

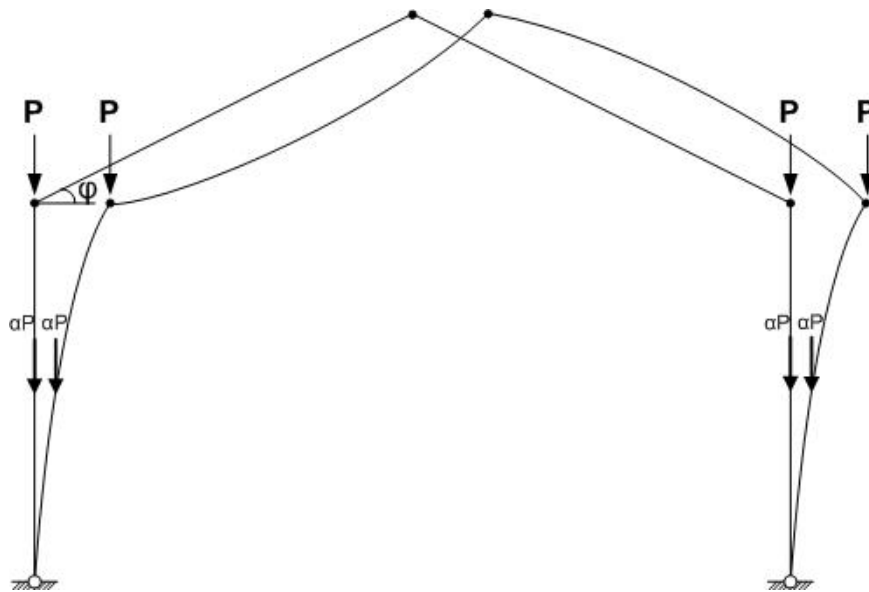


ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών

Μελέτη Ευστάθειας Δίστυλων Πλαισίων με Τμηματικά Θλιπτικά Φορτία στους Στύλους



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Στέφανος Γ. Σωτηρόπουλος

Επιβλέπων Καθηγητής: Λέκτορας ΕΜΠ Τάσος Αβραάμ

Αθήνα, Μάρτιος 2012

ΕΜΚ ΔΕ 2012/09

Πίνακας περιεχομένων

Περίληψη	5
Abstract	6
Ευχαριστίες	7
1 Εισαγωγή.....	8
1.1 Γενικά.....	8
1.2 Μορφές – τύποι λυγισμού.....	9
1.3 Μορφές ισορροπίας	10
2 Μαθηματική έκφραση καμπτικού λυγισμού.....	11
2.1 Βασικές παραδοχές θεωρίας γραμμικού λυγισμού	11
2.2 Παραδοχή σημάσεως	11
2.3 Σχέση ροπής κάμψεως και τέμνουσας δύναμης με βέλος κάμψης	12
2.4 Διαφορική εξίσωση καμπτικού λυγισμού.....	14
3 Ορθογωνικά πλαίσια	16
3.1 Εισαγωγή.....	16
3.2 Μορφές λυγισμού πλαισίων.....	17
3.2.1 Αντιμετρικός λυγισμός με μετάθεση	17
3.2.2 Συμμετρικός λυγισμός χωρίς μετάθεση	20
3.2.3 Αντιμετρικός λυγισμός χωρίς μετάθεση	23
3.2.4 Πίνακες-Διαγράμματα κρίσιμων φορτίων και ισοδύναμου μήκους λυγισμού	26
3.3 Πλαίσιο με πρόσθετες φορτίσεις στη μέση των στύλων.....	29
3.3.1 Επίλυση πλαισίου	29
3.3.2 Πίνακες-Διαγράμματα κρίσιμων φορτίων και ισοδύναμου μήκους λυγισμού	33
3.4 Πλαίσιο με πρόσθετες φορτίσεις στα τρίτα των στύλων	36
3.4.1 Επίλυση πλαισίου	36
3.4.2 Πίνακες-Διαγράμματα κρίσιμων φορτίων και ισοδύναμου μήκους λυγισμού	39
3.5 Πλαίσιο με πρόσθετες φορτίσεις στα τέταρτα των στύλων	43
3.5.1 Επίλυση πλαισίου	43
3.5.2 Πίνακες-διαγράμματα κρίσιμων φορτίων και ισοδύναμου μήκους λυγισμού.....	47
4 Μη ορθογωνικά πλαίσια	50
4.1 Εισαγωγή.....	50
4.2 Μορφές λυγισμού πλαισίων.....	51
4.2.1 Αντιμετρικός λυγισμός με μετάθεση	51
4.2.2 Αντιμετρικός λυγισμός χωρίς μετάθεση	53
4.2.3 Πίνακες-διαγράμματα κρίσιμων φορτίων και ισοδύναμου μήκους λυγισμού.....	54
4.3 Πλαίσιο με πρόσθετες φορτίσεις στη μέση των στύλων.....	58
4.3.1 Επίλυση πλαισίου	58
4.3.2 Πίνακες-διαγράμματα κρίσιμων φορτίων και ισοδύναμου μήκους λυγισμού.....	62
4.4 Πλαίσιο με πρόσθετες φορτίσεις στα τρίτα των στύλων	73
4.4.1 Επίλυση πλαισίου	73
4.4.2 Πίνακες-διαγράμματα κρίσιμων φορτίων και ισοδύναμου μήκους λυγισμού.....	77
4.5 Πλαίσιο με πρόσθετες φορτίσεις στα τέταρτα των στύλων	87
4.5.1 Επίλυση πλαισίου	87
4.5.2 Πίνακες-διαγράμματα κρίσιμων φορτίων και ισοδύναμου μήκους λυγισμού.....	92
5 Συμπεράσματα	104
6 Βιβλιογραφία.....	106

Περίληψη

Στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η εύρεση κρίσιμων φορτίων και ισοδύναμων μήκων λυγισμού δίστυλων πλαισίων (ορθογωνικών και μη), τα οποία φορτίζονται τμηματικά με θλιπτικές δυνάμεις στους στύλους. Η επίλυση γίνεται με αναλυτική μαθηματική μέθοδο.

Στο κεφάλαιο 1 περιγράφονται τα βασικά σημεία της γραμμικής θεωρίας της ελαστικής ευστάθειας ενώ γίνεται αναφορά σε άλλες μορφές λυγισμού και επεξήγηση κάποιων βασικών εννοιών.

Στο κεφάλαιο 2 γίνεται η μαθηματική περιγραφή του καμπτικού λυγισμού. Παραθέτονται ορισμένες παραδοχές και βασικά στοιχεία του φαινομένου που μελετάμε με μαθηματικό τρόπο. Τέλος επιλύεται η διαφορική εξίσωση του καμπτικού λυγισμού.

Στο κεφάλαιο 3 πραγματοποιείται διερεύνηση των μορφών λυγισμού ενός ορθογωνικού συμμετρικού πλαισίου με φορτίσεις στις κορυφές των υποστυλωμάτων. Επιλέγονται οι μορφές που μας ενδιαφέρουν (λυγισμός με μετάθεση και χωρίς) και ακολούθως επιλύεται διαδοχικά το πλαίσιο με τμηματικές φορτίσεις στους στύλους σε αποστάσεις $h/2$, $h/3$, $h/4$ μεταξύ τους. Σε κάθε περίπτωση σχηματίζονται πίνακες και διαγράμματα που δείχνουν τη μεταβολή των κρίσιμων φορτίων και των ισοδύναμων μήκων λυγισμού ανάλογα με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του πλαισίου καθώς και των τιμών φόρτισης.

Στο κεφάλαιο 4 διερευνούνται οι μορφές λυγισμού ενός μη ορθογωνικού συμμετρικού πλαισίου ενώ στη συνέχεια πραγματοποιούνται οι ίδιες φορτίσεις με αυτές του ορθογωνικού πλαισίου. Σχηματίζονται πίνακες και διαγράμματα όμοια με του κεφαλαίου 4 ενώ επιπλέον φαίνεται η μεταβολή των κρίσιμων φορτίων και των ισοδύναμων μήκων λυγισμού και ανάλογα με τη γωνία που σχηματίζεται.

Τέλος στο κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της διπλωματικής εργασίας.

Abstract

The objective of the present diploma thesis is to find critical loads and effective buckling lengths of two-column frames (rectangular or not) which are partially stressed by compressive loads to the columns. Analytic mathematical method is performed.

The first chapter presents the basic principles of the theory of elastic stability as well as some other forms of buckling.

The second chapter includes the mathematical representation of flexural buckling and a number of certain premises. Furthermore the differential equation of flexural buckling is solved.

In the third chapter various forms of buckling of a rectangular symmetric frame that is being stressed by compressive loads on the top of its columns, are investigated. The forms under the scope are buckling with and without transfer of the frame. Followingly the solvement of the frame is processed using partial loads having in between distance of $h/2$, $h/3$, $h/4$. In all cases, arrays and charts are formed in order to visualize the alteration of the critical loads and the effective buckling lengths depending on the geometric features of the frame and also the size of the loads.

The fourth chapter investigates the buckling of a non-rectangular frame. The use of partial loads is carried out exactly in the same way as the previous case. Again, arrays and charts are formed to provide a better understanding of the alteration of the critical loads and the effective buckling lengths depending on the exact previous conditions plus the formed angle.

The fifth chapter presents the general conclusions resulted from the diploma thesis.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κύριο Τάσο Αβραάμ για τις πολύτιμες συμβουλές και την υποστήριξή του κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Επίσης ευχαριστώ τον αδερφό μου, Σπύρο, για τη βοήθειά του και τους γονείς μου για την προσφορά τους όλα αυτά τα χρόνια.

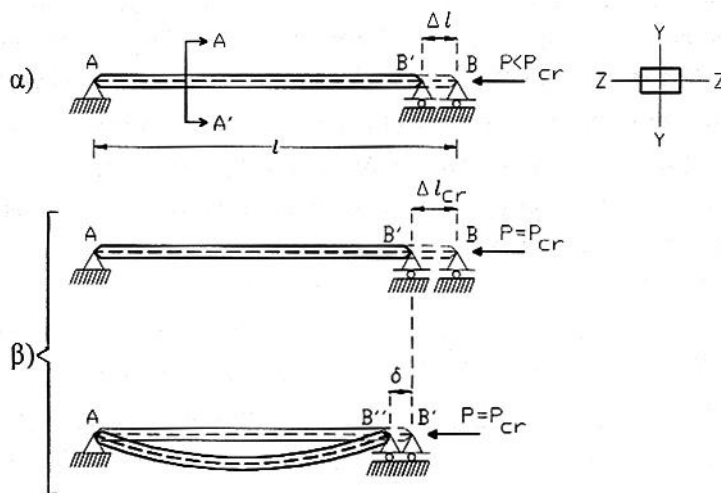
1 Εισαγωγή

1.1 Γενικά

Ο τρόπος αστοχίας μιας αξονικά θλιβομένης ευθύγραμμης ράβδου διαφέρει ανάλογα με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της. Δηλαδή μια βραχύσωμη αξονικά θλιβόμενη ράβδος με διατομή μεγάλου εμβαδού πρόκειται να αστοχήσει λόγω διαρροής. Αντίθετα μια λυγηρή ράβδος (δηλαδή μια ράβδος με εμβαδό διατομής πολύ μικρό συγκριτικά με το μήκος της) πρόκειται να αστοχήσει λόγω απώλειας της ευστάθειάς της, σε τιμή φόρτισης μικρότερη της τάσεως αναλογίας του υλικού που είναι κατασκευασμένη.

Πιο συγκεκριμένα γνωρίζουμε ότι όταν μια ευθύγραμμη ράβδος θλιβεται αξονικά, όσο αυξάνεται η φόρτιση (μέχρι μιας κρίσιμης τιμής), έχουμε συνεχώς αυξανόμενη αξονική βράχυνση. Επίσης όταν μια ελαστική ράβδος έχει λυγηρότητα μεγαλύτερη κάποιας ελάχιστης τιμής, η έντασή της βρίσκεται εντός της ελαστικής περιοχής και η αξονική βράχυνση είναι ανάλογη της φορτίσεως. Όταν η φόρτιση υπερβεί την κρίσιμη τιμή η ράβδος εγκαταλείπει την ευθύγραμμη μορφή και παίρνει μια ελαφρώς καμπυλωμένη μορφή. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται καμπτικός λυγισμός και λαμβάνει χώρα ως προς τον κύριο άξονα της διατομής με τη μικρότερη ροπή αδράνειας.

Ισορροπία έχουμε και στην ευθύγραμμη μορφή και στην καμπυλωμένη. Στα παρακάτω σχήματα βλέπουμε το προλυγισμικό στάδιο και την κρίσιμη κατάσταση μιας λυγηρής ράβδου:

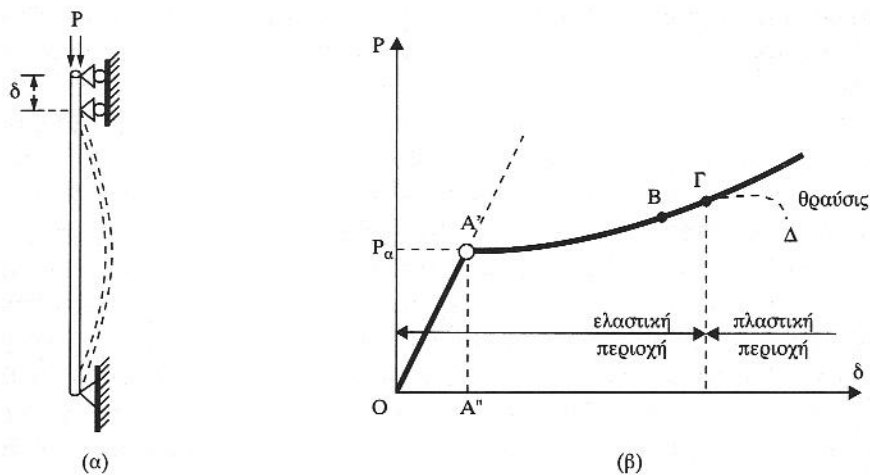


Σχ. 1.1 Προλυγισμικό στάδιο (α) και κρίσιμη κατάσταση, (β) στην οποία αντιστοιχούν δύο μορφές ισορροπίας: η ευθύγραμμη και η καμπυλωμένη

Όταν ξεπεράσουμε την κρίσιμη τιμή, μια μικρή αύξηση της φορτίσεως θα επιφέρει δυσανάλογα μεγαλύτερη καμπτική παραμόρφωση. Σε μια συγκεκριμένη τιμή φόρτισης ξεκινάει η διαρροή στην ακραία ίνα της περισσότερο εντεινόμενης από κάμψη διατομής, ενώ καθώς η φόρτιση αυξάνεται οδηγούμαστε σε ανελαστικό ή πλαστικό λυγισμό. Όμως η μεταλυγισμική αντοχή, για φόρτιση μεγαλύτερη της κρίσιμης, είναι περιορισμένη άρα χρησιμοποιούμε την κρίσιμη φόρτιση σαν κριτήριο σχεδιασμού αφού αυτή συσχετίζεται με τη μέγιστη φέρουσα ικανότητα αξονικά θλιβομένων ράβδων. Όπως βλέπουμε και στο

Σχ.1.2 μετά από μια τιμή φόρτισης έχουμε μη γραμμική σχέση φορτίσεως και βράχυνσης, ενώ συνεχίζουμε να βρισκόμαστε εντός της ελαστικής περιοχής. Δηλαδή η γραμμική ανάλυση δε μας καλύπτει πλήρως ως προς την πραγματική φέρουσα ικανότητα.

Η μέγιστη τιμή του φορτίου για την οποία η μορφή της ράβδου είναι ευθύγραμμη ονομάζεται κρίσιμο φορτίο ή αλλιώς φορτίου λυγισμού. Συνήθως τον όρο κρίσιμο φορτίο τον χρησιμοποιούμε για την τιμή που προκύπτει από τη μαθηματική επίλυση ενώ τον όρο φορτίο λυγισμού τον χρησιμοποιούμε όταν έχουμε πειραματική δοκιμή. Όπως αναφέραμε η κρίσιμη τάση λυγισμού είναι πολύ μικρότερη της τάσεως αναλογίας του υλικού και μάλιστα τόσο μικρότερη όσο μεγαλύτερη είναι η λυγηρότητα της ράβδου. Άρα αφού η αιτία αστοχίας είναι η αστάθεια ισορροπίας και ακολούθως η υπερβολική παραμόρφωση ο λυγισμός δεν αποτρέπεται με αύξηση της αντοχής αλλά με αύξηση της ακαμψίας μέσω της οποίας επιτυγχάνουμε αύξηση του κρίσιμου φορτίου και μείωση των βελών κάμψεως και της παραμόρφωσης.



Σχ. 1.2 (α) Συμπεριφορά ράβδου, (β) διάγραμμα P-δ

1.2 Μορφές – τύποι λυγισμού

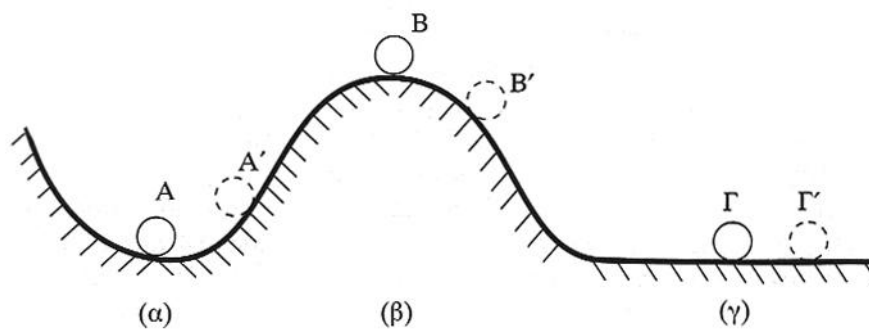
Εκτός από τον καμπτικό λυγισμό έχουμε και άλλες μορφές αστάθειας όπως: α) ο στρεπτικός λυγισμός (κατά τον οποίο οι διατομές στρέφονται χωρίς να μετατοπίζονται), β) ο στρεπτοκαμπτικός λυγισμός (συνδυασμός καμπτικού και στρεπτικού), γ) ο πλευρικός λυγισμός (ο οποίος υπόκειται σε εγκάρσια φόρτιση και έχουμε κάμψη εκτός του επιπέδου φόρτισης με παράλληλη στροφή της διατομής). Σε όλες τις παραπάνω μορφές λυγισμού συναντάμε δύο χαρακτηριστικούς τύπους ελαστικού λυγισμού υπό στατική φόρτιση: τον ακαριαίο (ή βίαιο) λυγισμό και τον ήπιο (ή ευγενή) λυγισμό. Οι δύο αυτοί τύποι ελαστικού λυγισμού (καταστροφικός και συνήθης αντίστοιχα) εξαρτώνται από το χαρακτήρα της κρίσιμης καταστάσεως ισορροπίας. Έτσι εάν αυτή είναι ασταθής ο λυγισμός είναι καταστροφικός ενώ εάν είναι ευσταθής ο λυγισμός είναι συνήθης. Ο δεύτερος συνδέεται με μεταλυγισμική αντοχή ενώ μπορεί να μελετηθεί μόνο με εφαρμογή μη γραμμικής θεωρίας ελαστικής ευστάθειας. Ένα παράδειγμα, για το αμφιαρθρωτό πλαίσιο υπό συμμετρική φόρτιση που θα επιλύσουμε στη συνέχεια βρίσκουμε δύο μορφές λυγισμού. Ο λυγισμός με μετάθεση μπορεί να είναι είτε ακαριαίος είτε συνήθης ενώ ο λυγισμός χωρίς μετάθεση ταυτίζεται με ακαριαίο λυγισμό.

1.3 Μορφές ισορροπίας

Όπως είδαμε, η θλιβόμενη ράβδος του Σχ.1.1 για $P = P_{cr}$ έχει δύο απείρως γειτονικές μορφές ισορροπίας: την ευθύγραμμη που είναι ασταθής και την ελαφρώς καμπυλωμένη που είναι ευσταθής.

Ενώ η δοκός αλλάζει μορφή ισορροπίας από την ασταθή στην ευσταθή, θεωρούμε ότι υπάρχει μια μεταβατική ισορροπία που ονομάζεται ουδέτερη ή αδιάφορη ισορροπία. Η τιμή του θλιπτικού φορτίου $P = P_{cr}$ για την οποία η ευθύγραμμη μορφή ισορροπίας της ράβδου σταματάει να είναι ευσταθής αντιστοιχεί στην ουδέτερη ισορροπία. Η μέθοδος που χρησιμοποιεί το κριτήριο της ουδέτερης ισορροπίας για να υπολογίσει το κρίσιμο φορτίο ονομάζεται μέθοδος ουδέτερης ισορροπίας. Η ουδέτερη ισορροπία είναι συνυφασμένη με τη γραμμική θεωρία ελαστικής ευστάθειας, με την οποία προσδιορίζουμε τα κρίσιμα φορτία αλλά όχι το κατά πόσο η ισορροπία είναι ευσταθής ή ασταθής. Για να κατανοήσουμε της τρεις μορφές ελαστικής ισορροπίας παραθέτουμε το εξής παράδειγμα του σχήματος 1.3.

Θεωρούμε ότι μια τελείως άκαμπτη σφαίρα ισορροπεί σε μια ομαλή επιφάνεια στις θέσεις Α,Β,Γ. Ενώ έχουμε ισορροπία και στις τρεις θέσεις υπάρχουν βασικές διαφορές μεταξύ των καταστάσεων ισορροπίας. Στη θέση Α αν μετακινήσουμε τη σφαίρα από την αρχική θέση ισορροπίας, όταν αφαιρέσουμε τη δύναμη που προκάλεσε τη μετακίνηση, αυτή θα ξαναγυρίσει στην ίδια θέση. Τότε έχουμε ευσταθή ισορροπία. Στη θέση Β αν μετακινηθεί η σφαίρα από την αρχική θέση ισορροπίας τότε μετά την αφαίρεση της δύναμης που προκάλεσε τη μετακίνηση όχι μόνο δεν επιστρέφει, αλλά απομακρύνεται συνεχώς από αυτή. Αυτή η μορφή ονομάζεται ασταθής ισορροπία. Τέλος στη θέση Γ η σφαίρα μετά από μικρή μετακίνηση ούτε επιστρέφει στην αρχική θέση, ούτε απομακρύνεται, αλλά παραμένει στη θέση την οποία μετακινήθηκε. Αυτή η μορφή ισορροπίας ονομάζεται ουδέτερη.



Σχ. 1.3 Κύριες μορφές ισορροπίας

2 Μαθηματική έκφραση καμπτικού λυγισμού

2.1 Βασικές παραδοχές θεωρίας γραμμικού λυγισμού

Για την μελέτη του καμπτικού λυγισμού θα χρησιμοποιήσουμε τη γραμμική θεωρία ελαστικής ευστάθειας η οποία βασίζεται στις εξής παραδοχές:

1. Το υλικό των ράβδων που μελετάμε είναι ομογενές, ισότροπο, γραμμικά ελαστικό που ακολουθεί το νόμο του Hooke.
2. Το διάγραμμα τάσης-ανηγμένης παραμόρφωσης θεωρείται ίδιο τόσο για τη θλίψη όσο και για τον εφελκυσμό.
3. Επίπεδες διατομές, κάθετες στον απαραμόρφωτο άξονα πριν από την κάμψη, παραμένουν επίπεδες και κάθετες στον παραμορφωμένο άξονα του μέλους μετά την κάμψη (παραδοχή Bernoulli-Navier).
4. Τα εξωτερικά εγκάρσια φορτία διέρχονται από το κέντρο διάτμησης της διατομής του μέλους και είναι παράλληλα ως προς ένα των κυρίων αξόνων αδράνειας. Έτσι αποφεύγεται οποιαδήποτε στροφή ή στρέψη της διατομής (περί τον άξονα του μέλους), η οποία υπόκειται μόνο σε κάμψη σε ένα από τα κύρια επίπεδά της.
5. Η αξονική μετατόπιση ξ και η εγκάρσια μετατόπιση w (βέλος κάμψης) ενός σημείου κατά μήκος του άξονα x είναι πολύ μικρές συγκριτικά με τις διαστάσεις της διατομής του μέλους, γι' αυτό και η γραμμική θεωρία ελαστική ευστάθειας είναι θεωρία μικρών βελών. Έτσι η ανηγμένη παραμόρφωση ε , η αξονική μετατόπιση ξ , η καμπυλότητα $\kappa \left(= \frac{1}{R} \right)$ και η εγκάρσια μετατόπιση w συνδέονται με τις σχέσεις:

$$\varepsilon = \frac{d\xi}{dx} = \xi', \kappa = -\frac{d^2w}{dx^2} = -w'' \quad (2.1)$$

όπου ε και κ αντιστοιχούν σε σημείο του άξονα το οποίο είναι συνάρτηση της τετμημένης x . Άρα σύμφωνα με τη θεωρία μικρών βελών ο όρος $(w')^2$ είναι αμελητέος συγκριτικά με τη μονάδα και τον όρο ξ' . Για να εξάγουμε βέβαια τον δεύτερο τύπο των εξισώσεων (2.1) κάνουμε και την πρόσθετη παραδοχή ότι δεν μεταβάλλεται το μήκος του άξονα του μέλους.

6. Αμελείται η επιρροή της διατμητικής παραμόρφωσης επί του βέλους κάμψης.
7. Τα κρίσιμα φορτία λυγισμού υπολογίζονται θεωρώντας ότι η ελαστική παραμόρφωση οφείλεται μόνο σε κάμψη δηλαδή αμελείται η αξονική παραμόρφωση που πιθανόν να προηγήθηκε

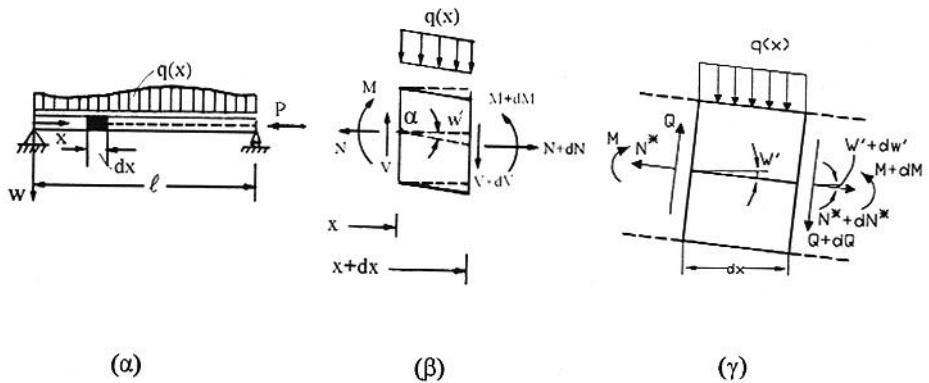
2.2 Παραδοχή σημάνσεως

Στη συνέχεια θα πρέπει να καθορίσουμε τις θετικές φορές των εντατικών μεγεθών, $M(x)$ (ροπή κάμψης), $V(x)$ (τέμνουσα δύναμη), $N(x)$ (αξονική δύναμη) καθώς και των κινηματικών μεγεθών $w(x)$ (βέλος κάμψης), $w'(x)$ (στροφή διατομής). Για την ευκολότερη κατανόηση της σήμανσης παραθέτουμε το σχήμα 2.1.

Πρώτον ορίζουμε ένα σύστημα ορθογώνιων συντεταγμένων από το οποίο καθορίζονται αυτόματα οι θετικές φορές των παραπάνω μεγεθών. Συνήθως ο διαμήκης άξονας x διέρχεται από τα κέντρα βάρους των διατομών του μέλους, ενώ ο άξονας εγκάρσιων βελών w είναι κάθετος στον άξονα x . Όπως βλέπουμε και στο σχήμα, ορίζουμε

θετική την εγκάρσια μετατόπιση $w(x)$ όταν αυτή κατευθύνεται προς τη θετική φορά του άξονα w . Θετική γωνία $w'(x)$ ορίζεται αυτή κατά την οποία ο θετικός άξονας x στρεφόμενος κατά μια ορθή γωνία συμπίπτει με τον θετικό άξονα w .

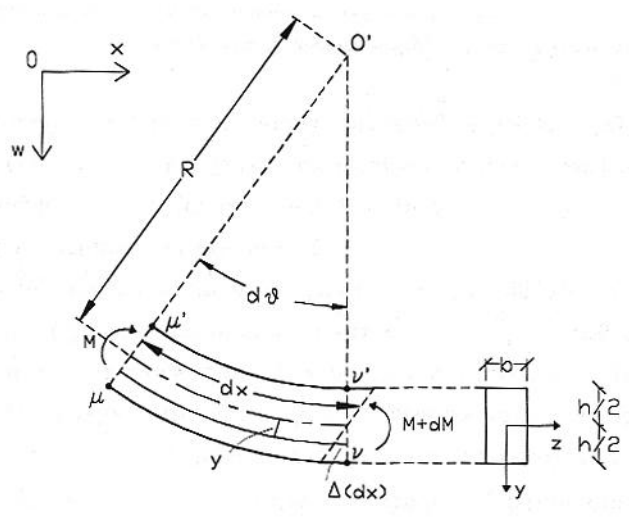
Στη συνέχεια για να ορίσουμε τις θετικές φορές των κινηματικών μεγεθών παίρνουμε το στοιχειώδες τμήμα dx όπως φαίνεται στο σχήμα. Στη διατομή που απέχει $x+dx$ (από το αριστερό στήριγμα της δοκού) η αξονική δύναμη $N+dN$ είναι θετική όταν έχει τη φορά του θετικού άξονα x . Αντίστοιχα η τέμνουσα δύναμη $V+dV$ (η οποία είναι κάθετη στον παραμόρφωτο άξονα της δοκού) είναι θετική όταν έχει φορά προς τον θετικό άξονα w . Τέλος η ροπή κάμψεως $M+dM$ είναι θετική όταν έχει φορά αντίθετη της φοράς του ζεύγους των θετικών τεμνουσών δυνάμεων V και $V+dV$.



Σχ. 2.1 (α) Δοκός υπό εγκάρσια φόρτιση και αξονική θλίψη, (β) ισορροπία στοιχείου dx με κατακόρυφες παρειές, (γ) και κεκλιμένες παρειές

2.3 Σχέση ροπής κάμψεως και τέμνουσας δύναμης με βέλος κάμψης

Για την επίλυση ενός προβλήματος ελαστική ευστάθειας θα πρέπει να βρούμε πως συσχετίζονται η $M(x)$ και η $V(x)$ με το w . Αν θεωρήσουμε ένα σύστημα συντεταγμένων στο οποίο ο θετικός άξονας x κατευθύνεται προς τα δεξιά και ο θετικός άξονας προς τα κάτω η καμπυλότητα του άξονα της δοκού $\kappa(x)$ είναι αρνητική όταν η δοκός στρέφει τα κοίλα προς τα άνω και θετική όταν στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω. Έστω η δοκός του παρακάτω σχήματος η οποία έχει αρνητική καμπυλότητα.



Σχ. 2.2 Παραμόρφωση στοιχείου dx λόγω κάμψης

Σύμφωνα με τα προηγούμενα η αρνητική καμπυλότητα συνδέεται με θετική ροπή άρα έχουμε:

$$\kappa(x) = \frac{1}{R(x)} = \frac{M(x)}{EI} \quad (2.2)$$

Υποθέτουμε ότι υπό την επίδραση θετικών ροπών κάμψεως το στοιχείο dx κάμπτεται σύμφωνα με τόξο κύκλου με διατομές $\mu\mu'$ και $\nu\nu'$. Αν προεκτείνουμε τις παραπάνω διατομές, θα έχουν σημείο τομής το O' το οποίο ονομάζεται κέντρο καμπυλότητας με ακτίνα καμπυλότητας R . Η γωνία μεταξύ των επίπεδων διατομών $\mu\mu'$ και $\nu\nu'$ θεωρείται $d\theta$. Εξαιτίας της καμπτικής παραμορφώσεως του dx θεωρούμε ότι η διατομή $\nu\nu'$ στρέφεται κατά $d\theta$ ως προς τη διατομή $\mu\mu'$ με αντίθετη φορά από τους δείκτες του ρολογιού άρα η στροφή είναι αρνητική. Ως εκ τούτου για μια ίνα που βρίσκεται σε απόσταση y κάτω από την κεντροβαρική γραμμή ισχύει :

$$\Delta(dx) = -y d\theta \quad (2.3)$$

όπου το πλην οφείλεται στο γεγονός ότι η αύξηση του x κατά την θετική κατεύθυνση δίνει αρνητική γωνία $d\theta$. Επίσης για την παραπάνω ίνα έχουμε:

$$\varepsilon = \frac{\Delta(dx)}{dx} = -y \frac{d\theta}{dx} \quad (2.4)$$

Σύμφωνα με το νόμο του Hooke :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{M(x)y}{EI} \quad (2.5)$$

Άρα από (2.4) και (2.5) έχουμε:

$$\frac{M(x)}{EI} = -\frac{d\theta}{dx} \quad (2.6)$$

Όπως παρατηρούμε στο Σχ.2.4 ισχύει $dx = R d\theta$ άρα από την (2.6) βρίσκουμε την (2.2). Επίσης ισχύει:

$$\tan\theta = \frac{dw}{dx} = w' \quad (2.7)$$

Λόγω όμως της θεωρίας των μικρών βελών μπορούμε να θεωρήσουμε για μικρές γωνίες:

$$\tan\theta = \theta = \frac{dw}{dx} \quad (2.8)$$

Παραγωγίζοντας την (2.8) παίρνουμε:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2w}{dx^2} \quad (2.9)$$

Από (2.2), (2.6), (2.9) οδηγούμαστε στη σχέση:

$$M(x) = -EI \frac{d^2w}{dx^2} = -EI w'' \quad (2.10)$$

Όσον αφορά την τέμνουσα δύναμη από την ισορροπία ροπών κάμψεως (σύμφωνα με το σχήμα Σχ 2.3) έχουμε:

$$M - (M + dM) - q dx \frac{dx}{2} + (V + dV) dx - (N + dN) \frac{dw}{dx} dx = 0 \quad (2.11)$$

Ενώ αν αμελήσουμε τα διαφορικά ανώτερης τάξης οδηγούμαστε στην έκφραση της τέμνουσας δύναμης:

$$V = \frac{dM}{dx} + N \frac{dw}{dx} \quad (2.12)$$

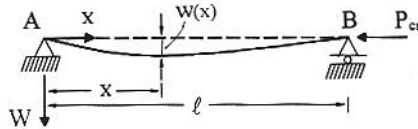
η οποία σύμφωνα με τη (2.10) μετατρέπεται στην :

$$V(x) = -EIw'''(x) - Pw'(x) \quad (2.13)$$

όπου το $-P$ ισχύει για θλίψη. Αν είχαμε εφελκυσμό θα ήταν $+P$.

2.4 Διαφορική εξίσωση καμπτικού λυγισμού

Για να βρούμε το κρίσιμο φορτίο μιας θλιβομένης αξονικά ράβδου θεωρούμε ισορροπία στην καμπλωμένη μορφή της ράβδου όπως φαίνεται στο Σχ.2.3.



Σχ. 2.3 Καμπλωμένη μορφή ισορροπίας

Δηλαδή θα πρέπει σε οποιαδήποτε διατομή της καμπλωμένης ράβδου να έχουμε ισορροπία μεταξύ εξωτερικής και εσωτερικής κάμψης. Έτσι για τυχαία διατομή στη θέση x έχουμε:

$$M_{εξ} = M_{εσ} \quad (2.14)$$

Όπως βλέπουμε και στο σχήμα η ροπή που προκαλείται λόγω του θλιπτικού φορτίου είναι:

$$M_{εξ} = P_{cr}w(x) \quad (2.15)$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (2.10) όπου EI είναι η καμπτική αντίσταση της διατομής ως προς τον κύριο άξονα κάμψης με τη μικρότερη ροπή αδράνειας της διατομής οδηγούμαστε στην διαφορική εξίσωση:

$$EIw''(x) + P_{cr}w(x) = 0 \quad (2.16)$$

η οποία είναι ομογενής γραμμική 2^{ης} τάξεως με σταθερούς συντελεστές. Αν παραγωγίσουμε την εξ. (2.16) δύο φορές ως προς x παίρνουμε:

$$EIw''''(x) + P_{cr}w''(x) = 0 \quad (2.17)$$

$$\text{ή αλλιώς: } w''''(x) + k^2w''(x) = 0, \quad (k^2 = \frac{P_{cr}}{EI}) \quad (2.18)$$

Ολοκληρώνοντας δύο φορές την εξ. (2.18) βρίσκουμε:

$$w''(x) + k^2w(x) = \Gamma'x + \Delta' \quad (2.19)$$

όπου Γ' και Δ' σταθερές ολοκληρώσεως. Η παραπάνω εξίσωση είναι γραμμική μη ομογενής συνήθης διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξεως. Η γενική λύση της εξίσωσης είναι το άθροισμα των λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς και μιας ειδικής δηλαδή:

$$w(x) = w_h(x) + w_p(x) \quad (2.20)$$

Έχουμε την ομογενή εξίσωση:

$$w''(x) + k^2w(x) = 0 \quad (2.21)$$

Από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων ψάχνουμε λύση της μορφής :

$$w(x) = Ce^{\rho x}, \text{ όπου } C \text{ σταθερά διάφορη του μηδενός} \quad (2.22)$$

Η εξ. (2.21) λόγω της εξ. (2.22) γίνεται :

$$\rho^2 + k^2 = 0 \quad (2.23)$$

από την οποία προκύπτει:

$$\rho = \pm jk \quad (j = \sqrt{-1}) \quad (2.24)$$

Με τη βοήθεια της εξίσωσης :

$$e^{\pm jkx} = \cos kx \pm j \sin kx \quad (2.25)$$

συμπεραίνουμε ότι τόσο το πραγματικό όσο και το μιγαδικό μέρος ικανοποιούν την εξ. (2.21). Άρα η λύση της ομογενούς εξίσωσης $w_h(x)$ είναι:

$$w_h(x) = A \sin kx + B \cos kx \quad (2.26)$$

$$\text{Η ειδική λύση } w_p(x) = C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \quad (2.27)$$

όπου C_1, C_2, C_3 προσδιοριστέες σταθερές

Εισάγοντας την εξ. (2.27) στην εξ.(2.19) βρίσκουμε:

$C_1 = 0, C_2 = \frac{\Gamma'}{k^2}$ και $C_3 = \frac{\Delta'}{k^2}$ οπότε μετατρέπεται στην εξίσωση:

$$w_p(x) = \Gamma x + \Delta \quad (2.28)$$

Έτσι από τα παραπάνω η εξ. (2.20) γίνεται:

$$w(x) = A \sin kx + B \cos kx + \Gamma x + \Delta \quad (2.29)$$

όπου A, B, Γ, Δ σταθερές ολοκληρώσεως οι οποίες προσδιορίζονται από ισάριθμες συνθήκες στηρίζεως.

Αν συνδυάσουμε την εξ. (2.29) με την έκφραση της τέμνουσας (2.13) έχουμε:

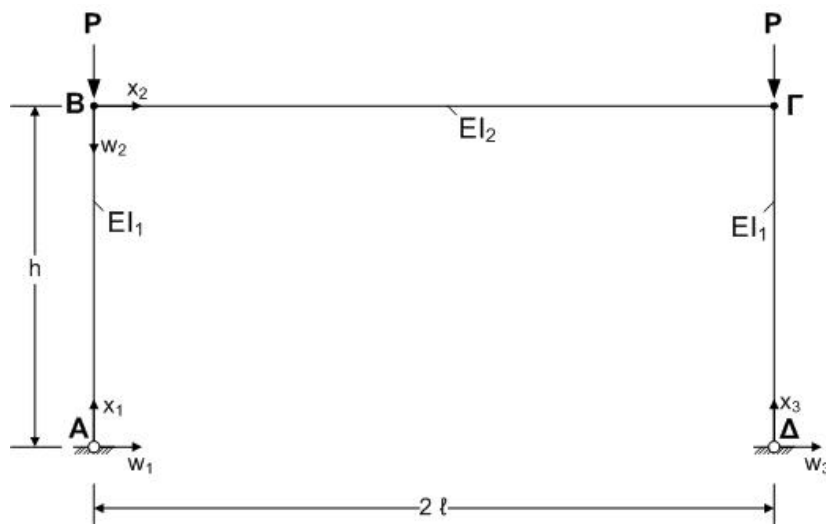
$V(x) = -EI w'''(x) - P_{cr} w'(x) = EI * A * k^3 * \cos kx - EI * B * k^3 * \sin kx - P_{cr} (A * k * \cos kx - B * k * \sin kx + \Gamma)$, η οποία αν διαιρεθεί με EI και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $k^2 = \frac{P_{cr}}{EI}$ δίνει:

$$V(x) = -P\Gamma \quad (2.30)$$

3 Ορθογωνικά πλαίσια

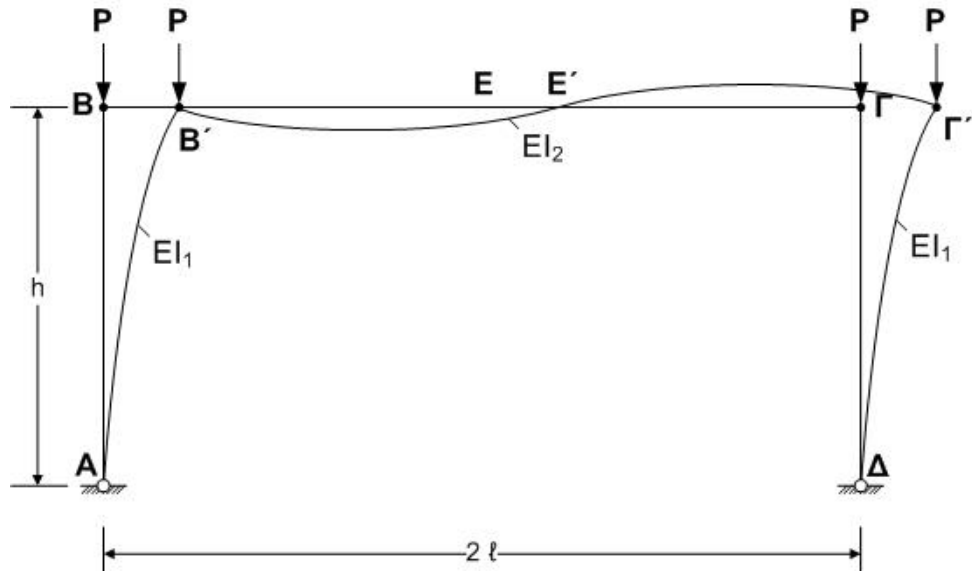
3.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο αρχικά θα μελετήσουμε τις μορφές λυγισμού των ορθογωνικών πλαισίων ενώ στη συνέχεια θα επιλύουμε τα πλαίσιά μας με τμηματικές φορτίσεις στους στύλους. Για να βρούμε τις μορφές λυγισμού των πλαισίων θα ξεκινήσουμε με την επίλυση του δίστυλου ορθογωνικού και συμμετρικού πλαισίου $AB\Gamma\Delta$ που φορτίζεται από δύο ίσα κατακόρυφα θλιπτικά φορτία P τα οποία ενεργούν στις κορυφές των υποστυλωμάτων δηλαδή στους κόμβους B, Γ .



Σχ. 3.1 Ορθογωνικό συμμετρικό πλαίσιο με φορτίσεις στις κορυφές των στύλων

Θεωρούμε ύψος h και μήκος $2l$ ενώ η ράβδος $B\Gamma$ έχει διαφορετική ροπή αδράνειας (I_2) από τις ράβδους $AB, \Gamma\Delta$ (I_1). Επιλέγουμε για κάθε ράβδο το σύστημα συντεταγμένων και καθορίζουμε με αυτόν τον τρόπο τις θετικές φορές των εντατικών μεγεθών καθώς και των μεγεθών μετατοπίσεως. Σύμφωνα με τις θεωρήσεις που έχουμε λάβει τα υποστυλώματα δεν βραχύνονται άρα οι κόμβοι B και Γ είναι αμετάθετοι κατά την κατακόρυφη διεύθυνση. Το ζύγωμα $B\Gamma$ μπορεί να μετακινηθεί είτε προς τα αριστερά είτε προς τα δεξιά άρα το πλαίσιο μετά από μια ορισμένη τιμή φόρτισης λυγίζει με παράλληλη μετάθεση του ζυγώματος και παίρνει την αντισυμμετρική μορφή του σχήματος 3.2:



Σχ. 3.2 Απαραμόρφωτη και παραμορφωμένη μορφή για αντισυμμετρικό λυγισμό με μετάθεση

3.2 Μορφές λυγισμού πλαισίων

3.2.1 Αντισυμμετρικός λυγισμός με μετάθεση

Όπως βλέπουμε στο Σχ. 3.2 τα φορτία P παραλαμβάνονται εξ ολοκλήρου από τα υποστυλώματα AB, ΓΔ άρα η οριζόντια ράβδος είναι αφόρτιστη, ενώ οι εξισώσεις που διέπουν την ισορροπία των ραβδών AB BΓ ΓΔ στην παραμορφωμένη κατάσταση είναι οι εξής:

$$w_1(x) = A_1 * \sin k_1 x_1 + B_1 * \cos k_1 x_1 + \Gamma_1 * x_1 + \Delta_1, \quad \left(k_1^2 = \frac{P}{EI_1}\right) \quad (3.1)$$

$$w_2(x) = A_2 * x_2^3 + B_2 * x_2^2 + \Gamma_2 * x_2 + \Delta_2 \quad (3.2)$$

$$w_3(x) = A_3 * \sin k_1 x_3 + B_3 * \cos k_1 x_3 + \Gamma_3 * x_3 + \Delta_3, \quad \left(k_1^2 = \frac{P}{EI_1}\right) \quad (3.3)$$

όπου $A_1, B_1, \Gamma_1, \Delta_1, A_2, B_2, \Gamma_2, \Delta_2, A_3, B_3, \Gamma_3, \Delta_3$ είναι σταθερές ολοκλήρωσης οι οποίες προσδιορίζονται από ισάριθμες συνοριακές συνθήκες. Στη θέση $x_1=0$ λόγω της άρθρωσης έχουμε βέλος και ροπή κάμψης ίσες με το μηδέν και σε συνδυασμό με την εξίσωση (3.1) έχουμε:

$$w_1(0) = 0 \Rightarrow B_1 + \Delta_1 = 0 \quad (3.4)$$

$$-EI_1 * w_1''(0) = 0 \Rightarrow B_1 = 0 \quad (3.5)$$

Η (3.4) λόγω της (3.5) μας δίνει $\Delta_1 = 0$

Όμοια στη θέση Δ έχουμε:

$$w_3(0) = 0 \Rightarrow B_3 + \Delta_3 = 0 \quad (3.6)$$

$$-EI_1 * w_3''(0) = 0 \Rightarrow B_3 = 0 \quad (3.7)$$

Η (3.6) λόγω της (3.7) μας δίνει $\Delta_3 = 0$

Όπως είπαμε ο κόμβος B είναι αμετάθετος κατά την κατακόρυφη διεύθυνση άρα:

$$w_2(0) = 0 \Rightarrow \Delta_2 = 0 \quad (3.8)$$

(Στις παρακάτω εξισώσεις θέτουμε τους συντελεστές $B_1, \Delta_1, B_3, \Delta_3, \Delta_2$ ίσους με το μηδέν)
Όμοια στον κόμβο Γ:

$$w_2(2l) = 0 \Rightarrow 4 * A_2 * l^2 + 2 * B_2 * l + \Gamma_2 = 0 \quad (3.9)$$

Λόγω συνέχειας στον κόμβο Β έχουμε ισότητα στοφών:

$$w'_1(h) = w'_2(0) \Rightarrow A_1 * k_1 * \cos(k_1 h) + \Gamma_1 = \Gamma_2 \quad (3.10)$$

Όμοια στον κόμβο Γ:

$$w'_3(h) = w'_2(2l) \Rightarrow A_3 * k_1 * \cos(k_1 h) + \Gamma_3 = 12 * A_2 * l^2 + 4 * B_2 * l + \Gamma_2 \quad (3.11)$$

Επίσης στον κόμβο Β έχουμε ισοροπία ροπών :

$$-EI_1 * w''_1(h) + EI_2 * w''_2(0) = 0 \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} * A_1 * k_1^2 * \sin(k_1 h) = -2 * B_2 \quad (3.12)$$

Όμοια στον κόμβο Γ:

$$-EI_1 * w''_3(h) - EI_2 * w''_2(2l) = 0 \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} * A_3 * k_1^2 * \sin(k_1 h) = 12 * A_2 * l + 2 * B_2 \quad (3.13)$$

Λόγω της παραδοχής της γραμμικής θεωρίας λυγισμού το μήκος της ράβδου ΒΓ δεν αλλάζει άρα τα υποστυλώματα έχουν ίσα βέλη στις κορυφές τους δηλαδή:

$$w_1(h) = w_3(h) \Rightarrow A_1 * \sin(k_1 h) + \Gamma_1 * h = A_3 * \sin(k_1 h) + \Gamma_3 * h \quad (3.14)$$

Τέλος επειδή η αξονική δύναμη στη ράβδο ΒΓ είναι μηδέν έχουμε άθροισμα τεμνουσών δυνάμεων στις κορυφές των υποστυλωμάτων ίσο με το μηδέν δηλαδή:

$$-EI_1 * w'''_1(h) - P * w'_1(h) - EI_1 * w'''_3(h) - P * w'_3(h) = 0 \Rightarrow -P * \Gamma_1 - P * \Gamma_3 = 0 \Rightarrow \Gamma_1 + \Gamma_3 = 0 \quad (3.15)$$

Η εξίσωση (3.10) λόγω της (3.9) δίνει: $A_1 * k_1 * \cos(k_1 h) + \Gamma_1 = -4 * A_2 * l^2 - 2 * B_2 * l$ (3.16)

Η εξίσωση (3.11) λόγω των (3.15) και (3.9) δίνει:

$$A_3 * k_1 * \cos(k_1 h) - \Gamma_1 = 8 * A_2 * l^2 + 2 * B_2 * l \quad (3.17)$$

$$\text{Από (3.16)+(3.17)} \Rightarrow A_1 * k_1 * \cos(k_1 h) + A_3 * k_1 * \cos(k_1 h) = 4 * A_2 * l^2 \quad (3.18)$$

Η εξίσωση (3.14) λόγω των (3.15) , (3.16) δίνει:

$$A_1 * \sin(k_1 h) - A_3 * \sin(k_1 h) - 8 * A_2 * l^2 * h - 4 * B_2 * l * h - 2 * A_1 * k_1 * h * \cos(k_1 h) = 0 \quad (3.19)$$

$$(3.12)+(3.13) \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} * A_1 * k_1^2 * \sin(k_1 h) + \frac{I_1}{I_2} * A_3 * k_1^2 * \sin(k_1 h) = 12 * A_2 * l \quad (3.20)$$

Η (3.19) λόγω της (3.12) δίνει : $A_1 * \sin(k_1 h) - A_3 * \sin(k_1 h) - 8 * A_2 * l^2 * h + 2 * \frac{I_1}{I_2} * A_1 * k_1^2 * \sin(k_1 h) * l * h - 2 * A_1 * k_1 * h * \cos(k_1 h) = 0$ (3.21)

$$\text{Από την (3.20) η (3.18) γίνεται: } A_1 * k_1 * \cos(k_1 h) + A_3 * k_1 * \cos(k_1 h) = \frac{I_1}{3 * I_2} * A_1 * k_1^2 * \sin(k_1 h) * l + \frac{I_1}{3 * I_2} * A_3 * k_1^2 * \sin(k_1 h) * l \quad (3.22)$$

$$\text{και η (3.21) : } A_1 * \sin(k_1 h) - A_3 * \sin(k_1 h) - \frac{2 * I_1}{3 * I_2} * A_1 * k_1^2 * \sin(k_1 h) * l * h - \frac{2 * I_1}{3 * I_2} * A_3 * k_1^2 * \sin(k_1 h) * l * h + 2 * \frac{I_1}{I_2} * A_1 * k_1^2 * \sin(k_1 h) * l * h - 2 * A_1 * k_1 * h * \cos(k_1 h) = 0 \quad (3.23)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (3.22) με h και μετά λύνουμε το σύστημα που δημιουργεί με την (3.23):

$$\left(k_1 * h * \cos(k_1 h) - \frac{I_1}{3 * I_2} * k_1^2 * \sin(k_1 h) * l * h\right) * \left(-\sin(k_1 h) - \frac{2 * I_1}{3 * I_2} * k_1^2 * \sin(k_1 h) * l * h\right) - \left(k_1 * h * \cos(k_1 h) - \frac{I_1}{3 * I_2} * k_1^2 * \sin(k_1 h) * l * h\right) * \left(\sin(k_1 h) - \frac{2 * I_1}{3 * I_2} * k_1^2 * \sin(k_1 h) * l * h + 2 * \frac{I_1}{I_2} * k_1^2 * l * h * \sin(k_1 h) - 2 * k_1 * h * \cos(k_1 h)\right) = 0 \quad (3.24)$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα την πρώτη παρένθεση έχουμε: $\left(k_1 * h * \cos(k_1 h) - \frac{I_1}{3 * I_2} * k_1^2 * \sin(k_1 h) * l * h\right) * \left(-\sin(k_1 h) + \frac{2 * I_1}{3 * I_2} * k_1^2 * \sin(k_1 h) * l * h - 2 * \frac{I_1}{I_2} * k_1^2 * l * h * \sin(k_1 h) + 2 * k_1 * h * \cos(k_1 h) - \sin(k_1 h) - \frac{2 * I_1}{3 * I_2} * k_1^2 * \sin(k_1 h) * l * h\right) = 0$ (3.25)

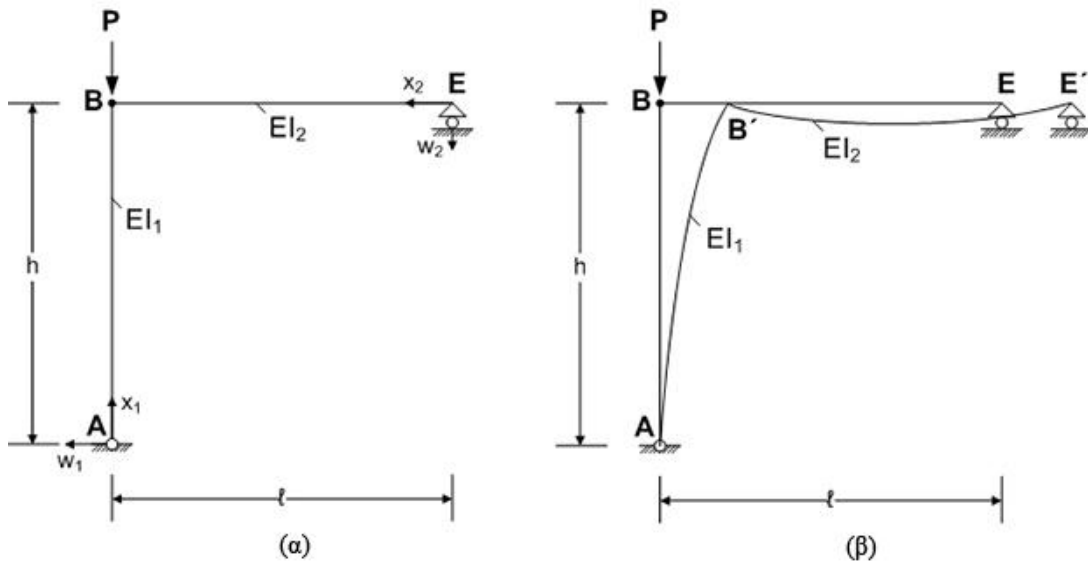
Δηλαδή έχουμε 2 εξισώσεις λυγισμού οι οποίες παίρνουν την μορφή:

$$\alpha) 3 * (k_1 * h) * \cos(k_1 h) - \frac{I_1 * l}{I_2 * h} * (k_1 * h)^2 * \sin(k_1 h) = 0 \quad (3.26)$$

$$\beta) \sin(k_1 h) - (k_1 * h) * \cos(k_1 h) + \frac{I_1 * l}{I_2 * h} * (k_1 * h)^2 * \sin(k_1 h) = 0 \quad (3.27)$$

Θέτουμε τον λόγο $r = \frac{I_1 * l}{I_2 * h}$ και για $r=1$ η μικρότερη λύση για την εξίσωση (3.26) είναι $kh=1,922$ και για τη (3.27) είναι $kh=3,4058$.

Το γεγονός της ύπαρξης δύο διαφορετικών εξισώσεων μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι περιγράφουν δυο διαφορετικές μορφές λυγισμού. Αξίζει επίσης να παρατηρήσουμε ότι αν λύσουμε το ορθογωνικό πλαίσιο ABE του Σχ.3.3, που είναι εντατικώς ισοδύναμο με το πλαίσιο ABΓΔ του Σχ.3.2, οδηγούμαστε στην εξίσωση (3.26).



Σχ. 3.3 (α) Εντατικώς ισοδύναμο πλαίσιο με το Σχ. 3.2, (β) σε παραμορφωμένη μορφή

Οι εξισώσεις που διέπουν την ισορροπία των ραβδών AB BE στην παραμορφωμένη κατάσταση είναι οι εξής:

$$w_1(x) = A_1 * \sin k_1 x_1 + B_1 * \cos k_1 x_1 + \Gamma_1 * x_1 + \Delta_1, \quad (k_1^2 = \frac{P}{EI_1}) \quad (3.28)$$

$$w_2(x) = A_2 * x_2^3 + B_2 * x_2^2 + \Gamma_2 * x_2 + \Delta_2 \quad (3.29)$$

Στη θέση E λόγω της στήριξης έχουμε μηδενικό βέλος και μηδενική ροπή:

$$w_2(0) = 0 \Rightarrow \Delta_2 = 0 \quad (3.30)$$

$$-EI_1 * w_2''(0) = 0 \Rightarrow B_2 = 0 \quad (3.31)$$

Για τον ίδιο λόγο μηδενίζονται και οι σταθερές B_1, Δ_1 .

Όμοια με το πλαίσιο ABΓΔ έχουμε:

$$-EI_1 * w_1'''(h) - P * w_1'(h) = 0 \Rightarrow -P * \Gamma_1 = 0 \Rightarrow \Gamma_1 = 0 \quad (3.32)$$

$$w_2(l) = 0 \Rightarrow A_2 * l^2 + \Gamma_2 = 0 \quad (3.33)$$

$$w_1'(h) = w_2'(l) \Rightarrow A_1 * k_1 * \cos(k_1 h) = 3 * A_2 * l^2 + \Gamma_2 \quad (3.34)$$

$$EI_1 * w_1''(h) + EI_2 * w_2''(l) = 0 \Rightarrow -\frac{l_1}{l_2} * A_1 * k_1^2 * \sin(k_1 h) + 6 * A_2 * l = 0 \quad (3.35)$$

$$\text{Από εξ.(3.33) , η (3.34) } \Rightarrow A_1 * k_1 * \cos(k_1 h) = 2 * A_2 * l^2 \quad (3.36)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (3.35) , (3.36) καταλήγουμε στην εξίσωση :

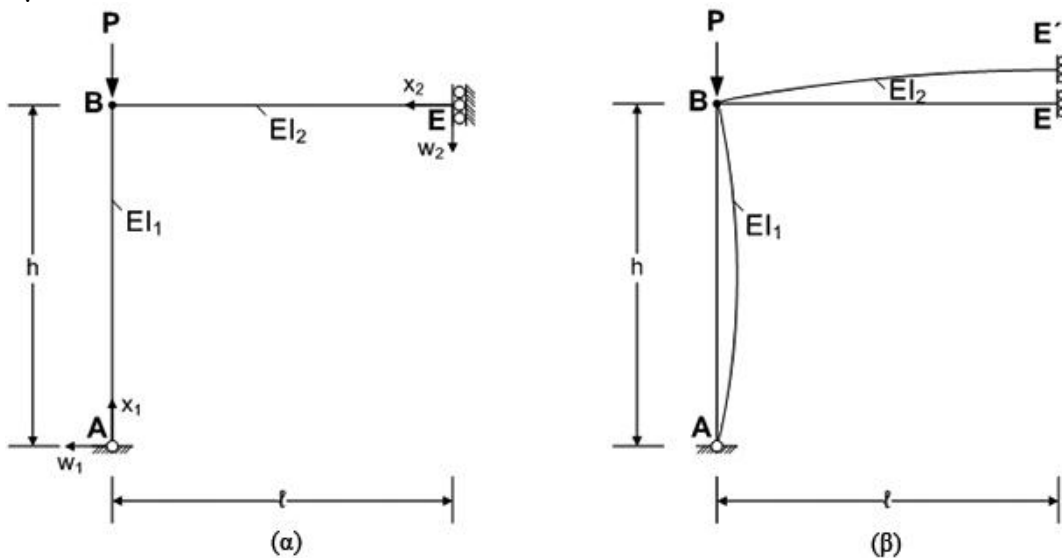
$$6 * k_1 * \cos(k_1 h) * l - 2 * \frac{l_1}{l_2} * k_1^2 * \sin(k_1 h) * l^2 = 0 \quad (3.37)$$

η οποία αν διαιρεθεί με το l και πολλαπλασιαστεί με το h μας δίνει την (3.26).

Η εξίσωση λυγισμού (3.26) δηλαδή μας δίνει τη λύση του κρίσιμου φορτίου για αντιμετρικό λυγισμό με μετάθεση.

3.2.2 Συμμετρικός λυγισμός χωρίς μετάθεση

Αν λύσουμε τώρα το πλαίσιο ABE έχοντας κυλιόμενη πάκτωση στον κόμβο E θα έχουμε:



Σχ. 3.4 (α) Απαραμόρφωτη, (β) παραμορφωμένη μορφή μισού φορέα για συμμετρικό λυγισμό

$$w_1(x) = A_1 * \sin k_1 x_1 + B_1 * \cos k_1 x_1 + \Gamma_1 * x_1 + \Delta_1, \quad (k_1^2 = \frac{P}{EI_1}) \quad (3.38)$$

$$w_2(x) = A_2 * x_2^3 + B_2 * x_2^2 + \Gamma_2 * x_2 + \Delta_2 \quad (3.39)$$

Όπως και πριν $B_1 = 0, \Delta_1 = 0$

Στον κόμβο E έχουμε μηδενική στροφή και τέμνουσα ίση με το μηδέν δηλαδή :

$$w_2'(0) = 0 \Rightarrow \Gamma_2 = 0 \quad (3.40)$$

$$-EI_2 * w_2'''(0) = 0 \Rightarrow A_2 = 0 \quad (3.41)$$

$$w_2(l) = 0 \Rightarrow B_2 * l^2 + \Delta_2 = 0 \quad (3.42)$$

Λόγω της κυλιόμενης πάκτωσης στον κόμβο E, ο κόμβος B είναι αμετάθετος και ως προς την οριζόντια διεύθυνση άρα:

$$w_1(h) = 0 \Rightarrow A_1 * \sin(k_1 h) + \Gamma_1 * h = 0 \quad (3.43)$$

$$w_1'(h) = w_2'(l) \Rightarrow A_1 * k_1 * \cos(k_1 h) + \Gamma_1 = 2 * B_2 * l \quad (3.44)$$

$$EI_1 * w_1''(h) + EI_2 * w_2''(l) = 0 \Rightarrow -\frac{l_1}{l_2} * A_1 * k_1^2 * \sin(k_1 h) + 2 * B_2 = 0 \quad (3.45)$$

Από εξ.(3.43), η εξ.(3.44) γίνεται:

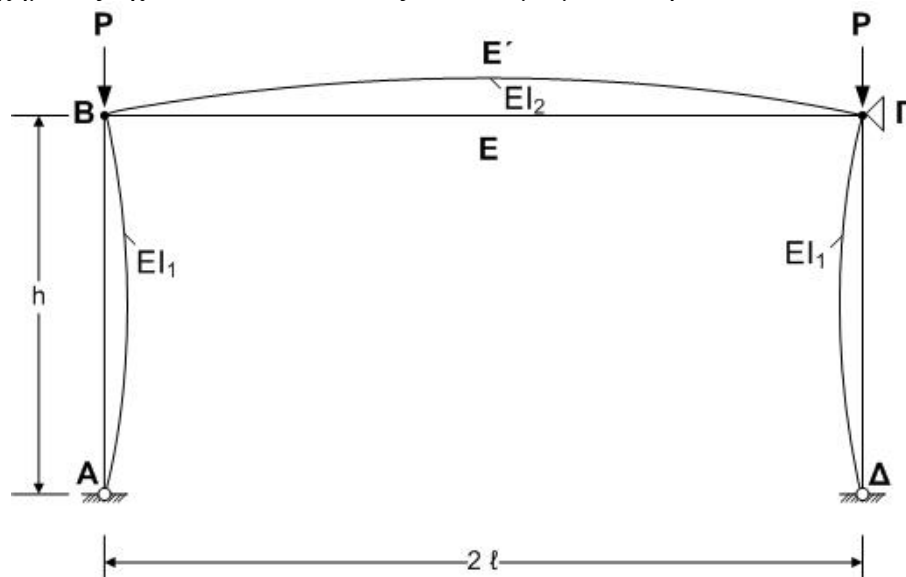
$$A_1 * (k_1 * h) * \cos(k_1 h) - A_1 * \sin(k_1 h) = 2 * B_2 * l * h \quad (3.46)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (3.45), (3.46) καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\frac{l_1}{l_2} * k_1^2 * \sin(k_1 h) * 2 * l * h - 2 * (k_1 * h) * \cos(k_1 h) + 2 * \sin(k_1 h) = 0 \quad (3.47)$$

η οποία είναι ίδια με την εξίσωση (3.27).

Συμπεραίνουμε δηλαδή ότι η δεύτερη εξίσωση λυγισμού που βγάζουμε λύνοντας ολόκληρο το πλαίσιο, είναι για συμμετρικό λυγισμό χωρίς μετάθεση αφού το πλαίσιο ABE του σχήματος Σχ.3.4 είναι εντατικώς ισοδύναμο με το παρακάτω πλαίσιο:



Σχ. 3.5 Παραμορφωμένη μορφή πλαισίου για συμμετρικό λυγισμό

Στη συνέχεια θα λύσουμε και ολόκληρο το πλαίσιο για συμμετρικό λυγισμό χωρίς μετάθεση δηλαδή θα εμποδίσουμε την οριζόντια μετάθεση του ζυγώματος ΒΓ. Οι εξισώσεις που διέπουν την ισορροπία των ραβδών ΑΒ ΒΓ ΓΔ στην παραμορφωμένη κατάσταση είναι ίδιες όπως και πριν (για ολόκληρο το φορέα) ενώ οι συνοριακές συνθήκες που περιγράφουν οι εξισώσεις (3.4)-(3.13) ισχύουν και στο συμμετρικό λυγισμό χωρίς μετάθεση.

Έχουμε επίσης:

$$w_1(h) = 0 \Rightarrow A_1 * \sin(k_1 h) + \Gamma_1 * h = 0 \quad (3.48)$$

$$w_3(h) = 0 \Rightarrow A_3 * \sin(k_1 h) + \Gamma_3 * h = 0 \quad (3.49)$$

Από (3.9) και (3.48), η (3.10) γίνεται:

$$A_1 * (k_1 * h) * \cos(k_1 h) - A_1 * \sin(k_1 h) = -4 * A_2 * l^2 * h - 2 * B_2 * l * h \quad (3.50)$$

Από (3.9), (3.49), (3.10) η (3.11) γίνεται:

$$A_3 * (k_1 * h) * \cos(k_1 h) - A_3 * \sin(k_1 h) = 8 * A_2 * l^2 * h + 2 * B_2 * l * h \quad (3.51)$$

Από τη (3.12) οι εξ.(3.50) , (3.51) γίνονται:

$$A_1 * (k_1 * h) * \cos(k_1 h) - A_1 * \sin(k_1 h) = -4 * A_2 * l^2 * h + \frac{l_1}{l_2} * A_1 * k_1^2 * \sin(k_1 h) * l * h \quad (3.52)$$

$$\text{και} \quad A_3 * (k_1 * h) * \cos(k_1 h) - A_3 * \sin(k_1 h) = 8 * A_2 * l^2 * h - \frac{l_1}{l_2} * A_1 * k_1^2 * \sin(k_1 h) * l * h \quad (3.53)$$

Σε συνδυασμό με την εξ.(3.20) βρίσκουμε το σύστημα:

$$A_1 * (k_1 * h) * \cos(k_1 h) - A_1 * \sin(k_1 h) - \frac{l_1}{l_2} * A_1 * k_1^2 * \sin(k_1 h) * l * h + \frac{l_1}{3 * l_2} * A_1 * k_1^2 * \sin(k_1 h) * l * h + \frac{l_1}{3 * l_2} * A_1 * k_1^2 * \sin(k_1 h) * l * h = 0 \quad (3.54)$$

$$A_3 * (k_1 * h) * \cos(k_1 h) - A_3 * \sin(k_1 h) + \frac{l_1}{l_2} * A_1 * k_1^2 * \sin(k_1 h) * l * h - \frac{2 * l_1}{3 * l_2} * A_1 * k_1^2 * \sin(k_1 h) * l * h - \frac{2 * l_1}{3 * l_2} * A_3 * k_1^2 * \sin(k_1 h) * l * h = 0 \quad (3.55)$$

Δημιουργώντας τον λόγο $r = \frac{l_1 * 1}{l_2 * h}$ όπου είναι απαραίτητο οδηγούμαστε στη λύση :

$$\left((k_1 * h) * \cos(k_1 h) - \sin(k_1 h) - r * (k_1 * h)^2 * \sin(k_1 h) + \frac{r}{3} * (k_1 * h)^2 * \sin(k_1 h) \right) * \left((k_1 * h) * \cos(k_1 h) - \sin(k_1 h) - \frac{2 * r}{3} * (k_1 * h)^2 * \sin(k_1 h) \right) - \left(\frac{r}{3} * (k_1 * h)^2 * \sin(k_1 h) \right) * \left(\frac{r}{3} * (k_1 * h)^2 * \sin(k_1 h) \right) = 0 \Rightarrow \quad (3.56)$$

$$\Rightarrow (k_1 * h)^2 * \cos(k_1 h)^2 - (k_1 * h) * \cos(k_1 h) * \sin(k_1 h) - \frac{2 * r}{3} * (k_1 * h)^3 * \sin(k_1 h) * \cos(k_1 h) - (k_1 * h) * \cos(k_1 h) * \sin(k_1 h) + \sin(k_1 h)^2 + \frac{2 * r}{3} * (k_1 * h)^2 * \sin(k_1 h)^2 - \frac{2 * r}{3} * (k_1 * h)^3 * \cos(k_1 h) * \sin(k_1 h) + \frac{2 * r}{3} * (k_1 * h)^2 * \sin(k_1 h)^2 + \frac{4 * r^2}{9} * (k_1 * h)^4 * \sin(k_1 h)^2 - \frac{r^2}{9} * (k_1 * h)^4 * \sin(k_1 h)^2 = 0 \quad (3.57)$$

η οποία αν βγάλουμε κοινό παράγοντα τους όρους $(\sin(k_1 h) - (k_1 * h) * \cos(k_1 h) + r * (k_1 * h)^2 * \sin(k_1 h))$ (η εξίσωση για συμμετρικό λυγισμό), μας δίνει ένα γινόμενο με τις εξής λύσεις :

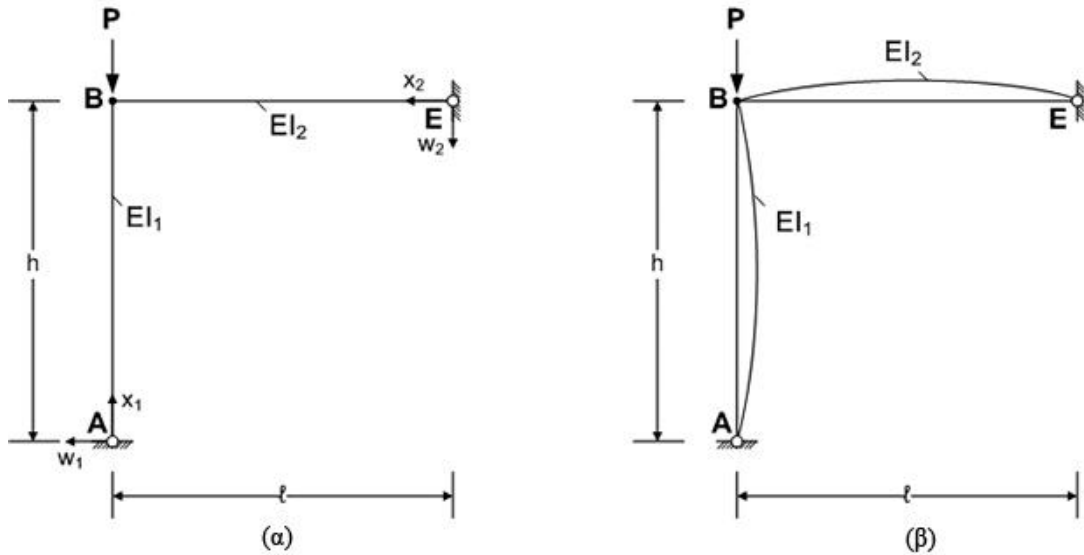
$$\beta) \sin(k_1 h) - (k_1 * h) * \cos(k_1 h) + \frac{l_1 * 1}{l_2 * h} * (k_1 * h)^2 * \sin(k_1 h) = 0 \quad (3.58)$$

$$\gamma) 3 * \sin(k_1 h) - 3 * (k_1 * h) * \cos(k_1 h) + \frac{l_1 * 1}{l_2 * h} * (k_1 * h)^2 * \sin(k_1 h) = 0 \quad (3.59)$$

Η εξ.(3.58) είναι ίδια με την (3.27) ενώ για $\frac{l_1 * 1}{l_2 * h} = 1$ η μικρότερη λύση που παίρνουμε για την εξ. (3.59) είναι $kh=3,7263$. Δηλαδή όπως και πριν η δεύτερη λύση μας δίνει την εξίσωση μιας άλλης μορφής λυγισμού.

3.2.3 Αντιμετρικός λυγισμός χωρίς μετάθεση

Δοκιμάζουμε να λύσουμε τον παρακάτω φορέα :



Σχ. 3.6 (α) Απαραμόρφωτη, (β) παραμορφωμένη μορφή μισού φορέα για αντιμετρικό λυγισμό χωρίς μετάθεση

Οι εξισώσεις που διέπουν την ισορροπία των ραβδών AB BE στην παραμορφωμένη κατάσταση είναι οι εξής:

$$w_1(x) = A_1 * \sin k_1 x_1 + B_1 * \cos k_1 x_1 + \Gamma_1 * x_1 + \Delta_1, \quad (k_1^2 = \frac{P}{EI_1}) \quad (3.60)$$

$$w_2(x) = A_2 * x_2^3 + B_2 * x_2^2 + \Gamma_2 * x_2 + \Delta_2 \quad (3.61)$$

Λόγω μηδενικής ροπής και μηδενικού βέλους οι συντελεστές $B_1, \Delta_1, B_2, \Delta_2$ μηδενίζονται.

$$w_2(l) = 0 \Rightarrow A_2 * l^2 + \Gamma_2 = 0 \quad (3.62)$$

$$w_1'(h) = w_2'(l) \Rightarrow A_1 * k_1 * \cos(k_1 h) + \Gamma_1 = 3 * A_2 * l^2 + \Gamma_2 \quad (3.63)$$

$$EI_1 * w_1''(h) + EI_2 * w_2''(l) = 0 \Rightarrow -\frac{l_1}{l_2} * A_1 * k_1^2 * \sin(k_1 h) + 6 * A_2 * l = 0 \quad (3.64)$$

$$w_1(h) = 0 \Rightarrow A_1 * \sin(k_1 h) + \Gamma_1 * h = 0 \quad (3.65)$$

Από (3.62) και (3.65) η (3.63) γίνεται :

$$A_1 * (k_1 * h) * \cos(k_1 h) - A_1 * \sin(k_1 h) = 3 * A_2 * l^2 * h - A_2 * l^2 * h \quad (3.66)$$

η οποία μαζί με την (3.64) μας δίνει :

$$6 * \sin(k_1 h) - 6 * (k_1 * h) * \cos(k_1 h) + \frac{2 * l_1 * l}{l_2 * h} * (k_1 * h)^2 * \sin(k_1 h) = 0 \quad \text{δηλαδή}$$

την εξ.(3.59).

Άρα η δεύτερη λύση είναι ο αντιμετρικός λυγισμός χωρίς μετάθεση αφού το πλαίσιο του Σχ.3.6 είναι εντατικώς ισοδύναμο με το πλαίσιο στο Σχ.3.7:

Από (3.73), (3.74) οι (3.75), (3.76) αντίστοιχα γίνονται :

$$A_1 * (k_1 * h) * \cos(k_1 h) - A_1 * \sin(k_1 h) = \Gamma_2 * h \quad (3.83)$$

$$A_4 * (k_1 * h) * \cos(k_1 h) - A_4 * \sin(k_1 h) = \Gamma_3 * h \quad (3.84)$$

Από (3.79) , (3.80) οι (3.81) , (3.82) αντίστοιχα γίνονται :

$$2 * B_2 * l + 4 * \Gamma_2 + 2 * B_3 * l + 4 * \Gamma_3 = 0 \quad (*2 \text{ για διευκόλυνση}) \quad (3.85)$$

$$4 * B_2 * l + 6 * \Gamma_2 - 4 * B_3 * l - 6 * \Gamma_3 = 0 \quad (3.86)$$

Πολλαπλασιάζουμε τις παραπάνω εξισώσεις με h και λόγω των εξισώσεων (3.77),(3.78),(3.83),(3.84):

$$-\frac{I_1}{I_2} * A_1 * k_1^2 * \sin(k_1 h) * l * h + 4 * A_1 * k_1 * h * \cos(k_1 h) - 4 * A_1 * \sin(k_1 h) - \frac{I_1}{I_2} * A_4 * k_1^2 * \sin(k_1 h) * l * h + 4 * A_4 * k_1 * h * \cos(k_1 h) - 4 * A_4 * \sin(k_1 h) = 0 \quad (3.87)$$

$$\frac{2 * I_1}{I_2} * A_1 * k_1^2 * \sin(k_1 h) * l * h - 6 * A_1 * k_1 * h * \cos(k_1 h) + 6 * A_1 * \sin(k_1 h) - \frac{2 * I_1}{I_2} * A_4 * k_1^2 * \sin(k_1 h) * l * h + 6 * A_4 * k_1 * h * \cos(k_1 h) - 6 * A_4 * \sin(k_1 h) = 0 \quad (3.88)$$

Λύση του παραπάνω συστήματος μας δίνει:

$$\left(-4 * \sin(k_1 h) + 4 * (k_1 * h) * \cos(k_1 h) - \frac{I_1 * l}{I_2 * h} * (k_1 * h)^2 * \sin(k_1 h) \right) * \left(-6 * \sin(k_1 h) + 6 * (k_1 * h) * \cos(k_1 h) - \frac{2 * I_1 * l}{I_2 * h} * (k_1 * h)^2 * \sin(k_1 h) \right) - \left(-4 * \sin(k_1 h) + 4 * (k_1 * h) * \cos(k_1 h) - \frac{I_1 * l}{I_2 * h} * (k_1 * h)^2 * \sin(k_1 h) \right) * \left(6 * \sin(k_1 h) - 6 * (k_1 * h) * \cos(k_1 h) + \frac{2 * I_1 * l}{I_2 * h} * (k_1 * h)^2 * \sin(k_1 h) \right) = 0 \quad (3.89)$$

η οποία μας δίνει τις εξής λύσεις:

$$\gamma) 3 * \sin(k_1 h) - 3 * (k_1 * h) * \cos(k_1 h) + \frac{I_1 * l}{I_2 * h} * (k_1 * h)^2 * \sin(k_1 h) = 0 \quad (3.90)$$

$$\delta) 4 * \sin(k_1 h) - 4 * (k_1 * h) * \cos(k_1 h) + \frac{I_1 * l}{I_2 * h} * (k_1 * h)^2 * \sin(k_1 h) = 0 \quad (3.91)$$

Η εξ.(3.90) είναι ίδια με την (3.59) ενώ για $\frac{I_1 * l}{I_2 * h} = 1$ η μικρότερη λύση που παίρνουμε για την εξ. (3.91) είναι $kh=3,8283$. Αντίστοιχα με τις προηγούμενες περιπτώσεις η δ) περιγράφει με διαφορετική μορφή λυγισμό.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν κυρίως ο αντισυμμετρικός λυγισμός με μετάθεση και ο συμμετρικός λυγισμός χωρίς μετάθεση. Ο αντισυμμετρικός λυγισμός χωρίς μετάθεση έχει μεγαλύτερο κρίσιμο φορτίο από τον συμμετρικό ενώ πρακτικά είναι δύσκολο να υπάρξει φορέας που να έχει αυτή τη μορφή (μια δέσμευση στη μέση). Άρα στη συνέχεια του κεφαλαίου θα ασχοληθούμε με το πρώτο πλαίσιο(Σχ.3.2) και τις συνθήκες που ισχύουν σε αυτό αφού με την επίλυσή του παίρνουμε τα κρίσιμα φορτία για λυγισμό με μετάθεση (αντισυμμετρικός) και χωρίς μετάθεση (συμμετρικός). Σε αυτό το σημείο αξίζει να τονίσουμε ότι για την εξίσωση που μας δίνει τον αντισυμμετρικό λυγισμό με μετάθεση, η αμέσως μεγαλύτερη τιμή kh είναι μεγαλύτερη από την μικρότερη τιμή kh του συμμετρικού λυγισμού. Η διευκρίνιση αυτή γίνεται γιατί για να βρούμε τις τιμές kh στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε ολόκληρη την εξίσωση που παίρνουμε από την επίλυση της πρώτης μορφής του πλαισίου(Σχ.3.2). Ο διαχωρισμός των εξισώσεων δεν θα είναι εφικτός, οπότε ξέρουμε ότι λαμβάνοντας τις δύο μικρότερες τιμές kh θα έχουμε τις λύσεις για λυγισμό με μετάθεση (αντισυμμετρικός) και χωρίς μετάθεση (συμμετρικός).

3.2.4 Πίνακες-Διαγράμματα κρίσιμων φορτίων και ισοδύναμου μήκους λυγισμού

Στη συνέχεια παραθέτουμε έναν πίνακα που μας δείχνει τα κρίσιμα φορτία (P_{cr}) και τους συντελεστές K . Ο συντελεστής K καθορίζει το ισοδύναμο μήκος λυγισμού των υποστυλωμάτων του πλαισίου μας. Πιο αναλυτικά :

$$\text{Έστω } kh = \beta \Rightarrow (kh)^2 = \beta^2 \quad (3.92)$$

Από $k^2 = \frac{P_{cr}}{EI}$ η εξ. (3.92) γίνεται:

$P_{cr} = \frac{\beta^2 * EI}{h^2}$, η οποία αν πολλαπλασιάσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή με π^2 γίνεται:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 * EI}{\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^2 h^2} \Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 * EI}{\left(\frac{\pi}{\beta}\right)^2 h^2} \quad (3.93)$$

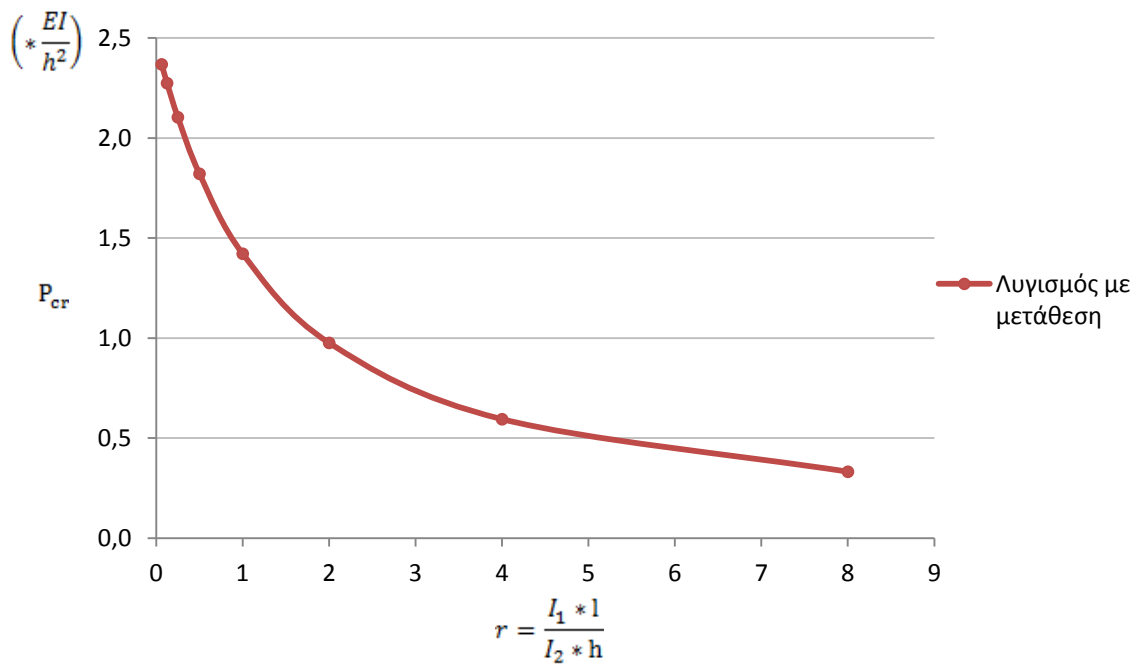
$$\text{Ξέρουμε ότι για μια αμφιέριστη δοκό μήκους } h \text{ ισχύει : } P_{cr} = \frac{\pi^2 * EI}{h^2} \quad (3.94)$$

Άρα από την εξ. (3.93) συμπεραίνουμε ότι το κλάσμα $\frac{\pi}{kh}$ μας δίνει το ισοδύναμο μήκος λυγισμού. Εξάλλου από $k^2 = \frac{P_{cr}}{EI}$, αν πολλαπλασιάσουμε τα δύο μέλη με h^2 οδηγούμαστε στη σχέση : $P_{cr} = \frac{(kh)^2 * EI}{h^2}$.

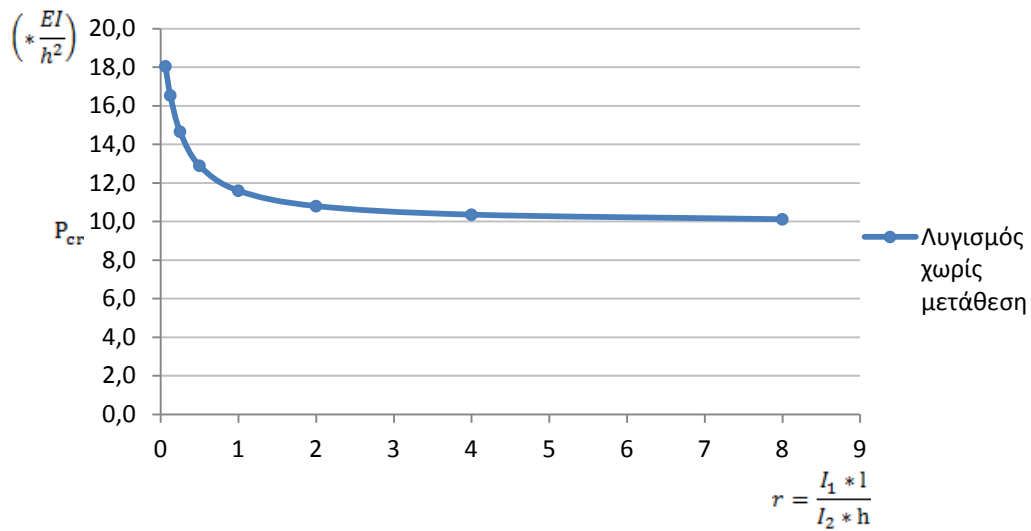
Για παράδειγμα για $r=1$ και αντιμετρικό λυγισμό με μετάθεση, έχω $kh=1,1922$ άρα $K = \frac{\pi}{1,1922} = 2,6351$ που σημαίνει ότι το υποστυλώμά μας είναι ισοδύναμο από πλευράς λυγισμού με αμφιέριστη δοκό μήκους $h' = 2,6351 * h$. Επίσης $P_{cr} = \frac{(1,1922)^2 * EI_1}{h^2} = 1,4213 * \frac{EI_1}{h^2}$. Στον πίνακα βλέπουμε για τους λόγους $\frac{I_1}{I_2}$ και $\frac{I_1}{I_2}$, τον λόγο $r = \frac{I_1 * 1}{I_2 * h}$ που σχηματίζεται. Επομένως αντικαθιστώ στην εξίσωση: $(3 * (k_1 * h) * \cos(k_1 h) - r * (k_1 * h)^2 * \sin(k_1 h)) * (\sin(k_1 h) - (k_1 * h) * \cos(k_1 h) + r * (k_1 * h)^2 * \sin(k_1 h)) = 0$ το ανάλογο r και με τη βοήθεια του Matlab βρίσκω τα σημεία μηδενισμού της γραφικής παράστασης της συνάρτησης και επομένως τις λύσεις kh που ψάχνω. Αντίστοιχα με το παράδειγμα βρίσκονται και οι υπόλοιπες τιμές P_{cr} και K . Σε άσπρο φόντο (πάνω) βλέπουμε τις τιμές για αντιμετρικό λυγισμό με μετάθεση ενώ σε μπλε (κάτω) για συμμετρικό λυγισμό χωρίς μετάθεση.

I_1/I_2	0,25		1		4	
$2l/h$						
0,5	r=0,0625	kh=1,5387	r=0,25	kh=1,4503	r=1	kh=1,1922
		kh=4,2483		kh=3,8289		kh=3,4058
	$P_{cr}=2,3676*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,0417	$P_{cr}=2,1034*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,1662	$P_{cr}=1,4213*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,6351
	$P_{cr}=18,0481*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,7395	$P_{cr}=14,6605*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,8205	$P_{cr}=11,5995*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9224
1	r=0,125	kh=1,5079	r=0,5	kh=1,3494	r=2	kh=0,9879
		kh=4,0664		kh=3,5909		kh=3,2864
	$P_{cr}=2,2738*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,0834	$P_{cr}=1,8209*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,3281	$P_{cr}=0,9759*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,1801
	$P_{cr}=16,5356*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,7726	$P_{cr}=12,8946*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,8749	$P_{cr}=10,8004*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9559
2	r=0,25	kh=1,4503	r=1	kh=1,1922	r=4	kh=0,7709
		kh=3,8289		kh=3,4058		kh=3,2181
	$P_{cr}=2,1034*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,1662	$P_{cr}=1,4213*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,6351	$P_{cr}=0,5943*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,0752
	$P_{cr}=14,6605*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,8205	$P_{cr}=11,5995*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9224	$P_{cr}=10,3562*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9762
4	r=0,5	kh=1,3494	r=2	kh=0,9879	r=8	kh=0,5761
		kh=3,5909		kh=3,2864		kh=3,1809
	$P_{cr}=1,8209*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,3281	$P_{cr}=0,9759*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,1801	$P_{cr}=0,3319*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,4532
	$P_{cr}=12,8946*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,8749	$P_{cr}=10,8004*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9559	$P_{cr}=10,1181*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9876

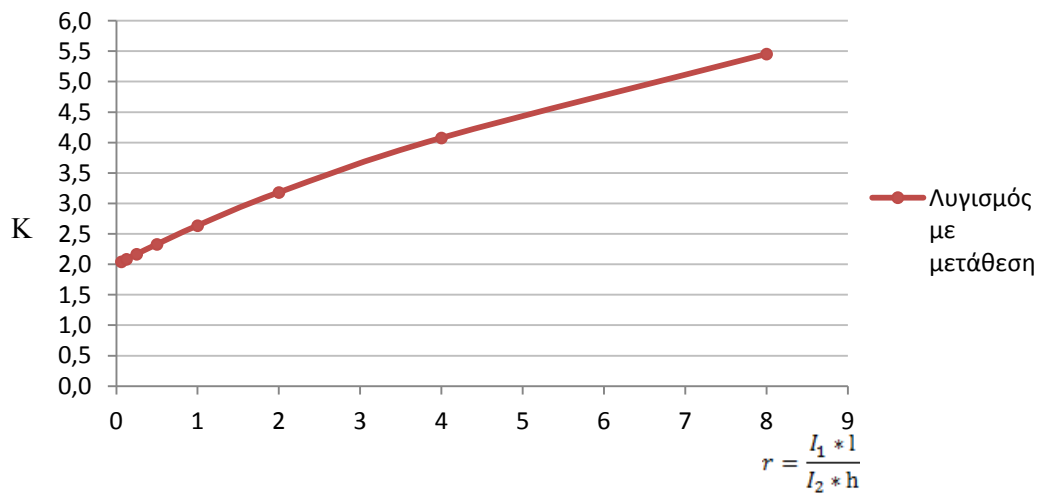
Πίνακας 3.1 Κρίσιμα φορτία και μήκη λυγισμού για αντισυμμετρικό λυγισμό με μετάθεση (άσπρο φόντο) και συμμετρικό λυγισμό χωρίς μετάθεση (μπλε φόντο).



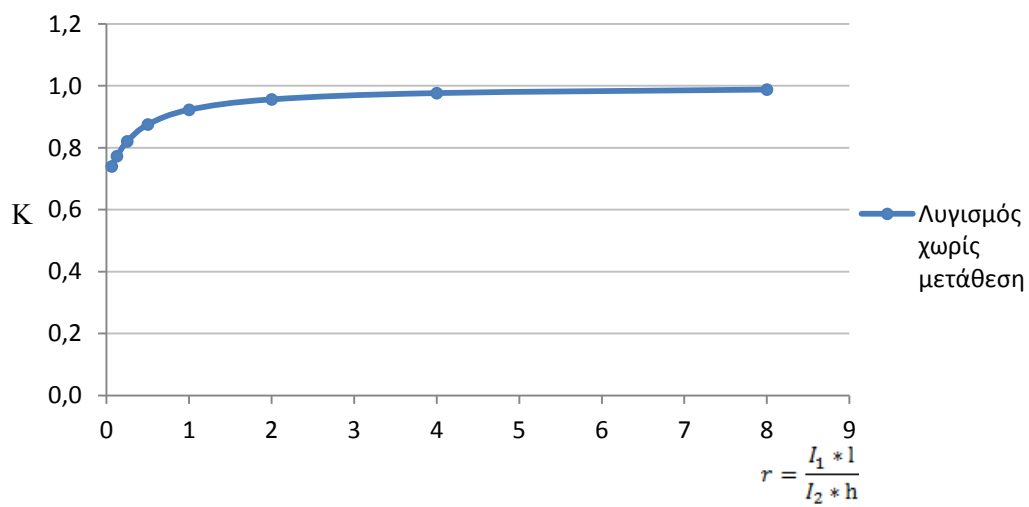
Σχ. 3.8 Διάγραμμα P_{cr} - r , για λυγισμό με μετάθεση



Σχ. 3.9 Διάγραμμα P_{cr} - r , για λυγισμό χωρίς μετάθεση



Σχ. 3.10 Διάγραμμα K - r , για λυγισμό με μετάθεση

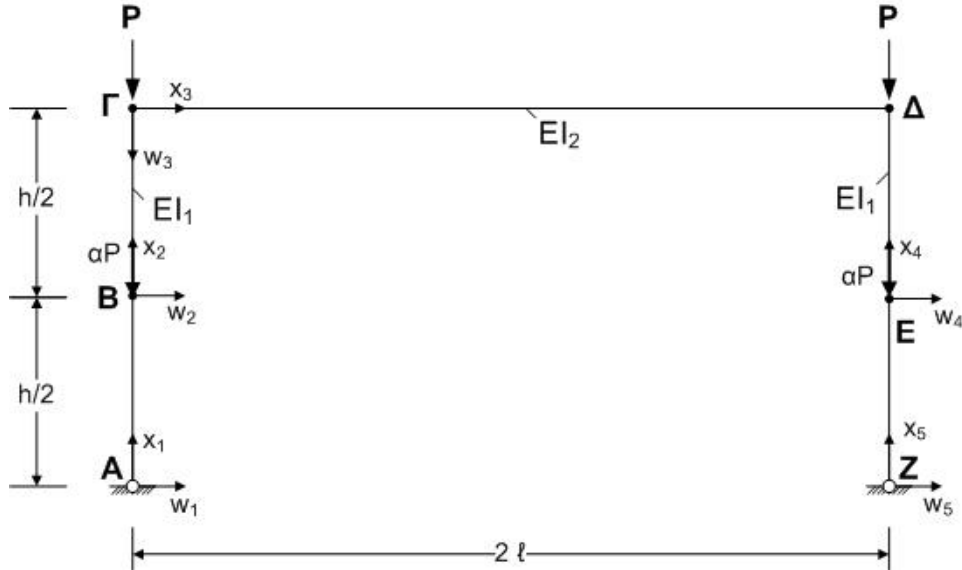


Σχ. 3.11 Διάγραμμα K - r , για λυγισμό χωρίς μετάθεση

3.3 Πλαίσιο με πρόσθετες φορτίσεις στη μέση των στύλων

3.3.1 Επίλυση πλαισίου

Στη συνέχεια φορτίζουμε τους στύλους του πλαισίου στη μέση με φορτία αP ενώ η παραμορφωμένη μορφή είναι ίδια με το Σχ.3.2.



Σχ. 3.12

Οι εξισώσεις που διέπουν την ισορροπία των ραβδών AB ΒΓ ΓΔ ΔΕ ΕΖ στην παραμορφωμένη κατάσταση είναι οι εξής:

$$w_1(x) = A_1 * \sin k_1 x_1 + B_1 * \cos k_1 x_1 + \Gamma_1 * x_1 + \Delta_1, \quad \left(k_1^2 = \frac{P+\alpha P}{EI_1}\right) \quad (3.95)$$

$$w_2(x) = A_2 * \sin k_2 x_2 + B_2 * \cos k_2 x_2 + \Gamma_2 * x_2 + \Delta_2, \quad \left(k_2^2 = \frac{P}{EI_1}\right) \quad (3.96)$$

$$w_3(x) = A_3 * x_3^3 + B_3 * x_3^2 + \Gamma_3 * x_3 + \Delta_3 \quad (3.97)$$

$$w_4(x) = A_4 * \sin k_2 x_4 + B_4 * \cos k_2 x_4 + \Gamma_4 * x_4 + \Delta_4, \quad \left(k_2^2 = \frac{P}{EI_1}\right) \quad (3.98)$$

$$w_5(x) = A_5 * \sin k_1 x_5 + B_5 * \cos k_1 x_5 + \Gamma_5 * x_5 + \Delta_5, \quad \left(k_1^2 = \frac{P+\alpha P}{EI_1}\right) \quad (3.99)$$

Λόγω των συνθηκών των στηρίξεων Α Ζ έχουμε:

$$w_1(0) = 0 \Rightarrow B_1 + \Delta_1 = 0 \quad (3.100)$$

$$-EI_1 * w_1''(0) = 0 \Rightarrow B_1 = 0 \quad (3.101)$$

$$w_5(0) = 0 \Rightarrow B_5 + \Delta_5 = 0 \quad (3.102)$$

$$-EI_1 * w_5''(0) = 0 \Rightarrow B_5 = 0 \quad (3.103)$$

Άρα οι σταθερές B_1 Δ_1 B_5 Δ_5 μηδενίζονται.

Όμοια με πριν ο κόμβος Γ είναι αμετάθετος κατά την κατακόρυφη διεύθυνση άρα:

$$w_3(0) = 0 \Rightarrow \Delta_3 = 0 \quad (3.104)$$

Στον κόμβο Β λόγω συνέχειας έχουμε ίσα βέλη και ίσες στροφές ενώ όπως έχουμε επιλέξει το σύστημα ορθογωνικών συντεταγμένων οι ροπές και οι τέμνουσες, των οποίων το άθροισμα είναι μηδέν, έχουν αντίθετες φορές. Άρα:

$$w_1\left(\frac{h}{2}\right) = w_2(0) \Rightarrow A_1 * \sin\left(k_1 \frac{h}{2}\right) + \Gamma_1 * \frac{h}{2} = B_2 + \Delta_2 \quad (3.105)$$

$$w_1'\left(\frac{h}{2}\right) = w_2'(0) \Rightarrow A_1 * k_1 * \cos\left(k_1 \frac{h}{2}\right) + \Gamma_1 = A_2 * k_2 + \Gamma_2 \quad (3.106)$$

$$-EI_1 * w_1''\left(\frac{h}{2}\right) = -EI_1 * w_2''(0) \Rightarrow A_1 * k_1^2 * \sin\left(k_1 \frac{h}{2}\right) = B_2 * k_2^2 \quad (3.107)$$

$$\begin{aligned} -EI_1 * w_1'''\left(\frac{h}{2}\right) - (1+a) * P * w_1'\left(\frac{h}{2}\right) + EI_1 * w_2''(0) + P * w_2'(0) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -(1+a) * P * \Gamma_1 + P * \Gamma_2 = 0 \Rightarrow -(1+a) * \Gamma_1 + \Gamma_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.108)$$

Όμοια στον κόμβο Ε:

$$w_5\left(\frac{h}{2}\right) = w_4(0) \Rightarrow A_5 * \sin\left(k_1 \frac{h}{2}\right) + \Gamma_5 * \frac{h}{2} = B_4 + \Delta_4 \quad (3.109)$$

$$w_5'\left(\frac{h}{2}\right) = w_4'(0) \Rightarrow A_5 * k_1 * \cos\left(k_1 \frac{h}{2}\right) + \Gamma_5 = A_4 * k_2 + \Gamma_4 \quad (3.110)$$

$$-EI_1 * w_5''\left(\frac{h}{2}\right) = -EI_1 * w_4''(0) \Rightarrow A_5 * k_1^2 * \sin\left(k_1 \frac{h}{2}\right) = B_4 * k_2^2 \quad (3.111)$$

$$\begin{aligned} -EI_1 * w_5'''\left(\frac{h}{2}\right) - (1+a)P * w_5'\left(\frac{h}{2}\right) + EI_1 * w_4''(0) + P * w_4'(0) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -(1+a) * P * \Gamma_5 + P * \Gamma_4 = 0 \Rightarrow -(1+a) * \Gamma_5 + \Gamma_4 = 0 \end{aligned} \quad (3.112)$$

Λόγω συνέχειας στον κόμβο Γ έχουμε ισότητα στοφών:

$$w_2'\left(\frac{h}{2}\right) = w_3'(0) \Rightarrow A_2 * k_2 * \cos\left(k_2 \frac{h}{2}\right) - B_2 * k_2 * \sin\left(k_2 \frac{h}{2}\right) + \Gamma_2 = \Gamma_3 \quad (3.113)$$

Όμοια στον κόμβο Δ: $w_4'\left(\frac{h}{2}\right) = w_3'(2l) \Rightarrow A_4 * k_2 * \cos\left(k_2 \frac{h}{2}\right) - B_4 * k_2 * \sin\left(k_2 \frac{h}{2}\right) + \Gamma_4 = 12 * A_3 * l^2 + 4 * B_3 * l + \Gamma_3 \quad (3.114)$

Ο κόμβος Δ είναι αμετάθετος κατά την κατακόρυφη διεύθυνση άρα:

$$w_3(2l) = 0 \Rightarrow 4 * A_3 * l^2 + 2 * B_3 * l + \Gamma_3 = 0 \quad (3.115)$$

Επίσης στον κόμβο Γ έχουμε ισοροπία ροπών :

$$\begin{aligned} -EI_1 * w_2''\left(\frac{h}{2}\right) = -EI_2 * w_3''(0) \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} * (A_2 * k_2^2 * \sin\left(k_2 \frac{h}{2}\right) + B_2 * k_2^2 * \\ \cos\left(k_2 \frac{h}{2}\right)) = -2 * B_3 \end{aligned} \quad (3.116)$$

Όμοια για τον κόμβο Δ:

$$\begin{aligned} EI_1 * w_4''\left(\frac{h}{2}\right) = -EI_2 * w_3''(2l) \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} * (A_4 * k_2^2 * \sin\left(k_2 \frac{h}{2}\right) + B_4 * k_2^2 * \cos\left(k_2 \frac{h}{2}\right)) = \\ 12 * A_3 * l + 2 * B_3 \end{aligned} \quad (3.117)$$

Όπως και πριν η αξονική δύναμη στη ράβδο ΓΔ είναι μηδέν άρα έχουμε άθροισμα τεμνουσών δυνάμεων στις κορυφές των υποστυλωμάτων ίσο με το μηδέν δηλαδή:

$$\begin{aligned} -EI_1 * w_2'''\left(\frac{h}{2}\right) - P * w_2'\left(\frac{h}{2}\right) - EI_1 * w_4'''\left(\frac{h}{2}\right) - P * w_4'\left(\frac{h}{2}\right) = 0 \Rightarrow -P * \Gamma_2 - P * \\ \Gamma_4 = 0 \Rightarrow \Gamma_2 + \Gamma_4 = 0 \end{aligned} \quad (3.118)$$

Επειδή το μήκος της ράβδου ΓΔ δεν αλλάζει, τα υποστυλώματα έχουν ίσα βέλη στις κορυφές τους δηλαδή:

$$w_2 \left(\frac{h}{2} \right) = w_4 \left(\frac{h}{2} \right) \Rightarrow A_2 * \sin \left(k_2 \frac{h}{2} \right) + B_2 * \cos \left(k_2 \frac{h}{2} \right) + \Gamma_2 * \frac{h}{2} + \Delta_2 = A_4 * \sin \left(k_2 \frac{h}{2} \right) + B_4 * \cos \left(k_2 \frac{h}{2} \right) + \Gamma_4 * \frac{h}{2} + \Delta_4 \quad (3.119)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι έχουν μηδενιστεί οι σταθερές $B_1, \Delta_1, B_5, \Delta_5, \Delta_3$ για να υπάρξει ισορροπία στην ελαφρώς παραμορφωμένη κατάσταση θα πρέπει οι υπόλοιπες σταθερές να μην μηδενίζονται ταυτόχρονα. Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε 15 άγνωστες σταθερές και 15 εξισώσεις, (3.105)-(3.119). Για να φέρουμε τις εξισώσεις σε επιλύσιμη μορφή θέτω $k_2 = k$ οπότε έχουμε $k_1 = \sqrt{(1+a)} * k$. Επίσης θέτουμε $kh = x$ και $\rho = \frac{I_1}{I_2}$. Πηγαίνουμε όλους τους όρους των εξισώσεων στο αριστερό μέρος και έτσι δημιουργούμε ένα ομογενές σύστημα όπως βλέπουμε στο Σχ.3.13.

Η εξίσωση που προκύπτει από το σύστημά μας είναι αρκετά μεγάλη για να την παρουσιάσουμε σε αυτό το τεύχος (ολόκληρη υπάρχει στο cd) γι' αυτό θα δείξουμε τους χαρακτηριστικούς όρους:

$$\begin{aligned} & 6 * \alpha * k^3 * I^1 * \sin(x/2) * \sin((x * (\alpha + 1)^{(1/2)})/2)^2 + \dots - \\ & 6 * h * k^4 * I^1 * \sin(x/2)^2 * \sin((x * (\alpha + 1)^{(1/2)})/2)^2 + \dots + 2 * \alpha^4 * k^4 * I^2 * \rho * \cos(x/2) * \sin((x * (\alpha + 1)^{(1/2)})/2)^2 - \\ & \dots - 8 * h * k^5 * I^2 * \rho * \cos(x/2) * \sin(x/2) * \sin((x * (\alpha + 1)^{(1/2)})/2)^2 - \\ & \dots + 2 * \alpha^2 * k^5 * I^3 * \rho^2 * \sin(x/2)^2 * \cos((x * (\alpha + 1)^{(1/2)})/2) * \sin((x * (\alpha + 1)^{(1/2)})/2) * (\alpha + 1)^{(1/2)} + \dots - \\ & 10 * \alpha * h * k^6 * I^3 * \rho^2 * \cos(x/2) * \sin(x/2) * \cos((x * (\alpha + 1)^{(1/2)})/2) * \sin((x * (\alpha + 1)^{(1/2)})/2) * (\alpha + 1)^{(1/2)} = 0 \end{aligned}$$

Αν θεωρήσουμε ότι το α είναι συγκεκριμένος αριθμός που θα αντικατασταθεί ($\alpha=0.5, 1, 2$), παρατηρώντας ολόκληρη την εξίσωση συμπεραίνουμε ότι πριν από τα ημιτονοειδή γινόμενα εμφανίζονται τα εξής γινόμενα: $k^3 * I^1, h * k^4 * I^1, k^4 * I^2 * \rho, h * k^5 * I^2 * \rho, k^5 * I^3 * \rho^2, h * k^6 * I^3 * \rho^2$. Αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση με h^3 και ταυτόχρονα διαιρέσουμε με 1 έχουμε:

$$\begin{aligned} k^3 * I^1 & \Rightarrow (kh)^3 \\ h * k^4 * I^1 & \Rightarrow (kh)^4 \\ k^4 * I^2 * \rho & \Rightarrow (kh)^4 * \frac{I_1 * I^1}{I_2 * h} \\ h * k^5 * I^2 * \rho & \Rightarrow (kh)^5 * \frac{I_1 * I^1}{I_2 * h} \\ k^5 * I^3 * \rho^2 & \Rightarrow (kh)^5 * \left(\frac{I_1 * I^1}{I_2 * h} \right)^2 \\ h * k^6 * I^3 * \rho^2 & \Rightarrow (kh)^6 * \left(\frac{I_1 * I^1}{I_2 * h} \right)^2 \end{aligned}$$

Θέτοντας $r = \frac{I_1 * I^1}{I_2 * h}$, $kh=x$ η εξίσωση έχει έναν άγνωστο (το x) αφού το r θα αντικατασταθεί με αριθμό όπως φαίνεται στους πίνακες.

3.3.2 Πίνακες-Διαγράμματα κρίσιμων φορτίων και ισοδύναμου μήκους λυγισμού

I_1/I_2 $2l/h$	0,25		1		4	
0,5	r=0,0625	Kh=1,2974	r=0,25	kh=1,2292	r=1	kh=1,0266
		kh=3,7176		kh=3,3757		kh=3,0277
	$P_{Cr}=1,6832 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=2,4215	$P_{Cr}=1,5109 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=2,5558	$P_{Cr}=1,0539 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=3,0602
	$P_{Cr}=13,8205 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=0,8451	$P_{Cr}=11,3954 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9306	$P_{Cr}=9,1670 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0376
1	r=0,125	kh=1,2738	r=0,5	kh=1,1509	r=2	kh=0,8608
		kh=3,5691		kh=3,1808		kh=2,9281
	$P_{Cr}=1,6226 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=2,4663	$P_{Cr}=1,3246 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=2,7297	$P_{Cr}=0,7410 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=3,6496
	$P_{Cr}=12,7385 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=0,8802	$P_{Cr}=10,1175 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9877	$P_{Cr}=8,5738 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0729
2	r=0,25	kh=1,2292	r=1	kh=1,0266	r=4	kh=0,6782
		kh=3,3757		kh=3,0277		kh=2,8706
	$P_{Cr}=1,5109 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=2,5558	$P_{Cr}=1,0539 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=3,0602	$P_{Cr}=0,4599 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=4,6323
	$P_{Cr}=11,3954 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9306	$P_{Cr}=9,1670 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0376	$P_{Cr}=8,2403 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0944
4	r=0,5	kh=1,1509	r=2	kh=0,8608	r=8	kh=0,5102
		kh=3,1808		kh=2,9281		kh=2,8394
	$P_{Cr}=1,3246 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=2,7297	$P_{Cr}=0,7410 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=3,6496	$P_{Cr}=0,2603 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=6,1576
	$P_{Cr}=10,1175 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9877	$P_{Cr}=8,5738 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0729	$P_{Cr}=8,0622 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1064

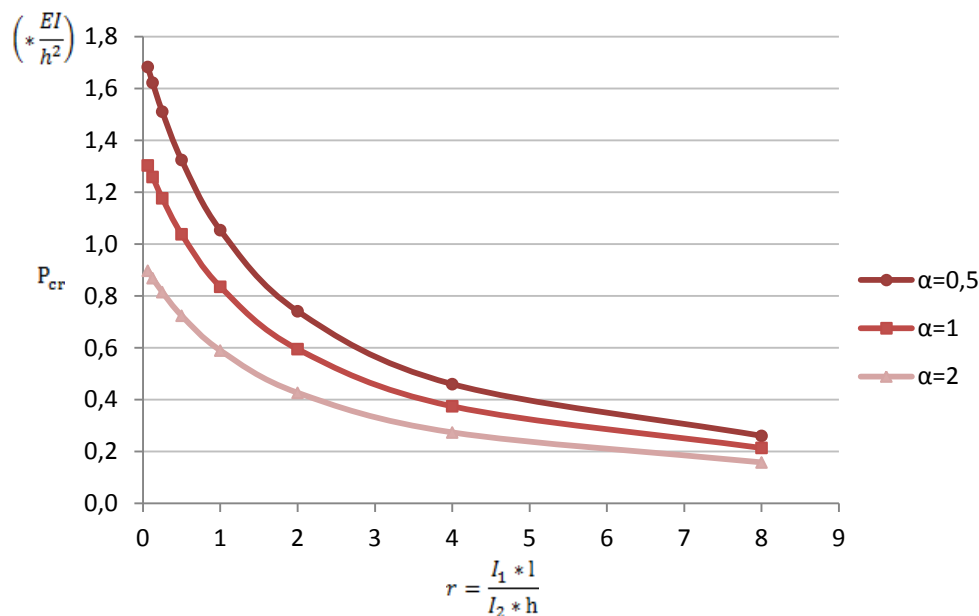
Πίνακας 3.2 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο) και λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\alpha=0,5$

I_1/I_2 $2l/h$	0,25		1		4	
0,5	r=0,0625	Kh=1,1417	r=0,25	kh=1,0848	r=1	kh=0,9140
		kh=3,3414		kh=3,0486		kh=2,7489
	$P_{Cr}=1,3035 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=2,7517	$P_{Cr}=1,1768 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=2,8960	$P_{Cr}=0,8354 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=3,4372
	$P_{Cr}=11,1650 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9402	$P_{Cr}=9,2940 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0305	$P_{Cr}=7,5565 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1429
1	r=0,125	kh=1,1220	r=0,5	kh=1,0188	r=2	kh=0,7714
		kh=3,2141		kh=2,8812		kh=2,6625
	$P_{Cr}=1,2589 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=2,8000	$P_{Cr}=1,0380 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=3,0836	$P_{Cr}=0,5951 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=4,0726
	$P_{Cr}=10,3304 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9774	$P_{Cr}=8,3013 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0904	$P_{Cr}=7,0889 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1799
2	r=0,25	kh=1,0848	r=1	kh=0,9140	r=4	kh=0,6121
		kh=3,0486		kh=2,7489		kh=2,6125
	$P_{Cr}=1,1768 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=2,8960	$P_{Cr}=0,8354 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=3,4372	$P_{Cr}=0,3747 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=5,1325
	$P_{Cr}=9,2940 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0305	$P_{Cr}=7,5565 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1429	$P_{Cr}=6,8252 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,2025
4	r=0,5	kh=1,0188	r=2	kh=0,7714	r=8	kh=0,4626
		kh=2,8812		kh=2,6625		kh=2,5856
	$P_{Cr}=1,0380 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=3,0836	$P_{Cr}=0,5951 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=4,0726	$P_{Cr}=0,2140 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=6,7912
	$P_{Cr}=8,3013 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0904	$P_{Cr}=7,0889 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1799	$P_{Cr}=6,6853 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,2150

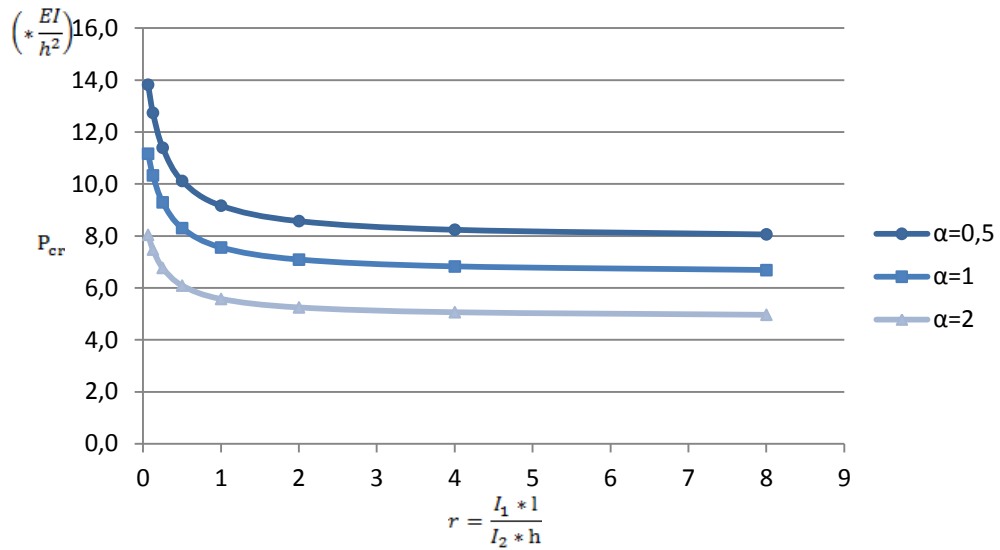
Πίνακας 3.3 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο) και λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\alpha=1$.

I_1/I_2 $2l/h$	0,25		1		4	
0,5	r=0,0625	kh=0,9472	r=0,25	kh=0,9026	r=1	kh=0,7677
		kh=2,8360		kh=2,6019		kh=2,3613
	$P_{Cr}=0,8972*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,3167	$P_{Cr}=0,8147*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,4806	$P_{Cr}=0,5894*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,0922
	$P_{Cr}=8,0429*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1078	$P_{Cr}=6,7699*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,2074	$P_{Cr}=5,5757*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,3305
1	r=0,125	kh=0,9320	r=0,5	kh=0,8507	r=2	kh=0,6529
		kh=2,7342		kh=2,4679		kh=2,2912
	$P_{Cr}=0,8686*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,3708	$P_{Cr}=0,7237*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,6929	$P_{Cr}=0,4263*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,8118
	$P_{Cr}=7,4758*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1490	$P_{Cr}=6,0905*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,2730	$P_{Cr}=5,2496*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,3712
2	r=0,25	kh=0,9026	r=1	kh=0,7677	r=4	kh=0,5229
		kh=2,6019		kh=2,3613		kh=2,2505
	$P_{Cr}=0,8147*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,4806	$P_{Cr}=0,5894*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,0922	$P_{Cr}=0,2734*\frac{EI_1}{h^2}$	K=6,0080
	$P_{Cr}=6,7699*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,2074	$P_{Cr}=5,5757*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,3305	$P_{Cr}=5,0648*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,3959
4	r=0,5	kh=0,8507	r=2	kh=0,6529	r=8	kh=0,3973
		kh=2,4679		kh=2,2912		kh=2,2285
	$P_{Cr}=0,7237*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,6929	$P_{Cr}=0,4263*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,8118	$P_{Cr}=0,1578*\frac{EI_1}{h^2}$	K=7,9074
	$P_{Cr}=6,0905*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,2730	$P_{Cr}=5,2496*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,3712	$P_{Cr}=4,9662*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,4097

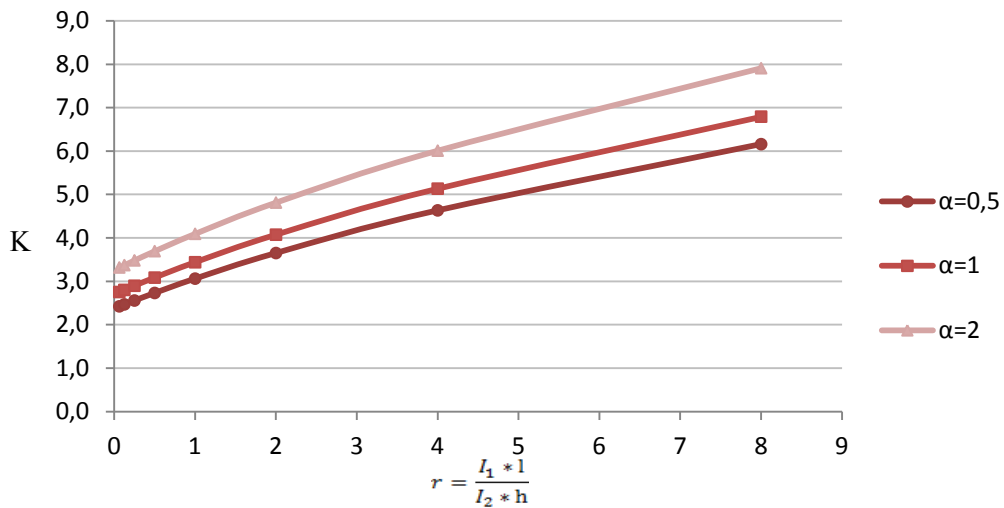
Πίνακας 3.4 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο) και λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\alpha=2$.



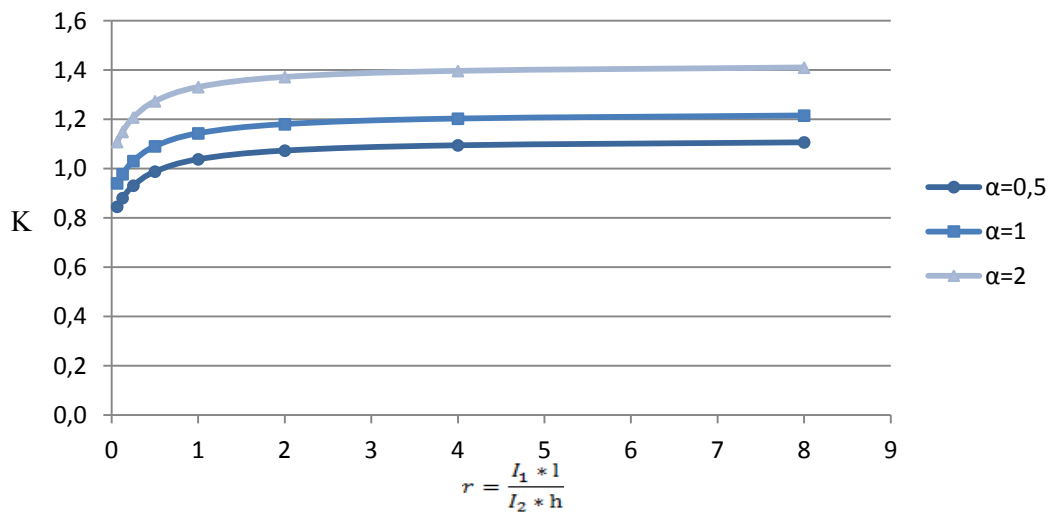
Σχ. 3.14 Διάγραμμα P_{Cr} - r , για λυγισμό με μετάθεση



Σχ. 3.15 Διάγραμμα P_{cr} - r , για λυγισμό χωρίς μετάθεση



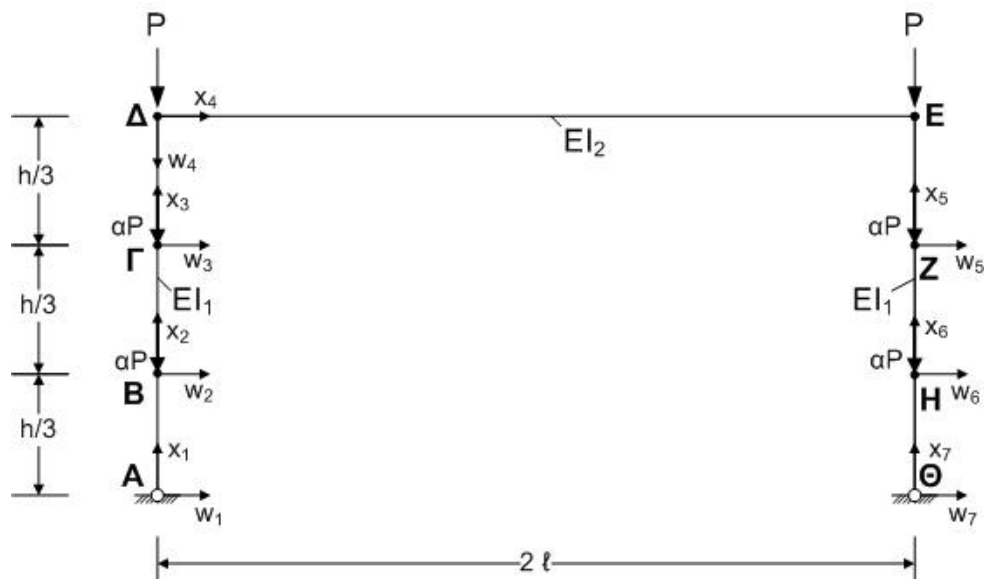
Σχ. 3.16 Διάγραμμα K - r , για λυγισμό με μετάθεση



Σχ. 3.17 Διάγραμμα K - r , για λυγισμό χωρίς μετάθεση

3.4 Πλαίσιο με πρόσθετες φορτίσεις στα τρίτα των στύλων

3.4.1 Επίλυση πλαισίου



Σχ. 3.18

Οι εξισώσεις που διέπουν την ισορροπία των ραβδών ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΕ ΕΖ ΖΗ ΗΘ στην παραμορφωμένη κατάσταση είναι οι εξής:

$$w_1(x) = A_1 * \operatorname{sink}_1 x_1 + B_1 * \operatorname{cosk}_1 x_1 + \Gamma_1 * x_1 + \Delta_1, \quad (k_1^2 = \frac{P+aP+aP}{EI_1}) \quad (3.120)$$

$$w_2(x) = A_2 * \operatorname{sink}_2 x_2 + B_2 * \operatorname{cosk}_2 x_2 + \Gamma_2 * x_2 + \Delta_2 \quad (k_2^2 = \frac{P+aP}{EI_1}) \quad (3.121)$$

$$w_3(x) = A_3 * \operatorname{sink}_3 x_3 + B_3 * \operatorname{cosk}_3 x_3 + \Gamma_3 * x_3 + \Delta_3 \quad (k_3^2 = \frac{P}{EI_1}) \quad (3.122)$$

$$w_4(x) = A_4 * x_4^3 + B_4 * x_4^2 + \Gamma_4 * x_4 + \Delta_4 \quad (3.123)$$

$$w_5(x) = A_5 * \operatorname{sink}_3 x_5 + B_5 * \operatorname{cosk}_3 x_5 + \Gamma_5 * x_5 + \Delta_5 \quad (k_3^2 = \frac{P}{EI_1}) \quad (3.124)$$

$$w_6(x) = A_6 * \operatorname{sink}_2 x_6 + B_6 * \operatorname{cosk}_2 x_6 + \Gamma_6 * x_6 + \Delta_6 \quad (k_2^2 = \frac{P+aP}{EI_1}) \quad (3.125)$$

$$w_7(x) = A_7 * \operatorname{sink}_1 x_7 + B_7 * \operatorname{cosk}_1 x_7 + \Gamma_7 * x_7 + \Delta_7, \quad (k_1^2 = \frac{P+aP+aP}{EI_1}) \quad (3.126)$$

Λόγω των συνθηκών των στηρίξεων Α Θ, όμοια με τις προηγούμενες περιπτώσεις οι σταθερές $B_1 \Delta_1 B_7 \Delta_7$ μηδενίζονται.

Όμοια με πριν ο κόμβος Δ είναι αμετάθετος κατά την κατακόρυφη διεύθυνση άρα:

$$w_4(0) = 0 \Rightarrow \Delta_4 = 0 \quad (3.127)$$

Στον κόμβο Β λόγω συνέχειας έχουμε ίσα βέλη και ίσες στροφές ενώ όπως έχουμε επιλέξει το σύστημα ορθογωνικών συντεταγμένων οι ροπές και οι τέμνουσες, των οποίων το άθροισμα είναι μηδέν, έχουν αντίθετες φορές. Άρα:

$$w_1\left(\frac{h}{3}\right) = w_2(0) \Rightarrow A_1 * \sin\left(k_1 \frac{h}{3}\right) + \Gamma_1 * \frac{h}{3} = B_2 + \Delta_2 \quad (3.128)$$

$$w_1'\left(\frac{h}{3}\right) = w_2'(0) \Rightarrow A_1 * k_1 * \cos\left(k_1 \frac{h}{3}\right) + \Gamma_1 = A_2 * k_2 + \Gamma_2 \quad (3.129)$$

$$-EI_1 * w_1''\left(\frac{h}{3}\right) = -EI_1 * w_2''(0) \Rightarrow A_1 * k_1^2 * \sin\left(k_1 \frac{h}{3}\right) = B_2 * k_2^2 \quad (3.130)$$

$$\begin{aligned} & -EI_1 * w_1'''\left(\frac{h}{3}\right) - (1 + 2a)P * w_1'\left(\frac{h}{3}\right) + EI_1 * w_2'''(0) + (1 + a)P * w_2'(0) = 0 \\ \Rightarrow & -(1 + 2a) * P * \Gamma_1 + (1 + a) * P * \Gamma_2 = 0 \Rightarrow -(1 + 2a) * \Gamma_1 + (1 + a) * \Gamma_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.131)$$

Όμοια στον κόμβο Γ:

$$w_2\left(\frac{h}{3}\right) = w_3(0) \Rightarrow A_2 * \sin\left(k_2 \frac{h}{3}\right) + B_2 * \cos\left(k_2 \frac{h}{3}\right) + \Gamma_2 * \frac{h}{3} + \Delta_2 = B_3 + \Delta_3 \quad (3.132)$$

$$w_2'\left(\frac{h}{3}\right) = w_3'(0) \Rightarrow A_2 * k_2 * \cos\left(k_2 \frac{h}{3}\right) - B_2 * k_2 * \sin\left(k_2 \frac{h}{3}\right) + \Gamma_2 = A_3 * k_3 + \Gamma_3 \quad (3.133)$$

$$-EI_1 * w_2''\left(\frac{h}{3}\right) = -EI_1 * w_3''(0) \Rightarrow A_2 * k_2^2 * \sin\left(k_2 \frac{h}{3}\right) + B_2 * k_2^2 * \cos\left(k_2 \frac{h}{3}\right) = B_3 * k_3^2 \quad (3.134)$$

$$\begin{aligned} & -EI_1 * w_2'''\left(\frac{h}{3}\right) - (1 + a)P * w_2'\left(\frac{h}{3}\right) + EI_1 * w_3'''(0) + P * w_3'(0) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow & -(1 + a) * P * \Gamma_2 + P * \Gamma_3 = 0 \Rightarrow -(1 + a) * \Gamma_2 + \Gamma_3 = 0 \end{aligned} \quad (3.135)$$

Όμοια στον κόμβο Η:

$$w_7\left(\frac{h}{3}\right) = w_6(0) \Rightarrow A_7 * \sin\left(k_1 \frac{h}{3}\right) + \Gamma_7 * \frac{h}{3} = B_6 + \Delta_6 \quad (3.136)$$

$$w_7'\left(\frac{h}{3}\right) = w_6'(0) \Rightarrow A_7 * k_1 * \cos\left(k_1 \frac{h}{3}\right) + \Gamma_7 = A_6 * k_2 + \Gamma_6 \quad (3.137)$$

$$-EI_1 * w_7''\left(\frac{h}{3}\right) = -EI_1 * w_6''(0) \Rightarrow A_7 * k_1^2 * \sin\left(k_1 \frac{h}{3}\right) = B_6 * k_2^2 \quad (3.138)$$

$$\begin{aligned} & -EI_1 * w_7'''\left(\frac{h}{3}\right) - (1 + 2a)P * w_7'\left(\frac{h}{3}\right) + EI_1 * w_6'''(0) + (1 + a)P * w_6'(0) = 0 \\ \Rightarrow & -(1 + 2a) * P * \Gamma_7 + (1 + a) * P * \Gamma_6 = 0 \Rightarrow -(1 + 2a) * \Gamma_7 + (1 + a) * \Gamma_6 = 0 \end{aligned} \quad (3.139)$$

Όμοια στον κόμβο Ζ:

$$w_6\left(\frac{h}{3}\right) = w_5(0) \Rightarrow A_6 * \sin\left(k_2 \frac{h}{3}\right) + B_6 * \cos\left(k_2 \frac{h}{3}\right) + \Gamma_6 * \frac{h}{3} + \Delta_6 = B_5 + \Delta_5 \quad (3.140)$$

$$w_6'\left(\frac{h}{3}\right) = w_5'(0) \Rightarrow A_6 * k_2 * \cos\left(k_2 \frac{h}{3}\right) - B_6 * k_2 * \sin\left(k_2 \frac{h}{3}\right) + \Gamma_6 = A_5 * k_3 + \Gamma_5 \quad (3.141)$$

$$-EI_1 * w_6''\left(\frac{h}{3}\right) = -EI_1 * w_5''(0) \Rightarrow A_6 * k_2^2 * \sin\left(k_2 \frac{h}{3}\right) + B_6 * k_2^2 * \cos\left(k_2 \frac{h}{3}\right) = B_5 * k_3^2 \quad (3.142)$$

$$\begin{aligned} & -EI_1 * w_6'''\left(\frac{h}{3}\right) - (1 + a)P * w_6'\left(\frac{h}{3}\right) + EI_1 * w_5'''(0) + P * w_5'(0) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow & -(1 + a) * P * \Gamma_6 + P * \Gamma_5 = 0 \Rightarrow -(1 + a) * \Gamma_6 + \Gamma_5 = 0 \end{aligned} \quad (3.143)$$

Ο κόμβος Ε είναι αμετάθετος κατά την κατακόρυφη διεύθυνση άρα:

$$w_4(2l) = 0 \Rightarrow 4 * A_4 * l^2 + 2 * B_4 * l + \Gamma_4 = 0 \quad (3.144)$$

Όπως και πριν η αξονική δύναμη στη ράβδο ΔΕ είναι μηδέν, άρα έχουμε άθροισμα τεμνουσών δυνάμεων στις κορυφές των υποστυλωμάτων ίσο με το μηδέν δηλαδή:

$$\begin{aligned} -EI_1 * w_3''' \left(\frac{h}{3} \right) - P * w_3' \left(\frac{h}{3} \right) - EI_1 * w_5''' \left(\frac{h}{3} \right) - P * w_5' \left(\frac{h}{3} \right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -P * \Gamma_3 - P * \Gamma_5 = 0 &\Rightarrow \Gamma_3 + \Gamma_5 = 0 \end{aligned} \quad (3.145)$$

Επίσης στον κόμβο Δ έχουμε ισοροπία ροπών :

$$\begin{aligned} -EI_1 * w_3'' \left(\frac{h}{3} \right) &= -EI_2 * w_4''(0) \Rightarrow \\ \frac{I_1}{I_2} * \left(A_3 * k_3^2 * \sin \left(k_3 \frac{h}{3} \right) + B_3 * k_3^2 * \cos \left(k_3 \frac{h}{3} \right) \right) &= -2 * B_4 \end{aligned} \quad (3.146)$$

Όμοια για τον κόμβο Ε:

$$\begin{aligned} EI_1 * w_5'' \left(\frac{h}{3} \right) &= -EI_2 * w_4''(2l) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} * \left(A_5 * k_3^2 * \sin \left(k_3 \frac{h}{3} \right) + B_5 * k_3^2 * \cos \left(k_3 \frac{h}{3} \right) \right) &= 12 * A_4 * l + 2 * B_4 \end{aligned} \quad (3.147)$$

Επειδή το μήκος της ράβδου ΔΕ δεν αλλάζει, τα υποστυλώματα έχουν ίσα βέλη στις κορυφές τους δηλαδή:

$$\begin{aligned} w_3 \left(\frac{h}{3} \right) = w_5 \left(\frac{h}{3} \right) &\Rightarrow A_3 * \sin \left(k_3 \frac{h}{3} \right) + B_3 * \cos \left(k_3 \frac{h}{3} \right) + \Gamma_3 * \frac{h}{3} + \Delta_3 = A_5 * \\ \sin \left(k_3 \frac{h}{3} \right) + B_5 * \cos \left(k_3 \frac{h}{3} \right) + \Gamma_5 * \frac{h}{3} + \Delta_5 \end{aligned} \quad (3.148)$$

Λόγω συνέχειας στον κόμβο Δ έχουμε ισότητα στοφών:

$$w_3' \left(\frac{h}{3} \right) = w_4'(0) \Rightarrow A_3 * k_3 * \cos \left(k_3 \frac{h}{3} \right) - B_3 * k_3 * \sin \left(k_3 \frac{h}{3} \right) + \Gamma_3 = \Gamma_4 \quad (3.149)$$

Όμοια στον κόμβο Ε: $w_5' \left(\frac{h}{3} \right) = w_4'(2l) \Rightarrow$

$$\Rightarrow A_5 * k_3 * \cos \left(k_3 \frac{h}{3} \right) - B_5 * k_3 * \sin \left(k_3 \frac{h}{3} \right) + \Gamma_5 = 12 * A_4 * l^2 + 4 * B_4 * l + \Gamma_4 \quad (3.150)$$

Αντίστοιχα με την προηγούμενη περίπτωση θέτω $k_3 = k$ οπότε θα έχουμε $k_1 = \sqrt{(1 + 2\alpha)} * k$ και $k_2 = \sqrt{(1 + \alpha)} * k$ ενώ πάλι θέτουμε $kh = x$ και $\rho = \frac{I_1}{I_2}$. Στην προκειμένη περίπτωση οι εξισώσεις (3.128)-(3.150) σχηματίζουν ένα σύστημα 23 επί 23. Όμοια και στη συγκεκριμένη περίπτωση παραθέτουμε κάποιους χαρακτηριστικούς όρους της εξίσωσης λυγισμού:

$$\begin{aligned} 162000 * k^5 * I^3 * \sin(x/3)^3 * \cos((2^{1/2} * x)/3)^2 * \sin((3^{1/2} * x)/3)^2 + \dots - \\ 138000 * k^6 * I^2 * \rho * \cos(x/3)^2 * \cos((2^{1/2} * x)/3)^2 * \sin((3^{1/2} * x)/3)^2 - \dots - \\ 65934 * h * k^6 * I^3 * \cos(x/3)^2 * \cos((2^{1/2} * x)/3)^2 * \cos((3^{1/2} * x)/3)^2 - \dots + \\ 9000 * k^7 * I^3 * \rho^2 * \cos(x/3) * \sin(x/3) * \cos((2^{1/2} * x)/3)^3 * \sin((3^{1/2} * x)/3)^2 - \dots - \\ 175824 * h * k^7 * I^2 * \rho * \cos(x/3) * \sin(x/3) * \cos((3^{1/2} * x)/3)^2 * \sin((2^{1/2} * x)/3)^2 + \dots + \\ 21978 * 2^{1/2} * 3^{1/2} * h * k^8 * I^3 * \rho^2 * \sin(x/3)^2 * \cos((2^{1/2} * x)/3) * \cos((3^{1/2} * x)/3) \\ * \sin((2^{1/2} * x)/3) * \sin((3^{1/2} * x)/3) + \dots = 0 \end{aligned}$$

Να σημειώσουμε σε αυτό το σημείο ότι το α (εδώ $\alpha=1$) έχει αντικατασταθεί πριν δώσουμε εντολή στο Matlab να βρει την ορίζουσα δηλαδή έχει αντικατασταθεί στον πίνακα που εισάγουμε. Αυτό έγινε γιατί όσες περισσότερες είναι οι μεταβλητές, τόσο αυξάνεται (εκθετικά θα μπορούσαμε να πούμε) ο χρόνος αναμονής για να βρει το πρόγραμμα την ορίζουσα. Οπότε στην προκειμένη περίπτωση κρίθηκε βέλτιστος τρόπος να θέσουμε την τιμή α που θέλουμε από πριν. Όπως και την προηγούμενη περίπτωση

παρατηρώντας ολόκληρη την εξίσωση συμπεραίνουμε ότι πριν από τα ημιτονοειδή γινόμενα εμφανίζονται τα εξής γινόμενα:

$k^5 \cdot l$, $k^6 \cdot l^2 \cdot \rho$, $h \cdot k^6 \cdot l$, $k^7 \cdot l^3 \cdot \rho^2$, $h \cdot k^7 \cdot l^2 \cdot \rho$, $h \cdot k^8 \cdot l^3 \cdot \rho^2$. Αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση με h^5 και ταυτόχρονα διαιρέσουμε με l έχουμε:

$$k^5 \cdot l \Rightarrow (kh)^5$$

$$h \cdot k^6 \cdot l \Rightarrow (kh)^6$$

$$k^6 \cdot l^2 \cdot \rho \Rightarrow (kh)^6 \cdot \frac{l_1 \cdot l}{l_2 \cdot h}$$

$$h \cdot k^7 \cdot l^2 \cdot \rho \Rightarrow (kh)^7 \cdot \frac{l_1 \cdot l}{l_2 \cdot h}$$

$$k^7 \cdot l^3 \cdot \rho^2 \Rightarrow (kh)^7 \cdot \left(\frac{l_1 \cdot l}{l_2 \cdot h}\right)^2$$

$$h \cdot k^8 \cdot l^3 \cdot \rho^2 \Rightarrow (kh)^8 \cdot \left(\frac{l_1 \cdot l}{l_2 \cdot h}\right)^2$$

Θέτοντας $r = \frac{l_1 \cdot l}{l_2 \cdot h}$, $kh = x$ η εξίσωση έχει έναν άγνωστο (το x) αφού το r θα αντικατασταθεί με αριθμό όπως φαίνεται στους πίνακες.

3.4.2 Πίνακες-Διαγράμματα κρίσιμων φορτίων και ισοδύναμου μήκους λυγισμού

I_1/I_2	0,25		1		4	
$2l/h$						
0,5	r=0,0625	kh=1,1556	r=0,25	kh=1,0967	r=1	kh=0,9210
		kh=3,2895		kh=3,0180		kh=2,7353
	$P_{cr}=1,3354 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=2,7186	$P_{cr}=1,2028 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=2,8646	$P_{cr}=0,8482 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=3,4111
	$P_{cr}=10,8208 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9550	$P_{cr}=9,1083 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0410	$P_{cr}=7,4819 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1485
1	r=0,125	kh=1,1350	r=0,5	kh=1,0291	r=2	kh=0,7756
		kh=3,1719		kh=2,8608		kh=2,6526
	$P_{cr}=1,2882 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=2,7679	$P_{cr}=1,0590 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=3,0528	$P_{cr}=0,6016 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=4,0505
	$P_{cr}=10,0609 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9904	$P_{cr}=8,1842 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0982	$P_{cr}=7,0363 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1843
2	r=0,25	kh=1,0967	r=1	kh=0,9210	r=4	kh=0,6143
		kh=3,0180		kh=2,7353		kh=2,6046
	$P_{cr}=1,2028 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=2,8646	$P_{cr}=0,8482 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=3,4111	$P_{cr}=0,3774 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=5,1141
	$P_{cr}=9,1083 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0410	$P_{cr}=7,4819 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1485	$P_{cr}=6,7839 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,2062
4	r=0,5	kh=1,0291	r=2	kh=0,7756	r=8	kh=0,4635
		kh=2,8608		kh=2,6526		kh=2,5786
	$P_{cr}=1,0590 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=3,0528	$P_{cr}=0,6016 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=4,0505	$P_{cr}=0,2148 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=6,7780
	$P_{cr}=8,1842 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0982	$P_{cr}=7,0363 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1843	$P_{cr}=6,6492 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,2183

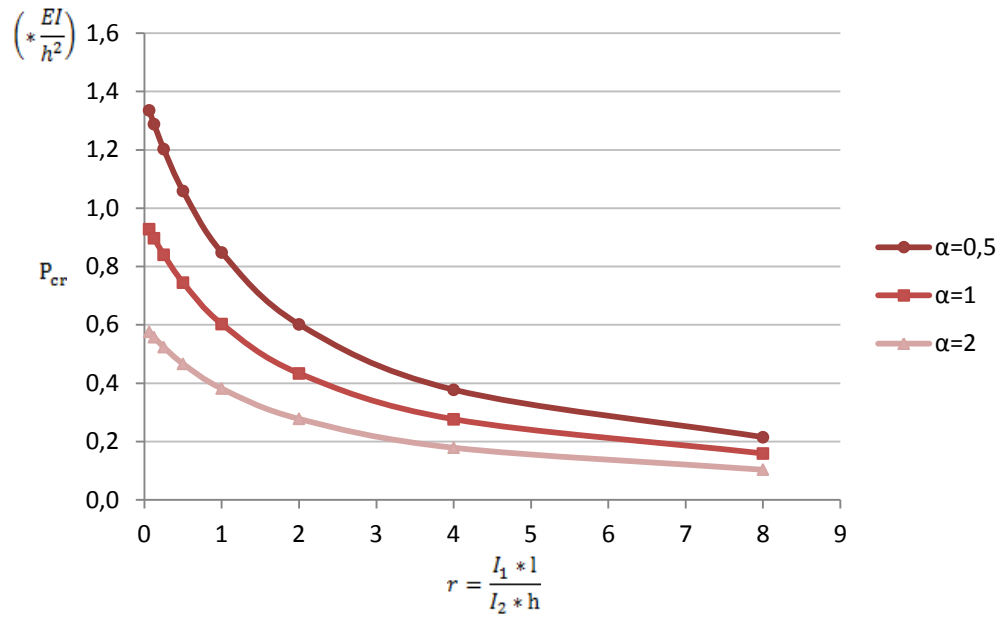
Πίνακας 3.5 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο) και λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\alpha=0,5$

I_1/I_2 $2l/h$	0,25		1		4	
0,5	r=0,0625	kh=0,9634	r=0,25	kh=0,9167	r=1	kh=0,7764
		kh=2,7727		kh=2,5615		kh=2,3405
	$P_{cr}=0,9281*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,2609	$P_{cr}=0,8403*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,4271	$P_{cr}=0,6028*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,0464
	$P_{cr}=7,6879*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1330	$P_{cr}=6,5613*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,2265	$P_{cr}=5,4779*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,3423
1	r=0,125	kh=0,9471	r=0,5	kh=0,8630	r=2	kh=0,6584
		kh=2,6811		kh=2,4390		kh=2,2753
	$P_{cr}=0,8970*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,3171	$P_{cr}=0,7448*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,6403	$P_{cr}=0,4335*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,7716
	$P_{cr}=7,1883*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1718	$P_{cr}=5,9487*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,2881	$P_{cr}=5,1770*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,3807
2	r=0,25	kh=0,9167	r=1	kh=0,7764	r=4	kh=0,5256
		kh=2,5615		kh=2,3405		kh=2,2369
	$P_{cr}=0,8403*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,4271	$P_{cr}=0,6028*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,0464	$P_{cr}=0,2763*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,9772
	$P_{cr}=6,5613*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,2265	$P_{cr}=5,4779*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,3423	$P_{cr}=5,0037*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,4044
4	r=0,5	kh=0,8630	r=2	kh=0,6584	r=8	kh=0,3987
		kh=2,4390		kh=2,2753		kh=2,2163
	$P_{cr}=0,7448*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,6403	$P_{cr}=0,4335*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,7716	$P_{cr}=0,1590*\frac{EI_1}{h^2}$	K=7,8796
	$P_{cr}=5,9487*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,2881	$P_{cr}=5,1770*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,3807	$P_{cr}=4,9120*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,4175

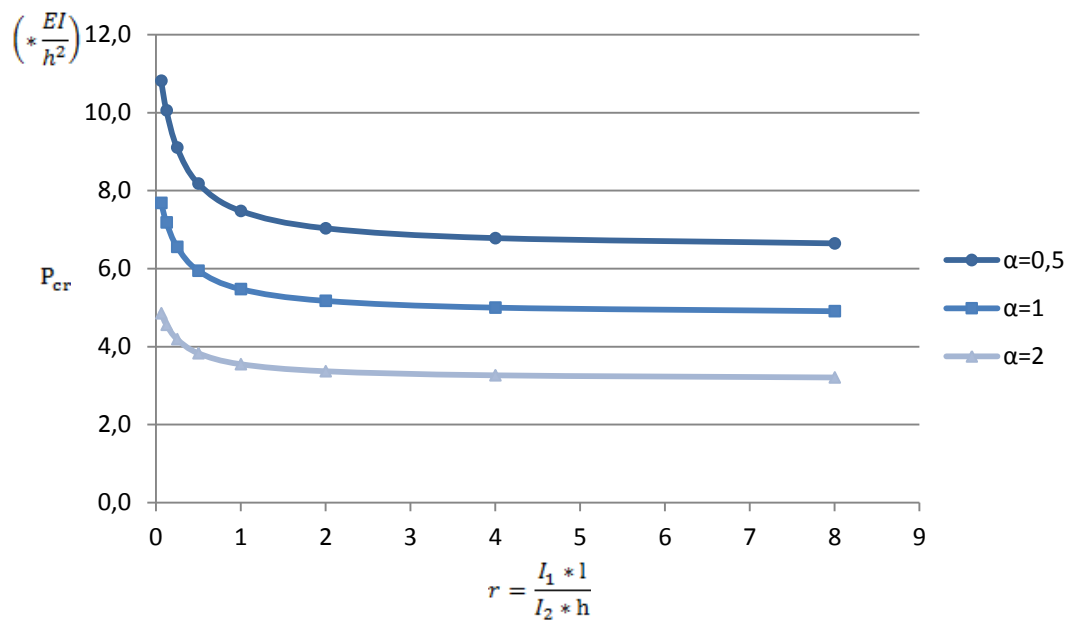
Πίνακας 3.6 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο) και λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\alpha=1$

I_1/I_2 $2l/h$	0,25		1		4	
0,5	r=0,0625	kh=0,7590	r=0,25	kh=0,7237	r=1	kh=0,6178
		kh=2,2041		kh=2,0479		kh=1,8847
	$P_{cr}=0,5761*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,1391	$P_{cr}=0,5237*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,3410	$P_{cr}=0,3817*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,0851
	$P_{cr}=4,8581*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,4253	$P_{cr}=4,1939*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,5341	$P_{cr}=3,5521*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,6669
1	r=0,125	kh=0,7468	r=0,5	kh=0,6829	r=2	kh=0,5272
		kh=2,1360		kh=1,9576		kh=1,8361
	$P_{cr}=0,5577*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,2067	$P_{cr}=0,4664*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,6004	$P_{cr}=0,2779*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,9590
	$P_{cr}=4,5625*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,4708	$P_{cr}=3,8322*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,6048	$P_{cr}=3,3713*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,7110
2	r=0,25	kh=0,7237	r=1	kh=0,6178	r=4	kh=0,4232
		kh=2,0479		kh=1,8847		kh=1,8076
	$P_{cr}=0,5237*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,3410	$P_{cr}=0,3817*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,0851	$P_{cr}=0,1791*\frac{EI_1}{h^2}$	K=7,4234
	$P_{cr}=4,1939*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,5341	$P_{cr}=3,5521*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,6669	$P_{cr}=3,2674*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,7380
4	r=0,5	kh=0,6829	r=2	kh=0,5272	r=8	kh=0,3222
		kh=1,9576		kh=1,8361		kh=1,7922
	$P_{cr}=0,4664*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,6004	$P_{cr}=0,2779*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,9590	$P_{cr}=0,1038*\frac{EI_1}{h^2}$	K=9,7504
	$P_{cr}=3,8322*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,6048	$P_{cr}=3,3713*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,7110	$P_{cr}=3,2120*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,7529

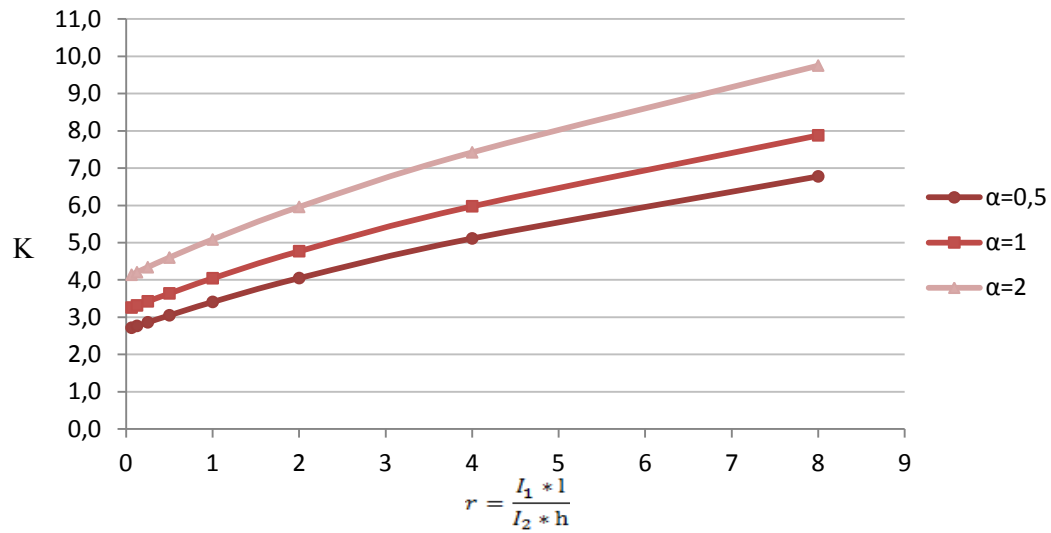
Πίνακας 3.7 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο) και λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\alpha=2$



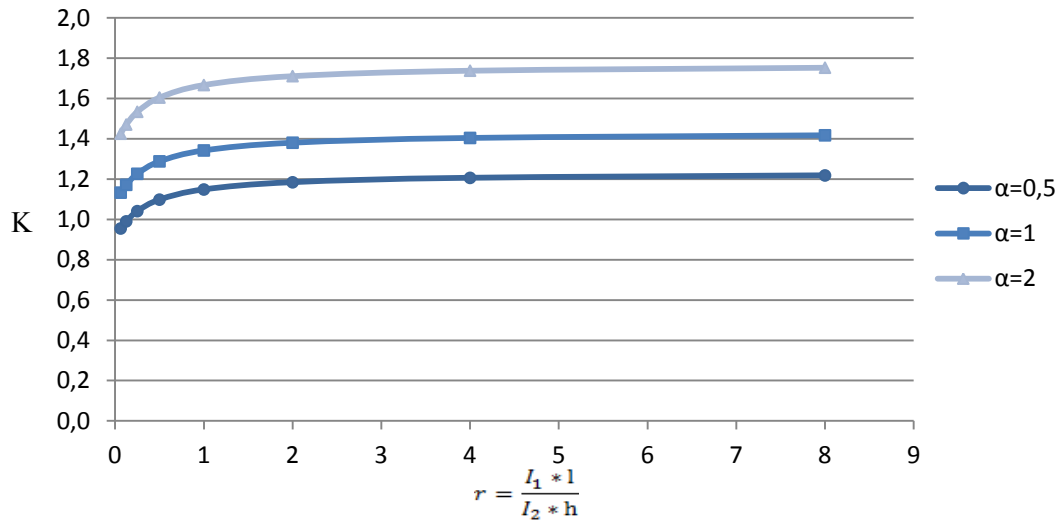
Σχ. 3.19 Διάγραμμα P_{cr} - r , για λυγισμό με μετάθεση



Σχ. 3.20 Διάγραμμα P_{cr} - r , για λυγισμό με μετάθεση



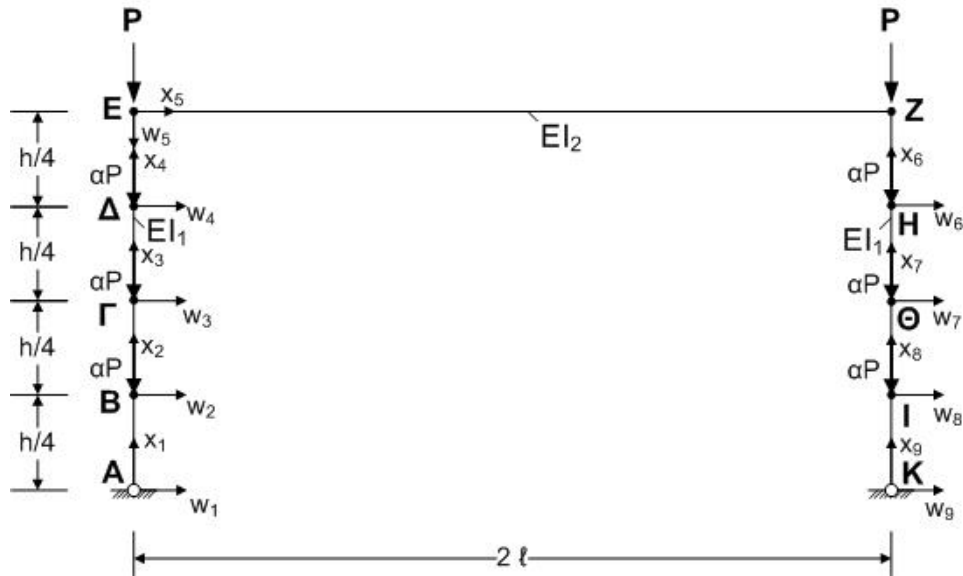
Σχ. 3.21 Διάγραμμα K - r , για λυγισμό με μετάθεση



Σχ. 3.22 Διάγραμμα K - r , για λυγισμό χωρίς μετάθεση

3.5 Πλαίσιο με πρόσθετες φορτίσεις στα τέταρτα των στύλων

3.5.1 Επίλυση πλαισίου



Σχ. 3.23

Οι εξισώσεις που διέπουν την ισορροπία των ραβδών AB ΒΓ ΓΔ ΔΕ ΕΖ ΖΗ ΗΘ ΘΙ ΙΚ στην παραμορφωμένη κατάσταση είναι οι εξής:

$$w_1(x) = A_1 * \text{sink}_1 x_1 + B_1 * \text{cosk}_1 x_1 + \Gamma_1 * x_1 + \Delta_1 \left(k_1^2 = \frac{P+aP+aP+aP}{EI_1} \right) \quad (3.151)$$

$$w_2(x) = A_2 * \text{sink}_2 x_2 + B_2 * \text{cosk}_2 x_2 + \Gamma_2 * x_2 + \Delta_2 \left(k_2^2 = \frac{P+aP+aP}{EI_1} \right) \quad (3.152)$$

$$w_3(x) = A_3 * \text{sink}_3 x_3 + B_3 * \text{cosk}_3 x_3 + \Gamma_3 * x_3 + \Delta_3 \left(k_3^2 = \frac{P+aP}{EI_1} \right) \quad (3.153)$$

$$w_4(x) = A_4 * \text{sink}_4 x_4 + B_4 * \text{cosk}_4 x_4 + \Gamma_4 * x_4 + \Delta_4 \left(k_4^2 = \frac{P}{EI_1} \right) \quad (3.154)$$

$$w_5(x) = A_5 * x_5^3 + B_5 * x_5^2 + \Gamma_5 * x_5 + \Delta_5 \quad (3.155)$$

$$w_6(x) = A_6 * \text{sink}_4 x_6 + B_6 * \text{cosk}_4 x_6 + \Gamma_6 * x_6 + \Delta_6 \left(k_4^2 = \frac{P}{EI_1} \right) \quad (3.156)$$

$$w_7(x) = A_7 * \text{sink}_3 x_7 + B_7 * \text{cosk}_3 x_7 + \Gamma_7 * x_7 + \Delta_7 \left(k_3^2 = \frac{P+aP}{EI_1} \right) \quad (3.157)$$

$$w_8(x) = A_8 * \text{sink}_2 x_8 + B_8 * \text{cosk}_2 x_8 + \Gamma_8 * x_8 + \Delta_8 \left(k_2^2 = \frac{P+aP+aP}{EI_1} \right) \quad (3.158)$$

$$w_9(x) = A_9 * \text{sink}_1 x_9 + B_9 * \text{cosk}_1 x_9 + \Gamma_9 * x_9 + \Delta_9 \left(k_1^2 = \frac{P+aP+aP+aP}{EI_1} \right) \quad (3.159)$$

Λόγω των συνθηκών των στηρίξεων Α Κ, όμοια με τις προηγούμενες περιπτώσεις, οι σταθερές $B_1 \Delta_1 B_9 \Delta_9$ μηδενίζονται.

Όμοια με πριν ο κόμβος Ε είναι αμετάθετος κατά την κατακόρυφη διεύθυνση άρα:

$$w_5(0) = 0 \Rightarrow \Delta_5 = 0 \quad (3.160)$$

Στον κόμβο Β λόγω συνέχειας έχουμε ίσα βέλη και ίσες στροφές ενώ όπως έχουμε επιλέξει το σύστημα ορθογωνικών συντεταγμένων οι ροπές και οι τέμνουσες, των οποίων το άθροισμα είναι μηδέν, έχουν αντίθετες φορές. Άρα:

$$w_1\left(\frac{h}{4}\right) = w_2(0) \Rightarrow A_1 * \sin\left(k_1 \frac{h}{4}\right) + \Gamma_1 * \frac{h}{4} = B_2 + \Delta_2 \quad (3.161)$$

$$w_1'\left(\frac{h}{4}\right) = w_2'(0) \Rightarrow A_1 * k_1 * \cos\left(k_1 \frac{h}{4}\right) + \Gamma_1 = A_2 * k_2 + \Gamma_2 \quad (3.162)$$

$$-EI_1 * w_1''\left(\frac{h}{4}\right) = -EI_1 * w_2''(0) \Rightarrow A_1 * k_1^2 * \sin\left(k_1 \frac{h}{4}\right) = B_2 * k_2^2 \quad (3.163)$$

$$\begin{aligned} & -EI_1 * w_1'''\left(\frac{h}{4}\right) - (1 + 3a)P * w_1'\left(\frac{h}{4}\right) + EI_1 * w_2'''(0) + (1 + 2a)P * w_2'(0) = \\ 0 \Rightarrow & -(1 + 3a) * P * \Gamma_1 + (1 + 2a) * P * \Gamma_2 = 0 \Rightarrow -(1 + 3a) * \Gamma_1 + (1 + 2a) * \Gamma_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.164)$$

Όμοια στον κόμβο Γ:

$$w_2\left(\frac{h}{4}\right) = w_3(0) \Rightarrow A_2 * \sin\left(k_2 \frac{h}{4}\right) + B_2 * \cos\left(k_2 \frac{h}{4}\right) + \Gamma_2 * \frac{h}{4} + \Delta_2 = B_3 + \Delta_3 \quad (3.165)$$

$$w_2'\left(\frac{h}{4}\right) = w_3'(0) \Rightarrow A_2 * k_2 * \cos\left(k_2 \frac{h}{4}\right) - B_2 * k_2 * \sin\left(k_2 \frac{h}{4}\right) + \Gamma_2 = A_3 * k_3 + \Gamma_3 \quad (3.166)$$

$$-EI_1 * w_2''\left(\frac{h}{4}\right) = -EI_1 * w_3''(0) \Rightarrow A_2 * k_2^2 * \sin\left(k_2 \frac{h}{4}\right) + B_2 * k_2^2 * \cos\left(k_2 \frac{h}{4}\right) = B_3 * k_3^2 \quad (3.167)$$

$$\begin{aligned} & -EI_1 * w_2'''\left(\frac{h}{4}\right) - (1 + 2a)P * w_2'\left(\frac{h}{4}\right) + EI_1 * w_3'''(0) + (1 + a)P * w_3'(0) = 0 \Rightarrow \\ & -(1 + 2a) * P * \Gamma_2 + (1 + a) * P * \Gamma_3 = 0 \Rightarrow -(1 + 2a) * \Gamma_2 + (1 + a) * \Gamma_3 = 0 \end{aligned} \quad (3.168)$$

Όμοια στον κόμβο Δ:

$$w_3\left(\frac{h}{4}\right) = w_4(0) \Rightarrow A_3 * \sin\left(k_3 \frac{h}{4}\right) + B_3 * \cos\left(k_3 \frac{h}{4}\right) + \Gamma_3 * \frac{h}{4} + \Delta_3 = B_4 + \Delta_4 \quad (3.169)$$

$$w_3'\left(\frac{h}{4}\right) = w_4'(0) \Rightarrow A_3 * k_3 * \cos\left(k_3 \frac{h}{4}\right) - B_3 * k_3 * \sin\left(k_3 \frac{h}{4}\right) + \Gamma_3 = A_4 * k_4 + \Gamma_4 \quad (3.170)$$

$$-EI_1 * w_3''\left(\frac{h}{4}\right) = -EI_1 * w_4''(0) \Rightarrow A_3 * k_3^2 * \sin\left(k_3 \frac{h}{4}\right) + B_3 * k_3^2 * \cos\left(k_3 \frac{h}{4}\right) = B_4 * k_4^2 \quad (3.171)$$

$$\begin{aligned} & -EI_1 * w_3'''\left(\frac{h}{4}\right) - (1 + a)P * w_3'\left(\frac{h}{4}\right) + EI_1 * w_4'''(0) + P * w_4'(0) = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow -(1 + a) * P * \Gamma_3 + P * \Gamma_4 = 0 \Rightarrow -(1 + a) * \Gamma_3 + \Gamma_4 = 0 \end{aligned} \quad (3.172)$$

Όμοια στον κόμβο Ι:

$$w_9\left(\frac{h}{4}\right) = w_8(0) \Rightarrow A_9 * \sin\left(k_1 \frac{h}{4}\right) + \Gamma_9 * \frac{h}{4} = B_8 + \Delta_8 \quad (3.173)$$

$$w_9'\left(\frac{h}{4}\right) = w_8'(0) \Rightarrow A_9 * k_1 * \cos\left(k_1 \frac{h}{4}\right) + \Gamma_9 = A_8 * k_2 + \Gamma_8 \quad (3.174)$$

$$-EI_1 * w_9''\left(\frac{h}{4}\right) = -EI_1 * w_8''(0) \Rightarrow A_9 * k_1^2 * \sin\left(k_1 \frac{h}{4}\right) = B_8 * k_2^2 \quad (3.175)$$

$$\begin{aligned}
& -EI_1 * w_9''' \left(\frac{h}{4} \right) - (1 + 3a)P * w_9' \left(\frac{h}{4} \right) + EI_1 * w_8'''(0) + (1 + 2a)P * w_8'(0) = \\
0 \Rightarrow & -(1 + 3a) * P * \Gamma_9 + (1 + 2a) * P * \Gamma_8 = 0 \Rightarrow -(1 + 3a) * \Gamma_9 + (1 + 2a) * \Gamma_8 = 0
\end{aligned} \tag{3.176}$$

Όμοια στον κόμβο Θ:

$$w_8 \left(\frac{h}{4} \right) = w_7(0) \Rightarrow A_8 * \sin \left(k_2 \frac{h}{4} \right) + B_8 * \cos \left(k_2 \frac{h}{4} \right) + \Gamma_8 * \frac{h}{4} + \Delta_8 = B_7 + \Delta_7 \tag{3.177}$$

$$w_8' \left(\frac{h}{4} \right) = w_7'(0) \Rightarrow A_8 * k_2 * \cos \left(k_2 \frac{h}{4} \right) - B_8 * k_2 * \sin \left(k_2 \frac{h}{4} \right) + \Gamma_8 = A_7 * k_3 + \Gamma_7 \tag{3.178}$$

$$-EI_1 * w_8'' \left(\frac{h}{4} \right) = -EI_1 * w_7''(0) \Rightarrow A_8 * k_2^2 * \sin \left(k_2 \frac{h}{4} \right) + B_8 * k_2^2 * \cos \left(k_2 \frac{h}{4} \right) = B_7 * k_3^2 \tag{3.179}$$

$$\begin{aligned}
& -EI_1 * w_8''' \left(\frac{h}{4} \right) - (1 + 2a)P * w_8' \left(\frac{h}{4} \right) + EI_1 * w_7'''(0) + (1 + a)P * w_7'(0) = 0 \Rightarrow \\
& -(1 + 2a) * P * \Gamma_8 + (1 + a) * P * \Gamma_7 = 0 \Rightarrow -(1 + 2a) * \Gamma_8 + (1 + a) * \Gamma_7 = 0
\end{aligned} \tag{3.180}$$

Όμοια στον κόμβο Η:

$$w_7 \left(\frac{h}{4} \right) = w_6(0) \Rightarrow A_7 * \sin \left(k_3 \frac{h}{4} \right) + B_7 * \cos \left(k_3 \frac{h}{4} \right) + \Gamma_7 * \frac{h}{4} + \Delta_7 = B_6 + \Delta_6 \tag{3.181}$$

$$w_7' \left(\frac{h}{4} \right) = w_6'(0) \Rightarrow A_7 * k_3 * \cos \left(k_3 \frac{h}{4} \right) - B_7 * k_3 * \sin \left(k_3 \frac{h}{4} \right) + \Gamma_7 = A_6 * k_4 + \Gamma_6 \tag{3.182}$$

$$-EI_1 * w_7'' \left(\frac{h}{4} \right) = -EI_1 * w_6''(0) \Rightarrow A_7 * k_3^2 * \sin \left(k_3 \frac{h}{4} \right) + B_7 * k_3^2 * \cos \left(k_3 \frac{h}{4} \right) = B_6 * k_4^2 \tag{3.183}$$

$$\begin{aligned}
& -EI_1 * w_7''' \left(\frac{h}{4} \right) - (1 + a)P * w_7' \left(\frac{h}{4} \right) + EI_1 * w_6'''(0) + P * w_6'(0) = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow -(1 + a) * P * \Gamma_7 + P * \Gamma_6 = 0 \Rightarrow -(1 + a) * \Gamma_7 + \Gamma_6 = 0
\end{aligned} \tag{3.184}$$

Ο κόμβος Ζ είναι αμετάθετος κατά την κατακόρυφη διεύθυνση άρα:

$$w_5(2l) = 0 \Rightarrow 4 * A_5 * l^2 + 2 * B_5 * l + \Gamma_5 = 0 \tag{3.185}$$

Όπως και πριν η αξονική δύναμη στη ράβδο ΕΖ είναι μηδέν άρα έχουμε άθροισμα τεμνουσών δυνάμεων στις κορυφές των υποστυλωμάτων ίσο με το μηδέν δηλαδή:

$$\begin{aligned}
& -EI_1 * w_4''' \left(\frac{h}{4} \right) - P * w_4' \left(\frac{h}{4} \right) - EI_1 * w_6''' \left(\frac{h}{4} \right) - P * w_6' \left(\frac{h}{4} \right) = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow -P * \Gamma_4 - P * \Gamma_6 = 0 \Rightarrow \Gamma_4 + \Gamma_6 = 0
\end{aligned} \tag{3.186}$$

Επίσης στον κόμβο Ε έχουμε ισορροπία ροπών :

$$\begin{aligned}
& -EI_1 * w_4'' \left(\frac{h}{4} \right) = -EI_2 * w_5''(0) \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} * (A_4 * k_4^2 * \sin \left(k_4 \frac{h}{4} \right) + B_4 * k_4^2 * \cos \left(k_4 \frac{h}{4} \right)) = -2 * B_5
\end{aligned} \tag{3.187}$$

Όμοια για τον κόμβο Ζ:

$$EI_1 * w_6'' \left(\frac{h}{4} \right) = -EI_2 * w_5''(2l) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{I_1}{I_2} * (A_6 * k_4^2 * \sin(k_4 \frac{h}{4}) + B_6 * k_4^2 * \cos(k_4 \frac{h}{4})) = 12 * A_5 * l + 2 * B_5 \quad (3.188)$$

Επειδή το μήκος της ράβδου EZ δεν αλλάζει τα υποστυλώματα έχουν ίσα βέλη στις κορυφές τους δηλαδή:

$$w_4(\frac{h}{4}) = w_6(\frac{h}{4}) \Rightarrow A_4 * \sin(k_4 \frac{h}{4}) + B_4 * \cos(k_4 \frac{h}{4}) + \Gamma_4 * \frac{h}{4} + \Delta_4 = A_6 * \sin(k_4 \frac{h}{4}) + B_6 * \cos(k_4 \frac{h}{4}) + \Gamma_6 * \frac{h}{4} + \Delta_6 \quad (3.189)$$

Λόγω συνέχειας στον κόμβο E έχουμε ισότητα στοφών:

$$w_4'(\frac{h}{4}) = w_5'(0) \Rightarrow A_4 * k_4 * \cos(k_4 \frac{h}{4}) - B_4 * k_4 * \sin(k_4 \frac{h}{4}) + \Gamma_4 = \Gamma_5 \quad (3.190)$$

$$\text{Όμοια στον κόμβο Z: } w_6'(\frac{h}{4}) = w_5'(2l) \Rightarrow A_6 * k_4 * \cos(k_4 \frac{h}{4}) - B_6 * k_4 * \sin(k_4 \frac{h}{4}) + \Gamma_6 = 12 * A_5 * l^2 + 4 * B_5 * l + \Gamma_5 \quad (3.191)$$

Όμοια με πριν : $k_4 = k$, $k_1 = \sqrt{(1 + 3\alpha)} * k$, $k_2 = \sqrt{(1 + 2\alpha)} * k$, $k_3 = \sqrt{(1 + \alpha)} * k$.
Θέτουμε $kh = x$ και $\rho = \frac{I_1}{I_2}$. Στην προκειμένη περίπτωση οι εξισώσεις (3.161)-(3.191)

σχηματίζουν ένα σύστημα 31 επί 31. Όμοια και στη συγκεκριμένη περίπτωση παραθέτουμε κάποιους χαρακτηριστικούς όρους της εξίσωσης λυγισμού:

$$\begin{aligned} & 1296 * k^7 * 1 * \cos(x/2)^2 * \sin(x/4) * \cos((2^{1/2} * x)/4) * \sin((3^{1/2} * x)/4)^2 + \dots - \\ & 1350 * h * k^8 * 1 * \cos(x/2)^2 * \cos(x/4)^2 * \cos((2^{1/2} * x)/4)^2 * \cos((3^{1/2} * x)/4)^2 + \dots + \\ & 1728 * k^8 * 1^2 * r * \cos(x/4) * \sin(x/2)^2 * \cos((2^{1/2} * x)/4)^2 * \cos((3^{1/2} * x)/4)^2 + \dots + \\ & 450 * k^9 * 1^3 * r^2 * \cos(x/2) * \sin(x/2) * \sin(x/4)^2 * \sin((2^{1/2} * x)/4)^2 * \sin((3^{1/2} * x)/4)^2 \\ & + \dots + \\ & 3600 * h * k^9 * 1^2 * r * \cos(x/2) * \cos(x/4)^2 * \sin(x/2) * \sin((2^{1/2} * x)/4)^2 * \sin((3^{1/2} * x)/4)^2 + \dots \\ & + 1800 * h * k^{10} * 1^3 * r^2 * \cos(x/2) * \cos(x/4) * \sin(x/2) * \sin(x/4) * \cos((3^{1/2} * x)/4)^2 * \sin((2^{1/2} * x)/4)^2 + \dots = 0 \end{aligned}$$

Όπως και την προηγούμενη περίπτωση παρατηρώντας ολόκληρη την εξίσωση συμπεραίνουμε ότι πριν από τα ημιτονοειδή γινόμενα εμφανίζονται τα εξής γινόμενα:

$k^7 * 1$, $k^8 * 1^2 * \rho$, $h * k^8 * 1$, $k^9 * 1^3 * \rho^2$, $h * k^9 * 1^2 * \rho$, $h * k^{10} * 1^3 * \rho^2$. Αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση με h^7 και ταυτόχρονα διαιρέσουμε με l έχουμε:

$$k^7 * 1 \Rightarrow (kh)^7$$

$$h * k^8 * 1 \Rightarrow (kh)^8$$

$$k^8 * 1^2 * \rho \Rightarrow (kh)^8 * \frac{I_1 * l}{I_2 * h}$$

$$h * k^9 * 1^2 * \rho \Rightarrow (kh)^9 * \frac{I_1 * l}{I_2 * h}$$

$$k^7 * 1^9 * \rho^2 \Rightarrow (kh)^9 * \left(\frac{I_1 * l}{I_2 * h}\right)^2$$

$$h * k^{10} * 1^3 * \rho^2 \Rightarrow (kh)^{10} * \left(\frac{I_1 * l}{I_2 * h}\right)^2$$

Θέτοντας $r = \frac{I_1 * l}{I_2 * h}$, $kh = x$ η εξίσωση έχει έναν άγνωστο (το x) αφού το r θα αντικατασταθεί με αριθμό όπως φαίνεται στους πίνακες.

3.5.2 Πίνακες-διαγράμματα κρίσιμων φορτίων και ισοδύναμου μήκους λυγισμού

I_1/I_2 $2l/h$	0,25		1		4	
0,5	r=0,0625	kh=1,0540	r=0,25	kh=1,0012	r=1	kh=0,8436
		kh=3,0001		kh=2,7635		kh=2,5167
	$P_{Cr}=1,1109*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,9806	$P_{Cr}=1,0024*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,1378	$P_{Cr}=0,7117*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,7240
	$P_{Cr}=9,0006*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0472	$P_{Cr}=7,6369*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1368	$P_{Cr}=6,3338*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,2483
1	r=0,125	kh=1,0355	r=0,5	kh=0,9404	r=2	kh=0,7126
		kh=2,8975		kh=2,6265		kh=2,4441
	$P_{Cr}=1,0723*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,0339	$P_{Cr}=0,8844*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,3407	$P_{Cr}=0,5078*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,4086
	$P_{Cr}=8,3955*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0842	$P_{Cr}=6,8985*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1961	$P_{Cr}=5,9736*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,2854
2	r=0,25	kh=1,0012	r=1	kh=0,8436	r=4	kh=0,5658
		kh=2,7635		kh=2,5167		kh=2,4017
	$P_{Cr}=1,0024*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,1378	$P_{Cr}=0,7117*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,7240	$P_{Cr}=0,3201*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,5525
	$P_{Cr}=7,6369*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1368	$P_{Cr}=6,3338*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,2483	$P_{Cr}=5,7682*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,3081
4	r=0,5	kh=0,9404	r=2	kh=0,7126	r=8	kh=0,4286
		kh=2,6265		kh=2,4441		kh=2,3788
	$P_{Cr}=0,8844*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,3407	$P_{Cr}=0,5078*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,4086	$P_{Cr}=0,1837*\frac{EI_1}{h^2}$	K=7,3299
	$P_{Cr}=6,8985*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1961	$P_{Cr}=5,9736*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,2854	$P_{Cr}=5,6587*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,3207

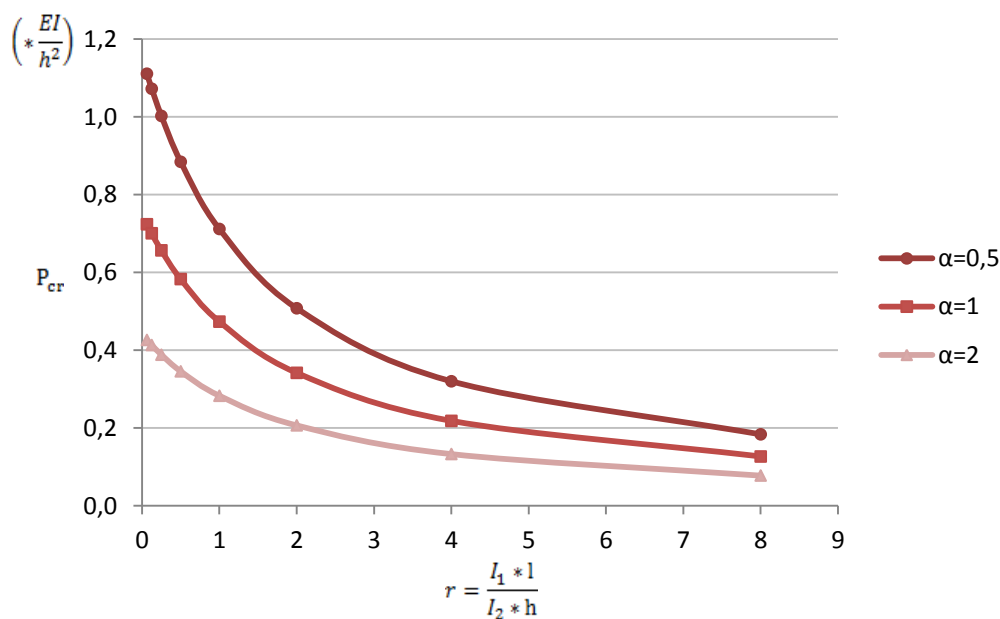
Πίνακας 3.8 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο) και λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\alpha=0,5$

I_1/I_2 $2l/h$	0,25		1		4	
0,5	r=0,0625	kh=0,8508	r=0,25	kh=0,8104	r=1	kh=0,6881
		kh=2,4423		kh=2,2642		kh=2,0781
	$P_{Cr}=0,7239*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,6925	$P_{Cr}=0,6567*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,8766	$P_{Cr}=0,4735*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,5656
	$P_{Cr}=5,9648*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,2863	$P_{Cr}=5,1266*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,3875	$P_{Cr}=4,3185*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,5118
1	r=0,125	kh=0,8371	r=0,5	kh=0,7635	r=2	kh=0,5846
		kh=2,3648		kh=2,1611		kh=2,0228
	$P_{Cr}=0,7007*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,7529	$P_{Cr}=0,5829*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,1147	$P_{Cr}=0,3418*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,3739
	$P_{Cr}=5,5923*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,3285	$P_{Cr}=4,6704*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,4537	$P_{Cr}=4,0917*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,5531
2	r=0,25	kh=0,8104	r=1	kh=0,6881	r=4	kh=0,4672
		kh=2,2642		kh=2,0781		kh=1,9905
	$P_{Cr}=0,6567*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,8766	$P_{Cr}=0,4735*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,5656	$P_{Cr}=0,2183*\frac{EI_1}{h^2}$	K=6,7243
	$P_{Cr}=5,1266*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,3875	$P_{Cr}=4,3185*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,5118	$P_{Cr}=3,9621*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,5783
4	r=0,5	kh=0,7635	r=2	kh=0,5846	r=8	kh=0,3560
		kh=2,1611		kh=2,0228		kh=1,9728
	$P_{Cr}=0,5829*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,1147	$P_{Cr}=0,3418*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,3739	$P_{Cr}=0,1267*\frac{EI_1}{h^2}$	K=8,8247
	$P_{Cr}=4,6704*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,4537	$P_{Cr}=4,0917*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,5531	$P_{Cr}=3,8919*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,5925

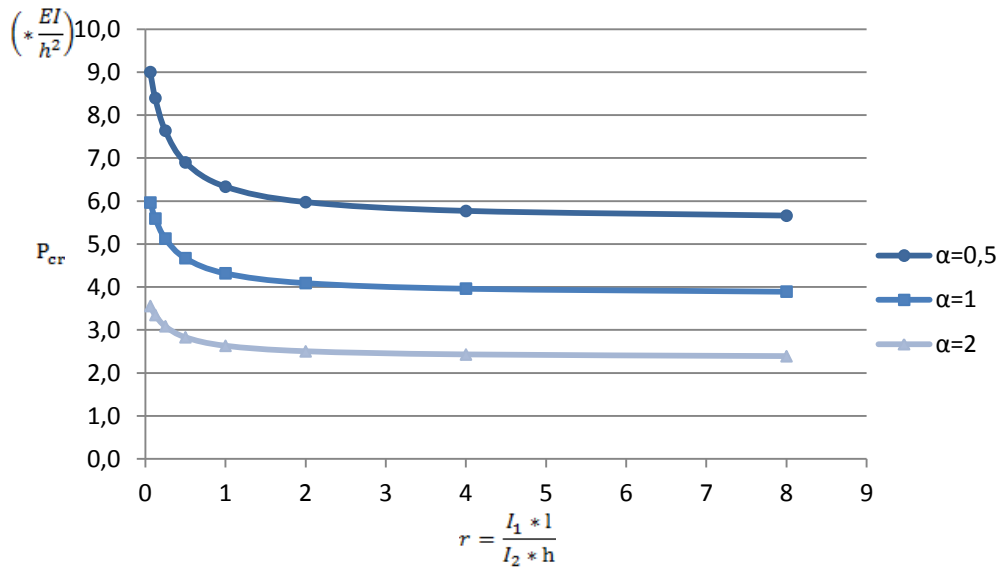
Πίνακας 3.9 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο) και λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\alpha=1$

I_1/I_2 $2l/h$	0,25		1		4		
0,5	r=0,0625	kh=0,6530	r=0,25	kh=0,6232	r=1	kh=0,5319	
		kh=1,8859		kh=1,7566		kh=1,6219	
	$P_{cr}=0,4264*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,8110	$P_{cr}=0,3884*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,0411	$P_{cr}=0,2829*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,9064	
		$P_{cr}=3,5566*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,6658	$P_{cr}=3,0856*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,7885	$P_{cr}=2,6306*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,9370
1	r=0,125	kh=0,6429	r=0,5	kh=0,5880	r=2	kh=0,4547	
		kh=1,8295		kh=1,6821		kh=1,5817	
	$P_{cr}=0,4133*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,8866	$P_{cr}=0,3457*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,3428	$P_{cr}=0,2068*\frac{EI_1}{h^2}$	K=6,9092	
		$P_{cr}=3,3471*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,7172	$P_{cr}=2,8295*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,8677	$P_{cr}=2,5018*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,9862
2	r=0,25	kh=0,6232	r=1	kh=0,5319	r=4	kh=0,3648	
		kh=1,7566		kh=1,6219		kh=1,5581	
	$P_{cr}=0,3884*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,0411	$P_{cr}=0,2829*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,9064	$P_{cr}=0,1331*\frac{EI_1}{h^2}$	K=8,6118	
		$P_{cr}=3,0856*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,7885	$P_{cr}=2,6306*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,9370	$P_{cr}=2,4277*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,0163
4	r=0,5	kh=0,5880	r=2	kh=0,4547	r=8	kh=0,2790	
		kh=1,6821		kh=1,5817		kh=1,5454	
	$P_{cr}=0,3457*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,3428	$P_{cr}=0,2068*\frac{EI_1}{h^2}$	K=6,9092	$P_{cr}=0,0778*\frac{EI_1}{h^2}$	K=11,2602	
		$P_{cr}=2,8295*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,8677	$P_{cr}=2,5018*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,9862	$P_{cr}=2,3883*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,0329

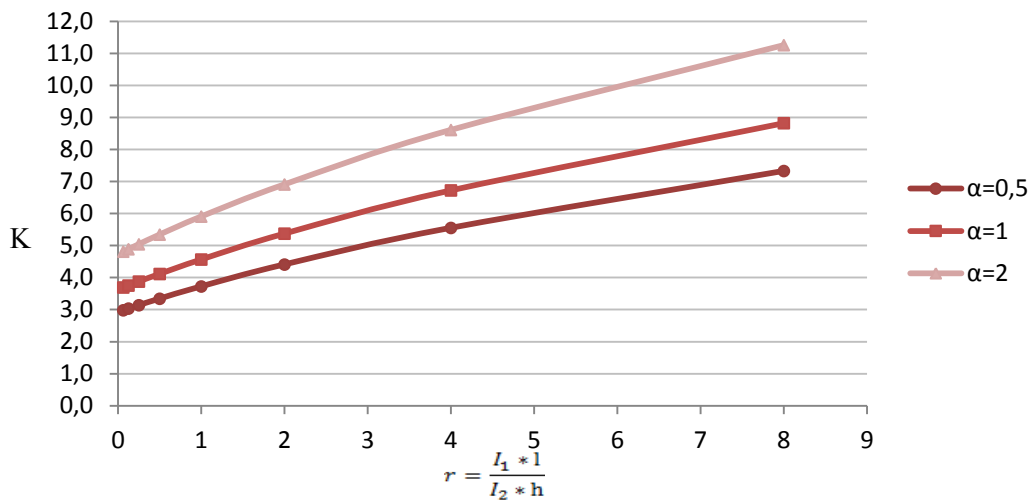
Πίνακας 3.10 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο) και λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\alpha=2$



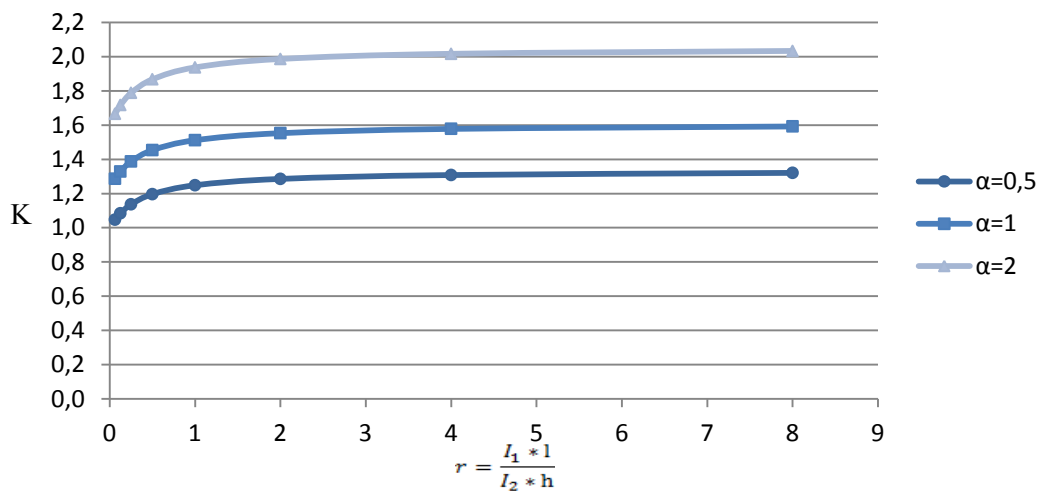
Σχ. 3.24 Διάγραμμα P_{cr} - r , για λυγισμό με μετάθεση



Σχ. 3.25 Διάγραμμα P_{cr} - r , για λυγισμό χωρίς μετάθεση



Σχ. 3.26 Διάγραμμα K - r , για λυγισμό με μετάθεση

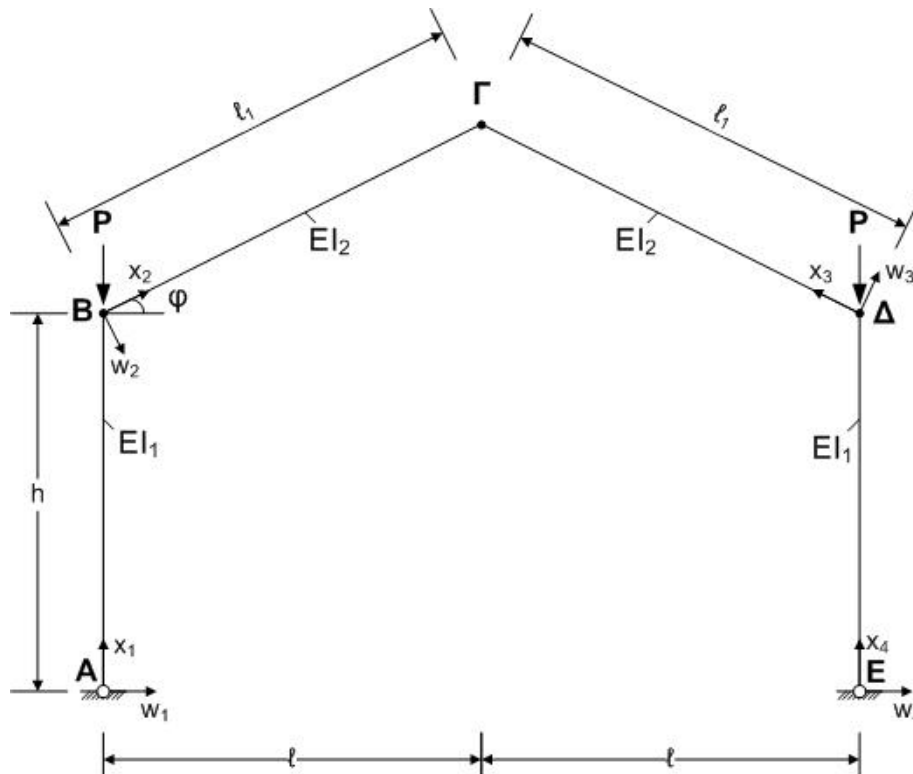


Σχ. 3.27 Διάγραμμα K - r , για λυγισμό χωρίς μετάθεση

4 Μη ορθογωνικά πλαίσια

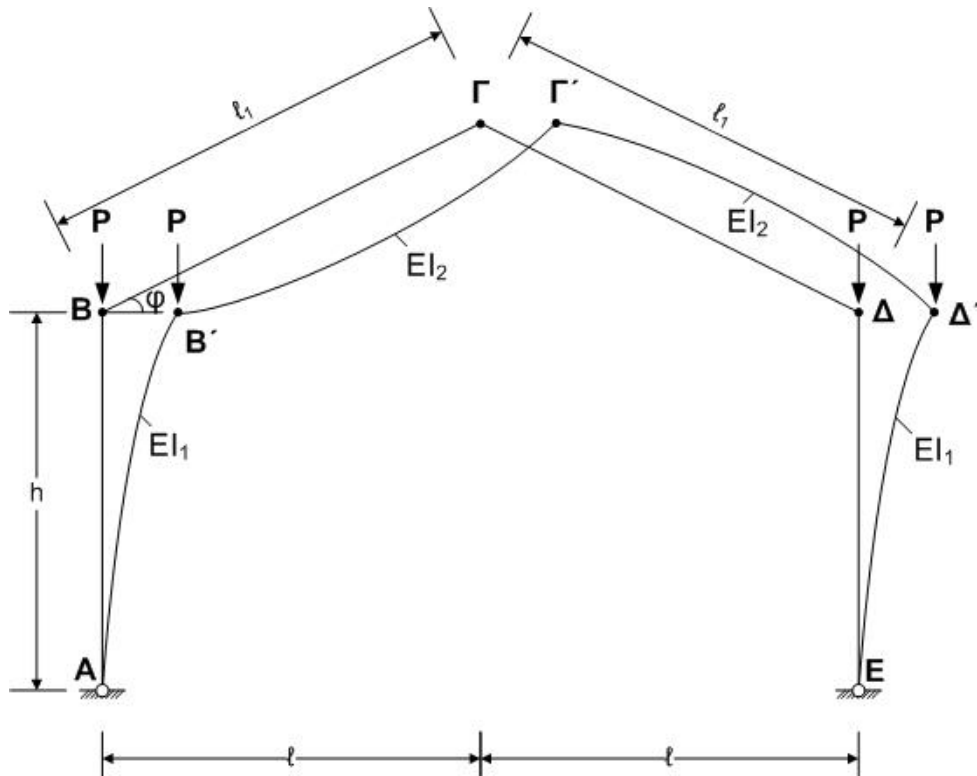
4.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε την ευστάθεια δίστυλων μη ορθογωνικών πλαισίων με τις ίδιες φορτίσεις που χρησιμοποιήσαμε και στην περίπτωση των ορθογωνικών. Έτσι για φορτίσεις P στις κορυφές των υποστυλωμάτων έχουμε:



Σχ. 4.1

Τα χαρακτηριστικά (ύψος στύλων, απόσταση μεταξύ των στύλων, ροπές αδράνειας) του πλαισίου $AB\Gamma\Delta E$ είναι ίδια με την προηγούμενη περίπτωση με τη διαφορά ότι τη θέση του ζυγώματος την έχουν πάρει δύο ράβδοι που σχηματίζουν τριγωνική σκεπή. Το μήκος των ράβδων $B\Gamma$ $\Gamma\Delta$ είναι $l_1 = \frac{l}{\cos\varphi}$, άρα μεταβάλλεται ανάλογα με τη γωνία φ . Από τη στιγμή που τα φορτία P δρουν στις διευθύνσεις των ράβδων AB ΔE παραλαμβάνονται αποκλειστικά από τα υποστυλώματα άρα οι ράβδοι $B\Gamma$ $\Delta\Gamma$ είναι αφόρτιστοι. Θεωρώντας ότι οι κόμβοι B και Δ είναι μεταθετοί ως προς την οριζόντια κατεύθυνση μετά από μια ορισμένη φόρτιση το πλαίσιο θα λυγίσει με τη μορφή του σχήματος 4.2.



Σχ. 4.2

4.2 Μορφές λυγισμού πλαισίων

4.2.1 Αντιμετρικός λυγισμός με μετάθεση

Οι εξισώσεις που διέπουν την ισορροπία των ραβδών AB BΓ ΓΔ ΔΕ στην παραμορφωμένη κατάσταση είναι οι εξής:

$$w_1(x) = A_1 * \sin k_1 x_1 + B_1 * \cos k_1 x_1 + \Gamma_1 * x_1 + \Delta_1 \quad (k_1^2 = \frac{P}{EI_1}) \quad (4.1)$$

$$w_2(x) = A_2 * x_2^3 + B_2 * x_2^2 + \Gamma_2 * x_2 + \Delta_2 \quad (4.2)$$

$$w_3(x) = A_3 * x_3^3 + B_3 * x_3^2 + \Gamma_3 * x_3 + \Delta_3 \quad (4.3)$$

$$w_4(x) = A_4 * \sin k_1 x_4 + B_4 * \cos k_1 x_4 + \Gamma_4 * x_4 + \Delta_4 \quad (k_1^2 = \frac{P}{EI_1}) \quad (4.4)$$

Λόγω των αρθρώσεων στα A, E, αντίστοιχα με τις προηγούμενες περιπτώσεις οι σταθερές $B_1, \Delta_1, B_4, \Delta_4$ μηδενίζονται.

Λόγω συνέχειας στον κόμβο B έχουμε ισότητα στρωφών και ισορροπία ροπών:

$$w_1'(h) = w_2'(0) \Rightarrow A_1 * k_1 * \cos(k_1 h) + \Gamma_1 = \Gamma_2 \quad (4.5)$$

$$-EI_1 * w_1''(h) = -EI_2 * w_2''(0) \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} * A_1 * k_1^2 * \sin(k_1 h) = -2 * B_2 \quad (4.6)$$

Όμοια στον κόμβο Δ:

$$w_4'(h) = w_3'(0) \Rightarrow A_4 * k_1 * \cos(k_1 h) + \Gamma_4 = \Gamma_3 \quad (4.7)$$

$$-EI_1 * w_4''(h) = -EI_2 * w_3''(0) \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} * A_4 * k_1^2 * \sin(k_1 h) = -2 * B_3 \quad (4.8)$$

Όμοια στον κόμβο Γ:

$$w_2'(l_1) = w_3'(l_1) \Rightarrow 3 * A_2 * l_1^2 + 2 * B_2 * l_1 + \Gamma_2 = 3 * A_3 * l_1^2 + 2 * B_3 * l_1 + \Gamma_3 \quad (4.9)$$

$$-EI_2 * w_2''(l_1) = EI_2 * w_3''(l_1) \Rightarrow 6 * A_2 * l_1 + 2 * B_2 = -6 * A_3 * l_1 - 2 * B_3 \quad (4.10)$$

Όπως βλέπουμε στο σχήμα 4.2 ο κόμβος B μετακινείται κατά την οριζόντια κατεύθυνση άρα η οριζόντια συνιστώσα του $w_2(0)$ θα είναι ίση με BB' , άρα και με $w_1(h)$:

$$\sin(\varphi) * w_2(0) = w_1(h) \Rightarrow A_1 * \sin(k_1 h) + \Gamma_1 * h = \sin(\varphi) * \Delta_2 \quad (4.11)$$

Όμοια για τον κόμβο Δ

$$\sin(\varphi) * w_3(0) = w_4(h) \Rightarrow A_4 * \sin(k_1 h) + \Gamma_4 * h = \sin(\varphi) * \Delta_3 \quad (4.12)$$

Όπως και στη περίπτωση του ορθογωνικού πλαισίου τα υποστυλώματα έχουν ίσα βέλη στις κορυφές τους ενώ και το άθροισμα των τεμνουσών δυνάμεων στις κορυφές των υποστυλωμάτων είναι ίσο με το μηδέν:

$$w_1(h) = w_4(h) \Rightarrow A_1 * \sin(k_1 h) + \Gamma_1 * h = A_4 * \sin(k_1 h) + \Gamma_4 * h \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} -EI_1 * w_1'''(h) - P * w_1'(h) - EI_1 * w_4'''(h) - P * w_4'(h) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -P * \Gamma_1 - P * \Gamma_4 &= 0 \Rightarrow \Gamma_1 + \Gamma_4 = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Επίσης λόγω συνέχειας στον κόμβο Γ η απόσταση $\Gamma\Gamma'$ εκφράζεται με τις οριζόντιες συνιστώσες και της ράβδου ΒΓ και της $\Gamma\Delta$ που προφανώς είναι ίσες :

$$\begin{aligned} \sin(\varphi) * w_2(l_1) &= \sin(\varphi) * w_3(l_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow A_2 * l_1^3 + B_2 * l_1^2 + \Gamma_2 * l_1 + \Delta_2 &= A_3 * l_1^3 + B_3 * l_1^2 + \Gamma_3 * l_1 + \Delta_3 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Τέλος λόγω της γραμμικής θεωρίας θεωρούμε ότι το μήκος της ράβδου ΒΓ μένει σταθερό άρα και οι αποστάσεις BB' και $\Gamma\Gamma'$ είναι ίσες :

$$\sin(\varphi) * w_2(0) = \sin(\varphi) * w_2(l_1) \Rightarrow A_2 * l_1^3 + B_2 * l_1^2 + \Gamma_2 * l_1 + \Delta_2 = \Delta_2 \quad (4.16)$$

Για να φέρουμε τις εξισώσεις σε επιλύσιμη μορφή θέτω $k_1 h = x$ και $\rho = \frac{l_1}{l_2}$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με πριν σχηματίζουμε ένα σύστημα 12 επί 12 που προκύπτει από τις εξισώσεις (4.5)-(4.16).

$$\begin{bmatrix} k * \cos(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k^2 * \rho * \sin(x) & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k * \cos(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^2 * \rho * \sin(x) & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 * l_1^2 & -3 * l_1^2 & 0 & 2 * l_1 & -2 * l_1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 * l_1 & 6 * l_1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h & 0 & 0 & 0 & -\sin(f) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h & 0 & -\sin(f) \\ \sin(x) & 0 & 0 & -\sin(x) & 0 & 0 & h & 0 & 0 & -h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & l_1^3 & -l_1^3 & 0 & l_1^2 & -l_1^2 & 0 & l_1 & -l_1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & l_1^2 & 0 & 0 & l_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ B_2 \\ B_3 \\ \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \\ \Gamma_4 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{bmatrix} = 0$$

Ο μηδενισμός της ορίζουσας του συστήματος μας οδηγεί στην εξίσωση:

$$\begin{aligned} 192 * k^4 * l_1^4 * \sin(f)^2 * \cos(x) * \sin(x) - 192 * h * k^2 * l_1^4 * \sin(f)^2 * \cos(x)^2 - \\ 64 * k^2 * l_1^5 * \rho * \sin(f)^2 * \sin(x)^2 - 16 * h * k^4 * l_1^6 * \rho^2 * \sin(f)^2 * \sin(x)^2 + \\ 112 * h * k^3 * l_1^5 * \rho * \sin(f)^2 * \cos(x) * \sin(x) = 0 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε με h και διαιρούμε με l_1^4 και $\sin(f)^2$. Σχηματίζοντας το $kh=x$ οδηγούμαστε στην εξίσωση :

$$12*x*\cos(x)*\sin(x) - 12*x^2*\cos(x)^2 - 4*x^2*r_1*\sin(x)^2 - x^4*r_1^2*\sin(x)^2 + 7*x^3*r_1*\cos(x)*\sin(x)=0 \quad , \text{ όπου } r_1=\frac{l_1*l_1}{l_2*h}$$

Ενδιαφέρον σε αυτό το σημείο έχει να σχηματίσουμε ένα γινόμενο που να μας οδηγήσει στην παραπάνω εξίσωση και πράγματι αν βγάλουμε κοινούς παράγοντες η εξίσωσή μας γίνεται: $(3 * x * \cos(x) - r_1 * x^2 * \sin x) * (4 * \sin x - 4 * x * \cos x + r_1 * x^2 * \sin x) = 0$ Δηλαδή αν υποθέσουμε ότι η γωνία φ τείνει στο 0 ($\cos\varphi \approx 1$) τότε $r_1 \approx r$. Άρα η πρώτη εξίσωση ταυτίζεται με την εξίσωση που μας δίνει τον αντισυμμετρικό λυγισμό με μετάθεση για ορθογωνικό πλαίσιο. Το αποτέλεσμα αυτό είναι λογικό αφού και το μη ορθογωνικό πλαίσιο λυγίζει αντισυμμετρικά με μετάθεση. Επίσης λόγω της μορφής του πλαισίου (τριγωνική σκεπή) ο συμμετρικός λυγισμός είναι αδύνατος αφού έχουμε κόμβο στο σημείο Γ. Οπότε η λογική θα έλεγε ότι δεύτερη εξίσωση που προκύπτει θα ήταν ο αντισυμμετρικός λυγισμός χωρίς μετάθεση.

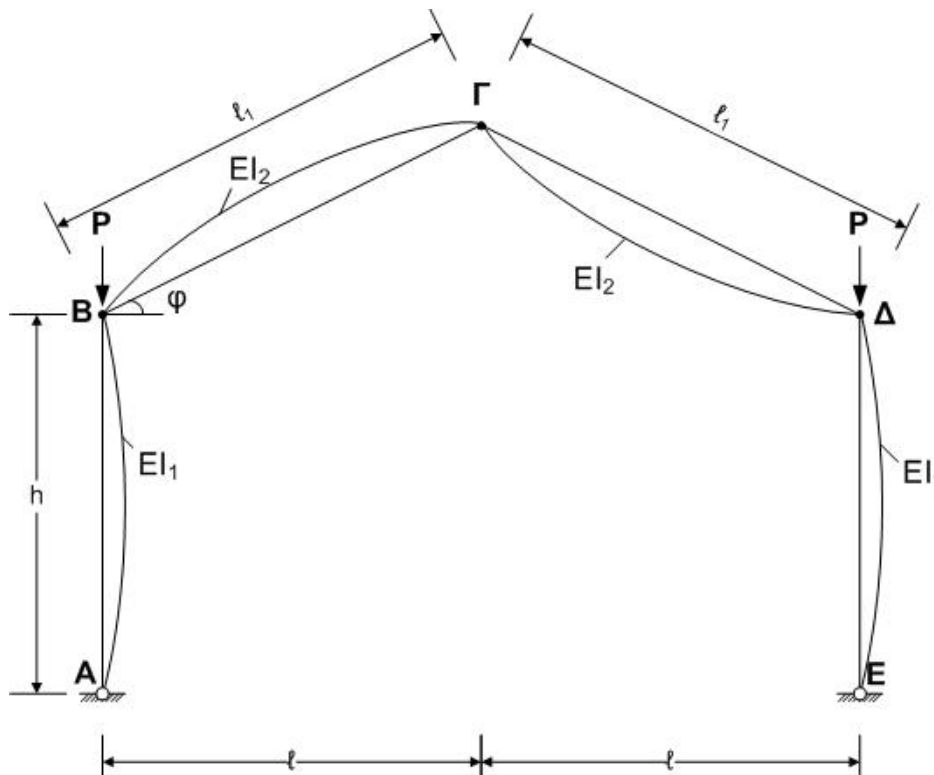
4.2.2 Αντισυμμετρικός λυγισμός χωρίς μετάθεση

Λύνουμε το πλαίσιο για την παρακάτω μορφή του σχήματος Σχ.4.3. Οι εξισώσεις (4.5)-(4.13) ισχύουν και στη περίπτωση για λυγισμό χωρίς μετάθεση ενώ επιπλέον έχουμε:

$$w_1(h) = 0 \Rightarrow A_1 * \sin(k_1 h) + \Gamma_1 * h = 0 \quad (4.17)$$

$$\sin(\varphi) * w_2(l_1) = 0 \Rightarrow A_2 * l_1^3 + B_2 * l_1^2 + \Gamma_2 * l_1 + \Delta_2 = 0 \quad (4.18)$$

$$\sin(\varphi) * w_3(l_1) = 0 \Rightarrow A_3 * l_1^3 + B_3 * l_1^2 + \Gamma_3 * l_1 + \Delta_3 = 0 \quad (4.19)$$



Σχ. 4.3

Σχηματίζουμε πάλι ένα σύστημα 12 επί 12:

$$\begin{bmatrix} k \cdot \cos(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k^2 \cdot \rho \cdot \sin(x) & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \cdot \cos(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^2 \cdot \rho \cdot \sin(x) & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 \cdot l_1^2 & -3 \cdot l_1^2 & 0 & 2 \cdot l_1 & -2 \cdot l_1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 \cdot l_1 & 6 \cdot l_1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h & 0 & 0 & 0 & -\sin(f) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h & 0 & -\sin(f) \\ \sin(x) & 0 & 0 & -\sin(x) & 0 & 0 & h & 0 & 0 & -h & 0 & 0 \\ \sin(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_1^3 & 0 & 0 & l_1^2 & 0 & 0 & l_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -l_1^3 & 0 & 0 & -l_1^2 & 0 & 0 & -l_1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ B_2 \\ B_3 \\ \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \\ \Gamma_4 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{bmatrix} = 0$$

του οποίου η λύση είναι:

$$8 \cdot \sin(f)^2 \cdot (12 \cdot l_1^5 \cdot \sin(x)^2 + 12 \cdot h^2 \cdot k^2 \cdot l_1^5 \cdot \cos(x)^2 + 7 \cdot h \cdot k^2 \cdot l_1^6 \cdot \rho \cdot \sin(x)^2 - 24 \cdot h \cdot k \cdot l_1^5 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x) + h^2 \cdot k^4 \cdot l_1^7 \cdot \rho^2 \cdot \sin(x)^2 - 7 \cdot h^2 \cdot k^3 \cdot l_1^6 \cdot \rho \cdot \cos(x) \cdot \sin(x)) = 0$$

Στη συνέχεια διαιρούμε με l_1^5 και $\sin(f)^2$. Σχηματίζοντας το $kh=x$ οδηγούμαστε στην εξίσωση:

$$-24 \cdot x^2 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x) + 12 \cdot x^2 \cdot \cos(x)^2 + 7 \cdot x^2 \cdot r_1 \cdot \sin(x)^2 + x^4 \cdot r_1^2 \cdot \sin(x)^2 - 7 \cdot x^3 \cdot r_1 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x) + 12 \cdot \sin(x)^2 = 0, \text{ όπου } r_1 = \frac{l_1 \cdot l_1}{l_2 \cdot h}$$

Όμοια με πριν βρίσκουμε:

$$(3 \cdot \sin x - 3 \cdot x \cdot \cos x + r_1 \cdot x^2 \cdot \sin x) \cdot (4 \cdot \sin x - 4 \cdot x \cdot \cos x + r_1 \cdot x^2 \cdot \sin x) = 0$$

Δηλαδή κάνοντας την υπόθεση $r_1 \approx r$ βλέπουμε ότι οι εξισώσεις μου λαμβάνουμε είναι οι ίδιες με αυτές που βγάζουμε από τη λύση του ορθογωνικού πλαισίου για αντισυμμετρικό λυγισμό χωρίς μετάθεση. Πιο συγκεκριμένα η $(3 \cdot \sin x - 3 \cdot x \cdot \cos x + r_1 \cdot x^2 \cdot \sin x)$ μας δίνει τον αντισυμμετρικό λυγισμό χωρίς μετάθεση και η $(4 \cdot \sin x - 4 \cdot x \cdot \cos x + r_1 \cdot x^2 \cdot \sin x)$ μια άλλη μορφή λυγισμού. Συμπεραίνουμε επομένως ότι λύνοντας το πλαίσιο για την μορφή του Σχ.4.2 η δεύτερη λύση που προκύπτει δεν είναι ο αντισυμμετρικός λυγισμός χωρίς μετάθεση αλλά η επόμενη μορφή που δίνει μεγαλύτερο κρίσιμο φορτίο. Επομένως στη συνέχεια θα κάνουμε δυο ξεχωριστές επιλύσεις αφού δε μπορούμε με τη λύση του Σχ.4.2 να πάρουμε την κρισιμότερη για λυγισμό χωρίς μετάθεση.

4.2.3 Πίνακες-διαγράμματα κρίσιμων φορτίων και ισοδύναμου μήκους λυγισμού

Στις εξισώσεις στο κεφάλαιο αυτό θα συναντάμε αντί για $r = \frac{l_1 \cdot l_1}{l_2 \cdot h}$ το $r_1 = \frac{l_1 \cdot l_1}{l_2 \cdot h}$. Αυτό σημαίνει ότι για ίδιο λόγο r το r_1 θα μεταβάλλεται ανάλογα με τη γωνία φ . Για παράδειγμα για $\varphi=20$ και $r=1$ έχω $r_1 = \frac{1}{\cos \varphi} = 1,064$ (αφού $l_1 = \frac{l}{\cos \varphi}$). Οπότε θα αντικαταστήσουμε στην εξίσωσή μας το $r_1=1,064$. Στα διαγράμματα όμως ο άξονας x θα είναι το r αφού έτσι θα δούμε τη μεταβολή των κρίσιμων φορτίων και του ισοδύναμου μήκους λυγισμού σε σχέση με τη γωνία φ . Στα διαγράμματα για αντισυμμετρικό λυγισμό με μετάθεση βάζουμε και τις τιμές για $\varphi=0$ δηλαδή για ορθογωνικό πλαίσιο ενώ για τον αντισυμμετρικό λυγισμό χωρίς μετάθεση όχι, αφού λυγίζει με διαφορετική μορφή από το ορθογωνικό(συμμετρικό).

I_1/I_2	0,25		1		4	
$2l/h$						
0,5	$r_1=0,0665$	kh=1,5367	$r_1=0,266$	kh=1,4434	$r_1=1,064$	kh=1,1757
		kh=4,3983		kh=4,1651		kh=3,7047
	$P_{cr}=2,3614*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,0444$	$P_{cr}=2,0834*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,1765$	$P_{cr}=1,3823*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,6721$
	$P_{cr}=19,345*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,7143$	$P_{cr}=17,3481*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,7543$	$P_{cr}=13,7248*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,848$
1	$r_1=0,133$	kh=1,5040	$r_1=0,532$	kh=1,3376	$r_1=2,128$	kh=0,9683
		kh=4,3121		kh=3,9507		kh=3,4890
	$P_{cr}=2,2620*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,0888$	$P_{cr}=1,7892*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,3487$	$P_{cr}=0,9376*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,2444$
	$P_{cr}=18,5942*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,7286$	$P_{cr}=15,608*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,7952$	$P_{cr}=12,1731*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,9004$
2	$r_1=0,266$	kh=1,4434	$r_1=1,064$	kh=1,1757	$r_1=4,256$	kh=0,7520
		kh=4,1651		kh=3,7047		kh=3,3376
	$P_{cr}=2,0834*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,1765$	$P_{cr}=1,3823*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,6721$	$P_{cr}=0,5655*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,1776$
	$P_{cr}=17,3481*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,7543$	$P_{cr}=13,7248*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,848$	$P_{cr}=11,1396*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,9413$
4	$r_1=0,532$	kh=1,3376	$r_1=2,128$	kh=0,9683	$r_1=8,512$	kh=0,5601
		kh=3,9507		kh=3,4890		kh=3,2462
	$P_{cr}=1,7892*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,3487$	$P_{cr}=0,9376*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,2444$	$P_{cr}=0,3137*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=5,6090$
	$P_{cr}=15,608*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,7952$	$P_{cr}=12,1731*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,9004$	$P_{cr}=10,5378*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,9678$

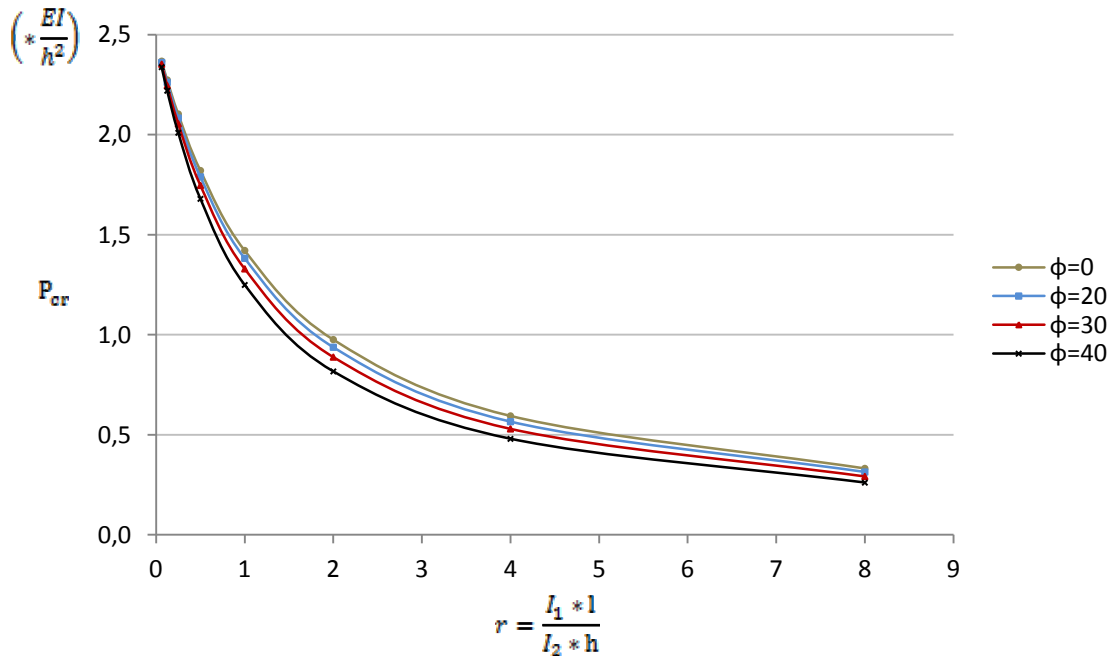
Πίνακας 4.1 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο), λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\varphi=20$

I_1/I_2	0,25		1		4	
$2l/h$						
0,5	$r_1=0,0722$	kh=1,5338	$r_1=0,2887$	kh=1,4335	$r_1=1,1548$	kh=1,1530
		kh=4,3905		kh=4,1430		kh=3,6766
	$P_{cr}=2,3525*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,0482$	$P_{cr}=2,0549*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,1916$	$P_{cr}=1,3294*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,7247$
	$P_{cr}=19,2765*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,7155$	$P_{cr}=17,1644*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,7583$	$P_{cr}=13,5174*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,8545$
1	$r_1=0,1444$	kh=1,4986	$r_1=0,5774$	kh=1,3216	$r_1=2,3096$	kh=0,9425
		kh=4,2982		kh=3,9221		kh=3,4676
	$P_{cr}=2,2458*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,0964$	$P_{cr}=1,7466*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,3771$	$P_{cr}=0,8883*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,3332$
	$P_{cr}=18,4745*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,7309$	$P_{cr}=15,3829*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,8010$	$P_{cr}=12,0242*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,9060$
2	$r_1=0,2887$	kh=1,4335	$r_1=1,1548$	kh=1,1530	$r_1=4,6192$	kh=0,7276
		kh=4,1430		kh=3,6766		kh=3,3241
	$P_{cr}=2,0549*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,1916$	$P_{cr}=1,3294*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,7247$	$P_{cr}=0,5294*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,3177$
	$P_{cr}=17,1644*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,7583$	$P_{cr}=13,5174*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,8545$	$P_{cr}=11,0496*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,9451$
4	$r_1=0,5774$	kh=1,3216	$r_1=2,3096$	kh=0,9425	$r_1=9,2384$	kh=0,5400
		kh=3,9221		kh=3,4676		kh=3,2385
	$P_{cr}=1,7466*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,3771$	$P_{cr}=0,8883*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,3332$	$P_{cr}=0,2916*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=5,8176$
	$P_{cr}=15,3829*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,8010$	$P_{cr}=12,0242*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,9060$	$P_{cr}=10,4879*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,9701$

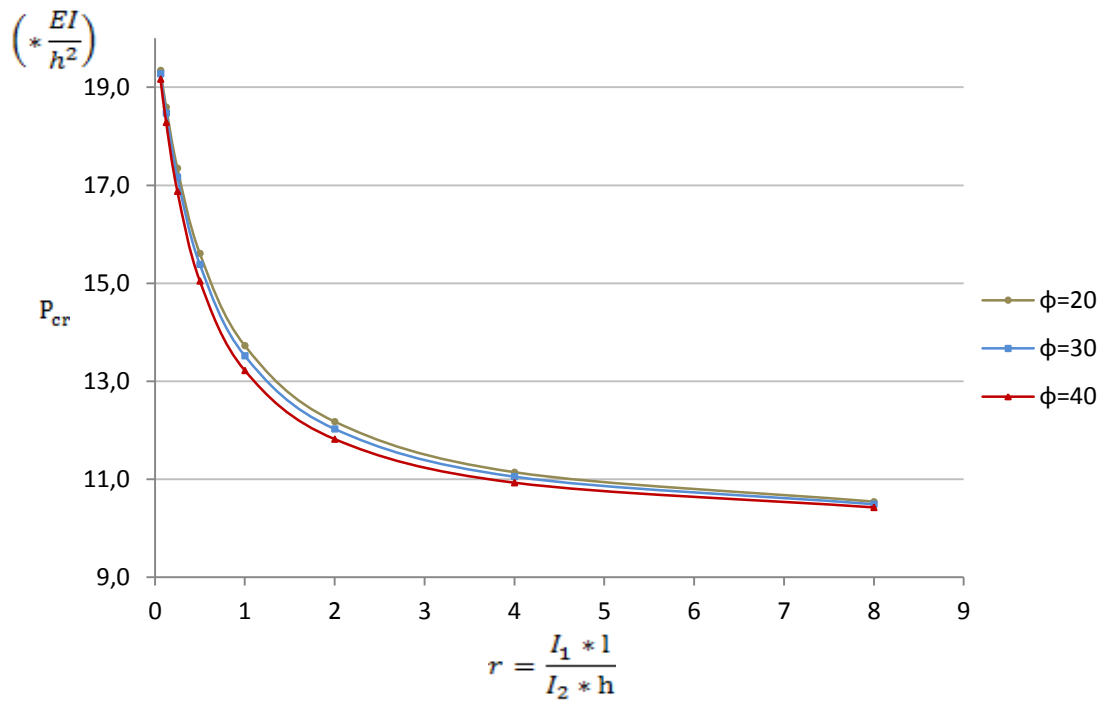
Πίνακας 4.2 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο), λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\varphi=30$

I_1/I_2 $2l/h$	0,25		1		4		
0,5	$r_1=0,0816$	kh=1,5290	$r_1=0,3264$	kh=1,4177	$r_1=1,3056$	kh=1,1176	
		kh=4,3779		kh=4,1081		kh=3,6355	
	$P_{cr}=2,3378*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,0547$	$P_{cr}=2,0099*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,2160$	$P_{cr}=1,2490*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,8110$	
		$P_{cr}=19,166*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,7176$	$P_{cr}=16,8765*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,7647$	$P_{cr}=13,2169*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,8641$
1	$r_1=0,1632$	kh=1,4899	$r_1=0,6528$	kh=1,2959	$r_1=2,6112$	kh=0,9037	
		kh=4,2759		kh=3,8786		kh=3,4372	
	$P_{cr}=2,2198*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,1086$	$P_{cr}=1,6794*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,4243$	$P_{cr}=0,8167*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,4764$	
		$P_{cr}=18,2833*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,7347$	$P_{cr}=15,0435*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,8100$	$P_{cr}=11,8143*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,9140$
2	$r_1=0,3264$	kh=1,4177	$r_1=1,3056$	kh=1,1176	$r_1=5,2224$	kh=0,6925	
		kh=4,1081		kh=3,6355		kh=3,3052	
	$P_{cr}=2,0099*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,2160$	$P_{cr}=1,2490*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,8110$	$P_{cr}=0,4796*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,5366$	
		$P_{cr}=16,8765*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,7647$	$P_{cr}=13,2169*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,8641$	$P_{cr}=10,9243*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,9505$
4	$r_1=0,6528$	kh=1,2959	$r_1=2,6112$	kh=0,9037	$r_1=10,4448$	kh=0,5106	
		kh=3,8786		kh=3,4372		kh=3,2280	
	$P_{cr}=1,6794*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,4243$	$P_{cr}=0,8167*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,4764$	$P_{cr}=0,2607*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=6,1527$	
		$P_{cr}=15,0435*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,8100$	$P_{cr}=11,8143*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,9140$	$P_{cr}=10,4200*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,9732$

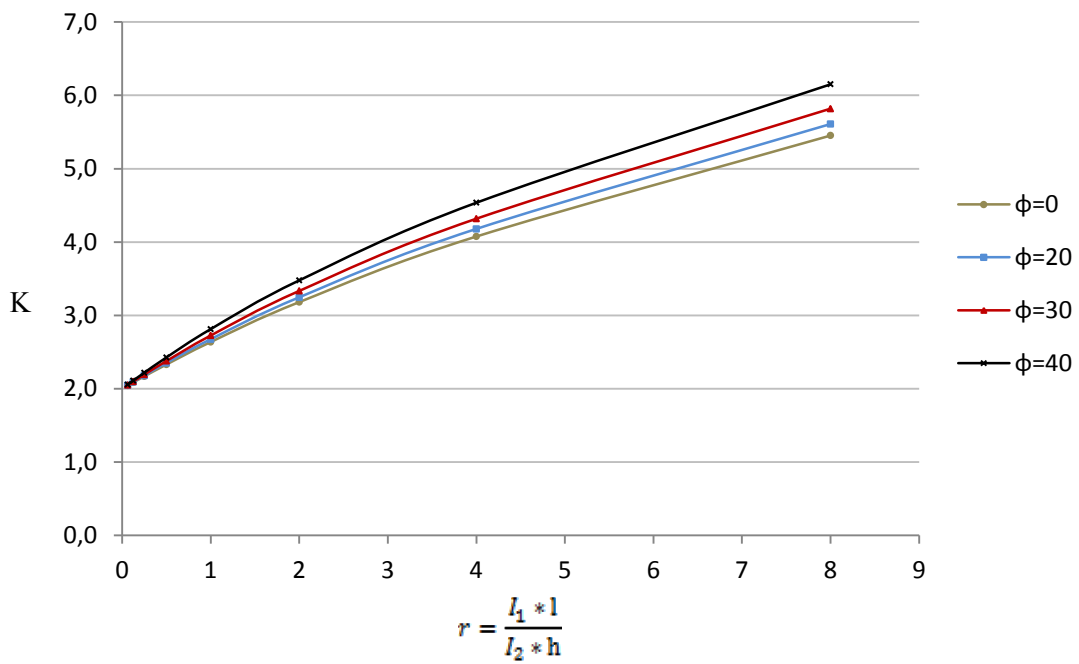
Πίνακας 4.3 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο), λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\phi=40$



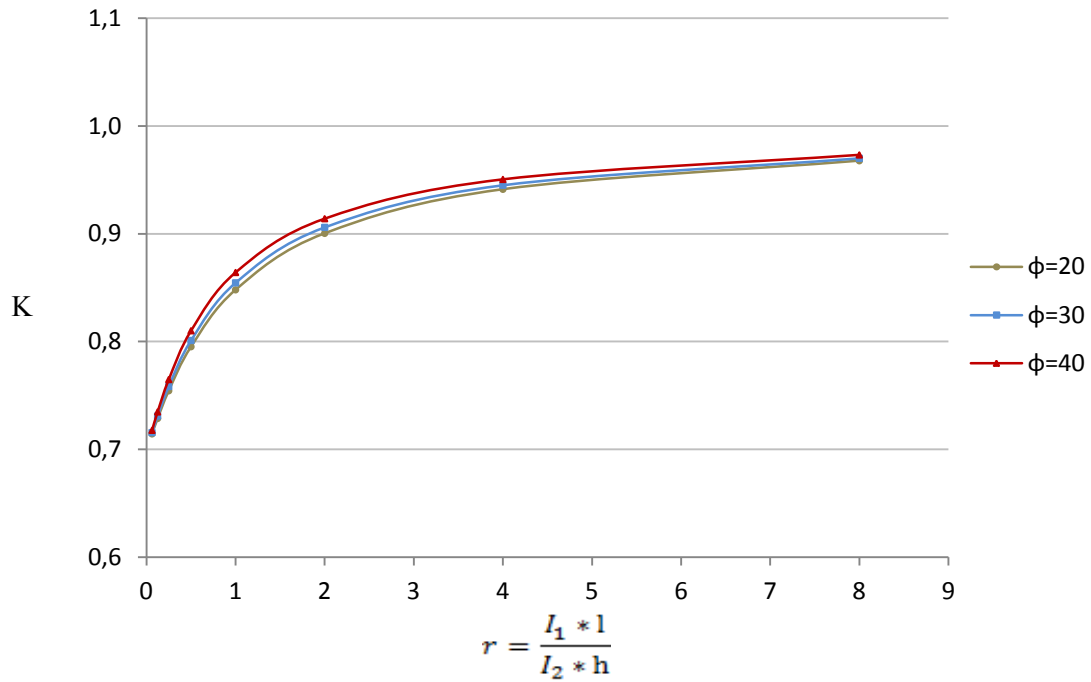
Σχ. 4.4 Διάγραμμα P_{cr} - r , για λυγισμό με μετάθεση



Σχ. 4.5 Διάγραμμα P_{cr} - r , για λυγισμό χωρίς μετάθεση



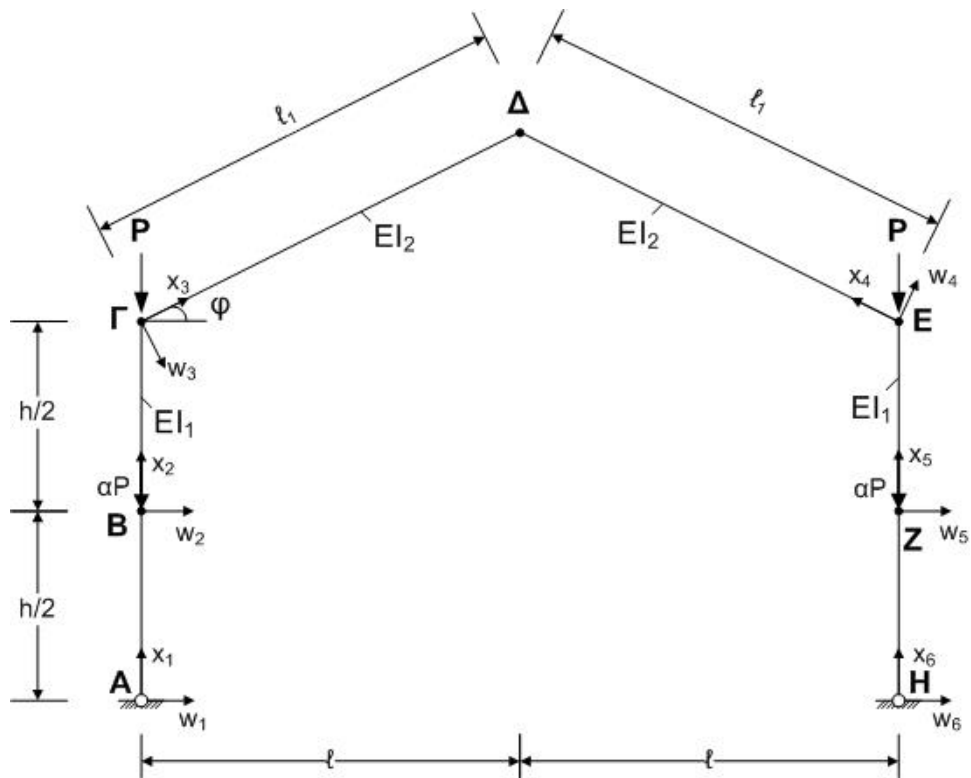
Σχ. 4.6 Διάγραμμα K - r , για λυγισμό με μετάθεση



Σχ. 4.7 Διάγραμμα K - r , για λυγισμό χωρίς μετάθεση

4.3 Πλαίσιο με πρόσθετες φορτίσεις στη μέση των στύλων

4.3.1 Επίλυση πλαισίου



Σχ. 4.8

Οι εξισώσεις που διέπουν την ισορροπία των ραβδών AB ΒΓ ΓΔ ΔΕ ΕΖ ΖΗ στην παραμορφωμένη κατάσταση είναι οι εξής:

$$w_1(x) = A_1 * \sin k_1 x_1 + B_1 * \cos k_1 x_1 + \Gamma_1 * x_1 + \Delta_1, \quad (k_1^2 = \frac{P+aP}{EI_1}) \quad (4.20)$$

$$w_2(x) = A_2 * \sin k_2 x_2 + B_2 * \cos k_2 x_2 + \Gamma_2 * x_2 + \Delta_2, \quad (k_2^2 = \frac{P}{EI_1}) \quad (4.21)$$

$$w_3(x) = A_3 * x_3^3 + B_3 * x_3^2 + \Gamma_3 * x_3 + \Delta_3 \quad (4.22)$$

$$w_4(x) = A_4 * x_4^3 + B_4 * x_4^2 + \Gamma_4 * x_4 + \Delta_4 \quad (4.23)$$

$$w_5(x) = A_5 * \sin k_2 x_5 + B_5 * \cos k_2 x_5 + \Gamma_5 * x_5 + \Delta_5, \quad (k_2^2 = \frac{P}{EI_1}) \quad (4.24)$$

$$w_6(x) = A_6 * \sin k_1 x_6 + B_6 * \cos k_1 x_6 + \Gamma_6 * x_6 + \Delta_6, \quad (k_1^2 = \frac{P+aP}{EI_1}) \quad (4.25)$$

Λόγω των αρθρώσεων στα Α, Ε οι σταθερές $B_1, \Delta_1, B_6, \Delta_6$ μηδενίζονται. Όπως και στο ορθογωνικό πλαίσιο, έχουμε στον κόμβο Β:

$$w_1\left(\frac{h}{2}\right) = w_2(0) \Rightarrow A_1 * \sin\left(k_1 \frac{h}{2}\right) + \Gamma_1 * \frac{h}{2} = B_2 + \Delta_2 \quad (4.26)$$

$$w_1'\left(\frac{h}{2}\right) = w_2'(0) \Rightarrow A_1 * k_1 * \cos\left(k_1 \frac{h}{2}\right) + \Gamma_1 = A_2 * k_2 + \Gamma_2 \quad (4.27)$$

$$-EI_1 * w_1''\left(\frac{h}{2}\right) = -EI_1 * w_2''(0) \Rightarrow A_1 * k_1^2 * \sin\left(k_1 \frac{h}{2}\right) = B_2 * k_2^2 \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} -EI_1 * w_1'''\left(\frac{h}{2}\right) - (1+a)P * w_1'\left(\frac{h}{2}\right) + EI_1 * w_2''(0) + P * w_2'(0) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -(1+a) * P * \Gamma_1 + P * \Gamma_2 = 0 &\Rightarrow -(1+a) * \Gamma_1 + \Gamma_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Στον κόμβο Ζ:

$$w_6\left(\frac{h}{2}\right) = w_5(0) \Rightarrow A_6 * \sin\left(k_1 \frac{h}{2}\right) + \Gamma_6 * \frac{h}{2} = B_5 + \Delta_5 \quad (4.30)$$

$$w_6'\left(\frac{h}{2}\right) = w_5'(0) \Rightarrow A_6 * k_1 * \cos\left(k_1 \frac{h}{2}\right) + \Gamma_6 = A_5 * k_2 + \Gamma_5 \quad (4.31)$$

$$-EI_1 * w_6''\left(\frac{h}{2}\right) = -EI_1 * w_5''(0) \Rightarrow A_6 * k_1^2 * \sin\left(k_1 \frac{h}{2}\right) = B_5 * k_2^2 \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} -EI_1 * w_6'''\left(\frac{h}{2}\right) - (1+a)P * w_6'\left(\frac{h}{2}\right) + EI_1 * w_5''(0) + P * w_5'(0) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -(1+a) * P * \Gamma_6 + P * \Gamma_5 = 0 &\Rightarrow -(1+a) * \Gamma_6 + \Gamma_5 = 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

Αντίστοιχα με την πρώτη περίπτωση στους κόμβους Γ, Ε ισχύει:

$$\begin{aligned} \sin(\varphi) * w_3(0) = w_2\left(\frac{h}{2}\right) &\Rightarrow A_2 * \sin\left(k_2 \frac{h}{2}\right) + B_2 * \cos\left(k_2 \frac{h}{2}\right) + \Gamma_2 * \frac{h}{2} + \Delta_2 = \\ \sin(\varphi) * \Delta_3 \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \sin(\varphi) * w_4(0) = w_5\left(\frac{h}{2}\right) &\Rightarrow A_5 * \sin\left(k_2 \frac{h}{2}\right) + B_5 * \cos\left(k_2 \frac{h}{2}\right) + \Gamma_5 * \frac{h}{2} + \Delta_5 = \\ \sin(\varphi) * \Delta_4 \end{aligned} \quad (4.35)$$

Λόγω συνέχειας στον κόμβο Γ έχουμε ισότητα στροφών και ισορροπία ροπών:

$$w_2'\left(\frac{h}{2}\right) = w_3'(0) \Rightarrow A_2 * k_2 * \cos\left(k_2 \frac{h}{2}\right) - B_2 * k_2 * \sin\left(k_2 \frac{h}{2}\right) + \Gamma_2 = \Gamma_3 \quad (4.36)$$

$$-EI_1 * w_2''\left(\frac{h}{2}\right) = -EI_2 * w_3''(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{l_1}{l_2} * \left(A_2 * k_2^2 * \sin\left(k_2 \frac{h}{2}\right) + B_2 * k_2^2 * \cos\left(k_2 \frac{h}{2}\right) \right) = -2 * B_3 \quad (4.37)$$

Όμοια στον κόμβο Ε :

$$w_5' \left(\frac{h}{2} \right) = w_4'(0) \Rightarrow A_5 * k_2 * \cos\left(k_2 \frac{h}{2}\right) - B_5 * k_2 * \sin\left(k_2 \frac{h}{2}\right) + \Gamma_5 = \Gamma_4 \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} -EI_1 * w_5'' \left(\frac{h}{2} \right) &= -EI_2 * w_4''(0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} * \left(A_5 * k_2^2 * \sin\left(k_2 \frac{h}{2}\right) + B_5 * k_2^2 * \cos\left(k_2 \frac{h}{2}\right) \right) &= -2 * B_4 \end{aligned} \quad (4.39)$$

Όμοια στον κόμβο Δ :

$$w_3'(l_1) = w_4'(l_1) \Rightarrow 3 * A_3 * l_1^2 + 2 * B_3 * l_1 + \Gamma_3 = 3 * A_4 * l_1^2 + 2 * B_4 * l_1 + \Gamma_4 \quad (4.40)$$

$$-EI_2 * w_3''(l_1) = EI_2 * w_4''(l_1) \Rightarrow 6 * A_3 * l_1 + 2 * B_3 = -6 * A_4 * l_1 - 2 * B_4 \quad (4.41)$$

Όμοια με τις εξισώσεις (4.13)(4.14)(4.15)(4.16):

$$\begin{aligned} w_2 \left(\frac{h}{2} \right) = w_5 \left(\frac{h}{2} \right) &\Rightarrow A_2 * \sin\left(k_2 \frac{h}{2}\right) + B_2 * \cos\left(k_2 \frac{h}{2}\right) + \Gamma_2 * \frac{h}{2} + \Delta_2 = A_5 * \\ \sin\left(k_2 \frac{h}{2}\right) + B_5 * \cos\left(k_2 \frac{h}{2}\right) + \Gamma_5 * \frac{h}{2} + \Delta_5 \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} -EI_1 * w_2''' \left(\frac{h}{2} \right) - P * w_2' \left(\frac{h}{2} \right) - EI_1 * w_5''' \left(\frac{h}{2} \right) - P * w_5' \left(\frac{h}{2} \right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -P * \Gamma_2 - P * \Gamma_5 = 0 \Rightarrow \Gamma_2 + \Gamma_5 = 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \sin(\varphi) * w_3(l_1) = \sin(\varphi) * w_4(l_1) &\Rightarrow \\ \Rightarrow A_3 * l_1^3 + B_3 * l_1^2 + \Gamma_3 * l_1 + \Delta_3 = A_4 * l_1^3 + B_4 * l_1^2 + \Gamma_4 * l_1 + \Delta_4 \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\sin(\varphi) * w_3(0) = \sin(\varphi) * w_3(l_1) \Rightarrow A_3 * l_1^3 + B_3 * l_1^2 + \Gamma_3 * l_1 + \Delta_3 = \Delta_3 \quad (4.45)$$

Για να φέρουμε τις εξισώσεις σε επιλύσιμη μορφή θέτω $k_2 = k$ οπότε έχουμε $k_1 = \sqrt{(1+a)} * k$. Επίσης θέτουμε $kh = x$ και $\rho = \frac{l_1}{l_2}$. Από τις εξισώσεις (4.26)-(4.45) σχηματίζουμε ένα σύστημα 20 επί 20 και παραθέτουμε κάποιους χαρακτηριστικούς όρους της εξίσωσης λυγισμού:

$$\begin{aligned} &72 * a^2 * k^3 * l_1^4 * \sin(x/2) * \sin((x*(a+1)^{(1/2)}/2)/2)^2 * \sin(f)^2 + \dots - \\ &8 * k^4 * l_1^5 * \rho * \cos(x/2)^2 * \sin((x*(a+1)^{(1/2)}/2)/2)^2 * \sin(f)^2 - \\ &24 * h * k^4 * l_1^4 * \sin(x/2)^2 * \sin((x*(a+1)^{(1/2)}/2)/2)^2 * \sin(f)^2 + \dots - \\ &14 * h * k^5 * l_1^5 * \rho * \cos(x/2) * \sin(x/2) * \sin((x*(a+1)^{(1/2)}/2)/2)^2 * \sin(f)^2 - \dots + \\ &2 * a^2 * k^5 * l_1^6 * \rho^2 * \sin(x/2)^2 * \cos((x*(a+1)^{(1/2)}/2)/2) * \sin((x*(a+1)^{(1/2)}/2)/2) * \sin(f)^2 * \\ &(a+1)^{(1/2)} + \dots - \\ &2 * a^3 * h * k^6 * l_1^6 * \rho^2 * \cos(x/2) * \sin(x/2) * \cos((x*(a+1)^{(1/2)}/2)/2) * \sin((x*(a+1)^{(1/2)}/2)/2) * \\ &\sin(f)^2 * (a+1)^{(1/2)} = 0 \end{aligned}$$

Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις παρατηρώντας ολόκληρη την εξίσωση συμπεραίνουμε ότι μπροστά από τα ημιτονοειδή γινόμενα εμφανίζονται οι εξής συντελεστές :

$k^3 * l_1^4 * \sin(f)^2, k^4 * l_1^5 * \rho * \sin(f)^2, h * k^4 * l_1^4 * \sin(f)^2, h * k^5 * l_1^5 * \rho * \sin(f)^2, k^5 * l_1^6 * \rho^2 * \sin(f)^2, h * k^6 * l_1^6 * \rho^2 * \sin(f)^2$. Αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση με h^3 και ταυτόχρονα διαιρέσουμε με l_1^4 και $\sin(f)^2$ έχουμε:

$$k^3 * l_1^4 * \sin(f)^2 \Rightarrow (kh)^3$$

$$k^4 * l_1^5 * \rho * \sin(f)^2 \Rightarrow (kh)^4 * \frac{l_1 * l_1}{l_2 * h}$$

$$h * k^4 * l_1^4 * \sin(f)^2 \Rightarrow (kh)^4$$

$$h * k^5 * l_1^5 * \rho * \sin(f)^2 \Rightarrow (kh)^5 * \frac{l_1 * l_1}{l_2 * h}$$

$$k^5 * l_1^6 * \rho^2 * \sin(f)^2 \Rightarrow (kh)^5 * \left(\frac{l_1 * l_1}{l_2 * h} \right)^2$$

$$h * k^6 * l_1^6 * \rho^2 * \sin(f)^2 \Rightarrow (kh)^6 * \left(\frac{l_1 * l_1}{l_2 * h} \right)^2$$

Θέτοντας $r_1 = \frac{l_1 * l_1}{l_2 * h}$, $kh=x$ η εξίσωση έχει έναν άγνωστο (το x) αφού το r_1 θα αντικατασταθεί με αριθμό όπως φαίνεται στους πίνακες.

Για τον αντιμετρικό λυγισμό χωρίς μετάθεση ισχύουν οι εξισώσεις (4.26)-(4.42) και επιπλέον έχουμε:

$$w_2 \left(\frac{h}{2} \right) = 0 \Rightarrow A_2 * \sin \left(k_2 \frac{h}{2} \right) + B_2 * \cos \left(k_2 \frac{h}{2} \right) + \Gamma_2 * \frac{h}{2} + \Delta_2 = 0 \quad (4.46)$$

$$\sin(\varphi) * w_3(l_1) = 0 \Rightarrow A_3 * l_1^3 + B_3 * l_1^2 + \Gamma_3 * l_1 + \Delta_3 = 0 \quad (4.47)$$

$$\sin(\varphi) * w_4(l_1) = 0 \Rightarrow A_4 * l_1^3 + B_4 * l_1^2 + \Gamma_4 * l_1 + \Delta_4 = 0 \quad (4.48)$$

Αντίστοιχα στην εξίσωση που προκύπτει από την επίλυση του αντιμετρικού λυγισμού χωρίς μετάθεση συναντάμε τα εξής γινόμενα:

$$k^2 * l_1^5 \Rightarrow (kh)^2$$

$$k^3 * l_1^5 * h \Rightarrow (kh)^3$$

$$\rho * k^3 * l_1^6 \Rightarrow (kh)^3 * \frac{l_1 * l_1}{l_2 * h}$$

$$h^2 * k^4 * l_1^5 \Rightarrow (kh)^4$$

$$k^4 * l_1^7 * \rho^2 \Rightarrow (kh)^4 * \left(\frac{l_1 * l_1}{l_2 * h} \right)^2$$

$$k^4 * l_1^6 * h * \rho \Rightarrow (kh)^4 * \left(\frac{l_1 * l_1}{l_2 * h} \right)$$

$$h^2 * k^5 * l_1^6 * \rho \Rightarrow (kh)^5 * \left(\frac{l_1 * l_1}{l_2 * h} \right)$$

$$h * k^5 * l_1^7 * \rho^2 \Rightarrow (kh)^5 * \left(\frac{l_1 * l_1}{l_2 * h} \right)^2$$

$$h^2 * k^6 * l_1^7 * \rho^2 \Rightarrow (kh)^6 * \left(\frac{l_1 * l_1}{l_2 * h} \right)^2$$

4.3.2 Πίνακες-διαγράμματα κρίσιμων φορτίων και ισοδύναμου μήκους λυγισμού

i. $\alpha=0,5$

I_1/I_2 $2l/h$	0,25		1		4	
0,5	$r_1=0,0665$	kh=1,2959	$r_1=0,266$	kh=1,2240	$r_1=1,064$	kh=1,0131
		kh=3,8412		kh=3,6495		kh=3,2742
	$P_{cr}=1,6794*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,4243	$P_{cr}=1,4982*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,5667	$P_{cr}=1,0264*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,1010
	$P_{cr}=14,7548*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,8179	$P_{cr}=13,3189*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,8608	$P_{cr}=10,7204*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9595
1	$r_1=0,133$	kh=1,2708	$r_1=0,532$	kh=1,1415	$r_1=2,128$	kh=0,8443
		kh=3,7700		kh=3,4749		kh=3,0966
	$P_{cr}=1,6149*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,4721	$P_{cr}=1,3030*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,7522	$P_{cr}=0,7128*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,7209
	$P_{cr}=14,2129*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,8333	$P_{cr}=12,0749*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9041	$P_{cr}=9,5889*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0145
2	$r_1=0,266$	kh=1,2240	$r_1=1,064$	kh=1,0131	$r_1=4,256$	kh=0,6624
		kh=3,6495		kh=3,2742		kh=2,9708
	$P_{cr}=1,4982*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,5667	$P_{cr}=1,0264*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,1010	$P_{cr}=0,4388*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,7427
	$P_{cr}=13,3189*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,8608	$P_{cr}=10,7204*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9595	$P_{cr}=8,8257*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0575
4	$r_1=0,532$	kh=1,1415	$r_1=2,128$	kh=0,8443	$r_1=8,512$	kh=0,4972
		kh=3,4749		kh=3,0966		kh=2,8945
	$P_{cr}=1,3030*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,7522	$P_{cr}=0,7128*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,7209	$P_{cr}=0,2472*\frac{EI_1}{h^2}$	K=6,3186
	$P_{cr}=12,0749*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9041	$P_{cr}=9,5889*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0145	$P_{cr}=8,3781*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0854

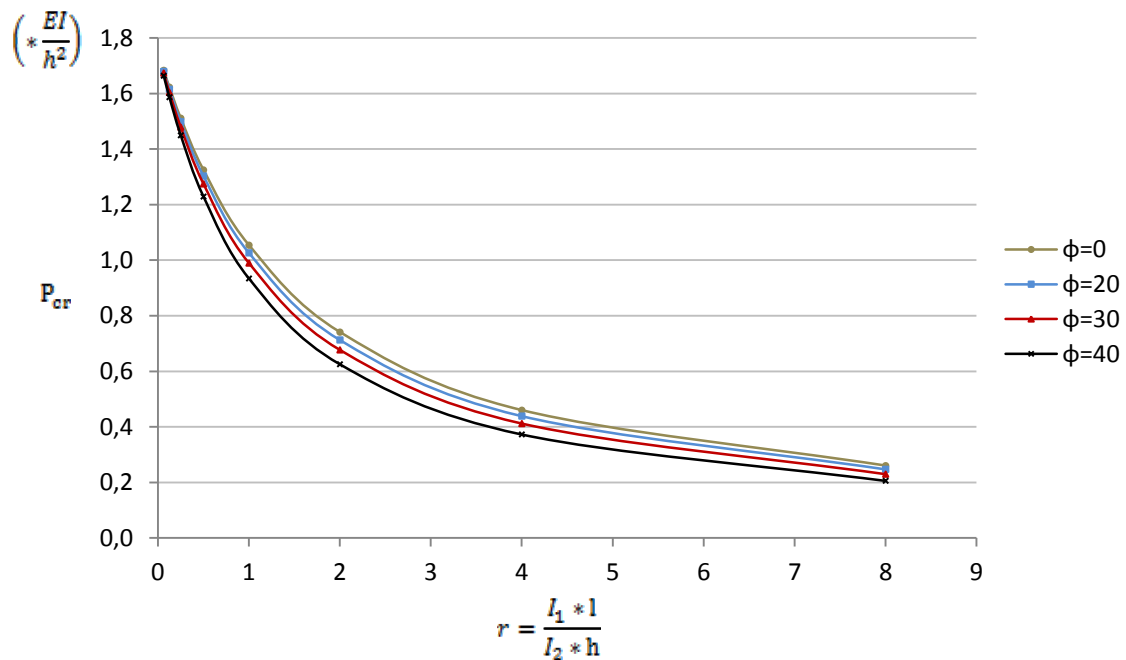
Πίνακας 4.4 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο), λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\varphi=20$

I_1/I_2 $2l/h$	0,25		1		4	
0,5	$r_1=0,0722$	kh=1,2936	$r_1=0,2887$	kh=1,2161	$r_1=1,1548$	kh=0,9948
		kh=3,8348		kh=3,6315		kh=3,2512
	$P_{cr}=1,6734*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,4286	$P_{cr}=1,4789*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,5833	$P_{cr}=0,9896*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,1580
	$P_{cr}=14,7057*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,8192	$P_{cr}=13,1878*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,8651	$P_{cr}=10,5703*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9663
1	$r_1=0,1444$	kh=1,2665	$r_1=0,5774$	kh=1,1290	$r_1=2,3096$	kh=0,8228
		kh=3,7587		kh=3,4516		kh=3,0789
	$P_{cr}=1,6040*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,4805	$P_{cr}=1,2746*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,7826	$P_{cr}=0,6770*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,8182
	$P_{cr}=14,1278*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,8358	$P_{cr}=11,9135*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9102	$P_{cr}=9,4796*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0204
2	$r_1=0,2887$	kh=1,2161	$r_1=1,1548$	kh=0,9948	$r_1=4,6192$	kh=0,6418
		kh=3,6315		kh=3,2512		kh=2,9596
	$P_{cr}=1,4789*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,5833	$P_{cr}=0,9896*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,1580	$P_{cr}=0,4119*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,8950
	$P_{cr}=13,1878*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,8651	$P_{cr}=10,5703*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9663	$P_{cr}=8,7592*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0615
4	$r_1=0,5774$	kh=1,1290	$r_1=2,3096$	kh=0,8228	$r_1=9,2384$	kh=0,4793
		kh=3,4516		kh=3,0789		kh=2,8881
	$P_{cr}=1,2746*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,7826	$P_{cr}=0,6770*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,8182	$P_{cr}=0,2297*\frac{EI_1}{h^2}$	K=6,5545
	$P_{cr}=11,9135*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9102	$P_{cr}=9,4796*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0204	$P_{cr}=8,3411*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0878

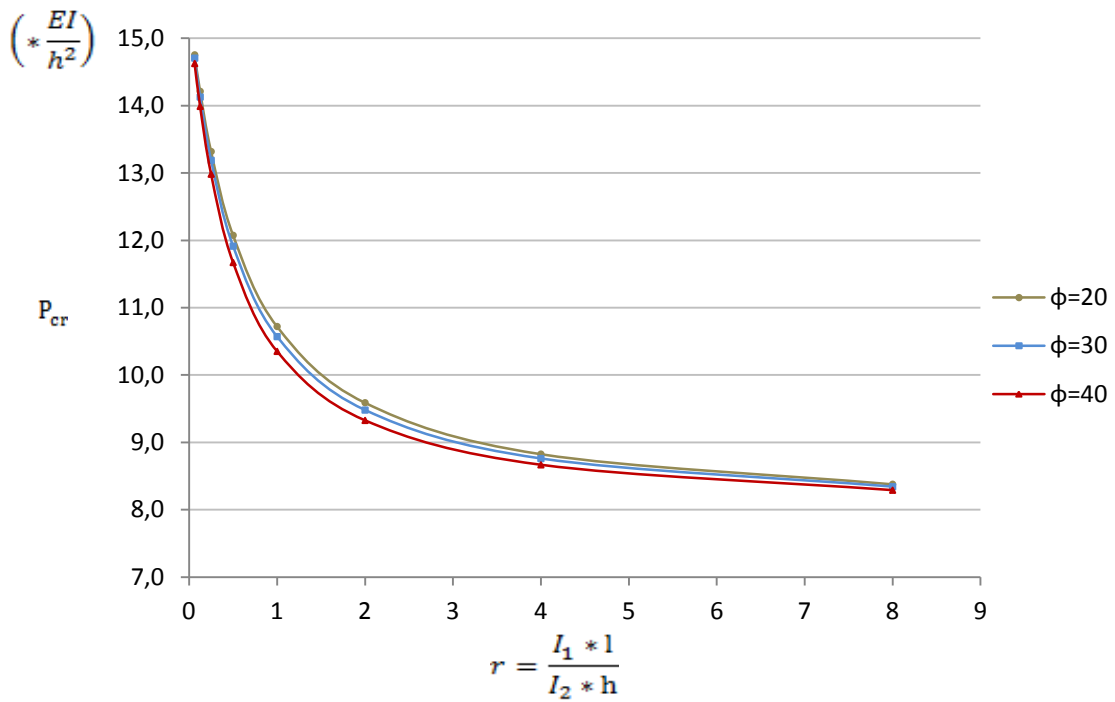
Πίνακας 4.5 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο), λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\varphi=30$

I_1/I_2 $2l/h$	0,25		1		4						
0,5	$r_1=0,0816$	kh=1,2899	$r_1=0,3264$	kh=1,2039	$r_1=1,3056$	kh=0,9665					
		kh=3,8243		kh=3,6031		kh=3,2173					
	$P_{cr}=1,6638*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,4355$	$P_{cr}=1,4494*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,6095$	$P_{cr}=0,9341*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,2505$	$P_{cr}=14,6253*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,8215$	$P_{cr}=12,9823*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,8719$	$P_{cr}=10,3510*\frac{EI_1}{h^2}$
1	$r_1=0,1632$	kh=1,2596	$r_1=0,6528$	kh=1,1086	$r_1=2,6112$	kh=0,7908					
		kh=3,7402		kh=3,4162		kh=3,0538					
	$P_{cr}=1,5866*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,4941$	$P_{cr}=1,2290*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,8338$	$P_{cr}=0,6254*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,9727$	$P_{cr}=13,9891*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,84$	$P_{cr}=11,6704*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,9196$	$P_{cr}=9,3257*\frac{EI_1}{h^2}$
2	$r_1=0,3264$	kh=1,2039	$r_1=1,3056$	kh=0,9665	$r_1=5,2224$	kh=0,6107					
		kh=3,6031		kh=3,2173		kh=2,9438					
	$P_{cr}=1,4494*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,6095$	$P_{cr}=0,9341*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,2505$	$P_{cr}=0,3729*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=5,1442$	$P_{cr}=12,9823*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,8719$	$P_{cr}=10,3510*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,9765$	$P_{cr}=8,666*\frac{EI_1}{h^2}$
4	$r_1=0,6528$	kh=1,1086	$r_1=2,6112$	kh=0,7908	$r_1=10,4448$	kh=0,4539					
		kh=3,4162		kh=3,0538		kh=2,8791					
	$P_{cr}=1,2290*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,8338$	$P_{cr}=0,6254*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,9727$	$P_{cr}=0,2060*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=6,9213$	$P_{cr}=11,6704*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,9196$	$P_{cr}=9,3257*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,0287$	$P_{cr}=8,2892*\frac{EI_1}{h^2}$

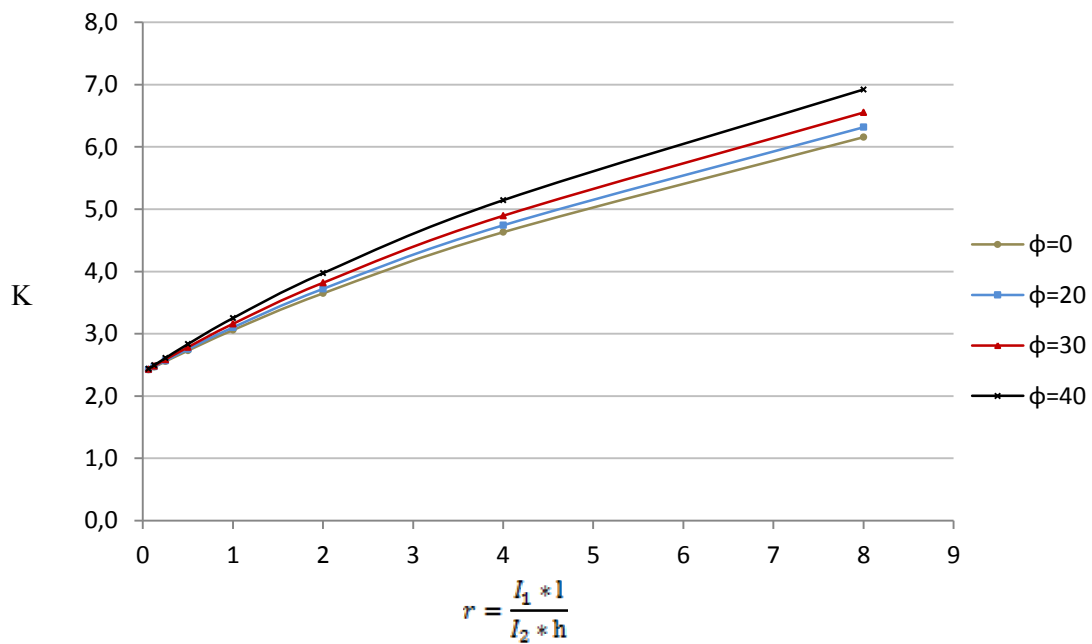
Πίνακας 4.6 Λυγισμός με μετάθεση (άσπρο φόντο), λυγισμός χωρίς μετάθεση (μπλε φόντο) για $\phi=40$



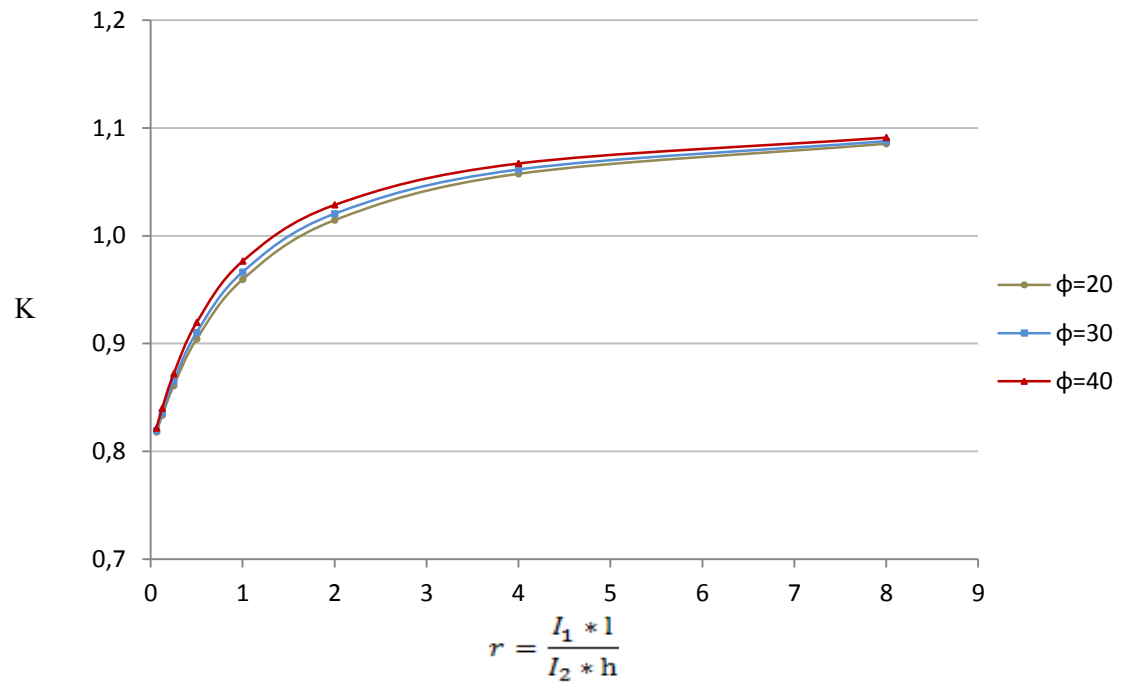
Σχ. 4.9 Διάγραμμα P_{cr} - r , για λυγισμό με μετάθεση



Σχ. 4.10 Διάγραμμα P_{cr} - r , για λυγισμό χωρίς μετάθεση



Σχ. 4.11 Διάγραμμα K - r , για λυγισμό με μετάθεση



Σχ. 4.12 Διάγραμμα K - r , για λυγισμό χωρίς μετάθεση

ii. $\alpha=1$

I_1/I_2 $2l/h$	0,25		1		4	
0,5	$r_1=0,0665$	kh=1,1404	$r_1=0,266$	kh=1,0804	$r_1=1,064$	kh=0,9024
		kh=3,4480		kh=3,2830		kh=2,9615
	$P_{cr}=1,3005*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,7548	$P_{cr}=1,1673*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,9078	$P_{cr}=0,8143*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,4814
	$P_{cr}=11,8887*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9111	$P_{cr}=10,7781*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9569	$P_{cr}=8,7705*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0608
1	$r_1=0,133$	kh=1,1194	$r_1=0,532$	kh=1,0112	$r_1=2,128$	kh=0,7574
		kh=3,3866		kh=3,1335		kh=2,8085
	$P_{cr}=1,2531*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,8065	$P_{cr}=1,0225*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,1068	$P_{cr}=0,5736*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,1479
	$P_{cr}=11,4691*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9277	$P_{cr}=9,8188*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0026	$P_{cr}=7,8877*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1186
2	$r_1=0,266$	kh=1,0804	$r_1=1,064$	kh=0,9024	$r_1=4,256$	kh=0,5984
		kh=3,2830		kh=2,9615		kh=2,6997
	$P_{cr}=1,1673*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,9078	$P_{cr}=0,8143*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,4814	$P_{cr}=0,3581*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,2500
	$P_{cr}=10,7781*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9569	$P_{cr}=8,7705*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0608	$P_{cr}=7,2884*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1637
4	$r_1=0,532$	kh=1,0112	$r_1=2,128$	kh=0,7574	$r_1=8,512$	kh=0,4514
		kh=3,1335		kh=2,8085		kh=2,6332
	$P_{cr}=1,0225*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,1068	$P_{cr}=0,5736*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,1479	$P_{cr}=0,2038*\frac{EI_1}{h^2}$	K=6,9597
	$P_{cr}=9,8188*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0026	$P_{cr}=7,8877*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1186	$P_{cr}=6,9337*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1931

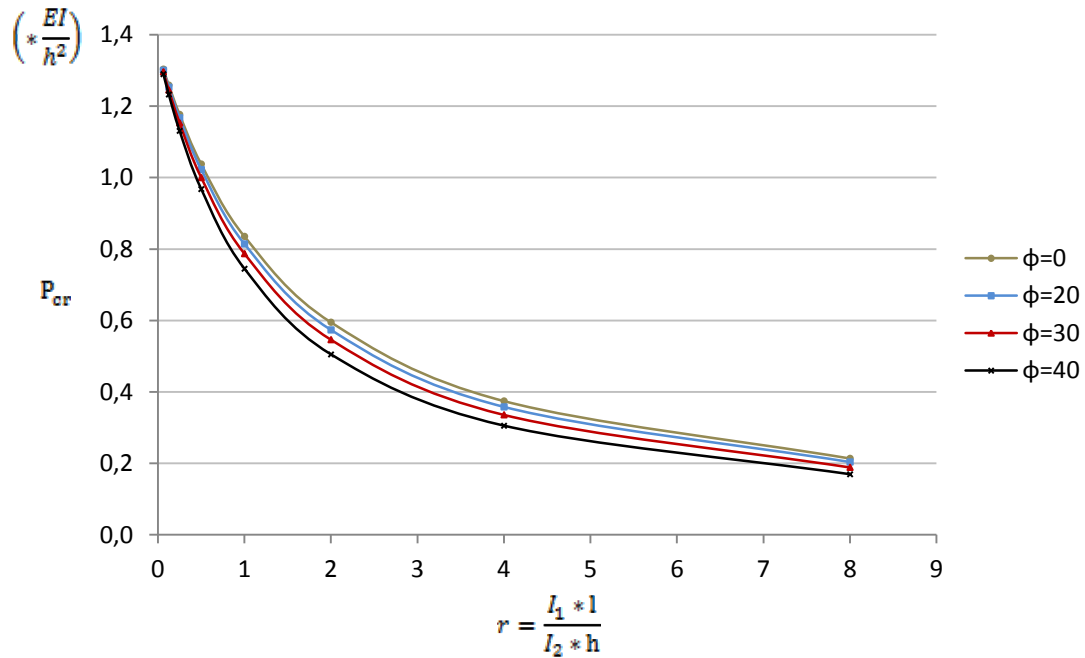
Πίνακας 4.7 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο), λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\varphi=20$

I_1/I_2 $2l/h$	0,25		1		4	
0,5	$r_1=0,0722$	kh=1,1385	$r_1=0,2887$	kh=1,0739	$r_1=1,1548$	kh=0,8872
		kh=3,4425		kh=3,2676		kh=2,9416
	$P_{cr}=1,2962*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,7594	$P_{cr}=1,1533*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,9254	$P_{cr}=0,7871*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,5410
	$P_{cr}=11,8508*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9126	$P_{cr}=10,6772*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9614	$P_{cr}=8,653*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,068
1	$r_1=0,1444$	kh=1,1159	$r_1=0,5774$	kh=1,0005	$r_1=2,3096$	kh=0,7391
		kh=3,3768		kh=3,1135		kh=2,7933
	$P_{cr}=1,2452*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,8153	$P_{cr}=1,0001*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,1400	$P_{cr}=0,5463*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,2506
	$P_{cr}=11,4028*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9303	$P_{cr}=9,6939*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,009	$P_{cr}=7,8025*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1247
2	$r_1=0,2887$	kh=1,0739	$r_1=1,1548$	kh=0,8872	$r_1=4,6192$	kh=0,5796
		kh=3,2676		kh=2,9416		kh=2,6898
	$P_{cr}=1,1533*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,9254	$P_{cr}=0,7871*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,5410	$P_{cr}=0,3359*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,4203
	$P_{cr}=10,6772*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9614	$P_{cr}=8,653*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,068	$P_{cr}=7,235*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,168
4	$r_1=0,5774$	kh=1,0005	$r_1=2,3096$	kh=0,7391	$r_1=9,2384$	kh=0,4346
		kh=3,1135		kh=2,7933		kh=2,6276
	$P_{cr}=1,0001*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,1400	$P_{cr}=0,5463*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,2506	$P_{cr}=0,1889*\frac{EI_1}{h^2}$	K=7,2287
	$P_{cr}=9,6939*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,009	$P_{cr}=7,8025*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1247	$P_{cr}=6,9043*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1956

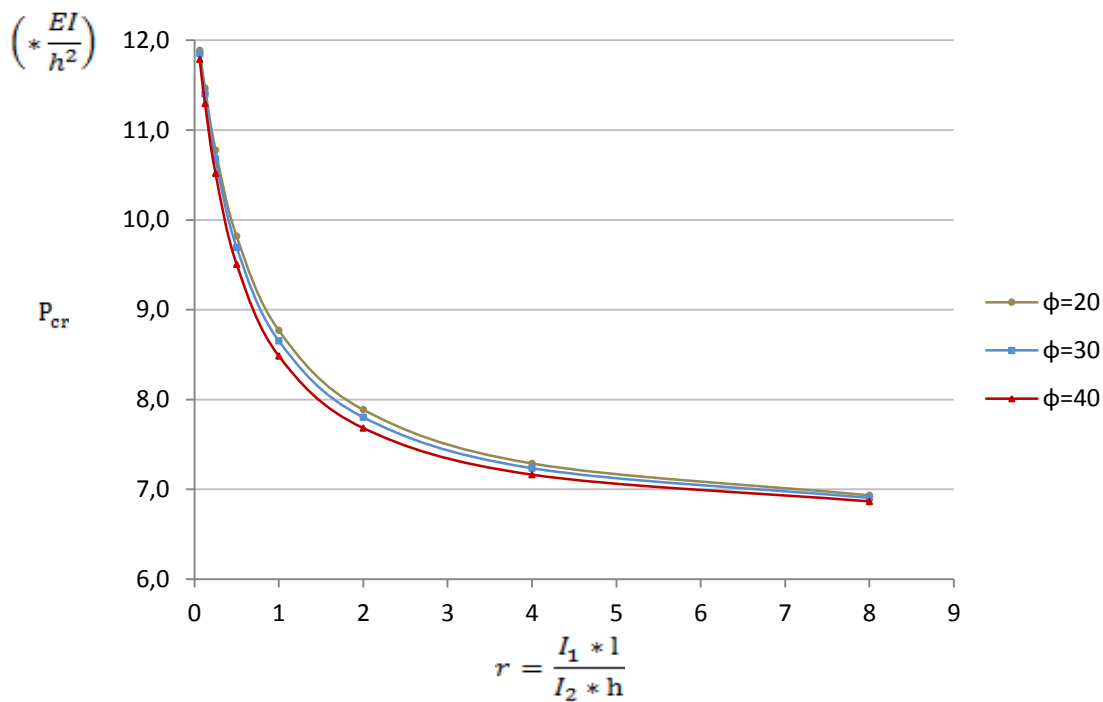
Πίνακας 4.8 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο), λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\varphi=30$

I_1/I_2 $2l/h$	0,25		1		4		
0,5	$r_1=0,0816$	kh=1,1356	$r_1=0,3264$	kh=1,0634	$r_1=1,3056$	kh=0,8630	
		kh=3,4334		kh=3,2432		kh=2,9127	
	$P_{cr}=1,2896*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,7665$	$P_{cr}=1,1308*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,9543$	$P_{cr}=0,7448*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,6403$	
	$P_{cr}=11,7882*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,915$	$P_{cr}=10,5183*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,9687$	$P_{cr}=8,4838*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,0786$	
1	$r_1=0,1632$	kh=1,1102	$r_1=0,6528$	kh=0,9837	$r_1=2,6112$	kh=0,7106	
		kh=3,3609		kh=3,0832		kh=2,7715	
	$P_{cr}=1,2325*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,8297$	$P_{cr}=0,9677*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,1936$	$P_{cr}=0,5049*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,4210$	
	$P_{cr}=11,2956*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,9347$	$P_{cr}=9,5061*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,0189$	$P_{cr}=7,6812*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,1335$	
2	$r_1=0,3264$	kh=1,0634	$r_1=1,3056$	kh=0,8630	$r_1=5,2224$	kh=0,5525	
		kh=3,2432		kh=2,9127		kh=2,6762	
	$P_{cr}=1,1308*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,9543$	$P_{cr}=0,7448*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,6403$	$P_{cr}=0,3053*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=5,6861$	
	$P_{cr}=10,5183*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=0,9687$	$P_{cr}=8,4838*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,0786$	$P_{cr}=7,162*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,1739$	
4	$r_1=0,6528$	kh=0,9837	$r_1=2,6112$	kh=0,7106	$r_1=10,4448$	kh=0,4116	
		kh=3,0832		kh=2,7715		kh=2,6199	
	$P_{cr}=0,9677*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,1936$	$P_{cr}=0,5049*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,4210$	$P_{cr}=0,1694*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=7,6326$	
	$P_{cr}=9,5061*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,0189$	$P_{cr}=7,6812*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,1335$	$P_{cr}=6,8639*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,1991$	

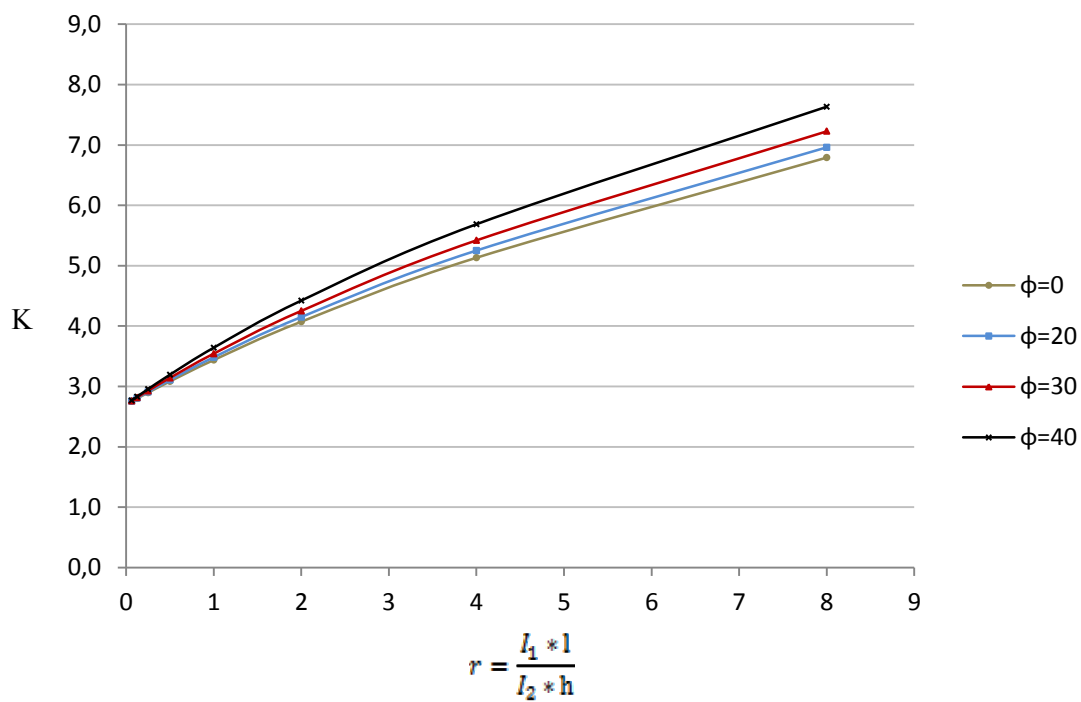
Πίνακας 4.9 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο), λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\phi=40$



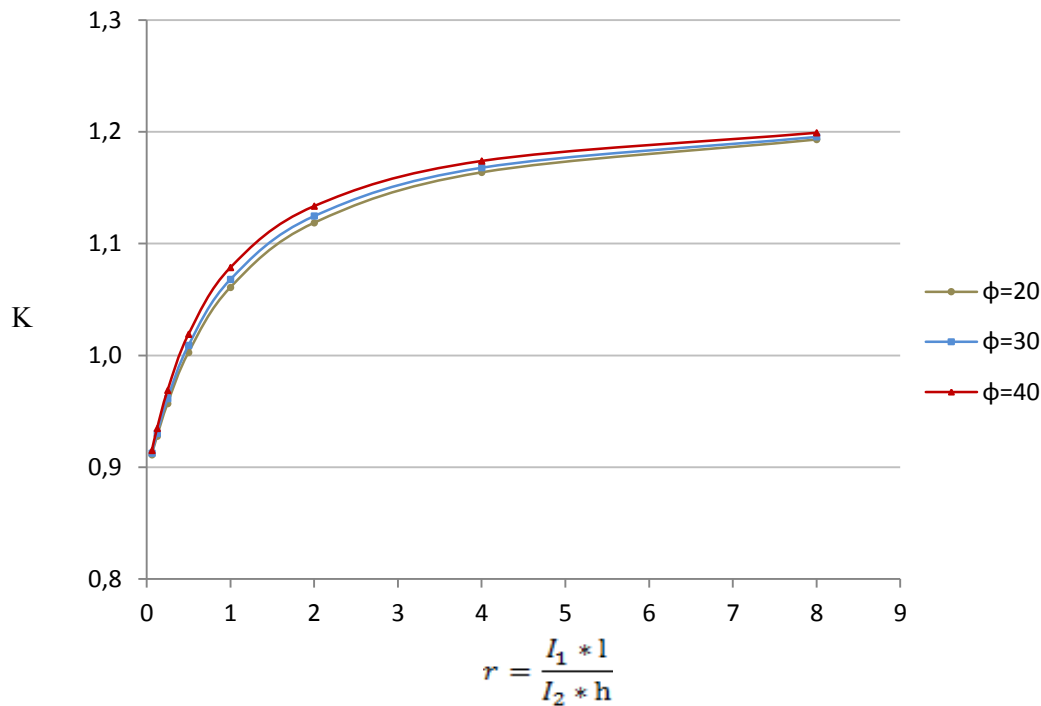
Σχ. 4.13 Διάγραμμα P_{cr} - r , για λυγισμό με μετάθεση



Σχ. 4.14 Διάγραμμα P_{cr} - r , για λυγισμό χωρίς μετάθεση



Σχ. 4.15 Διάγραμμα K - r , για λυγισμό με μετάθεση



Σχ. 4.16 Διάγραμμα K- r, για λυγισμό χωρίς μετάθεση

iii. $\alpha=2$

I_1/I_2 $2l/h$	0,25		1		4	
0,5	$r_1=0,0665$	kh=0,9462	$r_1=0,266$	kh=0,8989	$r_1=1,064$	kh=0,7584
		kh=2,9218		kh=2,7893		kh=2,5322
	$P_{cr}=0,8953 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=3,3202	$P_{cr}=0,8080 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=3,4949	$P_{cr}=0,5752 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=4,1424
	$P_{cr}=8,5369 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0752	$P_{cr}=7,7802 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1263	$P_{cr}=6,412 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,2407
1	$r_1=0,133$	kh=0,9299	$r_1=0,532$	kh=0,8446	$r_1=2,128$	kh=0,6419
		kh=2,8723		kh=2,6698		kh=2,4095
	$P_{cr}=0,8647 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=3,3784	$P_{cr}=0,7133 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=3,7196	$P_{cr}=0,4120 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=4,8942
	$P_{cr}=8,2501 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0938	$P_{cr}=7,1278 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1767	$P_{cr}=5,8057 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,3038
2	$r_1=0,266$	kh=0,8989	$r_1=1,064$	kh=0,7584	$r_1=4,256$	kh=0,5104
		kh=2,7893		kh=2,5322		kh=2,3214
	$P_{cr}=0,8080 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=3,4949	$P_{cr}=0,5752 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=4,1424	$P_{cr}=0,2605 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=6,1552
	$P_{cr}=7,7802 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1263	$P_{cr}=6,412 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,2407	$P_{cr}=5,3889 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,3533
4	$r_1=0,532$	kh=0,8446	$r_1=2,128$	kh=0,6419	$r_1=8,512$	kh=0,3867
		kh=2,6698		kh=2,4095		kh=2,2675
	$P_{cr}=0,7133 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=3,7196	$P_{cr}=0,4120 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=4,8942	$P_{cr}=0,1495 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=8,1241
	$P_{cr}=7,1278 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1767	$P_{cr}=5,8057 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,3038	$P_{cr}=5,1416 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	K=1,3855

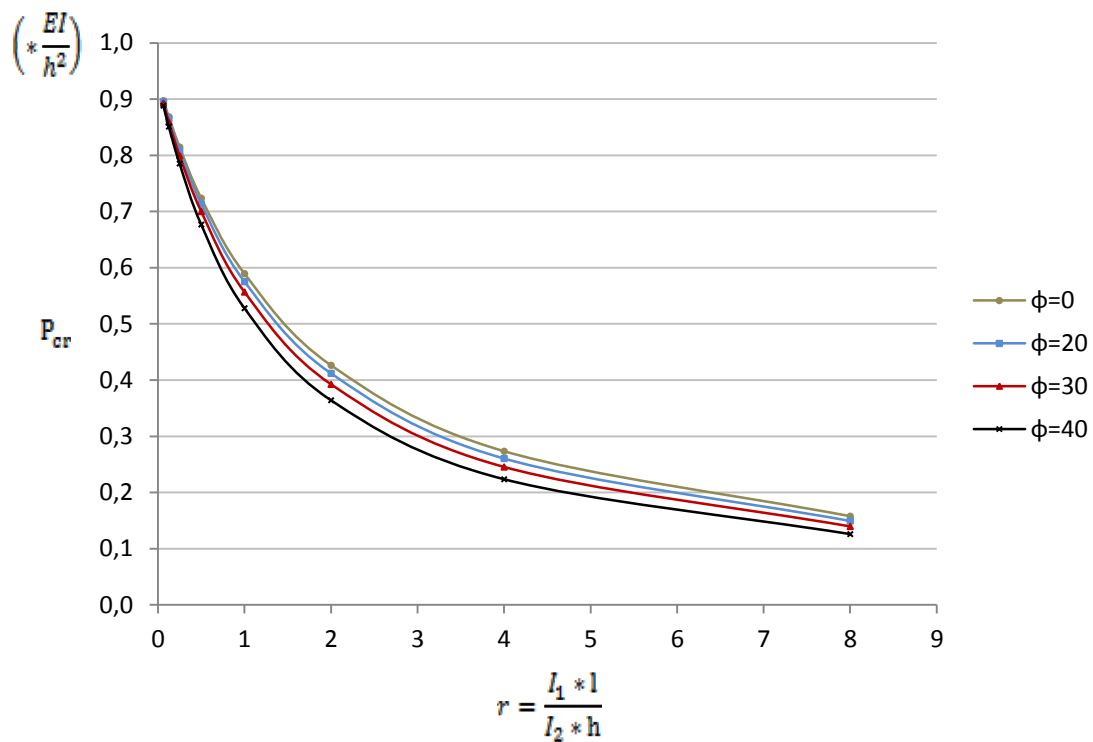
Πίνακας 4.10 Λυγισμός με μετάθεση (άσπρο φόντο), λυγισμός χωρίς μετάθεση (μπλε φόντο) για $\phi=20$

I_1/I_2 $2l/h$	0,25		l		4		
0,5	$r_1=0,0722$	kh=0,9448	$r_1=0,2887$	kh=0,8940	$r_1=1,1548$	kh=0,7461	
		kh=2,9173		kh=2,7769		kh=2,5163	
	$P_{cr}=0,8926*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,3251$	$P_{cr}=0,7992*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,5141$	$P_{cr}=0,5567*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,2107$	
		$P_{cr}=8,5106*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,0769$	$P_{cr}=7,7112*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,1313$	$P_{cr}=6,3318*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,2485$
1	$r_1=0,1444$	kh=0,9271	$r_1=0,5774$	kh=0,8366	$r_1=2,3096$	kh=0,6265	
		kh=2,8644		kh=2,6538		kh=2,397	
	$P_{cr}=0,8595*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,3886$	$P_{cr}=0,6999*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,7552$	$P_{cr}=0,3925*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=5,0145$	
		$P_{cr}=8,2048*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,0968$	$P_{cr}=7,0427*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,1838$	$P_{cr}=5,7456*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,3106$
2	$r_1=0,2887$	kh=0,8940	$r_1=1,1548$	kh=0,7461	$r_1=4,6192$	kh=0,4954	
		kh=2,7769		kh=2,5163		kh=2,3135	
	$P_{cr}=0,7992*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,5141$	$P_{cr}=0,5567*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,2107$	$P_{cr}=0,2454*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=6,3415$	
		$P_{cr}=7,7112*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,1313$	$P_{cr}=6,3318*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,2485$	$P_{cr}=5,3523*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,3579$
4	$r_1=0,5774$	kh=0,8366	$r_1=2,3096$	kh=0,6265	$r_1=9,2384$	kh=0,3736	
		kh=2,6538		kh=2,397		kh=2,263	
	$P_{cr}=0,6999*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,7552$	$P_{cr}=0,3925*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=5,0145$	$P_{cr}=0,1396*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=8,4090$	
		$P_{cr}=7,0427*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,1838$	$P_{cr}=5,7456*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,3106$	$P_{cr}=5,1212*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,3882$

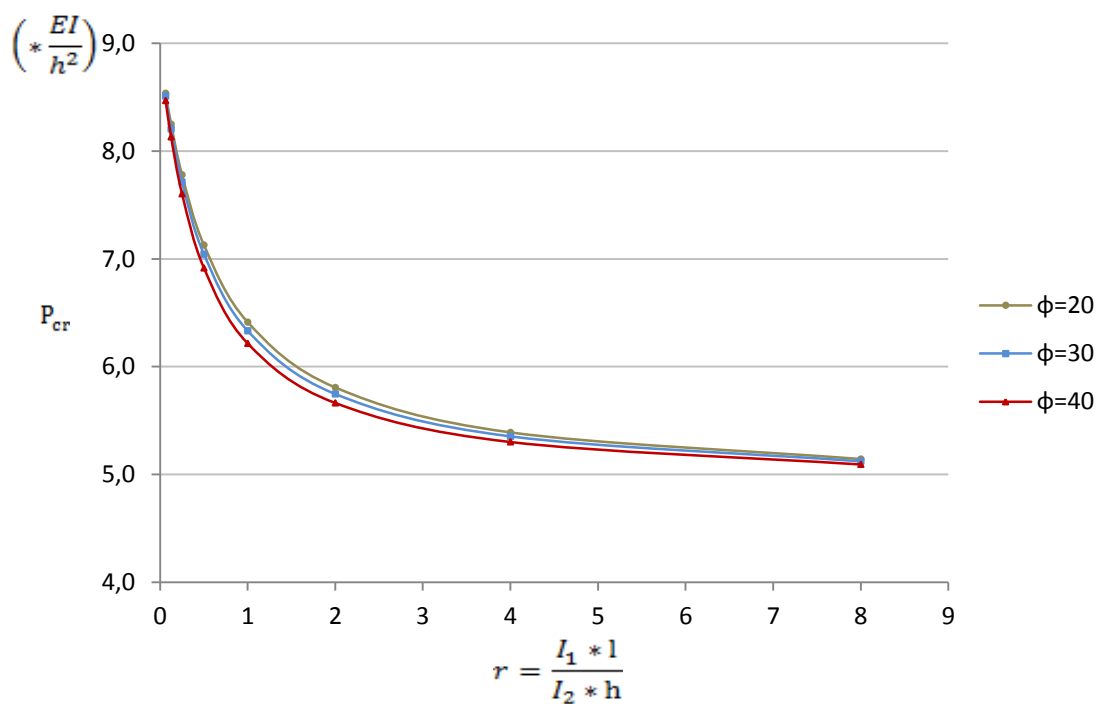
Πίνακας 4.11 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο), λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\varphi=30$

I_1/I_2 $2l/h$	0,25		l		4		
0,5	$r_1=0,0816$	kh=0,9425	$r_1=0,3264$	kh=0,8862	$r_1=1,3056$	kh=0,7266	
		kh=2,9101		kh=2,7574		kh=2,493	
	$P_{cr}=0,8883*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,3332$	$P_{cr}=0,7853*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,5450$	$P_{cr}=0,5279*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,3237$	
		$P_{cr}=8,4687*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,0795$	$P_{cr}=7,6033*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,1393$	$P_{cr}=6,215*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,2602$
1	$r_1=0,1632$	kh=0,9225	$r_1=0,6528$	kh=0,8227	$r_1=2,6112$	kh=0,6034	
		kh=2,8516		kh=2,6296		kh=2,3796	
	$P_{cr}=0,8510*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,4055$	$P_{cr}=0,6768*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,8186$	$P_{cr}=0,3641*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=5,2065$	
		$P_{cr}=8,1316*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,1017$	$P_{cr}=6,9148*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,1947$	$P_{cr}=5,6625*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,3202$
2	$r_1=0,3264$	kh=0,8862	$r_1=1,3056$	kh=0,7266	$r_1=5,2224$	kh=0,4729	
		kh=2,7574		kh=2,493		kh=2,3023	
	$P_{cr}=0,7853*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,5450$	$P_{cr}=0,5279*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,3237$	$P_{cr}=0,2236*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=6,6432$	
		$P_{cr}=7,6033*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,1393$	$P_{cr}=6,215*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,2602$	$P_{cr}=5,3006*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,3645$
4	$r_1=0,6528$	kh=0,8227	$r_1=2,6112$	kh=0,6034	$r_1=10,4448$	kh=0,3550	
		kh=2,6296		kh=2,3796		kh=2,2566	
	$P_{cr}=0,6768*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,8186$	$P_{cr}=0,3641*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=5,2065$	$P_{cr}=0,1260*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=8,8496$	
		$P_{cr}=6,9148*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,1947$	$P_{cr}=5,6625*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,3202$	$P_{cr}=5,0922*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,3922$

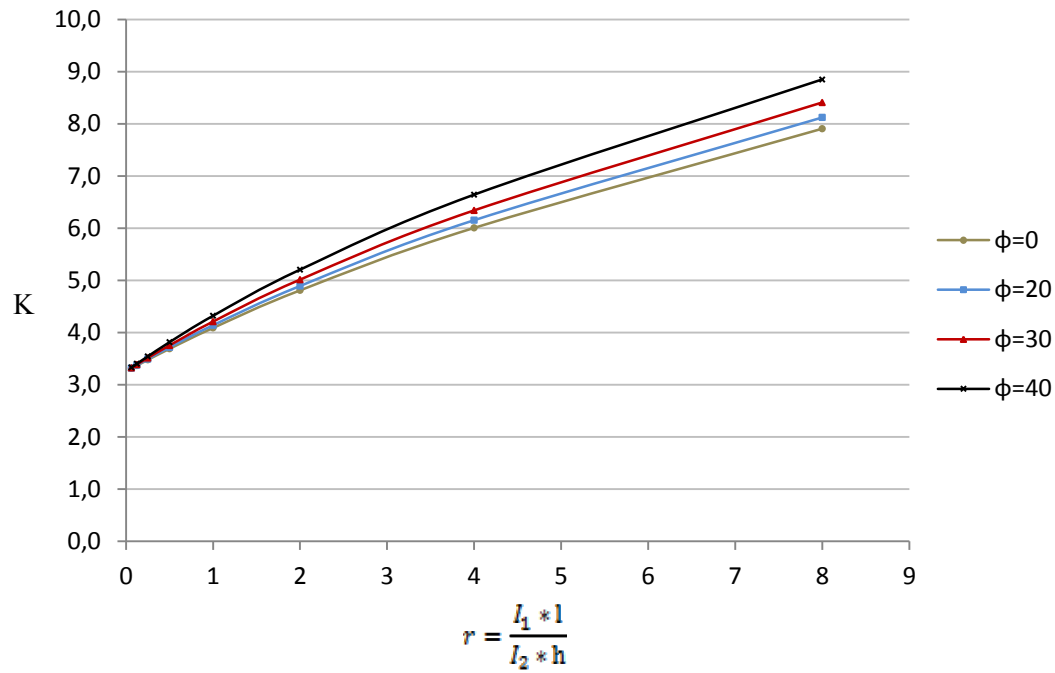
Πίνακας 4.12 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο), λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\varphi=40$



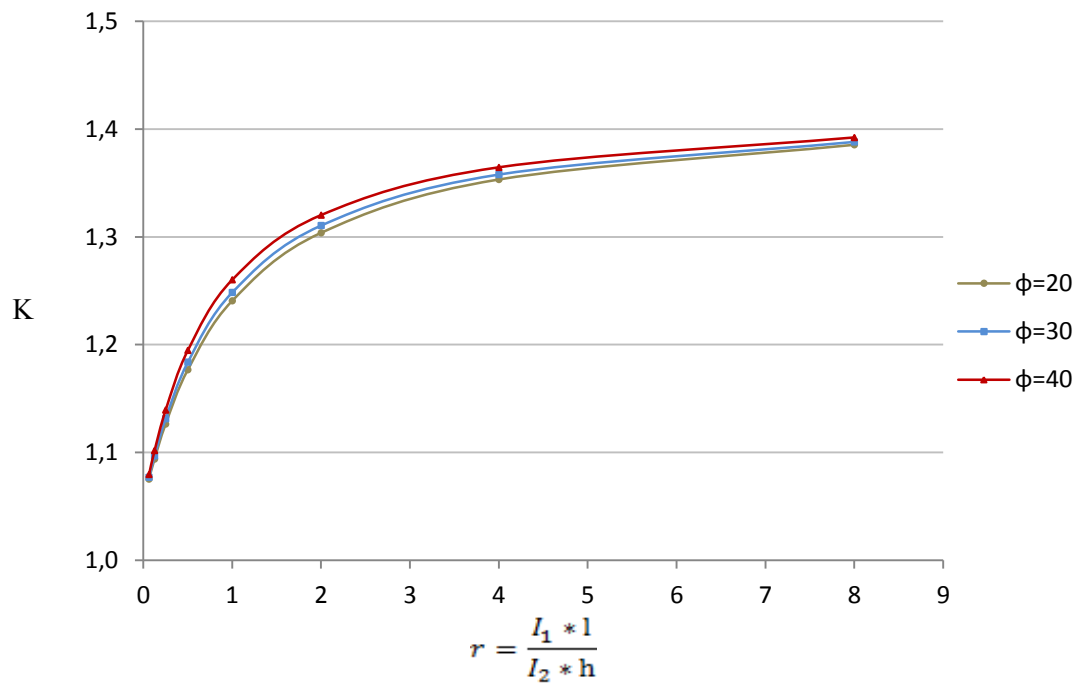
Σχ. 4.17 Διάγραμμα P_{cr} - r , για λυγισμό με μετάθεση



Σχ. 4.18 Διάγραμμα P_{cr} - r , για λυγισμό χωρίς μετάθεση



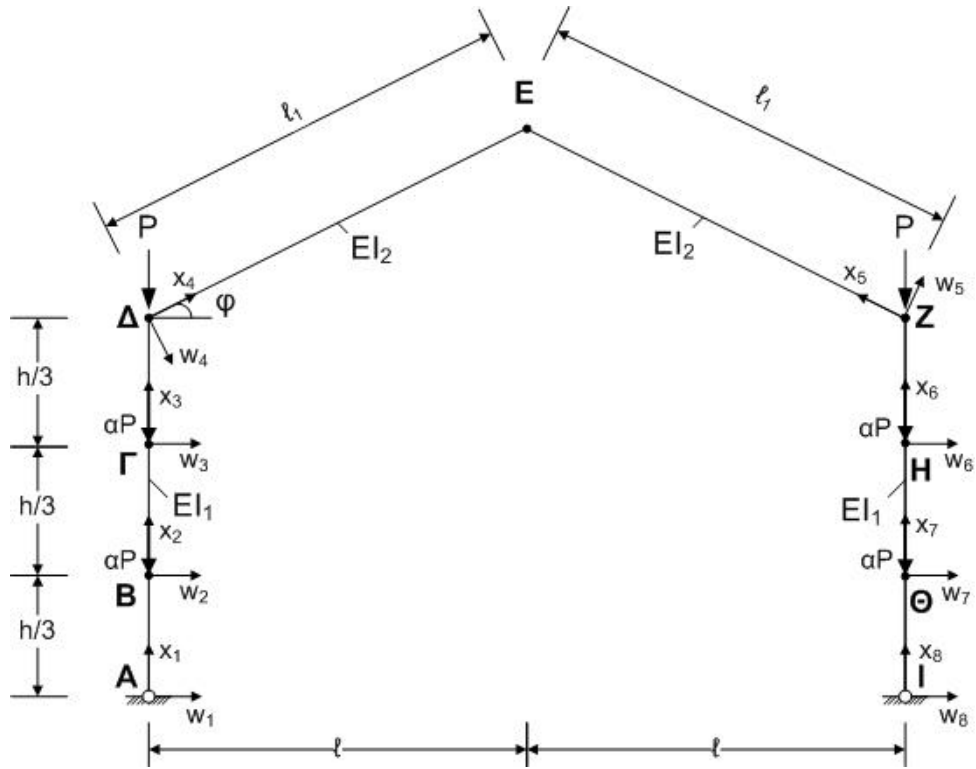
Σχ. 4.19 Διάγραμμα K- r, για λυγισμό με μετάθεση



Σχ. 4.20 Διάγραμμα K- r, για λυγισμό χωρίς μετάθεση

4.4 Πλαίσιο με πρόσθετες φορτίσεις στα τρίτα των στύλων

4.4.1 Επίλυση πλαισίου



Σχ. 4.21

Οι εξισώσεις που διέπουν την ισορροπία των ραβδών AB ΒΓ ΓΔ ΔΕ ΕΖ ΖΗ ΗΘ ΘΙ στην παραμορφωμένη κατάσταση είναι οι εξής:

$$w_1(x) = A_1 * \operatorname{sink}_1 x_1 + B_1 * \operatorname{cosk}_1 x_1 + \Gamma_1 * x_1 + \Delta_1, \left(k_1^2 = \frac{P+aP+aP}{EI_1} \right) \quad (4.49)$$

$$w_2(x) = A_2 * \operatorname{sink}_2 x_2 + B_2 * \operatorname{cosk}_2 x_2 + \Gamma_2 * x_2 + \Delta_2, \left(k_2^2 = \frac{P+aP}{EI_1} \right) \quad (4.50)$$

$$w_3(x) = A_3 * \operatorname{sink}_3 x_3 + B_3 * \operatorname{cosk}_3 x_3 + \Gamma_3 * x_3 + \Delta_3, \left(k_3^2 = \frac{P}{EI_1} \right) \quad (4.51)$$

$$w_4(x) = A_4 * x_4^3 + B_4 * x_4^2 + \Gamma_4 * x_4 + \Delta_4 \quad (4.52)$$

$$w_5(x) = A_5 * x_5^3 + B_5 * x_5^2 + \Gamma_5 * x_5 + \Delta_5 \quad (4.53)$$

$$w_6(x) = A_6 * \operatorname{sink}_3 x_6 + B_6 * \operatorname{cosk}_3 x_6 + \Gamma_6 * x_6 + \Delta_6, \left(k_3^2 = \frac{P}{EI_1} \right) \quad (4.54)$$

$$w_7(x) = A_7 * \operatorname{sink}_2 x_7 + B_7 * \operatorname{cosk}_2 x_7 + \Gamma_7 * x_7 + \Delta_7, \left(k_2^2 = \frac{P+aP}{EI_1} \right) \quad (4.55)$$

$$w_8(x) = A_8 * \operatorname{sink}_1 x_8 + B_8 * \operatorname{cosk}_1 x_8 + \Gamma_8 * x_8 + \Delta_8, \left(k_1^2 = \frac{P+aP+aP}{EI_1} \right) \quad (4.56)$$

Λόγω των συνθηκών των στηρίξεων A, I, οι σταθερές B_1 Δ_1 B_8 Δ_8 μηδενίζονται. Στον κόμβο B:

$$w_1\left(\frac{h}{3}\right) = w_2(0) \Rightarrow A_1 * \sin\left(k_1 \frac{h}{3}\right) + \Gamma_1 * \frac{h}{3} = B_2 + \Delta_2 \quad (4.57)$$

$$w_1' \left(\frac{h}{3} \right) = w_2'(0) \Rightarrow A_1 * k_1 * \cos \left(k_1 \frac{h}{3} \right) + \Gamma_1 = A_2 * k_2 + \Gamma_2 \quad (4.58)$$

$$-EI_1 * w_1'' \left(\frac{h}{3} \right) = -EI_1 * w_2''(0) \Rightarrow A_1 * k_1^2 * \sin \left(k_1 \frac{h}{3} \right) = B_2 * k_2^2 \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} & -EI_1 * w_1''' \left(\frac{h}{3} \right) - (1 + 2a) * P * w_1' \left(\frac{h}{3} \right) + EI_1 * w_2'''(0) + (1 + a) * P * w_2'(0) = 0 \\ \Rightarrow & -(1 + 2a) * P * \Gamma_1 + (1 + a) * P * \Gamma_2 = 0 \Rightarrow -(1 + 2a) * \Gamma_1 + (1 + a) * \Gamma_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.60)$$

Στον κόμβο Γ:

$$w_2 \left(\frac{h}{3} \right) = w_3(0) \Rightarrow A_2 * \sin \left(k_2 \frac{h}{3} \right) + B_2 * \cos \left(k_2 \frac{h}{3} \right) + \Gamma_2 * \frac{h}{3} + \Delta_2 = B_3 + \Delta_3 \quad (4.61)$$

$$w_2' \left(\frac{h}{3} \right) = w_3'(0) \Rightarrow A_2 * k_2 * \cos \left(k_2 \frac{h}{3} \right) - B_2 * k_2 * \sin \left(k_2 \frac{h}{3} \right) + \Gamma_2 = A_3 * k_3 + \Gamma_3 \quad (4.62)$$

$$-EI_1 * w_2'' \left(\frac{h}{3} \right) = -EI_1 * w_3''(0) \Rightarrow A_2 * k_2^2 * \sin \left(k_2 \frac{h}{3} \right) + B_2 * k_2^2 * \cos \left(k_2 \frac{h}{3} \right) = B_3 * k_3^2 \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} & -EI_1 * w_2''' \left(\frac{h}{3} \right) - (1 + a) * P * w_2' \left(\frac{h}{3} \right) + EI_1 * w_3'''(0) + P * w_3'(0) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow & -(1 + a) * P * \Gamma_2 + P * \Gamma_3 = 0 \Rightarrow -(1 + a) * \Gamma_2 + \Gamma_3 = 0 \end{aligned} \quad (4.64)$$

Στον κόμβο Θ:

$$w_8 \left(\frac{h}{3} \right) = w_7(0) \Rightarrow A_8 * \sin \left(k_1 \frac{h}{3} \right) + \Gamma_8 * \frac{h}{3} = B_7 + \Delta_7 \quad (4.65)$$

$$w_8' \left(\frac{h}{3} \right) = w_7'(0) \Rightarrow A_8 * k_1 * \cos \left(k_1 \frac{h}{3} \right) + \Gamma_8 = A_7 * k_2 + \Gamma_7 \quad (4.66)$$

$$-EI_1 * w_8'' \left(\frac{h}{3} \right) = -EI_1 * w_7''(0) \Rightarrow A_8 * k_1^2 * \sin \left(k_1 \frac{h}{3} \right) = B_7 * k_2^2 \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} & -EI_1 * w_8''' \left(\frac{h}{3} \right) - (1 + 2a) * P * w_8' \left(\frac{h}{3} \right) + EI_1 * w_7'''(0) + (1 + a) * P * w_7'(0) = 0 \\ \Rightarrow & -(1 + 2a) * P * \Gamma_8 + (1 + a) * P * \Gamma_7 = 0 \Rightarrow -(1 + 2a) * \Gamma_8 + (1 + a) * \Gamma_7 = 0 \end{aligned} \quad (4.68)$$

Στον κόμβο Η:

$$w_7 \left(\frac{h}{3} \right) = w_6(0) \Rightarrow A_7 * \sin \left(k_2 \frac{h}{3} \right) + B_7 * \cos \left(k_2 \frac{h}{3} \right) + \Gamma_7 * \frac{h}{3} + \Delta_7 = B_6 + \Delta_6 \quad (4.69)$$

$$w_7' \left(\frac{h}{3} \right) = w_6'(0) \Rightarrow A_7 * k_2 * \cos \left(k_2 \frac{h}{3} \right) - B_7 * k_2 * \sin \left(k_2 \frac{h}{3} \right) + \Gamma_7 = A_6 * k_3 + \Gamma_6 \quad (4.70)$$

$$-EI_1 * w_7'' \left(\frac{h}{3} \right) = -EI_1 * w_6''(0) \Rightarrow A_7 * k_2^2 * \sin \left(k_2 \frac{h}{3} \right) + B_7 * k_2^2 * \cos \left(k_2 \frac{h}{3} \right) = B_6 * k_3^2 \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} & -EI_1 * w_7''' \left(\frac{h}{3} \right) - (1 + a) * P * w_7' \left(\frac{h}{3} \right) + EI_1 * w_6'''(0) + P * w_6'(0) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow & -(1 + a) * P * \Gamma_7 + P * \Gamma_6 = 0 \Rightarrow -(1 + a) * \Gamma_7 + \Gamma_6 = 0 \end{aligned} \quad (4.72)$$

Αντίστοιχα με την πρώτη περίπτωση στους κόμβους Δ, Ζ ισχύει:

$$\begin{aligned} \sin(\varphi) * w_4(0) = w_3 \left(\frac{h}{3} \right) \Rightarrow & A_3 * \sin \left(k_3 \frac{h}{3} \right) + B_3 * \cos \left(k_3 \frac{h}{3} \right) + \Gamma_3 * \frac{h}{3} + \Delta_3 = \\ \sin(\varphi) * \Delta_4 & \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$\sin(\varphi) * w_5(0) = w_6\left(\frac{h}{3}\right) \Rightarrow A_6 * \sin\left(k_3 \frac{h}{3}\right) + B_6 * \cos\left(k_3 \frac{h}{3}\right) + \Gamma_6 * \frac{h}{3} + \Delta_6 = \sin(\varphi) * \Delta_5 \quad (4.74)$$

Λόγω συνέχειας στον κόμβο Δ έχουμε ισότητα στρωφών και ισορροπία ροπών:

$$w_3'\left(\frac{h}{3}\right) = w_4'(0) \Rightarrow A_3 * k_3 * \cos\left(k_3 \frac{h}{3}\right) - B_3 * k_3 * \sin\left(k_3 \frac{h}{3}\right) + \Gamma_3 = \Gamma_4 \quad (4.75)$$

$$\begin{aligned} -EI_1 * w_3''\left(\frac{h}{3}\right) &= -EI_2 * w_4''(0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} * (A_3 * k_3^2 * \sin\left(k_3 \frac{h}{3}\right) + B_3 * k_3^2 * \cos\left(k_3 \frac{h}{3}\right)) &= -2 * B_4 \end{aligned} \quad (4.76)$$

Όμοια στον κόμβο Z :

$$w_6'\left(\frac{h}{3}\right) = w_5'(0) \Rightarrow A_6 * k_3 * \cos\left(k_3 \frac{h}{3}\right) - B_6 * k_3 * \sin\left(k_3 \frac{h}{3}\right) + \Gamma_6 = \Gamma_5 \quad (4.77)$$

$$\begin{aligned} -EI_1 * w_6''\left(\frac{h}{3}\right) &= -EI_2 * w_5''(0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} * (A_6 * k_3^2 * \sin\left(k_3 \frac{h}{3}\right) + B_6 * k_3^2 * \cos\left(k_3 \frac{h}{3}\right)) &= -2 * B_5 \end{aligned} \quad (4.78)$$

Όμοια στον κόμβο E :

$$w_4'(l_1) = w_5'(l_1) \Rightarrow 3 * A_4 * l_1^2 + 2 * B_4 * l_1 + \Gamma_4 = 3 * A_5 * l_1^2 + 2 * B_5 * l_1 + \Gamma_5 \quad (4.79)$$

$$-EI_2 * w_4''(l_1) = EI_2 * w_5''(l_1) \Rightarrow 6 * A_4 * l_1 + 2 * B_4 = -6 * A_5 * l_1 - 2 * B_5 \quad (4.80)$$

Όμοια με τις εξισώσεις (4.13)(4.14)(4.15)(4.16):

$$\begin{aligned} w_3\left(\frac{h}{3}\right) = w_6\left(\frac{h}{3}\right) &\Rightarrow A_3 * \sin\left(k_3 \frac{h}{3}\right) + B_3 * \cos\left(k_3 \frac{h}{3}\right) + \Gamma_3 * \frac{h}{3} + \Delta_3 = A_6 * \\ \sin\left(k_3 \frac{h}{3}\right) + B_6 * \cos\left(k_3 \frac{h}{3}\right) + \Gamma_6 * \frac{h}{3} + \Delta_6 \end{aligned} \quad (4.81)$$

$$\begin{aligned} -EI_1 * w_3'''\left(\frac{h}{3}\right) - P * w_3'\left(\frac{h}{3}\right) - EI_1 * w_6'''\left(\frac{h}{3}\right) - P * w_6'\left(\frac{h}{3}\right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -P * \Gamma_3 - P * \Gamma_6 = 0 &\Rightarrow \Gamma_3 + \Gamma_6 = 0 \end{aligned} \quad (4.82)$$

$$\begin{aligned} \sin(\varphi) * w_4(l_1) &= \sin(\varphi) * w_5(l_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow A_4 * l_1^3 + B_4 * l_1^2 + \Gamma_4 * l_1 + \Delta_4 &= A_5 * l_1^3 + B_5 * l_1^2 + \Gamma_5 * l_1 + \Delta_5 \end{aligned} \quad (4.83)$$

$$\sin(\varphi) * w_4(0) = \sin(\varphi) * w_4(l_1) \Rightarrow A_4 * l_1^3 + B_4 * l_1^2 + \Gamma_4 * l_1 + \Delta_4 = \Delta_4 \quad (4.84)$$

Αντίστοιχα με την προηγούμενη περίπτωση θέτω $k_3 = k$ οπότε θα έχουμε $k_1 = \sqrt{(1 + 2\alpha)} * k$ και $k_2 = \sqrt{(1 + \alpha)} * k$ ενώ πάλι θέτουμε $kh = x$ και $\rho = \frac{I_1}{I_2}$. Στην προκειμένη περίπτωση οι εξισώσεις (4.57)-(4.84) σχηματίζουν ένα σύστημα 28 επί 28.

Όμοια και στη συγκεκριμένη περίπτωση παραθέτουμε κάποιους χαρακτηριστικούς όρους:

$$\begin{aligned} &432 * k^5 * l_1^4 * \sin(x/3) * \cos((2^{(1/2)} * x)/3) * \sin((3^{(1/2)} * x)/3)^2 * \sin(f)^2 + \dots - \\ &528 * h * k^6 * l_1^4 * \cos(x/3)^2 * \cos((2^{(1/2)} * x)/3)^2 * \cos((3^{(1/2)} * x)/3)^2 * \sin(f)^2 - \dots - \\ &720 * k^6 * l_1^5 * \rho * \cos(x/3)^2 * \cos((3^{(1/2)} * x)/3)^2 * \sin((2^{(1/2)} * x)/3)^2 * \sin(f)^2 - \dots - \\ &9 * 2^{(1/2)} * k^7 * l_1^6 * \rho^2 * \sin(x/3)^2 * \sin((2^{(1/2)} * x)/3)^3 * \sin((3^{(1/2)} * x)/3)^2 * \sin(f)^2 - \\ &\dots + \\ &308 * h * k^7 * l_1^5 * \rho * \cos(x/3) * \sin(x/3) * \cos((2^{(1/2)} * x)/3)^2 * \cos((3^{(1/2)} * x)/3)^2 * \sin(f)^2 \\ &+ \dots - \end{aligned}$$

$$88 \cdot 3^{1/2} \cdot h \cdot k^8 \cdot l_1^6 \cdot \rho^2 \cdot \cos(x/3) \cdot \sin(x/3) \cdot \cos((2^{1/2} \cdot x)/3)^2 \cdot \cos((3^{1/2} \cdot x)/3) \cdot \sin((3^{1/2} \cdot x)/3) \cdot \sin(f)^2 + \dots = 0$$

Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις παρατηρώντας ολόκληρη την εξίσωση συμπεραίνουμε ότι μπροστά από τα ημιτονοειδή γινόμενα εμφανίζονται τα εξής γινόμενα: $k^5 \cdot l_1^4 \cdot \sin(f)^2$, $k^6 \cdot l_1^5 \cdot \rho \cdot \sin(f)^2$, $h \cdot k^6 \cdot l_1^4 \cdot \sin(f)^2$, $h \cdot k^7 \cdot l_1^5 \cdot \rho \cdot \sin(f)^2$, $k^7 \cdot l_1^6 \cdot \rho^2 \cdot \sin(f)^2$, $h \cdot k^8 \cdot l_1^6 \cdot \rho^2 \cdot \sin(f)^2$. Αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση με h^5 και ταυτόχρονα διαιρέσουμε με l_1^4 και $\sin(f)^2$ έχουμε:

$$k^5 \cdot l_1^4 \cdot \sin(f)^2 \Rightarrow (kh)^5$$

$$k^6 \cdot l_1^5 \cdot \rho \cdot \sin(f)^2 \Rightarrow (kh)^6 \cdot \frac{l_1 \cdot l_1}{l_2 \cdot h}$$

$$h \cdot k^6 \cdot l_1^4 \cdot \sin(f)^2 \Rightarrow (kh)^6$$

$$h \cdot k^7 \cdot l_1^5 \cdot \rho \cdot \sin(f)^2 \Rightarrow (kh)^7 \cdot \frac{l_1 \cdot l_1}{l_2 \cdot h}$$

$$k^7 \cdot l_1^6 \cdot \rho^2 \cdot \sin(f)^2 \Rightarrow (kh)^7 \cdot \left(\frac{l_1 \cdot l_1}{l_2 \cdot h}\right)^2$$

$$h \cdot k^8 \cdot l_1^6 \cdot \rho^2 \cdot \sin(f)^2 \Rightarrow (kh)^8 \cdot \left(\frac{l_1 \cdot l_1}{l_2 \cdot h}\right)^2$$

Θέτοντας $r_1 = \frac{l_1 \cdot l_1}{l_2 \cdot h}$, $kh=x$ η εξίσωση έχει έναν άγνωστο (το x) αφού το r_1 θα αντικατασταθεί με αριθμό όπως φαίνεται στους πίνακες.

Για τον αντιμετρικό λυγισμό χωρίς μετάθεση ισχύουν οι εξισώσεις (4.57)-(4.81) και επιπλέον έχουμε:

$$w_3 \left(\frac{h}{3}\right) = 0 \Rightarrow A_3 \cdot \sin\left(k_3 \frac{h}{3}\right) + B_3 \cdot \cos\left(k_3 \frac{h}{3}\right) + \Gamma_3 \cdot \frac{h}{3} + \Delta_3 = 0 \quad (4.85)$$

$$\sin(\varphi) \cdot w_4(l_1) = 0 \Rightarrow A_4 \cdot l_1^3 + B_4 \cdot l_1^2 + \Gamma_4 \cdot l_1 + \Delta_4 = 0 \quad (4.86)$$

$$\sin(\varphi) \cdot w_5(l_1) = 0 \Rightarrow A_5 \cdot l_1^3 + B_5 \cdot l_1^2 + \Gamma_5 \cdot l_1 + \Delta_5 = 0 \quad (4.87)$$

Αντίστοιχα στην εξίσωση που προκύπτει από την επίλυση του αντιμετρικού λυγισμού χωρίς μετάθεση συναντάμε τα εξής γινόμενα:

$$k^4 \cdot l_1^5 \Rightarrow (kh)^4$$

$$k^5 \cdot l_1^5 \cdot h \Rightarrow (kh)^5$$

$$\rho \cdot k^5 \cdot l_1^6 \Rightarrow (kh)^5 \cdot \frac{l_1 \cdot l_1}{l_2 \cdot h}$$

$$h^2 \cdot k^6 \cdot l_1^5 \Rightarrow (kh)^6$$

$$k^6 \cdot l_1^7 \cdot \rho^2 \Rightarrow (kh)^6 \cdot \left(\frac{l_1 \cdot l_1}{l_2 \cdot h}\right)^2$$

$$k^6 \cdot l_1^6 \cdot h \cdot \rho \Rightarrow (kh)^6 \cdot \left(\frac{l_1 \cdot l_1}{l_2 \cdot h}\right)$$

$$h^2 \cdot k^7 \cdot l_1^6 \cdot \rho \Rightarrow (kh)^7 \cdot \left(\frac{l_1 \cdot l_1}{l_2 \cdot h}\right)$$

$$h \cdot k^7 \cdot l_1^7 \cdot \rho^2 \Rightarrow (kh)^7 \cdot \left(\frac{l_1 \cdot l_1}{l_2 \cdot h}\right)^2$$

$$h^2 \cdot k^8 \cdot l_1^7 \cdot \rho^2 \Rightarrow (kh)^8 \cdot \left(\frac{l_1 \cdot l_1}{l_2 \cdot h}\right)^2$$

4.4.2 Πίνακες-διαγράμματα κρίσιμων φορτίων και ισοδύναμου μήκους λυγισμού

i. $\alpha=0,5$

I_1/I_2 $2l/h$	0,25		1		4	
0,5	$r_1=0,0665$	kh=1,1543	$r_1=0,266$	kh=1,0919	$r_1=1,064$	kh=0,9097
		kh=3,3882		kh=3,236		kh=2,9367
	$P_{cr}=1,3324*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,7216	$P_{cr}=1,1922*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,8772	$P_{cr}=0,8276*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,4534
	$P_{cr}=11,4799*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9272	$P_{cr}=10,4717*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9708	$P_{cr}=8,6242*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0698
1	$r_1=0,133$	kh=1,1326	$r_1=0,532$	kh=1,0209	$r_1=2,128$	kh=0,7617
		kh=3,3315		kh=3,0974		kh=2,7923
	$P_{cr}=1,2828*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,7738	$P_{cr}=1,0422*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,0773	$P_{cr}=0,5802*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,1244
	$P_{cr}=11,0989*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9430	$P_{cr}=9,5939*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0143	$P_{cr}=7,7969*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1251
2	$r_1=0,266$	kh=1,0919	$r_1=1,064$	kh=0,9097	$r_1=4,256$	kh=0,6002
		kh=3,236		kh=2,9367		kh=2,6884
	$P_{cr}=1,1922*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,8772	$P_{cr}=0,8276*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,4534	$P_{cr}=0,3602*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,2342
	$P_{cr}=10,4717*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9708	$P_{cr}=8,6242*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0698	$P_{cr}=7,2275*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1686
4	$r_1=0,532$	kh=1,0209	$r_1=2,128$	kh=0,7617	$r_1=8,512$	kh=0,4521
		kh=3,0974		kh=2,7923		kh=2,6248
	$P_{cr}=1,0422*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,0773	$P_{cr}=0,5802*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,1244	$P_{cr}=0,2044*\frac{EI_1}{h^2}$	K=6,9489
	$P_{cr}=9,5939*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0143	$P_{cr}=7,7969*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1251	$P_{cr}=6,8896*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1969

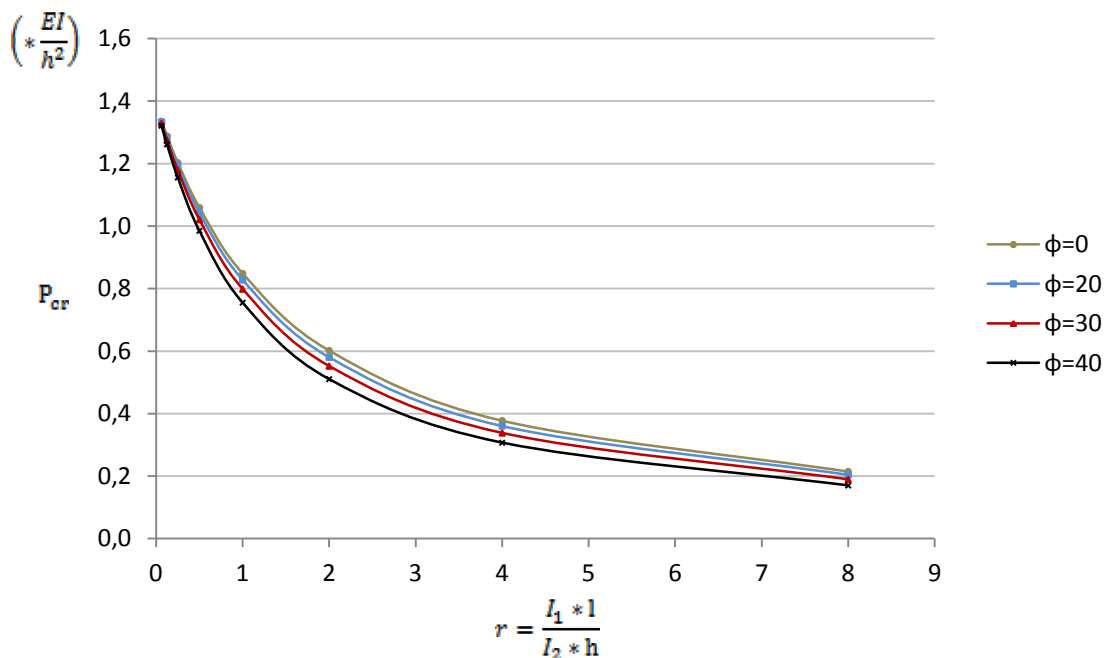
Πίνακας 4.13 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο), λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\varphi=20$

I_1/I_2 $2l/h$	0,25		1		4	
0,5	$r_1=0,0722$	kh=1,1525	$r_1=0,2887$	kh=1,0855	$r_1=1,1548$	kh=0,8935
		kh=3,3830		kh=3,2218		kh=2,9181
	$P_{cr}=1,3283*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,7259	$P_{cr}=1,1783*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,8941	$P_{cr}=0,7983*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,5161
	$P_{cr}=11,4447*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9286	$P_{cr}=10,3800*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9751	$P_{cr}=8,5153*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0766
1	$r_1=0,1444$	kh=1,1291	$r_1=0,5774$	kh=1,0101	$r_1=2,3096$	kh=0,7429
		kh=3,3225		kh=3,0789		kh=2,7776
	$P_{cr}=1,2749*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,7824	$P_{cr}=1,0203*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,1102	$P_{cr}=0,5519*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,2288
	$P_{cr}=11,0390*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9456	$P_{cr}=9,4796*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0204	$P_{cr}=7,7151*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1310
2	$r_1=0,2887$	kh=1,0855	$r_1=1,1548$	kh=0,8935	$r_1=4,6192$	kh=0,5813
		kh=3,2218		kh=2,9181		kh=2,679
	$P_{cr}=1,1783*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,8941	$P_{cr}=0,7983*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,5161	$P_{cr}=0,3379*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,4044
	$P_{cr}=10,3800*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9751	$P_{cr}=8,5153*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0766	$P_{cr}=7,1770*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1727
4	$r_1=0,5774$	kh=1,0101	$r_1=2,3096$	kh=0,7429	$r_1=9,2384$	kh=0,4353
		kh=3,0789		kh=2,7776		kh=2,6193
	$P_{cr}=1,0203*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,1102	$P_{cr}=0,5519*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,2288	$P_{cr}=0,1895*\frac{EI_1}{h^2}$	K=7,2171
	$P_{cr}=9,4796*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0204	$P_{cr}=7,7151*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1310	$P_{cr}=6,8607*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1994

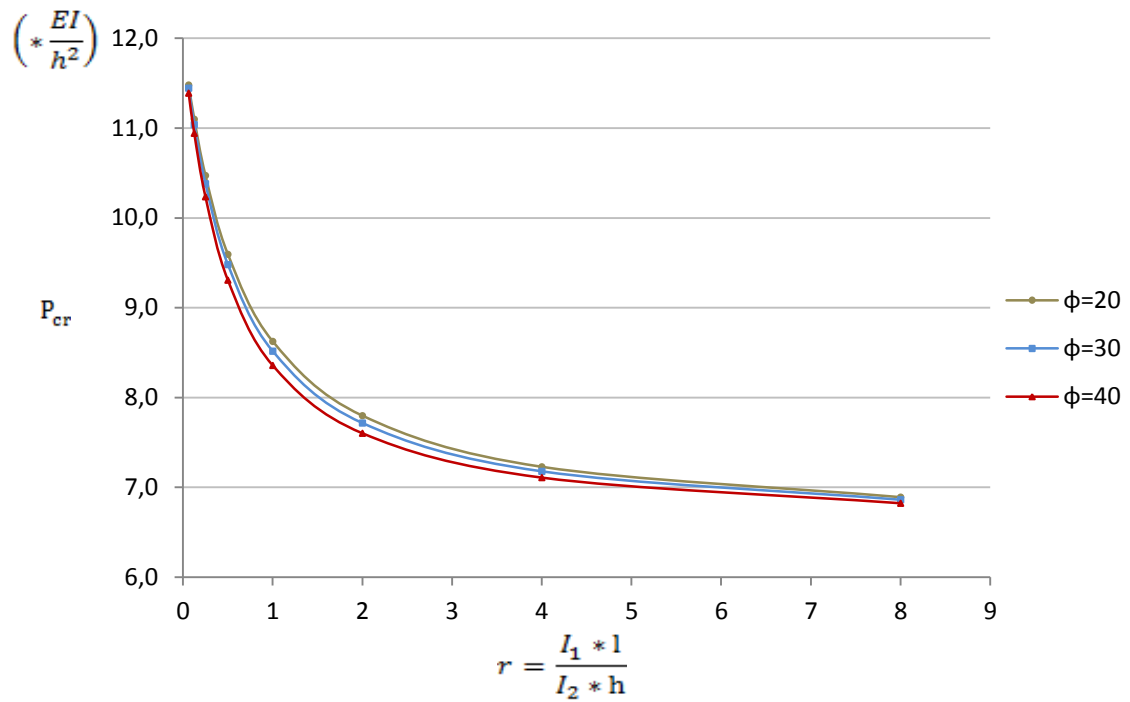
Πίνακας 4.14 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο), λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\varphi=30$

I_1/I_2 $2l/h$	0,25		1		4	
0,5	$r_1=0,0816$	kh=1,1493	$r_1=0,3264$	kh=1,0749	$r_1=1,3056$	kh=0,8688
		kh=3,3748		kh=3,1992		kh=2,8908
	$P_{cr}=1,3209*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,7335	$P_{cr}=1,1554*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,9227	$P_{cr}=0,7548*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,6160
	$P_{cr}=11,3893*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9309	$P_{cr}=10,2349*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,982	$P_{cr}=8,3567*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0868
1	$r_1=0,1632$	kh=1,1231	$r_1=0,6528$	kh=0,9923	$r_1=2,6112$	kh=0,7142
		kh=3,3079		kh=3,0506		kh=2,7570
	$P_{cr}=1,2614*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,7973	$P_{cr}=0,9847*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,1660	$P_{cr}=0,5101*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,3988
	$P_{cr}=10,9422*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,9497	$P_{cr}=9,3062*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0298	$P_{cr}=7,6010*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1395
2	$r_1=0,3264$	kh=1,0749	$r_1=1,3056$	kh=0,8688	$r_1=5,2224$	kh=0,5539
		kh=3,1992		kh=2,8908		kh=2,6659
	$P_{cr}=1,1554*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,9227	$P_{cr}=0,7548*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,6160	$P_{cr}=0,3068*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,6718
	$P_{cr}=10,2349*\frac{EI_1}{h^2}$	K=0,982	$P_{cr}=8,3567*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0868	$P_{cr}=7,1070*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1784
4	$r_1=0,6528$	kh=0,9923	$r_1=2,6112$	kh=0,7142	$r_1=10,4448$	kh=0,4122
		kh=3,0506		kh=2,7570		kh=2,6118
	$P_{cr}=0,9847*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,1660	$P_{cr}=0,5101*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,3988	$P_{cr}=0,1699*\frac{EI_1}{h^2}$	K=7,6215
	$P_{cr}=9,3062*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0298	$P_{cr}=7,6010*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1395	$P_{cr}=6,8215*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,2028

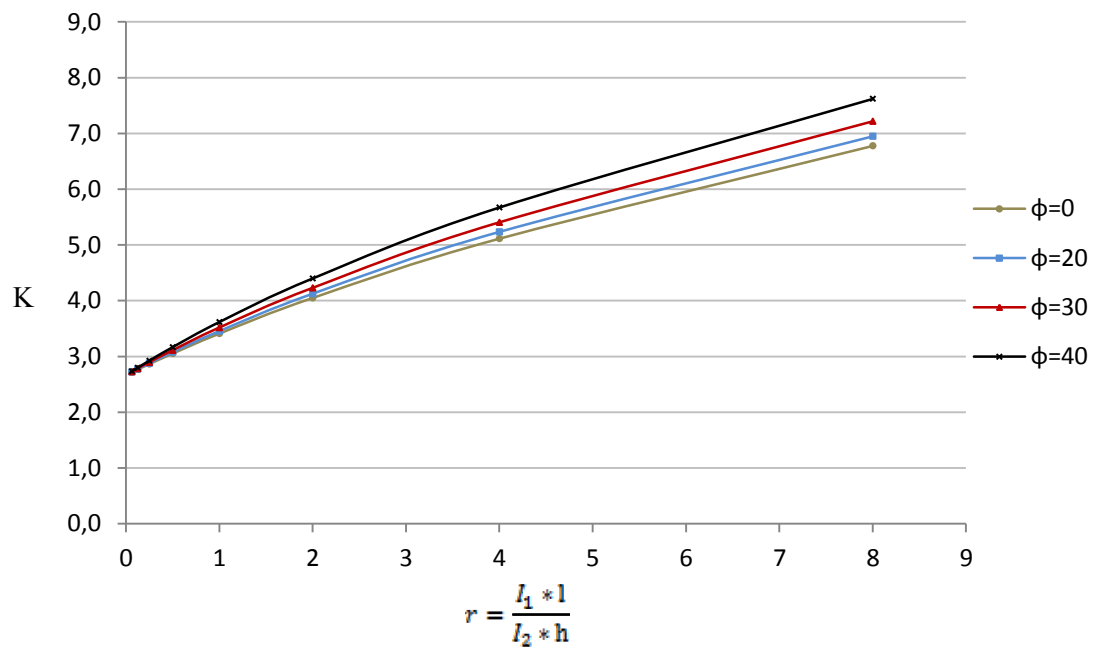
Πίνακας 4.15 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο), λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\phi=40$



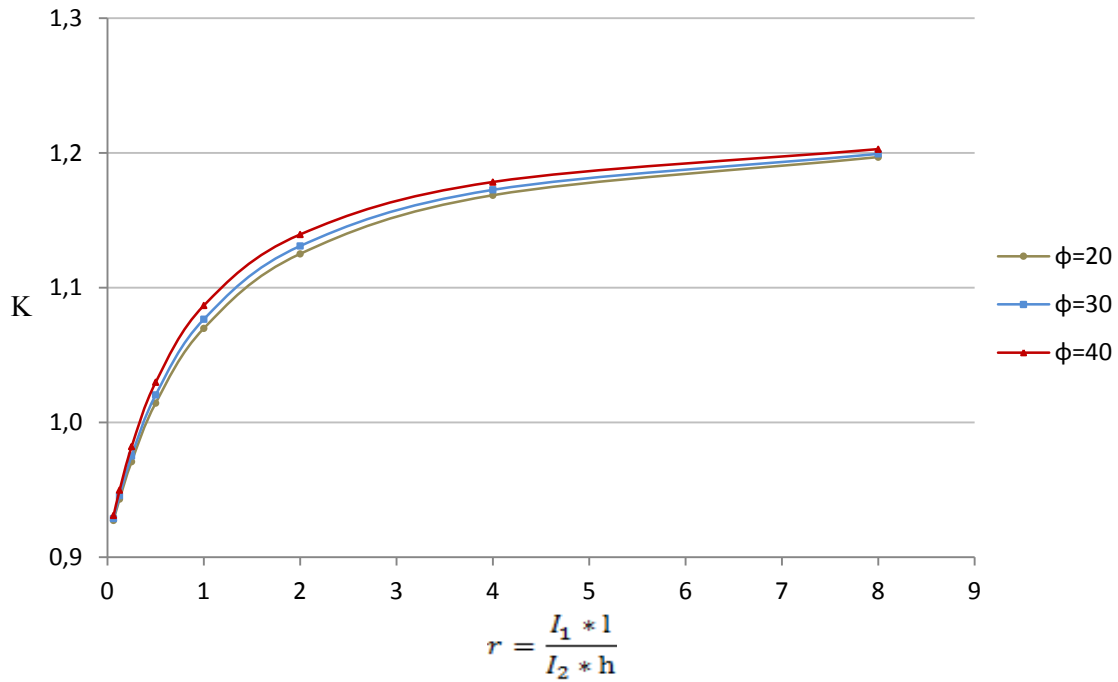
Σχ. 4.22 Διάγραμμα P_{cr} - r , για λυγισμό με μετάθεση



Σχ. 4.23 Διάγραμμα P_{cr} - r , για λυγισμό χωρίς μετάθεση



Σχ. 4.24 Διάγραμμα K - r , για λυγισμό με μετάθεση



Σχ. 4.25 Διάγραμμα K- r, για λυγισμό χωρίς μετάθεση

ii. $\alpha=1$

I_1/I_2 $2l/h$	0,25		1		4	
	0,5	$r_1=0,0665$ $P_{Cr}=0,9262 * \frac{EI_1}{h^2}$ $P_{Cr}=8,1265 * \frac{EI_1}{h^2}$	kh=0,9624 kh=2,8507 K=3,2643 K=1,102	$r_1=0,266$ $P_{Cr}=0,8339 * \frac{EI_1}{h^2}$ $P_{Cr}=7,4595 * \frac{EI_1}{h^2}$	kh=0,9132 kh=2,7312 K=3,4402 K=1,1503	$r_1=1,064$ $P_{Cr}=0,5887 * \frac{EI_1}{h^2}$ $P_{Cr}=6,2425 * \frac{EI_1}{h^2}$
1	$r_1=0,133$ $P_{Cr}=0,8932 * \frac{EI_1}{h^2}$ $P_{Cr}=7,8736 * \frac{EI_1}{h^2}$	kh=0,9451 kh=2,806 K=3,3241 K=1,1196	$r_1=0,532$ $P_{Cr}=0,7336 * \frac{EI_1}{h^2}$ $P_{Cr}=6,8828 * \frac{EI_1}{h^2}$	kh=0,8565 kh=2,6235 K=3,6679 K=1,1975	$r_1=2,128$ $P_{Cr}=0,4189 * \frac{EI_1}{h^2}$ $P_{Cr}=5,6906 * \frac{EI_1}{h^2}$	kh=0,6472 kh=2,3855 K=4,8541 K=1,317
2	$r_1=0,266$ $P_{Cr}=0,8339 * \frac{EI_1}{h^2}$ $P_{Cr}=7,4595 * \frac{EI_1}{h^2}$	kh=0,9132 kh=2,7312 K=3,4402 K=1,1503	$r_1=1,064$ $P_{Cr}=0,5887 * \frac{EI_1}{h^2}$ $P_{Cr}=6,2425 * \frac{EI_1}{h^2}$	kh=0,7673 kh=2,4985 K=4,0943 K=1,2574	$r_1=4,256$ $P_{Cr}=0,2632 * \frac{EI_1}{h^2}$ $P_{Cr}=5,307 * \frac{EI_1}{h^2}$	kh=0,5130 kh=2,3037 K=6,1240 K=1,3637
4	$r_1=0,532$ $P_{Cr}=0,7336 * \frac{EI_1}{h^2}$ $P_{Cr}=6,8828 * \frac{EI_1}{h^2}$	kh=0,8565 kh=2,6235 K=3,6679 K=1,1975	$r_1=2,128$ $P_{Cr}=0,4189 * \frac{EI_1}{h^2}$ $P_{Cr}=5,6906 * \frac{EI_1}{h^2}$	kh=0,6472 kh=2,3855 K=4,8541 K=1,317	$r_1=8,512$ $P_{Cr}=0,1504 * \frac{EI_1}{h^2}$ $P_{Cr}=5,0769 * \frac{EI_1}{h^2}$	kh=0,3878 kh=2,2532 K=8,1011 K=1,3943

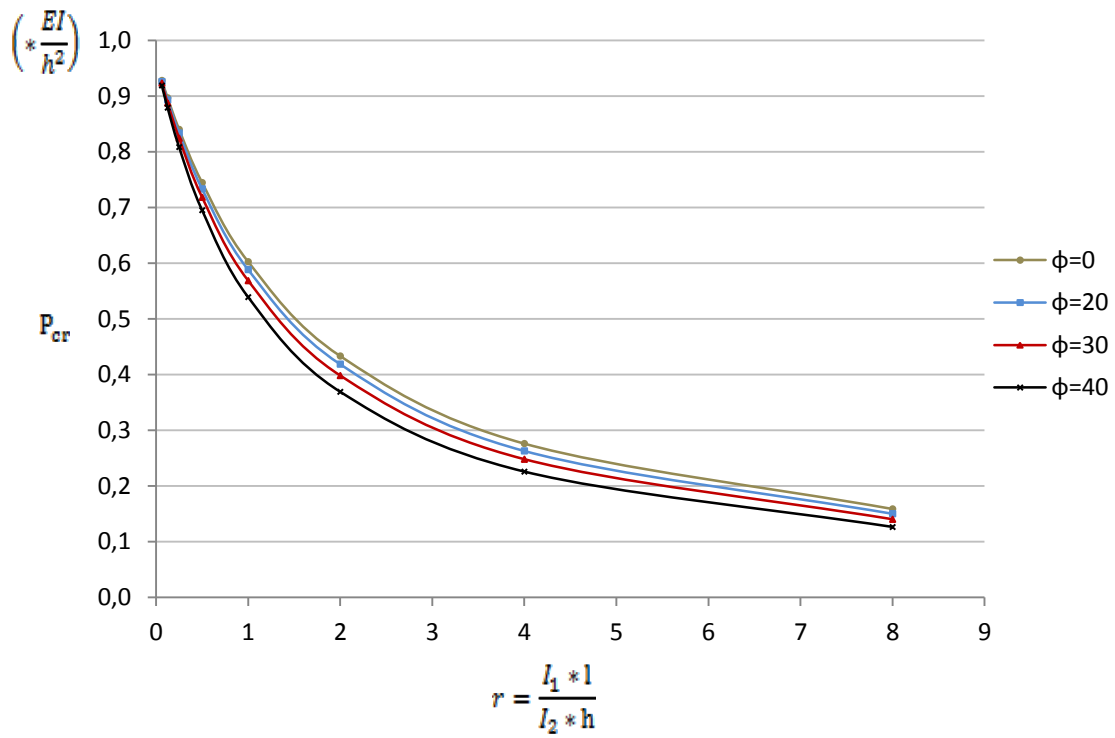
Πίνακας 4.16 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο), λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\phi=20$

I_1/I_2 $2l/h$	0,25		1		4		
0,5	$r_1=0,0722$	kh=0,9610	$r_1=0,2887$	kh=0,9080	$r_1=1,1548$	kh=0,7542	
		kh=2,8466		kh=2,7202		kh=2,4839	
	$P_{cr}=0,9235*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,2691$	$P_{cr}=0,8245*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,4599$	$P_{cr}=0,5688*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,1655$	
	$P_{cr}=8,1031*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,1036$	$P_{cr}=7,3995*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,1549$	$P_{cr}=6,1698*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,2648$	
1	$r_1=0,1444$	kh=0,9422	$r_1=0,5774$	kh=0,8476	$r_1=2,3096$	kh=0,6312	
		kh=2,7989		kh=2,609		kh=2,374	
	$P_{cr}=0,8877*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,3343$	$P_{cr}=0,7184*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,7065$	$P_{cr}=0,3984*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,9772$	
	$P_{cr}=7,8338*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,1224$	$P_{cr}=6,8069*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,2041$	$P_{cr}=5,6359*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,3233$	
2	$r_1=0,2887$	kh=0,9080	$r_1=1,1548$	kh=0,7542	$r_1=4,6192$	kh=0,4982	
		kh=2,7202		kh=2,4839		kh=2,2963	
	$P_{cr}=0,8245*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,4599$	$P_{cr}=0,5688*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,1655$	$P_{cr}=0,2482*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=6,3059$	
	$P_{cr}=7,3995*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,1549$	$P_{cr}=6,1698*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,2648$	$P_{cr}=5,273*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,3681$	
4	$r_1=0,5774$	kh=0,8476	$r_1=2,3096$	kh=0,6312	$r_1=9,2384$	kh=0,3747	
		kh=2,609		kh=2,374		kh=2,2489	
	$P_{cr}=0,7184*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,7065$	$P_{cr}=0,3984*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,9772$	$P_{cr}=0,1404*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=8,3843$	
	$P_{cr}=6,8069*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,2041$	$P_{cr}=5,6359*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,3233$	$P_{cr}=5,0576*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,3969$	

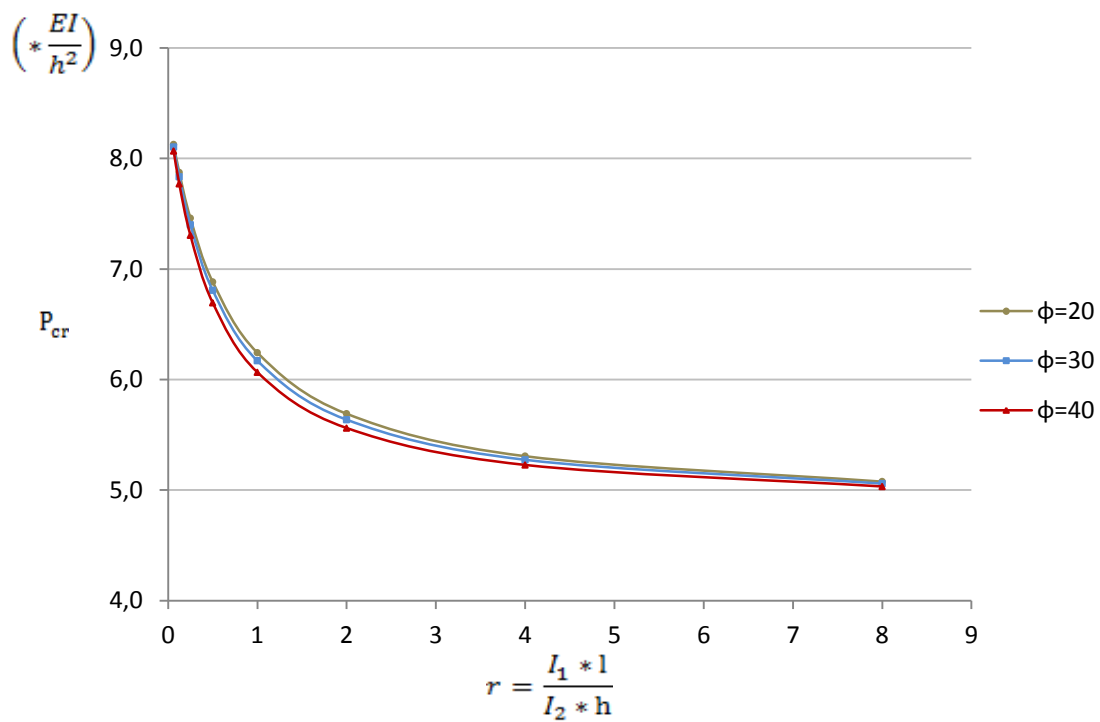
Πίνακας 4.17 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο), λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\varphi=30$

I_1/I_2 $2l/h$	0,25		1		4		
0,5	$r_1=0,0816$	kh=0,9587	$r_1=0,3264$	kh=0,8992	$r_1=1,3056$	kh=0,7343	
		kh=2,8401		kh=2,7026		kh=2,4626	
	$P_{cr}=0,9191*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,2769$	$P_{cr}=0,8086*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,4938$	$P_{cr}=0,5392*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,2784$	
	$P_{cr}=8,0662*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,1062$	$P_{cr}=7,3040*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,1624$	$P_{cr}=6,0644*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,2757$	
1	$r_1=0,1632$	kh=0,9377	$r_1=0,6528$	kh=0,8338	$r_1=2,6112$	kh=0,6076	
		kh=2,7874		kh=2,5871		kh=2,3579	
	$P_{cr}=0,8793*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,3503$	$P_{cr}=0,6952*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,7678$	$P_{cr}=0,3692*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=5,1705$	
	$P_{cr}=7,7696*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,1271$	$P_{cr}=6,6931*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,2143$	$P_{cr}=5,5597*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,3324$	
2	$r_1=0,3264$	kh=0,8992	$r_1=1,3056$	kh=0,7343	$r_1=5,2224$	kh=0,4753	
		kh=2,7026		kh=2,4626		kh=2,2860	
	$P_{cr}=0,8086*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,4938$	$P_{cr}=0,5392*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,2784$	$P_{cr}=0,2259*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=6,6097$	
	$P_{cr}=7,3040*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,1624$	$P_{cr}=6,0644*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,2757$	$P_{cr}=5,2258*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,3743$	
4	$r_1=0,6528$	kh=0,8338	$r_1=2,6112$	kh=0,6076	$r_1=10,4448$	kh=0,3557	
		kh=2,5871		kh=2,3579		kh=2,2430	
	$P_{cr}=0,6952*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,7678$	$P_{cr}=0,3692*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=5,1705$	$P_{cr}=0,1265*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=8,8321$	
	$P_{cr}=6,6931*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,2143$	$P_{cr}=5,5597*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,3324$	$P_{cr}=5,0310*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,4006$	

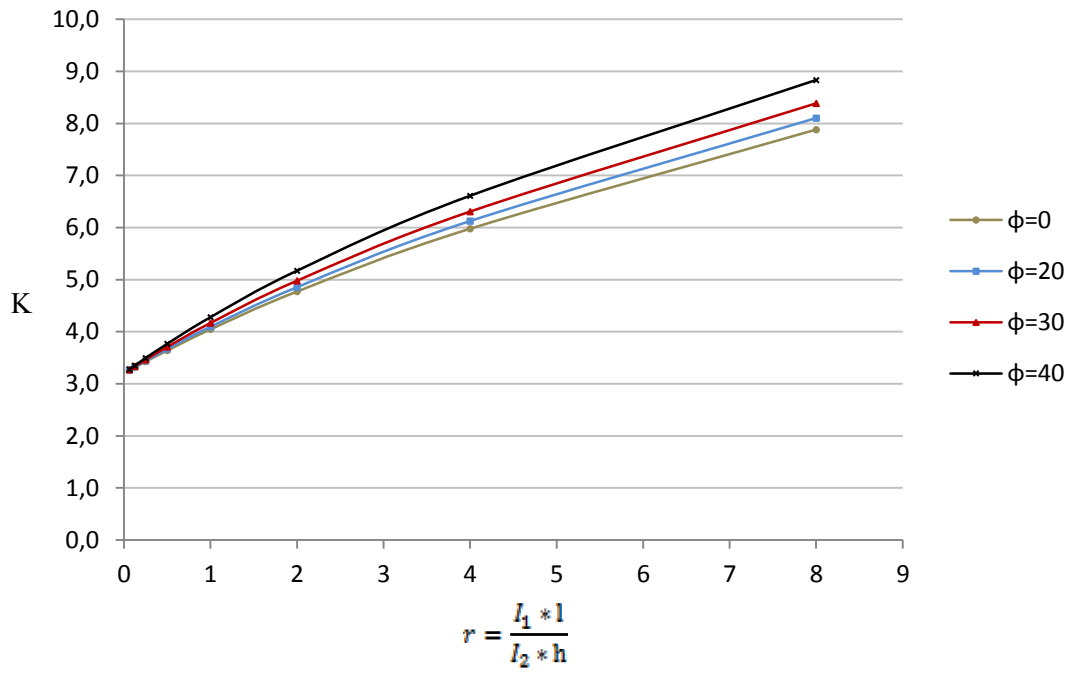
Πίνακας 4.18 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο), λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\varphi=40$



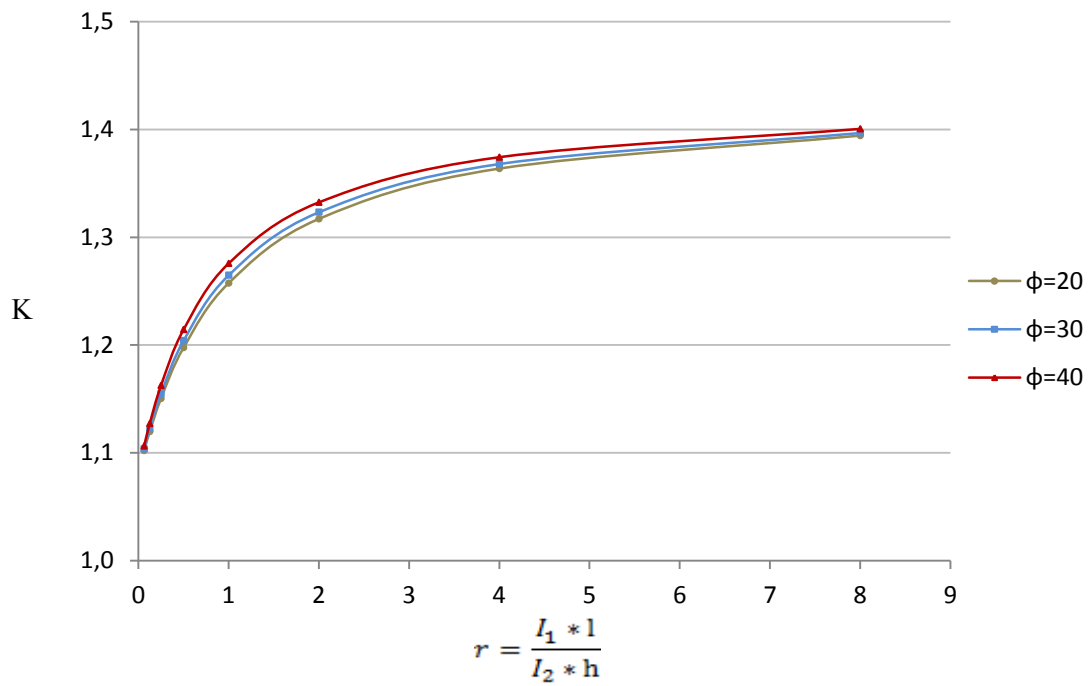
Σχ. 4.26 Διάγραμμα P_{cr} - r , για λυγισμό με μετάθεση



Σχ. 4.27 Διάγραμμα P_{cr} - r , για λυγισμό χωρίς μετάθεση



Σχ. 4.28 Διάγραμμα K- r, για λυγισμό με μετάθεση



Σχ. 4.29 Διάγραμμα K- r, για λυγισμό χωρίς μετάθεση

iii. $\alpha=2$

I_1/I_2 $2l/h$	0,25		1		4	
0,5	$r_1=0,0665$	kh=0,7582	$r_1=0,266$	kh=0,7211	$r_1=1,064$	kh=0,6102
		kh=2,2628		kh=2,1735		kh=2,0017
	$P_{cr}=0,5749*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,1435	$P_{cr}=0,5200*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,3567	$P_{cr}=0,3723*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,1485
	$P_{cr}=5,1203*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,3884	$P_{cr}=4,7241*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,4454	$P_{cr}=4,0068*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,5695
1	$r_1=0,133$	kh=0,7453	$r_1=0,532$	kh=0,6781	$r_1=2,128$	kh=0,5180
		kh=2,2292		kh=2,0939		kh=1,9182
	$P_{cr}=0,5555*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,2152	$P_{cr}=0,4598*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,6329	$P_{cr}=0,2683*\frac{EI_1}{h^2}$	K=6,6049
	$P_{cr}=4,9693*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,4093	$P_{cr}=4,3844*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,5004	$P_{cr}=3,6795*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,6378
2	$r_1=0,266$	kh=0,7211	$r_1=1,064$	kh=0,6102	$r_1=4,256$	kh=0,4133
		kh=2,1735		kh=2,0017		kh=1,8575
	$P_{cr}=0,5200*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,3567	$P_{cr}=0,3723*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,1485	$P_{cr}=0,1708*\frac{EI_1}{h^2}$	K=7,6012
	$P_{cr}=4,7241*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,4454	$P_{cr}=4,0068*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,5695	$P_{cr}=3,4503*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,6913
4	$r_1=0,532$	kh=0,6781	$r_1=2,128$	kh=0,5180	$r_1=8,512$	kh=0,3139
		kh=2,0939		kh=1,9182		kh=1,8199
	$P_{cr}=0,4598*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,6329	$P_{cr}=0,2683*\frac{EI_1}{h^2}$	K=6,6049	$P_{cr}=0,0985*\frac{EI_1}{h^2}$	K=10,0083
	$P_{cr}=4,3844*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,5004	$P_{cr}=3,6795*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,6378	$P_{cr}=3,3120*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,7262

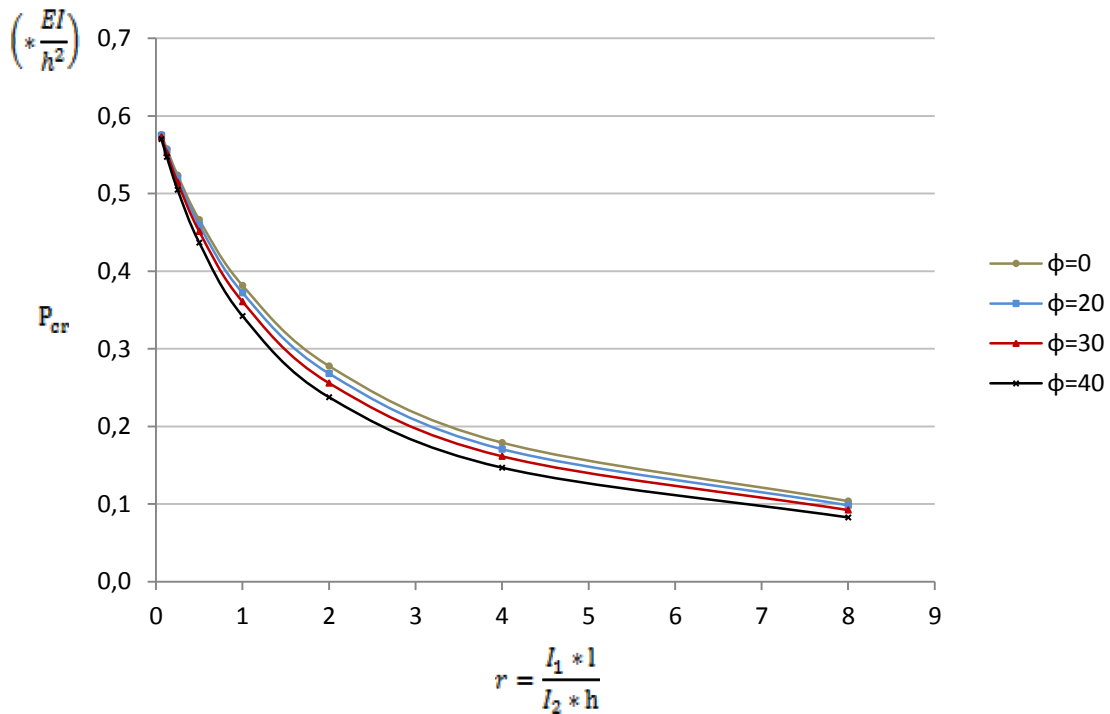
Πίνακας 4.19 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο), λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\varphi=20$

I_1/I_2 $2l/h$	0,25		1		4	
0,5	$r_1=0,0722$	kh=0,7570	$r_1=0,2887$	kh=0,7174	$r_1=1,1548$	kh=0,6007
		kh=2,2597		kh=2,1654		kh=1,991
	$P_{cr}=0,5730*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,1501	$P_{cr}=0,5147*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,3791	$P_{cr}=0,3608*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,2299
	$P_{cr}=5,1062*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,3903	$P_{cr}=4,689*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,4508	$P_{cr}=3,9641*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,5779
1	$r_1=0,1444$	kh=0,7433	$r_1=0,5774$	kh=0,6718	$r_1=2,3096$	kh=0,5059
		kh=2,2238		kh=2,0832		kh=1,9097
	$P_{cr}=0,5525*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,2265	$P_{cr}=0,4513*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,6764	$P_{cr}=0,2559*\frac{EI_1}{h^2}$	K=6,2099
	$P_{cr}=4,9453*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,4127	$P_{cr}=4,3397*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,5081	$P_{cr}=3,6470*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,6451
2	$r_1=0,2887$	kh=0,7174	$r_1=1,1548$	kh=0,6007	$r_1=4,6192$	kh=0,4020
		kh=2,1654		kh=1,991		kh=1,8521
	$P_{cr}=0,5147*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,3791	$P_{cr}=0,3608*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,2299	$P_{cr}=0,1616*\frac{EI_1}{h^2}$	K=7,8149
	$P_{cr}=4,689*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,4508	$P_{cr}=3,9641*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,5779	$P_{cr}=3,4303*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,6962
4	$r_1=0,5774$	kh=0,6718	$r_1=2,3096$	kh=0,5059	$r_1=9,2384$	kh=0,3039
		kh=2,0832		kh=1,9097		kh=1,8166
	$P_{cr}=0,4513*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,6764	$P_{cr}=0,2559*\frac{EI_1}{h^2}$	K=6,2099	$P_{cr}=0,0924*\frac{EI_1}{h^2}$	K=10,3376
	$P_{cr}=4,3397*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,5081	$P_{cr}=3,6470*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,6451	$P_{cr}=3,3000*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,7294

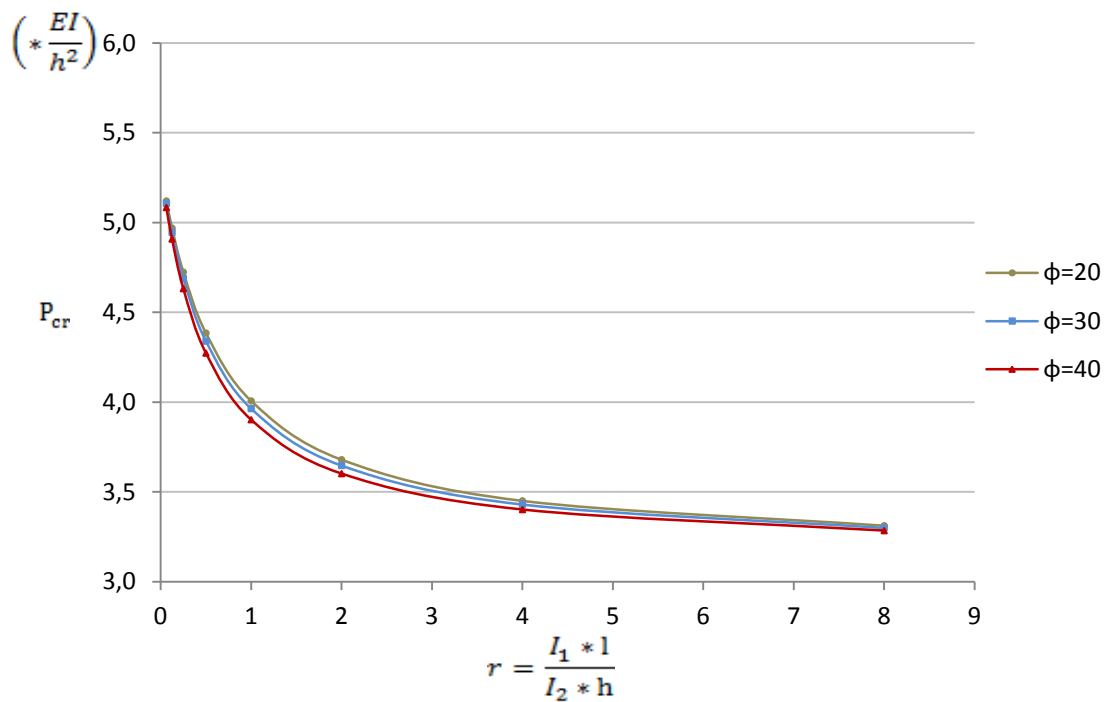
Πίνακας 4.20 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο), λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\varphi=30$

I_1/I_2	0,25		1		4		
$2l/h$							
0,5	$r_1=0,0816$	kh=0,7551	$r_1=0,3264$	kh=0,7106	$r_1=1,3056$	kh=0,5851	
		kh=2,2547		kh=2,1522		kh=1,9753	
	$P_{cr}=0,5702*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,1605$	$P_{cr}=0,5050*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,4210$	$P_{cr}=0,3423*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=5,3693$	
	$P_{cr}=5,0837*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,3934$	$P_{cr}=4,6320*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,4797$	$P_{cr}=3,9018*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,5904$	
1	$r_1=0,1632$	kh=0,7398	$r_1=0,6528$	kh=0,6609	$r_1=2,6112$	kh=0,4874	
		kh=2,2154		kh=2,0671		kh=1,8978	
	$P_{cr}=0,5473*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,2465$	$P_{cr}=0,4368*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,7535$	$P_{cr}=0,2376*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=6,4456$	
	$P_{cr}=4,9080*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,4181$	$P_{cr}=4,2729*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,5198$	$P_{cr}=3,6016*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,6554$	
2	$r_1=0,3264$	kh=0,7106	$r_1=1,3056$	kh=0,5851	$r_1=5,2224$	kh=0,3832	
		kh=2,1522		kh=1,9753		kh=1,8443	
	$P_{cr}=0,5050*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,4210$	$P_{cr}=0,3423*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=5,3693$	$P_{cr}=0,1468*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=8,1983$	
	$P_{cr}=4,6320*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,4797$	$P_{cr}=3,9018*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,5904$	$P_{cr}=3,4014*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,7034$	
4	$r_1=0,6528$	kh=0,6609	$r_1=2,6112$	kh=0,4874	$r_1=10,4448$	kh=0,2876	
		kh=2,0671		kh=1,8978		kh=1,8122	
	$P_{cr}=0,4368*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,7535$	$P_{cr}=0,2376*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=6,4456$	$P_{cr}=0,0827*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=10,9235$	
	$P_{cr}=4,2729*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,5198$	$P_{cr}=3,6016*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,6554$	$P_{cr}=3,2841*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,7336$	

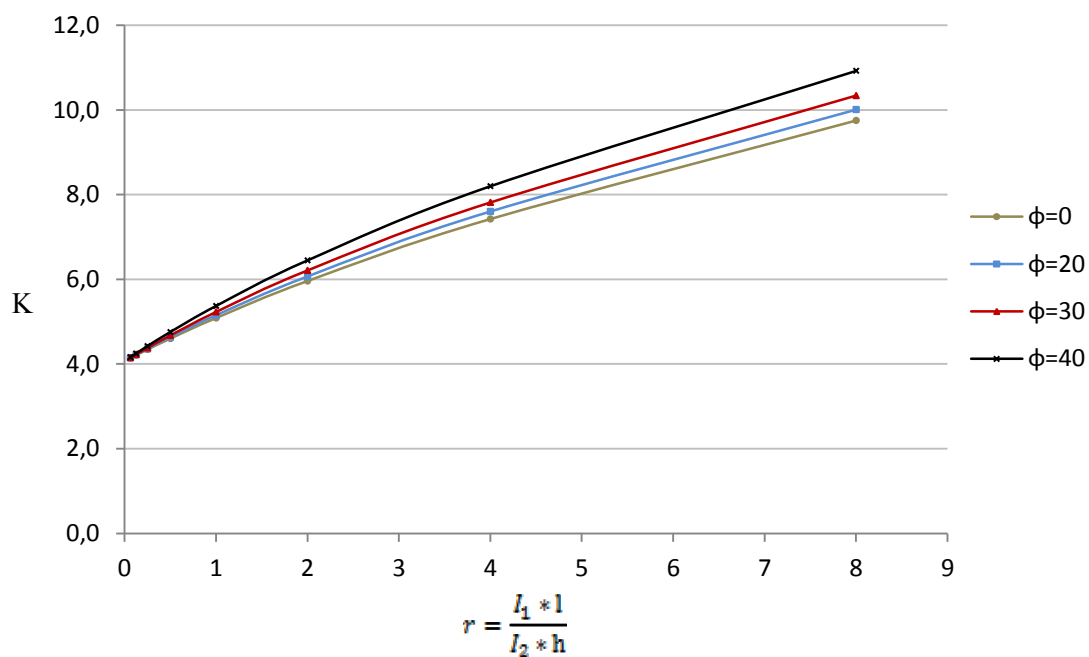
Πίνακας 4.21 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο), λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\phi=40$



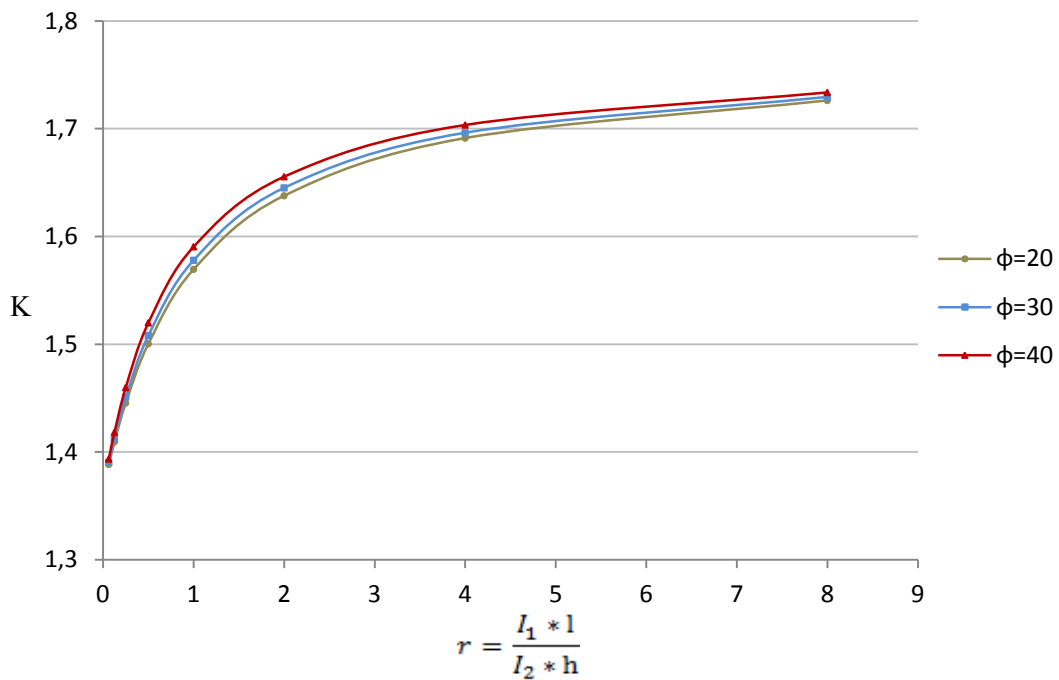
Σχ. 4.30 Διάγραμμα P_{cr} - r , για λυγισμό με μετάθεση



Σχ. 4.31 Διάγραμμα P_{cr} - r , για λυγισμό χωρίς μετάθεση



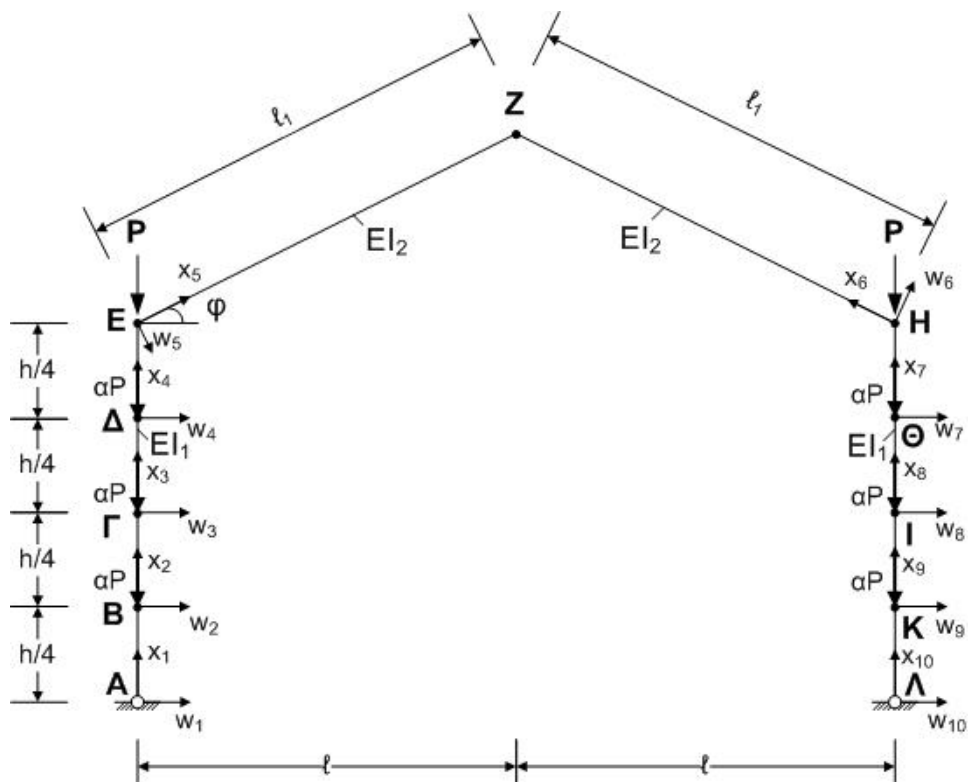
Σχ. 4.32 Διάγραμμα K - r , για λυγισμό με μετάθεση



Σχ. 4.33 Διάγραμμα K- r, για λυγισμό χωρίς μετάθεση

4.5 Πλαίσιο με πρόσθετες φορτίσεις στα τέταρτα των στύλων

4.5.1 Επίλυση πλαισίου



Σχ. 4.34

Οι εξισώσεις που διέπουν την ισορροπία των ραβδών ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΕ ΕΖ ΖΗ ΗΘ ΘΙ ΙΚ ΚΛ στην παραμορφωμένη κατάσταση είναι οι εξής:

$$w_1(x) = A_1 * \sin k_1 x_1 + B_1 * \cos k_1 x_1 + \Gamma_1 * x_1 + \Delta_1, \left(k_1^2 = \frac{P+aP+aP+aP}{EI_1}\right) \quad (4.88)$$

$$w_2(x) = A_2 * \sin k_2 x_2 + B_2 * \cos k_2 x_2 + \Gamma_2 * x_2 + \Delta_2, \left(k_2^2 = \frac{P+aP+aP}{EI_1}\right) \quad (4.89)$$

$$w_3(x) = A_3 * \sin k_3 x_3 + B_3 * \cos k_3 x_3 + \Gamma_3 * x_3 + \Delta_3, \left(k_3^2 = \frac{P+aP}{EI_1}\right) \quad (4.90)$$

$$w_4(x) = A_4 * \sin k_4 x_4 + B_4 * \cos k_4 x_4 + \Gamma_4 * x_4 + \Delta_4, \left(k_4^2 = \frac{P}{EI_1}\right) \quad (4.91)$$

$$w_5(x) = A_5 * x_5^3 + B_5 * x_5^2 + \Gamma_5 * x_5 + \Delta_5 \quad (4.92)$$

$$w_6(x) = A_6 * x_6^3 + B_6 * x_6^2 + \Gamma_6 * x_6 + \Delta_6 \quad (4.93)$$

$$w_7(x) = A_7 * \sin k_4 x_7 + B_7 * \cos k_4 x_7 + \Gamma_7 * x_7 + \Delta_7, \left(k_4^2 = \frac{P}{EI_1}\right) \quad (4.94)$$

$$w_8(x) = A_8 * \sin k_3 x_8 + B_8 * \cos k_3 x_8 + \Gamma_8 * x_8 + \Delta_8, \left(k_3^2 = \frac{P+aP}{EI_1}\right) \quad (4.95)$$

$$w_9(x) = A_9 * \sin k_2 x_9 + B_9 * \cos k_2 x_9 + \Gamma_9 * x_9 + \Delta_9, \left(k_2^2 = \frac{P+aP+aP}{EI_1}\right) \quad (4.96)$$

$$w_{10}(x) = A_{10} * \sin k_1 x_{10} + B_{10} * \cos k_1 x_{10} + \Gamma_{10} * x_{10} + \Delta_{10}, \left(k_1^2 = \frac{P+aP+aP+aP}{EI_1}\right) \quad (4.97)$$

Λόγω των συνθηκών των στηρίξεων, Α, Λ οι σταθερές $B_1, \Delta_1, B_{10}, \Delta_{10}$ μηδενίζονται.

Στον κόμβο Β:

$$w_1\left(\frac{h}{4}\right) = w_2(0) \Rightarrow A_1 * \sin\left(k_1 \frac{h}{4}\right) + \Gamma_1 * \frac{h}{4} = B_2 + \Delta_2 \quad (4.98)$$

$$w_1'\left(\frac{h}{4}\right) = w_2'(0) \Rightarrow A_1 * k_1 * \cos\left(k_1 \frac{h}{4}\right) + \Gamma_1 = A_2 * k_2 + \Gamma_2 \quad (4.99)$$

$$-EI_1 * w_1''\left(\frac{h}{4}\right) = -EI_1 * w_2''(0) \Rightarrow A_1 * k_1^2 * \sin\left(k_1 \frac{h}{4}\right) = B_2 * k_2^2 \quad (4.100)$$

$$\begin{aligned} -EI_1 * w_1'''\left(\frac{h}{4}\right) - (1+3a)P * w_1'\left(\frac{h}{4}\right) + EI_1 * w_2''(0) + (1+2a)P * w_2'(0) &= 0 \\ \Rightarrow -(1+3a) * P * \Gamma_1 + (1+2a) * P * \Gamma_2 = 0 \Rightarrow -(1+3a) * \Gamma_1 + (1+2a) * \Gamma_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.101)$$

Στον κόμβο Γ:

$$w_2\left(\frac{h}{4}\right) = w_3(0) \Rightarrow A_2 * \sin\left(k_2 \frac{h}{4}\right) + B_2 * \cos\left(k_2 \frac{h}{4}\right) + \Gamma_2 * \frac{h}{4} + \Delta_2 = B_3 + \Delta_3 \quad (4.102)$$

$$w_2'\left(\frac{h}{4}\right) = w_3'(0) \Rightarrow A_2 * k_2 * \cos\left(k_2 \frac{h}{4}\right) - B_2 * k_2 * \sin\left(k_2 \frac{h}{4}\right) + \Gamma_2 = A_3 * k_3 + \Gamma_3 \quad (4.103)$$

$$-EI_1 * w_2''\left(\frac{h}{4}\right) = -EI_1 * w_3''(0) \Rightarrow A_2 * k_2^2 * \sin\left(k_2 \frac{h}{4}\right) + B_2 * k_2^2 * \cos\left(k_2 \frac{h}{4}\right) = B_3 * k_3^2 \quad (4.104)$$

$$\begin{aligned}
& -EI_1 * w_2''' \left(\frac{h}{4} \right) - (1 + 2a)P * w_2' \left(\frac{h}{4} \right) + EI_1 * w_3'''(0) + (1 + a)P * w_3'(0) = 0 \\
& \Rightarrow -(1 + 2a) * P * \Gamma_2 + (1 + a) * P * \Gamma_3 = 0 \Rightarrow -(1 + 2a) * \Gamma_2 + (1 + a) * \Gamma_3 = 0
\end{aligned} \tag{4.105}$$

Στον κόμβο Δ:

$$w_3 \left(\frac{h}{4} \right) = w_4(0) \Rightarrow A_3 * \sin \left(k_3 \frac{h}{4} \right) + B_3 * \cos \left(k_3 \frac{h}{4} \right) + \Gamma_3 * \frac{h}{4} + \Delta_3 = B_4 + \Delta_4 \tag{4.106}$$

$$w_3' \left(\frac{h}{4} \right) = w_4'(0) \Rightarrow A_3 * k_3 * \cos \left(k_3 \frac{h}{4} \right) - B_3 * k_3 * \sin \left(k_3 \frac{h}{4} \right) + \Gamma_3 = A_4 * k_4 + \Gamma_4 \tag{4.107}$$

$$-EI_1 * w_3'' \left(\frac{h}{4} \right) = -EI_1 * w_4''(0) \Rightarrow A_3 * k_3^2 * \sin \left(k_3 \frac{h}{4} \right) + B_3 * k_3^2 * \cos \left(k_3 \frac{h}{4} \right) = B_4 * k_4^2 \tag{4.108}$$

$$\begin{aligned}
& -EI_1 * w_3''' \left(\frac{h}{4} \right) - (1 + a)P * w_3' \left(\frac{h}{4} \right) + EI_1 * w_4'''(0) + P * w_4'(0) = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow -(1 + a) * P * \Gamma_3 + P * \Gamma_4 = 0 \Rightarrow -(1 + a) * \Gamma_3 + \Gamma_4 = 0
\end{aligned} \tag{4.109}$$

Στον κόμβο Κ:

$$w_{10} \left(\frac{h}{4} \right) = w_9(0) \Rightarrow A_{10} * \sin \left(k_1 \frac{h}{4} \right) + \Gamma_{10} * \frac{h}{4} = B_9 + \Delta_9 \tag{4.110}$$

$$w_{10}' \left(\frac{h}{4} \right) = w_9'(0) \Rightarrow A_{10} * k_1 * \cos \left(k_1 \frac{h}{4} \right) + \Gamma_{10} = A_9 * k_2 + \Gamma_9 \tag{4.111}$$

$$-EI_1 * w_{10}'' \left(\frac{h}{4} \right) = -EI_1 * w_9''(0) \Rightarrow A_{10} * k_1^2 * \sin \left(k_1 \frac{h}{4} \right) = B_9 * k_2^2 \tag{4.112}$$

$$\begin{aligned}
& -EI_1 * w_{10}''' \left(\frac{h}{4} \right) - (1 + 3a)P * w_{10}' \left(\frac{h}{4} \right) + EI_1 * w_9'''(0) + (1 + 2a)P * w_9'(0) = 0 \\
& \Rightarrow -(1 + 3a) * P * \Gamma_{10} + (1 + 2a) * P * \Gamma_9 = 0 \Rightarrow -(1 + 3a) * \Gamma_{10} + (1 + 2a) * \Gamma_9 = 0
\end{aligned} \tag{4.113}$$

Στον κόμβο Ι:

$$w_9 \left(\frac{h}{4} \right) = w_8(0) \Rightarrow A_9 * \sin \left(k_2 \frac{h}{4} \right) + B_9 * \cos \left(k_2 \frac{h}{4} \right) + \Gamma_9 * \frac{h}{4} + \Delta_9 = B_8 + \Delta_8 \tag{4.114}$$

$$w_9' \left(\frac{h}{4} \right) = w_8'(0) \Rightarrow A_9 * k_2 * \cos \left(k_2 \frac{h}{4} \right) - B_9 * k_2 * \sin \left(k_2 \frac{h}{4} \right) + \Gamma_9 = A_8 * k_3 + \Gamma_8 \tag{4.115}$$

$$-EI_1 * w_9'' \left(\frac{h}{4} \right) = -EI_1 * w_8''(0) \Rightarrow A_9 * k_2^2 * \sin \left(k_2 \frac{h}{4} \right) + B_9 * k_2^2 * \cos \left(k_2 \frac{h}{4} \right) = B_8 * k_3^2 \tag{4.116}$$

$$\begin{aligned}
& -EI_1 * w_9''' \left(\frac{h}{4} \right) - (1 + 2a) * P * w_9' \left(\frac{h}{4} \right) + EI_1 * w_8'''(0) + (1 + a) * P * w_8'(0) = 0 \\
& \Rightarrow -(1 + 2a) * P * \Gamma_9 + (1 + a) * P * \Gamma_8 = 0 \Rightarrow -(1 + 2a) * \Gamma_9 + (1 + a) * \Gamma_8 = 0
\end{aligned} \tag{4.117}$$

Στον κόμβο Θ:

$$w_8 \left(\frac{h}{4} \right) = w_7(0) \Rightarrow A_8 * \sin \left(k_3 \frac{h}{4} \right) + B_8 * \cos \left(k_3 \frac{h}{4} \right) + \Gamma_8 * \frac{h}{4} + \Delta_8 = B_7 + \Delta_7 \tag{4.118}$$

$$w_8' \left(\frac{h}{4} \right) = w_7'(0) \Rightarrow A_8 * k_3 * \cos \left(k_3 \frac{h}{4} \right) - B_8 * k_3 * \sin \left(k_3 \frac{h}{4} \right) + \Gamma_8 = A_7 * k_4 + \Gamma_7 \quad (4.119)$$

$$-EI_1 * w_8'' \left(\frac{h}{4} \right) = -EI_1 * w_7''(0) \Rightarrow A_8 * k_3^2 * \sin \left(k_3 \frac{h}{4} \right) + B_8 * k_3^2 * \cos \left(k_3 \frac{h}{4} \right) = B_7 * k_4^2 \quad (4.120)$$

$$\begin{aligned} -EI_1 * w_8''' \left(\frac{h}{4} \right) - (1+a) * P * w_8' \left(\frac{h}{4} \right) + EI_1 * w_7'''(0) + P * w_7'(0) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -(1+a) * P * \Gamma_8 + P * \Gamma_7 = 0 &\Rightarrow -(1+a) * \Gamma_8 + \Gamma_7 = 0 \end{aligned} \quad (4.121)$$

Αντίστοιχα με την πρώτη περίπτωση στους κόμβους E, Η ισχύει:

$$\begin{aligned} \sin(\varphi) * w_5(0) = w_4 \left(\frac{h}{4} \right) \Rightarrow A_4 * \sin \left(k_4 \frac{h}{4} \right) + B_4 * \cos \left(k_4 \frac{h}{4} \right) + \Gamma_4 * \frac{h}{4} + \Delta_4 = \\ \sin(\varphi) * \Delta_5 \end{aligned} \quad (4.122)$$

$$\begin{aligned} \sin(\varphi) * w_6(0) = w_7 \left(\frac{h}{4} \right) \Rightarrow A_7 * \sin \left(k_4 \frac{h}{4} \right) + B_7 * \cos \left(k_4 \frac{h}{4} \right) + \Gamma_7 * \frac{h}{4} + \Delta_7 = \\ \sin(\varphi) * \Delta_6 \end{aligned} \quad (4.123)$$

Λόγω συνέχειας στον κόμβο E έχουμε ισότητα στρωφών και ισοροπία ροπών:

$$w_4' \left(\frac{h}{4} \right) = w_5'(0) \Rightarrow A_4 * k_4 * \cos \left(k_4 \frac{h}{4} \right) - B_4 * k_4 * \sin \left(k_4 \frac{h}{4} \right) + \Gamma_4 = \Gamma_5 \quad (4.124)$$

$$\begin{aligned} -EI_1 * w_4'' \left(\frac{h}{4} \right) = -EI_2 * w_5''(0) \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} * (A_4 * k_4^2 * \sin \left(k_4 \frac{h}{4} \right) + B_4 * k_4^2 * \cos \left(k_4 \frac{h}{4} \right)) = \\ -2 * B_5 \end{aligned} \quad (4.125)$$

Όμοια στον κόμβο Η :

$$w_7' \left(\frac{h}{4} \right) = w_6'(0) \Rightarrow A_7 * k_4 * \cos \left(k_4 \frac{h}{4} \right) - B_7 * k_4 * \sin \left(k_4 \frac{h}{4} \right) + \Gamma_7 = \Gamma_6 \quad (4.126)$$

$$\begin{aligned} -EI_1 * w_7'' \left(\frac{h}{4} \right) = -EI_2 * w_6''(0) \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} * (A_7 * k_4^2 * \sin \left(k_4 \frac{h}{4} \right) + B_7 * k_4^2 * \\ \cos \left(k_4 \frac{h}{4} \right)) = -2 * B_6 \end{aligned} \quad (4.127)$$

Όμοια στον κόμβο Z :

$$w_5'(l_1) = w_6'(l_1) \Rightarrow 3 * A_5 * l_1^2 + 2 * B_5 * l_1 + \Gamma_5 = 3 * A_6 * l_1^2 + 2 * B_6 * l_1 + \Gamma_6 \quad (4.128)$$

$$-EI_2 * w_5''(l_1) = EI_2 * w_6''(l_1) \Rightarrow 6 * A_5 * l_1 + 2 * B_5 = -6 * A_6 * l_1 - 2 * B_6 \quad (4.129)$$

Όμοια με τις εξισώσεις (4.13)(4.14)(4.15)(4.16):

$$\begin{aligned} w_4 \left(\frac{h}{4} \right) = w_7 \left(\frac{h}{4} \right) \Rightarrow A_4 * \sin \left(k_4 \frac{h}{4} \right) + B_4 * \cos \left(k_4 \frac{h}{4} \right) + \Gamma_4 * \frac{h}{4} + \Delta_4 = A_7 * \\ \sin \left(k_4 \frac{h}{4} \right) + B_7 * \cos \left(k_4 \frac{h}{4} \right) + \Gamma_7 * \frac{h}{4} + \Delta_7 \end{aligned} \quad (4.130)$$

$$\begin{aligned} -EI_1 * w_4''' \left(\frac{h}{4} \right) - P * w_4' \left(\frac{h}{4} \right) - EI_1 * w_7''' \left(\frac{h}{4} \right) - P * w_7' \left(\frac{h}{4} \right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -P * \Gamma_4 - P * \Gamma_7 = 0 &\Rightarrow \Gamma_4 + \Gamma_7 = 0 \end{aligned} \quad (4.131)$$

$$\begin{aligned} \sin(\varphi) * w_5(l_1) &= \sin(\varphi) * w_6(l_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow A_5 * l_1^3 + B_5 * l_1^2 + \Gamma_5 * l_1 + \Delta_5 &= A_6 * l_1^3 + B_6 * l_1^2 + \Gamma_6 * l_1 + \Delta_6 \end{aligned} \quad (4.132)$$

$$\sin(\varphi) * w_5(0) = \sin(\varphi) * w_5(l_1) \Rightarrow A_5 * l_1^3 + B_5 * l_1^2 + \Gamma_5 * l_1 + \Delta_5 = \Delta_5 \quad (4.133)$$

Όμοια με πριν : $k_4 = k$, $k_1 = \sqrt{(1 + 3\alpha)} * k$, $k_2 = \sqrt{(1 + 2\alpha)} * k$, $k_3 = \sqrt{(1 + \alpha)} * k$.
Θέτουμε $kh = x$ και $\rho = \frac{l_1}{l_2}$ ενώ σχηματίζουμε ένα σύστημα 36 επί 36 από τις εξισώσεις (4.98)-(4.133).

Όμοια και στη συγκεκριμένη περίπτωση παραθέτουμε κάποιους χαρακτηριστικούς όρους:

$$\begin{aligned} &15552 * k^7 * l_1^4 * \cos(x/2)^2 * \sin(x/4) * \cos((2^{(1/2)} * x)/4)^2 * \sin((3^{(1/2)} * x)/4)^2 * \sin(f) \\ &)^2 + \dots + \\ &1800 * k^8 * l_1^5 * \rho * \sin(x/2)^2 * \sin(x/4)^2 * \sin((2^{(1/2)} * x)/4)^2 * \sin((3^{(1/2)} * x)/4)^2 * \sin(f) \\ &)^2 + \dots - \\ &5400 * h * k^8 * l_1^4 * \cos(x/2)^2 * \cos(x/4)^2 * \cos((2^{(1/2)} * x)/4)^2 * \cos((3^{(1/2)} * x)/4)^2 * \sin(f) \\ &)^2 + \dots \\ &+ 492 * k^9 * l_1^6 * \rho^2 * \cos(x/2) * \sin(x/2) * \sin(x/4)^2 * \cos((2^{(1/2)} * x)/4)^2 * \cos((3^{(1/2)} * x)/4)^2 * \sin(f) \\ &)^2 + \dots \\ &+ 6300 * h * k^9 * l_1^5 * \rho * \cos(x/2) * \cos(x/4)^2 * \sin(x/2) * \cos((2^{(1/2)} * x)/4)^2 * \cos((3^{(1/2)} * x)/4)^2 * \sin(f) \\ &)^2 + \dots - \\ &1800 * h * k^{10} * l_1^6 * \rho^2 * \cos(x/2) * \cos(x/4) * \sin(x/2) * \sin(x/4) * \cos((2^{(1/2)} * x)/4)^2 * \cos((3^{(1/2)} * x)/4)^2 * \sin(f) \\ &)^2 + \dots = 0 \end{aligned}$$

Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις παρατηρώντας ολόκληρη την εξίσωση συμπεραίνουμε ότι μπροστά από τα ημιτονοειδή γινόμενα εμφανίζονται τα εξής γινόμενα:

$k^7 * l_1^4 * \sin(f)^2$, $k^8 * l_1^5 * \rho * \sin(f)^2$, $h * k^8 * l_1^4 * \sin(f)^2$, $h * k^9 * l_1^5 * \rho * \sin(f)^2$, $k^9 * l_1^6 * \rho^2 * \sin(f)^2$, $h * k^{10} * l_1^6 * \rho^2 * \sin(f)^2$. Αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση με h^7 και ταυτόχρονα διαιρέσουμε με l_1^4 και $\sin(f)^2$ έχουμε:

$$\begin{aligned} k^7 * l_1^4 * \sin(f)^2 &\Rightarrow (kh)^7 \\ k^8 * l_1^5 * \rho * \sin(f)^2 &\Rightarrow (kh)^8 * \frac{l_1 * l_1}{l_2 * h} \\ h * k^8 * l_1^4 * \sin(f)^2 &\Rightarrow (kh)^8 \\ h * k^9 * l_1^5 * \rho * \sin(f)^2 &\Rightarrow (kh)^9 * \frac{l_1 * l_1}{l_2 * h} \\ k^9 * l_1^6 * \rho^2 * \sin(f)^2 &\Rightarrow (kh)^9 * \left(\frac{l_1 * l_1}{l_2 * h}\right)^2 \\ h * k^{10} * l_1^6 * \rho^2 * \sin(f)^2 &\Rightarrow (kh)^{10} * \left(\frac{l_1 * l_1}{l_2 * h}\right)^2 \end{aligned}$$

Θέτοντας $r_1 = \frac{l_1 * l_1}{l_2 * h}$, $kh = x$ η εξίσωση έχει έναν άγνωστο (το x) αφού το r_1 θα αντικατασταθεί με αριθμό όπως φαίνεται στους πίνακες.

Για τον αντισυμμετρικό λυγισμό χωρίς μετάθεση ισχύουν οι εξισώσεις (4.98)-(4.130) και επιπλέον έχουμε:

$$w_4\left(\frac{h}{4}\right) = 0 \Rightarrow A_4 * \sin\left(k_4 \frac{h}{4}\right) + B_4 * \cos\left(k_4 \frac{h}{4}\right) + \Gamma_4 * \frac{h}{4} + \Delta_4 = 0 \quad (4.134)$$

$$\sin(\varphi) * w_5(l_1) = 0 \Rightarrow A_5 * l_1^3 + B_5 * l_1^2 + \Gamma_5 * l_1 + \Delta_5 = 0 \quad (4.135)$$

$$\sin(\varphi) * w_6(l_1) = 0 \Rightarrow A_6 * l_1^3 + B_6 * l_1^2 + \Gamma_6 * l_1 + \Delta_6 = 0 \quad (4.136)$$

Αντίστοιχα στην εξίσωση που προκύπτει από την επίλυση του αντισυμμετρικού λυγισμού χωρίς μετάθεση συναντάμε τα εξής γινόμενα:

$$\begin{aligned} k^6 * l_1^5 &\Rightarrow (kh)^6 \\ k^7 * l_1^5 * h &\Rightarrow (kh)^7 \end{aligned}$$

$$\rho \cdot k^7 \cdot l_1^6 \Rightarrow (kh)^7 \cdot \frac{l_1 \cdot l_1}{I_2 \cdot h}$$

$$h^2 \cdot k^8 \cdot l_1^5 \Rightarrow (kh)^8$$

$$k^8 \cdot l_1^7 \cdot \rho^2 \Rightarrow (kh)^8 \cdot \left(\frac{l_1 \cdot l_1}{I_2 \cdot h}\right)^2$$

$$k^8 \cdot l_1^6 \cdot h \cdot \rho \Rightarrow (kh)^8 \cdot \left(\frac{l_1 \cdot l_1}{I_2 \cdot h}\right)$$

$$h^2 \cdot k^9 \cdot l_1^6 \cdot \rho \Rightarrow (kh)^9 \cdot \left(\frac{l_1 \cdot l_1}{I_2 \cdot h}\right)$$

$$h \cdot k^9 \cdot l_1^7 \cdot \rho^2 \Rightarrow (kh)^9 \cdot \left(\frac{l_1 \cdot l_1}{I_2 \cdot h}\right)^2$$

$$h^2 \cdot k^{10} \cdot l_1^7 \cdot \rho^2 \Rightarrow (kh)^{10} \cdot \left(\frac{l_1 \cdot l_1}{I_2 \cdot h}\right)^2$$

4.5.2 Πίνακες-διαγράμματα κρίσιμων φορτίων και ισοδύναμου μήκους λυγισμού

i. $\alpha=0,5$

I_1/I_2 $2l/h$	0,25		1		4	
0,5	$r_1=0,0665$	kh=1,0527	$r_1=0,266$	kh=0,9969	$r_1=1,064$	kh=0,8332
		kh=3,0862		kh=2,9529		kh=2,6925
	$P_{cr}=1,1082 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	$K=2,9843$	$P_{cr}=0,9938 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,1514$	$P_{cr}=0,6942 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,7705$
	$P_{cr}=9,5246 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,0179$	$P_{cr}=8,7196 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,0639$	$P_{cr}=7,2496 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,1668$
1	$r_1=0,133$	kh=1,0333	$r_1=0,532$	kh=0,9335	$r_1=2,128$	kh=0,6996
		kh=3,0365		kh=2,8323		kh=2,5663
	$P_{cr}=1,0677 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,0403$	$P_{cr}=0,8714 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,3654$	$P_{cr}=0,4894 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,4906$
	$P_{cr}=9,2203 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,0346$	$P_{cr}=8,0219 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,1092$	$P_{cr}=6,5859 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,2242$
2	$r_1=0,266$	kh=0,9969	$r_1=1,064$	kh=0,8332	$r_1=4,256$	kh=0,5529
		kh=2,9529		kh=2,6925		kh=2,4754
	$P_{cr}=0,9938 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,1514$	$P_{cr}=0,6942 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,7705$	$P_{cr}=0,3057 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	$K=5,6820$
	$P_{cr}=8,7196 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,0639$	$P_{cr}=7,2496 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,1668$	$P_{cr}=6,1276 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,2691$
4	$r_1=0,532$	kh=0,9335	$r_1=2,128$	kh=0,6996	$r_1=8,512$	kh=0,4164
		kh=2,8323		kh=2,5663		kh=2,4193
	$P_{cr}=0,8714 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,3654$	$P_{cr}=0,4894 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,4906$	$P_{cr}=0,1734 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	$K=7,5447$
	$P_{cr}=8,0219 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,1092$	$P_{cr}=6,5859 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,2242$	$P_{cr}=5,8530 \cdot \frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,2986$

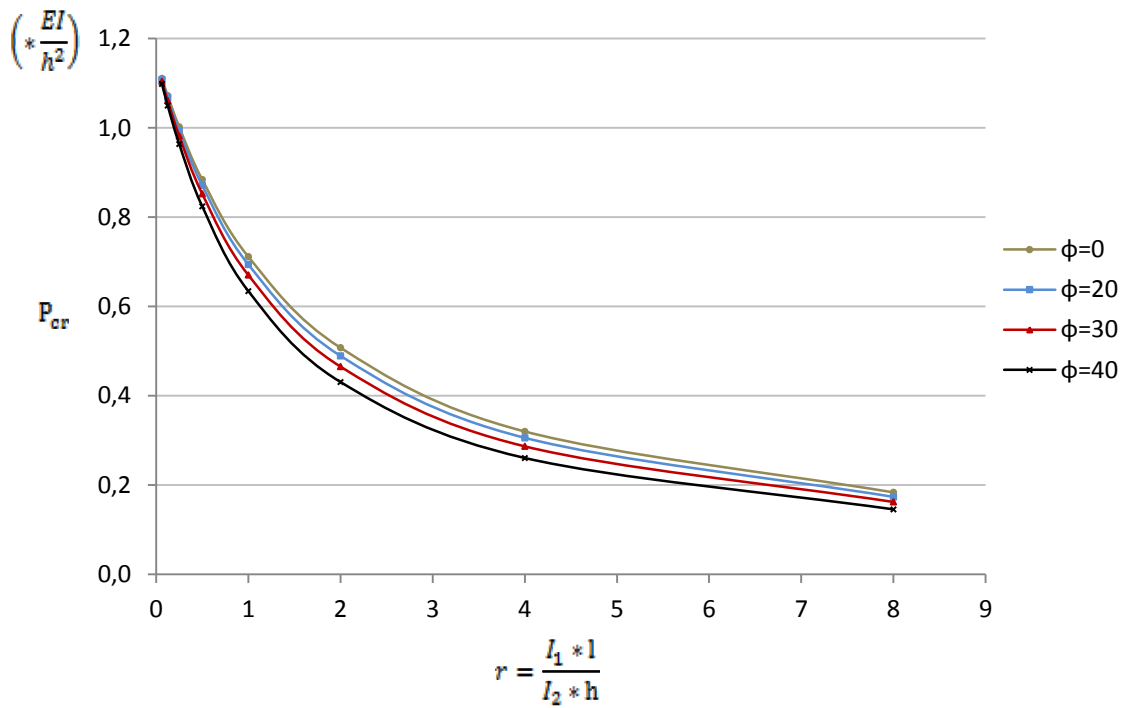
Πίνακας 4.22 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο), λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\varphi=20$

I_1/I_2	0,25		1		4	
$2l/h$						
0,5	$r_1=0,0722$	kh=1,0509	$r_1=0,2887$	kh=0,9910	$r_1=1,1548$	kh=0,8189
		kh=3,0817		kh=2,9405		kh=2,6762
	$P_{cr}=1,1044*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,9894	$P_{cr}=0,9821*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,1701	$P_{cr}=0,6706*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,8364
	$P_{cr}=9,4969*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0194	$P_{cr}=8,6465*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0684	$P_{cr}=7,1620*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1739
1	$r_1=0,1444$	kh=1,0302	$r_1=0,5774$	kh=0,9233	$r_1=2,3096$	kh=0,6823
		kh=3,0285		kh=2,8163		kh=2,5537
	$P_{cr}=1,0613*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,0495	$P_{cr}=0,8525*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,4026	$P_{cr}=0,4655*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,6044
	$P_{cr}=9,1718*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0373	$P_{cr}=7,9315*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1155	$P_{cr}=6,5214*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,2302
2	$r_1=0,2887$	kh=0,9910	$r_1=1,1548$	kh=0,8189	$r_1=4,6192$	kh=0,5356
		kh=2,9405		kh=2,6762		kh=2,4671
	$P_{cr}=0,9821*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,1701	$P_{cr}=0,6706*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,8364	$P_{cr}=0,2869*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,8656
	$P_{cr}=8,6465*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0684	$P_{cr}=7,1620*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1739	$P_{cr}=6,0866*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,2734
4	$r_1=0,5774$	kh=0,9233	$r_1=2,3096$	kh=0,6823	$r_1=9,2384$	kh=0,4029
		kh=2,8163		kh=2,5537		kh=2,4145
	$P_{cr}=0,8525*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,4026	$P_{cr}=0,4655*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,6044	$P_{cr}=0,1623*\frac{EI_1}{h^2}$	K=7,7975
	$P_{cr}=7,9315*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1155	$P_{cr}=6,5214*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,2302	$P_{cr}=5,8298*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,3011

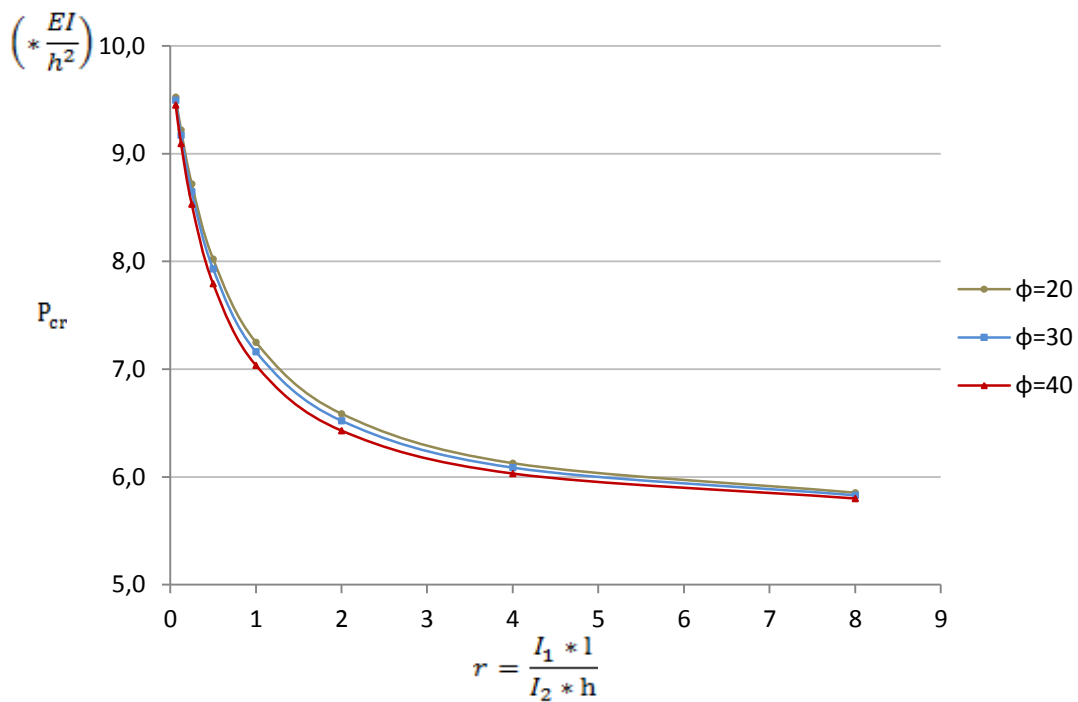
Πίνακας 4.23 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο), λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\varphi=30$

I_1/I_2	0,25		1		4	
$2l/h$						
0,5	$r_1=0,0816$	kh=1,0481	$r_1=0,3264$	kh=0,9818	$r_1=1,3056$	kh=0,7965
		kh=3,0743		kh=2,9209		kh=2,6524
	$P_{cr}=1,0985*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,9974	$P_{cr}=0,9639*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,1998	$P_{cr}=0,6344*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,9442
	$P_{cr}=9,4513*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0219	$P_{cr}=8,5317*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0756	$P_{cr}=7,0352*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1844
1	$r_1=0,1632$	kh=1,0247	$r_1=0,6528$	kh=0,9079	$r_1=2,6112$	kh=0,6563
		kh=3,0157		kh=2,7917		kh=2,5355
	$P_{cr}=1,0500*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,0659	$P_{cr}=0,8243*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,4603	$P_{cr}=0,4307*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,7868
	$P_{cr}=9,0944*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0417	$P_{cr}=7,7936*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1253	$P_{cr}=6,4288*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,2390
2	$r_1=0,3264$	kh=0,9818	$r_1=1,3056$	kh=0,7965	$r_1=5,2224$	kh=0,5104
		kh=2,9209		kh=2,6524		kh=2,4557
	$P_{cr}=0,9639*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,1998	$P_{cr}=0,6344*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,9442	$P_{cr}=0,2605*\frac{EI_1}{h^2}$	K=6,1552
	$P_{cr}=8,5317*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,0756	$P_{cr}=7,0352*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1844	$P_{cr}=6,0305*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,2793
4	$r_1=0,6528$	kh=0,9079	$r_1=2,6112$	kh=0,6563	$r_1=10,4448$	kh=0,3813
		kh=2,7917		kh=2,5355		kh=2,4081
	$P_{cr}=0,8243*\frac{EI_1}{h^2}$	K=3,4603	$P_{cr}=0,4307*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,7868	$P_{cr}=0,1454*\frac{EI_1}{h^2}$	K=8,2392
	$P_{cr}=7,7936*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,1253	$P_{cr}=6,4288*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,2390	$P_{cr}=5,7989*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,3046

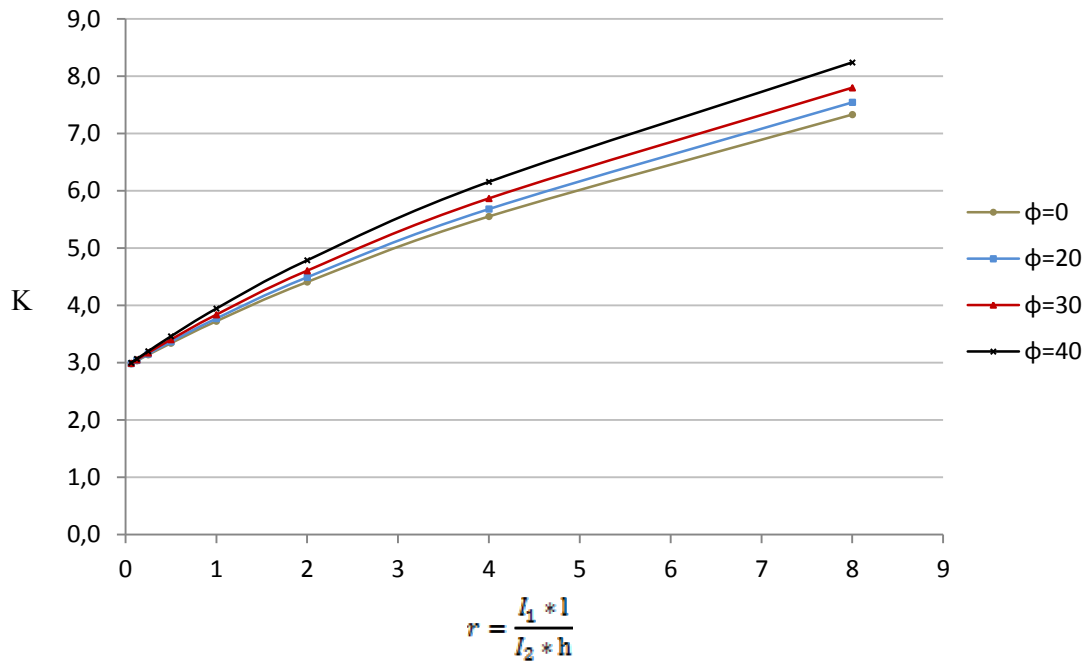
Πίνακας 4.24 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο), λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\varphi=40$



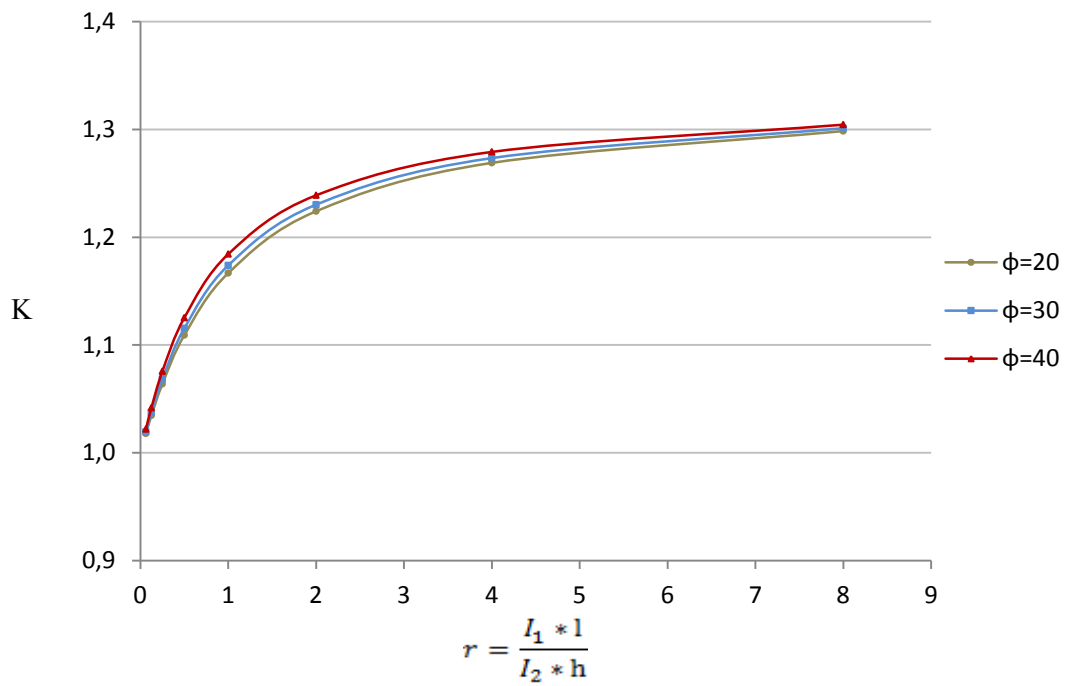
Σχ. 4.35 Διάγραμμα P_{cr} - r , για λυγισμό με μετάθεση



Σχ. 4.36 Διάγραμμα P_{cr} - r , για λυγισμό χωρίς μετάθεση



Σχ. 4.37 Διάγραμμα K - r , για λυγισμό με μετάθεση



Σχ. 4.38 Διάγραμμα K - r , για λυγισμό χωρίς μετάθεση

ii. $\alpha=1$

I_1/I_2 $2l/h$	0,25		l		4	
0,5	$r_1=0,0665$	kh=0,8498	$r_1=0,266$	kh=0,8070	$r_1=1,064$	kh=0,6796
		kh=2,5079		kh=2,4067		kh=2,2108
	$P_{cr}=0,7222*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,6969$	$P_{cr}=0,6512*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,8929$	$P_{cr}=0,4619*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,6227$
	$P_{cr}=6,2896*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,2527$	$P_{cr}=5,7922*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,3054$	$P_{cr}=4,8876*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,4210$
1	$r_1=0,133$	kh=0,8352	$r_1=0,532$	kh=0,7577	$r_1=2,128$	kh=0,5748
		kh=2,4699		kh=2,3158		kh=2,1158
	$P_{cr}=0,6976*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,7615$	$P_{cr}=0,5741*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,1462$	$P_{cr}=0,3304*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=5,4655$
	$P_{cr}=6,1004*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,2720$	$P_{cr}=5,3629*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,3566$	$P_{cr}=4,4766*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,4848$
2	$r_1=0,266$	kh=0,8070	$r_1=1,064$	kh=0,6796	$r_1=4,256$	kh=0,4569
		kh=2,4067		kh=2,2108		kh=2,0468
	$P_{cr}=0,6512*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,8929$	$P_{cr}=0,4619*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,6227$	$P_{cr}=0,2088*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=6,8759$
	$P_{cr}=5,7922*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,3054$	$P_{cr}=4,8876*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,4210$	$P_{cr}=4,1894*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,5349$
4	$r_1=0,532$	kh=0,7577	$r_1=2,128$	kh=0,5748	$r_1=8,512$	kh=0,3457
		kh=2,3158		kh=2,1158		kh=2,0039
	$P_{cr}=0,5741*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,1462$	$P_{cr}=0,3304*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=5,4655$	$P_{cr}=0,1195*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=9,0876$
	$P_{cr}=5,3629*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,3566$	$P_{cr}=4,4766*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,4848$	$P_{cr}=4,0156*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,5677$

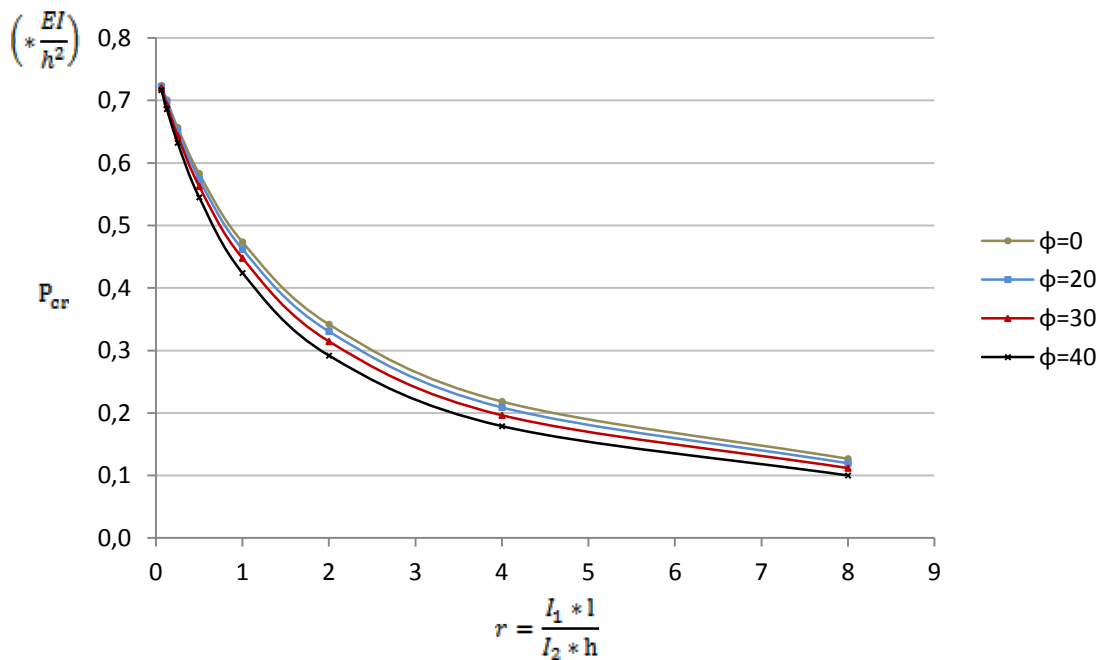
Πίνακας 4.25 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο), λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\varphi=20$

I_1/I_2 $2l/h$	0,25		l		4	
0,5	$r_1=0,0722$	kh=0,8485	$r_1=0,2887$	kh=0,8023	$r_1=1,1548$	kh=0,6690
		kh=2,5045		kh=2,3972		kh=2,1985
	$P_{cr}=0,7200*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,7025$	$P_{cr}=0,6437*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,9157$	$P_{cr}=0,4476*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,6960$
	$P_{cr}=6,2725*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,2544$	$P_{cr}=5,7466*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,3105$	$P_{cr}=4,8334*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,4290$
1	$r_1=0,1444$	kh=0,8325	$r_1=0,5774$	kh=0,7500	$r_1=2,3096$	kh=0,5607
		kh=2,4638		kh=2,3037		kh=2,1060
	$P_{cr}=0,6931*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,7737$	$P_{cr}=0,5625*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,1888$	$P_{cr}=0,3144*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=5,6030$
	$P_{cr}=6,0703*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,2751$	$P_{cr}=5,3070*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,3637$	$P_{cr}=4,4352*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,4917$
2	$r_1=0,2887$	kh=0,8023	$r_1=1,1548$	kh=0,6690	$r_1=4,6192$	kh=0,4429
		kh=2,3972		kh=2,1985		kh=2,0404
	$P_{cr}=0,6437*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,9157$	$P_{cr}=0,4476*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,6960$	$P_{cr}=0,1962*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=7,0932$
	$P_{cr}=5,7466*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,3105$	$P_{cr}=4,8334*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,4290$	$P_{cr}=4,1632*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,5397$
4	$r_1=0,5774$	kh=0,7500	$r_1=2,3096$	kh=0,5607	$r_1=9,2384$	kh=0,3342
		kh=2,3037		kh=2,1060		kh=2,0003
	$P_{cr}=0,5625*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,1888$	$P_{cr}=0,3144*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=5,6030$	$P_{cr}=0,1117*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=9,4003$
	$P_{cr}=5,3070*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,3637$	$P_{cr}=4,4352*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,4917$	$P_{cr}=4,0012*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,5706$

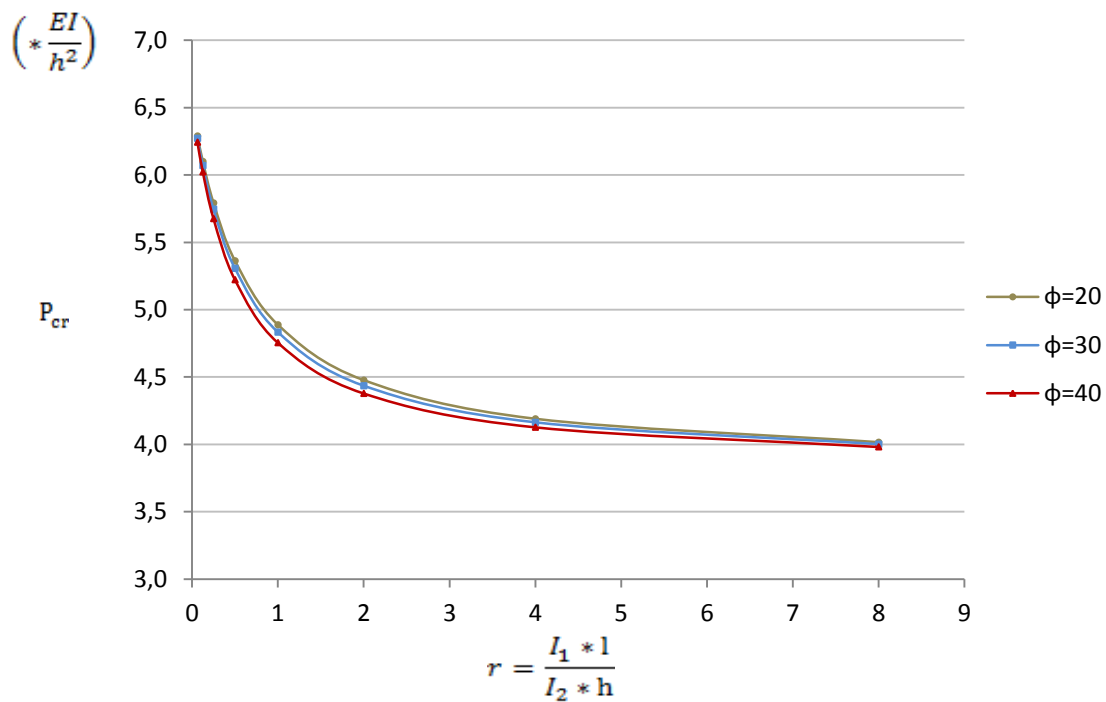
Πίνακας 4.26 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο), λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\varphi=30$

I_1/I_2	0,25		1		4	
$2l/h$						
0,5	$r_1=0,0816$	kh=0,8464	$r_1=0,3264$	kh=0,7951	$r_1=1,3056$	kh=0,6511
		kh=2,4988		kh=2,3825		kh=2,1806
	$P_{cr}=0,7164*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,7117$	$P_{cr}=0,6322*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,9512$	$P_{cr}=0,4239*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,8251$
	$P_{cr}=6,2440*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,2572$	$P_{cr}=5,6763*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,3186$	$P_{cr}=4,7550*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,4407$
1	$r_1=0,1632$	kh=0,8283	$r_1=0,6528$	kh=0,7381	$r_1=2,6112$	kh=0,5401
		kh=2,4542		kh=2,2853		kh=2,0925
	$P_{cr}=0,6861*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,7928$	$P_{cr}=0,5448*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,2563$	$P_{cr}=0,2917*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=5,8167$
	$P_{cr}=6,0231*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,2801$	$P_{cr}=5,2226*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,3747$	$P_{cr}=4,3786*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,5014$
2	$r_1=0,3264$	kh=0,7951	$r_1=1,3056$	kh=0,6511	$r_1=5,2224$	kh=0,4229
		kh=2,3825		kh=2,1806		kh=2,0316
	$P_{cr}=0,6322*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=3,9512$	$P_{cr}=0,4239*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,8251$	$P_{cr}=0,1788*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=7,4287$
	$P_{cr}=5,6763*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,3186$	$P_{cr}=4,7550*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,4407$	$P_{cr}=4,1274*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,5464$
4	$r_1=0,6528$	kh=0,7381	$r_1=2,6112$	kh=0,5401	$r_1=10,4448$	kh=0,3161
		kh=2,2853		kh=2,0925		kh=1,9954
	$P_{cr}=0,5448*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=4,2563$	$P_{cr}=0,2917*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=5,8167$	$P_{cr}=0,0999*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=9,9386$
	$P_{cr}=5,2226*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,3747$	$P_{cr}=4,3786*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,5014$	$P_{cr}=3,9816*\frac{EI_1}{h^2}$	$K=1,5744$

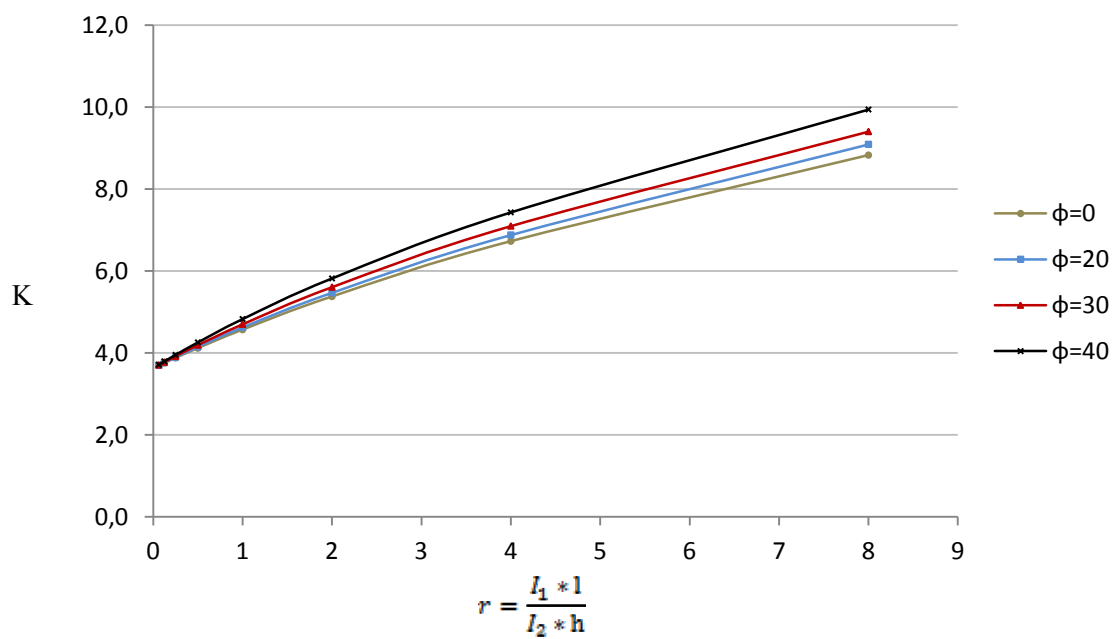
Πίνακας 4.27 Λυγισμός με μετάθεση (άσπρο φόντο), λυγισμός χωρίς μετάθεση (μπλε φόντο) για $\phi=40$



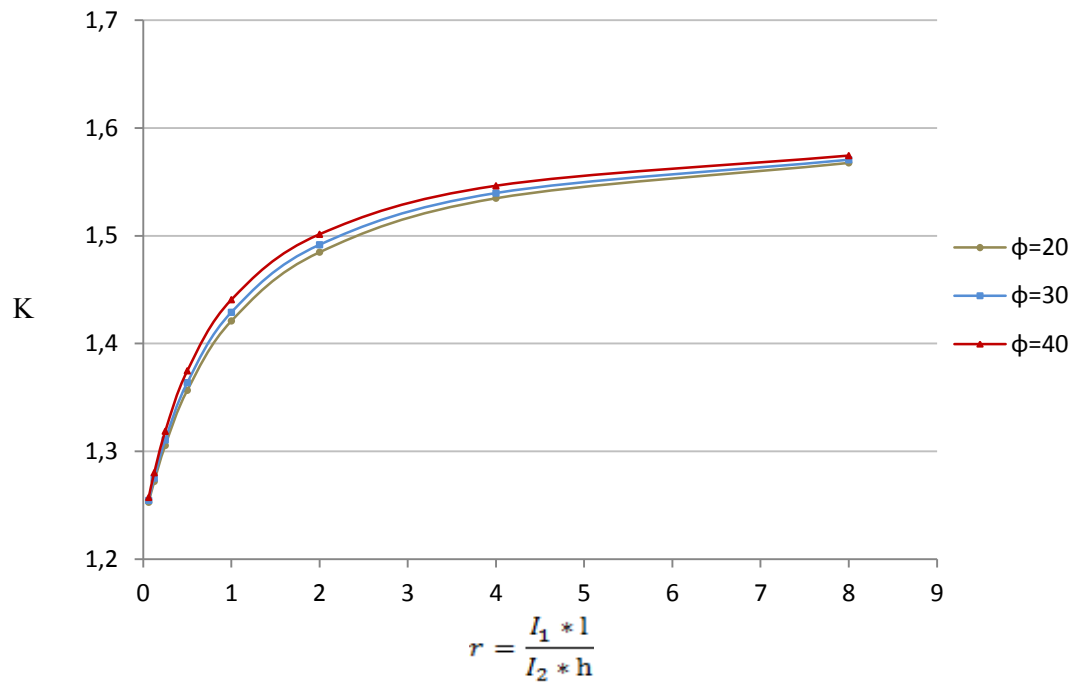
Σχ. 4.39 Διάγραμμα P_{cr} - r , για λυγισμό με μετάθεση



Σχ. 4.40 Διάγραμμα P_{cr} - r , για λυγισμό χωρίς μετάθεση



Σχ. 4.41 Διάγραμμα K - r , για λυγισμό με μετάθεση



Σχ. 4.42 Διάγραμμα K - r , για λυγισμό χωρίς μετάθεση

iii. $\alpha=2$

I_1/I_2 $2l/h$	0,25		1		4	
0,5	$r_1=0,0665$	kh=0,6523	$r_1=0,266$	kh=0,6210	$r_1=1,064$	kh=0,5262
		kh=1,9339		kh=1,8598		kh=1,7179
	$P_{cr}=0,4255*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,8162	$P_{cr}=0,3856*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,0589	$P_{cr}=0,2769*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,9703
	$P_{cr}=3,7400*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,6245	$P_{cr}=3,4589*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,6892	$P_{cr}=2,9512*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,8287
1	$r_1=0,133$	kh=0,6415	$r_1=0,532$	kh=0,5838	$r_1=2,128$	kh=0,4469
		kh=1,9060		kh=1,7939		kh=1,6491
	$P_{cr}=0,4115*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,8973	$P_{cr}=0,3408*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,3813	$P_{cr}=0,1997*\frac{EI_1}{h^2}$	K=7,0297
	$P_{cr}=3,6328*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,6483	$P_{cr}=3,2181*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,7513	$P_{cr}=2,7195*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,9050
2	$r_1=0,266$	kh=0,6210	$r_1=1,064$	kh=0,5262	$r_1=4,256$	kh=0,3575
		kh=1,8598		kh=1,7179		kh=1,5990
	$P_{cr}=0,3856*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,0589	$P_{cr}=0,2769*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,9703	$P_{cr}=0,1278*\frac{EI_1}{h^2}$	K=8,7877
	$P_{cr}=3,4589*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,6892	$P_{cr}=2,9512*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,8287	$P_{cr}=2,5568*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,9647
4	$r_1=0,532$	kh=0,5838	$r_1=2,128$	kh=0,4469	$r_1=8,512$	kh=0,2708
		kh=1,7939		kh=1,6491		kh=1,5679
	$P_{cr}=0,3408*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,3813	$P_{cr}=0,1997*\frac{EI_1}{h^2}$	K=7,0297	$P_{cr}=0,0733*\frac{EI_1}{h^2}$	K=11,6012
	$P_{cr}=3,2181*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,7513	$P_{cr}=2,7195*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,9050	$P_{cr}=2,4583*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,0037

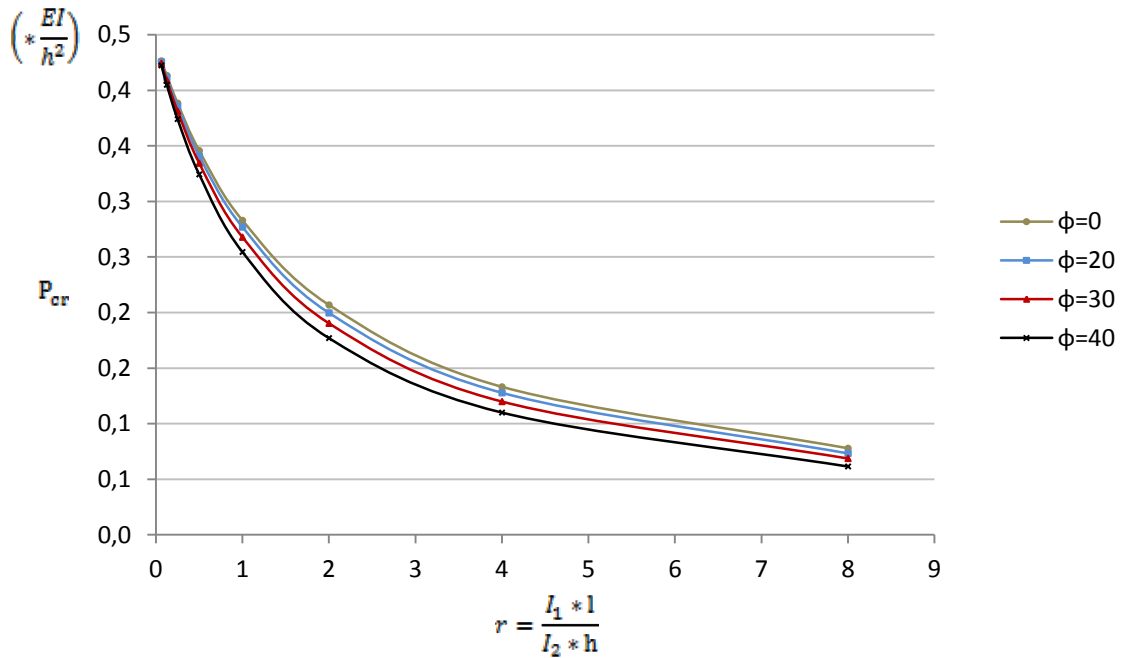
Πίνακας 4.28 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο), λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\varphi=20$

I_1/I_2 $2l/h$	0,25		1		4	
0,5	$r_1=0,0722$	kh=0,6514	$r_1=0,2887$	kh=0,6174	$r_1=1,1548$	kh=0,5175
		kh=1,9314		kh=1,8531		kh=1,7092
	$P_{cr}=0,4243*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,8228	$P_{cr}=0,3812*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,0884	$P_{cr}=0,2678*\frac{EI_1}{h^2}$	K=6,0707
	$P_{cr}=3,7303*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,6266	$P_{cr}=3,4340*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,6953	$P_{cr}=2,9214*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,8380
1	$r_1=0,1444$	kh=0,6395	$r_1=0,5774$	kh=0,5783	$r_1=2,3096$	kh=0,4362
		kh=1,9017		kh=1,7852		kh=1,6422
	$P_{cr}=0,4090*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,9126	$P_{cr}=0,3344*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,4325	$P_{cr}=0,1903*\frac{EI_1}{h^2}$	K=7,2022
	$P_{cr}=3,6165*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,6520	$P_{cr}=3,1869*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,7598	$P_{cr}=2,6968*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,9130
2	$r_1=0,2887$	kh=0,6174	$r_1=1,1548$	kh=0,5175	$r_1=4,6192$	kh=0,3462
		kh=1,8531		kh=1,7092		kh=1,5945
	$P_{cr}=0,3812*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,0884	$P_{cr}=0,2678*\frac{EI_1}{h^2}$	K=6,0707	$P_{cr}=0,1199*\frac{EI_1}{h^2}$	K=9,0745
	$P_{cr}=3,4340*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,6953	$P_{cr}=2,9214*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,8380	$P_{cr}=2,5424*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,9703
4	$r_1=0,5774$	kh=0,5783	$r_1=2,3096$	kh=0,4362	$r_1=9,2384$	kh=0,2622
		kh=1,7852		kh=1,6422		kh=1,5653
	$P_{cr}=0,3344*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,4325	$P_{cr}=0,1903*\frac{EI_1}{h^2}$	K=7,2022	$P_{cr}=0,0687*\frac{EI_1}{h^2}$	K=11,9817
	$P_{cr}=3,1869*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,7598	$P_{cr}=2,6968*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,9130	$P_{cr}=2,4502*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,0070

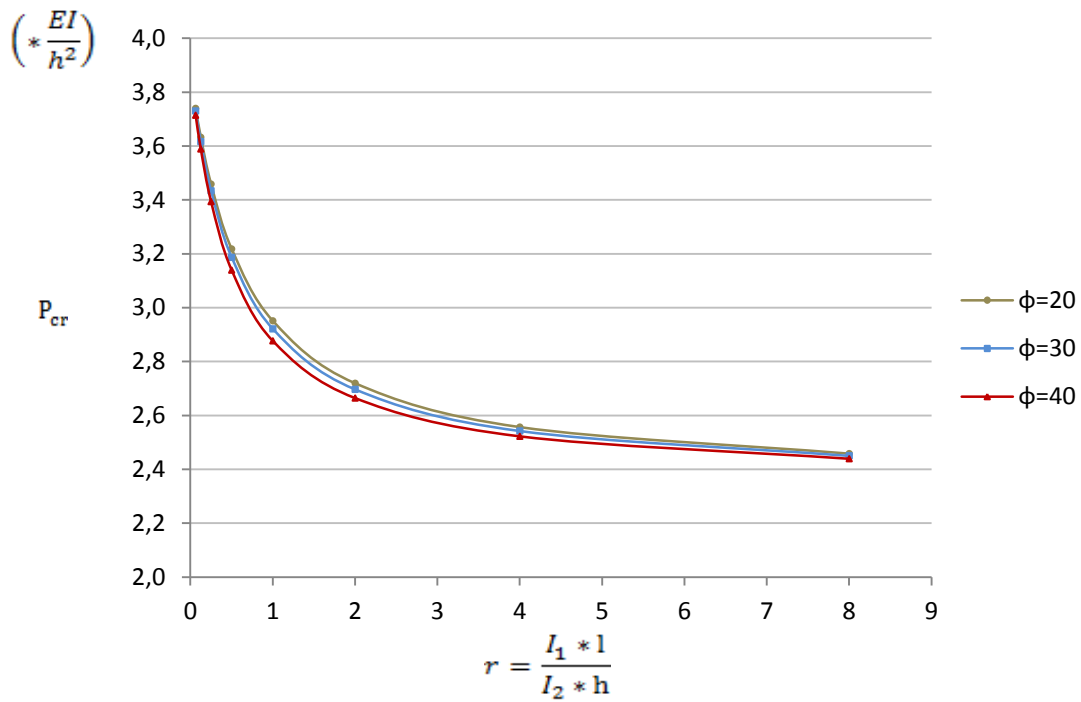
Πίνακας 4.29 Λυγισμός με μετάθεση(άσπρο φόντο), λυγισμός χωρίς μετάθεση(μπλε φόντο) για $\varphi=30$

I_1/I_2	0,25		1		4	
$2l/h$						
0,5	$r_1=0,0816$	kh=0,6499	$r_1=0,3264$	kh=0,6116	$r_1=1,3056$	kh=0,5045
		kh=1,9273		kh=1,8422		kh=1,6961
	$P_{cr}=0,4224*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,8340	$P_{cr}=0,3741*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,1367	$P_{cr}=0,2545*\frac{EI_1}{h^2}$	K=6,2271
	$P_{cr}=3,7145*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,6300	$P_{cr}=3,3937*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,7053	$P_{cr}=2,8768*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,8522
1	$r_1=0,1632$	kh=0,6363	$r_1=0,6528$	kh=0,5695	$r_1=2,6112$	kh=0,4207
		kh=1,8945		kh=1,7718		kh=1,6323
	$P_{cr}=0,4049*\frac{EI_1}{h^2}$	K=4,9373	$P_{cr}=0,3243*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,5164	$P_{cr}=0,1770*\frac{EI_1}{h^2}$	K=7,4675
	$P_{cr}=3,5891*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,6583	$P_{cr}=3,1393*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,7731	$P_{cr}=2,6644*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,9246
2	$r_1=0,3264$	kh=0,6116	$r_1=1,3056$	kh=0,5045	$r_1=5,2224$	kh=0,3316
		kh=1,8422		kh=1,6961		kh=1,5882
	$P_{cr}=0,3741*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,1367	$P_{cr}=0,2545*\frac{EI_1}{h^2}$	K=6,2271	$P_{cr}=0,1100*\frac{EI_1}{h^2}$	K=9,4740
	$P_{cr}=3,3937*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,7053	$P_{cr}=2,8768*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,8522	$P_{cr}=2,5224*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,9781
4	$r_1=0,6528$	kh=0,5695	$r_1=2,6112$	kh=0,4207	$r_1=10,4448$	kh=0,2479
		kh=1,7718		kh=1,6323		kh=1,5618
	$P_{cr}=0,3243*\frac{EI_1}{h^2}$	K=5,5164	$P_{cr}=0,1770*\frac{EI_1}{h^2}$	K=7,4675	$P_{cr}=0,0615*\frac{EI_1}{h^2}$	K=12,6728
	$P_{cr}=3,1393*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,7731	$P_{cr}=2,6644*\frac{EI_1}{h^2}$	K=1,9246	$P_{cr}=2,4392*\frac{EI_1}{h^2}$	K=2,0115

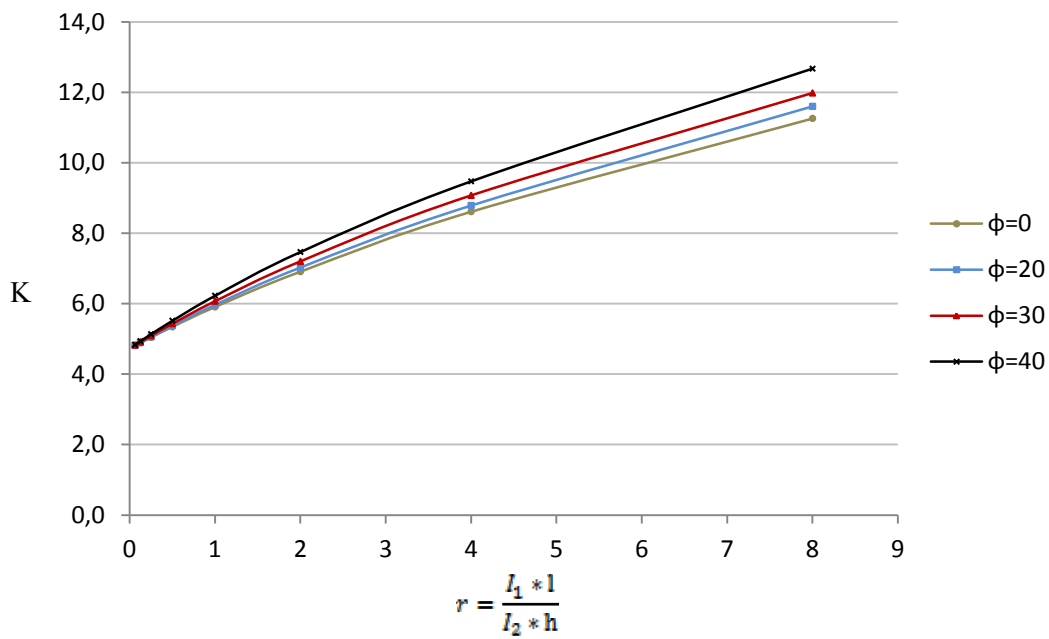
Πίνακας 4.30 Λυγισμός με μετάθεση (άσπρο φόντο), λυγισμός χωρίς μετάθεση (μπλε φόντο) για $\phi=40$



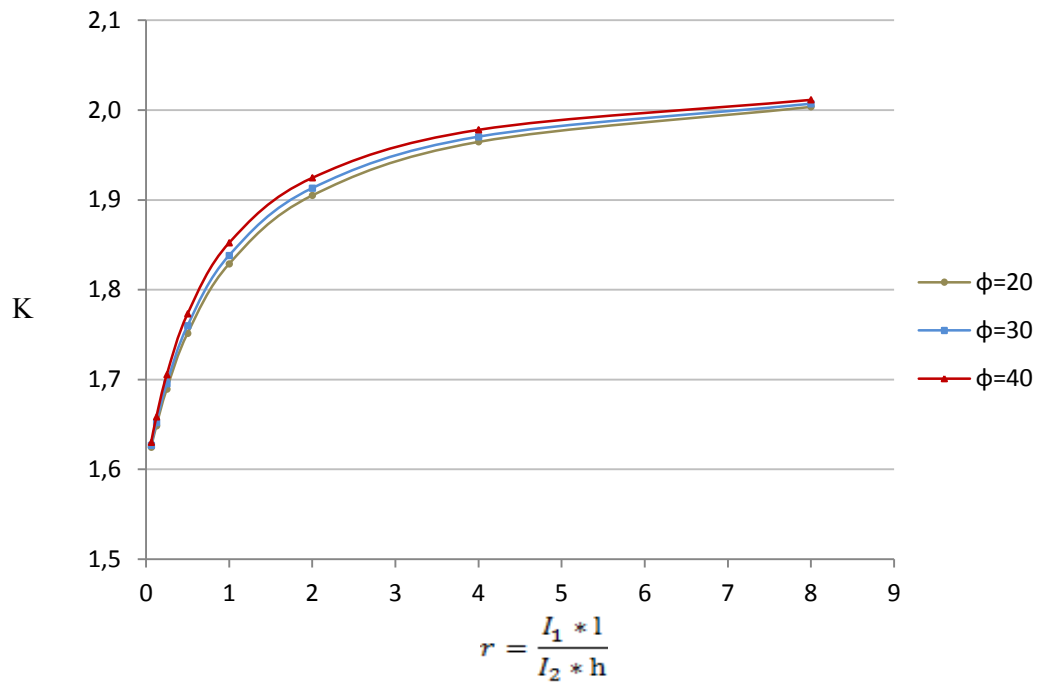
Σχ. 4.43 Διάγραμμα P_{cr} - r , για λυγισμό με μετάθεση



Σχ. 4.44 Διάγραμμα P_{cr} - r , για λυγισμό χωρίς μετάθεση



Σχ. 4.45 Διάγραμμα K - r , για λυγισμό με μετάθεση



Σχ. 4.46 Διάγραμμα K - r , για λυγισμό χωρίς μετάθεση

5 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της παρούσας διπλωματική εργασίας.

Ένα δίστυλο ορθογωνικό πλαίσιο έχει διάφορες μορφές λυγισμού ανάλογα με τις δεσμεύσεις που του έχουμε θέσει. Η κρίσιμότερη μορφή είναι ο αντιμετρικός λυγισμός με μετάθεση τον οποίο συναντάμε όταν δεν παρεμποδίζεται η οριζόντια μετακίνηση του ζυγώματος. Αν εμποδίζουμε την οριζόντια μετακίνηση τότε λυγίζει είτε συμμετρικά είτε αντιμετρικά, με τη συμμετρική μορφή να δίνει μικρότερο κρίσιμο φορτίο. Επιλύοντας το πλαίσιο για τη γενική μορφή (χωρίς παρεμπόδιση) λαμβάνουμε τα κρίσιμα φορτία για λυγισμό με μετάθεση (αντιμετρικό) και χωρίς μετάθεση (συμμετρικό).

Στην αρχή επιλύουμε το ορθογωνικό πλαίσιο για συμμετρική φόρτιση στις κορυφές των στύλων του. Βλέποντας τους πίνακες και τα διαγράμματα παρατηρούμε ότι αν αυξήσουμε την απόσταση μεταξύ των στύλων, το κρίσιμο φορτίο μειώνεται. Παρατηρώντας τα αντίστοιχα διαγράμματα το ισοδύναμο μήκος λυγισμού αυξάνεται όσο μεγαλώνει ο λόγος r . Στον λυγισμό με μετάθεση όσο αυξάνεται το r , το K τείνει στο άπειρο ενώ στο λυγισμό χωρίς μετάθεση τείνει στο ένα, δηλαδή υπάρχει όριο. Όταν φορτίσουμε τους στύλους στη μέση με αP , τα κρίσιμα φορτία μειώνονται ενώ το διάγραμμά τους διατηρεί την ίδια μορφή. Μάλιστα όσο αυξάνεται το α (0.5, 1, 2) τα κρίσιμα φορτία μειώνονται ακόμα περισσότερο, όπως είναι απόλυτα λογικό. Αντίστοιχη συμπεριφορά έχουν τα ισοδύναμα μήκη λυγισμού αφού αυξάνονται καθώς προσθέτουμε τα φορτία και καθώς αυξάνουμε το α . Συνεχίζοντας να προσθέτουμε επιπλέον θλιπτικά φορτία στους στύλους σε αποστάσεις $h/3$ και $h/4$ η συμπεριφορά των διαγραμμάτων των P_{cr} και K είναι παρόμοια. Δηλαδή για φορτίσεις σε αποστάσεις $h/3$ τα κρίσιμα φορτία μειώνονται σε σύγκριση με τις φορτίσεις στη μέση ενώ τα ισοδύναμα μήκη λυγισμού αυξάνονται. Όμοια για φορτίσεις στις αποστάσεις $h/4$.

Όταν το πλαίσιο πάρει μη ορθογωνική μορφή (τριγωνική σκεπή), λόγω σχήματος λυγίζει μόνο αντιμετρικά με ή χωρίς μετάθεση. Σε αντίθεση όμως με την περίπτωση του ορθογωνικού πλαισίου, λύνοντας το πλαίσιο με τη γενική μορφή (χωρίς παρεμπόδιση) δεν παίρνουμε το κρίσιμο φορτίο για τον λυγισμό χωρίς μετάθεση. Γι' αυτό το λόγο χρειάζεται ξεχωριστή επίλυση για την εύρεσή του.

Για την περίπτωση του αντιμετρικού λυγισμού με μετάθεση βλέπουμε στο ίδιο διάγραμμα τα κρίσιμα φορτία και τα ισοδύναμα μήκη λυγισμού για διαφορετικές γωνίες φ ενώ το r διατηρείται σταθερό. Μάλιστα έχουμε προσθέσει και την περίπτωση $\varphi=0$ η οποία είναι προφανώς το ορθογωνικό πλαίσιο. Παρατηρούμε ότι για $r<0.25$ η μεταβολή των κρίσιμων φορτίων λόγω της αύξησης της γωνίας φ είναι πολύ μικρή. Για να γίνει κατανοητή η επιρροή της γωνίας φ στη μεταβολή των κρίσιμων φορτίων παραθέτουμε το εξής παράδειγμα. Στην πρώτη περίπτωση, για $r=0.25$ παρατηρούμε τις εξής μεταβολές των κρίσιμων φορτίων:

- $\varphi=0^\circ$ μέχρι $\varphi=20^\circ$ έχουμε μείωση 0.95%
- $\varphi=20^\circ$ μέχρι $\varphi=30^\circ$ έχουμε μείωση 1.37%
- $\varphi=30^\circ$ μέχρι $\varphi=40^\circ$ έχουμε μείωση 4.5%

Για $r=2$ όμως έχουμε αντίστοιχα:

$\varphi=0^\circ$ μέχρι $\varphi=20^\circ$ έχουμε μείωση 3.92%

$\varphi=20^\circ$ μέχρι $\varphi=30^\circ$ έχουμε μείωση 5.25%

$\varphi=30^\circ$ μέχρι $\varphi=40^\circ$ έχουμε μείωση 8.06%

Δηλαδή όσο αυξάνεται το r τόσο αυξάνεται και η επιρροή της μεταβολής της γωνίας φ . Θα μπορούσαμε να πούμε μάλιστα ότι όσο αυξάνεται η γωνία αυξάνεται και ο βαθμός επιρροής της στη μείωση των κρίσιμων φορτίων. Για παράδειγμα η μεταβολή της γωνίας από 30° σε 40° επηρεάζει περισσότερο απ' ό,τι η μεταβολή από 20° σε 30° . Αντίστοιχα οι τιμές K αυξάνονται με την αύξηση της γωνίας φ ενώ είναι εμφανές ότι η μεταβολή της γωνίας από 30° σε 40° έχει μεγαλύτερη επιρροή από τις υπόλοιπες. Όμοια συμπεριφορά έχουν και τα διαγράμματα για τον λυγισμό χωρίς μετάθεση μόνο που δεν συγκρίνουμε για $\varphi=0^\circ$ αφού στην περίπτωση του ορθογωνικού πλαισίου είχαμε συμμετρική μορφή. Τέλος παρατηρώντας τα διαγράμματα όλων των επόμενων περιπτώσεων φόρτισης είναι ίδια όσον αφορά την επιρροή της γωνίας φ στις τιμές των κρίσιμων φορτίων και των ισοδύναμων μήκων λυγισμού.

6 Βιβλιογραφία

1. Κουνάδη Α.Ν, (1997). «Γραμμική θεωρία ελαστικής ευστάθειας», Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα.
2. Κουνάδη Α.Ν, (2004). «Μη γραμμική θεωρία ελαστικής ευστάθειας με στοιχεία από τη Θεωρία Καταστροφών», Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα.
3. Κουνάδη Α.Ν, (1999). «Σιδηρές κατασκευές: Συμπεριφορά και ανάλυσις, Τόμος ΙΙ», Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα.
4. Timoshenko, St.P. and Gere, J.M. (1961). “Theory of Elastic Stability”, McGraw Hill Book Co., Inc., New York