

**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**ΠΑΠΑΝΑΣΤΑΣΙΟΥ ΧΑΡΙΛΑΟΣ
ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
ΜΗ ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΩΝ
2^k ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΩΝ ΣΧΕΔΙΑΣΜΩΝ**

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Χ. ΚΟΥΚΟΥΒΙΝΟΣ



ΑΘΗΝΑ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2006

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια των απαιτήσεων για την απόκτηση πτυχίου από τη σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Η εργασία αναφέρεται στην ανάλυση των μη επαναλαμβανόμενων 2^k παραγοντικών σχεδιασμών, έναν επίκαιρο και εξελίξιμο κλάδο της στατιστικής με μεγάλο ενδιαφέρον για τους ερευνητές.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μία εισαγωγή στους 2^k παραγοντικούς σχεδιασμούς. Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφονται μερικές από τις υπάρχουσες μεθόδους ανάλυσης μη-επαναλαμβανόμενων 2^k παραγοντικών σχεδιασμών και δίνονται αρκετά παραδείγματα ώστε ο αναγνώστης να κατανοήσει τη διαδικασία εφαρμογής των μεθόδων αυτών. Τέλος στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται μια μελέτη προσομοίωσης που πραγματοποιήθηκε με σκοπό τη σύγκριση των μεθόδων αυτών.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Χ. Κουκουβίνο για την υπόδειξη του θέματος, την καθοδήγηση και τη βοήθεια που μου πρόσφερε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας αυτής.

Χαρίλαος Α. Παπαναστασίου

Αθήνα, Ιούνιος 2006

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1:

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1	Παραγοντικοί Σχεδιασμοί	1
1.2	Στατιστική ανάλυση 2^k παραγοντικών σχεδιασμών	1
1.3	Μη επαναλαμβανόμενοι 2^k παραγοντικοί σχεδιασμοί	4
1.4	EER και IER	5

Κεφάλαιο 2:

Μέθοδοι Ανάλυσης Μη Επαναλαμβανόμενων 2^k Παραγοντικών Σχεδιασμών

2.1	Μέθοδος Daniel (1959)	6
2.1.1	Κανονικό Διάγραμμα Πιθανότητας	6
2.1.2	Ημικανονικό Διάγραμμα Πιθανότητας	7
2.1.3	Χρήση γραφικών μεθόδων για εύρεση ενεργών επιδράσεων στους παραγοντικούς σχεδιασμούς	8
2.1.4	Το πρόβλημα της υποκειμενικότητας	9
2.1.5	Παραδείγματα	9
2.1.6	Συμπεράσματα	17
2.2	Μέθοδος Al-Shiha – Yang (1999)	18
2.2.1	Στατιστικό της μεθόδου Al-Shiha – Yang	18
2.2.2	Διαδικασία εφαρμογής της μεθόδου Al-Shiha – Yang	19
2.2.3	Αναδρομικός τύπος υπολογισμού του $L_{n,k}$	21
2.2.4	Η παράμετρος k	21
2.2.5	Παραδείγματα	21
2.2.6	Γενικά Συμπεράσματα	39
2.2.7	Πίνακας I : Κρίσιμες τιμές του στατιστικού $L_{n,k}$	40
2.3	Μέθοδος Chen - Kunert (2004)	43
2.3.1	Στατιστικό της μεθόδου Chen - Kunert	43
2.3.2	Διαδικασία εφαρμογής της μεθόδου Chen-Kunert	45
2.3.3	Παραδείγματα	46
2.3.4	Σύγκριση των μεθόδων Al-Shiha -Yang και Chen - Kunert και Συμπεράσματα	51
2.3.5	Πίνακας II : Κρίσιμες τιμές του στατιστικού MaxUr	52
2.4	Μέθοδοι Lenth	53
2.4.1	Απλή μέθοδος Lenth (1989)	53
2.4.2	Τροποποιημένη μέθοδος Lenth (2000)	54
2.4.3	Μέθοδος Step-Down Lenth (2001)	55
2.4.4	Παραδείγματα	56
2.4.5	Γενικά Συμπεράσματα	61
2.4.6	Πίνακας III : Κρίσιμες τιμές για έλεγχο του IER με την τροποποιημένη μέθοδο Lenth	62
2.4.7	Πίνακας IV : Κρίσιμες τιμές Wu, Ye και Hamada για τη μέθοδο Step-Down Lenth	63

2.5	Μέθοδος Box – Meyer (1986)	64
2.5.1	Εκ των Υστέρων Πιθανότητα	64
2.5.2	Υπολογισμός εκ των υστέρων πιθανοτήτων	65
2.5.3	Οι σταθερές α και k	66
2.5.4	Παραδείγματα	67
2.5.5	Γενικά Συμπεράσματα	70
2.6	Μέθοδος Benski (1989)	71
2.6.1	Θεωρητική περιγραφή της μεθόδου Benski	71
2.6.2	Διαδικασία υπολογισμού του d_f	72
2.6.3	Διαδικασία εφαρμογής της μεθόδου Benski	73
2.6.4	Παραδείγματα	74
2.6.5	Συμπεράσματα	77
2.7	Μέθοδος Dong (1993)	78
2.7.1	Διαδικασία εφαρμογής της μεθόδου Dong	78
2.7.2	Σύγκριση με τη μέθοδο Lenth και σχόλια	78
2.7.3	Παραδείγματα	79
2.8	Μέθοδος Juan – Pena (1992)	82
2.8.1	Διαδικασία υπολογισμού του $\hat{\sigma}$	82
2.8.2	Διαδικασία εφαρμογής της μεθόδου Juan – Pena	83
2.8.3	Παραδείγματα	84
2.9	Λύσεις Τριών Γνωστών Παραδειγμάτων	87
2.9.1	Daniel (1976)	87
2.9.2	Taguchi - Wu (1980)	88
2.9.3	Box - Hunter - Hunter (1978)	90

Κεφάλαιο 3:

Σύγκριση Μεθόδων μέσω Πειραμάτων Προσομοίωσης

3.1	Εισαγωγή	93
3.2	Συγκρινόμενες Μέθοδοι	93
3.3	Περιγραφή της μελέτης προσομοίωσης	100
3.4	Συμπεράσματα από τη μελέτη προσομοίωσης	102

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ:

Αποτελέσματα πειραμάτων προσομοίωσης και αντίστοιχα σχεδιαγράμματα	108
---	-----

Βιβλιογραφία	138
---------------------	-----

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1:

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Παραγοντικοί Σχεδιασμοί

Οι παραγοντικοί σχεδιασμοί χρησιμοποιούνται στην ανάλυση πειραμάτων 2 ή περισσότερων παραγόντων, κυρίως για την εύρεση των παραγόντων που ασκούν σημαντική επίδραση σε μία αποκριτική τιμή. Αυτό συνήθως γίνεται χωρίζοντας τον κάθε παράγοντα σε ποσοτικές (π.χ θερμοκρασία, χρόνος) ή ποιοτικές (π.χ. τύπος μηχανής) στάθμες και εξετάζοντας την τιμή της απόκρισης για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των στάθμων αυτών.

Μία από τις σημαντικότερες κλάσεις παραγοντικών σχεδιασμών, με ευρεία εφαρμογή στη βιομηχανία, είναι οι παραγοντικοί σχεδιασμοί με k παράγοντες 2 μόνο στάθμων (ψηλής και χαμηλής). Μια πλήρης επανάληψη ενός τέτοιου σχεδιασμού απαιτεί 2^k παρατηρήσεις και έτσι ο σχεδιασμός ονομάζεται **2^k παραγοντικός σχεδιασμός**.

1.2 Στατιστική ανάλυση 2^k παραγοντικών σχεδιασμών

Γενικά για την ανάλυση των 2^k παραγοντικών σχεδιασμών χρησιμοποιούμε το ακόλουθο στατιστικό μοντέλο:

$$Y = Xb + \varepsilon$$

όπου Y είναι ο $2^k \times n$ πίνακας των παρατηρήσεων (n ο αριθμός των επαναλήψεων), X ο $2^k \times 2^k$ πίνακας σχεδιασμού, b το $2^k \times 1$ διάνυσμα αγνώστων συντελεστών (επιδράσεων) και ε ο $2^k \times n$ πίνακας των σφαλμάτων. Τα σφάλματα αυτά είναι τυχαίες ασυσχέτιστες μεταβλητές που ακολουθούν κανονική κατανομή με μέσο 0 και κοινή αλλά άγνωστη διασπορά σ^2 .

Το μοντέλο περιέχει k κύριες επιδράσεις, $\binom{k}{2}$ αλληλεπιδράσεις 2 παραγόντων, $\binom{k}{3}$ αλληλεπιδράσεις 3 παραγόντων, κ.ο.κ. και τέλος μία αλληλεπίδραση k παραγόντων. Το πλήρες μοντέλο θα περιέχει, δηλαδή, $2^k - 1$ επιδράσεις.

Για να υπολογίσουμε μία επίδραση (ή αλληλεπίδραση) ή το άθροισμα τετραγώνων που οφείλεται σε αυτή, πρέπει πρώτα να προσδιορίσουμε την αντιπαραβολή που αντιστοιχεί στην επίδραση (ή αλληλεπίδραση). Αυτό, για μικρές τιμές του k , γίνεται θεωρώντας έναν πίνακα με θετικά και αρνητικά πρόσημα. Ο πίνακας αυτός για έναν 2^3 παραγοντικό σχεδιασμό φαίνεται πιο κάτω.

Συνδυασμός αγωγής	Παραγοντική επίδραση							
	I	A	B	AB	C	AC	AB	ABC
(1)	+	-	-	+	-	+	+	-
a	+	+	-	-	-	-	+	+
b	+	-	+	-	-	+	-	+
ab	+	+	+	+	-	-	-	-
c	+	-	-	+	+	-	-	+
ac	+	+	-	-	+	+	-	-
bc	+	-	+	-	+	-	+	-
abc	+	+	+	+	+	+	+	+

Στους συνδυασμούς των αγωγών κάθε μικρό γράμμα υποδηλώνει ότι ο αντίστοιχος παράγοντας βρίσκεται στην υψηλή στάθμη. Η απουσία κάποιου μικρού γράμματος από κάποιο συνδυασμό αγωγής υποδηλώνει ότι ο αντίστοιχος παράγοντας βρίσκεται στη χαμηλή στάθμη. Έτσι για παράδειγμα στο συνδυασμό (1) όλοι οι παράγοντες βρίσκονται στη χαμηλή στάθμη, ενώ στον ac οι παράγοντες A και C βρίσκονται στην υψηλή στάθμη και ο παράγοντας B στη χαμηλή. Στην πρώτη στήλη μπαίνουν θετικά πρόσημα. Προχωρώντας προς τα κάτω στις στήλες που αντιστοιχούν σε κύριες επιδράσεις, βάζουμε θετικά πρόσημα στις γραμμές που αντιστοιχούν σε συνδυασμούς αγωγών στις οποίες ο αντίστοιχος παράγοντας βρίσκεται στην υψηλή στάθμη. Τα πρόσημα μιας στήλης που αντιστοιχεί σε αλληλεπίδραση δίνονται από το γινόμενο των προσημών των στηλών των επιδράσεων που συνθέτουν την αλληλεπίδραση αυτή.

Αν τώρα για παράδειγμα θέλουμε να υπολογίσουμε τις αντιπαραβολές που αντιστοιχούν στην επίδραση A και την αλληλεπίδραση AC παρατηρούμε τα πρόσημα των αντίστοιχων στηλών και γράφουμε:

$$Contrast_A = -(1) + a - b + ab - c + ac - bc + abc$$

$$Contrast_{AC} = (1) - a + b - ab - c + ac - bc + abc$$

Στις δύο αυτές σχέσεις κάθε συνδυασμός αγωγών υποδηλώνει το άθροισμα των παρατηρήσεων του συνδυασμού αυτού. Έτσι αν έχουμε 2^k παραγοντικό σχεδιασμό με $n=3$ επαναλήψεις, κάθε συνδυασμός αγωγών θα υποδηλώνει άθροισμα 3 παρατηρήσεων (μία για κάθε επανάληψη). Στην ειδική περίπτωση που έχουμε 2^k παραγοντικό σχεδιασμό χωρίς επαναλήψεις ($n=1$), κάθε συνδυασμός αγωγών υποδηλώνει μία παρατήρηση.

Στην περίπτωση που το k είναι πολύ μεγάλο και άρα δεν μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε τον αντίστοιχο πίνακα με τα πρόσημα, χρησιμοποιούμε τη σχέση $Contrast_{AB...K} = (a \pm 1)(b \pm 1)...(k \pm 1)$ για να υπολογίσουμε τις απαιτούμενες αντιπαραβολές. Το πρόσημο σε κάθε παρένθεση είναι αρνητικό αν ο αντίστοιχος

παράγοντας συμπεριλαμβάνεται στην αλληλεπίδραση (ή την επίδραση) και θετικό αν ο παράγοντας δεν συμπεριλαμβάνεται σε αυτήν.

Έχοντας υπολογίσει τις απαιτούμενες αντιπαραβολές, βρίσκουμε τις επιδράσεις και τις αλληλεπιδράσεις και τα αντίστοιχα αθροίσματα τετραγώνων, χρησιμοποιώντας τις πιο κάτω σχέσεις:

$$AB\dots K = \frac{2}{n2^k} (\text{Contrast}_{AB\dots K}),$$

$$SS_{AB\dots K} = \frac{1}{n2^k} (\text{Contrast}_{AB\dots K})^2,$$

όπου n ο αριθμός των επαναλήψεων.

Έχοντας υπολογίσει τώρα τα απαιτούμενα αθροίσματα τετραγώνων, μπορούμε να προχωρήσουμε στην κατασκευή του πίνακα ανάλυσης διασποράς (ANOVA):

Πηγή Μεταβολής	S.S.	d.f.
k Κύριες Επιδράσεις A ⋮ K	SS_A ⋮ SS_K	1 ⋮ 1
$\binom{k}{2}$ αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων AB ⋮ JK	SS_{AB} ⋮ SS_{JK}	1 ⋮ 1
$\binom{k}{3}$ αλληλεπιδράσεις τριών παραγόντων ABC ⋮ IJK ⋮	SS_{ABC} ⋮ SS_{IJK} ⋮	1 ⋮ 1 ⋮
$\binom{k}{k}$ αλληλεπίδραση k παραγόντων ABC...K	$SS_{ABC\dots K}$	1
Σφάλμα	SSE	$2^k(n-1)$
Ολική	SST	$n2^k - 1$

Στον πίνακα αυτό η τρίτη στήλη δίνει τους βαθμούς ελευθερίας κάθε αθροίσματος, ενώ η τελευταία γραμμή δίνει το άθροισμα των προηγούμενων γραμμών. Άρα το SSE δίνεται από τη σχέση $SSE = SST -$ (υπόλοιπα αθροίσματα τετραγώνων), όπου

$$SST = \sum_{m=1}^{n2^k} y_m^2 - \frac{\sum_{m=1}^{n2^k} y_m}{n2^k}.$$

Στην περίπτωση που έχουμε $n \neq 1$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πιο κάτω μέθοδο για να αποφανθούμε αν μία επίδραση (ή αλληλεπίδραση) είναι σημαντική (ενεργή):

Έστω ότι μία επίδραση (ή αλληλεπίδραση) X έχει άθροισμα τετραγώνων SS_X .

Υπολογίζουμε το αντίστοιχο μέσο άθροισμα τετραγώνων:

$$MS_X = \frac{SS_X}{d.f. SS_X} = \frac{SS_X}{1}$$

Υπολογίζουμε επίσης το μέσο άθροισμα τετραγώνων για το σφάλμα:

$$MSE = \frac{SSE}{d.f. SSE} = \frac{SSE}{2^k (n-1)}$$

Τότε η ποσότητα $\frac{MS_X}{MSE}$ ακολουθεί την F κατανομή με $1, 2^k (n-1)$ βαθμούς ελευθερίας.

Άρα αν ισχύει: $\frac{MS_X}{MSE} > F_{1, 2^k (n-1)}$ τότε η επίδραση (ή αλληλεπίδραση) X θεωρείται ενεργή.

1.3 Μη επαναλαμβανόμενοι 2^k παραγοντικοί σχεδιασμοί

Μη επαναλαμβανόμενοι 2^k παραγοντικοί σχεδιασμοί καλούνται αυτοί για τους οποίους ισχύει ότι $n=1$, δηλαδή τα δεδομένα τους προέρχονται από μία μόνο πλήρη λήψη. Οι σχεδιασμοί αυτοί είναι κορεσμένοι, δηλαδή ο αριθμός k των παραγόντων είναι ίσος με $n-1$, όπου $n (=2^k)$ ισούται με τον αριθμό των παρατηρήσεων.

Οι σχεδιασμοί αυτοί έχουν μεγάλη σημασία στη βιομηχανία καθώς χρησιμοποιώντας τους οι ερευνητές επιδιώκουν να διακρίνουν τους παράγοντες που επηρεάζουν μια μεταβλητή (όπως π.χ. την διάρκεια ζωής μιας μπαταρίας), με δεδομένα από μία μόνο πλήρη λήψη, εξοικονομώντας έτσι χρόνο και χρήμα.

Το πρόβλημα που προκύπτει από την ανάλυση των μη-επαναλαμβανόμενων 2^k παραγοντικών σχεδιασμών είναι ότι, σε αντίθεση με τους επαναλαμβανόμενους 2^k παραγοντικούς σχεδιασμούς, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί η παραδοσιακή μέθοδος Ανάλυσης Διασποράς για τη διάκριση των ενεργών επιδράσεων και αλληλεπιδράσεων. Και αυτό γιατί δε μένουν βαθμοί ελευθερίας για τον υπολογισμό του μέσου αθροίσματος τετραγώνων του σφάλματος, αφού οι συνολικοί βαθμοί ελευθερίας ισούνται με το άθροισμα των βαθμών ελευθερίας των επιδράσεων κι αλληλεπιδράσεων.

Η δυσκολία αυτή καθώς και η τεράστια σημασία των μη-επαναλαμβανόμενων παραγοντικών σχεδιασμών για τη βιομηχανία οδήγησε τους στατιστικούς στην ανάπτυξη νέων μεθόδων, ειδικών για την διάκριση των ενεργών επιδράσεων, σε μη-επαναλαμβανόμενους 2^k παραγοντικούς σχεδιασμούς.

1.4 EER και IER

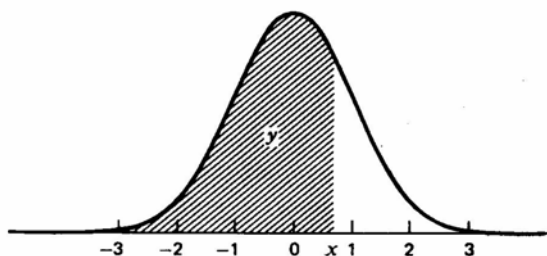
Δύο τύποι σφαλμάτων που είναι βοηθητικοί στη διαδικασία της κατηγοριοποίησης και σύγκρισης των μεθόδων ανάλυσης μη-επαναλαμβανόμενων 2^k παραγοντικών σχεδιασμών είναι το EER και το IER. Με τον όρο *EER*, experimental error rate, εννοούμε το ποσοστό των πειραμάτων στα οποία τουλάχιστον μια από τις συνολικά n επιδράσεις αναγνωρίστηκε ως ενεργή ενώ ήταν όλες αδρανείς και με τον όρο *IER*, individual error rate, εννοούμε το ποσοστό των επιδράσεων που αναγνωρίστηκαν ως ενεργές ενώ ήταν αδρανείς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2:

Μέθοδοι Ανάλυσης Μη Επαναλαμβανόμενων 2^k Παραγοντικών Σχεδιασμών

2.1 Μέθοδος Daniel (1959)

2.1.1 Κανονικό Διάγραμμα Πιθανότητας

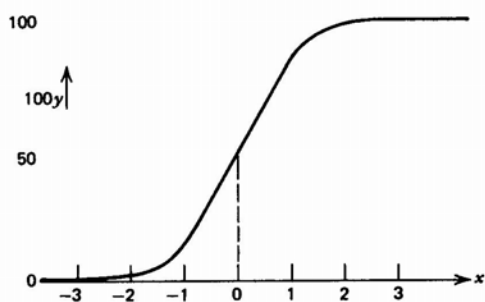


Σχήμα 2.1.1: Αθροιστική Περιοχή της $N(0,1)$ Κατανομής στο σημείο x

Η περιοχή y που βρίσκεται κάτω από μια $N(0,1)$ κατανομή, από το $-\infty$ μέχρι κάποιο σημείο x (και που ισούται με την πιθανότητα το X να είναι μικρότερο ή ίσο του x , όπως ξέρουμε από τη στατιστική) δίνεται από τη σχέση:

$$y = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2} X^2\right) dX .$$

Αν κατασκευάσουμε το διάγραμμα με τεταγμένη $100y$ και τετμημένη το x , θα πάρουμε μια S-σχήματος καμπύλη, που ονομάζεται αθροιστική καμπύλη της $N(0,1)$ κατανομής.



Σχήμα 2.1.2: Αθροιστική Καμπύλη της $N(0,1)$ Κατανομής

Χαρτί πιθανότητας κανονικής κατανομής (normal probability paper) είναι ένας ειδικός τύπος χαρτιού για διαγράμματα, στον οποίο ο κατακόρυφος άξονας έχει ειδική κλίμακα, ενώ ο οριζόντιος άξονας σημειώνεται με ίσες υποδιαιρέσεις κατά το συνήθη τρόπο. Η κατακόρυφη κλίμακα κυμαίνεται από το 0.01 μέχρι το 99.99 αλλά το διάστημα μεταξύ των υποδιαιρέσεων μεγαλώνει προχωρώντας προς τα πάνω από το σημείο 50 μέχρι το 99.99 και προς τα κάτω από το σημείο 50 μέχρι το 0.01, με συμμετρία περίπου ως προς την οριζόντια γραμμή 50. Η κλίμακα αυτή είναι τέτοια ώστε αν κατασκευάσουμε σε n.p.p. το διάγραμμα της $100y$ έναντι της x , θα πάρουμε μια ευθεία γραμμή. Η κλίμακα, δηλαδή, του κατακόρυφου άξονα ισιώνει το άνω και κάτω μέρος της S-σχήματος καμπύλης. Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι αν και τα σημεία $(-\infty, 0)$ και $(+\infty, 100)$ είναι πάνω στην ευθεία γραμμή, δεν μπορούν να δειχτούν στο διάγραμμα, γιατί η κλίμακα στον οριζόντιο άξονα έχει περιορισμένο μήκος και δεν μπορεί να εκτείνεται από το $-\infty$ στο $+\infty$.

Αν τώρα κατασκευάσουμε το διάγραμμα των σημείων της αθροιστικής καμπύλης πιθανότητας της κατανομής $N(\mu, \theta^2)$ (αντί της $N(0,1)$) σε χαρτί κανονικής πιθανότητας, θα πάρουμε μια ευθεία που περνάει από τα σημεία $(\mu-1.96\theta, 2.5)$, $(\mu, 50)$, $(\mu+\theta, 84.13)$, $(\mu+1.96\theta, 97.5)$ κτλ. Το γεγονός αυτό είναι πολύ χρήσιμο αν έχουμε ένα δείγμα $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m$ και θέλουμε να αποφασίσουμε αν προέρχεται από μία κανονική κατανομή. Καταρχήν διατάσσουμε το δείγμα σε αύξουσα σειρά. Έστω ότι η σωστή σειρά είναι η $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m$. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το διάγραμμα των χ_i έναντι των τεταγμένων με τιμές $100(i - \frac{1}{2})/m$. Η λογική στην οποία βασίζεται η μέθοδος αυτή είναι ότι αν διαιρέσουμε την περιοχή που βρίσκεται κάτω από την κανονική καμπύλη και έχει εμβαδόν ίσο με τη μονάδα σε m ίσες περιοχές, μπορούμε να αναμένουμε ότι μια παρατήρηση βρίσκεται σε κάθε περιοχή. Έτσι η i -οστή παρατήρηση στη σειρά, η χ_i , σημειώνεται στο διάγραμμα έναντι της αθροιστικής περιοχής στο μέσο της i -οστής περιοχής, που είναι το $(i - \frac{1}{2})/m$. Ο παράγοντας 100 προσαρμόζει την τιμή αυτή στην κλίμακα του κατακόρυφου άξονα του χαρτιού κανονικής πιθανότητας.

Αν το δείγμα είναι από κανονική κατανομή, τότε μπορούμε να φέρουμε μια καλά προσαρμοσμένη ευθεία γραμμή διαμέσου των σημείων του διαγράμματος, παρά το γεγονός ότι μπορεί κανένα από τα σημεία να μη βρίσκεται ακριβώς πάνω στην ευθεία αυτή.

2.1.2 Ημικανονικό Διάγραμμα Πιθανότητας

Όταν είναι γνωστό ότι ένα δείγμα προέρχεται από μια (πιθανώς κανονική) κατανομή με μέση τιμή θ , ένα εναλλακτικό διάγραμμα που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είναι το ημικανονικό διάγραμμα πιθανότητας.

$$\text{Αν } x \sim \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta^2}\right), (-\infty \leq x \leq \infty) \text{ , τότε } |x| \sim \frac{1}{\theta\sqrt{\frac{1}{2}\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta^2}\right).$$

Η μεταβλητή $|x|$ ακολουθεί μια ημικανονική κατανομή που έχει συνάρτηση κατανομής πιθανότητας με το ίδιο ακριβώς σχήμα με αυτό της $N(0, \theta^2)$, με τη διαφορά ότι η κάθε τεταγμένη είναι διπλάσια αυτής.

Έστω ότι:

$$y = \int_0^{|x|} \frac{1}{\theta\sqrt{\frac{1}{2}\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta^2}\right) dx.$$

Αν κατασκευάσουμε το διάγραμμα με συντεταγμένες τα σημεία $50(1+y)$ και $|x|$, σε χαρτί κανονικής πιθανότητας το αποτέλεσμα θα είναι μια ευθεία που θα περνάει από το σημείο $(0,50)$. Αυτή θα είναι το άνω μισό της θεωρητικής 'πλήρους κανονικής' γραμμής.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε ένα δείγμα από μία (πιθανώς κανονική) κατανομή της οποίας η πραγματική μέση τιμή είναι γνωστό ότι είναι 0. Για την κατασκευή του ημικανονικού διαγράμματος αρχικά υπολογίζουμε τις απόλυτες τιμές των παρατηρήσεων του δείγματος και τις διατάσσουμε σε αύξουσα σειρά, έστω τη z_1, z_2, \dots, z_m . Τα z_i σημειώνονται στο διάγραμμα (ως τετμημένες) έναντι των τιμών

$$50 + 50\left(i - \frac{1}{2}\right) / m, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Η λογική πίσω από αυτή τη διαδικασία είναι η ίδια με εκείνη που χρησιμοποιούμε για το κανονικό διάγραμμα. Διαιρούμε την περιοχή (ίση με τη μονάδα) που βρίσκεται κάτω από την ημικανονική καμπύλη σε m ίσες περιοχές και αναμένουμε ότι σε κάθε περιοχή θα βρίσκεται μία από τις παρατηρήσεις του δείγματος. Η i -οστή παρατήρηση σημειώνεται στο διάγραμμα έναντι της αθροιστικής περιοχής στο μέσο της i -οστής περιοχής που είναι το $(i - \frac{1}{2}) / m$. Για να προσαρμόσουμε την τιμή αυτή στην 50-100 κλίμακα των τεταγμένων του χαρτιού πιθανότητας, η τεταγμένη που χρησιμοποιείται στην πραγματικότητα είναι $50 + 50\left(i - \frac{1}{2}\right) / m$.

Αν το δείγμα είναι από κανονική κατανομή με μέση τιμή 0, μπορούμε να φέρουμε μια καλά προσαρμοσμένη ευθεία γραμμή από το σημείο $(0,50)$ δια μέσου του κύριου όγκου των σημείων του δείγματος.

2.1.3 Χρήση γραφικών μεθόδων για εύρεση ενεργών επιδράσεων στους παραγοντικούς σχεδιασμούς

Υποθέτουμε ότι έχουμε υπολογίσει της εκτιμήσεις των επιδράσεων και των αλληλεπιδράσεων. Οι εκτιμήσεις αυτές (ή τα απόλυτα τους για το ημικανονικό

διάγραμμα) κατατάσσονται σε αύξουσα σειρά και υπολογίζονται οι αντίστοιχες τιμές $100(i - \frac{1}{2})/m$ (για κανονικό διάγραμμα) ή $50 + 50(i - \frac{1}{2})/m$ (για ημικανονικό διάγραμμα). Αφού κατασκευάσουμε το διάγραμμα που θέλουμε, παρατηρούμε ότι ο κύριος όγκος των επιδράσεων και αλληλεπιδράσεων σχηματίζουν μία ευθεία την οποία και φέρουμε. Όσες επιδράσεις και αλληλεπιδράσεις βρίσκονται κοντά στην ευθεία (και άρα θεωρείται ότι ακολουθούν κανονική κατανομή), θεωρούνται μη σημαντικές, ενώ όσες αποκλίνουν σημαντικά από αυτή θεωρούνται σημαντικές.

Τα διαγράμματα αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση σημαντικών παραγόντων και σε παραγοντικούς σχεδιασμούς με επαναλήψεις.

2.1.4 Το πρόβλημα της υποκειμενικότητας

Ενώ θεωρητικά η χρήση της μεθόδου Daniel είναι εύκολη τόσο στην κατασκευή των normal probability plot και half normal probability plot, όσο και στη διάκριση των ενεργών παραγόντων, πολλές φορές ο ανθρώπινος παράγοντας οδηγεί σε λανθασμένα συμπεράσματα.

Ακόμα και αν όλες οι επιδράσεις δεν είναι σημαντικές, το πειραματικό σφάλμα δε θα επιτρέψει στα σημεία του γραφήματος να συμπέσουν τέλεια σε μια ευθεία. Παράλληλα η κατασκευή μίας όσο το δυνατό καλά προσαρμοσμένης ευθείας διαμέσου του κύριου όγκου των σημείων εναπόκειται στην κρίση του ερευνητή. Έτσι η ερμηνεία των αποτελεσμάτων είναι σε μεγάλο βαθμό υποκειμενική, αφού επιδράσεις που δε βρίσκονται πάνω στην ευθεία μπορούν είτε να χαρακτηριστούν σημαντικές ενώ δεν είναι, είτε να χαρακτηριστούν μη σημαντικές ενώ είναι. Πολλές φορές μάλιστα κάποιες επιδράσεις βρίσκονται σε τέτοια απόσταση ώστε να μην μπορούμε με σιγουριά να διακρίνουμε αν είναι ενεργές ή όχι (βλέπε normal probability plot του παραδείγματος 2).

Το πρόβλημα της υποκειμενικότητας στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων των γραφικών μεθόδων, ήταν ένας από τους λόγους που οδήγησαν τους στατιστικούς στην αναζήτηση νέων μεθόδων διάκρισης των ενεργών επιδράσεων ενός μη-επαναλαμβανόμενου 2^k παραγοντικού σχεδιασμού.

2.1.5 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1. (“Design and Analysis of Experiments” Montgomery D.C. 5th Edition 2001, example 6-2 σελ.246)

Ένα χημικό προϊόν παράγεται σε μια αντλία πίεσης. Χρησιμοποιείται ένας παραγοντικός σχεδιασμός για να μελετηθούν οι παράγοντες που επηρεάζουν το ρυθμό φιλτραρίσματος του προϊόντος. Οι παρατηρήσεις του πειράματος φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα:

Αριθμός παρατήρησης	A	B	C	D	Συνδυασμός Αγωγής	Ρυθμός Φιλτραρίσματος
1	-	-	-	-	(1)	45
2	+	-	-	-	a	71
3	-	+	-	-	b	48
4	+	+	-	-	ab	65
5	-	-	+	-	c	68
6	+	-	+	-	ac	60
7	-	+	+	-	bc	80
8	+	+	+	-	abc	65
9	-	-	-	+	a	43
10	+	-	-	+	ad	100
11	-	+	-	+	bd	45
12	+	+	-	+	abd	104
13	-	-	+	+	cd	75
14	+	-	+	+	acd	86
15	-	+	+	+	bcd	70
16	+	+	+	+	abcd	96

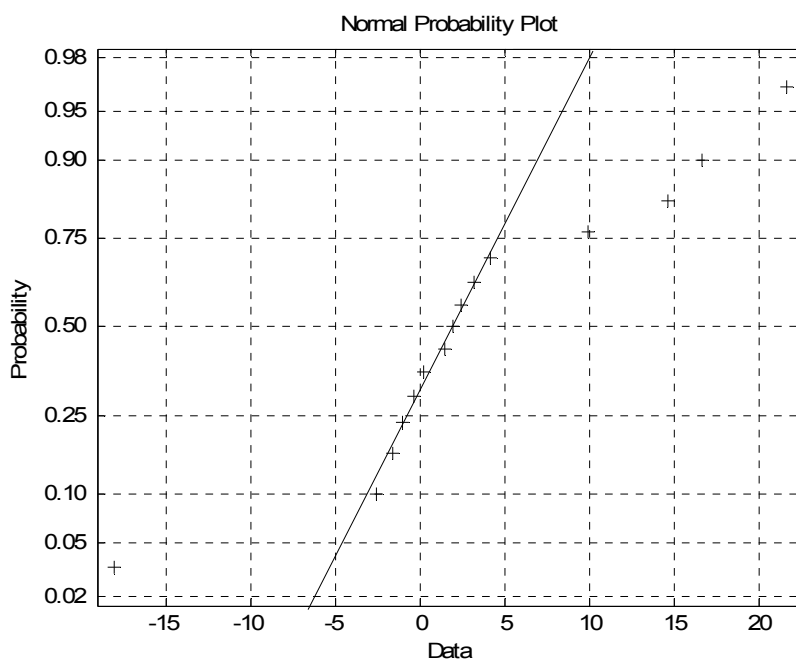
Πίνακας 2.1.3 : Παρατηρήσεις παραδείγματος 1

Υπολογίζουμε τα ποσοστιαία σημεία για την κατασκευή του normal probability plot:

Τάξη(j)	Εκτίμηση	Επίδραση	$100(j - 0.5)/15$
1	-18.125	AC	3.33
2	-2.625	BCD	10.00
3	-1.625	ACD	16.67
4	-1.125	CD	23.33
5	-0.375	BD	30.00
6	0.125	AB	36.67
7	1.375	ABCD	43.33
8	1.875	ABC	50.00
9	2.375	BC	56.67
10	3.125	B	63.33
11	4.125	ABD	70.00
12	9.875	C	76.67
13	14.625	D	83.33
14	16.625	AD	90.00
15	21.625	A	96.67

Πίνακας 2.1.4 : Εκτιμήσεις των επιδράσεων και ποσοστιαία σημεία για την κατασκευή του normal probability plot για το παράδειγμα 1

Προχωρούμε στην κατασκευή του normal probability plot:

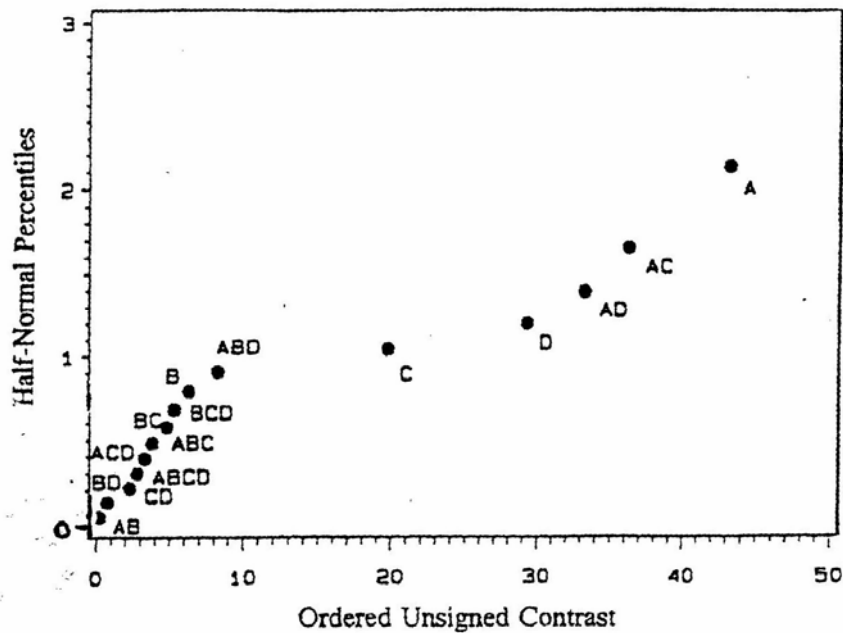


Σχήμα 2.1.5 : Normal Probability Plot του παραδείγματος 1

Εκτελούμε την ίδια διαδικασία για την κατασκευή του half normal probability plot. Πριν προχωρήσουμε στην κατασκευή του half normal probability plot θα πρέπει να κάνουμε την υπόθεση ότι η μέση τιμή του δείγματος είναι 0.

Τάξη(j)	Απόλυτη Εκτίμηση	Επίδραση	$50 + 50(j - 0.5)/15$
1	0.125	A	51.67
2	0.375	AC	55.00
3	1.125	AD	58.33
4	1.375	D	61.67
5	1.625	C	65.00
6	1.875	ABD	68.34
7	2.375	B	71.67
8	2.625	BCD	75.00
9	3.125	BC	78.34
10	4.125	ABC	81.67
11	9.875	ACD	85.00
12	14.625	ABCD	88.34
13	16.625	CD	91.67
14	18.125	BD	95.00
15	21.625	AB	98.34

Πίνακας 2.1.6 : Εκτιμήσεις των επιδράσεων και ποσοστιαία σημεία για την κατασκευή του half normal probability plot για το παράδειγμα 1



Σχήμα 2.1.7 : Half Normal Probability Plot του παραδείγματος 1

Στο σχήμα μας, στον άξονα y του half normal probability plot αντί για τα ποσοστιαία σημεία, χρησιμοποιούνται τα αντίστοιχα σημεία της ημικανονικής κατανομής.

Παρατηρώντας τα διαγράμματα, βλέπουμε ότι και τα δύο δείχνουν ότι έχουμε **5 ενεργές επιδράσεις**.

Παράδειγμα 2 (“Design and Analysis of Experiments”, Montgomery D.C. 5th Edition 2001. Problem **6.23** p.282)

Σε διαδικασία για τη μελέτη της απόδοσης μελετήθηκαν τέσσερις παράγοντες , ο καθένας σε 2 στάθμες : χρόνος (A) , συγκέντρωση (B) , πίεση (C) και θερμοκρασία (D) . Μια μόνο λήψη ενός 2^4 παραγοντικού σχεδιασμού πραγματοποιήθηκε και τα δεδομένα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα .

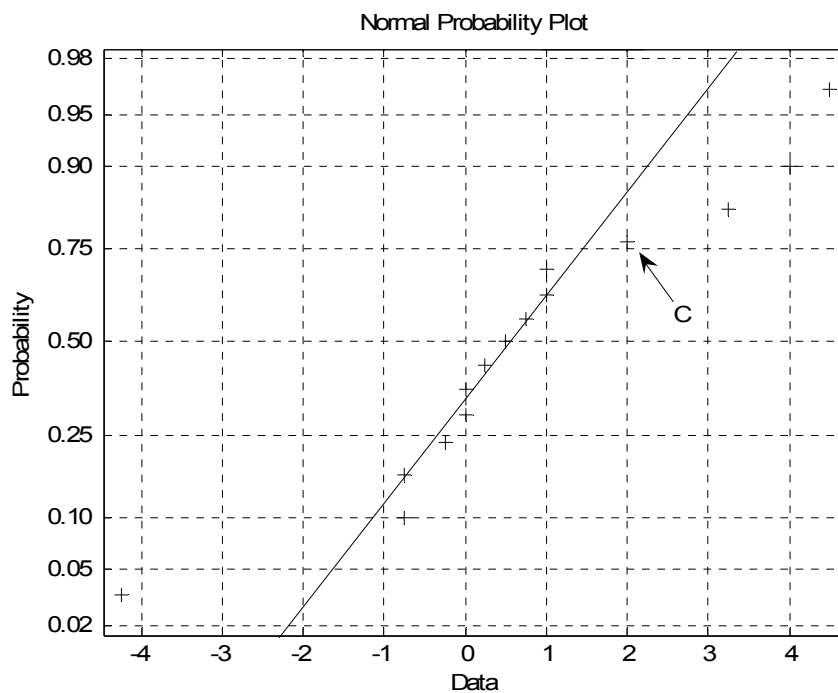
Αριθμός εκτέλεσης	Συνδυασμός αγωγής	Παράγοντας				Απόδοση (lbs)		Επίπεδα παραγόντων	
		A	B	C	D			(-)	(+)
1	1	-	-	-	-	12	A(h)	2.5	3
2	a	+	-	-	-	18	B(%)	14	18
3	b	-	+	-	-	13	C(psi)	60	80
4	ab	+	+	-	-	16	D(celcius)	225	250
5	c	-	-	+	-	17			
6	ac	+	-	+	-	15			
7	bc	-	+	+	-	20			
8	abc	+	+	+	-	15			
9	d	-	-	-	+	10			
10	ad	+	-	-	+	25			
11	bd	-	+	-	+	13			
12	abd	+	+	-	+	24			
13	cd	-	-	+	+	19			
14	acd	+	-	+	+	21			
15	bcd	-	+	+	+	17			
16	abcd	+	+	+	+	23			

Πίνακας 2.1.8 : Παρατηρήσεις παραδείγματος 2

Κατασκευάζουμε τα normal και half normal probability plots:

Τάξη(j)	Επίδραση	Εκτίμηση	$100(j - 0.5) / 15$
1	AC	-4.25	3.33
2	AB	-0.75	10.00
3	BCD	-0.75	16.67
4	ACD	-0.25	23.33
5	CD	0	30.00
6	BD	0	36.67
7	BC	0.25	43.33
8	B	0.5	50.00
9	ABD	0.75	56.67
10	ABC	1	63.33
11	ABCD	1	70.00
12	C	2	76.67
13	D	3.25	83.33
14	AD	4	90.00
15	A	4.5	96.67

Πίνακας 2.1.9 : Εκτιμήσεις των επιδράσεων και ποσοστιαία σημεία για την κατασκευή του normal probability plot για το παράδειγμα 2



Σχήμα 2.1.10 : Normal Probability Plot του παραδείγματος 2

Το normal probability plot δείχνει ότι έχουμε **4-5** (ανάλογα με την ερμηνεία του ερευνητή) **ενεργές επιδράσεις**. Στο παράδειγμα αυτό φαίνεται καθαρά το πρόβλημα της **υποκειμενικότητας** της απόφασης για το πόσοι παράγοντες είναι πραγματικά ενεργοί αφού στο normal probability plot η σημαντικότητα ή μη της επίδρασης C αμφισβητείται.

Παράδειγμα 3 (Daniel, 1976)

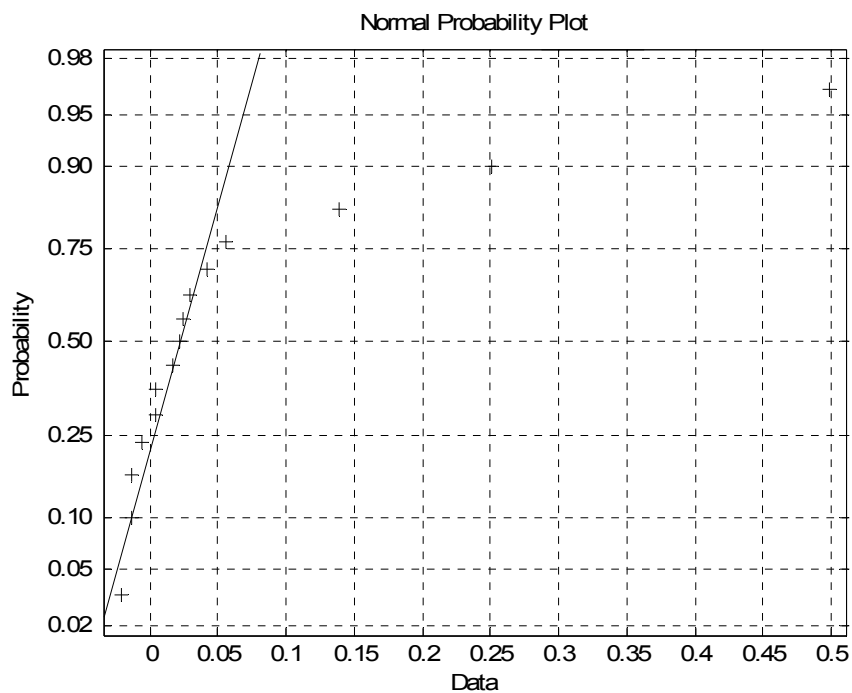
Στη διαδικασία παρακολούθησης μιας αποκριτικής τιμής (επίδραση διάτρησης) μελετήθηκαν τέσσερις παράγοντες, ο καθένας σε 2 στάθμες, βάρος (A), ροή (B), ταχύτητα (C) και λάσπη (D). Μια μόνο λήψη ενός 2^4 παραγοντικού σχεδιασμού πραγματοποιήθηκε και τα δεδομένα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Αριθμός εκτέλεσης	Συνδυασμός αγωγής	Παράγοντας				Απόκριση
		A	B	C	D	
1	1	-	-	-	-	0.23
2	a	+	-	-	-	0.30
3	b	-	+	-	-	0.52
4	ab	+	+	-	-	0.54
5	c	-	-	+	-	0.70
6	ac	+	-	+	-	0.76
7	bc	-	+	+	-	1.00
8	abc	+	+	+	-	0.96
9	d	-	-	-	+	0.32
10	ad	+	-	-	+	0.39
11	bd	-	+	-	+	0.61
12	abd	+	+	-	+	0.66
13	cd	-	-	+	+	0.89
14	acd	+	-	+	+	0.97
15	bcd	-	+	+	+	1.07
16	abcd	+	+	+	+	1.21

Πίνακας 2.1.13: Παρατηρήσεις παραδείγματος 3

Τάξη(j)	Επίδραση	Εκτίμηση	$100(j - 0.5)/15$
1	BC	-0.02	3.33
2	AB	-0.01	10.00
3	BC	-0.01	16.67
4	AC	0	23.33
5	ABC	0	30.00
6	BCD	0.01	36.67
7	ABD	0.02	43.33
8	ACD	0.02	50.00
9	ABCD	0.02	56.67
10	AD	0.03	63.33
11	CD	0.04	70.00
12	A	0.06	76.67
13	D	0.14	83.33
14	B	0.25	90.00
15	C	0.50	96.67

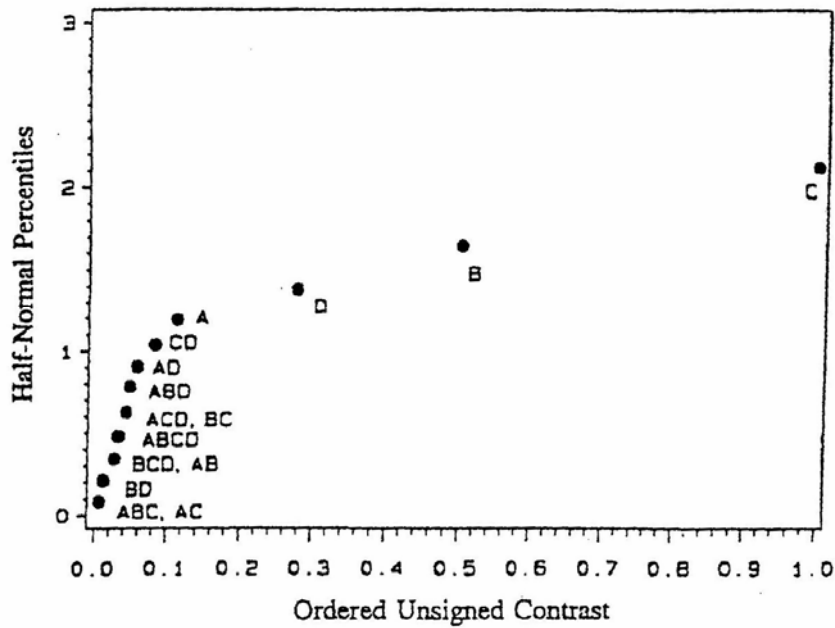
Πίνακας 2.1.14 : Εκτιμήσεις των επιδράσεων και ποσοστιαία σημεία για την κατασκευή του normal probability plot για το παράδειγμα 3



Σχήμα 2.1.15 : Normal Probability Plot του παραδείγματος 3

Τάξη(j)	Απόλυτη Εκτίμηση	Επίδραση	$50 + 50(j - 0.5)/15$
1	0	AC	51.67
2	0	ABC	55.00
3	0.01	AB	58.33
4	0.01	BC	61.67
5	0.01	BCD	65.00
6	0.02	BC	68.34
7	0.02	ABD	71.67
8	0.02	ACD	75.00
9	0.02	ABCD	78.34
10	0.03	AD	81.67
11	0.04	CD	85.00
12	0.06	A	88.34
13	0.14	D	91.67
14	0.25	B	95.00
15	0.50	C	98.34

Πίνακας 2.1.16 : Εκτιμήσεις των επιδράσεων και ποσοστιαία σημεία για την κατασκευή του half normal probability plot για το παράδειγμα 3



Σχήμα 2.1.17 : Half Normal Probability Plot του παραδείγματος 3

Βλέπουμε ότι το normal probability plot δείχνει ότι έχουμε 3 ενεργές επιδράσεις. Το half normal probability plot συμφωνεί με το normal probability plot.

2.1.6 Συμπεράσματα

Η γραφική μέθοδος για την αναγνώριση ενεργών παραγόντων είναι πολύ απλή. Γενικά τα δύο γραφήματα δίνουν τα ίδια αποτελέσματα. Συχνά πάντως, το πρόβλημα της υποκειμενικότητας δημιουργεί δυσκολίες στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων και καθιστά τις μεθόδους αυτές αναξιόπιστες.

2.2 Μέθοδος Al-Shiha – Yang (1999)

Η μέθοδος αυτή είναι μια μέθοδος πολλαπλών βημάτων που βασίζεται στην αρχή της πιθανοφάνειας. Μέσω ενός τεστ πηλίκου πιθανοφάνειας ελέγχει τη μηδενικής υπόθεση H_0 : [Δεν υπάρχουν ενεργές επιδράσεις], έναντι της εναλλακτικής H_a : [Υπάρχουν ακριβώς k ενεργές επιδράσεις]. Η μέθοδος ανήκει στην κατηγορία των μεθόδων που ελέγχουν το EER.

2.2.1 Στατιστικό της μεθόδου Al-Shiha - Yang

Έστω $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ ($n = 2^p - 1$) οι πραγματικές κύριες επιδράσεις και αλληλεπιδράσεις ενός μη-επαναλαμβανόμενου 2^p παραγοντικού σχεδιασμού και έστω $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n$ οι καλύτεροι γραμμικοί αμερόληπτοι εκτιμητές (B.L.U.E.) των επιδράσεων αυτών. Οι $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n$ είναι ανεξάρτητοι και ακολουθούν κανονικές κατανομές με μέσους $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ αντίστοιχα και κοινή διασπορά $\sigma^2/2^{p-2}$. Υποθέτουμε ότι k από τους $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ είναι μη μηδενικοί και ότι δεν υπάρχει αρχική εκτίμηση για το σ^2 .

Για ευκολία θεωρούμε τον μετασχηματισμό $Y_i = \sqrt{2^{p-2}} \hat{\theta}_i$ και $\mu_i = \sqrt{2^{p-2}} \theta_i$ ($i = 1, \dots, n$). Οι Y_i είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και ακολουθούν κανονικές κατανομές με μέσους μ_i και κοινή διασπορά σ^2 . Τα μ_i καλούνται τυποποιημένες επιδράσεις. Το νέο μετασχηματισμένο πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το αρχικό.

Έστω ότι A είναι ένα k-υποσύνολο των $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ και ότι θέλουμε να εξετάσουμε την υπόθεση $H_0: [\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = 0]$ έναντι της $H'_a: [\mu_i \neq 0 \text{ για } \mu_i \in A \text{ και } \mu_i = 0 \text{ για } \mu_i \notin A]$. Τότε το στατιστικό για το γενικευμένο τεστ πηλίκου πιθανοφάνειας είναι το:

$$\lambda_A = \left(1 + \frac{\sum_{\mu_i \in A} Y_i^2}{\sum_{\mu_i \notin A} Y_i^2} \right)^{-n/2}$$

Όταν αυτό είναι μικρότερο από μια κρίσιμη τιμή (Η τιμή αυτή είναι θεωρητική, αφού στην πραγματικότητα εξετάζουμε την κρίσιμη τιμή ενός ισοδύναμου στατιστικού το οποίο θα δούμε πιο κάτω), απορρίπτουμε την H_0 και αποδεχόμαστε την H'_a .

Έστω τώρα ότι θέλουμε να ελέγξουμε την H_0 έναντι της H_a : [ακριβώς k από τα μ_i είναι διάφορα του μηδενός]. Το στατιστικό που χρησιμοποιούμε είναι το

$$\lambda = \min_A \lambda_A$$

Ουσιαστικά, δηλαδή, ψάχνουμε να βρούμε ένα k -υποσύνολο A του $\{\mu_i : i = 1, 2, \dots, n\}$, για το οποίο η τιμή λ_A είναι μικρότερη της κρίσιμης τιμής. Αντί να ελέγξουμε όλα τα πιθανά A , παίρνουμε αυτό που δίνει τη μικρότερη τιμή για το λ_A και ελέγχουμε αυτό.

Εύκολα δείχνεται ότι:

$$\lambda = \left(1 + \frac{k}{n-k} L_{n,k}\right)^{-n/2},$$

όπου

$$L_{n,k} = \frac{\sum_{i=n-k+1}^n X_{(i)} / k}{\sum_{i=1}^{n-k} X_{(i)} / (n-k)}$$

και τα $X_{(i)}$ είναι τα διατεταγμένα στατιστικά των Y_i^2 .

Έτσι το τεστ μας μπορεί να αναχθεί στη μελέτη της τιμής $L_{n,k}$. Όταν αυτή είναι μεγαλύτερη μιας κρίσιμης τιμής απορρίπτουμε την H_0 και αποδεχόμαστε την H_A . Εκτενής πίνακας με τις κρίσιμες τιμές του $L_{n,k}$ δίνεται στο τέλος του κεφαλαίου.

2.2.2 Διαδικασία εφαρμογής της μεθόδου Al-Shiha - Yang

Η διαδικασία που χρησιμοποιείται είναι αρκετά απλή. Έστω ότι r είναι ο ακριβής αριθμός των ενεργών επιδράσεων ενός 2^p παραγοντικού σχεδιασμού. Επιλέγουμε αρχικά ένα σύνολο k ($k \geq r$) τυποποιημένων επιδράσεων $\mu_{(n-k+1)}, \dots, \mu_{(n)}$ που αντιστοιχούν στις k μεγαλύτερες τετραγωνικές εκτιμήσεις $X_{(n-k+1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ των τυποποιημένων επιδράσεων ($Y_j^2 = X_{(j)}$).

Βήματα:

1) Αρχικά ελέγχουμε τη μηδενική υπόθεση $H_0^{(0)}$: [Δεν υπάρχουν ενεργές επιδράσεις] έναντι της εναλλακτικής $H_a^{(0)}$: [Υπάρχουν ακριβώς k ενεργές επιδράσεις], χρησιμοποιώντας το στατιστικό $L_{n,k}$.

Αν το $L_{n,k}$ είναι μικρότερο της αντίστοιχης κρίσιμης τιμής, αποδεχόμαστε την $H_0^{(0)}$. Θεωρούμε δηλαδή ότι δεν υπάρχει ενεργή επίδραση και η διαδικασία τερματίζεται. Αν το $L_{n,k}$ είναι μεγαλύτερο της αντίστοιχης κρίσιμης τιμής, η $H_0^{(0)}$ απορρίπτεται. Θεωρούμε ότι η $\mu_{(n)}$ (η μεγαλύτερη, κατά απόλυτη τιμή, από τις μ_i) είναι ενεργή και προχωράμε στο επόμενο βήμα.

2) Εξετάζουμε τις υπόλοιπες $(n-1)$ επιδράσεις. Ελέγχουμε την $H_0^{(1)}$: [Δεν υπάρχουν ενεργές επιδράσεις] έναντι της $H_a^{(1)}$: [Υπάρχουν ακριβώς $(k-1)$ ενεργές επιδράσεις], χρησιμοποιώντας το $L_{n-1,k-1}$.

Αν το $L_{n-1,k-1}$ είναι μικρότερο της αντίστοιχης κρίσιμης τιμής, αποδεχόμαστε την $H_0^{(1)}$ και η διαδικασία τερματίζεται. Δεχόμαστε δηλαδή ότι μόνο η $\mu_{(n)}$ (που βρέθηκε ενεργή στο προηγούμενο βήμα) είναι ενεργή.

Αν το $L_{n-1,k-1}$ είναι μεγαλύτερο της αντίστοιχης κρίσιμης τιμής, απορρίπτουμε την $H_0^{(1)}$. Θεωρούμε ότι η $\mu_{(n-1)}$ είναι σημαντική και προχωράμε στο επόμενο βήμα.

.
. .
. .
. .
. .
. .
. .
. .

$m+1$) Εξετάζουμε τις υπόλοιπες $(n-m)$ επιδράσεις. Η διαδικασία τερματίζεται σε αυτό το βήμα, όπου ελέγχοντας την $H_0^{(m)}$: [Δεν υπάρχουν ενεργές επιδράσεις] έναντι της $H_a^{(m)}$: [Υπάρχουν ακριβώς $(k-m)$ ενεργές επιδράσεις] (χρησιμοποιώντας το $L_{n-m,k-m}$), αποδεχόμαστε την $H_0^{(m)}$. Στο σημείο αυτό έχουμε βρει ότι οι m τυποποιημένες επιδράσεις $\mu_{(n-m+1)}, \dots, \mu_{(n)}$ που αντιστοιχούν στις m μεγαλύτερες τετραγωνικές εκτιμήσεις των τυποποιημένων επιδράσεων είναι σημαντικές (ενεργές).

Σημείωση: Είναι δυνατό βέβαια η διαδικασία να τερματιστεί πριν αποδεχτούμε οποιαδήποτε μηδενική υπόθεση. Αυτό συμβαίνει όταν η μέθοδος κρίνει ότι και οι k επιδράσεις που ελέγχονται είναι σημαντικές.

2.2.3 Αναδρομικός τύπος υπολογισμού του $L_{n,k}$

Αφού το στατιστικό $L_{n,k}$ υπολογίζεται με τις τιμές των n και k να ελαττώνονται κατά ένα σε κάθε βήμα, μπορούμε για τον υπολογισμό του να χρησιμοποιήσουμε τον αναδρομικό τύπο:

$$L_{n-j,k-j} = \frac{1}{k-j} \left[(k-j+1) L_{n-j+1,k-j+1} - \frac{X_{(n-j+1)}}{\sum_{i=1}^{n-k} X_{(i)} / (n-k)} \right]$$

2.2.4 Η παράμετρος k

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της μεθόδου είναι η επιλογή της παραμέτρου k , της αρχικής δηλαδή εκτίμησης του αριθμού των σημαντικών επιδράσεων. Το τεστ έχει τη μέγιστη δυνατή αποτελεσματικότητα όταν η παράμετρος k είναι ίση με τον πραγματικό αριθμό r των σημαντικών ενεργών επιδράσεων. Επειδή όμως αρκετές φορές δεν μπορούμε με βεβαιότητα να ξέρουμε τον ακριβή αριθμό των ενεργών επιδράσεων, θα πρέπει να επιδιώκουμε το k να υπερεκτιμά και όχι να υποεκτιμά το r . Ο λόγος για αυτό είναι ότι όταν το k υπερεκτιμά το r , η μείωση της ισχύος του τεστ είναι μικρή ενώ όταν το k υποεκτιμά το r , η μείωση αυτή είναι μεγάλη. Βέβαια όσο λιγότερο το k υπερεκτιμά το r τόσο πιο αποτελεσματικό θα είναι το τεστ.

Συχνά μπορούμε να πάρουμε μια ικανοποιητική τιμή για το k ελέγχοντας το normal probability plot ή το half-normal plot. Όταν δεν έχουμε πληροφόρηση για τον πραγματικό αριθμό των ενεργών επιδράσεων οι εισηγητές της μεθόδου, στηριζόμενοι στην αρχή της σποραδικότητας, προτείνουν να επιλέξουμε $k = [0.3 \cdot n]$, όπου $[\cdot]$ δηλώνει το ακέραιο μέρος.

2.2.5 Παραδείγματα (Σε όλα τα παραδείγματα λαμβάνεται ε.σ. $\alpha = 0.05$)

Παράδειγμα 1. (“Design and Analysis of Experiments” Montgomery D.C. 5th Edition 2001, example 6-2 σελ.246)

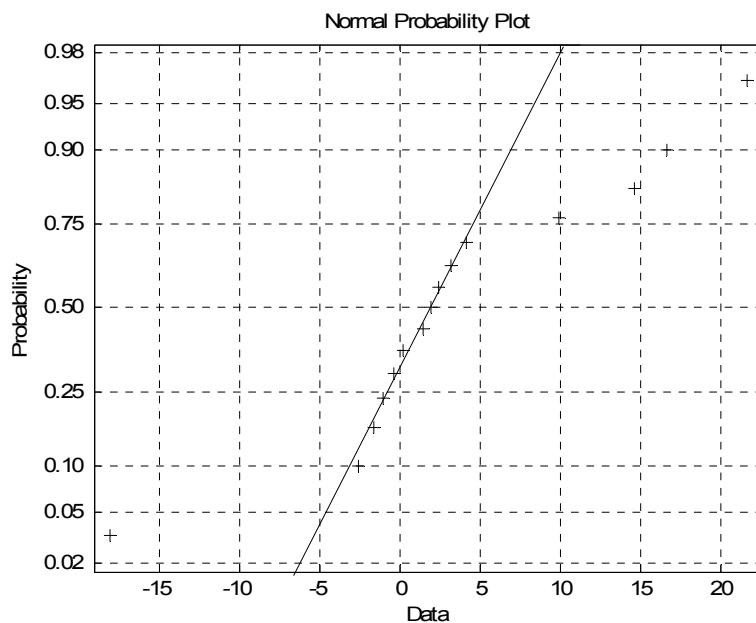
Τα δεδομένα του παραδείγματος και ο πίνακας των παρατηρήσεων (Πίνακας 2.1.3) βρίσκονται στις σελίδες 9-10.

Οι εκτιμήσεις των επιδράσεων και οι αντίστοιχες τετραγωνικές εκτιμήσεις των τυποποιημένων επιδράσεων είναι:

ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΕΠΙΔΡΑΣΗΣ	2^2 (εκτίμηση επίδρασης) ²
A	21.625	1870.5625
B	3.125	39.0625
AB	0.125	0.0625
C	9.875	390.0625
AC	-18.125	1314.0625
BC	2.375	22.5625
ABC	1.875	14.0625
D	14.625	855.5625
AD	16.625	1105.5625
BD	-0.375	0.5625
ABD	4.125	68.0625
CD	-1.125	5.0625
ACD	-1.625	10.5625
BCD	-2.625	27.5625
ABCD	1.375	7.5625

Πίνακας 2.2.1 : Εκτιμήσεις των επιδράσεων και τετραγωνικές εκτιμήσεις των τυποποιημένων επιδράσεων για το παράδειγμα 1

Για μια πρώτη ένδειξη για την παράμετρο k , που θα χρησιμοποιήσουμε στην εφαρμογή της μεθόδου, παρατηρούμε το normal probability plot των εκτιμήσεων των επιδράσεων.



Σχήμα 2.2.2 : Normal Probability Plot του παραδείγματος 1

Από το διάγραμμα αυτό φαίνεται ότι ο αριθμός των ενεργών επιδράσεων είναι 5. Μπορούμε λοιπόν να θέσουμε $k=5$.

Στη συνέχεια διατάσσουμε τις τιμές της τελευταίας στήλης του πίνακα 2.2.3 σε αύξουσα σειρά, οπότε έχω τα:

0.0625, 0.5625, 5.0625, 7.5625, 10.5625, 14.0625, 22.5625, 27.5625, 39.0625,
68.0625, 390.0625, 855.5625, 1105.5625, 1314.0625, 1870.5625

Υπολογίζω τα $L_{n,k}$ και ελέγγω τις αντίστοιχες υποθέσεις (Σε όλες τις υποθέσεις παίρνω ως επίπεδο σημαντικότητας το $\alpha=0.05$):

$$L_{15,5} = \frac{\sum_{i=11}^{15} X_{(i)}/5}{\sum_{i=1}^{10} X_{(i)}/(15-5)} = \frac{(390.0625 + \dots + 1870.5625)/5}{(0.0625 + \dots + 68.0625)/10} = 56.741 > C_{15,5} = 18.477$$

Απορρίπτεται λοιπόν η μηδενική υπόθεση και άρα η επίδραση που αντιστοιχεί στην $X_{(15)}$, δηλαδή η επίδραση του παράγοντα **A**, θεωρείται **ενεργή**.

Εξετάζουμε τώρα τις υπόλοιπες επιδράσεις:

$$L_{14,4} = \frac{\sum_{i=11}^{14} X_{(i)}/4}{\sum_{i=1}^{10} X_{(i)}/(14-4)} = \frac{(390.0625 + \dots + 1314.0625)/4}{(0.0625 + \dots + 68.0625)/10} = 46.960 > C_{14,4} = 16.598$$

Κι εδώ απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση και άρα η επίδραση που αντιστοιχεί στην $X_{(14)}$, δηλαδή η αλληλεπίδραση **AC**, θεωρείται **ενεργή**.

Εξετάζουμε τώρα τις υπόλοιπες επιδράσεις:

$$L_{13,3} = \frac{\sum_{i=11}^{13} X_{(i)}/3}{\sum_{i=1}^{10} X_{(i)}/(13-3)} = \frac{(390.0625 + \dots + 1105.5625)/3}{(0.0625 + \dots + 68.0625)/10} = 40.166 > C_{13,3} = 15.118$$

Άρα η επίδραση που αντιστοιχεί στην $X_{(13)}$, δηλαδή η αλληλεπίδραση **AD**, θεωρείται **ενεργή**.

Στη συνέχεια:

$$L_{12,2} = \frac{\sum_{i=11}^{12} X_{(i)}/2}{\sum_{i=1}^{10} X_{(i)}/(12-2)} = \frac{(390.0625 + 855.5625)/2}{(0.0625 + \dots + 68.0625)/10} = 31.919 > C_{12,2} = 13.691$$

Άρα η επίδραση που αντιστοιχεί στην $X_{(12)}$, δηλαδή η επίδραση του παράγοντα **D** θεωρείται **ενεργή**.

Προχωρώντας έχω:

$$L_{11,1} = \frac{\sum_{i=11}^{11} X_{(i)}/1}{\sum_{i=1}^{10} X_{(i)}/(11-1)} = \frac{(390.0625)/1}{(0.0625 + \dots + 68.0625)/10} = 19.990 \succ C_{11,1} = 13.269$$

Άρα η επίδραση που αντιστοιχεί στην $X_{(11)}$, δηλαδή η επίδραση του παράγοντα **C** θεωρείται **ενεργή**. Η διαδικασία τερματίζεται εδώ αφού έχω επιλέξει αρχικά $k=5$ και άρα δεν μπορώ να ελέγξω αν υπάρχουν περισσότερες ενεργές επιδράσεις.

Για $k=5$, λοιπόν, έχουν βρεθεί ενεργές οι επιδράσεις κι αλληλεπιδράσεις **A**, **AC**, **AD**, **D** και **C**. Το συμπέρασμα συμφωνεί και με το normal probability plot που είναι ένα ισχυρό δείγμα της ύπαρξης 5 σημαντικών επιδράσεων και αλληλεπιδράσεων.

Εκτελούμε την ίδια διαδικασία τώρα για $k=6$:

$$L_{15,6} = \frac{\sum_{i=10}^{15} X_{(i)}/6}{\sum_{i=1}^9 X_{(i)}/(15-6)} = \frac{(68.0625 + \dots + 1870.5625)/6}{(0.0625 + \dots + 39.0625)/9} = 66.155 \succ C_{15,6} = 22.883$$

Άρα η επίδραση του παράγοντα **A** θεωρείται **ενεργή**.

$$L_{14,5} = \frac{\sum_{i=10}^{14} X_{(i)}/5}{\sum_{i=1}^9 X_{(i)}/(14-5)} = \frac{(68.0625 + \dots + 1314.0625)/5}{(0.0625 + \dots + 39.0625)/9} = 52.887 \succ C_{14,5} = 20.480$$

Άρα η αλληλεπίδραση **AC** θεωρείται **ενεργή**.

$$L_{13,4} = \frac{\sum_{i=10}^{13} X_{(i)}/4}{\sum_{i=1}^9 X_{(i)}/(13-4)} = \frac{(68.0625 + \dots + 1105.5625)/4}{(0.0625 + \dots + 39.0625)/9} = 42.840 \succ C_{13,4} = 18.174$$

Άρα η αλληλεπίδραση **AD** θεωρείται **ενεργή**.

$$L_{12,3} = \frac{\sum_{i=10}^{12} X_{(i)}/3}{\sum_{i=1}^9 X_{(i)}/(12-3)} = \frac{(68.0625 + 390.0625 + 855.5625)/3}{(0.0625 + \dots + 39.0625)/9} = 31.017 > C_{12,3} = 16.282$$

Άρα η επίδραση του παράγοντα **D** θεωρείται **ενεργή**.

$$L_{11,2} = \frac{\sum_{i=10}^{11} X_{(i)}/2}{\sum_{i=1}^9 X_{(i)}/(11-2)} = \frac{(68.0625 + 390.0625)/2}{(0.0625 + \dots + 39.0625)/9} = 16.225 > C_{11,2} = 14.379$$

Άρα η επίδραση του παράγοντα **C** θεωρείται **ενεργή**.

$$L_{10,1} = \frac{\sum_{i=10}^{10} X_{(i)}/1}{\sum_{i=1}^9 X_{(i)}/(10-1)} = \frac{(68.0625)/1}{(0.0625 + \dots + 39.0625)/9} = 4.821 < C_{10,1} = 13.668$$

Εδώ τερματίζεται η διαδικασία (Αποδεχόμαστε τη μηδενική υπόθεση).

Κι εδώ έχουν βρεθεί ενεργές οι επιδράσεις κι αλληλεπιδράσεις **A**, **AC**, **AD**, **D** και **C**.

Ας δούμε τώρα τι θα συμβεί αν θέσουμε αρχικά **k=7**.

Επαναλαμβάνω την προηγούμενη διαδικασία μόνο που ξεκινώ με το $L_{15,7}$:

$$L_{15,7} = \frac{\sum_{i=9}^{15} X_{(i)}/7}{\sum_{i=1}^8 X_{(i)}/(15-7)} = \frac{(39.0625 + \dots + 1870.5625)/7}{(0.0625 + \dots + 27.5625)/8} = 73.285 > C_{15,7} = 28.717$$

Άρα η **A** **ενεργή**.

$$L_{14,6} = \frac{\sum_{i=9}^{14} X_{(i)}/6}{\sum_{i=1}^8 X_{(i)}/(14-6)} = \frac{(39.0625 + \dots + 1314.0625)/6}{(0.0625 + \dots + 27.5625)/8} = 57.157 > C_{14,6} = 25.771$$

Άρα η **AC** **ενεργή**.

$$L_{13,5} = \frac{\sum_{i=9}^{13} X_{(i)}/5}{\sum_{i=1}^8 X_{(i)}/(13-5)} = \frac{(39.0625 + \dots + 1105.5625)/5}{(0.0625 + \dots + 27.5625)/8} = 44.697 > C_{13,5} = 22.817$$

Άρα η **AD ενεργή**.

$$L_{12,4} = \frac{\sum_{i=9}^{12} X_{(i)}/4}{\sum_{i=1}^8 X_{(i)}/(12-4)} = \frac{(39.0625 + \dots + 855.5625)/4}{(0.0625 + \dots + 27.5625)/8} = 30.744 > C_{12,4} = 19.837$$

Άρα η **D ενεργή**.

$$L_{11,3} = \frac{\sum_{i=9}^{11} X_{(i)}/3}{\sum_{i=1}^8 X_{(i)}/(11-3)} = \frac{(39.0625 + 68.0625 + 390.0625)/3}{(0.0625 + \dots + 27.5625)/8} = 15.066 < C_{11,3} = 17.408$$

Άρα στο σημείο αυτό αποδεχόμαστε τη μηδενική υπόθεση και η διαδικασία τερματίζεται.

Θέτοντας, λοιπόν, αρχικά $k=7$ βρήκαμε 4 ενεργές επιδράσεις, τις **A**, **AC**, **AD** και **D**, εν αντιθέσει με πριν, όπου είχαμε θέσει αρχικά $k=5$ και είχαμε βρει 5 ενεργές επιδράσεις. Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με την παρατήρηση που κάναμε για το normal probability plot, επιβεβαιώνει το ότι όταν το k υπερεκτιμά τον πραγματικό αριθμό των επιδράσεων, μειώνεται η ισχύς της μεθόδου.

Αν τώρα δεν είχαμε πληροφόρηση για τον πραγματικό αριθμό των ενεργών επιδράσεων, κατά τους συγγραφείς, θα θέταμε $k = \lceil 0.3 \cdot n \rceil$, δηλαδή $k=4$:

$$L_{15,4} = \frac{\sum_{i=12}^{15} X_{(i)}/4}{\sum_{i=1}^{11} X_{(i)}/(15-4)} = \frac{(855.5625 + \dots + 1870.5625)/4}{(0.0625 + \dots + 390.0625)/11} = 24.182 > C_{15,4} = 15.577$$

Άρα η **A ενεργή**.

$$L_{14,3} = \frac{\sum_{i=12}^{14} X_{(i)}/3}{\sum_{i=1}^{11} X_{(i)}/(14-3)} = 20.522 > C_{14,3} = 14.321$$

Άρα η **AC ενεργή**.

$$L_{13,2} = \frac{\sum_{i=12}^{13} X_{(i)}/2}{\sum_{i=1}^{11} X_{(i)}/(13-2)} = 18.432 > C_{13,2} = 13.206$$

Άρα η **AD** ενεργή.

$$L_{12,1} = \frac{\sum_{i=12}^{12} X_{(i)}/1}{\sum_{i=1}^{11} X_{(i)}/(13-2)} = 16.082 > C_{12,1} = 12.892$$

Άρα η **D** ενεργή.

Είναι προφανές ότι αν θέσω **k=4** (αν δηλαδή το k υποεκτιμά τον πραγματικό αριθμό των ενεργών επιδράσεων) μειώνεται ακόμα περισσότερο η ισχύς της μεθόδου, καθώς δεν υπάρχει η δυνατότητα να βρεθούν 5 ενεργές επιδράσεις. Άρα σε αυτή την περίπτωση το $k = \lceil 0.3 \cdot n \rceil$ δεν βοηθάει στο να βρούμε όλες τις ενεργές επιδράσεις.

Ας μειώσουμε ακόμα περισσότερο το k (k=3):

$$L_{15,3} = \frac{\sum_{i=13}^{15} X_{(i)}/3}{\sum_{i=1}^{12} X_{(i)}/(15-3)} = 11.911 < C_{15,3} = 13.790$$

Με την περαιτέρω μείωση του k, μειώθηκε δραματικά η ισχύς της μεθόδου καθώς δεν βρέθηκε καμία ενεργή επίδραση.

Παράδειγμα 2 (“Design and Analysis of Experiments” Montgomery D.C. 5th Edition, 2001, prob.6-21 p.281)

Ένα πείραμα πραγματοποιήθηκε σε μία εγκατάσταση επεξεργασίας ημιαγωγών σε μια προσπάθεια να αυξηθεί η απόδοση. Πέντε παράγοντες, ο καθένας σε δύο επίπεδα εξετάστηκαν. Οι παράγοντες ήταν ο καθορισμός της οπής, ο χρόνος έκθεσης, ο χρόνος ανάπτυξης, η διάσταση της μάσκας και ο χρόνος χαράγματος. Ο μη-επαναλαμβανόμενος 2^5 παραγοντικός σχεδιασμός εφαρμόστηκε και τα αποτελέσματα δίνονται παρακάτω.

Συνδυασμός αγωγής	Υ	Συνδυασμός αγωγής	Υ		Επίπεδα παραγόντων	
					(-)	(+)
(1)	7	e	8	A	μικρή	μεγάλη
a	9	ae	12	B	20% κάτω	20% πάνω
b	34	be	35	C(s)	30	45
ab	55	abe	52	D	μικρή	μεγάλη
c	16	ce	15	E(min)	14.5	15.5
ac	20	ace	22			
bc	40	bce	45			
abc	60	abce	65			
d	8	de	6			
ad	10	ade	10			
bd	32	bde	30			
abd	50	abde	53			
cd	18	cde	15			
acd	21	acde	20			
bcd	44	bcde	41			
abcd	61	abcde	63			

Πίνακας 2.2.3 : Παρατηρήσεις παραδείγματος 2

Οι εκτιμήσεις των επιδράσεων και οι αντίστοιχες τετραγωνικές εκτιμήσεις των τυποποιημένων επιδράσεων δίνονται στον πιο κάτω πίνακα.

ΠΑΡΑΓ.	ΕΚΤ. ΕΠΙΔΡ.	2^3 (εκτ. επίδρ.) ²	ΠΑΡΑΓ.	ΕΚΤ. ΕΠΙΔΡ.	2^3 (εκτ. επίδρ.) ²
A	11.8125	1116.28125	AE	0.9375	7.03125
B	33.9375	9214.03125	BE	0.5625	2.53125
AB	7.9375	504.03125	ABE	-0.1875	0.28125
C	9.6875	750.78125	CE	0.3125	0.78125
AC	0.4375	1.53125	ACE	0.3125	0.78125
BC	0.0625	0.03125	BCE	0.9375	7.03125
ABC	-0.4375	1.53301	ABCE	0.1875	0.28125
D	-0.8125	5.28125	DE	-1.1875	11.28125
AD	-0.0625	0.03125	ADE	0.8125	5.28125
AB	-0.6875	3.78125	ABE	0.1875	0.28125
ABD	0.3125	0.78125	ABDE	0.9375	7.03125
CD	0.8125	5.28125	CDE	-0.8125	5.28125
ACD	-0.4375	1.53125	ACDE	-0.3125	0.78125
BCD	0.4375	1.53125	BCDE	-0.9375	7.03125
ABCD	-0.0625	0.03125	ABCDE	-0.1875	0.28125
E	0.4375	1.53125			

Πίνακας 2.2.4 : Εκτιμήσεις των επιδράσεων και τετραγωνικές εκτιμήσεις των τυποποιημένων επιδράσεων για το παράδειγμα 2

Στη συνέχεια διατάσσουμε την τελευταία στήλη του πίνακα 2.2.5 σε αύξουσα σειρά για να λάβουμε τα $X_{(i)}$:

0.03125, 0.03125, 0.03125, 0.28125, 0.28125, 0.28125, 0.28125, 0.78125, 0.78125,
 0.78125, 0.78125, 1.53125, 1.53125, 1.53125, 1.53125, 1.53301, 2.53125, 3.78125,
 5.28125, 5.28125, 5.28125, 5.28125, 7.03125, 7.03125, 7.03125, 7.03125, 11.28125,
 504.03125, 750.78125, 1116.28125, 9214.03125

Θα ξεκινήσουμε τη γνωστή, πλέον, διαδικασία χρησιμοποιώντας $k=9$, που ισούται με το ακέραιο μέρος του $0.3(31)$. Θα υποθέσουμε δηλαδή ότι δεν έχουμε πληροφορία σε σχέση με τον πραγματικό αριθμό των ενεργών επιδράσεων.

$$L_{31,9} = \frac{\sum_{i=23}^{31} X_{(i)}/9}{\sum_{i=1}^{22} X_{(i)}/(31-9)} = \frac{(7.03125 + \dots + 9214.03125)/9}{(0.03125 + \dots + 5.28125)/22} = 721.64 \succ C_{31,9} = 13.555$$

Άρα η επίδραση που αντιστοιχεί στην $X_{(31)}$, δηλαδή η επίδραση του παράγοντα **B** θεωρείται **σημαντική**.

$$L_{30,8} = \frac{\sum_{i=23}^{30} X_{(i)}/8}{\sum_{i=1}^{22} X_{(i)}/(30-8)} = \frac{(7.03125 + \dots + 1116.28125)/8}{(0.03125 + \dots + 5.28125)/22} = 168.086 \succ C_{30,8} = 13.007$$

Άρα η επίδραση του παράγοντα **A** θεωρείται **ενεργή**.

$$L_{29,7} = \frac{\sum_{i=23}^{29} X_{(i)}/7}{\sum_{i=1}^{22} X_{(i)}/(29-7)} = 103.139 \succ C_{29,7} = 12.549$$

Άρα η επίδραση του παράγοντα **C** θεωρείται **σημαντική**.

$$L_{28,6} = \frac{\sum_{i=23}^{28} X_{(i)}/6}{\sum_{i=1}^{22} X_{(i)}/(28-6)} = 50.525 \succ C_{28,6} = 12.093$$

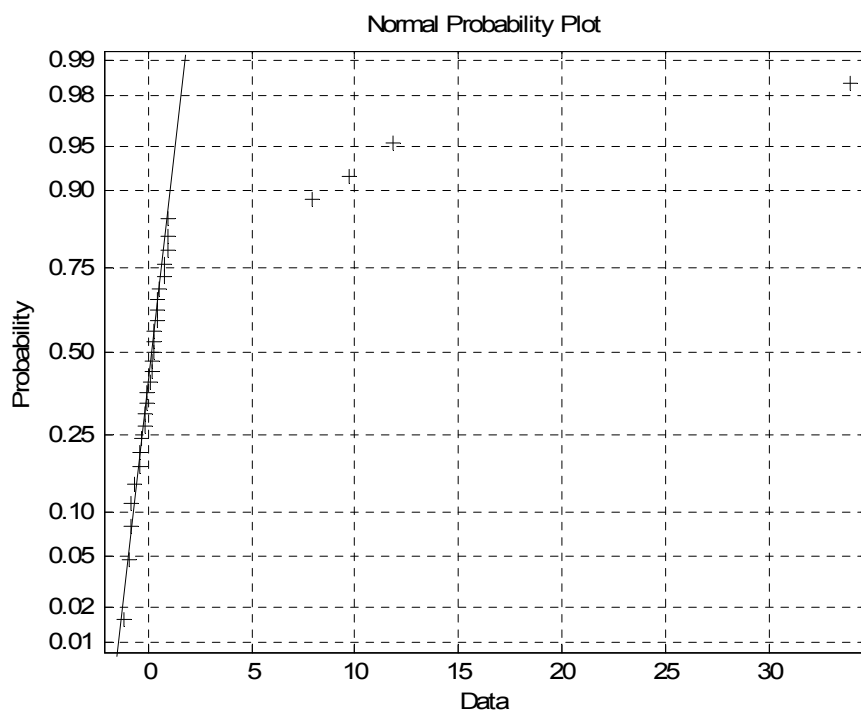
Άρα η αλληλεπίδραση **AB** θεωρείται **ενεργή**.

$$L_{27,5} = \frac{\sum_{i=23}^{27} X_{(i)}/5}{\sum_{i=1}^{22} X_{(i)}/(27-5)} = 4.396 < C_{27,5} = 11.797 .$$

Στο σημείο αυτό δεχόμαστε τη μηδενική υπόθεση και η διαδικασία τερματίζεται.

Έχουν βρεθεί **ενεργές** οι επιδράσεις και οι αλληλεπιδράσεις **A, B, C** και **AB**.

Τώρα θα επαναλάβουμε τη διαδικασία, παρατηρώντας πρώτα το normal probability plot, για να πάρουμε κατάλληλη τιμή του k.



Σχήμα 2.2.5 : Normal Probability Plot του παραδείγματος 2

Από το πιο πάνω διάγραμμα βλέπουμε ότι οι ενεργές επιδράσεις πιθανώς είναι 4. Θα μπορούσαμε να θέσουμε k=4, αλλά θα ξεκινήσουμε με **k=5** έτσι ώστε να μπορούμε να ελέγξουμε και την περίπτωση ύπαρξης 5 σημαντικών επιδράσεων. Έχουμε λοιπόν:

$$L_{31,5} = \frac{\sum_{i=27}^{31} X_{(i)}/5}{\sum_{i=1}^{26} X_{(i)}/(31-5)} = 892.52 > C_{31,5} = 11.103$$

Άρα η **B** ενεργή.

$$L_{30,4} = \frac{\sum_{i=27}^{30} X_{(i)}/4}{\sum_{i=1}^{26} X_{(i)}/(30-4)} = 229.201 \succ C_{30,4} = 10.879$$

Άρα η **A ενεργή**.

$$L_{29,3} = \frac{\sum_{i=27}^{29} X_{(i)}/3}{\sum_{i=1}^{26} X_{(i)}/(29-3)} = 162.409 \succ C_{29,3} = 10.830$$

Άρα η **C ενεργή**.

$$L_{28,2} = \frac{\sum_{i=27}^{28} X_{(i)}/2}{\sum_{i=1}^{26} X_{(i)}/(28-2)} = 99.153 \succ C_{28,2} = 11.055$$

Άρα η **AB ενεργή**.

$$L_{27,1} = 4.341 \prec C_{27,1} = 12.004$$

Εδώ τερματίζεται η διαδικασία. Έχουν βρεθεί **4 ενεργές επιδράσεις**, οι ίδιες που βρέθηκαν όταν είχαμε θέσει $k=9$.

Στην περίπτωση αυτή, αν και το $k=9$ υπερεκτιμά κατά μεγάλο βαθμό τον πραγματικό αριθμό των ενεργών επιδράσεων, δε σημειώθηκε διαφορά στην ισχύ της μεθόδου.

Παράλληλα το παράδειγμα αυτό υποδεικνύει ότι όταν δεν έχουμε πληροφορία για τον πραγματικό αριθμό των ενεργών επιδράσεων μία καλή τιμή για το k είναι το $[0.3 \cdot n]$.

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει, στο παράδειγμα αυτό, αν μειώσουμε το k έτσι ώστε να υποεκτιμά τον πραγματικό αριθμό των ενεργών επιδράσεων. Θα παρατηρηθεί κι εδώ δραστική μείωση της ισχύος της μεθόδου;

Θέτουμε $k=2$:

$$L_{31,2} = \frac{\sum_{i=30}^{31} X_{(i)}/2}{\sum_{i=1}^{29} X_{(i)}/(31-2)} = 112.31 \succ C_{31,2} = 10.986$$

Άρα η **B ενεργή**.

$$L_{30,1} = \frac{\sum_{i=30}^{30} X_{(i)}/1}{\sum_{i=1}^{29} X_{(i)}/(30-1)} = 24.27 > C_{30,1} = 11.949$$

Άρα η **A ενεργή**.

Βλέπουμε ότι κι εδώ, με την υποεκτίμηση του πραγματικού αριθμού των ενεργών επιδράσεων, μειώθηκε η ισχύς της μεθόδου, όχι όμως όσο μειώθηκε στο προηγούμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 3 (“Design and Analysis of Experiments”, Montgomery D.C. 5th Edition 2001. Problem **6.23** p.282)

Τα δεδομένα και ο πίνακας των παρατηρήσεων (Πίνακας 2.1.8) του παραδείγματος βρίσκονται στις σελίδες 12-13.

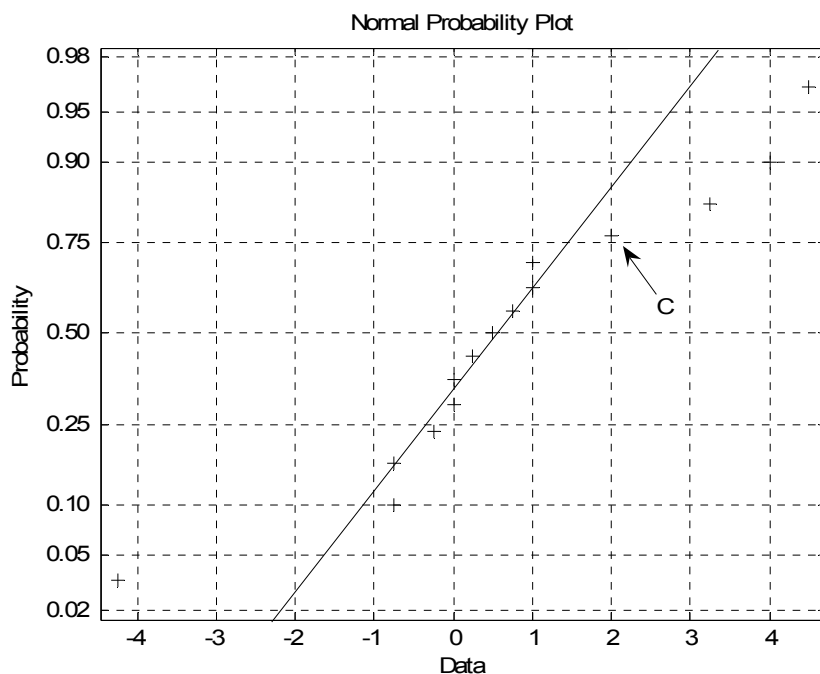
ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΕΠΙΔΡΑΣΗΣ	2^2 (εκτίμηση επίδρασης) ²
A	4.5	81
B	0.5	1
AB	-0.75	2.25
C	2	16
AC	-4.25	72.25
BC	0.25	0.25
ABC	1	4
D	3.25	42.25
AD	4	64
BD	0	0
ABD	0.75	2.25
CD	0	0
ACD	-0.25	0.25
BCD	-0.75	2.25
ABCD	1	4

Πίνακας 2.2.6 : Εκτιμήσεις των επιδράσεων και τετραγωνικές εκτιμήσεις των τυποποιημένων επιδράσεων για το παράδειγμα 3

Διατάσσουμε τις τιμές της τελευταίας στήλης σε αύξουσα σειρά:

0, 0, 0.25, 0.25, 1, 2.25, 2.25, 2.25, 4, 4, 4, 16, 42.25, 72.25, 81

Αν κοιτάξουμε το normal probability plot θα δούμε ότι η εικόνα που έχουμε για τον πραγματικό αριθμό των ενεργών επιδράσεων δεν είναι τόσο καθαρή. Είμαστε ανάμεσα στο 4 και το 5, λόγω της ύπαρξης της επίδρασης C.



Σχήμα 2.2.7: Normal Probability Plot του παραδείγματος 3

Θα θέσουμε αρχικά $k=5$:

$$L_{15,5} = \frac{\sum_{i=11}^{15} X_{(i)}/5}{\sum_{i=1}^{10} X_{(i)}/(15-5)} = 33.907 \succ C_{15,5} = 18.477$$

Άρα η **A** ενεργή.

$$L_{14,4} = \frac{\sum_{i=11}^{14} X_{(i)}/4}{\sum_{i=1}^{10} X_{(i)}/(14-4)} = 29.923 \succ C_{14,4} = 16.598$$

Άρα η **AC** ενεργή.

$$L_{13,3} = \frac{\sum_{i=11}^{13} X_{(i)}/3}{\sum_{i=1}^{10} X_{(i)}/(13-3)} = 25.077 \succ C_{13,3} = 15.118$$

Άρα η **AD** ενεργή.

$$L_{12,2} = \frac{\sum_{i=11}^{12} X_{(i)}/2}{\sum_{i=1}^{10} X_{(i)}/(12-2)} = 17.923 > C_{13,3} = 13.691$$

Άρα η **D ενεργή**.

$$L_{11,1} = \frac{\sum_{i=11}^{11} X_{(i)}/1}{\sum_{i=1}^{10} X_{(i)}/(11-1)} = 9.846 < C_{13,3} = 13.269$$

Εδώ τερματίζεται η διαδικασία και έχουν βρεθεί 4 ενεργές επιδράσεις, οι A, AC, AD και D.

Στο ίδιο αποτέλεσμα οδηγούμαστε και αν πάρουμε **k=4**.

Άρα εδώ επιβεβαιώνεται και το ότι μία καλή τιμή για το k είναι το $[0.3 \cdot n]$, όταν δεν έχουμε πληροφόρηση για τον πραγματικό αριθμό των ενεργών επιδράσεων.

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει για **k=3**, στην περίπτωση, δηλαδή, υποεκτίμησης του πραγματικού αριθμού των ενεργών επιδράσεων.

$$L_{15,3} = \frac{\sum_{i=13}^{15} X_{(i)}/3}{\sum_{i=1}^{12} X_{(i)}/(15-3)} = 11.664 < C_{15,3} = 13.790$$

Άρα δεν βρίσκουμε καμμία ενεργή επίδραση. Επιβεβαιώνεται το ότι όταν το k υποεκτιμά τον πραγματικό αριθμό των ενεργών επιδράσεων, η ισχύς της μεθόδου μειώνεται δραστικά.

Μένει να δούμε και τι συμβαίνει όταν το k υπερεκτιμά τον πραγματικό αριθμό των ενεργών επιδράσεων:

Θέτω **k=7**:

$$L_{15,7} = \frac{\sum_{i=9}^{15} X_{(i)}/7}{\sum_{i=1}^{8} X_{(i)}/(15-7)} = 39.273 > C_{15,7} = 28.717$$

Άρα η **A ενεργή**.

$$L_{14,6} = \frac{\sum_{i=9}^{14} X_{(i)}/6}{\sum_{i=1}^8 X_{(i)}/(14-6)} = 32.273 > C_{14,6} = 25.771$$

Άρα η **AC ενεργή**.

$$L_{13,5} = \frac{\sum_{i=9}^{13} X_{(i)}/5}{\sum_{i=1}^8 X_{(i)}/(13-5)} = 25.261 > C_{13,5} = 22.817$$

Άρα η **AD ενεργή**.

$$L_{12,4} = \frac{\sum_{i=9}^{12} X_{(i)}/4}{\sum_{i=1}^8 X_{(i)}/(12-4)} = 16.061 < C_{12,4} = 19.837$$

Η διαδικασία τερματίζεται εδώ και έχουμε βρει **3 ενεργές επιδράσεις**. Άρα φαίνεται ότι μειώθηκε η ισχύς της μεθόδου, όχι βέβαια όσο μειώθηκε για $k=3$.

Παράδειγμα 4 (“Design and Analysis of Experiments”, Montgomery D.C. 5th Edition, 2001. Problem **6.18**, p.281)

Σε ένα άρθρο του Solid State Technology περιγράφεται η εφαρμογή των παραγοντικών σχεδιασμών στην ανάπτυξη μιας διαδικασίας χάραξης με νιτρίδιο πάνω σε ένα δισκίο. Η διαδικασία χρησιμοποιεί το C_2F_6 ως αντιδρών αέριο. Τέσσερις παράγοντες μας ενδιαφέρουν για μελέτη. Η διαφορά ανόδου και καθόδου (A), η πίεση στον θάλαμο του αντιδραστήρα (B), η ροή του αερίου C_2F_6 (C) και η δύναμη που εφαρμόζεται στην κάθοδο (D). Η μεταβλητή απόκρισης που μας ενδιαφέρει είναι ο ρυθμός χαραγής για το νιτρίδιο πυριτίου. Μια λήψη ενός 2^4 παραγοντικού σχεδιασμού πραγματοποιείται και έχουμε τα παρακάτω δεδομένα.

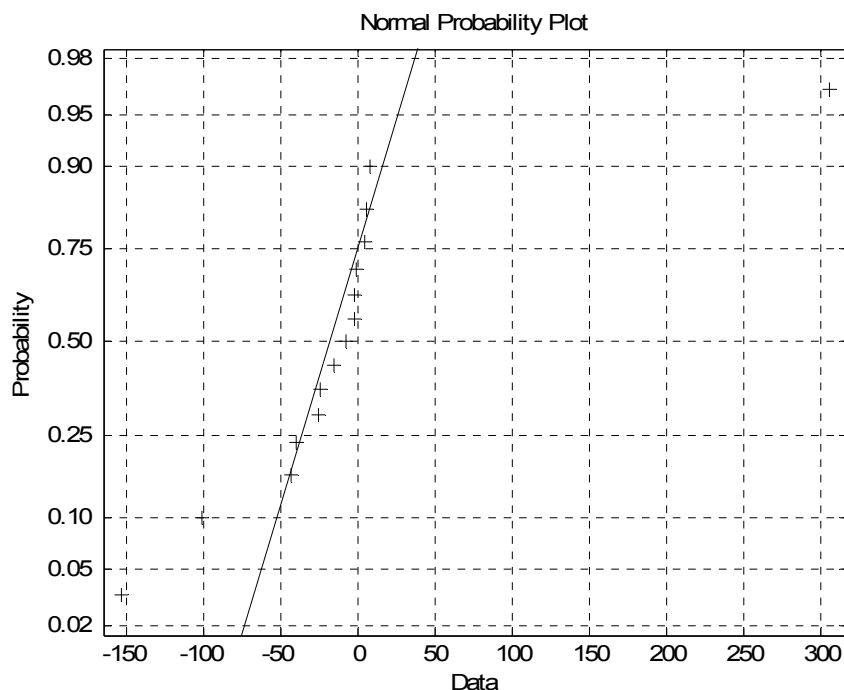
Αριθμός εκτέλεσης	Συνδυασμός αγωγής	Παράγοντας				Ρυθμός χάραξης (A/min)		Επίπεδα παραγόντων	
		A	B	C	D			(-)	(+)
1	1	-	-	-	-	550	A(cm)	0.80	1.20
2	a	+	-	-	-	669	B(mTorr)	450	550
3	b	-	+	-	-	604	C(SCCM)	125	200
4	ab	+	+	-	-	650	D(W)	275	325
5	c	-	-	+	-	633			
6	ac	+	-	+	-	642			
7	bc	-	+	+	-	601			
8	abc	+	+	+	-	635			
9	d	-	-	-	+	1037			
10	ad	+	-	-	+	749			
11	bd	-	+	-	+	1052			
12	abd	+	+	-	+	868			
13	cd	-	-	+	+	1075			
14	acd	+	-	+	+	860			
15	bcd	-	+	+	+	1063			
16	abcd	+	+	+	+	729			

Πίνακας 2.2.8 : Παρατηρήσεις παραδείγματος 4

Οι εκτιμήσεις των επιδράσεων και οι αντίστοιχες τετραγωνικές εκτιμήσεις των τυποποιημένων επιδράσεων καθώς και το normal probability plot δίνονται πιο κάτω.

ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΕΠΙΔΡΑΣΗΣ	2^2 (εκτίμηση επίδρασης) ²
A	-101.625	10327.64
B	-1.625	2.64
AB	-7.875	62.02
C	7.375	54.39
AC	-24.875	618.77
BC	-43.875	1925.02
ABC	-15.625	244.14
D	306.125	93712.52
AD	-153.625	23600.64
BD	-0.625	0.39
ABD	4.125	17.02
CD	-2.125	4.52
ACD	5.625	31.64
BCD	-25.375	643.89
ABCD	-40.125	1610.02

Πίνακας 2.2.9 : Εκτιμήσεις των επιδράσεων και τετραγωνικές εκτιμήσεις των τυποποιημένων επιδράσεων για το παράδειγμα 4



Σχήμα 2.2.10: Normal Probability Plot του παραδείγματος 4

Διατάσσουμε τις τετραγωνικές εκτιμήσεις των τυποποιημένων επιδράσεων σε αύξουσα σειρά:

0.39, 2.64, 4.52, 17.02, 31.64, 54.39, 62.02, 244.14, 618.77, 643.89, 1610.10, 1925.02, 10327.64, 23600.64, 93712.52.

Στη συνέχεια εκτελούμε τη γνωστή διαδικασία για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο Al-Shiha – Yang.

Από το normal probability plot βλέπουμε ότι μια καλή τιμή για το k είναι το $k=4$:

$$L_{15,4} = 108.318 > C_{15,4} = 15.577$$

Άρα η **D ενεργή**.

$$L_{14,3} = 39.965 > C_{14,3} = 14.321$$

Άρα η **AD ενεργή**.

$$L_{13,2} = 20.487 > C_{13,2} = 13.206$$

Άρα η **A ενεργή**.

$$L_{12,1} = 6.437 < C_{12,1} = 12.892$$

Εδώ τερματίζεται η διαδικασία. Έχουν βρεθεί ενεργές οι **D**, **AD** και **A**.

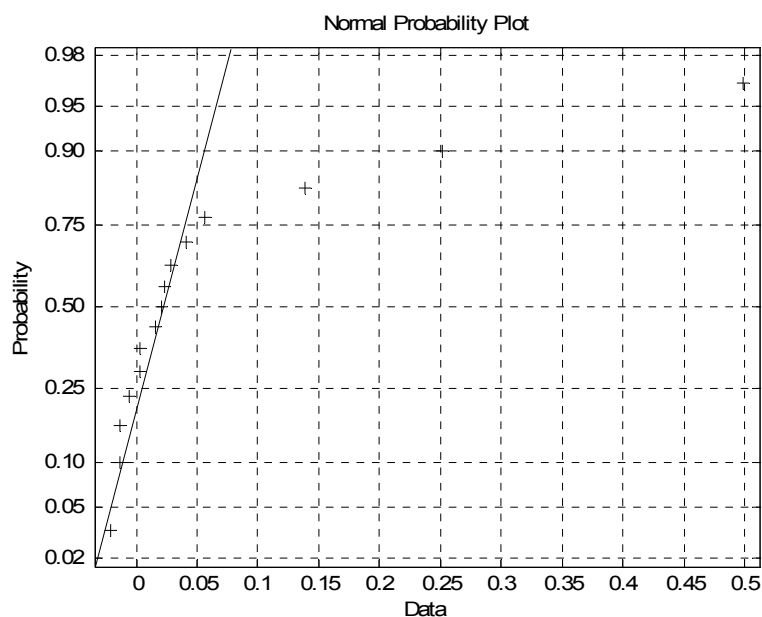
Παράδειγμα 5 (Daniel 1976)

Τα δεδομένα και ο πίνακας των παρατηρήσεων (πίνακας 2.1.13) του παραδείγματος βρίσκονται στις σελίδες 14-15.

Από τα δεδομένα της άσκησης έχω:

Παράγοντας	$X_{(i)}$
AC	0
ABC	0
AB	0.0001
BC	0.0001
BCD	0.0001
BC	0.0004
ABD	0.0004
ACD	0.0004
ABCD	0.0004
AD	0.0009
CD	0.0016
A	0.0036
D	0.0196
B	0.0625
C	0.25

Πίνακας 2.2.11 : Διατεταγμένες τετραγωνικές εκτιμήσεις των τυποποιημένων επιδράσεων για το παράδειγμα 5



Σχήμα 2.2.12: Normal Probability Plot του παραδείγματος 5

Μία καλή τιμή για το k είναι το $k=4$.

$$L_{15,4} = 209.812 \succ C_{15,4} = 15.577$$

Άρα η **C** ενεργή.

$$L_{14,3} = 71.417 \succ C_{14,3} = 14.321$$

Άρα η **B** ενεργή.

$$L_{13,2} = 29 \succ C_{13,2} = 13.206$$

Άρα η **D** ενεργή.

$$L_{12,1} = 9 \prec C_{12,1} = 12.892$$

Εδώ τερματίζεται η διαδικασία. Έχουν βρεθεί **ενεργές** οι επιδράσεις **C**, **B** και **D**.

Παρατηρούμε ότι στα παραδείγματα 4 και 5 αν δεν είχαμε ένδειξη για τον πραγματικό αριθμό των ενεργών επιδράσεων, η τιμή $k = \lceil 0.3 \cdot n \rceil$ (= 4 στην περίπτωση μας) θα μας έδινε σωστά αποτελέσματα.

2.2.6 Γενικά Συμπεράσματα

Η μέθοδος Al-Shiha – Yang είναι μία απλή και εύχρηστη πολυβηματική μέθοδος. Είναι αποτελεσματική στην εύρεση ενεργών παραγόντων αρκεί να λαμβάνεται μία σωστή τιμή για την παράμετρο k . Όταν αυτή η παράμετρος υποεκτιμά τον πραγματικό αριθμό των ενεργών επιδράσεων η ισχύς της μεθόδου μειώνεται δραστικά, πράγμα που φάνηκε άλλωστε και στα παραδείγματα που επιλύσαμε. Πολλές φορές μεγάλη υπερεκτίμηση του πραγματικού αριθμού των ενεργών επιδράσεων έχει το ίδιο αποτέλεσμα. Ένα άλλο στοιχείο που φάνηκε στα παραδείγματα είναι ότι όταν δεν έχουμε ένδειξη για τον πραγματικό αριθμό των ενεργών επιδράσεων, είναι ασφαλές στις περισσότερες περιπτώσεις να παίρνουμε $k = \lceil 0.3 \cdot n \rceil$, όπως προτείνουν οι συγγραφείς. Ωστόσο σε ορισμένες περιπτώσεις χρησιμοποιώντας τον τύπο αυτό, υπάρχει σοβαρός κίνδυνος να ‘χάσουμε’ κάποιες ενεργές επιδράσεις (Βλέπε παράδειγμα 1). Προτείνεται, λοιπόν, πάντοτε να φροντίζουμε να συμβουλευόμαστε το normal probability plot για να λάβουμε μία ασφαλή τιμή για το k .

2.2.7 Πίνακας I: Κρίσιμες τιμές του στατιστικού $L_{n,k}$ της μεθόδου Al-Shiha - Yang

		α						α			
n	k	0.01	0.025	0.05	0.10	n	k	0.01	0.025	0.05	0.10
3	1	301.519	123.591	59.895	28.536	14	5	33.564	24.817	20.480	16.014
4	1	89.353	47.274	28.840	17.428	14	6	43.631	33.363	25.771	19.846
4	2	556.030	230.274	108.912	53.366	14	7	63.011	45.599	34.936	25.911
5	1	54.879	32.039	21.442	13.964	15	1	18.885	15.043	12.516	10.142
5	2	141.007	74.632	44.250	26.948	15	2	18.358	15.021	12.577	10.382
6	1	37.099	24.931	17.740	12.386	15	3	19.835	16.506	13.790	11.388
6	2	72.069	41.574	28.576	18.818	15	4	23.597	18.786	15.577	12.772
6	3	220.745	107.357	64.944	38.686	15	5	28.894	22.286	18.477	14.831
7	1	31.770	21.423	16.322	11.720	15	6	37.360	28.008	22.883	18.030
7	2	46.402	31.711	22.349	15.946	15	7	49.353	36.662	28.717	22.245
7	3	95.108	56.910	37.258	25.416	16	1	18.797	14.745	12.283	10.087
8	1	27.357	19.662	14.789	11.069	16	2	17.916	14.495	12.327	10.303
8	2	35.408	25.055	18.894	14.226	16	3	19.414	15.662	13.300	10.928
8	3	60.502	40.239	28.015	19.770	16	4	22.226	17.548	14.798	12.224
8	4	121.009	75.029	50.219	32.106	16	5	25.672	20.705	17.247	14.005
9	1	23.989	18.265	14.123	10.721	16	6	32.243	25.186	20.442	16.577
9	2	30.056	21.447	16.870	12.803	16	7	41.191	31.794	25.305	19.702
9	3	42.321	30.064	22.791	16.736	16	8	56.236	41.768	32.371	25.170
9	4	73.142	48.796	35.111	24.301	17	1	18.432	14.645	12.335	10.161
10	1	22.302	17.300	13.668	10.461	17	2	17.355	14.319	12.120	10.148
10	2	26.688	19.437	15.271	12.095	17	3	18.670	14.887	13.018	10.662
10	3	34.363	25.140	19.611	14.735	17	4	20.203	16.806	14.045	11.778
10	4	52.615	36.747	27.585	19.873	17	5	23.726	19.164	16.023	13.167
10	5	85.654	57.605	41.756	28.937	17	6	28.830	22.193	18.830	15.143
11	1	21.835	16.492	13.269	10.483	17	7	35.328	27.344	22.386	17.949
11	2	23.535	18.003	14.379	11.533	17	8	45.641	34.768	27.898	21.894
11	3	29.362	21.690	17.408	13.734	18	1	17.919	14.382	12.327	10.036
11	4	41.359	29.878	22.673	17.267	18	2	17.064	14.088	11.843	10.097
11	5	62.725	43.657	32.402	23.356	18	3	17.900	14.382	12.461	10.520
12	1	20.573	15.882	12.892	10.224	18	4	19.604	15.895	13.509	11.391
12	2	22.314	16.894	13.691	11.078	18	5	21.962	18.161	15.179	12.606
12	3	26.273	19.861	16.282	12.859	18	6	25.500	20.941	17.448	14.289
12	4	33.970	25.416	19.837	15.497	18	7	31.128	24.716	20.522	16.572
12	5	47.879	34.401	26.817	19.879	18	8	39.605	30.376	25.072	19.559
12	6	72.397	51.277	37.309	27.701	18	9	51.129	38.098	30.541	24.263
13	1	19.905	15.551	12.854	10.189	19	1	17.771	14.453	12.172	10.048
13	2	21.071	16.216	13.206	10.817	19	2	16.512	13.676	11.874	9.958
13	3	23.493	18.600	15.118	12.238	19	3	16.909	14.331	12.211	10.380
13	4	29.198	22.270	18.174	14.432	19	4	18.523	15.309	13.232	11.106
13	5	38.608	29.025	22.817	17.715	19	5	20.700	16.949	14.538	12.102
13	6	55.346	39.720	30.333	22.964	19	6	23.631	19.298	16.248	13.600
14	1	19.473	15.244	12.671	10.067	19	7	28.179	22.448	18.829	15.630
14	2	19.237	15.618	12.888	10.505	19	8	34.804	27.099	22.505	17.975
14	3	21.735	17.237	14.321	11.678	19	9	41.958	33.543	26.992	21.558
14	4	25.570	20.534	16.598	13.492	20	1	17.467	14.336	12.215	10.051

		α						α			
n	k	0.01	0.025	0.05	0.10	n	k	0.01	0.025	0.05	0.10
20	2	16.295	13.598	11.671	9.952	24	5	16.438	14.176	12.439	10.698
20	3	16.393	13.720	12.015	10.205	24	6	17.936	15.230	13.362	11.445
20	4	17.748	14.805	12.813	10.795	24	7	19.880	16.697	14.505	12.422
20	5	19.644	16.160	13.959	11.729	24	8	22.240	18.601	15.967	13.636
20	6	22.192	17.959	15.525	12.990	24	9	25.203	20.956	17.871	15.116
20	7	25.872	20.808	17.626	14.626	24	10	29.237	23.868	20.330	16.946
20	8	30.709	24.755	20.376	16.810	24	11	34.809	27.652	23.438	19.305
20	9	36.692	29.319	24.035	19.775	24	12	41.509	32.932	27.346	22.479
20	10	47.065	36.082	29.441	23.460	25	1	16.860	13.874	11.994	10.173
21	1	17.409	14.209	12.036	10.065	25	2	15.132	12.765	11.159	9.709
21	2	15.977	13.424	11.571	9.824	25	3	14.868	12.789	11.172	9.772
21	3	15.883	13.705	11.829	10.136	25	4	15.233	13.151	11.516	10.037
21	4	17.078	14.322	12.514	10.700	25	5	16.067	13.768	12.101	10.487
21	5	18.715	15.488	13.473	11.454	25	6	17.343	14.732	12.931	11.155
21	6	20.735	17.232	14.831	12.483	25	7	18.999	16.078	13.994	12.037
21	7	23.652	19.491	16.724	13.884	25	8	20.998	17.773	15.287	13.104
21	8	27.797	22.541	19.068	15.698	25	9	23.482	19.809	16.894	14.373
21	9	33.227	26.899	21.842	17.990	25	10	26.846	22.314	19.006	15.949
21	10	41.558	31.810	26.307	21.193	25	11	31.616	25.560	21.805	18.002
22	1	17.044	14.073	12.024	10.020	25	12	37.957	29.784	25.112	20.601
22	2	15.881	13.146	11.564	9.748	26	1	16.877	13.991	11.991	10.122
22	3	15.799	13.296	11.537	9.997	26	2	14.977	12.703	11.129	9.613
22	4	16.591	13.972	12.175	10.463	26	3	14.712	12.609	11.027	9.690
22	5	17.959	15.047	13.092	11.159	26	4	14.970	12.927	11.338	9.945
22	6	19.745	16.529	14.194	12.110	26	5	15.611	13.495	11.902	10.334
22	7	22.062	18.469	15.712	13.310	26	6	16.687	14.350	12.667	10.907
22	8	25.288	20.966	17.845	14.814	26	7	18.160	15.528	13.629	11.690
22	9	29.920	24.237	20.505	16.805	26	8	19.936	17.015	14.806	12.669
22	10	36.235	28.658	23.653	19.500	26	9	22.038	18.797	16.233	13.829
22	11	43.754	34.739	28.698	22.754	26	10	24.750	20.945	17.977	15.211
23	1	17.120	14.159	12.034	10.112	26	11	28.559	23.682	20.162	16.941
23	2	15.277	12.992	11.369	9.778	26	12	33.710	27.357	23.013	19.174
23	3	15.259	13.147	11.412	9.954	26	13	39.215	32.282	26.906	21.933
23	4	15.983	13.621	11.975	10.309	27	1	16.641	14.059	12.004	10.165
23	5	17.202	14.440	12.759	10.880	27	2	14.686	12.720	11.050	9.679
23	6	18.867	15.745	13.731	11.735	27	3	14.579	12.467	11.041	9.681
23	7	20.984	17.521	15.049	12.871	27	4	14.826	12.718	11.349	9.881
23	8	23.696	19.724	16.825	14.243	27	5	15.291	13.235	11.797	10.235
23	9	27.374	22.492	19.002	15.871	27	6	16.150	13.965	12.393	10.761
23	10	32.445	26.172	21.626	17.939	27	7	17.458	14.932	13.189	11.459
23	11	38.723	30.876	25.800	20.823	27	8	19.116	16.185	14.221	12.311
24	1	17.298	13.988	11.988	10.159	27	9	21.061	17.776	15.510	13.315
24	2	15.128	12.924	11.327	9.727	27	10	23.459	19.766	17.088	14.522
24	3	14.930	12.992	11.289	9.818	27	11	26.719	22.247	19.020	16.040
24	4	15.437	13.454	11.719	10.161	27	12	31.122	25.356	21.406	17.971

		α						α			
n	k	0.01	0.025	0.05	0.10	n	k	0.01	0.025	0.05	0.10
27	13	35.872	29.284	24.311	20.239	31	2	14.299	12.427	10.986	9.624
28	1	16.385	14.007	11.999	10.131	31	3	13.753	12.068	10.760	9.467
28	2	14.623	12.601	11.055	9.701	31	4	13.852	12.145	10.848	9.572
28	3	14.332	12.345	10.896	9.618	31	5	14.203	12.410	11.103	9.830
28	4	14.556	12.551	11.108	9.769	31	6	14.740	12.840	11.496	10.187
28	5	15.053	13.010	11.522	10.100	31	7	15.495	13.467	12.032	10.629
28	6	15.844	13.700	12.093	10.586	31	8	16.492	14.300	12.718	11.173
28	7	16.977	14.630	12.831	11.212	31	9	17.728	15.323	13.555	11.844
28	8	18.442	15.787	13.759	11.971	31	10	19.203	16.524	14.553	12.664
28	9	20.199	17.160	14.907	12.872	31	11	20.965	17.936	15.745	13.648
28	10	22.254	18.781	16.311	13.947	31	12	23.151	19.665	17.199	14.807
28	11	24.742	20.775	18.029	15.259	31	13	25.972	21.855	18.992	16.170
28	12	27.952	23.365	20.148	16.901	31	14	29.619	24.592	21.163	17.831
28	13	32.255	26.803	22.780	18.980	31	15	34.063	27.692	23.599	20.008
28	14	37.872	31.185	26.043	21.590	35	1	16.542	13.795	12.178	10.336
29	1	16.614	13.869	12.026	10.151	35	2	14.112	12.262	10.955	9.593
29	2	14.553	12.641	11.075	9.699	35	3	13.339	11.750	10.558	9.362
29	3	14.126	12.281	10.830	9.555	35	4	13.297	11.717	10.546	9.383
29	4	14.297	12.383	10.995	9.658	35	5	13.536	11.896	10.717	9.534
29	5	14.744	12.766	11.384	9.960	35	6	13.889	12.190	10.997	9.769
29	6	15.441	13.365	11.906	10.416	35	7	14.339	12.585	11.372	10.082
29	7	16.424	14.166	12.549	10.995	35	8	14.929	13.102	11.846	10.480
29	8	17.701	15.172	13.347	11.680	35	9	15.706	13.768	12.425	10.972
29	9	19.261	16.407	14.356	12.479	35	10	16.703	14.599	13.110	11.560
29	10	21.128	17.912	15.625	13.429	35	11	17.932	15.604	13.909	12.244
29	11	23.411	19.765	17.186	14.597	35	12	19.397	16.791	14.846	13.029
29	12	26.310	22.073	19.053	16.066	35	13	21.114	18.175	15.962	13.929
29	13	30.027	24.955	21.252	17.913	35	14	23.119	19.791	17.318	14.976
29	14	34.530	28.484	23.874	20.167	35	15	25.479	21.687	18.963	16.218
30	1	16.556	13.926	11.949	10.206	35	16	28.276	23.919	20.897	17.715
30	2	14.197	12.413	11.043	9.625	35	17	31.565	26.514	22.986	19.527
30	3	13.794	12.034	10.754	9.491	40	1	16.216	13.948	12.092	10.383
30	4	13.987	12.163	10.879	9.611	40	2	13.828	12.277	10.919	9.670
30	5	14.389	12.530	11.240	9.888	40	3	12.971	11.515	10.408	9.320
30	6	15.006	13.057	11.725	10.279	40	4	12.803	11.287	10.265	9.217
30	7	15.914	13.752	12.303	10.780	40	5	12.899	11.351	10.323	9.275
30	8	17.121	14.649	13.007	11.399	40	6	13.093	11.567	10.495	9.434
30	9	18.574	15.778	13.895	12.152	40	7	13.352	11.865	10.745	9.660
30	10	20.230	17.164	15.019	13.053	40	8	13.705	12.222	11.065	9.936
30	11	22.153	18.835	16.405	14.120	40	9	14.188	12.643	11.459	10.263
30	12	24.557	20.840	18.055	15.383	40	10	14.818	13.147	11.931	10.647
30	13	27.750	23.265	19.994	16.907	40	11	15.596	13.756	12.488	11.100
30	14	31.911	26.223	22.364	18.814	40	12	16.506	14.493	13.131	11.635
30	15	36.648	29.834	25.594	21.315	40	13	17.538	15.372	13.864	12.258
31	1	16.584	13.988	11.932	10.203	40	14	18.703	16.405	14.694	12.973

2.3 Μέθοδος Chen – Kunert (2004)

Η μέθοδος αυτή ανήκει στην κατηγορία των μεθόδων που ελέγχουν το EER.

2.3.1 Στατιστικό της μεθόδου Chen - Kunert

Έστω ότι σε ένα 2^k μη επαναλαμβανόμενο παραγοντικό σχεδιασμό έχουμε ότι $\theta_1, \dots, \theta_m$ είναι οι κύριες επιδράσεις και οι αλληλεπιδράσεις του σχεδιασμού και $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_m$ οι εκτιμήσεις αυτών.

Αρχικά θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση $H_0 : [\theta_1 = \dots = \theta_m = 0]$ έναντι της $H_a : [\theta_1 = \dots = \theta_{m-c} = 0, \theta_i \neq 0 \text{ για } m-c < i \leq m]$.

Αν γνωρίζαμε ποιες από τις θ_i έχουν μέση τιμή διάφορη του 0, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το στατιστικό:

$$F = \frac{\frac{1}{c} \sum_{i=m-c+1}^m (\hat{\theta}_i)^2}{\frac{1}{m-c} \sum_{j=1}^{m-c} (\hat{\theta}_j)^2}$$

και αν $F > F_{c, m-c}$ θα απορρίπταμε την H_0 .

Ας υποθέσουμε τώρα ότι γνωρίζουμε ότι ακριβώς c από τις m επιδράσεις είναι ενεργές, χωρίς να γνωρίζουμε ποιες.

Αν επιλέξουμε τυχαία c επιδράσεις, έστω τις $\theta_{i_1}, \theta_{i_2}, \dots, \theta_{i_c}$ από το σύνολο των $\binom{m}{c}$ δυνατών συνδυασμών, το στατιστικό που θα χρησιμοποιήσουμε είναι το:

$$v_c^{\{i_1, i_2, \dots, i_c\}} = \frac{\frac{1}{c} \sum_{j=1}^c (\hat{\theta}_{i_j})^2}{\frac{1}{m-c} \sum_{j \notin \{i_1, i_2, \dots, i_c\}} (\hat{\theta}_j)^2}$$

Θα έπρεπε κανονικά να υπολογίσουμε το στατιστικό αυτό για όλους τους $\binom{m}{c}$ δυνατούς συνδυασμούς επιδράσεων. Κάτω από τη μηδενική υπόθεση H_0 όλα τα $v_c^{\{i_1, i_2, \dots, i_c\}}$ ακολουθούν την F-κατανομή με $c, m-c$ βαθμούς ελευθερίας. Θα συγκρίναμε, λοιπόν, τις τιμές των στατιστικών αυτών με την αντίστοιχη κρίσιμη τιμή, μέχρι να βρούμε ποιος συνδυασμός επιδράσεων δίνει τιμή $v_c^{\{i_1, i_2, \dots, i_c\}}$ μεγαλύτερη της κρίσιμης.

Για να αποφύγουμε αυτή τη μακροσκελή διαδικασία στηρίζομαστε στην εξής σκέψη. Αν ο συνδυασμός των επιδράσεων που ελέγχουμε είναι ο σωστός τότε θα λάβουμε τη μέγιστη τιμή για το $v_c^{\{i_1, i_2, \dots, i_c\}}$. Άρα, για να ελέγξουμε τη μηδενική υπόθεση H_0 , είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε το στατιστικό

$$\max_{\{i_1, i_2, \dots, i_c\} \in P_c} v_c^{\{i_1, i_2, \dots, i_c\}},$$

όπου P_c είναι το σύνολο των υποσυνόλων του $\{1, 2, \dots, m\}$ με ακριβώς c στοιχεία.

Τέλος εξετάζουμε την περίπτωση που γνωρίζουμε ότι υπάρχουν το πολύ r ενεργές επιδράσεις (από τις m) και πρέπει να βρούμε το κατάλληλο στατιστικό για να διακρίνουμε τις επιδράσεις αυτές. Για να το πετύχουμε αυτό θα πρέπει να βρούμε μια συνάρτηση μετασχηματισμού $g_c(\cdot)$, $1 \leq c \leq r$ τέτοια ώστε κάτω από τη μηδενική υπόθεση όλα τα $g_c(v_c^{\{i_1, i_2, \dots, i_c\}})$ ($1 \leq c \leq r$, $\{i_1, i_2, \dots, i_c\} \in A_c$) να ακολουθούν την ίδια κατανομή και η συνάρτηση αυτή να μεγιστοποιείται όταν οι επιδράσεις που εξετάζονται είναι ενεργές και οι υπόλοιπες ανενεργές. Τότε θα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το στατιστικό $\max_{1 \leq c \leq r} (\max_{\{i_1, i_2, \dots, i_c\} \in A_c} (g_c(v_c^{\{i_1, i_2, \dots, i_c\}})))$ για να ελέγξουμε την

H_0 . Μια τέτοια συνάρτηση είναι η $F_{c, m-c}(\cdot)$, η σ.π.π. της F-κατανομής με c , $m-c$ βαθμούς ελευθερίας. Για κάθε c το στατιστικό $u_c^{\{i_1, i_2, \dots, i_c\}} = F_{c, m-c}(v_c^{\{i_1, i_2, \dots, i_c\}})$ ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή $U[0,1]$, υπό την H_0 . Παράλληλα αν οι $\theta_{j_1}, \theta_{j_2}, \dots, \theta_{j_c}$ είναι ενεργές και οι υπόλοιπες επιδράσεις αδρανείς, θα λαμβάνουμε τη μέγιστη ανάμεσα σε όλες τις $\sum_{c=1}^r \binom{m}{c}$ δυνατές τιμές του $u_c^{\{i_1, i_2, \dots, i_c\}}$ ($1 \leq c \leq r$).

Σύμφωνα με την παραπάνω ιδέα, χρησιμοποιούμε το παρακάτω στατιστικό ελέγχου:

$$\boxed{MaxU_r = \max_{1 \leq c \leq r} \{MU_c\}}$$

με

$$MU_c = \max_{\{i_1, i_2, \dots, i_c\} \in P_c} \{u_c^{\{i_1, i_2, \dots, i_c\}}\}$$

2.3.2 Διαδικασία εφαρμογής της μεθόδου Chen – Kunert

Αρχικά επιλέγουμε έναν ακέραιο r ο οποίος πρέπει να μην είναι μικρότερος από τον αριθμό των πραγματικά ενεργών αντιπαραθέσεων. Αν δεν έχουμε πληροφόρηση για την κατάλληλη τιμή του r επιλέγουμε $r = m-1$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το $MaxU_r$.

Αν το $MaxU_r$ είναι μεγαλύτερο μιας κρίσιμης τιμής $c_{a;m,r}$ απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση H_0 και συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν ενεργές επιδράσεις. Στην περίπτωση αυτή η τιμή c^* για την οποία ισχύει:

$$MaxU_r = MU_{c^*}$$

είναι η εκτίμηση του αριθμού των ενεργών επιδράσεων και οι εκτιμήσεις των επιδράσεων από τις οποίες προκύπτει η τιμή MU_{c^*} υποδεικνύουν τις αντίστοιχες επιδράσεις που θεωρούνται σημαντικές.

Στο τέλος του κεφαλαίου δίνονται οι $c_{a;m,r}$ της μεθόδου Chen-Kunert.

Εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$MU_c = F_{c,m-c} \left(\frac{\frac{1}{c} \sum_{i=m-c+1}^m |\hat{\theta}_i|^2}{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m-c} |\hat{\theta}_i|^2} \right)$$

και

$$MaxU_r = \max_{1 \leq c \leq r} \left(F_{c,m-c} \left(\frac{\frac{1}{c} \sum_{i=m-c+1}^m |\hat{\theta}_i|^2}{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m-c} |\hat{\theta}_i|^2} \right) \right),$$

όπου $|\hat{\theta}_1|, |\hat{\theta}_2|, \dots, |\hat{\theta}_m|$ είναι τα διατεταγμένα στατιστικά των απολύτων των εκτιμήσεων των επιδράσεων. Ο τύπος αυτός είναι και ο πιο εύχρηστος και αυτός θα χρησιμοποιείται από εδώ και στο εξής.

2.3.3 Παραδείγματα (Σε όλα τα παραδείγματα λαμβάνεται ε.σ. $\alpha = 0.05$).

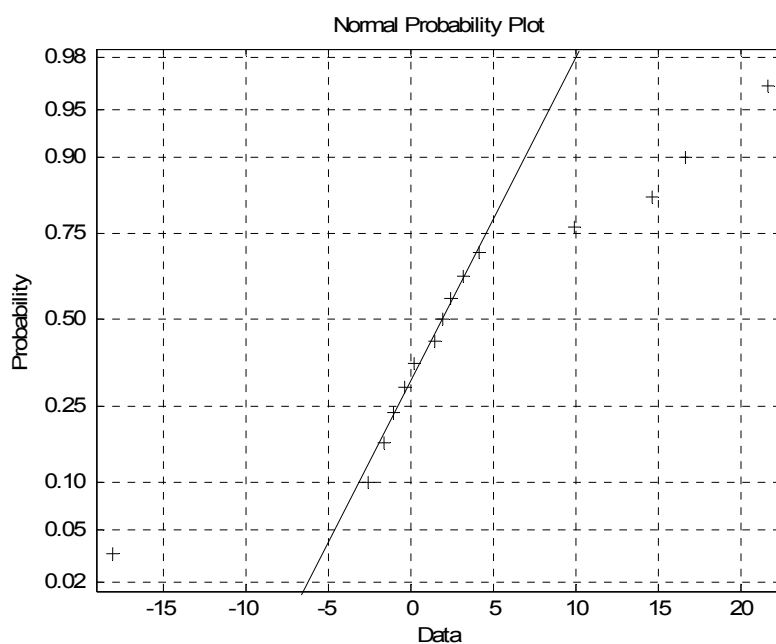
Παράδειγμα 1 (“Design and Analysis of Experiments” Montgomery D.C. 5th Edition 2001, example 6-2 σελ.246)

Τα δεδομένα και ο πίνακας παρατηρήσεων (Πίνακας 2.1.3) του προβλήματος είναι στις σελίδες 9-10.

Υπενθυμίζουμε τις εκτιμήσεις των επιδράσεων και το normal probability plot:

ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΕΠΙΔΡΑΣΗΣ
A	21.625
B	3.125
AB	0.125
C	9.875
AC	-18.125
BC	2.375
ABC	1.875
D	14.625
AD	16.625
BD	-0.375
ABD	4.125
CD	-1.125
ACD	-1.625
BCD	-2.625
ABCD	1.375

Πίνακας 2.3.1 : Εκτιμήσεις των επιδράσεων για το παράδειγμα 1



Σχήμα 2.3.2 : Normal Probability Plot για το παράδειγμα 1

Υπολογίζοντας όλα τα στατιστικά της μεθόδου καταλήγουμε στα εξής αποτελέσματα:

c	MU_c	r	$MaxU_r$	$C_{15,r}$	Ενεργές Επιδράσεις
1	0.9792082880	1	0.9792082880	0.9967511	0
2	0.9948718680	2	0.9948718680	0.9991350	0
3	0.9993443825	3	0.9993443825	0.9996795	0
4	0.9999789355	4	0.9999789355	0.9998458	A, AC, AD, D
5	0.9999994859	5	0.9999994859	0.9999110	A, AC, AD, D, C
6	0.9999993799	6	0.9999994859	0.9999441	A, AC, AD, D, C
7	0.9999987353	7	0.9999994859	0.9999630	A, AC, AD, D, C
8	0.9999968493	8	0.9999994859	0.9999733	A, AC, AD, D, C
9	0.9999923937	9	0.9999994859	0.9999789	A, AC, AD, D, C
10	0.9999741992	10	0.9999994859	0.9999825	A, AC, AD, D, C
11	0.9999051116	11	0.9999994859	0.9999847	A, AC, AD, D, C
12	0.9996343497	12	0.9999994859	0.9999856	A, AC, AD, D, C
13	0.9992913407	13	0.9999994859	0.9999860	A, AC, AD, D, C
14	0.9903155920	14	0.9999994859	0.9999860	A, AC, AD, D, C

Πίνακας 2.3.3: Στατιστικά και κρίσιμες τιμές της μεθόδου Chen-Kunert για το παράδειγμα 2

Στον πίνακα αυτό υπολογίζεται για κάθε τιμή του c , το στατιστικό MU_c , και για κάθε r το στατιστικό $MaxU_r$, το οποίο ισούται με το $\max_{1 \leq c \leq r} \{MU_c\}$.

Έτσι επιλέγοντας $r = 4$, $MaxU_r = 0.9999789355 > C_{15,r}$ και άρα δεχόμαστε ότι υπάρχουν ενεργές επιδράσεις. Αφού το $MaxU_r$ προκύπτει από το MU_4 , υπάρχουν **4 ενεργές επιδράσεις**. Οι 4 επιδράσεις που δίνουν το MU_4 είναι οι 4 μεγαλύτερες κατά απόλυτη τιμή, οι **A, AC, AD και D**.

Ανάλογα αν επιλέξουμε $r=7$, $MaxU_r = 0.9999994859 > C_{15,r}$ και άρα δεχόμαστε ότι υπάρχουν ενεργές επιδράσεις. Αφού το $MaxU_r$ προκύπτει από το MU_5 , υπάρχουν **5 ενεργές επιδράσεις**. Οι 5 επιδράσεις που δίνουν το MU_5 είναι οι 5 μεγαλύτερες κατά απόλυτη τιμή, οι **A, AC, AD, D και C**.

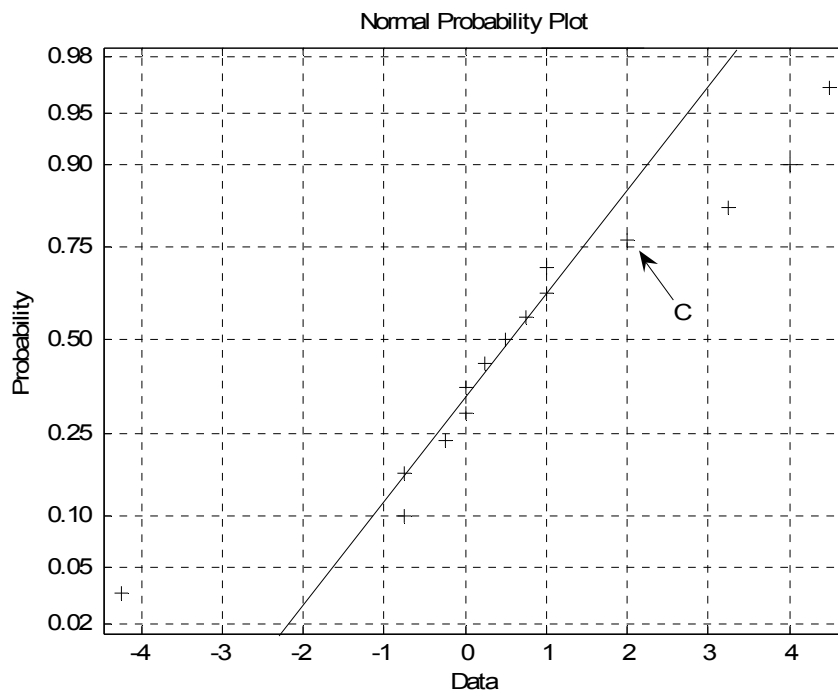
Παράδειγμα 2 (“Design and Analysis of Experiments”, Montgomery D.C. 5th Edition 2001. Problem 6.23 p.282)

Τα δεδομένα και ο πίνακας των παρατηρήσεων (Πίνακας 2.1.8) του προβλήματος βρίσκονται στις σελίδες 12-13.

Υπενθυμίζουμε τις εκτιμήσεις των επιδράσεων και το normal probability plot:

ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΕΠΙΔΡΑΣΗΣ
A	4.5
B	0.5
AB	-0.75
C	2
AC	-4.25
BC	0.25
ABC	1
D	3.25
AD	4
BD	0
ABD	0.75
CD	0
ACD	-0.25
BCD	-0.75
ABCD	1

Πίνακας 2.3.4 : Εκτιμήσεις των επιδράσεων για το παράδειγμα 2



Σχήμα 2.3.5: Normal Probability Pot για το παράδειγμα 2

Υπολογίζοντας όλα τα στατιστικά της μεθόδου καταλήγουμε στα εξής αποτελέσματα:

c	MU_c	r	$MaxU_r$	$C_{15,r}$	Ενεργές Επιδράσεις
1	0.9640172513	1	0.9640172513	0.9967511	0
2	0.9921140702	2	0.9921140702	0.9991350	A, AC
3	0.9992815425	3	0.9992815425	0.9996795	A, AC, AD
4	0.9999676690	4	0.9999676690	0.9998458	A, AC, AD, D
5	0.9999941443	5	0.9999941443	0.9999110	A, AC, AD, D, C
6	0.9999893839	6	0.9999941443	0.9999441	A, AC, AD, D, C
7	0.9999858325	7	0.9999941443	0.9999630	A, AC, AD, D, C
8	0.9999681332	8	0.9999941443	0.9999733	A, AC, AD, D, C
9	0.9999449590	9	0.9999941443	0.9999789	A, AC, AD, D, C
10	0.9999561814	10	0.9999941443	0.9999825	A, AC, AD, D, C
11	0.9999477687	11	0.9999941443	0.9999847	A, AC, AD, D, C
12	0.9997065105	12	0.9999941443	0.9999856	A, AC, AD, D, C
13	1	13	1	0.9999860	Όλες εκτός οι BD, CD
14	1	14	1	0.9999860	Όλες εκτός οι BD, CD

Πίνακας 2.3.6: Στατιστικά και Κρίσιμες τιμές της μεθόδου Chen-Kunert για το παράδειγμα 2

Το αποτέλεσμα του παραδείγματος εδώ έχει το εξής αξιοσημείωτο: Αν δεν είχαμε πληροφορία για τον πραγματικό αριθμό των ενεργών επιδράσεων και θέταμε $r = m-1 = 14$, θα βρίσκαμε 13 ενεργές επιδράσεις. Το πρόβλημα αυτό προκύπτει συχνά όταν χρησιμοποιούμε τη μέθοδο αυτή. Παράλληλα βλέπουμε ότι για $r=4$ η επίδραση C, για την οποία δεν μπορούμε να αποφανθούμε από το normal probability plot, κρίνεται μη ενεργή, ενώ για $r \geq 5$ κρίνεται ενεργή.

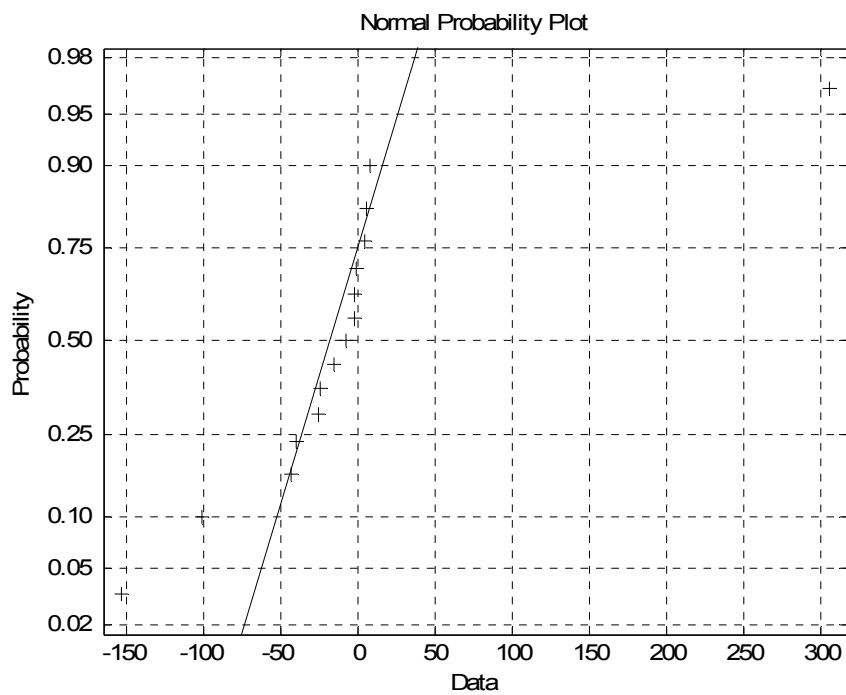
Παράδειγμα 3 (“Design and Analysis of Experiments”, Montgomery D.C. 5th Edition, 2001. Problem 6.18, p.281)

Τα δεδομένα και ο πίνακας των παρατηρήσεων (Πίνακας 2.2.8) του προβλήματος βρίσκονται στις σελίδες 35-36.

Υπενθυμίζουμε τις εκτιμήσεις των επιδράσεων και το normal probability plot:

ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΕΠΙΔΡΑΣΗΣ
A	-101.625
B	-1.625
AB	-7.875
C	7.375
AC	-24.875
BC	-43.875
ABC	-15.625
D	306.125
AD	-153.625
BD	-0.625
ABD	4.125
CD	-2.125
ACD	5.625
BCD	-25.375
ABCD	-40.125

Πίνακας 2.3.7: Εκτιμήσεις των επιδράσεων για το παράδειγμα 3



Σχήμα 2.3.8: Normal Probability Plot του παραδείγματος 3

Υπολογίζοντας όλα τα στατιστικά της μεθόδου καταλήγουμε στα εξής αποτελέσματα:

c	MU_c	r	$MaxU_r$	$C_{15,r}$	Αριθμός εν.επιδρ.
1	0.9999531110	1	0.9999531110	0.9967511	1
2	0.9999991233	2	0.9999991233	0.9991350	2
3	0.9999999895	3	0.9999999895	0.9996795	3
4	0.9999999907	4	0.9999999907	0.9998458	4
5	0.9999999962	5	0.9999999962	0.9999110	5
6	0.9999999942	6	0.9999999962	0.9999441	5
7	0.9999999977	7	0.9999999977	0.9999630	7
8	0.9999999979	8	0.9999999979	0.9999733	8
9	0.9999999845	9	0.9999999979	0.9999789	8
10	0.9999999137	10	0.9999999979	0.9999825	8
11	0.9999993893	11	0.9999999979	0.9999847	8
12	0.9999949786	12	0.9999999979	0.9999856	8
13	0.9998517041	13	0.9999999979	0.9999860	8
14	0.9949714415	14	0.9999999979	0.9999860	8

Πίνακας 2.3.9: Στατιστικά και Κρίσιμες τιμές της μεθόδου Chen-Kunert για το παράδειγμα 3

2.3.4 Σύγκριση των μεθόδων Al-Shiha – Yang και Chen – Kunert και Συμπεράσματα

Σοβαρή σύγκριση μεταξύ των διαφόρων μεθόδων μπορεί να γίνει μόνο μέσω της μαθηματικής προσομοίωσης. Ωστόσο λόγω του ότι και οι δύο συγκεκριμένες μέθοδοι ελέγχουν το EER, επιχειρείται εδώ μια άτυπη σύγκριση μέσω των αποτελεσμάτων που δίνουν για κοινά δεδομένα.

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα του παραδείγματος 1, βλέπουμε ότι για $5 \leq r \leq 14$ η μέθοδος Chen-Kunert κρίνει ότι υπάρχουν 5 ενεργές επιδράσεις. Στην εφαρμογή της μεθόδου Al-Shiha-Yang στα ίδια δεδομένα (σελ. 21) βρήκαμε ότι για $k=5$ και $k=6$ πήραμε 5 ενεργές επιδράσεις, ενώ για $k=7$ πήραμε 4 ενεργές επιδράσεις. Βλέπουμε ότι ενώ στην Chen-Kunert δε μειώνεται η ισχύς της μεθόδου (όσον αφορά την ανίχνευση ενεργών επιδράσεων) με αύξηση του r , στην Al-Shiha-Yang με αύξηση του k μειώνεται η ισχύς αυτή.

Στα ίδιο συμπέρασμα οδηγούμαστε, παρατηρώντας τα αποτελέσματα των δύο μεθόδων στο παράδειγμα 2 (Τα αποτελέσματα της Al-Shiha-Yang βρίσκονται στη σελ. 32). Κάτι άλλο που βλέπουμε στο παράδειγμα αυτό είναι ότι στη μέθοδο Chen-Kunert για $r=13$ και $r=14$ παίρνουμε 13 ενεργές επιδράσεις.

Ένα άλλο συμπέρασμα που βγαίνει από το παράδειγμα 1 είναι ότι όταν τα k και r υποεκτιμούν κατά πολύ τον πραγματικό αριθμό των ενεργών επιδράσεων, μειώνεται σημαντικά η ισχύς των μεθόδων.

Τέλος στο παράδειγμα 3 η μέθοδος Al-Shiha-Yang (σελ. 35) για $k=4$ δίνει 3 ενεργές επιδράσεις, ενώ η μέθοδος Chen-Kunert για $r=4$ δίνει 4 ενεργές επιδράσεις. Βλέπουμε, λοιπόν, μία καθαρή διαφοροποίηση στα αποτελέσματα των δύο μεθόδων.

Από τη σύγκριση αυτή αλλά και από την απλή παρατήρηση των αποτελεσμάτων της μεθόδου Chen-Kunert, μπορούμε να διακρίνουμε μια “φιλοσοφία” που υπάρχει πίσω από τη μέθοδο αυτή: Η μέθοδος αυτή πάντα επιδιώκει να κρίνει όσο το δυνατό περισσότερες επιδράσεις ως ενεργές έτσι ώστε να μη ‘χάνει’ ποτέ πραγματικά ενεργές επιδράσεις. Η ‘φιλοσοφία’ αυτή εκλαμβάνεται ως προτέρημα αφού η μέθοδος θεωρείται η πιο ισχυρή από τις υπάρχουσες, όσον αφορά τη διάκριση ενεργών παραγόντων. Έχει όμως ως επακόλουθο το ότι πολλές φορές, κρίνονται ως ενεργές επιδράσεις που στην πραγματικότητα δεν είναι.

2.3.5 Πίνακας II: Κρίσιμες τιμές του στατιστικού MaxUr της μεθόδου Chen-Kunert

m	r	α				
		0.20	0.10	0.05	0.025	0.01
7	1	0.9709150	0.9847355	0.9926990	0.9968258	0.9987041
	2	0.9860312	0.9936809	0.9972449	0.9986215	0.9994449
	3	0.9917365	0.9965355	0.9984861	0.9992564	0.9997482
	4	0.9939139	0.9976750	0.9990135	0.9995253	0.9998187
	5	0.9951706	0.9981618	0.9991909	0.9996400	0.9998611
	6	0.9957065	0.9983210	0.9992564	0.9996765	0.9998700
15	1	0.9866033	0.9934845	0.9967511	0.9984956	0.9993982
	2	0.9955954	0.9980245	0.9991350	0.9995962	0.9998618
	3	0.9980299	0.9992156	0.9996795	0.9998601	0.9999538
	4	0.9989703	0.9996129	0.9998458	0.9999294	0.9999780
	5	0.9993896	0.9997834	0.9999110	0.9999641	0.9999880
	6	0.9995944	0.9998602	0.9999441	0.9999772	0.9999920
	7	0.9997044	0.9999015	0.9999630	0.9999853	0.9999948
	8	0.9997766	0.9999257	0.9999733	0.9999904	0.9999966
	9	0.9998207	0.9999406	0.9999789	0.9999922	0.9999973
	10	0.9998470	0.9999492	0.9999825	0.9999933	0.9999978
	11	0.9998614	0.9999545	0.9999847	0.9999941	0.9999982
	12	0.9998709	0.9999569	0.9999856	0.9999945	0.9999983
	13	0.9998761	0.9999579	0.9999860	0.9999946	0.9999983
	14	0.9998768	0.9999581	0.9999860	0.9999946	0.9999983
31	1	0.9933986	0.9968138	0.9985154	0.9992558	0.9997117
	2	0.9985660	0.9993731	0.9997371	0.9998828	0.9999570
	3	0.9995529	0.9998242	0.9999288	0.9999705	0.9999904
	4	0.9998348	0.9999399	0.9999768	0.9999917	0.9999972
	5	0.9999276	0.9999761	0.9999917	0.9999969	0.9999991
	6	0.9999649	0.9999896	0.9999965	0.9999987	0.9999997
	7	0.9999819935	0.9999950535	0.9999984094	0.9999994650	0.9999998510
	8	0.9999900783	0.9999973952	0.9999992076	0.9999997632	0.9999999273
	9	0.9999941849	0.9999985724	0.9999995750	0.9999998726	0.9999999616
	10	0.9999965063	0.9999991312	0.9999997565	0.9999999231	0.9999999808
	11	0.9999977940	0.9999994524	0.9999998594	0.9999999532	0.9999999873
	12	0.9999985216	0.9999996393	0.9999999082	0.9999999718	0.9999999923
	13	0.9999989685	0.9999997489	0.9999999366	0.9999999820	0.9999999950
	14	0.9999992364	0.9999998175	0.9999999528	0.9999999860	0.9999999967
	15	0.9999994141	0.9999998632	0.9999999647	0.9999999888	0.9999999979

2.4 Μέθοδοι Lenth

2.4.1 Απλή μέθοδος Lenth (1989)

Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην υπόθεση της σποραδικότητας των επιδράσεων.

Έστω ότι $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_n$ είναι οι εκτιμήσεις των επιδράσεων $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$. Υποθέτουμε ότι οι εκτιμήτριες αυτές είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν (κατά προσέγγιση) την κανονική κατανομή με πιθανόν διαφορετικούς μέσους αλλά την ίδια κοινή διασπορά τ^2 .

Έστω ότι $s_0 = 1.5 \times \text{median} |\hat{\beta}_i|$. Ορίζεται το ψευδοτυπικό σφάλμα

$$PSE = 1.5 \times \text{median} \left| \hat{\beta}_i \right|_{|\hat{\beta}_i| < 2.5s_0}.$$

Η τιμή αυτή, όπως αποδεικνύεται από τον Lenth, είναι μια λογική εξήγηση της διασποράς όταν δεν υπάρχουν πολλοί ενεργοί παράγοντες και χρησιμοποιείται για να εξετάσουμε την σημαντικότητα μίας επίδρασης. Γενικά το PSE είναι ένας καλός εκτιμητής της τυπικής απόκλισης τ όταν οι επιδράσεις είναι σποραδικές δηλαδή οι περισσότερες επιδράσεις δεν είναι ενεργές.

Ορίζουμε ως περιθώριο σφάλματος (margin of error) σε ε.σ. a την ποσότητα

$$ME = t_{d, \frac{a}{2}} \times PSE.$$

Έτσι έχουμε ένα $100(1-a)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για τις εκτιμήσεις των επιδράσεων το $\hat{\beta}_i \pm ME$.

Επειδή μπορεί κάποιες εκτιμήσεις μη σημαντικών παραγόντων να υπερβαίνουν το ME , όταν ο αριθμός των εκτιμήσεων των αντιθέσεων είναι μεγάλος, και συνεπώς να οδηγηθούμε σε λάθος συμπεράσματα, ορίζουμε ως simultaneous margin of error σε ε.σ. a την ποσότητα

$$SME = t_{d, (1-\gamma)} \times PSE$$

όπου $\gamma = \left(1 + (1-a)^{\frac{1}{n}}\right) / 2$, ενώ οι βαθμοί ελευθερίας ορίζονται εμπειρικά ως $d = \frac{n}{3}$.

Ο Lenth υπολόγισε τις τιμές της t-κατανομής για διάφορες τιμές του $n = 2^k - 1$ και ε.σ. $a = 0.05$ (Πίνακας 2.4.1).

n	$t_{d,0.025}$	$t_{d,\gamma}$
7	3.76	9.01
15	2.57	5.22
31	2.22	4.22
63	2.08	3.91
127	2.02	3.84
255	1.99	3.89

Πίνακας 2.4.1: Τιμές t-κατανομής για ε.σ. $\alpha=0.05$

Οι εκτιμήσεις των επιδράσεων που **υπερβαίνουν** κατά απόλυτη τιμή το **SME** θεωρούνται **σημαντικές**, ενώ αυτές που κατά απόλυτη τιμή είναι **μικρότερες** του **ME** θεωρούνται **μη σημαντικές**. Μεταξύ των ME και SME υπάρχει μία **ζώνη αβεβαιότητας**. Η μέθοδος δεν μπορεί να αποφανθεί για τη σημαντικότητα ή μη όσων επιδράσεων βρίσκονται κατά απόλυτη τιμή στη ζώνη αυτή.

Στη βιβλιογραφία χρησιμοποιείται ο όρος Lenth-στατιστικό της εκτιμήτριας $\hat{\beta}_i$ για το λόγο $|\hat{\beta}_i|/PSE$. Έτσι για κάθε $\hat{\beta}_i$ υπολογίζεται το $t_{Lenth,i} = |\hat{\beta}_i|/PSE$ το οποίο συγκρίνεται με τις κρίσιμες τιμές της t-κατανομής που υπολόγισε ο Lenth για $d=n/3$ βαθμούς ελευθερίας. Στα παραδείγματα, για περισσότερη απλότητα, δεν θα υπολογίσουμε τα Lenth-στατιστικά, αλλά θα κάνουμε απευθείας σύγκριση των εκτιμήσεων των επιδράσεων με τα ME και SME.

2.4.2 Τροποποιημένη μέθοδος Lenth (2000)

Ο έλεγχος του Lenth χρησιμοποιεί κρίσιμες τιμές της t-κατανομής με $n/3$ β.ε. σαν προσέγγιση του $t_{Lenth,i} = |\hat{\beta}_i|/PSE$ για να ελέγξει το *IER* (individual error rate). Οι Hamada και Balakrishnan (1998) και ο Loughin(1998) παρατήρησαν ότι αυτή η προσέγγιση δεν ήταν ικανοποιητική. Ο έλεγχος του *IER* είναι αρκετός για την ανάλυση πειραμάτων κρησαρίσματος, όμως πολλοί πειραματιστές ενδιαφέρονται και για τον έλεγχο του *EER*. Για το λόγο αυτό τροποποίησαν την μέθοδο του Lenth έτσι ώστε να ελέγχεται και το *EER*.

Οι Hamada - Balakrishnan και Loughin παρουσίασαν δύο κρίσιμες τιμές για διάφορα επίπεδα σημαντικότητας α και διάφορα μεγέθη των πειραμάτων. Έτσι ο τροποποιημένος έλεγχος του Lenth χωρίζεται σε δυο ελέγχους και λειτουργεί χρησιμοποιώντας είτε τις κρίσιμες τιμές που ελέγχουν το *IER* είτε τις κρίσιμες τιμές που ελέγχουν το *EER*.

Διαδικασία εφαρμογής της μεθόδου

Αρχικά υπολογίζουμε το PSE της μεθόδου του Lenth.

Μια επίδραση χαρακτηρίζεται ως ενεργή αν το στατιστικό $t_{lenth,i} = |\hat{\beta}_i| / PSE$ είναι μεγαλύτερο από την κρίσιμη τιμή IER_a^n ή την κρίσιμη τιμή EER_a^n αναλόγως με τον έλεγχο που θέλουμε να κάνουμε.

2.4.3 Μέθοδος Step-Down Lenth (2001)

Κατά την εφαρμογή μιας μεθόδου μας ενδιαφέρουν δύο τύποι σφάλματος, το IER και EER . Ο Lenth το 1989 υποθέτοντας ότι υπάρχουν μόνο λίγες ενεργές επιδράσεις όρισε το PSE , υπολόγισε το στατιστικό $t_{lenth,i} = |\hat{\beta}_i| / PSE$ και πρότεινε την t -κατανομή με $n/3$ βαθμούς ελευθερίας για να προσεγγίσει το στατιστικό αυτό και να ελέγξει το IER . Η προσέγγιση αυτή βασιζόταν κυρίως σε εμπειρικά δεδομένα και όχι στην ασυμπτωτική θεωρία. Γι' αυτό ο Loughin (1998) και οι Ye και Hamada (2000) υπολόγισαν πιο ακριβείς τιμές μέσω προσομοίωσης για να ελέγξουν το IER .

Η κρίσιμη τιμή για το EER σε επίπεδο σημαντικότητας α με n επιδράσεις είναι το $(1-\alpha) \times 100$ -εκατοστημόριο της $\max(|\hat{\beta}_i| / PSE)$ κατανομής, κάτω από την μηδενική υπόθεση $H_0 : \hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_2 = \dots = \hat{\beta}_n = 0$. Στην περίπτωση που η μεγαλύτερη κατά απόλυτη τιμή επίδραση είναι ενεργή, έστω $\hat{\beta}_n$, είναι φυσικό να εξεταστεί η μεγαλύτερη κατά απόλυτη τιμή επίδραση των υπόλοιπων $n-1$ επιδράσεων. Ωστόσο οι αντίστοιχες κρίσιμες τιμές θα πρέπει να υπολογιστούν κάτω από την μηδενική υπόθεση $H_0 : \hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_2 = \dots = \hat{\beta}_{n-1} = 0$. Αυτή η μέθοδος μπορεί να επαναλαμβάνεται μέχρι η επίδραση που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη κατά απόλυτη επίδραση των υπόλοιπων επιδράσεων να μην κηρύσσεται ενεργή.

Επομένως οι Ye, Hamada και Wu (2000) πρότειναν την Step-Down μέθοδο Lenth για να ελέγχεται καλύτερα το EER .

Διαδικασία εφαρμογής της μεθόδου

- i. Κατατάσσουμε τις εκτιμήσεις των επιδράσεων σε φθίνουσα σειρά κατά απόλυτη τιμή. Έστω $|\hat{\beta}_{(1)}| \geq |\hat{\beta}_{(2)}| \geq \dots \geq |\hat{\beta}_{(n)}|$.
- ii. Υπολογίζουμε μια αρχική εκτίμηση της κλίμακας $s_{0,n} = 1.5 \times \text{median}_{1 \leq i \leq n} |\hat{\beta}_i|$
- iii. Ορίζουμε το ψευδοτυπικό σφάλμα $PSE_n = 1.5 \times \text{median}_{|\hat{\beta}_i| < 2.5s_{0,n}} |\hat{\beta}_i|$
- iv. Υπολογίζουμε για την κατά απόλυτη τιμή μεγαλύτερη επίδραση το στατιστικό $t_{lenth,n} = |\hat{\beta}_n| / PSE_n$.

- v. Αν $t_{lenth,n} > EER_a^n$ τότε η επίδραση που αντιστοιχεί στην $|\hat{\beta}|_{(n)}$ είναι ενεργή και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία αφαιρώντας την $|\hat{\beta}|_{(n)}$ από τους υπολογισμούς. Η διαδικασία σταματά μόλις προκύψει κάποια επίδραση ως αδρανής.

2.4.4 Παραδείγματα (Στις μεθόδους EER-Modified Lenth και Step-down Lenth λαμβάνεται ε.σ.= 0.05, ενώ στην IER-Modified Lenth λαμβάνεται ε.σ.= 0.10)

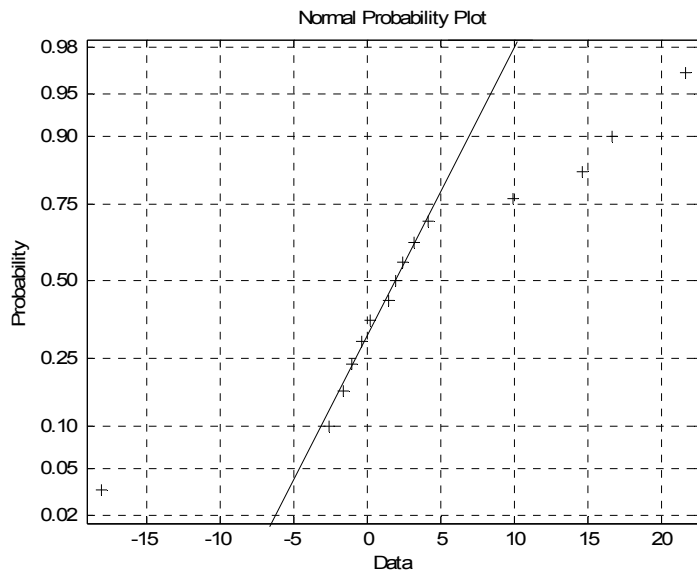
Παράδειγμα 1 (“Design and Analysis of Experiments” Montgomery D.C. 5th Edition 2001, example 6-2 σελ.246)

Τα δεδομένα και ο πίνακας παρατηρήσεων (πίνακας 2.1.3) του παραδείγματος είναι στις σελίδες 9-10.

Υπενθυμίζουμε τις εκτιμήσεις των επιδράσεων και το normal probability plot:

ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΕΠΙΔΡΑΣΗΣ
A	21.625
B	3.125
AB	0.125
C	9.875
AC	-18.125
BC	2.375
ABC	1.875
D	14.625
AD	16.625
BD	-0.375
ABD	4.125
CD	-1.125
ACD	-1.625
BCD	-2.625
ABCD	1.375

Πίνακας 2.4.2: Εκτιμήσεις επιδράσεων για το παράδειγμα 1



Σχήμα 2.4.3 : Normal Probability Plot για το παράδειγμα 1

Θα εφαρμόσουμε και τις τρεις μεθόδους Lenth.

Lenth (Len): Αν $|\hat{\beta}_i| > SME$ τότε η αντίστοιχη επίδραση είναι ενεργή και αν $|\hat{\beta}_i| < ME$ η αντίστοιχη επίδραση είναι μη ενεργή, ενώ αν $ME < |\hat{\beta}_i| < SME$ τότε η μέθοδος δεν καθορίζει αν η επίδραση είναι ενεργή ή αδρανής σε ε.σ. 0.05 (το ε.σ. είναι αυτό που λαμβάνεται για την t-κατανομή.)

s_0	PSE	ME	SME
3.9375	2.625	6.747	13.699

Η απλή μέθοδος Lenth, λοιπόν, βγάζει **ενεργές** τις επιδράσεις **A, AC, D, AD**. Η επίδραση **C** βρίσκεται στη **ζώνη αβεβαιότητας**.

Modified Lenth (ML): Αν $|\hat{\beta}_i| > PSE \times EER_{0.05}^{15}$ τότε η αντίστοιχη επίδραση είναι ενεργή για τον έλεγχο του EER στο 5% ενώ αν $|\hat{\beta}_i| > PSE \times IER_{0.10}^{15}$ τότε η αντίστοιχη επίδραση είναι ενεργή για τον έλεγχο του IER στο 10%

$PSE \times EER_{0.05}^{15}$	$PSE \times IER_{0.10}^{15}$
11.13	4.465

Στον έλεγχο του EER η modified Lenth βρίσκει **ενεργές** τις επιδράσεις **A, AC, D, AD**.

Στον έλεγχο του IER η modified Lenth βρίσκει **ενεργές** τις επιδράσεις **A, AC, D, AD** και **C**.

Step-Down Lenth (SDL): Αν $|\hat{\beta}_i| > PSE_i \times EER_{0.05}^i$ τότε η αντίστοιχη επίδραση είναι ενεργή, όταν κάποια επίδραση είναι αδρανής σταματάμε τη διαδικασία.

i	s_0	PSE_i	$PSE_i \times EER_{0.05}^i$
15	3.938	2.625	11.13
14	3.75	2.625	11.37
13	3.563	2.625	11.37
12	3.186	2.625	11.68
11	2.812	2.625	11.68

Στο πρώτο βήμα της μεθόδου ($i=15$) κρίνεται ενεργή η επίδραση A, αφού είναι μεγαλύτερη κατά απόλυτη τιμή του 11.13.

Στο δεύτερο βήμα της μεθόδου ($i=14$) κρίνεται ενεργή η επίδραση AC, αφού είναι μεγαλύτερη κατά απόλυτη τιμή του 11.37.

Συνεχίζοντας έτσι με τη Step-Down Lenth βρίσκουμε **ενεργές** τις 4 μεγαλύτερες κατά απόλυτη τιμή επιδράσεις, τις **A, AC, D, AD**.

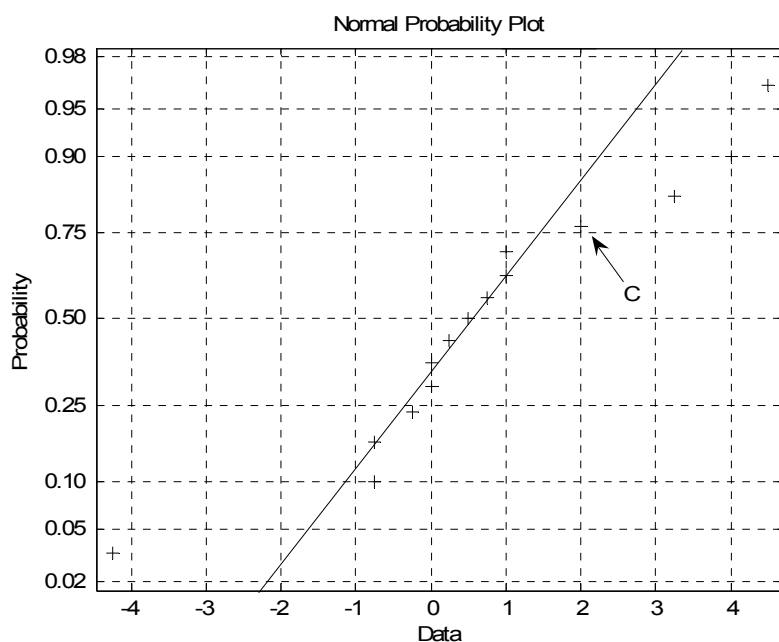
Παράδειγμα 2 (“Design and Analysis of Experiments”, Montgomery D.C. 5th Edition 2001. Problem **6.23** p.282)

Τα δεδομένα και ο πίνακας παρατηρήσεων (πίνακας 2.1.8) του παραδείγματος είναι στις σελίδες 12-13.

Υπενθυμίζουμε τις εκτιμήσεις των επιδράσεων και το normal probability plot:

ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΕΠΙΔΡΑΣΗΣ
A	4.5
B	0.5
AB	-0.75
C	2
AC	-4.25
BC	0.25
ABC	1
D	3.25
AD	4
BD	0
ABD	0.75
CD	0
ACD	-0.25
BCD	-0.75
ABCD	1

Πίνακας 2.4.4: Εκτιμήσεις επιδράσεων για το παράδειγμα 2



Σχήμα 2.4.5: Normal Probability Pot για το παράδειγμα 2

Θα εφαρμόσουμε και πάλι τις τρεις τροποποιήσεις της μεθόδου του Lenth.

Lenth (Len):

s_0	PSE	ME	SME
1.125	1.125	2.8919	5.8709

Η απλή μέθοδος Lenth δε βρίσκει **καμμία ενεργή** επίδραση. Οι επιδράσεις **A, AC, D, AD** βρίσκονται στη ζώνη αβεβαιότητας.

Modified Lenth (ML):

$PSE \times EER_{0.05}^{15}$	$PSE \times IER_{0.10}^{15}$
4.77	1.9136

Στον έλεγχο του EER η modified Lenth δε βρίσκει **καμμία ενεργή** επίδραση.

Στον έλεγχο του IER η modified Lenth βρίσκει **ενεργές** τις επιδράσεις **A, AC, D, AD** και **C**.

Step-Down Lenth (SDL):

i	s_0	PSE_i	$PSE_i \times EER_{0.05}^i$
15	1.125	1.125	4.77

Η Step-Down Lenth δε βρίσκει **καμμία ενεργή** επίδραση.

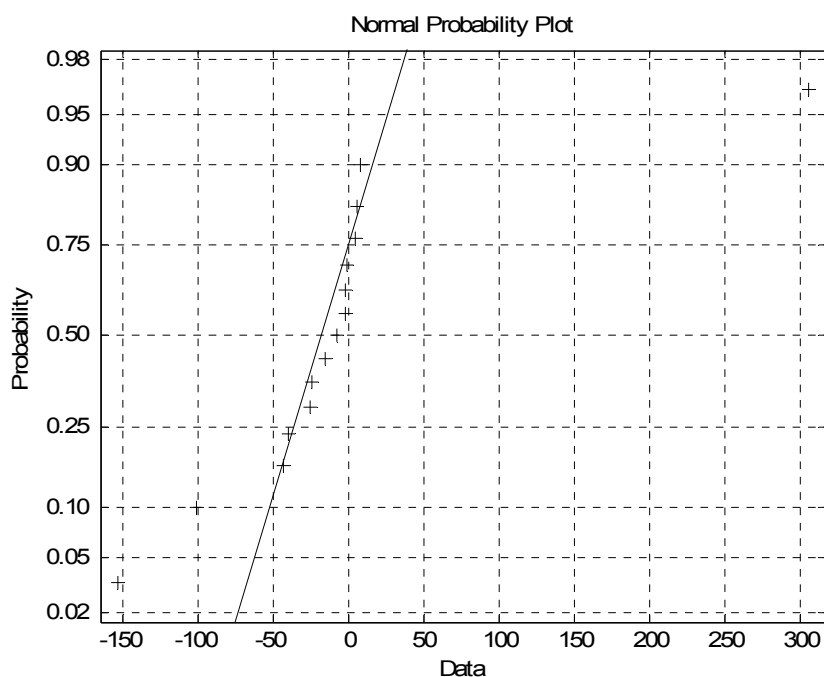
Παράδειγμα 3 (“Design and Analysis of Experiments”, Montgomery D.C. 5th Edition, 2001. Problem **6.18**, p.281)

Τα δεδομένα και ο πίνακας των παρατηρήσεων (Πίνακας 2.2.8) του προβλήματος βρίσκονται στις σελίδες 35-36.

Υπενθυμίζουμε τις εκτιμήσεις των επιδράσεων και το normal probability plot:

ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΕΠΙΔΡΑΣΗΣ
A	-101.625
B	-1.625
AB	-7.875
C	7.375
AC	-24.875
BC	-43.875
ABC	-15.625
D	306.125
AD	-153.625
BD	-0.625
ABD	4.125
CD	-2.125
ACD	5.625
BCD	-25.375
ABCD	-40.125

Πίνακας 2.4.6: Εκτιμήσεις των επιδράσεων για το παράδειγμα 3



Σχήμα 2.4.7: Normal Probability Plot του παραδείγματος 3

Η εφαρμογή των μεθόδων Lenth δίνει τα ακόλουθα αποτελέσματα:

Lenth (Len)

s_0	PSE	ME	SME
23.4375	11.4375	29.39	59.70

Η απλή μέθοδος Lenth βρίσκει **ενεργές** τις επιδράσεις **A, D** και **AD**. Στη ζώνη **αβεβαιότητας** βρίσκονται οι επιδράσεις **BC** και **ABCD**.

Modified Lenth (ML):

$PSE \times EER_{0.05}^{15}$	$PSE \times IER_{0.10}^{15}$
48.495	19.455

Στον έλεγχο του EER η modified Lenth βρίσκει **ενεργές** τις επιδράσεις **A, D, AD**.

Στον έλεγχο του IER η modified Lenth βρίσκει **ενεργές** τις επιδράσεις **A, D, AD, BC, ABCD, AC** και **BCD**.

Step-Down Lenth (SDL):

i	s_0	PSE_i	$PSE_i \times EER_{0.05}^i$
15	23.44	11.43	48.49
14	17.63	11.43	49.49
13	11.81	9.75	42.21
12	11.44	9.75	43.38
11	11.06	9.75	43.38

Τέλος η μέθοδος Step-Down Lenth βρίσκει **ενεργές** τις επιδράσεις **A, D, AD, BC**.

2.4.5 Γενικά Συμπεράσματα

Οι μέθοδοι Lenth είναι απλές και εύχρηστες. Η απλή μέθοδος, αν και είναι η πιο εύχρηστη από τις 3, οδηγεί τις περισσότερες φορές σε μη ικανοποιητικά αποτελέσματα, καθώς η ζώνη αβεβαιότητάς της συχνά περιλαμβάνει αρκετές επιδράσεις. Οι βελτιώσεις της μεθόδου Lenth δίνουν πιο χρήσιμα αποτελέσματα. Η τροποποιημένη (modified) μέθοδος Lenth ελέγχει κατ'επιλογή το EER ή το IER, ενώ η Step-down Lenth με τις 'μειωμένες κατά βήμα' μηδενικές της υποθέσεις δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα, συγκρίσιμα με άλλες μεθόδους που έχουν επίσης 'μειωμένες κατά βήμα' μηδενικές υποθέσεις (π.χ. μέθοδος Al-Shiha-Yang).

2.4.6 Πίνακας III: Κρίσιμες τιμές για έλεγχο του IER με την τροποποιημένη μέθοδο του Lenth.

α	I				
	7	15	31	63	127
0.001	13.391	6.536	4.523	3.82	3.528
0.002	10.083	5.527	4.054	3.51	3.282
0.003	8.496	4.985	3.791	3.33	3.135
0.004	7.517	4.633	3.612	3.21	3.030
0.005	6.842	4.368	3.474	3.11	2.948
0.006	6.317	4.164	3.361	3.03	2.880
0.007	5.911	3.998	3.265	2.96	2.821
0.008	5.576	3.860	3.182	2.90	2.769
0.009	5.301	3.737	3.109	2.85	2.723
0.010	5.069	3.629	3.044	2.80	2.681
0.020	3.755	2.954	2.594	2.44	2.381
0.030	3.092	2.518	2.341	2.26	2.212
0.040	2.532	2.308	2.186	2.12	2.087
0.050	2.297	2.156	2.064	2.01	1.987
0.060	2.133	2.034	1.964	1.92	1.904
0.070	2.000	1.932	1.879	1.85	1.830
0.080	1.888	1.845	1.805	1.78	1.766
0.090	1.794	1.769	1.740	1.72	1.708
0.100	1.710	1.701	1.681	1.66	1.655
0.200	1.202	1.255	1.273	1.28	1.281
0.300	0.928	0.988	1.016	1.03	1.032
0.400	0.745	0.792	0.818	0.83	0.836

2.4.7 Πίνακας IV: Κρίσιμες τιμές των Wu, Ye και Hamada για την μέθοδο Step-Down Lenth

<i>I</i>											
α	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0.001	42.47	40.59	24.28	24.51	18.93	18.25	15.39	14.79	12.99	12.75	11.54
0.002	29.86	28.00	19.06	18.88	14.94	14.51	12.48	12.14	10.78	10.62	9.77
0.003	24.58	22.79	16.36	16.07	13.02	12.64	11.06	10.82	9.64	9.53	8.82
0.004	21.01	19.45	14.66	14.32	11.84	11.47	10.10	9.91	8.92	8.77	8.22
0.005	18.83	17.28	13.50	13.10	11.03	10.61	9.46	9.26	8.43	8.24	7.79
0.006	17.15	15.67	12.60	12.13	10.36	9.95	8.96	8.73	8.03	7.85	7.44
0.007	15.73	14.34	11.90	11.40	9.80	9.45	8.54	8.32	7.70	7.54	7.16
0.008	14.70	13.33	11.30	10.79	9.38	9.01	8.19	7.98	7.44	7.26	6.92
0.009	13.78	12.51	10.78	10.23	9.00	8.63	7.90	7.70	7.21	7.04	6.73
0.010	13.03	11.83	10.33	9.75	8.68	8.32	7.65	7.45	7.00	6.83	6.55
0.020	8.89	8.18	7.77	7.18	6.80	6.47	6.19	5.97	5.78	5.63	5.51
0.030	7.07	6.66	6.52	6.03	5.89	5.57	5.45	5.24	5.16	5.02	4.96
0.040	5.95	5.81	5.74	5.33	5.30	5.01	4.97	4.78	4.75	4.62	4.60
0.050	5.14	5.24	5.17	4.87	4.87	4.62	4.62	4.45	4.45	4.33	4.33
0.060	4.52	4.83	4.73	4.53	4.53	4.33	4.35	4.20	4.22	4.10	4.12
0.070	4.02	4.51	4.37	4.26	4.26	4.10	4.12	4.00	4.03	3.92	3.95
0.080	3.59	4.23	4.07	4.04	4.03	3.92	3.93	3.83	3.86	3.77	3.80
0.090	3.17	4.00	3.82	3.85	3.83	3.75	3.77	3.69	3.72	3.64	3.68
0.100	2.67	3.79	3.59	3.69	3.65	3.62	3.63	3.56	3.60	3.53	3.56
0.200	1.91	2.28	2.23	2.42	2.39	2.59	2.48	2.74	2.72	2.80	2.81
0.300	1.61	1.88	1.90	2.06	2.07	2.17	2.17	2.25	2.25	2.31	2.32
0.400	1.41	1.63	1.68	1.80	1.84	1.93	1.95	2.02	2.04	2.09	2.10

<i>I</i>											
α	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
0.001	11.09	10.39	10.07	9.54	9.35	8.93	8.82	8.44	8.18	8.06	7.97
0.002	9.44	8.93	8.73	8.33	8.17	7.82	7.75	7.50	7.32	7.17	7.14
0.003	8.57	8.14	8.01	7.65	7.53	7.22	7.18	6.95	6.85	6.70	6.65
0.004	8.00	7.63	7.52	7.21	7.10	6.83	6.79	6.59	6.49	6.37	6.33
0.005	7.59	7.25	7.15	6.88	6.77	6.55	6.50	6.31	6.23	6.13	6.08
0.006	7.25	6.96	6.87	6.62	6.52	6.32	6.28	6.10	6.03	5.93	5.89
0.007	6.99	6.73	6.63	6.40	6.31	6.13	6.09	5.93	5.87	5.78	5.73
0.008	6.77	6.52	6.43	6.22	6.14	5.97	5.93	5.79	5.73	5.64	5.59
0.009	6.57	6.35	6.27	6.06	5.99	5.83	5.80	5.66	5.61	5.52	5.47
0.010	6.40	6.20	6.11	5.93	5.86	5.71	5.68	5.55	5.50	5.42	5.37
0.020	5.38	5.28	5.19	5.11	5.05	4.97	4.93	4.87	4.83	4.78	4.74
0.030	4.84	4.79	4.72	4.67	4.61	4.57	4.53	4.49	4.46	4.43	4.40
0.040	4.50	4.47	4.39	4.37	4.32	4.30	4.26	4.24	4.21	4.19	4.16
0.050	4.24	4.23	4.16	4.15	4.11	4.10	4.06	4.05	4.02	4.01	3.98
0.060	4.03	4.04	3.97	3.98	3.94	3.94	3.90	3.90	3.87	3.87	3.84
0.070	3.87	3.89	3.82	3.84	3.79	3.81	3.77	3.77	3.75	3.75	3.73
0.080	3.73	3.75	3.69	3.72	3.67	3.69	3.65	3.66	3.64	3.65	3.63
0.090	3.61	3.64	3.58	3.61	3.57	3.59	3.56	3.57	3.55	3.56	3.54
0.100	3.51	3.54	3.49	3.52	3.48	3.50	3.47	3.48	3.46	3.48	3.46
0.200	2.84	2.85	2.87	2.89	2.89	2.91	2.91	2.93	2.93	2.95	2.94
0.300	2.36	2.37	2.41	2.41	2.44	2.45	2.48	2.48	2.55	2.56	2.61
0.400	2.14	2.16	2.20	2.21	2.24	2.25	2.28	2.29	2.31	2.32	2.34

<i>I</i>										
α	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
0.001	7.75	7.56	7.38	7.35	7.17	7.16	7.03	6.97	6.80	6.72
0.002	6.93	6.84	6.66	6.64	6.47	6.47	6.37	6.31	6.21	6.15
0.003	6.49	6.41	6.25	6.23	6.09	6.10	6.02	5.96	5.89	5.84
0.004	6.19	6.13	6.00	5.97	5.84	5.86	5.77	5.73	5.65	5.62
0.005	5.96	5.91	5.80	5.77	5.66	5.67	5.59	5.54	5.48	5.46
0.006	5.78	5.73	5.64	5.60	5.51	5.52	5.44	5.40	5.34	5.32
0.007	5.63	5.58	5.50	5.47	5.38	5.38	5.32	5.28	5.23	5.21
0.008	5.50	5.46	5.39	5.36	5.27	5.28	5.22	5.18	5.13	5.11
0.009	5.40	5.36	5.29	5.26	5.18	5.18	5.13	5.10	5.05	5.03
0.010	5.31	5.27	5.20	5.18	5.10	5.10	5.05	5.02	4.98	4.95
0.020	4.70	4.68	4.63	4.62	4.58	4.58	4.54	4.52	4.50	4.48
0.030	4.38	4.36	4.32	4.32	4.29	4.29	4.26	4.25	4.23	4.22
0.040	4.15	4.13	4.11	4.11	4.09	4.08	4.06	4.05	4.04	4.03
0.050	3.98	3.97	3.95	3.94	3.93	3.93	3.91	3.90	3.90	3.89
0.060	3.84	3.83	3.82	3.81	3.81	3.80	3.79	3.78	3.78	3.77
0.070	3.73	3.72	3.71	3.70	3.70	3.69	3.69	3.68	3.68	3.67
0.080	3.63	3.62	3.62	3.61	3.61	3.60	3.60	3.60	3.60	3.59
0.090	3.54	3.53	3.54	3.53	3.53	3.52	3.52	3.52	3.52	3.51
0.100	3.47	3.45	3.46	3.45	3.46	3.45	3.46	3.45	3.45	3.45
0.200	2.96	2.96	2.97	2.97	2.99	2.98	3.00	2.99	3.01	3.00
0.300	2.62	2.65	2.65	2.67	2.68	2.70	2.71	2.71	2.73	2.73
0.400	2.35	2.37	2.38	2.40	2.40	2.42	2.43	2.44	2.45	2.46

2.5 Μέθοδος Box-Meyer (1986)

Η Μπευζιανή αυτή μέθοδος προτάθηκε για να ξεπεραστεί εν μέρει το πρόβλημα της υποκειμενικότητας στη μελέτη των κανονικών διαγραμμάτων πιθανότητας. Στηρίζεται στην αρχή της σποραδικότητας των επιδράσεων, σύμφωνα με την οποία οι επιδράσεις μεγαλύτερης τάξης είναι αμελητέες. Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι ο υπολογισμός μιας εκ των υστέρων πιθανότητας ότι μία επίδραση είναι ενεργή.

2.5.1 Εκ των Υστέρων Πιθανότητα

Αρχικά υποθέτουμε ότι η επίδραση τ_i είναι ενεργή με πιθανότητα α . Επίσης οι ενεργές τ_i είναι ανεξάρτητες, ισόνομα καταναμημένες και ακολουθούν κανονική κατανομή $N(0, \sigma_\tau^2)$, ενώ οι αδρανείς τ_i με πιθανότητα $(1-\alpha)$ θα είναι 0. Έστω $\mathbf{T} = (T_1, T_2, \dots, T_n)$ το διάνυσμα των n εκτιμώμενων επιδράσεων όπως το παίρνουμε από κάποιο ορθογώνιο πίνακα, τυποποιημένο έτσι ώστε για δοθέν $\mathbf{\tau}$ όλες οι επιδράσεις να έχουν την ίδια (άγνωστη) διασπορά σ^2 . Έτσι οι εκτιμήσεις των επιδράσεων $T_i = e_i$ που αντιστοιχούν στις αδρανείς επιδράσεις θα έχουν κατανομή $N(0, \sigma^2)$ ενώ οι εκτιμήσεις $T_i = \tau_i + e_i$ που αντιστοιχούν στις ενεργές επιδράσεις θα έχουν κατανομή $N(0, k^2 \sigma^2)$, με $k^2 = \frac{(\sigma^2 + \sigma_\tau^2)}{\sigma^2}$ και τα σφάλματα e_i θα είναι ανεξάρτητα, ισόνομα καταναμημένα και θα ακολουθούν κανονική κατανομή $N(0, \sigma^2)$. Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι T_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομα καταναμημένες με κατανομή $(1-\alpha)N(0, \sigma^2) + \alpha N(0, k^2 \sigma^2)$. Αυτό σημαίνει ότι με πιθανότητα $(1-\alpha)$ μία επίδραση T_i είναι κανονικά καταναμημένη με μέσο 0 και διασπορά σ^2 , ενώ με πιθανότητα α θα είναι κανονικά καταναμημένη επίσης με μέσο μηδέν αλλά μεγαλύτερη διασπορά $k^2 \sigma^2$.

Έστω ότι $\alpha_{(r)}$ το ενδεχόμενο ένα συγκεκριμένο σύνολο r το πλήθος από τις n επιδράσεις να είναι ενεργές και έστω $\mathbf{T}_{(r)}$ το διάνυσμα των εκτιμώμενων επιδράσεων που αντιστοιχεί στις r ενεργές επιδράσεις του $\alpha_{(r)}$. Τότε (Βλέπε Box-Tiao 1968) με την κατανομή της $p(\log \sigma)$ τοπικά ομοιόμορφη¹, η εκ των υστέρων πιθανότητα το $\mathbf{T}_{(r)}$ να περιλαμβάνει τις ενεργές επιδράσεις είναι:

$$p(\alpha_{(r)} | \mathbf{T}, a, k) = \left[\frac{ak^{-1}}{1-a} \right]^r \left[1 - \phi f_{(r)} \right]^{-v/2}, \quad \text{όπου } \phi = 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{\sigma_\tau^2}{\sigma^2 + \sigma_\tau^2} \text{ και}$$

$$f_{(r)} = \frac{\mathbf{T}_{(r)}' \mathbf{T}_{(r)}}{\mathbf{T}' \mathbf{T}} \text{ το κλάσμα του αθροίσματος τετραγώνων που σχετίζεται με το } \mathbf{T}_{(r)}.$$

¹ Μια κατανομή είναι τοπικά ομοιόμορφη στο θ_0 εάν $\frac{p(\alpha\sigma < \theta - \theta_0 < \beta\sigma)}{p(0 < \theta - \theta_0 < \sigma)} \rightarrow \beta - \alpha \quad \forall \alpha < \beta$ όταν $\sigma \rightarrow 0$

Συγκεκριμένα η περιθώρια πιθανότητα p_i ότι μία επίδραση i είναι ενεργή για δοσμένα \mathbf{T} , a και k είναι

$$p_i = \sum_{(r):i \text{ ενεργές}} p(a_{(r)} | \mathbf{T}, a, k)$$

Για να υπολογίσουμε τα p_i ($i=1,2,\dots,\nu$), θα πρέπει να υπολογίσουμε τις εκ των υστέρων πιθανότητες για καθένα από τα $2^\nu - 1$ δυνατά ενδεχόμενα $a_{(r)}$.

2.5.2 Υπολογισμός εκ των υστέρων πιθανοτήτων

Για να αποφευχθεί η άθροιση πάνω σε όλους τους $2^\nu - 1$ συνδυασμούς, χρησιμοποιείται μια εναλλακτική προσέγγιση με την οποία οι απαιτούμενες πιθανότητες υπολογίζονται πολύ πιο γρήγορα. Δεδομένου ότι οι T_1, T_2, \dots, T_ν είναι ανεξάρτητες και ισόνομα κατανεμημένες με κατανομή $(1-\alpha)N(0, \sigma^2) + \alpha N(0, k^2 \sigma^2)$, η εκ των υστέρων πιθανότητα ότι μία από τις T_i , προέρχεται από την πιο πλατιά κατανομή $N(0, k^2 \sigma^2)$, δοθέντος του σ είναι:

$$P_{i|\sigma} = \frac{\alpha \frac{1}{k} \exp\left\{\frac{-T_i^2}{2k^2 \sigma^2}\right\}}{\alpha \frac{1}{k} \exp\left\{\frac{-T_i^2}{2k^2 \sigma^2}\right\} + (1-\alpha) \exp\left\{\frac{-T_i^2}{2\sigma^2}\right\}}$$

Η πιο πάνω πιθανότητα προκύπτει με εφαρμογή του θεωρήματος του Bayes και είναι ανεξάρτητη από τις υπόλοιπες εκτιμώμενες επιδράσεις $T_j, j=1,2,\dots,\nu$ ($j \neq i$).

Ο υπολογισμός της χωρίς συνθήκη, εκ των υστέρων πιθανότητας ότι η επίδραση είναι ενεργή δίνεται από το πιο κάτω ολοκλήρωμα:

$$p_i = \int_0^\infty p_{i|\sigma} p(\sigma | \mathbf{T}) d\sigma$$

όπου η εκ των υστέρων κατανομή της σ δίνεται από τη σχέση:

$$p(\sigma | \mathbf{T}) = \sigma^{-n} \prod_{j=1}^{\nu} \left[(1-\alpha) \exp\left\{\frac{-T_j^2}{2\sigma^2}\right\} + \alpha \frac{1}{k} \exp\left\{\frac{-T_j^2}{2k^2 \sigma^2}\right\} \right]$$

Αν το γινόμενο αυτό αναλυθεί σε άθροισμα 2^ν όρων, η ολοκλήρωση μπορεί να γίνει αναλυτικά. Προτιμάται όμως ο υπολογισμός του ολοκληρώματος με αριθμητικές μεθόδους γιατί είναι πολύ πιο εύκολος.

2.5.3 Οι σταθερές α και k

Στην παραπάνω ανάλυση χρησιμοποιήσαμε τις παραμέτρους α και k , με α την πιθανότητα μία επίδραση να είναι ενεργή και k τον παράγοντα αύξησης της τυπικής απόκλισης, που παράγεται από μία ενεργή επίδραση. Ήδη υπάρχουσες πληροφορίες μέσα από τη βιβλιογραφία μας δίνουν ένα πεδίο τιμών για τα α και k . Μετά από εξέταση των αποτελεσμάτων από διάφορα παραδείγματα πάνω σε μη-επαναλαμβανόμενους κλασματικούς παραγοντικούς σχεδιασμούς, προέκυψε ο πιο κάτω πίνακας. Η παράμετρος α έχει εκτιμηθεί ως το κλάσμα των επιδράσεων που έχουν βρεθεί σημαντικές από τους συγγραφείς, ενώ το k^2 από το λόγο του τετραγωνικού μέσου των σημαντικών επιδράσεων (mean square significant effect) προς τον τετραγωνικό μέσο των μη ενεργών επιδράσεων (mean square inert effect). Οι εκτιμώμενες τιμές για το α κυμαίνονται μεταξύ του 0.13 και 0.27, με μέσο όρο γύρω στο 0.20, ενώ οι εκτιμώμενες τιμές για το k , μεταβάλλονται ευθέως από 2.7 ως 18, με μέσο γύρω στο 10.

Παράδειγμα	n	$\hat{\alpha}$	\hat{k}
Box, Hunter, Hunter (1978) σελ.398	16	0.20	7.9
Box, Hunter, Hunter (1978) σελ.327	16	0.27	13.9
Box, Hunter, Hunter (1978) σελ.378	32	0.16	11.0
Davies (1964) Σελ.275	16	0.13	2.7
Davies (1964) Σελ.462	16	0.27	7.1
Davies (1964) Σελ.71	16	0.20	13
Bennet, Franklin (1954) σελ.557	16	0.27	18
Johnson, Leone (1964) σελ.183	32	0.13	3.2
Johnson, Leone (1964) σελ.196	16	0.27	9.5
Taguchi, Wu (1980) Σελ.69	16	0.13	9.7
Μέσος όρος	-	0.20	9.6

Πίνακας 2.5.1: Εκτιμήσεις των α και k από δημοσιευμένα παραδείγματα

Λόγω του ότι τα διαστήματα αυτά βασίζονται σε παραδείγματα, υπάρχει πάντα η πιθανότητα ύπαρξης μεροληψίας σχετικά με αυτά. Παρόλα αυτά, μπορεί να αποδειχθεί ότι η ανάλυση δεν είναι συνήθως ευαίσθητη σε μεταβολές των τιμών α και k , άρα δεν υπάρχει ουσιαστικός λόγος για αναζήτηση μεγαλύτερης ακρίβειας.

2.5.4 Παραδείγματα

Στον πιο κάτω πίνακα έχουμε παραθέσει τα στοιχεία ορισμένων δημοσιευμένων παραδειγμάτων 2^k παραγοντικών σχεδιασμών:

Example	Source	Design	Factors	Response
I	Daniel (1976)	2^4	Load (A), Flow (B), Speed (C), Mud (D)	Log drill advance
II	Taguchi and Wu (1980)	2^{9-5}_{III}	Rods (A), Period (B), Material (C), Thickness (D), Angle (E), Opening (F), Current (G), Method (H), Preheating (J)	Tensile strength
III	Box, Hunter, and Hunter (1978)	2^{8-4}_{IV}	Temperature (T), Moisture (M), Holding pressure (H), Thickness (V), Booster pressure (B), Cycle time (C), Gate size (G), Speed (S)	Shrinkage
IV	Davies (1954)	2^4	Acid strength (A), Time (B), Amount of acid (C), Temperature (D)	Yield of isatin

Πίνακας 2.5.2: Παραδείγματα 2^k παραγοντικών σχεδιασμών

Οι εκτιμήσεις των επιδράσεων και οι αντίστοιχες εκ των υστέρων πιθανότητες, όπου έχουμε θέσει $\alpha=0.2$ και $k=10$ δίνονται πιο κάτω:

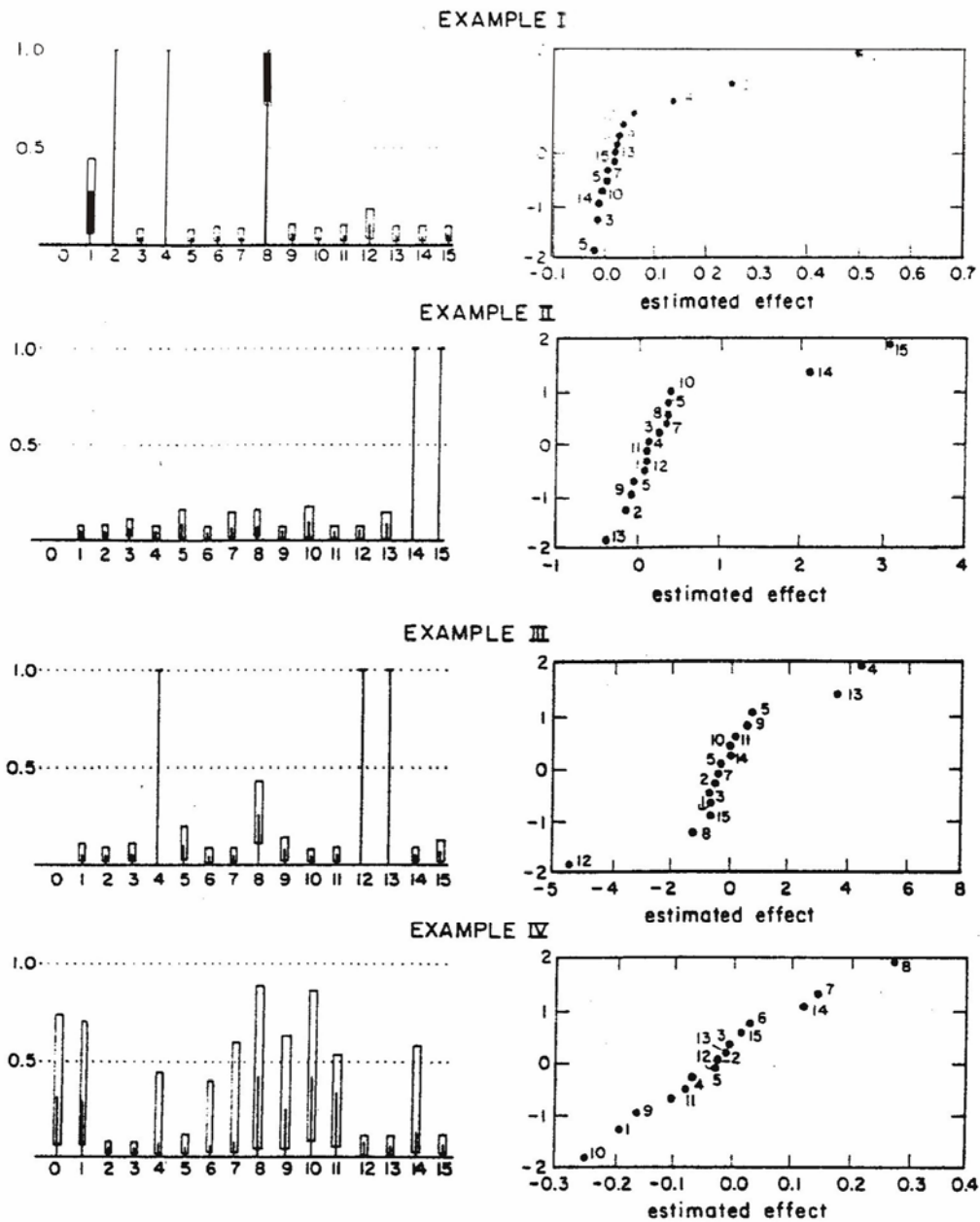
Column	I		II		III		IV	
	Effect	p	Effect	p	Effect	p	Effect	p
None Active	—	.00	—	.00	—	.00	—	.35
1	.06	.31	.13	.03	-.6	.05	-.19	.14
2	.25	1.00	-.15	.03	-.4	.03	-.02	.03
3	-.01	.03	.30	.05	-.6	.05	.00	.02
4	.50	1.00	.15	.03	4.6	1.00	-.08	.04
5	.00	.02	.40	.08	.9	.11	.03	.03
6	-.02	.03	-.03	.02	-.2	.03	-.07	.04
7	.00	.02	.37	.07	-.3	.03	.15	.09
8	.14	.99	.4	.08	-1.2	.28	.27	.34
9	.03	.05	-.05	.02	.7	.06	-.16	.10
10	-.01	.03	.42	.09	.1	.02	-.25	.27
11	.02	.03	.13	.03	.3	.03	-.10	.05
12	.04	.09	.13	.03	-5.5	1.00	-.03	.03
13	.02	.03	-.37	.07	3.8	1.00	-.01	.02
14	.01	.03	2.15	1.00	.1	.02	.12	.06
15	.02	.03	3.10	1.00	-.6	.05	.02	.03

Πίνακας 2.5.3: Εκτιμήσεις των επιδράσεων και αντίστοιχες εκ των υστέρων πιθανότητες για παραδείγματα I, II, III, IV.

Παρατηρώντας τις εκ των υστέρων πιθανότητες του πίνακα αυτού βλέπουμε ότι:

- 1) Για το πρώτο κρίνονται ενεργές οι επιδράσεις 2, 4 και 8.
- 2) Για το δεύτερο πείραμα κρίνονται ενεργές οι επιδράσεις 14 και 15.
- 3) Για το τρίτο πείραμα κρίνονται ενεργές οι επιδράσεις 4, 12 και 13.
- 4) Για το τέταρτο πείραμα κρίνεται ότι δεν υπάρχουν ενεργές επιδράσεις.

Μια καλύτερη ανάλυση των εκ των υστέρων πιθανοτήτων, για διάφορες τιμές των α ($0.1 < \alpha < 0.3$) και k ($5 < k < 10$) δίνεται πιο κάτω:



Σχήμα 2.5.4: Αριστερά: Εκ των υστέρων πιθανότητες για $0.1 < \alpha < 0.3$ και $5 < k < 15$.

Δεξιά: Αντίστοιχα διαγράμματα κανονικής πιθανότητας.

Τα σχήματα στα αριστερά δίνουν τις εκ των υστέρων πιθανότητες για κάθε μία από τις επιδράσεις του κάθε παραδείγματος. Πιο αναλυτικά, οι γραμμές δίνουν τις εκ των υστέρων πιθανότητες για $\alpha=0.2$ και $k=10$. Τα κουτιά που βρίσκονται πάνω στις γραμμές δίνουν το εύρος των εκ των υστέρων πιθανοτήτων για $0.1 < \alpha < 0.3$ και $5 < k < 15$. Δίπλα στα σχήματα των εκ των υστέρων πιθανοτήτων έχουμε τα normal probability plots των αντίστοιχων παραδειγμάτων.

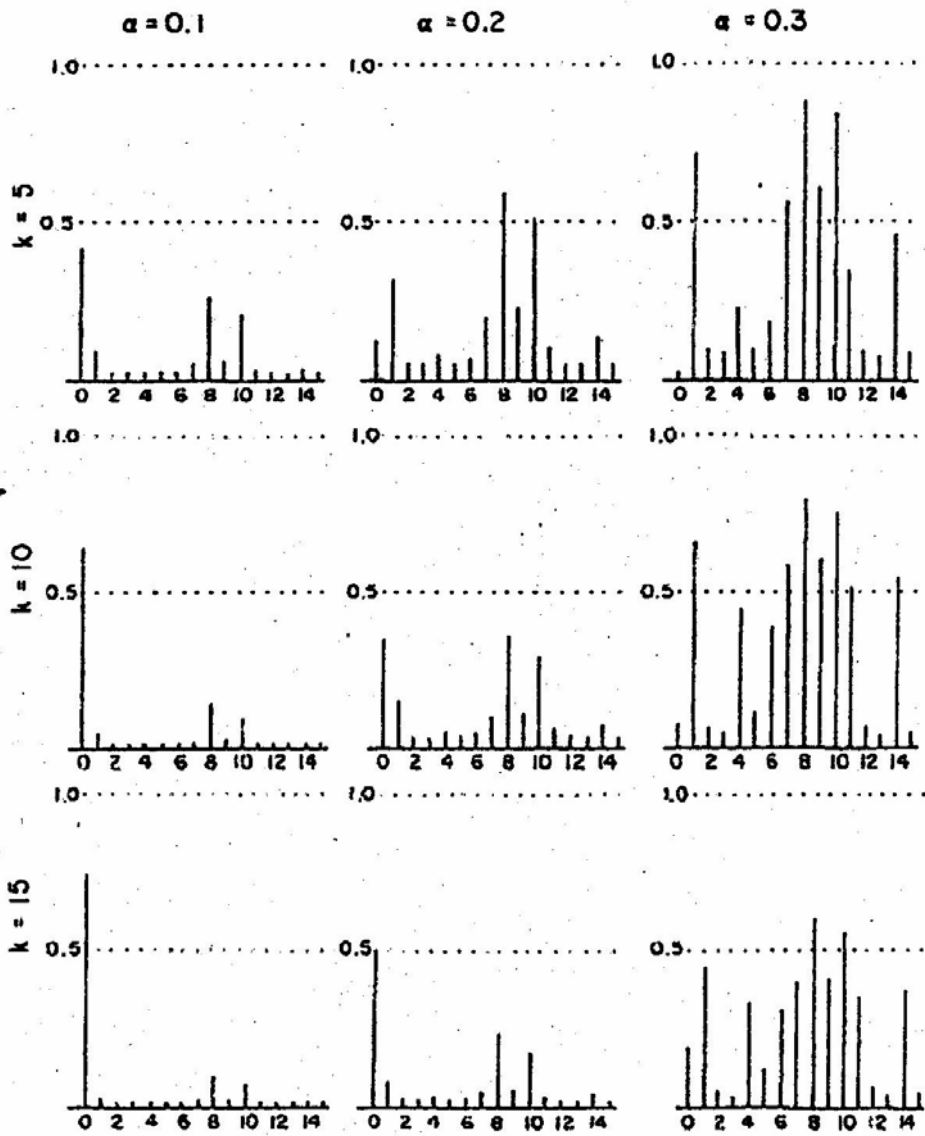
Συμπεράσματα από παραδείγματα I, II, και III

- 1) Αν θεωρήσουμε αρχικά τα αποτελέσματα για $\alpha=0.2$ και $k=10$, βλέπουμε ότι οι περισσότερες πιθανότητες είναι είτε μικρές είτε κοντά στη μονάδα. Έτσι ορίζεται μια ξεκάθαρη διαίρεση των επιδράσεων σε ενεργές και μη ενεργές, η οποία συμφωνεί με τα συμπεράσματα των normal probability plots.
- 2) Για κάθε ένα από τα παραδείγματα η πιθανότητα να μην υπάρχουν ενεργές επιδράσεις είναι μηδενική σε όλο το εύρος των τιμών των α και k .
- 3) Οι μεταβολές των α και k δε μεταβάλλουν τα συμπεράσματα της μεθόδου.

Συμπεράσματα από παράδειγμα IV

Το παράδειγμα αυτό απεικονίζει μια δυσκολία όσον αφορά τη διάκριση ενεργών επιδράσεων. Η δυσκολία αυτή φαίνεται και στο normal probability plot. Οι συγγραφείς των παραδειγμάτων, χρησιμοποιώντας μια αμφισβητούμενη μέθοδο ανάλυσης διασποράς, αποφάνθηκαν ότι οι επιδράσεις 8 και 10 είναι ενεργές. Για $\alpha=0.2$ και $k=10$, υπάρχει σημαντική πιθανότητα (0.35) καμμία από τις επιδράσεις να μην είναι ενεργές. Η εφαρμογή της μεθόδου Box-Meyer δείχνει ότι οι πιθανότητες οι επιδράσεις 8 και 10 να είναι ενεργές είναι μικρές. Στο παράδειγμα αυτό οι εκ των υστέρων επιδράσεις είναι αρκετά ευαίσθητες σε μεταβολές των α και k . Η ευαισθησία αυτή, που φαίνεται καθαρά στα πιο κάτω σχήματα που δίνουν τις εκ των υστέρων πιθανότητες του παραδείγματος αυτού για $\alpha=1.0, 0.2$ και 0.3 και $k=5, 10, 15$ δε μας επιτρέπει να βγάλουμε ασφαλή συμπεράσματα.

Σημείωση: Η πιθανότητα καμμία από τις επιδράσεις να μην είναι ενεργές ορίζεται εμπειρικά. Μπορεί, για παράδειγμα να οριστεί ως το ποσοστό των εφαρμογών διαφόρων μεθόδων που έχουν ήδη γίνει στα ίδια δεδομένα, στις οποίες δεν έχουν βρεθεί ενεργές επιδράσεις.



Σχήμα 2.5.5: Εκ των υστέρων πιθανότητες του παραδείγματος IV για $\alpha=0.1, 0.2$ και 0.3 και $k=5, 10$ και 15

Στην περίπτωση αυτή η μέθοδος δε μας βοηθάει στο να βρούμε τις ενεργές επιδράσεις. Θα πρέπει κάποια ή όλα τα σημεία του σχεδιασμού να επαναληφθούν, έτσι ώστε να έχουμε μεγαλύτερη ακρίβεια στις μετρήσεις μας ή και να πραγματοποιηθούν πειράματα στα οποία το εύρος ορισμένων παραγόντων να διευρυνθεί.

2.5.5 Γενικά Συμπεράσματα

Η μέθοδος των Box-Meyer είναι αρκετά απλή, παρόλο που απαιτεί τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή για τον υπολογισμό των εκ των υστέρων πιθανοτήτων. Η θεωρητική αυτή μέθοδος συμπληρώνει τις γραφικές μεθόδους που έχουν προταθεί από τον Daniel. Όταν όμως το Daniel plot δεν αναγνωρίζει ενεργές επιδράσεις τότε και αυτή δύσκολα πετυχαίνει ασφαλή αποτελέσματα. Για το λόγο αυτό είναι καλύτερο να καταφεύγουμε σε άλλες πιο σίγουρες μεθόδους.

2.6 Μέθοδος Benski (1989)

Η μέθοδος Benski αποτελεί μια μέθοδο αναγνώρισης των σημαντικών παραγόντων ενός παραγοντικού σχεδιασμού, η οποία ενισχύει τις γραφικές μεθόδους με ένα στατιστικό τεστ, το οποίο ελέγχει την υπόθεση οι υπολογισμένες επιδράσεις να είναι δείγμα της κανονικής κατανομής. Ανήκει στην κατηγορία των μεθόδων που ελέγχουν το EER.

Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι να χρησιμοποιήσει το στατιστικό W ομαλότητας των Shapiro and Wilk σε μια πιο απλή μορφή, όπως προτάθηκε από τον Olson σε συνδυασμό με έναν έλεγχο για ακραία σημεία. Ο έλεγχος της υπόθεσης ότι ο μέσος των επιδράσεων είναι μηδέν, όταν καμία επίδραση δεν είναι σημαντική, μπορεί να θεωρηθεί σαν επιπλέον δυνατότητα. Δυστυχώς αυτό εμποδίζεται από το γεγονός ότι μεγάλες αλλά αντίθετες επιδράσεις απλά διευρύνουν την κατανομή χωρίς να μετατοπίζουν σημαντικά την κεντρική της θέση. Σ' αυτές τις περιπτώσεις ένας έλεγχος για μηδενικό μέσο δε θα βοηθήσει στην επίλυση του προβλήματος και θα οδηγήσει σε λανθασμένο συμπέρασμα. Αντίθετα ένα τεστ για ακραία σημεία, χρησιμοποιεί έναν ανθεκτικό εκτιμητή του εύρους ο οποίος δεν είναι ευαίσθητος όταν μερικές σημαντικές επιδράσεις αναμιγνύονται με πολλές άλλες που δεν είναι.

Το πλεονέκτημα της μεθόδου Benski είναι ότι δε χρησιμοποιεί πίνακες και είναι πολύ απλή στην εφαρμογή σε αντίθεση με τη μέθοδο Box Meyer.

2.6.1 Θεωρητική περιγραφή της μεθόδου Benski

Η μέθοδος στηρίζεται στην υπόθεση ότι εάν όλες οι επιδράσεις και οι αλληλεπιδράσεις είναι αδρανείς τότε οι παρατηρήσεις από το πείραμα του παραγοντικού σχεδιασμού ακολουθούν την κανονική κατανομή με μηδενικό μέσο. Εάν μια ή περισσότερες επιδράσεις είναι σημαντικές τότε αυτές θα παριστάνουν δείγμα από κίβδηλες κατανομές οπότε θα υπάρχουν ακραία σημεία που σχετίζονται με την κατανομή θορύβου.

Θεωρώντας ότι η κατανομή είναι κανονική, η προτεινόμενη διαδικασία έχει ως εξής: Εφαρμόζουμε το τεστ ομαλότητας στο διάνυσμα του Yates. Αν η μηδενική υπόθεση απορριφθεί, θεωρούμε τη μεγαλύτερη κατά απόλυτη τιμή επίδραση σημαντική και επαναλαμβάνουμε το τεστ για την επόμενη επίδραση. Συνεχίζουμε τη διαδικασία αυτή μέχρι η μηδενική υπόθεση, δηλαδή οι επιδράσεις να ακολουθούν κανονική κατανομή, να μην απορρίπτεται.

Παράλληλα με το τεστ ομαλότητας κάνουμε και έναν έλεγχο για πιθανή παρουσία ακραίων σημείων. Ο έλεγχος αυτός ενισχύει τον έλεγχο ομαλότητας. Η ιδέα είναι να μην χρησιμοποιηθεί η συνηθισμένη εκτίμηση της τυπικής απόκλισης του δείγματος, καθώς επηρεάζεται από τα ακραία σημεία. Αντίθετα χρησιμοποιείται ένας ανθεκτικός εκτιμητής ο οποίος ονομάζεται fourth spread και συμβολίζεται με d_F . Ο έλεγχος αυτός ενισχύει τον έλεγχο ομαλότητας.

2.6.2 Διαδικασία υπολογισμού του d_F

Κατατάσσουμε τα δεδομένα σε αύξουσα σειρά και τοποθετούμε δίπλα τους αριθμούς της σειράς κατάταξής τους. Ορίζουμε το βάθος της διαμέσου του δείγματος, ως τη σειρά του στο ταξινομημένο δείγμα. Σε ένα δείγμα n παρατηρήσεων το βάθος της διαμέσου είναι $\frac{n+1}{2}$. (Βάθος της διαμέσου είναι μία μέτρηση του πόσο βαθιά βρίσκεται η διάμεσος του δείγματος όταν ξεκινάμε να μετράμε από τις ακραίες τιμές του δείγματος.)

Ορίζουμε τα τέταρτα (fourths), σαν το μέσο όρο 2 διαδοχικών τιμών, των οποίων το βάθος δίνεται από τον τύπο $depth\ of\ fourths = \frac{[depth\ of\ median]+1}{2}$, όπου οι αγκύλες αντιπροσωπεύουν τον μεγαλύτερο ακέραιο που δεν υπερβαίνει το όρισμα μεταξύ των αγκυλών. Κάθε τέταρτο βρίσκεται στο μέσο, μεταξύ της διαμέσου και μιας από τις μεγαλύτερες τιμές. Οι τιμές των δεδομένων που αντιστοιχούν σε αυτά τα βάθη ονομάζονται F_L και F_U , αντίστοιχα για το κάτω και το άνω τέταρτο. Τιμές του δείγματος έξω από το διάστημα $[F_L - 1.5d_F, F_U + 1.5d_F]$ έχουν μικρή πιθανότητα να ανήκουν στον όγκο του πληθυσμού που θεωρείται θόρυβος από μια γκαουσιανής κατανομής. Για μία κατανομή της οποίας ο μέσος είναι ίσος με μηδέν, αυτό είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι κάθε σημείο εκτός του διαστήματος $[-2d_F, 2d_F]$ είναι σημαντική επίδραση σε ένα επίπεδο σημαντικότητας που μπορεί να υπολογιστεί, έστω P_2 .

Χρησιμοποιώντας την κανονική κατανομή σαν συνάρτηση αναφοράς, οι Hoaglin, Iglewicz και Tuckey πρότειναν ένα προσεγγιστικό τύπο για την εκτίμηση του P_2 σαν συνάρτηση του μεγέθους του δείγματος.

$$P_2 \approx 2\Phi \left[4\Phi^{-1} \left(\frac{1}{4} \right) \right] + \frac{0.4}{n} \quad (1)$$

οπού Φ και Φ^{-1} η κανονική και αντίστροφη κανονική κατανομή.

Η συνδυαστική μέθοδος του Fisher, χρησιμοποιείται τώρα για να συνδυαστεί το επίπεδο σημαντικότητας των δύο ελέγχων και το αποτέλεσμα είναι ο έλεγχος της υπόθεσης ότι το δείγμα είναι της κανονικής κατανομής και δεν υπάρχουν ακραία σημεία. Εάν P_1 είναι το ε.σ. του W' ελέγχου και P_2 το ε.σ. του ελέγχου για τα ακραία σημεία τότε το συνδυασμένο επίπεδο σημαντικότητας αποκτάται χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το $2 \times \ln \left[\frac{1}{P_1 P_2} \right]$ (2) ακολουθεί την χ^2 κατανομή με 4 βαθμούς ελευθερίας.

2.6.3 Διαδικασία εφαρμογής της μεθόδου Benski

1. Κατατάσσουμε τις εκτιμήσεις των επιδράσεων σε αύξουσα σειρά.

2. Υπολογίζουμε το στατιστικό $W' = \frac{\left(\sum_{i=1}^n m_i y_i\right)^2}{\sum_{i=1}^n m_i^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$ όπου $m_i = \Phi^{-1}(p_i)$ και

$$p_i = \frac{(i-a)}{(n-2a+1)} \text{ ενώ η τιμή του } a \text{ δίνεται από τον τύπο}$$

$$a = \begin{cases} 0.275499 + 0.072884 \times [\ln(n)]^{0.41148} & \text{όταν } 1 < i < n \\ 0.205146 + 0.1314965 \times [\ln(n)]^{0.226701} & \text{όταν } i = 1 \text{ ή } i = n \end{cases}$$

3. Η πιθανότητα απόρριψης της υπόθεσης της κανονικότητας υπολογίζεται σαν συνάρτηση του W' με $P_1 = \exp(C)$ (3), όπου

$$C = \frac{(W' - A) / B + 0.0486128}{0.02760309} - \ln(100)$$

$$\text{όπου } A = 1.031918 - 0.183573(0.1n)^{-0.5447402}$$

$$B = -0.5084706 - 2.076782(0.1n)^{-0.4905993}$$

4. Αν το P_1 είναι μικρό, κάνουμε τον έλεγχο για τα ακραία σημεία (ο έλεγχος αυτός δεν αποτελεί ουσιαστικό μέρος της διαδικασίας και έτσι δεν έχει πραγματοποιηθεί στα παραδείγματα), χρησιμοποιώντας τις επιδράσεις σαν δεδομένα με ε.σ. τουλάχιστον P_2 . Προχωρούμε στο βήμα 7.
5. Αν το P_1 δεν είναι μικρό, τοποθετούμε όλες τις τιμές που προκάλεσαν την απόρριψη στο βήμα 7, συσχετίζοντας τις με τις αντίστοιχες επιδράσεις του αλγόριθμου του Yates. Αυτές θα είναι οι σημαντικές επιδράσεις.
6. Συσχετίζουμε τα δύο επίπεδα σημαντικότητας με τη μέθοδο του Fisher.
7. Χρησιμοποιούμε το συνδυασμένο επίπεδο σημαντικότητας, όπως δίνεται από τον χ^2 -έλεγχο και το συσχετίζουμε με την επίδραση με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή. Αφαιρούμε αυτή τη μεγαλύτερη επίδραση και ονομάζουμε τις υπόλοιπες σαν στήλη επιδράσεων του Yates και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία.

2.6.4 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1 (“Design and Analysis of Experiments” Montgomery D.C. 5th Edition 2001, example 6-2 σελ.246)

Τα δεδομένα και ο πίνακας παρατηρήσεων (Πίνακας 2.1.3) του προβλήματος είναι στις σελίδες 9-10.

Υπενθυμίζουμε τις εκτιμήσεις των επιδράσεων:

ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΕΠΙΔΡΑΣΗΣ
A	21.625
B	3.125
AB	0.125
C	9.875
AC	-18.125
BC	2.375
ABC	1.875
D	14.625
AD	16.625
BD	-0.375
ABD	4.125
CD	-1.125
ACD	-1.625
BCD	-2.625
ABCD	1.375

Πίνακας 2.6.1 : Εκτιμήσεις των επιδράσεων για το παράδειγμα 1

Το normal probability plot (Σχήμα 2.1.5) του προβλήματος είναι στη σελίδα 11.

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο Benski στα δεδομένα του προβλήματος:

Οι επιδράσεις που έχουν $P_1 < 0.05$ είναι ενεργές.

i	Επίδραση	W'	P_1	X^2	P_c
1	A	0.89	0.083	11.77	0.02

Βλέπουμε ότι $P_1 > 0.05$. Άρα η πιθανότητα οι επιδράσεις να ανήκουν στην κανονική κατανομή δεν είναι μικρή. Θεωρούμε δηλαδή ότι δεν έχουμε ενεργές επιδράσεις και η διαδικασία τερματίζεται. Το P_c κανονικά δεν είναι ανάγκη να υπολογιστεί.

Παράδειγμα 2 (“Design and Analysis of Experiments”, Montgomery D.C. 5th Edition 2001. Problem 6.23 p.282)

Τα δεδομένα και ο πίνακας των παρατηρήσεων (Πίνακας 2.1.8) του προβλήματος βρίσκονται στις σελίδες 12-13.

Υπενθυμίζουμε τις εκτιμήσεις των επιδράσεων:

ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΕΠΙΔΡΑΣΗΣ
A	4.5
B	0.5
AB	-0.75
C	2
AC	-4.25
BC	0.25
ABC	1
D	3.25
AD	4
BD	0
ABD	0.75
CD	0
ACD	-0.25
BCD	-0.75
ABCD	1

Πίνακας 2.6.2 : Εκτιμήσεις των επιδράσεων για το παράδειγμα 2

Το normal probability plot (Σχήμα 2.1.10) του προβλήματος είναι στη σελίδα 14.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Benski, λαμβάνω τα εξής αποτελέσματα:

i	Επίδραση	W'	P_1	X^2	P_c
1	A	0.9147	0.1445	10.6515	0.0308

Βλέπουμε ότι $P_1 > 0.05$. Άρα κι εδώ δεν έχουμε ενεργές επιδράσεις (Κι εδώ δεν είναι ανάγκη να υπολογίσουμε το P_c).

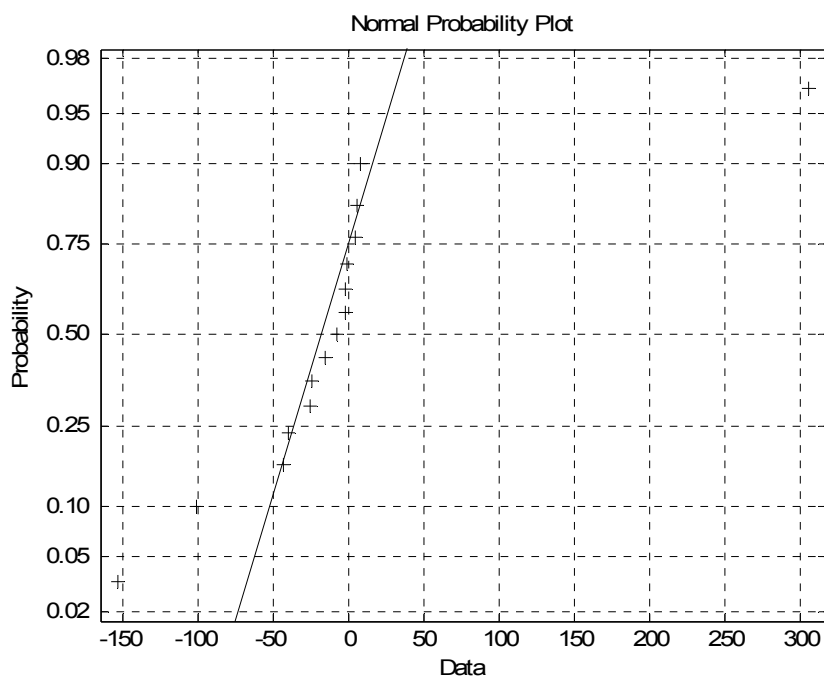
Παράδειγμα 3 (“Design and Analysis of Experiments”, Montgomery D.C. 5th Edition, 2001. Problem 6.18, p.281)

Τα δεδομένα και ο πίνακας των παρατηρήσεων (Πίνακας 2.2.8) του προβλήματος βρίσκονται στις σελίδες 35-36.

Υπενθυμίζουμε τις εκτιμήσεις των επιδράσεων και το normal probability plot:

ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΕΠΙΔΡΑΣΗΣ
A	-101.625
B	-1.625
AB	-7.875
C	7.375
AC	-24.875
BC	-43.875
ABC	-15.625
D	306.125
AD	-153.625
BD	-0.625
ABD	4.125
CD	-2.125
ACD	5.625
BCD	-25.375
ABCD	-40.125

Πίνακας 2.6.3: Εκτιμήσεις των επιδράσεων για το παράδειγμα 3



Σχήμα 2.6.4: Normal Probability Plot του παραδείγματος 3

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Benski έχουμε:

i	Επίδραση	W'	P_1	X^2	P_c
1	D	0.36474	0.0000295	27.6459	0.0000147
2	AD	0.7372	0.000961	20.5691	0.000385
3	A	0.7840	0.0051	17.1265	0.0018
4	BC	0.9075	0.1730		

Για $i=1$, $P_1 < 0.05$. Άρα θεωρούμε ότι υπάρχουν ενεργές επιδράσεις. Η P_1 έχει βρεθεί από τον τύπο (3) και η P_2 υπολογίζεται από τον τύπο (1). Έτσι υπολογίζουμε το στατιστικό που θα χρησιμοποιήσουμε για το συνδυασμένο τεστ σημαντικότητας από τον τύπο (2). Το στατιστικό αυτό που ισούται με 27.6459, ακολουθεί τη X^2 - κατανομή με 4 βαθμούς ελευθερίας. Άρα η P-τιμή του (δηλαδή το P_c) ισούται με 0.0000147. Η συνδυασμένη, δηλαδή, πιθανότητα οι επιδράσεις να ακολουθούν κανονική κατανομή και να μην υπάρχουν ακραία σημεία (σημαντικές επιδράσεις) είναι πολύ μικρή. Άρα επιβεβαιώνεται ότι έχουμε σημαντικές επιδράσεις. Από τις επιδράσεις εξαιρείται η μεγαλύτερη κατά απόλυτη τιμή, δηλαδή η **D**, την οποία θεωρούμε **ενεργή** και η διαδικασία επαναλαμβάνεται.

Έτσι προχωρώντας για $i=2$ και $i=3$ βρίσκουμε **ενεργές** τις επιδράσεις **AD** και **A**. Η διαδικασία τερματίζεται στο $i=4$, όπου βρίσκουμε $P_4 > 0.05$.

2.6.5 Συμπεράσματα

Η μέθοδος αυτή δεν είναι και από τις πιο εύχρηστες μεθόδους που υπάρχουν, από την άποψη ότι η εφαρμογή της απαιτεί πολλούς υπολογισμούς.

Παράλληλα μέσα από τα αποτελέσματα της μεθόδου Benski στα τρία παραδείγματα και τη σύγκριση των αποτελεσμάτων αυτών με τα αντίστοιχα των άλλων μεθόδων που ελέγχουν το EER, όπου είχαμε πάρει ε.σ.=0.05 (π.χ. Al-Shiha-Yang και Chen-Kunert), παρατηρούμε ότι η μέθοδος λόγω του τεστ κανονικότητας (κάτι που δεν έχουν οι άλλες μέθοδοι) σε ορισμένες περιπτώσεις όπου οι άλλες μέθοδοι δίνουν αρκετές ενεργές επιδράσεις, δε βρίσκει ενεργές επιδράσεις. Αυτό αποτελεί μειονέκτημα, αφού πολλές φορές εφαρμόζοντας τη μέθοδο αυτή, δε βγάζουμε συμπέρασμα για τη σημαντικότητα των επιδράσεων, καθώς όλες θεωρούνται μη ενεργές.

2.7 Μέθοδος Dong (1993)

Η μέθοδος αυτή είναι παρόμοια με τη μέθοδο του Lenth. Η κύρια διαφορά των δύο μεθόδων είναι ότι εδώ δε χρησιμοποιούμε το PSE της μεθόδου του Lenth για την εύρεση μιας καλής εκτίμησης της τυπικής απόκλισης σ , αλλά το ASE (Adaptive Standard Error).

2.7.1 Διαδικασία εφαρμογής της μεθόδου Dong

Ορίζουμε το νέο εκτιμητή ASE όπως παρακάτω,

1) Κατατάσσουμε τις εκτιμήσεις των επιδράσεων σε αύξουσα σειρά κατά απόλυτη τιμή.

2) Υπολογίζουμε την αρχική κλίμακα $s_0 = 1.5 \times \text{median}_j \{ |\hat{\beta}_j| \}$.

3) Υπολογίζουμε το $ASE = s_1 = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{|\hat{\beta}_j| \leq 2.5s_0} \hat{\beta}_j^2}$ όπου $m = \# \{ j : |\hat{\beta}_j| \leq 2.5s_0 \}$.

Έχοντας ένα καλό εκτιμητή της διασποράς, το επόμενο βήμα είναι να ορίσουμε μια διαδικασία ελέγχου που να βασίζεται σε αυτό τον εκτιμητή ώστε να αναγνωρίσουμε τους σημαντικούς παράγοντες. Ο στατιστικός έλεγχος που κάνουμε είναι να συγκρίνουμε τις απόλυτες τιμές των εκτιμήσεων των επιδράσεων με την τιμή $t(\gamma, m) \times s_1$ όπου με δεδομένο επίπεδο σημαντικότητας α , το γ δίνεται από τον τύπο

$\gamma = [1 + (1 - \alpha)^{\frac{1}{n}}] / 2$, όπου n είναι ο αριθμός των επιδράσεων. Οι επιδράσεις που

ικανοποιούν τη σχέση $\boxed{|\hat{\beta}_j| \geq t(\gamma, m) \times s_1}$ χαρακτηρίζονται ως ενεργές.

2.7.2 Σύγκριση με τη μέθοδο Lenth και σχόλια

Η μέθοδος Dong πλεονεκτεί έναντι της μεθόδου Lenth στο ότι χρησιμοποιεί τους κανονικούς πίνακες της t-κατανομής και όχι την t-κατανομή με κλασματικούς βαθμούς ελευθερίας όπως κάνει η μέθοδος Lenth. Παράλληλα δεν έχει ζώνη αβεβαιότητας (όπως τη μέθοδο Lenth) κι έτσι βγάζει πιο καθαρά συμπεράσματα.

Μετά από πειράματα προσομοίωσης που πραγματοποίησε ο Dong κατέληξε ότι η μέθοδος του πλεονεκτεί της μεθόδου Lenth όταν η υπόθεση της σποραδικότητας των επιδράσεων είναι αληθής, δηλαδή το ποσοστό των ενεργών παραγόντων δεν είναι μεγάλο (μικρότερο του 20%) και το μέγεθος των ενεργών παραγόντων δεν είναι πολύ μικρό.

Για να είναι πιο αποτελεσματική η μέθοδος, στην περίπτωση που το ποσοστό των ενεργών επιδράσεων είναι μεγάλο, κάνουμε επαναλήψεις αντιμετωπίζοντας την s_1 σαν s_0 και επαναλαμβάνοντας το βήμα (3).

2.7.3 Παραδείγματα (Σε όλα τα παραδείγματα λαμβάνεται ε.σ.=0.02)

Παράδειγμα 1 (“Design and Analysis of Experiments” Montgomery D.C. 5th Edition 2001, example 6-2 σελ.246)

Τα δεδομένα και ο πίνακας παρατηρήσεων (Πίνακας 2.1.3) του προβλήματος είναι στις σελίδες 9-10.

Υπενθυμίζουμε τις εκτιμήσεις των επιδράσεων:

ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΕΠΙΔΡΑΣΗΣ
A	21.625
B	3.125
AB	0.125
C	9.875
AC	-18.125
BC	2.375
ABC	1.875
D	14.625
AD	16.625
BD	-0.375
ABD	4.125
CD	-1.125
ACD	-1.625
BCD	-2.625
ABCD	1.375

Πίνακας 2.7.1 : Εκτιμήσεις των επιδράσεων για το παράδειγμα 1

Το normal probability plot (Σχήμα 2.1.5) του προβλήματος είναι στη σελίδα 11.

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο Dong στο πρόβλημά μας. Αν $|\hat{\beta}_i| > t(\gamma, m) \times ASE$ τότε η αντίστοιχη επίδραση είναι ενεργή.

s_0	s_1	m	ASE	$t(\gamma, m) \times ASE$
3.9375	9.844	10	2.21	9.71

Κρίνονται, λοιπόν, **ενεργές** οι επιδράσεις **A, AC, D, AD, C**.

Παράδειγμα 2 (“Design and Analysis of Experiments”, Montgomery D.C. 5th Edition 2001. Problem 6.23 p.282)

Τα δεδομένα και ο πίνακας των παρατηρήσεων (Πίνακας 2.1.8) του προβλήματος βρίσκονται στις σελίδες 12-13.

Υπενθυμίζουμε τις εκτιμήσεις των επιδράσεων:

ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΕΠΙΔΡΑΣΗΣ
A	4.5
B	0.5
AB	-0.75
C	2
AC	-4.25
BC	0.25
ABC	1
D	3.25
AD	4
BD	0
ABD	0.75
CD	0
ACD	-0.25
BCD	-0.75
ABCD	1

Πίνακας 2.7.2 : Εκτιμήσεις των επιδράσεων για το παράδειγμα 2

Το normal probability plot (Σχήμα 2.1.10) του προβλήματος είναι στη σελίδα 14.

Εφαρμογή της μεθόδου Dong:

s_0	s_1	m	ASE	$t(\gamma, m) \times ASE$
1.125	2.8125	11	0.856	3.646

Κρίνονται, λοιπόν, **ενεργές** οι επιδράσεις **A, AC, AD**.

Παράδειγμα 3 (“Design and Analysis of Experiments”, Montgomery D.C. 5th Edition, 2001. Problem **6.18**, p.281)

Τα δεδομένα και ο πίνακας των παρατηρήσεων (Πίνακας 2.2.8) του προβλήματος βρίσκονται στις σελίδες 35-36.

Υπενθυμίζουμε τις εκτιμήσεις των επιδράσεων:

ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΕΠΙΔΡΑΣΗΣ
A	-101.625
B	-1.625
AB	-7.875
C	7.375
AC	-24.875
BC	-43.875
ABC	-15.625
D	306.125
AD	-153.625
BD	-0.625
ABD	4.125
CD	-2.125
ACD	5.625
BCD	-25.375
ABCD	-40.125

Πίνακας 2.7.3: Εκτιμήσεις των επιδράσεων για το παράδειγμα 3

Το normal probability plot (Σχήμα 2.2.10) του προβλήματος είναι στη σελίδα 37.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Dong έχουμε:

s_0	s_1	m	ASE	$t(\gamma, m) \times ASE$
23.4375	58.594	12	20.8455	75.878

Άρα βρίσκουμε **ενεργές** τις επιδράσεις **A**, **D** και **AD**.

2.8 Μέθοδος Juan - Pena (1992)

Η μέθοδος αυτή ανήκει στην κατηγορία των μεθόδων που ελέγχουν το IER. Στηρίζεται στη χρήση ανθεκτικών εκτιμητών με ψηλό σημείο κατάρρευσης (robust estimators with high break-down point) για την εκτίμηση της τυπικής απόκλισης σ των εκτιμήσεων των επιδράσεων.

Τρεις συνηθισμένοι ανθεκτικοί κλιμακωτοί εκτιμητές είναι για παράδειγμα οι παρακάτω:

- $MAD = median \left\{ \left| \hat{\beta}_i - M \right| \right\}$, όπου $M = median \left\{ \hat{\beta}_i \right\}$
- $MAD_0 = median \left\{ \left| \hat{\beta}_i \right| \right\}$
- $d_F = F_U - F_L$, η διαφορά μεταξύ 3^{ου} και 1^{ου} τεταρτημρίου

Για να υπολογίσουμε την τυπική απόκλιση σ , πρέπει να κανονικοποιήσουμε τους εκτιμητές αυτούς ώστε να είναι συνεπείς με την κανονική κατανομή. Αυτό γίνεται διαιρώντας τους εκτιμητές MAD και MAD_0 με το $\Phi^{-1}(0.75) = 0.6745$ και τον εκτιμητή d_F με το $2\Phi^{-1}(0.75) = 1.349$, όπου Φ είναι η συνάρτηση της κανονικής κατανομής.

2.8.1 Διαδικασία υπολογισμού του $\hat{\sigma}$

Κατ'αρχήν ορίζουμε ένα νέο ανθεκτικό εκτιμητή $IMAD_0$ όπως παρακάτω ,

1)Υπολογίζουμε το MAD_0 χρησιμοποιώντας τον τύπο $MAD_0 = median \left\{ \left| \hat{\beta}_i \right| \right\}$ όπου $\hat{\beta}_i$ οι εκτιμήσεις των επιδράσεων .

2)Παίρνουμε τις $\hat{\beta}_i$ που ικανοποιούν την σχέση $\left| \hat{\beta}_i \right| \leq wMAD_0$ όπου w είναι προκαθορισμένη σταθερά που πρέπει να είναι $w > 2$.

3)Με τις τιμές αυτές υπολογίζουμε ξανά το MAD_0 . Εάν η νέα εκτίμηση είναι διαφορετική από την προηγούμενη τότε επαναλαμβάνουμε το βήμα 2 αλλιώς η διαδικασία σταματά και το τελευταίο MAD_0 είναι το $IMAD_0$.

4)Τέλος για να αποκτήσουμε ένα συνεπή εκτιμητή για την τυπική απόκλιση σ στην κανονική περίπτωση διαιρούμε με ένα παράγοντα a_w , $\hat{\sigma} = \frac{IMAD_0}{a_w}$, όπου ο

διορθωτικός αυτός παράγοντας είναι η λύση της αναδρομικής εξίσωσης

$\Phi(a_w) = \frac{1}{2}\Phi(wa_w) + \frac{1}{4}$. Για $w \rightarrow \infty$, $a_w = \Phi^{-1}(0.75) = 0.6745$ ενώ για άλλες τιμές

του w ικανοποιείται η σχέση $a_w < \Phi^{-1}(0.75)$. Λύσεις της πιο πάνω αναδρομικής εξίσωσης, για διάφορες τιμές του w , δίνονται στον πιο κάτω πίνακα:

w	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5
a_w	0.5424	0.6282	0.6578	0.6686	0.6725	0.6739	0.6743	0.6744	0.6745

2.8.2 Διαδικασία εφαρμογής της μεθόδου Juan-Pena

Έχοντας ένα καλό εκτιμητή της τυπικής απόκλισης, το επόμενο βήμα είναι να ορίσουμε μια διαδικασία ελέγχου που να βασίζεται σε αυτό τον εκτιμητή ώστε να αναγνωρίσουμε τους σημαντικούς παράγοντες. Συγκρίνουμε, λοιπόν, τις απόλυτες τιμές των εκτιμήσεων των επιδράσεων με την τιμή $z_c \times \hat{\sigma}$ όπου με δεδομένο επίπεδο σημαντικότητας a το z_c δίνεται από τον τύπο $P(|Z| \leq z_c) = (1-a)^{\frac{1}{m}}$, όπου Z είναι η

τυχαία μεταβλητή της $N(0,1)$, άρα $z_c = \Phi^{-1}\left(\frac{1+(1-a)^{\frac{1}{m}}}{2}\right)$.

Οι επιδράσεις που ικανοποιούν τη σχέση $|\hat{\beta}_i| \geq z_c \times \hat{\sigma}$ χαρακτηρίζονται ως ενεργές.

Από τη σχέση $\hat{\sigma} = \frac{IMAD_0}{a_w}$ και ορίζοντας $w_c = \frac{z_c}{a_w}$, ο στατιστικός έλεγχος παίρνει την μορφή $w_c \times IMAD_0$ και ενεργές χαρακτηρίζονται οι επιδράσεις που ικανοποιούν τη σχέση

$$\boxed{|\hat{\beta}_i| \geq w_c \times IMAD_0}$$

Για $w = 3.5$ και ε.σ. $a = 0.05$, το οποίο χρησιμοποιούμε στα παραδείγματα μας, έχουμε:

Εκτελέσεις	8	16	32
m	7	15	31
z_c	2.68	2.93	3.15
w_c	4	4.4	4.8

2.8.3 Παραδείγματα (Σε όλα τα παραδείγματα λαμβάνεται ε.σ. = 0.05)

Παράδειγμα 1 (“Design and Analysis of Experiments” Montgomery D.C. 5th Edition 2001, example 6-2 σελ.246)

Τα δεδομένα και ο πίνακας παρατηρήσεων (Πίνακας 2.1.3) του προβλήματος είναι στις σελίδες 9-10.

Υπενθυμίζουμε τις εκτιμήσεις των επιδράσεων:

ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΕΠΙΔΡΑΣΗΣ
A	21.625
B	3.125
AB	0.125
C	9.875
AC	-18.125
BC	2.375
ABC	1.875
D	14.625
AD	16.625
BD	-0.375
ABD	4.125
CD	-1.125
ACD	-1.625
BCD	-2.625
ABCD	1.375

Πίνακας 2.8.1 : Εκτιμήσεις των επιδράσεων για το παράδειγμα 1

Το normal probability plot (Σχήμα 2.1.5) του προβλήματος είναι στη σελίδα 11.

Εφαρμόζω στα δεδομένα του παραδείγματος τη μέθοδο Juan-Pena.

Αν $|\hat{\beta}_i| > w_c \times IMAD_0$ τότε η αντίστοιχη επίδραση είναι ενεργή.

MAD_0	s_0	$IMAD_0$	$w_c \times IMAD_0$
2.625	9.1875		
1.75	6.125		
1.75		1.75	7.7

Έχουν βρεθεί ενεργές οι επιδράσεις **A, AC, D, AD, C**.

Παράδειγμα 2 (“Design and Analysis of Experiments”, Montgomery D.C. 5th Edition 2001. Problem 6.23 p.282)

Τα δεδομένα και ο πίνακας των παρατηρήσεων (Πίνακας 2.1.6) του προβλήματος βρίσκονται στις σελίδες 12-13.

Υπενθυμίζουμε τις εκτιμήσεις των επιδράσεων:

ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΕΠΙΔΡΑΣΗΣ
A	4.5
B	0.5
AB	-0.75
C	2
AC	-4.25
BC	0.25
ABC	1
D	3.25
AD	4
BD	0
ABD	0.75
CD	0
ACD	-0.25
BCD	-0.75
ABCD	1

Πίνακας 2.8.2 : Εκτιμήσεις των επιδράσεων για το παράδειγμα 2

Το normal probability plot (Σχήμα 2.1.10) του προβλήματος είναι στη σελίδα 14.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Juan-Pena έχουμε:

MAD_0	s_0	$IMAD_0$	$w_c \times IMAD_0$
0.75	2.625		
0.75		0.75	3.3

Έχουν βρεθεί **ενεργές** οι επιδράσεις **A, AC, AD**.

Παράδειγμα 3 (“Design and Analysis of Experiments”, Montgomery D.C. 5th Edition, 2001. Problem **6.18**, p.281)

Τα δεδομένα και ο πίνακας των παρατηρήσεων (Πίνακας 2.2.8) του προβλήματος βρίσκονται στις σελίδες 35-36.

Υπενθυμίζουμε τις εκτιμήσεις των επιδράσεων:

ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΕΠΙΔΡΑΣΗΣ
A	-101.625
B	-1.625
AB	-7.875
C	7.375
AC	-24.875
BC	-43.875
ABC	-15.625
D	306.125
AD	-153.625
BD	-0.625
ABD	4.125
CD	-2.125
ACD	5.625
BCD	-25.375
ABCD	-40.125

Πίνακας 2.8.3: Εκτιμήσεις των επιδράσεων για το παράδειγμα 3

Το normal probability plot (Σχήμα 2.2.10) του προβλήματος είναι στη σελίδα 37.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Juan-Pena έχουμε:

MAD_0	s_0	$IMAD_0$	$w_c \times IMAD_0$
15.625	54.6875		
7.625	26.6875		
6.50	22.75		
4.875	17.06		
4.875		4.875	21.45

Άρα κρίνονται **ενεργές** οι επιδράσεις **A, AC, BC, D, AD, BCD, ABCD**.

2.9 Λύσεις Τριών Γνωστών Παραδειγμάτων

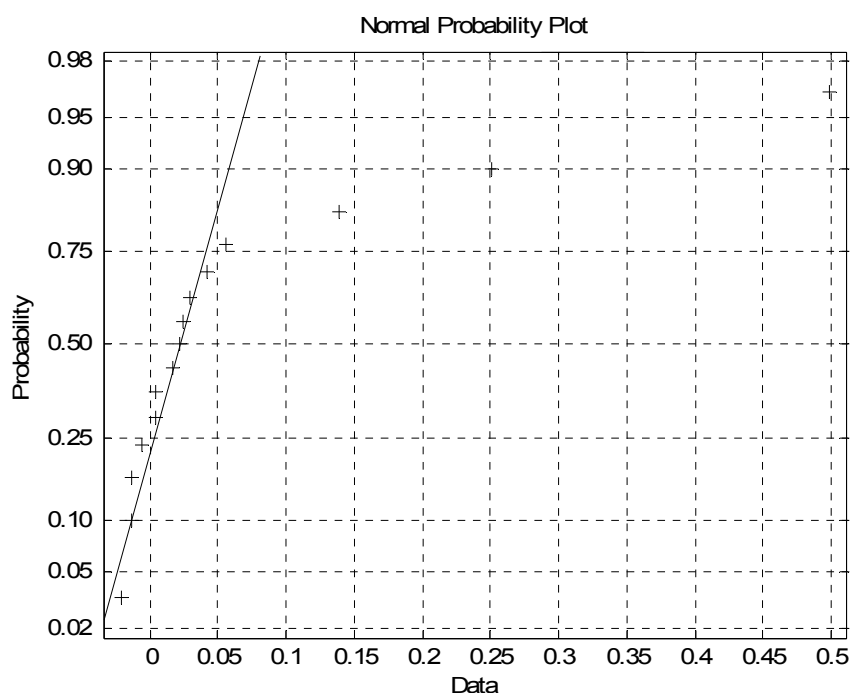
2.9.1 Daniel (1976) :

Στο παράδειγμα αυτό χρησιμοποιείται ένας 2^4 σχεδιασμός για να μετρηθεί η επίδραση μιας διάτρησης. Οι παράγοντες είναι το φορτίο (A), η ταχύτητα (B) και η λάσπη(C). Οι παρατηρήσεις καθώς και οι διατεταγμένες εκτιμήσεις των επιδράσεων δίνονται στους πιο κάτω πίνακες.

ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ																	
Εκτ.	(I)	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	D	AD	BD	ABD	CD	ACD	BCD	ABCD	Log Drill
(I)	+	-	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-	+	-	-	+	0.23
a	+	+	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+	+	+	-	-	0.30
b	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	+	-	+	-	0.52
ab	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	0.54
c	+	-	-	+	+	-	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-	0.70
ac	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+	0.76
bc	+	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	1.00
abc	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	0.96
d	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+	+	-	0.32
ad	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+	0.39
bd	+	-	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+	0.61
abd	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	0.66
cd	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	0.89
acd	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	0.97
bcd	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	1.07
abcd	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	1.21

Επίδραση	Εκτίμηση
BC	-0.02
AB	-0.01
BC	-0.01
AC	0
ABC	0
BCD	0.01
ABD	0.02
ACD	0.02
ABCD	0.02
AD	0.03
CD	0.04
A	0.06
D	0.14
B	0.25
C	0.50

Το normal probability plot δίνεται πιο κάτω:



Τα αποτελέσματα των μεθόδων δίνονται στον πιο κάτω πίνακα:

Μέθοδος	Dan	BM	EER=2%		EER=5%					IER=3%	
			Len	Ben	ML-EER	SDL	Dg	CK	AY	JP	ML-IER
Αριθμός εν. παρ.	3	3	2	3	3	3	3	4	3	3	3

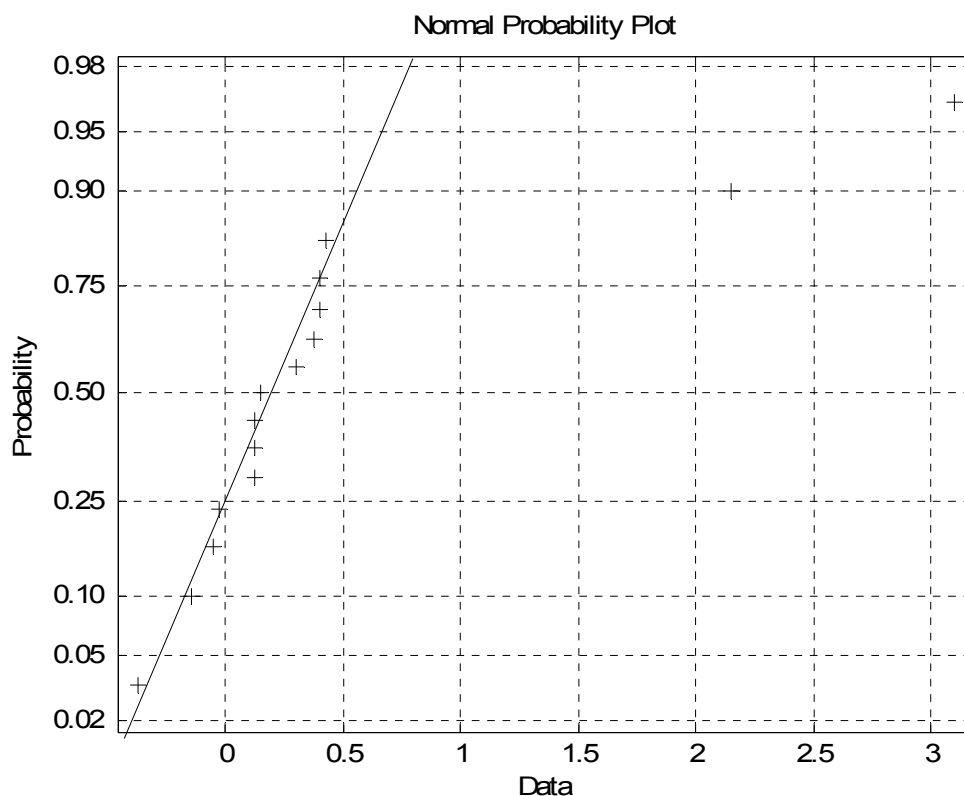
2.9.2 Taguchi -Wu (1980):

Στο παράδειγμα αυτό χρησιμοποιείται ένας 2_{III}^{9-5} σχεδιασμός για να μετρηθεί η αντοχή σε εφελκυσμό. Οι παράγοντες είναι η πυκνότητα(T), η μέθοδος (W), το ρεύμα (C), η ράβδος (P), το υλικό (M), η γωνία (A), το άνοιγμα (O), και η προθέρμανση(H). Ο πίνακας των παρατηρήσεων καθώς και οι εκτιμήσεις των επιδράσεων δίνονται στους πιο κάτω πίνακες.

ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ																	
Εκτ.	I	T	W	TW	C	-O	WC	TWC	R	-A	WR	-WA	CR	H	P	M	Αντοχή
1	+	-	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-	+	-	-	+	43.7
2	+	+	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+	+	+	-	-	40.2
3	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	+	-	+	-	42.4
4	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	44.7
5	+	-	-	+	+	-	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-	42.4
6	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+	45.9
7	+	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	42.2
8	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	40.6
9	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+	+	-	42.4
10	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+	45.5
11	+	-	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+	43.6
12	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	40.6
13	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	44
14	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	40.2
15	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	42.5
16	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	46.5

Επίδραση	Εκτίμηση
T	0.125
W	-0.15
TW	0.30
C	0.15
-O	0.40
WC	-0.025
TWC	0.375
R	0.4
-A	-0.05
WR	0.425
-WA	0.125
CR	0.125
H	-0.375
P	2.15
M	3.10

Το normal probability plot δίνεται πιο κάτω:



Τα αποτελέσματα των μεθόδων δίνονται στον πιο κάτω πίνακα:

			EER=2%	EER=5%						IER=3%	
Μέθοδος	Dan	BM	Len	Ben	ML-EER	SDL	Dg	CK	AY	JP	ML-IER
Αριθμός εν. παρ.	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	5

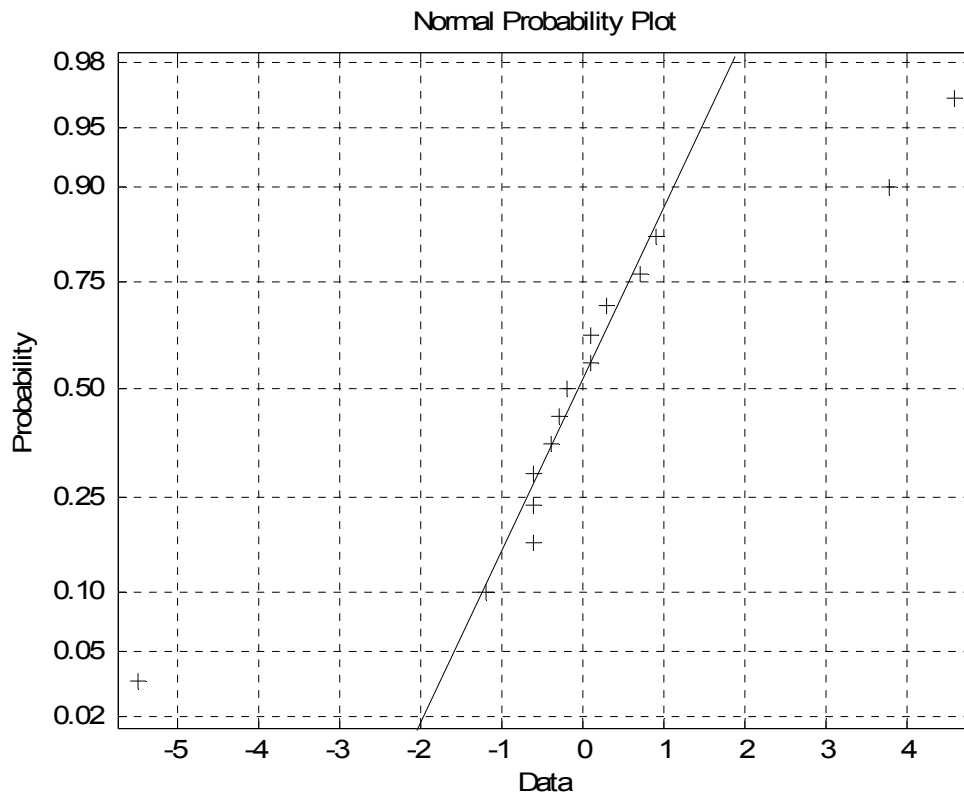
2.9.3 Box - Hunter - Hunter (1978):

Στο παράδειγμα αυτό χρησιμοποιείται ένας 2^{8-4}_{III} κλασματικός σχεδιασμός για να μετρηθεί η συρρίκνωση. Οι παράγοντες είναι η θερμοκρασία (T), η πυκνότητα (V), ο χρόνος κύκλου (C), η προωθητική πίεση (B), η υγρασία (M), η ταχύτητα (S), το μέγεθος της πύλης (O), και η πίεση κρατήματος (H). Ο πίνακας των παρατηρήσεων καθώς και οι εκτιμήσεις των επιδράσεων δίνονται στους πιο κάτω πίνακες.

Εκτ.	ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ															Συρρίκνωση	
	(I)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14		15
1	+	-	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-	+	-	-	+	14.0
2	+	+	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+	+	+	-	-	16.8
3	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	+	-	+	-	15.0
4	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	15.4
5	+	-	-	+	+	-	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-	27.6
6	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+	24.0
7	+	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	27.4
8	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	22.6
9	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+	+	-	22.3
10	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+	17.1
11	+	-	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+	21.5
12	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	17.5
13	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	15.9
14	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	21.9
15	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	16.7
16	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	20.3

Επίδραση	Εκτίμηση
1	-0.6
2	-0.4
3	-0.6
4	4.6
5	0.9
6	-0.2
7	-0.3
8	-1.2
9	0.7
10	0.1
11	0.3
12	-5.5
13	-3.8
14	0.1
15	-0.6

Το normal probability plot δίνεται πιο κάτω:



Τα αποτελέσματα των μεθόδων δίνονται στον πιο κάτω πίνακα:

			EER=2%	EER=5%						IER=3%	
Μέθοδος	Dan	BM	Len	Ben	ML-EER	SDL	Dg	CK	AY	JP	ML-IER
Αριθμός εν. παρ.	3	3	2	9	3	3	3	4	3	3	3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3:

Σύγκριση Μεθόδων μέσω Πειραμάτων Προσομοίωσης

3.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο προσπαθήσαμε μέσω των παραδειγμάτων να κάνουμε και μία σύγκριση μεταξύ των μεθόδων. Αυτή η σύγκριση όμως δεν είναι ικανοποιητική αφού η κάθε μέθοδος ορίζεται διαφορετικά και άρα ελέγχει και διαφορετική υπόθεση. Για παράδειγμα η μέθοδος χ_{C1} των Aboukalam (λεπτομέρειες για τις μεθόδους Aboukalam χ_{C1} και *ASkM* παρέχονται στη διπλωματική του συνάδελφου Γ. Γεωργίου) και Al-Shiha ελέγχει την μηδενική υπόθεση $H_0 : \beta_j = 0$ έναντι της εναλλακτικής $H_1 : \beta_j \neq 0$ κάτι που σημαίνει ότι ελέγχει την κάθε επίδραση ξεχωριστά (αν είναι ενεργή ή όχι), ενώ για παράδειγμα η μέθοδος *MaxUr* των Chen-Kunert ελέγχει την μηδενική υπόθεση $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$ έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_1 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_{n-k} = 0, \beta_i \neq 0$ για $n-k < i \leq n$ δηλαδή ελέγχει αν από το σύνολο των επιδράσεων κάποια ή κάποιες είναι ενεργές.

Δύο τύποι σφαλμάτων που είναι βοηθητικοί στη διαδικασία της σύγκρισης των μεθόδων είναι το EER και το IER. Με τον όρο *EER*, experimental error rate, εννοούμε το ποσοστό των πειραμάτων στα οποία τουλάχιστον μια από τις συνολικά n επιδράσεις αναγνωρίστηκε ως ενεργή ενώ ήταν όλες αδρανείς και με τον όρο *IER*, individual error rate, εννοούμε το ποσοστό των επιδράσεων που αναγνωρίστηκαν ως ενεργές ενώ ήταν αδρανείς.

3.2 Συγκρινόμενες Μέθοδοι

Στην προσπάθειά μας να κάνουμε την μελέτη προσομοίωσης ορίσαμε το μοντέλο $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$,

όπου $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_n$ είναι οι εκτιμήσεις των επιδράσεων. Για να λαμβάνουμε τιμές για το διάνυσμα \mathbf{y} των παρατηρήσεων ορίσαμε τον πίνακα \mathbf{X} του σχεδιασμού, ορίσαμε τις επιδράσεις $\hat{\beta}_i$ ως αδρανείς ή ενεργές και στη συνέχεια παραγάγαμε τυχαίες τιμές για τα σφάλματα από την τυποποιημένη κανονική κατανομή μέσω της εντολής *randn* του μαθηματικού πακέτου *Matlab7*. Στον πίνακα 3.1 βλέπουμε τις αποδόσεις κάθε μεθόδου όπως αυτές προτάθηκαν μετά από την εκτέλεση 10,000 πειραμάτων προσομοίωσης κάτω από την μηδενική υπόθεση, όλες οι επιδράσεις να είναι αδρανείς, αφού δηλαδή ορίστηκαν όλες οι $\hat{\beta}_i = 0$.

Number of declared effects	Lenth	Benski	Step Down Lenth	Juan & Pena	Dong	χ_{C1}	Al-Shiha & Yang	$MaxUr$	Modified	
									Lenth	$ASKM$
0	0.9769	0.9533	0.9481	0.7990	0.9519	0.3508	0.9454	0.9444	0.3239	0.3568
1	0.0148	0.0315	0.0315	0.1017	0.0370	0.2416	0.0261	0.0001	0.2737	0.2588
2	0.0048	0.0061	0.0093	0.0403	0.0076	0.1616	0.0101	0.0005	0.1685	0.1529
3	0.0013	0.0020	0.0044	0.0224	0.0017	0.1129	0.0055	0.0013	0.1133	0.0990
4	0.0012	0.0017	0.0026	0.0132	0.0011	0.0732	0.0038	0.0036	0.0642	0.0631
5	0.0005	0.0011	0.0021	0.0088	0.0006	0.0363	0.0034	0.0055	0.0321	0.0357
6	0.0003	0.0009	0.0013	0.0062	0.0001	0.0173	0.0028	0.0082	0.0165	0.0218
7	0.0002	0.0010	0.0005	0.0049	0	0.0063	0.0029	0.0134	0.0076	0.0116
≥ 8	0	0.0024	0.0002	0.0035	0	0	0	0.0230	0.0002	0.0003
EER	0.0231	0.0467	0.0519	0.2010	0.0481	0.6492	0.0546	0.0556	0.6761	0.6432
IER	0.0026	0.0066	0.0065	0.0300	0.0044	0.1017	0.0088	0.0249	0.1014	0.1005

Πίνακας 3.1: Off-the-Shelf απόδοση των συγκρινόμενων μεθόδων στην προτεινόμενη τους μορφή. Αναλογιά των περιμέτρων που αναγράφισαν λανθασμένα. i επιδράσεις ως ενεργές όταν όλες οι επιδράσεις είναι αδρανείς σε ένα πείραμα. 16 εκτελέσεων.

Lenth : Original Lenth με $\alpha=0.95$ στον υπολογισμό του γ χ_{C1} : χ_{C1} Aboukalam&Al-Shiha για $\epsilon.σ. 0.10$

Benski : $P_1 < 0.05$ Al-Shiha & Yang : Al-Shiha & Yang με $k = 7$ για $\epsilon.σ. 0.05$

StepDown Lenth : Για $\epsilon.σ. 0.05$ $MaxUr$: Chen Ying με $r = 8$ για $\epsilon.σ. 0.05$

Juan & Pena : $\alpha=0.05$ στον υπολογισμό του z_c **Modified Lenth IER** : Τροποποιημένη $Lenth - IER$ με $\epsilon.σ. 0.10$

Dong : Original Dong με $\delta=0.98$ $ASKM$: $ASKM$ του Aboukalam για $\epsilon.σ. 0.10$

Από τον πίνακα 3.1 μπορούμε να δούμε τη διαφορετικότητα της κάθε μεθόδου. Βλέπουμε ότι επιλέγοντας $a=0.05$ δηλαδή με ε.σ. 5% η μέθοδος Benski, η μέθοδος Dong, η μέθοδος Step-Down Lenth, η μέθοδος των Al-Shiha&Yang και η μέθοδος *MaxUr* ελέγχουν το *EER* στο 5%. Για τις μεθόδους χ_{C1} και *ASkM* του Aboukalam και για την τροποποιημένη μέθοδο του Lenth επιλέγοντας $a=0.10$ δηλαδή ε.σ. 10% βλέπουμε ότι ελέγχεται το *IER* στο 10%. Ενώ για $a=0.05$ η μέθοδος Lenth και η μέθοδος των Juan και Pena δεν περιορίζουν ούτε το *EER* αλλά ούτε και το *IER* στο 5%.

Για το λόγο αυτό και για να μπορέσουμε να πραγματοποιήσουμε μια αξιόπιστη σύγκριση έπρεπε να τυποποιήσουμε τις μεθόδους έτσι ώστε να περιορίζεται το ένα από τα δύο σφάλματα στο επιδιωκόμενο επίπεδο για όλες τις μεθόδους. Χωρίσαμε τις μεθόδους προς σύγκριση σε δύο ομάδες. Στην πρώτη ομάδα οι μέθοδοι που συγκρίνουμε περιορίζουν το *EER* στο 5% και στη δεύτερη ομάδα οι μέθοδοι περιορίζουν το *IER* στο 5%. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να δούμε και ποια από τις μεθόδους συμπεριφέρεται καλύτερα για κάθε ένα από τους δύο τύπους σφάλματος. Αυτό έγινε για πειράματα 16 και 32 εκτελέσεων και για τις δύο ομάδες. Φυσικά με τις τροποποιήσεις αυτές ίσως κάποιες μέθοδοι χάνουν την δύναμη τους επειδή σχεδιάστηκαν να περιορίζουν τον άλλο τύπο σφάλματος. Για το λόγο αυτό ίσως θα πρέπει να είμαστε λίγο επιεικείς στα συμπεράσματα μας για την χ_{C1} στο πείραμα για έλεγχο του *EER* και αντίστοιχα για τη μέθοδο του Dong στο πείραμα του *IER*.

Μετά από δοκιμές καταλήξαμε σε κάποιες τροποποιήσεις των μεθόδων έτσι ώστε να πετυχαίνουμε το σκοπό μας, δηλαδή η απόδοση των μεθόδων κάτω από την μηδενική υπόθεση να είναι η ίδια. Φυσικά να έχουν ίδια ακριβώς απόδοση όλες οι προς εξέταση μέθοδοι είναι στην πραγματικότητα αδύνατο λόγω της διαφορετικότητας της κάθε μεθόδου.

Οι αποδόσεις των τροποποιημένων αυτών μεθόδων λήφθηκαν μετά από 100,000 προσομοιώσεις σε πειράματα των 16 και 32 εκτελέσεων κάτω από την μηδενική υπόθεση ότι όλες οι επιδράσεις είναι αδρανείς ($\hat{\beta}_i = 0$) και δίνονται στους παρακάτω πίνακες. Επίσης στους επόμενους πίνακες δίνεται και ο αριθμός των επιδράσεων που αναγνωρίστηκαν ως ενεργές σε κάθε πείραμα και μέθοδο ώστε να μπορούμε να έχουμε μια αντίληψη για το πώς λειτουργεί η κάθε μέθοδος.

Για παράδειγμα παρατηρούμε στον πίνακα 3.2 ότι η μέθοδος *MaxUr* περιορίζει το *EER* στο 5% αλλά σε αντίθεση με τις υπόλοιπες μεθόδους περιορίζει την ίδια στιγμή το *IER* στο 2.3% ενώ οι υπόλοιπες μέθοδοι το περιορίζουν κάτω από το 1%. Αυτό, όπως βλέπουμε στον πίνακα 3.2, οφείλεται σε ένα μεγάλο βαθμό στο γεγονός ότι σε αρκετά πειράματα, στα οποία εσφαλμένα η μέθοδος *MaxUr* αναγνώρισε κάποιες επιδράσεις ως ενεργές, ο αριθμός των επιδράσεων που αναγνωρίστηκαν ως ενεργές ήταν αρκετά μεγάλος και σε ποσοστό 2% ήταν 8 και άνω.

Number of declared effects	Μέθοδοι που ελέγχουν το $EER=5\%$ στο πείραμα των 16 εκτελέσεων							
	<i>Len89</i>	<i>Ben89</i>	<i>SDL</i>	<i>JP-EER</i>	<i>Dong93</i>	$\chi_{C1}EER$	<i>AI-SY99</i>	<i>MaxUr</i>
0	0.94921	0.95088	0.94976	0.94887	0.95122	0.95045	0.94853	0.94799
1	0.03098	0.03259	0.03010	0.02402	0.03716	0.03605	0.02363	0.00008
2	0.01112	0.00665	0.00922	0.00990	0.00736	0.00932	0.00977	0.00038
3	0.00444	0.00278	0.00453	0.00586	0.00254	0.00279	0.00544	0.00134
4	0.00240	0.00158	0.00270	0.00412	0.00098	0.00097	0.00417	0.00299
5	0.00115	0.00122	0.00169	0.00257	0.00043	0.00035	0.00318	0.00568
6	0.00053	0.00081	0.00113	0.00218	0.00022	0.00005	0.00277	0.00899
7	0.00017	0.00066	0.00061	0.00146	0.00009	0.00002	0.00251	0.01259
≥ 8	0	0.00283	0.00026	0.00102	0	0	0	0.01996
<i>EER</i>	0.05079	0.04912	0.05024	0.05113	0.04878	0.04956	0.05147	0.05201
<i>IER</i>	0.00575	0.00694	0.00631	0.00820	0.00450	0.00461	0.00842	0.02313

Πίνακας 3.2: Off-the-Shelf απόδοση των συγκρινόμενων μεθόδων για $EER=5\%$. Ανάλογα των περιπτώσεων που αναγράφονται λανθασμένα η επιδράσεις ως ενεργές όταν όλες οι επιδράσεις είναι αδρανείς. Ο πίνακας βασίζεται σε 100,000 προσομοιώσεις ενός πειράματος 16 εκτελέσεων.

Τροποποιήσεις μεθόδων σε πείραμα 16 εκτελέσεων για περιορισμό του EER στο 5%

Len89 : Original Length αλλά με $\alpha=0.883$ στον υπολογισμό του γ , ισοδύναμη με την Modified Length EER

Ben89 : Μέθοδος Benski για $P_1 < 0.05$

SDL : Μέθοδος Step-Down Length για έλεγχο EER στο 5%

JP-EER : Μέθοδος Juan Pena με $\alpha=0.00003$ στον υπολογισμό του z_c

Dong93 : Original Dong με $\delta=0.98$

$\chi_{C1}EER$: Μέθοδος χ_{C1} των Aboukalam και Al-Shiha με κρίσιμη τιμή η οποία δίνεται από το μοντέλο

$$cT_{(\alpha,n)} = (0.992678 - 8.1044n^{-2} + 305.01n^{-4}) \times t_{(\alpha/2,n)} \text{ με } n=15, \alpha=0.0009 \text{ ε.ω. να ελέγξει το EER στο } 5\%$$

AI-SY99 : Μέθοδος Al-Shiha και Yang με $k=7$

MaxUr : Μέθοδος Chen Ying με $r=8$

Number of declared effects	Μέθοδοι που ελέγχουν το $EER = 5\%$ στο πείραμα των 32 εκτελέσεων.							
	<i>Len89</i>	<i>Ben89</i>	<i>SDL</i>	<i>JP - EER</i>	<i>Dong93</i>	$\chi_{C1}EER$	<i>AI - SY99</i>	<i>MaxUr</i>
0	0.95034	0.95376	0.95098	0.94998	0.95407	0.94914	0.94904	0.94977
1	0.03487	0.03369	0.03322	0.02750	0.03856	0.03936	0.02185	0
2	0.00885	0.00534	0.00839	0.00851	0.00566	0.00800	0.01069	0.00001
3	0.00286	0.00175	0.00301	0.00437	0.00118	0.00223	0.00559	0
4	0.00150	0.00087	0.00164	0.00271	0.00025	0.00084	0.00337	0.00003
5	0.00076	0.00054	0.00102	0.00170	0.00016	0.00032	0.00247	0.00001
6	0.00038	0.00038	0.00057	0.00117	0.00008	0.00008	0.00153	0.00007
7	0.00028	0.00027	0.00043	0.00105	0.00002	0.00002	0.00150	0.00015
≥ 8	0.00016	0.00340	0.00074	0.00301	0.00002	0.00001	0.00396	0.04996
<i>EER</i>	0.04966	0.04624	0.04902	0.05002	0.04593	0.05086	0.05096	0.05023
<i>IER</i>	0.00247	0.00389	0.00273	0.00398	0.00181	0.00218	0.00468	0.02268

Πίνακας 3.3: Off-the-Shelf απόδοση των συγκεκριμένων μεθόδων για $EER=5\%$. Αναλόγια των πειραμάτων που αναγράφουν λανθασμένα ή επιδράσεις ως ενεργές όταν όλες οι επιδράσεις είναι αδρανείς. Ο πίνακας βασίζεται σε 100 000 προσομοιώσεις ενός πειράματος 32 εκτελέσεων.

Τροποποιήσεις μεθόδων σε πείραμα 32 εκτελέσεων για περιορισμό του EER στο 5%

Len89 : Original Lenth αλλά με $\alpha=0.92$ στον υπολογισμό του γ

Ben89 : Μέθοδος Bensi για $P_1 < 0.05$

SDL : Μέθοδος Step-Down Lenth για έλεγχο *EER* στο 5%

JP-EER : Μέθοδος Juan Pena με $\alpha=0.00075$ στον υπολογισμό του z_c

Dong93 : Original Dong με $\delta=0.98$

$\chi_{C1}EER$: Μέθοδος χ_{C1} των Aboukalam και Al-Shiha με κρίσιμη τιμή η οποία δίνεται από το μοντέλο

$$cT_{(a,n)} = (0.992678 - 8.1044n^2 + 305.01n^{-1}) \times t_{(a/2,n)} \text{ με } n=31, \alpha=0.00055 \text{ ε.ω. να ελέγξει το } EER \text{ στο } 5\%$$

AI-SY99 : Μέθοδος Al-Shiha και Yang με $k=15$

MaxUr : Μέθοδος Chen Ying με $r=15$

Number of declared effects	Μέθοδοι που ελέγχουν το $IER = 5\%$ στο πείραμα των 16 εκτελέσεων				
	$ML - IER$	$JP - IER$	$Dg - IER$	χ_{c1}	$ASKM$
0	0.60508	0.63750	0.48703	0.59043	0.64984
1	0.20873	0.18582	0.35420	0.20627	0.16851
2	0.09512	0.07779	0.10316	0.10190	0.08068
3	0.04632	0.03988	0.03525	0.05340	0.04578
4	0.02316	0.02256	0.01356	0.02792	0.02578
5	0.01257	0.01427	0.00485	0.01291	0.01521
6	0.00634	0.00995	0.00167	0.00553	0.00916
7	0.00258	0.00766	0.00028	0.00164	0.00498
≥ 8	0.00010	0.00457	0	0	0.00006
IER	0.39492	0.36250	0.51297	0.4095	0.35016
IER	0.05002	0.05167	0.05045	0.05227	0.04912

Πίνακας 3.4: Off-the-Shelf απόδοση των συγκρινόμενων μεθόδων για $IER=5\%$. Αναλογία των περιπτώσεων που αναγνώρισαν λανθασμένα ή επιδόσεις ως ενεργές όταν όλες οι επιδόσεις είναι αδρανείς. Ο πίνακας βασίζεται σε 100 000 προσομοιώσεις ενός πειράματος 16 εκτελέσεων.

Τροποποιήσεις μεθόδων σε πείραμα 16 εκτελέσεων για περιορισμό του IER στο 5%

ML-IER : Τροποποιημένη μέθοδος Lenth για έλεγχο IER στο 5%

JP-IER : Μέθοδος Juan Pena με $a=0.35$ στον υπολογισμό του z_c

Dg-IER : Μέθοδος Dong με $\delta=0.41$.

χ_{c1} : Μέθοδος χ_{c1} των Aboukalam και Al-Shiha με κρίσιμη τιμή η οποία δίνεται από το μοντέλο

$$cr_{(a,n)} = (0.992678 - 8.1044n^{-2} + 305.01n^{-4}) \times t_{(a/2,n)} \text{ με } n=15, a=0.04 \text{ ε.ω. να ελέγχεται το } IER \text{ στο } 5\%$$

ASKM : Μέθοδος $ASKM$ του Aboukalam για έλεγχο IER στο 5%

Number of declared effects	Μέθοδοι που ελέγχουν το IER=5% στο πείραμα των 32 εκτελέσεων.				
	<i>ML - IER</i>	<i>JP - IER</i>	<i>Dg - IER</i>	χ_{C1}	<i>ASKM</i>
0	0.35868	0.40622	0.17718	0.38369	0.39176
1	0.25862	0.24685	0.37806	0.24005	0.24346
2	0.15973	0.13721	0.25500	0.14946	0.14245
3	0.09408	0.07803	0.11296	0.09279	0.08580
4	0.05442	0.04495	0.04553	0.05585	0.05187
5	0.03123	0.02865	0.01799	0.03357	0.03212
6	0.01860	0.01850	0.00792	0.01977	0.02045
7	0.01072	0.01151	0.00324	0.01227	0.01291
≥ 8	0.01392	0.02806	0.00212	0.01255	0.01918
<i>EER</i>	0.64132	0.59378	0.82282	0.61631	0.60824
<i>IER</i>	0.04987	0.05025	0.05120	0.04918	0.04982

Πίνακας 3.5: Off-the-Shelf απόδοση των συγκρινόμενων μεθόδων για IER=5%. Αναλογία των περιπτώσεων που αναγνώρισαν λανθασμένα ή επιδόσεις ως ενεργές όταν όλες οι επιδόσεις είναι αδρανείς. Ο πίνακας βασίζεται σε 100 000 προσομοιώσεις ενός πειράματος 32 εκτελέσεων.

Τροποποιήσεις μεθόδων σε πείραμα 32 εκτελέσεων για περιορισμό του IER στο 5%

ML-IER : Τροποποιημένη μέθοδος Lenth για έλεγχο IER στο 5%

JP-IER : Μέθοδος Juan Pena με $\alpha=0.675$ στον υπολογισμό του z_c

Dg-IER : Μέθοδος Dong με $\delta=0.21$

χ_{C1} : Μέθοδος χ_{C1} των Aboukalam και Al-Shiha με κρίσιμη τιμή η οποία δίνεται από το μοντέλο

$$cT_{(a,n)} = (0.992678 - 8.1044n^{-2} + 305.01n^{-4}) \times t_{(a/2,n)} \text{ με } n=31, \alpha=0.042 \text{ ε.ω. να ελέγχεται το IER στο 5\%}.$$

ASKM : Μέθοδος *ASKM* του Aboukalam για έλεγχο IER στο 5%

3.3 Περιγραφή της μελέτης προσομοίωσης

Έχοντας χωρίσει και τυποποιήσει τις μεθόδους όπως παραπάνω πραγματοποιήσαμε μια μελέτη προσομοίωσης για διάφορους σχηματισμούς ενεργών επιδράσεων και για διάφορα μεγέθη των σημαντικών επιδράσεων. Προσπαθήσαμε να κάνουμε τη μελέτη προσομοίωσης για διάφορες δυνατές περιπτώσεις που μπορεί να συναντηθούν στη πραγματικότητα και έτσι επιπρόσθετα με τους σχηματισμούς στους οποίους όλες οι ενεργές επιδράσεις έχουν την ίδια σημαντικότητα, μελετήσαμε και σχηματισμούς στους οποίους οι ενεργές επιδράσεις έχουν μεταξύ τους διαφορετική σημαντικότητα. Αναλυτικά οι σχεδιασμοί που χρησιμοποιήσαμε φαίνονται στους παρακάτω πίνακες.

$$C1: \beta_1 = s, \beta_2 = \dots = \beta_{15} = 0$$

$$C2: \beta_1 = \beta_2 = s, \beta_3 = \dots = \beta_{15} = 0$$

$$C3: \beta_1 = \dots = \beta_4 = s, \beta_5 = \dots = \beta_{15} = 0$$

$$C4: \beta_1 = \dots = \beta_6 = s, \beta_7 = \dots = \beta_{15} = 0$$

$$C5: \beta_1 = \dots = \beta_7 = s, \beta_8 = \dots = \beta_{15} = 0$$

$$C6: \beta_1 = 0.2s, \beta_2 = 0.4s, \beta_3 = 0.6s, \beta_4 = \dots = \beta_{15} = 0$$

$$C7: \beta_1 = 0.2s, \beta_2 = 0.2s, \beta_3 = 0.3s, \beta_4 = 0.5s, \beta_5 = 0.5s, \beta_6 = \dots = \beta_{15} = 0$$

$$C8: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0.2s, \beta_4 = 0.8s, \beta_5 = \dots = \beta_{15} = 0$$

Πίνακας 3.6: Σχηματισμοί που μελετήθηκαν για το πείραμα των 16 εκτελέσεων

$$C1: \beta_1 = \dots = \beta_3 = s, \beta_4 = \dots = \beta_{31} = 0$$

$$C2: \beta_1 = \dots = \beta_6 = s, \beta_7 = \dots = \beta_{31} = 0$$

$$C3: \beta_1 = \dots = \beta_9 = s, \beta_{10} = \dots = \beta_{31} = 0$$

$$C4: \beta_1 = \dots = \beta_{12} = s, \beta_{13} = \dots = \beta_{31} = 0$$

$$C5: \beta_1 = \dots = \beta_{15} = s, \beta_{16} = \dots = \beta_{31} = 0$$

$$C6: \beta_1 = 0.2s, \beta_2 = 0.4s, \beta_3 = 0.6s, \beta_4 = 0.8s, \beta_5 = 1s, \beta_6 = \dots = \beta_{31} = 0$$

$$C7: \beta_1 = \beta_2 = 0.3s, \beta_3 = \beta_4 = 0.5s, \beta_5 = \beta_6 = 0.8s, \beta_7 = 1.2s, \beta_8 = \dots = \beta_{31} = 0$$

$$C8: \beta_1 = \dots = \beta_7 = 0.2s, \beta_8 = 0.8s, \beta_9 = \dots = \beta_{31} = 0$$

Πίνακας 3.7: Σχηματισμοί που μελετήθηκαν για το πείραμα των 32 εκτελέσεων

Όπως αναφέραμε και στην προηγούμενη παράγραφο η μελέτη προσομοίωσης βασίστηκε στο μοντέλο $y = X\beta + \varepsilon$ όπου $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_n$ είναι οι εκτιμήσεις των επιδράσεων, X είναι ο πίνακας του σχεδιασμού και ε είναι τα σφάλματα τα οποία παραγάγαμε μέσω της εντολής *randn* του μαθηματικού πακέτου *Matlab 7.0* επειδή ακολουθούν την κανονική κατανομή όπως αναφέραμε και στο κεφάλαιο 1. Η παραπάνω διαδικασία επαναλήφθηκε 10,000 φορές για κάθε μία από τις συγκρινόμενες μεθόδους και καταγράφηκε ο συνδυασμός των επιδράσεων που αναγνωρίστηκαν ως ενεργές κάθε φορά.

Στην προσπάθεια να συγκρίνουμε τις μεθόδους έπρεπε να επιλέξουμε κάποια κριτήρια τα οποία να αναδεικνύουν και να αποδεικνύουν τις ικανότητες των μεθόδων. Σε παρόμοιες προσπάθειες σύγκρισης των μεθόδων χρησιμοποιήθηκαν διάφορα κριτήρια για να γίνεται μια αξιολογή σύγκριση. Για παράδειγμα οι Hamada και Balakrishnan χρησιμοποίησαν ως μέτρο σύγκρισης το Power, οι Aboukalam και Al-Shiha χρησιμοποίησαν το $pow_I = \text{Power}$ και το $pow_{II} = (1 - IER)$, οι Ye, Hamada και Wu χρησιμοποίησαν το *EER*, το *IER* και το Power, οι Benski και Cabaou χρησιμοποίησαν το

$$Merit Q = \frac{n^+}{N^+} \left(1 - \frac{n^-}{N^-} \right)$$

όπου N^+ είναι ο αριθμός των συνολικά πραγματικά ενεργών επιδράσεων, n^+ είναι ο αριθμός των επιδράσεων που αναγνωρίστηκαν ως ενεργές ανάμεσα στις πραγματικά ενεργές, N^- είναι ο αριθμός των αδρανών επιδράσεων και n^- είναι ο αριθμός των επιδράσεων που λανθασμένα αναγνωρίστηκαν ως ενεργές. Τέλος ο Chen Ying χρησιμοποίησε το Power και άλλες τέσσερις του μορφές συμπεριλαμβανομένου και του Power II ενώ χρησιμοποίησε και τρεις μορφές της Loss of Decision, τις LD1L9, LD2L και LD1L0. Η LD1L9 είναι η αναμενόμενη τιμή της Loss Function η οποία δίνει απώλεια 0.9 για κάθε ενεργή επίδραση που αναγνωρίζεται ως αδρανής ενώ δίνει απώλεια 0.1 για κάθε αδρανή επίδραση που αναγνωρίζεται ως ενεργής.

Το βασικό ζητούμενο σε πειράματα κρησαρίσματος είναι να αναγνωριστούν οι σημαντικοί παράγοντες για μελλοντικές μελέτες. Η λανθασμένη αναγνώριση μερικών αδρανών επιδράσεων ως ενεργών ίσως να μην είναι τόσο σοβαρό λάθος εφόσον οι σημαντικοί παράγοντες αναγνωρίστηκαν ως ενεργοί, αλλά η αποτυχία στο να αναγνωρίσουμε τους ενεργούς παράγοντες ίσως να είναι καταστροφική για τη συνέχεια του πειράματος. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιήσαμε τα παρακάτω δύο κριτήρια ώστε να συγκρίνουμε την αξία των μεθόδων όσον αφορά την ικανότητα τους στο να αναγνωρίσουν τις ενεργές επιδράσεις

- **Power** : Η πιθανότητα να κηρυχτεί μια επίδραση ως ενεργή δεδομένου ότι είναι ενεργή επίδραση.
- **Power II** : Το ποσοστό των πειραμάτων στα οποία αναγνωρίστηκαν όλες οι ενεργές επιδράσεις.

Από την άλλη όμως, ναι μεν δε θα μας πείραζε αν κάποιος αδρανής παράγοντας αναγνωριζόταν ως ενεργός άλλα σίγουρα δε θα θέλαμε μια μέθοδος να αναγνωρίζει πάρα πολλές επιδράσεις ως ενεργές ενώ στην πραγματικότητα είναι αδρανείς. Έτσι χρησιμοποιήσαμε την Power III ώστε να συγκρίνουμε τις μεθόδους ως προς την ικανότητα τους να αναγνωρίζουν μόνο τις ενεργές επιδράσεις.

- **Power III** : Η πιθανότητα μια επίδραση η οποία αναγνωρίστηκε ως ενεργή να ήταν πραγματικά ενεργή.

Επιλέξαμε την Power III αντί της πιθανότητας μια επίδραση να αναγνωριστεί ως αδρανής δεδομένου ότι είναι αδρανής επειδή πιστεύουμε ότι έχει διαφορετική σημασία η αναγνώριση μιας αδρανούς επίδρασης ως ενεργή σε ένα σχηματισμό όπου έχουμε μια μόνο ενεργή από ότι όταν έχουμε 7 ενεργές.

Τέλος θελήσαμε να συνδυάσουμε τα τρία αυτά κριτήρια έτσι ώστε να έχουμε και ένα κριτήριο το οποίο να λαμβάνει υπόψη την ικανότητα των μεθόδων να αναγνωρίζει τις ενεργές επιδράσεις αλλά και την ικανότητα να μην αναγνωρίζει τις αδρανείς ως ενεργές. Μια καλή επιλογή είναι η LD1L9 που πρότεινε ο Chen Ying αλλά εδώ χρησιμοποιήσαμε ένα κριτήριο το οποίο στηρίζεται στα προηγούμενα κριτήρια και είναι πάλι ένα ποσοστό:

- **PowComb**: Συνδυασμός των τριών παραπάνω κριτηρίων. Δίνουμε σημαντικότητα 70% στην ορθή αναγνώριση των πραγματικά ενεργών επιδράσεων και σημαντικότητα 30% στην ορθή μη αναγνώριση των αδρανών επιδράσεων. Επιπλέον έχοντας δύο κριτήρια για τον έλεγχο της ικανότητας των μεθόδων για την αναγνώριση των ενεργών επιδράσεων, χωρίζουμε το 70% σε 30% σημαντικότητα για την Power και 40% σημαντικότητα για την Power II επειδή θέλουμε να μην χάνουμε καμία ενεργή επίδραση σε κάθε πείραμα.

3.4 Συμπεράσματα από τη μελέτη προσομοίωσης

Στους πίνακες I.1-I.4 στο παράρτημα I φαίνονται τα αποτελέσματα για τα κριτήρια Power , Power II και Power III για τις δύο ομάδες των μεθόδων για όλους τους σχηματισμούς για τους οποίους κάναμε τα πειράματα προσομοίωσης. Στο παράρτημα I επίσης βρίσκονται και τα αποτελέσματα της PowerComb καθώς και της LD1L9 και τα αντίστοιχα σχεδιαγράμματα για τους πίνακες I.1-I.8 για μια πιο άμεση ματιά στα αποτελέσματα.

- Από τον πίνακα I.1, για την ομάδα των μεθόδων που ελέγχουν το EER στο 5% στο πείραμα των 16 εκτελέσεων έχουμε τα εξής συμπεράσματα:
 - Στο σχηματισμό C1 η μέθοδος Dong υπερτερεί από όλες τις μεθόδους και στα τρία κριτήρια τα οποία ελέγξαμε σε όλα τα μεγέθη. Άρα αν υπάρχει μια μόνο ενεργή επίδραση η μέθοδος Dong είναι η καλύτερη από τις εξεταζόμενες μεθόδους.
 - Στο σχηματισμό C2 βλέπουμε ότι και πάλι η μέθοδος Dong είναι η καλύτερη από τις εξεταζόμενες μεθόδους όσον αφορά τα κριτήρια Power και Power III ενώ στο κριτήριο Power II υστερεί ελάχιστα από τη μέθοδο *MaxUr* όταν το μέγεθος των ενεργών επιδράσεων είναι 1.0σ. Επίσης πολύ καλή απόδοση έχει και η μέθοδος Benski και στα τρία κριτήρια ενώ πάρα πολύ καλά αποδίδει και η μέθοδος *MaxUr* στα κριτήρια Power και Power II. Υστερεί, βέβαια, κατά πολύ από όλες τις άλλες μεθόδους στο κριτήριο Power III.

- Στο σχηματισμό C3 η μέθοδος *MaxUr* είναι με διαφορά η καλύτερη στα κριτήρια Power και Power II κυρίως στα μικρά μεγέθη (1σ και 1.5σ) ενώ υστερεί και πάλι από όλες τις άλλες μεθόδους στο κριτήριο Power III.
- Στο σχηματισμό C4 οι μέθοδοι *MaxUr* και Al-Shiha&Yang είναι οι καλύτερες, έχουν παρόμοια απόδοση όσον αφορά την Power. Η *MaxUr* υπερτερεί στο κριτήριο Power II και η μέθοδος Al-Shiha&Yang υπερτερεί στο κριτήριο στο Power III .
- Στο σχηματισμό C5 οι μέθοδοι *MaxUr* και Al-Shiha&Yang είναι πολύ καλύτερες από όλες τις υπόλοιπες μεθόδους. Η μέθοδος Al-Shiha&Yang υπερτερεί ελάχιστα της *MaxUr* ενώ υστερεί της *MaxUr* μόνο όταν το μέγεθος των ενεργών επιδράσεων είναι 1.0σ . Εδώ μπορούμε να πούμε ότι η μέθοδος Al-Shiha&Yang αποδίδει καλύτερα επειδή έχουμε επιλέξει να χρησιμοποιεί το $k = 7$.
- Στο σχηματισμό C6 η μέθοδος *MaxUr* υπερτερεί και πάλι με διαφορά όλων των μεθόδων στα κριτήρια Power και Power II αλλά πάλι είναι η χειρότερη μέθοδος στο κριτήριο Power III. Πολύ καλή απόδοση έχουν και οι μέθοδοι Dong και Benski.
- Στους σχηματισμούς C7 και C8 η μέθοδος *MaxUr* υπερτερεί και πάλι με διαφορά όλων των μεθόδων στα κριτήρια Power και Power II αλλά πάλι είναι η τελευταία μέθοδος στο κριτήριο Power III. Καλή απόδοση έχουν και οι μέθοδοι Dong, Benski και Al-Shiha & Yang ενώ η χειρότερη μέθοδος στα κριτήρια Power και Power II είναι η χ_{C1} των Aboukalam & Al-Shiha.

Σημείωση: Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι η μέθοδος *MaxUr* έχει την ίδια απόδοση όταν έχουμε την ίδια σημαντικότητα σε όλες τις ενεργές επιδράσεις στα κριτήρια Power και Power II παρόλο που η μια μετράει ποσοστό των ενεργών που πραγματικά αναγνωρίστηκαν ενώ η δεύτερη μετράει το ποσοστό των πειραμάτων που πέτυχαν όλο το σύνολο των ενεργών. Από αυτό το αποτέλεσμα βλέπουμε ότι η μέθοδος *MaxUr* στη περίπτωση που όλες οι επιδράσεις είναι περίπου ίδιες έχει την ίδια συμπεριφορά για όλο το σύνολο των επιδράσεων. Καμία άλλη μέθοδος δεν έχει αυτή την ιδιότητα.

Αν τώρα μιλήσουμε για το κάθε κριτήριο ξεχωριστά βλέπουμε ότι:

- Για το κριτήριο Power η μέθοδος *MaxUr* είναι η καλύτερη σε όλους τους σχηματισμούς εκτός από τους C1 και C2 στους οποίους έχουμε μία και δύο ενεργές επιδράσεις αντίστοιχα. Στους δύο αυτούς σχηματισμούς υπερτερεί η μέθοδος Dong. Η μέθοδος Dong από την άλλη όμως υστερεί από όλες τις μεθόδους στην περίπτωση του σχηματισμού C5 που έχουμε 7 επιδράσεις. Πολύ καλά επίσης αποδίδει και η μέθοδος Benski η οποία σε όλους τους σχεδιασμούς είναι ανάμεσα στις τρεις καλύτερες μεθόδους.
- Για το κριτήριο της Power II τα αποτελέσματα είναι πολύ κοντά με αυτά της Power. Βλέπουμε πάλι την υπεροχή της *MaxUr* σε όλους τους σχηματισμούς εκτός από τον C1 όπου υπερέχει και πάλι η Dong, ενώ στους σχηματισμούς C2

και C5 έχει την ίδια περίπου απόδοση με την Dong και την Al-Shiha&Yang αντίστοιχα.

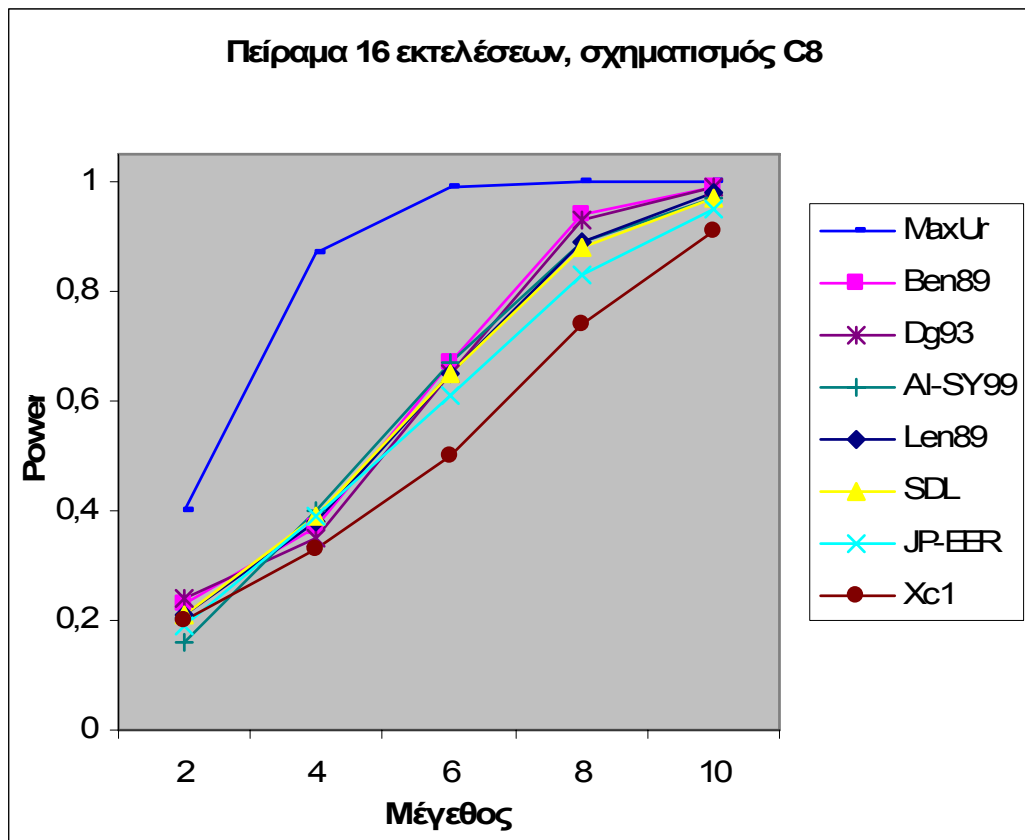
- Αντίθετα με τα αποτελέσματα που πήραμε στα δύο προηγούμενα κριτήρια είναι τα αποτελέσματα του κριτηρίου Power III. Σύμφωνα με το κριτήριο αυτό βλέπουμε ότι οι περισσότερες μέθοδοι αποδίδουν πάρα πολύ καλά, δηλαδή κοντά στη μονάδα και άρα δεν αναγνωρίζουν σχεδόν καθόλου αδρανείς επιδράσεις ως ενεργές. Αντίθετα παρατηρούμε ότι η μέθοδος *MaxUr* υστερεί πολύ στο κριτήριο αυτό και είναι η χειρότερη με διαφορά από όλες τις μεθόδους. Βλέπουμε ότι η μέθοδος *MaxUr* αναγνωρίζει ως ενεργές πολλές επιδράσεις οι οποίες στην πραγματικότητα είναι αδρανείς. Μάλιστα στα πειράματα με μια και δύο ενεργές επιδράσεις και για μικρά μεγέθη, το ποσοστό των πραγματικά ενεργών σε σχέση με τον αριθμό των επιδράσεων που αναγνωρίστηκαν είναι κοντά στο 50% και κάτω. Δηλαδή ενώ είχαμε για παράδειγμα δύο ενεργές στο σχηματισμό C2 βλέπουμε ότι η μέθοδος *MaxUr* είχε για μέγεθος 2, $Power = 1$ δηλαδή αναγνώρισε 100% τις ενεργές αλλά ταυτοχρόνως είχε $Power III = 0.62$ δηλαδή μόλις 62% των επιδράσεων που αναγνωρίστηκαν ως ενεργές ήταν πραγματικά ενεργές. Έτσι για κάθε δύο ενεργές αναγνωρίζονταν κατά μέσο όρο ακόμη μια ή δύο επιδράσεις ως ενεργές που στην πραγματικότητα δεν ήταν.
- Συνδυάζοντας τα τρία αυτά αποτελέσματα μέσω της PowerComb βλέπουμε ότι στους σχηματισμούς C1, C2 και C3 υπερτερεί η μέθοδος Dong, όμως και η μέθοδος Benski έχει πολύ καλή απόδοση. Για τους σχηματισμούς C4 και C5 οι μέθοδοι *MaxUr* και Al-Shiha&Yang αποδίδουν καλύτερα, ενώ στους σχηματισμούς C6, C7 και C8 η μέθοδος *MaxUr* είναι η καλύτερη.

Συγκρίνοντας τις μεθόδους Al-Shiha&Yang και *MaxUr* οι οποίες στηρίζονται στο ίδιο στατιστικό βλέπουμε ότι στο κριτήριο Power η *MaxUr* υπερτερεί της Al-Shiha&Yang σε όλους τους σχηματισμούς παρόλο που σαν αρχική εκτίμηση των ενεργών επιδράσεων είχαμε ορίσει για την *MaxUr* τις 8 ενώ για την Al-Shiha&Yang τις 7 και άρα πιο κοντά στον αριθμό των πραγματικά ενεργών (στους σχεδιασμούς που εξετάσαμε είχαμε το πολύ 7 ενεργές επιδράσεις). Ο μόνος σχηματισμός στον οποίο αποδίδει καλύτερα η Al-Shiha&Yang είναι στο C5 όπου είχαμε 7 ενεργές επιδράσεις. Στον συνδυασμό όμως που κάναμε, δηλαδή το κριτήριο PowerComb βρήκαμε ότι η μέθοδος Al-Shiha&Yang είναι καλύτερη από την *MaxUr* στο σχηματισμό C1, ενώ η *MaxUr* είναι καλύτερη της Al-Shiha&Yang στους σχηματισμούς C5, C6 και C7 όπου είχαμε διαφορετική σημαντικότητα μεταξύ των ενεργών επιδράσεων. Στους υπόλοιπους σχηματισμούς βλέπουμε ότι έχουν την ίδια περίπου απόδοση, ανάλογα και από το μέγεθος των ενεργών επιδράσεων.

Επίσης συγκρίνοντας για το κριτήριο Power τις μεθόδους Lenth και Step-Down Lenth οι οποίες και πάλι βασίζονται στο ίδιο στατιστικό παρατηρούμε ότι έχουν σχεδόν την ίδια απόδοση σε όλους τους συνδυασμούς, με την Step-Down Lenth όμως να υπερτερεί ελάχιστα όταν ο αριθμός των ενεργών επιδράσεων είναι μεγάλος (εδώ 6 και 7) και την μέθοδο Lenth όταν ο αριθμός των ενεργών επιδράσεων είναι μικρός (εδώ 1, 2 και 4).

Ένα ακόμη χαρακτηριστικό αποτέλεσμα είναι το γεγονός ότι η μέθοδος $\chi_{C1}EER$ είναι η χειρότερη από όλες τις μεθόδους στους 5 από τους 8 σχεδιασμούς που εξετάσαμε,

ενώ και στους υπόλοιπους τρεις σχηματισμούς είναι χειρότερη από τουλάχιστον τέσσερις μεθόδους.



Σχήμα 3.8: Κριτήριο Power όταν $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0.2s, \beta_4 = 0.8s, \beta_5 = \dots = \beta_{15} = 0$, όπου s είναι το μέγεθος.

- Στη συνέχεια συγκρίναμε την ίδια ομάδα μεθόδων, οι οποίες ελέγχουν το EER στο 5%, για πειράματα 32 εκτελέσεων. Τα αποτελέσματα των πειραμάτων προσομοίωσης βρίσκονται στον πίνακα I.2 στο παράρτημα I.

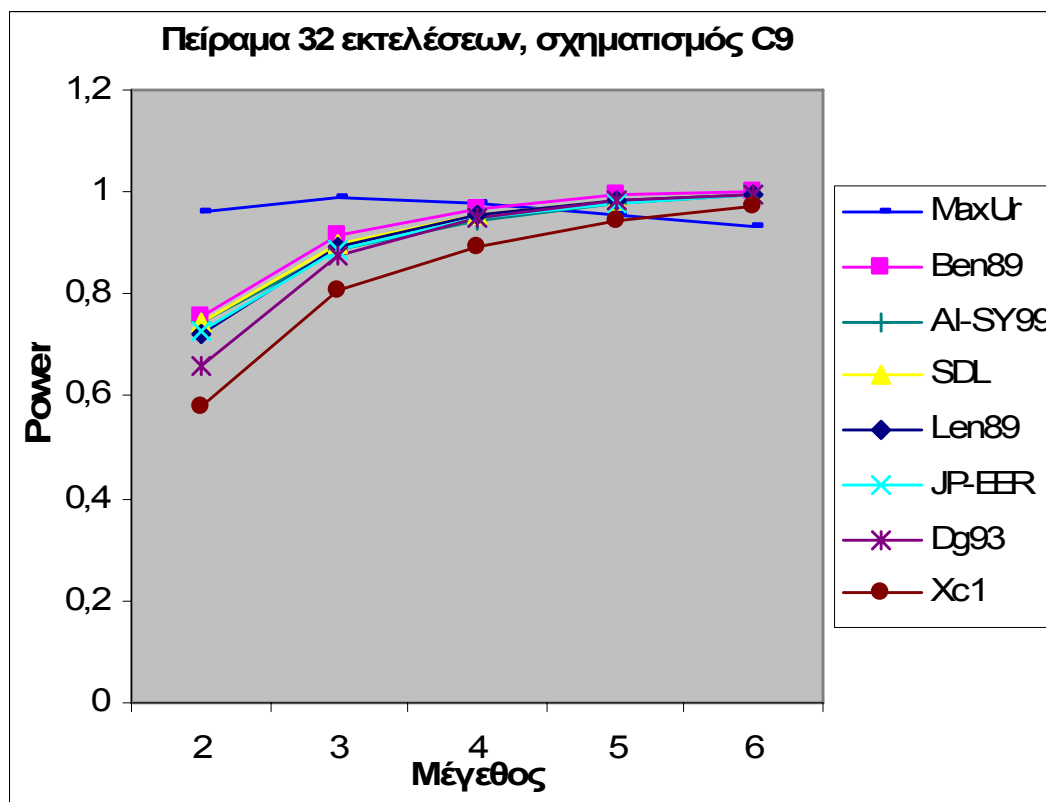
Κάποια γενικά σχόλια είναι ότι η μέθοδος *MaxUr* υπερτερεί και πάλι στο κριτήριο Power σε όλους τους σχηματισμούς στους οποίους είχαμε ενεργές επιδράσεις με το ίδιο μέγεθος. Στους αντίστοιχους σχηματισμούς αποδίδει πολύ καλά και η μέθοδος *Benski*. Καλή απόδοση έχουν η *Dong*, όταν οι ενεργές επιδράσεις είναι λίγες, και η μέθοδος *Al-Shiha & Yang*, όταν οι ενεργές είναι πολλές. Η μέθοδος *Al-Shiha & Yang* όπως αναφέρουν και οι συγγραφείς είναι ευαίσθητη στην επιλογή του k . Εδώ επιλέξαμε $k = 15$. Περιμέναμε η μέθοδος να αποδίδει καλύτερα όταν οι ενεργές επιδράσεις ήταν κοντά σε αυτό το k και πράγματι αυτό επαληθεύτηκε.

Στα αρνητικά θα αναφέρουμε την απόδοση της μεθόδου $\chi_{CI}EER$ η οποία είναι η χειρότερη σε πέντε σχηματισμούς για το κριτήριο Power ενώ για το κριτήριο Power II είναι η χειρότερη σε τρεις σχηματισμούς και ανάμεσα στις δύο χειρότερες στους υπόλοιπους πέντε σχηματισμούς.

Το πιο χαρακτηριστικό αποτέλεσμα από το πείραμα των 32 εκτελέσεων είναι η συμπεριφορά των μεθόδων στους σχηματισμούς C6, C7 και C8, κυρίως της μεθόδου *MaxUr*. Βλέποντας τα αποτελέσματα παρατηρούμε ότι η μέθοδος *MaxUr* αρχίζει για μικρά μεγέθη να αποδίδει πολύ καλά αλλά όταν αυξάνουμε το μέγεθος και ως επακόλουθο αυξάνουμε και την διαφορά ανάμεσα στις ενεργές επιδράσεις βλέπουμε η μέθοδος να επηρεάζεται στους σχηματισμούς C6 και C7. Ειδικά στο σχηματισμό C6 βλέπουμε ότι η μέθοδος χάνει τη μικρότερη ενεργή επίδραση σε κάθε πείραμα από το μέγεθος 5σ και άνω. Αν δούμε όμως ότι η μικρή αυτή επίδραση έχει μέγεθος 0.2s και το $s=5\sigma$ τότε το μέγεθος της επίδρασης είναι 1. Το παράδοξο είναι ότι στην περίπτωση που έχουμε σχηματισμό με όλες τις ενεργές επιδράσεις ίσες με μέγεθος 1 βλέπουμε ότι η μέθοδος *MaxUr* έχει απόδοση 100% ή κοντά σε αυτό. Παρόμοια με το σχηματισμό C6 είναι και τα αποτελέσματα στο σχηματισμό C7, στον οποίο χρησιμοποιήσαμε και τον περιορισμό που είχε θέσει ο Chen Ying, η μεγαλύτερη ενεργή επίδραση να είναι το πολύ τετραπλάσια από τη μικρότερη. Αντιθέτως με τους σχηματισμούς C6 και C7 η μέθοδος *MaxUr* αποδίδει πολύ καλύτερα από όλες τις μεθόδους στο σχηματισμό C8.

Λόγω αυτής της “περίεργης” συμπεριφοράς της μεθόδου στους σχηματισμούς με ενεργές επιδράσεις οι οποίες έχουν διαφορετική σημαντικότητα μελετήσαμε ακόμα μία περίπτωση. Την περίπτωση αυτή την ονομάζουμε σχηματισμό C9 και έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\beta_1 = \dots = \beta_3 = 0.3s, \beta_4 = \dots = \beta_7 = 0.5s, \beta_8 = \dots = \beta_{11} = 0.8s, \beta_{12} = \dots = \beta_{15} = 1s, \beta_{16} = \dots = \beta_{31} = 0$$



Σχήμα 3.9: Κριτήριο Power όταν $\beta_1 = \dots = \beta_3 = 0.3s, \beta_4 = \dots = \beta_7 = 0.5s, \beta_8 = \dots = \beta_{11} = 0.8s, \beta_{12} = \dots = \beta_{15} = 1s, \beta_{16} = \dots = \beta_{31} = 0$ όπου s είναι το μέγεθος.

Τα πλήρη αποτελέσματα του σχηματισμού C9 βρίσκονται στον πίνακα I.13 στο παράρτημα I και παρατηρούμε για ακόμη μια φορά το πρόβλημα της μεθόδου *MaxUr* στα κριτήρια Power και Power II όταν οι ενεργές επιδράσεις έχουν διαφορετική σημαντικότητα στο πείραμα των 32 εκτελέσεων.

- Όσον αφορά την άλλη ομάδα μεθόδων οι οποίες ελέγχουν το IER στο 5% μπορούμε να δούμε τα αποτελέσματα στο παράρτημα I, στον πίνακα I.3 για το πείραμα των 16 εκτελέσεων και στο πίνακα I.4 για το πείραμα των 32 εκτελέσεων.

Σε γενικές γραμμές βλέπουμε ότι στα κριτήρια Power και Power II για λίγες ενεργές επιδράσεις και στα δυο πειράματα (16 και 32 εκτελέσεων) οι προς εξέταση μέθοδοι συμπεριφέρονται παρόμοια ενώ στο κριτήριο Power III παρατηρούμε ότι η μέθοδος χ_{C1} αποδίδει καλύτερα από όλες τις υπόλοιπες μεθόδους. Στη συνέχεια καθώς αυξάνεται ο αριθμός των ενεργών επιδράσεων (σχηματισμοί C4 και C5) βλέπουμε και πάλι την μέθοδο Dong να χάνει αρκετά και να υστερεί των υπολοίπων στα κριτήρια Power και Power II. Πολύ καλή απόδοση έχει η μέθοδος Juan&Pena η οποία είναι σε όλους τους σχηματισμούς ανάμεσα στις δυο καλύτερες μεθόδους για τα κριτήρια Power και Power II αλλά υστερεί λίγο στο κριτήριο Power III.

Αν συγκρίνουμε τις δύο μεθόδους χ_{C1} και *ASkM* του Aboukalam βλέπουμε ότι η μέθοδος χ_{C1} υπερτερεί σε όλους τους σχηματισμούς στο κριτήριο Power III. Στα κριτήρια Power και Power II, για τους σχηματισμούς C1-C4 στα πειράματα 16 αλλά και 32 εκτελέσεων παρατηρούμε ότι αποδίδουν περίπου το ίδιο. Στο σχηματισμό C5 και για τα δύο πειράματα (16 και 32 εκτελέσεων), δηλαδή όταν έχουμε πολλές ενεργές επιδράσεις (7 και 15 αντίστοιχα), η μέθοδος χ_{C1} αποδίδει καλύτερα.

Αντίθετα στους σχηματισμούς C6 και C7, δηλαδή όταν οι ενεργές επιδράσεις έχουν διαφορετική σημαντικότητα, η μέθοδος *ASkM* είναι καλύτερη.

Για την τροποποιημένη μέθοδο του Lenth μπορούμε να πούμε ότι έχει μια σταθερή απόδοση για όλους τους σχηματισμούς αλλά χωρίς κάτι το ιδιαίτερο αφού υστερεί σε όλες τις περιπτώσεις από κάποιες άλλες μεθόδους.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ:

***Αποτελέσματα πειραμάτων προσομοίωσης και
αντίστοιχα σχεδιαγράμματα***

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Αποτελέσματα πειραμάτων προσομοίωσης και αντίστοιχα σχεδιαγράμματα

Σχήμα τύπος	Size	Power						Power II						Power III											
		Len89	Ben89	SDL	JP- EER	Dg93	$\lambda_{c,EER}$	AI- SY99	MaxUr	Len89	Ben89	SDL	JP- EER	Dg93	$\lambda_{c,EER}$	AI- SY99	MaxUr	Len89	Ben89	SDL	JP- EER	Dg93	$\lambda_{c,EER}$	AI- SY99	Max Ur
1	1	0.43	0.52	0.42	0.34	0.58	0.40	0.27	0.32	0.43	0.52	0.42	0.34	0.58	0.4	0.27	0.32	0.86	0.85	0.82	0.71	0.93	0.91	0.70	0.20
	1.5	0.84	0.93	0.84	0.73	0.96	0.81	0.59	0.71	0.84	0.93	0.84	0.73	0.96	0.81	0.59	0.71	0.93	0.91	0.90	0.86	0.95	0.95	0.84	0.28
	2	0.98	1	0.98	0.95	1	0.97	0.85	0.96	0.98	1	0.98	0.95	1	0.97	0.85	0.96	0.94	0.91	0.92	0.90	0.96	0.96	0.89	0.37
2	2.5	1	1	1	1	1	1	0.97	1	1	1	1	1	1	1	0.97	1	0.94	0.91	0.92	0.90	0.96	0.96	0.90	0.48
	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.99	1	0.94	0.91	0.92	0.89	0.96	0.96	0.91	0.55
	1	0.42	0.46	0.41	0.34	0.50	0.35	0.32	0.49	0.3	0.36	0.29	0.24	0.37	0.22	0.21	0.49	0.93	0.91	0.90	0.85	0.97	0.96	0.86	0.40
3	1.5	0.84	0.92	0.82	0.73	0.94	0.74	0.69	0.91	0.76	0.88	0.74	0.63	0.91	0.65	0.54	0.91	0.97	0.95	0.95	0.92	0.98	0.98	0.92	0.52
	2	0.98	1	0.98	0.95	1	0.95	0.91	1	0.97	1	0.96	0.92	1	0.93	0.85	1	0.97	0.96	0.95	0.94	0.98	0.99	0.94	0.62
	2.5	1	1	1	1	1	0.99	0.98	1	1	1	1	1	1	0.99	0.97	1	0.97	0.95	0.96	0.94	0.98	0.99	0.95	0.70
4	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.97	0.95	0.96	0.94	0.98	0.99	0.95	0.76
	1	0.32	0.27	0.32	0.33	0.28	0.21	0.36	0.53	0.16	0.2	0.16	0.16	0.15	0.06	0.18	0.53	0.98	0.95	0.96	0.93	0.99	0.99	0.95	0.67
	1.5	0.79	0.82	0.78	0.71	0.83	0.58	0.80	0.95	0.64	0.76	0.6	0.53	0.74	0.36	0.59	0.95	0.99	0.97	0.97	0.96	1	1	0.98	0.76
5	2	0.97	0.99	0.97	0.93	0.99	0.88	0.97	1	0.94	0.99	0.91	0.86	0.99	0.76	0.91	1	0.99	0.98	0.98	0.97	1	1	0.98	0.82
	2.5	1	1	1	1	1	0.98	1	1	0.99	1	0.99	0.98	1	0.96	0.99	1	0.99	0.98	0.98	0.97	1	1	0.98	0.87
	3	1	1	1	1	1	0.99	1	1	1	1	1	1	1	0.97	1	1	0.99	0.98	0.98	0.97	1	1	0.98	0.89
6	1	0.05	0.06	0.06	0.12	0.02	0.05	0.19	0.23	0.02	0.05	0.03	0.05	0.01	0	0.14	0.23	1	0.97	0.99	0.98	1	1	1	0.92
	1.5	0.33	0.44	0.37	0.51	0.17	0.31	0.73	0.71	0.22	0.41	0.28	0.35	0.16	0.08	0.71	0.71	1	0.99	0.99	0.98	1	1	1	0.94
	2	0.74	0.88	0.77	0.86	0.54	0.70	0.98	0.97	0.66	0.87	0.7	0.76	0.53	0.4	1	0.96	1	0.99	0.99	0.98	1	1	1	0.95
7	2.5	0.94	0.99	0.95	0.97	0.83	0.91	1	1	0.92	0.99	0.93	0.94	0.98	0.77	1	1	1	0.99	0.99	0.98	1	1	1	0.96
	3	0.99	1	0.99	1	0.96	0.99	1	1	0.99	1	0.99	0.99	1	0.98	1	1	1	0.99	0.99	0.98	1	1	1	0.96
	2	0.25	0.25	0.25	0.21	0.29	0.21	0.20	0.39	0.02	0.03	0.03	0.04	0.02	0.01	0.03	0.27	0.95	0.93	0.92	0.87	0.98	0.98	0.88	0.50
8	4	0.59	0.61	0.59	0.55	0.62	0.52	0.53	0.95	0.21	0.25	0.21	0.19	0.24	0.12	0.18	0.88	0.98	0.96	0.95	0.93	0.99	0.99	0.95	0.69
	6	0.87	0.91	0.86	0.83	0.91	0.81	0.82	1	0.62	0.72	0.6	0.5	0.73	0.43	0.49	0.99	0.98	0.97	0.97	0.95	0.99	1	0.97	0.82
	8	0.96	0.98	0.95	0.93	0.99	0.91	0.92	1	0.88	0.95	0.86	0.78	0.96	0.73	0.76	1	0.99	0.97	0.97	0.95	0.99	1	0.97	0.87
9	10	0.99	1	0.99	0.98	1	0.97	0.97	1	0.98	1	0.97	0.94	1	0.92	0.92	1	0.99	0.97	0.97	0.96	0.99	1	0.97	0.90
	2	0.11	0.08	0.11	0.11	0.10	0.08	0.12	0.24	0	0.01	0.01	0.01	0	0	0.02	0.1	0.98	0.95	0.95	0.91	0.992	0.99	0.93	0.68
	4	0.49	0.42	0.51	0.49	0.42	0.40	0.53	0.89	0.09	0.13	0.12	0.12	0.07	0.03	0.15	0.77	0.99	0.98	0.98	0.96	1	1	0.98	0.83
10	6	0.78	0.79	0.79	0.76	0.73	0.64	0.83	1	0.42	0.54	0.43	0.38	0.43	0.15	0.5	0.99	0.99	0.98	0.98	0.97	1	1	0.98	0.89
	8	0.93	0.96	0.93	0.90	0.93	0.81	0.96	1	0.78	0.89	0.76	0.69	0.83	0.44	0.83	1	0.99	0.98	0.98	0.98	1	1	0.99	0.92
	10	0.99	1	0.98	0.97	0.99	0.93	0.99	1	0.96	0.99	0.94	0.9	0.978	0.74	0.97	1	0.99	0.98	0.98	0.98	1	1	0.99	0.94
11	2	0.21	0.23	0.21	0.19	0.24	0.20	0.16	0.40	0	0	0	0.01	0	0	0.01	0.13	0.97	0.96	0.95	0.92	0.99	0.99	0.92	0.60
	4	0.38	0.37	0.39	0.39	0.35	0.33	0.40	0.87	0.07	0.1	0.09	0.09	0.06	0.03	0.1	0.69	0.98	0.97	0.96	0.94	0.99	1	0.96	0.80
	6	0.65	0.67	0.65	0.61	0.65	0.50	0.67	0.99	0.37	0.47	0.36	0.32	0.42	0.17	0.36	0.97	0.99	0.97	0.97	0.95	0.99	1	0.97	0.87
12	8	0.89	0.94	0.88	0.83	0.93	0.74	0.89	1	0.76	0.88	0.72	0.64	0.87	0.48	0.71	1	0.99	0.98	0.97	0.96	1	1	0.98	0.91
	10	0.98	0.99	0.97	0.95	0.99	0.91	0.97	1	0.94	0.99	0.92	0.87	0.99	0.79	0.92	1	0.99	0.98	0.98	0.97	1	1	0.98	0.93

Πίνακας Ι.1 : Επιδόσεις, μεθόδων οι οποίες ελέγχουν το EER στο 5%, για 10,000 πειράματα προσομοίωσης των 16 εκτελέσεων για τους σχηματισμούς του πίνακα 3.6 και για διάφορα μεγέθη.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Αποτελέσματα πειραμάτων προσομοίωσης και αντίστοιχα σχεδιαγράμματα

Σημείο πειράτος	Size	Power							Power II							Power III									
		Len89	Ben89	SDL	JP-EER	Dg93	χ_{CI-EER}	Al-SY99	MaxUr	Len89	Ben89	SDL	JP-EER	Dg93	χ_{CI-EER}	Al-SY99	MaxUr	Len89	Ben89	SDL	JP-EER	Dg93	χ_{CI-EER}	Al-SY99	MaxUr
1	0.75	0.57	0.64	0.57	0.50	0.66	0.49	0.39	0.70	0.32	0.36	0.32	0.26	0.39	0.27	0.16	0.7	0.97	0.93	0.96	0.93	0.98	0.98	0.91	0.28
	1	0.89	0.94	0.89	0.84	0.95	0.83	0.67	0.96	0.77	0.85	0.77	0.68	0.89	0.66	0.36	0.96	0.98	0.96	0.97	0.95	0.99	0.99	0.95	0.34
	1.25	0.99	1	0.99	0.97	1	0.97	0.85	1	0.97	0.99	0.97	0.94	1	0.93	0.64	1	0.98	0.96	0.97	0.96	0.99	0.99	0.96	0.42
	1.5	1	1	1	1	1	1	0.94	1	1	1	1	0.99	1	0.99	0.85	1	0.98	0.96	0.97	0.96	0.99	0.99	0.96	0.52
2	1.75	1	1	1	1	1	1	0.98	1	1	1	1	1	1	1	0.95	1	0.98	0.96	0.97	0.96	0.99	0.99	0.96	0.62
	0.75	0.51	0.59	0.52	0.48	0.49	0.35	0.50	0.87	0.17	0.19	0.18	0.16	0.16	0.05	0.12	0.86	0.99	0.96	0.97	0.96	0.99	1	0.96	0.52
	1	0.88	0.94	0.88	0.83	0.92	0.71	0.80	1	0.65	0.74	0.64	0.55	0.76	0.36	0.35	1	0.99	0.98	0.98	0.98	0.97	1	0.98	0.61
	1.25	0.99	1	0.98	0.97	1	0.93	0.93	1	0.94	0.98	0.93	0.88	0.99	0.78	0.78	1	0.99	0.98	0.98	0.98	1	1	0.98	0.69
3	1.5	1	1	1	1	1	1	0.98	1	0.99	1	0.99	0.99	1	0.96	0.87	1	0.99	0.98	0.99	0.98	1	1	0.98	0.77
	1.75	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.97	1	0.99	0.98	0.99	0.98	1	1	0.98	0.86
	0.75	0.39	0.52	0.43	0.46	0.25	0.22	0.56	0.87	0.1	0.14	0.13	0.14	0.06	0.01	0.12	0.85	0.99	0.97	0.97	0.98	0.97	1	0.98	0.70
	1	0.83	0.93	0.84	0.81	0.77	0.55	0.87	1	0.53	0.65	0.54	0.47	0.53	0.13	0.39	1	1	0.99	0.99	0.98	1	1	0.99	0.76
4	1.25	0.98	1	0.98	0.97	0.98	0.84	0.97	1	0.91	0.97	0.9	0.84	0.94	0.52	0.74	1	1	0.99	0.99	0.98	1	1	0.99	0.81
	1.5	1	1	1	1	1	0.97	0.99	1	0.99	1	0.99	0.98	1	0.86	0.94	1	1	0.99	0.99	0.98	1	1	0.99	0.86
	1.75	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.98	0.99	1	1	0.99	0.99	0.98	1	1	0.99	0.91
	0.75	0.17	0.40	0.23	0.38	0.05	0.12	0.53	0.75	0.03	0.1	0.07	0.1	0.01	0	0.11	0.72	1	0.98	0.99	0.98	1	1	0.99	0.84
5	1	0.63	0.90	0.72	0.79	0.37	0.40	0.92	0.99	0.33	0.59	0.43	0.43	0.21	0.04	0.49	0.99	1	0.99	0.99	0.98	1	1	0.99	0.87
	1.25	0.94	0.99	0.96	0.96	0.80	0.71	0.99	1	0.81	0.95	0.84	0.81	0.67	0.26	0.87	1	1	0.99	0.99	0.98	1	1	0.99	0.89
	1.5	1	1	1	1	1	0.98	0.92	1	0.98	1	0.98	0.97	0.95	0.66	0.99	1	1	0.99	0.99	0.99	1	1	0.99	0.91
	1.75	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.92	0.99	1	1	0.99	0.99	0.99	1	1	0.99	0.93
6	0.75	0.02	0.31	0.02	0.09	0.00	0.02	0.27	0.31	0	0.08	0.01	0.02	0	0	0.11	0.27	1	0.99	1	0.98	1	1	0.99	0.93
	1	0.11	0.85	0.17	0.40	0.02	0.16	0.83	0.83	0.04	0.52	0.11	0.22	0.01	0.01	0.69	0.83	1	0.99	1	0.99	1	1	0.99	0.92
	1.25	0.41	0.99	0.51	0.76	0.14	0.53	0.99	0.99	0.27	0.92	0.45	0.62	0.09	0.13	0.98	0.99	1	1	1	0.99	1	1	0.99	0.92
	1.5	0.74	1	0.80	0.94	0.40	0.84	1	1	0.64	1	0.78	0.9	0.31	0.48	1	1	1	0.99	1	0.99	1	1	0.99	0.92
7	1.75	0.92	1	0.94	0.98	0.69	0.96	1	1	0.89	1	0.93	0.98	0.62	0.82	1	1	1	0.99	0.99	0.99	1	1	0.99	0.91
	2	0.74	0.75	0.74	0.72	0.76	0.69	0.65	0.93	0.09	0.1	0.09	0.09	0.08	0.04	0.06	0.68	0.99	0.97	0.98	0.97	0.99	1	0.97	0.65
	3	0.86	0.87	0.86	0.85	0.87	0.82	0.80	0.92	0.33	0.37	0.33	0.28	0.37	0.19	0.18	0.59	0.99	0.97	0.98	0.97	0.99	1	0.97	0.92
	4	0.93	0.95	0.93	0.91	0.95	0.89	0.87	0.83	0.66	0.73	0.65	0.57	0.74	0.46	0.36	0.15	0.99	0.97	0.98	0.97	1	1	0.98	1
8	5	0.98	0.99	0.98	0.97	0.99	0.95	0.92	0.80	0.89	0.94	0.88	0.83	0.95	0.74	0.58	0.01	0.99	0.98	0.98	0.97	1	1	0.98	1
	6	1	1	1	1	1	0.98	0.96	0.80	0.98	0.99	0.98	0.95	0.99	0.92	0.78	0	0.99	0.98	0.98	0.97	1	1	0.98	1
	2	0.75	0.78	0.76	0.73	0.75	0.65	0.71	0.98	0.16	0.19	0.17	0.15	0.15	0.04	0.11	0.86	0.99	0.98	0.99	0.98	1	1	0.98	0.78
	3	0.94	0.96	0.93	0.92	0.95	0.85	0.88	0.98	0.66	0.74	0.65	0.58	0.74	0.34	0.41	0.84	0.99	0.98	0.99	0.98	1	1	0.98	0.97
9	4	0.99	1	0.99	0.99	1	0.96	0.96	0.93	0.96	0.98	0.96	0.92	0.98	0.8	0.77	0.54	0.99	0.99	0.99	0.98	1	1	0.99	1
	5	1	1	1	1	1	1	0.99	0.89	1	1	1	1	1	0.98	0.95	0.27	0.99	0.98	0.99	0.98	1	1	0.99	1
	6	1	1	1	1	1	1	1	0.87	1	1	1	1	1	1	0.11	0.11	0.99	0.98	0.99	0.98	1	1	0.99	1
	2	0.16	0.15	0.16	0.17	0.14	0.15	0.15	0.71	0	0	0	0	0	0	0	0.25	0.99	0.97	0.98	0.96	1	1	0.95	0.60
10	3	0.29	0.33	0.32	0.33	0.23	0.22	0.36	0.96	0.02	0.03	0.03	0.04	0.01	0	0.04	0.76	0.99	0.97	0.98	0.96	1	1	0.97	0.73
	4	0.61	0.71	0.63	0.61	0.54	0.41	0.66	0.99	0.2	0.26	0.22	0.2	0.19	0.04	0.16	0.97	0.99	0.98	0.98	0.97	1	1	0.98	0.80
	5	0.88	0.94	0.88	0.84	0.87	0.65	0.86	1	0.6	0.7	0.59	0.52	0.66	0.22	0.39	0.99	0.99	0.99	0.98	1	1	0.99	0.88	
	6	0.98	0.99	0.98	0.96	0.99	0.86	0.95	1	0.89	0.95	0.88	0.82	0.94	0.55	0.66	0.99	0.99	0.99	0.99	0.98	1	1	0.99	0.96

Πίνακας 1.2 : Επιδόσεις, μεθόδων οι οποίες ελέγχουν το EER στο 5%, για 10,000 πειράματα προσομοίωσης των 52 εκτελέσεων για τους σχηματισμούς του πίνακα 3.7 και για διάφορα μεγέθη.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Αποτελέσματα πειραμάτων προσομοίωσης και αντίστοιχα σχεδιαγράμματα

Σημια παράς	Size	Power I					Power II					Power III				
		ML-IER	JP-IER	Dg-IER	χ_{C1}	ASKM	ML-IER	JP-IER	Dg-IER	χ_{C1}	ASKM	ML-IER	JP-IER	Dg-IER	χ_{C1}	ASKM
		0.5	0.383	0.370	0.438	0.391	0.364	0.383	0.37	0.438	0.391	0.363	0.396	0.370	0.450	0.397
1	1	0.907	0.894	0.949	0.903	0.887	0.907	0.894	0.949	0.903	0.887	0.588	0.556	0.625	0.619	0.566
	1.5	0.998	0.997	1	0.997	0.997	0.998	0.997	1	0.997	0.603	0.574	0.620	0.638	0.585	
	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.607	0.582	0.625	0.643	0.589	
	2.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.602	0.579	0.622	0.637	0.582	
2	0.5	0.343	0.332	0.373	0.350	0.326	0.171	0.176	0.155	0.175	0.174	0.612	0.572	0.679	0.620	0.581
	1	0.885	0.876	0.914	0.873	0.877	0.814	0.804	0.848	0.787	0.809	0.761	0.725	0.814	0.822	0.731
	1.5	0.997	0.996	0.999	0.996	0.997	0.999	0.999	1	0.999	0.999	0.767	0.745	0.806	0.842	0.743
	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.759	0.734	0.806	0.839	0.737	
4	2.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.763	0.743	0.803	0.842	0.741	
	0.5	0.244	0.243	0.239	0.257	0.239	0.033	0.047	0.017	0.032	0.042	0.827	0.784	0.881	0.837	0.802
	1	0.778	0.788	0.708	0.782	0.786	0.572	0.616	0.477	0.523	0.622	0.907	0.861	0.948	0.958	0.868
	1.5	0.990	0.992	0.978	0.988	0.991	0.974	0.98	0.954	0.96	0.981	0.891	0.868	0.933	0.968	0.843
6	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.886	0.870	0.930	0.969	0.837	
	2.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.882	0.868	0.932	0.968	0.838	
	0.5	0.138	0.140	0.130	0.152	0.135	0.004	0.012	0.001	0.004	0.008	0.930	0.892	0.959	0.937	0.914
	1	0.486	0.529	0.300	0.600	0.488	0.246	0.365	0.112	0.259	0.289	0.979	0.931	0.989	0.993	0.960
7	1.5	0.903	0.929	0.741	0.956	0.901	0.816	0.899	0.603	0.861	0.834	0.959	0.923	0.977	0.996	0.919
	2	0.994	0.996	0.960	0.999	0.993	0.988	0.995	0.934	0.996	0.986	0.941	0.922	0.975	0.997	0.878
	2.5	1	1	0.997	1	1	1	1	0.996	1	1	0.931	0.920	0.974	0.997	0.866
	0.5	0.096	0.098	0.090	0.110	0.093	0.001	0.003	0	0	0.001	0.956	0.927	0.978	0.960	0.944
3	1	0.240	0.279	0.109	0.350	0.235	0.088	0.18	0.025	0.119	0.107	0.998	0.970	1	1	0.978
	1.5	0.660	0.720	0.386	0.839	0.648	0.518	0.681	0.252	0.681	0.529	0.991	0.954	0.999	1	0.901
	2	0.910	0.932	0.723	0.984	0.898	0.861	0.925	0.636	0.964	0.854	0.976	0.947	0.996	1	0.812
	2.5	0.984	0.989	0.922	1	0.981	0.974	0.988	0.892	0.998	0.97	0.962	0.945	0.992	1	0.762
5	2	0.616	0.611	0.626	0.591	0.619	0.188	0.199	0.155	0.151	0.206	0.823	0.786	0.874	0.867	0.799
	3	0.811	0.807	0.819	0.778	0.823	0.472	0.467	0.478	0.39	0.508	0.853	0.817	0.907	0.906	0.825
	4	0.911	0.906	0.920	0.877	0.923	0.733	0.721	0.76	0.634	0.771	0.856	0.824	0.908	0.920	0.828
	5	0.964	0.959	0.975	0.940	0.972	0.891	0.877	0.924	0.821	0.916	0.852	0.820	0.900	0.925	0.814
6	6	0.988	0.987	0.994	0.978	0.993	0.965	0.96	0.983	0.935	0.978	0.851	0.824	0.892	0.927	0.812
	2	0.418	0.423	0.391	0.408	0.423	0.033	0.056	0.012	0.023	0.043	0.929	0.889	0.962	0.950	0.908
	3	0.654	0.669	0.595	0.608	0.676	0.177	0.232	0.082	0.114	0.212	0.949	0.904	0.980	0.976	0.933
	4	0.827	0.837	0.755	0.765	0.855	0.458	0.512	0.28	0.317	0.53	0.950	0.901	0.980	0.983	0.926
5	5	0.925	0.932	0.868	0.876	0.945	0.721	0.759	0.543	0.567	0.792	0.944	0.903	0.975	0.986	0.909
	6	0.975	0.977	0.944	0.946	0.986	0.895	0.908	0.775	0.787	0.939	0.936	0.902	0.968	0.987	0.888

Πίνακας Ι.3 : Επιδόσεις, μέθοδων οι οποίες ελέγχουν το IER στο 5%, για 10,000 περιβάματα προσομοίωσης των 16 εκτελέσεων για τους σχηματισμούς του πίνακα 3.6 και για διάφορα μεγέθη.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Αποτελέσματα πειραμάτων προσομοίωσης και αντίστοιχα σχεδιαγράμματα

Σχήμα τυπός	Size	Power I				Power II				Power III						
		ML-IER	JP-IER	Dg-IER	χ_{C1}	ASKM	ML-IER	JP-IER	Dg-IER	χ_{C1}	ASKM	ML-IER	JP-IER	Dg-IER	χ_{C1}	ASKM
3	0.5	0.693	0.682	0.713	0.671	0.695	0.396	0.399	0.392	0.365	0.415	0.657	0.624	0.713	0.694	0.633
	0.75	0.965	0.962	0.974	0.952	0.967	0.906	0.899	0.928	0.871	0.914	0.692	0.667	0.724	0.768	0.657
	1	0.999	0.999	0.999	0.998	0.999	0.996	0.996	0.998	0.993	0.997	0.694	0.676	0.713	0.78	0.656
	1.25	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.692	0.671	0.709	0.777	0.652
6	0.5	0.594	0.599	0.562	0.575	0.607	0.143	0.177	0.09	0.11	0.178	0.851	0.803	0.908	0.882	0.822
	0.75	0.949	0.950	0.936	0.923	0.959	0.786	0.8	0.744	0.677	0.833	0.854	0.819	0.899	0.928	0.802
	1	0.999	0.999	0.999	0.996	0.999	0.993	0.992	0.993	0.975	0.996	0.839	0.819	0.868	0.935	0.777
	1.25	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.834	0.816	0.861	0.937	0.774
9	0.5	0.449	0.474	0.349	0.457	0.462	0.038	0.08	0.011	0.025	0.053	0.942	0.89	0.976	0.957	0.926
	0.75	0.887	0.916	0.765	0.870	0.903	0.58	0.693	0.369	0.435	0.659	0.935	0.885	0.971	0.979	0.892
	1	0.996	0.998	0.983	0.990	0.997	0.975	0.984	0.928	0.922	0.985	0.909	0.884	0.941	0.983	0.833
	1.25	1	1	1	1	1	1	1	1	0.998	1	0.899	0.883	0.924	0.983	0.812
12	0.5	0.245	0.275	0.154	0.284	0.248	0.006	0.033	0.001	0.005	0.011	0.984	0.946	0.996	0.987	0.978
	0.75	0.665	0.756	0.362	0.748	0.673	0.255	0.516	0.075	0.225	0.308	0.982	0.926	0.995	0.995	0.965
	1	0.955	0.982	0.772	0.974	0.956	0.835	0.955	0.533	0.808	0.856	0.964	0.919	0.982	0.996	0.909
	1.25	0.998	1	0.973	0.999	0.998	0.993	0.999	0.929	0.991	0.993	0.94	0.918	0.963	0.997	0.844
15	0.5	0.068	0.073	0.049	0.092	0.064	0	0.002	0	0	0	0.997	0.981	1	0.997	0.996
	0.75	0.146	0.199	0.037	0.266	0.139	0.019	0.111	0.001	0.031	0.021	1	0.975	1	1	0.998
	1	0.433	0.532	0.117	0.678	0.415	0.2	0.485	0.036	0.367	0.203	0.999	0.963	1	1	0.978
	1.25	0.745	0.813	0.344	0.929	0.723	0.583	0.794	0.215	0.815	0.554	0.995	0.951	0.999	1	0.925
5	0.5	0.917	0.943	0.638	0.990	0.906	0.851	0.937	0.534	0.973	0.823	0.984	0.946	0.994	1	0.845
	2	0.899	0.897	0.903	0.873	0.911	0.51	0.505	0.525	0.398	0.564	0.808	0.782	0.844	0.887	0.765
	3	0.979	0.969	0.976	0.953	0.978	0.855	0.847	0.881	0.767	0.889	0.814	0.789	0.847	0.901	0.764
	4	0.996	0.996	0.998	0.990	0.997	0.979	0.978	0.988	0.952	0.987	0.804	0.785	0.833	0.9	0.75
7	0.5	1	1	1	1	1	0.999	0.998	0.999	0.997	0.999	0.803	0.782	0.828	0.904	0.747
	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.804	0.785	0.825	0.904	0.748
	3	0.953	0.952	0.950	0.916	0.967	0.719	0.719	0.688	0.54	0.796	0.879	0.846	0.924	0.952	0.827
	4	0.998	0.998	0.999	0.993	0.999	0.988	0.987	0.99	0.954	0.994	0.867	0.846	0.896	0.956	0.797
Πίνακας 1.4	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.863	0.844	0.888	0.959	0.794
	6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.863	0.846	0.888	0.958	0.791
	7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.863	0.843	0.888	0.959	0.791
	8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.863	0.843	0.888	0.959	0.791

Πίνακας 1.4 : Επιδόσεις, μεθόδων οι οποίες ελέγχουν το IER στο 5%, για 10,000 πειράματα προσομοίωσης των 32 εκτελέσεων για τους σχηματισμούς του πίνακα 3.7 και για διάφορα μεγέθη.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Αποτελέσματα πειραμάτων προσομοίωσης και αντίστοιχα σχεδιαγράμματα

Σχηματισμός	Size	PowerComb							
		Len89	Ben89	SDL	JP-EER	Dg93	Xc1	AI-SY99	MaxUr
1	1	0.559	0.619	0.54	0.451	0.685	0.553	0.399	0.284
	1.5	0.867	0.924	0.858	0.769	0.957	0.852	0.665	0.581
	2	0.968	0.973	0.962	0.935	0.988	0.967	0.862	0.783
	2.5	0.982	0.973	0.976	0.966	0.988	0.988	0.949	0.844
	3	0.982	0.973	0.976	0.967	0.988	0.988	0.969	0.865
2	1	0.525	0.555	0.509	0.453	0.589	0.481	0.438	0.463
	1.5	0.847	0.913	0.827	0.747	0.94	0.776	0.699	0.793
	2	0.973	0.988	0.963	0.935	0.994	0.954	0.895	0.886
	2.5	0.991	0.985	0.988	0.975	0.994	0.99	0.967	0.91
	3	0.991	0.985	0.988	0.982	0.994	0.997	0.985	0.928
3	1	0.454	0.446	0.448	0.442	0.441	0.384	0.465	0.572
	1.5	0.79	0.841	0.765	0.713	0.845	0.618	0.77	0.893
	2	0.964	0.987	0.949	0.914	0.993	0.868	0.949	0.946
	2.5	0.993	0.994	0.99	0.98	1	0.978	0.99	0.961
	3	0.997	0.994	0.994	0.991	1	1	0.994	0.967
4	1	0.366	0.353	0.374	0.401	0.337	0.334	0.456	0.503
	1.5	0.646	0.681	0.665	0.68	0.592	0.473	0.844	0.869
	2	0.913	0.945	0.898	0.891	0.891	0.719	0.982	0.969
	2.5	0.99	0.997	0.982	0.975	0.986	0.918	0.997	0.982
	3	0.997	1	1	0.994	1	0.985	0.997	0.985
5	1	0.323	0.329	0.327	0.35	0.31	0.315	0.413	0.437
	1.5	0.487	0.593	0.52	0.587	0.415	0.425	0.803	0.779
	2	0.786	0.909	0.808	0.856	0.674	0.67	0.994	0.96
	2.5	0.95	0.99	0.954	0.961	0.941	0.881	1	0.988
	3	0.993	0.997	0.99	0.99	0.988	0.997	1	0.991
6	2	0.368	0.366	0.363	0.34	0.389	0.361	0.336	0.375
	4	0.555	0.571	0.546	0.52	0.579	0.501	0.516	0.844
	6	0.803	0.852	0.789	0.734	0.862	0.715	0.733	0.942
	8	0.937	0.965	0.92	0.876	0.978	0.865	0.871	0.961
	10	0.986	0.991	0.976	0.958	0.997	0.959	0.95	0.97
7	2	0.327	0.313	0.322	0.31	0.3276	0.321	0.323	0.316
	4	0.48	0.472	0.495	0.483	0.454	0.432	0.513	0.824
	6	0.699	0.747	0.703	0.671	0.691	0.552	0.743	0.963
	8	0.888	0.938	0.877	0.84	0.911	0.719	0.917	0.976
	10	0.978	0.99	0.964	0.945	0.9882	0.875	0.982	0.982
8	2	0.354	0.357	0.348	0.337	0.369	0.357	0.328	0.352
	4	0.436	0.442	0.441	0.435	0.426	0.411	0.448	0.777
	6	0.64	0.68	0.63	0.596	0.66	0.518	0.636	0.946
	8	0.868	0.928	0.843	0.793	0.927	0.714	0.845	0.973
	10	0.967	0.987	0.953	0.924	0.993	0.889	0.953	0.979

Πίνακας 1.5: Αποτελέσματα του συνδυασμού των προηγούμενων κριτηρίων στη PowerComb για τις μεθόδους οι οποίες ελέγχουν το EER στο 5% στο πείραμα των 16 εκτελέσεων.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Αποτελέσματα πειραμάτων προσομοίωσης και αντίστοιχα σχεδιαγράμματα

Σχηματισμός	Size	PowerComb							
		Len89	Ben89	SDL	JP-EER	Dg93	Xc1	AI-SY99	MaxUr
1	0.75	0.59	0.615	0.587	0.533	0.648	0.549	0.454	0.574
	1	0.869	0.91	0.866	0.809	0.938	0.81	0.63	0.774
	1.25	0.979	0.984	0.976	0.955	0.997	0.96	0.799	0.826
	1.5	0.994	0.988	0.991	0.984	0.997	0.993	0.91	0.856
	1.75	0.994	0.988	0.991	0.988	0.997	0.997	0.962	0.886
2	0.75	0.518	0.541	0.519	0.496	0.508	0.425	0.486	0.761
	1	0.821	0.872	0.814	0.76	0.88	0.657	0.674	0.883
	1.25	0.97	0.986	0.96	0.937	0.996	0.891	0.885	0.907
	1.5	0.993	0.994	0.993	0.99	1	0.984	0.936	0.931
	1.75	0.997	0.994	0.997	0.994	1	1	0.982	0.958
3	0.75	0.454	0.503	0.475	0.485	0.399	0.37	0.51	0.811
	1	0.761	0.836	0.765	0.725	0.743	0.517	0.714	0.928
	1.25	0.958	0.985	0.951	0.921	0.97	0.76	0.884	0.943
	1.5	0.996	0.997	0.993	0.986	1	0.935	0.97	0.958
	1.75	1	0.997	0.997	0.994	1	0.992	0.993	0.973
4	0.75	0.363	0.454	0.394	0.448	0.319	0.336	0.5	0.765
	1	0.621	0.803	0.685	0.703	0.495	0.436	0.769	0.954
	1.25	0.906	0.974	0.921	0.909	0.808	0.617	0.942	0.967
	1.5	0.992	0.997	0.989	0.985	0.974	0.84	0.993	0.973
	1.75	1	0.997	0.997	0.997	1	0.965	0.997	0.979
5	0.75	0.306	0.422	0.31	0.329	0.3	0.306	0.425	0.501
	1	0.349	0.76	0.395	0.505	0.31	0.352	0.825	0.881
	1.25	0.531	0.965	0.633	0.773	0.378	0.511	0.989	0.993
	1.5	0.778	0.997	0.852	0.939	0.544	0.744	1	1
	1.75	0.932	0.997	0.951	0.983	0.755	0.916	1	1
6	2	0.555	0.556	0.552	0.543	0.557	0.523	0.51	0.746
	3	0.687	0.7	0.684	0.658	0.706	0.622	0.603	0.788
	4	0.84	0.868	0.833	0.792	0.881	0.751	0.699	0.609
	5	0.947	0.967	0.94	0.914	0.977	0.881	0.802	0.544
	6	0.989	0.99	0.986	0.968	0.996	0.962	0.894	0.54
7	2	0.586	0.604	0.593	0.573	0.585	0.511	0.551	0.872
	3	0.843	0.878	0.836	0.802	0.881	0.691	0.722	0.921
	4	0.978	0.989	0.978	0.959	0.992	0.908	0.893	0.795
	5	0.997	0.994	0.997	0.994	1	0.992	0.974	0.675
	6	0.997	0.994	0.997	0.994	1	1	0.997	0.605
8	2	0.345	0.336	0.342	0.339	0.342	0.345	0.33	0.493
	3	0.392	0.402	0.402	0.403	0.373	0.366	0.415	0.811
	4	0.56	0.611	0.571	0.554	0.538	0.439	0.556	0.925
	5	0.801	0.859	0.797	0.754	0.825	0.583	0.711	0.96
	6	0.947	0.974	0.943	0.91	0.973	0.778	0.846	0.984

Πίνακας 1.6: Αποτελέσματα του συνδυασμού των προηγούμενων κριτηρίων στη PowerComb για τις μεθόδους οι οποίες ελέγχουν το EER στο 5% στο πείραμα των 32 εκτελέσεων.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Αποτελέσματα πειραμάτων προσομοίωσης και αντίστοιχα σχεδιαγράμματα

Σχηματισμός	Size	PowerComb				
		ML-IER	JP-IER	Dg-IER	Xc1	ASkM
1	0.5	0.3869	0.37	0.4416	0.3928	0.3669
	1	0.8113	0.7926	0.8518	0.8178	0.7907
	1.5	0.8795	0.8701	0.886	0.8893	0.8734
	2	0.8821	0.8746	0.8875	0.8929	0.8767
	2.5	0.8806	0.8737	0.8866	0.8911	0.8746
2	0.5	0.3549	0.3416	0.3776	0.361	0.3417
	1	0.8194	0.8019	0.8576	0.8233	0.806
	1.5	0.9288	0.9219	0.9415	0.951	0.9216
	2	0.9277	0.9202	0.9418	0.9517	0.9211
	2.5	0.9289	0.9229	0.9409	0.9526	0.9223
3	0.5	0.3345	0.3269	0.3428	0.341	0.3291
	1	0.7343	0.7411	0.6876	0.7312	0.745
	1.5	0.9539	0.95	0.9549	0.9708	0.9426
	2	0.9658	0.961	0.979	0.9907	0.9511
	2.5	0.9646	0.9604	0.9796	0.9904	0.9514
4	0.5	0.322	0.3144	0.3271	0.3283	0.3179
	1	0.5379	0.584	0.4315	0.5815	0.55
	1.5	0.885	0.9152	0.7566	0.93	0.8796
	2	0.9757	0.9734	0.9541	0.9972	0.9557
	2.5	0.9793	0.976	0.9897	0.9991	0.9598
5	0.5	0.316	0.3087	0.3204	0.321	0.3115
	1	0.4066	0.4467	0.3427	0.4526	0.4067
	1.5	0.7025	0.7746	0.5163	0.8241	0.6763
	2	0.9102	0.9337	0.7701	0.9808	0.8546
	2.5	0.9734	0.9754	0.931	0.9992	0.9109
6	2	0.5069	0.4987	0.512	0.4978	0.5078
	3	0.688	0.674	0.709	0.6612	0.6976
	4	0.8233	0.8074	0.8524	0.7927	0.8337
	5	0.9012	0.8845	0.9321	0.8879	0.9022
	6	0.9377	0.9273	0.959	0.9455	0.9327
7	2	0.4173	0.416	0.4107	0.4166	0.4165
	3	0.5517	0.5647	0.5053	0.5208	0.5675
	4	0.7163	0.7262	0.6325	0.6512	0.7463
	5	0.8491	0.8541	0.7701	0.7854	0.873
	6	0.9313	0.9269	0.8836	0.8947	0.9378

Πίνακας I.7: Αποτελέσματα του συνδυασμού των προηγούμενων κριτηρίων στη PowerComb για τις μεθόδους οι οποίες ελέγχουν το IER στο 5% στο πείραμα των 16 εκτελέσεων.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Αποτελέσματα πειραμάτων προσομοίωσης και αντίστοιχα σχεδιαγράμματα

Σχηματισμός	Size	PowerComb				
		ML-IER	JP-IER	Dg-IER	Xc1	ASKM
1	0,5	0,5634	0,5514	0,5846	0,5555	0,5644
	0,75	0,8595	0,8483	0,8806	0,8644	0,8528
	1	0,9063	0,9009	0,9128	0,9306	0,8953
	1,25	0,9076	0,9013	0,9127	0,9331	0,8956
	1,5	0,9073	0,9016	0,9133	0,9331	0,8959
2	0,5	0,4907	0,4914	0,477	0,4811	0,4999
	0,75	0,8553	0,8507	0,8481	0,8261	0,8615
	1	0,9486	0,9422	0,9573	0,9693	0,9312
	1,25	0,9502	0,9448	0,9583	0,9811	0,9322
	1,5	0,9505	0,9448	0,9583	0,9811	0,9322
3	0,5	0,4325	0,4412	0,4019	0,4342	0,4376
	0,75	0,7786	0,8175	0,6684	0,7287	0,8021
	1	0,9615	0,9582	0,9484	0,9607	0,943
	1,25	0,9697	0,9649	0,9772	0,9941	0,9436
	1,5	0,9694	0,9643	0,9766	0,9952	0,9433
4	0,5	0,3711	0,3795	0,3454	0,3833	0,3722
	0,75	0,5961	0,711	0,4371	0,6129	0,6146
	1	0,9097	0,9523	0,7394	0,9142	0,9019
	1,25	0,9786	0,975	0,9524	0,9952	0,9498
	1,5	0,9793	0,9757	0,9847	0,9991	0,9457
5	0,5	0,3195	0,317	0,3147	0,3267	0,318
	0,75	0,3514	0,3966	0,3115	0,3922	0,3495
	1	0,5096	0,6425	0,3495	0,6502	0,4991
	1,25	0,7552	0,8468	0,4889	0,9047	0,7160
	1,5	0,9107	0,9415	0,7032	0,9862	0,8545
6	2	0,7161	0,7057	0,7341	0,6872	0,7284
	3	0,8799	0,8662	0,8993	0,8630	0,8782
	4	0,9316	0,9255	0,9445	0,9478	0,9189
	5	0,9405	0,9338	0,948	0,9697	0,9237
	6	0,9412	0,9355	0,9475	0,9712	0,9244
7	2	0,8372	0,8270	0,8374	0,7764	0,8566
	3	0,9547	0,9480	0,9645	0,9663	0,9364
	4	0,9589	0,9532	0,9664	0,9877	0,9382
	5	0,9589	0,9538	0,9664	0,9874	0,9373
	6	0,9589	0,9529	0,9664	0,9877	0,9373

Πίνακας 1.8: Αποτελέσματα του συνδυασμού των προηγούμενων κριτηρίων στη PowerComb για τις μεθόδους οι οποίες ελέγχουν το IER στο 5% στο πείραμα των 32 εκτελέσεων.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Αποτελέσματα πειραμάτων προσομοίωσης και αντίστοιχα σχεδιαγράμματα

Σχηματισμός	Size	LD1L9							
		Len89	Ben89	SDL	JP-EER	Dg93	Xc1	AI-SY99	MaxUr
1	1	5200	4411.76	5312.2	6078.87	3823.66	5439.56	6685.71	7400
	1.5	1503.23	721.98	1533.33	2548.84	410.53	1752.63	3802.38	4435.71
	2	242.55	98.9	265.22	555.56	41.67	310.42	1455.06	1994.59
	2.5	63.83	98.9	86.96	111.11	41.67	41.67	377.78	1083.33
	3	63.83	98.9	86.96	123.6	41.67	41.67	98.9	818.18
2	1	5251.61	4905.49	5355.56	6000	4515.46	5864.58	6172.09	5325
	1.5	1465.98	768.42	1663.16	2493.48	559.18	2355.1	2850	1650
	2	210.31	41.67	231.58	510.64	20.41	459.6	868.09	612.9
	2.5	30.93	52.63	41.67	153.19	20.41	100	231.58	428.57
	3	30.93	52.63	41.67	63.83	20.41	10.1	52.63	315.79
3	1	6126.53	6584.21	6133.33	6054.84	6482.83	7112.12	5778.95	4491.04
	1.5	1897.98	1645.36	2004.12	2639.58	1530	3780	1816.33	750
	2	279.8	110.2	289.8	658.76	90	1080	289.8	219.51
	2.5	10.1	20.41	20.41	120.62	0	180	20.41	149.43
	3	10.1	20.41	20.41	30.93	0	0	20.41	123.6
4	1	7651.52	8103.09	7563.27	6939.58	8370	8100	6306.12	5823.53
	1.5	3695.96	3881.63	3522.45	2990.72	5040	5490	1358.59	1366.29
	2	729.29	648.98	738.78	828.57	1350	2430	100	176.09
	2.5	100	10.1	100	110.2	180	540	10.1	63.83
	3	10.1	0	0	20.41	0	90	10.1	52.63
5	1	8550	8461.86	8460.61	7922.45	8820	8550	7290	6950
	1.5	6030	5044.44	5673.74	4420.41	7470	6210	2430	2655.32
	2	2340	1088.89	2077.78	1277.55	4140	2700	180	321.05
	2.5	540	100	459.6	289.8	1530	810	0	41.67
	3	90	10.1	100	20.41	360	90	0	30.93
6	2	6763.16	6768.82	6771.74	7141.38	6395.92	7114.29	7227.27	5880
	4	3702.04	3535.42	3721.05	4091.4	3426.26	4325.25	4257.89	876.81
	6	1187.76	838.14	1286.6	1573.68	819.19	1710	1645.36	219.51
	8	369.7	210.31	479.38	678.95	100	810	748.45	149.43
	10	100	30.93	120.62	220.83	10.1	270	300	111.11
7	2	8012.24	8284.21	8015.79	8020.88	8100.81	8280.81	7929.03	6952.94
	4	4594.95	5228.57	4420.41	4610.42	5220	5400	4240.82	1172.29
	6	1987.88	1906.12	1906.12	2183.51	2430	3240	1546.94	123.6
	8	639.39	379.59	648.98	918.37	630	1710	369.7	86.96
	10	100	20.41	200	289.8	90	630	100	63.83
8	2	7116.49	6939.58	7121.05	7306.52	6842.42	7202.02	7573.91	5666.67
	4	5587.76	5681.44	5506.25	5514.89	5853.54	6030	5416.67	1387.5
	6	3156.57	2990.72	3170.1	3542.11	3156.57	4500	2990.72	237.93
	8	998.99	559.18	1107.22	1564.58	630	2340	1008.16	98.9
	10	189.9	110.2	289.8	479.38	90	810	289.8	75.27

Πίνακας 1.9: Αποτελέσματα της εφαρμογής της Loss of Decision function, LD1L9, για τις μεθόδους οι οποίες ελέγχουν το EER στο 5% στο πείραμα των 16 εκτελέσεων.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Αποτελέσματα πειραμάτων προσομοίωσης και αντίστοιχα σχεδιαγράμματα

Σχηματισμός	Size	LD1L9							
		Len89	Ben89	SDL	JP-EER	Dg93	Xc1	AI-SY99	MaxUr
1	0.75	3887,63	3288,17	3893,75	4537,63	3073,47	4600	5528,57	4500
	1	1008,16	579,17	1017,53	1484,21	459,6	1538,38	3005,26	2223,53
	1.25	110,2	41,67	120,62	310,42	10,1	279,8	1385,42	1380,95
	1.5	20,41	41,67	30,93	41,67	10,1	10,1	579,17	923,08
	1.75	20,41	41,67	30,93	41,67	10,1	10,1	220,83	612,9
2	0.75	4415,15	3714,58	4336,08	4700	4594,95	5850	4520,83	1973,08
	1	1088,89	559,18	1097,96	1555,67	720	2610	1816,33	639,34
	1.25	100	20,41	200	289,8	0	630	648,98	449,28
	1.5	10,1	20,41	10,1	20,41	0	0	200	298,7
	1.75	10,1	20,41	10,1	20,41	0	0	20,41	162,79
3	0.75	5493,94	4336,08	5138,78	4874,23	6750	7020	3971,43	1542,86
	1	1530	639,39	1448,48	1726,53	2070	4050	1178,79	315,79
	1.25	180	10,1	189,9	289,8	180	1440	279,8	234,57
	1.5	0	10,1	10,1	20,41	0	270	100	162,79
	1.75	0	10,1	10,1	20,41	0	0	10,1	98,9
4	0.75	7470	5408,16	6932,32	5587,76	8550	7920	4235,35	2392,86
	1	3330	909,09	2527,27	1906,12	5670	5400	729,29	237,93
	1.25	540	100	369,7	369,7	1800	2610	100	123,6
	1.5	0	10,1	10,1	10,1	180	720	10,1	98,9
	1.75	0	10,1	10,1	10,1	0	90	10,1	75,27
5	0.75	8820	6213,13	8820	8191,84	9000	8820	6570	6210
	1	8010	1358,59	7470	5404,04	8820	7560	1530	1530
	1.25	5310	90	4410	2167,68	7740	4230	90	90
	1.5	2340	10,1	1800	549,49	5400	1440	0	0
	1.75	720	10,1	549,49	189,9	2790	360	0	0
6	2	2347,47	2273,2	2355,1	2542,27	2167,68	2790	3170,1	1130,77
	3	1268,69	1196,91	1277,55	1376,29	1178,79	1620	1824,74	800
	4	639,39	479,38	648,98	838,14	450	990	1187,76	1530
	5	189,9	110,2	200	300	90	450	738,78	1800
	6	10,1	20,41	20,41	120,62	0	180	379,59	1800
7	2	2257,58	1995,92	2167,68	2444,9	2250	3150	2624,49	456,41
	3	549,49	379,59	639,39	738,78	450	1350	1097,96	210,31
	4	100	10,1	100	110,2	0	360	369,7	630
	5	10,1	20,41	10,1	20,41	0	0	100	990
	6	10,1	20,41	10,1	20,41	0	0	10,1	1170
8	2	7561,62	7654,64	7563,27	7477,08	7740	7650	7657,89	3083,33
	3	6392,93	6040,21	6126,53	6043,75	6930	7020	5771,13	715,07
	4	3516,16	2624,49	3342,86	3528,87	4140	5310	3073,47	337,5
	5	1088,89	549,49	1088,89	1457,14	1170	3150	1268,69	136,36
	6	189,9	100	189,9	379,59	90	1260	459,6	41,67

Πίνακας I.10: Αποτελέσματα της εφαρμογής της Loss of Decision function, LD1L9, για τις μεθόδους οι οποίες ελέγχουν το EER στο 5% στο πείραμα των 32 εκτελέσεων.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Αποτελέσματα πειραμάτων προσομοίωσης και αντίστοιχα σχεδιαγράμματα

Σχηματισμός	Size	LD1L9				
		ML-IER	JP-IER	Dg-IER	Xc1	ASKM
1	0.5	6137.17	6300	5593.33	6074.89	6330.67
	1	1472.52	1667.91	1028.4	1428.8	1697.14
	1.5	675.06	766.93	612.9	592.7	734.27
	2	647.45	718.21	600	555.21	697.79
	2.5	661.13	727.12	607.72	569.86	718.21
2	0.5	6130.46	6260.42	5819.34	6064.52	6301.1
	1	1312.94	1448.28	982.85	1332.04	1429.73
	1.5	329.87	376.91	249.45	222.9	371.86
	2	317.52	362.4	240.69	191.9	356.85
	2.5	310.62	345.9	245.33	187.65	349.53
3	0.5	6855.04	6879.95	6881.28	6737.05	6908
	1	2077.77	2035.21	2666.84	1996.28	2045.53
	1.5	211.11	222.86	268.23	140.66	265.56
	2	128.67	149.43	75.27	31.99	194.74
	2.5	133.79	152.07	72.96	33.06	193.32
4	0.5	7768.39	7756.95	7835.56	7642.22	7797.7
	1	4636.42	4278.21	6303.34	3604.23	4628.33
	1.5	911.61	716.5	2348.44	399.84	970.41
	2	116.32	120.26	384.62	12.01	200.98
	2.5	74.11	86.96	53.61	3.01	154.73
5	0.5	8140.42	8125.72	8192.02	8014.58	8168.52
	1	6840.48	6497.63	8019	5850	6890.29
	1.5	3065.99	2554.72	5526.39	1449	3239.2
	2	832.38	664.16	2495.9	144	1125.91
	2.5	182.87	156.56	709.44	0	477.4
6	2	3588.48	3667.35	3456.25	3771.66	3584.72
	3	1840.76	1917.76	1712.98	2078.72	1767.58
	4	954.25	1039.51	813.22	1183.26	884.73
	5	491.46	579.51	333.33	616.22	474.1
	6	280.99	327.82	174.35	275.02	292.91
7	2	5269.95	5245.82	5496.44	5349.47	5235.86
	3	3149.15	3050.04	3657.14	3542.95	2964.54
	4	1600.53	1558.97	2220.41	2128.23	1373.33
	5	729.87	712.12	1210.26	1128.44	589.6
	6	291.67	313.15	535.21	498.46	250.36

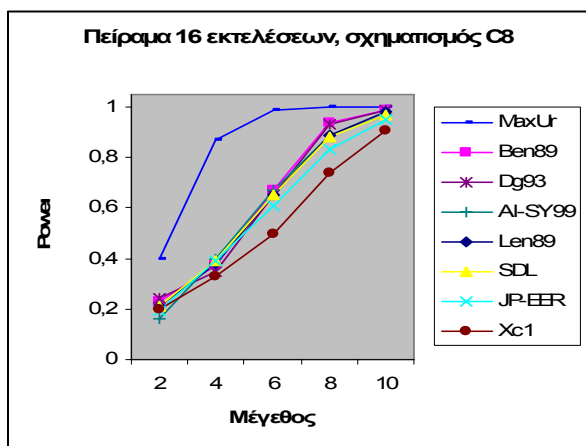
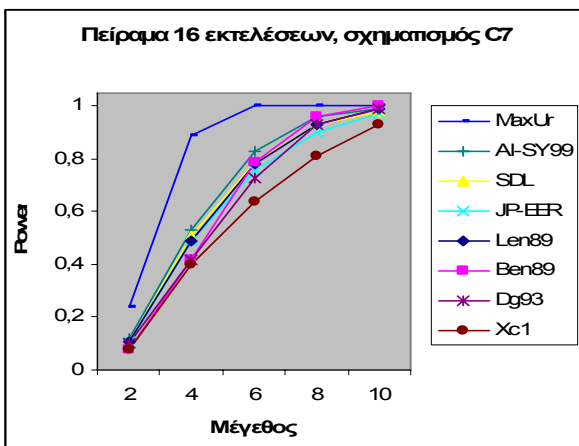
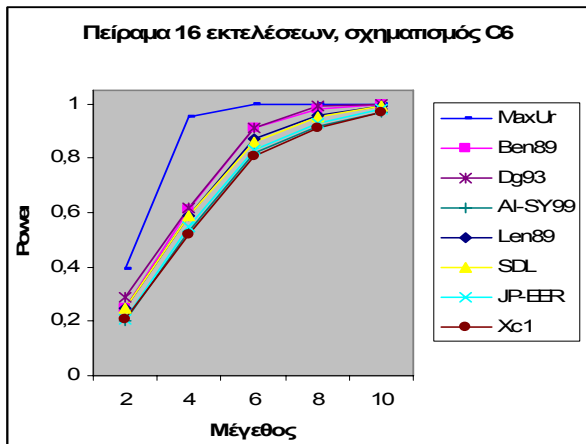
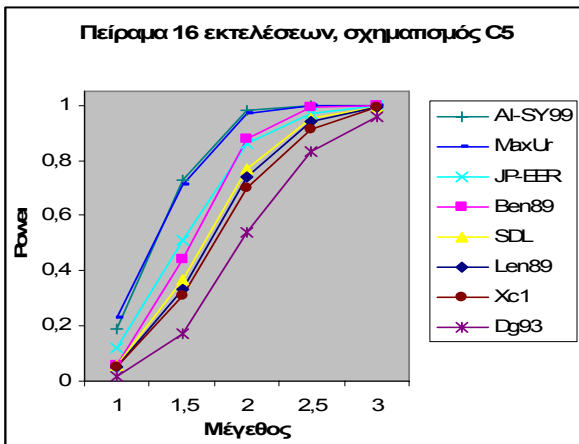
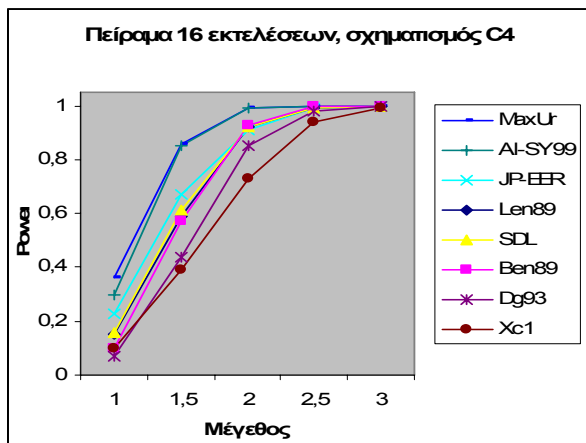
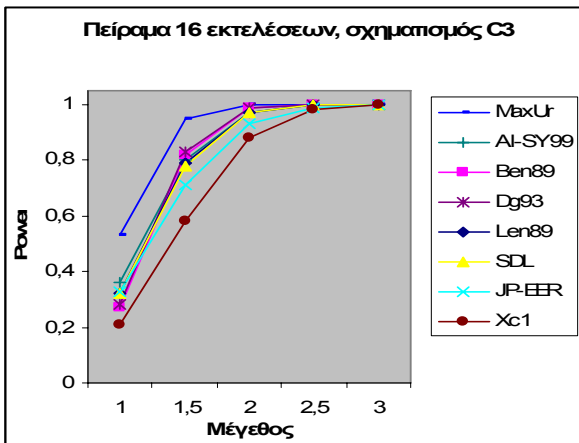
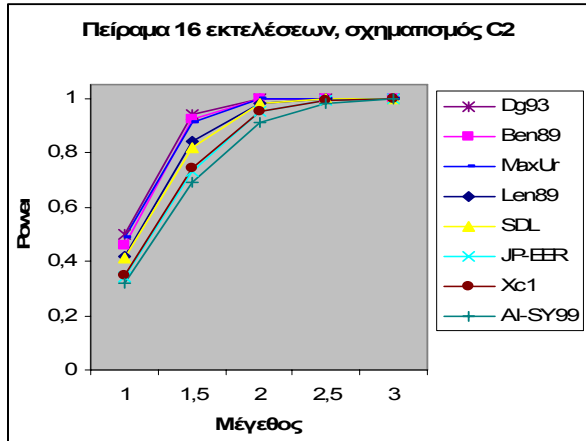
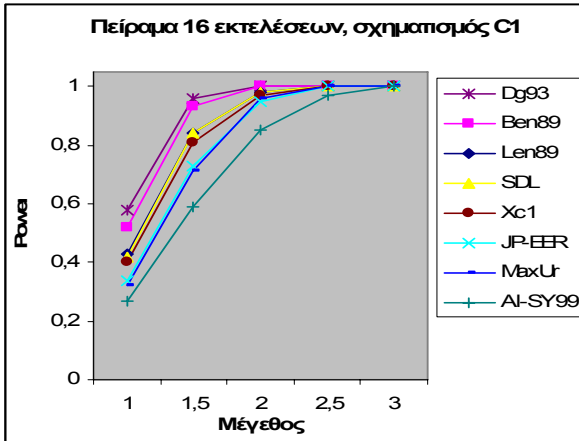
Πίνακας I.11: Αποτελέσματα της εφαρμογής της Loss of Decision function, LD1L9, για τις μεθόδους οι οποίες ελέγχουν το IER στο 5% στο πείραμα των 16 εκτελέσεων.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Αποτελέσματα πειραμάτων προσομοίωσης και αντίστοιχα σχεδιαγράμματα

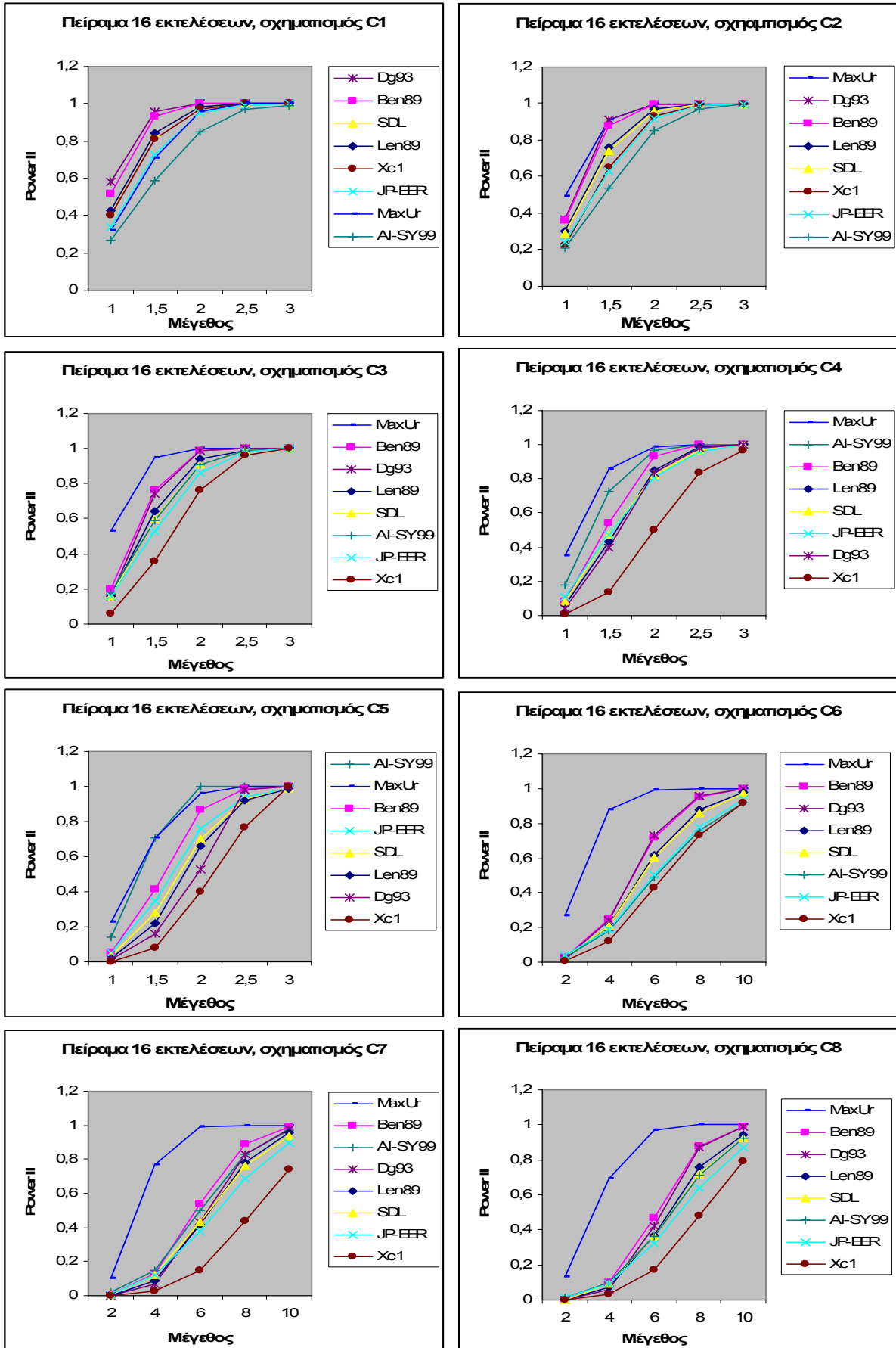
Σχηματισμός	Size	LD1L9				
		ML-IER	JP-IER	Dg-IER	Xc1	ASKM
1	0.5	3124.79	3272.95	2870	3256.86	3147.95
	0.75	744.51	822.28	605.3	719.58	801.84
	1	449.48	487.81	411.12	299.49	532.87
	1.25	445.09	490.31	410.44	287	533.74
	1.5	447.18	488.1	406.47	287	531.39
2	0.5	3758	3755.95	3998.94	3901.93	3668.44
	0.75	621.24	659.95	681.16	764.61	605.76
	1	200.7	229.78	160.92	105.24	295.71
	1.25	199.04	225.49	161.44	67.24	291.99
	1.5	197.6	225.49	161.44	67.24	291.99
3	0.5	4986.65	4792.58	5867.58	4907.53	4878.92
	0.75	1078.66	875.03	2137.85	1188.66	982.33
	1	135.71	148.96	214.63	107.12	226.88
	1.25	112.35	132.5	82.25	17.29	231.53
	1.5	113.59	135.07	84.6	16.26	233.05
4	0.5	6798.98	6540.7	7614.62	6447.74	6773.58
	0.75	3027.19	2256.41	5743.82	2271.76	2967.41
	1	440.66	248.55	2066.15	237.91	491.71
	1.25	81.7	89.32	280.38	12.01	202.46
	1.5	74.11	88.14	57.17	3.01	221
5	0.5	8388.2	8344.41	8559	8172.28	8424.26
	0.75	7686	7214.1	8667	6606	7749.28
	1	5103.43	4232.44	7947	2898	5274.34
	1.25	2298.74	1724.89	5904.34	639	2551.62
	1.5	761.91	566.83	3261.85	90	1012.19
6	2	1122.62	1177.06	1039.91	1254.22	1080.85
	3	412.7	538.14	392.3	527.71	500.1
	4	278.81	308.79	218.08	200	359.33
	5	245.33	278.77	207.73	115.09	338.69
	6	243.78	273.89	212.12	106.19	336.9
7	2	554.19	605.3	528.14	802.18	499.29
	3	171.1	199.67	124.96	108.7	263.45
	4	158.75	184.83	126.13	42.75	259.45
	5	158.75	182.03	126.13	43.84	264.22
	6	158.75	186.24	126.13	42.75	264.22

Πίνακας 1.12: Αποτελέσματα της εφαρμογής της Loss of Decision function, LD1L9, για τις μεθόδους οι οποίες ελέγχουν το IER στο 5% στο πείραμα των 32 εκτελέσεων.

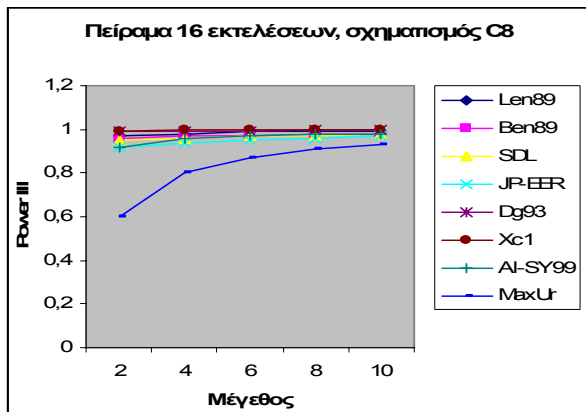
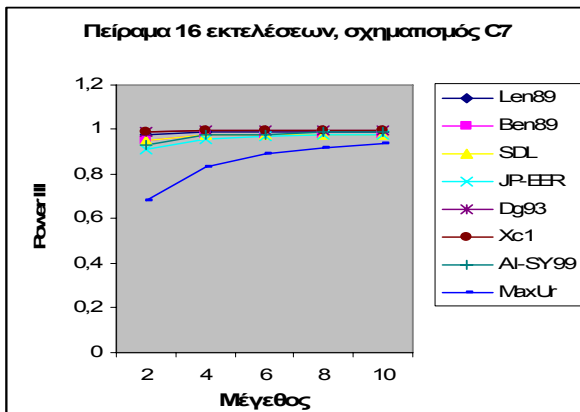
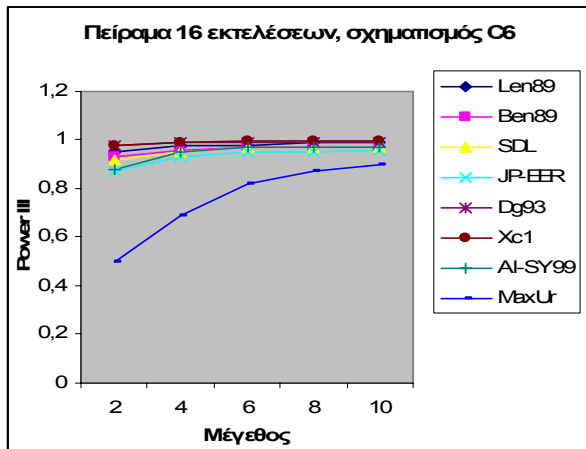
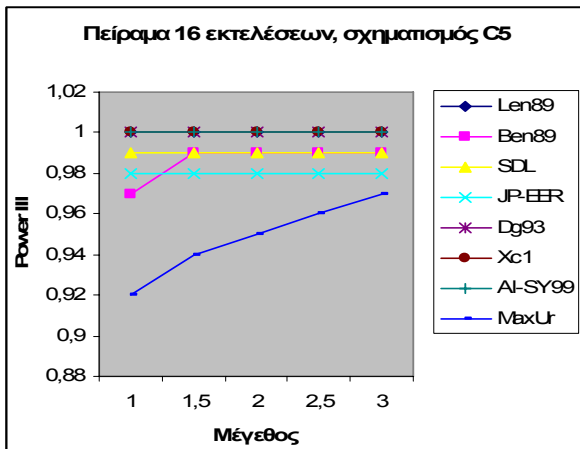
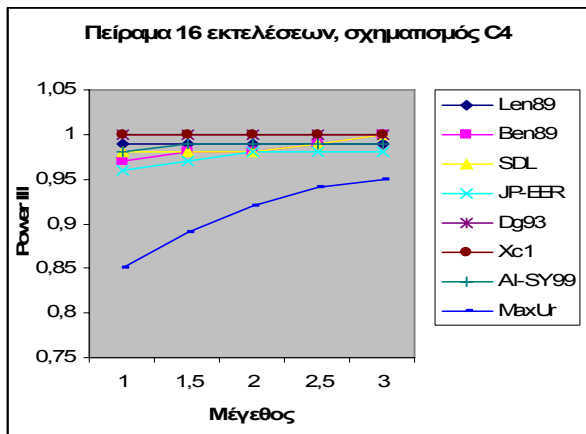
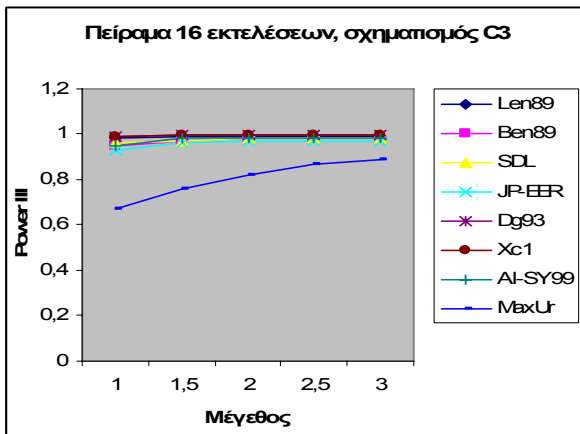
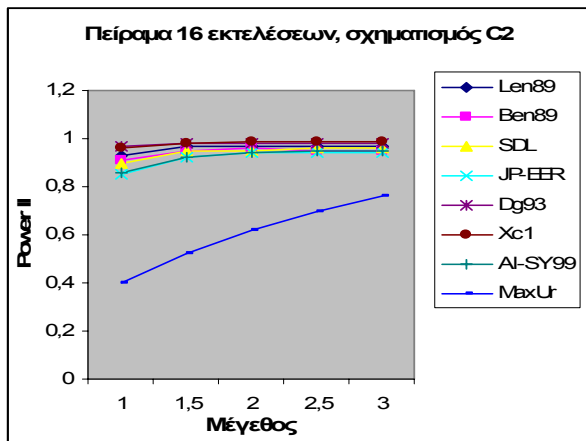
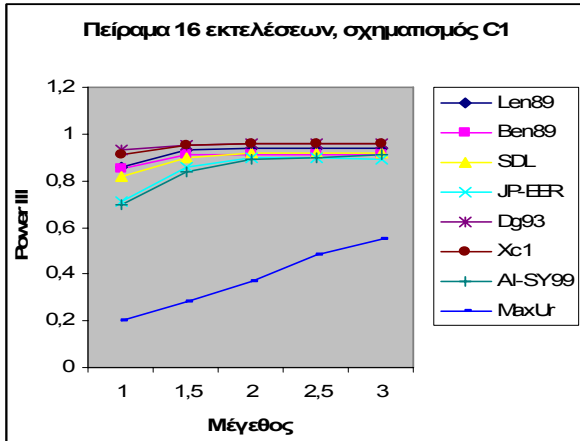
Σχεδιαγράμματα για το κριτήριο Power για τις μεθόδους οι οποίες ελέγχουν το EER στο 5%



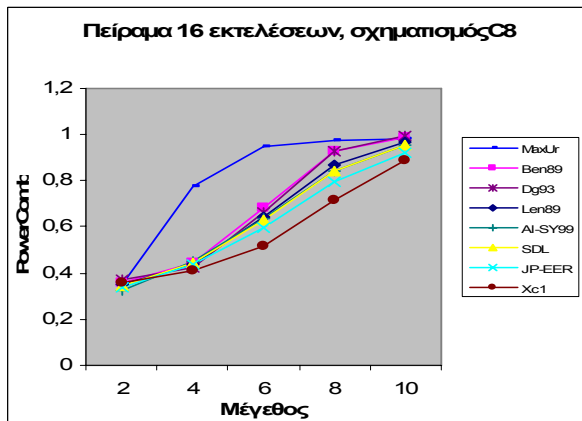
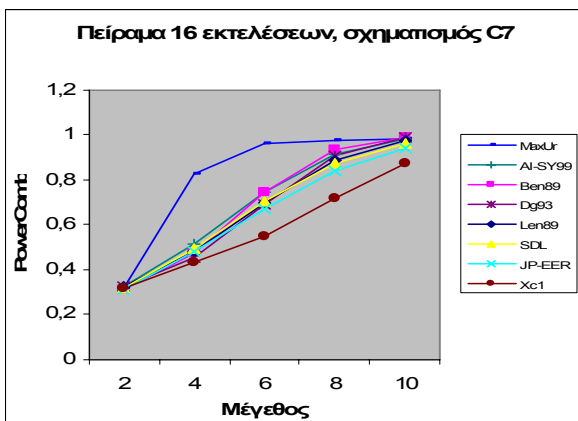
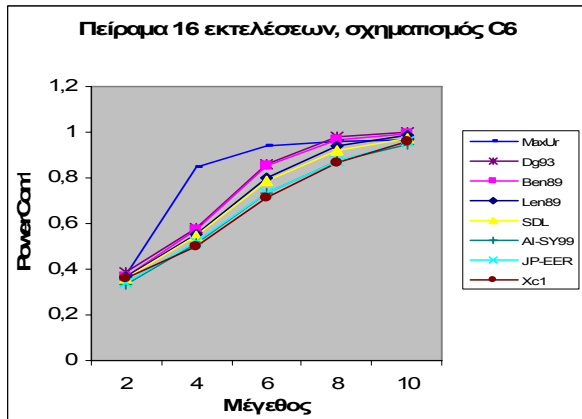
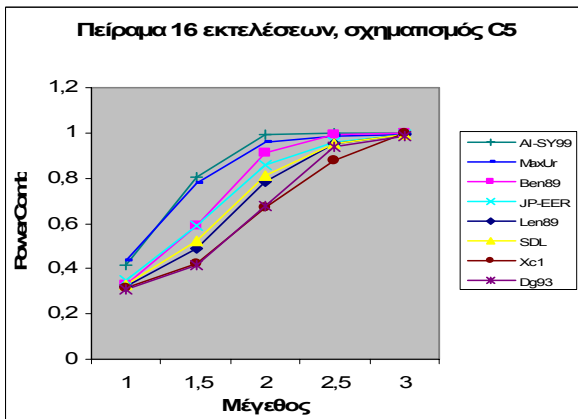
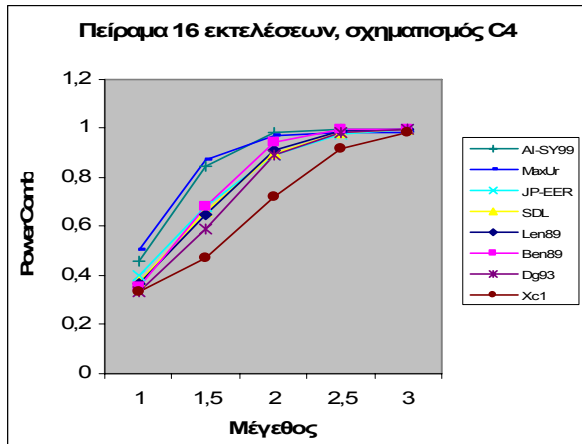
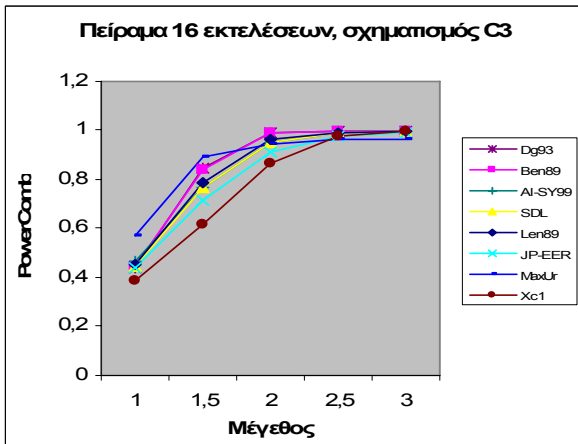
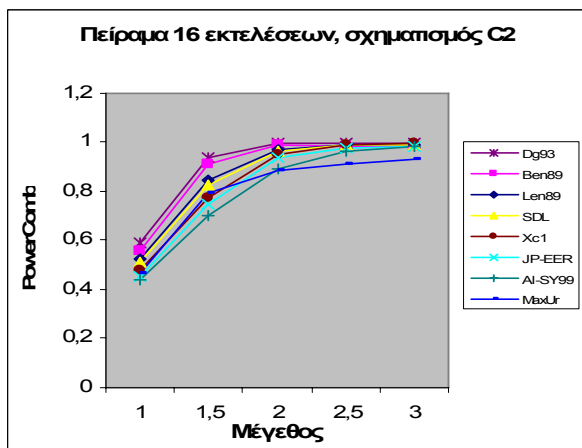
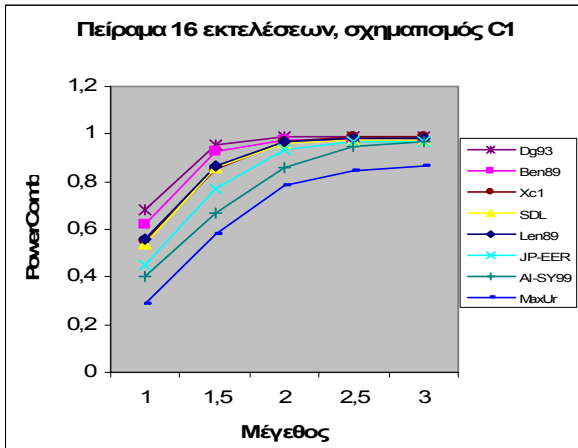
Σχεδιαγράμματα για το κριτήριο Power II για τις μεθόδους οι οποίες ελέγχουν το EER στο 5%



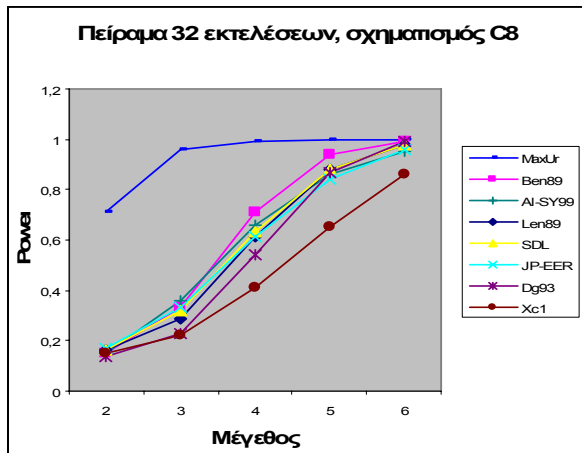
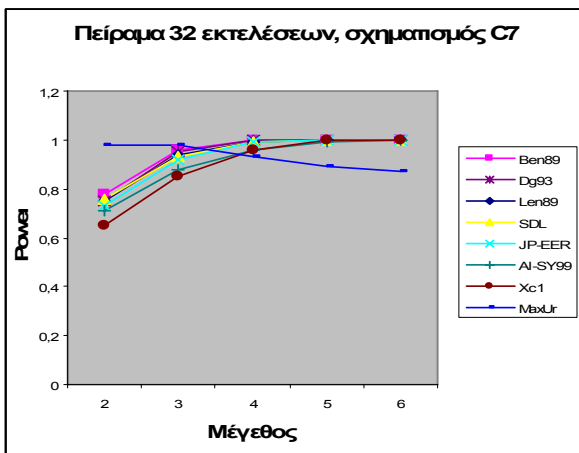
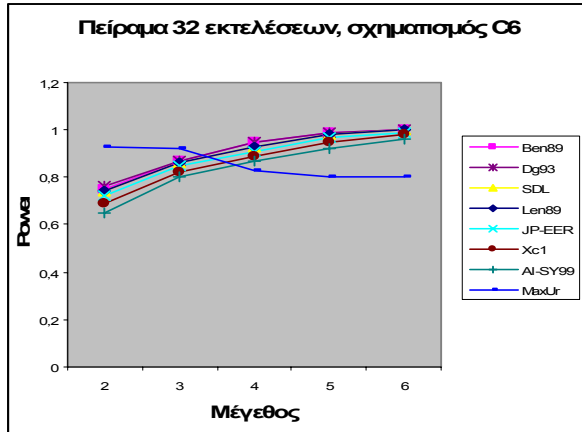
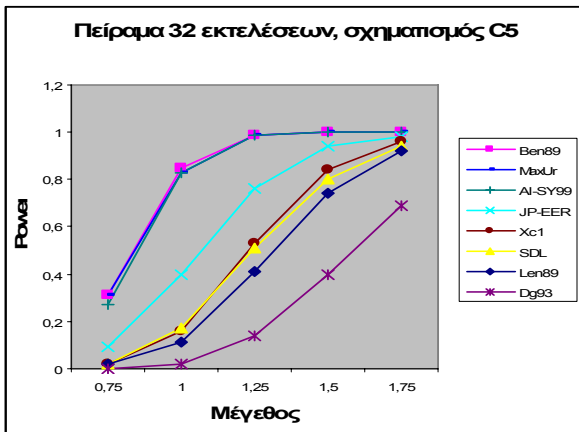
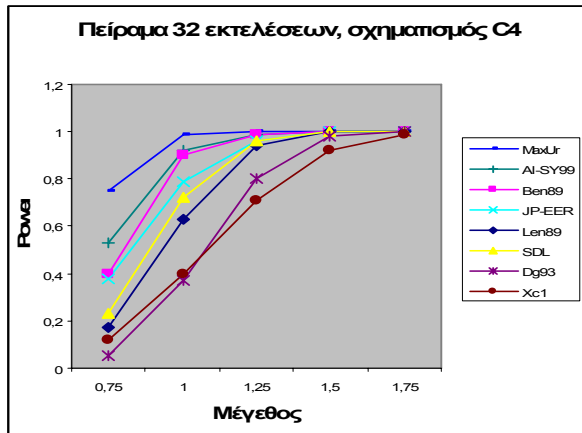
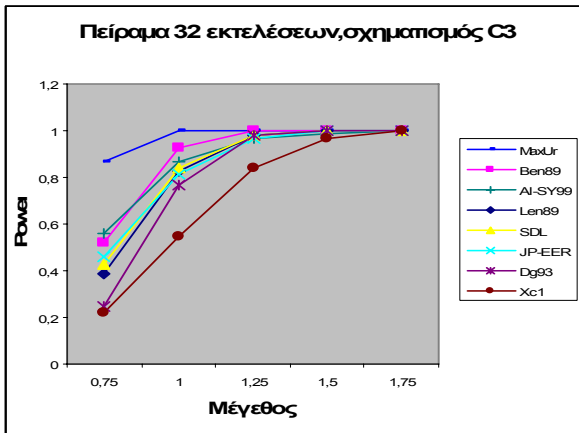
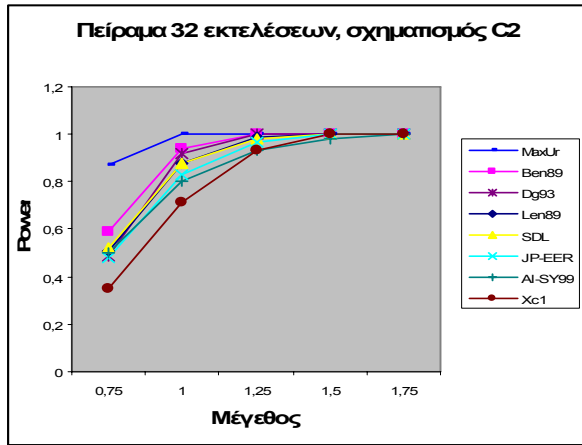
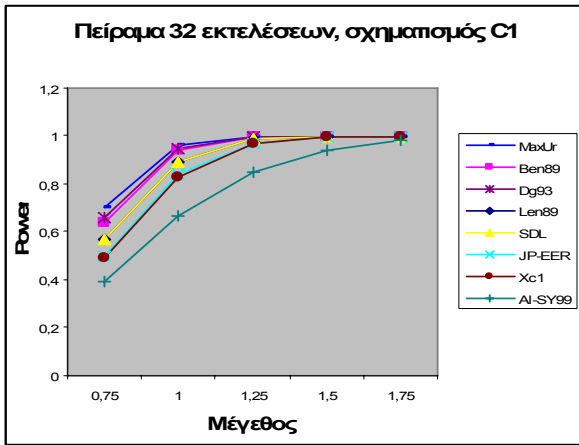
Σχεδιαγράμματα για το κριτήριο PowerIII για τις μεθόδους οι οποίες ελέγχουν το EER στο 5%



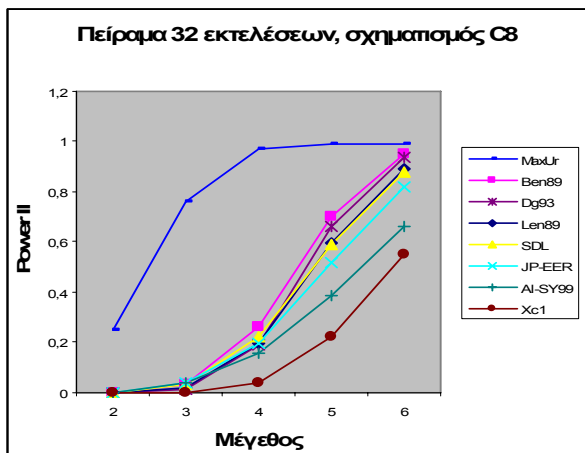
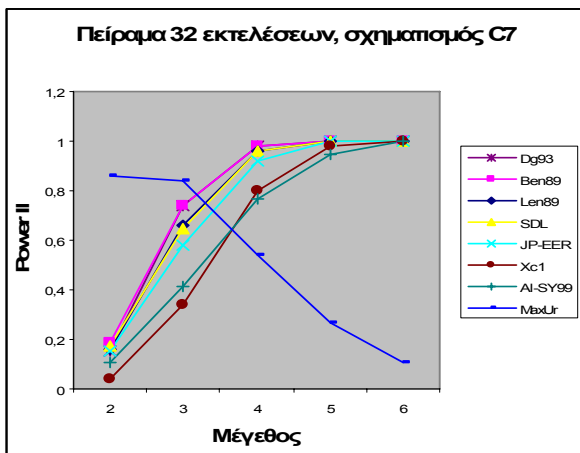
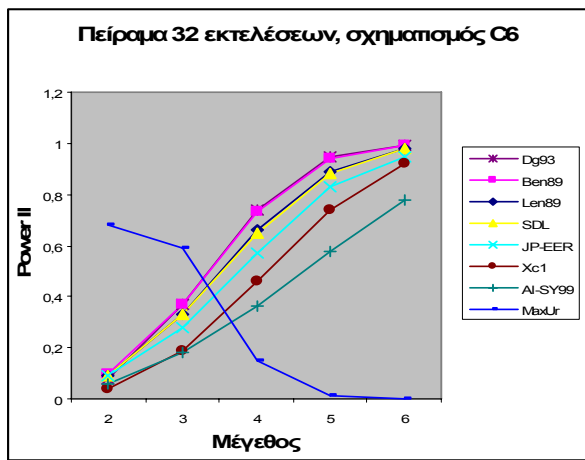
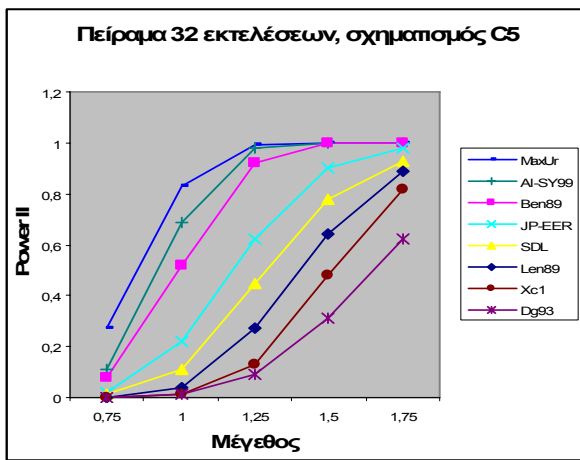
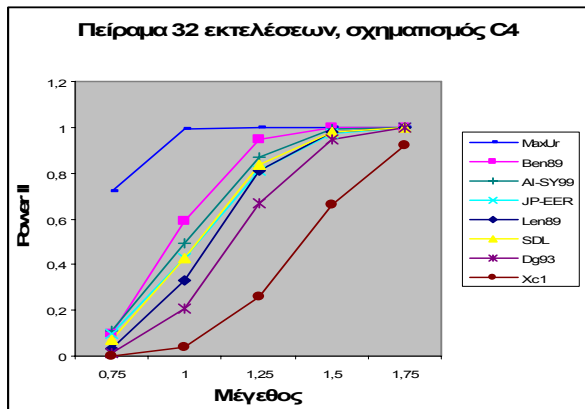
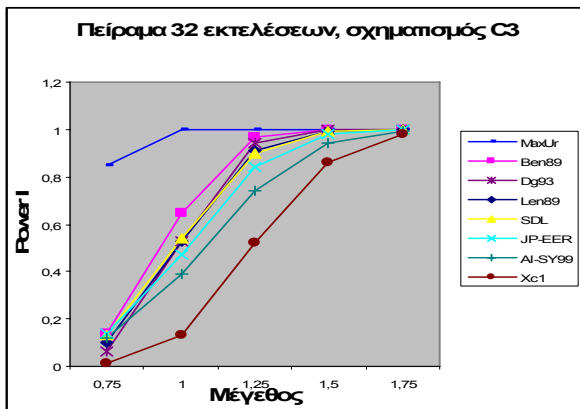
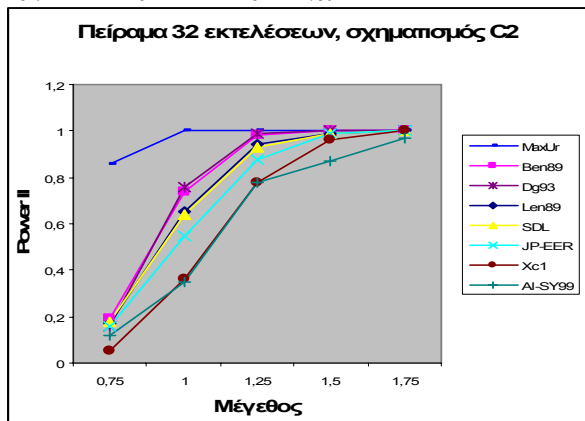
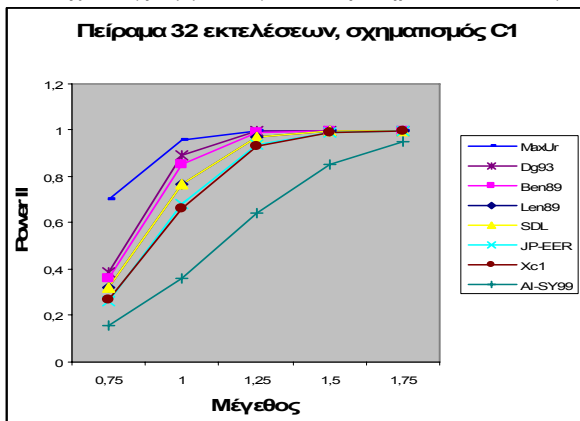
Σχεδιαγράμματα για το κριτήριο PowerComb για τις μεθόδους οι οποίες ελέγχουν το EER στο 5%



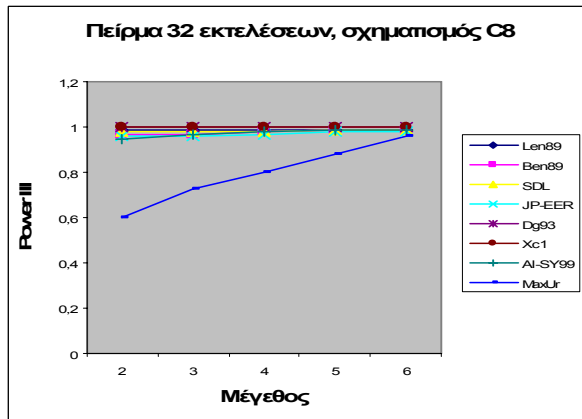
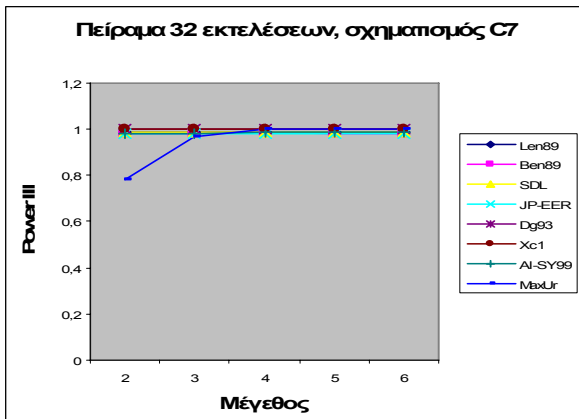
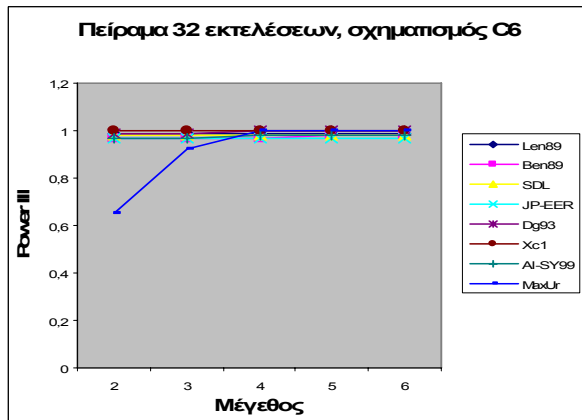
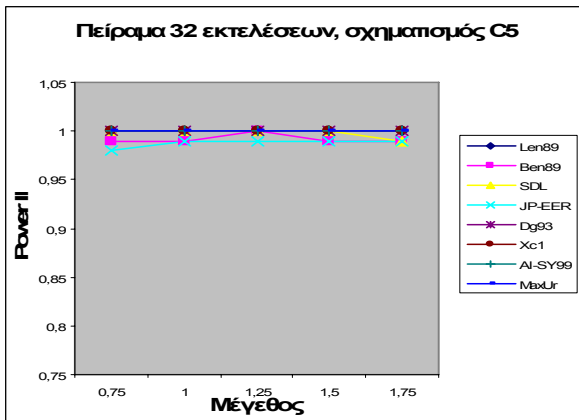
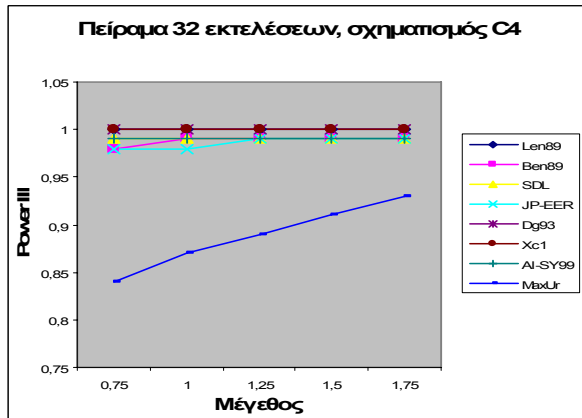
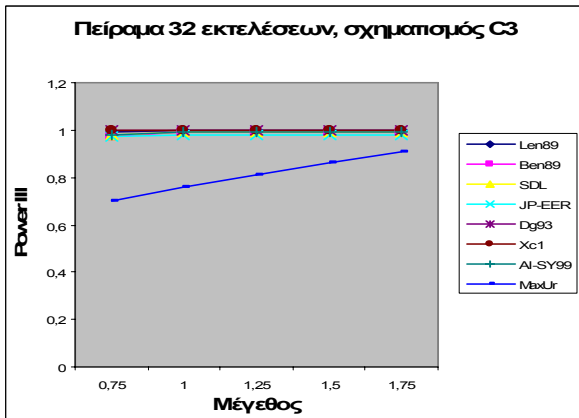
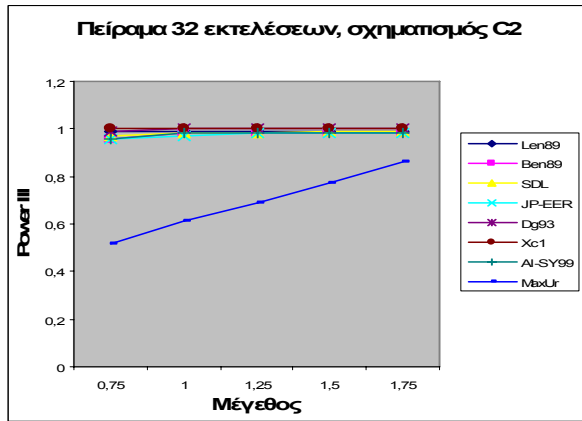
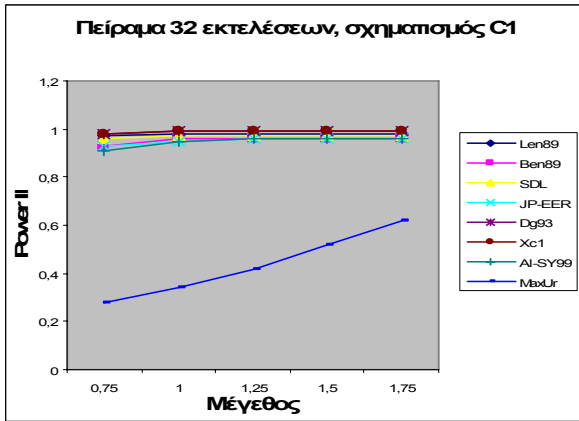
Σχεδιαγράμματα για το κριτήριο Power για τις μεθόδους οι οποίες ελέγχουν το EER στο 5%



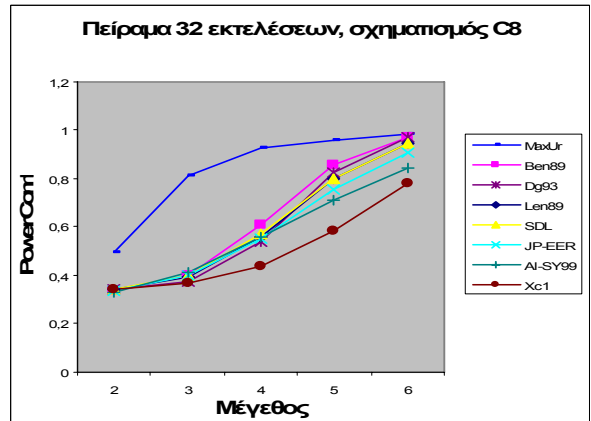
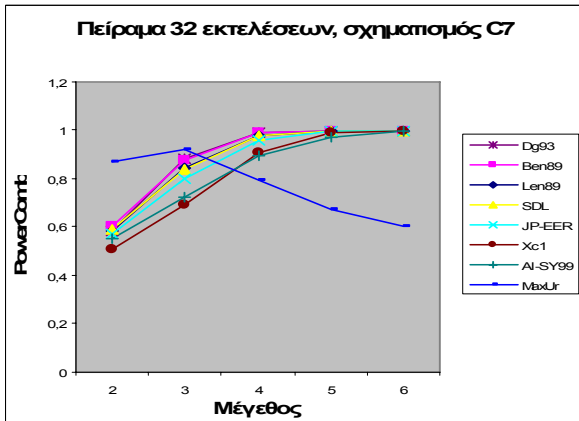
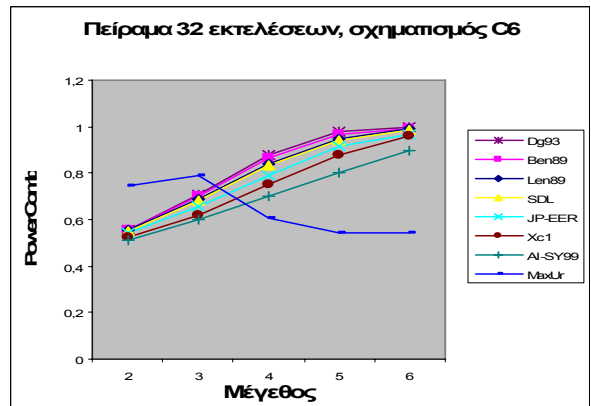
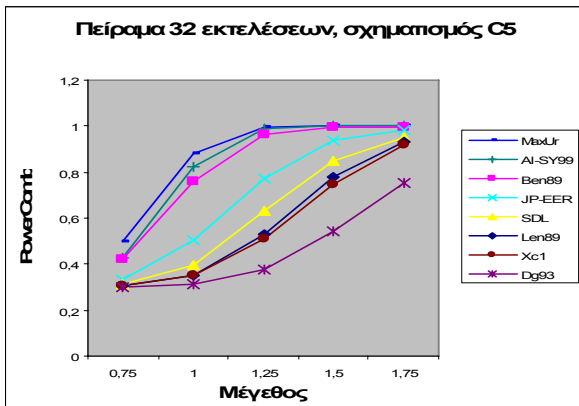
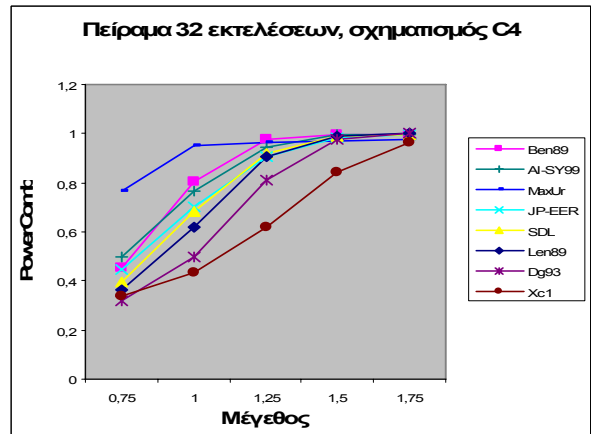
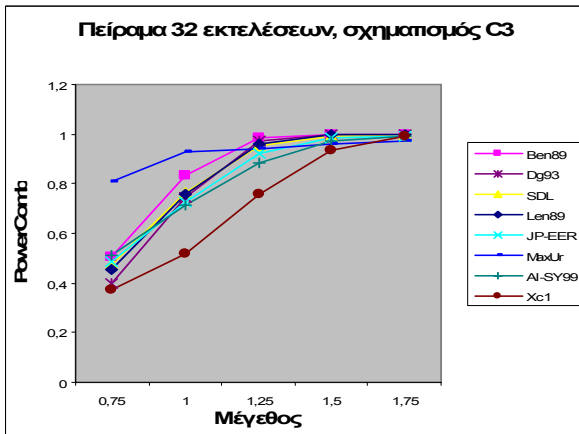
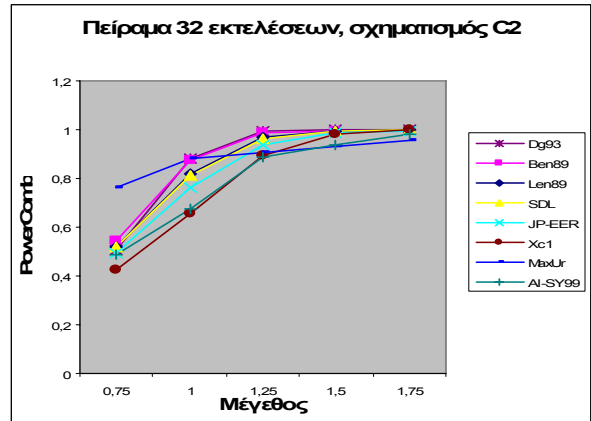
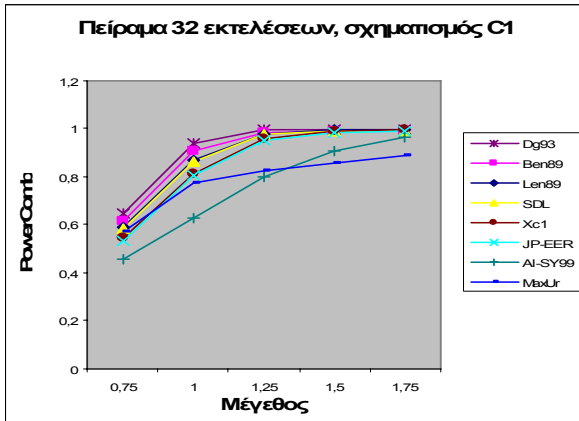
Σχεδιαγράμματα για το κριτήριο Power II για τις μεθόδους οι οποίες ελέγχουν το EER στο 5%



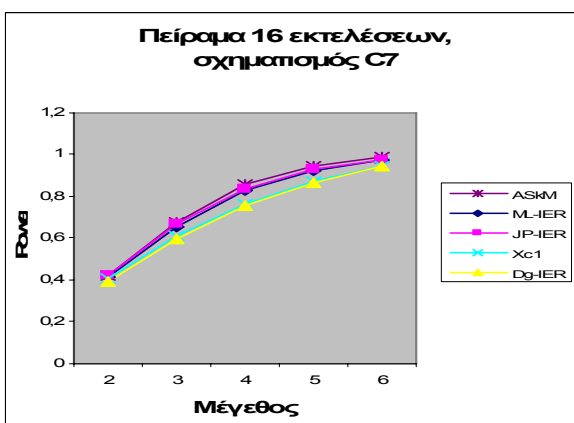
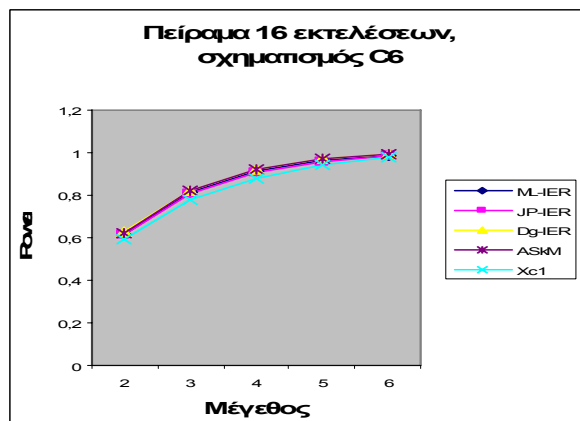
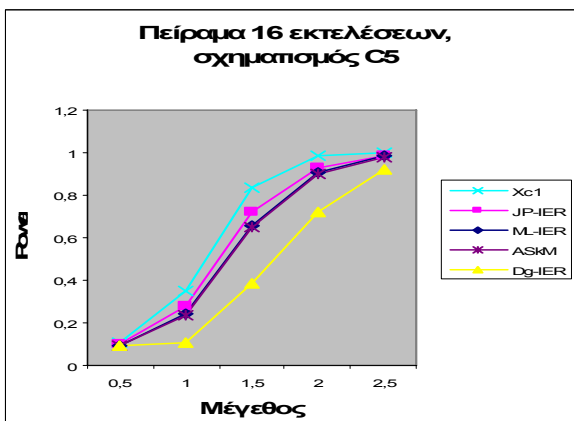
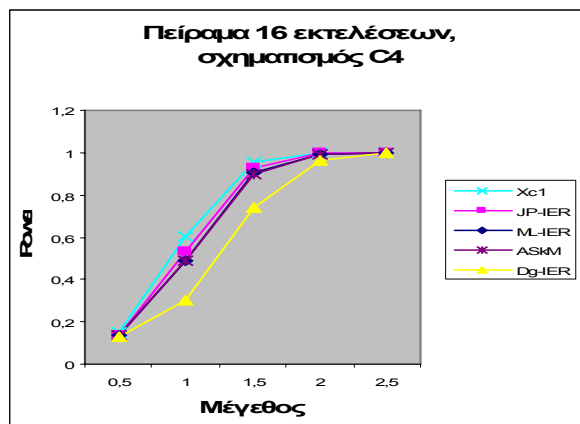
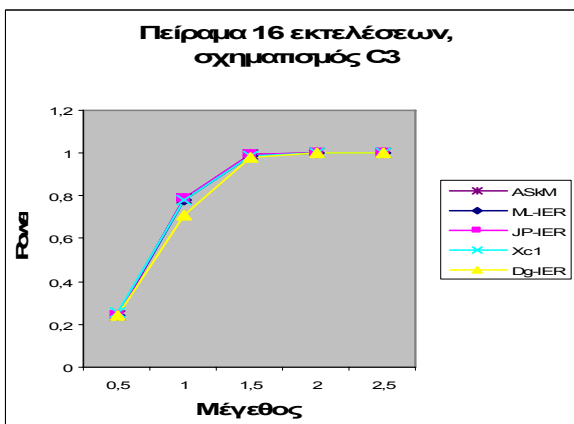
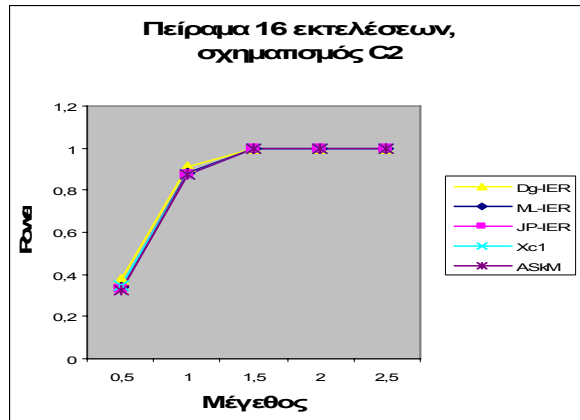
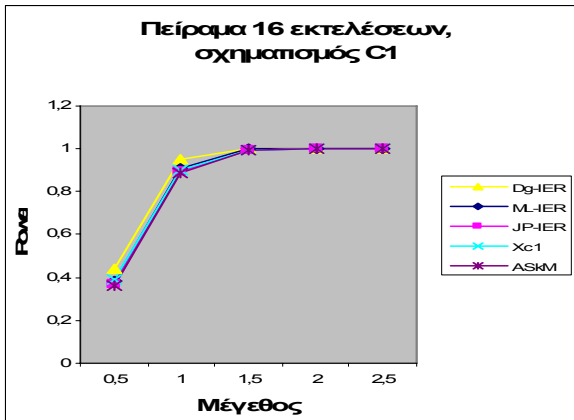
Σχεδιαγράμματα για το κριτήριο PowerIII για τις μεθόδους οι οποίες ελέγχουν το EER στο 5%



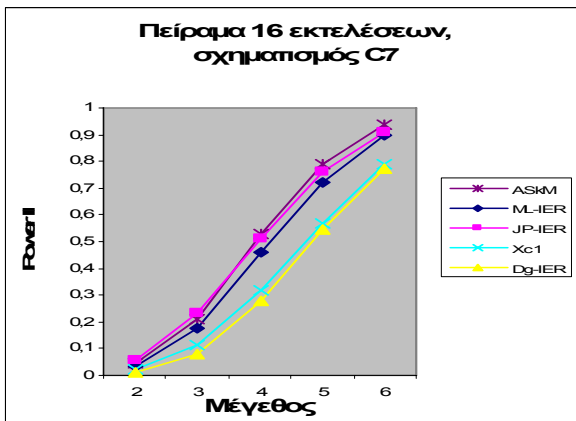
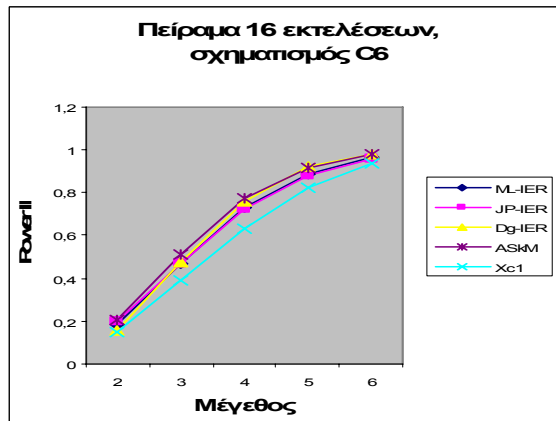
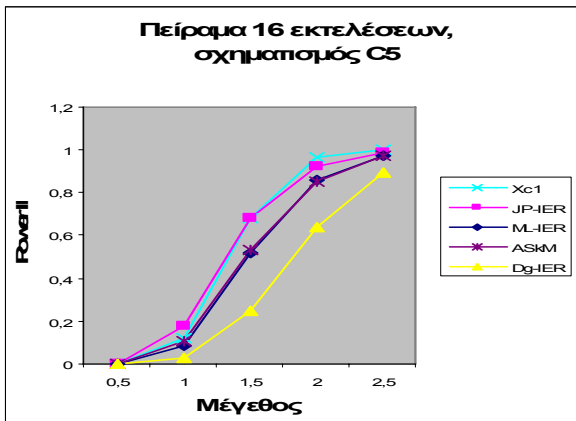
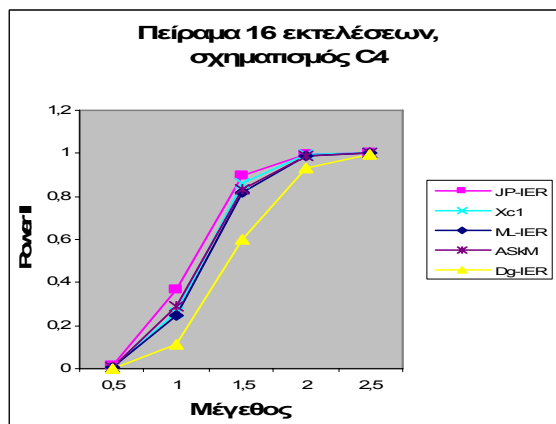
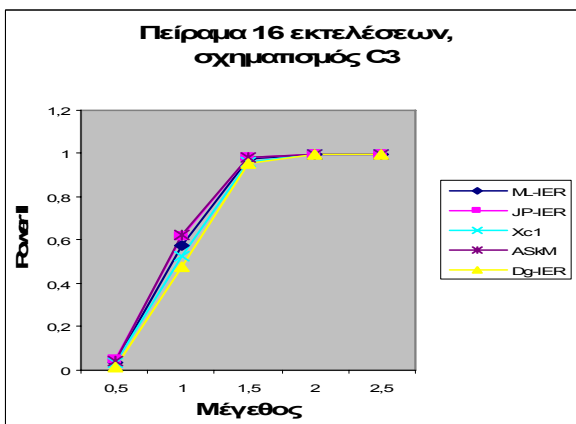
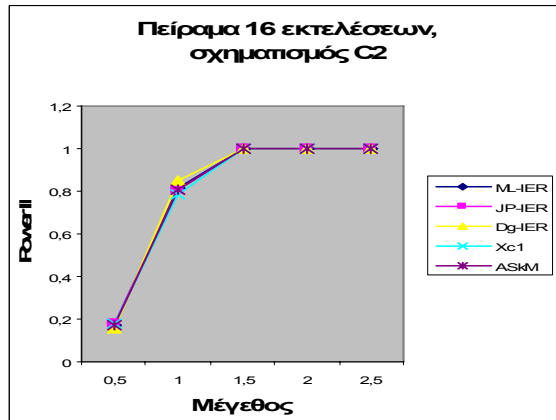
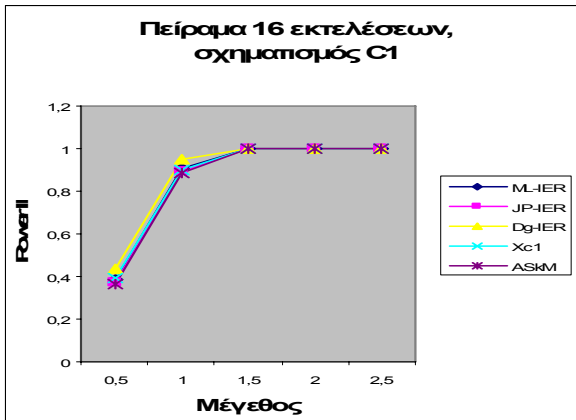
Σχεδιαγράμματα για το κριτήριο PowerComb για τις μεθόδους οι οποίες ελέγχουν το EER στο 5%



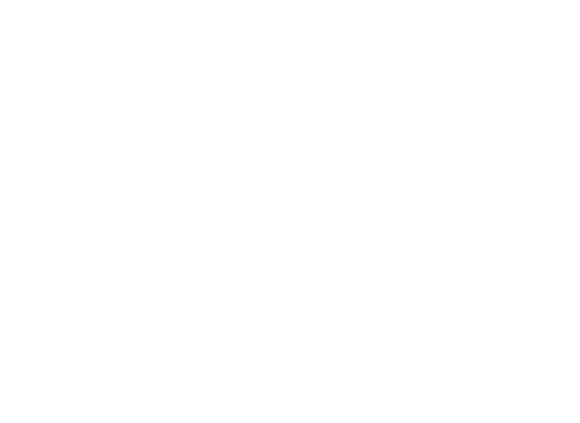
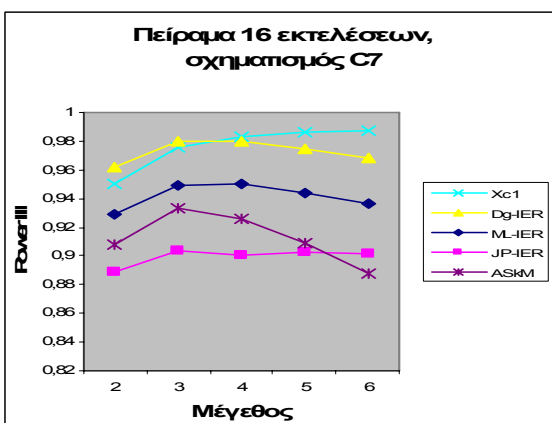
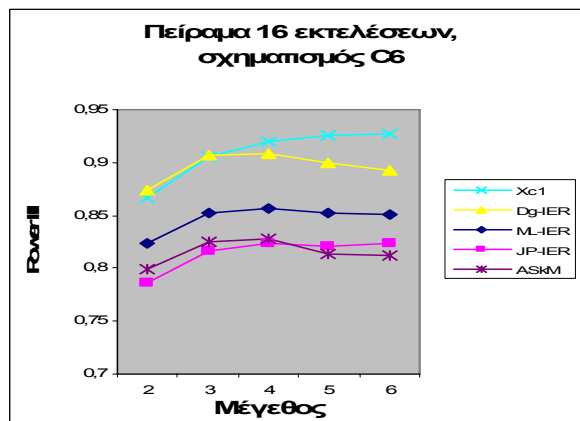
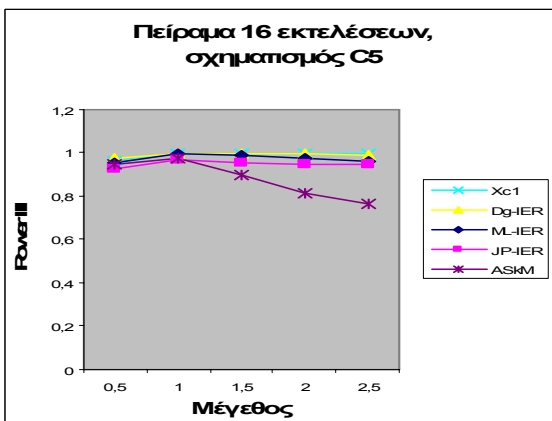
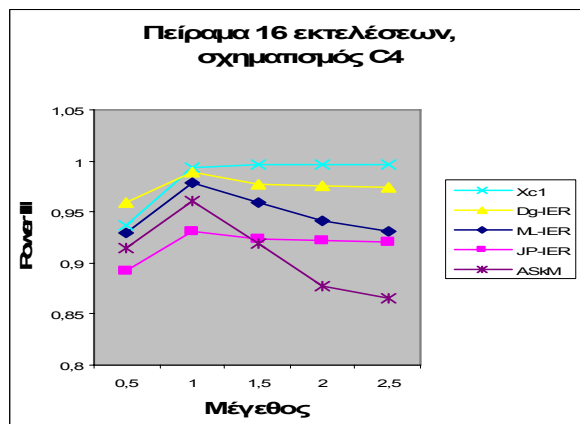
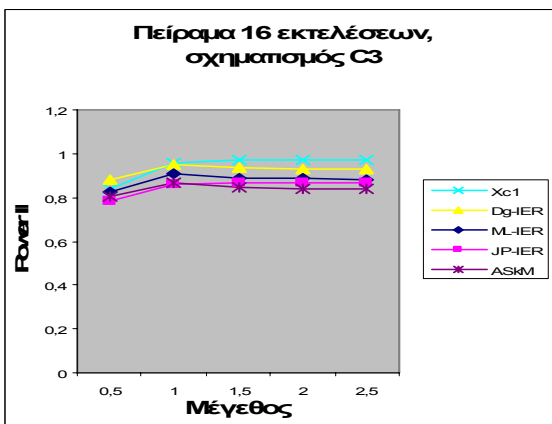
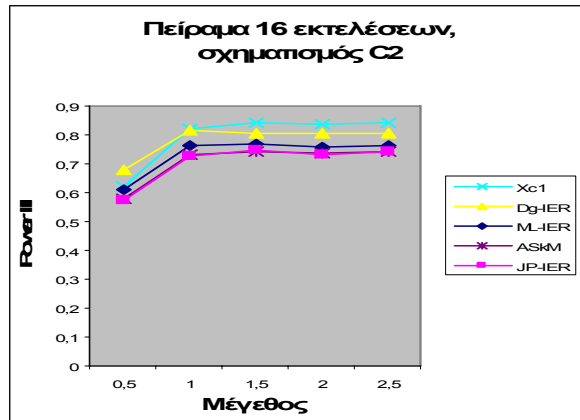
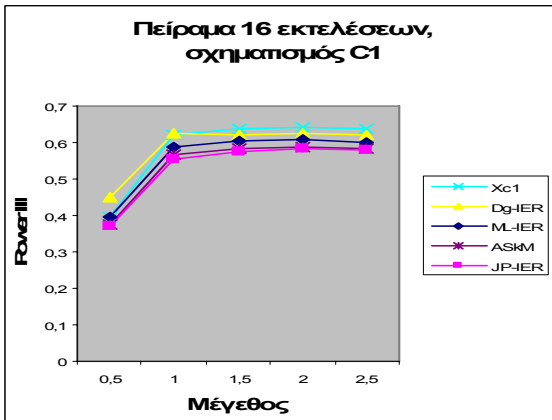
Σχεδιαγράμματα για το κριτήριο Power για τις μεθόδους οι οποίες ελέγχουν το IER στο 5%



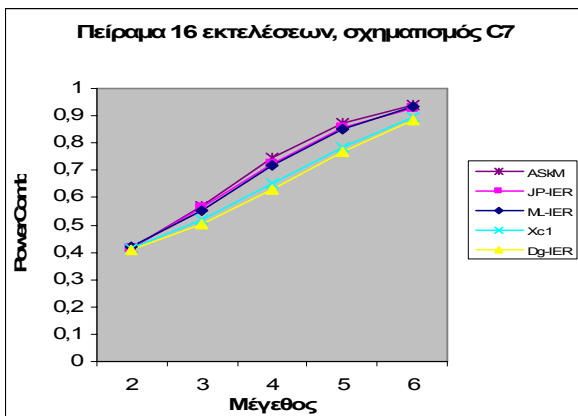
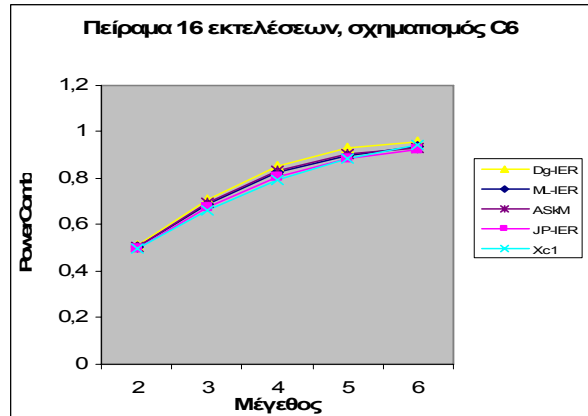
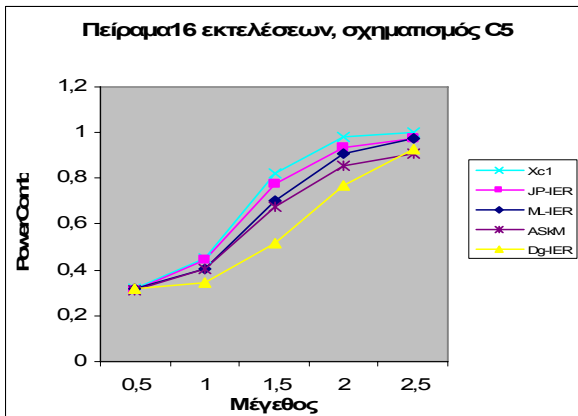
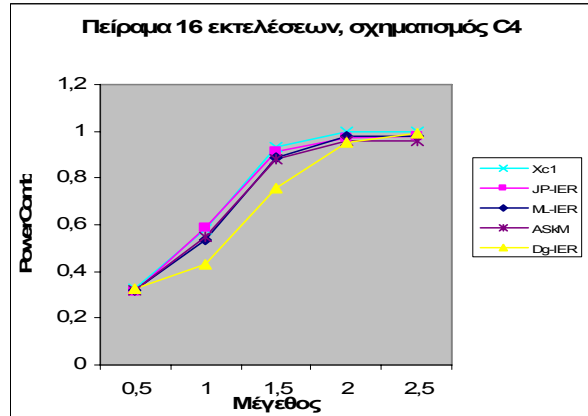
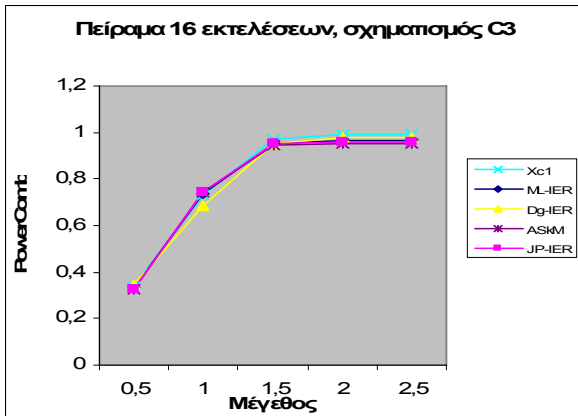
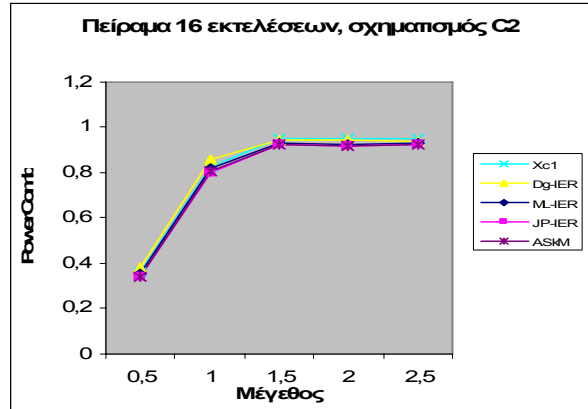
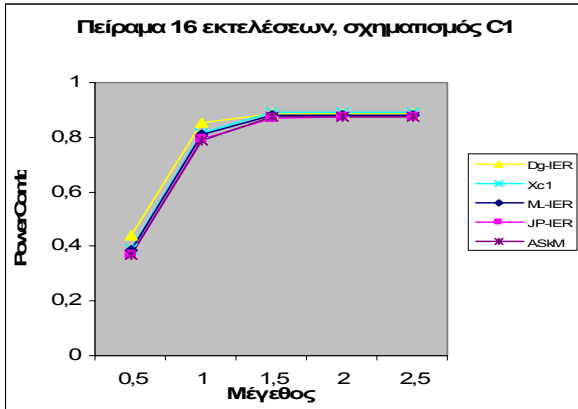
Σχεδιαγράμματα για το κριτήριο Power II για τις μεθόδους οι οποίες ελέγχουν το IER στο 5%



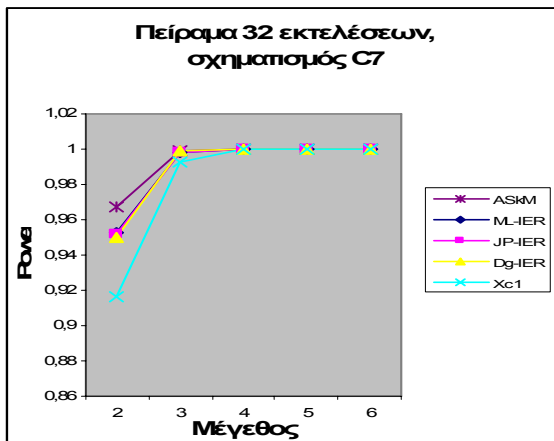
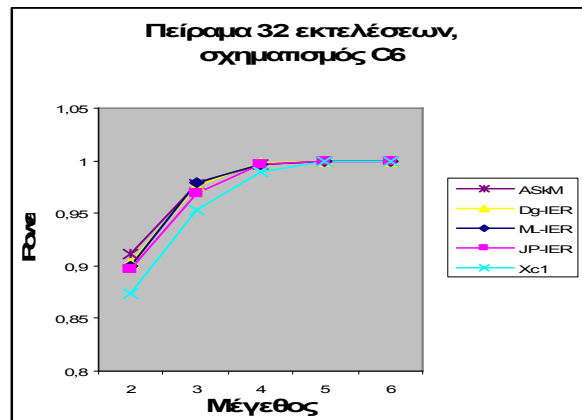
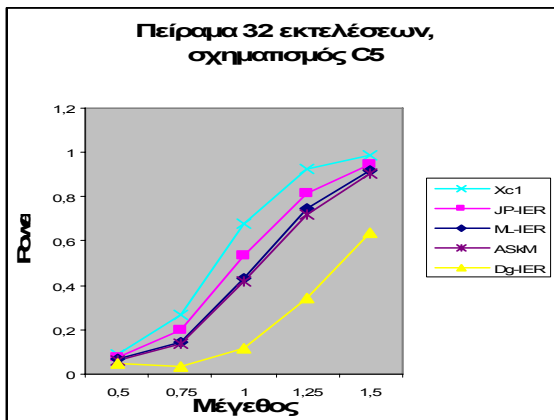
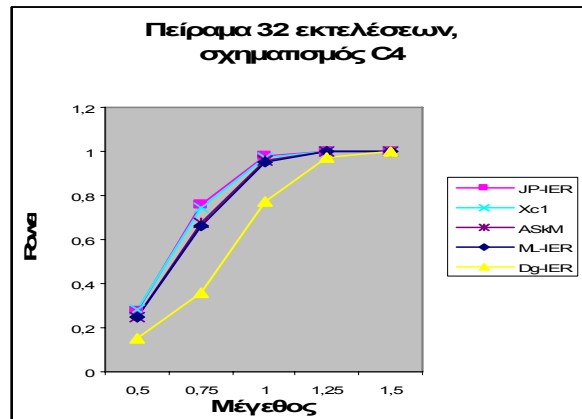
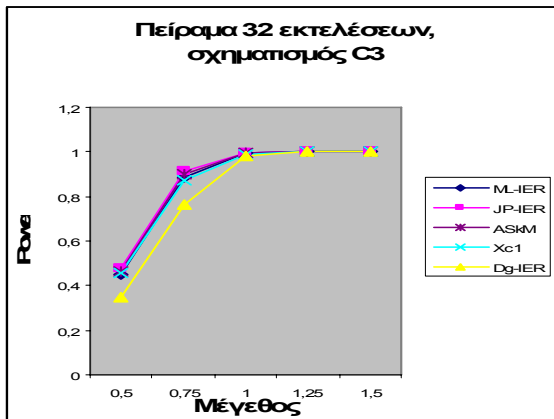
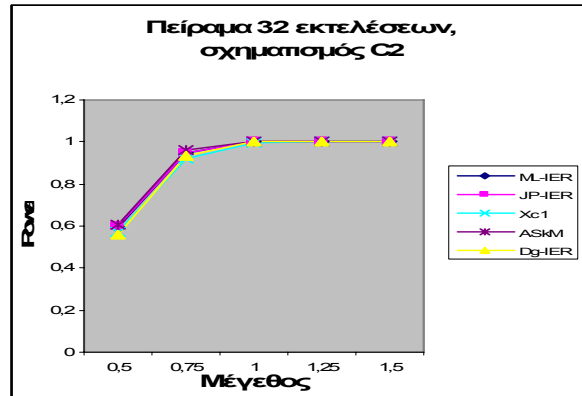
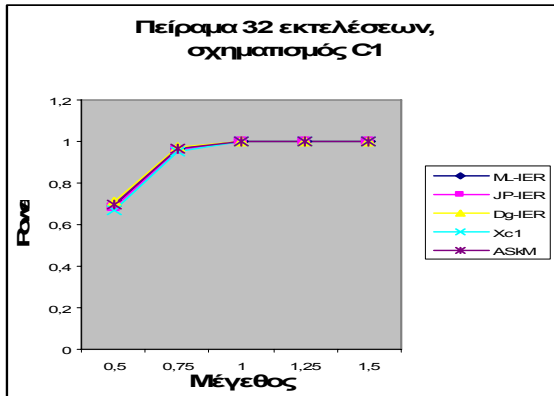
Σχεδιαγράμματα για το κριτήριο PowerIII για τις μεθόδους οι οποίες ελέγχουν το IER στο 5%



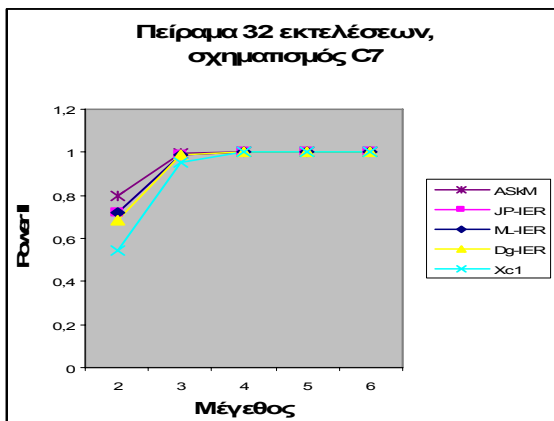
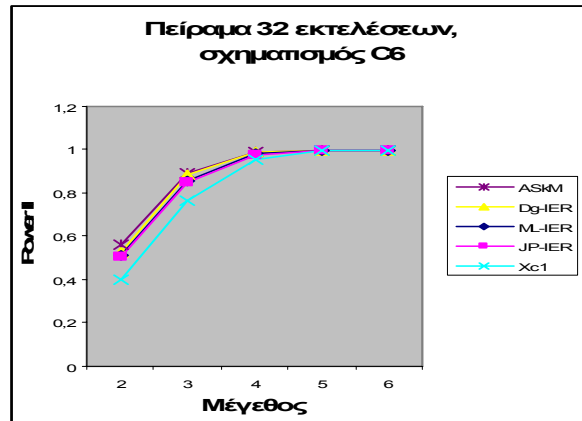
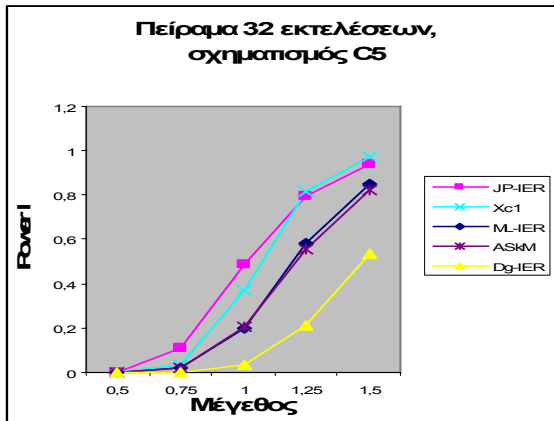
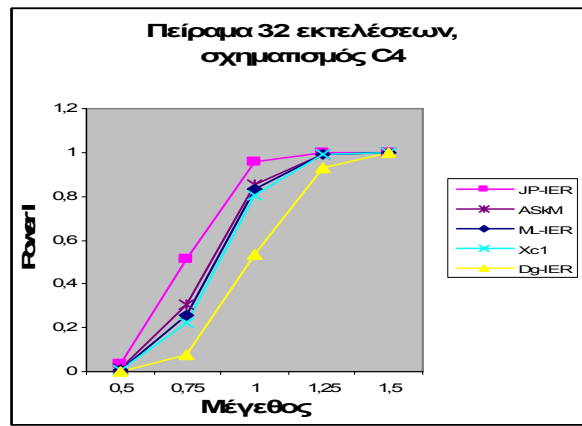
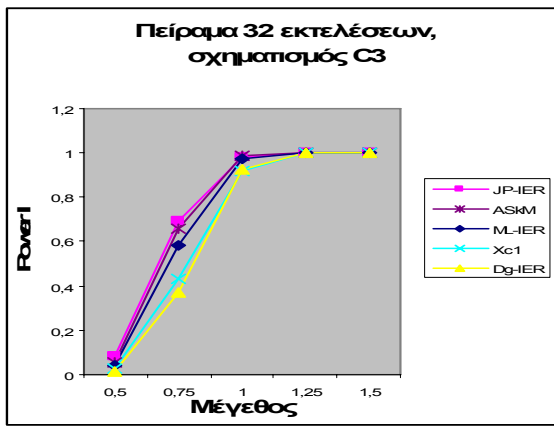
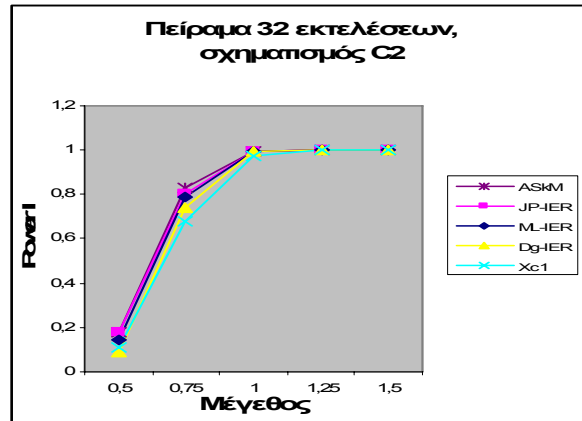
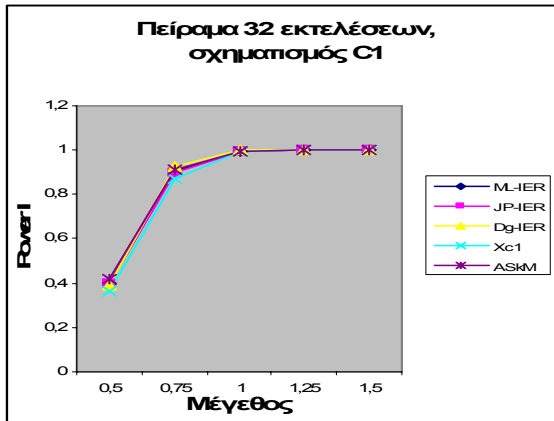
Σχεδιαγράμματα για το κριτήριο PowerComb για τις μεθόδους οι οποίες ελέγχουν το IER στο 5%



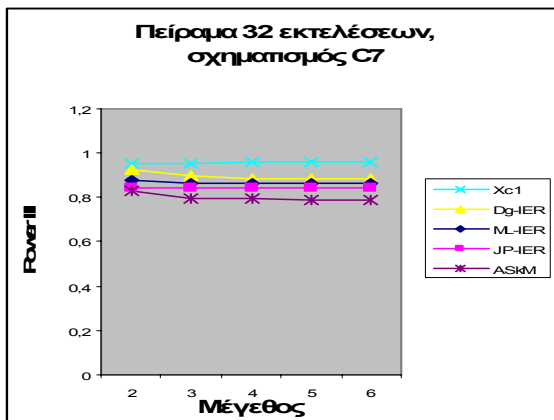
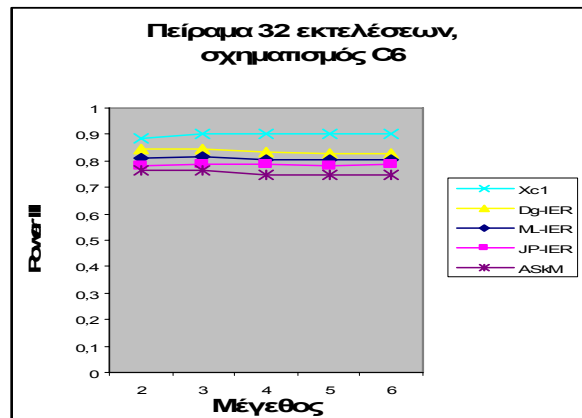
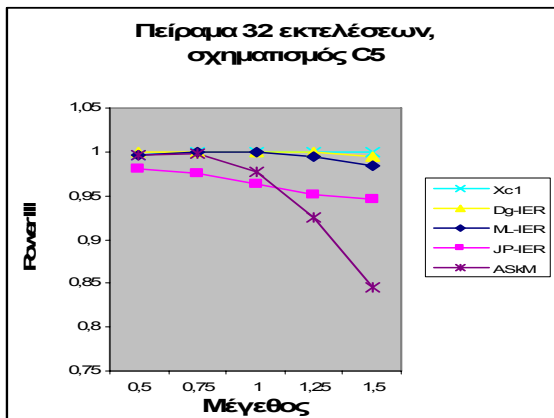
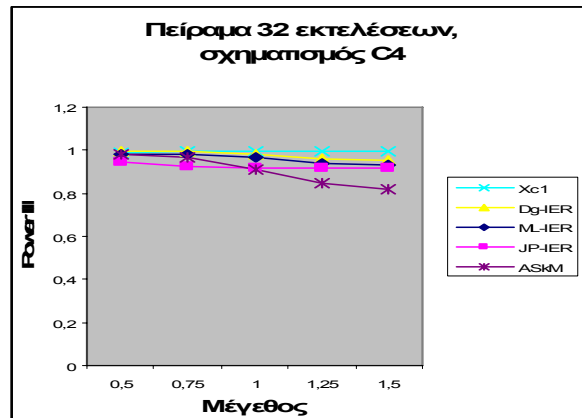
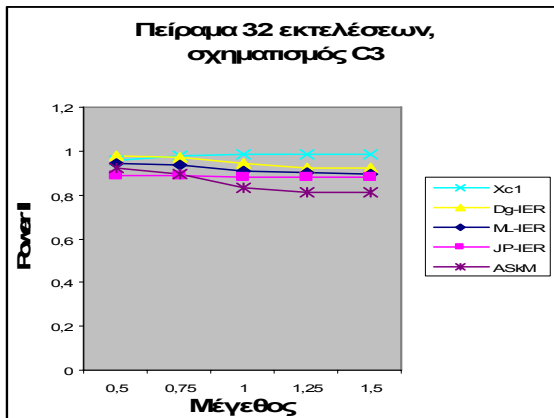
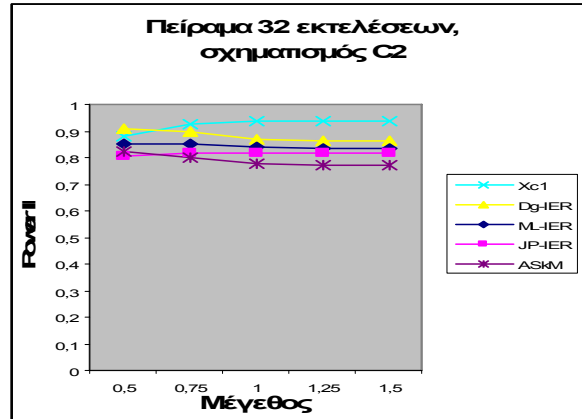
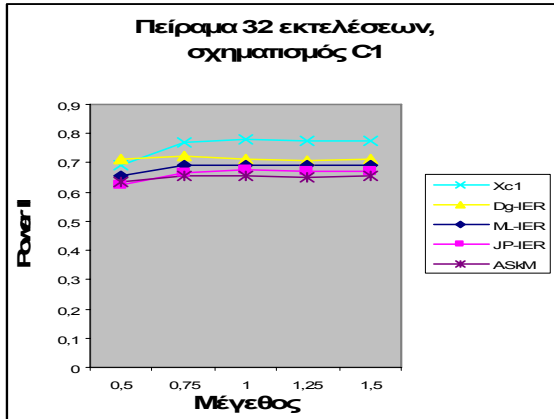
Σχεδιαγράμματα για το κριτήριο Power για τις μεθόδους οι οποίες ελέγχουν το IER στο 5%



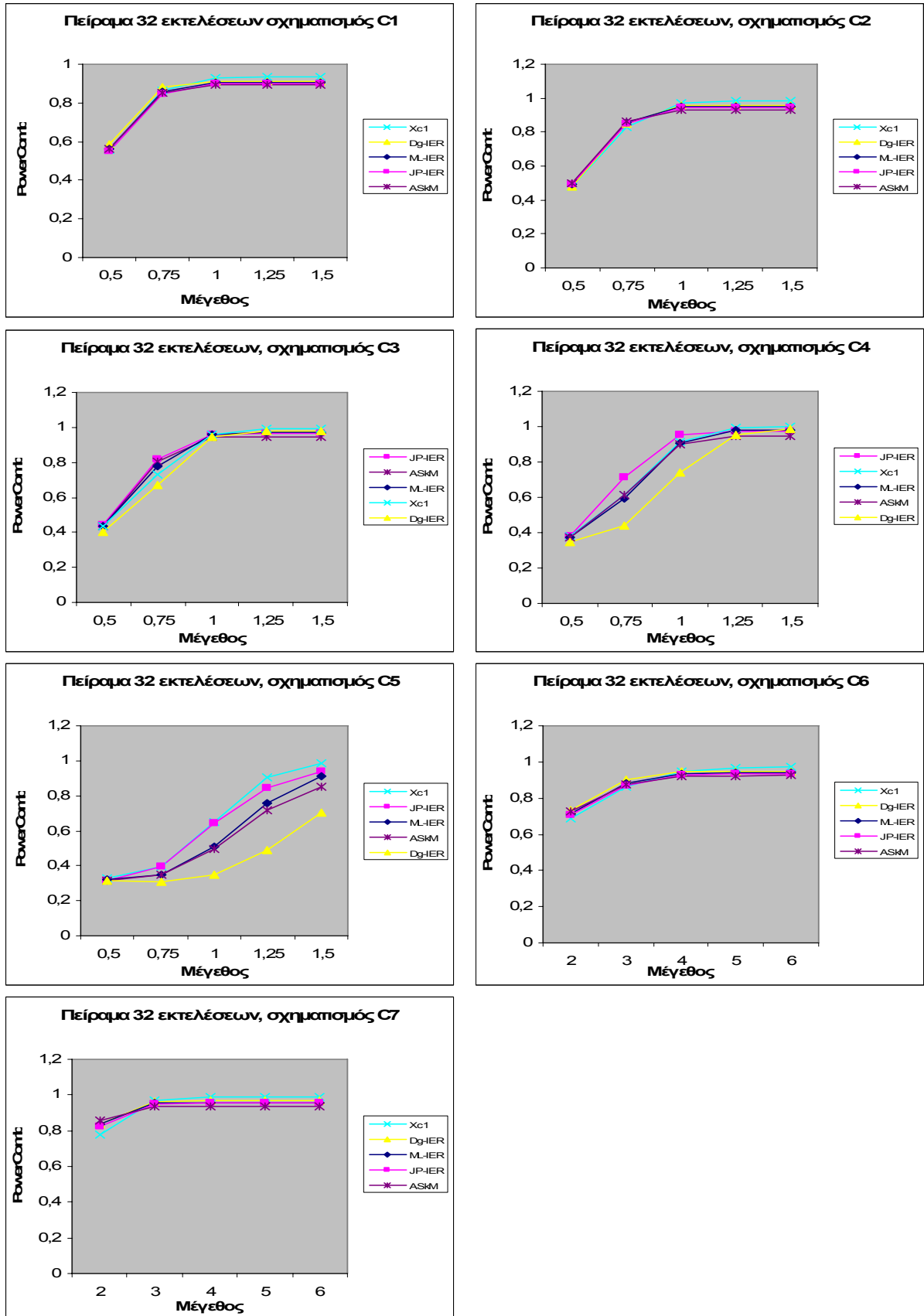
Σχεδιαγράμματα για το κριτήριο Power II για τις μεθόδους οι οποίες ελέγχουν το IER στο 5%



Σχεδιαγράμματα για το κριτήριο PowerIII για τις μεθόδους οι οποίες ελέγχουν το IER στο 5%

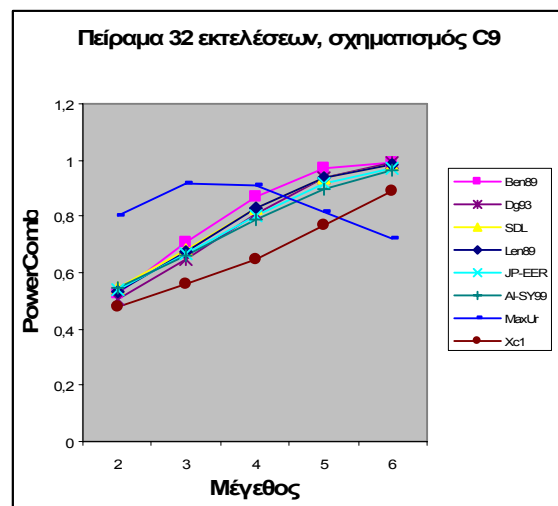
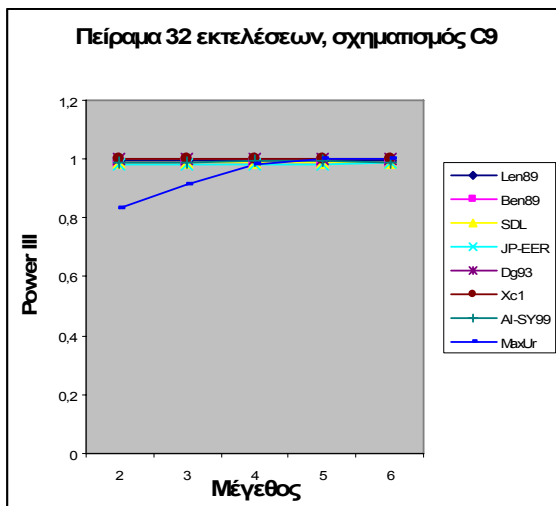
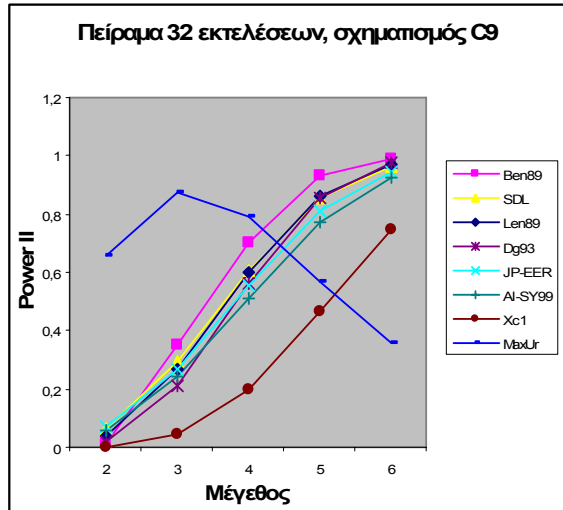
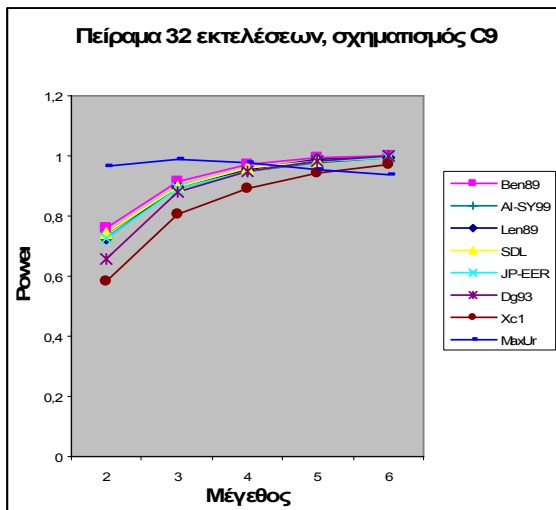


Σχεδιαγράμματα για το κριτήριο PowerComb για τις μεθόδους οι οποίες ελέγχουν το IER στο 5%



Πίνακας I.13: Σχηματισμός C9 για πείραμα 32 εκτελέσεων για τις μεθόδους που ελέγχουν το EER στο 5%

	Σχηματισμός	Size	Μέθοδος							
			Len89	Ben89	SDL	JP-EER	Dg93	$\chi_{c1}EER$	AI-SY99	MaxUr
Power	C9	2	0.7246	0.7590	0.7444	0.7273	0.6593	0.5808	0.7449	0.9629
		3	0.8952	0.9146	0.8997	0.8895	0.8775	0.8060	0.8898	0.9873
		4	0.9571	0.9695	0.9575	0.9507	0.9513	0.8940	0.9469	0.9794
		5	0.9861	0.9932	0.9856	0.9809	0.9855	0.9425	0.9770	0.9571
		6	0.9967	0.9990	0.9963	0.9947	0.9974	0.9742	0.9927	0.9355
Power II	C9	2	0.0371	0.0121	0.0643	0.0734	0.0188	0.0031	0.0588	0.6555
		3	0.2655	0.3514	0.2932	0.2663	0.2124	0.043	0.2416	0.8734
		4	0.6021	0.7048	0.6082	0.5575	0.5595	0.2004	0.5108	0.7941
		5	0.8626	0.9323	0.8571	0.8134	0.8575	0.4629	0.7717	0.5710
		6	0.9674	0.9901	0.9628	0.9470	0.9737	0.7438	0.9274	0.3550
Power III	C9	2	0.9975	0.9879	0.9899	0.9820	0.9996	0.9999	0.9906	0.8305
		3	0.9969	0.9874	0.9897	0.9841	0.9995	0.9999	0.9916	0.9152
		4	0.9966	0.9897	0.9904	0.9840	0.9995	0.9999	0.9924	0.9849
		5	0.9959	0.9891	0.9908	0.9851	0.9995	0.9999	0.9921	0.9995
		6	0.9960	0.9887	0.9912	0.9861	0.9994	0.9999	0.9916	1
PowComb	C9	2	0.5315	0.5289	0.5460	0.5422	0.5052	0.4754	0.5442	0.8002
		3	0.6738	0.7112	0.6841	0.6686	0.6481	0.5590	0.6611	0.9201
		4	0.8269	0.8697	0.8276	0.8034	0.8090	0.6483	0.7861	0.9069
		5	0.9396	0.9676	0.9358	0.9152	0.9385	0.7679	0.8994	0.8154
		6	0.9848	0.9923	0.9814	0.9730	0.9885	0.8897	0.9662	0.7227



Βιβλιογραφία

- 1) Κουκουβίνος Χ. “Γραμμικά Μοντέλα και Σχεδιασμοί” , Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα 2005
- 2) Montgomery D.C. “Design and Analysis of Experiments”, 5th Edition, John Wiley and Sons, New York 2001
- 3) Canavos, George C. “Applied Probability and Statistical Methods”, Little, Brown and Company
- 4) Al-Shiha A.A., Yang S. S. “A Multistage Procedure Analysing Unreplicated Factorial Experiments”, Biometrical Journal 41 (1999)
- 5) Al-Shiha A.A., Yang S. S. “Critical Values and Some Properties of a new Test Statistic Analysing Unreplicated Factorial Experiments”, Biometrical Journal 42 (2000)
- 6) Chen Y., Kunert J. “A new Quantitative Method for Analysing Unreplicated Factorial Experiments”, Biometrical Journal 46 (2004)
- 7) Dong F. “On the Identification of Active Contrasts of Unreplicated Fractional Factorials”, Statistica Sinica 3 (1993)
- 8) Ye K., Hamada M., Wu C.F.J., “A Step-Down Lenth Method for Analysing Unreplicated Factorial Designs”, Journal of Quality Control 33, No 2 (2001)
- 9) Lawson J., Grimshaw S., Burt J. “A Quantitative Method for Identifying Active Contrasts in Unreplicated Factorial Designs Based on the Half-Normal Plot”, Computational Statistics & Data Analysis 26 (1998)
- 10) Hamada M., Balakrishnan N. “Analysing Unreplicated Factorial Experiments: A Review with Some New Proposals”, Statistica Sinica 8 (1998)
- 11) Box G., Meyer R. “An analysis for Unreplicated Fractional Factorials”, Technometrics 28 (1986)
- 12) Benski C. “Use of a Normality Test to Identify Significant Effects in Factorial Designs”, Journal of Quality Technology 21 (1989)
- 13) Juan J., Pena D. “A Simple Method to Identify Significant Effects in Unreplicated Two-Level Factorial Designs” Communication in Statistics Theory and Methods 21 (1992)
- 14) Daniel C. “Use of Half-Normal Plots in Interpreting Factorial Two-Level Experiments”, Technometrics 1 (1959)
- 15) Draper N., Smith H. ”Εφαρμοσμένη Ανάλυση Παλινδρόμησης”, Εκδόσεις Παπαζήση (1997)
- 16) Κοκολάκης Γ., Σπηλιώτης Ι. “Εισαγωγή στις Πιθανότητες”, Εκδόσεις Συμεών (2002)

17) Lenth R.V. "Quick and Easy Analysis of Unreplicated Factorials", *Technometrics* 31 (1989)

18) Αγγελόπουλος Π. "Στατιστική Ανάλυση και Κριτήρια Ταξινόμησης Κλασματικών Παραγοντικών Σχεδιασμών", Διπλωματική Εργασία Μ.Δ.Ε. στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά (2005)

19) Aboukalam M.A.F., Al-Shiha A.A. "A Robust Analysis for Unreplicated Factorial Experiments", *Computational Statistics & Data Analysis* 36 (2001)