



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

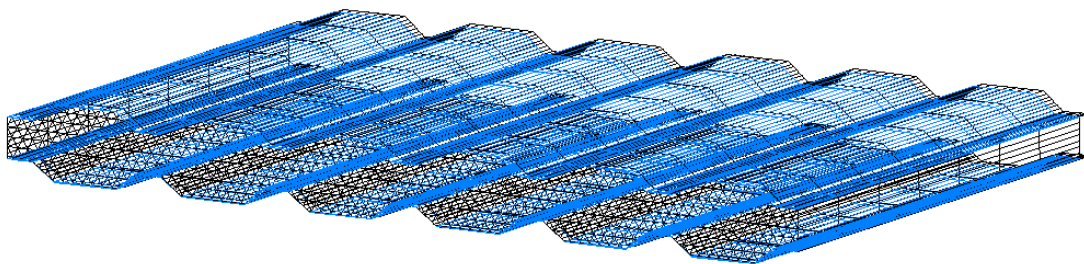
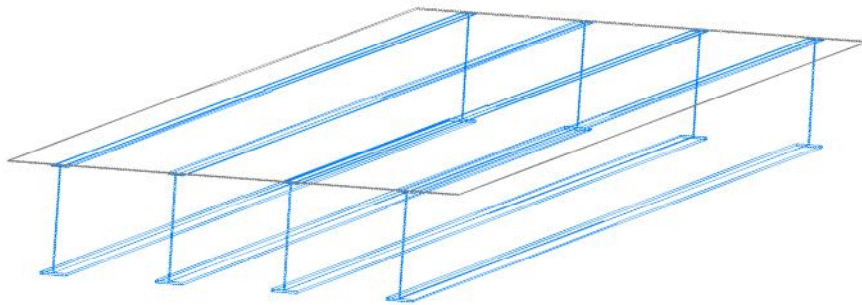
**ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**Τομέας Δομοστατικής**

**Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**ΛΕΠΤΟΤΟΙΧΕΣ ΔΙΑΤΟΜΕΣ ΜΕ  
ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΜΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**



**Αλέξανδρος Γ. Τριγωνάκης  
Σπυρίδων Ν. Κατσούλας**

**Επιβλέπων Καθηγητής : Γεώργιος Μιχάλτσος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.**

**Αθήνα  
2009**



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**Τομέας Δομοστατικής**

**Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**ΛΕΠΤΟΤΟΙΧΕΣ ΔΙΑΤΟΜΕΣ ΜΕ  
ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΜΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**

**Αλέξανδρος Γ. Τριγωνάκης  
Σπυρίδων Ν. Κατσούλας**

**Επιβλέπων Καθηγητής : Γεώργιος Μιχάλτσος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.**

**Αθήνα  
2009**

## **Ευχαριστίες**

Θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε θερμά τον επιβλέποντα της εργασίας μας, καθηγητή κύριο Γεώργιο Μιχάλτσο, για την βοήθεια και τις πολύτιμες συμβουλές που μας προσέφερε σχετικά με το θέμα που διαπραγματευτήκαμε, καθώς και την κυρία Κατερίνα Μιχάλτσου για την υπομονή της.

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	1
2. Η ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΜΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ	
2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	2
2.2 ΣΤΡΕΨΗ ΚΑΘΑΡΑ ΚΑΙ ΜΗ.....	3
2.3 Η ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΕΚΤΟΣ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΤΗΣ	
2.3.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΩΣΕΩΣ.....	4
2.3.2 ΟΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ ΤΗΣ ΣΤΡΕΠΤΙΚΗΣ ΚΑΜΠΥΛΩΣΕΩΣ.....	6
2.4 Η ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΤΗΣ	
2.4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	7
2.4.2 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ - Η ΚΑΜΠΥΛΗ ΔΟΚΟΣ.....	8
2.4.3 ΣΤΡΕΒΛΩΣΗ ΕΛΑΣΜΑΤΩΝ.....	11
2.4.4 Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΩΝ ΜΟΝΩΤΙΚΩΝ ΠΑΝΩ.....	13
2.4.5 ΣΩΛΗΝΩΤΕΣ ΔΙΑΤΟΜΕΣ – ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ BRAZIER...	17
3. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ	
3.1 ΚΑΜΠΥΛΩΣΗ ΔΙΑΤΟΜΗΣ.....	27
3.2 ΣΤΡΕΒΛΩΣΗ (CURLING) ΕΛΑΣΜΑΤΩΝ.....	29
3.3 ΜΟΝΩΤΙΚΑ ΠΑΝΩ.....	30
3.4 Η ΔΟΚΟΣ ΣΩΛΗΝΩΤΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ.....	31

4. Η ΠΑΡΟΥΣΑ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ	34
4.1 ΓΕΦΥΡΕΣ.....	34
4.2 ΕΠΙΚΑΛΥΨΕΙΣ.....	38
4.3 ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΜΕΝΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ.....	41
4.3.1 ΓΕΝΙΚΑ.....	41
4.3.2 ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΓΙΑ ΓΕΦΥΡΕΣ.....	41
4.3.2.1 ΜΗΔΕΝΙΚΟ ΑΡΧΙΚΟ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΟ ΒΕΛΟΣ.....	41
4.3.2.2 ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΟ ΑΡΧΙΚΟ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΟ ΒΕΛΟΣ.....	44
4.3.3 ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΓΙΑ ΜΟΝΩΤΙΚΑ ΠΑΝΩ.....	47
4.3.3.1 ΜΟΝΩΤΙΚΟ ΠΑΝΩ ΧΑΜΗΛΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ.....	47
4.3.3.2 ΜΟΝΩΤΙΚΟ ΠΑΝΩ ΥΨΗΛΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ.....	49
4.4 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ.....	52
4.4.1 ΓΕΦΥΡΕΣ.....	52
4.4.2 ΕΠΙΚΑΛΥΨΕΙΣ.....	61
4.5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	70
4.5.1 ΓΕΦΥΡΕΣ.....	70
4.5.2 ΕΠΙΚΑΛΥΨΕΙΣ.....	72

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

## 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάμε την επιρροή του φαινομένου Brazier σε αμφιέριστες γέφυρες διαφόρων ανοιγμάτων, καθώς και σε επικαλύψεις-μονωτικά πανώ. Το φαινόμενο Brazier χαρακτηρίζεται από την μεταβολή της αντοχής της μελετώμενης διατομής λόγω της αναπτυσσόμενης, από την φόρτιση, καμπυλότητας που επιτείνεται ιδιαίτερα από την ύπαρξη αρχικής καμπυλότητας (π.χ. λόγω αρχικής – κατασκευαστικής ατέλειας ή ηθελημένου κατασκευαστικού βέλους).

Πιο συγκεκριμένα, ερευνούμε το ποσοστό μεταβολής της ροπής αδρανείας της μελετώμενης διατομής, λόγω επιβολής ή μη κάποιας αρχικής καμπυλότητας, μεταφρασμένης σε αρχικό κατασκευαστικό βέλος κάμψης.

Στο πρώτο μέρος που αφορά τις γέφυρες, προσδιορίζουμε την μεταβολή της ροπής αδρανείας του καταστρώματος της γέφυρας για διάφορες τιμές ανοιγμάτων και διάφορες τιμές αρχικών καμπυλοτήτων.

Το δεύτερο μέρος της εργασίας, αφορά τα μονωτικά πανώ. Τα πανώ αυτά επικαλύπτουν επιφάνειες της κατασκευής προσφέροντας επιθυμητή μόνωση στο εσωτερικό. Συνίστανται από δύο ελάσματα, μεταξύ των οποίων παρεμβάλλεται μονωτικό υλικό, όπως πολυουρεθάνη. Τα ελάσματα μπορεί να είναι επίπεδα ή συνήθως πτυχωτά με υψηλά ή χαμηλά κύματα. Έτσι λοιπόν, όσον αφορά τα πανώ, μελετούμε την μεταβολή της ροπής αδρανείας της διατομής του, για δεδομένο άνοιγμα επικάλυψης και αρχική καμπυλότητα.

## 2. Η ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΜΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ

### 2.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Δύο θεμελιώδεις παραδοχές της θεωρίας της κάμψεως, είναι η παραδοχή Bernoulli, περί επιπεδότητας των διατομών και ακόμη η παραδοχή ότι κάθε διατομή παραμένει απαραμόρφωτη στο επίπεδο της.

Τα παραπάνω, για μικρές παραμορφώσεις και διατομές που πληρούν ωρισμένες προϋποθέσεις (π.χ. ικανοποιητικό πάχος ελασμάτων της διατομής), οδηγούν σε, κατ' αρχάς, αποδεκτά αποτελέσματα, που δεν αποκλίνουν ιδιαίτερα των πραγματικών.

Όταν όμως χρησιμοποιούνται λεπτότοιχες διατομές (και τούτο είναι πλέον σχεδόν ο κανόνας στις σύγχρονες μεταλλικές κατασκευές), οι παραπάνω παραδοχές οδηγούν σε ιδιαίτερα σημαντικές αποκλίσεις από την πραγματικότητα.

Η πραγματικά αναπτυσσόμενη εντατική κατάσταση, έχει μελετηθεί αυστηρά στην Μαθηματική Θεωρία της Ελαστικότητας [1, 2]. Εδώ, θα ασχοληθούμε με απλούστερες, αλλά εξίσου ακριβείς, αναλύσεις κατά την **τεχνική θεωρία της κάμψεως**.

Η παραμόρφωση μίας διατομής, τόσο στο επίπεδο της όσο και εκτός αυτού, οφείλεται σε ορθές τάσεις, πρωτογενείς ή δευτερογενείς, που υπό ωρισμένες προϋποθέσεις επιφέρουν τα παραπάνω αποτελέσματα. Την έννοια της πρωτογενούς και δευτερογενούς τάσεως θα εξηγήσουμε και θα κατανοήσουμε στη συνέχεια.

Πριν προχωρήσουμε στην λεπτομερή εξέταση των παραπάνω φαινομένων, θα ξαναθυμηθούμε ωρισμένες αρχές και έννοιες σχετικά με την καταπόνηση και την από αυτήν προκαλούμενη ένταση καθώς και τις συνθήκες που οδηγούν στη μία ή στην άλλη εντατική κατάσταση.

Ειδικότερα, θα ασχοληθούμε και θα εξετάσουμε το φαινόμενο της στρέψεως.

## 2.2. ΣΤΡΕΨΗ ΚΑΘΑΡΑ ΚΑΙ ΜΗ

Θεωρούμε ράβδο ευθύγραμμη μήκους  $l$ , με σταθερή κατά μήκος διατομή, η οποία καταπονείται στα άκρα της με την στρεπτική ροπή  $M_x$  και μόνο. Τότε οι ίνες της ράβδου, οι παράλληλες στον άξονα  $x$  (σχήμα 2.1 α), θα στραφούν όπως στο σχήμα 2.1 β, ενώ η ράβδος λόγω ακριβώς αυτής της στροφής και αφού το μήκος των ινών παραμένει αμετάβλητο, θα βραχυνθεί κατά  $u$ . Η παραμόρφωση  $u$ , δηλαδή η βράχυνση μίας ράβδου λόγω στρεπτικής ροπής καλείται **καμπύλωση**, επειδή προκύπτει από την καμπύλωση των ευθυγράμμων ινών.

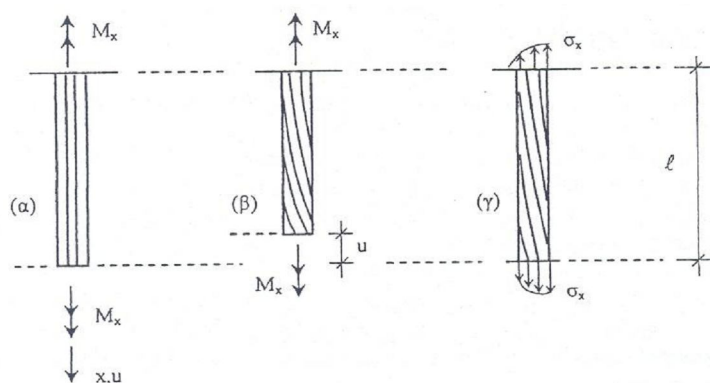
Τότε, η κατά τα ανωτέρω περιγραφείσα καταπόνηση καλείται **καθαρή ή κατά S. Venant στρέψη**, καθώς πρώτος ο S. Venant τη μελέτησε αναλυτικά.

Για να έχουμε επομένως καθαρά στρέψη, πρέπει:

α. Η ράβδος να καταπονείται με ζεύγος ροπών στρέψεως στα άκρα της και να μην υπάρχει οποιαδήποτε άλλη φόρτιση και

β. Να στηρίζεται έτσι, ώστε να μπορεί να βραχυνθεί ανεμπόδιστα.

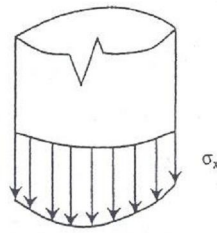
Εάν τώρα στο παραπάνω παράδειγμα δεσμεύσουμε και το ελεύθερο άκρο της ράβδου (σχήμα 2.1 γ), αυτή δεν θα μπορεί να βραχυνθεί και άρα θα αντιδράσει αναπτύσσοντας τις ανάλογες ορθές τάσεις  $\sigma_x$  (επιπροσθέτως των διατμητικών τάσεων  $\tau$  λόγω της ροπής στρέψεως  $M_x$ ).



Σχήμα 2.1

Τότε μιλάμε για **μη καθαρά στρέψη** και για **δευτερογενώς αναπτυσσόμενες τάσεις  $\sigma_x$** . Μη καθαρά στρέψη μπορεί ακόμη να έχουμε όχι μόνο λόγω των δεσμεύσεων στις στηρίξεις αλλά και λόγω της υπάρξεως φορτίων στο άνοιγμα της ράβδου-δοκού.





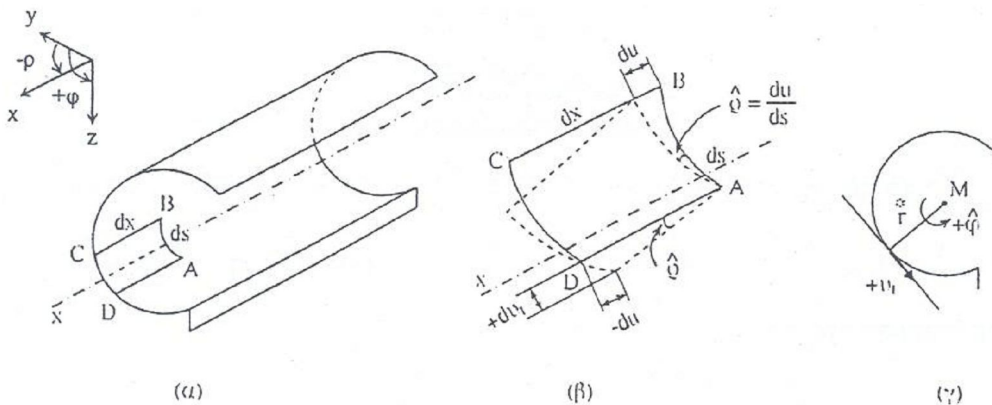
Σχήμα 2.2

Τότε προφανώς οι τάσεις  $\sigma_x$  δεν είναι σταθερές καθ' όλη την έκταση της διατομής (σχήμα 2.2) και επομένως η από αυτές προκαλούμενη καμπύλωση  $u$  θα διαφέρει καθ' ύψος της διατομής. Δηλαδή η διατομή δεν θα είναι πλέον επίπεδη μετά την παραμόρφωση της.

## 2.3. Η ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΕΚΤΟΣ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΤΗΣ

### 2.3.1. Ορισμός της καμπύλωσης

Έστω το στοιχειώδες τμήμα  $dx \cdot ds$  ράβδου, η οποία υφίσταται καμπύλωση  $u(x,s)$  λόγω στροφής της διατομής (σχήμα 2.3) κατά γωνία  $\varphi$ . Έστω ακόμη  $du$  η στοιχειώδης παραμόρφωση (καμπύλωση) της ίνας  $AD$ .



Σχήμα 2.3

Τότε θα έχουμε:  $du_t = r^* d\varphi$

Εξ άλλου:  $du_t = -\rho \cdot dx = -dx \cdot du/ds$

Και επομένως:  $r^* d\varphi = -dx \cdot du/ds$

ή τελικά:  $u = -\frac{d\varphi}{dx} \cdot \int r^* \cdot ds = \frac{d\varphi}{dx} \cdot \omega(s)$  (2.1)

καθόσον:  $\omega(s) = -\int r^* \cdot ds$

Και επομένως οι τάσεις οι οφειλόμενες στην καμπύλωση θα είναι:

$$\sigma_{x\omega} = E \cdot \frac{du}{dx} = E \cdot \frac{d^2\varphi}{dx^2} \cdot \omega(s) = c_1 \cdot \omega(s) \quad (2.2)$$

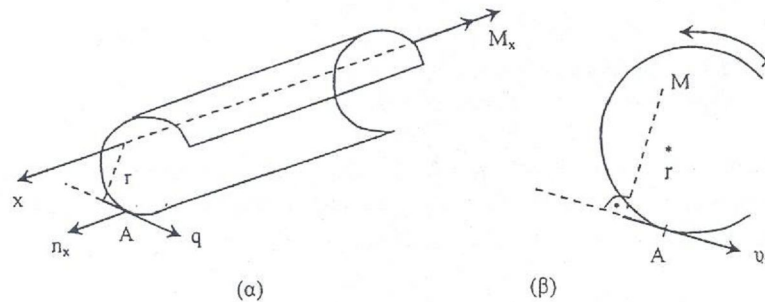
Οι τάσεις αυτές θα πρέπει να προστεθούν σε αυτές που προκύπτουν από την καθαρά κάμψη.

Μια εξωτερική ροπή στρέψεως, παραλαμβάνεται από την δοκό ως εξής:

α. Ένα τμήμα της που συμβολίζουμε  $M_{XSV}$ , προκαλεί καθαρά κατά S. Venant στρέψη και είναι ως γνωστόν:

$$M_{XSV} = GJ_D \cdot \varphi' \quad (2.3)$$

β. Ένα τμήμα της, που συμβολίζεται με  $M_{XT}$ , προκαλεί τάσεις καμπυλώσεως στη δοκό.



Σχήμα 2.4

Από το σχήμα 2.4 θα είναι:  $M_{XT} = \int q \cdot r \cdot ds$  και επειδή οι ορθές και οι διατμητικές ροές  $n_x$  και  $q$  συνδέονται με τη σχέση  $\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial s} = 0$ , η παραπάνω γράφεται:

$$M_{XT} = -\int q \cdot d\omega = -q \cdot [\omega]_0^{s_u} + \int \omega \cdot dq$$

ή τελικώς:

$$M_{XT} = -\int \omega \cdot \frac{\partial n_x}{\partial x} \cdot ds \quad (2.4)$$

Ακόμη, σύμφωνα με τα παραπάνω, ισχύει η σχέση:

$$M_X = M_{XSV} + M_{XT} = GJ_D \cdot \varphi' - \int \omega \cdot \frac{\partial n_x}{\partial x} \cdot ds \quad (2.5)$$

Ο διαχωρισμός της ροπής στρέψεως στις  $M_{XSV}$  και  $M_{XT}$  δεν είναι δυνατόν να γίνει μόνο με τις συνθήκες ισορροπίας της ράβδου, καθώς η ράβδος ως προς αυτό το σημείο είναι εσωτερικά στατικώς αόριστη.

### 2.3.2. Οι βασικές εξισώσεις των παραμορφώσεων της στρεπτικής καμπυλώσεως.

Για να αξιοποιήσουμε τις προηγούμενες σχέσεις, πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν μας τις συνθήκες παραμορφώσεως.

Θεωρούμε (σχήμα 2.4β) ότι η διατομή υφίσταται στροφή  $\varphi$  περί το κέντρο διατμήσεως (το οποίο είναι και κέντρο στροφής). Τότε η εφαπτομενική μετακίνηση  $v_t$  του σημείου A, θα είναι:

$$v_t = r^* \cdot \varphi$$

Γνωρίζουμε ότι για τη γωνιακή παραμόρφωση  $\gamma$  ισχύει η σχέση:

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v_t}{\partial x}$$

και άρα:

$$\dot{u} = \gamma - v_t' = \gamma - (r^* \cdot \varphi)' = \gamma - r^* \cdot \varphi'$$

ή τελικά:

$$\dot{u} = \int_s \gamma \cdot ds + \omega \cdot \varphi' \quad (2.6)$$

Διαδοχικά λαμβάνουμε:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon_x = E \cdot \dot{u} = E \cdot \left( \int \gamma' \cdot ds + \omega \cdot \varphi'' \right) \quad (2.7)$$

Είναι προφανές ότι οι τελικώς αναπτυσσόμενες ορθές τάσεις θα οφείλονται τόσο στις τάσεις λόγω καθαρής κάμψεως, όσο και στις τάσεις λόγω της καμπυλώσεως και άρα θα είναι [3]:

$$\sigma_x = \frac{Q_x}{A} + \frac{M_y}{J_y} \cdot z - \frac{M_z}{J_z} \cdot y + \frac{B}{C_T} \cdot \omega \quad (2.8)$$

Θεωρώντας την περίπτωση μόνον στρεπτικής καταπόνησεως (δηλαδή  $Q_x = M_y = M_z = 0$ ), από τις (2.7) και (2.8) θα έχουμε:

$$\sigma = \frac{B}{C_T} \cdot \omega = E \cdot \left( \int \gamma' \cdot ds + \omega \cdot \varphi'' \right)$$

από την οποία λαμβάνουμε:

$$EC_T \cdot \varphi'' = - \frac{EC_T}{\omega} \cdot \int \gamma' \cdot ds + B \quad (2.9)$$

Ο όρος του ολοκληρώματος εκφράζει την επιρροή της γωνιακής παραμορφώσεως. Στη στρέψη, η επιρροή της γωνιακής παραμορφώσεως είναι ακόμη μικρότερη απ' ότι στην καθαρά κάμψη. Η επιρροή λοιπόν αυτή είναι αμελητέα και μπορούμε άρα από την (2.6) να γράψουμε:

$$u = \omega \cdot \varphi' \quad (2.10)$$

οπότε λαμβάνουμε:

$$E C_T \cdot \varphi'' = B \quad (2.11)$$

και επειδή:  $M_{XT} = -B'$ , από την προηγούμενη (2.11) μπορούμε να γράψουμε:

$$M_{XT} = -E C_T \cdot \varphi''' \quad (2.12)$$

Και επομένως:

$$M_X = M_{XSV} + M_{XT} = GJ_D \cdot \varphi' - E C_T \cdot \varphi''' \quad (2.13)$$

Όταν κατά μήκος του άξονα  $x$  έχουμε διανεμημένη στρεπτική ροπή  $m_x$ , θα είναι:

$$E C_T \cdot \varphi'''' - GJ_D \cdot \varphi'' = -M'_X = m_x(x) \quad (2.14)$$

Εάν χρησιμοποιήσουμε την (2.13), η λύση της θα είναι:

$$\varphi(x) = d_1 + d_2 \cdot \cosh ax + d_3 \cdot \sinh ax + \varphi_p(x)$$

όπου  $d_i$ ,  $i = 1,2,3$  σταθερές,  $a^2 = GJ_D / EC_T$  και  $\varphi_p$ , μία ειδική λύση της (2.13). Εάν χρησιμοποιήσουμε την (2.14), η λύση της θα είναι:

$$\varphi(x) = d_1 + d_2 \cdot x + d_3 \cdot \sinh ax + d_4 \cdot \cosh ax + \varphi_p(x)$$

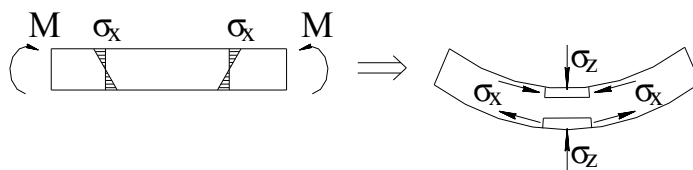
όπου  $d_i$ ,  $a$  ως προηγούμενως, ενώ  $\varphi_p$ , μία ειδική λύση της (2.14).

## 2.4. Η ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΤΗΣ

### 2.4.1. Εισαγωγή

Εάν προσπαθήσουμε να κάμψουμε ένα σωλήνα (π.χ. ένα απλό πλαστικό καλαμάκι αναψυκτικού) αυξάνοντας βαθμιαία την καμπυλότητα του, θα παρατηρήσουμε ότι η διατομή του χάνει το κυκλικό σχήμα και διαπλάτνεται βαθμιαία μέχρι να υποχωρήσει αιφνίδια.

Γενικότερα, γνωρίζουμε από την Μαθηματική Θεωρία της Ελαστικότητας [2], ότι οι διαμήκεις τάσεις  $\sigma_x$ , που προκαλούνται από καθαρή κάμψη, παράγουν άλλες τάσεις που είναι αναγκαίες για να ισορροπήσουν οι  $\sigma_x$  στην νέα παραμορφωμένη θέση (σχήμα 2.5). Έτσι ανάλογα με την φορά του ζεύγους των ροπών, προκαλείται διαπλάτνωση ή διόγκωση της διατομής.



Σχήμα 2.5

Αυτή η παραμόρφωση, είναι συνήθως ανεπαίσθητη και γενικά δεν μπορεί να μετρηθεί σε μία ορθογωνική διατομή, αλλά σε μία διατομή πρισματική, που αποτελείται από λεπτά ελάσματα ή σε ένα μονωτικό πανώ ή σε μία σωληνωτή διατομή μπορεί να είναι ιδιαίτερα σημαντική. Σε αυτή την τελευταία περίπτωση το περιγραφόμενο φαινόμενο ονομάζεται **φαινόμενο Brazier**, από τον πρώτο που το μελέτησε αναλυτικά [4].

Οι μοντέρνοι κανονισμοί, δίνουν λεπτομερείς οδηγίες σχετικά με τις παραγόμενες τάσεις  $\sigma_x$  λόγω καμπυλώσεως σε πρισματοειδείς διατομές, ενώ για την παραμόρφωση της πρισματικής διατομής στο επίπεδο της (*curling phenomenon*) δεν υπάρχουν ιδιαίτερες αναφορές εκτός από μία παράγραφο 30 γραμμών στους Βρεταννικούς κανονισμούς [5].

Αντιθέτως, υπάρχει μια πλούσια βιβλιογραφία για το φαινόμενο Brazier σε κυλινδρικά κελύφη.

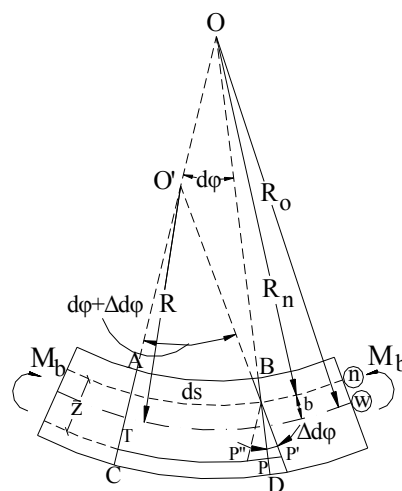
Στο παρόν κεφάλαιο, θα μελετήσουμε την παραμόρφωση της διατομής στο επίπεδο της λόγω καθαρής κάμψεως σε δοκούς με ή χωρίς αρχική (ελαφρά) καμπυλότητα.

Συγκεκριμένα θα εξετάσουμε τις περιπτώσεις διατομών που αποτελούνται από ελάσματα, των μονωτικών πανώ και τέλος μιας δοκού κυκλικής διατομής.

#### 2.4.2. Εισαγωγικές έννοιες - Η καμπύλη δοκός

Θεωρούμε το τμήμα της καμπύλης δοκού του σχήματος 2.6. Συμβολίζουμε με  $n$  τον ουδέτερο άξονα και με  $w$  τον άξονα των κέντρων βάρους της διατομής της δοκού. Έστω ακόμη  $b$  η απόσταση τους. Έστω ακόμη ότι η δοκός έχει αρχική (κατασκευαστική) καμπυλότητα  $R_n$ , την οποία μετράμε από τον άξονα  $n$ . Θεωρούμε ακόμη ότι το παραπάνω τμήμα της δοκού δέχεται στα άκρα του τις καμπτικές ροπές  $M_b$ .

Αποκόπτουμε το απειροστό τμήμα (ABCD). Η τυχαία ίνα TP αυτού του απειροστού τμήματος θα αποκτήσει (υπό την επενέργεια των ροπών  $M_b$ ) το μήκος TP'.



Σχήμα 2.6

Εάν η παραπάνω ίνα απέχει  $\bar{z}$  από τον άξονα  $n$ , θα ισχύουν τα ακόλουθα (βλέπε σχήμα 2.6):  $PP' = \bar{z} \Delta d\varphi$  και  $TP = (R_n + \bar{z}) d\varphi$ . Τότε:

$$\varepsilon_x = \frac{PP'}{TP} = \frac{\bar{z}}{R_n + \bar{z}} \cdot \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \quad (2.15)$$

Σύμφωνα με την αρχή του Hooke, θα έχουμε:

$$\sigma_x = \varepsilon_x \cdot E = E \cdot \frac{\bar{z}}{R_n + \bar{z}} \cdot \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \quad (2.16)$$

Η ισορροπία των δυνάμεων δίνει:

$$\int_A \sigma_x \cdot dA = 0 \quad , \quad \int_A \sigma_x \cdot \bar{z} \cdot dA = 0 \quad (2.17 \alpha, \beta)$$

Η ισότητα (2.17α), λόγω της (2.16), δίνει:

$$\int_A \frac{\bar{z}}{R_n + \bar{z}} \cdot dA = 0 \quad (2.18)$$

Η παραπάνω, είναι η σχέση από την οποία προσδιορίζουμε την θέση του ουδετέρου άξονος  $n$  (για  $R_n \gg \bar{z}$  είναι  $\int_A \bar{z} \cdot dA \cong 0$ , που είναι η γνωστή εξίσωση για την αρχικά ευθύγραμμη δοκό).

Η εξίσωση (2.17β), λόγω της (2.16) δίνει:

$$E \cdot \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \int_A \frac{\bar{z}^2}{R_n + \bar{z}} \cdot dA = M_b$$

η οποία μετά την εισαγωγή της τιμής της  $\Delta d\varphi/d\varphi$  από την (2.16) γίνεται:

$$\sigma_x = M_b \cdot \frac{\bar{z}}{R_n + \bar{z}} \cdot \frac{1}{\int_A \frac{\bar{z}^2}{R_n + \bar{z}} \cdot dA} \quad (2.19)$$

Η παραπάνω για  $R_n \gg \bar{z}$  δίνει  $\sigma_x = \frac{M_b}{\int_A \bar{z}^2 dA} \cdot \bar{z} = \frac{M_b}{J_{yn}} \cdot \bar{z}$

#### 2.4.2.1. Η περίπτωση $R_n/\bar{z} \leq 30$ .

Ο παρονομαστής της (2.19), λόγω της (2.18), γράφεται:

$$\int_A \frac{\bar{z}^2}{R_n + \bar{z}} \cdot dA = \int_A \left( \bar{z} + \frac{R_n \cdot \bar{z}}{R_n + \bar{z}} \right) dA = \int_A \bar{z} \cdot dA = b \cdot A \quad (2.20)$$

Συμβολίζοντας:

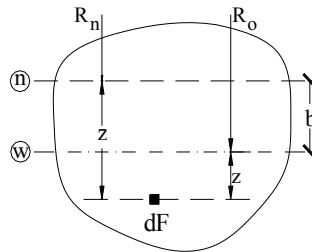
$$J_{yn} = R_n \cdot \int_A \frac{\bar{z}^2}{R_n + \bar{z}} \cdot dA = b \cdot R_n \cdot A \quad (2.21)$$

η εξίσωση (2.19) γράφεται:

$$\sigma_x = \frac{M_b}{J_{yn}} \cdot \frac{\bar{z} \cdot R_n}{\bar{z} + R_n} \quad (2.22)$$

Προκειμένου να μετρώνται οι αποστάσεις από τον άξονα  $w$  των κέντρων βάρους, θέτουμε (σχήμα 2.7):

$$\left. \begin{aligned} \bar{z} &= z + b \\ \bar{z} + R_n &= z + R_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.23 \alpha, \beta)$$



Σχήμα 2.7

Έτσι, οι εξισώσεις (2.21) και (2.22) γίνονται:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{M_b}{J_{yn}} \cdot \frac{(z+b) \cdot (R_0 - b)}{z + R_0} \\ J_{yn} &= (R_0 - b) \cdot b \cdot A \end{aligned} \right\} \quad (2.24 \alpha, \beta)$$

#### 2.4.2.2. Η περίπτωση $R_n/\bar{z} > 30$ .

Οι εξισώσεις (2.23) ισχύουν. Τότε θέτουμε:

$$\begin{aligned} J_{yn} &= (R_n + \bar{z}) \cdot \int_A \frac{\bar{z}^2}{R_n + \bar{z}} \cdot dA = (R_0 + \bar{z}) \cdot \int_A \frac{(z+b)^2}{R_0 + z} \cdot dA = \\ &= \left(1 + \frac{z}{R_0}\right) \cdot \int_A \frac{(z+b)^2}{1 + \frac{z}{R_0}} \cdot dA \end{aligned}$$

και παραλείποντας την ποσότητα  $(z/R_0)$ , που είναι πολύ μικρή, γράφουμε:

$$J_{yn} \cong \int_A (z+b)^2 \cdot dA = \int_A z^2 \cdot dA + 2 \cdot b \cdot \int_A z \cdot dA + b^2 \int_A dA$$

από την οποία, επειδή  $w$  είναι ο άξονας των κέντρων βάρους και άρα  $\int_A z \cdot dA = 0$

$$\int_A dA = A, \quad \text{βρίσκουμε τη σχέση, } \sigma_x = \frac{M_b}{J_{yn}} \cdot (z+b), \quad \text{όπου:}$$

$$J_{yn} = J_{yw} + b^2 \cdot A \quad (2.25 \alpha, \beta)$$

Χρησιμοποιώντας τέλος τις (2.18) και (2.23) προσδιορίζουμε το b:

$$\int_A \frac{\bar{z}}{\bar{z} + R_n} \cdot = \int_A \frac{z \cdot dA}{z + R_0} + \int_A \frac{b \cdot dA}{z + R_0}$$

ή μετά τις πράξεις:

$$b = - \frac{\int_A \frac{z \cdot dA}{z + R_0}}{\int_A \frac{dA}{z + R_0}} \quad (2.26)$$

Από το σχήμα 2.6 έχουμε  $\frac{P''P'}{ds} = \frac{\bar{z}}{R - b}$  και  $\frac{P''P}{ds} = \frac{\bar{z}}{R_n}$ , που δίνει:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{P''P' - P''P}{ds} = \frac{\bar{z}}{R - b} - \frac{\bar{z}}{R_n} = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\bar{z} \cdot M_b}{E \cdot J_{yn}} \cdot \frac{R_n}{R_n + \bar{z}}$$

και άρα λαμβάνουμε:

$$\frac{1}{R - b} - \frac{1}{R_n} = \frac{M_b}{E \cdot J_{yn}} \cdot \frac{R_n}{R_n + \bar{z}}, \text{ για } R_n/\bar{z} \leq 30 \quad (2.27 \alpha)$$

και

$$\frac{1}{R - b} - \frac{1}{R_n} \cong \frac{M_b}{E \cdot J_{yn}}, \text{ για } R_n/\bar{z} > 30. \quad (2.27 \beta)$$

### 2.4.3 Στρέβλωση ελασμάτων (The flange's curling phenomenon)

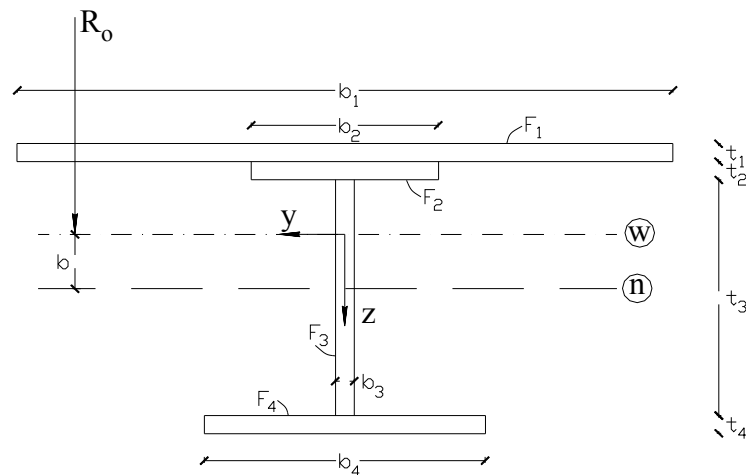
Θεωρούμε την δοκό του σχήματος 2.8, η οποία συνίσταται από i ελάσματα διατομής  $b_i \cdot t_i$  όπου  $b_i$  το πλάτος και  $t_i$  το πάχος του ελάσματος i διατομής  $F_i$ .

Προκειμένου να προσδιορίσουμε τον ουδέτερο άξονα από την εξίσωση (2.26) έχουμε:

$$b = - \frac{\int_A \frac{z \cdot dA}{z + R_0}}{\int_A \frac{dA}{z + R_0}} = - \frac{\sum_i \int_{A_i} \frac{z \cdot dA}{z + R_0}}{\sum_i \int_{A_i} \frac{dA}{z + R_0}}$$

ή μετά από πράξεις και χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς του σχήματος 2.8, βρίσκουμε την ακόλουθη έκφραση για το b:



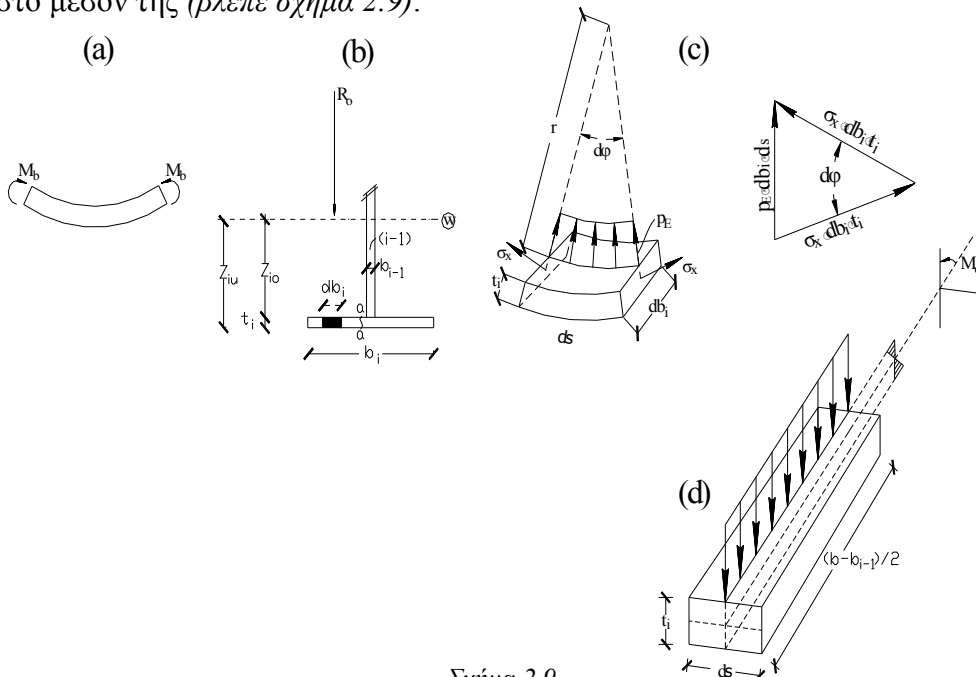


Σχήμα 2.8

$$b = R_o - \frac{\sum_i A_i}{\sum_i \left( b_i \cdot \ln \frac{R_o + z_{io}}{R_o + z_{iu}} \right)} \quad (2.28)$$

όπου  $z_{io}$  και  $z_{iu}$  είναι οι τεταγμένες κατά τον άξονα  $z$  της άνω και κάτω επιφανείας αντίστοιχα του ελάσματος  $i$ .

Θεωρούμε τώρα το  $i^{th}$  έλασμα, το οποίο είναι ένα από αυτά που έχουν την μεγάλη τους διάσταση (πλάτος) παράλληλη στον άξονα  $y$  (ή αλλιώς είναι κάθετο στην ακτίνα καμπυλότητας  $R_o$ ) και υποστηρίζεται από το έλασμα  $(i-1)$  στο μέσον της (βλέπε σχήμα 2.9).



Σχήμα 2.9

Αποκόπτουμε το απειροστό τμήμα ( $db_i \cdot ds$ ) από το έλασμα  $i$ , που έχει μια αρχική (κατασκευαστική) ή παραγόμενη από την κάμψη καμπυλότητα  $r = R_o + z_{io}$ . Τότε, οι διευθύνσεις επί των οποίων ενεργούν οι τάσεις  $\sigma_x$  σχηματίζουν την γωνία  $d\varphi$ , εμφανίζεται το νέο φορτίο  $p_y$  (βλέπε σχήμα 2.9 b,c), που παράγει την καμπτική ροπή  $M_a$  στη διατομή a-a του ελάσματος  $i$  (βλέπε σχήμα 2.9 b,d).

Από την ισοροπία του παραπάνω απειροστού τμήματος ( $db_i \cdot ds \cdot t_i$ ) βρίσκουμε (σχήμα 2.9 c):

$$p_z \cdot db_i \cdot ds = \sigma_x \cdot db_i \cdot t_i \cdot d\varphi, \text{ και τελικώς:}$$

$$p_x = \sigma_x \cdot \frac{t_i}{r}, \text{ όπου } r = R_o + z_{io} \quad (2.29)$$

Η αναπτυσσόμενη ροπή κάμψεως  $M_a$  και η αντίστοιχη ροπή αντιστάσεως  $W_a$  δίδονται από τις ακόλουθες εκφράσεις:

$$M_a = p_i \cdot \left( \frac{b_i - b_{i-1}}{2} \right)^2 \cdot \frac{ds}{2}, \quad W_a = \frac{t_i^2}{6} \cdot ds \text{ και έτσι η αντιστοιχούσες τάσεις } \sigma_a \text{ δίδονται από την σχέση:}$$

$$\sigma_a = \frac{M_a}{W_a} = \frac{3}{4} \cdot \frac{(b_i - b_{i-1})^2}{r \cdot t_i} \cdot \sigma_x \quad (2.30)$$

όπου η  $\sigma_x$  δίδεται από την σχέση (2.25a).

Οι τάσεις  $\sigma_x$  θεωρήθηκαν σταθερές κατά μήκος του πάχους  $t_i$ . Για πλατέα ελάσματα, πρέπει να προσδιορίζεται το ενεργό τους πλάτος κατά τις αντίστοιχες διατάξεις των κανονισμών ή με μεγαλύτερη ακρίβεια (λόγω της υπάρχουσας αρχικής καμπυλότητας) με την χρήση των ακόλουθων σχέσεων:

$$b_{ieff} = \rho_1 \cdot \left( 1 - 0.002 \cdot \rho_2 - 0.660 \cdot \rho_2^2 + 0.364 \cdot \rho_2^3 \right) \cdot b_i, \text{ όπου: } \rho_2 = \frac{b_i - b_{i-1}}{r \cdot t_i}$$

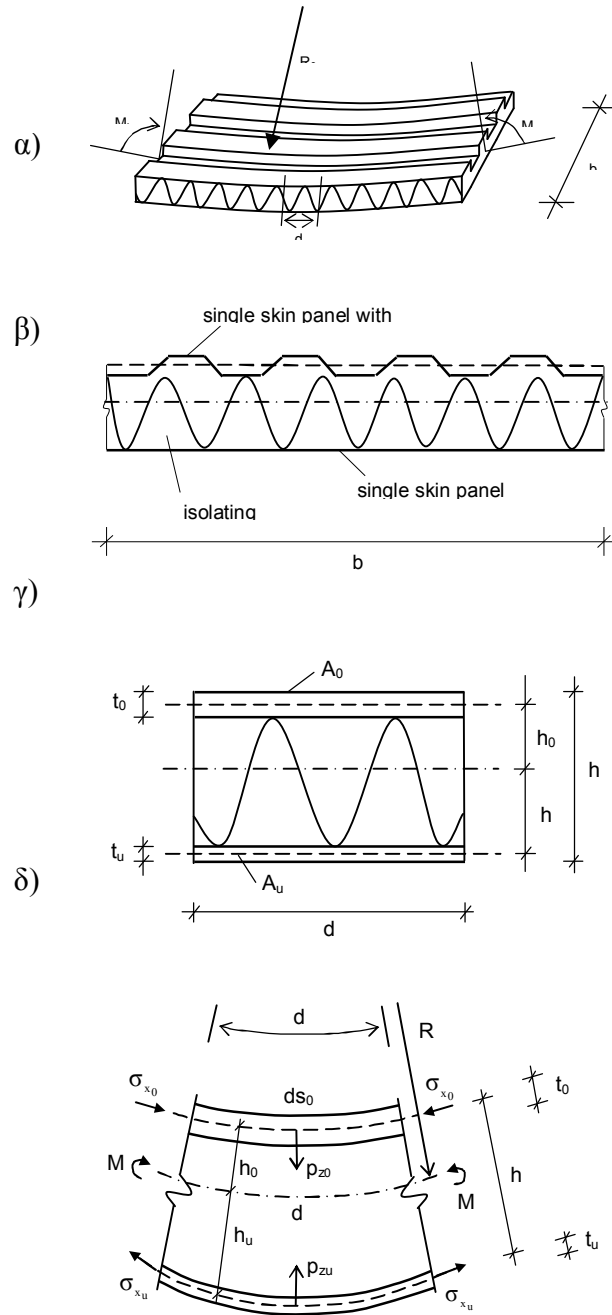
και  $\rho_1$  οι συντελεστές που προσδιορίζονται κατά τους κανονισμούς για το ενεργό πλάτος των ευθυγράμμων ελασμάτων.

#### 2.4.4. Η περίπτωση των μονωτικών πανών

Θεωρούμε το μονωτικό πανώ του σχήματος 2.10 α, που συνίσταται από δύο ελάσματα μεταξύ των οποίων παρεμβάλλεται μονωτικό υλικό (π.χ. πολυουρεθάνη).

Τα ελάσματα μπορεί να είναι επίπεδα ή πτυχωτά με χαμηλά ή υψηλά κύματα. Επιπροσθέτως το πανώ μπορεί να είναι καμπύλο κατά μήκος της διευθύνσεως των πτυχώσεων του με αρχική ακτίνα καμπυλότητας  $R_o$ . Το μονωτικό υλικό έχει μέτρο ελαστικότητας  $E_m$ .

Για διευκόλυνση της μαθηματικής επεξεργασίας και χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το υλικό των μεταλλικών πτυχωτών ελασμάτων είναι συγκεντρωμένο εκατέρωθεν του κεντροβατικού άξονα κάθε ελάσματος.



Σχήμα 2.10

Μετά τη δράση του ζεύγους των ροπών κάμψεως  $M_b$  η ακτίνα καμπυλότητας  $R_0$  γίνεται  $R$  και από τα σχηματιζόμενα όμοια τρίγωνα έχουμε:

$$\frac{ds_o}{R - h_o} = \frac{ds}{R} = \frac{ds_u}{R - h_u} \quad (2.31)$$

Εξ άλλου, η ισοροπία των οριζοντίων δυνάμεων δίδει:

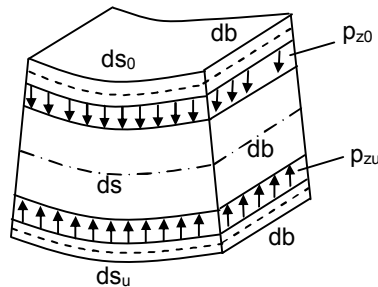
$$\sigma_{x_o} \cdot t_o = \sigma_{x_u} \cdot t_u \quad (2.32)$$

Από την ισορροπία των απειροστών τμημάτων ( $ds_o \cdot db$ ) και ( $ds_u \cdot db$ ), (όπως φαίνεται στα σχήματα 2.9 β, 2.10 δ και 2.11) και λόγω των εξισώσεων (2.31) και (2.32), λαμβάνουμε διαδοχικά:

$$p_{z_o} \cdot ds_o \cdot db = \sigma_{x_o} \cdot \frac{t_o}{R - h_o} \cdot ds_o \cdot db = \sigma_{x_u} \cdot \frac{t_u}{R - h_u} \cdot ds_u \cdot db = p_{z_u} \cdot ds_u \cdot db \quad (2.33)$$

Η τελευταία δείχνει ότι η συνολική δύναμη της πίεσης μέσα στον καμπυλόγραμμο κώλο του σχήματος 2.11 είναι σταθερά καθ' ύψος. Μπορεί συνεπώς να χρησιμοποιήσει κάποιος την πίεση  $p_z$ , που ενεργεί στην επιφάνεια των κέντρων βάρους του πανώ:

$$p_{z_o} \cdot ds_o = p_{z_u} \cdot ds_u = p_z \cdot ds \quad (2.33)'$$



Σχήμα 2.11

$$\left. \begin{array}{l} \text{Θέτουμε:} \\ \text{και αν} \\ \text{βρίσκουμε:} \end{array} \right\} \begin{array}{l} A_o = k \cdot A \\ A_u = (1 - k) \cdot A \\ t_o + t_u = t \\ t_o = k \cdot t, \quad t_u = (1 - k) \cdot t \\ h_o = (1 - k) \cdot h, \quad h_u = k \cdot h \end{array} \quad (2.34 \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon)$$

Ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:  $\varepsilon_z = \frac{\Delta h}{h} = \frac{p_z}{E_m}$ . Ή τελικώς:

$$\zeta = \frac{p_z}{E_m}, \quad \text{με} \quad \zeta = \frac{\Delta h}{h} \quad (2.35)$$

Η ροπή αδρανείας του απαραμόρφωτου πανώ είναι:

$$J_o = A_o \cdot h_o^2 + A_u \cdot h_u^2 = k \cdot (1 - k) \cdot h^2 \cdot A \quad (2.36)$$

ροπή αδρανείας του παραμορφωμένου πανώ είναι:

$$J_o - \Delta J_o = A_o \cdot (h_o - \Delta h_o)^2 + A_u \cdot (h_u - \Delta h_u)^2 = A_o \cdot \left(h_o - h_o \cdot \frac{p_z}{E_m}\right)^2 + A_u \cdot \left(h_u - h_u \cdot \frac{p_z}{E_m}\right)^2$$

Ή τελικώς:

$$J_o - \Delta J_o = J_o \cdot (1 - \zeta)^2 \quad (2.37)$$

Εργαζόμενοι για πλάτος  $db = 1 \text{ cm}$ , έχουμε:

$$M_b = \sigma_{x_o} \cdot (t_o \cdot 1) \cdot (h - \Delta h) = \sigma_{x_o} \cdot A_o \cdot h \cdot (1 - \zeta) \quad (2.38)$$

Συμβολίζοντας με  $C$  την καμπυλότητα μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R_o} = C - C_o = \frac{M_b}{E \cdot (J_o - \Delta J_o)} \quad \text{και}$$

$$M_b = (C - C_o) \cdot E \cdot (J_o - \Delta J_o) \quad (2.39)$$

Από τις εξισώσεις (2.38), (2.39), και λόγω της (2.37), έχουμε:

$$\sigma_{x_o} \cdot k \cdot A \cdot h \cdot (1 - \zeta) = (C - C_o) \cdot E \cdot k \cdot (1 - k) \cdot A \cdot h^2 \cdot (1 - \zeta)^2$$

ή τελικώς:

$$\sigma_{x_o} = (C - C_o) \cdot (1 - k) \cdot E \cdot h \cdot (1 - \zeta) \quad (2.40)$$

Από τις εξισώσεις (2.33), λόγω της (2.33)', (2.34d), και (2.31) λαμβάνουμε:

$$p_{z_o} \cdot ds = \sigma_{x_o} \cdot t_o \cdot \frac{ds_o}{R - h_o} \quad \text{ή}$$

$$p_z \cdot ds = \sigma_{x_o} \cdot k \cdot t \cdot \frac{ds}{R} \quad \text{ή}$$

$$p_z = \sigma_{x_o} \cdot \frac{k \cdot t}{R} \quad \text{ή}$$

$$\zeta = \frac{p_z}{E_m} = \sigma_{x_o} \cdot \frac{k \cdot t}{R \cdot E_m} \quad \text{ή}$$

ή εισάγοντας την  $\sigma_{x_o}$  από την εξίσωση (2.40) βρίσκουμε τελικώς:

$$\zeta = C \cdot (C - C_o) \cdot k \cdot (1 - k) \cdot \frac{E \cdot h \cdot t}{E_m} \cdot (1 - \zeta) \quad (2.41)$$

Θέτουμε τα ακόλουθα αδιάστατα μεγέθη:

$$\bar{C} = C \cdot \sqrt{\frac{E \cdot h \cdot t}{E_m}}, \quad \bar{C}_o = C_o \cdot \sqrt{\frac{E \cdot h \cdot t}{E_m}} \quad (2.42)$$

Και μετά τις πράξεις βρίσκουμε:

$$\zeta = \frac{\bar{C} \cdot (\bar{C} - \bar{C}_o) \cdot k \cdot (1 - k)}{1 + \bar{C} \cdot (\bar{C} - \bar{C}_o) \cdot k \cdot (1 - k)} \quad (2.43)$$

Από την (2.38), λόγω της (2.40), θα έχουμε τα ακόλουθα:

$$M_b = (C - C_o) \cdot k \cdot (1 - k) \cdot E \cdot A \cdot h^2 \cdot (1 - \zeta)^2 \quad (2.44)$$

Η χρησιμοποιώντας τα αδιάστατα μεγέθη της εξίσωσης (2.42) και εισάγοντας την τιμή του  $\zeta$  από την εξίσωση (2.43) μπορούμε να γράψουμε:

$$\bar{M}_b = \frac{M_b}{A \cdot h^2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot E_m}{h \cdot t}}} = (\bar{C} - \bar{C}_o) \cdot k \cdot (1 - k) \cdot (1 - \zeta)^2 \quad (2.45 \alpha)$$

$$\bar{M}_b = \frac{(\bar{C} - \bar{C}_o) \cdot k \cdot (1 - k)}{[1 + \bar{C} \cdot (\bar{C} - \bar{C}_o) \cdot k \cdot (1 - k)]^2} \quad (2.45 \beta)$$

Προκειμένου να προσδιορίσουμε την ελάττωση της ικανότητας του πανώ στην παραλαβή καμπτικών ροπών, συγκρίνουμε την ροπή που δίδεται από την εξίσωση (2.44) προς την αντίστοιχη που μπορεί να παραλάβει το απαραμόρφωτο πανώ:

$$M_{b0} = (C - C_o) \cdot E \cdot J = (C - C_o) \cdot E \cdot k \cdot (1 - k) \cdot h^2 \cdot A \quad \text{και άρα:}$$

$$m = \frac{M_b}{M_{b0}} = (1 - \zeta)^2 \quad (2.45 \gamma)$$

#### 2.4.5. Σωληνωτές διατομές - Φαινόμενο Brazier

Θεωρούμε την σωληνωτή δοκό του σχήματος 2.13 α, κυκλικής διατομής ακτίνας  $a$ , που υπόκειται στην δράση του ζεύγους των ροπών  $M_b$ . Υποθέτουμε ότι ο διαμήκης άξονας της αφόρτιστης δοκού είναι μία επίπεδη καμπύλη με ακτίνα  $R_0$ .

Υποθέτουμε ακόμη, ότι η δοκός στην τελική της θέση ισορροπίας έχει ακτίνα καμπυλότητας  $R$  σταθερή κατά μήκος του άξονα  $x$ .

Για την παρούσα περίπτωση μιας κυκλικής διατομής ακτίνας  $a$  και πάχους  $t$ , υποθέτουμε ότι  $t \ll a$ , ώστε η δοκός να μπορεί να θεωρηθεί λεπτότοιχη.

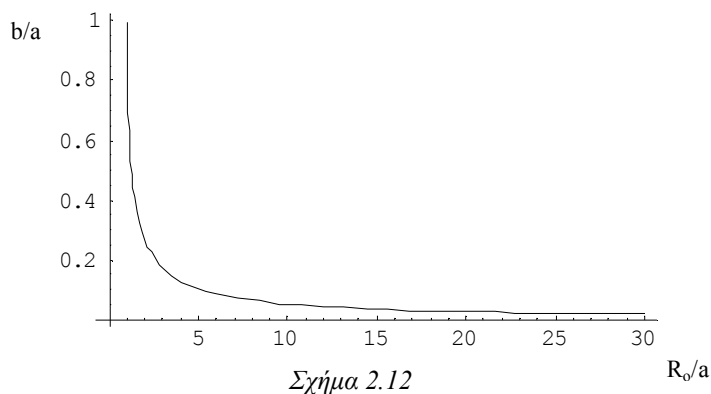
Το κέντρο βάρους συμπίπτει με το κέντρο του κύκλου, οπότε από την (2.26) έχουμε:

$$b = - \frac{a \cdot t \cdot \int_0^{2\pi} \frac{a \cdot \cos \theta}{R_0 + a \cdot \cos \theta} \cdot d\theta}{a \cdot t \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{R_0 + a \cdot \cos \theta} \cdot d\theta} = - \frac{2 \cdot \pi \cdot R_0 \cdot \sqrt{\frac{R_0 + a}{R_0 - a}}}{R_0 + a} \cdot \frac{R_0 + a}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{R_0 + a}{R_0 - a}}}$$

ή τελικώς:

$$b = R_0 - \sqrt{R_0^2 - a^2} \quad (2.46)$$

Το διάγραμμα του σχήματος 2.12, δείχνει την μεταβολή του λόγου  $b/a$  συναρτήσει του λόγου  $R_0/a$ . Παρατηρούμε ότι για  $R_0/a > 30$  έχουμε  $b/a < 0.0166$ .

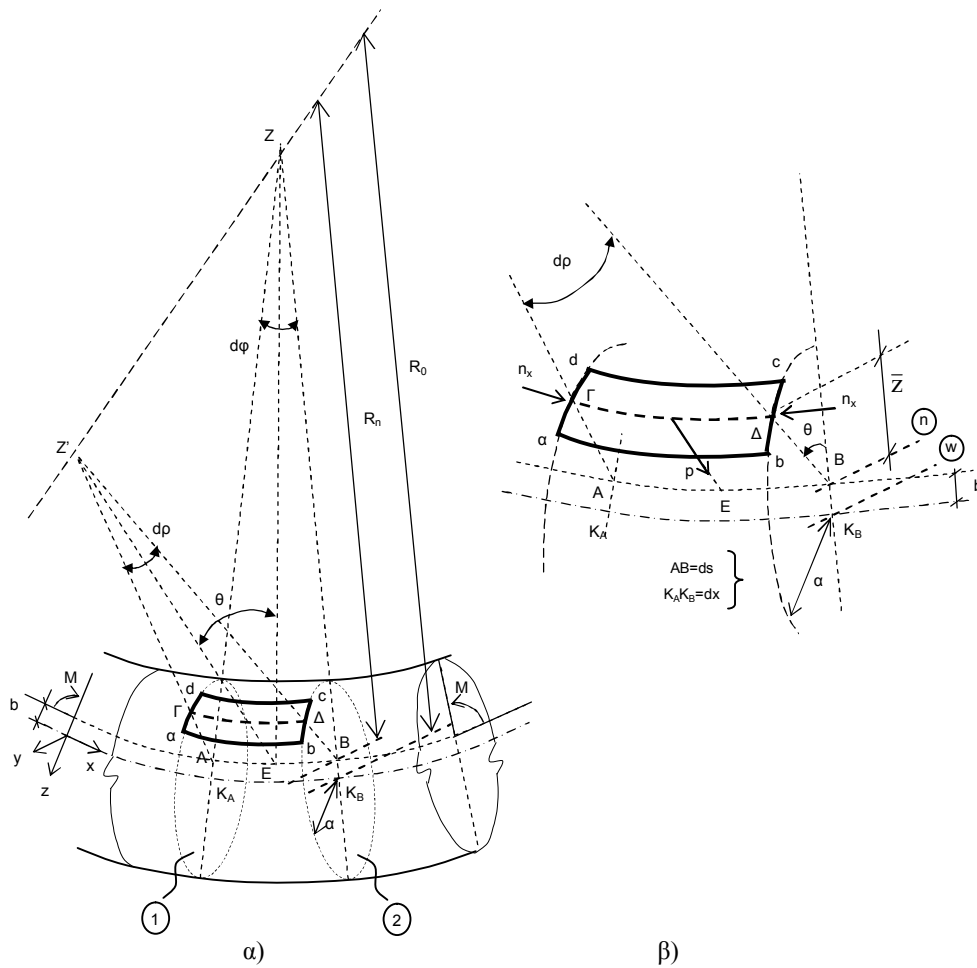


Σχήμα 2.12

Θεωρούμε τώρα το απειροστό τμήμα  $AB = ds$  του άξονος του σωλήνα που προσδιορίζεται από τις δύο διατομές 1 και 2 (σχήμα 2.13 α). Υποθέτουμε ακόμη ότι οι παραπάνω διατομές παραμένουν επίπεδες (δεν υφίστανται καμπύλωση) και ακόμη ότι τα επίπεδα τους τέμνονται κατά την ευθεία  $ZZ'$  και υπό γωνία  $d\varphi$ .

Η καμπυλότητα  $R$  και η γωνία  $d\varphi$  συνδέονται με την σχέση:

$$ds = R_n \cdot d\varphi \tag{2.47}$$



Σχήμα 2.13

Φέρουμε την BZ κάθετο στην τομή ZZ' των διατομών 1 και 2. Θεωρούμε τώρα την ίνα ΓΔ που κείται στο επίπεδο (ABZ'), που σχηματίζει γωνία θ με το (ABZ) που είναι επίσης κάθετο στο ZZ'. Ισχύει η ακόλουθος σχέση:

$$ds = (BZ) \cdot d\varphi = (BZ') \cdot d\rho$$

Θεωρώντας ότι:  $\cos d\varphi \approx \cos d\rho \approx 1$  και λόγω της σχέσεως :  
 $(BZ) \approx (EZ) = (EZ') \cdot \cos\theta \approx (BZ') \cdot \cos\theta$ , βρίσκουμε τελικώς:

$$d\rho = \cos\theta \cdot d\varphi \quad (2.48)$$

Από την επιφάνεια του σωλήνος, αποκόπτουμε το απειροστό τμήμα (abcd), που βρίσκεται εκατέρωθεν της ίνας ΓΔ και έχει διαστάσεις  $(ab \cdot bc)$ .

Κατά την παραμόρφωση του σωλήνος, η αρχική ακτίνα καμπυλότητας  $R_0$  γίνεται R και υποθέτοντας ότι η περιμετρική  $\sigma_\varphi$  μπορεί να θεωρηθεί μηδενική και άρα να παραλειφθεί, η ισορροπία του αποκοπέντος τμήματος (abcd) δίνει:

$$p \cdot \overline{ab} \cdot \overline{bc} = n_x \cdot \overline{bc} \cdot d\rho \quad (2.49)$$

όπου το φορτίο p είναι κάθετο στην επιφάνεια (abcd) και έτσι συμπεραίνουμε ότι βρίσκεται στο επίπεδο (ABZ') (σχήμα 2.13 β).

Ακόμη έχουμε:

$$\frac{\overline{ab}}{ds} \cong \frac{\overline{\Gamma\Delta}}{ds} = \frac{\overline{BZ'} - \overline{B\Delta}}{\overline{BZ'}} = \frac{\frac{\overline{BZ}}{\cos\theta} - \overline{B\Delta}}{\frac{\overline{BZ}}{\cos\theta}} = \frac{R_n - \overline{B\Delta} \cdot \cos\theta}{R_n} = \frac{R_n - \bar{z}}{R_n}$$

Η εξίσωση (2.49), λόγω της προηγούμενης και της (2.38) γίνεται:

$$p \cdot \frac{R_n - \bar{z}}{R_n} \cdot ds = n_x \cdot d\rho = n_x \cdot \cos\theta \cdot d\varphi$$

η οποία λόγω της (2.47) δίδει:

$$p = \frac{\cos\theta}{R_n - \bar{z}} \cdot n_x \quad (2.50)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την εξίσωση (2.25)' και ότι  $n_x = \sigma_x \cdot t$  η παραπάνω γίνεται:

$$p = \frac{\cos\theta}{R_n - \bar{z}} \cdot \frac{M_b}{J_{yn}} \cdot \bar{z} \cdot t = \frac{M_b \cdot t}{J_{yn}} \cdot \cos\theta \cdot \frac{\bar{z}}{R_n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\bar{z}}{R_n}} \quad (2.51)$$

Αναπτύσσοντας τον παρονομαστή σε σειρά απείρων όρων, παρατηρούμε ότι για  $R_n/\bar{z} < 30$ , η (2.51) μπορεί με μεγάλη ακρίβεια να γραφεί υπό την μορφή:



$$p = \frac{M_b \cdot t}{J_{yn} \cdot R_n} \cdot \bar{z} \cdot \cos \theta \quad (2.52)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την εξίσωση (2.23), και ότι μετά την παραμόρφωση η  $R_n$  γίνεται  $R$ , μπορούμε να γράψουμε:

$$p(\theta) = p_o \cdot \cos^2 \theta + \frac{b}{a} \cdot p_o \cdot \cos \theta \quad (2.53\alpha)$$

όπου 
$$p_o = \frac{M_b \cdot t \cdot a}{R \cdot J_{yn}} \quad (2.53\beta)$$

ενώ η  $J_{yn}$  λαμβάνεται από την εξίσωση (2.25β)'.

Θα μελετήσουμε τώρα τον δακτύλιο του σχήματος 2.14, ο οποίος έχει μοναδιαίο μήκος και φορτίζεται με το φορτίο  $p(\theta)$ .

Τέμνοντας τον δακτύλιο στο σημείο  $\theta = 0$ , θα έχουμε να προσδιορίσουμε τα άγνωστα εντατικά μεγέθη  $H$ ,  $V$  και  $m_o$  (σχήμα 2.14).

Η επίλυση του παραπάνω στατικού συστήματος, ενός δακτυλίου μοναδιαίου μήκους, δίδει τα παραπάνω άγνωστα μεγέθη ως εξής:

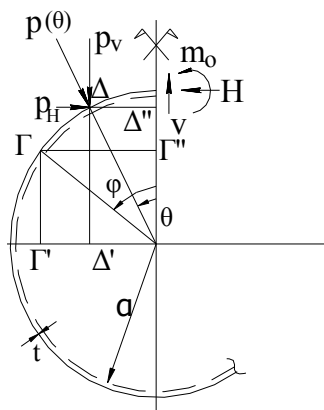
$$V \approx 0 \quad , \quad H = \frac{a}{3} \cdot p_o \quad \text{και} \quad m_o = \frac{a^2}{6} \cdot \left(1 + \frac{3 \cdot b}{a}\right) \cdot p_o$$

Έτσι, η έκφραση που δίδει την καμπτική ροπή του δακτυλίου είναι:

$$m(\varphi) = \frac{a^2 \cdot p_o}{6} \cdot \cos 2\varphi + \frac{a \cdot b \cdot p_o}{2} (1 - \varphi \cdot \sin \varphi) \quad (2.54)$$

Οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν το πρόβλημα μιας καμπύλης δοκού, είναι οι ακόλουθες [6]:

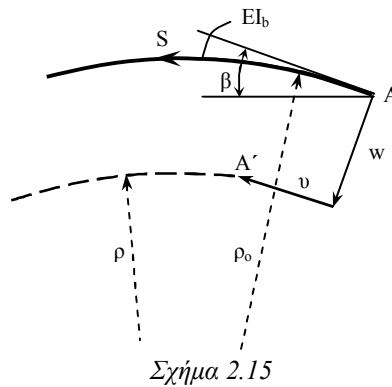
$$\left. \begin{aligned} m(s) &= -E \cdot J_b \cdot \frac{d^2}{ds^2} \left( \rho_o \cdot \frac{dv}{ds} \right) - E \cdot J_b \cdot \frac{d}{ds} \left( \frac{v}{\rho_o} \right) \\ dv + w \cdot d\beta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.55 \alpha, \beta)$$



Σχήμα 2.14

οι οποίες για κυκλική ράβδο με  $\rho_0 = a$  και  $\beta = \varphi$ , παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w &= -\frac{a}{E \cdot J_b} \cdot m(\varphi) \\ \frac{dv}{d\varphi} &= -w \end{aligned} \right\} \quad (2.56 \alpha, \beta)$$



Στις παραπάνω σχέσεις είναι  $J_b = (1 \cdot t^3) / 12$ . Εάν θέσουμε  $\tau = \arctan(b/a)$ , μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση (2.56 α) με συνοριακές συνθήκες  $w'(0) = w'(\pi/2 - \tau) = 0$ .

Λαμβάνοντας ακόμη υπ' όψιν ότι για  $R/a > 30$  έχουμε  $b/a < 0.016$ , μπορούμε να γράψουμε:

$$\tau = \frac{b}{a}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right) = \frac{b}{a}, \quad \sin(\pi - 2 \cdot \tau) = \frac{2 \cdot b}{a}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right) \approx 0.$$

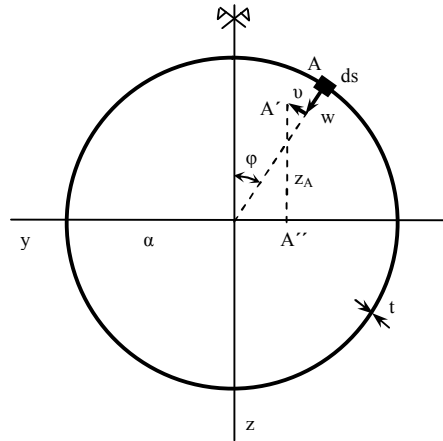
Έτσι, λαμβάνουμε την ακόλουθη εξίσωση που δίνει την ακτινική παραμόρφωση  $w$ :

$$\left. \begin{aligned} w(\varphi) &= a \cdot \zeta \cdot \cos 2\varphi + 9 \cdot b \cdot \zeta \cdot \left[ (1 - 2 \cdot \varphi^2) \cdot \cos \varphi + 2 \cdot \varphi \cdot \sin \varphi \right] \\ \zeta &= \frac{w_0}{a} \\ w_0 &= \frac{2 \cdot a^4 \cdot p_0}{3 \cdot E \cdot t^3} \end{aligned} \right\} \quad (2.57 \alpha, \beta, \gamma)$$

Από την εξίσωση (2.55 β) βρίσκουμε:

$$v(\varphi) = -\frac{a \cdot \zeta}{2} \cdot \sin 2\varphi - 9 \cdot b \cdot \zeta \cdot \varphi - \frac{27}{4} \cdot b \cdot \zeta \cdot \varphi \cdot \cos \varphi + \frac{9}{8} \cdot b \cdot \zeta \cdot (7 - 2 \cdot \varphi^2) \cdot \sin \varphi \quad (2.58)$$

Θα προσδιορίσουμε τώρα την ροπή αδρανείας του παραμορφωμένου δακτυλίου. Υποθέτουμε ότι το απειροστό τμήμα  $ds$  του δακτυλίου κινείται λόγω της παραμορφώσεως από το Α στην νέα του θέση Α' (βλέπε σχήμα 2.16).



Σχήμα 2.16

Τότε θα είναι:

$$z_A = (a - w) \cdot \cos \varphi + v \cdot \sin \varphi \quad \text{και} \quad J_y = \int_A z_A^2 dA = a \cdot t \cdot \int_{-\pi}^{\pi} z_A^2 d\varphi \quad \eta$$

$$J_y = t \cdot a^3 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \left( 1 - \frac{w}{a} \right) \cdot \cos \varphi + \frac{v}{a} \cdot \sin \varphi \right] \cdot d\varphi \quad (2.59)$$

Εισάγοντας τα  $w$  και  $v$  από τις (2.57 α) και (2.58) αντιστοίχως, βρίσκουμε:

$$\left. \begin{aligned} J_y &= J_o \cdot [1 - \xi_1 \cdot \zeta + \xi_2 \cdot \zeta^2] \\ \text{όπου: } J_o &= \pi \cdot t \cdot a^3 \\ \xi_1 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \zeta_1 \\ \xi_2 &= \frac{5}{8} - \frac{101}{360} \cdot \zeta_1 + \left( -\frac{11533}{1152} + \frac{17 \cdot \pi^2}{16} + \frac{\pi^4}{40} \right) \cdot \zeta_1^2 \\ \zeta_1 &= 9 \cdot \frac{b}{a} \end{aligned} \right\} \quad (2.60 \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon)$$

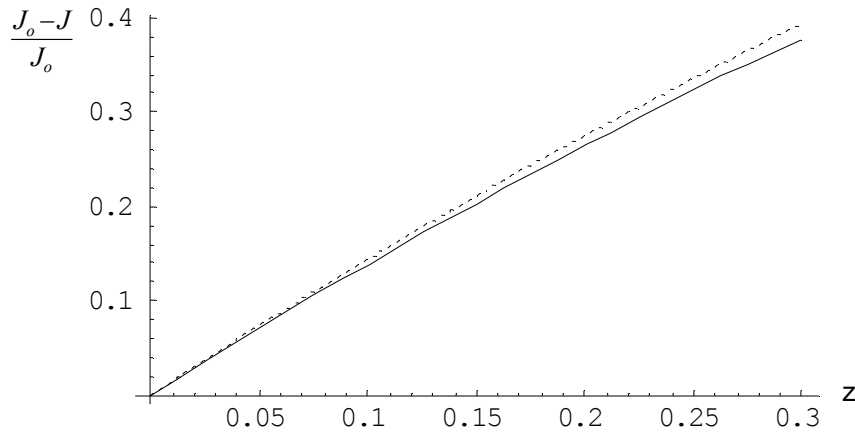
Για μία αρχικώς ευθύγραμμη σωληνωτή δοκό είναι  $b = 0$  και άρα  $\zeta_1 = 0$ . Τότε η ροπή αδραειάς  $J_y$ , παίρνει τη γνωστή μορφή που δίδει ο Brazier [7]:

$$J_y = J_o \cdot \left( 1 - \frac{3}{2} \cdot \zeta + \frac{5}{8} \cdot \zeta^2 \right) \quad (2.61)$$

Το διάγραμμα του σχήματος 2.17, δείχνει την επιρροή του  $\zeta$  στη ροπή αδραειάς για την κρίσιμη τιμή της καμπυλότητας  $C$  ( $C = 1/R = 1/30a$ , δηλαδή  $b = 0.0016 \cdot a$ ).

Σε αυτό το διάγραμμα το  $J_{yn}$  για  $C = 0$  (δηλαδή  $b = 0$ ) φαίνεται με εστιγμένη γραμμή. Παρατηρεί κανείς ότι η μέγιστη διαφορά ανέρχεται σε 2% περίπου.

Προκειμένου να εκτιμηθεί η επιρροή της καμπυλότητας C (ή της R) στον συντελεστή της διατομής ζ καθώς και επί της ροπής κάμψεως  $M_b$ , πρέπει να προσδιορίσουμε την αναπτυσσόμενη ενέργεια παραμορφώσεως μιας δοκού μοναδιαίου μήκους.



Σχήμα 2.17

Θεωρούμε, όπως είναι γενικώς παραδεκτό, ότι η σωληνωτή δοκός παραμορφώνεται σε δύο φάσεις. Κατά την πρώτη φάση η διατομή της δοκού χάνει την κυκλική της μορφή, ενώ κατά την δεύτερη κάμπτεται κατά τον διαμήκη της άξονα σαν μια δοκός που έχει διατομή την νέα παραμορφωμένη οβάλ διατομή.

Για την πρώτη φάση, χρησιμοποιώντας την έκφραση της εξισώσεως (2.54), μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2} \cdot \int_s \frac{m(s)^2}{E \cdot J_b} \cdot ds = \frac{a}{2 \cdot E \cdot J_b} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} m(\varphi) \cdot d\varphi = \\ &= \frac{a}{2 \cdot E \cdot J_b} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{a^2 \cdot p_o}{6} \cdot \cos 2\varphi + \frac{a \cdot b \cdot p_o}{2} \cdot (1 - \varphi \cdot \sin \varphi) \right] \cdot d\varphi \end{aligned}$$

ή ενθυμούμενοι ότι:

$$p_o = \frac{18 \cdot E \cdot J_b}{a^4} \cdot w_o = \frac{18 \cdot E \cdot J_b}{a^3} \cdot \zeta, \quad \text{και} \quad J_b = \frac{t^3}{12}$$

η παραπάνω γίνεται:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \frac{3}{8} \cdot \frac{\pi \cdot E \cdot t^3}{a} \cdot \zeta^2 \cdot (1 + \xi_3) \\ \text{όπου: } \xi_3 &= \frac{b}{324 \cdot \pi \cdot a} - \frac{5 \cdot b^2}{2592 \cdot \pi \cdot a^2} + \frac{\pi^2 \cdot b^2}{3888 \cdot a^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.62 \text{ a, } \beta)$$

Για την δεύτερα φάση και έχοντας υπ' όψιν ότι η δοκός έχει μοναδιαίο μήκος θα είναι:

$$U_2 = \frac{1}{2} \cdot E \cdot J_{ym} \cdot (C - C_o)^2 \quad (2.63)$$

Αλλά:  $J_{yn} = J_y + b^2 \cdot A = J_o \cdot (1 - \xi_1 \cdot \zeta + \xi_2 \cdot \zeta^2) + b^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot a \cdot t$  και τελικώς:

$$J_{yn} = \pi \cdot t \cdot a^3 \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot b^2}{a^2} - \xi_1 \cdot \zeta + \xi_2 \cdot \zeta^2 \right) \quad (2.64)$$

Έτσι, η εξίσωση (2.63), στην τελική της μορφή γράφεται ως εξής:

$$U_2 = \frac{1}{2} \cdot E \cdot \pi \cdot t \cdot a^3 \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot b^2}{a^2} - \xi_1 \cdot \zeta + \xi_2 \cdot \zeta^2 \right) \cdot (C - C_o)^2 \quad (2.63)'$$

Το μέγιστο της μεταβολής της μορφής της διατομής δίδεται από την συνθήκη:

$$\frac{\partial U}{\partial \zeta} = \frac{\partial U_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial U_2}{\partial \zeta} = 0$$

που δίδει:

$$\frac{E \cdot \pi \cdot t^3}{a} \cdot (1 + \xi_3) \cdot \zeta + \frac{1}{2} \cdot E \cdot \pi \cdot t \cdot a^3 \cdot (-\xi_1 \cdot \zeta + 2 \cdot \xi_2 \cdot \zeta) \cdot (C - C_o)^2 = 0$$

ή τελικώς:

$$\zeta = \frac{2 \cdot a^4 \cdot \xi_1 \cdot (C - C_o)^2}{3 \cdot t^2 \cdot (1 + \xi_2) + 4 \cdot a^4 \cdot \xi_2 \cdot (C - C_o)^2} \quad (2.65)$$

Θεωρώντας την αδιάστατη καμπυλότητα:

$$\bar{C} = C \cdot \frac{a^2}{t} \quad (2.66)$$

η εξίσωση (2.65) θα λάβει την ακόλουθη τελική της μορφή:

$$\zeta = \frac{2 \cdot \xi_1 \cdot (C - C_o)^2}{3 \cdot (1 + \xi_2) + 4 \cdot \xi_2 \cdot (C - C_o)^2} \quad (2.67)$$

Τέλος, μπορεί να ευρεθεί μία έκφραση για την ροπή κάμψεως  $M_b$ , χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.62 α) και (2.63) μέσω της ακόλουθου σχέσεως:

$$M_b = \frac{\partial U}{\partial (C - C_o)} = \frac{\partial U_1}{\partial (C - C_o)} + \frac{\partial U_2}{\partial (C - C_o)} = E \cdot J_{yn} \cdot (C - C_o)$$

Η παραπάνω, λόγω των (2.64), (2.66) και (2.67) γίνεται:

$$M_b = E \cdot \pi \cdot a \cdot t^2 \left[ \left( 1 + \frac{2 \cdot b^2}{a^2} \right) \cdot (C - C_o) - \frac{2 \cdot \xi_1 \cdot (C - C_o)^3}{3 \cdot (1 + \xi_2) + 4 \cdot \xi_2 \cdot (C - C_o)^2} + \frac{4 \cdot \xi_1^2 \cdot (C - C_o)^5}{[3 \cdot (1 + \xi_2) + 4 \cdot \xi_2 \cdot (C - C_o)^2]^2} \right] \quad (2.68)$$

Προκειμένου να προσδιορίσουμε μια αδιάστατη έκφραση για τη ροπή

κάμψεως, θεωρούμε την σχέση  $m = M_b/M_{cr}$ . Ωφείλουμε επομένως να προσδιορίσουμε την  $M_{cr}$ .

Αυτή η  $M_{cr}$ , είναι η μέγιστη ροπή που μπορεί να παραλάβει μία δοκός με **απαρამόρφωτη** διατομή.

Αυτή η μέγιστη ροπή, είναι η μικρότερη ροπή κάμψεως που μπορεί να φέρει η δοκός είτε σε καθαρά κάμψη είτε σε λυγισμό.

α) Για την περίπτωση του λυγισμού είναι [7]:

$$N_{x,cr} = \frac{E \cdot t^2}{a \cdot \sqrt{3} \cdot (1 - \mu^2)}, \quad \text{και ετσι: } \sigma_{x,cr} = \frac{E \cdot t}{a \cdot \sqrt{3} \cdot (1 - \mu^2)},$$

και η κρίσιμη ροπή είναι:

$$M_{cr} = \frac{\sigma_{x,cr} \cdot J_o}{a} = \frac{E \cdot t}{a \cdot \sqrt{3} \cdot (1 - \mu^2)} \cdot \frac{\pi \cdot t \cdot a^3}{a} = \frac{E \cdot \pi \cdot a \cdot t^2}{\sqrt{3} \cdot (1 - \mu^2)} \quad (2.69)$$

στην οποία αντιστοιχεί η καμπυλότητα:

$$\bar{C}_{max} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot (1 - \mu^2)} \quad (2.69 \alpha)$$

β) Για την περίπτωση της καθαρής κάμψεως είναι:

$$M_{cr} = \frac{\sigma_f \cdot J_o}{a} = \sigma_f \cdot \pi \cdot t \cdot a^2 \quad (2.70)$$

με αντίστοιχη καμπυλότητα:

$$\bar{C}_{max} = \frac{\sigma_f \cdot a}{t \cdot E} \quad (2.70 \alpha)$$

Έτσι, η κρίσιμη τιμή της  $\sigma_x$ , από την οποία προσδιορίζεται η κρίσιμη περίπτωση από τις παραπάνω δύο είναι:

$$\sigma_{cr} = \frac{E \cdot t}{a \cdot \sqrt{3} \cdot (1 - \mu^2)} = \sigma_f$$

από την οποία λαμβάνουμε τον ακόλουθο λόγο για τα κρίσιμα χαρακτηριστικά μιάς σωλήνος:

$$\frac{a}{t} = \frac{E}{\sigma_f \cdot \sqrt{3} \cdot (1 - \mu^2)} \quad (2.71)$$

Μπορούμε επομένως να προσδιορίσουμε τις ακόλουθες εκφράσεις:

α) Για:  $\frac{a}{t} \geq \frac{E}{\sigma_f \cdot \sqrt{3 \cdot (1 - \mu^2)}}$  είναι:

$$m = \sqrt{3 \cdot (1 - \mu^2)} \cdot \left[ \left(1 + \frac{2 \cdot b^2}{a^2}\right) \cdot (\bar{C} - \bar{C}_o) - \frac{2 \cdot \xi_1 \cdot (\bar{C} - \bar{C}_o)^3}{3 \cdot (1 + \xi_2) + 4 \cdot \xi_2 \cdot (\bar{C} - \bar{C}_o)^2} + \frac{4 \cdot \xi_1^2 \cdot (\bar{C} - \bar{C}_o)^5}{\left[3 \cdot (1 + \xi_2) + 4 \cdot \xi_2 \cdot (\bar{C} - \bar{C}_o)^2\right]^2} \right] \quad (2.72 \alpha)$$

α) Για:  $\frac{a}{t} < \frac{E}{\sigma_f \cdot \sqrt{3 \cdot (1 - \mu^2)}}$  είναι:

$$m = \frac{E \cdot t}{a \cdot \sigma_f} \cdot \left[ \left(1 + \frac{2 \cdot b^2}{a^2}\right) \cdot (\bar{C} - \bar{C}_o) - \frac{2 \cdot \xi_1 \cdot (\bar{C} - \bar{C}_o)^3}{3 \cdot (1 + \xi_2) + 4 \cdot \xi_2 \cdot (\bar{C} - \bar{C}_o)^2} + \frac{4 \cdot \xi_1^2 \cdot (\bar{C} - \bar{C}_o)^5}{\left[3 \cdot (1 + \xi_2) + 4 \cdot \xi_2 \cdot (\bar{C} - \bar{C}_o)^2\right]^2} \right] \quad (2.72 \beta)$$

Στις περιπτώσεις που συναντάμε συνήθως στην πράξη, για μία δοκό με σωληνωτή διατομή με  $\sigma_f = 3500$  έως  $4500 \text{ dN/cm}^2$ ,  $\mu = 0,3$  και  $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ dN/cm}^2$ , μπορούμε εύκολα να βρούμε ότι είναι  $a / t = 363$  έως  $282$ , που σημαίνει ότι για να είναι κρίσιμος ο λυγισμός θα πρέπει:

για  $a = 100 \text{ cm}$  να είναι:  $t < 0.35 \text{ cm}$  ή  
για  $a = 200 \text{ cm}$  να είναι:  $t < 0.70 \text{ cm}$ .

Οι παραπάνω τιμές, δεν χαρακτηρίζουν μία δοκό σωληνωτής διατομής αλλά μάλλον ένα καθαρά κυλινδρικό κέλυφος.

Μπορούμε επομένως να πούμε ότι το σύνηθες κριτήριο μιας σωληνωτής δοκού δίδεται από την σχέση (2.72 β).

### 3. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ

#### 3.1. Καμπύλωση διατομής

Θεωρούμε την δοκό του σχήματος 3.1 α, με διατομή όπως στο σχ. 3.1 β, η οποία καταπονείται με το κατανεμημένο φορτίο  $p = 75 \text{ KN} / \text{m}$  και την κατανεμημένη στρεπτική ροπή  $m_x = 1 \text{ KN} \cdot \text{m} / \text{m}$ . Θα προσδιορίσουμε την παραμόρφωση της διατομής της δοκού στο σημείο  $x = \ell/2$ .

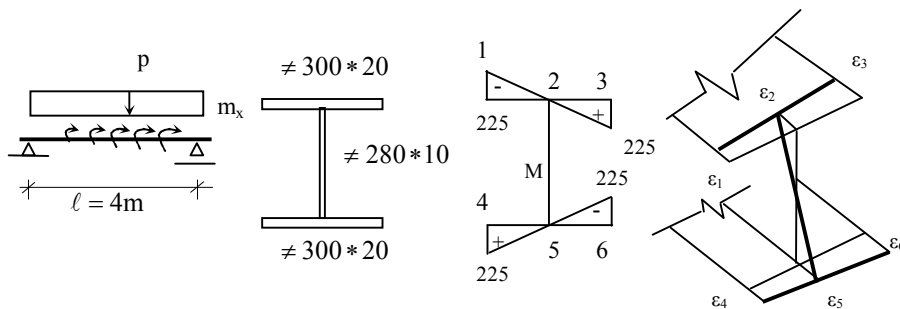
Υπολογίζουμε κατ' αρχάς τα στοιχεία της διατομής:

$$A = 30 \cdot 2 \cdot 2 + 28 \cdot 1 = 148 \text{ cm}^2$$

$$J_y = 2 \cdot 30 \cdot 2 \cdot 15^2 + 1 \cdot 28^3 / 12 = 28829 \text{ cm}^4$$

$$C_M = \int \omega^2 dF = 4 \cdot 2 \cdot 1 / 3 \cdot 225^2 = 2,025 \cdot 10^6 \text{ cm}^6$$

$$J_D = 1 / 3 \cdot (2 \cdot 30 \cdot 2^3 + 28 \cdot 1^3) = 169,33 \text{ cm}^4$$



(σχήμα 3.1)



Από τις λύσεις Rutecki [3], βρίσκουμε διαδοχικά:

$$a = \sqrt{\frac{G \cdot J_D}{E \cdot C_M}} = \sqrt{\frac{0,8 \cdot 169,33}{2,1 \cdot 2,025 \cdot 10^6}} = 5,644 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$$

$$a \cdot \ell = 5,644 \cdot 10^{-3} \cdot 400 = 2,2576$$

Το δίρροπο δίδεται από την έκφραση:

$$B(x) = \frac{m_x}{a^2} \left[ -1 + \frac{1 - \cosh a \cdot \ell}{\sinh a \cdot \ell} \cdot \sinh a \cdot x + \cosh a \cdot x \right], \text{ που για } \chi = \ell/2 \text{ δίνει:}$$

$$B(\ell/2) = -1,3047 \cdot 10^6 \text{ dNcm}^2 \quad \text{και ακόμη:}$$

$$M_y(\ell/2) = 750000 \cdot 4^2 / 8 = 1,50 \cdot 10^6 \text{ dNcm}$$

Από την εξίσωση (2.8) μπορούμε να υπολογίσουμε:

$$\text{Σημείο 1: } \sigma_{x1} = -\frac{1,5 \cdot 10^6}{28829} \cdot 15 + \frac{1,3047 \cdot 10^6}{2,025 \cdot 10^6} \cdot 225 = -648 + 145 = -503 \text{ dN} / \text{cm}^2$$

$$\text{Σημείο 2: } \sigma_{x2} = -\frac{1,5 \cdot 10^6}{28829} \cdot 15 - 0 = -648 - 0 = -648 \text{ dN} / \text{cm}^2$$

$$\text{Σημείο 3: } \sigma_{x3} = -\frac{1,5 \cdot 10^6}{28829} \cdot 15 - \frac{1,3047 \cdot 10^6}{2,025 \cdot 10^6} \cdot 225 = -648 - 145 = -793 \text{ dN} / \text{cm}^2$$

$$\text{Σημείο 4: } \sigma_{x4} = \frac{1,5 \cdot 10^6}{28829} \cdot 15 - \frac{1,3047 \cdot 10^6}{2,025 \cdot 10^6} \cdot 225 = 648 - 145 = 503 \text{ dN} / \text{cm}^2$$

$$\text{Σημείο 5: } \sigma_{x5} = \frac{1,5 \cdot 10^6}{28829} \cdot 15 - 0 = 648 - 0 = 648 \text{ dN} / \text{cm}^2$$

$$\text{Σημείο 6: } \sigma_{x6} = \frac{1,5 \cdot 10^6}{28829} \cdot 15 + \frac{1,3047 \cdot 10^6}{2,025 \cdot 10^6} \cdot 225 = 648 + 145 = 793 \text{ dN} / \text{cm}^2$$

Και οι παραμορφώσεις των σημείων 1 έως 6 της διατομής θα δίδονται από τη σχέση  $\varepsilon = \sigma / E$ , της οποίας η εφαρμογή δίδει το διάγραμμα του σχήματος 3.1 δ, με  $\varepsilon_1 = -2,39 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$ ,  $\varepsilon_2 = -3,08 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$ ,  $\varepsilon_3 = -3,78 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$ ,  $\varepsilon_4 = 2,39 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$ ,  $\varepsilon_5 = 3,08 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$ ,  $\varepsilon_6 = 3,78 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$ .

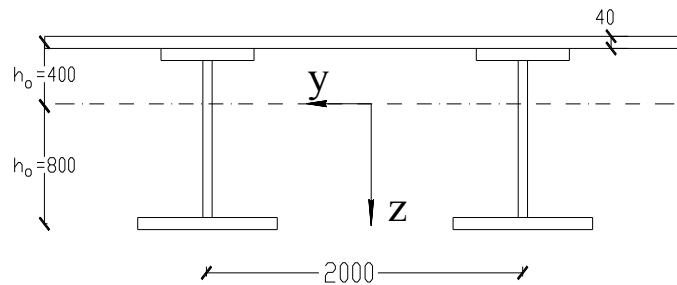
### 3.2. Στρέβλωση (curling) ελασμάτων

Θεωρούμε το τμήμα του καταστρώματος της γέφυρας που φαίνεται στο σχήμα 3.2, με μία αρχική, για κατασκευαστικούς λόγους, καμπυλότητα  $C_0 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ .

Έστω κατ' αρχάς ότι η γέφυρα φορτίζεται μόνο με τα νεκρά φορτία, τα οποία παράγουν ορθές τάσεις στο ανώτερο έλασμα ίσες με  $\sigma_x = 300 \text{ dN/cm}^2$ .

Η προκαλούμενη καμπυλότητα από την παραπάνω φόρτιση είναι:

$$C = \frac{M_b}{E \cdot J} = \frac{\sigma_x}{h_o \cdot E} = \frac{300 \cdot 100}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 40} = 3,57 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$$



(σχήμα 3.2)

Η συνολική καμπυλότητα γίνεται:  $C_{\text{tot}} = 8,57 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ , ενώ η αντίστοιχη ακτίνα καμπυλότητας είναι:  $r = 1 / C_{\text{tot}} = 1166,85 \text{ m}$ .

Η εξίσωση (2.29) δίνει:  $p_y = \frac{300 \cdot 3}{116685} \cdot 100^2 = 77,13 \text{ dN/cm}^2$ .

Η ροπή αδρανείας του άνω ελάσματος είναι:  $J = 100 \cdot 3^3 / 12 = 225 \text{ cm}^4$ .

Η προκαλούμενη παραμόρφωση στο μέσο του ελάσματος θα είναι τότε:

$$f = \frac{77,13 \cdot 200^4}{384 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 225} = 0,682 \text{ cm}$$

ενώ η συνεισφορά του ελάσματος στην συνολική ροπή αδρανείας της διατομής μειώνεται κατά 1,69%.

Θεωρούμε τώρα ότι η γέφυρα φορτίζεται με το σύνολο των φορτίων της που προκαλεί ορθές τάσεις στο ανώτερο έλασμα ίσες με:  $\sigma_x = 1000 \text{ dN/cm}^2$ .

Τότε η προκαλούμενη καμπυλότητα από την παραπάνω φόρτιση θα είναι:

$$C = \frac{1000 \cdot 100}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 40} = 11,90 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$$

Η συνολική καμπυλότητα γίνεται:  $C_{\text{tot}} = 16,90 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ , ενώ η αντίστοιχη ακτίνα καμπυλότητας είναι:  $r = 1 / C_{\text{tot}} = 591,71 \text{ m}$ .

Η εξίσωση (2.29) δίδει:  $p_y = \frac{1000 \cdot 3}{59171} \cdot 100^2 = 505,51 \text{ dN/cm}^2$

Η προκαλούμενη παραμόρφωση στο μέσον του ελάσματος θα είναι τότε:

$$f = \frac{505,51 \cdot 200^4}{384 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 225} = 4,470 \text{ cm}$$

ενώ η συνεισφορά του ελάσματος στην συνολική ροπή αδρανείας της διατομής μειώνεται κατά 10,71 %.

Από τα παραπάνω εύκολα διαπιστώνουμε την επιρροή της στρεβλώσεως των ελασμάτων στην καταπόνηση της δοκού.

### 3.3. Μονωτικά πανώ

Θεωρούμε ένα μονωτικό πανώ με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:  $A=20\text{cm}^2$ ,  $h = 4\text{cm}$ ,  $t = 0,2\text{cm}$ ,  $k = 0,6$ ,  $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ dN/cm}^2$  και  $E_m=10\text{dN/cm}^2$ .

Υποθέτουμε ότι έχουμε να καλύψουμε ένα άνοιγμα 10 m, με μία κυκλική στέγη με ακτίνα  $R = 7,25 \text{ m}$ , βρίσκουμε:

$C_o = 1/725 = 1,379 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$  και άρα η αδιάστατη καμπυλότητα είναι:

$$\bar{C}_o = 1,379 \cdot 10^{-3} \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 0,2}{10}} = 0,565$$

Υποθέτοντας ακόμη, ότι η αναπτυσσόμενη τάση από την κάμψη του πανώ ανέρχεται σε  $2000 \text{ dN/cm}^2$ , λαμβάνουμε:

$$C - C_o = \frac{M_b}{E \cdot J} = \frac{\sigma_x \cdot k \cdot A \cdot h}{E \cdot k \cdot (1-k) \cdot h^2 \cdot A} = \frac{\sigma_x}{E \cdot (1-k) \cdot h} = \frac{2000}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 0,4 \cdot 4} = 5,95 \cdot 10^{-4}$$

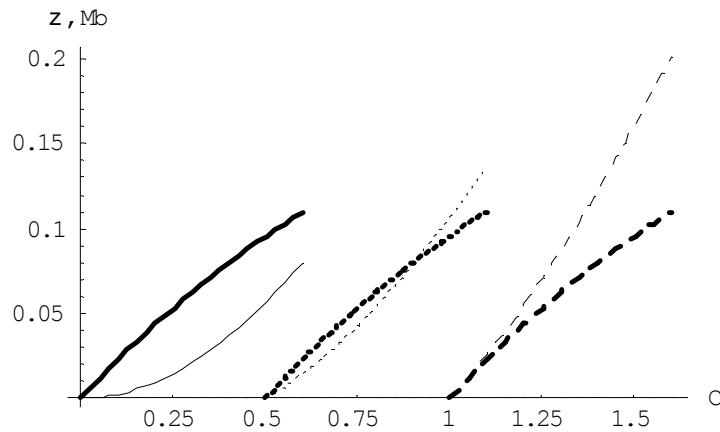
$$\text{ή } \bar{C} - \bar{C}_o = 5,95 \cdot 10^{-4} \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 0,2}{10}} = 0,300 \quad \text{ή } \bar{C} = 0,865 .$$

Τότε η εξίσωση (2.43) δίνει:  $\zeta = \frac{0,865 \cdot 0,300 \cdot 0,6 \cdot 0,4}{1 + 0,865 \cdot 0,300 \cdot 0,6 \cdot 0,4} = 0,0586 .$

Η μεταβολή του πάχους του πανώ είναι:  $\Delta h = 0,0586 \cdot 4 = 0,235 \text{ cm}$ , και η μείωση της ροπής αδρανείας ανέρχεται σε:

$\frac{J - \Delta J}{J} \cdot 100 = (1 - \zeta)^2 \cdot 100 = 88,62\%$  της τιμής της αρχικής τιμής της (του απάραμόρφωτου πανώ).

Το διάγραμμα του σχήματος 3.3, δίνει τη μεταβολή των  $\zeta$  και  $\bar{M}_b$  συναρτήσει του  $\bar{C}$  για  $k=0,6$  και για διάφορες τιμές του  $\bar{C}_o$ .



(σχήμα 3.3)

### 3.4. Η δοκός σωληνωτής διατομής

Σαν τελευταίο παράδειγμα, θεωρούμε μία σωληνωτή δοκό κατασκευασμένη από χάλυβα ποιότητας S315MC, που έχει όριο διαρροής  $\sigma_f = 3150 \text{ dN/cm}^2$  και  $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ dN/cm}^2$ ,  $\mu = 0,3$ , με αρχική καμπυλότητα ακτίνας  $R_o = 30 \cdot a$  και  $a = 50 \text{ cm}$ ,  $t = 0,2 \text{ cm}$ .

Εύκολα υπολογίζουμε ότι:  $\frac{b}{a} = \frac{R_o}{a} - \sqrt{\left(\frac{R_o}{a}\right)^2 - 1} = 0,01667$ ,

$$\zeta_1 = 9 \cdot \frac{b}{a} = 0,15, \quad \xi_1 = \frac{3}{2} + \frac{\zeta_1}{3} = 1,65,$$

$$\xi_2 = \frac{5}{8} - \frac{101}{360} \cdot \zeta_1 - \frac{11533}{1152} \cdot \zeta_1^2 + \frac{17 \cdot \pi^2}{16} \cdot \zeta_1^2 + \frac{\pi^4}{40} \cdot \zeta_1^2 = 0,6484$$

$$\xi_3 = \frac{b}{324 \cdot \pi \cdot a} - \frac{5 \cdot b^2}{2592 \cdot \pi \cdot a^2} + \frac{\pi^2 \cdot b^2}{3888 \cdot a^2} = 1,68 \cdot 10^{-5}.$$

Είναι ακόμη:

$$\frac{a}{t} = \frac{50}{0,2} = 100 < \frac{E}{\sigma_f \cdot \sqrt{3 \cdot (1 - \mu^2)}} = \frac{2,1 \cdot 10^2}{3150 \cdot \sqrt{3 \cdot (1 - 0,3^2)}} = 403,48$$

Και επομένως, η καμπτική καταπόνηση θα είναι η κρίσιμη.

Η ροπή αδρανείας της απαραμόρφωτης διατομής είναι:  $J_o = \pi \cdot t \cdot a^3 = \pi \cdot 0,2 \cdot 50^3 = 78539,82 \text{ cm}^4$  και υποθέτοντας ότι η αναπτυσσόμενη μέγιστη καμπτική τάση του σωλήνος ανέρχεται σε  $\sigma_f$ , έχουμε για την απαραμόρφωτη διατομή:  $M_{cr} = \sigma_f \cdot J_o / a = 49480 \text{ dN} \cdot \text{m}$  και  $C-C_o = M_b / E \cdot J_o = 3 \cdot 10^{-5}$ .

Επομένως:

$$C = 3 \cdot 10^{-5} + C_o = 3 \cdot 10^{-5} + \frac{1}{30 \cdot 50} = 3 \cdot 10^{-5} + 6,67 \cdot 10^{-4} = 6,97 \cdot 10^{-4}$$

που δείχνει ότι η επιρροή της κάμψεως στην τελική καμπυλότητα είναι αμελητέα.

Η εξίσωση (2.65) δίνει:

$$\zeta = \frac{2 \cdot 50^4 \cdot 1,65 \cdot (3 \cdot 10^{-5})^2}{3 \cdot 0,2^2 \cdot (1 + 0,6484) + 4 \cdot 50^4 \cdot 1,65 \cdot (3 \cdot 10^{-5})^2} = 0,0874$$

Η εξίσωση (2.60) δίνει:

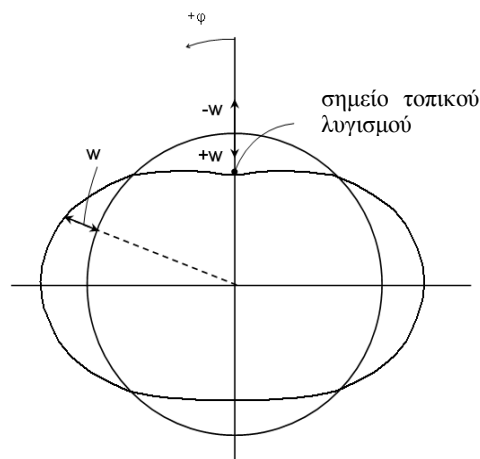
$$J_y = 78539,82 \cdot (1 - 1,65 \cdot 0,0874 + 0,6484 \cdot 0,0874^2) = 67602,60 \text{ cm}^4$$

Η αδιάστατη καμπυλότητα που δίδεται από την (2.66) είναι:

$$\bar{C} - \bar{C}_o = 3 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{50^2}{0,2} = 0,375$$

Μπορούμε εν τέλει μέσω της εξίσωσης (2.68) να προσδιορίσουμε τη ροπή κάμψεως που είναι ικανή να παραλάβει η διατομή:

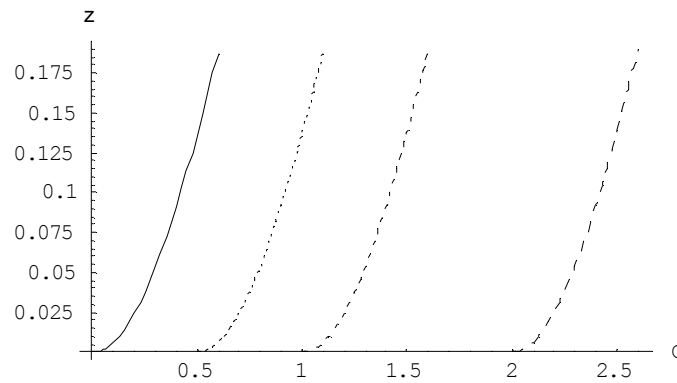
$$\begin{aligned} M_b = & \\ = & 2,1 \cdot 10^6 \cdot 50 \cdot 0,2^2 \left[ (1 + 2 \cdot 0,0167^2) \cdot 0,375 - \frac{2 \cdot 1,65 \cdot 0,375^3}{3 \cdot (1 + 0,6484) + 4 \cdot 0,6484 \cdot 0,375^2} + \right. \\ & \left. + \frac{4 \cdot 1,65^2 \cdot 0,375^5}{[3 \cdot (1 + 0,6484) + 4 \cdot 0,6484 \cdot 0,375^2]^2} \right] = 45559,45 \text{ dN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$



(σχήμα 3.4)

Τούτο σημαίνει, ότι η διατομή στην παραμορφωμένη της κατάσταση μπορεί να παραλάβει το 92,07 % της  $M_{cr}$ .

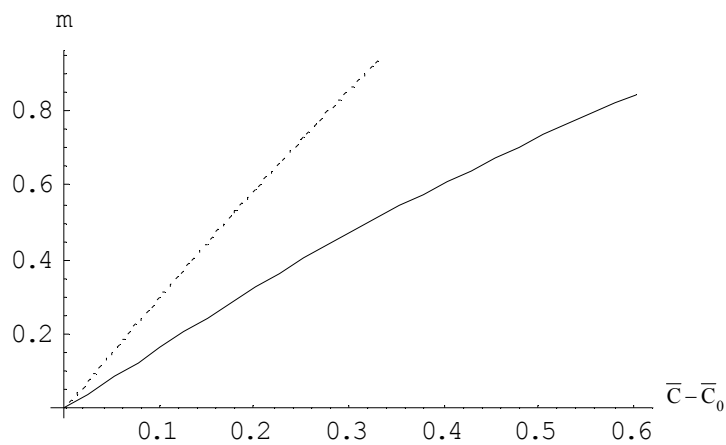
Το διάγραμμα του σχήματος 1.21 δείχνει την παραμορφωμένη διατομή μιας δοκού με  $\alpha = 10$ ,  $\zeta = 0,25$ , και  $R/a = 50$ . Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι στο μέσο του άνω τμήματος της δοκού έχει ήδη εμφανιστεί η περιοχή του τοπικού λυγισμού.



(σχήμα 3.5)

Το διάγραμμα του σχήματος 3.5 δείχνει την μεταβολή του  $\zeta$  συναρτήσει του  $\bar{C}$ , για διάφορες τιμές του  $\bar{C}_0$ .

Τέλος, το διάγραμμα του σχήματος 3.6 δείχνει την μεταβολή της ροπής  $m$  για διάφορες τιμές της  $(\bar{C} - \bar{C}_0)$  και για την περίπτωση (συνεχής γραμμή) μιας δοκού ευαίσθητης σε τοπικό λυγισμό (με  $\alpha/t = 400$ ,  $R_0/a = 400$ , και  $\bar{C}_{\max} = 0.605$ ) καθώς και για την περίπτωση (διακεκομμένη γραμμή) μιάς δοκού ευαίσθητης σε κάμψη (με  $\alpha/t=200$ ,  $R_0/a = 400$ , και  $\bar{C}_{\max} = 0.333$ ).



(σχήμα 3.6)



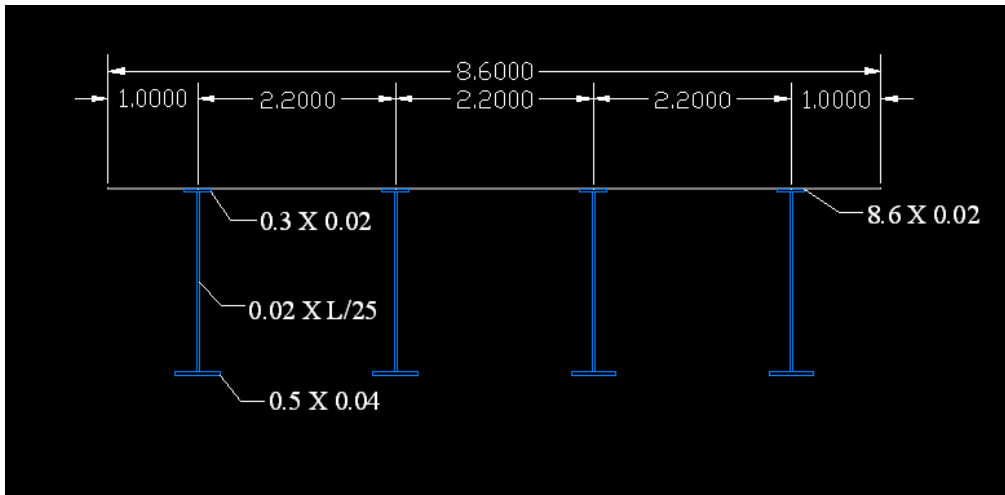
## 4. Η ΠΑΡΟΥΣΑ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάμε την επιρροή του φαινομένου Brazier σε αμφιέριστες γέφυρες διαφόρων ανοιγμάτων, καθώς και σε επικαλύψεις-μονωτικά πανώ. Το φαινόμενο Brazier χαρακτηρίζεται από την μεταβολή της αντοχής της μελετώμενης διατομής λόγω της αναπτυσσόμενης, από την φόρτιση, καμπυλότητας που επιτείνεται ιδιαίτερα από την ύπαρξη αρχικής καμπυλότητας (π.χ. λόγω αρχικής-κατασκευαστικής ατέλειας ή ηθελημένου κατασκευαστικού βέλους).

### 4.1. ΓΕΦΥΡΕΣ

Θεωρούμε αμφιέριστες γέφυρες διατομής όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1 (κατάστρωμα πλάτους 8,6 m και πάχους 20 mm, και τέσσερις διατομές διπλού T ανά 2,2 m με τον κορμό των ακραίων να απέχει 1 m από τα δυο άκρα του καταστρώματος). Για τα διπλά T, το άνω πέλμα έχει πλάτος 300 mm και πάχος 20 mm, το κάτω πέλμα έχει πλάτος 500 mm και πάχος 40 mm, ενώ ο κορμός έχει πάχος 20 mm.

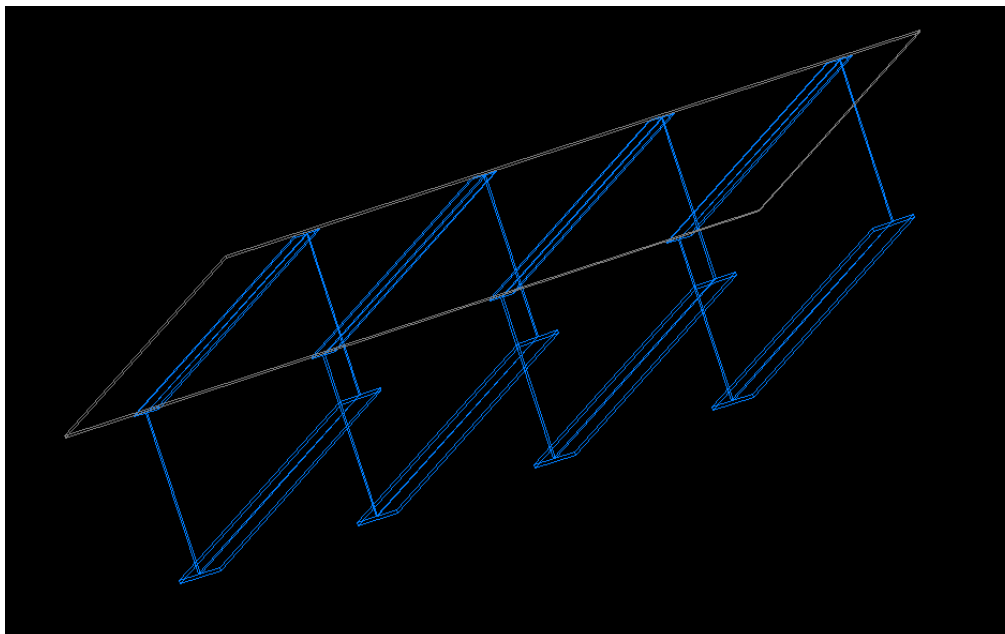




(σχήμα 4.1)

Λαμβάνουμε διάφορες περιπτώσεις ανοιγμάτων  $L$  της γέφυρας. Συγκεκριμένα εργαζόμαστε για  $L = 10 \text{ m}$ ,  $20 \text{ m}$ ,  $30 \text{ m}$ ,  $40 \text{ m}$ ,  $50 \text{ m}$ ,  $60 \text{ m}$ ,  $70 \text{ m}$ . Το μήκος του κορμού κάθε διατομής διπλού T εξαρτάται κάθε φορά από το μήκος  $L$ , και συγκεκριμένα από τη σχέση  $h_w = L/25$ .

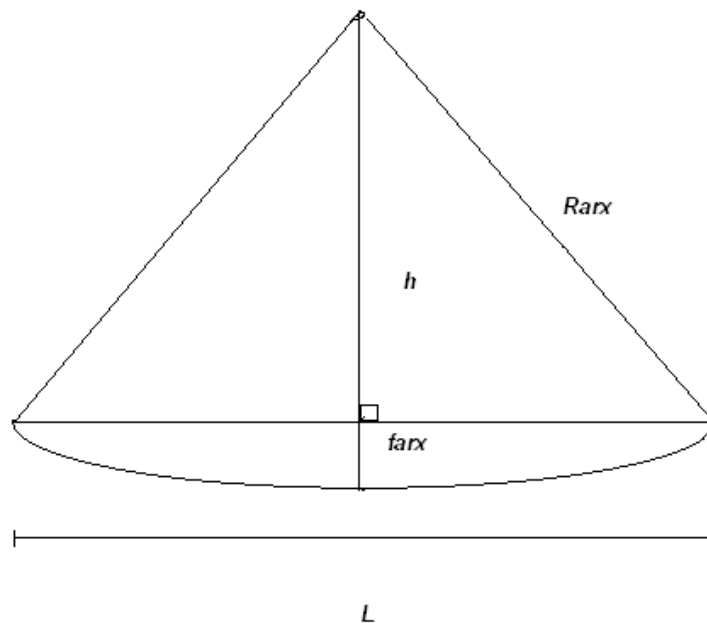
Οι μονάδες που χρησιμοποιούμε γενικά για τα διάφορα μεγέθη κατά τους υπολογισμούς μας είναι τα μέτρα (m), καθώς και τα (dN) για δύναμη, μονάδα ισοδύναμη με τα κιλά (kg) σε μάζα.



(σχήμα 4.2)

Διά τα νεκρά φορτία της γέφυρας, λαμβάνουμε τις εξής τιμές: ίδιον βάρος της πλάκας σκυροδέματος, σταθερό σε όλες τις περιπτώσεις και ίσο προς  $q_{bet} = 190 \text{ dN/m}^2$ , ανωδομής  $q_{anod} = 140 \text{ dN/m}^2$ , τυχόντα δευτερεύοντα φορτία  $q_{deut} = 20 \text{ dN/m}^2$  και διά τα φορτία κυκλοφορίας λαμβάνουμε την τιμή:  $q_{kyklof} = 500 \text{ dN/m}^2$ . Επίσης, λαμβάνουμε μέτρο ελαστικότητας του χάλυβα  $E = 2,1 \cdot 10^{10} \text{ dN/m}^2$ . Στην συνέχεια λύνουμε το ίδιο πρόβλημα για τις παραπάνω 7 τιμές ανοιγμάτων και για τις παρακάτω υποπεριπτώσεις αρχικών κατασκευαστικών βελών:  $f_{arx} = 0 \text{ mm}, 20 \text{ mm}, L/500, L/200$ .

Ακολουθείται η εξής διαδικασία: Υπολογίζουμε το ολικό εμβαδόν της διατομής προσθέτοντας τα επιμέρους εμβαδά του ελάσματος του καταστρώματος με αυτά των διατομών των διπλών T, το κέντρο βάρους της ολικής διατομής, βάσει των κέντρων βαρών των επιμέρους διατομών ως προς την άνω ίνα του καταστρώματος, καθώς και την ροπή αδρανείας της ολικής διατομής ως προς το κέντρο βάρους, που υπολογίσαμε παραπάνω, από τον γνωστό τύπο που φαίνεται στο πρόγραμμα. Εν συνεχεία, υπολογίζουμε την αρχική ακτίνα καμπυλότητας  $R_{arx}$ , λόγω της αρχικής κατασκευαστικής ατέλειας, τριγωνομετρικά από το ορθογώνιο τρίγωνο που δημιουργείται από την ακτίνα καμπυλότητας  $R_{arx}$ , το μήκος  $L/2$  και το ύψος  $h = R_{arx} - f_{arx}$  (σχήμα 4.3). Έτσι θα έχουμε  $R_{arx}^2 = (L/2)^2 + (R_{arx} - f_{arx})^2$ .



(σχήμα 4.3)

Από τις ακτίνες καμπυλότητας  $R_{arx}$  και  $R_{tot}$  μεταβαίνουμε στις καμπυλότητες  $C_{arx}$  και  $C_{tot}$ , από  $C = 1/R$ . Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το γραμμικό φορτίο ως άθροισμα των μονίμων φορτίων μόνο (όλων συμπεριλαμβανομένου και του ίδιου βάρους της διατομής, εκτός από τα φορτία κυκλοφορίας), καθώς και το αντίστοιχο βέλος κάμψης για τα μόνιμα

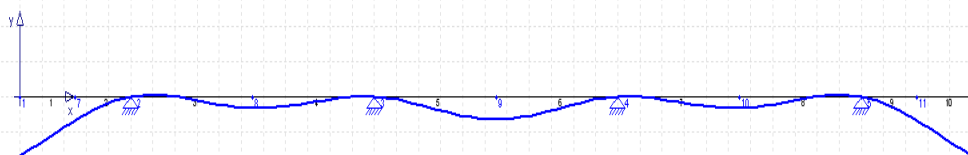
φορτία από τον τύπο που φαίνεται στο πρόγραμμα. Με την ίδια διαδικασία μετατρέπεται το βέλος κάμψης σε αντίστοιχη καμπυλότητα. Έπειτα, βρίσκουμε το επιπρόσθετο βέλος λόγω των φορτίων κυκλοφορίας με τον ίδιο τύπο από το πρόγραμμα και το μετατρέπουμε ομοίως σε καμπυλότητα. Προσθέτουμε όλες τις καμπυλότητες, λόγω κατασκευαστικής ατέλειας, μονίμων φορτίων και φορτίων κυκλοφορίας και από τους δυο τύπους που φαίνονται στο πρόγραμμα βρίσκουμε την ορθή τάση  $\sigma_{x1}$  και την κατακόρυφη  $p_{y1}$  που ασκούνται στη διατομή.

Κατόπιν, με δεδομένο το φορτίο  $p_{y1}$  που εφαρμόζεται πάνω στο κατάστρωμα, το επιλύουμε σαν συνεχή δοκό, με στηρίξεις τις τέσσερις διατομές διπλού T. Προκειμένου να το επιλύσουμε, για την εύρεση των βελών που αναπτύσσονται στα ανοίγματα, χρησιμοποιούμε τους πίνακες αντιδράσεων, καμπτικών ροπών και βελών που βρίσκονται πίσω στο παράρτημα των πινάκων, από το βιβλίο. Πιο συγκεκριμένα, προσομοιάζουμε το τμήμα του καταστρώματος μεταξύ των δύο μεσαίων στηρίξεων-διπλών T με αμφίπακτη δοκό υπό ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο  $p_{y1}$ , λαμβάνοντας τον αντίστοιχο τύπο για το βέλος κάμψης από τον πίνακα  $f = (q \cdot \ell) \cdot \ell^3 / (384 \cdot E \cdot J)$ .

Τα δύο παρακείμενα αυτού τμήματα προσομοιάζονται με μονόπακτες δοκούς υπό ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο  $p_{y1}$  οπότε  $f = (q \cdot \ell) \cdot \ell^3 / (185 \cdot E \cdot J)$  για  $\chi = 0,4215 \cdot \ell$ . Εδώ όμως, πρέπει να λάβουμε υπόψη μας και την επιρροή της ροπής λόγω του φορτίου του παρακείμενου προβόλου, η οποία δημιουργεί ένα βέλος  $f = - (M \cdot x^2) \cdot (\ell - x) / (4 \cdot \ell \cdot E \cdot J)$ , όπου  $M = q \cdot \ell^2 / 2$ .

Τέλος, τα ακραία τμήματα λύνονται ως πρόβολοι με ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο  $p_{y1}$ , οπότε  $f = (q \cdot \ell) \cdot \ell^3 / (8 \cdot E \cdot J)$ . Από την επίλυση αυτή, λοιπόν, προκύπτουν τα βέλη που αναπτύσσονται στα επιμέρους ανοίγματα μεταξύ των διατομών των διπλών T, καθώς και τα βέλη στα άκρα των ακραίων προβόλων.

Λόγω των βελών αυτών, το κατάστρωμα παίρνει μια νέα μορφή στο χώρο, όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.4 από τις επιλύσεις του Beam 2D. Θυμίζουμε ότι ο στόχος μας είναι ο προσδιορισμός της μεταβολής της ροπής αδράνειας της διατομής μετά την επιβολή όλων των φορτίων. Σε αυτή τη μεταβολή, ουσιαστικά, συνεισφέρει μόνο το κατάστρωμα, λόγω της μεταβολής της γεωμετρίας του.



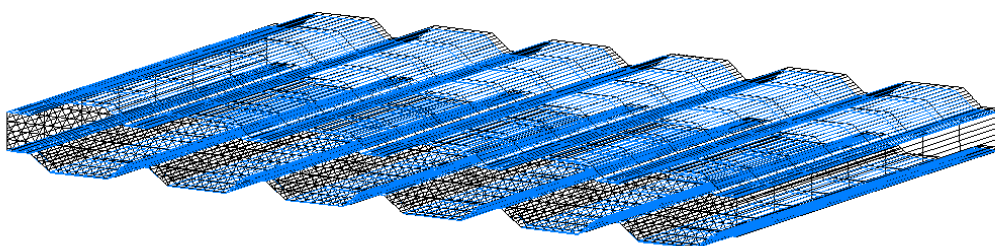
(σχήμα 4.4)

Για τον προσδιορισμό, λοιπόν, της μεταβολής της ροπής αδράνειας της διατομής, απαιτείται η προσομοίωση της νέας μορφής του καταστρώματος με σειρά εξισώσεων καμπύλων. Για τα ανοίγματα επελέγη η συνημιτονοειδής καμπύλη,  $y = f [\cos (2 \cdot \pi \cdot x / L)]$ , ενώ για τους ακραίους προβόλους επελέγη η  $y = f [\cos (\pi \cdot x / 2 \cdot L)]$ , όπου  $f$  το αντίστοιχο βέλος που υπολογίσαμε μέσω των τύπων των πινάκων. Έτσι, η νέα ροπή αδράνειας του καταστρώματος, μετά την επιβολή των φορτίων, υπολογίζεται ως εξής: Για κάθε άνοιγμα ή πρόβολο υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα, σε όλο το αντίστοιχο πλάτος (2,2 m για άνοιγμα ή 1 m για ακραίο πρόβολο), της διαφοράς της απόστασης του κέντρου βάρους όλης της διατομής από την πάνω ακραία ίνα, μείον την νέα εξίσωση της καμπύλης σε κάθε περίπτωση, στο τετράγωνο, επί το πάχος του ελάσματος. Το άθροισμα αυτών των ολοκληρωμάτων αποτελεί την νέα ροπή αδράνειας του καταστρώματος.

Η αρχική ροπή αδράνειας του καταστρώματος είναι το εμβαδόν της διατομής του καταστρώματος επί την απόσταση του από το κέντρο βάρους της διατομής στο τετράγωνο. Τέλος, αφαιρούμε την αρχική από την τελική ροπή αδράνειας και βρίσκουμε την μεταβολή.

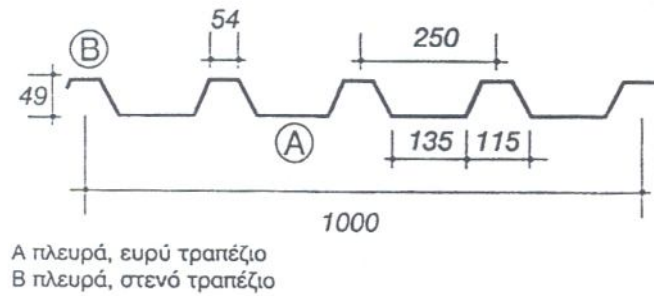
## 4.2. ΕΠΙΚΑΛΥΨΕΙΣ

Θεωρούμε μονωτικό πανώ με δύο φύλλα μεταξύ των οποίων παρεμβάλλεται μονωτικό υλικό – πολουρεθάνη (σχήμα 4.5). Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των φύλλων λαμβάνονται από τους πίνακες της KSH.



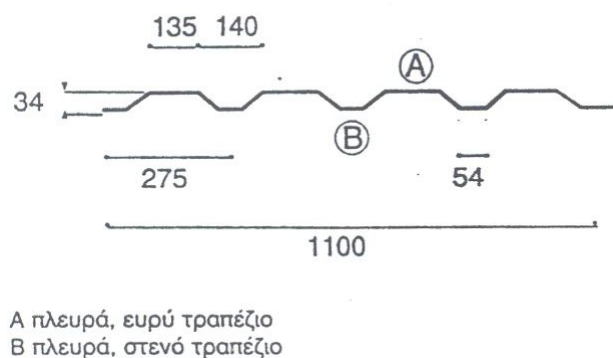
(σχήμα 4.5)

Αρχικά, για εξωτερικό φύλλο χρησιμοποιούμε το KSH 50-1000 (σχήμα 4.5), γαλβανισμένου εν θερμώ χάλυβα FeE280G, με ύψος κύματος  $h_o = 49$  mm, πάχος ελάσματος  $t_{el} = 0,5$  mm, εμβαδόν διατομής ανά 1 m ωφέλιμου πλάτους,  $A_o = 5,5$  cm<sup>2</sup>, και ροπή αδράνειας  $J_o = 21,54$  cm<sup>4</sup> για το ίδιο ωφέλιμο πλάτος.



(σχήμα 4.6)

Για εσωτερικό φύλλο χρησιμοποιούμε το KSH 35-1100 (σχήμα 4.6), γαλβανισμένου εν θερμώ χάλυβα FeE280G, με ύψος κύματος  $h_u = 34$  mm, πάχος ελάσματος  $t_{el} = 0,5$  mm, εμβαδόν διατομής ανά 1,1 m ωφέλιμου πλάτους,  $A_u = 4,98$  cm<sup>2</sup>, και ροπή αδράνειας  $J_u = 10,03$  cm<sup>4</sup> για το ίδιο ωφέλιμο πλάτος.



(σχήμα 4.7)

Επίσης, θεωρούμε απόσταση μεταξύ των δύο ελασμάτων  $t = 30 \text{ mm}$ , άνοιγμα προς επικάλυψη επιφάνειας  $L = 10 \text{ m}$ , καθώς και αρχικό βέλος κάμψης  $f_1 = L/5$ . Εν συνεχεία, για την μελέτη του φαινομένου Brazier, κάνουμε τους ίδιους υπολογισμούς και για φύλλα με διαφορετικό πάχος  $t_{el} = 0,6 \text{ mm}, 0,75 \text{ mm}, 1 \text{ mm}, 1,25 \text{ mm}$ , (λαμβάνοντας τα αντίστοιχα εμβαδά ροπές αδράνειας και βάρη των χαλυβδόφυλλων από τους αντίστοιχους πίνακες), επίσης για προς επικάλυψη ανοίγματα  $L = 3 \text{ m}, 4 \text{ m}, 5 \text{ m}, 15 \text{ m}, 20 \text{ m}, 25 \text{ m}$ , καθώς και για αρχικά βέλη κάμψης  $f_1 = L/2, L/3, L/10, L/15, L/20, L/25, L/30, L/40, L/50$ .

Σε καθεμία, λοιπόν, περίπτωση ακολουθούμε την εξής διαδικασία. Υπολογίζουμε τις αποστάσεις των κεντροβαρικών αξόνων κάθε ελάσματος από την κάτω ίνα της συνολικής διατομής και τα προσομοιάζουμε με επίπεδα ελάσματα που διέρχονται από τον κεντροβαρικό τους άξονα για την διευκόλυνση των υπολογισμών. Επίσης, υπολογίζουμε τον συντελεστή  $k$  που αποτελεί το ποσοστό συμμετοχής του εμβαδού του άνω ελάσματος  $A_o$  στο συνολικό εμβαδό των δύο ελασμάτων  $A$ . Εν συνεχεία, υπολογίζουμε την απόσταση του κεντροβαρικού άξονα της συνολικής διατομής από την κάτω ίνα, την ροπή αδράνειας της συνολικής διατομής ως προς τον κεντροβαρικό αυτό άξονα, καθώς και τις αντίστοιχες ροπές αντίστασης  $W$ , για την άνω και την κάτω ίνα.

Συνεχίζουμε με το συνολικό φορτίο που ασκείται στην διατομή που προέρχεται από την υποπίεση  $q$  και από τα ίδια βάρη των ελασμάτων και την αντίστοιχη καμπτική ροπή  $M$  στο μέσον του ανοίγματος λόγω του φορτίου αυτού. Από την σχέση  $\sigma_x = M/W$  υπολογίζουμε την ορθή τάση που αναπτύσσεται στις δυο ίνες της διατομής λόγω της φόρτισης. Μετά, υπολογίζουμε την ακτίνα καμπυλότητας  $R_1$  που αντιστοιχούν στο βέλος  $f_1$ , τριγωνομετρικά από το ορθογώνιο τρίγωνο που δημιουργείται από την ακτίνα καμπυλότητας  $R$ , το μήκος  $L/2$  και το ύψος  $h = R - f$ . Έτσι θα έχουμε  $R^2 = (L/2)^2 + (R - f)^2$  και μεταβαίνουμε από την ακτίνα καμπυλότητας στην καμπυλότητα,  $C = 1/R$ .

Τέλος, από τους τύπους του προγράμματος υπολογίζουμε διαδοχικά την αδιάστατη καμπυλότητα λόγω αρχικού βέλους κάμψης  $C1$ , κατόπιν, υπολογίζουμε την τελική ανηγμένη καμπυλότητα  $C2$  και τον συντελεστή  $\zeta$ . Τέλος μέσω του συντελεστή  $\zeta$ , υπολογίζουμε την τελική μεταβολή του πάχους  $Dh$  και της ροπής αδράνειας  $DJ$ .

### 4.3. ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΜΕΝΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ

#### 4.3.1. Γενικά

Τα προγράμματα που χρησιμοποιήθηκαν στη παρούσα εργασία είναι τα εξής:

- α) Mathematica 6, για τους υπολογισμούς μας.
- β) Microsoft Office Excel 2003, για την κατασκευή των διαγραμμάτων από τα αποτελέσματα των υπολογισμών.
- γ) Microsoft Office Word, για τη συγγραφή της εργασίας.
- δ) Math Type, για την εισαγωγή μαθηματικών τύπων στα αρχεία Word.
- ε) Beam 2D, πρόγραμμα του Ε.Μ.Π. που χρησιμοποιήθηκε για επαλήθευση εντατικών μεγεθών και βελών κατά την επίλυση των φορέων μας.
- στ) AutoCad 2007, για τη δημιουργία τομών και όψεων 2D και 3D των γεφυρών και των επικαλύψεων.

#### 4.3.2 Πρόγραμμα για γέφυρες.

##### 4.3.2.1 Μηδενικό αρχικό κατασκευαστικό βέλος.

Τα δεδομένα του συγκεκριμένου προγράμματος είναι τα εξής: Κατάστρωμα πλάτους 8,6 m και πάχους 20 mm, και τέσσερις διατομές διπλού T ανά 2,2 m με τον κορμό των ακραίων να απέχει 1 m από τα δυο άκρα του καταστρώματος. Για τα διπλά T, το άνω πέλμα έχει πλάτος 300 mm και πάχος 20 mm, το κάτω πέλμα έχει πλάτος 500 mm και πάχος 40 mm, ενώ ο κορμός έχει πάχος 20 mm. Λαμβάνουμε άνοιγμα της γέφυρας  $L=10$  m. Το μήκος του κορμού κάθε διατομής διπλού T εξαρτάται από το μήκος L, και συγκεκριμένα λαμβάνουμε  $h_w = L/25$ , δηλαδή 400 mm. Οι μονάδες που χρησιμοποιούμε γενικά για τα διάφορα μεγέθη κατά τους υπολογισμούς μας είναι τα μέτρα (m), καθώς και τα (dN) για δύναμη, μονάδα ισοδύναμη με τα κιλά (kg) σε μάζα. Διά τα νεκρά φορτία της γέφυρας, λαμβάνουμε τις εξής τιμές: ίδιον βάρος της πλάκας σκυροδέματος, ίσο προς  $q_{bet} = 190 \text{ dN/m}^2$ , ανωδομής  $q_{anod} = 140 \text{ dN/m}^2$ , τυχόντα δευτερεύοντα φορτία  $q_{deut} = 20 \text{ dN/m}^2$  και διά τα φορτία κυκλοφορίας λαμβάνουμε την τιμή:  $q_{kyklof} = 500 \text{ dN/m}^2$ . Επίσης, λαμβάνουμε μέτρο ελαστικότητας του χάλυβα  $E = 2,1 \cdot 10^{10} \text{ dN/m}^2$ . Στην συνέχεια λύνουμε το πρόβλημα για αρχικό κατασκευαστικό βέλος:  $f_{αρχ} = 0$  mm.

Το ακόλουθο πρόγραμμα επιλύει το πρόβλημα για μηδενικό αρχικό κατασκευαστικό βέλος.

```
ClearAll[L, F, bel, tel, bfo, tfo, bfu, tfu, tbet, tw, hw, Ym, Jy, EE, qtel, q,
Beton, Anod, Deut, fo, Ro, Co, kuklof, farx, Rarx, Carx, Ctot, Rtot, dN, m, M,
Yo, Yu, Pyu, Pyo, Jyo, Jyu]
```

```
L=10;
```

```
bel=8.600;
```

```
tel=0.020;
```

```
bfo=0.300;
```

```
tfo=0.020;
```

```
bfu=0.500;
```

```
tfu=0.040;
```

```
tw=0.020;
```

```
tbet=0.080;
```

```
Beton=190;
```

```
Anod=140;
```

```
Deut=20;
```

```
kuklof=500;
```

```
"farx(m)="
```

```
farx=0
```

```
"EE(dN/m2)="
```

```
EE=2.10 1010
```

```
"hw(m)="
```

```
hw=N[L/25,8]
```

```
"F(m2)="
```

```
F=bel tel+4 (bfo tfo+hw tw+bfu tfu)
```

```
"Ym(m)="
```

```
Ym=(bel tel tel/2+4 (bfo tfo (tel+tfo/2)+hw tw (tel+tfo+hw/2)+bfu tfu
(tel+tfo+hw+tfu/2)))/F
```

```
"Jy(m4)="
```

```
Jy=bel tel3/12+(Ym-tel/2)2 bel tel+4 (bfo tfo3/12+bfo tfo (Ym-tel-
tfo/2)2+tw hw3/12+tw hw (Ym-tel-tfo-hw/2)2+bfu tfu3/12+bfu tfu (Ym-tel-
tfo-hw-tfu/2)2)
```

```
q=N[(Beton+Anod+Deut+kuklof),8]
```

```
"qtel(dN/m)="
```

```
qtel=F 7850+q bel
```

```
"fo(m)="
```

```
fo=(0.01302 qtel L (L 100)3/(EE Jy 10000)) 0.01
```

```
"Ro(m)="
```

```
Ro=(fo2+(L/2)2)/(2 fo)
```



```

"Co(m-1)="
Co=1/Ro
"Ctot(m-1)="
Ctot=Co
"Rtot(m)="
Rtot=1/Ctot
"M(dN m)="
M=(qtel) L2/8
"Yo(dN/m2)="
Yo=M (Ym-tfo/2)/Jy
"Yu(dN/m2)="
Yu=M (hw+tfo+tfu+tel-Ym-tfu/2)/Jy
"Pyo(dN/m2)="
Pyo=Yo tel/Rtot
"Pyu(dN/m2)="
Pyu=Yu tfu/Rtot
"Jyo(m4)="
Jyo=1 tel3/12
"Jyu(m4)="
Jyu=1 tfu3/12
ClearAll[fp,a,y,x,Jtelp,Jarx,ΔJ,Jarxp,DJp]
a=1;
fp=Pyo a a3/(8 EE Jyo)
y=fp*(Sin[π*x/(2*a)])
Plot[y, {x,0,a} ]
"Jarxp(m4)="
Jarxp=2 tel ∫0a (Y m -tel/2)2 dx
"Jtelp(m4)="
Jtelp=2 tel ∫0a (Y m -tel/2-y)2 dx
"DJp(%)="

DJp=(Jtelp-Jarxp) 100/Jarxp
ClearAll[a,y,x,fm,Jtelm,Jarxm,DJm]
a=2.2;
fm=Pyo a a3/(384 EE Jyo)
y=fm/2*(Cos[2*π*x/a]-1)
Plot[y, {x,0,a} ]

```

```

"Jarxm(m4)="
Jarxm=tel ∫0a (Ym - tel / 2) ^ 2 dx
"Jtelm(m4)="
Jtelm=tel ∫0a (Ym - tel / 2 + y) ^ 2 dx
"DJm(%)"
DJm=(Jtelm-Jarxm) 100/Jarxm
ClearAll[a,y,x,f,f1,f2,Jtel,Jarx,DJ]
a=2.2;
f1=Pyo a a^3/(185 EE Jyo);
f2=Pyo (0.4215 a)^2 (a-0.4215 a)/(2 4 a EE Jyo);
f=f1-f2
y=f/2*(Cos[2*π*x/a]-1)
Plot[y,{x,0,a}]
"Jarx(m4)="
Jarx=2 tel ∫0a (Ym - tel / 2) ^ 2 dx
"Jtel(m4)="
Jtel=2 tel ∫0a (Ym - tel / 2 + y) ^ 2 dx
"DJ(%)"
DJ=(Jtel-Jarx) 100/Jarx
"ΔJ (%)"
ΔJ=DJ+DJm+DJp

```

#### 4.3.2.2 Μη μηδενικό αρχικό κατασκευαστικό βέλος.

Τα δεδομένα του συγκεκριμένου προγράμματος είναι τα εξής: Κατάστρωμα πλάτους 8,6 m και πάχους 20 mm, και τέσσερις διατομές διπλού T ανά 2,2 m με τον κορμό των ακραίων να απέχει 1 m από τα δυο άκρα του καταστρώματος. Για τα διπλά T, το άνω πέλμα έχει πλάτος 300 mm και πάχος 20 mm, το κάτω πέλμα έχει πλάτος 500 mm και πάχος 40 mm, ενώ ο κορμός έχει πάχος 20 mm. Λαμβάνουμε άνοιγμα της γέφυρας L = 10 m. Το μήκος του κορμού κάθε διατομής διπλού T εξαρτάται από το μήκος L και συγκεκριμένα λαμβάνουμε  $h_w = L/25$ , δηλαδή 400 mm. Οι μονάδες που χρησιμοποιούμε γενικά για τα διάφορα μεγέθη κατά τους υπολογισμούς μας είναι τα μέτρα (m), καθώς και τα (dN) για δύναμη, μονάδα ισοδύναμη με τα κιλά (kg) σε μάζα. Διά τα νεκρά φορτία της γέφυρας, λαμβάνουμε τις εξής τιμές: ίδιον βάρος της πλάκας σκυροδέματος, ίσο προς  $q_{bet} = 190 \text{ dN/m}^2$ ,

ανωδομής  $q_{\text{anod}} = 140 \text{ dN/m}^2$ , τυχόντα δευτερεύοντα φορτία  $q_{\text{deut}} = 20 \text{ dN/m}^2$  και διά τα φορτία κυκλοφορίας λαμβάνουμε την τιμή:  $q_{\text{kuklof}} = 500 \text{ dN/m}^2$ . Επίσης, λαμβάνουμε μέτρο ελαστικότητας του χάλυβα  $E = 2,1 \cdot 10^{10} \text{ dN/m}^2$ . Στην συνέχεια λύνουμε το πρόβλημα για διάφορες τιμές του αρχικού κατασκευαστικού βέλους, δηλαδή για  $f_{\text{αρχ}} \neq 0 \text{ mm}$ , έστω  $f_{\text{αρχ}} = L/200$ , δηλαδή 50 mm.

ClearAll[L, F, bel, tel, bfo, tfo, bfu, tfu, tbet, tw, hw, Ym, Jy, EE, qtel, q, Beton, Anod, Deut, fo, Ro, Co, kuklof, farx, Rarx, Carx, Ctot, Rtot, dN, m, M, σο, συ, Pyu, Pyo, Jyo, Jyu]

L=10;

bel=8.600;

tel=0.020;

bfo=0.300;

tfo=0.020;

bfu=0.500;

tfu=0.040;

tw=0.020;

tbet=0.080;

Beton=190;

Anod=140;

Deut=20;

kuklof=500;

"farx(m)="

farx=N[L/200,5]

"EE(dN/m<sup>2</sup>)="

EE=2.10 10<sup>10</sup>

"hw(m)="

hw=N[L/25,8]

"F(m<sup>2</sup>)="

F=bel tel+4 (bfo tfo+hw tw+bfu tfu)

"Ym(m)="

Ym=(bel tel tel/2+4 (bfo tfo (tel+tfo/2)+hw tw (tel+tfo+hw/2)+bfu tfu (tel+tfo+hw+tfu/2)))/F

"Jy(m<sup>4</sup>)="

Jy=bel tel<sup>3</sup>/12+(Ym-tel/2)<sup>2</sup> bel tel+4 (bfo tfo<sup>3</sup>/12+bfo tfo (Ym-tel-tfo/2)<sup>2</sup>+tw hw<sup>3</sup>/12+tw hw (Ym-tel-tfo-hw/2)<sup>2</sup>+bfu tfu<sup>3</sup>/12+bfu tfu (Ym-tel-tfo-hw-tfu/2)<sup>2</sup>)

q=N[(Beton+Anod+Deut+kuklof),8]

"qtel(dN/m)="

qtel=F 7850+q bel

"Rarx(m)="

Rarx=(farx<sup>2</sup>+(L/2)<sup>2</sup>)/(2 farx)

"Carx(m<sup>-1</sup>)="

Carx=1/Rarx

"fo(m)="

```

fo=(0.01302 qtel L (L 100)^3/(EE Jy 10000)) 0.01
"Ro(m)="
Ro=(fo^2+(L/2)^2)/(2 fo)
"Co(m^-1)="
Co=1/Ro
"Ctot(m^-1)="
Ctot=Carx+Co
"Rtot(m)="
Rtot=1/Ctot
"M(dN m)="
M=(qtel) L^2/8
"σo(dN/m^2)="
σo=M (Ym-tfo/2)/Jy
"σu(dN/m^2)="
σu=M (hw+tfo+tfu+tel-Ym-tfu/2)/Jy
"Pyo(dN/m^2)="
Pyo=σo tel/Rtot
"Pyu(dN/m^2)="
Pyu=σu tfu/Rtot
"Jyo(m^4)="
Jyo=1 tel^3/12
"Jyu(m^4)="
Jyu=1 tfu^3/12
ClearAll[fp,a,y,x,Jtelp,Jarx,ΔJ,Jarxp,DJp]
a=1;
fp=Pyo a a^3/(8 EE Jyo)
y=fp*(Sin[π*x/(2*a)])
Plot[y,{x,0,a}]
"Jarxp(m^4)="
Jarxp=2 tel ∫_0^a (Ym - tel / 2) ^ 2 dx
"Jtelp(m^4)="
Jtelp=2 tel ∫_0^a (Ym - tel / 2 - y) ^ 2 dx
"DJp(%)="
DJp=(Jtelp-Jarxp) 100/Jarxp
ClearAll[a,y,x,fm,Jtelm,Jarxm,DJm]
a=2.2;
fm=Pyo a a^3/(384 EE Jyo)
y=fm/2*(Cos[2*π*x/a]-1)
Plot[y,{x,0,a}]
"Jarxm(m^4)="
Jarxm=tel ∫_0^a (Ym - tel / 2) ^ 2 dx
"Jtelm(m^4)="
Jtelm=tel ∫_0^a (Ym - tel / 2 + y) ^ 2 dx

```

```

"DJm(%)"=
DJm=(Jtelm-Jarxm) 100/Jarxm
ClearAll[a,y,x,f,f1,f2,Jtel,Jarx,DJ]
a=2.2;
f1=Pyo a a^3/(185 EE Jyo);
f2=Pyo (0.4215 a)^2 (a-0.4215 a)/(2 4 a EE Jyo);
f=f1-f2
y=f*(Cos[2*π*x/a]-1)/2
Plot[y, {x,0,a} ]
"Jarx(m^4)"=
Jarx=2 tel ∫0a (Ym - tel / 2) ^ 2 dx
"Jtel(m^4)"=
Jtel=2 tel ∫0a (Ym - tel / 2 + y) ^ 2 dx
"DJ(%)"=
DJ=(Jtel-Jarx) 100/Jarx
"ΔJ (%)"=
ΔJ=DJ+DJm+DJp

```

### 4.3.3 Πρόγραμμα για μονωτικά πανώ.

#### 4.3.3.1 Μονωτικό πανώ χαμηλού κύματος.

Θεωρούμε μονωτικό πανώ με δύο φύλλα μεταξύ των οποίων παρεμβάλλεται μονωτικό υλικό-πολυουρεθάνη. Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των φύλλων λαμβάνονται από τους πίνακες της KSH. Για εξωτερικό φύλλο χρησιμοποιούμε το KSH 35-1100, με ύψος κύματος  $h_u = 34$  mm, πάχος ελάσματος  $tel = 0,5$  mm, εμβαδόν διατομής ανά 1,1 m ωφέλιμου πλάτους,  $A_u = 4,98$  cm<sup>2</sup>, και ροπή αδράνειας  $J_u = 10,03$  cm<sup>4</sup> για το ίδιο ωφέλιμο πλάτος. Για εσωτερικό φύλλο χρησιμοποιούμε το KSH 35-1100, με ύψος κύματος  $h_u = 34$  mm, πάχος ελάσματος  $tel = 0,5$  mm, εμβαδόν διατομής ανά 1,1 m ωφέλιμου πλάτους,  $A_u = 4,98$  cm<sup>2</sup>, και ροπή αδράνειας  $J_u = 10,03$  cm<sup>4</sup> για το ίδιο ωφέλιμο πλάτος. Επίσης, θεωρούμε απόσταση μεταξύ των δύο ελασμάτων  $t = 30$  mm, άνοιγμα προς επικάλυψη επιφάνειας  $L = 10$  m, καθώς και αρχικό βέλος κάμψης  $f_1 = L/5$ , δηλαδή 2 m.

Συντάξαμε το ακόλουθο πρόγραμμα:

```

ClearAll[Ao, Au, A, Yo, Yu, Ytot, to, tu, Jtot, ho, tel, t, k, EE, Em, C0, C1,
C2, L, fl, R1,  $\sigma_x$ , DC,  $\zeta$ , Dh, DJ, Jo, Ju, Wo, Wu, q, Bo, Bu, qtel, dN, cm, m]
ho=3.4;
t=3.0;
tel=0.05;
L=1000;
"q(dN/m2)="
q=100
EE=2100000;
Em=10;
fl=L/5;
Ao=4.98;
Jo=10.03;
Bo=4.54;
Au=4.98;
Ju=10.03;
Bu=4.54;
"A(cm2)="
A=Ao+Au
k=Ao/A
"Yo(cm)="
Yo=t+tel+(4 (13.5 tel (ho-tel/2)+2  $\sqrt{(ho^2 + 4 \cdot 3^2)}$  tel ho/2+(5.4 tel2) /2)
/Ao)
"Yu(cm)="
Yu=(4 (13.5 tel (ho-tel/2)+2  $\sqrt{(ho^2 + 4 \cdot 3^2)}$  tel ho/2+(5.4 tel2) /2) /Ao)
"to(cm)="
to=Ao/100
"tu(cm)="
tu=(1-k) to/k
"Ytot(cm)="
Ytot=(Ao Yo+Au Yu)/A
"Jtot(cm4)="
Jtot=Ao (Yo-Ytot)2+Au Ytot2+Jo+Ju
"R1(cm)="
R1=N[(fl2+(L/2)2)/(2 fl )]
"Wo(cm3)="
Wo=Jtot/(Yo-Ytot)
"Wu(cm3)="
Wu=Jtot/Ytot
"qtel(dN/m)="
qtel=q-Bo-Bu
"M(dN m)="
M=qtel (L/100)2/8
" $\sigma_x$ (dN/cm2)="

```

$$\sigma_x = M_{100} / W_u$$

$$C_0 = N [1/R_{1,2}]$$

$$C_1 = C_0 \sqrt{\frac{EE (Y_o - Y_u) (t_u + t_o)}{E_m}}$$

$$DC = \sigma_x / (EE (Y_o - Y_u) (1-k))$$

$$C_2 = DC \sqrt{\frac{EE (Y_o - Y_u) (t_u + t_o)}{E_m}} + C_1$$

$$"ζ="$$

$$ζ = C_2 (C_2 - C_1) k (1-k) / (1 + C_2 (C_2 - C_1) k (1-k))$$

$$"Dh(cm)="$$

$$Dh = (Y_o - Y_u) ζ$$

$$"DJ(%)="$$

$$DJ = ((1-ζ)^2) 100$$

#### 4.3.3.2 Μονωτικό πανώ υψηλού κύματος.

Θεωρούμε μονωτικό πανώ με δύο φύλλα μεταξύ των οποίων παρεμβάλλεται μονωτικό υλικό - πολυουρεθάνη. Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των φύλλων λαμβάνονται από τους πίνακες της KSH. Για εξωτερικό φύλλο χρησιμοποιούμε το KSH 50-1000, με ύψος κύματος  $h_o = 49$  mm, πάχος ελάσματος  $t_{el} = 0,5$  mm, εμβαδόν διατομής ανά 1 m ωφέλιμου πλάτους,  $A_o = 5,5$  cm<sup>2</sup>, και ροπή αδράνειας  $J_o = 21,54$  cm<sup>4</sup> για το ίδιο ωφέλιμο πλάτος. Για εσωτερικό φύλλο χρησιμοποιούμε το KSH 35-1100, με ύψος κύματος  $h_u = 34$  mm, πάχος ελάσματος  $t_{el} = 0,5$  mm, εμβαδόν διατομής ανά 1,1 m ωφέλιμου πλάτους,  $A_u = 4,98$  cm<sup>2</sup>, και ροπή αδράνειας  $J_u = 10,03$  cm<sup>4</sup> για το ίδιο ωφέλιμο πλάτος. Επίσης, θεωρούμε απόσταση μεταξύ των δύο ελασμάτων  $t = 30$  mm, άνοιγμα προς επικάλυψη επιφάνειας  $L = 10$  m, καθώς και αρχικό βέλος κάμψης  $f_1 = L/5$ , δηλαδή 2 m.

Συντάξαμε το ακόλουθο πρόγραμμα:

```

ClearAll[Ao, Au, A, Yo, Yu, Ytot, to, tu, Jtot, ho, tel, t, k, EE, Em, C0, C1,
C2, L, fl, R1,  $\sigma_x$ , DC,  $\zeta$ , Dh, DJ, Jo, Ju, Wo, Wu, q, Bo, Bu, qtel, dN, cm, m]
ho=4.9;
t=3.0;
tel=0.05;
L=1000;
"q(dN/m2)="
q=100
EE=2100000;
Em=10;
fl=L/5;
Ao=5.5;
Jo=21.54;
Bo=5;
Au=4.98;
Ju=10.03;
Bu=4.54;
"A(cm2)="
A=Ao+Au
k=Ao/A
"Yo(cm)="
Yo=t+tel+(4 (5.4 tel (ho-tel/2)+2  $\sqrt{(ho^2 + 3.05^2)}$  tel ho/2+((25-11.5) tel2
/2)/Ao)
"Yu(cm)="
Yu=tel/2
"to(cm)="
to=Ao/100
"tu(cm)="
tu=(1-k) to/k
"Ytot(cm)="
Ytot=(Ao Yo+Au Yu)/A
"Jtot(cm4)="
Jtot=Ao (Yo-Ytot)2+Au Ytot2+Jo+Ju
"R1(cm)="
R1=N[(fl2+(L/2)2)/(2 fl )]
"Wo(cm3)="
Wo=Jtot/(Yo-Ytot)
"Wu(cm3)="
Wu=Jtot/Ytot
"qtel(dN/m)="
qtel=q-Bo-Bu
"M(dN m)="
M=qtel (L/100)2/8

```



" $\sigma_x(\text{dN}/\text{cm}^2)$ ="

$\sigma_x = M \cdot 100 / W_u$

$C_0 = N[1/R_{1,2}]$

$$C_1 = C_0 \sqrt{\frac{EE (Y_o - Y_u) (t_u + t_o)}{E_m}}$$

$DC = \sigma_x / (EE (Y_o - Y_u) (1 - k))$

$$C_2 = DC \sqrt{\frac{EE (Y_o - Y_u) (t_u + t_o)}{E_m}} + C_1$$

" $\zeta$ ="

$\zeta = C_2 (C_2 - C_1) k (1 - k) / (1 + C_2 (C_2 - C_1) k (1 - k))$

" $D_h(\text{cm})$ ="

$D_h = (Y_o - Y_u) \zeta$

" $DJ(\%)$ ="

$DJ = ((1 - \zeta)^2) \cdot 100$

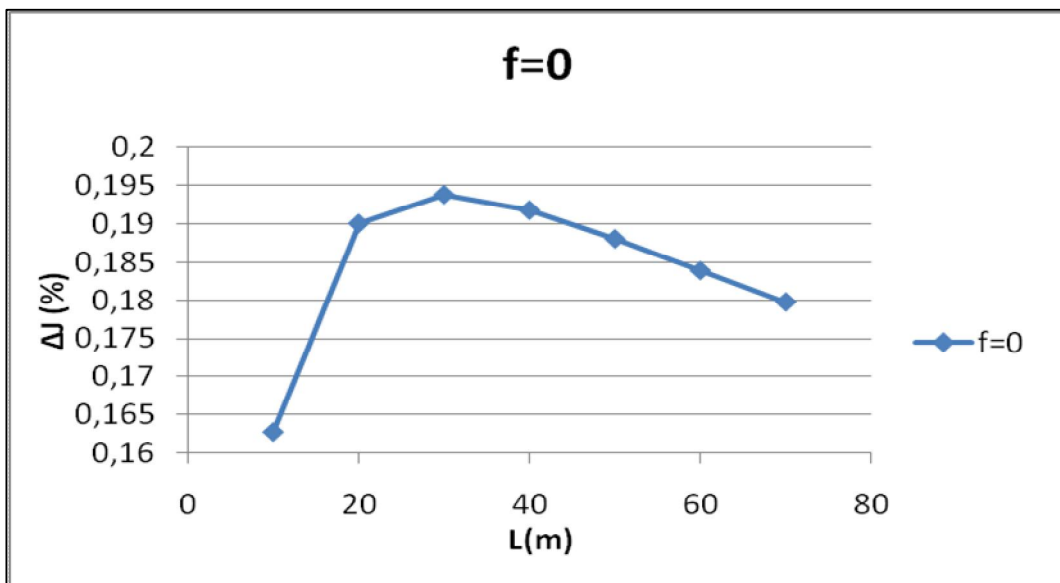
#### 4.4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

##### 4.4.1. Γέφυρες

Τα αποτελέσματα που πήραμε από την εφαρμογή των προηγούμενων προγραμμάτων δίνονται στον ακόλουθο Πίνακα 4.1, όπου φαίνεται η μεταβολή επί τις εκατό της ροπής αδράνειας του φορέα καταστρώματος συναρτήσει του ανοίγματος  $L$  της γέφυρας και του ανηγμένου αρχικού βέλους  $f_{arx} / L$ .

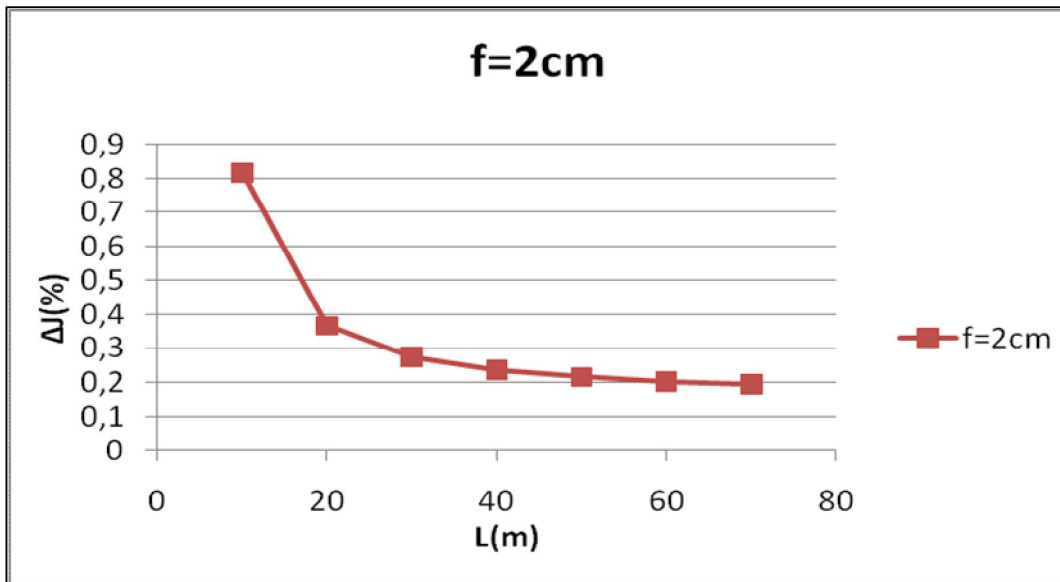
Πίνακας 4.1

$f_{arx} \setminus L$	$\Delta J\%$						
	10 m	20 m	30 m	40 m	50 m	60 m	70 m
0 cm	0,16273	0,19002	0,19376	0,19175	0,18804	0,18388	0,17973
2 cm	0,81527	0,36642	0,27293	0,23606	0,21612	0,20316	0,19374
L/500	0,81527	0,54272	0,43123	0,36894	0,32842	0,29956	0,27777
L/200	1,79181	1,07108	0,7871	0,63454	0,53886	0,47301	0,42477



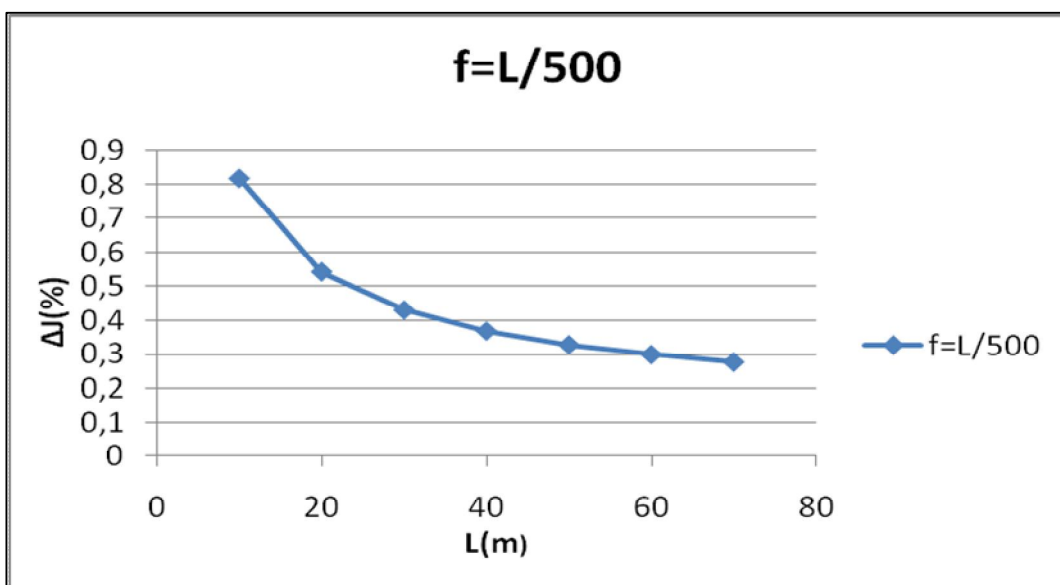
Διάγραμμα 4.1

Στο παραπάνω Διάγραμμα 4.1 φαίνεται η μεταβολή  $\Delta J\%$  για  $f_{\text{arx}} = 0$ .



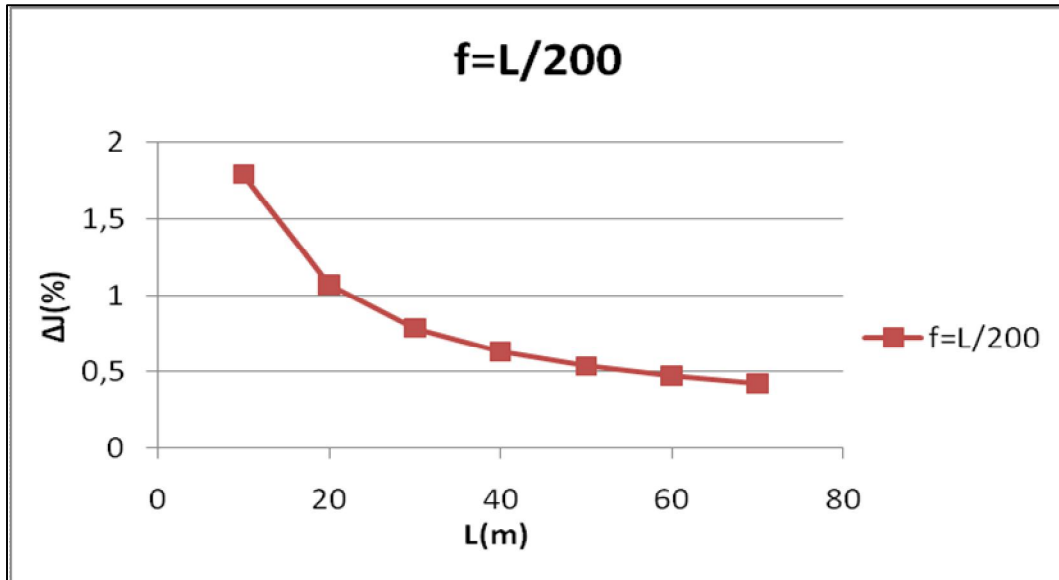
Διάγραμμα 4.2

Στο παραπάνω Διάγραμμα 4.2 φαίνεται η μεταβολή  $\Delta J\%$  για  $f_{\text{arx}} = 2\text{cm}$ .



Διάγραμμα 4.3

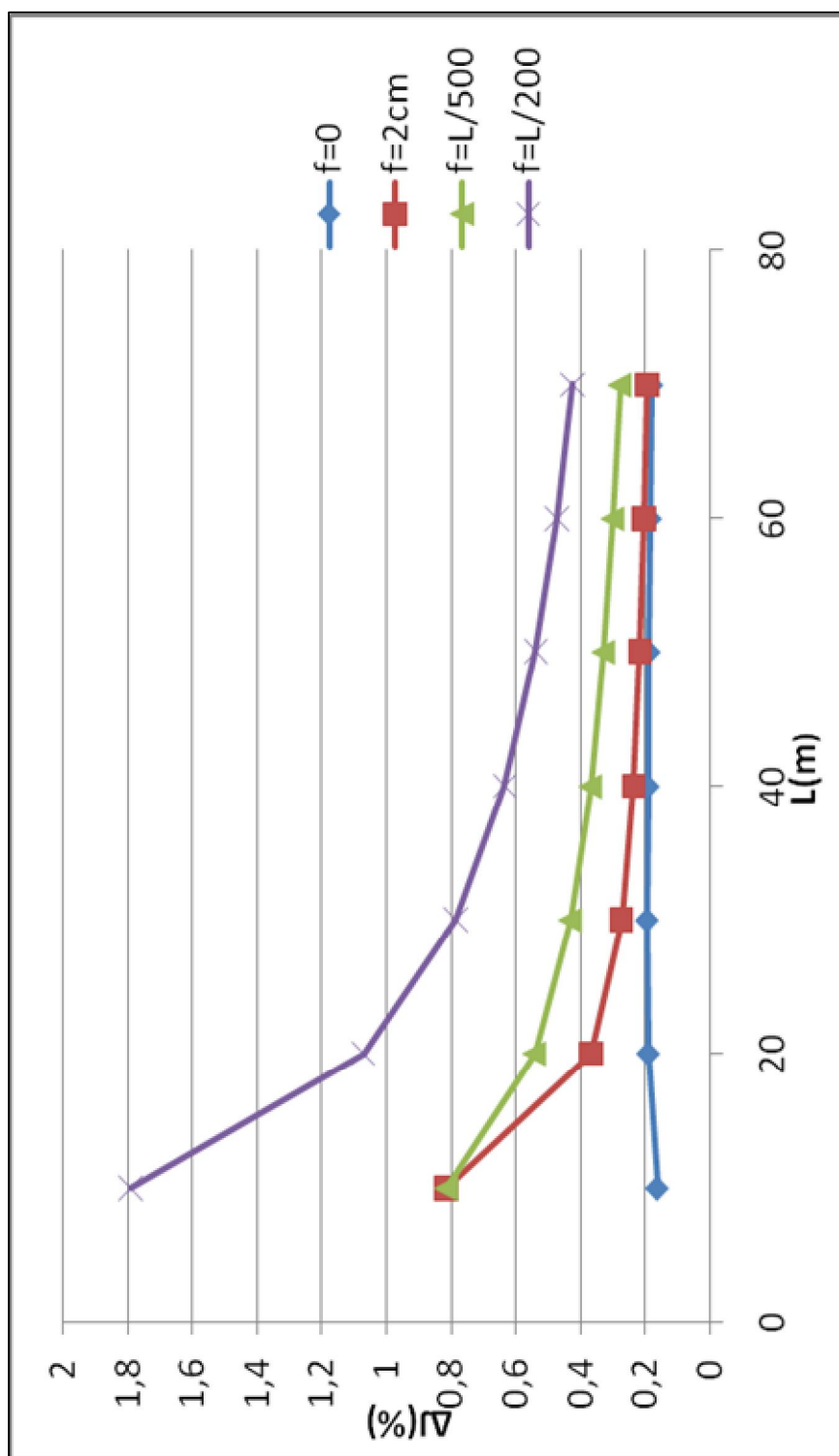
Στο παραπάνω Διάγραμμα 4.3 φαίνεται η μεταβολή  $\Delta J\%$  για  $f_{\text{arx}} = L / 500$ .



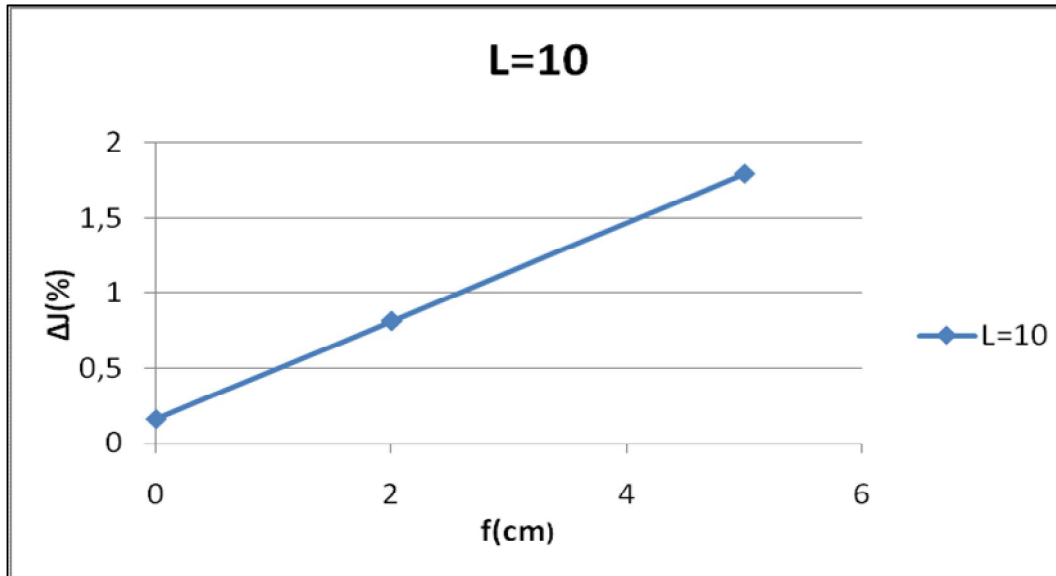
Διάγραμμα 4.4

Στο παραπάνω Διάγραμμα 4.4 φαίνεται η μεταβολή  $\Delta J\%$  για  $f_{\text{arx}} = L / 200$ .

Στο επόμενο Διάγραμμα 4.5 σχεδιάστηκαν μαζί τα προηγούμενα διαγράμματα για εποπτικούς λόγους.

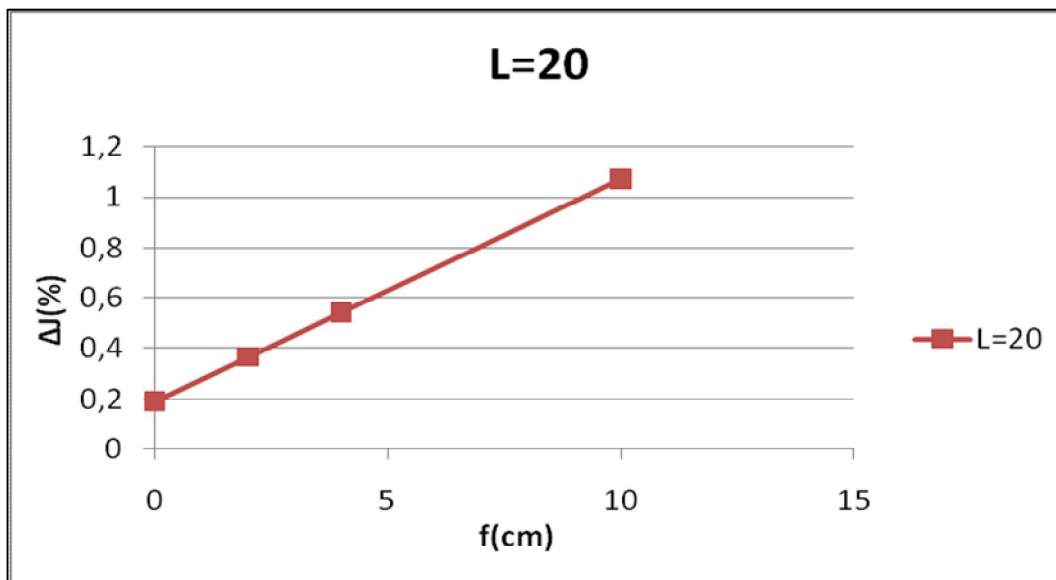


Διάγραμμα 4.5



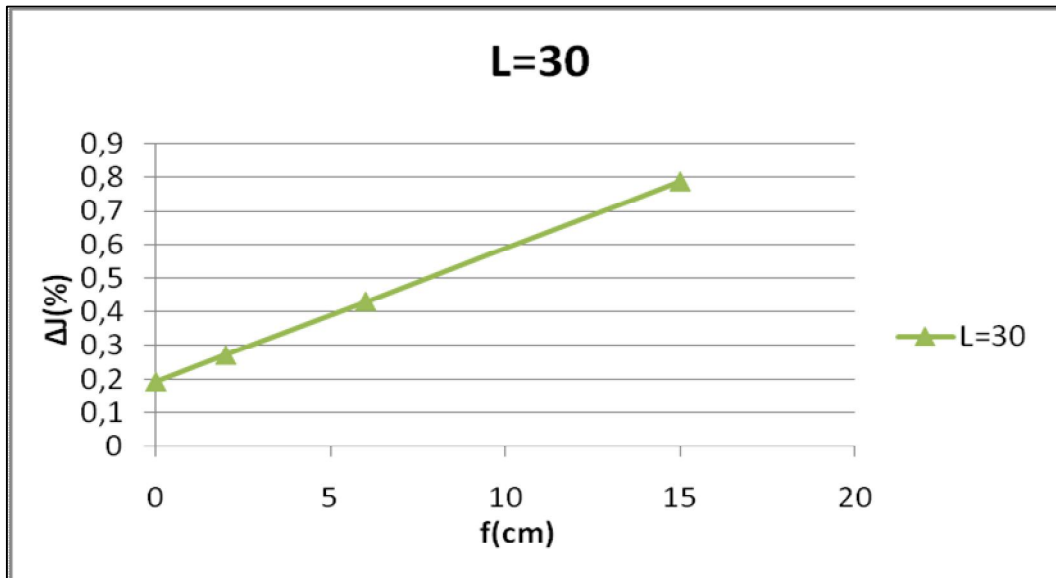
Διάγραμμα 4.6

Στο Διάγραμμα 4.6 φαίνεται η μεταβολή του  $\Delta J$  % για άνοιγμα  $L = 10$  m και μεταβλητό αρχικό κατασκευαστικό βέλος  $f_{arx}$ .



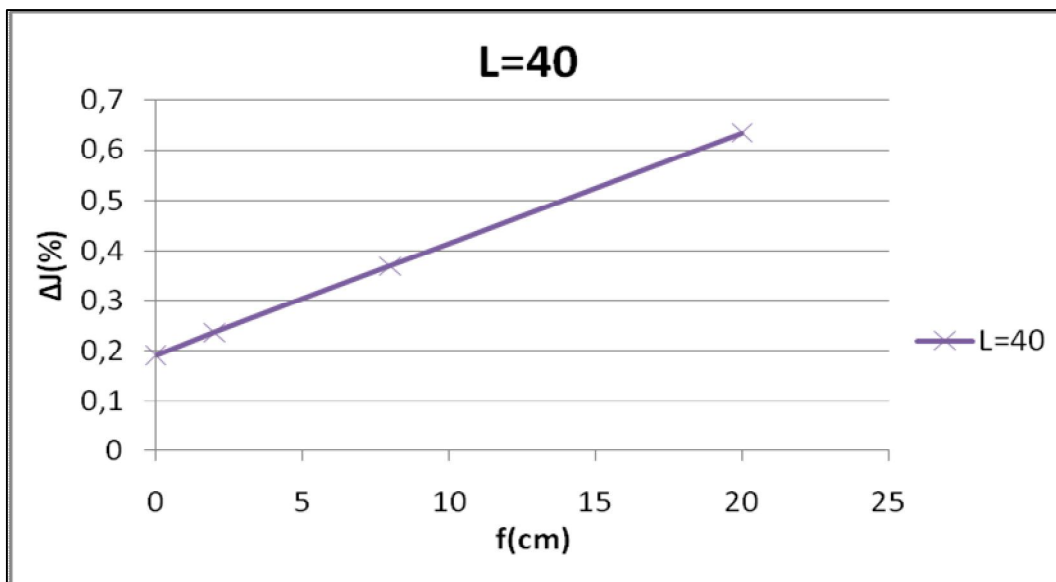
Διάγραμμα 4.7

Στο Διάγραμμα 4.7 φαίνεται η μεταβολή του  $\Delta J$  % για άνοιγμα  $L = 20$  m και μεταβλητό αρχικό κατασκευαστικό βέλος  $f_{arx}$ .



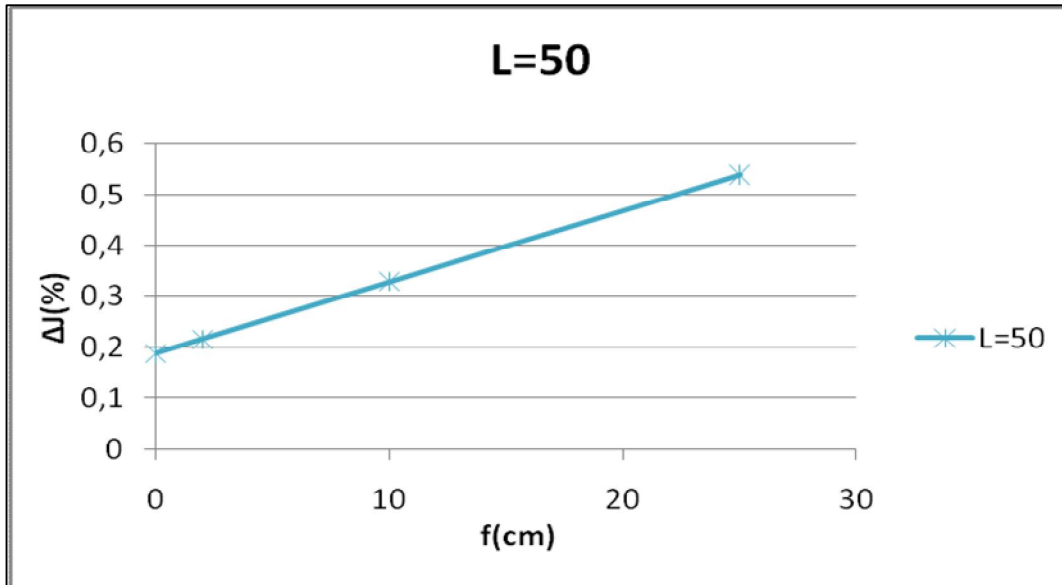
Διάγραμμα 4.8

Στο Διάγραμμα 4.8 φαίνεται η μεταβολή του  $\Delta J$  % για άνοιγμα  $L = 30$  m και μεταβλητό αρχικό κατασκευαστικό βέλος  $f_{arx}$ .



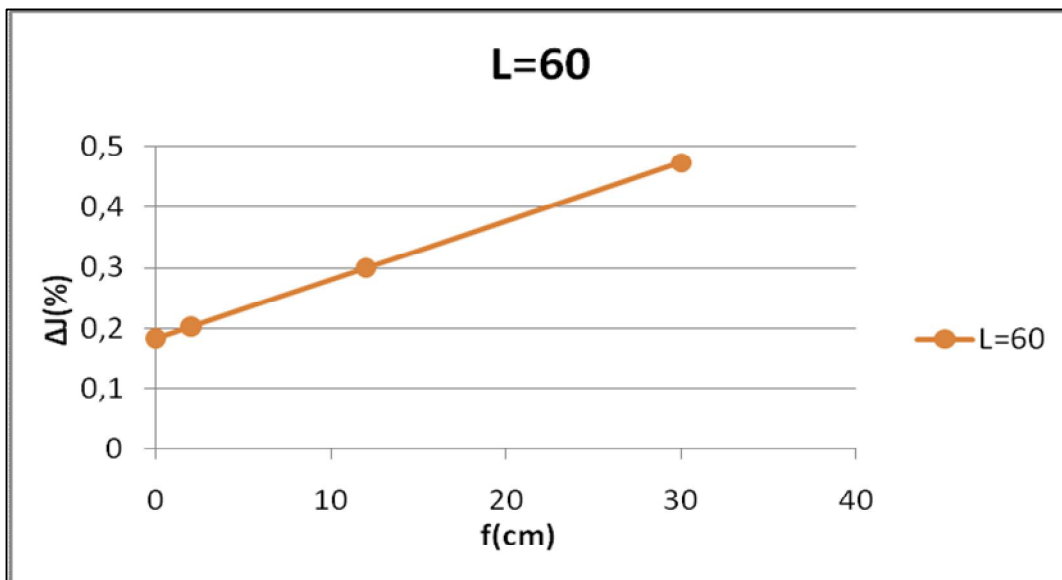
Διάγραμμα 4.9

Στο Διάγραμμα 4.9 φαίνεται η μεταβολή του  $\Delta J$  % για άνοιγμα  $L = 40$  m και μεταβλητό αρχικό κατασκευαστικό βέλος  $f_{arx}$ .



Διάγραμμα 4.10

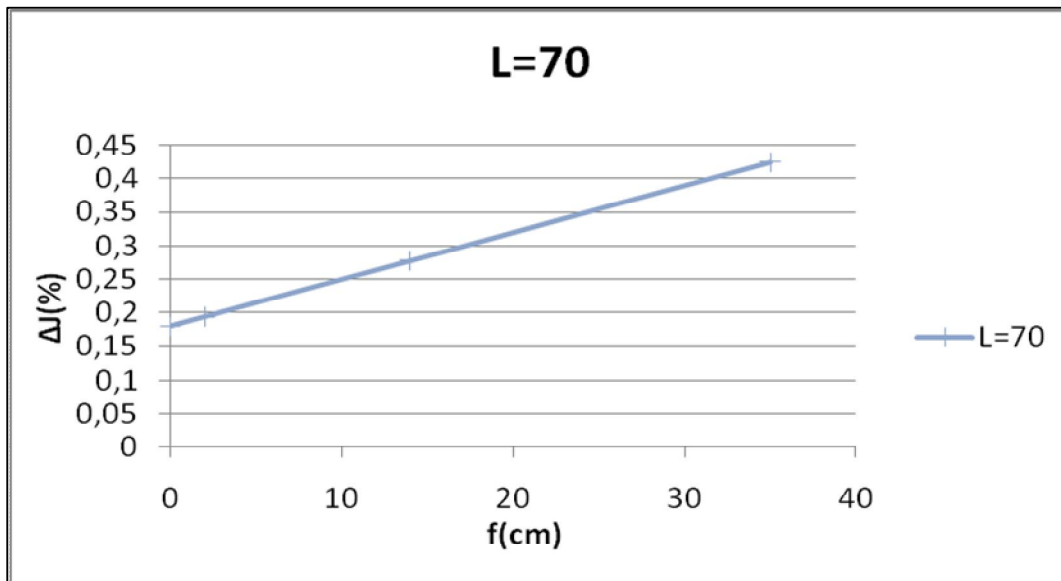
Στο Διάγραμμα 4.10 φαίνεται η μεταβολή του  $\Delta J$  % για άνοιγμα  $L = 50$  m και μεταβλητό αρχικό κατασκευαστικό βέλος  $f_{arx}$ .



Διάγραμμα 4.11

Στο Διάγραμμα 4.11 φαίνεται η μεταβολή του  $\Delta J$  % για άνοιγμα  $L = 60$  m και μεταβλητό αρχικό κατασκευαστικό βέλος  $f_{arx}$ .

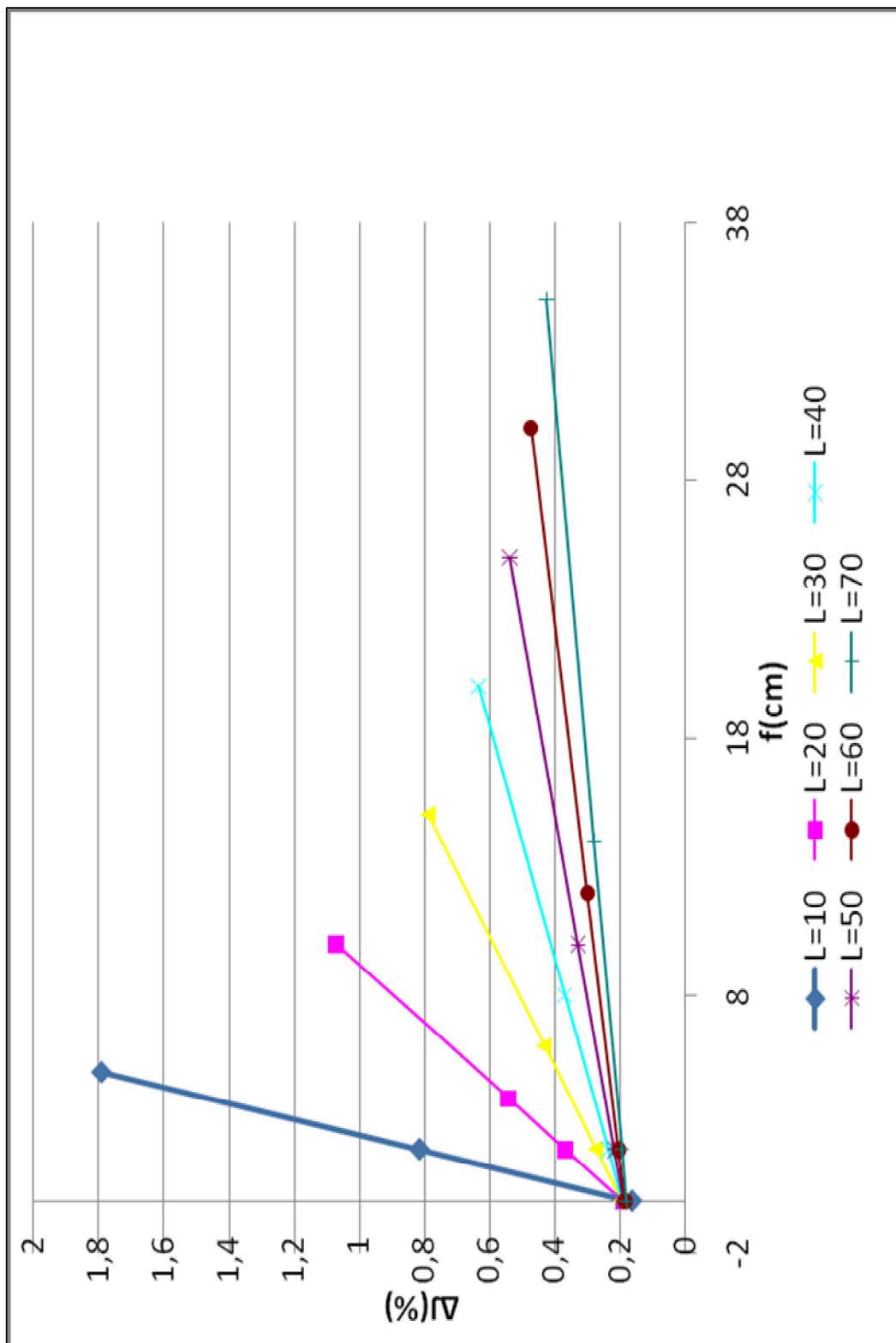




Διάγραμμα 4.12

Στο Διάγραμμα 4.12 φαίνεται η μεταβολή του  $\Delta J$  % για άνοιγμα  $L = 70$  m και μεταβλητό αρχικό κατασκευαστικό βέλος  $f_{\text{αρχ}}$ .

Στο επόμενο Διάγραμμα 4.13 σχεδιάστηκαν μαζί τα προηγούμενα διαγράμματα για εποπτικούς λόγους.



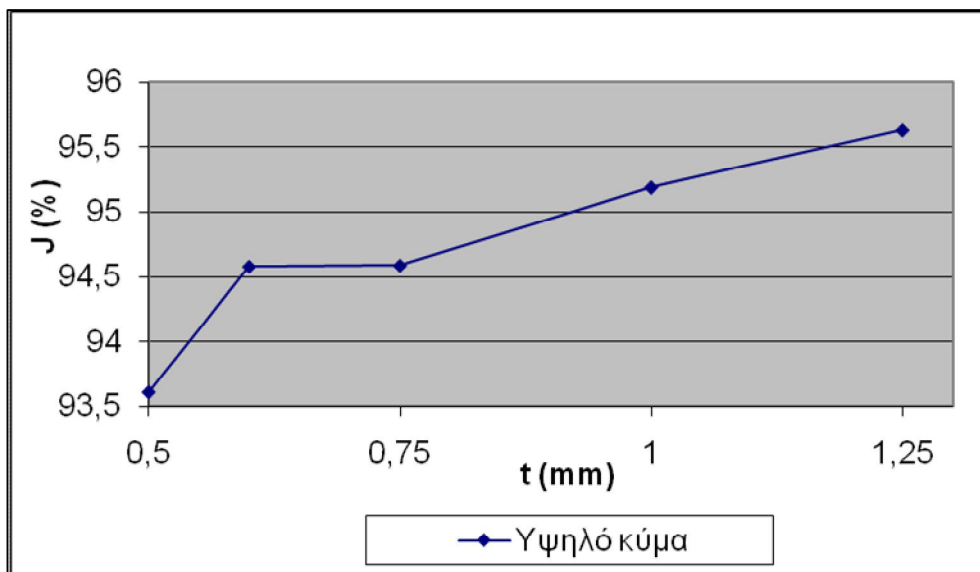
Διάγραμμα 4.13

#### 4.4.2. Επικαλύψεις

Τα αποτελέσματα που πήραμε από την εφαρμογή των προηγούμενων προγραμμάτων δίνονται στον ακόλουθο Πίνακα 4.2, όπου φαίνεται η τελική ροπή αδράνειας του μονωτικού πανώ ως ποσοστό της αρχικής ροπής αδράνειας συναρτήσει του πάχους των ελασμάτων  $t$ , για άνοιγμα προς επικάλυψη επιφάνειας  $L = 10$  m και αρχικού βέλους  $f_{\text{arx}} = L / 5 = 2$  m.

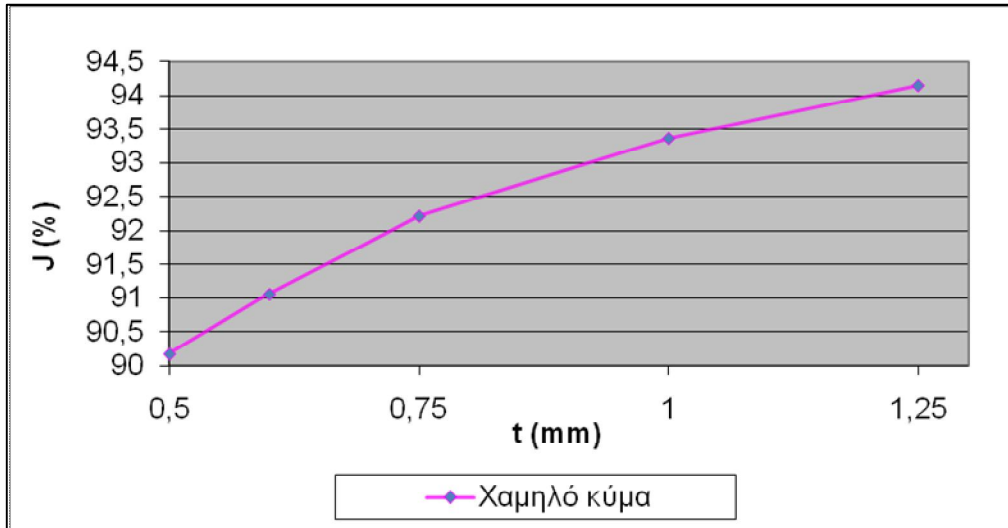
Πίνακας 4.2

	Υψηλό κύμα	Χαμηλό κύμα	
t(mm)	J (%)	J (%)	
0,5	93,6111	90,1794	L=10m farx=L/5
0,6	94,5793	91,0574	
0,75	94,5867	92,2185	
1	95,1903	93,3654	
1,25	95,6322	94,1522	



Διάγραμμα 4.14

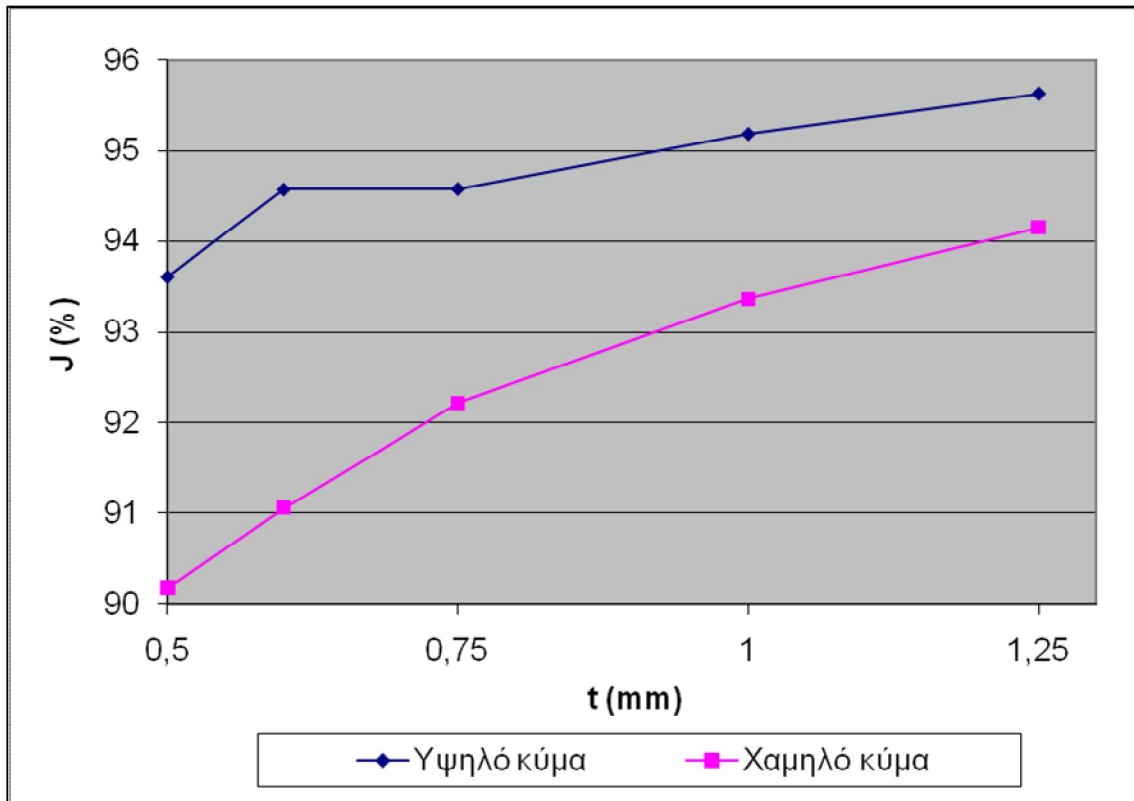
Στο Διάγραμμα 4.14 φαίνεται η τελική ροπή αδράνειας του μονωτικού πανώ  $J$  % για υψηλό κύμα και διάφορα πάχη ελασμάτων  $t$ , για άνοιγμα προς επικάλυψη επιφάνειας  $L = 10$  m και αρχικού βέλους  $f_{\text{arx}} = L / 5 = 2$  m.



Διάγραμμα 4.15

Στο Διάγραμμα 4.15 φαίνεται η τελική ροπή αδράνειας του μονωτικού πανώ J % για χαμηλό κύμα και διάφορα πάχη ελασμάτων t, για άνοιγμα προς επικάλυψη επιφάνειας  $L = 10 \text{ m}$  και αρχικού βέλους  $f_{\text{arx}} = L / 5 = 2 \text{ m}$ .

Στο ακόλουθο Διάγραμμα 4.16 σχεδιάστηκαν μαζί τα δύο προηγούμενα διαγράμματα για εποπτικούς λόγους.

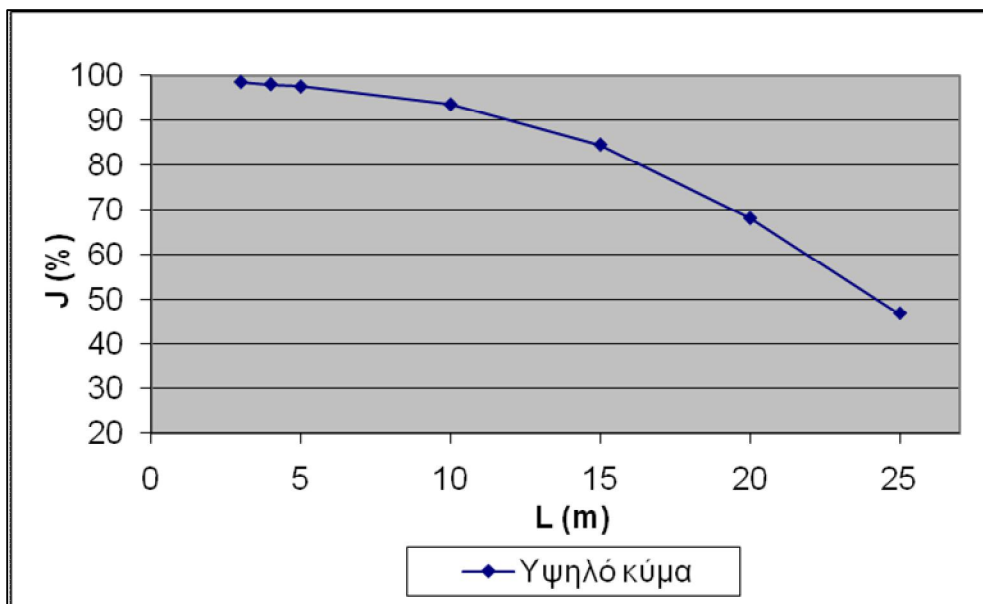


Διάγραμμα 4.16

Τα αποτελέσματα που πήραμε από την εφαρμογή των αντίστοιχων προγραμμάτων δίνονται στον ακόλουθο Πίνακα 4.3, όπου φαίνεται η τελική ροπή αδράνειας του μονωτικού πανώ ως ποσοστό της αρχικής ροπής αδράνειας συναρτήσει του ανοίγματος προς επικάλυψη επιφάνειας  $L$ , για πάχος των ελασμάτων  $t = 0,5 \text{ mm}$  και αρχικού βέλους  $f_{\text{arx}} = L / 5$ .

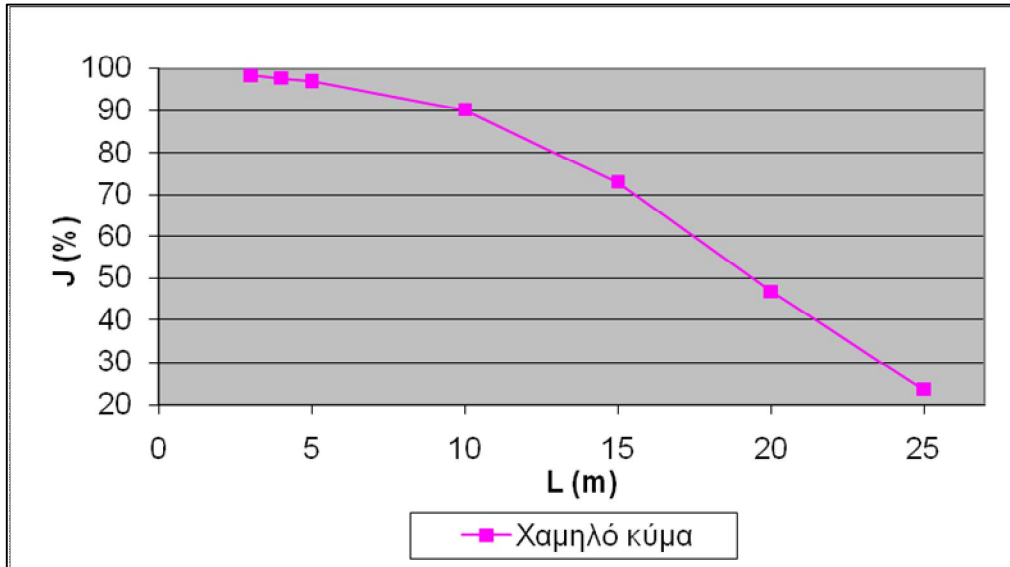
Πίνακας 4.3

	Υψηλό κύμα	Χαμηλό κύμα	
L (m)	J (%)	J (%)	
3	98,6029	98,3173	
4	98,1141	97,6937	
5	97,5903	96,9816	t=0,5 mm
10	93,6111	90,1794	f <sub>arx</sub> =L/5
15	84,6226	73,0785	
20	68,1381	46,8731	
25	46,8601	23,5988	



Διάγραμμα 4.17

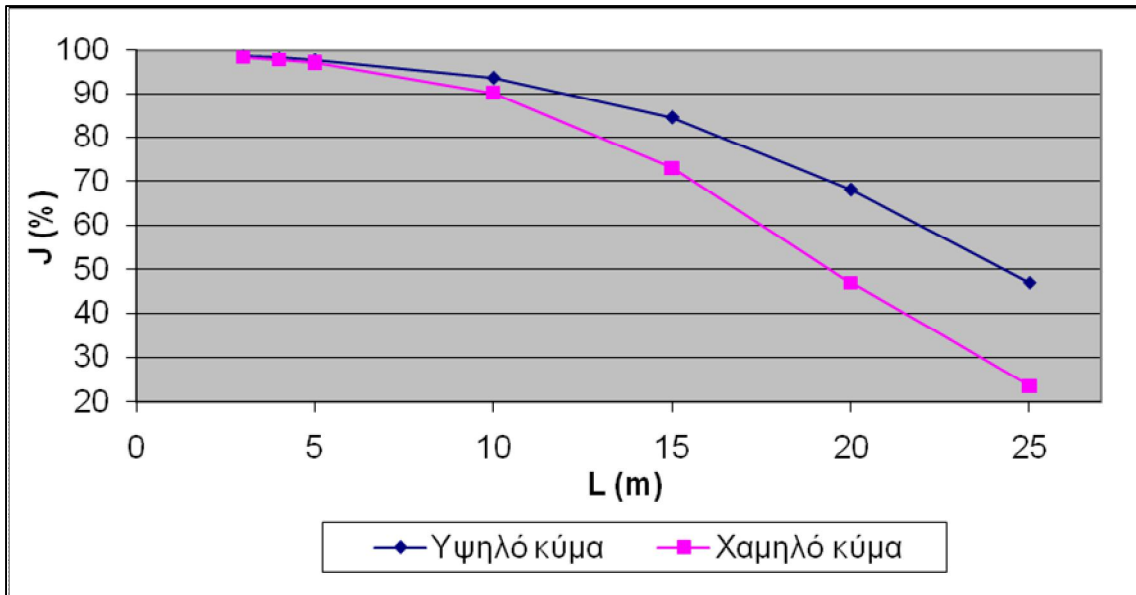
Στο Διάγραμμα 4.17 φαίνεται η τελική ροπή αδράνειας του μονωτικού πανώ  $J \%$  για υψηλό κύμα και διάφορα ανοίγματα προς επικάλυψη  $L$ , για πάχη ελασμάτων  $t = 0.5 \text{ mm}$  και αρχικού βέλους  $f_{\text{arx}} = L / 5$ .



Διάγραμμα 4.18

Στο Διάγραμμα 4.18 φαίνεται η τελική ροπή αδράνειας του μονωτικού πανώ  $J$  % για χαμηλό κύμα και διάφορα ανοίγματα προς επικάλυψη  $L$ , για πάχη ελασμάτων  $t = 0.5$  mm και αρχικού βέλους  $f_{arx} = L / 5$ .

Στο ακόλουθο Διάγραμμα 4.19 σχεδιάστηκαν μαζί τα δύο προηγούμενα διαγράμματα για εποπτικούς λόγους.



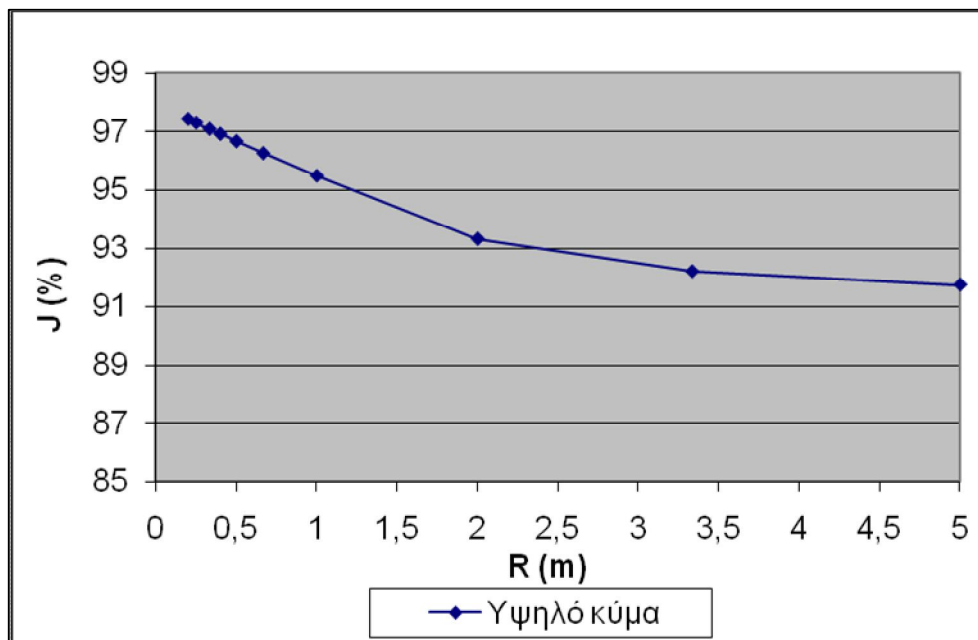
Διάγραμμα 4.19



Τα αποτελέσματα που πήραμε από την εφαρμογή των αντίστοιχων προγραμμάτων δίνονται στον ακόλουθο Πίνακα 4.4, όπου φαίνεται η τελική ροπή αδράνειας του μονωτικού πανώ ως ποσοστό της αρχικής ροπής αδράνειας συναρτήσει του αρχικού βέλους  $f_{arx}$  (ή ακτίνας προς επικάλυψη στέγης R), για πάχος των ελασμάτων  $t = 0,5 \text{ mm}$  και άνοιγμα  $L = 10 \text{ m}$ .

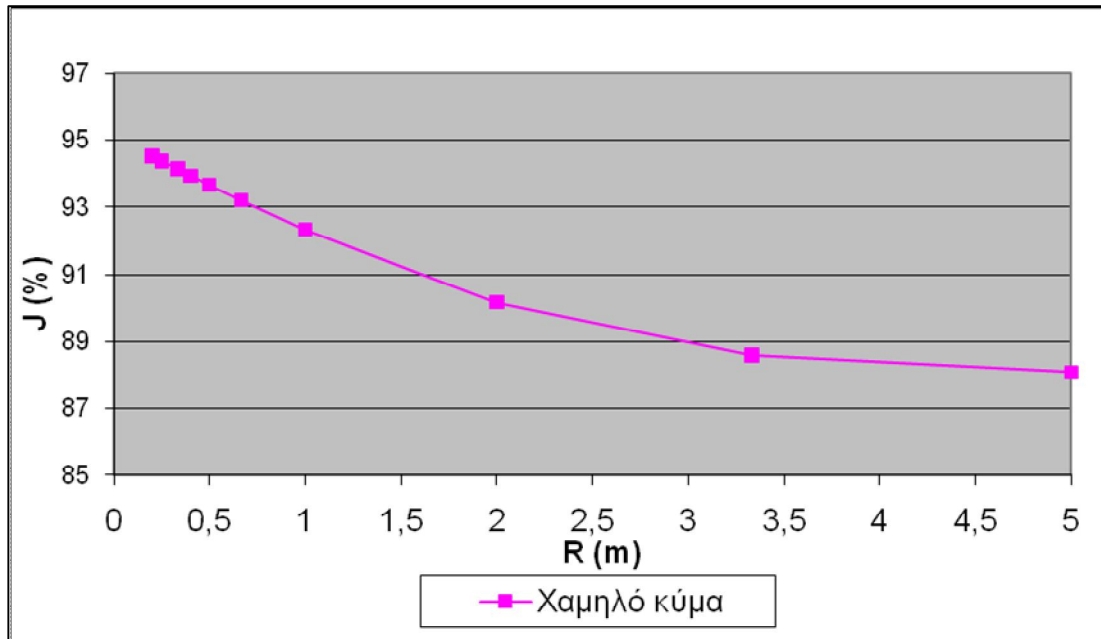
Πίνακας 4.4

	Υψηλό κύμα	Χαμηλό κύμα	
R (m)	J (%)	J (%)	
L/2	91,744	88,0803	
L/3	92,2016	88,5937	
L/5	93,3111	90,1794	
L/10	95,5023	92,3166	
L/15	96,2786	93,197	t=0,5 mm L=10m
L/20	96,6875	93,6615	
L/25	96,9383	93,9466	
L/30	97,1074	94,139	
L/40	97,3206	94,3817	
L/50	97,4495	94,5284	



Διάγραμμα 4.20

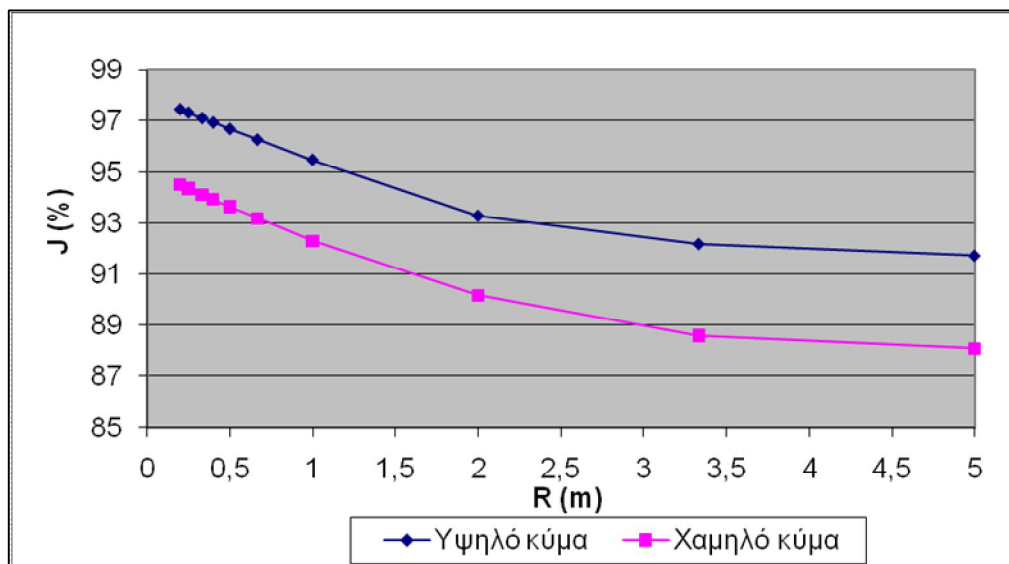
Στο Διάγραμμα 4.20 φαίνεται η τελική ροπή αδράνειας του μονωτικού πανώ J % για υψηλό κύμα και διάφορα αρχικά βέλη  $f_{arx}$  (ή ακτίνας προς επικάλυψη στέγης R), για πάχη ελασμάτων  $t = 0.5$  mm και άνοιγμα προς επικάλυψη  $L = 10$  m.



Διάγραμμα 4.21

Στο Διάγραμμα 4.21 φαίνεται η τελική ροπή αδράνειας του μονωτικού πανώ J % για χαμηλό κύμα και διάφορα αρχικά βέλη  $f_{arx}$  (ή ακτίνας προς επικάλυψη στέγης R), για πάχη ελασμάτων  $t = 0.5$  mm και άνοιγμα προς επικάλυψη  $L = 10$  m.

Στο ακόλουθο Διάγραμμα 4.22 σχεδιάστηκαν μαζί τα δύο προηγούμενα διαγράμματα για εποπτικούς λόγους.



Διάγραμμα 4.22

## 4.5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Τα αριθμητικά αποτελέσματα του υπολογιστικού μέρους της παρούσης εργασίας συνοψίζονται στους πίνακες της προηγούμενης ενότητας αποτελεσμάτων (κεφάλαιο 4.4). Από τα αποτελέσματα αυτά, καθώς και από τα διαγράμματα που προκύπτουν από αυτά, εξάγουμε τα ακόλουθα συμπεράσματα, όσον αφορά την αντοχή γεφυρών και επικαλύψεων.

### 4.5.1. Γέφυρες

Θα πρέπει να επισημάνουμε πρωτίστως πως ο άξονας των τεταγμένων στα διαγράμματα των επικαλύψεων, αναφέρεται σε ποσοστιαία μεταβολή της ροπής αδρανείας της διατομής της γέφυρας σε σχέση με τη αρχική.

Αναλύουμε, λοιπόν, την επιρροή του μήκους της γέφυρας στην μεταβολή της ροπής αδρανείας της. Δηλαδή, κρατάμε σταθερό το λόγο του αρχικού βέλους κάμψης  $f$  της γέφυρας προς το μήκος της και ελέγχουμε την μεταβολή της ροπής αδρανείας για τα διάφορα μήκη γεφυρών  $L$  (Πίνακας 4.1).

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να αναφέρουμε πως οι γέφυρες με μικρό μήκος δεν αποτελούν αξιόπιστες πηγές για την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων για την μεταβολή της ροπής αδρανείας γεφυρών και ιδίως όταν συνδυάζονται με μικρό αρχικό βέλος (δηλαδή μικρή αρχική καμπυλότητα  $C$ ) και αυτό συμβαίνει επειδή ο λόγος βέλους προς μήκος γέφυρας  $f/L$  είναι πολύ μικρός. Αυτό φαίνεται καθαρά στο διάγραμμα μεταβολής της ροπής αδρανείας συναρτήσεως του μήκους γέφυρας για αρχικό βέλος μηδενικό,  $f = 0$  (Διάγραμμα 4.1). Ενώ στα αντίστοιχα διαγράμματα 4.2, 4.3, 4.4 για τα υπόλοιπα αρχικά βέλη  $f$ , η πορεία της καμπύλης είναι συνεχώς πτωτική, στην συγκεκριμένη περίπτωση για  $f = 0$  εμφανίζεται και ένας ανοδικός κλάδος στην καμπύλη για  $L = 10$  m,  $L = 20$  m, και  $L = 30$  m και κατόπιν η καμπύλη συνεχίζει πτωτικά όπως και στις υπόλοιπες περιπτώσεις.

Στην περίπτωση σταθερού αρχικού βέλους ίσου προς 2 cm, η καμπύλη έχει συνεχώς πτωτική πορεία (Διάγραμμα 4.2), δηλαδή η μεταβολή της ροπής αδρανείας συνεχώς μειώνεται με την αύξηση του μήκους της γέφυρας. Το ίδιο συμβαίνει και στις περιπτώσεις  $f / L = 1 / 500$  και  $f / L = 1 / 200$  (Διαγράμματα 4.3 και 4.4). Κρατώντας δηλαδή σταθερή την αναλογία αρχικού βέλους προς μήκος γέφυρας παρατηρούμε μείωση της μεταβολής της ροπής αδρανείας με αύξηση του μήκους της γέφυρας.

Επιπλέον, από τα τέσσερα αυτά διαγράμματα παρατηρούμε ότι οι κλίσεις των καμπύλων συνεχώς μειώνονται με την αύξηση του μήκους της γέφυρας  $L$ . Άρα, μειώνεται ο ρυθμός μεταβολής της ροπής αδρανείας με την αύξηση του μήκους της γέφυρας. Συνεπώς, όσο μεγαλύτερο είναι το μήκος της γέφυρας, τόσο λιγότερο επηρεάζεται η αντοχή της από το αρχικό βέλος και την αύξησή του.

Τέλος, παρατηρούμε (Διάγραμμα 4.5), όπου βρίσκονται και οι τέσσερις καμπύλες, πως αυξανόμενου του λόγου  $f / L$ , η καμπύλη μετατοπίζεται προς τα πάνω. Άρα, με την αύξηση του λόγου  $f / L$ , αυξάνεται και η ροπή αδράνειας. Το συμπέρασμα αυτό επαληθεύεται και από την παρακάτω ανάλυση.

Εν συνεχεία, αναλύουμε την επιρροή του αρχικού βέλους κάμψης στην μεταβολή της ροπής αδράνειας της γέφυρας (Πίνακας 4.1). Κρατάμε σταθερό το μήκος  $L$  της γέφυρας, και ελέγχουμε την μεταβολή της ροπής αδράνειας για τους διάφορους λόγους αρχικού βέλους κάμψης προς μήκος γέφυρας  $f / L$ . Παρατηρούμε, λοιπόν, πως και στις επτά περιπτώσεις μηκών γέφυρας  $L = 10 \text{ m}, 20 \text{ m}, 30 \text{ m}, 40 \text{ m}, 50 \text{ m}, 60 \text{ m}, 70 \text{ m}$  η μεταβολή της ροπής αδράνειας αυξάνεται με την αύξηση του αρχικού βέλους κάμψης (Διαγράμματα 4.6 έως 4.12). Αυτό σημαίνει πως για δεδομένο άνοιγμα γέφυρας, όσο μεγαλώνει το αρχικό της βέλος, τόσο περισσότερο μειώνεται η αντοχή της.

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η κλίση των διαγραμμάτων αυτών είναι πρακτικά σταθερή. Δηλαδή, η μεταβολή της ροπής αδράνειας της γέφυρας αυξάνεται σχεδόν γραμμικά συναρτήσει του αρχικού βέλους και ο ρυθμός μεταβολής της ροπής αδράνειας δεν επηρεάζεται από την αύξηση του αρχικού βέλους.

Τέλος, παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει το άνοιγμα της γέφυρας η αντίστοιχη καμπύλη ποσοστιαίας μεταβολής της ροπής αδράνειας – αρχικού βέλους μετατοπίζεται προς τα κάτω (Διάγραμμα 4.13). Δηλαδή, όσο μεγαλύτερο το μήκος της γέφυρας τόσο λιγότερο επηρεάζεται η αντοχή της από το αρχικό βέλος κάμψης της.

#### 4.5.2. Επικαλύψεις

Στα διαγράμματα των επικαλύψεων ο άξονας των τεταγμένων αναφέρεται σε ποσοστό της αρχικής ροπής αδρανείας της διατομής, στο οποίο αντιστοιχεί η τελική ροπή αδρανείας της.

Αναλύουμε λοιπόν την μεταβολή της ροπής αδρανείας της διατομής συναρτήσει του πάχους των χρησιμοποιούμενων στην επικάλυψη ελασμάτων, για δυο περιπτώσεις ελασμάτων (Πίνακας 4.2). Στην μια περίπτωση χρησιμοποιούμε δυο ελάσματα μικρού ύψους για την επικάλυψη (στήλη «χαμηλό κύμα»), ενώ στη άλλη περίπτωση χρησιμοποιούμε ένα έλασμα μικρού ύψους και ένα έλασμα μεγάλου ύψους για την επικάλυψη (στήλη «υψηλό κύμα»). Τα ακριβή γεωμετρικά χαρακτηριστικά των ελασμάτων περιγράφονται στην διαδικασία των υπολογισμών.

Σε αμφότερες τις περιπτώσεις παρατηρούμε πως με την αύξηση του πάχους των χρησιμοποιούμενων ελασμάτων, αυξάνεται το ποσοστό της τελικής ροπής αδρανείας επί της αρχικής (Διαγράμματα 4.14 και 4.15). Δηλαδή, όσο μεγαλύτερο το πάχος των ελασμάτων, τόσο λιγότερο μειώνεται η τελική ροπή αδρανείας.

Παρόλα αυτά, η καμπύλη που αντιστοιχεί στην διατομή με ένα έλασμα μικρού ύψους είναι πιο κάτω από αυτή του μεγάλου (Διάγραμμα 4.16). Αυτό σημαίνει πως η ροπή αδρανείας της διατομής της επικάλυψης με το χαμηλό κύμα επηρεάζεται περισσότερο από την μεταβολή του πάχους των ελασμάτων από ότι η αντίστοιχη με το υψηλό κύμα. Έτσι, η αντοχή της επικάλυψης αυξάνεται με την αύξηση του πάχους των ελασμάτων της και βελτιώνεται με τη χρήση ελασμάτων μεγαλύτερων υψών.

Εν συνεχεία αναλύουμε την μεταβολή της ροπής αδρανείας της διατομής συναρτήσει του προς επικάλυψη ανοίγματος  $L$ , για τις ίδιες δυο περιπτώσεις με παραπάνω (Πίνακας 4.3).

Σε αμφότερες τις περιπτώσεις, παρατηρούμε πως η αύξηση του ανοίγματος προς επικάλυψη, μειώνει την τελική ροπή αδρανείας της διατομής (Διαγράμματα 4.17 και 4.18). Δηλαδή, όσο μεγαλύτερο είναι το άνοιγμα, τόσο μικρότερη είναι η τελική ροπή αδρανείας της διατομής και τόσο μικρότερη είναι η τελική της αντοχή.

Η κλίση των καμπύλων είναι συνεχώς αυξανόμενη. Άρα, όσο μεγαλύτερο είναι το άνοιγμα προς επικάλυψη  $L$ , τόσο πιο επιρρεπής είναι η διατομή της επικάλυψης. Επίσης, παρατηρούμε ξανά πως η καμπύλη που αντιστοιχεί στην επικάλυψη με ένα έλασμα μεγάλου ύψους είναι ψηλότερα από την αντίστοιχη της επικάλυψης με ελάσματα μικρού ύψους (Διάγραμμα 4.19).

Τέλος, αναλύουμε την μεταβολή της ροπής αδρανείας της διατομής συναρτήσει του αρχικού βέλους κάμψης της επικάλυψης  $R$  (ή πρακτικά της αρχικής ακτίνας κυκλικής στέγης προς επικάλυψη) για τις δυο περιπτώσεις (Πίνακας 4.4). Και στις δυο περιπτώσεις, η αύξηση της αρχικής ακτίνας, μειώνει την τελική ροπή αδρανείας της διατομής (Διαγράμματα 4.20 και 4.21). Δηλαδή, όσο μεγαλύτερη είναι η αρχική ακτίνα  $R$ , τόσο μικρότερη είναι η τελική ροπή αδρανείας της διατομής και τόσο μικρότερη είναι η τελική της αντοχή.

Η κλίση των καμπύλων είναι συνεχώς μειούμενη. Επομένως, όσο μικρότερη είναι η αρχική ακτίνα της επικάλυψης, τόσο πιο επιρρεπής είναι η διατομή της επικάλυψης.

Παρατηρούμε ξανά πως η καμπύλη που αντιστοιχεί στην επικάλυψη με ένα έλασμα μεγάλου ύψους είναι ψηλότερα από την αντίστοιχη της επικάλυψης με ελάσματα μικρού ύψους (*Διάγραμμα 4.21*). Αυτό είναι φυσιολογικό, καθώς το έλασμα μεγάλου ύψους έχει από μόνο του μεγαλύτερη ροπή αδρανείας από το έλασμα μικρού ύψους, λόγω του μεγαλύτερου ύψους του αυτού. Έτσι προσδίδει δυσκαμψία στο σύνολο της επικάλυψης.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. A.E.H. Love, "A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", 1944, Dover Publications, N.York.
2. F. Bleich. «Buckling strength of metal structures.», 1952, Mc Graw Hill, New York.
3. Γ.Θ. Μιχάλτσος, «Ελαφρές Μεταλλικές Κατασκευές - Μέθοδοι Υπολογισμού», 2008, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα.
4. L. G. Brazier. The flexure on thin cylindrical shells and other "thin" sections. Late of the Royal Aircraft Establishment. Reports and Memoranda, 1926, No 1081 (M 49), 1-30.
5. BS 5950: Part 5 (Code of practice for design of cold formed sections), 1987.
6. G. Burgermeister, H. Steup, H. Kretzschmer. Stabilitaets Theorie. Akademie Verlag, Berlin, 1963.
7. C. R. Calladine. Theory of Shell Structures. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1983.
8. Πίνακες εταιρίας ΚΟΝΤΙ για τα χαρακτηριστικά των φύλλων επικαλύψεως.