



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ  
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2008-2009**

**ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΗ ΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ  
ΠΛΑΙΣΙΑΚΩΝ ΦΟΡΕΩΝ ΑΠΟ ΟΠΛΙΣΜΕΝΟ ΣΚΥΡΟΔΕΜΑ  
ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ**

***ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ  
ΚΑΡΑΚΙΤΣΙΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ***



**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:  
ΠΑΠΑΔΡΑΚΑΚΗΣ ΜΑΝΟΛΗΣ  
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ**

**ΑΘΗΝΑ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2009**



# ΣΥΝΟΨΗ

Στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία θα παρουσιάσουμε τη λεπτομερή προσομοίωση με πεπερασμένα στοιχεία φορέων από οπλισμένο σκυρόδεμα, μέσω της οποίας θα αποτιμήσουμε τη μη γραμμική στατική τους συμπεριφορά. Η προτεινόμενη προσομοίωση κατορθώνει να υπερνικήσει περιορισμούς και μειονεκτήματα παλαιότερων μοντέλων αναφορικά με την ακρίβεια και την υπολογιστική αποδοτικότητα. Το σκυρόδεμα διακριτοποιείται με ισοπαραμετρικά εξαεδρικά οκτακομβικά στοιχεία. Οι ενσωματωμένοι ράβδοι οπλισμού μπορούν να έχουν οποιοδήποτε προσανατολισμό εντός του εσωτερικού των συμπαγών πεπερασμένων στοιχείων του σκυροδέματος, επιτρέποντας την προσομοίωση τόσο διαμήκων όσο και διατμητικών οπλισμών (συνδετήρων). Η ρηγμάτωση του σκυροδέματος αντιμετωπίζεται με τη μέθοδο της διανεμημένης ρωγμής, ενώ οι ράβδοι οπλισμού προσομοιώνονται με φυσικά στοιχεία δυνάμεων, τα οποία συνδυάζουν τη μέθοδο των φυσικών μορφών με τη μέθοδο των ινών και έχουν το πλεονέκτημα να λαμβάνουν υπόψιν πέραν της αξονικής τόσο την καμπτική όσο και τη διατμητική στιβαρότητα των ράβδων οπλισμού, καθώς επίσης και τη σχετική τους ολίσθηση με το σκυρόδεμα. Η απόδοση και η αριθμητική ευρωστία του προτεινόμενου κώδικα ReConAn, ο οποίος έχει αναπτυχθεί σε γλώσσα προγραμματισμού fortran 95, επιδεικνύεται μέσω της σύγκρισης των αριθμητικών αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα πειραματικά τα οποία υπάρχουν στη διεθνή αλληλογραφία. Τα συμπεράσματα, που εξήχθησαν από τη σύγκριση αυτή, αποδεικνύουν ότι η προτεινόμενη αυτή εξελιγμένη προσομοίωση προβλέπει όχι μόνο με ικανοποιητική ακρίβεια αλλά και γρήγορα τη στατική μη γραμμική ανελαστική συμπεριφορά πλαισιακών κατασκευών από οπλισμένο σκυρόδεμα, επιτυγχάνοντας ικανοποιητική ακρίβεια και υπολογιστική αποδοτικότητα.

# ABSTRACT

In this thesis we present and propose a detailed finite element modeling for the simulation of the nonlinear behavior of reinforced concrete structures which overcomes limitations of previous models regarding accuracy and computational efficiency. The proposed modeling method uses 8-node hexahedral isoparametric elements for the discretization of concrete. Steel rebars may have any orientation inside the solid concrete elements allowing the simulation of longitudinal as well as transverse reinforcement. Concrete cracking is treated with the smeared crack approach, while steel reinforcement is modeled with the natural beam-column flexibility-based element that is based on the natural mode method and the fiber approach and takes into consideration bending and shear stiffness, as well as slippage with concrete. The numerical results came from the proposed code of finite elements ReConAn\_Academic, which was developed in language fortran 95. The performance of the proposed modeling is demonstrated by comparing the numerical predictions with existing experimental results in the literature. The results show that the proposed refined simulation predicts accurately the static nonlinear inelastic behavior of reinforced concrete structures achieving numerical robustness and computational efficiency.

# ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον Καθηγητή του τομέα Δομοστατικής του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου και επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας, κ. Παπαδρακάκη Μανόλη, για την καθοδήγησή του, την πίστη στις δυνατότητές μου, το γεγονός ότι αποτελεί υπόδειγμα τόσο επιστήμονα όσο και ανθρώπου για μένα σε μία εποχή έλλειψης υγιών προτύπων αλλά κυρίως επειδή η ενασχόληση με το επιστημονικό του πεδίο έδωσε νόημα στις σπουδές μου και αποτέλεσε κίνητρο για τη συνέχισή τους.

Τις θερμές μου ευχαριστίες θα ήθελα, επίσης, να εκφράσω στον διδακτορικό φοιτητή, Μάρκου Γεώργιο, τόσο για τις σημαντικές υποδείξεις του όσο και για την άψογη συνεργασία μας καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης αυτής της εργασίας. Οι συμβουλές και η συμπαράστασή του ήταν καθοριστικές.

Τέλος, νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω βαθύτατα τον αδερφό μου Καρακίτσιο Αλέξανδρο και τους φίλους μου για την ηθική στήριξη και συμπαράσταση καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.



# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή</b> .....	7
1.1 Γενικά .....	8
1.2 Σκοπός .....	8
1.3 Περίληψη κεφαλαίων .....	9
<b>Κεφάλαιο 2: Η μέθοδος των φυσικών μορφών και το φυσικό στοιχείο μετατοπίσεων.....</b>	10
2.1 Εισαγωγικά στοιχεία .....	12
2.2 Η μέθοδος των φυσικών μορφών .....	15
2.2.1 Αντικατάσταση των κλασικών συναρτήσεων σχήματος [N] με τις συναρτήσεις των φυσικών μορφών παραμόρφωσης $[\Omega_N]$ .....	15
2.2.2 Η συμβολή της μεθόδου των φυσικών μορφών.....	16
2.2.3 Το φυσικό μητρώο στιβαρότητας και οι φυσικές δυνάμεις.....	18
2.3 Το φυσικό στοιχείο μετατοπίσεων δοκού .....	21
2.3.1 Τα χαρακτηριστικά του φυσικού στοιχείου μετατοπίσεων .....	21
2.3.2 Οι φυσικές μορφές στερεού σώματος του φυσικού στοιχείου μετατοπίσεων.....	25
2.3.3 Οι φυσικές μορφές παραμόρφωσης του φυσικού στοιχείου μετατοπίσεων .....	34
2.3.4 Σχέση του πλήρους μητρώου των φυσικών μορφών με το μητρώο των τοπικών και το μητρώο των καθολικών καρτεσιανών βαθμών ελευθερίας .....	43
2.4 Το φυσικό μητρώο παραμόρφωσης $[B_N]$ .....	45
2.5 Το φυσικό μητρώο στιβαρότητας $[K_N]$ .....	62
2.6 Υπολογισμός του φυσικού μητρώου στιβαρότητας $[K_N]$ .....	66
2.6.1 “Αναλυτικός” υπολογισμός του φυσικού μητρώου στιβαρότητας $[K_N]$ .....	67
2.6.2 Υπολογισμός του φυσικού μητρώου στιβαρότητας $[K_N]$ με αριθμητική ολοκλήρωση .....	74
2.7 Υπολογισμός των εντατικών μεγεθών του φορέα .....	82
<b>Κεφάλαιο 3: Το φυσικό στοιχείο δυνάμεων.....</b>	86
3.1 Εισαγωγικά στοιχεία .....	88
3.2 Το διάνυσμα των γενικευμένων εσωτερικών δυνάμεων και το διάνυσμα των γενικευμένων παραμορφώσεων της διατομής .....	91
3.3 Διατύπωση του φυσικού στοιχείου δυνάμεων.....	92
3.3.1 Η έννοια των στοιχείων μεικτού τύπου .....	92
3.3.2 Η μητρική διατύπωση της εξίσωσης ισορροπίας του στοιχείου δυνάμεων .....	95
• Η μητρική διατύπωση της σχέσης μεταξύ των φυσικών εσωτερικών δράσεων και των φυσικών μορφών παραμόρφωσης του στοιχείου δυνάμεων .....	96
• Η μητρική διατύπωση της εξίσωσης ισορροπίας του στοιχείου δυνάμεων .....	99
3.3.3 Η μητρική διατύπωση της γραμμικοποιημένης σχέσης που συνδέει τις δυνάμεις που δεν έχουν εξισορροπηθεί με τις αντίστοιχες επαυξητικές φυσικές μορφές παραμόρφωσης κάθε στοιχείου ..	101
3.4 Προσδιορισμός της κατάστασης του φυσικού στοιχείου δυνάμεων .....	105
<b>Κεφάλαιο 4: Τα εξαεδρικά στοιχεία τρισδιάστατης ελαστικότητας.....</b>	125
4.1 Εισαγωγικά στοιχεία .....	127
4.2 Τα βασικά χαρακτηριστικά του εξαεδρικού στοιχείου τρισδιάστατης ελαστικότητας .....	128
4.2.1 Οκτακομβικό στοιχείο .....	128
• Συναρτήσεις σχήματος.....	129
• Μητρώο παραμορφώσεως.....	131
• Μητρώο στιβαρότητας .....	132
4.2.2 Στοιχείο ανωτέρου βαθμού.....	133
4.2.3 Σύγκριση των διαφόρων τύπων του εξαεδρικού στοιχείου .....	135
4.3 Σύγκριση του εξαεδρικού με τα άλλα είδη τρισδιάστατων στοιχείων .....	137

<b><u>Κεφάλαιο 5:</u></b> Λεπτομερής προσομοίωση πλαισιακού φορέα από οπλισμένο σκυρόδεμα με εξαεδρικά στοιχεία και φυσικά στοιχεία δυνάμεων .....	139
5.1 Εισαγωγικά στοιχεία .....	141
5.1.1 Επικράτηση του τρισδιάστατου έναντι του μονοδιάστατου και δισδιάστατου μοντέλου .....	142
5.1.2 Το οπλισμένο σκυρόδεμα ως συνύπαρξη και αλληλεπίδραση δύο διαφορετικών υλικών .....	146
5.1.3 Μητρικά εξαεδρικά στοιχεία για το σκυρόδεμα και θυγατρικά ενσωματωμένα φυσικά στοιχεία δυνάμεων για τον οπλισμό.....	147
5.1.4 Η γλώσσα προγραμματισμού του κώδικα ReConAn και η σύνδεσή του με το πακέτο λογισμικού FEMAP .....	148
• Η γλώσσα προγραμματισμού του κώδικα ReConAn .....	148
• Η σύνδεση του κώδικα ReConAn με το πακέτο λογισμικού FEMAP .....	150
5.2 Το μοντέλο του ενσωματωμένου οπλισμού .....	152
5.2.1 Κινηματικές σχέσεις.....	157
5.2.2 Γένεση του ενσωματωμένου οπλισμού στο προτεινόμενο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων ...	161
• Γένεση των βοηθητικών κόμβων του ενσωματωμένου οπλισμού .....	162
<b><u>Κεφάλαιο 6:</u></b> Το καταστατικό μοντέλο για το σκυρόδεμα και τον χάλυβα του οπλισμού .	169
6.1 Το καταστατικό μοντέλο για το σκυρόδεμα.....	171
6.1.1 Το καταστατικό προσομοίωμα των Kotsonos and Pavlovic .....	171
• Εισαγωγή .....	171
• Οκταεδρική διατύπωση τάσεων – παραμορφώσεων .....	172
• Το καταστατικό προσομοίωμα των Kotsonos and Pavlovic .....	175
6.1.2 Κριτήρια αστοχίας.....	186
6.1.3 Το τροποποιημένο καταστατικό προσομοίωμα .....	189
6.1.4 Η μέθοδος της διανεμημένης ρωγμής (Smearred Crack Modeling) .....	192
• Ο συντελεστής μερικής διατήρησης της διατμητικής στιβαρότητας $\beta$ .....	195
6.1.5 Το προσομοίωμα συνάφειας και σχετικής ολίσθησης μεταξύ οπλισμού και σκυροδέματος.....	196
6.2 Το καταστατικό μοντέλο για τον χάλυβα του οπλισμού.....	201
6.2.1 Το διγραμμικό μοντέλο.....	201
6.2.2 Το μοντέλο Menegotto-Pinto .....	202
<b><u>Κεφάλαιο 7:</u></b> Αριθμητικές εφαρμογές.....	204
7.1 Προσδιορισμός της μονοαξονικής αντοχής σε θλίψη.....	206
7.1.1 κυλινδρικών δοκιμίων από άοπλο σκυρόδεμα ύψους $h=0,20$ m και διαμέτρου $D=0,10$ m .....	206
• ποιότητας σκυροδέματος C40 .....	214
• ποιότητας σκυροδέματος C40.8.....	223
7.1.2 κυλινδρικών δοκιμίων από άοπλο σκυρόδεμα ύψους $h=0,15$ m και διαμέτρου $D=0,075$ m .....	225
• ποιότητας σκυροδέματος C41.2.....	226
• ποιότητας σκυροδέματος C48.5.....	228
7.2 Προσομοίωση αμφιέριστης δοκού από οπλισμένο σκυρόδεμα .....	230
7.2.1 χωρίς συνδετήρες.....	230
7.2.2 με συνδετήρες .....	230
<b><u>Βιβλιογραφία</u></b> .....	286





## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1**

### **Εισαγωγή**

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1

- 1.1 Γενικά
- 1.2 Σκοπός
- 1.3 Περίληψη κεφαλαίων

## 1.1 Γενικά

Στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία θα ασχοληθούμε με τη μέθοδο της λεπτομερούς προσομοίωσης της μη γραμμικής συμπεριφοράς πλαισιακών φορέων από οπλισμένο σκυρόδεμα τρισδιάστατης ελαστικότητας με εξαεδρικά στοιχεία και ενσωματωμένα φυσικά στοιχεία δυνάμεων, η οποία αποτελεί μία από τις δυνατότητες του κώδικα ReConAn και υπερνικά τους περιορισμούς ακρίβειας (accuracy) και υπολογιστικής αποδοτικότητας (computational efficiency) παλαιότερων μεθόδων προσομοίωσης. Το σκυρόδεμα διακριτοποιείται με ισοπαραμετρικά οκτακομβικά εξαεδρικά στοιχεία, ενώ ο χάλυβας του οπλισμού προσομοιώνεται με τα φυσικά στοιχεία δυνάμεων (natural beam-column flexibility based element), τα οποία λαμβάνουν υπόψιν τόσο την καμπτική και διατμητική στιβαρότητα του οπλισμού όσο και την ολίσθησή του με το σκυρόδεμα. Οι ράβδοι οπλισμού μπορούν να έχουν οποιοδήποτε προσανατολισμό στο εσωτερικό των συμπαγών εξαεδρικών στοιχείων σκυροδέματος, επιτρέποντας την προσομοίωση τόσο του διαμήκους όσο και του διατμητικού οπλισμού (όπως συνδετήρες). Η ρηγμάτωση του σκυροδέματος (concrete cracking) αντιμετωπίζεται με την προσέγγιση της διανεμημένης ρωγμής (smeared crack approach).

Ένα από τα κύρια πλεονεκτήματα της λεπτομερούς προσομοίωσης είναι ότι συνδυάζει την αριθμητική ακρίβεια (numerical accuracy), την αριθμητική στιβαρότητα (numerical robustness) και την υπολογιστική αποδοτικότητα (computational efficiency).

## 1.2 Σκοπός

Κύριος στόχος αποτελεί η παρουσίαση όχι μόνο των χαρακτηριστικών της μεθόδου και των πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιεί αλλά και η τεκμηρίωση, μέσω αριθμητικών εφαρμογών στατικής ανελαστικής ανάλυσης μοντέλων από οπλισμένο σκυρόδεμα, της υπεροχής της έναντι άλλων τρόπων προσομοίωσης ως προς την ποιότητα της λύσης και την αριθμητική αποδοτικότητα.

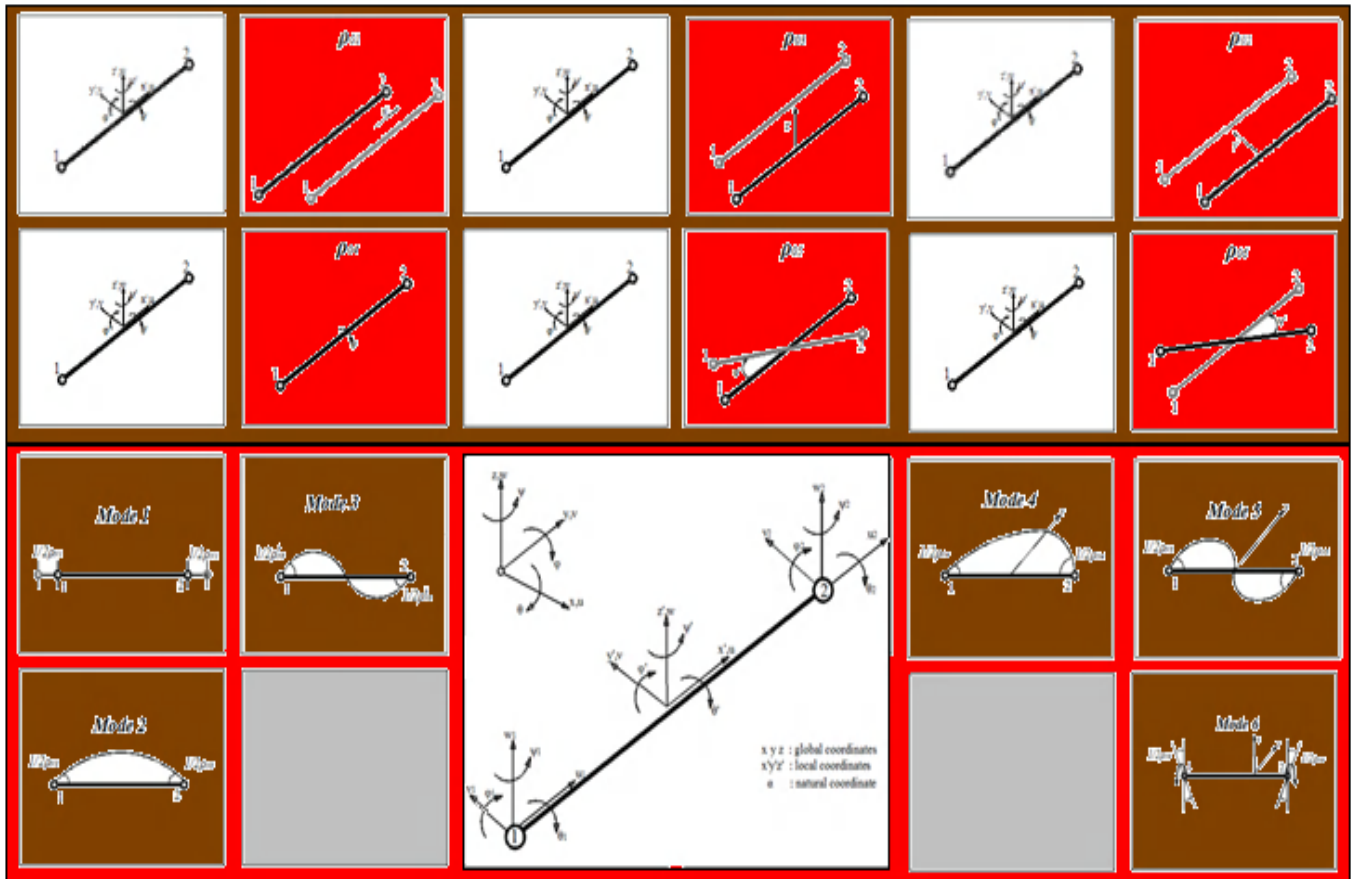
## 1.3 Περίληψη κεφαλαίων

Η συγκεκριμένη διπλωματική εργασία διακρίνεται ουσιαστικά σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος είναι το θεωρητικό και περιλαμβάνει τα 6 πρώτα κεφάλαια, ενώ το δεύτερο μέρος είναι το τελευταίο κεφάλαιο 7, στο οποίο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων που διεξήχθησαν με τη συγκεκριμένη μεθοδολογία και τον προτεινόμενο κώδικα ReConAn.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναλύεται η μέθοδος των φυσικών μορφών και παρουσιάζεται το φυσικό στοιχείο μετατοπίσεων δοκού (BEC). Στο τρίτο κεφάλαιο διατυπώνεται το φυσικό πεπερασμένο στοιχείο δυνάμεων, το οποίο χρησιμοποιείται για την διακριτοποίηση των ράβδων οπλισμού και αναλύεται η τεχνική υπολογισμού των εσωτερικών του δράσεων. Το τέταρτο κεφάλαιο αναφέρεται στα οκτακομβικά εξαεδρικά στοιχεία τρισδιάστατης ελαστικότητας και στους λόγους που επιλέχθηκαν για την προσομοίωση του σκυροδέματος έναντι των άλλων τύπων τρισδιάστατων στοιχείων. Στο πέμπτο κεφάλαιο καταπιανόμαστε με την λεπτομερή προσομοίωση πλαισιακού φορέα από οπλισμένο σκυρόδεμα με εξαεδρικά στοιχεία και φυσικά στοιχεία δυνάμεων και

εμβαθύνουμε ιδιαίτερα στο μοντέλο του ενσωματωμένου οπλισμού. Κλείνοντας το πρώτο μέρος, γίνεται λόγος για τους καταστατικούς νόμους τόσο του σκυροδέματος όσο και του χάλυβα.

Το δεύτερο μέρος ενασχολείται με την εφαρμογή των όσων αναλύθηκαν στο πρώτο θεωρητικό μέρος στην ανελαστική στατική ανάλυση προσομοιωμάτων από άοπλο και οπλισμένο σκυρόδεμα. Να επισημάνουμε ότι η μη γραμμική συμπεριφορά των φορέων οφείλεται εξολοκλήρου σε μη γραμμικότητα υλικού και όχι γεωμετρίας. Συγκεκριμένα, προσομοιώσαμε κυλινδρικά δοκίμια από άοπλο σκυρόδεμα προκειμένου να ελέγξουμε την απόδοση του χρησιμοποιούμενου καταστατικού μοντέλου σκυροδέματος και δύο αμφιέριστες δοκούς από οπλισμένο σκυρόδεμα με και χωρίς συνδετήρες αντίστοιχα, προκειμένου να τεκμηριώσουμε την αριθμητική ευρωστία και ακρίβεια του προτεινόμενου κώδικα ReConAn. Τέλος, παραθέτουμε τα γενικά συμπεράσματα που προέκυψαν από τη σύγκριση των αριθμητικών αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα πειραματικά.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

**Η μέθοδος των φυσικών μορφών και  
το φυσικό στοιχείο μετατοπίσεων**

**natural mode method and  
natural displacement-based finite element**

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 2

### 2.1 Εισαγωγικά στοιχεία

### 2.2 Η μέθοδος των φυσικών μορφών

2.2.1 Αντικατάσταση των κλασικών συναρτήσεων σχήματος  $[N]$  με τις συναρτήσεις των φυσικών μορφών παραμόρφωσης  $[\Omega_N]$

2.2.2 Η συμβολή της μεθόδου των φυσικών μορφών

2.2.3 Το φυσικό μητρώο στιβαρότητας και οι φυσικές δυνάμεις

### 2.3 Το φυσικό στοιχείο μετατοπίσεων δοκού

2.3.1 Τα χαρακτηριστικά του φυσικού στοιχείου μετατοπίσεων

2.3.2 Οι φυσικές μορφές στερεού σώματος του φυσικού στοιχείου μετατοπίσεων

2.3.3 Οι φυσικές μορφές παραμόρφωσης του φυσικού στοιχείου μετατοπίσεων

2.3.4 Σχέση του πλήρους μητρώου των φυσικών μορφών με το μητρώο των τοπικών και το μητρώο των καθολικών καρτεσιανών βαθμών ελευθερίας

### 2.4 Το φυσικό μητρώο παραμόρφωσης $[B_N]$

### 2.5 Το φυσικό μητρώο στιβαρότητας $[K_N]$

### 2.6 Υπολογισμός του φυσικού μητρώου στιβαρότητας $[K_N]$

2.6.1 “Αναλυτικός” υπολογισμός του φυσικού μητρώου στιβαρότητας  $[K_N]$

2.6.2 Υπολογισμός του φυσικού μητρώου στιβαρότητας  $[K_N]$  με αριθμητική ολοκλήρωση

### 2.7 Υπολογισμός των εντατικών μεγεθών του φορέα

## 2.1 Εισαγωγικά στοιχεία

Η μέθοδος των φυσικών μορφών (natural mode method) προτάθηκε από τον καθηγητή κ. Ιωάννη Αργύρη (1962) και αποτέλεσε τη βάση του φυσικού στοιχείου μετατοπίσεων και του πιο εξελιγμένου φυσικού στοιχείου δυνάμεων. Αξιοσημείωτη είναι η πορεία εξέλιξης από το απλό συμβατικό στοιχείο δοκού-στύλου στο φυσικό στοιχείο δυνάμεων, με το οποίο θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία.

### συμβατικό στοιχείο δοκού-στύλου

(χρησιμοποιεί εμμέσως τις συναρτήσεις σχήματος N και υπολογίζει το μητρώο στιβαρότητας μέσω της διαφορικής εξίσωσης της ελαστικής γραμμής)



### στοιχείο μετατοπίσεων με συγκεντρωμένη πλαστικότητα



### στοιχείο μετατοπίσεων με κατανεμημένη πλαστικότητα



### φυσικό στοιχείο δοκού – στύλου

(βασίζεται στη μέθοδο των φυσικών μορφών παραμόρφωσης)



### στρωσιγενές στοιχείο δοκού BeC (Beam Composites)

(στόχος η προσομοίωση δοκών από σύνθετα υλικά, δεν χρησιμοποιεί τη μέθοδο των φυσικών μορφών παραμόρφωσης)



### φυσικό στοιχείο μετατοπίσεων (φυσικό στοιχείο ινών)

(displacement-based element)

(χρησιμοποιεί τη μέθοδο των φυσικών μορφών παραμόρφωσης)



### φυσικό στοιχείο δυνάμεων

(force-based element)

( στόχος η προσομοίωση της ανελαστικής συμπεριφοράς των χωρικών πλαισίων)

**Σχήμα 2.1** Εξέλιξη του συμβατικού στοιχείου δοκού-στύλου

**Φυσικό στοιχείο μετατοπίσεων** : Πρόκειται για ένα συμβατικό στοιχείο, το οποίο βασίζεται στις συναρτήσεις των φυσικών μορφών παραμόρφωσης μέσω των οποίων οι μετακινήσεις κατανέμονται στο εσωτερικό του. Αρχικά, υπολογίζουμε τις φυσικές μορφές παραμόρφωσης του στοιχείου, από τις οποίες θα προκύψει το φυσικό μητρώο παραμόρφωσης. Κατόπιν, προσδιορίζουμε το φυσικό μητρώο στιβαρότητας και τις εσωτερικές δράσεις, ενώ με κατάλληλα μητρώα μετασχηματισμού μεταφερόμαστε από το φυσικό στο τοπικό καρτεσιανό και έπειτα στο καθολικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Το φυσικό στοιχείο μετατοπίσεων πλεονεκτεί ως προς την απλή διατύπωση και τη σχετικά εύκολη εφαρμογή του σε προβλήματα υπολογιστικής στατικής και δυναμικής ανάλυσης πλαισιακών φορέων, ενώ κύριο μειονέκτημα αποτελεί η αδυναμία του να ερμηνεύσει την κατανομή των καμπυλοτήτων κατά μήκος ενός μέλους του οποίου τα άκρα έχουν διαρρεύσει. Κατά συνέπεια, πρέπει κάθε μέλος του υπό προσομοίωση φορέα (ανελαστική μελέτη) να διακριτοποιηθεί με περισσότερα του ενός στοιχεία, καθιστώντας το δίκτυο ιδιαίτερα πυκνό στις θέσεις όπου αναμένονται μεγάλες ανελαστικές παραμορφώσεις, όπως για παράδειγμα στα άκρα μίας δοκού ή ενός υποστυλώματος ή στη θέση εφαρμογής ενός συγκεντρωμένου φορτίου (όπου αναπτύσσονται υψηλές τάσεις και κατά συνέπεια ευμεγέθεις παραμορφώσεις λόγω του φαινομένου της διάτρησης). Η ανάγκη αυτή οδηγεί σε αύξηση του χρόνου διακριτοποίησης και του χρόνου προσομοίωσης, η οποία μεταφράζεται σε κόστος.

**Φυσικό στοιχείο δυνάμεων** : Προκύπτει από τον εκφυλισμό του μεικτού πεπερασμένου στοιχείου μετατοπίσεων-δυνάμεων. Σύμφωνα με τη γενικευμένη αυτή ενεργειακή πρόταση, θεωρούμε ως άγνωστα μεγέθη εκτός από τις μετατοπίσεις και τις εσωτερικές δυνάμεις, με αποτέλεσμα να έχουμε εκτός από τις συναρτήσεις παρεμβολής των μετατοπίσεων και τις συναρτήσεις παρεμβολής των εσωτερικών δυνάμεων. Με επιλογή συγκεκριμένων συναρτήσεων παρεμβολής για τις μετατοπίσεις, η μεικτή μέθοδος ανάγεται στην ειδική μέθοδο της ευκαμψίας, μέσω της οποίας υπολογίζουμε το μητρώο ευκαμψίας του στοιχείου με τη βοήθεια των συναρτήσεων παρεμβολής των εσωτερικών δυνάμεων, μετά την αντιστροφή του οποίου προκύπτει το μητρώο δυσκαμψίας.

Με τη χρήση του φυσικού στοιχείου δυνάμεων, που αποτελεί μία ελαφρώς πιο περίπλοκη διατύπωση του φυσικού στοιχείου ινών, αίρεται το προαναφερθέν μειονέκτημα του φυσικού στοιχείου μετατοπίσεων. Ενώ το στοιχείο μετατοπίσεων υπολογίζει τις εσωτερικές δυνάμεις ολοκληρώνοντας απλά τις τάσεις, στο στοιχείο δυνάμεων λαμβάνει χώρα μία επαναληπτική μη γραμμική διαδικασία (σε επίπεδο στοιχείου), μέσω της οποίας ικανοποιείται πάντα το συμβιβαστό των παραμορφώσεων (το οποίο συνδέει τις ανηγμένες παραμορφώσεις με τις μετατοπίσεις) και η ισορροπία των δυνάμεων κατά μήκος του στοιχείου, με αποτέλεσμα να μας επιτρέπει στις περισσότερες περιπτώσεις να προσομοιώνουμε κάθε μέλος με ένα και μόνο στοιχείο.

Η γραμμική συμπεριφορά και των δύο στοιχείων προσομοιώνεται με τη διακριτοποίησή τους σε ίνες (fibers), με αποτέλεσμα τη διαίρεση της διατομής τους σε υποεπιφάνειες (fiber approach). Κάθε ίνα και κατ' επέκταση κάθε υποεπιφάνεια μπορεί να έχει διαφορετικές ιδιότητες, όπως για παράδειγμα διαφορετικό μέτρο ελαστικότητας, σε σχέση με τις γειτονικές της. Το γεγονός αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό στην ανάλυση της ανελαστικής συμπεριφοράς ενός δομικού μέλους πλαισιακού φορέα, διότι μας δίνει τη δυνατότητα να προσομοιώσουμε τη σταδιακή πλαστικοποίηση της διατομής του μέλους αυτού. Ως γνωστόν, μία διατομή δεν διαρρέει αμέσως ολόκληρη, αλλά αντιθέτως πραγματοποιείται μία σταδιακή διαρροή των υποεπιφανειών της (ζώνη πλαστικοποίησης). Προφανώς, μία πλαστικοποιημένη υποεπιφάνεια έχει διαφορετικές ιδιότητες

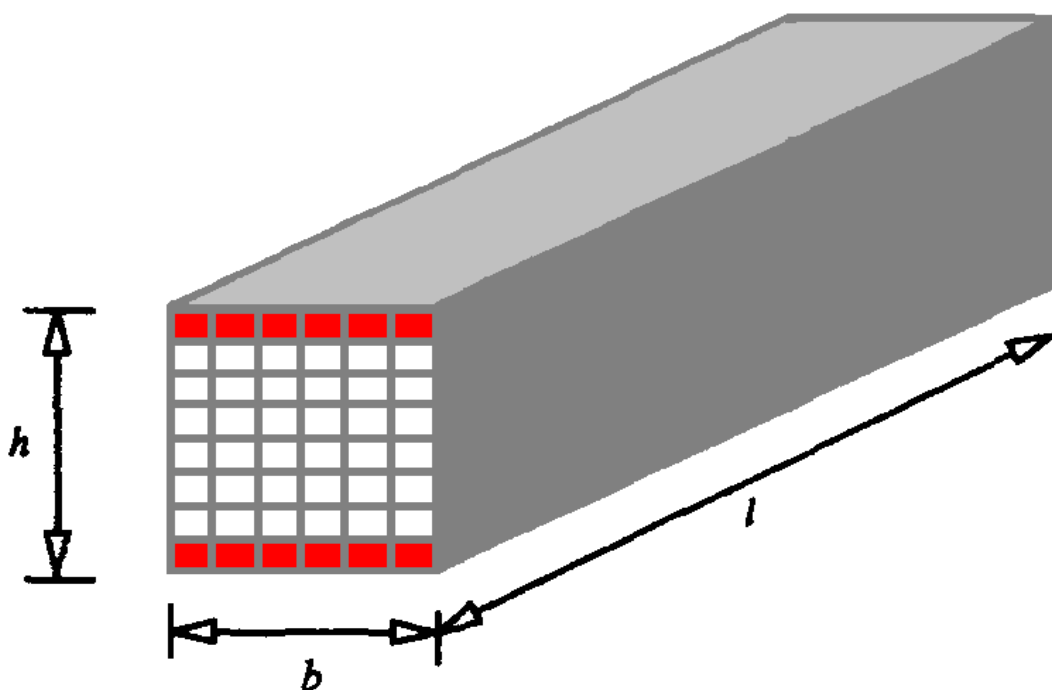


από μία υποεπιφάνεια που δεν έχει διαρρεύσει, γεγονός ισοδύναμο με την ύπαρξη δύο διαφορετικών υλικών. Την ανισοτροπία αυτή είμαστε σε θέση να προσομοιώσουμε με τη fiber approach.

Σύμφωνα με τη θεώρηση συγκεντρωμένης πλαστικότητας, όταν η τάση των ακραίων “ινών” μίας διατομής γίνει ίση με την τάση διαρροής τότε στη διατομή αυτή σχηματίζεται πλαστική άρθρωση. Στην πραγματικότητα αυτό δεν είναι ακριβές και μόνο οι ακραίες στρώσεις της διατομής θα έχουν πλαστικοποιηθεί, ενώ οι εσωτερικές της θα εξακολουθούν να βρίσκονται στην ελαστική περιοχή και να είναι σε θέση να παραλάβουν επιπλέον φορτίο.

Με τη θεώρηση της διανεμημένης πλαστικότητας και τη διαίρεση της δοκού σε ίνες κάνουμε μία περισσότερο ρεαλιστική παραδοχή : όταν κάποια χαρακτηριστική τάση (εξαρτάται από το κριτήριο διαρροής που θα επιλέξουμε) της υποεπιφάνειας γίνει ίση με την τάση διαρροής  $\sigma_y$ , τότε ολόκληρη η υποεπιφάνεια πλαστικοποιείται. Μόνο όταν πλαστικοποιηθούν όλες οι υποεπιφάνειες της διατομής, μπορούμε να πούμε ότι η διατομή έχει πλαστικοποιηθεί πλήρως.

Οι τάσεις και οι ανηγμένες παραμορφώσεις υπολογίζονται στο μέσο κάθε υποεπιφάνειας. Κατόπιν, συγκρίνουμε την τάση του μέσου κάθε υποεπιφάνειας με την τάση διαρροής. Στην περίπτωση λεπτών δοκών μπορούμε να αγνοήσουμε τη συμβολή των διαμηθικών τάσεων στην αντοχή της δοκού και να συγκρίνουμε μόνο την ορθή τάση  $\sigma_{xx}$  (  $x$  είναι ο διαμήκης άξονας της δοκού) του μέσου κάθε υποεπιφάνειας με την  $\sigma_y$  χωρίς να χρειάζεται να υπολογίσουμε κάποια ισοδύναμη τάση.



**Σχήμα 2.2** Διαίρεση της διατομής στοιχείου δοκού στο χώρο σε οριζόντιες και κατακόρυφες στρώσεις (πλαστικοποίηση των ακραίων υποεπιφανειών)

## 2.2 Η μέθοδος των φυσικών μορφών

### 2.2.1 Αντικατάσταση των κλασικών συναρτήσεων σχήματος $[N]$ με τις συναρτήσεις των φυσικών μορφών παραμόρφωσης $[\Omega_N]$

Σύμφωνα με τη μέθοδο των φυσικών μορφών, οι φυσικές μορφές  $\rho$  κάθε στοιχείου διακρίνονται σε φυσικές μορφές στερεού σώματος  $\rho_0$  (natural rigid body modes) και σε φυσικές μορφές παραμόρφωσης  $\rho_N$  (natural straining modes). Μέσω των φυσικών μορφών μπορούμε να περιγράψουμε πλήρως την κινηματική κατάσταση του στοιχείου δοκού.

Το κύριο χαρακτηριστικό της μεθόδου είναι ότι οι κλασικές συναρτήσεις σχήματος  $N$  του συμβατικού πεπερασμένου στοιχείου δοκού αντικαθίστανται από τις συναρτήσεις  $\Omega_N$  των φυσικών μορφών παραμόρφωσης του φυσικού στοιχείου δοκού μέσω της σχέσης  $[N] = [\Omega_N] \cdot [\alpha_N]$ , την οποία αποδεικνύουμε αμέσως παρακάτω.

Σύμφωνα με την κλασική μεθοδολογία των συναρτήσεων σχήματος, το πεδίο των μετακινήσεων (μετατοπίσεων και στροφών)  $[u] = (u \ v \ w \ \theta_x \ \theta_y \ \theta_z)^T$  κάθε σημείου στο εσωτερικό ενός πεπερασμένου στοιχείου εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των επικόμβιων μετακινήσεων (των μετακινήσεων των κόμβων) του στοιχείου στο καρτεσιανό σύστημα. Έστω  $[d]$  το διάνυσμα των επικόμβιων καρτεσιανών μετακινήσεων του στοιχείου και έστω  $n$  ο συνολικός αριθμός των βαθμών ελευθερίας του στοιχείου, ο οποίος ως γνωστόν ισούται με το γινόμενο του αριθμού των βαθμών ελευθερίας κάθε κόμβου επί το πλήθος των κόμβων. Προφανώς, το διάνυσμα  $[u]$  ενός εσωτερικού σημείου έχει διαστάσεις  $6 \times 1$  καθώς περιέχει την μετατόπιση και τη στροφή του σημείου αυτού σε καθένα από τους τρεις άξονες ( $u$  : μετατόπιση κατά τον άξονα  $x$ ,  $v$  : μετατόπιση κατά τον άξονα  $y$ ,  $w$  : μετατόπιση κατά τον άξονα  $z$ ,  $\theta_x$  : στροφή περί τον άξονα  $x$ ,  $\theta_y$  : στροφή περί τον άξονα  $y$ ,  $\theta_z$  : στροφή περί τον άξονα  $z$ ) και το διάνυσμα  $[d]$  έχει διαστάσεις  $n \times 1$ , όπου  $n=3*$  (συνολικός αριθμός των κόμβων του στοιχείου).

Τότε έχουμε ότι:

$$[u] = [N] \cdot [d] \quad (2.1)$$

$(6 \times 1) \quad (6 \times n) \quad (n \times 1)$

Υπάρχει μία σχέση μοναδική και αντιστρέψιμη μεταξύ του γενικευμένου διανύσματος  $[\rho]$  των φυσικών μορφών και του διανύσματος των τοπικών καρτεσιανών επικόμβιων μετακινήσεων  $[d]$ . Για το λόγο αυτό εισάγουμε την έννοια των μητρώων μετασχηματισμού  $[A]$ ,  $[\alpha]$  ( $[\alpha] = [A]^{-1}$ ), τα οποία μας μεταφέρουν από τις κλασικές συναρτήσεις σχήματος στις συναρτήσεις των φυσικών μορφών:

$$[d] = [A] \cdot [\rho] \Leftrightarrow [\rho] = [A]^{-1} \cdot [d] \Leftrightarrow [\rho] = [\alpha] \cdot [d] \Leftrightarrow$$

$(n \times 1) \quad (n \times n) \quad (n \times 1) \quad (n \times 1) \quad (n \times n) \quad (n \times 1) \quad (n \times 1) \quad (n \times n) \quad (n \times 1)$

$$\begin{bmatrix} [\rho_0] \\ [\rho_N] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\alpha_0] \\ [\alpha_N] \end{bmatrix} \cdot [d] \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} [\rho_0] = [\alpha_0] \cdot [d] \\ [\rho_N] = [\alpha_N] \cdot [d] \end{array} \right\} \quad (2.2)$$

Σύμφωνα με τη σχέση (2.2), οι φυσικές μορφές στερεού σώματος και παραμόρφωσης προκύπτουν από τις επικόμβιες μετακινήσεις με τη βοήθεια των μητρώων  $[\alpha_o]$  και  $[\alpha_N]$  αντίστοιχα.

Ένα στοιχείο με  $n$  βαθμούς ελευθερίας μπορεί να παραμορφωθεί με  $n$  διαφορετικές μορφές. Η συνολική του παραμόρφωση εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των  $n$  αυτών μορφών  $u = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ . Τότε έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_u^1 & \omega_u^2 & \omega_u^3 \\ \omega_v^1 & \omega_v^2 & \omega_v^3 \\ \omega_w^1 & \omega_w^2 & \omega_w^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{N_1} \\ \rho_{N_2} \\ \dots \\ \rho_{N_n} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} = [\Omega_N] \cdot [\rho_N] \Rightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} = [\Omega_N] \cdot [\alpha_N] \cdot [d] \xrightarrow{\substack{[u] = [N] [d] \\ (6 \times 1) \quad (6 \times n)(n \times 1)}} \begin{bmatrix} N \\ \dots \\ N \end{bmatrix} = [\Omega_N] \cdot [\alpha_N] \quad (2.3)$$

## 2.2.2 Η συμβολή της μεθόδου των φυσικών μορφών

Υπολογίζουμε για κάθε στοιχείο το μητρώο στιβαρότητας στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων. Το μητρώο αυτό είναι αραιό (περιέχει πολλούς μηδενικούς όρους) και μόλις  $6 \times 6$ . Ο υπολογιστής μέσω του κώδικα το μόνο που πρέπει να πραγματοποιήσει είναι η μετατροπή του “βολικού” αυτού φυσικού μητρώου (ο όρος φυσικό αναφέρεται στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων ως προς το οποίο διατυπώθηκε το μητρώο) σε τοπικές και κατόπιν καθολικές καρτεσιανές συντεταγμένες, με αποτέλεσμα τη σπουδαία αύξηση της υπολογιστικής και κατ’ επέκταση οικονομικής αποδοτικότητας. Η μορφή του φυσικού συστήματος εξαρτάται από τη γεωμετρία του στοιχείου. Για ένα στοιχείο δοκού ή ένα στοιχείο δικτυώματος το φυσικό σύστημα αποτελείται αποκλειστικά από τη φυσική συντεταγμένη  $\xi$  που τρέχει κατά μήκος του άξονα που ενώνει τα άκρα του στοιχείου (διαμήκης άξονας). Όπως αναφέραμε προηγουμένως, η χρήση του φυσικού συστήματος επιτρέπει τον προσδιορισμό του πεδίου των μετατοπίσεων μέσω των φυσικών μορφών παραμόρφωσης.

Είναι πολύ σημαντικό να εξασφαλίσουμε ότι κατά τη διατύπωση ενός πεπερασμένου στοιχείου οι φυσικές μορφές, τις οποίες λαμβάνουμε υπόψιν για την εξαγωγή του μητρώου στιβαρότητας, δεν προκαλούν παραμόρφωση και κατά συνέπεια δεν συνεισφέρουν στην ενέργεια παραμόρφωσης. Με τη μέθοδο των φυσικών μορφών το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με το διαχωρισμό των φυσικών μορφών σε μορφές στερεού σώματος και σε μορφές παραμόρφωσης. Μόνο οι μορφές παραμόρφωσης εισάγονται στον υπολογισμό του μητρώου στιβαρότητας καθώς περιγράφουν πλήρως την παραμορφωσιακή και εντατική κατάσταση του στοιχείου, με αποτέλεσμα την εξοικονόμηση υπολογιστικού χρόνου (μειώνεται αυτομάτως η τάξη του προβλήματος) και τη μείωση του κόστους ή καλύτερα τη βελτιστοποίηση της εργασίας. Το συγκριτικό πλεονέκτημα της μεθόδου είναι η γρήγορη σύγκλιση των κωδίκων που δημιουργούνται βάσει αυτής και η σχετικά

εύκολη κατάστρωση των καταστατικών σχέσεων υλικού, διότι λαμβάνει υπόψιν το γεγονός ότι η ένταση είναι το αιτιατό των παραμορφώσεων του στοιχείου και όχι των μετατοπίσεών του.

Η μέθοδος των φυσικών μορφών συνέδραμε και στην ανάπτυξη κωδίκων ανάλυσης μη γραμμικών φαινομένων (όπως ο λυγισμός) με μη γραμμικότητα γεωμετρίας (μεγάλες μετατοπίσεις – αδυναμία θεώρησης της αρχικής απαραμόρφωτης γεωμετρίας). Ωστόσο, στη συγκεκριμένη εργασία θα ασχοληθούμε κυρίως με τη μη γραμμικότητα υλικού. Με τη μέθοδο των φυσικών μορφών οι κώδικες δεν αντιμετωπίζουν σε κανένα σημείο καθ' όλη τη διάρκεια της ανάλυσής τους προβλήματα μη σύγκλισης, γεγονός που έδωσε τη δυνατότητα μείωσης του υπολογιστικού χρόνου κατά τάξεις μεγέθους. Ως γνωστόν, το μεγαλύτερο ποσοστό του υπολογιστικού χρόνου σπαταλιέται για τη διεξαγωγή αλγεβρικών πράξεων, όπως πολλαπλασιασμοί μητρώων.

Επιπλέον, κατορθώσαμε να αντιμετωπίσουμε αποτελεσματικότερα τις υπολογιστικές δυσχέρειες λόγω παρασιτικών φαινομένων, όπως η παρασιτική διατμητική στιβαρότητα (shear locking), rigid body failure και zero-energy modes, χωρίς να χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε θεωρίες ανωτέρας τάξεως, οι οποίες μπορεί μεν να αντιμετωπίζουν κάποιες από τα δυσκολίες αυτές αυξάνοντας την ακρίβεια, ωστόσο δρουν εις βάρος της οικονομικότητας της λύσης. Υπενθυμίζουμε ότι η παρασιτική διατμητική στιβαρότητα είναι ένα σημαντικό υπολογιστικό πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε στην περίπτωση ανάλυσης χαμηλόκορμων δοκών, τις οποίες προσομοιώνουμε με ισοπαραμετρικά δομητικά (εκφυλισμένα) στοιχεία δοκού με πολύ μικρό πάχος. Στα δομητικά στοιχεία το πεδίο των μετατοπίσεων προκύπτει με παρεμβολή τόσο των μετακινήσεων  $u, v, w$  όσο και των στροφών του διαμήκου άξονα των στοιχείων σε αντίθεση με τα συμβατικά στοιχεία συνεχούς μέσου (continuum elements), στα οποία το πεδίο των μετατοπίσεων προκύπτει με παρεμβολή μόνο των επικόμβιων μετακινήσεων. Στην περίπτωση χαμηλόκορμων δοκών δεν ισχύουν οι βασικές παραδοχές της θεωρίας Bernoulli και έτσι καταφεύγουμε στη θεωρία Timoshenko, σύμφωνα με την οποία οι διατμητικές παραμορφώσεις δεν είναι μηδενικές.

Το μητρώο στιβαρότητας του δομητικού στοιχείου δοκού Timoshenko μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα ενός μητρώου  $[k_s]$ , που οφείλεται στην καμπτική στιβαρότητα της δοκού και ενός μητρώου  $[k_b]$ , που οφείλεται στην εγκάρσια διατμητική στιβαρότητα της δοκού, δηλαδή ισχύει ότι  $[k] = [k_b] + [k_s]$ . Οι όροι του μητρώου αυτού στιβαρότητας εξαρτώνται από το πάχος του  $t$ . Όταν το πάχος  $t$  γίνεται πολύ μικρό (χαμηλόκορμη δοκός) σε σχέση με τις άλλες δύο διαστάσεις της δοκού, εκτός του ότι δεν ισχύουν οι παραδοχές της θεωρίας Bernoulli, ο όρος  $t^3$  του μητρώου της διατμητικής στιβαρότητας  $[k_b]$  γίνεται πολύ μικρότερος από τον όρο  $t$  του μητρώου της καμπτικής στιβαρότητας  $[k_s]$ , με αποτέλεσμα η λύση της εξίσωσης ισορροπίας  $\{[k_b] + [k_s]\} \cdot \{d\} = \{r\}$  να δίνει πολύ μικρές επικόμβιες μετατοπίσεις  $\{d\} \rightarrow \{0\}$ . Το φαινόμενο αυτό, κατά το οποίο το στοιχείο εμφανίζεται να είναι πολύ δύσκαμπτο έως άκαμπτο, ονομάζεται παρασιτική διατμητική στιβαρότητα, το λεγόμενο shear locking. Ο όρος locking προήλθε από το γεγονός ότι έχουμε να κάνουμε με ένα προβληματικής φύσεως μητρώο στιβαρότητας, το οποίο εμφανίζεται να “κλειδώνει” και δεν μπορεί να επιλυθεί καθώς ο επιλύτης του κώδικα “κολλάει”. Μέσω της μεθόδου των φυσικών μορφών, το πρόβλημα αντιμετωπίζεται με περιορισμένη ή επιλεκτική ολοκλήρωση Gauss κατά τον αριθμητικό υπολογισμό του μητρώου στιβαρότητας  $[k]$ , με αποτέλεσμα το μητρώο καμπτικής στιβαρότητας  $[k_s]$  να τείνει προς ένα ιδιάζον μητρώο και η ορίζουσα να τείνει προς το μηδέν με τη μείωση του πάχους της πλάκας.

### 2.2.3 Το φυσικό μητρώο στιβαρότητας και οι φυσικές δυνάμεις

Προκειμένου να υπολογίσουμε το μητρώο στιβαρότητας, θα λάβουμε υπόψιν μόνο τις φυσικές μορφές παραμόρφωσης. Αυτή είναι άλλωστε η φιλοσοφία και η σπουδαιότητα της μεθόδου των φυσικών μορφών.

Το έργο των εξωτερικών δυνάμεων  $[P]$  (φυσικές) και  $[P_e]$  (τοπικές καρτεσιανές) ισούται με το γινόμενο των δυνάμεων αυτών με τις αντίστοιχες μετατοπίσεις  $[p]$  (φυσικές) και  $[d]$  (τοπικές καρτεσιανές) και δεν εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων. Για το λόγο αυτό οι δύο διατυπώσεις του έργου παραμόρφωσης στο καρτεσιανό και στο φυσικό σύστημα πρέπει να είναι ισοδύναμες:

$$[P_e]^T \cdot [\delta d] = [P]^T \cdot [\delta p] \xrightarrow{[p]=[a][d]} [P_e]^T \cdot [\delta d] = [P]^T \cdot [a] \cdot [\delta d] \Rightarrow$$

$$[P_e]^T = [P]^T \cdot [a] \Rightarrow [P_e] = [a]^T \cdot [P] \Rightarrow$$

$$[P] = [A]^T \cdot [P_e] \Rightarrow \begin{bmatrix} [P_0] \\ [P_N] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_0]^T \\ [A_N]^T \end{bmatrix} \cdot [P_e] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} [P_0] = [A_0]^T \cdot [P_e] \\ [P_N] = [A_N]^T \cdot [P_e] \end{cases} \quad (2.4)$$

όπου  $[P_0]$  και  $[P_N]$  το διάνυσμα φόρτισης που αντιστοιχεί στις φυσικές μορφές στερεού σώματος και στις φυσικές μορφές παραμόρφωσης αντίστοιχα.

Επειδή οι φυσικές μορφές στερεού σώματος δεν προκαλούν παραμόρφωση, δεν συνεισφέρουν στην ενέργεια παραμόρφωσης. Ισχύει ότι:

$$[P_0]^T \cdot [\delta p_0] = [0] \xrightarrow{[\delta p_0]=[a_0][\delta d]} [P_0]^T \cdot [a_0] \cdot [\delta d] = [0] \xrightarrow{\substack{[\delta d] \neq [0] \\ [a_0] \neq [0]}} [P_0]^T = [0] \Rightarrow$$

$$[P_0] = [0] \quad (2.5)$$

Συνοψίζοντας:

$$[\rho_N] = [\alpha_N] \cdot [d] \qquad [\rho_0] = [\alpha_0] \cdot [d] \qquad (2.6.a)$$

$$[P_N] = [A_N]^T \cdot [d] \qquad [P_0] = [0] \qquad (2.6.b)$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι τα φυσικά ( $[\rho_N], [\rho_0], [P_N], [P_0]$ ) και τα καρτεσιανά ( $[d]$ ) μεγέθη σχετίζονται μέσω των μητρών  $[\alpha]$  και  $[A]=[\alpha]^{-1}$ , τα οποία εξαρτώνται μόνο από τη γεωμετρία του στοιχείου και μπορούν να διατυπωθούν εύκολα ανάλογα με τον τύπο του.

Σύμφωνα με την αρχή των δυνατών έργων, όταν σε ένα φορέα που ισορροπεί ασκούνται εξωτερικά φορτία, τότε για οποιαδήποτε «μικρή» δυνατή παραμόρφωση του φορέα, συμβιβαστή με τις συνθήκες στηρίξεως του, το δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων ισούται με το δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων, δηλαδή:

$$W_{int} = W_{ext} \Rightarrow \int_V [\sigma]^T [\delta \epsilon] dV = [P]^T [\delta \rho] \qquad (2.7)$$

Το διάνυσμα  $[P]$  αποτελείται από τις δράσεις οι οποίες αναφέρονται στο φυσικό σύστημα. Οι δράσεις αυτές μπορεί να είναι χωρικές όπως οι μαζικές δράσεις  $[f^V]$  (δράσεις ανά μονάδα όγκου), επιφανειακές  $[f^S]$  (δράσεις ανά μονάδα επιφάνειας) όπως στην περίπτωση που ο φορέας μας στηρίζεται σε μία επιφάνεια  $S_u$  με καθορισμένες μετατοπίσεις  $[D^{Su}]$  και συγκεντρωμένες, όπως οι επικόμβιες δράσεις  $[R_c^i]$  στον κόμβο  $i$ .

Για την επίλυση ενός προβλήματος αντοχής, έχουμε στη φαρέτρα μας 3 είδη εξισώσεων : τις εξισώσεις ισορροπίας των τάσεων, τις εξισώσεις συμβιβαστού των μετατοπίσεων και τις καταστατικές εξισώσεις. Οι καταστατικές εξισώσεις συνδέουν το αίτιο (τάση) με το αποτέλεσμα (παραμόρφωση). Δεν μπορούν να γραφούν σε γενική μορφή, είναι διαφορετικές για κάθε υλικό, (εξαρτώνται από τη φύση του) και προκύπτουν από πειραματικά δεδομένα.

Ανάλογα με τον καταστατικό νόμο – καταστατική σχέση που θα χρησιμοποιήσουμε για το υλικό μας, θα υπάρχει ένα καταστατικό μητρώο  $[\kappa_{ct}]$  (για παράδειγμα στα πεπερασμένα στοιχεία επίπεδης έντασης – παραμόρφωσης το καταστατικό μητρώο είναι το μητρώο ελαστικότητας  $[E]$ ), το οποίο θα συνδέει το μητρώο των τάσεων  $[\sigma]$  με το μητρώο των παραμορφώσεων  $[\epsilon]$ :

$$[\sigma] = [\kappa_{ct}] \cdot [\epsilon] \qquad (2.8)$$

$$(2.7) \xrightarrow{(2.8)} \int_V ([\kappa_{ct}] [\epsilon])^T [\delta \epsilon] dV = [P]^T [\delta \rho] \Rightarrow$$

$$\int_V ([\epsilon]^T [\kappa_{ct}]^T) [\delta \epsilon] dV = [P]^T [\delta \rho] \qquad (2.9)$$

Αν αγνοηθεί η ύπαρξη των αρχικών παραμορφώσεων, τότε οι ανηγμένες παραμορφώσεις  $[\varepsilon]$  συνδέονται με τις φυσικές μορφές παραμόρφωσης  $[\rho_N]$  μέσω του φυσικού μητρώου παραμόρφωσης  $[B_N]$ .

$$[\varepsilon] = [B_N] \cdot [\rho_N] \quad (2.10)$$

$$(2.9) \xrightarrow{(2.10)} \int_V ([B_N] \cdot [\rho_N])^T [k_{ct}]^T \delta([B_N] \cdot [\rho_N]) dV = [P]^T [\delta\rho] \Rightarrow$$

$$\int_V ([\rho_N]^T \cdot [B_N]^T) [k_{ct}]^T [B_N] [\delta\rho_N] dV = [P]^T [\delta\rho] \xrightarrow{[P]^T [\delta\rho] = [P_0]^T [\delta\rho_0] + [P_N]^T [\delta\rho_N]} \Rightarrow$$

$$[\rho_N]^T \left[ \int_V [B_N]^T [k_{ct}]^T [B_N] dV \right] [\delta\rho_N] = [P_0]^T [\delta\rho_0] + [P_N]^T [\delta\rho_N] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [0] = [P_0]^T \\ [\rho_N]^T \left[ \int_V [B_N]^T [k_{ct}]^T [B_N] dV \right] = [P_N]^T \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [P_0] = [0] \\ [P_N] = \left[ \int_V [B_N]^T [k_{ct}] [B_N] dV \right] [\rho_N] \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [P_0] = [0] \\ [P_N] = \left[ \int_V [B_N]^T [k_{ct}] [B_N] dV \right] = [K_N] [\rho_N], \text{ όπου } [K_N] = \int_V [B_N]^T [k_{ct}] [B_N] dV \end{array} \right\} (2.11)$$

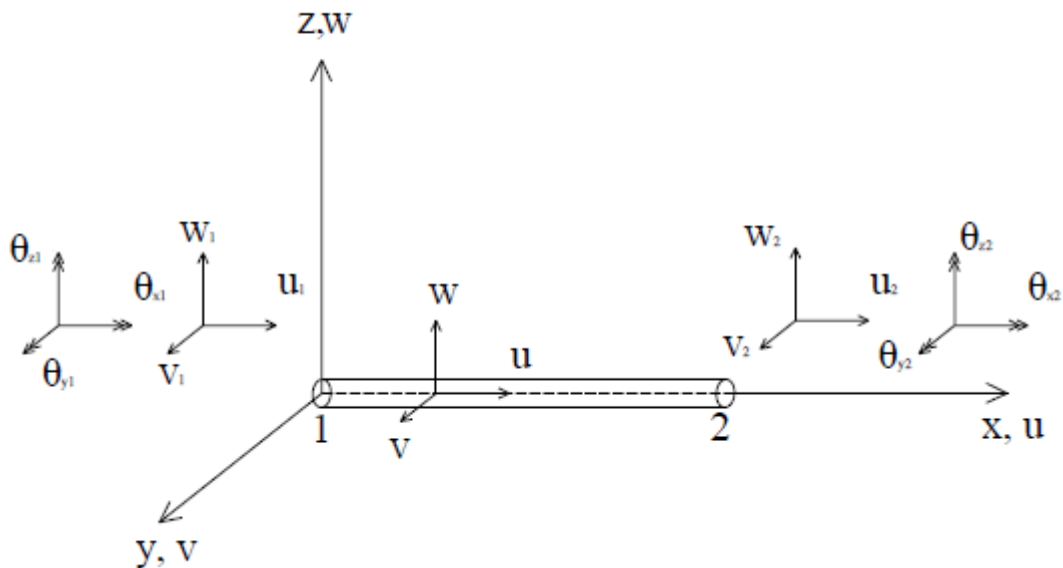
Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι:

- 1) Οι δυνάμεις στερεού σώματος  $[P_0]$  που δρουν πάνω στο στοιχείο πρέπει να είναι μηδενικές.
- 2) Το φυσικό μητρώο στιβαρότητας ισούται με  $[K_N] = \int_V [B_N]^T [k_{ct}] [B_N] dV$ . Αξιοσημείωτο είναι

ότι η σχέση αυτή θυμίζει την αντίστοιχη σχέση του καρτεσιανού μητρώου στιβαρότητας. Το φυσικό μητρώο στιβαρότητας, με απλούς μετασχηματισμούς, συνηθίζεται να εκφράζεται πρώτα στο τοπικό και τελικά στο καθολικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

## 2.3 Το φυσικό στοιχείο μετατοπίσεων δοκού

### 2.3.1 Τα χαρακτηριστικά του φυσικού στοιχείου μετατοπίσεων



Σχήμα 2.3 Το στοιχείο δοκού στο χώρο

Το φυσικό στοιχείο δοκού αποτελείται από δύο κόμβους. Σε κάθε κόμβο αντιστοιχούν 6 καρτεσιανοί βαθμοί ελευθερίας:

- 1) η αξονική μετατόπιση κατά τον διαμήκη τοπικό καρτεσιανό άξονα  $x$  ( $\mathbf{u}$ )
- 2) η εγκάρσια μετατόπιση κατά τον τοπικό καρτεσιανό άξονα  $y$  ( $\mathbf{v}$ )
- 3) η εγκάρσια μετατόπιση κατά τον τοπικό καρτεσιανό άξονα  $z$  ( $\mathbf{w}$ )
- 4) η στρεπτική στροφή της οποίας το διάνυσμα βρίσκεται στον διαμήκη τοπικό άξονα  $x$  ( $\theta_x$ )
- 5) η καμπτική στροφή της οποίας το διάνυσμα βρίσκεται στον τοπικό καρτεσιανό άξονα  $y$  ( $\theta_y$ )
- 6) η καμπτική στροφή της οποίας το διάνυσμα βρίσκεται στον τοπικό καρτεσιανό άξονα  $z$  ( $\theta_z$ )

Συνεπώς, σε κάθε στοιχείο αντιστοιχούν δώδεκα συνολικά καρτεσιανοί βαθμοί ελευθερίας, οι οποίοι στο τοπικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ομαδοποιούνται στο διάνυσμα  $[\mathbf{d}]$ :

$$[\mathbf{d}] = \left[ u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \theta_{x_1} \quad \theta_{y_1} \quad \theta_{z_1} \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \theta_{x_2} \quad \theta_{y_2} \quad \theta_{z_2} \right]^T$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε τις φυσικές μορφές παραμόρφωσης  $[\rho_N]$ , ορίζουμε το φυσικό σύστημα συντεταγμένων με τη βοήθεια της φυσικής συντεταγμένης  $\xi$ , η οποία είναι αδιάστατη και παίρνει τιμές από -1 έως 1. Ο φυσικός άξονας  $\xi$  ταυτίζεται με το διαμήκη τοπικό καρτεσιανό άξονα  $x$ , ο οποίος διέρχεται από το κέντρο βάρους κάθε διατομής του στοιχείου. Η αρχή των αξόνων του τοπικού καρτεσιανού συστήματος κάθε στοιχείου, μήκους  $L$ , τοποθετείται στο μέσον του στοιχείου. Για να βρούμε τη σχέση της φυσικής συντεταγμένης  $\xi$  ( $-1 \leq \xi \leq 1$ ) με την καρτεσιανή συντεταγμένη  $x$  ( $-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$ ) θέτουμε :

$$\xi(x) = a \cdot x + b$$



$$\xi\left(-\frac{L}{2}\right) = -1 \Rightarrow a \cdot \left(-\frac{L}{2}\right) + b = -1 \Rightarrow b = -1 - a \cdot \left(-\frac{L}{2}\right) \Rightarrow b = -1 + \frac{a \cdot L}{2}$$

$$\xi\left(+\frac{L}{2}\right) = 1 \Rightarrow a \cdot \left(+\frac{L}{2}\right) + b = 1 \xrightarrow{b = -1 + \frac{a \cdot L}{2}} a \cdot \left(+\frac{L}{2}\right) - 1 + \frac{a \cdot L}{2} = 1 \Rightarrow a \cdot L = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{L}$$

$$b = -1 + \frac{\frac{2}{L} \cdot L}{2} \Rightarrow b = 0$$

Συνεπώς,

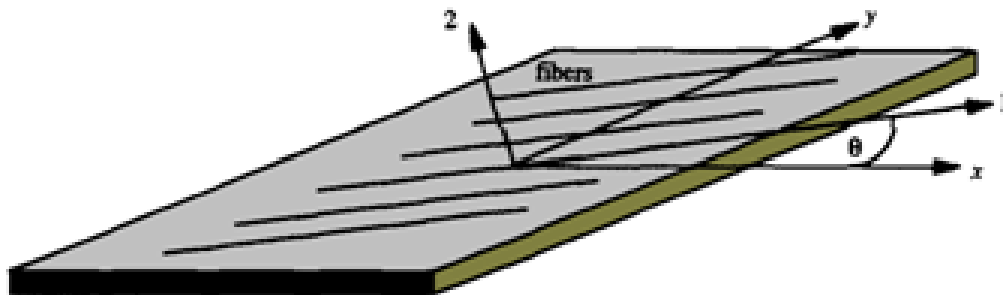
$$\xi = \frac{2}{L} \cdot x \quad \mu\epsilon \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{2}{L} \quad (2.13)$$

Στο ακόλουθο σχήμα 2.5 παρατηρούμε το φυσικό στοιχείο δοκού με το καθολικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, τους καθολικούς καρτεσιανούς βαθμούς ελευθερίας, το τοπικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, τους τοπικούς καρτεσιανούς βαθμούς ελευθερίας και τον διαμήκη άξονα του φυσικού συστήματος.

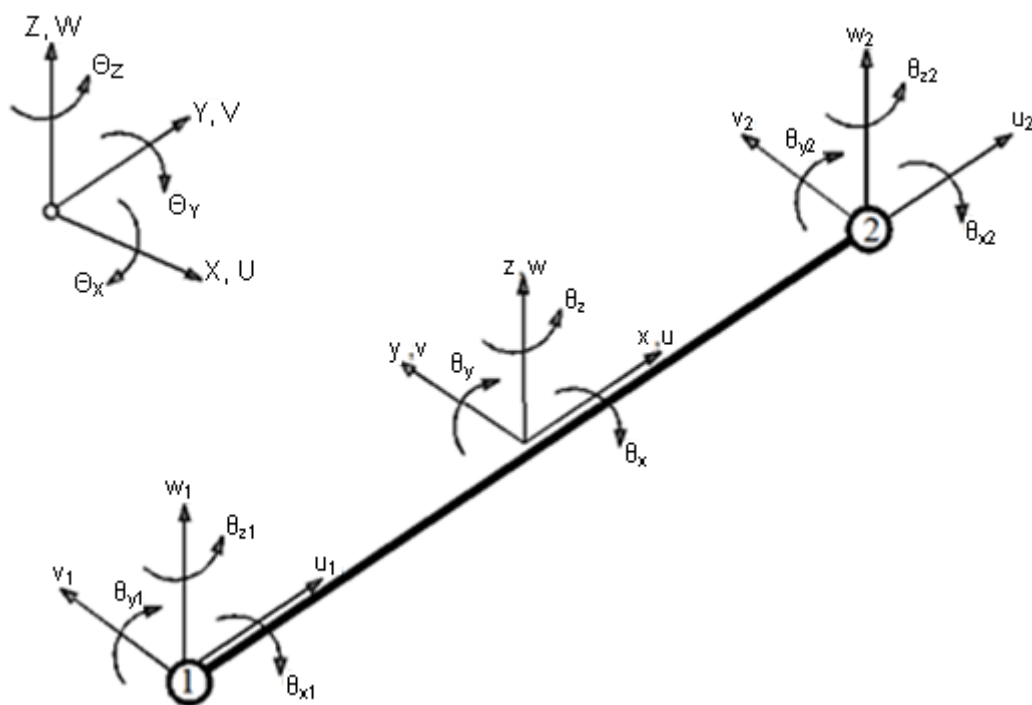
- τοπικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων: Οι συντεταγμένες του συμβολίζονται με  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Πρόκειται για ένα ορθοκανονικό σύστημα με τους άξονες  $x, y$  να βρίσκονται στο μέσο επίπεδο του στοιχείου και τον άξονα  $z$  να είναι κάθετος στο επίπεδο αυτό. Το μέσο επίπεδο του στοιχείου δοκού ορίζεται από τους δύο ακραίους κόμβους του στοιχείου και ένα τρίτο σημείο (το λεγόμενο auxiliary point), το οποίο εισάγουμε εμείς βάσει των δεδομένων του προβλήματος. Ο άξονας  $x$  είναι ο διαμήκης άξονας της δοκού, ενώ ο άξονας  $y$  είναι κάθετος σε αυτόν και επί του μέσου επιπέδου.

- καθολικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων : Οι συντεταγμένες του συμβολίζονται με  $X, Y, Z$ . Πρόκειται για ένα ορθοκανονικό σύστημα, στο οποίο διατυπώνονται και τελικά επιλύονται οι εξισώσεις ισορροπίας.
- φυσικό σύστημα συντεταγμένων : Περιλαμβάνει την αδιάστατη συντεταγμένη  $\xi$  κατά μήκος του στοιχείου. Ως αρχή του φυσικού άξονα  $\xi$  ( $\xi=0$ ) θεωρούμε το μέσον της δοκού.
- σύστημα υλικού : Δεν είναι απαραίτητα ορθοκανονικό. Οι συντεταγμένες του συμβολίζονται με 1, 2, 3. Ο άξονας 1 είναι παράλληλος προς την κύρια διεύθυνση όπλισης επί του μέσου επιπέδου του στοιχείου, ο άξονας 2 κείται στο ίδιο επίπεδο με τον άξονα 1 και ο άξονας 3 είναι παράλληλος με τον τοπικό καρτεσιανό άξονα  $z$ , δηλαδή κάθετος στο μέσο επίπεδο. Για κάθε στρώση του υλικού ορίζεται μία γωνία  $\theta$  μεταξύ του τοπικού άξονα  $x$  και του άξονα του υλικού 1. Η γωνία  $\theta$  θεωρείται θετική όταν μετριέται αντιωρολογιακά. Στην περίπτωση ομογενούς (ίδια σύσταση σε όλα τα σημεία της μάζας) και ισότροπου (μηχανικές ιδιότητες σταθερές καθ'όλες τις διευθύνσεις) το σύστημα του υλικού ταυτίζεται με το τοπικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.



Σχήμα 2.4 Το σύστημα υλικού μίας στρώσης του στοιχείου δοκού

- τοπικοί επικόμβιοι βαθμοί ελευθερίας :  $u_1, v_1, w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, \theta_{z1}$   
 $u_2, v_2, w_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, \theta_{z2}$
- καθολικοί επικόμβιοι βαθμοί ελευθερίας :  $U_1, V_1, W_1, \Theta_{x1}, \Theta_{y1}, \Theta_{z1}$   
 $U_2, V_2, W_2, \Theta_{x2}, \Theta_{y2}, \Theta_{z2}$



**Σχήμα 2.5** Το φυσικό στοιχείο δοκού στο χώρο

Εφόσον το στοιχείο δοκού έχει 12 καρτεσιανούς βαθμούς ελευθερίας, ισάριθμες είναι και οι φυσικές του μορφές, εκ των οποίων οι 6 είναι οι φυσικές μορφές στερεού σώματος και οι άλλες 6 αποτελούν τις φυσικές μορφές παραμόρφωσης. Σε κάθε βαθμό ελευθερίας αντιστοιχεί και μία διαφορετική φυσική μορφή, γι' αυτό άλλωστε το πλήθος των φυσικών μορφών του στοιχείου ταυτίζεται με το πλήθος των βαθμών ελευθερίας του στοιχείου.

Το πλήθος των φυσικών μορφών παραμόρφωσης προκύπτει αφαιρώντας από το πλήθος των φυσικών μορφών του στοιχείου το πλήθος των φυσικών μορφών στερεού σώματος. Όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια, η προηγούμενη παρατήρηση δεν ισχύει μόνο για το πλήθος των φυσικών μορφών, αλλά μπορεί να επεκταθεί και για τη μορφή τους.

### 2.3.2 Οι φυσικές μορφές στερεού σώματος του φυσικού στοιχείου μετατοπίσεων

Ως μηχανικό σύστημα ορίζεται ένα σύνολο υλικών σημείων ή σωμάτων, στο οποίο η θέση ή η κίνηση κάθε υλικού σημείου ή σώματος εξαρτάται από τη θέση ή την κίνηση των άλλων υλικών σημείων ή σωμάτων. Το απολύτως στερεό σώμα ή απλούστερα **το στερεό σώμα** είναι ένα σύστημα υλικών σημείων, το οποίο έχει τις ακόλουθες δύο βασικές ιδιότητες:

- το διανυσματικό άθροισμα όλων των εσωτερικών του δυνάμεων είναι μηδενικό
- το άθροισμα των ροπών όλων των εσωτερικών του δυνάμεων ως προς ένα σημείο ή άξονα ισούται με μηδέν.

Ως εσωτερικές χαρακτηρίζονται οι δυνάμεις μέσω των οποίων αλληλεπιδρούν τα επιμέρους στοιχεία (υλικά σημεία) του στερεού σώματος. Ως εξωτερικές χαρακτηρίζονται οι δυνάμεις που ασκούνται στα στοιχεία του στερεού σώματος (ή του συστήματος γενικότερα) από υλικά σημεία ή σώματα που δεν ανήκουν σε αυτό. Σε αντίθεση με τη γενική περίπτωση ενός μηχανικού συστήματος στο οποίο οι εφαρμοζόμενες εσωτερικές δυνάμεις σε διάφορα σημεία του μπορούν να προκαλέσουν αμοιβαίες μετακινήσεις και κατά συνέπεια παραμόρφωση του συστήματος αυτού, σε ένα στερεό σώμα οι εσωτερικές δυνάμεις αμοιβαία ισορροπούν και δεν επηρεάζουν την κίνηση του σώματος αυτού. Κύριο χαρακτηριστικό ενός στερεού σώματος είναι ότι η απόσταση μεταξύ δύο οποιονδήποτε σημείων του παραμένει σταθερή.

Οι **φυσικές μορφές στερεού σώματος** είναι πάντα 6 (3 μετακινήσεις + 3 στροφές) για ένα χωρικό στοιχείο (δηλαδή για ένα στοιχείο τρισδιάστατης εντατικής κατάστασης) και 3 (2 μετακινήσεις + 1 στροφή, το διάνυσμα της οποίας είναι κάθετο στο επίπεδο του στοιχείου) για ένα στοιχείο επίπεδης εντατικής κατάστασης. Ένα απολύτως στερεό σώμα εκτελεί επίπεδη κίνηση, όταν το διάνυσμα της ταχύτητας κάθε σημείου του βρίσκεται πάνω στο ίδιο επίπεδο. Στην περίπτωση αυτή η επίπεδη κίνηση αναλύεται σε μία μεταφορική και σε μία περιστροφική κίνηση, ο άξονας της οποίας είναι κάθετος στο επίπεδο της κίνησης.

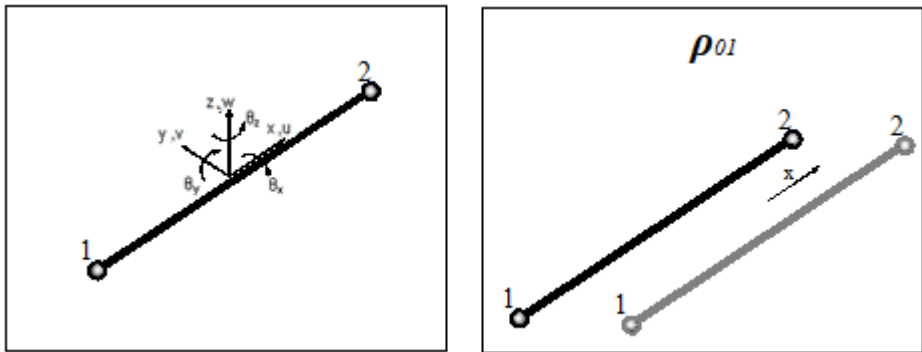
**Οι έξι μορφές στερεού σώματος του φυσικού στοιχείου δοκού** γράφονται συγκεντρωτικά στο παρακάτω διάνυσμα  $\rho_0$  και παρουσιάζονται στα σχήματα 2.6.1-2.6.6.

$$[\rho_0] = [\rho_{0_1} \quad \rho_{0_2} \quad \rho_{0_3} \quad \rho_{0_4} \quad \rho_{0_5} \quad \rho_{0_6}]^T \quad (2.14)$$

Πρόκειται για τρεις μετακινήσεις κατά τις διευθύνσεις των τοπικών αξόνων x,y,z και για τρεις στροφές περί των διευθύνσεων αυτών.

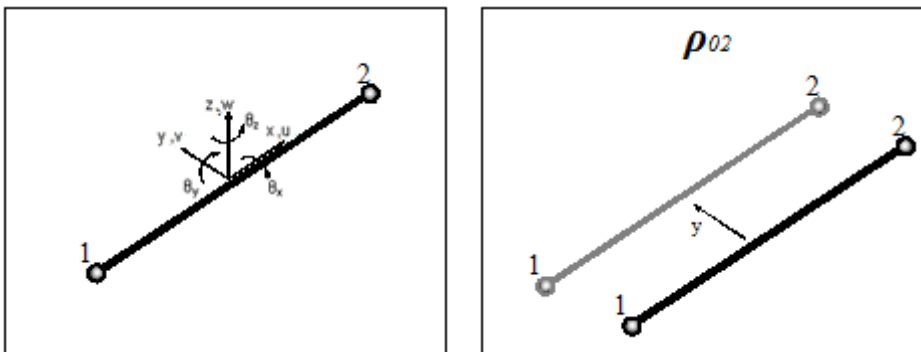
Ειδικότερα:

$\rho_{01}$  : η μετατόπιση του στοιχείου ως στερεό σώμα κατά τον τοπικό καρτεσιανό διαμήκη άξονα x



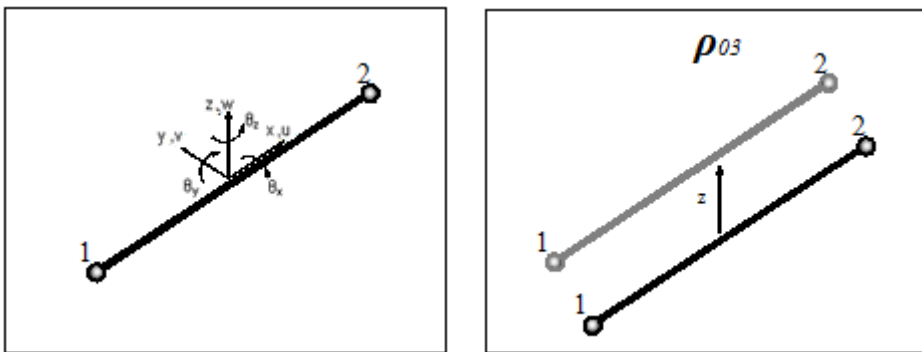
Σχήμα 2.6.1 Φυσική μορφή στερεού σώματος  $\rho_{01}$

$\rho_{02}$  : η μετατόπιση του στοιχείου ως στερεό σώμα κατά τον τοπικό καρτεσιανό άξονα y



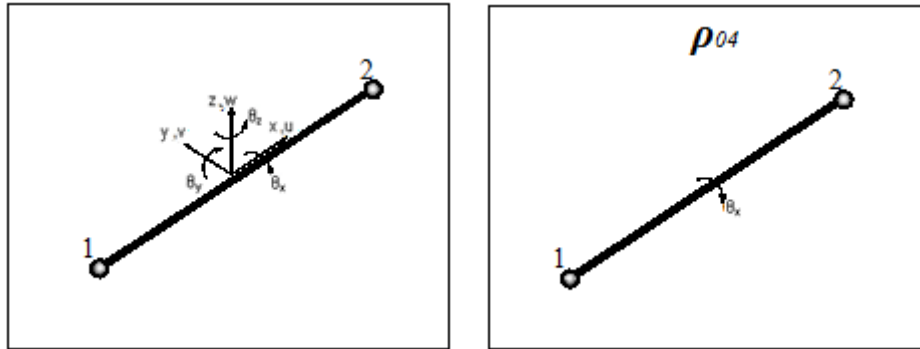
Σχήμα 2.6.2 Φυσική μορφή στερεού σώματος  $\rho_{02}$

$\rho_{03}$  : η μετατόπιση του στοιχείου ως στερεό σώμα κατά τον τοπικό καρτεσιανό και κάθετο στο μέσο επίπεδο του στοιχείου άξονα z



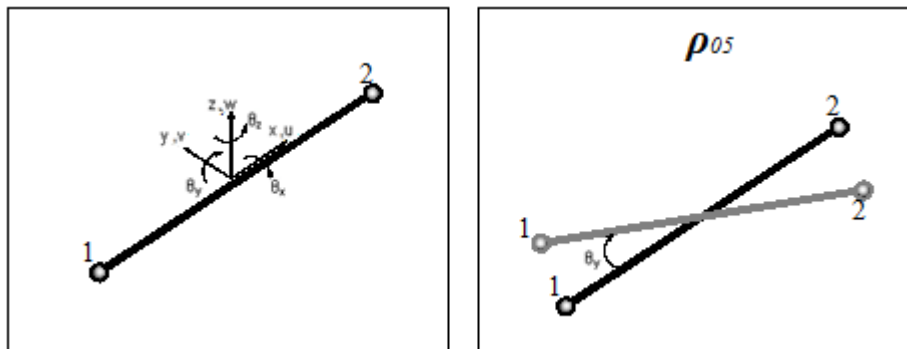
Σχήμα 2.6.3 Φυσική μορφή στερεού σώματος  $\rho_{03}$

$\rho_{04}$  : η στροφή του στοιχείου ως στερεό σώμα περί τον τοπικό καρτεσιανό διαμήκη άξονα x



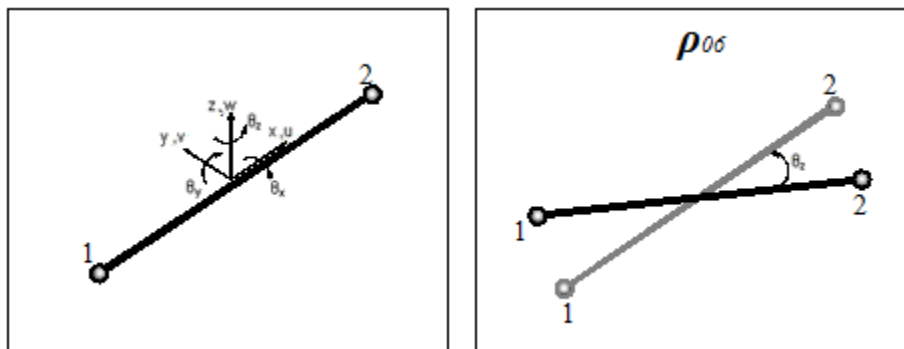
Σχήμα 2.6.4 Φυσική μορφή στερεού σώματος  $\rho_{04}$

$\rho_{05}$  : η στροφή του στοιχείου ως στερεό σώμα περί τον τοπικό καρτεσιανό άξονα y



Σχήμα 2.6.5 Φυσική μορφή στερεού σώματος  $\rho_{05}$

$\rho_{06}$  : η στροφή του στοιχείου ως στερεό σώμα περί τον τοπικό καρτεσιανό και κάθετο στο επίπεδο του στοιχείου άξονα z



Σχήμα 2.6.6 Φυσική μορφή στερεού σώματος  $\rho_{06}$

Η σχέση των φυσικών μορφών στερεού σώματος με τους τοπικούς καρτεσιανούς βαθμούς ελευθερίας δίνεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \rho_{0_1} \\
 u_2 &= \rho_{0_1} \\
 v_1 &= \rho_{0_2} - \frac{L}{2} \rho_{0_6} \\
 v_2 &= \rho_{0_2} + \frac{L}{2} \rho_{0_6} \\
 w_1 &= \rho_{0_3} + \frac{L}{2} \rho_{0_5} \\
 w_2 &= \rho_{0_3} - \frac{L}{2} \rho_{0_5}
 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Από τις σχέσεις αυτές έχουμε ότι:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \rho_{0_1} \\ u_2 &= \rho_{0_1} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(+)} u_1 + u_2 = 2 \cdot \rho_{0_1} \Rightarrow \rho_{0_1} = \frac{u_1 + u_2}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \rho_{0_2} - \frac{L}{2} \rho_{0_6} \\ v_2 &= \rho_{0_2} + \frac{L}{2} \rho_{0_6} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(+)} v_1 + v_2 = 2 \cdot \rho_{0_2} \Rightarrow \rho_{0_2} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \rho_{0_2} - \frac{L}{2} \rho_{0_6} \\ v_2 &= \rho_{0_2} + \frac{L}{2} \rho_{0_6} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(-)} v_1 - v_2 = -L \cdot \rho_{0_6} \Rightarrow \rho_{0_6} = \frac{v_2 - v_1}{L}$$

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \rho_{0_3} + \frac{L}{2} \rho_{0_5} \\ w_2 &= \rho_{0_3} - \frac{L}{2} \rho_{0_5} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(+)} w_1 + w_2 = 2 \cdot \rho_{0_3} \Rightarrow \rho_{0_3} = \frac{w_1 + w_2}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \rho_{0_3} + \frac{L}{2} \rho_{0_5} \\ w_2 &= \rho_{0_3} - \frac{L}{2} \rho_{0_5} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(-)} w_1 - w_2 = L \cdot \rho_{0_5} \Rightarrow \rho_{0_5} = \frac{w_1 - w_2}{L}$$

Όσον αφορά στην τέταρτη φυσική μορφή στερεού σώματος, αυτή αντιστοιχεί σε στροφή περί τον διαμήκη άξονα  $x$ . Ειδικότερα:  $\rho_{0_4} = \frac{\theta_{x_1} + \theta_{x_2}}{2}$ .

Συνοψίζοντας, έχουμε ότι:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{0_1} = \frac{u_1 + u_2}{2} \\ \rho_{0_2} = \frac{v_1 + v_2}{2} \\ \rho_{0_3} = \frac{w_1 + w_2}{2} \\ \rho_{0_4} = \frac{\theta_{x_1} + \theta_{x_2}}{2} \\ \rho_{0_5} = \frac{w_1 - w_2}{L} \\ \rho_{0_6} = \frac{v_2 - v_1}{L} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \rho_{0_1} \\ \rho_{0_2} \\ \rho_{0_3} \\ \rho_{0_4} \\ \rho_{0_5} \\ \rho_{0_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_{x_1} \\ \theta_{y_1} \\ \theta_{z_1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \theta_{x_2} \\ \theta_{y_2} \\ \theta_{z_2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow [\rho_0] = [\alpha_0] \cdot [d]$$

$$\text{όπου } [\alpha_0] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

είναι το μητρώο που συνδέει τις φυσικές μορφές στερεού σώματος με τους τοπικούς καρτεσιανούς βαθμούς ελευθερίας. Γνωρίζοντας, λοιπόν, το διάνυσμα των τοπικών μετακινήσεων  $[d]$  ενός στοιχείου (ο όρος μετακίνηση είναι γενικότερος του όρου μετατόπιση και περιλαμβάνει τόσο την έννοια της μετατόπισης όσο και την έννοια της στροφής), προσδιορίζουμε εύκολα το αντίστοιχο διάνυσμα των φυσικών μορφών στερεού σώματος  $[\rho_0]$ .



Πώς συνδέεται το διάνυσμα των καθολικών μετακινήσεων  $\begin{bmatrix} - \\ d \end{bmatrix}$  ενός στοιχείου με το αντίστοιχο διάνυσμα των φυσικών μορφών στερεού σώματος  $[p_0]$ ;

Από το διάνυσμα των καθολικών μετακινήσεων  $\begin{bmatrix} - \\ d \end{bmatrix}$  του στοιχείου μπορούμε να προσδιορίσουμε το αντίστοιχο διάνυσμα των τοπικών μετακινήσεων  $[d]$  μέσω του μητρώου μετασχηματισμού  $[T_{04}]$ .

Το  $[T_{04}]$  είναι ένα μητρώο περιέχον 4 υπομητρώα  $[T_0]$ , τα λεγόμενα **μητρώα συνημιτόνων κατεύθυνσης**. Το μητρώο αυτό μας επιτρέπει να μετασχηματίζουμε το μητρώο δυσκαμψίας  $[K]$ , το διάνυσμα των μετακινήσεων  $[d]$  και το διάνυσμα των εξωτερικών δράσεων  $[P]$  από το τοπικό στο καθολικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

$$[T_{04}]_{(12 \times 12)} = \begin{bmatrix} [T_0]_{(3 \times 3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [T_0]_{(3 \times 3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [T_0]_{(3 \times 3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [T_0]_{(3 \times 3)} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\text{όπου } [T_0]_{(3 \times 3)} = \begin{bmatrix} c_{xX} & c_{xY} & c_{xZ} \\ c_{yX} & c_{yY} & c_{yZ} \\ c_{zX} & c_{zY} & c_{zZ} \end{bmatrix}$$

Το **συνημίτονο κατεύθυνσης**  $c_{ij}$  (όπου  $i=x,y,z$  και  $j=X,Y,Z$ ) εκφράζει το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζει ο τοπικός καρτεσιανός άξονας  $i$  με τον καθολικό καρτεσιανό άξονα  $j$ .

Έστω  $(X_1, Y_1, Z_1)$  και  $(X_2, Y_2, Z_2)$  οι συντεταγμένες στο καθολικό καρτεσιανό σύστημα (τις συμβολίζουμε με κεφαλαία) των δύο κόμβων αντίστοιχα του στοιχείου δοκού. Για να καθορίσουμε πλήρως τη γεωμετρία του στοιχείου στο χώρο, οφείλουμε να ορίσουμε το μέσο επίπεδο του στοιχείου. Είναι γνωστό ότι ένα επίπεδο μπορεί να οριστεί από τρία σημεία. Αποτελώντας οι κόμβοι 1,2 του στοιχείου σημεία του μέσου επιπέδου του, αρκεί να ορίσουμε άλλο ένα σημείο. Έστω P(oint) το σημείο αυτό με καθολικές συντεταγμένες  $(X_P, Y_P, Z_P)$  (γνωστό στα διάφορα πακέτα λογισμικού και ως **auxiliary point**).

Κατόπιν, υπολογίζουμε τις διαφορές των καθολικών συντεταγμένων του κόμβου 1 από τις καθολικές συντεταγμένες του κόμβου 2 και του σημείου P.

$$\begin{bmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \\ Z_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} X_{1P} \\ Y_{1P} \\ Z_{1P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_P - X_1 \\ Y_P - Y_1 \\ Z_P - Z_1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Η πρώτη γραμμή του διανύσματος  $T_0$  είναι το ακόλουθο μοναδιαίο διάνυσμα:

$$[p_x] = \begin{bmatrix} c_{xx} \\ c_{xy} \\ c_{xz} \end{bmatrix} = \frac{1}{L} \cdot \begin{bmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \\ Z_{12} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} c_{xx} &= \frac{1}{L} \cdot X_{12} \\ c_{xy} &= \frac{1}{L} \cdot Y_{12} \\ c_{xz} &= \frac{1}{L} \cdot Z_{12} \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\text{όπου} \quad L = \sqrt{X_{12}^2 + Y_{12}^2 + Z_{12}^2}$$

Η τρίτη γραμμή του διανύσματος  $[T_0]$  είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο μέσο επίπεδο της δοκού:

$$\begin{aligned} [p_z] &= \begin{bmatrix} c_{zx} \\ c_{zy} \\ c_{zz} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Omega} \cdot \begin{bmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \\ Z_{12} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_{1P} \\ Y_{1P} \\ Z_{1P} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Omega} \cdot (X_{12}\vec{i} + Y_{12}\vec{j} + Z_{12}\vec{k}) \times (X_{1P}\vec{i} + Y_{1P}\vec{j} + Z_{1P}\vec{k}) = \\ &= \frac{1}{2\Omega} \cdot (X_{12} \cdot X_{1P} \cdot \vec{i} \times \vec{i} + X_{12} \cdot Y_{1P} \cdot \vec{i} \times \vec{j} + X_{12} \cdot Z_{1P} \cdot \vec{i} \times \vec{k} + Y_{12} \cdot X_{1P} \cdot \vec{j} \times \vec{i} + Y_{12} \cdot Y_{1P} \cdot \vec{j} \times \vec{j} + \\ &\quad + Y_{12} \cdot Z_{1P} \cdot \vec{j} \times \vec{k} + Z_{12} \cdot X_{1P} \cdot \vec{k} \times \vec{i} + Z_{12} \cdot Y_{1P} \cdot \vec{k} \times \vec{j} + Z_{12} \cdot Z_{1P} \cdot \vec{k} \times \vec{k}) \end{aligned}$$

Γνωρίζοντας ότι:

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} &= \vec{0} \\ \vec{j} \times \vec{j} &= \vec{0} \\ \vec{k} \times \vec{k} &= \vec{0} \\ \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k} \Rightarrow \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i} \Rightarrow \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j} \Rightarrow \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \end{aligned}$$

έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} [p_z] &= \frac{1}{2\Omega} \cdot [X_{12} \cdot Y_{1P} \cdot \vec{k} + X_{12} \cdot Z_{1P} \cdot (-\vec{j}) + Y_{12} \cdot X_{1P} \cdot (-\vec{k}) + Y_{12} \cdot Z_{1P} \cdot \vec{i} + Z_{12} \cdot X_{1P} \cdot \vec{j} + Z_{12} \cdot Y_{1P} \cdot (-\vec{i})] = \\ &= \frac{1}{2\Omega} \cdot [(Y_{12} \cdot Z_{1P} - Z_{12} \cdot Y_{1P}) \cdot \vec{i} + (Z_{12} \cdot X_{1P} - X_{12} \cdot Z_{1P}) \cdot \vec{j} + (X_{12} \cdot Y_{1P} - Y_{12} \cdot X_{1P}) \cdot \vec{k}] = \\ &= \frac{1}{2\Omega} \cdot \begin{bmatrix} Y_{12} \cdot Z_{1P} - Z_{12} \cdot Y_{1P} \\ Z_{12} \cdot X_{1P} - X_{12} \cdot Z_{1P} \\ X_{12} \cdot Y_{1P} - Y_{12} \cdot X_{1P} \end{bmatrix} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{zX} &= \frac{1}{2\Omega} \cdot (Y_{12} \cdot Z_{1P} - Z_{12} \cdot Y_{1P}) \\
\Rightarrow c_{zY} &= \frac{1}{2\Omega} \cdot (Z_{12} \cdot X_{1P} - X_{12} \cdot Z_{1P}) \quad (2.20) \\
c_{zZ} &= \frac{1}{2\Omega} \cdot (X_{12} \cdot Y_{1P} - Y_{12} \cdot X_{1P})
\end{aligned}$$

όπου  $\Omega = \sqrt{X_{12}^2 + Y_{12}^2 + Z_{12}^2}$  : το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τους δύο κόμβους και το σημείο P

Η δεύτερη γραμμή του διανύσματος  $[T_0]$  είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα, το οποίο ισούται με το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $[p_x]$  και  $[p_z]$ .

$$\begin{aligned}
[p_y] &= \begin{bmatrix} c_{yX} \\ c_{yY} \\ c_{yZ} \end{bmatrix} = -[p_x] \times [p_z] = - \begin{bmatrix} c_{xX} \\ c_{xY} \\ c_{xZ} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_{zX} \\ c_{zY} \\ c_{zZ} \end{bmatrix} = -(c_{xX}\vec{i} + c_{xY}\vec{j} + c_{xZ}\vec{k}) \times (c_{zX}\vec{i} + c_{zY}\vec{j} + c_{zZ}\vec{k}) = \\
&= -(c_{xX} \cdot c_{zX} \cdot \vec{i} \times \vec{i} + c_{xX} \cdot c_{zY} \cdot \vec{i} \times \vec{j} + c_{xX} \cdot c_{zZ} \cdot \vec{i} \times \vec{k} + c_{xY} \cdot c_{zX} \cdot \vec{j} \times \vec{i} + c_{xY} \cdot c_{zY} \cdot \vec{j} \times \vec{j} + \\
&\quad + c_{xY} \cdot c_{zZ} \cdot \vec{j} \times \vec{k} + c_{xZ} \cdot c_{zX} \cdot \vec{k} \times \vec{i} + c_{xZ} \cdot c_{zY} \cdot \vec{k} \times \vec{j} + c_{xZ} \cdot c_{zZ} \cdot \vec{k} \times \vec{k}) \Rightarrow \\
[p_y] &= -[c_{xX} \cdot c_{zY} \cdot \vec{k} + c_{xX} \cdot c_{zZ} \cdot (-\vec{j}) + c_{xY} \cdot c_{zX} \cdot (-\vec{k}) + c_{xY} \cdot c_{zZ} \cdot \vec{i} + c_{xZ} \cdot c_{zX} \cdot \vec{j} + c_{xZ} \cdot c_{zY} \cdot (-\vec{i})] = \\
&= [(c_{xY} \cdot c_{zZ} - c_{xZ} \cdot c_{zY}) \cdot \vec{i} + (c_{xZ} \cdot c_{zX} - c_{xX} \cdot c_{zZ}) \cdot \vec{j} + (c_{xX} \cdot c_{zY} - c_{xY} \cdot c_{zX}) \cdot \vec{k}] = \\
&= - \begin{bmatrix} c_{xY} \cdot c_{zZ} - c_{xZ} \cdot c_{zY} \\ c_{xZ} \cdot c_{zX} - c_{xX} \cdot c_{zZ} \\ c_{xX} \cdot c_{zY} - c_{xY} \cdot c_{zX} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{xZ} \cdot c_{zY} - c_{xY} \cdot c_{zZ} \\ c_{xX} \cdot c_{zZ} - c_{xZ} \cdot c_{zX} \\ c_{xY} \cdot c_{zX} - c_{xX} \cdot c_{zY} \end{bmatrix} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{yX} &= (c_{xZ} \cdot c_{zY} - c_{xY} \cdot c_{zZ}) \\
\Rightarrow c_{yY} &= (c_{xX} \cdot c_{zZ} - c_{xZ} \cdot c_{zX}) \quad (2.21) \\
c_{yZ} &= (c_{xY} \cdot c_{zX} - c_{xX} \cdot c_{zY})
\end{aligned}$$

όπου  $\Omega = \sqrt{X_{12}^2 + Y_{12}^2 + Z_{12}^2}$  : το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τους δύο κόμβους και το σημείο P

Προκύπτει, λοιπόν, ότι:

$$[T_0]_{(3 \times 3)} = \begin{bmatrix} c_{xX} & c_{xY} & c_{xZ} \\ c_{yX} & c_{yY} & c_{yZ} \\ c_{zX} & c_{zY} & c_{zZ} \end{bmatrix}$$

και

$$[T_{04}]_{(12 \times 12)} = \begin{bmatrix} c_{xX} & c_{xY} & c_{xZ} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{yX} & c_{yY} & c_{yZ} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{zX} & c_{zY} & c_{zZ} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{xX} & c_{xY} & c_{xZ} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{yX} & c_{yY} & c_{yZ} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{zX} & c_{zY} & c_{zZ} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{xX} & c_{xY} & c_{xZ} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{yX} & c_{yY} & c_{yZ} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{zX} & c_{zY} & c_{zZ} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{xX} & c_{xY} & c_{xZ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{yX} & c_{yY} & c_{yZ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{zX} & c_{zY} & c_{zZ} & 0 \end{bmatrix}$$

Από το διάνυσμα των καθολικών μετακινήσεων  $[d^-]$ , μπορούμε να προσδιορίσουμε το διάνυσμα των τοπικών μετακινήσεων  $[d]$  μέσω της σχέσης:

$$[d]_{(12 \times 1)} = [T_{04}]_{(12 \times 12)} \cdot [d^-]_{(12 \times 1)} \quad (2.22)$$

και το διάνυσμα των φυσικών μορφών στερεού σώματος μέσω της σχέσης:

$$[\rho_0]_{(6 \times 1)} = [\alpha_0]_{(6 \times 12)} \cdot [d]_{(12 \times 1)} \Rightarrow [\rho_0]_{(6 \times 1)} = [\alpha_0]_{(6 \times 12)} \cdot [T_{04}]_{(12 \times 12)} \cdot [d^-]_{(12 \times 1)} \quad (2.23)$$

### 2.3.3 Οι φυσικές μορφές παραμόρφωσης του φυσικού στοιχείου μετατοπίσεων

Οι **φυσικές μορφές παραμόρφωσης** πρέπει να συνάδουν με όλες τις συνοριακές κινηματικές συνθήκες του εκάστοτε στοιχείου. Δεν είναι ούτε πλήρεις ούτε μοναδικές. Τόσο το πλήθος τους όσο και η μορφή τους προκύπτουν αν αφαιρέσουμε τις φυσικές μορφές στερεού σώματος από τους καρτεσιανούς βαθμούς ελευθερίας.

Οι **φυσικές μορφές παραμόρφωσης του φυσικού στοιχείου δοκού** είναι έξι και παρουσιάζονται συγκεντρωτικά ως εξής:

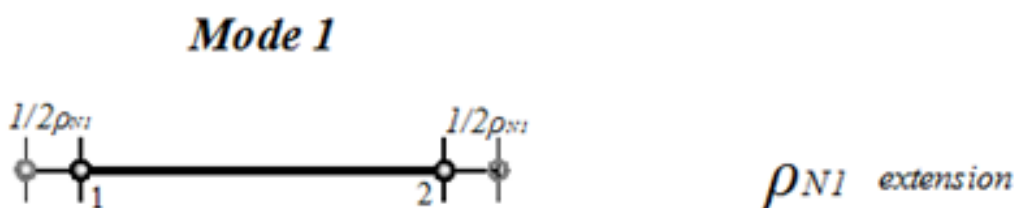
$$[\rho_N] = [\rho_{N_1} \quad \rho_{N_2} \quad \rho_{N_3} \quad \rho_{N_4} \quad \rho_{N_5} \quad \rho_{N_6}]^T \quad (2.24)$$

Ειδικότερα:

$\rho_{N_1}$ : η συνολική **επιμήκυνση** του στοιχείου. Καθένας από τους δύο (ακραίους) κόμβους μετατοπίζεται κατά  $\frac{\rho_{N_1}}{2}$  κατά τη διεύθυνση του διαμήκους άξονα  $x$  (ή του  $x$ ).

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = -\frac{\rho_{N_1}}{2} \text{ (κατά την αρνητική φορά του άξονα } x) \\ u_2 = +\frac{\rho_{N_1}}{2} \text{ (κατά τη θετική φορά του άξονα } x) \end{array} \right\} \Rightarrow u_2 - u_1 = \frac{\rho_{N_1}}{2} + \frac{\rho_{N_1}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_2 - u_1 = \rho_{N_1} \Rightarrow \rho_{N_1} = u_2 - u_1 \quad (2.25)$$



Σχήμα 2.7.1 Φυσική μορφή παραμόρφωσης  $\rho_{N_1}$

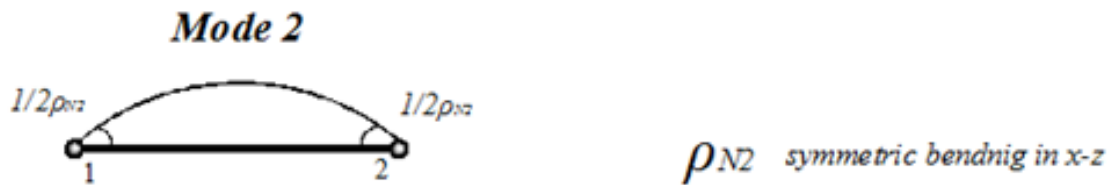
Γνωρίζουμε ότι ο καρτεσιανός άξονας  $z$  είναι κάθετος στο μέσο επίπεδο του στοιχείου. Αν το επίπεδο του στοιχείου είναι οριζόντιο, τότε το επίπεδο  $xy$  είναι προφανώς οριζόντιο και το  $xz$  κατακόρυφο.

$\rho_{N_2}$  : αναφέρεται στη συμμετρική κάμψη του στοιχείου στο επίπεδο xz (κάθετο στο μέσο επίπεδο του στοιχείου). Η κλίση του παραμορφωμένου άξονα με τον απαραμόρφωτο και στα δύο άκρα του στοιχείου ισούται με  $\frac{\rho_{N_2}}{2}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} w'(-1) = -\frac{\rho_{N_2}}{2} \Rightarrow \theta_{y_1} = -\frac{\rho_{N_2}}{2} \text{ (αντιωρολογιακά)} \\ w'(1) = +\frac{\rho_{N_2}}{2} \Rightarrow \theta_{y_2} = +\frac{\rho_{N_2}}{2} \text{ (ωρολογιακά - θετική φορά)} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta_{y_2} - \theta_{y_1} = \frac{\rho_{N_2}}{2} + \frac{\rho_{N_2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_{y_2} - \theta_{y_1} = \rho_{N_2} \Rightarrow \rho_{N_2} = \theta_{y_2} - \theta_{y_1} \quad (2.26)$$

Η στροφή  $\theta_y$  με ωρολογιακή φορά (όπως φαίνεται στο σχήμα) είναι θετική, διότι το διάνυσμά της έχει ως φορά την θετική φορά του άξονα y.



Σχήμα 2.7.2 Φυσική μορφή παραμόρφωσης  $\rho_{N_2}$

$\rho_{N_3}$  : αναφέρεται στην αντισυμμετρική κάμψη στο κατακόρυφο επίπεδο xz. Η κλίση του παραμορφωμένου άξονα με τον απαραμόρφωτο και στα δύο άκρα του στοιχείου ισούται με  $\frac{\rho_{N_3}}{2}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} w'(-1) = -\frac{\rho_{N_3}}{2} \Rightarrow \theta_{y_1} = -\frac{\rho_{N_3}}{2} \text{ (αντιωρολογιακά - αρνητική φορά)} \\ w'(1) = -\frac{\rho_{N_3}}{2} \Rightarrow \theta_{y_2} = -\frac{\rho_{N_3}}{2} \text{ (αντιωρολογιακά)} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_{y_2} + \theta_{y_1} = -\frac{\rho_{N_3}}{2} - \frac{\rho_{N_3}}{2} \Rightarrow$$

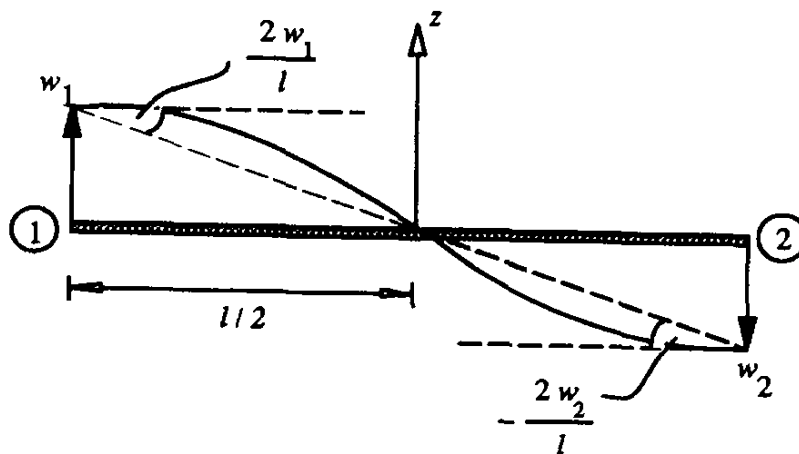
$$\Rightarrow \theta_{y_2} + \theta_{y_1} = -\rho_{N_3} \Rightarrow \rho_{N_3} = -(\theta_{y_1} + \theta_{y_2}) \quad (2.27)$$

Σύμφωνα με το σχήμα 2.8, παρατηρούμε ότι θα πρέπει να προσθέσουμε στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (2.27) και έναν επιπλέον όρο. Ο όρος αυτός ισούται με την επιπρόσθετη στροφή  $\frac{2w_1}{L}$  του κόμβου 1 και  $-\frac{2w_2}{L}$  (το αρνητικό πρόσημο δικαιολογείται από το γεγονός ότι η μετατόπιση του κόμβου 2 πραγματοποιείται κατά τα αρνητικά του άξονα z) του κόμβου 2. Συνεπώς, επαναλαμβάνοντας το προηγούμενο σκεπτικό έχουμε ότι:

$$\left\{ \begin{array}{l} w'(-1) = -\frac{\rho_{N_3}}{2} - \frac{2w_1}{L} \Rightarrow \theta_{y_1} = -\frac{\rho_{N_3}}{2} - \frac{2w_1}{L} \text{ (αντιωρολογιακά - αρνητική φορά)} \\ w'(1) = -\frac{\rho_{N_3}}{2} + \frac{2w_2}{L} \Rightarrow \theta_{y_2} = -\frac{\rho_{N_3}}{2} + \frac{2w_2}{L} \text{ (αντιωρολογιακά)} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

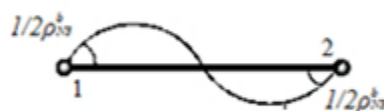
$$\Rightarrow \theta_{y_2} + \theta_{y_1} = \left(-\frac{\rho_{N_3}}{2} - \frac{2w_1}{L}\right) + \left(-\frac{\rho_{N_3}}{2} + \frac{2w_2}{L}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_{y_2} + \theta_{y_1} = -\rho_{N_3} - \frac{2(w_1 - w_2)}{L} \Rightarrow \rho_{N_3} = -(\theta_{y_1} + \theta_{y_2}) + \frac{2(w_1 - w_2)}{L} \quad (2.28)$$



Σχήμα 2.8 Αντισυμμετρική στροφή εξαιτίας των κατακόρυφων επικόμβιων μετακινήσεων  $w_1, w_2$

### Mode 3



$\rho_{N3}$  antisymmetric bending in x-z

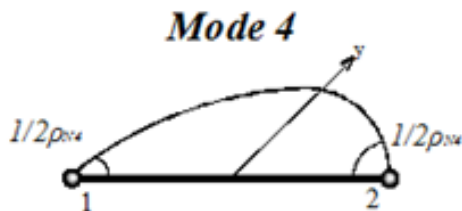
Σχήμα 2.7.3 Φυσική μορφή παραμόρφωσης  $\rho_{N_3}$

$\rho_{N_4}$  : αναφέρεται στη συμμετρική κάμψη του στοιχείου στο επίπεδο xy (επί του επιπέδου του). Η κλίση του παραμορφωμένου άξονα με τον απαραμόρφωτο και στα δύο άκρα του στοιχείου ισούται με  $\frac{\rho_{N_4}}{2}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} v'(-1) = +\frac{\rho_{N_4}}{2} \Rightarrow \theta_{z_1} = +\frac{\rho_{N_4}}{2} \text{ (αντιωρολογιακά - θετική φορά)} \\ v'(1) = -\frac{\rho_{N_4}}{2} \Rightarrow \theta_{z_2} = -\frac{\rho_{N_4}}{2} \text{ (ωρολογιακά)} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta_{z_1} - \theta_{z_2} = \frac{\rho_{N_4}}{2} + \frac{\rho_{N_4}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_{z_1} - \theta_{z_2} = \rho_{N_4} \Rightarrow \rho_{N_4} = \theta_{z_1} - \theta_{z_2} \quad (2.29)$$

Η στροφή  $\theta_z$  με αντιωρολογιακή φορά (όπως φαίνεται στο σχήμα) είναι θετική, διότι το διάνυσμά της έχει ως φορά τη θετική φορά του άξονα z.



$\rho_{N4}$  symmetric bending in x-y

Σχήμα 2.7.4 Φυσική μορφή παραμόρφωσης  $\rho_{N_4}$

$\rho_{N_5}$  : αναφέρεται στην αντισυμμετρική κάμψη στο οριζόντιο επίπεδο xz. Η κλίση του παραμορφωμένου άξονα με τον απαραμόρφωτο και στα δύο άκρα του στοιχείου ισούται με  $\frac{\rho_{N_5}}{2}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} v'(-1) = +\frac{\rho_{N_5}}{2} \Rightarrow \theta_{z_1} = +\frac{\rho_{N_5}}{2} \text{ (αντιωρολογιακά - θετική φορά)} \\ v'(1) = +\frac{\rho_{N_5}}{2} \Rightarrow \theta_{z_2} = +\frac{\rho_{N_5}}{2} \text{ (αντιωρολογιακά)} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta_{z_1} + \theta_{z_2} = +\frac{\rho_{N_5}}{2} + \frac{\rho_{N_5}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_{z_1} + \theta_{z_2} = \rho_{N_5} \Rightarrow \rho_{N_5} = \theta_{z_1} + \theta_{z_2} \quad (2.30)$$

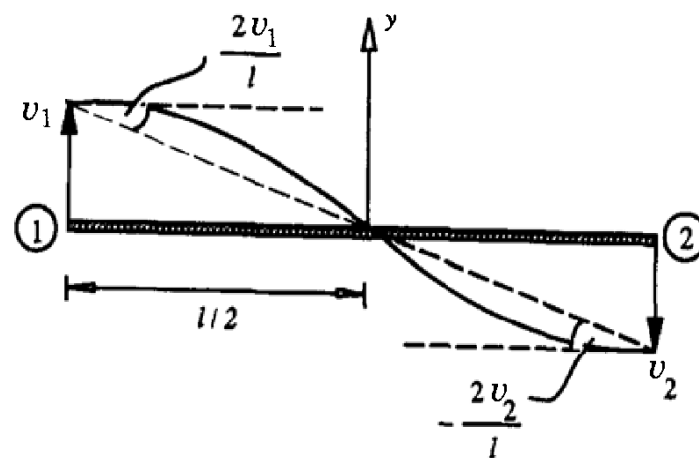


Σύμφωνα με το σχήμα 2.9, παρατηρούμε ότι θα πρέπει να προσθέσουμε στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (2.30) και έναν επιπλέον όρο. Ο όρος αυτός ισούται με την επιπρόσθετη στροφή κόμβου 1  $\frac{2v_1}{L}$  και (το αρνητικό πρόσημο δικαιολογείται από το γεγονός ότι η μετατόπιση του κόμβου 2 πραγματοποιείται κατά τα αρνητικά του άξονα z) του κόμβου 2  $-\frac{2v_2}{L}$ . Συνεπώς, επαναλαμβάνοντας το προηγούμενο σκεπτικό έχουμε ότι:

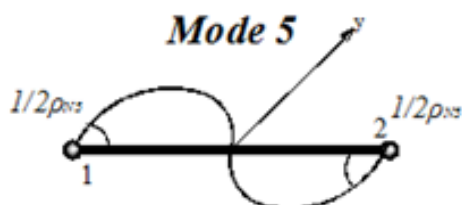
$$\left\{ \begin{array}{l} v'(-1) = +\frac{\rho_{N_5}}{2} - \frac{2v_1}{L} \Rightarrow \theta_{z_1} = +\frac{\rho_{N_5}}{2} - \frac{2v_1}{L} \text{ (αντιωρολογιακά - θετική φορά)} \\ v'(1) = +\frac{\rho_{N_5}}{2} + \frac{2v_2}{L} \Rightarrow \theta_{z_2} = +\frac{\rho_{N_5}}{2} + \frac{2v_2}{L} \text{ (αντιωρολογιακά)} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_{z_1} + \theta_{z_2} = \left(+\frac{\rho_{N_5}}{2} - \frac{2v_1}{L}\right) + \left(+\frac{\rho_{N_5}}{2} + \frac{2v_2}{L}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_{z_1} + \theta_{z_2} = \rho_{N_5} - \frac{2(v_1 - v_2)}{L} \Rightarrow \rho_{N_5} = \theta_{z_1} + \theta_{z_2} + \frac{2(v_1 - v_2)}{L} \quad (2.31)$$



Σχήμα 2.9 Αντισυμμετρική στροφή εξαιτίας των κατακόρυφων επικόμβιων μετακινήσεων  $w_1, w_2$



$\rho_{N_5}$  antisymmetric bending in x-y

Σχήμα 2.7.5 Φυσική μορφή παραμόρφωσης  $\rho_{N_5}$

$\rho_{N_6}$  : αναφέρεται στη στρέψη του στοιχείου περί τον διαμήκη άξονα x. Η γωνία στροφής σε κάθε

άκρο ισούται με  $\frac{\rho_{N_6}}{2}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_{x_1} = -\frac{\rho_{N_6}}{2} \\ \theta_{x_2} = +\frac{\rho_{N_6}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta_{x_2} - \theta_{x_1} = \frac{\rho_{N_6}}{2} + \frac{\rho_{N_6}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_{x_2} - \theta_{x_1} = \rho_{N_6} \Rightarrow \rho_{N_6} = \theta_{x_2} - \theta_{x_1} \quad (2.32)$$



Σχήμα 2.7.6 Φυσική μορφή παραμόρφωσης  $\rho_{N_6}$

Συγκεντρωτικά, η σχέση των μορφών παραμόρφωσης με τους τοπικούς καρτεσιανούς βαθμούς ελευθερίας δίνεται από τις εξισώσεις:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{N_1} = u_2 - u_1 \\ \rho_{N_2} = \theta_{y_2} - \theta_{y_1} \\ \rho_{N_3} = -(\theta_{y_1} + \theta_{y_2}) + \frac{2(w_1 - w_2)}{L} \\ \rho_{N_4} = \theta_{z_1} - \theta_{z_2} \\ \rho_{N_5} = (\theta_{z_1} + \theta_{z_2}) + \frac{2(v_1 - v_2)}{L} \\ \rho_{N_6} = \theta_{x_2} - \theta_{x_1} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \rho_{N_1} \\ \rho_{N_2} \\ \rho_{N_3} \\ \rho_{N_4} \\ \rho_{N_5} \\ \rho_{N_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{L} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{L} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{2}{L} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{L} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_{x_1} \\ \theta_{y_1} \\ \theta_{z_1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \theta_{x_2} \\ \theta_{y_2} \\ \theta_{z_2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow [\rho_N] = [\alpha_N] \cdot [d]$$

όπου

$$[\alpha_N] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{L} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{L} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{2}{L} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{L} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

είναι το μητρώο που συνδέει τις φυσικές μορφές παραμόρφωσης με τους τοπικούς καρτεσιανούς βαθμούς ελευθερίας και περιέχει μόνο μηδενικά, μονάδες και γεωμετρικές παραμέτρους. Παρατηρούμε ότι οι περισσότερες φυσικές μορφές προκύπτουν με προσθαφαίρεση των τοπικών βαθμών ελευθερίας. Η σπουδαιότητά του πηγάζει από το ότι μας επιτρέπει να μετασχηματίζουμε το φυσικό μητρώο στιβαρότητας στο τοπικό μητρώο στιβαρότητας και εν τέλει στο καθολικό μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου, το οποίο μαζί με τα αντίστοιχα μητρώα των άλλων στοιχείων συνθέτουν το ζητούμενο καθολικό μητρώο στιβαρότητας της κατασκευής.

Από το διάνυσμα των καθολικών μετακινήσεων του στοιχείου  $\begin{bmatrix} \bar{d} \end{bmatrix}$  προσδιορίζουμε το διάνυσμα των φυσικών μορφών παραμόρφωσης  $[\rho_N]$  μέσω της σχέσης:

$$[\rho_N] = [\alpha_N] \cdot [d] \Rightarrow [\rho_N] = [\alpha_N] \cdot [T_{04}] \cdot \begin{bmatrix} \bar{d} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$(6 \times 1)$        $(6 \times 12)$      $(12 \times 1)$        $(6 \times 1)$        $(6 \times 12)$      $(12 \times 12)$        $(12 \times 1)$

## Το διάνυσμα των γενικευμένων δυνάμεων του φυσικού στοιχείου μετατοπίσεων

Έχοντας περιγράψει πλήρως τις φυσικές μορφές παραμόρφωσης του φυσικού στοιχείου δοκού, μπορούμε να αναφερθούμε στις αντίστοιχες γενικευμένες δυνάμεις, οι οποίες συγκεντρώνονται στο διάνυσμα  $[P_N]$ .

$$[P_N] = [F_N \quad M_S^1 \quad M_A^1 \quad M_S^2 \quad M_A^2 \quad M_T]^T \quad (2.35)$$

Οι γενικευμένες δυνάμεις συνδέονται με τις φυσικές μορφές παραμόρφωσης μέσω του φυσικού μητρώου στιβαρότητας, ήτοι:

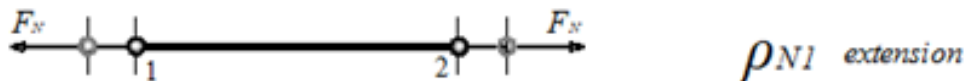
$$[P_N] = [K_N] \cdot [\rho_N] \quad (2.36)$$

Τονίζουμε ότι ο υπολογισμός του φυσικού μητρώου στιβαρότητας βασίζεται μόνο στην παραμόρφωση του στοιχείου δοκού και όχι στην κίνησή του ως στερεό σώμα. Αυτό είναι άλλωστε και το συγκριτικό πλεονέκτημα της μεθόδου των φυσικών μορφών, μέσω της οποίας προσεγγίζουμε ακόμη περισσότερο τον στόχο μας, που δεν είναι άλλος από την ελαχιστοποίηση του υπολογιστικού χρόνου.

Ειδικότερα:

$F_N$ : η αξονική δύναμη που ασκείται στο στοιχείο προκειμένου να παραμορφωθεί (στην προκειμένη περίπτωση να επιμηκυνθεί) σύμφωνα με την πρώτη φυσική μορφή παραμόρφωσης.

### *Mode 1*



Σχήμα 2.10.1 Αξονική δύναμη  $F_N$

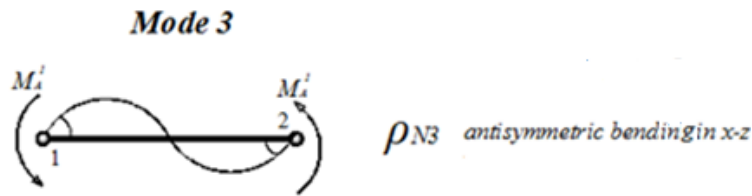
$M_S^1$ : η ροπή κάμψης που θα πρέπει να ασκηθεί στο στοιχείο προκειμένου να παραμορφωθεί (στην προκειμένη περίπτωση να καμφθεί) σύμφωνα με τη δεύτερη φυσική μορφή παραμόρφωσης. Το διάνυσμά της έχει τη διεύθυνση του οριζόντιου άξονα  $y$ .

### *Mode 2*



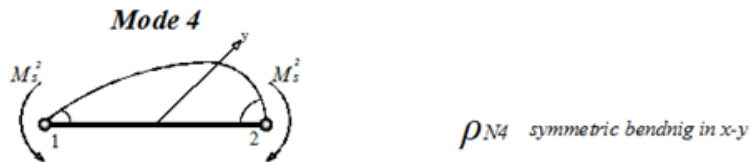
Σχήμα 2.10.2 Ροπή κάμψης  $M_S^1$

$M_A^1$ : η ροπή κάμψεως που θα πρέπει να ασκηθεί στο στοιχείο προκειμένου να παραμορφωθεί (στην προκειμένη περίπτωση να καμφθεί) σύμφωνα με την τρίτη φυσική μορφή παραμόρφωσης. Το διάνυσμά της έχει τη διεύθυνση του οριζόντιου άξονα z.



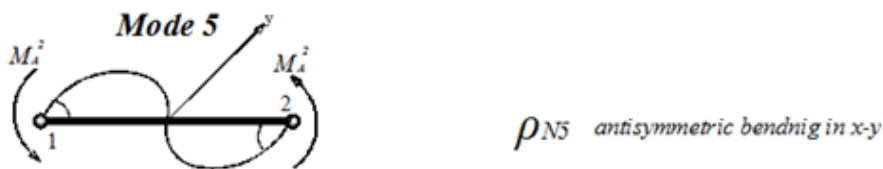
Σχήμα 2.10.3 Ροπή κάμψης  $M_A^1$

$M_S^2$ : η ροπή κάμψεως που θα πρέπει να ασκηθεί στο στοιχείο προκειμένου να παραμορφωθεί (στην προκειμένη περίπτωση να καμφθεί) σύμφωνα με την τέταρτη φυσική μορφή παραμόρφωσης. Το διάνυσμά της έχει τη διεύθυνση του κατακόρυφου άξονα z.



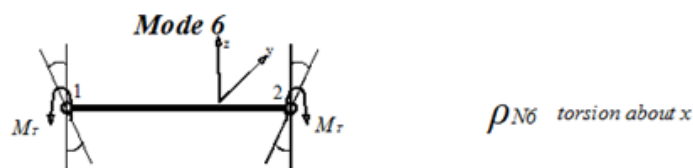
Σχήμα 2.10.4 Ροπή κάμψης  $M_S^2$

$M_A^2$ : η ροπή κάμψεως που θα πρέπει να ασκηθεί στο στοιχείο προκειμένου να παραμορφωθεί (στην προκειμένη περίπτωση να καμφθεί) σύμφωνα με την πέμπτη φυσική μορφή παραμόρφωσης. Το διάνυσμά της έχει τη διεύθυνση του κατακόρυφου άξονα z.



Σχήμα 2.10.5 Ροπή κάμψης  $M_A^2$

$M_T$ : η ροπή στρέψεως που θα πρέπει να ασκηθεί στο στοιχείο προκειμένου να παραμορφωθεί (στην προκειμένη περίπτωση να στραφεί) σύμφωνα με την έκτη φυσική μορφή παραμόρφωσης. Το διάνυσμά της έχει τη διεύθυνση του διαμήκους άξονα x.



Σχήμα 2.10.6 Ροπή στρέψης  $M_T$

2.3.4 Σχέση του πλήρους μητρώου των φυσικών μορφών  $[\rho]_{(12 \times 12)}$  με το μητρώο  $[d]_{(12 \times 12)}$  των

τοπικών και το μητρώο  $[d]_{(12 \times 12)}$  των καθολικών καρτεσιανών βαθμών ελευθερίας του φυσικού

στοιχείου δοκού δύο κόμβων

$$[\rho]_{(12 \times 1)} = [\alpha]_{(12 \times 12)} \cdot [d]_{(12 \times 1)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} [\rho_0]_{(6 \times 1)} \\ [\rho_N]_{(6 \times 1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\alpha_0]_{(6 \times 12)} \\ [\alpha_N]_{(6 \times 12)} \end{bmatrix} \cdot [d]_{(12 \times 1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \rho_{0_1} \\ \rho_{0_2} \\ \rho_{0_3} \\ \rho_{0_4} \\ \rho_{0_5} \\ \rho_{0_6} \\ \rho_{N_1} \\ \rho_{N_2} \\ \rho_{N_3} \\ \rho_{N_4} \\ \rho_{N_5} \\ \rho_{N_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2/L & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2/L & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2/L & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2/L & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_{x_1} \\ \theta_{y_1} \\ \theta_{z_1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \theta_{x_2} \\ \theta_{y_2} \\ \theta_{z_2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_{x_1} \\ \theta_{y_1} \\ \theta_{z_1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \theta_{x_2} \\ \theta_{y_2} \\ \theta_{z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2/L & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2/L & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2/L & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2/L & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \rho_{0_1} \\ \rho_{0_2} \\ \rho_{0_3} \\ \rho_{0_4} \\ \rho_{0_5} \\ \rho_{0_6} \\ \rho_{N_1} \\ \rho_{N_2} \\ \rho_{N_3} \\ \rho_{N_4} \\ \rho_{N_5} \\ \rho_{N_6} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_{x_1} \\ \theta_{y_1} \\ \theta_{z_1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \theta_{x_2} \\ \theta_{y_2} \\ \theta_{z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -L/2 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & L/2 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & L/2 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -L/2 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho_{0_1} \\ \rho_{0_2} \\ \rho_{0_3} \\ \rho_{0_4} \\ \rho_{0_5} \\ \rho_{0_6} \\ \rho_{N_1} \\ \rho_{N_2} \\ \rho_{N_3} \\ \rho_{N_4} \\ \rho_{N_5} \\ \rho_{N_6} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

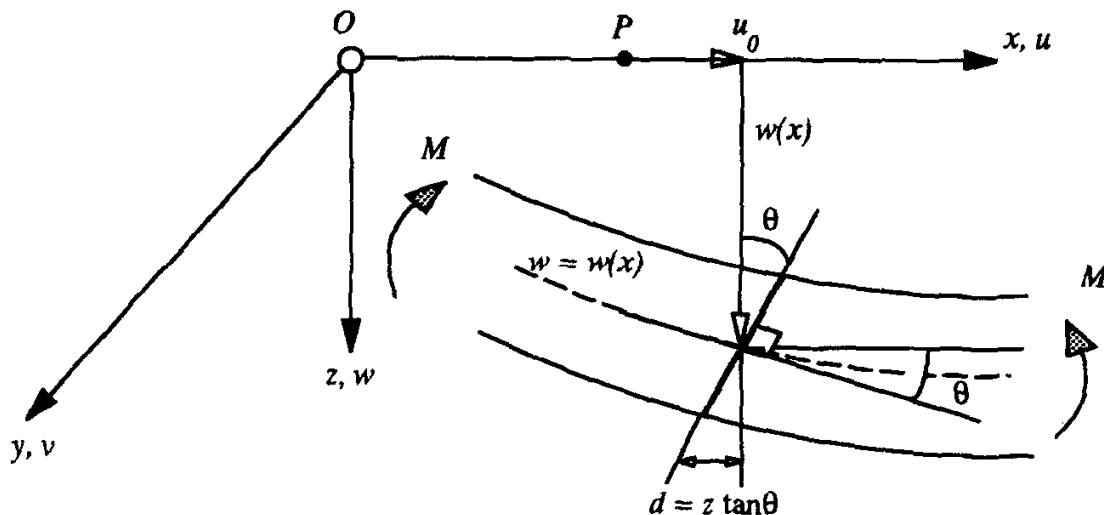
$$\Leftrightarrow \underset{(12 \times 1)}{[d]} = \underset{(12 \times 12)}{[A]} \cdot \underset{(12 \times 1)}{[\rho]} \Leftrightarrow \underset{(12 \times 1)}{[d]} = \begin{bmatrix} \underset{(12 \times 6)}{[A_0]} & \underset{(12 \times 6)}{[A_N]} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underset{(6 \times 1)}{[\rho_0]} \\ \underset{(6 \times 1)}{[\rho_N]} \end{bmatrix}$$

όπου

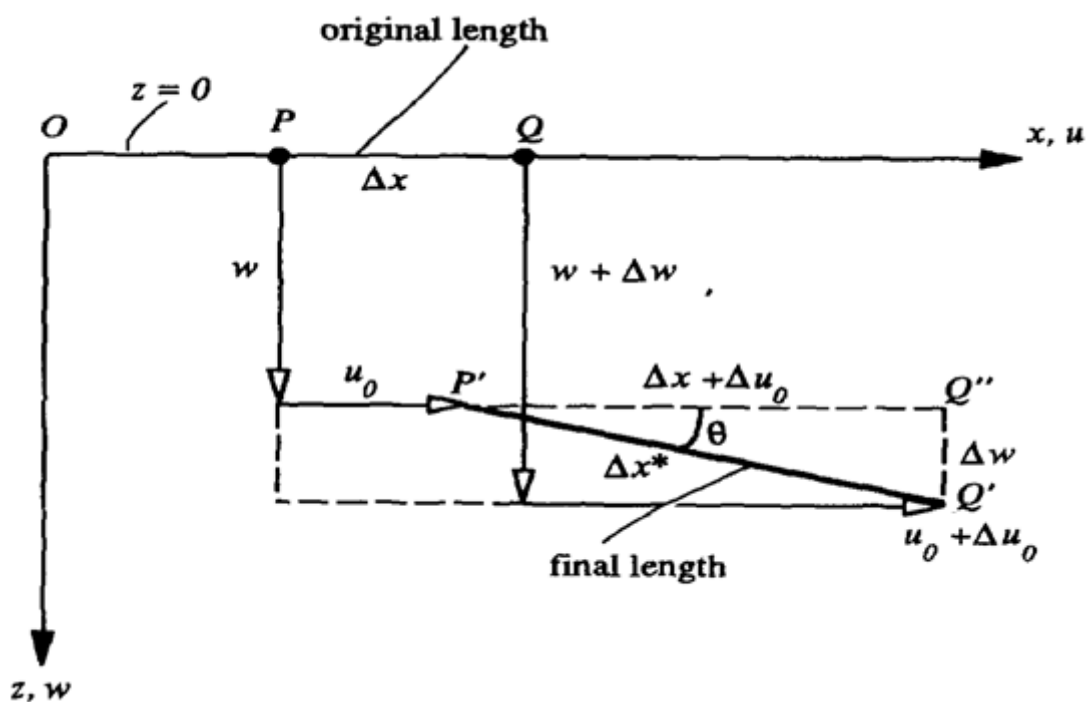
$$\underset{(12 \times 6)}{[A_0]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -L/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & L/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & L/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -L/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \underset{(12 \times 6)}{[A_N]} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

## 2.4 Το φυσικό μητρώο παραμόρφωσης $[B_N]$

Ο προσδιορισμός του φυσικού μητρώου παραμόρφωσης βασίζεται στην προηγούμενη διατύπωση των φυσικών μορφών παραμόρφωσης και στην κινηματική μελέτη του στοιχείου δοκού.



Σχήμα 2.11 Παραμόρφωση της δοκού υπό καθαρή κάμψη



Σχήμα 2.12 Παραμόρφωση του στοιχείου δοκού PQ

Στο προηγούμενο σχήμα απεικονίζεται ένα στοιχείο δοκού το οποίο υποβάλλεται σε δύο ακραίες ροπές κάμψης (καθαρή κάμψη). Λόγω της συγκεκριμένης γεωμετρίας και φόρτισης, μπορούμε να κάνουμε την παραδοχή ότι η κατακόρυφη μετατόπιση  $w$  είναι συνάρτηση μόνο της καρτεσιανής συντεταγμένης  $x$ , ήτοι  $w=w(x)$ .



Εκμεταλλευόμενοι ζητήματα συμμετρίας, μπορούμε να θεωρήσουμε μηδενική την οριζόντια μετακίνηση κατά τον άξονα  $y$ :  $v=0$ .

Προκύπτει, λοιπόν, το ακόλουθο πεδίο μετατοπίσεων:

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, z) \\ v &= 0 \\ w &= w(x) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Θεωρούμε ότι ισχύει μία από τις βασικές παραδοχές της θεωρίας Bernoulli για τις δοκούς, ότι δηλαδή οι επίπεδες και κάθετες στον άξονα της δοκού διατομές παραμένουν επίπεδες και κάθετες στον παραμορφωμένο άξονα της δοκού. Η θεωρία Bernoulli δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα που προσεγγίζουν την πραγματικότητα στην περίπτωση της καθαρής κάμψης.

Σύμφωνα με το σχήμα 2.11, παρατηρούμε ότι η κάτω ίνα της διατομής, η οποία απέχει απόσταση ίση με  $z$  από το κέντρο βάρους της διατομής, μετατοπίζεται οριζόντια κατά απόσταση ίση με:

$$u = d = -z \cdot \tan\theta \quad (2.38)$$

όπου

$\theta$  : η γωνία που σχηματίζει η απαραμόρφωτη με την “παραμορφωμένη” διατομή ή αλλιώς η γωνία που σχηματίζει ο απαραμόρφωτος με τον παραμορφωμένο άξονα της δοκού.

Το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στο ότι η κάτω ίνα μετατοπίζεται κατά τα αρνητικά του άξονα  $x$ .

Στο σχήμα 2.12 απεικονίζεται ένα τμήμα PQ του άξονα της δοκού αρχικού μήκους  $\Delta x$ . Καθώς η δοκός παραμορφώνεται, το σημείο P μετατοπίζεται στη διεύθυνση του άξονα  $x$  κατά  $u_0$  και στη διεύθυνση του άξονα  $z$  κατά  $w$  και αντίστοιχα το σημείο Q κατά  $u_0 + \Delta u_0$  και κατά  $w + \Delta w$ . Μετά την παραμόρφωση της δοκού, έχουμε πλέον το τμήμα P'Q' μήκους  $\Delta x^*$ . Εργαζόμεστε στο τρίγωνο (P'Q'Q'')

$$\tan\theta = \frac{(Q''Q')}{(P'Q'')} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\Delta w}{\Delta x + \Delta u_0} \Rightarrow$$

$$\tan\theta = \frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{1 + \epsilon_{x0}} \approx \frac{\partial w}{\partial x} \xrightarrow{\text{θεωρία μικρών γωνιών}} \theta \approx \tan\theta \approx \frac{\partial w}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.39)$$

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα, έχουμε ότι:

$$(P'Q')^2 = (P'Q'')^2 + (Q''Q')^2 \Rightarrow (\Delta x^*)^2 = (\Delta x + \Delta u_0)^2 + (\Delta w)^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (\Delta x^*)^2 = (\Delta x)^2 + 2 \cdot (\Delta x) \cdot (\Delta u_0) + (\Delta u_0)^2 + (\Delta w)^2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\Delta x)^2 = (\Delta x)^2 + 2 \cdot (\Delta x) \cdot (\Delta u_0) + (\Delta u_0)^2 + (\Delta w)^2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 0 = 2 \cdot (\Delta x) \cdot (\Delta u_0) + (\Delta u_0)^2 + (\Delta w)^2 \Rightarrow 2 \cdot (\Delta x) \cdot (\Delta u_0) = -[(\Delta u_0)^2 + (\Delta w)^2] \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{2 \cdot (\Delta x) \cdot (\Delta u_0)}{(\Delta x)^2} = \frac{-[(\Delta u_0)^2 + (\Delta w)^2]}{(\Delta x)^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{\Delta u_0}{\Delta x} = -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\Delta u_0}{\Delta x} \right)^2 + \left( \frac{\Delta w}{\Delta x} \right)^2 \right] \Rightarrow \frac{\Delta u_0}{\Delta x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta u_0}{\Delta x} \right)^2 = -\frac{1}{2} \left( \frac{\Delta w}{\Delta x} \right)^2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{\Delta u_0}{\Delta x} \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta u_0}{\Delta x} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{\Delta w}{\Delta x} \right)^2 \xrightarrow{\frac{\Delta u_0}{\Delta x} \approx 0} \frac{\Delta u_0}{\Delta x} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\Delta w}{\Delta x} \right)^2 \Rightarrow \frac{\Delta u_0}{\Delta x} = -\frac{1}{2} \cdot \theta^2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{x0} = -\frac{\theta^2}{2} \\ u_0 = \int_0^L \left( -\frac{1}{2} \cdot \theta^2 \right) dx \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

Όντας η γωνία  $\theta$  μικρή, ο όρος  $\theta^2$  είναι ακόμη μικρότερος, καθιστώντας την αξονική μετατόπιση  $u_0$  και παραμόρφωση  $\varepsilon_{x0}$  αμελητέες. Μπορούμε, λοιπόν, να υποθέσουμε ότι:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{x0} = 0 \\ u_0 = 0 \end{array} \right\} \quad (2.40)$$

Έχουμε, λοιπόν, ότι:

$$\begin{aligned}
u(x, z) &= u_0 - z \cdot \tan \theta \approx 0 - z \cdot \frac{dw}{dx} \Rightarrow u(x, z) = -z \cdot \frac{dw}{dx} \\
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u(x, z)}{\partial x} \Rightarrow \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u(x, z)}{\partial x} \Rightarrow \varepsilon_{xx} = \frac{\partial \left( -z \cdot \frac{dw}{dx} \right)}{\partial x} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \varepsilon_{xx} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.41)
\end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε ότι:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{2}{L}$$

ορίζουσα του ιακωβιανού μητρώου  $\rightarrow \det[J] = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{L}{2}$

$\rho_{N_1}$ : Θεωρούμε γραμμική την κατανομή της αξονικής μετατόπισης  $u$  κατά μήκος του διαμήκους φυσικού άξονα  $\xi$  του στοιχείου δοκού.

$$u(\xi) = a \cdot \xi + b, \quad -1 \leq \xi \leq 1$$

συνοριακές συνθήκες:

$$u(-1) = u_1 \Rightarrow a \cdot (-1) + b = u_1 \Rightarrow -a + b = u_1$$

$$u(+1) = u_2 \Rightarrow a \cdot (+1) + b = u_2 \Rightarrow a + b = u_2$$

Προσθέτοντας τις δύο προηγούμενες εξισώσεις έχουμε ότι:

$$2b = u_1 + u_2 \Rightarrow b = \frac{u_1 + u_2}{2}$$

Αφαιρώντας τις δύο προηγούμενες εξισώσεις έχουμε ότι:

$$2a = u_2 - u_1 \Rightarrow a = \frac{u_2 - u_1}{2}$$

Συνεπώς,

$$u(\xi) = \frac{(u_2 - u_1)}{2} \cdot \xi + \frac{u_1 + u_2}{2} \xrightarrow[u_2 = +\frac{\rho_{N_1}}{2}]{u_1 = -\frac{\rho_{N_1}}{2}} u(\xi) = \frac{[\frac{\rho_{N_1}}{2} - (-\frac{\rho_{N_1}}{2})]}{2} \cdot \xi + \frac{[\frac{\rho_{N_1}}{2} + (-\frac{\rho_{N_1}}{2})]}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(\xi) = \frac{\rho_{N_1}}{2} \cdot \xi \Rightarrow u(\xi) = \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot \rho_{N_1} \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \cdot \rho_{N_1}$$

Η αξονική μετατόπιση  $u$  προξενεί την αξονική παραμόρφωση  $\epsilon_{xx}^e$ :

$$\epsilon_{xx}^e = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \rho_{N_1} \cdot \frac{2}{L} \Rightarrow \epsilon_{xx}^e = \frac{1}{L} \cdot \rho_{N_1} \Rightarrow \mathbf{B}_N^e = \frac{1}{L} \quad (2.43)$$

Ο εκθέτης  $e$  προέρχεται από τον αγγλικό όρο extension (επιμήκυνση).

Συγκεντρωτικά, το πεδίο των ανηγμένων παραμορφώσεων λόγω της αξονικής φυσικής μορφής

παραμόρφωσης  $\rho_{N_1}$  είναι το ακόλουθο:

$$\begin{bmatrix} e \\ \epsilon_{xx} \\ e \\ \epsilon_{yy} \\ e \\ \epsilon_{zz} \\ e \\ \epsilon_{xy} \\ e \\ \epsilon_{yz} \\ e \\ \epsilon_{zx} \end{bmatrix} = \frac{1}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho_{N_1} \\ \rho_{N_2} \\ \rho_{N_3} \\ \rho_{N_4} \\ \rho_{N_5} \\ \rho_{N_6} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

$\rho_{N_2}$  : Σύμφωνα με το σχήμα 2.7.2 παρατηρούμε την παραμορφωμένη γεωμετρία του στοιχείου

δοκού όταν παραμορφώνεται σύμφωνα με τη δεύτερη φυσική μορφή παραμόρφωσης  $\rho_{N_2}$ . Προκειμένου να είμαστε σύμφωνοι με τη μορφή του παραμορφωμένου στοιχείου στη συμμετρική αυτή κάμψη, θεωρούμε τετραγωνική την κατανομή της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  (κατά τον κάθετο στο μέσο επίπεδο της δοκού) άξονα  $z$ . Θεωρούμε, δηλαδή, ότι η ελαστική καμπύλη παίρνει τη μορφή μίας πολυωνυμικής καμπύλης δευτέρου βαθμού (τετραγωνική).

### α' τρόπος

Ένας τρόπος είναι να εργαστούμε με το φυσικό σύστημα, δηλαδή με τη φυσική συντεταγμένη  $\xi$ .

$$w(\xi) = a \cdot \xi^2 + b \cdot \xi + c, \quad -1 \leq \xi \leq 1$$

συνοριακές συνθήκες :

$$w(-1) = 0 \Rightarrow a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 0 \Rightarrow a - b + c = 0$$

$$w(+1) = 0 \Rightarrow a \cdot (+1)^2 + b \cdot (+1) + c = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$$

Προσθέτοντας τις δύο προηγούμενες εξισώσεις έχουμε ότι :

$$a + c = 0 \Rightarrow c = -a$$

Αφαιρώντας τις δύο προηγούμενες εξισώσεις έχουμε ότι :

$$b = 0$$

Συνεπώς,

$$w(\xi) = a \cdot \xi^2 - a \Rightarrow w(\xi) = a \cdot (\xi^2 - 1), \quad -1 \leq \xi \leq 1$$

$$w'(\xi) = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = (2a\xi) \cdot \frac{2}{L} \Rightarrow w'(\xi) = \frac{4a}{L} \cdot \xi$$

συνοριακές συνθήκες (θετική φορά είναι η ωρολογιακή):

$$w'(-1) = -\frac{\rho_{N_2}}{2} \Rightarrow \frac{4a}{L} \cdot (-1) = -\frac{\rho_{N_2}}{2} \Rightarrow a = \frac{L}{8} \rho_{N_2}$$

$$w'(1) = +\frac{\rho_{N_2}}{2} \Rightarrow \frac{4a}{L} \cdot (+1) = +\frac{\rho_{N_2}}{2} \Rightarrow a = +\frac{L}{8} \rho_{N_2} \text{ (επαλήθευση)}$$

Άρα,

$$w(\xi) = a \cdot (\xi^2 - 1) = \frac{L}{8} \rho_{N_2} \cdot (\xi^2 - 1) \Rightarrow w(\xi) = \frac{L}{8} (1 - \xi^2) \cdot \rho_{N_2}$$

### β' τρόπος

Εναλλακτικά, μπορούμε να εργαστούμε με το καρτεσιανό σύστημα. Όπως δείχνουμε κατωτέρω, οι δύο λύσεις είναι ισοδύναμες.

$$w(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c, \quad -\frac{L}{2} \leq x \leq +\frac{L}{2}$$

συνοριακές συνθήκες :

$$w\left(-\frac{L}{2}\right) = 0 \Rightarrow a \cdot \left(-\frac{L}{2}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{L}{2}\right) + c = 0 \Rightarrow a \cdot \frac{L^2}{4} - b \cdot \frac{L}{2} + c = 0$$

$$w\left(+\frac{L}{2}\right) = 0 \Rightarrow a \cdot \left(+\frac{L}{2}\right)^2 + b \cdot \left(+\frac{L}{2}\right) + c = 0 \Rightarrow a \cdot \frac{L^2}{4} + b \cdot \frac{L}{2} + c = 0$$

Προσθέτοντας τις δύο προηγούμενες εξισώσεις έχουμε ότι :

$$a \cdot \frac{L^2}{4} + c = 0 \Rightarrow c = -a \cdot \frac{L^2}{4}$$

Αφαιρώντας τις δύο προηγούμενες εξισώσεις έχουμε ότι :

$$b \cdot \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow b = 0$$

Συνεπώς,

$$w(x) = a \cdot x^2 - a \cdot \frac{L^2}{4} \Rightarrow w(x) = a \cdot \left(x^2 - \frac{L^2}{4}\right), \quad -\frac{L}{2} \leq x \leq +\frac{L}{2}$$

$$w'(x) = 2a \cdot x$$

συνοριακές συνθήκες (θετική φορά είναι η ωρολογιακή):

$$w'\left(-\frac{L}{2}\right) = -\frac{\rho_{N_2}}{2} \Rightarrow 2a \cdot \left(-\frac{L}{2}\right) = -\frac{\rho_{N_2}}{2} \Rightarrow a \cdot L = \frac{\rho_{N_2}}{2} \Rightarrow a = \frac{\rho_{N_2}}{2L}$$

$$w'\left(+\frac{L}{2}\right) = +\frac{\rho_{N_2}}{2} \Rightarrow 2a \cdot \left(+\frac{L}{2}\right) = +\frac{\rho_{N_2}}{2} \Rightarrow a = \frac{\rho_{N_2}}{2L} \text{ (επαλήθευση)}$$

Άρα,

$$w(x) = a \cdot \left(x^2 - \frac{L^2}{4}\right) = \frac{\rho_{N_2}}{2L} \cdot \left(x^2 - \frac{L^2}{4}\right) \xrightarrow{\xi = \frac{2x}{L} \Rightarrow x = \frac{\xi L}{2}} w(\xi) = \frac{\rho_{N_2}}{2L} \cdot \left[\left(\frac{\xi L}{2}\right)^2 - \frac{L^2}{4}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w(\xi) = \frac{\rho_{N_2}}{2L} \cdot \left[\frac{\xi^2 L^2}{4} - \frac{L^2}{4}\right] \Rightarrow w(\xi) = \frac{\rho_{N_2}}{2L} \cdot \frac{L^2}{4} [\xi^2 - 1]$$

$$\Rightarrow w(\xi) = \frac{L}{8} (1 - \xi^2) \cdot \rho_{N_2} \quad (2.45)$$

$\rho_{N_3}$  : Σύμφωνα με το σχήμα 2.7.3 παρατηρούμε την παραμορφωμένη γεωμετρία του στοιχείου

δοκού όταν παραμορφώνεται σύμφωνα με τη τρίτη φυσική μορφή παραμόρφωσης  $\rho_{N_3}$  .

Προκειμένου να είμαστε σύμφωνοι με τη μορφή του παραμορφωμένου στοιχείου στην αντισυμμετρική αυτή κάμψη, θεωρούμε κυβική την κατανομή της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  (κατά τον κάθετο στο μέσο επίπεδο της δοκού) άξονα  $z$ . Θεωρούμε, δηλαδή, ότι η ελαστική καμπύλη παίρνει τη μορφή μίας πολυωνυμικής καμπύλης τρίτου βαθμού (κυβική).

Θα εργαστούμε στο καρτεσιανό σύστημα.

$$w(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d, \quad -\frac{L}{2} \leq x \leq +\frac{L}{2}$$

Συνοριακές συνθήκες για τη μετατόπιση  $w(x)$ :

$$w\left(-\frac{L}{2}\right) = 0 \Rightarrow a \cdot \left(-\frac{L}{2}\right)^3 + b \cdot \left(-\frac{L}{2}\right)^2 + c \cdot \left(-\frac{L}{2}\right) + d = 0 \Rightarrow -a \cdot \frac{L^3}{8} + b \cdot \frac{L^2}{4} - c \cdot \frac{L}{2} + d = 0$$

$$w\left(+\frac{L}{2}\right) = 0 \Rightarrow a \cdot \left(+\frac{L}{2}\right)^3 + b \cdot \left(+\frac{L}{2}\right)^2 + c \cdot \left(+\frac{L}{2}\right) + d = 0 \Rightarrow a \cdot \frac{L^3}{8} + b \cdot \frac{L^2}{4} + c \cdot \frac{L}{2} + d = 0$$

Προσθέτοντας τις δύο προηγούμενες εξισώσεις έχουμε ότι:

$$b \cdot \frac{L^2}{4} + d = 0 \Rightarrow d = -b \cdot \frac{L^2}{4}$$

Αφαιρώντας τις δύο προηγούμενες εξισώσεις έχουμε ότι:

$$a \cdot \frac{L^3}{8} + c \cdot \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow a \cdot \frac{L^2}{4} + c = 0 \Rightarrow c = -a \cdot \frac{L^2}{4}$$

Συνεπώς,

$$w(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 - a \cdot \frac{L^2}{4} \cdot x - b \cdot \frac{L^2}{4}, \quad -\frac{L}{2} \leq x \leq +\frac{L}{2}$$

$$w'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x - a \cdot \frac{L^2}{4}, \quad -\frac{L}{2} \leq x \leq +\frac{L}{2}$$

Συνοριακές συνθήκες για την κλίση  $w'(x)$  (θετική φορά είναι η ωρολογιακή):

$$w'(-\frac{L}{2}) = \frac{\rho_{N_3}}{2} \Rightarrow 3a \cdot (-\frac{L}{2})^2 + 2b \cdot (-\frac{L}{2}) - a \cdot \frac{L^2}{4} = \frac{\rho_{N_3}}{2} \Rightarrow 3a \cdot \frac{L^2}{4} - b \cdot L - a \cdot \frac{L^2}{4} = \frac{\rho_{N_3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a \cdot \frac{L^2}{4} - b \cdot L = \frac{\rho_{N_3}}{2} \Rightarrow a \cdot L^2 - 2b \cdot L = \rho_{N_3}$$

$$w'(+\frac{L}{2}) = \frac{\rho_{N_3}}{2} \Rightarrow 3a \cdot (+\frac{L}{2})^2 + 2b \cdot (+\frac{L}{2}) - a \cdot \frac{L^2}{4} = \frac{\rho_{N_3}}{2} \Rightarrow 3a \cdot \frac{L^2}{4} + b \cdot L - a \cdot \frac{L^2}{4} = \frac{\rho_{N_3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a \cdot \frac{L^2}{4} + b \cdot L = \frac{\rho_{N_3}}{2} \Rightarrow a \cdot L^2 + 2b \cdot L = \rho_{N_3}$$

Προσθέτοντας τις δύο προηγούμενες εξισώσεις έχουμε ότι:

$$(a \cdot L^2 - 2b \cdot L) + (a \cdot L^2 + 2b \cdot L) = 2\rho_{N_3} \Rightarrow 2a \cdot L^2 = 2\rho_{N_3} \Rightarrow a = \frac{\rho_{N_3}}{L^2}$$

Αφαιρώντας τις δύο προηγούμενες εξισώσεις έχουμε ότι:

$$(a \cdot L^2 - 2b \cdot L) - (a \cdot L^2 + 2b \cdot L) = 0 \Rightarrow b = 0$$

Συνεπώς,

$$w(x) = \left(\frac{\rho_{N_3}}{L^2}\right) \cdot x^3 - \left(\frac{\rho_{N_3}}{L^2}\right) \cdot \frac{L^2}{4} \cdot x \xrightarrow{\xi = \frac{2x}{L} \Rightarrow x = \frac{\xi L}{2}} w(\xi) = \left(\frac{\rho_{N_3}}{L^2}\right) \cdot \left(\frac{\xi L}{2}\right)^3 - \left(\frac{\rho_{N_3}}{L^2}\right) \cdot \frac{L^2}{4} \cdot \left(\frac{\xi L}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w(\xi) = \rho_{N_3} \cdot \left(\frac{1}{L^2} \cdot \left(\frac{\xi^3 L^3}{8}\right) - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\xi L}{2}\right)\right) \Rightarrow w(\xi) = \rho_{N_3} \cdot \left(\frac{\xi^3 L}{8} - \frac{\xi L}{8}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w(\xi) = \frac{L}{8} \cdot (\xi^3 - \xi) \rho_{N_3} \quad (2.46)$$

Η μετατόπιση  $w$  οφείλεται αφενός στη συμμετρική (σχέση (2.45)) και αφετέρου στην αντισυμμετρική (σχέση (2.46)) κάμψη του στοιχείου δοκού στο κατακόρυφο επίπεδο  $xz$ . Υπερθέτοντας τις ελαστικές γραμμές  $w(\xi)$  που προέρχονται από τη δεύτερη και την τρίτη φυσική μορφή παραμόρφωσης, έχουμε ότι:

$$w(\xi) = \frac{L}{8}(1-\xi^2) \cdot \rho_{N_2} + \frac{L}{8} \cdot (\xi^3 - \xi) \rho_{N_3} \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{L}{8}(-2\xi) \cdot \rho_{N_2} + \frac{L}{8} \cdot (3\xi^2 - 1) \rho_{N_3} \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial \xi} = -\frac{L}{4} \cdot \xi \cdot \rho_{N_2} + \frac{L}{8} \cdot (3\xi^2 - 1) \rho_{N_3} \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = -\frac{L}{4} \cdot \rho_{N_2} + \frac{L}{8} \cdot (6\xi) \cdot \rho_{N_3} \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = -\frac{L}{4} \cdot \rho_{N_2} + \frac{3L}{4} \cdot \xi \cdot \rho_{N_3} \quad (2.49)$$

Προκειμένου να προσδιορίσουμε την αξονική ανηγμένη παραμόρφωση  $\epsilon_{xx}$  λόγω της συμμετρικής (δεύτερη φυσική μορφή) και αντισυμμετρικής (τρίτη φυσική μορφή) καμπτικής μορφής, χρησιμοποιούμε τη σχέση (2.41) :

$$\epsilon_{xx} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -z \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -z \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \xrightarrow{\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{2}{L}}$$

$$\epsilon_{xx} = -z \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \cdot \frac{2}{L} \right) = -z \cdot \frac{2}{L} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \Rightarrow$$

$$\epsilon_{xx} = -z \cdot \frac{2}{L} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = -z \cdot \frac{2}{L} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \cdot \frac{2}{L} = -z \cdot \frac{4}{L^2} \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) \xrightarrow{(2.49)}$$

$$\epsilon_{xx} = -z \cdot \frac{4}{L^2} \cdot \left( -\frac{L}{4} \cdot \rho_{N_2} + \frac{3L}{4} \cdot \xi \cdot \rho_{N_3} \right) \Rightarrow \epsilon_{xx} = -z \cdot \frac{4}{L^2} \cdot \frac{L}{4} \left( -\rho_{N_2} + 3 \cdot \xi \cdot \rho_{N_3} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \epsilon_{xx} = -z \cdot \frac{1}{L} \left( -\rho_{N_2} + 3 \cdot \xi \cdot \rho_{N_3} \right) \Rightarrow \epsilon_{xx} = \frac{z}{L} \cdot \rho_{N_2} - 3 \cdot \frac{z}{L} \cdot \xi \cdot \rho_{N_3} \quad (2.50)$$



$\rho_{N_4}$  : Η τέταρτη και η δεύτερη φυσική μορφή παραμόρφωσης διαθέτουν ακριβώς την ίδια φιλοσοφία. Και οι δύο είναι συμμετρικές καμπτικές μορφές με τη διαφορά ότι η  $\rho_{N_2}$  έχει οριστεί για το επίπεδο xz ενώ η  $\rho_{N_4}$  έχει οριστεί για το επίπεδο xy. Συνεπώς, η εξίσωση της ελαστικής γραμμής θα είναι η:

$$v(\xi) = \frac{L}{8}(1 - \xi^2) \cdot \rho_{N_4} \quad (2.51)$$

$\rho_{N_5}$  : Η πέμπτη και η τρίτη φυσική μορφή παραμόρφωσης διαθέτουν ακριβώς την ίδια φιλοσοφία. Και οι δύο είναι αντισυμμετρικές καμπτικές μορφές με τη διαφορά ότι η  $\rho_{N_3}$  έχει οριστεί για το επίπεδο xz, ενώ η  $\rho_{N_5}$  έχει οριστεί για το επίπεδο xy. Συνεπώς, η εξίσωση της ελαστικής γραμμής θα είναι η:

$$v(\xi) = \frac{L}{8} \cdot (\xi^3 - \xi) \rho_{N_5} \quad (2.52)$$

Η μετατόπιση  $v$  οφείλεται αφενός στη συμμετρική και αφετέρου στην αντισυμμετρική κάμψη του στοιχείου δοκού στο κατακόρυφο επίπεδο xy. Υπερθέτοντας τις ελαστικές γραμμές  $v(\xi)$  που προέρχονται από την τέταρτη και την πέμπτη φυσική μορφή παραμόρφωσης, έχουμε ότι:

$$v(\xi) = \frac{L}{8}(1 - \xi^2) \cdot \rho_{N_4} + \frac{L}{8} \cdot (\xi^3 - \xi) \rho_{N_5} \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{L}{8}(-2\xi) \cdot \rho_{N_4} + \frac{L}{8} \cdot (3\xi^2 - 1) \rho_{N_5} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial \xi} = -\frac{L}{4} \cdot \xi \cdot \rho_{N_4} + \frac{L}{8} \cdot (3\xi^2 - 1) \rho_{N_5} \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = -\frac{L}{4} \cdot \rho_{N_4} + \frac{L}{8} \cdot (6\xi) \cdot \rho_{N_5} \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = -\frac{L}{4} \cdot \rho_{N_4} + \frac{3L}{4} \cdot \xi \cdot \rho_{N_5} \quad (2.55)$$

Προκειμένου να προσδιορίσουμε την αξονική ανηγμένη παραμόρφωση  $\varepsilon_{xx}$  λόγω της συμμετρικής (τέταρτη φυσική μορφή) και αντισυμμετρικής (πέμπτη φυσική μορφή) καμπτικής μορφής, χρησιμοποιούμε τη σχέση (2.41):

$$\varepsilon_{xx} = -y \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -y \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -y \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \xrightarrow{\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{2}{L}}$$

$$\varepsilon_{xx} = -y \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} \cdot \frac{2}{L} \right) = -y \cdot \frac{2}{L} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \Rightarrow$$

$$\varepsilon_{xx} = -y \cdot \frac{2}{L} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = -y \cdot \frac{2}{L} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \cdot \frac{2}{L} = -y \cdot \frac{4}{L^2} \cdot \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \right) \xrightarrow{(2.55)}$$

$$\varepsilon_{xx} = -y \cdot \frac{4}{L^2} \cdot \left( -\frac{L}{4} \cdot \rho_{N_4} + \frac{3L}{4} \cdot \xi \cdot \rho_{N_5} \right) \Rightarrow \varepsilon_{xx} = -y \cdot \frac{4}{L^2} \cdot \frac{L}{4} \left( -\rho_{N_4} + 3 \cdot \xi \cdot \rho_{N_5} \right) \Rightarrow$$

$$\varepsilon_{xx} = -y \cdot \frac{1}{L} \left( -\rho_{N_4} + 3 \cdot \xi \cdot \rho_{N_5} \right) \Rightarrow \varepsilon_{xx} = \frac{y}{L} \cdot \rho_{N_4} - 3 \cdot \frac{y}{L} \cdot \xi \cdot \rho_{N_5} \quad (2.56)$$

Συγκεντρωτικά βάσει των σχέσεων (2.50) και (2.56), το πεδίο των ανηγμένων παραμορφώσεων λόγω των καμπτικών φυσικών μορφών παραμόρφωσης  $\rho_{N_2}$ ,  $\rho_{N_3}$ ,  $\rho_{N_4}$ ,  $\rho_{N_5}$  είναι το ακόλουθο:

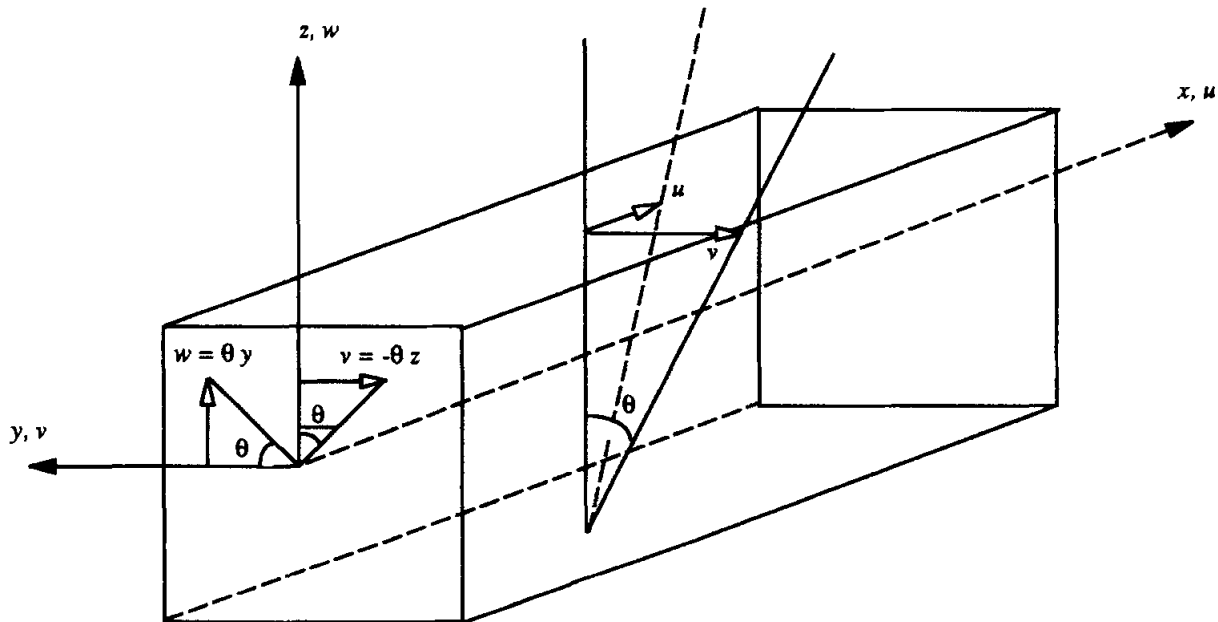
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^b \\ \varepsilon_{yy}^b \\ \varepsilon_{zz}^b \\ \varepsilon_{xy}^b \\ \varepsilon_{yz}^b \\ \varepsilon_{zx}^b \end{bmatrix} = \frac{1}{L} \cdot \begin{bmatrix} 0 & z & -3 \cdot z \cdot \xi & y & -3 \cdot y \cdot \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho_{N_1} \\ \rho_{N_2} \\ \rho_{N_3} \\ \rho_{N_4} \\ \rho_{N_5} \\ \rho_{N_6} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Ο εκθέτης b προέρχεται από τον αγγλικό όρο bending (κάμψη).

$\rho_{N_6}$  : Η έκτη φυσική μορφή παραμόρφωσης είναι μία στρεπτική μορφή, η οποία ορίζεται στο επίπεδο yz. Η γωνία στροφής  $\theta_x$  ισούται με:

$$\theta_x(\xi) = \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot \rho_{N_6} \quad (2.58)$$

$$\frac{d\theta_x(\xi)}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d\xi}{dx} \cdot \rho_{N_6} \Rightarrow \frac{d\theta_x(\xi)}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{L} \cdot \rho_{N_6} \Rightarrow \frac{d\theta_x(\xi)}{dx} = \frac{1}{L} \cdot \rho_{N_6} \quad (2.59)$$



Σχήμα 2.13 Πεδίο μετατοπίσεων λόγω στρέψης

Εισάγουμε την έννοια της συνάρτησης στρεβλώσεως  $\Psi(y,z)$  (warping function) προκειμένου να περιγράψουμε το πεδίο μετατοπίσεων που προκαλεί η γωνία στροφής  $\theta_x(x)$ . Ισχύει ότι:

$$u(x,y,z) = \frac{d\theta_x(x)}{dx} \cdot \Psi(y,z)$$

$$v(x,z) = -\theta_x(x) \cdot z \quad (2.60)$$

$$w(x,y) = \theta_x(x) \cdot y$$

$$(2.60) \xrightarrow[\text{(2.59)}]{\text{(2.58)}} \left\{ \begin{array}{l} u(\xi, y, z) = \frac{1}{L} \cdot \rho_{N_6} \cdot \Psi(y, z) \\ v(\xi, z) = -\frac{1}{2} \cdot \xi \cdot \rho_{N_6} \cdot z \\ w(\xi, y) = \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot \rho_{N_6} \cdot y \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u(\xi, y, z) = \frac{1}{L} \cdot \Psi(y, z) \cdot \rho_{N_6} \\ v(\xi, z) = -\frac{1}{2} \cdot \xi \cdot z \cdot \rho_{N_6} \\ w(\xi, y) = \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot y \cdot \rho_{N_6} \end{array} \right\} \quad (2.61)$$

Διατυπώσαμε το πεδίο των μετατοπίσεων συναρτήσει της φυσικής συντεταγμένης  $\xi$ . Ωστόσο, προκειμένου να εξάγουμε το αντίστοιχο πεδίο των ανηγμένων παραμορφώσεων λόγω της έκτης αυτής μορφής παραμόρφωσης, θα πρέπει να διατυπώσουμε το πεδίο των μετατοπίσεων (σχέσεις 2.61) συναρτήσει της καρτεσιανής συντεταγμένης  $x$ .

$$(2.61) \xrightarrow{\xi = \frac{2x}{L}} \left\{ \begin{array}{l} u(x, y, z) = \frac{1}{L} \cdot \Psi(y, z) \cdot \rho_{N_6} \\ v(x, z) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{L} \cdot z \cdot \rho_{N_6} \\ w(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{L} \cdot y \cdot \rho_{N_6} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y, z) = \frac{1}{L} \cdot \Psi(y, z) \cdot \rho_{N_6} \\ v(x, z) = -\frac{x}{L} \cdot z \cdot \rho_{N_6} \\ w(x, y) = \frac{x}{L} \cdot y \cdot \rho_{N_6} \end{array} \right\} \quad (2.62)$$

Στη συνέχεια, εξάγουμε το πεδίο των ανηγμένων παραμορφώσεων της μορφής αυτής, όπως εργαστήκαμε και για τις προηγούμενες 5 φυσικές μορφές παραμόρφωσης.

Ισχύει ότι:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = x, y, z$$

Υπολογίζουμε αρχικά τις ορθές ανηγμένες παραμορφώσεις:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{L} \cdot \Psi(y, z) \cdot \rho_{N_6} \right) \Rightarrow \varepsilon_{xx} = 0 \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{1}{2} \cdot \xi \cdot z \cdot \rho_{N_6} \right) \Rightarrow \varepsilon_{yy} = 0 \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot y \cdot \rho_{N_6} \right) \Rightarrow \varepsilon_{zz} = 0 \end{aligned} \quad (2.63)$$

Συνεχίζουμε με τις διατμητικές παραμορφώσεις, για τις οποίες ισχύουν τα εξής:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Rightarrow \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial \left( \frac{1}{L} \cdot \Psi(y,z) \cdot \rho_{N_6} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left( -\frac{x}{L} \cdot z \cdot \rho_{N_6} \right)}{\partial x} \right) \Rightarrow$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{L} \cdot \frac{\partial(\Psi(y,z))}{\partial y} - \frac{z}{L} \right) \cdot \rho_{N_6} \Rightarrow \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2L} \cdot \left( \frac{\partial(\Psi(y,z))}{\partial y} - z \right) \cdot \rho_{N_6} \quad (2.64)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \Rightarrow \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial \left( -\frac{x}{L} \cdot z \cdot \rho_{N_6} \right)}{\partial z} + \frac{\partial \left( \frac{x}{L} \cdot y \cdot \rho_{N_6} \right)}{\partial y} \right) \Rightarrow$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{x}{L} + \frac{x}{L} \right) \cdot \rho_{N_6} \Rightarrow \varepsilon_{yz} = 0 \quad (2.65)$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \Rightarrow \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial \left( \frac{x}{L} \cdot y \cdot \rho_{N_6} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( \frac{1}{L} \cdot \Psi(y,z) \cdot \rho_{N_6} \right)}{\partial z} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{y}{L} + \frac{1}{L} \cdot \frac{\partial(\Psi(y,z))}{\partial z} \right) \cdot \rho_{N_6} \Rightarrow \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2L} \cdot \left( y + \frac{\partial(\Psi(y,z))}{\partial z} \right) \cdot \rho_{N_6} \quad (2.66)$$

Συγκεντρωτικά λόγω των σχέσεων (2.63), (2.64), (2.65) και (2.66), το πεδίο των ανηγμένων παραμορφώσεων λόγω της στρεπτικής μορφής  $\rho_{N_6}$  είναι το ακόλουθο:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^T \\ \varepsilon_{yy}^T \\ \varepsilon_{zz}^T \\ \varepsilon_{xy}^T \\ \varepsilon_{yz}^T \\ \varepsilon_{zx}^T \end{bmatrix} = \frac{1}{L} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{\partial(\Psi(y,z))}{\partial y} - z \right] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{\partial(\Psi(y,z))}{\partial z} + y \right] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho_{N_1} \\ \rho_{N_2} \\ \rho_{N_3} \\ \rho_{N_4} \\ \rho_{N_5} \\ \rho_{N_6} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

Ο εκθέτης T προέρχεται από τον αγγλικό όρο torsion (στρέψη).

### Μητρώο συναρτήσεων φυσικών μορφών

Συνοψίζοντας τις σχέσεις (2.42), (2.47), (2.53) και (2.58) σε ένα ενιαίο μητρώο και αγνοώντας τη στρέβλωση, προκύπτει το μητρώο των συναρτήσεων των φυσικών μορφών  $[\Omega_N]$ , το οποίο συνδέει το διάνυσμα των τοπικών καρτεσιανών μετακινήσεων  $[u]$  (τριών μετατοπίσεων και τριών στροφών) τυχαίου σημείου του στοιχείου με τις φυσικές μορφές παραμόρφωσης  $[\rho_N]$ . Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, με τη μέθοδο των φυσικών μορφών, βάσει της οποίας αναπτύχθηκε το φυσικό στοιχείο μετατοπίσεων, αντί των κλασικών συναρτήσεων σχήματος  $[N]$  των συμβατικών πεπερασμένων στοιχείων χρησιμοποιούμε τις συναρτήσεις φυσικών μορφών  $[\Omega_N]$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} (2.42) \Rightarrow u = \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot \rho_{N_1} \\ (2.53) \Rightarrow v = \frac{L}{8}(1-\xi^2) \cdot \rho_{N_4} + \frac{L}{8} \cdot (\xi^3 - \xi) \rho_{N_5} \\ (2.47) \Rightarrow w = \frac{L}{8}(1-\xi^2) \cdot \rho_{N_2} + \frac{L}{8} \cdot (\xi^3 - \xi) \rho_{N_3} \\ (2.58) \Rightarrow \theta_x = \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot \rho_{N_6} \\ \theta_y = 0 \\ \theta_z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cccccc} \frac{1}{2} \cdot \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L}{8}(1-\xi^2) & \frac{L}{8} \cdot (\xi^3 - \xi) & 0 \\ 0 & \frac{L}{8}(1-\xi^2) & \frac{L}{8} \cdot (\xi^3 - \xi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \cdot \xi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{l} \rho_{N_1} \\ \rho_{N_2} \\ \rho_{N_3} \\ \rho_{N_4} \\ \rho_{N_5} \\ \rho_{N_6} \end{array} \right\}$$

Συνεπώς, το μητρώο των συναρτήσεων των φυσικών μορφών  $[\Omega_N]$  είναι το εξής:

$$[\Omega_N] = \left[ \begin{array}{cccccc} \frac{1}{2} \cdot \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L}{8}(1-\xi^2) & \frac{L}{8} \cdot (\xi^3 - \xi) & 0 \\ 0 & \frac{L}{8}(1-\xi^2) & \frac{L}{8} \cdot (\xi^3 - \xi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \cdot \xi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (2.68)$$

## Φυσικό μητρώο παραμορφώσεως [B<sub>N</sub>]

Επαλληλίζοντας τα μητρώα ανηγμένων παραμορφώσεων (2.44), (2.57), (2.67) λόγω της αξονικής, των καμπτικών (συμμετρικών και αντισυμμετρικών) και της στρεπτικής αντίστοιχα φυσικής μορφής παραμόρφωσης, προκύπτει το συνολικό μητρώο ανηγμένων παραμορφώσεων του φυσικού στοιχείου δοκού δύο κόμβων:

$$\begin{aligned}
 [\varepsilon] &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^e \\ \varepsilon_{yy}^e \\ \varepsilon_{zz}^e \\ \varepsilon_{xy}^e \\ \varepsilon_{yz}^e \\ \varepsilon_{zx}^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^b \\ \varepsilon_{yy}^b \\ \varepsilon_{zz}^b \\ \varepsilon_{xy}^b \\ \varepsilon_{yz}^b \\ \varepsilon_{zx}^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^T \\ \varepsilon_{yy}^T \\ \varepsilon_{zz}^T \\ \varepsilon_{xy}^T \\ \varepsilon_{yz}^T \\ \varepsilon_{zx}^T \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{1}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho_{N_1} \\ \rho_{N_2} \\ \rho_{N_3} \\ \rho_{N_4} \\ \rho_{N_5} \\ \rho_{N_6} \end{bmatrix} + \\
 &+ \frac{1}{L} \cdot \begin{bmatrix} 0 & z & -3 \cdot z \cdot \xi & y & -3 \cdot y \cdot \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho_{N_1} \\ \rho_{N_2} \\ \rho_{N_3} \\ \rho_{N_4} \\ \rho_{N_5} \\ \rho_{N_6} \end{bmatrix} + \\
 &+ \frac{1}{L} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{\partial(\cdot\Psi(y,z))}{\partial y} - z \right] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{\partial(\cdot\Psi(y,z))}{\partial z} + y \right] & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho_{N_1} \\ \rho_{N_2} \\ \rho_{N_3} \\ \rho_{N_4} \\ \rho_{N_5} \\ \rho_{N_6} \end{bmatrix} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$[\varepsilon] = \frac{1}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & z & -3 \cdot z \cdot \xi & y & -3 \cdot y \cdot \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{\partial(\cdot\Psi(y,z))}{\partial y} - z \right] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{\partial(\cdot\Psi(y,z))}{\partial z} + y \right] \end{bmatrix} \cdot [\rho_N] \quad (2.69)$$

Το φυσικό μητρώο παραμόρφωσης  $[B_N]$  πολλαπλασιασμένο με το διάνυσμα των φυσικών μορφών παραμόρφωσης  $[\rho_N]$  μας δίνει το διάνυσμα των καρτεσιανών ανηγμένων παραμορφώσεων  $[\varepsilon]$ . Ήτοι:

$$[\varepsilon] = [B_N] \cdot [\rho_N] \xrightarrow{(2.69)}$$

$$\frac{1}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & z & -3 \cdot z \cdot \xi & y & -3 \cdot y \cdot \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{\partial(\cdot\Psi(y,z))}{\partial y} - z \right] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{\partial(\cdot\Psi(y,z))}{\partial z} + y \right] \end{bmatrix} \cdot [\rho_N] = [B_N] \cdot [\rho_N] \Rightarrow$$

$$[B_N] = \frac{1}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & z & -3 \cdot z \cdot \xi & y & -3 \cdot y \cdot \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{\partial(\cdot\Psi(y,z))}{\partial y} - z \right] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{\partial(\cdot\Psi(y,z))}{\partial z} + y \right] \end{bmatrix} \quad (2.70)$$



## 2.5 Το φυσικό μητρώο στιβαρότητας [ $K_N$ ]

Υποθέτουμε ότι το υλικό της διατομής είναι **ισότροπο**, δηλαδή οι μηχανικές του ιδιότητες είναι σταθερές καθ' όλες τις διευθύνσεις και ομογενές, δηλαδή έχει την ίδια σύσταση σε όλα τα σημεία της μάζας του.

Προκειμένου να μελετήσουμε ένα πρόβλημα αντοχής υλικού, έχουμε να προσδιορίσουμε 15 αγνώστους :

- τις **6 συνιστώσες του τανυστή των τάσεων**,
- τις **6 συνιστώσες του τανυστή των παραμορφώσεων** και
- τις **3 συνιστώσες του διανύσματος των μετατοπίσεων**.

Στη φαρέτρα μας διαθέτουμε 3 είδη εξισώσεων : τις **εξισώσεις ισορροπίας**, τις **εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων** και τις **καταστατικές εξισώσεις**. Συνολικά, λοιπόν, διαθέτουμε 15 εξισώσεις :

- τις **6 εξισώσεις ισορροπίας** (3 εξισώσεις ισορροπίας δυνάμεων και 3 εξισώσεις ισορροπίας ροπών),
- τις **3 εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων** και
- τις **6 καταστατικές εξισώσεις**.

Στην παράγραφο 2.4 υπολογίσαμε το φυσικό μητρώο παραμόρφωσης [ $B_N$ ] με τη βοήθεια των εξισώσεων ισορροπίας και των εξισώσεων συμβιβαστού των παραμορφώσεων. Στην παράγραφο αυτή θα προσδιορίσουμε το φυσικό μητρώο στιβαρότητας [ $K_N$ ] με την αξιοποίηση των καταστατικών σχέσεων.

Οι καταστατικές εξισώσεις συνδέουν τις τάσεις με τις παραμορφώσεις που αναπτύσσονται σε ένα σώμα από κάποιο υλικό. Οι σχέσεις αυτές , συγκρινόμενες με τα άλλα 2 είδη εξισώσεων (τις εξισώσεις ισορροπίας και τις εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων) παρουσιάζουν δύο ιδιαιτερότητες:

- 1) δεν μπορούν να προκύψουν θεωρητικά παρά μόνο πειραματικά. Μόνο το πείραμα μας επιτρέπει να περιγράψουμε την καταστατική συμπεριφορά του υλικού για όλο το εύρος των δυνατών να επιβληθούν φορτίσεων (από την αρχική ελαστική περιοχή έως την περιοχή της πλήρους αστοχίας του υλικού).
- 2) δεν είναι ενιαίες για όλα τα υλικά αλλά χαρακτηρίζουν ένα συγκεκριμένο υλικό και εξαρτώνται άμεσα από τη φύση του.

Στην απλούστερη περίπτωση της φορτίσεως στην αρχική γραμμική ελαστική περιοχή, όπου τα φαινόμενα θεωρούνται αντιστρεπτά (ελαστική περιοχή) και οι σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων είναι γραμμικές (γραμμική περιοχή), απαιτείται ο προσδιορισμός 36 σταθερών προκειμένου να περιγράψουμε τη μηχανική συμπεριφορά του υλικού, καθώς καθεμία εκ των 6 συνιστωσών του τανυστή των τάσεων εξαρτάται από όλες (και τις 6) συνιστώσες του τανυστή των παραμορφώσεων. Δεδομένου ότι το υλικό μας είναι ισότροπο και ομογενές και εκμεταλλευόμενοι επιχειρήματα συμμετρίας, από τις 36 σταθερές οδηγούμαστε στον νόμο του Hooke με 2 ανεξάρτητες σταθερές : το μέτρο ελαστικότητας  $E$  και τον λόγο του Poisson  $\nu$ .

Στη συγκεκριμένη περίπτωση του φυσικού στοιχείου δοκού 2 κόμβων έχουμε ότι:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{xx} = E \cdot \varepsilon_{xx} \\ \sigma_{yy} = 0 \\ \sigma_{zz} = 0 \\ \tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \Rightarrow \tau_{xy} = G \cdot 2\varepsilon_{xy} \\ \tau_{yz} = 0 \\ \tau_{zx} = G \cdot \gamma_{zx} \Rightarrow \tau_{zx} = G \cdot 2\varepsilon_{zx} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$[\sigma] = [K_{ct}] \cdot [\varepsilon]$$

όπου

- **G** είναι το μέτρο διάτμησης του υλικού για το οποίο ισχύει ότι:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

- **K<sub>ct</sub>** είναι το καταστατικό μητρώο, το οποίο συνδέει το μητρώο των τάσεων [σ] με το μητρώο των ανηγμένων παραμορφώσεων [ε] και για το οποίο ισχύει ότι:

$$[K_{ct}] = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Το φυσικό μητρώο στιβαρότητας του φυσικού στοιχείου μετατοπίσεων δύο κόμβων θα προκύψει από τη σχέση:

$$[K_N] = \int_V \left\{ [B_N]^T \cdot [K_{ct}] \cdot [B_N] \right\} dV \xrightarrow[(2.71)]{(2.70)}$$

$$[K_N] = \int_V \left\{ \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & z & -3z\xi & y & -3y\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(\Psi(y,z))}{\partial y} - z \right] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(\Psi(y,z))}{\partial z} + y \right] \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z & -3z\xi & y & -3y\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(\Psi(y,z))}{\partial y} - z \right] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(\Psi(y,z))}{\partial z} + y \right] \end{bmatrix} \right\} dV$$

Μετά τη διεξαγωγή της ανωτέρω μητρικής σχέσης μέσω Matlab έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

$$[K_N] = \frac{1}{L^2} \cdot \int_V \begin{bmatrix} E & zE & -3z\xi E & yE & -3y\xi E & 0 \\ zE & z^2 E & -3z^2 \xi E & yzE & -3yz\xi E & 0 \\ -3z\xi E & -3z^2 \xi E & 9z^2 \xi^2 E & -3yz\xi E & 9yz\xi^2 E & 0 \\ yE & yzE & -3yz\xi E & y^2 E & -3y^2 \xi E & 0 \\ -3y\xi E & -3yz\xi E & 9yz\xi^2 E & -3y^2 \xi E & -9y^2 \xi^2 E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G}{2} \left\{ \left[ \frac{\partial(\Psi(y,z))}{\partial y} - z \right]^2 + \left[ \frac{\partial(\Psi(y,z))}{\partial z} + y \right]^2 \right\} \end{bmatrix} dV \quad (2.72)$$

Στην περίπτωση ισότροπου και γραμμικώς ελαστικού υλικού, η σχέση (2.72) απλοποιείται σημαντικά λόγω μηδενισμού των εκτός της κυρίας διαγωνίου όρων:

$$[K_N] = \begin{bmatrix} \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E \cdot I_y}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3 \cdot E \cdot I_y}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E \cdot I_z}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3 \cdot E \cdot I_z}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G \cdot I_P}{L} \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

όπου:

- $I_y$  : η ροπή αδράνειας της διατομής του στοιχείου ως προς τον άξονα y
- $I_z$  : η ροπή αδράνειας της διατομής του στοιχείου ως προς τον άξονα z

- $I_p$  : η πολική ροπή αδράνειας του στοιχείου. Για ορθογωνική διατομή πλάτους  $b$  και ύψους  $h$ , ισχύει ότι  $I_p = k \cdot b \cdot h^3$ , όπου  $k$  είναι ένας μειωτικός συντελεστής, ο οποίος εξαρτάται από τον λόγο  $\frac{h}{b}$ .

$$k = 0,1406 \quad \text{για} \quad \frac{h}{b} = 1$$

$$k = 0,2910 \quad \text{για} \quad \frac{h}{b} = 5$$

$$k = 0,3333 \quad \text{για} \quad \frac{h}{b} \rightarrow \infty$$

Σύμφωνα με τη σχέση (2.72), απαιτείται ολοκλήρωση σε ολόκληρο τον όγκο του στοιχείου προκειμένου να υπολογίσουμε το μητρώο στιβαρότητας. Το ολοκλήρωμα αυτό δεν θα υπολογιστεί αναλυτικά αλλά αριθμητικά και μάλιστα υπάρχουν δύο τρόποι αριθμητικής ολοκλήρωσης, στους οποίους θα αναφερθούμε διεξοδικά στην επόμενη και τελευταία ενότητα αυτού του κεφαλαίου.

Έχοντας υπολογίσει το φυσικό μητρώο στιβαρότητας, στη συνέχεια διατυπώνουμε το τοπικό  $[K]$

και κατόπιν το καθολικό  $[\bar{K}]$  μητρώο στιβαρότητας μέσω των σχέσεων :

$$[K] = [\alpha_N]^T \cdot [K_N] \cdot [\alpha_N] \quad (2.74)$$

$(12 \times 12)$     $(12 \times 6)$     $(6 \times 6)$     $(6 \times 12)$

$$[\bar{K}] = [T_{04}]^T \cdot [K] \cdot [T_{04}] \Rightarrow [\bar{K}] = [T_{04}]^T \cdot [\alpha_N]^T \cdot [K_N] \cdot [\alpha_N] \cdot [T_{04}] \quad (2.75)$$

$(12 \times 12)$     $(12 \times 12)$     $(12 \times 12)$     $(12 \times 12)$     $(12 \times 6)$     $(6 \times 6)$     $(6 \times 12)$     $(12 \times 12)$

Αντίστοιχες σχέσεις ισχύουν και για το φυσικό  $[P_N]$ , τοπικό  $[P]$  και καθολικό  $[\bar{P}]$  διάνυσμα δυνάμεων.

$$[P] = [\alpha_N]^T \cdot [P_N] \quad (2.76)$$

$(12 \times 1)$     $(12 \times 6)$     $(6 \times 1)$

$$[\bar{P}] = [T_{04}]^{-1} \cdot [P] \Rightarrow [\bar{P}] = [T_{04}]^{-1} \cdot [\alpha_N]^T \cdot [P_N] \quad (2.77)$$

$(12 \times 1)$     $(12 \times 12)$     $(12 \times 1)$     $(12 \times 12)$     $(12 \times 6)$     $(6 \times 1)$

## 2.6 Υπολογισμός του φυσικού μητρώου στιβαρότητας $[K_N]$

Η μέθοδος υπολογισμού του ολοκληρώματος  $[K_N] = \int_V \{ [B_N]^T \cdot [K_{ct}] \cdot [B_N] \} dV$  είναι ένας κρίσιμος παράγοντας που επηρεάζει την πυκνότητα και γενικότερα τη μόρφωση του δικτύου των πεπερασμένων στοιχείων, το λεγόμενο meshing. Το φαινόμενο αυτό είναι ιδιαίτερα έντονο όταν θέλουμε να μελετήσουμε με ικανοποιητική ακρίβεια την ανελαστική συμπεριφορά ενός φορέα.

Η διαφοροποίηση στον υπολογισμό του φυσικού μητρώου στιβαρότητας  $[K_N]$  πραγματοποιείται σε δύο επίπεδα. Το πρώτο αφορά στον **τρόπο υπολογισμού του μητρώου** και το δεύτερο στη **μεθολογία ολοκλήρωσης του μητρώου**.

Σχετικά με τον **τρόπο υπολογισμού του μητρώου** διακρίνουμε δύο εναλλακτικές:

- 1) “Αναλυτικός” υπολογισμός του φυσικού μητρώου στιβαρότητας
- 2) Υπολογισμός του φυσικού μητρώου στιβαρότητας με **αριθμητική ολοκλήρωση**
- 3) Υπολογισμός του φυσικού μητρώου στιβαρότητας με **αναλυτική ολοκλήρωση**. Ο τρίτος αυτός τρόπος είναι πολύ χρονοβόρος έως υπερβολικά σε κατασκευές μεγάλης κλίμακας, εκτοξεύοντας στα ύψη το κόστος και συνήθως δεν χρησιμοποιείται. Για το λόγο αυτό θα ασχοληθούμε μόνο με τις δύο πρώτες εναλλακτικές.

Σχετικά με το δεύτερο επίπεδο επιλογής (**μεθολογία ολοκλήρωσης του μητρώου**), το οποίο είναι εσωτερικό του πρώτου και συνεπώς ακολουθεί την επιλογή του τρόπου υπολογισμού, διακρίνουμε και πάλι δύο εναλλακτικές:

- 1) Μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης **Gauss**
- 2) Μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης **Gauss-Lobatto**

Στο δεύτερο επίπεδο η διαφοροποίηση έγκειται στον υπολογισμό των τάσεων κατά μήκος του διαμήκους φυσικού  $\xi$  (ή καρτεσιανού  $x$ ) άξονα του στοιχείου, ενώ σε επίπεδο διατομής η διαδικασία είναι πανομοιότυπη. Ειδικότερα, η διαφορά οφείλεται στο γεγονός ότι η ολοκλήρωση κατά Gauss – Lobatto, σε αντίθεση με την κατά Gauss, λαμβάνει ως σημεία ολοκλήρωσης τις ακραίες διατομές του στοιχείου. Η καταλληλότητα και η αποτελεσματικότητά τους κρίνεται από την ακρίβεια με την οποία προσεγγίζουν το οριακό φορτίο σε σχέση με το δίκτυο των πεπερασμένων στοιχείων. Στην περίπτωση γραμμικής συμπεριφοράς δίνουν ταυτόσημα αποτελέσματα.

## 2.6.1 “Αναλυτικός” υπολογισμός του φυσικού μητρώου στιβαρότητας [K<sub>N</sub>]

Αρχικά θα πρέπει να τονίσουμε ότι η λέξη “αναλυτικός” είναι ιδιαίτερα παραπλανητική διότι μπορεί να παραπέμψει κάποιον στην εντύπωση ότι πρόκειται για την εύρεση της ακριβούς λύσης κάθε ολοκληρώματος μέσω της αναλυτικής ολοκλήρωσης. Ωστόσο, πρόκειται για έναν προσεγγιστικό τρόπο υπολογισμού του ολοκληρώματος, ο οποίος βασίζεται στη φιλοσοφία του στοιχείου ινών (διαίρεση της διατομής σε ίνες). Ο όρος “αναλυτικός” χρησιμοποιείται για να δηλωθεί ότι με τον τρόπο αυτό δεν χρησιμοποιούμε τις συμβατικές μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης.

Κατά τον υπολογισμό αυτό, επιλέγουμε μία χαρακτηριστική διατομή στην οποία θα γίνεται ο έλεγχος των παραμορφώσεων.

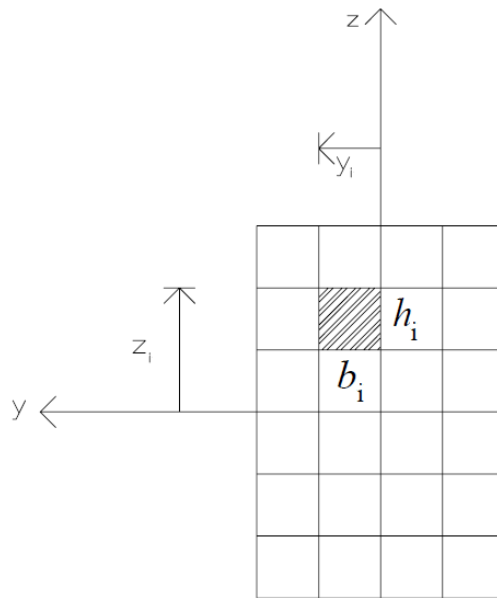
Σύμφωνα με τη μεθοδολογία αυτή, θεωρούμε ότι η δοκός αποτελείται από  $n$  **ίνες** με αποτέλεσμα κάθε διατομή να διαιρείται σε  $n$  συνολικά **υποεπιφάνειες** (**υποεπιφάνεια=διατομή της ίνας**). Κάθε ίνα έχει πρισματική μορφή με μήκος ίσο με το μήκος της δοκού και διατομή ορθογωνική. Προφανώς, το άθροισμα των εμβαδών των διατομών όλων των ινών ισούται με το εμβαδόν της διατομής της δοκού.

Καθεμία από τις  $n$  υποεπιφάνειες (χαρακτηρίζεται από το δείκτη  $i=1,2,3,\dots,n$ ) :

- έχει συγκεκριμένες διαστάσεις : πλάτος  $b_i$ , ύψος  $h_i$  → συγκεκριμένο εμβαδόν  $A_i = b_i \cdot h_i$
- έχει συγκεκριμένες συντεταγμένες :  $y_i, z_i$
- ακολουθεί το δικό της νόμο υλικού → έχει το δικό της μέτρο ελαστικότητας  $E_i$ . Με άλλα λόγια, το μέτρο ελαστικότητας δεν είναι υποχρεωτικά το ίδιο για όλες τις υποεπιφάνειες της διατομής της δοκού αλλά μεταβάλλεται σύμφωνα με το μονοδιάστατο νόμο του υλικού.

**Σε επίπεδο υποεπιφάνειας** στόχος μας είναι **ο υπολογισμός της τάσεως στο μέσο κάθε υποεπιφάνειας της διατομής**. Για αποφυγή ενδεχόμενης σύγχυσης μεταξύ των όρων υποεπιφάνεια και ίνα τονίζουμε ότι η υποεπιφάνεια είναι η διατομή (δισδιάστατο σχήμα) της πρισματικής ίνας, η οποία ίνα εκτείνεται σε όλο το μήκος του στοιχείου της δοκού (τρισδιάστατο σχήμα). Εφόσον κάθε υποεπιφάνεια χαρακτηρίζεται από το δικό της μέτρο ελαστικότητας  $E_i$ , συμπεραίνουμε ότι και κάθε ίνα χαρακτηρίζεται από το ίδιο μέτρο ελαστικότητας. Το μέσο κάθε υποεπιφάνειας καθορίζεται από τις αντίστοιχες συντεταγμένες της ( $\xi_i, y_i, z_i$ ) και είναι η θέση με συντεταγμένες  $(\xi_i, y_i - \frac{b_i}{2}, z_i - \frac{h_i}{2})$ .

Η διακριτοποίηση της δοκού σε ίνες επιτρέπει την προσομοίωση προβλημάτων κάμψεως δοκού στο χώρο, ακόμη και για διατομές με διαφορετικές, όχι απαραίτητα συμμετρικές, γεωμετρίες.



**Σχήμα 1.8** Διαίρεση της διατομής σε ίνες

Ο υπολογισμός των δεικτών στιβαρότητας θα βασιστεί στις ακόλουθες προσεγγιστικές σχέσεις:

$$\int_A (E) dA = \sum_{i=1}^n (E_i \cdot A_i) \quad (2.78)$$

$$\int_A (yE) dA = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n (E_i \cdot A_i \cdot y_i) \quad (2.79)$$

$$\int_A (zE) dA = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n (E_i \cdot A_i \cdot z_i) \quad (2.80)$$

$$\int_A (yzE) dA = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^n (E_i \cdot A_i \cdot y_i \cdot z_i) \quad (2.81)$$

$$\int_A (y^2 E) dA = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^n (E_i \cdot A_i \cdot y_i^2) \quad (2.82)$$

$$\int_A (z^2 E) dA = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^n (E_i \cdot A_i \cdot z_i^2) \quad (2.83)$$

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{L}{2} d\xi = \frac{L}{2} [\xi]_{-1}^1 = \frac{L}{2} \cdot (1+1) \Rightarrow \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx = L \quad (2.84)$$

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \xi dx = \int_{-1}^1 \frac{L}{2} \xi d\xi = \frac{L}{2} \left[ \frac{\xi^2}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{L}{2} \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \xi dx = 0 \quad (2.85)$$

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \xi^2 dx = \int_{-1}^1 \frac{L}{2} \xi^2 d\xi = \frac{L}{2} \left[ \frac{\xi^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{L}{2} \cdot \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) \Rightarrow \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \xi^2 dx = \frac{L}{3} \quad (2.86)$$

$$K_{N_{11}} = \frac{1}{L^2} \cdot \int_V (E) dV \Rightarrow K_{N_{11}} = \frac{1}{L^2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (E) dz dy dx \Rightarrow K_{N_{11}} = \frac{1}{L^2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[ \int_A (E) dA \right] dx \Rightarrow$$

$$K_{N_{11}} = \frac{1}{L^2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \cdot \int_A (E) dA \xrightarrow[(2.84)]{(2.78)} K_{N_{11}} = \frac{1}{L^2} \cdot L \cdot \sum_{i=1}^n (E_i \cdot A_i) \Rightarrow K_{N_{11}} = \frac{1}{L} \cdot \sum_{i=1}^n (E_i \cdot A_i)$$

$$K_{N_{12}} = \frac{1}{L^2} \cdot \int_V (zE) dV \Rightarrow K_{N_{12}} = \frac{1}{L^2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (zE) dz dy dx \Rightarrow K_{N_{12}} = \frac{1}{L^2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[ \int_A (zE) dA \right] dx \Rightarrow$$

$$K_{N_{12}} = \frac{1}{L^2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \cdot \int_A (zE) dA \xrightarrow[(2.84)]{(2.80)} K_{N_{12}} = \frac{1}{L^2} \cdot L \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n (E_i \cdot A_i \cdot z_i) \Rightarrow K_{N_{12}} = \frac{1}{2L} \cdot \sum_{i=1}^n (E_i \cdot A_i \cdot z_i)$$

$$K_{N_{13}} = \frac{1}{L^2} \cdot \int_V (-3z\xi E) dV \Rightarrow K_{N_{13}} = -\frac{3}{L^2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (z\xi E) dz dy dx \Rightarrow K_{N_{13}} = -\frac{3}{L^2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[ \int_A (z\xi E) dA \right] dx \Rightarrow$$

$$K_{N_{13}} = -\frac{3}{L^2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \xi dx \cdot \int_A (zE) dA \xrightarrow[(2.85)]{(2.80)} K_{N_{13}} = -\frac{3}{L^2} \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n (E_i \cdot A_i \cdot z_i) \Rightarrow K_{N_{13}} = 0$$

Να σημειώσουμε ότι όσοι όροι περιέχουν τη φυσική συντεταγμένη  $\xi$  υψωμένη στην πρώτη δύναμη ισούνται με μηδέν, διότι (2.85)  $\Rightarrow \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \xi dx = 0$ . Συνεπώς, έχουμε ότι:

$$K_{N_{13}} = K_{N_{15}} = K_{N_{23}} = K_{N_{25}} = K_{N_{34}} = K_{N_{45}} = 0$$

$$K_{N_{14}} = \frac{1}{L^2} \cdot \int_V (yE) dV \Rightarrow K_{N_{14}} = \frac{1}{L^2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (yE) dz dy dx \Rightarrow K_{N_{14}} = \frac{1}{L^2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[ \int_A (yE) dA \right] dx \Rightarrow$$

$$K_{N_{14}} = \frac{1}{L^2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \cdot \int_A (yE) dA \xrightarrow[(2.84)]{(2.79)} K_{N_{14}} = \frac{1}{L^2} \cdot L \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n (E_i \cdot A_i \cdot y_i) \Rightarrow K_{N_{14}} = \frac{1}{2L} \cdot \sum_{i=1}^n (E_i \cdot A_i \cdot y_i)$$



$$K_{N_{22}} = \frac{1}{L^2} \cdot \int_V (z^2 E) dV \Rightarrow K_{N_{22}} = \frac{1}{L^2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (z^2 E) dz dy dx \Rightarrow$$

$$K_{N_{22}} = \frac{1}{L^2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[ \int_A (z^2 E) dA \right] dx \Rightarrow K_{N_{22}} = \frac{1}{L^2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \cdot \int_A (z^2 E) dA \xrightarrow[(2.84)]{(2.83)}$$

$$K_{N_{22}} = \frac{1}{L^2} \cdot L \cdot \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^n (E_i \cdot A_i \cdot z_i^2) \Rightarrow K_{N_{22}} = \frac{1}{3L} \cdot \sum_{i=1}^n (E_i \cdot A_i \cdot z_i^2)$$

$$K_{N_{24}} = \frac{1}{L^2} \cdot \int_V (yzE) dV \Rightarrow K_{N_{24}} = \frac{1}{L^2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (yzE) dz dy dx \Rightarrow$$

$$K_{N_{24}} = \frac{1}{L^2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[ \int_A (yzE) dA \right] dx \Rightarrow K_{N_{24}} = \frac{1}{L^2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \cdot \int_A (yzE) dA \xrightarrow[(2.84)]{(2.81)}$$

$$K_{N_{24}} = \frac{1}{L^2} \cdot L \cdot \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^n (E_i \cdot A_i \cdot y_i \cdot z_i) \Rightarrow K_{N_{24}} = \frac{1}{4L} \cdot \sum_{i=1}^n (E_i \cdot A_i \cdot y_i \cdot z_i)$$

$$K_{N_{33}} = \frac{1}{L^2} \cdot \int_V (9z^2 \xi^2 E) dV \Rightarrow K_{N_{33}} = \frac{9}{L^2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (z^2 \xi^2 E) dz dy dx \Rightarrow$$

$$K_{N_{33}} = \frac{9}{L^2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[ \int_A (z^2 \xi^2 E) dA \right] dx \Rightarrow K_{N_{33}} = \frac{9}{L^2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \xi^2 dx \cdot \int_A (z^2 E) dA \xrightarrow[(2.86)]{(2.83)}$$

$$K_{N_{33}} = \frac{9}{L^2} \cdot \frac{L}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^n (E_i \cdot A_i \cdot z_i^2) \Rightarrow K_{N_{33}} = \frac{1}{L} \cdot \sum_{i=1}^n (E_i \cdot A_i \cdot z_i^2)$$

$$K_{N_{35}} = \frac{1}{L^2} \cdot \int_V (9yz \xi^2 E) dV \Rightarrow K_{N_{35}} = \frac{9}{L^2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (yz \xi^2 E) dz dy dx \Rightarrow$$

$$K_{N_{35}} = \frac{9}{L^2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[ \int_A (yz \xi^2 E) dA \right] dx \Rightarrow K_{N_{35}} = \frac{9}{L^2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \xi^2 dx \cdot \int_A (yzE) dA \xrightarrow[(2.86)]{(2.81)}$$

$$K_{N_{35}} = \frac{9}{L^2} \cdot \frac{L}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^n (E_i \cdot A_i \cdot y_i \cdot z_i) \Rightarrow K_{N_{35}} = \frac{3}{4L} \cdot \sum_{i=1}^n (E_i \cdot A_i \cdot y_i \cdot z_i)$$

$$K_{N_{44}} = \frac{1}{L^2} \cdot \int_V (y^2 E) dV \Rightarrow K_{N_{44}} = \frac{1}{L^2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (y^2 E) dz dy dx \Rightarrow$$

$$K_{N_{44}} = \frac{1}{L^2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[ \int_A (y^2 E) dA \right] dx \Rightarrow K_{N_{44}} = \frac{1}{L^2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \cdot \int_A (y^2 E) dA \xrightarrow[(2.84)]{(2.82)}$$

$$K_{N_{44}} = \frac{1}{L^2} \cdot L \cdot \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^n (E_i \cdot A_i \cdot y_i^2) \Rightarrow K_{N_{44}} = \frac{1}{3L} \cdot \sum_{i=1}^n (E_i \cdot A_i \cdot y_i^2)$$

$$K_{N_{55}} = \frac{1}{L^2} \cdot \int_V (-9y^2 \xi^2 E) dV \Rightarrow K_{N_{55}} = -\frac{9}{L^2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (y^2 \xi^2 E) dz dy dx \Rightarrow$$

$$K_{N_{55}} = -\frac{9}{L^2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[ \int_A (y^2 \xi^2 E) dA \right] dx \Rightarrow K_{N_{55}} = -\frac{9}{L^2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \xi^2 dx \cdot \int_A (y^2 E) dA \xrightarrow[(2.86)]{(2.82)}$$

$$K_{N_{55}} = -\frac{9}{L^2} \cdot \frac{L}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^n (E_i \cdot A_i \cdot y_i^2) \Rightarrow K_{N_{55}} = -\frac{1}{L} \cdot \sum_{i=1}^n (E_i \cdot A_i \cdot y_i^2)$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε τον τελευταίο όρο του φυσικού μητρώου στιβαρότητας

$$K_{N_{66}} = \frac{G}{2} \left\{ \left[ \frac{\partial(\Psi(y,z))}{\partial y} - z \right]^2 + \left[ \frac{\partial(\Psi(y,z))}{\partial z} + y \right]^2 \right\}$$

θα πρέπει να γνωρίζουμε την έκφραση της συνάρτησης στρέβλωσης  $\Psi$ .

Στην περίπτωση που δεν λαμβάνουμε υπόψιν τη στρέβλωση και δεχόμαστε σταθερό μέτρο διάτμησης  $G$  κατά μήκος του στοιχείου και κατά την ιστορία της φόρτισης, δηλαδή θεωρούμε  $\Psi=0$ , προκύπτει ότι:

$$K_{N_{66}} = \frac{1}{L^2} \cdot \int_V \left( \frac{G}{2} \{ z^2 + y^2 \} \right) dV \Rightarrow$$

$$K_{N_{66}} = \frac{1}{2L^2} \cdot \int_V (G \cdot z^2) dV + \int_V (G \cdot y^2) dV \Rightarrow$$

$$K_{N_{66}} = \frac{1}{2L^2} \cdot \int_V (G \cdot z^2) dV + \frac{1}{2L^2} \cdot \int_V (G \cdot y^2) dV \Rightarrow$$

$$K_{N_{66}} = \frac{1}{2L^2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (G \cdot z^2) dz dy dx + \frac{1}{2L^2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (G \cdot y^2) dz dy dx \Rightarrow$$

$$K_{N_{66}} = \frac{1}{2L^2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \cdot \int_A (G \cdot z^2) dA + \frac{1}{2L^2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \cdot \int_A (G \cdot y^2) dA \xrightarrow[(2.84)]{(2.82),(2.83)}$$

$$K_{N_{66}} = \frac{1}{2L^2} \cdot L \cdot \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^n (G_i \cdot A_i \cdot z_i^2) + \frac{1}{2L^2} \cdot L \cdot \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^n (G_i \cdot A_i \cdot y_i^2) \Rightarrow$$

$$K_{N_{66}} = \frac{1}{6L} \cdot \sum_{i=1}^n (G_i \cdot z_i^2) + \frac{1}{6L} \cdot \sum_{i=1}^n (G_i \cdot y_i^2)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω το φυσικό μητρώο στιβαρότητας γίνεται ίσο με:

$$[K_N] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n (E_i A_i) & \frac{1}{2L} \sum_{i=1}^n (E_i A_i z_i) & 0 & \frac{1}{2L} \sum_{i=1}^n (E_i A_i y_i) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2L} \sum_{i=1}^n (E_i A_i z_i) & \frac{1}{3L} \sum_{i=1}^n (E_i A_i z_i^2) & 0 & \frac{1}{4L} \sum_{i=1}^n (E_i A_i y_i z_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n (E_i A_i z_i^2) & 0 & \frac{3}{4L} \sum_{i=1}^n (E_i A_i y_i z_i) & 0 \\ \frac{1}{2L} \sum_{i=1}^n (E_i A_i y_i) & \frac{1}{4L} \sum_{i=1}^n (E_i A_i y_i z_i) & 0 & \frac{1}{3L} \sum_{i=1}^n (E_i A_i y_i^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4L} \sum_{i=1}^n (E_i A_i y_i z_i) & 0 & -\frac{1}{L} \sum_{i=1}^n (E_i A_i y_i^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6L} \sum_{i=1}^n (G_i z_i^2) + \frac{1}{6L} \sum_{i=1}^n (G_i y_i^2) \end{bmatrix}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Steiner, η ροπή αδράνειας κάθε υποεπιφάνειας ως προς τον άξονα y,z ισούται με το άθροισμα της ροπής αδράνειας ως προς τον κεντροβαρικό άξονα της υποεπιφάνειας τον παράλληλο αντίστοιχα με τον y,z και του γινομένου του εμβαδού της υποεπιφάνειας επί την απόσταση του κέντρου βάρους της επιφάνειας από τον άξονα y,z

$$I_{y_i} = I_{y_{KB_i}} + A_i \cdot \left( z_i - \frac{h_i}{2} \right)^2$$

$$I_{z_i} = I_{z_{KB_i}} + A_i \cdot \left( y_i - \frac{b_i}{2} \right)^2$$

Οι όροι  $I_{y_{KB_i}}$ ,  $I_{z_{KB_i}}$  είναι πολύ μικρότεροι των όρων  $A_i \cdot \left( z_i - \frac{h_i}{2} \right)^2$ ,  $A_i \cdot \left( y_i - \frac{b_i}{2} \right)^2$  αντίστοιχα και

τους αμελούμε. Το άθροισμα των ροπών αδράνειας όλων των υποεπιφανειών ισούται με τη ροπή αδράνειας της διατομής της δοκού. Αυτή είναι και η φυσική σημασία της προσέγγισης του ολοκληρώματος με το άθροισμα της υπό ολοκλήρωση ποσότητας στο σύνολο των ινών.

Για το λόγο αυτό στην περίπτωση επίπεδων προβλημάτων (για αυτά οι εκτός της κυρίας διαγωνίου όροι μηδενίζονται) με το ίδιο μέτρο ελαστικότητας για όλες τις ίνες, το μητρώο στιβαρότητας παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$[K_N] = \begin{bmatrix} \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E \cdot I_y}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3 \cdot E \cdot I_y}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E \cdot I_z}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3 \cdot E \cdot I_z}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G \cdot I_P}{L} \end{bmatrix}$$

Για την προσέγγιση των ανελαστικών παραμορφώσεων με ικανοποιητική ακρίβεια κατά μήκος ενός δομικού μέλους ( μίας δοκού ή ενός υποστυλώματος), θα πρέπει να προσομοιώσουμε το δομικό μέλος με περισσότερα από ένα φυσικά στοιχεία δοκού. Το μειονέκτημα αυτό που χαρακτηρίζει γενικά τα φυσικά στοιχεία μετατοπίσεων αντιμετωπίζεται, όπως αναφέρεται στο επόμενο κεφάλαιο, με τη χρησιμοποίηση του φυσικού στοιχείου δυνάμεων.

Για τον προσδιορισμό των τάσεων σε κάθε ένα κάθε στοιχείου, επιλέγουμε για κάθε στοιχείο μία χαρακτηριστική θέση  $\xi_0$  στην οποία θα υπολογίσουμε τις παραμορφώσεις και κατόπιν μέσω του καταστατικού νόμου θα εξάγουμε τις αντίστοιχες τάσεις. Διακρίνουμε δύο εναλλακτικές:

- Ως χαρακτηριστική θέση επιλέγεται η **μεσαία διατομή του στοιχείου**. (συνηθέστερη μεθοδολογία)
- Ως χαρακτηριστικές διατομές επιλέγονται **οι δύο ακραίες διατομές του στοιχείου** και χρησιμοποιούμε τον μέσο όρο των παραμορφώσεων των δύο ακραίων διατομών.

## 2.6.2 Υπολογισμός του φυσικού μητρώου στιβαρότητας $[K_N]$ με αριθμητική ολοκλήρωση

### Εισαγωγικά στοιχεία για την αριθμητική ολοκλήρωση

Καταφεύγουμε στην αριθμητική ολοκλήρωση διότι η αναλυτική ολοκλήρωση του μητρώου στιβαρότητας καθίσταται **εξαιρετικά δύσχερης έως αδύνατη** ιδιαίτερα σε στοιχεία ανωτέρου βαθμού. Κατά τον υπολογισμό αυτό, οι παραμορφώσεις ελέγχονται στις διατομές, οι θέσεις των οποίων έχουν επιλεγθεί ως σημεία ολοκλήρωσης. Διακρίνουμε την αριθμητική ολοκλήρωση κατά **Gauss** και την αριθμητική ολοκλήρωση κατά **Gauss-Lobatto**.

Το μητρώο στιβαρότητας δίνεται από το ολοκλήρωμα  $\int F(\xi)d\xi$ , το οποίο υπολογίζεται από τον ακόλουθο τύπο της αριθμητικής ολοκλήρωσης:

$$\int F(\xi)d\xi = \sum_{i=1}^n [w_i \cdot F(\xi_i)] + [e_n] \Rightarrow \int F(\xi)d\xi \approx \sum_{i=1}^n [w_i \cdot F(\xi_i)]$$

όπου

- το άθροισμα περιλαμβάνει όλα τα σημεία του στοιχείου που καθορίζονται από το δείκτη  $i=1, \dots, n$ . Πρόκειται για τα λεγόμενα **σημεία ολοκλήρωσης**. Ως σημείο ολοκλήρωσης ονομάζουμε τη διατομή του στοιχείου, στην οποία επιλέγουμε να υπολογίσουμε το προς ολοκλήρωση μητρώο  $F(\xi)$ .
- **n** : ο συνολικός αριθμός των σημείων ολοκλήρωσης, ο οποίος επιλέγεται ανάλογα με τον τύπο της αριθμητικής ολοκλήρωσης, τον τύπο του στοιχείου και τις χαρακτηριστικές του ιδιότητες.
- οι συντελεστές  $W_i$  είναι οι λεγόμενοι **συντελεστές βάρους**.
- το  $F(\xi_i)$  είναι το μητρώο  $F(\xi)$  υπολογισμένο στα σημεία-διατομές ολοκλήρωσης  $i$  του στοιχείου.
- το μητρώο  $[e_n]$  είναι το λεγόμενο **μητρώο σφάλματος**, το οποίο προφανώς δεν υπολογίζουμε.

Αρκεί να εξετάσουμε αναλυτικά την αριθμητική ολοκλήρωση ενός μόνο όρου  $f(\xi)$  του μητρώου  $[F(\xi)]$ , καθώς η αριθμητική ολοκλήρωση του μητρώου  $[F(\xi)]$  επαναλαμβάνεται χωριστά για κάθε όρο του.

Η αριθμητική ολοκλήρωση  $\int_a^b f(\xi)d\xi$  πραγματοποιείται με την παρεμβολή ενός πολυωνύμου  $\psi(\xi)$  μεταξύ καθορισμένων τιμών του  $f(\xi)$  και στη συνέχεια ο υπολογισμός του ολοκληρώματος  $\int_a^b \psi(\xi)d\xi$  αποτελεί την αριθμητική προσέγγιση του ζητούμενου ολοκληρώματος  $\int_a^b f(\xi)d\xi$ . Ο αριθμός των σημείων από τα οποία θα περάσει το πολυώνυμο  $\psi(\xi)$  καθορίζει το μέγεθος του σφάλματος της αριθμητικής ολοκλήρωσης. Με τη χρήση των πολυωνύμων παρεμβολής Lagrange βαθμού  $n-1$  :

$$L_i(\xi) = \frac{(\xi_1 - \xi) \cdot (\xi_2 - \xi) \cdot \dots \cdot (\xi_{i-1} - \xi) \cdot (\xi_{i+1} - \xi) \cdot \dots \cdot (\xi_n - \xi)}{(\xi_1 - \xi_i) \cdot (\xi_2 - \xi_i) \cdot \dots \cdot (\xi_{i-1} - \xi_i) \cdot (\xi_{i+1} - \xi_i) \cdot \dots \cdot (\xi_n - \xi_i)}$$

$$L_i(\xi_j) = \delta_{ij} \text{ (δέλτα του Kronecker)} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ -1, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

το πολυώνυμο  $\psi(\xi)$  υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\psi(\xi) = f(\xi_1) \cdot L_1(\xi) + f(\xi_2) \cdot L_2(\xi) + \dots + f(\xi_n) \cdot L_n(\xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot L_i(\xi)$$

### Αριθμητική ολοκλήρωση κατά Gauss

Η αριθμητική ολοκλήρωση Gauss είναι μία αποτελεσματική μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης, στην οποία τόσο οι θέσεις των σημείων-διατομών ολοκλήρωσης  $\xi_i$  όσο και οι συντελεστές βάρους  $w_i$  είναι μεταβλητές ποσότητες.

$$\int_{\alpha}^b f(\xi) d\xi = w_1 \cdot f(\xi_1) + w_2 \cdot f(\xi_2) + \dots + w_n \cdot f(\xi_n) + e_n \quad (2.87)$$

Εφόσον οι θέσεις των σημείων-διατομών ολοκλήρωσης είναι άγνωστες, θα πρέπει να τις υπολογίσουμε. Ορίζουμε τη **συνάρτηση παρεμβολής** :

$$\psi(\xi) = (\xi - \xi_1) \cdot (\xi - \xi_2) \cdot \dots \cdot (\xi - \xi_n) \quad (2.88)$$

Πρόκειται για ένα πολυώνυμο  $n$  βαθμού, το οποίο μηδενίζεται στις άγνωστες θέσεις των σημείων-διατομών ολοκλήρωσης  $\xi_i$  ( $i=1, \dots, n$ ).

$$f(\xi) = \psi(\xi) + e(\xi) \quad (2.89)$$

Έστω  $e(\xi) = \varphi(\xi) \cdot (\beta_0 + \beta_1 \cdot \xi + \beta_2 \cdot \xi^2 + \dots)$  τότε έχουμε ότι:

$$e(\xi) = \varphi(\xi) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} [\beta_j \cdot \xi^j] \quad (2.90)$$

Επιπλέον:

$$(2.87) \xrightarrow{(2.88)} \int_{\alpha}^b f(\xi) d\xi = \int_{\alpha}^b \psi(\xi) d\xi + \int_{\alpha}^b e(\xi) d\xi \Rightarrow$$

$$\int_{\alpha}^b f(\xi) d\xi = \int_{\alpha}^b \left\{ \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) \cdot L_i(\xi)] \right\} d\xi + \int_{\alpha}^b \left\{ \varphi(\xi) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} [\beta_j \cdot \xi^j] \right\} d\xi$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n \left\{ f(\xi_i) \cdot \left[ \int_a^b L_i(\xi) d\xi \right] \right\} + \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \beta_j \cdot \int_a^b \left[ \xi^j \cdot \varphi(\xi) \right] d\xi \right\} \quad (2.91)$$

Οι άγνωστες θέσεις  $\xi_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) των σημείων-διατομών ολοκλήρωσης προκύπτουν από τη συνθήκη:

$$\int_a^b \left[ \varphi(\xi) \cdot \xi^k \right] d\xi = 0, \text{ όπου } k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2.92)$$

Από τη συνθήκη (2.89) συμπεραίνουμε ότι το ολοκλήρωμα  $\int_a^b f(\xi) d\xi$  προσεγγίζεται με την ολοκλήρωση ενός πολυωνύμου βαθμού  $(2n-1)$  αντί της  $f(\xi)$ . Με την ολοκλήρωση Gauss χρησιμοποιούμε  $n$  μη ισαπέχοντα και συμμετρικά ως προς το κέντρο σημεία ολοκλήρωσης και υπολογίζουμε με ακρίβεια ένα πολυώνυμο βαθμού μέχρι  $(2n-1)$ .

Για τον προσδιορισμό των θέσεων των σημείων-διατομών ολοκλήρωσης  $\xi_i$  και των αντίστοιχων συντελεστών βάρους  $w_i$ , κανονικοποιούμε το καρτεσιανό διάστημα  $(a, b)$  στο φυσικό διάστημα  $(-1, 1)$ .

$$x_i = \frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2} \cdot \xi_i \quad (2.93)$$

$$w_i = \frac{(b-a)}{2} \cdot w_i' \quad (2.94)$$

όπου  $w_i'$  οι συντελεστές βάρους στο διάστημα  $(-1, 1)$  του φυσικού συστήματος.

Συνεπώς, οι θέσεις  $\xi_i$  προκύπτουν από τη σχέση (2.92) με  $a=-1$  και  $\beta=1$  και οι συντελεστές βάρους από τη σχέση (2.87) μετά την αντικατάσταση της  $f(\xi)$  με το πολυώνυμο  $\varphi(\xi)$  της σχέσης (2.88) και την εκτέλεση της ολοκλήρωσης. Έτσι, οι συντελεστές βάρους προκύπτουν ίσοι με :

$$a_j = \int_{-1}^1 L_j(\xi) d\xi, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.95)$$

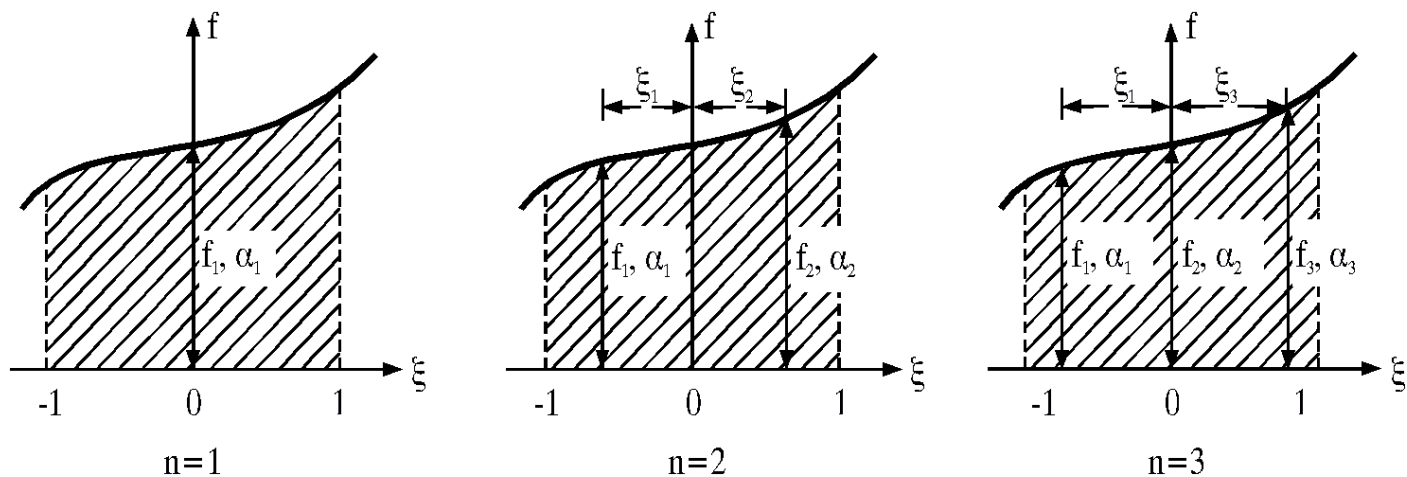
Στον πίνακα 2.1 παρουσιάζονται οι θέσεις  $\xi_i$  των σημείων-διατομών ολοκλήρωσης και οι αντίστοιχοι συντελεστές βάρους  $w_i$  για  $i=1, \dots, n$ .

Πλήθος σημείων-διατομών ολοκλήρωσης	Θέση σημείων-διατομών ολοκλήρωσης	Συντελεστές βάρους
$n$	$\xi_i$	$w_i$
1	0,0	2,0
2	$\pm 0,57735$	1,0
3	$\pm 0,577460$	0,55556
	0,0	0,88889
4	$\pm 0,86114$	0,34786
	$\pm 0,33998$	0,65215
5	$\pm 0,90618$	0,23693
	$\pm 0,53847$	0,47863
	0,0	0,56889
6	$\pm 0,93247$	0,17132
	$\pm 0,66121$	0,36076
	$\pm 0,23862$	0,46791
7	$\pm 0,94911$	0,12949
	$\pm 0,74153$	0,27971
	$\pm 0,40585$	0,38183
	0,0	0,41796
8	$\pm 0,96029$	0,10123
	$\pm 0,79667$	0,22238
	$\pm 0,52553$	0,31371
	$\pm 0,18344$	0,36268
9	$\pm 0,96816$	0,08127
	$\pm 0,83603$	0,18065
	$\pm 0,61337$	0,26061
	$\pm 0,32425$	0,31235
	0,0	0,33024

Πίνακας 2.1 Συντεταγμένες σημείων και συντελεστές βάρους αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss στο φυσικό διάστημα (-1,1)



Στο σχήμα 2.14 παραθέτουμε ενδεικτικά τον αριθμητικό υπολογισμό της διαγραμμισμένης επιφάνειας για 1, 2 και 3 σημεία Gauss.

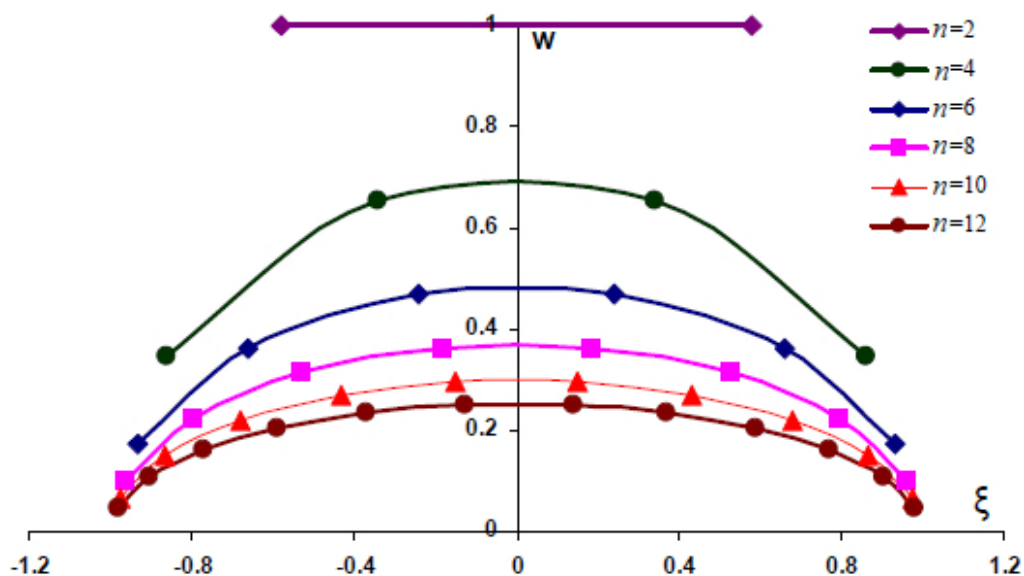


Σχήμα 2.14 Αριθμητικός υπολογισμός κατά Gauss της διαγραμμισμένης επιφάνειας για n=1,2,3

Επιλέγοντας τον αριθμό n των σημείων-διατομών ολοκλήρωσης, από τον πίνακα 2.1 προσδιορίζουμε τις θέσεις  $\xi_i$  των σημείων αυτών και τους αντίστοιχους συντελεστές ολοκλήρωσης  $w_i$ . Με τη γνώση αυτών, είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης f ως τον σταθμισμένο μέσο όρο των n τιμών της συνάρτησης στις θέσεις-διατομές  $\xi_i$  :

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \frac{\sum_{i=1}^n [w_i \cdot f(\xi_i)]}{\sum_{i=1}^n w_i} \Rightarrow \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \frac{\sum_{i=1}^n [w_i \cdot f(\xi_i)]}{2}$$

Στο σχήμα 2.15 απεικονίζεται γραφικά η σχέση μεταξύ των θέσεων  $\xi_i$  και των συντελεστών  $w_i$ . Στο ίδιο σχήμα παρατηρούμε ότι η τιμή του συντελεστή βάρους αυξάνεται καθώς προχωρούμε από τα άκρα προς τη μεσαία διατομή του στοιχείου.



Σχήμα 2.15 Κατανομή των σημείων ολοκλήρωσης  $\xi_i$  κατά Gauss και των συντελεστών βάρους  $w_i$

## Αριθμητική ολοκλήρωση κατά Gauss-Lobatto

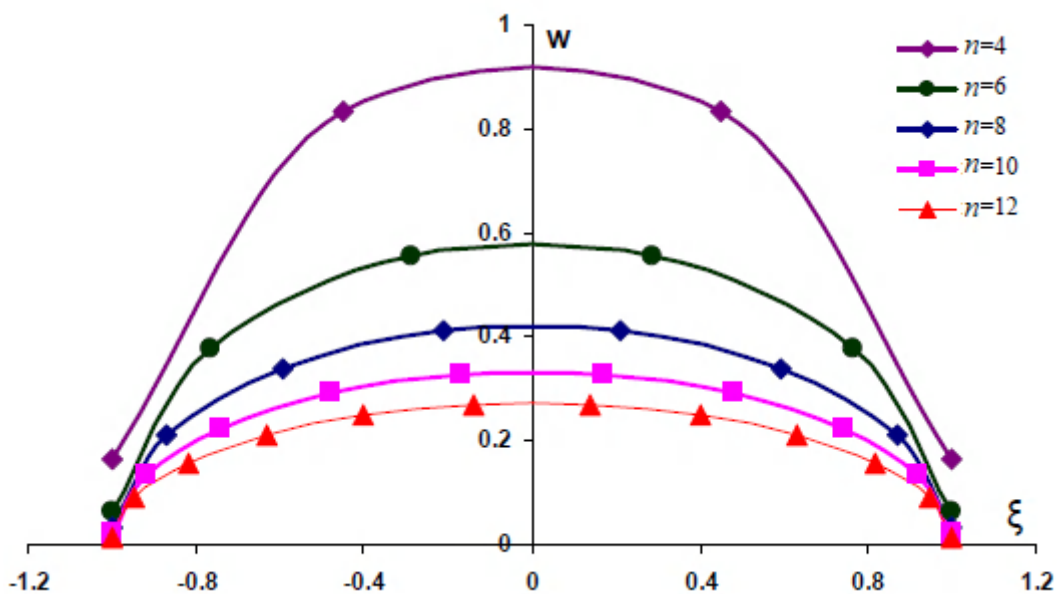
Η αριθμητική ολοκλήρωση Gauss-Lobatto είναι πανομοιότυπη με την αριθμητική ολοκλήρωση Gauss με τη διαφορά ότι **λαμβάνει πάντα ως σημεία-διατομές ολοκλήρωσης τις δύο ακραίες διατομές** του στοιχείου δοκού. Με την ολοκλήρωση Gauss-Lobatto **χρησιμοποιούμε  $n$  μη ισαπέχοντα και συμμετρικά ως προς το κέντρο σημεία ολοκλήρωσης** και **υπολογίζουμε με ακρίβεια ένα πολυώνυμο βαθμού μέχρι  $(2n-3)$** .

Στον πίνακα 2.2 παρουσιάζονται οι θέσεις  $\xi_i$  των σημείων-διατομών ολοκλήρωσης και οι αντίστοιχοι συντελεστές βάρους  $w_i$  για  $i=1, \dots, n$ .

Επιλέγοντας τον αριθμό  $n$  των σημείων-διατομών ολοκλήρωσης, από τον πίνακα 2.2 προσδιορίζουμε τις θέσεις  $\xi_i$  των σημείων αυτών και τους αντίστοιχους συντελεστές ολοκλήρωσης  $w_i$ . Με τη γνώση αυτών, είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης  $f$  ως τον σταθμισμένο μέσο όρο των  $n$  τιμών της συνάρτησης στις θέσεις-διατομές  $\xi_i$  :

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \frac{\sum_{i=1}^n [w_i \cdot f(\xi_i)]}{\sum_{i=1}^n w_i} \Rightarrow \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \frac{\sum_{i=1}^n [w_i \cdot f(\xi_i)]}{2} \Rightarrow$$
$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \frac{\sum_{i=1}^n \left\{ w_1 \cdot f(-1) + \sum_{i=2}^{n-1} [w_i \cdot f(\xi_i)] + w_n \cdot f(+1) \right\}}{2}$$

Στο σχήμα 2.16 απεικονίζεται γραφικά η σχέση μεταξύ των θέσεων  $\xi_i$  και των συντελεστών  $w_i$ . Στο ίδιο σχήμα παρατηρούμε ότι η τιμή του συντελεστή βάρους αυξάνεται καθώς προχωρούμε από τα άκρα προς τη μεσαία διατομή του στοιχείου.



**Σχήμα 2.16** Κατανομή των σημείων ολοκλήρωσης  $\xi_i$  κατά Gauss-Lobatto και των συντελεστών βάρους  $w_i$

<i>Πλήθος σημείων-διατομών ολοκλήρωσης <math>n</math></i>	<i>Θέση σημείων-διατομών ολοκλήρωσης <math>\xi_i</math></i>	<i>Συντελεστές βάρους <math>w_i</math></i>
1	-	-
2	$\pm 1,0$	1,0
3	$\pm 1,0$	0,33333
	0,0	1,33333
4	$\pm 1,0$	0,16667
	$\pm 0,44721$	0,83333
5	$\pm 1,0$	0,1
	$\pm 0,65465$	0,54444
	0,0	0,71111
6	$\pm 1,0$	0,06667
	$\pm 0,76506$	0,37848
	$\pm 0,28523$	0,55486
7	$\pm 1,0$	0,04762
	$\pm 0,83022$	0,27683
	$\pm 0,49885$	0,43175
	0,0	0,48762
8	$\pm 1,0$	0,03571
	$\pm 0,87174$	0,21070
	$\pm 0,5917$	0,34112
	$\pm 0,20930$	0,41246
9	$\pm 1,0$	0,02778
	$\pm 0,89976$	0,16550
	$\pm 0,67719$	0,27454
	$\pm 0,36312$	0,34643
	0,0	0,37152

**Πίνακας 2.2** Συντεταγμένες σημείων και συντελεστές βάρους αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss-Lobatto στο φυσικό διάστημα  $(-1,1)$

## Σύγκριση των δύο μεθόδων

Όπως έχουμε αναφέρει, και στις δύο μεθόδους ως σημεία ολοκλήρωσης εννοούμε διατομές, καθεμία εκ των οποίων διαιρείται σε ίνες. Αν για ένα στοιχείο επιλέξουμε  $n_1$  σημεία-διατομές ολοκλήρωσης και διαιρέσουμε κάθε διατομή ολοκλήρωσης σε  $n_2$  ίνες, θα έχουμε να εξετάσουμε  $(n_1 \cdot n_2)$  υποεπιφάνειες.

Σε αντίθεση με τον “αναλυτικό” υπολογισμό του φυσικού μητρώου στιβαρότητας  $[K_N]$ , στον οποίο ο υπολογισμός των τάσεων πραγματοποιείται **1 φορά** στη μεσαία διατομή του στοιχείου (ή δύο φορές στις ακραίες διατομές του στοιχείου και η τάση προκύπτει ως ο μέσος όρος των τάσεων των ακραίων αυτών διατομών), στις δύο μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss, Gauss-Lobatto **οι τάσεις υπολογίζονται σε η διατομές**, στις λεγόμενες διατομές ολοκλήρωσης. Μπορεί το γεγονός αυτό να συνεπάγεται **σημαντική αύξηση του υπολογιστικού χρόνου**, που μεταφράζεται σε κόστος, εντούτοις επιτυγχάνουμε **καλύτερη παρακολούθηση των τάσεων εντός του στοιχείου και μεγαλύτερης ακρίβειας προσέγγιση του φορτίου καταρρεύσεως**. Επιπλέον, οι όροι του μητρώου στιβαρότητας  $K_{N_{13}}, K_{N_{15}}, K_{N_{23}}, K_{N_{25}}, K_{N_{34}}, K_{N_{45}}$  σύμφωνα με τον “αναλυτικό” υπολογισμό προκύπτουν μηδενικοί, ενώ σύμφωνα με την αριθμητική ολοκλήρωση προκύπτουν διάφοροι του μηδενός στην περίπτωση μη συμμετρικής πλαστικοποίησης. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τόσο η μέθοδος Gauss όσο και η Gauss-Lobatto να **προσομοιώνουν πολύ καλύτερα την πλαστικοποίηση του στοιχείου στην περίπτωση διαξονικής φόρτισης**.

Γνωρίζουμε ότι η κατανομή των ανηγμένων παραμορφώσεων κατά μήκος μίας δοκού έχει συνήθως μία από τις ακόλουθες μορφές:

- Οι ανηγμένες παραμορφώσεις μειώνονται καθώς προχωρούμε από τις ακραίες προς τη μεσαία διατομή της δοκού.
- Οι ανηγμένες παραμορφώσεις μειώνονται καθώς προχωρούμε από τη μία ακραία διατομή προς την άλλη ακραία διατομή της δοκού.

Οι παραπάνω δύο κατανομές δεν συμπίπτουν με την κατανομή των συντελεστών βάρους τόσο για τη Gauss όσο και για τη Gauss-Lobatto μέθοδο, καθώς όπως παρατηρήσαμε στα σχήματα 2.15 και 2.16 οι συντελεστές βάρους παίρνουν τη μέγιστή τους τιμή στο μέσο του στοιχείου και την ελάχιστη στα άκρα. Για το σκοπό αυτό **είμαστε υποχρεωμένοι να προσομοιώνουμε μία δοκό ή και ένα υποστύλωμα με περισσότερα από ένα στοιχεία** προκειμένου να πετύχουμε ικανοποιητικής ακρίβειας αποτελέσματα. Αυτό ωστόσο δεν σημαίνει ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των σημείων ολοκλήρωσης, τόσο πιο βέλτιστα θα είναι τα αποτελέσματα. Αντίθετα, έχει παρατηρηθεί ότι **η μέγιστη ακρίβεια επιτυγχάνεται συνήθως για 2-6 σημεία-διατομές ολοκλήρωσης**.

Τέλος, να σημειώσουμε ότι η αριθμητική ολοκλήρωση Gauss πετυχαίνει πιο ακριβή υπολογισμό του φορτίου κατάρρευσης σε σχέση με τη Gauss-Lobatto, ενώ η Gauss-Lobatto έχει επικρατήσει σε συνδυασμό με το φυσικό στοιχείο δυνάμεων, όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 3, στον τομέα της μη γραμμικής ανάλυσης πλαισιακών κατασκευών, στις οποίες οι πλαστικές αρθρώσεις σχηματίζονται ως επί το πλείστον στις ακραίες διατομές των δομικών μελών (δοκαριών ή υποστυλωμάτων).

## 2.7 Υπολογισμός των εντατικών μεγεθών του φορέα

Προκειμένου να υπολογίσουμε τα εντατικά μεγέθη ενός πλαισιακού φορέα στο καθολικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ακολουθούμε την παρακάτω πορεία :

- 1) Έχοντας προσδιορίσει το φυσικό μητρώο στιβαρότητας  $[K_N]$  κάθε στοιχείου του φορέα, με έναν από τους τρόπους που αναλύσαμε στην ενότητα 2.6, έχουμε τη δυνατότητα να εξάγουμε το αντίστοιχο μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου στο τοπικό  $[K]$  και κατόπιν στο καθολικό  $\begin{bmatrix} - \\ K \end{bmatrix}$  καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων μέσω των σχέσεων:

$$\begin{bmatrix} K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_N \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} K_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_N \end{bmatrix}$$

$(12 \times 12) \quad (12 \times 6) \quad (6 \times 6) \quad (6 \times 12)$

$$\begin{bmatrix} - \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{04} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{04} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} - \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{04} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \alpha_N \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} K_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{04} \end{bmatrix}$$

$(12 \times 12) \quad (12 \times 12) \quad (12 \times 12) \quad (12 \times 12) \quad (12 \times 12) \quad (12 \times 6) \quad (6 \times 6) \quad (6 \times 12) \quad (12 \times 12)$

όπου το μητρώο  $\begin{bmatrix} \alpha_N \end{bmatrix}$  δίνεται από τη σχέση (2.33) και το μητρώο  $\begin{bmatrix} T_{04} \end{bmatrix}$  δίνεται από τη σχέση (2.17).

- 2) Έχοντας υπολογίσει το καθολικό μητρώο στιβαρότητας κάθε στοιχείου της φέρουσας κατασκευής, μορφώνουμε το συνολικό καθολικό μητρώο στιβαρότητας του φορέα.

- 3) Γνωρίζοντας το καθολικό μητρώο στιβαρότητας του φορέα  $\begin{bmatrix} - \\ K_{ολ} \end{bmatrix}$  και το διάνυσμα της

εξωτερικής φόρτισης  $\begin{bmatrix} - \\ P_{εξ} \end{bmatrix}$  που ασκείται στο συγκεκριμένο φορέα στο καθολικό

καρτεσιανό σύστημα, μορφώνουμε και επιλύουμε την εξίσωση ισορροπίας στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων.

$$\begin{bmatrix} - \\ P_{εξ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \\ K_{ολ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} - \\ d_{ολ} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} - \\ d_{ολ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \\ K_{ολ} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} - \\ P_{εξ} \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

$(12N \times 1) \quad (12N \times 12N) \quad (12N \times 1) \quad (12N \times 1) \quad (12N \times 12N) \quad (12N \times 1)$

Από την εξίσωση (2.96) προκύπτει το διάνυσμα των καθολικών καρτεσιανών επικόμβιων μετακινήσεων  $\begin{bmatrix} - \\ d_{ολ} \end{bmatrix}$  του φορέα, από το οποίο μπορούμε να εξάγουμε το διάνυσμα των

καθολικών καρτεσιανών επικόμβιων μετακινήσεων  $\begin{bmatrix} - \\ d \end{bmatrix}$  κάθε στοιχείου.

- 4) Υπενθυμίζουμε τη σχέση μεταξύ του διανύσματος των φυσικών μορφών παραμόρφωσης  $[\rho_N]$ , του διανύσματος των τοπικών καρτεσιανών επικόμβιων μετακινήσεων  $[d]$  και του διανύσματος των καθολικών καρτεσιανών επικόμβιων μετακινήσεων  $[\bar{d}]$  ενός στοιχείου.

$$(2.34) \Rightarrow \underset{(6 \times 1)}{[\rho_N]} = \underset{(6 \times 12)}{[\alpha_N]} \cdot \underset{(12 \times 1)}{[d]} \Rightarrow \underset{(6 \times 1)}{[\rho_N]} = \underset{(6 \times 12)}{[\alpha_N]} \cdot \underset{(12 \times 12)}{[T_{04}]} \cdot \underset{(12 \times 1)}{[\bar{d}]}$$

Υπολογίζουμε μέσω της σχέσης (2.34) το διάνυσμα των τοπικών καρτεσιανών επικόμβιων μετακινήσεων  $[d]$  :

$$\underset{(12 \times 1)}{[d]} = \underset{(12 \times 12)}{[T_{04}]} \cdot \underset{(12 \times 1)}{[\bar{d}]}$$

και το διάνυσμα των φυσικών μορφών παραμόρφωσης  $[\rho_N]$  :

$$\underset{(6 \times 1)}{[\rho_N]} = \underset{(6 \times 12)}{[\alpha_N]} \cdot \underset{(12 \times 1)}{[d]}$$

- 5) Μορφώνοντας την εξίσωση ισορροπίας κάθε στοιχείου στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων, προσδιορίζουμε το αντίστοιχο διάνυσμα των φυσικών εσωτερικών εντατικών μεγεθών  $[P_N]$ .

$$\underset{(6 \times 1)}{[P_N]} = \underset{(6 \times 6)}{[K_N]} \cdot \underset{(6 \times 1)}{[\rho_N]}$$

Για τα φυσικά εντατικά μεγέθη χρησιμοποιούμε την ακόλουθη σύμβαση προσήμων, η οποία ισχύει και για τα δύο άκρα του στοιχείου:

- θετική αξονική δύναμη : η αξονική δύναμη με φορά προς τα δεξιά
- θετική τέμνουσα δύναμη : η τέμνουσα δύναμη με φορά προς τα πάνω
- θετική ροπή : η ροπή με ωρολογιακή φορά

Ειδικότερα, για τις δύο ακραίες διατομές του στοιχείου έχουμε ότι:

### Αριστερό άκρο

- Αξονική δύναμη :  $N_x = - | F_N |$  (σχήμα 2.10.1)
- Τέμνουσα δύναμη κατά τον τοπικό καρτεσιανό άξονα y :  $V_y = + | \frac{2 \cdot M_A^1}{L} |$
- Τέμνουσα δύναμη κατά τον τοπικό καρτεσιανό άξονα z :  $V_z = + | \frac{2 \cdot M_A^2}{L} |$
- Ροπή στρέψης περί τον τοπικό καρτεσιανό άξονα x :  $M_x = | M_T |$  (σχήμα 2.10.6)
- Ροπή κάμψης περί τον τοπικό καρτεσιανό άξονα y :  $M_y = - | M_S^1 | - | M_A^1 |$   
(σχήμα 2.10.2, 2.10.3)
- Ροπή κάμψης περί τον τοπικό καρτεσιανό άξονα z :  $M_z = - | M_S^2 | - | M_A^2 |$   
(σχήμα 2.10.4, 2.10.5)

### Δεξιό άκρο

- Αξονική δύναμη :  $N_x = + | F_N |$  (σχήμα 2.10.1)
- Τέμνουσα δύναμη κατά τον τοπικό καρτεσιανό άξονα y :  $V_y = - | \frac{2 \cdot M_A^1}{L} |$
- Τέμνουσα δύναμη κατά τον τοπικό καρτεσιανό άξονα z :  $V_z = - | \frac{2 \cdot M_A^2}{L} |$
- Ροπή στρέψης περί τον τοπικό καρτεσιανό άξονα x :  $M_x = | M_T |$  (σχήμα 2.10.6)
- Ροπή κάμψης περί τον τοπικό καρτεσιανό άξονα y :  $M_y = + | M_S^1 | - | M_A^1 |$   
(σχήμα 2.10.2, 2.10.3)
- Ροπή κάμψης περί τον τοπικό καρτεσιανό άξονα z :  $M_z = + | M_S^2 | - | M_A^2 |$   
(σχήμα 2.10.4, 2.10.5)

- 6) Το αντίστοιχο διάνυσμα των εντατικών μεγεθών  $[P]$  κάθε στοιχείου στο τοπικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ισούται με:

$$\underset{(12 \times 1)}{[P]} = \underset{(12 \times 6)}{[\alpha_N]}^T \cdot \underset{(6 \times 1)}{[P_N]}$$

- 7) Το αντίστοιχο διάνυσμα των εντατικών μεγεθών  $\underset{(12 \times 1)}{\begin{bmatrix} - \\ P \end{bmatrix}}$  κάθε στοιχείου στο καθολικό

καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων είναι ίσο με:

$$\underset{(12 \times 1)}{\begin{bmatrix} - \\ P \end{bmatrix}} = \underset{(12 \times 12)}{[T_{04}]}^{-1} \cdot \underset{(12 \times 1)}{[P]} \Rightarrow \underset{(12 \times 1)}{\begin{bmatrix} - \\ P \end{bmatrix}} = \underset{(12 \times 12)}{[T_{04}]}^{-1} \cdot \underset{(12 \times 6)}{[\alpha_N]}^T \cdot \underset{(6 \times 1)}{[P_N]}$$

- 8) Έχοντας υπολογίσει το διάνυσμα των εσωτερικών εντατικών μεγεθών  $\underset{(12 \times 1)}{\begin{bmatrix} - \\ P \end{bmatrix}}$  κάθε στοιχείου

στο καθολικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, μορφώνουμε το συνολικό διάνυσμα των

εσωτερικών δράσεων  $\underset{(12N \times 1)}{\begin{bmatrix} - \\ P_{\varepsilon\sigma} \end{bmatrix}}$  του πλαισιακού φορέα, τον οποίο διακριτοποιήσαμε σε N

φυσικά στοιχεία μετατοπίσεων.

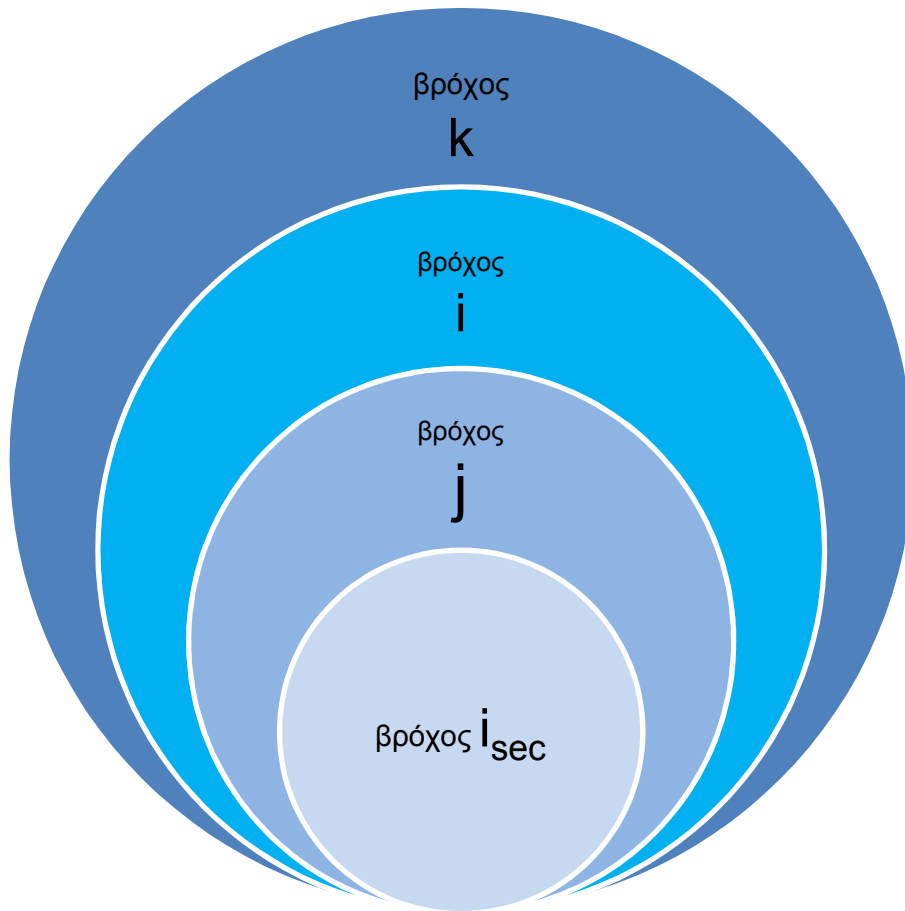
- 9) Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται έως ότου το καθολικό διάνυσμα των εσωτερικών δράσεων

του φορέα  $\underset{(12N \times 1)}{\begin{bmatrix} - \\ P_{\varepsilon\sigma} \end{bmatrix}}$  εξισωθεί με το καθολικό διάνυσμα των εξωτερικών δράσεων του φορέα

$\underset{(12N \times 1)}{\begin{bmatrix} - \\ P_{\varepsilon\xi} \end{bmatrix}}$ . Θέλουμε, δηλαδή, η διαφορά τους να είναι πολύ μικρή. Εισάγοντας ένα κριτήριο

σύγκλισης, η διαδικασία σταματά όταν η διαφορά μεταξύ των δύο διανυσμάτων γίνει μικρότερη από την ανοχή του κριτηρίου σύγκλισης.





### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

**Το φυσικό στοιχείο δυνάμεων**

**natural force-based finite element**

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 3

### 3.1 Εισαγωγικά στοιχεία

### 3.2 Το δiάνυσμα των γενικευμένων εσωτερικών δυνάμεων και το δiάνυσμα των γενικευμένων παραμορφώσεων της διατομής

### 3.3 Διατύπωση του φυσικού στοιχείου δυνάμεων

#### 3.3.1 Η έννοια των στοιχείων μεικτού τύπου

#### 3.3.2 Η μητρική διατύπωση της εξίσωσης ισορροπίας του στοιχείου δυνάμεων

- Η μητρική διατύπωση της σχέσης μεταξύ των φυσικών εσωτερικών δράσεων και των φυσικών μορφών παραμόρφωσης του στοιχείου δυνάμεων
- Η μητρική διατύπωση της εξίσωσης ισορροπίας του στοιχείου δυνάμεων

#### 3.3.3 Η μητρική διατύπωση της γραμμικοποιημένης σχέσης που συνδέει τις δυνάμεις που δεν έχουν εξισορροπηθεί με τις αντίστοιχες επαυξητικές φυσικές μορφές παραμόρφωσης κάθε στοιχείου

### 3.4 Προσδιορισμός της κατάστασης του φυσικού στοιχείου δυνάμεων

### 3.1 Εισαγωγικά στοιχεία

Το φυσικό στοιχείο δυνάμεων προκύπτει από τον [εκφυλισμό του μεικτού πεπερασμένου στοιχείου μετατοπίσεων-δυνάμεων](#). Σύμφωνα με τη γενικευμένη αυτή ενεργειακή πρόταση, θεωρούμε ως άγνωστα μεγέθη εκτός από τις μετατοπίσεις και τις εσωτερικές δυνάμεις. Πέραν των **συναρτήσεων παρεμβολής των μετατοπίσεων** χρησιμοποιούμε και τις **συναρτήσεις παρεμβολής των εσωτερικών δυνάμεων**. Με επιλογή συγκεκριμένων συναρτήσεων παρεμβολής για τις μετατοπίσεις η μεικτή μέθοδος ανάγεται στην ειδική μέθοδο της ευκαμψίας. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, υπολογίζουμε το μητρώο ευκαμψίας του στοιχείου με τη βοήθεια των συναρτήσεων παρεμβολής των εσωτερικών δυνάμεων. Το ζητούμενο μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου προκύπτει ως το αντίστροφο του μητρώου ενδοσιμότητας.

Χρησιμοποιώντας το φυσικό στοιχείο δυνάμεων, που αποτελεί [μία ελαφρώς πιο περίπλοκη διατύπωση του φυσικού στοιχείου ινών](#), αίρεται το μειονέκτημα του φυσικού στοιχείου μετατοπίσεων και ικανοποιείται το συμβιβαστό των παραμορφώσεων και η ισορροπία πάντα και παντού κατά μήκος του στοιχείου. Η εξίσωση ισορροπίας ισχύει κατά μήκος του στοιχείου λόγω της ύπαρξης των συναρτήσεων παρεμβολής των γενικευμένων δυνάμεων. Η ικανοποίηση του συμβιβαστού των παραμορφώσεων επιτυγχάνεται ολοκληρώνοντας τις παραμορφώσεις στα σημεία-διατομές ολοκλήρωσης, προκειμένου να αποκτήσουμε τις αντίστοιχες παραμορφώσεις των άκρων του στοιχείου. Ενώ το στοιχείο μετατοπίσεων υπολογίζει τις εσωτερικές δυνάμεις ολοκληρώνοντας απλά τις τάσεις, στο στοιχείο δυνάμεων λαμβάνει χώρα μία επαναληπτική μη γραμμική διαδικασία (σε επίπεδο στοιχείου αλλά και διατομής) για την ικανοποίηση της μη γραμμικής σχέσης μεταξύ των γενικευμένων εσωτερικών δυνάμεων και των γενικευμένων παραμορφώσεων για συγκεκριμένο επίπεδο σφάλματος. Χάριν αυτής της εσωτερικής επανάληψης ικανοποιείται πάντα το συμβιβαστό των παραμορφώσεων (το οποίο συνδέει τις ανηγμένες παραμορφώσεις με τις μετατοπίσεις) και η ισορροπία των γενικευμένων δυνάμεων κατά μήκος του στοιχείου. Ως αποτέλεσμα, το natural force-based element μας επιτρέπει στις περισσότερες περιπτώσεις να προσομοιώνουμε κάθε δομικό μέλος με ένα και μόνο στοιχείο.

Δηλαδή, το φυσικό στοιχείο δυνάμεων βασίζεται σε δύο μεθόδους :

- στη **μέθοδο των φυσικών μορφών** (natural mode method) και
- στη **μέθοδο της ενδοσιμότητας** (flexibility method).

Η διατύπωση του φυσικού στοιχείου ινών με τη μέθοδο της ενδοσιμότητας οδηγεί στο natural flexibility-based fiber element (φυσικό στοιχείο ενδοσιμότητας), το οποίο χαρακτηρίζεται από το ότι:

- σε επίπεδο στοιχείου οι εσωτερικές δράσεις διορθώνονται ώστε να είναι συμβατές με τις επικόμβιες μετακινήσεις. Προκειμένου να ικανοποιείται η μη-γραμμική σχέση δυνάμεων-παραμορφώσεων εισάγεται μία επαναληπτική διαδικασία σε επίπεδο στοιχείου (βρόγχος i, όπως θα δούμε στην ενότητα 3.4). Στη λεγόμενη αυτή **διαδικασία καθορισμού της κατάστασης του στοιχείου** (element state determination) οφείλεται και το πλεονέκτημα του φυσικού στοιχείου δυνάμεων έναντι του φυσικού στοιχείου μετατοπίσεων, δηλαδή η **δυνατότητα προσομοίωσης ενός δομικού μέλους (δοκός, υποστύλωμα) με ένα και μόνο**

**στοιχείο.** Το χαρακτηριστικό αυτό οδηγεί σε μείωση του υπολογιστικού χρόνου, άρα και του κόστους.

- **σε επίπεδο διατομής** προσδιορίζεται το μητρώο ενδοσιμότητας (section flexibility matrix) για τις εσωτερικές διατομές του στοιχείου. Από τα μητρώα αυτά υπολογίζουμε τις εσωτερικές δράσεις κάθε διατομής και το μητρώο ενδοσιμότητας του στοιχείου, από το οποίο εύκολα προκύπτει το αντίστοιχο μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου.

Σχετικά με τη μέθοδο της ενδοσιμότητας αξίζει να αναφερθούμε στους:

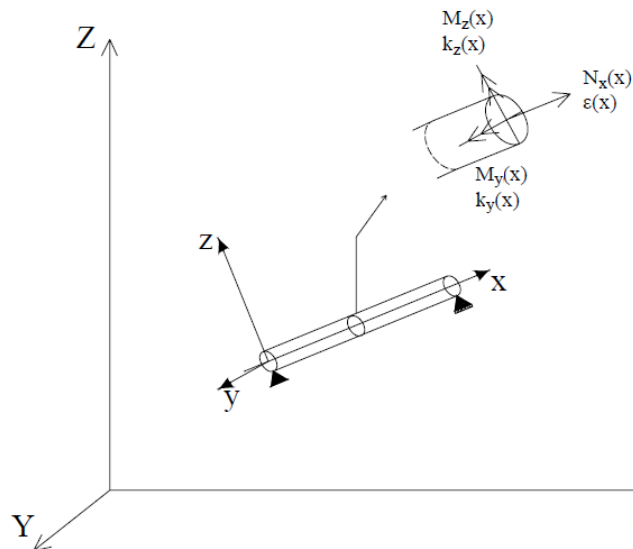
- **Kaba and Mahin :**  
Διατύπωσαν το πρώτο στοιχείο ινών βασισμένο στη μέθοδο της ενδοσιμότητας. Επέλεξαν ισαπέχουσες διατομές και θεωρούσαν γραμμική κατανομή της ενδοσιμότητας μεταξύ αυτών. Παρά τα **ακριβή αποτελέσματα** σε πολλές περιπτώσεις, το στοιχείο Kaba-Mahin συνοδευόταν από **σοβαρά προβλήματα σύγκλισης** και **μειονεκτούσε** στην προσομοίωση της συμπεριφοράς των δομικών μελών της κατασκευής **στην περίπτωση φθιπών δρόμων ισορροπίας**. Οι αδυναμίες αυτές οφείλονταν στην προβληματική διατύπωση του στοιχείου, κατά την οποία οι εσωτερικές δράσεις κάθε διατομής δεν ήταν συμβατές πάντα με τις αντίστοιχες εξισώσεις ισορροπίας. Ως αποτέλεσμα, η κατανομή των ροπών ήταν μη γραμμική και η κατανομή της αξονικής δύναμης δεν παρέμενε σταθερή κατά μήκος του στοιχείου.
- **Zeris and Mahin :**  
**Βελτίωσαν τη διαδικασία καθορισμού της κατάστασης του στοιχείου** των Kaba and Mahin. Μάλιστα, διέυρυναν τις δυνατότητές του, καθιστώντας το **ικανό να προσομοιώσει και χωρικά προβλήματα**. Ειδικότερα,
  - οι εσωτερικές δράσεις υπολογίζονται αρχικά βάσει των μετατοπίσεων των ακραίων διατομών
  - οι τελικές μετατοπίσεις των εσωτερικών διατομών προκύπτουν μέσω μίας επαναληπτικής διαδικασίας, η οποία εξασφαλίζει ότι οι εσωτερικές δράσεις ακολουθούν την κατανομή που αρχικά έχουμε υποθέσει.
- **Spacone et al :**  
Βασιζόμενοι στη θεωρία στοιχείων μεικτού τύπου, οι Spacone et al πρότειναν ένα βελτιωμένο στοιχείο δοκού. Κατά μήκος του στοιχείου αυτού **ικανοποιούνται τόσο η ισορροπία των γενικευμένων δυνάμεων** μέσω κατάλληλων συναρτήσεων παρεμβολής όσο και **το συμβιβαστό των παραμορφώσεων** μέσω ολοκλήρωσης των μετατοπίσεων κάθε διατομής για τον καθορισμό των επικόμβιων μετατοπίσεων. Επιπλέον, πρότειναν μία επαναληπτική διαδικασία ώστε να ικανοποιείται **η μη-γραμμική σχέση δυνάμεων-μετατοπίσεων σε κάθε διατομή**.

Στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα με το φυσικό στοιχείο δυνάμεων (natural force-based element). Αυτό περιέχει χαρακτηριστικά τόσο του φυσικού στοιχείου μετατοπίσεων όσο και του στοιχείου που ανέπτυξαν οι Spacone et al. Ο όρος **φυσικό** προέρχεται από το γεγονός ότι *πρόκειται για μία διατύπωση του φυσικού στοιχείου ινών*, το οποίο βασίζεται στη μέθοδο των φυσικών μορφών παραμόρφωσης. Ο όρος **στοιχείο δυνάμεων** οφείλεται στο ότι πρόκειται για ένα *στοιχείο ενδοσιμότητας*, βασική υπόθεση του οποίου είναι η χρησιμοποίηση κατάλληλων συναρτήσεων παρεμβολής με στόχο τον προσδιορισμό των φυσικών εντατικών μεγεθών ή δράσεων κάθε εσωτερικής διατομής του στοιχείου αυτού βάσει των επικόμβιων φορτίων. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι το φυσικό στοιχείο δυνάμεων προέρχεται από το συνδυασμό του φυσικού στοιχείου δοκού και του στοιχείου δυνάμεων.

Λόγω των προηγούμενων χαρακτηριστικών του, **το φυσικό στοιχείο δυνάμεων κερδίζει ολοένα και περισσότερο έδαφος έναντι του προκατόχου του** (φυσικό στοιχείο μετατοπίσεων). Η εξέλιξη αυτή δεν μας εξέπληξε, καθώς η προσομοίωση με natural force-based elements μπορεί να αντιμετωπίσει χωρίς υπολογιστικά προβλήματα τη συμπεριφορά των περισσότερων δομικών μελών, ακόμη και όταν αυτά έχουν ξεπεράσει την οριακή τους αντοχή. Τέτοια μπορεί να είναι δομικά μέλη από σπλισμένο σκυρόδεμα, τα οποία είτε δε διαθέτουν τον απαιτούμενο σπλισμό είτε υποβάλλονται σε μεγάλο μεγέθους αξονικές δυνάμεις. Επιπλέον, προσεγγίζει ικανοποιητικά τη χρυσή τομή μεταξύ ακρίβειας και οικονομίας υπολογιστικού χρόνου (σημαντικά αραιότερο δίκτυο πεπερασμένων στοιχείων → καλύτερο meshing).

Ο καταστατικός νόμος που θα χρησιμοποιήσουμε έχει γραμμική μορφή και εκφράζεται ως συνάρτηση μόνο των ανηγμένων παραμορφώσεων  $\epsilon$ . Αξίζει να τονίσουμε ότι η μορφή του καταστατικού νόμου δεν επηρεάζει τη διατύπωση του φυσικού στοιχείου δυνάμεων. Οι μετατοπίσεις κάθε διατομής εξάγονται από τις νέες δράσεις, αξιοποιώντας το αρχικό μητρώο ενδοσιμότητας της διατομής. Γνωρίζοντας τις παραμορφώσεις και (μέσω του καταστατικού νόμου του υλικού) τις αντίστοιχες τάσεις κάθε διατομής, οι εσωτερικές δράσεις και οι στιβαρότητες καθορίζονται εύκολα με ολοκλήρωση των τάσεων αυτών σε κάθε διατομή. Τέλος, υπολογίζουμε τις επικόμβιες εσωτερικές δράσεις και το μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου.

### 3.2 Το δiάνυσμα των γενικευμένων εσωτερικών δυνάμεων και το δiάνυσμα των γενικευμένων παραμορφώσεων της διατομής



**Σχήμα 3.1** Γενικευμένες εσωτερικές δυνάμεις και γενικευμένες παραμορφώσεις σε επίπεδο διατομής

Στο ανωτέρω σχήμα 3.1 απεικονίζεται ένα αμφιαρθρωτό στοιχείο δοκού με το τοπικό  $xyz$  και το καθολικό  $XYZ$  καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Στο επίπεδο της διατομής παρατηρούμε ότι ασκούνται μόνο τρεις γενικευμένες εσωτερικές δυνάμεις (οι δύο καμπτικές ροπές  $M_y(x)$ ,  $M_z(x)$  και η αξονική δύναμη  $N_x(x)$ ) έναντι των 6 που θα περιμέναμε. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι, προκειμένου να μορφώσουμε το μητρώο ενδοσιμότητας **της διατομής**, αγνοήσαμε τη στρέβλωση της διατομής (άρα και τη στρεπτική ροπή  $M_T(x)$ ) και τις διατμητικές παραμορφώσεις (άρα και τις τέμνουσες δυνάμεις  $V_y(x)$  και  $V_z(x)$ ).

Το δiάνυσμα των γενικευμένων δυνάμεων  $[N(x)]$  είναι πλέον  $3 \times 3$  αντί  $6 \times 6$  και ισούται με :

$$[N(x)] = \begin{bmatrix} N_x(x) \\ M_y(x) \\ M_z(x) \end{bmatrix}$$

Επειδή ο τοπικός καρτεσιανός άξονα  $x$  ταυτίζεται με τον διαμήκη φυσικό άξονα  $\xi$ , **το δiάνυσμα των γενικευμένων εσωτερικών δυνάμεων της διατομής** μπορεί να γραφεί και με την ακόλουθη μορφή:

$$[N(\xi)] = \begin{bmatrix} N_x(\xi) \\ M_y(\xi) \\ M_z(\xi) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Η συζυγής παραμόρφωση της  $N_x(\xi)$  είναι η αξονική ανηγμένη παραμόρφωση  $\epsilon_x(\xi)$ , ενώ το συζυγές παραμορφωσιακό μέγεθος της ροπής  $M_y(\xi)$  και της ροπής  $M_z(\xi)$  είναι αντίστοιχα η καμπυλότητα  $\kappa_y(\xi)$  περί τον τοπικό καρτεσιανό άξονα  $y$  και η καμπυλότητα  $\kappa_z(\xi)$  περί τον τοπικό καρτεσιανό άξονα  $z$ . Συνεπώς, **το δiάνυσμα των γενικευμένων παραμορφώσεων της διατομής**, η θέση της οποίας χαρακτηρίζεται από τη φυσική συντεταγμένη  $\xi$  (σε κάθε διατομή αντιστοιχεί διαφορετικό  $\xi$ ), μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$[\epsilon(\xi)] = \begin{bmatrix} \epsilon_x(\xi) \\ \kappa_y(\xi) \\ \kappa_z(\xi) \end{bmatrix} \quad (3.2).$$

### 3.3 Διατύπωση του φυσικού στοιχείου δυνάμεων

#### 3.3.1 Η έννοια των στοιχείων μεικτού τύπου και η αρχή της στάσιμης τιμής της συνολικής δυναμικής ενέργειας

Στη διατύπωση του φυσικού στοιχείου μετατοπίσεων τα μόνα άγνωστα μεγέθη είναι οι μετακινήσεις του στοιχείου. Οι εξισώσεις ισορροπίας ενός τέτοιου στοιχείου εξάγονται με εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων (όπως είδαμε στην υποενότητα 2.2.3 του κεφαλαίου 2) ή της αρχής της στάσιμης τιμής της συνολικής δυναμικής ενέργειας. Μπορεί οι σχέσεις τάσεων-ανηγμένων παραμορφώσεων, οι σχέσεις ανηγμένων παραμορφώσεων-μετατοπίσεων και οι συνοριακές συνθήκες να ικανοποιούνται πλήρως, εντούτοις η διαφορική εξίσωση ισορροπίας ενός δομικού μέλους και οι φυσικές συνοριακές συνθήκες δεν ικανοποιούνται παρά μόνο οριακά (στην περίπτωση που διακριτοποιήσουμε το δομικό μέλος με μεγάλο πλήθος στοιχείων) στο εσωτερικό των στοιχείων. Το σημαντικό αυτό μειονέκτημα του στοιχείου μετατοπίσεων οδηγεί στη **δημιουργία πυκνού και αρκετά περίπλοκου δικτύου αυξάνοντας τον υπολογιστικό χρόνο** (άρα και το κόστος) και μπορεί να αντιμετωπιστεί με τη χρησιμοποίηση στοιχείων μεικτού τύπου, όπως το στοιχείο δυνάμεων.

Ο όρος στοιχείο μεικτού τύπου είναι αρκετά ευρύς και κύριο χαρακτηριστικό του είναι ότι **εκτός από τις μετακινήσεις, ως άγνωστα μεγέθη μπορούν να θεωρηθούν οι γενικευμένες εσωτερικές δυνάμεις, οι ανηγμένες παραμορφώσεις ή οι τάσεις**. Η διατύπωση των στοιχείων αυτών βασίζεται σε γενικευμένες ενεργειακές προτάσεις, που δεν είναι τίποτα άλλο από μία επέκταση της αρχής της στάσιμης τιμής της συνολικής δυναμικής ενέργειας.

**Σύμφωνα με την αρχή της στάσιμης τιμής της συνολικής δυναμικής ενέργειας, ένα συντηρητικό σύστημα που υποβάλλεται σε μια στατική φόρτιση ισορροπεί σε κάποια παραμορφωμένη θέση, όταν η συνολική δυναμική ενέργεια  $\Pi$  έχει σε αυτή τη θέση στάσιμη τιμή ( $\delta\Pi = 0$ )**, δηλαδή παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο σε σχέση με οποιαδήποτε άλλη γειτονική θέση παραμόρφωσης. Η κατάσταση αυτή ισορροπίας θα είναι ευσταθής, για μικρού μεγέθους διαταραχή, όταν η συνολική δυναμική ενέργεια  $\Pi$  παρουσιάζει σε αυτή τη θέση τοπικό ελάχιστο σε σχέση με οποιαδήποτε άλλη γειτονική θέση παραμόρφωσης, διαφορετικά είναι ασταθής.

Η αρχή αυτή μπορεί να εφαρμόζεται **μόνο σε συντηρητικά συστήματα**. Ως συντηρητικό ονομάζεται ένα σύστημα όταν όλες οι δυνάμεις που επιδρούν σε αυτό είναι συντηρητικές, δηλαδή **απορρέουν από δυναμικό και παράγουν έργο που εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση του σημείου εφαρμογής τους** (στην απαραμόρφωτη και παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα αντίστοιχα), και όχι από τις ενδιάμεσες θέσεις. Ο περιορισμός αυτός εφαρμογής δεν θεωρείται ότι περιορίζει σημαντικά την εφαρμοσιμότητα της μεθόδου, διότι τα συντηρητικά συστήματα περιλαμβάνουν τη μεγάλη πλειοψηφία των κατασκευών που απαντώνται στην πράξη. Επιπλέον, η μέθοδος αυτή αποτελεί το θεωρητικό υπόβαθρο των περισσότερων σύγχρονων αριθμητικών μεθόδων γραμμικής και μη γραμμικής ανάλυσης των κατασκευών, διότι παρέχει τη δυνατότητα **να ανευρεθούν οι θέσεις ισορροπίας ενός φορέα και να αξιολογηθεί η ευστάθεια ή αστάθεια αυτών των θέσεων** με συστηματικό και αυστηρά μαθηματικό τρόπο, που προσφέρεται για προγραμματισμό.

**Η συνολική δυναμική ενέργεια  $\Pi$  ενός συντηρητικού συστήματος** που λόγω της επενέργειας εξωτερικών φορτίων βρίσκεται σε κάποια κατάσταση παραμόρφωσης ορίζεται ως **το**

άθροισμα της δυναμικής ενέργειας  $U_p$  των εσωτερικών δυνάμεων του συστήματος και της δυναμικής ενέργειας  $V_p$  των εξωτερικών δυνάμεων, δηλαδή:

$$\Pi = U_p + V_p \quad (3.3)$$

όπου θεωρείται ότι τα ενεργειακά μεγέθη  $\Pi$ ,  $U_p$ ,  $V_p$  έχουν μηδενική τιμή στην αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση του συστήματος.

**Η δυναμική ενέργεια  $U_p$  των εσωτερικών δυνάμεων** ισούται με την ελαστική ενέργεια ή ενέργεια παραμόρφωσης που αποταμιεύεται στο φορτιζόμενο και παραμορφωνόμενο σύστημα. Δηλαδή:

$$U_p = \frac{1}{2} \times \int_V \{ [\varepsilon]^T \times [E] \times [\varepsilon] \} dV \quad (3.4)$$

**Η δυναμική ενέργεια  $V_p$  των εξωτερικών δυνάμεων** υπολογίζεται από τη σχέση (3.5), όπου το αρνητικό πρόσημο εκφράζει την απώλεια δυναμικής ενέργειας όταν το σημείο εφαρμογής της δύναμης μετακινείται κατά τη φορά εφαρμογής της :

$$V_p = - \left[ \bar{d} \right]^T \times [R_C] - \int_V \left\{ \left[ \bar{u} \right]^T \times [f_V] \right\} dV - \int_S \left\{ \left[ \bar{u}_S \right]^T \times [f_S] \right\} dS \quad (3.5)$$

όπου:

- $[R_C]$  : το διάνυσμα των επικόμβιων φορτίων του φορέα
- $\left[ \bar{d} \right]$  : το διάνυσμα των καθολικών καρτεσιανών επικόμβιων μετακινήσεων του φορέα
- $[f_V]$  : το διάνυσμα των μαζικών δράσεων του φορέα
- $\left[ \bar{u} \right]$  : το διάνυσμα των καθολικών καρτεσιανών εσωτερικών μετακινήσεων του φορέα
- $[f_S]$  : το διάνυσμα των επιφανειακών δράσεων του φορέα
- $\left[ \bar{u}_S \right]$  : το διάνυσμα των καθολικών καρτεσιανών επιφανειακών μετακινήσεων του φορέα



Συνεπώς,

η συνολική δυναμική ενέργεια  $\Pi$ , η οποία αποτελεί το «υπολογιστικό εργαλείο» της ενεργειακής αυτής μεθόδου, ισούται με:

$$(3.3) \xrightarrow[(3.5)]{(3.4)} \Pi = \frac{1}{2} \times \int_V \{ [\varepsilon]^T \times [E] \times [\varepsilon] \} dV - \left[ \bar{d} \right]^T \times [R_c] - \int_V \left\{ \left[ \bar{u} \right]^T \times [f_v] \right\} dV - \int_S \left\{ \left[ \bar{u}_s \right]^T \times [f_s] \right\} dS$$

Επομένως,

$$\delta \Pi = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times \int_V \{ [\delta \varepsilon]^T \times [E] \times [\varepsilon] \} dV + \frac{1}{2} \times \int_V \{ [\varepsilon]^T \times [E] \times [\delta \varepsilon] \} dV - \\ & - \left[ \delta \bar{d} \right]^T \times [R_c] - \int_V \left\{ \left[ \delta \bar{u} \right]^T \times [f_v] \right\} dV - \int_S \left\{ \left[ \delta \bar{u}_s \right]^T \times [f_s] \right\} dS = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

και λαμβάνοντας υπόψιν ότι:

$$\int_V \{ [\varepsilon]^T \times [E] \times [\delta \varepsilon] \} dV = \int_V \{ [\delta \varepsilon]^T \times [E] \times [\varepsilon] \} dV$$

η σχέση (3.6) γίνεται:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times \int_V \{ [\delta \varepsilon]^T \times [E] \times [\varepsilon] \} dV + \frac{1}{2} \times \int_V \{ [\delta \varepsilon]^T \times [E] \times [\varepsilon] \} dV - \\ & - \left[ \delta \bar{d} \right]^T \times [R_c] - \int_V \left\{ \left[ \delta \bar{u} \right]^T \times [f_v] \right\} dV - \int_S \left\{ \left[ \delta \bar{u}_s \right]^T \times [f_s] \right\} dS = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\int_V \{ [\delta \varepsilon]^T \times [E] \times [\varepsilon] \} dV - \left[ \delta \bar{d} \right]^T \times [R_c] - \int_V \left\{ \left[ \delta \bar{u} \right]^T \times [f_v] \right\} dV - \int_S \left\{ \left[ \delta \bar{u}_s \right]^T \times [f_s] \right\} dS = 0 \Rightarrow$$

$$\int_V \{ [\delta \varepsilon]^T \times [\sigma] \} dV - \left[ \delta \bar{d} \right]^T \times [R_c] - \int_V \left\{ \left[ \delta \bar{u} \right]^T \times [f_v] \right\} dV - \int_S \left\{ \left[ \delta \bar{u}_s \right]^T \times [f_s] \right\} dS = 0$$

### 3.3.2 Η μητρική διατύπωση της εξίσωσης ισορροπίας του στοιχείου δυνάμεων με τη μέθοδο της ενδοσιμότητας

Η διατύπωση του φυσικού πεπερασμένου στοιχείου δυνάμεων είναι ουσιαστικά η διατύπωση ενός πεπερασμένου στοιχείου μεικτού τύπου  $[N(\xi)] - [\varepsilon(\xi)]$ .

Συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι οι τρεις γενικευμένες εσωτερικές δυνάμεις

$$[N(\xi)] = [N_x(\xi) \quad M_y(\xi) \quad M_z(\xi)]^T$$

(3x1)

και οι τρεις γενικευμένες παραμορφώσεις

$$[\varepsilon(\xi)] = [\varepsilon_x(\xi) \quad \kappa_y(\xi) \quad \kappa_z(\xi)]^T$$

(3x1)

σε οποιαδήποτε διατομή εντός του στοιχείου εκφράζονται αντίστοιχα ως συνάρτηση των έξι φυσικών μορφών παραμόρφωσης

$$[\rho_N] = [\rho_{N_1} \quad \rho_{N_2} \quad \rho_{N_3} \quad \rho_{N_4} \quad \rho_{N_5} \quad \rho_{N_6}]^T$$

(6x1)

και των έξι φυσικών γενικευμένων δυνάμεων

$$[P_N] = [F_N \quad M_S^1 \quad M_A^1 \quad M_S^2 \quad M_A^2 \quad M_T]^T$$

(6x1)

**του στοιχείου.**

Προκειμένου να διατυπώσουμε τις σχέσεις που συνδέουν το διάνυσμα  $[\varepsilon(\xi)]$  με το διάνυσμα

$[\rho_N]$  και το  $[N(\xi)]$  με το  $[P_N]$  θα χρησιμοποιήσουμε αντίστοιχα τις ανεξάρτητες μεταξύ τους

συναρτήσεις σχήματος  $[a(\xi)]$  και  $[b(\xi)]$ .

$$[\varepsilon(\xi)] = [a(\xi)] \times [\rho_N] \quad (3.7)$$

(3x1)      (3x6)      (6x1)

$$[N(\xi)] = [b(\xi)] \times [P_N] \quad (3.8)$$

(3x1)      (3x6)      (6x1)

Μέσω των σχέσεων (3.7) και (3.8) και συγκεκριμένα μέσω των μητρών  $[a(\xi)]$  και  $[b(\xi)]$

μεταφερόμαστε από επίπεδο στοιχείου σε επίπεδο διατομής.

**Η μητρική διατύπωση της σχέσης μεταξύ των φυσικών εσωτερικών δράσεων  $[P_N]$  και των φυσικών μορφών παραμόρφωσης  $[\rho_N]$  του στοιχείου δυνάμεων**

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, προκειμένου να ικανοποιείται πάντα η μη γραμμική σχέση γενικευμένων δυνάμεων-γενικευμένων παραμορφώσεων (πλεονέκτημα του στοιχείου δυνάμεων έναντι του στοιχείου μετατοπίσεων), εισάγουμε μία επαναληπτική διαδικασία σε επίπεδο στοιχείου. Προκειμένου να ενσωματωθούν στη διαδικασία αυτή, οι σχέσεις (3.7) και (3.8) γράφονται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^i(\xi) \end{bmatrix}_{(3 \times 1)} = \begin{bmatrix} a(\xi) \end{bmatrix}_{(3 \times 6)} \times \begin{bmatrix} \rho_N^i \end{bmatrix}_{(6 \times 1)} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon^i(\xi) \end{bmatrix}_{(3 \times 1)} = \begin{bmatrix} a(\xi) \end{bmatrix}_{(3 \times 6)} \times \begin{bmatrix} \Delta \rho_N^i \end{bmatrix}_{(6 \times 1)} \quad (3.9)$$

$$\begin{bmatrix} N^i(\xi) \end{bmatrix}_{(3 \times 1)} = \begin{bmatrix} b(\xi) \end{bmatrix}_{(3 \times 6)} \times \begin{bmatrix} P_N^i \end{bmatrix}_{(6 \times 1)} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta N^i(\xi) \end{bmatrix}_{(3 \times 1)} = \begin{bmatrix} b(\xi) \end{bmatrix}_{(3 \times 6)} \times \begin{bmatrix} \Delta P_N^i \end{bmatrix}_{(6 \times 1)} \quad (3.10)$$

όπου ο δείκτης  $i$  αντιπροσωπεύει την  $i$  διορθωτική επανάληψη της επαναληπτικής διαδικασίας (μέθοδος Newton-Raphson) κάποιου βήματος φόρτισης  $k$ . Από εδώ και κάτω όλες οι σχέσεις θα γράφονται στην επαναληπτική τους μορφή.

Έστω  $f(\xi)$  το μητρώο ενδοσιμότητας της διατομής που βρίσκεται στη θέση  $\xi$ . Αντιστρέφοντας το μητρώο ενδοσιμότητας προκύπτει το αντίστοιχο μητρώο στιβαρότητας  $k(\xi)$  της διατομής. Σε επίπεδο διατομής η γραμμικοποιημένη σχέση μεταξύ των γενικευμένων δυνάμεων και των γενικευμένων παραμορφώσεων είναι η εξής:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^i(\xi) \end{bmatrix}_{(3 \times 1)} = \begin{bmatrix} f^{i-1}(\xi) \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \times \begin{bmatrix} N^i(\xi) \end{bmatrix}_{(3 \times 1)} \quad (3.11a)$$

$$(3.11a) \Rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_x(\xi) \\ \varepsilon_y(\xi) \\ \varepsilon_z(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}^{i-1}(\xi) & f_{12}^{i-1}(\xi) & f_{13}^{i-1}(\xi) \\ f_{21}^{i-1}(\xi) & f_{22}^{i-1}(\xi) & f_{23}^{i-1}(\xi) \\ f_{31}^{i-1}(\xi) & f_{32}^{i-1}(\xi) & f_{33}^{i-1}(\xi) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} N_x(\xi) \\ M_y(\xi) \\ M_z(\xi) \end{bmatrix}$$

$$(3.11a) \Rightarrow \begin{bmatrix} N^i(\xi) \end{bmatrix}_{(3 \times 1)} = \begin{bmatrix} f^{i-1}(\xi) \end{bmatrix}_{(3 \times 3)}^{-1} \times \begin{bmatrix} \varepsilon^i(\xi) \end{bmatrix}_{(3 \times 1)} \Rightarrow \begin{bmatrix} N^i(\xi) \end{bmatrix}_{(3 \times 1)} = \begin{bmatrix} k^{i-1}(\xi) \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \times \begin{bmatrix} \varepsilon^i(\xi) \end{bmatrix}_{(3 \times 1)} \quad (3.11b)$$

$$(3.11b) \Rightarrow \begin{bmatrix} N_x(\xi) \\ M_y(\xi) \\ M_z(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^{i-1}(\xi) & k_{12}^{i-1}(\xi) & k_{13}^{i-1}(\xi) \\ k_{21}^{i-1}(\xi) & k_{22}^{i-1}(\xi) & k_{23}^{i-1}(\xi) \\ k_{31}^{i-1}(\xi) & k_{32}^{i-1}(\xi) & k_{33}^{i-1}(\xi) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varepsilon_x(\xi) \\ \varepsilon_y(\xi) \\ \varepsilon_z(\xi) \end{bmatrix}$$

$$(3.11b) \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta N^i(\xi) \end{bmatrix}_{(3 \times 1)} = \begin{bmatrix} k^{i-1}(\xi) \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \times \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon^i(\xi) \end{bmatrix}_{(3 \times 1)}$$

$$(3.11a) \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon^i(\xi) \end{bmatrix}_{(3 \times 1)} - \begin{bmatrix} f^{i-1}(\xi) \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \times \begin{bmatrix} \Delta N^i(\xi) \end{bmatrix}_{(3 \times 1)} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}_{(3 \times 1)} \quad (3.12)$$

Η σχέση (3.12) είναι η εξίσωση-περιορισμός που θα πρέπει να πληροί το πεδίο των γενικευμένων παραμορφώσεων  $\left[ \underset{(3 \times 1)}{\Delta \varepsilon^i(\xi)} \right] = \left[ \underset{(3 \times 6)}{a(\xi)} \right] \times \left[ \underset{(6 \times 1)}{\Delta \rho_N^i} \right]$ .

Να σημειώσουμε ότι για τη διατύπωση της γραμμικοποιημένης σχέσης (3.11α) μεταξύ των γενικευμένων δυνάμεων και των γενικευμένων παραμορφώσεων της διατομής της επανάληψης  $i$  αξιοποιούμε το μητρώο ενδοσιμότητας της διατομής του αμέσως προηγούμενου επαναληπτικού βήματος  $i-1$ .

Με τη χρήση των πολλαπλασιαστών Laplace, οι οποίοι θεωρούμε ότι ισοδυναμούν με τις γενικευμένες δυνάμεις, η εξίσωση-περιορισμός (3.12) ενσωματώνεται σε μία διευρυμένη έκφραση της συνολικής δυναμικής ενέργειας της διατομής, η οποία μας οδηγεί στη σχέση:

$$\int_{-1}^1 \left\{ \left[ \underset{(3 \times 1)}{\delta N(\xi)} \right]^T \times \left( \left[ \underset{(3 \times 1)}{\Delta \varepsilon^i(\xi)} \right] - \left[ \underset{(3 \times 3)}{f^{i-1}(\xi)} \right] \times \left[ \underset{(3 \times 1)}{\Delta N^i(\xi)} \right] \right) \right\} d\xi = 0 \quad (3.13)$$

$$(3.10) \Rightarrow \left[ \underset{(3 \times 1)}{\delta N^i(\xi)} \right] = \left[ \underset{(3 \times 6)}{b(\xi)} \right] \times \left[ \underset{(6 \times 1)}{\delta P_N^i} \right] \quad (3.14)$$

$$(3.13) \xrightarrow{(3.14)} \int_{-1}^1 \left\{ \left( \left[ \underset{(3 \times 6)}{b(\xi)} \right] \times \left[ \underset{(6 \times 1)}{\delta P_N^i} \right] \right)^T \times \left( \left[ \underset{(3 \times 1)}{\Delta \varepsilon^i(\xi)} \right] - \left[ \underset{(3 \times 3)}{f^{i-1}(\xi)} \right] \times \left[ \underset{(3 \times 6)}{b(\xi)} \right] \times \left[ \underset{(6 \times 1)}{\Delta P_N^i} \right] \right) \right\} d\xi = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{-1}^1 \left\{ \left[ \underset{(6 \times 1)}{\delta P_N^i} \right]^T \times \left[ \underset{(3 \times 6)}{b(\xi)} \right]^T \times \left( \left[ \underset{(3 \times 1)}{\Delta \varepsilon^i(\xi)} \right] - \left[ \underset{(3 \times 3)}{f^{i-1}(\xi)} \right] \times \left[ \underset{(3 \times 6)}{b(\xi)} \right] \times \left[ \underset{(6 \times 1)}{\Delta P_N^i} \right] \right) \right\} d\xi = 0 \Rightarrow$$

$$\left[ \underset{(6 \times 1)}{\delta P_N^i} \right]^T \times \int_{-1}^1 \left\{ \left[ \underset{(3 \times 6)}{b(\xi)} \right]^T \times \left( \left[ \underset{(3 \times 1)}{\Delta \varepsilon^i(\xi)} \right] - \left[ \underset{(3 \times 3)}{f^{i-1}(\xi)} \right] \times \left[ \underset{(3 \times 6)}{b(\xi)} \right] \times \left[ \underset{(6 \times 1)}{\Delta P_N^i} \right] \right) \right\} d\xi = 0 \Rightarrow \quad (3.15)$$

Δεδομένου ότι η σχέση (3.15) οφείλει να ισχύει για οποιοσδήποτε δυνατές φυσικές εσωτερικές δυνάμεις  $\left[ \underset{(6 \times 1)}{\delta P_N^i} \right]^T$  του στοιχείου (αρχή των μεταβολών), ισχύει ότι:

$$(3.15) \Rightarrow \int_{-1}^1 \left\{ \left[ \underset{(3 \times 6)}{b(\xi)} \right]^T \times \left( \left[ \underset{(3 \times 1)}{\Delta \varepsilon^i(\xi)} \right] - \left[ \underset{(3 \times 3)}{f^{i-1}(\xi)} \right] \times \left[ \underset{(3 \times 6)}{b(\xi)} \right] \times \left[ \underset{(6 \times 1)}{\Delta P_N^i} \right] \right) \right\} d\xi = 0 \xrightarrow{(3.9)} \rightarrow$$

$$\int_{-1}^1 \left\{ \left[ \underset{(3 \times 6)}{b(\xi)} \right]^T \times \left( \left[ \underset{(3 \times 6)}{a(\xi)} \right] \times \left[ \underset{(6 \times 1)}{\Delta \rho_N^i} \right] - \left[ \underset{(3 \times 3)}{f^{i-1}(\xi)} \right] \times \left[ \underset{(3 \times 6)}{b(\xi)} \right] \times \left[ \underset{(6 \times 1)}{\Delta P_N^i} \right] \right) \right\} d\xi = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \left\{ \underset{(3 \times 6)}{[b(\xi)]^T} \times \underset{(3 \times 6)}{[a(\xi)]} \times \underset{(6 \times 1)}{[\Delta \rho_N^i]} - \underset{(3 \times 6)}{[b(\xi)]^T} \times \underset{(3 \times 3)}{[f^{i-1}(\xi)]} \times \underset{(3 \times 6)}{[b(\xi)]} \times \underset{(6 \times 1)}{[\Delta P_N^i]} \right\} d\xi = 0 \Rightarrow \\
& \int_{-1}^1 \left\{ \underset{(3 \times 6)}{[b(\xi)]^T} \times \underset{(3 \times 6)}{[a(\xi)]} \times \underset{(6 \times 1)}{[\Delta \rho_N^i]} \right\} d\xi - \int_{-1}^1 \left\{ \underset{(3 \times 6)}{[b(\xi)]^T} \times \underset{(3 \times 3)}{[f^{i-1}(\xi)]} \times \underset{(3 \times 6)}{[b(\xi)]} \times \underset{(6 \times 1)}{[\Delta P_N^i]} \right\} d\xi = 0 \Rightarrow \\
& \left\{ \int_{-1}^1 \left\{ \underset{(3 \times 6)}{[b(\xi)]^T} \times \underset{(3 \times 6)}{[a(\xi)]} \right\} d\xi \right\} \times \underset{(6 \times 1)}{[\Delta \rho_N^i]} - \left\{ \int_{-1}^1 \left\{ \underset{(3 \times 6)}{[b(\xi)]^T} \times \underset{(3 \times 3)}{[f^{i-1}(\xi)]} \times \underset{(3 \times 6)}{[b(\xi)]} \right\} d\xi \right\} \times \underset{(6 \times 1)}{[\Delta P_N^i]} = 0 \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Στη σχέση (3.16) η πρώτη έκφραση εντός των αγκυλών λαμβάνεται υπόψιν ως ένα μητρώο **[T]**. Το μητρώο [T], όπως παρατηρούμε, εξαρτάται αποκλειστικά από τα ανεξάρτητα μεταξύ τους μητρώα  $[a(\xi)]$ ,  $[b(\xi)]$  των συναρτήσεων παρεμβολής:

$$[T] = \int_{-1}^1 \left\{ \underset{(3 \times 6)}{[b(\xi)]^T} \times \underset{(3 \times 6)}{[a(\xi)]} \right\} d\xi \quad (3.17)$$

Στη σχέση (3.16) η δεύτερη εντός των αγκυλών έκφραση συνιστά **το μητρώο ενδοσιμότητας [F] του στοιχείου**:

$$[F^{i-1}] = \int_{-1}^1 \left\{ \underset{(3 \times 6)}{[b(\xi)]^T} \times \underset{(3 \times 3)}{[f^{i-1}(\xi)]} \times \underset{(3 \times 6)}{[b(\xi)]} \right\} d\xi \quad (3.18)$$

Με την ολοκλήρωση από  $\xi=-1$  έως  $\xi=+1$  μεταφερόμαστε από επίπεδο διατομής σε επίπεδο στοιχείου.

Βάσει των σχέσεων (3.17) και (3.18), η γραμμικοποιημένη σχέση μεταξύ των φυσικών εντατικών μεγεθών και των φυσικών μορφών παραμόρφωσης του φυσικού στοιχείου δυνάμει παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\boxed{[T] \times \underset{(6 \times 1)}{[\Delta \rho_N^i]} - [F^{i-1}] \times \underset{(6 \times 1)}{[\Delta P_N^i]} = 0} \quad (3.19a)$$

$$[T] \times \underset{(6 \times 1)}{[\Delta \rho_N^i]} = [F^{i-1}] \times \underset{(6 \times 1)}{[\Delta P_N^i]} \quad (3.19b)$$

Αξιοσημείωτο είναι ότι με τη χρησιμοποίηση και μόνο κατάλληλων μητρώων συναρτήσεων παρεμβολής μπορούμε να απλοποιήσουμε σημαντικά τη μορφή του μητρώου [T] άρα και της σχέσης (3.19a). Το γεγονός αυτό είναι εξαιρετικά σημαντικό, αν σκεφτούμε ότι ένας από τους κύριους στόχους μας είναι **η βέλτιστη προγραμματιστικά λύση του προς επίλυση προβλήματος**, η οποία προφανώς προβλέπει τόσο οικονομία σε υπολογιστικό επίπεδο όσο και αποφυγή ενός περίπλοκου και υπερβολικά σύνθετου κώδικα.

## Η μητρική διατύπωση της εξίσωσης ισορροπίας του στοιχείου δυνάμεων

Σε δεύτερο στάδιο στοχεύουμε στη διατύπωση της εξίσωσης ισορροπίας του φυσικού στοιχείου δυνάμεων, δεδομένου ότι οι εξωτερικές δυνάμεις πρέπει να ισορροπούν με τα αντίστοιχα εσωτερικά εντατικά μεγέθη παντού κατά μήκος του στοιχείου. Αυτό είναι άλλωστε και το προτέρημα αυτού του τύπου των πεπερασμένων στοιχείων.

Στο σημείο αυτό εύλογο είναι να αναφερθούμε εν συντομία στην Αρχή των Δυνατών Έργων, την οποία θα αξιοποιήσουμε για να συνεχίσουμε τους υπολογισμούς μας.

Σύμφωνα με την Αρχή των Δυνατών Έργων, ένα παραμορφώσιμο σώμα ή σύστημα σωμάτων ισορροπεί όταν το άθροισμα των δυνατών έργων των εξωτερικών δυνάμεων ισούται με την ενέργεια παραμόρφωσης του σώματος ή του συστήματος για κάθε δυνατή μετατόπιση, συμβιβαστή όμως με τους περιορισμούς στους οποίους υπόκειται το σώμα ή το σύστημα αυτό. Δυνατό έργο είναι το έργο που παράγουν οι πραγματικές δυνάμεις όταν επιβάλλονται αυθαίρετα στο σώμα ή στο σύστημα σωμάτων δυνατές μετατοπίσεις. Ο όρος δυνατή μετατόπιση χρησιμοποιείται για να περιγράψει μία μικρή και αυθαίρετη μετατόπιση, η οποία όμως είναι συμβιβαστή με τις συνοριακές και φυσικές συνθήκες του προβλήματος. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η αρχή αυτή αναφέρεται τόσο στις εξωτερικές δυνάμεις όσο και στις αντίστοιχες εσωτερικές, που όλες μαζί θα πρέπει να ικανοποιούν τη συνθήκη ισορροπίας τόσο για τις δυνατές μετατοπίσεις των σημείων εφαρμογής των εξωτερικών δυνάμεων όσο και για τις προκαλούμενες παραμορφώσεις.

Σύμφωνα με την αρχή των δυνατών έργων, η ζητούμενη εξίσωση ισορροπίας μετουσιώνεται στην κατωτέρω έκφραση:

$$\int_{-1}^1 \left\{ \begin{matrix} [\delta \epsilon(\xi)]^T \\ (3 \times 1) \end{matrix} \right\} \times \left( \begin{matrix} [N^{i-1}(\xi)] \\ (3 \times 1) \end{matrix} + \begin{matrix} [\Delta N^i(\xi)] \\ (3 \times 1) \end{matrix} \right) d\xi = \begin{matrix} [\delta \rho_N]^T \\ (6 \times 1) \end{matrix} \times \begin{matrix} [P_{\epsilon\xi}^k] \\ (6 \times 1) \end{matrix} \quad (3.20)$$

Υπενθυμίζουμε ότι η προσθήκη του συμφώνου  $\delta$  σε ένα μέγεθος δίνει την έννοια του δυνατού (αρχή των δυνατών έργων), όπως δυνατή παραμόρφωση ή δυνατή εσωτερική δύναμη.

Στην ανωτέρω σχέση (3.20) το μητρώο  $[P_{\epsilon\xi}^k]$  ενσωματώνει τα εξωτερικά φορτία τα οποία πρέπει πάντα να εξισορροπούνται από τις αντίστοιχες εσωτερικές δυνάμεις  $([N^{i-1}(\xi)] + [\Delta N^i(\xi)])$  που αναπτύσσονται στο στοιχείο ή γενικότερα σε επίπεδο κατασκευής.

$$(3.7) \Rightarrow \begin{matrix} [\epsilon(\xi)] \\ (3 \times 1) \end{matrix} = \begin{matrix} [a(\xi)] \\ (3 \times 6) \end{matrix} \times \begin{matrix} [\rho_N] \\ (6 \times 1) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} [\delta \epsilon(\xi)] \\ (3 \times 1) \end{matrix} = \begin{matrix} [a(\xi)] \\ (3 \times 6) \end{matrix} \times \begin{matrix} [\delta \rho_N] \\ (6 \times 1) \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} [\delta \epsilon(\xi)]^T \\ (3 \times 1) \end{matrix} = \begin{matrix} [\delta \rho_N]^T \\ (6 \times 1) \end{matrix} \times \begin{matrix} [a(\xi)]^T \\ (3 \times 6) \end{matrix} \quad (3.21)$$

$$(3.8) \Rightarrow \begin{matrix} [N(\xi)] \\ (3 \times 1) \end{matrix} = \begin{matrix} [b(\xi)] \\ (3 \times 6) \end{matrix} \times \begin{matrix} [P_N] \\ (6 \times 1) \end{matrix} \Rightarrow \left. \begin{matrix} \begin{matrix} [N^{i-1}(\xi)] \\ (3 \times 1) \end{matrix} = \begin{matrix} [b(\xi)] \\ (3 \times 6) \end{matrix} \times \begin{matrix} [P_N^{i-1}] \\ (6 \times 1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} [\Delta N^i(\xi)] \\ (3 \times 1) \end{matrix} = \begin{matrix} [b(\xi)] \\ (3 \times 6) \end{matrix} \times \begin{matrix} [\Delta P_N^i] \\ (6 \times 1) \end{matrix} \end{matrix} \right\} \quad (3.22)$$

$$(3.20) \xrightarrow{(3.21)} \int_{-1}^1 \left\{ \begin{matrix} [\delta \rho_N]^T & \times & [a(\xi)]^T & \times & \left( [N^{i-1}(\xi)] + [\Delta N^i(\xi)] \right) \end{matrix} \right\} d\xi = [\delta \rho_N]^T \times [P_{\varepsilon\xi}^k] \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} [\delta \rho_N]^T & \times & \int_{-1}^1 \left\{ [a(\xi)]^T \times \left( [N^{i-1}(\xi)] + [\Delta N^i(\xi)] \right) \right\} d\xi = [\delta \rho_N]^T \times [P_{\varepsilon\xi}^k] \end{matrix} \quad (3.23)$$

Δεδομένου ότι η σχέση (3.23) οφείλει να ισχύει για κάθε δυνατή φυσική μορφή παραμόρφωσης, συμπεραίνουμε ότι:

$$\begin{aligned} (3.23) &\Rightarrow \int_{-1}^1 \left\{ [a(\xi)]^T \times \left( [N^{i-1}(\xi)] + [\Delta N^i(\xi)] \right) \right\} d\xi = [P_{\varepsilon\xi}^k] \xrightarrow{(3.22)} \\ &\int_{-1}^1 \left\{ [a(\xi)]^T \times \left( [b(\xi)] \times [P_N^{i-1}] + [b(\xi)] \times [\Delta P_N^i] \right) \right\} d\xi = [P_{\varepsilon\xi}^k] \Rightarrow \\ &\int_{-1}^1 \left\{ [a(\xi)]^T \times [b(\xi)] \times [P_N^{i-1}] + [a(\xi)]^T \times [b(\xi)] \times [\Delta P_N^i] \right\} d\xi = [P_{\varepsilon\xi}^k] \Rightarrow \\ &\int_{-1}^1 \left\{ [a(\xi)]^T \times [b(\xi)] \times [P_N^{i-1}] \right\} d\xi + \int_{-1}^1 \left\{ [a(\xi)]^T \times [b(\xi)] \times [\Delta P_N^i] \right\} d\xi = [P_{\varepsilon\xi}^k] \Rightarrow \\ &\int_{-1}^1 \left\{ [a(\xi)]^T \times [b(\xi)] \right\} d\xi \times [P_N^{i-1}] + \int_{-1}^1 \left\{ [a(\xi)]^T \times [b(\xi)] \right\} d\xi \times [\Delta P_N^i] = [P_{\varepsilon\xi}^k] \end{aligned} \quad (3.24)$$

Γνωρίζουμε, όμως, ότι:

$$(3.17) \Rightarrow [T] = \int_{-1}^1 \left\{ [b(\xi)]^T \times [a(\xi)] \right\} d\xi \Rightarrow$$

$$[T]^T = \int_{-1}^1 \left\{ [a(\xi)]^T \times [b(\xi)] \right\} d\xi \quad (3.25)$$

Επομένως,

$$(3.24) \xrightarrow{(3.25)} [T]^T \times [P_N^{i-1}] + [T]^T \times [\Delta P_N^i] = [P_{\varepsilon\xi}^k] \quad (3.26)$$

$$(3.26) \Rightarrow \boxed{[T]^T \times \left\{ [P_N^{i-1}] + [\Delta P_N^i] \right\} = [P_{\varepsilon\xi}^k]}$$

Η σχέση (3.26) αποτελεί τη μητρική διατύπωση της εξίσωσης ισορροπίας του φυσικού στοιχείου δυνάμεων.

### 3.3.3 Η μητρική διατύπωση της γραμμικοποιημένης σχέσης που συνδέει τις δυνάμεις που δεν έχουν εξισορροπηθεί $[P_{\varepsilon\xi}^i] - [P_N^{i-1}]$ με τις αντίστοιχες επαυξητικές φυσικές μορφές παραμόρφωσης $[\Delta\rho_N^i]$ κάθε στοιχείου

Στα πλαίσια της επαναληπτικής διαδικασίας Newton-Raphson  $i$  του φυσικού στοιχείου δυνάμεων, οι δυνάμεις  $[P_{\varepsilon\xi}^i] - [P_N^{i-1}]$  που δεν έχουν εξισορροπηθεί επιβάλλονται εκ νέου ως εξωτερικές δυνάμεις έως ότου ικανοποιηθεί το επιλεχθέν κριτήριο σύγκλισης. Να σημειώσουμε ότι:  $[P_{\varepsilon\xi}^i] = [P_{\varepsilon\xi}^k]$ , όπου  $k$  είναι το επιβαλλόμενο βήμα φόρτισης.

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.19b) και (3.26), έχουμε ότι:

$$(3.19b) \Rightarrow \underset{(6 \times 6)}{[T]} \times \underset{(6 \times 1)}{[\Delta\rho_N^i]} = \underset{(6 \times 6)}{[F^{i-1}]} \times \underset{(6 \times 1)}{[\Delta P_N^i]} \Rightarrow \underset{(6 \times 6)}{[F^{i-1}]} \times \underset{(6 \times 1)}{[\Delta P_N^i]} - \underset{(6 \times 6)}{[T]} \times \underset{(6 \times 1)}{[\Delta\rho_N^i]} = 0 \Rightarrow$$

$$-\underset{(6 \times 6)}{[F^{i-1}]} \times \underset{(6 \times 1)}{[\Delta P_N^i]} + \underset{(6 \times 6)}{[T]} \times \underset{(6 \times 1)}{[\Delta\rho_N^i]} = 0 \quad (3.27)$$

$$(3.26) \Rightarrow \underset{(6 \times 6)}{[T]^T} \times \underset{(6 \times 1)}{[P_N^{i-1}]} + \underset{(6 \times 6)}{[T]^T} \times \underset{(6 \times 1)}{[\Delta P_N^i]} = \underset{(6 \times 1)}{[P_{\varepsilon\xi}^i]} \Rightarrow$$

$$\underset{(6 \times 6)}{[T]^T} \times \underset{(6 \times 1)}{[\Delta P_N^i]} = \underset{(6 \times 1)}{[P_{\varepsilon\xi}^i]} - \underset{(6 \times 6)}{[T]^T} \times \underset{(6 \times 1)}{[P_N^{i-1}]} \Rightarrow$$

$$\underset{(6 \times 6)}{[T]^T} \times \underset{(6 \times 1)}{[\Delta P_N^i]} + \underset{(6 \times 6)}{[0]} \times \underset{(6 \times 1)}{[\Delta\rho_N^i]} = \underset{(6 \times 1)}{[P_{\varepsilon\xi}^i]} - \underset{(6 \times 6)}{[T]^T} \times \underset{(6 \times 1)}{[P_N^{i-1}]} \quad (3.28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (3.27) \\ (3.28) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cc} -\underset{(6 \times 6)}{[F^{i-1}]} & \underset{(6 \times 6)}{[T]} \\ \underset{(6 \times 6)}{[T]^T} & \underset{(6 \times 6)}{[0]} \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{c} \underset{(6 \times 1)}{[\Delta P_N^i]} \\ \underset{(6 \times 1)}{[\Delta\rho_N^i]} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \underset{(6 \times 6)}{[0]} \\ \underset{(6 \times 1)}{[P_{\varepsilon\xi}^i]} - \underset{(6 \times 6)}{[T]^T} \times \underset{(6 \times 1)}{[P_N^{i-1}]} \end{array} \right\} \quad (3.29)$$

Επίσης,

$$(3.27) \Rightarrow \underset{(6 \times 6)}{[F^{i-1}]} \times \underset{(6 \times 1)}{[\Delta P_N^i]} = \underset{(6 \times 6)}{[T]} \times \underset{(6 \times 1)}{[\Delta\rho_N^i]} \Rightarrow \underset{(6 \times 1)}{[\Delta P_N^i]} = \underset{(6 \times 6)}{[F^{i-1}]^{-1}} \times \underset{(6 \times 6)}{[T]} \times \underset{(6 \times 1)}{[\Delta\rho_N^i]} \quad (3.30)$$

$$(3.28) \xrightarrow{(3.30)} \underset{(6 \times 6)}{[T]^T} \times \left\{ \underset{(6 \times 6)}{[F^{i-1}]^{-1}} \times \underset{(6 \times 6)}{[T]} \times \underset{(6 \times 1)}{[\Delta\rho_N^i]} \right\} = \underset{(6 \times 1)}{[P_{\varepsilon\xi}^i]} - \underset{(6 \times 6)}{[T]^T} \times \underset{(6 \times 1)}{[P_N^{i-1}]} \Rightarrow$$



$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \end{bmatrix}_{(6 \times 6)}^T \times \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{-1} \end{bmatrix}_{(6 \times 6)}^{-1} \times \begin{bmatrix} \mathbf{T} \end{bmatrix}_{(6 \times 6)} \times \begin{bmatrix} \Delta \rho_N^i \end{bmatrix}_{(6 \times 1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\varepsilon \xi}^i \end{bmatrix}_{(6 \times 1)} - \begin{bmatrix} \mathbf{T} \end{bmatrix}_{(6 \times 6)}^T \times \begin{bmatrix} \mathbf{P}_N^{i-1} \end{bmatrix}_{(6 \times 1)} \quad (3.31)$$

Το μητρώο  $[\mathbf{T}]$  εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από τα μητρώα των συναρτήσεων παρεμβολής  $[\mathbf{a}(\xi)]$  και  $[\mathbf{b}(\xi)]$ . Με την κατάλληλη επιλογή της μορφής των μητρώων αυτών, μας δίνεται η δυνατότητα να απλοποιήσουμε όσο το δυνατόν τη μορφή του μητρώου  $[\mathbf{T}]$  και κατ'επέκταση τη μορφή των εξισώσεων στις οποίες το  $[\mathbf{T}]$  υπεισέρχεται.

Συγκεκριμένα, το μητρώο των συναρτήσεων παρεμβολής των γενικευμένων εσωτερικών δυνάμεων  $[\mathbf{b}(\xi)]$  επιλέγεται βάσει της ισορροπίας της αξονικής δύναμης της διατομής  $N_x(\xi)$  και των καμπτικών ροπών της διατομής  $M_y(\xi)$  περί τον τοπικό καρτεσιανό άξονα  $y$  και  $M_z(\xi)$  περί τον άξονα  $z$ . Με τη θεώρηση ότι οι ροπές κάμψης  $M_y(\xi)$  και  $M_z(\xi)$  κατανέμονται γραμμικά κατά μήκος του στοιχείου και ότι η αξονική δύναμη  $N_x(\xi)$  παραμένει σταθερή κατά μήκος του στοιχείου, έχουμε ότι:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_x(\xi) = F_N \\ M_y(\xi) = -M_S^1 + \xi \times M_A^1 \\ M_z(\xi) = -M_S^2 + \xi \times M_A^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} N_x(\xi) \\ M_y(\xi) \\ M_z(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \xi & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_N \\ M_S^1 \\ M_A^1 \\ M_S^2 \\ M_A^2 \\ M_T \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon(\xi) \end{bmatrix}_{(3 \times 1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \xi & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{N}(\xi) \end{bmatrix}_{(6 \times 1)} \xrightarrow{[\varepsilon(\xi)] = [\mathbf{b}(\xi)] \times [\mathbf{N}(\xi)]} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}(\xi) \end{bmatrix}_{(3 \times 6)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \xi & 0 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Η σχέση (3.32) δίνει τη μορφή του **μητρώου παρεμβολής  $[\mathbf{b}(\xi)]$  των γενικευμένων εσωτερικών δυνάμεων της διατομής**, το οποίο μας καθιστά ικανούς να **εξάγουμε τα εντατικά μεγέθη σε επίπεδο διατομής από τα φυσικά εντατικά μεγέθη σε επίπεδο στοιχείου**.

Σε αντίθεση με το μητρώο  $[\mathbf{b}(\xi)]$ , η μορφή του μητρώου των συναρτήσεων παρεμβολής των γενικευμένων παραμορφώσεων  $[\mathbf{a}(\xi)]$  δεν επιδρά στη διατύπωση της εξίσωσης ισορροπίας του στοιχείου, καθώς οι παραμορφώσεις είναι οι συζυγείς ποσότητες των εντατικών μεγεθών ως προς

το έργο. Αν και σε ένα μεικτό στοιχείο οι συναρτήσεις παρεμβολής είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, για λόγους απλοποίησης επιλέγουμε την ακόλουθη μορφή του μητρώου  $[a(\xi)]$ :

$$[a(\xi)] = \underset{(3 \times 6)}{[f^{i-1}(\xi)]} \times \underset{(3 \times 3)}{[b(\xi)]} \times \underset{(6 \times 6)}{[F^{i-1}]^{-1}} \quad (3.33)$$

όπου τόσο το εφαπτομενικό μητρώο ενδοσιμότητας της διατομής  $\underset{(3 \times 3)}{[f^{i-1}(\xi)]}$  όσο και το

εφαπτομενικό μητρώο ενδοσιμότητας του στοιχείου  $\underset{(6 \times 6)}{[F^{i-1}]}$  αναφέρονται στην προηγούμενη

διορθωτική επανάληψη  $i-1$  Newton-Raphson.

Με την επιλογή της συγκεκριμένης μορφής του  $[a(\xi)]$ , οδηγούμαστε από τη γενική μεικτή μέθοδο στην ειδικότερη μέθοδο της ευκαμψίας και από το γενικό μεικτό στοιχείο δοκού στο στοιχείο δυνάμεων.

Γνωρίζουμε ότι οι συναρτήσεις παρεμβολής των γενικευμένων παραμορφώσεων  $[a(\xi)]$  συνδέουν τις προσαυξητικές παραμορφώσεις  $[\Delta \epsilon(\xi)]$  της διατομής με τις προσαυξητικές φυσικές μορφές παραμόρφωσης  $[\Delta \rho_N]$  του στοιχείου:

$$[\Delta \epsilon(\xi)] = \underset{(3 \times 1)}{[a(\xi)]} \times \underset{(6 \times 1)}{[\Delta \rho_N]} \Rightarrow [\Delta \epsilon(\xi)] = \underset{(3 \times 3)}{[f^{i-1}(\xi)]} \times \underset{(3 \times 6)}{[b(\xi)]} \times \underset{(6 \times 6)}{[F^{i-1}]^{-1}} \times \underset{(6 \times 1)}{[\Delta \rho_N]} \quad (3.34)$$

Το πλεονέκτημα της επιλεχθείσας μορφής (3.33) του  $[a(\xi)]$  είναι εμφανές στη σχέση (3.35). Το μητρώο  $[T]$  μεταπίπτει στο μοναδιαίο  $6 \times 6$  πίνακα  $[I]$ , με αποτέλεσμα η σχέση (3.31) να απλοποιείται σημαντικά.

$$(3.17) \Rightarrow [T] = \int_{-1}^1 \left\{ \underset{(3 \times 6)}{[b(\xi)]}^T \times \underset{(3 \times 6)}{[a(\xi)]} \right\} d\xi \xrightarrow{(3.33)}$$

$$[T] = \int_{-1}^1 \left\{ \underset{(3 \times 6)}{[b(\xi)]}^T \times \underset{(3 \times 3)}{[f^{i-1}(\xi)]} \times \underset{(3 \times 6)}{[b(\xi)]} \times \underset{(6 \times 6)}{[F^{i-1}]^{-1}} \right\} d\xi \xrightarrow{(3.18)}$$

$$[T] = \int_{-1}^1 \left\{ \underset{(3 \times 6)}{[b(\xi)]}^T \times \underset{(3 \times 3)}{[f^{i-1}(\xi)]} \times \underset{(3 \times 6)}{[b(\xi)]} \right\} d\xi \times \underset{(6 \times 6)}{[F^{i-1}]^{-1}} \xrightarrow{(3.18)}$$

$$[T] = \underset{(6 \times 6)}{[F^{i-1}]} \times \underset{(6 \times 6)}{[F^{i-1}]^{-1}} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} [T] = [I] \Rightarrow \\ (6 \times 6) \quad (6 \times 6) \end{matrix}$$

$$[T]_{(6 \times 6)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$(3.31) \xrightarrow{(3.35)} \begin{matrix} [I] \\ (6 \times 6) \end{matrix}^T \times \begin{matrix} [F^{i-1}] \\ (6 \times 6) \end{matrix}^{-1} \times \begin{matrix} [I] \\ (6 \times 6) \end{matrix} \times \begin{matrix} [\Delta \rho_N^i] \\ (6 \times 1) \end{matrix} = \begin{matrix} [P_{\varepsilon\xi}^i] \\ (6 \times 1) \end{matrix} - \begin{matrix} [I] \\ (6 \times 6) \end{matrix}^T \times \begin{matrix} [P_N^{i-1}] \\ (6 \times 1) \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{matrix} [F^{i-1}] \\ (6 \times 6) \end{matrix}^{-1} \times \begin{matrix} [\Delta \rho_N^i] \\ (6 \times 1) \end{matrix} = \begin{matrix} [P_{\varepsilon\xi}^i] \\ (6 \times 1) \end{matrix} - \begin{matrix} [P_N^{i-1}] \\ (6 \times 1) \end{matrix}} \quad (3.36)$$

Η σχέση 3.36 αποτελεί τη **μητρική διατύπωση της γραμμικοποιημένης σχέσης που συνδέει τις εξωτερικές επιβαλλόμενες γενικευμένες δυνάμεις που δεν έχουν εξισορροπηθεί**  $[P_{\varepsilon\xi}^i] - [P_N^{i-1}]$  (**unbalanced forces**) με τις αντίστοιχες **επαυξητικές φυσικές μορφές παραμόρφωσης**  $[\Delta \rho_N^i]$  **κάθε φυσικού στοιχείου δυνάμεων** και ενσωματώνεται στην επαναληπτική διαδικασία  $i$ . Ουσιαστικά, πρόκειται για μία παραλλαγή της γνωστής κλασικής σχέσης  $[F]=[K] \times [D]$ , με τις εξής δύο διαφορές:

- **Χρησιμοποιούνται συναρτήσεις σχήματος για τα εντατικά μεγέθη** και όχι για τις μετατοπίσεις. Γενικότερα, διαφέρει σημαντικά η διαδικασία προσδιορισμού του διανύσματος των εσωτερικών γενικευμένων δυνάμεων σε επίπεδο στοιχείου μεταξύ του στοιχείου δυνάμεων και του στοιχείου μετατοπίσεων.
- **Το εφαπτομενικό μητρώο στιβαρότητας  $[K^{i-1}]$  του στοιχείου γράφεται στη μορφή  $[F^{i-1}]^{-1}$** , προκειμένου να δώσουμε έμφαση στο ότι χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της ενδοσιμότητας σύμφωνα με την οποία το εφαπτομενικό μητρώο στιβαρότητας κάθε στοιχείου δεν προκύπτει άμεσα αλλά έμμεσα από την αντιστροφή του αντίστοιχου εφαπτομενικού μητρώου ενδοσιμότητας.

### 3.4 Προσδιορισμός της κατάστασης του φυσικού στοιχείου δυνάμεων

Κύριος στόχος της ανάλυσης ενός φορέα με πεπερασμένα στοιχεία είναι η **μόρφωση του καθολικού μητρώου στιβαρότητας του φορέα και ο υπολογισμός των εντατικών του μεγεθών**, βάσει των οποίων θα πραγματοποιηθεί η διαστασιολόγησή του. Προκειμένου να προσδιορίσουμε τις εσωτερικές αυτές δράσεις σε επίπεδο φορέα, θα πρέπει να προηγηθεί η **διαδικασία προσδιορισμού της κατάστασης κάθε στοιχείου του φορέα** (element state determination). Η διαδικασία προσδιορισμού της κατάστασης ενός φυσικού πεπερασμένου στοιχείου μετατοπίσεων αναλύθηκε στην ενότητα 2.7 του κεφαλαίου 2. Στην περίπτωση του φυσικού στοιχείου δυνάμεων (στοιχείο ενδοσιμότητας) η διαδικασία αυτή είναι **πιο σύνθετη**.

Το μητρώο στιβαρότητας του φυσικού στοιχείου δυνάμεων προκύπτει άμεσα ως το αντίστροφο του αντίστοιχου μητρώου ενδοσιμότητας. Αντίθετα, τα εντατικά μεγέθη του στοιχείου δεν προκύπτουν άμεσα από τις εσωτερικές δυνάμεις των διατομών του αλλά μέσω της χαρακτηριστικής εσωτερικής επαναληπτικής διαδικασίας. Η επιπλέον (δεν υπάρχει στο φυσικό στοιχείο μετατοπίσεων) αυτή διαδικασία λαμβάνει χώρα σε επίπεδο στοιχείου, βασίζεται στη μέθοδο Newton-Raphson και είναι ανάλογη με την επαναληπτική διαδικασία που χρησιμοποιείται για την επίλυση των καθολικών εξισώσεων ισορροπίας σε επίπεδο φορέα. Στη διαδικασία αυτή οφείλει το προτέρημά του το φυσικό στοιχείο δυνάμεων, που δεν είναι άλλο από τη μείωση ή καλύτερα τον **αριθμητικό μηδενισμό των υπολειμματικών μετατοπίσεων** και την **ικανοποίηση του συμβιβαστού των παραμορφώσεων παντού κατά μήκος του στοιχείου**.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι στη μη γραμμική διαδικασία του φυσικού στοιχείου δυνάμεων προστίθεται ένας επιπλέον εσωτερικός βρόγχος (διαδικασία προσδιορισμού της κατάστασης του στοιχείου) πέραν των δύο εξωτερικών βρόγχων της κλασικής μη γραμμικής διαδικασίας. Στη συγκεκριμένη ενότητα θα χρησιμοποιήσουμε τους εξής δείκτες :

#### A. (άνω δείκτης) **k**

Συμβολίζει τον πλέον εξωτερικό βρόγχο, ο οποίος περιλαμβάνει ως εσωτερικούς τους άλλους δύο και ανανεώνει το επιβαλλόμενο βήμα φόρτισης σύμφωνα με τη μέθοδο Newton-Raphson. Ως γνωστόν, στις μη γραμμικές αναλύσεις επιβάλλουμε το εξωτερικό

φορτίο σε σταδιακά βήματα μεγέθους  $\left[ \Delta \bar{P}_k \right]_{(12N \times 1)}$  και όχι όλο μαζί ταυτόχρονα. Στο βήμα k το

ολικό καθολικό διάνυσμα της εξωτερικής φόρτισης του φορέα ισούται με:

$$\left[ \bar{P}_{εξ}^k \right]_{(12N \times 1)} = \left[ \bar{P}_{εξ}^{k-1} \right]_{(12N \times 1)} + \left[ \Delta \bar{P}_{εξ}^k \right]_{(12N \times 1)} \quad \text{με} \quad \left[ \bar{P}_{εξ}^{k=0} \right]_{(12N \times 1)} = \left[ 0 \right]_{(12N \times 1)}$$

όπου N ο συνολικός αριθμός των φυσικών στοιχείων δυνάμεων του φορέα.

#### B. (άνω δείκτης) **i**

Συμβολίζει τη διορθωτική επαναληπτική διαδικασία **σε επίπεδο φορέα**, η οποία βασίζεται στη μέθοδο Newton-Raphson, είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τη διατύπωση του φυσικού στοιχείου δυνάμεων και είναι εσωτερική του βρόγχου k και εξωτερική του επιπρόσθετου βρόγχου j. Η επανάληψη i καθορίζει το διάνυσμα των καθολικών καρτεσιανών επικόμβιων

μετακινήσεων  $\left[ \bar{d}_{ολ}^i \right]_{(12N \times 1)}$  του φορέα που αντιστοιχεί στο διάνυσμα των εξωτερικών

γενικευμένων δυνάμεων  $\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{P}}_{\varepsilon\xi}^k \end{bmatrix}$  του βήματος φόρτισης  $k$ . Η διαδικασία αυτή ολοκληρώνεται

όταν η επιβαλλόμενη εξωτερική φόρτιση αντισταθμιστεί από τα εσωτερικά εντατικά μεγέθη του φορέα.

C. (άνω δείκτης)  $j$

Συμβολίζει τον επιπρόσθετο βρόγχο (αναφέρεται **σε επίπεδο στοιχείου**), ο οποίος συνιστά την κύρια διαφορά μεταξύ του φυσικού στοιχείου δυνάμεων και του φυσικού στοιχείου μετατοπίσεων. Πρόκειται για την εσωτερική διορθωτική επαναληπτική διαδικασία προσδιορισμού της κατάστασης του στοιχείου, βάσει της οποίας καθορίζουμε τις φυσικές μορφές παραμόρφωσης  $[\rho_N^i]$  του στοιχείου κατά την επανάληψη  $i$ , ούτως ώστε να

ικανοποιείται παντού κατά μήκος του στοιχείου το συμβιβαστό των παραμορφώσεων.

D. (δείκτης)  $i_{elem}$

Αναφέρεται στο στοιχείο.  $i_{elem} = 1, \dots, N$

E. (δείκτης)  $i_{sec}$

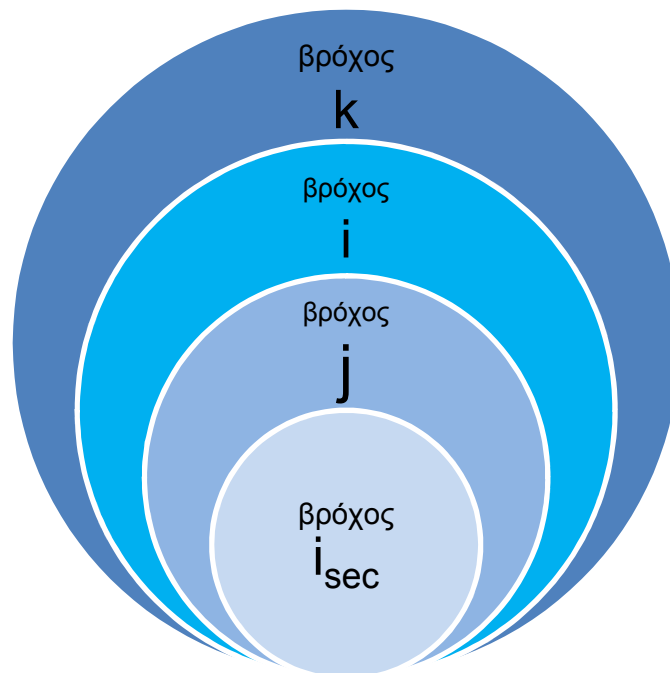
Αναφέρεται στη διατομή.  $i_{sec} = 1, \dots, n$ ,

όπου  $n$  είναι το πλήθος των σημείων-διατομών ολοκλήρωσης του στοιχείου.

F. (δείκτης)  $i_{fib}$

Αναφέρεται στο στοιχείο.  $fib = 1, \dots, n_{fibers}$ ,

όπου  $n_{fibers}$  είναι το πλήθος των υποεπιφανειών της διατομής ολοκλήρωσης.



Σχήμα 3.2 Ιεραρχία των επαναληπτικών διαδικασιών

Τα στάδια της μη γραμμικής διαδικασίας της μεθόδου Newton-Raphson για τον προσδιορισμό της κατάστασης του φυσικού στοιχείου δυνάμεων είναι τα ακόλουθα :

- 1) Επίλυση της μητρικής καθολικής εξίσωσης ισορροπίας σε επίπεδο φορέα (επανάληψη i), εύρεση των επαυξητικών φυσικών μορφών παραμόρφωσης κάθε στοιχείου (επανάληψη i) και ανανέωση των φυσικών μορφών παραμόρφωσης κάθε στοιχείου (επανάληψη i)

Στην i-επανάληψη (η οποία αναφέρεται στο βήμα φόρτισης k) χρησιμοποιούμε το καθολικό μητρώο στιβαρότητας του φορέα  $\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}}_{ολ}^{i-1} \\ (12N \times 12N) \end{bmatrix}$  της (i-1)-επανάληψης (η οποία αναφέρεται στο ίδιο βήμα φόρτισης k). Θέλουμε να υπολογίσουμε τις **επαυξητικές καθολικές επικόμβιες μετακινήσεις του φορέα**  $\begin{bmatrix} \overline{\Delta \mathbf{d}}_{ολ}^i \\ (12N \times 1) \end{bmatrix}$  λόγω της επιβολής του βήματος

εξωτερικής φόρτισης k μεγέθους  $\begin{bmatrix} \overline{\Delta \mathbf{P}}_{εξ}^k \\ (12N \times 1) \end{bmatrix}$ .

Έστω N ο συνολικός αριθμός των φυσικών στοιχείων δυνάμεων του φορέα.

$$\begin{bmatrix} \overline{\Delta \mathbf{P}}_{εξ}^k \\ (12N \times 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}}_{ολ}^{i-1} \\ (12N \times 12N) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \overline{\Delta \mathbf{d}}_{ολ}^i \\ (12N \times 1) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \overline{\Delta \mathbf{d}}_{ολ}^i \\ (12N \times 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}}_{ολ}^{i-1} \\ (12N \times 12N) \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \overline{\Delta \mathbf{P}}_{εξ}^k \\ (12N \times 1) \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Από το  $\begin{bmatrix} \overline{\Delta \mathbf{d}}_{ολ}^i \\ (12N \times 1) \end{bmatrix}$  του φορέα μπορούμε να εξάγουμε το διάνυσμα των καθολικών

καρτεσιανών επικόμβιων μετακινήσεων  $\begin{bmatrix} \overline{\Delta \mathbf{d}}^i \\ (12 \times 1) \end{bmatrix}$  κάθε στοιχείου.

Μετασχηματίζουμε τις καθολικές καρτεσιανές επικόμβιες μετακινήσεις κάθε στοιχείου σε τοπικές, μέσω της σχέσης:

$$\begin{bmatrix} \overline{\Delta \mathbf{d}}^i \\ (12 \times 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{04} \\ (12 \times 12) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \overline{\Delta \mathbf{d}}_{ολ}^i \\ (12 \times 1) \end{bmatrix}$$

όπου το μητρώο  $[\mathbf{T}_{04}]$  υπολογίζεται σύμφωνα με την υποενότητα 2.3.2.

Κατόπιν, υπολογίζουμε τις **προσαυξητικές φυσικές μορφές παραμόρφωσης κάθε στοιχείου** της επανάληψης  $i$ :

$$\boxed{[\Delta \rho_N^i] = [\alpha_N] \cdot [\Delta d^i]} \quad (3.38)$$

$(6 \times 1)$        $(6 \times 12)$        $(12 \times 1)$

όπου το μητρώο  $[\alpha_N]$  δίνεται από τη σχέση (2.33).

Οι **ολικές φυσικές μορφές παραμόρφωσης κάθε στοιχείου** της επανάληψης  $i$  ισούνται με:

$$\boxed{[\rho_N^i] = [\rho_N^{i-1}] + [\Delta \rho_N^i]} \quad (3.39)$$

$(6 \times 1)$        $(6 \times 1)$        $(6 \times 1)$

## 2) Υπολογισμός των φυσικών δυνάμεων κάθε στοιχείου (επανάληψη $j \in$ επανάληψη $i$ )

Από το σημείο αυτό ξεκινούν οι εσωτερικές επαναλήψεις  $j$  σε επίπεδο στοιχείου. Ως αρχικό φυσικό μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου  $[\mathbf{K}_N^{j=0}]$  χρησιμοποιείται το φυσικό μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου της  $(i-1)$ -επανάληψης  $[\mathbf{K}_N^{i-1}]$ , ως αρχικές φυσικές εσωτερικές δυνάμεις του στοιχείου  $[\mathbf{P}_N^{j=0}]$  λαμβάνονται οι φυσικές εσωτερικές δυνάμεις του στοιχείου της  $(i-1)$ -επανάληψης  $[\mathbf{P}_N^{i-1}]$  και ως επαυξητικές φυσικές μορφές παραμόρφωσης της πρώτης εσωτερικής επανάληψης  $j=1$   $[\Delta \rho_N^{j=1}]$  χρησιμοποιούνται οι επαυξητικές φυσικές μορφές παραμόρφωσης της επανάληψης Newton-Raphson  $i$   $[\Delta \rho_N^i]$ . Συνοπτικά, η αρχικοποίηση των επαναλήψεων  $j$  παρουσιάζεται ως εξής:

$$[\mathbf{F}_N^{j=0}] = [\mathbf{F}_N^{i-1}] \Rightarrow [\mathbf{F}_N^{j=0}]^{-1} = [\mathbf{F}_N^{i-1}]^{-1} \Rightarrow [\mathbf{K}_N^{j=0}] = [\mathbf{K}_N^{i-1}] \quad (3.40)$$

$(6 \times 6)$        $(6 \times 6)$        $(6 \times 6)$        $(6 \times 6)$        $(6 \times 6)$        $(6 \times 6)$

$$[\Delta \rho_N^{j=1}] = [\Delta \rho_N^i] \quad (3.41)$$

$(6 \times 1)$        $(6 \times 1)$

$$[\mathbf{P}_N^{j=0}] = [\mathbf{P}_N^{i-1}] = [\mathbf{K}_N^{i-1}] \times [\rho_N^{i-1}] \quad (3.42)$$

$(6 \times 6)$        $(6 \times 6)$        $(6 \times 6)$        $(6 \times 1)$

όπου  $[F_N]$  είναι το φυσικό μητρώο ενδοσιμότητας του στοιχείου.  
(6x6)

Στο βήμα αυτό υπολογίζουμε τις **επαυξητικές φυσικές δυνάμεις που έχει το στοιχείο** μετά το τέλος της εσωτερικής επανάληψης  $j$  :

$$[\Delta P_N^j] = [K_N^j] \times [\Delta \rho_N^j] \quad (3.43)$$

(6x6)      (6x6)      (6x1)

και “ενημερώνουμε” τις **ολικές φυσικές δυνάμεις του στοιχείου**:

$$[P_N^j] = [P_N^{j-1}] + [\Delta P_N^j] \quad (3.44)$$

(6x6)      (6x6)      (6x6)

### 3) Υπολογισμός του διανύσματος των γενικευμένων εσωτερικών δυνάμεων της διατομής ελέγχου (ή των διατομών ελέγχου) στη θέση $\xi$ (επανάληψη $j \in$ επανάληψη $i$ )

Ως αρχικές γενικευμένες εσωτερικές δυνάμεις της διατομής στη θέση  $\xi$   $[N^{j=0}(\xi)]$  (3x3) χρησιμοποιούνται οι γενικευμένες εσωτερικές δυνάμεις που έχει η διατομή αυτή κατά την (i-1)-επανάληψη  $[N^{i-1}(\xi)]$ , δηλαδή:

(3x3)

$$[N^{j=0}(\xi)] = [N^{i-1}(\xi)] \quad (3.45)$$

(3x3)      (3x3)

Στο βήμα αυτό υπολογίζουμε τις **επαυξητικές γενικευμένες εσωτερικές δυνάμεις που έχει η διατομή** (η οποία βρίσκεται στη θέση  $\xi$ ) :

$$[\Delta N^j(\xi)] = [b(\xi)] \times [\Delta P_N^j] \quad (3.46)$$

(3x1)      (3x6)      (6x1)

όπου το μητρώο παρεμβολής των γενικευμένων εσωτερικών δυνάμεων της διατομής  $[b(\xi)]$  δίνεται από τη σχέση (3.32) και το διάνυσμα  $[\Delta P_N^j]$  έχει υπολογιστεί ήδη βάσει της σχέσης (3.43).

Κατόπιν, “ενημερώνουμε” τις **ολικές γενικευμένες εσωτερικές δυνάμεις της διατομής**:

$$[N^j(\xi)] = [N^{j-1}(\xi)] + [\Delta N^j(\xi)] \quad (3.47)$$

(3x1)      (3x1)      (3x1)



4) Υπολογισμός του διανύσματος των γενικευμένων παραμορφώσεων της διατομής ελέγχου (ή των διατομών ελέγχου) στη θέση ξ (επανάληψη j ∈ επανάληψη i)

Ως αρχικό μητρώο ενδοσιμότητας της διατομής στη θέση ξ  $[f^{j=0}(\xi)]_{(3 \times 3)}$  λαμβάνεται το μητρώο ενδοσιμότητας που έχει η διατομή αυτή κατά την (i-1)-επανάληψη Newton-Raphson  $[f^{i-1}(\xi)]_{(3 \times 3)}$ , δηλαδή:

$$[f^{j=0}(\xi)]_{(3 \times 3)} = [f^{i-1}(\xi)]_{(3 \times 3)} \quad (3.48)$$

Στο βήμα αυτό υπολογίζουμε τις **επαυξητικές γενικευμένες παραμορφώσεις που έχει η διατομή** (η οποία βρίσκεται στη θέση ξ), σύμφωνα με τη σχέση (3.49) που προέκυψε από τη γραμμικοποίηση της μη γραμμικής σχέσης γενικευμένων εσωτερικών δυνάμεων – γενικευμένων παραμορφώσεων της διατομής:

$$[\Delta \varepsilon^j(\xi)]_{(3 \times 1)} = [f^{j-1}(\xi)]_{(3 \times 3)} \times [\Delta N^j(\xi)]_{(3 \times 1)} + [r^{j-1}(\xi)]_{(3 \times 1)} \quad (3.49)$$

όπου :

- $[f^{j-1}(\xi)]_{(3 \times 3)}$  είναι το τρέχον φυσικό μητρώο ενδοσιμότητας της διατομής της προηγούμενης εσωτερικής επανάληψης j-1.
- $[\Delta N^j(\xi)]_{(3 \times 1)}$  είναι το διάνυσμα των επαυξητικών γενικευμένων εσωτερικών δυνάμεων της διατομής, το οποίο έχουμε ήδη υπολογίσει σύμφωνα με τη σχέση (3.46).
- $[r^{j-1}(\xi)]_{(3 \times 1)}$  είναι το **μητρώο των λεγόμενων υπολειμματικών παραμορφώσεων (residual deformations) της διατομής** της εσωτερικής επανάληψης j-1, το οποίο έχει μηδενικές αρχικές τιμές :

$$[r^{j=0}(\xi)]_{(3 \times 1)} = [0]_{(3 \times 1)} \quad (3.50)$$

Σε κάθε επανάληψη j καθορίζονται οι υπολειμματικές αυτές παραμορφώσεις για κάθε φυσικό στοιχείο δυνάμεων. Όπως έχουμε αναφέρει αρκετές φορές, το συγκριτικό πλεονέκτημα του φυσικού στοιχείου δυνάμεων έναντι του φυσικού στοιχείου μετατοπίσεων είναι η ικανοποίηση του συμβιβαστού των παραμορφώσεων παντού κατά μήκος του στοιχείου. Για να επιτευχθεί αυτό απαιτείται η διόρθωση των υπολειμματικών παραμορφώσεων  $[r^{j-1}(\xi)]$ . Η διόρθωση αυτή επιβάλλει διορθωτικές

εσωτερικές υπολειμματικές δράσεις, οι οποίες πολλαπλασιαζόμενες με το τρέχον φυσικό μητρώο ενδοσιμότητας  $[f^j(\xi)]$  της διατομής στη θέση  $\xi$  δίνουν τις διορθωμένες υπολειμματικές παραμορφώσεις  $[r^j(\xi)]$ .

Κατόπιν, “ενημερώνουμε” τις **ολικές γενικευμένες παραμορφώσεις της διατομής**:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^j(\xi) \end{bmatrix}_{(3 \times 1)} = \begin{bmatrix} \varepsilon^{j-1}(\xi) \end{bmatrix}_{(3 \times 1)} + \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon^j(\xi) \end{bmatrix}_{(3 \times 1)} \quad (3.51)$$

Να επισημάνουμε στο σημείο αυτό την τεράστια διαφορά σε σχέση με το κλασικό στοιχείο μετατοπίσεων, στο οποίο οι παραμορφώσεις κάθε διατομής λαμβάνονται άμεσα μέσω των συναρτήσεων σχήματος από τις φυσικές μορφές παραμόρφωσης και βάσει του νόμου του υλικού προκύπτουν οι αντίστοιχες εσωτερικές δράσεις κάθε διατομής. Με ολοκλήρωση των εσωτερικών αυτών δράσεων κατά μήκος του στοιχείου εξάγεται το διάνυσμα των γενικευμένων εσωτερικών δυνάμεων του στοιχείου. Αντίθετα, στο φυσικό στοιχείο δυνάμεων ο υπολογισμός του διανύσματος των εσωτερικών δράσεων είναι μία ολόκληρη μη γραμμική διαδικασία.

**5) Υπολογισμός της αξονικής ανηγμένης παραμόρφωσης  $\varepsilon_x(\xi)$  στο μέσο κάθε υποεπιφάνειας της διατομής ελέγχου (ή των διατομών ελέγχου) που βρίσκεται στη θέση  $\xi$  (επανάληψη  $j \in$  επανάληψη  $i$ )**

Στο βήμα αυτό υπολογίζουμε, αρχικά, για κάθε εσωτερική επανάληψη  $j$  την **προσαυξητική αξονική ανηγμένη παραμόρφωση  $\Delta \varepsilon_{x, \text{fib}}^j(\xi)$  στο μέσο κάθε υποεπιφάνειας  $\text{fib}$**  ( $\text{fib}=1, \dots, n_{\text{fibers}}$  όπου  $n_{\text{fibers}}$  είναι ο αριθμός των υποεπιφανειών κάθε διατομής ελέγχου) της διατομής ή των διατομών ελέγχου με τη βοήθεια του μητρώου  $L(\xi)$ , το οποίο αποτελείται από τις συντεταγμένες του μέσου κάθε υποεπιφάνειας της διατομής-ελέγχου που βρίσκεται στη θέση  $\xi$ .

$$\Delta \varepsilon_{x, \text{fib}}^j(\xi) = \begin{bmatrix} L(\xi) \end{bmatrix}_{(1 \times 3)} \times \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon^j(\xi) \end{bmatrix}_{(3 \times 1)} \quad (3.52)$$

όπου

- το μητρώο των επαυξητικών γενικευμένων παραμορφώσεων  $[\Delta \varepsilon^j(\xi)]$  της διατομής ελέγχου (η οποία βρίσκεται στη θέση  $\xi$ ) έχει ήδη μορφωθεί βάσει της σχέσης (3.49).
- το μητρώο  $[L(\xi)]$  εξαρτάται αποκλειστικά από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά κάθε υποεπιφάνειας

$$[L(\xi)] = \begin{bmatrix} 1 & -y_{\text{fib}} & z_{\text{fib}} \end{bmatrix}$$

Οι συντεταγμένες  $-y_{\text{fib}}$ ,  $z_{\text{fib}}$  ορίζονται στο ακόλουθο σχήμα 3.3.

Κατόπιν, προσδιορίζουμε τη **συνολική αξονική ανηγμένη παραμόρφωση  $\varepsilon_{x, \text{fib}}^j(\xi)$  στο μέσο κάθε υποεπιφάνειας** της διατομής ή των διατομών ελέγχου:

$$\varepsilon_{x, \text{fib}}^j(\xi) = \varepsilon_{x, \text{fib}}^{j-1}(\xi) + \Delta \varepsilon_{x, \text{fib}}^j(\xi) \quad (3.53)$$

6) Υπολογισμός της ορθής τάσης  $\sigma_x(\xi)$  στο μέσο κάθε υποεπιφάνειας της διατομής ελέγχου (ή των διατομών ελέγχου) που βρίσκεται στη θέση  $\xi$  και έλεγχος πλαστικοποίησης κάθε υποεπιφάνειας (επανάληψη  $i \in$  επανάληψη  $i$ )

Το βήμα αυτό παραμένει το ίδιο τόσο για το φυσικό στοιχείο μετατοπίσεων όσο και για το φυσικό στοιχείο δυνάμεων.

Η καταστατική παράμετρος  $E_{fib}$  (μέτρο ελαστικότητας) εξαρτάται και δίνεται από τον εκάστοτε **καταστατικό νόμο υλικού** που ακολουθεί κάθε υποεπιφάνεια της διατομής. Η πολυστρωματική θεώρηση (fiber approach) παρέχει τη δυνατότητα ικανοποιητικής ανάλυσης διατομών στις οποίες υπάρχουν υποεπιφάνειες από διαφορετικό υλικό, που προφανώς ακολουθούν διαφορετικό καταστατικό νόμο υλικού. Η δυνατότητα αυτή είναι πολύ σημαντική, αν σκεφτούμε ότι μία διατομή από οπλισμένο σκυρόδεμα (διφασικό υλικό) αποτελείται από περισσότερα του ενός υλικά, το σκυρόδεμα και τον χάλυβα του οπλισμού, τα οποία έχουν πολύ διαφορετικές ιδιότητες το καθένα. Επιπλέον, η ποιότητα και η ποσότητα του χάλυβα μπορεί να μην είναι ίδια για κάθε υποεπιφάνεια μίας διατομής από οπλισμένο σκυρόδεμα. Ο διαμήκης οπλισμός έχει συνήθως μεγαλύτερη διάμετρο και καλύτερη ποιότητα χάλυβα από τους συνδετήρες, οι οποίοι τοποθετούνται τόσο για λόγους κατασκευαστικούς όσο και για λόγους περίσφιξης. Το σκυρόδεμα ως επί το πλείστον διατηρεί την ίδια ποιότητα σε ολόκληρη τη διατομή. Ολοκληρώνοντας το σχολιασμό αυτό, θα πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι το σκυρόδεμα είναι ένα πολυφασικό υλικό (μη ομογενές υλικό).

Έχοντας υπολογίσει την προσαυξητική αξονική ανηγμένη παραμόρφωση  $\Delta \varepsilon_{x,fib}^j(\xi)$  στο μέσο κάθε υποεπιφάνειας  $fib$ , εξάγουμε την αντίστοιχη **προσαυξητική ορθή τάση  $\Delta \sigma_{x,fib}^j(\xi)$  στο μέσο κάθε υποεπιφάνειας  $fib$** :

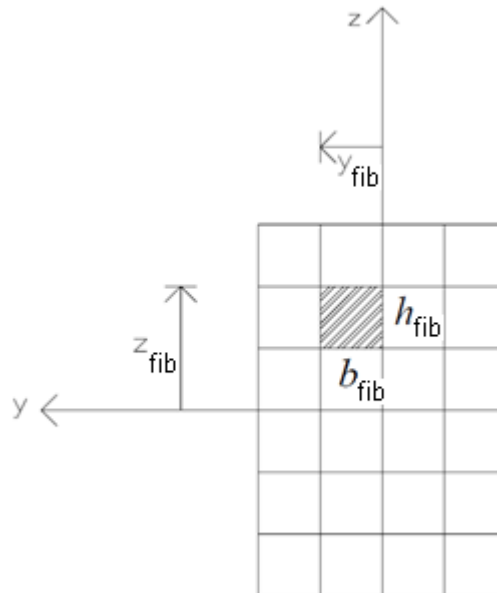
$$\Delta \sigma_{x,fib}^j(\xi) = E_{fib}^j(\xi) \times \Delta \varepsilon_{x,fib}^j(\xi) \quad (3.54)$$

Στη συνέχεια, προσδιορίζουμε την **ολική αξονική ορθή τάση  $\sigma_{x,fib}^j(\xi)$  στο μέσο κάθε υποεπιφάνειας** της διατομής ή των διατομών ελέγχου:

$$\sigma_{x,fib}^j(\xi) = \sigma_{x,fib}^{j-1}(\xi) + \Delta \sigma_{x,fib}^j(\xi) \quad (3.55)$$

Η αξονική ανηγμένη παραμόρφωση και η αντίστοιχη τάση στο μέσο κάθε υποεπιφάνειας συγκεντρώνονται αντίστοιχα στα διανύσματα  $\left[ \varepsilon_{x,fib}^j(\xi) \right]_{(n_{fibers} \times 3)}$ ,  $\left[ \sigma_{x,fib}^j(\xi) \right]_{(n_{fibers} \times 3)}$ .

$$\left[ \varepsilon_{x,fib}^j(\xi) \right]_{(n_{fibers} \times 3)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x,1}^j(x, y_1, z_1) \\ \dots \\ \varepsilon_{x,fib}^j(x, y_{fib}, z_{fib}) \\ \dots \\ \varepsilon_{x,n_{fibers}}^j(x, y_{n_{fibers}}, z_{n_{fibers}}) \end{bmatrix}, \quad \left[ \sigma_{x,fib}^j(\xi) \right]_{(n_{fibers} \times 3)} = \begin{bmatrix} \sigma_{x,1}^j(x, y_1, z_1) \\ \dots \\ \sigma_{x,fib}^j(x, y_{fib}, z_{fib}) \\ \dots \\ \sigma_{x,n_{fibers}}^j(x, y_{n_{fibers}}, z_{n_{fibers}}) \end{bmatrix}$$



Σχήμα 3.3 Διαίρεση της διατομής σε ίνες

Κατόπιν, **ακολουθεί ο έλεγχος της πλαστικοποίησης κάθε υποεπιφάνειας**, ο οποίος πραγματοποιείται στο μέσο της. Η πλαστικοποίηση μίας ίνας επέρχεται μόλις ικανοποιηθεί το κριτήριο διαρροής του μονοαξονικού καταστατικού νόμου του υλικού της ίνας, ενώ οι υπόλοιπες ίνες της δοκού ή του υποστυλώματος παραμένουν στην ελαστική περιοχή. Η πολυστρωματική θεώρηση βασίζεται σε κριτήρια διαρροής με τασικά μεγέθη  $f(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{yield})=0$ , σε αντίθεση με τα κριτήρια διαρροής της συγκεντρωμένης πλαστικότητας τα οποία διατυπώνονται συναρτήσει των εντατικών μεγεθών  $f(F_{11}, F_{22}, F_{33}, F_{12}, F_{23}, F_{31}, F_{yield}) = 0$ .

Υπενθυμίζουμε ότι η ελαστοπλαστική ανάλυση ενός πλαισιακού φορέα είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί θεωρώντας είτε **συγκεντρωμένη** είτε **κατανεμημένη πλαστικότητα**. Σε αντίθεση με την πρώτη θεώρηση (concentrated plasticity) κατά την οποία όλα τα σημεία μίας διατομής διαρρέουν ταυτόχρονα όταν τα εντατικά της μεγέθη ικανοποιήσουν το αντίστοιχο κριτήριο διαρροής, η πλαστικοποίηση των διατομών με κατανεμημένη πλαστικότητα (distributed plasticity) επέρχεται σταδιακά ανάλογα με την ικανοποίηση του κριτηρίου διαρροής σε χαρακτηριστικά σημεία καθ' ύψος και κατά μήκος της διατομής. Τα χαρακτηριστικά αυτά σημεία είναι τα μέσα των υποεπιφανειών των διατομών στην περίπτωση της πολυστρωματικής θεώρησης.

**Η κατανεμημένη πλαστικότητα μπορεί να προσομοιωθεί με δύο τρόπους:**

- μέσω της σχέσης ροπών-καμπυλοτήτων της διατομής και **της θεώρησης ενός ισοδύναμου πλαστικού κόμβου**
- μέσω **της πολυστρωματικής θεώρησης** (fiber approach), όπου τα στοιχεία δοκού υποδιαιρούνται σε λεπτές επίπεδες στρώσεις, παράλληλες προς τον διαμήκη άξονα της δοκού και συμπεριφερόμενες ανεξάρτητα η μία από την άλλη.

Ο λόγος, λοιπόν, που έχουμε ασχοληθεί με την **κατανεμημένη πλαστικότητα** είναι ότι η **μέθοδος του πλαστικού κόμβου (plastic node)** αδυνατεί να προσομοιώσει την **πλαστικοποίηση καθ' ύψος της διατομής και κατά μήκος των μελών του φορέα**. Ειδικότερα, από τις δύο μεθόδους της διανεμημένης πλαστικότητας προτιμήσαμε την **πολυστρωματική θεώρηση**, διότι είναι **πιο ακριβής** σε σχέση με τη θεώρηση του ισοδύναμου ελαστικού κόμβου.

Η γνωστή και ως fiber approach **κατανέμει την πλαστικοποίηση τόσο καθ' ύψος όσο και κατά μήκος των μελών του πλαισιακού φορέα** και παρουσιάζει τα ακόλουθα πλεονεκτήματα:

- παρέχει τη **δυνατότητα γενίκευσης, χωρίς σημαντικές διαφοροποιήσεις**, τόσο σε φορείς από χάλυβα όσο και σε φορείς από σπλισμένο σκυρόδεμα.
- έχει τη **δυνατότητα επέκτασης** με μικρές τροποποιήσεις **σε ανακυκλική ή σεισμική φόρτιση**
- είναι κατά κανόνα **πιο αξιόπιστη**.

Το ότι είναι **υπολογιστικά χρονοβόρα** συνιστά το σημαντικότερο μειονέκτημά της, ένα μειονέκτημα το οποίο με την ολοένα και πιο θεαματική βελτίωση της τεχνολογίας των ηλεκτρονικών υπολογιστών και της δημιουργίας αποτελεσματικότερων και ταχύτερων επιλυτών αμβλύνεται συνεχώς.

Στον κώδικα ReConAn (Reinforced Concrete Analysis), με τον οποίο θα ασχοληθούμε στα πλαίσια της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας, **ο έλεγχος της πλαστικοποίησης κάθε υποεπιφάνειας πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας μονοαξονικό καταστατικό νόμο υλικού**. Αυτό σημαίνει ότι ελέγχουμε μόνο το μέτρο της αξονικής ορθής τάσης στο μέσο κάθε υποεπιφάνειας. Η απλοποίηση αυτή μπορεί μεν να **μειώνει αποτελεσματικά τον υπολογιστικό χρόνο** και να **αμβλύνει την πολυπλοκότητα του κώδικα**, εντούτοις **ελλοχεύει ο κίνδυνος απόκλισης από την πραγματική συμπεριφορά σε περιπτώσεις μελών του πλαισιακού φορέα τα οποία καταπονούνται κυρίως από διάτμηση (shear dominated elements)**. Τέτοια δομικά μέλη είναι τα τοιχία και οι χαμηλόκορμες δοκοί (short beams).

Επανερχόμενοι στον έλεγχο πλαστικοποίησης κάθε υποεπιφάνειας, η διαδικασία είναι συνοπτικά η εξής:

- **Συγκρίνουμε την τάση του μέσου κάθε υποεπιφάνειας  $\sigma_{x, \text{fib}}^j(\xi)$  με την αντίστοιχη τάση διαρροής  $\sigma_{\text{yield}}$** . Η τάση διαρροής δίνεται από τον μονοαξονικό μη γραμμικό καταστατικό νόμο (διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων) που χαρακτηρίζει το υλικό της υποεπιφάνειας.
- Ανάλογα με το αν το υλικό της υποεπιφάνειας έχει πλαστικοποιηθεί ή όχι, **αλλάζουμε το εφαπτομενικό καταστατικό μέτρο ελαστικότητας  $E_{\text{fib}}^j(\xi)$** . Το εφαπτομενικό καταστατικό μέτρο ελαστικότητας  $E_{\text{fib}}^j(\xi)$  του υλικού κάθε υποεπιφάνειας ανανεώνεται ή καλύτερα ελέγχεται σε κάθε εσωτερική επανάληψη  $j$ . Δεν αλλάζει τιμή παρά μόνο αν επέλθει πλαστικοποίηση της υποεπιφάνειας.

7) Υπολογισμός του μητρώου στιβαρότητας  $[k^j(\xi)]_{(3 \times 3)}$  και του μητρώου ενδοσιμότητας

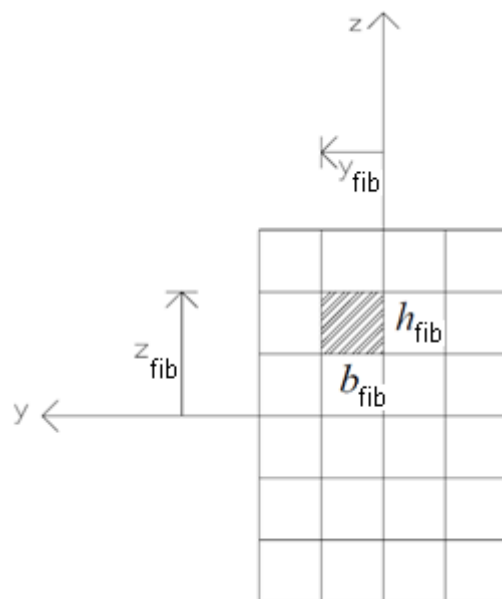
$[f^j(\xi)]_{(3 \times 3)}$  της διατομής ελέγχου (ή των διατομών ελέγχου) που βρίσκεται στη θέση  $\xi$

(επανάληψη  $j \in$  επανάληψη  $i$ )

Να σημειώσουμε ότι στο κεφάλαιο αυτό συμβολίσαμε τον δείκτη των υποεπιφανειών ως  $fib$ , σε αντίθεση με το κεφάλαιο 2 που τον έχουμε συμβολίσει ως  $i$ . Αυτό ήταν απαραίτητο προκειμένου να αποφευχθεί οποιαδήποτε σύγχυση του δείκτη των υποεπιφανειών με τον δείκτη της επανάληψης Newton-Raphson  $i$ . Κατ' αντιστοιχία με το κεφάλαιο 2 έχουμε ότι:

Καθεμία από τις  $n_{fibers}$  υποεπιφάνειες (χαρακτηρίζεται από το δείκτη  $fib=1,2,3,\dots, n_{fibers}$ ):

- έχει συγκεκριμένες διαστάσεις: πλάτος  $b_{fib}$ , ύψος  $h_{fib}$   $\rightarrow$  συγκεκριμένο εμβαδόν  $A_{fib} = b_{fib} \times h_{fib}$
- έχει συγκεκριμένες συντεταγμένες :  $y_{fib}, z_{fib}$
- ακολουθεί το δικό της νόμο υλικού  $\rightarrow$  έχει το δικό της μέτρο ελαστικότητας  $E_{fib}$ . Με άλλα λόγια, το μέτρο ελαστικότητας δεν είναι υποχρεωτικά το ίδιο για όλες τις υποεπιφάνειες της διατομής της δοκού αλλά μεταβάλλεται σύμφωνα με το μονοδιάστατο νόμο του υλικού.



**Σχήμα 3.3** Διαίρεση της διατομής σε ίνες

Έχοντας ανανεώσει το εφαπτομενικό μέτρο ελαστικότητας  $E_{fib}^j(\xi)$  κάθε υποεπιφάνειας  $fib=1,\dots,n_{fibers}$  (όπου  $n_{fibers}$  είναι ο αριθμός των υποεπιφανειών κάθε διατομής ελέγχου) της διατομής (ή των διατομών) ελέγχου που βρίσκεται στη θέση  $\xi$ , υπολογίζουμε το **εφαπτομενικό μητρώο στιβαρότητας  $[k^j(\xi)]_{(3 \times 3)}$  της διατομής ελέγχου.**

$$[k^j(\xi)]_{(3 \times 3)} = \begin{bmatrix} \sum_{fib=1}^{n_{fibers}} [E_{fib}^j(\xi) \times A_{fib}] & - \sum_{fib=1}^{n_{fibers}} [E_{fib}^j(\xi) \times A_{fib} \times z_{fib}] & \sum_{fib=1}^{n_{fibers}} [E_{fib}^j(\xi) \times A_{fib} \times y_{fib}] \\ - \sum_{fib=1}^{n_{fibers}} [E_{fib}^j(\xi) \times A_{fib} \times z_{fib}] & \sum_{fib=1}^{n_{fibers}} [E_{fib}^j(\xi) \times A_{fib} \times z_{fib}^2] & - \sum_{fib=1}^{n_{fibers}} [E_{fib}^j(\xi) \times A_{fib} \times y_{fib} \times z_{fib}] \\ \sum_{fib=1}^{n_{fibers}} [E_{fib}^j(\xi) \times A_{fib} \times y_{fib}] & - \sum_{fib=1}^{n_{fibers}} [E_{fib}^j(\xi) \times A_{fib} \times y_{fib} \times z_{fib}] & \sum_{fib=1}^{n_{fibers}} [E_{fib}^j(\xi) \times A_{fib} \times y_{fib}^2] \end{bmatrix}$$

Αντιστρέφοντας το εφαπτομενικό μητρώο στιβαρότητας  $[k^j(\xi)]_{(3 \times 3)}$ , προκύπτει το αντίστοιχο

**εφαπτομενικό μητρώο ενδοσιμότητας  $[f^j(\xi)]_{(3 \times 3)}$  της διατομής ελέγχου.**

$$[f^j(\xi)]_{(3 \times 3)} = [k^j(\xi)]_{(3 \times 3)}^{-1} \quad (3.56)$$

**8) Υπολογισμός του διανύσματος των εσωτερικών γενικευμένων δυνάμεων  $[N_R^j(\xi)]_{(3 \times 1)}$  της διατομής ελέγχου (ή των διατομών ελέγχου) που βρίσκεται στη θέση  $\xi$  (επανάληψη  $j \in$  επανάληψη  $i$ )**

Το διάνυσμα των εσωτερικών γενικευμένων δυνάμεων  $[N_R^j(\xi)]$  (resisting forces-ανθίστανται στην παραμόρφωση) της διατομής ελέγχου περιλαμβάνει την αξονική δύναμη  $N_{x,R}^j(\xi)$ , την καμπτική ροπή  $M_{y,R}^j(\xi)$  περί τον τοπικό καρτεσιανό άξονα  $y$  και την καμπτική ροπή  $M_{z,R}^j(\xi)$  περί τον τοπικό καρτεσιανό άξονα  $z$ . Και οι τρεις αυτές εσωτερικές δράσεις της διατομής υπολογίζονται **αθροίζοντας τη συμβολή κάθε υποεπιφάνειας της διατομής.**

$$N_{x,R}^j(\xi) = \sum_{fib=1}^{n_{fibers}} [\sigma_{fib}^j(\xi) \times A_{fib}] \quad (3.57a)$$

$$M_{y,R}^j(\xi) = - \sum_{fib=1}^{n_{fibers}} [\sigma_{fib}^j(\xi) \times A_{fib} \times y_{fib}] \quad (3.57b)$$

$$M_{z,R}^j(\xi) = \sum_{fib=1}^{n_{fibers}} [\sigma_{fib}^j(\xi) \times A_{fib} \times z_{fib}] \quad (3.57c)$$

Έχουμε, λοιπόν, ότι:

$$[N_R^j(\xi)] = \begin{bmatrix} N_{x,R}^j(\xi) \\ M_{y,R}^j(\xi) \\ M_{z,R}^j(\xi) \end{bmatrix} \Rightarrow [N^j(\xi)] = \begin{bmatrix} \sum_{fib=1}^{n_{fibers}} [\sigma_{fib}^j(\xi) \times A_{fib}] \\ - \sum_{fib=1}^{n_{fibers}} [\sigma_{fib}^j(\xi) \times A_{fib} \times y_{fib}] \\ \sum_{fib=1}^{n_{fibers}} [\sigma_{fib}^j(\xi) \times A_{fib} \times z_{fib}] \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

9) Υπολογισμός του διανύσματος των υπολειμματικών γενικευμένων δυνάμεων  $[N_U^j(\xi)]_{(3 \times 1)}$  της διατομής ελέγχου (ή των διατομών ελέγχου) που βρίσκεται στη θέση  $\xi$  (επανάληψη  $j \in$  επανάληψη  $i$ )

Το διάνυσμα των υπολειμματικών γενικευμένων δυνάμεων (unbalanced forces)  $[N_U^j(\xi)]$  της διατομής ελέγχου προκύπτει αν από το διάνυσμα των εσωτερικών γενικευμένων δυνάμεων  $[N^j(\xi)]_{(3 \times 1)}$ , το οποίο υπολογίσαμε σύμφωνα με τη σχέση (3.47), αφαιρέσουμε το διάνυσμα των εσωτερικών γενικευμένων δυνάμεων  $[N_R^j(\xi)]$ , το οποίο δίνεται από τη σχέση (3.58).

$$[N_U^j(\xi)]_{(3 \times 1)} = [N^j(\xi)]_{(3 \times 1)} - [N_R^j(\xi)]_{(3 \times 1)} \quad (3.59)$$

10) Υπολογισμός του διανύσματος των υπολειμματικών παραμορφώσεων  $[r^j(\xi)]$  της διατομής ελέγχου (ή των διατομών ελέγχου) που βρίσκεται στη θέση  $\xi$  (επανάληψη  $j \in$  επανάληψη  $i$ )

Η διόρθωση των υπολειμματικών παραμορφώσεων είναι αναγκαία ώστε να ικανοποιείται το συμβιβαστό των παραμορφώσεων και η ισορροπία πάντα και παντού κατά μήκος του στοιχείου. Το διάνυσμα των υπολειμματικών παραμορφώσεων (unbalanced forces)  $[r^j(\xi)]$  της διατομής ελέγχου προκύπτει από τον ακόλουθο τύπο:

$$[r^j(\xi)]_{(3 \times 1)} = [f^j(\xi)]_{(3 \times 3)} \times [N_U^j(\xi)]_{(3 \times 1)} \quad (3.60)$$



11) Υπολογισμός του φυσικού μητρώου ενδοσιμότητας  $[F_N^j(\xi)]$  και του φυσικού μητρώου στιβαρότητας  $[K_N^j(\xi)]$  του στοιχείου (επανάληψη  $i \in$  επανάληψη  $i$ )

Το φυσικό μητρώο ενδοσιμότητας  $[F_N^j(\xi)]$  του στοιχείου εξάγεται εύκολα σύμφωνα με τον ακόλουθο τύπο:

$$[F_N^j(\xi)]_{(6 \times 6)} = \int_{-1}^1 \left\{ [b(\xi)]_{(3 \times 6)}^T \times [f^j(\xi)]_{(3 \times 3)} \times [b(\xi)]_{(3 \times 6)} \right\} d\xi \quad (3.62)$$

όπου

- το μητρώο ενδοσιμότητας  $[f^j(\xi)]_{(3 \times 3)}$  της διατομής (ή των διατομών ολοκλήρωσης) έχει ήδη μορφωθεί βάσει της σχέσης (3.56) :  $[f^j(\xi)]_{(3 \times 3)} = [k^j(\xi)]_{(3 \times 3)}^{-1}$

- το μητρώο παρεμβολής των γενικευμένων εσωτερικών δυνάμεων της διατομής ισούται με :

$$(3.32) \Rightarrow [b(\xi)]_{(3 \times 6)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \xi & 0 \end{bmatrix}$$

Το φυσικό μητρώο στιβαρότητας  $[K_N^j(\xi)]$  του στοιχείου εξάγεται εύκολα αντιστρέφοντας το αντίστοιχο φυσικό μητρώο ενδοσιμότητας:

$$[K_N^j(\xi)]_{(6 \times 6)} = [F_N^j(\xi)]_{(6 \times 6)}^{-1} \quad (3.63)$$

Η επίλυση του ολοκληρώματος της σχέσης (3.62) μπορεί να πραγματοποιηθεί εφαρμόζοντας είτε “αναλυτική” είτε αριθμητική ολοκλήρωση, οι οποίες δύο εναλλακτικές μέθοδοι έχουν περιγραφεί αναλυτικά στην ενότητα 2.6 του κεφαλαίου 2.

Εφαρμόζοντας αριθμητική ολοκλήρωση Gauss ή Gauss-Lobatto, η σχέση (3.62) γίνεται:

$$[F_N^j(\xi)]_{(6 \times 6)} = \frac{\sum_{i_{sec}=1}^n \left[ w_{i_{sec}} \times [b(\xi_{i_{sec}})]_{(3 \times 6)}^T \times [f^j(\xi_{i_{sec}})]_{(3 \times 3)} \times [b(\xi_{i_{sec}})]_{(3 \times 6)} \right]}{\sum_{i_{sec}=1}^n w_{i_{sec}}} \Rightarrow$$

$$[F_N^j(\xi)]_{(6 \times 6)} = \frac{\sum_{i_{sec}=1}^n \left[ w_{i_{sec}} \times [b(\xi_{i_{sec}})]_{(3 \times 6)}^T \times [k^j(\xi_{i_{sec}})]_{(3 \times 3)}^{-1} \times [b(\xi_{i_{sec}})]_{(3 \times 6)} \right]}{2}$$

## 12) Έλεγχος του κριτηρίου σύγκλισης (επανάληψη j ∈ επανάληψη i)

Για να ελέγξουμε αν συγκλίνει η εσωτερική (ονομάζεται εσωτερική διότι αποτελεί εσωτερική υποδιαδικασία της εξωτερικής επαναληπτική διαδικασία i) επαναληπτική διαδικασία j, εισάγουμε το παρακάτω ενεργειακό κριτήριο σύγκλισης:

$$\frac{\begin{matrix} [\Delta P_N^j]^T \cdot [\Delta \rho_N^j] \\ (6 \times 6) \quad (6 \times 1) \end{matrix}}{\begin{matrix} [\Delta P_N^{j=1}]^T \cdot [\Delta \rho_N^{j=1}] \\ (6 \times 6) \quad (6 \times 1) \end{matrix}} \leq \varepsilon \quad (3.64)$$

όπου

- το διάνυσμα των επαυξητικών φυσικών δυνάμεων  $[\Delta P_N^j]$  του στοιχείου έχει ήδη μορφωθεί βάσει του τύπου (3.43)

$$\begin{matrix} [\Delta P_N^j] \\ (6 \times 6) \end{matrix} = \begin{matrix} [K_N^j] \\ (6 \times 6) \end{matrix} \times \begin{matrix} [\Delta \rho_N^j] \\ (6 \times 1) \end{matrix} \quad (3.43)$$

- (3.41)  $\Rightarrow [\Delta \rho_N^{j=1}] = [\Delta \rho_N^i]$
- (3.43)  $\Rightarrow [\Delta P_N^{j=1}] = [K_N^{j=1}] \times [\Delta \rho_N^{j=1}] \xrightarrow{(3.41)}$

$$\begin{matrix} [\Delta P_N^{j=1}] \\ (6 \times 6) \end{matrix} = \begin{matrix} [K_N^i] \\ (6 \times 6) \end{matrix} \times \begin{matrix} [\Delta \rho_N^i] \\ (6 \times 1) \end{matrix} \quad (3.65)$$

- $\varepsilon$  : είναι η ανοχή του κριτηρίου σύγκλισης, που παίρνει συνήθως τιμές της τάξεως του  $10^{-6}$ . Η επιλογή του μεγέθους της αφήνεται στην κρίση του ερευνητή, ο οποίος θα πρέπει να λάβει υπόψη τις ιδιαιτερότητες του κάθε προβλήματος και να πετύχει τη χρυσή τομή μεταξύ ακρίβειας και οικονομίας.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

- Αν το κριτήριο σύγκλισης ικανοποιείται, τότε :
  - θέτουμε  $\begin{matrix} [P_N^i] \\ (6 \times 6) \end{matrix} = \begin{matrix} [P_N^j] \\ (6 \times 6) \end{matrix}$  και το προσθέτουμε στο ολικό διάνυσμα των εντατικών

μεγεθών του φορέα  $\begin{matrix} [\bar{P}_{ol}] \\ (12N \times 1) \end{matrix}$

- θέτουμε  $[K_N^i] = [K_N^j]$  και το προσθέτουμε στο ολικό μητρώο στιβαρότητας του

φορέα 
$$\begin{bmatrix} \overline{K}_{ολ}^{i-1} \end{bmatrix}$$
  
(12Nx12N)

- τερματίζεται η εσωτερική επανάληψη j
  - συνεχίζεται η επανάληψη Newton-Raphson i με το βήμα 13.
- **Αν το κριτήριο σύγκλισης δεν ικανοποιείται**, τότε
    - δεν ικανοποιείται το συμβιβαστό των παραμορφώσεων σε όλες τις διατομές
    - υπολογίζεται **το διάνυσμα των υπολειμματικών παραμορφώσεων**  $[s^j(\xi)]$  **του στοιχείου** με ολοκλήρωση των υπολειμματικών παραμορφώσεων  $[r^j(\xi)]$  κάθε διατομής

$$[s^j(\xi)]_{(6 \times 1)} = \int_{-1}^1 \left\{ [b(\xi)]_{(3 \times 6)}^T \cdot [r^j(\xi)]_{(3 \times 1)} \right\} d\xi \quad (3.66)$$

Σύμφωνα με την αριθμητική ολοκλήρωση Gauss ή Gauss-Lobatto, η (3.66) μπορεί να προσεγγιστεί από τη σχέση (3.67):

$$[s^j(\xi)]_{(6 \times 1)} = \frac{\sum_{fib=1}^{n_{fibers}} \left[ w_{fib} \times [b(\xi_{fib})]_{(3 \times 6)}^T \times [r^j(\xi_{fib})]_{(3 \times 1)} \right]}{\sum_{fib=1}^{n_{fibers}} w_{fib}} \Rightarrow$$

$$[s^j(\xi)]_{(6 \times 1)} = \frac{\sum_{fib=1}^{n_{fibers}} \left[ w_{fib} \times [b(\xi_{fib})]_{(3 \times 6)}^T \times [r^j(\xi_{fib})]_{(3 \times 1)} \right]}{2}$$

- θέτουμε  $j=j+1$  και  $[\Delta \rho_N^{j+1}]_{(6 \times 1)} = -[s^j(\xi)]_{(6 \times 1)}$ .
- επαναλαμβάνονται τα βήματα της εσωτερικής επαναληπτικής διαδικασίας j 2÷12.

### 13) Υπολογισμός του καθολικού μητρώου στιβαρότητας $\begin{bmatrix} \bar{K} \end{bmatrix}$ και του καθολικού

#### διανύσματος των εντατικών μεγεθών $\begin{bmatrix} \bar{P} \end{bmatrix}$ του στοιχείου (επανάληψη i)

Έχοντας προσδιορίσει το φυσικό μητρώο στιβαρότητας  $[K_N]$  του στοιχείου, υπολογίζουμε το αντίστοιχο **μητρώο δυσκαμψίας**  $\begin{bmatrix} \bar{K} \end{bmatrix}$  **του στοιχείου στο καθολικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων:**

$$\begin{bmatrix} \bar{K} \\ (12 \times 12) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{04} \\ (12 \times 12) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \alpha_N \\ (12 \times 6) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} K_N \\ (6 \times 6) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_N \\ (6 \times 12) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{04} \\ (12 \times 12) \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

όπου το μητρώο  $[\alpha_N]$  δίνεται από τη σχέση (2.33) και το μητρώο  $[T_{04}]$  δίνεται από τη σχέση (2.17).

Έχοντας προσδιορίσει το φυσικό διάνυσμα των εντατικών μεγεθών  $[P_N]$  του στοιχείου, υπολογίζουμε το αντίστοιχο **διάνυσμα των εντατικών μεγεθών**  $\begin{bmatrix} \bar{P} \end{bmatrix}$  **του στοιχείου στο καθολικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων:**

$$\begin{bmatrix} \bar{P} \\ (12 \times 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{04} \\ (12 \times 12) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_N \\ (12 \times 6) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} P_N \\ (6 \times 1) \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

#### **Παρατήρηση**

Με τον υπολογισμό του καθολικού μητρώου στιβαρότητας και του καθολικού διανύσματος των εντατικών μεγεθών του στοιχείου ουσιαστικά έχει ολοκληρωθεί η διαδικασία προσδιορισμού της κατάστασης του στοιχείου. Ωστόσο, δεν συμβαίνει το ίδιο και με την επαναληπτική διορθωτική διαδικασία i (μέθοδος Newton-Raphson), η οποία αναφέρεται σε επίπεδο φορέα και όχι στοιχείου

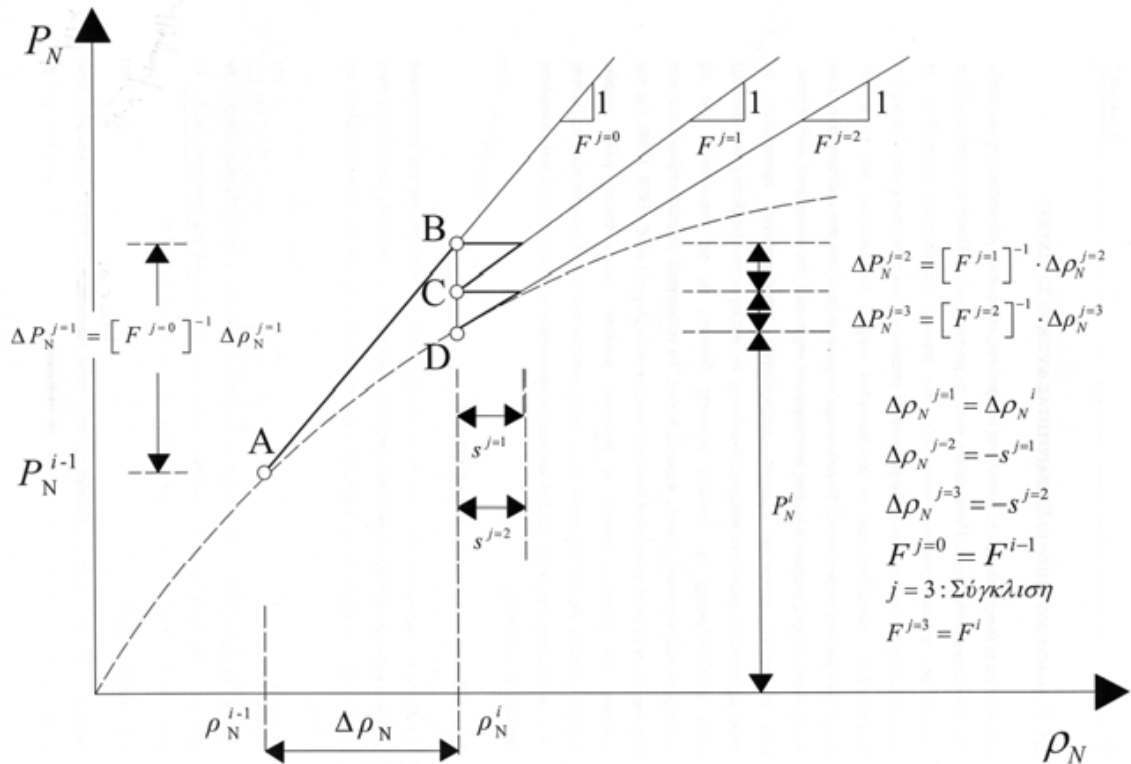
και καθορίζει το διάνυσμα των καθολικών καρτεσιανών επικόμβιων μετακινήσεων  $\begin{bmatrix} \bar{d}_{04} \\ (12N \times 1) \end{bmatrix}$  του

φορέα που αντιστοιχεί στο διάνυσμα των εξωτερικών γενικευμένων δυνάμεων  $\begin{bmatrix} \bar{P}_{\varepsilon\xi}^k \\ (12N \times 1) \end{bmatrix}$  του βήματος

φόρτισης k, όπου N είναι ο συνολικός αριθμός των φυσικών στοιχείων δυνάμεων του φορέα.

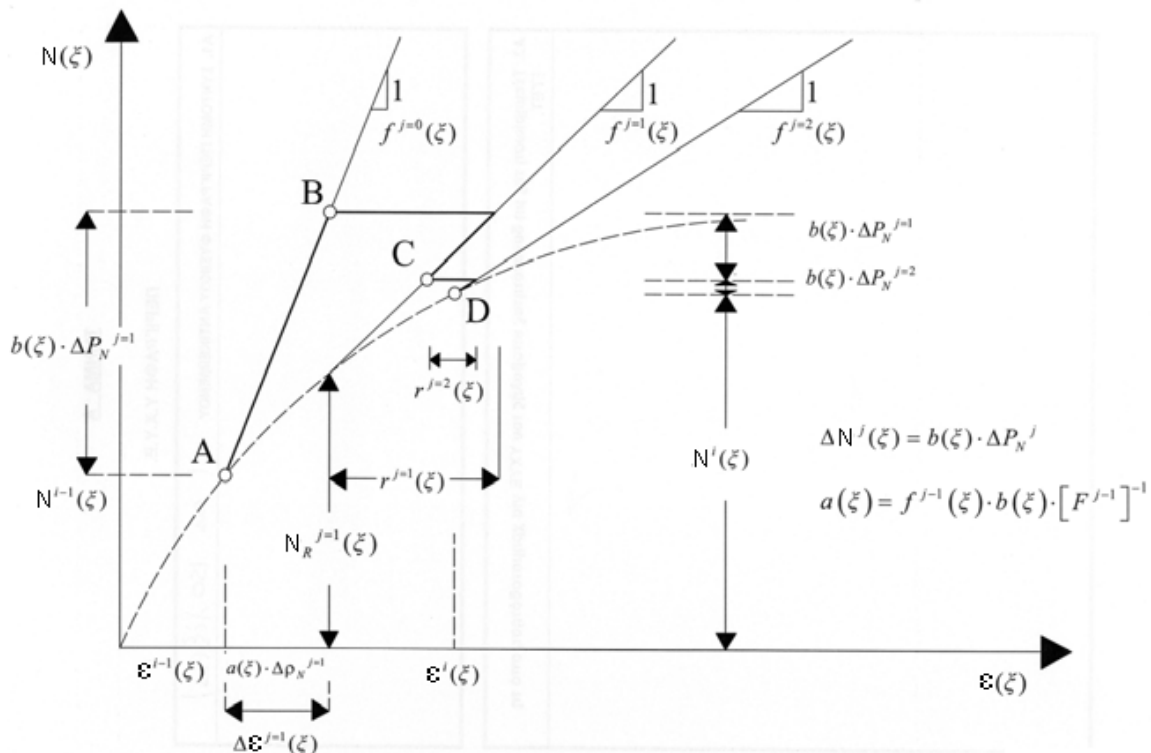
Έχοντας υπολογίσει το καθολικό μητρώο στιβαρότητας και το καθολικό διάνυσμα των εντατικών μεγεθών κάθε στοιχείου της φέρουσας κατασκευής, είμαστε σε θέση να μορφώσουμε το ολικό **καθολικό μητρώο στιβαρότητας** και το ολικό **καθολικό διάνυσμα των εσωτερικών γενικευμένων δυνάμεων του φορέα**. Εάν ικανοποιείται το ενεργειακό κριτήριο σύγκλισης της επαναληπτικής διαδικασίας i (Newton-Raphson), ο επιλύτης μας συνεχίζει με το επόμενο βήμα εξωτερικής φόρτισης k=k+1.

Η επαναληπτική εσωτερική διαδικασία προσδιορισμού της κατάστασης του στοιχείου απεικονίζεται γραφικά στο σχήμα 3.4.

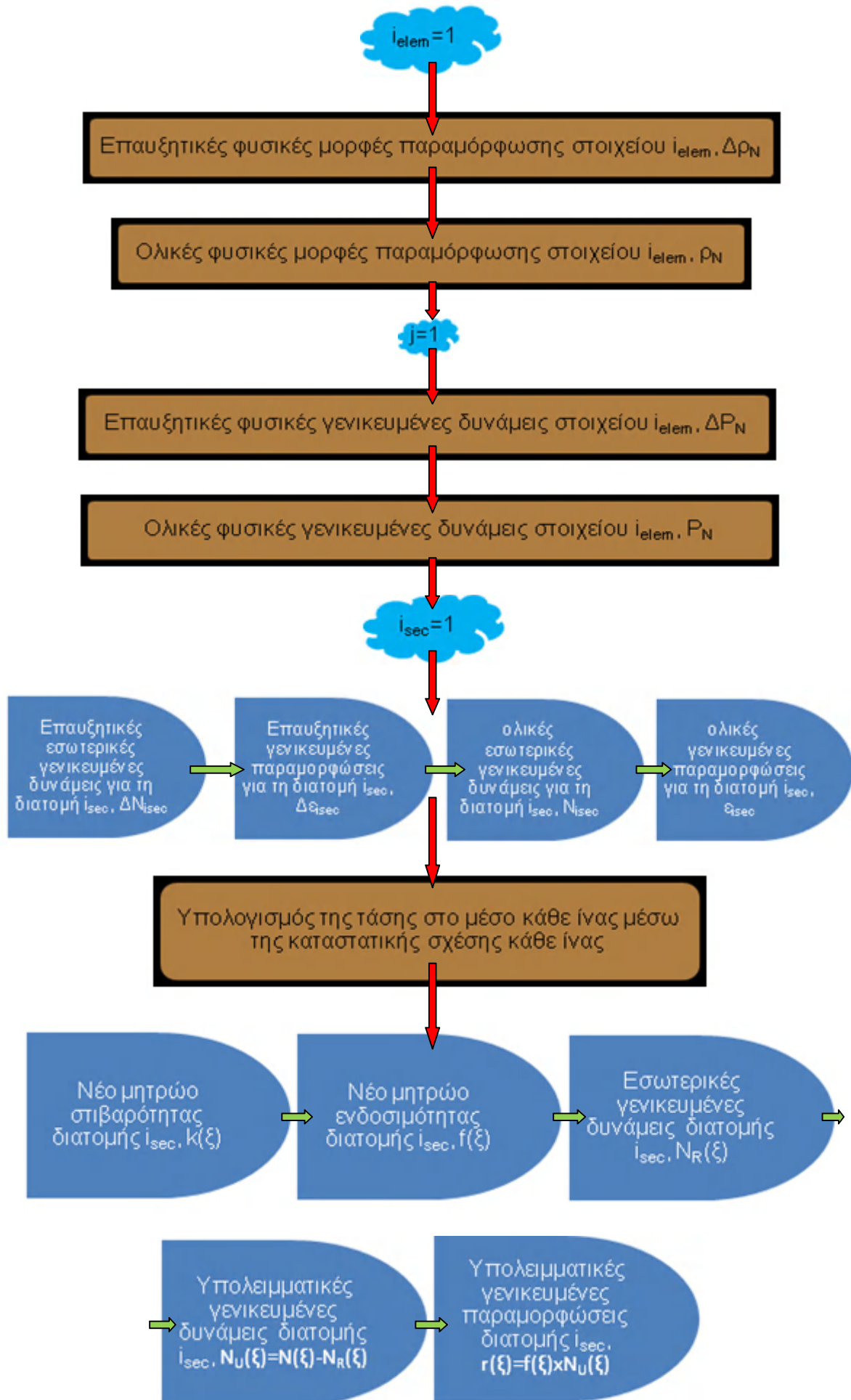


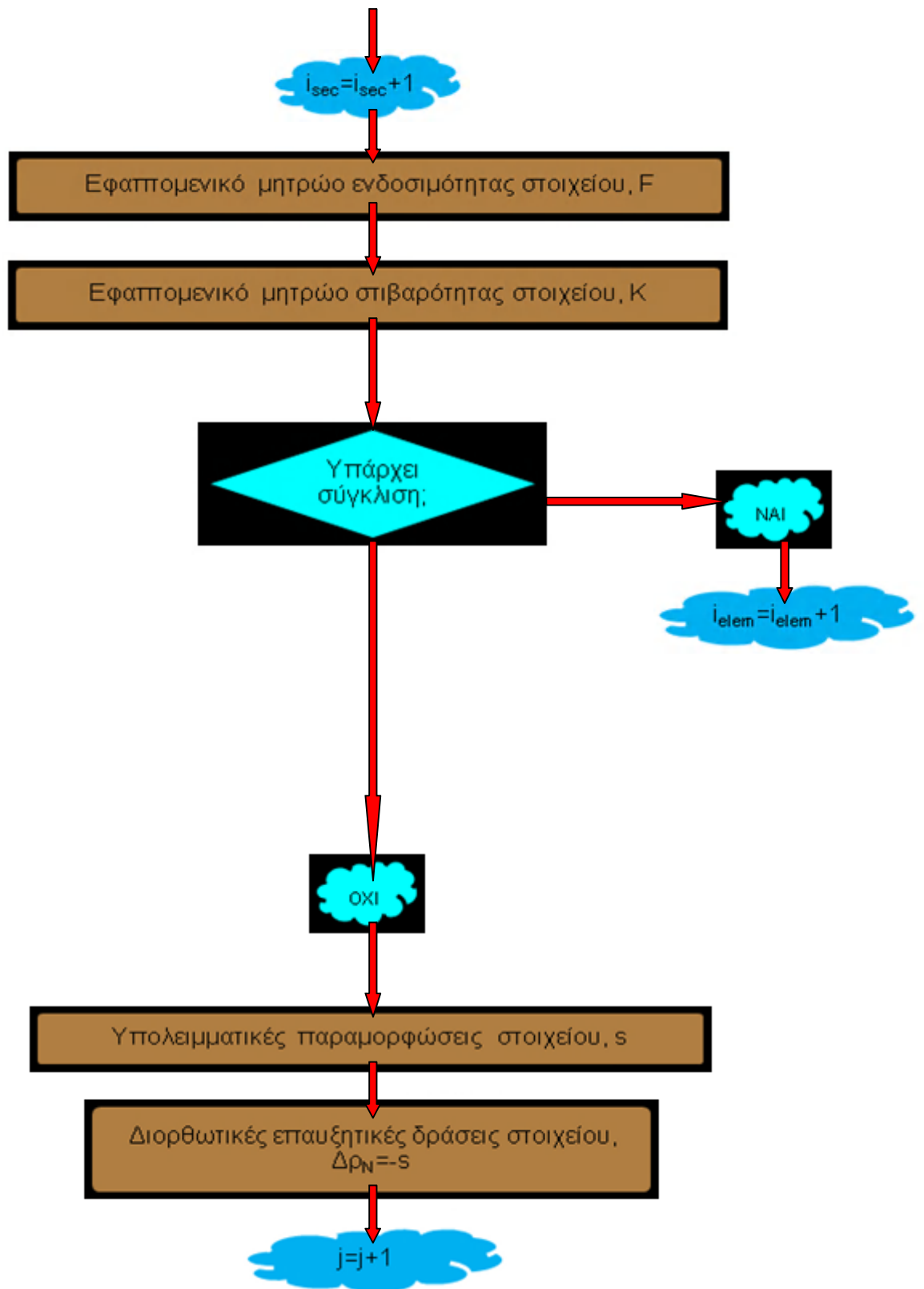
Σχήμα 3.4 Προσδιορισμός της κατάστασης του στοιχείου

Η επαναληπτική εσωτερική διαδικασία προσδιορισμού της κατάστασης της διατομής απεικονίζεται γραφικά στο κάτωθι σχήμα.

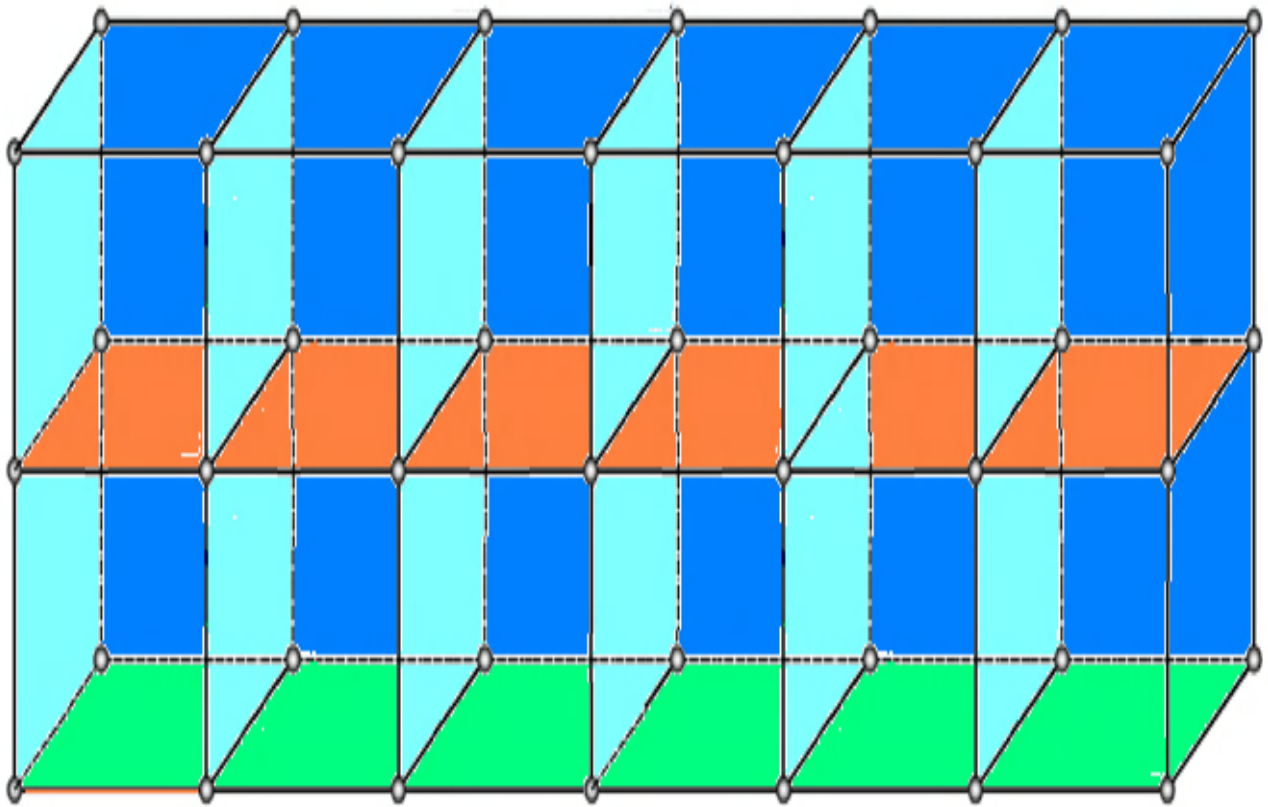


Σχήμα 3.5 Προσδιορισμός της κατάστασης της διατομής





Σχήμα 3.6 Διάγραμμα ροής προσδιορισμού της κατάστασης του στοιχείου



## Κεφάλαιο 4

Τα εξαεδρικά στοιχεία τρισδιάστατης ελαστικότητας



## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 4

### 4.1 Εισαγωγικά στοιχεία

### 4.2 Τα βασικά χαρακτηριστικά του εξαεδρικού στοιχείου τρισδιάστατης ελαστικότητας

#### 4.2.1 Οκτακομβικό στοιχείο

- Συναρτήσεις σχήματος
- Μητρώο παραμορφώσεως
- Μητρώο στιβαρότητας

#### 4.2.2 Στοιχείο ανωτέρου βαθμού

#### 4.2.3 Σύγκριση των διαφόρων τύπων του εξαεδρικού στοιχείου

### 4.3 Σύγκριση του εξαεδρικού με τα άλλα είδη τρισδιάστατων στοιχείων

## 4.1 Εισαγωγικά στοιχεία

Τα πεπερασμένα στοιχεία τρισδιάστατης ελαστικότητας προκύπτουν από τα αντίστοιχα στοιχεία της δισδιάστατης ελαστικότητας με την προσθήκη της συντεταγμένης  $z$  και της αντίστοιχης μετατόπισης  $w$ . Τα στοιχεία αυτά **χρησιμοποιούν τρισδιάστατους καταστατικούς νόμους υλικού** και **αξιοποιούνται για την ανάλυση φορέων η εντατική κατάσταση των οποίων αντιστοιχεί σε τρισδιάστατη ελαστικότητα**. Σε αυτή την κατηγορία φορέων ανήκουν και οι φορείς από οπλισμένο σκυρόδεμα, καθώς το σκυρόδεμα είναι ένα υλικό το οποίο για να προσομοιωθεί σωστά και με ακρίβεια θα πρέπει να ληφθούν υπόψιν οι εντατικές καταστάσεις της τρισδιάστατης ελαστικότητας.

Οι εννέα συνιστώσες της τάσης διατεταγμένες σε μητρική μορφή απαρτίζουν τον περίφημο ταυυστή των τάσεων, ο οποίος αποδεικνύεται ότι είναι συμμετρικός. Δηλαδή, ισχύει ότι:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{για κάθε } i, j = x, y, z \text{ με } i \neq j \quad (4.1)$$

Λόγω του ότι  $T_{xy} = T_{yx}$ ,  $T_{yz} = T_{zy}$ ,  $T_{zx} = T_{xz}$ , η εντατική και παραμορφωσιακή κατάσταση σε οποιοδήποτε σημείο ενός φορέα, ο οποίος προσομοιώνεται με πεπερασμένα στοιχεία τρισδιάστατης ελαστικότητας, προσδιορίζεται από τις έξι συνιστώσες του ταυυστή των τάσεων  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $T_{xy}$ ,  $T_{yz}$ ,  $T_{zx}$ , δηλαδή από το διάνυσμα των τάσεων

$$\{\sigma\} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ T_{xy} \ T_{yz} \ T_{zx}]^T \quad (4.2)$$

και από τις έξι αντίστοιχες συνιστώσες του ταυυστή των παραμορφώσεων  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_z$ ,  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{zx}$ , δηλαδή από το διάνυσμα των ανηγμένων παραμορφώσεων

$$\{\epsilon\} = [\epsilon_x \ \epsilon_y \ \epsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]^T \quad (4.3)$$

όπου  $\gamma_{ij}$  είναι οι τεχνικές ανηγμένες διατμητικές παραμορφώσεις (engineering shear strain), για τις οποίες ισχύουν τα εξής:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= 2 \cdot \epsilon_{xy} \\ \gamma_{yz} &= 2 \cdot \epsilon_{yz} \\ \gamma_{zx} &= 2 \cdot \epsilon_{zx} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Υπάρχουν τρία είδη ισοπαραμετρικών πεπερασμένων στοιχείων τρισδιάστατης ελαστικότητας :

- τα **εξαεδρικά**
- τα **τετραεδρικά**
- τα **πενταεδρικά σφηνοειδούς μορφής**.

Στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία θα εργαστούμε με τα εξαεδρικά ισοπαραμετρικά στοιχεία τρισδιάστατης ελαστικότητας

- **8 κόμβων** (κυρίως με αυτά)
- **20 κόμβων**
- **27 κόμβων**.

## 4.2 Τα βασικά χαρακτηριστικά του εξαεδρικού στοιχείου τρισδιάστατης ελαστικότητας

### 4.2.1 Οκτακομβικό στοιχείο

Το εξαεδρικό ισοπαραμετρικό στοιχείο τρισδιάστατης ελαστικότητας οκτώ κόμβων αποτελεί τη γενίκευση στις τρεις διαστάσεις του τετραπλευρικού ισοπαραμετρικού στοιχείου επίπεδης έντασης – παραμόρφωσης τεσσάρων κόμβων.

Σε κάθε κόμβο ενός τετραπλευρικού στοιχείου επίπεδης έντασης – παραμόρφωσης αντιστοιχούν δύο μετατοπισιακοί βαθμοί ελευθερίας:

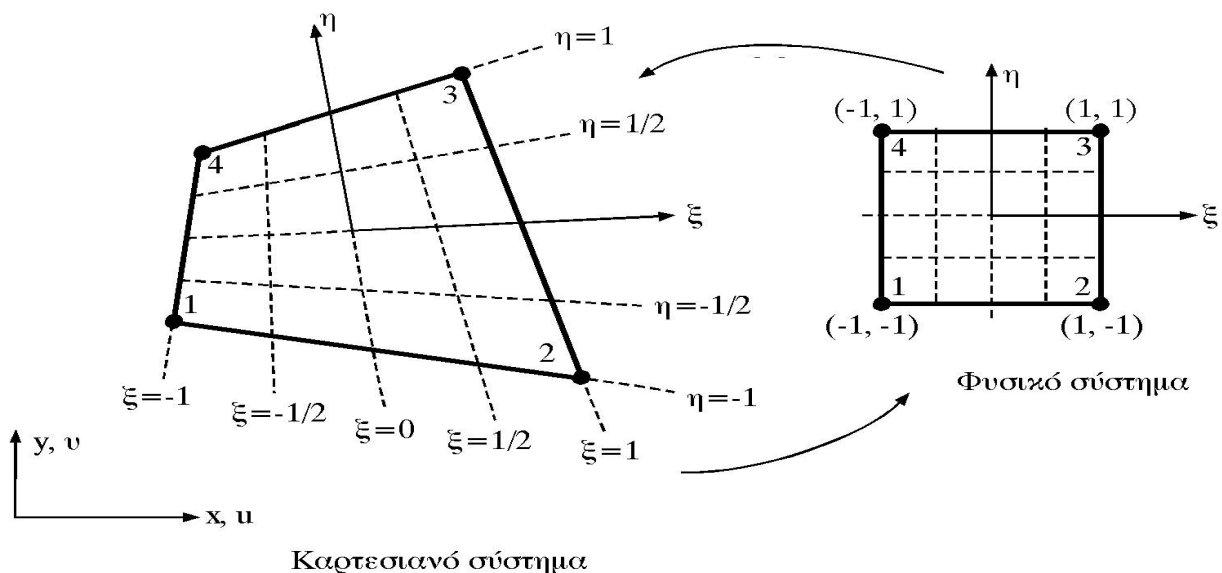
- η μετατόπιση κατά τη διεύθυνση του άξονα  $x$  ( $u$ )
- η μετατόπιση κατά τη διεύθυνση του άξονα  $y$  ( $v$ ).

Συνολικά, κάθε δισδιάστατο τετραπλευρικό στοιχείο τεσσάρων κόμβων χαρακτηρίζεται από 8 επικόμβιους μετατοπισιακούς βαθμούς ελευθερίας.

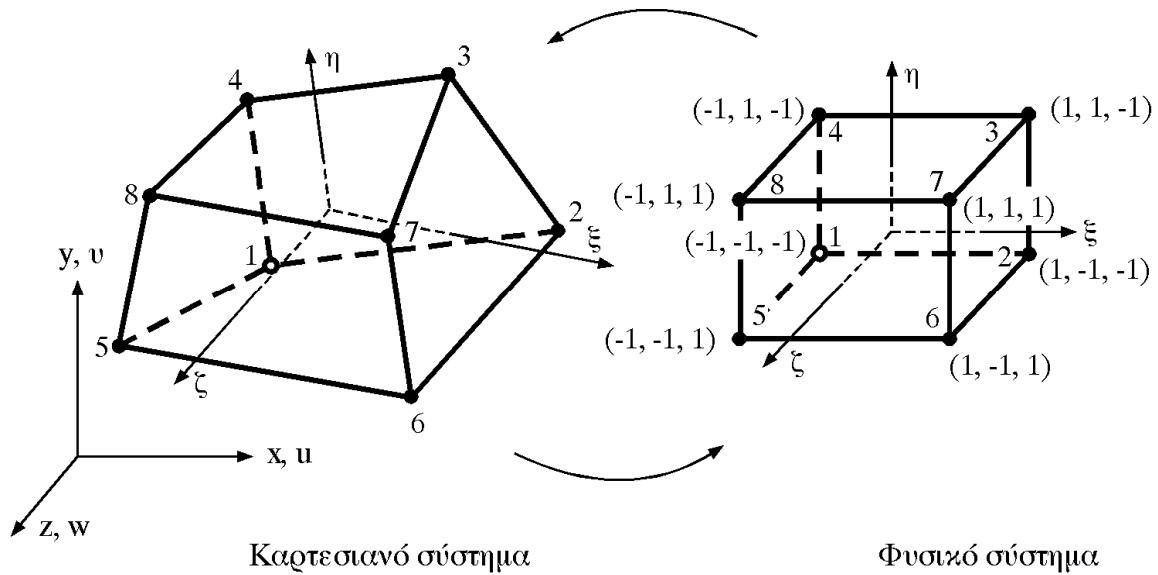
Γενικεύοντας, σε κάθε κόμβο ενός εξαεδρικού στοιχείου τρισδιάστατης ελαστικότητας αντιστοιχούν τρεις μετατοπισιακοί βαθμοί ελευθερίας:

- η μετατόπιση κατά τη διεύθυνση του άξονα  $x$  ( $u$ )
- η μετατόπιση κατά τη διεύθυνση του άξονα  $y$  ( $v$ )
- η μετατόπιση κατά τη διεύθυνση του άξονα  $z$  ( $w$ )

Συνολικά, κάθε τρισδιάστατο εξαεδρικό στοιχείο οκτώ κόμβων χαρακτηρίζεται από  $3 \times 8 = 24$  επικόμβιους μετατοπισιακούς βαθμούς ελευθερίας.



Σχήμα 4.1 Τετραπλευρικό ισοπαραμετρικό στοιχείο επίπεδης έντασης - παραμόρφωσης τεσσάρων κόμβων στο καρτεσιανό και στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων



**Σχήμα 4.2** Εξαεδρικό ισοπαραμετρικό στοιχείο τρισδιάστατης ελαστικότητας οκτώ κόμβων στο καρτεσιανό και στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων

### Συναρτήσεις σχήματος

Όπως παρατηρούμε στο προηγούμενο σχήμα 4.2, η απεικόνιση του φυσικού συστήματος συντεταγμένων στο καρτεσιανό δεν είναι πάντα ένα ορθογωνικό σύστημα αξόνων. Επειδή σε κάθε ακμή ενός οκτακομβικού εξαεδρικού στοιχείου έχουμε δύο κόμβους, η **απεικόνιση είναι γραμμική**. Αυτό σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων ορίζεται από γραμμικά πολυώνυμα ως προς  $\xi, \eta, \zeta$ . Κατά συνέπεια, οι φυσικοί άξονες  $\xi, \eta, \zeta$  στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ενός εξαεδρικού στοιχείου, οι οποίοι διέρχονται από τα μέσα των εδρών του, είναι ευθύγραμμοι. Η πολυωνυμική απεικόνιση των καρτεσιανών συντεταγμένων  $x, y, z$  θα έχει την εξής μορφή:

$$\begin{aligned}
 x &= \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \zeta + \alpha_5 \xi\eta + \alpha_6 \eta\zeta + \alpha_7 \zeta\xi + \alpha_8 \xi\eta\zeta \\
 y &= \alpha_9 + \alpha_{10} \xi + \alpha_{11} \eta + \alpha_{12} \zeta + \alpha_{13} \xi\eta + \alpha_{14} \eta\zeta + \alpha_{15} \zeta\xi + \alpha_{16} \xi\eta\zeta \\
 z &= \alpha_{17} + \alpha_{18} \xi + \alpha_{19} \eta + \alpha_{20} \zeta + \alpha_{21} \xi\eta + \alpha_{22} \eta\zeta + \alpha_{23} \zeta\xi + \alpha_{24} \xi\eta\zeta
 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Επίσης, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
 x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 + N_5 x_5 + N_6 x_6 + N_7 x_7 + N_8 x_8 = \sum_{i=1}^8 N_i x_i \\
 y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 + N_5 y_5 + N_6 y_6 + N_7 y_7 + N_8 y_8 = \sum_{i=1}^8 N_i y_i \\
 z &= N_1 z_1 + N_2 z_2 + N_3 z_3 + N_4 z_4 + N_5 z_5 + N_6 z_6 + N_7 z_7 + N_8 z_8 = \sum_{i=1}^8 N_i z_i
 \end{aligned} \quad (4.6)$$

όπου

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \\ N_2 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \\ N_3 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \\ N_4 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \\ N_5 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\ N_6 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\ N_7 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \\ N_8 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \end{aligned} \quad (4.8)$$

είναι **οι συναρτήσεις σχήματος του ισοπαραμετρικού οκτακομβικού εξαεδρικού στοιχείου.**

Σύμφωνα με την ισοπαραμετρική θεώρηση, τόσο οι συνιστώσες της μετατόπισης  $u, v, w$  όσο και οι καρτεσιανές συντεταγμένες  $x, y, z$  εκφράζονται ως προς τις αντίστοιχες επικόμβιες ποσότητες με τις ίδιες συναρτήσεις παρεμβολής ή σχήματος.

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 + N_5 u_5 + N_6 u_6 + N_7 u_7 + N_8 u_8 = \sum_{i=1}^8 N_i u_i$$

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4 + N_5 v_5 + N_6 v_6 + N_7 v_7 + N_8 v_8 = \sum_{i=1}^8 N_i v_i \quad (4.9)$$

$$w = N_1 w_1 + N_2 w_2 + N_3 w_3 + N_4 w_4 + N_5 w_5 + N_6 w_6 + N_7 w_7 + N_8 w_8 = \sum_{i=1}^8 N_i w_i$$

## Μητρώο παραμορφώσεως

Το Ιακωβιανό μητρώο, το οποίο συνδέει τις παραγώγους μίας συνάρτησης  $\varphi$  ως προς τα δύο συστήματα συντεταγμένων, είναι ένα μητρώο διαστάσεων (3x3):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = [J] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

όπου

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* \\ J_{31}^* & J_{32}^* & J_{33}^* \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Τα στοιχεία  $J_{ij}^*$  του αντιστρόφου  $[J]^{-1}$  του Ιακωβιανού μητρώου μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά συναρτήσει των στοιχείων  $J_{ij}$  του μητρώου  $[J]$ .

Γνωρίζουμε ότι:

$$\{\varepsilon\} = [B_1] \cdot \{u_{,\xi}\} \Rightarrow$$

$(6 \times 1) \quad (6 \times 9) \quad (9 \times 1)$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{31}^* & J_{32}^* & J_{33}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* & J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{31}^* & J_{32}^* & J_{33}^* & J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* \\ J_{31}^* & J_{32}^* & J_{33}^* & 0 & 0 & 0 & J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,\zeta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \\ v_{,\zeta} \\ w_{,\xi} \\ w_{,\eta} \\ w_{,\zeta} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Οι μερικές παράγωγοι των  $u, v, w$  ως προς  $\xi, \eta, \zeta$  μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των επικόμβιων μετατοπίσεων μέσω της σχέσης:

$$\{u_{,\xi}\} = [B_2] \cdot \{d\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,\zeta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \\ v_{,\zeta} \\ w_{,\xi} \\ w_{,\eta} \\ w_{,\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & 0 & 0 & \dots & N_{8,\xi} & 0 & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & \dots & \dots & \dots & N_{8,\eta} & 0 & 0 \\ N_{1,\zeta} & 0 & 0 & N_{2,\zeta} & \dots & \dots & \dots & N_{8,\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & 0 & \dots & 0 & N_{8,\xi} & 0 \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & \dots & \dots & 0 & N_{8,\eta} & 0 \\ 0 & N_{1,\zeta} & 0 & 0 & N_{2,\zeta} & \dots & \dots & 0 & N_{8,\zeta} & 0 \\ \dots & \dots & N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & \dots & 0 & 0 & N_{8,\xi} \\ \dots & \dots & N_{1,\eta} & \dots & \dots & N_{2,\eta} & \dots & 0 & 0 & N_{8,\eta} \\ \dots & \dots & N_{1,\zeta} & \dots & \dots & N_{2,\zeta} & \dots & 0 & 0 & N_{8,\zeta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_8 \\ v_8 \\ w_8 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Οι όροι  $N_{i,\xi}, N_{i,\eta}, N_{i,\zeta}$  του μητρώου  $[B_2]$  προκύπτουν από τους παρακάτω γενικούς τύπους με την κατάλληλη επιλογή των προσήμων ανάλογα με τη θέση του κόμβου  $i$  ( $i=1 \div 8$ ).

$$N_{i,\xi} = \pm \frac{1}{8} \cdot (1 \pm \eta) \cdot (1 \pm \zeta) \quad N_{i,\eta} = \pm \frac{1}{8} \cdot (1 \pm \xi) \cdot (1 \pm \zeta) \quad N_{i,\zeta} = \pm \frac{1}{8} \cdot (1 \pm \xi) \cdot (1 \pm \eta) \quad (4.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{ \varepsilon \} = [B_1] \cdot \{ u_{,\xi} \} \xrightarrow{\substack{\{ u_{,\xi} \} = [B_2] \cdot \{ d \} \\ (9 \times 1) \quad (9 \times 24) \quad (24 \times 1)}} \{ \varepsilon \} = [B_1] \cdot [B_2] \cdot \{ d \} \\ (6 \times 1) \quad (6 \times 9) \quad (9 \times 24) \quad (24 \times 1)} \\ \{ \varepsilon \} = [B] \cdot \{ d \} \\ (6 \times 1) \quad (6 \times 24) \quad (24 \times 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{[B] = [B_1] \cdot [B_2]} \quad (4.15)$$

$(6 \times 24) \quad (6 \times 9) \quad (9 \times 24)$

### Μητρώο στιβαρότητας

Το μητρώο στιβαρότητας του οκτακομβικού στοιχείου δίνεται από τη σχέση:

$$[k] = \int_{V_e} \left\{ [B]^T [E] [B]^T \right\} dV_e \Rightarrow \boxed{[k] = \int_{-1,-1,-1}^{1,1,1} \left\{ [B(\xi,\eta,\zeta)]^T [E] [B(\xi,\eta,\zeta)] \det[J] \right\} d\xi d\eta d\zeta}$$

όπου το μητρώο ελαστικότητας  $[E]$  ισούται με:

$$[E] = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

## 4.2.2 Στοιχείο ανωτέρου βαθμού

Τα ισοπαραμετρικά στοιχεία των οποίων όλοι οι κόμβοι κείνται στις πλευρές ανήκουν στην **οικογένεια** των στοιχείων **Serendipity**, ενώ τα ισοπαραμετρικά στοιχεία με εσωτερικό ή εσωτερικούς κόμβους ανήκουν στην **οικογένεια** των στοιχείων **Lagrange**. Η ονομασία του στοιχείου Lagrange οφείλεται στο ότι οι συναρτήσεις σχήματος μπορεί να παραχθούν με πολλαπλασιασμό των πολυωνύμων παρεμβολής Lagrange.

Ένα πλήρες δευτεροβάθμιο χωρικό στοιχείο τύπου Serendipity με ενδιάμεσους κόμβους σε όλες τις ακμές έχει **20 κόμβους**. Το αντίστοιχο δευτεροβάθμιο στοιχείο Lagrange έχει **27 κόμβους**, καθώς περιλαμβάνει επιπλέον

- ένα κεντρικό κόμβο στην αρχή των αξόνων ( $\xi=\eta=\zeta=0$ ),
- καθώς και στα κέντρα βάρους των έξι εδρών.

Οι συναρτήσεις σχήματος σχηματίζονται με ανάλογο τρόπο προς τις συναρτήσεις σχήματος των αντίστοιχων επίπεδων ισοπαραμετρικών στοιχείων. Κατ' αναλογία με τα επίπεδα στοιχεία, χρησιμοποιούμε τον παρακάτω πίνακα για τον σχηματισμό των συναρτήσεων σχήματος ενός εξαεδρικού στοιχείου τρισδιάστατης ελαστικότητας, το οποίο μπορεί να αποτελείται από 8 έως 27 κόμβους.

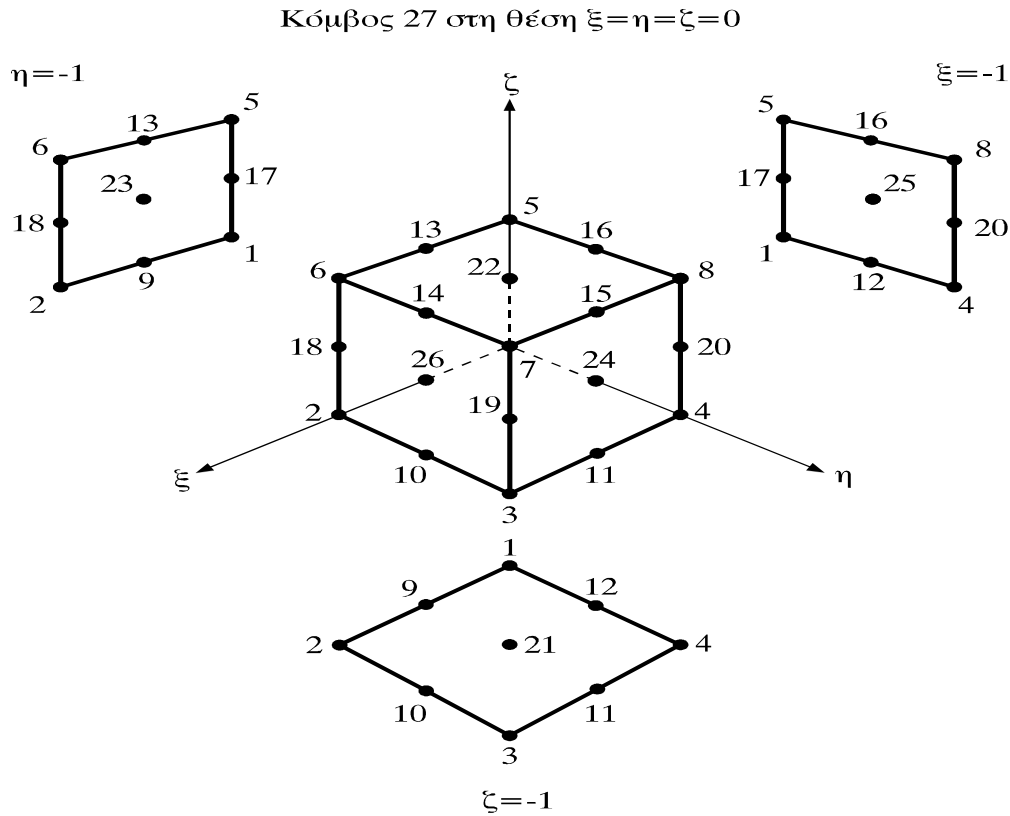
Οι συναρτήσεις σχήματος ενός τετραπλευρικού στοιχείου το οποίο περιλαμβάνει από τέσσερις έως εννέα κόμβους παρατίθενται στον παρακάτω πίνακα. Οι συναρτήσεις σχήματος που βρίσκονται στις στήλες  $i=5 \div 9$  ενεργοποιούνται όταν υπάρχει στο στοιχείο ο αντίστοιχος κόμβος και προστίθενται στην αντίστοιχη συνάρτηση σχήματος της πρώτης στήλης του πίνακα.

	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9
$N_1 = \frac{1}{4} \times (1-\xi) \times (1-\eta)$	$-\frac{N_5}{2}$			$-\frac{N_8}{2}$	$-\frac{N_9}{4}$
$N_2 = \frac{1}{4} \times (1+\xi) \times (1-\eta)$	$-\frac{N_5}{2}$	$-\frac{N_6}{2}$			$-\frac{N_9}{4}$
$N_3 = \frac{1}{4} \times (1+\xi) \times (1+\eta)$		$-\frac{N_6}{2}$	$-\frac{N_7}{2}$		$-\frac{N_9}{4}$
$N_4 = \frac{1}{4} \times (1-\xi) \times (1+\eta)$			$-\frac{N_7}{2}$	$-\frac{N_8}{2}$	$-\frac{N_9}{2}$
$N_5 = \frac{1}{2} \times (1-\xi^2) \times (1-\eta)$					$-\frac{N_9}{2}$
$N_6 = \frac{1}{2} \times (1+\xi) \times (1-\eta^2)$					$-\frac{N_9}{2}$
$N_7 = \frac{1}{2} \times (1-\xi^2) \times (1+\eta)$					$-\frac{N_9}{2}$
$N_8 = \frac{1}{2} \times (1-\xi) \times (1-\eta^2)$					$-\frac{N_9}{2}$
$N_9 = (1-\xi) \times (1-\eta^2)$					

**Πίνακας 4.1** Συναρτήσεις σχήματος τετραπλευρικών στοιχείων με τέσσερις έως εννέα κόμβους



Για την περίπτωση του στοιχείου serendipity 20 κόμβων των οποίων η θέση φαίνεται στο σχήμα 4.3, οι συναρτήσεις σχήματος είναι οι εξής:



**Σχήμα 4.3** Εξαεδρικό ισοπαραμετρικό στοιχείο τρισδιάστατης ελαστικότητας 8 έως 27 κόμβων

$N_1 = \frac{1}{8} \cdot (1-\xi) \cdot (1-\eta) \cdot (1-\zeta) \cdot (-\xi - \eta - \zeta - 2)$	$N_{11} = \frac{1}{4} \cdot (1-\xi^2) \cdot (1+\eta) \cdot (1-\zeta)$
$N_2 = \frac{1}{8} \cdot (1+\xi) \cdot (1-\eta) \cdot (1-\zeta) \cdot (\xi - \eta - \zeta - 2)$	$N_{12} = \frac{1}{4} \cdot (1-\xi) \cdot (1-\eta^2) \cdot (1-\zeta)$
$N_3 = \frac{1}{8} \cdot (1+\xi) \cdot (1+\eta) \cdot (1-\zeta) \cdot (\xi + \eta - \zeta - 2)$	$N_{13} = \frac{1}{4} \cdot (1-\xi^2) \cdot (1-\eta) \cdot (1+\zeta)$
$N_4 = \frac{1}{8} \cdot (1-\xi) \cdot (1+\eta) \cdot (1-\zeta) \cdot (-\xi + \eta - \zeta - 2)$	$N_{14} = \frac{1}{4} \cdot (1+\xi) \cdot (1-\eta^2) \cdot (1+\zeta)$
$N_5 = \frac{1}{8} \cdot (1-\xi) \cdot (1-\eta) \cdot (1+\zeta) \cdot (-\xi - \eta + \zeta - 2)$	$N_{15} = \frac{1}{4} \cdot (1-\xi^2) \cdot (1+\eta) \cdot (1+\zeta)$
$N_6 = \frac{1}{8} \cdot (1+\xi) \cdot (1-\eta) \cdot (1+\zeta) \cdot (\xi - \eta + \zeta - 2)$	$N_{16} = \frac{1}{4} \cdot (1-\xi) \cdot (1-\eta^2) \cdot (1+\zeta)$
$N_7 = \frac{1}{8} \cdot (1+\xi) \cdot (1+\eta) \cdot (1+\zeta) \cdot (\xi + \eta + \zeta - 2)$	$N_{17} = \frac{1}{4} \cdot (1-\xi) \cdot (1-\eta) \cdot (1-\zeta^2)$
$N_8 = \frac{1}{8} \cdot (1-\xi) \cdot (1+\eta) \cdot (1+\zeta) \cdot (-\xi + \eta + \zeta - 2)$	$N_{18} = \frac{1}{4} \cdot (1+\xi) \cdot (1-\eta) \cdot (1-\zeta^2)$
$N_9 = \frac{1}{4} \cdot (1-\xi^2) \cdot (1-\eta) \cdot (1-\zeta)$	$N_{19} = \frac{1}{4} \cdot (1+\xi) \cdot (1+\eta) \cdot (1-\zeta^2)$
$N_{10} = \frac{1}{4} \cdot (1+\xi) \cdot (1-\eta^2) \cdot (1-\zeta)$	$N_{20} = \frac{1}{4} \cdot (1-\xi) \cdot (1+\eta) \cdot (1-\zeta^2)$

### 4.2.3 Σύγκριση των διαφόρων τύπων του εξαεδρικού στοιχείου

Στον κώδικα **ReConAn (Reinforced Concrete Analysis)** μπορούμε να εργαστούμε και με τα 3 είδη εξαεδρικών στοιχείων:

- τα οκτακομβικά (8 κόμβοι, 8 συναρτήσεις σχήματος)
- τα Serendipity (20 κόμβοι, 20 συναρτήσεις σχήματος)
- τα Lagrange (27 κόμβοι, 27 συναρτήσεις σχήματος).

Όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των κόμβων, τόσο περισσότερες είναι οι μορφές παραμόρφωσης του στοιχείου, δηλαδή οι τρόποι με τους οποίους είναι δυνατόν να παραμορφωθεί. Αυτό σημαίνει ότι με την αύξηση των κόμβων το στοιχείο καθίσταται **πιο εύκαμπτο**, με αποτέλεσμα να **αυξάνεται η ακρίβεια της προσομοίωσης**.

Μπορεί με τα στοιχεία Serendipity και Lagrange να **κερδίζουμε σε ακρίβεια, υστερούμε όμως σε οικονομία χρόνου**. Η προσομοίωση ενός φορέα με αυτά τα στοιχεία **δημιουργεί ένα αρκετά περίπλοκο και πυκνό δίκτυο και αυξάνει σημαντικά τον υπολογιστικό χρόνο** που μεταφράζεται σε **αυξημένο υπολογιστικό κόστος**. Ειδικότερα, έχοντας περισσότερους κόμβους, τα ανωτέρας τάξεως στοιχεία διαθέτουν ανωτέρας τάξεως συναρτήσεις σχήματος, οι οποίες **αυξάνουν κατά τάξη μεγέθους (δεκαπλασιάζουν) τον χρόνο υπολογισμού του μητρώου στιβαρότητας, μας επιβαρύνουν από πλευράς μνήμης και υπολογιστικού φόρτου είτε κατά την αρχικοποίηση είτε κατά την ανανέωση (update) του μητρώου στιβαρότητας**. Ως αποτέλεσμα προκύπτει ένα κακής κατασκευής μητρώο στιβαρότητας, η απομείωση του οποίου είναι γρηγορότερη.

Στα φυσικά στοιχεία δυνάμεων και μετατοπίσεων, τα λεγόμενα σημεία ολοκλήρωσης Gauss είναι στην πραγματικότητα διατομές ολοκλήρωσης. Αντίθετα, στα εξαεδρικά στοιχεία τα σημεία Gauss είναι σημεία. Στα οκτακομβικά εξαεδρικά χρησιμοποιούμε συνήθως  $2 \times 2 \times 2 = 8$  σημεία Gauss για κάθε στοιχείο, ελέγχοντας το εσωτερικό του σε δύο θέσεις κατά μήκος κάθε άξονα x,y,z. Στα στοιχεία ανωτέρας τάξεως **χρησιμοποιούμε περισσότερα σημεία Gauss**, όπως  $3 \times 3 \times 3 = 27$ , γεγονός που **αυξάνει ακόμη περισσότερο τον υπολογιστικό χρόνο**.

Οι παραπάνω λόγοι μας οδηγούν στην **προτίμηση των οκτακομβικών στοιχείων**, καθώς στόχος ενός πολιτικού μηχανικού δεν είναι απλά η διεκπεραίωση μίας μελέτης, αλλά η ολοκλήρωσή της σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα και με το ελάχιστο δυνατό κόστος. Γι' αυτό, **τα οκτακομβικά χρησιμοποιούνται ευρέως**, καθώς σε σχέση με τις άλλες δύο κατηγορίες είναι **υπολογιστικά πιο αποδοτικά** (computational efficient), ιδιαίτερα σε μεγάλης κλίμακας (large scale) προβλήματα όπου τα ανωτέρας τάξεως εξαεδρικά καθυστερούν.

Ένα σημαντικό πλεονέκτημα του κώδικα ReConAn είναι ότι **πετυχαίνει ικανοποιητικής ακρίβειας αποτελέσματα προσομοίωσης με τη χρήση των οκτακομβικών στοιχείων**, καθιστώντας τα ακόμη πιο προτιμητέα. Συγκεκριμένα, ο κώδικας ReConAn έχει κατορθώσει να αμβλύνει το μειονέκτημα των οκτακομβικών, με αποτέλεσμα να τα καθιστά τα πλέον κατάλληλα. Αυτό οφείλεται στο ότι :

- έχει προγραμματιστεί βάσει της γλώσσας προγραμματισμού Fortran 90/95 και του αντικειμενοστραφούς προγραμματισμού. Όπως θα αναλύσουμε διεξοδικά στο κεφάλαιο 8, η Fortran 90/95 προσφέρει τη δυνατότητα μίας **πιο οργανωμένης μορφής κώδικα**, ενώ ο παραλληλισμός δεδομένων που επιτυγχάνεται με τους πίνακες και τις νέες της δομές επιτρέπει την **επίλυση σε παράλληλους υπολογιστές**. Επιπλέον, πλεονεκτεί ως προς την **αυτόματη διόρθωση συντακτικών λαθών**, την **αποσφαλμάτωση**, τις **μαθηματικές και στατιστικές βιβλιοθήκες**, τις **βιβλιοθήκες γραφικών**, τη **διασύνδεση με κώδικα γραμμένο σε άλλες γλώσσες**, τη **διασύνδεση με βιβλιοθήκες για τη δημιουργία εφαρμογών Windows** και τις **επεκτάσεις της γλώσσας εκτός προτύπου**. Με τον αντικειμενοστραφή προγραμματισμό,

που αποτελεί την πιο σύγχρονη τάση στην επιστήμη του προγραμματισμού την τελευταία δεκαετία, προσεγγίζουμε ικανοποιητικά την προσομοίωση φυσικών εννοιών εύκολα αντιληπτών από τον καθένα και αυξάνουμε την παραγωγικότητα της εργασίας μας μέσω της αύξησης της επαναχρησιμοποίησης κομματιών κώδικα, των δυνατοτήτων σταδιακής ή ομαδικής ανάπτυξης του κώδικα και λόγω του ότι η καθαρότητα στην έκφραση βοηθάει στην κατανόηση και την ευκολότερη επίλυση των προβλημάτων.

- στις αριθμητικές βελτιώσεις σε επίπεδο στοιχείων οπλισμού.
  - Παρέχει τη δυνατότητα προσομοίωσης του οπλισμού με το εξελεγμένο φυσικό στοιχείο δυνάμεων, το οποίο λαμβάνει υπόψιν όχι μόνο την αξονική αλλά και την καμπτική και τη στρεπτική στιβαρότητα του οπλισμού. Σε ερευνητικό επίπεδο και για μικρής κλίμακας προβλήματα μπορούμε να χρησιμοποιούμε αποκλειστικά το φυσικό στοιχείο δυνάμεων. Ωστόσο, σε μεγάλης κλίμακας κατασκευές με πληθώρα βαθμών ελευθερίας είναι ανάγκη να το συνδυάσουμε με το απλό στοιχείο δικτυώματος δύο κόμβων (rod element), το οποίο λαμβάνει υπ' όψιν μόνο την αξονική στιβαρότητα του οπλισμού, καθώς το force-based natural element είναι περισσότερο υπολογιστικά αποδοτικό (computational demanding). Έτσι, σε μεγάλες κατασκευές, με φυσικά στοιχεία δυνάμεων προσομοιώνουμε μόνο τις ράβδους του κύριου οπλισμού. Μικρότερης διαμέτρου (Φ12, Φ14) διαμήκεις ράβδοι, που τοποθετούνται κυρίως για κατασκευαστικούς λόγους, καθώς και οι συνδετήρες προσομοιώνονται με απλά στοιχεία rod, προκειμένου να μειώσουμε τον υπολογιστικό χρόνο.
  - Όπως γνωρίζουμε, η αντοχή του σκυροδέματος σε εφελκυσμό είναι τόσο μικρή που μπορούμε να την αμελήσουμε. Όταν σε μία θέση σχηματιστεί ρωγμή το σκυρόδεμα χάνει την αντοχή του και καλείται να συνεισφέρει ο οπλισμός. Αυτός είναι άλλωστε και ο ρόλος του οπλισμένου σκυροδέματος. Το τοπικό μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου προκύπτει προσθέτοντας τα 8 μητρώα των σημείων Gauss (κάθε σημείο Gauss αντιστοιχεί σε ένα μητρώο στιβαρότητας), καθένα από τα οποία έχει πρώτα πολλαπλασιαστεί με τον αντίστοιχο συντελεστή βάρους (weight factor). Ο σχηματισμός ρωγμής καθορίζεται από το Smeared Crack Model, το οποίο λαμβάνει υπόψιν τις 6 συνιστώσες του τανυστή των τάσεων και ελέγχει αν έχουμε υπερβεί τη μέγιστη αντοχή. Αν την έχουμε υπερβεί, σχηματίζεται ρωγμή. Όταν στη θέση του σημείου Gauss σχηματιστεί ρωγμή (η ρωγμή σχηματίζεται κάθετα στο επίπεδο της μέγιστης εφελκυστικής τάσης), μηδενίζονται οι διαγώνιοι όροι του μητρώου στιβαρότητας του σημείου Gauss. Αν σχηματιστεί ρωγμή σε όλες τις θέσεις των σημείων Gauss, οδηγούμαστε στην αριθμητική απομείωση (αποδυναμωση, αποσύνθεση) του [K] με αποτέλεσμα να μην μπορεί να αντιστραφεί. Η υπολογιστική αυτή αδυναμία συνδέεται με τη φυσική αδυναμία του σκυροδέματος να παραλάβει εφελκυστικές τάσεις. Ωστόσο, στο σημείο αυτό υπεισέρχεται η στιβαρότητα του οπλισμού. Με τον κώδικα ReConAn έχουμε καταφέρει να εισάγουμε τη συνεισφορά του μητρώου στιβαρότητας του οπλισμού στο τοπικό μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου με έναν αρκετά υπολογιστικά αποδοτικό τρόπο.
- στα πειραματικά καταστατικά μοντέλα υλικών που χρησιμοποιεί.

Προτιμούμε, λοιπόν, τα στοιχεία οκτώ κόμβων καθώς συνδυάζουν καλύτερα τις δύο επιδιώξεις μας, που δεν είναι άλλες από:

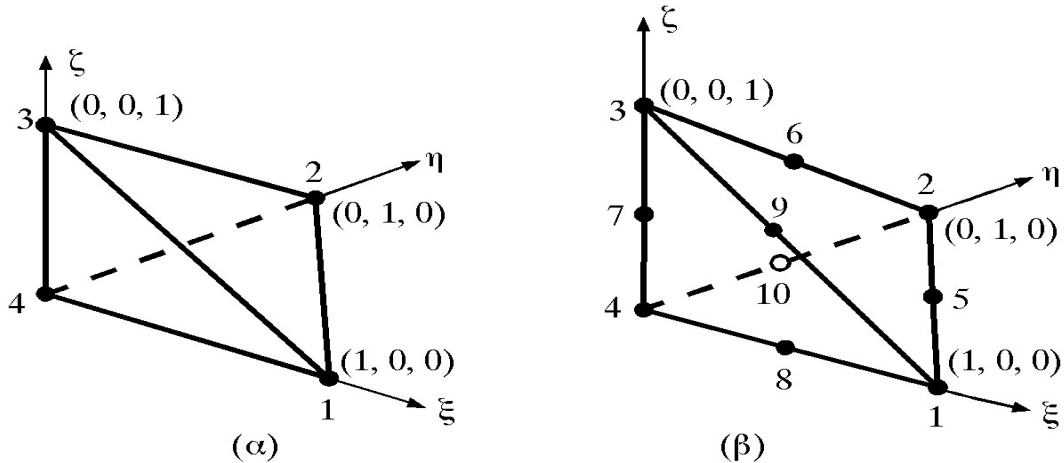
- τη μεγιστοποίηση της ακρίβειας της λύσης
- την ελαχιστοποίηση του κόστους.

### 4.3 Σύγκριση του εξαεδρικού με τα άλλα είδη τρισδιάστατων στοιχείων

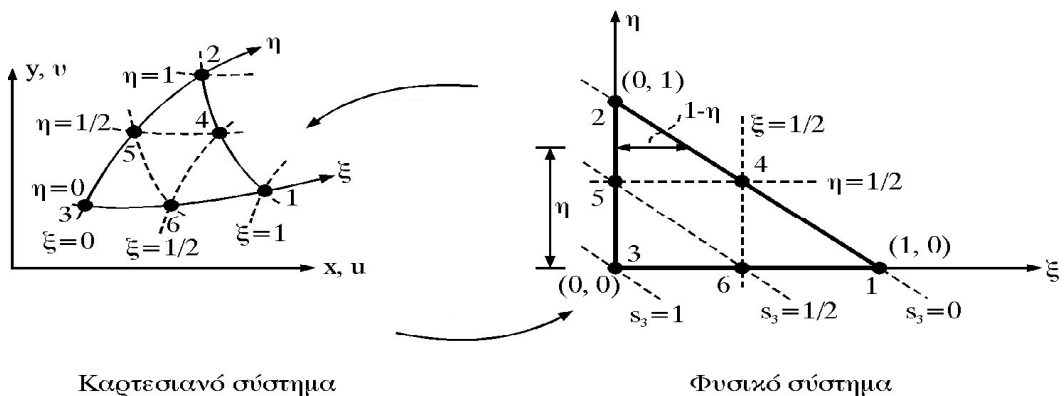
Αξιοσημείωτοι είναι οι λόγοι για τους οποίους προτιμήσαμε τα εξαεδρικά στοιχεία έναντι των άλλων δύο τύπων τρισδιάστατων ισοπαραμετρικών στοιχείων: των τετραεδρικών και των πενταεδρικών σφηνοειδούς μορφής.

Τα τετραεδρικά στοιχεία προσφέρονται καλύτερα σε σχέση με τα εξαεδρικά για την προσομοίωση ολόσωμων φορέων με πολύπλοκη γεωμετρία (ευκολότερη μόρφωση δικτύου) και παρέχουν τη δυνατότητα αναλυτικού υπολογισμού του μητρώου στιβαρότητας με κλειστούς τύπους. Ωστόσο, πρόκειται για μειωμένης ακρίβειας στοιχεία και για να πετύχουμε την ίδια ακρίβεια με τα εξαεδρικά θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε πολύ περισσότερα. Δεδομένου αφενός ότι ο κύριος στόχος μας είναι η προσομοίωση κατασκευών από οπλισμένο σκυρόδεμα, οι οποίες χαρακτηρίζονται από πιο “καλή” (λιγότερο σύνθετη) γεωμετρία (ευθύγραμμες πρισματικές ράβδοι) σε σχέση με άλλες κατασκευές (μηχανολογικές κατασκευές) και αφετέρου ότι απαιτούνται πολύ λιγότερα εξαεδρικά στοιχεία έναντι των τετραεδρικών για να πετύχουμε την επιδιωκόμενη ακρίβεια, τα εξαεδρικά στοιχεία προτιμήθηκαν ως τα πιο κατάλληλα για τη συγκεκριμένη προσομοίωση.

Στο σχήμα 4.4 παραθέτουμε ένα τετραεδρικό στοιχείο τεσσάρων κόμβων στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων, του οποίου η θέση και ο προσανατολισμός βρίσκονται σε πλήρη αναλογία προς το αντίστοιχο σύστημα του επίπεδου τριγωνικού στοιχείου του σχήματος 4.5.



**Σχήμα 4.4** Τετραεδρικό ισοπαραμετρικό στοιχείο τρισδιάστατης ελαστικότητας στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων: (α) τεσσάρων κόμβων, (β) δέκα κόμβων



Καρτεσιανό σύστημα

Φυσικό σύστημα

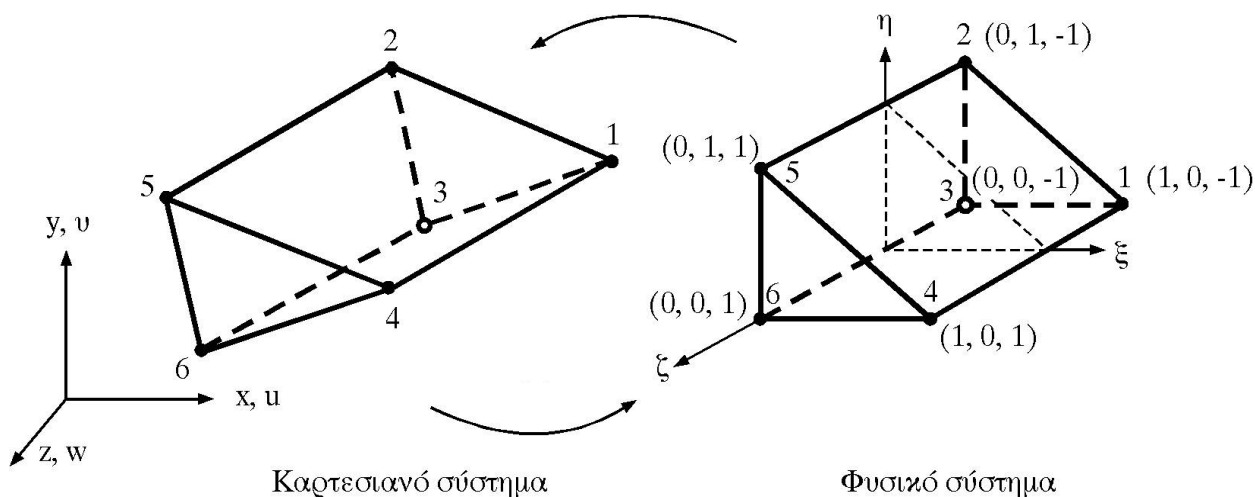
**Σχήμα 4.5** Απεικόνιση στο φυσικό και στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων του τριγωνικού στοιχείου επίπεδης έντασης – παραμόρφωσης

Το πενταεδρικό στοιχείο σφηνοειδούς μορφής είναι ένα περισσότερο ευσταθές στοιχείο σε σχέση με το τετραεδρικό ( το σχήμα του προσεγγίζει καλύτερα το σχήμα του κύβου καθώς μπορεί να είναι πρισματικό, δηλαδή να έχει τις ακμές του παράλληλες) και λιγότερο σε σχέση με το εξαεδρικό. Ακμή είναι η ένωση δύο εδρών. Η χρησιμοποίηση πενταεδρικών στοιχείων επιβάλλεται κυρίως από τον τύπο του προς επίλυση προβλήματος, όπως για παράδειγμα στην μελέτη ενός πασσάλου τον οποίο θα προσομοιώναμε με πενταεδρικά στοιχεία σφηνοειδούς μορφής. Ωστόσο, εμείς μελετούμε φορείς από οπλισμένο σκυρόδεμα, στους οποίους τα ραβδωτά στοιχεία που προσομοιώνουν τον οπλισμό έχουν σχετικά μικρές διαστάσεις και για αυτό τα χρησιμοποιούμε ενσωματωμένα εντός των εξαεδρικών στοιχείων (embedded).

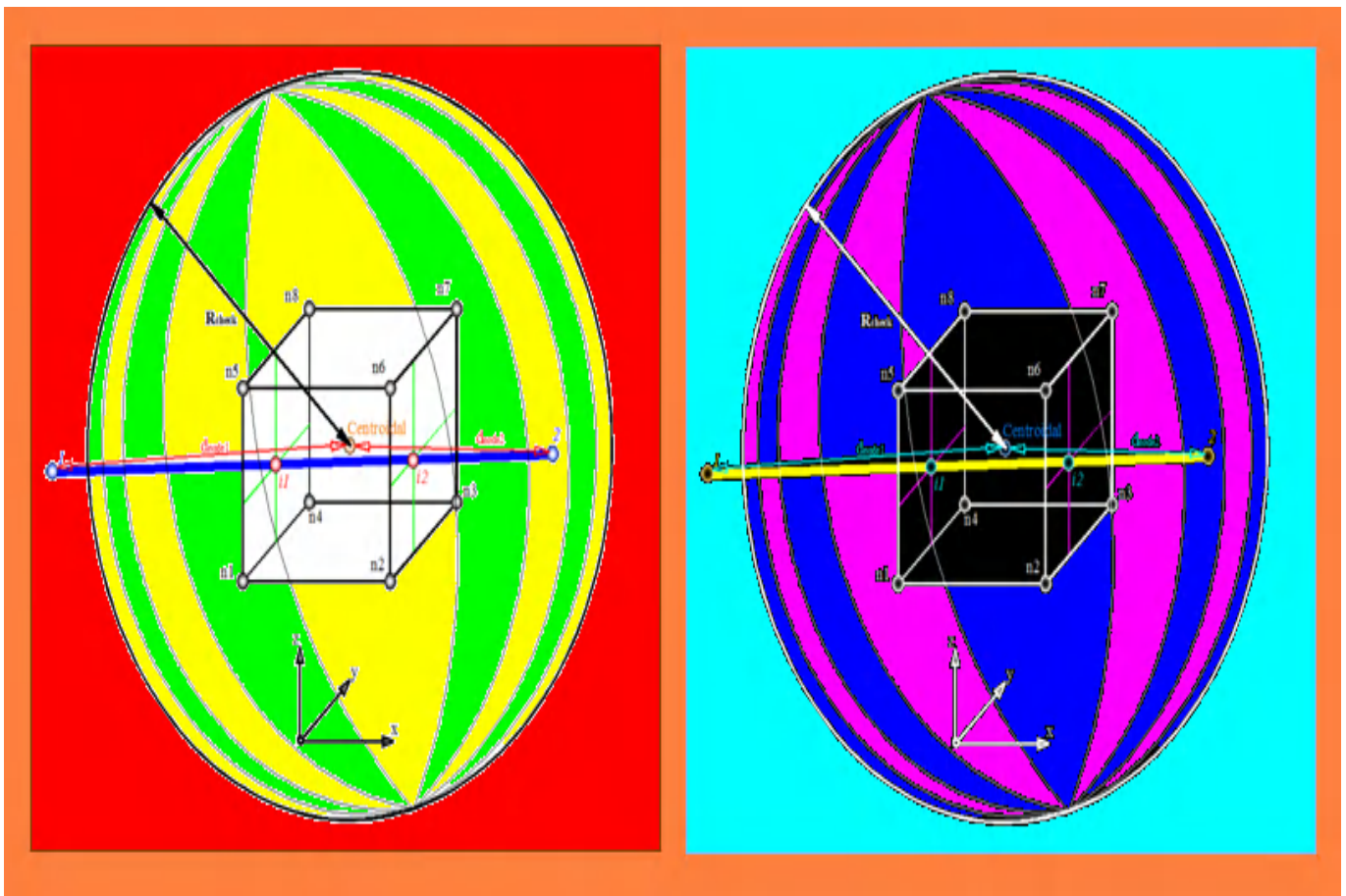
Γενικότερα, το embedded στοιχείο είναι ένα στοιχείο το οποίο τοποθετείται εντός των εξαεδρικών ή άλλων τρισδιάστατων στοιχείων με σκοπό να προσομοιώσει τους οπλισμούς, είναι δηλαδή ένα ενσωμάτωμα. Στη συγκεκριμένη εργασία αξιοποιούμε τα εξαεδρικά στοιχεία για να προσομοιώσουμε το σκυρόδεμα, ενώ τον οπλισμό τον προσομοιώνουμε με τα beam elements τα οποία εντοπίζονται εντός του όγκου του εξαεδρικού στοιχείου. Στην περίπτωση αυτή τα beam elements καλούνται embedded.

Διαφορετικά, αν δεν παίρναμε ενσωμάτωμα και προσπαθούσαμε να διακριτοποιήσουμε με ακρίβεια και το σκυρόδεμα και τον οπλισμό χωριστά, θα χρειαζόμασταν πολλά περισσότερα στοιχεία. Σε περίπτωση δε πραγματικής κατασκευής η λύση θα κατέληγε εξαιρετικά δύσκολη αν όχι αδύνατη. Ο βαθμός δυσκολίας εξαρτάται από τη γεωμετρία του οπλισμού εντός του σκυροδέματος και το είδος των υλικών που χρησιμοποιούμε. Για παράδειγμα, όταν χρησιμοποιούμε smeared crack material model (ένα είδος προσομοίωσης ή καλύτερα κριτηρίου ρηγματώσης) το μέγεθος του στοιχείου επηρεάζει άμεσα τα αποτελέσματα. Συνεπώς, τα ενσωματώματα είναι μία πολύ καλή προσέγγιση της πραγματικότητας.

Στο σχήμα 4.6 παραθέτουμε ένα πενταεδρικό στοιχείο έξι κόμβων στο φυσικό και στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, το οποίο μπορεί να προκύψει από τη θεώρηση ενός τριγωνικού στοιχείου στο επίπεδο  $\xi\eta$  σε συνδυασμό με ένα ραβδωτό στοιχείο κατά τη διεύθυνση  $\zeta$ .



**Σχήμα 4.6** Πενταεδρικό ισοπαραμετρικό στοιχείο τρισδιάστατης ελαστικότητας έξι κόμβων στο φυσικό και στο καρτεσιανό σύστημα αξόνων



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Λεπτομερής προσομοίωση πλαισιακού φορέα  
από οπλισμένο σκυρόδεμα με εξαεδρικά  
στοιχεία και φυσικά στοιχεία δυνάμεων

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 5

### 5.1 Εισαγωγικά στοιχεία

- 5.1.1 Επικράτηση του τρισδιάστατου έναντι του μονοδιάστατου και δισδιάστατου μοντέλου
- 5.1.2 Το οπλισμένο σκυρόδεμα ως συνύπαρξη και αλληλεπίδραση δύο διαφορετικών υλικών
- 5.1.3 Μητρικά εξαεδρικά στοιχεία για το σκυρόδεμα και θυγατρικά ενσωματωμένα φυσικά στοιχεία δυνάμεων για τον οπλισμό
- 5.1.4 Η γλώσσα προγραμματισμού του κώδικα ReConAn και η σύνδεσή του με το πακέτο λογισμικού FEMAP
  - Η γλώσσα προγραμματισμού του κώδικα ReConAn
  - Η σύνδεση του κώδικα ReConAn με το πακέτο λογισμικού FEMAP

### 5.2 Το μοντέλο του ενσωματωμένου οπλισμού

- 5.2.1 Κινηματικές σχέσεις
- 5.2.2 Γένεση του ενσωματωμένου οπλισμού στο προτεινόμενο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων
  - Γένεση των βοηθητικών κόμβων του ενσωματωμένου οπλισμού

## 5.1 Εισαγωγικά στοιχεία

Στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία θα ασχοληθούμε με τη **μέθοδο της λεπτομερούς προσομοίωσης της μη γραμμικής συμπεριφοράς πλαισιακών φορέων από οπλισμένο σκυρόδεμα τρισδιάστατης ελαστικότητας με εξαεδρικά στοιχεία και ενσωματωμένα φυσικά στοιχεία δυνάμεων**, η οποία αποτελεί μία από τις δυνατότητες του κώδικα ReConAn και υπερνικά τους περιορισμούς ακρίβειας (accuracy) και υπολογιστικής αποδοτικότητας (computational efficiency) παλαιότερων μεθόδων προσομοίωσης. Το σκυρόδεμα διακρίτοποιείται με ισοπαραμετρικά οκτακομβικά εξαεδρικά στοιχεία, ενώ ο χάλυβας του οπλισμού προσομοιώνεται με τα φυσικά στοιχεία δυνάμεων (natural beam-column flexibility based element), τα οποία λαμβάνουν υπόψιν τόσο την καμπτική και διατμητική στιβαρότητα του οπλισμού όσο και την ολίσθησή του με το σκυρόδεμα. Οι ράβδοι οπλισμού μπορεί να έχουν οποιοδήποτε προσανατολισμό στο εσωτερικό των συμπαγών εξαεδρικών στοιχείων σκυροδέματος, επιτρέποντας την προσομοίωση τόσο του διαμήκου όσο και του διατμητικού οπλισμού (όπως συνδετήρες). Η ρηγμάτωση του σκυροδέματος (concrete cracking) αντιμετωπίζεται με την προσέγγιση της διανεμημένης ρωγμής (smeared crack approach).

Η προτεινόμενη μεθοδολογία επιτρέπει την **ικανοποιητική πρόβλεψη της μη γραμμικής ανελαστικής συμπεριφοράς full-scale πλαισιακών κατασκευών τρισδιάστατης ελαστικότητας από οπλισμένο σκυρόδεμα**. Να τονίσουμε στο σημείο αυτό τον κίνδυνο σύγχυσης μεταξύ των όρων full-scale και large-scale. Ως **full-scale model** ονομάζουμε μία πλήρη κατασκευή, η οποία περιλαμβάνει θεμέλια, υποστυλώματα, τοιχία, δοκούς και πλάκες. Αντίθετα, ένα **large-scale model** αποτελεί ένα μοντέλο με πολλούς βαθμούς ελευθερίας, που μπορεί να είναι ένα μικρότερο τμήμα μίας full-scale κατασκευής ή ένα απλό δομικό της μέλος (υποστύλωμα, δοκός, κλπ). Χαρακτηρίζεται από πληθώρα πεπερασμένων στοιχείων και κόμβων, που συνιστούν ένα αρκετά πυκνό δίκτυο. Σε αντιπαραβολή με τον όρο *large-scale model*, έχουμε τον όρο **small-scale model** για να περιγράψουμε ένα μοντέλο με σχετικά μικρό αριθμό στοιχείων, άρα και βαθμών ελευθερίας.

Ένα από τα κύρια πλεονεκτήματα της λεπτομερούς προσομοίωσης είναι ότι συνδυάζει την **αριθμητική ακρίβεια** (numerical accuracy), την **αριθμητική στιβαρότητα** (numerical robustness) και την **υπολογιστική αποδοτικότητα** (computational efficiency). Όσο μεγαλύτερη είναι η αριθμητική στιβαρότητα ενός κώδικα, τόσο πιο σταθερός είναι αυτός, δηλαδή:

- δεν κολλάει
- δεν καθυστερεί
- δίνει τα ίδια αποτελέσματα αν επαναλάβουμε επακριβώς την ίδια ανάλυση με τις ίδιες παραμέτρους.

Για λόγους πληρότητας αναφέρουμε ότι ο κώδικας ReConAn προσφέρει και τη δυνατότητα ενός υβριδικού μοντέλου, το οποίο συνδυάζει την προσομοίωση συγκεκριμένων δομικών μελών ή περιοχών (όπως η περιοχή των κόμβων σε μία πλαισιακή κατασκευή) με μητρικά εξαεδρικά στοιχεία-θυγατρικά φυσικά στοιχεία δυνάμεων και τη διακρίτωση των υπολοίπων μόνο με φυσικά στοιχεία δυνάμεων ή στοιχεία rod. Συγκεκριμένα, τα δομικά μέλη, όπως τα τοιχία (shear walls), τα οποία υπόκεινται σε σημαντικές διατμητικές τάσεις πρέπει να διακρίτωσηθούν και να αναλυθούν με τρισδιάστατα εξαεδρικά στοιχεία οκτώ κόμβων με ενσωματωμένες (στο εσωτερικό του όγκου τους) ράβδους οπλισμού, ενώ τα υπόλοιπα (που δεν υπόκεινται σε σημαντική διάτμηση) με μονοδιάστατα φυσικά στοιχεία δυνάμεων (NBCFB RC elements). Τα στοιχεία NBCFB, εφόσον έχουν εμπλουτιστεί με τη μέθοδο των φυσικών μορφών και τη μέθοδο των ινών, επιτρέπουν τη χρήση περισσότερων του ενός υλικών σε κάθε διατομή δοκού ή υποστυλώματος.



Στην πραγματικότητα, η θεώρηση του ανωτέρου υβριδικού μοντέλου (το οποίο αποτελεί και μελλοντικό μου στόχο) είναι πολύ πρακτική. Ορισμένα δομικά μέλη, όπως οι δοκοί και τα υποστυλώματα, μπορούν να αναλυθούν χρησιμοποιώντας απλοποιημένα μονοδιάστατα μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων. Κάτι τέτοιο δεν ισχύει για δομικά μέλη καταπονούμενα κυρίως από διάτμηση, όπως είναι τα τοιχία (shear walls), οι κοντοί πρόβολοι (short cantilevers) (χρήση κυρίως σε γερανοδοκούς) και οι υψίκορμες δοκοί (short beams). Τα μέλη αυτά απαιτούν λεπτομερή προσομοίωση με εξαεδρικά στοιχεία και ενσωματωμένα φυσικά στοιχεία δυνάμεων. Το συνδυασμό των δύο προηγούμενων προσεγγίσεων (ή καλύτερα τρόπων διακριτοποίησης) μας προσφέρει ο υβριδικός τρόπος προσομοίωσης, που αποτελεί την καλύτερη δίοδο για να πετύχουμε ταυτόχρονα την επιδιωκόμενη ακρίβεια και αποδοτικότητα. Όπως είναι προφανές, σε ένα τέτοιο μοντέλο η διακριτοποίηση εξαρτάται από την υπό μελέτη κάθε φορά κατασκευή.

Η παρουσίαση του προτεινόμενου μοντέλου τεκμηριώνεται συγκρίνοντας τα αριθμητικά αποτελέσματα με τα ήδη υπάρχοντα πειραματικά δεδομένα της διεθνούς βιβλιογραφίας. Η σύγκριση αυτή πραγματοποιείται στο τελευταίο κεφάλαιο και μας αποδεικνύει ότι η προτεινόμενη εξευγενισμένη προσομοίωση προβλέπει με ακρίβεια τη μη γραμμική ανελαστική συμπεριφορά των πλαισιακών κατασκευών από οπλισμένο σκυρόδεμα, επιτυγχάνοντας αριθμητική ευρωστία (numerical robustness) και υπολογιστική αποδοτικότητα (computational efficiency).

### 5.1.1 Επικράτηση του τρισδιάστατου έναντι του μονοδιάστατου και δισδιάστατου μοντέλου

Πολλά και ποικίλα αριθμητικά μοντέλα έχουν αναπτυχθεί για την ανάλυση κατασκευών από οπλισμένο σκυρόδεμα, αλλά κανένα από αυτά δεν κατόρθωσε να συνδυάσει ικανοποιητικά την αριθμητική ακρίβεια (arithmetical accuracy), την αριθμητική ευρωστία (arithmetical robustness) και την υπολογιστική αποδοτικότητα (computational efficiency) κατά την πρόβλεψη της μη γραμμικής ανελαστικής συμπεριφοράς των κατασκευών αυτών.

Στην πλειονότητά τους **τα μονοδιάστατα μοντέλα** (1D beam-column models), βασιζόμενα σε μεθόδους είτε συγκεντρωμένης (concentrated plasticity methods, πλαστική άρθρωση) είτε διανεμημένης (distributed plasticity methods, fiber approach – θεώρηση ινών) πλαστικότητας, απέτυχαν να προβλέψουν την μηχανική συμπεριφορά τέτοιου είδους πλαισιακών κατασκευών **εξαιτίας της αδυναμίας τους να λαμβάνουν υπόψιν τη συμβολή της διάτμησης και των τοπικών φαινομένων στην καθολική απόκριση της κατασκευής.**

Μπορεί με **τα δισδιάστατα μοντέλα** πεπερασμένων στοιχείων επίπεδης έντασης να αποφεύγουμε ορισμένες απλοποιητικές μη ρεαλιστικές θεωρήσεις που αποτελούν μονόδρομο για τα μονοδιάστατα μοντέλα (όπως η επιρροή των διατμητικών τάσεων), ωστόσο **η ανικανότητά τους να προσομοιώσουν ικανοποιητικά την εκτός επιπέδου απόκριση του φορέα** (κυρίως των τοιχίων – shear walls), τα κατέστησε ανεπαρκή για την ανάλυση τρισδιάστατων full scale κατασκευών (3D full scale structure analysis). Για το λόγο αυτό, **η τρισδιάστατη μοντελοποίηση των κατασκευών από οπλισμένο σκυρόδεμα με συμπαγή πεπερασμένα στοιχεία** (βασισμένα σε τριαξονικές σχέσεις τάσεων – παραμορφώσεων) και ενσωματωμένες ράβδους οπλισμού αποδείχθηκε **το πιο ακριβές εργαλείο** για την προσομοίωση της μη γραμμικής μηχανικής συμπεριφοράς τους. Τονίζουμε πάντως ότι το τίμημα της υψηλής αυτής ποιότητας προσέγγισης είναι **το αυξημένο υπολογιστικό κόστος** και σε ορισμένες περιπτώσεις **η έλλειψη αριθμητικής ευρωστίας.**

Για μία περισσότερο ρεαλιστική πρόβλεψη, λοιπόν, κάθε κατασκευή από οπλισμένο σκυρόδεμα θα πρέπει να θεωρηθεί ως τρισδιάστατη. Με άλλα λόγια, οι τρισδιάστατες σχέσεις τάσεων – παραμορφώσεων είναι οι περισσότερο κατάλληλες. Ειδικά για τις πλαισιακές κατασκευές, προκειμένου να πάρουμε μία ολική εκτίμηση, χρησιμοποιούμε προσεγγίσεις οι οποίες βασίζονται είτε σε μεθόδους συγκεντρωμένης πλαστικότητας (πλαστική άρθρωση-πλαστικός κόμβος) είτε σε μεθόδους διανεμημένης πλαστικότητας (μοντέλα ινών-fiber models). Για λόγους που έχουμε αναφέρει ήδη σε προηγούμενη ενότητα, προτιμήσαμε τις μεθόδους διανεμημένης πλαστικότητας και συγκεκριμένα τη μέθοδο των ινών. Για την προσομοίωση του οπλισμού θα χρησιμοποιήσουμε το Beam Column Flexibility Based Element (το φυσικό στοιχείο δυνάμεων), το οποίο βασίζεται στη μέθοδο των ινών (fiber approach) και στη μέθοδο των φυσικών μορφών (natural mode method-Αργύρης). Το προτεινόμενο αυτό στοιχείο (NBCFB) μπορεί κάλλιστα να συγκριθεί ως προς την **αριθμητική** του **στιβαρότητα** (numerical robustness) και την **υπολογιστική** του **αποδοτικότητα** (computational superiority), κυρίως σε περιπτώσεις μονοτονικής φόρτισης, με το στοιχείο ευκαμψίας (flexibility based element) του πακέτου λογισμικού OpenSees.

Μία περίπτωση μονοτονικής φόρτισης (monotonically loading case) αποτελεί η σταθερά αυξανόμενη φόρτιση χωρίς αλλαγή της κατεύθυνσης του φορτίου. Το αντίθετο της μονοτονικής φόρτισης είναι η ανακυκλική φόρτιση (όπως ο σεισμός), στην οποία έχουμε αλλαγή της κατεύθυνσης και κυρίως της φοράς του φορτίου.

Ωστόσο, όπως αναφέραμε προηγουμένως, το κύριο μειονέκτημα της χρήσης ενός τέτοιου τρισδιάστατου μοντέλου σε μία full scale κατασκευή, δεν είναι άλλο από τις **υψηλές απαιτήσεις σε υπολογιστικό χρόνο**. Το ελάττωμα αυτό οφείλεται στην πολυπλοκότητα τέτοιων μεθόδων, η οποία μπορεί να καταστήσει τη χρήση τους ακόμη και μη πρακτική. Η υπολογιστική αυτή συνθετότητα αυξάνεται ακόμη περισσότερο :

- 1) **λόγω της χρήσης αριθμητικά ασταθών καταστατικών μοντέλων υλικών και κατανομής των ρωγμών**, όπως είναι ο καταστατικός νόμος του σκυροδέματος σε συνδυασμό με την προσέγγιση της διανεμημένης ρωγμής. Πολλές φορές είμαστε υποχρεωμένοι να χρησιμοποιήσουμε τέτοια καταστατικά πειραματικά μοντέλα υλικών, γεγονός που καθιστά την αστάθεια του κώδικα μία κρίσιμη παράμετρο.

Στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία, για τη μελέτη του υλικού του σκυροδέματος, το οποίο διακριτοποιούμε με ισοπαραμετρικά εξαεδρικά οκτακομβικά στοιχεία, θα εφαρμόσουμε ένα βελτιωμένο μοντέλο υλικού, που οφείλει την αρχική του μορφή στους Kotsovos and Pavlovic, και την προσέγγιση της διανεμημένης ρωγμής (smeared crack approach). Το καταστατικό αυτό μοντέλο υλικού αναπτύχθηκε βασιζόμενο σε πειραματικές δοκιμές του σκυροδέματος, το οποίο υποβαλλόταν σε πολυαξονικές εντατικές καταστάσεις. Στα πειράματα αυτά η ρωγμή αντιμετωπιζόταν ως μία ξαφνική απώλεια της τάσης για την περίπτωση της μονοτονικής φόρτισης και η μόνη παράμετρος υλικού που απαιτούνταν ήταν η μονοαξονική θλιπτική αντοχή του σκυροδέματος.

**Το μοντέλο υλικού των Kotsovos and Pavlovic** είναι ασταθές, καθώς **ακόμη και για μικρές τάσεις θεωρεί ότι αλλάζουν τα χαρακτηριστικά του υλικού**. Κατά συνέπεια, ακόμη και για χαμηλά επίπεδα φόρτισης, δημιουργούνται εσωτερικές υπολειπόμενες τάσεις (unbalanced stresses) από την ενημέρωση (update) του καταστατικού μοντέλου του υλικού, οι οποίες συνεπάγονται υπολειπόμενες δυνάμεις (unbalanced forces). Έχουμε, δηλαδή, εισαγωγή αριθμητικής αστάθειας στην ίδια τη μη γραμμική διαδικασία. Με σκοπό να αμβλύνει κατά το δυνατόν την αριθμητική αυτή αστάθεια, **ο κώδικας ReConAn θεωρεί ότι**

**το σκυρόδεμα συμπεριφέρεται ελαστικά έως το 50% της θλιπτικής του αντοχής**, ενώ από το όριο αυτό και κάτω εφαρμόζει τον καταστατικό νόμο των Kotsonos and Pavlovic.

**Το μοντέλο της διανεμημένης ρωγμής (smeared crack model)** αποτελεί ένα πειραματικό νόμο κατανομής της ρωγμής. Ο νόμος αυτός συνδέεται με ένα κριτήριο αστοχίας του υλικού, το οποίο λαμβάνει υπόψιν και τις 6 συνιστώσες του τανυστή των τάσεων ( $\sigma_{xx}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\sigma_{zz}$ ). Το μοντέλο αυτό θεωρεί κατανεμημένη (εντός του στοιχείου) ρηγμάτωση, σύμφωνα με την οποία το αποτέλεσμα της ρωγμής κατανέμεται στο στοιχείο με ενιαίο τρόπο μέσω του μητρώου στιβαρότητας. Σε αντιδιαστολή αναφέρουμε το μοντέλο της διακριτής ρωγμής, κατά με το οποίο η ρωγμή εμφανίζεται αμέσως και απότομα όταν ικανοποιηθεί το αντίστοιχο κριτήριο και χωρίζει το στοιχείο μονομιάς στα δύο.

Σε ένα σημείο Gauss-Lobatto, ο καταστατικός νόμος του υλικού λαμβάνει χώρα έως όπου εμφανιστεί ρωγμή και από εκεί και κάτω ενεργοποιείται το μοντέλο της διανεμημένης ρωγμής. Σε κάθε σημείο το τασικό πεδίο χαρακτηρίζεται από τις 6 συνιστώσες του τανυστή των τάσεων. Αν στο σημείο αυτό σχηματιστεί ρωγμή (ασυνέχεια), οι 6 συνιστώσες του τανυστή των τάσεων μεταβάλλονται και ειδικότερα στη διεύθυνση την κάθετη στο επίπεδο κατά το οποίο ανοίγει η ρωγμή έχουμε μηδενισμό της τάσης (απώλεια τάσης). Η ρωγμή ανοίγει κάθετα στο επίπεδο της κύριας εφελκυστικής τάσης.

Ο κώδικας των Kotsonos and Pavlovic **θέτει περιορισμό στη διαδικασία του ανοίγματος των ρωγμών**, σύμφωνα με τον οποίο σε κάθε βήμα φόρτισης επιτρέπεται να ανοίξουν το πολύ τρεις ρωγμές σε ολόκληρη την κατασκευή. Η εισαγωγή του περιορισμού αυτού στόχευε στην αντιμετώπιση της μη σύγκλισης του κώδικα. Για παράδειγμα, αν σε ένα βήμα φόρτισης θα άνοιγαν χωρίς τον περιορισμό 10 ρωγμές, επιτρέπεται να ανοίξουν μόνο οι τρεις και συγκεκριμένα αυτές με τη μεγαλύτερη εφελκυστική τάση. Οι άλλες ρωγμές δεν επιτρέπεται να ανοίξουν, με αποτέλεσμα να εμφανίζονται υπολειπόμενες τάσεις (unbalanced stresses) που μας οδηγούν σε υπολειπόμενες γενικευμένες δυνάμεις (unbalanced forces). Αυτό σημαίνει ότι οι εσωτερικές δράσεις δεν εξισορροπούν τις εξωτερικές. Η διαφορά μεταξύ των εξωτερικών και των εσωτερικών γενικευμένων δυνάμεων (οι υπολειπόμενες γενικευμένες δυνάμεις) θα πρέπει να επιβληθεί ως εξωτερικό φορτίο στο επόμενο βήμα φόρτισης (ανακατανομή των unbalanced forces). Ο περιορισμός της διαδικασίας του ανοίγματος των ρωγμών μπορεί μεν να καθιστούσε πιο στιβαρό τον κώδικα, **εισήγαγε δε παρασιτική στιβαρότητα και επηρέαζε σημαντικά τα αποτελέσματα της μη γραμμικής διαδικασίας**. Σε αντίθεση, ο κώδικας ReConAn **δεν επιβάλλει κάποιο περιορισμό (constraint) στη διαδικασία του ανοίγματος των ρωγμών**. Αντίθετα, **θεωρεί ενιαίο άνοιγμα των ρωγμών**, δηλαδή επιτρέπει σε όλες τις ρωγμές (για τις οποίες ικανοποιείται το κριτήριο) να ανοίξουν σε κάποιο βήμα φόρτισης.

2) **λόγω της χρήσης ανωτέρας τάξεως στοιχείων.** Λόγω της ευαισθησίας τέτοιου είδους μοντέλων στις διάφορες παραμέτρους που καλείται να ορίσει ο εκάστοτε χρήστης, έως τώρα οι περισσότεροι ερευνητές προτιμούσαν τα ανωτέρας τάξεως στοιχεία σε συνδυασμό με ανωτέρας τάξεως κανόνες ολοκλήρωσης, στοχεύοντας τη μέγιστη δυνατή ακρίβεια. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να **επιβαρύνουν τον επιλύτη του εκάστοτε κώδικα από άποψη μνήμης. Η αύξηση σε υπολογιστικό χρόνο ήταν κατά τάξεις μεγέθους και σίγουρα δυσανάλογη με την επιπρόσθετη ακρίβεια που παρείχαν.** Το αποτέλεσμα ήταν μία καθόλου αριθμητικά αποδοτική προσομοίωση με πολλές επαναλήψεις Newton-Raphson ανά βήμα φόρτισης και με υψηλές απαιτήσεις σε υπολογιστική προσπάθεια ακόμη και για small-scale μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων. Για το σκοπό αυτό προτείνουμε τη χρήση οκτακομβικών εξαεδρικών στοιχείων, όπου το μητρώο στιβαρότητας υπολογίζεται μόνο στο κέντρο μάζας κάθε συμπαγούς στοιχείου προκειμένου να μειωθεί ο υπολογιστικός φόρτος.

Στην περίπτωση των εξαεδρικών στοιχείων, αντί των απλών και αποτελεσματικών (υπό κατάλληλες προϋποθέσεις) οκτακομβικών προτιμούσαν τα 20κομβικά και συνηθέστερα τα 27κομβικά. Δηλαδή μόνο και μόνο για κάθε εξαεδρικό στοιχείο έπρεπε να καθοριστούν επιπρόσθετα  $(20-8) \times 3 = 36$  και  $(27-8) \times 3 = 57$  αντίστοιχα βαθμοί ελευθερίας. Φυσικά, **σε επίπεδο κατασκευής το σύνολο των επιπρόσθετων βαθμών ελευθερίας διογκωνόταν.**

Τα ανωτέρας τάξεως στοιχεία **εμφανίζουν μεγαλύτερη στιβαρότητα ως προς το αριθμητικό κομμάτι και είναι πιο δύσκολο με αυτά να πάρουμε μηδενικούς μη διαγώνιους όρους.** Επιπλέον, σε αυτά (βλέπε 20κομβικά και 27κομβικά εξαεδρικά) έχουμε ανωτέρας τάξεως πεδίο, το οποίο για να προσομοιωθεί με την επιθυμητή ακρίβεια **απαιτείται μεγαλύτερος αριθμός** (σε σχέση με το 8κομβικό) **σημείων ολοκλήρωσης** Gauss ή Gauss-Lobatto. Αν προσομοιώνουμε με 27κομβικά εξαεδρικά χρησιμοποιούμε συνήθως  $3 \times 3 \times 3 = 27$  σημεία ολοκλήρωσης (χωρίζουμε τον κάθε άξονα x,y,z σε 3 σημεία), ενώ αν εργαστούμε με 8κομβικά αρκούν μόνο  $2 \times 2 \times 2 = 8$  (χωρίζουμε τον κάθε άξονα x,y,z σε 2 σημεία). Μπορούμε, στην περίπτωση του οκτακομβικού στοιχείου, να χρησιμοποιήσουμε και τον κανόνα ολοκλήρωσης  $2 \times 3 \times 2 = 12$ , δηλαδή 12 σημεία ολοκλήρωσης, κάτι το οποίο δεν συνηθίζεται.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η χρήση ενός τρισδιάστατου μοντέλου μπορεί μεν να **είναι η πλέον κατάλληλη για την προσομοίωση πλαισιακών κατασκευών από οπλισμένο σκυρόδεμα**, αλλά **σε συνδυασμό με ασταθή μοντέλα υλικών και ανωτέρας τάξεως στοιχεία υπερφορτώνει αριθμητικά τα προς επίλυση προβλήματα**, διότι απαιτεί πολύ μεγαλύτερο αριθμό εσωτερικών επαναλήψεων προκειμένου να επιτευχθεί σύγκλιση. Κατά συνέπεια, απαιτείται αξιοσημείωτος υπολογιστικός χρόνος ακόμη και για small-scale μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων.

Ωστόσο, **ο κώδικας ReConAn** έχοντας :

- προγραμματίζεται βάσει της γλώσσας προγραμματισμού Fortran 90/95 και του αντικειμενοστραφούς προγραμματισμού
- βελιωθεί αριθμητικά σε επίπεδο στοιχείων οπλισμού (ελέγχει καλύτερα τη διάχυση των λαθών και τη ροή των δεδομένων)
- βελτιώσει αριθμητικά τα καταστατικά μοντέλα υλικών που χρησιμοποιεί

**έχει αντιμετωπίσει αρκετά αποτελεσματικά το μειονέκτημα της χρήσης ενός τρισδιάστατου μοντέλου.**

Κλείνοντας την υποενότητα αυτή, αξίζει να επισημάνουμε ότι ο όρος τρισδιάστατη ελαστικότητα αποτελεί μία γενική έννοια, εμπεριέχοντας και τον όρο τρισδιάστατη ανελαστικότητα. Πιο σωστή θα ήταν η χρήση του όρου τρισδιάστατη εντατική κατάσταση.

## 5.1.2 Το οπλισμένο σκυρόδεμα ως συνύπαρξη και αλληλεπίδραση δύο διαφορετικών υλικών

Ο **χάλυβας του οπλισμού** είναι ένα όλκιμο υλικό. Όλκιμα ονομάζονται τα υλικά που έχουν την ιδιότητα να διαρρέουν πριν αστοχήσουν (ως αποτέλεσμα της επενέργειας κρίσιμων διατμητικών τάσεων σε επίπεδο  $45^\circ$ ) και να θραύονται όλκιμα. Η όλκιμη θραύση διακρίνεται από τις έντονες πλαστικές παραμορφώσεις γύρω από την περιοχή θραύσης και οφείλεται κυρίως στις διατμητικές τάσεις. Για το λόγο αυτό σε τέτοιου είδους υλικά ως κριτήριο διαστασιολόγησης ή ελέγχου χρησιμοποιείται η μέγιστη διατμητική τάση. Η επιφάνεια θραύσης είναι ανομοιόμορφη και χονδρόκοκκη. Επειδή η όλκιμη θραύση γίνεται αργά και συνοδεύεται από μεγάλες πλαστικές παραμορφώσεις δεν είναι τόσο επικίνδυνη όσο η ψαθυρή (“προειδοποιεί”).

Σε αντίθεση, **το σκυρόδεμα** είναι ένα ψαθυρό υλικό. Ψαθυρά καλούνται τα υλικά που έχουν την ιδιότητα να θραύονται ψαθυρά. Ψαθυρή ονομάζεται εκείνη η θραύση κατά την οποία το υλικό σπάει κάθετα στη διεύθυνση φόρτισής του, χωρίς σημαντικές πλαστικές παραμορφώσεις γύρω από την περιοχή θραύσης. Επειδή τα υλικά αυτά θραύονται κάθετα στη διεύθυνση της μέγιστης ορθής τάσης, ως κριτήριο διαστασιολόγησης ή ελέγχου χρησιμοποιείται η μέγιστη ορθή τάση. Η επιφάνεια θραύσης είναι λεία και λεπτόκοκκη. Σε αντίθεση με τα όλκιμα υλικά, τα ψαθυρά θραύονται χωρίς προηγουμένως να διαρρεύσουν.

Η ουσιώδης διαφορά μεταξύ του χάλυβα και του σκυροδέματος διαπιστώνεται και πειραματικά: στο πείραμα εφελκυσμού η όλκιμη θραύση του χάλυβα φαίνεται από τη δημιουργία έντονου λαιμού στο δοκίμιο, κάτι το οποίο δε συμβαίνει στο πείραμα εφελκυσμού του σκυροδέματος. Επειδή η ψαθυρή θραύση διαδίδεται ταχύτατα και δημιουργείται ακόμη και κάτω από μικρές φορτίσεις, είναι πολύ επικίνδυνη.

Να σημειώσουμε πάντως ότι *τόσο η όλκιμότητα όσο και η ψαθυρότητα δεν αποτελούν στην πραγματικότητα χαρακτηριστικές ιδιότητες ενός υλικού* (όπως π.χ. το όριο διαρροής). Αντιθέτως, *μεταβάλλονται από εξωτερικές επιδράσεις* όπως είναι η θερμοκρασία, το είδος της φόρτισης και η ταχύτητα καταπόνησης. Ένα υλικό μπορεί να συμπεριφέρεται άλλοτε όλκιμα και άλλοτε ψαθυρά ανάλογα με τις εξωτερικές συνθήκες. Πάντως **για τις συνηθισμένες θερμοκρασίες του φυσικού και ανθρωπογενούς περιβάλλοντος ο χάλυβας που χρησιμοποιείται για τον οπλισμό συμπεριφέρεται όλκιμα, ενώ το σκυρόδεμα ψαθυρά.**

Το οπλισμένο σκυρόδεμα συνδυάζει αποτελεσματικά τις ιδιότητες των δύο υλικών του. Μπορεί το σκυρόδεμα να διαθέτει υψηλή αντοχή σε θλίψη, εντούτοις η αντοχή του σε εφελκυσμό είναι πολύ μικρή έως αμελητέα. Έτσι, στη θέση σχηματισμού ρωγμής, η οποία αναπτύσσεται κάθετα στη διεύθυνση της κύριας εφελκυστικής τάσης, η αντοχή του σκυροδέματος μηδενίζεται και τις εφελκυστικές τάσεις καλείται να παραλάβει ο οπλισμός.

**Η συνάφεια μεταξύ χάλυβα και σκυροδέματος** αποτελεί έναν κρίσιμο παράγοντα για τη συμπεριφορά του οπλισμένου σκυροδέματος και επηρεάζεται άμεσα από την **ολίσθηση του οπλισμού**. Ως εκ τούτου, προκειμένου να αναλύσουμε με ακρίβεια μία κατασκευή από οπλισμένο σκυρόδεμα, θα πρέπει, κατά την τρισδιάστατη προσομοίωση του οπλισμένου σκυροδέματος, να δώσουμε ιδιαίτερη έμφαση εκτός από ποιο **τύπο στοιχείων** και ποιο **καταστατικό μοντέλο υλικού** πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για τον χάλυβα (rod element ή BCFB, bilinear ή Menegotto-Pinto) και το σκυρόδεμα (οκτακομβικό εξαεδρικό, καταστατικό νόμο των Kotsos and Pavlovic και smeared crack approach), και στα λεγόμενα **bond effects** (συνάφεια μεταξύ σκυροδέματος και οπλισμού, η οποία όταν χάνεται επέρχεται ολίσθηση).

### 5.1.3 Μητρικά εξαεδρικά στοιχεία για το σκυρόδεμα και θυγατρικά ενσωματωμένα φυσικά στοιχεία δυνάμεων για τον οπλισμό

Σύμφωνα με την προτεινόμενη μέθοδο, **προσομοιώνουμε το σκυρόδεμα με τα εξαεδρικά στοιχεία τρισδιάστατης ελαστικότητας και τις ράβδους οπλισμού με τα φυσικά στοιχεία δυνάμεων.**

Για τους λόγους που έχουμε ήδη αναφέρει στην υποενότητα 4.2.3, προτιμούμε τα **οκτακομβικά** έναντι των εικοσικομβικών και των εικοσιεπτακομβικών εξαεδρικών στοιχείων. Συνήθως χρησιμοποιούμε  $2 \times 2 \times 2 = 8$  **σημεία ολοκλήρωσης**. Ελέγχουμε, δηλαδή, το οκτακομβικό εξαεδρικό σε δύο σημεία κατά μήκος κάθε άξονα (x,y,z).

Όπως έχουμε αναπτύξει διεξοδικά στο κεφάλαιο 3, κάθε φυσικό στοιχείο δυνάμεων περιλαμβάνει **2** ακραίους κόμβους και συνολικά  $2 \times 6 = 12$  μετακινησιακούς επικόμβιους βαθμούς ελευθερίας. Σε αντίθεση με το απλό στοιχείο δικτυώματος (rod element) το οποίο:

- διαθέτει μόνο αξονική στιβαρότητα  $\frac{EA}{L}$
- μπορεί να προσομοιώσει μόνο τον εφελκυσμό και τη θλίψη ενός ραβδωτού δομικού μέλους **το φυσικό στοιχείο δυνάμεων** (beam column flexibility based element) μπορεί να λάβει υπόψιν (πέραν της αξονικής) και την καμπτική στιβαρότητα (λόγω της καμπτικής παραμόρφωσης) του οπλισμού, καθώς και τη σχετική του ολίσθηση (slippage) με το σκυρόδεμα. Το γεγονός αυτό έχει αποδειχθεί εξαιρετικά σημαντικό για τη **σωστή ανάλυση της καθολικής απόκρισης των περισσότερων full-scale κατασκευών από οπλισμένο σκυρόδεμα.**

Κύριο χαρακτηριστικό του επιλεγθέντος μοντέλου είναι ότι **ως βαθμούς ελευθερίας λαμβάνει μόνο τους τρεις μετατοπισιακούς βαθμούς ελευθερίας που αντιστοιχούν σε κάθε κόμβο εξαεδρικού στοιχείου** και όχι τους 6 μετακινησιακούς βαθμούς ελευθερίας που αντιστοιχούν σε κάθε ακραίο κόμβο δικομβικού φυσικού στοιχείου δυνάμεων. Η δυνατότητα αυτή, που λειτουργεί σημαντικά **υπέρ της οικονομίας υπολογιστικού χρόνου**, είναι απόρροια της **θεώρησης ενσωματωματωμένου οπλισμού** (embedded reinforcement). Τα στοιχεία οπλισμού προέρχονται από τα αρχικές ράβδους οπλισμού, δηλαδή είναι τμήμα αυτών. Μέσω της διαδικασίας “Generation of the Embedded Elements”, ο κώδικας διαιρεί τις ήδη υπάρχουσες ράβδους οπλισμού σε μικρότερα φυσικά στοιχεία δυνάμεων, τα λεγόμενα στοιχεία οπλισμού. Δημιουργείται, λοιπόν, μία σχέση μητέρας-κόρης, δηλαδή **κάθε μητρικό εξαεδρικό στοιχείο σκυροδέματος έχει στο εσωτερικό του όγκου του ενσωματωμένα τα θυγατρικά νέα φυσικά στοιχεία δυνάμεων.** Η προτεινόμενη διατύπωση επιτρέπει στα στοιχεία οπλισμού να έχουν οποιονδήποτε προσανατολισμό στο εσωτερικό του όγκου των στοιχείων σκυροδέματος (δηλαδή των εξαεδρικών στοιχείων).

Το σκυρόδεμα (ψαθυρό υλικό) έχει υψηλή αντοχή σε θλίψη και πολύ μικρή έως αμελητέα αντοχή σε εφελκυσμό. Κατά συνέπεια, είναι απαραίτητη η τοποθέτηση του οπλισμού, ώστε να παραλάβει τις εφελκυστικές τάσεις και να προσφέρει αντοχή στις θέσεις όπου το σκυρόδεμα έχει ρηγματωθεί (και έχει μηδενιστεί η αντοχή του). **Το φαινόμενο της συνδυασμένης αυτής λειτουργίας είμαστε σε θέση να προσομοιώσουμε ικανοποιητικά** με την αξιοποίηση των υβριδικών αυτών εξαεδρικών στοιχείων σκυροδέματος, **χωρίς να επιβαρύνουμε το πρόβλημα με επιπρόσθετους βαθμούς ελευθερίας.** Αν λαμβάνονταν ως ενεργοί βαθμοί ελευθερίας και οι μετακινήσεις των ακραίων κόμβων των ενσωματωμάτων, ο υπολογιστικός χρόνος θα αυξανόταν κατά τάξεις μεγέθους. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι **η συμβολή των ενσωματωμάτων στη βελτίωση της συμπεριφοράς του απλού εξαεδρικού στοιχείου σκυροδέματος είναι καίρια, καθώς ενισχύουν τη στιβαρότητά του.** Πρόκειται, δηλαδή, για ένα ενισχυμένο εξαεδρικό στοιχείο.

## 5.1.4 Η γλώσσα προγραμματισμού του κώδικα ReConAn και η σύνδεσή του με το πακέτο λογισμικού FEMAP

### Η γλώσσα προγραμματισμού του κώδικα ReConAn

Ένα εξαιρετικά κρίσιμο θέμα που θα πρέπει να λάβουμε υπόψιν είναι η **αριθμητική εφαρμογή**. Σήμερα, έχουν αναπτυχθεί πολλά πακέτα λογισμικού για την ανάλυση κατασκευών από οπλισμένο σκυρόδεμα. Το καθένα από αυτά έχει τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά του, ανάλογα με την εκάστοτε ερευνητική εφαρμογή και επιδίωξη. Προκειμένου να δημιουργήσουμε ένα κώδικα με τη βέλτιστη δυνατή προγραμματιστική δομή για την επίλυση των προβλημάτων μας, πρώτα από όλα θα πρέπει να επιλέξουμε την κατάλληλη γλώσσα προγραμματισμού, η οποία θα μας εφοδιάσει με τα απαραίτητα εργαλεία.

Για την περίπτωση των αριθμητικών υπολογιστικών προβλημάτων μηχανικής, οι επιλογές μας περιορίζονται σε δύο βασικές γλώσσες προγραμματισμού, οι οποίες είναι:

- η C++
- η Fortran 90/95.

Η γλώσσα προγραμματισμού C++ απορρίφθηκε εξαιτίας των ακόλουθων στοιχείων σύγκρισής της με την Fortran 90/95:

- Η έλλειψη προτύπου στη C++ δημιουργεί **προβλήματα στη μεταφερσιμότητα του κώδικα**.
- **Η έλλειψη εγγενών πινάκων**. Σε αντίθεση, η επιλεγείσα Fortran 90/95 προσφέρει μεγάλη ευκολία στο χειρισμό τους.
- **Η έλλειψη δυνατότητας ορισμού της ακρίβειας των μεταβλητών**.
- Η Fortran 90/95 είναι **σημαντικά ευκολότερη στην εκμάθηση** και προσφέρεται **περισσότερο ως πρώτη γλώσσα προγραμματισμού** από ότι η C++.
- Η Fortran 90/95 θεωρείται **αξεπέραστη στο χειρισμό των υπολογιστικών προβλημάτων μηχανικής**.
- Οι πίνακες και οι νέες δομές της Fortran 90/95 επιτρέπουν τον **παραλληλισμό των δεδομένων** και την **επίλυση σε παράλληλους υπολογιστές**.
- Όλοι οι εμπορικοί μεταγλωττιστές της Fortran 90/95 προσφέρουν **ενσωματωμένη βελτιστοποίηση του κώδικα** και πλήθος άλλων δυνατοτήτων, όπως:
  - ❖ αυτόματη διόρθωση συντακτικών λαθών
  - ❖ αποσφαλμάτωση
  - ❖ μαθηματικές και στατιστικές βιβλιοθήκες
  - ❖ βιβλιοθήκες γραφικών
  - ❖ διασύνδεση με κώδικα γραμμένο σε άλλες γλώσσες (C, Visual Basic)
  - ❖ διασύνδεση με βιβλιοθήκες για τη δημιουργία εφαρμογών Windows
  - ❖ επεκτάσεις της γλώσσας εκτός προτύπου

Η Fortran 77, εξαιτίας της απλότητάς της, κυριαρχούσε πάντα στο πεδίο των επιστημόνων – ερευνητών. Ωστόσο, θεωρείται μάλλον απαρχαιωμένη από τότε που εμφανίστηκαν στο προσκήνιο οι νέες δυνατότητες της Fortran 90/95. Η Fortran 95 αποτελεί μία μικρή αναβάθμιση της Fortran 90 με κύρια χαρακτηριστικά:

- τη διόρθωση κάποιων λαθών του προτύπου της Fortran 90
- την προσθήκη της δομής FORALL
- την προσθήκη των pure function.

Η ανάγκη για έναν κώδικα με αντικειμενοστραφή προσανατολισμό συνέβαλε στη δημιουργία του προγράμματος ReConAn. Η ανάγκη αυτή αναδύθηκε από το γεγονός ότι η **ανάλυση** με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων θα έπρεπε να είναι **περισσότερο ευέλικτη**, δηλαδή να μπορεί ένας **κώδικας** που βασίζεται στην ανάλυση αυτή εύκολα να επεκταθεί και να διατηρηθεί ή αλλιώς να **επαναχρησιμοποιηθεί**.

Ο αντικειμενοστραφής προγραμματισμός αποτελεί την πιο σύγχρονη τάση στην επιστήμη του προγραμματισμού την τελευταία δεκαετία. Ως έννοια διαμορφώθηκε το 1960 με στόχο τη διατήρηση της ποιότητας του software, η οποία απειλούνταν συνεχώς από την ολοένα και αυξανόμενη δημιουργία περίπλοκων software και hardware. Η εξέλιξή του και το γεγονός ότι η προσπάθεια της συνεχούς βελτίωσής του αποτελεί αντικείμενο διεθνούς έρευνας οφείλεται στις εξαιρετικές δυνατότητες που παρέχει όχι μόνο στον προγραμματιστή αλλά και σε οιονδήποτε χρήστη.

Σε γενικές γραμμές, τα κυριότερα χαρακτηριστικά του είναι:

- η **επιτυχής προσομοίωση φυσικών εννοιών εύκολα αντιληπτών από τον καθένα**
- η **μείωση του υπολογιστικού χρόνου** και η **ταυτόχρονη αύξηση της παραγωγικότητας** όσον αφορά στην ανάπτυξη και επίλυση ενός υπολογιστικού μοντέλου (όπως μοντέλο των πεπερασμένων στοιχείων) μέσω:
  - ❖ της **δυνατότητας επαναχρησιμοποίησης κομματιών κώδικα**. Καθώς μία εφαρμογή θα αποτελείται από αυτοδύναμα κομμάτια κώδικα, δίνεται η δυνατότητα στον προγραμματιστή να χρησιμοποιήσει τα κομμάτια σε μία παρόμοια μελλοντική εφαρμογή (επαναχρησιμοποίηση των κομματιών του κώδικα).
  - ❖ της **δυνατότητας σταδιακής ή ομαδικής ανάπτυξης του κώδικα**. Καθώς μία εφαρμογή θα αποτελείται από αυτοδύναμα κομμάτια κώδικα, δίνεται η δυνατότητα στον προγραμματιστή να αναπτύξει τη συγκεκριμένη εφαρμογή σε στάδια (σταδιακή ανάπτυξη του κώδικα) ή να αναθέσει τα επιμέρους κομμάτια σε διαφορετικούς ανθρώπους (ομαδική ανάπτυξη του κώδικα).
  - ❖ της **δυνατότητας ελέγχου των αριθμητικών διαδικασιών και των αποτελεσμάτων τους σε κάθε φάση της ανάλυσης**
  - ❖ του γεγονότος ότι η **καθαρότητα στην έκφραση βοηθάει στην κατανόηση και στην ευκολότερη επίλυση των προβλημάτων**.

Η Fortran 90/95 σχεδιάστηκε με σχεδόν όλες τις δυνατότητες της C++. Υπάρχουν βέβαια και κάποια χαρακτηριστικά της C++, όπως τα template και ο χειρισμός εξαιρέσεων, που δεν υπάρχουν στη Fortran 90/95, μπορούν όμως να υποκατασταθούν με επιπλέον κώδικα.

Όπως όλες οι σύγχρονες γλώσσες αντικειμενοστραφούς προγραμματισμού, η Fortran 90/95 διαθέτει τη δυνατότητα υλοποίησης τριών χαρακτηριστικών:

- 1) **Ενθυλάκωση** (encapsulation). Πρόκειται για τη **δυνατότητα δημιουργίας κλάσεων**, δηλαδή μονάδων με αυτόνομη χρησιμότητα, όπως τα αρθρώματα (modules). Ένα άρθρωμα δημιουργείται σε ένα ξεχωριστό αρχείο που περιέχει πηγαίο κώδικα με την κατάληξη .f90.
- 2) **Κληρονομικότητα** (inheritance). Πρόκειται για τη **δυνατότητα δημιουργίας ιεραρχικών τύπων δεδομένων**, όπως διαδοχικά παράγωγων τύπων δεδομένων.
- 3) **Πολυμορφισμός** (Polymorphism). Πρόκειται για τη **δυνατότητα δημιουργίας ενιαίων διεπιφανειών για διαφοροποιημένη χρήση** ανάλογα με το είδος των δεδομένων.

Στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία χρησιμοποιήσαμε την τελευταία έκδοση **Intel(R) Fortran Compiler Professional Edition v10.1**, που υποστηρίζει όλες τις νέες εφαρμογές της νέας Fortran 90/95 και το **Visual Studio 2008 Professional Edition**.



## Η σύνδεση του κώδικα ReConAn με το πακέτο λογισμικού FEMAP

Είναι ευρέως γνωστό ότι κάθε ολοκληρωμένο πακέτο λογισμικού πεπερασμένων στοιχείων περιλαμβάνει τρία μέρη. Τα τρία αυτά μέρη είναι:

### a) ο προεπεξεργαστής (preprocessor)

Ως **preprocessor** καλείται ένα πρόγραμμα, στο οποίο εισάγοντας το αρχείο δεδομένων (input file) εξάγουμε το αντίστοιχο αρχείο αποτελεσμάτων (output file), προκειμένου να το χρησιμοποιήσουμε ως input file για ένα άλλο πρόγραμμα (στην περίπτωση μας το πρόγραμμα αυτό είναι το ReConAn).

Ο κώδικας ReConAn χρησιμοποιεί ως preprocessor το πακέτο λογισμικού **FEMAP** (version 9.0-9.3). Το FEMAP είναι ουσιαστικά το πρόγραμμα με το οποίο δημιουργούμε και απεικονίζουμε το αρχικό γεωμετρικό μοντέλο των πεπερασμένων στοιχείων και περιλαμβάνει διαδικασίες όπως η δημιουργία του δικτύου των πεπερασμένων στοιχείων (meshing) και η αρίθμηση των κόμβων, των στοιχείων, των υλικών και των ιδιοτήτων. Χρησιμοποιούμε τον όρο γεωμετρικό μοντέλο για να το διακρίνουμε από το αριθμητικό μοντέλο που δημιουργεί ο επιλύτης του κώδικα. Σε αυτό ορίζουμε εκτός από τα γεωμετρικά στοιχεία και τις ομάδες των πεπερασμένων στοιχείων, των υλικών και των ιδιοτήτων. Το γεωμετρικό μοντέλο εισάγεται ως input file στον κώδικα, ο επιλύτης του οποίου θα σχηματίσει το αριθμητικό μοντέλο.

### b) ο επιλύτης (solver)

Ο **επιλύτης του κώδικα** είναι ο καταλύτης της αριθμητικής διαδικασίας της ανάλυσης και ο κατ' εξοχήν υπεύθυνος για τη μετάφραση του γεωμετρικού μοντέλου των πεπερασμένων στοιχείων στο τελικό αριθμητικό μοντέλο. Ο επιλύτης θα χρησιμοποιήσει την κατάλληλη διαδικασία ή μέθοδο επίλυσης για να παράγει τα απαιτούμενα αποτελέσματα, όπως εντατικά μεγέθη, τάσεις, παραμορφώσεις, μετατοπίσεις, ιδιομορφές. Για να υπάρχει συμβατότητα μεταξύ των δύο προγραμμάτων, έχει αναπτυχθεί μία διεπιφάνεια μεταξύ τους, η οποία δίνει στον κώδικα ReConAn την ικανότητα να διαβάζει όλες τις απαιτούμενες πληροφορίες του μοντέλου των πεπερασμένων στοιχείων από ένα ουδέτερο τύπο αρχείου (neutral text type file, .NEU), που παράγει το FEMAP v9.0.

### c) το λογισμικό του post-processor

Ως **post-processor** καλείται ένα πρόγραμμα, μέσω του οποίου απεικονίζουμε τα αποτελέσματα του επιλύτη ενός άλλου προγράμματος (του ReConAn). Τα αποτελέσματα αυτά μπορεί να είναι:

- ❖ εντατικά μεγέθη
- ❖ τάσεις (stresses)
- ❖ παραμορφώσεις (strains)
- ❖ μετατοπίσεις (displacements)
- ❖ ιδιομορφές (modes)
- ❖ ρωγμές

Για την οπτική απεικόνιση των αποτελεσμάτων του επιλύτη του ReConAn διαθέτουμε δύο εναλλακτικές:

- **το πακέτο λογισμικού FEMAP**

Το FEMAP έχει τεράστιες δυνατότητες απεικόνισης, εκ των οποίων μας ενδιαφέρουν η οπτική απεικόνιση μέσω χρωματισμών των τάσεων και των παραμορφώσεων (stress and strain contouring) και η εικονική αναπαράσταση (virtual animation) της απαραμόρφωτης και παραμορφωμένης κατάστασης του φορέα και των διαφόρων ιδιομορφών του. Το κύριο μειονέκτημα είναι ότι **δεν προσφέρει τρισδιάστατη αναπαράσταση της διαδικασίας του ανοίγματος των ρωγμών.**

- **το πρόγραμμα ReConAn Eye**

Ο κώδικας ReConAn διαθέτει στις βιβλιοθήκες του το τρισδιάστατο μοντέλο της διανεμημένης ρωγμής (3D smeared crack material model). Η προσέγγιση της διανεμημένης ρωγμής δίνει την αριθμητική ικανότητα να προσομοιώνουμε υλικά τα οποία κυριαρχούνται από το φαινόμενο της ρηγμάτωσης, όπως είναι το σκυρόδεμα. Με στόχο την τρισδιάστατη απεικόνιση της ρηγμάτωσης (μία δυνατότητα που δεν μας προσφέρει το FEMAP) δημιουργήθηκε το ReConAn Eye, το οποίο έχει ενσωματωθεί στην κύρια δομή του κώδικα ReConAn και βασίζεται στις pre-build OpenGL libraries f90gl.

Το ReConAn Eye παρέχει τη δυνατότητα οπτικής απεικόνισης :

1. του τρισδιάστατου φαινομένου της ανάπτυξης ρωγμών κατά την εξέλιξη της φόρτισης (3D crack visualization).
2. της απαραμόρφωτης και παραμορφωμένης κατάστασης του φορέα (3D graphical FEM model illustration, deformations - animation)
3. των σημείων ολοκλήρωσης Gauss ή Gauss-Lobatto

Ολοκληρώνοντας την ενότητα αυτή, αξίζει να αναφέρουμε και τις εξής δύο βιβλιοθήκες του κώδικα ReConAn.

### **Problem Solution Library**

1. Static Linear Analysis
2. Static Non-Linear Analysis (Newton-Raphson, Arc-Length with Large Displacements)
3. Dynamic Linear Analysis
4. Dynamic Non Linear Analysis

### **Solver Library**

1. Gauss Elimination using Skyline Storage
2. Preconditioned Conjugated Gradient (PCG) using Compact Storage
  - i. No Preconditioning
  - ii. Diagonal Preconditioning
  - iii. SSOR Preconditioning

## 5.2 Το μοντέλο των ενσωματωμένων ράβδων οπλισμού στα εξαεδρικά στοιχεία σκυροδέματος

Προκειμένου να επιλέξουμε τόσο τον πιο κατάλληλο (κυρίως αριθμητικά) τύπο πεπερασμένου στοιχείου όσο και το πιο κατάλληλο (κυρίως αριθμητικά) καταστατικό μοντέλο υλικού για την προσομοίωση του χάλυβα του ενσωματωμένου (εντός των εξαεδρικών στοιχείων) οπλισμού, θα πρέπει να κατανοήσουμε τη μηχανική συμπεριφορά και τις ιδιότητες του υλικού αυτού και να λάβουμε υπόψιν αριθμητικές παραμέτρους, όπως :

- η αριθμητική ακρίβεια (arithmetical accuracy)
- η αριθμητική ευρωστία (arithmetical robustness)
- η υπολογιστική αποδοτικότητα (computational efficiency).

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων δεν είναι τίποτα άλλο από **μία αριθμητική μέθοδο που υπακούει τυφλά στο νόμο των αριθμών**. Τα αριθμητικά αποτελέσματα εξαρτώνται άμεσα από τα αριθμητικά μοντέλα που χρησιμοποιεί ο εκάστοτε προγραμματιστής ή χρήστης και **δεν έχουν καμία σχέση με τον τύπο του φυσικού προβλήματος**. Το γεγονός αυτό καθιστά επιτακτική την αναζήτηση των πιο σημαντικών αριθμητικών χαρακτηριστικών που θα μας επιτρέψουν να προσεγγίσουμε κατά το βέλτιστον δυνατόν τη μηχανική συμπεριφορά του φυσικού προβλήματος, που στην περίπτωση αυτή είναι οι ενσωματωμένες ράβδοι οπλισμού.

Οι έως τώρα προσομοιώσεις με ενσωματωμένες ράβδους οπλισμού χρησιμοποιούσαν στοιχεία δικτυώματος δύο ή τριών κόμβων. Θεωρούσαν, δηλαδή, ότι ο οπλισμός συμπεριφερόταν ως ένα μονοαξονικό ραβδωτό στοιχείο, το οποίο μπορεί μόνο να θλίβεται ή να εφελκύεται **χωρίς να λαμβάνει υπόψιν καμπτική και διατμητική στιβαρότητα**. Επιπλέον, να υπενθυμίσουμε ότι για το στοιχείο δικτυώματος, το οποίο αποτελεί ένα συμβατικό στοιχείο μετατοπίσεων, **δεν ισχύει η ισοδυναμία μεταξύ των μετατοπίσεων και των αντίστοιχων εσωτερικών δυνάμεων κατά μήκος του στοιχείου**. Άλλωστε, κάτι τέτοιο αποτελεί μοναδικό προνόμιο του φυσικού στοιχείου δυνάμεων. Αυτό είναι ένα αριθμητικό χαρακτηριστικό το οποίο προσθέτει **επιπλέον αριθμητική αστάθεια** κατά τη διαδικασία ανάλυσης του πλαισιακού φορέα της κατασκευής. Είναι πράγματι γεγονός ότι η καμπτική αντοχή του οπλισμού σε πολλά μέλη από οπλισμένο σκυρόδεμα (με συγκεκριμένα γεωμετρικά χαρακτηριστικά) είναι πολύ μικρή έως αμελητέα, εντούτοις κάτι τέτοιο δεν ισχύει πάντα και ιδιαίτερα **σε μέλη τα οποία καταπονούνται κυρίως από διάτμηση**, όπως τα τοιχεία, οι κοντοί πρόβολοι και οι υψίκορμες δοκοί. Για τις περιπτώσεις αυτές προτείνουμε η διακριτοποίηση του οπλισμού να πραγματοποιείται με φυσικά στοιχεία δυνάμεων, τα οποία εκτός από το να **λαμβάνουν υπόψιν τα φαινόμενα της κάμψης και της διάτμησης του οπλισμού**, έχει παρατηρηθεί ότι **αυξάνουν την αριθμητική ευστάθεια της εσωτερικής διαδικασίας Newton-Raphson**, εξαιτίας της εσωτερικής επαναληπτικής μη γραμμικής διαδικασίας που διαθέτουν.

Γνωρίζοντας ότι τα καταστατικά μοντέλα υλικών που βασίζονται στην προσέγγιση της διανεμημένης ρωγμής (smeared crack based models) παράγουν παθογενείς πίνακες-μητρώα, **μάλλον απαγορευτική φαντάζει η χρήση στοιχείων (όπως στοιχεία δικτυώματος) τα οποία εισάγουν επιπλέον αριθμητική αστάθεια**, επιδεινώνοντας το ήδη υπάρχον πρόβλημα. Για τους ανωτέρω λόγους, σε αυτήν την εργασία **η διακριτοποίηση του οπλισμού γίνεται κυρίως με τα φυσικά στοιχεία δυνάμεων (NBCFB)**, τα οποία **αμβλύνουν το πρόβλημα της αριθμητικής αστάθειας** λόγω της εσωτερικής μη γραμμικής επαναληπτικής διαδικασίας, χάριν της οποίας **ικανοποιείται το συμβιβαστό των παραμορφώσεων και η ισορροπία των δυνάμεων πάντα και παντού κατά μήκος του στοιχείου του οπλισμού**.

Θα πρέπει να τονίσουμε, πάντως, ότι η επιλογή των τρισδιάστατων ραβδωτών φυσικών στοιχείων δυνάμεων έναντι των συμβατικών μονοαξονικών στοιχείων δικτυώματος θέτει κάποια **ζητήματα εφαρμογής**. Όταν χρησιμοποιούμε **δικομβικά ή τρικομβικά στοιχεία δικτυώματος**, οι **συνθήκες συμβατότητας μεταξύ των ακραίων κόμβων 1,2 του δικτυώματος και των αντίστοιχων εξαεδρικών κόμβων  $n_1 \neq n_8$  επιβάλλονται μέσω των μεταφορικών βαθμών ελευθερίας**, καθώς αμελείται η στροφή των κόμβων του rod στοιχείου (Σχήμα 5.3). Από την άλλη πλευρά, **όταν χρησιμοποιούμε φυσικά στοιχεία δυνάμεων**, τα οποία όπως έχουμε αναλύσει διεξοδικά είναι εξελιγμένα και βελτιωμένα στοιχεία δοκού, **η συμβατότητα μεταξύ των επικόμβιων μετακινήσεων των στοιχείων οπλισμού και της παραμορφωμένης θέσης των εξαεδρικών εδρών πρέπει να λαμβάνει υπόψη τη στροφή των κόμβων των στοιχείων οπλισμού** (Σχήμα 5.4).

Προκειμένου, λοιπόν, να υπολογίσουμε τη στροφή ενός κόμβου της ράβδου οπλισμού από τη μετατόπιση της αντίστοιχης εξαεδρικής έδρας που τον περιέχει, οφείλουμε να υπολογίσουμε τη στροφή της έδρας αυτής. Έστω  $\bar{\theta}$  **η γωνία μεταξύ της διεύθυνσης της ράβδου οπλισμού και του κάθετου διανύσματος  $\bar{n}$  του τριγώνου αναφοράς (master triangle) της εξαεδρικής έδρας** (Σχήμα 5.5). Θεωρώντας ότι η γωνία  $\bar{\theta}$  διατηρείται σταθερή πριν και μετά την παραμόρφωση, η απαιτούμενη στροφή μπορεί να εξαχθεί μέσω κινηματικών περιορισμών.

Για να ορίσουμε ένα επίπεδο χρειαζόμαστε τρία σημεία. Τέσσερα σημεία ορίζουν τέσσερα διαφορετικά επίπεδα, καθώς με 4 σημεία μπορώ να ορίσω

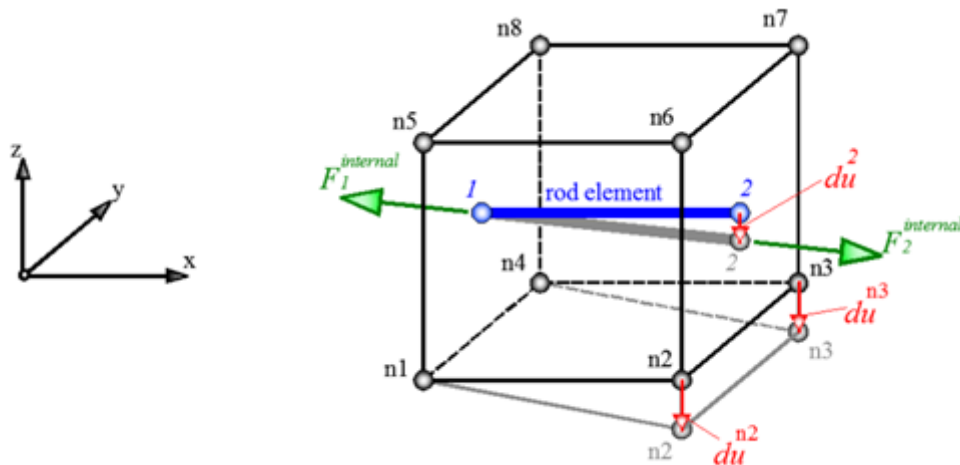
$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3! \cdot (4-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Rightarrow \binom{4}{3} = 4 \text{ διαφορετικές τριάδες (συνδυασμούς) σημείων. Κάθε}$$

ενσωματωμένο στοιχείο οπλισμού αποτελείται από δύο κόμβους, καθένας εκ των οποίων μπορεί να είναι είτε ακραίος κόμβος της ράβδου οπλισμού είτε σημείο τομής της ράβδου οπλισμού με κάποια έδρα εξαεδρικού στοιχείου.

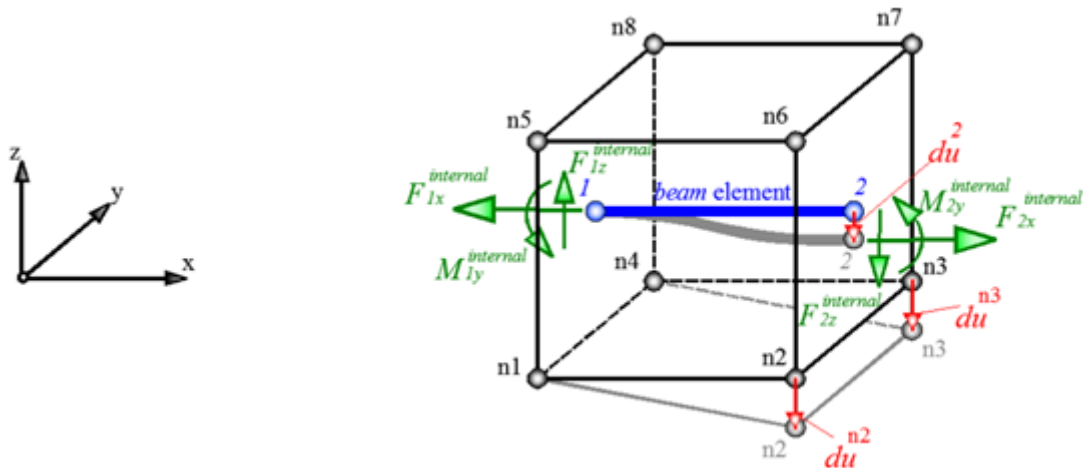
Κάθε εξαεδρική έδρα διαθέτει 4 κόμβους, οι οποίοι μετά την παραμόρφωση καθορίζουν τέσσερα διαφορετικά επίπεδα, ένα εκ των οποίων πρέπει να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της απαιτούμενης στροφής. **Για κάθε κόμβο στοιχείου οπλισμού (rebar node) ορίζουμε ένα τρίγωνο αναφοράς (master triangle)**, του οποίου η στροφή θεωρείται ότι αντιστοιχεί στη στροφή της εξαεδρικής έδρας. Ο ορισμός του τριγώνου αναφοράς για κάθε κόμβο στοιχείου οπλισμού είναι μία διαδικασία, η οποία πραγματοποιείται πριν από την ανάλυση και **ανιχνεύει τους τρεις πιο κοντινούς (στον συγκεκριμένο κόμβο στοιχείου οπλισμού) εξαεδρικούς κόμβους της αντίστοιχης έδρας που περιέχει τον κόμβο αυτό**. Οι τρεις πλησιέστεροι εξαεδρικοί κόμβοι ( $n_2, n_3, n_6$  στο Σχήμα 5.5) ορίζουν **το τρίγωνο αναφοράς (master triangle)**, το οποίο **ελέγχει τη στροφή του αντίστοιχου κόμβου του στοιχείου οπλισμού**. Επιπλέον, στο προτεινόμενο μοντέλο – κώδικα, αν ένας κόμβος στοιχείου οπλισμού κείται στο εσωτερικό του όγκου του εξαέδρου ή ανήκει σε στοιχείο δικτυώματος και όχι δοκού, τότε εφαρμόζονται μόνο μετατοπισιακές κινηματικές συνθήκες – περιορισμοί.

Στο σχήμα 5.3 απεικονίζεται η απαραμόρφωτη και η παραμορφωμένη γεωμετρία ενός θυγατρικού στοιχείου δικτυώματος 1-2, το οποίο είναι ενσωματωμένο εντός του μητρικού εξαεδρικού στοιχείου  $n_1-n_2-n_3-n_4-n_5-n_6-n_7-n_8$ . Στην περίπτωση αυτή του στοιχείου δικτυώματος (rod element), **η κινηματική σύνδεση μεταξύ των κόμβων του 1 και 2 και των αντίστοιχων κόμβων του εξαεδρικού στοιχείου ( $n_1 \neq n_8$ ) χαρακτηρίζεται μόνο από μεταφορικούς βαθμούς ελευθερίας**, ενώ η στροφή των κόμβων των στοιχείων οπλισμού κατά την παραμόρφωση του εξαεδρικού στοιχείου παραλείπεται. Από την άλλη πλευρά, όταν χρησιμοποιείται το φυσικό στοιχείο δυνάμεων (NBCFB), **η στροφή κάθε κόμβου των ράβδων οπλισμού πρέπει να υπολογιστεί μέσω των κινηματικών περιορισμών**. Αυτό είναι εμφανές στο σχήμα 5.4,

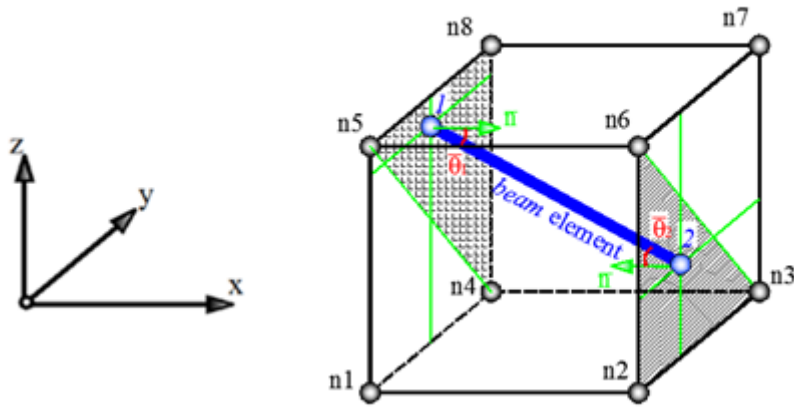
παρατηρώντας την απαραμόρφωτη και την παραμορφωμένη κατάσταση του θυγατρικού φυσικού στοιχείου δυνάμεων 1-2, το οποίο έχει ενσωματωθεί εντός του μητρικού εξαεδρικού στοιχείου  $n_1$ - $n_2$ - $n_3$ - $n_4$ - $n_5$ - $n_6$ - $n_7$ - $n_8$ . Στην περίπτωση του BCFB, σε κάθε ακραίο κόμβο έχουμε 6 μετακινησιακούς (3 μετατοπισιακούς+3 στροφικούς) βαθμούς ελευθερίας αντί του ενός μετατοπισιακού που έχουμε στην περίπτωση του rod element.



**Σχήμα 5.3** Η απαραμόρφωτη και η παραμορφωμένη κατάσταση ενός ενσωματωμένου (εντός του εξαεδρικού στοιχείου) στοιχείου δικτυώματος (προσομοίωση της ράβδου οπλισμού)



**Σχήμα 5.4** Η απαραμόρφωτη και η παραμορφωμένη κατάσταση ενός ενσωματωμένου (εντός του εξαεδρικού στοιχείου) φυσικού στοιχείου δυνάμεων (προσομοίωση της ράβδου οπλισμού)



**Σχήμα 5.5** Το master triangle του κόμβου 2 του φυσικού στοιχείου δυνάμεων, το οποίο βρίσκεται στην έδρα  $n_2$ - $n_3$ - $n_6$ - $n_7$  του εξαεδρικού στοιχείου  $n_1$ - $n_2$ - $n_3$ - $n_4$ - $n_5$ - $n_6$ - $n_7$ - $n_8$  και ορίζεται από τους κόμβους  $n_2$ ,  $n_3$  και  $n_4$

Οι ενεργοί βαθμοί ελευθερίας του προβλήματος είναι μόνο οι μετατοπισιακοί βαθμοί ελευθερίας των κόμβων των εξαεδρικών στοιχείων και όχι οι μετακινησιακοί βαθμοί ελευθερίας των φυσικών στοιχείων δυνάμεων που προσομοιώνουν τον οπλισμό. Κατά αυτόν τον τρόπο, εξοικονομούμε χωρητικότητα μνήμης και το καθολικό μητρώο στιβαρότητας της κατασκευής έχει πιο απλή μορφή.

Στο συγκεκριμένο κώδικα έχουμε επιβάλλει τον ακόλουθο **γεωμετρικό περιορισμό** : κάθε φυσικό στοιχείο δυνάμεων μπορεί να εισχωρεί στο εσωτερικό των πολύ 4 εξαεδρικών στοιχείων σκυροδέματος. Μέσω μίας διαδικασίας που θα περιγράψουμε σε ακόλουθη ενότητα, προσδιορίζουμε τα σημεία τομής της ράβδου οπλισμού με τις έδρες των γειτονικών της εξαεδρικών στοιχείων. Οι δύο ακραίοι κόμβοι με αυτά τα σημεία τομής διαιρούν την εκάστοτε ράβδο οπλισμού στα λεγόμενα στοιχεία οπλισμού, έτσι ώστε κάθε θυγατρικό ενσωματωμένο στοιχείο οπλισμού να βρίσκεται στο εσωτερικό του αντίστοιχου μητρικού στοιχείου σκυροδέματος. Οι μετακινησιακοί βαθμοί ελευθερίας των άκρων κάθε ενσωματωμένου στοιχείου οπλισμού δεν ανήκουν στους βαθμούς ελευθερίας που ορίζουν το πρόβλημά μας, αλλά σε αντίθεση προκύπτουν από αυτούς και ειδικότερα από τους ήδη γνωστούς μετατοπισιακούς βαθμούς ελευθερίας των 8 κόμβων του αντίστοιχου μητρικού τους εξαεδρικού στοιχείου σκυροδέματος.

Τέλος, αξίζει να αναφερθούμε συνοπτικά στη λογική της αλγοριθμικής διαδικασίας του προτεινόμενου μοντέλου.

- Αρχικά, μορφώνουμε το μητρώο στιβαρότητας κάθε εξαεδρικού στοιχείου με τον κλασικό τρόπο χωρίς να λαμβάνουμε υπόψιν τα ενσωματωμένα σε αυτά στοιχεία οπλισμού.

- Έπειτα, μορφώνουμε το καθολικό μητρώο στιβαρότητας  $\begin{bmatrix} \bar{K}_{ol} \\ \end{bmatrix}$  ολόκληρης της  $(24N \times 24N)$

κατασκευής και το καθολικό διάνυσμα των εξωτερικών φορτίων της κατασκευής  $\begin{bmatrix} \bar{P}_{εξ} \\ \end{bmatrix}$   $(24N \times 1)$ .

- Έστω ότι ο υπό μελέτη πλαίσιακός φορέας προσομοιώνεται μόνο με  $N$  εξαεδρικά στοιχεία. Ο ολικός αριθμός των βαθμών ελευθερίας ισούται με:  
 $N$  εξαεδρικά στοιχεία  $\rightarrow 8 \cdot N$  κόμβοι  $\rightarrow 3 \cdot 8 \cdot N = 24 \cdot N$  βαθμοί ελευθερίας. Οι μετατοπισιακοί εξαεδρικοί βαθμοί ελευθερίας συγκεντρώνονται στο διάνυσμα  $[\bar{d}_{ολ}]_{(24N \times 1)}$ , το οποίο προκύπτει από την ακόλουθη σχέση :

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_{\varepsilon\xi} \end{bmatrix}_{(24N \times 1)} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{ολ} \end{bmatrix}_{(24N \times 24N)} \cdot \begin{bmatrix} \bar{d}_{ολ} \end{bmatrix}_{(24N \times 1)} \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{d}_{ολ} \end{bmatrix}_{(24N \times 1)} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{ολ} \end{bmatrix}_{(24N \times 24N)}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \bar{P}_{\varepsilon\xi} \end{bmatrix}_{(24N \times 1)} \quad (5.3)$$

- Στη συνέχεια, προσδιορίζουμε τις εσωτερικές δυνάμεις σε επίπεδο εξαεδρικών στοιχείων. Πραγματοποιείται ο έλεγχος των εσωτερικών δυνάμεων και παρατηρούμε αν έχουν ρηγματωθεί τα σημεία Gauss και αν το εξαεδρικό στοιχείο έχει στο εσωτερικό του ενσωματωμένο κάποιο ή κάποια στοιχεία οπλισμού (στη συντριπτική πλειονότητα των κατασκευών θα έχει). Συγκεκριμένα, μέσω του μητρώου  $T$ , στο οποίο θα αναφερθούμε διεξοδικά στην αμέσως επόμενη υποενότητα, εξάγουμε από το  $[\bar{d}_{ολ}]_{(24N \times 1)}$  των εξαέδρων τους εσωτερικούς μετακινησιακούς βαθμούς ελευθερίας των ενσωματωμένων στοιχείων οπλισμού, έπειτα τις αντίστοιχες παραμορφώσεις και τέλος τις εσωτερικές δυνάμεις.
- Τόσο οι εσωτερικές δυνάμεις όσο και το μητρώο στιβαρότητας των ενσωματωμένων στοιχείων οπλισμού προσθέτονται στο μητρώο στιβαρότητας και στο μητρώο εσωτερικών γενικευμένων δυνάμεων αντίστοιχα του μητρικού εξαεδρικού στοιχείου σκυροδέματος (ανάγονται δηλαδή σε επίπεδο μητρικού εξαεδρικού στοιχείου σκυροδέματος). Πριν γίνει βέβαια αυτό, ελέγχεται κατά τα γνωστά αν έχει διαρρεύσει κάποιο στοιχείο οπλισμού και αναλόγως ενημερώνουμε το αντίστοιχο μητρώο στιβαρότητας.
- Τέλος, προσθέτουμε το ενισχυμένο μητρώο στιβαρότητας του εξαεδρικού στοιχείου στο καθολικό μητρώο στιβαρότητας της κατασκευής και συνεχίζουμε με το επόμενο εξαεδρικό. Όταν η διαδικασία αυτή ολοκληρωθεί για όλα τα εξαεδρικά, ελέγχουμε σε επίπεδο κατασκευής αν το καθολικό διάνυσμα των εσωτερικών δράσεων της κατασκευής προσεγγίζει ικανοποιητικά το αντίστοιχο καθολικό διάνυσμα των εξωτερικών δράσεων της κατασκευής. Αν ικανοποιείται το κριτήριο σύγκλισης, το οποίο είναι συνήθως ενεργειακό με ανοχή της τάξης του  $10^{-3}$  ή  $10^{-4}$ , συνεχίζουμε με το επόμενο βήμα (της μεθόδου Newton-Raphson) επιβολής του εξωτερικού φορτίου.

Να σημειώσουμε ότι κάθε δομικό μέλος ενός πλαίσιακού φορέα μπορεί να προσομοιωθεί με δύο τρόπους:

- **Προσομοίωση με ενισχυμένα εξαεδρικά στοιχεία**, τα οποία περιέχουν στο εσωτερικό τους ενσωματωμένα τα στοιχεία οπλισμού (στοιχεία δικτυώματος ή φυσικά στοιχεία δυνάμεων).
- **Προσομοίωση με φυσικά στοιχεία δυνάμεων**, στα οποία με τη θεώρηση ινών λαμβάνουμε υπόψιν και τα δύο υλικά (σκυρόδεμα, χάλυβας οπλισμού).

### 5.2.1 Κινηματικές σχέσεις

Αξίζει να υπενθυμίσουμε ότι σε κάθε κόμβο ενός φυσικού στοιχείου δυνάμεων αντιστοιχούν 3 μετατοπίσεις (κατά τη διεύθυνση των τριών καθολικών αξόνων) :

- 1) η μετατόπιση κατά τον καθολικό καρτεσιανό άξονα X ( $\bar{u}$ )
- 2) η μετατόπιση κατά τον καθολικό καρτεσιανό άξονα Y ( $\bar{v}$ )
- 3) η μετατόπιση κατά τον καθολικό καρτεσιανό άξονα Z ( $\bar{w}$ )

και 3 στροφές (περί τη διεύθυνση των τριών καθολικών αξόνων) :

- 1) η στροφή με διάνυσμα επί του καθολικού καρτεσιανού άξονα X ( $\bar{\theta}_x$ )
- 2) η στροφή με διάνυσμα επί του καθολικού καρτεσιανού άξονα Y ( $\bar{\theta}_y$ )
- 3) η στροφή με διάνυσμα επί του καθολικού καρτεσιανού άξονα Z ( $\bar{\theta}_z$ )

Κατά συνέπεια, ένα φυσικό στοιχείο δυνάμεων, το οποίο περιέχει 2 κόμβους, χαρακτηρίζεται από  $2 \cdot 6 = 12$  καθολικούς βαθμούς ελευθερίας, εκ των οποίων οι 6 είναι μετατοπισιακοί και οι άλλοι 6 στροφικοί και οι οποίοι ομαδοποιούνται στο λεγόμενο **διάνυσμα των επικόμβιων μετακινήσεων**

**του φυσικού στοιχείου δυνάμεων**  $[\bar{d}]_{BCFB}$  :

$$[\bar{d}]_{BCFB} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 & \bar{v}_1 & \bar{w}_1 & \bar{\theta}_{x_1} & \bar{\theta}_{y_1} & \bar{\theta}_{z_1} & \bar{u}_2 & \bar{v}_2 & \bar{w}_2 & \bar{\theta}_{x_2} & \bar{\theta}_{y_2} & \bar{\theta}_{z_2} \end{bmatrix}^T \quad (5.4)$$

(12x1)

Σε κάθε κόμβο ενός εξαεδρικού στοιχείου αντιστοιχούν μόνο τρεις μετατοπίσεις (κατά τη διεύθυνση των 3 καθολικών αξόνων X, Y, Z). Κατά συνέπεια, ένα εξαεδρικό οκτακομβικό στοιχείο χαρακτηρίζεται από  $3 \cdot 8 = 24$  μετατοπισιακούς βαθμούς ελευθερίας, οι οποίοι ομαδοποιούνται στο

λεγόμενο **διάνυσμα των επικόμβιων μετακινήσεων του εξαεδρικού στοιχείου**  $[\bar{d}]_{HEX}$  :

$$[\bar{d}]_{HEX} = \begin{bmatrix} \bar{u}_{n_1} & \bar{v}_{n_1} & \bar{w}_{n_1} & \dots & \bar{u}_{n_8} & \bar{v}_{n_8} & \bar{w}_{n_8} \end{bmatrix}^T \quad (5.5)$$

(24x1)

Να σημειώσουμε ότι οι καθολικοί καρτεσιανοί άξονες συμβολίζονται με τα κεφαλαία X, Y, Z σε αντίθεση με τους τοπικούς καρτεσιανούς άξονες, οι οποίοι συμβολίζονται με τα πεζά x, y, z. Στα ανωτέρω διανύσματα τοποθετήσαμε στις μετακινήσεις την άνω παύλα για να δηλώσουμε ότι αναφέρονται στο καθολικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

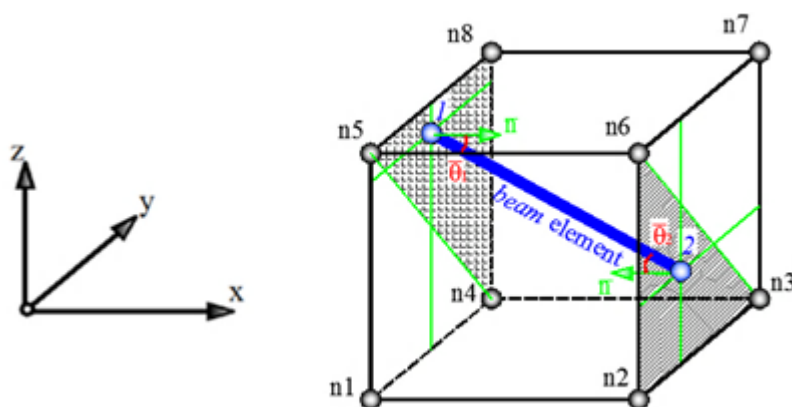


Οι περισσότεροι ερευνητές (όπως Kotsovos MD and Pavlovic MN, Spiliopoulos KV and Lykidis G., Barzegar F and Maddipudi S) χρησιμοποιούν σταθερές κινηματικές σχέσεις προκειμένου να συνδέσουν τις επικόμβιες μετατοπίσεις του στοιχείου δικτυώματος (στοιχείο οπλισμού) με τις αντίστοιχες επικόμβιες μετατοπίσεις του εξαεδρικού στοιχείου σκυροδέματος. Μία πιο πρόσφατη προσέγγιση προτάθηκε από τους Jendele and Cervenka, σύμφωνα με την οποία διεξάγεται η επίλυση ενός προβλήματος πολυκομβικών συνοριακών συνθηκών (Complex Boundary Conditions). Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει την επίλυση ενός συστήματος μη συμμετρικών συνοριακών εξισώσεων (non-symmetric constraint equations).

Στον προτεινόμενο κώδικα, **οι κινηματικές σχέσεις που συνδέουν τις επικόμβιες μετατοπίσεις του φυσικού στοιχείου δυνάμεων (στοιχείο δοκού, στοιχείο οπλισμού) με τις επικόμβιες μετατοπίσεις του αντίστοιχου εξαεδρικού στοιχείου (στοιχείο σκυροδέματος) που το περιέχει**, δίνονται από τις ακόλουθες εκφράσεις:

$$[\bar{d}]_{BCFB} = [T] \cdot [\bar{d}]_{HEX} \Leftrightarrow [\bar{d}]_{HEX} = [T]^T \cdot [\bar{d}]_{BCFB} \quad (5.6)$$

$(12 \times 1)$        $(12 \times 24)$      $(24 \times 1)$        $(24 \times 1)$        $(12 \times 24)$      $(12 \times 1)$



**Σχήμα 5.5** Το master triangle του κόμβου 2 του φυσικού στοιχείου δυνάμεων, το οποίο βρίσκεται στην έδρα  $n_2$ - $n_3$ - $n_6$ - $n_7$  του εξαεδρικού στοιχείου  $n_1$ - $n_2$ - $n_3$ - $n_4$ - $n_5$ - $n_6$ - $n_7$ - $n_8$  και ορίζεται από τους κόμβους  $n_2$ ,  $n_3$  και  $n_4$

**Το μητρώο μετασχηματισμού**  $[T]_{(12 \times 24)}$  υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τις φυσικές

ισοπαραμετρικές συντεταγμένες  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  των κόμβων τόσο του φυσικού στοιχείου δυνάμεων όσο και του εξαεδρικού στοιχείου που το περιέχει. Για την περίπτωση του σχήματος 5.5, όπου το τρίγωνο αναφοράς (master triangle) για τον κόμβο 1 και τον κόμβο 2 του φυσικού στοιχείου δυνάμεων (στοιχείο οπλισμού) ορίζεται αντίστοιχα από τους εξαεδρικούς κόμβους  $n_4$ ,  $n_8$ ,  $n_5$  και  $n_2$ ,  $n_3$ ,  $n_6$ , το μητρώο  $[T]$  αποτελείται από 22 μη μηδενικά υπομητρώα διαστάσεων  $3 \times 3$  και δίνεται από τη σχέση (5.7). Όπως παρατηρούμε, τα υπομητρώα τα οποία τοποθετούνται στις γραμμές 1 και 3 του

μητρώου  $[T]$  αντιστοιχούν στους μετατοπισιακούς βαθμούς ελευθερίας  $\begin{bmatrix} T_i^j \\ (3 \times 3) \end{bmatrix}$ , ενώ εκείνα που

τοποθετούνται στις γραμμές 2 και 4 αντιστοιχούν στους στροφικούς βαθμούς ελευθερίας  $\begin{bmatrix} R_k^j \\ (3 \times 3) \end{bmatrix}$ .

$$[T]_{(12 \times 24)} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{n_1}^1 \\ (3 \times 3) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} T_{n_2}^1 \\ (3 \times 3) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} T_{n_3}^1 \\ (3 \times 3) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} T_{n_4}^1 \\ (3 \times 3) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} T_{n_5}^1 \\ (3 \times 3) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} T_{n_6}^1 \\ (3 \times 3) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} T_{n_7}^1 \\ (3 \times 3) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} T_{n_8}^1 \\ (3 \times 3) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ (3 \times 3) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ (3 \times 3) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ (3 \times 3) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} R_{n_4}^1 \\ (3 \times 3) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} R_{n_5}^1 \\ (3 \times 3) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ (3 \times 3) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ (3 \times 3) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} R_{n_8}^1 \\ (3 \times 3) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} T_{n_1}^2 \\ (3 \times 3) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} T_{n_2}^2 \\ (3 \times 3) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} T_{n_3}^2 \\ (3 \times 3) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} T_{n_4}^2 \\ (3 \times 3) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} T_{n_5}^2 \\ (3 \times 3) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} T_{n_6}^2 \\ (3 \times 3) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} T_{n_7}^2 \\ (3 \times 3) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} T_{n_8}^2 \\ (3 \times 3) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ (3 \times 3) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} R_{n_2}^2 \\ (3 \times 3) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} R_{n_3}^2 \\ (3 \times 3) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ (3 \times 3) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ (3 \times 3) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} R_{n_6}^2 \\ (3 \times 3) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ (3 \times 3) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ (3 \times 3) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

όπου

- το υπομητρώο

$$\begin{bmatrix} T_i^j \\ (3 \times 3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i^j & 0 & 0 \\ 0 & N_i^j & 0 \\ 0 & 0 & N_i^j \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

συνδέει τους επικόμβιους μετατοπισιακούς βαθμούς ελευθερίας του φυσικού στοιχείου δυνάμεων (στοιχείο οπλισμού) με τους επικόμβιους μετατοπισιακούς βαθμούς ελευθερίας του εξαεδρικού στοιχείου (στοιχείο σκυροδέματος), με τον κάτω δείκτη  $i$  να αναφέρεται στον κόμβο του εξαεδρικού στοιχείου, δηλαδή  $i = n_1 \div n_8$  και τον άνω δείκτη  $j$  να αναφέρεται στον κόμβο του φυσικού στοιχείου δυνάμεων, δηλαδή  $j = 1, 2$ . Συγκεκριμένα, περιέχει τις τιμές των 8 συναρτήσεων σχήματος  $N_i^j$  του εξαεδρικού στοιχείου (μία για κάθε εξαεδρικό κόμβο).

Για παράδειγμα, στο υπομητρώο  $\begin{bmatrix} T_{n_4}^1 \\ (3 \times 3) \end{bmatrix}$  οι διαγώνιοι όροι είναι ίσοι με

$N_{n_4}^1 = \frac{1}{8}(1 - \xi^1)(1 + \eta^1)(1 - \zeta^1)$ , δηλαδή με την τιμή της συνάρτησης σχήματος  $N_{n_4}^1$  του εξαεδρικού στοιχείου αν σε αυτήν αντικαταστήσουμε τις φυσικές συντεταγμένες του κόμβου 1 ( $\xi^1, \eta^1, \zeta^1$ ). Είναι προφανές ότι οι φυσικές συντεταγμένες υποδηλώνονται με τους συμβολισμούς  $\xi, \eta, \zeta$ .

Ενδεικτικά, οι μετατοπίσεις του κόμβου 1 του φυσικού στοιχείου δυνάμεων ισούνται με :

$$\begin{aligned}
U_{BCFB_1} &= N_{n_1}^1 \times u_{HEX_1} + N_{n_2}^1 \times u_{HEX_2} + \dots + N_{n_8}^1 \times u_{HEX_8} \\
V_{BCFB_1} &= N_{n_1}^1 \times v_{HEX_1} + N_{n_2}^1 \times v_{HEX_2} + \dots + N_{n_8}^1 \times v_{HEX_8} \\
W_{BCFB_1} &= N_{n_1}^1 \times w_{HEX_1} + N_{n_2}^1 \times w_{HEX_2} + \dots + N_{n_8}^1 \times w_{HEX_8}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

- το υπομητρώο

$$\left[ R_k^j \right]_{(3 \times 3)} = \begin{bmatrix} \eta^j - \eta^k & -(\zeta^j - \zeta^k) & 0 \\ -(\xi^j - \xi^k) & 0 & \zeta^j - \zeta^k \\ 0 & \xi^j - \xi^k & -(\eta^j - \eta^k) \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

συνδέει τους επικόμβιους στροφικούς βαθμούς ελευθερίας του φυσικού στοιχείου δυνάμεων (στοιχείο σπλισμού) με τους επικόμβιους μετατοπισιακούς βαθμούς ελευθερίας του εξαεδρικού στοιχείου (στοιχείο σκυροδέματος). Οι φυσικές συντεταγμένες που έχουν ως άνω δείκτη το  $j$  αναφέρονται στους κόμβους του στοιχείου σπλισμού ( $j = 1, 2$ ), ενώ εκείνες που έχουν άνω δείκτη  $k$  αναφέρονται στους εξαεδρικούς κόμβους που ορίζουν το αντίστοιχο τρίγωνο αναφοράς.

Ωστόσο, οφείλουμε να επισημάνουμε ότι η θεώρηση της συγκεκριμένης κινηματικής σύνδεσης είναι υπολογιστικά εφικτή χάριν της χρήσης των οκτακομβικών εξαεδρικών στοιχείων, των οποίων οι έδρες δεν καμπυλώνονται έντονα ακόμη και μετά την παραμόρφωση του στοιχείου σε αντίθεση με τα 20-κομβικά και τα 27-κομβικά εξαεδρικά στοιχεία. Αποτέλεσμα είναι η μη απαίτηση επιπρόσθετων υπολογισμών και η αποφυγή σημαντικής μείωσης της αριθμητικής στιβαρότητας.

Στο σημείο αυτό μπορούμε να κατανοήσουμε καλύτερα την αριθμητική υπεροχή του οκτακομβικού στοιχείου (που έχουμε περιγράψει σε προηγούμενη ενότητα).

Αν χρησιμοποιούσαμε

- 20-κομβικά στοιχεία ή
- 27-κομβικά στοιχεία

κάθε μητρώο  $[T]$  θα είχε διαστάσεις

- (12x60) αντί (12x24)
- (12x81) αντί (12x24)

αντίστοιχα.

Δηλαδή, για κάθε εξαεδρικό στοιχείο θα έπρεπε να υπολογίσουμε **επιπλέον**:

- 432 όρους
- 684 όρους

αντίστοιχα,

ενώ συνολικά για το δομικό μέλος, που προσομοιώνεται με αρκετά έως πολλά εξαεδρικά στοιχεία, ο αριθμός των επιπλέον όρων αυξάνεται σημαντικά και φαντάζει υπερβολικά διογκωμένος σε επίπεδο πλαισιακού φορέα της υπό μελέτη κατασκευής.

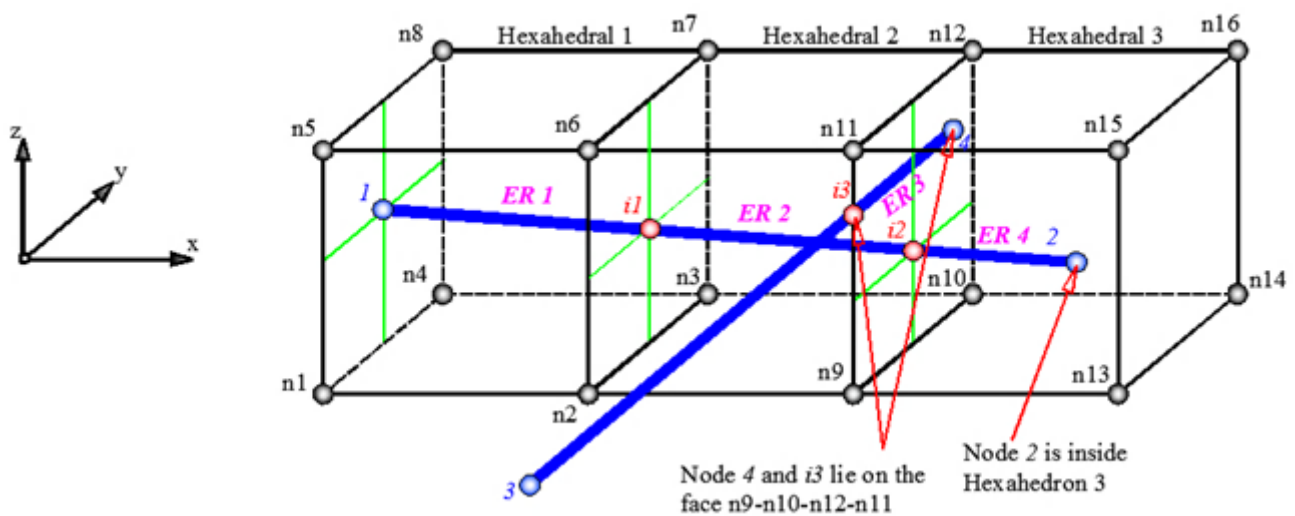
## 5.2.2 Γένεση του ενσωματωμένου οπλισμού στο προτεινόμενο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων (Generating Reinforcement in FE Modeling)

Η πιο αξιολογούμενη μέθοδος γένεσης του ενσωματωμένου οπλισμού στο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων μίας κατασκευής από οπλισμένο σκυρόδεμα προτείνεται από τους Barzegar and Maddipati και αποτελεί επέκταση της εργασίας των Elwi and Hudey. Το πλεονέκτημα της προσέγγισης αυτής είναι ότι επιτρέπει **αυθαίρετες θέσεις των ράβδων οπλισμού στο εσωτερικό των στοιχείων σκυροδέματος** και **ελεύθερη γεωμετρία για κάθε εξαεδρικό στοιχείο**. Ωστόσο, απαιτείται μία μη γραμμική διαδικασία αναζήτησης, βασισμένη στη μέθοδο Newton-Raphson, προκειμένου να υπολογίσουμε τις φυσικές συντεταγμένες κάθε κόμβου στοιχείου οπλισμού. **Το κριτήριο σύγκλισης (convergence rate) της μη γραμμικής αυτής διαδικασίας είναι μάλλον υψηλό και οι υπολογιστικές απαιτήσεις για large-scale μοντέλα-κατασκευές με χιλιάδες ράβδους χάλυβα γίνονται υπερβολικές.**

Το προτεινόμενο μοντέλο θεωρεί αυθαίρετη θέση των ράβδων οπλισμού στο εσωτερικό των στοιχείων σκυροδέματος (όπως απεικονίζουμε χαρακτηριστικά στο σχήμα 5.6) και αποφεύγει μία μη γραμμική διαδικασία αναζήτησης για τον υπολογισμό των φυσικών συντεταγμένων των κόμβων των ενσωματωμένων στοιχείων οπλισμού εντός των αντίστοιχων εξαεδρικών στοιχείων.

Ο προτεινόμενος κώδικας ReConAn χρησιμοποιεί ως pre-processor και ως post-processor το πακέτο λογισμικού Femap, μέσω του οποίου πραγματοποιείται η γένεση του αρχικού δικτύου των πεπερασμένων στοιχείων. Συγκεκριμένα, ο κώδικας ReConAn χρησιμοποιεί τις συντεταγμένες των αρχικών κόμβων των ράβδων οπλισμού, οι οποίοι έχουν δημιουργηθεί μέσω του FEMAP και παράγει το αριθμητικό μοντέλο των ενσωματωμένων στοιχείων οπλισμού (numerical model of embedded rebar elements). Η δημιουργία των ενσωματωμένων στοιχείων οπλισμού πραγματοποιείται για κάθε στοιχείο οπλισμού ξεχωριστά. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε αρχική ράβδο οπλισμού διεξάγεται μία ανεξάρτητη έρευνα προκειμένου να εντοπιστούν όλα τα σημεία τομής του ευθύγραμμου τμήματος της ράβδου με τις έδρες από τα περιβάλλοντα συμπαγή εξαεδρικά στοιχεία. Το αποτέλεσμα της αριθμητικής αυτής διαδικασίας είναι η τοποθέτηση των ενσωματωμένων στοιχείων οπλισμού στο εσωτερικό των αντίστοιχων εξαεδρικών στοιχείων.

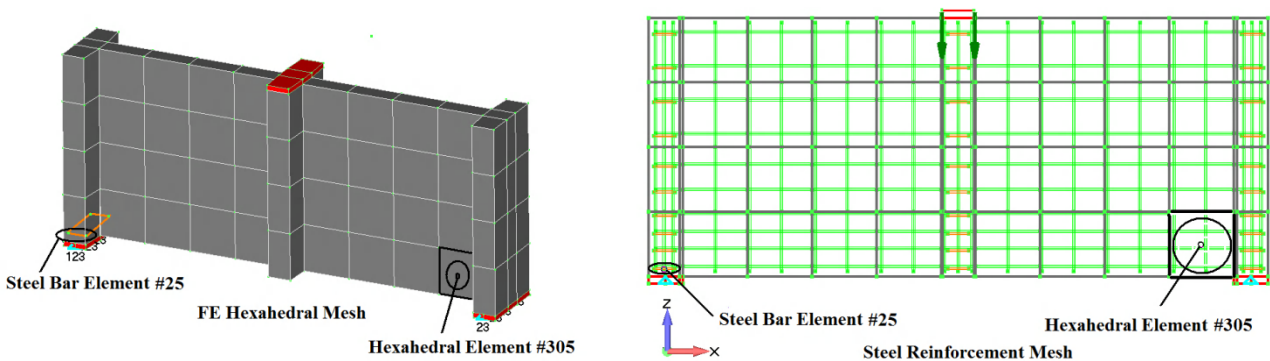
Στο σχήμα 5.6 παρατηρούμε **δύο αρχικές ράβδους οπλισμού, τέσσερα ενσωματωμένα στοιχεία οπλισμού και τρία εξαεδρικά στοιχεία σκυροδέματος**. Ειδικότερα, η αρχική ράβδος οπλισμού 1-2 τέμνει τις έδρες  $n_1-n_4-n_8-n_5$ ,  $n_2-n_3-n_7-n_6$ ,  $n_9-n_{10}-n_{12}-n_{11}$  στα σημεία 1,  $i_1$ ,  $i_2$  αντίστοιχα, με αποτέλεσμα να διακριτοποιείται στα ενσωματωμένα στοιχεία οπλισμού 1- $i_1$  ( $ER_1$ : ενσωματωμένο εντός του εξαεδρικού  $n_1-n_2-n_3-n_4-n_5-n_6-n_7-n_8$ ),  $i_1-i_2$  ( $ER_2$ : ενσωματωμένο εντός του εξαεδρικού  $n_2-n_9-n_{10}-n_3-n_6-n_{11}-n_{12}-n_7$ ) και  $i_2-2$  ( $ER_4$ : ενσωματωμένο εντός του εξαεδρικού  $n_9-n_{13}-n_{14}-n_{10}-n_{11}-n_{15}-n_{16}-n_{12}$ ).



Σχήμα 5.6 Ενσωματωμένες ράβδοι οπλισμού σε εξαεδρικά στοιχεία σκυροδέματος

## Γένεση των βοηθητικών κόμβων του ενσωματωμένου οπλισμού (Generation of Embedded Virtual Nodes)

**Βοηθητικοί κόμβοι** (virtual nodes) ονομάζονται τα σημεία τομής των αρχικών ράβδων οπλισμού με τις εξαεδρικές έδρες. Για παράδειγμα, στο προηγούμενο σχήμα 5.6 διακρίνουμε τους βοηθητικούς κόμβους i1, i2 και i3. Ο κώδικας ReConAn, πέραν των άλλων διαδικασιών, περιέχει και τη διαδικασία γένεσης των βοηθητικών κόμβων του ενσωματωμένου οπλισμού. Η διαδικασία αυτή γίνεται **εξαιρετικά φορτική** (δυσκίνητη) όταν το μοντέλο των πεπερασμένων στοιχείων αποτελείται από σχετικά μεγάλο αριθμό στοιχείων οπλισμού και εξαεδρικών στοιχείων σκυροδέματος. Είναι φανερό ότι αν επιχειρήσουμε να προσδιορίσουμε τα πιθανά αυτά σημεία τομής χωρίς να εφαρμόσουμε κανένα περιορισμό (constraint) στο πεδίο αναζήτησης, το υπολογιστικό κόστος της αλγοριθμικής διαδικασίας εντοπισμού των βοηθητικών κόμβων αυξάνεται σημαντικά. Το πρόβλημα πηγάζει από το γεγονός ότι απαιτείται να εντοπίσουμε όλα τα πιθανά σημεία τομής που ίσως υπάρχουν μεταξύ των εξαεδρικών εδρών και των αρχικών ράβδων οπλισμού, ακόμη και εκείνα που έχουν μόνο αριθμητική και όχι φυσική σημασία (Σχήματα 5.7, 5.8).



**Σχήμα 5.7** Το δίκτυο των εξαεδρικών πεπερασμένων στοιχείων σκυροδέματος και το δίκτυο των πεπερασμένων ενσωματωμένων στοιχείων οπλισμού

Για να αποφύγουμε κατά το δυνατόν περιττούς υπολογισμούς, στον προτεινόμενο κώδικα έχει εισαχθεί ένας **γεωμετρικός περιορισμός** (geometrical constraint) με σκοπό να περιορίσουμε το πεδίο αναζήτησης στη γειτνιάζουσα περιοχή των υπό εξέταση στοιχείων οπλισμού. Προκειμένου να εφαρμόσουμε τον γεωμετρικό περιορισμό, ορίζουμε για κάθε εξαεδρικό στοιχείο τη λεγόμενη **ενεργή σφαίρα** (active sphere). Το κέντρο της ενεργής σφαίρας ταυτίζεται με το κέντρο μάζας του αντίστοιχου εξαεδρικού στοιχείου. Έστω  $R_c$  η ακτίνα της ενεργής σφαίρας, για την οποία ισχύει ότι:

$$R_c = c \cdot L \quad (5.11)$$

όπου

$$L = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2} \quad (5.12)$$

και

$$s_x = \frac{\sum_{n=1}^8 (s_x^{cen} - s_x^n)}{8} \quad (5.13a)$$

$$s_y = \frac{\sum_{n=1}^8 (s_y^{\text{cen}} - s_y^n)}{8} \quad (5.13b)$$

$$s_z = \frac{\sum_{n=1}^8 (s_z^{\text{cen}} - s_z^n)}{8} \quad (5.13c)$$

όπου  $(s_x^n, s_y^n, s_z^n)$  και  $(s_x^{\text{cen}}, s_y^{\text{cen}}, s_z^{\text{cen}})$  είναι οι καθολικές συντεταγμένες του εξαεδρικού κόμβου  $n = n_1 \div n_8$  και του κέντρου μάζας του υπό εξέταση εξαέδρου αντίστοιχα, ενώ η παράμετρος  $c$  ορίζει τον ενεργό όγκο γύρω από κάθε εξαέδρο, στον οποίο θα εφαρμοστεί ο περιορισμός. Η διαδικασία αναζήτησης πραγματοποιείται, αν και μόνο αν ικανοποιείται η κατωτέρω συνθήκη – γεωμετρικός περιορισμός:

$$d_{n_1} < R_c \text{ ή } d_{n_2} < R_c \quad (5.14)$$

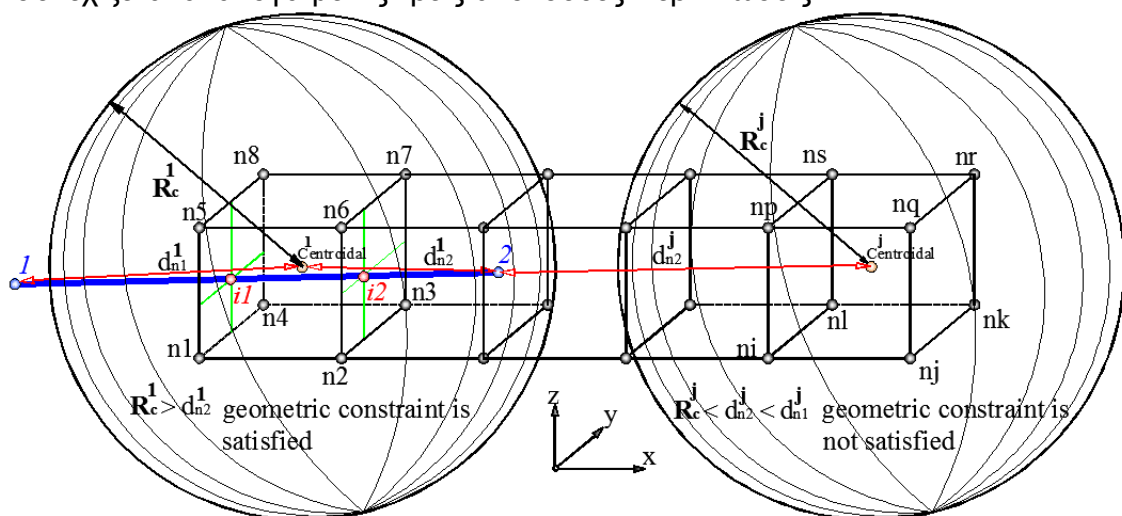
όπου

$$d_{n_1} = |s_{\text{cen}} - s_1| = \sqrt{(s_x^{\text{cen}} - s_x^1)^2 + (s_y^{\text{cen}} - s_y^1)^2 + (s_z^{\text{cen}} - s_z^1)^2} \text{ και } d_{n_2} = |s_{\text{cen}} - s_2| = \sqrt{(s_x^{\text{cen}} - s_x^2)^2 + (s_y^{\text{cen}} - s_y^2)^2 + (s_z^{\text{cen}} - s_z^2)^2} \quad (5.15)$$

είναι οι αποστάσεις των ακραίων κόμβων 1,2 των ράβδων οπλισμού αντίστοιχα από το κέντρο μάζας του υπό εξέταση εξαέδρου (Σχήμα 5.8).

Μετά από μία εκτενή παραμετρική διερεύνηση, προτείνουμε να λαμβάνεται η προσαυξητική παράμετρος  $c$  ίση με 5. Την τιμή αυτή χρησιμοποιήσαμε και για τις αριθμητικές εφαρμογές του κεφαλαίου 7. Μεγαλύτερες τιμές για την παράμετρο  $c$  ( $c > 5$ ) οδηγούν σε περισσότερους περιττούς υπολογισμούς προκειμένου να εντοπιστούν πιθανά σημεία τομής ράβδων οπλισμού – εξαεδρικών εδρών, ενώ μικρότερες τιμές ( $c < 5$ ) καθιστούν τη διαδικασία γένεσης του αρχικού δικτύου ράβδων οπλισμού μέσω του FEMAP (pre-processing software) περισσότερο πολύπλοκη και χρονοβόρα. Αυτό σημαίνει ότι όταν λαμβάνει χώρα η δημιουργία του αρχικού δικτύου των ράβδων οπλισμού, το αρχικό στοιχείο (ράβδος) οπλισμού δεν θα πρέπει να διεισδύει σε περισσότερα από 5 εξαεδρικά στοιχεία σκυροδέματος, προκειμένου να βεβαιωθούμε ότι τουλάχιστον ένας κόμβος αρχικής ράβδου οπλισμού θα εντοπιστεί στο εσωτερικό του ενεργού όγκου του εξαέδρου (hexahedral active volume), όπως υποδεικνύει η εικόνα 5.8. Ο προτεινόμενος αυτός περιορισμός ελαττώνει σημαντικά τον υπολογιστικό χρόνο και κόστος, επειδή επιτρέπει να ελεγχθούν λιγότερα (μόνο τα εγγύτερα) εξαεδρικά στοιχεία κατά τη διάρκεια αυτής της διαδικασίας κατανομής, ειδικά όταν καταπιανόμαστε με large-scale προβλήματα.

Μετά την ικανοποίηση του περιορισμού – εξίσωση 4, η γένεση των ενσωματωμένων στοιχείων οπλισμού συνεχίζεται ανάλογα με τις τρεις ακόλουθες περιπτώσεις.



Σχήμα 5.8 Ο γεωμετρικός περιορισμός της αναζήτησης των βοηθητικών κόμβων των ενσωματωμένων στοιχείων οπλισμού

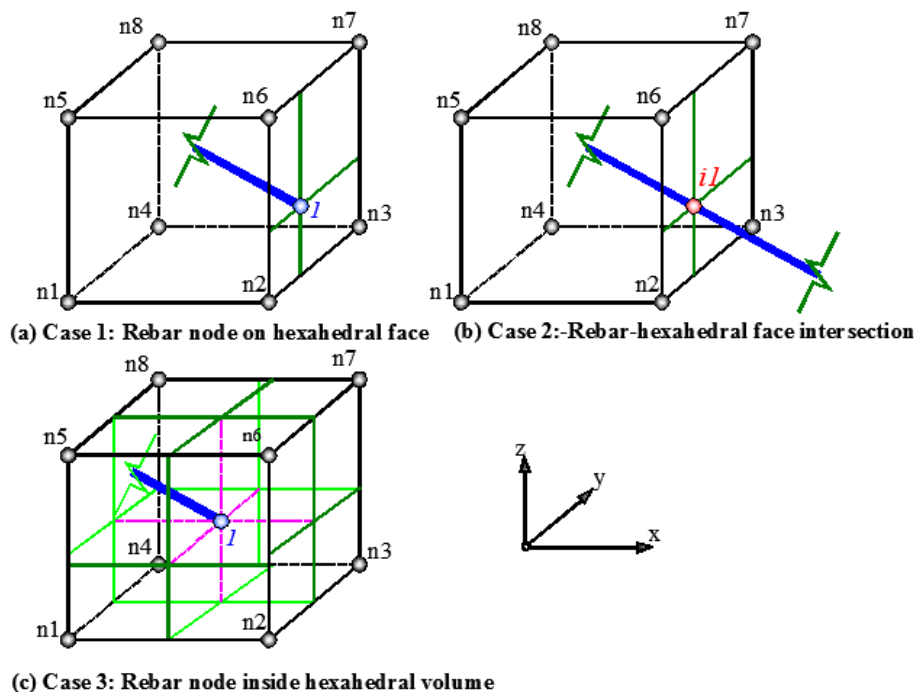
## Περίπτωση 1: Ο ένας ή και οι δύο ακραίοι κόμβοι της αρχικής ράβδου οπλισμού ανήκουν σε εξαεδρική έδρα

Πραγματοποιείται έλεγχος προκειμένου να ανιχνευθεί αν ο ένας ή και οι δύο ακραίοι κόμβοι (1,2) κάθε αρχικής ράβδου οπλισμού βρίσκονται σε κάποια εξαεδρική έδρα (Σχήμα 5.9a). Αν κάτι τέτοιο ισχύει, τότε ο κόμβος ή οι κόμβοι αυτοί δηλώνονται επίσης ως βοηθητικοί. Επειδή όλες οι επικόμβιες τιμές ανάγονται στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων, το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε τις φυσικές συντεταγμένες των βοηθητικών κόμβων. Για τον σκοπό αυτό, θα πρέπει να υπολογίσουμε τις αποστάσεις  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  μεταξύ του κέντρου μάζας του εξαεδρικού στοιχείου και του πρώτου εξαεδρικού κόμβου  $n_1$ , οι οποίες αποθηκεύονται στο αντίστοιχο εξαεδρικό μητρώο συνδεσμολογίας (connectivity matrix).

$$d_X^{\text{Hexa}} = s_x^{n_1} - s_x^{\text{cen}}, \quad d_Y^{\text{Hexa}} = s_y^{n_1} - s_y^{\text{cen}}, \quad d_Z^{\text{Hexa}} = s_z^{n_1} - s_z^{\text{cen}} \quad (5.16)$$

Τέλος, οι φυσικές συντεταγμένες τυχόντος (εσωτερικού του εξαεδρικού στοιχείου) σημείου P δίνονται από τις ακόλουθες εκφράσεις:

$$\xi_P = \frac{s_x^P - s_x^{\text{cen}}}{d_X^{\text{Hexa}}}, \quad \eta_P = \frac{s_y^P - s_y^{\text{cen}}}{d_Y^{\text{Hexa}}}, \quad \zeta_P = \frac{s_z^P - s_z^{\text{cen}}}{d_Z^{\text{Hexa}}} \quad (5.17)$$



Σχήμα 5.9 Γεωμετρική απεικόνιση των τριών περιπτώσεων

Αν και οι δύο (ακραίοι) κόμβοι μίας αρχικής ράβδου οπλισμού κείνται πάνω στην ίδια εξαεδρική έδρα, τότε ο προτεινόμενος αλγόριθμος αναζητεί σημεία τομής με τις εξαεδρικές ακμές και δημιουργεί τους αντίστοιχους βοηθητικούς κόμβους. Για την υποπερίπτωση αυτή, το μητρώο στιβαρότητας του ενσωματωμένου στοιχείου οπλισμού κατανέμεται μεταξύ των δύο γειτονικών εξαεδρικών στοιχείων. Μία τέτοια περίπτωση απεικονίζεται στην προηγούμενη Εικόνα 5.6, στην οποία η αρχική ράβδος οπλισμού 3-4 κείται στο επίπεδο της εξαεδρικής έδρας  $n_9$ - $n_{10}$ - $n_{12}$ - $n_{11}$ . Ο κώδικας εντοπίζει το σημείο τομής της ράβδου 3-4 με την εξαεδρική ακμή  $n_9$ - $n_{11}$ , το οποίο αποτελεί τον βοηθητικό κόμβο  $i3$ . Κατ' αυτόν τον τρόπο, δημιουργείται το ενσωματωμένο στοιχείο οπλισμού ER3, του οποίου το μητρώο στιβαρότητας κατανέμεται μεταξύ των εξαεδρικών στοιχείων 2 και 3.

## Περίπτωση 2: Η αρχική ράβδος οπλισμού τέμνεται με εξαεδρική ή εξαεδρικές έδρες

Στην δεύτερη αυτή περίπτωση, **μία ράβδος οπλισμού τέμνεται με μία ή δύο εξαεδρικές έδρες**. Μία τέτοια περίπτωση απεικονίζεται στο Σχήμα 5.9b, όπου η αρχική ράβδος οπλισμού τέμνει την εξαεδρική έδρα  $n_2-n_3-n_7-n_6$  στον βοηθητικό κόμβο  $i_1$ , καθώς επίσης στο Σχήμα 5.11, όπου η αρχική ράβδος οπλισμού τέμνει τις εξαεδρικές έδρες  $n_2-n_3-n_7-n_6$ ,  $n_1-n_4-n_8-n_5$  στους βοηθητικούς κόμβους  $i_1$ ,  $i_2$ . **Προκειμένου να βρούμε ένα ενδεχόμενο σημείο τομής της αρχικής ράβδου οπλισμού με μία εξαεδρική έδρα**, πρέπει να επιλύσουμε την αλγεβρική εξίσωση, την οποία θα περιγράψουμε αμέσως παρακάτω.

Ο αλγεβρικός αλγόριθμος αντιμετωπίζει **κάθε αρχική ράβδο οπλισμού ως ευθεία και κάθε εξαεδρική έδρα ως επίπεδο**, δεν αναζητεί δηλαδή τίποτα άλλο από το σημείο τομής μίας ευθείας με ένα επίπεδο. Όπως γνωρίζουμε, ένα επίπεδο ορίζεται πλήρως από την ακόλουθη εξίσωση:

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0 \quad (5.18)$$

όπου  $x, y, z$  είναι οι συντεταγμένες τυχαίου σημείου επί του συγκεκριμένου επιπέδου.

Αν  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  και  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  δύο σημεία της ευθείας, τότε η εξίσωσή της μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda \cdot (x_2 - x_1) \\ P &= P_1 + \lambda \cdot (P_2 - P_1) \Rightarrow y = y_1 + \lambda \cdot (y_2 - y_1) \\ z &= z_1 + \lambda \cdot (z_2 - z_1) \end{aligned} \quad (5.19)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (5.19) στην εξίσωση (5.18), έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} A \cdot [x_1 + \lambda \cdot (x_2 - x_1)] + B \cdot [y_1 + \lambda \cdot (y_2 - y_1)] + C \cdot [z_1 + \lambda \cdot (z_2 - z_1)] + D &= 0 \Rightarrow \\ A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C \cdot z_1 + D + \lambda \cdot \{ A \cdot (x_2 - x_1) + B \cdot (y_2 - y_1) + C \cdot (z_2 - z_1) \} &= 0 \Rightarrow \\ A \cdot x_1 + A \cdot \lambda \cdot (x_2 - x_1) + B \cdot y_1 + B \cdot \lambda \cdot (y_2 - y_1) + C \cdot z_1 + C \cdot \lambda \cdot (z_2 - z_1) + D &= 0 \Rightarrow \\ \lambda = - \frac{A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C \cdot z_1 + D}{A \cdot (x_2 - x_1) + B \cdot (y_2 - y_1) + C \cdot (z_2 - z_1)} &\Rightarrow \lambda = - \frac{A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C \cdot z_1 + D}{A \cdot (x_1 - x_2) + B \cdot (y_1 - y_2) + C \cdot (z_1 - z_2)} \end{aligned} \quad (5.20)$$

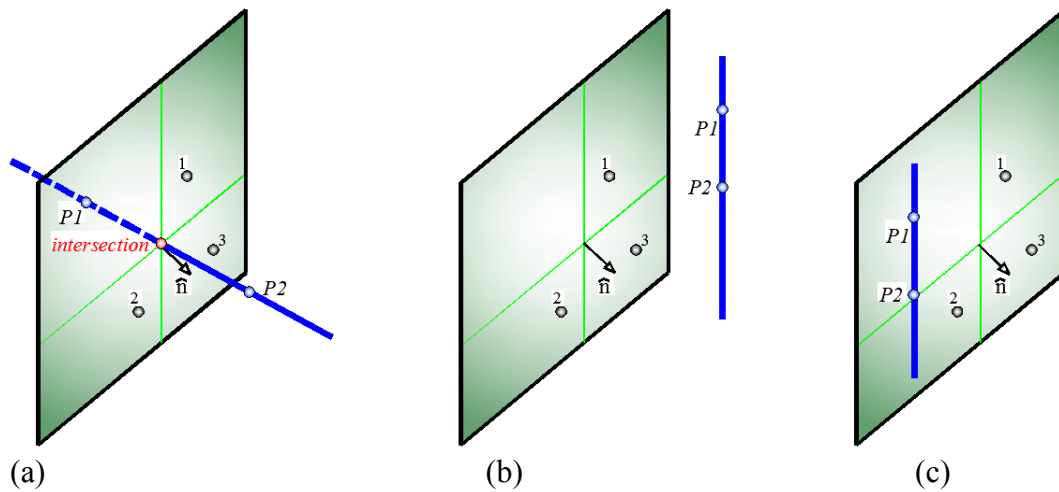
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις ανάλογα με την τιμή του  $\lambda$ . Στην πρώτη περίπτωση (Σχήμα 5.10b), κατά την οποία  $\lambda=0$ , το κάθετο διάνυσμα του επιπέδου είναι κάθετο στην ευθεία, δηλαδή το επίπεδο είναι παράλληλο με την ευθεία, με αποτέλεσμα να μην υπάρχει σημείο τομής. Στη δεύτερη περίπτωση (Σχήμα 5.10α), κατά την οποία  $\lambda \neq 0$ , υπάρχει σημείο τομής μεταξύ της ευθείας και του επιπέδου, το οποίο υπολογίζεται **αντικαθιστώντας την έκφραση του  $\lambda$  της σχέσης (5.20) στη σχέση (5.19)**.

Επιπλέον, θα πρέπει να ελέγξουμε αν **η γραμμή ανήκει στο επίπεδο**, το οποίο μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες των δύο σημείων  $P_1$  και  $P_2$  (τα οποία όπως προείπαμε ορίζουν την ευθεία) στην εξίσωση (5.18) του επιπέδου. Αν οι συντεταγμένες και των δύο σημείων ικανοποιούν την εξίσωση αυτή, αυτό σημαίνει ότι τα σημεία αυτά ανήκουν στο επίπεδο, με αποτέλεσμα και η ευθεία να κείται στο επίπεδο αυτό (Σχήμα 5.10c).

Να τονίσουμε ότι το σχήμα 5.10 παρουσιάζει τις 3 σχετικές θέσεις ευθείας - επιπέδου.

- Η ευθεία τέμνει το επίπεδο.
- Η ευθεία είναι παράλληλη με το επίπεδο.
- Η ευθεία ανήκει στο επίπεδο.





Σχήμα 5.10 α) Η ευθεία τέμνει το επίπεδο β) Η ευθεία δεν τέμνει το επίπεδο γ) Η ευθεία κείται στο επίπεδο

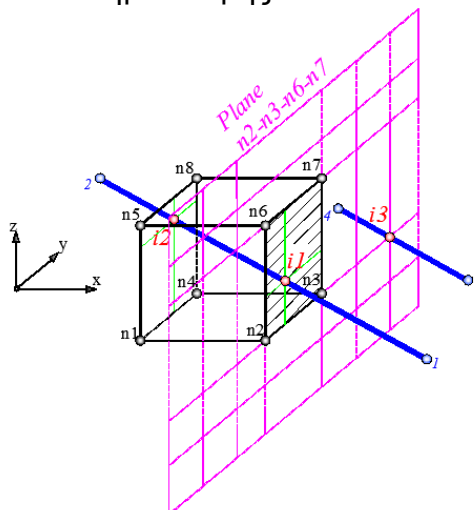
Κατόπιν, **θα πρέπει να ελέγξουμε αν θα αποδεχτούμε τα σημεία τομής**, που προέκυψαν από την προαναφερθείσα αλγοριθμική διαδικασία. Συγκεκριμένα, αποδεχόμαστε όσα σημεία τομής εντοπίζονται στο εσωτερικό της εξαεδρικής έδρας ή σε κάποια ακμή της και συνεχίζουμε με τον εντοπισμό ενός δεύτερου πιθανού σημείου τομής.

Το σημείο τομής P (το οποίο προέκυψε από την αλγοριθμική διαδικασία) **βρίσκεται στο εσωτερικό της υπό εξέταση εξαεδρικής έδρας, αν και μόνο αν ικανοποιείται ο ακόλουθος περιορισμός:**

$$|\xi_P, \eta_P, \zeta_P| \leq 1 \quad (5.21)$$

όπου  $\xi_P, \eta_P, \zeta_P$  είναι οι φυσικές συντεταγμένες του σημείου τομής P. Αν δεν ικανοποιείται ο περιορισμός αυτός, τότε δεν αποθηκεύεται το συγκεκριμένο σημείο τομής και ο αλγόριθμος προχωρεί στον υπολογισμό του επομένου σημείου τομής.

Ενδεικτικό της προηγούμενης παρατήρησης είναι το Σχήμα 5.11. Μέσω της αλγοριθμικής διαδικασίας εντοπίζουμε τα σημεία i1 (σημείο τομής της ευθείας, που διέρχεται από τους ακραίους κόμβους 1, 2 της αρχικής ράβδου σπλισμού 1-2, με το επίπεδο της έδρας  $n_2-n_3-n_7-n_6$  του εικονιζόμενου εξαεδρικού στοιχείου), το σημείο i2 (σημείο τομής της ευθείας, που διέρχεται από τους ακραίους κόμβους 1, 2 της αρχικής ράβδου σπλισμού 1-2, με το επίπεδο της έδρας  $n_1-n_4-n_8-n_5$  του εικονιζόμενου εξαεδρικού στοιχείου) και το σημείο i3 (σημείο τομής της ευθείας, που διέρχεται από τους ακραίους κόμβους 3, 4 της αρχικής ράβδου σπλισμού 3-4, με το επίπεδο της έδρας  $n_2-n_3-n_7-n_6$  του εικονιζόμενου εξαεδρικού στοιχείου). Ωστόσο, μόνο δύο από τα τρία αυτά σημεία ικανοποιούν τον περιορισμό της σχέσης (5.21) και αποτελούν πραγματικά σημεία τομής των αρχικών ράβδων σπλισμού και του συγκεκριμένου εξαέδρου. Αυτά είναι τα σημεία τομής i1 και i2. Σε αντίθεση, δεν αποδεχόμαστε το σημείο τομής i3.



Σχήμα 5.11 Σημεία τομής αρχικών ράβδων σπλισμού με έδρες των εξαεδρικών στοιχείων σκυροδέματος

### Περίπτωση 3: Ο ένας ή και οι δύο ακραίοι κόμβοι της αρχικής ράβδου οπλισμού βρίσκονται στο εσωτερικό του όγκου του εξαεδρικού στοιχείου

Όταν δεν ισχύουν οι περιπτώσεις 1,2 , τότε πραγματοποιείται έλεγχος αν ικανοποιείται ο περιορισμός:

$$|\xi_P, \eta_P, \zeta_P| < 1 \quad (5.22)$$

όπου  $\xi_P, \eta_P, \zeta_P$  είναι οι φυσικές συντεταγμένες του ακραίου κόμβου της ράβδου οπλισμού. Αν ικανοποιείται η παραπάνω ανισότητα, αυτό σημαίνει ότι ο κόμβος της συγκεκριμένης ράβδου οπλισμού έχει εντοπιστεί στο εσωτερικό του όγκου του εξαεδρικού στοιχείου (Σχήμα 5.9c). Διαφορετικά, ο κόμβος βρίσκεται στο εξωτερικό του όγκου του εξαέδρου και δεν πραγματοποιείται καμία διαδικασία ελέγχου.

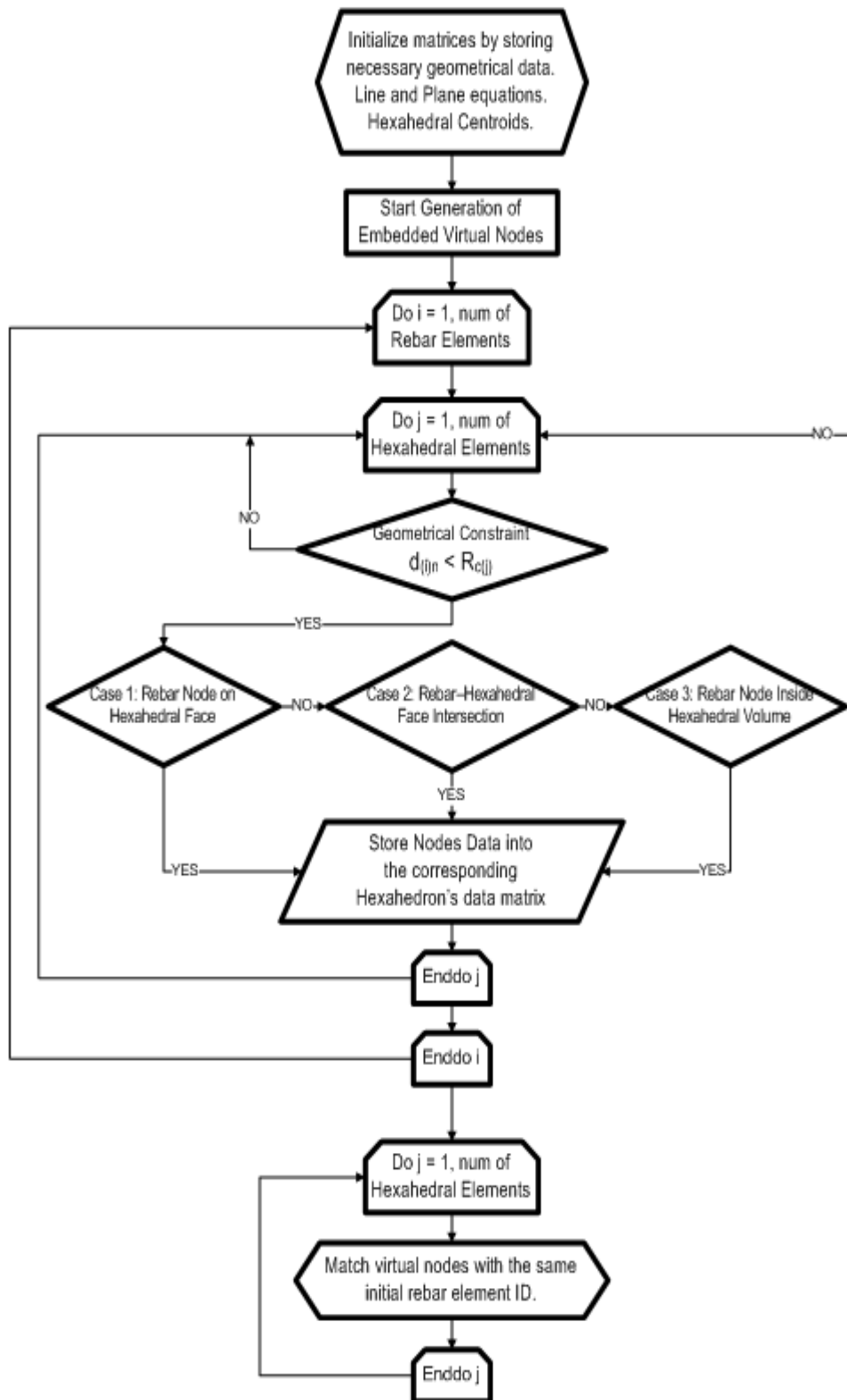
#### Παρατήρηση

Αμέσως μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας προσδιορισμού των βοηθητικών κόμβων των στοιχείων οπλισμού, **αρχίζει η γένεση του δικτύου των ενσωματωμένων στοιχείων οπλισμού**. Κατόπιν, όλα τα απαραίτητα δεδομένα κάθε εξαεδρικού στοιχείου καθορίζονται σύμφωνα με τους προσδιορισθέντες βοηθητικούς κόμβους, οι οποίοι έχουν εντοπιστεί στο εσωτερικό του εξαεδρικού όγκου ή σε κάποια από τις εξαεδρικές έδρες. **Τα κύρια χαρακτηριστικά των ενσωματωμένων στοιχείων οπλισμού προσδιορίζονται και αποθηκεύονται**. Τέτοια χαρακτηριστικά είναι:

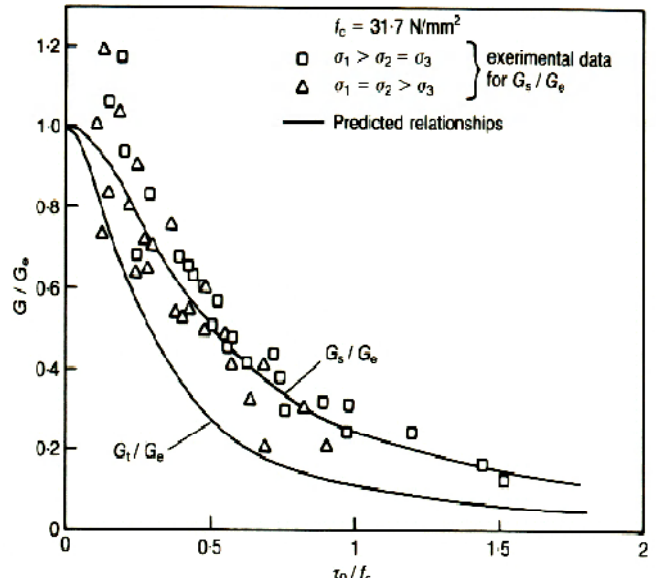
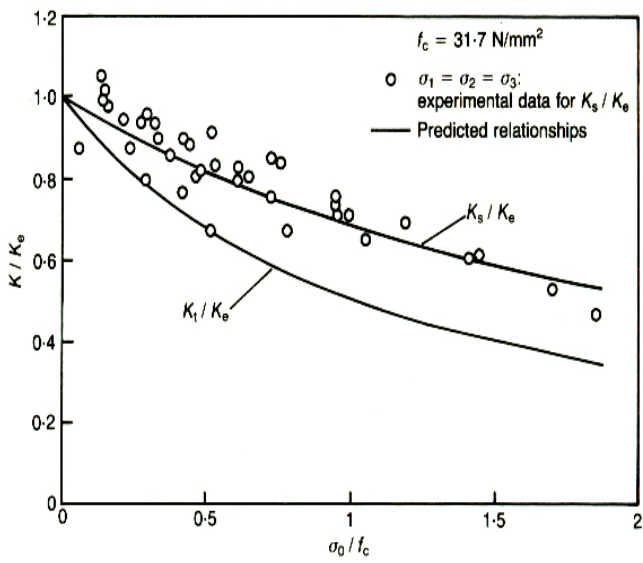
- ο τύπος του στοιχείου (φυσικό στοιχείο δυνάμεων ή στοιχείο δικτυώματος)
- τα μητρώα μετασχηματισμού
- ο τύπος του κόμβου (βοηθητικός κόμβος ή φυσικός κόμβος του αρχικού δικτύου των ράβδων οπλισμού)
- οι ιδιότητες των υλικών
- τα χαρακτηριστικά των ινών (fiber data), εφόσον πρόκειται για φυσικό στοιχείο δυνάμεων.

Η εικόνα 8 απεικονίζει το διάγραμμα ροής του προτεινόμενου αλγορίθμου γένεσης του δικτύου των ενσωματωμένων στοιχείων οπλισμού.

Θα πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι προκειμένου να είναι εφαρμόσιμος ο υπολογισμός των επικόμβιων φυσικών συντεταγμένων, τα εξαεδρικά στοιχεία σκυροδέματος θα πρέπει να είναι ορθογώνια παραλληλεπίπεδα.

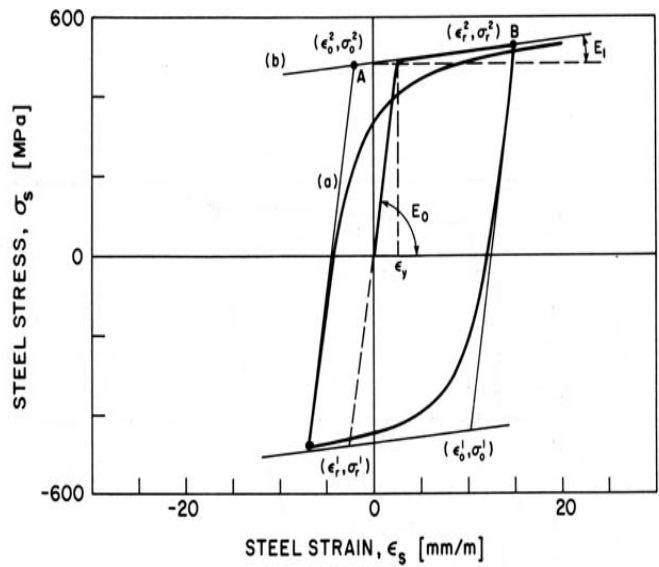
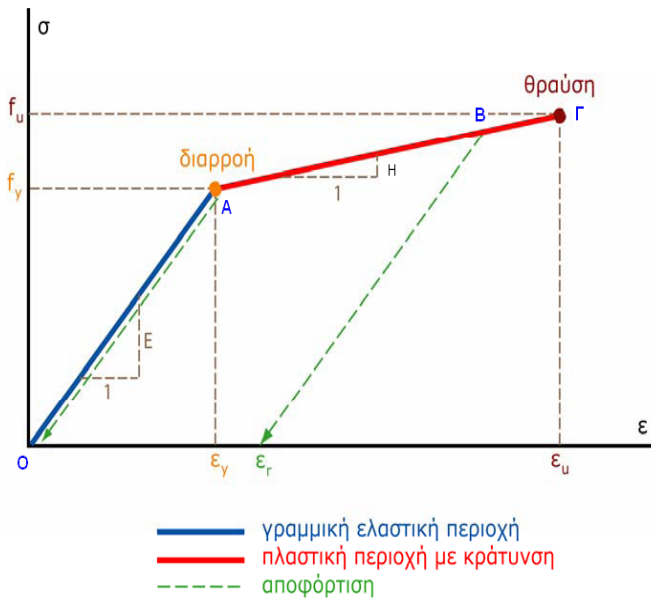


Σχήμα 5.12 Το διάγραμμα ροής της προτεινόμενης μεθόδου γένεσης του δικτύου των ενσωματωμένων στοιχείων οπλισμού



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

### Το καταστατικό μοντέλο για το σκυρόδεμα και τον χάλυβα του οπλισμού



## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 6

### 6.1 Το καταστατικό μοντέλο για το σκυρόδεμα

#### 6.1.1 Το καταστατικό προσομοίωμα των Kotsovos and Pavlovic

- Εισαγωγή
- Οκταεδρική διατύπωση τάσεων – παραμορφώσεων
- Το καταστατικό προσομοίωμα των Kotsovos and Pavlovic

#### 6.1.2 Κριτήρια αστοχίας

#### 6.1.3 Το τροποποιημένο καταστατικό προσομοίωμα

#### 6.1.4 Η μέθοδος της διανεμημένης ρωγμής (Smearred Crack Modeling)

- Ο συντελεστής μερικής διατήρησης της διατμητικής στιβαρότητας  $\beta$

#### 6.1.5 Το προσομοίωμα συνάφειας και σχετικής ολίσθησης μεταξύ χάλυβα οπλισμού και σκυροδέματος

### 6.2 Το καταστατικό μοντέλο για τον χάλυβα του οπλισμού

#### 6.2.1 Το διγραμμικό μοντέλο

#### 6.2.2 Το μοντέλο Menegotto-Pinto

## 6.1 Το καταστατικό μοντέλο για το σκυρόδεμα

### 6.1.1 Το καταστατικό προσομοίωμα των Kotsovos and Pavlovic

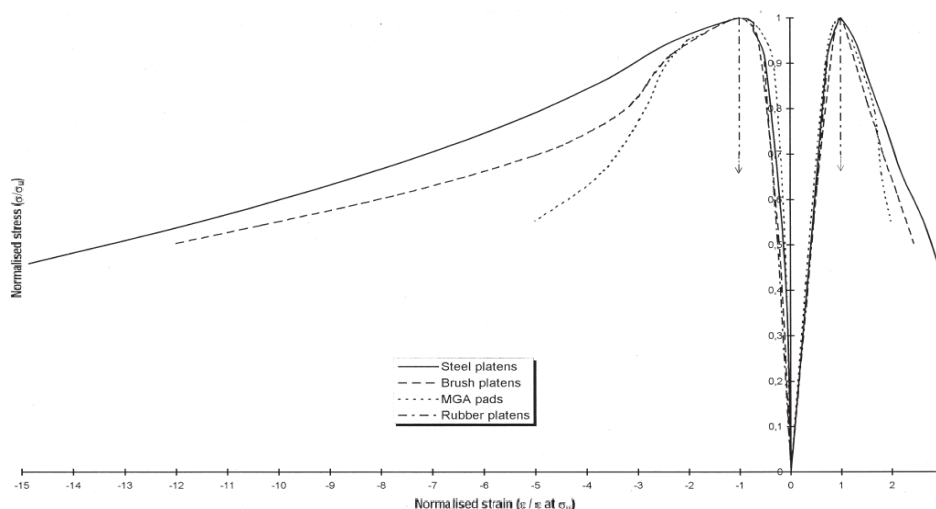
- Εισαγωγή

Για την προσομοίωση του σκυροδέματος έχει προταθεί πληθώρα καταστατικών νόμων υλικού. Ως τα πλέον κατάλληλα θεωρούνται τα τρισδιάστατα καταστατικά μοντέλα υλικού. Στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία, **το προτεινόμενο τρισδιάστατο καταστατικό μοντέλο του σκυροδέματος βασίστηκε στο προσομοίωμα που διατυπώθηκε από τους Kotsovos and Pavlovic μετά από κατάλληλη βελτίωση κυρίως σε αριθμητικό επίπεδο.** Η προτεινόμενη μετατροπή σκοπεύει να βελτιώσει το επίπεδο της αριθμητικής ευρωστίας και ακρίβειας. Στη συνέχεια, θα αναφερθούμε τόσο στο καταστατικό προσομοίωμα του σκυροδέματος των Kotsovos and Pavlovic όσο και στις προτεινόμενες διαφοροποιήσεις.

Οι διάφοροι νόμοι του σκυροδέματος, που έχουν διατυπωθεί έως τώρα από την επιστημονική κοινότητα, προέκυψαν ύστερα από επεξεργασία πειραματικών δεδομένων από εργαστηριακές δοκιμές κυλινδρικών, πρισματικών ή κυβικών δοκιμίων. Τέτοιες δοκιμές είναι η δοκιμή του σκυροδέματος σε θλίψη και η δοκιμή του σκυροδέματος σε τριαξονική καταπόνηση. Τα δοκίμια υπόκεινται σε διάφορους συνδυασμούς φορτίσεων. Τα φορτία επιβάλλονται συνήθως μέσω χαλύβδινων πλακών φόρτισης.

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν εκφράζονται με τη μορφή καμπύλης τάσης – ανηγμένης παραμόρφωσης, η οποία αποτελείται από έναν αύξοντα κλάδο κράτυνσης (strain hardening branch), ο οποίος ακολουθείται από ένα μετελαστικό φθιπτό κλάδο (strain softening branch). Έπειτα από εντατική πειραματική διερεύνηση, έχει αποδειχθεί ότι μόνο ο αύξων κλάδος κράτυνσης είναι σε θέση να περιγράψει τη συμπεριφορά του σκυροδέματος υπό την επίδραση συγκεκριμένων τάσεων, ενώ ο μετελαστικός κλάδος αντικατοπτρίζει την αλληλεπίδραση μεταξύ του δοκιμίου και των αντίστοιχων πλακών φόρτισης, όπως διακρίνουμε χαρακτηριστικά στο σχήμα 6.1, η οποία καθορίζεται από την ανάπτυξη μη ελεγχόμενων δυνάμεων τριβής μεταξύ της επιφάνειας του δοκιμίου και της επιφάνειας της πλάκας φόρτισης.

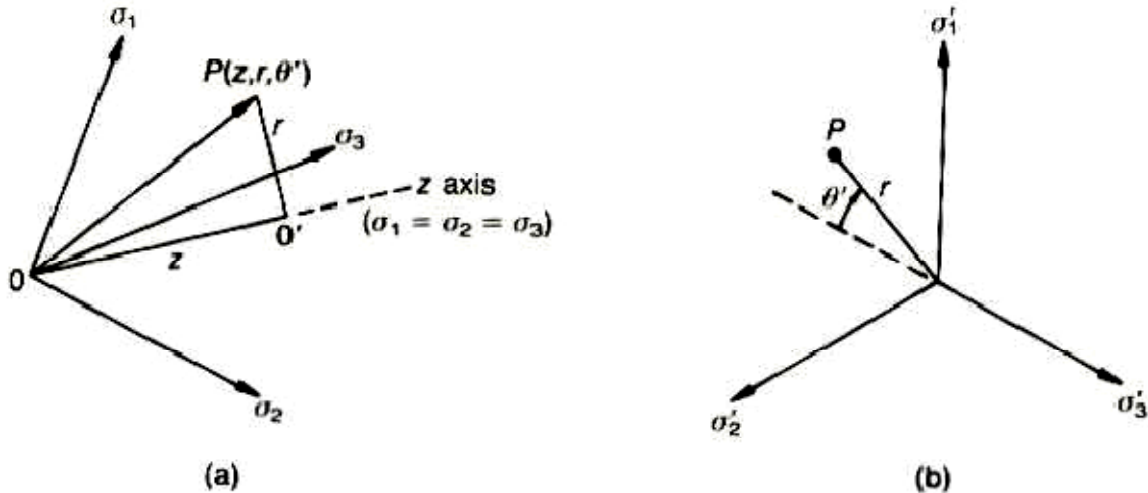
Βασιζόμενοι σε αυτά τα πειράματα, καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι το σκυρόδεμα είναι **ένα εξαιρετικά ασταθές υλικό** και ότι το προτεινόμενο μοντέλο εμφανίζεται ως το πιο κατάλληλο για την αριθμητική του προσομοίωση.



Σχήμα 6.1 Καμπύλη τάσης – ανηγμένης παραμόρφωσης για διάφορες συνοριακές συνθήκες της πειραματικής διάταξης

- **Οκταεδρική διατύπωση τάσεων – παραμορφώσεων**

Χρησιμοποιούμε την οκταεδρική διατύπωση των τάσεων και των παραμορφώσεων, προκειμένου να αξιοποιήσουμε με μεγαλύτερη άνεση τα υπάρχοντα πειραματικά δεδομένα. Θεωρούμε το καρτεσιανό σύστημα των κυρίων τάσεων  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Έστω P ένα τυχαίο σημείο του τασικού χώρου, το οποίο δίνεται είτε με τις καρτεσιανές του συντεταγμένες P ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) είτε με τις κυλινδρικές του συντεταγμένες P ( $z, r, \theta'$ ). Στο σχήμα 6.2 απεικονίζεται ο καρτεσιανός και ο κυλινδρικός τασικός χώρος.



**Σχήμα 6.2** (α) Τασικός χώρος καρτεσιανός ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) και κυλινδρικός ( $z, r, \theta'$ )  
(β) όψη από το αποκλίνον επίπεδο

Οι καρτεσιανές και οι κυλινδρικές συντεταγμένες συνδέονται μεταξύ τους μέσω των ακόλουθων σχέσεων:

$$z = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sqrt{3}} \quad (6.1.a)$$

$$r = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{\sqrt{3}} \quad (6.1.b)$$

$$\cos \theta' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3}{\sqrt{6} \cdot r} \quad (6.1.c)$$

Το επίπεδο, στο οποίο ασκείται η οκταεδρική τάση, είναι κάθετο στην τριχοτόμο του συστήματος των αξόνων των κυρίων τάσεων και δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\sigma_{oct} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Η οκταεδρική τάση  $\sigma_{oct}$  αναλύεται στις εξής δύο συνιστώσες:

- $\sigma_o$ : ορθή συνιστώσα της οκταεδρικής τάσης  $\sigma_{oct}$  (**υδροστατική τάση**)
- $\tau_o$ : διατμητική συνιστώσα της οκταεδρικής τάσης  $\sigma_{oct}$  (**αποκλίνουσα τάση**)

Για να οριστεί πλήρως η οκταεδρική τάση, θα πρέπει να γνωρίζουμε, εκτός από τις δύο συνιστώσες, και τη στροφική γωνία  $\theta$ . Ως **στροφική γωνία  $\theta$**  ορίζουμε τη **γωνία που σχηματίζει η αποκλίνουσα τάση  $\tau_o$  με την προβολή οποιουδήποτε άξονα στο αποκλίνον επίπεδο**. Η υδροστατική τάση  $\sigma_o$ , η αποκλίνουσα τάση  $\tau_o$  και η στροφική γωνία  $\theta$  συνδέονται με τις κύριες τάσεις  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  μέσω των ακόλουθων σχέσεων:

$$\sigma_o = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \Rightarrow \sigma_o = \frac{z}{\sqrt{3}} \quad (6.3.a)$$

$$\tau_o = \frac{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}}{3} \Rightarrow \tau_o = \frac{r}{\sqrt{3}} \quad (6.3.b)$$

$$\cos \theta = \frac{\sigma_o - \sigma_3}{\sqrt{2} \cdot \tau_o} = \cos \theta' \quad (6.3.c)$$

Για να υπολογίσουμε τις κύριες τάσεις  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  με τις αντίστοιχες κύριες διευθύνσεις που αντιστοιχούν σε μία τυχαία εντατική κατάσταση ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ ), θα πρέπει να επιλύσουμε ένα πρόβλημα ιδιοτιμών, απαιτώντας η ορίζουσα των μητρώων των συντελεστών των τριών ομογενών εξισώσεων να είναι μηδενική. Από την απαίτηση αυτή προκύπτει η ακόλουθη κυβική εξίσωση:

$$\sigma^3 - I_1 \cdot \sigma^2 + I_2 \cdot \sigma - I_3 = 0 \quad (6.4)$$

Γνωρίζουμε ότι οι κύριες τάσεις δεν εξαρτώνται από το αρχικό σύστημα αξόνων, το οποίο μπορούμε να επιλέξουμε αυθαίρετα, και συνιστούν μοναδικές φυσικές ποσότητες. Γι' αυτό το λόγο, άλλωστε, οι ποσότητες αυτές ονομάζονται πρώτη, δεύτερη και τρίτη αναλλοίωτη του τανυστή των τάσεων.

**Οι αναλλοίωτες του τανυστή των τάσεων** ορίζονται με τη βοήθεια των συνιστωσών του κύριου τανυστή των τάσεων ως εξής:

$$\begin{aligned} I_1(T_\sigma) &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2(T_\sigma) &= -(\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1) \\ I_3(T_\sigma) &= \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \end{aligned} \quad (6.5)$$

ή με τη βοήθεια των συνιστωσών του τυχόντος τανυστή των τάσεων ως εξής:

$$\begin{aligned} I_1(T_\sigma) &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2(T_\sigma) &= -(\sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x) + (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \\ I_3(T_\sigma) &= \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z - \sigma_x \cdot \tau_{yz}^2 - \sigma_y \cdot \tau_{zx}^2 - \sigma_z \cdot \tau_{xy}^2 + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \tau_{yz} \cdot \tau_{zx} \end{aligned} \quad (6.6)$$



Οι οκταεδρικές τάσεις συνδέονται με τις αναλλοίωτες ως εξής:

$$\sigma_o = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \xrightarrow{I_1(T_\sigma) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3} \Rightarrow \sigma_o = \frac{I_1}{3} \quad (6.7.a)$$

$$\tau_o = \frac{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}}{3} \Rightarrow \tau_o = \sqrt{\left(2 \cdot \sigma_o^2 - \frac{2 \cdot I_2}{3}\right)} \quad (6.7.b)$$

$$\cos(3 \cdot \theta) = -\frac{\sqrt{2}}{\tau_o^3} \cdot J_3 \quad (6.7.c)$$

όπου  $J_3$  είναι η τρίτη αναλλοίωτη του αποκλίνοντα τανυστή των τάσεων  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_o \cdot \delta_{ij}$ .

Ανάλογες σχέσεις ισχύουν και για τις παραμορφώσεις:

$$\varepsilon_o = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} \xrightarrow{I_1(T_\varepsilon) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3} \Rightarrow \varepsilon_o = \frac{I_1}{3} \quad (6.8.a)$$

$$\gamma_o = \frac{\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}}{3} \quad (6.8.b)$$

$$\cos \delta = \frac{\varepsilon_o - \varepsilon_3}{\sqrt{2} \cdot \gamma_o} \quad (6.8.c)$$

Αξιοποιώντας τις σχέσεις που συνδέουν τις κύριες τάσεις ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) με τις κύριες παραμορφώσεις ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ )

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1 - \nu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)}{E} \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2 - \nu \cdot (\sigma_3 + \sigma_1)}{E} \\ \varepsilon_3 &= \frac{\sigma_3 - \nu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)}{E} \end{aligned} \quad (6.9)$$

εξάγουμε τις σχέσεις που συνδέουν τις οκταεδρικές τάσεις με τις οκταεδρικές παραμορφώσεις.

$$\varepsilon_o = \frac{1 - 2 \cdot \nu}{E} \cdot \sigma_o \Rightarrow \varepsilon_o = \frac{\sigma_o}{3 \cdot K} \quad (6.10.a)$$

$$\gamma_o = \frac{1 + \nu}{E} \cdot \tau_o \Rightarrow \varepsilon_o = \frac{\tau_o}{2 \cdot G} \quad (6.10.b)$$

όπου:

- $K$  είναι το μέτρο συμπίεστικότητας  $K = \frac{E}{3 \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}$  (6.11.a)

- $G$  είναι το μέτρο διάτμησης  $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$  (6.11.b)

- **Το καταστατικό προσομοίωμα των Kotsovos and Pavlovic**

Οι Kotsovos and Pavlovic αναφέρουν τρεις τρόπους μαθηματικής περιγραφής της παραμορφωσιακής κατάστασης του σκυροδέματος πριν την ρηγμάτωση:

1. Των τριών σταθερών
2. Των εσωτερικών τάσεων
3. Τη συνδυαστική των (1) και (2)

Η τρίτη προσέγγιση ενδείκνυται περισσότερο δεδομένου ότι είναι **η πιο απλή** και **η πιο εύκολα εφαρμόσιμη**. Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε τα στοιχεία των δύο πρώτων προσεγγίσεων, τα οποία χρησιμοποιούμε για να εφαρμόσουμε τον τρίτο συνδυαστικό τρόπο.

Σύμφωνα με τον νόμο του Hooke, η σχέση γενικευμένων τάσεων – παραμορφώσεων έχει την ακόλουθη γενική μορφή:

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu_e}{E_e} \cdot \sigma_{kk} \cdot \delta_{ij} + \frac{(1+\nu_e)}{E_e} \cdot \sigma_{ij} \quad (6.12)$$

$$(6.12) \Rightarrow \varepsilon_{ij} = -\frac{(3 \cdot K_e - 2 \cdot G_e)}{18 \cdot K_e \cdot G_e} \cdot \sigma_{kk} \cdot \delta_{ij} + \frac{1}{2 \cdot G_e} \cdot \sigma_{ij} \quad (6.13)$$

όπου  $K_e$ ,  $G_e$  είναι αντίστοιχα τα ελαστικά μέτρα συμπίεστότητας και διάτμησης.

Μετατρέποντας τις τάσεις σε οκταεδρικές έχουμε ότι:

$$\sigma_{kk} = 3 \cdot \sigma_o \Rightarrow \sigma_o = \frac{\sigma_{kk}}{3} \quad (6.14.a)$$

$$2 \cdot \varepsilon_{ij} = \gamma_{ij} \quad (6.14.b)$$

$$\varepsilon_o = \frac{\varepsilon_{kk}}{3} \quad (6.14.c)$$

$$\mathbf{e}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_o \cdot \delta_{ij} \Rightarrow \varepsilon_{ij} = \varepsilon_o \cdot \delta_{ij} + \mathbf{e}_{ij} \Rightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_o}{3 \cdot K_e} \cdot \delta_{ij} + \frac{s_{ij}}{2 \cdot G_e} \quad (6.14.d)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_o \cdot \delta_{ij} \quad (6.14.e)$$

Στο σκυρόδεμα λόγω της μη γραμμικότητας (πριν την μακρορηγμάτωση) είναι σαφές ότι μπορεί να θεωρηθεί μία σχέση του τύπου:

$$\sigma_o = \sigma_{ij}^{ext} + \sigma_{ij}^{int} \quad (6.15)$$

δηλαδή οι τάσεις χωρίζονται σε μία εξωτερική συνιστώσα (αυτή τείνει να εφαρμοστεί λόγω του εξωτερικού φορτίου) και σε μία εσωτερική λόγω της μικρορηγμάτωσης. Η συνιστώσα της παραμόρφωσης που οφείλεται στην εξωτερική τάση είναι αναστρέψιμη κατά την αποφόρτιση, ενώ αυτή λόγω της εσωτερικής όχι.

Μετά την αναλυτική επεξεργασία των δεδομένων, τα οποία απεικονίζονται στα σχήματα 6.3 και 6.4, με τη μέθοδο της παλινδρόμησης προέκυψαν οι ακόλουθες σχέσεις που περιγράφουν αναλυτικά τις καμπύλες  $\sigma_o - \epsilon_o$  και  $T_o - \gamma_o$ .

$$\epsilon_{oh} = \begin{cases} \frac{\sigma_o + 3 \cdot K_e \cdot \sigma_o^b}{3 \cdot K_e} & \text{για } \frac{\sigma_o}{f_c} \leq 2 \\ \frac{\sigma_o + 3 \cdot a \cdot b \cdot K_e \cdot (2 \cdot f_c)^{b-1} \cdot \sigma_o + 3 \cdot a \cdot (1-b) \cdot K_e \cdot (2 \cdot f_c)^b \cdot \sigma_o}{3 \cdot K_e} & \text{για } \frac{\sigma_o}{f_c} > 2 \end{cases} \quad (6.16)$$

$$\gamma_o = \frac{\tau_o + 2 \cdot c \cdot G_e \cdot \tau_o^d}{2 \cdot G_e} \quad (6.17)$$

Το αρχικό μέτρο συμπίεστικότητας  $K_e$  και το αρχικό μέτρο διάτμησης  $G_e$  του σκυροδέματος δίνονται αντίστοιχα από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$K_e = 11.000 + 3,2 \cdot f_c \quad (6.18)$$

$$G_e = 9.224 + 136 \cdot f_c + 3.296 \cdot 10^{-15} \cdot f_c^{8,273} \quad (6.19)$$

όπου  $f_c$  είναι η αντοχή του σκυροδέματος σε μονοαξονική θλίψη και  $a, b, c, d$  παράμετροι που εξαρτώνται από την ποιότητα του υλικού και μπορούν επίσης να εκφραστούν συναρτήσει του  $f_c$ . Συγκεκριμένα, έχουμε ότι:

$$b = 2 + 1,81 \cdot 10^{-8} \cdot f_c^{4,461} \quad (6.20)$$

$$d = \begin{cases} 2,12 + 0,183 \cdot f_c & \text{για } f_c \leq 31,7 \text{MPa} \\ 2,7 & \text{για } f_c > 31,7 \text{MPa} \end{cases} \quad (6.21)$$

Το  $a$  ενσωματώνεται στην παράμετρο  $A$  ως εξής:

$$A = 3 \cdot a \cdot K_e \cdot f_c^{b-1} \quad (6.22)$$

Οι σχέσεις (6.16) και (6.17) των  $\epsilon_{oh}$  και  $\gamma_o$  πρέπει να είναι συμβατές με τον πρώτο όρο της εναλλακτικής διατύπωσης του νόμου του Hooke (6.14.d). Πρέπει δηλαδή η εσωτερική συνιστώσα της εσωτερικής τάσης  $\sigma_{o(int)}^h \equiv \sigma_{ih}$  που προκύπτει από την υδροστατική τάση  $\sigma_o^{ext} \equiv \sigma_o$  να είναι:

$$\frac{\sigma_{ih}}{f_c} = A \cdot \left( \frac{\sigma_o}{f_c} \right)^b \quad \text{για } \frac{\sigma_o}{f_c} \leq 2 \quad (6.23.a)$$

$$\frac{\sigma_{ih}}{f_c} = 2^{b-1} \cdot A \cdot b \cdot \left( \frac{\sigma_o}{f_c} \right) + 2^b \cdot A \cdot (1-b) \quad \text{για } \frac{\sigma_o}{f_c} > 2 \quad (6.23.b)$$

Με ανάλυση της παλινδρόμησης των πειραματικών δεδομένων της σχέσης (6.23) προκύπτουν οι εκφράσεις του A (και άρα και του a):

$$A = \begin{cases} 0,516 & \text{για } f_c \leq 31,7 \text{ MPa} \\ \frac{0,516}{1 + 0,0027 \cdot (f_c - 31,7)^{2,397}} & \text{για } f_c > 31,7 \text{ MPa} \end{cases} \quad (6.24)$$

Το c ενσωματώνεται στην παράμετρο C ως εξής:

$$C = 2 \cdot c \cdot G_e \cdot f_c^{d-1} \quad (6.25)$$

Η σχέση (6.17) του  $\gamma_0$  πρέπει να είναι συμβατή με τον πρώτο όρο της εναλλακτικής διατύπωσης του νόμου του Hooke (6.14.d). Πρέπει, δηλαδή, η αποκλίνουσα συνιστώσα της εσωτερικής τάσης  $T_{o(d)}^{\text{int}} \equiv T_{id}$  να είναι:

$$\frac{T_{id}}{f_c} = C \cdot \left( \frac{T_o}{f_c} \right)^d \quad (6.26)$$

Η σχέση (6.26) με ανάλυση παλινδρόμησης από τα πειραματικά αποτελέσματα δίνει το συντελεστή C ίσο με:

$$C = \begin{cases} 3,573 & \text{για } f_c \leq 31,7 \text{ MPa} \\ \frac{3,573}{1 + 0,0134 \cdot (f_c - 31,7)^{1,414}} & \text{για } f_c > 31,7 \text{ MPa} \end{cases} \quad (6.27)$$

Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν για  $15 \text{ MPa} < f_c < 65 \text{ MPa}$ . Για τιμές του  $f_c$  μεγαλύτερες από 65 MPa ή μικρότερες από 15 MPa τα K, G θα είναι εκείνα που ισχύουν για  $f_c$  ίσο με 65 MPa και 15 MPa αντίστοιχα.

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η προσομοίωση μπορεί να γίνει ως εξής:

- με τη χρήση των κατάλληλων K, G ώστε να λαμβάνουν τις μη γραμμικότητες των  $\sigma_0$ - $\varepsilon_{o(h)}$  και  $T_o$ - $\gamma_{o(d)}$
- σε συνδυασμό με τον υπολογισμό της εσωτερικής έντασης  $\sigma_{id}$  ώστε να λαμβάνεται υπόψη η σχέση μεταξύ  $T_o$ - $\varepsilon_{o(d)}$ .

Συνεπώς, οι γενικευμένες σχέσεις τάσεων – ανηγμένων παραμορφώσεων, που ισχύουν για τα πειραματικά δεδομένα και αντιστοιχούν στον αύξοντα κλάδο, μπορούν να εκφραστούν αναλύοντας κάθε εντατική κατάσταση σε μία υδροστατική και μία αποκλίνουσα συνιστώσα, οι οποίες αντιπροσωπεύουν αντίστοιχα την ορθή και διατμητική οκταεδρική τάση.

Οι υδροστατικές και αποκλίνουσες τάσεις ( $\sigma_0$ ,  $T_o$ ) προέρχονται από τις αντίστοιχες υδροστατικές και αποκλίνουσες παραμορφώσεις ( $\varepsilon_0$ ,  $\gamma_0$ ) σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{0h} + \varepsilon_{0d} = \frac{\sigma_0 + \sigma_{id}}{3 \cdot K_s} \quad (6.28.a)$$

$$\gamma_0 = \frac{T_0}{2 \cdot G_s} \quad (6.28.b)$$

όπου:

- $\sigma_{id}$ : η **ισοδύναμη εσωτερική υδροστατική τάση**, η οποία εξαρτάται από την ορθή οκταεδρική τάση  $\sigma_0$ , τη διατμητική οκταεδρική τάση  $T_0$  και την μονοαξονική αντοχή σε θλίψη  $f_c$  του σκυροδέματος και ερμηνεύει τη σύνδεση μεταξύ της αποκλίνουσας διατμητικής τάσης  $T_0$  και της αποκλίνουσας ανηγμένης παραμόρφωσης  $\varepsilon_{0d}$ .
- $K_s$ : το **τέμνον μέτρο συμπίεστικότητας**, το οποίο προέκυψε λαμβάνοντας υπόψιν μόνο τις τάσεις  $\sigma_0$ ,  $T_0$  και όχι την τάση σύνδεσης  $\sigma_{id}$ .
- $G_s$ : το **τέμνον μέτρο διάτμησης**, το οποίο προέκυψε λαμβάνοντας υπόψιν μόνο τις τάσεις  $\sigma_0$ ,  $T_0$  και όχι την τάση σύνδεσης  $\sigma_{id}$ .

Οι εκφράσεις των μεγεθών  $\sigma_{id}$ ,  $K_s$ ,  $G_s$  προέρχονται από προσαρμογή σε καμπύλη των πειραματικών δεδομένων από πειραματικές δοκιμές, κατά τις οποίες το υλικό υποβλήθηκε σε μονοαξονική, διαξονική και τριαξονική εντατική κατάσταση.

Σχετικά με το τέμνον  $K_s = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$  και το εφαπτομενικό  $K_t = \frac{d\sigma_0}{d\varepsilon_0}$  μέτρο συμπίεστικότητας έχουμε

αντίστοιχα ότι:

$$\frac{K_s}{K_e} = \begin{cases} \frac{1}{1 + A \cdot \left(\frac{\sigma_0}{f_c}\right)^{b-1}} \quad \text{για } \frac{\sigma_0}{f_c} \leq 2 \\ \frac{1}{1 + 2^{b-1} \cdot A \cdot b - 2 \cdot (b-1) \cdot A \cdot \left(\frac{\sigma_0}{f_c}\right)^{-1}} \quad \text{για } \frac{\sigma_0}{f_c} > 2 \end{cases} \quad (6.29)$$

$$\frac{K_t}{K_e} = \begin{cases} \frac{1}{1 + b \cdot A \cdot \left(\frac{\sigma_0}{f_c}\right)^{b-1}} \quad \text{για } \frac{\sigma_0}{f_c} \leq 2 \\ \frac{1}{1 + 2^{b-1} \cdot A \cdot b} \quad \text{για } \frac{\sigma_0}{f_c} > 2 \end{cases} \quad (6.30)$$

όπου

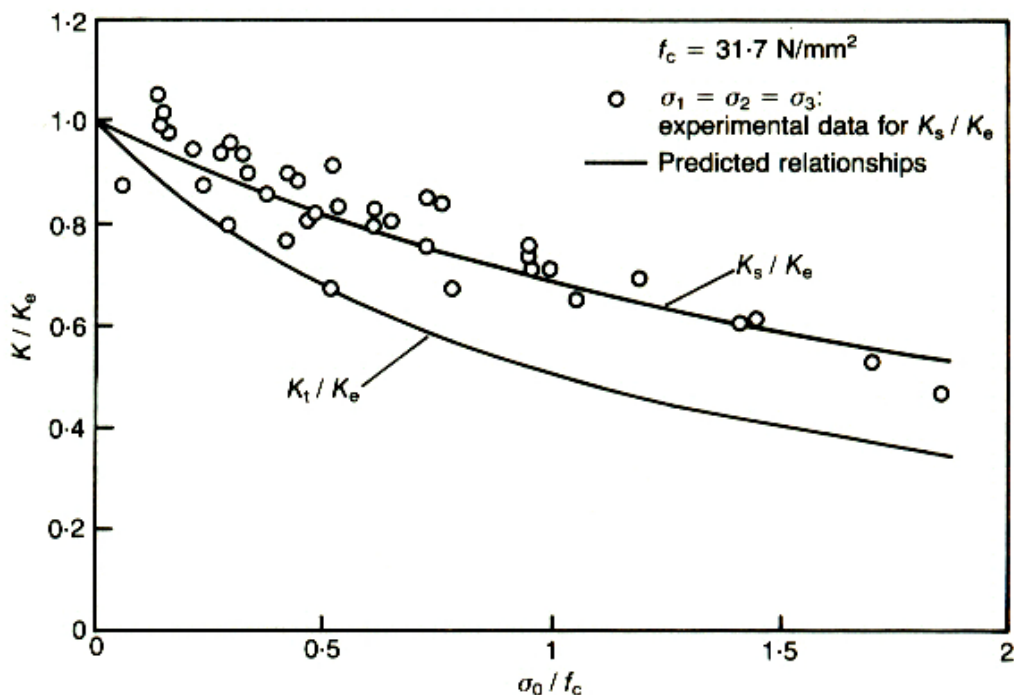
- $K_t$ : το εφαπτομενικό μέτρο συμπίεστικότητας της καμπύλης  $\sigma_0$ - $\varepsilon_0$
- $K_e$ : το ελαστικό μέτρο συμπίεστικότητας του σκυροδέματος
- $A, b$ : παράμετροι υλικού
- $f_c$ : η μονοαξονική αντοχή σε θλίψη κυλινδρικού δοκιμίου από την αντίστοιχη ποιότητα σκυροδέματος.

Τα μεγέθη  $K_e$ ,  $A$  και  $b$  έχουν αποτιμηθεί με τη βοήθεια παλινδρόμησης έγκυρων πειραματικών αποτελεσμάτων (τα οποία παρουσιάζουμε στο σχήμα 6.3) και δίνονται από τους ακόλουθους τύπους:

$$K_e = 11.000 + 3,2 \cdot f_c \quad (6.31.a)$$

$$A = \begin{cases} 0,516 & \text{για } f_c \leq 31,7 \text{ MPa} \\ \frac{0,516}{1 + 0,0027 \cdot (f_c - 31,7)^{2,397}} & \text{για } f_c > 31,7 \text{ MPa} \end{cases} \quad (6.31.b)$$

$$b = 2 + 1,81 \cdot 10^{-8} \cdot f_c^{4,461} \quad (6.31.c)$$



**Σχήμα 6.3** Τυπικές σχέσεις του τέμνοντος και του εφαπτομενικού μέτρου συμπίεστικότητας με την υδροστατική συνιστώσα  $\sigma_0$  για συγκεκριμένη ποιότητα σκυροδέματος  $f_c=31,7$  MPa

Σχετικά με το τέμνον  $G_s = \frac{\tau_o}{\gamma_o}$  και το εφαπτομενικό  $G_T = \frac{d\tau_o}{d\gamma_o}$  μέτρο διάτμησης έχουμε αντίστοιχα ότι:

$$\frac{G_s}{G_e} = \frac{1}{1 + C \cdot \left(\frac{\tau_o}{f_c}\right)^{d-1}} \quad (6.32)$$

$$\frac{G_t}{G_e} = \frac{1}{1 + d \cdot C \cdot \left(\frac{\tau_o}{f_c}\right)^{d-1}} \quad (6.33)$$

όπου

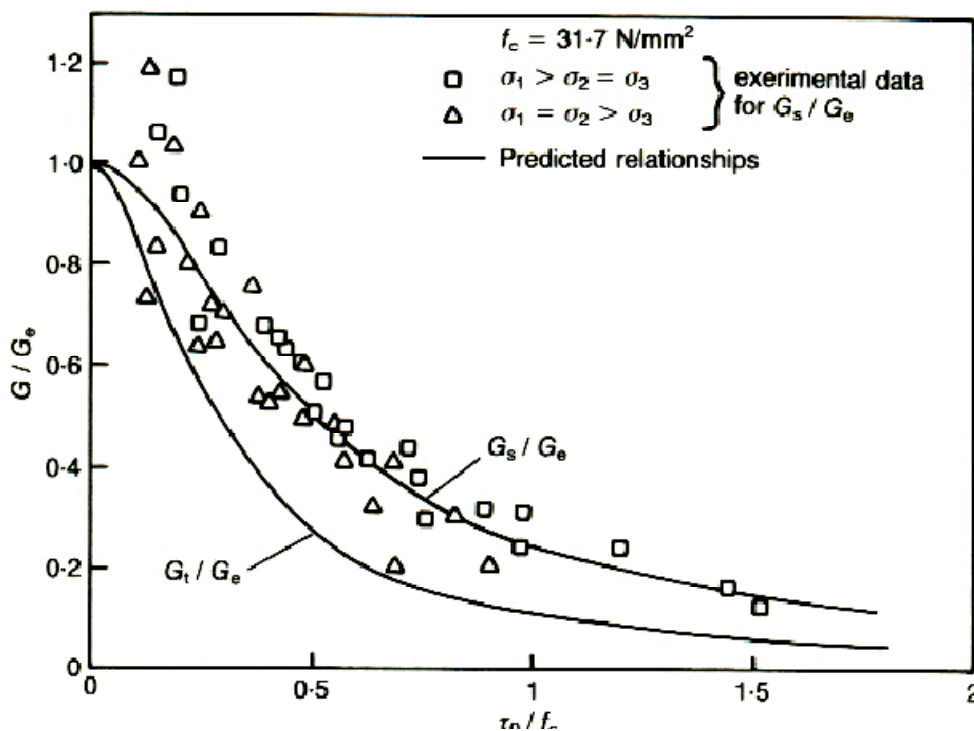
- $G_e$ : είναι το ελαστικό μέτρο διάτμησης του σκυροδέματος
- $C, d$ : είναι παράμετροι υλικού
- $f_c$ : είναι η μονοαξονική αντοχή σε θλίψη κυλινδρικού δοκιμίου από την αντίστοιχη ποιότητα σκυροδέματος.

Τα μεγέθη  $G_e, C$  και  $d$  έχουν αποτιμηθεί με τη βοήθεια παλινδρόμησης έγκυρων πειραματικών αποτελεσμάτων (τα οποία παρουσιάζουμε στο σχήμα 6.4) και δίνονται από τους ακόλουθους τύπους:

$$G_e = 9.224 + 136 \cdot f_c + 3.296 \cdot 10^{-15} \cdot f_c^{8,273} \quad (6.34)$$

$$C = \begin{cases} 3,573 & \text{για } f_c \leq 31,7 \text{ MPa} \\ \frac{3,573}{1 + 0,0134 \cdot (f_c - 31,7)^{1,414}} & \text{για } f_c > 31,7 \text{ MPa} \end{cases} \quad (6.35)$$

$$d = \begin{cases} 2,12 + 0,0183 \cdot f_c & \text{για } f_c \leq 31,7 \text{ MPa} \\ 2,12 & \text{για } f_c > 31,7 \text{ MPa} \end{cases} \quad (6.36)$$



Σχήμα 6.4 Τυπικές σχέσεις του τέμνοντος και του εφαπτομενικού μέτρου διάτμησης με την αποκλίνουσα συνιστώσα  $\tau_o$  για συγκεκριμένη ποιότητα σκυροδέματος  $f_c=31,7$  MPa

Σχετικά με την υδροστατική τάση  $\sigma_{id}$  έχουμε ότι:

$$\frac{\sigma_{id}}{f_c} = D \cdot \left( \frac{\tau_o}{f_c} \right)^n \quad (6.37)$$

$$D = \frac{k}{1 + l \cdot \left(\frac{\tau_0}{f_c}\right)^m} \quad (6.38)$$

Τα  $k$ ,  $l$ ,  $m$ ,  $n$  είναι παράμετροι, οι οποίες βασίζονται στη μονοαξονική αντοχή σε θλίψη του σκυροδέματος και μπορούν να εκφραστούν ως εξής:

$$k = \frac{4}{1 + 1,087 \cdot (f_c - 15)^{0,23}} \quad (6.39)$$

$$l = 0,222 + 0,01086 \cdot f_c - 0,000122 \cdot f_c^2 \quad (6.40)$$

$$m = \begin{cases} -2,415 & \text{για } f_c \leq 31,7 \text{ MPa} \\ -3,531 + 0,0352 \cdot f_c & \text{για } f_c > 31,7 \text{ MPa} \end{cases} \quad (6.41)$$

$$n = \begin{cases} 1.0 & \text{για } f_c \leq 31,7 \text{ MPa} \\ 0,3124 + 0,0217 \cdot f_c & \text{για } f_c > 31,7 \text{ MPa} \end{cases} \quad (6.42)$$

Για  $f_c > 65 \text{ MPa}$  και  $f_c < 15 \text{ MPa}$  οι παραπάνω παράμετροι έχουν σταθερές τιμές και ίσες με αυτές που αντιστοιχούν σε  $f_c = 65 \text{ MPa}$  και  $f_c = 15 \text{ MPa}$ .

Δεδομένου ότι η  $\sigma_{id}$  είναι υδροστατική τάση, οι (6.28.a) και (6.28.b) είναι ισοδύναμες με την ακόλουθη σχέση:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij} + \sigma_{id} \cdot \delta_{ij}}{2 \cdot G_s} - \frac{3 \cdot \nu_s}{E_s} \cdot (\sigma_0 + \sigma_{id}) \cdot \delta_{ij} \quad (6.43)$$

Από τις εκφράσεις των μέτρων συμπίεστικότητας και διάτμησης μπορούν εύκολα να προκύψουν οι σχέσεις που δίνουν το μέτρο ελαστικότητας Young  $E$  και το λόγο Poisson  $\nu$ .

$$E = \frac{9 \cdot K \cdot G}{3 \cdot K + G} \quad (6.44)$$

$$\nu = \frac{3 \cdot K - 2 \cdot G}{3 \cdot K + 2 \cdot G} \quad (6.45)$$

Οι ανηγμένες παραμορφώσεις του σκυροδέματος κατά τη διεύθυνση της κύριας τάσης προκύπτουν από τις σχέσεις:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_{int}}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_2 + \sigma_3 + 2 \cdot \sigma_{int}}{E} \quad (6.46.a)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2 + \sigma_{int}}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_3 + 2 \cdot \sigma_{int}}{E} \quad (6.46.b)$$

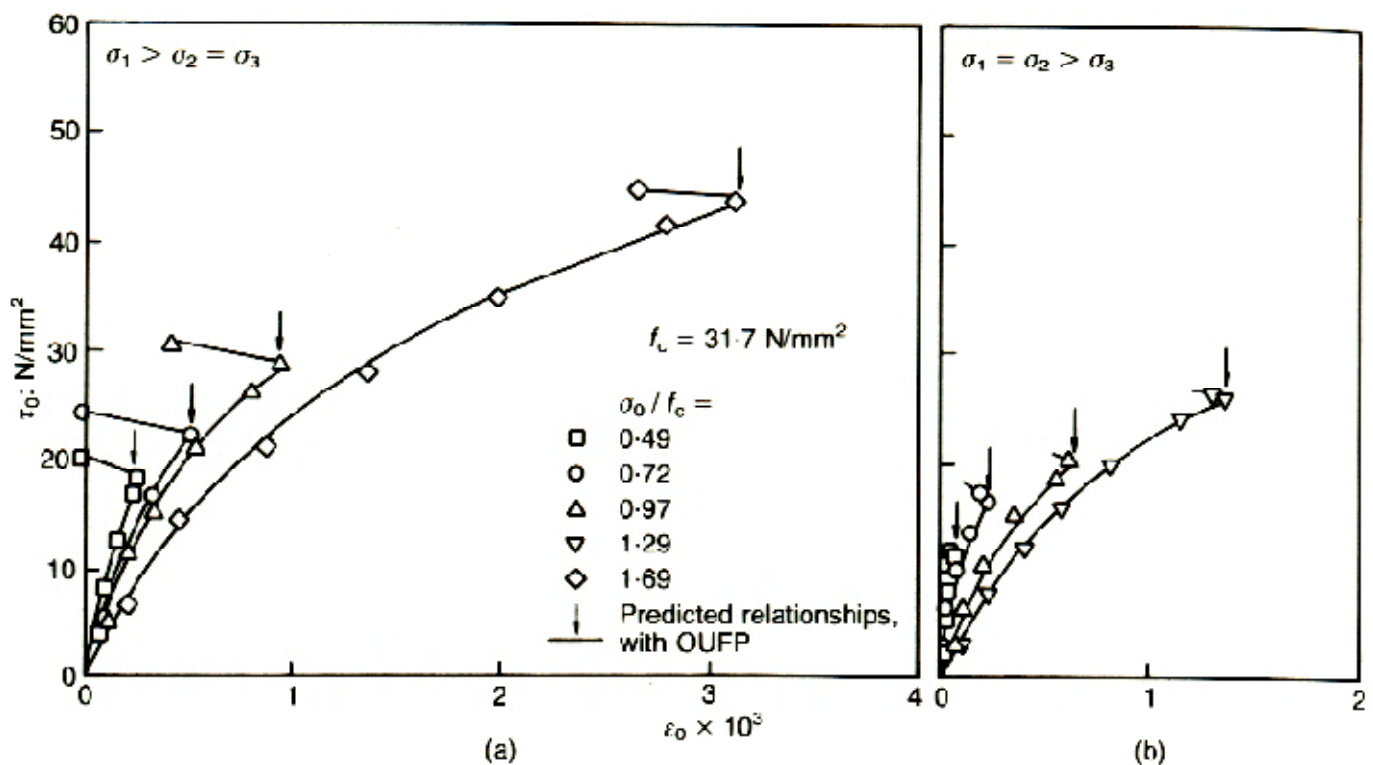
$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3 + \sigma_{int}}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_2 + \sigma_1 + 2 \cdot \sigma_{int}}{E} \quad (6.46.c)$$



Σε γενικές γραμμές η σχέση (6.43) αποτελεί τη βάση για τον υπολογισμό των καθολικών παραμορφώσεων από τις καθολικές τάσεις. Η διαδικασία έχει ως εξής:

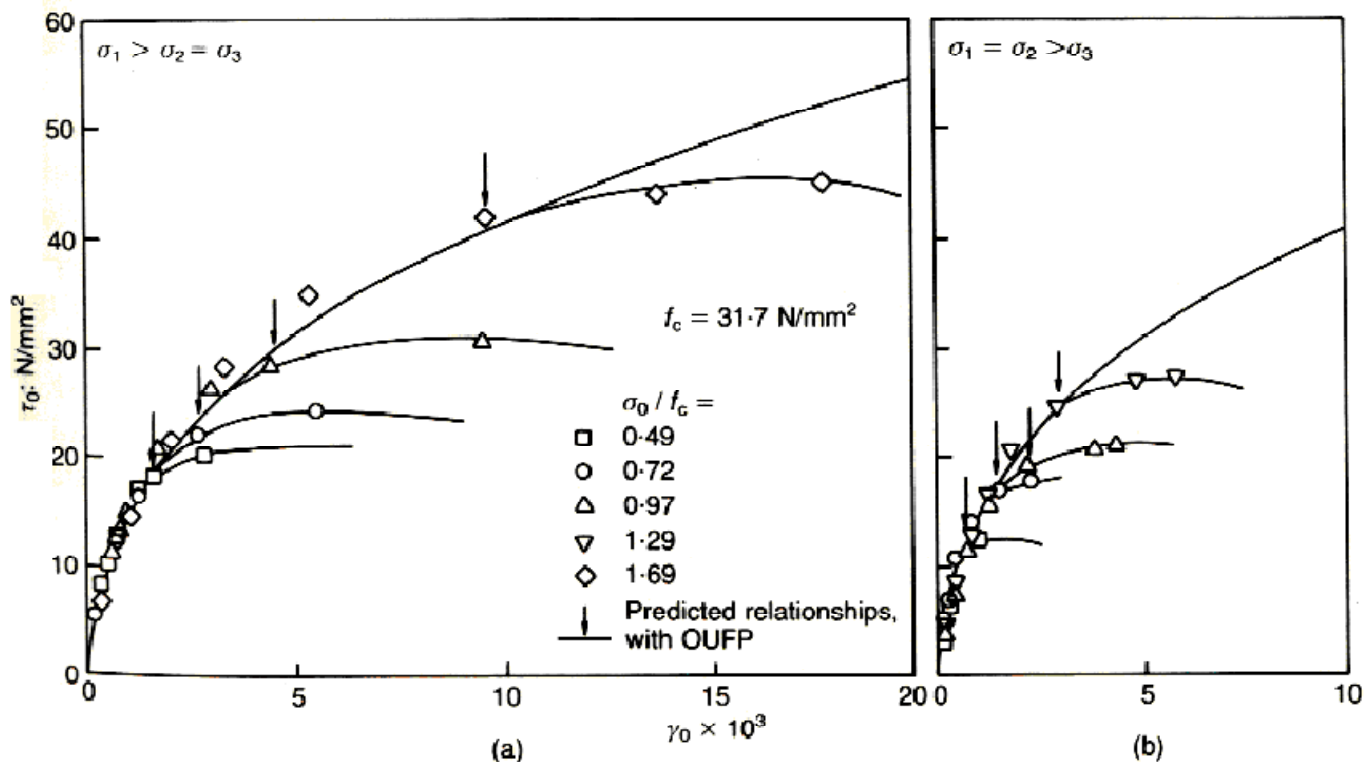
- Οι οκταεδρικές τάσεις ( $\sigma_0, \tau_0$ ) υπολογίζονται είτε από τις κύριες τάσεις  $\sigma_1, \sigma_2$  και  $\sigma_3$  είτε από τις καθολικές  $\sigma_{ij}$ .
- Υπολογίζονται τα  $K_s, G_s, E_s$  και  $\nu$ .
- Υπολογίζεται η υδροστατική διόρθωση  $\sigma_{id}$ .
- Υπολογίζονται οι καθολικές παραμορφώσεις  $\epsilon_{ij}$ .

Στο σημείο αυτό απαιτείται να υπολογιστεί η εσωτερική τάση  $\sigma_{id}$  της σχέσης (6.37) που εκφράζει τη σχέση  $\tau_0$ - $\epsilon_{od}$ .

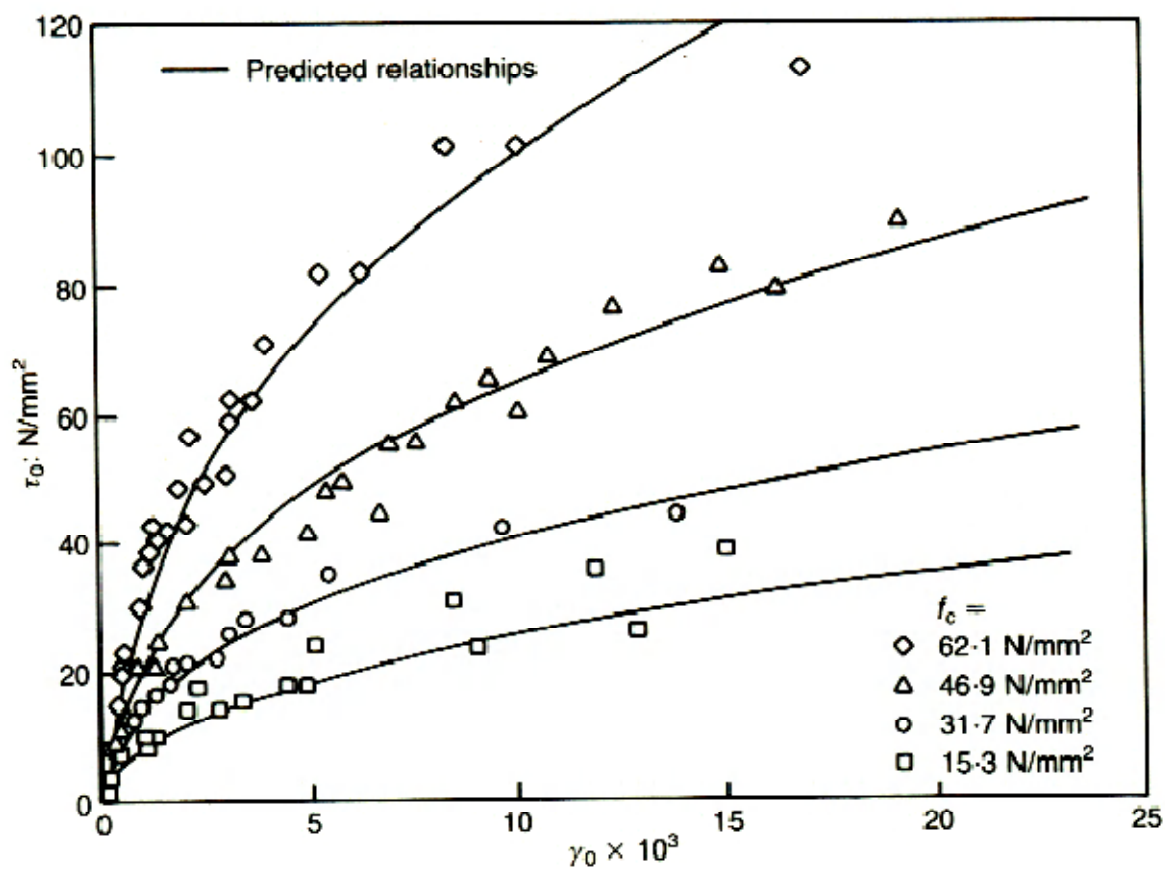


**Σχήμα 6.5** Σχέση διατμητικής οκταεδρικής τάσης  $\tau_0$  με υδροστατική παραμόρφωση  $\epsilon_{od}$  για διάφορους τύπους σκυροδέματος υπό καταπόνηση τάσεων  $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$  και  $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ .

Η ορθή οκταεδρική (υδροστατική) συνιστώσα  $\sigma_{id}$  της εσωτερικής έντασης που αναπτύσσεται στο δοκίμιο λόγω της μικρορηγματώσης που χαρακτηρίζει το σκυρόδεμα. Κάνοντας χρήση των αντίστοιχων καμπυλών (Σχήμα 6.5, 6.6, 6.7) που περιγράφουν τη σχέση  $\sigma_0$ - $\epsilon_0$ , από τις σχέσεις  $\tau_0$ - $\epsilon_{od}$  είναι δυνατόν να υπολογιστούν ονομαστικές τιμές της με τη διαδικασία που απεικονίζεται στο Σχήμα 6.8.

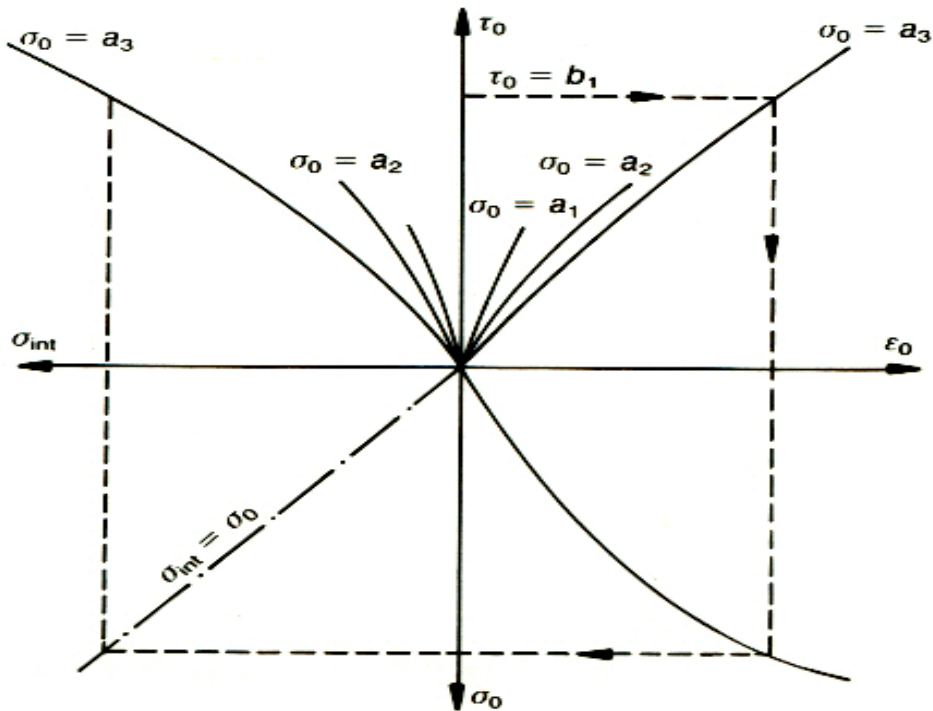


Σχήμα 6.6 Σχέση διατμητικής οκταεδρικής τάσης  $\tau_0$  με οκταεδρική διατμητική παραμόρφωση  $\gamma_0$  για τιμές της υδροστατικής πίεσης  $\sigma_0$  υπό εντατική κατάσταση  $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$  και  $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ .



Σχήμα 6.7 Σχέση διατμητικής οκταεδρικής τάσης  $\tau_0$  με οκταεδρική διατμητική παραμόρφωση  $\gamma_0$  για

διάφορους τύπους σκυροδέματος



**Σχήμα 6.8** Υπολογισμός της εσωτερικής τάσης  $\sigma_{id}$  για οποιονδήποτε συνδυασμό υδροστατικής και αποκλίνουσας τάσης ( $\sigma_o, \tau_o$ )

Συγκεκριμένα, για κάποια συγκεκριμένη τιμή  $\epsilon_{od}$  που αντιστοιχεί στην εντατική κατάσταση ( $\sigma_o, \tau_o$ ), η υδροστατική τάση (που μπορεί να θεωρηθεί ότι αναπαριστά κάποια τιμή της  $\sigma_{id}$ ) μπορεί να προσδιοριστεί από τη σχέση  $\sigma_o - \epsilon_{o(h)}$ . Με αυτόν τον τρόπο, η σχέση  $\tau_o - \epsilon_{o(d)}$  μπορεί να μετασχηματιστεί σε σχέση  $\sigma_{id} - \tau_o$ . Η διαδικασία αυτή περιγράφεται σχηματικά στο σχήμα 6.8.

Όταν η εντατική κατάσταση είναι γνωστή, τότε οι ποσότητες  $\sigma_o, \tau_o$ , θ μπορούν να υπολογιστούν ως εξής:

$$\sigma_o = \frac{I_1}{3} \quad (6.47)$$

$$\tau_o = \sqrt{\left(2\sigma_o^2 - \frac{2 \cdot I_2}{3}\right)} \frac{I_1}{3} \quad (6.48)$$

$$\cos(3\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{\tau_o^3} \cdot J_3 \quad (6.49)$$

όπου  $I_1, I_2$  είναι η πρώτη και η δεύτερη αναλλοίωτη του τανυστή των τάσεων, ενώ  $J_3$  είναι η τρίτη αναλλοίωτη του αποκλίνοντος τανυστή των τάσεων  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_o \delta_{ij}$ .

Δεδομένου ότι η  $\sigma_{id}$  είναι μία καθαρά υδροστατική συνιστώσα, οι εκφράσεις της εξίσωσης (6.23.a, 6.23.b) είναι ισοδύναμες με τις ακόλουθες σχέσεις οι οποίες γράφονται στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων ως εξής.

$$\epsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij} + \sigma_{id} \cdot \delta_{ij}}{2 \cdot G_s} - \frac{3 \cdot \nu_s}{E_s} \cdot (\sigma_o + \sigma_{id}) \cdot \delta_{ij} \quad (6.50)$$

όπου  $E_s=f(\sigma_0, \tau_0, f_c)$  και  $\nu_s=f(\sigma_0, \tau_0, f_c)$  είναι αντίστοιχα το **τέμνον μέτρο του Young** και ο **λόγος του Poisson**, τα οποία προκύπτουν από τις ακόλουθες εκφράσεις βάσει των  $K_s$  και  $G_s$ :

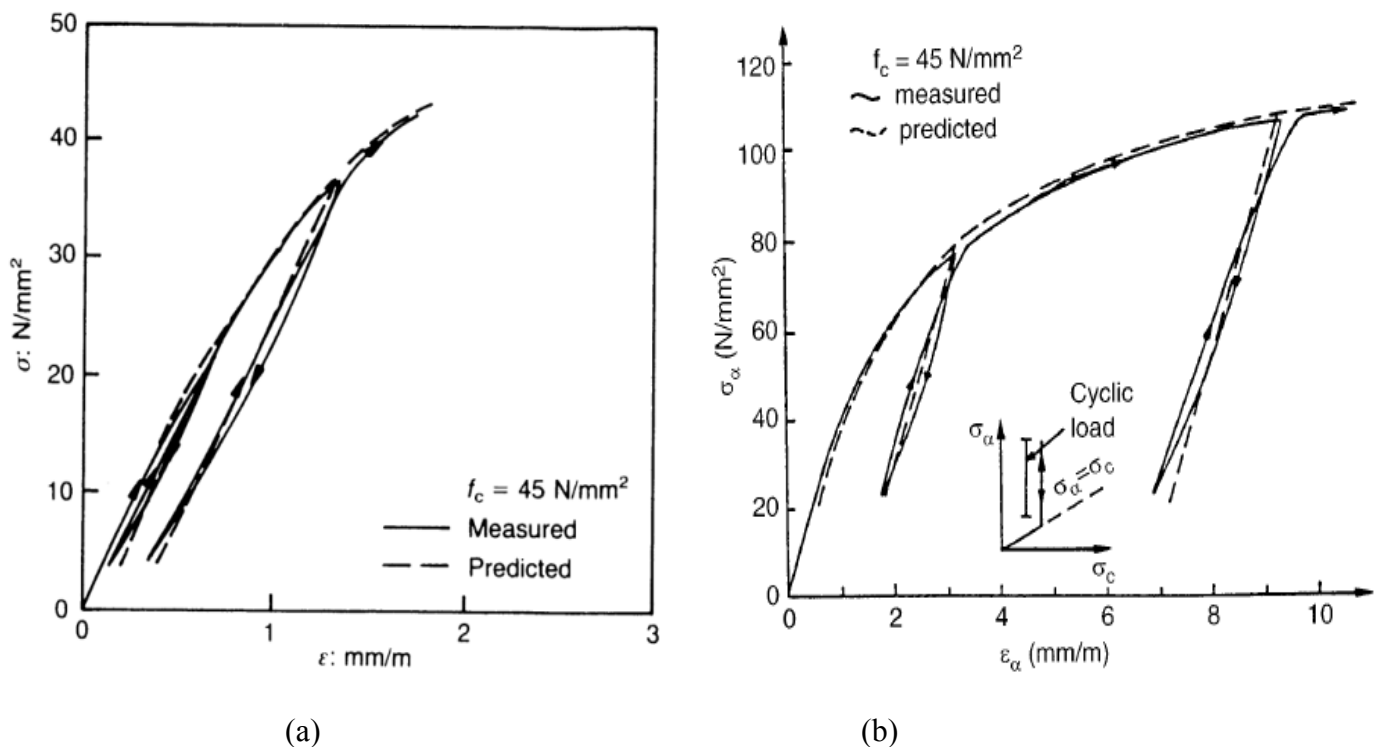
$$E_s = \frac{9 \cdot K_s \cdot G_s}{3 \cdot K_s + G_s} \quad (6.51)$$

$$\nu_s = \frac{3 \cdot K_s - 2 \cdot G_s}{3 \cdot K_s + 2 \cdot G_s} \quad (6.52)$$

Η μη γραμμική παραμόρφωση του σκυροδέματος υπό την επίδραση της διατμητικής τάσης  $\tau_0$  είναι σημαντικά μεγαλύτερη από την αντίστοιχη παραμόρφωση υπό την επίδραση της ορθής τάσης  $\sigma_0$ . Αν  $\max \tau_0$  είναι η μέγιστη αποκλίνουσα τάση σε κάθε σημείο της καμπύλης τάσης – παραμόρφωσης, τότε η ελαστική αποφόρτιση / επαναφόρτιση πραγματοποιείται όταν η αποκλίνουσα τάση  $\tau_0$  γίνεται μικρότερη από την  $\max \tau_0$ .

Σχετικά με τις συνθήκες αποφόρτισης – επαναφόρτισης, χρησιμοποιήθηκαν οι θεωρήσεις που προτείνονται στο άρθρο των Kotsovos and Spiliourous 1998. Σύμφωνα με αυτό, αποφόρτιση από κάποιο εντατικό σημείο και επαναφόρτιση με επιστροφή σε αυτό μπορεί να περιγραφεί επαρκώς από τις «αρχικές» ελαστικές μηχανικές ιδιότητες του υλικού. Δεδομένου ότι η μη γραμμική παραμορφωσιακή αποκλίνουσα συνιστώσα είναι πολύ μεγαλύτερη από την υδροστατική, το κριτήριο φόρτισης / επαναφόρτισης στηρίζεται στη σύγκριση της τρέχουσας αποκλίνουσας τάσης  $\tau_0$  με τη μέγιστη επιτευχθείσα μέχρι το τρέχον σημείο  $|\tau_0|_{\max}$ . Εάν είναι μεγαλύτερη τότε βρισκόμαστε σε συνθήκες φόρτισης, ενώ σε αντίθετη περίπτωση σε συνθήκες αποφόρτισης.

Το ακόλουθο σχήμα 6.9 απεικονίζει την πειραματική και την αναλυτική (analytical) καμπύλη τάσης – ανηγμένης παραμόρφωσης κατά τη διάρκεια φόρτισης και αποφόρτισης/ επαναφόρτισης για ένα τυπικό δοκίμιο από σκυρόδεμα ( $f_c = 45 \text{ MPa}$ ) υποβαλλόμενο σε (a) μονοαξονική και (b) τριαξονική θλίψη.



**Σχήμα 6.9** Πειραματική (measured) και αναλυτική (analytical) καμπύλη τάσης – ανηγμένης παραμόρφωσης κατά τη διάρκεια φόρτισης και αποφόρτισης/ επαναφόρτισης για ένα τυπικό δοκίμιο από σκυρόδεμα ( $f_c = 45 \text{ MPa}$ ) υποβαλλόμενο σε (a) μονοαξονική και (b) τριαξονική θλίψη.

## 6.1.2 Κριτήρια αστοχίας

Το **κριτήριο αστοχίας** είναι η σχέση που ικανοποιείται τη στιγμή της μετάβασης του υλικού από την ελαστική κατάσταση (αντιστρεπτά φαινόμενα) στην κατάσταση διαρροής ή θραύσης (στην περίπτωση των ψαθυρών υλικών, όπως είναι το σκυρόδεμα) (μη αντιστρεπτά φαινόμενα).

Στη σύνθετη εντατική κατάσταση, αποδεικνύεται πειραματικά ότι η αστοχία δεν εξαρτάται μόνο από τη μέγιστη εκ των κυρίων τάσεων  $\sigma_1$ , αλλά και από τις τρεις κύριες τάσεις  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Έχουν αναπτυχθεί διάφορες θεωρίες αστοχίας των υλικών, οι οποίες προσδιορίζουν τον κατάλληλο συνδυασμό των κυρίων τάσεων για τον οποίο επέρχεται αστοχία καθώς και τη σχέση που συνδέει τις κύριες τάσεις στη σύνθετη εντατική κατάσταση (τη στιγμή της αστοχίας) με την αντίστοιχη τάση σε απλή καταπόνηση.

**Κάθε κριτήριο αστοχίας θα πρέπει να είναι ανεξάρτητο από το σύστημα αναφοράς, καθώς και από την υδροστατική πίεση.**

Στην πλειονότητα των υλικών, η επιβολή υδροστατικής πίεσης (οσοδήποτε μεγάλης) δεν μπορεί να επιφέρει αστοχία, δεδομένου ότι η συμβολή της στην αλλαγή σχήματος του υλικού είναι αμελητέα. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι το κριτήριο αστοχίας δεν θα πρέπει να εξαρτάται από την πρώτη αναλλοίωτη  $I_1(T_\sigma)$  του τανυστή των τάσεων, που αποτελεί το τριπλάσιο της υδροστατικής πίεσης, αλλά θα αποτελεί συνάρτηση μόνο των άλλων δύο αναλλοίωτων  $I_2(T_\sigma), I_3(T_\sigma)$  του τανυστή των τάσεων ή εναλλακτικά συνάρτηση της δεύτερης  $I_2(D_\sigma)$  και της τρίτης  $I_3(D_\sigma)$  αναλλοίωτης του αποκλίνοντα τανυστή των τάσεων.

Ο αποκλίνων τανυστής των τάσεων ορίζεται ως εξής:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_o \cdot \delta_{ij} \Rightarrow \begin{pmatrix} s_{xx} & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_{yy} & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} - p \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.53)$$

όπου

- $\delta_{ij}$  είναι το δέλτα του Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{για } i = j \\ 0 & \text{για } i \neq j \end{cases} \quad (6.54)$$

- $p$  είναι η υδροστατική πίεση

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \Rightarrow p = \frac{I_1(T_\sigma)}{3} \quad (6.55)$$

Προφανώς, η πρώτη αναλλοίωτη του τανυστή των τάσεων είναι εκ ταυτότητας ίση με μηδέν.

$$I_1(D_\sigma) = 0 \quad (6.56)$$

Βάσει των ανωτέρω, συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση αστοχίας θα είναι η εξίσωση ενός κυλινδρικού πρίσματος στο χώρο των κυρίων τάσεων, του οποίου ο άξονας είναι η γραμμή  $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$ . Είναι αρκετό να εξετάζουμε μόνο το ίχνος της κυλινδρικής αυτής επιφάνειας επί του αποκλίνοντος επιπέδου. Το αποκλίνον επίπεδο διέρχεται από την αρχή  $O$  του συστήματος αξόνων  $O\sigma_1\sigma_2\sigma_3$  και είναι κάθετο στη γραμμή  $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$ . Το ίχνος αυτό, το οποίο είναι συμμετρικό ως προς τους άξονες  $1', 2', 3'$  (οι προβολές των κυρίων αξόνων επί του αποκλίνοντος επιπέδου), ονομάζεται **καμπύλη αστοχίας**.

Η καμπύλη αστοχίας έχει τις εξής ιδιότητες:

- δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων  $O$ , δεδομένου ότι η αστοχία συνδέεται με σημαντικές διατμητικές τάσεις.
- είναι κυρτή, δηλαδή πρέπει να κείται εξ ολοκλήρου από τη μία πλευρά της εφαπτομένης σε οποιοδήποτε σημείο της.

Γνωρίζουμε, επίσης, ότι οι κύριες τάσεις δεν εξαρτώνται από το αρχικό σύστημα αξόνων, το οποίο επιλέξαμε αυθαίρετα, και συνιστούν μοναδικές φυσικές ποσότητες, οι οποίες διατηρούνται σταθερές ανεξάρτητα από το σύστημα αξόνων που επιλέγουμε. Γι' αυτό το λόγο, άλλωστε, οι ποσότητες αυτές ονομάζονται πρώτη, δεύτερη και τρίτη αναλλοίωτη του τανυστή των τάσεων.

Ειδικά στην περίπτωση του σκυροδέματος, οι οκταεδρικές τάσεις χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν την αστοχία του σκυροδέματος, η οποία μπορεί να παρουσιαστεί στον τρισδιάστατο χώρο των κυρίων τάσεων ως μία ανοικτή και κυρτή επιφάνεια αστοχίας, όπως φαίνεται στο σχήμα 6.9. Η προβολή της επιφάνειας αστοχίας στο αποκλίνον επίπεδο, το οποίο είναι κάθετο με τη διεύθυνση της  $\sigma_0$ , συνιστά μία καμπύλη η οποία αντιπροσωπεύει τον γεωμετρικό τόπο της μέγιστης επιτρεπόμενης αποκλίνουσας τάσης  $\tau_{0u}$ . Η μέγιστη αυτή τάση μπορεί να υπολογιστεί από την υδροστατική τάση  $\sigma_0$  και από τη στροφική γωνία  $\theta$ . Υπενθυμίζουμε ότι η στροφική γωνία  $\theta$  είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της αποκλίνουσας τάσης  $\tau_0$  με την προβολή οποιουδήποτε άξονα του συστήματος αξόνων των κυρίων τάσεων στο αποκλίνον επίπεδο.

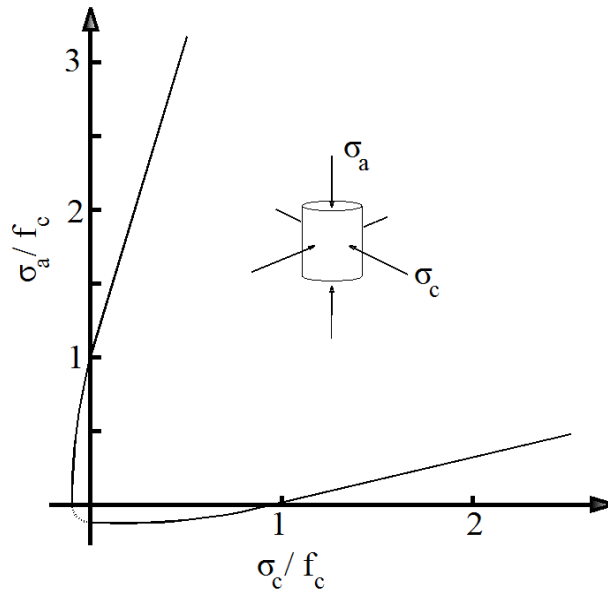
$$\tau_{0u} = \frac{2\tau_{0c}(\tau_{0c}^2 - \tau_{0e}^2)\cos\theta + \tau_{0c}(2\tau_{0e} - \tau_{0c})\sqrt{4(\tau_{0c}^2 - \tau_{0e}^2)\cos^2\theta + 5\tau_{0e}^2 - 4\tau_{0c}\tau_{0e}}}{4(\tau_{0c}^2 - \tau_{0e}^2)\cos^2\theta + (\tau_{0c} - 2\tau_{0e})^2} \quad (6.57)$$

Οι τάσεις  $\tau_{0e}$  και  $\tau_{0c}$ , οι οποίες χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της μέγιστης αποκλίνουσας αντοχής με βάση το κριτήριο αστοχίας, προκύπτουν και αυτές από πειραματικά δεδομένα. Μία τέτοια προσέγγιση μας οδηγεί στις ακόλουθες εκφράσεις:

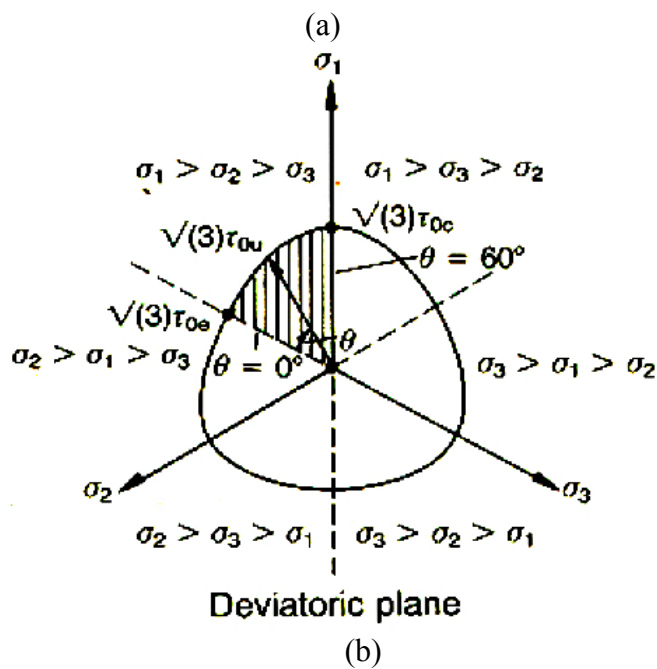
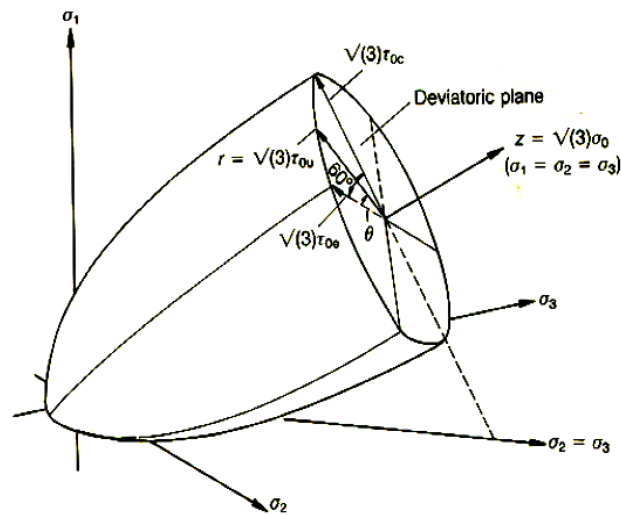
$$\frac{\tau_{0c}}{f_c} = 0,944 \cdot \left( \frac{\sigma_0}{f_c} + 0,05 \right)^{0,724} \quad (6.58)$$

$$\frac{\tau_{0e}}{f_c} = 0,633 \cdot \left( \frac{\sigma_0}{f_c} + 0,05 \right)^{0,857} \quad (6.59)$$

Η σχέση (6.57) περιγράφει μία ομαλή κυρτή επιφάνεια, της οποίας οι εφαπτόμενες είναι κάθετες στις διευθύνσεις των τάσεων  $\tau_{0e}$  και  $\tau_{0c}$  για  $\theta = 0^\circ$  και  $\theta = 60^\circ$  αντίστοιχα (Σχήμα 6.11). Για το λόγο αυτό, μπορούμε να καθορίσουμε πλήρως την επιφάνεια αστοχίας όταν γνωρίζουμε τα μεγέθη  $\sigma_0$ ,  $\tau_{0e}$  και  $\tau_{0c}$ .



Σχήμα 6.10 Η τομή της επιφάνειας αστοχίας του σκυροδέματος με το επίπεδο που ορίζεται από ένα διαγώνιο άξονα και έναν κύριο άξονα του συστήματος αξόνων των κυρίων τάσεων



Σχήμα 6.11 Σχηματική αναπαράσταση της επιφάνειας μέγιστης αντοχής (α) Προοπτικό στο χώρο των τάσεων (β) Εγκάρσια τομή της επιφάνειας αστοχίας με το αποκλίνον επίπεδο

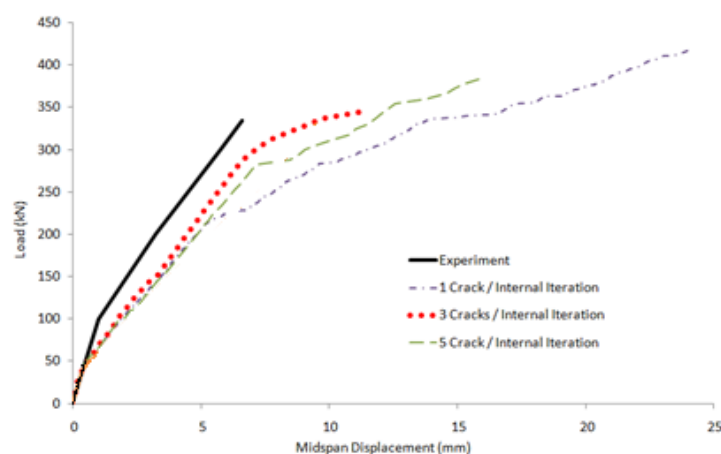
### 6.1.3 Το τροποποιημένο καταστατικό προσομοίωμα

Ένας τρισδιάστατος καταστατικός νόμος σκυροδέματος σε συνδυασμό με την προσέγγιση της διανεμημένης ρωγμής εισάγει **αριθμητική αστάθεια** στην επαναληπτική διαδικασία Newton – Raphson, ιδιαίτερα **όταν ο οπλισμός εισέρχεται στη φάση διαρροής**. Σε ορισμένες περιπτώσεις, η μη σύγκλιση της διαδικασίας παρατηρείται **όταν η ρηγμάτωση αναπτύσσεται τοπικά**, με αποτέλεσμα η κατασκευή να εμφανίζει πρόωρη μείωση φέρουσας ικανότητας χωρίς να εισέρχεται στη ζώνη αστοχίας (failure zone). Το γεγονός αυτό οφείλεται στην εισαγόμενη αστάθεια μέσω του καταστατικού μητρώου  $[E]$  (6x6). Η **δυσκολία σύγκλισης** εντοπίζεται κυρίως όταν αρκετοί διαγώνιοι

όροι του μητρώου δυσκαμψίας του στοιχείου γίνονται μηδενικοί ή αρνητικοί. Όταν συμβαίνει άνοιγμα ρωγμών δημιουργούνται αιφνίδια υπολειπόμενες δυνάμεις (unbalanced forces), οι οποίες επιφέρουν αστάθεια στον αλγόριθμο της επίλυσης, ιδιαίτερα **όταν ανοίγει ταυτόχρονα ένας μεγάλος αριθμός ρωγμών**.

Στις αριθμητικές τους εφαρμογές, οι Kotsovos και Pavinovic χρησιμοποίησαν εξαεδρικά στοιχεία 20 και 27 κόμβων και 3x3 κανόνα ολοκλήρωσης. Τα **σοβαρά προβλήματα σύγκλισης** τους οδήγησαν στην **εισαγωγή ενός περιορισμού στον αριθμό των ρωγμών που ανοίγουν σε κάθε βήμα Newton – Raphson**. Ειδικότερα, δεν επέτρεπαν την εμφάνιση στο ίδιο βήμα Newton – Raphson περισσότερων των 2 ή 3 ρωγμών. Με τον περιορισμό αυτό προσπαθούσαν **να ελέγξουν αριθμητικά το άνοιγμα των ρωγμών και να αντιμετωπίσουν τα προβλήματα σύγκλισης**. Ωστόσο, με τον τρόπο αυτό καθιστούσαν τον καταστατικό νόμο του υλικού **μη αντικειμενικό**, καθώς διαφορετικές τιμές για το μέγιστο επιτρεπόμενο αριθμό ρωγμών οδηγούσαν σε διαφορετικά αριθμητικά αποτελέσματα και στις περισσότερες περιπτώσεις σε υπερεκτίμηση της αντοχής του υπό εξέταση φορέα από οπλισμένο σκυρόδεμα.

Η επίδραση αυτού του περιορισμού απεικονίζεται στο σχήμα 6.12, όπου παρουσιάζεται η καμπύλη φορτίου – μετατόπισης για μία αμφιέριστη δοκό από οπλισμένο σκυρόδεμα, η οποία έχει οπλιστεί μόνο με διαμήκη οπλισμό χωρίς συνδετήρες. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε την πειραματική καμπύλη, την καμπύλη που προέκυψε χωρίς κανένα περιορισμό στο άνοιγμα των ρωγμών και τρεις καμπύλες που αντιστοιχούν σε μέγιστο αριθμό ρωγμών ανά εσωτερική επανάληψη ίσο με 1, 3, 5. Παρατηρούμε ότι οι τρεις καμπύλες που αντιστοιχούν σε διαφορετικές παραμέτρους του περιορισμού (1, 3, 5) διαφοροποιούνται σημαντικά μεταξύ τους ιδιαίτερα στον μεταελαστικό κλάδο, γεγονός που επισημαίνει ακόμη περισσότερο την προαναφερθείσα αδυναμία του περιορισμού.



**Σχήμα 6.12** Επίδραση του επιτρεπόμενου αριθμού ρωγμών ανά επανάληψη Newton – Raphson στη μορφή της καμπύλης φορτίου - μετατόπισης



Οι Spiliopoulos και Lykidis πρότειναν **ενιαία αντιμετώπιση του ανοίγματος των ρωγμών** χωρίς κάποιον περιορισμό στον αριθμό των ρωγμών ανά βήμα Newton – Raphson. Κάθε ρωγμή επιτρέπεται να ανοίξει σε οποιοδήποτε σημείο Gauss, με την προϋπόθεση ότι η αντίστοιχη αποκλίνουσα τάση έχει προσεγγίσει τη μέγιστη δυνατή τιμή (αντοχή). Ωστόσο, η αντιμετώπιση αυτή απαιτούσε τη χρησιμοποίηση εξαεδρικών στοιχείων 27 κόμβων και κανόνα ολοκλήρωσης 3x3x3, γεγονός που επέφερε **αυξημένο υπολογιστικό κόστος και χρόνο** ακόμη και για small-scale μοντέλα. Παρόλο που το πρόβλημα της αριθμητικής αστάθειας μπορεί να αμβλυθεί με τη χρήση ανωτέρας τάξεως στοιχείων, η συνολική διαδικασία επιβαρύνεται επιπρόσθετα λόγω των **αυξημένων απαιτήσεων σε αριθμό εσωτερικών επαναλήψεων Newton-Raphson ανά εξωτερικό βήμα φόρτισης** έως ότου επιτευχθεί σύγκλιση.

Στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία, το προτεινόμενο μοντέλο για την προσομοίωση του σκυροδέματος, το οποίο έχει αποδειχθεί **περισσότερο αριθμητικά σταθερό και αποδοτικό**, χρησιμοποιεί:

- ❖ **ισοπαραμετρικά οκτακομβικά εξαεδρικά στοιχεία**
- ❖ **2x2x2 κανόνα ολοκλήρωσης**
- ❖ **τροποποιημένο τον καταστατικό νόμο των Kotsovos and Pavlovic**
- ❖ **ενιαία αντιμετώπιση του ανοίγματος των ρωγμών.**

Στο καταστατικό προσομοίωμα σκυροδέματος των Kotsovos and Pavlovic, το τέμνον μέτρο συμπίεστικότητας  $K_S$  και το τέμνον μέτρο διάτμησης  $G_S$  αλλάζουν ακόμη και όταν οι αναπτυσσόμενες τάσεις είναι σημαντικά μικρότερες από την θλιπτική αντοχή του σκυροδέματος ( $\tau_{0u} \ll \max \tau$ ), διότι οι τιμές τους εξαρτώνται τόσο από την υδροστατική συνιστώσα  $\sigma_0$  των οκταεδρικών τάσεων όσο και από την αποκλίνουσα συνιστώσα  $\tau_0$ . Η ενημέρωση των εξαεδρικών μητρών στιβαρότητας στα αρχικά στάδια της φόρτισης απαιτεί **επιπρόσθετη υπολογιστική προσπάθεια χωρίς ωστόσο κάποια σημαντική βελτίωση στο αποτέλεσμα** σχετικά με την πρόβλεψη της μη γραμμικής συμπεριφοράς της κατασκευής.

Σε κάθε εξωτερικό βήμα φόρτισης ορισμένα εξαεδρικά στοιχεία ρηγματώνονται, άλλα έχουν ήδη ρηγματωθεί, ενώ υπάρχουν και κάποια τα οποία παραμένουν στην ελαστική περιοχή και παράγουν επιπρόσθετες υπολειπόμενες δυνάμεις, οι οποίες θα πρέπει να επιβληθούν ως εξωτερικές φορτίσεις κατά τη διάρκεια της διαδικασίας Newton – Raphson. Αριθμητική αστάθεια εισάγεται στη μη γραμμική διαδικασία επίλυσης ως αποτέλεσμα του υπολογισμού των υπολειπόμενων αυτών δυνάμεων. Έχοντας να επιλύσουμε ένα αριθμητικά παθογενές πρόβλημα όταν συμβαίνει ρηγματώση, **τα μη ρηγματωμένα εξαεδρικά στοιχεία** αντί να αποτελούν σταθεροποιητικό παράγοντα, αντιθέτως **εισάγουν επιπρόσθετη αστάθεια και αυξάνουν το υπολογιστικό κόστος** μέσω της διατύπωσης του καταστατικού νόμου του υλικού και του συνεχή εκσυγχρονισμού του μητρώου δυσκαμψίας τους.

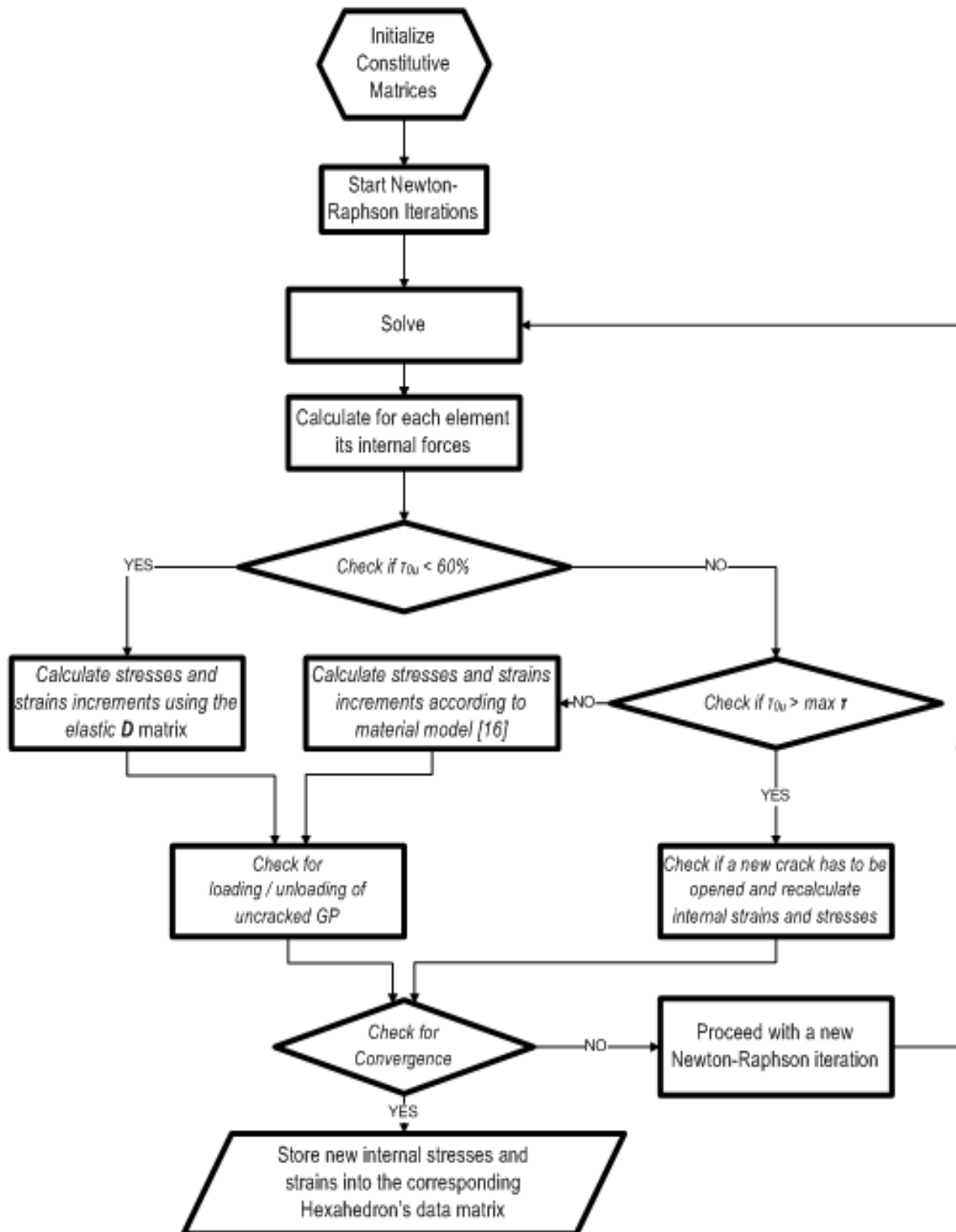
Λαμβάνοντας υπόψιν τις αριθμητικές αυτές δυσκολίες, προτείνουμε την ακόλουθη τροποποίηση σχετικά με τον αριθμητικό χειρισμό του καταστατικού προσομοιώματος των Kotsovos and Pavlovic. Έπειτα από εκτεταμένη παραμετρική διερεύνηση, καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι **αν η μέγιστη αποκλίνουσα τάση  $\tau_{0u}$  σε κάποιο σημείο Gauss είναι μικρότερη από το 60% της αντίστοιχης αντοχής, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ελαστικό καταστατικό μητρώο E**. Μόνο αν η υπολογιζόμενη αποκλίνουσα τάση  $\tau_{0u}$  υπερβαίνει το 60% της αντίστοιχης αντοχής, ενεργοποιείται ο μη γραμμικός νόμος υλικού και το καταστατικό μητρώο E υπολογίζεται ενημερώνοντας το εφαπτομενικό μέτρο συμπίεστικότητας  $K_t$  σύμφωνα με τη σχέση:

$$\frac{K_t}{K_e} = \begin{cases} \frac{1}{1 + b \cdot A \cdot \left(\frac{\sigma_0}{f_c}\right)^{b-1}} & \text{για } \frac{\sigma_0}{f_c} \leq 2 \\ \frac{1}{1 + 2^{b-1} \cdot A \cdot b} & \text{για } \frac{\sigma_0}{f_c} > 2 \end{cases} \quad (6.30)$$

και το εφαπτομενικό μέτρο διάτμησης  $G_t$  σύμφωνα με τη σχέση:

$$\frac{G_t}{G_e} = \frac{1}{1 + d \cdot C \cdot \left(\frac{T_o}{f_c}\right)^{d-1}} \quad (6.33)$$

Το σχήμα 6.13 απεικονίζει το διάγραμμα ροής του προτεινόμενου αριθμητικού χειρισμού του καταστατικού νόμου σκυροδέματος.



Σχήμα 6.13 Το διάγραμμα ροής του προτεινόμενου καταστατικού προσομοιώματος σκυροδέματος

#### 6.1.4 Η μέθοδος της διανεμημένης ρωγμής (Smearred Crack Modeling)

Για την προσομοίωση της ρηγμάτωσης έχουν αναπτυχθεί δύο προσεγγίσεις:

1. η **θεώρηση της διακριτής ρωγμής**
2. η **θεώρηση της διανεμημένης ρωγμής**, η οποία περιλαμβάνει ως υποκατηγορίες **το προσομοίωμα της σταθερής διανεμημένης ρωγμής** και **το προσομοίωμα της στρεπτόμενης διανεμημένης ρωγμής**.

**Με την θεώρηση της διακριτής ρωγμής**, η δημιουργία μίας ασυνέχειας ρηγμάτωσης προσομοιώνεται με επαναδιακριτοποίηση του φορέα και διαχωρισμό των κόμβων εκατέρωθεν μίας ρωγμής. Εισάγεται, δηλαδή, ένα φυσικό κενό στο δίκτυο των πεπερασμένων στοιχείων στη θέση της ρωγμής. Αν και είχε χρησιμοποιηθεί στην πρώτη ανάλυση προσομοιωμάτων οπλισμένου σκυροδέματος με πεπερασμένα στοιχεία, δεν υιοθετήθηκε μετέπειτα σε μεγάλο βαθμό από την επιστημονική και ερευνητική κοινότητα.

Περισσότερο δημοφιλής αποδείχθηκε **η μέθοδος της διανεμημένης ρωγμής**, η οποία συνιστά μία από τις σημαντικότερες προσεγγίσεις για την προσομοίωση της θραύσης του σκυροδέματος. Η ρηγμάτωση περιγράφεται στα πλαίσια της μηχανικής της βλάβης (damage mechanics) με αλλαγή των καταστατικών ιδιοτήτων, των μητρώων δυσκαμψίας και των τάσεων των πεπερασμένων στοιχείων στα σημεία-διατομές ολοκλήρωσης Gauss, έτσι ώστε μία ρωγμή σε ένα από αυτά να είναι ισοδύναμη με έναν άπειρο αριθμό μικρορηγματώσεων διανεμημένων σε όλον τον όγκο του στοιχείου. Βασίζεται στη θεώρηση ξεχωριστών μεμονωμένων ρωγμών χωρίς να χρειάζεται επαναδιακριτοποίηση (remeshing), όπως απαιτείται στη θεώρηση της διακριτής ρωγμής.

Διακρίνουμε δύο είδη προσομοιώματος διανεμημένης ρωγμής. **Στο προσομοίωμα σταθερής διανεμημένης ρωγμής** (fixed smeared crack model) η ρωγμή διαμορφώνεται κάθετα στη διεύθυνση της μέγιστης εφελκυστικής τάσης και παραμένει σε αυτήν την διεύθυνση για το υπόλοιπο της ανάλυσης. Αντίθετα, **στο εναλλακτικό προσομοίωμα της στρεπτόμενης διανεμημένης ρωγμής** (rotating crack model), το επίπεδο της ρωγμής επιτρέπεται να στραφεί ανάλογα με το πως μετασχηματίζεται το σύστημα των κυρίων τάσεων κατά τη διάρκεια της ανάλυσης.

Ωστόσο, κατά τη μακροχρόνια χρήση της μεθόδου της διανεμημένης ρωγμής διαπιστώθηκαν διάφορα προβλήματα στις εφαρμογές. Τα κρισιμότερα προκύπτουν από **το φαινόμενο της συγκέντρωσης της παραμόρφωσης**, το οποίο δεν είναι συμβατό με τις παραδοχές του συνεχούς μέσου. Για την αντιμετώπιση αυτών των δυσχερειών έχουν αναπτυχθεί διάφορες μέθοδοι περιορισμού της συγκέντρωσης (localization limiters), μέσω των οποίων έχει περιοριστεί **το πρόβλημα της εξάρτησης της λύσης από το μέγεθος του δικτύου των πεπερασμένων στοιχείων**, καθιστώντας τη λύση μας περισσότερο ρεαλιστική και αντικειμενική. Όπως θα παρατηρήσουμε στο αμέσως επόμενο κεφάλαιο των αριθμητικών εφαρμογών, **η επιρροή του φαινομένου αυτού είναι περισσότερο έντονη στην προσομοίωση των κυλινδρικών δοκιμών και γενικότερα των προσομοιωμάτων από άοπλο σκυρόδεμα και λιγότερο στην προσομοίωση μοντέλων από οπλισμένο σκυρόδεμα**, των οποίων η συμπεριφορά εξαρτάται κυρίως από τα χαρακτηριστικά του οπλισμού και όχι από την ρηγμάτωση του σκυροδέματος. Ο οπλισμός δεν παρουσιάζει παραμορφωσιακή χαλάρωση, με αποτέλεσμα να αμβλύνεται το πρόβλημα της εξάρτησης της ορθότητας της αριθμητικής λύσης από το μέγεθος του πεπερασμένου στοιχείου. Λόγω της ύπαρξης του οπλισμού, η λύση αγνοώντας την χαλάρωση του σκυροδέματος σε εφελκυσμό είναι σχεδόν ίδια με αυτή που προκύπτει λαμβάνοντας υπόψιν την παραμορφωσιακή χαλάρωση.

**Στον προτεινόμενο κώδικα ReConAn εφαρμόζεται η προσέγγιση της σταθερής διανεμημένης ρωγμής** όπως διατυπώθηκε από τους Kotsovos & Pavlovic, η οποία βασίστηκε σε πειραματικές δοκιμές υπό τριαξονικές εντατικές καταστάσεις και αντιμετωπίζει τη ρηγμάτωση ως

πλήρη απότομη απώλεια της έντασης, δηλαδή ως πλήρως ψαθυρή. Σημαντικό της πλεονέκτημα συνιστά το γεγονός ότι απαιτείται μόνο μία παράμετρος για την περιγραφή της συμπεριφοράς του σκυροδέματος, η οποία δεν είναι άλλη από την μονοαξονική θλιπτική του αντοχή  $f_c$ , την οποία εύκολα εξάγουμε από μία δοκιμή του κυλινδρικού δοκιμίου της συγκεκριμένης ποιότητας σκυροδέματος υπό μονοαξονική θλίψη. Η εξάρτηση της αντικειμενικότητας της αριθμητικής λύσης από το δίκτυο των πεπερασμένων στοιχείων είναι περιορισμένη σε φορείς από οπλισμένο σκυρόδεμα και μπορεί να αντιμετωπιστεί ακόμη περισσότερο θέτοντας περιορισμό στην ελάχιστη διάσταση ενός πεπερασμένου στοιχείου. Παραμετρικές διερευνήσεις έδειξαν ότι το πρόβλημα δεν είναι τόσο έντονο σε περιπτώσεις δικτύων με μέγεθος πεπερασμένων στοιχείων μεγαλύτερο από το διπλάσιο ή τριπλάσιο της μέγιστης διάστασης των αδρανών.

Στα πλαίσια της επαυξητικής εσωτερικής επαναληπτικής διαδικασίας, οι προσαυξήσεις των τάσεων σε κάθε σημείο ολοκλήρωσης Gauss προκύπτουν από τις αντίστοιχες προσαυξήσεις των παραμορφώσεων μέσω του καταστατικού μητρώου  $E$ . Ενδεικτική είναι η κατωτέρω σχέση (6.60), η οποία όμως ισχύει για μη ρηγματωμένη διατομή – σημείο ολοκλήρωσης Gauss χωρίς ασυνέχειες.

$$\Delta\sigma = E \cdot \Delta\varepsilon \quad (6.60)$$

Για να εμφανιστεί ρωγή σε μία διατομή-σημείο ολοκλήρωσης Gauss θα πρέπει στη διατομή αυτή να έχει ξεπεραστεί η μέγιστη δυνατή τιμή (αντοχή) της αποκλίνουσας τάσης  $\tau_{0u}$  (συνήθως σε εφελκυσμό ή σε συνδυασμό εφελκυσμού και θλίψης). Αν ικανοποιείται η ανωτέρω συνθήκη, τότε σχηματίζεται το **επίπεδο της ρωγμής**, το οποίο είναι κάθετο στη διεύθυνση της μέγιστης εφελκυστικής τάσης που υπάρχει προφανώς πριν τη ρηγμάτωση. Προκειμένου να μην έχουμε υπολειπόμενες δυνάμεις στους αντίστοιχους κόμβους, θέτουμε την εφελκυστική αυτή τάση ίση με το μηδέν. Η σχέση (6.60), η οποία συνδέει τις προσαυξητικές τάσεις με τις προσαυξητικές παραμορφώσεις, προσαρμόζεται κατάλληλα έτσι ώστε να θεωρεί μηδενική τάση κατά τη διεύθυνση του επιπέδου της ρωγμής (κατά τη διεύθυνση του άξονα 3', όπως απεικονίζεται χαρακτηριστικά στο σχήμα 6.14) και τροποποιημένη διατμητική στιβαρότητα κατά μήκος του επιπέδου της ρωγμής μέσω του συντελεστή μερικής διατήρησης της διατμητικής στιβαρότητας  $\beta$ .

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma'_x \\ \Delta\sigma'_y \\ \Delta\sigma'_z \\ \Delta\tau'_{xy} \\ \Delta\tau'_{yz} \\ \Delta\tau'_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2G + \mu & \mu & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu & 2G + \mu & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & G & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \beta G & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \beta G \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon'_x \\ \Delta\varepsilon'_y \\ \Delta\varepsilon'_z \\ \Delta\gamma'_{xy} \\ \Delta\gamma'_{yz} \\ \Delta\gamma'_{zx} \end{Bmatrix} \quad (6.61)$$

όπου  $\mu$  είναι μία από τις σταθερές του Lamé.

Υπενθυμίζουμε τις σχέσεις που συνδέουν τις σταθερές  $\mu$ ,  $\lambda$  του Lamé με το μέτρο ελαστικότητας και τον λόγο του Poisson  $\nu$ .

$$E = \frac{\mu \cdot (3 \cdot \lambda + 2 \cdot \mu)}{\lambda + \mu} \quad (6.62)$$

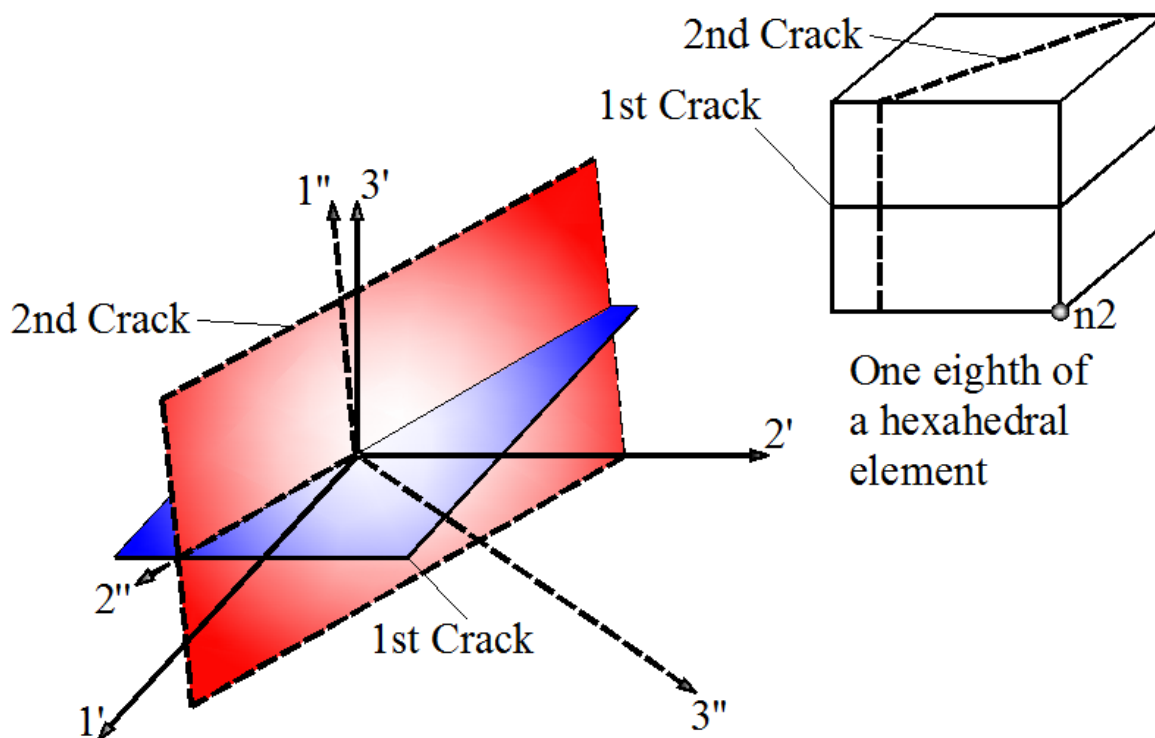
$$\nu = \frac{\lambda}{2 \cdot (\lambda + \mu)} \quad (6.63)$$

Στο σχήμα 6.14 απεικονίζεται μία διατομή στην οποία έχουν εμφανιστεί δύο ρωγμές. Ειδικότερα, παρατηρούμε το επίπεδο της κάθε ρωγμής και τους αντίστοιχους άξονες. Οι άξονες 1', 2', 3' αναφέρονται στην ρωγμή 1, ενώ οι άξονες 1'', 2'', 3'' αναφέρονται στη ρωγμή 2. Οι άξονες 3', 3'' είναι αντίστοιχα κάθετοι στο επίπεδο της ρωγμής 1,2. Το εύρος της ρωγμής σχεδιάζεται (στο ReConAn Eye) και θεωρείται ίσο με το  $\frac{1}{8}$  της ακμής του αντίστοιχου εξαεδρικού στοιχείου.

Αν μετά την εμφάνιση της πρώτης ρωγμής εμφανιστεί στην ίδια διατομή εφελκυστική τάση σε διαφορετική διεύθυνση από την διεύθυνση της προηγούμενης η οποία να υπερβαίνει την εφελκυστική αντοχή του σκυροδέματος, τότε σχηματίζεται στην ίδια διατομή μία δεύτερη ρωγμή. Προφανώς, το επίπεδο της δεύτερης ρωγμής θα είναι κάθετο στη διεύθυνση της νέας μέγιστης εφελκυστικής τάσης. Σε συνδυασμό και με την προηγούμενη εντατική κατάσταση, **μη μηδενικές τάσεις μπορούν να αναπτυχθούν μόνο κατά μήκος της τομής των δύο επιπέδων των ρωγμών**. Για τον λόγο αυτό, οι προσαυξητικές τάσεις κατά μήκος των καρτεσιανών αξόνων 1'', 2'', 3'' συνδέονται με τις αντίστοιχες προσαυξητικές παραμορφώσεις μέσω της ακόλουθης σχέσης (6.64).

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma''_x \\ \Delta\sigma''_y \\ \Delta\sigma''_z \\ \Delta\tau''_{xy} \\ \Delta\tau''_{yz} \\ \Delta\tau''_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2G + \mu & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \beta G & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \beta G & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \beta G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon''_x \\ \Delta\varepsilon''_y \\ \Delta\varepsilon''_z \\ \Delta\gamma''_{xy} \\ \Delta\gamma''_{yz} \\ \Delta\gamma''_{zx} \end{Bmatrix} \quad (6.64)$$

Στην περίπτωση που εμφανιστεί και τρίτη εφελκυστική τάση στην ίδια διατομή, τότε θεωρείται μηδενική η συνεισφορά της συγκεκριμένης διατομής στη συνολική δυσκαμψία του υπό εξέταση φορέα από σκυρόδεμα.



Σχήμα 6.14 Οι τοπικοί άξονες σε μία διατομή – σημείο ολοκλήρωσης με δύο ρωγμές

- **Ο συντελεστής μερικής διατήρησης της διατμητικής στιβαρότητας  $\beta$**

Ο συντελεστής μερικής διατήρησης της διατμητικής στιβαρότητας  $\beta$  (shear retention factor) διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στις περισσότερες περιπτώσεις θεώρησης διανεμημένης ρωγμής, καθώς **συνεισφέρει στην ευστάθεια της μη γραμμικής επαναληπτικής διαδικασίας, ιδιαίτερα όταν αρχίζουν να σχηματίζονται ρωγμές**. Στην περίπτωση που θεωρήσουμε μηδενική την τιμή του, τότε με την εμφάνιση της πρώτης ρωγμής στο καθολικό μητρώο στιβαρότητας θα εμφανιστεί πληθώρα μηδενικών διαγώνιων όρων, με αποτέλεσμα η αντιστροφή του μητρώου να γίνεται υπολογιστικά εξαιρετικά επίπονη αν όχι αδύνατη. Το πρόβλημα αυτό παρατηρείται εντονότερο σε φορείς από οπλισμένο σκυρόδεμα με λιγότερο οπλισμό από τον απαιτούμενο.

Η φυσική σημασία της παραμέτρου  $\beta$  αφορά στην **παραμένουσα διατμητική στιβαρότητα κατά μήκος της επιφάνειας της ρωγμής λόγω της αλληλεμπλοκής των αδρανών** (aggregate interlock). Η συνηθέστερη τιμή του  $\beta$  που χρησιμοποιούμε είναι το 0,1, καθώς έχει αποδειχθεί ότι με την τιμή αυτή προσεγγίζουμε κατά το βέλτιστο δυνατόν τα πειραματικά αποτελέσματα. Η τιμή 0,1 του  $\beta$  υποδηλώνει ότι μετά το άνοιγμα της ρωγμής λόγω της αλληλεμπλοκής των αδρανών κατά μήκος της επιφάνειας ρηγμάτωσης παραμένει το 10% της αρχικής διατμητικής αντοχής.

Με τη χρήση του συντελεστή  $\beta$  **προσπαθούμε να αντισταθμίσουμε ορισμένα αριθμητικά προβλήματα που ενδεχομένως να αντιμετωπίσουμε λόγω της προσέγγισης της διανεμημένης ρωγμής**. Έχει διαπιστωθεί ότι μη μηδενική τιμή του  $\beta$  μπορεί **να ελαττώσει αποτελεσματικά τον αριθμό των μηχανισμών του ρηγματωμένου σημείου ολοκλήρωσης** σε σχέση με αυτόν που θα προέκυπτε για μηδενική τιμή του  $\beta$ . Για παράδειγμα, σε περιπτώσεις δημιουργίας πολλών παράλληλων ρωγμών σε διαδοχικά πεπερασμένα στοιχεία, ο ενδιάμεσος κόμβος μπορεί να καταλήξει να είναι πολύ χαλαρά συνδεδεμένος με το υπόλοιπο σύστημα, με αποτέλεσμα να έχουμε πρόωρες αποκλίσεις από την αριθμητική λύση, οι οποίες ενδέχεται να τερματίσουν πρόωρα την ανάλυση.

Γενικά, **μεγάλες τιμές** της παραμέτρου ( $0,5 < \beta < 1$ ) μπορούν να προσελκύσουν φορτίο σε μεγάλο βαθμό λόγω της μεγάλης στιβαρότητας που διατηρούν και μετά τη ρηγμάτωση και να οδηγήσουν σε **υπερεκτίμηση της αντοχής** και σε **μη ρεαλιστική μορφή καμπύλης φορτίου - μετατόπισης** (έχουμε πλέον παρασιτική στιβαρότητα), ενώ **μικρές τιμές** (όπως  $\beta=0$  ή  $\beta=0,01$ ) οδηγούν σε πρόωρα μη αντιστρέψιμα μητρώα στιβαρότητας για τα ρηγματωμένα στοιχεία και **υποεκτίμηση της αντοχής**. Αναλυτικές προβλέψεις έδειξαν ότι οι τιμές  $0,1 < \beta < 0,5$  έχουν σχεδόν τις ίδιες επιρροές στα αποτελέσματα της ανάλυσης.

**Προτείνουμε, λοιπόν, την τιμή  $\beta=0,1$** , καθώς **συνδυάζει την αποφυγή λαθών και μη ρεαλιστικών αποτελεσμάτων με τη θεώρηση της ασθενούς επιρροής της εμπλοκής των αδρανών**.

### 6.1.5 Το προσομοίωμα συνάφειας και σχετικής ολίσθησης μεταξύ χάλυβα οπλισμού και σκυροδέματος

Κύριο χαρακτηριστικό της συμπεριφοράς φορέων από οπλισμένο σκυρόδεμα συνιστά η αλληλεπίδραση μεταξύ σκυροδέματος και οπλισμού. Η **συνάφεια** μεταξύ των δύο αυτών υλικών είναι ο παράγοντας εκείνος που καθορίζει τη μεταφορά των τάσεων στη διεπιφάνεια. Γνωρίζουμε ότι η ποιότητα της συνάφειας εξαρτάται από τη διάταξη των ράβδων οπλισμού στο εσωτερικό του σκυροδέματος (από τη μορφή της επιφάνειας της ράβδου, από τη διάσταση του δομικού στοιχείου), από τον τρόπο και τη διεύθυνση της σκυροδέτησης (από τη θέση και κλίση του οπλισμού κατά τη σκυροδέτηση) και γενικά από το πεδίο των τάσεων του σκυροδέματος στην περιοχή της επαφής του με τους οπλισμούς. Ελάχιστη επικάλυψη των οπλισμών οφείλει να εξασφαλίζει την ικανοποιητική ανάπτυξη και μεταβίβαση των τάσεων συνάφειας. Τόσο το μήκος αγκυρώσεως όσο και η υπερκάλυψη των ράβδων οπλισμού βασίζονται στην τιμή σχεδιασμού της τάσης αυτής. Ενδεικτικές είναι οι συνθήκες, σύμφωνα με τον ΕΚΩΣ 2000, που θα πρέπει να ικανοποιούνται προκειμένου να θεωρηθεί ότι μία ράβδος ανήκει στην περιοχή συνάφειας II (μη ευνοϊκές συνθήκες συνάφειας). Αυτές είναι:

- η ράβδος έχει κλίση ως προς την οριζόντια  $0^\circ \div 45^\circ$  για κατακόρυφη σκυροδέτηση
- η ράβδος βρίσκεται σε στοιχείο με πάχος κατά τη διεύθυνση σκυροδέτησης μεγαλύτερο από 250 mm
- η ράβδος είναι τοποθετημένη στο πάνω μισό πάχος του στοιχείου
- το πάχος του σκυροδέματος που την καλύπτει είναι μικρότερο από 300 mm.

**Όταν η τάση συνάφειας στη διεπιφάνεια φθάσει τη μέγιστη δυνατή τιμή** (τάση αστοχίας), η συνάφεια περιορίζεται και συμβαίνει **ολίσθηση**. Το φαινόμενο αυτό παράγει σχετικές μετατοπίσεις μεταξύ των δύο υλικών, οι οποίες ελαττώνουν τις μεταφερόμενες (μέσω του μηχανισμού της συνάφειας) από τις ράβδους οπλισμού δυνάμεις στο περιβάλλον σκυρόδεμα. Οι νόμοι συνάφειας και σχετικής ολίσθησης μεταξύ χάλυβα οπλισμού και σκυροδέματος διαδραματίζουν ακόμη κρισιμότερο ρόλο **όταν οι οπλισμοί σε κάποιες διατομές έχουν διαρρεύσει**. Άλλωστε, **η μακρορηγμάτωση του σκυροδέματος** επιδεινώνει τη μείωση της συνάφειας. Για τον λόγο αυτό, όταν τα δομικά μέλη ενός φορέα από οπλισμένο σκυρόδεμα έχουν αρχίσει να μακρορηγματώνονται με τους οπλισμούς να έχουν εισέλθει στη φάση διαρροής, οι μετατοπίσεις λόγω ολίσθησης είναι σημαντικές.

Να επισημάνουμε στο σημείο αυτό τη διαφορά μεταξύ μικρορηγμάτωσης και μακρορηγμάτωσης. **Μικρορηγμάτωση** καλείται η ομαλή σταθερή ρηγμάτωση του σκυροδέματος, η οποία προκαλείται από την ανακούφιση των εφελκυστικών τάσεων στα άκρα των ρωγμών και επηρεάζει το σκυρόδεμα σε επίπεδο υλικού. Σε αντίθεση, **η μακρορηγμάτωση** επηρεάζει το σκυρόδεμα σε επίπεδο φορέα και εμφανίζεται όταν αρχίζει η ρηγμάτωση να εξελίσσεται εντονότερα και η ογκομετρική παραμόρφωση να αυξάνεται με ταχύτερους ρυθμούς λόγω τοπικής έντονης ρηγμάτωσης. Στην περίπτωση αυτή, είναι εμφανείς οι ασυνέχειες στην αρχική γεωμετρία της κατασκευής λόγω τοπικής θραύσης του υλικού, οι οποίες επεκτείνονται υπό σταθερό φορτίο με ταυτόχρονη ανακατανομή της έντασης στον υπόλοιπο φορέα.

Στο παρελθόν, λαμβάνοντας υπόψιν ότι η προσέγγιση της διανεμημένης ρωγμής δεν είχε τη δυνατότητα να περιγράψει τοπικά φαινόμενα, υπέθεταν ύπαρξη πλήρους συνάφειας μεταξύ σκυροδέματος και οπλισμού. Η θεώρηση αυτή δεν είναι έγκυρη στις περιπτώσεις εκτεταμένης ρηγμάτωσης, στις οποίες η απώλεια της συνάφειας εξαιτίας της ολίσθησης διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην εύρεση του φορτίου κατάρρευσης, γεγονός που μας υποχρεώνει να λαμβάνουμε υπόψιν το φαινόμενο αυτό. Το πρώτο προσομοίωμα συνάφειας-σχετικής ολίσθησης για τις κατασκευές από οπλισμένο σκυρόδεμα διατυπώθηκε από τους Ngo & Scordelis, στο οποίο θεώρησαν ένα απλό συνδετικό στοιχείο με δύο γραμμικά ελατήρια. Έκτοτε, έχουν προταθεί διάφορες προσεγγίσεις με την πιο διαδεδομένη εκείνη των Eliqehausen et al. Ο Lowes πρότεινε

ένα εξελιγμένο και περίπλοκο μοντέλο συνάφειας, σύμφωνα με το οποίο η τάση συνάφειας εξαρτάται από αρκετές παραμέτρους, μεταξύ των οποίων η **περίσφιγξη του σκυροδέματος, το πεδίο των αναπτυσσόμενων τάσεων και διάφορες κατασκευαστικές λεπτομέρειες**. Τέτοια πολυπαραμετρικά μοντέλα είναι **πολύπλοκα, υπολογιστικά απαιτητικά και πρακτικά δεν μπορούν να εφαρμοστούν σε large-scale εφαρμογές**.

Αξιοσημείωτο είναι ότι όλες οι πειραματικές δοκιμές που διεξήχθησαν προκειμένου να δημιουργηθεί ή να επικυρωθεί ένα αριθμητικό προσομοίωμα συνάφειας-ολίσθησης ήταν δοκιμές εξόλκευσης του οπλισμού (rebar pull-out tests). Στα πειράματα αυτά, ράβδοι συγκεκριμένου μήκους αγκυρώσεως στο εσωτερικό του δοκιμίου υποβλήθηκαν σε αξονικές εφελκυστικές ή θλιπτικές δυνάμεις έως ότου επέλθει **αστοχία λόγω συνάφειας, δηλαδή εξόλκευση**. Μπορεί οι ερευνητές μέσω των δοκιμών αυτών να προσδιόριζαν την τιμή ορισμένων παραμέτρων, όπως η μέγιστη τάση συνάφειας, και τις καμπύλες τάσης συνάφειας – μετακίνησης λόγω ολίσθησης, ωστόσο πρακτικά δεν μπορούσαν να συλλάβουν την πραγματική φύση του φαινομένου, το οποίο μπορεί να περιγραφεί μόνο με την προσομοίωση της πραγματικής κατανομής των τάσεων πέριξ των ράβδων οπλισμού και την αλληλεπίδραση σκυροδέματος-χάλυβα.

Όλες οι ανωτέρω παρατηρήσεις καθιστούν επιτακτική την ανάγκη ύπαρξης ενός προσομοιώματος συνάφειας, το οποίο:

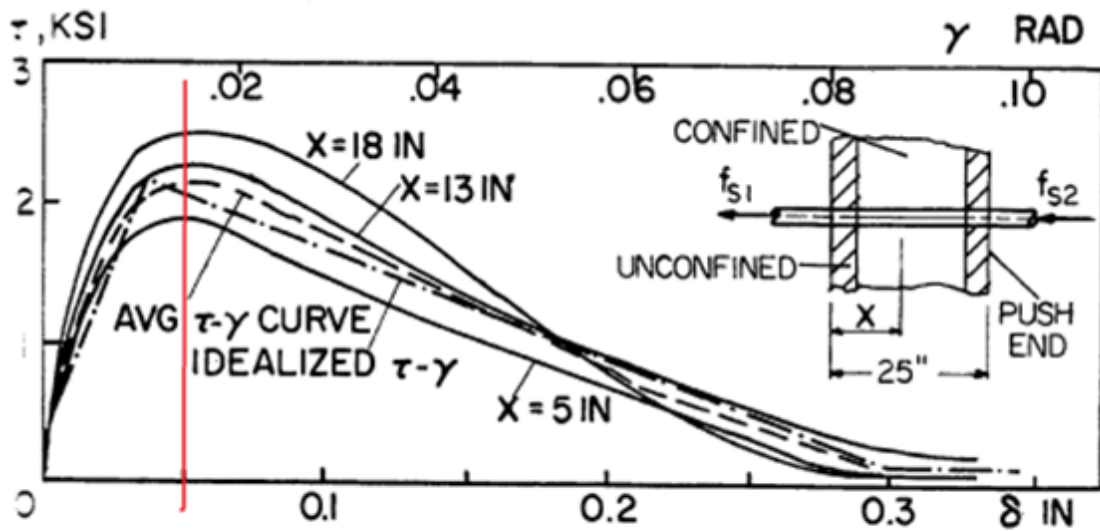
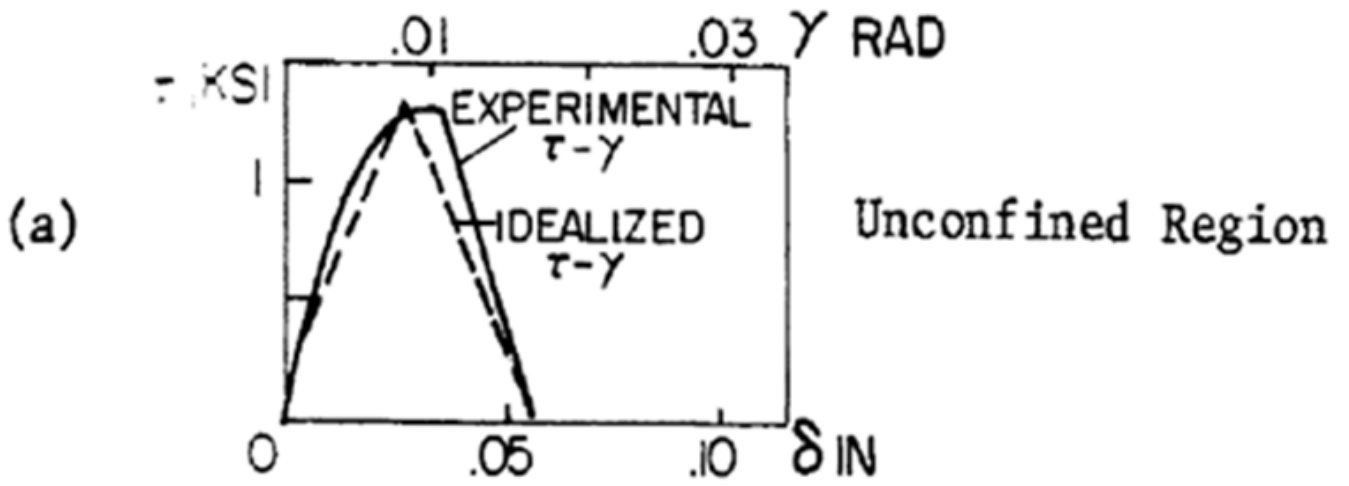
- θα είναι υπολογιστικά αποδοτικό
- θα αναπαράγει με ικανοποιητική ακρίβεια τα πειραματικά αποτελέσματα
- δεν θα εισάγει επιπρόσθετους βαθμούς ελευθερίας, καθώς, όπως γνωρίζουμε, σε έναν φορέα από οπλισμένο σκυρόδεμα ο αριθμός των ενσωματωμένων στοιχείων οπλισμού μπορεί να είναι αρκετά έως πολύ μεγάλος.

Είναι σημαντικό, από υπολογιστικής πλευράς, **να αποφύγουμε την εισαγωγή επιπλέον βαθμών ελευθερίας** και ταυτόχρονα **να λάβουμε υπόψιν τις έστω και εξασθενημένες δυνάμεις λόγω του φαινομένου της ολίσθησης**.

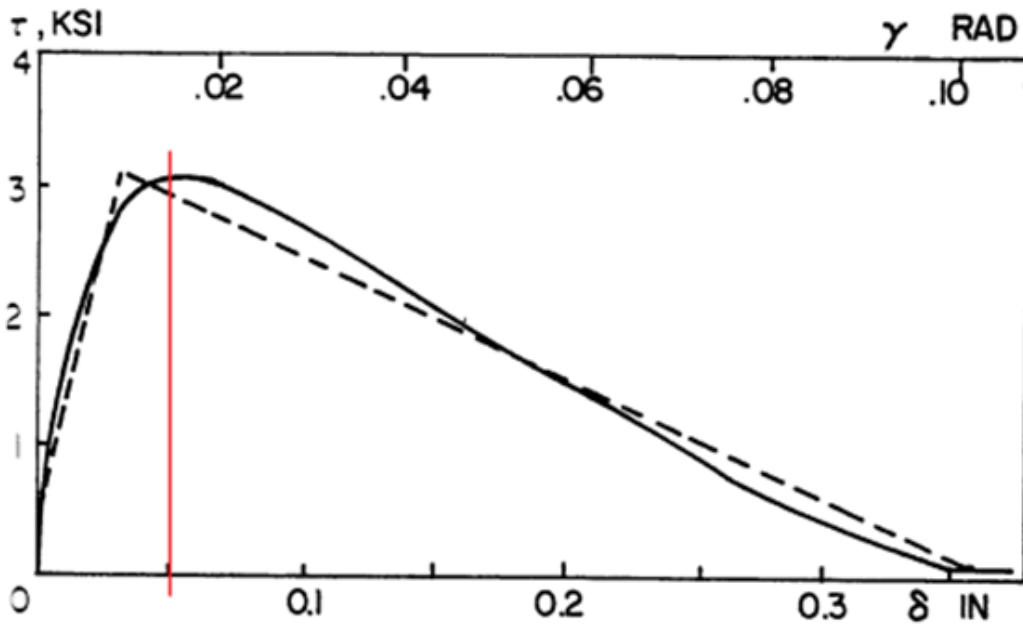
Το προτεινόμενο μοντέλο συνάφειας βασίζεται στις ακόλουθες επτά εξισώσεις (6.65.α+6.65.γ). Οι σχέσεις αυτές δίνουν την εξασθένιση της δύναμης συνάφειας λόγω της επίδρασης της ολίσθησης ανάλογα με την παραμορφωσιακή κατάσταση των ράβδων οπλισμού. Στο σχήμα 6.15 απεικονίζονται τυπικές καμπύλες τάσης συνάφειας  $\tau$  - μετατόπισης  $\delta$  λόγω ολίσθησης από ένα πείραμα εξόλκευσης, το οποίο διεξήχθη από τους Viwathanatapa et al. για περισφιγμένο σκυρόδεμα. Όπως παρατηρούμε, όλες οι καμπύλες δείχνουν την αύξηση της τάσης συνάφειας  $\tau$  μέχρι μία συγκεκριμένη μετατόπιση, από την οποία και μετά οι κλάδοι φθίνουν λόγω της εξασθένησης της συνάφειας μεταξύ του σκυροδέματος και του χάλυβα του οπλισμού. Συγκεκριμένα, στο εσωτερικό της περισφιγμένης περιοχής του σκυροδέματος, η απώλεια της συνάφειας ξεκινάει όταν η μετατόπιση  $\delta$  λαμβάνει την τιμή 0,5 ίντσες, η οποία αντιστοιχεί σε μετατόπιση 0,002 m. Σχετικά με τον χάλυβα του οπλισμού, το όριο διαρροής ισούται με  $f_y=68$  KSI (469 MPa) και το αντίστοιχο μέτρο ελαστικότητας ισούται με  $E=29.200$  KSI= $201,33$  GPa και αντίστοιχη μετατόπιση διαρροής ίση με 0,002329 m. Η επίδραση της ολίσθησης γίνεται σημαντική όταν η παραμόρφωση της ράβδου οπλισμού προσεγγίζει την παραμόρφωση διαρροής. Η γεωμετρία της ράβδου επηρεάζει σημαντικά τον βαθμό μείωσης της συνάφειας.

Στο σημείο αυτό τίθεται το εύλογο ερώτημα αν έχουμε την ίδια απώλεια τάσης σε εφελκυσμό και θλίψη της ράβδου. Έχει αποδειχθεί πειραματικά ότι στην περίπτωση θλιβόμενης ράβδου είναι πιο έντονη η μείωση των τάσεων λόγω του φαινομένου συνάφειας – σχετικής ολίσθησης. Για τον λόγο αυτό, το μοντέλο του Lowes χρησιμοποιεί την παράμετρο  $\Gamma_0$ , η οποία ελέγχει την μέγιστη τιμή της τάσης συνάφειας ανάλογα με το πεδίο των τάσεων που επικρατεί πέριξ του οπλισμού. Βασιζόμενοι στη λογική αυτή, έχουμε προσαρμόσει το προτεινόμενο προσομοίωμα συνάφειας με τις διαφορετικές υποθέσεις που ισχύουν για θλιβόμενη και εφελκυσμένη ράβδο οπλισμού.





(b) Confined Region



(c) Push-End Region

Σχήμα 6.15 Πειραματικές και εξιδανικευμένες καμπύλες  $\tau-\delta$  για την περίπτωση μονοτονικής φόρτισης (Viathanatera et al.)

Η βασική ιδέα πίσω από το προτεινόμενο προσομοίωμα συνάφειας – σχετικής ολίσθησης είναι η εύρεση με ικανοποιητική ακρίβεια της απολεσθείσας δύναμης που επιφέρει η αξονική μετατόπιση των ράβδων οπλισμού λόγω ολίσθησης. Όταν υπολογίζονται οι εσωτερικές δυνάμεις μίας ενσωματωμένης ράβδου οπλισμού, χρησιμοποιούμε τις καθολικές μετατοπίσεις των κόμβων της ράβδου προκειμένου να υπολογίσουμε την αξονική παραμόρφωση  $\varepsilon_x^{\text{rebar}}$ . Οι εκφράσεις για την τάση συνάφειας που χάνεται λόγω της ολίσθησης είναι οι ακόλουθες:

$$\sigma_{\text{lost}}^i = 0 \quad \left| \varepsilon_x^{\text{rebar}} \right| \leq \varepsilon_1 \quad (6.65.a)$$

$$\sigma_{\text{lost}}^i = \sqrt{f_c} \cdot \left( \frac{\varepsilon_x^{\text{rebar}} - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \right) \quad 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_x^{\text{rebar}} \leq \varepsilon_2 \text{ (tension)} \quad (6.65.b)$$

$$\sigma_{\text{lost}}^i = 4 \cdot \sqrt{f_c} + 0,25 \cdot f_c \cdot \left( \frac{\varepsilon_x^{\text{rebar}} - \varepsilon_2}{\varepsilon_y - \varepsilon_2} \right) \quad 0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_x^{\text{rebar}} \leq \varepsilon_y \text{ (tension)} \quad (6.65.c)$$

$$\sigma_{\text{lost}}^i = 4 \cdot \sqrt{f_c} + 0,25 \cdot f_c + 0,3 \cdot f_c \cdot \left( \frac{\varepsilon_x^{\text{rebar}} - \varepsilon_y}{\varepsilon_{\text{fail}} - \varepsilon_y} \right)^{1,3} \quad 0 < \varepsilon_y < \varepsilon_x^{\text{rebar}} < \varepsilon_{\text{fail}} \text{ (tension)} \quad (6.65.d)$$

$$\sigma_{\text{lost}}^i = \sqrt{f_c} \cdot \left( \frac{\varepsilon_x^{\text{rebar}} - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \right) \quad \left| \varepsilon_1 \right| < \left| \varepsilon_x^{\text{rebar}} \right| \leq \left| \varepsilon_2 \right| < 0 \text{ (compression)} \quad (6.65.e)$$

$$\sigma_{\text{lost}}^i = \sqrt{f_c} + 0,075 \cdot f_c \cdot \left( \frac{\varepsilon_x^{\text{rebar}} - \varepsilon_2}{\varepsilon_y - \varepsilon_2} \right) \quad \left| \varepsilon_2 \right| < \left| \varepsilon_x^{\text{rebar}} \right| \leq \left| \varepsilon_y \right| < 0 \text{ (compression)} \quad (6.65.f)$$

$$\sigma_{\text{lost}}^i = \sqrt{f_c} + 0,075 \cdot f_c + 0,3 \cdot f_c \cdot \left( \frac{\varepsilon_x^{\text{rebar}} - \varepsilon_y}{\varepsilon_{\text{fail}} - \varepsilon_y} \right) \quad \left| \varepsilon_y \right| < \left| \varepsilon_x^{\text{rebar}} \right| \leq \left| \varepsilon_{\text{fail}} \right| < 0 \text{ (compression)} \quad (6.65.g)$$

όπου

- $\varepsilon_1 = 0,0005$

- $\varepsilon_2 = \left( \frac{f_y^{\text{steel}}}{1,1 \cdot E_{\text{steel}}} \right)^{1,02}$

- $\varepsilon_y = \left( \frac{f_y^{\text{steel}}}{E_{\text{steel}}} \right)$

- $f_c$  (kPa): είναι η μονοαξονική θλιπτική αντοχή κυλινδρικού δοκιμίου από σκυρόδεμα της συγκεκριμένης ποιότητας

Η απολεσθείσα δύναμη συνάφειας  $F_{\text{lost}}$  προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την αντίστοιχη απολεσθείσα τάση συνάφειας  $\sigma_{\text{lost}}$  με το εμβαδόν της αντίστοιχης διεπιφάνειας (επιφάνειας επαφής) ράβδου οπλισμού – σκυροδέματος  $SA_{\text{rebar}}$ . Η δύναμη αυτή αφαιρείται από την αρχική αξονική εσωτερική δύναμη της ράβδου  $F_{\text{initial}}$ , σύμφωνα με τις κατωτέρω σχέσεις:

$$|F_{\text{reduced}}| = |F_{\text{initial}}| - |\sigma_{\text{lost}} \cdot SA_{\text{rebar}}| \quad (6.66.a)$$

$$|F_{\text{reduced}}| < 0,1 \cdot |F_{\text{initial}}| \rightarrow |F_{\text{reduced}}| = 0,1 \cdot |F_{\text{initial}}| \quad (6.66.b)$$

Αν η ράβδος οπλισμού έχει παραμορφωθεί σε μεγάλο βαθμό προσεγγίζοντας την αστοχία και η αντίστοιχη απομειωμένη δύναμη συνάφειας  $F_{\text{reduced}}$  προκύπτει μικρότερη από το 10% της αρχικής αξονικής εσωτερικής δύναμης της ράβδου  $F_{\text{initial}}$  (Σχέση 6.66.b), τότε το προτεινόμενο προσομοίωμα θεωρεί ότι εξαιτίας των μηχανισμών τριβής η μεταφερόμενη αξονική δύναμη είναι σταθερή και ίση με το 10% της αρχικής αξονικής εσωτερικής δύναμης της ράβδου  $F_{\text{initial}}$  έως ότου επέλθει αστοχία.

Όπως μπορούμε να δούμε στις εξισώσεις 6.65, η απολεσθείσα τάση συνάφειας  $\sigma_{\text{lost}}$  είναι μεγαλύτερη στην περίπτωση εφελκυσμού της ράβδου από την αντίστοιχη τάση στην περίπτωση θλίψης. Αυτό είναι σημαντικό προκειμένου να λάβουμε υπόψιν το πεδίο των τάσεων πέριξ των οπλισμών. Εν τούτοις, και για τις δύο περιπτώσεις υποθέτουμε ότι η απομείωση της αξονικής δύναμης ξεκινάει όταν η αξονική ανηγμένη παραμόρφωση της ράβδου είναι μεγαλύτερη από 0,05% ( $\varepsilon_x > 0,0005$ ), η οποία εισάγει το σκυρόδεμα στην ζώνη μακρορηγματώσης και εκδηλώνεται ολίσθηση.

Καθώς η ανηγμένη παραμόρφωση της ράβδου οπλισμού προσεγγίζει την παραμόρφωση διαρροής (σχέσεις 6.65.c, 6.65.f), η υποτιθέμενη απώλεια της τάσης αυξάνεται σύμφωνα με τα πειραματικά δεδομένα των δοκιμών εξόλκευσης. Όταν η παραμόρφωση του χάλυβα υπερβαίνει την παραμόρφωση διαρροής, η απώλεια της συνάφειας εισέρχεται στο τελευταίο της στάδιο και η απομείωση της δύναμης λαμβάνει τις μέγιστές της τιμές. Η μέγιστη απολεσθείσα τάση  $\sigma$  θεωρείται ίση με το 55% της μονοαξονικής θλιπτικής αντοχής σκυροδέματος (κυλινδρικού δοκιμίου). Η τάση αυτή αυξάνεται σταδιακά ανάλογα με την παραμόρφωση του οπλισμού μειώνοντας την μεταφερόμενη αξονική δύναμη στους αντίστοιχους εξεδρικούς κόμβους.

## 6.2 Το καταστατικό μοντέλο για τον χάλυβα του οπλισμού

Όσον αφορά στην προσομοίωση του υλικού του χάλυβα, χρησιμοποιούμε μονοδιάστατο καταστατικό μοντέλο υλικού. Υπάρχουν δύο εναλλακτικές:

- το διγραμμικό μοντέλο (Bilinear Steel Material Model)
- το μοντέλο Menegotto-Pinto.

### 6.2.1 Το διγραμμικό μοντέλο

**Το διγραμμικό μοντέλο υλικού** θεωρεί τον χάλυβα ως γραμμικά ελαστικό – γραμμικά κρατυνόμενο υλικό. Θεωρεί, δηλαδή, ότι ο οπλισμός είναι σε θέση να παραλάβει μεγαλύτερη τάση μετά τη διαρροή. Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως κράτυνση. Η περίπτωση αυτή είναι γενικότερη και περιέχει το μοντέλο του γραμμικά ελαστικού-τελείως πλαστικού (μηδενικό μέτρο κράτυνσης) υλικού.

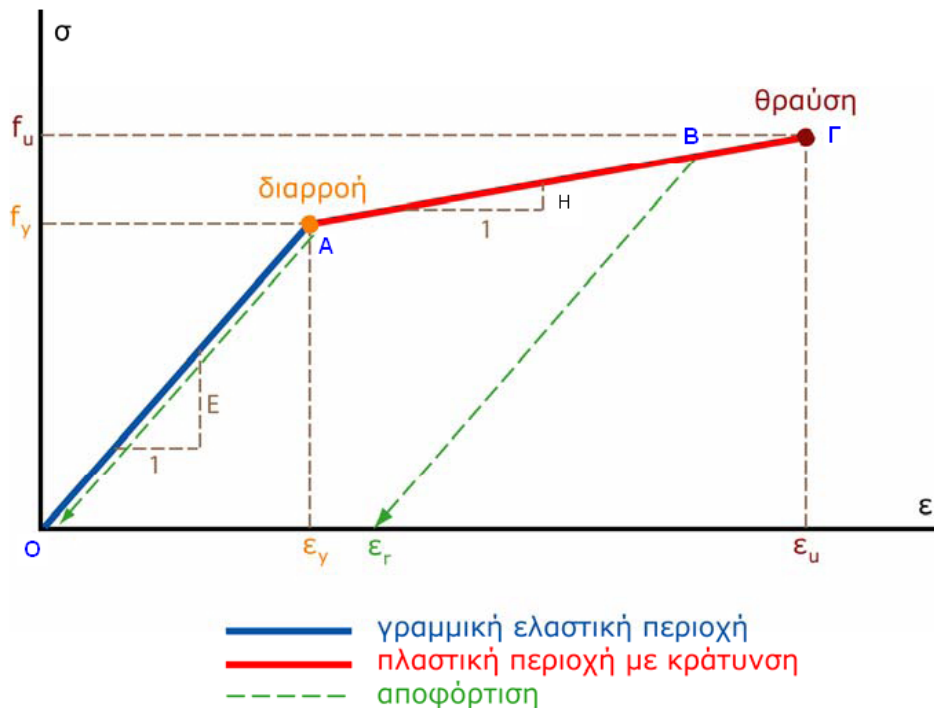
Το διάγραμμα τάσεων ( $\sigma$ ) – ανηγμένων παραμορφώσεων ( $\varepsilon$ ) μέχρι τη διαρροή συμπίπτει με το αντίστοιχο διάγραμμα  $\sigma$ - $\varepsilon$  των γραμμικά ελαστικών – τελείως πλαστικών υλικών, ενώ μετά τη διαρροή αποτελείται από μία δεύτερη κεκλιμένη ευθεία με κλίση σημαντικά μικρότερη από εκείνη της ελαστικής περιοχής, η οποία περιγράφει την κράτυνση του υλικού. Στο δεύτερο τμήμα ισχύει μία αναλογία μεταξύ των μεταβολών των τάσεων και των μεταβολών των παραμορφώσεων με συντελεστή το μέτρο κράτυνσης  $H$  (συνήθως  $H=0,005E \div 0,05E$ ). Κατά την κράτυνση επέρχεται πλαστική παραμόρφωση ( $\varepsilon_r$ , remained strain), αλλά αυξάνεται και η ελαστική παραμόρφωση ( $\varepsilon_e = \varepsilon_u - \varepsilon_r$ ) και μάλιστα κατά ποσό ανάλογο της αύξησης της τάσης.

Στην γραμμική και ελαστική περιοχή (ΟΑ), οι κλάδοι φόρτισης και αποφόρτισης συμπίπτουν και μετά από πλήρη αποφόρτιση δεν υπάρχουν παραμένουσες παραμορφώσεις. Στην πλαστική περιοχή (ΑΓ) η συμπεριφορά είναι ανελαστική, κατά την αποφόρτιση δεν ακολουθείται πορεία αντίστροφη της φόρτισης αλλά μία ευθεία γραμμή (ΒΔ) παράλληλη με τον αρχικό ελαστικό κλάδο (ΟΑ) και σε περίπτωση πλήρους αποφόρτισης παραμένουν στο δοκίμιο οι λεγόμενες πλαστικές-μόνιμες-παραμένουσες παραμορφώσεις. Η πλαστική παραμόρφωση  $\varepsilon_r$  σε υλικά με γραμμικά ελαστική – γραμμικά κρατυνόμενη συμπεριφορά δίνεται από τη σχέση:

$$\varepsilon_r = (\varepsilon - \varepsilon_y) \cdot \left(1 - \frac{H}{E}\right) \quad (6.67)$$

όπου  $\varepsilon$  είναι η ανηγμένη παραμόρφωση τη στιγμή έναρξης της αποφόρτισης.

Στην περίπτωση της μονοαξονικής εντατικής κατάστασης, η συμπεριφορά ενός γραμμικά ελαστικού–γραμμικά κρατυνόμενου υλικού περιγράφεται πλήρως όταν γνωρίζουμε το μέτρο ελαστικότητας  $E$ , την τάση διαρροής  $f_y$  (ή την ανηγμένη παραμόρφωση διαρροής  $\varepsilon_y = \frac{f_y}{E}$ ), το μέτρο κράτυνσης  $H$  και την τάση θραύσης  $f_u$  (ή την ανηγμένη παραμόρφωση θραύσης  $\varepsilon_u$ ). Στην περίπτωση της πολυαξονικής εντατικής κατάστασης, απαιτείται επιπρόσθετα και η γνώση του λόγου Poisson  $\nu$  ή του μέτρου διάτμησης  $G$ .



Σχήμα 6.16 Το μοντέλο γραμμικά ελαστικού – γραμμικά κρατυνόμενου υλικού

## 6.2.2 Το μοντέλο Menegotto-Pinto

Το μοντέλο των Menegotto and Pinto συνδυάζει απλότητα και ικανοποιητική ακρίβεια. Η καταστατική σχέση, η οποία περιγράφει τη μετάβαση από μία ευθεία με κλίση  $E$  (μέτρο ελαστικότητας) σε μία νέα ευθεία με κλίση  $H=b \cdot E$  (μέτρο κράτυνσης), είναι η εξής:

$$\left( \frac{\sigma - \sigma_r}{\sigma_0 - \sigma_r} \right) = b \cdot \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_r}{\varepsilon_0 - \varepsilon_r} \right) + \frac{(1-b)}{\sqrt[1+R]{1 + \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_r}{\varepsilon_0 - \varepsilon_r} \right)^R}} \cdot \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_r}{\varepsilon_0 - \varepsilon_r} \right) \quad (6.68)$$

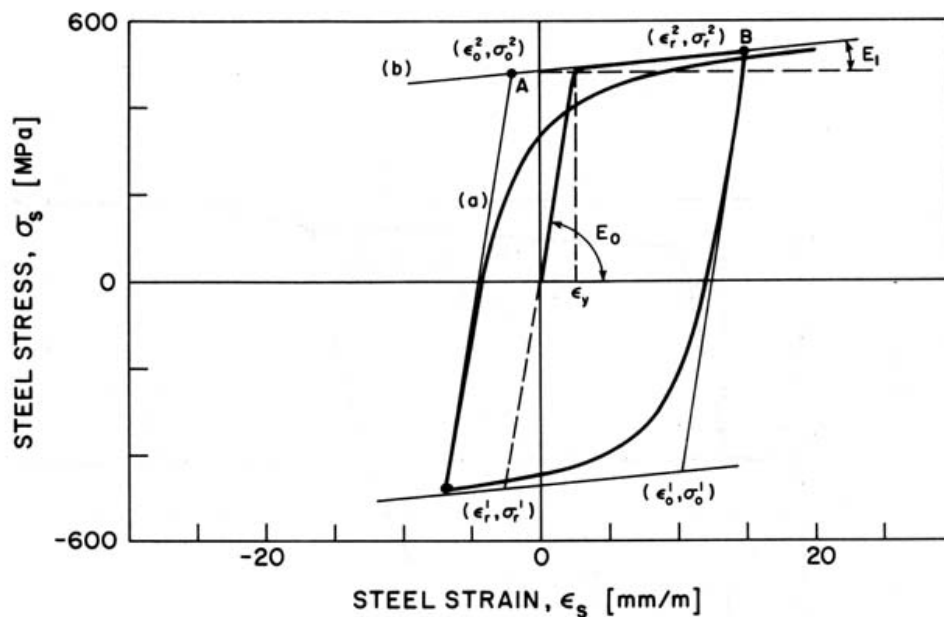
όπου

- $\sigma_0, \varepsilon_0$ : η τάση και η ανηγμένη παραμόρφωση αντίστοιχα του σημείου τομής των δύο ευθειών
- $\sigma_r, \varepsilon_r$ : η τάση και η ανηγμένη παραμόρφωση αντίστοιχα του σημείου, στο οποίο πραγματοποιήθηκε η τελευταία αλλαγή της φοράς της φόρτισης
- $R$ : η καμπυλότητα του τόξου συναρμογής, που καθορίζει το σχήμα της καμπύλης μετάβασης. Καθώς η παράμετρος αυτή αυξάνεται, η μετάβαση από τη μία ευθεία στην άλλη γίνεται πιο απότομη. Η καμπυλότητα του τόξου συναρμογής του  $i$ -οστού κύκλου φόρτισης ισούται με:

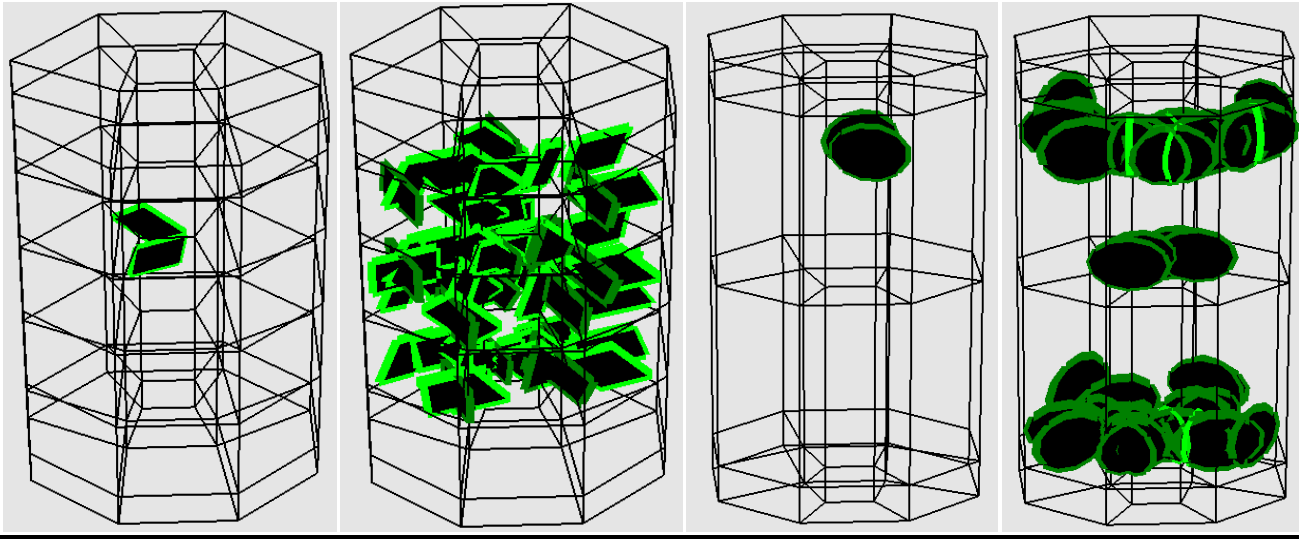
$$R^i = R_0 - \frac{\alpha_1 \cdot (\epsilon_r^i - \epsilon_0^i)}{\alpha_2 + (\epsilon_r^i - \epsilon_0^i)}$$

- $R_0$ : η καμπυλότητα του τόξου συναρμογής κατά τον πρώτο κύκλο φόρτισης. Καθορίζεται πειραματικά. Ως τυπική τιμή μπορούμε να θεωρούμε  $R_0=20$ .
- $\epsilon_0^i = \epsilon_r^{i-1} + \frac{\sigma_0^i - \sigma_0^{i-1}}{E}$
- $\alpha_1, \alpha_2$ : μεταβλητές που καθορίζονται πειραματικά με τυπικές τιμές  $\alpha_1=18,5$  και  $\alpha_2=0,15$ .

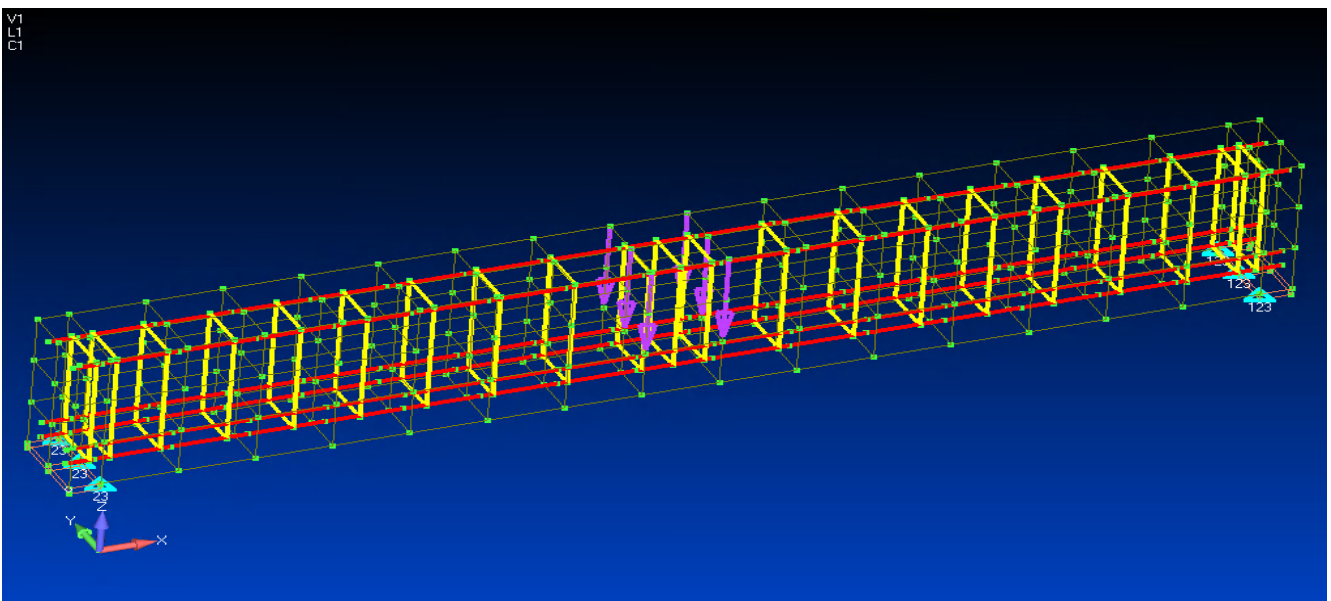
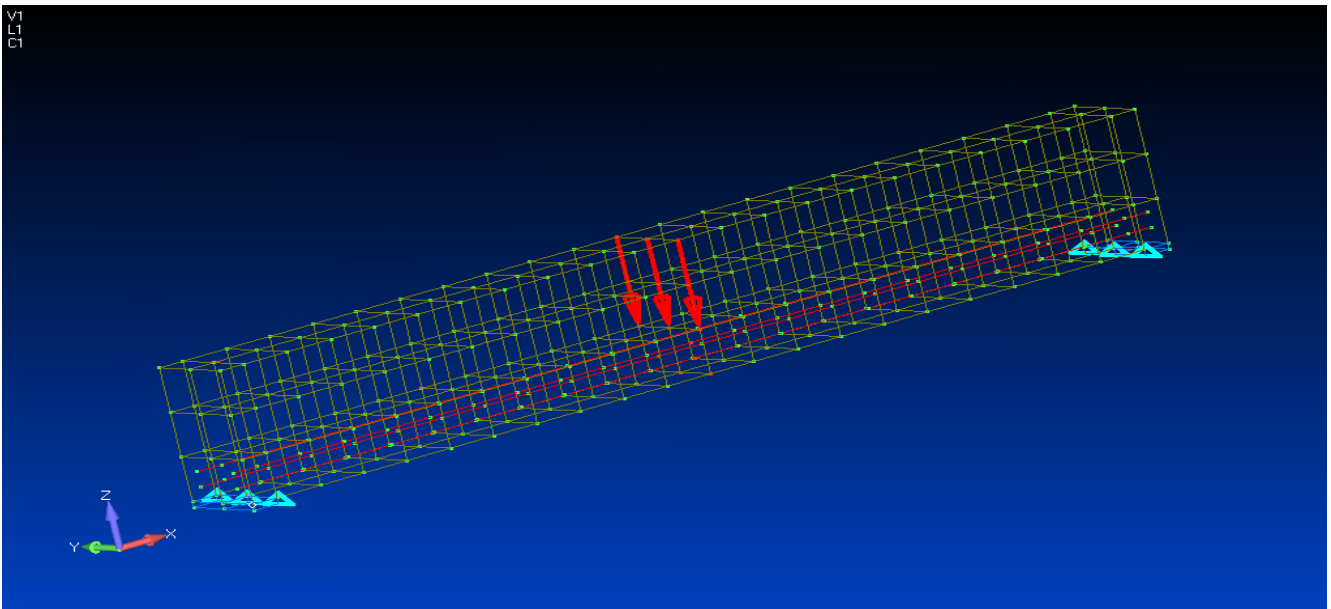
Το σημείο τομής των δύο ευθειών  $(\epsilon_0, \sigma_0)$  σηματοδοτεί την έναρξη του νέου κλάδου φόρτισης. Μετά από κάθε αλλαγή της φοράς της φόρτισης, οι παράμετροι  $\epsilon_0, \sigma_0, \epsilon_r, \sigma_r$  ανανεώνονται.



Σχήμα 6.17 Το μοντέλο Menegotto-Pinto



## Κεφάλαιο 7 Αριθμητικές εφαρμογές



## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 7

### 7.1 Προσδιορισμός της μονοαξονικής αντοχής σε θλίψη

1. κυλινδρικών δοκιμίων από άοπλο σκυρόδεμα ύψους  $h=0,20$  m και διαμέτρου  $D=0,10$  m
  - ποιότητας σκυροδέματος C40
  - ποιότητας σκυροδέματος C40.8
2. κυλινδρικών δοκιμίων από άοπλο σκυρόδεμα ύψους  $h=0,15$  m και διαμέτρου  $D=0,075$  m
  - ποιότητας σκυροδέματος C41.2
  - ποιότητας σκυροδέματος C48.5

### 7.2 Προσομοίωση αμφιέριστης δοκού από οπλισμένο σκυρόδεμα

1. χωρίς συνδετήρες
2. με συνδετήρες



## 7.1 Προσδιορισμός της μονοαξονικής αντοχής σε θλίψη κυλινδρικών δοκιμίων από άοπλο σκυρόδεμα

Όπως γνωρίζουμε, η πειραματική δοκιμή της θλίψεως (compression test) εφαρμόζεται στα ψαθυρά υλικά, όπως το σκυρόδεμα, σε αντικατάσταση της δοκιμής του εφελκυσμού ή ως συμπλήρωμα αυτού. Αυτό γίνεται διότι τα υλικά αυτά δέχονται κατά τη λειτουργία τους κυρίως ή αποκλειστικά θλιπτικά φορτία. Στόχος της υποεπότητας αυτής είναι η **ικανοποιητική αριθμητική προσομοίωση της δοκιμής σε θλίψη κυλινδρικών δοκιμίων δύο διαφορετικών γεωμετριών μέσω της σύγκρισης αριθμητικών αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα πειραματικά.**

### 7.1.1 Κυλινδρικά δοκίμια ύψους 20 cm και διαμέτρου 10 cm

Η συγκεκριμένη προσομοίωση αφορά **κυλινδρικά δοκίμια ύψους 20 cm και διαμέτρου 10 cm**. Τα αριθμητικά αποτελέσματα της προσομοίωσης αυτής θα συγκριθούν με τα πειραματικά δεδομένα του δημοσιευμένου άρθρου των Nam-Sik Kima, Ji-Ho Lee b and Sung-Pil Chang με τίτλο “Equivalent multi-phase similitude law for pseudodynamic test on small scale reinforced concrete models”.

Συγκεκριμένα, θα προσομοιώσουμε ένα κυλινδρικό δοκίμιο από άοπλο σκυρόδεμα με τα εξής χαρακτηριστικά:

- Ύψος :  $H=0,200$  m
- Διάμετρος βάσης κυλίνδρου :  $D=0,100$  m
- Ποιότητα άοπλου σκυροδέματος : **C40, C40.8**
- Μέτρο ελαστικότητας :  $E=32$  GPa
- Λόγος του Poisson :  $\nu=0,17$

Να τονίσουμε ότι σύμφωνα με τον ΕΚΩΣ 2000 (Ελληνικός Κανονισμός Ωπλισμένου Σκυροδέματος) το μέτρο ελαστικότητας της ποιότητας σκυροδέματος C40 ισούται με  $E=35$  GPa. Άρα, το  $E=32$  GPa που θεωρήσαμε στην προσομοίωση (βάσει και της πειραματικής καμπύλης) είναι αρκετά ικανοποιητικό.

**Προκειμένου να υπολογίσουμε τη μονοαξονική αντοχή σε θλίψη του συγκεκριμένου κυλινδρικού δοκιμίου από άοπλο σκυρόδεμα, θα το προσομοιώσουμε με ισοπαραμετρικά οκτακομβικά εξαεδρικά στοιχεία.** Προκειμένου να προσεγγίσουμε κατά το δυνατόν τις πειραματικές συνθήκες και να εξάγουμε ρεαλιστικά αποτελέσματα, θα θεωρήσουμε άνω και κάτω πλάκα φόρτισης από χάλυβα, ο οποίος προφανώς θα έχει πολύ μεγαλύτερο όριο διαρροής. Επιλέγουμε χάλυβα S500.

Συγκεκριμένα, θα πραγματοποιήσουμε 6 συνολικά προσομοιώσεις:

1. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 1 cm χωρίς πλάκες φόρτισης (πραγματοποιείται για να κατανοήσουμε τη σημασία των πλακών φόρτισης)
2. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 1 cm με πλάκες φόρτισης
3. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 2 cm με πλάκες φόρτισης
4. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 3 cm με πλάκες φόρτισης
5. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 5 cm με πλάκες φόρτισης
6. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 10 cm με πλάκες φόρτισης.

Σε καθεμία από τις 6 αυτές προσομοιώσεις, το φορτίο ορίζεται με την εξής λογική:

- Το επιβληθέν φορτίο έχει μέτρο ελαφρώς μεγαλύτερο από το θεωρητικό φορτίο θραύσεως, το οποίο ισούται με την τάση θραύσεως (μονοαξονική αντοχή σε θλίψη) επί το εμβαδόν της διατομής του κυλινδρικού δοκιμίου.
- Το επιβληθέν φορτίο κατανέμεται ομοιόμορφα σε όλους τους κόμβους της άνω επιφάνειας της άνω πλάκας φορτίσεως.
- Μέσω της μη γραμμικής διαδικασίας Newton – Raphson, το φορτίο επιβάλλεται σταδιακά σε 50 βήματα. Για κάθε βήμα φόρτισης, ορίζουμε ως μέγιστο αριθμό εσωτερικών επαναλήψεων τις 25. Όπως θα παρατηρήσουμε, κάποιες από τις προσομοιώσεις, όπως αναμενόταν, δεν δέχονται και τα 50 βήματα, καθώς η αντίστοιχη επίλυση τερματίζεται σε κάποιο βήμα πρωθύστερο του πεντηκοστού.

Σε καθεμία από τις 6 προαναφερθείσες προσομοιώσεις, επιβάλλουμε τις συνοριακές συνθήκες με την εξής λογική:

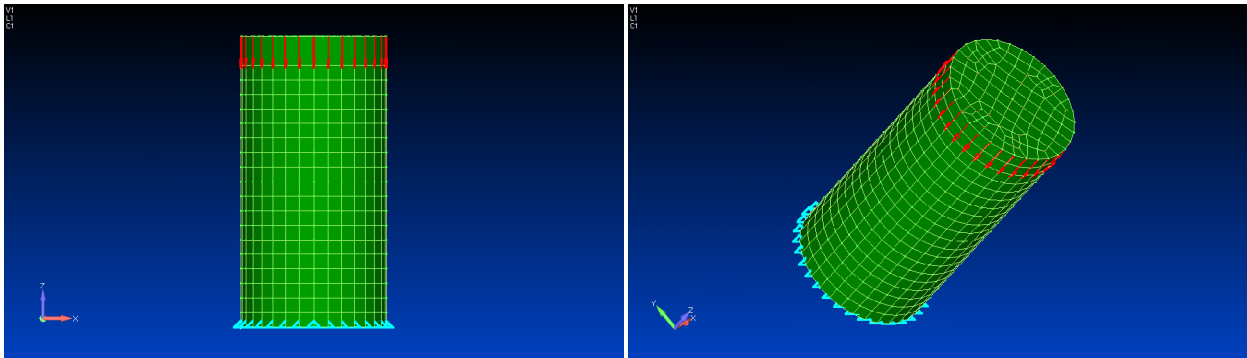
- Δεσμεύουμε μόνο τη μετατόπιση κατά τον άξονα Z όλων των εξαεδρικών κόμβων της κάτω επιφάνειας της κάτω πλάκας φορτίσεως.
- Επιλέγουμε μία κεντρική τριάδα κόμβων της επιφάνειας αυτής, την οποία τριάδα δεσμεύουμε και ως προς την μετατόπιση κατά τους άξονες X, Y. (123)
- Επιλέγουμε μία άλλη κεντρική τριάδα κόμβων (κάθετη στην προηγούμενη) στην ίδια επιφάνεια, την οποία δεσμεύουμε και ως προς την μετατόπιση κατά τον άξονα Y. (23)
- Να τονίσουμε ότι αν δεσμεύαμε και τους τρεις μετατοπισιακούς βαθμούς ελευθερίας όλων των κόμβων της κάτω διεπιφάνειας, τότε το αριθμητικό μας μοντέλο θα εμφάνιζε παρασιτική στιβαρότητα και θα απέκλινε σημαντικά από την πειραματική διάταξη.

Στη συνέχεια, απεικονίζουμε για καθεμία από τις 6 αυτές προσομοιώσεις:

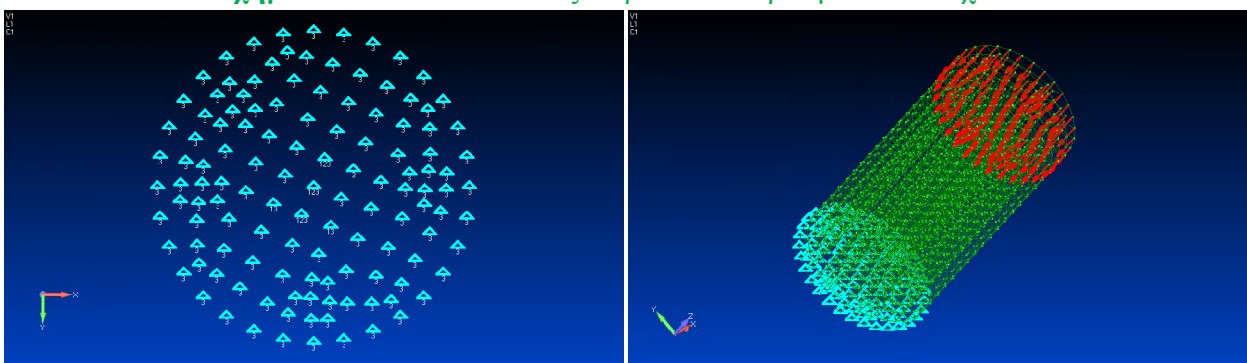
- A. το δίκτυο των εξαεδρικών πεπερασμένων στοιχείων και τη μορφή των συνοριακών συνθηκών και της εξωτερικής φορτίσεως
- B. την κατανομή των παραμορφώσεων
- C. τη γραφική παράσταση τάσης – κατακόρυφης παραμόρφωσης
- D. την κατανομή των ρωγμών

## A. Το δίκτυο των εξαεδρικών πεπερασμένων στοιχείων και η μορφή των συνοριακών συνθηκών και της εξωτερικής φορτίσεως

1. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 1 cm χωρίς πλάκες φόρτισης

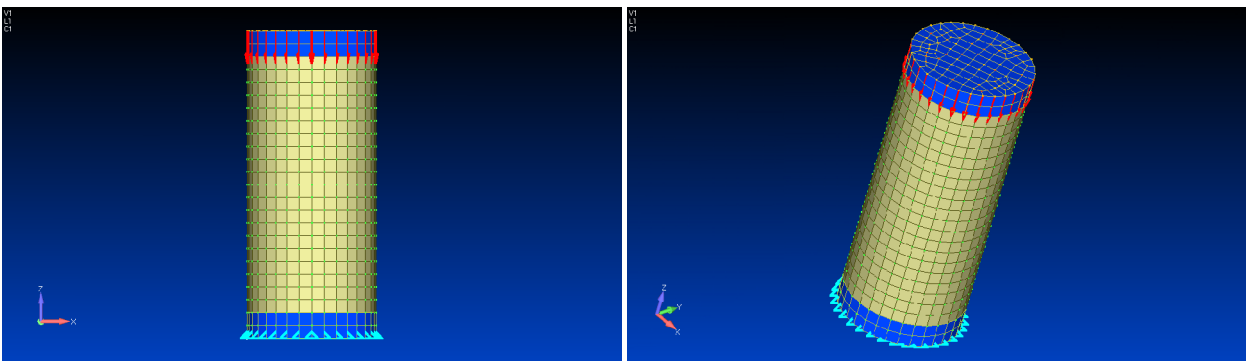


Σχήμα 7.1 Το δίκτυο των εξαεδρικών πεπερασμένων στοιχείων

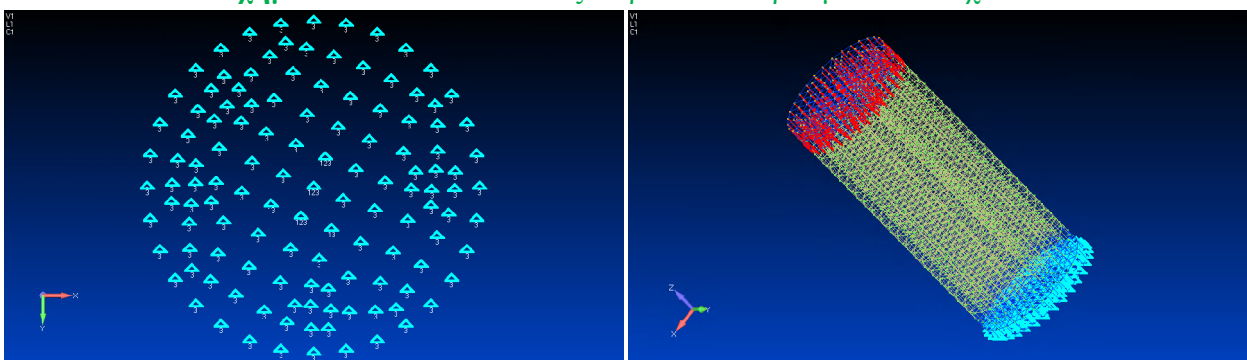


Σχήμα 7.2 Επιβολή συνοριακών συνθηκών και εξωτερικής φόρτισης

2. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 1 cm με πλάκες φόρτισης

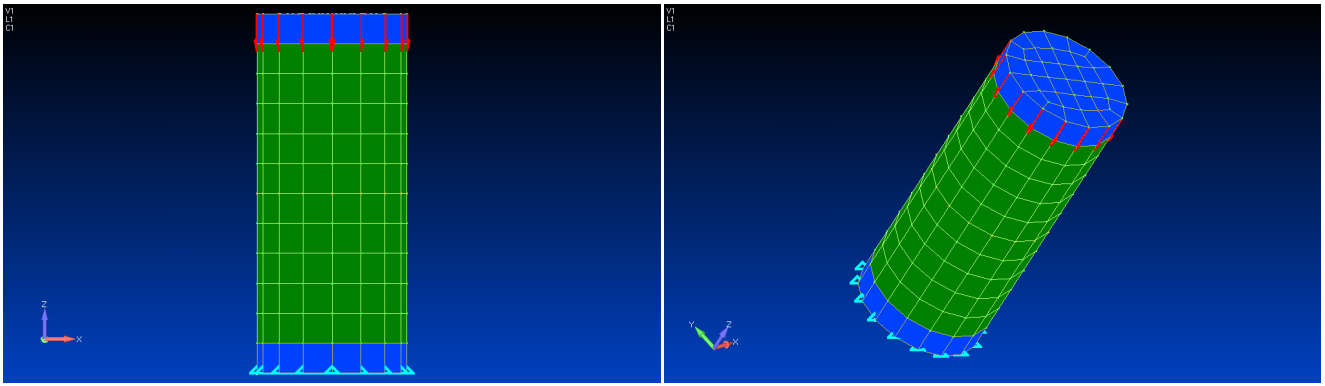


Σχήμα 7.3 Το δίκτυο των εξαεδρικών πεπερασμένων στοιχείων

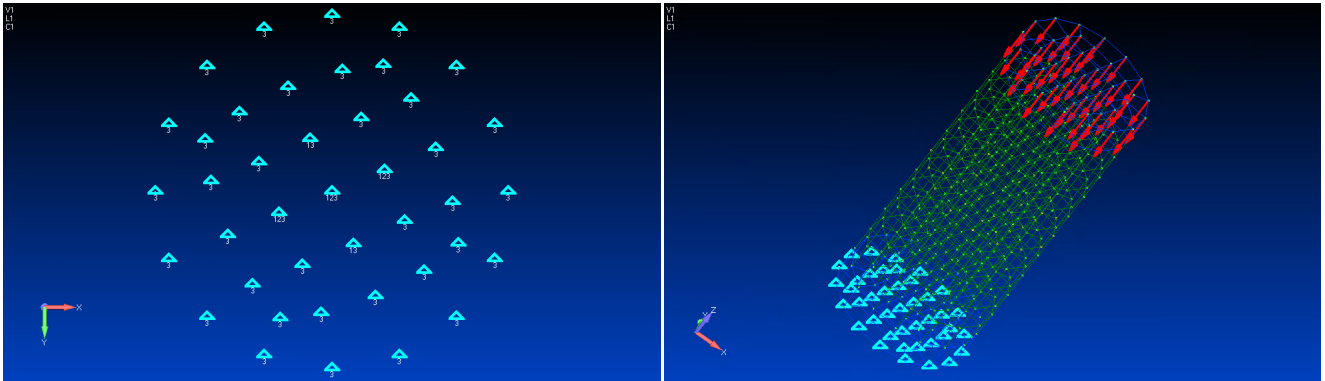


Σχήμα 7.4 Επιβολή συνοριακών συνθηκών και εξωτερικής φόρτισης

3. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 2 cm με πλάκες φόρτισης

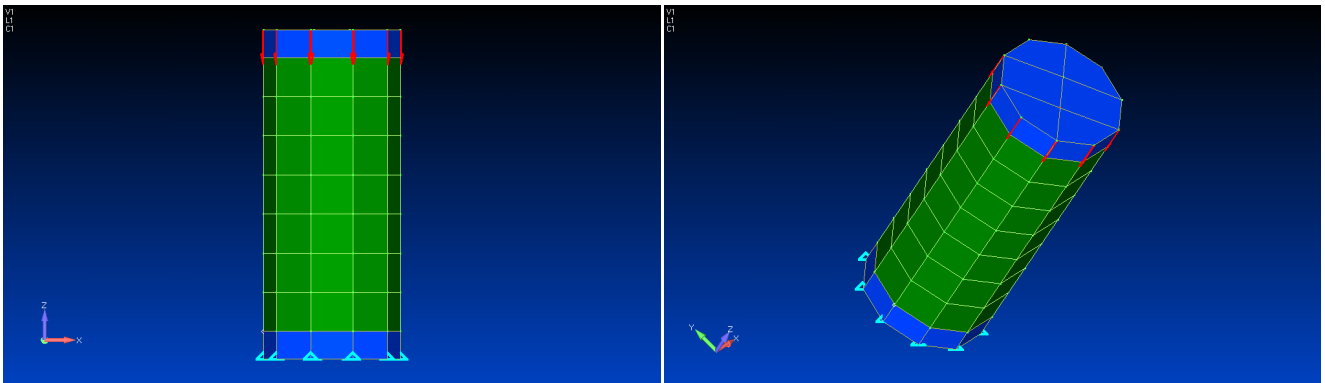


Σχήμα 7.5 Το δίκτυο των εξαεδρικών πεπερασμένων στοιχείων

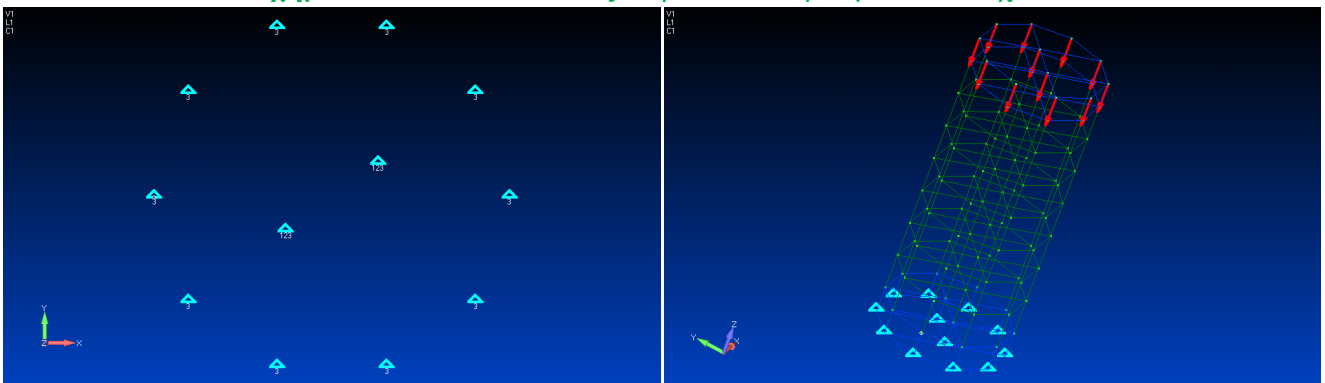


Σχήμα 7.6 Επιβολή συνοριακών συνθηκών και εξωτερικής φόρτισης

4. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 3 cm με πλάκες φόρτισης

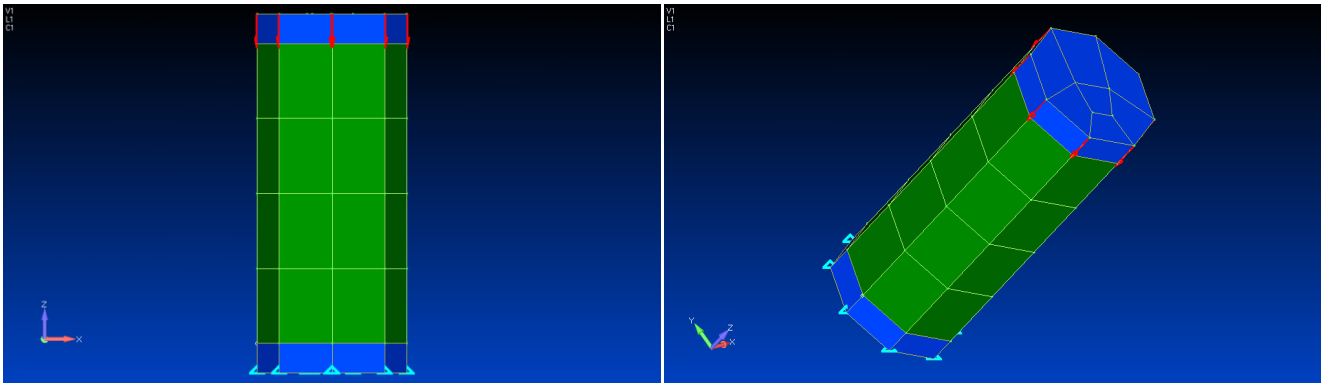


Σχήμα 7.7 Το δίκτυο των εξαεδρικών πεπερασμένων στοιχείων

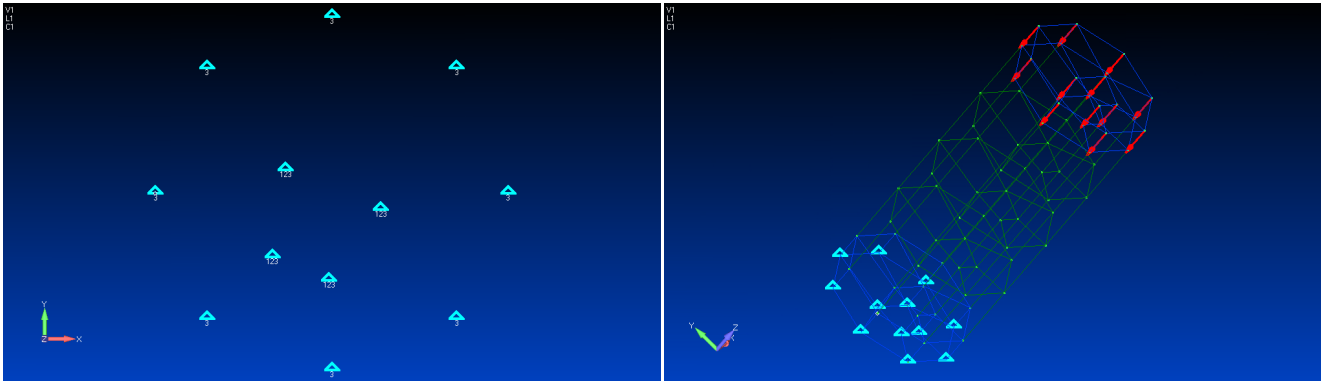


Σχήμα 7.8 Επιβολή συνοριακών συνθηκών και εξωτερικής φόρτισης

5. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 5 cm με πλάκες φόρτισης

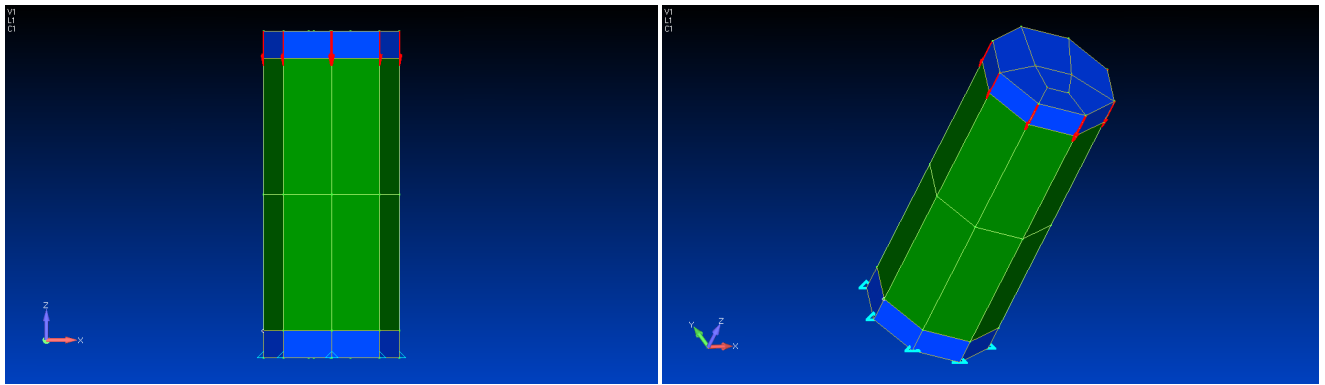


Σχήμα 7.9 Το δίκτυο των εξαεδρικών πεπερασμένων στοιχείων

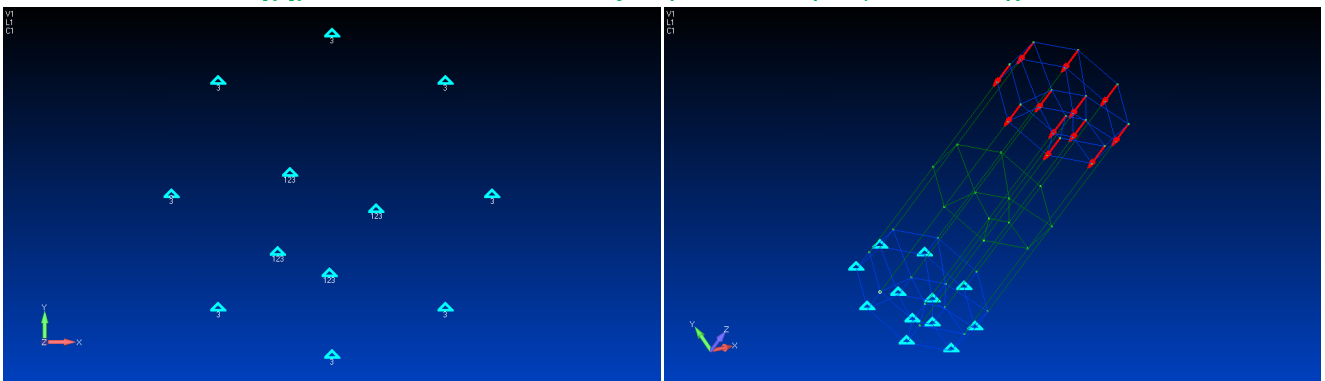


Σχήμα 7.10 Επιβολή συνοριακών συνθηκών και εξωτερικής φόρτισης

6. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 10 cm με πλάκες φόρτισης.



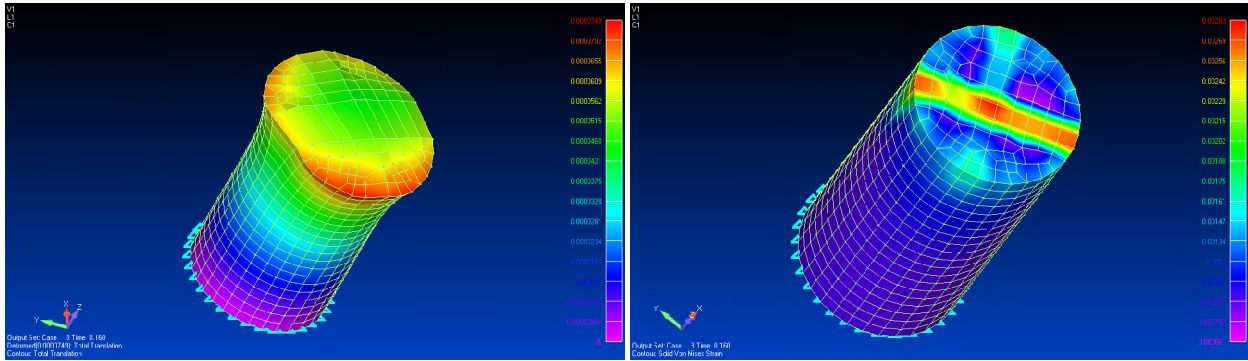
Σχήμα 7.11 Το δίκτυο των εξαεδρικών πεπερασμένων στοιχείων



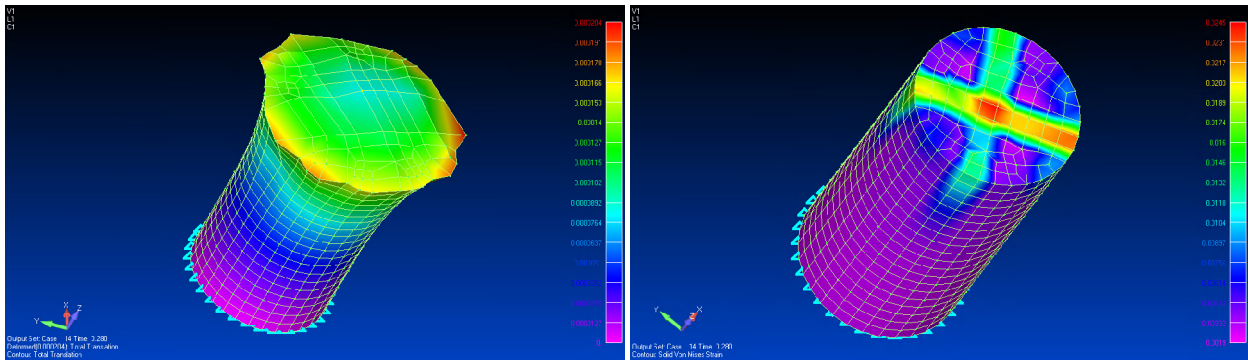
Σχήμα 7.12 Επιβολή συνοριακών συνθηκών και εξωτερικής φόρτισης

## B. Η παραμορφωμένη κατάσταση και η κατανομή των παραμορφώσεων (C40)

### 1. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 1 cm χωρίς πλάκες φόρτισης

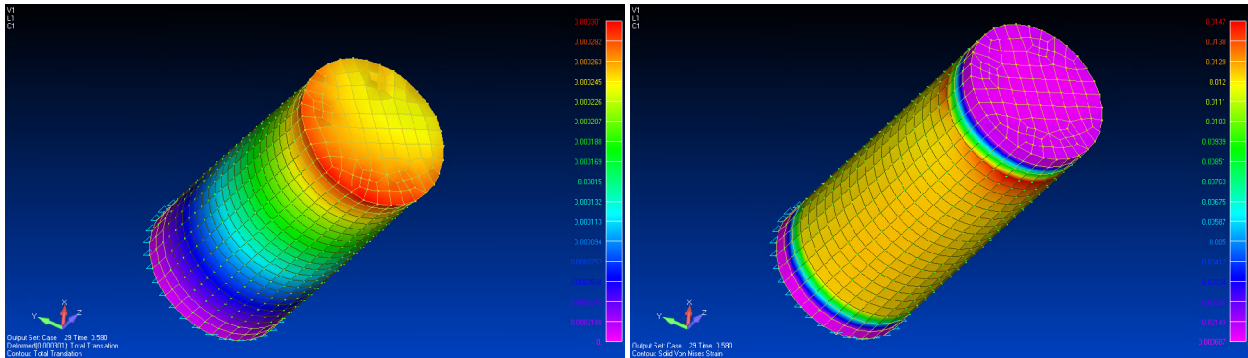


Σχήμα 7.13 Παραμορφωμένη κατάσταση με contour ολικής μετατόπισης (δεξί σχήμα) και κατανομή των Von Mises παραμορφώσεων - Βήμα εξωτερικής φόρτισης : 8/50

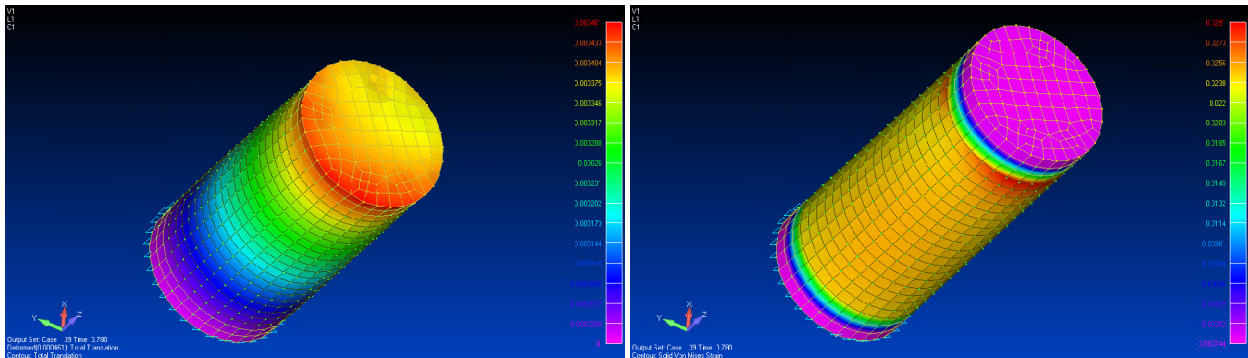


Σχήμα 7.14 Παραμορφωμένη κατάσταση με contour ολικής μετατόπισης (δεξί σχήμα) και κατανομή των Von Mises παραμορφώσεων - Βήμα εξωτερικής φόρτισης : 14/50

### 2. προσομοίωση με εξαεδρικά στοιχεία μεγέθους 1 cm με πλάκες φόρτισης

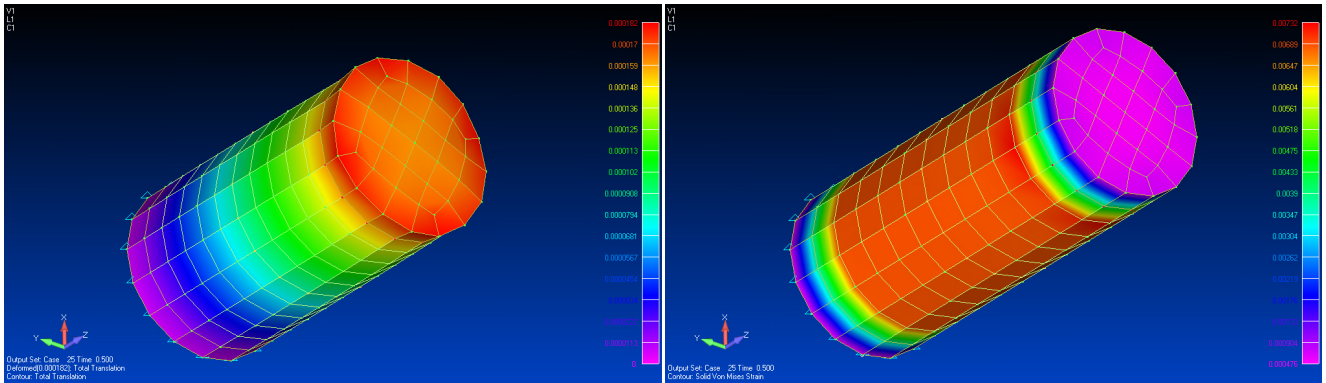


Σχήμα 7.15 Παραμορφωμένη κατάσταση με contour ολικής μετατόπισης (δεξί σχήμα) και κατανομή των Von Mises παραμορφώσεων - Βήμα εξωτερικής φόρτισης : 29/50

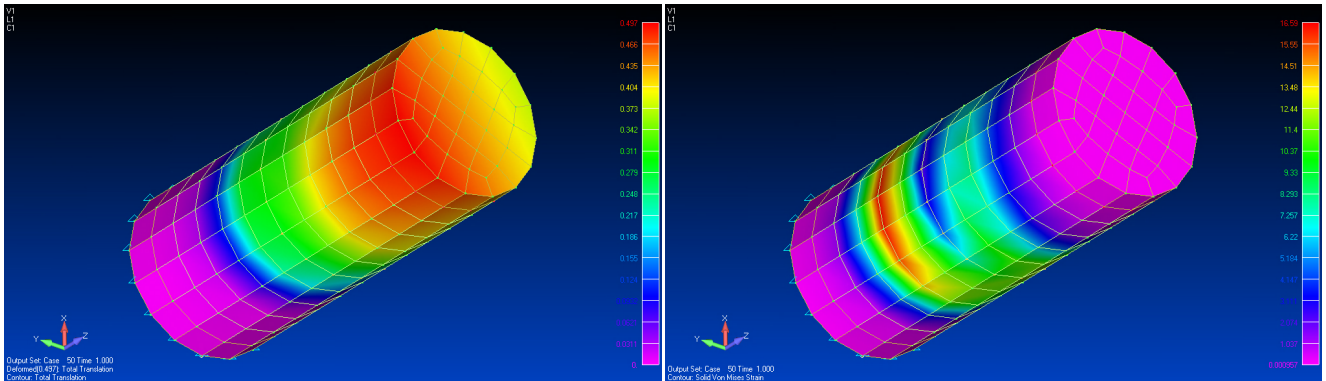


Σχήμα 7.16 Παραμορφωμένη κατάσταση με contour ολικής μετατόπισης (δεξί σχήμα) και κατανομή των Von Mises παραμορφώσεων - Βήμα εξωτερικής φόρτισης : 39/50

### 3. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 2 cm με πλάκες φόρτισης

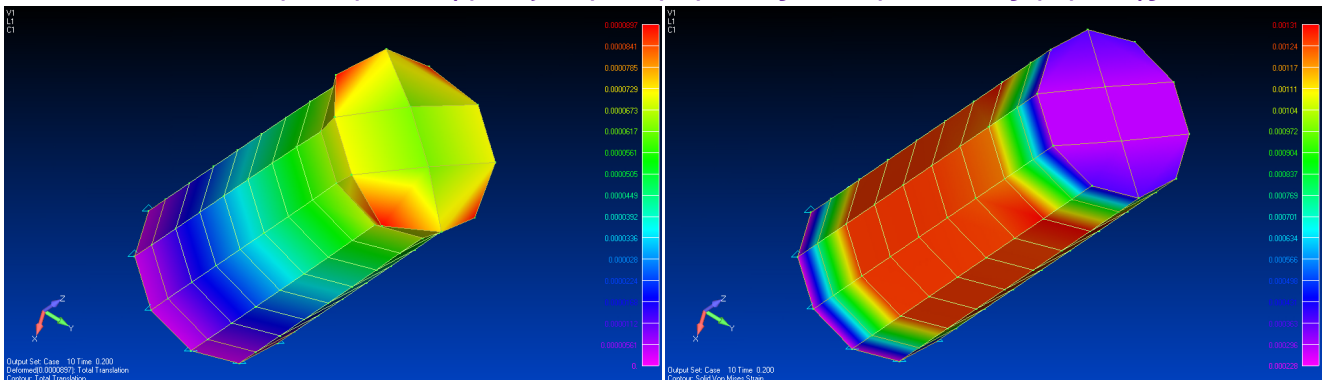


Σχήμα 7.17 Παραμορφωμένη κατάσταση με contour ολικής μετατόπισης (δεξί σχήμα) και κατανομή των Von Mises παραμορφώσεων - Βήμα εξωτερικής φόρτισης : 29/50

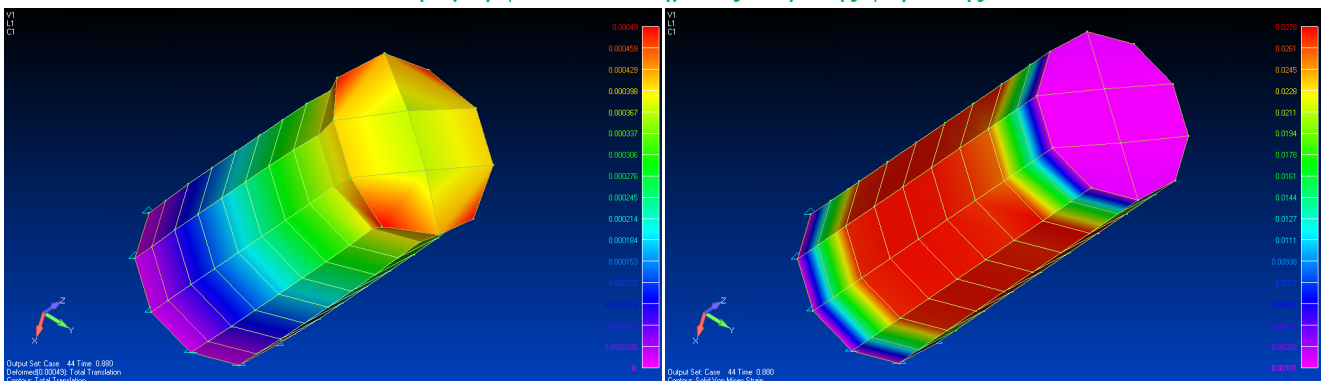


Σχήμα 7.18 Παραμορφωμένη κατάσταση με contour ολικής μετατόπισης (δεξί σχήμα) και κατανομή των Von Mises παραμορφώσεων - Βήμα εξωτερικής φόρτισης : 39/50

### 4. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 3 cm με πλάκες φόρτισης

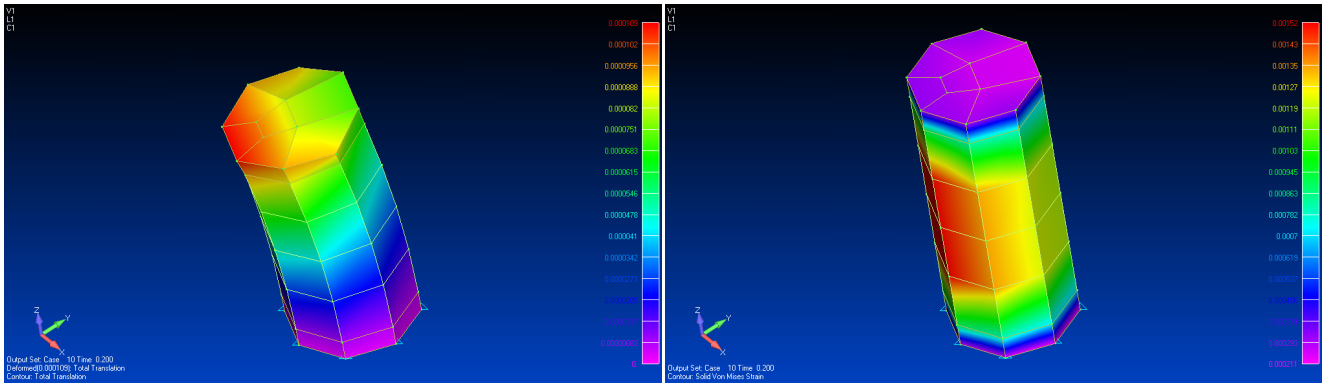


Σχήμα 7.19 Παραμορφωμένη κατάσταση με contour ολικής μετατόπισης (δεξί σχήμα) και κατανομή των Von Mises παραμορφώσεων - Βήμα εξωτερικής φόρτισης : 10/50

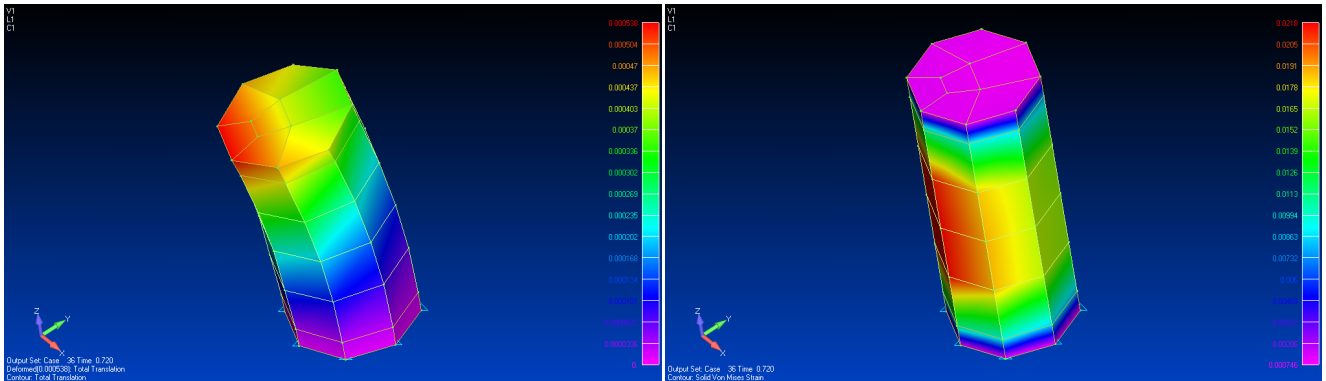


Σχήμα 7.20 Παραμορφωμένη κατάσταση με contour ολικής μετατόπισης (δεξί σχήμα) και κατανομή των Von Mises παραμορφώσεων - Βήμα εξωτερικής φόρτισης : 44/50

## 5. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 5 cm με πλάκες φόρτισης

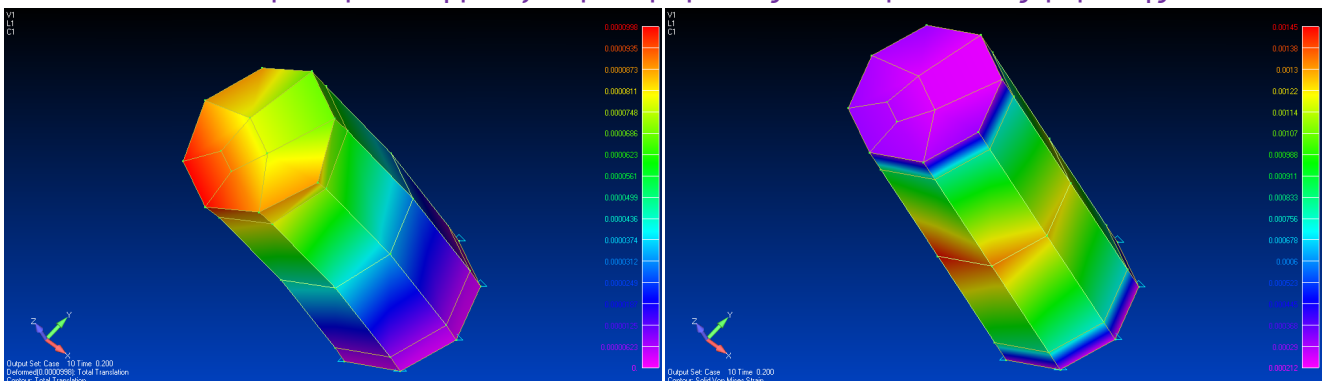


**Σχήμα 7.21** Παραμορφωμένη κατάσταση με contour ολικής μετατόπισης (δεξί σχήμα) και κατανομή των Von Mises παραμορφώσεων - Βήμα εξωτερικής φόρτισης : 10/50

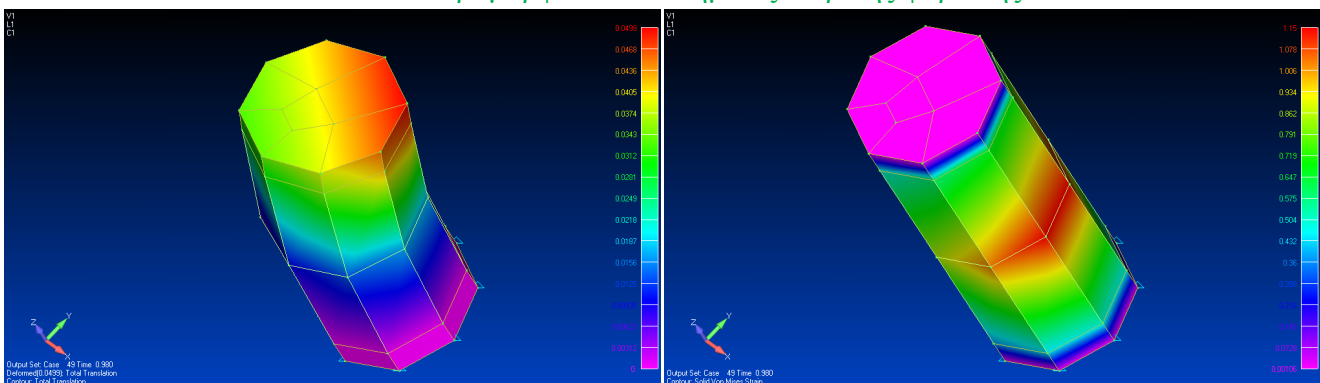


**Σχήμα 7.22** Παραμορφωμένη κατάσταση με contour ολικής μετατόπισης (δεξί σχήμα) και κατανομή των Von Mises παραμορφώσεων - Βήμα εξωτερικής φόρτισης : 36/50

## 6. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 10 cm με πλάκες φόρτισης



**Σχήμα 7.23** Παραμορφωμένη κατάσταση με contour ολικής μετατόπισης (δεξί σχήμα) και κατανομή των Von Mises παραμορφώσεων - Βήμα εξωτερικής φόρτισης : 10/50

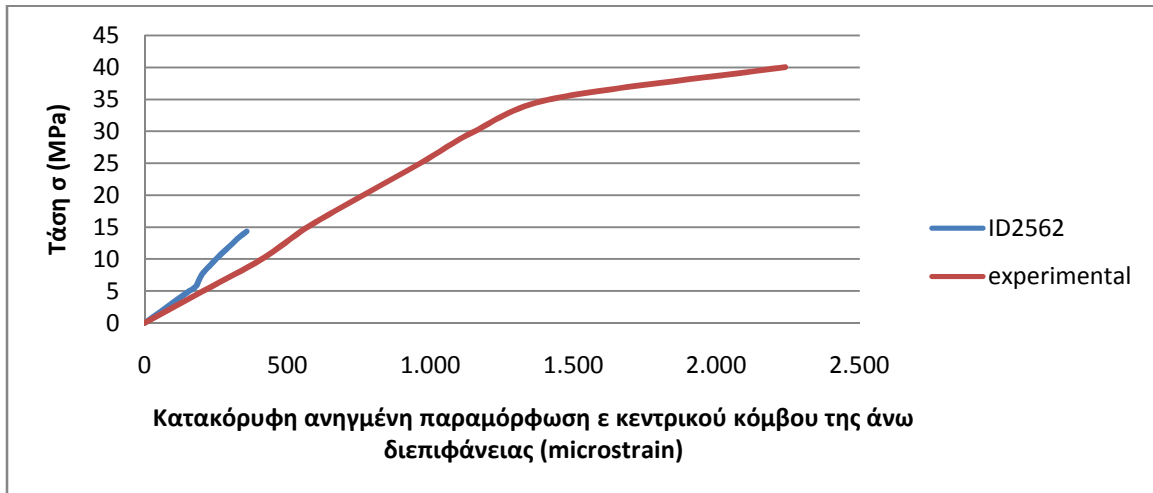


**Σχήμα 7.24** Παραμορφωμένη κατάσταση με contour ολικής μετατόπισης (δεξί σχήμα) και κατανομή των Von Mises παραμορφώσεων - Βήμα εξωτερικής φόρτισης : 49/50



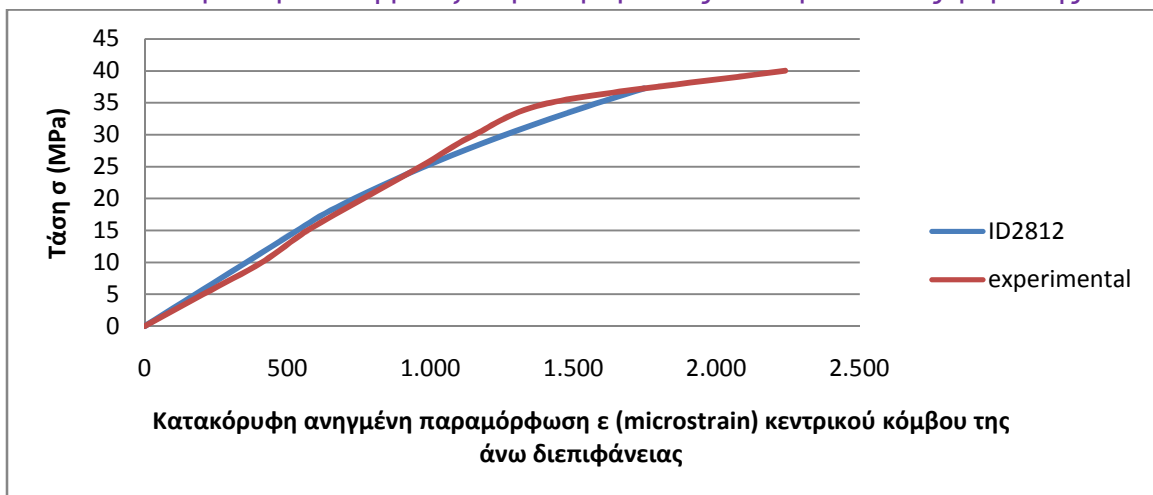
## C. Η γραφική παράσταση τάσης – κατακόρυφης παραμόρφωσης (C40)

### 1. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 1 cm χωρίς πλάκες φόρτισης



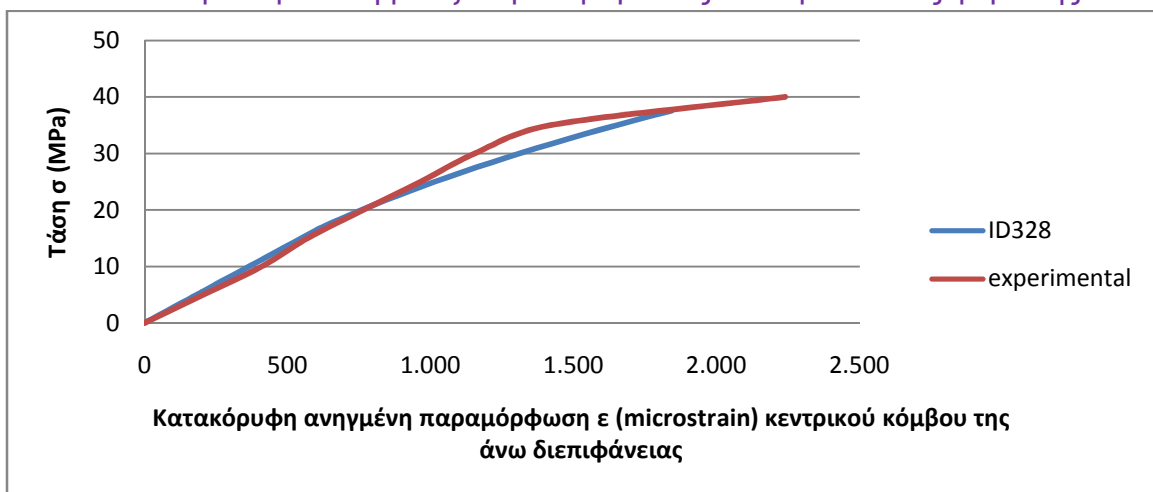
Σχήμα 7.25 Γραφική παράσταση τάσης – κατακόρυφης ανηγμένης παραμόρφωσης

### 2. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 1 cm με πλάκες φόρτισης



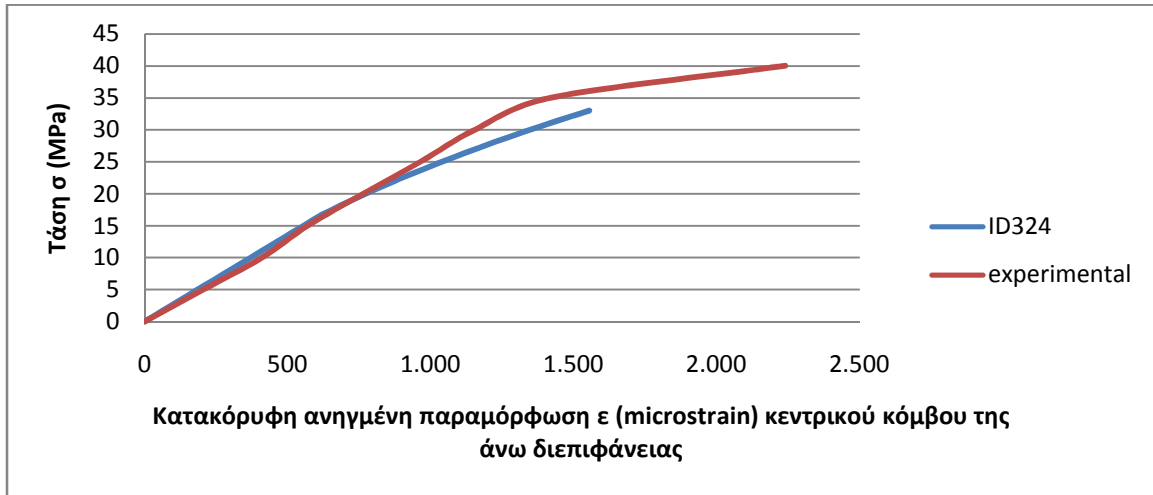
Σχήμα 7.26 Γραφική παράσταση τάσης – κατακόρυφης ανηγμένης παραμόρφωσης

### 3. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 2 cm με πλάκες φόρτισης



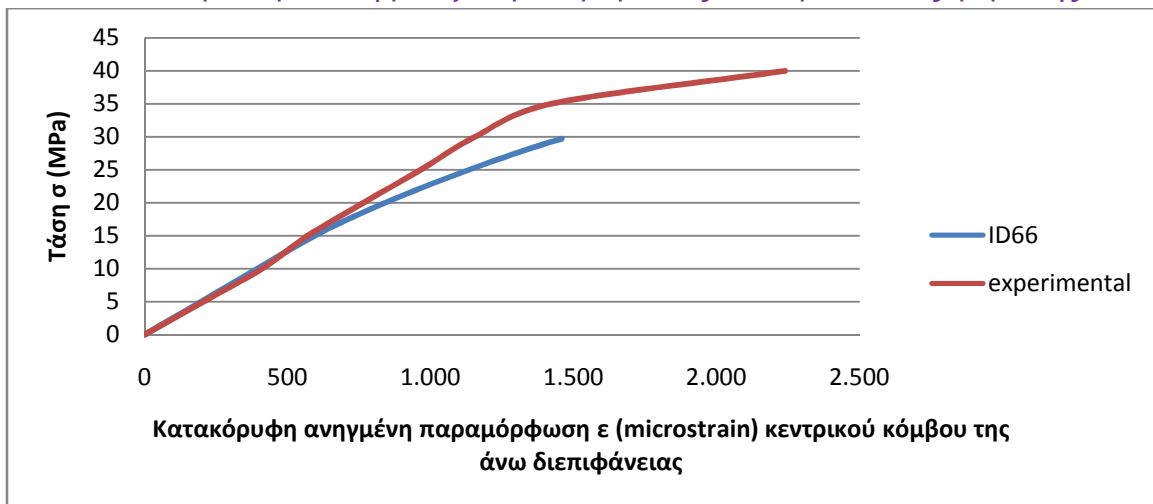
Σχήμα 7.27 Γραφική παράσταση τάσης – κατακόρυφης ανηγμένης παραμόρφωσης

#### 4. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 3 cm με πλάκες φόρτισης



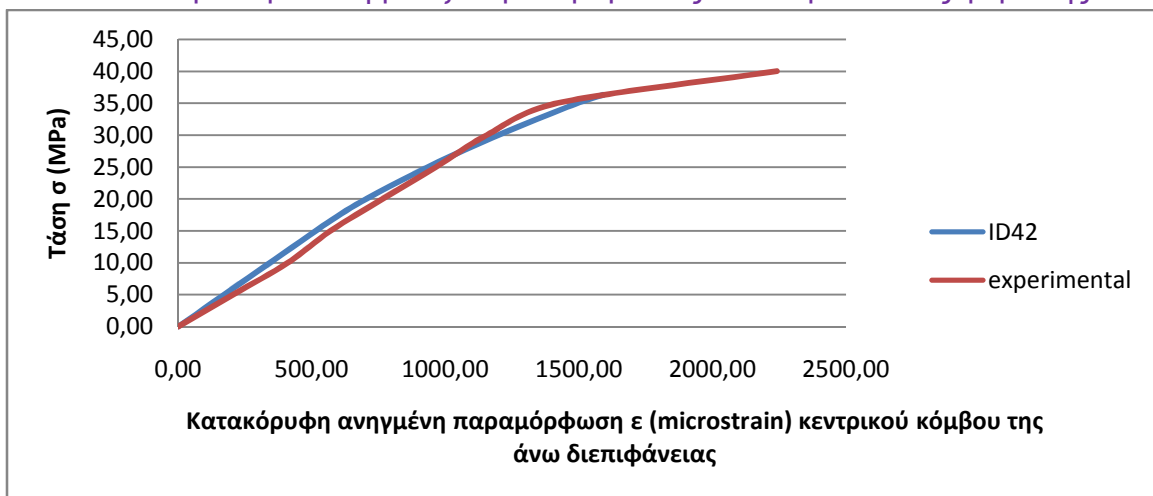
Σχήμα 7.28 Γραφική παράσταση τάσης – κατακόρυφης ανηγμένης παραμόρφωσης

#### 5. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 5 cm με πλάκες φόρτισης

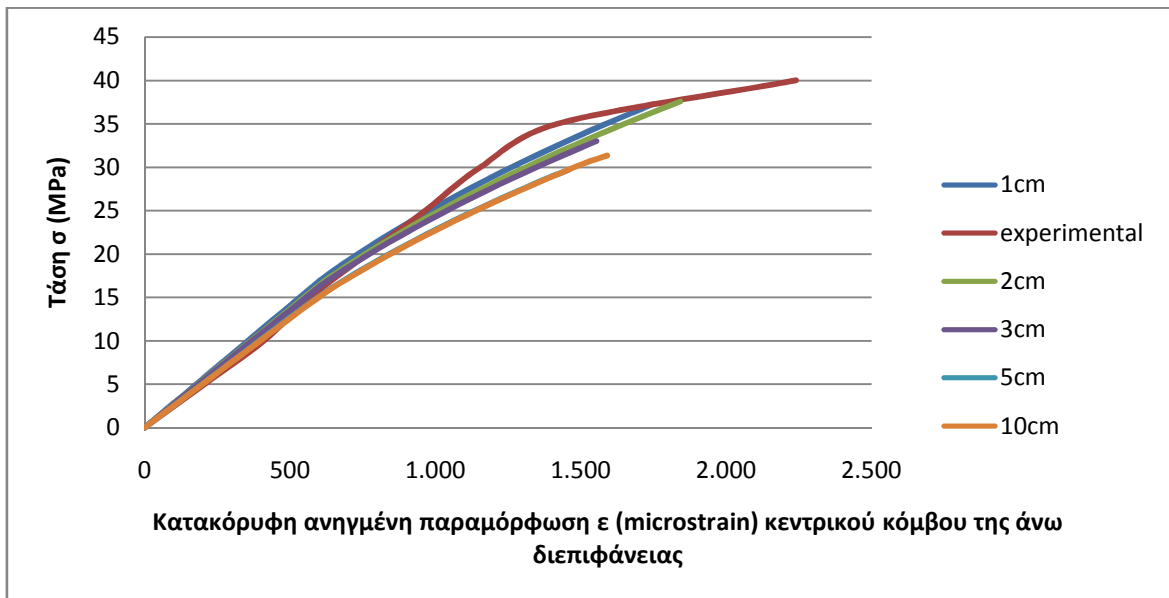


Σχήμα 7.29 Γραφική παράσταση τάσης – κατακόρυφης ανηγμένης παραμόρφωσης

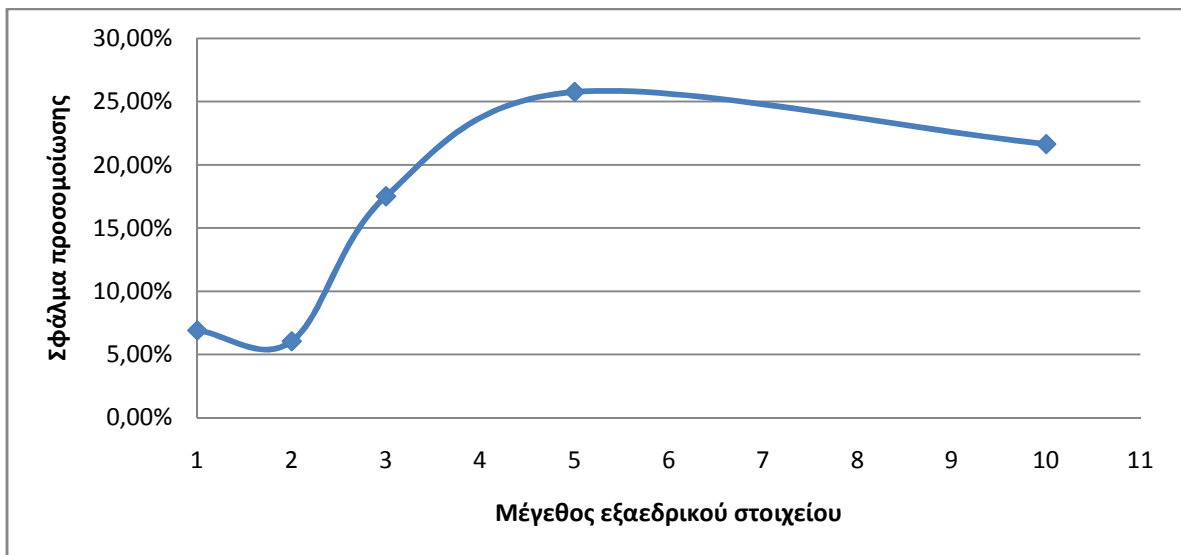
#### 6. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 10 cm με πλάκες φόρτισης



Σχήμα 7.30 Γραφική παράσταση τάσης – κατακόρυφης ανηγμένης παραμόρφωσης



Σχήμα 7.31 Σύγκριση των γραφικών παραστάσεων



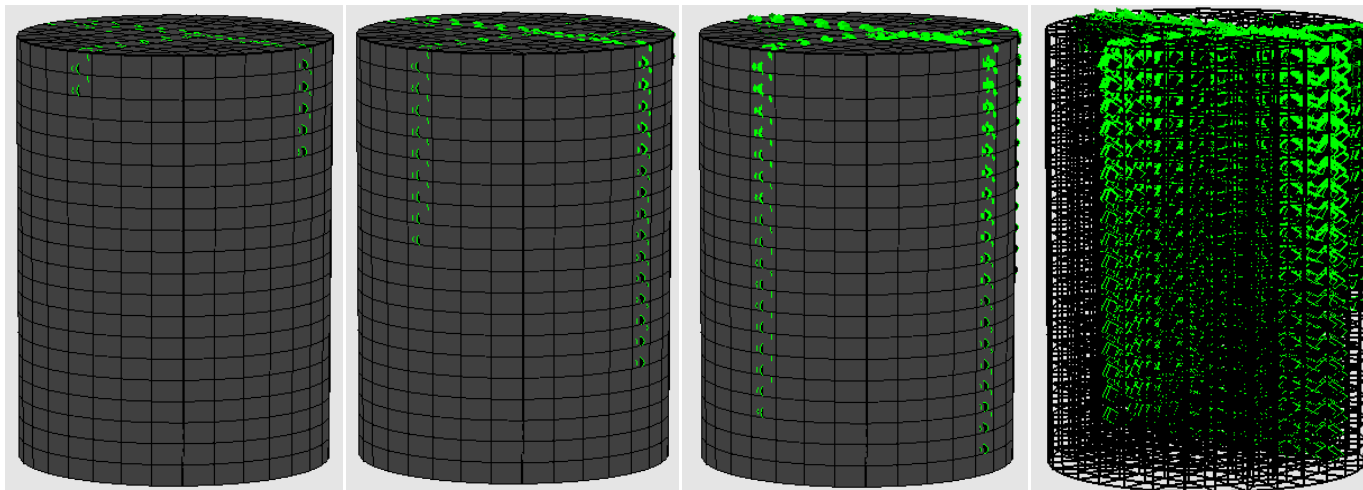
Σχήμα 7.32 Σύγκριση του σφάλματος προσομοίωσης



Σχήμα 7.33 Σύγκριση του συνολικού χρόνου αριθμητικής επίλυσης

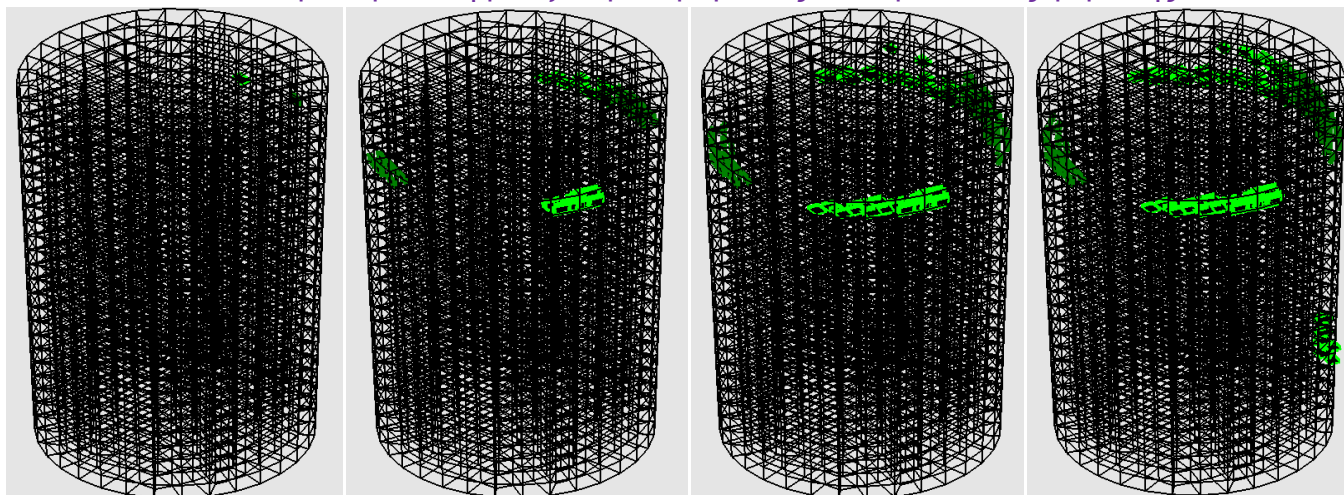
## D. Η κατανομή των ρωγμών (C40)

1. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 1 cm χωρίς πλάκες φόρτισης



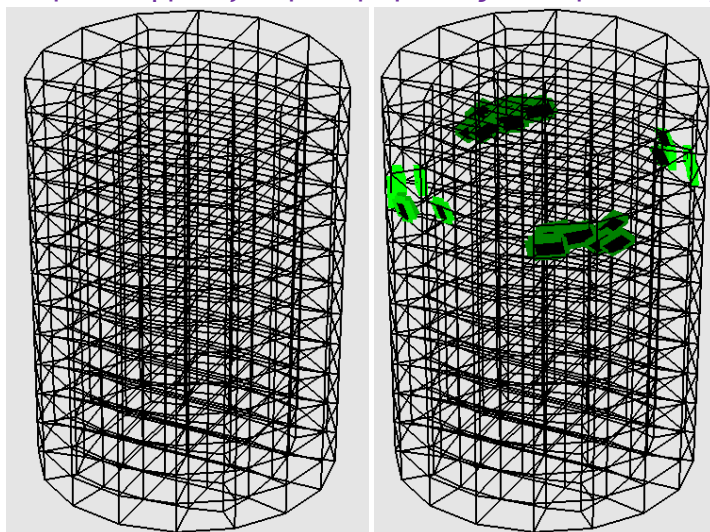
Σχήμα 7.34 Βήμα εξωτερικής φόρτισης : 7, 8, 9, 9

2. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 1 cm με πλάκες φόρτισης



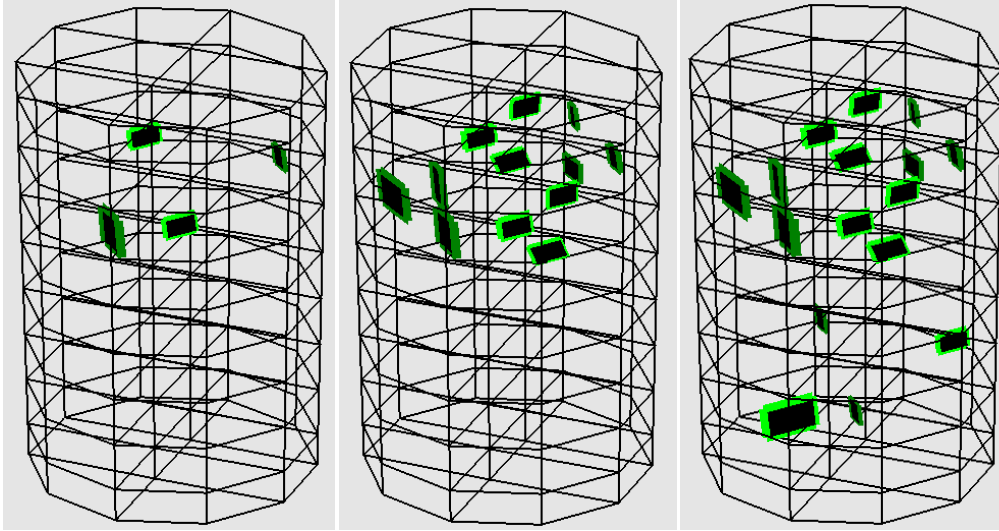
Σχήμα 7.35 Βήμα εξωτερικής φόρτισης : 34, 37, 38, 39

3. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 2 cm με πλάκες φόρτισης



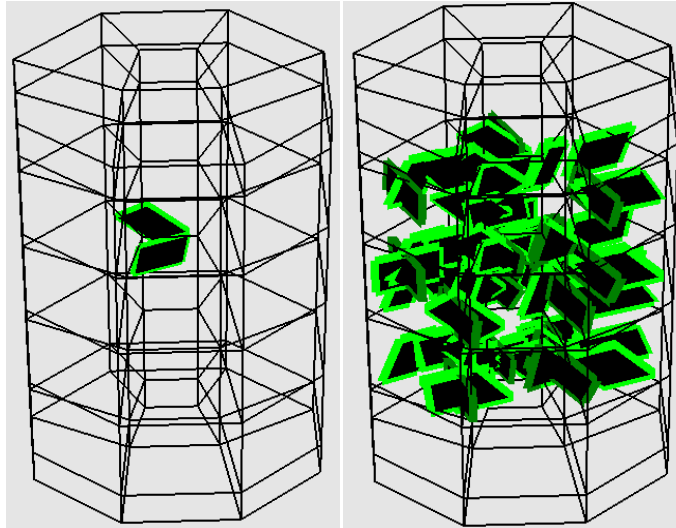
Σχήμα 7.36 Βήμα εξωτερικής φόρτισης : 44, 45

4. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 3 cm με πλάκες φόρτισης



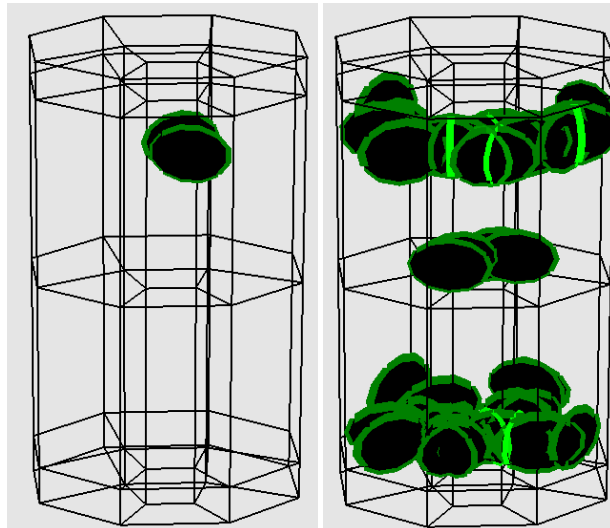
Σχήμα 7.37 Βήμα εξωτερικής φόρτισης : 42, 43, 44

5. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 5 cm με πλάκες φόρτισης



Σχήμα 7.38 Βήμα εξωτερικής φόρτισης : 34, 36

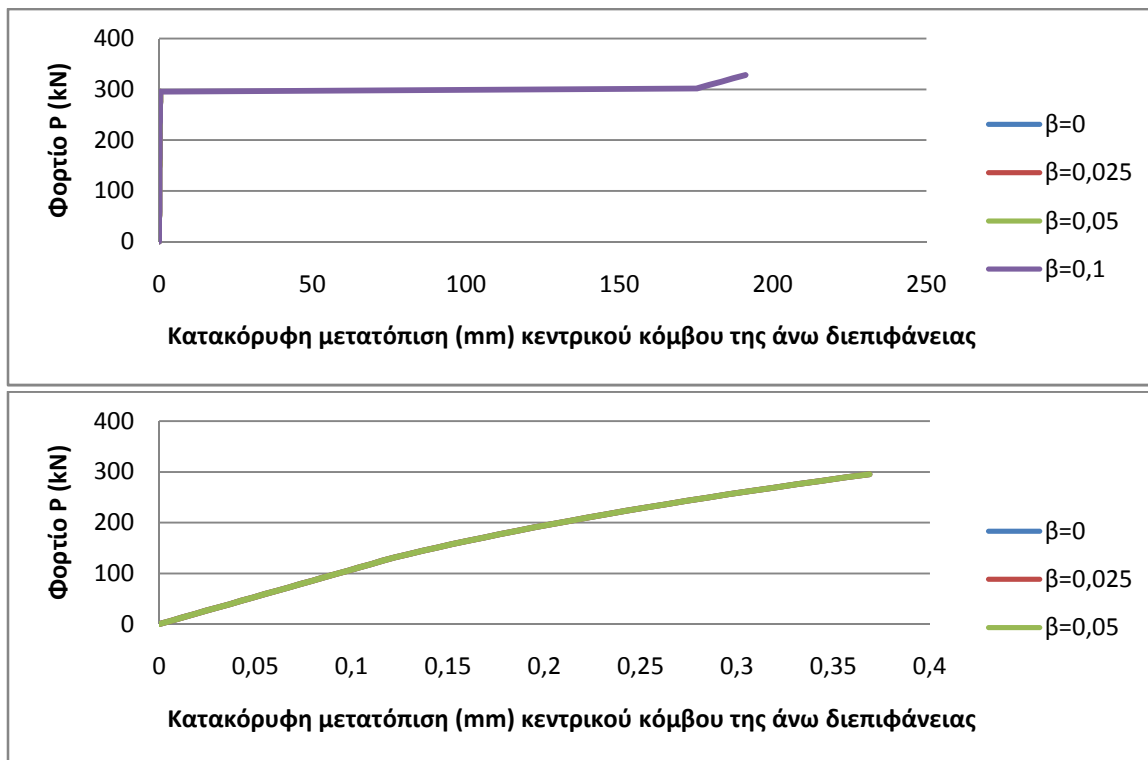
6. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 10 cm με πλάκες φόρτισης



Σχήμα 7.39 Βήμα εξωτερικής φόρτισης : 37, 38

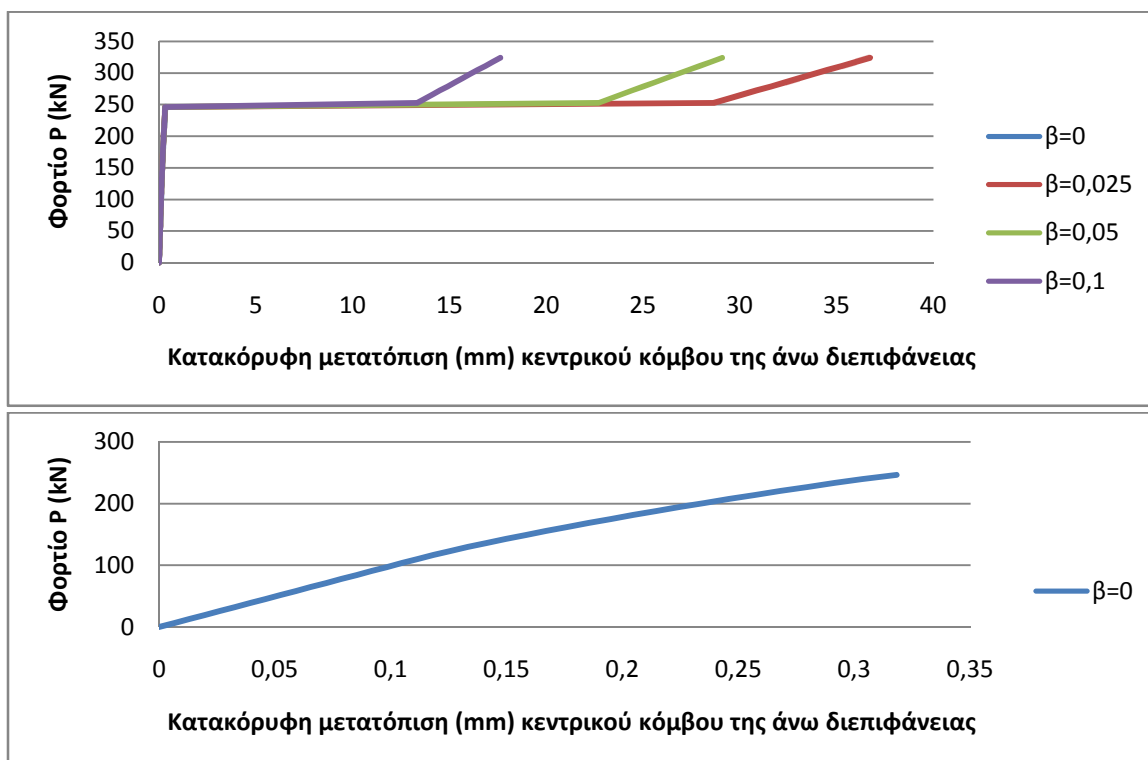
## Επιρροή του συντελεστή $\beta$ στα αριθμητικά αποτελέσματα και στη μορφή της καμπύλης τάσης – παραμόρφωσης (C40)

προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 2 cm με πλάκες φόρτισης



Σχήμα 7.40 Σύγκριση των γραφικών παραστάσεων φορτίου – κατακόρυφης μετατόπισης

προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 10 cm με πλάκες φόρτισης



Σχήμα 7.41 Σύγκριση των γραφικών παραστάσεων φορτίου – κατακόρυφης μετατόπισης

## Συμπεράσματα - Παρατηρήσεις

### 1. Πλάκες φόρτισης:

Προκειμένου να αποδείξουμε αριθμητικά την επιτακτική ανάγκη ύπαρξης των λεγόμενων “πλακών φόρτισης”, προσομοιώσαμε το κυλινδρικό δοκίμιο με εξαεδρικά στοιχεία μεγέθους 1 cm με και χωρίς τη θεώρηση πλακών. Όπως παρατηρούμε από τη σύγκριση των σχημάτων:

✚ 7.13, 7.14 με 7.15, 7.16 (Παραμορφωμένη κατάσταση με contour ολικής μετατόπισης και κατανομή των Von Mises παραμορφώσεων)

✚ 7.25 με 7.26(Γραφική παράσταση τάσης – κατακόρυφης ανηγμένης παραμόρφωσης)

✚ 7.34 με 7.35(Κατανομή των ρωγμών)

τα αριθμητικά αποτελέσματα της προσομοίωσης χωρίς πλάκες (παρά τη διακριτοποίηση με μεγάλο πλήθος εξαεδρικών στοιχείων σκυροδέματος) είναι **άκρως αναληθή και μη ρεαλιστικά** σε αντίθεση με τα αριθμητικά αποτελέσματα της προσομοίωσης με πλάκες, τα οποία προσεγγίζουν με ικανοποιητική ακρίβεια την πραγματική μονοαξονική αντοχή σε θλίψη του σκυροδέματος του υπό εξέταση κυλινδρικού δοκιμίου.

Ειδικότερα, στο σχήμα 7.25 διαπιστώνουμε τον τερματισμό της μη γραμμικής αλγοριθμικής διαδικασίας μόλις στο δέκατο βήμα εξωτερικής φόρτισης Newton – Raphson από τα συνολικά πενήντα που έχουμε επιβάλει, καθώς και την ανορθόδοξη μορφή της γραφικής παράστασης, η κλίση της οποίας μετά την επιβολή της τάσης των 5 MPa αυξάνεται και αποκλίνει σημαντικά από την πειραματική καμπύλη.

Διαπιστώνουμε ότι η **προσομοίωση της μονοαξονικής θλίψης κυλινδρικού δοκιμίου από άοπλο σκυρόδεμα χωρίς πλάκες δίνει αναληθή αποτελέσματα**. Κάτι τέτοιο ήταν αναμενόμενο, καθώς γνωρίζουμε ότι κάθε κατάλληλη πειραματική διάταξη της δοκιμής θλίψεως οφείλει να περιλαμβάνει πλάκες, ανάμεσα στις οποίες να συνθλίβονται τα δοκίμια. Αυτές θα πρέπει να είναι επίπεδες, καλά λειασμένες και να έχουν κατασκευαστεί από ανθεκτικότερο και σημαντικά σκληρότερο υλικό σε σχέση με το υλικό των θλιβομένων δοκιμίων, **ώστε να αποκλείεται η παραμόρφωσή τους**. Για το σκοπό αυτό θεωρήσαμε πλάκες από χάλυβα S500. Επιπρόσθετα, για να εξασφαλίζεται η παραλληλία των πλακών φόρτισης καθ’ όλη τη διάρκεια του πειράματος, πρέπει η μία από αυτές να εδράζεται έτσι ώστε να περιστρέφεται προς όλες τις κατευθύνσεις μέσα σε καθορισμένα όρια. Την απαίτηση αυτή επιτύχαμε με την επιβολή των κατάλληλων συνοριακών συνθηκών. Παράλληλα η τοποθέτηση των δοκιμίων πρέπει να γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε να εξασφαλίζεται απολύτως η αξονικότητα της φόρτισης.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι χωρίς πλάκες δεν τηρούνται οι προαναφερθείσες προϋποθέσεις και **το δοκίμιο ρηγματώνεται πρόωρα λόγω διάτρησης**, γεγονός εμφανές και από τη μορφή της ρηγμάτωσης του σχήματος 7.34, η εκκίνηση της οποίας γίνεται από την επιφάνεια και όχι από το εσωτερικό του δοκιμίου (όπως θα έπρεπε).

## 2. Ρηγμάτωση:

Η θραύση του σκυροδέματος σε θλίψη επέρχεται κατά τη διεύθυνση της μέγιστης διατμητικής τάσης, ενώ το όριο θραύσης βρίσκεται κατά κανόνα τόσο κοντά στο όριο διαρροής ώστε να καθίσταται αδύνατη η διάκρισή τους. Συνεπώς, στο σκυρόδεμα επέρχεται αστοχία (δημιουργία ρωγμών και θραύση) αμέσως μετά την είσοδό του στη διαρροή. Η θραύση είναι διατμητική, δηλαδή έχει κλίση περίπου  $45^\circ$  ως προς τον διαμήκη άξονα του δοκιμίου (κατά το επίπεδο εφαρμογής της μέγιστης διατμητικής τάσης), επειδή ακριβώς το σκυρόδεμα ως ψαθυρό υλικό παρουσιάζει μειωμένη αντοχή σε διατμητικές τάσεις σε σύγκριση με τις ορθές θλιπτικές τάσεις, οι οποίες τείνουν να «κλείσουν» παρά να επεκτείνουν τις περιοχές ανωμαλιών και τις μικρορωγμές στο εσωτερικό του υλικού, όπου και γίνεται η εκκίνηση της θραύσεως.

Το γεγονός αυτό διαπιστώνεται από τη μορφή και τη διάταξη των ρωγμών στα σχήματα 7.35÷7.39. Αξίζει να επισημάνουμε ότι στην περίπτωση της μη θεώρησης πλακών φόρτισης, η ρηγμάτωση (όπως φαίνεται και από το σχήμα 7.34) δεν ξεκινάει από το εσωτερικό του δοκιμίου, αλλά από την άνω του επιφάνεια (λόγω του φαινομένου της διάτρησης). Η επιφανειακή αυτή ρηγμάτωση αντιμετωπίζεται με τη θεώρηση πλακών.

Η διεύθυνση των ρωγμών είναι κάθετη στο επίπεδο των κύριων εφελκυστικών τάσεων, που στην προκειμένη περίπτωση είναι επίπεδο εγκάρσιο στον διαμήκη άξονα της δοκού. Συνεπώς, η διεύθυνση των ρωγμών (όπως αποδεικνύουμε και στα σχήματα 7.35÷7.39) είναι παράλληλη με τον διαμήκη άξονα του δοκιμίου.

## 3. Επίδραση του μεγέθους των εξεδρικών στοιχείων στην αριθμητική επίλυση:

Αξίζει να αναφερθούμε στον τρόπο με τον οποίο η πυκνότητα του δικτύου των εξεδρικών πεπερασμένων στοιχείων επιδρά στην αξιοπιστία των αριθμητικών αποτελεσμάτων και στην ταχύτητα ολοκλήρωσης της αλγοριθμικής διαδικασίας.

Στο σχήμα 7.32 παρουσιάζεται το σφάλμα προσομοίωσης για τα διάφορα μεγέθη εξεδρικού στοιχείου. Ως σφάλμα προσομοίωσης ορίσαμε την ποσοστιαία διαφορά μεταξύ της πειραματικής και της αριθμητικής τιμής της μονοαξονικής αντοχής σε θλίψη του κυλινδρικού δοκιμίου. Παρατηρούμε ότι τα πιο αξιόπιστα αριθμητικά αποτελέσματα μας παρέχει το δίκτυο των πεπερασμένων στοιχείων μεγέθους 1cm και 2cm, με σφάλμα προσομοίωσης κάτω του 5%, ενώ το σφάλμα των υπόλοιπων δικτύων είναι σημαντικό. Σχετικά με τον συνολικό χρόνο αριθμητικής επίλυσης (Σχήμα 7.33), παρατηρούμε ότι η επίλυση των δικτύων των εξεδρικών στοιχείων μεγέθους 2cm, 3cm, 5cm, 10 cm έχει διάρκεια της ίδιας τάξης μεγέθους, σε αντίθεση με το δίκτυο των εξεδρικών στοιχείων μεγέθους 1cm το οποίο απαιτεί πολλαπλάσιο χρόνο.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι **η βέλτιστη προσομοίωση, η οποία συνδυάζει την αξιοπιστία των αριθμητικών αποτελεσμάτων με την αριθμητική ευρωστία και αποδοτικότητα, είναι η διακριτοποίηση με εξεδρικά στοιχεία μεγέθους 2cm.**



4. Επίδραση του συντελεστή μερικής διατήρησης της διατμητικής στιβαρότητας (remaining shear)  $\beta$  στα αριθμητικά αποτελέσματα:

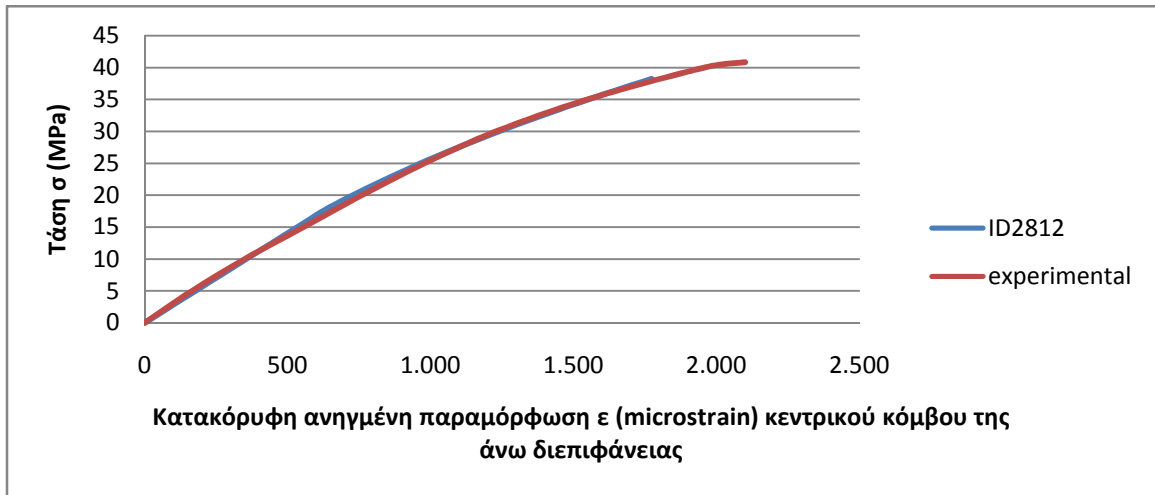
Ο συντελεστής  $\beta$  αντιπροσωπεύει την παραμένουσα διατμητική αντοχή κατά μήκος της επιφάνειας της ρωγμής λόγω αλληλεμπλοκής των αδρανών. Μπορούμε να πούμε ότι στο αριθμητικό μας μοντέλο οι ρωγμές παραλαμβάνουν φορτίο μέσω του  $\beta$ . Έπειτα από παραμετρική διερεύνηση (σχήματα 7.40 και 7.41), καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι **μη μηδενικές τιμές του  $\beta$  δεν έχουν κάποιο φυσικό νόημα και εισάγουν παρασιτική στιβαρότητα στη μετελαστική απόκριση του συγκεκριμένου προσομοιώματος από άοπλο σκυρόδεμα**, με αποτέλεσμα ακόμη και μετά τη διαρροή του υλικού να παίρνουμε μετακινήσεις πολύ μεγάλου μεγέθους. Για τις συγκεκριμένες προσομοιώσεις, κρίθηκε ως καταλληλότερη τιμή για το  $\beta$  το μηδέν.

Γενικά, θα πρέπει να δίνεται ιδιαίτερη προσοχή στη χρήση του συντελεστή μερικής διατήρησης της διατμητικής στιβαρότητας, η οποία **θα πρέπει να ανταποκρίνεται στη φυσική διάσταση του εκάστοτε αριθμητικού μοντέλου**. Μπορεί ο συντελεστής  $\beta$  να χρησιμοποιείται σε ορισμένες προσομοιώσεις για να τις βελτιώσει αριθμητικά και να αποφύγει την κακή κατάσταση των μητρώων στιβαρότητας, εντούτοις σε άλλες (όπως στη συγκεκριμένη) μη μηδενικές τιμές του  $\beta$  πετυχαίνουν το ακριβώς αντίθετο αποτέλεσμα και εμφανίζουν μετελαστικό κλάδο με απολύτως κανένα φυσικό νόημα.

5. Τα ανωτέρω 4 συμπεράσματα επιβεβαιώθηκαν και από τα αποτελέσματα της αριθμητικής προσομοίωσης για ποιότητα σκυροδέματος C40.8, καθώς και από εκείνα της υποενότητας 7.2.2, στην οποία παρουσιάζουμε την προσομοίωση ενός δεύτερου πειράματος μονοαξονικής θλίψης δοκιμίων διαφορετικής γεωμετρίας.

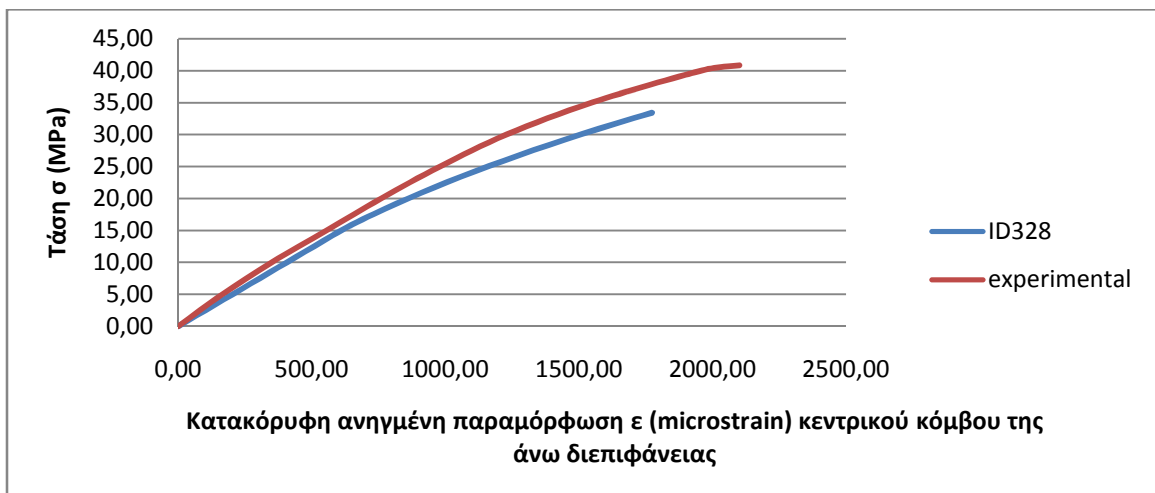
## Η γραφική παράσταση τάσης – κατακόρυφης παραμόρφωσης (C40.8)

### 1. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 1 cm με πλάκες φόρτισης



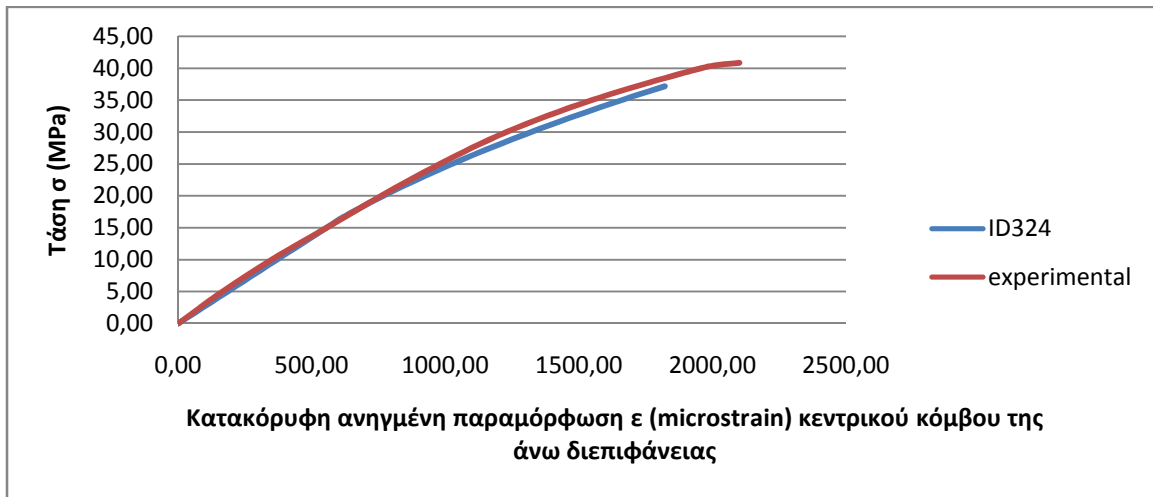
Σχήμα 7.42 Γραφική παράσταση τάσης – κατακόρυφης ανηγμένης παραμόρφωσης

### 2. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 2 cm με πλάκες φόρτισης



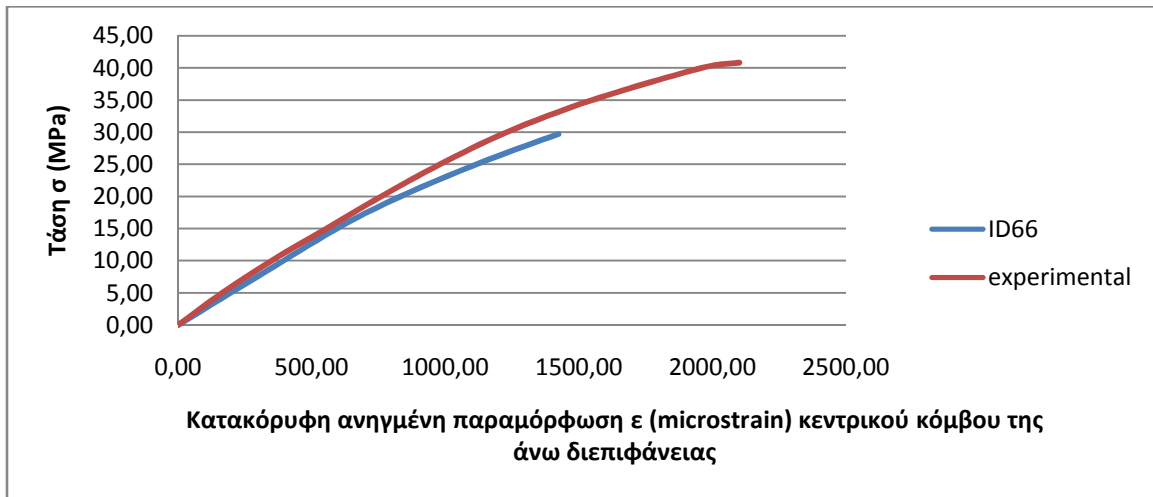
Σχήμα 7.43 Γραφική παράσταση τάσης – κατακόρυφης ανηγμένης παραμόρφωσης

### 3. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 3 cm με πλάκες φόρτισης



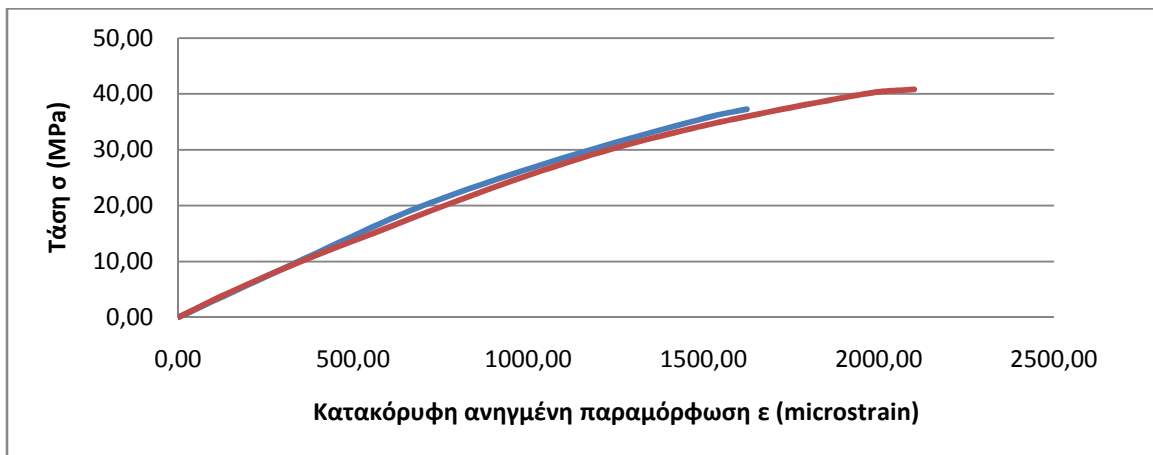
Σχήμα 7.44 Γραφική παράσταση τάσης – κατακόρυφης ανηγμένης παραμόρφωσης

### 4. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 5 cm με πλάκες φόρτισης



Σχήμα 7.45 Γραφική παράσταση τάσης – κατακόρυφης ανηγμένης παραμόρφωσης

### 5. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 10 cm με πλάκες φόρτισης



Σχήμα 7.46 Γραφική παράσταση τάσης – κατακόρυφης ανηγμένης παραμόρφωσης

### 7.1.2 Κυλινδρικά δοκίμια ύψους 15 cm και διαμέτρου 7,5 cm

Η συγκεκριμένη προσομοίωση αφορά κυλινδρικά δοκίμια ύψους 15 cm και διαμέτρου 7,5 cm. Τα αριθμητικά αποτελέσματα της προσομοίωσης αυτής θα συγκριθούν με τα πειραματικά δεδομένα του δημοσιευμένου άρθρου των P.M. Zisopoulos, M.D. Kotsovos and M.N. Pavlovic με τίτλο “Deformational behaviour of concrete specimens in uniaxial compression under different boundary conditions”.

Συγκεκριμένα, θα προσομοιώσουμε ένα κυλινδρικό δοκίμιο από άοπλο σκυρόδεμα με τα εξής χαρακτηριστικά:

- Ύψος :  $H=0,150$  m
- Διάμετρος βάσης κυλίνδρου :  $D=0,075$  m
- Ποιότητα άοπλου σκυροδέματος : C41.2, C48.5
- Μέτρο ελαστικότητας :  $E=40$  GPa,  $E=45$  GPa
- Λόγος του Poisson :  $\nu=0,17$

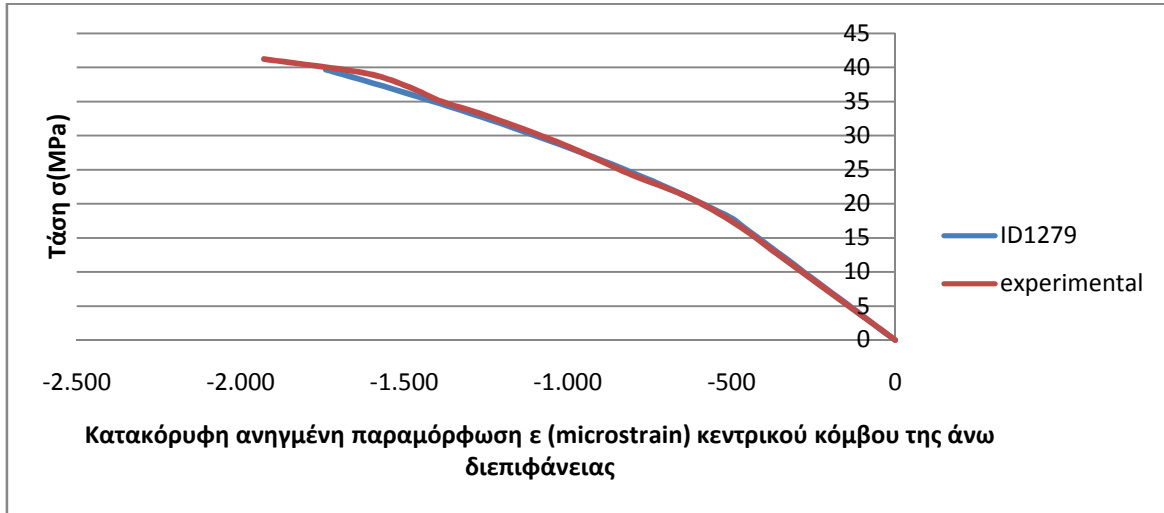
Προκειμένου να υπολογίσουμε τη μονοαξονική αντοχή σε θλίψη του συγκεκριμένου κυλινδρικού δοκιμίου από άοπλο σκυρόδεμα, θα το προσομοιώσουμε με ισοπαραμετρικά οκτακομβικά εξαεδρικά στοιχεία. Προκειμένου να προσεγγίσουμε κατά το δυνατόν τις πειραματικές συνθήκες και να εξάγουμε ρεαλιστικά αποτελέσματα, θα θεωρήσουμε άνω και κάτω πλάκα φόρτισης από χάλυβα, ο οποίος προφανώς έχει πολύ μεγαλύτερο όριο διαρροής. Επιλέγουμε χάλυβα S500.

Συγκεκριμένα, θα πραγματοποιήσουμε 4 συνολικά προσομοιώσεις:

1. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 1 cm με πλάκες φόρτισης
2. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 2 cm με πλάκες φόρτισης
3. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 3 cm με πλάκες φόρτισης
4. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 5 cm με πλάκες φόρτισης.

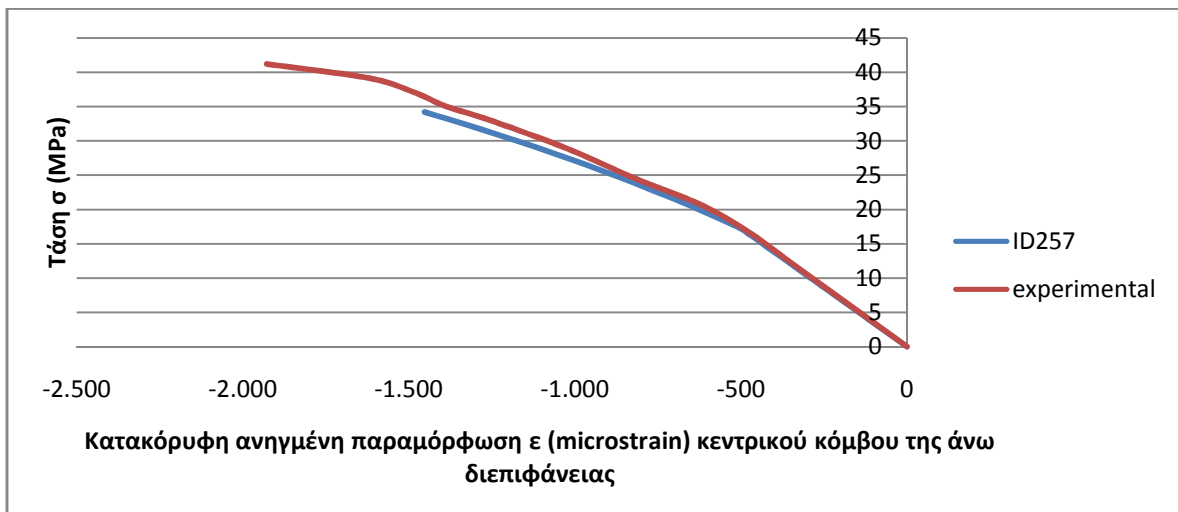
## Η γραφική παράσταση τάσης – κατακόρυφης παραμόρφωσης (C41.2)

### 1. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 1 cm με πλάκες φόρτισης



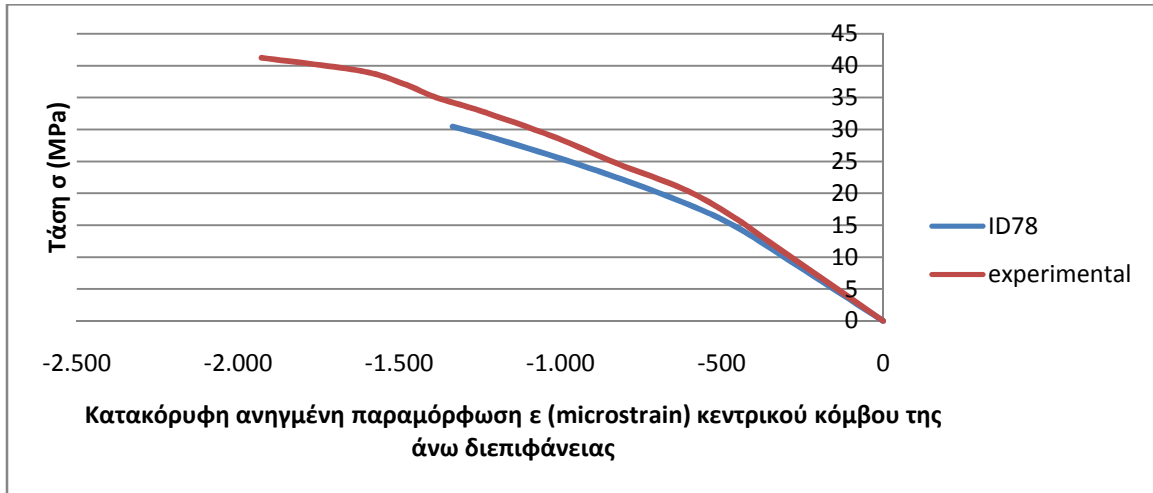
Σχήμα 7.47 Γραφική παράσταση τάσης – κατακόρυφης ανηγμένης παραμόρφωσης

### 2. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 2 cm με πλάκες φόρτισης



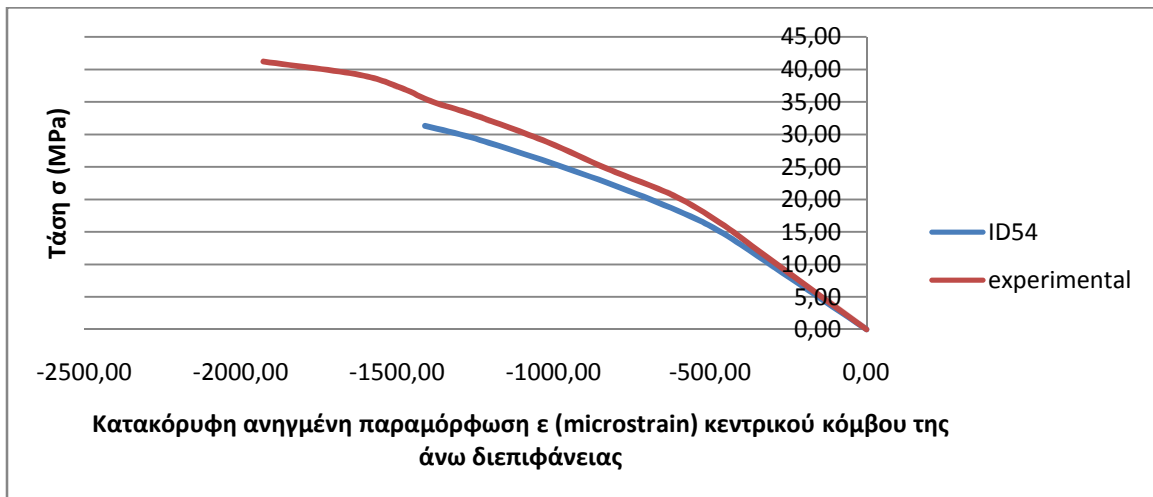
Σχήμα 7.48 Γραφική παράσταση τάσης – κατακόρυφης ανηγμένης παραμόρφωσης

### 3. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 3 cm με πλάκες φόρτισης



Σχήμα 7.49 Γραφική παράσταση τάσης – κατακόρυφης ανηγμένης παραμόρφωσης

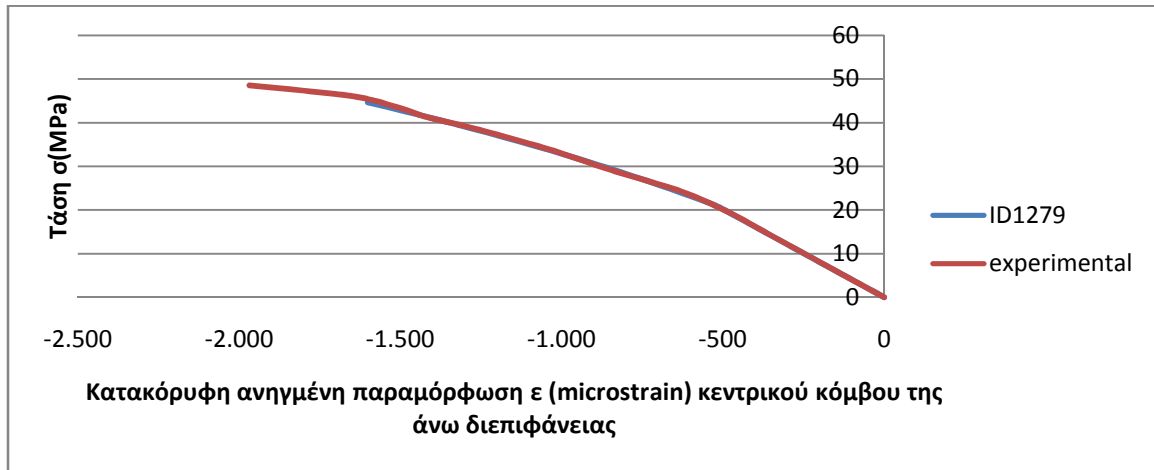
### 4. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 5 cm με πλάκες φόρτισης



Σχήμα 7.50 Γραφική παράσταση τάσης – κατακόρυφης ανηγμένης παραμόρφωσης

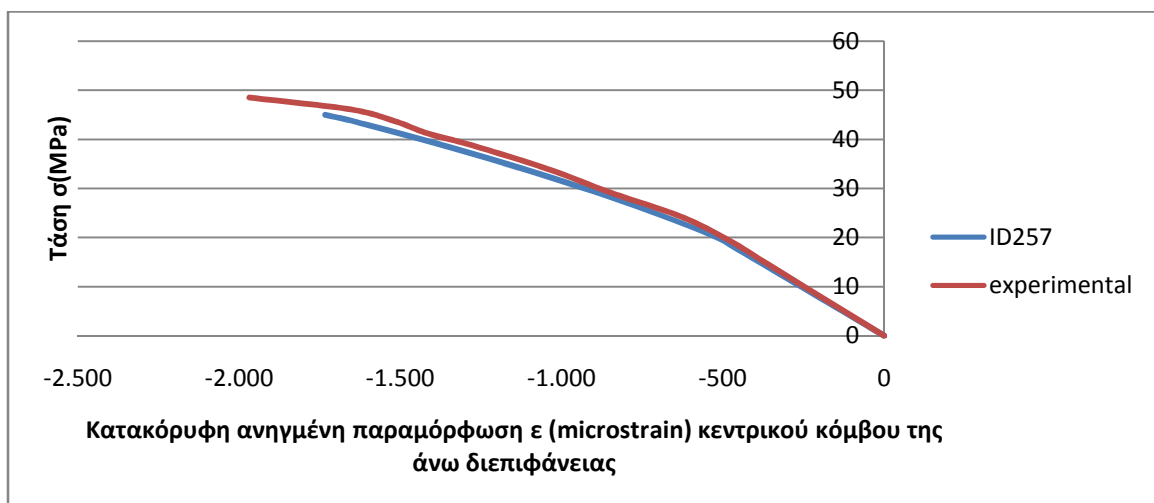
## Η γραφική παράσταση τάσης – κατακόρυφης παραμόρφωσης (C48.5)

### 1. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 1 cm με πλάκες φόρτισης



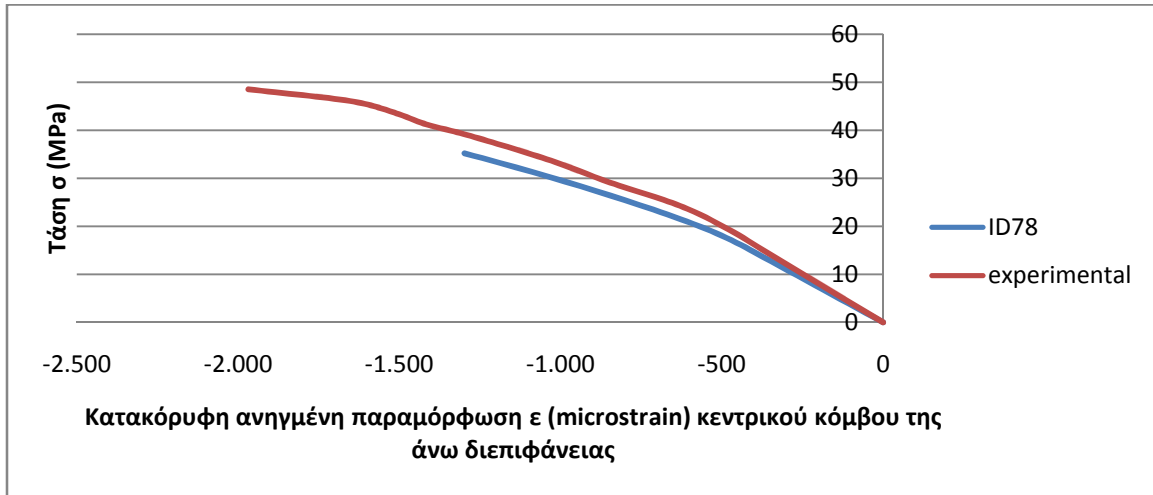
Σχήμα 7.51 Γραφική παράσταση τάσης – κατακόρυφης ανηγμένης παραμόρφωσης

### 2. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 2 cm με πλάκες φόρτισης



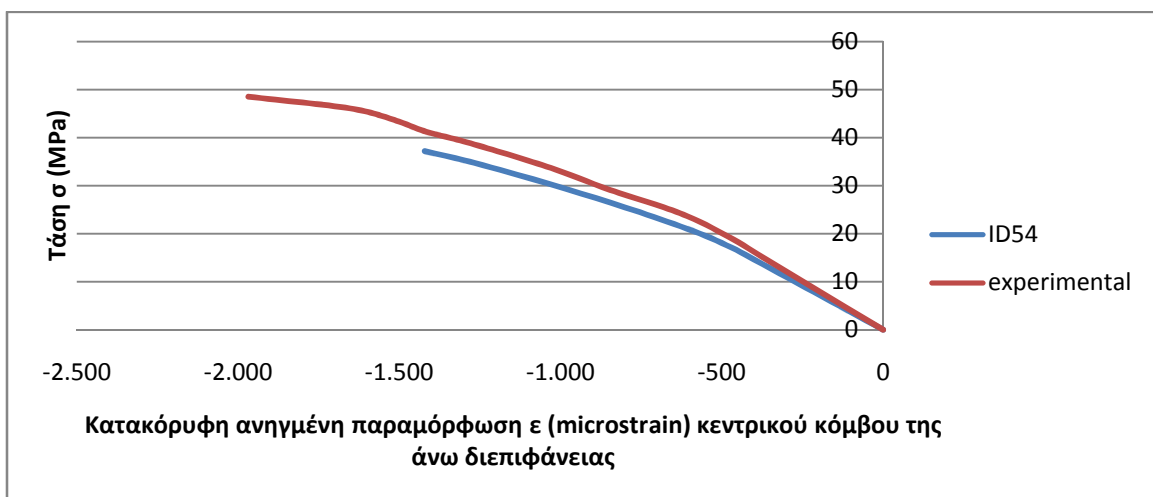
Σχήμα 7.52 Γραφική παράσταση τάσης – κατακόρυφης ανηγμένης παραμόρφωσης

### 3. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 3 cm με πλάκες φόρτισης



Σχήμα 7.53 Γραφική παράσταση τάσης – κατακόρυφης ανηγμένης παραμόρφωσης

### 4. προσομοίωση με εξαεδρικά μεγέθους 5 cm με πλάκες φόρτισης



Σχήμα 7.54 Γραφική παράσταση τάσης – κατακόρυφης ανηγμένης παραμόρφωσης



## 7.2 Προσομοίωση αμφιέρειστης δοκού από οπλισμένο σκυρόδεμα

Στη συγκεκριμένη υποενότητα παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα του προτεινόμενου κώδικα ReConAn από την ανάλυση μίας αμφιέρειστης δοκού από οπλισμένο σκυρόδεμα χωρίς συνδετήρες (χωρίς διατμητικό οπλισμό, μόνο διαμήκεις κάτω ράβδοι) και μίας αμφιέρειστης δοκού από οπλισμένο σκυρόδεμα με συνδετήρες. Συγχρόνως, πραγματοποιείται η σύγκριση των αριθμητικών αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα πειραματικά. Στόχος των δύο αυτών αναλύσεων είναι:

- να επισημάνουμε τις διαφορές μεταξύ της προσομοίωσης του οπλισμού με συμβατικά στοιχεία δικτυώματος και της αντίστοιχης προσομοίωσης με εξελιγμένα φυσικά στοιχεία δυνάμεων (στοιχεία δοκού).
- να κατανοήσουμε το πως οι δύο διαφορετικοί τρόποι προσομοίωσης του οπλισμού ενός μοντέλου από οπλισμένο σκυρόδεμα επιδρούν σε αριθμητικές παραμέτρους, όπως η αριθμητική αποδοτικότητα και η ακρίβεια.
- να τονίσουμε ότι σε αρκετές περιπτώσεις θα πρέπει να λαμβάνουμε υπόψιν την καμπτική και διατμητική στιβαρότητα του οπλισμού, την οποία ως επί το πλείστον οι παλαιότεροι ερευνητές αμελούσαν.

### 7.2.1 Προσομοίωση αμφιέρειστης δοκού από οπλισμένο σκυρόδεμα χωρίς συνδετήρες

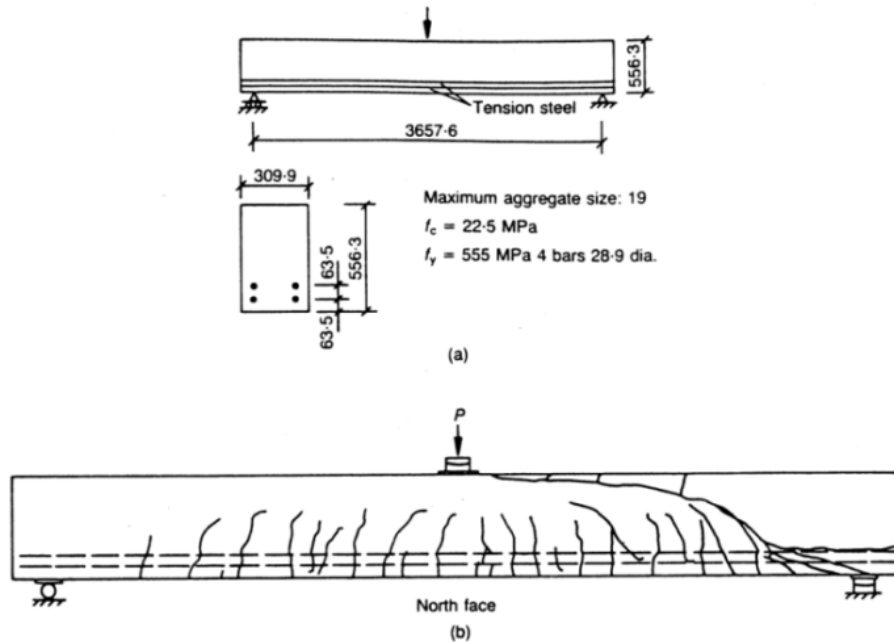
Θα προσομοιώσουμε μία αμφιέρειστη δοκό από οπλισμένο σκυρόδεμα, η οποία έχει ως διαμήκη κάτω οπλισμό 4Φ28,9 (δηλαδή 4 διαμήκεις ράβδους με διάμετρο  $\Phi = 28,9 \text{ mm} = 0,0289 \text{ m}$ ) και της οποίας το μέσον του ανοίγματος καταπονείται από κατακόρυφο συγκεντρωμένο φορτίο. Το φορτίο καταρρεύσεως έχει υπολογιστεί πειραματικά ίσο με  $P_{cr} = 334 \text{ kN}$ , ενώ η αντίστοιχη πειραματική μετατόπιση του μέσου του ανοίγματος ισούται με  $6,6 \text{ mm}$ .

Ειδικότερα, η συγκεκριμένη δοκός έχει τα εξής γεωμετρικά χαρακτηριστικά:

- καθαρό άνοιγμα:  $L = 3.657,6 \text{ mm} = 3,6576 \text{ m}$
- διατομή: ορθογωνική με πλάτος  $b = 309,9 \text{ mm} = 0,3099 \text{ m}$  και ύψος  $h = 556,3 \text{ mm} = 0,5563 \text{ m}$
- επικάλυψη σκυροδέματος:  $e = 63,5 \text{ mm} = 0,0635 \text{ m}$
- απόσταση μεταξύ των διαμήκων ράβδων:  $d = 63,5 \text{ mm} = 0,0635 \text{ m}$
- προεξοχή της δοκού πέραν των στηρίξεων :  $d' = 100 \text{ mm} = 0,1 \text{ m}$

Για τη σωστή προσομοίωση του προβλήματος στη θέση των στηρίξεων (κύλιση, άρθρωση) τοποθετούμε πλάκα από χάλυβα S355 με:

- πλάτος: το πλάτος της δοκού  $b = 309,9 \text{ mm} = 0,3099 \text{ m}$
- μήκος:  $L_{\text{πλάκας}} = 100 \text{ mm} = 0,1 \text{ m}$
- πάχος:  $h_{\text{πλάκας}} = 25 \text{ mm} = 0,025 \text{ m}$



**Σχήμα 7.55** Δοκός από οπλισμένο σκυρόδεμα χωρίς συνδετήρες υποβαλλόμενη σε συγκεντρωμένο κατακόρυφο φορτίο

α) Γεωμετρικά χαρακτηριστικά β) Η πειραματική διάταξη των ρωγμών κατά την επιβολή του φορτίου θραύσεως

Σχετικά με τις ιδιότητες των υλικών έχουμε ότι:

- σκυρόδεμα
  - ❖ ποιότητα : C22.5
  - ❖ αντοχή:  $f_c = 22,5 \text{ MPa} = 22.500 \text{ kPa}$
  - ❖ μέτρο ελαστικότητας:  $E = 27 \text{ GPa}$
  - ❖ λόγος του Poisson:  $\nu = 0,17$
- χάλυβας ράβδων οπλισμού
  - ❖ ποιότητα : S555
  - ❖ τάση διαρροής:  $f_y = 555 \text{ MPa} = 555.000 \text{ kPa}$
  - ❖ μέτρο ελαστικότητας:  $E = 200 \text{ GPa}$
  - ❖ λόγος του Poisson:  $\nu = 0,3$
- χάλυβας πλάκας
  - ❖ ποιότητα : S555
  - ❖ τάση διαρροής:  $f_y = 555 \text{ MPa} = 555.000 \text{ kPa}$
  - ❖ μέτρο ελαστικότητας:  $E = 200 \text{ GPa}$
  - ❖ λόγος του Poisson:  $\nu = 0,3$

Στη συνέχεια, περιγράφουμε αναλυτικά τα βήματα μόρφωσης του γεωμετρικού μοντέλου στο FEMAP. Θα εργαστούμε με μονάδες μέτρησης m και kN.

## Βήμα 1: Ορισμός των υλικών (material) και των ιδιοτήτων (property) τους

Εφόσον έχουμε δύο διαφορετικά υλικά και τρεις διαφορετικούς τύπους πεπερασμένων στοιχείων, θα δημιουργήσουμε 2 materials και 3 properties.

- Model → Material → (ID1)Title(**C22.5material**) → στην καρτέλα General δίνω την τιμή του μέτρου ελαστικότητας (Youngs Modulus, E) (27.000.000), την τιμή του λόγου του Poisson (Poisson's Ratio, nu) (0,17) και την αντοχή σε θλίψη (Compression) (22.500) → στην καρτέλα Nonlinear επιλέγω ως Nonlinearity Type το Elasto-Plastic (Bi-Linear) και ως Initial Yield Stress δίνω την τιμή 22.500 → OK
  - Model → Material → (ID2)Title(**S555material**) → στην καρτέλα General δίνω την τιμή του μέτρου ελαστικότητας (Youngs Modulus, E) (200.000.000), την τιμή του λόγου του Poisson (Poisson's Ratio, nu) (0,3) και την αντοχή σε θλίψη (Compression) (555.000) → στην καρτέλα Nonlinear επιλέγω ως Nonlinearity Type το Elasto-Plastic (Bi-Linear) και ως Initial Yield Stress δίνω την τιμή 555.000 → OK
  - Model → Property → (ID1)Title(**C22.5property**) → επιλέγω ως Material το 1..C22.5Material → επιλέγω ως Elem/Property Type την ένδειξη Solid (διότι θα προσομοιώσουμε το σκυρόδεμα με εξαεδρικά οκτακομβικά στοιχεία) → OK → OK
  - Model → Property → (ID2)Title(**S555property**) → επιλέγω ως Material το 2..S555Material → επιλέγω ως Elem/Property Type την ένδειξη Beam (διότι θα προσομοιώσουμε τον οπλισμό με φυσικά στοιχεία δυνάμεων ή στοιχεία δικτυώματος) → Shape → ως shape επιλέγω circular bar → δίνω την ακτίνα στο Radius ίση με  $\frac{0,0289}{2}=0,01445\text{m}$  → OK → OK
  - Model → Property → (ID3)Title(**S555propertyplaten**) → επιλέγω ως Material το 2..S555Material → επιλέγω ως Elem/Property Type την ένδειξη Solid (διότι θα προσομοιώσουμε τον χάλυβα της πλάκας με εξαεδρικά οκτακομβικά στοιχεία) → OK → OK
- Στην περίπτωση που θέλουμε να ελέγξουμε ή να τροποποιήσουμε τα στοιχεία ενός material ή ενός property, τότε ακολουθούμε την εξής διαδικασία.
- Tools → Model Info → εμφανίζεται το παράθυρο Model Info → εμφανίζω τη στήλη του Model → εμφανίζω τη στήλη του material (ή του property ανάλογα με το τι θέλω να τροποποιήσω) και επιλέγω την ένδειξη Edit κάνοντας δεξί κλικ στο material (ή property) που με ενδιαφέρει να τροποποιήσω → εμφανίζεται η αντίστοιχη καρτέλα

## Βήμα 2: Ορισμός της γεωμετρίας

Στη συγκεκριμένη προσομοίωση δεν θα μας χρειαστεί το βήμα αυτό, καθώς θα δημιουργήσουμε απευθείας τα πεπερασμένα στοιχεία που θέλουμε.

### Βήμα 3: Ορισμός του δικτύου των πεπερασμένων στοιχείων

Θα δημιουργήσουμε αρχικά το δίκτυο των εξαεδρικών στοιχείων που προσομοιώνουν το σκυρόδεμα της δοκού. Η ορθογωνική διατομή της δοκού διακριτοποιείται συνολικά σε 2 στοιχεία κατά πλάτος και σε 3 στοιχεία καθ' ύψος, άρα συνολικά περιέχει  $2 \cdot 3 = 6$  εξαεδρικά στοιχεία. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι κάθε εξαεδρικό στοιχείο έχει μήκος κατά την y διεύθυνση ίσο με

$$\frac{\text{πλάτος δοκού}}{2} = \frac{b}{2} = \frac{0,3099}{2} = 0,15495\text{m}$$

και ύψος (μήκος κατά τη z διεύθυνση) ίσο με

$$\frac{\text{ύψος δοκού}}{3} = \frac{h}{3} = \frac{0,5563}{3} = 0,18543\text{m}.$$

Σχετικά με το μήκος τους κατά τη διεύθυνση του άξονα x (που ορίζει την επιμήκη διάσταση της δοκού), οι εξάδες στοιχείων που προεξέχουν των στηρίξεων έχουν μήκος προφανώς ίσο με την προεξοχή της δοκού πέραν των στηρίξεων :  $d' = 100 \text{ mm} = 0,1 \text{ m}$ , ενώ οι εξάδες που βρίσκονται εντός των στηρίξεων έχουν μήκος ίσο με

$$\frac{\text{καθαρό άνοιγμα δοκού}}{20} = \frac{L}{20} = \frac{3,6576}{20} = 0,18288\text{m},$$

διότι θα διακριτοποιήσουμε το άνοιγμα με 20 εξάδες στοιχείων, δηλαδή με 120 εξαεδρικά στοιχεία.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι κάθε εξαεδρικό στοιχείο εκτός του καθαρού ανοίγματος (σύνολο: 12) θα έχει διαστάσεις  $0,1 \times 0,15495 \times 0,18543$ , ενώ εντός του ανοίγματος (σύνολο: 120)  $0,18288 \times 0,15495 \times 0,18543$ . Κατασκευάζουμε τα δύο αυτά εξαεδρικά στοιχεία και στη συνέχεια με αντιγραφή των στοιχείων αυτών δημιουργούμε το επιθυμητό δίκτυο.

### Δημιουργία των εξαεδρικών στοιχείων σκυροδέματος μεγέθους $0,1 \times 0,15495 \times 0,18543$

- Geometry → Surface → Corners, δίνουμε τα εξής τέσσερα σημεία :
  - 1.(0, 0, 0)
  - 2.(0.1, 0, 0)
  - 3.(0.1, 0.15495, 0)
  - 4.(0, 0.15495, 0)
- Geometry → Solid → Extrude → στο To Depth δίνω την τιμή 0,18543 → Surface → επιλέγουμε με τον κέρσορα την ορθογωνική επιφάνεια → OK → OK
- Mesh → Mesh Control → Size on Solid → επιλέγουμε το πρίσμα → OK → επιλέγουμε Hex Meshing → ως Element Size δίνουμε την τιμή 0,18543 → OK

- Mesh → Mesh Control → Attributes on Solid → επιλέγουμε το πρίσμα → OK → OK
- Mesh → Geometry → Hex Mesh Solids → επιλέγουμε το πρίσμα → OK → OK
- Delete → Geometry → All → OK
- Mesh → Copy → Element → επιλέγουμε το πρώτο στοιχείο → OK → Repetitions (1) → OK → Methods (Global Axis) → Positive, Y Axis → Length (0,15495) → OK →
- Mesh → Copy → Element → επιλέγουμε το πρώτο στοιχείο και την αντιγραφή του → OK → Repetitions (2) → OK → Methods (Global Axis) → Positive, Z Axis → Length (0,18543) → OK
- Mesh → Copy → Element → επιλέγουμε την εξάδα του πρώτου στοιχείου → OK → Repetitions (1) → OK → Methods (Global Axis) → Positive, X Axis → Length (3,7576) → OK

Με τον τρόπο αυτό, δημιουργήσαμε τα 12 εξαεδρικά στοιχεία μεγέθους 0,1x0,15495x0,18543.

#### Δημιουργία των εξαεδρικών στοιχείων σκυροδέματος μεγέθους 0,18288x0,15495x0,18543

- Geometry → Surface → Corners, δίνουμε τα εξής τέσσερα σημεία :  
1.(0.1, 0, 0)  
2.(0.28288, 0, 0)  
3.(0.28288, 0.15495, 0)  
4.(0.1, 0.15495, 0)
- Geometry → Solid → Extrude → στο To Depth δίνουμε την τιμή 0,18543 → Surface → επιλέγουμε με τον κέρσορα την ορθογωνική επιφάνεια → OK → OK
- Mesh → Mesh Control → Size on Solid → επιλέγουμε το πρίσμα → OK → επιλέγουμε Hex Meshing → ως Element Size δίνουμε την τιμή 0,18543 → OK
- Mesh → Mesh Control → Attributes on Solid → επιλέγουμε το πρίσμα → OK → OK
- Mesh → Geometry → Hex Mesh Solids → επιλέγουμε το πρίσμα → OK → OK
- Delete → Geometry → All → OK
- Mesh → Copy → Element → επιλέγουμε το πρώτο στοιχείο → OK → Repetitions (1) → OK → Methods (Global Axis) → Positive, Y Axis → Length (0,15495) → OK →
- Mesh → Copy → Element → επιλέγουμε το πρώτο στοιχείο και την αντιγραφή του → OK → Repetitions (2) → OK → Methods (Global Axis) → Positive, Z Axis → Length (0,18543) → OK
- Mesh → Copy → Element → επιλέγουμε την εξάδα του πρώτου στοιχείου → OK → Repetitions (19) → OK → Methods (Global Axis) → Positive, X Axis → Length (0,18288) → OK

Δημιουργήσαμε, λοιπόν, τα 120 εξαεδρικά στοιχεία μεγέθους 0,18288x0,15495x0,18543.

Ολοκληρώθηκε, με τον τρόπο αυτό, η δημιουργία του δικτύου των  $12+120=132$  εξαεδρικών στοιχείων του σκυροδέματος.

[Δημιουργία των εξαεδρικών στοιχείων της χαλύβδινης πλάκας μεγέθους  \$0,1 \times 0,15495 \times 0,025\$](#)

Στη συνέχεια, δημιουργούμε τα δύο εξαεδρικά στοιχεία που θα προσομοιώσουν τον χάλυβα της κάθε πλάκας.

- Geometry → Surface → Corners, δίνουμε τα εξής τέσσερα σημεία :
  - 1.(0, 0, 0)
  - 2.(0.1, 0, 0)
  - 3.(0.1, 0.15495, 0)
  - 4.(0, 0.15495, 0)
- Geometry → Solid → Extrude → επιλέγουμε Negative Direction και στο To Depth δίνουμε την τιμή 0,025 → Surface → επιλέγουμε με τον κέρσορα την ορθογωνική επιφάνεια → OK → OK
- Mesh → Mesh Control → Size on Solid → επιλέγουμε το πρίσμα → OK → επιλέγουμε Hex Meshing → ως Element Size δίνουμε την τιμή 0,15495 → OK
- Mesh → Mesh Control → Attributes on Solid → επιλέγουμε το πρίσμα → OK → OK
- Mesh → Geometry → Hex Mesh Solids → επιλέγουμε το πρίσμα → OK → OK
- Delete → Geometry → All → OK
- Mesh → Copy → Element → επιλέγουμε το πρώτο στοιχείο → OK → Repetitions (1) → OK → Methods (Global Axis) → Positive, Y Axis → Length (0,15495) → OK →
- Mesh → Copy → Element → επιλέγουμε το πρώτο στοιχείο και την αντιγραφή του → OK → Repetitions (1) → OK → Methods (Global Axis) → Positive, X Axis → Length (3,7576) → OK

Ολοκληρώθηκε με τον τρόπο αυτό η δημιουργία του δικτύου των τεσσάρων εξαεδρικών στοιχείων της πλάκας, τα οποία έχουν διαστάσεις  $0,1 \times 0,15495 \times 0,025$ .

Το μειονέκτημα της αντιγραφής των στοιχείων είναι ότι δημιουργούνται αλληλεπικαλυπτόμενοι κόμβοι. Για το λόγο αυτό, εφαρμόζουμε την ακόλουθη εντολή:

- Tools → Check → Coincident Nodes → Select All → OK → Merge Coincident Entities → OK
- Tools → Check → Coincident Elements → Select All → OK → OK

Στη συνέχεια, επαναριθμούμε τους κόμβους και τα στοιχεία. Εκτελούμε την ακόλουθη εντολή:

- Modify → Renumber → Node → Select All → OK → επιλέγουμε διαδοχικά X, Y, Z → OK
- Modify → Renumber → Element → Select All → OK → επιλέγουμε διαδοχικά X, Y, Z → OK

## Δημιουργία των ραβδωτών στοιχείων του οπλισμού

Στη συνέχεια, δημιουργούμε τα στοιχεία οπλισμού (ραβδωτά στοιχεία, Beam) που θα προσομοιώσουν τον χάλυβα της κάθε πλάκας.

- Model → Node, δίνουμε τα εξής τέσσερα σημεία :  
289. (0, 0.0635, 0.0635)  
290. (0.1, 0.0635, 0.0635)
- Model → Element → Type (Beam) → επιλέγουμε τον κόμβο αρχής (289) και τον κόμβο τέλους (290) → επιλέγουμε ως property το 2..S555property → επιλέγουμε το Vector και positive, Y axis → OK → OK
- Mesh → Copy → Element → επιλέγουμε το στοιχείο → OK → Repetitions (1) → OK → Methods (Global Axis) → Positive, Y Axis → Length (0,1829) → OK
- Mesh → Copy → Element → επιλέγουμε το πρώτο στοιχείο και την αντιγραφή του → OK → Repetitions (1) → OK → Methods (Global Axis) → Positive, Z Axis → Length (0,0635) → OK
- Mesh → Copy → Element → επιλέγουμε την τετράδα → OK → Repetitions (1) → OK → Methods (Global Axis) → Positive, X Axis → Length (3,7576) → OK
- Mesh → Copy → Element → επιλέγουμε την τετράδα → OK → Repetitions (1) → OK → Methods (Global Axis) → Positive, X Axis → Length (0,10) → OK
- Modify → Move by → Node → επιλέγουμε με Box τους δεξιούς κόμβους της αντιγραμμένης τετράδας → OK → Repetitions (1) → OK → Methods (Global Axis) → Positive, X Axis → Length (0,08288) → OK
- Mesh → Copy → Element → επιλέγουμε την τροποποιημένη τετράδα → OK → Repetitions (19) → OK → Methods (Global Axis) → Positive, X Axis → Length (0,18288) → OK

Ολοκληρώθηκε με τον τρόπο αυτό η δημιουργία του δικτύου των πεπερασμένων στοιχείων οπλισμού.

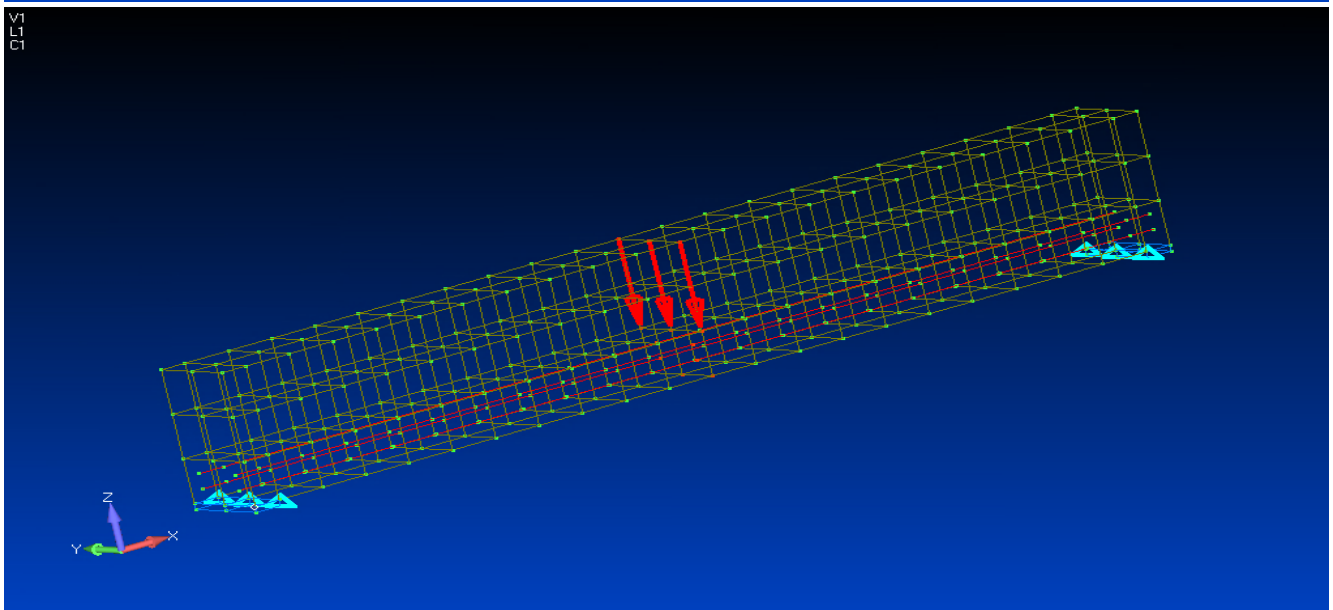
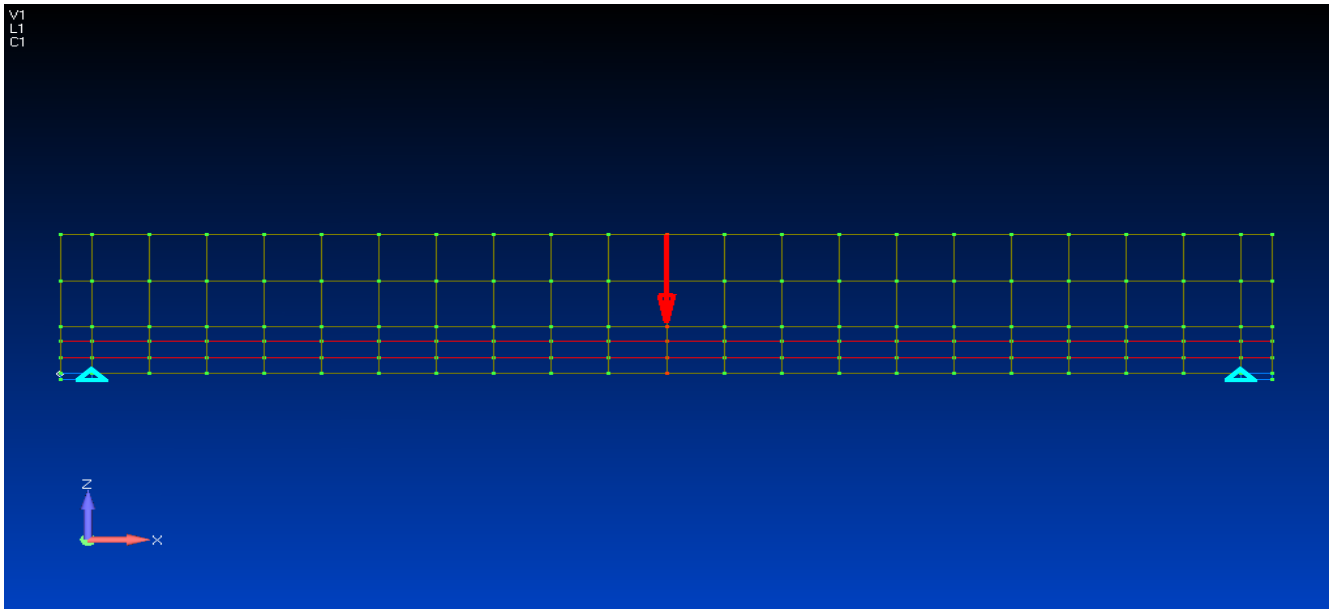
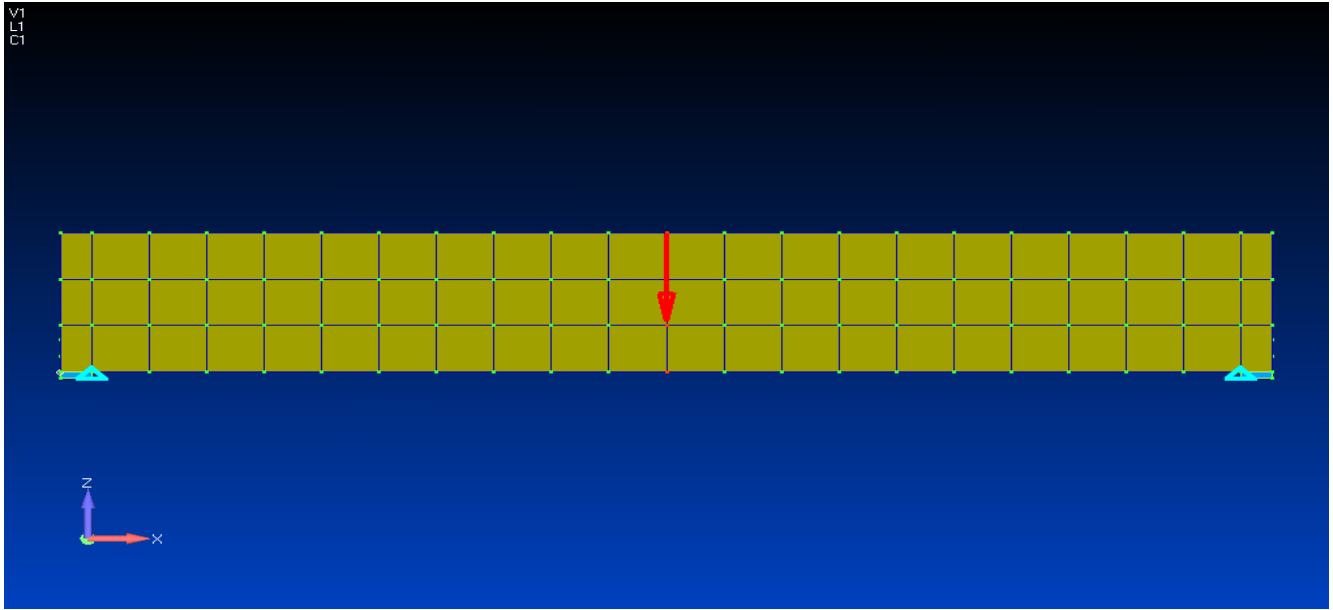
- Tools → Check → Coincident Nodes → Select All → OK → Merge Coincident Entities → OK
- Tools → Check → Coincident Elements → Select All → OK → OK

Στη συνέχεια, επαναριθμούμε τους κόμβους και τα στοιχεία. Εκτελούμε την παρακάτω εντολή:

- Modify → Renumber → Node → Select All → OK → επιλέγω διαδοχικά X, Y, Z → OK
- Modify → Renumber → Element → Select All → OK → επιλέγω διαδοχικά X, Y, Z → OK

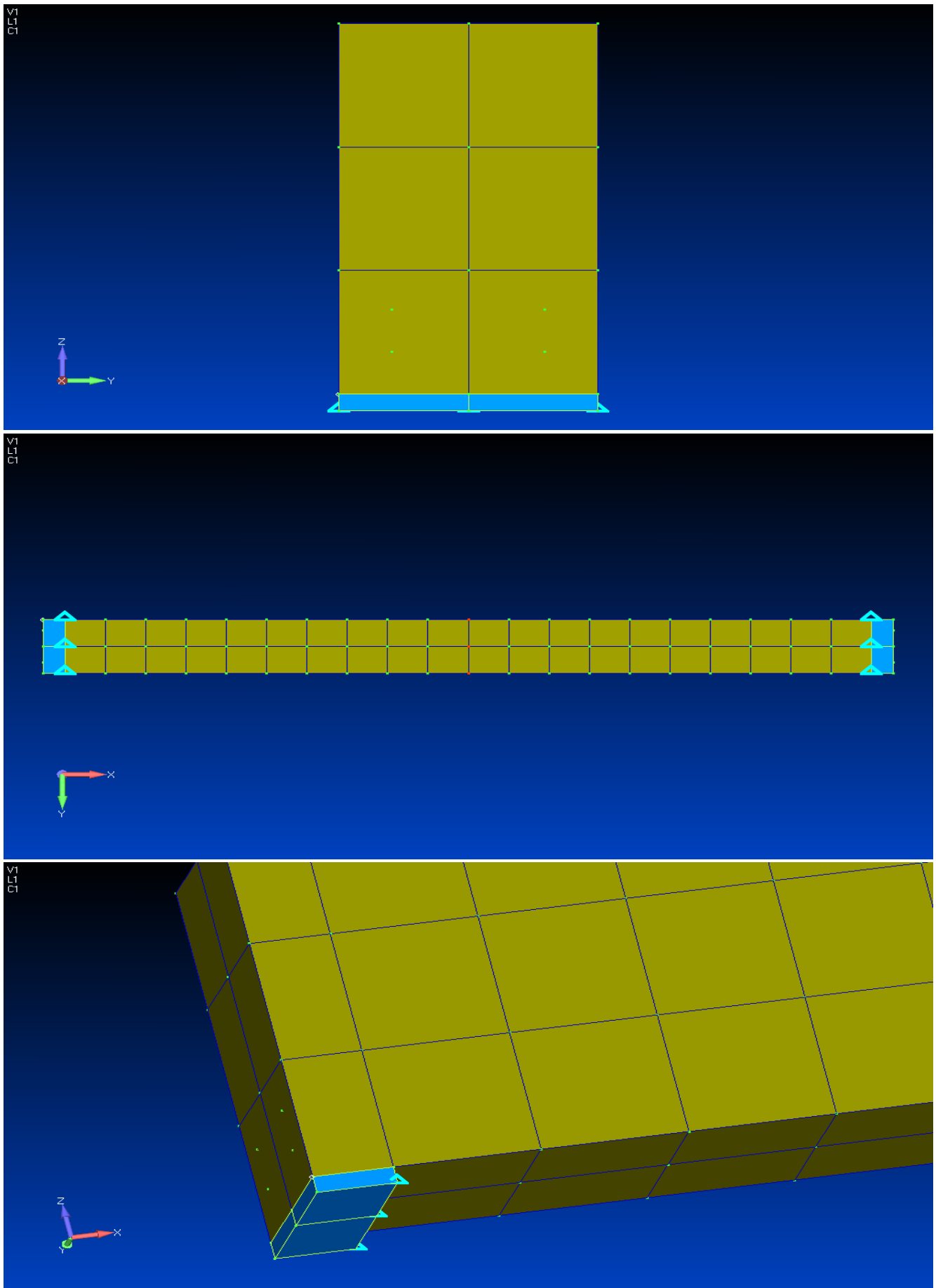
## Βήμα 4: Αντιστοίχιση των πεπερασμένων στοιχείων με τα properties

- Modify → Update Elements → Property ID → επιλέγουμε το στοιχείο → OK → επιλέγουμε το αντίστοιχο property → OK





**Σχήμα 7.56** Το δίκτυο των πεπερασμένων στοιχείων αμφιέρειστης δοκού από οπλισμένο σκυρόδεμα υποβαλλόμενης σε συγκεντρωμένο φορτίο στο μέσον του ανοίγματός της



## Σχήμα 7.57 Η πλάκα από χάλυβα S555

### Βήμα 5: Αντιστοίχιση των properties με τα χαρακτηριστικά τους

Η διαδικασία αυτή πραγματοποιείται μέσω του προγράμματος SMAD. Προσοχή! δίνουμε τα χαρακτηριστικά στα properties και όχι στα materials. Ενεργοποιώ το property κάνοντας διπλό αριστερό κλικ στο όνομά του στην καρτέλα Model Info ή δεξί κλικ και στη συνέχεια Activate.

#### Τα εξαεδρικά στοιχεία του σκυροδέματος

- Ενεργοποιώ το 1..C22.5property → Επιλέγω ως Femap Type το Hexa property →
  1. **Material: 1**  
Η δοκός αποτελείται από οπλισμένο σκυρόδεμα.
  2. **Smearred: 3**
  3. **Give Vita for remaining shear: 0/ 0,25/ 0,05/ 0,1** (παραμετρική διερεύνηση)
  4. **Give Cracks/Internal Iteration: 0**
  5. **Give Tensile Strength: 0,05**→ Apply

#### Ο οπλισμός ως στοιχείο δικτυώματος (Rod element)

- Ενεργοποιώ το 2..S555property → Επιλέγω ως Femap Type το Reinforcement property →
  1. **Slip Flag: 1**  
Θα λάβουμε υπόψιν μας την ολίσθηση.
  2. **Type of Element of Reinforcement: 1**  
Υπάρχουν 2 επιλογές.  
1 : Rod (Στοιχείο Δικτυώματος)  
2 : BCFB (Φυσικό Στοιχείο Δυνάμεων)  
Θα θεωρήσουμε τα στοιχεία του οπλισμού ως στοιχεία δικτυώματος.
  3. **Number of Fibers: 0**  
Διότι χρησιμοποιούμε στοιχεία δικτυώματος και όχι φυσικά στοιχεία δυνάμεων.
  4. **Number of Integ Points: 0**  
Διότι χρησιμοποιούμε στοιχεία δικτυώματος και όχι φυσικά στοιχεία δυνάμεων.
  5. **Material Flag: 1**  
Θα χρησιμοποιήσουμε το διγραμμικό (bilinear) καταστατικό μοντέλο για την προσομοίωση του υλικού του χάλυβα.
  6. **(always 1.0): 1**
  7. **Steel Young Modulus: 200.000.000**  
Το μέτρο ελαστικότητας του χάλυβα ισούται με 200 GPa (200.000.000 kPa)
  8. **Steel Poisson: 0,3**  
Ο λόγος Poisson του χάλυβα ισούται με 0,3.
  9. **Steel Hardening: 200.000**  
Το μέτρο κράτυνσης ισούται με το 1‰ του μέτρου ελαστικότητας, δηλαδή ίσο με  $0,001 \cdot 200\text{GPa} = 0,2\text{GPa}$  (200.000 kPa)
  10. **Steel F<sub>y</sub>: 555.000**  
Το όριο διαρροής του χάλυβα του οπλισμού ισούται με 555 MPa (555.000 kPa).

**11. Steel Strain Failure: 0,05**

**12.** Ακολουθούν 12 μηδενικά.

**13. Reinforcement Flag (always 10): 10**

→ Apply

### Ο οπλισμός ως φυσικό στοιχείο δυνάμεων (BCFB element)

- Ενεργοποιώ το 2..S555property → Επιλέγω ως Femap Type το Reinforcement property →
  - 1. Slip Flag: 1**  
Θα λάβουμε υπόψιν μας την ολίσθηση.
  - 2. Type of Element of Reinforcement: 2**  
Υπάρχουν 2 επιλογές.  
1 : Rod (Στοιχείο Δικτυώματος)  
2 : BCFB (Φυσικό Στοιχείο Δυνάμεων)  
Θα θεωρήσουμε τα στοιχεία του οπλισμού διαδοχικά ως φυσικά στοιχεία δυνάμεων.
  - 3. Number of Fibers: 4/ 10/ 400** (παραμετρική διερεύνηση)  
Θα διακριτοποιήσουμε κάθε φυσικό στοιχείο δυνάμεων σε 4/ 10 ίνες.
  - 4. Number of Integ Points: 3**  
Θεωρούμε 3 σημεία – διατομές ολοκλήρωσης για κάθε φυσικό στοιχείο δυνάμεων.
  - 5. Material Flag: 1**  
Θα χρησιμοποιήσουμε το διγραμμικό (bilinear) καταστατικό μοντέλο για την προσομοίωση του υλικού του χάλυβα.
  - 6. (always 1.0): 1**
  - 7. Steel Young Modulus: 200.000.000**  
Το μέτρο ελαστικότητας του χάλυβα ισούται με 200 GPa (200.000.000 kPa)
  - 8. Steel Poisson: 0,3**  
Ο λόγος Poisson του χάλυβα ισούται με 0,3.
  - 9. Steel Hardening: 200.000**  
Το μέτρο κράτυνσης ισούται με το 1‰ του μέτρου ελαστικότητας, δηλαδή ίσο με  $0,001 \cdot 200\text{GPa} = 0,2 \text{ GPa}$  (200.000 kPa)
  - 10. Steel  $F_y$ : 555.000**  
Το όριο διαρροής του χάλυβα του οπλισμού ισούται με 555 MPa (555.000 kPa).
  - 11. Steel Strain Failure: 0,05**
  - 12.** Ακολουθούν 12 μηδενικά.
  - 13. Reinforcement Flag (always 10): 10**  
→ Apply

### Χάλυβας πλάκας

- Ενεργοποιώ το 3..S555propertyplaten → Επιλέγω ως Femap Type το Hexa property →
  - 1. Material: 2**  
Τα συγκεκριμένα εξαεδρικά στοιχεία αποτελούνται από χάλυβα.
  - 2. Smeared: 0**
  - 3. Give Vita for remaining shear: 0**
  - 4. Give Cracks/Internal Iteration: 0**
  - 5. Give Tensile Strength: 0**

→ Apply

### Βήμα 5 : Ορισμός των συνοριακών συνθηκών (constraints)

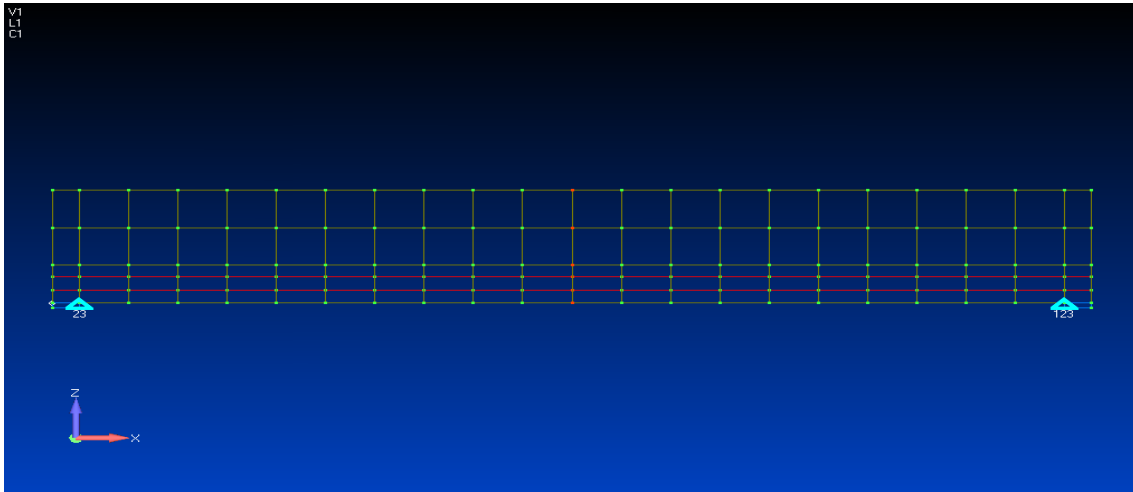
- Model → Constraint → Set → Στην καρτέλα Create or Activate Constraint Set ορίζουμε ως ID το 1 και ως Title το Con → OK

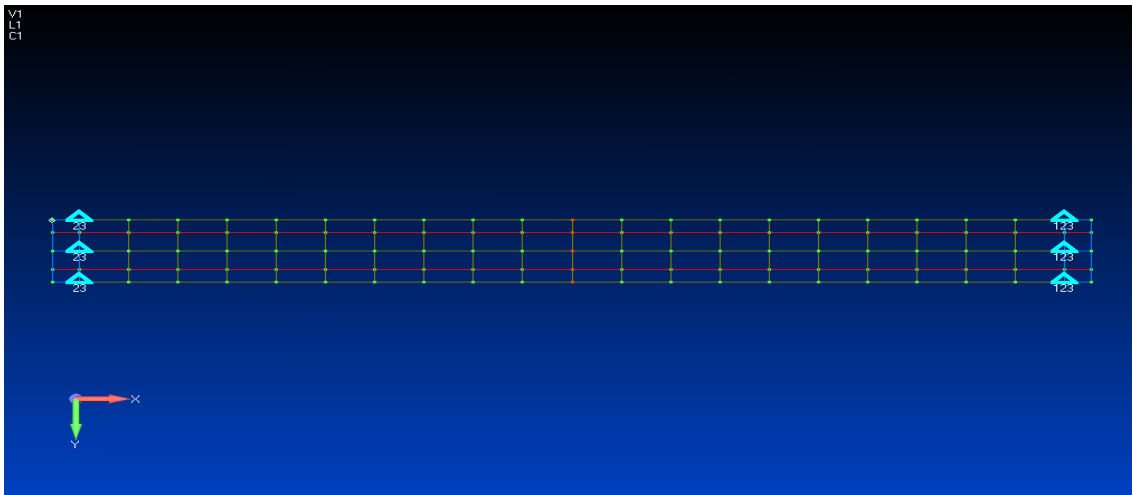
Παρατηρούμε κάτω δεξιά την ένδειξη :

Prop: 3, Ld: 0, Con: 1, Grp: 0, Out: 0

Στο Ld έχει την ένδειξη μηδέν, διότι δεν έχουμε ορίσει ακόμη φορτία. Επίσης, πατώντας αριστερό κλικ σε κάποιο από αυτά μπορούμε να δούμε τι έχουμε ορίσει. Για παράδειγμα, αριστερό κλικ στο Prop θα εμφανίσει τα properties που ορίσαμε.

- Model → Constraint → Nodal → Εμφανίζεται η καρτέλα Entity Selection, στην οποία αφού επιλέξουμε με αριστερό κλικ τον κόμβο στον οποίο θέλουμε να επιβάλλουμε τη συνοριακή συνθήκη (δηλαδή στη συγκεκριμένη εφαρμογή τους κόμβους 2,6,10) πατούμε OK → Στην καρτέλα Create Nodal Constraints δεσμεύουμε και τους 2 μετατοπισιακούς (TY, TZ) βαθμούς ελευθερίας καθώς πρόκειται για πάκτωση και μετά πατούμε OK → Εμφανίζεται η καρτέλα Entity Selection, στην οποία αφού επιλέξουμε με αριστερό κλικ τον κόμβο στον οποίο θέλουμε να επιβάλλουμε τη συνοριακή συνθήκη (δηλαδή στη συγκεκριμένη εφαρμογή τους κόμβους 3,7,11) πατούμε OK → Στην καρτέλα Create Nodal Constraints δεσμεύουμε και τους 3 μετατοπισιακούς (TX, TY, TZ) βαθμούς ελευθερίας καθώς πρόκειται για πάκτωση και μετά πατούμε OK





Σχήμα 7.58 Επιβολή συνοριακών συνθηκών στις στηρίξεις της αμφιέρειστης δοκού

### Βήμα 6 : Επιβολή των φορτίων (Loads)

- Model → Load → Set → Στην καρτέλα Create or Activate Load Set ορίζουμε ως ID το 1 και ως Title το Load → OK  
 Παρατηρούμε κάτω δεξιά την ένδειξη :  
 Prop: 3, Ld: 1, Con: 1, Grp: 0, Out: 0  
 Στο Ld έχει τώρα την ένδειξη 1, διότι έχουμε ορίσει το set φορτίων Load.
- Model → Load → Nodal → Εμφανίζεται η καρτέλα Entity Selection, στην οποία αφού επιλέξουμε με αριστερό κλικ τον κόμβο στον οποίο θέλουμε να επιβάλλουμε το φορτίο (δηλαδή στη συγκεκριμένη εφαρμογή τους τρεις άνω κόμβους της μεσαίας διεπιφάνειας των εξαεδρικών στοιχείων του σκυροδέματος) πατούμε OK → Στην καρτέλα Create Loads on Nodes επιλέγουμε το Force και ειδικότερα στο Load δίνουμε την τιμή της δύναμης  $F_z$  ίση με -200 (το - υποδηλώνει ότι η δύναμη έχει φορά προς τα αρνητικά του κατακόρυφου άξονα z και μέτρο ίσο με 200 kN) και μετά πατούμε OK.
- Model → Load → Nonlinear Analysis → Στην καρτέλα Load Set Options for Nonlinear Analysis επιλέγουμε:
  - ως Solution Type: Static
  - ως Basic/ Number of Increments: 6/ 10/ 30/ 50/ 100
  - ως Basic/ Max Iterations/Steps: 50
  - ως Convergence Tolerance: Work 0,0001(διότι αυτό έχει αποδειχθεί ως το πιο σταθερό εκ των τριών όταν χρησιμοποιούμε εξαεδρικά στοιχεία και smeared crack model σε συνδυασμό με τη μέθοδο Newton-Raphson).
  - ως Output Control/ Intermediate: 1.YES
 Στη συνέχεια πατώ OK.

Για την επιβολή του φορτίου ακολουθήσαμε το εξής σκεπτικό : σύμφωνα με το paper το θεωρητικό φορτίο κατάρρευσης ισούται με  $P_{cr} = 334$  kN. Το φορτίο αυτό, λοιπόν, θα κατανομηθεί στους τρεις άνω κόμβους της μεσαίας κατακόρυφης διεπιφάνειας. Ως διεπιφάνεια ορίζουμε την επιφάνεια που χωρίζει δύο διαφορετικά στοιχεία. Στο συγκεκριμένο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων έχουμε 22 6-άδες εξαεδρικών στοιχείων και συνεπώς 23 διεπιφάνειες. Επομένως, από την κατανομή του φορτίου των 334 kN στους άνω κόμβους της μεσαίας κατακόρυφης διεπιφάνειας

(323, 346, 369), δηλαδή σε συνολικά 3 κόμβους, συμπεραίνουμε ότι σε κάθε ένα από τους κόμβους αυτούς θα πρέπει να ασκήσουμε επικόμβιο φορτίο ίσο με :

$$F_i = \frac{P_{cr}}{3} = \frac{334\text{kN}}{3} = 111,33\text{kN}$$

Στρογγυλοποιούμε προς τα πάνω και έχουμε το επικόμβιο φορτίο ίσο με:

$$F_z = 200\text{kN}$$

Συνολικά ασκούμε φορτίο ίσο με  $3 \cdot 200\text{kN} = 600\text{kN}$ , προφανώς μεγαλύτερο του φορτίου καταρρεύσεως του paper κατά 266 kr.

Ωστόσο, για να είναι πιο ρεαλιστική η κατανομή της εξωτερικής φορτίσεως, θα επιβάλλουμε στους ακραίους κόμβους 323, 369 φορτίο ίσο με 150 kN και στον μεσαίο κόμβο 346 φορτίο ίσο με 300 kN.

#### Βήμα 7: Εξαγωγή του αρχείου

- File → Export → Femap Neutral... → δίνουμε το όνομα του αρχείου (beam.NEU) και το αποθηκεύουμε στον φάκελο ReConAn v1.0 → Write → στην καρτέλα Neutral File Write Options και συγκεκριμένα:
  - στο Entity Options αποεπιλέγουμε το Write Output, το Write Groups και το Write Views. Θα πρέπει να είναι ενεργοποιημένα μόνο το Write Geometry Model και το Write Analysis Model.
  - Στο File Format επιλέγουμε ως Version την 9.0.

#### Βήμα 8: Παραγωγή του αρχείου των αποτελεσμάτων

- Επιστρέφουμε στον φάκελο ReConAn v1.0.
- Ενεργοποιούμε (κάνουμε διπλό αριστερό κλικ) στο εκτελέσιμο αρχείο ReConAn v1.0.exe.
- Αντιγράφουμε και επικολλούμε στο παράθυρο του DOS το όνομα του αρχείου beam.NEU.  
**Χρήσιμη πληροφορία:** κάνουμε δεξί κλικ στο παράθυρο του DOS του exe αρχείου και έπειτα Edit και Paste.
- Enter

Μόλις ολοκληρωθεί η διαδικασία, εμφανίζεται το παράθυρο ReConAn Eye V1.0. Κάνουμε δεξί κλικ στην οθόνη του και επιλέγουμε \*\*Animate Deformation History. Παρατηρούμε ότι δημιουργήθηκε στον ίδιο φάκελο με το exe αρχείο ReConAn v1.0.exe και το αρχείο των δεδομένων beam.NEU, το output αρχείο beam.NEU\_OUT.neu.

#### Βήμα 9: Εισαγωγή του αρχείου των αποτελεσμάτων μέσω του FEMAP

Επιστρέφουμε στο FEMAP.

- File → Import → Analysis Results → στην καρτέλα Import Results From επιλέγουμε το FEMAP Neutral → επιλέγουμε το beam.NEU\_OUT.neu → Open → OK
- View → Select → στην καρτέλα View Select →

- XY Style: XY vs Set Value → XY Data στην καρτέλα Select XY Curve Data επιλέγουμε
  - ως Output Set: 50..Case 50 Time 1.000
  - ως Output Vector: 4..T3 Translation (κατακόρυφη μετατόπιση)
  - ως Output Location/ Node: 47 (πρόκειται για κόμβο της κάτω ίνας, στον οποίο ασκείται επικόμβιο φορτίο)
  - OK
- OK

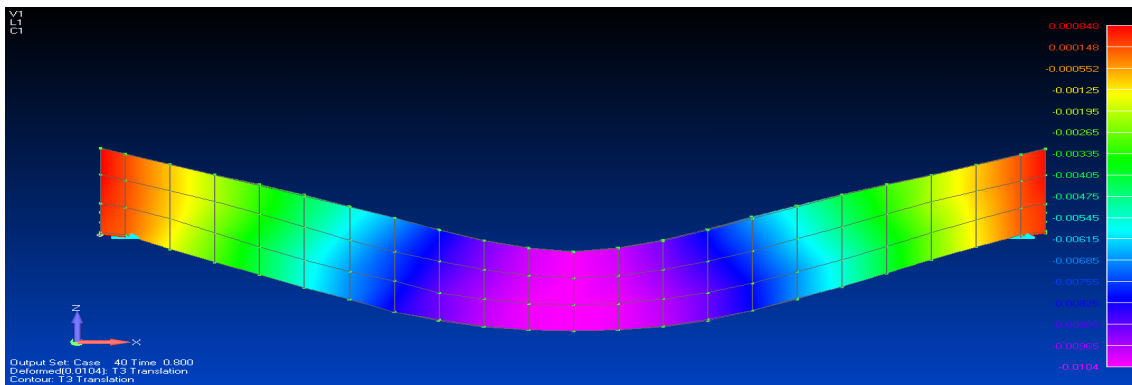
Με τον τρόπο αυτό, εμφανίζεται η γραφική παράσταση του φορτικού συντελεστή  $\lambda$  και της κατακόρυφης μετατόπισης του κόμβου 47.

Για να εμφανιστούν σε μορφή λίστας τα σημεία της προηγούμενης γραφικής παράστασης, ακολουθούμε την ακόλουθη εντολή:

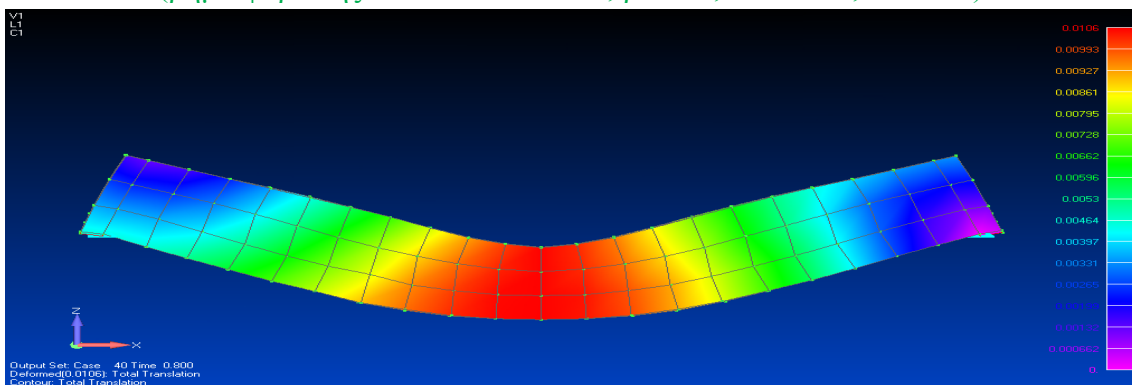
- List → Output → XY plot → στο Messages μου εμφανίζονται τα στοιχεία P - w (μετατόπιση κατά τον άξονα z) → Τα αντιγράφουμε και τα επικολλούμε σε ένα φύλλο του Excel → επιλέγουμε στο Excel τη στήλη που περιέχει τα δεδομένα και Data → Text to Columns → Next → Next → Finish.

Προκειμένου να εμφανίσουμε την παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα, ακολουθούμε την ακόλουθη εντολή:

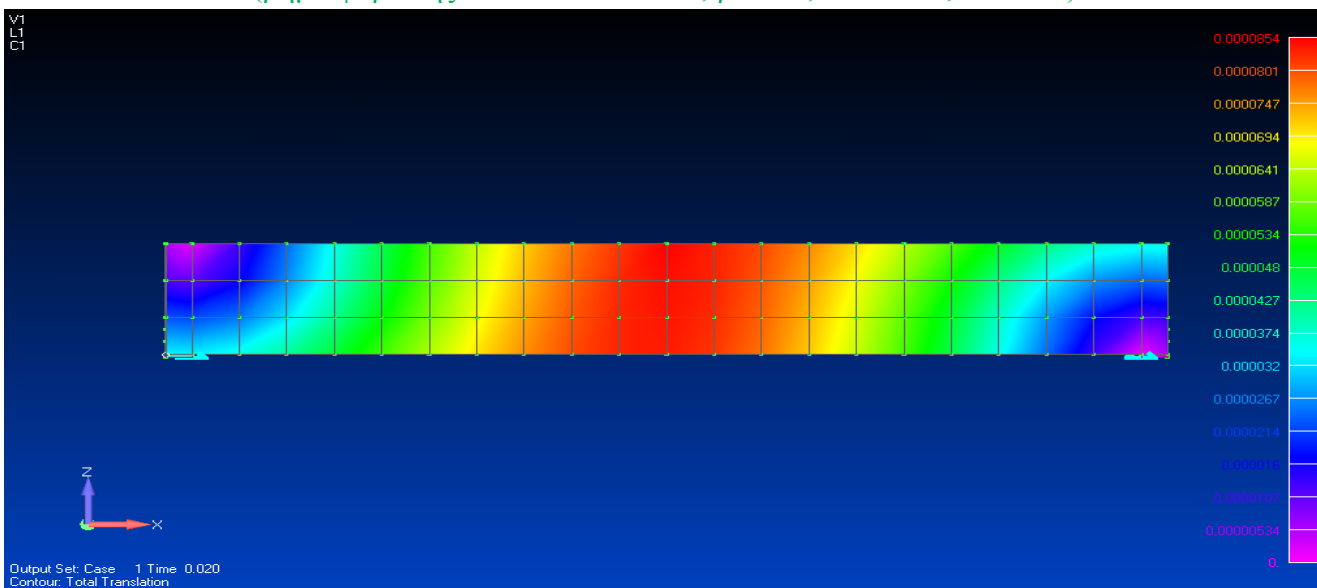
- View → Select → στην καρτέλα View Select →
  - Model Style: Draw Model
  - Deformed Style: None – Model Only (εφόσον επιθυμούμε να δείξουμε την απαραμόρφωτη κατάσταση) ή Deform (εφόσον επιθυμούμε να δείξουμε την παραμορφωμένη κατάσταση) ή Animate (εφόσον επιθυμούμε να αναπαραστήσουμε την εξέλιξη της παραμορφωμένης κατάστασης)
  - Contour Style: Contour
  - Επιλέγουμε Deformed and Contoured Data → στην καρτέλα Select PostProcessing Data επιλέγουμε
    - ως Output Set: 41..Case 41 Time 1.000
    - ως Output Vectors/ Deformation: 1..Total Translation ή 4..T3 Translation ή 60059..Solid Von Mises Strain
    - ως Output Vectors/ Contour: 1..Total Translation ή 4..T3 Translation ή 60059..Solid Von Mises Strain
    - OK
- OK



Σχήμα 7.59 Απεικόνιση της παραμορφωμένης κατάστασης με contour της κατακόρυφης μετατόπισης (βήμα φόρτισης: 40/50 – P=480kN,  $\beta=0.05$ , fibers=10, NBCFB)

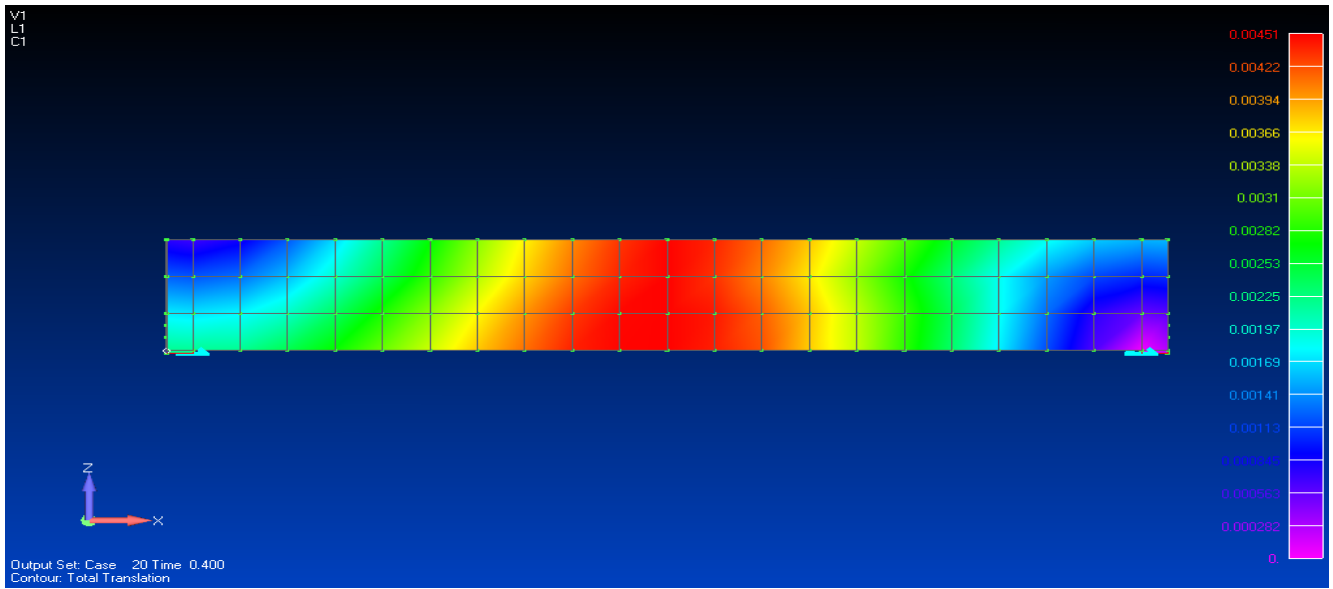


Σχήμα 7.60 Απεικόνιση της παραμορφωμένης κατάστασης με contour της ολικής μετατόπισης (βήμα φόρτισης: 40/50 – P=480kN,  $\beta=0.05$ , fibers=10, NBCFB)

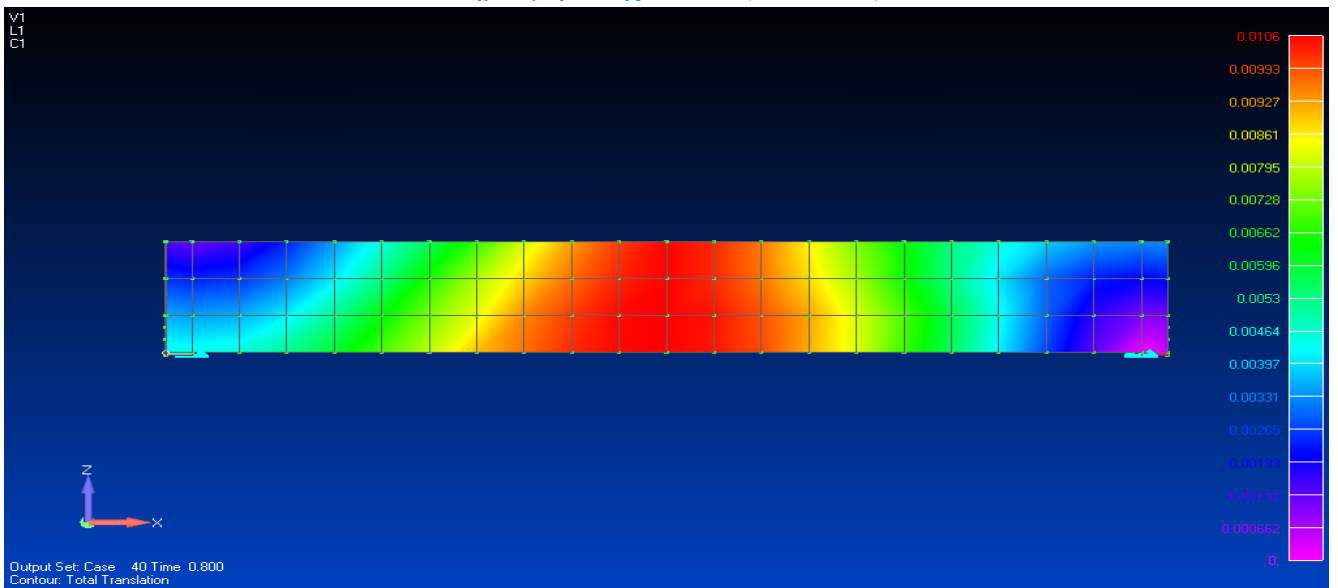


Βήμα φόρτισης: 1/50 (P=12kN)



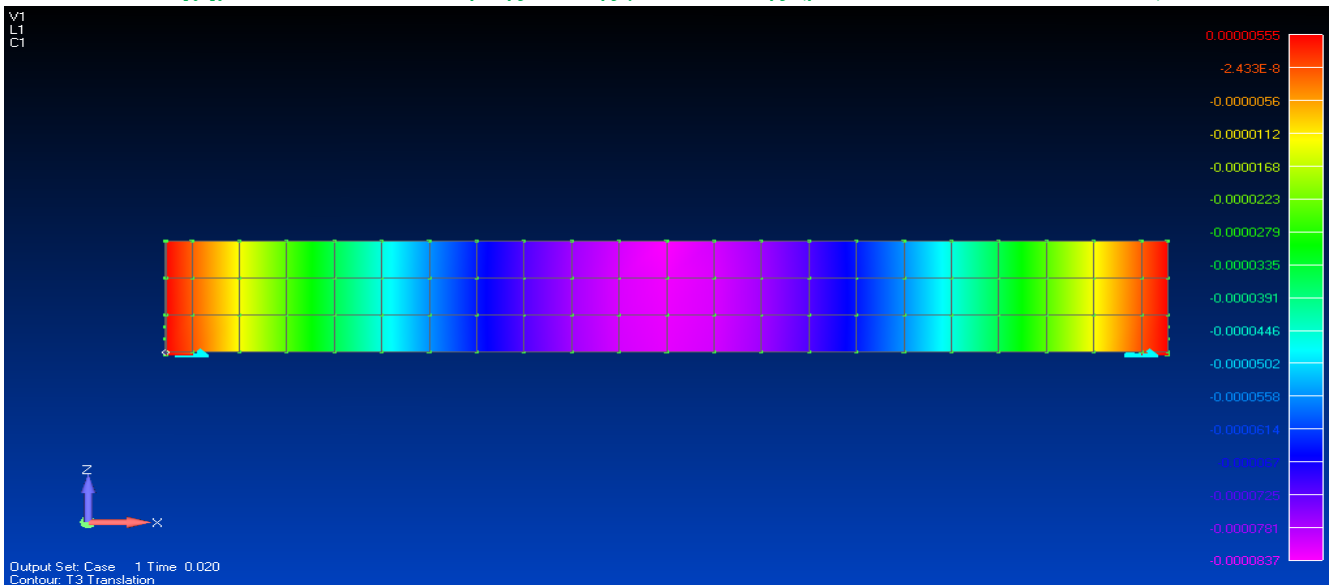


Βήμα φόρτισης: 20/50 (P=240kN)

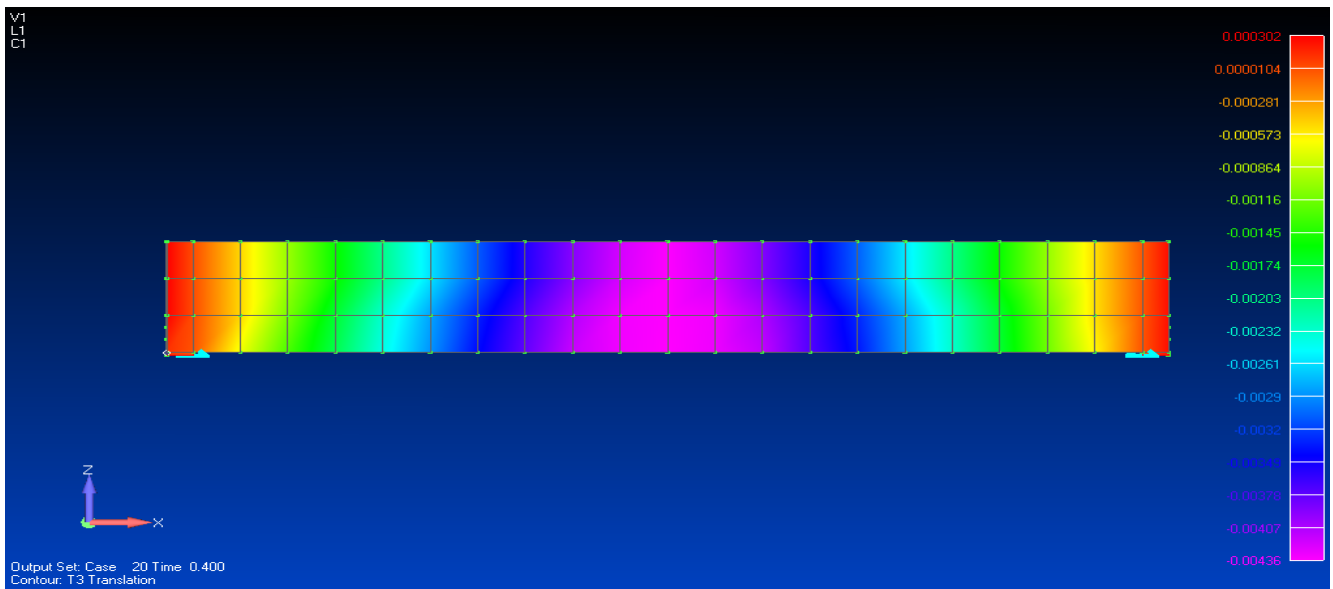


Βήμα φόρτισης: 40/50 (P=480kN)

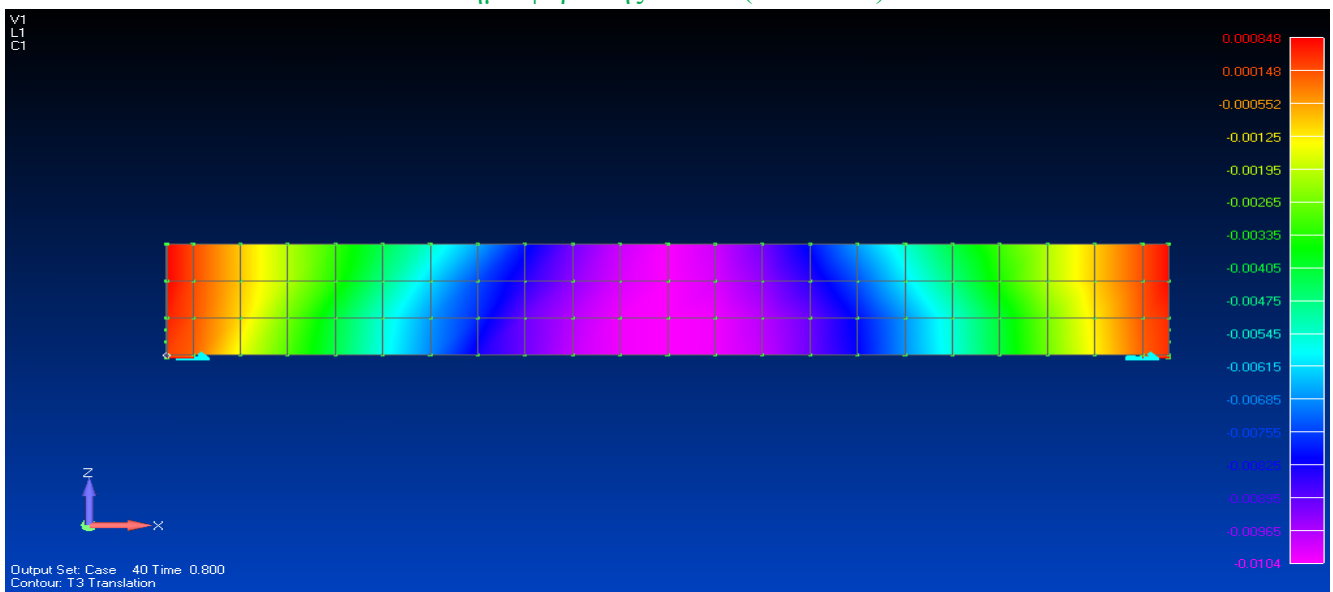
Σχήμα 7.61 Απεικόνιση της ολικής μετατόπισης ( $\beta=0.05$ , fibers=10, NBCFB)



Βήμα φόρτισης: 1/50 (P=12kN)

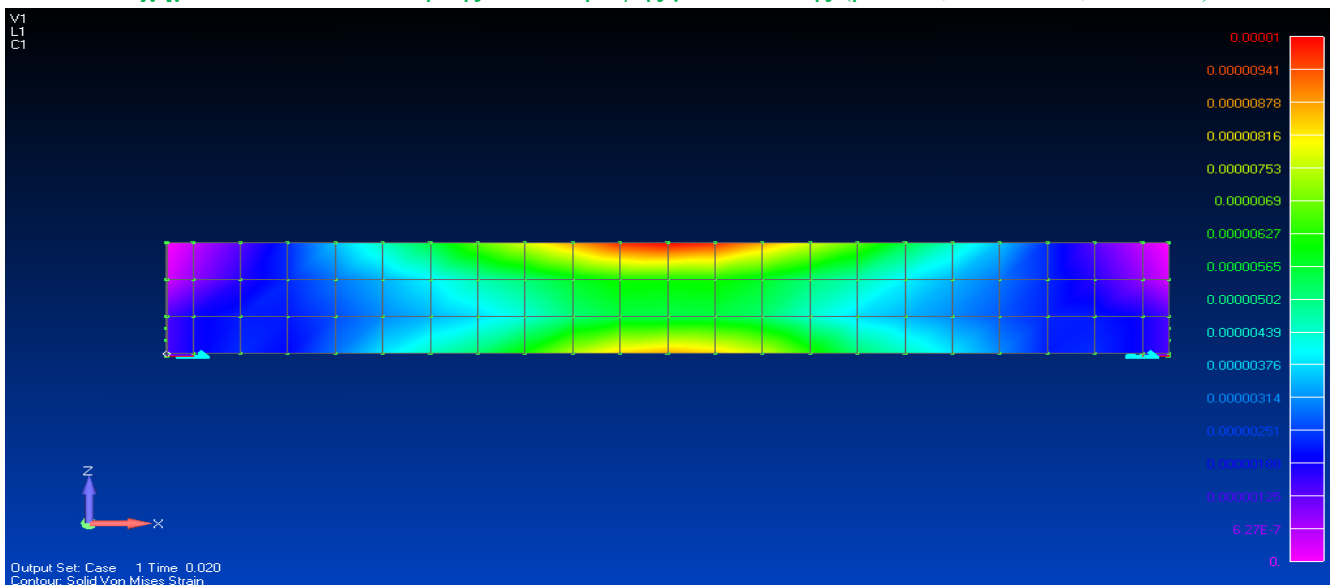


Βήμα φόρτισης: 20/50 (P=240kN)

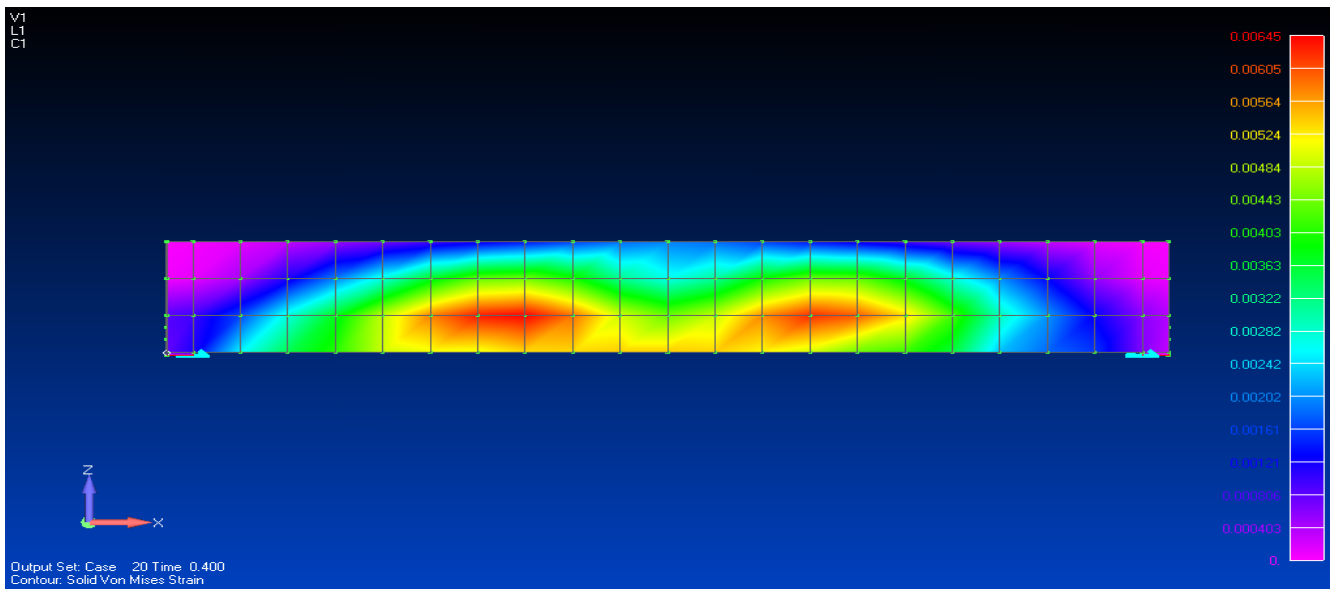


Βήμα φόρτισης: 40/50 (P=480kN)

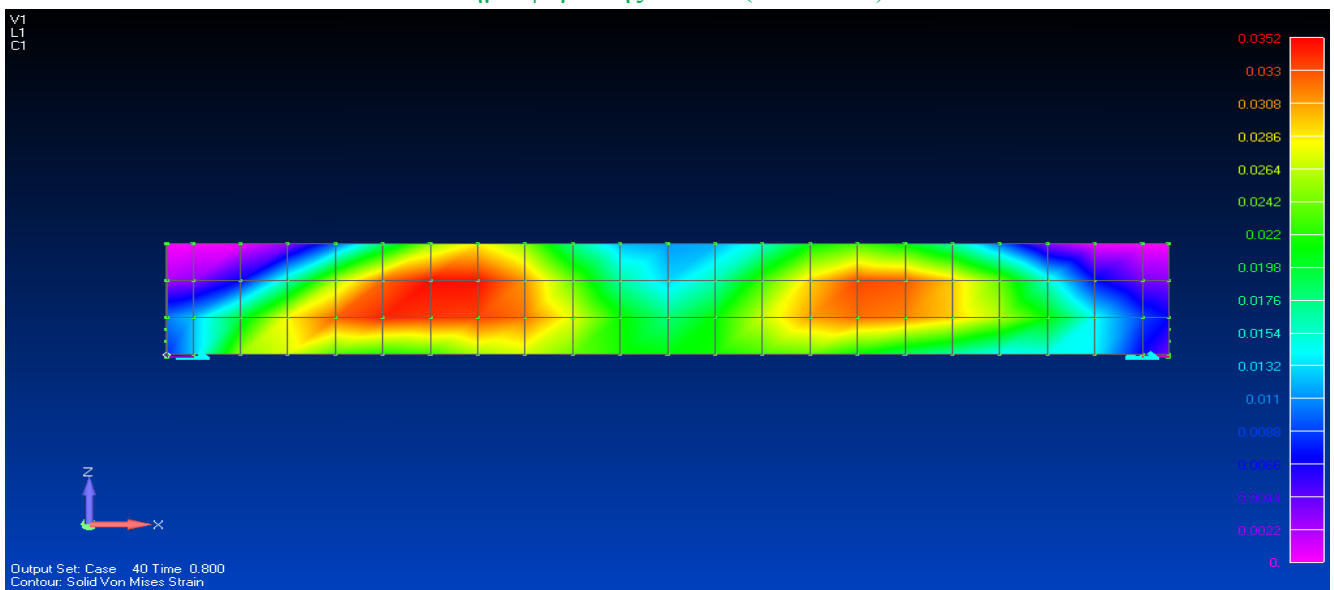
Σχήμα 7.62 Απεικόνιση της κατακόρυφης μετατόπισης ( $\beta=0.05$ , fibers=10, NBCFB)



Βήμα φόρτισης: 1/50 (P=12kN)

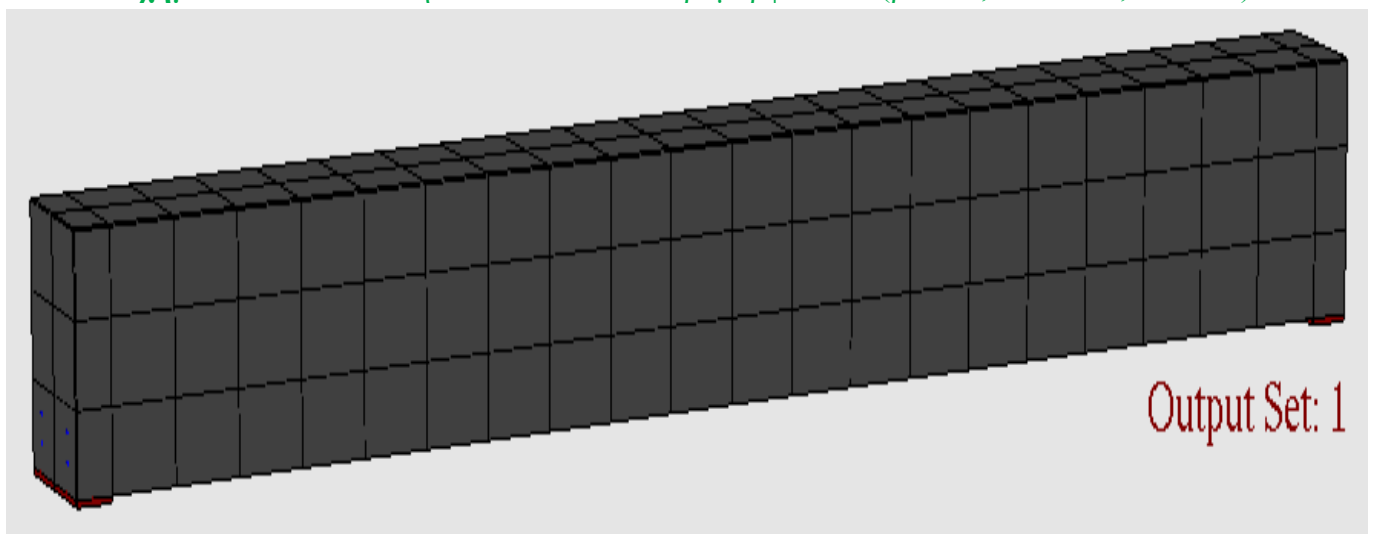


Βήμα φόρτισης: 20/50 (P=240kN)

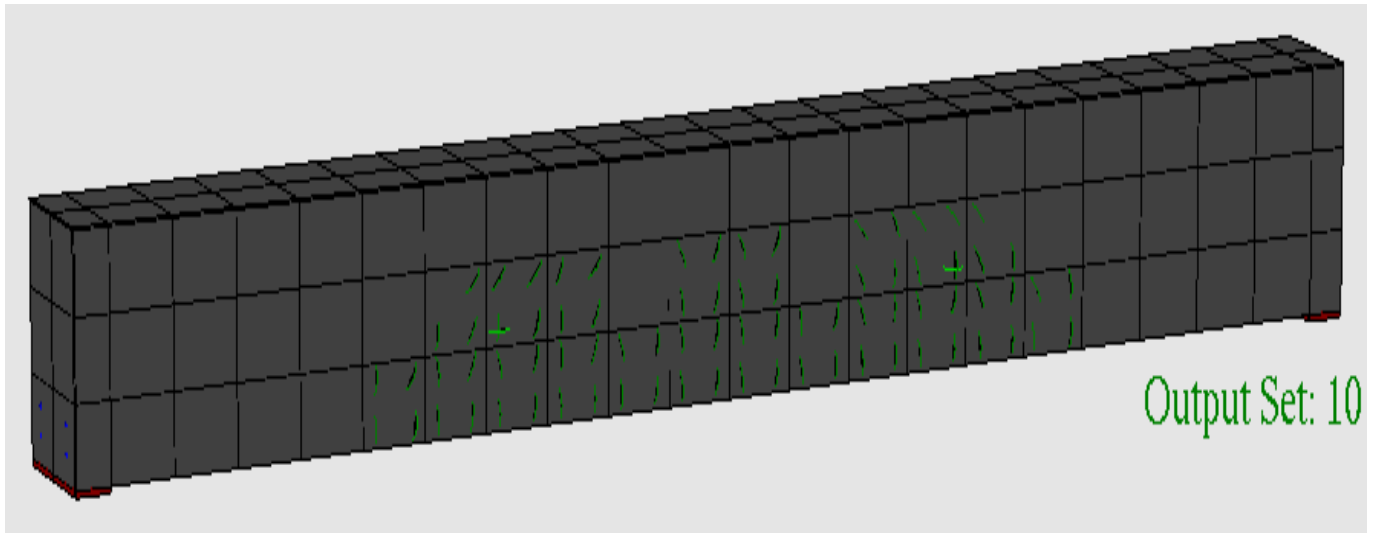


Βήμα φόρτισης: 40/50 (P=480kN)

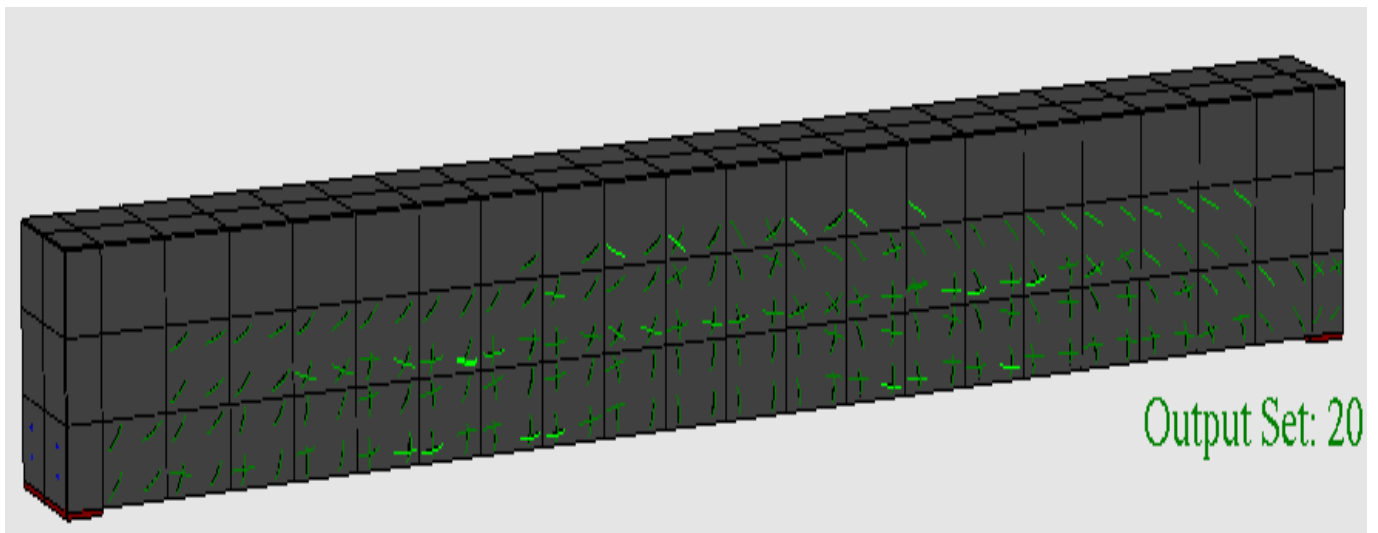
Σχήμα 7.63 Απεικόνιση των Von Mises παραμορφώσεων ( $\beta=0.05$ , fibers=10, NBCFB)



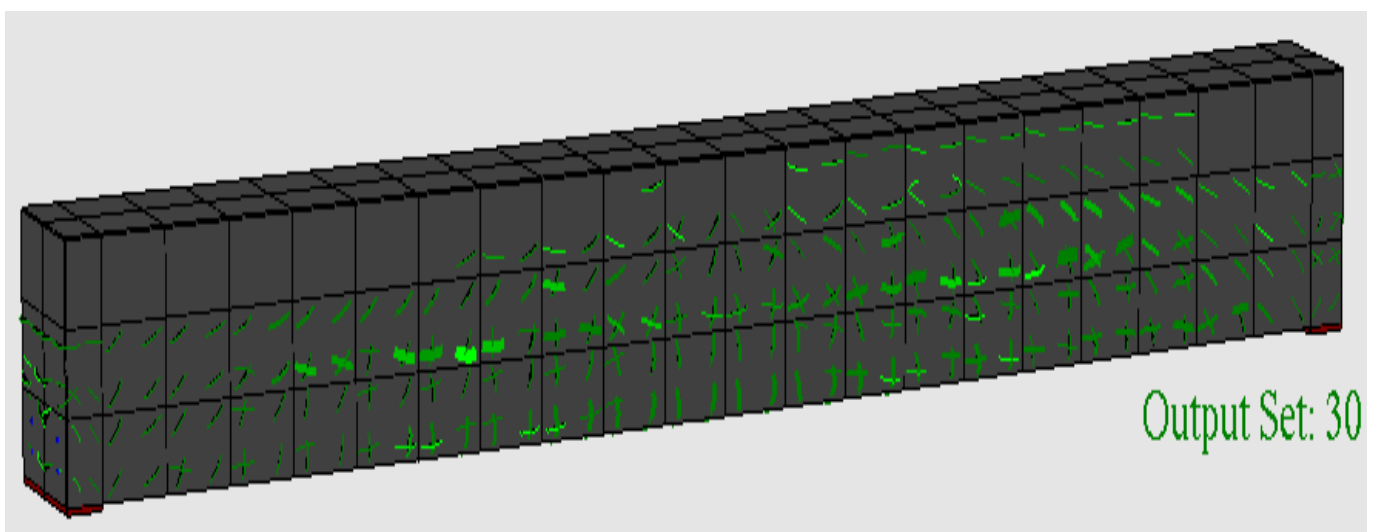
Επιβολή φορτίου P=12kN



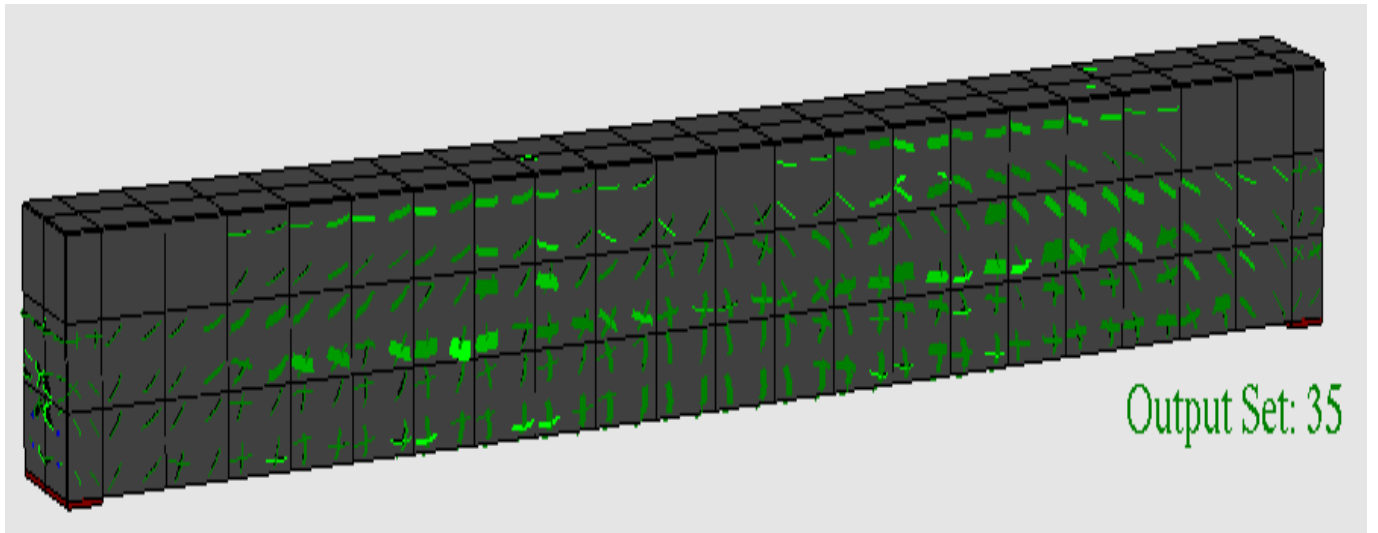
Επιβολή φορτίου  $P=120\text{kN}$



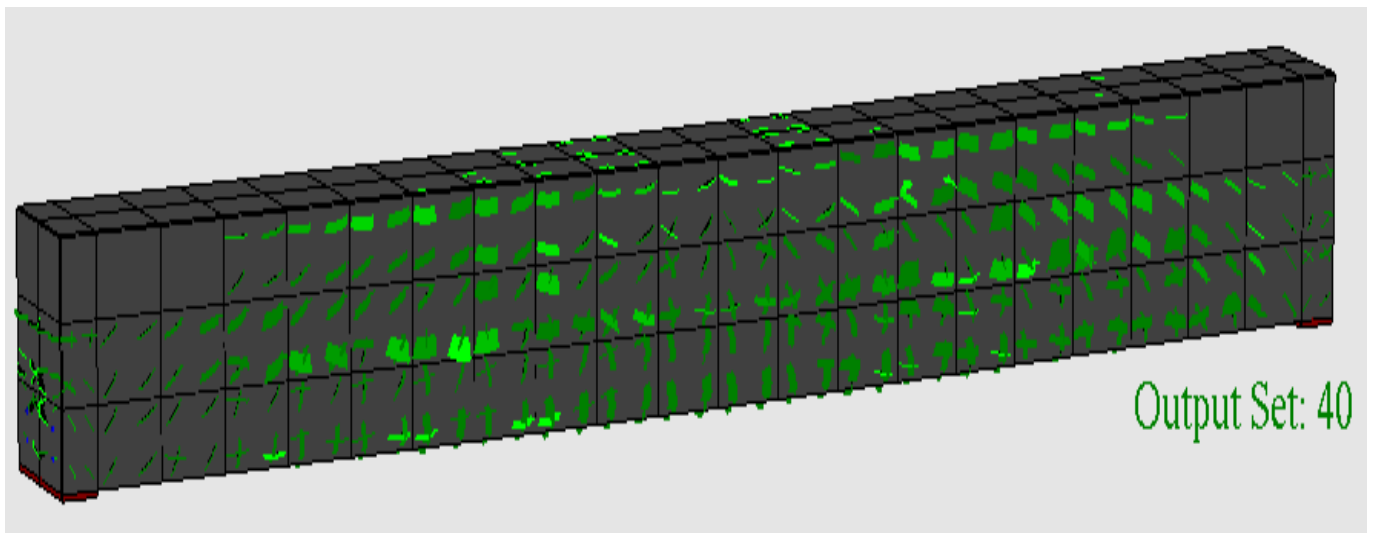
Επιβολή φορτίου  $P=240\text{kN}$



Επιβολή φορτίου  $P=360\text{kN}$

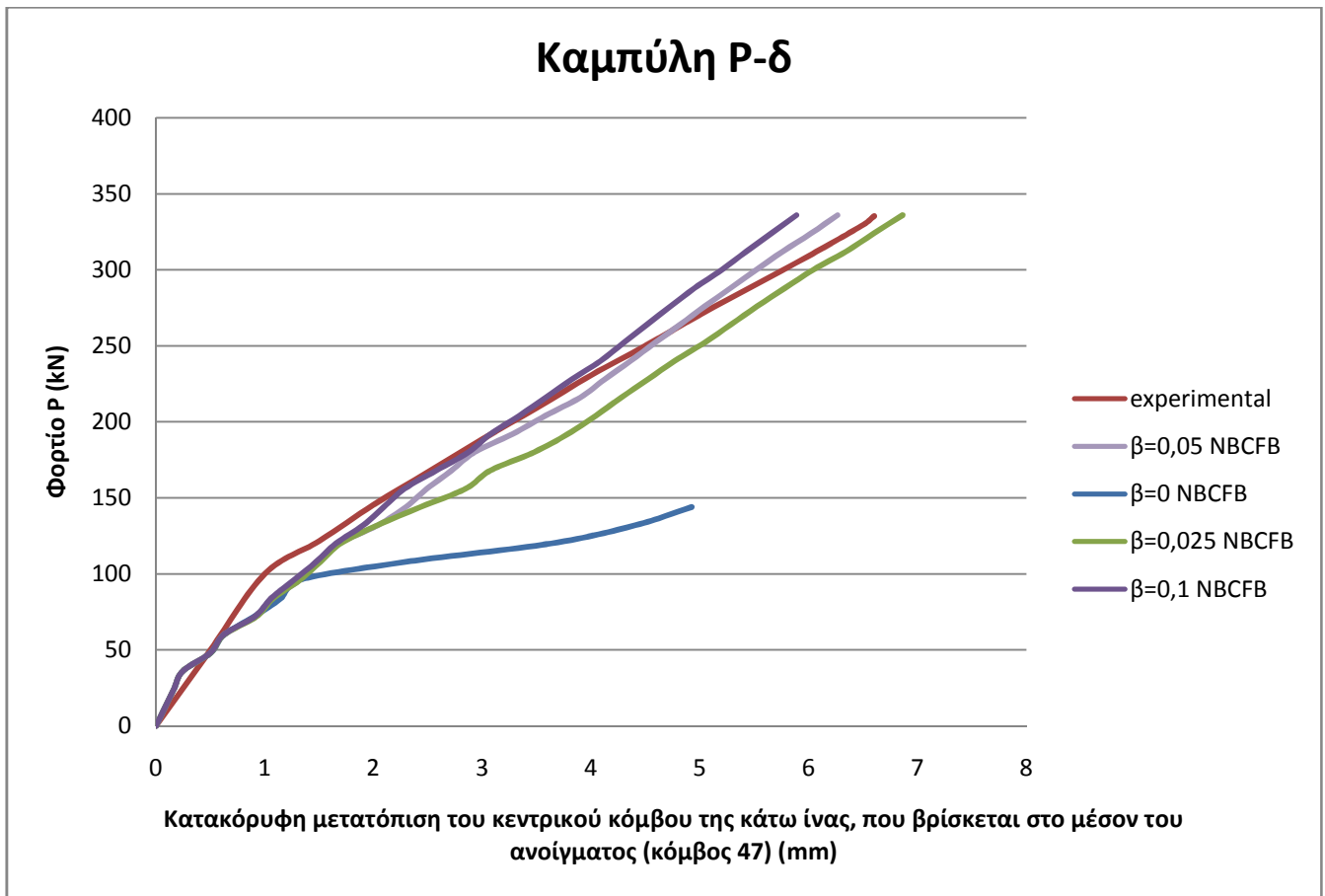


Επιβολή φορτίου  $P=420\text{kN}$

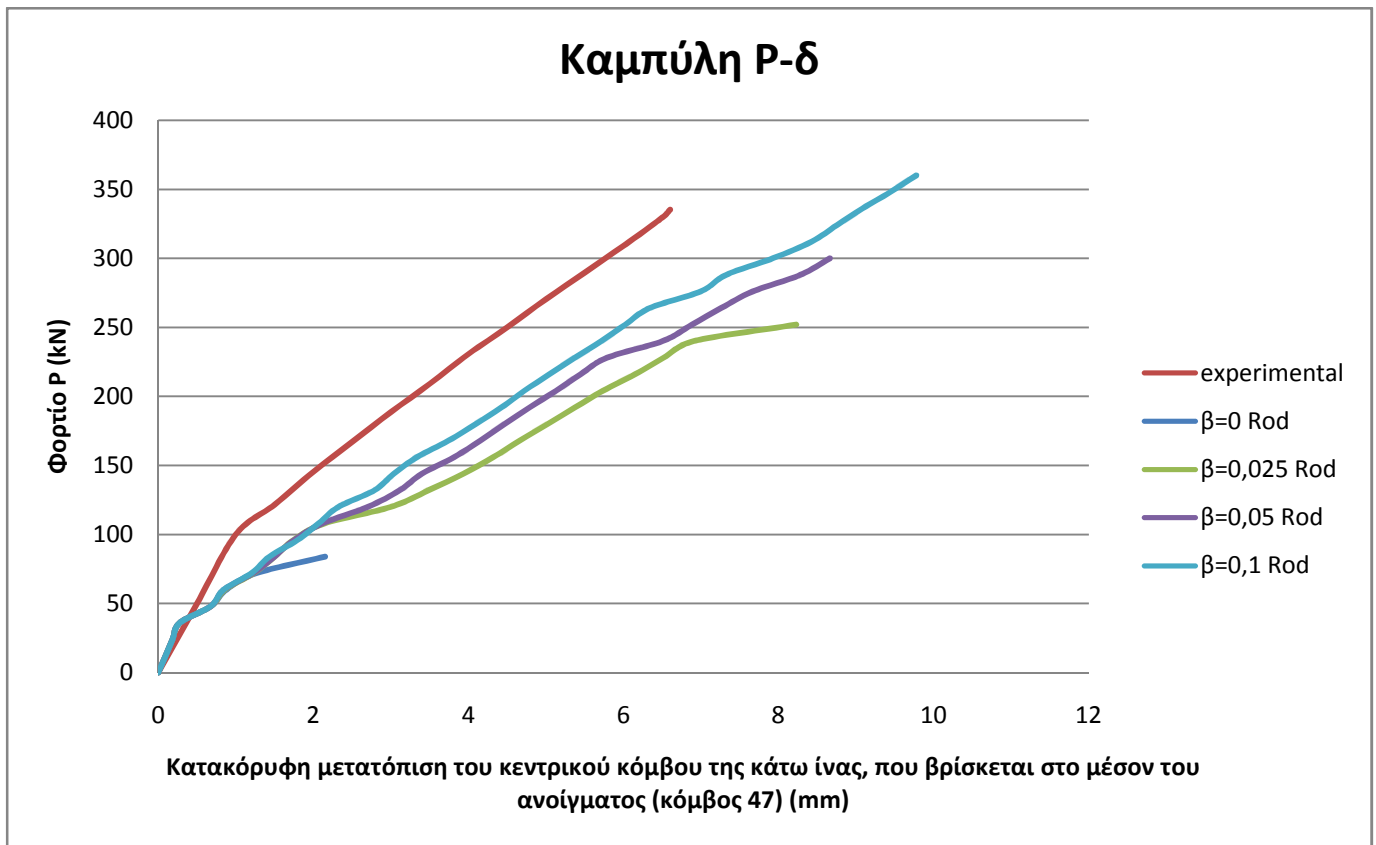


Επιβολή φορτίου  $P=480\text{kN}$

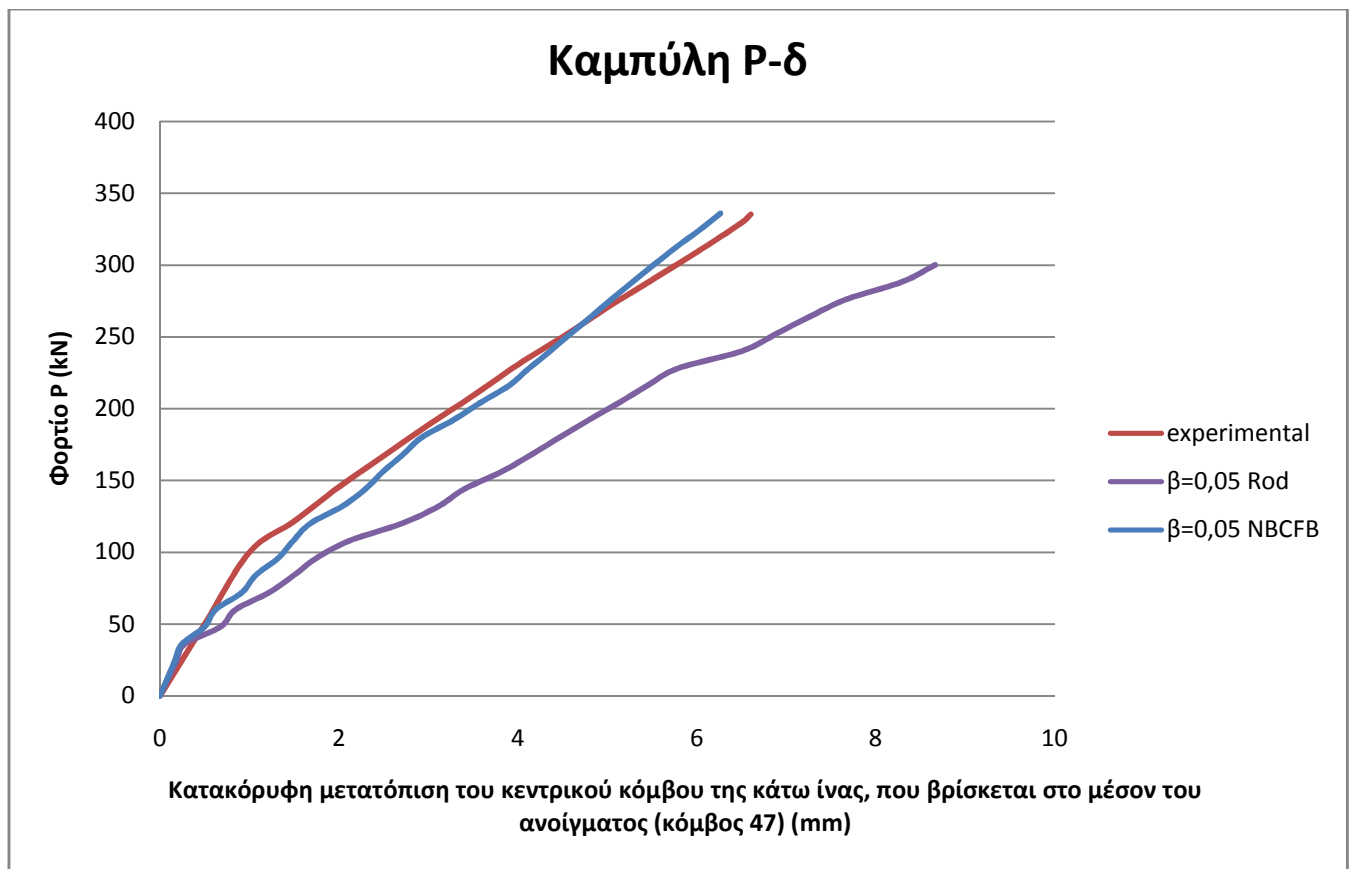
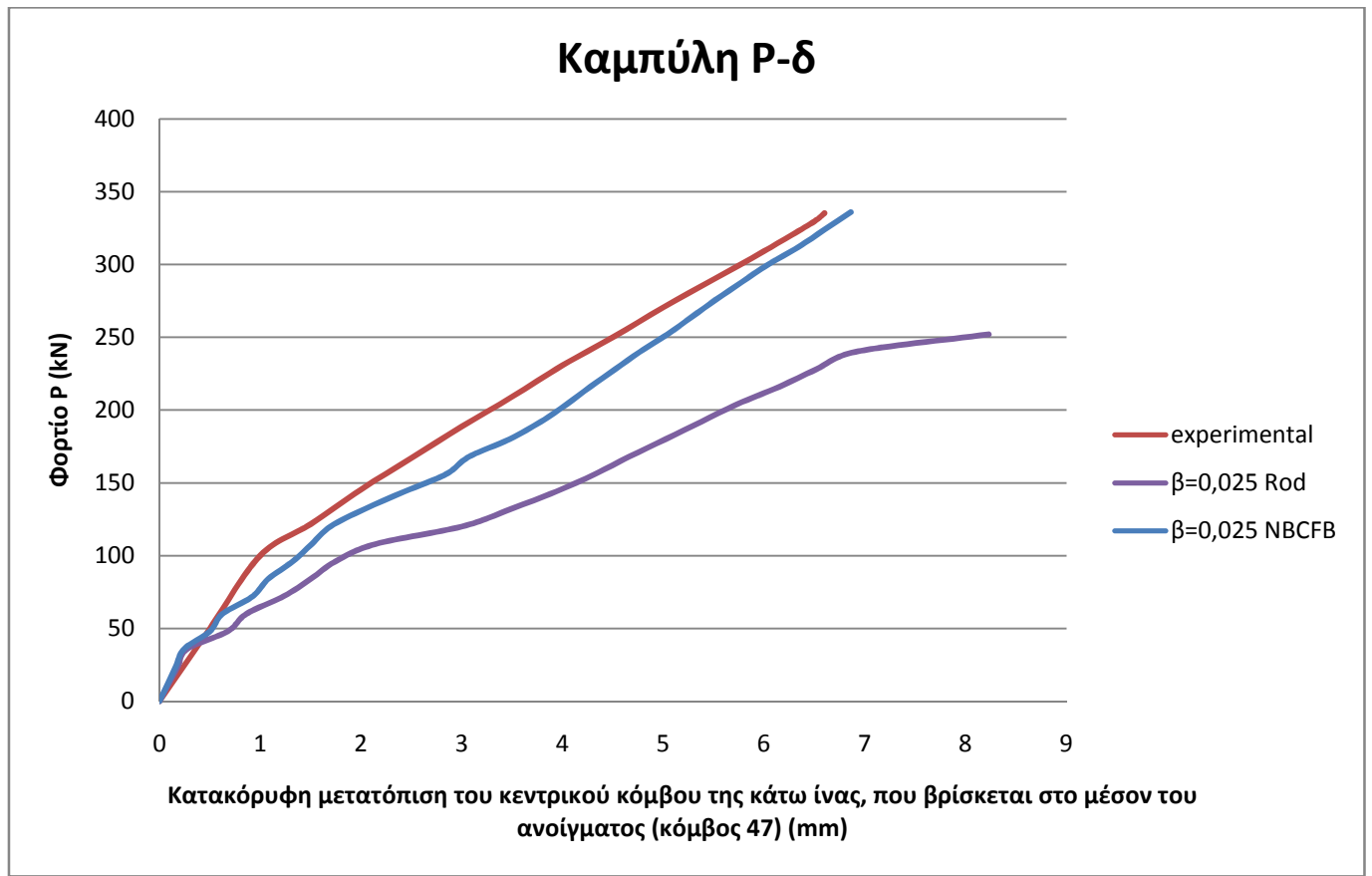
Σχήμα 7.64 Απεικόνιση των ρωγμών ( $\beta=0.05$ , fibers=10, NBCFB)



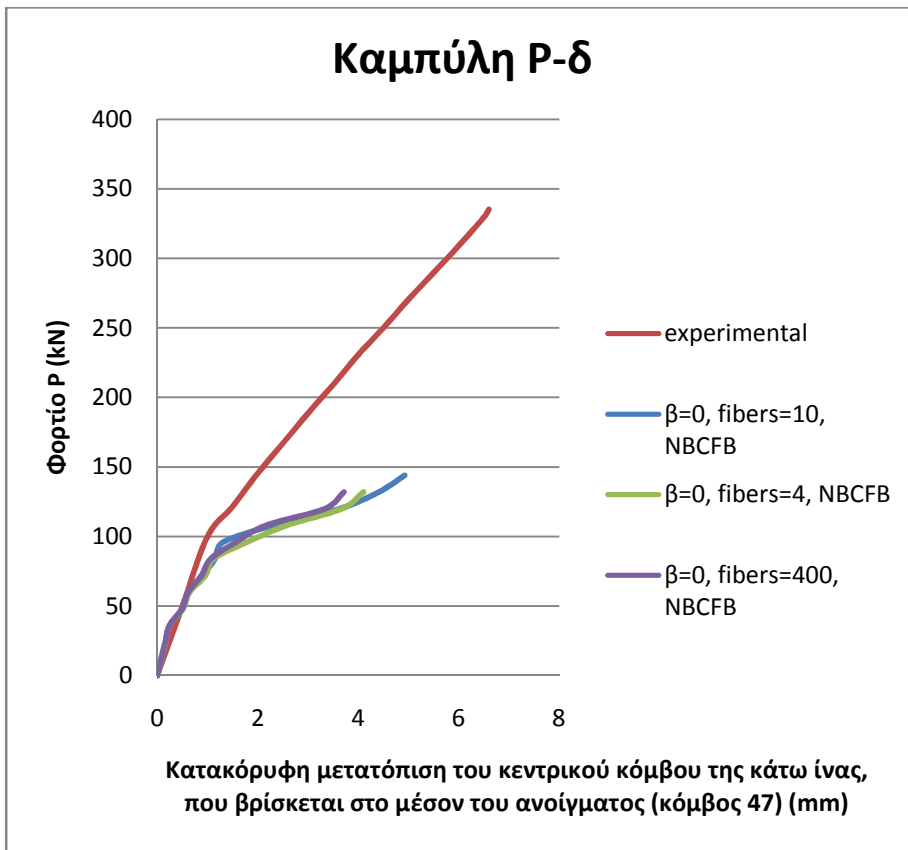
Σχήμα 7.65 Γραφική παράσταση φορτίου – κατακόρυφης μετατόπισης  
(θεώρηση στοιχείου οπλισμού ως φυσικό στοιχείο δυνάμεων, NLSteps=50, fibers=10)



Σχήμα 7.66 Γραφική παράσταση φορτίου – κατακόρυφης μετατόπισης  
(θεώρηση στοιχείου οπλισμού ως στοιχείο δικτύωματος, NLSteps=50)

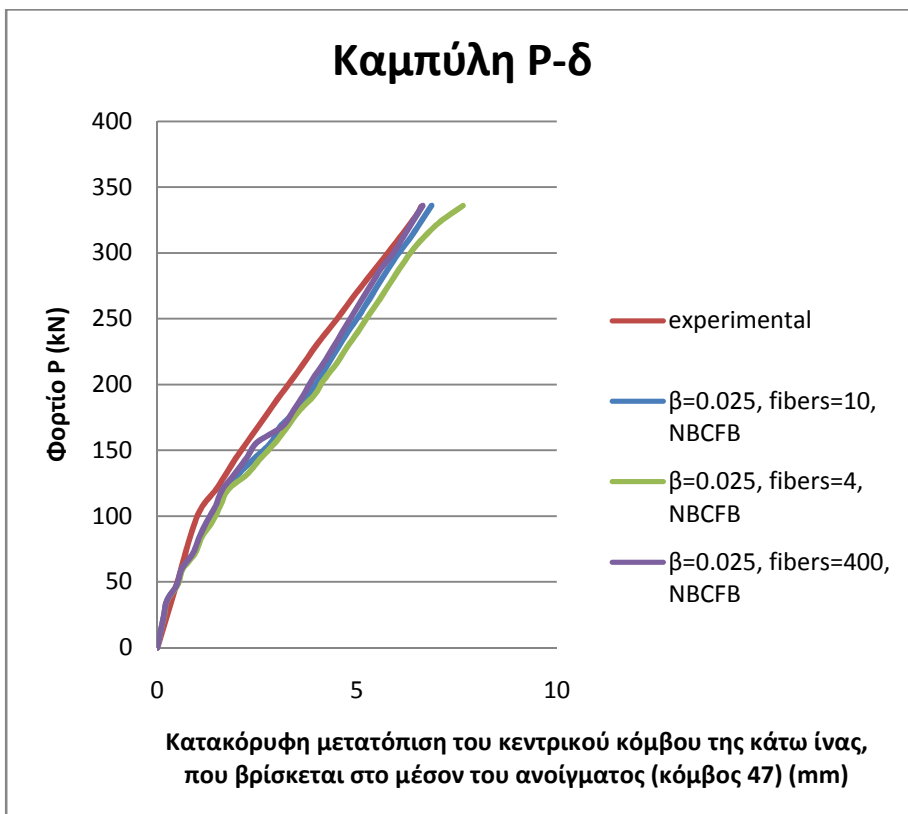


**Σχήμα 7.67** Σύγκριση των γραφικών παραστάσεων φορτίου – κατακόρυφης μετατόπισης των θεωρήσεων του στοιχείου σπλισμού ως στοιχείο δικτύωματος και ως φυσικό στοιχείο δυνάμεων (NLSteps=50)



β=0 (NBCFB element)	
πλήθος ινών	συνολικός χρόνος αριθμητικής επίλυσης (sec)
4	13,17
10	17,45
400	16,9

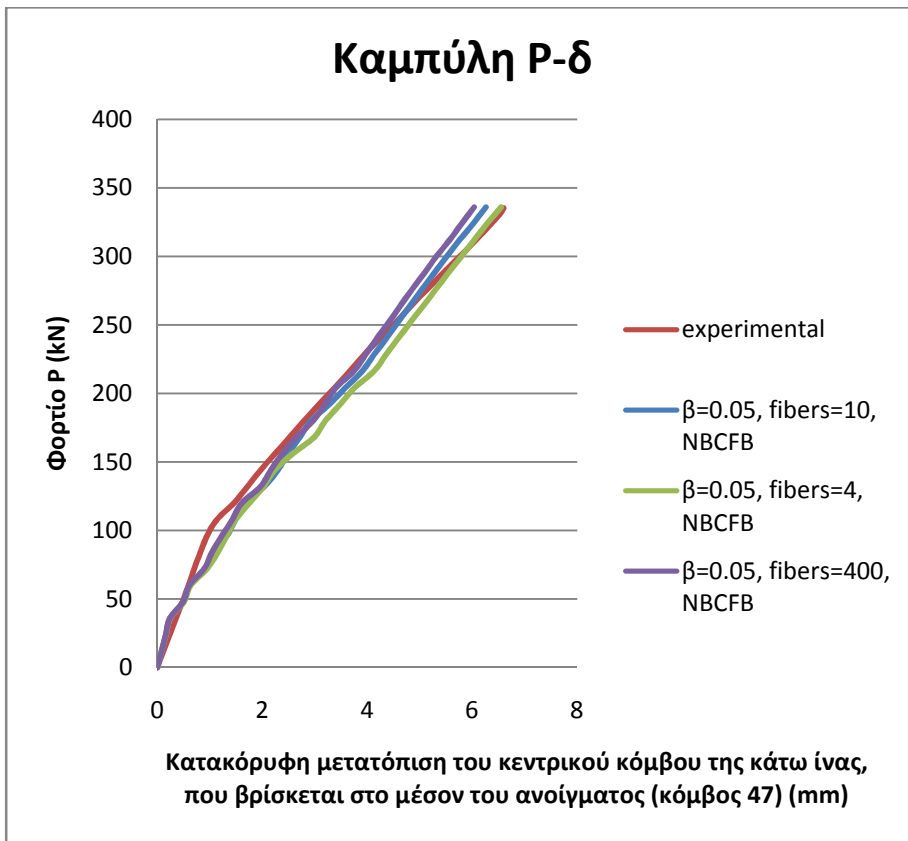
Σχήμα 7.68 Σύγκριση των γραφικών παραστάσεων φορτίου – κατακόρυφης μετατόπισης και του συνολικού χρόνου αριθμητικής επίλυσης για διάφορα πλήθη ινών (β=0, NLSteps=50)



β=0,025 (NBCFB element)	
πλήθος ινών	συνολικός χρόνος αριθμητικής επίλυσης (sec)
4	20,14
10	19,9
400	41,9

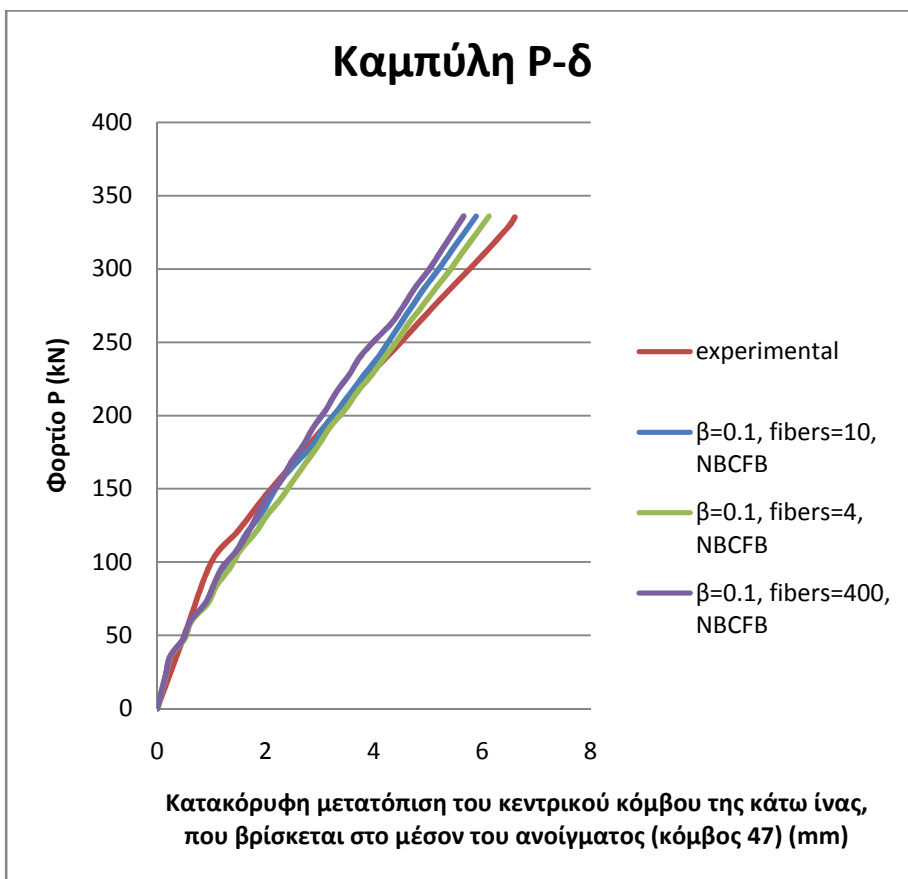
Σχήμα 7.69 Σύγκριση των γραφικών παραστάσεων φορτίου – κατακόρυφης μετατόπισης και του συνολικού χρόνου αριθμητικής επίλυσης για διάφορα πλήθη ινών (β=0.025, NLSteps=50)





$\beta=0,05$ (NBCFB element)	
πλήθος ινών	συνολικός χρόνος αριθμητικής επίλυσης (sec)
4	20,81
10	24,78
400	47,48

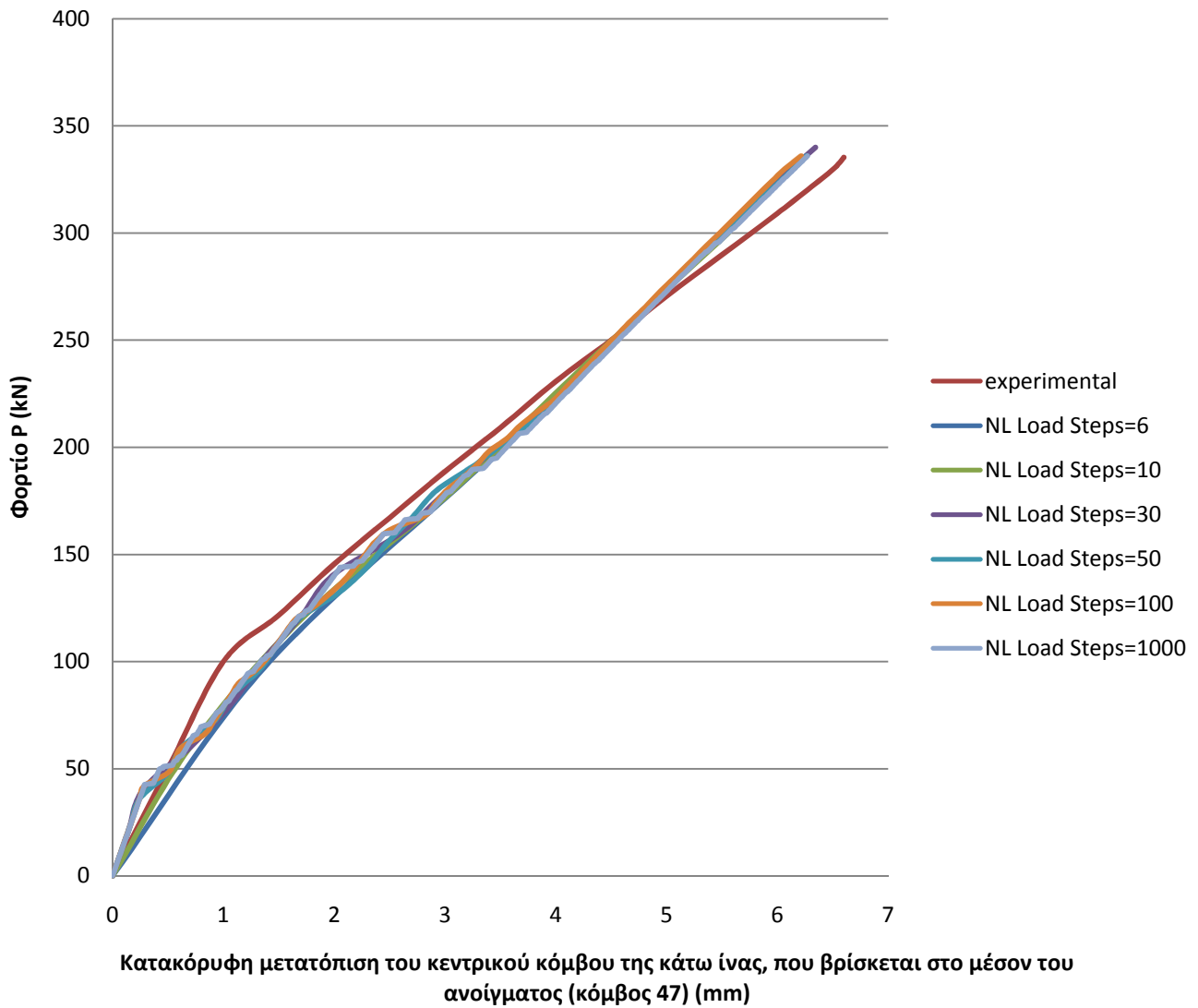
**Σχήμα 7.70** Σύγκριση των γραφικών παραστάσεων φορτίου – κατακόρυφης μετατόπισης και του συνολικού χρόνου αριθμητικής επίλυσης για διάφορα πλήθη ινών ( $\beta=0.05$ , NLSteps=50)



$\beta=0,1$ (NBCFB element)	
πλήθος ινών	συνολικός χρόνος αριθμητικής επίλυσης (sec)
4	25,21
10	27,64
400	55,95

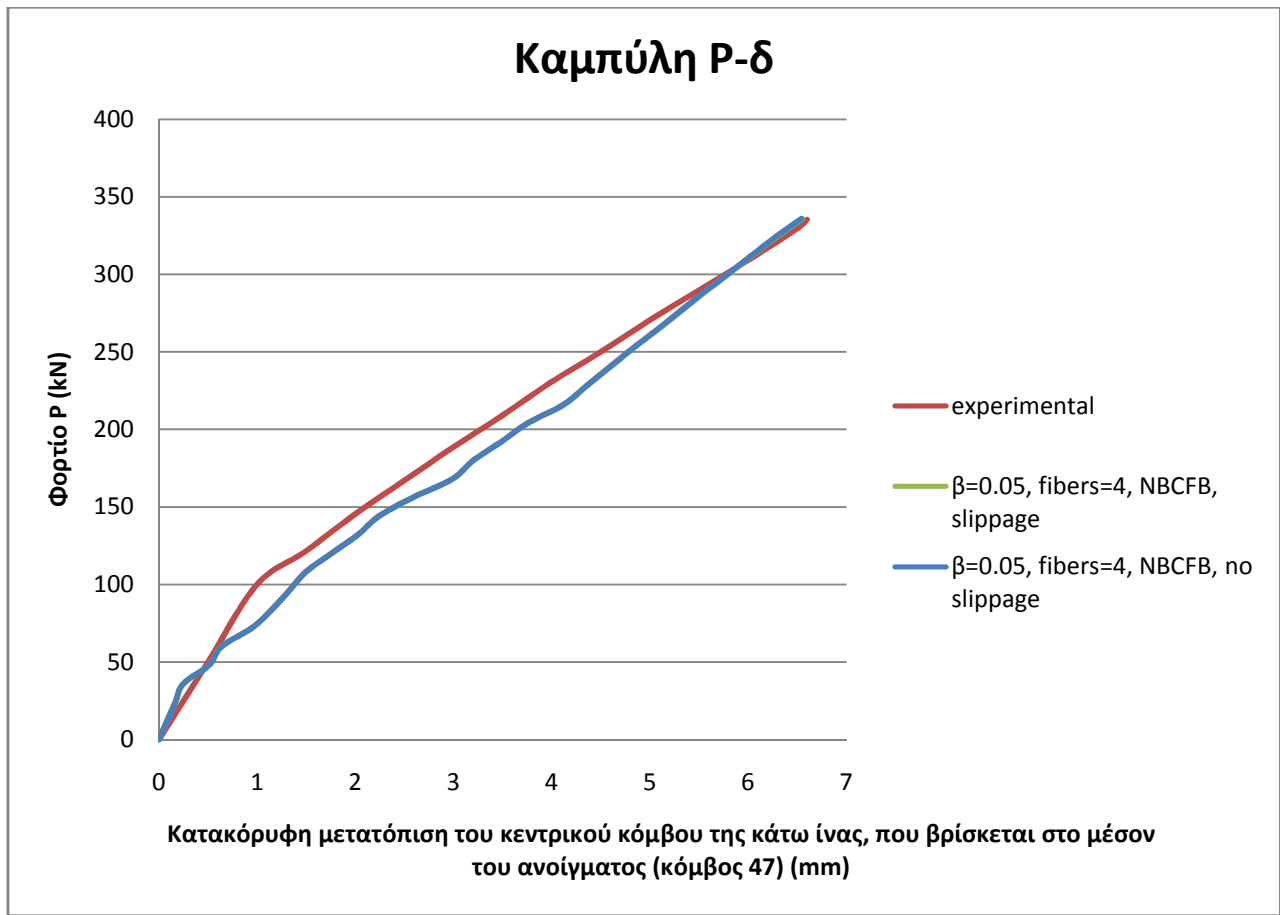
**Σχήμα 7.71** Σύγκριση των γραφικών παραστάσεων φορτίου – κατακόρυφης μετατόπισης και του συνολικού χρόνου αριθμητικής επίλυσης για διάφορα πλήθη ινών ( $\beta=0.1$ , NLSteps=50)

## Καμπύλη P-δ

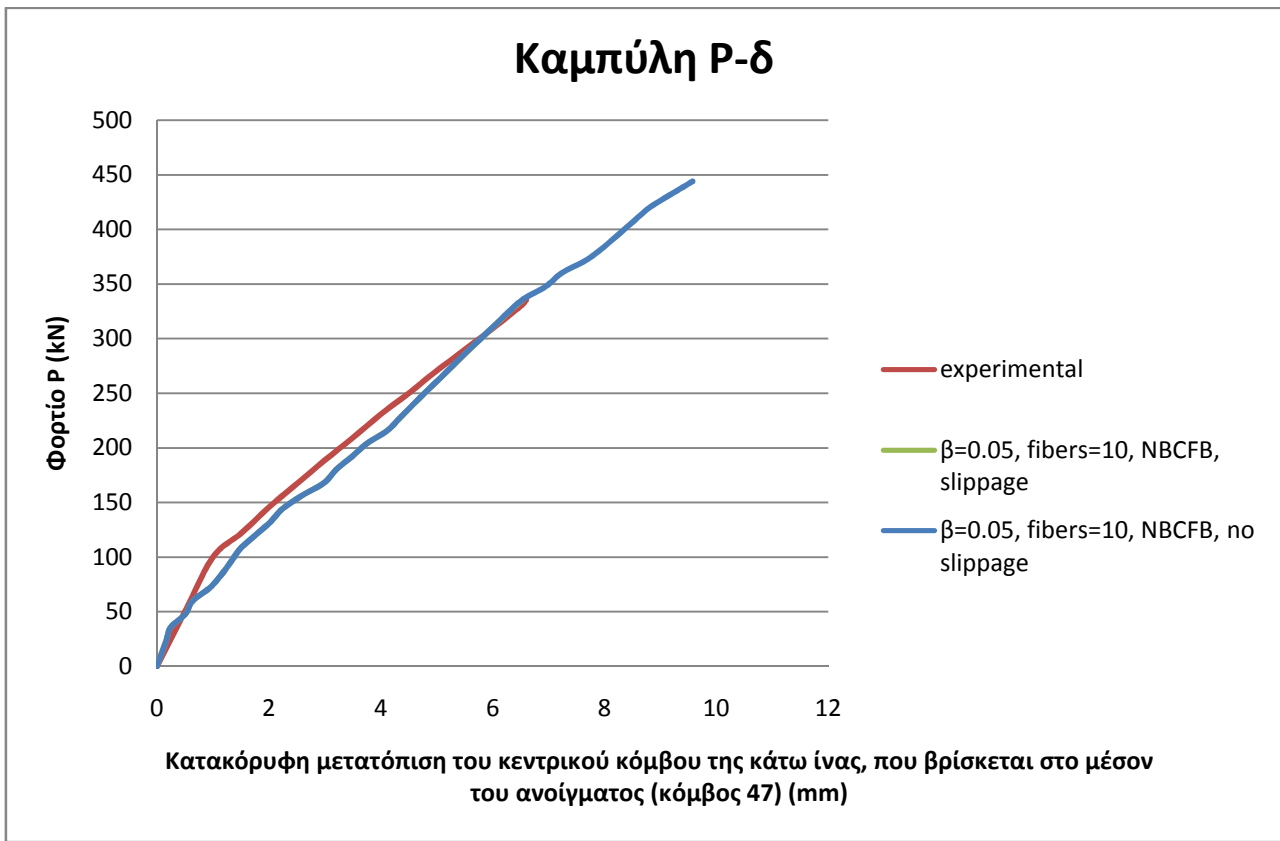


β=0,05 - fibers=10 (NBCFB element)	
πλήθος βημάτων φόρτισης	συνολικός χρόνος αριθμητικής επίλυσης (sec)
6	4,46
10	6,7
30	15,85
50	26,81
100	43,76
1000	1398,86

**Σχήμα 7.72** Σύγκριση των γραφικών παραστάσεων φορτίου – κατακόρυφης μετατόπισης και του συνολικού χρόνου αριθμητικής επίλυσης για διάφορα πλήθη βημάτων φόρτισης (β=0.05, fibers=10)



Σχήμα 7.73 Σύγκριση των γραφικών παραστάσεων φορτίου – κατακόρυφης μετατόπισης για την περίπτωση θεώρησης ή μη ολίσθησης ( $\beta=0.05$ , fibers=4)



Σχήμα 7.74 Σύγκριση των γραφικών παραστάσεων φορτίου – κατακόρυφης μετατόπισης για την περίπτωση θεώρησης ή μη ολίσθησης ( $\beta=0.05$ , fibers=10)

$\beta=0,05$ - fibers=10 - Load steps=50 (NBCFB element)	
βήμα φόρτισης	πλήθος εσωτερικών επαναλήψεων ανά βήμα φόρτισης
1	1
2	1
3	1
4	4
5	1
6	7
7	1
8	8
9	1
10	7
11	11
12	9
13	2
14	7
15	5
16	12
17	15
18	10
19	2
20	3
21	2
22	3
23	3
24	3
25	4
26	6
27	11
28	3
29	22
30	13
31	22
32	3
33	6
34	7
35	2
36	4
37	10
38	8
39	3
40	6
41	αστοχία
42÷50	-

Σχήμα 7.75 Εσωτερικές επαναλήψεις Newton-Raphson ανά βήμα φόρτισης ( $\beta=0.05$ , fibers=10, Load Steps=50)

### 1. Ρηγμάτωση:

Στο σχήμα 7.64 απεικονίζεται η σταδιακή ρηγμάτωση της αμφιέριστης δοκού. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται οι ρωγμές στο 1°, 10°, 20°, 30° και 40° βήμα φόρτισης. Το 40° βήμα φόρτισης αποτελεί το τελευταίο πριν την κατάρρευση του φορέα από τα συνολικά 50 βήματα στα οποία διαιρέθηκε το επιβληθέν φορτίο. Η μορφή της ρηγμάτωσης είναι ρεαλιστική και έρχεται σε άμεση συμφωνία με την πειραματική εμφάνιση των ρωγμών. Ειδικότερα, οι συνοριακές συνθήκες οδήγησαν στη δημιουργία αντισυμμετρικής ρηγμάτωσης, η οποία παρατηρήθηκε και στο πείραμα.

Θεωρώντας το οπλισμένο σκυροδέμα ως ένα σύστημα ελκυστήρων και θλιπτήρων, γνωρίζουμε ότι οι ρωγμές εμφανίζονται κάθετα στους ελκυστήρες όταν υπερβληθεί η εφελκυστική αντοχή του σκυροδέματος και κατά μήκος των θλιπτήρων όταν υπερβληθεί η θλιπτική αντοχή του σκυροδέματος η οποία και σηματοδοτεί την αστοχία του φορέα.

Η καμπτοδιατμητική ρηγμάτωση διακρίνεται από:

- τις καμπτικές ρωγμές (ρωγμές διαμήκων ελκυστήρων και θλιπτήρων), οι οποίες εμπεριέχουν:
  - ❖ τις ρωγμές λόγω αστοχίας του διαμήκου ελκυστήρα
  - ❖ τις ρωγμές λόγω αστοχίας του διαμήκου θλιπτήρα
- τις διατμητικές ρωγμές (ρωγμές λοξών ελκυστήρων και θλιπτήρων), οι οποίες εμπεριέχουν :
  - ❖ τις ρωγμές λόγω αστοχίας του λοξού ελκυστήρα
  - ❖ τις ρωγμές λόγω αστοχίας του λοξού θλιπτήρα.

Αναφορικά με τις καμπτικές ρωγμές, οι ρωγμές λόγω αστοχίας του διαμήκου ελκυστήρα έχουν διακριτά χείλη, είναι διαμπερείς, εμφανίζονται για πολύ μικρά φορτία (λόγω της πολύ μικρής εφελκυστικής αντοχής του σκυροδέματος) και δεν διακρίνονται με γυμνό οφθαλμό για τα φορτία λειτουργίας. Οι ρωγμές λόγω αστοχίας του διαμήκου θλιπτήρα είναι υπό τη μορφή σύνθλιψης του σκυροδέματος, επεκτείνονται σε όλο το πλάτος του φορέα, δεν εμφανίζονται σε κατάσταση λειτουργίας, ενώ η ανάπτυξή τους σηματοδοτεί την αστοχία του φορέα. Οι θέσεις εμφάνισης των καμπτικών ρωγμών είναι αυτές των κρίσιμων διατομών για την καμπτική ροπή, που στην προκειμένη περίπτωση της αμφιέριστης δοκού είναι το μέσον του ανοίγματος. Όπως παρατηρούμε στο τελευταίο βήμα – εικόνα του σχήματος 7.64, στο μέσον του ανοίγματος οι ρωγμές είναι κατακόρυφες – κάθετες στον διαμήκη άξονα της δοκού, καθώς πρόκειται για τις καμπτικές ρωγμές στη θέση της κρίσιμης διατομής, που δεν είναι άλλη από το μέσον του ανοίγματος όπου η καμπτική ροπή είναι η μέγιστη.

Αναφορικά με τις διατμητικές ρωγμές, οι ρωγμές λόγω αστοχίας του λοξού ελκυστήρα έχουν διακριτά χείλη, είναι διαμπερείς, εμφανίζονται για πολύ μικρά φορτία (λόγω της πολύ μικρής εφελκυστικής αντοχής του σκυροδέματος) και δεν διακρίνονται με γυμνό οφθαλμό για τα φορτία λειτουργίας. Οι ρωγμές λόγω αστοχίας του λοξού θλιπτήρα είναι υπό τη

μορφή σύνθλιψης του σκυροδέματος, επεκτείνονται σε όλο το πλάτος του φορέα, εμφανίζονται μόνο σε φορείς με ανεπαρκές πλάτος, δεν εμφανίζονται σε κατάσταση λειτουργίας του φορέα, ενώ η ανάπτυξή τους σηματοδοτεί την αστοχία του φορέα. Οι θέσεις εμφάνισης των διατμητικών ρωγμών είναι αυτές με τη μεγαλύτερη δρώσα τέμνουσα, που στην προκειμένη περίπτωση της αμφιέριστης δοκού είναι η παρειά κάθε στήριξης. Οι λοξές αυτές διατμητικές ρωγμές εμφανίζονται σε πρώτη φάση ενδιάμεσα του ύψους στις θέσεις με τη μέγιστη διατμητική τάση (για δοκό ορθογωνικής διατομής στο μέσον του ύψους) και με κλίση προς τις στηρίξεις. Στη συγκεκριμένη δοκό η διατομή είναι ορθογωνική, άρα η εκκίνηση των διατμητικών ρωγμών αιτιολογημένα πραγματοποιείται από το μέσον του ύψους της δοκού, όπως χαρακτηριστικά φαίνεται στο σχήμα 7.64. Με την αύξηση της επιπόνησης οι διατμητικές ρωγμές προεκτείνονται προς τα πέλματα του φορέα, διευρυνόμενες προς το εφελκούμενο πέλμα λόγω της ελκτικής δράσης του διαμήκου ελκυστήρα και κλείνοντας προς το θλιβόμενο πέλμα λόγω της συμπιεστικής δράσης του διαμήκου θλιπτήρα. Όπως παρατηρούμε στο τελευταίο βήμα – εικόνα του σχήματος 7.64, στις παρειές των στηρίξεων οι ρωγμές είναι λοξές σχηματίζοντας γωνία περίπου  $45^\circ$  με τον διαμήκη άξονα της δοκού, καθώς πρόκειται για τις διατμητικές ρωγμές στη θέση της κρίσιμης διατομής, που δεν είναι άλλη από την παρειά της στήριξης όπου η δρώσα τέμνουσα είναι η μέγιστη.

Πέραν της ρηγμάτωσης, ρεαλιστική είναι και η παραμορφωμένη κατάσταση της δοκού, καθώς και η κατανομή της κατακόρυφης και ολικής μετατόπισης κατά μήκος της. Στα σχήματα 7.59, 7.60 απεικονίζεται η παραμορφωμένη κατάσταση της δοκού με χρωματική απεικόνιση αντίστοιχα της κατακόρυφης και ολικής μετατόπισης για το τελευταίο αποδεκτό (πριν την κατάρρευση) βήμα φόρτισης στην περίπτωση της διακριτοποίησης των στοιχείων οπλισμού με φυσικά στοιχεία δυνάμεων με  $\beta=0,05$  και 10 ίνες. Έπειτα, στα σχήματα 7.61, 7.62, 7.63 παρουσιάζεται η ολική μετατόπιση, η κατακόρυφη μετατόπιση και οι Von Mises παραμορφώσεις για διάφορα βήματα φόρτισης.

## **2. Σύγκριση των αποτελεσμάτων της θεώρησης στοιχείων οπλισμού – φυσικών στοιχείων δυνάμεων με τα αντίστοιχα αποτελέσματα της θεώρησης στοιχείων οπλισμού - στοιχείων δικτυώματος:**

Στη συγκεκριμένη αμφιέριστη δοκό από οπλισμένο σκυρόδεμα προσομοιώσαμε τους διαμήκεις οπλισμούς αρχικά με στοιχεία δικτυώματος και έπειτα με φυσικά στοιχεία δυνάμεων. Όπως παρατηρούμε από τη σύγκριση των σχημάτων 7.65 με 7.66 (Γραφική παράσταση φορτίου – κατακόρυφης μετατόπισης), οι αντίστοιχες καμπύλες των δύο θεωρήσεων διαφοροποιούνται σημαντικά. Στο σχήμα 7.67, στο οποίο η διαφορά είναι πιο εμφανής, το πρώτο διάγραμμα απεικονίζει την πειραματική καμπύλη, την καμπύλη που αντιστοιχεί σε φυσικά στοιχεία δυνάμεων και την καμπύλη που αντιστοιχεί σε στοιχεία δικτυώματος για  $\beta=0,025$ , ενώ το δεύτερο περιέχει τις αντίστοιχες καμπύλες για  $\beta=0,05$ . Τα αποτελέσματα της θεώρησης στοιχείων δικτυώματος απέχουν σημαντικά από τα πειραματικά (η αντίστοιχη καμπύλη βρίσκεται αρκετά κάτω από την πειραματική) και έρχονται σε αντίθεση με εκείνα της θεώρησης φυσικών στοιχείων δυνάμεων, των οποίων η προβλεπόμενη καμπύλη φορτίου-μετατόπισης συμπίπτει καλύτερα τόσο ποσοτικά όσο και ποιοτικά με την αντίστοιχη πειραματική.

Η διαφοροποίηση αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι με τα NBCFB λαμβάνουμε υπόψιν την καμπτική και διατμητική στιβαρότητα των διαμήκων οπλισμών (που είναι μεγάλης διαμέτρου), με συνέπεια την αύξηση της στιβαρότητας του μοντέλου των πεπερασμένων στοιχείων της δοκού. Παράλληλα, η εσωτερική μη γραμμική διαδικασία υπολογισμού των εσωτερικών δυνάμεων (κύριο χαρακτηριστικό των NBCFB) δεν επιβαρύνει υπολογιστικά την επίλυση λόγω του βέλτιστου προγραμματισμού του κώδικα και εξασφαλίζει την ελαχιστοποίηση της αστάθειας που εισάγεται λόγω της υπολογιστικής διαχείρισης των οπλισμών. Προς την κατεύθυνση αυτή αξιοσημείωτη είναι η συμβολή της ευστάθειας που επιφέρει η αριθμητική διαχείριση του μοντέλου του σκυροδέματος του Κωτσοβού, η οποία σε συνδυασμό με τον συγκεκριμένο τύπο πεπερασμένων στοιχείων άρει την ανάγκη χρήσης πεπερασμένων στοιχείων ανωτέρας τάξεως. Τονίζουμε για άλλη μία φορά ότι για την συγκεκριμένη εφαρμογή, όπως και για την αμέσως επόμενη, χρησιμοποιήσαμε οκτακομβικά ισοπαραμετρικά εξαεδρικά στοιχεία για την διακριτοποίηση του σκυροδέματος με κανόνα ολοκλήρωσης  $2 \times 2 \times 2$ . Μετά την τροποποίηση σχετικά με τον αριθμητικό χειρισμό του καταστατικού προσομοιώματος του σκυροδέματος υπάρχει η δυνατότητα εμφάνισης απειριορίστου αριθμού ρωγμών σε κάθε βήμα φόρτισης χωρίς να προκύπτουν προβλήματα σύγκλισης. Όλοι οι ανωτέρω παράγοντες συμβάλλουν ώστε ο κώδικας να μην έχει αρχικά αριθμητικές αστάθειες και να τρέχει γρήγορα.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι σε τέτοιου είδους πειραματικές διατάξεις και γενικότερα σε πλαισιακούς φορείς από οπλισμένο σκυρόδεμα για την προσομοίωση των ενσωματωμένων ράβδων οπλισμού κρίνεται ως καταλληλότερο το φυσικό στοιχείο δυνάμεων, καθώς μόνο αυτό λαμβάνει υπόψιν την καμπτική και διατμητική τους στιβαρότητα.

### **3. Επίδραση του συντελεστή μερικής διατήρησης της διατμητικής στιβαρότητας (remaining shear) $\beta$ στα αριθμητικά αποτελέσματα:**

Ο συντελεστής μερικής διατήρησης της διατμητικής στιβαρότητας  $\beta$  (shear retention factor) αντιπροσωπεύει την παραμένουσα διατμητική αντοχή κατά μήκος της επιφάνειας της ρωγμής λόγω αλληλεμπλοκής των αδρανών (aggregate interlock) (δηλαδή στο αριθμητικό μας μοντέλο οι ρωγμές παραλαμβάνουν φορτίο μέσω του  $\beta$ ) και διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στις περισσότερες περιπτώσεις θεώρησης διανεμημένης ρωγμής, καθώς συνεισφέρει στην ευστάθεια της μη γραμμικής επαναληπτικής διαδικασίας, ιδιαίτερα όταν αρχίζουν να σχηματίζονται ρωγμές.

Προκειμένου να μελετήσουμε την επίδραση του συντελεστή  $\beta$  στα αποτελέσματα της συγκεκριμένης εφαρμογής, διεξήχθη παραμετρική διερεύνηση, μέσω της οποίας καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι θα πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί στη χρήση του, η οποία θα πρέπει να ανταποκρίνεται στη φυσική διάσταση του εκάστοτε αριθμητικού μοντέλου. Η επίδραση των τιμών του  $\beta$  στη μετελαστική απόκριση της αμφιέριστης δοκού είναι αρκετά σημαντική, γεγονός που οφείλεται και στο ότι πρόκειται για μία υπο-οπλισμένη δοκό, καθώς δεν περιλαμβάνει ούτε άνω θλιβόμενο οπλισμό (ούτε καν τον ελάχιστο που προβλέπει ο ΕΚΩΣ 2000) ούτε συνδετήρες (ούτε καν τους ελάχιστους που προβλέπει ο ΕΚΩΣ 2000). Όταν ξεκινάει η μακρορηγμάτωση έχουμε γρήγορη απώλεια της αντοχής λόγω του ότι δεν υπάρχουν αρκετοί οπλισμοί για να παραλάβουν τις αναπτυσσόμενες

τάσεις. Αν υπήρχαν συνδετήρες, το πρόβλημα δεν θα ήταν τόσο έντονο, όπως θα δούμε στην αμέσως επόμενη εφαρμογή.

Τα σχήματα 7.68÷7.71 απεικονίζουν τα αποτελέσματα της παραμετρικής διερεύνησης τόσο του  $\beta$  όσο και του αριθμού των ινών, στις οποίες θεωρούμε ότι διακριτοποιείται κάθε φυσικό στοιχείο δυνάμεων. Όπως παρατηρούμε από τους αντίστοιχους πίνακες, όσο αυξάνεται η τιμή του  $\beta$  και ο αριθμός των ινών τόσο αυξάνεται ο συνολικός υπολογιστικός χρόνος. Τα 4 σχήματα 7.68, 7.69, 7.70, 7.71 αντιστοιχούν στις τιμές  $\beta=0, 0.025, 0.05, 0.1$  και καθένα από αυτά περιέχει τρεις καμπύλες αντίστοιχες των 4, 10, 100 ινών.

Για  $\beta=0$  (Σχήμα 7.68) παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα είναι άκρως αναληθή και η διαδικασία σταματάει πρόωρα. Στην περίπτωση αυτή, με την εμφάνιση της πρώτης ρωγμής στο καθολικό μητρώο στιβαρότητας εμφανίζεται πληθώρα μηδενικών διαγώνιων όρων, με αποτέλεσμα η αντιστροφή του μητρώου να γίνεται υπολογιστικά εξαιρετικά επίπονη αν όχι αδύνατη. Θέτοντας μηδενική την τιμή του  $\beta$ , δεν λαμβάνουμε καθόλου υπόψιν την αλληλεμπλοκή των αδρανών και θεωρούμε μηδενική την παραμένουσα διατμητική αντοχή κατά μήκος της επιφάνειας της ρωγμής, γεγονός σημαντικό για την περίπτωση αυτή που έχουμε να κάνουμε με έναν υπο-οπλισμένο φορέα. Το πρόβλημα γίνεται ακόμη πιο έντονο όταν ανοίγουν πολλές ρωγμές και έχουμε φόρτιση ως προς το επίπεδο της ρωγμής, οπότε οι παραμορφώσεις που δημιουργούνται είναι ανεξέλεγκτες με συνέπεια να έχουμε πρόωρη αστοχία. Αν υπήρχε ικανοποιητική παρουσία οπλισμού, τότε τα φορτία αυτά θα μπορούσαν να αναληφθούν και η επίλυση θα συνεχιζόταν.

Για  $\beta \neq 0$  (Σχήματα 7.69÷7.71) αντισταθμίζουμε ορισμένα αριθμητικά προβλήματα που ενδεχομένως να αντιμετωπίσουμε λόγω της προσέγγισης της διανεμημένης ρωγμής και ελαττώνουμε αποτελεσματικά τον αριθμό των μηχανισμών του ρηγματωμένου σημείου ολοκλήρωσης σε σχέση με αυτόν που θα προέκυπτε για μηδενική τιμή του  $\beta$ . Για παράδειγμα, σε περιπτώσεις δημιουργίας πολλών παράλληλων ρωγμών σε διαδοχικά πεπερασμένα στοιχεία, ο ενδιάμεσος κόμβος μπορεί να καταλήξει να είναι πολύ χαλαρά συνδεδεμένος με το υπόλοιπο σύστημα, με αποτέλεσμα να έχουμε πρόωρες αποκλίσεις από την αριθμητική λύση, οι οποίες ενδέχεται να τερματίσουν πρόωρα την ανάλυση. Στη συγκεκριμένη αριθμητική εφαρμογή ο συντελεστής  $\beta$  χρησιμοποιείται για να την βελτιώσει αριθμητικά και να αποφύγει την κακή κατάσταση των μητρώων στιβαρότητας.

Τα καλύτερα αποτελέσματα παίρνουμε για  $\beta=0,05$  και 4 ίνες. Η τιμή 0,05 του  $\beta$  υποδηλώνει ότι μετά το άνοιγμα της ρωγμής λόγω της αλληλεμπλοκής των αδρανών κατά μήκος της επιφάνειας ρηγμάτωσης παραμένει το 5% της αρχικής διατμητικής αντοχής. Στην περίπτωση αυτή το φορτίο υπολογίζεται ίσο με  $P_{cr}=336\text{kN}$  (διαφέρει από το πειραματικό μόλις κατά 0,60%) με αντίστοιχη μετατόπιση του μέσου του ανοίγματος ίση με  $w_{cr}=6,5\text{ mm}$  (διαφέρει από την πειραματική μόλις κατά -1,52%). Η αστοχία της δοκού (τερματισμός της μη γραμμικής διαδικασίας) οφείλεται στη ρηγμάτωση της θλιβόμενης περιοχής της δοκού, κατά την οποία έχουμε απώλεια της φέρουσας ικανότητας του σκυροδέματος.

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι δεν χρειάζεται να διακριτοποιήσουμε τον φορέα μας με περισσότερες ίνες επιβαρύνοντας αριθμητικά το πρόβλημά μας καθώς δεν παίρνουμε αναγκαστικά καλύτερο αποτέλεσμα.



#### 4. Επίδραση του αριθμού των βημάτων εξωτερικής φόρτισης στα αριθμητικά αποτελέσματα:

Προκειμένου να αποδείξουμε την αντικειμενικότητα του προτεινόμενου καταστατικού νόμου υλικού και την υπολογιστική αποδοτικότητα του προτεινόμενου κώδικα, εφαρμόσαμε για την περίπτωση του φυσικού στοιχείου δυνάμεων με 10 ίνες (και  $\beta=0,05$  για το σκυρόδεμα) διάφορα πλήθη βημάτων φόρτισης.

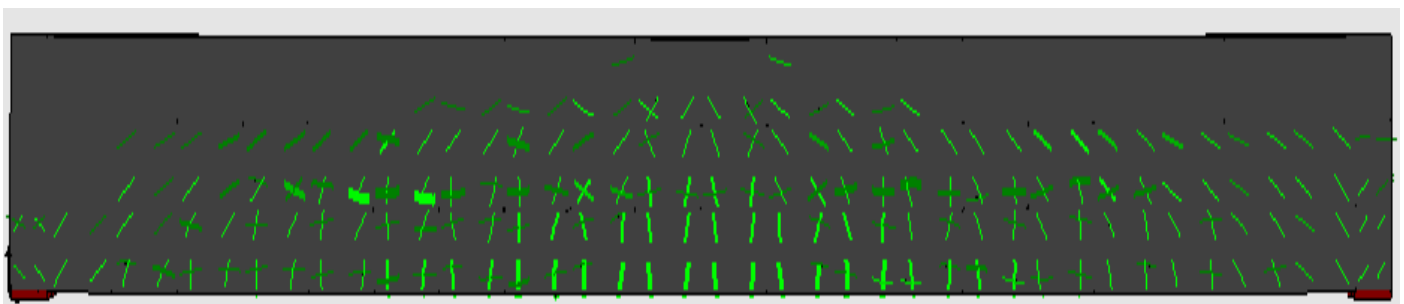
Στο σχήμα 7.72 απεικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις φορτίου – κατακόρυφης μετατόπισης και στον πίνακα 7.72 ο συνολικός χρόνος αριθμητικής επίλυσης για τα επιλεγθέντα πλήθη βημάτων φόρτισης (6, 10, 30, 50, 100, 1000).

Όπως ήταν αναμενόμενο, όσο αυξάνεται το πλήθος των βημάτων φόρτισης που επιλέγουμε για τη μη γραμμική διαδικασία Newton-Raphson τόσο αυξάνεται και ο συνολικός χρόνος αριθμητικής επίλυσης που μεταφράζεται σε υπολογιστικό κόστος, ενώ τα αποτελέσματα και η μορφή της καμπύλης που παίρνουμε είναι παραπλήσια. Από το σχήμα 7.72 είναι εμφανές ότι η διαφοροποίηση της καμπύλης φορτίου-μετατόπισης μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η ακρίβεια της διαδικασίας επίλυσης δεν είναι ευαίσθητη στον αριθμό των βημάτων εξωτερικής φόρτισης, ο οποίος είναι μία εξαιρετικά κρίσιμη αριθμητική παράμετρος, ιδιαίτερα όταν καταπιανόμαστε με large-scale προβλήματα. Όσο αυξάνει ο αριθμός των βημάτων φόρτισης, ο υπολογιστικός χρόνος αυξάνεται δυσανάλογα σε σχέση με την επιπρόσθετη ακρίβεια που κερδίζουμε. Υπάρχουν περιπτώσεις όπου με τα λίγα βήματα (μεγάλα  $\delta l$ ) έχουμε αστάθεια στην μη γραμμική διαδικασία λόγω αδυναμίας σύγκλισης. Αυτό στην συγκεκριμένη περίπτωση δεν ισχύει λόγω του τρόπου με τον οποίο διαχειριζόμαστε αριθμητικά το πρόβλημα. Όσο μικρότερα είναι τα βήματα τόσο μικρότερος είναι και ο απαιτούμενος χρόνος επίλυσης, ιδίως σε περιπτώσεις που έχουμε μοντέλα με πολλούς βαθμούς ελευθερίας.

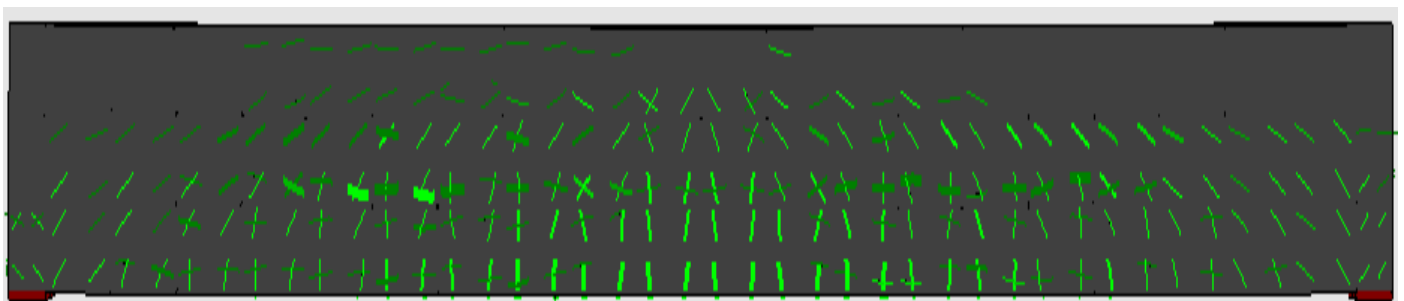
## 5. Ο αριθμός των εσωτερικών επαναλήψεων Newton-Raphson ανά βήμα φόρτισης:

Στο σχήμα 7.75 απεικονίζεται ο πίνακας με τον αριθμό των εσωτερικών επαναλήψεων που απαιτήθηκαν ανά βήμα φόρτισης Newton-Raphson κατά τη διαδικασία επίλυσης της συγκεκριμένης δοκού χωρίς διατμητικό σπλισμό στην περίπτωση φυσικών στοιχείων δυνάμεων με  $\beta=0,05$ , 10 ίνες και 50 βήματα φόρτισης. Το 40<sup>ο</sup> βήμα είναι το τελευταίο βήμα παρά το γεγονός ότι έχουμε επιβάλει 50. Αυτό συμβαίνει διότι μετά το 40<sup>ο</sup> βήμα Newton-Raphson ο αλγόριθμος αποτυγχάνει ως προς τη σύγκλιση λόγω της εμφάνισης μηδενικών διαγώνιων όρων στο καθολικό μητρώο στιβαρότητας, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να αντιστραφεί.

Όπως παρατηρούμε, στα περισσότερα από τα 40 αυτά βήματα εξωτερικής φόρτισης απαιτούνται λιγότερες από 7÷8 εσωτερικές επαναλήψεις Newton-Raphson (έχοντας ορίσει ως μέγιστο αριθμό τις 50 εσωτερικές επαναλήψεις), γεγονός που επιβεβαιώνει την αριθμητική στιβαρότητα του προτεινόμενου κώδικα. Να τονίσουμε, ωστόσο, ότι σε ορισμένα βήματα φόρτισης (μόλις 5 σε αριθμό), όπως στο 29<sup>ο</sup> βήμα φόρτισης, απαιτείται ένας σημαντικός αριθμός εσωτερικών επαναλήψεων Newton-Raphson λόγω της εμφάνισης στο βήμα αυτό μεγάλου αριθμού ρωγμών. Στο σχήμα 7.76 απεικονίζεται η ρηγμάτωση της δοκού στα βήματα φόρτισης 28<sup>ο</sup> και 29<sup>ο</sup> και μπορούμε να διακρίνουμε τις επιπλέον ρωγμές που συνέβησαν στο μόλις **ένα** βήμα φόρτισης που μεσολάβησε, γεγονός που εξηγεί τον σχετικά αυξημένο (από 3 στο 28<sup>ο</sup> βήμα σε 22 στο 29<sup>ο</sup> βήμα) σε σχέση με τα υπόλοιπα βήματα αριθμό εσωτερικών επαναλήψεων.



28<sup>ο</sup> βήμα φόρτισης Newton-Raphson



29<sup>ο</sup> βήμα φόρτισης Newton-Raphson

Σχήμα 7.76 Σύγκριση της μορφής της ρηγμάτωσης στο 28<sup>ο</sup> και 29<sup>ο</sup> βήμα φόρτισης



## 7.2.2 Προσομοίωση αμφιέρειστης δοκού από οπλισμένο σκυρόδεμα με συνδετήρες

Θα προσομοιώσουμε μία αμφιέρειστη δοκό από οπλισμένο σκυρόδεμα, η οποία έχει:

- ❖ ως διαμήκη κάτω οπλισμό  $4\Phi 28,9$  (δηλαδή 4 διαμήκεις ράβδους με διάμετρο  $\Phi = 28,9\text{mm} = 0,0289\text{m}$ )
- ❖ ως διαμήκη άνω οπλισμό  $2\Phi 12,7$  (δηλαδή 2 διαμήκεις ράβδους με διάμετρο  $\Phi = 12,7\text{mm} = 0,0127\text{m}$ )
- ❖ ως διατμητικό οπλισμό (συνδετήρες)  $\Phi 6,4/210$  (δηλαδή συνδετήρες με διάμετρο  $\Phi = 6,4\text{mm} = 0,0064\text{m}$  ανά  $210\text{mm} = 0,210\text{m}$ )

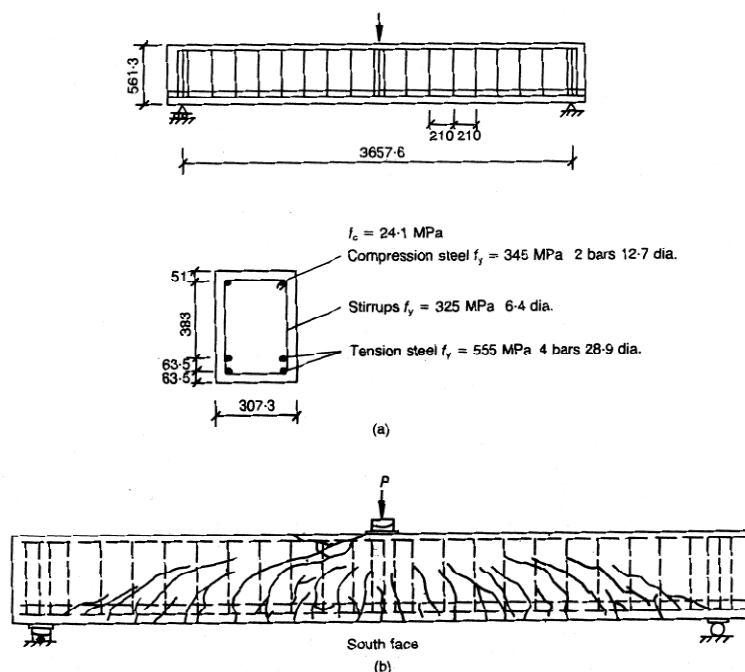
και της οποίας το μέσον του ανοίγματος καταπονείται από κατακόρυφο συγκεντρωμένο φορτίο. Το φορτίο καταρρεύσεως έχει υπολογιστεί πειραματικά ίσο με  $P_{cr} = 467 \text{ kN}$ , ενώ η αντίστοιχη πειραματική μετατόπιση του μέσου του ανοίγματος ισούται με  $13,8 \text{ mm}$ .

Ειδικότερα, η συγκεκριμένη δοκός έχει τα εξής γεωμετρικά χαρακτηριστικά:

- καθαρό άνοιγμα:  $L = 3.657,6 \text{ mm} = 3,6576 \text{ m}$
- διατομή: ορθογωνική με πλάτος  $b = 307,3 \text{ mm} = 0,3073 \text{ m}$  και ύψος  $h = 561 \text{ mm} = 0,561 \text{ m}$
- επικάλυψη σκυροδέματος κάτω διαμήκων οπλισμών:  $e = 63,5 \text{ mm} = 0,0635 \text{ m}$
- επικάλυψη σκυροδέματος άνω διαμήκων οπλισμών:  $e = 51 \text{ mm} = 0,051 \text{ m}$
- κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των διαμήκων ράβδων:  $d = 63,5 \text{ mm} = 0,0635 \text{ m}$
- προεξοχή της δοκού πέραν των στηρίξεων :  $d' = 100 \text{ mm} = 0,1 \text{ m}$

Για τη σωστή προσομοίωση του προβλήματος στη θέση των στηρίξεων (κύλιση, άρθρωση) τοποθετούμε πλάκα από χάλυβα S555 με:

- πλάτος: το πλάτος της δοκού  $b = 307,3 \text{ mm} = 0,3073 \text{ m}$
- μήκος:  $L_{\text{πλάκας}} = 100 \text{ mm} = 0,1 \text{ m}$
- πάχος:  $h_{\text{πλάκας}} = 25 \text{ mm} = 0,025 \text{ m}$



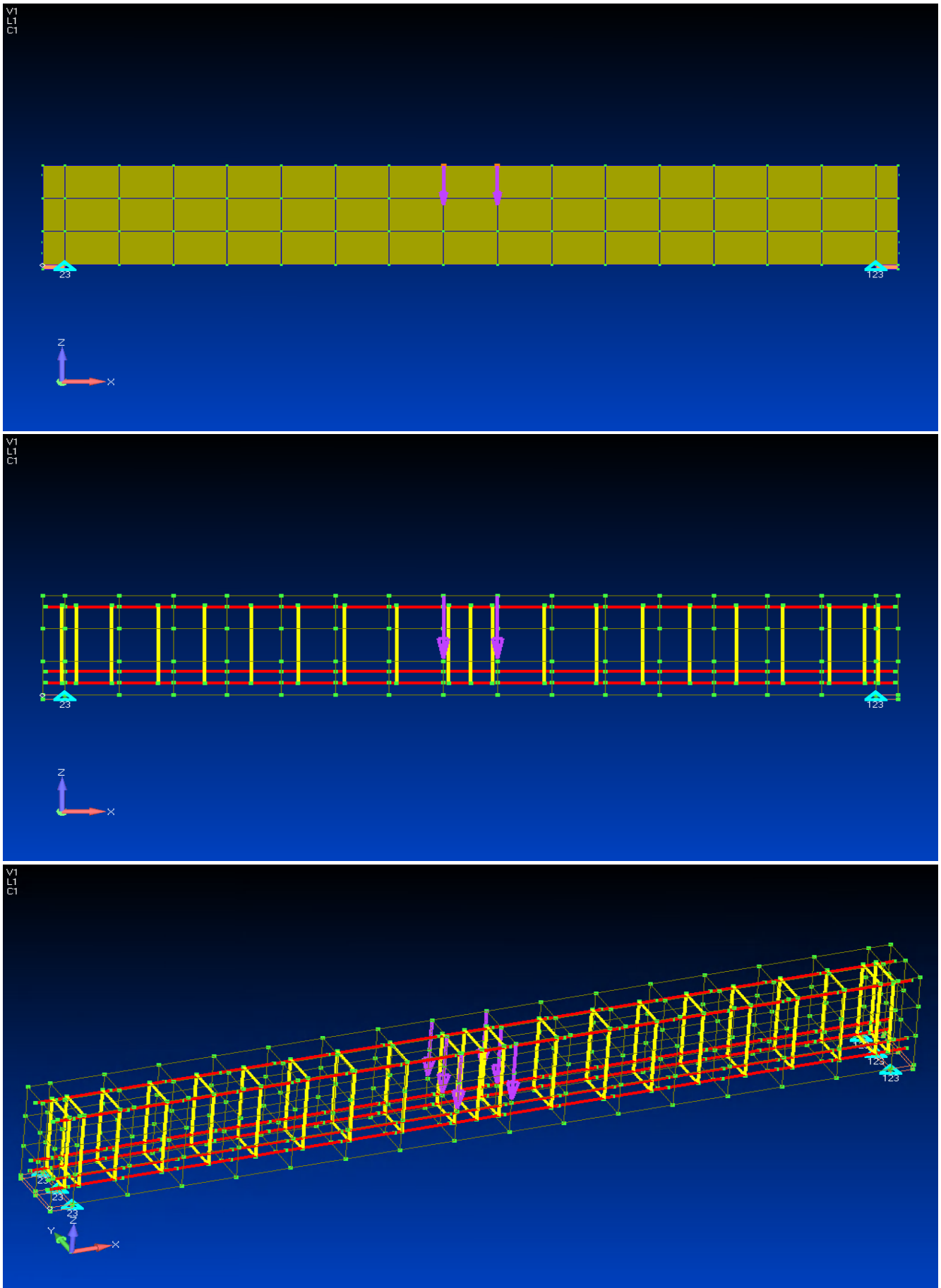
**Σχήμα 7.77** Δοκός από οπλισμένο σκυρόδεμα με συνδετήρες υποβαλλόμενη σε συγκεντρωμένο κατακόρυφο φορτίο

α) Γεωμετρικά χαρακτηριστικά b) Η πειραματική διάταξη των ρωγμών κατά την επιβολή του φορτίου θραύσεως

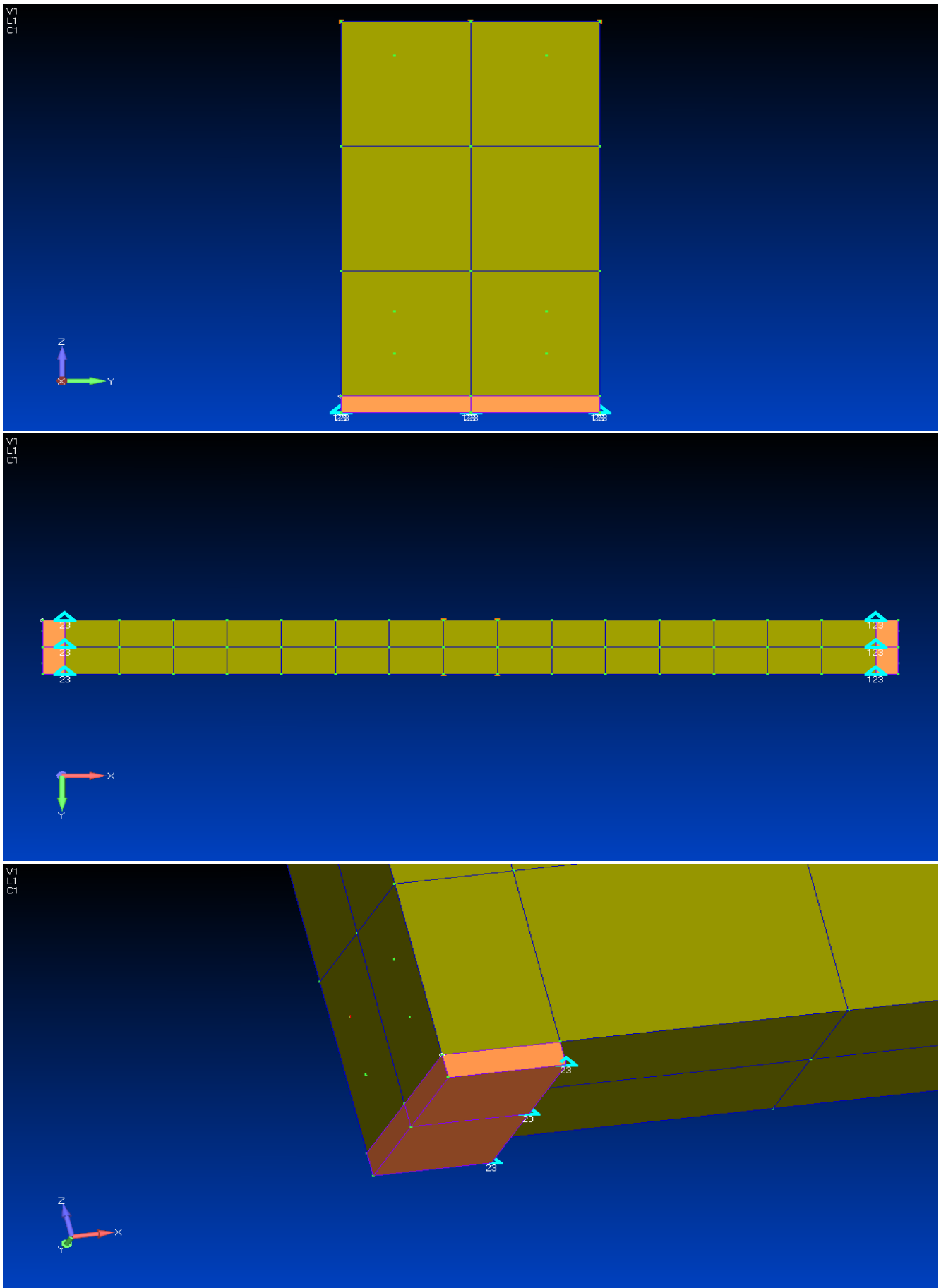
Σχετικά με τις ιδιότητες των υλικών έχουμε ότι:

- σκυρόδεμα
  - ❖ ποιότητα : C24.1
  - ❖ αντοχή:  $f_c = 24,1 \text{ MPa} = 24.100 \text{ kPa}$
  - ❖ μέτρο ελαστικότητας:  $E = 28 \text{ GPa}$
  - ❖ λόγος του Poisson:  $\nu = 0,17$
- χάλυβας ράβδων κάτω διαμήκους οπλισμού
  - ❖ ποιότητα : S555
  - ❖ τάση διαρροής:  $f_y = 555 \text{ MPa} = 555.000 \text{ kPa}$
  - ❖ μέτρο ελαστικότητας:  $E = 200 \text{ GPa}$
  - ❖ λόγος του Poisson:  $\nu = 0,3$
- χάλυβας ράβδων άνω διαμήκους οπλισμού
  - ❖ ποιότητα : S345
  - ❖ τάση διαρροής:  $f_y = 345 \text{ MPa} = 345.000 \text{ kPa}$
  - ❖ μέτρο ελαστικότητας:  $E = 190 \text{ GPa}$
  - ❖ λόγος του Poisson:  $\nu = 0,3$
- χάλυβας ράβδων διατμητικού οπλισμού
  - ❖ ποιότητα : S325
  - ❖ τάση διαρροής:  $f_y = 325 \text{ MPa} = 325.000 \text{ kPa}$
  - ❖ μέτρο ελαστικότητας:  $E = 180 \text{ GPa}$
  - ❖ λόγος του Poisson:  $\nu = 0,3$
- χάλυβας πλάκας
  - ❖ ποιότητα : S555
  - ❖ τάση διαρροής:  $f_y = 555 \text{ MPa} = 555.000 \text{ kPa}$
  - ❖ μέτρο ελαστικότητας:  $E = 200 \text{ GPa}$
  - ❖ λόγος του Poisson:  $\nu = 0,3$

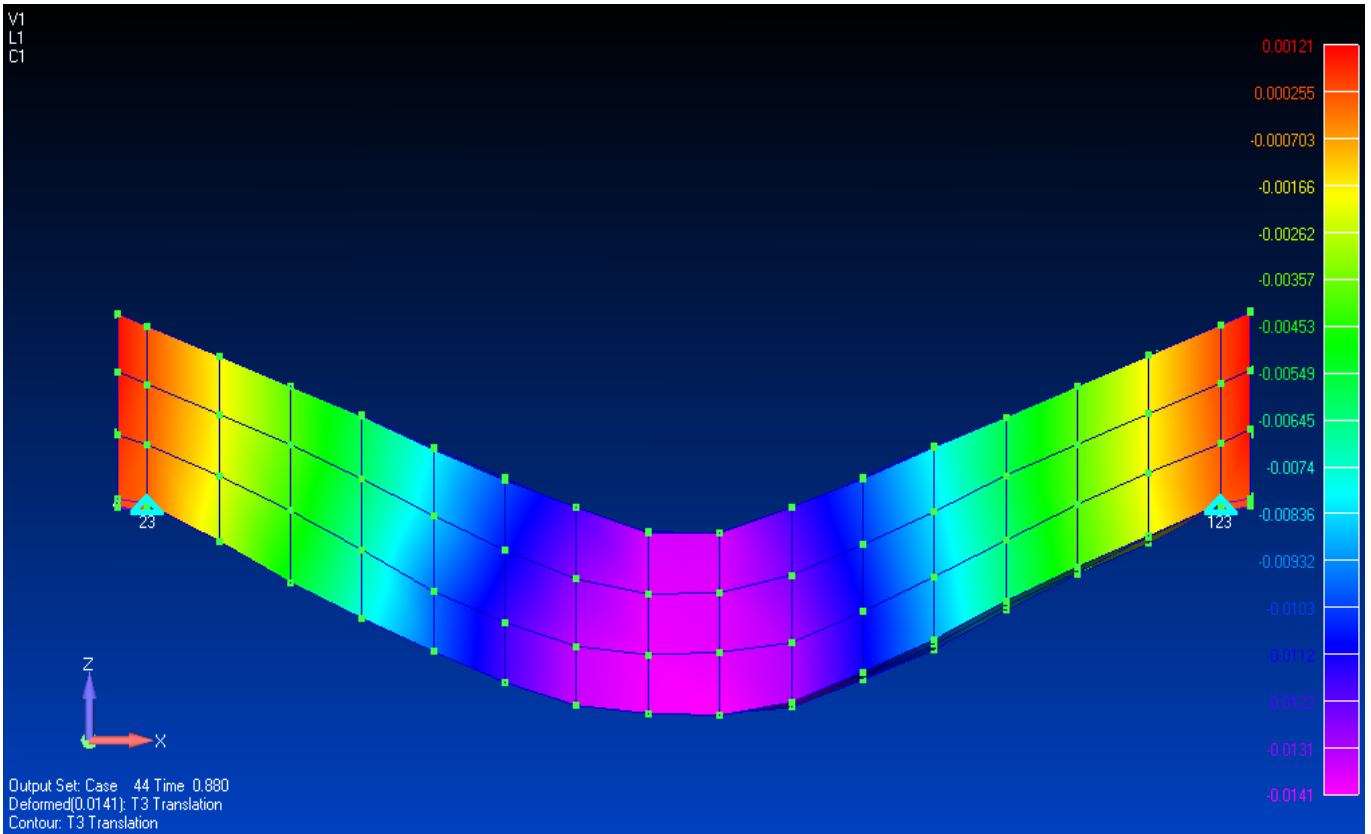
Θα εργαστούμε με μονάδες μέτρησης m και kN.



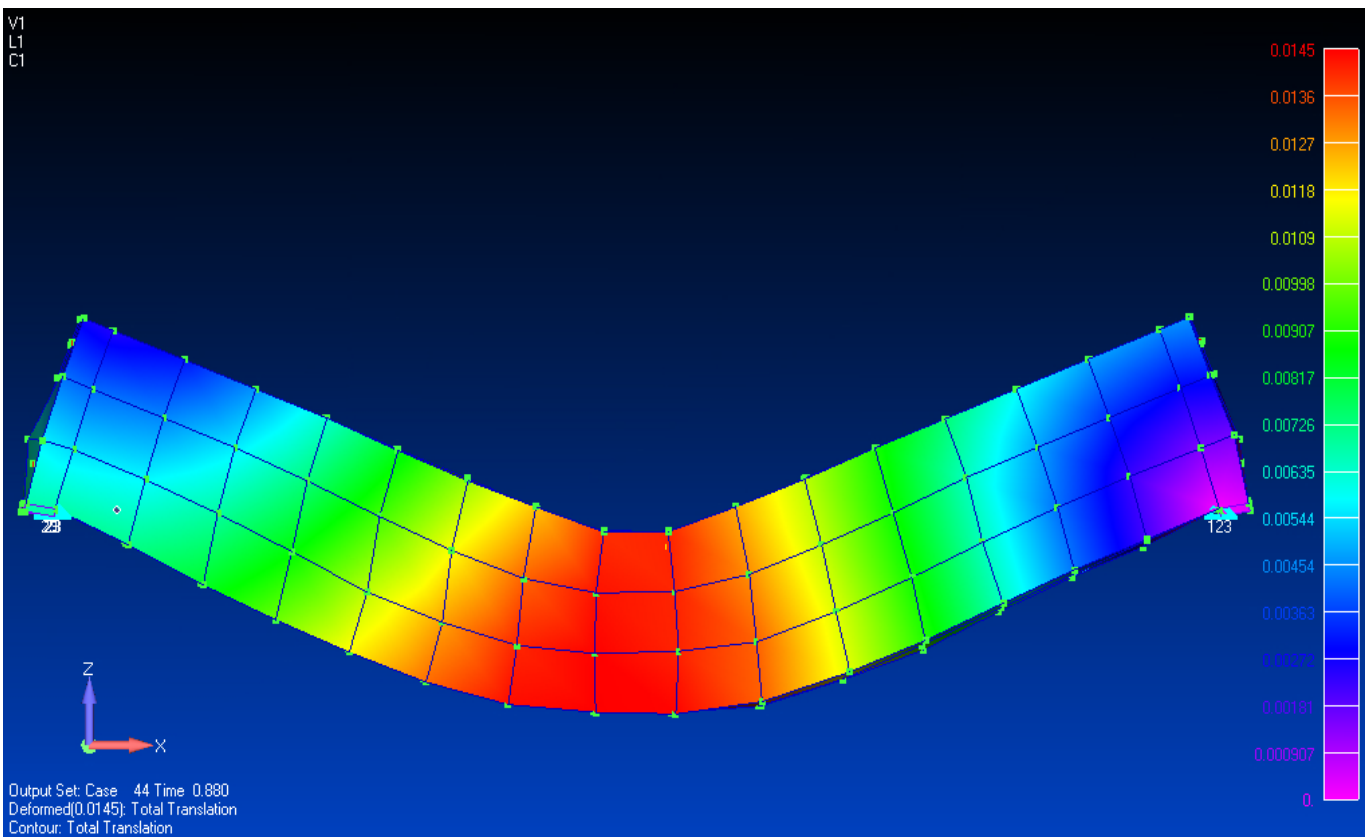
**Σχήμα 7.78** Το δίκτυο των πεπερασμένων στοιχείων αμφιέριστης δοκού από οπλισμένο σκυρόδεμα υποβαλλόμενη σε συγκεντρωμένο φορτίο στο μέσον του ανοίγματός της



Σχήμα 7.79 Η πλάκα από χάλυβα S325

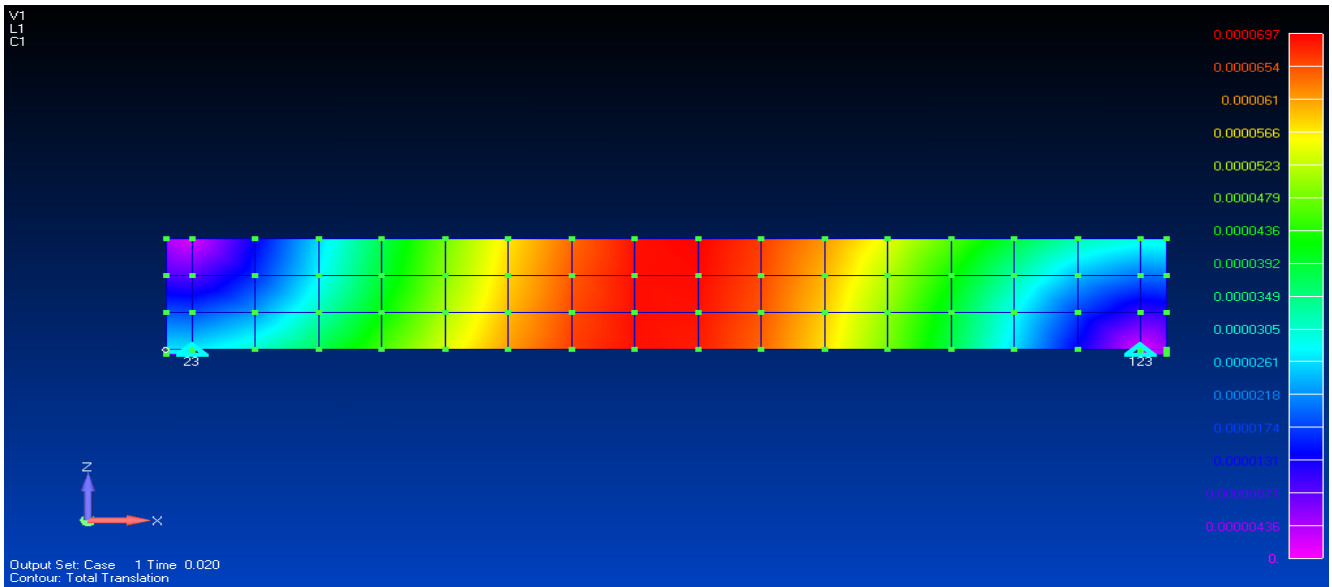


**Σχήμα 7.80** Απεικόνιση της παραμορφωμένης κατάστασης με contour της κατακόρυφης μετατόπισης (βήμα φόρτισης: 44/50 – P=528kN,  $\beta=0.025$ , fibers=10, NBCFB)

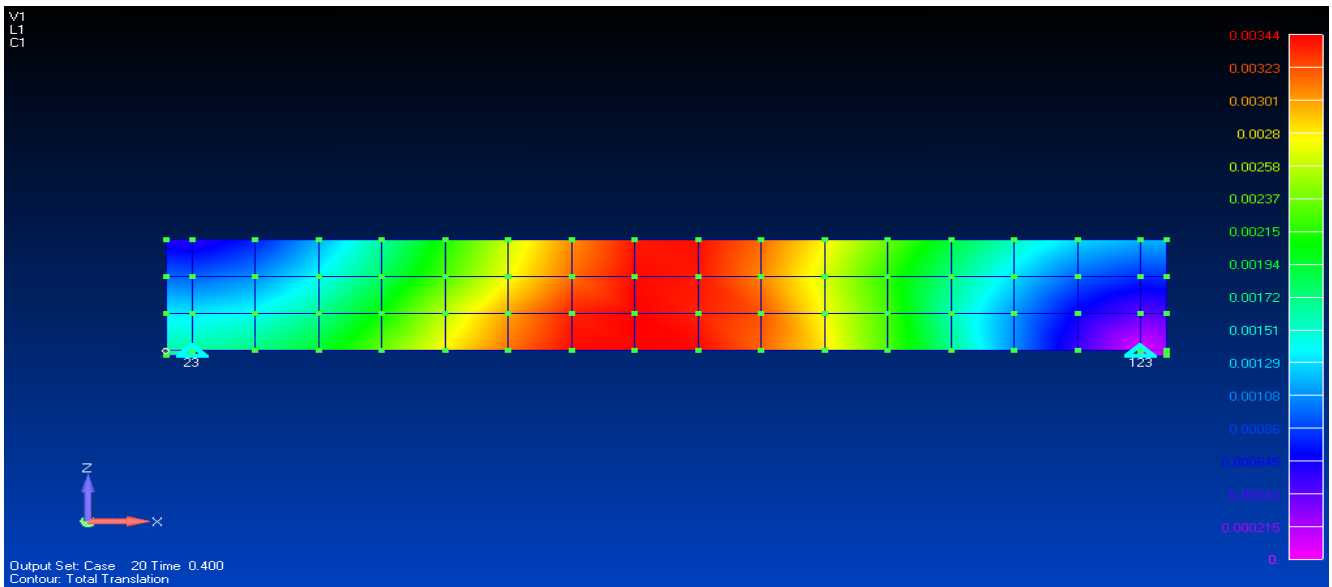


**Σχήμα 7.81** Απεικόνιση της παραμορφωμένης κατάστασης με contour της ολικής μετατόπισης (βήμα φόρτισης: 44/50 – P=528kN,  $\beta=0.025$ , fibers=10, NBCFB)

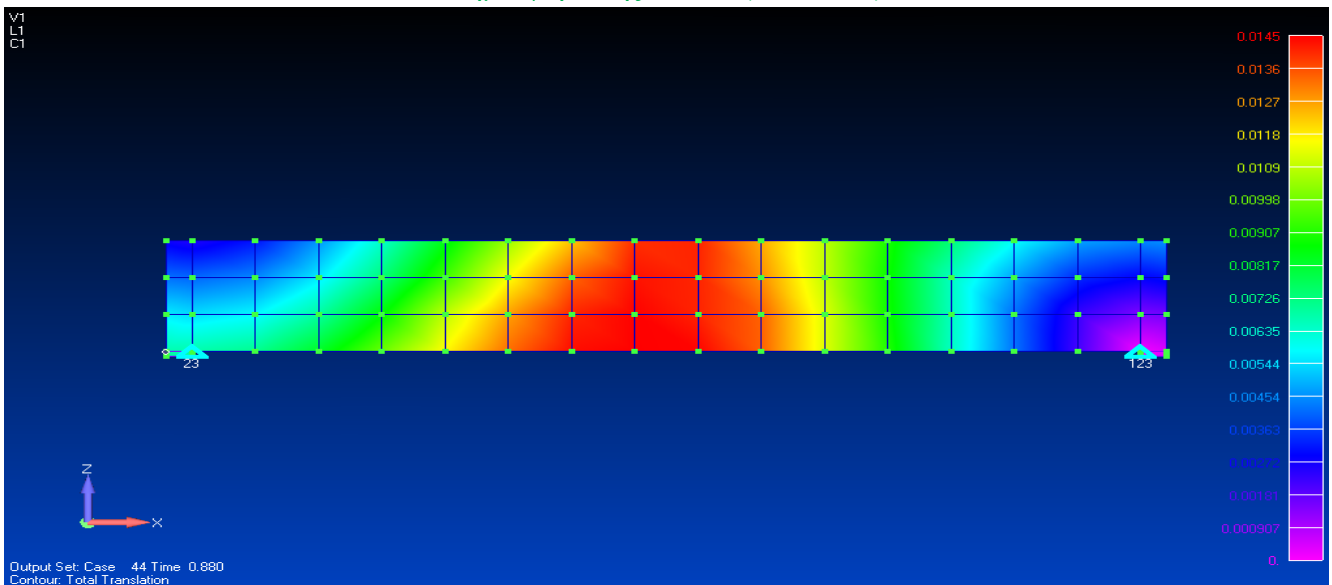




Βήμα φόρτισης: 1/50 (P=12kN)

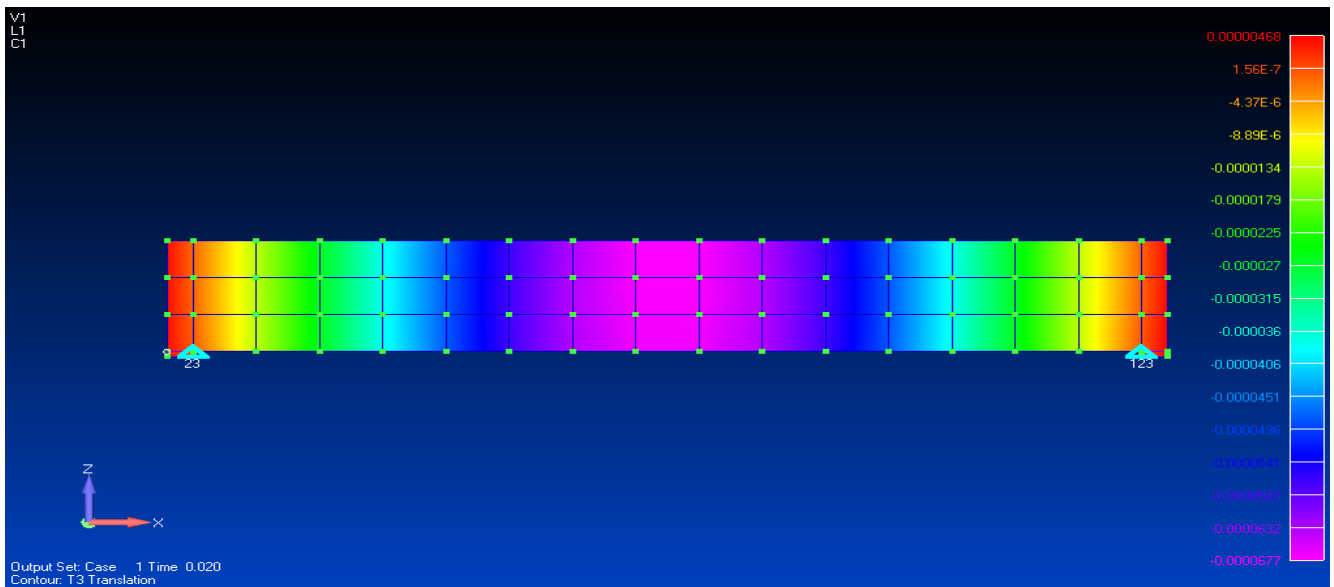


Βήμα φόρτισης: 20/50 (P=240kN)

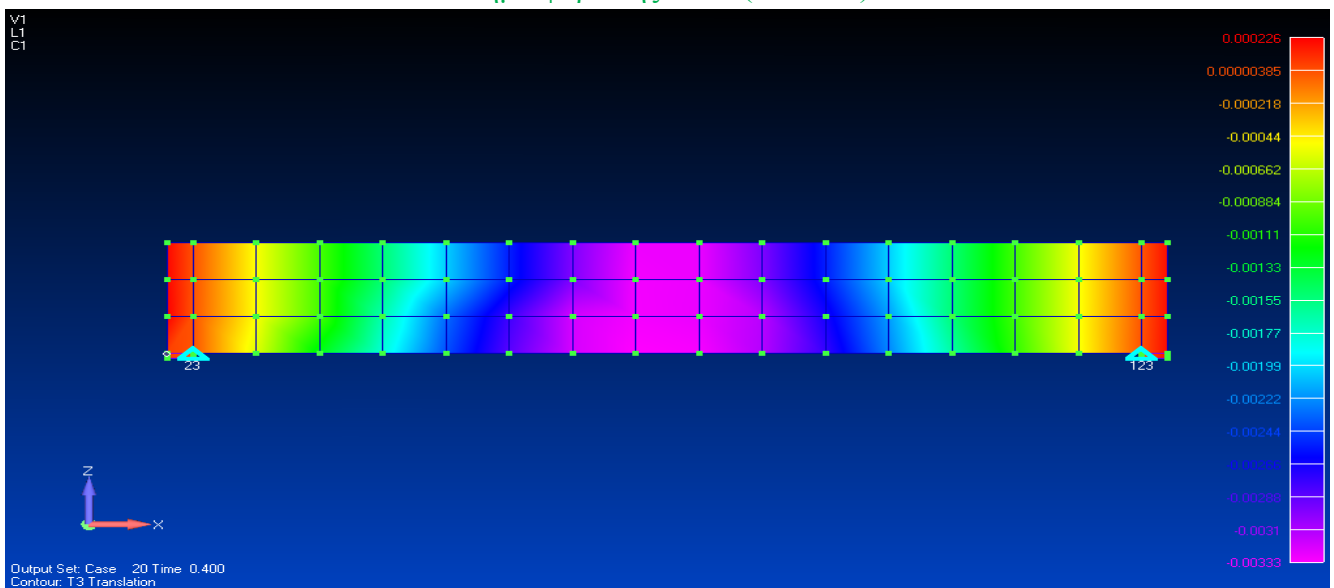


Βήμα φόρτισης: 44/50 (P=528kN)

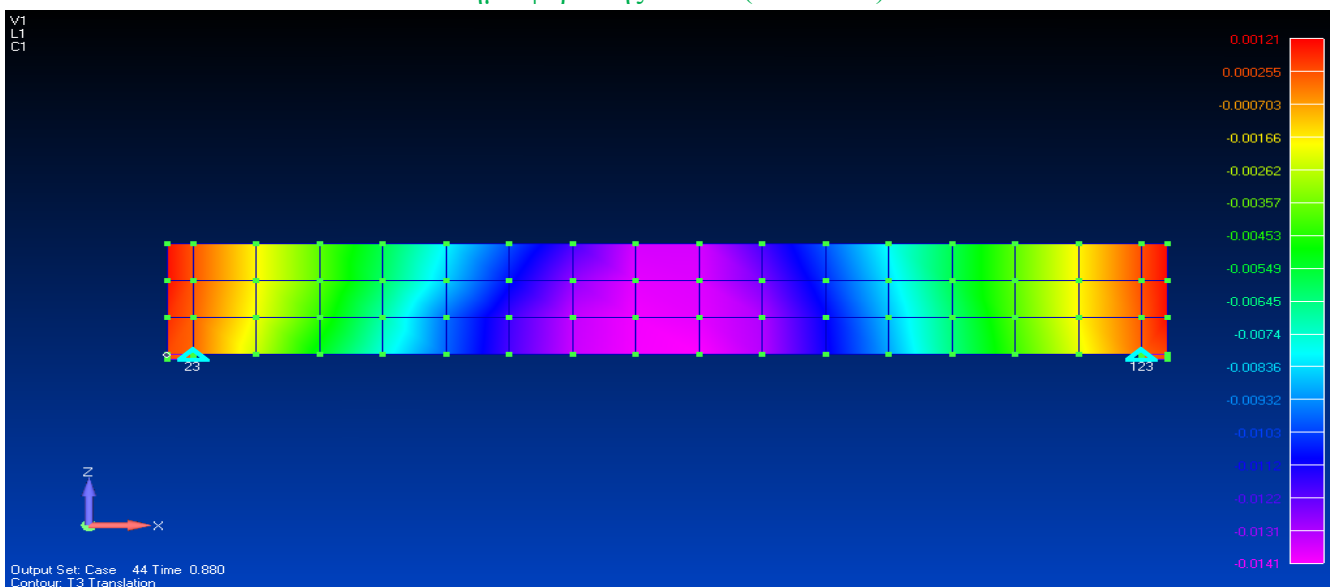
Σχήμα 7.82 Απεικόνιση της ολικής μετατόπισης ( $\beta=0.025$ , fibers=10, NBCFB)



Βήμα φόρτισης: 1/50 (P=12kN)

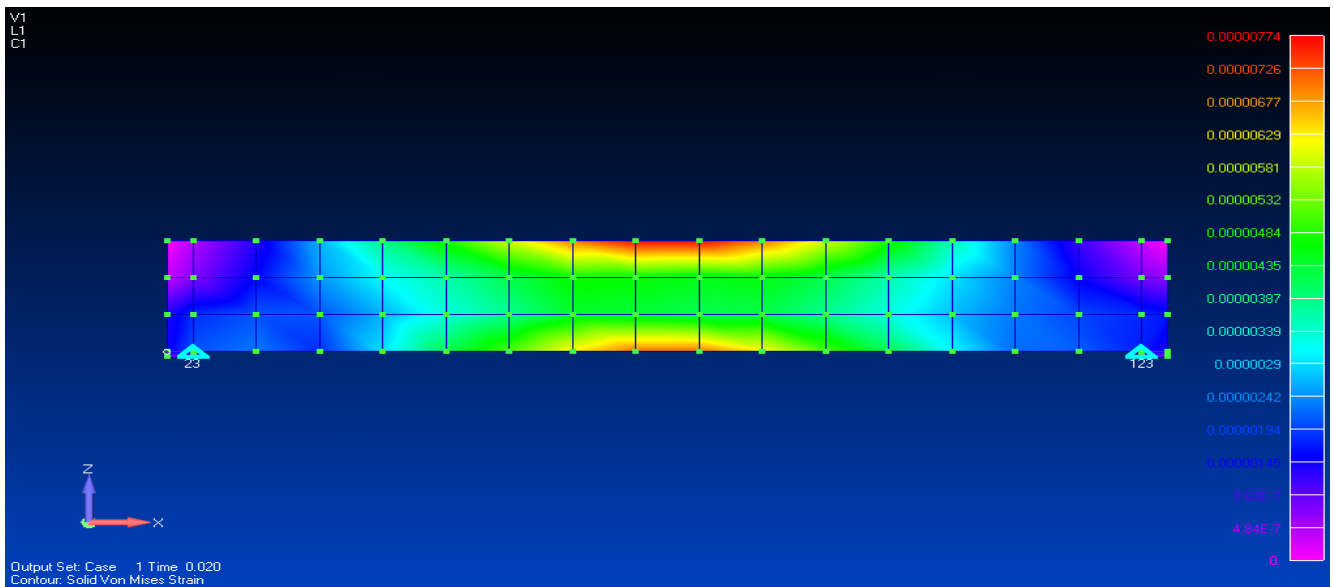


Βήμα φόρτισης: 20/50 (P=240kN)

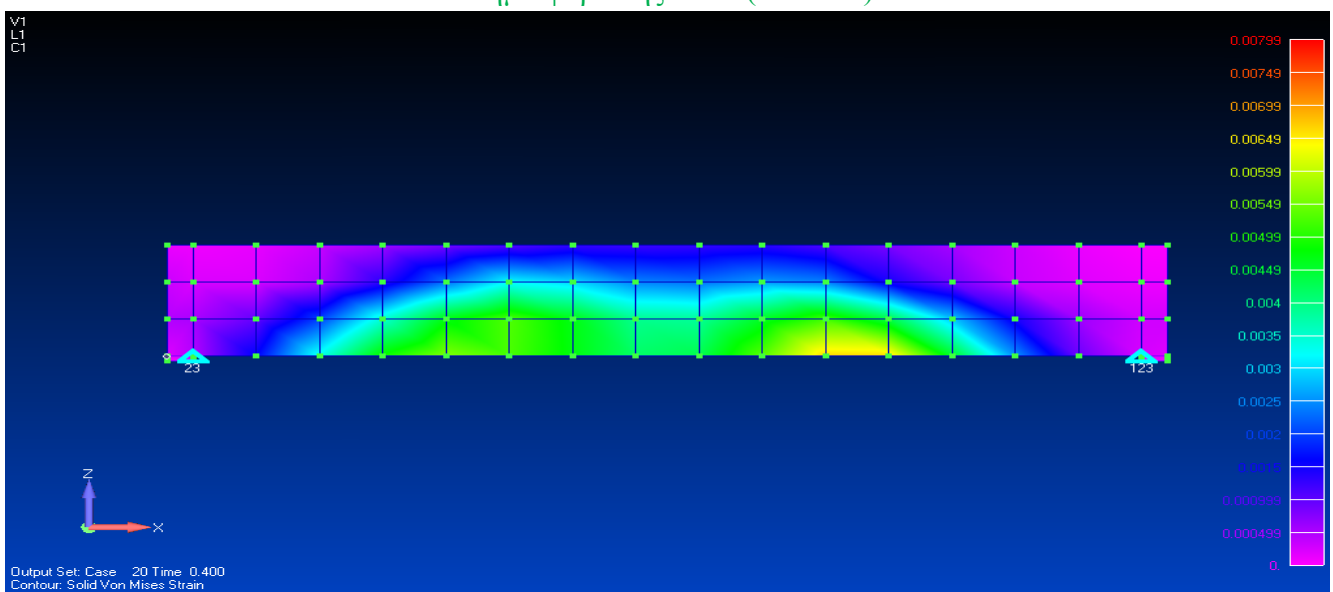


Βήμα φόρτισης: 44/50 (P=528kN)

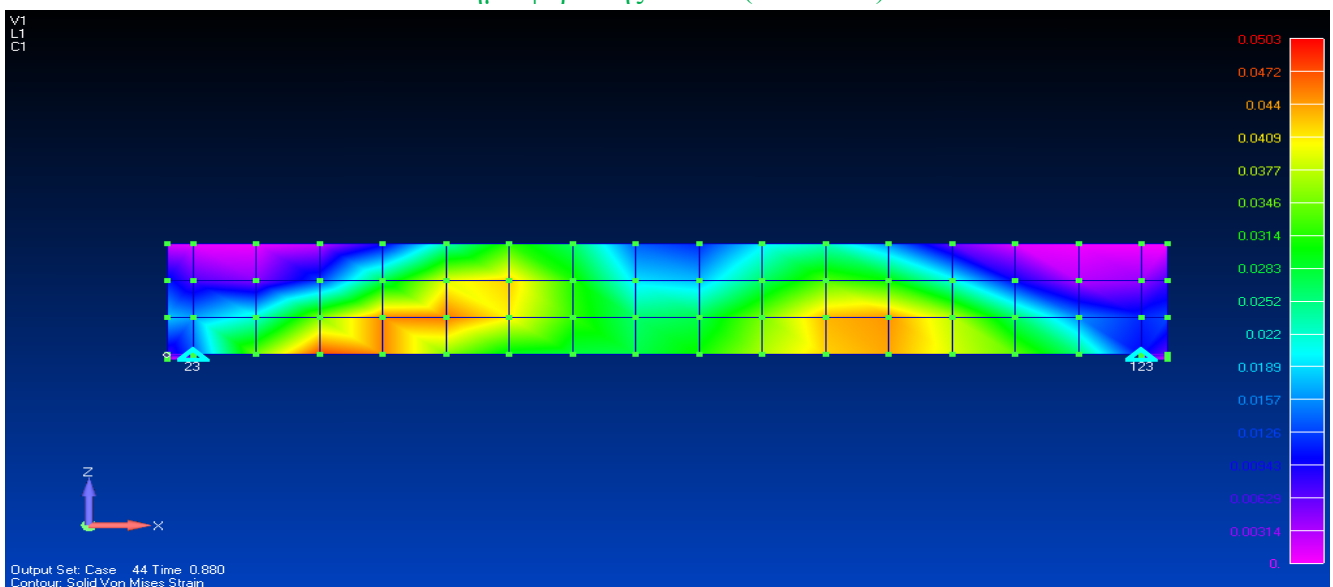
Σχήμα 7.83 Απεικόνιση της κατακόρυφης μετατόπισης ( $\beta=0.025$ , fibers=10, NBCFB)



Βήμα φόρτισης: 1/50 (P=12kN)

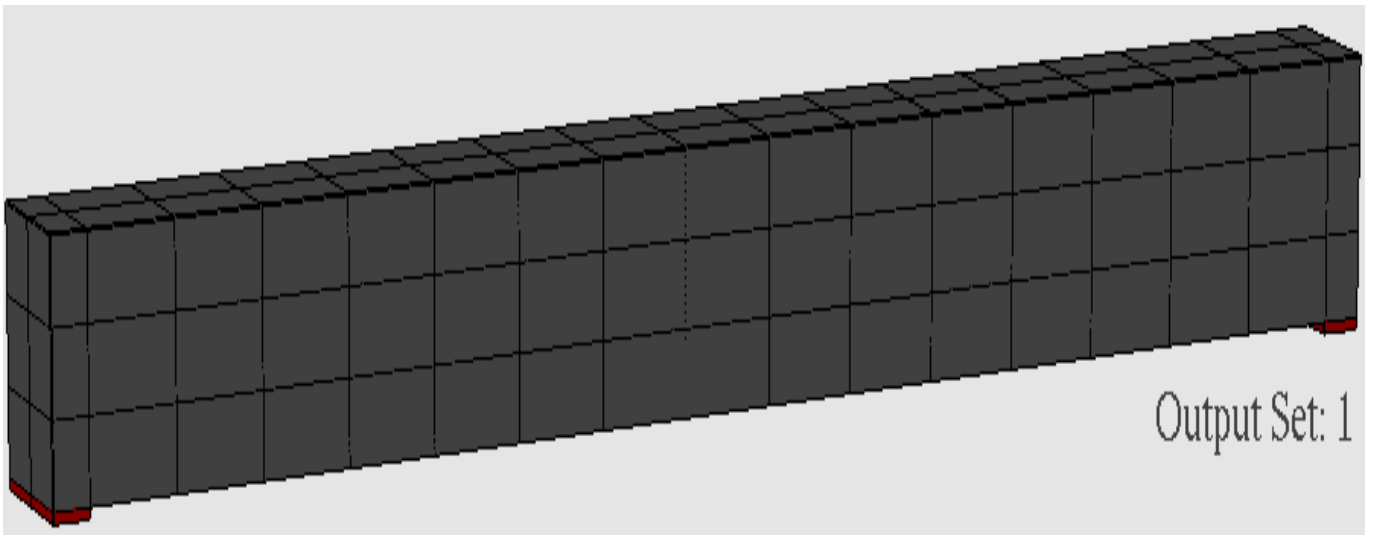


Βήμα φόρτισης: 20/50 (P=240kN)

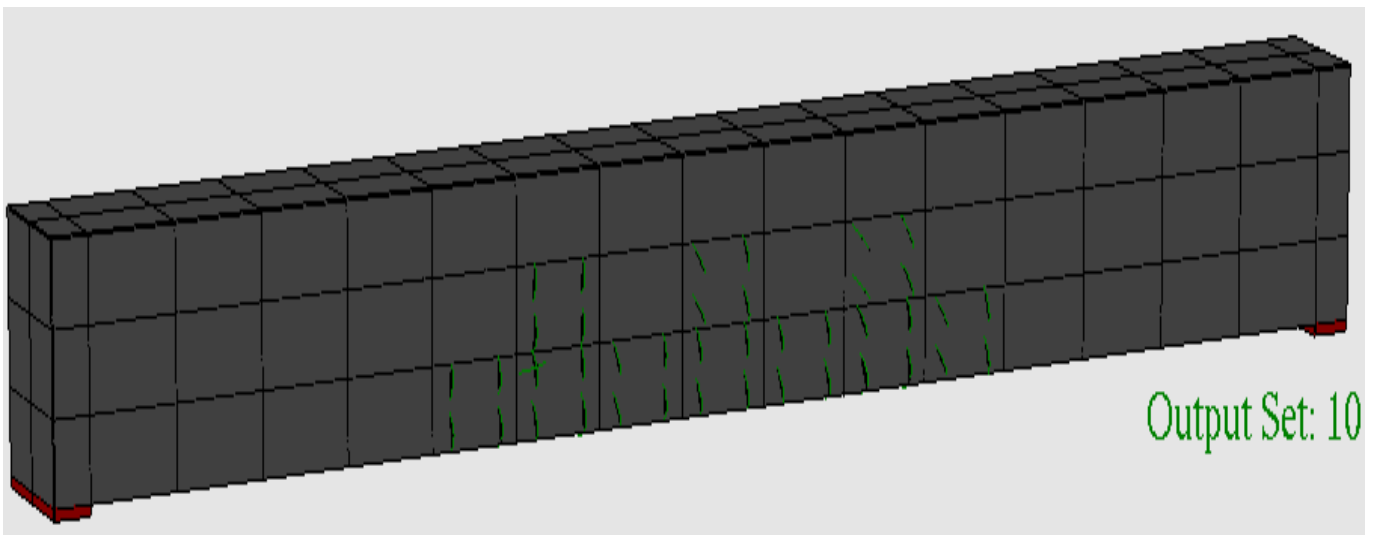


Βήμα φόρτισης: 44/50 (P=528kN)

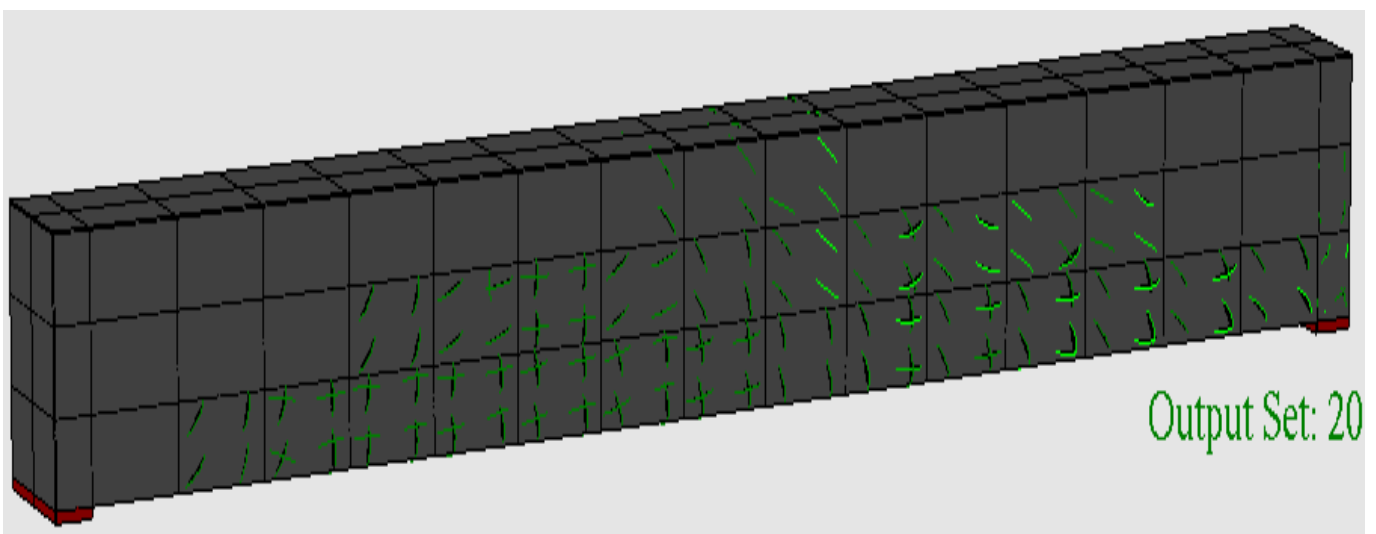
Σχήμα 7.84 Απεικόνιση των Von Mises παραμορφώσεων ( $\beta=0.025$ , fibers=10, NBCFB)



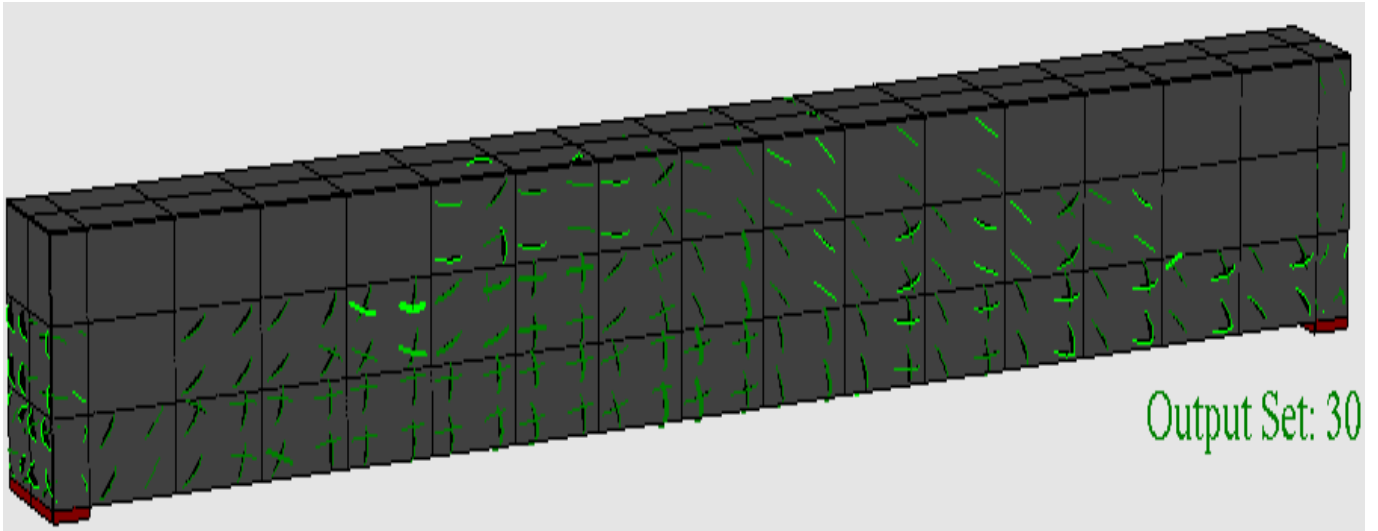
Επιβολή φορτίου  $P=12\text{kN}$



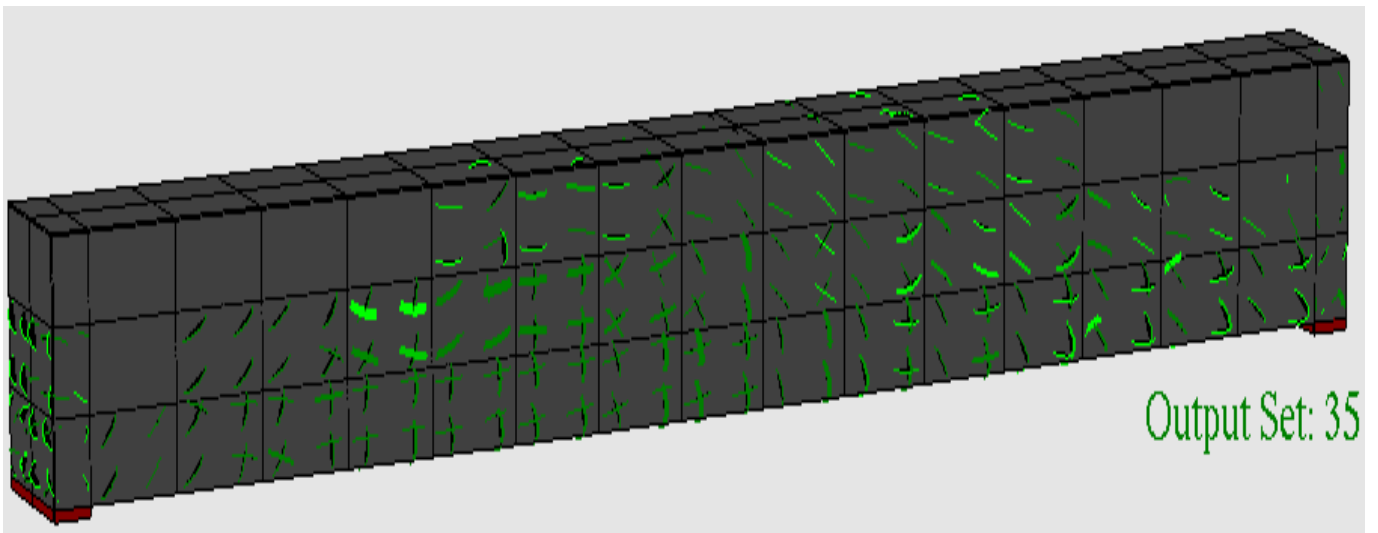
Επιβολή φορτίου  $P=120\text{kN}$



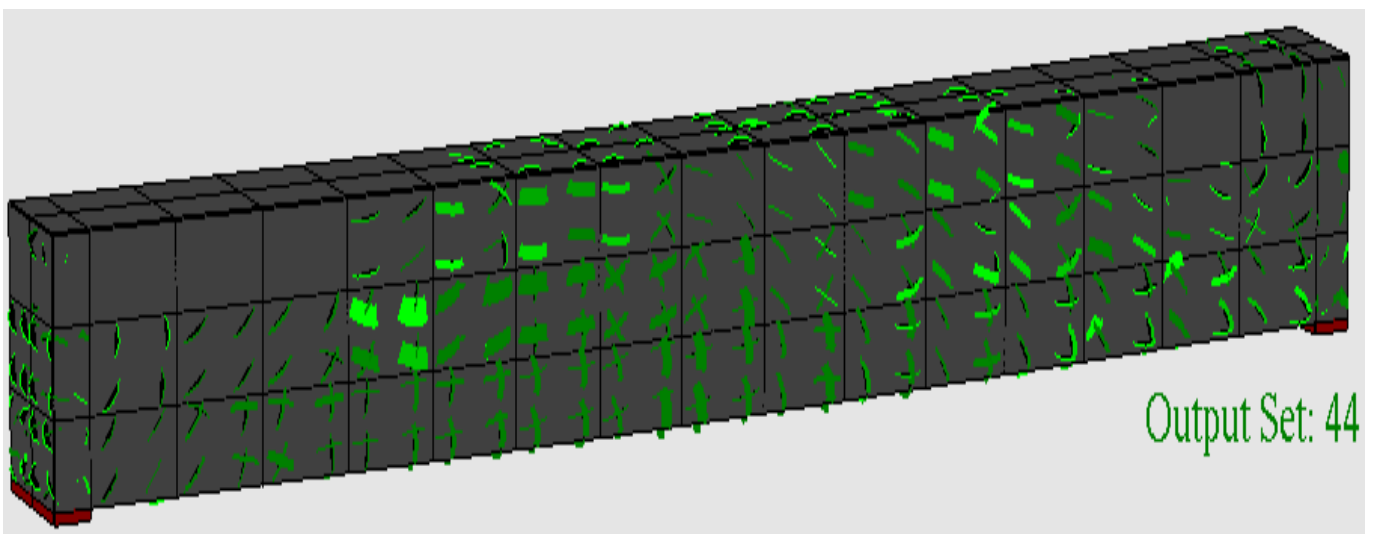
Επιβολή φορτίου  $P=240\text{kN}$



Επιβολή φορτίου  $P=360\text{kN}$

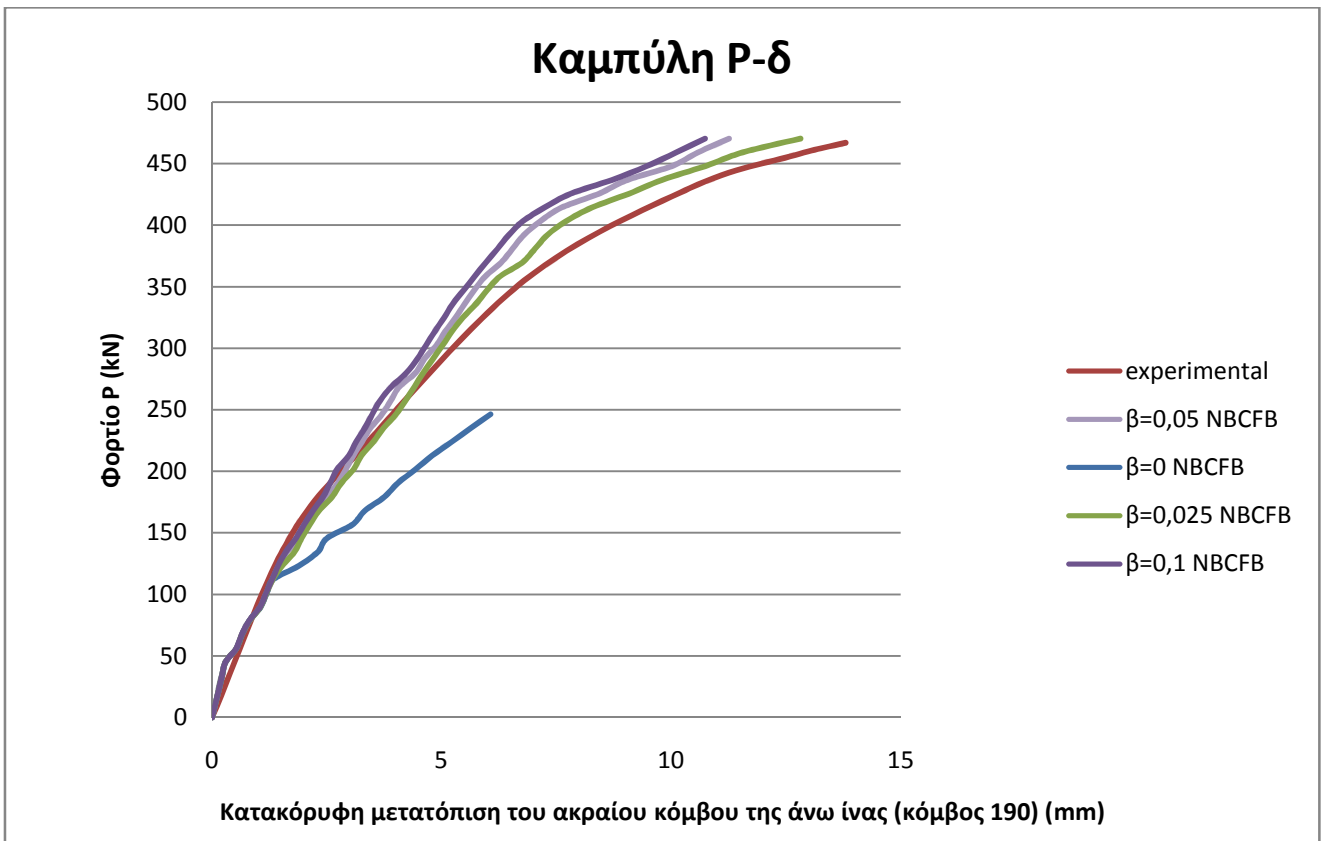


Επιβολή φορτίου  $P=420\text{kN}$

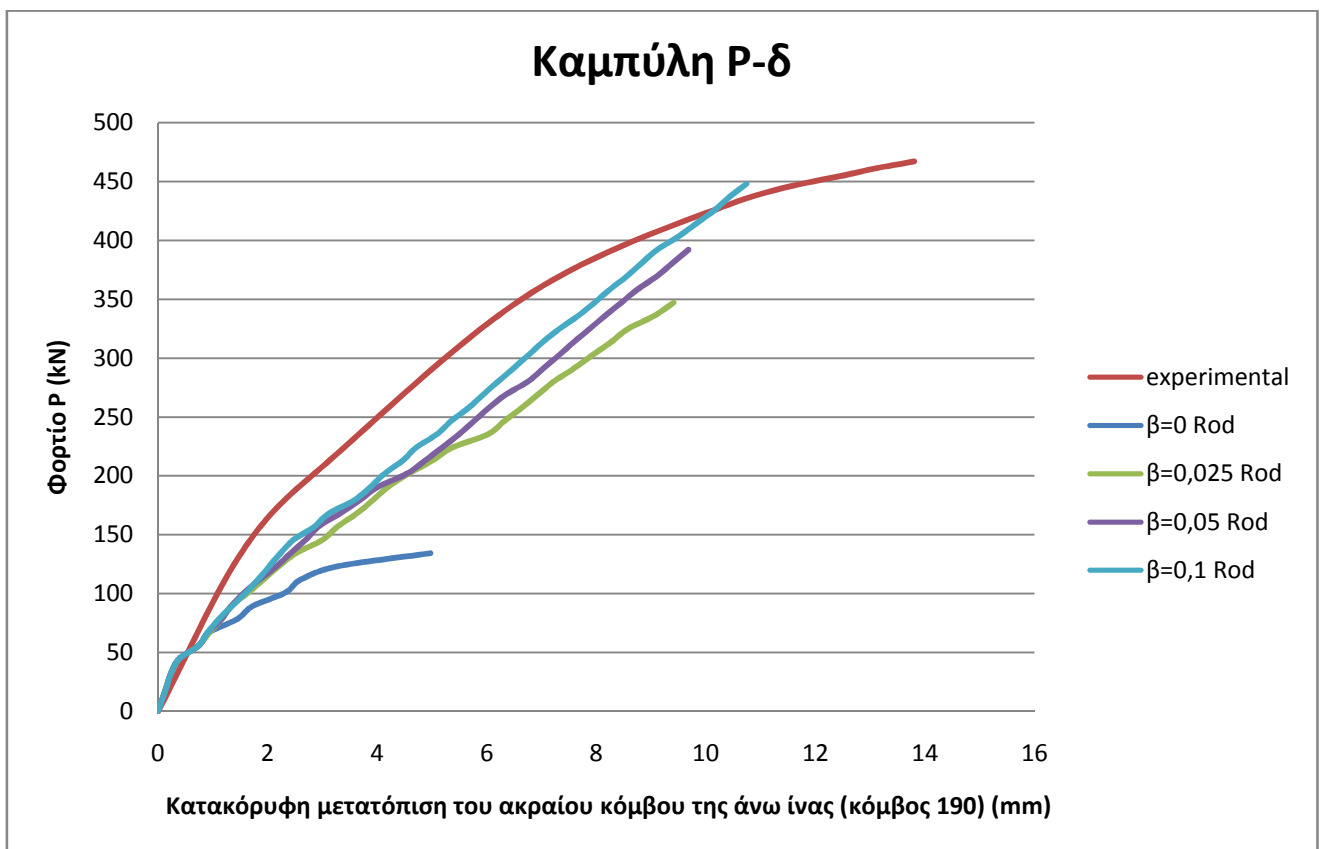


Επιβολή φορτίου  $P=528\text{kN}$

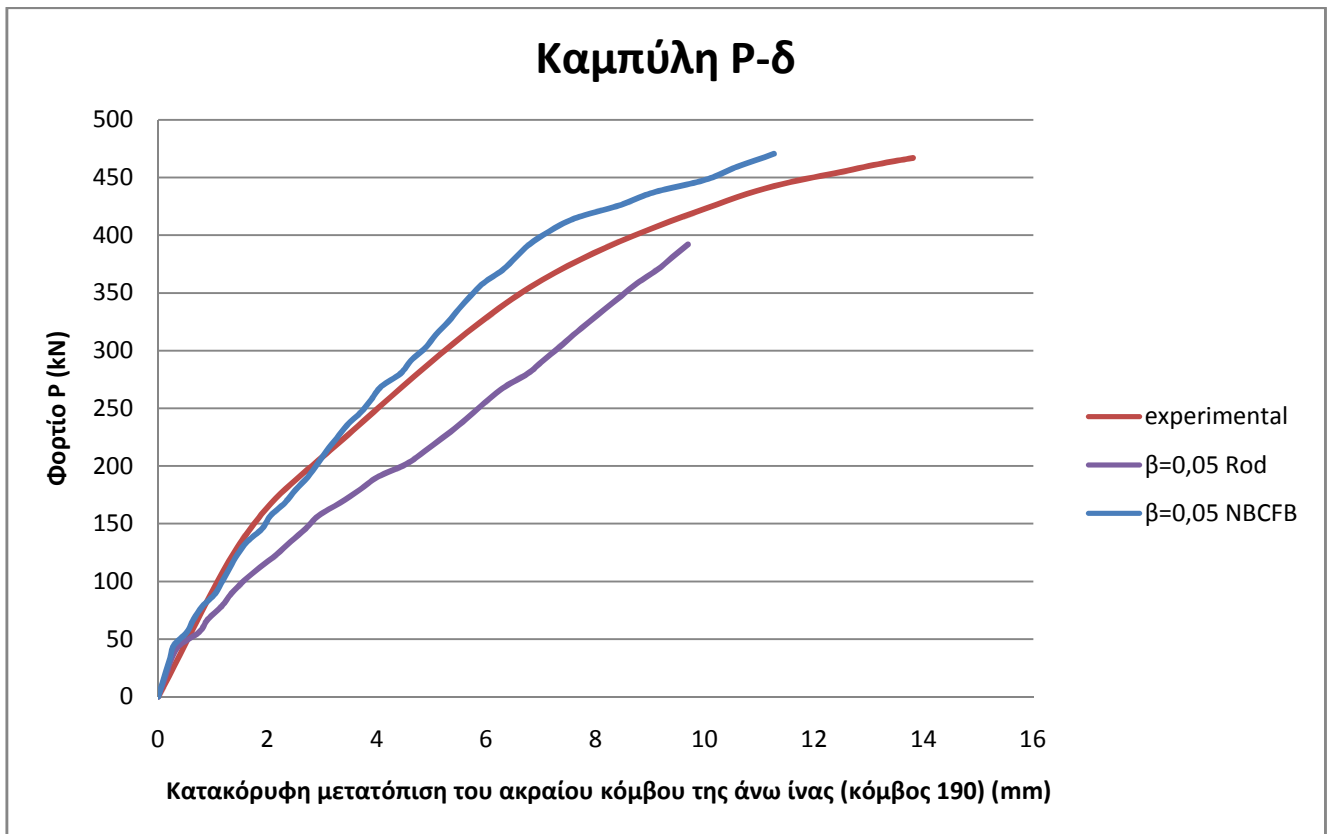
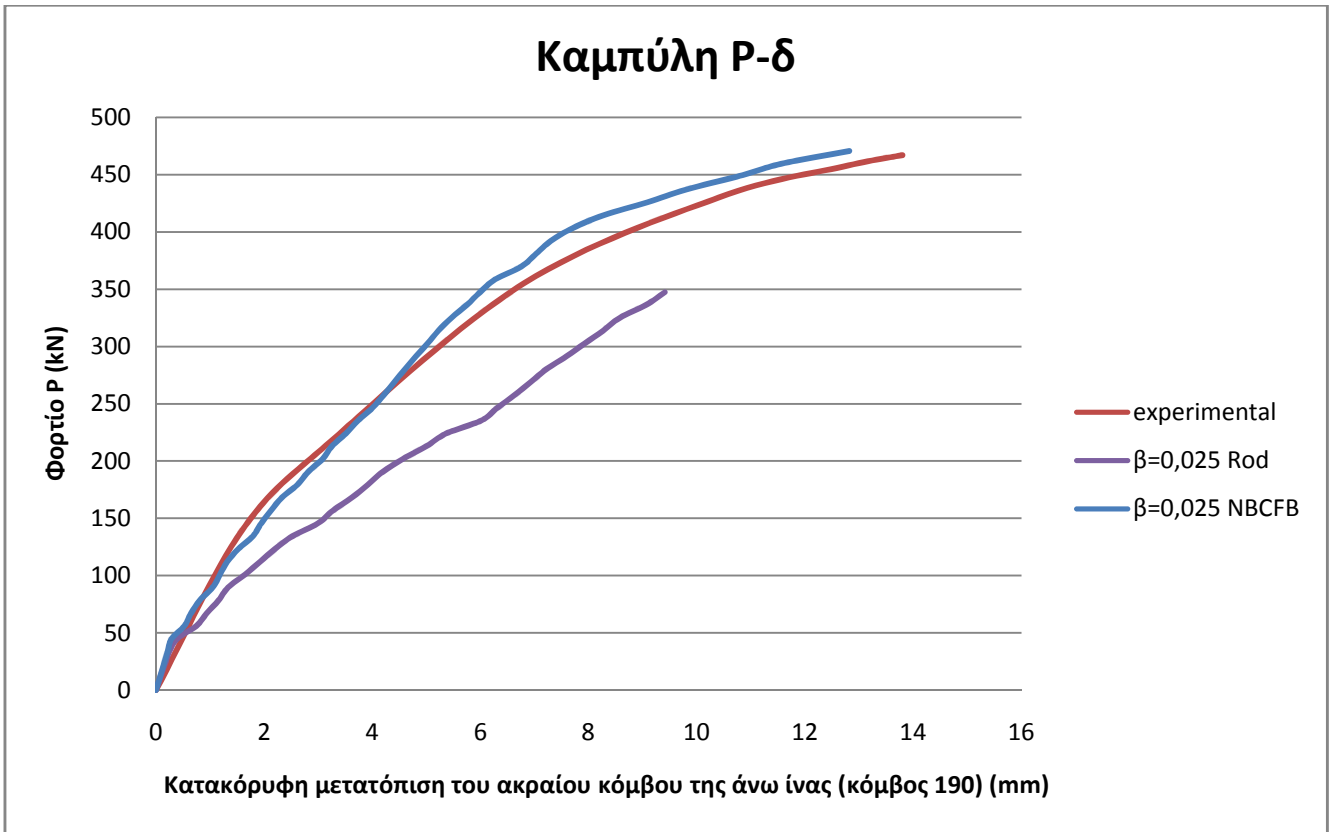
Σχήμα 7.85 Απεικόνιση των ρωγμών ( $\beta=0,025$ , fibers=10, NBCFB)



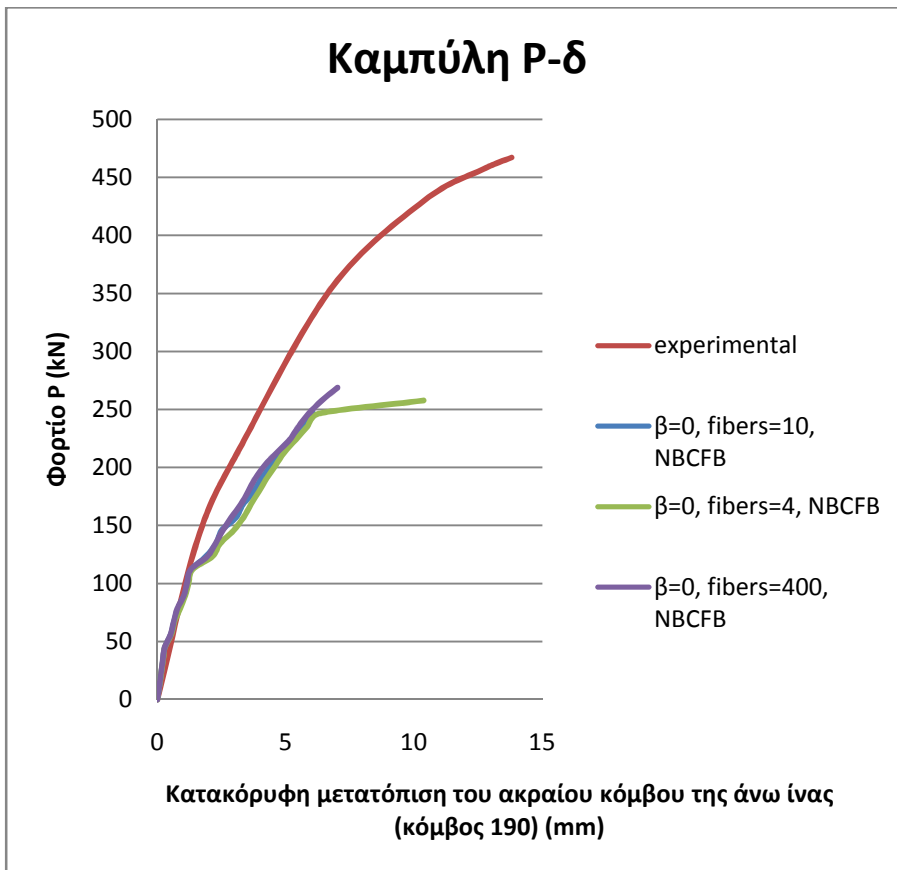
Σχήμα 7.86 Γραφική παράσταση φορτίου – κατακόρυφης μετατόπισης  
(θεώρηση στοιχείου οπλισμού ως φυσικό στοιχείο δυνάμεων, NLSteps=50, fibers=10)



Σχήμα 7.87 Γραφική παράσταση φορτίου – κατακόρυφης μετατόπισης  
(θεώρηση στοιχείου οπλισμού ως στοιχείο δικτύωματος, NLSteps=50)

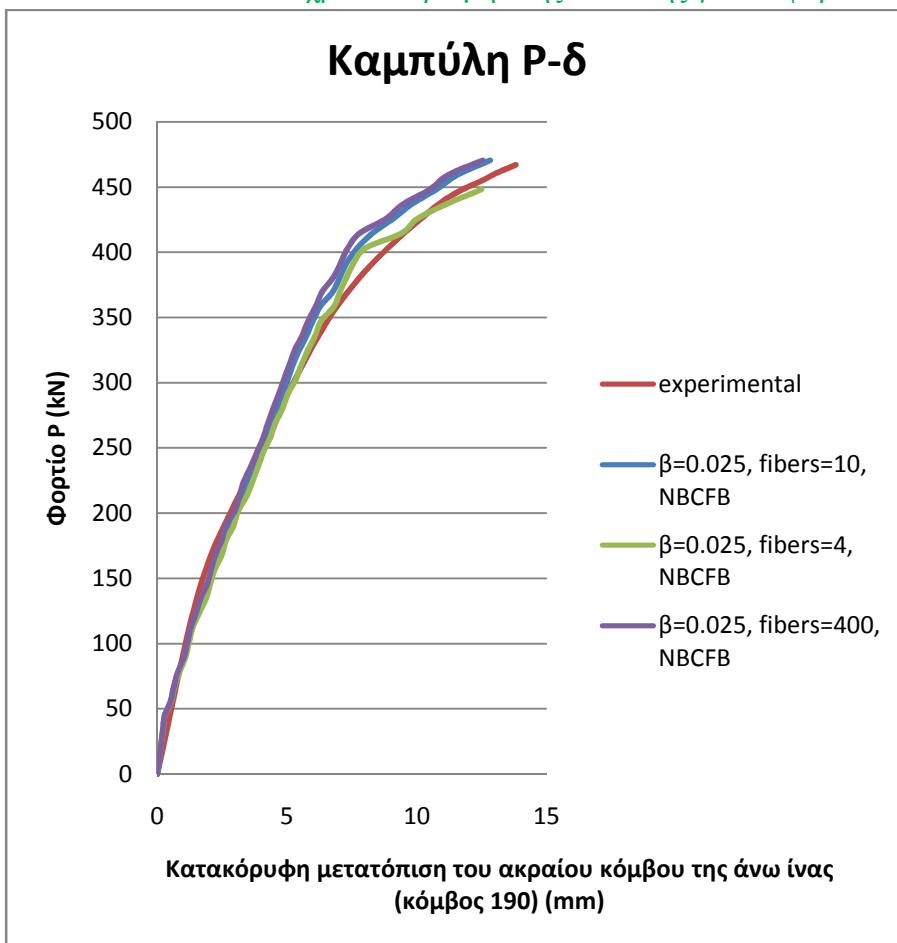


**Σχήμα 7.88** Σύγκριση των γραφικών παραστάσεων φορτίου – κατακόρυφης μετατόπισης των θεωρήσεων του στοιχείου οπλισμού ως στοιχείο δικτυώματος και ως φυσικό στοιχείο δυνάμεων (NLSteps=50)



β=0 (NBCFB element)	
πλήθος ινών	συνολικός χρόνος αριθμητικής επίλυσης (sec)
4	29,28
10	45,95
400	72,6

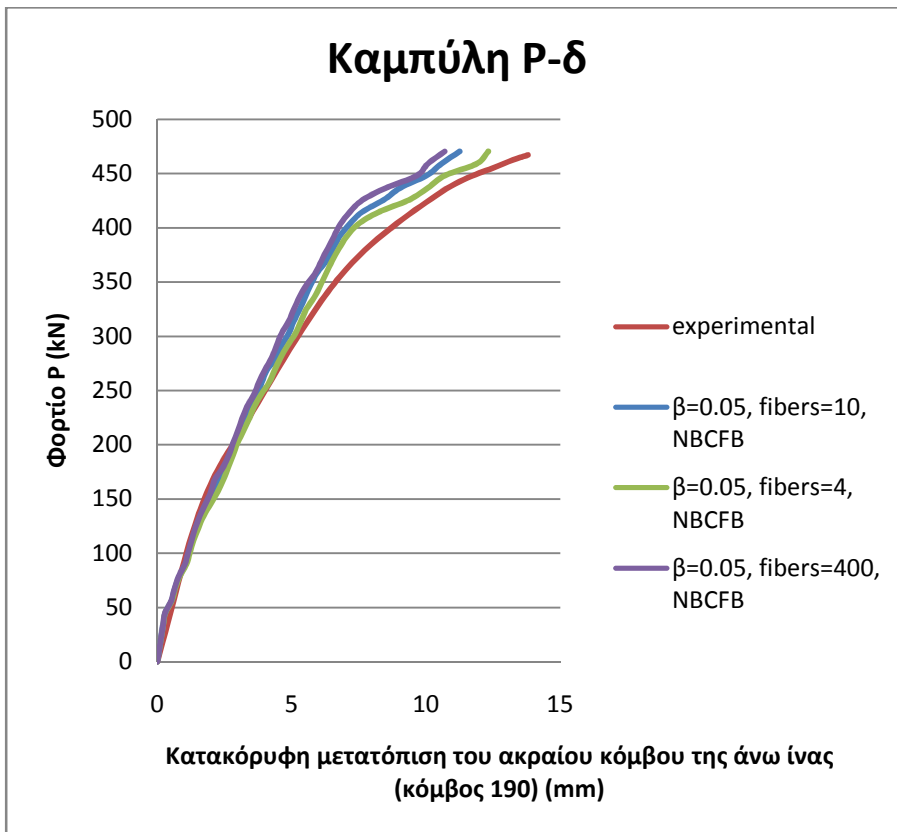
Σχήμα 7.89 Σύγκριση των γραφικών παραστάσεων φορτίου – κατακόρυφης μετατόπισης και του συνολικού χρόνου αριθμητικής επίλυσης για διάφορα πλήθη ινών (β=0, NLSteps=50)



β=0,025 (NBCFB element)	
πλήθος ινών	συνολικός χρόνος αριθμητικής επίλυσης (sec)
4	32,12
10	34,76
400	195,79

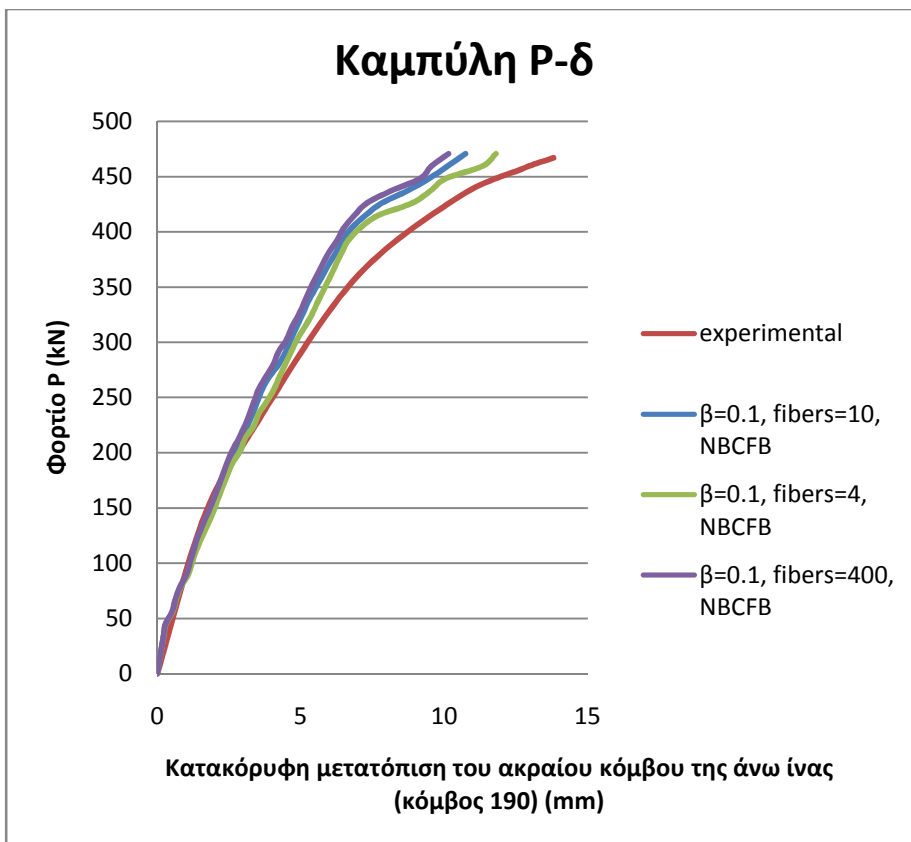
Σχήμα 7.90 Σύγκριση των γραφικών παραστάσεων φορτίου – κατακόρυφης μετατόπισης και του συνολικού χρόνου αριθμητικής επίλυσης για διάφορα πλήθη ινών (β=0.025, NLSteps=50)





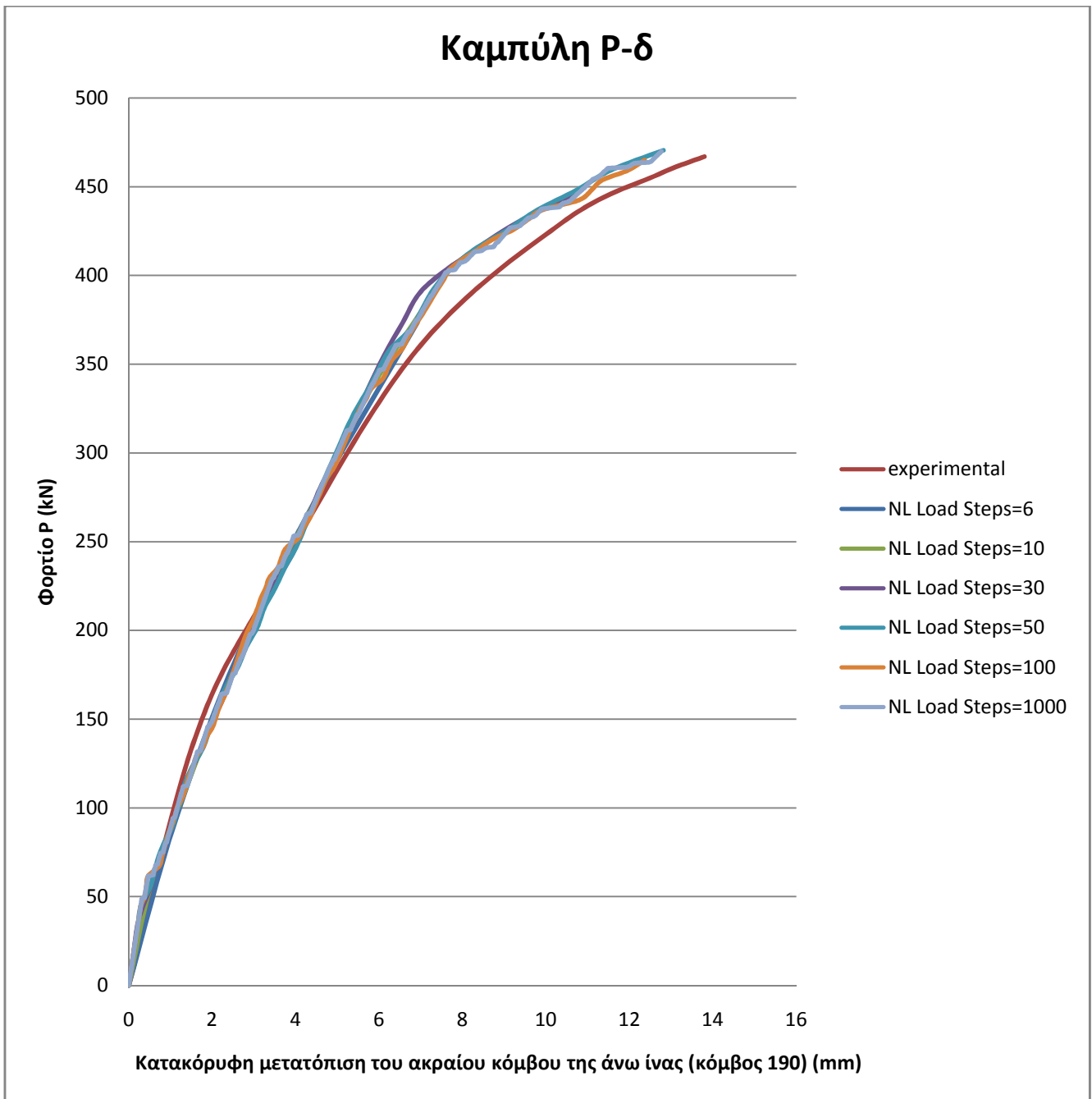
$\beta=0,05$ (NBCFB element)	
πλήθος ινών	συνολικός χρόνος αριθμητικής επίλυσης (sec)
4	35,57
10	38,87
400	216,4

Σχήμα 7.91 Σύγκριση των γραφικών παραστάσεων φορτίου – κατακόρυφης μετατόπισης και του συνολικού χρόνου αριθμητικής επίλυσης για διάφορα πλήθη ινών ( $\beta=0.05$ , NLSteps=50)



$\beta=0,1$ (NBCFB element)	
πλήθος ινών	συνολικός χρόνος αριθμητικής επίλυσης (sec)
4	36,93
10	38,7
400	480,7

Σχήμα 7.92 Σύγκριση των γραφικών παραστάσεων φορτίου – κατακόρυφης μετατόπισης και του συνολικού χρόνου αριθμητικής επίλυσης για διάφορα πλήθη ινών ( $\beta=0.1$ , NLSteps=50)

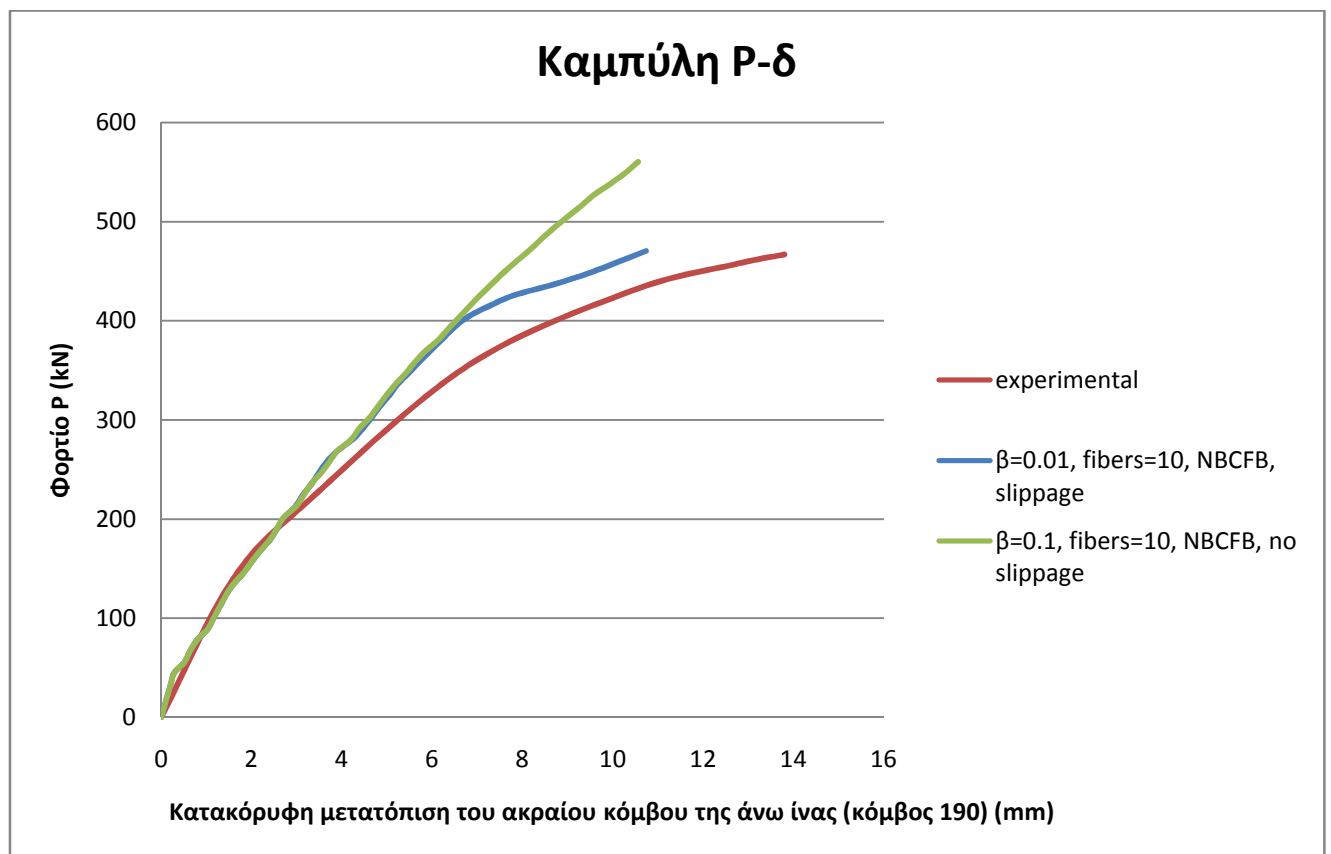
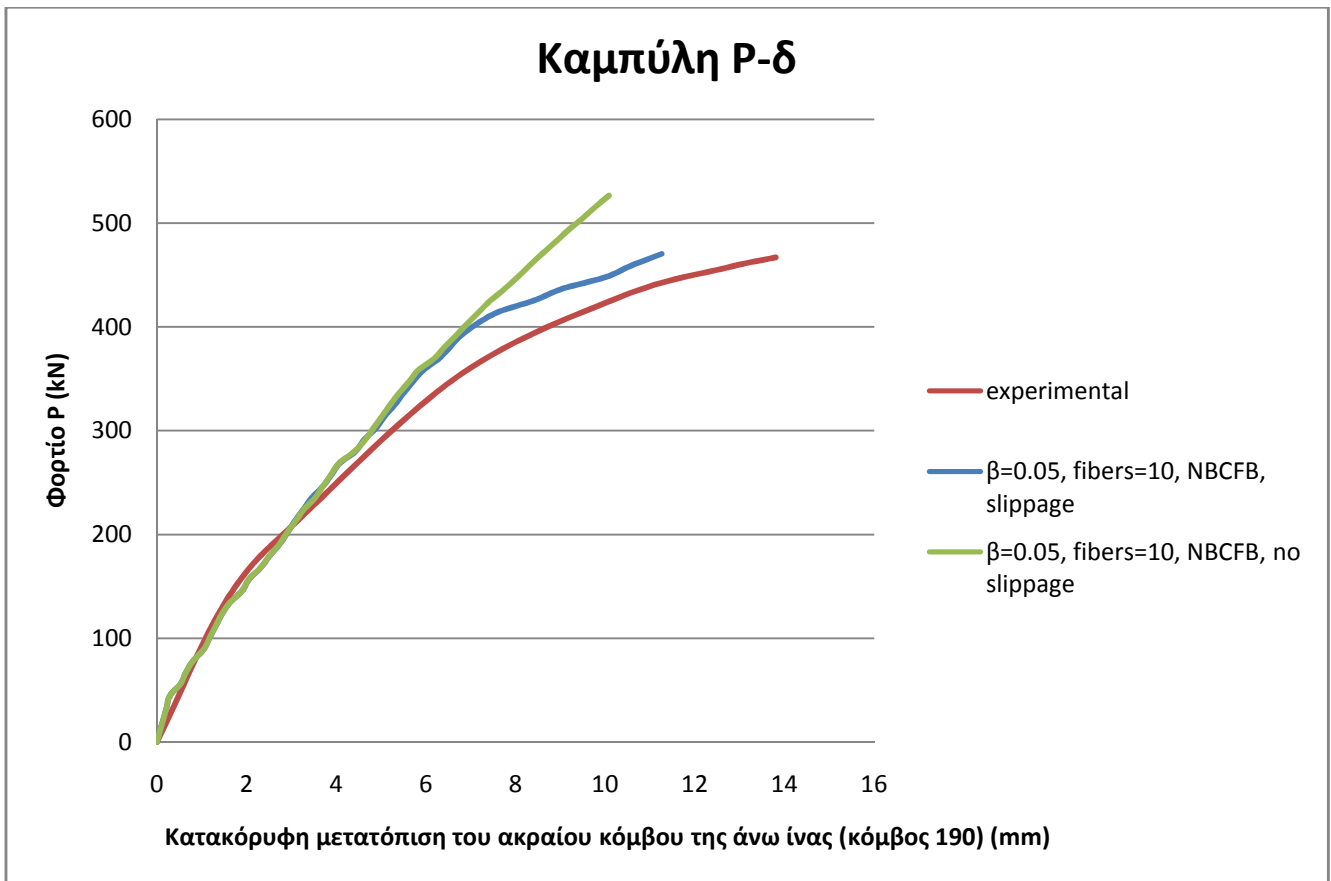


$\beta=0,025$ (NBCFB element)	
πλήθος βημάτων φόρτισης	συνολικός χρόνος αριθμητικής επίλυσης (sec)
6	4,71
10	7,3
30	23,62
50	40,2
100	63,75
1000	655,76

**Σχήμα 7.93** Σύγκριση των γραφικών παραστάσεων φορτίου – κατακόρυφης μετατόπισης και του συνολικού χρόνου αριθμητικής επίλυσης για διάφορα πλήθη βημάτων φόρτισης ( $\beta=0.025$ , fibers=10)

$\beta=0,025$ - fibers=10 - Load steps=50 (NBCFB element)	
βήμα φόρτισης	πλήθος εσωτερικών επαναλήψεων ανά βήμα φόρτισης
1÷4	1
5	4
6	2
7	10
8	11
9	4
10	3
11	16
12	18
13	4
14	11
15	12
16	20
17	11
18	9
19	2
20	17
21	11
22	11
23	8
24	6
25	5
26	3
27	5
28	4
29	8
30	11
31	6
32	11
33	22
34	6
35	2
36	9
37	11
38	16
39	13
40	12
41	11
42	14
43	10
44	13
45÷50	αστοχία

Σχήμα 7.94 Εσωτερικές επαναλήψεις Newton-Raphson ανά βήμα φόρτισης ( $\beta=0.025$ , fibers=10, Load Steps=50)



**Σχήμα 7.95** Σύγκριση των γραφικών παραστάσεων φορτίου – κατακόρυφης μετατόπισης των θεωρήσεων ολίσθησης και πλήρους συνάφειας ( $\beta=0.05$  και  $\beta=0.1$ , fibers=10)

## 1. Ρηγμάτωση:

Το σχήμα 7.85 απεικονίζει τη μορφή της ρηγμάτωσης για διάφορα επίπεδα φόρτισης έως την αστοχία της αμφιέριστης δοκού, η οποία σε αντίθεση με την προηγούμενη εφαρμογή διαθέτει τόσο άνω θλιβόμενο διαμήκη οπλισμό όσο και συνδετήρες. Οι ρωγμές του σχήματος 7.85 προήλθαν από ανάλυση με  $\beta=0.025$ , διαίρεση κάθε ράβδου οπλισμού με 10 ίνες και επιβολή (διαίρεση) του εξωτερικού φορτίου σε 50 βήματα. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται οι ρωγμές στο  $1^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $35^\circ$  και  $44^\circ$  βήμα φόρτισης. Το  $44^\circ$  βήμα φόρτισης αποτελεί το τελευταίο πριν την κατάρρευση του φορέα. Παρατηρούμε ότι η ρηγμάτωση ξεκινάει στη θλιπτική ζώνη (compressive zone) της δοκού για συνολικό επιβληθέν φορτίο ίσο με 300kN, αλλά δεν οδηγεί τη δοκό σε αστοχία εξαιτίας της συμβολής του διατμητικού οπλισμού (των συνδετήρων) και του άνω θλιβόμενου οπλισμού. Η αριθμητική διαδικασία τερματίζεται όταν εκδηλώνεται αστοχία των άνω θλιβόμενων ράβδων, γεγονός το οποίο έρχεται σε άμεση συμφωνία με την πειραματική μορφή αστοχίας. Η μορφή της ρηγμάτωσης είναι ρεαλιστική και αντίστοιχη με την πειραματική της εμφάνιση. Ειδικότερα, οι συντοιακές συνθήκες οδήγησαν στη δημιουργία αντισυμμετρικής ρηγμάτωσης, η οποία παρατηρήθηκε και στο πείραμα.

Πέραν της ρηγμάτωσης, ρεαλιστική είναι και η παραμορφωμένη κατάσταση της δοκού, καθώς και η κατανομή της κατακόρυφης και ολικής μετατόπισης κατά μήκος της. Στα σχήματα 7.80, 7.81 απεικονίζεται η παραμορφωμένη κατάσταση της δοκού με χρωματική απεικόνιση αντίστοιχα της κατακόρυφης και ολικής μετατόπισης για το τελευταίο αποδεκτό (πριν την κατάρρευση) βήμα φόρτισης στην περίπτωση της διακριτοποίησης των στοιχείων οπλισμού με φυσικά στοιχεία δυνάμεων με  $\beta=0,025$  και 10 ίνες. Έπειτα, στα σχήματα 7.82, 7.83, 7.84 παρουσιάζεται η ολική μετατόπιση, η κατακόρυφη μετατόπιση και οι Von Mises παραμορφώσεις για το  $1^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $44^\circ$  βήμα φόρτισης.

## 2. Σύγκριση των αποτελεσμάτων της θεώρησης στοιχείων οπλισμού – φυσικών στοιχείων δυνάμεων με τα αντίστοιχα αποτελέσματα της θεώρησης στοιχείων οπλισμού - στοιχείων δικτυώματος:

Στη συγκεκριμένη αμφιέριστη δοκό από οπλισμένο σκυρόδεμα προσομοιώσαμε τόσο τους διαμήκεις οπλισμούς όσο και τους συνδετήρες αρχικά με στοιχεία δικτυώματος και έπειτα με φυσικά στοιχεία δυνάμεων. Στην πειραματική διάταξη εισήχθησαν επιπλέον συνδετήρες για τοπική ενίσχυση των περιοχών στήριξης και επιβολής του συγκεντρωμένου φορτίου της δοκού ούτως ώστε να αποφευχθεί τοπική αστοχία. Αυτό είναι εμφανές και στο σχήμα 7.78, όπου απεικονίζεται το μοντέλο των πεπερασμένων στοιχείων, το οποίο αποτελείται από 102 εξαεδρικά στοιχεία για την προσομοίωση του σκυροδέματος και 190 φυσικά στοιχεία δυνάμεων για την προσομοίωση του ενσωματωμένου οπλισμού.

Όπως παρατηρούμε από τη σύγκριση των σχημάτων 7.86 με 7.87 (Γραφική παράσταση φορτίου – κατακόρυφης μετατόπισης), οι αντίστοιχες καμπύλες των δύο θεωρήσεων διαφοροποιούνται σημαντικά. Στο σχήμα 7.88, στο οποίο η διαφορά είναι πιο εμφανής, το πρώτο διάγραμμα απεικονίζει την πειραματική καμπύλη, την καμπύλη που αντιστοιχεί σε φυσικά στοιχεία δυνάμεων και την καμπύλη που αντιστοιχεί σε στοιχεία δικτυώματος για  $\beta=0.025$ , ενώ το δεύτερο περιέχει τις αντίστοιχες καμπύλες για  $\beta=0.05$ . Τα αποτελέσματα της θεώρησης στοιχείων δικτυώματος απέχουν σημαντικά από τα πειραματικά (η αντίστοιχη καμπύλη βρίσκεται αρκετά κάτω από την πειραματική) και έρχονται σε αντίθεση με εκείνα της θεώρησης φυσικών στοιχείων δυνάμεων, των οποίων η προβλεπόμενη καμπύλη φορτίου-μετατόπισης συμπίπτει καλύτερα τόσο ποσοτικά όσο και ποιοτικά με την αντίστοιχη πειραματική.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, και από την αριθμητική αυτή εφαρμογή ότι σε τέτοιου είδους πειραματικές διατάξεις και γενικότερα σε πλαισιακούς φορείς από οπλισμένο σκυρόδεμα για την προσομοίωση των ενσωματωμένων ράβδων οπλισμού κρίνεται ως καταλληλότερο το φυσικό στοιχείο δυνάμεων, καθώς μόνο αυτό λαμβάνει υπόψη την καμπτική και διατμητική τους στιβαρότητα.

### 3. Επίδραση του συντελεστή μερικής διατήρησης της διατμητικής στιβαρότητας (remaining shear) $\beta$ στα αριθμητικά αποτελέσματα:

Διεξήχθη παραμετρική διερεύνηση του συντελεστή μερικής διατήρησης της διατμητικής στιβαρότητας, μέσω της οποίας καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι θα πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί στην χρήση του, η οποία οφείλει να ανταποκρίνεται στη φυσική διάσταση του εκάστοτε αριθμητικού μοντέλου. Και σε αυτήν την αριθμητική εφαρμογή η επίδραση των τιμών του  $\beta$  στη μετελαστική απόκριση της αμφιέριστης δοκού είναι σημαντική, ωστόσο λιγότερο απ' ό,τι στην αριθμητική εφαρμογή 7.2.1, διότι τώρα η δοκός δεν είναι υπο-οπλισμένη αφού διαθέτει τόσο άνω θλιβόμενο οπλισμό όσο και συνδετήρες. Για τον λόγο αυτό, με την εκκίνηση της μακρορρηγμάτωσης το πρόβλημα της γρήγορης απώλειας της αντοχής δεν είναι τόσο έντονο.

Τα σχήματα 7.89÷7.92 απεικονίζουν τα αποτελέσματα της παραμετρικής διερεύνησης τόσο του  $\beta$  όσο και του αριθμού των ινών, στις οποίες θεωρούμε ότι διακριτοποιείται κάθε φυσικό στοιχείο δυνάμεων. Όπως παρατηρούμε από τους αντίστοιχους πίνακες, όσο αυξάνεται η τιμή του  $\beta$  και ο αριθμός των ινών, τόσο αυξάνεται ο συνολικός υπολογιστικός χρόνος. Τα 4 σχήματα 7.89, 7.90, 7.91, 7.92 αντιστοιχούν στις τιμές  $\beta=0, 0.025, 0.05, 0.1$  και καθένα από αυτά περιέχει τρεις καμπύλες αντίστοιχες των 4, 10, 100 ινών.

Για  $\beta=0$  (Σχήμα 7.89) παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα είναι άκρως αναληθή και η διαδικασία σταματάει πρόωρα. Στην περίπτωση αυτή, με την εμφάνιση της πρώτης ρωγμής στο καθολικό μητρώο στιβαρότητας εμφανίζεται πληθώρα μηδενικών διαγώνιων όρων, με αποτέλεσμα η αντιστροφή του μητρώου να γίνεται υπολογιστικά εξαιρετικά επίπονη αν όχι αδύνατη. Θέτοντας μηδενική την τιμή του  $\beta$ , δεν λαμβάνουμε καθόλου υπόψιν την αλληλεμπλοκή των αδρανών και θεωρούμε μηδενική την παραμένουσα διατμητική αντοχή κατά μήκος της επιφάνειας της ρωγμής.

Για  $\beta \neq 0$  (Σχήματα 7.90÷7.92) αντισταθμίζουμε ορισμένα αριθμητικά προβλήματα που ενδεχομένως να αντιμετωπίσουμε λόγω της προσέγγισης της διανεμημένης ρωγμής. Στη συγκεκριμένη αριθμητική εφαρμογή ο συντελεστής  $\beta$  χρησιμοποιείται για να την βελτιώσει αριθμητικά και να αποφύγει την κακή κατάσταση των μητρώων στιβαρότητας. Τα καλύτερα αποτελέσματα παίρνουμε για  $\beta=0.025$  και 10 ίνες. Η τιμή 0.025 του  $\beta$  υποδηλώνει ότι μετά το άνοιγμα της ρωγμής λόγω της αλληλεμπλοκής των αδρανών κατά μήκος της επιφάνειας ρηγμάτωσης παραμένει το 2,5% της αρχικής διατμητικής αντοχής. Στην περίπτωση αυτή, το προβλεπόμενο από τον κώδικα φορτίο κατάρρευσης ισούται με  $P_{cr}=470,5\text{kN}$  (διαφέρει από το πειραματικό μόλις κατά 0,75%) με αντίστοιχη μετατόπιση του μέσου του ανοίγματος ίση με  $w_{cr}=12,8\text{ mm}$  (διαφέρει από την πειραματική κατά -7,25%). Η αστοχία της δοκού (τερματισμός της μη γραμμικής διαδικασίας) οφείλεται στη ρηγμάτωση της θλιβόμενης περιοχής της δοκού, κατά την οποία έχουμε απώλεια της φέρουσας ικανότητας του σκυροδέματος. Πρόκειται δηλαδή για ψαθυρή θραύση χωρίς διαρροή των ράβδων οπλισμού. Η διαγώνια ρηγμάτωση ξεκίνησε στο ίδιο επίπεδο φορτίου όπως και στη δοκό χωρίς συνδετήρες (267 kN), αλλά δεν οδήγησε σε αστοχία εξαιτίας της ύπαρξης των συνδετήρων και του θλιβομένου οπλισμού.

Κλείνοντας την παρατήρηση αυτή, οφείλουμε να τονίσουμε ότι δεν είναι πάντα απαραίτητο να διακριτοποιούμε τον φορέα μας με περισσότερες ίνες, επιβαρύνοντας αριθμητικά το πρόβλημα, καθώς δεν παίρνουμε αναγκαστικά καλύτερο αποτέλεσμα.

#### 4. Επίδραση του αριθμού των βημάτων εξωτερικής φόρτισης στα αριθμητικά αποτελέσματα:

Προκειμένου να αποδείξουμε την αριθμητική ευρωστία και στιβαρότητα της προτεινόμενης αλγοριθμικής διαδικασίας, εφαρμόσαμε για την περίπτωση του φυσικού στοιχείου δυνάμεων με 10 ίνες (και  $\beta=0.025$  για το σκυρόδεμα) διάφορα πλήθη βημάτων φόρτισης. Στο σχήμα 7.93 απεικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις φορτίου – κατακόρυφης μετατόπισης και στον πίνακα 7.93 ο συνολικός χρόνος αριθμητικής επίλυσης για τα επιλεχθέντα πλήθη βημάτων φόρτισης (6, 10, 30, 50, 100, 1000).

Όπως ήταν αναμενόμενο, όσο αυξάνεται το πλήθος των βημάτων φόρτισης που επιλέγουμε για τη μη γραμμική διαδικασία Newton-Raphson τόσο αυξάνεται και ο συνολικός χρόνος αριθμητικής επίλυσης που μεταφράζεται σε υπολογιστικό κόστος, ενώ τα αποτελέσματα και η μορφή της καμπύλης που παίρνουμε είναι παραπλήσια. Από το σχήμα 7.93 είναι εμφανές ότι η διαφοροποίηση της καμπύλης φορτίου-μετατόπισης μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η ακρίβεια της διαδικασίας επίλυσης δεν είναι ευαίσθητη στον αριθμό των βημάτων εξωτερικής φόρτισης, ο οποίος είναι μία εξαιρετικά κρίσιμη αριθμητική παράμετρος, ιδιαίτερα όταν καταπιανόμαστε με large-scale προβλήματα. Όσο αυξάνει ο αριθμός των βημάτων φόρτισης, ο υπολογιστικός χρόνος αυξάνεται δυσανάλογα σε σχέση με την επιπρόσθετη ακρίβεια που κερδίζουμε. Υπάρχουν περιπτώσεις όπου με τα λίγα βήματα (μεγάλα  $\delta l$ ) έχουμε αστάθεια στην μη γραμμική διαδικασία λόγω αδυναμίας σύγκλισης. Αυτό στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν ισχύει λόγω του τρόπου με τον οποίο διαχειριζόμαστε αριθμητικά το πρόβλημα. Όσο μικρότερα είναι τα βήματα τόσο μικρότερος είναι και ο απαιτούμενος χρόνος επίλυσης, ιδίως σε περιπτώσεις που έχουμε μοντέλα με πολλούς βαθμούς ελευθερίας.

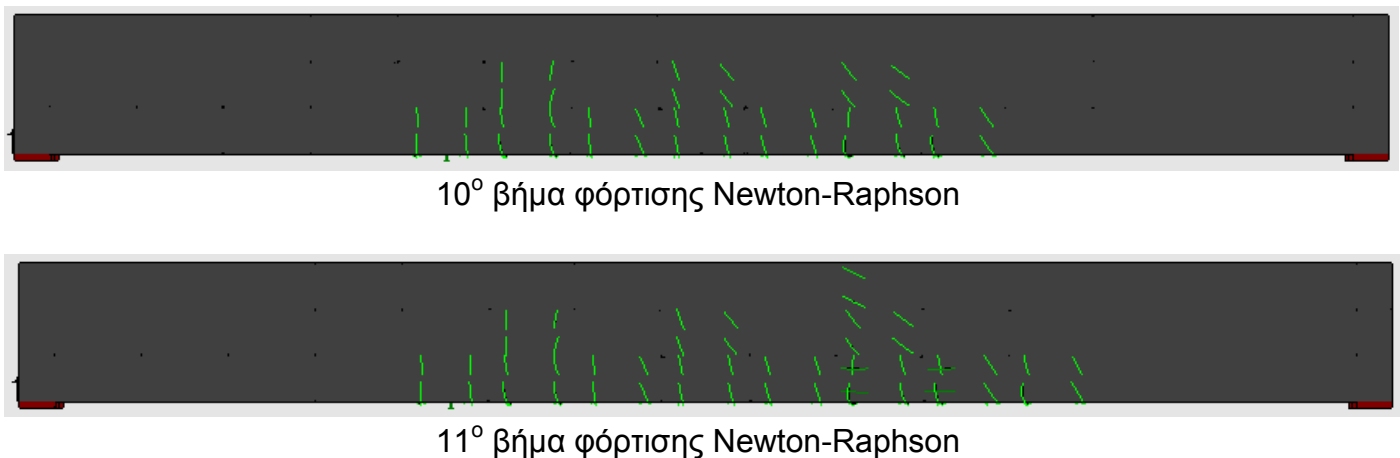
Για τη συγκεκριμένη αριθμητική εφαρμογή της συγκεκριμένης δοκού με συνδετήρες ο μέσος υπολογιστικός χρόνος ανά βήμα φόρτισης ισούται με 0,354 δευτερόλεπτα σε σχέση με τα 0,177 δευτερόλεπτα της αντίστοιχης εφαρμογής χωρίς συνδετήρες. Η διαφορά αυτή αποδίδεται στον τετραπλασιασμό των στοιχείων δοκού που χρησιμοποιούμε για τη διακριτοποίηση του οπλισμού, καθώς τώρα εκτός από κάτω διαμήκεις ράβδους έχουμε και άνω θλιβόμενο οπλισμό και συνδετήρες.



## 5. Ο αριθμός των εσωτερικών επαναλήψεων Newton-Raphson ανά βήμα φόρτισης:

Στο σχήμα 7.94 απεικονίζεται ο πίνακας με τον αριθμό των εσωτερικών επαναλήψεων που απαιτήθηκαν ανά βήμα φόρτισης Newton-Raphson κατά τη διαδικασία επίλυσης της συγκεκριμένης δοκού χωρίς διατμητικό οπλισμό στην περίπτωση φυσικών στοιχείων δυνάμεων με  $\beta=0.025$ , 10 ίνες και 50 βήματα φόρτισης. Το 44<sup>ο</sup> βήμα είναι το τελευταίο βήμα παρά το γεγονός ότι έχουμε επιβάλει 50. Αυτό συμβαίνει διότι μετά το 44<sup>ο</sup> βήμα Newton-Raphson ο αλγόριθμος αποτυγχάνει ως προς τη σύγκλιση λόγω της εμφάνισης μηδενικών διαγώνιων όρων στο καθολικό μητρώο στιβαρότητας, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να αντιστραφεί.

Όπως παρατηρούμε, στα περισσότερα από τα 44 αυτά βήματα εξωτερικής φόρτισης απαιτούνται λιγότερες από 7÷8 εσωτερικές επαναλήψεις Newton-Raphson (έχοντας ορίσει ως μέγιστο αριθμό τις 50 εσωτερικές επαναλήψεις), γεγονός που επιβεβαιώνει την αριθμητική ευρωστία της προτεινόμενης μεθόδου. Να τονίσουμε, ωστόσο, ότι σε ορισμένα βήματα φόρτισης (μόλις 11 σε αριθμό), όπως στο 11<sup>ο</sup> βήμα φόρτισης, απαιτείται ένας σημαντικός αριθμός εσωτερικών επαναλήψεων Newton-Raphson λόγω της εμφάνισης στο βήμα αυτό μεγάλου αριθμού ρωγμών. Στο σχήμα 7.96 απεικονίζεται η ρηγμάτωση της δοκού στα βήματα φόρτισης 10<sup>ο</sup> και 11<sup>ο</sup> και μπορούμε να διακρίνουμε τις επιπλέον ρωγμές που συνέβησαν στο μόλις **ένα** βήμα φόρτισης που μεσολάβησε, γεγονός που εξηγεί τον σχετικά αυξημένο (από 3 στο 10<sup>ο</sup> βήμα σε 16 στο 11<sup>ο</sup> βήμα) σε σχέση με τα υπόλοιπα βήματα αριθμό εσωτερικών επαναλήψεων.



**Σχήμα 7.96** Σύγκριση της μορφής της ρηγμάτωσης στο 10<sup>ο</sup> και 11<sup>ο</sup> βήμα φόρτισης

Ο μέγιστος αριθμός εσωτερικών επαναλήψεων Newton-Raphson (22) απαιτήθηκε στο βήμα φόρτισης 33, κατά το οποίο έλαβε χώρα η εκκίνηση της ρηγμάτωσης της θλιβόμενης ζώνης της δοκού και η εμφάνιση ρωγμών είναι εκτεταμένη λόγω της έντονης ανακατανομής των τάσεων.

## 6. Επίδραση της ολίσθησης στα πειραματικά αποτελέσματα

Στο σχήμα 7.95 απεικονίζεται η περίπτωση της θεώρησης πλήρους συνάφειας μεταξύ των ράβδων οπλισμού και του περιβάλλοντος σκυροδέματος, δηλαδή η περίπτωση κατά την οποία δεν θεωρούμε ολίσθηση σκυροδέματος και οπλισμού. Στο πρώτο διάγραμμα ( $\beta=0.05$ , 10 ίνες) του σχήματος 7.95 απεικονίζονται τρεις γραφικές παραστάσεις φορτίου – μετατόπισης:

- η πειραματική
- αυτή που προκύπτει με τη θεώρηση ύπαρξης ολίσθησης μεταξύ οπλισμού και σκυροδέματος
- αυτή που προκύπτει από τη θεώρηση πλήρους συνάφειας μεταξύ ράβδων οπλισμού και σκυροδέματος.

Το δεύτερο διάγραμμα περιλαμβάνει τις αντίστοιχες τρεις γραφικές παραστάσεις για  $\beta=0.01$ .

Η ολίσθηση ξεκινάει να διαδραματίζει ένα σημαντικό ρόλο με αξιοσημείωτη επιρροή στα προβλεπόμενα αποτελέσματα, ιδιαίτερα όταν οι θλιβόμενοι διαμήκεις οπλισμοί διαρρέουν και οι δυνάμεις οι οποίες μεταφέρονται από τις ράβδους στα στοιχεία σκυροδέματος μειώνονται σημαντικά. Σε αυτήν την περίπτωση, το αριθμητικό μοντέλο υπερεκτιμά (όπως ήταν αναμενόμενο) την στιβαρότητα της δοκού, δίνοντας υψηλότερο φορτίο κατάρρευσης (560kN) με μικρότερη αντίστοιχη μετατόπιση του μέσου του ανοίγματος. Αυτό είναι εμφανές και στα δύο διαγράμματα του σχήματος 7.95.



# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Argyris J., Tenek, Mattson A. (1997), BEC : a 2-node fast converging shear-deformable isotropic and composite beam element based on 6 rigid-body and straining modes, University of Stuttgart, June 1997
2. Παπαδρακάκης Μ. (1996), Ανάλυση φορέων με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, Παπασωτηρίου
3. Παπαπδρακάκης Μ. (1998), Μη γραμμικά πεπερασμένα στοιχεία, Εκδόσεις ΕΜΠ
4. Φραγκιαδάκης Μ. (2000), Μη γραμμική ανάλυση του υλικού με το φυσικό πεπερασμένο στοιχείο δοκού BEC, Διπλωματική Εργασία, Τομέας Δομοστατικής ΕΜΠ, Σεπτέμβριος 2000
5. Παπαιωάννου Ι. (2005), Εξελιγμένες μέθοδοι ανελαστικής πλαισιακών φορέων, Διπλωματική Εργασία, Τομέας Δομοστατικής ΕΜΠ, Μάρτιος 2005
6. Βασιλομιχελάκη Σ. (2008), Ανελαστική ανάλυση πλαισιακών φορέων με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, Διπλωματική Εργασία, Τομέας Δομοστατικής ΕΜΠ, Οκτώβριος 2008
7. Ματαράς Δ. (2003), Προγραμματισμός για επιστήμονες και μηχανικούς : fortran 90/95, Εκδόσεις Τζιόλα
8. Zeris CA and Mahin S. Analysis of reinforced concrete beam-columns under uniaxial excitation. Journal of Structural Engineering, ASCE, 1988;114(4):804-820.
9. Papaioannou I, Fragiadakis M and Papadrakakis M. Inelastic analysis of framed structures using the fiber approach. Proceedings of the GRACM 05: 5th International Congress on Computational Mechanics, Limassol, Cyprus, 2005;1:231-238
10. Kotsovos MD, Pavlovic MN. Structural concrete. Finite Element Analysis for Limit State Design. Thomas Telford: London, 1995.
11. Spiliopoulos KV and Lykidis G. An efficient three-dimensional solid finite element dynamic analysis of reinforced concrete structures. Earthquake Engng Struct. Dyn. 2006;35:137–157.
12. Kotsovos MD. A mathematical description of the strength properties of concrete under generalized stress. Magazine of Concrete Research 1979;31(108):151–158.
13. Argyris JH, Tenek L, Mattsson A. BEC: A 2-node fast converging shear-deformable isotropic and composite beam element based on 6 rigid-body and 6 straining modes. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 1998;152:281-336.
14. Lykidis G. Static and Dynamic Analysis of Reinforced Concrete structures with 3D Finite Elements and the smeared crack approach. Ph.D Thesis, NTUA, Greece, 2007. [In Greek]
15. Markou G. Detailed Three-Dimensional Nonlinear Modeling Combined with Hybrid Simulation for the Analysis of Full-Scale Reinforced Concrete Structures Subjected to Seismic Loadings. Ph.D Thesis, National Technical University of Athens, Institute of Structural Analysis and Seismic Research, Greece 2010.

# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Argyris J., Tenek, Mattson A. (1997), BEC : a 2-node fast converging shear-deformable isotropic and composite beam element based on 6 rigid-body and straining modes, University of Stuttgart, June 1997
2. Παπαδρακάκης Μ. (1996), Ανάλυση φορέων με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, Παπασωτηρίου
3. Παπαπδρακάκης Μ. (1998), Μη γραμμικά πεπερασμένα στοιχεία, Εκδόσεις ΕΜΠ
4. Φραγκιαδάκης Μ. (2000), Μη γραμμική ανάλυση του υλικού με το φυσικό πεπερασμένο στοιχείο δοκού BEC, Διπλωματική Εργασία, Τομέας Δομοστατικής ΕΜΠ, Σεπτέμβριος 2000
5. Παπαιωάννου Ι. (2005), Εξελιγμένες μέθοδοι ανελαστικής πλαισιακών φορέων, Διπλωματική Εργασία, Τομέας Δομοστατικής ΕΜΠ, Μάρτιος 2005
6. Βασιλομιχελάκη Σ. (2008), Ανελαστική ανάλυση πλαισιακών φορέων με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, Διπλωματική Εργασία, Τομέας Δομοστατικής ΕΜΠ, Οκτώβριος 2008
7. Ματαράς Δ. (2003), Προγραμματισμός για επιστήμονες και μηχανικούς : fortran 90/95, Εκδόσεις Τζιόλα
8. Zeris CA and Mahin S. Analysis of reinforced concrete beam-columns under uniaxial excitation. Journal of Structural Engineering, ASCE, 1988;114(4):804-820.
9. Papaioannou I, Fragiadakis M and Papadrakakis M. Inelastic analysis of framed structures using the fiber approach. Proceedings of the GRACM 05: 5th International Congress on Computational Mechanics, Limassol, Cyprus, 2005;1:231-238
10. Kotsovos MD, Pavlovic MN. Structural concrete. Finite Element Analysis for Limit State Design. Thomas Telford: London, 1995.
11. Spiliopoulos KV and Lykidis G. An efficient three-dimensional solid finite element dynamic analysis of reinforced concrete structures. Earthquake Engng Struct. Dyn. 2006;35:137–157.
12. Kotsovos MD. A mathematical description of the strength properties of concrete under generalized stress. Magazine of Concrete Research 1979;31(108):151–158.
13. Argyris JH, Tenek L, Mattsson A. BEC: A 2-node fast converging shear-deformable isotropic and composite beam element based on 6 rigid-body and 6 straining modes. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 1998;152:281-336.
14. Lykidis G. Static and Dynamic Analysis of Reinforced Concrete structures with 3D Finite Elements and the smeared crack approach. Ph.D Thesis, NTUA, Greece, 2007. [In Greek]
15. Markou G. Detailed Three-Dimensional Nonlinear Modeling Combined with Hybrid Simulation for the Analysis of Full-Scale Reinforced Concrete Structures Subjected to Seismic Loadings. Ph.D Thesis, National Technical University of Athens, Institute of Structural Analysis and Seismic Research, Greece 2010.