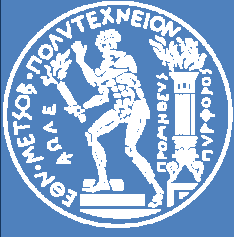
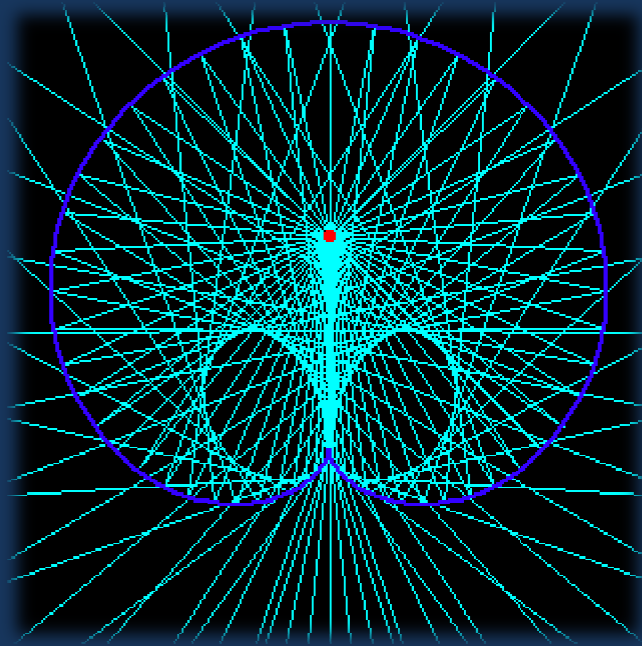


ΜΕΝΤΩΝΗΣ Π. ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ



ΕΘΝΙΚΟ
ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Ανάλυση βασικών προβλημάτων
της θεωρίας επαφών (contact
mechanics) των ελαστικών
σωμάτων και πειραματική μελέτη
αυτών με την μέθοδο της θεωρίας
των καυστικών (caustics)



MECH

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Επιβλέπων Διπλωματικής

Κωστόπουλος Ν. Θεόδωρος D. Sc.
Διευθυντής Εργαστηρίου Στοιχείων Μηχανών

Διπλωματική Εργασία για την Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου

Τίτλος: Ανάλυση βασικών προβλημάτων της θεωρίας επαφών (contact mechanics)
των ελαστικών σωμάτων και πειραματική μελέτη αυτών
με την μέθοδο της θεωρίας των καυστικών (caustics).

Εκπονών: Μεντώνης Π. Δημήτριος Α.Μ.:02102019

Επιβλέπων: Κωστόπουλος Ν. Θεόδωρος D.Sc. - Αναπληρωτής καθηγητής Ε.Μ.Π.
Διευθυντής του Εργαστηρίου Στοιχείων Μηχανών

Αθήνα 2012

Περιεχόμενα

Πρόλογος	vi
Ευχαριστίες	vii
1. Εισαγωγή	1
1.1 Τα είδη της επαφής	1
1.2 Σχετική κίνηση δύο επιφανειών – Ολίσθηση, Κύλιση και Περιστροφή	3
1.3 Δυνάμεις στο σημείο επαφής	5
1.4 Τάσεις στο σημείο επαφής	7
1.5 Το ελαστικό ημιεπίπεδο	8
2. Στοιχεία Θεωρίας Ελαστικότητας	9
2.1 Θεμελιώδεις Εξισώσεις	9
2.2 Προσδιορισμός της $\phi(x,z)$ με την μέθοδο των δυναμοσειρών σε καρτεσιανό σ.σ.	13
2.3 Προσδιορισμός της $\phi(x,z)$ με την μέθοδο Fourier σε καρτεσιανό σ.σ.	15
2.4 Προσδιορισμός της $\phi(r,\theta)$ σε πολικό σ.σ. (λύση Michell)	17
2.5 Είδη προβλημάτων επαφής ανάλογα με τα δεδομένα	20
3. Επίλυση Επιλεγμένων Προβλημάτων Επαφής	21
3.1 Συγκεντρωμένη δύναμη κάθετη στην επιφάνεια (πρόβλημα Flamant)	21
3.2 Κατανεμημένο θλιπτικό και διατμητικό φορτίο τυχαίας μορφής	29
3.3 Ομοιόμορφα κατανεμημένα φορτία	33
3.4 Φορτία με τριγωνική κατανομή	40
4. Επαφή Ελαστικών Σωμάτων – Θεωρία Hertz	45
4.1 Γεωμετρικά στοιχεία της επαφής λείων, μη-σύμμορφων επιφανειών	45
4.2 Θεωρία ελαστικής επαφής Hertz	49
4.3 Βασικοί υπολογισμοί επαφής	61
5. Μελέτες Περιπτώσεων (Case Studies)	71
6. Οπτική Μέθοδος των Καυστικών	93
6.1 Παρατηρήσεις στην πειραματική επίλυση προβλημάτων ελαστικότητας	93
6.2 Γενικά θεωρητικά στοιχεία της μεθόδου	95
6.3 Μεταβολή της έντασης φωτεινής ακτίνας διερχόμενης δια διαφανούς μέσου	96
6.4 Επίδραση της φόρτισης επί του οπτικού δρόμου	98
6.5 Βασική μαθηματική θεωρία της μεθόδου των καυστικών	102

6.6	Μιγαδική τασική συνάρτηση	112
6.7	Εφαρμογή της μεθόδου στο επίπεδο εντατικό πρόβλημα για οπτικώς ισότροπα υλικά	113
7.	Πειραματική Εφαρμογή της Μεθόδου των Καυσιτικών στην Μηχανική Επαφής	117
7.1	Εισαγωγή	117
	I. Προετοιμασία των πειραμάτων	
7.2	Σχεδιασμός των δοκιμών	119
7.3	Κατασκευή των δοκιμών	124
	II. Διεξαγωγή των δοκιμών	
7.4	Εξοπλισμός και διατάξεις που χρησιμοποιήθηκαν	126
7.5	Πειραματική διαδικασία	127
	III. Ανάλυση των αποτελεσμάτων	
7.6	Αποτελέσματα των δοκιμών	130
7.7	Συγκεντρωμένη δύναμη κάθετη στην επιφάνεια	132
7.8	Γραμμική επαφή στερεού σώματος (flat punch) με ελαστικό ημιεπίπεδο	138
7.9	Γραμμική εσωτερική επαφή ελαστικών δίσκων (pin-in-hole)	159
	Παραρτήματα	215
	Παράρτημα 1	217
	Παράρτημα 2	223
	Παράρτημα 3	225
	Βιβλιογραφία	227

Πρόλογος

Στην παρούσα εργασία έγινε προσπάθεια για να επιτευχθεί μια ολοκληρωμένη προσέγγιση των βασικών προβλημάτων της θεωρίας επαφής ελαστικών σωμάτων. Η ανάλυση γίνεται σε δύο μέρη.

Στο πρώτο μέρος αφού γίνεται μια σύντομη εισαγωγή στην θεωρία ελαστικότητας και στην χρήση των τασικών συναρτήσεων, προχωρούμε σε αναλυτική επίλυση των τασικών πεδίων ορισμένων απλών προβλημάτων. Κατόπιν γίνεται διεξοδική παρουσίαση της θεωρίας του Hertz και τέλος παραθέτουμε μελέτες περιπτώσεων (case studies) μηχανικής επαφής με ξεχωριστό ενδιαφέρον για την επιστήμη της μηχανολογίας.

Στο δεύτερο μέρος περιλαμβάνονται όλα τα σχετικά με την εφαρμογή της πειραματικής μεθόδου των καυστικών καμπυλών. Πρώτον παρουσιάζουμε όλο το απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο για την κατανόηση της μεθόδου των καυστικών. Κατόπιν παρουσιάζουμε όλη την προετοιμασία που απαιτήθηκε για την διεξαγωγή των δοκιμών (σχεδιασμός των δοκιμών, επιλογή υλικών, κατασκευή των δοκιμών κτλ). Παράλληλα γίνεται και περιγραφή της πειραματικής διαδικασίας. Τελευταία παρουσιάζουμε την ανάλυση των πειραματικών αποτελεσμάτων, όπου γίνεται χρήση των εξισώσεων της θεωρίας επαφής και της θεωρίας των καυστικών για τον προσδιορισμό φορτίων και παραμέτρων επαφής (π.χ. μήκος επαφής) στην πράξη.

Τα δεδομένα που προκύπτουν από την εργασία αυτή αποτελούν πολύ καλή βάση για περαιτέρω έρευνα στην περιοχή της τριβολογίας.

Ευχαριστίες

Κατ' αρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου και επιβλέποντα της παρούσας εργασίας κύριο Θεόδωρο Κωστόπουλο για την εμπιστοσύνη του, την πολύτιμη καθοδήγηση που μου παρείχε καθ' όλη την διάρκεια των σπουδών μου και την αμέριστη συμπαράσταση του σε κάθε μου πρόβλημα.

Εν συνεχεία θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή του Τομέα Αντοχής Υλικών, κύριο Γεώργιο Παπαδόπουλο, διότι αν και δεν είχε υποχρέωση, προσέφερε εξοπλισμό και κυρίως προσωπική βοήθεια για την διεξαγωγή των δοκιμών με την μέθοδο των καυστικών.

Επιπλέον ευχαριστώ θερμά τον διευθυντή του Τομέα Κατεργασιών, κύριο Δημήτριο Μανωλάκο καθώς επίσης και το προσωπικό του τομέα, χωρίς την βοήθεια των οποίων, δεν θα ήταν δυνατή η κατασκευή των απαιτούμενων για τα πειράματα δοκιμίων.

Σε προσωπικό επίπεδο θέλω να ευχαριστήσω τα μέλη της οικογένειας μου και τον πατέρα Αθανάσιο για την υπομονή τους και την συμπαράσταση τους σε κάθε δύσκολη στιγμή.

Τέλος, ευχαριστώ όσους συνέβαλαν, με όποιον τρόπο και σε όποιο βαθμό, στην ολοκλήρωση των σπουδών μου στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.

1

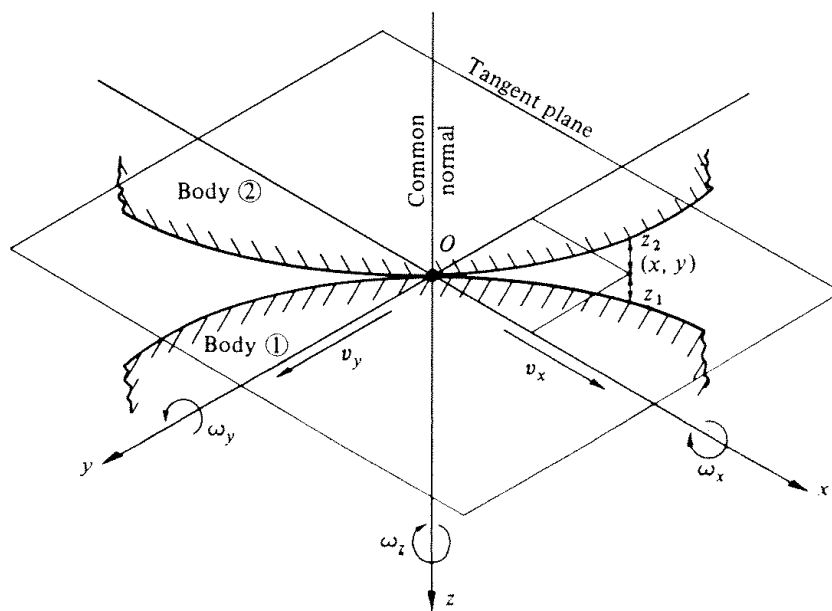
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα είδη της επαφής

Η παρούσα εργασία ασχολείται με τις τάσεις και τις παραμορφώσεις που δημιουργούνται όταν οι επιφάνειες δύο στερεών σωμάτων έρχονται σε επαφή. Οι επαφές διακρίνονται σε **σύμμορφες** επαφές και σε **μη σύμμορφες** επαφές (ορισμένοι συγγραφείς χρησιμοποιούν τον όρο **αντίμορφες** επαφές). Μια επαφή ονομάζεται σύμμορφη όταν οι δύο επιφάνειες «ταιριάζουν» ακριβώς η μία με την άλλη χωρίς να έχουν υποστεί κάποια παραμόρφωση. Τα έδρανα ολίσθησης είναι χαρακτηριστικό παράδειγμα σύμμορφης επαφής. Αντίθετα αν τα σώματα που έρχονται σε επαφή έχουν διαφορετικά προφίλ τότε έχουμε την περίπτωση της μη σύμμορφης επαφής. Σε μια μη σύμμορφη επαφή είναι δυνατόν να έχουμε **σημειακή επαφή** αν τα σώματα αρχικά συναντώνται σε ένα σημείο ή **γραμμική επαφή** αν τα σώματα αρχικά συναντώνται κατά μήκος μιας γραμμής. Για παράδειγμα, σε έναν ένσφαιρο τριβέα (ρουλεμάν), η κάθε σφαίρα έρχεται σε σημειακή επαφή με το αυλάκι ενώ στα κυλινδρικά ρουλεμάν κάθε κύλινδρος είναι σε γραμμική επαφή. Ουσιαστικά η γραμμική επαφή προκύπτει όταν τα σώματα έχουν σύμμορφη γεωμετρία σε μια διεύθυνση και μη σύμμορφη γεωμετρία στην κάθετη διεύθυνση. Η επιφάνεια επαφής σε μία μη σύμμορφη επαφή είναι πολύ μικρή σε σχέση με τις διαστάσεις των σωμάτων που έρχονται σε επαφή. Συνεπώς εμφανίζεται μεγάλη συγκέντρωση τάσεων στην περιοχή πλησίον της ζώνης επαφής η οποία δεν επηρεάζεται καθόλου από το μακροσκοπικό σχήμα των σωμάτων.

Στην πλειονότητα των μηχανολογικών εφαρμογών τα σημεία των επιφανειών επαφής εκτελούν πολύπλοκες κινήσεις και μέσω αυτών μεταδίδονται μέσω αυτών δυνάμεις και ροπές. Για παράδειγμα, στην εμπλοκή οδοντωτών τροχών στις δύο διαστάσεις, το σημείο επαφής κινείται στον χώρο, και ταυτόχρονα οι δύο επιφάνειες βρίσκονται σε σχετική κίνηση η οποία συνδυάζει ολίσθηση και κύλιση. Στην εισαγωγή αυτή σκοπός μας είναι να δημιουργήσουμε ένα πλαίσιο αναφοράς στο οποίο θα ανάγουμε τις κινήσεις και τις δυνάμεις που αναπτύσσονται σε κάθε ξεχωριστή περίπτωση επαφής.

Ας υποθέσουμε ότι δύο επιφάνειες με μη σύμμορφες γεωμετρίες έρχονται σε επαφή υπό την επίδραση μίας αμελητέας δύναμης και η αρχική τους επαφή είναι ένα μεμονωμένο σημείο. Θεωρούμε το σημείο αυτό O σαν αρχή ενός ορθογωνικού συστήματος συντεταγμένων $Oxyz$. Τα δύο στερεά σώματα, το κατώτερο και το ανώτερο όπως φαίνονται στο *Σχήμα 1* ονομάζονται αντίστοιχα σώμα 1 και σώμα 2.



Σχήμα 1

Ο άξονας Oz πάντοτε επιλέγεται να συμπίπτει με την κοινή κάθετη των επιφανειών στο σημείο O . Συνεπώς το επίπεδο Oxy είναι το κοινό εφαπτόμενο επίπεδο στις δύο επιφάνειες στο σημείο O . Η διεύθυνση των αξόνων Ox και Oy επιλέγεται, όπου είναι αυτό δυνατόν, να συμπίπτει με άξονες συμμετρίας των επιφανειών.

Το απαραμόρφωτο προφίλ των επιφανειών περιγράφεται από τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$\begin{aligned} z_1 &= f_1(x, y) \\ z_2 &= f_2(x, y) \end{aligned} \tag{1}$$

Οπότε η απόσταση μεταξύ των επιφανειών πριν την φόρτιση θα είναι:

$$h = z_1 + z_2 = f(x, y) \tag{2}$$

Σχετική κίνηση δύο επιφανειών – Ολίσθηση, Κύλιση και Περιστροφή

Η κίνηση ενός στερεού σώματος σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή μπορεί να περιγραφεί αν δίνεται το διάνυσμα της γραμμικής ταχύτητας ενός τυχαίου σημείου αναφοράς επάνω στο σώμα και το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας του σώματος. Αν τώρα στην περίπτωση επαφής δύο σωμάτων θεωρήσουμε σαν σημείο αναφοράς το κοινό σημείο επαφής O , στην δεδομένη χρονική στιγμή, το σώμα 1 θα έχει γραμμική ταχύτητα V_1 και γωνιακή ταχύτητα Ω_1 και το σώμα 2 θα έχει γραμμική ταχύτητα V_2 και γωνιακή ταχύτητα Ω_2 . Ολόκληρο το σύστημα αναφοράς κινείται με την γραμμική ταχύτητα του σημείου επαφής, V_O και με γωνιακή ταχύτητα Ω_O , ώστε να διατηρεί τον αρχικό προσανατολισμό του σε σχέση με την κοινή κάθετη και το κοινό εφαπτόμενο επίπεδο των δύο επιφανειών.

Για το σύστημα αναφοράς της επαφής τα δύο σώματα θα κινούνται με γραμμικές ταχύτητες:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_O \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_O \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

και γωνιακές ταχύτητες:

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_1 &= \boldsymbol{\Omega}_1 - \boldsymbol{\Omega}_0 \\ \boldsymbol{\omega}_2 &= \boldsymbol{\Omega}_2 - \boldsymbol{\Omega}_0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Εάν η επαφή είναι συνεχής, δηλαδή οι επιφάνειες δεν απομακρύνονται ούτε εισέρχονται η μία μέσα στην άλλη, τότε οι συνιστώσες της γραμμικής ταχύτητας κατά τον άξονα της κοινής καθέτου θα πρέπει να είναι οι ίδιες.

$$\left. \begin{aligned} V_{z1} &= V_{z2} = V_{z0} \\ v_{z1} &= v_{z2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Ορίζουμε ως *ολίσθηση* των δύο επιφανειών, την σχετική γραμμική ταχύτητα ανάμεσα στις δύο επιφάνειες στο σημείο O, και την συμβολίζουμε με $\Delta \mathbf{v}$.

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 \quad (6)$$

Οι συνιστώσες της ταχύτητας ολίσθησης είναι οι ακόλουθες:

$$\left. \begin{aligned} \Delta v_x &= v_{x1} - v_{x2} \\ \Delta v_y &= v_{y1} - v_{y2} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Ορίζουμε ως *κύλιση* των δύο επιφανειών την σχετική γωνιακή ταχύτητα των δύο σωμάτων γύρω από άξονα ο οποίος κείται στο κοινό εφαπτόμενο επίπεδο. Όπως και προηγουμένως η γωνιακή ταχύτητα κύλισης έχει συνιστώσες:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \omega_x &= \omega_{x1} - \omega_{x2} = \Omega_{x1} - \Omega_{x2} \\ \Delta \omega_y &= \omega_{y1} - \omega_{y2} = \Omega_{y1} - \Omega_{y2} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Τέλος ορίζουμε σαν *περιστροφή* την σχετική γωνιακή ταχύτητα των δύο σωμάτων γύρω από τον άξονα της κοινής κάθετης στις επιφάνειες, δηλαδή:

$$\Delta\omega_z = \omega_{z1} - \omega_{z2} = \Omega_{z1} - \Omega_{z2} \quad (9)$$

Κάθε κίνηση μεταξύ σωμάτων πρέπει να πληροί την συνθήκη συνεχούς επαφής (5) και τότε μπορεί να θεωρηθεί σαν συνισταμένη των τριών βασικών κινήσεων που ορίσαμε παραπάνω, δηλαδή της *ολίσθησης*, της *κύλισης* και της *περιστροφής*. Για παράδειγμα οι τροχοί ενός οχήματος κανονικά εκτελούν μόνο κύλιση. Ωστόσο αν το όχημα αρχίσει να στρίβει προτίθεται η περιστροφή ενώ αν «μπλοκάρουν» κατά την πέδηση τότε εκτελούν μόνο ολίσθηση.

Δυνάμεις στο σημείο επαφής

Η συνολική δύναμη που αναπτύσσεται σε κάθε σώμα λόγω της επαφής μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες, την *κάθετη δύναμη* P με διεύθυνση παράλληλη με την κοινή κάθετη στις επιφάνειες και η οποία γενικά είναι θλιπτική, και την *εφαπτομενική δύναμη* Q η οποία κείται πάνω στο κοινό επαπτόμενο επίπεδο και οφείλει την ύπαρξη της στην τριβή. Το μέτρο της Q θα πρέπει να είναι μικρότερο ή οριακά ίσο με την οριακή τριβή, δηλαδή:

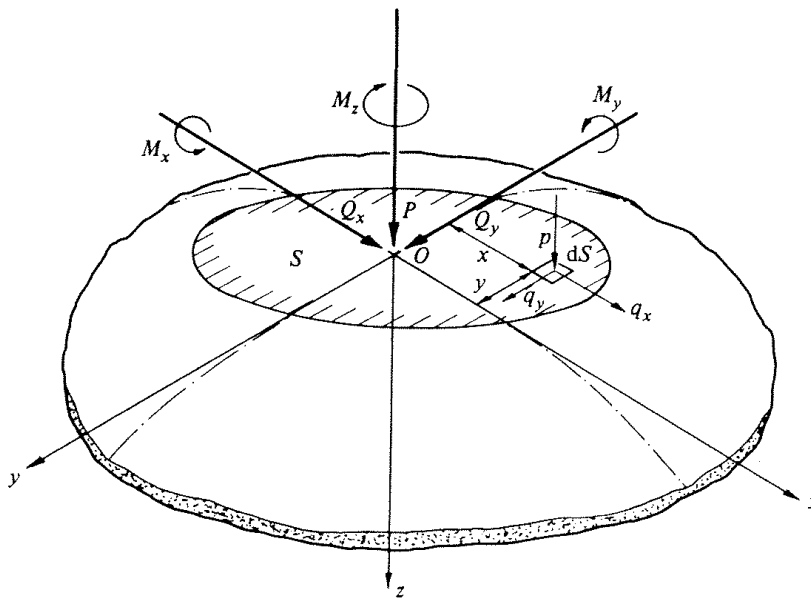
$$Q \leq \mu P \quad (10)$$

όπου μ είναι ο συντελεστής οριακής τριβής. Αναλύουμε την Q σε δύο συνιστώσες Q_x και Q_y παράλληλες στους άξονες x και y αντίστοιχα. Σε μια επαφή που περιλαμβάνει μόνο ολίσθηση η επαπτομενική δύναμη παίρνει την οριακή τιμή σε κατεύθυνση αντίθετη με την ταχύτητα ολίσθησης και ισχύει:

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -\frac{\Delta v_x}{|\Delta v|} \mu P \\ Q_y &= -\frac{\Delta v_y}{|\Delta v|} \mu P \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Η κάθετη δύναμη P που ασκείται σε μια σημειακή επαφή προκαλεί συμπίεση και παραμόρφωση των σωμάτων έτσι ώστε η επιφάνεια επαφής να μεγαλώσει και να αποκτήσει πεπερασμένο μέγεθος. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να γίνει δυνατή η μετάδοση ροπών πλέον των δυνάμεων. Οι συνιστώσες M_x και M_y ονομάζονται ροπές κύλισης και ουσιαστικά αντιστέκονται στην κύλιση των σωμάτων. Αποτελούν αυτό που πολλές φορές ονομάζεται τριβή κύλισης. Η τρίτη συνιστώσα M_z που έχει την διεύθυνση της κοινής καθέτου, προκαλείται από την τριβή στην επιφάνεια επαφής, και ονομάζεται *ροπή περιστροφής (spin moment)*. Όταν η κύλιση συνδυάζεται με περιστροφή τότε η ροπή περιστροφής προστίθεται στην συνολική τριβή κύλισης.

Στο σημείο αυτό πρέπει να ορίσουμε την έννοια της ελεύθερης περιστροφής. *Ελεύθερη περιστροφή* είναι η κίνηση που περιλαμβάνει κύλιση χωρίς περιστροφή και όπου η εφαπτομενική δύναμη Q στο σημείο επαφής είναι 0.



Σχήμα 2

Τάσεις στο σημείο επαφής

Οι δυνάμεις και οι ροπές που αναπτύσσονται στην επαφή δύο σωμάτων λόγω της παραμόρφωσης και άρα της επιφάνειας επαφής που δημιουργούν, προκαλούν την εμφάνιση τάσεων στη διεπιφάνεια. Η ορθή τάση (πίεση) συμβολίζεται με p και η εφαπτομενική τάση (διατμητική τάση) με q . Με αναφορά στο Σχήμα 2 μπορούμε να γράψουμε τις παρακάτω γενικές σχέσεις:

$$P = \int_S p dS \quad Q_x = \int_S q_x dS \quad Q_y = \int_S q_y dS \quad (12)$$

Επιπλέον όταν σε μια μη σύμμορφη επαφή η επιφάνεια επαφής ανήκει σχεδόν εξ' ολοκλήρου στο κοινό εφαπτόμενο επίπεδο τότε μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_S p y dS \\ M_y &= \int_S p x dS \\ M_z &= \int_S (q_y x - q_x y) dS \end{aligned} \quad (13)$$

Όταν όμως η επαφή πλησιάζει να γίνει σύμμορφη, και η επιφάνεια επαφής παρουσιάζει αναδίπλωση έτσι ώστε να μην ανήκει στο κοινό εφαπτόμενο επίπεδο, τότε οι εκφράσεις των ροπών M_x και M_y πρέπει να τροποποιηθούν ώστε να περιλαμβάνουν και την επίδραση των διατμητικών τάσεων q_x και q_y .

Το ελαστικό ημιεπίπεδο (elastic half-space)

Τα ελαστικά στερεά με μη σύμμορφη γεωμετρία, των οποίων οι παραμορφώσεις είναι αρκετά μικρές ώστε να εμπίπτουν στο πλαίσιο της γραμμικής θεωρίας των μικρών παραμορφώσεων αναπόφευκτα θα συναντηθούν σε μια περιοχή επαφής με διαστάσεις πολύ μικρές σε σύγκριση με τις ακτίνες καμπυλότητας των απαραμόρφωτων επιφανειών. Οι δυνάμεις επαφής έχουν υψηλή συγκέντρωση πλησίον σε αυτή την περιοχή επαφής, ενώ το μέτρο τους μειώνεται απότομα όσο απομακρυνόμαστε από αυτή μέχρι που μηδενίζεται μετά από κάποια απόσταση. Αυτό συνεπάγεται ότι η περιοχή που μας ενδιαφέρει πρακτικά είναι μια πολύ μικρή σε μέγεθος περιοχή γύρω από το σημείο της πρώτης επαφής. Άρα, αν υποθέσουμε ότι οι διαστάσεις των σωμάτων είναι αρκετές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερες από τις διαστάσεις της περιοχής επαφής, οι τάσεις που εμφανίζονται πλησίον της επαφής δεν επηρεάζονται σχεδόν καθόλου από το σχήμα των σωμάτων ή από τον τρόπο στήριξής τους. Για τον υπολογισμό των τάσεων αυτών εισάγουμε την έννοια του **ελαστικού ημιεπιπέδου** δηλαδή την εξιδανικευμένη θεώρηση των ελαστικών σωμάτων που έρχονται σε επαφή ως ημι-άπειρους ελαστικούς χώρους με επίπεδο όριο. Η εξιδανίκευση αυτή, που χρησιμοποιείται σχεδόν στο σύνολο των προβλημάτων επαφής, απλοποιεί σημαντικά τις οριακές συνθήκες ενώ παράλληλα αποτελεί καλή προσέγγιση της πραγματικότητας.

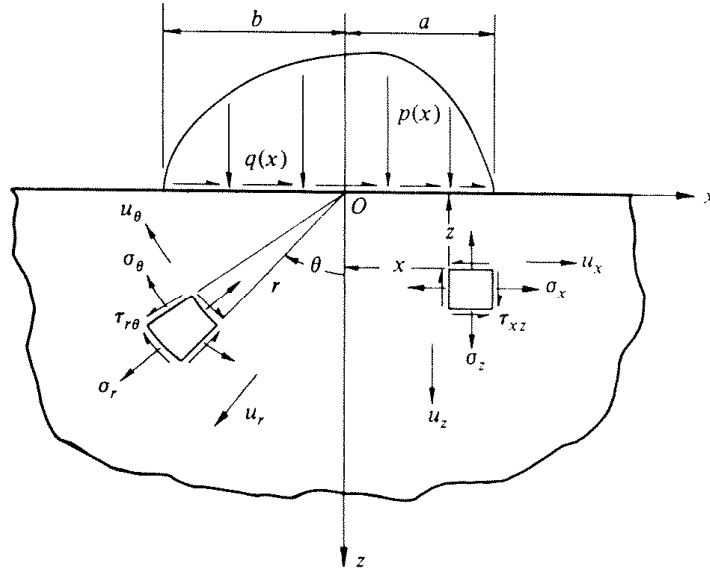
2

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Θεμελιώδεις εξισώσεις

Θεωρούμε το πρόβλημα του Σχήματος 1 κατά το οποίο ένα ελαστικό ημιεπίπεδο φορτίζεται επιφανειακά με ορθό και διατμητικό φορτίο τυχαίας κατανομής. Επειδή το βάθος του ελαστικού ημιεπιπέδου είναι άπειρο θεωρούμε ότι οι ισχύουν συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης ($\varepsilon_y = 0$). Η αντίθετη περίπτωση επίπεδης έντασης ($\sigma_y = 0$) θα ίσχυε μόνο αν είχαμε γραμμική φόρτιση μίας πλάκας με πάχος αρκετά μικρό σε σύγκριση με το πλάτος της επιφάνειας φόρτισης, κάτι το οποίο είναι εξαιρετικά σπάνιο.

Το σύνηθες ζητούμενο στα προβλήματα αυτού του είδους είναι οι τάσεις σ_x , σ_z και τ_{xz} σε όλη την έκταση του υλικού (συνήθως με την μορφή διαγραμμάτων) και οι συνιστώσες της μετατόπισης u_x και u_z πάλι σε όλη την έκταση του υλικού. Ορισμένες φορές ζητείται και το παραμορφωμένο προφίλ της επιφάνειας $\bar{u}_z(x)$ (δηλαδή η μετατόπιση u_z για $z=0$ και $y=0$).



Σχήμα 1

Από την μηχανική του παραμορφώσιμου στερεού σώματος ισχύουν οι παρακάτω εξισώσεις:

Διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας (εξισώσεις Navier).

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0$$

Εξισώσεις συμβιβαστού (Εξισώσεις Saint-Venant)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}$$

Η σχέση μεταξύ παραμορφώσεων και μετατοπίσεων είναι:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

Το πρόβλημα αποτελεί περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης (plain strain) οπότε ισχύει ότι:

$$\varepsilon_y = 0 \quad \text{και} \quad \sigma_y = \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)$$

Έτσι σύμφωνα με τον νόμο του Hooke για την επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση θα ισχύουν τα εξής:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left\{ (1-\nu^2) \cdot \sigma_x - \nu \cdot (1+\nu) \cdot \sigma_z \right\}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \left\{ (1-\nu^2) \cdot \sigma_z - \nu \cdot (1+\nu) \cdot \sigma_x \right\}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{xz} = \frac{2 \cdot (1+\nu)}{E} \cdot \tau_{xz}$$

Αν δεν χρησιμοποιούσαμε την τασική συνάρτηση Airy τότε για να λύσουμε το γενικό πρόβλημα επίπεδης ελαστικότητας, δηλαδή για να προσδιορίσουμε τα σ_x , σ_z , τ_{xz} , ε_x , ε_z , γ_{xz} πρέπει να λύσουμε το ακόλουθο σύστημα έξι εξισώσεων.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \quad (3)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left\{ (1-\nu^2) \cdot \sigma_x - \nu \cdot (1+\nu) \cdot \sigma_z \right\} \quad (4)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \left\{ (1-\nu^2) \cdot \sigma_z - \nu \cdot (1+\nu) \cdot \sigma_x \right\} \quad (5)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{xz} = \frac{2 \cdot (1+\nu)}{E} \cdot \tau_{xz} \quad (6)$$

Το παραπάνω σύστημα είναι δύσκολο να λυθεί γιατί είναι σύστημα μερικών παραγώγων.

Αντί για αυτό μπορούμε να λύσουμε την παρακάτω διαρμονική εξίσωση που προκύπτει από τις 3 πρώτες εξισώσεις του συστήματος.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right) = 0 \quad (7)$$

Επιλύοντας την εξίσωση βρίσκουμε την συνάρτηση $\varphi(x,z)$ η οποία ονομάζεται τασική συνάρτηση του Airy. Έχοντας την συνάρτηση Airy μπορούμε να υπολογίσουμε και του 6 αγνώστους του παραπάνω συστήματος με τις ακόλουθες εξισώσεις.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (8)$$

$$\sigma_z = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (9)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left\{ (1-\nu^2) \cdot \sigma_x - \nu \cdot (1+\nu) \cdot \sigma_z \right\} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left\{ (1-\nu^2) \cdot \sigma_z - \nu \cdot (1+\nu) \cdot \sigma_x \right\} \\ \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \cdot \tau_{xz} = \frac{2 \cdot (1+\nu)}{E} \cdot \tau_{xz} \end{aligned} \right\} \nu. \text{ Hooke}$$

Η παραπάνω διαρμονική εξίσωση μπορεί να λυθεί είτε με αναλυτική (μέθοδος δυναμοσειρών, μέθοδος μιγαδικών συναρτήσεων) είτε με αριθμητική μέθοδο (FDM, FEM, BEM, Ritz). Προς το παρόν δεν θα μας απασχολήσουν οι αριθμητικές μέθοδοι αλλά οι αναλυτικές. Οι τρεις κυριότερες είναι:

- Η μέθοδος δυναμοσειρών
- Η μέθοδος Fourier
- Η μέθοδος μιγαδικών συναρτήσεων

Από αυτές θα ασχοληθούμε περισσότερο με την μέθοδο δυναμοσειρών.

Προσδιορισμός της $\varphi(x,z)$ με την μέθοδο των δυναμοσειρών σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Έστω το προηγούμενο πρόβλημα επίπεδης ελαστικότητας εκφρασμένο σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Όταν δεν ασκούνται εξωτερικές ογκικές δυνάμεις στο σύστημα (όπως π.χ. βάρος) τότε η εξίσωση που δίνει την τασική συνάρτηση φ είναι της παρακάτω μορφής.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = 0$$

ή

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} = 0 \quad (11)$$

Αν στο σύστημα δρούσαν και εξωτερικές δυνάμεις τότε το δεύτερο μέλος θα ήταν $\neq 0$.

Η καρτεσιανή μορφή της εξίσωσης είναι χρήσιμη όταν έχουμε να κάνουμε με ορθογωνικά χωρία επειδή θα είναι πιο εύκολο να ικανοποιηθούν οι συνοριακές συνθήκες.

Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην αντίστροφη επίλυση της διαρμονικής εξίσωσης κατά την οποία υποθέτουμε ότι η λύση έχει την γενική πολυωνυμική μορφή:

$$\varphi(x, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} x^m z^n \quad (12)$$

Όπου A_{mn} οι συντελεστές που πρέπει να προσδιοριστούν. Η λύση αυτή προτάθηκε το 1957 από τον Νεου. Πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι όπως προκύπτει από τις εξισώσεις (8), (9) και (10) οι τρεις όροι της (12) που έχουν την χαμηλότερη τάξη, δηλαδή $m+n \leq 1$, μηδενίζονται κατά την παραγωγή επομένως δεν συνεισφέρουν στην διαμόρφωση του τασικού πεδίου. Οι όροι δεύτερης τάξης παράγουν σταθερή κατανομή τάσεων, οι όροι τρίτης τάξης σταθερή κατανομή κ.ο.κ.

Εάν η $\varphi(x,z)$ έχει μονάχα όρους με $m+n \leq 3$ ικανοποιείται αυτόματα η (11) για οποιονδήποτε συντελεστή A_{mn} (ταυτότητα).

Εάν όμως έχουμε όρους υψηλότερης τάξεως, όπου δηλαδή $m+n > 3$ τότε θα πρέπει με αντικατάσταση στην (11) να προκύψει μια σχέση των συντελεστών A_{mn} η οποία μαζί με τις

εξισώσεις που θα προκύψουν από τις οριακές συνθήκες, να αποτελέσει σύστημα από το οποίο θα προσδιοριστούν οι συντελεστές A_{mn} .

Στην γενική περίπτωση τώρα, αν αντικαταστήσουμε την $\varphi(x,z)$ από την (12) στην εξίσωση (11) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=4}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} m(m-1)(m-2)(m-3) A_{mn} x^{m-4} z^n \\ & + 2 \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} m(m-1)n(n-1) A_{mn} x^{m-2} z^{n-2} \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3) A_{mn} x^m z^{n-4} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Αν παραγοντοποιήσουμε την (13) θα έχουμε:

$$\sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \left[(m+2)(m+1)m(m-1) A_{m+2,n-2} + 2m(m-1)n(n-1) A_{mn} \right. \\ \left. + (n+2)(n+1)n(n-1) A_{m-2,n+2} \right] x^{m-2} z^{n-2} = 0 \quad (14)$$

Επειδή η παραπάνω εξίσωση πρέπει να ισχύει για κάθε ζεύγος (x,z) οι συντελεστές στην αγκύλη πρέπει να είναι 0. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} & (m+2)(m+1)m(m-1) A_{m+2,n-2} + 2m(m-1)n(n-1) A_{mn} \\ & + (n+2)(n+1)n(n-1) A_{m-2,n+2} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Η σχέση (15) θα πρέπει να ισχύει υποχρεωτικά για τους συντελεστές της τασικής συνάρτησης Airy και εξασφαλίζει ότι αυτή θα ικανοποιεί της διαρμονική εξίσωση (7). Αυτή μαζί με τις σχέσεις που προκύπτουν από τις οριακές συνθήκες του προβλήματος θα μας δώσουν τις τιμές των συντελεστών και άρα την τασική συνάρτηση $\varphi(x,z)$.

Επειδή η μέθοδος αυτή δίνει πολυωνυμικές κατανομές τάσεων πρέπει να περιμένουμε ότι δεν θα ικανοποιούνται γενικά οριακές συνθήκες οποιασδήποτε μορφής. Ωστόσο ο περιορισμός αυτός

μπορεί να παρακαμφθεί τροποποιώντας τις οριακές συνθήκες σύμφωνα με την αρχή του Saint-Venant.

Προσδιορισμός της $\varphi(x,z)$ με την μέθοδο Fourier σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Η μέθοδος επίλυσης αυτή είναι παρόμοια με την προηγούμενη στην γενική της ιδέα και έτσι θα αναλυθεί με συντομία.

Αναπτύχθηκε από τους *Pickett (1944)*, *Timoshenko* και *Goodier (1970)* και *Little (1973)*.

Αυτή την φορά αντί να υποθέσουμε ότι η τασική συνάρτηση Airy έχει μορφή δυναμοσειράς υποθέτουμε ότι έχει την παρακάτω μορφή χωριζομένων μεταβλητών.

$$\varphi(x, z) = X(x)Z(z) \quad (16)$$

Όπου $X = e^{\alpha x}$ και $Z = e^{\beta z}$. Αν αντικαταστήσουμε την παραπάνω μορφή στην εξίσωση (11) θα πάρουμε την παρακάτω εξίσωση:

$$(\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4)e^{\alpha x}e^{\beta z} = 0 \quad (17)$$

Επειδή η προηγούμενη εξίσωση πρέπει να ισχύει για κάθε τιμή (x,z) ο όρος στην παρένθεση θα πρέπει να ισούται με 0. Παίρνουμε λοιπόν την ισοδύναμη χαρακτηριστική εξίσωση:

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 = 0 \quad (18)$$

Η οποία δίνει μηδενικές ρίζες και μία διπλή ρίζα της μορφής $\alpha = \pm i\beta$.

Αντικαθιστώντας τώρα τις 4 ρίζες στην (16) και κατόπιν στην διαρμονική εξίσωση (11) και επιλύοντας ως προς $\varphi(x,z)$ προκύπτει:

Για $\beta=0$

$$\varphi_{\beta=0} = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 \quad (19)$$

Για $\alpha=0$

$$\varphi_{\alpha=0} = C_4z + C_5z^2 + C_6z^3 + C_7xz + C_8x^2z + C_9xz^2 \quad (20)$$

Για $\alpha=\pm i\beta$

$$\begin{aligned} \varphi = e^{i\beta x} [Ae^{\beta z} + Be^{-\beta z} + Cze^{\beta z} + Dze^{-\beta z}] \\ + e^{-i\beta x} [A'e^{\beta z} + B'e^{-\beta z} + C'ze^{\beta z} + D'ze^{-\beta z}] \end{aligned} \quad (21)$$

Η γενική λύση προκύπτει από την υπέρθεση των τριών παραπάνω λύσεων. Μάλιστα επειδή η λύση πρέπει να είναι πραγματική αντικαθιστούμε τους εκθετικούς όρους με τα ισοδύναμα υπερβολικά ημίτονα και συνημίτονα. Προκύπτει λοιπόν:

$$\begin{aligned} \varphi = \sin \beta x [(A + C\beta z)\sinh \beta z + (B + D\beta z)\cosh \beta z] \\ + \cos \beta x [(A' + C'\beta z)\sinh \beta z + (B' + D'\beta z)\cosh \beta z] \\ + \sin \alpha z [(E + G\alpha x)\sinh \alpha x + (F + H\alpha x)\cosh \alpha x] \\ + \cos \alpha z [(E' + G'\alpha x)\sinh \alpha x + (F' + H'\alpha x)\cosh \alpha x] \\ + \varphi_{\alpha=0} + \varphi_{\beta=0} \end{aligned} \quad (22)$$

Ο προσδιορισμός των σταθερών συντελεστών της (22) είναι εφικτός με χρήση των οριακών συνθηκών του προβλήματος. Όταν μάλιστα οι οριακές συνθήκες είναι πολύπλοκες κατανομές και δεν έχουν αναλυτική έκφραση και η γεωμετρία του προβλήματος δεν επιτρέπει την χρήση της αρχής Saint-Venant, αυτό που συμφέρει να κάνουμε είναι να εκφράσουμε τις οριακές συνθήκες με σειρές Fourier της μορφής:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (23)$$

όπου

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \cos\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right) d\xi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right) d\xi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Προσδιορισμός της $\varphi(r, \theta)$ σε πολικό σύστημα συντεταγμένων (λύση Michell).

Σε ορισμένες περιπτώσεις προβλημάτων επαφής είναι προτιμότερη η χρήση πολικών συντεταγμένων (r, θ) . Ισχύουν οι ίδιες καταστατικές εξισώσεις με προηγουμένως και το ζητούμενο είναι ο προσδιορισμός της τασικής συναρτήσεως $\varphi(r, \theta)$. Η διαρμονική εξίσωση (7) μετασχηματισμένη σε πολικές συντεταγμένες γίνεται:

$$\nabla^4 \varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \varphi = 0 \quad (24)$$

Ο Michell έκανε για πρώτη φορά την υπόθεση ότι η παραπάνω εξίσωση έχει λύση της μορφής $\varphi(r, \theta) = f(r)e^{b\theta}$ όπου b μια άγνωστη παράμετρος. Αντικαθιστώντας την λύση στην εξίσωση (24) και απαλείφοντας τους όρους $e^{b\theta}$ προκύπτει η παρακάτω εξίσωση.

$$f'''' + \frac{2}{r} f''' - \frac{1-2b^2}{r^2} f'' + \frac{1-2b^2}{r^3} f' + \frac{b^2(4+b^2)}{r^4} f = 0 \quad (25)$$

Για να επιλύσουμε την (25) θα κάνουμε την αντικατάσταση $r = e^\xi$ και θα προκύψει η ομογενής διαφορική εξίσωση 4^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές:

$$f'''' - 4f''' + (4 + 2b^2)f'' - 4b^2f' + b^2(4 + b^2)f = 0 \quad (26)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής είναι:

$$(a^2 + b^2)(a^2 - 4a + 4 + b^2) = 0 \quad (27)$$

και οι λύσεις είναι:

$$\begin{aligned} a &= \pm ib, \quad a = 2 \pm ib \\ &\text{ή} \\ b &= \pm ia, \quad b = \pm i(a - 2) \end{aligned}$$

Επειδή οι οριακές συνθήκες των περισσότερων προβλημάτων (όταν δεν είναι σε απλή μορφή) εκφράζονται με τριγωνομετρικές σειρές Fourier, θα πρέπει και η λύση της (24) ως προς $\varphi(r, \theta)$ να είναι συνάρτηση περιοδικής μορφής. Ως εκ τούτου μελετούμε την περίπτωση όπου $b=in$ όπου n ακέραιος συντελεστής. Αυτό επίσης συνεπάγεται από τις παραπάνω λύσεις ότι ο a θα είναι ακέραιος. Έτσι $\varphi(r, \theta) = f(r)e^{b\theta} = f(r)e^{in\theta} = f(r)[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$

Πληρέστερη ανάπτυξη της λύσης υπάρχει στο έργο του Michell (1899). Για συντομία παρουσιάζουμε κατευθείαν την τελική λύση για την φ .

$$\begin{aligned}
\varphi(r, \theta) &= \alpha_0 + \alpha_1 \ln r + a_2 r^2 + a_3 r^2 \ln r \\
&+ (a_4 + a_5 \ln r + a_6 r^2 + a_7 r^2 \ln r) \theta \\
&+ \left(a_{11} r + a_{12} r \ln r + \frac{a_{13}}{r} + a_{14} r^3 + a_{15} r \theta + a_{16} r \theta \ln r \right) \cos \theta \\
&+ \left(b_{11} r + b_{12} r \ln r + \frac{b_{13}}{r} + b_{14} r^3 + b_{15} r \theta + b_{16} r \theta \ln r \right) \sin \theta \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n1} r^n + a_{n2} r^{2+n} + a_{n3} r^{-n} + a_{n4} r^{2-n}) \cos n\theta \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} (b_{n1} r^n + b_{n2} r^{2+n} + b_{n3} r^{-n} + b_{n4} r^{2-n}) \sin n\theta
\end{aligned} \tag{28}$$

Όπου a_n, a_{nm} και b_{nm} σταθεροί συντελεστές που προσδιορίζονται από τις οριακές συνθήκες του εκάστοτε προβλήματος.

Στην περίπτωση που το πρόβλημα παρουσιάζει συμμετρία ως προς τον y άξονα, τα τασικά πεδία θα είναι και αυτά συμμετρικά, επομένως θα είναι ανεξάρτητα του θ . Συνεπώς στην λύση (28) οι όροι που περιέχουν θ δεν συνεισφέρουν και άρα αγνοούνται. Τελικά η λύση για την αξονοσυμμετρική περίπτωση είναι:

$$\varphi(r) = a_0 + a_1 \ln r + a_2 r^2 + a_3 r^2 \ln r \tag{29}$$

Είδη προβλημάτων επαφής ανάλογα με τα δεδομένα.

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος του σχήματος 1 είναι:

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}_z = \overline{\tau}_{xz} = 0 & \quad x < -b, \quad x > +a \\ \left. \begin{aligned} \overline{\sigma}_z = -p(x) \\ \overline{\tau}_{xz} = -q(x) \end{aligned} \right\} & \quad -b \leq x \leq a \end{aligned} \quad (30)$$

(Το σύμβολο $\overline{\sigma}$ αναφέρεται στο $z=0, y=0$ δηλαδή στο όριο της επιφάνειας)

Επιπλέον οι ορθές και εφαπτομενικές μετατοπίσεις στο όριο συμβολίζονται με $\overline{u}_z(x)$ και $\overline{u}_x(x)$ αντίστοιχα.

Τέλος σε μεγάλη απόσταση από την περιοχή φόρτισης ($x, z \rightarrow \infty$) οι τάσεις μηδενίζονται ($\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz} \rightarrow 0$).

Για να είναι ένα πρόβλημα επαφής αυτού του είδους πλήρως ορισμένο θα πρέπει να δίνονται 2 από τα 4 παρακάτω μεγέθη: $\overline{u}_z(x), \overline{u}_x(x), p(x), q(x)$.

Ανάλογα με ποια από τα μεγέθη δίνονται προκύπτουν και διαφορετικοί συνδυασμοί προβλημάτων.

Για παράδειγμα αν δίνεται ότι ένα γνωστής γεωμετρίας ανένδοτο προφίλ πιέζεται σε ένα υλικό τότε αυτομάτως είναι γνωστό το $\overline{u}_z(x)$.

Εάν η διεπιφάνεια επαφής είναι δίχως τριβή τότε $q(x) = 0$.

Εάν οι δύο επιφάνειες «κολλούν» μεταξύ τους χωρίς σχετική μετακίνηση τότε $\overline{u}_x(x) = 0$ και άγνωστος είναι το $q(x)$.

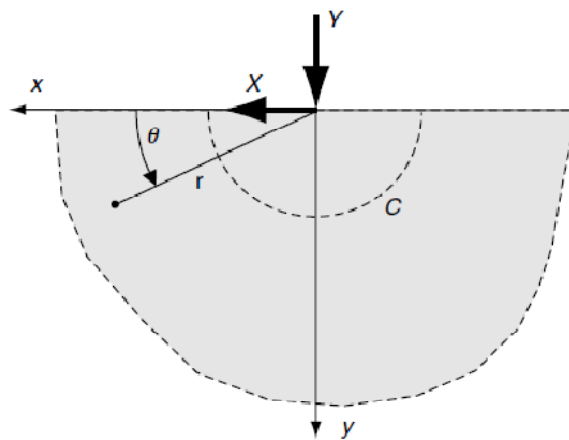
Ειδικές οριακές συνθήκες έχουμε όταν το προφίλ ολισθαίνει σε σχέση με την επιφάνεια επαφής με έναν συντελεστή τριβής ολίσθησης μ . Τότε $q(x) = \pm \mu \cdot p(x)$.

3

ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΕΠΑΦΗΣ

Συγκεντρωμένη δύναμη κάθετη στην επιφάνεια (πρόβλημα Flamant).

Στο πρόβλημα αυτό μας ενδιαφέρουν οι τάσεις που αναπτύσσονται σαν αποτέλεσμα της εξασκούμενης συγκεντρωμένης δύναμης P (ανά μονάδα μήκους επιφανείας στον άξονα y) η οποία στην γενική περίπτωση σχηματίζει τυχαία γωνία με την επιφάνεια και για τον λόγο αυτό αναλύεται σε δύο συνιστώσες X και Y όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1

Η συγκεκριμένη περίπτωση φόρτισης αντιστοιχεί για παράδειγμα σε μια λεπτή λεπίδα που πιέζεται κατά μήκος του z άξονα σε μια επιφάνεια ενός υλικού υπό τυχαία γωνία.

Το πρόβλημα αυτό λύνεται ευκολότερα αν χρησιμοποιηθεί πολικό σύστημα συντεταγμένων με κέντρο το O , όπως φαίνεται στο *Σχήμα 1* έτσι όπως λύθηκε για πρώτη φορά από τον Flamant (1892).

Γενικά οι συγκεντρωμένες δυνάμεις αποτελούν ειδική περίπτωση διότι δεν επιδέχονται οριακές συνθήκες της μορφής που ορίσαμε στις εξισώσεις (2.30). Για τον λόγο αυτό στο πρόβλημα πρέπει να γίνει μια τροποποίηση ώστε να βρεθεί μια κατάλληλη τασική συνάρτηση. Θα πρέπει οι τάσεις που ασκούνται σε κάθε ημικύκλιο C που περιλαμβάνει το κέντρο O και οι εξωτερικές φορτίσεις X, Y να βρίσκονται σε ισορροπία. Επειδή όμως η επιφάνεια που αντιπροσωπεύει κάθε τέτοιο ημικυκλικό τόξο C είναι ανάλογη της ακτίνας r και επειδή η ισορροπία θα πρέπει να ισχύει για κάθε ακτίνα r , προκύπτει ότι οι τάσεις θα είναι υποχρεωτικά της τάξης $1/r$. Ωστόσο οι σχέσεις που συνδέουν τις τάσεις σε πολικές συντεταγμένες με την τασική συνάρτηση $\varphi(r, \theta)$ προκύπτουν από τις (2.8), (2.9) και (2.10) με μετασχηματισμό και είναι αντίστοιχα οι (1), (2) και (3).

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \quad (1)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \quad (2)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \quad (3)$$

Από την γενική λύση του Michell για πολικές συντεταγμένες επιλέγουμε τους όρους εκείνους που μέσω των παραπάνω σχέσεων δίνουν τάσεις ανάλογες του $1/r$ και κατασκευάζουμε την τασική συνάρτηση του προβλήματος.

$$\varphi(r, \theta) = (\alpha_{12} r \ln r + a_{15} r \theta) \cos \theta + (b_{12} r \ln r + b_{15} r \theta) \sin \theta \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας την (4) στις (1), (2) και (3) προκύπτουν οι παρακάτω εκφράσεις των τάσεων σε κάθε σημείο του σώματος.

$$\sigma_r = \frac{1}{r} [(a_{12} + 2b_{15}) \cos \theta + (b_{12} - 2a_{15}) \sin \theta] \quad (5)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{r} [a_{12} \cos \theta + b_{12} \sin \theta] \quad (6)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r} [a_{12} \cos \theta - b_{12} \sin \theta] \quad (7)$$

Είναι προφανές ότι για $\theta=0$ και π (εκτός από το κέντρο O), θα έχω $\overline{\sigma_\theta} = 0$ και $\overline{\tau_{r\theta}} = 0$ οπότε $a_{12} = b_{12} = 0$. Καταφέραμε έτσι να προσδιορίσουμε δύο από τους τέσσερις άγνωστους συντελεστές των τάσεων. Αν αντικαταστήσουμε στις σχέσεις (6) και (7) παίρνουμε ότι $\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$ παντού. Συνεπώς η μόνη τάση που επιδρά σε κάθε σημείο είναι η ακτινική τάση

$$\sigma_r = \frac{1}{r} [2b_{15} \cos \theta - 2a_{15} \sin \theta] \quad (8)$$

με κατεύθυνση πάντα προς την αρχή O. Η κατανομή αυτή των τάσεων λέγεται **ακτινική κατανομή**. Για να προσδιορίσουμε και τους υπόλοιπους δύο συντελεστές της σχέσης (8) εφαρμόζουμε την οριακή συνθήκη της ισορροπίας στην οποία αναφερθήκαμε στο στάδιο προσδιορισμού της τασικής συνάρτησης.

$$\begin{aligned} X &= -\int_0^\pi \sigma_r(a, \theta) a \cos \theta d\theta = -\pi b_{15} \\ Y &= -\int_0^\pi \sigma_r(a, \theta) a \sin \theta d\theta = \pi a_{15} \end{aligned} \quad (9)$$

Άρα $a_{15} = Y/\pi$ και $b_{15} = -X/\pi$ τα οποία μαζί με την (8) δίνουν το τασικό πεδίο του προβλήματος:

$$\sigma_r = -\frac{2}{\pi r} (X \cos \theta + Y \sin \theta) \quad (10)$$

$$\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \quad (11)$$

Όπως ήταν προβλεπόμενο το τασικό πεδίο έχει ιδιόμορφο σημείο στο $O(0,0)$. Επιπλέον είναι αξιοσημείωτο ότι οι τάσεις σ_θ και $\tau_{r\theta}$ είναι πάντα μηδενικές ακόμα και στην περίπτωση καθαρά εφαπτομενικής φόρτισης ($Y=0$).

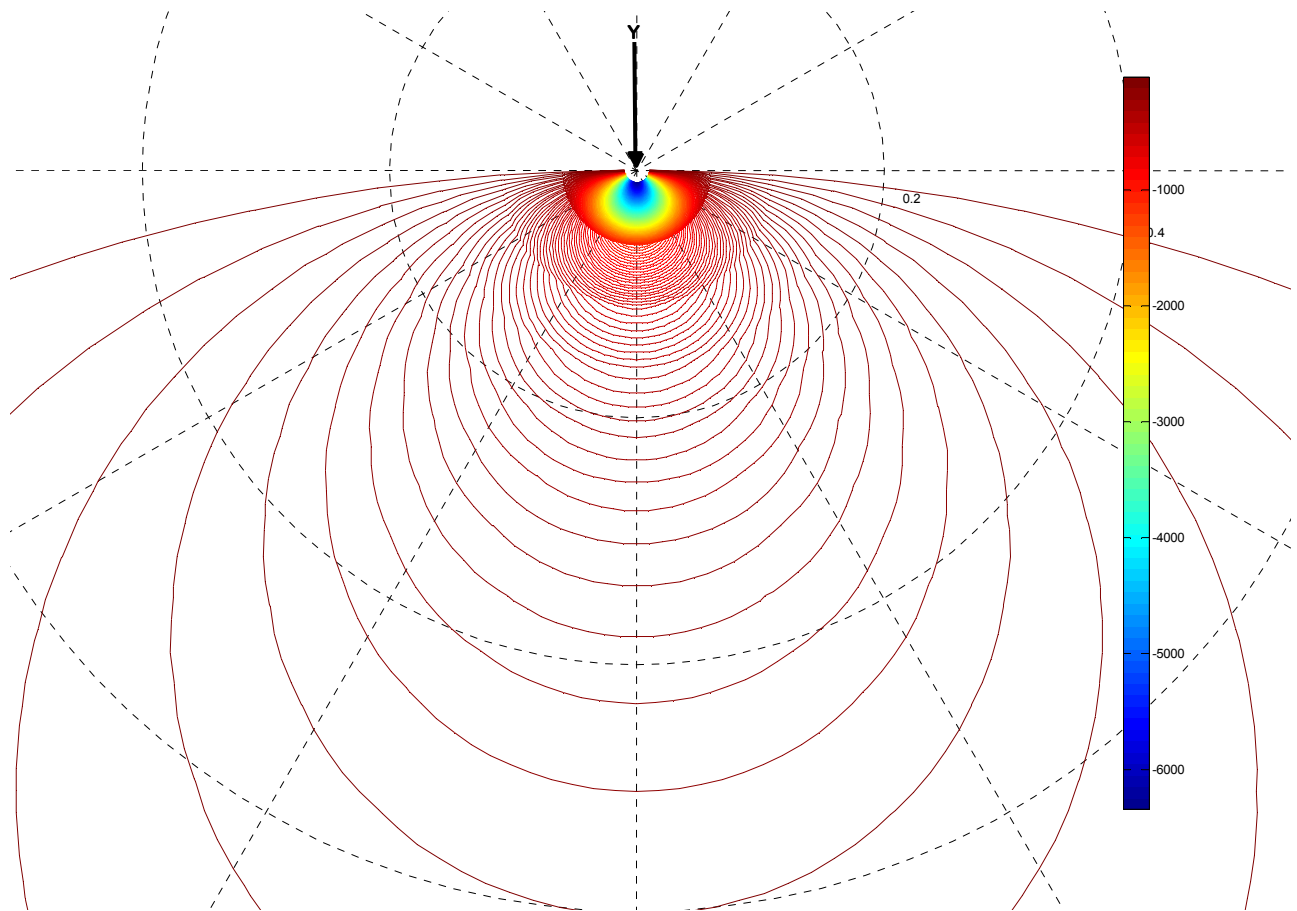
Για να διερευνήσουμε το πρόβλημα διεξοδικότερα θα περιοριστούμε στην περίπτωση που η φόρτιση είναι κάθετη στην επιφάνεια, δηλαδή $X=0$. Στην περίπτωση αυτή οι εξισώσεις του τασικού πεδίου θα είναι ως εξής:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2Y}{\pi r} \sin \theta \\ \sigma_\theta &= \tau_{r\theta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Οι ίδιες σχέσεις εκφρασμένες σε καρτεσιανές συντεταγμένες φαίνονται παρακάτω:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta = -\frac{2Yx^2y}{\pi(x^2 + y^2)^2} \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta = -\frac{2Yy^3}{\pi(x^2 + y^2)^2} \\ \tau_{xy} &= \sigma_r \sin \theta \cos \theta = -\frac{2Yxy^2}{\pi(x^2 + y^2)^2} \end{aligned} \quad (13)$$

Μια γραφική απεικόνιση του τασικού πεδίου που περιγράφεται από τις εξισώσεις (42) φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα ισοτασικών καμπύλων (Σχήμα 2).



Σχήμα 2

Όπως φαίνεται και από το διάγραμμα η επίδραση της συγκεντρωμένης δύναμης είναι πολύ περιορισμένη σε έκταση και σχεδόν εξαφανίζεται μετά από κάποιο μικρό βάθος. Επίσης πρέπει να σημειωθεί ότι αν και οι ισοτασικές καμπύλες είναι κύκλοι των οποίων τα κέντρα κείνται επί του φορέα της δύναμης Y και εφάπτονται στο σημείο $O(0,0)$, η διεύθυνση των τάσεων δεν είναι προς το κέντρο του κύκλου αλλά προς το σημείο εφαρμογής της δύναμης.

Για τον προσδιορισμό του πεδίου μετατοπίσεων δουλεύουμε ως εξής. Από την σχέση μεταξύ παραμορφώσεων και μετατοπίσεων καθώς και από τον νόμο Hooke (εξ. 2.4, 2.5 και 2.6) προκύπτει το παρακάτω σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων με αγνώστους τα u_r και u_θ .

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) = -\frac{2Y}{\pi E r} \sin \theta \\
\varepsilon_\theta &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) = \frac{2\nu Y}{\pi E r} \sin \theta \\
2\varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} = \frac{1}{\mu} \tau_{r\theta} = 0
\end{aligned} \tag{14}$$

Ολοκληρώνοντας την πρώτη εξίσωση παίρνουμε:

$$u_r = -\frac{2Y}{\pi E} \sin \theta \ln r + f(\theta) \tag{15}$$

όπου f είναι μια συνάρτηση της γωνίας θ .

Αντικαθιστώντας την (15) στην δεύτερη εξίσωση της (14) προκύπτει:

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{2\nu Y}{\pi E} \sin \theta + \frac{2Y}{\pi E} \sin \theta \ln r - f'(\theta) \tag{16}$$

Ολοκληρώνοντας προκύπτει:

$$u_\theta = -\frac{2\nu Y}{\pi E} \cos \theta - \frac{2Y}{\pi E} \cos \theta \ln r - \int f'(\theta) d\theta + g(r) \tag{17}$$

όπου g είναι μία συνάρτηση του r . Ο προσδιορισμός των συναρτήσεων f και g μπορεί να γίνει με αντικατάσταση των (15) και (17) στην τρίτη εξίσωση της (14). Το αποτέλεσμα είναι οι ακόλουθες 2 εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
g(r) - rg'(r) &= K \\
-(1-\nu) \frac{2Y}{\pi E} \cos \theta + f'(\theta) + \int f'(\theta) d\theta &= K
\end{aligned} \tag{18}$$

όπου K μια σταθερά. Η λύση του συστήματος αυτού είναι:

$$g(r) = Cr + K$$

$$f(\theta) = \frac{(1-\nu)Y}{\pi E} \theta \cos \theta + A \sin \theta + B \cos \theta \quad (19)$$

όπου A , B και C οι σταθερές ολοκλήρωσης. Συγκεντρώνοντας τα αποτελέσματα των (15), (17) και (19) προκύπτουν οι εξισώσεις του πεδίου μετατοπίσεων.

$$u_r = \frac{(1-\nu)Y}{\pi E} \theta \cos \theta - \frac{2Y}{\pi E} \ln r \sin \theta + A \sin \theta + B \cos \theta$$

$$u_\theta = -\frac{(1-\nu)Y}{\pi E} \theta \sin \theta - \frac{2Y}{\pi E} \ln r \cos \theta - \frac{(1+\nu)Y}{\pi E} \cos \theta + A \cos \theta - B \sin \theta + Cr \quad (20)$$

Λόγω της συμμετρίας του προβλήματος κατά τον άξονα y θα πρέπει να ισχύει $u_\theta(r, \pi/2) = 0$ οπότε από την δεύτερη εξίσωση της (20) προκύπτει ότι:

$$C = 0, \quad B = -\frac{(1-\nu)Y}{2E} \quad (21)$$

Επίσης υποχρεωτικά υπάρχει μια περιοχή στον άξονα x εκατέρωθεν του $O(0,0)$ έξω από την οποία οι ορθές μετατοπίσεις είναι 0. Αν το όριο της περιοχής απέχει απόσταση r_o από την αρχή θα ισχύει $\overline{u_\theta}(r_o, 0) = 0$ άρα

$$A = \frac{2Y}{\pi E} \ln r_o + \frac{(\nu+1)Y}{\pi E} \quad (22)$$

Δεν γίνεται να προσδιοριστεί εύκολα το r_o διότι δεν εξαρτάται μόνο από την φόρτιση αλλά και από τις πραγματικές διαστάσεις του σώματος καθώς και από το είδος της στήριξης του. Το πρόβλημα αυτό εμφανίζεται συχνά σε περιπτώσεις δυσδιάστατης επαφής. Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις (50) προκύπτει το πεδίο μετατοπίσεων του προβλήματος.

$$u_r = \frac{(1-\nu)Y}{\pi E} \left[\theta - \frac{\pi}{2} \right] \cos \theta - \frac{2Y}{\pi E} \ln \left(\frac{r}{r_o} \right) \sin \theta + \frac{(\nu+1)Y}{\pi E} \sin \theta \quad (23)$$

$$u_\theta = -\frac{(1-\nu)Y}{\pi E} \left[\theta + \frac{\pi}{2} \right] \sin \theta - \frac{2Y}{\pi E} \ln \left(\frac{r}{r_o} \right) \cos \theta \quad (24)$$

Με τις δύο παραπάνω σχέσεις μπορούμε να υπολογίσουμε την μετατόπιση κάθε σημείου του υλικού, αρκεί να δίνονται οι συντεταγμένες (r, θ) του σημείου. Όπως ήταν αναμενόμενο οι σχέσεις δεν ισχύουν για το σημείο $O(0,0)$ όπου εμφανίζεται ανωμαλία. Εκεί τοπικά η μετατόπιση γίνεται άπειρη κάτι το οποίο προφανώς δεν έχει φυσική σημασία.

Αν θέλαμε να μελετήσουμε την κατάσταση της επιφάνειας του υλικού μετά την άσκηση της φόρτισης θα θέσουμε στις δύο παραπάνω σχέσεις $\theta=0$ και π .

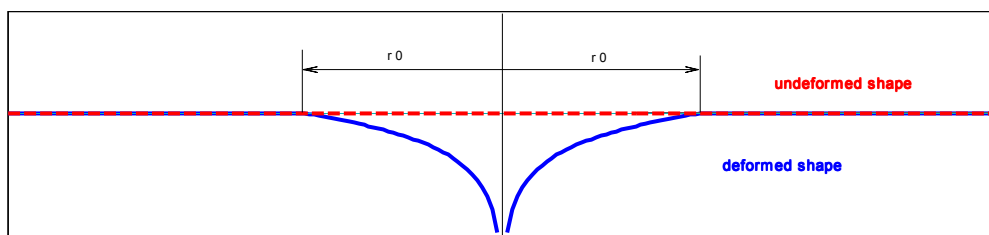
Η ακτινική μετατόπιση της επιφάνειας είναι:

$$\bar{u}_r(r, 0) = \bar{u}_r(r, \pi) = -\frac{Y}{2E}(1-\nu) \quad (25)$$

Η ορθή (κατακόρυφη) μετατόπιση της επιφανείας είναι:

$$\bar{u}_\theta(r, 0) = -\bar{u}_\theta(r, \pi) = -\frac{2Y}{\pi E} \ln \left(\frac{r}{r_o} \right) \quad (26)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (26) μπορούμε να έχουμε μια γραφική εσοπτεία της παραμορφωμένης κατάστασης (deformed shape) του προφίλ της επιφανείας του υλικού κατά την άσκηση της φόρτισης Y (Σχήμα 3).



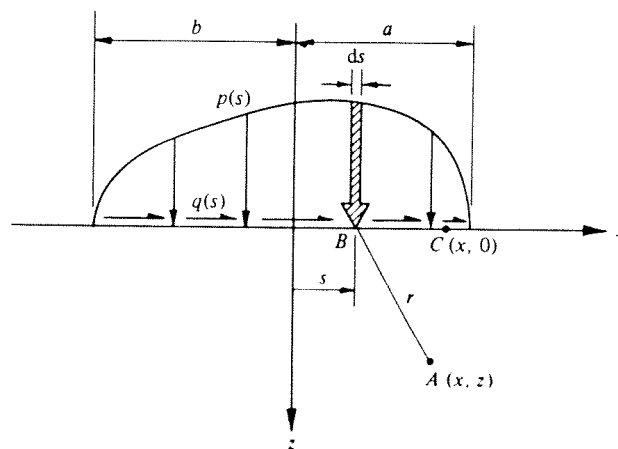
Σχήμα 3

Φαίνεται καθαρά η λογαριθμική συμπεριφορά της συνάρτησης u_θ καθώς επίσης και η φυσική σημασία της περιοχής r_0 γύρω από το σημείο φόρτισης.

Κατανεμημένο θλιπτικό και διατμητικό φορτίο τυχαίας μορφής.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αντιμετωπίσαμε την περίπτωση συγκεντρωμένης δύναμης που ασκείται σε ημι-άπειρο ελαστικό χώρο. Πρέπει τώρα να μελετήσουμε και την περίπτωση που το φορτίο δεν είναι συγκεντρωμένο αλλά κατανεμημένο σε μια πεπερασμένη περιοχή με πλάτος $a+b$.

Στα περισσότερα προβλήματα επαφής που συναντούμε στην μηχανική σπάνια εμφανίζεται αμιγώς ορθή φόρτιση χωρίς να συνοδεύεται από κάποια δύναμη τριβής. Έτσι υποθέτουμε ότι στην επιφάνεια που εξετάζουμε ασκείται το θλιπτικό φορτίο $p(x)$, κάθετο σε αυτήν και το διατμητικό φορτίο $q(x)$, παράλληλο με αυτήν (Σχήμα 4).



Σχήμα 4

Τα εξωτερικά φορτία έχουν τυχαία κατανομή και το ζητούμενο είναι όπως και προηγουμένως ο προσδιορισμός του πεδίου τάσεων και μετατοπίσεων.

Θεωρούμε μια στοιχειώδη περιοχή B με μήκος ds η οποία απέχει απόσταση s από την αρχή των αξόνων. Επειδή το μήκος είναι απειροστό οι κατανεμημένες δυνάμεις που ασκούνται στη B μπορούν να θεωρηθούν σαν δύο συγκεντρωμένες δυνάμεις μεγέθους $p(s)ds$ η οποία θα είναι κάθετη στην επιφάνεια και $q(s)ds$ η οποία θα είναι παράλληλη στην επιφάνεια. Αν επιπλέον με μετασχηματισμό μετακινήσουμε την αρχή του συστήματος συντεταγμένων στο B τότε μπορούμε με βάση την ανάλυση του προηγούμενου κεφαλαίου να προσδιορίσουμε τις τάσεις που αναπτύσσονται στο υλικό λόγω αυτών των δύο συγκεντρωμένων δυνάμεων.

Ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων είναι: $\{x \rightarrow (x-s), y \rightarrow z\}$ και εφαρμόζοντας τον στις εξισώσεις (13) έχουμε:

$$\sigma_x = -\frac{2z}{\pi} \frac{p(s)(x-s)^2 ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} - \frac{2}{\pi} \frac{q(s)(x-s)^3 ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} \quad (27)$$

$$\sigma_z = -\frac{2z^3}{\pi} \frac{p(s) ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} - \frac{2z^2}{\pi} \frac{q(s)(x-s) ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} \quad (28)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{2z^2}{\pi} \frac{p(s)(x-s) ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} - \frac{2z}{\pi} \frac{q(s)(x-s)^2 ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} \quad (29)$$

Αφού λοιπόν οι εξισώσεις (27), (28) και (29) δίνουν τις τάσεις που οφείλονται στην απειροστή δύναμη, για να προσδιορίσουμε το συνολικό πεδίο τάσεων αρκεί να ολοκληρώσουμε στο πλάτος της περιοχής επαφής.

$$\sigma_x = -\frac{2z}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(s)(x-s)^2 ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} - \frac{2}{\pi} \int_{-b}^a \frac{q(s)(x-s)^3 ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} \quad (30)$$

$$\sigma_z = -\frac{2z^3}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(s) ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} - \frac{2z^2}{\pi} \int_{-b}^a \frac{q(s)(x-s) ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} \quad (31)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{2z^2}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(s)(x-s) ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} - \frac{2z}{\pi} \int_{-b}^a \frac{q(s)(x-s)^2 ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} \quad (32)$$

Όταν η αναλυτική μορφή των συναρτήσεων $p(x)$ και $q(x)$ είναι γνωστή μπορούμε με τις παραπάνω σχέσεις να υπολογίσουμε τις τάσεις σε κάθε σημείο του υλικού (παρόλο που τις περισσότερες φορές οι ολοκληρώσεις είναι δύσκολες).

Ο προσδιορισμός των μετατοπίσεων των σημείων της επιφανείας γίνεται με παρόμοιο τρόπο. Θα έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} \bar{u}_x = & -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2E} \left\{ \int_{-b}^x p(s) ds - \int_x^a p(s) ds \right\} \\ & - \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-b}^a q(s) \ln|x-s| ds + C_1 \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_z = & -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-b}^a p(s) \ln|x-s| ds \\ & + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2E} \left\{ \int_{-b}^x q(s) ds - \int_x^a q(s) ds \right\} + C_2 \end{aligned} \quad (34)$$

Οι σταθερές ολοκλήρωσης C_1 και C_2 μπορούν να υπολογιστούν από τις οριακές συνθήκες μετατόπισης του εκάστοτε προβλήματος (για παράδειγμα αν το πρόβλημα έχει συμμετρία φόρτισης και γεωμετρίας τότε $u_x(0, z) = 0$). Ορισμένες φορές οι οριακές συνθήκες δεν αφορούν τις μετατοπίσεις αλλά τις παραγώγους των μετατοπίσεων, οπότε είναι χρήσιμο να τις προσδιορίσουμε. Παραγωγίζοντας τις (33), (34) έχουμε:

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} p(x) - \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-b}^a \frac{q(s)}{x-s} ds \quad (35)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-b}^a \frac{p(s)}{x-s} ds + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} q(x) \quad (36)$$

Η παράγωγος $\partial \bar{u}_x / \partial x$ είναι η εφαπτομενική συνιστώσα της επιφανειακής παραμόρφωσης $\bar{\varepsilon}_x$, και η παράγωγος $\partial \bar{u}_z / \partial x$ είναι η πραγματική κλίση της παραμορφωμένης κατάστασης της επιφανείας.

Μια περίπτωση με ξεχωριστό ενδιαφέρον ανακύπτει αν $q(x) = 0$. Από την (35) προκύπτει ότι:

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} p(x) \quad (37)$$

Επίσης από τον νόμο του Hooke (2.4) έχουμε:

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{1}{E} \left\{ (1-\nu^2) \cdot \bar{\sigma}_x - \nu \cdot (1+\nu) \cdot \bar{\sigma}_z \right\} \quad (38)$$

Εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη των (37), (38) και έχοντας υπόψη ότι $\bar{\sigma}_z = -p(x)$ παίρνουμε ότι:

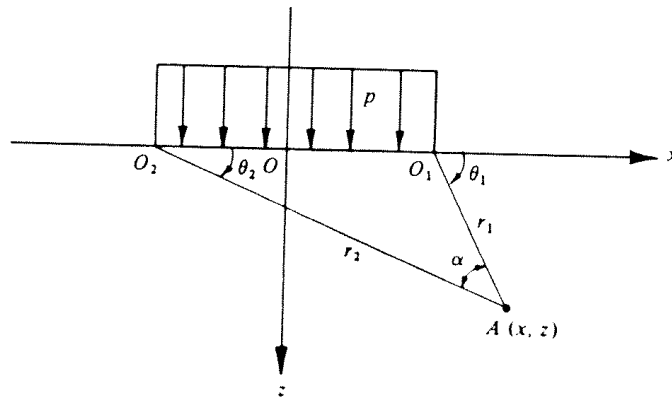
$$\boxed{\bar{\sigma}_x = \bar{\sigma}_z = -p(x)} \quad (39)$$

Αυτό σημαίνει ότι κάτω από την επίδραση οποιουδήποτε είδους θλιπτικού κατανεμημένου φορτίου, οι επιφανειακές τάσεις που αναπτύσσονται είναι ίσες και αντίθετες με το κάθετα επιβαλλόμενο φορτίο. Το γεγονός αυτό δημιουργεί μια τάση του επιφανειακού στρώματος κάθε υλικού να αντιστέκεται περισσότερο, δηλαδή να φθάνει δυσκολότερα στο όριο διαρροής, όταν του επιβάλλεται καθαρά θλιπτικό φορτίο.

Ομοιόμορφα κατανεμημένα φορτία.

(α) Ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο θλιπτικής πίεσης

Πρόκειται για την απλούστερη μορφή κατανεμημένης δύναμης όπου η κάθετη δύναμη δίνεται από την σταθερή συνάρτηση $p(x) = c$ εντός μιας περιοχής $-a \leq x \leq a$ και η διάτμηση απουσιάζει εντελώς.



Σχήμα 5

Ισχύουν οι εξισώσεις (30), (31), (32) του προηγούμενου κεφαλαίου. Το $p(x)$ βγαίνει έξω από τα ολοκληρώματα καθώς είναι σταθερό και το $q(x)$ είναι παντού μηδενικό. Κάνοντας τις πράξεις προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις του τασικού πεδίου.

$$\sigma_x = -\frac{P}{2\pi} [2(\theta_1 - \theta_2) + (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)] \quad (40)$$

$$\sigma_z = -\frac{P}{2\pi} [2(\theta_1 - \theta_2) - (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)] \quad (41)$$

$$\tau_{xz} = \frac{P}{2\pi} (\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2) \quad (42)$$

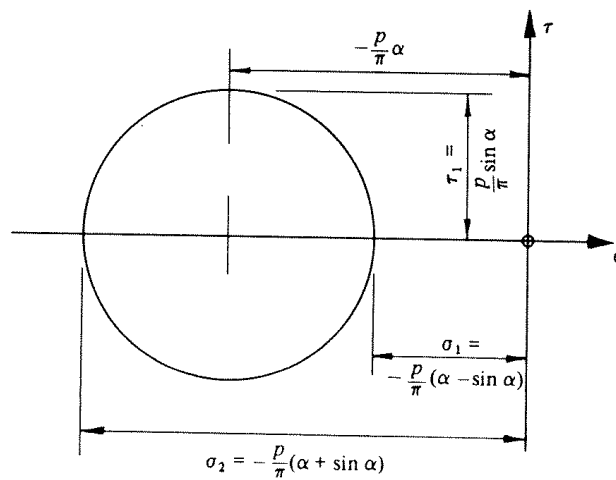
Οι κύριες τάσεις (μηδενική διάτμηση) δίνονται ως γνωστόν από την παρακάτω σχέση:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} \quad (43)$$

Με αντικατάσταση την (43) των (40), (41), (42) και αν θέσουμε για ευκολία $\alpha = (\theta_1 - \theta_2)$ προκύπτει ότι οι κύριες τάσεις θα είναι:

$$\sigma_{1,2} = -\frac{p}{\pi}(\alpha \mp \sin \alpha) \quad (44)$$

Γνωρίζοντας τις δύο κύριες τάσεις του συστήματος μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε τον κύκλο Mohr του προβλήματος (Σχήμα 6).

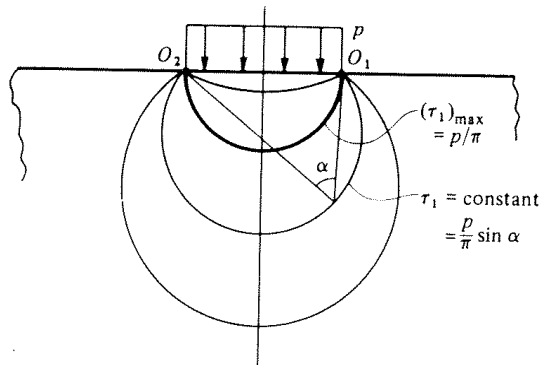


Σχήμα 6

Ο κύκλος Mohr μας πληροφορεί ότι η μέγιστη διατμητική τάση που εμφανίζεται σε σύστημα συντεταγμένων με γωνία -45° ως προς το κύριο σύστημα, θα έχει μέτρο:

$$\tau_1 = \frac{p}{\pi} \sin \alpha \quad (45)$$

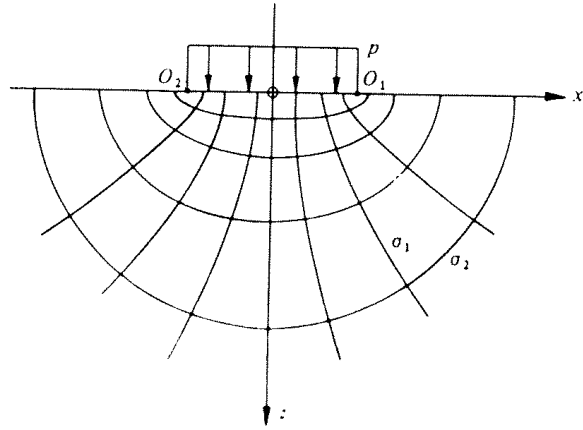
Αν θέσουμε όπου τ_1 μια σταθερά προκύπτει ότι και η γωνιά α θα είναι σταθερή οπότε οι καμπύλες σταθερής μέγιστης διατμητικής τάσης θα είναι οικογένεια κύκλων που διέρχονται από τα σημεία O_1 και O_2 όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 7).



Σχήμα 7

Επίσης από την εξίσωση (45) προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή της τάσης τ_1 είναι p/π για γωνία α ίση με $\pi/2$. Στο Σχήμα 7 ο κύκλος που αντιστοιχεί στην μέγιστη αυτή τάση είναι αυτός που έχει διάμετρο O_1O_2 .

Από την σχέση (44) προκύπτει επιπλέον ότι οι διαδρομές των κύριων τάσεων $\sigma_{1,2}$ είναι οικογένεια ομοεστιακών ελλείψεων και υπερβολών με εστίες τα σημεία O_1 και O_2 όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.



Σχήμα 8

Αν παραγωγίσουμε την σχέση (44) ως προς a και θέσουμε $\partial\sigma_{1,2}/\partial a = 0$ παίρνουμε την μέγιστη τιμή της κύριας τάσης που είναι $\sigma_{1,\max} = -p$ για $\alpha = \pi$. Δηλαδή η μέγιστη κύρια τάση που δημιουργείται στο υλικό εμφανίζεται επιφανειακά στην περιοχή μεταξύ O_1 και O_2 και είναι ίσου μέτρου και αντίθετης φοράς με το επιβαλλόμενο φορτίο.

Εν συνεχεία πρέπει να υπολογιστεί και το πεδίο μετατοπίσεων του προβλήματος. Επειδή ο υπολογισμός των μετατοπίσεων σε όλη την έκταση του υλικού είναι δύσκολος θα περιοριστούμε στον υπολογισμό των επιφανειακών μετατοπίσεων. Από την εξίσωση (35) και για ένα σημείο εντός της περιοχής φόρτισης $-a \leq x \leq a$ έχουμε:

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} p \quad (46)$$

Και ολοκληρώνοντας την προηγούμενη έχουμε:

$$\bar{u}_x = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} px \quad (47)$$

Από την εξίσωση (36) για τις κατακόρυφες μετατοπίσεις και για $-a \leq x \leq a$ παίρνουμε:

$$\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} = -\frac{2(1-v^2)}{\pi E} p \int_{-a}^a \frac{ds}{x-s} \quad (48)$$

Η συνάρτηση του ολοκληρώματος δεν ορίζεται για $s = x$ οπότε θα πρέπει το ολοκλήρωμα να υπολογιστεί τμηματικά.

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{ds}{x-s} &= \int_{-a}^{x-\varepsilon} \frac{ds}{x-s} - \int_{x+\varepsilon}^a \frac{ds}{s-x} \\ &= [\ln(x-s)]_{-a}^{x-\varepsilon} - [\ln(s-x)]_{x+\varepsilon}^a \\ &= \ln(a+x) - \ln(a-x) \end{aligned}$$

Οπότε αν αντικαταστήσουμε στην (48) θα πάρουμε:

$$\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} = -\frac{2(1-v^2)}{\pi E} p \{ \ln(a+x) - \ln(a-x) \} \quad (49)$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$\bar{u}_z = -\frac{(1-v^2)}{\pi E} p \left\{ (a+x) \ln\left(\frac{a+x}{a}\right)^2 + (a-x) \ln\left(\frac{a-x}{a}\right)^2 \right\} + C \quad (50)$$

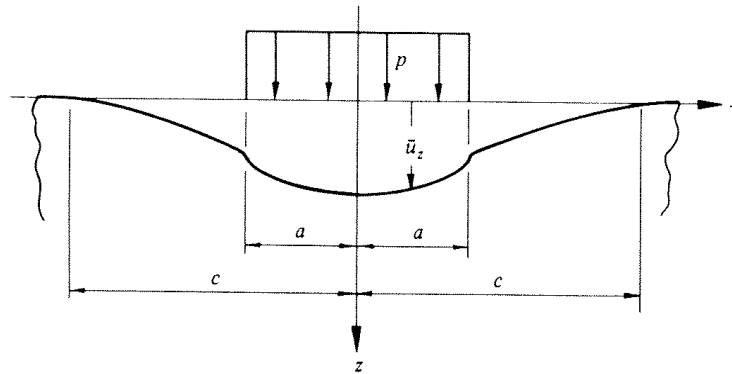
Από την εξίσωση (35) και για ένα σημείο εκτός της περιοχής φόρτισης ($|x| > a$) έχουμε:

$$\bar{u}_x = \begin{cases} +\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} pa & x < -a \\ -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} pa & x > a \end{cases} \quad (51)$$

Και από την εξίσωση (36) για τις κατακόρυφες μετατοπίσεις εκτός της περιοχής φόρτισης ($|x| > a$) προκύπτει:

$$\bar{u}_z = -\frac{(1-\nu^2)p}{\pi E} \left\{ (x+a) \ln\left(\frac{x+a}{a}\right)^2 - (x-a) \ln\left(\frac{x-a}{a}\right)^2 \right\} + C \quad (52)$$

Η παραπάνω σχέση ταυτίζεται με την σχέση (50). Αποδεικνύεται έτσι ότι η κατακόρυφη μετατόπιση της επιφανείας δίνεται από την ίδια σχέση είτε πρόκειται για σημείο εντός της περιοχής φόρτισης, είτε πρόκειται για σημείο εκτός αυτής. Η σταθερά ολοκλήρωσης C στις σχέσεις (50) και (52) είναι η ίδια και προσδιορίζεται από τις πραγματικές συνθήκες του προβλήματος και τις διαστάσεις του σώματος. Αν θεωρήσουμε ότι μετά από μια ορισμένη απόσταση από την αρχή των αξόνων, έστω $x = \pm c$ οι ορθές μετατοπίσεις της επιφανείας \bar{u}_z μηδενίζονται τότε η παραμορφωμένη κατάσταση (deformed shape) του προφίλ της επιφανείας του υλικού κατά την άσκηση της φόρτισης παριστάνεται στο Σχήμα 9.



Σχήμα 9

(β) Ομοιόμορφα κατανεμημένη διάτμηση

Πρόκειται για την απλούστερη μορφή διάτμησης όπου η φόρτιση δίνεται από την σταθερή συνάρτηση $q(x) = c$ εντός μιας περιοχής $-a \leq x \leq a$ και η κάθετη δύναμη απουσιάζει εντελώς.

Ισχύουν οι εξισώσεις (30), (31), (32) του προηγούμενου κεφαλαίου. Το $q(x)$ βγαίνει έξω από τα ολοκληρώματα καθώς είναι σταθερό και το $p(x)$ είναι παντού μηδενικό. Κάνοντας τις πράξεις προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις του τασικού πεδίου.

$$\sigma_x = \frac{q}{2\pi} \left[4 \ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right) - (\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2) \right] \quad (53)$$

$$\sigma_z = \frac{q}{2\pi} (\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2) \quad (54)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{q}{2\pi} [2(\theta_1 - \theta_2) + (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)] \quad (55)$$

Όπου $r_{1,2} = \left[(x \mp a)^2 + z^2 \right]^{1/2}$.

Εξετάζοντας τις σχέσεις (33) και (34) που αφορούν στην γενική περίπτωση κατανεμημένου φορτίου, ανακαλύπτουμε ότι οι επιφανειακές μετατοπίσεις του παρόντος προβλήματος μπορούν να προκύψουν απευθείας από τις σχέσεις (47), (50), (51) και (52) που αφορούν στο πρόβλημα ορθού κατανεμημένου φορτίου. Αν χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα p και q για να δηλώσουμε παρόμοιες κατανομές ορθού και διατμητικού φορτίου αντίστοιχα τότε ισχύει:

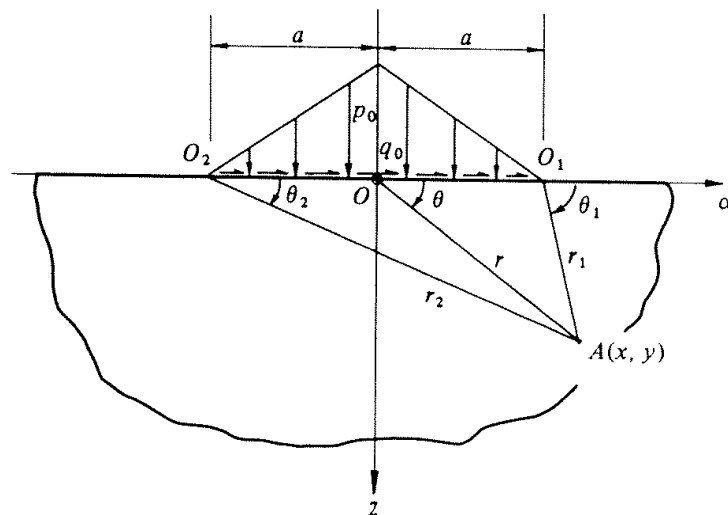
$$\left(\overline{u_x} \right)_q = \left(\overline{u_z} \right)_p \quad \text{και} \quad \left(\overline{u_z} \right)_q = -\left(\overline{u_x} \right)_p \quad (56, 57)$$

Η κατανομή των τάσεων των εξισώσεων (53), (54) και (55) βρέθηκε με βάση την γενική περίπτωση φόρτισης (εξ. (30), (31) και (32)), όπου θεωρήσαμε το κατανεμημένο φορτίο σαν άθροισμα απειροστών συγκεντρωμένων φορτίων (πρόβλημα Flamant). Μια εναλλακτική προσέγγιση λύσης που χρησιμοποιείται στο βιβλίο των Timoshenko & Goodier είναι η υπέρθεση κατάλληλων τασικών συναρτήσεων Airy. Παρόλο που με την μέθοδο αυτή ο υπολογισμός των

κατανομών τάσεων είναι ευκολότερος, δεν υπάρχει τρόπος να βρούμε την τασική συνάρτηση παρά μόνο στηριζόμενοι στην εμπειρία και στην διαίσθηση. Για τον λόγο αυτό δεν την χρησιμοποιήσαμε.

Φορτία με τριγωνική κατανομή.

Ακόμη μια απλή περίπτωση προβλήματος επαφής με κατανεμημένο φορτίο είναι και η περίπτωση που η φόρτιση μεταβάλλεται γραμμικά εντός μιας πεπερασμένης περιοχής O_1O_2 , από την τιμή μηδέν στα άκρα O_1 και O_2 έως τις μέγιστες τιμές p_0 και q_0 στο κέντρο O ($x=0$) όπως φαίνεται στο Σχήμα 10.



Σχήμα 10

Η αναλυτική μορφή των συναρτήσεων που δίνουν τα εξωτερικά φορτία είναι:

$$p(x) = \frac{p_o}{a}(a - |x|) \quad |x| \leq a \quad (58)$$

και

$$q(x) = \frac{q_o}{a}(a - |x|) \quad |x| \leq a \quad (59)$$

Αρκεί να αντικαταστήσουμε τις παραπάνω εκφράσεις στις γενικές σχέσεις (30), (31) και (32) και κάνοντας τις ολοκληρώσεις προκύπτει το τασικό πεδίο για κάθε σημείο $A(x,z)$ του στερεού χωριστά για την ορθή τάση $p(x)$:

$$\sigma_x = \frac{p_o}{\pi a} \left[(x-a)\theta_1 + (x+a)\theta_2 - 2x\theta + 2z \ln \left(\frac{r_1 r_2}{r^2} \right) \right] \quad (60)$$

$$\sigma_z = \frac{p_o}{\pi a} \left[(x-a)\theta_1 + (x+a)\theta_2 - 2x\theta \right] \quad (61)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{p_o z}{\pi a} (\theta_1 + \theta_2 - 2\theta) \quad (62)$$

και για την διατμητική τάση $q(x)$:

$$\sigma_x = \frac{q_o}{\pi a} \left[2x \ln \left(\frac{r_1 r_2}{r^2} \right) + 2a \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) - 3z(\theta_1 + \theta_2 - 2\theta) \right] \quad (63)$$

$$\sigma_z = -\frac{q_o z}{\pi a} (\theta_1 + \theta_2 - 2\theta) \quad (64)$$

$$\tau_{xz} = \frac{q_o}{\pi a} \left[(x-a)\theta_1 + (x+a)\theta_2 - 2x\theta + 2z \ln \left(\frac{r_1 r_2}{r^2} \right) \right] \quad (65)$$

όπου $r_1^2 = (x-a)^2 + z^2$, $r_2^2 = (x+a)^2 + z^2$, $r^2 = x^2 + z^2$ και $\tan \theta_1 = z/(x-a)$, $\tan \theta_2 = z/(x+a)$, $\tan \theta = z/x$. Εννοείται ότι η συνολική τάση σε κάποιο σημείο του υλικού θα δίνεται από το άθροισμα των αντίστοιχων τάσεων λόγω πίεσης και λόγω διάτμησης.

Οι επιφανειακές μετατοπίσεις μπορούν να υπολογιστούν με την βοήθεια των σχέσεων (35) και (36). Λόγω της **ορθής εξωτερικής φόρτισης $p(x)$** για ένα σημείο της επιφάνειας του σώματος το οποίο βρίσκεται **εντός της ζώνης φόρτισης** η οριζόντια μετατόπιση θα είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} &= -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} \frac{p_o}{a} (a-|x|) \Rightarrow \\ \bar{u}_x &= -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} \frac{p_o}{a} x \left(a - \frac{1}{2}|x| \right) \quad |x| \leq a \end{aligned} \quad (66)$$

Και για ένα σημείο της επιφάνειας το οποίο βρίσκεται **εκτός της ζώνης φόρτισης**:

$$\bar{u}_x = \mp \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} \frac{p_o a}{2} \quad |x| \geq a \quad (67)$$

Ενώ η κατακόρυφη μετατόπιση θα είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} &= -\frac{(1-\nu^2)}{\pi E} \frac{p_o}{a} \left[(x+a) \ln \left(\frac{x+a}{x} \right)^2 + (x-a) \ln \left(\frac{x-a}{x} \right)^2 \right] \Rightarrow \\ \bar{u}_z &= -\frac{(1-\nu^2)}{2\pi E} \frac{p_o}{a} \left[(x+a)^2 \ln \left(\frac{x+a}{x} \right)^2 + (x-a)^2 \ln \left(\frac{x-a}{x} \right)^2 - 2x^2 \ln \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right] + C \end{aligned} \quad (68)$$

Το πεδίο επιφανειακών μετατοπίσεων λόγω της **διατμητικής εξωτερικής φόρτισης $q(x)$** ακολουθεί την αναλογία των εξισώσεων (56) και (57).

Αν εξετάσουμε την κατανομή των τάσεων που περιγράφεται στις εξισώσεις (60) έως (65) παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις είναι παντού πεπερασμένες και συνεχείς. Επίσης η κατανομή των παραμορφώσεων που περιγράφεται στις εξισώσεις (66) έως (68) είναι και αυτή πεπερασμένη και συνεχής. Η κατάσταση αυτή έρχεται σε αντίθεση με την προηγούμενη περίπτωση φόρτισης όπου εμφανίζονταν ασυνέχειες στα άκρα της ζώνης φόρτισης.

4

ΕΠΑΦΗ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ ΘΕΩΡΙΑ HERTZ

Γεωμετρικά στοιχεία της επαφής λείων, μη-σύμμορφων επιφανειών.

Όταν δύο μη-σύμμορφες επιφάνειες έρχονται σε επαφή αρχικά συναντιούνται σε ένα σημείο ή κατά μήκος μιας γραμμής. Υπό την επίδραση ενός οσοδήποτε μικρού καθέτου φορτίου υπάρχει παραμόρφωση των επιφανειών στην περιοχή κοντά στο σημείο της πρώτης επαφής, και έτσι δημιουργείται μια περιοχή επαφής των σωμάτων, ή οποία είναι υπαρκτή παρόλο που είναι απειροελάχιστη σε σχέση με τις διαστάσεις των σωμάτων. Είναι λοιπόν αναγκαία μια θεωρία η οποία θα περιγράφει το σχήμα της περιοχής επαφής και τον τρόπο με τον οποίο αυτή μεταβάλλεται καθώς αυξάνεται η εξωτερική φόρτιση και επιπλέον το μέγεθος και την κατανομή των επιφανειακών τάσεων που αναπτύσσονται, ορθών και διατμητικών. Τέλος, μια τέτοια θεωρία θα πρέπει να μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τις συνιστώσες των τάσεων και των παραμορφώσεων στην περιοχή πλησίον της επαφής.

Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με μια τέτοια θεωρία, χρονολογικά την πρώτη που διατυπώθηκε (1881). Αλλά πριν προχωρήσουμε στην θεωρία είναι αναγκαία μια αναλυτική περιγραφή της γεωμετρίας των επαπτόμενων επιφανειών. Η αρχή του ορθογώνιου συστήματος αναφοράς γενικά στα προβλήματα επαφής τοποθετείται στο σημείο της πρώτης επαφής. Το επίπεδο $x-y$ ταυτίζεται με το κοινό επαπτόμενο επίπεδο στις επιφάνειες που διέρχεται από την αρχή. Ο άξονας z ταυτίζεται με την κοινή κάθετη στις επιφάνειες στο σημείο επαφής και η θετική φορά του είναι προς το κατώτερο σώμα. Κάθε επιφάνεια θεωρείται λεία σε μικροσκοπική και μακροσκοπική κλίμακα. Λεία σε μικροσκοπική κλίμακα σημαίνει απουσία τραχύτητας και κάθε είδους μικρών επιφανειακών ανωμαλιών, που αν υπήρχαν θα οδηγούσαν σε ανομοιόμορφη επαφή

και μεγάλες τοπικές διακυμάνσεις της πίεσης επαφής. Λεία σε μακροσκοπική κλίμακα σημαίνει ότι τα προφίλ των επιφανειών είναι συνεχείς συναρτήσεις μέχρι και την δεύτερη παράγωγο τους εντός της περιοχής επαφής.

Κάνοντας όλες τις παραπάνω παραδοχές μπορούμε να εκφράσουμε το προφίλ κάθε επιφάνειας στην περιοχή πλησίον της αρχής του συστήματος συντεταγμένων με μια προσεγγιστική σχέση της μορφής:

$$z_1 = A_1x^2 + B_1y^2 + C_1xy + \dots \quad (1)$$

Στην έκφραση αυτή αγνοούμε τους όρους τρίτης και μεγαλύτερης τάξης. Αποδεικνύεται ότι με κατάλληλη επιλογή προσανατολισμού αξόνων $(x, y) \xrightarrow{\theta} (x_1, y_1)$ οι όροι που περιέχουν γινόμενο xy απαλείφονται, ούτως ώστε η (1) να μπορεί να γραφεί ως:

$$z_1 = \frac{1}{2R'_1}x_1^2 + \frac{1}{2R''_1}y_1^2 \quad (2)$$

όπου R'_1 και R''_1 είναι οι κύριες ακτίνες καμπυλότητας της επιφάνειας 1, στην αρχή των αξόνων. Ορίζονται αντίστοιχα ως η μέγιστη και ελάχιστη τιμή της ακτίνας καμπυλότητας όλων των πιθανών διατομών της επιφάνειας και ισχύει ότι, αν υπάρχει ένα επίπεδο συμμετρίας στην επιφάνεια, τότε μια τουλάχιστον από αυτές θα κείται επ' αυτού. Παρομοίως μπορεί να εκφραστεί και το προφίλ της δεύτερης επιφάνειας επαφής:

$$z_2 = -\left(\frac{1}{2R'_2}x_2^2 + \frac{1}{2R''_2}y_2^2\right) \quad (3)$$

Η απόσταση μεταξύ των δύο επιφανειών ορίζεται ως $h = z_1 - z_2$. Αφαιρώντας κατά μέλη την σχέση (1) ως προς τις δύο επιφάνειες παίρνουμε την σχέση:

$$h = Ax^2 + By^2 + Cxy \quad (4)$$

Όπως και προηγουμένως μπορούμε με κατάλληλη περιστροφή αξόνων να μηδενίσουμε τον όρο του γινομένου. Έτσι θα πάρουμε την σχέση:

$$h = Ax^2 + By^2 = \frac{1}{2R'}x^2 + \frac{1}{2R''}y^2 \quad (5)$$

όπου A και B θετικές σταθερές. Τα R' και R'' ονομάζονται κύριες σχετικές ακτίνες καμπυλότητας. Εάν οι διευθύνσεις κύριας καμπυλότητας των δύο επιφανειών (π.χ. ο άξονας x_1 και ο άξονας x_2) σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία a , αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις που συνδέουν τις κύριες με την σχετική καμπυλότητα:

$$(A+B) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R''_1} + \frac{1}{R'_2} + \frac{1}{R''_2} \right) \quad (6)$$

και

$$|B-A| = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R''_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{R'_2} - \frac{1}{R''_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R''_1} \right) \left(\frac{1}{R'_2} - \frac{1}{R''_2} \right) \cos 2a \right]^{1/2} \quad (7)$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα είναι δυνατός ο προσδιορισμός των A και B και άρα της εξίσωσης που δίνει την απόσταση των επιφανειών από την σχέση (5).

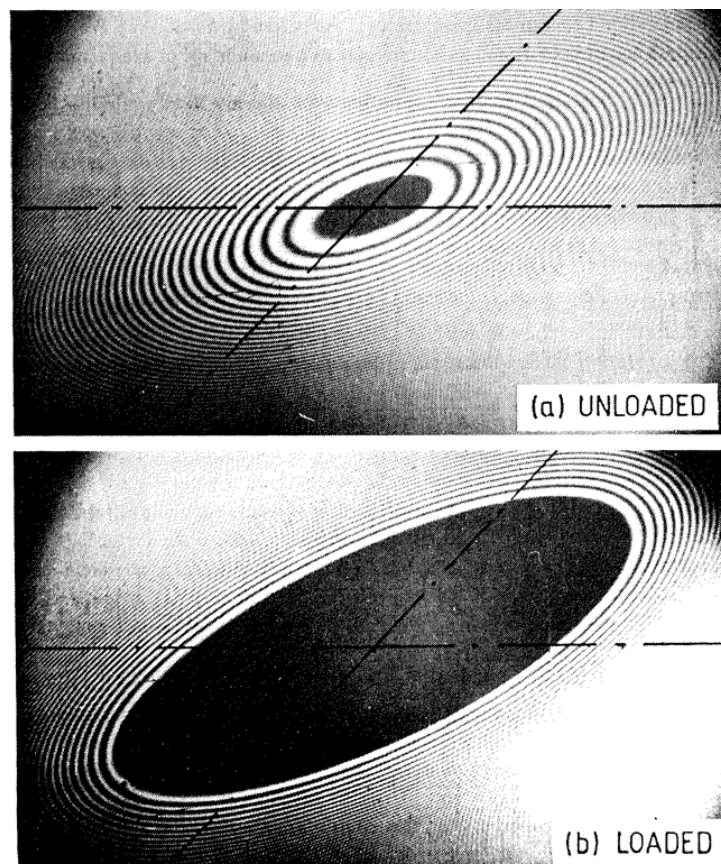
Στο σημείο αυτό ορίζουμε την ισοδύναμη ακτίνα καμπυλότητας της επαφής (ορίζεται πάντα για δύο επιφάνειες και όχι για μια):

$$R_e = (R'R'')^{1/2} = \frac{1}{2}(AB)^{-1/2} \quad (8)$$

Σε όλες τις προηγούμενες εξισώσεις δεχόμαστε ότι οι **κυρτές** επιφάνειες έχουν **θετική** καμπυλότητα και οι **κοίλες** επιφάνειες, **αρνητική** καμπυλότητα. Επομένως μπορούμε να

περιγράψουμε με την ίδια ευκολία κοίλες ή ακόμα και σελοειδείς (saddle-shaped) επιφάνειες αρκεί να προσθέσουμε αρνητικό πρόσημο στις ακτίνες των κοίλων καμπυλοτήτων.

Είναι προφανές από την σχέση (5) ότι οι ισοϋψείς καμπύλες σταθερού h είναι ελλείψεις. Ο λόγος του μεγάλου προς τον μικρό ημιάξονα της έλλειψης είναι ίσος με $(B/A)^{1/2} = (R'/R'')^{1/2}$. Στο Σχήμα 1 φαίνεται ένα παράδειγμα τέτοιων ελλειπτικών ισοόψων καμπυλών με την μορφή κροσσών συμβολής φωτός μεταξύ κυλινδρικών φακών ακτίνας καμπυλότητας R και γωνίας αξόνων 45° . Στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι $R_e = R\sqrt{2}$ και $(B/A)^{1/2} = (R'/R'')^{1/2} = 2.41$.



Σχήμα 1

Στο σημείο αυτό μπορούμε να δώσουμε ένα πιο ακριβή ορισμό των μη σύμμορφων επιφανειών: είναι αυτές όπου οι σχετικές καμπυλότητες $1/R'$ και $1/R''$ είναι αρκετά μεγάλες έτσι ώστε οι όροι Ax^2 και By^2 της σχέσης (5) να πολύ μεγαλύτεροι από τους όρους υψηλότερης τάξης που αγνοήσαμε.

Η θεωρία του Hertz ήταν η πρώτη, χρονολογικά, θεωρία που έδωσε ικανοποιητικά αποτελέσματα όσον αφορά τις τάσεις που αναπτύσσονται κατά την επαφή ελαστικών σωμάτων. Όπως είδαμε παραπάνω ο Hertz έκανε αρχικά την υπόθεση ότι η περιοχή επαφής είναι γενικά ελλειπτικού σχήματος. Κατόπιν, για να είναι δυνατός ο υπολογισμός των τοπικών παραμορφώσεων, εισήγαγε την απλούστευση ότι τα σώματα μπορούν να θεωρηθούν ελαστικά ημιεπίπεδα. Η απλούστευση αυτή, η οποία είναι πολύ συνηθισμένη στην αντιμετώπιση προβλημάτων επαφής, έχει ως αποτέλεσμα οι υψηλές συγκεντρώσεις τάσεων να αντιμετωπίζονται ξεχωριστά από την γενική κατανομή των τάσεων που προκαλείται από το σχήμα των σωμάτων και τον τρόπο στήριξής τους. Για να ανταποκρίνεται η απλούστευση αυτή στην πραγματικότητα θα πρέπει να πληρούνται δύο προϋποθέσεις: πρώτον οι διαστάσεις της περιοχής επαφής πρέπει να είναι μικρές σε σχέση με τις διαστάσεις των σωμάτων και δεύτερον θα πρέπει να είναι μικρές και σε σύγκριση με την σχετική ακτίνα καμπυλότητας των επιφανειών που έρχονται σε επαφή. Η πρώτη συνθήκη είναι απαραίτητη για να εξασφαλίσει ότι η κατανομή των τάσεων της περιοχής επαφής δεν επηρεάζεται από την εγγύτητα στο όριο των σωμάτων. Η δεύτερη συνθήκη είναι απαραίτητη για να εξασφαλίσει αφενός ότι η επιφάνεια πλησίον της περιοχής επαφής προσεγγίζει περίπου την επιπεδότητα του ελαστικού ημιεπιπέδου και αφετέρου ότι οι παραμορφώσεις εντός της περιοχής επαφής είναι αρκετά μικρές για να ισχύει η γραμμική θεωρία των μικρών παραμορφώσεων.

Τα μεταλλικά στερεά που φορτίζονται στην ελαστική περιοχή, ικανοποιούν αναγκαστικά τις δύο προηγούμενες συνθήκες. Ωστόσο χρειάζεται προσοχή όταν εξετάζουμε υλικά με χαμηλό μέτρο ελαστικότητας, όπως λάστιχο, όπου οι παραμορφώσεις ξεπερνούν τα όρια της θεωρίας των μικρών παραμορφώσεων. Η τελευταία παραδοχή της θεωρίας του Hertz είναι ότι δεν υπάρχει τριβή μεταξύ των επιφανειών που εφάπτονται. Κατά συνέπεια δεχόμαστε μόνο κατανομές ορθών τάσεων στην περιοχή επαφής.

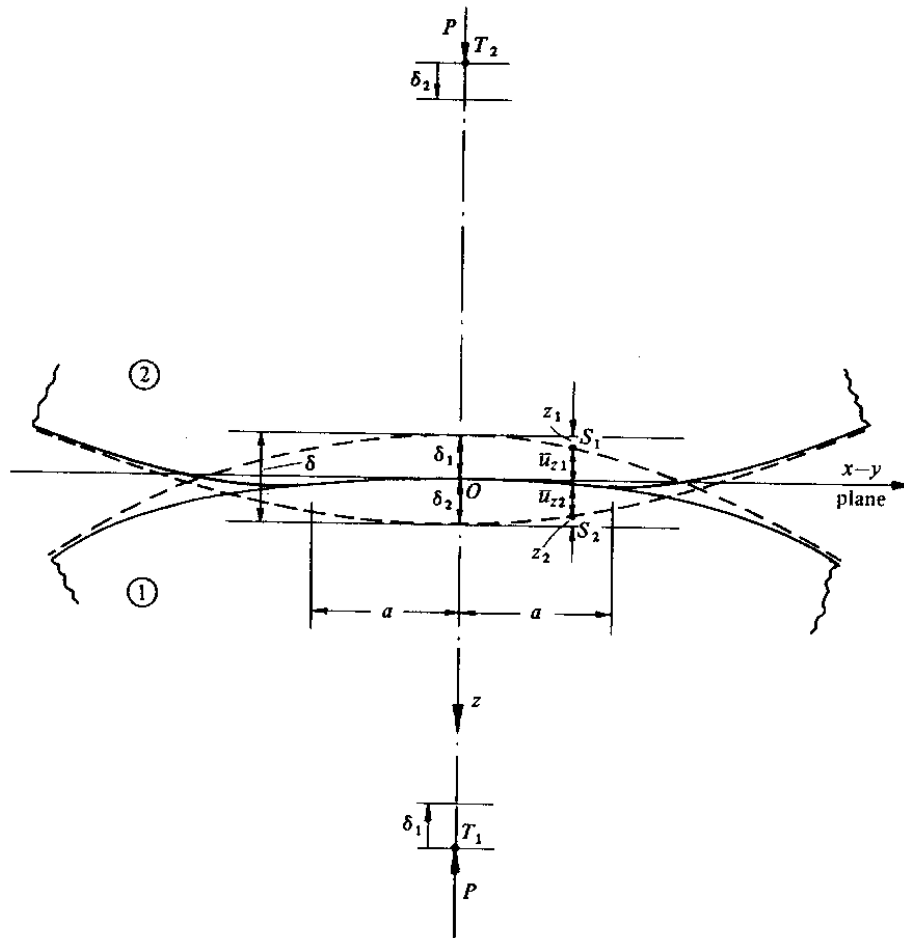
Συγκεντρωτικά, αν συμβολίσουμε με a την περιοχή επαφής, με R την σχετική ακτίνα καμπυλότητας, με R_1 και R_2 τις κύριες ακτίνες καμπυλότητας και με l τις κύριες διαστάσεις των σωμάτων σε όλες τις διευθύνσεις, οι παραδοχές της θεωρίας επαφής του Hertz έχουν ως εξής:

- (i) Οι επιφάνειες είναι συνεχείς και μη σύμμορφες: $a \ll R$
- (ii) Οι παραμορφώσεις είναι μικρές: $a \ll R$

(iii) Κάθε σώμα θεωρείται ιδεατά σαν ελαστικό ημιεπίπεδο: $a \ll R_{1,2}$, $a \ll l$

(iv) Δεν υπάρχει τριβή μεταξύ των επιφανειών: $q_x = q_y = 0$

Στο Σχήμα 2 μπορούμε να δούμε όλα τα μεγέθη που έχουν ως τώρα αναφερθεί πάνω στην περιοχή επαφής των δύο επιφανειών.



Σχήμα 2

Αν καλέσουμε \bar{u}_{z1} και \bar{u}_{z2} τις μετατοπίσεις των σημείων S_1 και S_2 αντίστοιχα και δ την απόσταση μεταξύ αυτών τότε θα ισχύει η σχέση:

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} + \delta_1 + \delta_2 = \delta \Rightarrow$$

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} = \delta - Ax^2 - By^2$$

(9)

Η παραπάνω σχέση ισχύει **μόνο** αν τα σημεία S_1 και S_2 βρίσκονται **εντός** της περιοχής επαφής. Για τα σημεία που βρίσκονται **εκτός** της περιοχής επαφής ισχύει η *Σχέση 10*.

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} > \delta - Ax^2 - By^2 \quad (10)$$

Στο σημείο αυτό θα δώσουμε έναν **ορισμό του προβλήματος ελαστικότητας**: Αναζητούμε την κατανομή πίεσης μεταξύ των επιφανειών $p(x, y)$ η οποία όταν εφαρμοστεί σε μια περιοχή S της κοινής επιφάνειας δύο ελαστικών ημιεπιπέδων, παράγει ορθές μετατοπίσεις των σημείων των επιφανειών, που ικανοποιούν την σχέση (9) εντός της περιοχής S και την σχέση (10) εκτός αυτής.

(Α) ΣΤΕΡΕΑ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

Θα εξετάσουμε την πρώτη και απλούστερη περίπτωση δύο σφαιρών που έρχονται σε επαφή. Για τις σφαίρες ισχύει $R_1' = R_1'' = R_1$, $R_2' = R_2'' = R_2$. Η επιφάνεια επαφής θα είναι προφανώς κυκλική, με ακτίνα έστω a .

Από τις εξισώσεις (6) και (7) προκύπτει ότι:

$$A = B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (11)$$

Η σχέση (9) λοιπόν γίνεται:

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} = \delta - \frac{1}{2R} r^2 \quad (12)$$

όπου $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$ η σχετική καμπυλότητα.

Μια κατανομή πίεσης η οποία προκαλεί την εμφάνιση μετατοπίσεων που πληρούν τις προϋποθέσεις (9) και (10) είναι αυτή που προτείνει ο Hertz, δηλαδή:

$$p = p_0 \left\{ 1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (13)$$

Και οι εν λόγω μετατοπίσεις δίνονται από την σχέση:

$$\bar{u}_z = \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{\pi p_0}{4a} (2a^2 - r^2), \quad r \leq a \quad (14)$$

Στο σημείο αυτό ορίζω ως ισοδύναμο μέτρο ελαστικότητας των σωμάτων 1 και 2 το μέγεθος:

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (15)$$

Αντικαθιστώντας τις μετατοπίσεις από την σχέση (14) στην εξίσωση (12) προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$\frac{\pi p_0}{4aE^*} (2a^2 - r^2) = \delta - \frac{1}{2R} r^2 \quad (16)$$

από την οποία προκύπτει τελικά η ζητούμενη σχέση που δίνει την ακτίνα του κύκλου επαφής συναρτήσει της έντασης της πίεσης p_0 .

$$a = \frac{\pi p_0 R}{2E^*} \quad (17)$$

Από την (16) προκύπτει επιπλέον και η προσέγγιση δ των δύο σωμάτων.

$$\delta = \pi a p_0 / (2E^*) \quad (18)$$

Το συνολικό θλιπτικό φορτίο που συμπιέζει τις επιφάνειες μπορεί να υπολογιστεί ολοκληρώνοντας την συνάρτηση της πίεσης στο εμβαδό επαφής.

$$P = \int_0^a p(r) 2\pi r dr = \frac{2}{3} p_0 \pi a^2 \quad (19)$$

Σε πρακτικές εφαρμογές συνήθως είναι γνωστό το παραπάνω συνολικό φορτίο οπότε είναι ιδιαίτερα χρήσιμο να αναπροσαρμόσουμε τις σχέσεις (17), (18) και (19) ώστε να περιέχουν το συνολικό φορτίο αντί για την ένταση της πίεσης.

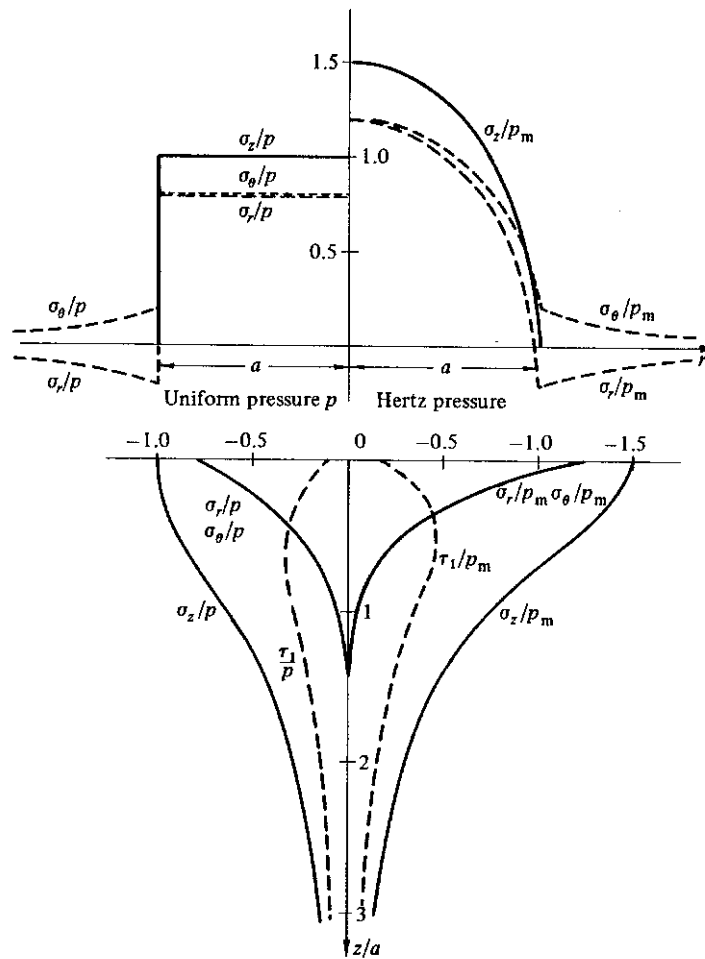
$$a = \left(\frac{3PR}{4E^*} \right)^{1/3} \quad (20)$$

$$\delta = \frac{a^2}{R} = \left(\frac{9P^2}{16R(E^*)^2} \right)^{1/3} \quad (21)$$

$$p_0 = \frac{3P}{2\pi a^2} = \left(\frac{6P(E^*)^2}{\pi^3 R^2} \right)^{1/3} \quad (22)$$

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι η κατανομή της σχέσης (13) είναι η μοναδική κατανομή ορθών τάσεων που προκαλεί μετατοπίσεις οι οποίες ικανοποιούν τη συνθήκη (12). Όσον αφορά τις τάσεις που αναπτύσσονται στο εσωτερικό των σωμάτων ακριβώς κάτω από την επιφάνεια επαφής, αυτές φαίνονται στο Σχήμα 3. Χαρακτηριστικό είναι ότι είναι παντού θλιπτικές εκτός από τα άκρα της περιοχής επαφής όπου η σ_r είναι εφελκυστική και έχει μέγιστη τιμή $(1-2\nu)p_0/3$. Αυτή είναι και η μέγιστη εφελκυστική τάση που αναπτύσσεται οπουδήποτε στο υλικό και είναι υπεύθυνη για τις κυκλικής μορφής ρωγμές που εμφανίζονται σε ψαθυρά υλικά, όπως το γυαλί, όταν αυτά πιέζονται μεταξύ τους. Στο κέντρο της κυκλικής περιοχής επαφής η ακτινική τάση σ_r είναι θλιπτική και έχει τιμή $(1+2\nu)p_0/2$. Συνεπάγεται ότι για ασυμπίεστα

υλικά ($\nu = 0.5$) στο κέντρο έχουμε συνθήκες υδροστατικής πίεσης. Έξω από την περιοχή επαφής οι ακτινικές και γωνιακές τάσεις έχουν ίδιο μέτρο και είναι εφελκυστικές και θλιπτικές αντίστοιχα.



Σχήμα 3: Τάσεις ανοιγμένες στην μέση πίεση επιφανείας $p_m = 2/3p_0$

Αναφορικά με τις τάσεις που αναπτύσσονται στο εσωτερικό του υλικού των σωμάτων κατά τον άξονα z , πάλι το Σχήμα 3 μας δίνει απάντηση. Αξιοπρόσεκτο είναι ότι η μέγιστη διατμητική τάση η οποία ισούται με το μισό της διαφοράς των κύριων τάσεων, λαμβάνει μέγιστη τιμή $0.31p_0$ σε βάθος υλικού $0.48a$ κάτω από το κέντρο της επιφάνειας επαφής (για $\nu = 0.3$). Αυτή είναι και η **μέγιστη τιμή διατμητικής τάσης** που εμφανίζεται στο τασικό πεδίο, ξεπερνά δε και την διατμητική τάση στο κέντρο επαφής που είναι $|\sigma_z - \sigma_r|/2 = 0.1p_0$ αλλά και την διατμητική τάση στο άκρο της επαφής που είναι $|\sigma_r - \sigma_\theta|/2 = 0.13p_0$. Αποτέλεσμα του φαινομένου αυτού είναι ότι η διαρροή του υλικού σε σώματα που καταπονούνται με πίεση επαφής δεν αρχίζει όπως φαίνεται λογικό από την επιφάνεια αλλά σε κάποιο βάθος **κάτω** από την επιφάνεια.

(B) ΣΤΕΡΕΑ ΜΕ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΠΡΟΦΙΛ

Στην γενική περίπτωση επαφής όπου όμως εξακολουθεί να ισχύει η εξίσωση (5) για την απόσταση των επιφανειών, το σχήμα της επιφάνειας επαφής δεν είναι εν γένει γνωστό. Ωστόσο για την ανάλυση αυτή ο Hertz έκανε την υπόθεση ότι η περιοχή επαφής S είναι έλλειψη με ημιάξονες a και b . Αποδεικνύεται ότι η παρακάτω κατανομή πίεσης επιφάνειας (γνωστή και ως κατανομή Hertz):

$$p = p_0 \left\{ 1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (23)$$

προκαλεί μετατοπίσεις εντός της περιοχής επαφής που είναι της μορφής:

$$\bar{u}_z = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} (L - Mx^2 - Ny^2) \quad (24)$$

Συνολικά και για τα δύο σώματα θα ισχύει:

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} = \frac{1}{\pi E^*} (L - Mx^2 - Ny^2) \quad (25)$$

Για να ικανοποιεί η παραπάνω έκφραση την συνθήκη (9) θα πρέπει να ισχύουν τα παρακάτω:

$$A = \frac{M}{\pi E^*} = \left(\frac{p_0}{E^*} \right) \left(\frac{b}{e^2 a^2} \right) \{ \mathbf{K}(e) - \mathbf{E}(e) \} \quad (26)$$

$$B = \frac{N}{\pi E^*} = \left(\frac{p_0}{E^*} \right) \left(\frac{b}{e^2 a^2} \right) \left\{ \left(\frac{a^2}{b^2} \right) \mathbf{E}(e) - \mathbf{K}(e) \right\} \quad (27)$$

$$\delta = \frac{L}{\pi E^*} = \left(\frac{p_0}{E^*} \right) b \mathbf{K}(e) \quad (28)$$

όπου $\mathbf{E}(e)$ και $\mathbf{K}(e)$ είναι ελλειπτικά ολοκληρώματα δευτέρου και πρώτου είδους αντίστοιχα με όρισμα:

$$e = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)^{1/2}, \quad b < a \quad (29)$$

Η κατανομή της πίεσης επιφανείας είναι ένα ημι-ελλειψοειδές (εκ περιστροφής έλλειψη) για το οποίο ο όγκος δίνεται από γνωστό τύπο, επομένως το ολικό φορτίο μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της πίεσης επιφανείας ως:

$$P = \frac{2}{3} p_0 \pi ab \quad (30)$$

Συνεπώς η μέση πίεση επιφανείας θα είναι: $p_m = (2/3) p_0$. Για να υπολογίσουμε τώρα το μέγεθος και το σχήμα της έλλειψης επαφής χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (26) και (27).

$$\frac{B}{A} = \left(\frac{R'}{R''}\right) = \frac{(a/b)^2 \mathbf{E}(e) - \mathbf{K}(e)}{\mathbf{K}(e) - \mathbf{E}(e)} \quad (31)$$

και:

$$\begin{aligned} (AB)^{1/2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R'R''}\right)^{1/2} = \frac{1}{2R_e} = \\ &= \frac{p_0}{E^*} \frac{b}{a^2 e^2} \left[\left\{ \left(\frac{a}{b}\right)^2 \mathbf{E}(e) - \mathbf{K}(e) \right\} (\mathbf{K}(e) - \mathbf{E}(e)) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (32)$$

Αν στο σημείο αυτό κάνουμε την αντικατάσταση $c = (ab)^{1/2}$ και ταυτόχρονα αντικαταστήσουμε την (30) στην (32) προκύπτει:

$$c^3 = (ab)^{3/2} = \left(\frac{3PR_e}{4E^*}\right) \frac{4}{\pi e^2} \left(\frac{b}{a}\right)^{3/2} \left[\left\{ \left(\frac{a}{b}\right)^2 \mathbf{E}(e) - \mathbf{K}(e) \right\} (\mathbf{K}(e) - \mathbf{E}(e)) \right]^{1/2} \quad (33)$$

Για ευκολία στους υπολογισμούς εισάγουμε την χρήση των συντελεστών F , επομένως η σχέση (33) μετασχηματίζεται στην ισοδύναμη μορφή:

$$c = (ab)^{1/2} = \left(\frac{3PR_e}{4E^*} \right)^{1/3} F_1(e) \quad (34)$$

Η αμοιβαία προσέγγιση των κέντρων καμπυλότητας των επιφανειών εκφράζεται με την βοήθεια των σχέσεων (28) και (30) ως εξής:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{3P}{2\pi abE^*} b\mathbf{K}(e) \\ &= \left(\frac{9P^2}{16E^{*2}R_e} \right)^{1/3} \frac{2}{\pi} \left(\frac{b}{a} \right)^{1/2} \{F_1(e)\}^{-1} \mathbf{K}(e) \\ &= \left(\frac{9P^2}{16E^{*2}R_e} \right)^{1/3} F_2(e) \end{aligned} \quad (35)$$

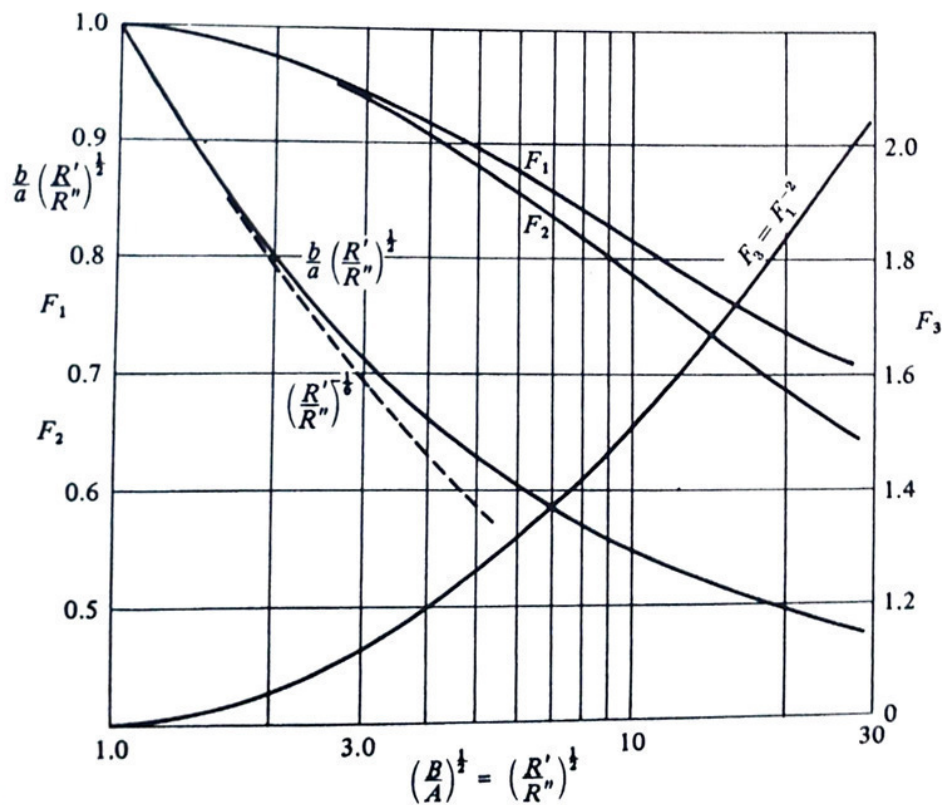
Τέλος αν συνδυάσουμε την σχέση (34) με την σχέση (30) θα προκύψει η σχέση που μας δίνει την μέγιστη πίεση επιφανείας συναρτήσει του φορτίου και της ισοδύναμης ακτίνας καμπυλότητας.

$$p_0 = \frac{3P}{2\pi ab} = \left(\frac{6PE^{*2}}{\pi^3 R_e^2} \right)^{1/3} \{F_1(e)\}^{-2} \quad (36)$$

Βλέπουμε ότι η σχέση (30) στην πράξη δεν είναι και τόσο χρήσιμη διότι περιέχει μικροσκοπικά μεγέθη όπως οι ημιάξονες της έλλειψης επαφής, τα οποία είναι πολύ δύσκολο να μετρηθούν στην πράξη. Από την άλλη πλευρά η ισοδύναμη σχέση (36) περιέχει μακροσκοπικά μεγέθη όπως η ισοδύναμη ακτίνα καμπυλότητας, τα οποία είναι εύκολο να μετρηθούν. Αυτό καθιστά την σχέση (36) πολύ χρήσιμη στην πράξη αφού γίνεται δυνατός ο υπολογισμός της μέγιστης τιμής πίεσης επιφανείας από το φορτίο, το υλικό και τα μακροσκοπικά γεωμετρικά στοιχεία της επαφής.

Η εκκεντρότητα της έλλειψης επαφής, η οποία είναι ανεξάρτητη του φορτίου και εξαρτάται αποκλειστικά από τον λόγο των σχετικών ακτινών καμπυλότητας των επιφανειών (R'/R''), δίνεται από την σχέση (31). Είναι προφανές από την εξίσωση (5) ότι στην **αφόρτιστη κατάσταση** όπου τα σώματα δεν έχουν δεχτεί παραμορφώσεις οι ισοϋψείς καμπύλες σταθερού h είναι ελλείψεις με $b/a = (A/B)^{1/2} = (R''/R')^{1/2}$.

Χρησιμοποιούμε την εξίσωση (31) για να σχεδιάσουμε την μεταβολή του όρου $(b/a)(B/A)^{1/2}$ συναρτήσει του $(B/A)^{1/2}$. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα 4.



Σχήμα 4: Το σχήμα της έλλειψης επαφής και οι συντελεστές διόρθωσης

Εάν η έλλειψη επαφής είχε το ίδιο σχήμα με τις καμπύλες σταθερού h στην απαραμόρφωτη κατάσταση, που δίνονται από την σχέση (5), τότε θα έπρεπε ο όρος $(b/a)(B/A)^{1/2}$ να είναι σταθερός και ίσος με 1.0. Από το γράφημα του Σχήματος 4 καταλαβαίνουμε ότι κάτι τέτοιο δεν ισχύει καθώς η καμπύλη ξεκινά από το 1 και πέφτει καθώς αυξάνεται ο λόγος (R'/R'') . Αυτό σημαίνει ότι η έλλειψη επαφής είναι κατά τι πιο μακρόστενη από τις καμπύλες σταθερού h .

Στην ανάλυση που προηγήθηκε ο Hertz εισήγαγε τις έννοιες της ισοδύναμης ακτίνας επαφής $c = (ab)^{1/2}$ και της ισοδύναμης σχετικής καμπυλότητας $R_e = (R'R'')^{1/2}$ και με την βοήθεια αυτών κατάφερε να υπολογίσει αναλυτικά το c την μέγιστη πίεση επαφής p_0 και την αμοιβαία προσέγγιση δ τα οποία δίνονται από τις σχέσεις (34), (36) και (35) αντίστοιχα. Αν συγκρίνουμε τις σχέσεις αυτές με τις σχέσεις που δίνουν τα ίδια μεγέθη για εκ περιστροφής στερεά, δηλαδή τις (20), (21) και (22), διακρίνουμε ότι ο πρώτος όρος σε κάθε περίπτωση είναι ο ίδιος και ουσιαστικά η μόνη διαφορά που έχουν είναι οι συντελεστές $\{F_1(e)\}$, $\{F_2(e)\}$ και $\{F_1(e)\}^{-2}$. Καλούμε τους συντελεστές αυτούς, συντελεστές διόρθωσης, και είναι υπεύθυνοι για την εκκεντρότητα της έλλειψης επαφής. Είναι πολύ μεγάλη η χρησιμότητα τους γιατί μέσω αυτών μπορούμε να ανάγουμε τα αποτελέσματα της απλής περίπτωσης επαφής σωμάτων εκ περιστροφής, στην γενικής περίπτωση σωμάτων με οποιοδήποτε προφίλ. Στο Σχήμα 4 φαίνεται η μεταβολή των συντελεστών διόρθωσης συναρτήσει του λόγου των σχετικών καμπυλοτήτων.

Μετά τον Hertz διάφοροι ερευνητές όπως ο Dyson (1965) και οι Brewe και Hamrock (1977) για να κάνουν πιο εύκολους του αριθμητικούς υπολογισμούς αντικατέστησαν τους συντελεστές διόρθωσης με προσεγγιστικές αλγεβρικές σχέσεις του λόγου (A/B). Επιπλέον ο Cooper (1969) δημοσίευσε πίνακες με τιμές των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων των εξισώσεων του Hertz.

Αναφορικά με το τασικό πεδίο που δημιουργείται στο εσωτερικό των σωμάτων που έρχονται σε επαφή, αυτό έχει γενικά μορφή παραπλήσια με το τασικό πεδίο όταν η περιοχή επαφής είναι κυκλική. Αν θεωρήσουμε άξονες x και y αυτούς που περιέχουν τους ημιάξονες a και b αντίστοιχα και αν $a > b$ τότε στο κέντρο της έλλειψης επαφής οι τάσεις θα έχουν τις παρακάτω τιμές:

$$\sigma_x = -p_0 \left\{ 2\nu + \frac{(1-2\nu)b}{(a+b)} \right\} \quad (37)$$

$$\sigma_y = -p_0 \left\{ 2\nu + \frac{(1-2\nu)a}{(a+b)} \right\} \quad (38)$$

Στα άκρα του μεγάλου και μικρού ημιάξονα της έλλειψης, που συμπίπτουν με τα άκρα της περιοχής επαφής, έχουμε ίσου μέτρου εφελκυσμό και θλίψη στην ακτινική και περιφερειακή διεύθυνση αντίστοιχα. Συνεπώς στα σημεία με $x = \pm a$, $y = 0$ έχω:

$$\sigma_x = -\sigma_y = p_0 (1-2\nu) \frac{b}{ae^2} \left\{ \frac{1}{e} \tanh^{-1} e - 1 \right\} \quad (39)$$

και στα σημεία με $x = 0$, $y = \pm b$ έχω:

$$\sigma_y = -\sigma_x = p_0 (1-2\nu) \frac{b}{ae^2} \left\{ 1 - \frac{b}{ae} \tan^{-1} \left(\frac{ea}{b} \right) \right\} \quad (40)$$

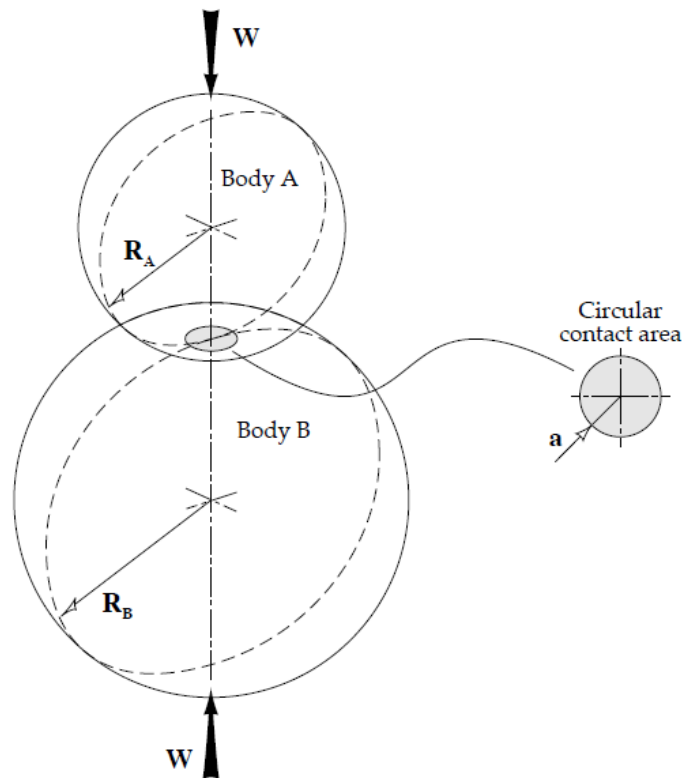
Η μέγιστη διάτμηση εμφανίζεται στο εσωτερικό του υλικού κάτω από την επιφάνεια επαφής πάνω στον άξονα των z . Το ακριβές βάθος εξαρτάται από την εκκεντρότητα της έλλειψης επαφής. Ενδεικτικές τιμές δίνονται στον πίνακα του Σχήματος 5. Υπολογισμός των τάσεων κατά την διεύθυνση z με αριθμητικές μεθόδους έχει γίνει από τους Thomas & Hoersch (1930) και από τους Lundberg & Sjoval (1958).

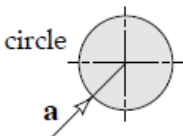
b/a	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
z/b	0.785	0.745	0.665	0.590	0.530	0.480
$(\tau_1)_{\max}/p_0$	0.300	0.322	0.325	0.323	0.317	0.310

Σχήμα 5

Η θεωρία του Hertz αποτελεί μέχρι και σήμερα την βάση για κάθε άλλη θεωρία που αφορά στην επαφή ελαστικών σωμάτων. Ωστόσο με την πάροδο των ετών και καθώς νέες πειραματικές και θεωρητικές μέθοδοι άρχισαν να εφαρμόζονται, έγιναν από διάφορους ερευνητές τροποποιήσεις των βασικών εξισώσεων του Hertz. Οι νέες εξισώσεις που προέκυψαν έχουν ασφαλώς μεγαλύτερη ακρίβεια. Στο παρόν κεφάλαιο παραθέτουμε με συντομία, καθαρά για χρήση σε υπολογισμούς, τις πιο σύγχρονες και ακριβείς εξισώσεις επαφής. Έτσι ανάλογα με την περίπτωση επαφής που εξετάζουμε έχουμε άμεση πρόσβαση και τις αντίστοιχες εξισώσεις που δίνουν τα χαρακτηριστικά μεγέθη της επαφής. Αξίζει να σημειώσουμε ότι πολλές από τις παρακάτω εξισώσεις είναι ίδιες με αυτές της θεωρίας του Hertz επειδή η ακρίβεια τους στάθηκε ικανοποιητική.

1. Επαφή μεταξύ σφαιρικών επιφανειών



Contact area dimensions	Maximum contact pressure	Average contact pressure	Maximum deflection	Maximum shear stress
$a = \left(\frac{3WR'}{E'} \right)^{1/3}$  <p>circle a</p>	$P_{\max} = \frac{3W}{2\pi a^2}$ <p>Hemispherical pressure distribution</p>	$P_{\text{average}} = \frac{W}{\pi a^2}$	$\delta = 1.0397 \left(\frac{W^2}{E'^2 R'} \right)^{1/3}$	$\tau_{\max} = \frac{1}{3} P_{\max}$ <p>at a depth of $z = 0.638 a$</p>

όπου:

a είναι η ακτίνα της περιοχής επαφής [m]

W είναι η εξωτερικά ασκούμενη δύναμη [N]

p είναι η πίεση επιφανείας (πίεση Hertz) [Pa]

δ είναι η προσέγγιση των κέντρων καμπυλότητας [m]

τ είναι η διατμητική τάση [Pa]

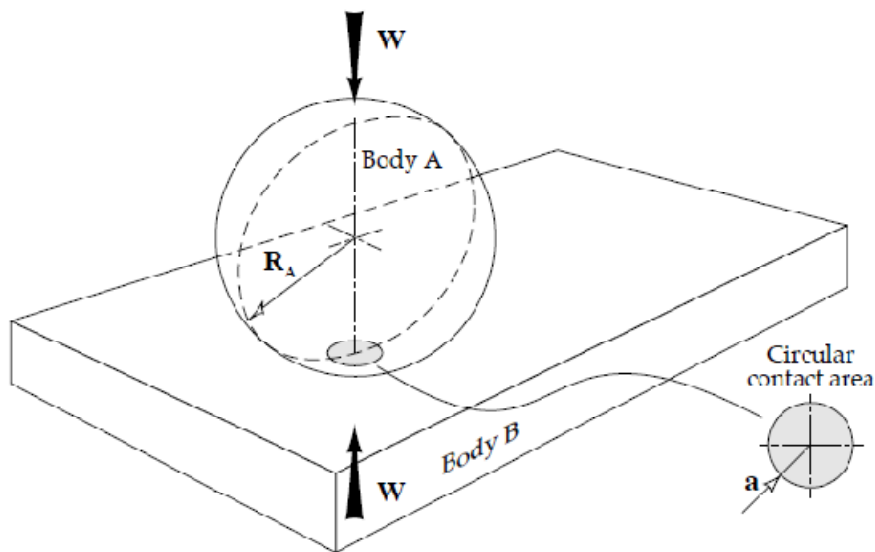
E' είναι το ισοδύναμο μέτρο ελαστικότητας που ορίζεται λίγο διαφορετικά από πριν

$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{2} \left[\frac{1 - \nu_A^2}{E_A} + \frac{1 - \nu_B^2}{E_B} \right]$$

R' είναι η ισοδύναμη ακτίνα καμπυλότητας

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} = \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} = 2 \left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} \right)$$

2. Επαφή μεταξύ σφαίρας και επιπέδου

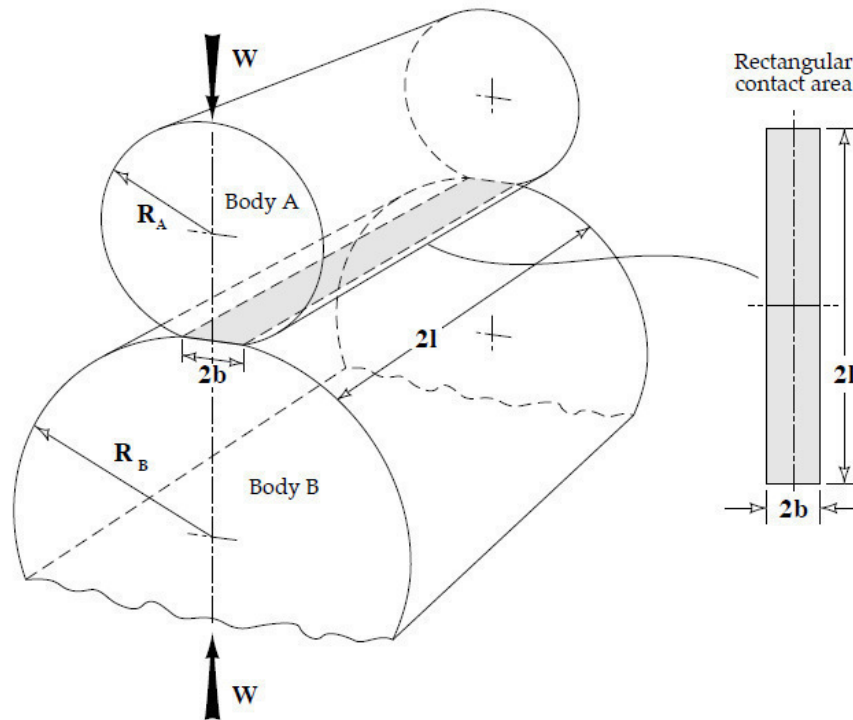


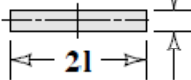
Στην περίπτωση επαφής μεταξύ σφαίρας και επιπέδου η περιοχή επαφής είναι κυκλική, όπως και στην περίπτωση δύο σφαιρών. Ισχύουν οι σχέσεις που διέπουν την προηγούμενη περίπτωση με την διαφορά ότι η ακτίνα καμπυλότητας του επιπέδου είναι άπειρη ($R_{bx} = R_{by} = \infty$).

Η ισοδύναμη ακτίνα καμπυλότητας δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} = \frac{1}{R_A} + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{R_A} + \frac{1}{\infty} = \frac{2}{R_A}$$

3. Επαφή μεταξύ παράλληλων κυλίνδρων



Contact area dimensions	Maximum contact pressure	Average contact pressure	Maximum deflection	Maximum shear stress
$b = \left(\frac{4WR'}{\pi l E'} \right)^{1/2}$ rectangle $2b$ 	$p_{\max} = \frac{W}{\pi b l}$ Elliptical pressure distribution	$p_{\text{average}} = \frac{W}{4b l}$	$\delta = 0.319 \left(\frac{W}{E' l} \right) \times \left[\frac{2}{3} + \ln \left(\frac{4R_A R_B}{b^2} \right) \right]$	$\tau_{\max} = 0.304 p_{\max}$ at a depth of $z = 0.786 b$

όπου:

b είναι το μισό πλάτος του ορθογωνίου επαφής [m]

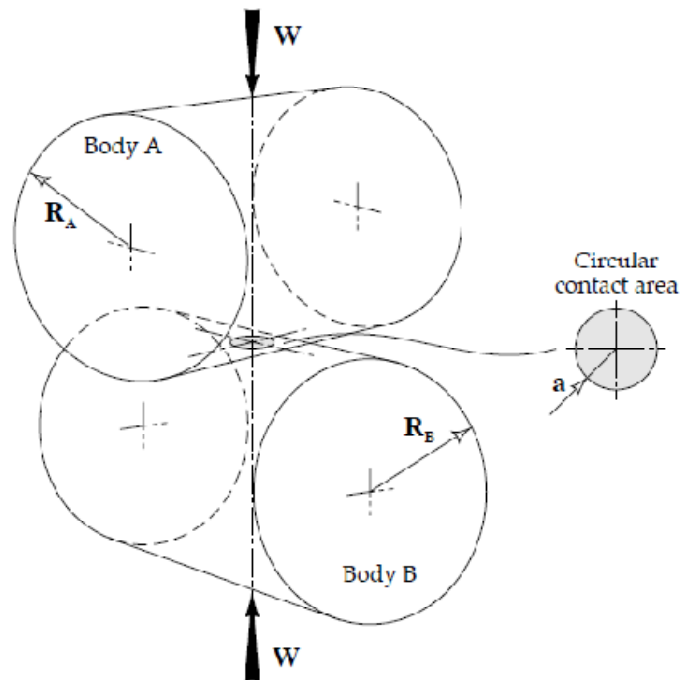
l είναι το μισό μήκος του ορθογωνίου επαφής [m]

R' είναι η ισοδύναμη ακτίνα καμπυλότητας των εφαιπόμενων κυλίνδρων [m].

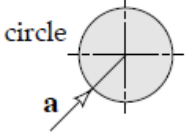
Για τις κυλινδρικές επιφάνειες ισχύει: $R_{ax} = R_A, R_{ay} = \infty, R_{bx} = R_B, R_{by} = \infty$

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} = \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty} = \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B}$$

4. Επαφή μεταξύ καθέτων κυλίνδρων με ίσες διαμέτρους



Η περιοχή επαφής μεταξύ κυλίνδρων ίσης ακτίνας που οι άξονες τους σχηματίζουν γωνία 90° είναι κύκλος. Ο λόγος για τον οποίο αναφέρουμε την περίπτωση αυτή είναι γιατί η συγκεκριμένη διάταξη κυλίνδρων χρησιμοποιείται πολύ συχνά σε δοκιμές αντοχής.

Contact area dimensions	Maximum contact pressure	Average contact pressure	Maximum deflection	Maximum shear stress
$a = \left(\frac{3WR'}{E'} \right)^{1/3}$ 	$P_{\max} = \frac{3W}{2\pi a^2}$ Hemispherical pressure distribution	$P_{\text{average}} = \frac{W}{\pi a^2}$	$\delta = 1.0397 \left(\frac{W^2}{E'^2 R'} \right)^{1/3}$	$\tau_{\max} = \frac{1}{3} P_{\max}$ at a depth of $z = 0.638 a$

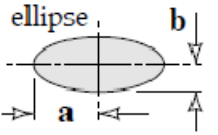
Αφού $R_A = R_B$ και ισχύει $R_{ax} = \infty, R_{ay} = R_A, R_{bx} = R_B, R_{by} = \infty$ τότε η ισοδύναμη καμπυλότητα δίνεται από την σχέση:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_A} + \frac{1}{\infty} = \frac{2}{R_A}$$

5. Ελλειπτική επαφή μεταξύ ελαστικών σωμάτων, Γενική περίπτωση

Οι δυνατές γεωμετρίες που συναντάμε στην γενική περίπτωση επαφής είναι οι ακόλουθες:

	$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} = \frac{1}{R_{ax}} + \frac{1}{R_{bx}} + \frac{1}{R_{ay}} + \frac{1}{R_{by}}$
	$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} = \frac{1}{R_{ax}} + \frac{1}{R_{ay}}$
	$\frac{1}{R'} = \left(\frac{1}{R_{ax}} + \frac{1}{R_{ay}} \right) - \left(\frac{1}{R_{bx}} + \frac{1}{R_{by}} \right)$

Contact area dimensions	Maximum contact pressure	Average contact pressure	Maximum deflection	Maximum shear stress
$a = k_1 \left(\frac{3WR'}{E'} \right)^{1/3}$ $b = k_2 \left(\frac{3WR'}{E'} \right)^{1/3}$  <p>ellipse</p>	$P_{\max} = \frac{3W}{2\pi ab}$ Elliptical pressure distribution	$P_{\text{average}} = \frac{W}{\pi ab}$	$\delta = 0.52k_3 \left(\frac{W^2}{E'^2 R'} \right)^{1/3}$	$\tau_{\max} = k_4 P_{\max}$ $\approx 0.3 P_{\max}$ at a depth of $z = k_5 b$

όπου:

a είναι ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης επαφής [m]

b είναι ο μικρός ημιάξονας της έλλειψης επαφής [m]

R' είναι η ισοδύναμη ακτίνα καμπυλότητας [m]

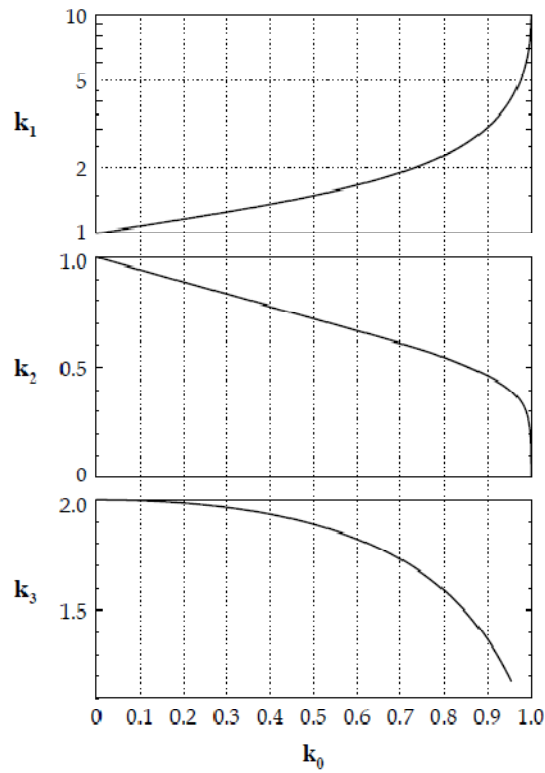
k₁, k₂, k₃, k₄, k₅ είναι οι συντελεστές επαφής

Τα υπόλοιπα μεγέθη έχουν αναφερθεί στα προηγούμενα. Ο προσδιορισμός των συντελεστών επαφής γίνεται με αναφορά στους επόμενους πίνακες. Από τον Πίνακα Α μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές k_1 , k_2 και k_3 αν γνωρίζουμε την τιμή του συντελεστή k_0 ο οποίος ορίζεται ως εξής:

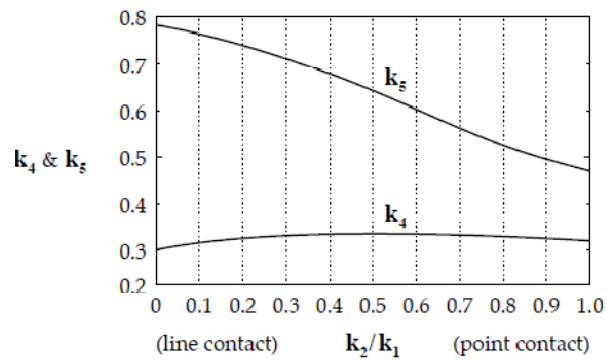
$$k_0 = \frac{\left[\left(\frac{1}{R_{ax}} - \frac{1}{R_{ay}} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_{bx}} - \frac{1}{R_{by}} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{R_{ax}} - \frac{1}{R_{ay}} \right) \left(\frac{1}{R_{bx}} - \frac{1}{R_{by}} \right) \cos 2\phi \right]^{1/2}}{\left(\frac{1}{R_{ax}} + \frac{1}{R_{ay}} + \frac{1}{R_{bx}} + \frac{1}{R_{by}} \right)}$$

όπου ϕ είναι η γωνία μεταξύ του επιπέδου που περιλαμβάνει την **ελάχιστη** κύρια ακτίνα καμπυλότητας του σώματος Α και του επιπέδου που περιλαμβάνει την **ελάχιστη** κύρια ακτίνα καμπυλότητας του σώματος Β. Για παράδειγμα στην περίπτωση των παράλληλων κυλίνδρων $\phi=0^\circ$ ενώ στην περίπτωση τροχού επάνω σε ράγα θα είναι $\phi=90^\circ$.

Οι υπόλοιποι συντελεστές k_4 και k_5 προσδιορίζονται από τον Πίνακα Β συναρτήσει του λόγου k_2/k_1 .



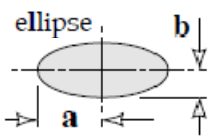
Πίνακας A



Πίνακας B

Εκτός από αυτόν τον τρόπο υπολογισμού των παραμέτρων επαφής, υπάρχει και η μέθοδος που αναπτύχθηκε από τους Hamrock και Dowson. Οι ερευνητές αυτοί χρησιμοποίησαν την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για να προσδιορίσουν απλουστευμένες αλγεβρικές σχέσεις οι οποίες θα αντικαταστήσουν τα περίπλοκα ελλειπτικά ολοκληρώματα της θεωρία του Hertz. Οι

αλγεβρικές αυτές σχέσεις μπορούν να εφαρμοστούν σε κάθε περίπτωση ελαστική επαφής, ώστε να μην είναι αναγκαία η χρήση μεθόδων αριθμητικής ανάλυσης ή πινάκων όπως προηγουμένως.

Contact area dimensions	Maximum contact pressure	Maximum deflection	Simplified elliptical integrals
$a = \left(\frac{6\bar{k}^2 \bar{\varepsilon} W R'}{\pi E'} \right)^{1/3}$ $b = \left(\frac{6\bar{\varepsilon} W R'}{\pi \bar{k} E'} \right)^{1/3}$ 	$P_{\max} = \frac{3W}{2\pi ab}$	$\delta = \bar{\xi} \left[\left(\frac{4.5}{\bar{\varepsilon} R'} \right) \left(\frac{W}{\pi \bar{k} E'} \right)^2 \right]^{1/3}$	$\bar{\varepsilon} = 1.0003 + \frac{0.5968 R_x}{R_y}$
	Average contact pressure		$\bar{\xi} = 1.5277 + 0.6023 \ln \left(\frac{R_y}{R_x} \right)$
	$P_{\text{average}} = \frac{W}{\pi ab}$		Ellipticity parameter
			$\bar{k} = 1.0339 \left(\frac{R_y}{R_x} \right)^{0.636}$

όπου:

$\bar{\varepsilon}$ και $\bar{\xi}$ είναι τα απλοποιημένα ελλειπτικά ολοκληρώματα

\bar{k} είναι η απλοποιημένη παράμετρος ελλειπτικότητας.

Αν και οι τύποι Hamrock & Dowson είναι απλά προσεγγίσεις, οι διαφορές των αποτελεσμάτων τους με τα αποτελέσματα της θεωρίας του Hertz είναι πάρα πολύ μικρές. Υπάρχει, ωστόσο, ένας **περιορισμός** στην εφαρμογή τους. **Δεν μπορούν να εφαρμοστούν** σε περιπτώσεις όπου η επιφάνεια επαφής **δεν είναι έλλειψη**, όπως για παράδειγμα η περίπτωση επαφής παράλληλων κυλίνδρων στην οποία η επιφάνεια επαφής είναι ορθογώνιο.

Σε όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις οι τύποι Hamrock & Dowson είναι η απλούστερη και γρηγορότερη μέθοδος προσδιορισμού βασικών παραμέτρων επαφής, χωρίς παράλληλα να υστερεί καθόλου σε ακρίβεια. Είναι η μέθοδος που χρησιμοποιείται σήμερα στις περισσότερες μηχανολογικές εφαρμογές.

5

ΜΕΛΕΤΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ (CASE STUDIES)

**Στο παρόν κεφάλαιο υλοποιείται με την βοήθεια του προγράμματος
MathCAD η μελέτη των ακόλουθων περιπτώσεων:**

1. Ελαστικός κύλινδρος ακτίνας R_1 ολισθαίνει χωρίς την παρουσία λιπαντικού επάνω στην επιφάνεια ακίνητου ελαστικού κυλίνδρου ακτίνας R_2 .
2. Ελαστικός κύλινδρος ακτίνας R_1 ολισθαίνει χωρίς την παρουσία λιπαντικού επάνω σε ακίνητο επίπεδο.

Κύλινδρος ακτίνας R1 ολισθαίνει ως προς κύλινδρο ακτίνας R2

Υλικό - Γεωμετρία - Φόρτιση

$$v1 := 0.2$$

$$v2 := 0.2$$

$$E1 := 15 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$E2 := 15 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$R1 := 0.05 \text{ m}$$

$$\text{Δύναμη ανα μονάδα μήκους γενέτειρας: } P := 1000 \text{ N/m}$$

$$R2 := 0.1 \text{ m}$$

$$\text{Συντελεστής τριβής: } \mu := 0.1$$

Ισοδύναμη ακτίνα καμπυλότητας

$$R := \frac{R1 \cdot R2}{R1 + R2} = 0.033 \text{ m}$$

Ισοδύναμο μέτρο ελαστικότητας

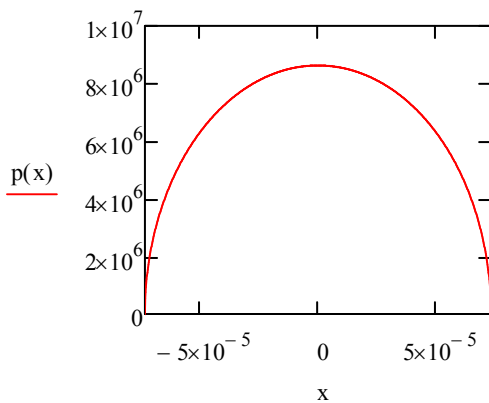
$$Estar := \frac{1}{\left(\frac{1 - v1^2}{E1} + \frac{1 - v2^2}{E2} \right)} = 7.813 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

Ημι-μήκος επαφής

$$a := \sqrt{\left(\frac{4P \cdot R}{\pi \cdot Estar} \right)} = 7.371 \times 10^{-5} \text{ m}$$

Κατανομή πίεσης Hertz

$$p(x) := \frac{2 \cdot P}{\pi a^2} \cdot (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$



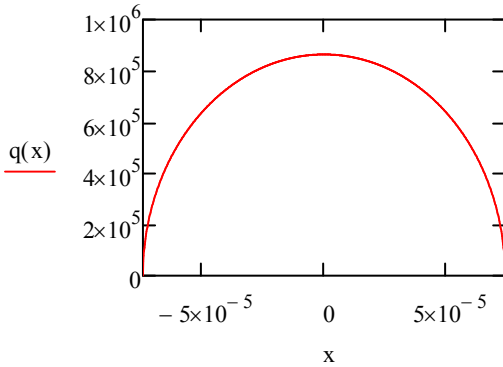
Μέγιστη πίεση Hertz

$$p(0) = 8.637 \times 10^6 \text{ Pa}$$

Εφαπτομενική διατμητική τάση

$$q(x) := \frac{2\mu \cdot P}{\pi \cdot a^2} \cdot (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Αν υποθεθεί ότι η πάνω επιφάνεια είναι ακίνητη τότε το (+) της διπλανής σχέσης συνεπάγεται κίνηση προς τα αρνητικά του άξονα χ. Αντίθετα αν η κίνηση έχει φορά προς τα θετικά του άξονα χ η διπλανή σχέση πρέπει να λάβει αρνητικό πρόσημο.

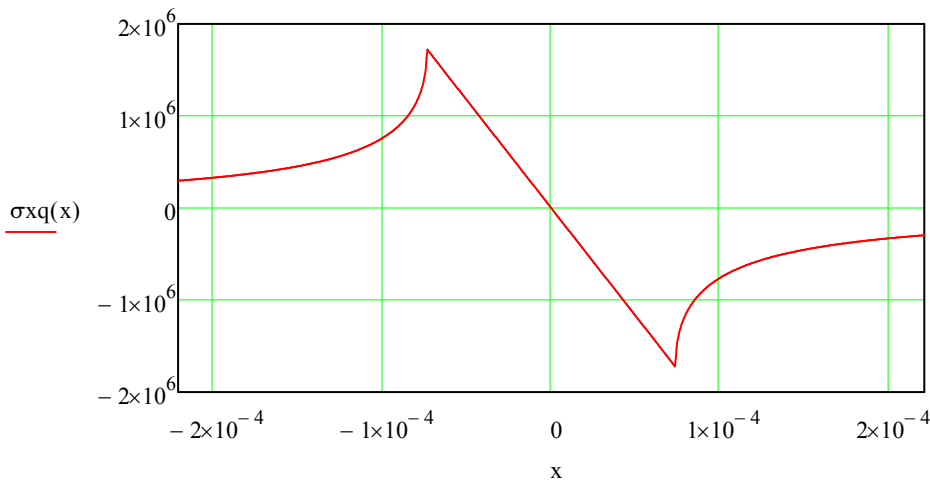


Ισχύει ότι $q_0 = \mu p_0$

Κατανομή ορθής τάσης παράλληλης προς την επιφάνεια (z=0) λόγω της διάτμησης Q

$$\sigma_x q(x) := \text{if} \left[(|x| > a), \text{if} \left[(x > a), -2 \cdot q(0) \cdot \left[\frac{x}{a} - \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right], -2 \cdot q(0) \cdot \left[\frac{x}{a} + \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right], -2 \cdot q(0) \cdot \frac{x}{a} \right]$$

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η μεταβολή της ορθής τάσης σ_x σε όλο το μήκος του άξονα x.



Μέγιστη τιμή εφελκυσμού στο άκρο της επιφάνειας επαφής που βρίσκεται στην φορά της κίνησης

$$|\sigma_x q(-a)| = 1.727 \times 10^6 \text{ Pa}$$

Επιπλέον η ορθή φόρτιση $p(x)$ προκαλεί εμφάνιση ορθής επιφανειακής τάσης $\sigma_x = -p(x)$ εντός της περιοχής επαφής και μηδενική τάση έξω από την περιοχή επαφής. Αυτό σημαίνει ότι ανεξάρτητα από την τιμή του συντελεστή τριβής, η μέγιστη εφελκυστική τάση που αναπτύσσεται στην επιφάνεια θα είναι πάντα στο άκρο που "κοιτάει" στην φορά της κίνησης και θα έχει πάντα τιμή $2\mu p_0$

Υπολογισμός του τασικού πεδίου

$$M(x, z) := \left[\frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{\left[(a^2 - x^2 + z^2)^2 + 4 \cdot x^2 \cdot z^2 \right]} + (a^2 - x^2 + z^2) \right] \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$n(x, z) := \text{if} \left((x \geq 0), \left[\frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{\left[(a^2 - x^2 + z^2)^2 + 4 \cdot x^2 \cdot z^2 \right]} - (a^2 - x^2 + z^2) \right] \right]^{\frac{1}{2}}, - \left[\frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{\left[(a^2 - x^2 + z^2)^2 + 4 \cdot x^2 \cdot z^2 \right]} - (a^2 - x^2 + z^2) \right] \right]^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$\sigma_{xq}(x, z) := \frac{q(0)}{a} \cdot \left[n(x, z) \cdot \left(2 - \frac{z^2 - M(x, z)^2}{M(x, z)^2 + n(x, z)^2} \right) - 2 \cdot x \right]$$

$$\sigma_{xp}(x, z) := \frac{-p(0)}{a} \cdot \left[M(x, z) \cdot \left(1 + \frac{z^2 + n(x, z)^2}{M(x, z)^2 + n(x, z)^2} \right) - 2 \cdot z \right]$$

$$\sigma_{zq}(x, z) := \frac{-q(0)}{a} \cdot n(x, z) \cdot \left(\frac{M(x, z)^2 - z^2}{M(x, z)^2 + n(x, z)^2} \right)$$

$$\sigma_{zp}(x, z) := \frac{-p(0)}{a} \cdot M(x, z) \cdot \left(1 - \frac{z^2 + n(x, z)^2}{M(x, z)^2 + n(x, z)^2} \right)$$

$$\tau_{xzq}(x, z) := \frac{-q(0)}{a} \cdot \left[M(x, z) \cdot \left(1 + \frac{z^2 + n(x, z)^2}{M(x, z)^2 + n(x, z)^2} \right) - 2 \cdot z \right]$$

$$\tau_{xzp}(x, z) := \frac{-p(0)}{a} \cdot n(x, z) \cdot \left(\frac{M(x, z)^2 - z^2}{M(x, z)^2 + n(x, z)^2} \right)$$

Η συνολική τάση που ασκείται σε ένα στοιχείο του υλικού σε κάθε διεύθυνση προκύπτει από το αλγεβρικό άθροισμα των επιμέρους τάσεων που οφείλονται στην ορθή και διατμητική φόρτιση.

$$\sigma_x(x, z) := \sigma_{xp}(x, z) + \sigma_{xq}(x, z)$$

$$\sigma_z(x, z) := \sigma_{zp}(x, z) + \sigma_{zq}(x, z)$$

$$\tau_{xz}(x, z) := \tau_{xzp}(x, z) + \tau_{xzq}(x, z)$$

Κριτήριο μέγιστης διάτμησης Tresca

Παρακάτω γίνεται έλεγχος για διαρροή του υλικού χρησιμοποιώντας το γνωστό κριτήριο αντοχής Tresca.

$$\tau_{\text{principal}}(x, z) := \frac{1}{2} \cdot \left[(\sigma_x(x, z) - \sigma_z(x, z))^2 + 4 \cdot \tau_{xz}(x, z)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$x_{\text{low}} := -3 \cdot a \quad x_{\text{high}} := 3 \cdot a$$

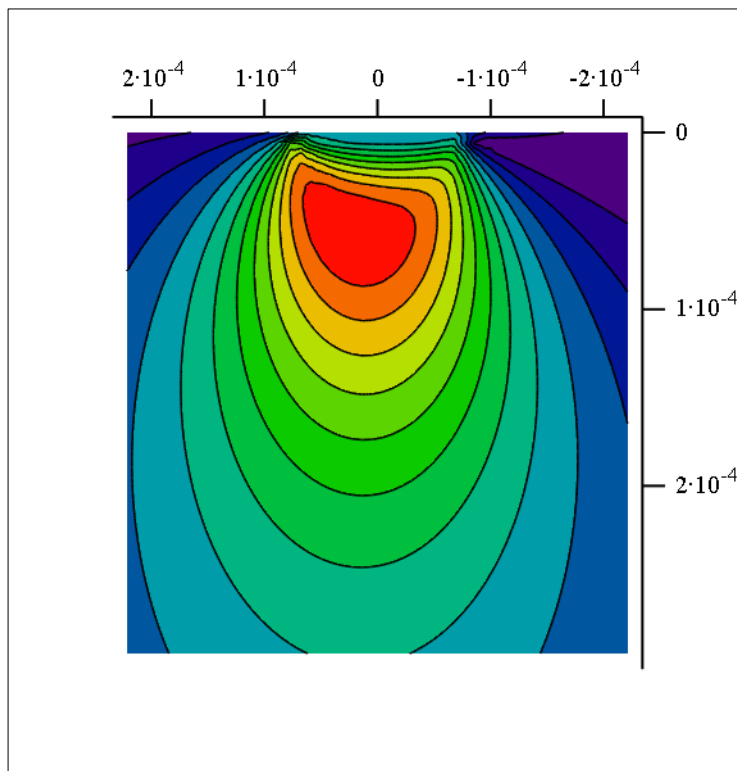
$$x_n := 50$$

$$z_{\text{low}} := 4 \cdot a \quad z_{\text{high}} := 0$$

$$z_n := 50$$

$$F := \text{CreateMesh}(\tau_{\text{principal}}, x_{\text{low}}, x_{\text{high}}, z_{\text{low}}, z_{\text{high}}, x_n, z_n)$$

Διάγραμμα της μέγιστης διάτμησης στο βάθος του υλικού



F

$$x := a \quad z := a$$

Given

$$-3 \cdot a < x < 3 \cdot a$$

$$0 < z < 4 \cdot a$$

Η μέγιστη κύρια διατμητική τάση θα εμφανίζεται στο σημείο του επιπέδου (x,z) με συντεταγμένες:

$$\text{MaxT1} := \text{Maximize}(\text{τprincipal}, x, z) = \begin{pmatrix} 2.416 \times 10^{-5} \\ 5.447 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$\text{και θα έχει τιμή: } \text{τprincipal}(\text{MaxT1}_0, \text{MaxT1}_1) = 2.633 \times 10^6 \quad \text{Pa}$$

Έστω ότι ο κύλινδρος #2 είναι κατασκευασμένος από: (Υλικό)
το οποίο έχει αντοχή σε απλή διάτμηση: $k := 2.5 \cdot 10^6 \text{ Pa}$

Αν ο παρακάτω λόγος είναι >1 τότε το υλικό έχει αστοχήσει και η αστοχία εντοπίζεται γύρω από το σημείο μέγιστης διάτμησης

$$\frac{\text{τprincipal}(\text{MaxT1}_0, \text{MaxT1}_1)}{k} = 1.053$$

Είναι χαρακτηριστικό γνώρισμα αυτού του είδους αστοχίας ότι στις περισσότερες περιπτώσεις ξεκινάει κάτω από την επιφάνεια επαφής και όχι πάνω στην επιφάνεια. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα προκύπτει αστοχία υλικού σε βάθος 54,47 μm . Υπάρχει άμεση σχέση του φαινομένου αυτού με την δημιουργία υπο-επιφανειακών ρωγμών οι οποίες τελικά οδηγούν στην βλάβη γνωστή σαν spalling

Κύλινδρος ακτίνας R1 ολισθαίνει ως προς επίπεδη επιφάνεια 2

Υλικό - Γεωμετρία - Φόρτιση

$$v1 := 0.2$$

$$v2 := 0.2$$

$$E1 := 15 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$E2 := 15 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$R1 := 0.05 \text{ m}$$

$$\text{Δύναμη ανα μονάδα μήκους γενέτειρας: } P := 1000 \text{ N/m}$$

$$\text{Συντελεστής τριβής: } \mu := 0.1$$

Ισοδύναμη ακτίνα καμπυλότητας

$$R := R1 = 0.05 \text{ m}$$

Ισοδύναμο μέτρο ελαστικότητας

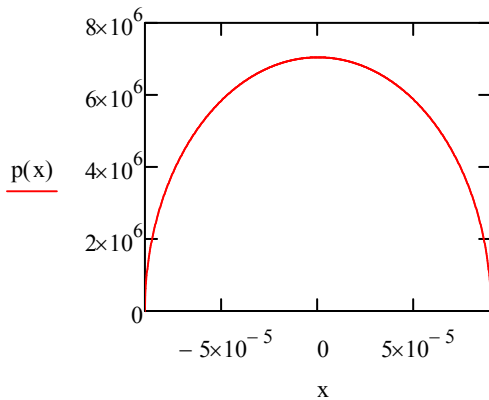
$$Estar := \frac{1}{\left(\frac{1 - v1^2}{E1} + \frac{1 - v2^2}{E2} \right)} = 7.813 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

Ημι-μήκος επαφής

$$a := \sqrt{\left(\frac{4P \cdot R}{\pi \cdot Estar} \right)} = 9.027 \times 10^{-5} \text{ m}$$

Κατανομή πίεσης Hertz

$$p(x) := \frac{2 \cdot P}{\pi a^2} \cdot (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$



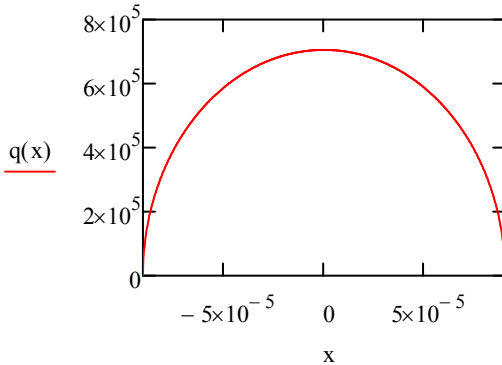
Μέγιστη πίεση Hertz

$$p(0) = 7.052 \times 10^6 \text{ Pa}$$

Εφαπτομενική διατμητική τάση

$$q(x) := \frac{2\mu \cdot P}{\pi \cdot a^2} \cdot (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Αν υποθεθεί ότι η πάνω επιφάνεια είναι ακίνητη τότε το (+) της διπλανής σχέσης συνεπάγεται κίνηση προς τα αρνητικά του άξονα χ. Αντίθετα αν η κίνηση έχει φορά προς τα θετικά του άξονα χ η διπλανή σχέση πρέπει να λάβει αρνητικό πρόσημο.

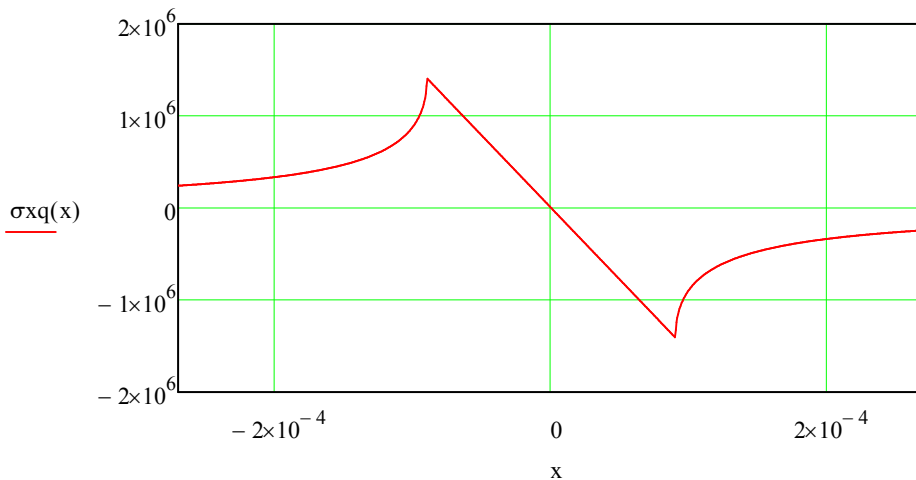


Ισχύει ότι $q_0 = \mu p_0$

Κατανομή ορθής τάσης παράλληλης προς την επιφάνεια (z=0) λόγω της διάτμησης Q

$$\sigma_x q(x) := \text{if} \left[(|x| > a), \text{if} \left[(x > a), -2 \cdot q(0) \cdot \left[\frac{x}{a} - \left(\frac{\frac{x^2}{a^2} - 1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right], -2 \cdot q(0) \cdot \left[\frac{x}{a} + \left(\frac{\frac{x^2}{a^2} - 1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right], -2 \cdot q(0) \cdot \frac{x}{a} \right]$$

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η μεταβολή της ορθής τάσης σ_x σε όλο το μήκος του άξονα x.



Μέγιστη τιμή εφελκυσμού στο άκρο της επιφάνειας επαφής που βρίσκεται στην φορά της κίνησης

$$|\sigma_x(-a)| = 1.41 \times 10^6 \text{ Pa}$$

Επιπλέον η ορθή φόρτιση $p(x)$ προκαλεί εμφάνιση ορθής επιφανειακής τάσης $\sigma_x = -p(x)$ εντός της περιοχής επαφής και μηδενική τάση έξω από την περιοχή επαφής. Αυτό σημαίνει ότι ανεξάρτητα από την τιμή του συντελεστή τριβής, η μέγιστη εφελκυστική τάση που αναπτύσσεται στην επιφάνεια θα είναι πάντα στο άκρο που "κοιτάει" στην φορά της κίνησης και θα έχει πάντα τιμή $2\mu p_0$

Υπολογισμός του τασικού πεδίου

$$M(x, z) := \left[\frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{\left[(a^2 - x^2 + z^2)^2 + 4 \cdot x^2 \cdot z^2 \right]} + (a^2 - x^2 + z^2) \right] \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$n(x, z) := \text{if} \left[(x \geq 0), \left[\frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{\left[(a^2 - x^2 + z^2)^2 + 4 \cdot x^2 \cdot z^2 \right]} - (a^2 - x^2 + z^2) \right] \right]^{\frac{1}{2}}, - \left[\frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{\left[(a^2 - x^2 + z^2)^2 + 4 \cdot x^2 \cdot z^2 \right]} - (a^2 - x^2 + z^2) \right] \right]^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$\sigma_{xq}(x, z) := \frac{q(0)}{a} \cdot \left[n(x, z) \cdot \left(2 - \frac{z^2 - M(x, z)^2}{M(x, z)^2 + n(x, z)^2} \right) - 2 \cdot x \right]$$

$$\sigma_{xp}(x, z) := \frac{-p(0)}{a} \cdot \left[M(x, z) \cdot \left(1 + \frac{z^2 + n(x, z)^2}{M(x, z)^2 + n(x, z)^2} \right) - 2 \cdot z \right]$$

$$\sigma_{zq}(x, z) := \frac{-q(0)}{a} \cdot n(x, z) \cdot \left(\frac{M(x, z)^2 - z^2}{M(x, z)^2 + n(x, z)^2} \right)$$

$$\sigma_{zp}(x, z) := \frac{-p(0)}{a} \cdot M(x, z) \cdot \left(1 - \frac{z^2 + n(x, z)^2}{M(x, z)^2 + n(x, z)^2} \right)$$

$$\tau_{xzq}(x, z) := \frac{-q(0)}{a} \cdot \left[M(x, z) \cdot \left(1 + \frac{z^2 + n(x, z)^2}{M(x, z)^2 + n(x, z)^2} \right) - 2 \cdot z \right]$$

$$\tau_{xzp}(x, z) := \frac{-p(0)}{a} \cdot n(x, z) \cdot \left(\frac{M(x, z)^2 - z^2}{M(x, z)^2 + n(x, z)^2} \right)$$

Η συνολική τάση που ασκείται σε ένα στοιχείο του υλικού σε κάθε διεύθυνση προκύπτει από το αλγεβρικό άθροισμα των επιμέρους τάσεων που οφείλονται στην ορθή και διατμητική φόρτιση.

$$\sigma_x(x, z) := \sigma_{xp}(x, z) + \sigma_{xq}(x, z)$$

$$\sigma_z(x, z) := \sigma_{zp}(x, z) + \sigma_{zq}(x, z)$$

$$\tau_{xz}(x, z) := \tau_{xzp}(x, z) + \tau_{xzq}(x, z)$$

Κριτήριο μέγιστης διάτμησης Tresca

Παρακάτω γίνεται έλεγχος για διαρροή του υλικού χρησιμοποιώντας το γνωστό κριτήριο αντοχής Tresca.

$$\tau_{\text{principal}}(x, z) := \frac{1}{2} \cdot \left[(\sigma_x(x, z) - \sigma_z(x, z))^2 + 4 \cdot \tau_{xz}(x, z)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$x_{\text{low}} := -3 \cdot a \quad x_{\text{high}} := 3 \cdot a$$

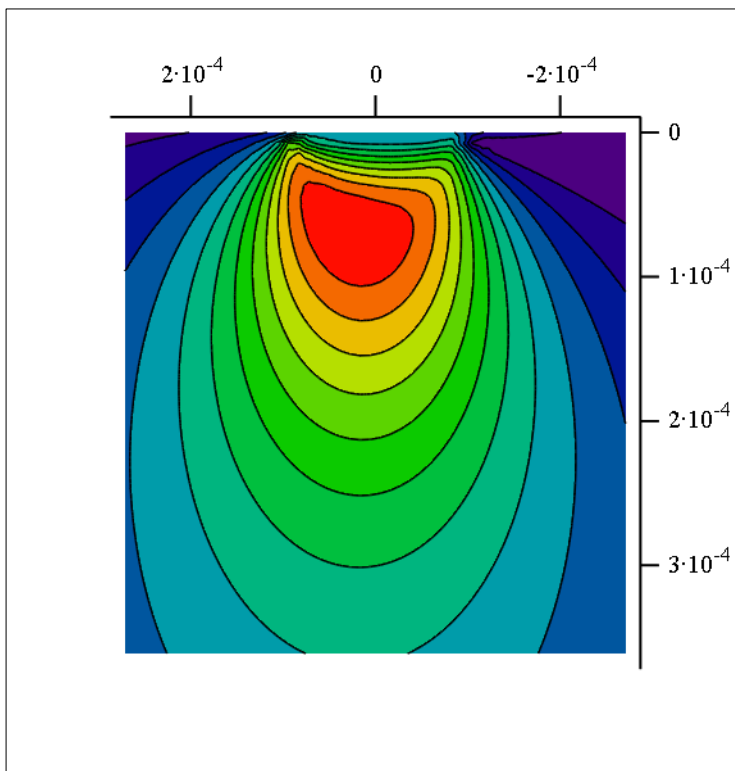
$$x_n := 50$$

$$z_{\text{low}} := 4 \cdot a \quad z_{\text{high}} := 0$$

$$z_n := 50$$

$$F := \text{CreateMesh}(\tau_{\text{principal}}, x_{\text{low}}, x_{\text{high}}, z_{\text{low}}, z_{\text{high}}, x_n, z_n)$$

Διάγραμμα της μέγιστης διάτμησης στο βάθος του υλικού



F

$$x := a \quad z := a$$

Given

$$-3 \cdot a < x < 3 \cdot a$$

$$0 < z < 4 \cdot a$$

Η μέγιστη κύρια διατμητική τάση θα εμφανίζεται στο σημείο του επιπέδου (x,z) με συντεταγμένες:

$$\text{MaxT1} := \text{Maximize}(\text{τρprincipal}, x, z) = \begin{pmatrix} 2.959 \times 10^{-5} \\ 6.671 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$\text{και θα έχει τιμή: } \text{τρprincipal}(\text{MaxT1}_0, \text{MaxT1}_1) = 2.15 \times 10^6 \quad \text{Pa}$$

Έστω ότι ο κύλινδρος #2 είναι κατασκευασμένος από: (Υλικό)

το οποίο έχει αντοχή σε απλή διάτμηση: $k := 2.5 \cdot 10^6 \text{ Pa}$

Αν ο παρακάτω λόγος είναι >1 τότε το υλικό έχει αστοχήσει και η αστοχία εντοπίζεται γύρω από το σημείο μέγιστης διάτμησης

$$\frac{\text{τρprincipal}(\text{MaxT1}_0, \text{MaxT1}_1)}{k} = 0.86$$

Βλέπουμε ότι στην ενω στην προηγούμενη περίπτωση όπου ο δύο κύλινδροι ολίσθαιναν ο ένας πρὸς τον άλλο, υπήρχε αστοχία του υλικού, στην παρούσα περίπτωση όπου αντικαταστήσαμε τον ένα κύλινδρο με επίπεδη επιφάνεια, δεν προκύπτει αστοχία. Το γεγονός αυτό καταδεικνύει την σημασία που έχει η καμπυλότητα μιας επιφάνειας στην διαμόρφωση της αντοχής σε ολίσθηση. Γενικά όσο μειώνεται η καμπυλότητα, δηλαδή η επιφάνεια τείνει στο επίπεδο, τόσο λιγότερο πιθανό είναι να αστοχήσει το υλικό όταν καταπονείται με ολίσθηση.

Επιπλέον παρατηρούμε ότι στην περίπτωση του επιπέδου, η μέγιστη τιμή της κύριας διάτμησης, εμφανίζεται σε βάθος 22.5% μεγαλύτερο σε σχέση με την περίπτωση των δύο κυλίνδρων.

6

ΟΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ

Παρατηρήσεις στην πειραματική επίλυση προβλημάτων ελαστικότητας.

Η μελέτη των προβλημάτων ελαστικότητας αποτελεί ένα βασικό τομέα στην περιοχή της εφαρμοσμένης έρευνας. Οι λύσεις δε οι οποίες επιτυγχάνονται βοηθούν στην επίλυση άλλων προβλημάτων που αφορούν κατασκευές ή στην δημιουργία νέων υλικών των οποίων η μηχανική αντοχή θα είναι μεγαλύτερη από την αντοχή των μέχρι τώρα γνωστών υλικών. Η επίλυση των πιο πάνω προβλημάτων έγινε πιο εύκολη τα τελευταία χρόνια με την ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Η αριθμητική λύση έχει εφαρμοστεί με επιτυχία σε πολλά προβλήματα της ελαστικότητας και έχουν αναπτυχθεί νέες αριθμητικές μέθοδοι όπως είναι τα πεπερασμένα στοιχεία, συνοριακά στοιχεία κτλ οι οποίες έδωσαν λύσεις σε άλυτα μέχρι τότε προβλήματα.

Δυστυχώς όμως ένας μεγάλος αριθμός προβλημάτων εξακολουθεί να μην επιλύεται αναλυτικά ή αριθμητικά. Για τον λόγο αυτό και παράλληλα με τις θεωρητικές μεθόδους έχουν αναπτυχθεί και οι πειραματικές οι οποίες σκοπό έχουν:

- Να μας δώσουν πληροφορίες οι οποίες αφορούν την εντατική κατάσταση των διαφόρων σωμάτων κάτω από γνωστές εξωτερικές φορτίσεις.
- Να μας δώσουν πληροφορίες για τις τιμές των διαφόρων ελαστικών και πλαστικών σταθερών που διέπουν την συμπεριφορά των υλικών.
- Να αποτελέσουν σημείο αναφοράς για την ανάπτυξη νέων υπολογιστικών μεθόδων αλλά και μέσο ελέγχου της ακρίβειας αυτών που ήδη υπάρχουν.

Η χρήση των μηκυνσιομέτρων ή συμπλεγμάτων μηκυνσιομέτρων, η μέθοδος των διπλοθλαστικών επιστρώσεων, η μέθοδος Moiré, η συμβολομετρία, η ολογραφία, η φωτοελαστικότητα και φυσικά η μέθοδος των καυστικών καμπυλών, είναι πειραματικές μέθοδοι οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν και χρησιμοποιούνται ακόμη για την πειραματική επίλυση διαφόρων προβλημάτων ελαστικότητας. Κρίνοντας τις οπτικές μεθόδους (φωτοελαστικότητα, ολογραφία κτλ) οι οποίες μάλιστα κατατάσσονται στις ακριβείς πειραματικές μεθόδους, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι σε προβλήματα όπου υπάρχει κάποια μηχανική ιδιομορφία είναι δύσκολο αν όχι αδύνατο να αποτιμήσει κανείς τις πληροφορίες από τις οποίες θα υπολογισθεί η εντατική κατάσταση του σώματος. Τέτοια κλασικά παραδείγματα ιδιομορφίας είναι η μελέτη του τασικού πεδίου σε σώματα που περιλαμβάνουν ρωγμές, η μελέτη των τάσεων στην επαφή δύο ελαστικών μέσων κ.α.

Στη δεκαετία του 1970 ο καθηγητής Π.Σ. Θεοχάρης στο εργαστήριο Αντοχής Υλικών το Ε.Μ. Πολυτεχνείου, ανέπτυξε μια οπτική πειραματική μέθοδο, την οπτική μέθοδο των καυστικών, η οποία δίνει ακριβείς πειραματικές λύσεις, εκεί που οι άλλες οπτικές μέθοδοι αποτυγχάνουν.

Η μέθοδος των καυστικών βασίζεται στο γεγονός ότι μια τασική ιδιομορφία ενός ελαστικού σώματος είναι δυνατόν να μετατραπεί μέσω μιας απλής οπτικής διάταξης, σε μια οπτική ιδιομορφία. Η μελέτη δε της οπτικής αυτής ιδιομορφίας δίνει τις απαραίτητες πληροφορίες για τον υπολογισμό της τασικής ιδιομορφίας.

Με την μέθοδο αυτή έχει μελετηθεί ένα πλήθος προβλημάτων και έχουν ευρεθεί ακριβή πειραματικά αποτελέσματα. Τέτοια προβλήματα είναι η μελέτη του συντελεστή εντάσεως των τάσεων σε ισότροπα και ανισότροπα υλικά (Theocaris 1972), μελέτη διακλαδωμένων ρωγμών και ρωγμών κειμένων στη διαχωριστική επιφάνεια δύο ελαστικών σωμάτων (Theocaris 1973), μελέτη προβλημάτων με εγκλείσματα ή οπές (Theocaris 1974), μελέτη φορτίων εφαρμοσμένων στο σύνορο ελαστικών σωμάτων και προβλήματα επαφής ελαστικών σωμάτων (Theocaris, Razem 1977), μελέτη μηχανικών ιδιοτήτων ελαστικών σωμάτων κ.α.

Μια από τις αρχικές εφαρμογές της μεθόδου αφορούσε την μελέτη των ρωγμών και συγκεκριμένα της συγκέντρωσης των τάσεων στο άκρο ρωγμής. Στα προβλήματα των ρωγμών η πιο ενδιαφέρουσα περιοχή είναι η παρά το άκρο της ρωγμής. Εντός και πλησίον της μικρής αυτής περιοχής οι μεταβολές των τάσεων και των παραμορφώσεων είναι απότομες, το γεγονός αυτό καθιστά δύσκολη την επίλυση του προβλήματος με τις κλασικές μεθόδους πειραματικής ανάλυσης των τάσεων και παραμορφώσεων, ενώ αντιθέτως, η μαθηματική αντιμετώπιση του προβλήματος σημείωσε σημαντική πρόοδο.

Κατά την τελευταία δεκαετία αναπτύχθηκε πειραματική μέθοδος από τους Manogg και Π.Θεοχάρη, η οποία κρίνεται ως η μόνη ενδεδειγμένη για την ικανοποιητική παρακολούθηση των απότομων μεταβολών του εντατικού πεδίου και της διανομής των τάσεων εντός της μικρής παρά το άκρο της ρωγμής ιδιόμορφης (singular) περιοχής.

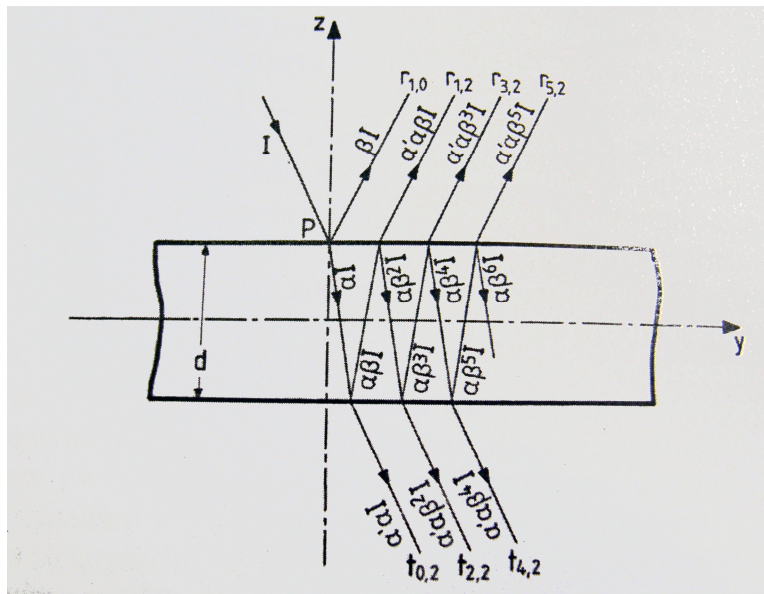
Η πειραματική αυτή μέθοδος καλείται **Οπτική Μέθοδος των Καστικών** και βασίζεται στις αρχές της γεωμετρικής οπτικής. Με την πειραματική αυτή μέθοδο **η επικρατούσα ιδιομορφία (singularity) των τάσεων παρά το άκρο της ρωγμής μετατρέπεται βάσει αυστηρών μαθηματικών κανόνων σε οπτική ιδιομορφία, η οποία μετρούμενη με μεγάλη ακρίβεια παρέχει ικανοποιητικά στοιχεία για την μελέτη της παρά το άκρο της ρωγμής περιοχής.** Η οπτική αυτή ιδιομορφία προέρχεται από την συγκέντρωση επί ιδιόμορφης στον χώρο καμπύλης, η οποία καλείται **καυστική**, των ακτινών φωτός που αποκλίνουν από την ισχυρώς καταπονούμενη παρά το άκρο της ρωγμής περιοχή. Η καυστική αυτή λαμβάνεται επάνω σε πέτασμα και αφού ευρίσκεται σε πλήρη αντιστοιχία προς την παρά το άκρο της ρωγμής περιοχή επιτρέπει την μελέτη αυτής.

Η οπτική μέθοδος των καυστικών μπορεί να εφαρμοσθεί σε όλα τα υλικά διαφανή (μέθοδος διερχομένων καυστικών) και μη διαφανή (μέθοδος των ανακλώμενων καυστικών) και αποτελεί απλή, ακριβή και ευαίσθητη μέθοδο μοναδική για την μελέτη των ρωγμών.

Αλλά εκτός από την μελέτη των ρωγμών, η μέθοδος των καυστικών μπορεί να εφαρμοστεί και σε πολλές άλλες περιπτώσεις όπου έχουμε συγκέντρωση τάσεων, όπως είναι και τα προβλήματα μηχανικής της επαφής. Συγκεκριμένα η πειραματική μέθοδος των καυστικών είναι κατάλληλη για την μελέτη προβλημάτων επαφής στα οποία εμφανίζονται ιδιομορφίες (singularities) του τασικού πεδίου είτε λόγω φόρτισης, είτε λόγω γεωμετρικής ασυνέχειας (π.χ. άκρα, γωνίες, ρωγμές).

Μεταβολή της έντασης φωτεινής ακτίνας διερχόμενης δια διαφανούς μέσου.

Θεωρούμε επίπεδο δοκίμιο με παράλληλες παράπλευρες επιφάνειες από διαφανές υλικό και ακτίνα μονοχρωματικού φωτός προσπίπτουσα καθέτως επί του δοκιμίου σε τυχόν σημείο P. Η ακτίνα κατά την πρόσπτωσή της επί του δοκιμίου αφ' ενός μεν ανακλάται αφ' ετέρου δε διαθλάται και ακολούθως διέρχεται δια του δοκιμίου. Η διαθλώμενη όμως ακτίνα ανακλάται στην πίσω επιφάνεια του δοκιμίου και ακολούθως δια διαθλάσεως εξέρχεται από την εμπρός και πίσω επιφάνεια του δοκιμίου. Οι διαδοχικές αυτές ανακλάσεις και διαθλάσεις της ακτίνας εξακολουθούν επ' άπειρον, έτσι ώστε μια απειρία ακτινών εξέρχεται από την εμπρός και πίσω επιφάνεια του δοκιμίου (Σχήμα 1).



Σχήμα 1

Η ένταση I της φωτεινής ακτίνας μειώνεται συνεχώς κατά τις διαδοχικές αυτές ανακλάσεις και διαθλάσεις. Εάν με $r_{m,\ell}$ συμβολίζονται οι εξερχόμενες ακτίνες από την εμπρός επιφάνεια της πλάκας και με $t_{m,\ell}$ συμβολίζονται οι εξερχόμενες ακτίνες από την πίσω επιφάνεια της πλάκας,

όπου ο δείκτης m συμβολίζει τον αριθμό των ανακλάσεων και ο δείκτης ℓ τον αριθμό των διαθλάσεων τότε οι εντάσεις των ακτινών αυτών δίνονται από τις σχέσεις:

$$I_{r_{m,\ell}, t_{m,\ell}} = \beta^m (1 - \beta)^\ell I \quad (1)$$

όπου ο λόγος μείωσης β της φωτεινής έντασης δίνεται από την σχέση:

$$\beta = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 \quad (2)$$

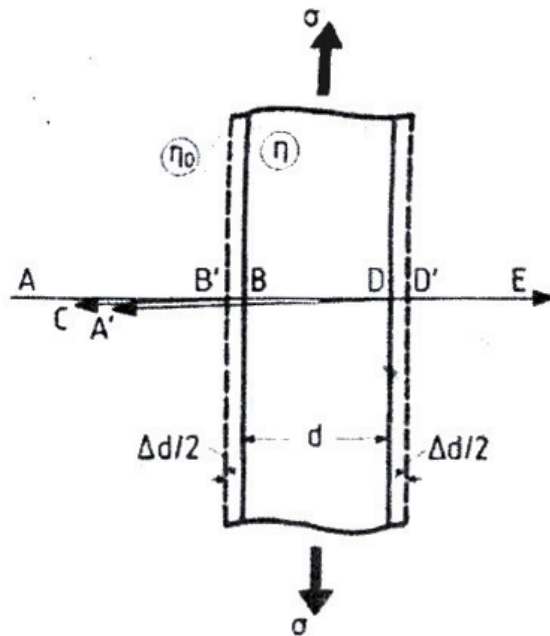
όπου n ο δείκτης διάθλασης του υλικού της πλάκας.

Επίδραση της φόρτισης επί του οπτικού δρόμου των ανακλώμενων και διερχόμενων ακτινών.

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2 θεωρούμε φωτεινή ακτίνα $ABDE$, πολωμένη κατά την διεύθυνση είτε της κύριας τάσης σ_1 είτε της κύριας τάσης σ_2 και προσπίπτουσα καθέτως επί της πλευρικής επιφάνειας της πλάκας ευρισκόμενης υπό επίπεδη εντατική κατάσταση (plane stress). Για την περίπτωση της ανακλάσεως της φωτεινής ακτίνας από την πίσω επιφάνεια της πλάκας, ο οπτικός δρόμος μεταξύ των δύο σημείων αναφοράς A και A' της φωτεινής ακτίνας $ABDA'$ ($AB = A'B$), όταν η πλάκα είναι αφόρτιστη, είναι:

$$s_A = 2(AB)\eta_0 + 2d\eta \quad (3)$$

όπου d είναι το πάχος της πλάκας, η_0 είναι ο συντελεστής διαθλάσεως περιβάλλοντος και η είναι ο συντελεστής διαθλάσεως του υλικού της πλάκας όταν είναι αφόρτιστο.



Σχήμα 2

Όταν η πλάκα φορτιστεί, ο οπτικός δρόμος μεταξύ των αυτών σημείων, A και A' είναι:

$$s_{L_{1,2}} = 2\left((AB) - \frac{\Delta d}{2}\right)\eta_o + 2(d + \Delta d)\eta_{1,2} \quad (4)$$

όπου Δd είναι η μεταβολή του πάχους της πλάκας που οφείλεται στη φόρτιση και $\eta_{1,2}$ είναι ο δείκτης διαθλάσεως του υλικού της φορτισμένης πλάκας, κατά τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων $\sigma_{1,2}$, αντιστοίχως. Θέτοντας:

$$\eta_{1,2} = \eta + \Delta\eta_{1,2} \quad (5)$$

όπου $\Delta\eta_{1,2}$ είναι η μεταβολή του δείκτη διαθλάσεως, η μεταβολή του οπτικού δρόμου της ακτίνας $ABDA'$, που οφείλεται στη φόρτιση δίνεται από την σχέση:

$$\Delta s_{\eta_{1,2}} = s_{L_{1,2}} - s_A = 2\left[\left(\eta_{1,2} - \eta\right)d + \left(\eta - \frac{\eta_o}{2}\right)\Delta d\right] \quad (6)$$

Ομοίως για την οπτική ακτίνα $ABDE$ τη διερχόμενη δια της πλάκας η μεταβολή του οπτικού δρόμου που οφείλεται στην φόρτιση είναι:

$$\Delta s_{\eta_{1,2}} = (\eta_{1,2} - \eta)d + (\eta - \eta_o)\Delta d \quad (7)$$

Για την φωτεινή ακτίνα ABC την ανακλώμενη από την εμπρός επιφάνεια της πλάκας, η μεταβολή του οπτικού δρόμου είναι:

$$\Delta s_f = -\eta_o\Delta d \quad (8)$$

Οι μεταβολές του δείκτη διαθλάσεως η κατά τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων $\sigma_{1,2}$ στο επίπεδο τασικό πρόβλημα δίνονται από τον φωτοτασεοπτικό νόμο των Neumann-Maxwell:

$$\Delta\eta_{1,2} = \eta_{1,2} - \eta = b_1\varepsilon_{1,2} + b_2(\varepsilon_{2,1} + \varepsilon_3) \quad (9)$$

όπου b_1 και b_2 σταθερές και $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ οι κύριες παραμορφώσεις. Αντικαθιστώντας την σχέση (9) στις σχέσεις (6) και (7) και λαμβάνοντας υπ' όψη τον νόμο του Hooke προκύπτουν οι συνθήκες Fante οι οποίες δίνουν την μεταβολή των οπτικών δρόμων των ακτινών $ABDA'$ και $ABDE$ που οφείλονται στην φόρτιση:

$$\Delta s_{r,2} = 2c_r[(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \xi_r(\sigma_1 - \sigma_2)]d \quad (10)$$

$$\Delta s_{t,2} = c_t[(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \xi_t(\sigma_1 - \sigma_2)]d \quad (11)$$

όπου $\xi_{r,t}$ είναι ο συντελεστής της οπτικής ανισοτροπίας του υλικού και $c_{r,t}$ είναι οι τασεοπτικές σταθερές οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις:

$$c_{r,t} = \frac{\alpha_{r,t} + \beta_{r,t}}{2}, \quad \xi_{r,t} = \frac{\alpha_{r,t} - \beta_{r,t}}{\alpha_{r,t} + \beta_{r,t}} \quad (12)$$

όπου:

$$\alpha_r = \frac{1}{E}[b_1 - 2\nu b_2 - \nu(\eta - \frac{\eta_o}{2})] \quad (13)$$

$$\beta_r = \frac{1}{E}[b_2 - \nu(b_1 + b_2) - \nu(\eta - \frac{\eta_o}{2})] \quad (14)$$

$$\alpha_t = \frac{1}{E}[b_1 - 2\nu b_2 - \nu(\eta - \eta_o)] \quad (15)$$

$$\beta_t = \frac{1}{E}[b_2 - \nu(b_1 + b_2) - \nu(\eta - \eta_o)] \quad (16)$$

Στην περίπτωση που έχουμε οπτικώς ισότροπα υλικά ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$b_1 = b_2 = b \quad (17)$$

$$\Delta s_{r1} = \Delta s_{r2} = 2c_r(\sigma_1 + \sigma_2)d \quad (18)$$

$$\Delta s_{t1} = \Delta s_{t2} = c_t(\sigma_1 + \sigma_2)d \quad (19)$$

$$a_r = \beta_r = c_r = \frac{1}{E} \left[(1-2\nu)b - \nu \left(\eta - \frac{\eta_o}{2} \right) \right] \quad (20)$$

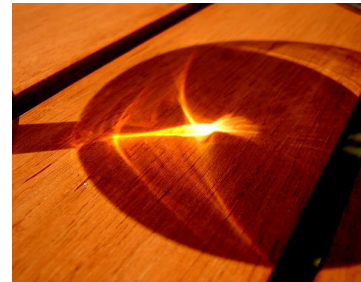
$$a_t = \beta_t = c_t = \frac{1}{E} [(1-2\nu)b - \nu(\eta - \eta_o)] \quad (21)$$

Από τις σχέσεις (20) και (21) προκύπτει ότι:

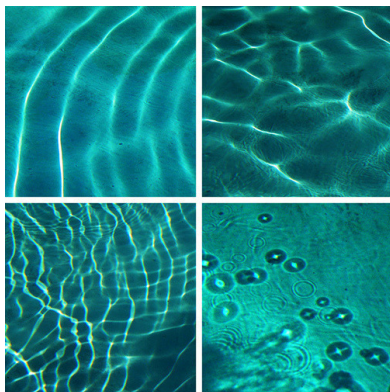
$$c_r = c_t - \frac{\nu\eta_o}{2E} \quad (22)$$

Οι τασεοπτικές σταθερές υπολογίζονται πειραματικά με την συμβολομετρική μέθοδο.

Γενικά, λέγοντας καυστική εννοούμε μια καμπύλη ή μια επιφάνεια στον χώρο στις οποίες υπάρχει πυκνή συγκέντρωση φωτός. Τέτοιες καμπύλες ή επιφάνειες είναι δυνατόν να δημιουργηθούν από ανάκλαση φωτεινών ακτινών σε επιφάνειες οι οποίες συμπεριφέρονται ως κάτοπτρα. Παρατηρείται συχνά στην φύση, δημιουργία καυστικών που προέρχονται είτε από ανάκλαση είτε από διάθλαση του ηλιακού φωτός (βλ. παράπλευρες εικόνες). Από το γεγονός ότι στις καμπύλες αυτές ή στις επιφάνειες υπάρχει πυκνή ένταση του φωτός είναι δυνατόν να γίνει εύκολη παρατήρηση σε πειραματικές διατάξεις και η ευκολία γίνεται μεγαλύτερη στην περίπτωση που οι καυστικές τέμνονται από ένα επίπεδο οπότε έχουμε να παρατηρήσουμε μια φωτεινή καμπύλη την οποία και ονομάζουμε καυστική (βλ. Σχήμα 4).

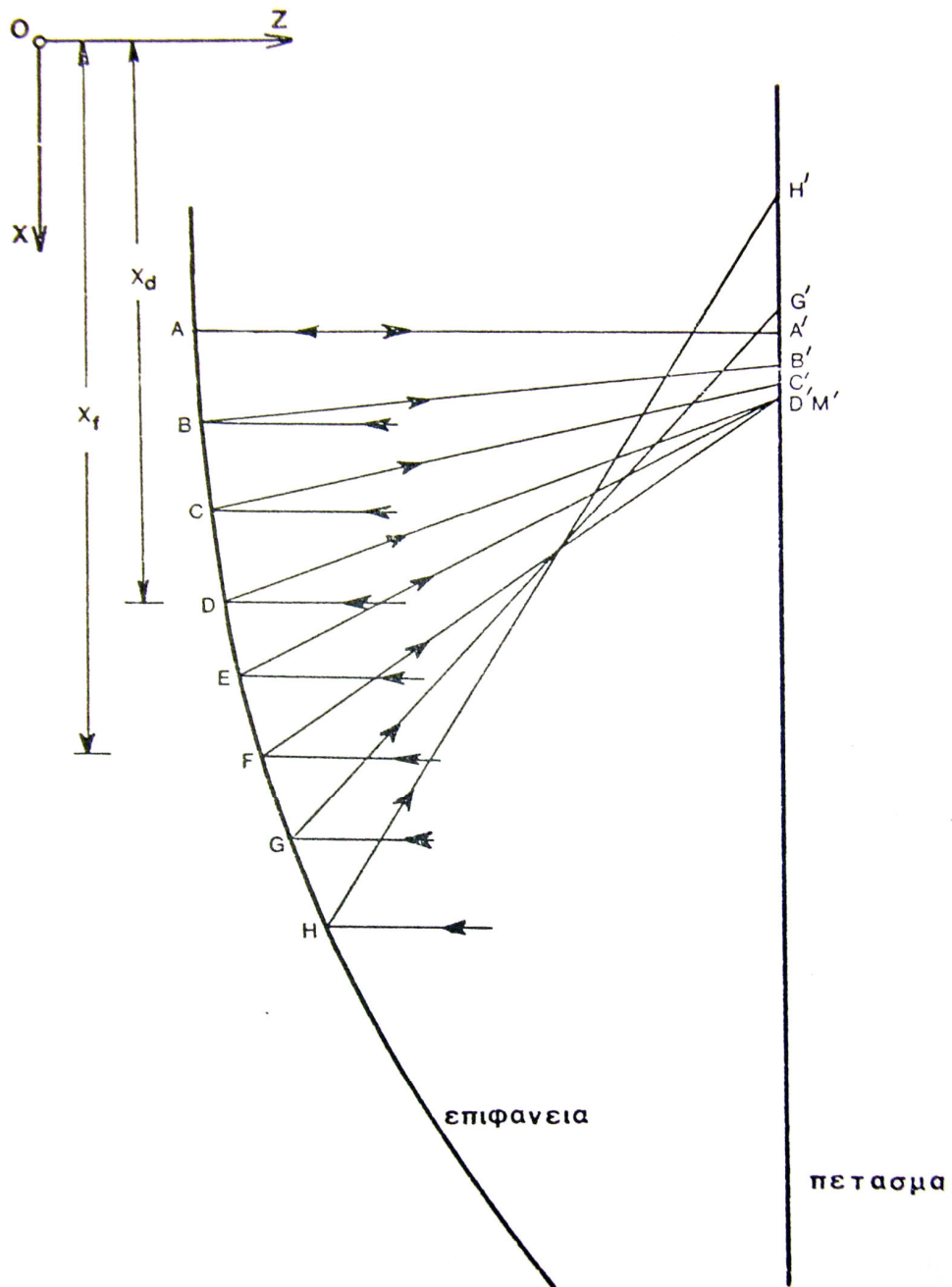


Οι φυσικοί νόμοι στους οποίους βασίζεται η δημιουργία μιας καυστικής είναι οι νόμοι της ανακλάσεως του φωτός. Βάσει των νόμων αυτών μπορούμε να βρούμε σχέσεις ανάμεσα στις συντεταγμένες των σημείων από τα οποία ανακλάται το φως και των αντίστοιχων συντεταγμένων των σημείων στα οποία προσπίπτει το φως στο επίπεδο του πετάσματος.



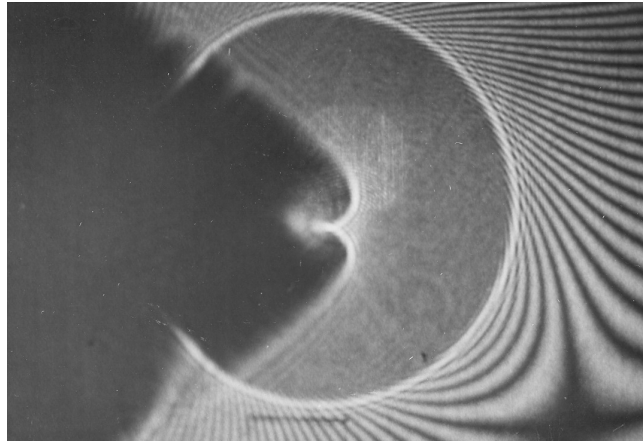
Θεωρούμε για απλούστευση μια κυλινδρική επιφάνεια της οποίας ο διαμήκης άξονας είναι παράλληλος στον άξονα y του συστήματος συντεταγμένων. Ακόμη υποθέτουμε ότι η κυλινδρική επιφάνεια ανακλά τις ακτίνες του φωτός ως κάτοπτρο και σε απόσταση z_0 υπάρχει ένα πέτασμα στο οποίο προσπίπτουν οι ανακλώμενες ακτίνες. Παρακολουθώντας τις ανακλάσεις των ακτινών από τα σημεία A, B, C, \dots παρατηρούμε ότι υπάρχει κατ' αρχήν αντιστοιχία μεταξύ των ανακλώμενων ακτινών από την επιφάνεια και αυτών που προσπίπτουν στο πέτασμα. Για παράδειγμα το A αντιστοιχεί στο A' , το B στο B' κλπ. Υπάρχει όμως μια περιοχή της κυλινδρικής επιφάνειας την οποία μπορούμε να χαρακτηρίσουμε ως την περιοχή των σημείων των οποίων η τετμημένη ευρίσκεται μεταξύ των X_D και X_F .

Για την περιοχή αυτή παρατηρούμε ότι όλες οι ανακλώμενες ακτίνες συγκεντρώνονται σε μια μικρή περιοχή του πετάσματος στην οποία όπως είναι φυσικό θα υπάρχει μεγάλη ένταση φωτός και την οποία στο Σχήμα 3 μπορούμε να χαρακτηρίσουμε ως το σημείο M .



Σχήμα 3: Γεωμετρική επαλήθευση της δημιουργίας της καυστικής.

Η μελέτη αυτή γίνεται βέβαια σε ένα επίπεδο κάθετο προς την κυλινδρική επιφάνεια και το πέτασμα. Στην πραγματικότητα στο επίπεδο του πετάσματος θα δημιουργηθεί μια συγκέντρωση του φωτός σε μια ευθεία η οποία περνάει από το σημείο M και θα είναι παράλληλη προς τον άξονα y . Η καυστική λοιπόν αυτή θα είναι μια ευθεία.



Σχήμα 4: Καυστική στο εργαστήριο

Ας προσπαθήσουμε τώρα την πιο πάνω ποιοτική παρατήρηση να την ερμηνεύσουμε σύμφωνα με τους νόμους της ανακλάσεως του φωτός.

Εφόσον ο διαμήκης άξονας της κυλινδρικής επιφάνειας είναι παράλληλος προς τον άξονα y μπορούμε να περιγράψουμε την επιφάνεια αυτή με την εξίσωση:

$$z = f(x) \quad (23)$$

Ενώ από τον νόμο της ανάκλασης του φωτός ισχύει η σχέση:

$$X = x - [z_0 - f(x)] \tan 2a \quad (24)$$

όπου x είναι σημεία της επιφάνειας και X τα αντίστοιχα σημεία του πετάσματος, ενώ η γωνία a είναι η γωνία ανακλάσεως και ισχύει βέβαια η σχέση ότι:

$$\tan a = f'(x) \quad (25)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (25) και (24) καταλήγουμε στην σχέση:

$$X = x - [z_0 - f(x)] \frac{2f'(x)}{1 + [f'(x)]^2} \quad (26)$$

Από την γεωμετρία της κυλινδρικής επιφάνειας (Σχήμα 3) προκύπτει ότι οι τιμές $f(x)$ και $f'(x)$ είναι θετικές. Εκτός αυτού συγκρίνοντας την απόσταση z_0 με την $f(x)$ αυτή είναι πολύ πιο μεγάλη και μας επιτρέπει την αντικατάσταση στη σχέση (26) της ποσότητας $[z_0 - f(x)]$ με το z_0 και της ποσότητας $1 + [f'(x)]^2$ με την μονάδα. Έτσι η σχέση (26) γράφεται:

$$X = x - 2z_0 f'(x) \quad (27)$$

Αν όμως θεωρήσουμε ότι η επιφάνεια η οποία ανακλά το φως περιγράφεται από την σχέση:

$$z = f(x, y) \quad (28)$$

τότε, οι αντίστοιχες εξισώσεις της σχέσης (27) είναι οι παρακάτω:

$$\begin{aligned} X &= x - 2z_0 \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ Y &= y - 2z_0 \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{aligned} \quad (29)$$

ή αν τις γράψουμε σε διανυσματική μορφή έχουμε ότι:

$$(X, Y) = (x, y) - 2z_0 \text{grad } f(x, y) \quad (30)$$

Θεωρώντας ότι η καθυστέρηση του οπτικού δρόμου είναι Δs έχουμε ότι:

$$\Delta s = -2f(x, y) \quad (31)$$

Και οι εξισώσεις (29) παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} X &= x + z_0 \frac{\partial \Delta s}{\partial x} \\ Y &= y + z_0 \frac{\partial \Delta s}{\partial y} \end{aligned} \quad (32)$$

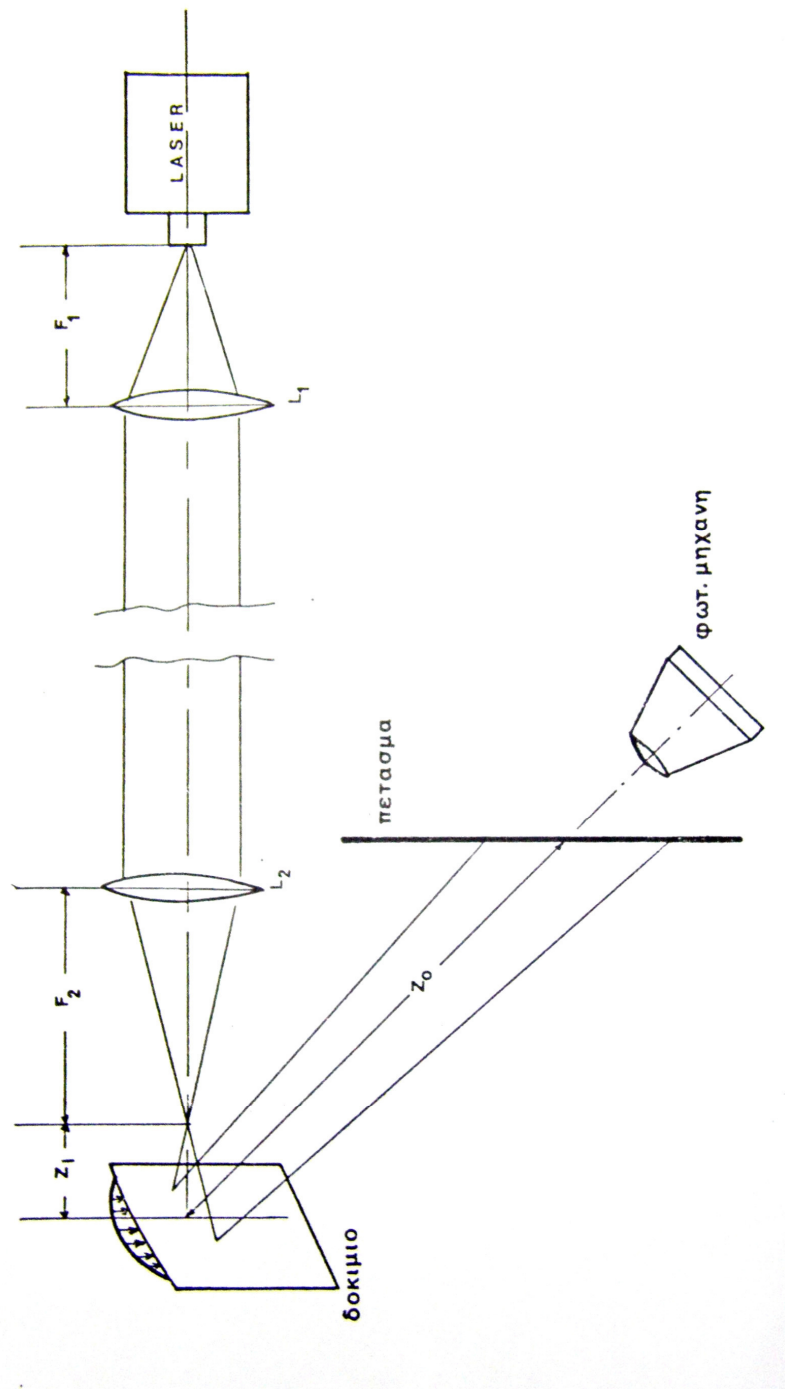
Βέβαια όλες οι πιο πάνω σχέσεις έχουν ευρεθεί με την υπόθεση ότι το προσπίπτον φως είναι παράλληλο. Στην πραγματικότητα όμως δεν συμβαίνει αυτό όπως φαίνεται στην απλή πειραματική διάταξη του Σχήματος 5. Στην περίπτωση αυτή στους πιο πάνω τύπους μπαίνει και ο λόγος μεγεθύνσεως λ_m ο οποίος δίνεται από την σχέση:

$$\lambda_m = \frac{z_0 \pm z_i}{z_i} \quad (33)$$

όπου z_0 είναι η απόσταση δοκιμίου πετάσματος και z_i η εστιακή απόσταση της εστίας του φακού από το δοκίμιο, η οποία λαμβάνεται αρνητική (-) στην περίπτωση που η προσπίπτουσα επί του δοκιμίου φωτεινή δέσμη είναι συγκλίνουσα και θετική (+) στην περίπτωση που είναι αποκλίνουσα.

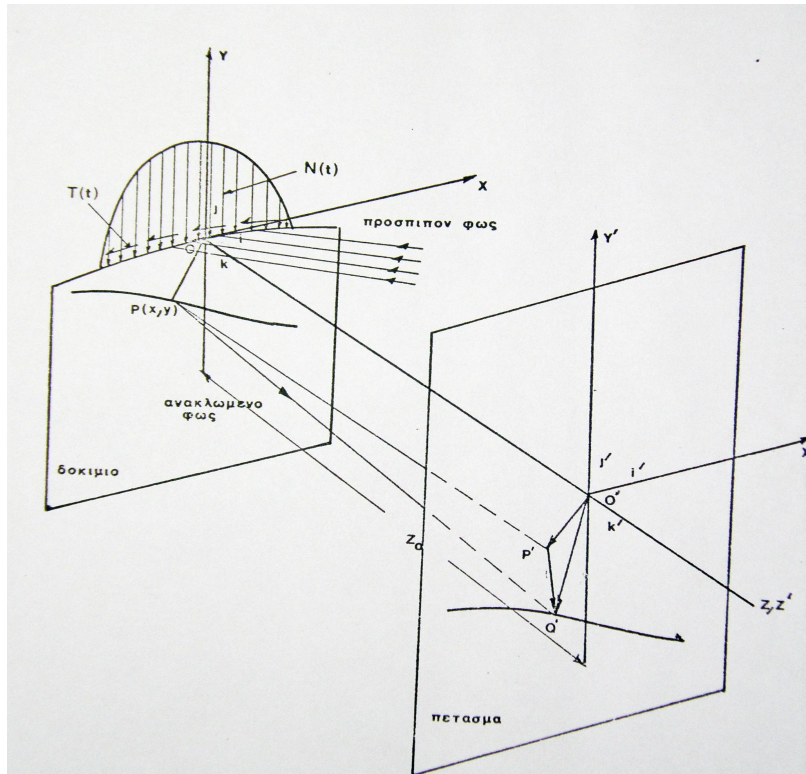
Μετά από αυτά οι σχέσεις (32) παίρνουν την μορφή:

$$\begin{aligned} X &= \lambda_m x + z_0 \frac{\partial \Delta s}{\partial x} \\ Y &= \lambda_m y + z_0 \frac{\partial \Delta s}{\partial y} \end{aligned} \quad (34)$$



Σχήμα 5: Πειραματική Διάταξη

Οι σχέσεις αυτές εκφράζουν την αντιστοιχία μεταξύ των σημείων $P(x, y)$ του δοκιμίου και των σημείων $Q'(X, Y)$ του πετάσματος (Σχήμα 6) όπου Δs η αύξηση του οπτικού δρόμου των ακτινών, η οποία οφείλεται στην φόρτιση του δοκιμίου.



Σχήμα 6: Δημιουργία καυστικής από την εφαρμογή ενός ορθού και ενός διατμητικού φορτίου.

Έχει γίνει βέβαια από πριν η υπόθεση ότι οι επιφάνειες του δοκιμίου πριν την φόρτιση είναι επίπεδες και παράλληλες. Προκειμένου τα σημεία X και Y να ανήκουν σε μια καμπύλη, πρέπει το X να παίρνει μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή όταν το Y μένει σταθερό ή αντίστροφα το Y να παίρνει μια μέγιστη ή ελάχιστη τιμή όταν το X μένει σταθερό. Αυτό εκφράζεται με το μηδενισμό της Ιακωβιανής διακρίνουσας:

$$J = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (35)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις (34) η σχέση (35) γίνεται:

$$\begin{vmatrix} 1 + \left(\frac{z_0}{\lambda_m}\right) \frac{\partial^2 \Delta s}{\partial x^2} & \left(\frac{z_0}{\lambda_m}\right) \frac{\partial^2 \Delta s}{\partial x \partial y} \\ \left(\frac{z_0}{\lambda_m}\right) \frac{\partial^2 \Delta s}{\partial x \partial y} & 1 + \left(\frac{z_0}{\lambda_m}\right) \frac{\partial^2 \Delta s}{\partial y^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (36)$$

το οποίο γίνεται:

$$1 + \frac{z_0}{\lambda_m} \left(\frac{\partial^2 \Delta s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta s}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{z_0}{\lambda_m} \right)^2 \left[\frac{\partial^2 \Delta s}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Delta s}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \Delta s}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = 0 \quad (37)$$

Έτσι, λοιπόν, παρατηρούμε ότι η σχέση ανάμεσα στα σημεία (x, y) του δοκιμίου και (X, Y) του πετάσματος δίνεται από τις σχέσεις (34) ενώ για να ανήκουν τα σημεία στην καυστική θα πρέπει να ισχύει και η σχέση (35) ή οι ισοδύναμες μορφές της (36) και (37). Η εξίσωση (34) ονομάζεται εξίσωση της καυστικής ενώ η εξίσωση (37) εξίσωση της αρχικής καμπύλης.

Μελετώντας τις εξισώσεις (34) και (37) παρατηρούμε ότι τα μεγέθη τα οποία υπάρχουν σε αυτές αναφέρονται στην οπτική και δεν έχουν καμία σχέση με τις παραμέτρους της θεωρίας της ελαστικότητας. Για να μπορέσουμε να συνδέσουμε οπτική και ελαστικότητα πρέπει να εκφράσουμε την μεταβολή του οπτικού δρόμου Δs ως συνάρτηση μεγεθών της θεωρίας της ελαστικότητας. Αυτό έχει γίνει μερικώς στο προηγούμενο κεφάλαιο όπου αναλύσαμε το θέμα των τασεοπτικών σταθερών.

Για ευκολία στους υπολογισμούς, εισάγουμε στο σημείο αυτό την έννοια του διανύσματος αποκλίσεως \mathbf{w} το οποίο ορίζεται από το Σχήμα 6 ως $\mathbf{w} = \mathbf{O}'\mathbf{Q}' - \mathbf{O}'\mathbf{P}'$. Οι αιχμές του διανύσματος \mathbf{w} καθορίζουν πάνω στο επίπεδο $z = z_0$ περιβάλλουσα (καυστική), η οποία είναι στενά συνδεδεμένη με τον τρόπο παραμόρφωσης των περιοχών της πλάκας, από τις οποίες

αναδύονται οι φωτεινές ακτίνες. Με χρήση του διανύσματος \mathbf{w} οι σχέσεις (32) μετατρέπονται στην παρακάτω σχέση:

$$\mathbf{w} = -z_0 \text{grad} \Delta s_{r,t}(x, y) \quad (38)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (10), (11), (18) και (19) στην σχέση (38) προκύπτει το διάνυσμα απόκλισης για τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. Οπτικώς ανισότροπα υλικά με συντελεστή διπλοθλαστικότητας $\xi_{r,t}$.

Για την πρώτη ακτίνα την ανακλώμενη από την πίσω επιφάνεια της πλάκας.

$$\mathbf{w} = -2z_0 dc_r \text{grad} \left[(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \xi_r (\sigma_1 - \sigma_2) \right] \quad (39)$$

Για την πρώτη ακτίνα τη διερχόμενη δια της πλάκας.

$$\mathbf{w} = -z_0 dc_t \text{grad} \left[(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \xi_t (\sigma_1 - \sigma_2) \right] \quad (40)$$

Οι σχέσεις (39) και (40) γενικά είναι δυνατόν να γραφούν:

$$\mathbf{w} = -\varepsilon z_0 dc_{r,t} \text{grad} \left[(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \xi_{r,t} (\sigma_1 - \sigma_2) \right] \quad (41)$$

όπου η σταθερά ε παίρνει την τιμή $\varepsilon=2$ για την πρώτη ανακλώμενη ακτίνα από την πίσω επιφάνεια της πλάκας, (r) και $\varepsilon=1$ για την πρώτη διερχόμενη δια της πλάκας ακτίνα, (t).

2. Οπτικώς ισότροπα υλικά ($\xi_{r,t}=0$).

Για την πρώτη ακτίνα την ανακλώμενη από την πίσω επιφάνεια της πλάκας.

$$\mathbf{w} = -2z_0 dc_r \text{grad} (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (42)$$

Για την πρώτη ακτίνα τη διερχόμενη δια της πλάκας.

$$\mathbf{w} = -z_0 dc_t \text{grad} (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (43)$$

Οι σχέσεις (39) και (40) γενικά είναι δυνατόν να γραφούν:

$$\mathbf{w} = -\varepsilon z_0 dc_{r,t} \text{grad} (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (44)$$

Για την πρώτη ακτίνα την ανακλώμενη από την εμπρός επιφάνεια της πλάκας ισχύει ότι, εάν α είναι η γωνία στροφής λόγω της παραμόρφωσης τότε η απόκλιση φ της ανακλώμενης ακτίνας, σύμφωνα με τον νόμο της οπτικής του Snell, δίνεται από την σχέση:

$$\varphi = 2\alpha \quad (45)$$

και η γωνία α δίνεται από την σχέση:

$$a = \text{grad} \frac{\Delta d}{2} = -\text{grad} \left[\frac{vd}{2E} (\sigma_1 + \sigma_2) \right] \quad (46)$$

οπότε η γωνία φ είναι:

$$\varphi = -\frac{vd}{E} \text{grad} (\sigma_1 + \sigma_2) = -dc_f \text{grad} (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (47)$$

όπου:

$$c_f = \frac{v}{E} \quad (48)$$

Είναι η ταυροοπτική σταθερά για την πρώτη ανακλώμενη ακτίνα από την εμπρός επιφάνεια της πλάκας. Το διάνυσμα απόκλισης \mathbf{w} της ανακλώμενης ακτίνας πάνω στο πέτασμα σε απόσταση z_0 από την πλάκα δίνεται από την σχέση:

$$\mathbf{w} = -z_0 dc_f \text{grad} (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (49)$$

Τελικά οι σχέσεις (44) και (49) μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\mathbf{w} = -\varepsilon z_0 dc_{r,t,f} \text{grad} (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (50)$$

Θέτουμε:

$$C_{r,t,f}^* = -\frac{\varepsilon z_0 dc_{r,t,f}}{\lambda_m} \quad (51)$$

και έτσι η σχέση (50) γίνεται:

$$\mathbf{w} = C_{r,t,f}^* \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (52)$$

Μιγαδική τασική συνάρτηση.

Στο πρώτο κεφάλαιο ορίσαμε την έννοια της **τασικής συνάρτησης** ή **συνάρτησης Airy**. Στο κεφαλαίο αυτό θα την συμβολίσουμε με $F = F(x, y)$.

Θεώρημα

Κάθε συνάρτηση $F(x, y)$ ή οποία ικανοποιεί την διαρμονική εξίσωση (2.11) δύναται να παρασταθεί με την βοήθεια δυο αναλυτικών συναρτήσεων $\varphi(z)$ και $x(z)$ της μιγαδικής μεταβλητής $z = x + iy$ δια της σχέσεως:

$$\varphi(z)F = \text{Re}[\bar{z}\varphi(z) + x(z)] \quad (53)$$

Από τις σχέσεις (53) και (2.8), (2.9) και (2.10) προκύπτει για το **επίπεδο εντατικό** πρόβλημα ότι:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] = 4\text{Re}\varphi'(z) = 4\text{Re}\varphi(z) = 2[\varphi(z) + \overline{\varphi(z)}] \quad (54)$$

Εφαρμογή της οπτικής μεθόδου των καυστικών στο επίπεδο εντατικό πρόβλημα για οπτικώς ισότροπα υλικά.

Από το προηγούμενο κεφάλαιο μπορούμε να συνάγουμε ότι το άθροισμα των κυρίων τάσεων δίνεται από την σχέση:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4 \operatorname{Re} \varphi(z) \quad (55)$$

όπου $\varphi(z)$ αναλυτική συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής z . Έστω ότι η $\varphi(z)$ είναι της μορφής:

$$\varphi(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (56)$$

όπου $u(x, y)$ και $v(x, y)$ πραγματικές συναρτήσεις των μεταβλητών x, y που ικανοποιούν τις σχέσεις Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (57)$$

Από τις σχέσεις (57) συμπεραίνεται ότι οι συναρτήσεις $u(x, y)$ και $v(x, y)$ ικανοποιούν την αρμονική εξίσωση Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (58)$$

Το διάνυσμα απόκλισης του φωτός για τα ισότροπα υλικά δίνεται από την σχέση:

$$\mathbf{w} = C_{r,t,f}^* \operatorname{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) = 4C_{r,t,f}^* \operatorname{grad} \varphi(z) = 4C_{r,t,f}^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} \right) \quad (59)$$

ενώ στο μιγαδικό επίπεδο η σχέση αυτή γράφεται:

$$\mathbf{w} = 4C_{r,t,f}^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (60)$$

Το διάνυσμα \mathbf{w} εκφράζει τη σχετική απόκλιση του φωτός μεταξύ τυχόντος σημείου $P(x, y)$, στη γειτονιά της υπό μελέτη περιοχής, της πλάκας και της εικόνας του $Q'(X, Y)$ πάνω στο πέτασμα αναφοράς τοποθετημένου σε απόσταση z_0 από την πλάκα. Η απόλυτη απόκλιση εκφράζεται με το διάνυσμα \mathbf{W} το οποίο στο μιγαδικό επίπεδο πάνω στο πέτασμα αναφοράς γράφεται:

$$\mathbf{W} = (x + iy) + \mathbf{w} = x + iy + 4C_{r,t,f}^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (61)$$

Αλλά επίσης όπως είδαμε και προηγουμένως ισχύει το εξής:

$$\mathbf{W} = (\mathbf{O}'\mathbf{Q}') = X + iY \quad (62)$$

Από τις σχέσεις (61) και (62) συνάγουμε τις παρακάτω παραμετρικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned} X &= x + 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial u}{\partial x} \\ Y &= y + 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \quad (63)$$

Οι παραπάνω σχέσεις είναι ισοδύναμες με τις σχέσεις (32) με την διαφορά ότι πετύχαμε να εισάγουμε την τασεοπτική σταθερά η οποία είναι μέγεθος που συνδέει την οπτική με την θεωρία της ελαστικότητας. Επίσης καταφέραμε να συνδέσουμε τις εξισώσεις της καυστικής με τις συναρτήσεις $u(x, y)$ και $v(x, y)$ δηλαδή με την μιγαδική τασική συνάρτηση $\varphi(z)$.

Είδαμε προηγουμένως ότι για να ανήκουν τα σημεία (X, Y) στην καυστική καμπύλη θα πρέπει να ικανοποιείται η εξίσωση (35) ή οι ισοδύναμες μορφές της (36) και (37).

Θα πρέπει λοιπόν να ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$1 + 4C_{r,t,f}^* \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + 16C_{r,t,f}^{*2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = 0 \quad (64)$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (64) την πρώτη των σχέσεων (58) απλοποιείται στην εξής:

$$1 + 16C_{r,t,f}^{*2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = 0 \quad (65)$$

Παραγωγίζοντας την αναλυτική συνάρτηση $\varphi(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, δύο φορές ως προς x προκύπτει:

$$\varphi''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (66)$$

και λαμβάνοντας υπ' όψη τη δεύτερη των σχέσεων (58) προκύπτει:

$$\varphi''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - i \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad (67)$$

Το μέτρο της (67) είναι:

$$|\varphi''(z)|^2 = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \quad (68)$$

και λαμβάνοντας υπ' όψη την πρώτη των σχέσεων (58) προκύπτει:

$$|\varphi''(z)|^2 = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \quad (69)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (69) στην σχέση (65) προκύπτει:

$$|4C_{r,t,f}^* \varphi''(z)|^2 = 1 \quad (70)$$

Και από αυτή προκύπτει η εξίσωση της **αρχικής καμπύλης** της καυστικής.

$ 4C_{r,t,f}^* \varphi''(z) = 1$	(71)
-----------------------------------	------

Και επειδή ισχύει:

$$\overline{\varphi'(z)} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \quad (72)$$

Η σχέση (61) αν λάβουμε υπ' όψη και τον συντελεστή μεγέθυνσης γίνεται:

$\mathbf{W} = \lambda_m \left(z + 4C_{r,t,f}^* \overline{\varphi'(z)} \right)$	(73)
---	------

Η οποία είναι και η **εξίσωση της καυστικής καμπύλης**.

Η εξίσωση (71) εκφράζει τα σημεία της αρχικής καμπύλης από τα οποία δημιουργείται η καυστική, η οποία εκφράζεται από την εξίσωση (73).

Κάθε σημείο του δοκιμίου το οποίο δεν ανήκει στην αρχική καμπύλη, ανακλά το φως σύμφωνα με τους νόμους ανακλάσεως και οι ανακλώμενες ακτίνες προσπίπτουν στο πέτασμα σε σημεία τα οποία υπακούν στην εξίσωση της καυστικής, οι καμπύλες δε που σχηματίζουν τα σημεία αυτά ονομάζονται ψευδοκαυστικές.



ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΕΠΑΦΗΣ

Εισαγωγή

Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή του προηγούμενου κεφαλαίου η πειραματική επίλυση προβλημάτων ελαστικότητας αποτελεί αναντικατάστατο εργαλείο στα χέρια των επιστημόνων που ασχολούνται με την μηχανολογία και όχι μόνο. Αρκεί να σκεφτεί κανείς την αμφίδρομη σχέση που υπάρχει μεταξύ θεωρητικής και πειραματικής έρευνας. Τα αποτελέσματα των θεωρητικών μοντέλων δεν μπορούν να έχουν απόλυτη αξιοπιστία αν δεν ελεγχθούν διεξοδικά με πειραματικές διαδικασίες και πολλές φορές τα αποτελέσματα των πειραμάτων μας υποχρεώνουν να αναπροσαρμόσουμε - βελτιώσουμε τα θεωρητικά μοντέλα ώστε να ανταποκρίνονται καλύτερα στην πραγματικότητα. Παράλληλα τα αποτελέσματα της θεωρητικής έρευνας οδηγούν πολλές φορές στον σχεδιασμό νέων πειραμάτων με καλύτερη ακρίβεια και ευρύτερο φάσμα ελέγχου.

Για τους λόγους αυτούς απαιτείται μεγάλη προσοχή και υπευθυνότητα στην διεξαγωγή των πειραμάτων αλλά και στην ανάλυση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από αυτά. Θα πρέπει να χρησιμοποιούνται αξιόπιστα όργανα μετρήσεων και ιδιοσυσκευές, θα πρέπει να δίνεται προσοχή στην κατασκευή των δοκιμίων και στην εκτέλεση του πειράματος, θα πρέπει να περιορίζεται η επίδραση αστάθμητων παραγόντων και αν δεν γίνεται θα πρέπει να το γνωρίζουμε κτλ.

Το κεφάλαιο αυτό σκοπό έχει να καλύψει όλα τα παραπάνω ζητήματα αναφορικά με τα πειράματα που διεξήχθησαν στο εργαστήριο Αντοχής των Υλικών του Ε.Μ.Π. υπό την επίβλεψη του καθηγητή Γ.Α. Παπαδόπουλου καθώς και να εκθέσει τα αποτελέσματα τους.

Σκοπός των πειραμάτων ήταν η σύγκριση των αποτελεσμάτων της αναλυτικής θεωρητικής επίλυσης τριών χαρακτηριστικών προβλημάτων επαφής με αυτά που προκύπτουν από την πειραματική μέθοδο των καυστικών. Τα προβλήματα αυτά είναι:

1. Σημειακή επαφή μεταξύ ελαστικών δίσκων ή δίσκου – ημιεπιπέδου.
2. Επαφή επίπεδου στερεού σώματος (*flat punch*) χωρίς καμπυλότητα στα άκρα με ελαστικό ημιεπίπεδο.
3. Γραμμική εσωτερική επαφή ελαστικών δίσκων (*pin-in-hole*).

Αξίζει να σημειωθεί ότι έγιναν πειράματα και για το πρόβλημα επαφής σφαίρας-δίσκου αλλά τα αποτελέσματα όπως θα δούμε κρίθηκαν μη αξιόπιστα λόγω απόκλισης της γεωμετρίας του δοκιμίου από την σφαιρική.

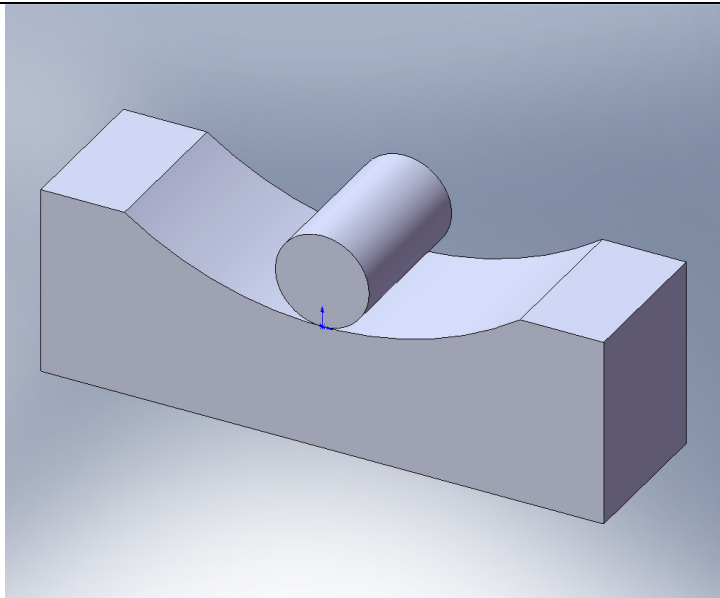
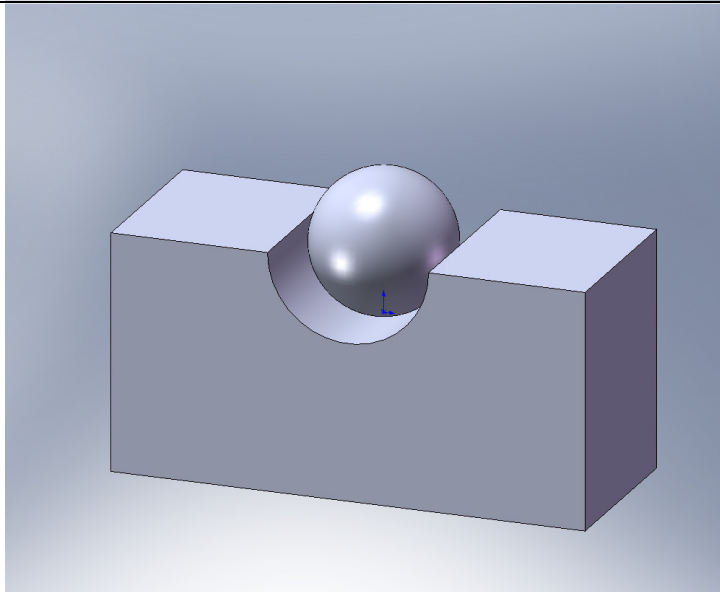
Για την καλύτερη παρουσίαση των πειραμάτων το κεφάλαιο διαιρείται σε τρία υποκεφάλαια:

- I. Προετοιμασία των πειραμάτων.**
- II. Διεξαγωγή των δοκιμών.**
- III. Ανάλυση των αποτελεσμάτων.**

I. ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ΠΕΙΡΑΜΑΤΩΝ

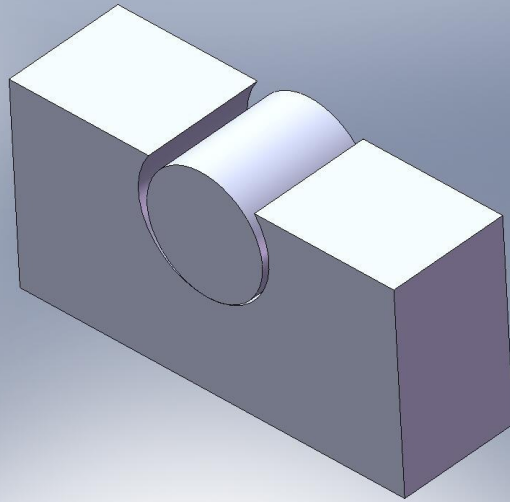
Σχεδιασμός των δοκιμίων

Για να μελετηθούν πειραματικά τα προαναφερθέντα προβλήματα επαφής θα πρέπει πρώτα από όλα να σχηματιστούν ώστε να γίνει κατανοητή η φύση τους και επιπλέον να γίνει ευκολότερος ο προσδιορισμός της κατάλληλης μορφής των δοκιμίων. Στα παρακάτω τρισδιάστατα σκαριφήματα γίνεται εποπτική παρουσίαση των προβλημάτων που θα εξετασθούν.

<p>Σημειακή εσωτερική επαφή ελαστικών δίσκων</p> <p>$R=110 \text{ mm}$ $r = 15 \text{ mm}$ πάχος δίσκων 10 mm</p>	
<p>Γραμμική εσωτερική επαφή σφαίρας με ελαστικό δίσκο</p> <p>$R=17 \text{ mm}$ $r = 15 \text{ mm}$ πάχος δίσκου 10 mm</p>	

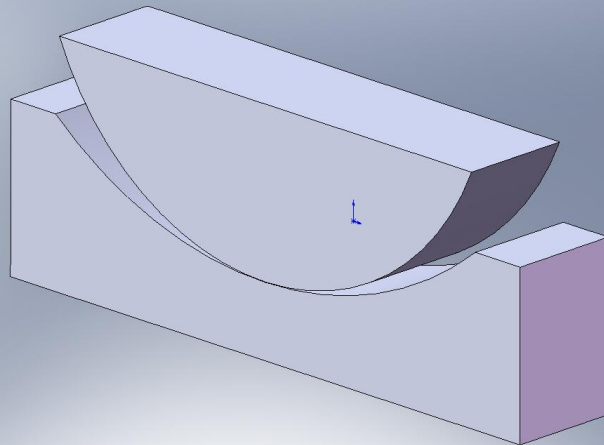
Γραμμική εσωτερική επαφή
δύο ελαστικών δίσκων
(*pin-in-hole*)

$R=17\text{ mm}$
 $r = 15\text{ mm}$
πάχος δίσκων 10 mm



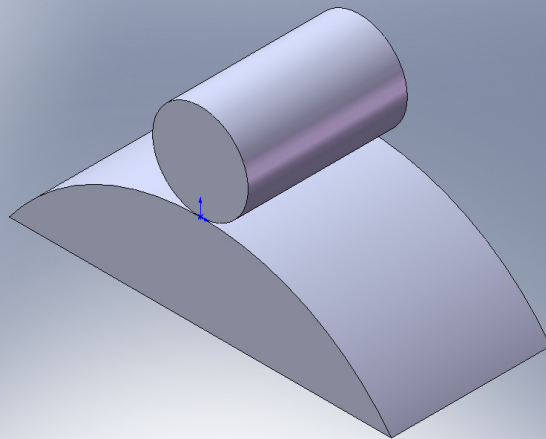
Γραμμική εσωτερική επαφή
δύο ελαστικών δίσκων

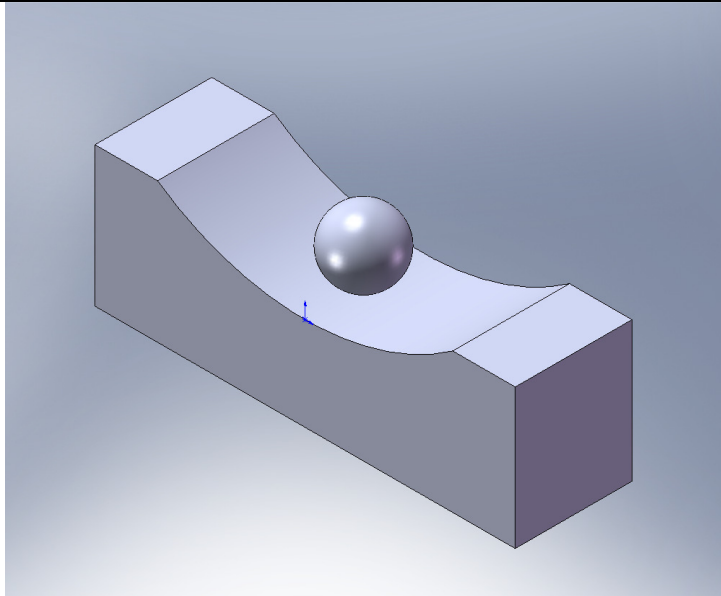
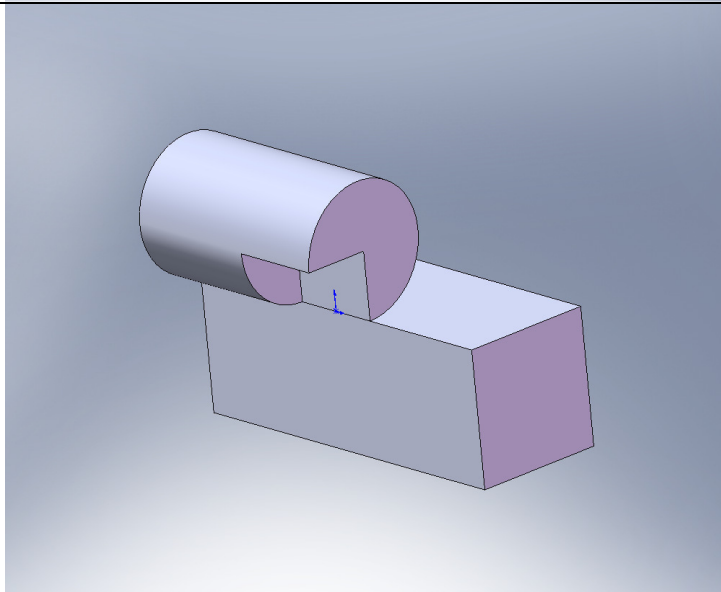
$R=110\text{ mm}$
 $r = 75\text{ mm}$
πάχος δίσκων 10 mm



Σημειακή εξωτερική επαφή
δύο ελαστικών δίσκων

$R=75\text{ mm}$
 $r = 15\text{ mm}$
πάχος δίσκων 10 mm

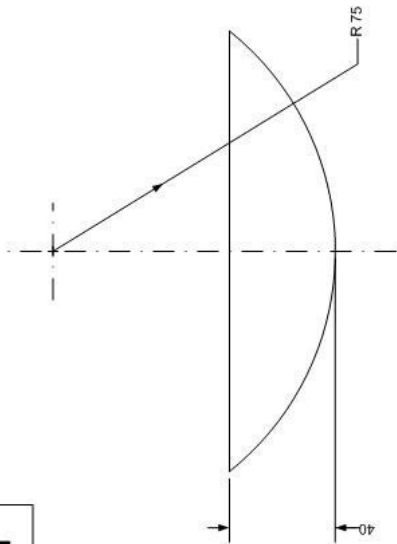


<p>Σημειακή εσωτερική επαφή σφαίρας με ελαστικό δίσκο</p> <p>$R=110 \text{ mm}$ $r = 15 \text{ mm}$ πάχος δίσκων 10 mm</p>	 <p>A 3D perspective view of a grey elastic disk with a curved top surface. A dark grey sphere is in contact with the center of the curve. A blue arrow points to the contact point.</p>
<p>Γραμμική επαφή κυλίνδρου με ελαστικό ημιεπίπεδο (<i>flat punch</i>)</p> <p>$r = 15 \text{ mm}$ πάχος ημιεπιπέδου 10 mm</p>	 <p>A 3D perspective view of a grey elastic block with a flat top surface. A purple cylindrical punch is shown in contact with the surface. A blue arrow points to the contact area.</p>

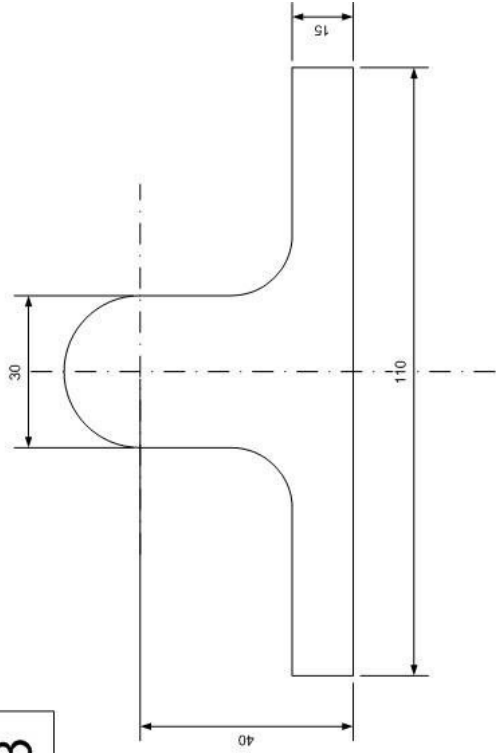
Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι οι παραπάνω γεωμετρίες δεν έχουν επιλεγεί τυχαία. Υπάρχουν δεκάδες περιπτώσεις μηχανολογικών προβλημάτων που ανάγονται στα βασικά αυτά προβλήματα επαφής. Για παράδειγμα το πρόβλημα επαφής ενός ρουλεμάν με κυλινδρικά σώματα κύλισης ανάγεται στην πρώτη περίπτωση ενώ η δεύτερη περίπτωση θυμίζει περισσότερο την επαφή ενός σφαιρικού σώματος κύλισης από ρουλεμάν με το αυλάκι του. Η τρίτη περίπτωση θα μπορούσε κάλλιστα να είναι η επαφή ήλου-ελάσματος κοκ.

Με βάση λοιπόν τα παραπάνω σκαριφήματα και κάνοντας κάποιες απαραίτητες τροποποιήσεις που σκοπό έχουν αφενός να είναι εφικτή και οικονομική η κατασκευή των δοκιμίων και αφετέρου να είναι εφικτή η στήριξη των δοκιμίων στις συσκευές, καταλήγουμε στις παρακάτω τελικές διαστάσεις.

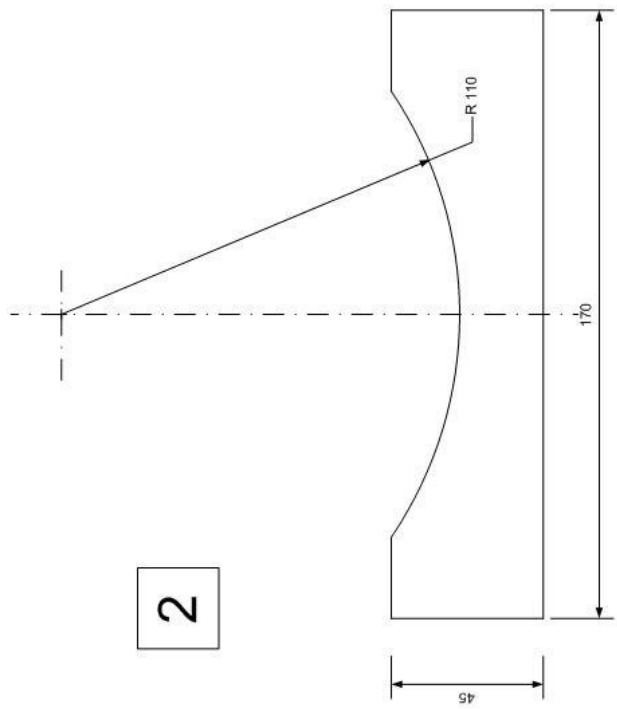
1



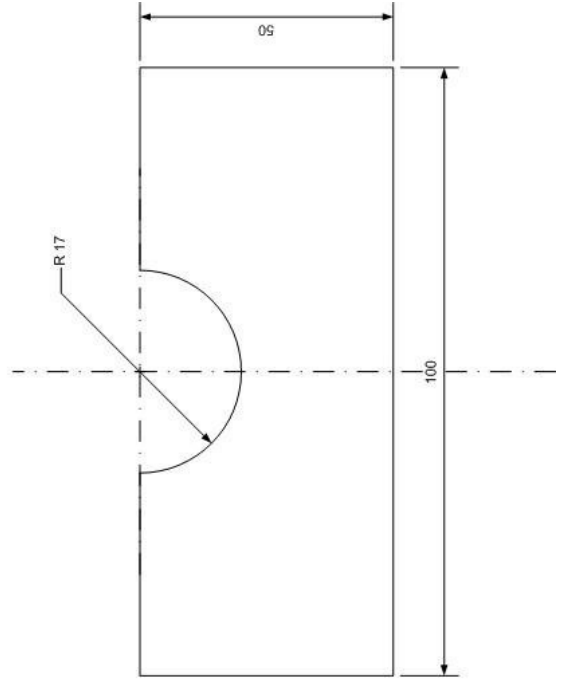
3



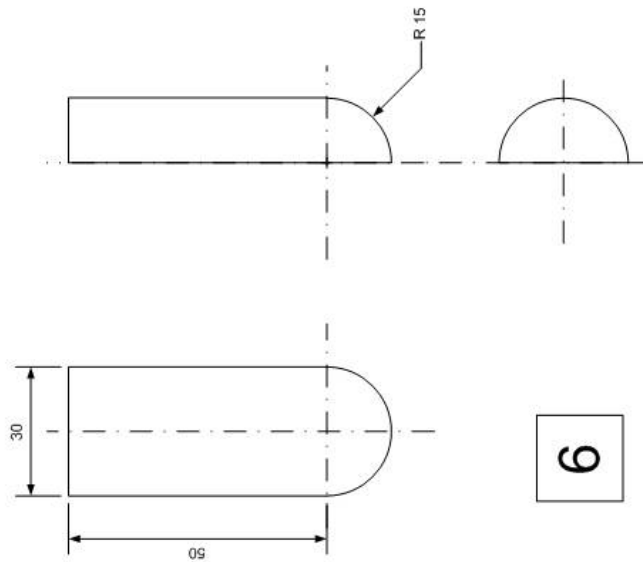
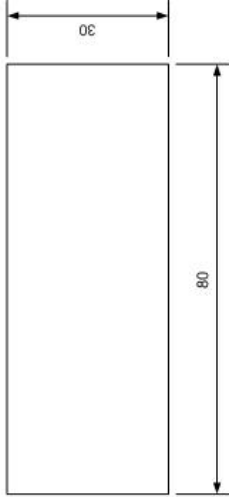
2



4



5



6

Το πάχος όλων των δοκιμίων, εκτός του 6, είναι ομοιόμορφο και ίσο με 10 mm.

Με βάση την παραπάνω διαστασιολόγηση προχωρούμε στο επόμενο στάδιο, την κατασκευή των δοκιμίων.

Κατασκευή των δοκιμίων

Η πρώτη ύλη που χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή των δοκιμίων ήταν φύλλο **Plexiglas (PMMA) πάχους 10 mm** και **συμπαγής κυλινδρική ράβδος από το ίδιο υλικό διαμέτρου Φ40 mm**.

Το φύλλο από Plexiglas είχε, από τον παραγωγό, εξωτερική επένδυση η οποία διατηρήθηκε ανέπαφη καθ' όλη την διάρκεια της κατεργασίας του προς αποφυγή δημιουργίας εκδορών στην επιφάνεια του. Αφαιρέθηκε μόνο λίγο πριν από την εκτέλεση των δοκιμών οπότε και γυαλίστηκε.

Στον πίνακα που ακολουθεί παραθέτουμε τις ελαστικές και τις τασεοπτικές σταθερές του υλικού.

Plexiglas (PMMA)	
Στατικές τιμές	Δυναμικές τιμές
$\nu^s = 0.34$	$\nu^d = 0.34$
$E^s = 3.4 \text{ GPa}$	$E^d = 4.3 \text{ GPa}$
$c_f^s = \frac{\nu^s}{E^s} = 1 \times 10^{-10} \frac{m^2}{N}$	$c_f^d = \frac{\nu^d}{E^d} = 0.79 \times 10^{-10} \frac{m^2}{N}$
$c_t^s = -1.21 \times 10^{-10} \frac{m^2}{N}$	$c_t^d = -0.74 \times 10^{-10} \frac{m^2}{N}$
$c_r^s = -1.70 \times 10^{-10} \frac{m^2}{N}$	$c_r^d = -1.13 \times 10^{-10} \frac{m^2}{N}$

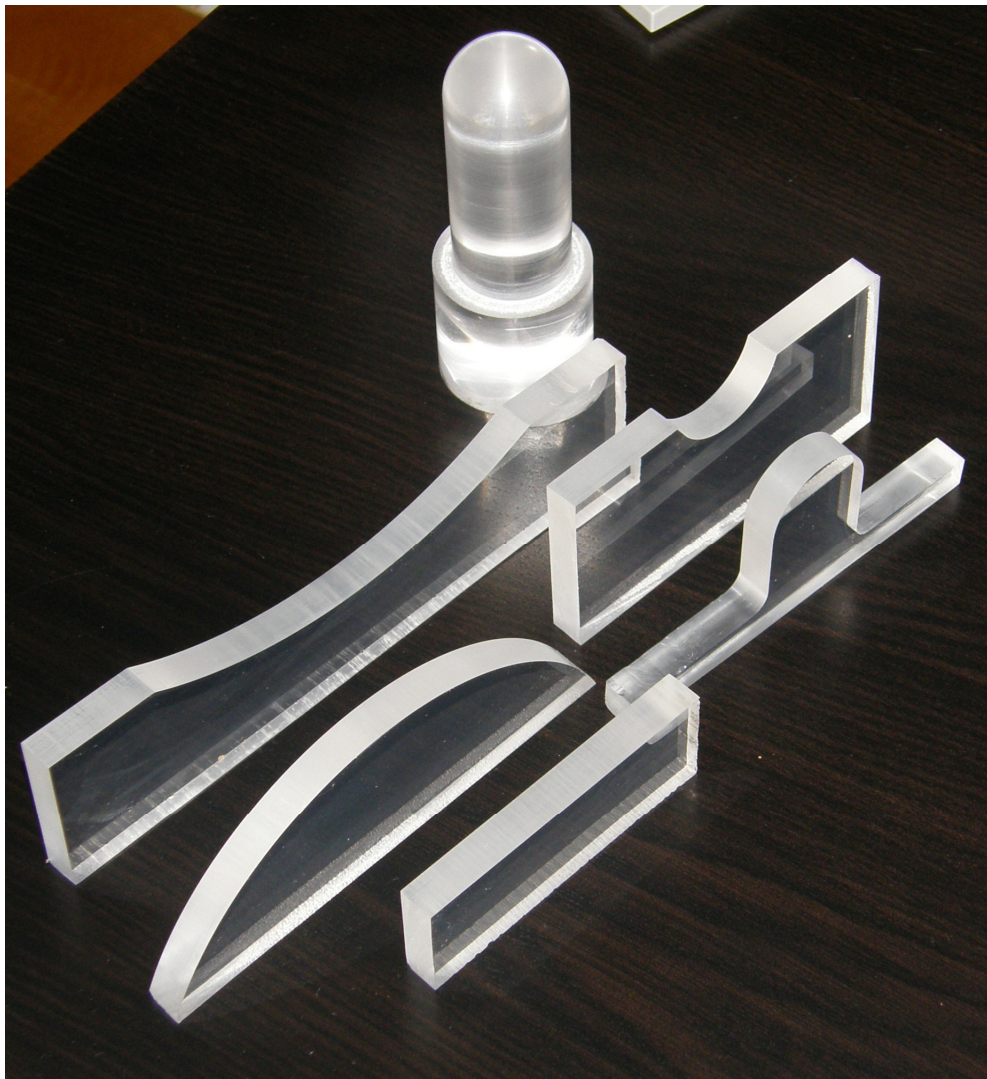
Η κατεργασία του υλικού έγινε στα παρακάτω στάδια:

1. Κοπή του φύλλου και της ράβδου με σταθερό ηλεκτρικό πριόνι βαρέως τύπου. Αποκόπτονται τεμάχια υλικού με διαστάσεις πιο κοντά στις επιθυμητές ώστε να είναι δυνατή η στήριξη τους στις εργαλειομηχανές.

2. Τοποθέτηση του τμήματος της ράβδου σε CNC τόρνο και κατεργασία του με δύο πάσα (εκχόνδριση - φινίρισμα) ώστε να διαμορφωθεί το σφαιρικό άκρο.
3. Τοποθέτηση των υπόλοιπων τεμαχίων σε CNC φρέζα τεσσάρων αξόνων και κατεργασία τους μέχρι τις τελικές διαστάσεις.
4. Τοποθέτηση της ράβδου με το σφαιρικό άκρο σε συμβατικό τόρνο και λείανση της σφαιρικής επιφάνειας.
5. Λείανση των επιφανειών των υπολοίπων δοκιμίων, με πολύ ψιλό γυαλόχαρτο, για να επιτευχθεί καλύτερη ποιότητα επιφανείας στα σημεία όπου θα γίνει η επαφή.

Όλες οι παραπάνω εργασίες έλαβαν χώρα στο Μηχανουργείο του Τομέα Κατεργασιών της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών του Ε.Μ.Π.

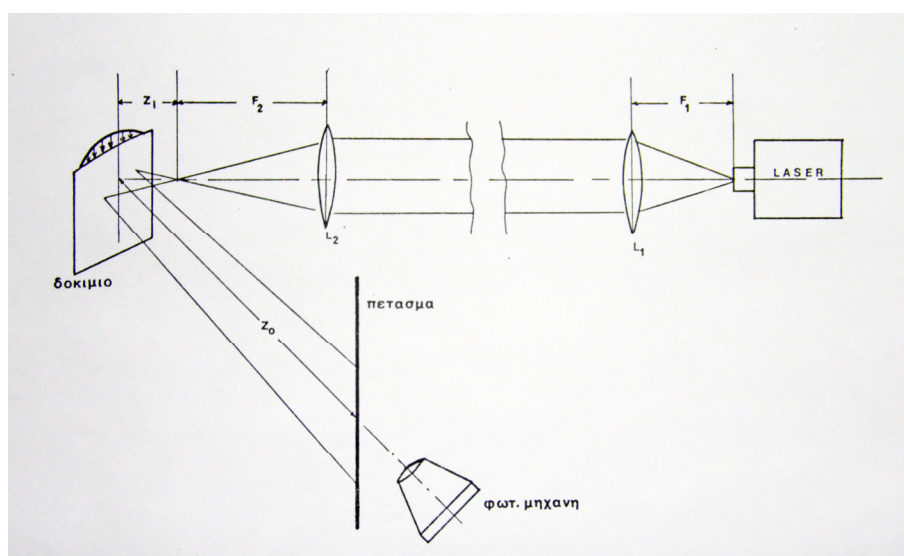
Στην επόμενη φωτογραφία φαίνεται το αποτέλεσμα της παραπάνω προσπάθειας.



II. ΔΙΕΞΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΔΟΚΙΜΩΝ

Εξοπλισμός και διατάξεις που χρησιμοποιήθηκαν

Η πειραματική διάταξη για την εκτέλεση των δοκιμών είναι σχετικά απλή στην υλοποίησή της. Μια σχηματική παράσταση αυτής φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1

Ο εξοπλισμός που χρησιμοποιήθηκε είναι:

- Φωτεινή Πηγή: Laser He-Ne τοποθετημένο επάνω σε ειδική τράπεζα απολύτως οριζοντιωμένη.
- Ειδικό φίλτρο για το άνοιγμα της συνεκτικής φωτεινής δέσμης του laser.
- Δύο συγκλίνοντες οπτικοί φακοί με εστιακή απόσταση 1m για να δημιουργηθεί η συγκλίνουσα ή αποκλίνουσα φωτεινή δέσμη.
- Πέτασμα αναφοράς πάνω στο οποίο προβάλλονται οι σχηματιζόμενες καυστικές.
- Χειροκίνητη κοχλιωτή πρέσα για την άσκηση θλιπτικής δύναμης επί των δοκιμίων.
- Διάφορες ιδιοσκευές για την συγκράτηση των δοκιμίων στην πρέσα.
- Δυναμόμετρο για την μέτρηση της θλιπτικής δύναμης που ασκεί η πρέσα.
- Φωτογραφική μηχανή Canon EOS 350D Digital για την φωτογράφιση των καυστικών καμπυλών πάνω στα πετάσματα αναφοράς.

Το δυναμόμετρο που χρησιμοποιήθηκε στις δοκιμές ήταν μηχανικό με αναλογική ένδειξη η οποία έπρεπε να υποστεί μετατροπή για να εξαχθεί η πραγματική τιμή της δύναμης. Η μετατροπή έγινε σύμφωνα με τις παρακάτω δύο σχέσεις οι οποίες δίνονται από τον κατασκευαστή του οργάνου.

Χαρακτηριστική Εξίσωση Δυναμόμετρου για δοκιμή θλίψης	
Γραμμική σχέση	$y = 15.054x + 45.362$
Πολυωνυμική σχέση	$y = -0.0025x^2 + 15.89x + 4.2292$

Όπου x είναι η ένδειξη του οργάνου και y η ασκούμενη δύναμη σε *Newton*.

Αφού περιγράψαμε τα όργανα και τις συσκευές με τις οποίες έγιναν οι δοκιμές μένει να περιγράψουμε την διαδικασία που ακολουθήθηκε κατά την εκτέλεση των δοκιμών.

Πειραματική Διαδικασία

Στον χώρο των δοκιμών κατά την διάρκεια τους θα πρέπει να επικρατεί απόλυτο σκοτάδι και η μόνη πηγή φωτός θα πρέπει να είναι η δέσμη του laser.

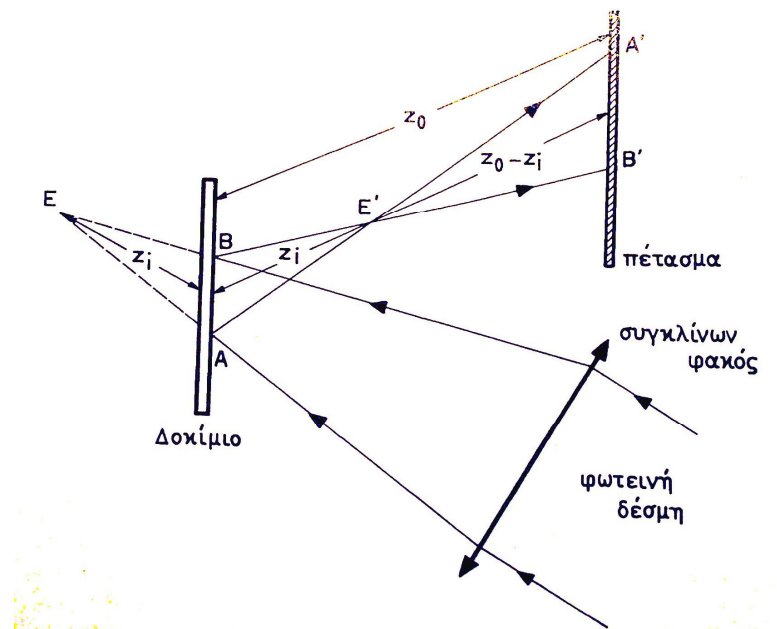
Τα πετάσματα αναφοράς τοποθετούνται εμπρός και πίσω από το δοκίμιο σε απόσταση z_0 από το δοκίμιο. Στο πέτασμα εμπρός από το δοκίμιο λαμβάνονται οι καυστικές εξ ανακλάσεως, ενώ στο πέτασμα πίσω από το δοκίμιο λαμβάνονται οι καυστικές διελεύσεως. Η εστία της φωτεινής δέσμης, ανάλογα με το είδος του δοκιμίου και τον τύπο των καυστικών, τοποθετείται (ρυθμίζοντας ανάλογα τους φακούς εστίασης) εμπρός ή πίσω από το δοκίμιο σε απόσταση z_i . Σε όλες τις δοκιμές που πραγματοποιήσαμε η εστία της φωτεινής δέσμης παρέμεινε **πίσω** από το δοκίμιο (συγκλίνουσα δέσμη) όπως φαίνεται και στο *Σχήμα 2*.

Η οπτική διάταξη για αποκλίνουσα ή συγκλίνουσα δέσμη έχει συντελεστή μεγέθυνσης λ_m ενώ για παράλληλη δέσμη ο συντελεστής μεγέθυνσης είναι ίσος με την μονάδα. Ο συντελεστής

μεγέθυνσης υπολογίζεται γεωμετρικά σύμφωνα με την ομοιότητα τριγώνων. Για την συγκλίνουσα δέσμη που μας ενδιαφέρει άμεσα είναι ίσος με:

$$\lambda_m = \frac{A'B'}{AB} = \frac{z_o - z_i}{z_i} \quad (1)$$

Συνεπώς πριν από κάθε δοκιμή θα πρέπει να γίνεται μέτρηση των μεγεθών z_o και z_i και υπολογισμός του λ_m .



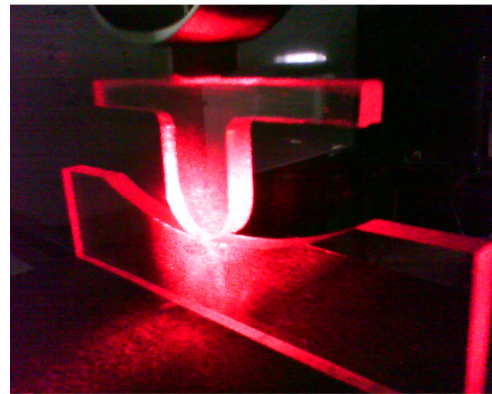
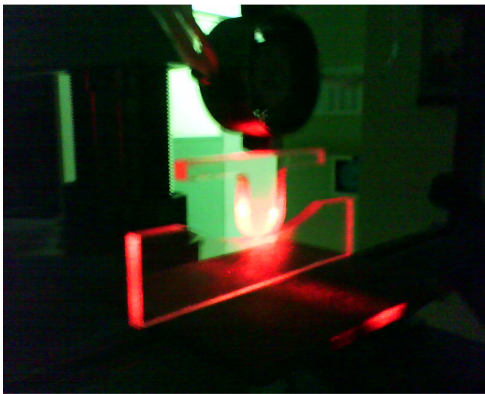
Σχήμα 2

Τα βήματα λοιπόν που ακολουθούμε για κάθε δοκιμή είναι τα ακόλουθα:

1. Γυαλίζουμε τα δοκίμια και τα τοποθετούμε στην πρέσα.
2. Τοποθετούμε το δυναμόμετρο και το μηδενίζουμε.
3. Περιστρέφουμε τον κοχλία ώστε τα δοκίμια να έρθουν σε επαφή.
4. Συνεχίζουμε την περιστροφή μέχρι να πάρουμε την επιθυμητή ένδειξη δύναμης.
5. Σημειώνουμε την ένδειξη του δυναμόμετρου.

6. Μετρούμε τα μεγέθη z_o και z_i για το εμπρός και το πίσω πέτασμα. (Στο σημείο αυτό μπορεί να χρειαστούν ορισμένες λεπτές ρυθμίσεις για να πάρουμε καθαρότερη καυστική)
7. Σβήνουμε τα φώτα και φωτογραφίζουμε τις καυστικές που έχουν σχηματιστεί στα πετάσματα αναφοράς.
8. Σημειώνουμε το όνομα με το οποίο αποθήκευσε η φωτογραφική μηχανή την φωτογραφία στην μνήμη της ώστε να μπορούμε να ανατρέξουμε αργότερα σε αυτήν.

Πρέπει στο σημείο αυτό να σημειωθεί ότι για να είναι αξιοποιήσιμες οι φωτογραφίες που τραβάμε πρέπει εκ των προτέρων να έχουμε κατασκευάσει πάνω στο πέτασμα αναφοράς μία γραμμή με συγκεκριμένο μήκος (2cm) που θα αποτελέσει σύνδεση των γεωμετρικών στοιχείων της φωτογραφίας με τα πραγματικά.



Στιγμιότυπα από την εκτέλεση των δοκιμών

Αφού επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία για όσες δοκιμές θέλουμε να πραγματοποιήσουμε έχουμε στα χέρια μας όλα τα δεδομένα για να ξεκινήσει η ανάλυση των αποτελεσμάτων.

III. ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Αποτελέσματα των δοκιμών

IMG No	Ένδειξη X (γραμμές)	Z ₀ (cm) (εμπρός)	Z ₀ (cm) (πίσω)	Z _i (cm) (εστία)	Γραμμική Παρεμβολή	Πολυωνυμική Παρεμβολή	Συντελεστής μεγέθυνσης
					Δύναμη Y (Newton)	Δύναμη Y (Newton)	λ _m
3615	21	138	327	38	361,496	336,816	2,6315
3616	21	138	327	38	361,496	336,816	7,6052
3617	21	138	327	38	361,496	336,816	7,6052
3618	21	138	327	38	361,496	336,816	7,6052
3619	68	138	327	38	1069,034	1073,189	7,6052
3620	148	138	327	38	2273,354	2301,189	7,6052
3621	60	138	327	40	948,602	948,629	7,175
3622	110	138	327	40	1701,302	1721,879	7,175
3623	150	138	327	40	2303,462	2331,479	7,175
3624	180	138	327	40	2755,082	2783,429	7,175
3625	210	138	327	40	3206,702	3230,879	7,175
3626	70	138	327	38	1099,142	1104,279	7,6052
3627	70	138	327	38	1099,142	1104,279	2,6315
3628	70	138	327	38	1099,142	1104,279	2,6315
3629	100	138	327	38	1550,762	1568,229	7,6052
3630	132	138	327	38	2032,49	2058,149	7,6052
3631	50	130	327	38	798,062	792,479	2,4210
3632	50	130	327	38	798,062	792,479	2,4210
3633	50	130	327	38	798,062	792,479	2,4210
3634	50	130	327	38	798,062	792,479	7,6052
3635	17	157	327	38	301,28	273,636	7,6052
3636	17	157	327	38	301,28	273,636	3,1315

Πίνακας 1: Αποτελέσματα των δοκιμών.

IMG No	Ένδειξη Χ (γραμμές)	Z ₀ (cm) (εμπρός)	Z ₀ (cm) (πίσω)	Z _i (cm) (εστία)	Γραμμική Παρεμβολή	Πολυωνυμική Παρεμβολή	Συντελεστής μεγέθυνσης
					Δύναμη Υ (Newton)	Δύναμη Υ (Newton)	λ _m
3637	38	157	327	38	617,414	604,439	3,1315
3638	38	157	327	38	617,414	604,439	7,6052
3639	38	157	327	38	617,414	604,439	7,6052
3640	38	157	327	38	617,414	604,439	7,6052
3641	59	157	327	38	933,548	933,036	7,6052
3642	59	157	327	38	933,548	933,036	3,1315
3643	92	157	327	38	1430,33	1444,949	3,1315
3644	92	157	327	38	1430,33	1444,949	7,6052
1α	36	150	327	38	594,833	580,883	2,9473
1δ	36	150	327	38	594,833	580,883	7,6052
2α	60	150	327	38	948,602	948,629	2,9473
2δ	60	150	327	38	948,602	948,629	7,6052
3α	81	150	327	38	1264,736	1274,916	2,9473
3δ	81	150	327	38	1264,736	1274,916	7,6052
4α	93	150	327	38	1445,384	1460,376	2,9473
4δ	93	150	327	38	1445,384	1460,376	7,6052
5α	173	150	327	38	2649,704	2678,376	2,9473
5δ	173	150	327	38	2649,704	2678,376	7,6052

Πίνακας 1 (συνέχεια)

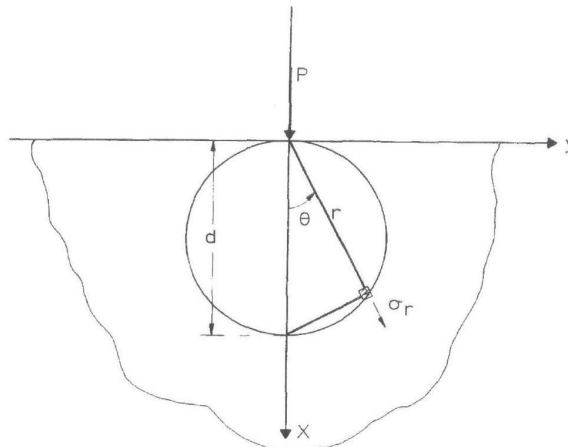
Στον Πίνακα 1 παραθέτουμε τα αποτελέσματα που πήραμε από τις εργαστηριακές δοκιμές που πραγματοποιήσαμε. Στην αριστερή στήλη είναι συγκεντρωμένα τα ονόματα αρχείων (filenames) των φωτογραφιών όπως αποθηκεύτηκαν στην κάρτα μνήμης της κάμερας. Τα αποτελέσματα που σημειώνονται με κόκκινο χρώμα δεν είναι αξιοποιήσιμα διότι οι φωτογραφίες που τραβήχτηκαν δεν είναι αρκετά καθαρές. Συνήθως όμως πρόκειται για διπλές ή τριπλές λήψεις και απλώς παρατίθενται για λόγους πληρότητας.

Δεν μπορούμε να εξάγουμε κάποιο συμπέρασμα απλώς από τον παραπάνω πίνακα. Απαιτείται επεξεργασία των δεδομένων χωρίζοντας τα σε τρεις ομάδες ανάλογα με την τασική συνάρτηση του αντίστοιχου προβλήματος επαφής.

Συγκεντρωμένη δύναμη κάθετη στην επιφάνεια.

Στην πρώτη αυτή ομάδα δοκιμών συγκαταλέγονται αυτές που οι διαστάσεις των δοκιμών διαφέρουν αρκετά μεταξύ τους καθώς επίσης και η ασκούμενη δύναμη είναι σχετικά μικρή. Τα χαρακτηριστικά αυτά οδηγούν σε δημιουργία επιφάνειας επαφής που όμως είναι τόσο πολύ μικρή, που οι διαστάσεις της μπορούν να θεωρηθούν σημειακές. Αυτό επιβεβαιώνεται και από τις καυστικές καμπύλες που δημιουργούνται όπως θα δούμε παρακάτω.

Συνεπώς θεωρούμε ότι για την ομάδα αυτή των δοκιμών η δύναμη P ασκείται σημειακά και επειδή η διεύθυνση της είναι κάθετη στην επιφάνεια, δεν δημιουργείται οριζόντια συνιστώσα, επομένως δεν αναπτύσσεται δύναμη τριβής σαν αντίδραση. Η φόρτιση περιορίζεται στην απολύτως ελαστική περιοχή του υλικού και το πρόβλημα εμπίπτει στην περιοχή των μικρών παραμορφώσεων.



Σχήμα 3

Όπως είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο (πρόβλημα *Flamant*) η τασική συνάρτηση για αυτού του είδους τα προβλήματα είναι:

$$\Phi(r, \theta) = -\frac{P}{\pi} r \theta \sin \theta \quad (2)$$

Συνεπάγεται ότι οι τάσεις που αναπτύσσονται στο υλικό δίνονται από τις σχέσεις:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = -\frac{2P \cos \theta}{\pi r} \quad (3)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0 \quad (4)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (5)$$

Οι ισοτασικές καμπύλες είναι κύκλοι με διάμετρο $D = -\frac{2P}{\pi \sigma_r}$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.

Βάση της θεωρίας που αναπτύξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, προκύπτει η σχέση (6.52) η οποία, για οπτικώς ισότροπα υλικά όπως το Plexiglas, συνδέει το διάνυσμα απόκλισης των οπτικών ακτινών που είτε διέρχονται είτε ανακλώνται από το δοκίμιο με τις τάσεις και κατά συνέπεια με την τασική συνάρτηση.

$$\mathbf{w}_t = -\frac{\varepsilon z_0 d c_{r,t,f}}{\lambda_m} \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (6)$$

Όπου $\varepsilon = 1$ για c_t και $\varepsilon = 2$ για c_r .

Ισχύει επίσης από τις σχέσεις (3) και (4) ότι:

$$4 \text{Re} \varphi(z) = \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_r + \sigma_\theta = -\frac{2P \cos \theta}{\pi r} \quad (7)$$

Η σχέση (6) λοιπόν μετασχηματίζεται σε:

$$\mathbf{w}_t = C_t \cdot \text{grad}_{(x,y)} \left(\frac{1}{r} \cos \theta \right) = C_t \cdot \frac{1}{r^2} [\cos(2\theta) \mathbf{i} + \sin(2\theta) \mathbf{j}] \quad (8)$$

Όπου για διευκόλυνση των πράξεων έχουμε θέσει:

$$C_t = -\frac{2\varepsilon z_0 d c_{r,t,f} P}{\lambda_m \pi} \quad (9)$$

Οι παραμετρικές εξισώσεις της καυστικής που σχηματίζεται στο πέτασμα δίνονται όπως έχουμε εξηγήσει από την παρακάτω διανυσματική εξίσωση:

$$\mathbf{W}_t = \mathbf{r} + \mathbf{w}_t \quad (10)$$

δηλαδή:

$$\begin{aligned} X_t &= r \cos \theta + C_t r^{-2} \cos(2\theta) \\ Y_t &= r \sin \theta + C_t r^{-2} \sin(2\theta) \end{aligned} \quad (11)$$

Όπου r είναι η ακτίνα της αρχικής καμπύλης της καυστικής. Για να την υπολογίσουμε αρκεί να μηδενίσουμε την Ιακωβιανή των καυστικών κάτι το οποίο είναι απαραίτητη συνθήκη για να ανήκει ένα σημείο στην αρχική καμπύλη.

$$J = \frac{\partial(X_t, Y_t)}{\partial(r, \theta)} = 0$$

Οπότε η ακτίνα της αρχικής καμπύλης είναι:

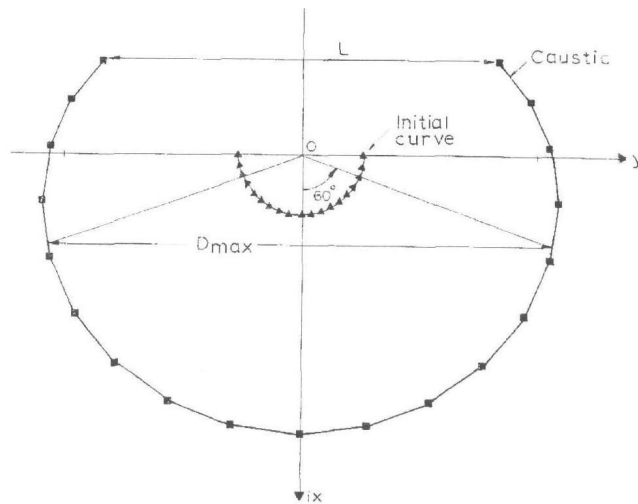
$$\boxed{r_0 = r = (2C_t)^{1/3}} \quad (12)$$

Παρατηρούμε ότι η αρχική καμπύλη είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα που εξαρτάται από το επιβαλλόμενο φορτίο P .

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (12) στις εξισώσεις (11) έχω:

$$\begin{aligned} X_t &= \lambda_m (2C_t)^{1/3} \left[\cos \theta + \frac{1}{2} \cos(2\theta) \right] \\ Y_t &= \lambda_m (2C_t)^{1/3} \left[\sin \theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

Οι οποίες είναι τελικά οι παραμετρικές εξισώσεις των καυστικών λαμβάνοντας υπόψη και τον συντελεστή μεγέθυνσης λ_m .



Σχήμα 4

Για διάφορες τιμές του θ στο διάστημα $[-\pi/2, \pi/2]$ έχουμε την γραφική παράσταση της αρχικής καμπύλης και της αντίστοιχης καυστικής (Σχήμα 4). Είναι χαρακτηριστικό για όλες τις μορφές της καυστικής ότι πάντοτε υπάρχει ένα προς ένα αντιστοιχία των σημείων της με τα σημεία της αρχικής καμπύλης από όπου προέρχεται.

Στο σχήμα είναι επιπλέον σημειωμένο το μέγιστο «άνοιγμα» της καυστικής κατά την Oy διεύθυνση. Αυτό μπορεί να υπολογιστεί εύκολα από την συνθήκη:

$$\frac{\partial Y_t}{\partial \theta} = 0 \quad (14)$$

Η οποία δίνει: $\theta^{\max} = 60^\circ$ (15)

Αντικαθιστώντας την παραπάνω τιμή της γωνίας στην σχέση (13) έχω:

$$D_{MAX} = 2Y_t^{MAX} = \lambda_m C_t^{1/3} 2^{-2/3} 3^{3/2} \quad (16)$$

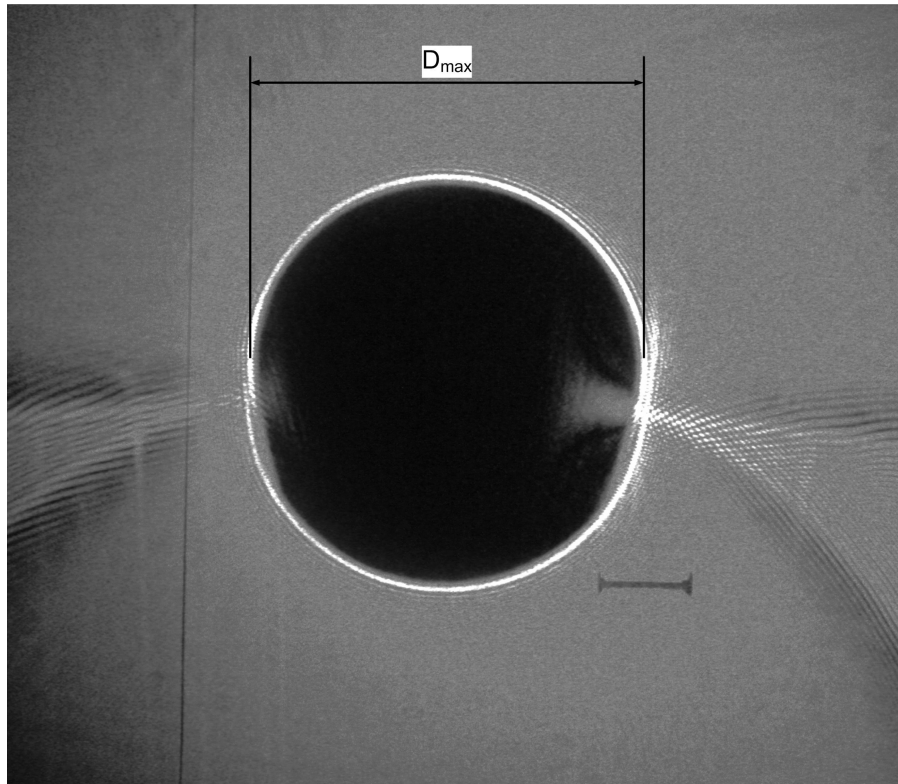
Συνεπώς αν τελικά αντικαταστήσω την σχέση (9) στην σχέση (16) και λύσω ως προς P θα πάρω την ακόλουθη σχέση η οποία θα δίνει το φορτίο συναρτήσει ενός γεωμετρικού στοιχείου της καυστικής.

$$P = \frac{2\pi D_{MAX}^3}{81\sqrt{3} \cdot z_0 d \lambda_m^2 \epsilon c_{r,t,f}} \quad (17)$$

όπου D_{MAX} το μέγιστο άνοιγμα της καυστικής που αντιστοιχεί σε γωνιά 60° από τον άξονα Ox, το z_0 είναι η απόσταση του δοκιμίου από το πέτασμα αναφοράς, d το πάχος του δοκιμίου, λ_m ο συντελεστής μεγέθυνσης ο οποίος έχει υπολογιστεί στον Πίνακα 1 και $c_{r,t,f}$ η τασεοπτική σταθερά ανάλογα με την περίπτωση.

Συνεπώς για την περίπτωση αυτή της επαφής αρκεί μια απλή μέτρηση του μέγιστου ανοίγματος της καυστικής όπως φαίνεται και στην παρακάτω ενδεικτική φωτογραφία (Σχήμα 5).

- Στον Πίνακα 2 παραθέτουμε τα αποτελέσματα της πρώτης αυτής ομάδας δοκιμών.
- Στο Παράρτημα 1 έχουμε συγκεντρώσει αναλυτικά όλες τις φωτογραφίες της πρώτης ομάδας δοκιμών.



Σχήμα 5: Δοκιμή 3619 - Μέγιστο άνοιγμα καυστικής.

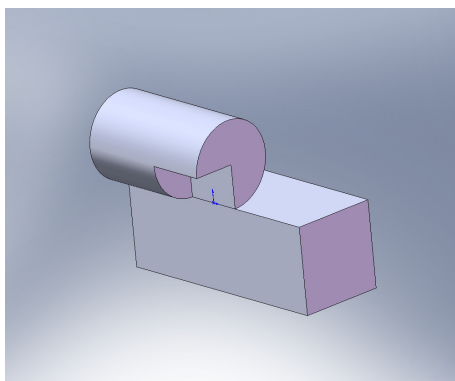
IMG No	D_{max1} πάνω καυστική (cm)	D_{max2} κάτω καυστική (cm)	D_{max} $= (D_{max1} + D_{max2}) / 2$	Φορτίο P (N)	Γραμμική Παρεμβολή	Πολυωνυμική Παρεμβολή	Δοκίμια σε επαφή
					Σχετική απόκλιση Φορτίου P από Δύναμη Y (%)	Σχετική απόκλιση Φορτίου P από Δύναμη Y (%)	
3615	3	3	3	371,9520	2,8924	10,4315	2, 3
3618	5,7	5,7	5,7	362,2237	0,2013	7,5432	2, 3
3619	8,4	8,4	8,4	1159,2850	8,4423	8,0224	2, 3
3620	10,5	10,5	10,5	2264,2286	0,4014	1,6061	2, 3
3631	3,5	3,5	3,5	740,7768	7,1780	6,5241	3, 1
3634	7,1	7,1	7,1	700,0473	12,2815	11,6636	3, 1
3641	7,7	-	7,7	892,9446	4,3493	4,2969	6, 2
3642	5	-	5	1068,8547	14,4938	14,5565	6, 2
3643	5,5	-	5,5	1422,6457	0,5372	1,5435	6, 2
3644	8,9	-	8,9	1378,8670	3,5979	4,5733	6, 2

Πίνακας 2

Στον Πίνακα 2 το φορτίο P έχει υπολογιστεί σύμφωνα με την αναλυτική σχέση (17). Οι σχετικές αποκλίσεις αναφέρονται στην διαφορά μεταξύ του φορτίου που δίνεται από την προαναφερθείσα σχέση και του φορτίου που μετράει το δυναμόμετρο. Στα σφάλματα που εμφανίζονται δεν διακρίνουμε κάποια συστηματικότητα άρα μάλλον πρόκειται για τυχαία σφάλματα που οφείλονται στο υλικό ή σε κάποιο σφάλμα σε μέτρηση μήκους.

Το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι τα αποτελέσματα της πειραματικής μεθόδου των καυστικών και κατά συνέπεια της θεωρίας πάνω στην οποία βασίζεται είναι πολύ κοντά και σχεδόν ταυτίζονται με την πραγματικότητα (θεωρώντας ότι στις μετρήσεις του δυναμόμετρου δεν υπεισέρχεται σφάλμα). Άρα για παράδειγμα μπορούμε να πούμε ότι όντως η τασική συνάρτηση που χρησιμοποιήσαμε για να περιγράψουμε το πρόβλημα είναι σωστή και οι παραδοχές που κάναμε για να την εξάγουμε (π.χ. ακτινική κατανομή τάσεων) ανταποκρίνονται καλά στην πραγματικότητα.

Γραμμική επαφή στερεού σώματος (flat punch) με ελαστικό ημιεπίπεδο.



Σχήμα 6

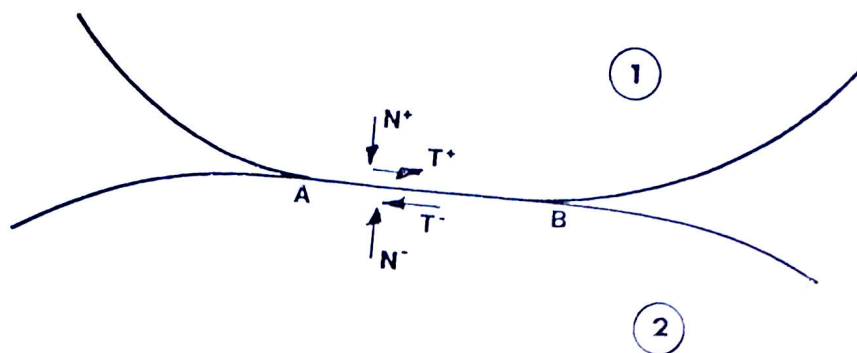
Στην δεύτερη αυτή ομάδα δοκιμών συγκαταλέγονται αυτές όπου το δοκίμιο υπ' αριθμόν 3 πιέζεται με σταθερή θλιπτική δύναμη επί του δοκιμίου υπ' αριθμόν 5 κατά τον τρόπο που δείχνει το Σχήμα 6. Η ακτίνα καμπυλότητας των άκρων του δοκιμίου 3 (κύλινδρος) κατά την διεύθυνση της γενέτειρας είναι τόσο μικρή που μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα.

Επειδή η δύναμη από την πρέσα ασκείται κάθετα στην επιφάνεια και επειδή το πρόβλημα δεν επεκτείνεται στην πλαστική περιοχή ώστε να έχουμε ροή υλικού μπορούμε να πούμε ότι μεταξύ των δύο σωμάτων θα αναπτύσσεται μια ομοιόμορφη κατανομή ορθών τάσεων. Επιπλέον και αυτή η περίπτωση επαφής δεν ξεφεύγει από την θεωρία των μικρών παραμορφώσεων.

Χαρακτηριστικό αυτού του είδους προβλημάτων επαφής αποτελεί το γεγονός ότι **γνωρίζουμε ακριβώς το μέγεθος της περιοχής επαφής**. Δεν θα είναι φυσικά αμελητέο όπως στην προηγούμενη περίπτωση αλλά αντίθετα θα είναι όσο το πάχος του κυλίνδρου (πάχος του δοκιμίου), δηλαδή 1cm.

Στο σημείο αυτό παραθέτουμε ορισμένα θεωρητικά στοιχεία.

Έστω δύο ελαστικά σώματα τα οποία συμβολίζουμε με τους δείκτες 1 και 2 όπως φαίνεται στο *Σχήμα 7*. Αν στα σώματα αυτά υποβληθούν εξωτερικές δυνάμεις τότε στην περιοχή της επαφής θα παρουσιαστεί μια κατανομή ορθών και διατμητικών τάσεων. Στο σώμα 1 έστω ότι οι τάσεις αυτές συμβολίζονται με N^+ και T^+ ενώ στο σώμα 2 συμβολίζονται με N^- και T^- .



Σχήμα 7

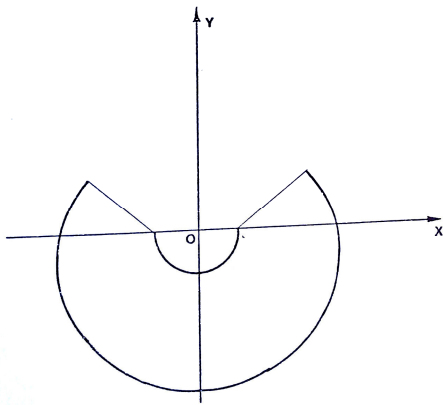
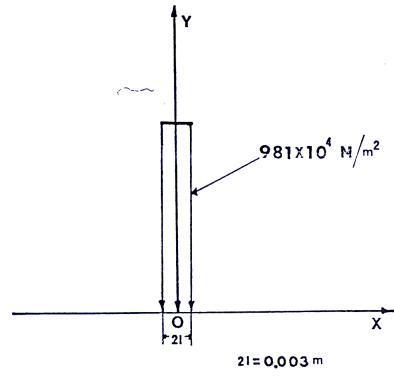
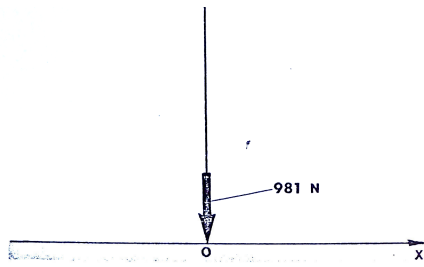
Αν υποθέσουμε ότι χωρίζουμε τα δύο σώματα τότε η μελέτη των τάσεων N και T στην περιοχή της επαφής ανάγεται στην μελέτη του ισοδύναμου προβλήματος της ανάλυσης των τάσεων N και T στο σώμα 2 όταν αυτές εφαρμόζονται στο αντίστοιχο με την περιοχή επαφής τμήμα AB . Άρα το πρόβλημα της επαφής των δύο ελαστικών σωμάτων ανάγεται στην μελέτη των αγνώστων τάσεων N και T οι οποίες μαζί με τις άλλες εξωτερικές δυνάμεις εφαρμόζονται στο σύνορο του ελαστικού σώματος.

Αν χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των καυστικών στην επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων πρέπει πρώτον η τασική συνάρτηση $\Phi(z)$ να μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση των αγνώστων τάσεων N και T και δεύτερο η μορφή της καυστικής να είναι τέτοια που να επιτρέπει την μέτρηση στοιχείων τα οποία θα είναι ικανά για να υπολογιστούν οι άγνωστες τάσεις.

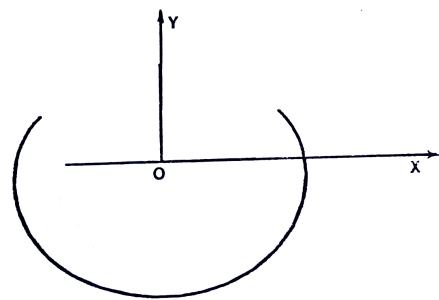
Τα στοιχεία τα οποία επηρεάζουν την μορφή και το μέγεθος της καυστικής σε προβλήματα επαφής, είναι πρώτον το μήκος της επαφής στο οποίο εφαρμόζονται οι τάσεις N και T και δεύτερο το μέγεθος και η μορφή της κατανομής των τάσεων N και T . Πρέπει να τονιστεί ιδιαίτερα το μήκος της επαφής των ελαστικών σωμάτων όπου αυτό είναι άγνωστο. Για παράδειγμα στην περίπτωση δύο ελαστικών δίσκων η αρχική επαφή είναι σημείο και μετά από την επιβολή των εξωτερικών δυνάμεων παίρνει κάποια μορφή και κάποιο μέγεθος. Τα προβλήματα της μορφής και του μεγέθους των καυστικών έχουν μελετηθεί για την περίπτωση του ημιεπιπέδου από τους Theocaris – Razem (1977) και για την περίπτωση του ελαστικού δίσκου από τους Theocaris – Stassinakis (1982).

Από τις εργασίες αυτές συμπεραίνει κανείς ότι οι καυστικές που μπορεί να δημιουργηθούν είναι μια καυστική στην περίπτωση που το μήκος επαφής είναι μικρό ή δύο καυστικές στην περίπτωση που το μήκος επαφής είναι αρκετά μεγάλο. Στην δεύτερη περίπτωση οι καυστικές ενώνονται με ένα τμήμα ψευδοκαυστικής το οποίο δημιουργείται από ανακλάσεις φωτεινών ακτινών από το σύνορο του ελαστικού σώματος. Αλλά και στην δεύτερη περίπτωση που το μήκος επαφής είναι μεγάλο αν αυξηθεί η τιμή των φορτίων οι δύο καυστικές ενώνονται και καταλήγουμε στην πρώτη περίπτωση σε μία καυστική χωρίς καθόλου τμήμα ψευδοκαυστικής.

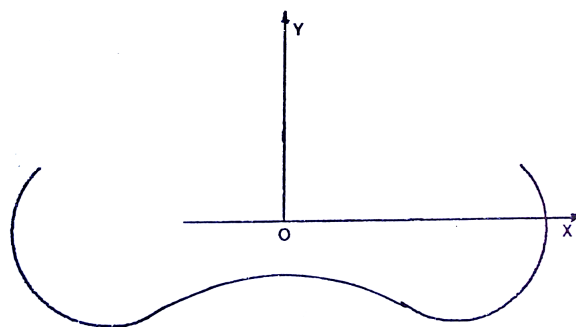
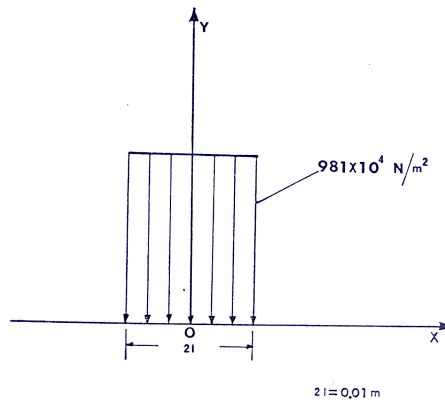
Όλα αυτά μπορούμε να τα παρατηρήσουμε για απλούστευση στην περίπτωση του ημιεπιπέδου στο *Σχήμα 8, 9, 10* όπου στο πρώτο φαίνεται η αρχική καμπύλη και η αντίστοιχη καυστική από ένα συγκεντρωμένο φορτίο εντάσεως 981 N , στο δεύτερο η καυστική από ένα ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο εντάσεως 981 N σε μήκος επαφής 0.003 m και τέλος στο τρίτο οι δύο καυστικές και το τμήμα ψευδοκαυστικής μεταξύ αυτών οι οποίες δημιουργούνται από ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο εντάσεως 981 N σε μήκος επαφής αυτή την φορά 0.015 m .



Σχήμα 8



Σχήμα 9



Σχήμα 10

Μετά από τα παραπάνω γενικά θεωρητικά στοιχεία που παραθέσαμε προχωράμε στην μαθηματική διατύπωση του προβλήματος. Ο Muskhelishvili το 1953 πρώτος θεώρησε ότι μια τασική συνάρτηση η οποία περιγράφει πολύ καλά το πρόβλημα της κατανεμημένης ορθής και διατμητικής τάσης (γενική περίπτωση) στο σύνορο ελαστικού ημιεπιπέδου είναι η ακόλουθη:

$$\boxed{\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{N(x) + iT(x)}{x-z} dx} \quad (18)$$

Η παραπάνω τασική συνάρτηση είναι αυτή που θα χρησιμοποιηθεί και στην παρούσα ανάλυση. Τα a και b καθορίζουν το μήκος εφαρμογής του φορτίου $N(x) + iT(x)$, τουτέστιν το μήκος επαφής.

Στους παρακάτω υπολογισμούς θα χρησιμοποιήσουμε την τασεοπτική σταθερά C η οποία ορίζεται ως:

$$C = 4 \cdot C_{r,t,f}^* = 4 \cdot \left(-\frac{\varepsilon z_o d c_{r,t,f}}{\lambda_m} \right) \quad (19)$$

Για την περίπτωση που η φωτογραφία είναι στο **πίσω πέτασμα** ισχύει ότι:

$$C = 4 \cdot \left(-\frac{z_o d c_t}{\lambda_m} \right) \quad (20)$$

Ενώ για την περίπτωση που η φωτογραφία είναι στο **εμπρός πέτασμα** ισχύει ότι:

$$C = 4 \cdot \left(-\frac{2z_o d c_r}{\lambda_m} \right) \quad (21)$$

Επίσης ισχύουν οι εξισώσεις της καυστικής που αποδείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

$$\text{Εξίσωση Αρχικής Καμπύλης Καυστικής:} \quad |C\Phi''(z)| = 1 \quad (22)$$

$$\text{Εξίσωση Καυστικής:} \quad W = \lambda_m \left[z + C \cdot \overline{\Phi'(z)} \right] \quad (23)$$

Αν παραγωγίσω την σχέση (18) παίρνω:

$$\Phi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{N(x) + iT(x)}{(x-z)^2} dx \quad (24)$$

Αν λύσω όμως την σχέση (23) ως προς $\Phi'(z)$ παίρνω:

$$\Phi'(z) = \frac{\overline{W - \lambda_m z}}{\lambda_m C} \quad (25)$$

Τελικά η σχέση που συνδέει τα γεωμετρικά στοιχεία της καυστικής με την φόρτιση προέρχεται από τις (24) και (25) και είναι:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{N(x) + iT(x)}{(x-z)^2} dx = \frac{\overline{W - \lambda_m z}}{\lambda_m C} \quad (26)$$

Στο πρόβλημα που εξετάζουμε εφαρμόζουμε μόνο ομοιόμορφη ορθή τάση $N(x) = P$ ενώ δεν επιβάλλεται καθόλου διατμητική τάση $T(x) = 0$. Συνεπώς η σχέση (26) μετασχηματίζεται σε:

$$\begin{aligned} \frac{P}{2\pi i} \int_a^b \frac{1}{(x-z)^2} dx &= \frac{\overline{W - \lambda_m z}}{\lambda_m C} \Rightarrow \\ \frac{P}{2\pi i} \left[-\frac{1}{x-z} \right]_a^b &= \frac{P}{2\pi i} \left[-\frac{1}{b-z} + \frac{1}{a-z} \right] \Rightarrow \\ \frac{P}{2\pi i} \frac{(b-a)}{(b-z)(a-z)} &= \frac{\overline{W - \lambda_m z}}{\lambda_m C} \end{aligned} \quad (27)$$

Χρήσιμος επίσης είναι και ο υπολογισμός της δεύτερης παραγώγου της τασικής συνάρτησης καθώς αυτή υπεισέρχεται στην εξίσωση της αρχικής καμπύλης. Έχω ότι:

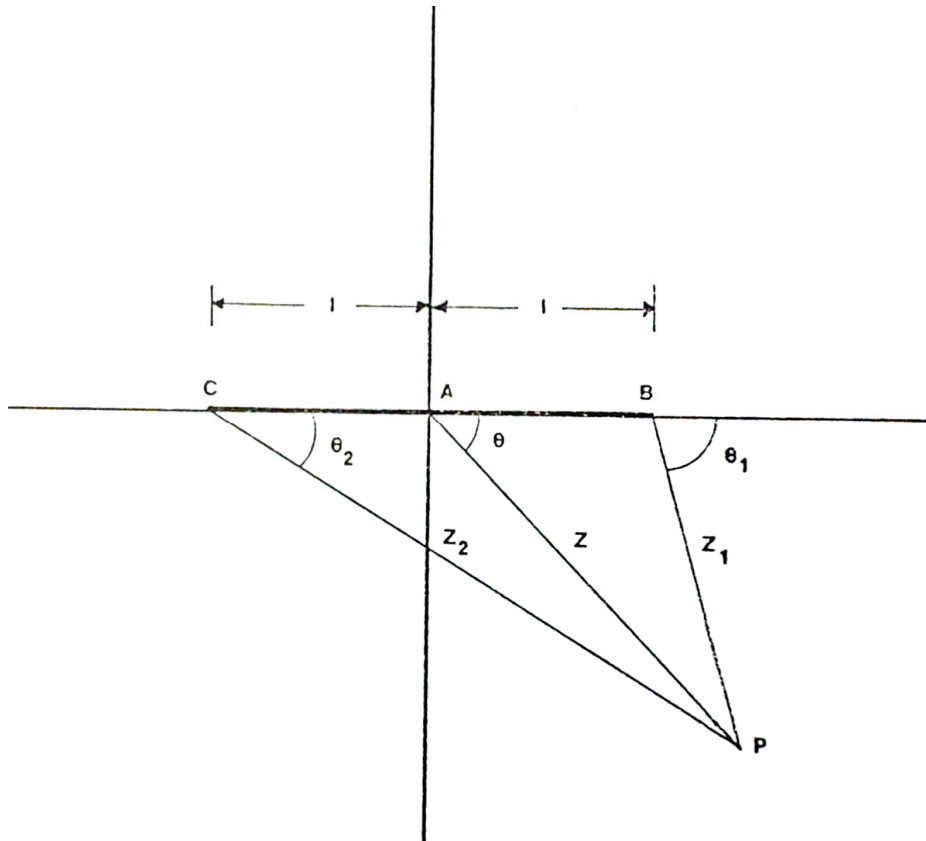
$$\Phi''(z) = \left(\frac{P}{2\pi i} \frac{(b-a)}{(b-z)(a-z)} \right)' = \frac{P}{2\pi i} \left(\frac{1}{(b-z)^2} - \frac{1}{(a-z)^2} \right) \quad (28)$$

Θεωρώ το παρακάτω σύστημα συντεταγμένων στην περιοχή επαφής CB (Σχήμα 11). Έστω P ένα τυχαίο σημείο που ανήκει στην αρχική καμπύλη της καυστικής. Επίσης z, z_1, z_2 είναι μιγαδικά διανύσματα για τα οποία ισχύει:

$$\begin{aligned} z_1 &= z - l & z_2 &= z + l \\ z &= \rho \cdot e^{i\theta} & z_1 &= \rho_1 \cdot e^{i\theta_1} & z_2 &= \rho_2 \cdot e^{i\theta_2} \end{aligned} \quad (29)$$

Επιπλέον από την (28) έχω:

$$C\Phi''(z) = \frac{CP}{2\pi i} \left(\frac{1}{(b-z)^2} - \frac{1}{(a-z)^2} \right) \quad (30)$$



Σχήμα 11

Αν χρησιμοποιήσω τις σχέσεις (29) η σχέση (30) παίρνει την μορφή:

$$C\Phi''(z) = \frac{CP}{2\pi e^{i\frac{\pi}{2}}} \left(\frac{1}{(b-(z_1+l))^2} - \frac{1}{(a-(z_2-l))^2} \right) \quad (31)$$

Με τον τρόπο που τοποθετήσαμε τους άξονες προκύπτει ότι $a = -l$ και $b = l$ όπου l είναι το μισό μήκος επαφής. Οπότε η (31) γίνεται:

$$C\Phi''(z) = \frac{CP}{2\pi e^{i\frac{\pi}{2}}} \left(\frac{1}{z_1^2} - \frac{1}{z_2^2} \right) \quad (32)$$

$$\Rightarrow C\Phi''(z) = \frac{CP}{2\pi e^{i\frac{\pi}{2}}} \left(\frac{1}{(\rho_1 e^{i\theta_1})^2} - \frac{1}{(\rho_2 e^{i\theta_2})^2} \right) \Rightarrow C\Phi''(z) = \frac{CP}{2\pi e^{i\frac{\pi}{2}}} \left(\frac{\rho_2^2 e^{2i\theta_2} - \rho_1^2 e^{2i\theta_1}}{\rho_1^2 \rho_2^2 e^{2i(\theta_1+\theta_2)}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C\Phi''(z) = \frac{CP}{2\pi \rho_1^2 \rho_2^2} \left(\frac{(\rho_2 e^{i\theta_2} + \rho_1 e^{i\theta_1})(\rho_2 e^{i\theta_2} - \rho_1 e^{i\theta_1})}{e^{(2(\theta_1+\theta_2)+\frac{\pi}{2})i}} \right)$$

Όμως από τον διανυσματικό λογισμό στο Σχήμα 11 ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\rho_2 e^{i\theta_2} + \rho_1 e^{i\theta_1} = \vec{z}_2 + \vec{z}_1 = 2\vec{z}$$

$$\rho_2 e^{i\theta_2} - \rho_1 e^{i\theta_1} = \vec{z}_2 - \vec{z}_1 = 2\vec{l}$$

Συνεπώς:

$$\Rightarrow C\Phi''(z) = \frac{CP}{2\pi \rho_1^2 \rho_2^2} \left(\frac{2\rho e^{i\theta} \cdot 2l}{e^{(2(\theta_1+\theta_2)+\frac{\pi}{2})i}} \right) = \frac{CP \cdot 2\rho \cdot 2l}{2\pi \rho_1^2 \rho_2^2} \cdot e^{i(\theta - 2(\theta_1+\theta_2) - \frac{\pi}{2})} \quad (33)$$

Άρα από την σχέση (22) και την σχέση (33) προκύπτει η εξίσωση της αρχικής καμπύλης.

$$|C\Phi''(z)| = \frac{CP \rho \cdot 2l}{\pi \rho_1^2 \rho_2^2} = 1 \quad (34)$$

Από την οποία συνεπάγεται ότι:

$$\rho_1^2 \rho_2^2 = \frac{CP\rho \cdot 2l}{\pi} \quad (35)$$

Από το Σχήμα 11 με χρήση του νόμου συνημίτονων έχω τις εξής σχέσεις για τα ρ_1 και ρ_2 .

$$\begin{aligned} \rho_1^2 &= \rho^2 + l^2 - 2l\rho \cos \theta \\ \rho_2^2 &= \rho^2 + l^2 + 2l\rho \cos \theta \end{aligned} \quad (36)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (36) στην (35) έχω:

$$\begin{aligned} (\rho^2 + l^2 - 2l\rho \cos \theta)(\rho^2 + l^2 + 2l\rho \cos \theta) &= \frac{CP\rho 2l}{\pi} \Rightarrow \\ \rho^4 + 2l^2(1 - 2\cos^2 \theta)\rho^2 - \frac{CP2l}{\pi}\rho + l^4 &= 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{\rho^4 - 2l^2 \cos(2\theta) \cdot \rho^2 - \frac{CP2l}{\pi} \rho + l^4 = 0} \quad (37)$$

Η σχέση (37) είναι ισοδύναμη με την σχέση (34) και η επίλυση της δίνει την **αρχική καμπύλη** της καυστικής. Είναι όπως βλέπουμε 4^{ου} βαθμού όπου ο τριτοβάθμιος όρος απουσιάζει ενώ παράλληλα υπάρχει πρωτοβάθμιος όρος. Συνεπώς δεν μπορεί να αναχθεί σε διτετράγωνη αλλά μπορεί, επειδή απουσιάζει ο τριτοβάθμιος όρος, να λυθεί με την μέθοδο που ανακάλυψε ο L.Ferrari. Αν λοιπόν την λύσουμε αναλυτικά με την μέθοδο αυτή προκύπτει μια εξαιρετικά περίπλοκη σχέση $\rho = f(l, \theta)$.

Επιστρέφουμε στην εξίσωση (27) και αντικαθιστούμε σε αυτή τις παρακάτω ισοδύναμες εκφράσεις:

$$z = \rho e^{i\theta} \quad \bar{z} = \rho e^{-i\theta} \quad (38)$$

Προκύπτουν τα ακόλουθα:

$$\frac{CP}{2\pi i} \frac{(b-a)}{(b-\rho e^{i\theta})(a-\rho e^{i\theta})} = \frac{\bar{W}}{\lambda_m} - \rho e^{-i\theta} \Rightarrow \frac{\bar{W}}{\lambda_m} = \rho e^{-i\theta} + \frac{CP}{2\pi i} \frac{(b-a)}{(b-\rho e^{i\theta})(a-\rho e^{i\theta})} \Rightarrow$$

$$\frac{\bar{W}}{\lambda_m} = \rho(\cos\theta - i\sin\theta) + \frac{CP}{2\pi i} \frac{(b-a)}{(b-\rho(\cos\theta + i\sin\theta))(a-\rho(\cos\theta + i\sin\theta))} \Rightarrow$$

Θέτω για διευκόλυνση των πράξεων

$$\Pi = (2\pi\rho(a+b)\sin\theta - 2\pi\rho^2\sin 2\theta)^2 + (2\pi ab - 2\pi\rho(a+b)\cos\theta + 2\pi\rho^2\cos 2\theta)^2$$

οπότε έχω:

$$\frac{\bar{W}}{\lambda_m} = \frac{\left[\Pi\rho\cos\theta + CP(b-a)(2\pi\rho(a+b)\sin\theta - 2\pi\rho^2\sin 2\theta) \right]}{\Pi} -$$

$$-i \cdot \frac{\left[\Pi\rho\sin\theta + CP(b-a)(2\pi ab - 2\pi\rho(a+b)\cos\theta + 2\pi\rho^2\cos 2\theta) \right]}{\Pi}$$

Και τέλος αντικαθιστώντας το διάνυσμα $\mathbf{W} = X_t + iY_t$ στην παραπάνω σχέση και εξισώνοντας τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη προκύπτουν οι παραμετρικές εξισώσεις των καυστικών.

$$\begin{aligned}
X_t &= \lambda_m \left\{ \rho \cos \theta + \frac{CP(b-a)(2\pi\rho(a+b)\sin\theta - 2\pi\rho^2 \sin 2\theta)}{\Pi} \right\} \\
Y_t &= \lambda_m \left\{ \rho \sin \theta + \frac{CP(b-a)(2\pi ab - 2\pi\rho(a+b)\cos\theta + 2\pi\rho^2 \cos 2\theta)}{\Pi} \right\}
\end{aligned} \tag{39}$$

Στις οποίες βέβαια απομένει να αντικαταστήσω $a = -l$ και $b = l$ για να προκύψουν οι τελικές παραμετρικές εξισώσεις των καυστικών, αυτές που ουσιαστικά αποτελούν την θεωρητική πρόβλεψη για το πώς ακριβώς θα εμφανιστούν οι καυστικές καμπύλες στο εργαστήριο.

$$\begin{aligned}
X_t &= \lambda_m \left\{ \rho \cos \theta + \frac{CP \cdot 2l(-2\pi\rho^2 \sin 2\theta)}{(2\pi\rho^2 \sin 2\theta)^2 + (-2\pi l^2 + 2\pi\rho^2 \cos 2\theta)^2} \right\} \\
Y_t &= \lambda_m \left\{ \rho \sin \theta + \frac{CP \cdot 2l(2\pi\rho^2 \cos 2\theta - 2\pi l^2)}{(2\pi\rho^2 \sin 2\theta)^2 + (-2\pi l^2 + 2\pi\rho^2 \cos 2\theta)^2} \right\}
\end{aligned} \tag{40}$$

Όπου ρ είναι η πολική ακτίνα των σημείων της αρχικής καμπύλης δηλαδή η τεράστια σχέση που προέκυψε από την επίλυση της εξίσωσης (37). Φυσικά δεν είναι εφικτή η αντικατάσταση του ρ στην (40) για τον λόγο αυτό θα περιοριστούμε στο να χρησιμοποιήσουμε ζεύγη λύσεων (θ, ρ) της εξίσωσης της αρχικής καμπύλης, και να εξάγουμε με χρήση της σχέσης (40) σημεία (X_t, Y_t) . Από τα σημεία αυτά θα κατασκευάσουμε την θεωρητική καυστική την οποία και θα συγκρίνουμε με την εργαστηριακή καυστική. Με κριτήριο το πόσο αποκλίνει η μία από την άλλη μπορούμε να βγάλουμε διάφορα χρήσιμα συμπεράσματα.

• **Δοκιμή #3635**

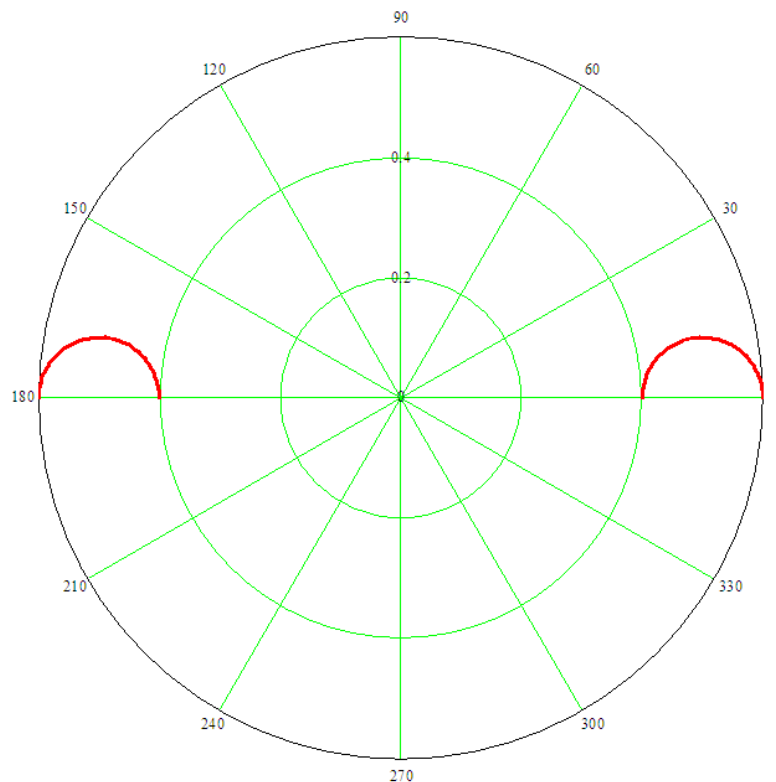
Filename: IMG3635

$$P = 301.28N$$

$$C = 0.000208103 \frac{cm^4}{N}$$

$$l = 0.5cm$$

Στο *Σχήμα 12* βλέπουμε τις αρχικές καμπύλες των καυστικών σε σύστημα πολικών συντεταγμένων. Παρατηρούμε ότι συμβαίνει να έχουν διαχωριστεί και ενώ θα περιμέναμε μια αρχική καμπύλη, η εξίσωση (37) μας δίνει δύο καμπύλες.

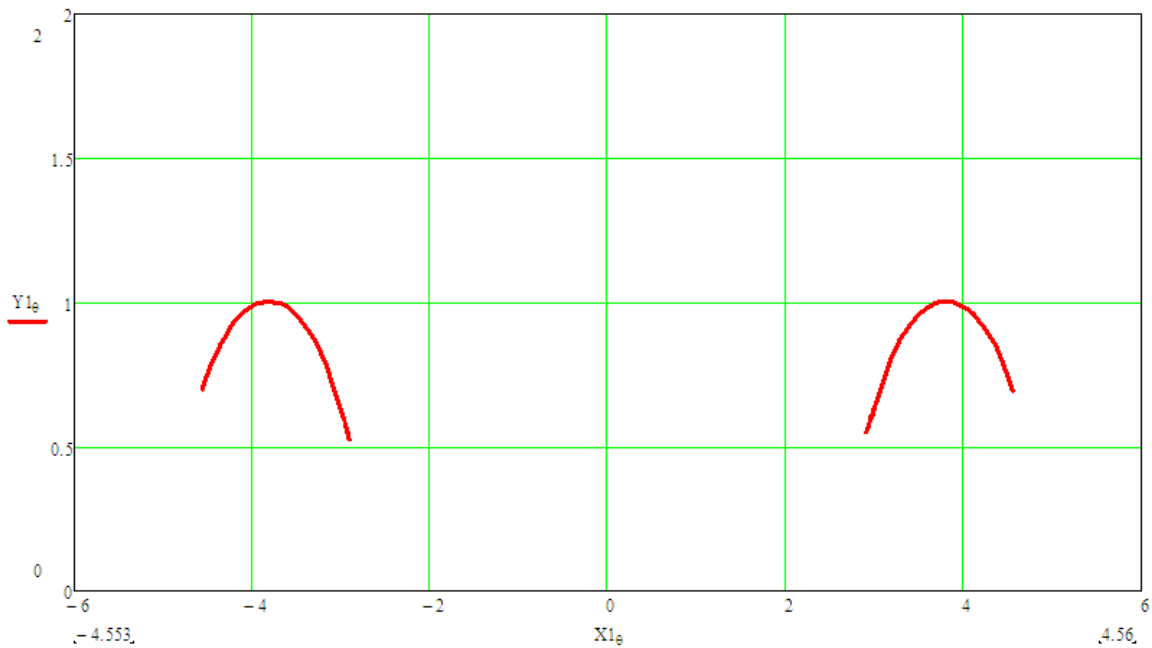


Σχήμα 12

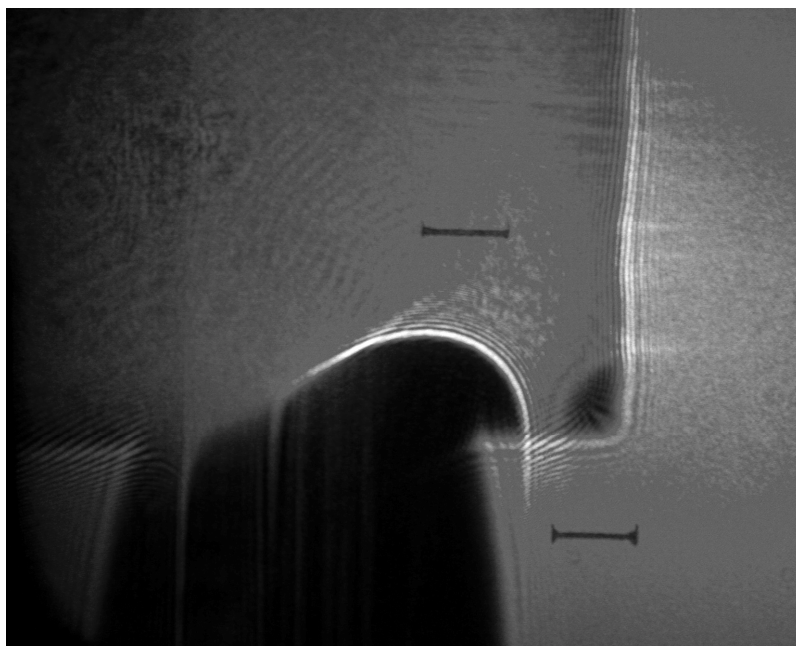
Ο διαχωρισμός αυτός συμβαίνει διότι το φορτίο είναι σχετικά μικρό και παράλληλα το μήκος επαφής σχετικά μεγάλο. Παρατηρούμε επιπλέον ότι η απόσταση των κέντρων των καμπυλών είναι

ίση με 1cm όσο ακριβώς και το μήκος επαφής, κάτι που συμβαίνει σε όλες τις δοκιμές της ομάδας αυτής.

Στο Σχήμα 13 βλέπουμε ακριβώς την θεωρητική καυστική καμπύλη όπως οι παραμετρικές εξισώσεις (40) προβλέπουν ότι θα σχηματιστεί στο οπίσθιο πέτασμα.



Σχήμα 13: Θεωρητική καυστική - δοκιμή 3635



Σχήμα 14: Εργαστηριακή καυστική - δοκιμή 3635

Παράλληλα στο *Σχήμα 14* βλέπουμε την πραγματική καυστική σε λήψη που έγινε στο εργαστήριο για την συγκεκριμένη περίπτωση φόρτισης. Το γεγονός ότι βλέπουμε μόνο μία καμπύλη ενώ η θεωρία προβλέπει δύο, οφείλεται στο ότι η δέσμη του laser δεν φωτίζει ολόκληρη την περιοχή επαφής των δύο δοκιμίων αλλά μόνο το δεξί άκρο. Συνεπώς βλέπουμε μόνο την δεξιά καυστική, πράγμα που δεν έχει ουσιαστική σημασία, καθώς οι καυστικές παρουσιάζουν συμμετρία ως προς τον κατακόρυφο άξονα.

Παρατηρώντας προσεκτικότερα τις δύο απεικονίσεις βλέπουμε διαφορές στην μορφή της καμπύλης και συγκεκριμένα η εργαστηριακή καυστική παρουσιάζει πιο οριζοντιωμένο εσωτερικό άκρο ενώ το εσωτερικό άκρο της θεωρητικής καυστική γέρνει απότομα προς τα κάτω. Αυτό κατά πάσα πιθανότητα οφείλεται στην ύπαρξη ψευδοκαυστικής καμπύλης, η οποία δεν δίνεται από τις αρχικές καμπύλες όμως εμφανίζεται στο πέτασμα και υπακούει στις παραμετρικές εξισώσεις της καυστικής.

Είναι πολύ σημαντικό όμως ότι η θέση της εργαστηριακής καυστικής ταυτίζεται με αυτή της θεωρητικά προβλεπόμενης. Αυτό αποτελεί μια πολύ καλή ένδειξη ότι οι θεωρητικές παραδοχές που κάναμε ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα και οι εξισώσεις ισχύουν.

- **Δοκιμή #3636**

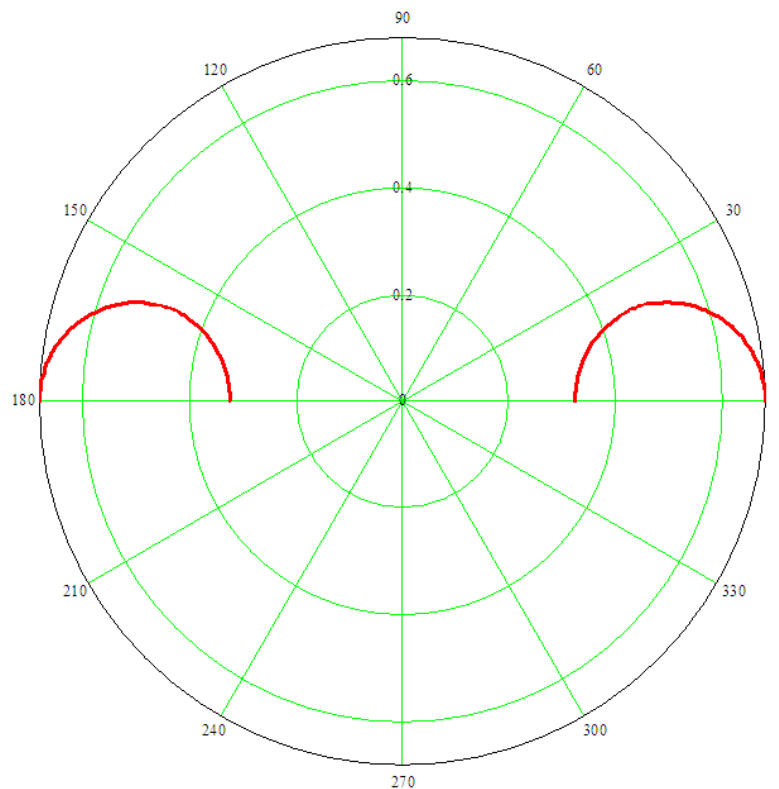
Filename: IMG3636

$$P = 301.28N$$

$$C = 0.000681829 \frac{cm^4}{N}$$

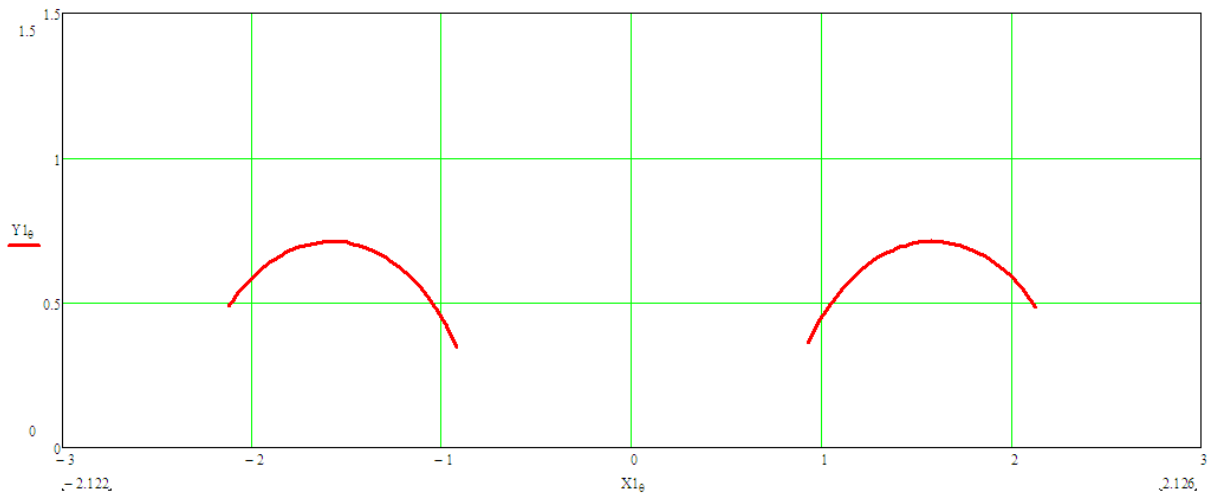
$$l = 0.5cm$$

Ουσιαστικά πρόκειται για την ίδια δοκιμή με την #3635 μόνο που ασχολούμαστε με το εμπρόσθιο πέτασμα. Στο *Σχήμα 15* διακρίνουμε τις αρχικές καμπύλες των καυστικών όπως προέκυψαν από γραφική απεικόνιση των αριθμητικών δεδομένων.

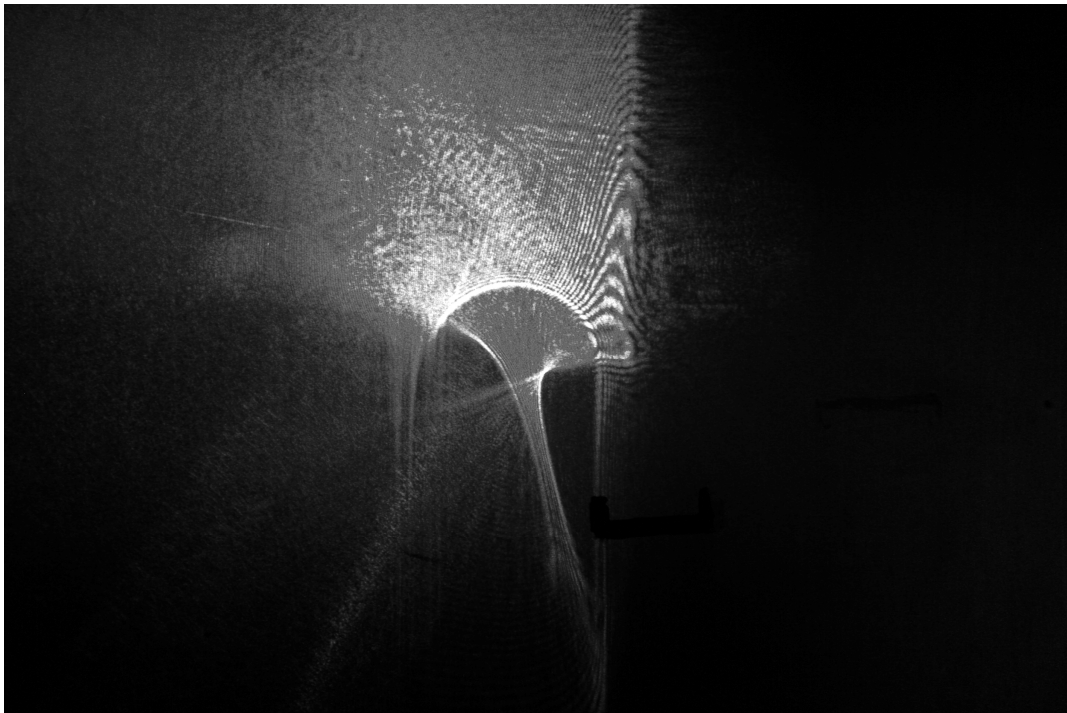


Σχήμα 15

Οι διαφορές με τα προηγούμενα οφείλονται στον διαφορετικό συντελεστή μεγέθυνσης. Στα *Σχήματα 16, 17* φαίνονται αντίστοιχα οι θεωρητικές καυστικές και η φωτογραφική λήψη της εργαστηριακής καυστικής.



Σχήμα 16: Θεωρητική καυστική - δοκιμή 3636



Σχήμα 17: Εργαστηριακή καυστική - δοκιμή 3636

• **Δοκιμή #3637**

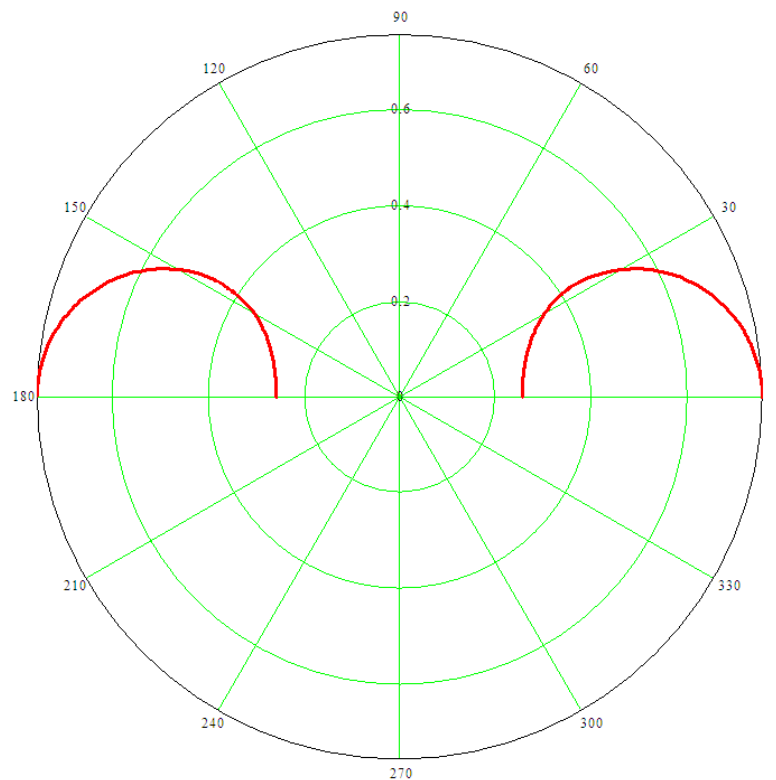
Filename: IMG3637

$$P = 617.41N$$

$$C = 0.000681829 \frac{cm^4}{N}$$

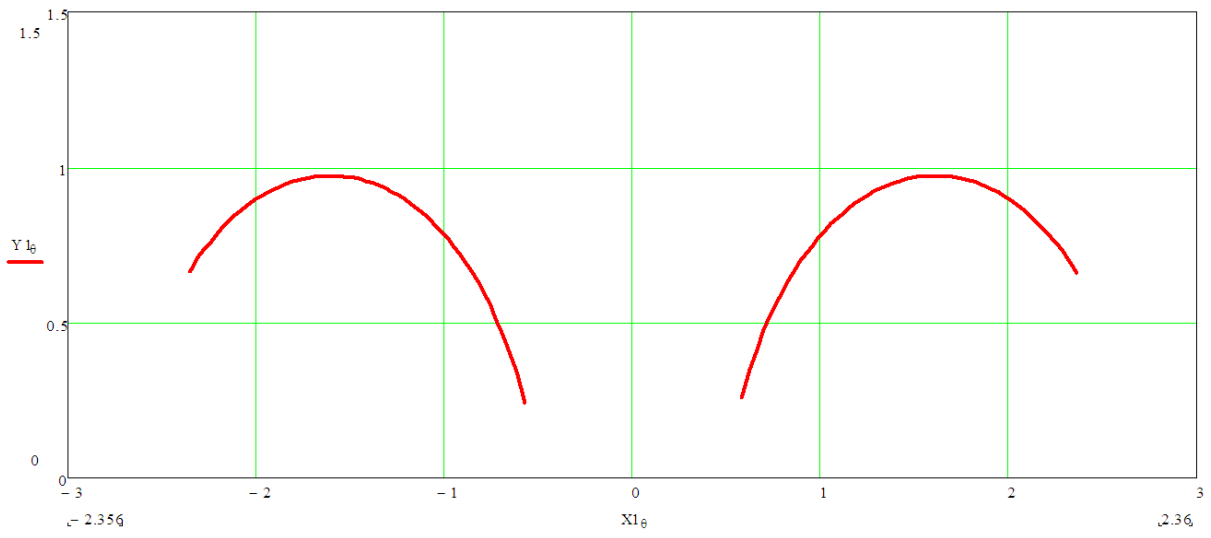
$$l = 0.5cm$$

Στην δοκιμή αυτή διπλασιάζουμε το φορτίο και εξετάζουμε την καυστική του εμπρόσθιου πετάσματος. Στο *Σχήμα 18* φαίνεται η αρχική καμπύλη της καυστικής.

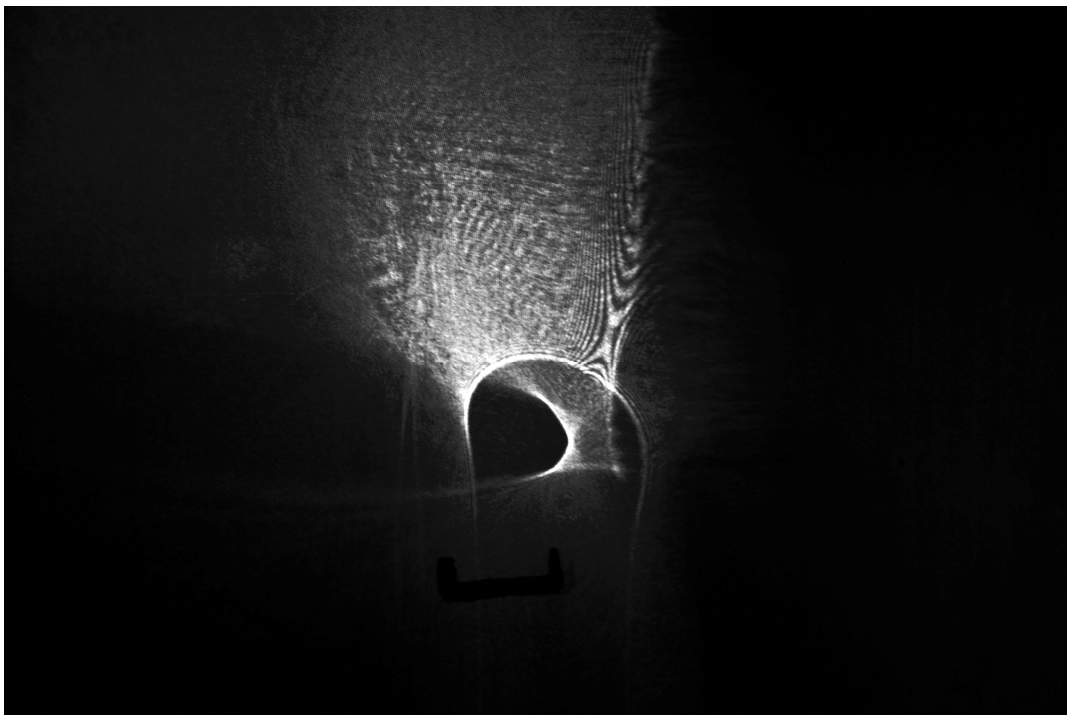


Σχήμα 18

Στην περίπτωση αυτή φαίνεται καθαρότερα ότι στην πραγματικότητα οι αρχικές καμπύλες **δεν** είναι κύκλοι, παρόλο που πολλές φορές πλησιάζουν το σχήμα του κύκλου. Βλέπουμε επίσης ότι αύξηση του φορτίου προκαλεί «διόγκωση» των αρχικών καμπυλών και κατά συνέπεια των καυστικών.



Σχήμα 19: Θεωρητική καυστική - δοκιμή 3637



Σχήμα 20: Εργαστηριακή καυστική - δοκιμή 3637

• **Δοκιμή #3639**

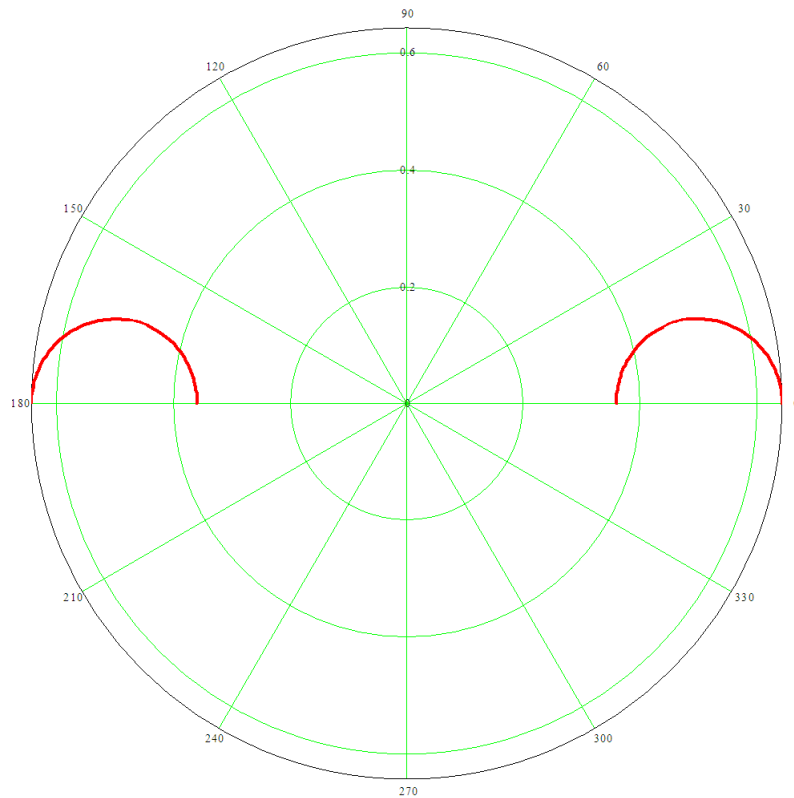
Filename: IMG3639

$$P = 617.41N$$

$$C = 0.000208103 \frac{cm^4}{N}$$

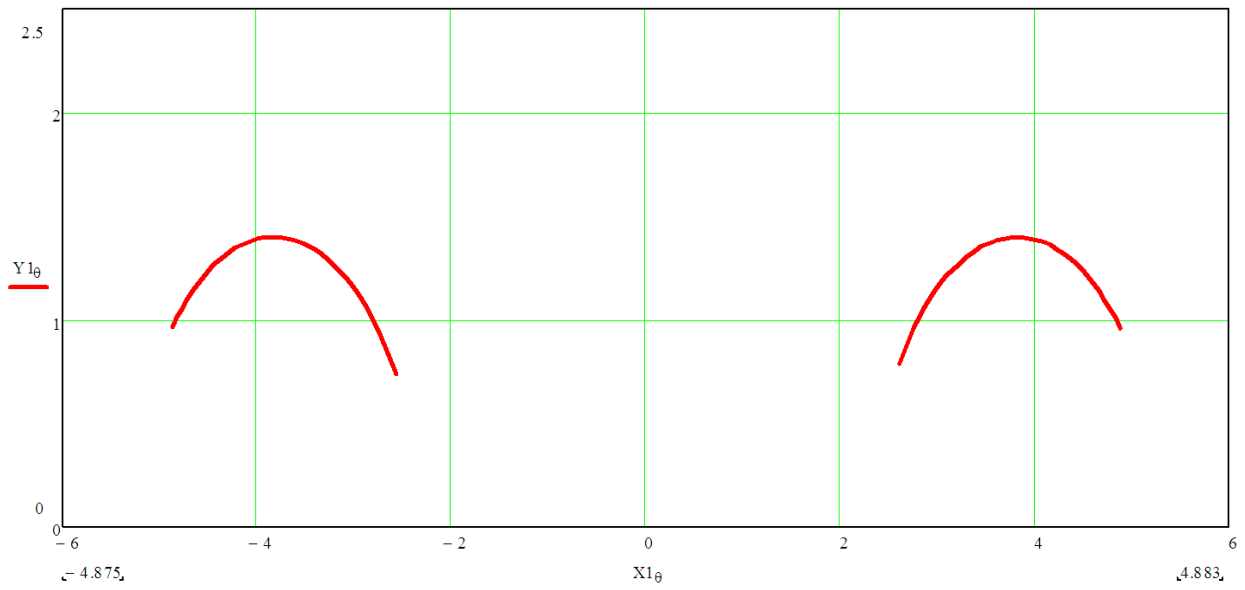
$$l = 0.5cm$$

Στην δοκιμή αυτή το φορτίο παραμένει το ίδιο με την προηγούμενη και εξετάζουμε την καυστική που σχηματίζεται στο οπίσθιο πέτασμα. Στο *Σχήμα 21* φαίνεται η αρχική καμπύλη και αυτής της καυστικής.

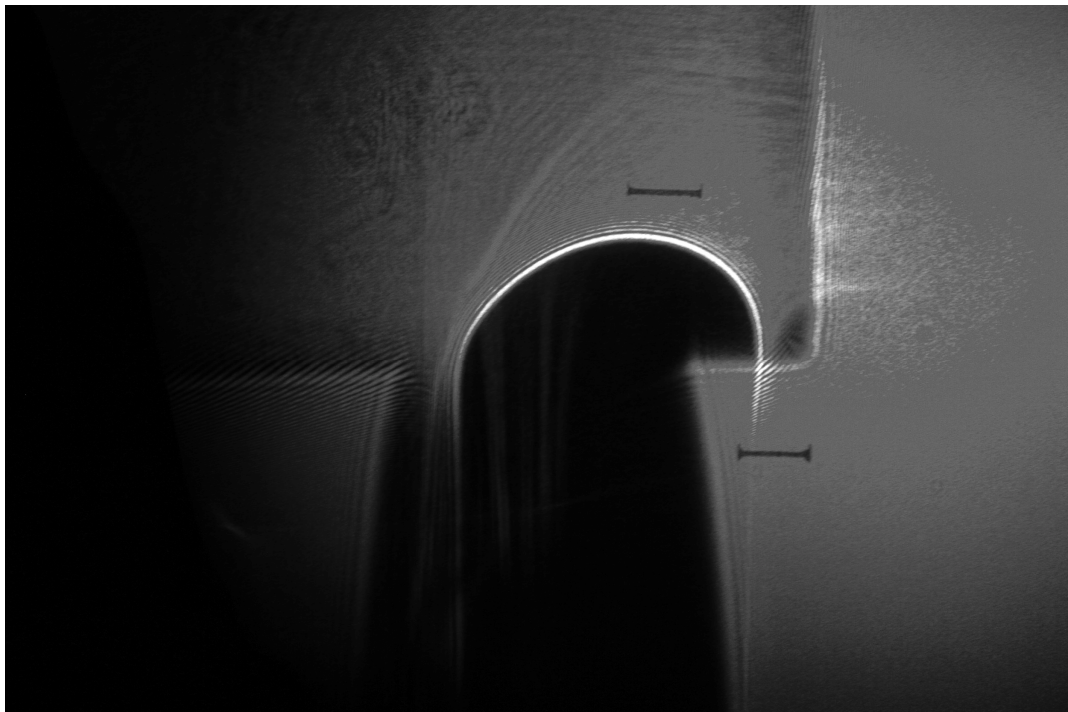


Σχήμα 21

Στα επόμενα σχήματα βλέπουμε και την μορφή των αντίστοιχων καυστικών καμπυλών. Χαρακτηριστική είναι η μεγέθυνση των καυστικών λόγω της αύξησης του επιβαλλόμενου φορτίου.

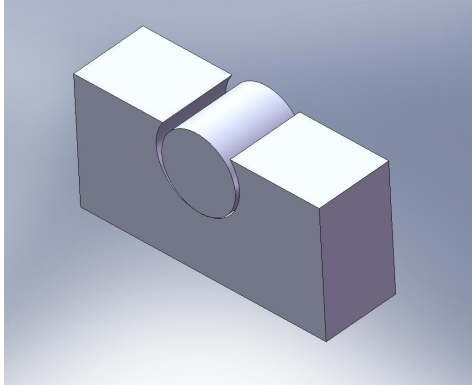


Σχήμα 22: Θεωρητική καυστική - δοκιμή 3639



Σχήμα 23: Εργαστηριακή καυστική - δοκιμή 3639

Γραμμική εσωτερική επαφή ελαστικών δίσκων (pin-in-hole).



Σχήμα 24

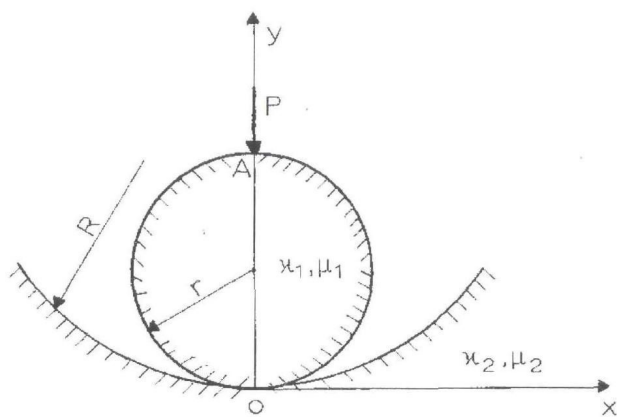
Στην τρίτη και τελευταία αυτή ομάδα δοκιμών συγκαταλέγονται αυτές όπου τα δοκίμια έχουν μορφή ελαστικών δίσκων και έρχονται σε επαφή εσωτερικά μεταξύ τους κατά τον τρόπο που δείχνει το Σχήμα 24. Το πρόβλημα της επαφής δύο ελαστικών δίσκων ανήκει στα προβλήματα εκείνα που το μήκος επαφής αυξάνει με την επιβολή εξωτερικών δυνάμεων.

Το πρόβλημα αυτό έχει λυθεί θεωρητικά κάνοντας διάφορες υποθέσεις, η κυριότερη από τις οποίες είναι ότι οι διαστάσεις της επαφής είναι αμελητέες σε σχέση με τις διαστάσεις των σωμάτων. Αυτήν την παραδοχή κάναμε κατά την ανάλυση της πρώτης ομάδας δοκιμών, οπότε μπορούσαμε να ανάγουμε την επαφή δίσκων σε συγκεντρωμένη δύναμη που δρα σημειακά κάθετα στην επιφάνεια.

Στην περίπτωση επαφής, ωστόσο, που εξετάζουμε σε αυτή την ομάδα δοκιμών δεν μπορούμε να κάνουμε την παραπάνω παραδοχή διότι οι διαστάσεις της επαφής, είναι βέβαια μικρές, αλλά είναι **συγκρίσιμες** με αυτές των σωμάτων που έρχονται σε επαφή και κατά συνέπεια **δεν είναι αμελητέες**. Επιπλέον δεν μπορούμε να θεωρήσουμε μια γνωστή κατανομή τάσεων όπως κάναμε στην δεύτερη ομάδα δοκιμών διότι η γεωμετρία είναι πιο περίπλοκη. Τέλος είναι άγνωστο και το μήκος επαφής.

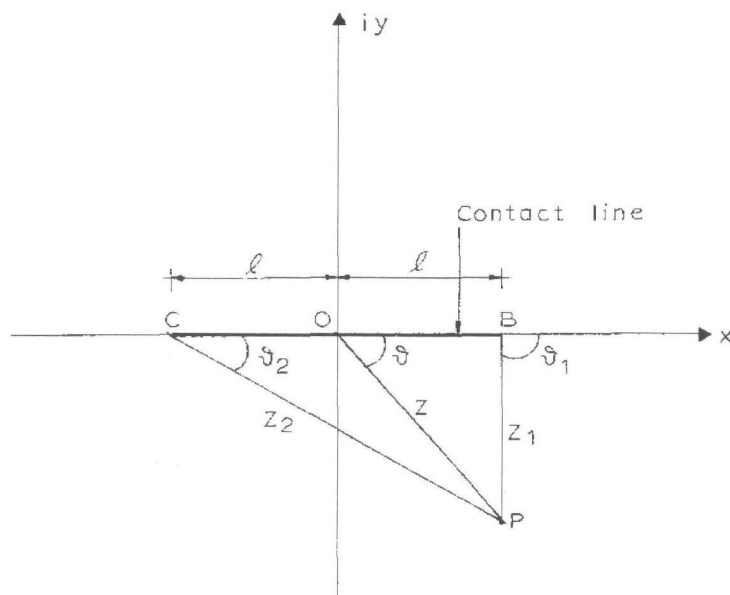
Μια παραδοχή όμως που μπορούμε να κάνουμε στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι ότι **η περιοχή επαφής είναι ευθεία** καθώς επίσης ότι το πρόβλημα ανήκει στην περιοχή των μικρών παραμορφώσεων. Στο σημείο αυτό θα δούμε τι προβλέπει η θεωρία επαφής:

Θεωρούμε ένα δισδιάστατο άπειρο επίπεδο το οποίο περιέχει μια τρύπα ακτίνας R και ένα κυλινδρικό δίσκο με ακτίνα r ο οποίος βρίσκεται σε επαφή με το επίπεδο στο σημείο O , όπως δείχνει το Σχήμα 25. Τα δύο σώματα θεωρούνται ότι είναι ομογενή, ισότροπα και ελαστικά. Στο αντιδιαμετρικό σημείο το O θεωρούμε ότι εφαρμόζεται ένα φορτίο P ανά μονάδα μήκους.



Σχήμα 25

Επιπλέον θεωρούμε με αρχή το O σύστημα μιγαδικών συντεταγμένων xOy πάνω στο οποίο συμβολίζουμε με CB το μήκος επαφής και με P ένα τυχαίο σημείο που ανήκει στην αρχική καμπύλη της καυστικής. Με l συμβολίζουμε όπως και προηγουμένως το μισό μήκος επαφής.



Σχήμα 26

Για το πρόβλημα αυτό ο Muskhelishvili (1953) κάνοντας τις παραδοχές που αναφέραμε παραπάνω έδωσε για την τασική συνάρτηση την ακόλουθη μορφή:

$$\Phi(z) = \frac{(l^2 - z^2)^{1/2}}{2\pi K} \int_{-l}^{+l} \frac{f'(t) dt}{(l^2 - t^2)^{1/2} (t - z)} \quad (41)$$

και την σχέση η οποία προκύπτει από την ισορροπία των δυνάμεων:

$$\int_{-l}^{+l} \frac{t \cdot f'(t) dt}{(l^2 - t^2)^{1/2}} = KP \quad (42)$$

όπου:

$$f(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) t^2 \quad (43)$$

Η παραπάνω σχέση προκύπτει από την συνθήκη των μετατοπίσεων. Επίσης:

$$K = \frac{\kappa_1 + 1}{4\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{4\mu_2} \quad (44)$$

όπου $\mu_{1,2}$ είναι τα μέτρα διατμήσεως των δύο σωμάτων που ορίζονται ως εξής:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (45)$$

όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας και ν ο λόγος Poisson. Οι ελαστικές σταθερές $\kappa_{1,2}$ δίνονται από τις σχέσεις:

Για επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση: $\kappa_{1,2} = (3 - \nu_{1,2})$ (46)

Για επίπεδη εντατική κατάσταση: $\kappa_{1,2} = \frac{3 - \nu_{1,2}}{1 + \nu_{1,2}}$ (47)

Στην θεωρία επαφής ελαστικών ημιεπιπέδων ισχύουν οι συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης, επειδή έχω ελαστικό μέσο με άπειρο βάθος y και μπορώ, άρα, να υποθέσω ότι $\varepsilon_y = 0$. Στα πειράματα με καυστικές ισχύουν οι συνθήκες επίπεδης έντασης $\sigma_y = 0$ επειδή το ελαστικό μέσο δεν είναι άπειρο αλλά περιορίζεται σε κάποιο πάχος υλικού (πάχος δοκιμίων). Θέλει λοιπόν προσοχή όταν συνδυάζονται αποτελέσματα από τις δύο θεωρίες. Στην παρούσα φάση επειδή μελετώ τα αποτελέσματα των πειραμάτων με καυστικές θεωρώ ότι οι συνθήκες που ισχύουν είναι επίπεδης έντασης.

Το υλικό το οποίο χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή των δοκιμίων είναι Plexiglas (PolyMethyl MethAcrylate – PMMA) για το οποίο ισχύει:

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu, \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu, \quad \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa \quad (48)$$

Μετά από αυτά ισχύει για επίπεδη ένταση ότι:

$$\boxed{K = \frac{\kappa + 1}{4\mu} \quad \text{και} \quad \kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}} \quad (49)$$

Αν ολοκληρώσουμε στο μήκος επαφής τις εξισώσεις (41) και (42) θα προκύψουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\Phi(z) = -i \frac{R-r}{2KRr} \left(z - \sqrt{z^2 - l^2} \right) \quad (50)$$

και:

$$l^2 = \frac{2Rr}{\pi(R-r)} KP \quad (51)$$

Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις από την θεωρία επαφής και τα δεδομένα από τα πειράματα των καυστικών μπορώ σε πρώτη φάση να υπολογίσω το μήκος επαφής $2l$ και σε δεύτερη φάση να υπολογίσω είτε το φορτίο P αν είναι γνωστή η ελαστική σταθερά K , είτε την σταθερά K (η οποία συνδέεται και με τις άλλες ελαστικές σταθερές) αν είναι γνωστό το φορτίο P .

Στους παρακάτω υπολογισμούς θα χρησιμοποιήσουμε την τασεοπτική σταθερά C η οποία ορίζεται ως:

$$C = 4 \cdot C_{r,t,f}^* = 4 \cdot \left(-\frac{\varepsilon z_o d c_{r,t,f}}{\lambda_m} \right) \quad (52)$$

Για την περίπτωση που η φωτογραφία είναι στο **πίσω πέτασμα** ισχύει ότι:

$$C = 4 \cdot \left(-\frac{z_o d c_t}{\lambda_m} \right) \quad (53)$$

Ενώ για την περίπτωση που η φωτογραφία είναι στο **εμπρός πέτασμα** ισχύει ότι:

$$C = 4 \cdot \left(-\frac{2z_o d c_r}{\lambda_m} \right) \quad (54)$$

Επίσης ισχύουν οι εξισώσεις της καυστικής που αποδείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Εξίσωση Αρχικής Καμπύλης Καυστικής: $|C\Phi''(z)| = 1 \quad (55)$

Εξίσωση Καυστικής: $W = \lambda_m \left[z + C \cdot \overline{\Phi'(z)} \right] \quad (56)$

Παραγωγίζοντας δύο φορές την σχέση (50) προκύπτει η δεύτερη παράγωγος της τασικής συνάρτησης δηλαδή:

$$C\Phi''(z) = -i \frac{C(R-r)}{2KRr} \left(\frac{z^2}{(z^2-l^2)\sqrt{z^2-l^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2-l^2}} \right) \quad (57)$$

Για ευκολία των πράξεων θέτω:

$$C^* = \frac{C(R-r)}{2KRr} \quad (58)$$

το οποίο έχει μονάδες μήκους. Η σχέση (57) γίνεται:

$$C\Phi''(z) = -iC^* \left(\frac{l^2}{(z^2-l^2)^{3/2}} \right) \quad (59)$$

Θεωρώ το σύστημα συντεταγμένων στην περιοχή επαφής CB (Σχήμα 26). Έστω P ένα τυχαίο σημείο που ανήκει στην αρχική καμπύλη της καυστικής. Επίσης z, z_1, z_2 είναι μιγαδικά διανύσματα για τα οποία ισχύει:

$$\begin{aligned} z_1 &= z - l & z_2 &= z + l \\ z &= \rho \cdot e^{i\theta} & z_1 &= \rho_1 \cdot e^{i\theta_1} & z_2 &= \rho_2 \cdot e^{i\theta_2} \end{aligned} \quad (60)$$

Λόγω των παραπάνω μετασχηματισμών η εξίσωση (59) παίρνει την μορφή:

$$C\Phi''(z) = -iC^* \left(\frac{l^2}{(z_1 z_2)^{3/2}} \right) = -iC^* \frac{l^2}{(\rho_1 \rho_2)^{3/2}} \cdot e^{-i \frac{3(\theta_1 + \theta_2)}{2}} \quad (61)$$

Τώρα μπορούμε αν συνδυάσουμε τις σχέσεις (55) και (61) να βρούμε μια πρώτη μορφή της εξίσωσης της αρχικής καμπύλης.

$$|C\Phi''(z)| = C^* \frac{l^2}{(\rho_1\rho_2)^{3/2}} = 1 \quad (62)$$

Από το Σχήμα 26 με χρήση του νόμου συνημίτονων εκφράζω τα ρ_1 και ρ_2 συναρτήσει των ρ και θ .

$$\rho_1^2 = \rho^2 + l^2 - 2l\rho \cos \theta \quad (63)$$

$$\rho_2^2 = \rho^2 + l^2 + 2l\rho \cos \theta$$

Τις εκφράσεις (63) τις αντικαθιστούμε στην (62) και προκύπτει η παρακάτω εξίσωση 4^{ου} βαθμού, της οποίας οι λύσεις δίνουν την **αρχική καμπύλη**.

$$\boxed{\rho^4 - 2\rho^2 l^2 \cos 2\theta + l^4 - (C^*)^{4/3} l^{8/3} = 0} \quad (64)$$

Ισοδύναμη με την παραπάνω σχέση είναι η ακόλουθη:

$$\rho = l \left\{ \cos 2\theta \pm \left[\cos^2 2\theta - 1 + \left(\frac{C^*}{l} \right)^{4/3} \right]^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (65)$$

Αφού λοιπόν βρήκαμε την εξίσωση της αρχικής καμπύλης μένει να βρούμε και τις παραμετρικές εξισώσεις της καυστικής. Για να το πετύχουμε αυτό παραγωγίζουμε μια φορά την εξίσωση (50).

$$C\Phi'(z) = -iC^* \left(1 - \frac{z}{(z^2 - l^2)^{1/2}} \right) \quad (66)$$

Αντικαθιστώ στο δεύτερο μέλος τις εκφράσεις (60) και την σχέση που προκύπτει την εισάγω στην εξίσωση της καυστικής (56). Αφού γράψω το διάνυσμα απόκλισης \mathbf{W} της καυστικής με την μορφή $X_t + iY_t$ και εξισώσω τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη προκύπτουν οι **παραμετρικές εξισώσεις της καυστικής**. Αναλυτικά η διαδικασία υπάρχει στο *Παράρτημα 2*.

$$\begin{aligned}
 X_t &= \lambda_m \left[\rho \cos \theta - \rho \left(\frac{C^*}{l} \right)^{2/3} \sin \left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \right] \\
 Y_t &= \lambda_m \left[\rho \sin \theta + C^* - \rho \left(\frac{C^*}{l} \right)^{2/3} \cos \left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

όπου:

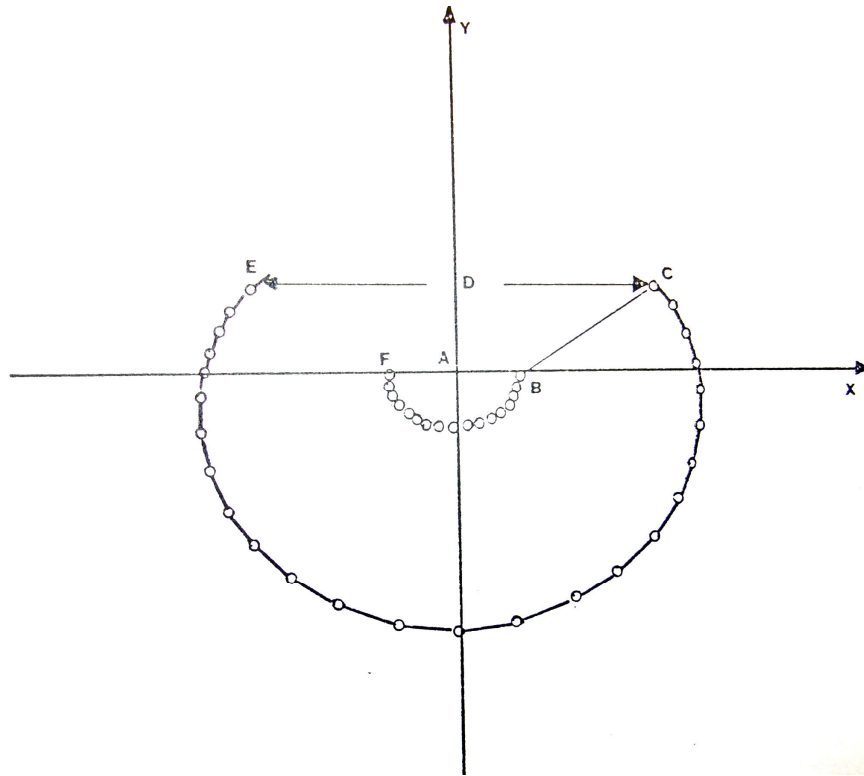
$$\begin{aligned}
 \theta_1 &= \arctan \left(\frac{\rho \sin \theta}{\rho \cos \theta - l} \right) \\
 \theta_2 &= \arctan \left(\frac{\rho \sin \theta}{\rho \cos \theta + l} \right)
 \end{aligned}$$

(67)

Οι εξισώσεις (67) δίνουν όλα τα σημεία της καυστικής καμπύλης για κάθε θ και ρ που προκύπτουν από την εξίσωση (64). Η καμπύλη που θα προκύψει θα είναι της μορφής που φαίνεται στο *Σχήμα 27*. Στο ίδιο σχήμα φαίνεται καθαρά και η ένα προς ένα αντιστοιχία των σημείων της αρχικής καμπύλης με τα σημεία της καυστικής. Συμβολίζουμε με D την απόσταση των ακραίων σημείων της καυστικής, η οποία είναι σημειωμένη στο *Σχήμα 27*.

Με αναφορά στο ίδιο σχήμα, τα ακραία σημεία της καυστικής C και E αντιστοιχούν στα σημεία της αρχικής καμπύλης B και F αντίστοιχα, τα οποία με την σειρά τους αντιστοιχούν σε πολικές γωνίες $\theta=0$ και $\theta=\pi$ αντίστοιχα. Λόγω συμμετρίας του προβλήματος η απόσταση EC είναι διπλάσια της τετμημένης X_C του σημείου C η οποία μπορεί εύκολα να εκφραστεί συναρτήσει του αγνώστου μήκους επαφής l .

Όμως η απόσταση $D=EC$ μπορεί εύκολα να μετρηθεί σε μια εργαστηριακή καυστική καμπύλη. Άρα βρήκαμε ένα τρόπο να συνδέσουμε ένα εύκολα μετρήσιμο γεωμετρικό στοιχείο της καυστικής με το άγνωστο μήκος επαφής.



Σχήμα 27: Αντιστοιχία σημείων αρχικής καμπύλης – καυστικής.

Η πολική ακτίνα του σημείου B θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση η οποία προκύπτει από την (65) για $\theta=0$:

$$\rho_{\theta=0} = \left[l^2 \pm l^2 \left(\frac{C^*}{l} \right)^{2/3} \right]^{1/2} \quad (68)$$

Τώρα από την σχέση (67) και την προηγούμενη σχέση έχω:

$$\begin{aligned}
X_C = X_t(\theta=0) &= \frac{D}{2} = \lambda_m \left[\rho_{\theta=0} + (C^*)^{2/3} l^{-2/3} \rho_{\theta=0} \sin 0 \right] = \\
&= \lambda_m \cdot \rho_{\theta=0} = \lambda_m \left[l^2 \pm l^2 \left(\frac{C^*}{l} \right)^{2/3} \right]^{1/2} \Rightarrow \\
D &= 2\lambda_m \left[l^2 \pm l^{4/3} (C^*)^{2/3} \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση απαιτεί διερεύνηση. Για να είναι το D θετικός πραγματικός αριθμός (καθότι μήκος) θα πρέπει $\left[l^2 \pm l^{4/3} (C^*)^{2/3} \right] \geq 0$.

$$l^2 + l^{4/3} (C^*)^{2/3} \geq 0 \Rightarrow l^2 \left(1 + l^{-2/3} (C^*)^{2/3} \right) \geq 0 \Rightarrow 1 + l^{-2/3} (C^*)^{2/3} \geq 0$$

i)

Ισχύει για κάθε $l \geq 0$

$$l^2 - l^{4/3} (C^*)^{2/3} \geq 0 \Rightarrow 1 - l^{-2/3} (C^*)^{2/3} \geq 0 \Rightarrow 1 \geq l^{-2/3} (C^*)^{2/3} \Rightarrow$$

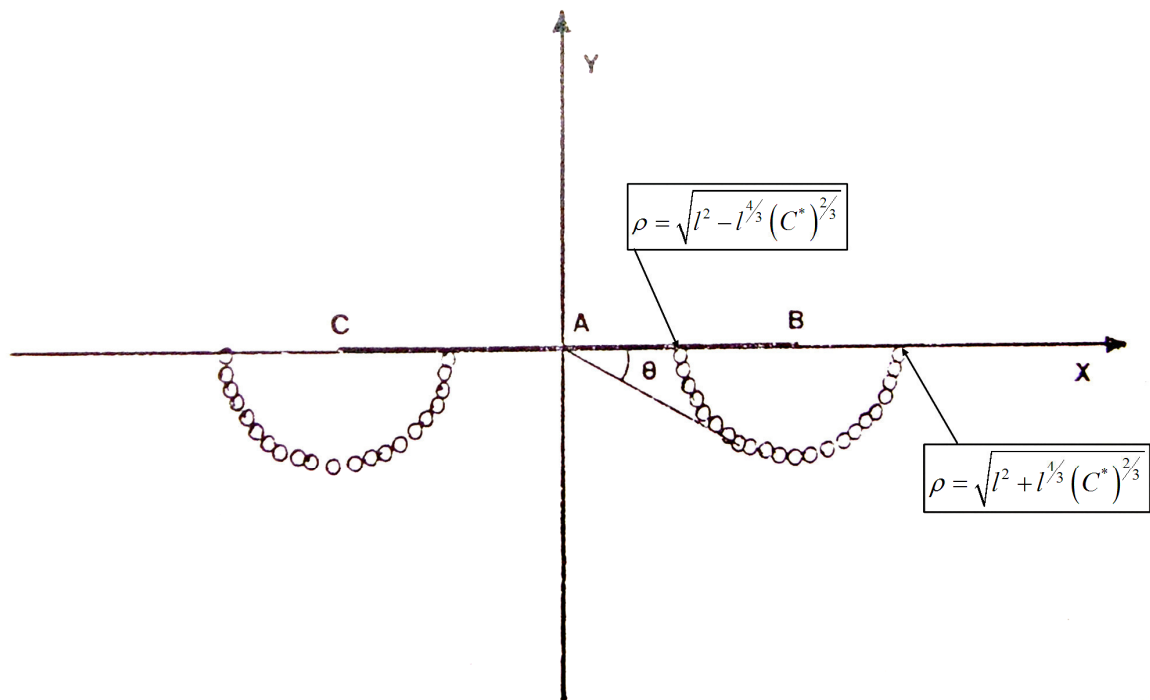
ii)

$$\Rightarrow l^{2/3} \geq (C^*)^{2/3} \Rightarrow l \geq C^*$$

Δηλαδή αν ισχύει ότι $l \geq C^*$ τότε μόνον έχει νόημα το (-) στην σχέση (68). Άρα σε αυτήν την περίπτωση συμβαίνει η εξής ιδιομορφία: θα έχω δύο τιμές πολικής ακτίνας αρχικής καμπύλης για $\theta=0$. Αυτό αυτομάτως σημαίνει λόγω συμμετρίας του προβλήματος ότι θα έχω δύο συμμετρικά τοποθετημένες αρχικές καμπύλες άρα και δύο συμμετρικές καυστικές. Η περίπτωση αυτή φαίνεται στο Σχήμα 28.

Αν όμως δεν ισχύει το παραπάνω και ισχύει ότι $l < C^*$ τότε το (-) στην σχέση (68) δεν έχει κανένα νόημα όπως φαίνεται από την διερεύνηση και επομένως έχω μια τιμή πολικής ακτίνας αρχικής καμπύλης για $\theta=0$. Η περίπτωση αυτή φαίνεται στο Σχήμα 29.

Αυτό αυτομάτως σημαίνει ότι έχω μια αρχική καμπύλη και άρα μια μοναδική καυστική. Υπάρχει μια περίπτωση όπως θα δούμε παρακάτω να έχω δύο αρχικές καμπύλες στα άκρα της περιοχής επαφής αλλά να φαίνεται ότι έχω μια καυστική καμπύλη. Αυτή την περίπτωση θα την εξετάσουμε αργότερα.



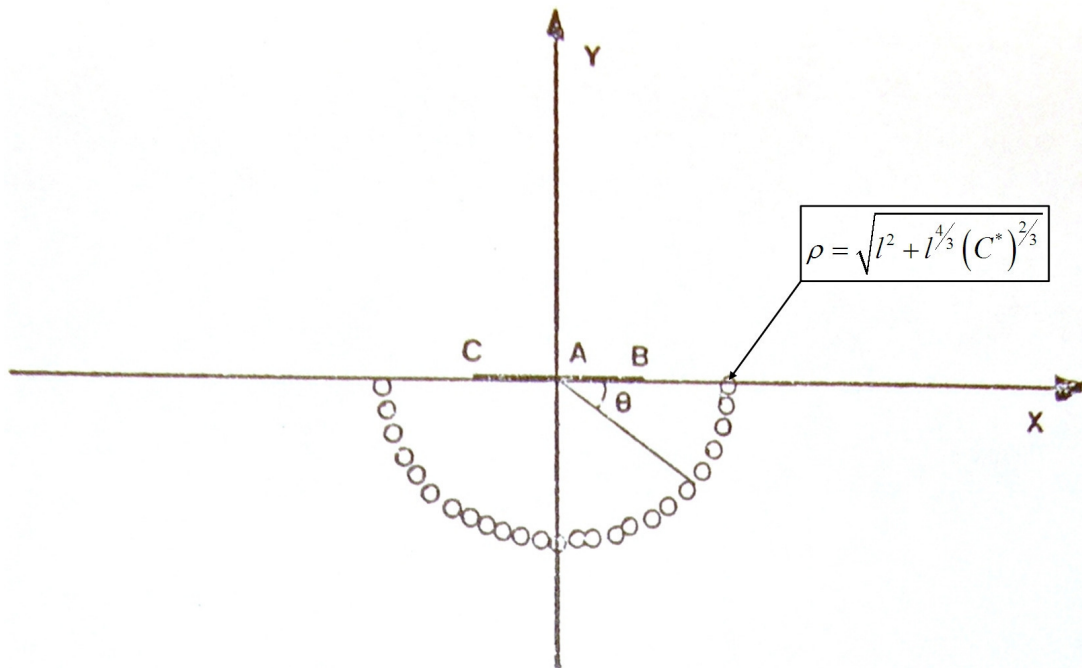
Σχήμα 28: Δύο καυστικές στα άκρα ($l \geq C^*$)

Αν λοιπόν έχω δεδομένο D και θέλω να υπολογίσω το μήκος επαφής l είναι λάθος να χρησιμοποιήσω την σχέση $D = 2\lambda_m \left[l^2 \pm l^{4/3} (C^*)^{2/3} \right]^{1/2}$ με (-) διότι το αποτέλεσμα που θα πάρω σαν μήκος επαφής θα ξεπερνάει(!) την ακτίνα της αρχικής καμπύλης.

Συνεπώς για τον υπολογισμό του μήκους επαφής από δεδομένο D χρησιμοποιώ πάντα τον παρακάτω τύπο:

$$D = 2\lambda_m \left[l^2 + l^{4/3} (C^*)^{2/3} \right]^{1/2} \quad (69)$$

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι το «κέντρο» των αρχικών καμπυλών για την περίπτωση που έχω $l \geq C^*$ δεν συμπίπτει με τα άκρα B, C της περιοχής επαφής αλλά η σχετικής τους θέση εξαρτάται από τον λόγο C^*/l . Η απόδειξη περιλαμβάνεται στο Παράρτημα 3.



Σχήμα 29: Μια καυστική από την επαφή ($l < C^*$)

Ακολουθεί η παρουσίαση των αποτελεσμάτων των δοκιμών. Για κάθε μια από αυτές γίνεται υπολογισμός του μήκους επαφής και σύγκριση αυτού με το προβλεπόμενο από την θεωρία του Hertz όπως αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 4.

• Δοκιμή #3626

Filename: IMG3626

Δοκίμια: #3 και #4

Λόγος Poisson ν	0.34
c_i (m^2/N)	-1.21×10^{-10}
c_r (m^2/N)	-1.7×10^{-10}
Ελαστική σταθερά κ	1.985
Μέτρο διάτμησης μ (N/cm^2)	1.26866×10^5
Ελαστική σταθερά K	1.176×10^{-5}
Μέτρο ελαστικότητας E (N/cm^2)	3.4×10^5
Τασεοπτική σταθερά C (cm^4/N)	2.081×10^{-4}
Τασεοπτική σταθερά C^* (cm)	0.694

Απόσταση z_0 (cm)	327
ε	1
d (cm)	1
Συντελεστής Μεγέθ. λ_m	7.6052631
Ακτίνα R (cm)	1.7
Ακτίνα r (cm)	1.5
Φορτίο P (N)	1104.27

Ακραίο άνοιγμα D (cm)	9.5
--------------------------------	-----

$$D = 2\lambda_m \left[l^2 + l^{4/3} (C^*)^{2/3} \right]^{1/2} \Rightarrow l = 0.399448cm$$

Μήκος επαφής σε (cm): $2l = 0.799$

Χαρακτηριστικό μέγεθος επαφής $\chi = \frac{C^*}{l} : 1.737$

Εφόσον το παραπάνω μέγεθος είναι >1 θα έχω μια ενιαία αρχική καμπύλη.

Υπολογισμός του μήκους επαφής βάσει της θεωρίας Hertz

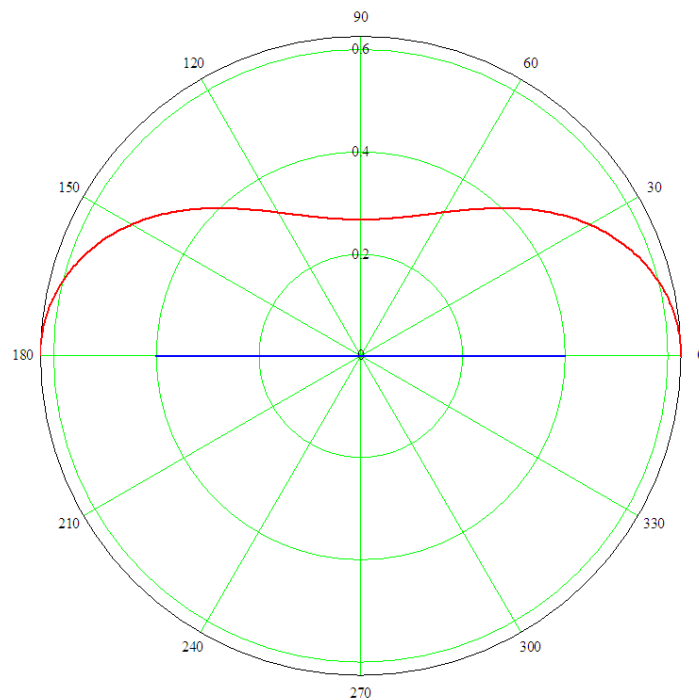
$$a := 2 \left(\frac{4 \cdot \text{Load}}{\pi} \cdot 2 \cdot \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot \frac{R \cdot r}{R - r} \right)^{\frac{1}{2}} = 0.61$$

Σύγκριση των αποτελεσμάτων

$$\Delta l = 2l - \alpha = 0.189 \text{ cm}$$

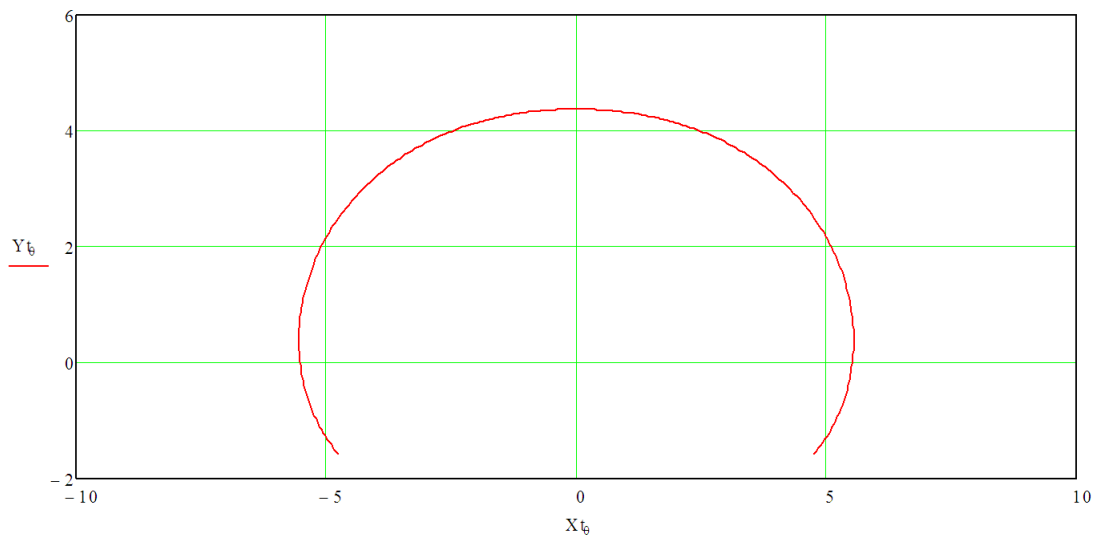
Υπολογισμός αρχικών καμπυλών

(Με μπλε συμβολίζεται το μήκος επαφής)

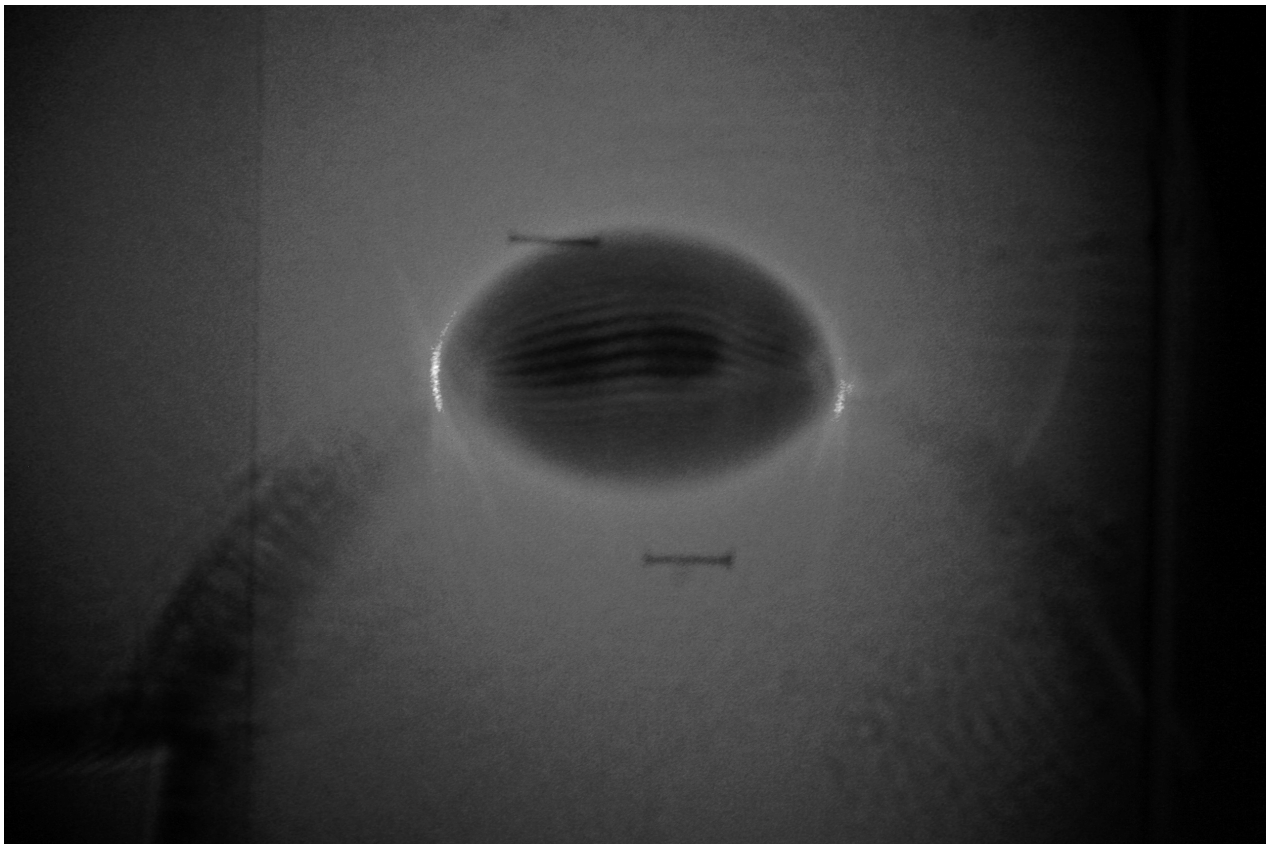


Σχήμα 30

Σχεδίαση των θεωρητικών καυστικών και σύγκριση με τις εργαστηριακές.



Σχήμα 31



Σχήμα 32

• Δοκιμή #3629

Filename: IMG3629

Δοκίμια: #3 και #4

Λόγος Poisson ν	0.34
c_i (m^2/N)	-1.21×10^{-10}
c_r (m^2/N)	-1.7×10^{-10}
Ελαστική σταθερά κ	1.985
Μέτρο διάτμησης μ (N/cm^2)	1.26866×10^5
Ελαστική σταθερά K	1.176×10^{-5}
Μέτρο ελαστικότητας E (N/cm^2)	3.4×10^5
Τασεοπτική σταθερά C (cm^4/N)	2.081×10^{-4}
Τασεοπτική σταθερά C* (cm)	0.694

Απόσταση z_0 (cm)	327
ε	1
d (cm)	1
Συντελεστής Μεγέθ. λ_m	7.6052631
Ακτίνα R (cm)	1.7
Ακτίνα r (cm)	1.5
Φορτίο P (N)	1568.23

Ακραίο άνοιγμα D (cm)	11.05
------------------------------	-------

$$D = 2\lambda_m \left[l^2 + l^{4/3} (C^*)^{2/3} \right]^{1/2} \Rightarrow l = 0.481603 \text{ cm}$$

Μήκος επαφής σε (cm): $2l = 0.963$

Χαρακτηριστικό μέγεθος επαφής $\chi = \frac{C^*}{l} : 1.44$

Εφόσον το παραπάνω μέγεθος είναι >1 θα έχω μια ενιαία αρχική καμπύλη.

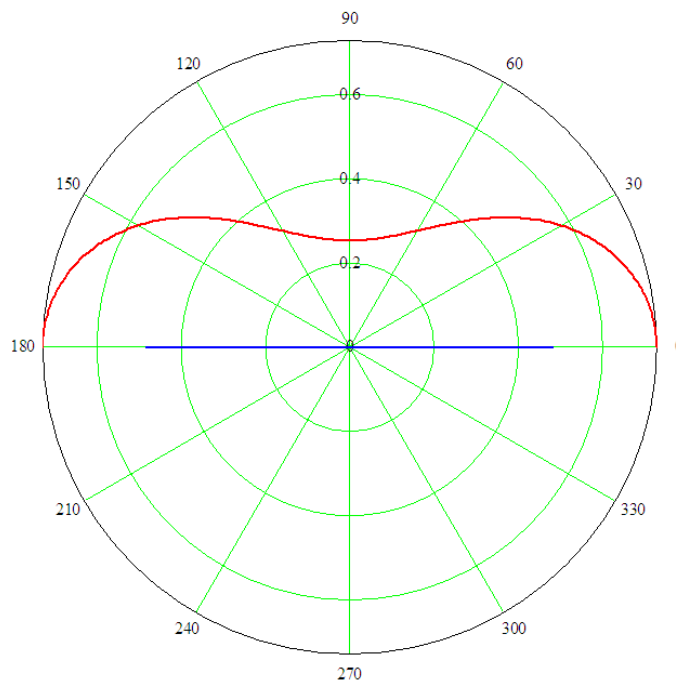
Υπολογισμός του μήκους επαφής βάσει της θεωρίας Hertz

$$a := 2 \left(\frac{4 \cdot \text{Load}}{\pi} \cdot 2 \cdot \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot \frac{R \cdot r}{R - r} \right)^{\frac{1}{2}} = 0.728$$

Σύγκριση των αποτελεσμάτων

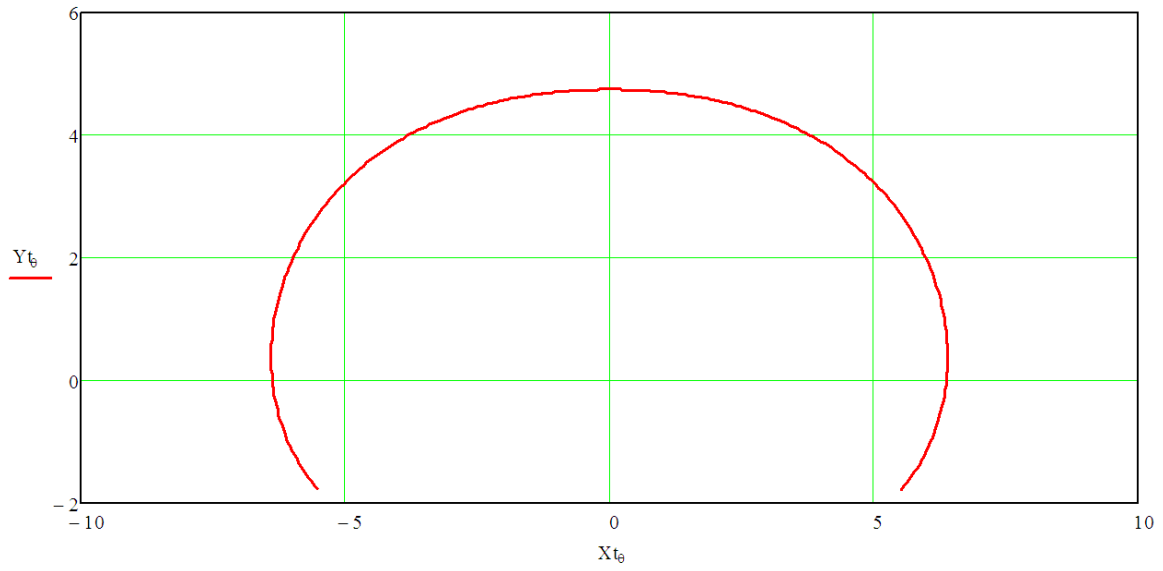
$$\Delta l = 2l - \alpha = 0.235 \text{ cm}$$

Υπολογισμός αρχικών καμπυλών

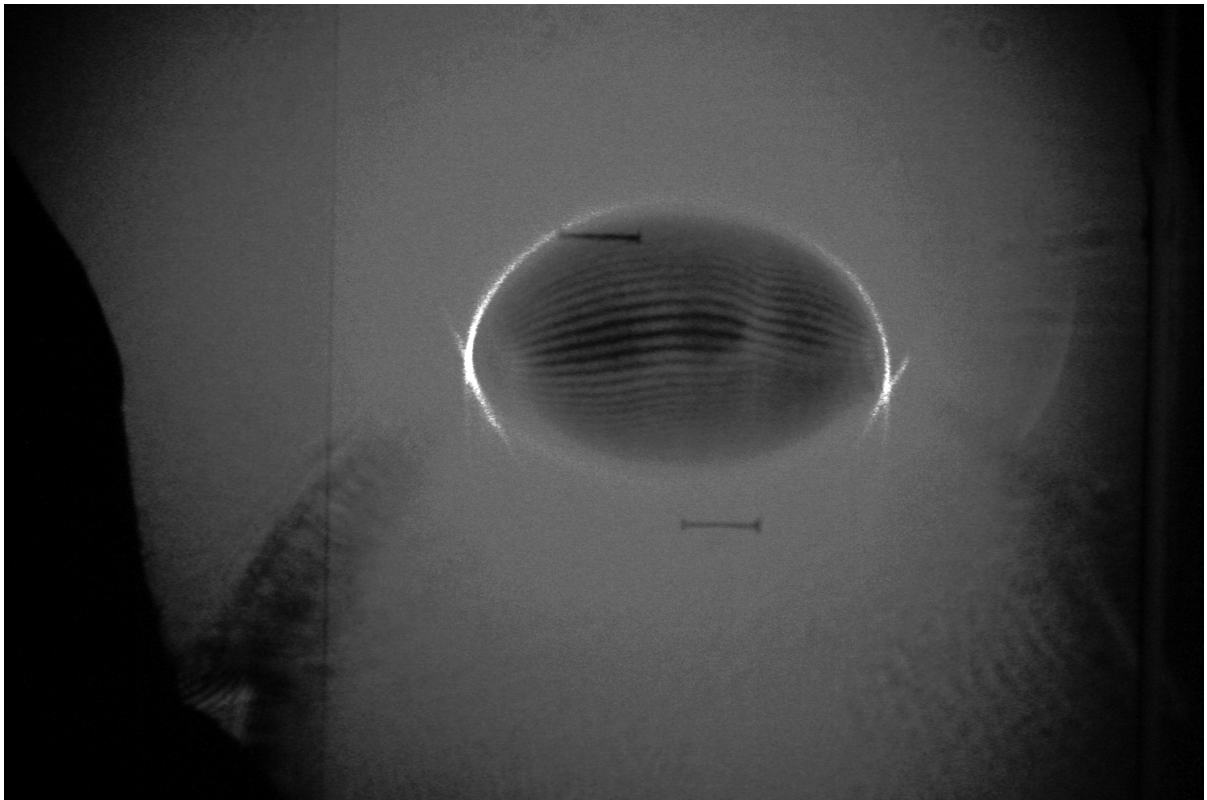


Σχήμα 33

Σχεδίαση των θεωρητικών καυστικών και σύγκριση με τις εργαστηριακές.



Σχήμα 34



Σχήμα 35

• Δοκιμή #3630

Filename: IMG3630

Δοκίμια: #3 και #4

Λόγος Poisson ν	0.34
c_i (m^2/N)	-1.21×10^{-10}
c_r (m^2/N)	-1.7×10^{-10}
Ελαστική σταθερά κ	1.985
Μέτρο διάτμησης μ (N/cm^2)	1.26866×10^5
Ελαστική σταθερά K	1.176×10^{-5}
Μέτρο ελαστικότητας E (N/cm^2)	3.4×10^5
Τασεοπτική σταθερά C (cm^4/N)	2.081×10^{-4}
Τασεοπτική σταθερά C^* (cm)	0.694

Απόσταση z_0 (cm)	327
ε	1
d (cm)	1
Συντελεστής Μεγέθ. λ_m	7.6052631
Ακτίνα R (cm)	1.7
Ακτίνα r (cm)	1.5
Φορτίο P (N)	2058.15

Ακραίο άνοιγμα D (cm)	12.13
--------------------------------	-------

$$D = 2\lambda_m \left[l^2 + l^{4/3} (C^*)^{2/3} \right]^{1/2} \Rightarrow l = 0.539885cm$$

Μήκος επαφής σε (cm): $2l = 1.08$

Χαρακτηριστικό μέγεθος επαφής $\chi = \frac{C^*}{l} : 1.285$

Εφόσον το παραπάνω μέγεθος είναι >1 θα έχω μια ενιαία αρχική καμπύλη.

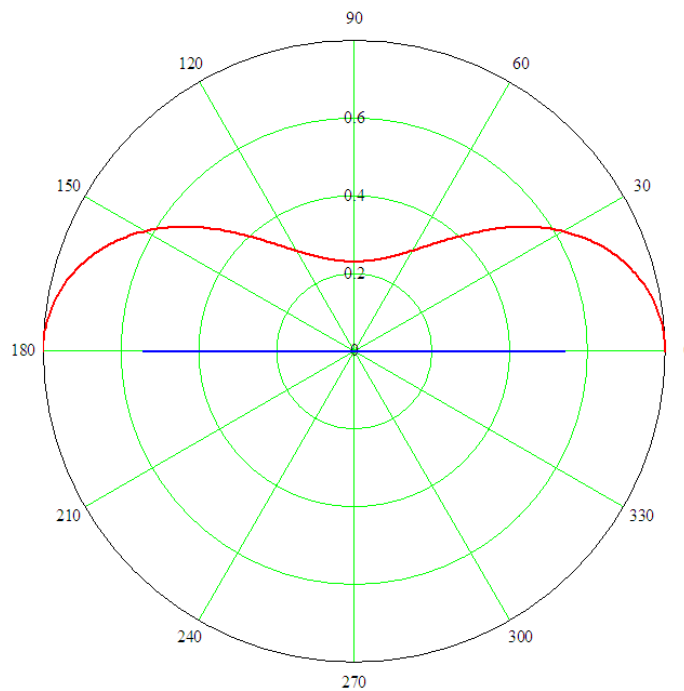
Υπολογισμός του μήκους επαφής βάσει της θεωρίας Hertz

$$a := 2 \left(\frac{4 \cdot \text{Load}}{\pi} \cdot 2 \cdot \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot \frac{R \cdot r}{R - r} \right)^{\frac{1}{2}} = 0.834$$

Σύγκριση των αποτελεσμάτων

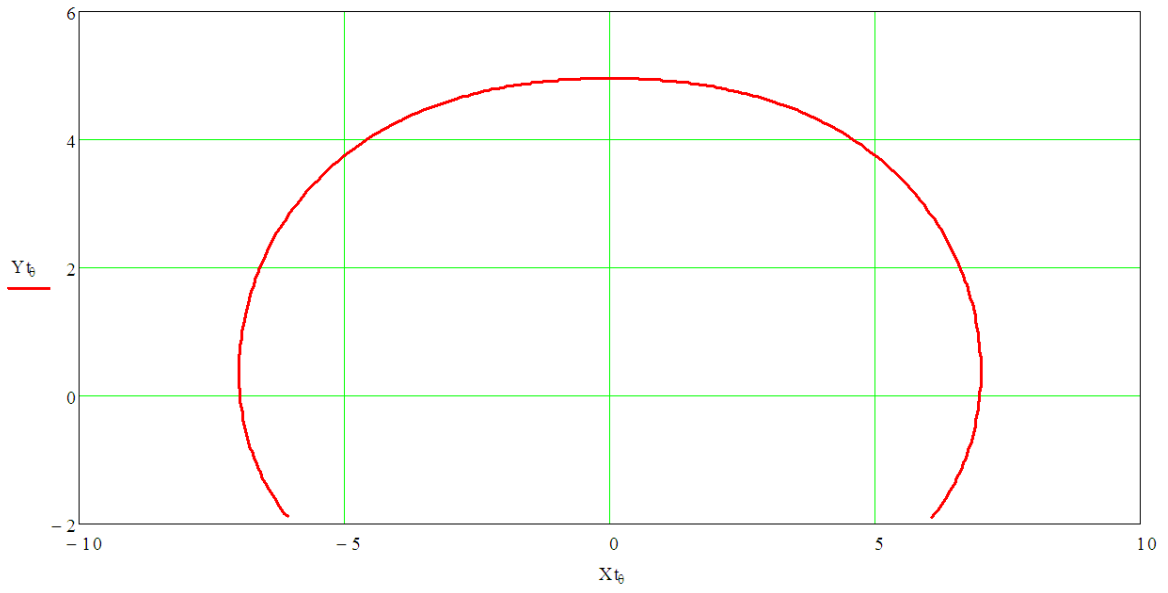
$$\Delta l = 2l - \alpha = 0.246 \text{ cm}$$

Υπολογισμός αρχικών καμπυλών

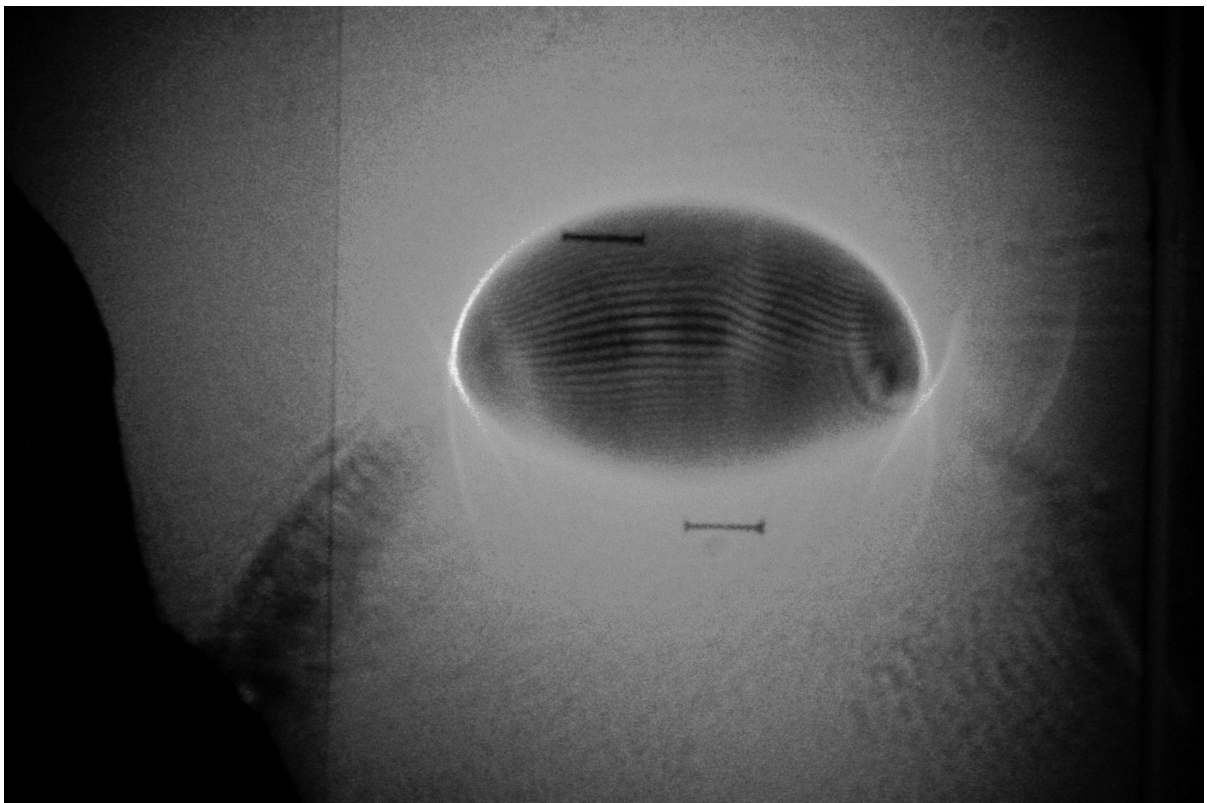


Σχήμα 36

Σχεδίαση των θεωρητικών καυστικών και σύγκριση με τις εργαστηριακές.



Σχήμα 37



Σχήμα 38

• Δοκιμή #1δ

Filename: IMG1d

Δοκίμια: #1 και #2

Λόγος Poisson ν	0.34
c_i (m^2/N)	-1.21×10^{-10}
c_r (m^2/N)	-1.7×10^{-10}
Ελαστική σταθερά κ	1.985
Μέτρο διάτμησης μ (N/cm^2)	1.26866×10^5
Ελαστική σταθερά K	1.176×10^{-5}
Μέτρο ελαστικότητας E (N/cm^2)	3.4×10^5
Τασεοπτική σταθερά C (cm^4/N)	2.081×10^{-4}
Τασεοπτική σταθερά C^* (cm)	0.375

Απόσταση z_0 (cm)	327
ε	1
d (cm)	1
Συντελεστής Μεγέθ. λ_m	7.6052631
Ακτίνα R (cm)	11
Ακτίνα r (cm)	7.5
Φορτίο P (N)	594.8

Ακραίο άνοιγμα D (cm)	7.11
--------------------------------	------

$$D = 2\lambda_m \left[l^2 + l^{4/3} (C^*)^{2/3} \right]^{1/2} \Rightarrow l = 0.322cm$$

Μήκος επαφής σε (cm): $2l = 0.644$

Χαρακτηριστικό μέγεθος επαφής $\chi = \frac{C^*}{l} : 1.165$

Εφόσον το παραπάνω μέγεθος είναι >1 θα έχω μια ενιαία αρχική καμπύλη.

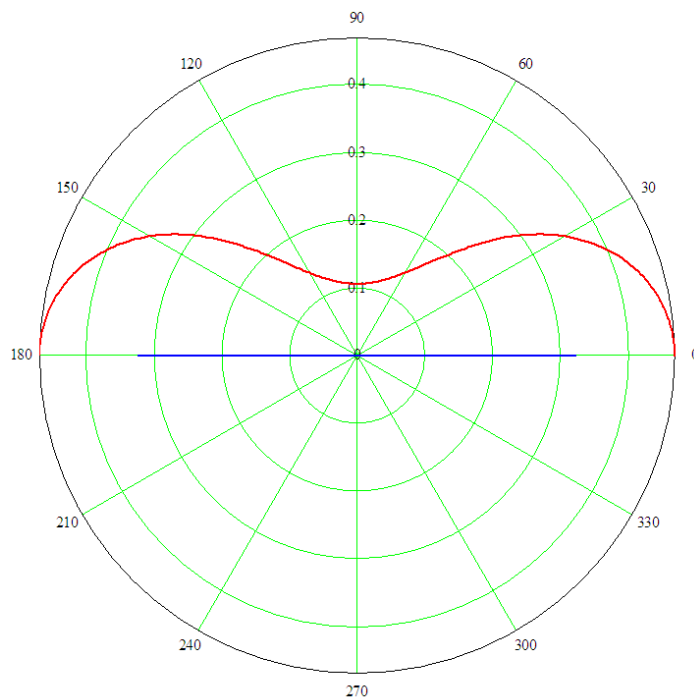
Υπολογισμός του μήκους επαφής βάσει της θεωρίας Hertz

$$a := 2 \left(\frac{4 \cdot \text{Load}}{\pi} \cdot 2 \cdot \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot \frac{R \cdot r}{R - r} \right)^{\frac{1}{2}} = 0.609$$

Σύγκριση των αποτελεσμάτων

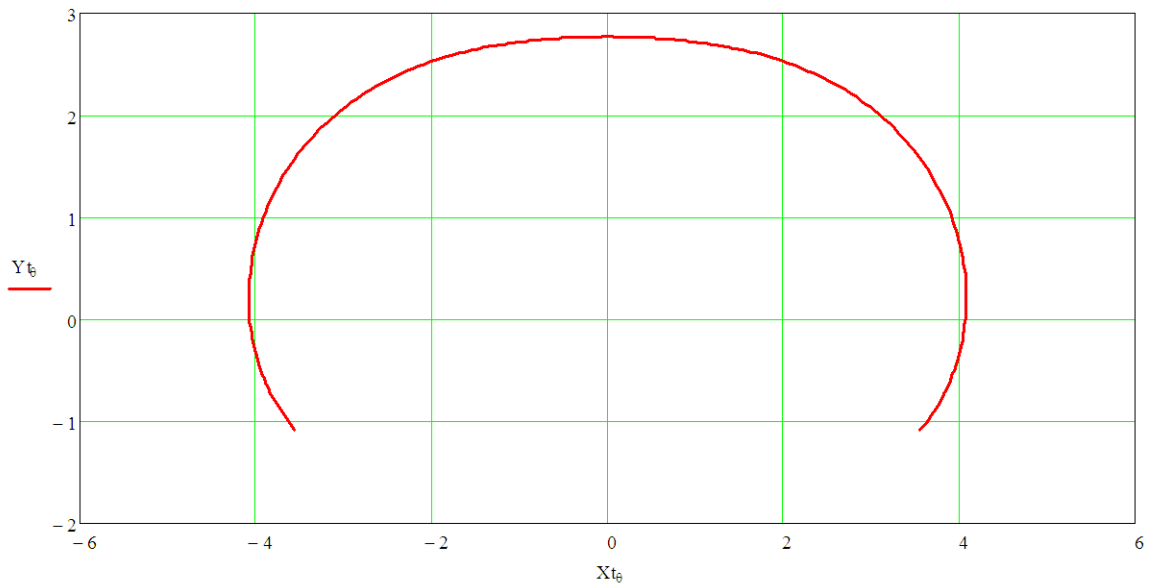
$$\Delta l = 2l - \alpha = 0.035 \text{ cm}$$

Υπολογισμός αρχικών καμπυλών

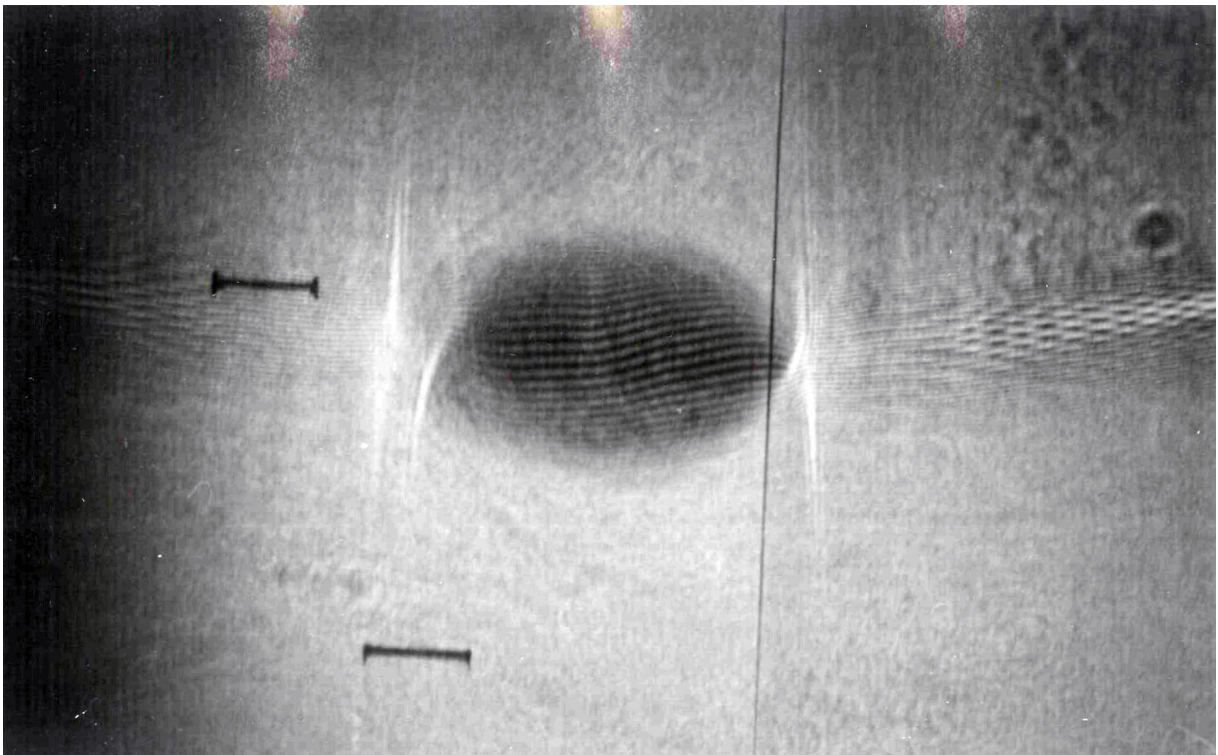


Σχήμα 39

Σχεδίαση των θεωρητικών καυστικών και σύγκριση με τις εργαστηριακές.



Σχήμα 40



Σχήμα 41

• Δοκιμή #2δ

Filename: IMG2d

Δοκίμια: #1 και #2

Λόγος Poisson ν	0.34
c_i (m^2/N)	-1.21×10^{-10}
c_r (m^2/N)	-1.7×10^{-10}
Ελαστική σταθερά κ	1.985
Μέτρο διάτμησης μ (N/cm^2)	1.26866×10^5
Ελαστική σταθερά K	1.176×10^{-5}
Μέτρο ελαστικότητας E (N/cm^2)	3.4×10^5
Τασεοπτική σταθερά C (cm^4/N)	2.081×10^{-4}
Τασεοπτική σταθερά C^* (cm)	0.375

Απόσταση z_0 (cm)	327
ε	1
d (cm)	1
Συντελεστής Μεγέθ. λ_m	7.6052631
Ακτίνα R (cm)	11
Ακτίνα r (cm)	7.5
Φορτίο P (N)	948.6

Ακραίο άνοιγμα D (cm)	8.57
------------------------------	------

$$D = 2\lambda_m \left[l^2 + l^{4/3} (C^*)^{2/3} \right]^{1/2} \Rightarrow l = 0.371243cm$$

Μήκος επαφής σε (cm): $2l = 0.742$

Χαρακτηριστικό μέγεθος επαφής $\chi = \frac{C^*}{l} : 1.011$

Εφόσον το παραπάνω μέγεθος είναι >1 θα έχω μια ενιαία αρχική καμπύλη.

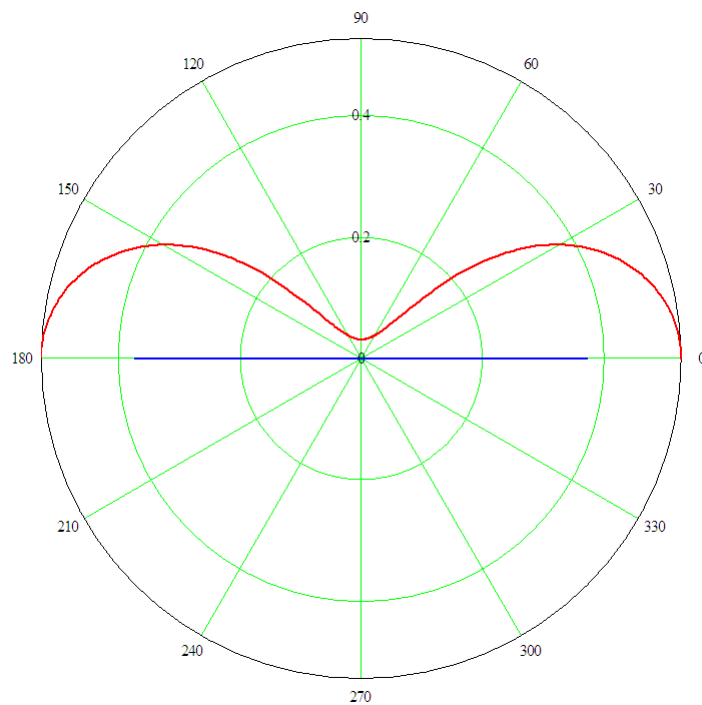
Υπολογισμός του μήκους επαφής βάσει της θεωρίας Hertz

$$a := 2 \left(\frac{4 \cdot \text{Load}}{\pi} \cdot 2 \cdot \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot \frac{R \cdot r}{R - r} \right)^{\frac{1}{2}} = 0.769$$

Σύγκριση των αποτελεσμάτων

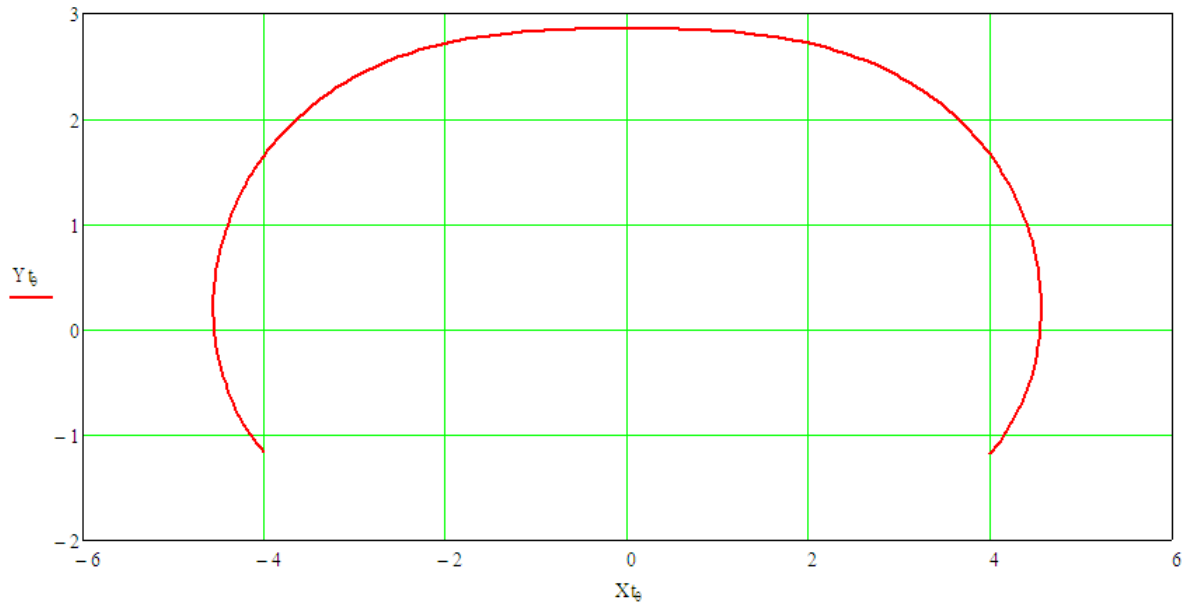
$$\Delta l = 2l - \alpha = -0.027 \text{ cm}$$

Υπολογισμός αρχικών καμπυλών

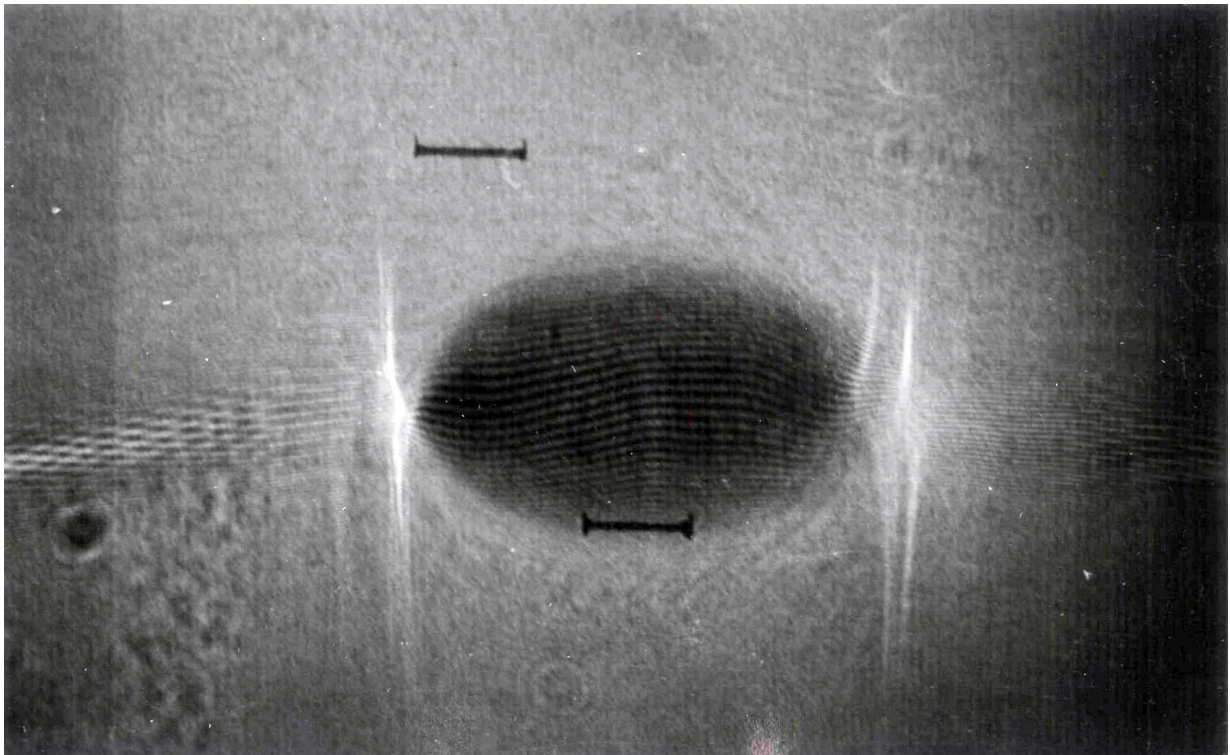


Σχήμα 42

Σχεδίαση των θεωρητικών καυστικών και σύγκριση με τις εργαστηριακές.



Σχήμα 43



Σχήμα 44

• Δοκιμή #3δ

Filename: IMG3d

Δοκίμια: #1 και #2

Λόγος Poisson ν	0.34
c_t (m^2/N)	-1.21×10^{-10}
c_r (m^2/N)	-1.7×10^{-10}
Ελαστική σταθερά κ	1.985
Μέτρο διάτμησης μ (N/cm^2)	1.26866×10^5
Ελαστική σταθερά K	1.176×10^{-5}
Μέτρο ελαστικότητας E (N/cm^2)	3.4×10^5
Τασεοπτική σταθερά C (cm^4/N)	2.081×10^{-4}
Τασεοπτική σταθερά C^* (cm)	0.375

Απόσταση z_0 (cm)	327
ε	1
d (cm)	1
Συντελεστής Μεγέθ. λ_m	7.6052631
Ακτίνα R (cm)	11
Ακτίνα r (cm)	7.5
Φορτίο P (N)	1274.9

Ακραίο άνοιγμα D (cm)	10.47
------------------------------	-------

$$D = 2\lambda_m \left[l^2 + l^{4/3} (C^*)^{2/3} \right]^{1/2} \Rightarrow l = 0.4841862 cm$$

Μήκος επαφής σε (cm): $2l = 0.968$

Χαρακτηριστικό μέγεθος επαφής $\chi = \frac{C^*}{l} : 0.775$

Εφόσον το παραπάνω μέγεθος είναι <1 θα έχω δύο διαχωρισμένες και συμμετρικά τοποθετημένες αρχικές καμπύλες.

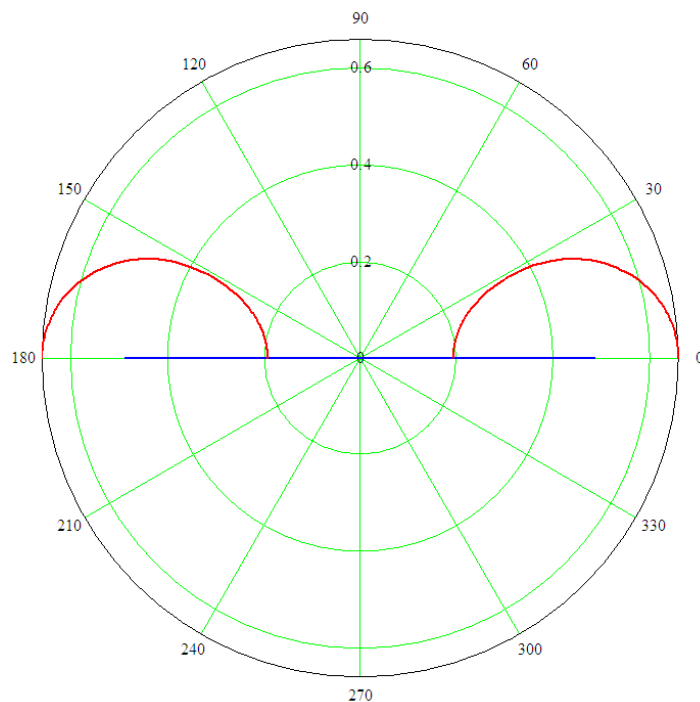
Υπολογισμός του μήκους επαφής βάσει της θεωρίας Hertz

$$a := 2 \left(\frac{4 \cdot \text{Load}}{\pi} \cdot 2 \cdot \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot \frac{R \cdot r}{R - r} \right)^{\frac{1}{2}} = 0.892$$

Σύγκριση των αποτελεσμάτων

$$\Delta l = 2l - \alpha = 0.076 \text{ cm}$$

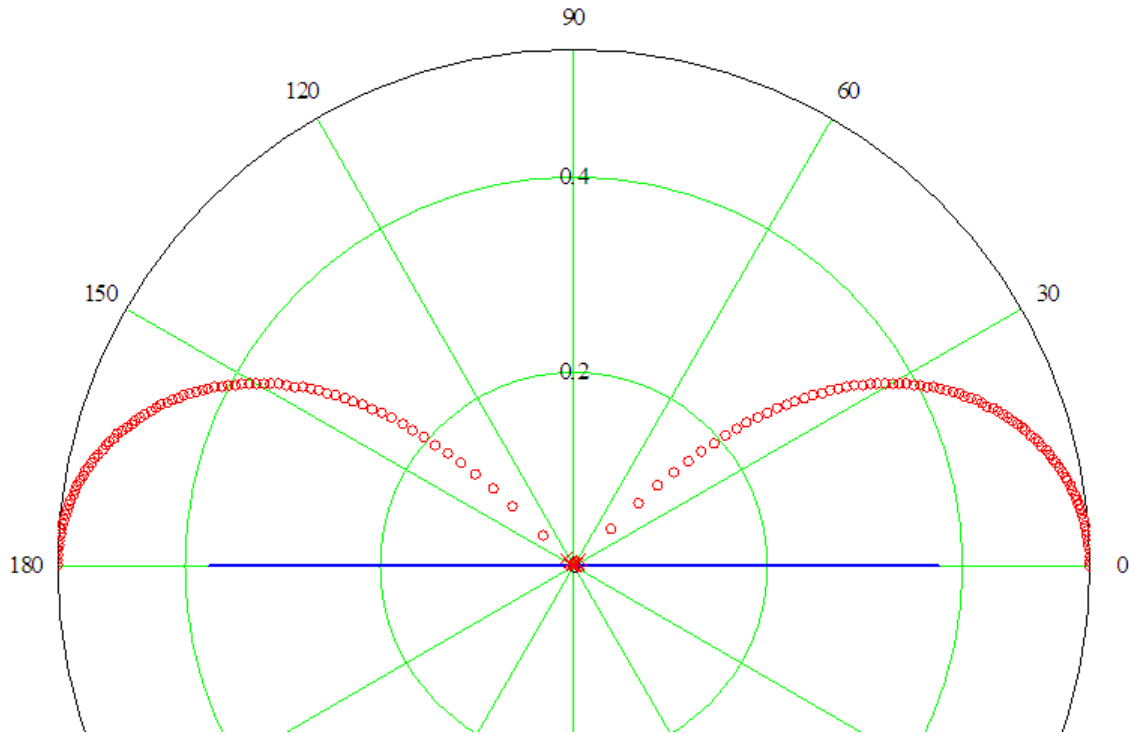
Υπολογισμός αρχικών καμπυλών



Σχήμα 45

Στο Σχήμα 45 βλέπουμε να επαληθεύεται αυτό που μελετήσαμε στην θεωρία, ότι δηλαδή αν η αύξηση του φορτίου μεγεθύνει αρκετά την περιοχή επαφής ώστε να ξεπεράσει την τιμή του C^* τότε θα έχω, αντί για μία αρχική καμπύλη, δύο, συμμετρικά μάλιστα τοποθετημένες.

Για να γίνει πιο σαφής ο μηχανισμός δημιουργίας των δύο αρχικών καμπυλών, χρήσιμο είναι στο σημείο αυτό να εξετάσουμε την οριακή περίπτωση όπου ο λόγος $\chi = C^*/l$ παίρνει την τιμή 1. Στο Σχήμα 46 είναι σχεδιασμένη η αρχική καμπύλη για την περίπτωση αυτή.



Σχήμα 46: Οριακή μορφή αρχικής καμπύλης ($\chi=1$).

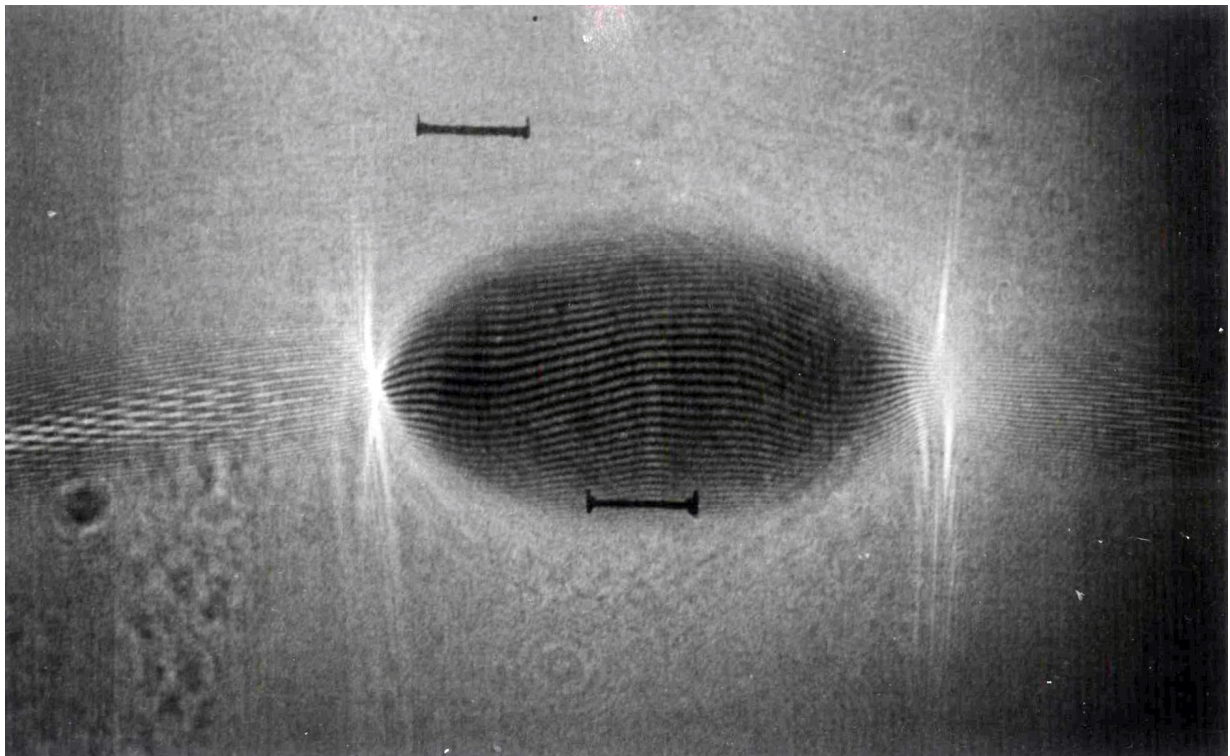
Με (ο) είναι σημειωμένα τα σημεία που αντιστοιχούν σε μία ρίζα της εξίσωσης (64) αυτά τα οποία απάρτιζαν μέχρι τώρα την ενιαία αρχική καμπύλη, τα οποία όπως βλέπουμε αρχίζουν να αραιώνουν γύρω από το 0. Παράλληλα εμφανίζονται νέα σημεία τα οποία σημειώνονται με (x), είναι συγκεντρωμένα με μεγάλη πυκνότητα γύρω από το 0, και ουσιαστικά πρόκειται για τιμές μιας δευτέρης ρίζας της εξίσωσης (64) που ενώ ήταν μιγαδική, τώρα γίνεται πραγματική.

Όσο ο λόγος χ τείνει περισσότερο προς το 0, τόσο τα σημεία (ο) θα υποχωρούν προς τα άκρα και θα σχηματίζουν μια καμπύλη που προσεγγίζει τον κύκλο.

Επιπρόσθετα είναι εμφανές και μόνο κοιτώντας το Σχήμα 64 ότι οι αρχικές καμπύλες δεν έχουν καμία σχέση με κύκλο.

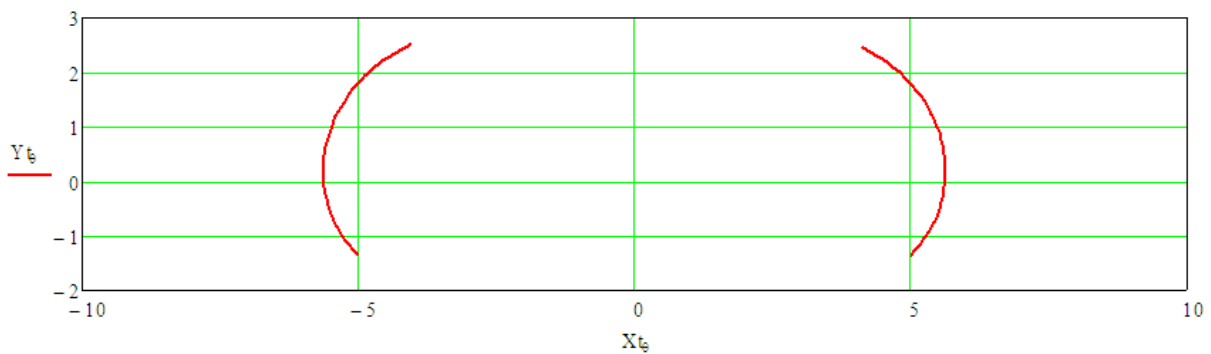
Σχεδίαση των θεωρητικών καυστικών και σύγκριση με τις εργαστηριακές.

Θα περίμενε κανείς στην δοκιμή 3δ να υπάρχουν και δύο σαφώς διαχωρισμένες καυστικές που να αντιστοιχεί έκαστη σε μια αρχική καμπύλη. Όμως η φωτογραφία που πάρθηκε στο εργαστήριο δεν επιβεβαιώνει αυτή την γνώμη.



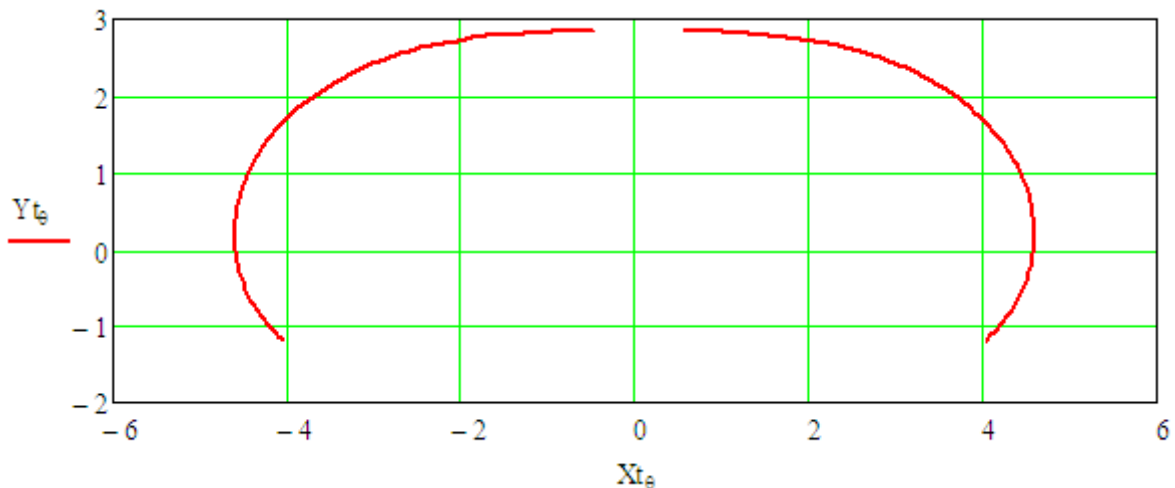
Σχήμα 47: Εργαστηριακή καυστική – δοκιμή 3δ

Φαίνεται σαν να είναι, όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, μια ενιαία καυστική. Ωστόσο σχεδιάζουμε και την θεωρητική καυστική με βάση τις παραμετρικές εξισώσεις (67).



Σχήμα 48: Θεωρητική καυστική – δοκιμή 3δ

Το αξιοπερίεργο με την καυστική που προβλέπουν οι θεωρητικές σχέσεις είναι ότι είναι ακριβώς ίδια με την εργαστηριακή καυστική, στο σχήμα και στο μέγεθος, αλλά φαίνεται να λείπει ένα τμήμα. Στην πραγματικότητα τα αποτελέσματα είναι ολόσωστα. Πρόκειται για 2 καυστικές καμπύλες οι οποίες ενώνονται με ένα τμήμα ψευδοκαυστικής καμπύλης. Έτσι, ενώ φαίνεται στο *Σχήμα 47* να είναι 1 καυστική στην πραγματικότητα είναι 2. Μετά την οριακή τιμή του λόγου χ οι αρχικές καμπύλες διαχωρίζονται σαφώς. Εφόσον λοιπόν υπάρχει 1-1 αντιστοιχία των σημείων της αρχικής καμπύλης με τα σημεία της καυστικής, θα ακολουθήσουν στον διαχωρισμό και οι καυστικές. Για επιβεβαίωση των λεγομένων μπορούμε να δούμε στο *Σχήμα 49* την καυστική που αντιστοιχεί στην αρχική καμπύλη του *Σχήματος 46* όπου ο διαχωρισμός είναι στο αρχικό του στάδιο, φαίνεται όμως καθαρά ότι είναι δύο οι καμπύλες και ότι προέρχονται από μια καυστική.



Σχήμα 49: Οριακή μορφή καυστικής ($\chi=1$).

Όσον αφορά την ψευδοκαυστική, η μελέτη της ξεφεύγει από τα όρια αυτής της εργασίας, καθώς απαιτεί ειδική ανάλυση και δεν μπορεί να εφαρμοστεί η θεωρία στην οποία βασιστήκαμε. Αρκεί μόνο να πούμε ότι χαρακτηριστικό της ψευδοκαυστικής είναι ότι υπακούει στην γενική εξίσωση της καυστικής αλλά δεν δίνεται από την αρχική καμπύλη.

Άρα λοιπόν το κριτήριο για τον διαχωρισμό των καυστικών είναι ο διαχωρισμός των αρχικών καμπυλών καθώς η ύπαρξη ψευδοκαυστικής μπορεί να μας οδηγήσει σε εσφαλμένα συμπεράσματα. Πάντως ο υπολογισμός του μήκους επαφής ή άλλων παραμέτρων που απαιτούν μόνο μέτρηση του μεγίστου ανοίγματος της καυστικής δεν επηρεάζεται από την ψευδοκαυστική.

• **Δοκιμή #4δ**

Filename: IMG4d

Δοκίμια: #1 και #2

Λόγος Poisson ν	0.34
c_i (m^2/N)	-1.21×10^{-10}
c_r (m^2/N)	-1.7×10^{-10}
Ελαστική σταθερά κ	1.985
Μέτρο διάτμησης μ (N/cm^2)	1.26866×10^5
Ελαστική σταθερά K	1.176×10^{-5}
Μέτρο ελαστικότητας E (N/cm^2)	3.4×10^5
Τασεοπτική σταθερά C (cm^4/N)	2.081×10^{-4}
Τασεοπτική σταθερά C^* (cm)	0.375

Απόσταση z_0 (cm)	327
ε	1
d (cm)	1
Συντελεστής Μεγέθ. λ_m	7.6052631
Ακτίνα R (cm)	11
Ακτίνα r (cm)	7.5
Φορτίο P (N)	1460.38

Ακραίο άνοιγμα D (cm)	11.13
------------------------------	-------

$$D = 2\lambda_m \left[l^2 + l^{4/3} (C^*)^{2/3} \right]^{1/2} \Rightarrow l = 0.549102cm$$

Μήκος επαφής σε (cm): $2l = 1.098$

Χαρακτηριστικό μέγεθος επαφής $\chi = \frac{C^*}{l} : 0.683$

Εφόσον το παραπάνω μέγεθος είναι <1 θα έχω δύο διαχωρισμένες και συμμετρικά τοποθετημένες αρχικές καμπύλες.

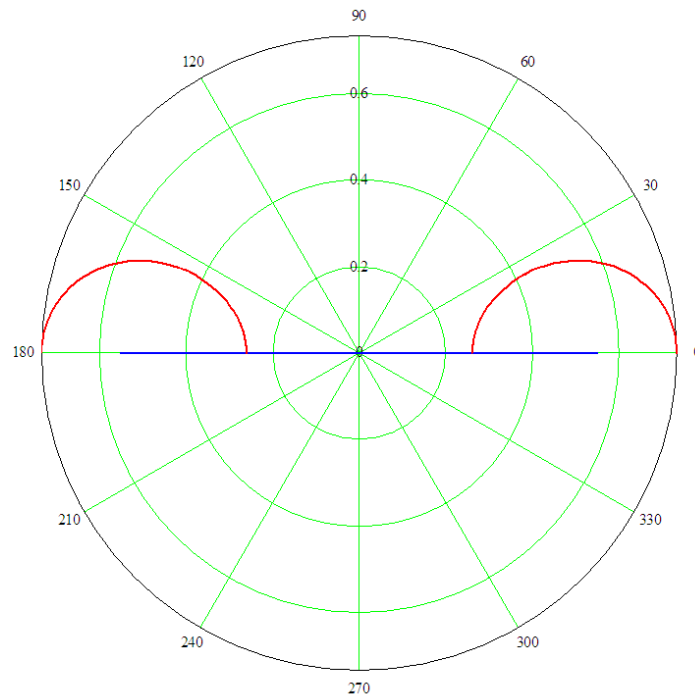
Υπολογισμός του μήκους επαφής βάσει της θεωρίας Hertz

$$a := 2 \left(\frac{4 \cdot \text{Load}}{\pi} \cdot 2 \cdot \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot \frac{R \cdot r}{R - r} \right)^{\frac{1}{2}} = 0.955$$

Σύγκριση των αποτελεσμάτων

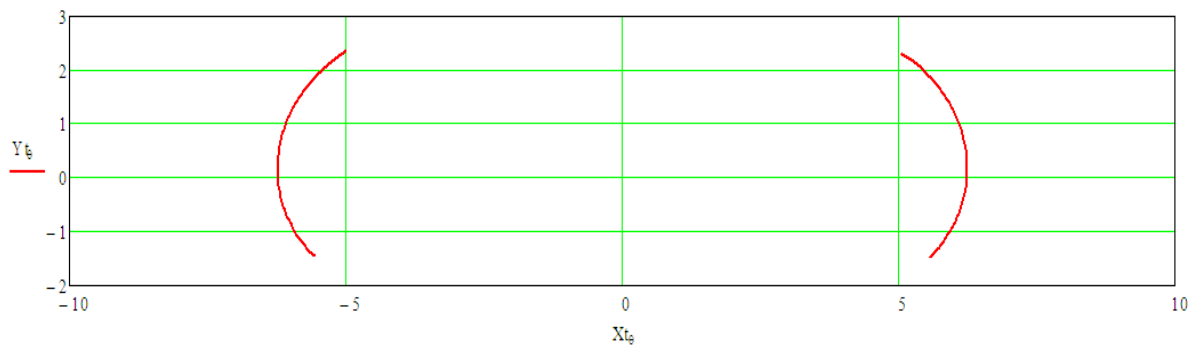
$$\Delta l = 2l - a = 0.143 \text{ cm}$$

Υπολογισμός αρχικών καμπυλών

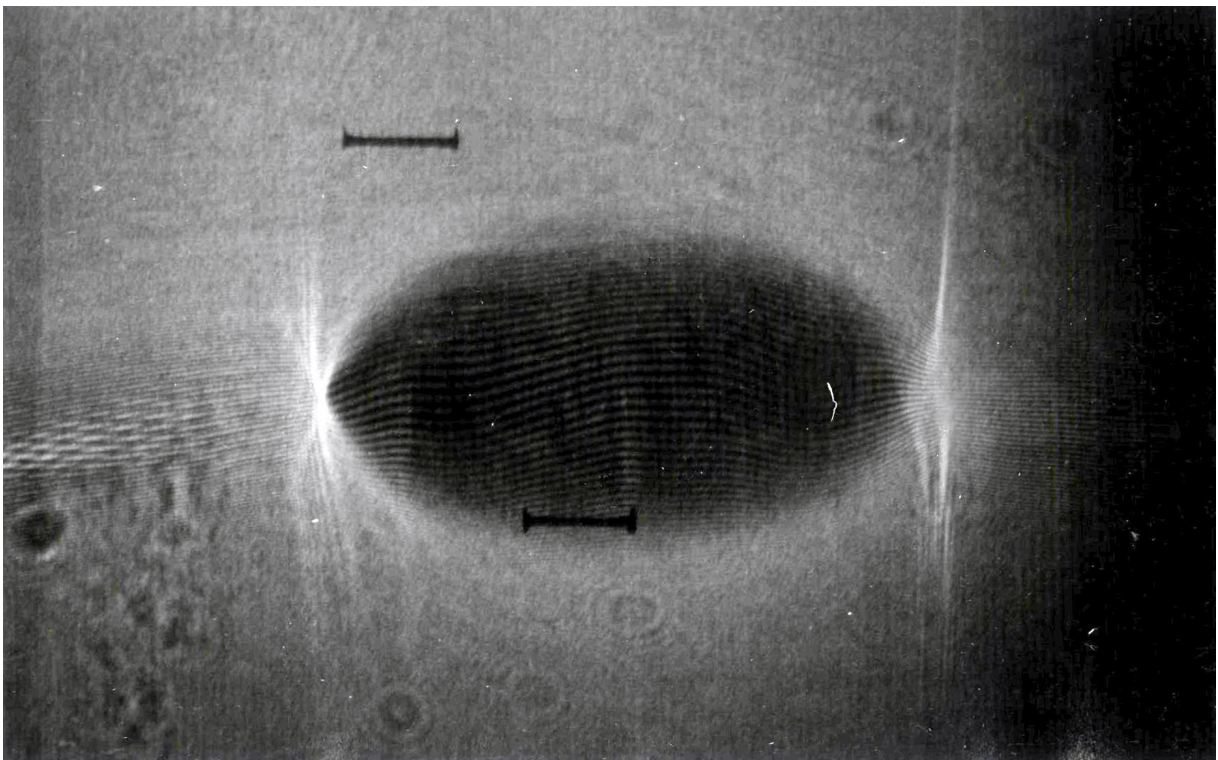


Σχήμα 50

Σχεδίαση των θεωρητικών καυστικών και σύγκριση με τις εργαστηριακές.



Σχήμα 51: Θεωρητική καυστική – δοκιμή 4δ



Σχήμα 52: Εργαστηριακή καυστική – δοκιμή 4δ

• Δοκιμή #5δ

Filename: IMG5d

Δοκίμια: #1 και #2

Λόγος Poisson ν	0.34
c_i (m^2/N)	-1.21×10^{-10}
c_r (m^2/N)	-1.7×10^{-10}
Ελαστική σταθερά κ	1.985
Μέτρο διάτμησης μ (N/cm^2)	1.26866×10^5
Ελαστική σταθερά K	1.176×10^{-5}
Μέτρο ελαστικότητας E (N/cm^2)	3.4×10^5
Τασεοπτική σταθερά C (cm^4/N)	2.081×10^{-4}
Τασεοπτική σταθερά C^* (cm)	0.375

Απόσταση z_0 (cm)	327
ε	1
d (cm)	1
Συντελεστής Μεγέθ. λ_m	7.6052631
Ακτίνα R (cm)	11
Ακτίνα r (cm)	7.5
Φορτίο P (N)	2678.37

Ακραίο άνοιγμα D (cm)	13.3
------------------------------	------

$$D = 2\lambda_m \left[l^2 + l^{4/3} (C^*)^{2/3} \right]^{1/2} \Rightarrow l = 0.675465 \text{ cm}$$

Μήκος επαφής σε (cm): $2l = 1.351$

Χαρακτηριστικό μέγεθος επαφής $\chi = \frac{C^*}{l} : 0.555$

Εφόσον το παραπάνω μέγεθος είναι <1 θα έχω δύο διαχωρισμένες και συμμετρικά τοποθετημένες αρχικές καμπύλες.

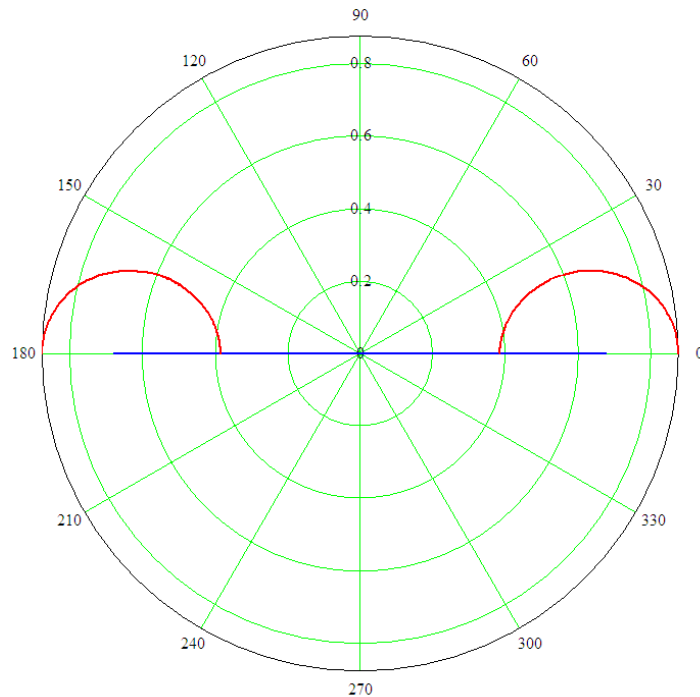
Υπολογισμός του μήκους επαφής βάσει της θεωρίας Hertz

$$a := 2 \left(\frac{4 \cdot \text{Load}}{\pi} \cdot 2 \cdot \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot \frac{R \cdot r}{R - r} \right)^{\frac{1}{2}} = 1.293$$

Σύγκριση των αποτελεσμάτων

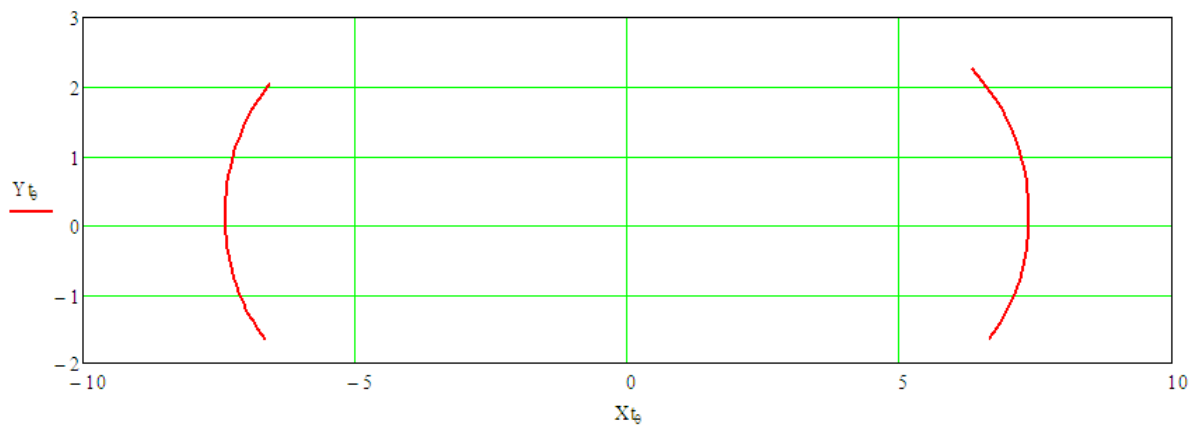
$$\Delta l = 2l - \alpha = 0.058 \text{ cm}$$

Υπολογισμός αρχικών καμπυλών

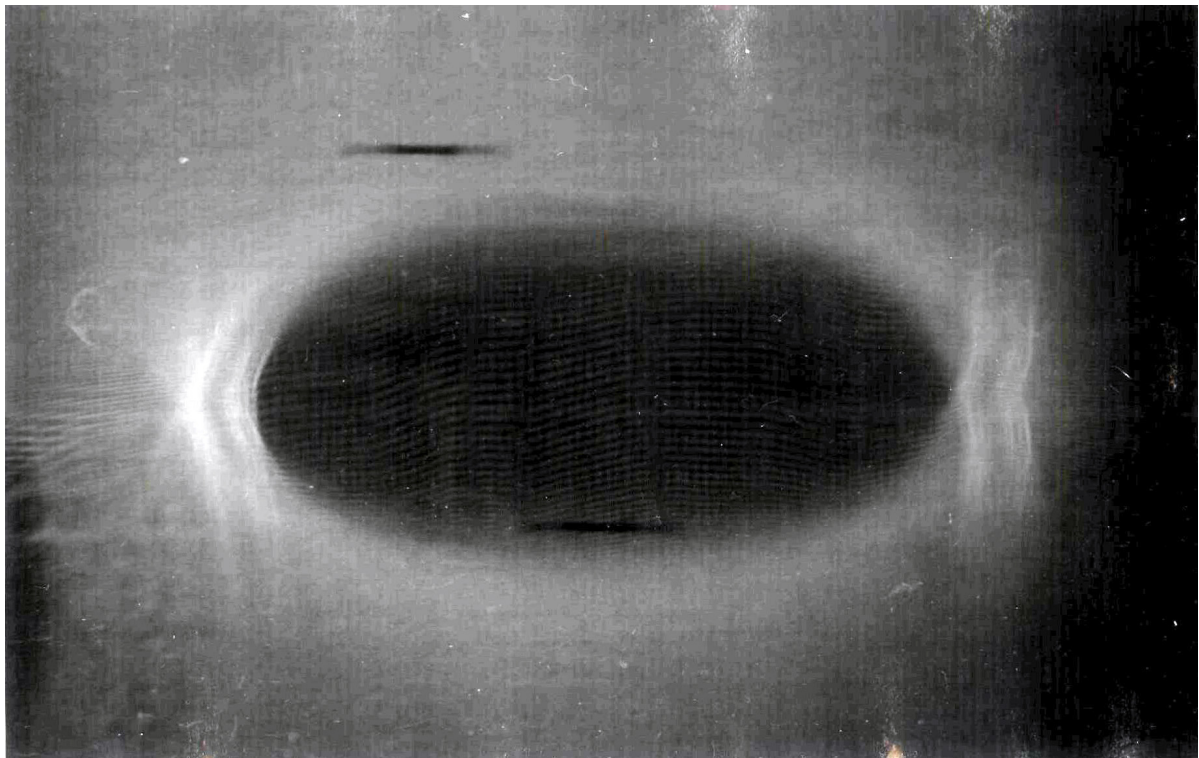


Σχήμα 53

Σχεδίαση των θεωρητικών καυστικών και σύγκριση με τις εργαστηριακές.



Σχήμα 54: Θεωρητική καυστική – δοκιμή 5δ



Σχήμα 55: Εργαστηριακή καυστική – δοκιμή 5δ

• **Δοκιμή #1α**

Filename: IMG 1a

Δοκίμα: #1 και #2

Λόγος Poisson ν	0.34
c_i (m^2/N)	-1.21×10^{-10}
c_r (m^2/N)	-1.7×10^{-10}
Ελαστική σταθερά κ	1.985
Μέτρο διάτμησης μ (N/cm^2)	1.26866×10^5
Ελαστική σταθερά K	1.176×10^{-5}
Μέτρο ελαστικότητας E (N/cm^2)	3.4×10^5
Τασεοπτική σταθερά C (cm^4/N)	6.921×10^{-4}
Τασεοπτική σταθερά C^* (cm)	1.248

Απόσταση z_0 (cm)	150
ε	2
d (cm)	1
Συντελεστής Μεγέθ. λ_m	2.9473684
Ακτίνα R (cm)	11
Ακτίνα r (cm)	7.5
Φορτίο P (N)	594.8

Ακραίο άνοιγμα D (cm)	4.2
--------------------------------	-----

$$D = 2\lambda_m \left[l^2 + l^{4/3} (C^*)^{2/3} \right]^{1/2} \Rightarrow l = 0.4031048 cm$$

Μήκος επαφής σε (cm): $2l = 0.806$

Χαρακτηριστικό μέγεθος επαφής $\chi = \frac{C^*}{l} : 3.096$

Εφόσον το παραπάνω μέγεθος είναι >1 θα έχω μια ενιαία αρχική καμπύλη.

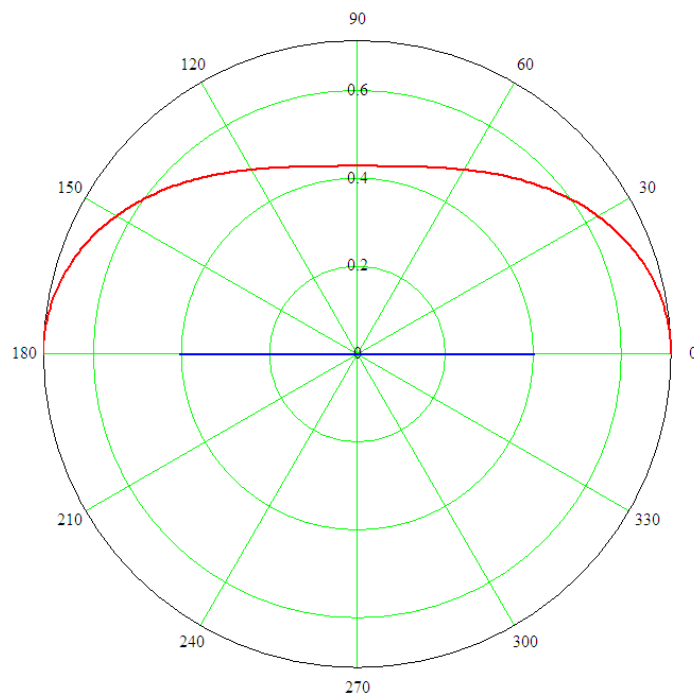
Υπολογισμός του μήκους επαφής βάσει της θεωρίας Hertz

$$a := 2 \left(\frac{4 \cdot \text{Load}}{\pi} \cdot 2 \cdot \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot \frac{R \cdot r}{R - r} \right)^{\frac{1}{2}} = 0.609$$

Σύγκριση των αποτελεσμάτων

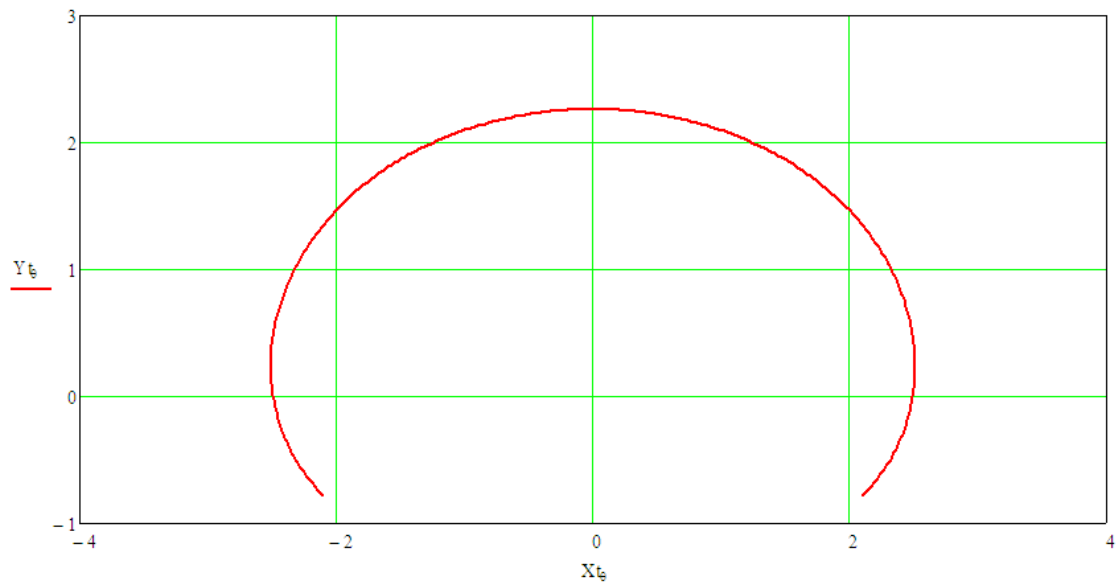
$$\Delta l = 2l - \alpha = 0.197 \text{ cm}$$

Υπολογισμός αρχικών καμπυλών

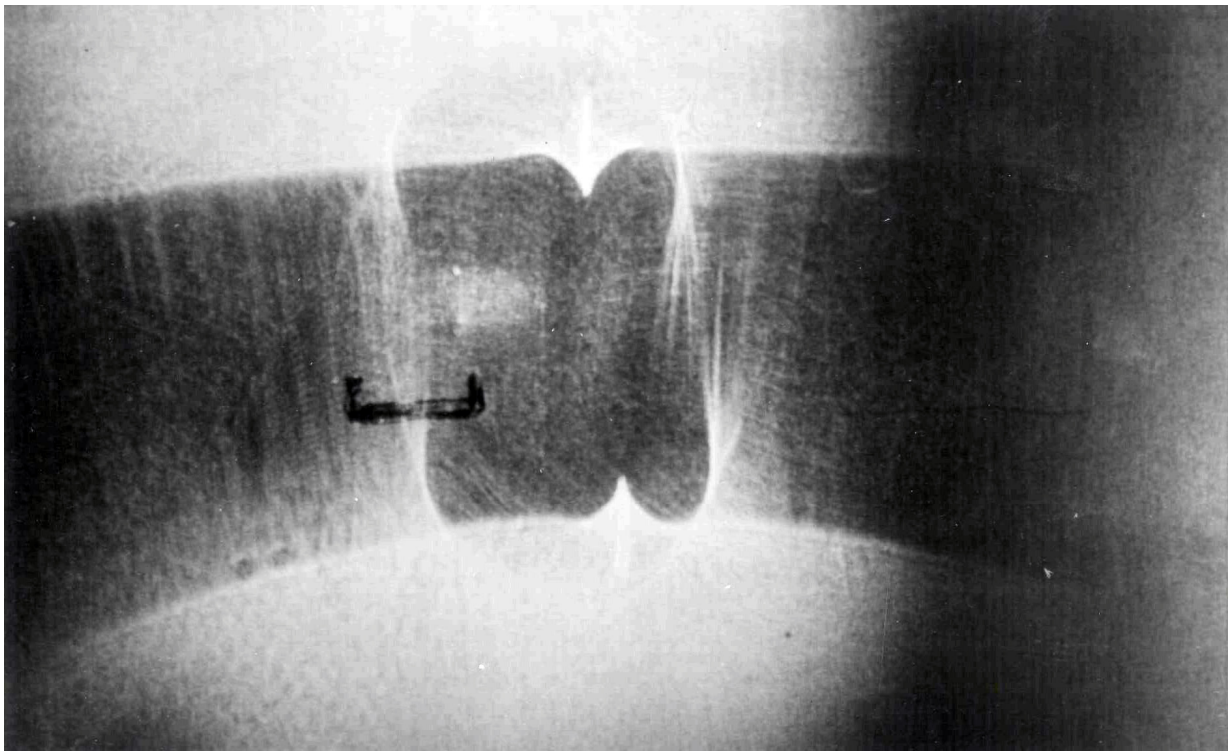


Σχήμα 56

Σχεδίαση των θεωρητικών καυστικών και σύγκριση με τις εργαστηριακές.



Σχήμα 57: Θεωρητική καυστική – δοκιμή 1α



Σχήμα 58: Εργαστηριακή καυστική – δοκιμή 1α

• **Δοκιμή #2α**

Filename: IMG 2a

Δοκίμα: #1 και #2

Λόγος Poisson ν	0.34
c_i (m^2/N)	-1.21×10^{-10}
c_r (m^2/N)	-1.7×10^{-10}
Ελαστική σταθερά κ	1.985
Μέτρο διάτμησης μ (N/cm^2)	1.26866×10^5
Ελαστική σταθερά K	1.176×10^{-5}
Μέτρο ελαστικότητας E (N/cm^2)	3.4×10^5
Τασεοπτική σταθερά C (cm^4/N)	6.921×10^{-4}
Τασεοπτική σταθερά C^* (cm)	1.248

Απόσταση z_0 (cm)	150
ε	2
d (cm)	1
Συντελεστής Μεγέθ. λ_m	2.9473684
Ακτίνα R (cm)	11
Ακτίνα r (cm)	7.5
Φορτίο P (N)	948.6

Ακραίο άνοιγμα D (cm)	5.135
--------------------------------	-------

$$D = 2\lambda_m \left[l^2 + l^{4/3} (C^*)^{2/3} \right]^{1/2} \Rightarrow l = 0.521639cm$$

Μήκος επαφής σε (cm): $2l = 1.043$

Χαρακτηριστικό μέγεθος επαφής $\chi = \frac{C^*}{l} : 2.392$

Εφόσον το παραπάνω μέγεθος είναι >1 θα έχω μια ενιαία αρχική καμπύλη.

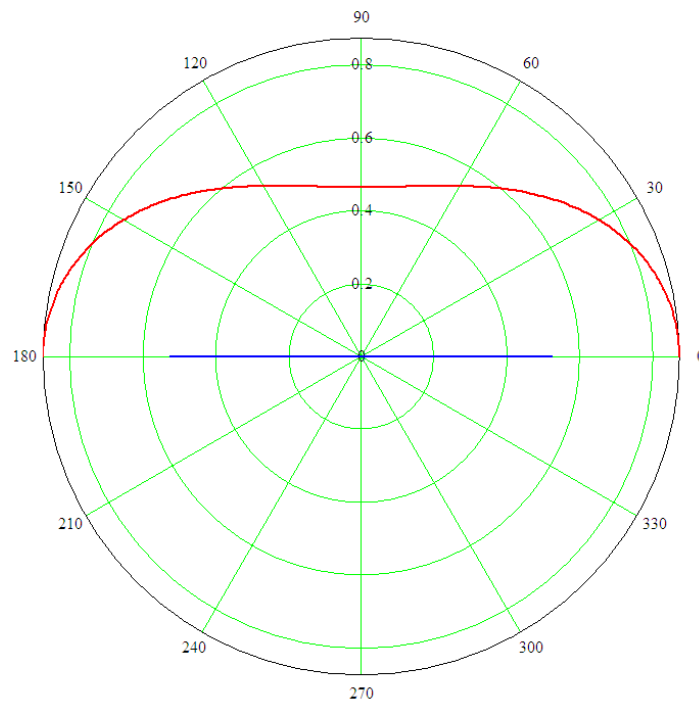
Υπολογισμός του μήκους επαφής βάσει της θεωρίας Hertz

$$a := 2 \left(\frac{4 \cdot \text{Load}}{\pi} \cdot 2 \cdot \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot \frac{R \cdot r}{R - r} \right)^{\frac{1}{2}} = 0.769$$

Σύγκριση των αποτελεσμάτων

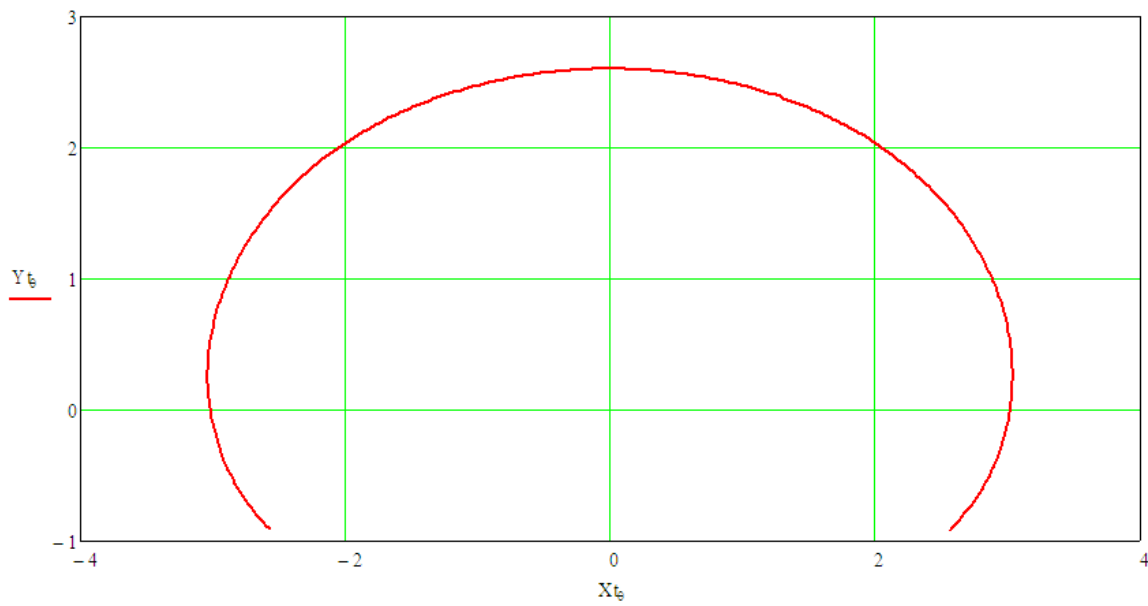
$$\Delta l = 2l - \alpha = 0.274 \text{ cm}$$

Υπολογισμός αρχικών καμπυλών

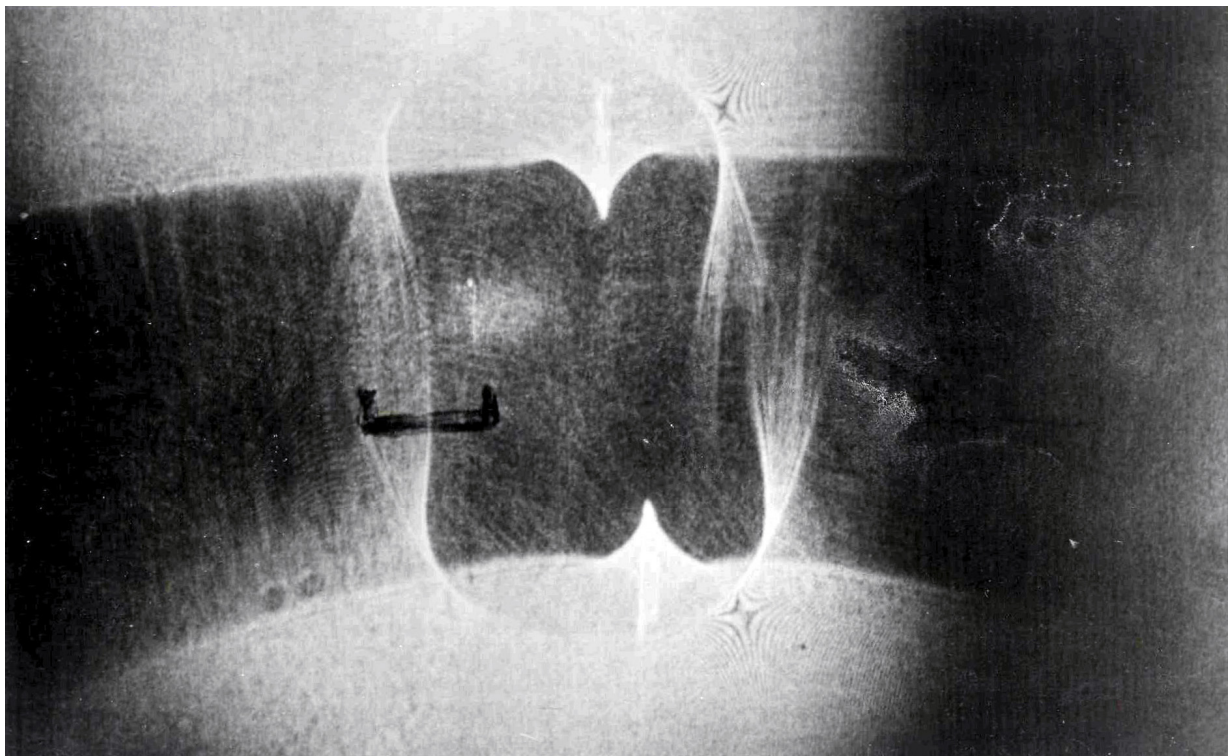


Σχήμα 59

Σχεδίαση των θεωρητικών καυστικών και σύγκριση με τις εργαστηριακές.



Σχήμα 60: Θεωρητική καυστική – δοκιμή 2α



Σχήμα 61: Εργαστηριακή καυστική – δοκιμή 2α

• Δοκιμή #3α

Filename: IMG 3a

Δοκίμα: #1 και #2

Λόγος Poisson ν	0.34
c_i (m^2/N)	-1.21×10^{-10}
c_r (m^2/N)	-1.7×10^{-10}
Ελαστική σταθερά κ	1.985
Μέτρο διάτμησης μ (N/cm^2)	1.26866×10^5
Ελαστική σταθερά K	1.176×10^{-5}
Μέτρο ελαστικότητας E (N/cm^2)	3.4×10^5
Τασεοπτική σταθερά C (cm^4/N)	6.921×10^{-4}
Τασεοπτική σταθερά C^* (cm)	1.248

Απόσταση z_0 (cm)	150
ε	2
d (cm)	1
Συντελεστής Μεγέθ. λ_m	2.9473684
Ακτίνα R (cm)	11
Ακτίνα r (cm)	7.5
Φορτίο P (N)	1274.9

Ακραίο άνοιγμα D (cm)	6
--------------------------------	---

$$D = 2\lambda_m \left[l^2 + l^{4/3} (C^*)^{2/3} \right]^{1/2} \Rightarrow l = 0.6350601 cm$$

Μήκος επαφής σε (cm): $2l = 1.27$

Χαρακτηριστικό μέγεθος επαφής $\chi = \frac{C^*}{l} : 1.965$

Εφόσον το παραπάνω μέγεθος είναι >1 θα έχω μια ενιαία αρχική καμπύλη.

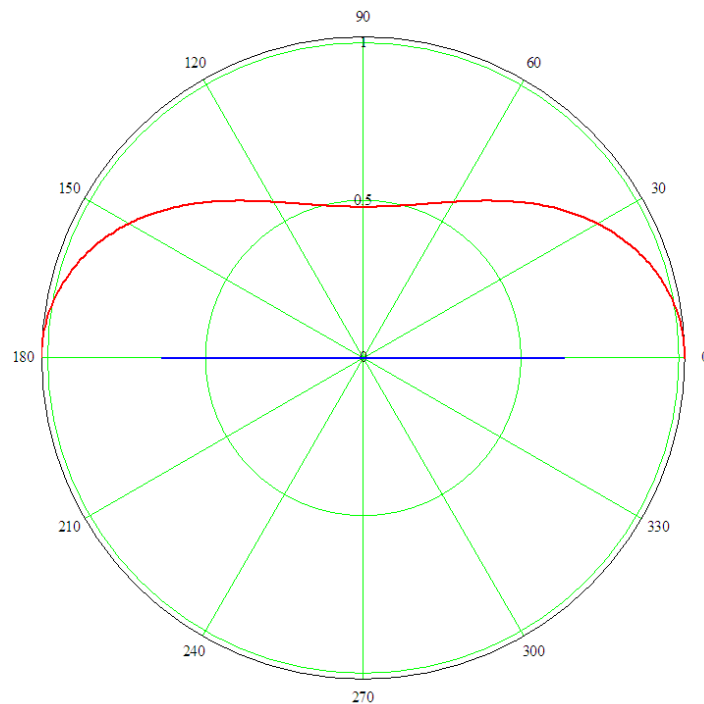
Υπολογισμός του μήκους επαφής βάσει της θεωρίας Hertz

$$a := 2 \left(\frac{4 \cdot \text{Load}}{\pi} \cdot 2 \cdot \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot \frac{R \cdot r}{R - r} \right)^{\frac{1}{2}} = 0.892$$

Σύγκριση των αποτελεσμάτων

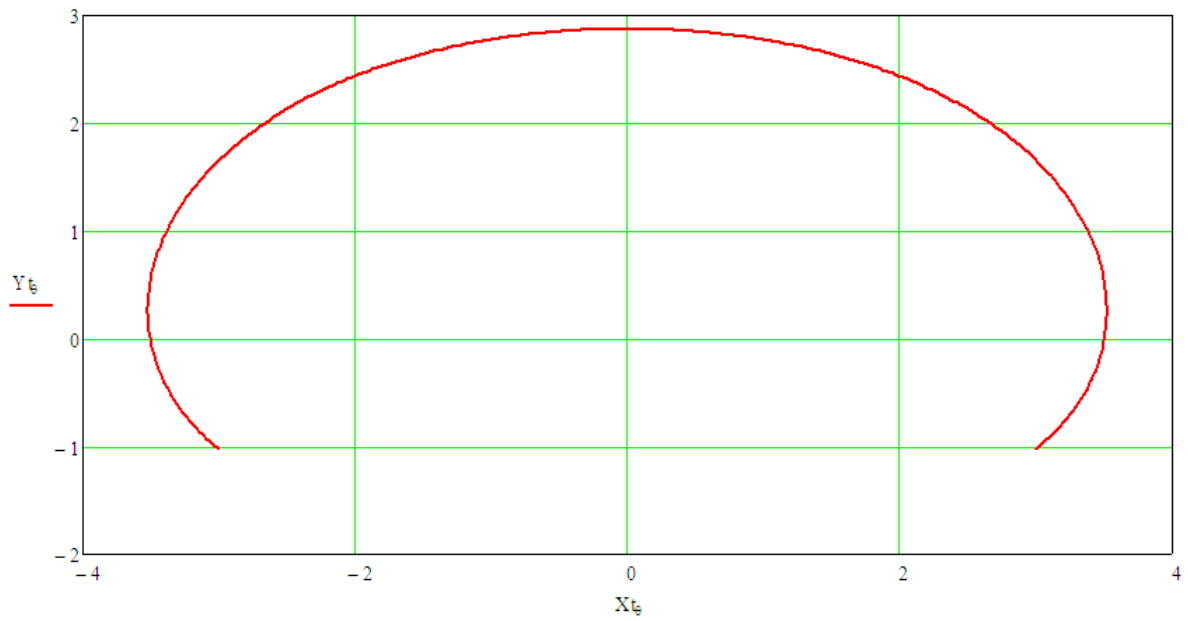
$$\Delta l = 2l - \alpha = 0.378 \text{ cm}$$

Υπολογισμός αρχικών καμπυλών

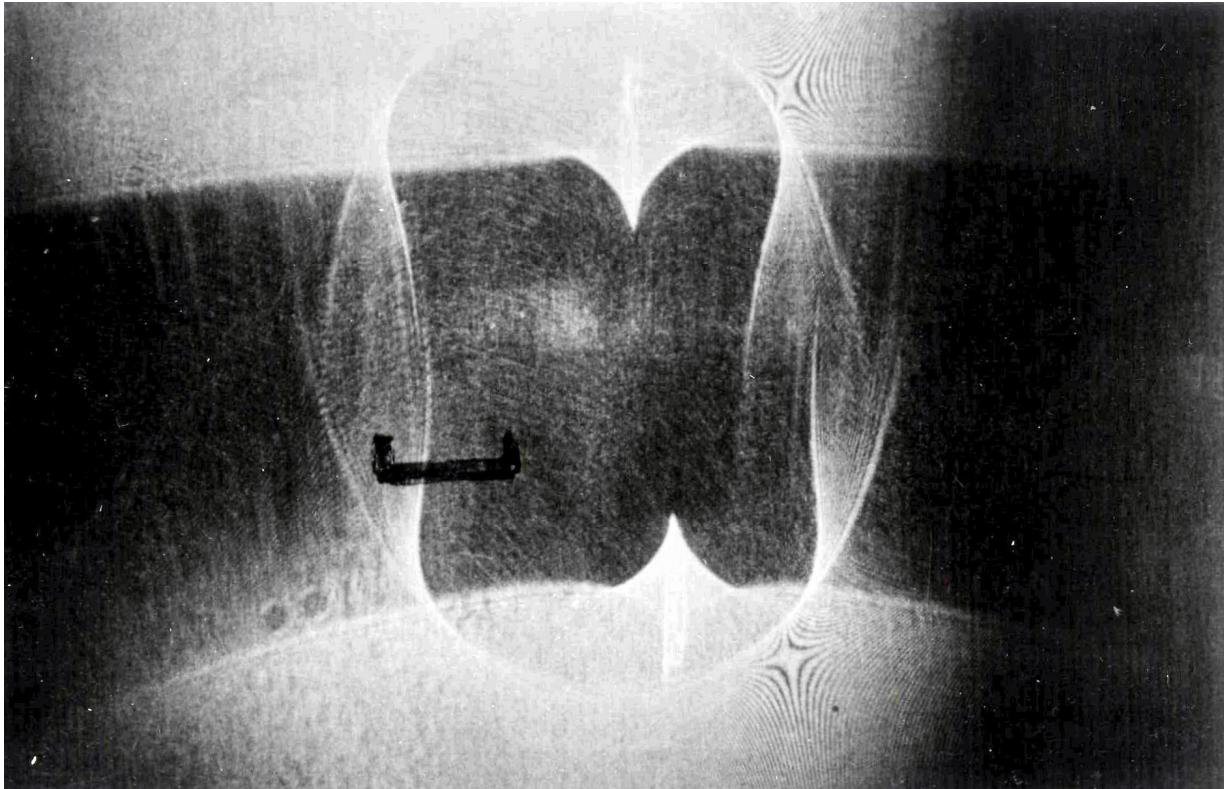


Σχήμα 62

Σχεδίαση των θεωρητικών καυστικών και σύγκριση με τις εργαστηριακές.



Σχήμα 63: Θεωρητική καυστική – δοκιμή 3α



Σχήμα 64: Εργαστηριακή καυστική – δοκιμή 3α

• **Δοκιμή #4α**

Filename: IMG 4a

Δοκίμα: #1 και #2

Λόγος Poisson ν	0.34
c_i (m^2/N)	-1.21×10^{-10}
c_r (m^2/N)	-1.7×10^{-10}
Ελαστική σταθερά κ	1.985
Μέτρο διάτμησης μ (N/cm^2)	1.26866×10^5
Ελαστική σταθερά K	1.176×10^{-5}
Μέτρο ελαστικότητας E (N/cm^2)	3.4×10^5
Τασεοπτική σταθερά C (cm^4/N)	6.921×10^{-4}
Τασεοπτική σταθερά C^* (cm)	1.248

Απόσταση z_0 (cm)	150
ε	2
d (cm)	1
Συντελεστής Μεγέθ. λ_m	2.9473684
Ακτίνα R (cm)	11
Ακτίνα r (cm)	7.5
Φορτίο P (N)	1460.38

Ακραίο άνοιγμα D (cm)	6.75
--------------------------------	------

$$D = 2\lambda_m \left[l^2 + l^{4/3} (C^*)^{2/3} \right]^{1/2} \Rightarrow l = 0.7357468 \text{ cm}$$

Μήκος επαφής σε (cm): $2l = 1.471$

Χαρακτηριστικό μέγεθος επαφής $\chi = \frac{C^*}{l} : 1.696$

Εφόσον το παραπάνω μέγεθος είναι >1 θα έχω μια ενιαία αρχική καμπύλη.

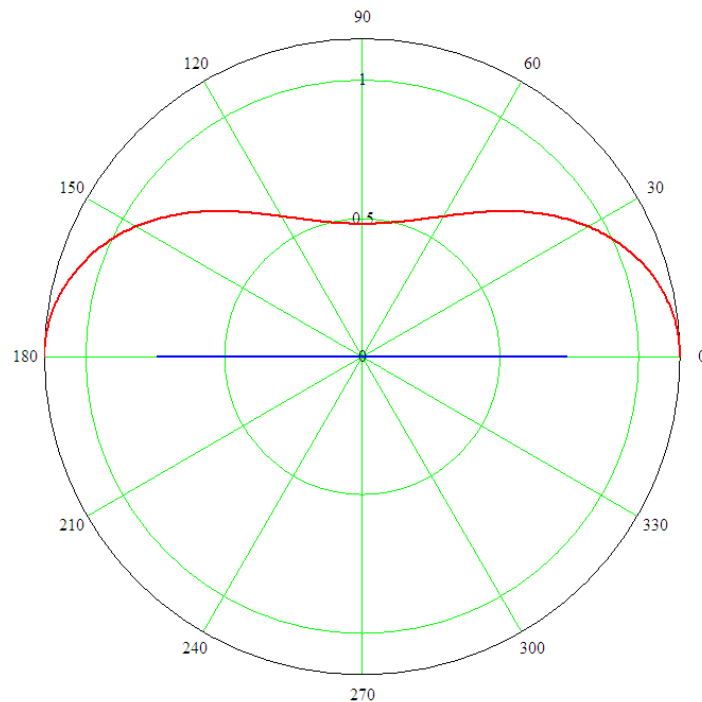
Υπολογισμός του μήκους επαφής βάσει της θεωρίας Hertz

$$a := 2 \left(\frac{4 \cdot \text{Load}}{\pi} \cdot 2 \cdot \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot \frac{R \cdot r}{R - r} \right)^{\frac{1}{2}} = 0.955$$

Σύγκριση των αποτελεσμάτων

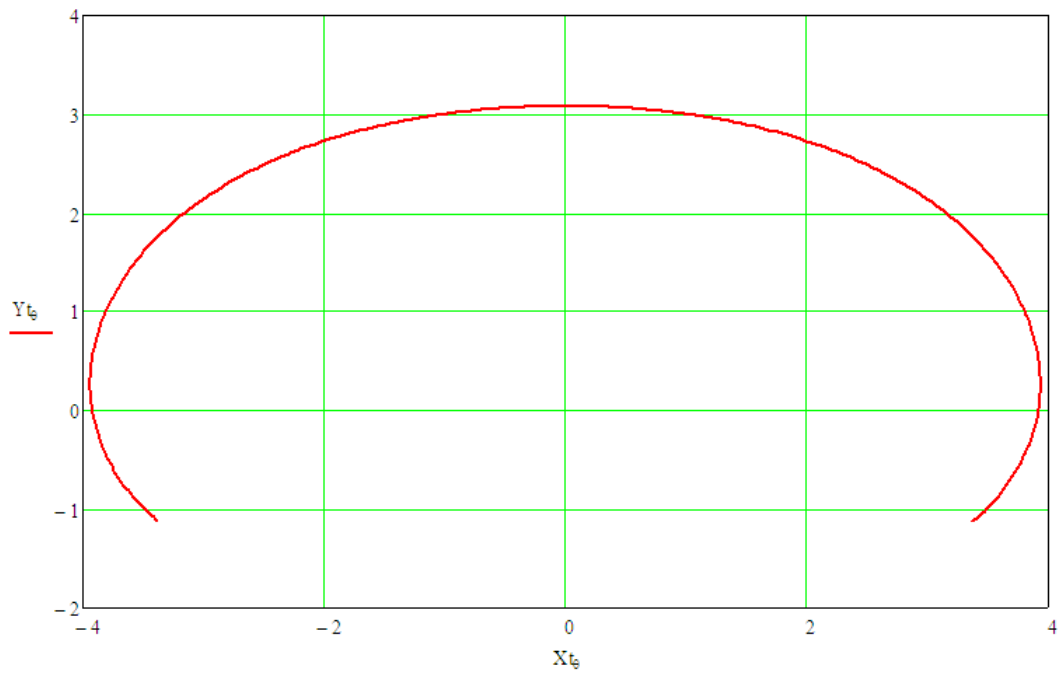
$$\Delta l = 2l - \alpha = 0.517 \text{ cm}$$

Υπολογισμός αρχικών καμπυλών

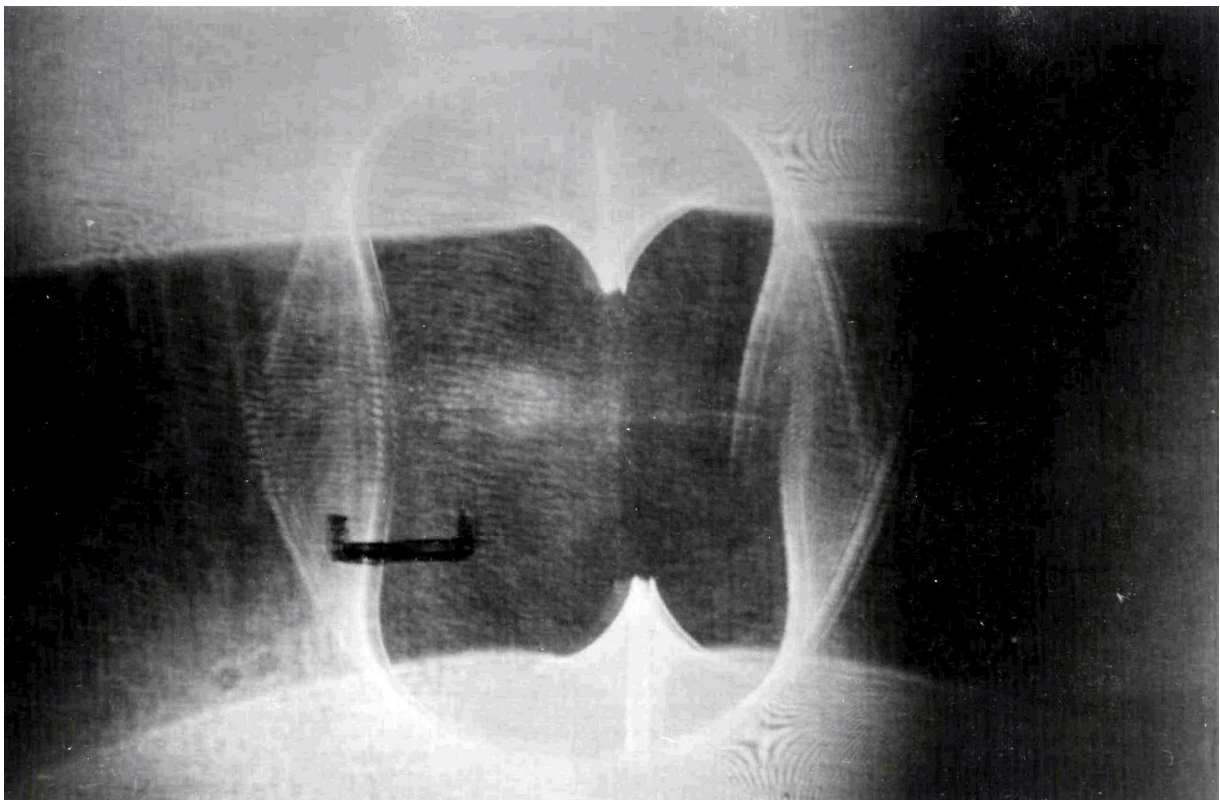


Σχήμα 65

Σχεδίαση των θεωρητικών καυστικών και σύγκριση με τις εργαστηριακές.



Σχήμα 66: Θεωρητική καυστική – δοκιμή 4α



Σχήμα 67: Εργαστηριακή καυστική – δοκιμή 4α

• Δοκιμή #5α

Filename: IMG 5a

Δοκίμα: #1 και #2

Λόγος Poisson ν	0.34
c_i (m^2/N)	-1.21×10^{-10}
c_r (m^2/N)	-1.7×10^{-10}
Ελαστική σταθερά κ	1.985
Μέτρο διάτμησης μ (N/cm^2)	1.26866×10^5
Ελαστική σταθερά K	1.176×10^{-5}
Μέτρο ελαστικότητας E (N/cm^2)	3.4×10^5
Τασεοπτική σταθερά C (cm^4/N)	6.921×10^{-4}
Τασεοπτική σταθερά C^* (cm)	1.248

Απόσταση z_0 (cm)	150
ε	2
d (cm)	1
Συντελεστής Μεγέθ. λ_m	2.9473684
Ακτίνα R (cm)	11
Ακτίνα r (cm)	7.5
Φορτίο P (N)	2678.38

Ακραίο άνοιγμα D (cm)	9.33
--------------------------------	------

$$D = 2\lambda_m \left[l^2 + l^{4/3} (C^*)^{2/3} \right]^{1/2} \Rightarrow l = 1.0944435 cm$$

Μήκος επαφής σε (cm): $2l = 2.189$

Χαρακτηριστικό μέγεθος επαφής $\chi = \frac{C^*}{l} : 1.14$

Εφόσον το παραπάνω μέγεθος είναι >1 θα έχω μια ενιαία αρχική καμπύλη.

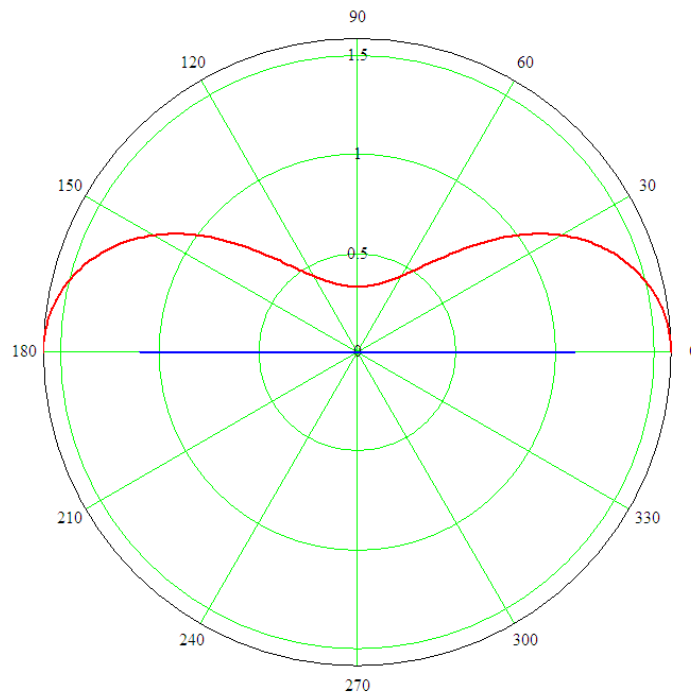
Υπολογισμός του μήκους επαφής βάσει της θεωρίας Hertz

$$a := 2 \left(\frac{4 \cdot \text{Load}}{\pi} \cdot 2 \cdot \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot \frac{R \cdot r}{R - r} \right)^{\frac{1}{2}} = 1.293$$

Σύγκριση των αποτελεσμάτων

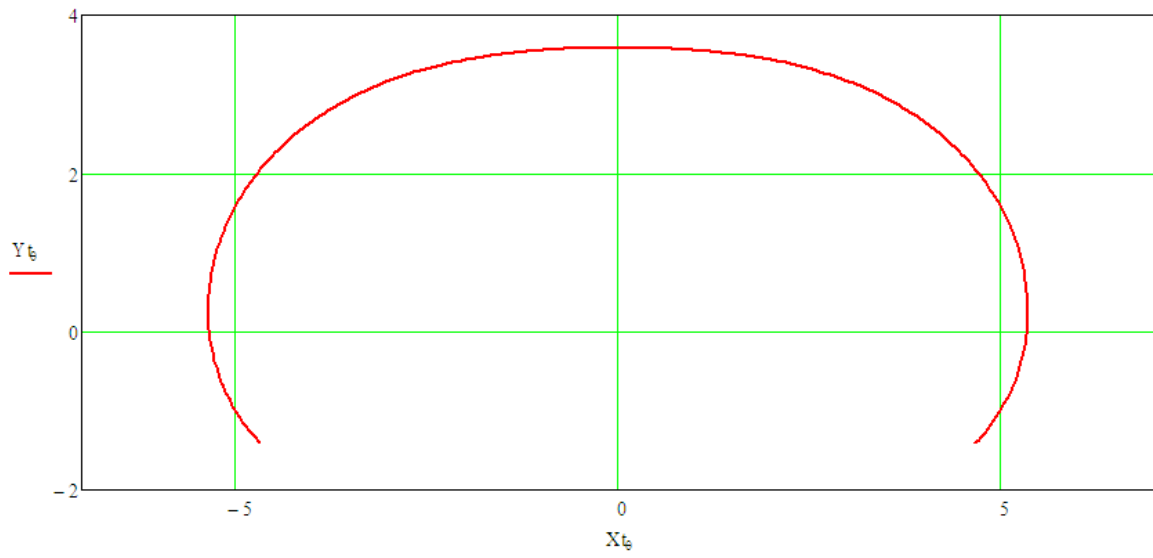
$$\Delta l = 2l - \alpha = 0.896 \text{ cm}$$

Υπολογισμός αρχικών καμπυλών

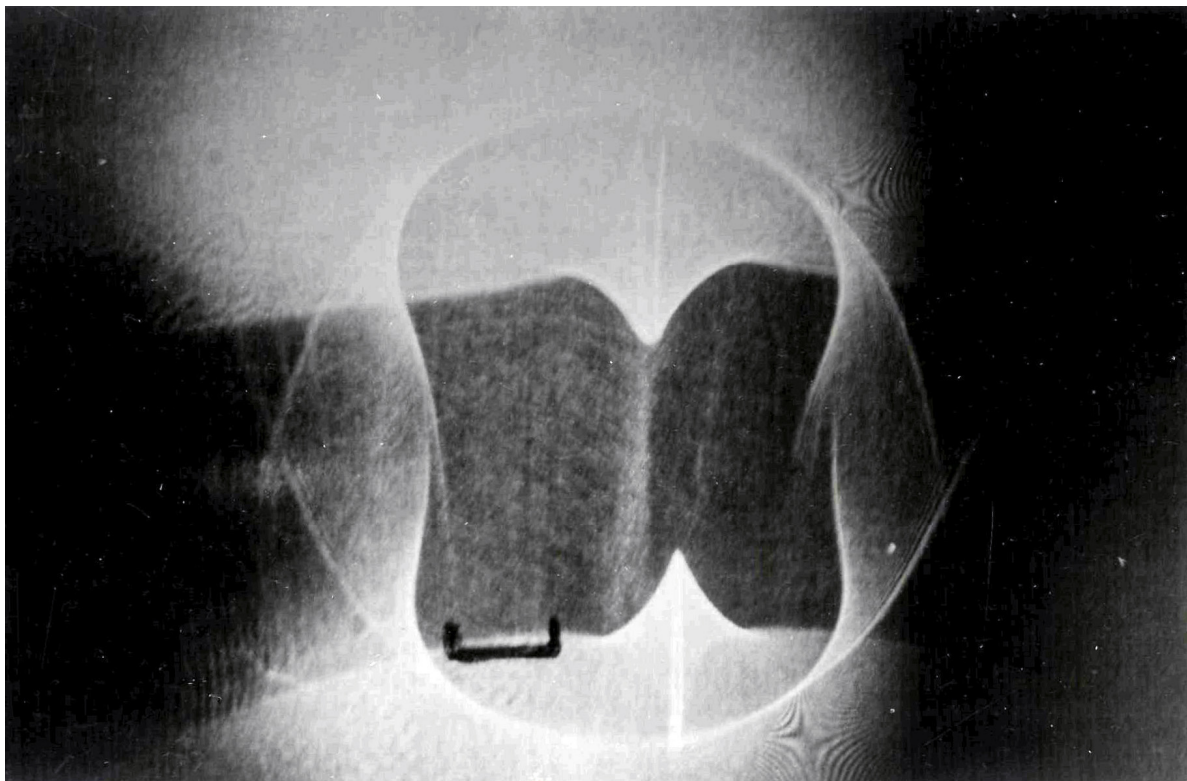


Σχήμα 68

Σχεδίαση των θεωρητικών καυστικών και σύγκριση με τις εργαστηριακές.



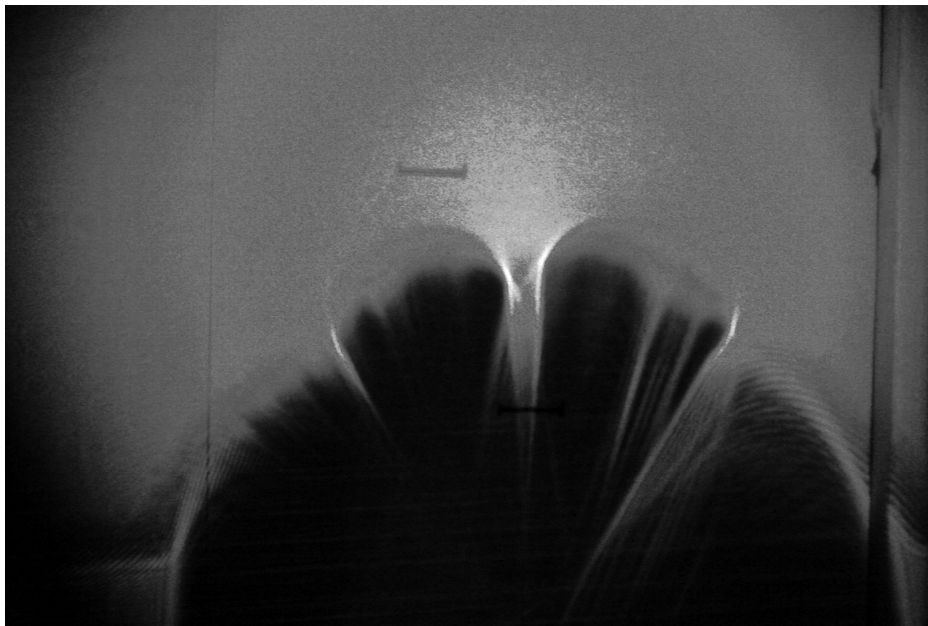
Σχήμα 69: Θεωρητική καυστική – δοκιμή 5α



Σχήμα 70: Εργαστηριακή καυστική – δοκιμή 5α

Οι δοκιμές της τρίτης ομάδας έχουν χαρακτηριστικά μεγάλη ακρίβεια. Παρατηρούμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις οι καμπύλες που φωτογραφήθηκαν στο εργαστήριο έχουν ίδια θέση, μέγεθος και σχήμα με αυτές που προβλέπει η αντίστοιχη θεωρία. Επομένως οι παραδοχές στις οποίες βασιστήκαμε για την ανάλυση μας είναι πέρα για πέρα αληθινές και οι θεωρητικές σχέσεις ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα. Επιπλέον βλέπουμε ότι δεν υπάρχουν μεγάλες αποκλίσεις στον υπολογισμό του μήκους επαφής από την θεωρία του Hertz, ειδικά στην επαφή των δοκιμίων #1 και #2.

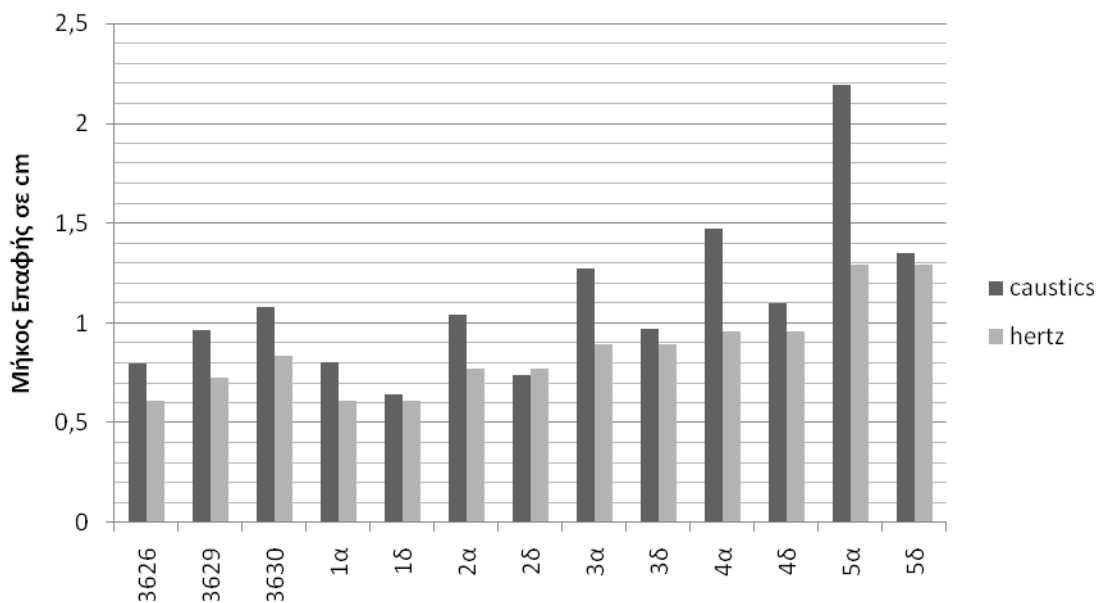
Αναφορικά με τις δοκιμές 3621 έως 3625 στις οποίες έγινε προσπάθεια μελέτης της επαφής σφαιρικής γεωμετρίας με κοίλο δίσκο, τα αποτελέσματα κρίνονται ανακριβή. Στην δοκιμή για παράδειγμα 3621 προέκυψε $\chi=1.203$ το οποίο σημαίνει ότι περιμένουμε μια ενιαία αρχική καμπύλη πάνω από την περιοχή επαφής, ωστόσο στις φωτογραφικές λήψεις προέκυψε η εικόνα του Σχήματος 71 στην οποία φαίνονται 2 ξεχωριστές καυστικές. Αυτό προφανώς δεν μπορεί να ισχύει. Προκύπτει όμως από εσφαλμένη διαμόρφωση του σφαιρικού άκρου του δοκιμίου το οποίο «πατάει» σε δύο περιοχές αντί για μια.



Σχήμα 71

Εδώ ολοκληρώνεται η παρουσίαση της τρίτης και τελευταίας ομάδας δοκιμών. Κλείνοντας το κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε δύο γραφήματα που προέκυψαν από την ανάλυση των μετρήσεων, το πρώτο αφορά στην τρίτη ομάδα δοκιμών και το δεύτερο την πρώτη ομάδα.

Στο Σχήμα 72 είναι συγκεντρωμένα τα αποτελέσματα του υπολογισμού του μήκους επαφής για τις δοκιμές της τρίτης ομάδας, ο οποίος έγινε με δύο διαφορετικούς τρόπους. Ο πρώτος τρόπος είναι με την πειραματική μέθοδο των καυστικών καμπυλών μετρώντας κάθε φορά το άνοιγμα των άκρων της καυστικής που δημιουργούνται. Ο δεύτερος τρόπος είναι με τον τύπο του Hertz για γραμμική επαφή κυλινδρικών σωμάτων (βλ. κεφ. 4).

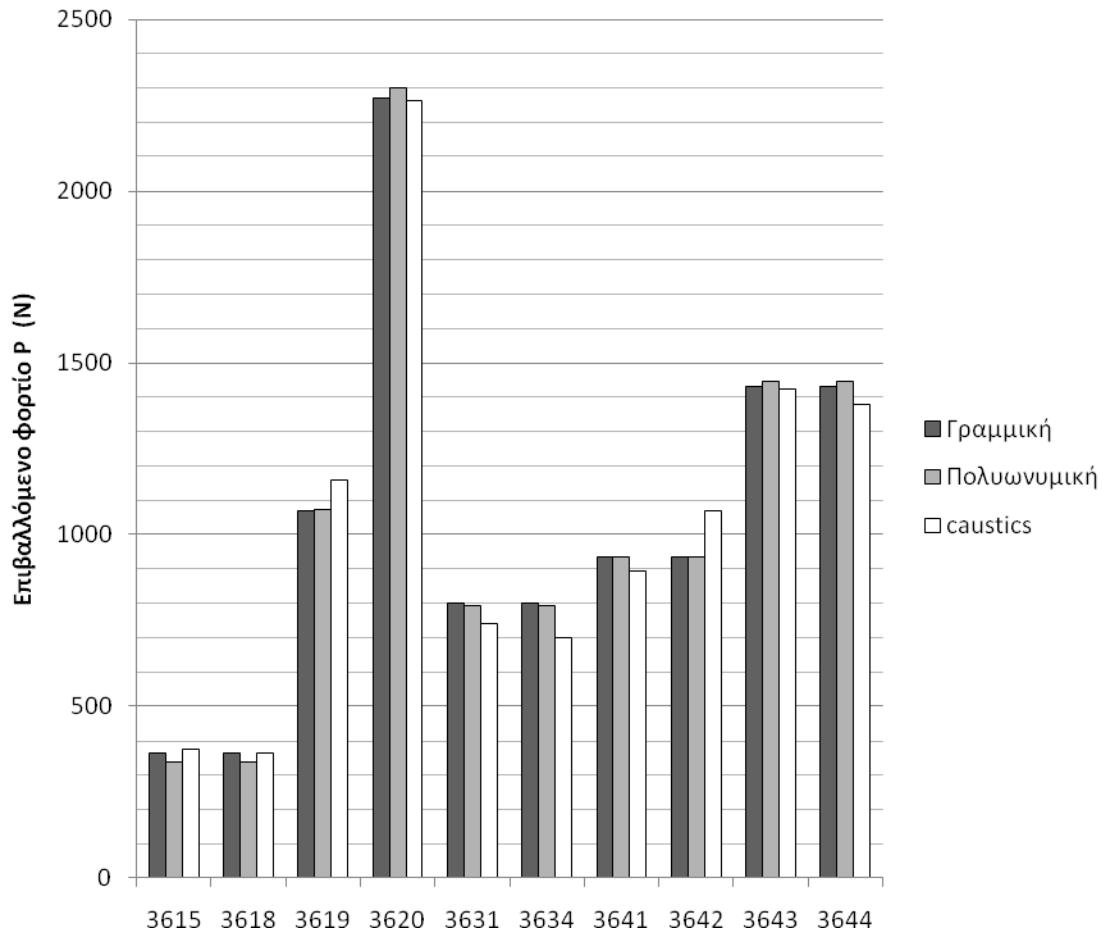


Σχήμα 72: Απόκλιση πειραματικού και θεωρητικού υπολογισμού μήκους επαφής

Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα είναι παραπλήσια, ωστόσο μεγαλύτερες αποκλίσεις παρατηρούνται στις δοκιμές στις οποίες η καυστική σχηματίζονταν στο εμπρόσθιο πέτασμα. Αυτή η κανονικότητα μας οδηγεί να συμπεράνουμε ότι ίσως οι αποκλίσεις αυτές να οφείλονται σε συστηματικό σφάλμα μέτρησης του μήκους.

Στο Σχήμα 73 παρουσιάζονται σε διάγραμμα τα αποτελέσματα της πρώτης ομάδας δοκιμών. Πρόκειται για μέτρηση του επιβαλλόμενου φορτίου P ανά μονάδα πάχους δοκιμίου η οποία γίνεται με τρεις διαφορετικούς τρόπους, χρησιμοποιώντας την γραμμική καμπύλη του δυναμόμετρου, χρησιμοποιώντας την πολυωνυμική καμπύλη του δυναμόμετρου και τέλος

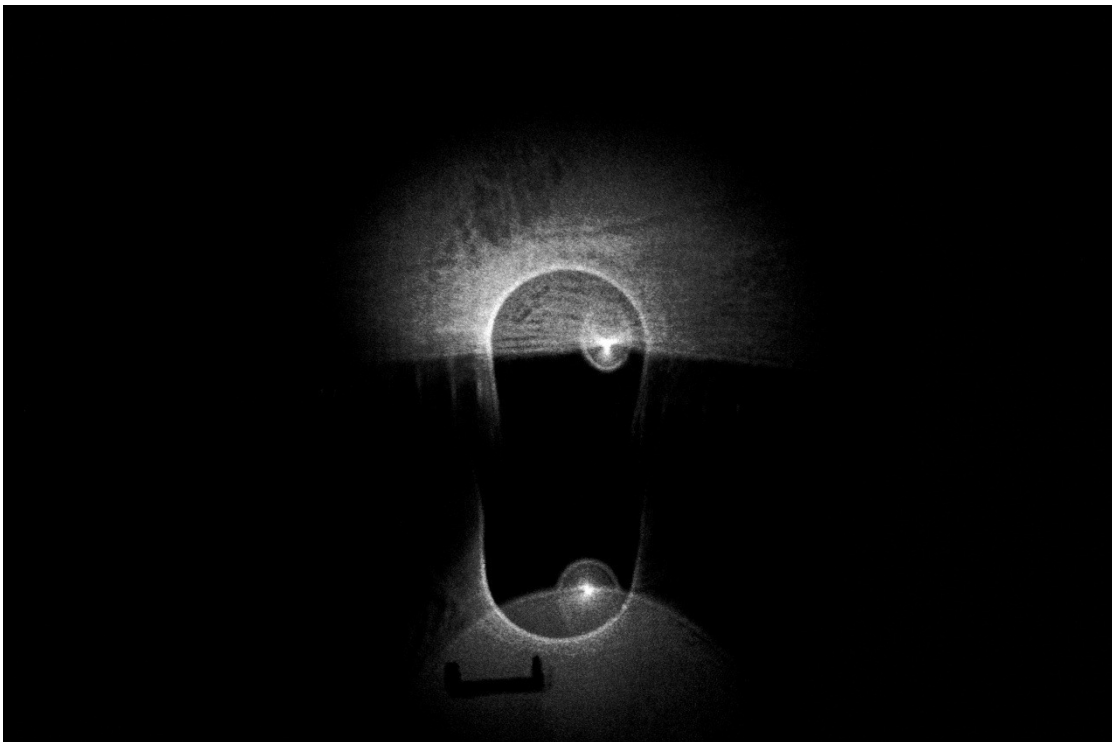
μετρώντας την μέγιστη διάμετρο της καυστικής καμπύλης που σχηματίζεται και χρησιμοποιώντας την σχέση (17). Είναι εμφανές ότι τα αποτελέσματα σχεδόν ταυτίζονται.



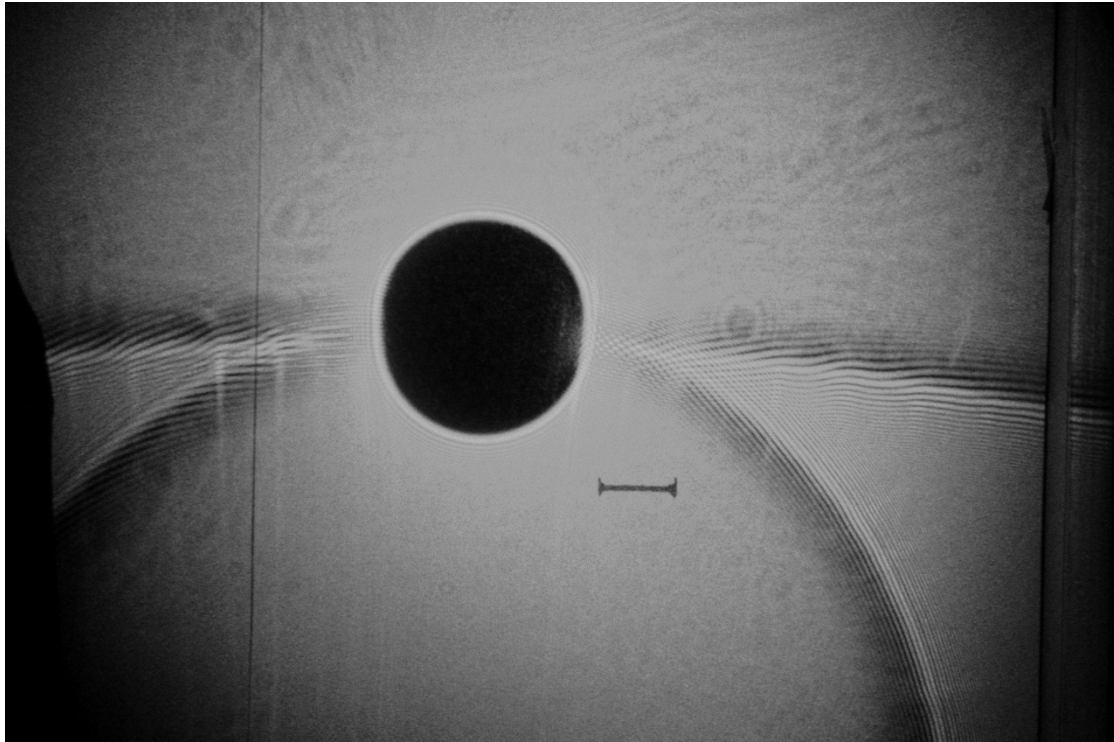
Σχήμα 72: Απόκλιση της μέτρησης της δύναμης P από θεωρία των καυστικών και από δυναμόμετρο

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

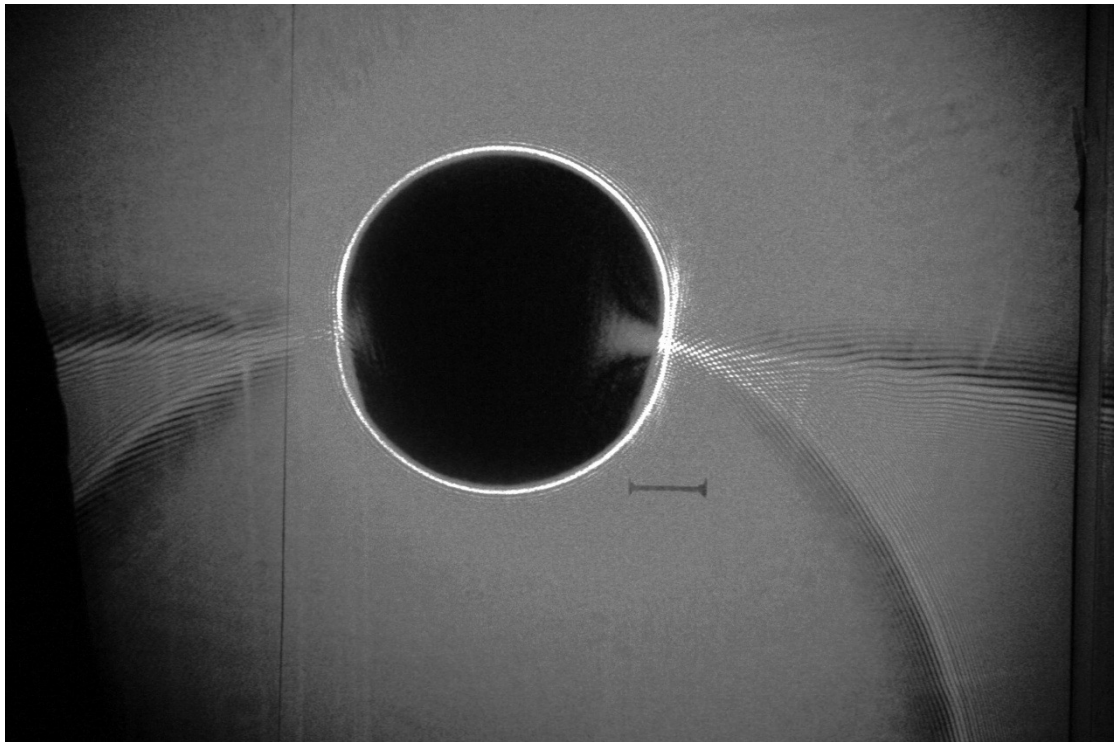
Στο παράρτημα αυτό περιλαμβάνονται οι φωτογραφίες για την πρώτη ομάδα δοκιμών.



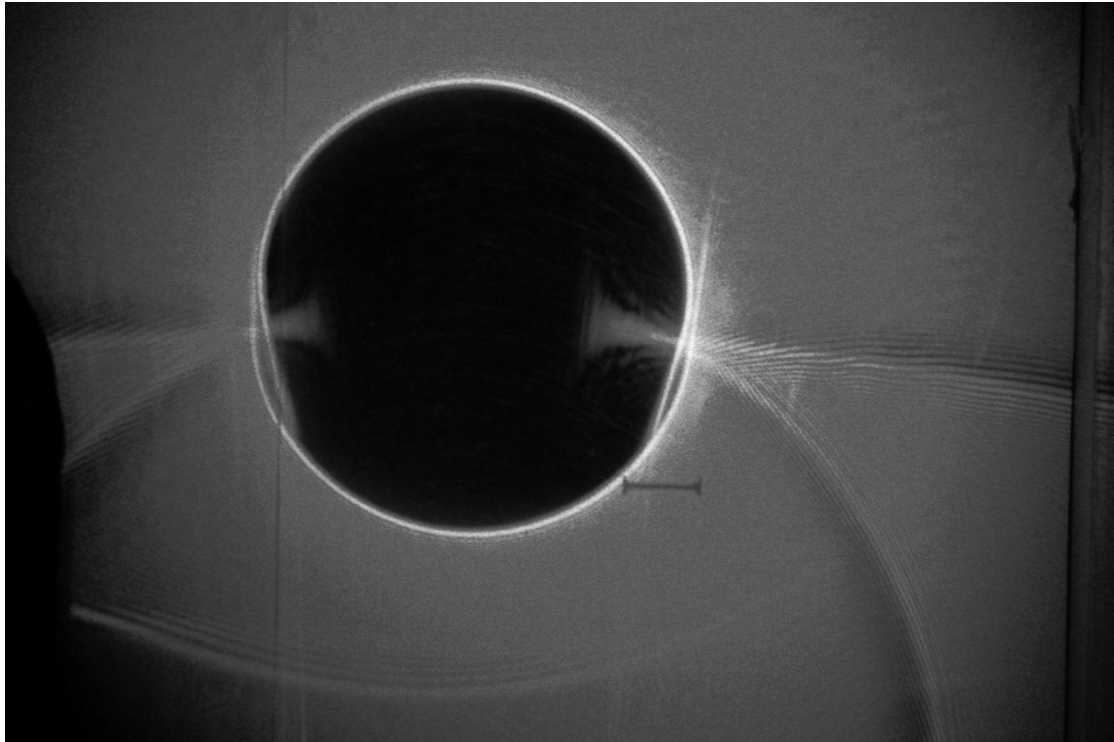
IMG 3615



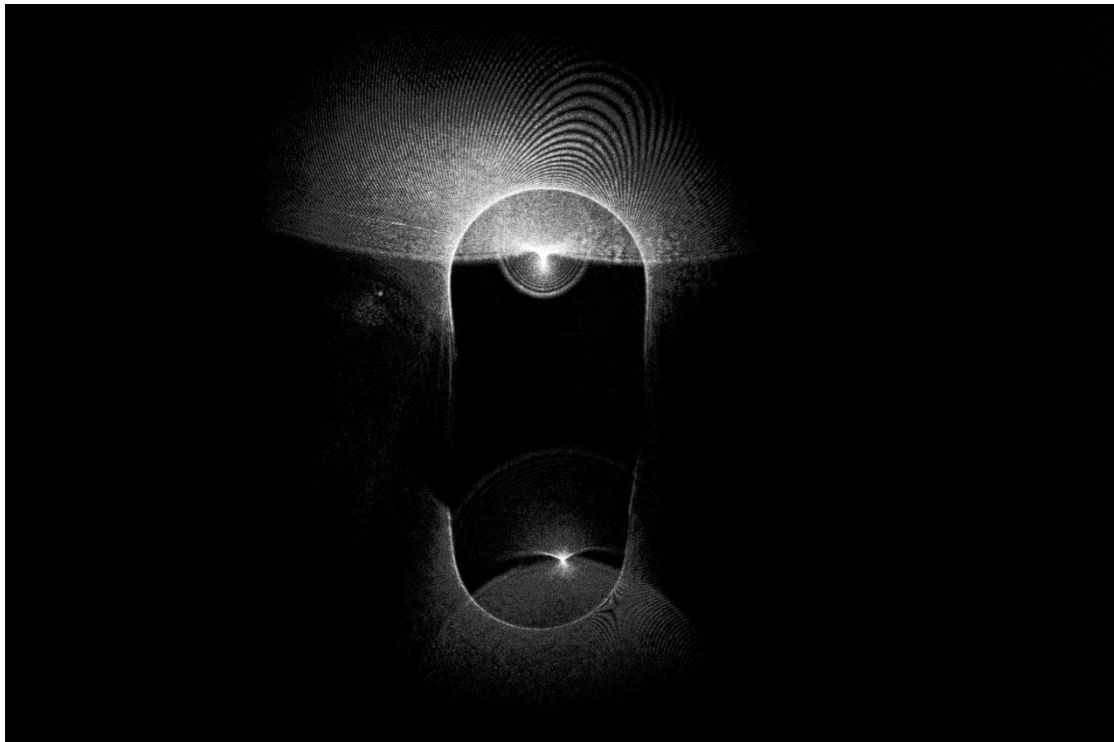
IMG 3618



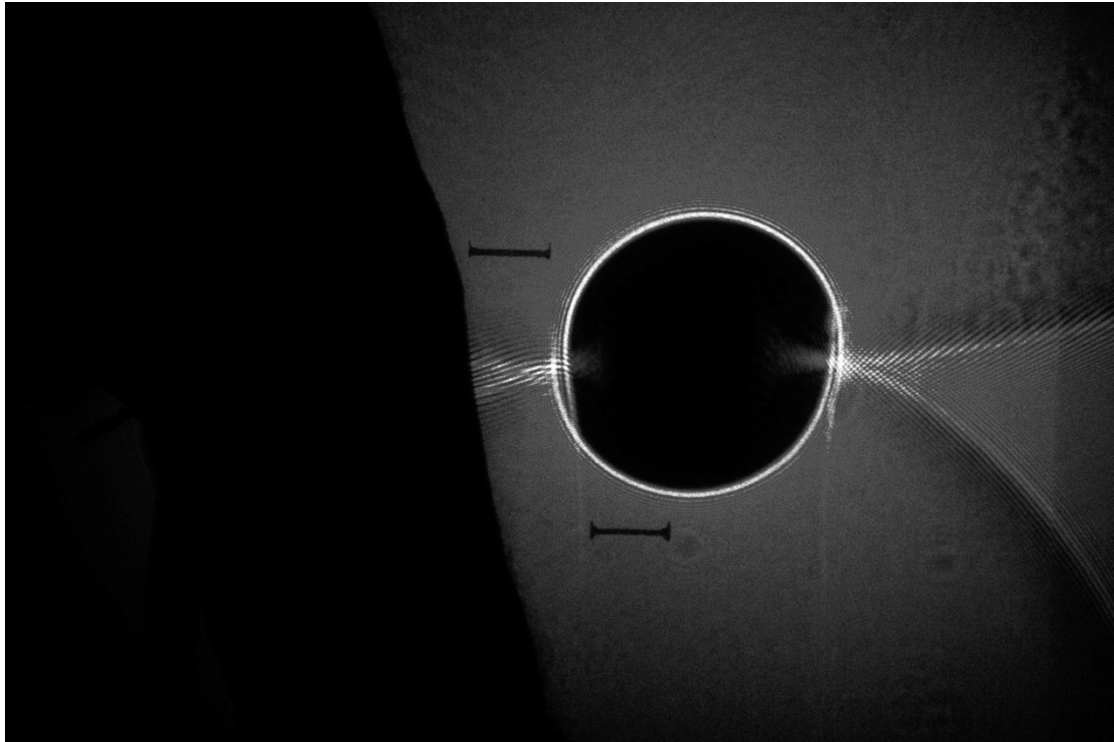
IMG 3619



IMG 3620



IMG 3631

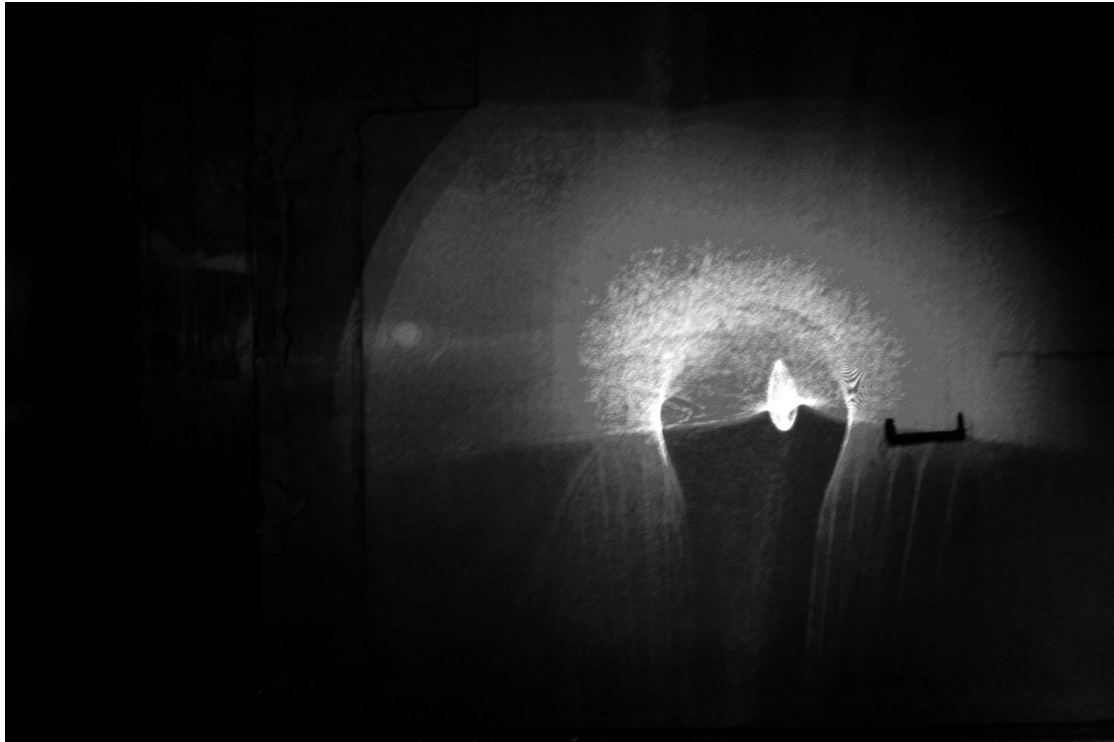


IMG 3634

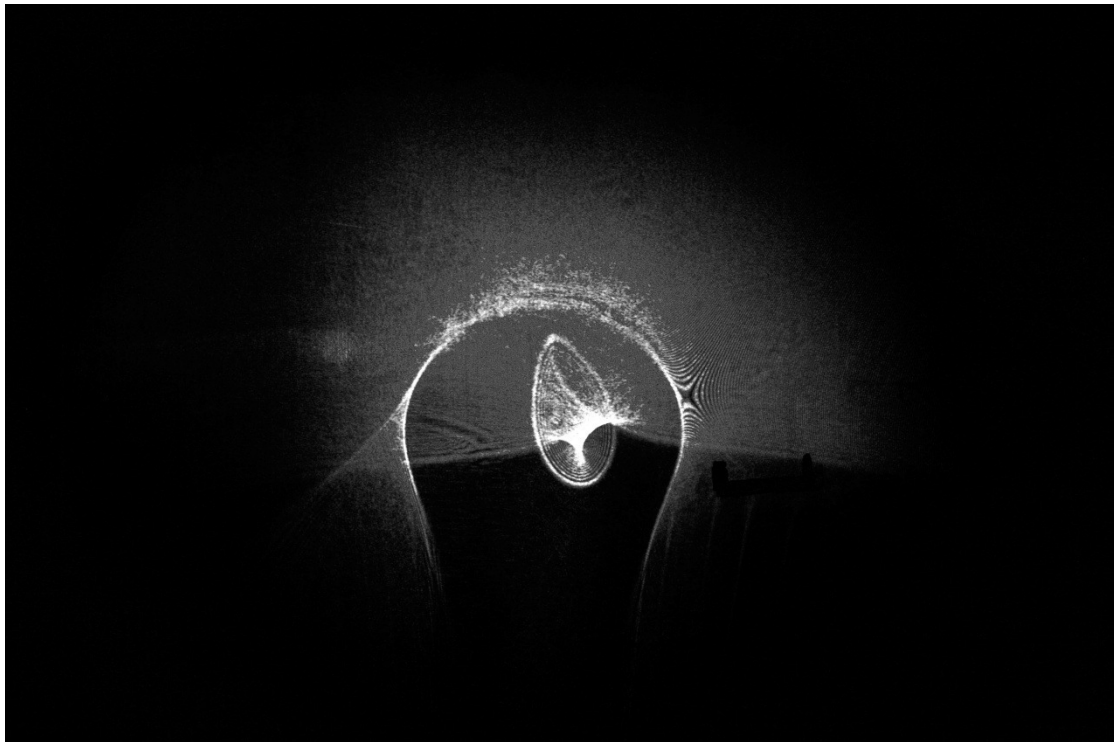


IMG 3641

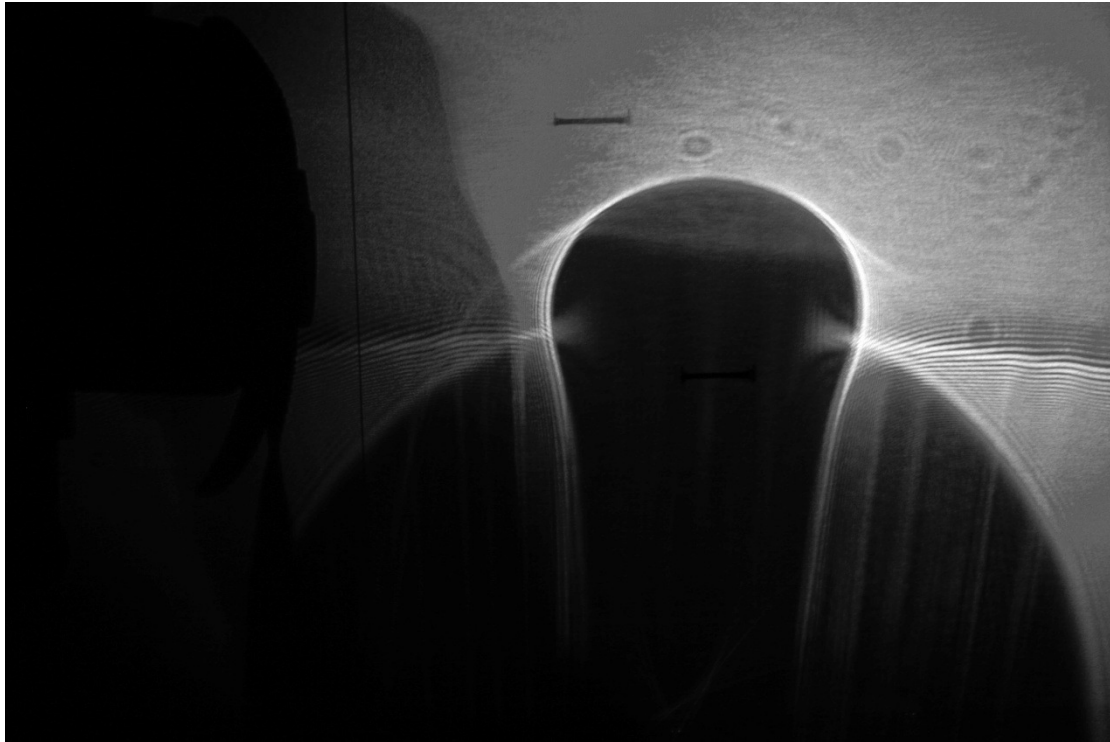
[220]



IMG 3642



IMG 3643



IMG 3644

Το πρότυπο μήκος («μάτι») είναι σε όλες τις λήψεις 2 cm.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2

$$\begin{aligned}
 C\Phi'(z) &= -iC^* \left(1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{[(z-l)(z+l)]^{1/2}} \right) = -iC^* \left(1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{[\rho_1 e^{i\theta_1} \rho_2 e^{i\theta_2}]^{1/2}} \right) = \\
 &= -iC^* \left(1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{(\rho_1 \rho_2)^{1/2} e^{i\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}}} \right) = -iC^* \left(1 - \frac{\rho}{(\rho_1 \rho_2)^{1/2}} \cdot e^{i\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)} \right) = \\
 &= -i \left(C^* - \rho \left(\frac{C^*}{l} \right)^{2/3} e^{i\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)} \right) = \\
 &= -i \left(C^* - \rho \left(\frac{C^*}{l} \right)^{2/3} \cos\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) - i\rho \left(\frac{C^*}{l} \right)^{2/3} \sin\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \right) \\
 &= -iC^* + i\rho \left(\frac{C^*}{l} \right)^{2/3} \cos\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) - \rho \left(\frac{C^*}{l} \right)^{2/3} \sin\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Αν τώρα αντικαταστήσω την παραπάνω σχέση στην εξίσωση της καυστικής προκύπτει:

$$\begin{aligned}
 \frac{W}{\lambda_m} &= \mathbf{z} + \overline{C\Phi'(\mathbf{z})} = \rho \cos \theta + i\rho \sin \theta + \\
 &+ iC^* - i\rho \left(\frac{C^*}{l} \right)^{2/3} \cos\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) - \rho \left(\frac{C^*}{l} \right)^{2/3} \sin\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτουν οι παραμετρικές εξισώσεις της καυστικής.

$$X_t = \lambda_m \left[\rho \cos \theta - \rho \left(\frac{C^*}{l} \right)^{2/3} \sin \left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \right]$$

$$Y_t = \lambda_m \left[\rho \sin \theta + C^* - \rho \left(\frac{C^*}{l} \right)^{2/3} \cos \left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \right]$$

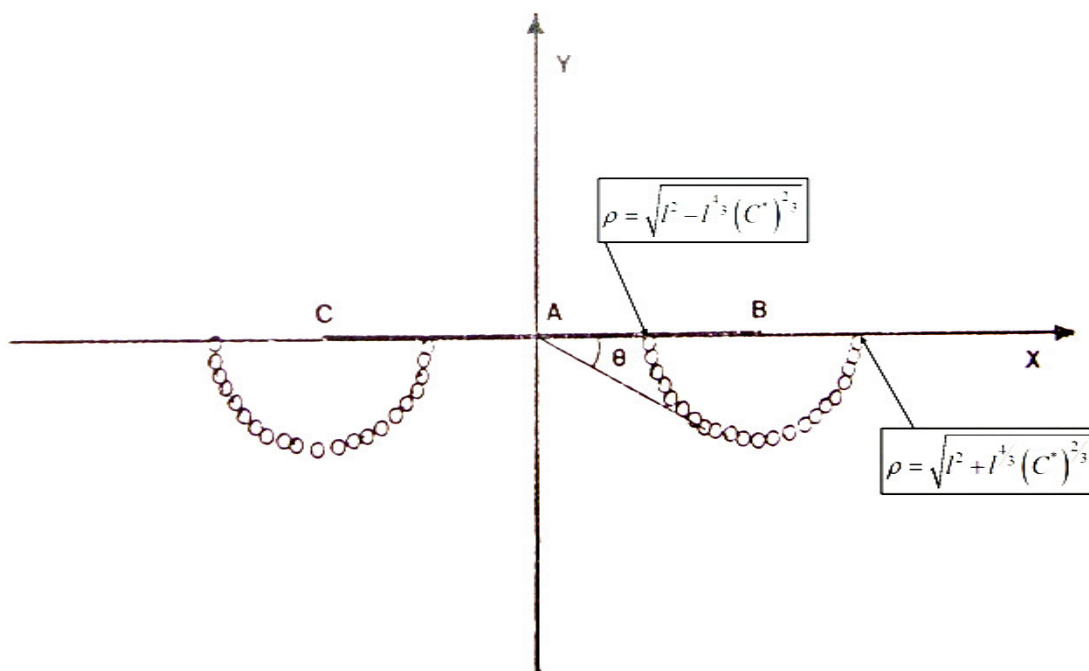
όπου:

$$\theta_1 = \arctan \left(\frac{\rho \sin \theta}{\rho \cos \theta - l} \right)$$

$$\theta_2 = \arctan \left(\frac{\rho \sin \theta}{\rho \cos \theta + l} \right)$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3

Στο παράρτημα αυτό περιλαμβάνεται η απόδειξη του γιατί το «κέντρο» των αρχικών καμπυλών για την περίπτωση που έχω $l \geq C^*$ δεν συμπίπτει με τα άκρα Β, C της περιοχής επαφής αλλά η σχετικής τους θέση εξαρτάται από τον λόγο C^*/l .



Αν ίσχυε ότι το Β είναι το κέντρο της αρχικής καμπύλης τότε θα έπρεπε να ισχύει το παρακάτω:

$$\frac{\sqrt{l^2 + l^{4/3} (C^*)^{2/3}} - \sqrt{l^2 - l^{4/3} (C^*)^{2/3}}}{2} + \sqrt{l^2 - l^{4/3} (C^*)^{2/3}} = l$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{\sqrt{l^2 + l^{4/3} (C^*)^{2/3}} + \sqrt{l^2 - l^{4/3} (C^*)^{2/3}}}{2} = l \\ &\Rightarrow \left(\sqrt{l^2 + l^{4/3} (C^*)^{2/3}} + \sqrt{l^2 - l^{4/3} (C^*)^{2/3}} \right)^2 = 4l^2 \\ &\Rightarrow 2\sqrt{l^4 - l^{8/3} (C^*)^{4/3}} = 2l^2 \Rightarrow l^4 = l^4 - l^{8/3} (C^*)^{4/3} \end{aligned}$$

Η τελευταία όμως σχέση δεν μπορεί προφανώς να ισχύει. Αυτό σημαίνει ότι το κέντρο της αρχικής καμπύλης δεν συμπίπτει με το άκρο της περιοχής επαφής.

Ας δούμε τώρα ποια είναι η σχετική τους θέση. Έστω το κέντρο της καυστικής είναι στην θέση κl όπου $\kappa \in \mathbb{R}_*^+$

$$\begin{aligned} &\sqrt{l^2 + l^{4/3} (C^*)^{2/3}} + \sqrt{l^2 - l^{4/3} (C^*)^{2/3}} = 2\kappa l \\ &\Rightarrow \sqrt{1 + \left(\frac{C^*}{l}\right)^{2/3}} + \sqrt{1 - \left(\frac{C^*}{l}\right)^{2/3}} = 2\kappa \end{aligned}$$

Ο λόγος C^*/l είναι χαρακτηριστικό μέγεθος που καθορίζει τον αριθμό των καυστικών καμπυλών που θα έχω. Για την περίπτωση που εξετάζω $\chi = C^*/l \leq 1$.

- Οριακά για $\chi = 1$ έχω $\kappa = \sqrt{2}/2 \cong 0,7$
- Για $\chi = 0.1$ έχω $\kappa \cong 0,994$
- Για $\chi \rightarrow 0$ έχω $\kappa \rightarrow 1$

Το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι το κέντρο της αρχικής καμπύλης (και κατά συνέπεια της καυστικής) δεν θα συμπίπτει ποτέ με τα άκρα της περιοχής επαφής αλλά θα κυμαίνεται σε μια περιοχή από $0.7 \times l$ έως l .

Βιβλιογραφία

- [1] **Johnson, K.L.** *Contact Mechanics*, 1985 (Cambridge University Press, Cambridge, UK)
- [2] **Παπαδόπουλος, Γ.Α.** *Πειραματική Μηχανική των Θραύσεων, Οπτικές Μέθοδοι Ανάλυσης των Τάσεων*, 2007 (εκδόσεις Κλειδάριθμος, Αθήνα)
- [3] **Papadopoulos, G.A.** *Experimental study of the load distribution in bearings by the method of caustics and the photoelasticity method*, 2004 (J. Strain Analysis Vol. 40 No. 4, IMechE 2005)
- [4] **Stachowiak, G.W. and Batchelor, A.W.** *Engineering Tribology*, (Butterworth Heinemann, Burlington, USA)
- [5] **Norton, R.L.** *Machine Design, An Integrated Approach*, 2006 (Pearson Prentice Hall, New Jersey)
- [6] **Sadd, M.H.** *Elasticity Theory, Applications and Numerics*, 2005 (Butterworth Heinemann, Burlington, USA)