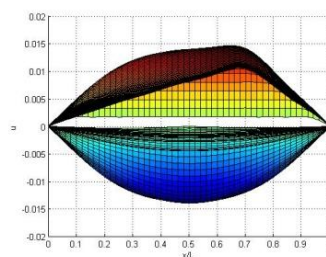
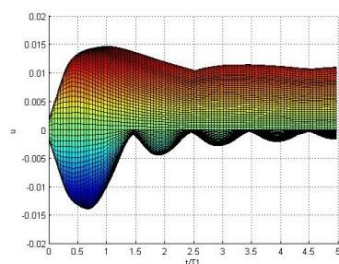
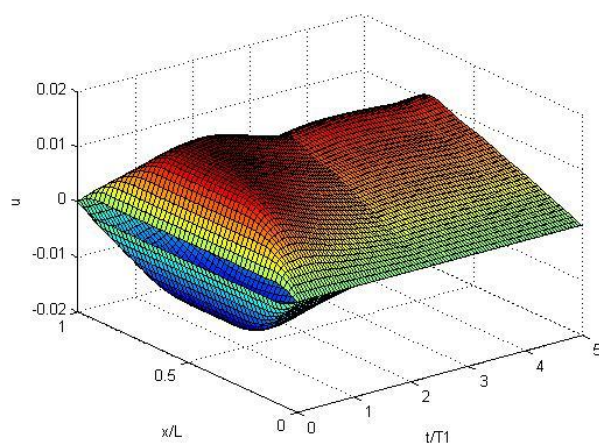




ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Διπλωματική εργασία

**Φάσματα Απόκρισης Συνεχών Ταλαντούμενων
Συστημάτων για Πλήγματα Διαφόρων Μορφών**



Βιργινία - Αργίνη Ζάννα

Επιβλέπων καθηγητής: Χρήστος Γιούνης

Τομέας Μηχανικής

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Αθήνα 2012

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία υπολογίζεται η απόκριση και κατασκευάζονται φάσματα απόκρισης για ταλαντούμενα συνεχή μονοδιάστατα συστήματα με συνεχείς και σταθερές κατανομές μάζας και ακαμψίας που περιγράφονται από μερικές διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} (χορδές, αξονικές και στρεπτικές ταλαντώσεις ράβδων) και 4^{ης} τάξης (εγκάρσιες ταλαντώσεις δοκών). Η κατανομή των ιδιοτήτων μάζας και ακαμψίας λαμβάνεται σταθερή ούτως ώστε για τον υπολογισμό της απόκρισης των συστημάτων να χρησιμοποιηθεί η ακριβής αναλυτική μέθοδος των κανονικών μορφών.

Αρχικά, αναλύεται η ελεύθερη ταλάντωση του συστήματος, ούτως ώστε να υπολογιστούν οι ιδιολύσεις του (ιδιοσυχνότητες και αντίστοιχες κανονικοποιημένες ιδιομορφές). Στη συνέχεια, επιλύεται η μερική διαφορική εξίσωση κίνησης του συστήματος που περιέχει τον όρο της εξωτερικής φόρτισης (πλήγμα) με τη μέθοδο των κανονικών μορφών. Κατά την επίλυση, διατυπώνονται οι αρμονικές διαφορικές εξισώσεις από τις οποίες υπολογίζονται οι κανονικές συντεταγμένες. Η μαθηματική έκφραση των γενικευμένων φορτίων, δηλαδή των όρων των αρμονικών διαφορικών εξισώσεων που αναφέρονται στις εξωτερικές δυνάμεις, περιλαμβάνει τη συνάρτηση του πλήγματος. Η ολοκλήρωση των αρμονικών διαφορικών εξισώσεων γίνεται με χρήση του ολοκληρώματος Duhamel, το οποίο υπολογίζεται με μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης. Για την έκφραση της απόκρισης του συνεχούς συστήματος, θεωρήθηκε επαρκές να χρησιμοποιηθεί το άθροισμα των 10 πρώτων όρων, δηλαδή οι 10 πρώτες ιδιολύσεις. Στη συνέχεια γίνεται αδιαστατοποίηση των διαφόρων μεγεθών και εξισώσεων και το πρόβλημα λύνεται στην αδιάστατη μορφή του.

Τα συστήματα που μελετήθηκαν εδώ είναι:

- χορδή με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα,
- χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελεύθερο άκρο,
- χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελαστικά στερεωμένο άκρο,
- χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο και με συγκεντρωμένη μάζα στο άλλο άκρο,
- χορδή με ένα ελαστικά στερεωμένο και ένα ελεύθερο άκρο,
- αμφιέριστη δοκός,
- πρόβολος,
- μονόπακτη δοκός.

Οι βασικές παράμετροι για τις οποίες έγινε μελέτη των παραπάνω συστημάτων είναι: τα χαρακτηριστικά του πλήγματος (διάρκεια, θέση εφαρμογής του πλήγματος κατά μήκος του συστήματος, μορφή πλήγματος, μέγιστη ένταση πλήγματος) και οι ιδιότητες του συστήματος (κατανεμημένη μάζα του συστήματος, κατανεμημένη ακαμψία του συστήματος και οι τιμές της σταθεράς του συγκεντρωμένου ελατηρίου και συγκεντρωμένης μάζας, όπου αυτά υπάρχουν).

Για την κατασκευή των βίντεο της απόκρισης υπολογίστηκε η μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας κάθε σημείου του συστήματος κατά τη διάρκεια του πλήγματος και για ένα χρονικό διάστημα μετά το πέρας του, κατά την ελεύθερη ταλάντωση του συστήματος.

Για την κατασκευή των τρισδιάστατων επιφανειών των φασμάτων απόκρισης υπολογίστηκε η μέγιστη θετική και η ελάχιστη αρνητική μετατόπιση σε κάθε θέση του συστήματος συναρτήσει της διάρκειας του πλήγματος.

Εισαγωγή

Η έννοια του *πλήγματος* ως χαρακτηριστικό της ταλάντωσης ενός δομικού ή μηχανικού συστήματος δεν είναι αυστηρά ορισμένη στη βιβλιογραφία. Πρόκειται για μια μη περιοδική εξωτερική διέγερση που έχει τη μορφή λ.χ. ενός παλμού ή μιας συνάρτησης βήματος. Η έννοια «πλήγμα» εμπεριέχει ακόμη τις έννοιες του ξαφνικού και του έντονου. Επομένως, ως *πλήγμα* θα μπορούσε να οριστεί μια αιφνίδια, μεγάλης έντασης και σύντομης, σε σχέση με την ιδιοπερίοδο ενός συστήματος, χρονικής διάρκειας φόρτιση στην οποία υπόκειται το σύστημα. Η κίνηση του συστήματος κατά τη διάρκεια που ασκείται ένα πλήγμα είναι ταλάντωση που περιλαμβάνει τόσο τη συχνότητα του πλήγματος, όσο και τις φυσικές ιδιοσυχνότητες του συστήματος. Όταν η διάρκεια του πλήγματος είναι μικρή, τότε η κίνηση του συστήματος μετά το πέρας του πλήγματος είναι ελεύθερη ταλάντωση με τις φυσικές του ιδιοσυχνότητες. Φορτίσεις με την έννοια του πλήγματος είναι δυνατό να προκαλέσουν ανεπιθύμητες ταλαντώσεις του συστήματος, τοπικές ζημιές, δυσλειτουργίες, διακοπές λειτουργίας, βλάβες, αστοχίες, ακόμη και κατάρρευση της κατασκευής. Παραδείγματα τέτοιων φορτίσεων είναι τα διάφορα κρουστικά φορτία, κρούσεις, συγκρούσεις, απότομες ωθήσεις, σεισμοί, άνεμος κ.ο.κ.

Η εφαρμογή ενός πλήγματος σε ένα σύστημα, μια μηχανή ή μια κατασκευή και κατ' επέκταση η ταλάντωσή τους είναι δυνατόν να είναι προσχεδιασμένες, όπως για παράδειγμα σε διάφορες μηχανές, αλλά συνήθως είναι αιφνίδιες. Επομένως, η μελέτη της κίνησης των συστημάτων υπό την επίδραση πληγμάτων και η αξιολόγηση των χαρακτηριστικών της ταλάντωσης αυτής έχει μεγάλη σημασία για το σχεδιασμό μιας μηχανής ή μιας κατασκευής, καθώς πρέπει να προβλέπονται τα δυσμενέστερα αποτελέσματα, δηλαδή οι μέγιστες και ακραίες μετατοπίσεις, παραμορφώσεις, τάσεις, ταχύτητες, επιταχύνσεις κλπ. Αν ληφθούν υπόψη τα παραπάνω, τότε η κατασκευή ή η μηχανή μπορεί είτε να σχεδιαστεί με τρόπο τέτοιο ώστε να μπορεί να αντέξει ασφαλώς την επίδραση των πληγμάτων, είτε να διαθέτει τους απαραίτητους μηχανισμούς ελέγχου και περιορισμού της επίδρασης του πλήγματος σε αυτά.

Για το σκοπό αυτό, κατασκευάζονται τα *φάσματα απόκρισης*, που περιέχουν τις μέγιστες αποκρίσεις κάθε σημείου του συστήματος συναρτήσει των βασικών παραμέτρων του πλήγματος. Βασικότερη παράμετρος για το πλήγμα είναι η χρονική του διάρκεια και έπονται το είδος του, δηλαδή ο τρόπος που μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου, η μέγιστη έντασή του, το σημείο του συστήματος στο οποίο ασκείται κ.ο.κ. Στα [1], [2], [3] και [5] παρουσιάζεται η κατασκευή των φασμάτων απόκρισης μονοβάθμιου ταλαντωτή για τα

απλούστερα πλήγματα. Για τη μελέτη και στο σχεδιασμό κατασκευών έναντι κίνησης των στηρίξεων έχουν συνταχθεί φάσματα απόκρισης μονοβάθμιου ταλαντωτή από διέγερση με τα δεδομένα πρότυπων σεισμών [3].

Για τη μελέτη της απόκρισης συνεχών δομικών ή μηχανικών συστημάτων, δηλαδή συστημάτων με κατανεμημένες ιδιότητες μάζας, ακαμψίας και απόσβεσης, συνηθίζεται να χρησιμοποιούνται διάφορα πρότυπα προσομοιώματα στα οποία προσεγγιστικά οι ιδιότητες μάζας, ακαμψίας και απόσβεσης λαμβάνονται συγκεντρωμένες. Όμως, για λόγους ακριβέστερης προσομοίωσης ενδείκνυται να χρησιμοποιούνται μοντέλα με κατανεμημένες και όχι με συγκεντρωμένες ιδιότητες. Για αυτά τα μοντέλα είναι προφανές ότι, μεταξύ άλλων, χρειάζεται να κατασκευαστούν και να μελετηθούν τα φάσματα απόκρισής τους, όπως έχει γίνει αντίστοιχα και για το μονοβάθμιο ταλαντωτή.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία κατά βάση υπολογίζεται η απόκριση και κατασκευάζονται φάσματα απόκρισης για *μονοδιάστατα συστήματα με συνεχείς κατανομές μάζας και ακαμψίας*. Για το σκοπό αυτό, αναπτύσσονται μέθοδοι υπολογισμού της απόκρισης τέτοιων συστημάτων. Συγκεκριμένα, μελετώνται τα συστήματα που περιγράφονται από τη μερική διαφορική εξίσωση κίνησης 2^{ης} τάξης (χορδή, αξονικές και στρεπτικές ταλαντώσεις ράβδου) και τα συστήματα που μελετώνται από τη μερική διαφορική εξίσωση κίνησης 4^{ης} τάξης (δοκοί). Θεωρείται σταθερή η κατανομή των ιδιοτήτων μάζας και ακαμψίας και για τον υπολογισμό της απόκρισης των συστημάτων χρησιμοποιείται η ακριβής και αναλυτική *μέθοδος των κανονικών μορφών (modal analysis)*.

Αρχικά, θεωρείται η ελεύθερη ταλάντωση του συστήματος και υπολογίζονται οι *ιδιολύσεις* του (ιδιοσυχνότητες και αντίστοιχες κανονικοποιημένες ιδιομορφές). Στη συνέχεια, επιλύεται η μερική διαφορική εξίσωση κίνησης του συστήματος που περιέχει τον όρο της εξωτερικής φόρτισης (πλήγμα) με τη μέθοδο των κανονικών μορφών. Κατά την επίλυση, διατυπώνονται οι αρμονικές διαφορικές εξισώσεις από τις οποίες υπολογίζονται οι *κανονικές συντεταγμένες*. Σύμφωνα με τη μέθοδο των κανονικών μορφών, η ταλάντωση του συστήματος είναι η επαλληλία επιμέρους ταλαντώσεων, καθεμία από τις οποίες γίνεται με τη μορφή της αντίστοιχης κανονικοποιημένης ιδιομορφής, η οποία ταλαντώνεται στο χρόνο σύμφωνα με την αντίστοιχη κανονική συντεταγμένη.

Τα *γενικευμένα φορτία*, δηλαδή οι όροι διέγερσης των αρμονικών διαφορικών εξισώσεων που αναφέρονται στην επίδραση των εξωτερικών δυνάμεων στο σύστημα αντιστοιχίζονται και αυτά με μία κανονική συντεταγμένη και κατ' επέκταση με μία κανονικοποιημένη ιδιομορφή. Η μαθηματική τους έκφραση περιλαμβάνει τη συνάρτηση του πλήγματος.

Η ολοκλήρωση των αρμονικών διαφορικών εξισώσεων γίνεται με χρήση του ολοκληρώματος *Duhamel*, το οποίο υπολογίζεται με μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης. Για την απαιτούμενη ακρίβεια της έκφρασης της απόκρισης του συνεχούς συστήματος, θεωρήθηκε επαρκές να χρησιμοποιηθεί το άθροισμα των 10 πρώτων όρων, δηλαδή να χρησιμοποιηθούν μόνο οι 10 πρώτες ιδιολύσεις.

Στη συνέχεια γίνεται *αδιαστατοποίηση* των διαφόρων μεγεθών και εξισώσεων και το πρόβλημα λύνεται στην αδιάστατη μορφή του. Με αυτόν τον τρόπο, τα συμπεράσματα που βγαίνουν μπορούν να αξιοποιηθούν για όλες σχεδόν τις τιμές των πραγματικών διαστατών μεγεθών. Ακόμη, είναι δυνατή η εξαγωγή συμπερασμάτων για περισσότερα από ένα μεγέθη κάθε φορά.

Τα συστήματα που μελετήθηκαν σε αυτή τη διπλωματική εργασία είναι:

- χορδή με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα,
- χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελεύθερο άκρο,
- χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελαστικά στερεωμένο άκρο,
- χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο και με συγκεντρωμένη μάζα στο άλλο άκρο,
- χορδή με ένα ελαστικά στερεωμένο και ένα ελεύθερο άκρο,
- αμφιέριστη δοκός,
- πρόβολος,
- μονόπακτη δοκός.

Οι βασικές παράμετροι για τις οποίες έγινε μελέτη των παραπάνω συστημάτων είναι: τα χαρακτηριστικά του πλήγματος (διάρκεια, θέση εφαρμογής του πλήγματος κατά μήκος του συστήματος, μορφή πλήγματος, μέγιστη ένταση πλήγματος) και οι ιδιότητες του συστήματος (κατανεμημένη μάζα του συστήματος, κατανεμημένη ακαμψία του συστήματος και οι τιμές της σταθεράς ελατηρίου και συγκεντρωμένης μάζας, όπου αυτά υπάρχουν).

Για τα αποτελέσματα που αναφέρονται στην *απόκριση* υπολογίστηκε η μετατόπιση κάθε σημείου του συστήματος από τη θέση ισορροπίας κατά τη διάρκεια του πλήγματος και για ένα χρονικό διάστημα μετά το πέρας του, κατά την ελεύθερη ταλάντωση του συστήματος. Η παρουσίαση των παραπάνω έγινε με τη μορφή βίντεο μέσω του προγράμματος Matlab και με χρήση κυρίως της εντολής "movie".

Για την κατασκευή των *φασμάτων απόκρισης* υπολογίστηκε η μέγιστη θετική και η ελάχιστη αρνητική μετατόπιση κάθε σημείου του συστήματος από τη θέση ισορροπίας με παράμετρο την αδιάστατη χρονική διάρκεια του πλήγματος. Τα αποτελέσματα επεξεργάστηκαν με τη βοήθεια βασικών εντολών του Matlab και προέκυψαν τα τρισδιάστατα φάσματα.

Στο *πρώτο κεφάλαιο* παρατίθεται η βασική θεωρία για τις ταλαντώσεις των συνεχών συστημάτων, υπολογίζονται οι ιδιοσυχνότητες και οι ιδιομορφές της ελεύθερης ταλάντωσης, διατυπώνονται οι αρμονικές διαφορικές εξισώσεις των κανονικών συντεταγμένων καθώς και η γενική μορφή της λύσης τους. Τα βήματα αυτά επαναλαμβάνονται για καθεμία από τις μερικές διαφορικές εξισώσεις που αντιστοιχούν σε κάθε συνεχές μονοδιάστατο σύστημα, όπως επίσης και για κάθε είδος οριακών συνθηκών του προβλήματος (απλές ή σύνθετες).

Το *δεύτερο κεφάλαιο* αναφέρεται στα συστήματα που περιγράφονται από τη μερική διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης (εξίσωση κύματος). Υπολογίζονται οι ιδιοσυχνότητες και οι ιδιομορφές της ελεύθερης ταλάντωσης, διατυπώνονται οι αρμονικές διαφορικές εξισώσεις των κανονικών συντεταγμένων και παρατίθεται η ακριβής λύση τους για κάθε συγκεκριμένη περίπτωση οριακών συνθηκών. Στη συνέχεια, γίνεται αδιαστατοποίηση των διαφόρων μεγεθών και εξισώσεων που απαντώνται στο πρόβλημα. Στο τρίτο μέρος του κεφαλαίου, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα (βίντεο και φάσματα απόκρισης) της παραμετρικής μελέτης για το πρόβλημα των εγκάρσιων ταλαντώσεων χορδής. Τέλος, γίνεται αναλυτικός σχολιασμός των αποτελεσμάτων.

Το *τρίτο κεφάλαιο* αναφέρεται στα συστήματα που περιγράφονται από τη μερική διαφορική εξίσωση 4^{ης} τάξης (εξίσωση δοκού). Η δομή και τα περιεχόμενά του είναι όμοια με αυτήν του δεύτερου κεφαλαίου και τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται και σχολιάζονται αναφέρονται στις εγκάρσιες ταλαντώσεις δοκού.

Ευχαριστίες

Αυτή η διπλωματική εργασία δε θα μπορούσε να ολοκληρωθεί χωρίς τη βοήθεια εκείνων τους οποίους θα ήθελα να ευχαριστήσω εγκάρδια.

Τον καθηγητή κύριο Χρήστο Γιούννη για την επί της ουσίας επίβλεψη της εργασίας, τις πολύτιμες συμβουλές, την ουσιαστική καθοδήγησή του στο αντικείμενο και στη διαδικασία εκπόνησης αυτής της εργασίας και το χρόνο που αφιέρωσε για την αξιολόγησή της.

Τον Τομέα Μηχανικής της ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ και τις Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ για την εκτύπωση αυτής της εργασίας.

Το παιδικό μου φίλο Φρίξο Γαβαλά και το συνάδελφο υποψήφιο διδάκτορα του ΕΜΠ Κώστα Κουτσουμάρη για τις τεχνικές συμβουλές και ιδέες.

Τη Β.Κ. για την ηθική στήριξη και την έμπρακτη βοήθεια.

Τον καλό μου φίλο Μιχάλη Κατσούλη για την ηθική συμπαράσταση.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένειά μου, τους συντρόφους και στους λίγους θαυμάσιους φίλους και φίλες, στους οποίους και αφιερώνεται η εργασία.

Αργίνη Ζάννα

Αθήνα, Μάρτιος 2012

Πίνακας περιεχομένων

| | |
|---------------------------|---------|
| Περίληψη | Σελ. 3 |
| Εισαγωγή | Σελ. 5 |
| Ευχαριστίες | Σελ. 9 |
| Πίνακας περιεχομένων..... | Σελ. 11 |
| Ευρετήριο σχημάτων..... | Σελ. 17 |
| Ευρετήριο φασμάτων..... | Σελ. 21 |
| Ευρετήριο βίντεο..... | Σελ. 25 |

Κεφάλαιο 1: Θεωρία των ταλαντώσεων των συνεχών συστημάτων

| | |
|---|---------|
| 1. Ορισμοί..... | Σελ. 27 |
| 2. Η μερική διαφορική εξίσωση κίνησης 2 ^{ης} τάξης..... | Σελ. 28 |
| 2.1. Γενική διατύπωση..... | Σελ. 28 |
| 2.2. Εξαγωγή της ΜΔΕ 2 ^{ης} τάξης για τις εγκάρσιες ταλαντώσεις τεντωμένης χορδής με το 2 ^ο νόμο του Νεύτωνα..... | Σελ. 30 |
| 2.3. Περιγραφή των όρων της ΜΔΕ 2 ^{ης} τάξης για τις εγκάρσιες ταλαντώσεις τεντωμένης χορδής..... | Σελ. 32 |
| 2.4. Οριακές συνθήκες του προβλήματος των εγκάρσιων ταλαντώσεων χορδής..... | Σελ. 33 |
| 2.4.1. Απλές οριακές συνθήκες του προβλήματος των εγκάρσιων ταλαντώσεων χορδής..... | Σελ. 33 |
| 2.4.2. Σύνθετες οριακές συνθήκες του προβλήματος των εγκάρσιων ταλαντώσεων χορδής..... | Σελ. 34 |
| 2.5. Ειδικές περιπτώσεις της μερικής διαφορικής εξίσωσης κίνησης 2 ^{ης} τάξης..... | Σελ. 37 |
| 2.6. Ελεύθερη ταλάντωση χορδής με απλές οριακές συνθήκες..... | Σελ. 37 |
| 2.6.1. Το πρόβλημα ιδιοτιμών για τις εγκάρσιες ταλαντώσεις τεντωμένης χορδής με απλές οριακές συνθήκες..... | Σελ. 37 |
| 2.6.2. Ορθογωνιότητα και ορθοκανονικότητα των κανονικών μορφών για τις εγκάρσιες ταλαντώσεις τεντωμένης χορδής με απλές οριακές συνθήκες..... | Σελ. 42 |

- 2.7. Επίλυση του προβλήματος των εγκάρσιων ταλαντώσεων χορδής με απλές οριακές συνθήκες με τη μέθοδο των κανονικών μορφών..... Σελ. 44
- 2.8. Ελεύθερη ταλάντωση χορδής με σύνθετες οριακές συνθήκες..... Σελ. 48
- 2.8.1. Το πρόβλημα ιδιοτιμών για τις εγκάρσιες ταλαντώσεις τεντωμένης χορδής με σύνθετες οριακές συνθήκες..... Σελ. 48
- 2.8.2. Ορθογωνιότητα και ορθοκανονικότητα των κανονικών μορφών για το πρόβλημα των εγκάρσιων ταλαντώσεων τεντωμένης χορδής με σύνθετες οριακές συνθήκες..... Σελ. 50
- 2.9. Επίλυση του προβλήματος των εγκάρσιων ταλαντώσεων χορδής με σύνθετες οριακές συνθήκες με τη μέθοδο των κανονικών μορφών..... Σελ. 53
3. Η μερική διαφορική εξίσωση κίνησης 4^{ης} τάξης..... Σελ. 56
- 3.1. Γενική διατύπωση..... Σελ. 56
- 3.2. Εξαγωγή της ΜΔΕ 4^{ης} τάξης για τις εγκάρσιες ταλαντώσεις δοκού με το 2^ο νόμο του Νεύτωνα..... Σελ. 57
- 3.3. Περιγραφή των όρων της ΜΔΕ 4^{ης} τάξης για τις εγκάρσιες ταλαντώσεις δοκού..... Σελ. 59
- 3.4. Οριακές συνθήκες του προβλήματος των εγκάρσιων ταλαντώσεων δοκού..... Σελ. 59
- 3.4.1. Απλές οριακές συνθήκες του προβλήματος των εγκάρσιων ταλαντώσεων δοκού..... Σελ. 60
- 3.4.2. Σύνθετες οριακές συνθήκες του προβλήματος των εγκάρσιων ταλαντώσεων δοκού..... Σελ. 63
- 3.5. Ειδικές περιπτώσεις της μερικής διαφορικής εξίσωσης κίνησης 4^{ης} τάξης..... Σελ. 66
- 3.6. Ελεύθερη ταλάντωση δοκού με απλές οριακές συνθήκες..... Σελ. 66
- 3.6.1. Το πρόβλημα ιδιοτιμών για τις εγκάρσιες ταλαντώσεις δοκού με απλές οριακές συνθήκες..... Σελ. 66
- 3.6.2. Ορθογωνιότητα και ορθοκανονικότητα των κανονικών μορφών για το πρόβλημα των εγκάρσιων ταλαντώσεων δοκού με απλές οριακές συνθήκες..... Σελ. 70
- 3.7. Επίλυση του προβλήματος των εγκάρσιων ταλαντώσεων δοκού με απλές οριακές συνθήκες με τη μέθοδο των κανονικών μορφών..... Σελ. 72
- 3.8. Ελεύθερη ταλάντωση δοκού με σύνθετες οριακές συνθήκες..... Σελ. 75
- 3.8.1. Το πρόβλημα ιδιοτιμών για τις εγκάρσιες ταλαντώσεις δοκού με σύνθετες οριακές συνθήκες..... Σελ. 75
- 3.8.2. Ορθογωνιότητα και ορθοκανονικότητα των κανονικών μορφών του προβλήματος των εγκάρσιων ταλαντώσεων δοκού με σύνθετες οριακές συνθήκες..... Σελ. 77

- 3.9. Επίλυση του προβλήματος των εγκάρσιων ταλαντώσεων δοκού με σύνθετες οριακές συνθήκες με τη μέθοδο των κανονικών μορφών..... Σελ. 80
- 4. Εξωτερική φόρτιση συνεχούς συστήματος..... Σελ. 85
 - 4.1. Γενικά στοιχεία για την εξωτερική φόρτιση..... Σελ. 85
 - 4.2. Πλήγματα..... Σελ. 85
- 5. Φάσματα απόκρισης..... Σελ. 90
- 6. Το ολοκλήρωμα Duhamel..... Σελ. 91
 - 6.1. Η μορφή του ολοκληρώματος Duhamel για τις διάφορες περιπτώσεις πλήγματων..... Σελ. 91
 - 6.2. Αριθμητικός υπολογισμός του ολοκληρώματος Duhamel..... Σελ. 95

Κεφάλαιο 2: Εγκάρσιες ταλαντώσεις χορδής

- 1. Διατύπωση του προβλήματος της εγκάρσιας ταλάντωσης χορδής και εξαγωγή των εξισώσεων για τις διάφορες περιπτώσεις οριακών συνθηκών..... Σελ. 99
 - 1.1. Χορδή με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα..... Σελ. 99
 - 1.2. Χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελεύθερο άκρο..... Σελ. 103
 - 1.3. Χορδή με ένα ελαστικά στερεωμένο και ένα ελεύθερο άκρο..... Σελ. 105
 - 1.4. Χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελαστικά στερεωμένο άκρο..... Σελ. 108
 - 1.5. Χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο άκρο και με συγκεντρωμένη μάζα στο άλλο άκρο..... Σελ. 111
- 2. Αδιαστατοποίηση των διαφόρων μεγεθών και εξισώσεων για το πρόβλημα των εγκάρσιων ταλαντώσεων χορδής..... Σελ. 114
- 3. Παραμετρική μελέτη χορδής..... Σελ. 118
 - 3.1. Επίδραση του αριθμού των ιδιολύσεων που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της απόκρισης στην απόκριση και στο φάσμα της απόκρισης της χορδής..... Σελ. 119
 - 3.2. Επίδραση της μέγιστης τιμής της έντασης \bar{F}_0 του πλήγματος στην απόκριση και στο φάσμα απόκρισης της χορδής..... Σελ. 120
 - 3.3. Επίδραση του είδους του πλήγματος στο φάσμα απόκρισης και στην απόκριση της χορδής..... Σελ. 121
 - 3.3.1. Απόκριση..... Σελ. 121
 - 3.3.2. Φάσματα απόκρισης..... Σελ. 121
 - 3.4. Επίδραση της τιμής της κατανεμημένης μάζας στην απόκριση της χορδής..... Σελ. 130

| | |
|---|----------|
| 3.5. Επίδραση της θέσης του πλήγματος στην απόκριση και στο φάσμα απόκρισης της χορδής για τις διάφορες περιπτώσεις οριακών συνθηκών..... | Σελ. 132 |
| 3.5.1. Απόκριση..... | Σελ. 132 |
| 3.5.2. Φάσματα απόκρισης..... | Σελ. 133 |
| 3.5.2.1. Χορδή με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα..... | Σελ. 134 |
| 3.5.2.2. Χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελεύθερο άκρο..... | Σελ. 137 |
| 3.5.2.3. Χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελαστικά στερεωμένο άκρο | Σελ. 140 |
| 3.5.2.4. Χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο άκρο και με συγκεντρωμένη μάζα στο άλλο άκρο..... | Σελ. 143 |
| 3.5.2.5. Χορδή με ένα ελαστικά στερεωμένο και ένα ελεύθερο άκρο..... | Σελ. 146 |
| 3.6. Επίδραση της τιμής της σταθεράς του ελατηρίου στο ελαστικά στερεωμένο άκρο στην απόκριση και στο φάσμα της απόκρισης της χορδής..... | Σελ. 149 |
| 3.6.1. Απόκριση..... | Σελ. 149 |
| 3.6.2. Φάσματα απόκρισης..... | Σελ. 149 |
| 3.7. Επίδραση της τιμής της συγκεντρωμένης μάζας στο αντίστοιχο άκρο στην απόκριση και στο φάσμα της απόκρισης της χορδής..... | Σελ. 154 |
| 3.7.1. Απόκριση..... | Σελ. 154 |
| 3.7.2. Φάσματα απόκρισης..... | Σελ. 154 |
| 3.8. Επίδραση της διάρκειας του πλήγματος στην απόκριση και στο φάσμα απόκρισης της χορδής..... | Σελ. 158 |
| 3.8.1. Απόκριση..... | Σελ. 158 |
| 3.8.2. Φάσμα απόκρισης..... | Σελ. 159 |

Κεφάλαιο 3: Εγκάρσιες ταλαντώσεις δοκού

| | |
|---|----------|
| 1. Διατύπωση του προβλήματος των εγκαρσίων ταλαντώσεων δοκού και εξαγωγή των εξισώσεων για τις διάφορες περιπτώσεις οριακών συνθηκών..... | Σελ. 163 |
| 1.1. Αμφιέρειστη δοκός..... | Σελ. 163 |
| 1.2. Πρόβολος..... | Σελ. 168 |
| 1.3. Μονόπακτη δοκός..... | Σελ. 172 |
| 2. Αδιαστατοποίηση των διαφόρων μεγεθών και των εξισώσεων για το πρόβλημα των εγκαρσίων ταλαντώσεων δοκού..... | Σελ. 176 |
| 3. Παραμετρική μελέτη δοκού..... | Σελ. 179 |

| | |
|---|----------|
| 3.1. Επίδραση του αριθμού των ιδιολύσεων που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της απόκρισης στην απόκριση και στο φάσμα της απόκρισης δοκού..... | Σελ. 179 |
| 3.2. Επίδραση της μέγιστης τιμής της έντασης \bar{F}_0 του πλήγματος στην απόκριση και στο φάσμα απόκρισης της δοκού..... | Σελ. 179 |
| 3.3. Επίδραση του είδους του πλήγματος στο φάσμα απόκρισης και στην απόκριση της δοκού..... | Σελ. 180 |
| 3.3.1. Απόκριση..... | Σελ. 180 |
| 3.3.2. Φάσματα απόκρισης..... | Σελ. 182 |
| 3.3.2.1. Πρόβολος..... | Σελ. 183 |
| 3.3.2.2. Μονόπακτη δοκός..... | Σελ. 190 |
| 3.3.2.3. Αμφιέρειστη δοκός..... | Σελ. 197 |
| 3.4. Επίδραση της τιμής της κατανεμημένης μάζας στην απόκριση της δοκού..... | Σελ. 204 |
| 3.5. Επίδραση της θέσης του πλήγματος στην απόκριση και στο φάσμα απόκρισης της δοκού για τις διάφορες περιπτώσεις οριακών συνθηκών..... | Σελ. 206 |
| 3.5.1. Απόκριση..... | Σελ. 206 |
| 3.5.2. Φάσματα απόκρισης..... | Σελ. 207 |
| 3.5.2.1. Αμφιέρειστη δοκός..... | Σελ. 207 |
| 3.5.2.2. Πρόβολος..... | Σελ. 210 |
| 3.5.2.3. Μονόπακτη δοκός..... | Σελ. 213 |
| 3.6. Επίδραση της διάρκειας του πλήγματος στην απόκριση και στο φάσμα απόκρισης της δοκού..... | Σελ. 217 |
| 3.6.1. Απόκριση..... | Σελ. 217 |
| 3.6.2. Φάσμα απόκρισης..... | Σελ. 218 |
| | |
| Συμπεράσματα..... | Σελ. 221 |
| Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα..... | Σελ. 223 |
| Βιβλιογραφία..... | Σελ. 225 |

Ευρετήριο σχημάτων

Σχήμα 1: (α) Εγκάρσιες ταλαντώσεις τεντωμένης χορδής, (β) Αξονικές ταλαντώσεις ράβδου, (γ) Στρεπτικές ταλαντώσεις ράβδου..... Σελ. 29

Σχήμα 2: Οι δυνάμεις που ασκούνται στο στοιχειώδες κομμάτι μήκους dx χορδής..... Σελ. 30

Σχήμα 3: Σταθερά στερεωμένο άκρο χορδής..... Σελ. 33

Σχήμα 4: Ελεύθερο άκρο χορδής..... Σελ. 34

Σχήμα 5: Χορδή με ελαστικά στερεωμένο άκρο (α) στο $x=0$ και (β) στο $x=L$ Σελ. 35

Σχήμα 6: Χορδή με συγκεντρωμένη μάζα M (α) στο άκρο $x=0$ και (β) στο άκρο $x=L$ Σελ. 36

Σχήμα 7: Ενοποίηση των σύνθετων οριακών συνθηκών στην εγκάρσια ταλάντωση χορδής. Σελ. 48

Σχήμα 8: Ταλάντωση δοκού υπό την επίδραση εξωτερικού κατανεμημένου φορτίου $F(x,t)$ Σελ. 57

Σχήμα 9: Δυνάμεις και ροπές που ασκούνται στο στοιχειώδες τμήμα μήκους dx της δοκού..... Σελ. 57

Σχήμα 10: Δοκός πακτωμένη (α) στο άκρο $x=0$ και (β) στο $x=L$ Σελ. 60

Σχήμα 11: Άρθρωση ή κύλιση (α) στο άκρο $x=0$ της δοκού και (β) στο άκρο $x=L$ Σελ. 61

Σχήμα 12: (α) Δοκός με ελεύθερο το άκρο $x=L$ και (β) δοκός με ελεύθερο το άκρο $x=0$ Σελ. 62

Σχήμα 13: Κυλιόμενη πάκτωση (α) στο άκρο $x = 0$ και (β) στο άκρο $x = L$ δοκού..... Σελ. 63

Σχήμα 14: Σύνθετες οριακές συνθήκες στα άκρα $x=0$ και $x=L$ δοκού..... Σελ. 63

| | |
|--|----------|
| Σχήμα 15: Δυνάμεις και ροπές στο άκρο $x = 0$ (a) και $x = L$ (b) δοκού με σύνθετες οριακές συνθήκες. | Σελ. 64 |
| Σχήμα 16: Ορθογωνικό πλήγμα..... | Σελ. 87 |
| Σχήμα 17: Αυξανόμενο τριγωνικό πλήγμα..... | Σελ. 87 |
| Σχήμα 18: Μειούμενο τριγωνικό πλήγμα..... | Σελ. 88 |
| Σχήμα 19: Ισοσκελές τριγωνικό πλήγμα..... | Σελ. 88 |
| Σχήμα 20: Ημιτονοειδές πλήγμα..... | Σελ. 89 |
| Σχήμα 21: Φάσμα απόκρισης χορδής (α) και δοκού (β) | Σελ. 90 |
| Σχήμα 22: Υπολογισμός ολοκληρώματος με τον κανόνα του τραπεζίου..... | Σελ. 96 |
| Σχήμα 23: Υπολογισμός ολοκληρώματος με τον κανόνα του Simpson..... | Σελ. 96 |
| Σχήμα 24: Υπολογισμός ολοκληρώματος με τον κανόνα του μέσου..... | Σελ. 98 |
| Σχήμα 25: Χορδή με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα..... | Σελ. 99 |
| Σχήμα 26: Χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελεύθερο άκρο..... | Σελ. 103 |
| Σχήμα 27: Χορδή με ένα ελαστικά στερεωμένο και ένα ελεύθερο άκρο..... | Σελ. 105 |
| Σχήμα 28: Λύσεις της εξίσωσης ιδιοσυχνοτήτων (2.27) για τη χορδή με ένα ελαστικά στερεωμένο και ένα ελεύθερο άκρο..... | Σελ. 106 |
| Σχήμα 29: Χορδή με ένα σταθερά και ένα ελαστικά στερεωμένο άκρο... | Σελ. 108 |
| Σχήμα 30: Λύσεις της εξίσωσης ιδιοσυχνοτήτων (2.22) για τη χορδή με ένα σταθερά και ελαστικά στερεωμένο άκρο..... | Σελ. 109 |
| Σχήμα 31: Χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο άκρο και με συγκεντρωμένη μάζα στο άλλο άκρο..... | Σελ. 111 |
| Σχήμα 32: Λύσεις της εξίσωσης ιδιοσυχνοτήτων (2.32) για τη χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο άκρο και με συγκεντρωμένη μάζα στο άλλο άκρο..... | Σελ. 112 |

| | |
|--|----------|
| Σχήμα 33: Αμφιέριστη δοκός..... | Σελ. 163 |
| Σχήμα 34: Πρόβολος..... | Σελ. 168 |
| Σχήμα 35: Γραφική επίλυση της εξίσωσης ιδιοσυχνοτήτων (3.18) προβόλου..... | Σελ. 170 |
| Σχήμα 36: Μονόπακτη δοκός..... | Σελ. 172 |
| Σχήμα 37: Γραφική επίλυση της εξίσωσης ιδιοσυχνοτήτων (3.24) μονόπακτης δοκού..... | Σελ. 173 |

Ευρετήριο φασμάτων

Φάσμα 1: Ορθογωνικό πλήγμα σε χορδή με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα..... Σελ. 122

Φάσμα 2: Πλήγμα μισό ημίτονο σε χορδή με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα..... Σελ. 123

Φάσμα 3: Αυξανόμενο τριγωνικό πλήγμα σε χορδή με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα..... Σελ. 124

Φάσμα 4: Μειούμενο τριγωνικό πλήγμα σε χορδή με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα..... Σελ. 125

Φάσμα 5: Ισοσκελές τριγωνικό πλήγμα σε χορδή με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα..... Σελ. 126

Φάσμα 6: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0.5$ χορδής με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα..... Σελ. 134

Φάσμα 7: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0.7$ χορδής με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα..... Σελ. 135

Φάσμα 8: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0.9$ χορδής με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα..... Σελ. 135

Φάσμα 9: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0.1$ χορδής με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελεύθερο άκρο..... Σελ. 137

Φάσμα 10: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0.5$ χορδής με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελεύθερο άκρο..... Σελ. 138

Φάσμα 11: Πλήγμα στη θέση $\xi = 1$ χορδής με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελεύθερο άκρο..... Σελ. 138

Φάσμα 12: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0,1$ χορδής με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελαστικά στερεωμένο άκρο..... Σελ. 140

- Φάσμα 13: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0,5$ χορδής με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελαστικά στερεωμένο άκρο..... Σελ. 141
- Φάσμα 14: Πλήγμα στη θέση $\xi = 1$ χορδής με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελαστικά στερεωμένο άκρο..... Σελ. 141
- Φάσμα 15: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0,1$ χορδής με ένα σταθερά στερεωμένο και με συγκεντρωμένη μάζα στο άλλο άκρο..... Σελ. 143
- Φάσμα 16: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0,5$ χορδής με ένα σταθερά στερεωμένο και με συγκεντρωμένη μάζα στο άλλο άκρο..... Σελ. 144
- Φάσμα 17: Πλήγμα στη θέση $\xi = 1$ χορδής με ένα σταθερά στερεωμένο και με συγκεντρωμένη μάζα στο άλλο άκρο..... Σελ. 144
- Φάσμα 18: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0$ χορδής με ένα ελαστικά στερεωμένο και ένα σταθερά στερεωμένο άκρο..... Σελ. 146
- Φάσμα 19: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0,5$ χορδής με ένα ελαστικά στερεωμένο και ένα σταθερά στερεωμένο άκρο..... Σελ. 147
- Φάσμα 20: Πλήγμα στη θέση $\xi = 1$ χορδής με ένα ελαστικά στερεωμένο και ένα σταθερά στερεωμένο άκρο..... Σελ. 147
- Φάσμα 21: Χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελαστικά στερεωμένο άκρο $\bar{k} = 1$ Σελ. 150
- Φάσμα 22: Χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελαστικά στερεωμένο άκρο $\bar{k} = 2$ Σελ. 151
- Φάσμα 23: Χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελαστικά στερεωμένο άκρο $\bar{k} = 3$ Σελ. 151
- Φάσμα 24: Χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελαστικά στερεωμένο άκρο $\bar{k} = 4$ Σελ. 152
- Φάσμα 25: Χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο άκρο και με συγκεντρωμένη μάζα $\bar{M} = 0.05$ στο άλλο άκρο..... Σελ. 155

| | |
|--|----------|
| Φάσμα 26: Χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο άκρο και με συγκεντρωμένη μάζα $\bar{M} = 0.03$ στο άλλο άκρο..... | Σελ. 155 |
| Φάσμα 27: Χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο άκρο και με συγκεντρωμένη μάζα $\bar{M} = 0.01$ στο άλλο άκρο..... | Σελ. 156 |
| Φάσμα 28: Διάρκεια πλήγματος ίση με 40 ιδιοπεριόδους του συστήματος (χορδή με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα) | Σελ. 160 |
| Φάσμα 29: Ορθογωνικό πλήγμα σε πρόβολο..... | Σελ. 183 |
| Φάσμα 30: Πλήγμα μισό ημίτονο σε πρόβολο..... | Σελ. 184 |
| Φάσμα 31: Αυξανόμενο τριγωνικό πλήγμα σε πρόβολο..... | Σελ. 185 |
| Φάσμα 32: Μειούμενο τριγωνικό πλήγμα σε πρόβολο..... | Σελ. 186 |
| Φάσμα 33: Ισοσκελές τριγωνικό πλήγμα σε πρόβολο..... | Σελ. 187 |
| Φάσμα 34: Ορθογωνικό πλήγμα σε μονόπακτη δοκό..... | Σελ. 190 |
| Φάσμα 35: Πλήγμα μισό ημίτονο σε μονόπακτη δοκό..... | Σελ. 191 |
| Φάσμα 36: Αυξανόμενο τριγωνικό πλήγμα σε μονόπακτη δοκό..... | Σελ. 192 |
| Φάσμα 37: Μειούμενο τριγωνικό πλήγμα σε μονόπακτη δοκό..... | Σελ. 193 |
| Φάσμα 38: Ισοσκελές τριγωνικό πλήγμα σε μονόπακτη δοκό..... | Σελ. 194 |
| Φάσμα 39: Ορθογωνικό πλήγμα σε αμφιέρειστη δοκό..... | Σελ. 197 |
| Φάσμα 40: Πλήγμα μισό ημίτονο σε αμφιέρειστη δοκό..... | Σελ. 198 |
| Φάσμα 41: Αυξανόμενο τριγωνικό πλήγμα σε αμφιέρειστη δοκό..... | Σελ. 199 |
| Φάσμα 42: Μειούμενο τριγωνικό πλήγμα σε αμφιέρειστη δοκό..... | Σελ. 200 |
| Φάσμα 43: Ισοσκελές τριγωνικό πλήγμα σε αμφιέρειστη δοκό..... | Σελ. 201 |
| Φάσμα 44: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0.5$ αμφιέρειστης δοκού..... | Σελ. 208 |
| Φάσμα 45: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0.7$ αμφιέρειστης δοκού..... | Σελ. 208 |
| Φάσμα 46: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0.9$ αμφιέρειστης δοκού..... | Σελ. 209 |

| | |
|---|----------|
| Φάσμα 47: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0.1$ προβόλου..... | Σελ. 210 |
| Φάσμα 48: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0.5$ προβόλου..... | Σελ. 211 |
| Φάσμα 49: Πλήγμα στη θέση $\xi = 1$ προβόλου..... | Σελ. 211 |
| Φάσμα 50: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0,1$ μονόπακτης δοκού..... | Σελ. 213 |
| Φάσμα 51: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0,3$ μονόπακτης δοκού..... | Σελ. 214 |
| Φάσμα 52: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0,5$ μονόπακτης δοκού..... | Σελ. 214 |
| Φάσμα 53: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0,7$ μονόπακτης δοκού..... | Σελ. 215 |
| Φάσμα 54: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0,9$ μονόπακτης δοκού..... | Σελ. 215 |
| Φάσμα 55: Διάρκεια πλήγματος ίση με 40 ιδιοπεριόδους του συστήματος (μονόπακτη δοκός) | Σελ. 218 |

Ευρετήριο βίντεο απόκρισης

Τα βίντεο βρίσκονται στο επισυναπτόμενο CD. Για την αναπαραγωγή τους απαραίτητο είναι ένα πρόγραμμα που να υποστηρίζει αρχεία της μορφής “.avi”, όπως για παράδειγμα το VLC Media Player¹.

A. Βίντεο απόκρισης χορδής

| Όνομα αρχείου | Οριακές συνθήκες | Κατανεμημένη μάζα | Πλήγμα | | | | Διάρκεια ελεύθερης ταλάντωσης | Συγκεντρωμένη μάζα | Συγκεντρωμένο ελατήριο | Εδάφιο του κεφ. 2 |
|---------------|------------------|-------------------|------------------|--------|-------------------|------|-------------------------------|--------------------|------------------------|-------------------|
| | | | Είδος | Ένταση | Διάρκεια | Θέση | | | | |
| 1 | ΟΣΧ1 | 0,05 | ορθογωνικό | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 0 | 0 | 3.3 |
| 2 | ΟΣΧ1 | 0,05 | ημιτονοειδές | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 0 | 0 | 3.3 |
| 3 | ΟΣΧ1 | 0,05 | αυξανόμενο τριγ. | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 0 | 0 | 3.3 |
| 4 | ΟΣΧ1 | 0,05 | μειούμενο τριγ. | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 0 | 0 | 3.3 |
| 5 | ΟΣΧ1 | 0,05 | ισοσκελές τριγ. | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 0 | 0 | 3.3 |
| 6 | ΟΣΧ1 | 0,05 | ορθογωνικό | 0,05 | $0,7\bar{T}_1$ | 0,7 | $2,8\bar{T}_1$ | 0 | 0 | 3.4 |
| 7 | ΟΣΧ1 | 0,10 | ορθογωνικό | 0,05 | $0,4950\bar{T}_1$ | 0,7 | $1,9799\bar{T}_1$ | 0 | 0 | 3.4 |
| 8 | ΟΣΧ1 | 0,15 | ορθογωνικό | 0,05 | $0,4142\bar{T}_1$ | 0,7 | $1,6167\bar{T}_1$ | 0 | 0 | 3.4 |
| 9 | ΟΣΧ1 | 0,20 | ορθογωνικό | 0,05 | $0,3500\bar{T}_1$ | 0,7 | $1,4000\bar{T}_1$ | 0 | 0 | 3.4 |
| 10 | ΟΣΧ1 | 0,25 | ορθογωνικό | 0,05 | $0,3130\bar{T}_1$ | 0,7 | $1,2522\bar{T}_1$ | 0 | 0 | 3.4 |
| 11 | ΟΣΧ2 | 0,05 | ορθογωνικό | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 0,1 | $4\bar{T}_1$ | 0 | 0 | 3.5 |
| 12 | ΟΣΧ2 | 0,05 | ορθογωνικό | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 0,5 | $4\bar{T}_1$ | 0 | 0 | 3.5 |
| 13 | ΟΣΧ2 | 0,05 | ορθογωνικό | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 1,0 | $4\bar{T}_1$ | 0 | 0 | 3.5 |
| 14 | ΟΣΧ4 | 0,05 | ορθογωνικό | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 0 | 1 | 3.6 |
| 15 | ΟΣΧ4 | 0,05 | ορθογωνικό | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 0 | 2 | 3.6 |
| 16 | ΟΣΧ4 | 0,05 | ορθογωνικό | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 0 | 3 | 3.6 |
| 17 | ΟΣΧ4 | 0,05 | ορθογωνικό | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 0 | 4 | 3.6 |
| 18 | ΟΣΧ5 | 0,05 | ορθογωνικό | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 0,05 | 0 | 3.7 |
| 19 | ΟΣΧ5 | 0,05 | ορθογωνικό | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 0,03 | 0 | 3.7 |
| 20 | ΟΣΧ5 | 0,05 | ορθογωνικό | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 0,01 | 0 | 3.7 |
| 21 | ΟΣΧ1 | 0,05 | ορθογωνικό | 0,05 | $0,5\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 0 | 0 | 3.8 |
| 22 | ΟΣΧ1 | 0,05 | ορθογωνικό | 0,05 | $0,7\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 0 | 0 | 3.8 |
| 23 | ΟΣΧ1 | 0,05 | ορθογωνικό | 0,05 | $1,0\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 0 | 0 | 3.8 |
| 24 | ΟΣΧ1 | 0,05 | ορθογωνικό | 0,05 | $1,2\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 0 | 0 | 3.8 |
| 25 | ΟΣΧ1 | 0,05 | ορθογωνικό | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 0 | 0 | 3.8 |

Πίνακας 1: Είναι ΟΣΧ1: χορδή με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα, ΟΣΧ2: χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελεύθερο άκρο, ΟΣΧ3: Χορδή με ένα ελαστικά στερεωμένο και ένα ελεύθερο άκρο, ΟΣΧ4: Χορδή με ένα σταθερά και ένα ελαστικά στερεωμένο άκρο, ΟΣΧ5: Χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο άκρο και με συγκεντρωμένη μάζα στο άλλο άκρο.

¹ Διαθέσιμο δωρεάν στη σελίδα <http://www.videolan.org/vlc/>

Β. Βίντεο απόκρισης δοκού

| Όνομα αρχείου | Οριακές συνθήκες | Κατανεμημένη μάζα | Πλήγμα | | | | Διάρκεια ελεύθερης ταλάντωσης | Εδάφιο του κεφ. 3 |
|---------------|------------------|-------------------|------------------|--------|-------------------|------|-------------------------------|-------------------|
| | | | Είδος | Ένταση | Διάρκεια | Θέση | | |
| 26 | ΟΣΔ1 | 0,05 | ορθογωνικό | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 3.3 |
| 27 | ΟΣΔ1 | 0,05 | ημιτονοειδές | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 3.3 |
| 28 | ΟΣΔ1 | 0,05 | αυξανόμενο τριγ. | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 3.3 |
| 29 | ΟΣΔ1 | 0,05 | μειούμενο τριγ. | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 3.3 |
| 30 | ΟΣΔ1 | 0,05 | ισοσκελές τριγ. | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 3.3 |
| 31 | ΟΣΔ2 | 0,05 | ορθογωνικό | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 3.3 |
| 32 | ΟΣΔ2 | 0,05 | ημιτονοειδές | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 3.3 |
| 33 | ΟΣΔ2 | 0,05 | αυξανόμενο τριγ. | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 3.3 |
| 34 | ΟΣΔ2 | 0,05 | μειούμενο τριγ. | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 3.3 |
| 35 | ΟΣΔ2 | 0,05 | ισοσκελές τριγ. | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 3.3 |
| 36 | ΟΣΔ3 | 0,05 | ορθογωνικό | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 3.3 |
| 37 | ΟΣΔ3 | 0,05 | ημιτονοειδές | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 3.3 |
| 38 | ΟΣΔ3 | 0,05 | αυξανόμενο τριγ. | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 3.3 |
| 39 | ΟΣΔ3 | 0,05 | μειούμενο τριγ. | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 3.3 |
| 40 | ΟΣΔ3 | 0,05 | ισοσκελές τριγ. | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 3.3 |
| 41 | ΟΣΔ1 | 0,05 | ορθογωνικό | 0,05 | $0,7\bar{T}_1$ | 0,7 | $2,8\bar{T}_1$ | 3.4 |
| 42 | ΟΣΔ1 | 0,10 | ορθογωνικό | 0,05 | $0,4950\bar{T}_1$ | 0,7 | $1,9799\bar{T}_1$ | 3.4 |
| 43 | ΟΣΔ1 | 0,15 | ορθογωνικό | 0,05 | $0,4042\bar{T}_1$ | 0,7 | $1,6167\bar{T}_1$ | 3.4 |
| 44 | ΟΣΔ1 | 0,20 | ορθογωνικό | 0,05 | $0,3500\bar{T}_1$ | 0,7 | $1,4000\bar{T}_1$ | 3.4 |
| 45 | ΟΣΔ1 | 0,25 | ορθογωνικό | 0,05 | $0,3130\bar{T}_1$ | 0,7 | $1,2522\bar{T}_1$ | 3.4 |
| 46 | ΟΣΔ2 | 0,05 | ορθογωνικό | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 0,1 | $4\bar{T}_1$ | 3.5 |
| 47 | ΟΣΔ2 | 0,05 | ορθογωνικό | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 0,5 | $4\bar{T}_1$ | 3.5 |
| 48 | ΟΣΔ2 | 0,05 | ορθογωνικό | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 1,0 | $4\bar{T}_1$ | 3.5 |
| 49 | ΟΣΔ1 | 0,05 | ορθογωνικό | 0,05 | $0,5\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 3.6 |
| 50 | ΟΣΔ1 | 0,05 | ορθογωνικό | 0,05 | $0,7\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 3.6 |
| 51 | ΟΣΔ1 | 0,05 | ορθογωνικό | 0,05 | $1,0\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 3.6 |
| 52 | ΟΣΔ1 | 0,05 | ορθογωνικό | 0,05 | $1,2\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 3.6 |
| 53 | ΟΣΔ1 | 0,05 | ορθογωνικό | 0,05 | $1,5\bar{T}_1$ | 0,7 | $4\bar{T}_1$ | 3.6 |

Πίνακας 2: Είναι ΟΣΔ1: αμφιέρειστη δοκός, ΟΣΔ2: πρόβολος, ΟΣΔ3: μονόπακτη δοκός.

Κεφάλαιο 1:

Θεωρία των ταλαντώσεων των συνεχών συστημάτων

1. Ορισμοί

Συνεχές σύστημα είναι εκείνο στο οποίο οι ιδιότητες της μάζας, της ακαμψίας και της απόσβεσης είναι συνεχώς κατανομημένες στο σώμα του συστήματος. Στοιχεία που μπορούν να θεωρηθούν συνεχή συστήματα και άρα να μελετηθούν όπως αυτά είναι: καλώδια, ράβδοι, δοκοί, μεμβράνες, πλάκες, κελύφη, άτρακτοι κλπ. Αντίθετα, τα *διακριτά συστήματα* είναι εκείνα στα οποία οι ιδιότητες της μάζας, της ακαμψίας και της απόσβεσης θεωρείται ότι είναι τοποθετημένες σε συγκεκριμένα σημεία.

Τα μηχανικά συστήματα είναι δυνατόν να εκτελέσουν *περιοδικές κινήσεις γύρω από μια θέση ισορροπίας*, δηλαδή να *ταλαντωθούν*. Αυτές οι ταλαντώσεις, όταν δεν ξεπερνιέται το όριο αστοχίας των υλικών, γίνονται με πολύ μικρό πλάτος σε σχέση με τις διαστάσεις του συστήματος. Ιδανικά, ένα σύστημα μπορεί να εκτελεί *ελεύθερες ταλαντώσεις* σταθερού πλάτους και συχνότητας χωρίς απόσβεση, άρα και χωρίς να προσφέρεται σε αυτό ενέργεια εξωτερικά (μέσω μιας διεγείρουσας δύναμης). Στην πράξη όμως κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό, καθώς το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται συνεχώς λόγω της απόσβεσης. Όταν στο σύστημα προσφέρεται ενέργεια μέσω μιας *διεγείρουσας δύναμης*, τότε η ταλάντωση είναι *εξαναγκασμένη*.

Οι ταλαντώσεις των διακριτών συστημάτων περιγράφονται από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, ενώ οι ταλαντώσεις των συνεχών συστημάτων από μερικές διαφορικές εξισώσεις. Τα συνεχή συστήματα θεωρείται ότι έχουν άπειρους βαθμούς ελευθερίας, ενώ τα διακριτά συστήματα έχουν πεπερασμένο αριθμό βαθμών ελευθερίας. Βέβαια, εδώ υπάρχουν πολύπλοκες περιπτώσεις, ανάλογα με τους βαθμούς ελευθερίας. Τα διακριτά συστήματα ξεφεύγουν από τους σκοπούς της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Ανάλογα με τη διαφορική εξίσωση που περιγράφει την ταλάντωση τους, τα συνεχή μονοδιάστατα συστήματα που εξετάζονται στην παρούσα διπλωματική εργασία χωρίζονται σε δύο κατηγορίες. Η πρώτη περιγράφεται από την εξίσωση κύματος (2^{ης} τάξης μερική διαφορική εξίσωση) και περιλαμβάνει την εγκάρσια ταλάντωση μιας χορδής, τη διαμήκη ταλάντωση μιας ράβδου και τη στρεπτική

ταλάντωση μιας ράβδου. Η δεύτερη περιγράφεται από την εξίσωση της δοκού, δηλαδή μια μερική διαφορική εξίσωση 4^{ης} τάξης, η οποία περιγράφει τις εγκάρσιες ταλαντώσεις μιας δοκού.

2. Η μερική διαφορική εξίσωση κίνησης 2^{ης} τάξης

2.1. Γενική διατύπωση

Η μερική διαφορική εξίσωση κίνησης δεύτερης τάξης (εξίσωση κύματος) είναι της μορφής:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[A(x) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right] + F(x, t) = B(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

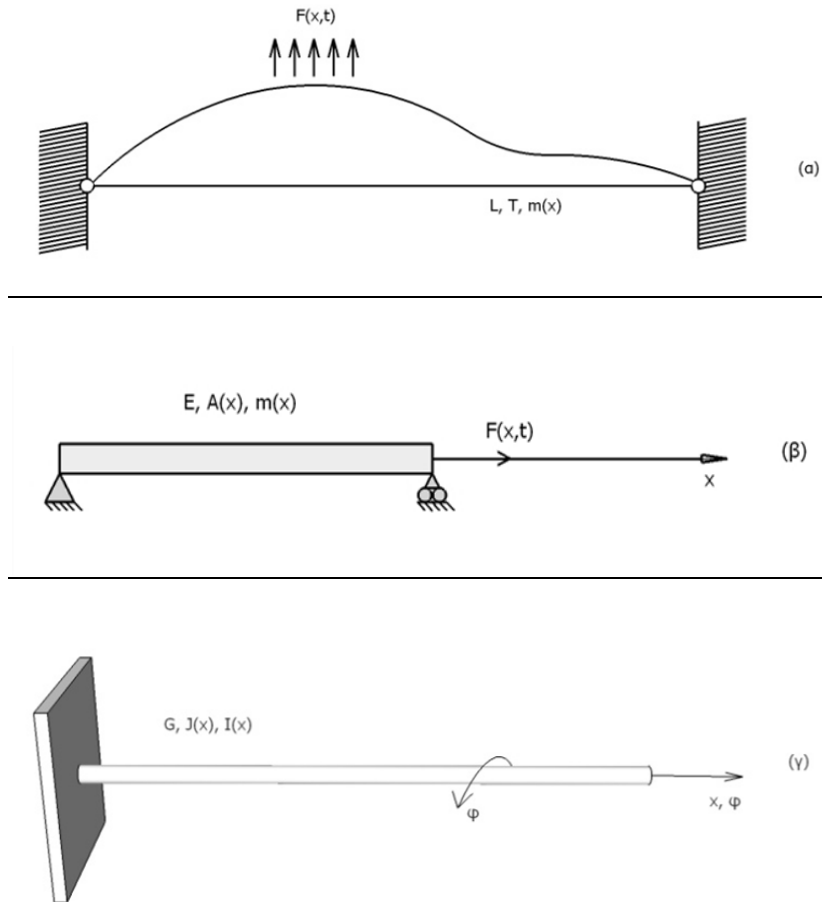
όπου $v(x, t)$ η μετακίνηση του σημείου με τετμημένη x της χορδής τη χρονική στιγμή t . Η ΜΔΕ (1.1) περιγράφει τις εγκάρσιες ταλαντώσεις τεντωμένης χορδής, τις αξονικές διαμήκειες ταλαντώσεις ράβδου και τις στρεπτικές ταλαντώσεις ράβδου. Παρακάτω φαίνεται η μορφή της ΜΔΕ (1.1) σε κάθε περίπτωση. Η παρούσα διπλωματική εργασία θα ασχοληθεί μόνο με τη μελέτη της εγκάρσιας ταλάντωσης χορδής.

Εγκάρσιες ταλαντώσεις τεντωμένης χορδής

Έστω χορδή μήκους L , τεντωμένη με εφελκυστική δύναμη $T(x)$, με συνάρτηση κατανομής μάζας $m(x)$. Στη χορδή ασκείται διεγείρουσα εξωτερική κατανομημένη δύναμη $F(x, t)$, κάθετα στη διεύθυνσή της. Η εξίσωση κίνησης της χορδής είναι:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T(x) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right) + F(x, t) = m(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

όπου στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι $A(x) = T(x)$, $B(x) = m(x)$.



Σχήμα 1: (α) Εγκάρσιες ταλαντώσεις τεντωμένης χορδής, (β) Αξονικές ταλαντώσεις ράβδου, (γ) Στρεπτικές ταλαντώσεις ράβδου

Αξονικές διαμήκειες ταλαντώσεις ράβδου

Αν E το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της δοκού, $A(x)$ η επιφάνεια της διατομής της ράβδου, $m(x)$ η συνάρτηση κατανομής της μάζας της ράβδου και $F(x, t)$ το αξονικό εξωτερικό καταναμημένο φορτίο, τότε:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EA(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + F(x, t) = m(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

Όπου στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι $A(x) = EA(x)$, $B(x) = m(x)$.

Στρεπτικές ταλαντώσεις ράβδου

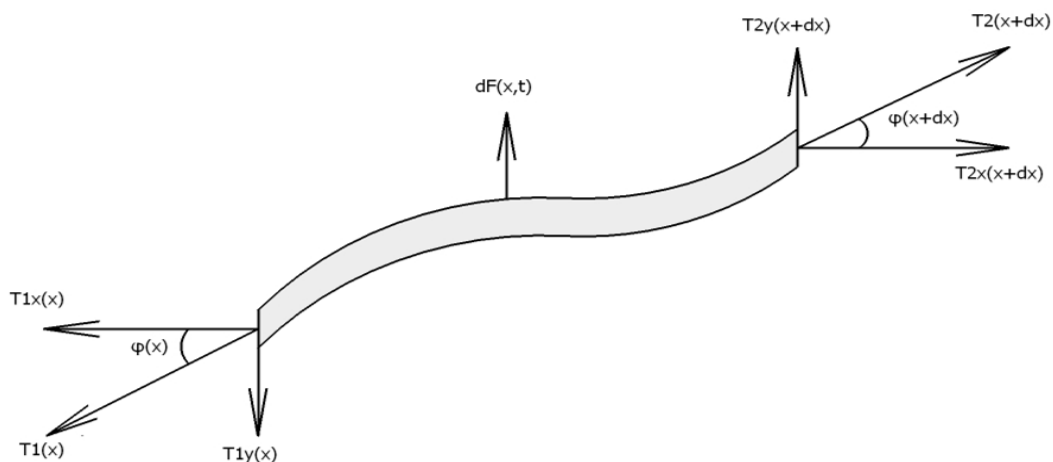
Είναι: G το μέτρο διάτμησης της ράβδου, $R(x)$ η ακτίνα της διατομής της ράβδου στο σημείο με τετμημένη x , $J(x)$ η στρεπτική ροπή αδράνειας της διατομής της ράβδου, $I(x)$ η μαζική ροπή αδράνειας ανά μονάδα μήκους και $F(x, t)$ μια εξωτερική κατανεμημένη ροπή στρέψης. Η ΜΔΕ που περιγράφει την ταλάντωση της ράβδου είναι:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(GJ(x) \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \right) + M(x, t) = I(x) \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2}$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι $A(x) = GJ(x)$, $B(x) = I(x)$ και $u(x, t) = \varphi(x, t)$ η γωνία στροφής της κάθε διατομής από την αρχική της θέση.

2.2. Εξαγωγή της ΜΔΕ 2ης τάξης για τις εγκάρσιες ταλαντώσεις τεντωμένης χορδής με το 2ο νόμο του Νεύτωνα

Έστω το τμήμα χορδής του σχήματος, πάχους dx που τεντώνεται με εφελκυστική δύναμη $T(x)$ και έχει κατανομή μάζας $dm(x)$. Σε αυτό εφαρμόζεται κατακόρυφη εξωτερική κατανεμημένη δύναμη $dF(x, t)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρείται πως η δύναμη αυτή εφαρμόζεται με φορά προς τα πάνω, επομένως και οι δυνάμεις στα άκρα του απειροστού τμήματος διαμορφώνονται όπως στο σχήμα 2.



Σχήμα 2: Οι δυνάμεις που ασκούνται στο στοιχειώδες κομμάτι μήκους dx χορδής

Ανάλυση των $T(x)$ και $T(x + dx)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες:

$$T_x(x) = T(x)\cos\varphi(x) \cong T(x)$$

$$T_x(x + dx) = T(x + dx)\cos\varphi(x + dx) \cong T(x + dx)$$

$$T_y(x) = T_x(x)\tan\varphi(x) \cong T(x)\tan\varphi(x) = T(x)\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} T_y(x + dx) &= T_x(x + dx)\tan\varphi(x + dx) \cong T(x + dx)\tan\varphi(x + dx) = \\ &= T(x + dx)\frac{\partial v(x + dx, t)}{\partial x} \end{aligned}$$

Είναι $\Sigma F_x = 0$, γιατί θεωρείται πως η χορδή δεν κινείται οριζοντια, αλλά μόνο κατακόρυφα και μάλιστα για μικρές μετατοπίσεις $u(x, t)$ σε σχέση με το μήκος της L . Συγκεκριμένα:

$$T_x(x) = T_y(x + dx) \stackrel{(1.3)}{\implies} T(x + dx) = T(x)$$

Από το 2^ο νόμο του Νεύτωνα:

$$\Sigma F_y = dm \cdot a \implies$$

$$\implies dF(x, t) + T_y(x) - T_y(x + dx) = m(x)dx \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} \stackrel{(1.3)}{\implies}$$

$$\implies F(x, t)dx + T(x + dx)\frac{\partial v(x + dx, t)}{\partial x} - T(x)\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = m(x)dx \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} \implies^3$$

$$\implies F(x, t)dx + T(x + dx)\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} - T(x)\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = m(x)dx \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} \quad (1.4)$$

Ο όρος $T(x + dx)\frac{\partial v(x, t)}{\partial x}$ τη βοήθεια του αναπτύγματος Taylor γίνεται:

$$T(x + dx)\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = T(x)\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(T(x)\frac{\partial v(x, t)}{\partial x}\right)dx$$

Επομένως, η (1.4) γίνεται:

² Επειδή οι γωνίες $\varphi(x)$ και $\varphi(x + dx)$ είναι πολύ μικρές σε σχέση με τις $T_x(x)$, $T_x(x + dx)$, $T_y(x)$ και $T_y(x + dx)$, μπορούν να γίνουν οι προσεγγίσεις:

$\varphi(x) \cong \tan\varphi(x)$, $\varphi(x + dx) \cong \tan\varphi(x + dx)$, $\cos\varphi(x) \cong 1$ και $\cos\varphi(x + dx) \cong 1$.

³ Ισχύουν οι σχέσεις: $dm(x) = m(x)dx$ και $dF(x, t) = F(x, t)dx$.

$$F(x, t)dx + \frac{\partial}{\partial x} \left(T(x) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right) dx = m(x)dx \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2}$$

Διαιρώντας κατά μέλη με dx :

$$F(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left(T(x) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right) = m(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2}$$

που είναι η εξίσωση (1.2).

2.3. Περιγραφή των όρων της ΜΔΕ 2^{ης} τάξης για τις εγκάρσιες ταλαντώσεις τεντωμένης χορδής

Στη γενική περίπτωση της ΜΔΕ 2^{ης} τάξης (εξίσωση 1.1) ο όρος $\frac{\partial}{\partial x} \left[A(x) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right]$ εκφράζει την επίδραση της *ακαμψίας* στην εγκάρσια κατανεμημένη δύναμη, ο όρος $F(x, t)$ περιγράφει την *εξωτερική κατανεμημένη δύναμη* και ο όρος $B(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2}$ εκφράζει την επίδραση της *μάζας* στην εγκάρσια κατανεμημένη δύναμη, που είναι η *αδράνεια*.

Στην εξίσωση (1.2) της χορδής τα παραπάνω εξειδικεύονται και γίνονται πιο κατανοητά.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T(x) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right) + F(x, t) = m(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2}$$

Ο πρώτος όρος της εξίσωσης, $\frac{\partial}{\partial x} \left(T(x) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right)$, που περιέχει τη συνάρτηση $T(x)$, εκφράζει την επίδραση της *ακαμψίας* στην εγκάρσια κατανεμημένη δύναμη. Ο δεύτερος όρος, $F(x, t)$, είναι το *εξωτερικό κατανεμημένο φορτίο* που εφαρμόζεται στη χορδή κάθετα στη διεύθυνσή της. Τέλος, ο τρίτος όρος της αδράνειας, $m(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2}$, που περιέχει τη συνάρτηση κατανομής της μάζας ανά μονάδα μήκους $m(x)$, εκφράζει την επίδραση της μάζας στην εγκάρσια κατανεμημένη δύναμη, δηλαδή την *αδράνεια*.

2.4. Οριακές συνθήκες του προβλήματος των εγκάρσιων ταλαντώσεων χορδής

Οι οριακές συνθήκες είναι οι σχέσεις που περιγράφουν τη συμπεριφορά των άκρων της χορδής. Ανάλογα με το πώς είναι στερεωμένα τα άκρα της χορδής, χρησιμοποιούνται διαφορετικές οριακές συνθήκες. Υπάρχουν απλές και σύνθετες οριακές συνθήκες. Οι σύνθετες οριακές συνθήκες διακρίνονται από τις απλές, καθώς περιέχουν νέες παραμέτρους.

2.4.1. Απλές οριακές συνθήκες του προβλήματος των εγκάρσιων ταλαντώσεων χορδής

Ως απλές οριακές συνθήκες ορίζονται οι εξής:

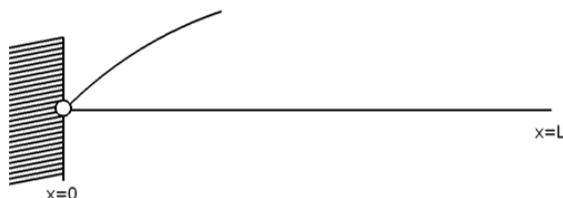
(α) σταθερά στερεωμένο άκρο χορδής

Το άκρο $x = 0$ της χορδής δεν μετατοπίζεται από τη θέση ισορροπίας του, άρα:

$$v(0, t) = 0$$

Ενώ στο $x = L$:

$$v(L, t) = 0$$



Σχήμα 3: Σταθερά στερεωμένο άκρο χορδής

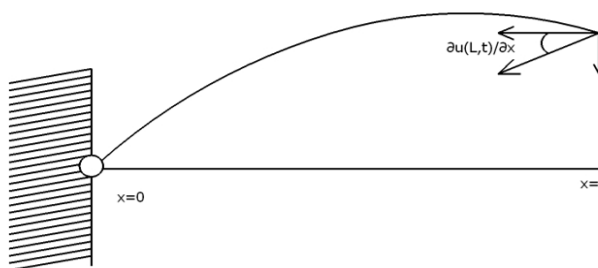
(β) ελεύθερο άκρο χορδής

Επειδή στο άκρο $x = L$ η κάθετη δύναμη είναι μηδέν, προκύπτει η εξίσωση της οριακής συνθήκης:

$$T_y(L, t) = 0 \Rightarrow T_x(L, t) \frac{\partial v(L, t)}{\partial x} \cong T(L) \frac{\partial v(L, t)}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v(L, t)}{\partial x} = 0$$

ή στο $x = 0$:

$$\frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = 0$$



Σχήμα 4: Ελεύθερο άκρο χορδής

2.4.2. Σύνθετες οριακές συνθήκες του προβλήματος των εγκάρσιων ταλαντώσεων χορδής

Ως σύνθετες οριακές συνθήκες ορίζονται οι εξής:

(γ) ελαστικά στερεωμένο άκρο χορδής

Η παράμετρος που υπεισέρχεται εδώ είναι η σταθερά k του ελατηρίου.

(γ₁) ελαστικά στερεωμένο άκρο στο $x = 0$:

Επειδή η συνισταμένη των δυνάμεων κατά τον άξονα y στο άκρο $x = 0$ είναι μηδέν, προκύπτει η εξίσωση της οριακής συνθήκης:

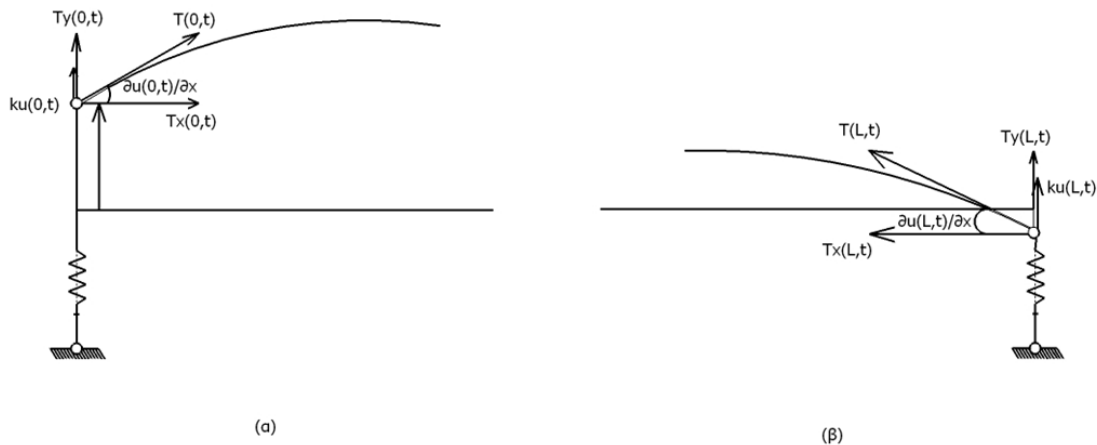
$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow T_y(0, t) - kv(0, t) = 0 \Rightarrow T_x(0, t) \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} - kv(0, t) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow T(0) \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} - kv(0, t) = 0 \end{aligned}$$

(γ₂) ελαστικά στερεωμένο άκρο στο $x = L$:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_y(L, t) + kv(L, t) = 0 \Rightarrow T_x(L, t) \frac{\partial v(L, t)}{\partial x} + kv(L, t) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(L) \frac{\partial v(L, t)}{\partial x} + kv(L, t) = 0$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι για $k = 0$ η παραπάνω οριακή συνθήκη γίνεται $\frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = 0$ ή $\frac{\partial v(L, t)}{\partial x} = 0$, όπως στο ελεύθερο άκρο δηλαδή, ενώ για $k = \infty$ η οριακή συνθήκη γίνεται $v(0, t) = 0$ ή $v(L, t) = 0$, όπως στο σταθερά στερεωμένο άκρο δηλαδή.



Σχήμα 5: Χορδή με ελαστικά στερεωμένο άκρο (α) στο $x=0$ και (β) στο $x=L$

(δ) συγκεντρωμένη μάζα M συνδεδεμένη στο άκρο της χορδής

Η νέα παράμετρος εδώ είναι η μάζα M .

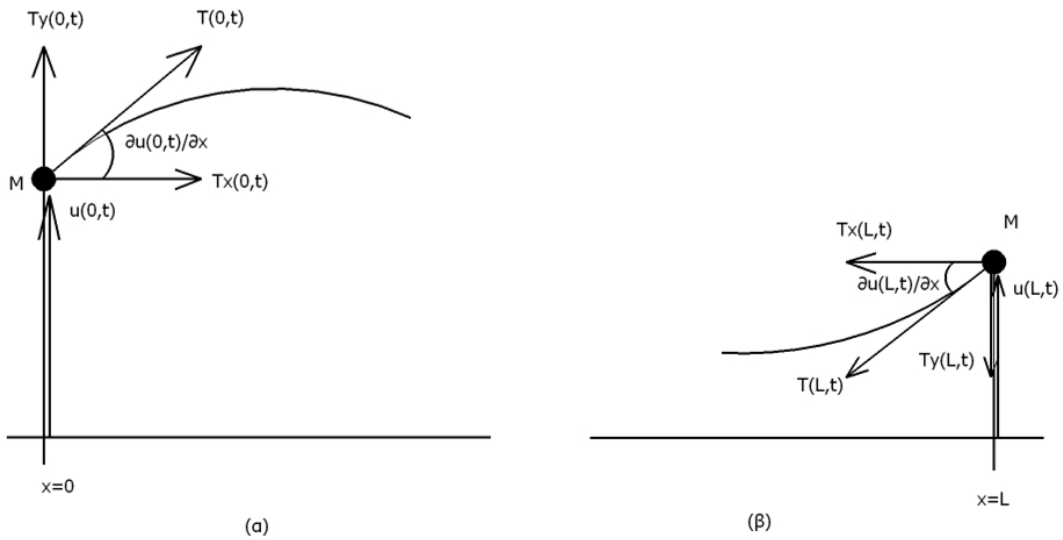
(δ₁) συγκεντρωμένη μάζα M στο $x = 0$:

Επειδή η συνισταμένη των δυνάμεων κατά τον άξονα y στο άκρο $x = 0$ είναι μηδέν. Προκύπτει η εξίσωση της οριακή συνθήκης:

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow T_y(0, t) - M \frac{\partial^2 v(0, t)}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow T_x(0, t) \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} - M \frac{\partial^2 v(0, t)}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow T(0) \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} - M \frac{\partial^2 v(0, t)}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}$$

(δ₂) συγκεντρωμένη μάζα M στο $x = L$:

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow T_y(L, t) + M \frac{\partial^2 v(L, t)}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow T_x(L, t) \frac{\partial v(L, t)}{\partial x} + M \frac{\partial^2 v(L, t)}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow T(L) \frac{\partial v(L, t)}{\partial x} + M \frac{\partial^2 v(L, t)}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}$$



Σχήμα 6: Χορδή με συγκεντρωμένη μάζα M (α) στο άκρο $x=0$ και (β) στο άκρο $x=L$

Αξίζει να σημειωθεί ότι για $M = 0$ η παραπάνω οριακή συνθήκη γίνεται $\frac{\partial v(0,t)}{\partial x} = 0$ ή $\frac{\partial v(L,t)}{\partial x} = 0$, όπως δηλαδή στο ελεύθερο άκρο.

2.5. Ειδικές περιπτώσεις της ΜΔΕ 2^{ης} τάξης

Η εξίσωση κίνησης της χορδής μπορεί να απλοποιηθεί αρκετά σε κάποιες περιπτώσεις. Για παράδειγμα, αν η χορδή κάνει ελεύθερη ταλάντωση, δηλαδή η εξωτερική δύναμη $F(x, t)$ είναι μηδέν, τότε η (1.2) γίνεται:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T(x) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right) = m(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} \quad (1.5)$$

Αν επιπλέον η χορδή είναι ομογενής, έχει δηλαδή σταθερή συνάρτηση κατανομής μάζας $m(x) = m$ και τεντώνεται με σταθερή δύναμη $T(x) = T$, τότε η εξίσωση (1.5) γίνεται:

$$\begin{aligned} T \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} &= m \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = \frac{m}{T} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2}, \quad c = \sqrt{\frac{T}{m}} \end{aligned} \quad (1.6)$$

2.6. Ελεύθερη ταλάντωση χορδής με απλές οριακές συνθήκες

2.6.1. Το πρόβλημα ιδιοτιμών για τις εγκάρσιες ταλαντώσεις τεντωμένης χορδής με απλές οριακές συνθήκες

Έστω η εξίσωση κύματος (1.1):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[A(x) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right] + F(x, t) = B(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

Υποτίθεται ότι $F(x, t) = 0$, δηλαδή ελεύθερη ταλάντωση. Άρα η (1.1) γίνεται η ομογενής διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[A(x) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right] = B(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2}, \quad 0 \leq x \leq L \quad (1.7)$$

Οι δυνατοί συνδυασμοί απλών οριακών συνθηκών στα άκρα του συστήματος είναι οι εξής:

$$\begin{cases} v(0, t) = 0 \\ v(L, t) = 0 \end{cases} \quad (1.8.a)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = 0 \\ v(L, t) = 0 \end{cases} \quad (1.8.b)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v(L, t)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (1.8.c)$$

$$\begin{cases} v(0, t) = 0 \\ \frac{\partial v(L, t)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (1.8.d)$$

Η εξίσωση (1.7) μαζί με ένα ζεύγος απλών οριακών συνθηκών από τα (1.8) αποτελούν το πρόβλημα ιδιοτιμών ή πρόβλημα της ελεύθερης ταλάντωσης.

Για την επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών, αναζητείται σύγχρονη κίνηση, δηλαδή μια λύση της μορφής:

$$v(x, t) = \varphi(x)f(t) \quad (1.9)$$

Όπου $\varphi(x)$ ένα σταθερό (ανεξάρτητο του χρόνου) σχήμα σύγχρονης ταλάντωσης και $f(t)$ μια συνάρτηση του χρόνου.

Αντικατάσταση της λύσης (1.9) στην αρχική διαφορική εξίσωση (1.7) δίνει:

$$\begin{aligned} f(t) \frac{d}{dx} \left[A(x) \frac{d\varphi(x)}{dx} \right] &= \ddot{f}(t) B(x) \varphi(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} &= \frac{\frac{d}{dx} \left[A(x) \frac{d\varphi(x)}{dx} \right]}{B(x) \varphi(x)} \end{aligned}$$

Όπου το πρώτο μέλος είναι ανεξάρτητο του x και το δεύτερο μέρος ανεξάρτητο του t . Έστω

$$\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = \frac{\frac{\partial}{\partial x} \left[A(x) \frac{d\varphi(x)}{dx} \right]}{B(x) \varphi(x)} = -\omega^2$$

Προκύπτουν οι διαφορικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} \ddot{f}(t) + \omega^2 f(t) = 0, & t \geq 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[A(x) \frac{d\varphi(x)}{dx} \right] + \omega^2 B(x) \varphi(x) = 0, & 0 \leq x \leq L \end{cases} \quad \begin{matrix} (1.10.a) \\ (1.10.b) \end{matrix}$$

Αν οι οριακές συνθήκες (1.8) αντικατασταθούν στη λύση (1.9) δίνουν τις εξής σχέσεις:

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \varphi(L) = 0 \end{cases} \quad (1.11.a)$$

$$\begin{cases} \varphi'(0) = 0 \\ \varphi(L) = 0 \end{cases} \quad (1.11.b)$$

$$\begin{cases} \varphi'(0) = 0 \\ \varphi'(L) = 0 \end{cases} \quad (1.11.c)$$

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \varphi'(L) = 0 \end{cases} \quad (1.12.d)$$

Το πρόβλημα της εξίσωσης (1.10b) μαζί με ένα ζεύγος από τις παραπάνω οριακές συνθήκες (1.11) είναι ένα πρόβλημα τύπου *Sturm - Liouville*.

Η μορφή της λύσης της εξίσωσης (1.10a) είναι

$$f(t) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) \quad (1.12.a)$$

$$\text{ή} \quad f(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \quad (1.12.b)$$

$$\text{ή} \quad f(t) = C \cos(\omega t - \varphi) \quad (1.12.c)$$

Οι σταθερές A_1, A_2, C_1, C_2 και C προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Και οι τρεις παραπάνω λύσεις, (1.12a), (1.12b) και (1.12c), είναι ισοδύναμες. Επιλέγεται η λύση (1.12a).

Έστω

$$\varphi(x) = c_1 \varphi_1(x, \omega) + c_2 \varphi_2(x, \omega) \quad (1.13)$$

η λύση της εξίσωσης (1.10b), όπου $\varphi_1(x, \omega)$ και $\varphi_2(x, \omega)$ δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της.

Αντικατάσταση της (1.13) στις οριακές συνθήκες (1.11) δίνει σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:

$$\begin{cases} c_1\varphi_1(0, \omega) + c_2\varphi_2(0, \omega) = 0 \\ c_1\varphi_1(L, \omega) + c_2\varphi_2(L, \omega) = 0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} \varphi_1(0, \omega) & \varphi_2(0, \omega) \\ \varphi_1(L, \omega) & \varphi_2(L, \omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1\varphi_1'(0, \omega) + c_2\varphi_2'(0, \omega) = 0 \\ c_1\varphi_1(L, \omega) + c_2\varphi_2(L, \omega) = 0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} \varphi_1'(0, \omega) & \varphi_2'(0, \omega) \\ \varphi_1(L, \omega) & \varphi_2(L, \omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1\varphi_1'(0, \omega) + c_2\varphi_2'(0, \omega) = 0 \\ c_1\varphi_1'(L, \omega) + c_2\varphi_2'(L, \omega) = 0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} \varphi_1'(0, \omega) & \varphi_2'(0, \omega) \\ \varphi_1'(L, \omega) & \varphi_2'(L, \omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1\varphi_1(0, \omega) + c_2\varphi_2(0, \omega) = 0 \\ c_1\varphi_1'(L, \omega) + c_2\varphi_2'(L, \omega) = 0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} \varphi_1(0, \omega) & \varphi_2(0, \omega) \\ \varphi_1'(L, \omega) & \varphi_2'(L, \omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Για να λυθούν οι παραπάνω εξισώσεις πρέπει να μηδενιστούν οι αντίστοιχες ορίζουσες, δηλαδή:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(0, \omega) & \varphi_2(0, \omega) \\ \varphi_1(L, \omega) & \varphi_2(L, \omega) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \varphi_1'(0, \omega) & \varphi_2'(0, \omega) \\ \varphi_1(L, \omega) & \varphi_2(L, \omega) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \varphi_1'(0, \omega) & \varphi_2'(0, \omega) \\ \varphi_1'(L, \omega) & \varphi_2'(L, \omega) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(0, \omega) & \varphi_2(0, \omega) \\ \varphi_1'(L, \omega) & \varphi_2'(L, \omega) \end{vmatrix} = 0$$

Από τις εξισώσεις (1.15) προκύπτουν οι λύσεις ω_i , $i = 1, 2, 3 \dots$, δηλαδή οι *ιδιοσυχνότητες*. Αυτές είναι άπειρες τον αριθμό και ισχύει: $0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 \dots$. Η ιδιοσυχνότητα ω_1 ονομάζεται *θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα*.

Γνωρίζοντας τις ιδιοσυχνότητες, μπορούν από τα συστήματα εξισώσεων (1.14) και με τη βοήθεια της συνθήκης ότι ο λόγος δύο οποιωνδήποτε συντελεστών c_{1i} και c_{2i} είναι σταθερός, να υπολογιστούν οι συντελεστές αυτοί. Επομένως, γνωρίζοντας τους συντελεστές c_{1i} και c_{2i} , η (1.13) παρέχει τις αντίστοιχες ιδιομορφές $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, 3 \dots$. Προφανώς και αυτές είναι άπειρες και η γενική τους μορφή είναι:

$$\varphi_i(x) = c_{1i}\varphi_1(x, \omega_i) + c_{2i}\varphi_2(x, \omega_i), \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (1.16)$$

Άρα στη θεμελιώδη ιδιοσυχνότητα ω_1 αντιστοιχεί η ιδιομορφή $\varphi_1(x)$, στην ιδιοσυχνότητα ω_2 αντιστοιχεί η ιδιομορφή $\varphi_2(x)$, κ.ο.κ.

Οι ιδιομορφές $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, 3 \dots$ δεν είναι μοναδικά καθορισμένες, επειδή προκύπτουν από την επίλυση απροσδιόριστου γραμμικού αλγεβρικού συστήματος.

Από τη συνθήκη κανονικοποίησης:

$$\int_0^L B(x)\varphi_i^2(x)dx = 1, \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (1.17)$$

ρυθμίζονται κατάλληλα οι συντελεστές c_{1i} και c_{2i} και οι μοναδικές ιδιομορφές $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, 3 \dots$ που ικανοποιούν τη συνθήκη κανονικοποίησης ονομάζονται *κανονικοποιημένες ιδιομορφές (normal modes)*.

Η λύση του προβλήματος ιδιοτιμών βρίσκεται με αντικατάσταση των $\varphi_i(x)$ στη λύση (1.9) που είχε αρχικά υποτεθεί.

Πρώτα αντικαθίστανται οι ιδιοσυχνότητες ω_i στην (1.12.a), οπότε διατυπώνονται οι συναρτήσεις του χρόνου:

$$f_i(t) = A_{1i} \cos(\omega_i t) + A_{2i} \sin(\omega_i t), \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (1.18)$$

Οι συντελεστές A_{1i} και A_{2i} υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Επομένως, με αντικατάσταση των $\varphi_i(x)$ και των $f_i(x)$ στην (1.9), προκύπτει η λύση της μορφής:

$$v_i(x, t) = \varphi_i(x)[A_{1i} \cos(\omega_i t) + A_{2i} \sin(\omega_i t)], \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (1.19)$$

Η παραπάνω είναι επιμέρους λύση της ελεύθερης ταλάντωσης και του αρχικού προβλήματος ιδιοτιμών. Η γενική λύση της ελεύθερης ταλάντωσης είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των επιμέρους λύσεων, είναι δηλαδή της μορφής:

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x)f_i(t) \quad (1.20)$$

2.6.2. Ορθογωνιότητα και ορθοκανονικότητα των κανονικών μορφών για τις εγκάρσιες ταλαντώσεις τεντωμένης χορδής με απλές οριακές συνθήκες

Έστω $\omega_i, \varphi_i(x)$ και $\omega_j, \varphi_j(x)$ δύο λύσεις του προβλήματος ιδιοτιμών της εξίσωσης (1.10b) με οριακές συνθήκες κάποια από τις (1.11). Αφού οι $\omega_i, \varphi_i(x)$ και $\omega_j, \varphi_j(x)$ είναι λύσεις της εξίσωσης (1.10b) ισχύει:

$$\frac{d}{dx} [A(x)\varphi'_i(x)] + \omega_i^2 B(x)\varphi_i(x) = 0 \quad (1.21.a)$$

και
$$\frac{d}{dx} [A(x)\varphi'_j(x)] + \omega_j^2 B(x)\varphi_j(x) = 0 \quad (1.21.b)$$

Αν πολλαπλασιαστεί η (1.21.a) με $\varphi_j(x)$ και η (1.21.b) με $\varphi_i(x)$ και στη συνέχεια αφαιρεθούν κατά μέλη, προκύπτει:

$$\frac{d}{dx} [A(x)\varphi'_i(x)]\varphi_j(x) - \frac{d}{dx} [A(x)\varphi'_j(x)]\varphi_i(x) + (\omega_i^2 - \omega_j^2)B(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x) = 0$$

Με ολοκλήρωση από 0 έως L :

$$\int_0^L \left\{ \frac{d}{dx} [A(x)\varphi'_i(x)]\varphi_j(x) - \frac{d}{dx} [A(x)\varphi'_j(x)]\varphi_i(x) \right\} dx + (\omega_i^2 - \omega_j^2) \int_0^L B(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x) dx = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & A(x)\varphi'_i(x)\varphi_j(x) \Big|_0^L - A(x)\varphi'_j(x)\varphi_i(x) \Big|_0^L - \\ & - \int_0^L A(x)[\varphi'_i(x)\varphi'_j(x) - \varphi'_j(x)\varphi'_i(x)] dx + \\ & + (\omega_i^2 - \omega_j^2) \int_0^L B(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x) dx = 0 \end{aligned}$$

Από τις οριακές συνθήκες μηδενίζονται οι δύο πρώτοι όροι. Επίσης, μηδενικός είναι και ο τρίτος όρος. Άρα μένει μόνο το εξής:

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \int_0^L B(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x) dx = 0$$

Όμως, αν $i \neq j$, είναι $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$. Άρα:

$$\int_0^L B(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \dots, i \neq j$$

η οποία με τη βοήθεια της εξίσωσης κανονικοποίησης (1.17) γράφεται:

$$\int_0^L B(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \dots^4 \quad (1.22)$$

Η τελευταία είναι η συνθήκη ορθογωνιότητας ως προς την κατανομή της μάζας $B(x)$.

Πολλαπλασιάζοντας μία από τις εξισώσεις (1.21) με $\varphi_j(x)$ ή $\varphi_i(x)$ αντίστοιχα, (έστω την (1.21.a) με $\varphi_j(x)$) ολοκληρώνοντας από 0 έως L και με τη βοήθεια της (1.22):

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{d}{dx} [A(x)\varphi'_i(x)]\varphi_j(x)dx + \omega_i^2 \int_0^L B(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx &= 0^5 \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_0^L \frac{d}{dx} [A(x)\varphi'_i(x)]\varphi_j(x)dx + \omega_i^2 \delta_{ij} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_0^L \frac{d}{dx} [A(x)\varphi'_i(x)]\varphi_j(x)dx = -\omega_i^2 \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \dots & \quad (1.23) \end{aligned}$$

Η τελευταία είναι η συνθήκη ορθογωνιότητας ως προς την κατανομή της ακαμψίας $A(x)$.

⁴ Είναι $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{αν } i \neq j \\ 1 & \text{αν } i = j \end{cases}$

⁵ Σύμφωνα με το θεώρημα αναπτύγματος, κάθε συνάρτηση $g(x), 0 \leq x \leq L$, που ικανοποιεί τις δεδομένες οριακές συνθήκες μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x)$$

όπου $\varphi_i(x)$ οι κανονικές συντεταγμένες και $c_i = \int_0^L B(x)\varphi_i(x)\varphi_i(x)dx$ οι φυσικές συντεταγμένες. Με χρήση της 2^{ης} συνθήκης ορθογωνιότητας αποδεικνύεται ότι:

$$\int_0^L B(x)\varphi_i(x)\varphi_i(x)dx = \delta_{ij}$$

2.7. Επίλυση του προβλήματος των εγκάρσιων ταλαντώσεων χορδής με απλές οριακές συνθήκες με τη μέθοδο των κανονικών μορφών

Το γενικό πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[A(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] + F(x, t) = B(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

με αρχικές συνθήκες

$$v(x, 0) = g(x) \quad (1.24.a)$$

$$\frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = h(x) \quad (1.24.b)$$

και οριακές συνθήκες ένα από τα ζεύγη (1.8).

Έχοντας λύσει το πρόβλημα της ελεύθερης ταλάντωσης (πρόβλημα ιδιοτιμών), είναι γνωστές οι ιδιοσυχνότητες $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \dots$ και οι αντίστοιχες κανονικοποιημένες ιδιομορφές $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots$

Υποτίθεται ότι η μερική διαφορική εξίσωση του προβλήματος έχει λύση της μορφής

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} n_i(t) \varphi_i(x) \quad (1.25)$$

όπου $n_i(t)$ είναι οι κανονικές συντεταγμένες.

Αντικατάσταση της (1.25) στην εξίσωση (1.1) δίνει:

$$B(x) \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{n}_i(t) \varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} n_i(t) \frac{d}{dx} \left[A(x) \frac{d\varphi_i(x)}{dx} \right] + F(x, t)$$

Η παραπάνω σχέση πολλαπλασιάζεται με $\varphi_j(x)$ και ολοκληρούμενη από 0 έως L , γίνεται:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \ddot{n}_i(t) \int_0^L B(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx &= \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} n_i(t) \int_0^L \frac{d}{dx} \left[A(x) \frac{d\varphi_i(x)}{dx} \right] \varphi_j(x) dx \\
&+ \int_0^L F(x,t) \varphi_j(x) dx, \quad j = 1,2,3 \dots
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Από τις συνθήκες ορθογωνιότητας (1.22) και (1.23) η τελευταία γίνεται:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ddot{n}_i(t) \delta_{ij} + \sum_{i=1}^{\infty} n_i(t) \omega_i^2 \delta_{ij} = \int_0^L F(x,t) \varphi_j(x) dx, \quad j = 1,2,3 \dots \tag{1.27}$$

Τα ολοκληρώματα

$$N_j(t) = \int_0^L F(x,t) \varphi_j(x) dx, \quad j = 1,2,3 \dots \tag{1.28}$$

είναι τα γενικευμένα φορτία που αντιστοιχούν στις κανονικές συντεταγμένες $n_j(t)$.

Άρα η (1.27) γράφεται:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ddot{n}_i(t) \delta_{ij} + \sum_{i=1}^{\infty} n_i(t) \omega_i^2 \delta_{ij} = N_j(t), \quad j = 1,2,3 \dots \tag{1.29}$$

Για κάποιο j :

$$\ddot{n}_j(t) + \omega_j^2 n_j(t) = N_j(t)$$

Οι παραπάνω αποτελούν ένα σύνολο ασύζευκτων διαφορικών εξισώσεων που η καθεμιά τους έχει λύση:

$$n_i(t) = n_i(0) \cos(\omega_i t) + \frac{\dot{n}_i(0)}{\omega_i} \sin(\omega_i t) + \frac{1}{\omega_i} \int_0^t N_i(\tau) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau \tag{1.30}$$

Οι δύο πρώτοι όροι είναι η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης και περιγράφουν την απόκριση λόγω των αρχικών συνθηκών. Ο τρίτος όρος είναι η ειδική λύση, δηλαδή η απόκριση του συστήματος από την ηρεμία, και ονομάζεται *ολοκλήρωμα Duhamel*.

Ο υπολογισμός των αρχικών συνθηκών $n_i(0)$ και $\dot{n}_i(0)$ γίνεται ως εξής:

Αρχικά γίνεται αντικατάσταση της υποτιθέμενης λύσης (1.25) στις αρχικές συνθήκες (1.24):

$$v(x, 0) = \sum_{i=1}^{\infty} n_i(0)\varphi_i(x) = g(x)$$

$$\frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{\infty} \dot{n}_i(0)\varphi_i(x) = h(x)$$

Στη συνέχεια γίνεται πολλαπλασιασμός με $B(x)\varphi_j(x)$ και ολοκλήρωση από 0 έως L :

$$\sum_{i=1}^{\infty} n_i(0) \int_0^L B(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \int_0^L g(x)B(x)\varphi_j(x)dx, \quad j = 1,2,3 \dots$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \dot{n}_i(0) \int_0^L B(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \int_0^L h(x)B(x)\varphi_j(x)dx, \quad j = 1,2,3 \dots$$

Επειδή όμως $\int_0^L B(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \delta_{ij}$ οι παραπάνω γίνονται:

$$n_i(0) = \int_0^L g(x)B(x)\varphi_j(x)dx, \quad j = 1,2,3 \dots \quad (1.31.a)$$

$$\dot{n}_i(0) = \int_0^L h(x)B(x)\varphi_j(x)dx, \quad j = 1,2,3 \dots \quad (1.31.b)$$

Άρα η λύση (1.25) με βάση τα παραπάνω γίνεται:

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[n_i(0) \cos(\omega_i t) + \frac{\dot{n}_i(0)}{\omega_i} \sin(\omega_i t) + \frac{1}{\omega_i} \int_0^t N_i(\tau) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau \right] \varphi_i(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_0^L g(x)B(x)\varphi_j(x)dx \cos(\omega_i t) + \frac{\int_0^L h(x)B(x)\varphi_j(x)dx}{\omega_i} \sin(\omega_i t) + \frac{1}{\omega_i} \int_0^t N_i(\tau) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau \right] \varphi_i(x) \quad (1.32)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι στην **ειδική περίπτωση όπου για $t = 0$ το σύστημα ηρεμεί**, δηλαδή οι αρχικές συνθήκες (1.24) είναι:

$$v(x, t) = 0$$

$$\left. \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

τότε ακολουθώντας την ίδια διαδικασία,

$$\begin{aligned} \begin{cases} v(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} n_j(0) \cdot \varphi_j(x) = 0 \\ \sum_{j=1}^{\infty} \dot{n}_j(0) \cdot \varphi_j(x) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\cdot B(x)\varphi_j(x), \text{ ολοκλ. από } 0 \text{ έως } L} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} n_j(0) \int_0^L B(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0, & i, j = 1, 2, 3 \dots \\ \sum_{j=1}^{\infty} \dot{n}_j(0) \int_0^L B(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0, & i, j = 1, 2, 3 \dots \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} n_j(0) \delta_{ij} = 0, & i, j = 1, 2, 3 \dots \\ \sum_{j=1}^{\infty} \dot{n}_j(0) \delta_{ij} = 0, & i, j = 1, 2, 3 \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_j(0) = 0, & j = 1, 2, 3 \dots \\ \dot{n}_j(0) = 0, & j = 1, 2, 3 \dots \end{cases} \end{aligned}$$

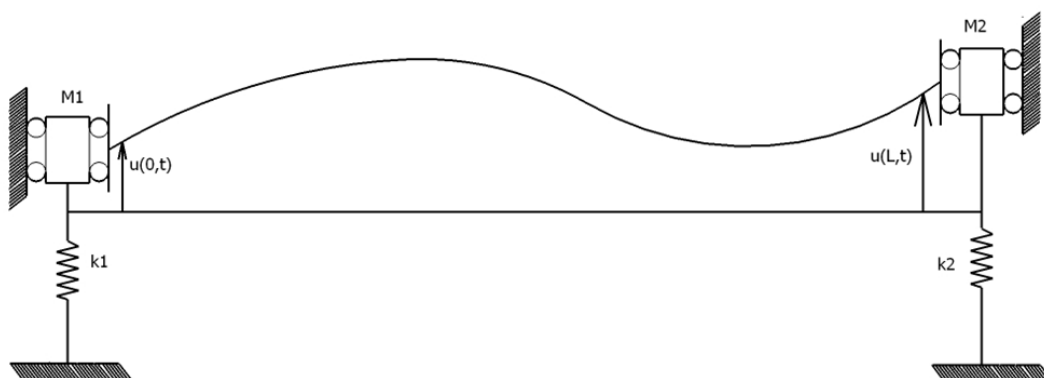
Επομένως, με τα παραπάνω αποτελέσματα για τις αρχικές συνθήκες $n_j(0)$ και $\dot{n}_j(0)$, $j = 1, 2, 3 \dots$ η λύση περιορίζεται μόνο στον όρο που περιέχει το ολοκλήρωμα Duhamel:

$$n_j(t) = \frac{1}{\omega_j} \int_0^t N_j(t) \sin[\omega_j(t - \tau)] d\tau, \quad j = 1, 2, 3 \dots$$

2.8. Ελεύθερη ταλάντωση χορδής με σύνθετες οριακές συνθήκες

2.8.1. Το πρόβλημα ιδιοτιμών για τις εγκάρσιες ταλαντώσεις τεντωμένης χορδής με σύνθετες οριακές συνθήκες

Για ευκολία, γίνεται ομαδοποίηση των σύνθετων οριακών συνθηκών σε ένα σχήμα.



Σχήμα 7: Ενοποίηση των σύνθετων οριακών συνθηκών στην εγκάρσια ταλάντωση χορδής. Στο άκρο $x=0$ υπάρχει συγκεντρωμένη μάζα M_1 και ελατήριο σταθεράς k_1 , ενώ στο άκρο $x=L$ συγκεντρωμένη μάζα M_2 και ελατήριο σταθεράς k_2 .

Όμοια με προηγουμένως, θεωρείται το πρόβλημα της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[A(x) \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right] = B(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}, \quad 0 \leq x \leq L \quad (1.7)$$

με τις σύνθετες οριακές συνθήκες

$$A(0) \frac{\partial v(0,t)}{\partial x} - k_1 v(0,t) - M_1 \frac{\partial^2 v(0,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.33.a)$$

$$A(L) \frac{\partial v(L, t)}{\partial x} - k_2 v(0, t) - M_2 \frac{\partial^2 v(L, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.33.b)$$

Αναζητείται σύγχρονη κίνηση, δηλαδή μια λύση της μορφής:

$$v(x, t) = \varphi(x)f(t) \quad (1.9)$$

Όπως και στην περίπτωση των απλών οριακών συνθηκών, γίνεται αντικατάσταση της υποτιθέμενης λύσης (1.9) στην αρχική εξίσωση (1.7) και θεωρείται το μέγεθος ω . Έτσι προκύπτουν ξανά οι σχέσεις (1.10):

$$\begin{cases} \ddot{f}(t) + \omega^2 f(t) = 0, & t \geq 0 \\ \frac{d}{dx} \left[A(x) \frac{d\varphi(x)}{dx} \right] + \omega^2 B(x) \varphi(x) = 0, & 0 \leq x \leq L \end{cases} \quad (1.10.a)$$

$$(1.10.b)$$

Αν οι οριακές συνθήκες αντικατασταθούν στη λύση δίνουν τις εξής σχέσεις:

$$A(0)\varphi'(0) - (k_1 - \omega^2 M_1)\varphi(0) = 0 \quad (1.34.a)$$

$$A(L)\varphi'(L) - (k_2 - \omega^2 M_2)\varphi(L) = 0 \quad (1.34.b)$$

Έστω γενική λύση:

$$\varphi(x) = c_1 \varphi_1(x, \omega) + c_2 \varphi_2(x, \omega) \quad (1.13)$$

Αντικατάσταση της παραπάνω γενικής λύσης (1.13) στις οριακές συνθήκες (1.34) δίνει το σύστημα:

$$\begin{cases} A(0)[c_1 \varphi_1'(0, \omega) + c_2 \varphi_2'(0, \omega)] - (k_1 - \omega^2 M_1)[c_1 \varphi_1(0, \omega) + c_2 \varphi_2(0, \omega)] = 0 \\ A(L)[c_1 \varphi_1'(L, \omega) + c_2 \varphi_2'(L, \omega)] - (k_2 - \omega^2 M_2)[c_1 \varphi_1(L, \omega) + c_2 \varphi_2(L, \omega)] = 0 \end{cases}$$

ή με τη μορφή πινάκων:

$$\begin{bmatrix} A(0)\varphi_1'(0, \omega) - (k_1 - \omega^2 M_1)\varphi_1(0, \omega) & A(0)\varphi_2'(0, \omega) - (k_1 - \omega^2 M_1)\varphi_2(0, \omega) \\ A(L)\varphi_1'(L, \omega) - (k_2 - \omega^2 M_2)\varphi_1(L, \omega) & A(L)\varphi_2'(L, \omega) - (k_2 - \omega^2 M_2)\varphi_2(L, \omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Αναζητείται μη μηδενική λύση του συστήματος, άρα πρέπει να μηδενίζεται η ορίζουσα:

⁶ Παρατηρήσεις για τις τιμές των k_1, k_2, M_1, M_2 :

Αν $M_1 = M_2 = 0$ τότε οι οριακές συνθήκες καταλήγουν σε απλές ως εξής:

- για $k = 0$: $\frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = 0$ ή $\frac{\partial v(L, t)}{\partial x} = 0$, όπως στο ελεύθερο άκρο.
- για $k = \infty$: $v(0, t) = 0$ ή $v(L, t) = 0$, όπως στο σταθερά στερεωμένο άκρο.

$$\begin{vmatrix} A(0)\varphi'_1(0, \omega) - (k_1 - \omega^2 M_1)\varphi_1(0, \omega) & A(0)\varphi'_2(0, \omega) - (k_1 - \omega^2 M_1)\varphi_2(0, \omega) \\ A(L)\varphi'_1(L, \omega) + (k_2 - \omega^2 M_2)\varphi_1(L, \omega) & A(L)\varphi'_2(L, \omega) + (k_2 - \omega^2 M_2)\varphi_2(L, \omega) \end{vmatrix} = 0$$

Από τη λύση της παραπάνω εξίσωσης προκύπτουν οι λύσεις ω_i , $i = 1, 2, 3 \dots$, δηλαδή οι ιδιοσυχνότητες με $0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 \dots$, καθώς επίσης και οι αντίστοιχες ιδιομορφές $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, 3 \dots$, όπως στο προηγούμενο εδάφιο.

Από τη συνθήκη κανονικοποίησης (1.17) ρυθμίζονται κατάλληλα οι συντελεστές c_{1i} και c_{2i} και προκύπτουν οι κανονικοποιημένες ιδιομορφές, δηλαδή οι συναρτήσεις $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, 3 \dots$

Η λύση του προβλήματος ιδιοτιμών βρίσκεται με αντικατάσταση των $\varphi_i(x)$ στην αρχική υπόθεση λύσης (1.9):

$$v_i(x, t) = \varphi_i(x)[A_{1i} \cos(\omega_i t) + A_{2i} \sin(\omega_i t)], \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (1.19)$$

όπου οι $f_i(t) = A_{1i} \cos(\omega_i t) + A_{2i} \sin(\omega_i t)$, $i = 1, 2, 3 \dots$ όπως υπολογίστηκαν προηγουμένως.

Η γενική λύση της ελεύθερης ταλάντωσης είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των επιμέρους λύσεων, είναι δηλαδή της μορφής:

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) f_i(x) \quad (1.20)$$

2.8.2. Ορθογωνιότητα και ορθοκανονικότητα των κανονικών μορφών για το πρόβλημα των εγκαρσίων ταλαντώσεων τεντωμένης χορδής με σύνθετες οριακές συνθήκες

Έστω ω_i , $\varphi_i(x)$ και ω_j , $\varphi_j(x)$ δύο λύσεις του προβλήματος ιδιοτιμών της εξίσωσης (1.10.b) με σύνθετες οριακές συνθήκες μία από τις εξισώσεις (1.33).

Για την εξαγωγή των συνθηκών ορθογωνιότητας των κανονικών μορφών $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, 3 \dots$ ακολουθείται η ίδια διαδικασία με την περίπτωση των απλών οριακών συνθηκών. Αφού οι ω_i , $\varphi_i(x)$ και ω_j , $\varphi_j(x)$ είναι λύσεις του προβλήματος ισχύουν οι σχέσεις (1.21):

$$\frac{\partial}{\partial x} [A(x)\varphi'_i(x)] + \omega_i^2 B(x)\varphi_i(x) = 0 \quad (1.21.a)$$

και

$$\frac{\partial}{\partial x} [A(x)\varphi'_j(x)] + \omega_j^2 B(x)\varphi_j(x) = 0 \quad (1.21.b)$$

Αν πολλαπλασιαστεί η πρώτη σχέση με $\varphi_j(x)$ και η δεύτερη με $\varphi_i(x)$, στη συνέχεια οι δύο σχέσεις αφαιρεθούν κατά μέλη και τέλος ολοκληρωθούν από 0 έως L , προκύπτει:

$$\begin{aligned} & A(L)\varphi'_i(L)\varphi_j(L) - A(0)\varphi'_i(0)\varphi_j(0) - A(L)\varphi'_j(L)\varphi_i(L) + \\ & + A(0)\varphi'_j(0)\varphi_i(0) + (\omega_i^2 - \omega_j^2) \int_0^L B(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0 \end{aligned} \quad (1.35)$$

Οι οριακές συνθήκες δίνουν τις παρακάτω σχέσεις:

$$A(L)\varphi'_i(L) = -(k_2 - \omega_i^2 M_2)\varphi_i(L) \quad (1.36.a)$$

$$A(L)\varphi'_j(L) = -(k_2 - \omega_j^2 M_2)\varphi_j(L) \quad (1.36.b)$$

$$A(0)\varphi'_i(0) = -(k_1 - \omega_i^2 M_1)\varphi_i(0) \quad (1.36.c)$$

$$A(0)\varphi'_j(0) = -(k_1 - \omega_j^2 M_1)\varphi_j(0) \quad (1.36.d)$$

Αν πολλαπλασιαστεί η (1.36.a) με $\varphi_j(L)$ και η (1.36.b) με $\varphi_i(L)$ και στη συνέχεια αφαιρεθούν κατά μέλη, προκύπτει:

$$\begin{aligned} & A(L)\varphi'_i(L)\varphi_j(L) - A(L)\varphi'_j(L)\varphi_i(L) = \\ & = -(k_2 - \omega_i^2 M_2)\varphi_i(L)\varphi_j(L) + (k_2 - \omega_j^2 M_2)\varphi_i(L)\varphi_j(L) \Rightarrow \\ \Rightarrow & A(L)\varphi'_i(L)\varphi_j(L) - A(L)\varphi'_j(L)\varphi_i(L) = M_2(\omega_i^2 - \omega_j^2)\varphi_i(L)\varphi_j(L) \end{aligned} \quad (1.37)$$

Αν πολλαπλασιαστεί η (1.36.c) με $\varphi_j(0)$ και η (1.36.d) με $\varphi_i(0)$ και στη συνέχεια αφαιρεθούν κατά μέλη, προκύπτει:

$$\begin{aligned} & -A(0)\varphi'_i(0)\varphi_j(0) + A(0)\varphi'_j(0)\varphi_i(0) = \\ & = -(k_1 - \omega_i^2 M_1)\varphi_i(0)\varphi_j(0) + (k_1 - \omega_j^2 M_1)\varphi_i(0)\varphi_j(0) \Rightarrow \\ \Rightarrow & -A(0)\varphi'_i(0)\varphi_j(0) + A(0)\varphi'_j(0)\varphi_i(0) = M_1(\omega_i^2 - \omega_j^2)\varphi_i(0)\varphi_j(0) \end{aligned} \quad (1.38)$$

Αντικατάσταση των (1.37) και (1.38) στην εξίσωση (1.35) δίνει:

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2)[M_1\varphi_i(0)\varphi_j(0) + M_2\varphi_i(L)\varphi_j(L) + \int_0^L B(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0$$

Επειδή όμως για $i \neq j$ είναι $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$, η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$\int_0^L B(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx + M_1\varphi_i(0)\varphi_j(0) + M_2\varphi_i(L)\varphi_j(L) = 0,$$

$$i, j = 1, 2, 3 \dots, i \neq j$$

Με τη βοήθεια της συνθήκης κανονικοποίησης (1.22) προκύπτει:

$$\int_0^L B(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx + M_1\varphi_i(0)\varphi_j(0) + M_2\varphi_i(L)\varphi_j(L) = \delta_{ij}, \quad (1.39)$$

$$i, j = 1, 2, 3 \dots$$

που είναι η συνθήκη ορθογωνιότητας ως προς τις κατανομές μάζας και άρα περιέχει μόνο τις μάζες $B(x)$, M_1 και M_2 .

Πολλαπλασιάζοντας μία από τις εξισώσεις (1.21) με $\varphi_j(x)$ ή $\varphi_i(x)$ αντίστοιχα, (έστω την (1.21.a) με $\varphi_j(x)$), ολοκληρώνοντας από 0 έως L και με τη βοήθεια της (1.39):

$$\int_0^L \frac{d}{dx} [A(x)\varphi'_i(x)]\varphi_j(x)dx - \omega_i^2 M_1\varphi_i(0)\varphi_j(0) - \omega_i^2 M_2\varphi_i(L)\varphi_j(L) = \quad (1.40)$$

$$= -\omega_i^2 \delta_{ij}$$

Όμως από τις σύνθετες οριακές συνθήκες ισχύουν οι σχέσεις:

$$\omega_i^2 M_1\varphi_i(0) = k_1\varphi_i(0) - A(0)\varphi'_i(0) \quad (1.41.a)$$

$$\omega_i^2 M_2\varphi_i(L) = k_2\varphi_i(L) + A(L)\varphi'_i(L) \quad (1.41.b)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (1.41.a) με $\varphi_j(0)$ και την (1.41.b) με $\varphi_j(L)$ και αντικαθιστώντας στην (1.40):

$$\int_0^L \frac{d}{dx} [A(x)\varphi'_i(x)]\varphi_j(x)dx - k_1\varphi_i(0)\varphi_j(0) +$$

$$+ A(0)\varphi'_i(0)\varphi_i(0) - k_2\varphi_i(L)\varphi_j(L) - A(L)\varphi'_i(L)\varphi_i(L) = -\omega_i^2 \delta_{ij} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(x)\varphi'_i(x)\varphi_j(x) \Big|_0^L - \int_0^L A(x)\varphi'_i(x)\varphi'_j(x)dx - k_1\varphi_i(0)\varphi_j(0) +$$

$$\begin{aligned}
& +A(0)\varphi'_i(0)\varphi_i(0) - k_2\varphi_i(L)\varphi_j(L) - A(L)\varphi'_i(L)\varphi_i(L) = -\omega_i^2\delta_{ij} \Rightarrow \\
\Rightarrow & A(L)\varphi'_i(L)\varphi_i(L) - A(0)\varphi'_i(0)\varphi_i(0) - \int_0^L A(x)\varphi'_i(x)\varphi'_j(x)dx - \\
& -k_1\varphi_i(0)\varphi_j(0) + A(0)\varphi'_i(0)\varphi_i(0) - k_2\varphi_i(L)\varphi_j(L) - A(L)\varphi'_i(L)\varphi_i(L) = \\
& = -\omega_i^2\delta_{ij} \Rightarrow \\
\Rightarrow & \int_0^L A(x)\varphi'_i(x)\varphi'_j(x)dx + k_1\varphi_i(0)\varphi_j(0) + k_2\varphi_i(L)\varphi_j(L) = \omega_i^2\delta_{ij}, \quad (1.42) \\
& \quad i, j = 1, 2, 3 \dots
\end{aligned}$$

που είναι η συνθήκη ορθογωνιότητας ως προς τις κατανομές ακαμψίας και περιέχει μόνο τις ακαμψίες $A(x)$, k_1 και k_2 .

2.9. Επίλυση του προβλήματος των εγκάρσιων ταλαντώσεων χορδής με σύνθετες οριακές συνθήκες με τη μέθοδο των κανονικών μορφών

Το γενικό πρόβλημα έχει διατυπωθεί. Περιλαμβάνει την εξίσωση (1.1) με αρχικές συνθήκες τις εξισώσεις (1.24) και οριακές συνθήκες τις εξισώσεις (1.33). Ακολουθείται η ίδια ακριβώς διαδικασία με την περίπτωση των απλών οριακών συνθηκών και στην εξίσωση (1.26) αντικαθίστανται οι σύνθετες οριακές συνθήκες. Προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{n}_i(t) M_1 \varphi_i(0) &= \sum_{i=1}^{\infty} n_i(t) [-k_1 \varphi_i(0) + A(0) \varphi'_i(0)] & (1.43.a) \\ \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{n}_i(t) M_2 \varphi_i(L) &= \sum_{i=1}^{\infty} n_i(t) [-k_2 \varphi_i(L) - A(L) \varphi'_i(L)] & (1.43.b) \end{aligned} \right.$$

Πολλαπλασιάζοντας την (1.43.a) με $\varphi_j(0)$ και την (1.43.b) με $\varphi_j(L)$:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{n}_i(t) M_1 \varphi_i(0) \varphi_j(0) &= \sum_{i=1}^{\infty} n_i(t) [-k_1 \varphi_i(0) \varphi_j(0) + A(0) \varphi'_i(0) \varphi_j(0)] \quad (1.44.a) \\ \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{n}_i(t) M_2 \varphi_i(L) \varphi_j(L) &= \sum_{i=1}^{\infty} n_i(t) [-k_2 \varphi_i(L) \varphi_j(L) - A(L) \varphi'_i(L) \varphi_j(L)] \quad (1.44.b) \end{aligned} \right.$$

Πρόσθεση κατά μέλη των εξισώσεων (1.26), (1.44.a) και (1.44.b) δίνει:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{n}_i(t) \left[\int_0^L B(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + M_1 \varphi_i(0) \varphi_j(0) + M_2 \varphi_i(L) \varphi_j(L) \right] &= \\ = \sum_{i=1}^{\infty} n_i(t) \left[\int_0^L \frac{d}{dx} [A(x) \varphi'_i(x)] \varphi_j(x) dx - k_1 \varphi_i(0) \varphi_j(0) + \right. & \\ \left. + A(0) \varphi'_i(0) \varphi_j(0) - k_2 \varphi_i(L) \varphi_j(L) + A(L) \varphi'_i(L) \varphi_j(L) \right] &+ N_j(t), \end{aligned}$$

$j = 1, 2, 3 \dots$

όπου $N_j(t)$ τα γενικευμένα φορτία. Από τις συνθήκες ορθογωνιότητας (1.39) και (1.42) όμως, για κάποιο i :

$$\begin{aligned} \ddot{n}_j(t) &= -\omega_j^2 n_j(t) + N_j(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow \ddot{n}_j(t) + \omega_j^2 n_j(t) &= N_j(t), \quad j = 1, 2, 3 \dots \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό των αρχικών συνθηκών $n_i(0)$ και $\dot{n}_i(0)$ ακολουθείται η ίδια διαδικασία με την περίπτωση των απλών οριακών συνθηκών. Αντικαθίσταται η γενική λύση (1.20) στις σύνθετες οριακές συνθήκες (1.33) και:

$$\left\{ \begin{aligned} v(x, 0) &= \sum_{i=1}^{\infty} n_i(0) \varphi_i(x) = g(x) \quad (1.45.a) \\ \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} &= \sum_{i=1}^{\infty} \dot{n}_i(0) \varphi_i(x) = h(x) \quad (1.45.b) \end{aligned} \right.$$

Πολλαπλασιάζοντας καθεμία από τις τελευταίες με $B(x) \varphi_j(x)$ και ολοκληρώνοντας από 0 έως L :

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} n_i(0) \int_0^L B(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx &= \int_0^L g(x) B(x) \varphi_j(x) dx \quad (1.46.a) \\ \sum_{i=1}^{\infty} \dot{n}_i(0) \int_0^L B(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx &= \int_0^L h(x) B(x) \varphi_j(x) dx \quad (1.46.b) \end{aligned} \right.$$

Οι αρχικές συνθήκες (1.45) για $x = 0$ δίνουν:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} n_i(0)\varphi_i(0) = g(0) \\ \sum_{i=1}^{\infty} \dot{n}_i(0)\varphi_i(0) = h(0) \end{cases} \xrightarrow{\cdot M_1\varphi_j(0)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} n_i(0)M_1\varphi_i(0)\varphi_j(0) = M_1g(0)\varphi_j(0) & (1.47.a) \\ \sum_{i=1}^{\infty} \dot{n}_i(0)M_1\varphi_i(0)\varphi_j(0) = M_1h(0)\varphi_j(0) & (1.47.b) \end{cases}$$

ενώ για $x = L$:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} n_i(0)\varphi_i(L) = g(L) \\ \sum_{i=1}^{\infty} \dot{n}_i(0)\varphi_i(L) = h(L) \end{cases} \xrightarrow{\cdot M_2\varphi_j(L)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} n_i(0)M_2\varphi_i(L)\varphi_j(L) = M_2g(L)\varphi_j(L) & (1.47.c) \\ \sum_{i=1}^{\infty} \dot{n}_i(0)M_2\varphi_i(L)\varphi_j(L) = M_2h(L)\varphi_j(L) & (1.47.d) \end{cases}$$

Αθροίζοντας κατά μέλη τις εξισώσεις (1.46.a), (1.47.a) και (1.47.c):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} n_i(0) \left[\int_0^L B(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx + M_1\varphi_i(0)\varphi_j(0) + M_2\varphi_i(L)\varphi_j(L) \right] = \\ = \int_0^L g(x)B(x)\varphi_j(x)dx + M_1g(0)\varphi_j(0) + M_2g(L)\varphi_j(L) \end{aligned}$$

Από την εξίσωση (1.39) όμως για κάποιο $j = 1,2,3 \dots$:

$$n_j(0) = \int_0^L g(x)B(x)\varphi_j(x)dx + M_1g(0)\varphi_j(0) + M_2g(L)\varphi_j(L), \quad j = 1,2,3 \dots$$

Όμοια για τις εξισώσεις (1.46.b), (1.47.b) και (1.47.d):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \dot{n}_i(0) \left[\int_0^L B(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + M_1 \varphi_i(0) \varphi_j(0) + M_2 \varphi_i(L) \varphi_j(L) \right] = \\ = \int_0^L h(x) B(x) \varphi_j(x) dx + M_1 h(0) \varphi_j(0) + M_2 h(L) \varphi_j(L) \end{aligned}$$

Και με τη βοήθεια της (1.39) για κάποιο $j = 1, 2, 3 \dots$:

$$\Rightarrow \dot{n}_j(0) = \int_0^L h(x) B(x) \varphi_j(x) dx + M_1 h(0) \varphi_j(0) + M_2 h(L) \varphi_j(L)$$

3. Η μερική διαφορική εξίσωση κίνησης 4^{ης} τάξης

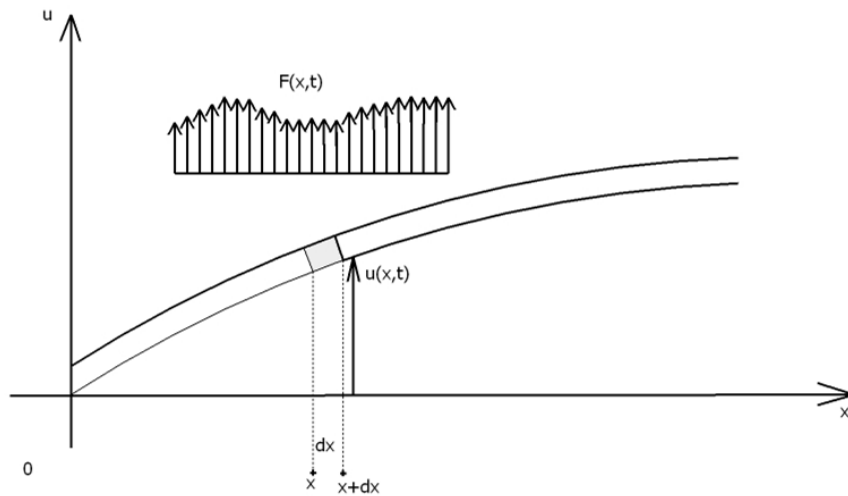
3.1. Γενική διατύπωση

Έστω δοκός μήκους L , μέτρου ελαστικότητας E , που έχει συνάρτηση κατανομής μάζας $m(x)$ και ροπή αδράνειας ανά μονάδα μήκους $I(x)$. Όταν στη δοκό ασκηθεί εξωτερικό κατανεμημένο φορτίο $F(x, t)$ κάθετο στη διεύθυνσή της, τότε αυτή εξαναγκάζεται σε ταλάντωση. Αν $u(x, t)$ η απομάκρυνση του σημείου x της δοκού από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή t , τότε η εξίσωση κίνησης της δοκού είναι η παρακάτω ΜΔΕ 4^{ης} τάξης (εξίσωση δοκού):

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] + F(x, t) = m(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (1.48)$$

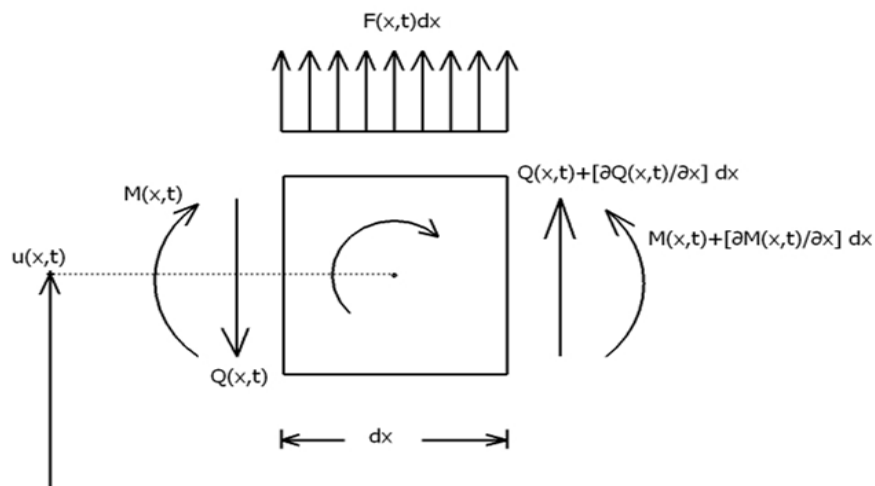
Η ΜΔΕ 4^{ης} τάξης (1.48) περιγράφει τις εγκάρσιες ταλαντώσεις καμπτόμενης δοκού.

3.2. Εξαγωγή της ΜΔΕ 4ης τάξης για τις εγκάρσιες ταλαντώσεις δοκού με το 2^ο νόμο του Νεύτωνα



Σχήμα 8: Ταλάντωση δοκού υπό την επίδραση εξωτερικού κατανεμημένου φορτίου $F(x,t)$

Έστω το τμήμα πάχους dx της δοκού με κατανομή μάζας $dm(x) = m(x)dx$. Στο τμήμα αυτό ασκείται κατακόρυφα εξωτερικό φορτίο $dF(x,t) = F(x,t)dx$. Υποτίθεται ότι το εξωτερικό φορτίο ασκείται προς τα πάνω, επομένως οι δυνάμεις και οι ροπές στο τμήμα πάχους dx διαμορφώνονται όπως στο σχήμα 9.



Σχήμα 9: Δυνάμεις και ροπές που ασκούνται στο στοιχειώδες τμήμα μήκους dx της δοκού

Το τμήμα dx δεν κινείται κατά την οριζόντια διεύθυνση. Ταλαντώνεται όμως κατακόρυφα και ισχύουν ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα για τις δυνάμεις του κατακόρυφου άξονα και η εξίσωση ισορροπίας των ροπών.

Εφαρμογή του 2^{ου} νόμου του Νεύτωνα στον κατακόρυφο άξονα:

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= m(x)dx \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow F(x,t)dx - Q(x,t) + Q(x,t) + \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} dx &= m(x)dx \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + F(x,t) &= m(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.49)$$

Έστω K το γεωμετρικό κέντρο του τμήματος πάχους dx . Ακόμη, είναι $\rho I(x)dx \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right)$ η αδράνειά του για την περιστροφή.

Εξίσωση ισορροπίας των ροπών ως προς το σημείο K :

$$\begin{aligned} \Sigma M_K &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -F(x,t)dx \frac{dx}{2} - M(x,t) + M(x,t) + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} dx + \\ + \left[Q(x,t) + \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} dx \right] \frac{dx}{2} + Q(x,t) \frac{dx}{2} - \rho I(x)dx \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Οι όροι που περιέχουν δεύτερης τάξης διαφορικά μηδενίζονται γιατί υποτίθεται ότι η δοκός κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Άρα:

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = -Q(x,t) + \rho I(x) \frac{\partial^3 v(x,t)}{\partial x \partial t^2}$$

Ο όρος $\rho I(x) \frac{\partial^3 v(x,t)}{\partial x \partial t^2}$ μπορεί να θεωρηθεί αμελητέος γιατί περιέχει τρίτης τάξης διαφορικό. Άρα η εξίσωση των ροπών γίνεται:

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = -Q(x,t) \quad (1.50)$$

Από την καταστατική εξίσωση της δοκού (εξίσωση Euler – Bernoulli), ισχύει ότι:

$$M(x, t) = EI(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}$$

Και η (1.50) γίνεται:

$$Q(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \left[EI(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right] \quad (1.51)$$

Αντικατάσταση της εξίσωσης (1.50) στην (1.49) οδηγεί στη *μερική διαφορική εξίσωση καμπτικών ταλαντώσεων*, δηλαδή στην (1.48):

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right] + F(x, t) = m(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} \quad (1.48)$$

3.3. Περιγραφή των όρων της ΜΔΕ 4^{ης} τάξης για τις εγκάρσιες ταλαντώσεις δοκού

Σε πλήρη αντιστοιχία με τη ΜΔΕ 2^{ης} τάξης, στην εξίσωση (1.48) ο πρώτος όρος, $-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right]$, εκφράζει την επίδραση της *ακαμψίας* στην εγκάρσια καταναμημένη δύναμη, ο δεύτερος όρος, $F(x, t)$, την *εξωτερική καταναμημένη δύναμη* και ο τρίτος, $m(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2}$, την επίδραση της *μάζας* στην εγκάρσια καταναμημένη δύναμη, δηλαδή την *αδράνεια*.

3.4. Οριακές συνθήκες του προβλήματος των εγκάρσιων ταλαντώσεων δοκού

Οι οριακές συνθήκες είναι οι συνθήκες που ισχύουν στα άκρα της δοκού, ανάλογα με το πώς αυτά είναι στερεωμένα. Όπως και στη χορδή, και εδώ υπάρχουν *απλές* και *σύνθετες οριακές συνθήκες*.

3.4.1. Απλές οριακές συνθήκες του προβλήματος των εγκάρσιων ταλαντώσεων δοκού

Οι απλές οριακές συνθήκες είναι:

(α) πάκτωση

(α₁) πάκτωση στο $x = 0$:

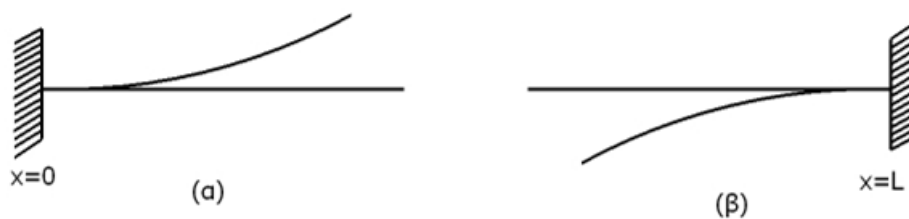
$$v(0, t) = 0 \quad (1.52.a)$$

και
$$\frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (1.52.b)$$

(α₂) πάκτωση στο $x = L$:

$$v(L, t) = 0 \quad (1.52.c)$$

και
$$\frac{\partial v(L, t)}{\partial x} = 0 \quad (1.52.d)$$



Σχήμα 10: Δοκός πακτωμένη (α) στο άκρο $x=0$ και (β) στο $x=L$

(β) Άρθρωση ή κύλιση

(β₁) άρθρωση ή κύλιση στο $x = 0$:

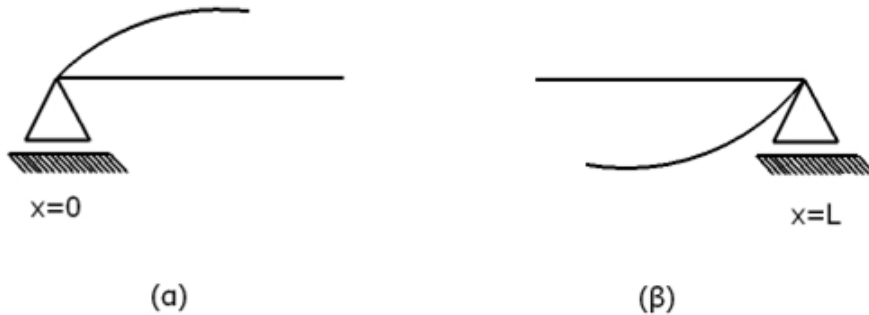
$$v(0, t) = 0 \quad (1.52.e)$$

και
$$M(0, t) = 0 \Rightarrow EI(0) \frac{\partial^2 v(0, t)}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 v(0, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (1.52.f)$$

(β₂) άρθρωση ή κύλιση στο $x = L$:

$$v(L, t) = 0 \quad (1.52.g)$$

και
$$M(L, t) = 0 \Rightarrow EI(L) \frac{\partial^2 v(L, t)}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 v(L, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (1.52.h)$$



Σχήμα 11: Άρθρωση ή κύλιση (α) στο άκρο $x=0$ της δοκού και (β) στο άκρο $x=L$

(γ) ελεύθερο άκρο δοκού

(γ₁) ελεύθερο άκρο $x = 0$:

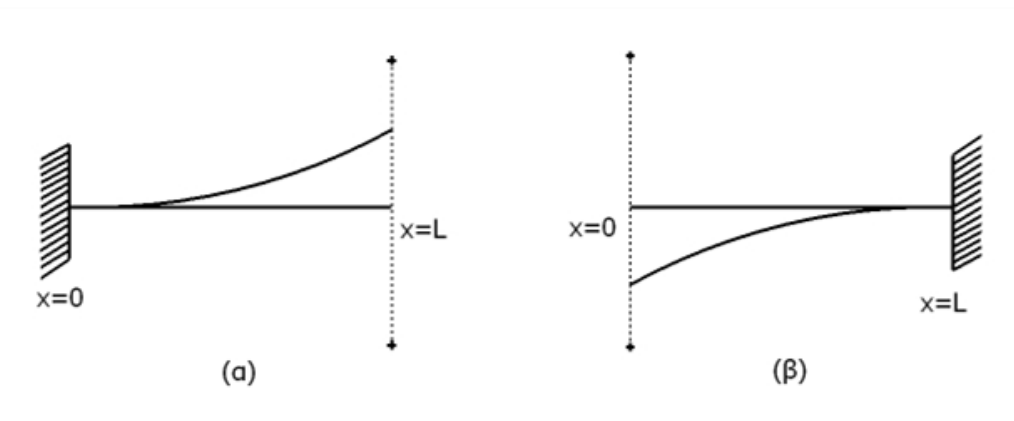
$$M(0, t) = 0 \Rightarrow EI(0) \frac{\partial^2 v(0, t)}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 v(0, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (1.52.i)$$

και
$$Q(0, t) = 0 \xrightarrow{(1.51)} -\frac{\partial}{\partial x} \left[EI(0) \frac{\partial^2 v(0, t)}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (1.52.j)$$

(γ₂) ελεύθερο άκρο $x = L$:

$$M(L, t) = 0 \Rightarrow EI(L) \frac{\partial^2 v(L, t)}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 v(L, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (1.52.k)$$

και
$$Q(L, t) = 0 \xrightarrow{(1.51)} -\frac{\partial}{\partial x} \left[EI(L) \frac{\partial^2 v(L, t)}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (1.52.l)$$



Σχήμα 12: (α) Δοκός με ελεύθερο το άκρο $x=L$ και (β) δοκός με ελεύθερο το άκρο $x=0$

(δ) Κυλιόμενη πάκτωση

(δ₁) κυλιόμενη πάκτωση στο $x = 0$:

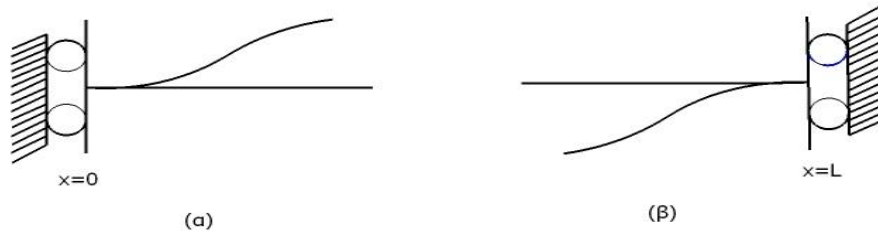
$$\frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (1.52.m)$$

και
$$Q(0, t) = 0 \xrightarrow{(1.61)} -\frac{\partial}{\partial x} \left[EI(0) \frac{\partial^2 v(0, t)}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (1.52.n)$$

(δ₂) κυλιόμενη πάκτωση στο $x = L$:

$$\frac{\partial v(L, t)}{\partial x} = 0 \quad (1.52.o)$$

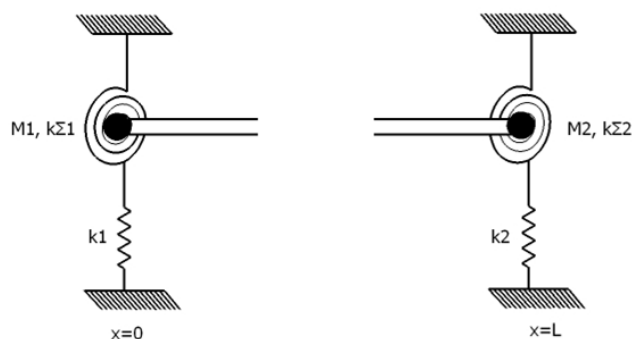
και
$$Q(L, t) = 0 \xrightarrow{(1.61)} -\frac{\partial}{\partial x} \left[EI(L) \frac{\partial^2 v(L, t)}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (1.52.p)$$



Σχήμα 13: Κυλιόμενη πάκτωση (α) στο άκρο $x = 0$ και (β) στο άκρο $x = L$ δοκού

3.4.2. Σύνθετες οριακές συνθήκες του προβλήματος των εγκάρσιων ταλαντώσεων δοκού

Οι σύνθετες οριακές συνθήκες αφορούν μάζες στερεωμένες στα άκρα της δοκού, γραμμικά και στρεπτικά ελατήρια. Επίσης, οι σύνθετες οριακές συνθήκες μπορούν να διατυπωθούν με ένα ζεύγος εξισώσεων για κάθε άκρο.



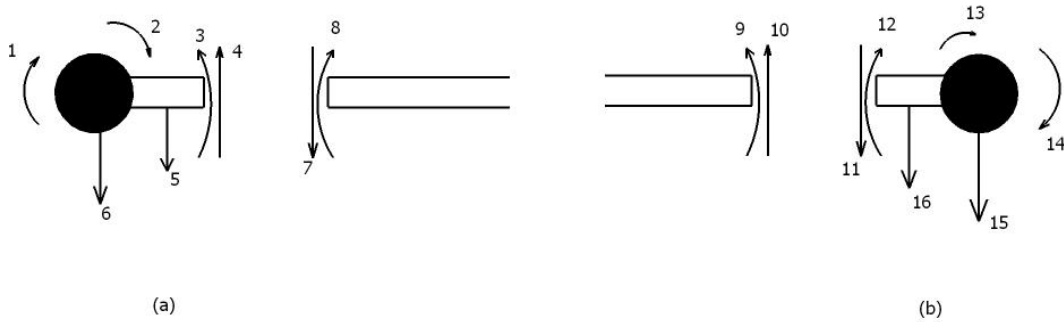
Σχήμα 14: Σύνθετες οριακές συνθήκες στα άκρα $x=0$ και $x=L$ δοκού

Στο άκρο $x = 0$:

Το άκρο $x = 0$ είναι ελαστικά στερεωμένο με ευθύγραμμο ελατήριο σταθεράς k και με στρεπτικό ελατήριο σταθεράς k_S . Επίσης, στο άκρο $x = 0$ είναι δεμένο σώμα μάζας M . Για τις δυνάμεις και τις ροπές που ισοδυναμούν με τα ελατήρια και τη μάζα M ισχύουν τα παρακάτω:

- Το ευθύγραμμο ελατήριο ασκεί δύναμη $F = kx$, όπου x η μεταβολή του μήκους του ελατηρίου.
- Το στρεπτικό ελατήριο προκαλεί ροπή $M = k_\Sigma \varphi$, όπου φ η γωνία στρέψης.

Τα παραπάνω φαίνονται και στο σχήμα 14. Αξίζει να σημειωθεί ότι η τομή στη δοκό και τα διανύσματα των δυνάμεων και των ροπών σχεδιάστηκαν βάσει της μεθόδου Ritter.⁷



Σχήμα 15: Δυνάμεις και ροπές στο άκρο $x = 0$ (a) και $x = L$ (b) δοκού με σύνθετες οριακές συνθήκες.

Τα διανύσματα αντιστοιχίζονται ως εξής: (1) $J_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial v(0,t)}{\partial x} \right)$, (2) $k_{\Sigma 1} \frac{\partial v(0,t)}{\partial x}$, (3) $M(0, t)$, (4) $Q(0, t)$, (5) $k_1 v(0, t)$, (6) $M_1 \frac{\partial^2 v(0,t)}{\partial t^2}$, (11) $Q(L, t)$, (12) $M(L, t)$, (13) $k_{\Sigma 2} \frac{\partial v(L,t)}{\partial x}$, (14) $J_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial v(L,t)}{\partial x} \right)$, (15) $M_2 \frac{\partial^2 v(L,t)}{\partial t^2}$ και (16) $k_2 v(L, t)$.

Ισορροπία στον άξονα y :

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow -M_1 \frac{\partial^2 v(0, t)}{\partial t^2} - k_1 v(0, t) + Q(0, t) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -M_1 \frac{\partial^2 v(0, t)}{\partial t^2} - k_1 v(0, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left[EI(0) \frac{\partial^2 v(0, t)}{\partial x^2} \right] = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left[EI(0) \frac{\partial^2 v(0, t)}{\partial x^2} \right] + k_1 v(0, t) + M_1 \frac{\partial^2 v(0, t)}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (1.53.a)$$

Ισορροπία ροπών:

⁷ Μέθοδος Ritter: Θεωρείται τομή της δοκού, ώστε να προκύψουν δύο στερεά σώματα. Οι οριζόντιες και κατακόρυφες δυνάμεις και οι ροπές σχεδιάζονται έτσι ώστε η συνισταμένη δύναμη και ροπή για κάθε στερεό να είναι μηδέν.

$$\begin{aligned}
\Sigma M = 0 &\Rightarrow -k_{\Sigma 1} \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} - J_1 \frac{\partial^3 v(0, t)}{\partial x \partial t^2} + M_1(0, t) = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow -k_{\Sigma 1} \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} - J_1 \frac{\partial^3 v(0, t)}{\partial x \partial t^2} + EI(0) \frac{\partial^2 v(0, t)}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow EI(0) \frac{\partial^2 v(0, t)}{\partial x^2} - k_{\Sigma 1} \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} - J_1 \frac{\partial^3 v(0, t)}{\partial x \partial t^2} = 0 \quad (1.53.b)
\end{aligned}$$

Παρατήρηση:

Στην περίπτωση που δεν υπάρχει η μάζα, το γραμμικό ή το στρεπτικό ελατήριο, τότε μηδενίζονται αντίστοιχα οι σταθερές M , k και k_{Σ} στις σχέσεις των οριακών συνθηκών. Αν μηδενιστούν και οι τρεις σταθερές, προκύπτει η οριακή συνθήκη για το ελεύθερο άκρο.

Στο άκρο $x = L$:

Ισορροπία στον άξονα y :

$$\begin{aligned}
\Sigma F_y = 0 &\Rightarrow -Q(L, t) - M_2 \frac{\partial^2 v(L, t)}{\partial t^2} - k_2 v(L, t) = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left[EI(L) \frac{\partial^2 v(L, t)}{\partial x^2} \right] - k_2 v(L, t) - M_2 \frac{\partial^2 v(L, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.53.c)
\end{aligned}$$

Ισορροπία ροπών:

$$\begin{aligned}
\Sigma M = 0 &\Rightarrow -M_2(L, t) - k_{\Sigma 2} \frac{\partial v(L, t)}{\partial x} - J_2 \frac{\partial^3 v(L, t)}{\partial x \partial t^2} = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow EI(L) \frac{\partial^2 v(L, t)}{\partial x^2} + k_{\Sigma 2} \frac{\partial v(L, t)}{\partial x} + J_2 \frac{\partial^3 v(L, t)}{\partial x \partial t^2} = 0 \quad (1.53.d)
\end{aligned}$$

3.5. Ειδικές περιπτώσεις της ΜΔΕ 4ης τάξης

Αν η δοκός κάνει ελεύθερη ταλάντωση, δηλαδή δίχως την επίδραση κάποιας εξωτερικής κατανεμημένης δύναμης ($F(x, t) = 0$), η εξίσωση (1.48) γίνεται:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.54)$$

Αν επιπλέον τα μεγέθη E, I και m είναι σταθερά, τότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + \frac{1}{c^4} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

$$\text{όπου } c = \sqrt[4]{\frac{EI}{m}}.$$

3.6. Ελεύθερη ταλάντωση δοκού με απλές οριακές συνθήκες

3.6.1. Το πρόβλημα ιδιοτιμών για τις εγκάρσιες ταλαντώσεις δοκού με απλές οριακές συνθήκες

Έστω η παρακάτω ομογενής διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.54)$$

με οριακές συνθήκες έναν από τους συνδυασμούς εξισώσεων (1.52). Αυτές αποτελούν το πρόβλημα ιδιοτιμών της δοκού.

Αναζητείται σύγχρονη κίνηση, δηλαδή μια λύση της μορφής:

$$v(x, t) = \varphi(x)f(t) \quad (1.9)$$

Η οποία αν αντικατασταθεί στην εξίσωση (1.54) δίνει:

$$f(t) \frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \right] + \ddot{f}(t) m(x) \varphi(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = - \frac{\frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \right]}{m(x) \varphi(x)} = -\omega^2$$

Προκύπτουν οι διαφορικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} \ddot{f}(t) + \omega^2 f(t) = 0, & t \geq 0 & (1.10.a) \\ \frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \right] - \omega^2 m(x) \varphi(x) = 0, & 0 \leq x \leq L & (1.10.b) \end{cases}$$

Η υποτιθέμενη λύση (1.9) αντικαθίσταται στις οριακές συνθήκες:

| | | | |
|-------|----------------------|---|--------|
| | Πάκτωση | $\varphi(0) = 0$ και $\varphi'(0) = 0$ | |
| | Άρθρωση | $\varphi(0) = 0$ και $\varphi''(0) = 0$ | |
| $x=0$ | Ελεύθερο άκρο | $\varphi''(0) = 0$ και $\frac{d}{dx} [EI(0)\varphi''(0)] = 0$ | |
| | Κυλιόμενη πάκτωση | $\varphi'(0) = 0$ και $\frac{d}{dx} [EI(0)\varphi''(0)] = 0$ | |
| | | | |
| | Πάκτωση | $\varphi(L) = 0$ και $\varphi'(L) = 0$ | |
| | Άρθρωση | $\varphi(L) = 0$ και $\varphi''(L) = 0$ | |
| $x=L$ | Ελεύθερο άκρο | $\varphi''(L) = 0$ και $\frac{d}{dx} [EI(L)\varphi''(L)] = 0$ | |
| | Κυλιόμενη πάκτωση | $\varphi(L) = 0$ και $\frac{d}{dx} [EI(L)\varphi''(L)] = 0$ | (1.55) |

Το πρόβλημα οριακών τιμών ορίζεται από τις εξισώσεις (1.10.b) και μία από τις οριακές συνθήκες (1.55).

Η γενική λύση της (1.10.b) είναι:

$$\varphi(x) = c_1 \varphi_1(x, \omega) + c_2 \varphi_2(x, \omega) + c_3 \varphi_3(x, \omega) + c_4 \varphi_4(x, \omega) \quad (1.56)$$

όπου $\varphi_1(x, \omega)$, $\varphi_2(x, \omega)$, $\varphi_3(x, \omega)$ και $\varphi_4(x, \omega)$ είναι τέσσερις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης (1.10.b).

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με αυτή του προβλήματος ιδιοτιμών την ΜΔΕ 2ης τάξης, αντικαθίσταται η γενική λύση (1.56) σε καθεμιά από τις οριακές συνθήκες (1.55). Προκύπτουν τόσα συστήματα γραμμικών εξισώσεων, όσα και οι οριακές συνθήκες.

Βέβαια, για ένα συγκεκριμένο συνδυασμό απλών οριακών συνθηκών προκύπτει ένα 4×4 σύστημα γραμμικών εξισώσεων. Για να λυθεί το σύστημα αυτό, πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών $\varphi_i(0, \omega)$ και $\varphi_i(L, \omega)$, $i = 1, 2, 3, 4$ να μηδενίζεται. Από το μηδενισμό της ορίζουσας υπολογίζονται οι *ιδιοσυχνότητες* ω_i , $i = 1, 2, 3 \dots$ Αυτές είναι άπειρες των αριθμό, για αυτές ισχύει η ανισοτική σχέση $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 \dots$ και η ω_1 ονομάζεται *θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα*. Για κάθε ιδιοσυχνότητα ω_i , $i = 1, 2, 3 \dots$ το σύστημα 4×4 παρέχει τα c_{1i} , c_{2i} , c_{3i} και c_{4i} , τα οποία δεν είναι μεν καθορισμένα, έχουν όμως καθορισμένο λόγο. Γνωρίζοντας τους συντελεστές c_{ij} , $j = 1, 2, 3, 4$ και τις ιδιοσυχνότητες ω_i , $i = 1, 2, 3 \dots$ μπορούν από την (1.56) να υπολογιστούν οι αντίστοιχες ιδιομορφές $\varphi_i(x)$.

Για να είναι οι ιδιομορφές $\varphi_i(x)$ μοναδικά καθορισμένες πρέπει οι συντελεστές c_{ij} να ρυθμιστούν κατάλληλα από τη *συνθήκη κανονικοποίησης*:

$$\int_0^L m(x) \varphi_i^2(x) dx = 1, \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (1.57)$$

οι ιδιομορφές $\varphi_i(x)$ που ικανοποιούν την (1.57) ονομάζονται *κανονικοποιημένες ιδιομορφές*.

Η λύση της εξίσωσης (1.10.a) έχει αποδειχθεί ότι είναι:

$$f_i(t) = A_{1i} \cos(\omega_i t) + A_{2i} \sin(\omega_i t) \quad (1.18)$$

με τις σταθερές A_1 και A_2 να υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Αντικατάσταση των κανονικών μορφών $\varphi_i(x)$ και των $f_i(t)$ στην υποτιθέμενη λύση (1.9) δίνουν τις επιμέρους λύσεις του προβλήματος ιδιοτιμών:

$$v_i(x, t) = \varphi_i(x) [A_{1i} \cos(\omega_i t) + A_{2i} \sin(\omega_i t)] \quad (1.19)$$

Η γενική λύση του προβλήματος της ελεύθερης ταλάντωσης είναι ο *γραμμικός συνδυασμός* των επιμέρους λύσεων, δηλαδή:

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) f_i(t) \quad (1.20)$$

Παρατήρηση:

Αν θεωρηθεί ότι τα $m(x)$ και $I(x)$ είναι σταθερές συναρτήσεις, δηλαδή $m(x) = m$ και $I(x) = I$, τότε με αντικατάσταση της γενικής λύσης στην αρχική εξίσωση:

$$\varphi^{(4)}(x) - \frac{\omega^2 m}{EI} \varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi^{(4)}(x) - \frac{\omega^2}{c^4} \varphi(x) = 0, \text{ όπου } c^4 = \frac{EI}{m} = \text{const.}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$\rho^4 - \frac{\omega^2}{c^4} = 0 \Rightarrow \rho^4 = \frac{\omega^2}{c^4} e^{i2k\pi} \Rightarrow \rho = \frac{\sqrt{\omega}}{c} e^{\frac{ik\pi}{2}}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \dots$$

από όπου προκύπτουν οι ρίζες $\rho_1 = \frac{\sqrt{\omega}}{c}$, $\rho_2 = -\frac{\sqrt{\omega}}{c}$, $\rho_3 = i \frac{\sqrt{\omega}}{c}$ και $\rho_4 = -i \frac{\sqrt{\omega}}{c}$.

Άρα οι ιδιομορφές είναι:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(x, \omega) = e^{\frac{\sqrt{\omega}}{c}x} \\ \varphi_2(x, \omega) = e^{-\frac{\sqrt{\omega}}{c}x} \\ \varphi_3(x, \omega) = e^{i\frac{\sqrt{\omega}}{c}x} \\ \varphi_4(x, \omega) = e^{-i\frac{\sqrt{\omega}}{c}x} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(x, \omega) = \cos \frac{\sqrt{\omega}}{c} x \\ \varphi_2(x, \omega) = \sin \frac{\sqrt{\omega}}{c} x \\ \varphi_3(x, \omega) = \cosh \frac{\sqrt{\omega}}{c} x \\ \varphi_4(x, \omega) = \sinh \frac{\sqrt{\omega}}{c} x \end{array} \right.$$

Η (1.56) γίνεται:

$$\varphi(x) = c_1 \cos \frac{\sqrt{\omega}}{c} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{\omega}}{c} x + c_3 \cosh \frac{\sqrt{\omega}}{c} x + c_4 \sinh \frac{\sqrt{\omega}}{c} x$$

Τέλος, ανάλογα με τις οριακές συνθήκες του προβλήματος προκύπτει το σύστημα 4×4 . Ο μηδενισμός της ορίζουσας των συντελεστών παρέχει τις ιδιοσυχνότητες ω_i , $i = 1, 2, 3 \dots$ και η λύση του συστήματος τους συντελεστές c_{1i} , c_{2i} , c_{3i} και c_{4i} . Άρα, υπολογίζονται και οι ιδιομορφές $\varphi_i(x)$.

3.6.2. Ορθογωνιότητα και ορθοκανονικότητα των κανονικών μορφών για το πρόβλημα των εγκαρσίων ταλαντώσεων δοκού με απλές οριακές συνθήκες

Έστω $\omega_i, \varphi_i(x)$ και $\omega_j, \varphi_j(x)$ δύο λύσεις του προβλήματος ιδιοτιμών της εξίσωσης (1.56) με κάποιο συνδυασμό οριακών συνθηκών (1.55).

Αφού οι $\omega_i, \varphi_i(x)$ και $\omega_j, \varphi_j(x)$ είναι λύσεις του προβλήματος ισχύει:

$$[EI(x)\varphi_i''(x)]'' - \omega_i^2 m(x)\varphi_i(x) = 0 \quad (1.58.a)$$

και $[EI(x)\varphi_j''(x)]'' - \omega_j^2 m(x)\varphi_j(x) = 0 \quad (1.58.b)$

Αν πολλαπλασιαστεί η (1.58.a) με $\varphi_j(x)$ και η (1.58.b) με $\varphi_i(x)$, στη συνέχεια αφαιρεθούν κατά μέλη και γίνει ολοκλήρωση από 0 έως L προκύπτει:

$$\begin{aligned} & \int_0^L [EI(x)\varphi_i''(x)]'' \varphi_j(x) dx - \int_0^L [EI(x)\varphi_j''(x)]'' \varphi_i(x) dx - \\ & \quad - (\omega_i^2 - \omega_j^2) \int_0^L m(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x) dx = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow & \{[EI(x)\varphi_i''(x)]' \varphi_j(x)\}_0^L - \int_0^L [EI(x)\varphi_i''(x)]' \varphi_j'(x) dx - \\ & \quad - \{[EI(x)\varphi_j''(x)]' \varphi_i(x)\}_0^L + \int_0^L [EI(x)\varphi_j''(x)]' \varphi_i'(x) dx - \\ & \quad - (\omega_i^2 - \omega_j^2) \int_0^L m(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x) dx = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow & \{[EI(x)\varphi_i''(x)]' \varphi_j(x)\}_0^L - \{EI(x)\varphi_i''(x)\varphi_j'(x)\}_0^L + \\ & \quad + \int_0^L EI(x)\varphi_i''(x)\varphi_j''(x) dx - \{[EI(x)\varphi_j''(x)]' \varphi_i(x)\}_0^L + \\ & \quad + \{EI(x)\varphi_j''(x)\varphi_i'(x)\}_0^L - \int_0^L EI(x)\varphi_j''(x)\varphi_i''(x) dx - \end{aligned}$$

$$-(\omega_i^2 - \omega_j^2) \int_0^L m(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\omega_i^2 - \omega_j^2) \int_0^L m(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0$$

αφού τα δύο πρώτα ολοκληρώματα είναι αντίθετα και οι υπόλοιποι όροι μηδενίζονται. Άρα:

$$\Rightarrow \int_0^L m(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \dots, \quad i \neq j$$

και από τη συνθήκη κανονικοποίησης (1.57):

$$\int_0^L m(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \dots \quad (1.59)$$

Η τελευταία είναι η συνθήκη ορθογωνιότητας ως προς την κατανομή της μάζας $m(x)$.

Πολλαπλασιάζοντας μία από τις εξισώσεις (1.58) με $\varphi_j(x)$ ή $\varphi_i(x)$ αντίστοιχα, (έστω την (1.58.a) με $\varphi_j(x)$) ολοκληρώνοντας από 0 έως L και με τη βοήθεια της (1.59):

$$\int_0^L [EI(x) \varphi_i''(x)]'' \varphi_j(x) dx + \omega_i^2 \int_0^L m(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^L [EI(x) \varphi_i''(x)]'' \varphi_j(x) dx = \omega_i^2 \delta_{ij} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{[EI(x) \varphi_i''(x)]' \varphi_j(x)\} \Big|_0^L - \int_0^L [EI(x) \varphi_i''(x)]' \varphi_j'(x) dx = \omega_i^2 \delta_{ij} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{[EI(x) \varphi_i''(x)]' \varphi_j(x)\} \Big|_0^L - \{EI(x) \varphi_i''(x) \varphi_j'(x)\} \Big|_0^L +$$

$$+ \int_0^L EI(x) \varphi_i''(x) \varphi_j''(x) dx = \omega_i^2 \delta_{ij} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^L EI(x) \varphi_i''(x) \varphi_j''(x) dx = \omega_i^2 \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \dots \quad (1.60)$$

Η τελευταία είναι η συνθήκη ορθογωνιότητας ως προς την κατανομή της ακαμψίας $EI(x)$.

3.7. Επίλυση του προβλήματος των εγκάρσιων ταλαντώσεων δοκού με απλές οριακές συνθήκες με τη μέθοδο των κανονικών μορφών

Το γενικό πρόβλημα περιλαμβάνει την εξίσωση (1.48) με οριακές συνθήκες έναν από τους συνδυασμούς (1.52) και αρχικές συνθήκες

$$v(x, 0) = g(x) \quad (1.61.a)$$

$$\frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = h(x) \quad (1.61.b)$$

Έχοντας λύσει το πρόβλημα της ελεύθερης ταλάντωσης (πρόβλημα ιδιοτιμών), είναι γνωστές οι ιδιοσυχνότητες $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \dots$ και οι αντίστοιχες ιδιομορφές $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots$

Υποτίθεται ότι η μερική διαφορική εξίσωση του προβλήματος έχει λύση της μορφής

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} n_i(t) \varphi_i(x) \quad (1.62)$$

όπου $n_i(t)$ είναι οι κανονικές συντεταγμένες και $\varphi_i(x)$ οι κανονικές μορφές.

Αντικατάσταση της (1.62) στην εξίσωση (1.48) δίνει:

$$m(x) \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{n}_i(t) \varphi_i(x) + \sum_{i=1}^{\infty} n_i(t) \frac{d^2}{dx^2} [EI(x) \varphi_i''(x)] = F(x, t)$$

Η παραπάνω σχέση πολλαπλασιαζόμενη με $\varphi_j(x)$ και ολοκληρούμενη από 0 έως L , γίνεται:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{n}_i(t) \int_0^L m(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + \sum_{i=1}^{\infty} n_i(t) \int_0^L \frac{d^2}{dx^2} [EI(x) \varphi_i''(x)] \varphi_j(x) dx = \\ = \int_0^L F(x, t) \varphi_j(x) dx, \quad j = 1, 2, 3 \dots \end{aligned}$$

η οποία από τις συνθήκες ορθογωνιότητας και ορθοκανονικότητας γίνεται:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ddot{n}_i(t) \delta_{ij} + \sum_{i=1}^{\infty} n_i(t) \omega_i^2 \delta_{ij} = \int_0^L F(x, t) \varphi_j(x) dx, \quad j = 1, 2, 3 \dots$$

ή

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ddot{n}_i(t) \delta_{ij} + \sum_{i=1}^{\infty} n_i(t) \omega_i^2 \delta_{ij} = N_j(t), \quad j = 1, 2, 3 \dots$$

όπου $N_j(t) = \int_0^L F(x, t) \varphi_j(x) dx$, $j = 1, 2, 3 \dots$ είναι το γενικευμένο φορτίο που αντιστοιχεί στις κανονικές συντεταγμένες $n_j(t)$.

Για κάποιο j :

$$\ddot{n}_j(t) + \omega_j^2 n_j(t) = N_j(t)$$

Οι τελευταίες είναι ένα σύνολο ανεξάρτητων εξισώσεων που η καθεμία έχει λύση:

$$n_i(t) = n_i(0) \cos(\omega_i t) + \frac{\dot{n}_i(0)}{\omega_i} \sin(\omega_i t) + \frac{1}{\omega_i} \int_0^t N_i(\tau) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau$$

δύο πρώτοι όροι είναι η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης και ο τρίτος το ολοκλήρωμα *Duhamel*.

Για τον υπολογισμό των αρχικών συνθηκών $n_i(0)$ και $\dot{n}_i(0)$ γίνεται αντικατάσταση της (1.62) στις αρχικές συνθήκες (1.61). Στη συνέχεια γίνεται

πολλαπλασιασμός με $B(x)\varphi_j(x)$ και ολοκλήρωση από 0 έως L . Λαμβάνοντας υπόψη και τις συνθήκες ορθογωνιότητας, τα $n_i(0)$ και $\dot{n}_i(0)$ είναι:

$$n_i(0) = \int_0^L g(x)B(x)\varphi_j(x)dx, \quad j = 1,2,3 \dots$$

$$\dot{n}_i(0) = \int_0^L h(x)B(x)\varphi_j(x)dx, \quad j = 1,2,3 \dots$$

Άρα η λύση (1.62) με βάση τα παραπάνω γίνεται:

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[n_i(0) \cos(\omega_i t) + \frac{\dot{n}_i(0)}{\omega_i} \sin(\omega_i t) + \frac{1}{\omega_i} \int_0^t N_i(\tau) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau \right] \varphi_i(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_0^L g(x)B(x)\varphi_j(x)dx \cos(\omega_i t) + \frac{\int_0^L h(x)B(x)\varphi_j(x)dx}{\omega_i} \sin(\omega_i t) + \frac{1}{\omega_i} \int_0^t N_i(\tau) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau \right] \varphi_i(x) \quad (1.63)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι στην ειδική περίπτωση όπου για $t = 0$ το σύστημα ηρεμεί, δηλαδή οι αρχικές συνθήκες (1.27) είναι:

$$v(x, 0) = 0$$

$$\left. \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

τότε ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, η γενική λύση είναι:

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\omega_j} \int_0^t N_j(t) \sin[\omega_j(t - \tau)] d\tau \right] \varphi_i(x)$$

3.8. Ελεύθερη ταλάντωση δοκού με σύνθετες οριακές συνθήκες

3.8.1. Το πρόβλημα ιδιοτιμών για τις εγκάρσιες ταλαντώσεις δοκού με σύνθετες οριακές συνθήκες

Όμοια με το εδάφιο για τις απλές οριακές συνθήκες, θεωρείται το πρόβλημα της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (1.54) με τις σύνθετες οριακές συνθήκες (1.53) Αναζητείται σύγχρονη κίνηση, δηλαδή μια λύση της μορφής:

$$v(x, t) = \varphi(x)f(t) \quad (1.9)$$

Η οποία αντικαθίσταται στην εξίσωση (1.54) και προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\begin{cases} \ddot{f}(t) + \omega^2 f(t) = 0, & t \geq 0 & (1.10.a) \\ \frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2} \right] - \omega^2 m(x) \varphi(x) = 0, & 0 \leq x \leq L & (1.10.b) \end{cases}$$

Η υποτιθέμενη λύση (1.9) αντικαθίσταται στις οριακές συνθήκες:

$$\begin{cases} [EI(0)\varphi''(0)]' + k_1\varphi(0) - \omega^2 M_1\varphi(0) = 0 \\ EI(0)\varphi''(0) - k_{\Sigma 1}\varphi'(0) + \omega^2 J_1\varphi'(0) = 0 \\ [EI(L)\varphi''(L)]' - k_2\varphi(L) + \omega^2 M_2\varphi(L) = 0 \\ EI(L)\varphi''(0) + k_{\Sigma 2}\varphi'(L) - \omega^2 J_2\varphi'(L) = 0 \end{cases} \quad (1.64)$$

Το πρόβλημα οριακών τιμών ορίζεται από τις εξισώσεις (1.10.b) και μία από τις οριακές συνθήκες (1.64).

Η γενική λύση της (1.10.b) είναι:

$$\varphi(x) = c_1\varphi_1(x, \omega) + c_2\varphi_2(x, \omega) + c_3\varphi_3(x, \omega) + c_4\varphi_4(x, \omega) \quad (1.56)$$

όπου $\varphi_1(x, \omega)$, $\varphi_2(x, \omega)$, $\varphi_3(x, \omega)$ και $\varphi_4(x, \omega)$ είναι τέσσερις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης (1.10.b).

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με αυτή του προβλήματος ιδιοτιμών με απλές οριακές συνθήκες, αντικαθίσταται η γενική λύση (1.56) σε καθεμιά από τις οριακές συνθήκες (1.64). Συγκεκριμένα, προκύπτουν τόσα συστήματα

γραμμικών εξισώσεων, όσα και οι οριακές συνθήκες. Προκύπτει ένα 4×4 σύστημα γραμμικών εξισώσεων. Για να λυθεί το σύστημα αυτό, πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών $\varphi_i(0, \omega)$ και $\varphi_i(L, \omega)$, $i = 1, 2, 3, 4$ να μηδενίζεται. Από το μηδενισμό της ορίζουσας υπολογίζονται οι *ιδιοσυχνότητες* $\omega_i, i = 1, 2, 3 \dots$ Αυτές είναι άπειρες των αριθμό και ισχύει: $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 \dots$ Για κάθε ιδιοσυχνότητα $\omega_i, i = 1, 2, 3 \dots$ το σύστημα 4×4 παρέχει τα c_{1i}, c_{2i}, c_{3i} και c_{4i} . Γνωρίζοντας τους συντελεστές $c_{ij}, j = 1, 2, 3, 4$ και τις ιδιοσυχνότητες $\omega_i, i = 1, 2, 3 \dots$ μπορούν από την (1.56) να υπολογιστούν οι αντίστοιχες ιδιομορφές $\varphi_i(x)$.

Τέλος, κανονικοποίηση των ιδιομορφών βάσει της συνθήκης κανονικοποίησης (1.57) δίνει τις *κανονικοποιημένες ιδιομορφές* $\varphi_i(x)$.

Η λύση της (1.10.a), όπως προηγούμενα, είναι:

$$f_i(t) = A_{1i} \cos(\omega_i t) + A_{2i} \sin(\omega_i t), \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (1.18)$$

με τις σταθερές A_1 και A_2 να υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Αντικατάσταση των κανονικοποιημένων ιδιομορφών $\varphi_i(x)$ και των $f_i(t)$ στην υποτιθέμενη λύση (1.9) δίνουν τις επιμέρους λύσεις του προβλήματος ιδιοτιμών:

$$v_i(x, t) = \varphi_i(x) [A_{1i} \cos(\omega_i t) + A_{2i} \sin(\omega_i t)] \quad (1.19)$$

Η γενική λύση είναι ο γραμμικός συνδυασμός των επιμέρους λύσεων, δηλαδή:

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) f_i(t) \quad (1.20)$$

3.8.2. Ορθογωνιότητα και ορθοκανονικότητα των κανονικών μορφών του προβλήματος των εγκάρσιων ταλαντώσεων δοκού με σύνθετες οριακές συνθήκες

Έστω $\omega_i, \varphi_i(x)$ και $\omega_j, \varphi_j(x)$ δύο λύσεις του προβλήματος ιδιοτιμών της εξίσωσης (1.10.b) με κάποιο συνδυασμό οριακών συνθηκών (1.64). Αφού οι $\omega_i, \varphi_i(x)$ και $\omega_j, \varphi_j(x)$ είναι λύσεις του προβλήματος ισχύει:

$$[EI(x)\varphi_i''(x)]'' - \omega_i^2 m(x)\varphi_i(x) = 0 \quad (1.58.a)$$

και $[EI(x)\varphi_j''(x)]'' - \omega_j^2 m(x)\varphi_j(x) = 0 \quad (1.58.b)$

Οι παραπάνω εξισώσεις γίνονται στα άκρα $x = 0$ και $x = L$:

$$\begin{aligned} & [EI(0)\varphi_i''(0)]' = -k_1\varphi_i(0) + \omega_i^2 M_1\varphi_i(0) \\ & [EI(0)\varphi_j''(0)]' = -k_1\varphi_j(0) + \omega_j^2 M_1\varphi_j(0) \\ \left. \begin{aligned} EI(0)\varphi_i''(0) &= k_{\Sigma 1}\varphi_i'(0) - \omega_i^2 J_1\varphi_i'(0) \\ EI(0)\varphi_j''(0) &= k_{\Sigma 1}\varphi_j'(0) - \omega_j^2 J_1\varphi_j'(0) \end{aligned} \right\} & (1.65) \\ & [EI(L)\varphi_i''(L)]' = -k_2\varphi_i(L) + \omega_i^2 M_2\varphi_i(L) \\ \left. \begin{aligned} [EI(L)\varphi_j''(L)]' &= -k_2\varphi_j(L) + \omega_j^2 M_2\varphi_j(L) \\ EI(L)\varphi_i''(L) &= k_{\Sigma 2}\varphi_i'(L) - \omega_i^2 J_2\varphi_i'(L) \\ EI(L)\varphi_j''(L) &= k_{\Sigma 2}\varphi_j'(L) - \omega_j^2 J_2\varphi_j'(L) \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Ισχύει ότι:

$$\int_0^L \left\{ [EI(x)\varphi_i''(x)]'' - \omega_i^2 m(x)\varphi_i(x) \right\} \varphi_i(x) - \left[[EI(x)\varphi_j''(x)]'' - \omega_j^2 m(x)\varphi_j(x) \right] \varphi_i(x) \Big|_0^L = 0$$

και κάνοντας τις πράξεις προκύπτει:

$$\begin{aligned}
& -(\omega_i^2 - \omega_j^2) \left\{ \int_0^L m(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + M_1 \varphi_i(0) \varphi_j(0) + J_1 \varphi_i'(0) \varphi_j'(0) \right. \\
& \quad \left. + M_2 \varphi_i(L) \varphi_j(L) + J_2 \varphi_i'(L) \varphi_j'(L) \right\} = 0
\end{aligned} \tag{1.66}$$

Από τη συνθήκη κανονικοποίησης:

$$\int_0^L m(x) \varphi_i^2(x) dx + M_1 \varphi_i^2(0) + J_1 \varphi_i'^2(0) + M_2 \varphi_i^2(L) + J_2 \varphi_i'^2(L) = 1,$$

$i = 1, 2, 3 \dots$

η (1.66) γίνεται:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L m(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + M_1 \varphi_i(0) \varphi_j(0) + J_1 \varphi_i'(0) \varphi_j'(0) + \\
& \quad + M_2 \varphi_i(L) \varphi_j(L) + J_2 \varphi_i'(L) \varphi_j'(L) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \dots
\end{aligned} \tag{1.67}$$

Η τελευταία είναι η συνθήκη ορθογωνιότητας ως προς τις μάζες $m(x)$, M_1 , M_2 , J_1 και J_2 .

Αν η (1.58.a) πολλαπλασιαστεί με $\varphi_j(x)$ και ολοκληρωθεί από 0 έως L , προκύπτει:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L [EI(x) \varphi_i''(x)]'' \varphi_j(x) dx - \omega_i^2 \int_0^L m(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0 \xrightarrow{(1.67)} \\
& \Rightarrow \int_0^L [EI(x) \varphi_i''(x)]'' \varphi_j(x) dx + \omega_i^2 M_1 \varphi_i(0) \varphi_j(0) + \omega_i^2 J_1 \varphi_i'(0) \varphi_j'(0) + \\
& \quad + \omega_i^2 M_2 \varphi_i(L) \varphi_j(L) + \omega_i^2 J_2 \varphi_i'(L) \varphi_j'(L) = \omega_i^2 \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \dots
\end{aligned} \tag{1.68}$$

Αν οι οριακές συνθήκες (1.65) που αναφέρονται στη λύση $\varphi_i(x)$ πολλαπλασιαστούν με $\varphi_j(x)$ ή $\varphi_j'(x)$ γίνονται:

$$\omega_i^2 M_1 \varphi_i(0) \varphi_j(0) = [EI(0) \varphi_i''(0)]' \varphi_j(0) + k_1 \varphi_i(0) \varphi_j(0)$$

$$\omega_i^2 J_1 \varphi_i'(0) \varphi_j'(0) = -EI(0) \varphi_i''(0) \varphi_j'(0) + k_{\Sigma 1} \varphi_i'(0) \varphi_j'(0)$$

$$\omega_i^2 M_2 \varphi_i(L) \varphi_j(L) = -[EI(L) \varphi_i''(L)]' \varphi_j(L) + k_2 \varphi_i(L) \varphi_j(L)$$

$$\omega_i^2 J_2 \varphi_i'(L) \varphi_j'(L) = EI(L) \varphi_i''(L) \varphi_j'(L) + k_{\Sigma 2} \varphi_i'(L) \varphi_j'(L)$$

Επομένως η (1.68) γίνεται:

$$\begin{aligned} \int_0^L [EI(x) \varphi_i''(x)]'' \varphi_j(x) dx + [EI(0) \varphi_i''(0)]' \varphi_j(0) \\ - [EI(L) \varphi_i''(L)]' \varphi_j(L) - EI(0) \varphi_i''(0) \varphi_j'(0) \\ + EI(L) \varphi_i''(L) \varphi_j'(L) + k_1 \varphi_i(0) \varphi_j(0) + k_{\Sigma 1} \varphi_i'(0) \varphi_j'(0) \\ + k_{\Sigma 2} \varphi_i'(L) \varphi_j'(L) + k_2 \varphi_i(L) \varphi_j(L) = \omega_i^2 \delta_{ij}, \\ i, j = 1, 2, 3 \dots \end{aligned} \quad (1.69)$$

που περιέχει μόνο τους όρους που σχετίζονται με την ακαμψία $EI(x)$, k_1 , k_2 , $k_{\Sigma 1}$ και $k_{\Sigma 2}$.

Το ολοκλήρωμα $\int_0^L [EI(x) \varphi_i''(x)]'' \varphi_j(x) dx$ της (1.68) λύνεται και δίνει:

$$\begin{aligned} \int_0^L [EI(x) \varphi_i''(x)]'' \varphi_j(x) dx = \\ = [EI(L) \varphi_i''(L)]' \varphi_j(L) - [EI(0) \varphi_i''(0)]' \varphi_j(0) - \int_0^L [EI(x) \varphi_i''(x)]' \varphi_j(x) dx = \\ = [EI(L) \varphi_i''(L)]' \varphi_j(L) - [EI(0) \varphi_i''(0)]' \varphi_j(0) - EI(L) \varphi_i''(L) \varphi_j'(L) + \\ + EI(0) \varphi_i''(0) \varphi_j'(0) + \int_0^L EI(x) \varphi_i''(x) \varphi_j''(x) dx \end{aligned}$$

Αν η τελευταία αντικατασταθεί στην (1.69) και διαγραφούν οι αντίθετοι όροι προκύπτει η συνθήκη ορθογωνιότητας ως προς τις ακαμψίες $EI(x)$, k_1 , k_2 , $k_{\Sigma 1}$ και $k_{\Sigma 2}$:

$$\begin{aligned} \int_0^L EI(x) \varphi_i''(x) \varphi_j''(x) dx + k_1 \varphi_i(0) \varphi_j(0) + k_{\Sigma 1} \varphi_i'(0) \varphi_j'(0) + \\ + k_{\Sigma 2} \varphi_i'(L) \varphi_j'(L) + k_2 \varphi_i(L) \varphi_j(L) = \omega_i^2 \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \dots \end{aligned} \quad (1.70)$$

3.9. Επίλυση του προβλήματος των εγκάρσιων ταλαντώσεων δοκού με σύνθετες οριακές συνθήκες με τη μέθοδο των κανονικών μορφών

Το γενικό πρόβλημα περιλαμβάνει την εξίσωση (1.48) με τις σύνθετες οριακές συνθήκες (1.53) και αρχικές συνθήκες τις (1.61). Έχοντας λύσει το πρόβλημα της ελεύθερης ταλάντωσης (πρόβλημα ιδιοτιμών), είναι γνωστές οι ιδιοσυχνότητες $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ και οι αντίστοιχες ιδιομορφές $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$

Υποτίθεται ότι η μερική διαφορική εξίσωση του προβλήματος έχει λύση της μορφής

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} n_i(t) \varphi_i(x) \quad (1.62)$$

όπου $n_i(t)$ είναι οι κανονικές συντεταγμένες και $\varphi_i(x)$ οι κανονικές μορφές.

Η (1.62) αντικαθίσταται στην (1.48), πολλαπλασιάζεται με $\varphi_j(x)$ και ολοκληρώνεται από 0 έως L , όπως προηγουμένως. Άρα:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{n}_i(t) \int_0^L m(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx &= - \sum_{i=1}^{\infty} n_i(t) \int_0^L \frac{d^2}{dx^2} [EI(x) \varphi_i''(x)] \varphi_j(x) dx + \\ &+ \int_0^L F(x, t) \varphi_j(x) dx, \quad j = 1, 2, 3 \dots \end{aligned}$$

Αντικατάσταση στις οριακές συνθήκες και πολλαπλασιασμός με $\varphi_j(0)$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ddot{n}_i(t) M_1 \varphi_i(0) \varphi_j(0) = - \sum_{i=1}^{\infty} n_i(t) \{ [EI(0) \varphi_i''(0)] \varphi_j(0) + k_1 \varphi_i(0) \varphi_j(0) \}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ddot{n}_i(t) J_1 \varphi_i'(0) \varphi_j'(0) = - \sum_{i=1}^{\infty} n_i(t) \{ -EI(0) \varphi_i''(0) \varphi_j'(0) + k_{\Sigma 1} \varphi_i'(0) \varphi_j'(0) \}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ddot{n}_i(t) M_2 \varphi_i(L) \varphi_j(L) = - \sum_{i=1}^{\infty} n_i(t) \{ [EI(L) \varphi_i''(L)] \varphi_j(L) + k_2 \varphi_i(L) \varphi_j(L) \}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ddot{n}_i(t) J_2 \varphi_i'(L) \varphi_j'(L) = - \sum_{i=1}^{\infty} n_i(t) \{-EI(L) \varphi_i''(L) \varphi_j'(0) + k_{\Sigma 2} \varphi_i'(L) \varphi_j'(L)\}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των τελευταίων 5 σχέσεων προκύπτει:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{n}_i(t) \left[\int_0^L m(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + M_1 \varphi_i(0) \varphi_j(0) + J_1 \varphi_i'(0) \varphi_j'(0) + \right. \\ \left. + M_2 \varphi_i(L) \varphi_j(L) + J_2 \varphi_i'(L) \varphi_j'(L) \right] = \\ = - \sum_{i=1}^{\infty} n_i(t) \left\{ \int_0^L [EI(x) \varphi_i''(x)]'' \varphi_j(x) dx + [EI(0) \varphi_i''(0)]' \varphi_j(0) + \right. \\ \left. + k_1 \varphi_i(0) \varphi_j(0) - EI(0) \varphi_i''(0) \varphi_j'(0) + \right. \\ \left. + k_{\Sigma 1} \varphi_i'(0) \varphi_j'(0) + [EI(L) \varphi_i''(L)] \varphi_j(L) + \right. \\ \left. + k_2 \varphi_i(L) \varphi_j(L) - EI(L) \varphi_i''(L) \varphi_j'(0) + k_{\Sigma 2} \varphi_i'(L) \varphi_j'(L) \right\} + \\ + \int_0^L F(x, t) \varphi_j(x) dx, \quad j = 1, 2, 3 \dots \end{aligned}$$

Η τελευταία, με τη βοήθεια των συνθηκών ορθογωνιότητας (1.67) και (1.70) γράφεται:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ddot{n}_i(t) \delta_{ij} + \sum_{i=1}^{\infty} n_i(t) \omega_i^2 \delta_{ij} = N_j(t)$$

όπου $N_j(t) = \int_0^L F(x, t) \varphi_j(x) dx$, $j = 1, 2, 3 \dots$ τα γενικευμένα φορτία, ή αλλιώς για κάποιο $j = 1, 2, 3 \dots$:

$$\ddot{n}_j(t) + \omega_j^2 n_j(t) = N_j(t), \quad j = 1, 2, 3 \dots \quad (1.71)$$

Οι παραπάνω αποτελούν ένα σύνολο ασύζευκτων διαφορικών εξισώσεων, που η καθεμιά τους έχει λύση:

$$n_i(t) = n_i(0) \cos(\omega_i t) + \frac{\dot{n}_i(0)}{\omega_i} \sin(\omega_i t) + \frac{1}{\omega_i} \int_0^t N_i(\tau) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau$$

Για τον **υπολογισμό των αρχικών συνθηκών $n_i(0)$ και $\dot{n}_i(0)$** γίνεται αντικατάσταση της (1.62) στις αρχικές συνθήκες (1.61):

$$\begin{cases} v(x, 0) = \sum_{i=1}^{\infty} n_i(0)\varphi_i(x) = g(x) & (1.45. a) \\ \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{\infty} \dot{n}_i(0)\varphi_i(x) = h(x) & (1.45. b) \end{cases}$$

Στη συνέχεια γίνεται πολλαπλασιασμός με $m(x)\varphi_j(x)$ και ολοκλήρωση από 0 έως L :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} n_i(0) \int_0^L m(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \int_0^L g(x)m(x)\varphi_j(x)dx & (1.72. a) \\ \sum_{i=1}^{\infty} \dot{n}_i(0) \int_0^L m(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \int_0^L h(x)m(x)\varphi_j(x)dx & (1.72. b) \end{cases}$$

Οι αρχικές συνθήκες (1.45) για $x = 0$ δίνουν:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} n_i(0)\varphi_i(0) = g(0) \\ \sum_{i=1}^{\infty} \dot{n}_i(0)\varphi_i(0) = h(0) \end{cases} \xrightarrow{\cdot M_1\varphi_j(0)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} n_i(0)M_1\varphi_i(0)\varphi_j(0) = M_1g(0)\varphi_j(0) & (1.47. a) \\ \sum_{i=1}^{\infty} \dot{n}_i(0)M_1\varphi_i(0)\varphi_j(0) = M_1h(0)\varphi_j(0) & (1.47. b) \end{cases}$$

ενώ για $x = L$:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} n_i(0)\varphi_i(L) = g(L) \\ \sum_{i=1}^{\infty} \dot{n}_i(0)\varphi_i(L) = h(L) \end{cases} \xrightarrow{\cdot M_2\varphi_j(L)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} n_i(0)M_2\varphi_i(L)\varphi_j(L) = M_2g(L)\varphi_j(L) & (1.47. c) \\ \sum_{i=1}^{\infty} \dot{n}_i(0)M_2\varphi_i(L)\varphi_j(L) = M_2h(L)\varphi_j(L) & (1.47. d) \end{cases}$$

Παραγωγίζοντας τις εξισώσεις (1.45):

$$\begin{cases} \frac{\partial v(x, 0)}{\partial x} = \sum_{i=1}^{\infty} n_i(0) \varphi_i'(x) = g'(x) & (1.73. a) \\ \frac{\partial^2 v(x, 0)}{\partial x \partial t} = \sum_{i=1}^{\infty} \dot{n}_i(0) \varphi_i'(x) = h'(x) & (1.73. b) \end{cases}$$

Οι τελευταίες (1.73) εφαρμόζονται στο άκρο $x = 0$ και πολλαπλασιάζονται με $J_1 \varphi_j'(0)$:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} n_i(0) J_1 \varphi_i'(0) \varphi_j'(0) = J_1 g'(0) \varphi_j'(0) & (1.74. a) \\ \sum_{i=1}^{\infty} \dot{n}_i(0) J_1 \varphi_i'(0) \varphi_j'(0) = J_1 h'(0) \varphi_j'(0) & (1.74. b) \end{cases}$$

Ομοίως γίνεται και στο άκρο $x = L$ αν πολλαπλασιαστούν με $J_2 \varphi_j'(L)$:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} n_i(0) J_2 \varphi_i'(L) \varphi_j'(L) = J_2 g'(L) \varphi_j'(L) & (1.74. c) \\ \sum_{i=1}^{\infty} \dot{n}_i(0) J_2 \varphi_i'(L) \varphi_j'(L) = J_2 h'(L) \varphi_j'(L) & (1.74. d) \end{cases}$$

Αθροίζοντας κατά μέλη τις εξισώσεις (1.72.a), (1.47.a), (1.47.c), (1.74.a) και (1.74.c):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} n_i(0) \left[\int_0^L m(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + M_1 \varphi_i(0) \varphi_j(0) + M_2 \varphi_i(L) \varphi_j(L) + \right. \\ \left. + J_1 \varphi_i'(0) \varphi_j'(0) + J_2 \varphi_i'(L) \varphi_j'(L) \right] = \\ = \int_0^L g(x) m(x) \varphi_j(x) dx + M_1 g(0) \varphi_j(0) + M_2 g(L) \varphi_j(L) + \\ + J_1 g'(0) \varphi_j'(0) + J_2 g'(L) \varphi_j'(L), \quad j = 1, 2, 3 \dots \end{aligned}$$

Από τη συνθήκη ορθογωνιότητας (1.67) όμως για κάποιο $j = 1, 2, 3 \dots$:

$$\begin{aligned} n_j(0) = \int_0^L g(x) m(x) \varphi_j(x) dx + M_1 g(0) \varphi_j(0) + M_2 g(L) \varphi_j(L) + \\ + J_1 g'(0) \varphi_j'(0) + J_2 g'(L) \varphi_j'(L), \quad j = 1, 2, 3 \dots \end{aligned}$$

Όμοια, αθροίζονται κατά μέλη οι εξισώσεις (1.72.b), (1.47.b), (1.47.d), (1.74.b) και (1.74.d):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \dot{n}_i(0) \left[\int_0^L m(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + M_1 \varphi_i(0) \varphi_j(0) + M_2 \varphi_i(L) \varphi_j(L) + \right. \\ \left. + J_1 \varphi_i'(0) \varphi_j'(0) + J_2 \varphi_i'(L) \varphi_j'(L) \right] = \\ = \int_0^L h(x) m(x) \varphi_j(x) dx + M_1 h(0) \varphi_j(0) + M_2 h(L) \varphi_j(L) + \\ + J_1 h'(0) \varphi_j'(0) + J_2 h'(L) \varphi_j'(L), \quad j = 1, 2, 3 \dots \end{aligned}$$

Και από τη συνθήκη ορθογωνιότητας (1.70) για κάποιο $j = 1, 2, 3 \dots$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{n}_j(0) = \int_0^L h(x) m(x) \varphi_j(x) dx + M_1 h(0) \varphi_j(0) + M_2 h(L) \varphi_j(L) + \\ + J_1 h'(0) \varphi_j'(0) + J_2 h'(L) \varphi_j'(L), \quad j = 1, 2, 3 \dots \end{aligned}$$

4. Εξωτερική φόρτιση συνεχούς συστήματος

4.1. Γενικά στοιχεία για την εξωτερική φόρτιση

Πρόκειται για εξωτερικές δυνάμεις (συγκεντρωμένες ή κατανεμημένες) ή ροπές που ασκούνται στο σύστημα. Εδώ υπάρχουν πολλές περιπτώσεις για το μέτρο, την κατεύθυνση και το σημείο εφαρμογής των εξωτερικών φορτίων.

4.2. Πλήγματα

Η έννοια του *πλήγματος* ως χαρακτηριστικό της ταλάντωσης ενός δομικού ή μηχανικού συστήματος δεν είναι αυστηρά ορισμένη στη βιβλιογραφία. Πρόκειται για μια μη περιοδική εξωτερική διέγερση που έχει τη μορφή λ.χ. ενός παλμού ή μιας συνάρτησης βήματος. Η έννοια «πλήγμα» εμπεριέχει ακόμη τις έννοιες του ξαφνικού και του έντονου. Επομένως, ως *πλήγμα* θα μπορούσε να οριστεί μια αιφνίδια, μεγάλης έντασης και σύντομης, σε σχέση με την ιδιοπερίοδο ενός συστήματος, χρονικής διάρκειας φόρτιση στην οποία υπόκειται το σύστημα.

Φορτίσεις με την έννοια του πλήγματος είναι δυνατό να προκαλέσουν ανεπιθύμητες ταλαντώσεις του συστήματος, τοπικές ζημιές, δυσλειτουργίες, διακοπές λειτουργίας, βλάβες, αστοχίες, ακόμη και κατάρρευση της κατασκευής. Παραδείγματα τέτοιων φορτίσεων είναι τα διάφορα κρουστικά φορτία, κρούσεις, συγκρούσεις, απότομες ωθήσεις, σεισμοί, άνεμος κ.ο.κ.

Πρόκειται λοιπόν για μαθηματικά μοντέλα που μπορούν αρκετά καλά να περιγράψουν μια απότομες δυνάμεις που καταπονούν μια κατασκευή. Η μελέτη, λοιπόν, της συμπεριφοράς των μηχανικών συστημάτων υπό την επίδραση πληγμάτων, δίνει ασφαλή συμπεράσματα για πραγματικές κατασκευές.

Για την περιγραφή ενός πλήγματος σε ένα συνεχές σύστημα χρειάζεται να είναι γνωστά τα εξής:

α. Σε ποιο σημείο ή σε ποιο τμήμα του συστήματος εφαρμόζεται το πλήγμα.

β. Η χρονική διάρκεια του πλήγματος t_1 .

γ. Η μέγιστη τιμή της δύναμης F_0 .

δ. Η συνάρτηση που περιγράφει τη μεταβολή του μέτρου της δύναμης $F(t)$, δηλαδή το είδος του πλήγματος.

Ως προς το (α) χαρακτηριστικό, διακρίνονται οι εξής δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1^η: συγκεντρωμένη δύναμη σε ένα σημείο $x = x_0$ του συστήματος.

Σε αυτήν την περίπτωση το πλήγμα έχει συνάρτηση της μορφής

$$f(x, t) = \delta(x - x_0)F(t)$$

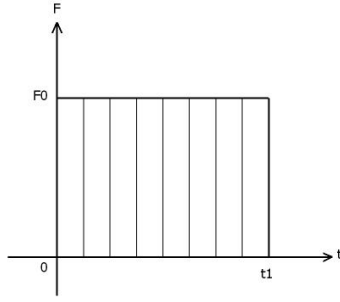
όπου $\delta(x - x_0)$ η συνάρτηση Δέλτα του Dirac που δείχνει ότι το πλήγμα εφαρμόζεται μόνο στο σημείο με $x = x_0$ και $F(t)$ η συνάρτηση του μέτρου του πλήγματος.

Εδώ διακρίνονται πολλές υποπεριπτώσεις ανάλογα με τη μορφή της $F(t)$. Η $F(t)$ παρέχει πληροφορίες τόσο για το είδος του πλήγματος όσο και για τη μέγιστη δύναμη F_0 . Επομένως, θα εξετάζονται πλήγματα δύο «μεταβλητών». **Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα μελετηθεί η απόκριση μιας τεντωμένης χορδής και μιας δοκού υπό την επίδραση των παρακάτω πληγμάτων.** Παρόλα αυτά, ο κατάλογος των διαφορετικών ειδών πληγμάτων δεν περιορίζεται μόνο σε αυτά, τουναντίον είναι άπειρος.

(α) ορθογωνικό πλήγμα με αναλυτική έκφραση

$$F(t) = \begin{cases} F_0, & 0 < t < t_1 \\ 0, & t > t_1 \end{cases} \quad (1.75. a)$$

και γραφική παράσταση

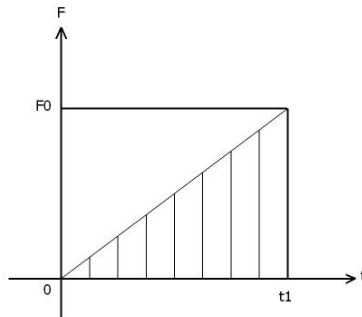


Σχήμα 16: Ορθογωνικό πλήγμα

(β) αυξανόμενο τριγωνικό πλήγμα που περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$F(t) = \begin{cases} F_0 \frac{t}{t_1}, & 0 < t < t_1 \\ 0, & t > t_1 \end{cases} \quad (1.75. b)$$

και παριστάνεται παρακάτω.

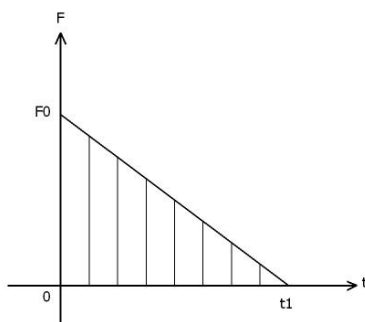


Σχήμα 17: Αυξανόμενο τριγωνικό πλήγμα

(γ) μειούμενο τριγωνικό πλήγμα με αναλυτική έκφραση

$$F(t) = \begin{cases} F_0 \left(1 - \frac{t}{t_1}\right), & 0 < t < t_1 \\ 0, & t > t_1 \end{cases} \quad (1.75. c)$$

και γραφική παράσταση

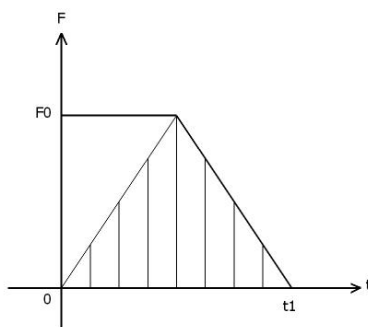


Σχήμα 18: Μειούμενο τριγωνικό πλήγμα

(δ) **ισοσκελές τριγωνικό πλήγμα** με μαθηματική έκφραση

$$F(t) = \begin{cases} F_0 \frac{2t}{t_1}, & 0 < t < \frac{t_1}{2} \\ F_0 \left(-\frac{2t}{t_1} + 2 \right), & \frac{t_1}{2} < t < t_1 \\ 0, & t > t_1 \end{cases} \quad (1.75. d)$$

και γραφική παράσταση

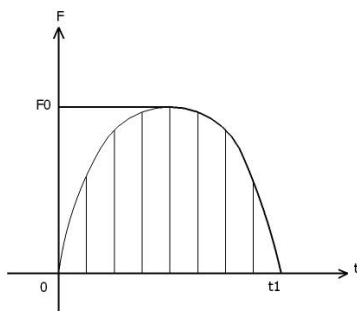


Σχήμα 19: Ισοσκελές τριγωνικό πλήγμα

(ε) **μισό ημίτονο** με το χρόνο t_1 να είναι η ημιπερίοδος της συνάρτησης του ημιτόνου. Το παραπάνω περιγράφεται μαθηματικά από την έκφραση

$$F(t) = \begin{cases} F_0 \sin\left(\pi \frac{t}{t_1}\right), & 0 < t < t_1 \\ 0, & t > t_1 \end{cases} \quad (1.75. e)$$

και παριστάνεται στο επίπεδο ως εξής:



Σχήμα 20: Ημιτονοειδές πλήγμα

Περίπτωση 2^η: κατανεμημένη δύναμη σε τμήμα μήκους l της χορδής με $0 < l \leq L$

Σε αυτήν την περίπτωση το πλήγμα έχει συνάρτηση της μορφής

$$f(x, t) = g(x)F(t)$$

όπου $g(x)$ η συνάρτηση που δείχνει σε ποιο τμήμα της χορδής εφαρμόζεται το πλήγμα και $F(t)$ η συνάρτηση του μέτρου του πλήγματος. Για τη συνάρτηση $g(x)$ προφανώς ισχύει $0 \leq x \leq L$, όπου L το μήκος της χορδής.

Εδώ επίσης διακρίνονται περιπτώσεις για το είδος του πλήγματος, όπως και προηγουμένως.

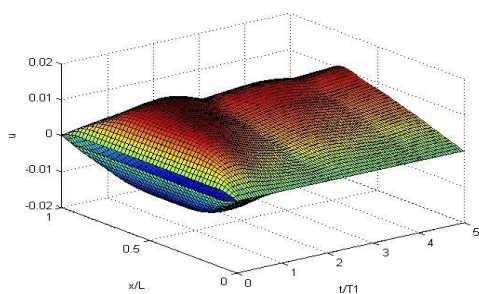
5. Φάσματα απόκρισης

Απόκριση είναι η μετατόπιση ενός σημείου από τη θέση ισορροπίας του κατά την ταλάντωσή του, δηλαδή το σχήμα της ταλάντωσης. Στην περίπτωση των συνεχών μονοδιάστατων συστημάτων (χορδή – ράβδος) που ταλαντώνονται κάθετα στον άξονά τους, η απόκριση σε κάθε χρονική στιγμή είναι μια καμπύλη γραμμή. Στην αξονική και στρεπτική ταλάντωση ράβδου, η απόκριση δε μπορεί να παρασταθεί γραφικά, αφού η διεύθυνση της ταλάντωσης είναι η ίδια με τη διεύθυνση της ράβδου.

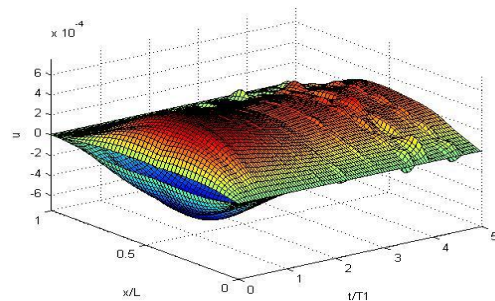
Φάσμα απόκρισης είναι η γραφική παράσταση της μέγιστης απόκρισης ενός συστήματος σε συνάρτηση με το χρόνο, και συγκεκριμένα τη διάρκεια του πλήγματος. Στα διακριτά συστήματα το φάσμα απόκρισης είναι δύο διαστάσεων, με τη διάρκεια του πλήγματος στον οριζόντιο άξονα και την απόκριση στον κατακόρυφο. Στα συνεχή μονοδιάστατα συστήματα όμως, το φάσμα απόκρισης είναι τριών διαστάσεων. Στις περιπτώσεις της εγκάρσιας ταλάντωσης τεντωμένης χορδής και δοκού στους τρεις άξονες του φάσματος απόκρισης παριστάνονται το αδιάστατο μήκος της χορδής ή της δοκού, η διάρκεια του πλήγματος και η απόκριση των σημείων της χορδής ή της δοκού από τη θέση ισορροπίας τους.

Τα φάσματα απόκρισης, λοιπόν, περιέχουν τις μέγιστες αποκρίσεις κάθε σημείου του συστήματος συναρτήσει των βασικών παραμέτρων του πλήγματος. Για την κατασκευή τους υπολογίζεται πρώτα η απόκριση του συστήματος κατά τη διάρκεια του πλήγματος και στη συνέχεια επιλέγεται η μέγιστη τιμή της.

Παρατίθενται δύο παραδείγματα φασμάτων απόκρισης. Στο σχήμα 14.a παρουσιάζεται ένα φάσμα απόκρισης τεντωμένης χορδής με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα, ενώ στο σχήμα 14.b ένα φάσμα απόκρισης μονόπακτης δοκού.



(α)



(β)

Σχήμα 21: Φάσμα απόκρισης χορδής (α) και δοκού (β)

6. Το ολοκλήρωμα Duhamel

Πρόκειται για το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^t N_i(\tau) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau \quad (1.76)$$

που εμφανίζεται στην τελική λύση του προβλήματος των εγκάρσιων ταλαντώσεων χορδής ή δοκού αν ακολουθηθεί για την επίλυσή του η μέθοδος των κανονικών μορφών.

Να σημειωθεί ότι το ολοκλήρωμα Duhamel μπορεί να γραφτεί με δύο τρόπους αφού είναι ολοκλήρωμα συνέλιξης δύο συναρτήσεων, της $N_i(y)$ και της $\sin y$:

$$\int_0^t N_i(t) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau$$

ή

$$\int_0^t N_i(t - \tau) \sin(\omega_i\tau) d\tau$$

6.1. Η μορφή του ολοκληρώματος Duhamel για τις διάφορες περιπτώσεις πληγμάτων

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, το

$$N_i(t) = \int_0^L F(x, t) \varphi_i(x) dx, \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (1.28)$$

είναι το γενικευμένο φορτίο που αντιστοιχεί στην κανονική συντεταγμένη $n_i(t)$. Η $F(x, t)$ είναι η συνάρτηση που περιγράφει το πλήγμα και παρέχει πληροφορίες σε σχέση με το πού ασκείται αυτό, τη μέγιστη τιμή της δύναμης και το είδος του. Στην περίπτωση που το πλήγμα είναι συγκεντρωμένο στη θέση $x = b$, η $F(x, t)$ είναι της μορφής:

$$F(x, t) = F(t)\delta(x - b) \quad (1.77)$$

όπου $F(t)$ είναι μία από τις συναρτήσεις (1.75) των πληγμάτων. Το γενικευμένο φορτίο επομένως γράφεται:

$$\begin{aligned} N_i(t) &= \int_0^L F(x, t)\varphi_i(x)dx = \int_0^L F(t)\delta(x - b)\varphi_i(x)dx = \\ &= F(t) \int_0^L \delta(x - b)\varphi_i(x)dx = F(t)\varphi_i(b), \quad i = 1, 2, 3 \dots \end{aligned} \quad (1.78)$$

Αφού για τη συνάρτηση δέλτα του Dirac ισχύει: $\int_0^L \delta(x - b)\varphi_i(x)dx = \varphi_i(b)$.

Επομένως, το ολοκλήρωμα Duhamel μπορεί να γραφτεί αναλυτικά στη μορφή:

$$I = \int_0^t [F(t)\varphi_i(b)] \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau \quad (1.79)$$

Ανάλογα με το είδος του πλήγματος, το ολοκλήρωμα Duhamel μπορεί να πάρει τις παρακάτω μορφές.

(α) ορθογωνικό πλήγμα με αναλυτική έκφραση

$$F(t) = \begin{cases} F_0, & 0 < t < t_1 \\ 0, & t > t_1 \end{cases} \quad (1.75. a)$$

Το ολοκλήρωμα Duhamel γράφεται:

$$I(t) = \begin{cases} \int_0^t [F_0\varphi_i(b)] \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau, & 0 < t < t_1 \\ \int_0^{t_1} [F_0\varphi_i(b)] \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau, & t > t_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(t) = \begin{cases} F_0 \varphi_i(b) \int_0^t \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau, & 0 < t < t_1 \\ F_0 \varphi_i(b) \int_0^{t_1} \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau, & t > t_1 \end{cases} \quad (1.80. a)$$

(β) αυξανόμενο τριγωνικό πλήγμα που περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$F(t) = \begin{cases} F_0 \frac{t}{t_1}, & 0 < t < t_1 \\ 0, & t < 0, \quad t > t_1 \end{cases} \quad (1.75. b)$$

Το ολοκλήρωμα Duhamel γράφεται:

$$I(t) = \begin{cases} \int_0^t \left[F_0 \frac{t}{t_1} \varphi_i(b) \right] \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau, & 0 < t < t_1 \\ \int_0^{t_1} \left[F_0 \frac{t}{t_1} \varphi_i(b) \right] \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau, & t > t_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(t) = \begin{cases} \frac{F_0 \varphi_i(b)}{t_1} \int_0^t t \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau, & 0 < t < t_1 \\ \frac{F_0 \varphi_i(b)}{t_1} \int_0^{t_1} t \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau, & t > t_1 \end{cases} \quad (1.80. b)$$

(γ) μειούμενο τριγωνικό πλήγμα με αναλυτική έκφραση

$$F(t) = \begin{cases} F_0 \left(1 - \frac{t}{t_1} \right), & 0 < t < t_1 \\ 0, & t < 0, \quad t > t_1 \end{cases} \quad (1.75. c)$$

Το ολοκλήρωμα Duhamel γράφεται:

$$I(t) = \begin{cases} \int_0^t \left[F_0 \left(1 - \frac{t}{t_1} \right) \varphi_i(b) \right] \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau, & 0 < t < t_1 \\ \int_0^{t_1} \left[F_0 \left(1 - \frac{t}{t_1} \right) \varphi_i(b) \right] \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau, & t > t_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(t) = \begin{cases} F_0 \varphi_i(b) \int_0^t \left(1 - \frac{t}{t_1}\right) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau, & 0 < t < t_1 \\ F_0 \varphi_i(b) \int_0^{t_1} \left(1 - \frac{t}{t_1}\right) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau, & t > t_1 \end{cases} \quad (1.80.c)$$

(δ) ισοσκελές τριγωνικό πλήγμα με μαθηματική έκφραση

$$F(t) \begin{cases} F_0 \frac{2t}{t_1}, & 0 < t < \frac{t_1}{2} \\ F_0 \left(-\frac{2t}{t_1} + 2\right), & \frac{t_1}{2} < t < t_1 \\ 0, & t < 0, \quad t > t_1 \end{cases} \quad (1.75.d)$$

Το ολοκλήρωμα Duhamel γράφεται:

$$I(t) = \begin{cases} \int_0^t F_0 \frac{2t}{t_1} \varphi_i(b) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau, & 0 < t < \frac{t_1}{2} \\ \int_0^t F_0 \left(-\frac{2t}{t_1} + 2\right) \varphi_i(b) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau, & \frac{t_1}{2} < t < t_1 \\ \int_0^{\frac{t_1}{2}} F_0 \frac{2t}{t_1} \varphi_i(b) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau + \\ + \int_{\frac{t_1}{2}}^{t_1} F_0 \left(-\frac{2t}{t_1} + 2\right) \varphi_i(b) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau, & t > t_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I(t) = \begin{cases} \frac{2F_0 \varphi_i(b)}{t_1} \int_0^t t \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau, & 0 < t < \frac{t_1}{2} \\ 2F_0 \varphi_i(b) \int_0^t \left(-\frac{t}{t_1} + 1\right) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau, & \frac{t_1}{2} < t < t_1 \\ 2F_0 \varphi_i(b) \left\{ \int_0^{\frac{t_1}{2}} \frac{t}{t_1} \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau + \right. \\ \left. + \int_{\frac{t_1}{2}}^{t_1} \left(-\frac{t}{t_1} + 1\right) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau \right\}, & t > t_1 \end{cases} \quad (1.80.d)$$

(ε) μισό ημίτονο με μαθηματική έκφραση:

$$F(t) = \begin{cases} F_0 \sin\left(\pi \frac{t}{t_1}\right), & 0 < t < t_1 \\ 0, & t < 0, \quad t > t_1 \end{cases} \quad (1.75. e)$$

Το ολοκλήρωμα Duhamel γράφεται:

$$I(t) = \begin{cases} \int_0^t \left[F_0 \sin\left(\pi \frac{t}{t_1}\right) \varphi_i(b) \right] \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau, & 0 < t < t_1 \\ \int_0^{t_1} \left[F_0 \sin\left(\pi \frac{t}{t_1}\right) \varphi_i(b) \right] \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau, & t > t_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(t) = \begin{cases} F_0 \varphi_i(b) \int_0^t \sin\left(\pi \frac{t}{t_1}\right) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau, & 0 < t < t_1 \\ F_0 \varphi_i(b) \int_0^{t_1} \sin\left(\pi \frac{t}{t_1}\right) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau, & t > t_1 \end{cases} \quad (1.80. e)$$

6.2. Αριθμητικός υπολογισμός του ολοκληρώματος Duhamel

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, το ολοκλήρωμα Duhamel έχει τη γενική μορφή

$$I = \int_0^t N_i(\tau) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau$$

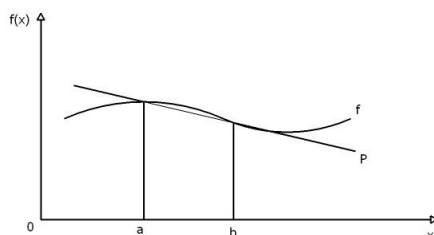
Η γενικότερη μορφή του ολοκληρώματος είναι:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

Η εύρεση της τιμής του ολοκληρώματος γίνεται αριθμητικά, υπολογίζοντας το εμβαδόν που περικλείεται από τη συνάρτηση $f(x)$ και τον οριζόντιο άξονα. Υπάρχουν πολλές μέθοδοι για τον υπολογισμό αυτού του εμβαδού, ενδεικτικά αναφέρονται οι παρακάτω.⁸

⁸ Για περισσότερες πληροφορίες βλ. [10] Burden, R. L., Faires, J. D., Reynolds, A. C., *Numerical Analysis*, 2nd ed., Prindle, Weber & Schmidt, USA, 1981

(α) Κανόνας του τραπεζίου



Σχήμα 22: Υπολογισμός ολοκληρώματος με τον κανόνα του τραπεζίου

Ο υπολογισμός της εξίσωσης της ευθείας P_1 γίνεται με τη βοήθεια του πρώτου πολυωνύμου Lagrange:

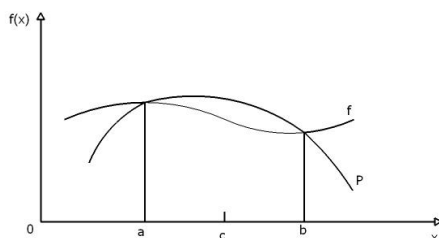
$$P_1(x) = \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\cong \int_a^b P_1(x)dx = \int_a^b \left[\frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) \right] dx = \\ &= \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] \end{aligned}$$

Επομένως, η τιμή του ολοκληρώματος Duhamel δίνεται από το άθροισμα πολλών τέτοιων τραπεζίων με μικρό ύψος $b-a$.

(β) Κανόνας του Simpson



Σχήμα 23: Υπολογισμός ολοκληρώματος με τον κανόνα του Simpson

Ο υπολογισμός της εξίσωσης της γραμμής P_2 γίνεται με τη βοήθεια του δεύτερου πολυωνύμου Lagrange:

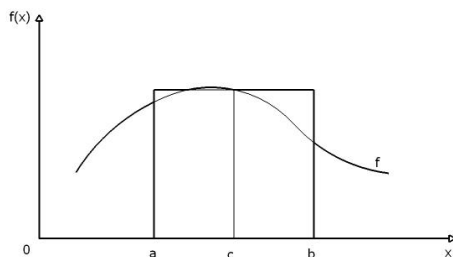
$$\begin{aligned}
 P_2(x) &= \frac{\left[x - \left(a + \frac{b-a}{2}\right)\right] (x-b)}{\left[a - \left(a + \frac{b-a}{2}\right)\right] \left[b - \left(a + \frac{b-a}{2}\right)\right]} f(a) + \\
 &+ \frac{(x-a)(x-b)}{\left[\left(a + \frac{b-a}{2}\right) - a\right] \left[\left(a + \frac{b-a}{2}\right) - b\right]} f\left(a + \frac{b-a}{2}\right) + \\
 &+ \frac{(x-a) \left[x - \left(a + \frac{b-a}{2}\right)\right]}{(b-a) \left[b - \left(a + \frac{b-a}{2}\right)\right]} f(b)
 \end{aligned}$$

Οπότε,

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &\cong \int_{\alpha}^{\beta} P_2(x) dx = \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \frac{\left[x - \left(a + \frac{b-a}{2}\right)\right] (x-b)}{\left[a - \left(a + \frac{b-a}{2}\right)\right] \left[b - \left(a + \frac{b-a}{2}\right)\right]} f(a) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(x-a)(x-b)}{\left[\left(a + \frac{b-a}{2}\right) - a\right] \left[\left(a + \frac{b-a}{2}\right) - b\right]} f\left(a + \frac{b-a}{2}\right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(x-a) \left[x - \left(a + \frac{b-a}{2}\right)\right]}{(b-a) \left[b - \left(a + \frac{b-a}{2}\right)\right]} f(b) \right\} dx = \\
 &= \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(a + \frac{b-a}{2}\right) + f(b) \right]
 \end{aligned}$$

Επομένως, η τιμή του ολοκληρώματος Duhamel δίνεται από το άθροισμα πολλών τέτοιων σχημάτων με μικρό ύψος $b - a$.

(γ) Κανόνας του μέσου



Σχήμα 24: Υπολογισμός ολοκληρώματος με τον κανόνα του μέσου

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος γίνεται μέσω του εμβαδού του ορθογωνίου με βάση $b - a$ και ύψος $f(c)$, όπου $c = \frac{b-a}{2}$:

$$\int_a^b f(x) dx \cong (b - a) f\left(\frac{b - a}{2}\right)$$

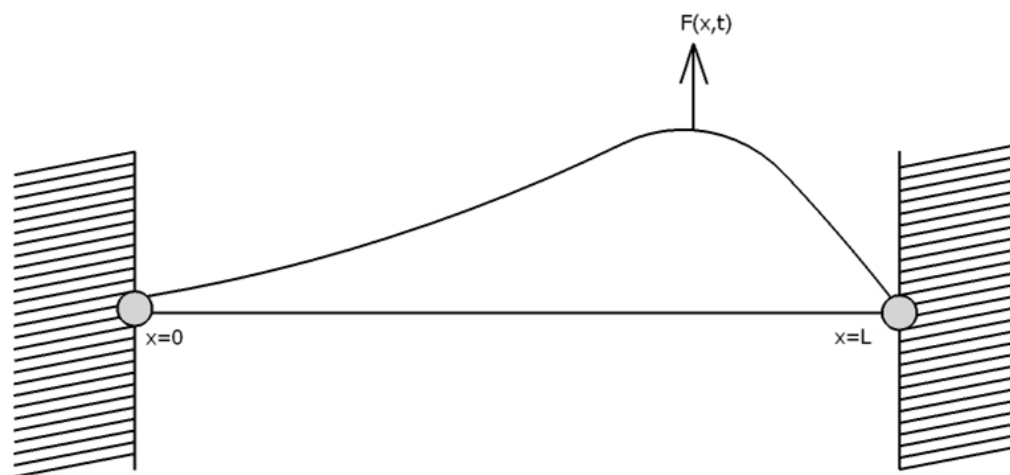
Επομένως, η τιμή του ολοκληρώματος Duhamel δίνεται από το άθροισμα πολλών τέτοιων ορθογωνίων με μικρή βάση $b - a$.

Εγκάρσιες ταλαντώσεις χορδής

1. Διατύπωση του προβλήματος της εγκάρσιας ταλάντωσης χορδής και εξαγωγή των εξισώσεων για τις διάφορες περιπτώσεις οριακών συνθηκών

Με βάση τα όσα αναλύθηκαν στο πρώτο κεφάλαιο, το πρόβλημα της ΜΔΕ 2^{ης} τάξης για τις εγκάρσιες ταλαντώσεις τεντωμένης χορδής επιλύεται παρακάτω για τις διάφορες περιπτώσεις οριακών συνθηκών. Κατά την επίλυση και στην εξαγωγή των τελικών συμπερασμάτων χρησιμοποιούνται τα αδιάστατα μεγέθη.

1.1. Χορδή με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα



Σχήμα 25: Χορδή με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα

Η μερική διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης που περιγράφει τις εγκάρσιες ταλαντώσεις τεντωμένης χορδής με σταθερές κατανομές μάζας και ακαμψίας είναι:

$$T \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + F(x, t) = m \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

Το **πρόβλημα ιδιοτιμών** που περιγράφει την ελεύθερη ταλάντωση χορδής περιλαμβάνει την εξίσωση

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2}, \quad c = \sqrt{\frac{T}{m}} \quad (2.2)$$

τις αρχικές συνθήκες

$$\begin{cases} v(x, 0) = 0 \\ \left. \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

και τις οριακές συνθήκες

$$\begin{cases} v(0, t) = 0 \\ v(L, t) = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Υποτίθεται σύγχρονη κίνηση, δηλαδή λύση της μορφής

$$v(x, t) = \varphi(x)f(t) \quad (2.5)$$

Αντικατάσταση της (2.5) στην εξίσωση (2.2) δίνει:

$$\begin{cases} \ddot{f}(t) + \omega^2 f(t) = 0 \\ \varphi''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varphi(x) = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Αντικατάσταση των οριακών συνθηκών (2.4) στην εξίσωση (2.5):

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \varphi(L) = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Έστω λύση

$$\varphi(x) = c_1 \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \quad (2.8)$$

Με αντικατάσταση της (2.8) στις οριακές συνθήκες (2.7) προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = 0 \\ c_1 \cos\left(\frac{\omega L}{c}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos\left(\frac{\omega L}{c}\right) & \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Από την πρώτη εξίσωση του συστήματος ισχύει ότι $c_1 = 0$. Για να έχει το σύστημα (2.9) μη μηδενική λύση πρέπει η ορίζουσά του να μηδενίζεται, δηλαδή:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos\left(\frac{\omega L}{c}\right) & \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\omega L}{c} = n\pi, \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_n = \frac{n\pi c}{L} = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{m}}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.10)$$

Οι ω_n είναι οι ιδιοσυχνότητες της ελεύθερης ταλάντωσης. Σε καθεμιά από αυτές αντιστοιχεί μια ιδιομορφή:

$$\varphi_n(x) = c_{2n} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (2.11)$$

Από τη συνθήκη κανονικοποίησης προκύπτουν οι κανονικοποιημένοι συντελεστές c_{2n} :

$$m \int_0^L \varphi_n^2(x) dx = 1 \Rightarrow m c_{2n}^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m c_{2n}^2 \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin\left(2\frac{n\pi}{L}x\right)}{4\frac{n\pi}{L}} \right] \Bigg|_0^L = 1 \Rightarrow c_{2n}^2 = \frac{2}{mL} \Rightarrow c_{2n} = \sqrt{\frac{2}{mL}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Άρα οι κανονικοποιημένες ιδιομορφές είναι:

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{mL}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.12)$$

Το πρόβλημα των εγκάρσιων ταλαντώσεων τεντωμένης χορδής με σταθερές κατανομές μάζας και ακαμψίας υπό την επίδραση συγκεντρωμένου φορτίου (πλήγματος) στη θέση $x = b, 0 \leq b \leq L$, θα επιλυθεί με τη μέθοδο των κανονικών μορφών και περιλαμβάνει τη ΜΔΕ 2^{ης} τάξης (2.1), τις αρχικές

συνθήκες (2.3) και τις οριακές συνθήκες (2.4). Έστω ότι η λύση της (2.1) είναι της μορφής:

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} n_i(t) \varphi_i(x) \quad (2.13)$$

όπου $n_i(t)$ είναι οι κανονικές συντεταγμένες. Η (2.13) αντικαθίσταται στην εξίσωση (2.1) και στη συνέχεια η (2.1) πολλαπλασιάζεται με $\varphi_j(x)$ και ολοκληρώνεται από 0 έως L , όπως στο εδάφιο 2.4.1 του κεφαλαίου 1. Προκύπτουν οι ασύζευκτες διαφορικές εξισώσεις

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ddot{n}_i(t) \delta_{ij} + \sum_{i=1}^{\infty} n_i(t) \omega_i^2 \delta_{ij} = N_j(t), \quad j = 1, 2, 3 \dots$$

η καθεμία από τις οποίες έχει λύση:

$$n_i(t) = n_i(0) \cos(\omega_i t) + \frac{\dot{n}_i(0)}{\omega_i} \sin(\omega_i t) + \frac{1}{\omega_i} \int_0^t N_i(\tau) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau$$

Από τις αρχικές συνθήκες (2.3) όμως, είναι $n_i(0) = 0$ και $\dot{n}_i(0) = 0$, άρα η τελευταία περιορίζεται μόνο στο ολοκλήρωμα Duhamel:

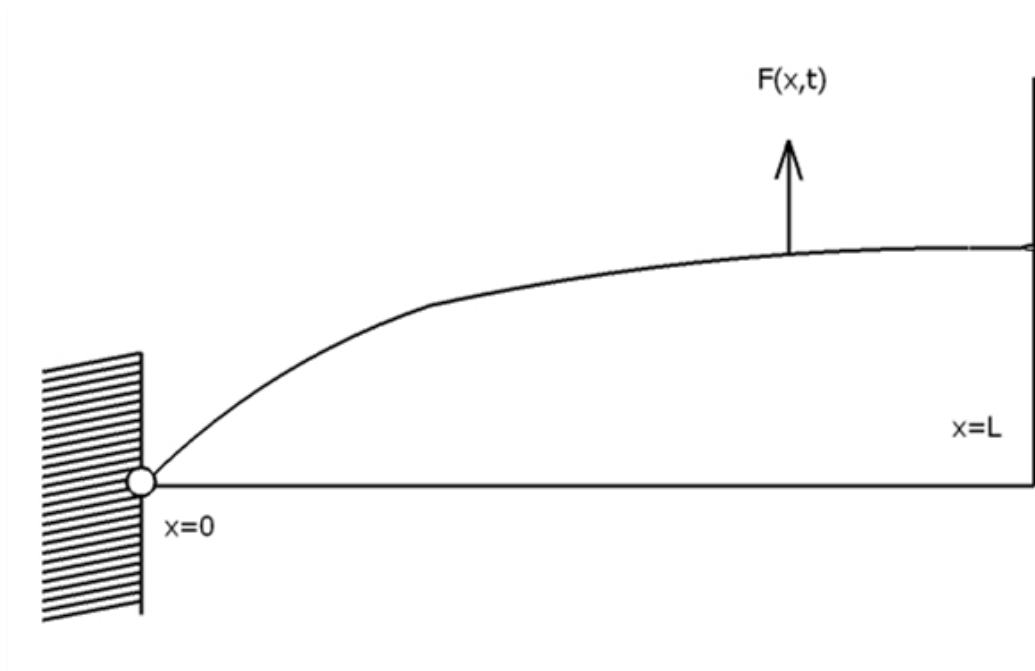
$$\begin{aligned} n_i(t) &= \frac{1}{\omega_i} \int_0^t N_i(\tau) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau = \\ &= \frac{1}{\omega_i} \int_0^t \left[\int_0^L F(x, \tau) \varphi_i(x) dx \right] \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau, \quad i = 1, 2, 3 \dots \end{aligned} \quad (2.14)$$

Επειδή υπάρχει πλήγμα στη θέση $x = b$, τα γενικευμένα φορτία (βλ. εδάφιο 6.1 του κεφαλαίου 1) γράφονται:

$$n_i(t) = \frac{\varphi_i(b)}{\omega_i} \int_0^t F(t) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau, \quad i = 1, 2, 3 \dots$$

Ανάλογα με το είδος του πλήγματος, τα παραπάνω παίρνουν μία από τις μορφές (1.80).

1.2. Χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελεύθερο άκρο



Σχήμα 26: Χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελεύθερο άκρο

Το **πρόβλημα ιδιοτιμών** που περιγράφει την ελεύθερη ταλάντωση χορδής περιλαμβάνει την εξίσωση (2.2), τις αρχικές συνθήκες (2.3) και τις οριακές συνθήκες

$$\begin{cases} v(0, t) = 0 \\ \frac{\partial v(L, t)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία προκύπτει το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\omega}{c} \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) & \frac{\omega}{c} \cos\left(\frac{\omega L}{c}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Από την πρώτη εξίσωση του συστήματος ισχύει ότι $c_1 = 0$. Υπολογισμός των ιδιοσυχνοτήτων ω_n :

$$\left| -\frac{\omega}{c} \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) \quad \frac{\omega}{c} \cos\left(\frac{\omega L}{c}\right) \right| = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\omega L}{c}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\omega L}{c} = (2n - 1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_n = \frac{(2n-1)\pi c}{2L} = \frac{(2n-1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{T}{m}}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.17)$$

Οι αντίστοιχες ιδιομορφές είναι:

$$\varphi_n(x) = c_{2n} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right) \quad (2.18)$$

Κανονικοποίηση των ιδιομορφών δίνει τους συντελεστές

$$c_{2n} = \sqrt{\frac{2}{mL}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Άρα οι κανονικοποιημένες ιδιομορφές είναι:

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{mL}} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right), \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.19)$$

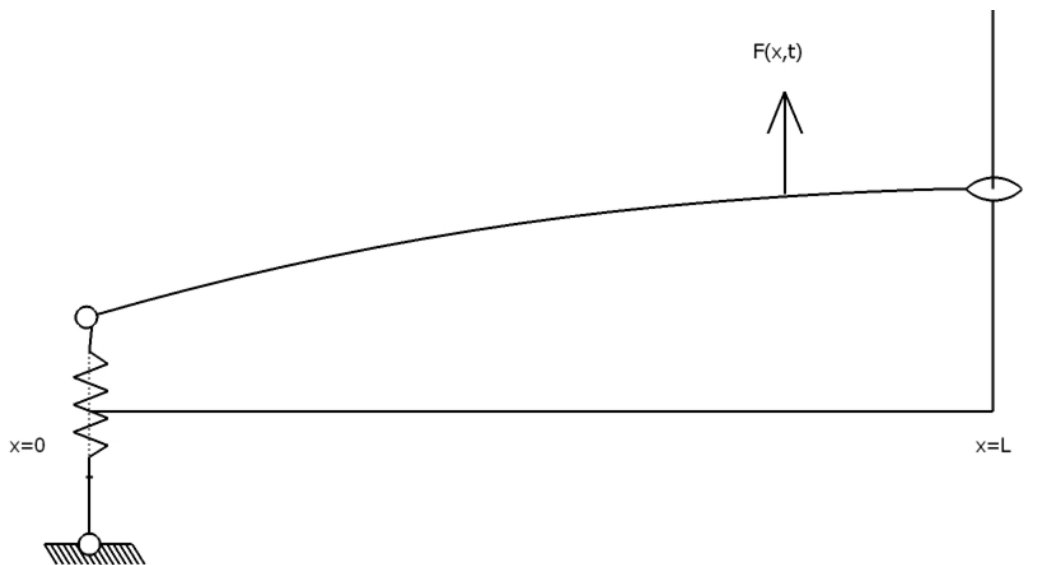
Το **πρόβλημα των εγκάρσιων ταλαντώσεων τεντωμένης χορδής** με σταθερές κατανομές μάζας και ακαμψίας υπό την επίδραση συγκεντρωμένου φορτίου (πλήγματος) στη θέση $x = b, 0 \leq b \leq L$, θα επιλυθεί με τη μέθοδο των κανονικών μορφών και περιλαμβάνει τη ΜΔΕ 2^{ης} τάξης (2.1), τις αρχικές συνθήκες (2.3) και τις οριακές συνθήκες (2.15).

Οι κανονικές συντεταγμένες που προκύπτουν είναι:

$$n_i(t) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t N_i(\tau) \sin[\omega_i(t-\tau)] d\tau$$

και το ολοκλήρωμα Duhamel παίρνει ανάλογα με το είδος του πλήγματος μία από τις μορφές (1.80).

1.3. Χορδή με ένα ελαστικά στερεωμένο και ένα ελεύθερο άκρο



Σχήμα 27: Χορδή με ένα ελαστικά στερεωμένο και ένα ελεύθερο άκρο

Το **πρόβλημα ιδιοτιμών** που περιγράφει την ελεύθερη ταλάντωση χορδής περιλαμβάνει την εξίσωση (2.2), τις αρχικές συνθήκες (2.3) και τις οριακές συνθήκες

$$\begin{cases} \frac{\partial v(0, \tau)}{\partial \xi} - \frac{k}{T} v(0, t) = 0 \\ \frac{\partial v(L, t)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} -k & T \frac{\omega}{L} \\ -\frac{\omega}{c} \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) & \frac{\omega}{c} \cos\left(\frac{\omega L}{c}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Από το μηδενισμό της ορίζουσας τους συστήματος (2.21) προκύπτει η εξίσωση ιδιοσυχνοτήτων:

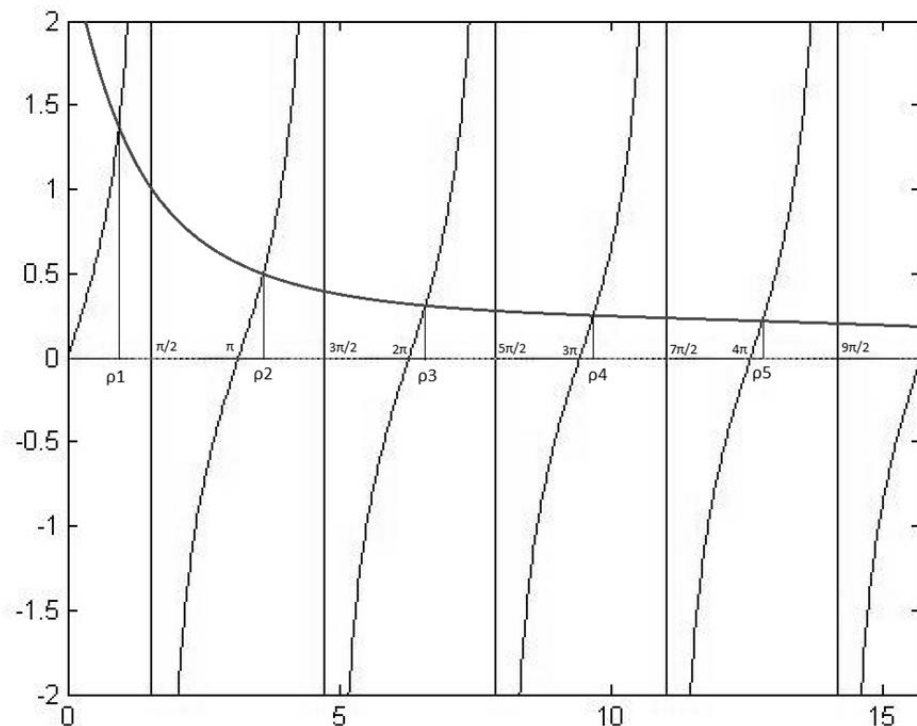
$$\tan\left(\frac{\omega L}{c}\right) = \frac{kL}{\frac{\omega L}{c}} \quad (2.22)$$

Οι λύσεις της τελευταίας εξίσωσης φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Προφανώς είναι:

$$0 < \rho_1 = \frac{\omega_1}{c} L < \frac{\pi}{2}$$

$$\pi < \rho_2 = \frac{\omega_2}{c} L < \frac{3\pi}{2}$$

$$2\pi < \rho_3 = \frac{\omega_3}{c} L < \frac{5\pi}{2}, \quad \text{κ.ο.κ.}$$



Σχήμα 28: Λύσεις της εξίσωσης ιδιοσυχνοτήτων (2.27) για τη χορδή με ένα ελαστικά στερεωμένο και ένα ελεύθερο άκρο

Από την εύρεση των ριζών $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_n$ υπολογίζονται και οι αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$.

Οι αντίστοιχες ιδιομορφές είναι:

$$\varphi_n(x) = c_{1n} \frac{\cos\left(\frac{\omega_n}{c}(L-x)\right)}{\cos\left(\frac{\omega_n}{c}L\right)}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.23)$$

Κανονικοποίηση των ιδιομορφών δίνει τελικά τις *κανονικοποιημένες ιδιομορφές*:

$$\varphi_n(x) = 2 \sqrt{\frac{\omega_n}{mc \left[2 \frac{\omega_n L}{c} + \sin\left(\frac{2\omega_n L}{c}\right)\right]}} \cos\left(\frac{\omega_n(L-x)}{c}\right), \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.24)$$

Το **πρόβλημα των εγκάρσιων ταλαντώσεων τεντωμένης χορδής** με σταθερές κατανομές μάζας και ακαμψίας υπό την επίδραση συγκεντρωμένου φορτίου (πλήγματος) στη θέση $x = b, 0 \leq b \leq L$, θα επιλυθεί με τη *μέθοδο των κανονικών μορφών* και περιλαμβάνει τη ΜΔΕ 2ης τάξης (2.1), τις αρχικές συνθήκες (2.3) και τις οριακές συνθήκες (2.20).

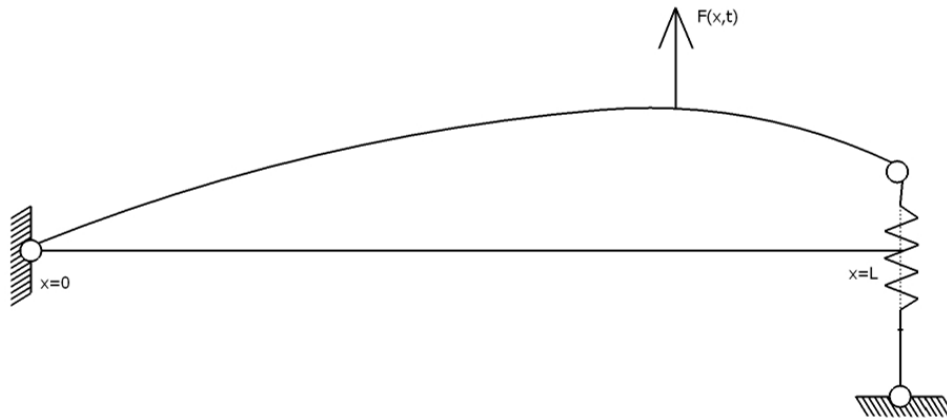
Οι κανονικές συντεταγμένες που προκύπτουν είναι:

$$n_i(t) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t N_i(t) \sin[\omega_i(t-\tau)] d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_i(t) = \frac{\varphi_i(b)}{\omega_i} \int_0^t F(t) \sin[\omega_i(t-\tau)] d\tau, \quad i = 1, 2, 3 \dots$$

και το ολοκλήρωμα Duhamel παίρνει αντίστοιχα τις μορφές (1.80).

1.4. Χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελαστικά στερεωμένο άκρο



Σχήμα 29: Χορδή με ένα σταθερά και ένα ελαστικά στερεωμένο άκρο

Το **πρόβλημα ιδιοτιμών** που περιγράφει την ελεύθερη ταλάντωση χορδής περιλαμβάνει την εξίσωση (2.2), τις αρχικές συνθήκες (2.3) και τις οριακές συνθήκες

$$\begin{cases} v(0, t) = 0 \\ \frac{\partial v(L, t)}{\partial x} - \frac{k}{T} v(L, t) = 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} -T \frac{\omega}{c} \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) + k \cos\left(\frac{\omega L}{c}\right) & T \frac{\omega}{c} \cos\left(\frac{\omega L}{c}\right) + k \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Από το μηδενισμό της ορίζουσας του συστήματος (2.26) προκύπτει η εξίσωση ιδιοσυχνοτήτων:

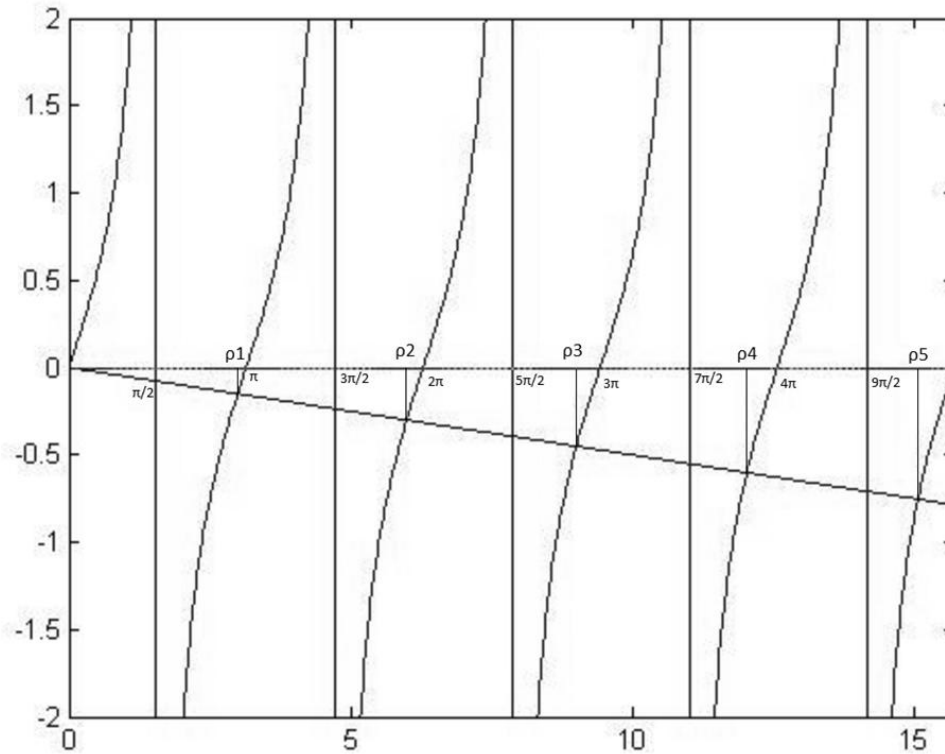
$$\tan\left(\frac{\omega L}{c}\right) = \left(-\frac{T}{kL}\right) \left(\frac{\omega L}{c}\right) \quad (2.27)$$

Οι λύσεις της τελευταίας εξίσωσης φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Προφανώς είναι:

$$\frac{\pi}{2} < \rho_1 = \frac{\omega_1}{c} L < \pi$$

$$\frac{3\pi}{2} < \rho_2 = \frac{\omega_2}{c}L < 2\pi$$

$$\frac{5\pi}{2} < \rho_3 = \frac{\omega_3}{c}L < 3\pi, \quad \text{κ. ο. κ.}$$



Σχήμα 30: Λύσεις της εξίσωσης ιδιοσυχνοτήτων (2.22) για τη χορδή με ένα σταθερά και ελαστικά στερεωμένο άκρο

Από την εύρεση των ριζών $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_n$ υπολογίζονται και οι αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$.

Οι αντίστοιχες ιδιομορφές είναι:

$$\varphi_n(x) = c_{2n} \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right), \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.28)$$

Κανονικοποίηση των ιδιομορφών δίνει τελικά τις *κανονικοποιημένες ιδιομορφές*:

$$\varphi_n(x) = 2 \sqrt{\frac{\omega_n}{mc \left[2 \frac{\omega_n L}{c} + \sin\left(\frac{2\omega_n L}{c}\right) \right]}} \sin\left(\frac{\omega_n}{c} x\right), \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.29)$$

Το πρόβλημα των εγκάρσιων ταλαντώσεων τεντωμένης χορδής με σταθερές κατανομές μάζας και ακαμψίας υπό την επίδραση συγκεντρωμένου φορτίου (πλήγματος) στη θέση $x = b, 0 \leq b \leq L$, θα επιλυθεί με τη μέθοδο των κανονικών μορφών και περιλαμβάνει τη ΜΔΕ 2ης τάξης (2.1), τις αρχικές συνθήκες (2.3) και τις οριακές συνθήκες (2.25).

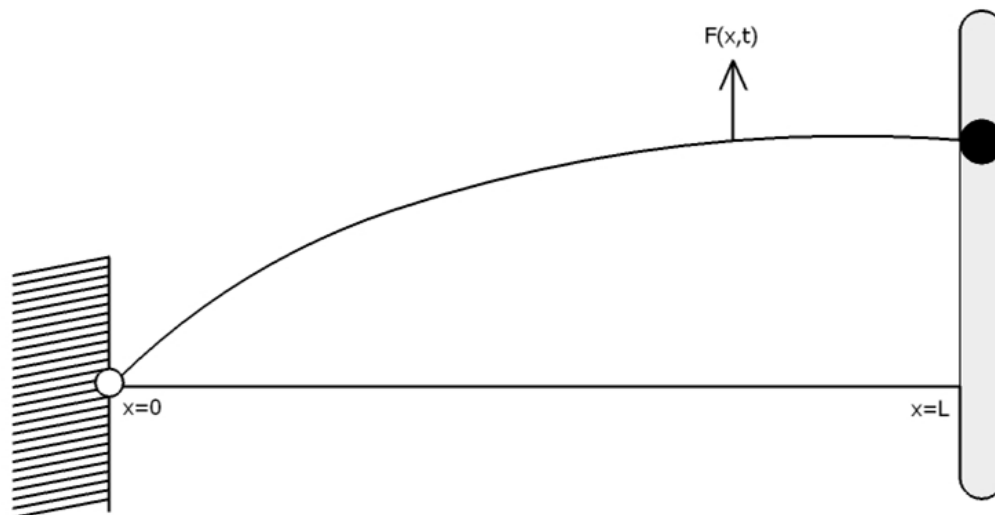
Οι κανονικές συντεταγμένες που προκύπτουν είναι:

$$n_i(t) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t N_i(t) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_i(t) = \frac{\varphi_i(b)}{\omega_i} \int_0^t F(t) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau, \quad i = 1, 2, 3 \dots$$

και το ολοκλήρωμα Duhamel παίρνει αντίστοιχα τις μορφές (1.80).

1.5. Χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο άκρο και με συγκεντρωμένη μάζα στο άλλο άκρο



Σχήμα 31: Χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο άκρο και με συγκεντρωμένη μάζα στο άλλο άκρο

Το **πρόβλημα ιδιοτιμών** που περιγράφει την ελεύθερη ταλάντωση χορδής περιλαμβάνει την εξίσωση (2.2), τις αρχικές συνθήκες (2.3) και τις οριακές συνθήκες

$$\begin{cases} v(0, t) = 0 \\ \frac{\partial v(L, t)}{\partial x} - \frac{M}{T} v(L, t) = 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\omega}{c} \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) - \omega^2 \frac{M}{T} \cos\left(\frac{\omega L}{c}\right) & \frac{\omega}{c} \cos\left(\frac{\omega L}{c}\right) - \omega^2 \frac{M}{T} \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Από το μηδενισμό της ορίζουσας τους συστήματος (2.31) προκύπτει η εξίσωση ιδιοσυχνοτήτων:

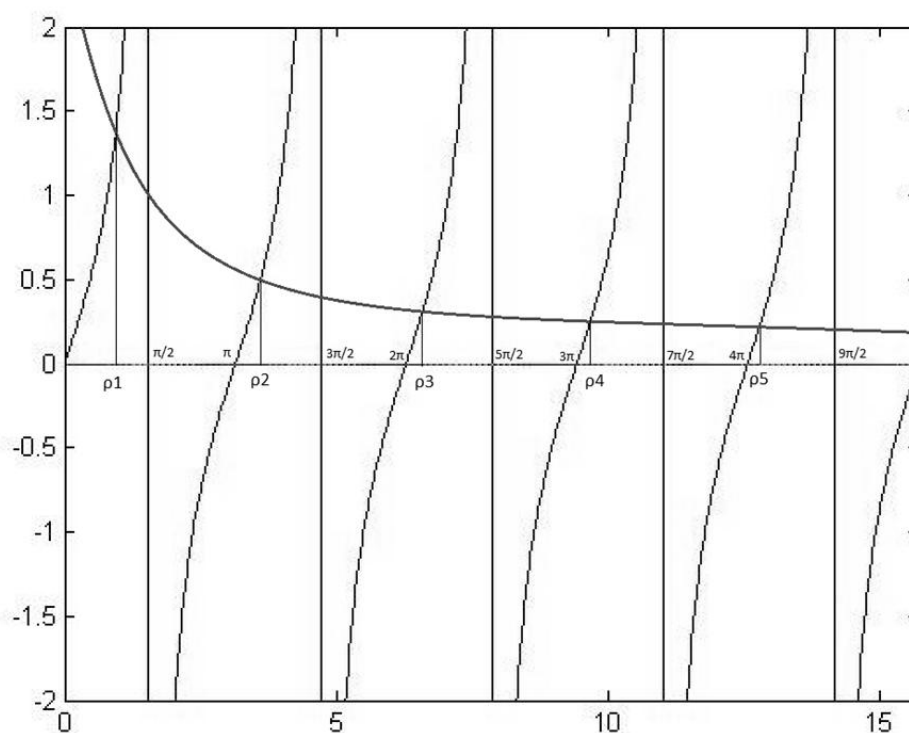
$$\tan\left(\frac{\omega L}{c}\right) = \frac{mL}{\omega L} \quad (2.32)$$

Οι λύσεις της τελευταίας εξίσωσης φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Προφανώς είναι:

$$0 < \rho_1 = \frac{\omega_1}{c} L > \frac{\pi}{2}$$

$$\pi < \rho_2 = \frac{\omega_2}{c} L > \frac{3\pi}{2}$$

$$2\pi < \rho_3 = \frac{\omega_3}{c} L > \frac{5\pi}{2}, \quad \text{κ.ο.κ.}$$



Σχήμα 32: Λύσεις της εξίσωσης ιδιοσυχνοτήτων (2.32) για τη χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο άκρο και με συγκεντρωμένη μάζα στο άλλο άκρο

Από την εύρεση των ριζών $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_n$ υπολογίζονται και οι αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$.

Οι αντίστοιχες ιδιομορφές είναι:

$$\varphi_n(x) = c_{2n} \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right), \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.33)$$

Κανονικοποίηση των ιδιομορφών δίνει τελικά τις *κανονικοποιημένες ιδιομορφές*:

$$\varphi_n(x) = 2 \sqrt{\frac{\omega_n}{mc \left[2 \frac{\omega_n L}{c} + \sin\left(\frac{2\omega_n L}{c}\right) \right] + \frac{4M\omega_n L}{c} \sin^2\left(\frac{\omega_n L}{c}\right)}} \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right) \quad (2.34)$$

Το **πρόβλημα των εγκάρσιων ταλαντώσεων τεντωμένης χορδής** με σταθερές κατανομές μάζας και ακαμψίας υπό την επίδραση συγκεντρωμένου φορτίου (πλήγματος) στη θέση $x = b, 0 \leq b \leq L$, θα επιλυθεί με τη *μέθοδο των κανονικών μορφών* και περιλαμβάνει τη ΜΔΕ 2^{ης} τάξης (2.1), τις αρχικές συνθήκες (2.3) και τις οριακές συνθήκες (2.30).

Οι κανονικές συντεταγμένες που προκύπτουν είναι:

$$\begin{aligned} n_i(t) &= \frac{1}{\omega_i} \int_0^t N_i(t) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau \Rightarrow \\ \Rightarrow n_i(t) &= \frac{\varphi_i(b)}{\omega_i} \int_0^t F(t) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau, \quad i = 1, 2, 3 \dots \end{aligned}$$

και το ολοκλήρωμα Duhamel παίρνει αντίστοιχα τις μορφές (1.80).

2. Αδιαστατοποίηση των διαφόρων μεγεθών και εξισώσεων για το πρόβλημα των εγκαρσίων ταλαντώσεων χορδής

Για την επίλυση του προβλήματος των ταλαντώσεων τεντωμένης χορδής χρησιμοποιούνται *αδιάστατα μεγέθη* και *αδιάστατες εξισώσεις*. Τούτο εξυπηρετεί στην ευκολότερη επίλυση των προβλημάτων, καθώς και για την καλύτερη εξαγωγή συμπερασμάτων. Πιο αναλυτικά, από την παραμετρική μελέτη ως προς ένα αδιάστατο μέγεθος βγαίνουν συμπεράσματα για περισσότερα διαστατά μεγέθη. Για παράδειγμα, αν μελετηθεί ο αδιάστατος χρόνος $\tau = t \sqrt{\frac{g}{L}}$, τότε εξάγονται συμπεράσματα τόσο για το διαστατό χρόνο t , όσο και για το μήκος της χορδής L . Μάλιστα, τα συμπεράσματα αφορούν τα διαστατά μεγέθη ως ζεύγη (t, L) , είτε το καθένα ξεχωριστά⁹.

Στην παραμετρική μελέτη που ακολουθεί, ανάλογα με το μέγεθος που εξετάζεται κάθε φορά, σχολιάζεται η αντίστοιχη επίδραση των αδιάστατων μεγεθών στην απόκριση και στο φάσμα απόκρισης της χορδής.

Τα *βασικά μεγέθη* για την αδιαστατοποίηση είναι: το **μήκος** L [m], η **δύναμη** T [N] και ο **χρόνος** $\sqrt{\frac{L}{g}}$ [s]. Τα υπόλοιπα μεγέθη και εξισώσεις αδιαστατοποιούνται ως εξής:

- Μάζα

$$\bar{M} = M \frac{g}{T}$$

- Εξωτερικό φορτίο

$$\bar{F}(x, t) = F(x, t) \frac{L}{T} \left[\frac{N}{m} \right]$$

- Τετμημένη

$$\xi = \frac{x}{L}$$

⁹ Η θεωρητική βάση της αδιαστατοποίησης, αλλά και της διαστατικής ανάλυσης εν γένει, είναι το *θεώρημα Buckingham* ή *θεώρημα Π*. Σύμφωνα με αυτό, αν μια φυσική διεργασία περιγράφεται από n διαστατές μεταβλητές z_1, z_2, \dots, z_n οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με μια διαστατικά ομογενή σχέση της μορφής $z_1 = f(z_2, z_3, \dots, z_n)$, τότε η ίδια διεργασία μπορεί να περιγραφεί πλήρως από ένα μικρότερο αριθμό m ανεξάρτητων αδιάστατων ομάδων $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$, οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με μια ισοδύναμη προς της προηγούμενη σχέση της μορφής $\Pi_1 = g(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_m)$.

- Χρόνος

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{\frac{L}{g}}} = t \sqrt{\frac{g}{L}}$$

- Κατανεμημένη μάζα

$$\bar{m} = m \frac{L}{T} = m \frac{Lg}{T}$$

- Συχνότητα

$$w = \omega \sqrt{\frac{L}{g}}$$

- Ταχύτητα μετάδοσης του κύματος στη χορδή

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{T}{m}} \frac{\sqrt{L}}{L} = \sqrt{\frac{TL}{mL^2g}} = \sqrt{\frac{T}{mLg}} = \sqrt{\frac{T}{\bar{m}T}} = \sqrt{\frac{1}{\bar{m}}}$$

ή

$$\bar{c} = \frac{c}{\sqrt{Lg}}$$

- Το μέγεθος

$$\frac{w}{\bar{c}} = \frac{\omega \sqrt{\frac{L}{g}}}{\frac{c}{\sqrt{Lg}}} = \frac{\omega}{c} L$$

- Όρισμα

$$\frac{w}{\bar{c}} \xi = \frac{w}{\bar{c}} \frac{1}{L} \xi L = \frac{\omega}{c} x$$

- Μετατόπιση

$$\bar{v}(\xi, \tau) = \frac{v(x, t)}{L}$$

- Σταθερά του ελατηρίου

$$\bar{k} = k \frac{L}{T}$$

- Η μερική διαφορική εξίσωση

$$T \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + F(x, t) = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \left[\frac{N}{m} \right]$$

αδιαστατοποιείται αν αντικατασταθούν όλα τα μεγέθη με τα αντίστοιχα αδιάστατα:

$$\begin{aligned}
T \frac{\partial^2(\bar{v}L)}{\partial(\xi L)^2} + \bar{F}(\xi, \tau) \frac{T}{L} &= \bar{m} \frac{T}{Lg} \frac{\partial^2(\bar{v}L)}{\partial\left(\tau\sqrt{\frac{L}{g}}\right)^2} \Rightarrow \\
\Rightarrow T \frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\xi^2} \frac{L}{L^2} + \bar{F}(\xi, \tau) \frac{T}{L} &= \bar{m} \frac{T}{Lg} \frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\tau^2} \frac{T}{Lg} \frac{L}{\frac{L}{g}} \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{T}{L} \frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\xi^2} + \bar{F}(\xi, \tau) \frac{T}{L} &= \frac{T}{L} \bar{m} \frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\tau^2} \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\xi^2} + \bar{F}(\xi, \tau) &= \bar{m} \frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\tau^2}
\end{aligned}$$

- Κανονικοποιημένη ιδιομορφή:

$$\bar{\varphi}_i(\xi) = \varphi_i(x) \sqrt{\frac{T \frac{L}{g}}{L}} = \varphi_i(x) \sqrt{\frac{T}{g}}$$

Παρομοίως, οι συντελεστές c_{1i} και c_{2i} αδιαστατοποιούνται ως εξής:

$$\bar{c}_{1i} = c_{1i} \sqrt{\frac{T}{g}}, \quad \bar{c}_{2i} = c_{2i} \sqrt{\frac{T}{g}}$$

- Γενικευμένο φορτίο:

$$\bar{N}_i(\tau) = N_i(\tau) \sqrt{\frac{\frac{L}{g}}{TL}} = \frac{N_i(\tau)}{\sqrt{Tg}}$$

- Κανονικές συντεταγμένες:

$$\bar{n}_i(\tau) = n_i(t) \frac{1}{\sqrt{TL \frac{L}{g}}} = n_i(t) \sqrt{\frac{g}{TL^2}}$$

- Η αδιαστατοποίηση των ασύζευκτων διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{d^2 n_i(t)}{dt^2} + \omega_i^2 n_i(t) = N_i(t)$$

γίνεται αν αντικατασταθούν όλα τα μεγέθη με τα αντίστοιχα αδιάστατα:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{d^2\left(\bar{n}_i(\tau)\sqrt{\frac{TL^2}{g}}\right)}{d\left(\tau\sqrt{\frac{L}{g}}\right)^2} + \left(w_i\sqrt{\frac{g}{L}}\right)^2 \bar{n}_i(\tau) \sqrt{\frac{TL^2}{g}} &= \bar{N}_i(\tau)\sqrt{Tg} \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{d^2\bar{n}_i(\tau)}{d\tau^2} \sqrt{Tg} + w_i^2 \bar{n}_i(\tau) \sqrt{Tg} &= \bar{N}_i(\tau)\sqrt{Tg} \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{d^2\bar{n}_i(\tau)}{d\tau^2} + w_i^2 \bar{n}_i(\tau) &= \bar{N}_i(\tau)
\end{aligned}$$

- Αδιαστατοποίηση της

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} n_i(t) \varphi_i(x)$$

Είναι:

$$\begin{aligned} \bar{v}(\xi, \tau)L &= \sum_{i=1}^{\infty} \bar{n}_i(\tau) \sqrt{\frac{TL^2}{g}} \bar{\varphi}_i(\xi) \sqrt{\frac{g}{T}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{v}(\xi, \tau) &= \sum_{i=1}^{\infty} \bar{n}_i(\tau) \bar{\varphi}_i(\xi) \end{aligned}$$

3. Παραμετρική μελέτη χορδής

Η παραμετρική μελέτη του προβλήματος των ταλαντώσεων τεντωμένης χορδής υπό την επίδραση πλήγματος γίνεται ως εξής: κρατούνται σταθερές οι τιμές όλων των παραμέτρων εκτός από την προς μελέτη παράμετρο. Έτσι, μπορούν να εξαχθούν συμπεράσματα για την επίδραση της τιμής της προς μελέτη παραμέτρου και μόνο για αυτήν.

Οι παράμετροι που κρατούνται σταθερές κάθε φορά παίρνουν τις τιμές:

- Αριθμός ιδιολύσεων που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της απόκρισης. Ύστερα από τη μελέτη της επίδρασης του αριθμού αυτού στην απόκριση και το φάσμα απόκρισης (αναλυτικότερα στο εδάφιο 3.1 του παρόντος κεφαλαίου), θα χρησιμοποιούνται 10 ιδιολύσεις.
- Ένταση πλήγματος. Μετά από τη διερεύνηση της επίδρασης της έντασης του πλήγματος στην απόκριση και στο φάσμα απόκρισης της χορδής (αναλυτικότερα στο εδάφιο 3.2 του παρόντος κεφαλαίου), θα χρησιμοποιείται η τιμή $\bar{F}_0 = 0.05 = 5\%T$.
- Θέση κατά μήκος του συστήματος όπου ασκείται το πλήγμα. Είναι $0 \leq \xi \leq 1$. Προτιμώνται σημεία όσο το δυνατόν τυχαία. Για το σκοπό αυτό αποφεύγονται τα άκρα και το μέσον της χορδής, καθώς επίσης και τα σημεία στα οποία υπάρχει κόμβος κάποιας από τις ιδιομορφές της ελεύθερης ταλάντωσης. Επιλέχθηκε κυρίως η τιμή $\xi = 0,7$. Επειδή όμως στη συγκεκριμένη θέση υπάρχει κόμβος της 10^{ης} ιδιομορφής $\bar{\varphi}_{10}(x)$, στα βίντεο και στα φάσματα της απόκρισης όπου το πλήγμα ασκείται στη θέση αυτή, η ιδιομορφή $\bar{\varphi}_{10}(x)$ δε θα διεγείρεται καθόλου.
- Κατανομημένη μάζα της χορδής. Είναι $\bar{m} = \frac{\bar{M}g}{T}$. Επειδή το πλήγμα έχει ένταση $\bar{F}_0 = 5\%T$, επιλέγεται και το αδιάστατο βάρος της χορδής να έχει την ίδια τιμή, δηλαδή $\bar{M}g = 5\%T$, επομένως η κατανομημένη μάζα θα είναι $\bar{m} = 0,05$.
- Διάρκεια πλήγματος. Αποφεύγονται τα ακέραια πολλαπλάσια της πρώτης ιδιοπεριόδου \bar{T}_1 του συστήματος, καθώς σε αυτές τις περιπτώσεις παρατηρούνται συντονισμοί. Επιλέχθηκε λοιπόν η τιμή $\tau_{\pi\lambda} = 1,5\bar{T}_1$. Στο εδάφιο 3.8 του παρόντος κεφαλαίου υπάρχει η παραμετρική μελέτη για τη διάρκεια του πλήγματος.
- Διάρκεια ελεύθερης ταλάντωσης μετά το πέρας του πλήγματος. Για τη μελέτη της απόκρισης της χορδής είναι απαραίτητο να παρουσιαστεί και η κίνησή της μετά το πέρας του πλήγματος. Επειδή όμως η ελεύθερη ταλάντωση είναι περιοδική κίνηση χωρίς απόσβεση, δηλαδή σταθερού πλάτους και συχνότητας, αρκεί $\tau_{\text{ελεύθερης ταλάντωσης}} = 4\bar{T}_1$. Μεγαλύτεροι χρόνοι δεν παρέχουν διαφορετικές πληροφορίες.

Σημειώνεται επίσης ότι η παραμετρική μελέτη γίνεται ως προς τα αδιάστατα μεγέθη, επομένως τα συμπεράσματα που εξάγονται αφορούν λόγους διαστατών μεγεθών, δηλαδή περισσότερα από ένα διαστατά μεγέθη.

3.1. Επίδραση του αριθμού των ιδιολύσεων που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της απόκρισης στην απόκριση και στο φάσμα της απόκρισης της χορδής

Η ακριβής λύση του προβλήματος είναι

$$\bar{v}(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{n}_i(\tau) \bar{\varphi}_i(\xi)$$

Η προσέγγιση που χρησιμοποιείται είναι

$$\bar{v}(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^n \bar{n}_i(\tau) \bar{\varphi}_i(\xi)$$

Επομένως, όσο $n \rightarrow \infty$, τόσο καλύτερη προσέγγιση γίνεται στη λύση του προβλήματος.

Ειδικά στη περίπτωση που $n = 1$, όπου δηλαδή χρησιμοποιείται μόνο η πρώτη κανονικοποιημένη ιδιομορφή για τον υπολογισμό της απόκρισης, η σχέση που περιγράφει την απόκριση είναι:

$$\bar{v}(\xi, \tau) = \bar{n}_1(\tau) \bar{\varphi}_1(\xi)$$

Προφανώς το σχήμα της απόκρισης σε αυτήν την περίπτωση συμπίπτει με το σχήμα της πρώτης ιδιομορφής, αφού λαμβάνεται υπόψη μόνο η ιδιολύση $\bar{\varphi}_1(\xi)$ και άρα δε μπορούν να εξαχθούν ασφαλή συμπεράσματα από αυτό.

Για πιο ακριβή αποτελέσματα, προτιμάται να χρησιμοποιείται ο μέγιστος δυνατός αριθμός ιδιομορφών στους υπολογισμούς. Μία προσέγγιση που παρέχει αρκετά ακριβή αποτελέσματα για τα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι αυτή των 10 ιδιολύσεων.

3.2. Επίδραση της μέγιστης τιμής της έντασης \bar{F}_0 του πλήγματος στην απόκριση και στο φάσμα απόκρισης της χορδής

Από τη θεωρία είναι γνωστό ότι η απόκριση του συστήματος δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{v}(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{n}_i(\tau) \bar{\varphi}_i(\xi)$$

όπου $\bar{n}_i(\tau)$ οι κανονικές συντεταγμένες και $\bar{\varphi}_i(\xi)$ οι κανονικοποιημένες ιδιομορφές. Ισχύει ότι:

$$\bar{n}_i(\tau) = \frac{\bar{\varphi}_i(b)}{w_i} \int_0^t \bar{F}(\tau) \sin[w_i(t - \tau)] d\tau$$

και επειδή η συνάρτηση του πλήγματος μπορεί να γραφτεί $\bar{F}(\tau) = \bar{F}_0 \bar{f}(\tau)$ όπου \bar{F}_0 η μέγιστη τιμή της δύναμης του πλήγματος και $\bar{f}(\tau)$ η συνάρτηση που περιγράφει το είδος του πλήγματος (ορθογωνικό, αυξανόμενο τριγωνικό κλπ), οι κανονικές συντεταγμένες μπορούν να γραφούν και ως εξής:

$$\bar{n}_i(\tau) = \bar{F}_0 \frac{\bar{\varphi}_i(b)}{w_i} \int_0^t \bar{f}(\tau) \sin[w_i(t - \tau)] d\tau$$

Αντικατάσταση των παραπάνω κανονικών συντεταγμένων στον τύπο της απόκρισης:

$$\bar{v}(\xi, \tau) = \bar{F}_0 \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\bar{\varphi}_i(b)}{w_i} \int_0^t \bar{f}(\tau) \sin[w_i(t - \tau)] d\tau \right] \bar{\varphi}_i(\xi)$$

Από την τελευταία σχέση είναι εμφανής η γραμμική εξάρτηση της απόκρισης από την τιμή της \bar{F}_0 . Επομένως, τα διαγράμματα της απόκρισης και τα φάσματα έχουν ακριβώς το ίδιο σχήμα και για αυτό δεν παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον η μελέτη τους. Στο εξής, θα χρησιμοποιείται η τιμή $\bar{F}_0 = 0.05$, δηλαδή $\bar{F}_0 = 5\%T$.

3.3. Επίδραση του είδους του πλήγματος στο φάσμα απόκρισης και στην απόκριση της χορδής

3.3.1. Απόκριση

Η παραμετρική μελέτη αφορά τη χορδή με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα. Οι τιμές των υπόλοιπων παραμέτρων εδώ είναι:

- Θέση πλήγματος: $\xi = 0,7$.
- Μέγιστη τιμή της δύναμης του πλήγματος: $\bar{F}_0 = 0,05$.
- Διάρκεια πλήγματος ίση με $1,5\bar{T}_1$, όπου \bar{T}_1 η ιδιοπερίοδος του συστήματος.
- Διάρκεια μελέτης της ελεύθερης ταλάντωσης της χορδής μετά το πέρας του πλήγματος $4\bar{T}_1$, όπου \bar{T}_1 η ιδιοπερίοδος του συστήματος.
- Κατανεμημένη μάζα του συστήματος: $\bar{m} = 0,05$.

Επισυνάπτονται τα σχετικά βίντεο:

| Όνομα αρχείου | Είδος πλήγματος |
|---------------|----------------------|
| Βίντεο 1 | Ορθογωνικό |
| Βίντεο 2 | Μισό ημίτονο |
| Βίντεο 3 | Αυξανόμενο τριγωνικό |
| Βίντεο 4 | Μειούμενο τριγωνικό |
| Βίντεο 5 | Ισοσκελές τριγωνικό |

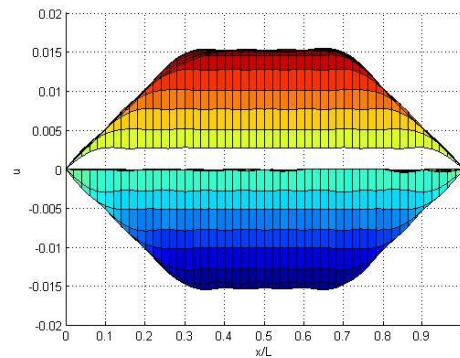
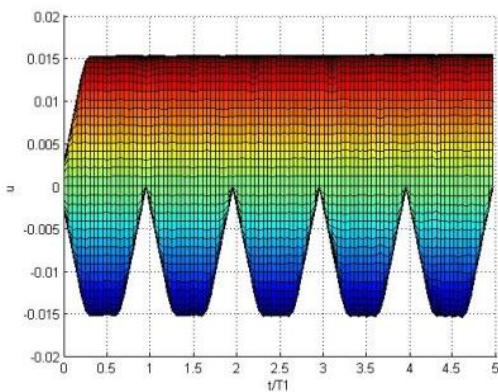
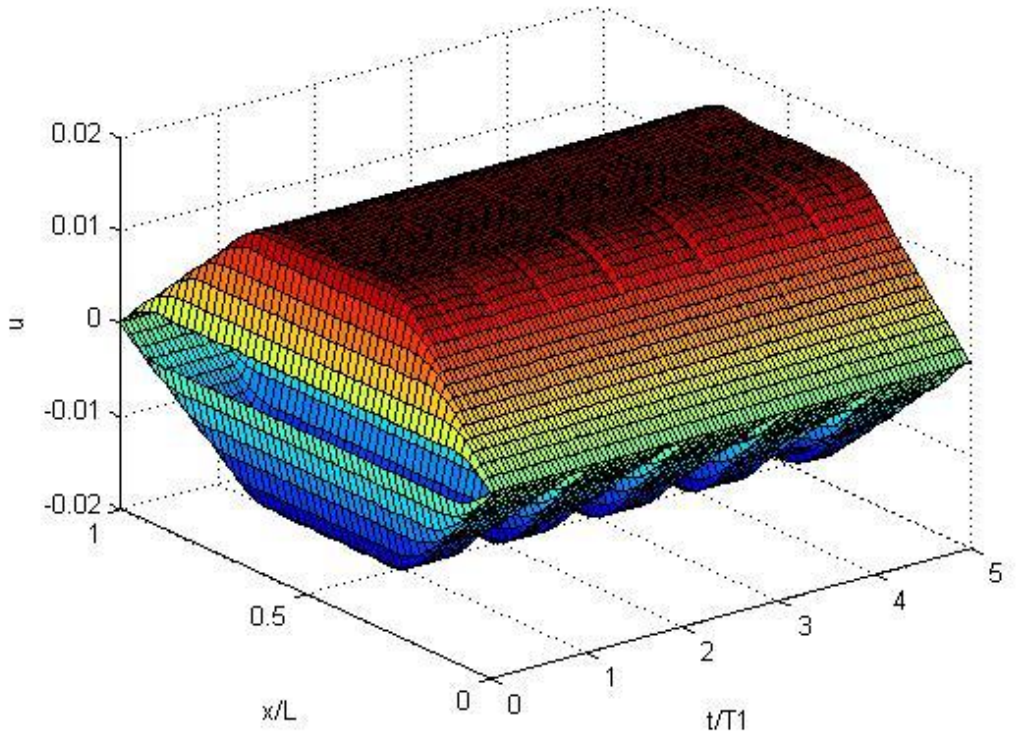
3.3.2. Φάσματα απόκρισης

Η παραμετρική μελέτη αφορά τη χορδή με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα. Οι τιμές των υπόλοιπων παραμέτρων εδώ είναι:

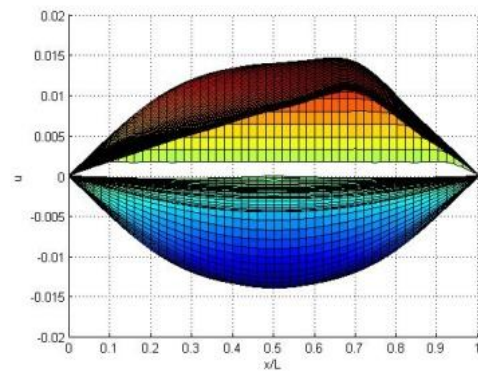
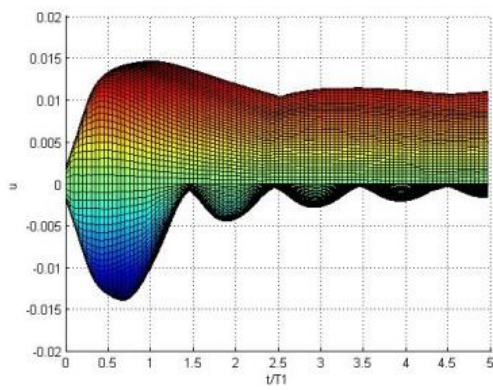
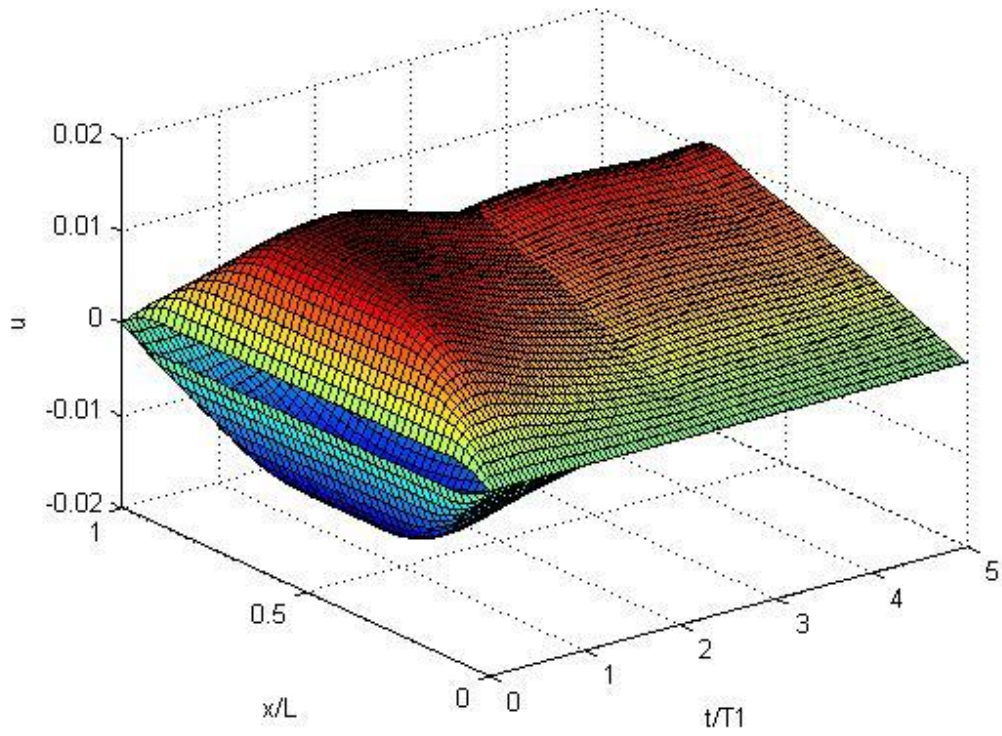
- Θέση πλήγματος: $\xi = 0,7$.
- Μέγιστη τιμή της δύναμης του πλήγματος: $\bar{F}_0 = 0,05$.
- Διάρκεια πλήγματος ίση με πέντε ιδιοπεριόδους του συστήματος, δηλαδή $5\bar{T}_1 = 5\frac{2\pi}{w_1}$.
- Κατανεμημένη μάζα του συστήματος: $\bar{m} = 0,05$.

Ακολουθούν τα φάσματα. Κάθε φάσμα παρουσιάζεται από τρεις οπτικές γωνίες. Στην πρώτη είναι εμφανείς και οι τρεις άξονες, στη δεύτερη παρουσιάζεται μόνο το επίπεδο $v(\xi, \tau) - \tau$ και στην τρίτη μόνο το επίπεδο $v(\xi, \tau) - \xi$.

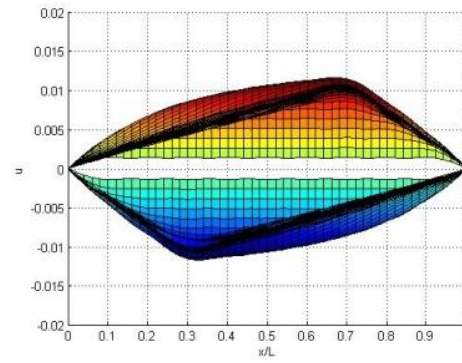
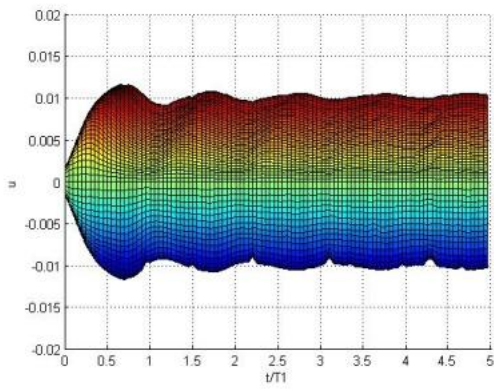
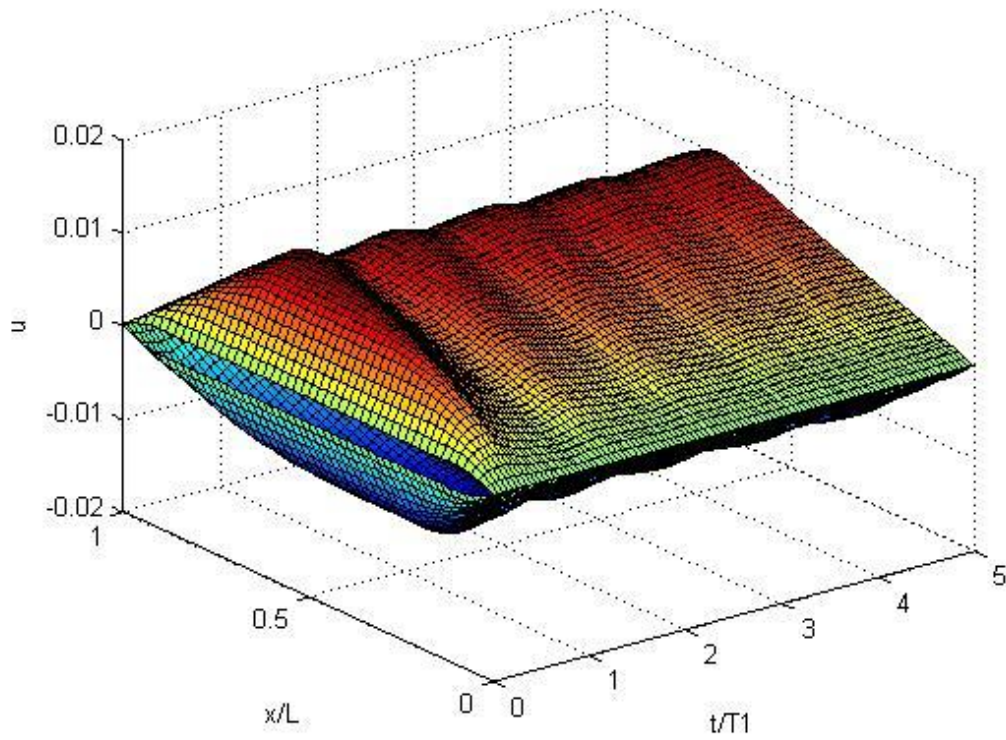
Φάσμα 1: Ορθογωνικό πλήγμα σε χορδή με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα



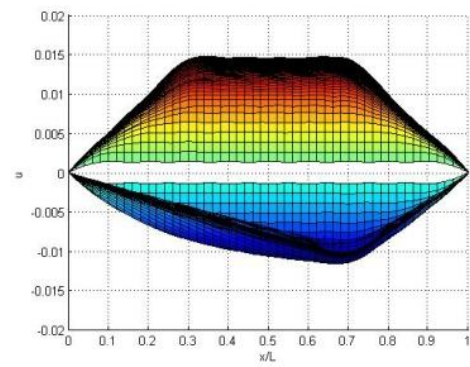
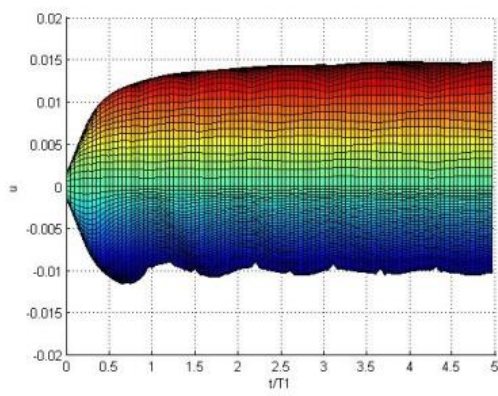
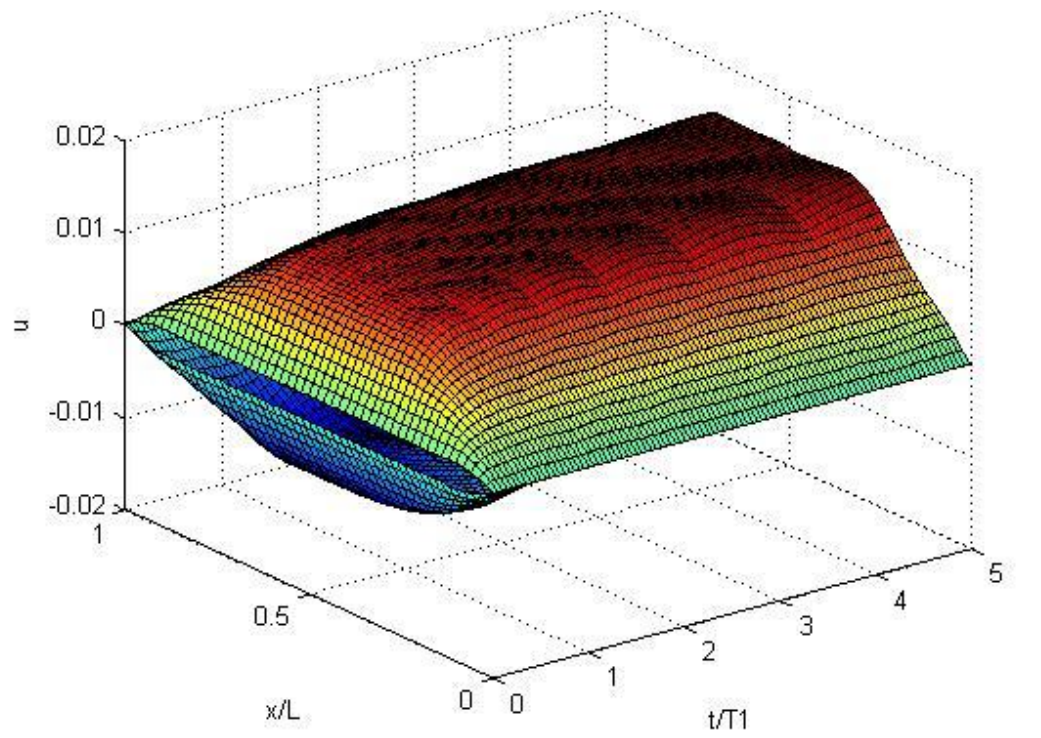
Φάσμα 2: Πλήγμα μσό ημίτονο σε χορδή με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα



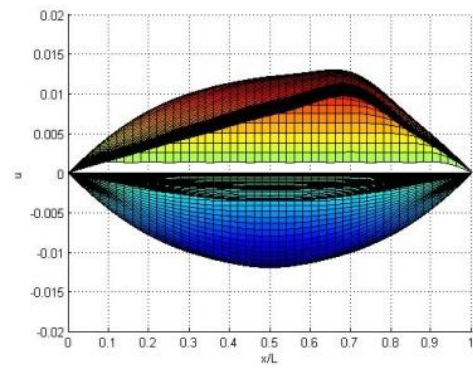
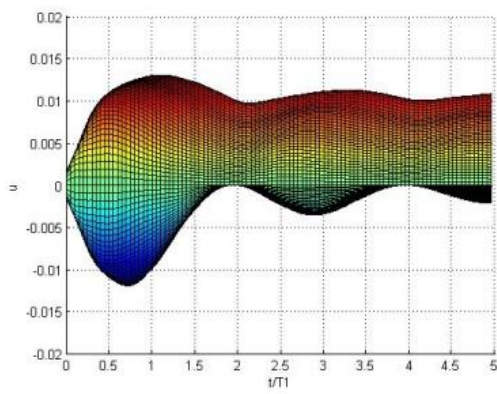
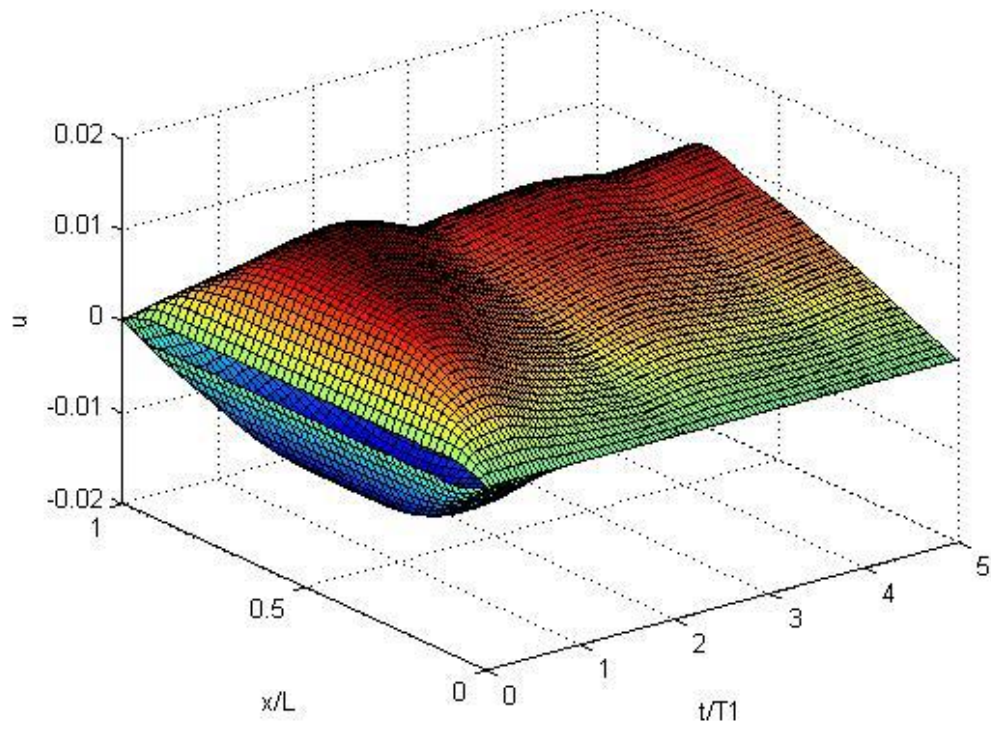
Φάσμα 3: Αυξανόμενο τριγωνικό πλήγμα σε χορδή με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα



Φάσμα 4: Μειούμενο τριγωνικό πλήγμα σε χορδή με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα



Φάσμα 5: Ισοσκελές τριγωνικό πλήγμα σε χορδή με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα



Σχολιασμός των βίντεο και των φασμάτων απόκρισης χορδής με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα για πλήγματα διαφόρων μορφών:

- Σε όλα τα φάσματα και τα βίντεο είναι εμφανείς οι οριακές συνθήκες στα άκρα της χορδής: $\bar{v}(0, \tau) = \bar{v}(1, \tau) = 0$.
- Στα πλήγματα στα οποία η μέγιστη δύναμη εφαρμόζεται εξαρχής (ορθογωνικό και μειούμενο τριγωνικό πλήγμα), η μέγιστη απόκριση στα θετικά φτάνει μέχρι την τιμή $\bar{v} = 0,015$. Στις περιπτώσεις του αυξανόμενου και του ισοσκελούς τριγωνικού πλήγματος, επειδή η δύναμη αυξάνεται γραμμικά σε σχέση με το χρόνο, η μέγιστη απόκριση είναι σαφώς μικρότερη ($\bar{v} \cong 0,0125$).
- Στο ορθογωνικό πλήγμα (φάσμα 1), όταν η διάρκεια του πλήγματος είναι $\tau \geq 0,3\bar{T}_1$, τότε η μέγιστη θετική απόκριση είναι σταθερή, $\bar{v} = 0,015$. Αντίθετα, στα φάσματα 2, 3 και 5 (πλήγματα μισού ημιτόνου, αυξανόμενο τριγωνικό και ισοσκελές τριγωνικό) παρατηρείται μια περιοδικότητα στο σχήμα τους. Πιο συγκεκριμένα, στο πλήγμα μισού ημιτόνου η τιμή του φάσματος έχει μέγιστο για $\tau = 0,9$ και μετά έχει ημιτονοειδή μορφή με περίοδο $2\bar{T}_1$. Στο αυξανόμενο τριγωνικό πλήγμα, η τιμή του φάσματος στα θετικά είναι μέγιστη για $\tau = 0,7$ και στη συνέχεια ο θετικός κλάδος εμφανίζει επαναληψιμότητα με περίοδο ίση με της πρώτη ιδιοπερίοδο του συστήματος \bar{T}_1 . Τέλος, στο ισοσκελές τριγωνικό πλήγμα η τιμή του φάσματος έχει μέγιστο για $\tau = 1$ και μετά έχει ημιτονοειδή μορφή με περίοδο $2\bar{T}_1$.
- Στο ορθογωνικό και στο μειούμενο τριγωνικό πλήγμα, τα οποία ξεκινούν με τη μέγιστη δύναμη, (φάσματα 1 και 4), διαπιστώνεται πως η μέγιστη θετική απόκριση δεν αποκτάται μόνο στη θέση που εφαρμόζεται το πλήγμα, αλλά και σε άλλες την ίδια χρονική στιγμή. Συγκεκριμένα, τη μέγιστη θετική απόκριση αποκτούν τα σημεία από το $\xi = 0,3$ έως και το $\xi = 0,7$ περίπου του μήκους της χορδής, στο μεν ορθογωνικό τη χρονική στιγμή $\xi = 0,3$, στο δε μειούμενο τριγωνικό παρατηρείται ταυτόχρονη αύξηση της απόκρισης των σημείων αυτών. Αντίθετα, στα υπόλοιπα πλήγματα, στα οποία η δύναμη ξεκινά από την τιμή μηδέν και αυξάνει σταδιακά (φάσματα 2, 3 και 5) κανένα σημείο της χορδής δεν ταλαντώνεται εξαρχής με μέγιστο θετικό πλάτος ίσο με το μέγιστο θετικό πλάτος του σημείου εφαρμογής του πλήγματος. Σημειώνεται ότι για την παραμετρική μελέτη της θέσης του πλήγματος για χορδή με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα όταν σε αυτήν εφαρμόζεται ορθογωνικό πλήγμα, υπάρχουν αναλυτικά σχόλια στο εδάφιο 3.5.2.1 του παρόντος κεφαλαίου.
- Εκτός από το μειούμενο τριγωνικό πλήγμα όπου υπάρχει μια μικρή απόκλιση, σε όλα τα υπόλοιπα φάσματα η μέγιστη θετική απόκριση είναι όση περίπου και η μέγιστη αρνητική.
- Οι δύο επιφάνειες των φασμάτων του ημιτονοειδούς και του ισοσκελούς τριγωνικού φάσματος μοιάζουν αρκετά, άρα συμπεραίνεται ότι το

ημιτονοειδές τριγωνικό πλήγμα προσιδιάζει περισσότερο στο ισοσκελές τριγωνικό πλήγμα και όχι στο ορθογωνικό.

- Σε όλα τα πλήγματα ο αρνητικός κλάδος του φάσματος είναι περιοδικός με ημιτονοειδή μορφή. Στο μεν ορθογωνικό η χορδή ταλαντώνεται με σταθερό μέγιστο πλάτος στα αρνητικά και το φάσμα εμφανίζει μια περιοδικότητα με περίοδο ίση με την πρώτη ιδιοπερίοδο του συστήματος \bar{T}_1 . Παρόμοια, για αυξανόμενο και μειούμενο τριγωνικό πλήγμα, η χορδή ταλαντώνεται με σχεδόν σταθερό μέγιστο πλάτος στα αρνητικά και με περίοδο \bar{T}_1 . Για ημιτονοειδές και ισοσκελές τριγωνικό πλήγμα, παρατηρείται σταδιακή μείωση του πλάτους στα αρνητικά. Ειδικότερα, για το πλήγμα μισού ημιτόνου παρατηρείται πως η χορδή αποκτά το μέγιστο πλάτος στα αρνητικά $\bar{v} \cong -0,015$ σε χρόνο $\tau \cong 0,75\bar{T}_1$ και στη συνέχεια το πλάτος στα αρνητικά μειώνεται με περίοδο περίπου ίση με την πρώτη ιδιοπερίοδο του συστήματος \bar{T}_1 . Ο αρνητικός κλάδος του φάσματος για το ισοσκελές τριγωνικό πλήγμα παρουσιάζει αντίστοιχη εικόνα με το ημιτονοειδές πλήγμα, αλλά με σταθερή περίοδο $2\bar{T}_1$.
- Τα φάσματα 2 και 5 (πλήγμα μισό ημίτονο και ισοσκελές τριγωνικό) δείχνουν πως η απόκριση στα αρνητικά αποκτά την ελάχιστη τιμή της στο σημείο $\xi = 0,5$ της χορδής.
- Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το φάσμα 3 και το βίντεο 3 για το αυξανόμενο τριγωνικό πλήγμα. Μέγιστη θετική απόκριση έχει το σημείο με $\xi = 0,7$, όπου και ασκείται το πλήγμα, αλλά μέγιστη αρνητική απόκριση παρουσιάζει το σημείο με $\xi = 0,3$. Παρατηρείται λοιπόν μία συμμετρία ως προς το μέσο της χορδής, η οποία οφείλεται αφενός στο γεγονός ότι η δύναμη του πλήγματος αυξάνεται διαρκώς και γραμμικά, αφετέρου στις οριακές συνθήκες του προβλήματος (δύο σταθερά στερεωμένα άκρα), που επιτρέπουν την ανάκλαση των εγκαρσίων κυμάτων που δημιουργούνται κατά μήκος της χορδής όταν εφαρμόζεται ένα πλήγμα (βλ και εδάφιο 3.5. Επίδραση της θέσης του πλήγματος).
- Εξίσου ενδιαφέροντα είναι τα βίντεο της απόκρισης της χορδής για τα πλήγματα ορθογωνικό και μισού ημιτόνου (βίντεο 1 και 2). Όταν εφαρμόζεται ορθογωνικό πλήγμα (βίντεο 1), κατά την ελεύθερη ταλάντωσή της, η χορδή συντονίζεται στην πρώτη ιδιομορφή $\bar{\varphi}_1(x)$. Αντίστοιχα, όταν εφαρμόζεται πλήγμα μισού ημιτόνου (βίντεο 2), η χορδή συντονίζεται στη δεύτερη ιδιομορφή $\bar{\varphi}_2(x)$. Το αποτέλεσμα αυτό μάλιστα, είναι ανεξάρτητο της θέσης του πλήγματος για την περίπτωση της χορδής με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα και για τα δύο αυτά πλήγματα.
- Η απόκριση για το αυξανόμενο και το μειούμενο τριγωνικό πλήγμα παρουσιάζουν μία συμμετρία ως προς το μέσο της χορδής (βίντεο 3 και 4). Στο μεν αυξανόμενο τριγωνικό πλήγμα (βίντεο 3) η μέγιστη απόκριση στα θετικά παρουσιάζεται στη θέση εφαρμογής του πλήγματος $\xi = 0,7$,

ενώ στα αρνητικά στη συμμετρική της ως προς το μέσο της χορδής, $\xi = 0.3$. Στο δε μειούμενο τριγωνικό (βίντεο 4), κατά τη διάρκεια του πλήγματος παρατηρείται μέγιστη απόκριση στη θέση όπου αυτό εφαρμόζεται, $\xi = 0.7$, μετά το πέρας του όμως, παρατηρείται ότι μέγιστη απόκριση στα θετικά εμφανίζει το σημείο με $\xi = 0.3$ και στα αρνητικά το σημείο με $\xi = 0.7$. Η διαφορά στα δύο πλήγματα έχει να κάνει με τη μορφή τους.

- Στις περιπτώσεις του αυξανόμενου και του ισοσκελούς τριγωνικού πλήγματος (βίντεο 3 και 5), είναι εμφανής η αύξηση της απόκρισης της χορδής καθώς η τιμή της εφαρμοζόμενης δύναμης αυξάνεται. Αντίθετα, στο ημιτονοειδές πλήγμα, η απόκριση δεν παρουσιάζει την παραπάνω εικόνα, καθώς στο συγκεκριμένο πλήγμα η τιμή της δύναμης αυξάνεται πιο απότομα, με αποτέλεσμα να μοιάζει περισσότερο με το αντίστοιχο του ορθογωνικού πλήγματος, παρά με του ισοσκελούς τριγωνικού.
- Σε όλα τα βίντεο παρατηρείται η εξής εικόνα: η χορδή ταλαντώνεται στα θετικά, επιστρέφει στη θέση ισορροπίας, ταλαντώνεται εκ νέου στα θετικά και μετά αρχίζει η «αναμενόμενη» κίνησή της, δηλαδή από τα θετικά στα αρνητικά και το αντίστροφο. Για αναλυτικό σχολιασμό του φαινομένου βλ. εδάφιο 3.8.1 του παρόντος κεφαλαίου.
- Όλα τα φάσματα στο επίπεδο $v(\xi, \tau) - \tau$ είναι όμοια με τα αντίστοιχα φάσματα δύο διαστάσεων ταλαντωτών με πολλούς βαθμούς ελευθερίας.¹⁰

¹⁰ Για περισσότερες πληροφορίες για τα φάσματα απόκρισης συστημάτων με πεπερασμένο αριθμό βαθμών ελευθερίας βλ. [6] Τόλης, Κ., *Φάσματα απόκρισης πολυβάθμιων Ταλαντωτών για Πλήγματα Διαφόρων Μορφών*, Διπλωματική Εργασία, Τομέας Μηχανικής, ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ, Αθήνα, 2009

3.4. Επίδραση της τιμής της κατανεμημένης μάζας στην απόκριση της χορδής

Η παραμετρική μελέτη αφορά τη χορδή με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα. Επιλέγονται οι παρακάτω τιμές για τις υπόλοιπες παραμέτρους:

- Θέση πλήγματος $\xi = 0,7$.
- Είδος πλήγματος: ορθογωνικό.
- Μέγιστη δύναμη πλήγματος $\overline{F_0} = 0,05$.
- Διάρκεια πλήγματος $1,5\overline{T_1}$, όπου $\overline{T_1}$ η ιδιοπερίοδος του συστήματος.
- Χρονικό διάστημα μελέτης της ελεύθερης ταλάντωσης της χορδής μετά το πέρας του πλήγματος $4\overline{T_1}$.

Η διάρκεια του πλήγματος πρέπει να είναι κοινή και στα τέσσερα διαγράμματα. Όμως αυτή εξαρτάται από την ιδιοπερίοδο του συστήματος $\overline{T_1}$, η οποία με τη σειρά της εξαρτάται από την τιμή της κατανεμημένης μάζας \overline{m} . Για αυτό το λόγο γίνεται η παρακάτω προεργασία.

Έστω δύο χορδές με κατανεμημένες μάζες \overline{m}_1 και \overline{m}_2 και όλες τις υπόλοιπες παραμέτρους ίδιες (δύναμη T , μήκος χορδής, χαρακτηριστικά πλήγματος). Αν οι δύο αυτές χορδές υποβληθούν σε πλήγμα ίδιας διάρκειας $\tau_{\pi\lambda}$, τότε ισχύει:

$$\tau_{\pi\lambda 1} = 1\overline{T_{11}} = \alpha\overline{T_{12}}$$

όπου $\overline{T_{11}}$ και $\overline{T_{12}}$ οι πρώτες ιδιοπερίοδοι των χορδών. Επειδή οι θεμελιώδεις ιδιοσυχνότητες είναι ανάλογες της τετραγωνικής ρίζας της κατανεμημένης μάζας, ισχύει:

$$\frac{w_{11}}{w_{12}} = \sqrt{\frac{\overline{m}_2}{\overline{m}_1}} \Rightarrow \frac{\overline{T_{11}}}{\overline{T_{12}}} = \sqrt{\frac{\overline{m}_1}{\overline{m}_2}} = \alpha$$

Επομένως, βάσει της παραπάνω σχέσης, συμπληρώνεται ο πίνακας:

| Τιμή κατανεμημένης μάζας \overline{m} | Τιμή του συντελεστή α |
|---|---------------------------------|
| 0,05 | 1 |
| 0,10 | 0,7071 |
| 0,15 | 0,5774 |
| 0,20 | 0,5 |
| 0,25 | 0,4472 |

Επισυνάπτονται τα σχετικά βίντεο:

| Όνομα αρχείου | Κατανεμημένη μάζα \bar{m} |
|---------------|-----------------------------|
| Βίντεο 6 | 0,05 |
| Βίντεο 7 | 0,10 |
| Βίντεο 8 | 0,15 |
| Βίντεο 9 | 0,20 |
| Βίντεο 10 | 0,25 |

Σχολιασμός των βίντεο απόκρισης χορδής με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα για τις διάφορες τιμές της κατανεμημένης μάζας:

- Όσο πιο μικρή η μάζα της χορδής, τόσο πιο γρήγορα αυτή ταλαντώνεται λόγω μικρής αδράνειας. Η σχέση των αδιάστατων μεγεθών που επιβεβαιώνει το παραπάνω συμπέρασμα είναι:

$$w_n = \omega_n \sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{m}} \sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\bar{m} \frac{T}{L} g}} \sqrt{\frac{L}{g}} = n\pi \frac{1}{\sqrt{\bar{m}}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Συμπερασματικά, η αδιάστατη θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα w_1 είναι αντιστρόφως ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας της αδιάστατης κατανεμημένης μάζας \bar{m} , δηλαδή αύξηση της τιμής της κατανεμημένης μάζας σημαίνει μείωση της τιμής της w_1 , αύξηση της T_1 και άρα πιο «αργή» ταλάντωση.

- Στα βίντεο παρατηρείται η εξής εικόνα: μέγιστη θετική απόκριση αποκτά αρχικά το σημείο εφαρμογής του πλήγματος $\xi = 0.7$, στη συνέχεια τα σημεία αριστερά του έως και το σημείο με $\xi = 0.3$, και τέλος επαναλαμβάνεται το ίδιο και για τα αρνητικά της απόκρισης. Είναι προφανής η συμμετρία του προβλήματος (βλ. σχόλια στο εδάφιο 3.5.2.1 του παρόντος κεφαλαίου για τη θέση του πλήγματος στην περίπτωση της χορδής με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα). Επιπλέον, η παραπάνω εικόνα παρατηρείται και στα φάσματα απόκρισης της χορδής με τις ίδιες οριακές συνθήκες και ορθογωνικό πλήγμα (βλ. φάσμα 1 και τα σχετικά σχόλια στο εδάφιο 3.3 του παρόντος κεφαλαίου).
- Σε όλα τα βίντεο είναι εμφανείς οι οριακές συνθήκες για τα άκρα της χορδής: $\bar{v}(0, \tau) = \bar{v}(1, \tau) = 0$.
- Γενικά στα βίντεο παρατηρείται η εξής εικόνα: η χορδή ταλαντώνεται στα θετικά, επιστρέφει στη θέση ισορροπίας, ταλαντώνεται εκ νέου στα θετικά και μετά το πέρας της διάρκειας του πλήγματος, αρχίζει η «αναμενόμενη» ελεύθερη ταλάντωσή της, δηλαδή από τα θετικά στα

αρνητικά και το αντίστροφο. Για αναλυτικό σχολιασμό του φαινομένου βλ. εδάφιο 3.8.1 του παρόντος κεφαλαίου.

3.5. Επίδραση της θέσης του πλήγματος στην απόκριση και στο φάσμα απόκρισης της χορδής για τις διάφορες περιπτώσεις οριακών συνθηκών

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη του φάσματος απόκρισης της χορδής σε σχέση με τη θέση στην οποία ασκείται το πλήγμα για τις διάφορες περιπτώσεις οριακών συνθηκών. Υπενθυμίζεται ότι μετά την αδιαστατοποίηση το μήκος της χορδής θεωρείται ίσο με 1, άρα για τις θέσεις στις οποίες μπορεί να ασκηθεί το πλήγμα ισχύει: $0 \leq \xi \leq 1$.

3.5.1. Απόκριση

Η μελέτη αφορά τη χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο άκρο ($\xi = 0$) και ένα ελεύθερο άκρο ($\xi = 1$). Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι:

- Είδος πλήγματος: ορθογωνικό.
- Μέγιστη τιμή της δύναμης του πλήγματος: $\bar{F}_0 = 0,05$.
- Διάρκεια πλήγματος $1,5\bar{T}_1$, όπου \bar{T}_1 η ιδιοπερίοδος του συστήματος.
- Χρονικό διάστημα μελέτης της ελεύθερης ταλάντωσης της χορδής μετά το πέρας του πλήγματος $4\bar{T}_1$.
- Κατανεμημένη μάζα του συστήματος: $\bar{m} = 0,05$.

Επισυνάπτονται τα σχετικά βίντεο:

| Όνομα αρχείου | Θέση πλήγματος |
|----------------------|-----------------------|
| Βίντεο 11 | 0,1 |
| Βίντεο 12 | 0,5 |
| Βίντεο 13 | 1,0 |

Σχολιασμός των βίντεο απόκρισης χορδής με ένα σταθερά στερεωμένο αι ένα ελεύθερο άκρο για τις διάφορες τιμές της θέσης του πλήγματος:

- Όσο πιο κοντά στο σταθερά στερεωμένο άκρο της χορδής ασκείται το πλήγμα, τόσο πιο μικρή η απόκρισή της. Αναμενόμενο είναι λοιπόν να παρατηρείται μέγιστη απόκριση όταν το πλήγμα ασκείται στο ελεύθερο άκρο της χορδής (βίντεο 13)
- Όσο πιο κοντά στο σταθερά στερεωμένο άκρο ασκείται το πλήγμα, τόσο περισσότερο μήκος της χορδής είναι ελεύθερο να ταλαντωθεί με μέγιστο πλάτος.
- Οι αποκρίσεις στο άκρο $\xi = 1$ έχουν οριζόντιες εφαπτομένες, ισχύει δηλαδή η οριακή συνθήκη $\frac{\partial \bar{v}(1, \tau)}{\partial \xi} = 0$, ενώ για το σταθερά στερεωμένο άκρο είναι: $\bar{v}(0, \tau) = 0$.
- Με το που αρχίζει να ασκείται το πλήγμα, το ελεύθερο άκρο της χορδής παραμένει στην αρχική του θέση, και αρχίζει να κινείται μετά την πάροδο κάποιου χρονικού διαστήματος.
- Γενικά στα βίντεο παρατηρείται η εξής εικόνα: η χορδή ταλαντώνεται στα θετικά, επιστρέφει στη θέση ισορροπίας, ταλαντώνεται εκ νέου στα θετικά και μετά το πέρας της διάρκειας του πλήγματος, αρχίζει η «αναμενόμενη» ελεύθερη ταλάντωσή της, δηλαδή από τα θετικά στα αρνητικά και το αντίστροφο. Για αναλυτικό σχολιασμό του φαινομένου βλ. εδάφιο 3.8.1 του παρόντος κεφαλαίου.

3.5.2. Φάσματα απόκρισης

Ακολουθεί παραμετρική μελέτη για όλες τις περιπτώσεις οριακών συνθηκών. Σε όλα τα επόμενα αποτελέσματα έχουν επιλεγεί οι εξής τιμές για τις υπόλοιπες παραμέτρους:

- Είδος πλήγματος: ορθογωνικό.
- Μέγιστη τιμή της δύναμης του πλήγματος: $\bar{F}_0 = 0,05$.
- Διάρκεια πλήγματος μέχρι 5 ιδιοπεριόδους του συστήματος.
- Κατανεμημένη μάζα του συστήματος: $\bar{m} = 0,05$.

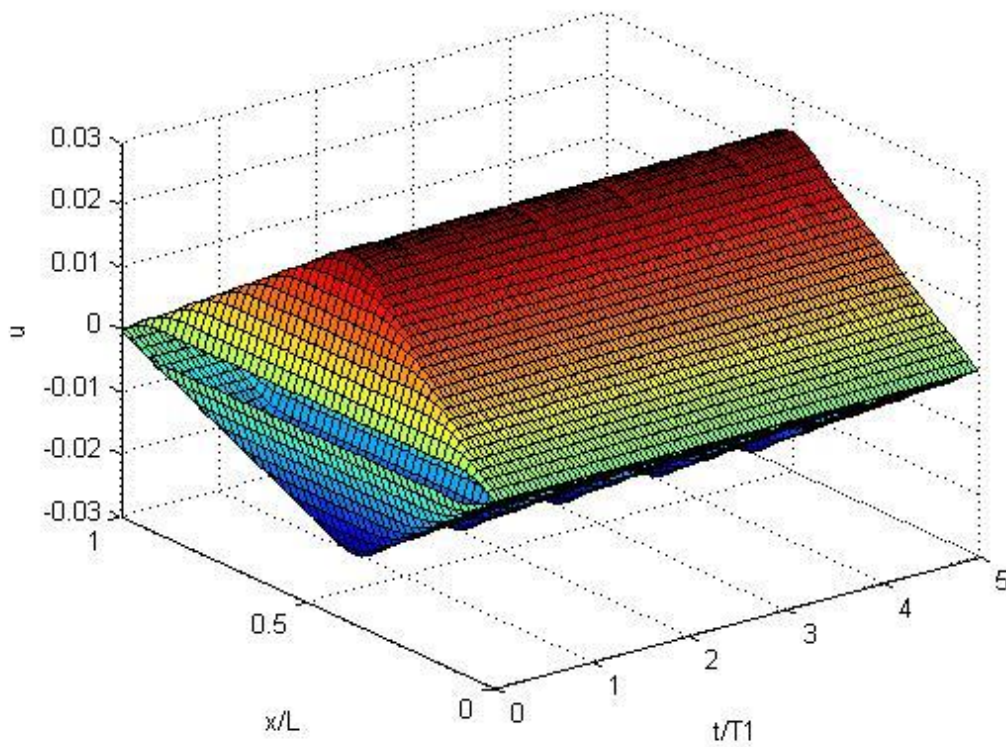
Η παραμετρική μελέτη γίνεται χωριστά για καθεμία από τις περιπτώσεις οριακών συνθηκών.

3.5.2.1.Χορδή με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα

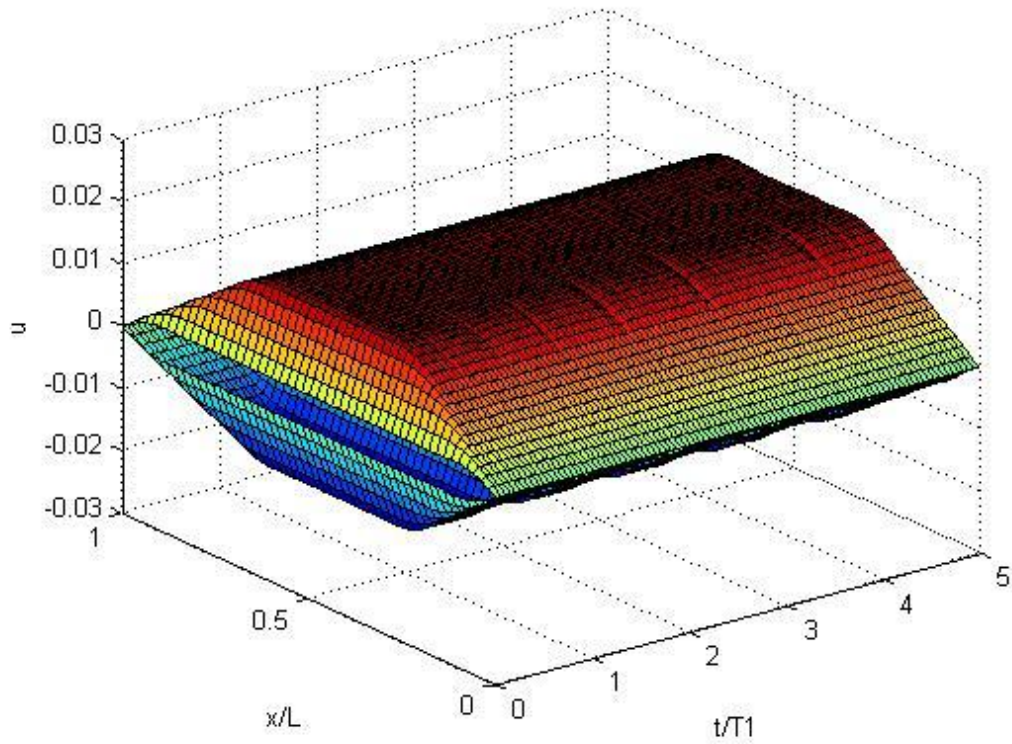
Είναι γνωστή η συμμετρία του προβλήματος. Για αυτό το λόγο επιλέγονται οι θέσεις δεξιά του μέσου της χορδής, δηλαδή στο τμήμα $0.5 \leq \xi \leq 1$. Αν το πλήγμα ασκηθεί στις αντίστοιχες θέσεις αριστερά του μέσου της χορδής, προκύπτουν διαγράμματα συμμετρικά με τα παρακάτω.

Ακολουθούν τα φάσματα.

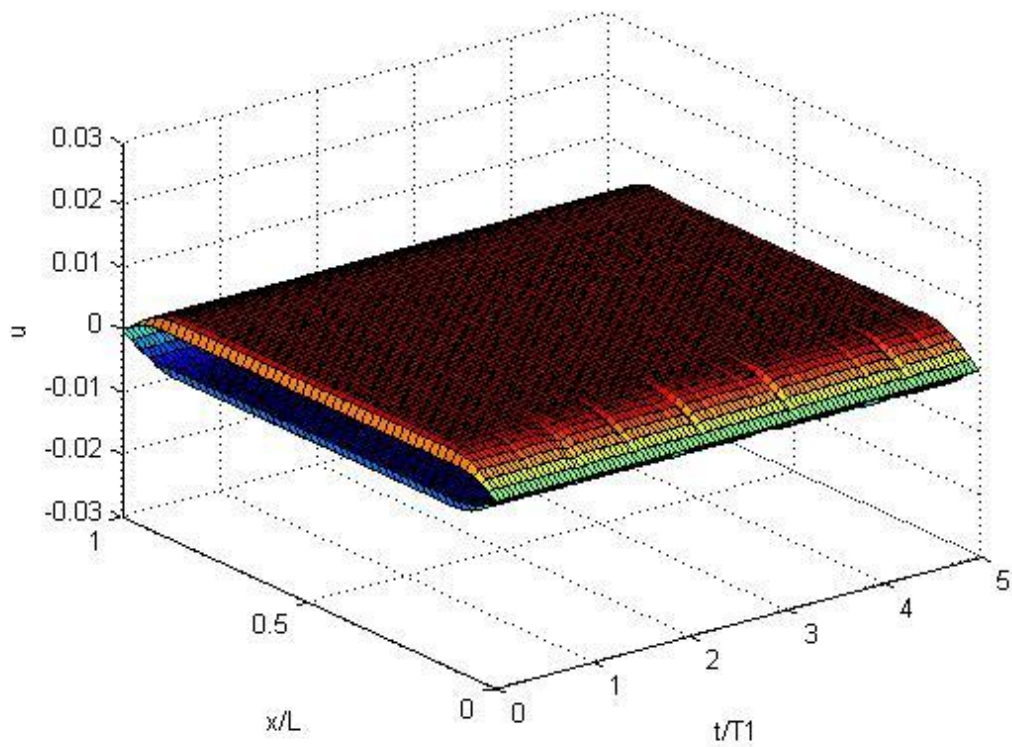
Φάσμα 6: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0.5$ χορδής με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα



Φάσμα 7: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0.7$ χορδής με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα



Φάσμα 8: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0.9$ χορδής με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα



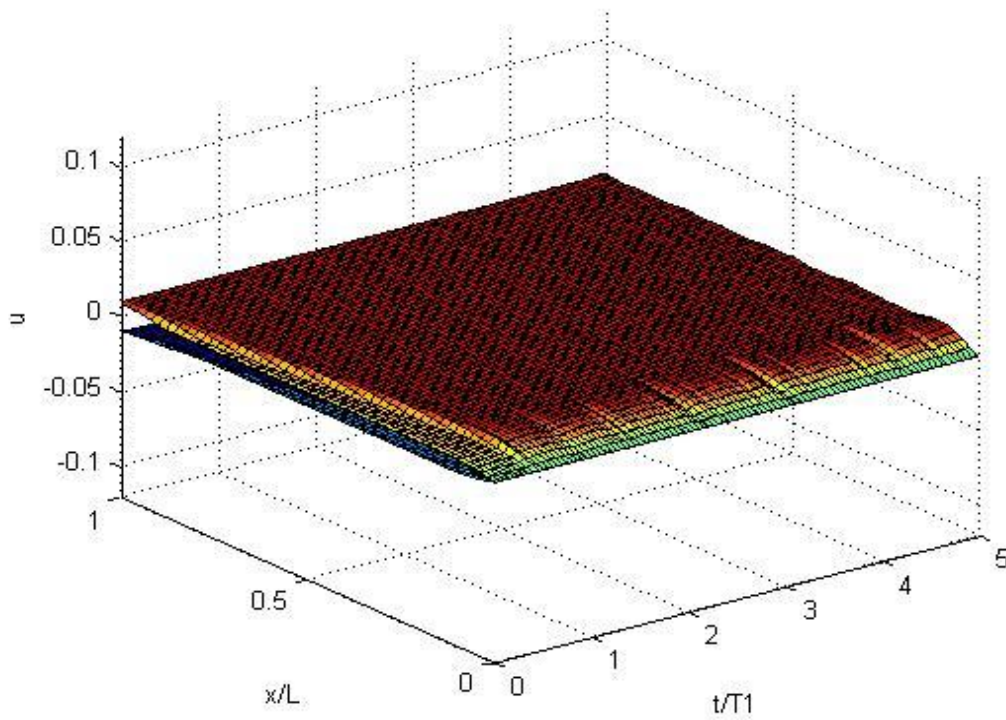
Σχολιασμός των φασμάτων απόκρισης χορδής με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα για τις διάφορες τιμές της θέσης του πλήγματος:

- Μέγιστο πλάτος ταλάντωσης έχει το σημείο της χορδής όπου εφαρμόζεται το πλήγμα και κάποια σημεία γύρω από αυτό.
- Όσο πιο κοντά στο σταθερά στερεωμένο άκρο της χορδής ασκείται το πλήγμα, τόσο πιο μικρές είναι οι τιμές των φασμάτων της χορδής. Συγκεκριμένα, στο φάσμα 6 είναι $\bar{v}(0.7, \tau) \cong 0.015$, ενώ στο φάσμα 8 είναι $\bar{v}(0.7, \tau) \cong 0.05$.
- Όσο πιο κοντά στο ένα σταθερά στερεωμένο άκρο ασκείται το πλήγμα, τόσο μικρότερο μήκος της χορδής είναι ελεύθερο να ταλαντωθεί με το μέγιστο πλάτος.
- Επειδή πρόκειται για συμμετρικό πρόβλημα, όταν το πλήγμα ασκείται στο σημείο $\xi = \frac{1}{2} + \xi_1$, τότε μέγιστο πλάτος ταλάντωσης αποκτούν όλα τα σημεία με $\frac{1}{2} - \xi_1 \leq \xi \leq \frac{1}{2} + \xi_1$. Για παράδειγμα, στο φάσμα 8 το πλήγμα ασκείται στη θέση $\xi = 0.9$ και με μέγιστο πλάτος ταλαντώνονται όλα τα σημεία της χορδής με $0.1 \leq \xi \leq 0.9$.
- Σε όλα τα φάσματα είναι εμφανές ότι ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες στα άκρα της χορδής: $\bar{v}(0, \tau) = \bar{v}(1, \tau) = 0$.
- Οι θετικές επιφάνειες των φασμάτων έχουν σταθερές τιμές για $\tau > 0.3\bar{T}_1$, ενώ οι αρνητικές εμφανίζουν περιοδικότητα με περίοδο ίση με την πρώτη ιδιοπερίοδο του συστήματος \bar{T}_1 . Η εικόνα αυτή οφείλεται στο είδος του πλήγματος (ορθογωνικό) και σχολιάστηκε αναλυτικά στο εδάφιο 3.3 του παρόντος κεφαλαίου.

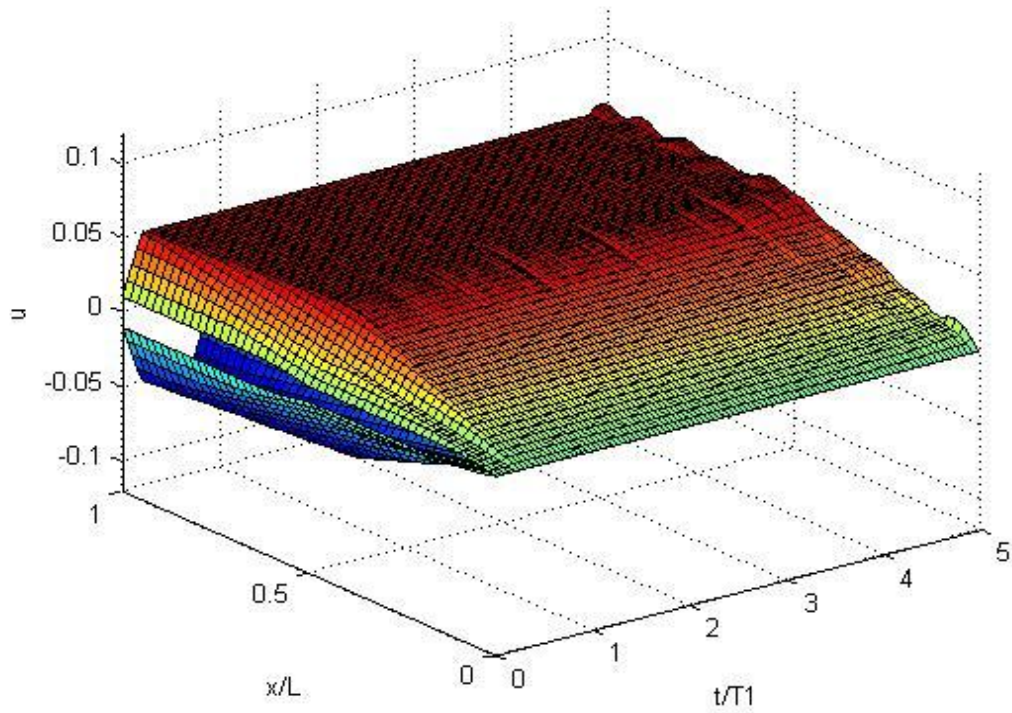
3.5.2.2.Χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελεύθερο άκρο

Το σταθερά στερεωμένο άκρο είναι το $\xi = 0$ και το ελεύθερο το $\xi = 1$. Ακολουθούν τα φάσματα.

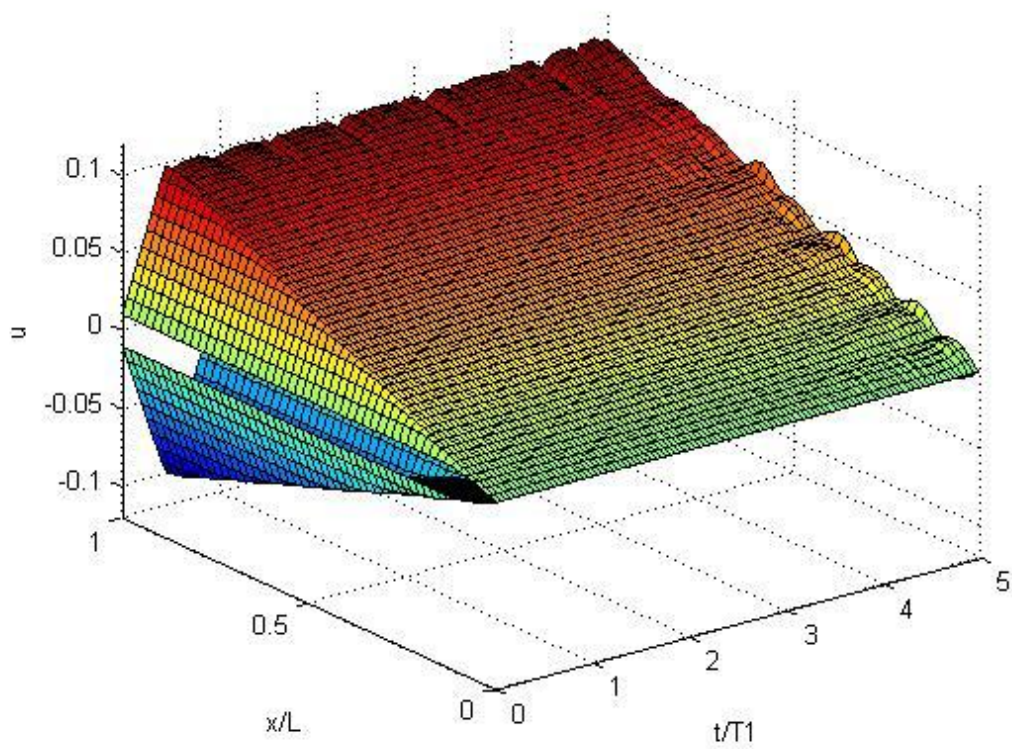
Φάσμα 9: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0.1$ χορδής με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελεύθερο άκρο



Φάσμα 10: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0.5$ χορδής με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελεύθερο άκρο



Φάσμα 11: Πλήγμα στη θέση $\xi = 1$ χορδής με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελεύθερο άκρο



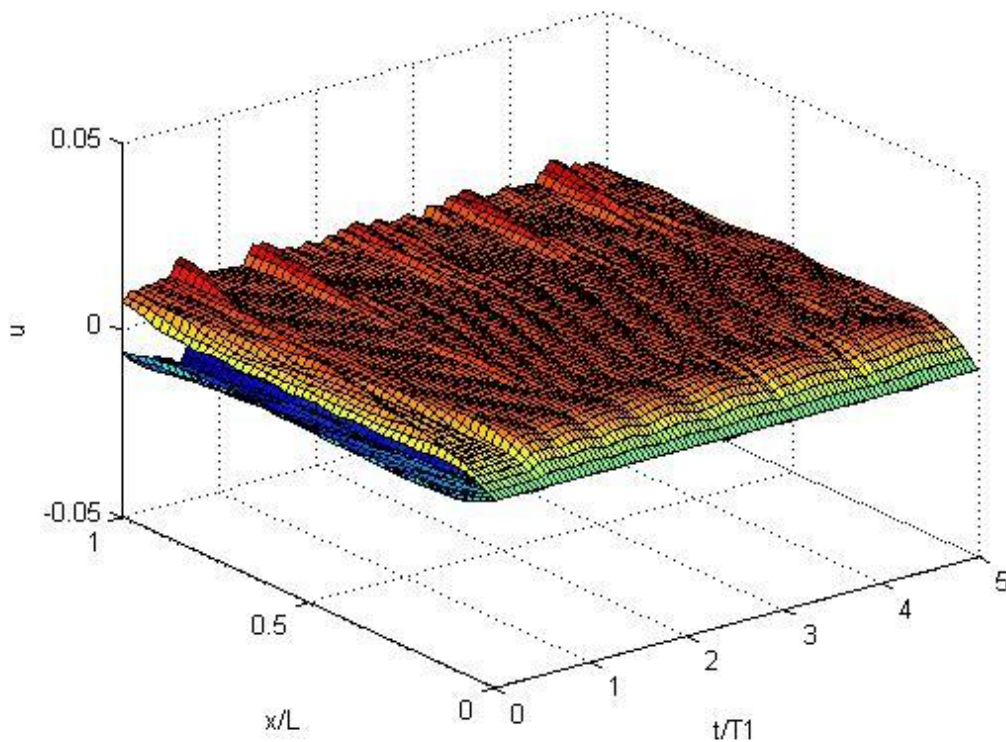
Σχολιασμός των φασμάτων απόκρισης χορδής ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελεύθερο άκρο για τις διάφορες τιμές της θέσης του πλήγματος:

- Μέγιστο πλάτος ταλάντωσης έχει το σημείο της χορδής όπου εφαρμόζεται το πλήγμα και κάποια σημεία γύρω από αυτό.
- Για τις μέγιστες τιμές των φασμάτων της χορδής ισχύει ό,τι και προηγουμένως, δηλαδή πως όσο πιο κοντά στο σταθερά στερεωμένο άκρο της χορδής ασκείται το πλήγμα, τόσο πιο μικρές είναι οι τιμές των φασμάτων. Συγκεκριμένα, στο φάσμα 9 είναι $\bar{v}(0.1, \tau) \cong 0.01$, ενώ στο φάσμα 10 είναι $\bar{v}(0.5, \tau) \cong 0.05$ και στο φάσμα 11 $\bar{v}(1, \tau) \cong 0.1$.
- Η κλίση των επιφανειών των φασμάτων στο άκρο $\xi = 1$ κατά διεύθυνση παράλληλη στον άξονα των ξ είναι οριζόντια, βάσει της οριακής συνθήκης για το ελεύθερο $\frac{\partial \bar{v}(1, t)}{\partial \xi} = 0$, ενώ η τιμή των φασμάτων στο σταθερά στερεωμένο άκρο είναι: $\bar{u}(0, \tau) = 0$.
- Στα φάσματα 9 και 10 παρατηρείται πως στο τμήμα της χορδής μεταξύ της θέσης που ασκείται το πλήγμα και του σταθερά στερεωμένου άκρου για μικρές διάρκειες πλήγματος ($\Delta t \leq 0.5\bar{T}_1$ για το φάσμα 9 και $\Delta t \leq 0.3\bar{T}_1$ για το φάσμα 10) το φάσμα έχει μία μικρότερη τιμή, η οποία για τις αμέσως μεγαλύτερες διάρκειες πλήγματος αυξάνεται απότομα. Αυτό συμβαίνει γιατί για τις μεγαλύτερες διάρκειες πλήγματος στα εν λόγω σημεία της χορδής συμβάλλουν δύο κύματα: το πρώτο που προκαλεί το πλήγμα και το δεύτερο που ανακλάται στο σταθερά στερεωμένο άκρο της χορδής, ενώ για μικρότερες διάρκειες πλήγματος, αυτό δεν προλαβαίνει να συμβεί.
- Οι θετικές επιφάνειες των φασμάτων έχουν σταθερές τιμές για $\tau > 0.3\bar{T}_1$, ενώ οι αρνητικές εμφανίζουν περιοδικότητα με περίοδο ίση με την πρώτη ιδιοπερίοδο του συστήματος \bar{T}_1 . Η εικόνα αυτή οφείλεται στο είδος του πλήγματος (ορθογωνικό) και σχολιάστηκε αναλυτικά στο εδάφιο 3.3 του παρόντος κεφαλαίου.

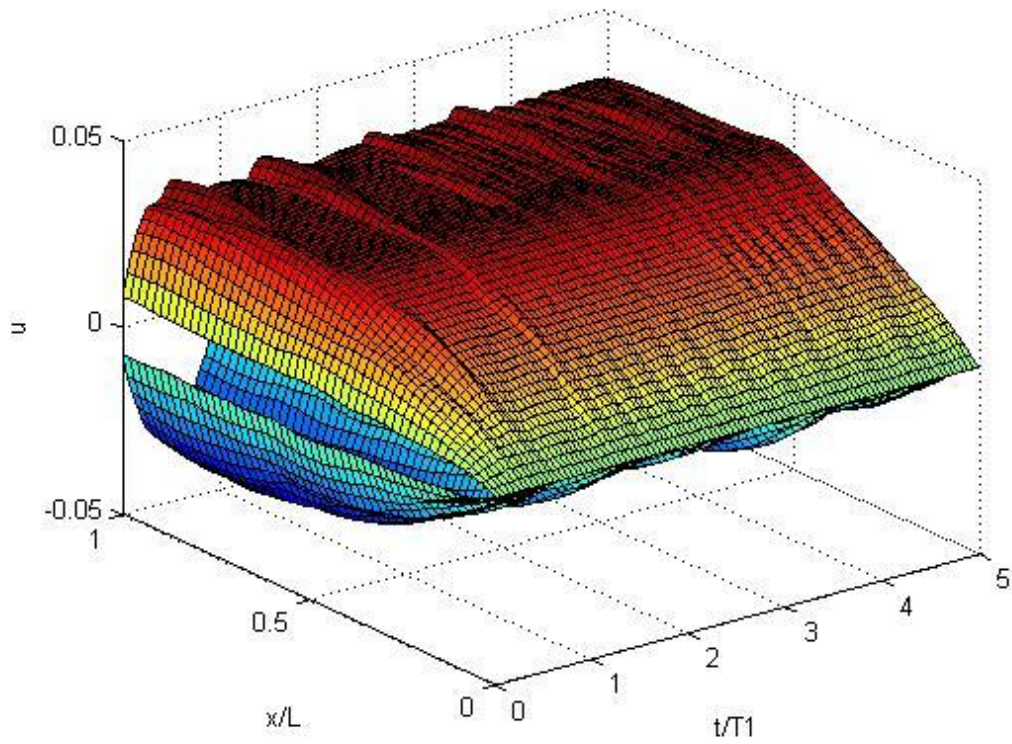
3.5.2.3. Χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελαστικά στερεωμένο άκρο

Το σταθερά στερεωμένο άκρο είναι το $\xi = 0$ και το ελαστικά στερεωμένο το $\xi = 1$. Για την παράμετρο \bar{k} (σταθερά του ελατηρίου) επιλέχθηκε η τιμή 1, αν και η παραμετρική μελέτη ως προς αυτήν βρίσκεται στο εδάφιο 3.6 του παρόντος κεφαλαίου. Ακολουθούν τα φάσματα.

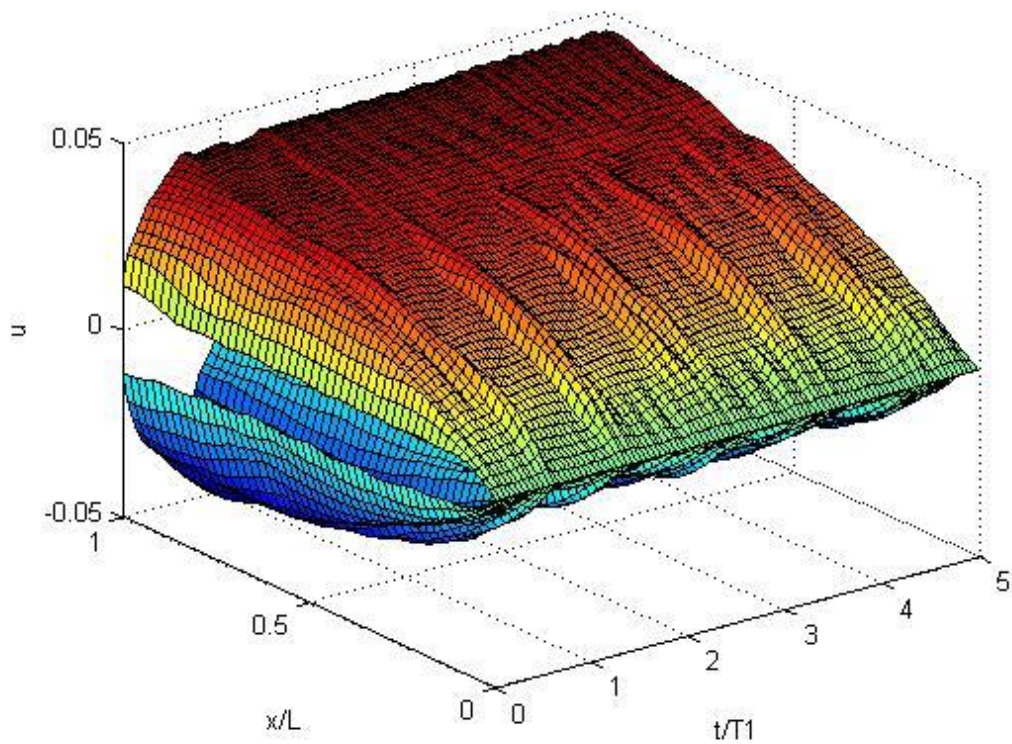
Φάσμα 12: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0, 1$ χορδής με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελαστικά στερεωμένο άκρο



Φάσμα 13: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0,5$ χορδής με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελαστικά στερεωμένο άκρο



Φάσμα 14: Πλήγμα στη θέση $\xi = 1$ χορδής με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελαστικά στερεωμένο άκρο



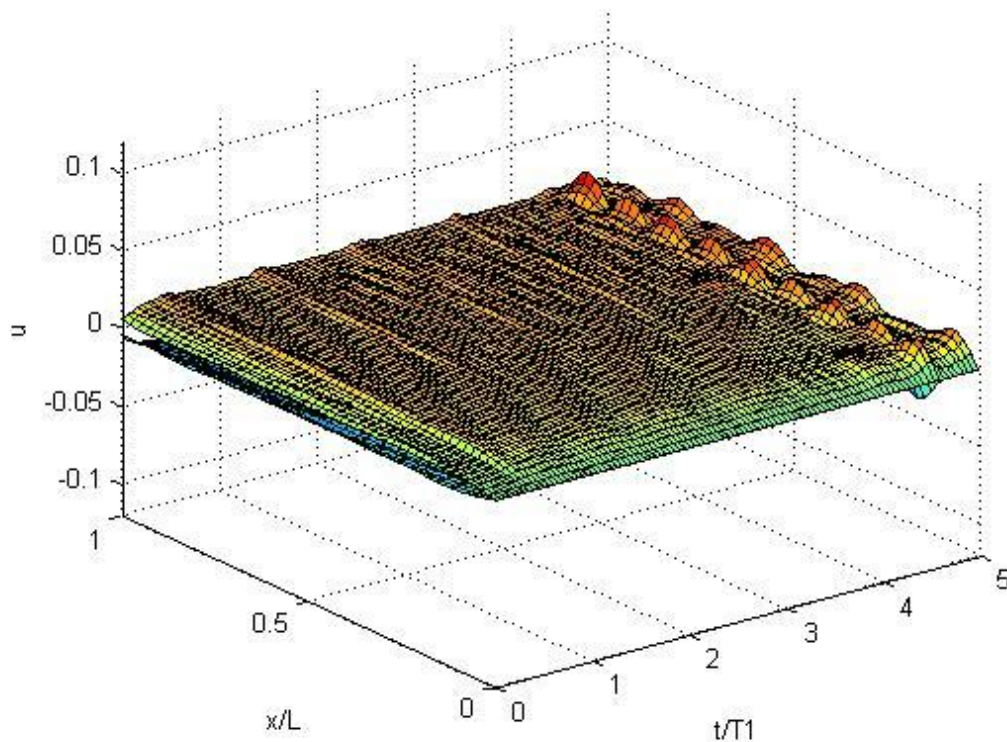
Σχολιασμός των φασμάτων απόκρισης χορδής ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελαστικά στερεωμένο άκρο για τις διάφορες τιμές της θέσης του πλήγματος:

- Μέγιστο πλάτος ταλάντωσης έχει το σημείο της χορδής όπου εφαρμόζεται το πλήγμα και κάποια σημεία γύρω από αυτό.
- Για τις μέγιστες τιμές των φασμάτων της χορδής ισχύει ό,τι και προηγουμένως, δηλαδή πως όσο πιο κοντά στο σταθερά στερεωμένο άκρο της χορδής ασκείται το πλήγμα, τόσο πιο μικρή είναι η μέγιστη απόκριση της χορδής. Συγκεκριμένα, στο φάσμα 12 είναι $\bar{v}(0.1, \tau) \cong 0.005$, ενώ στο φάσμα 13 είναι $\bar{v}(0.5, \tau) \cong 0.035$ και στο φάσμα 14 $\bar{v}(1, \tau) \cong 0.045$.
- Η κλίση των επιφανειών των φασμάτων κατά τη διεύθυνση ξ στο άκρο $\xi = 1$ δίνεται από τον τύπο της οριακής συνθήκης $\frac{\partial \bar{v}(1, \tau)}{\partial \xi} + \bar{k} \bar{v}(1, \tau) = 0$. Από εδώ συμπεραίνεται ότι όσο πιο μεγάλη είναι η σταθερά k του ελατηρίου, τόσο πιο μεγάλη η κλίση της γραφικής παράστασης στο άκρο $\xi = 1$. Αυτό εξηγείται αναλυτικά στο εδάφιο 3.5 του παρόντος κεφαλαίου όπου γίνεται παραμετρική μελέτη ως προς την τιμή της σταθεράς k . Τέλος, αν ήταν $\bar{k} = 0$, τότε το άκρο $\xi = 1$ θα ήταν ελεύθερο, δηλαδή τα διαγράμματα θα ήταν όμως και αυτά του προηγούμενου εδαφίου. Επιπλέον, για το σταθερά στερεωμένο άκρο ισχύει: $\bar{v}(0, \tau) = 0$.
- Τα φάσματα μοιάζουν αρκετά με τα αντίστοιχα για τη χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελεύθερο άκρο, μόνο που η μέγιστη απόκριση του σημείου $\xi = 1$ μειώνεται λόγω του ελατηρίου.
- Όμοια με προηγουμένως, όσο πιο κοντά στο ένα σταθερά στερεωμένο άκρο ασκείται το πλήγμα, τόσο περισσότερο μήκος της χορδής είναι ελεύθερο να ταλαντωθεί με μέγιστο πλάτος.
- Οι θετικές επιφάνειες των φασμάτων έχουν σταθερές τιμές για $\tau > 0.3\bar{T}_1$, ενώ οι αρνητικές εμφανίζουν περιοδικότητα με περίοδο ίση με την πρώτη ιδιοπερίοδο του συστήματος \bar{T}_1 . Η εικόνα αυτή οφείλεται στο είδος του πλήγματος (ορθογωνικό) και σχολιάστηκε αναλυτικά στο εδάφιο 3.3 του παρόντος κεφαλαίου.

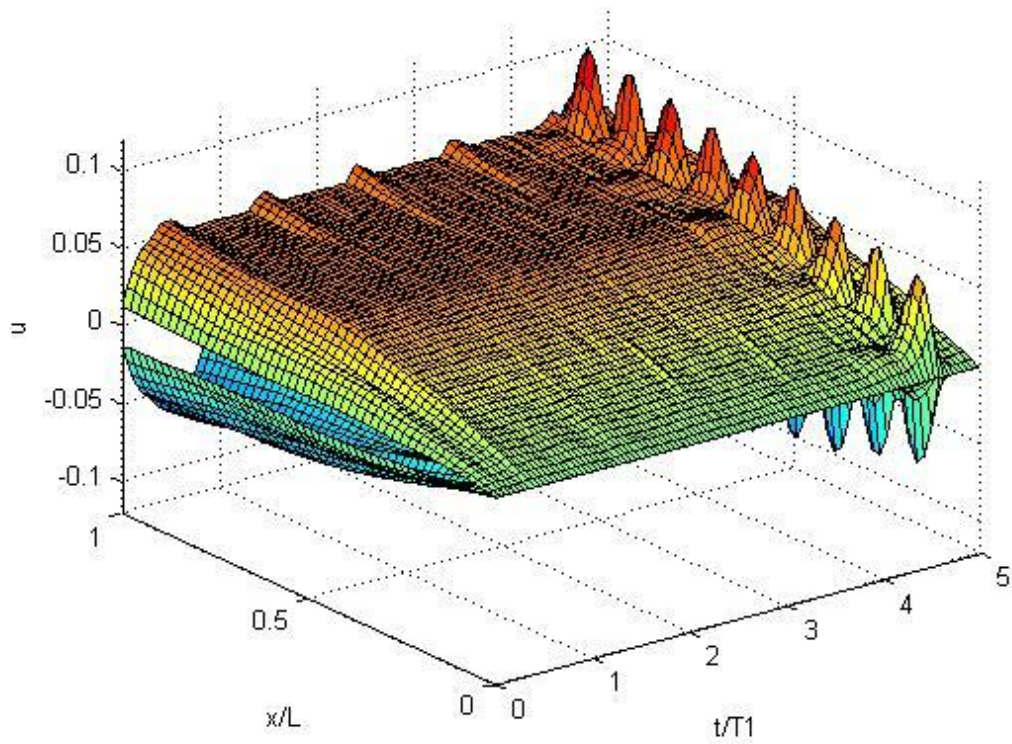
3.5.2.4.Χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο άκρο και με συγκεντρωμένη μάζα στο άλλο άκρο

Το σταθερά στερεωμένο άκρο είναι το $\xi = 0$ και η συγκεντρωμένη μάζα βρίσκεται στο άκρο $\xi = 1$. Για την παράμετρο \bar{M} (συγκεντρωμένη μάζα) επιλέχθηκε η τιμή 0,01, αν και η παραμετρική μελέτη ως προς αυτήν βρίσκεται στο εδάφιο 3.7 του παρόντος κεφαλαίου. Ακολουθούν τα φάσματα.

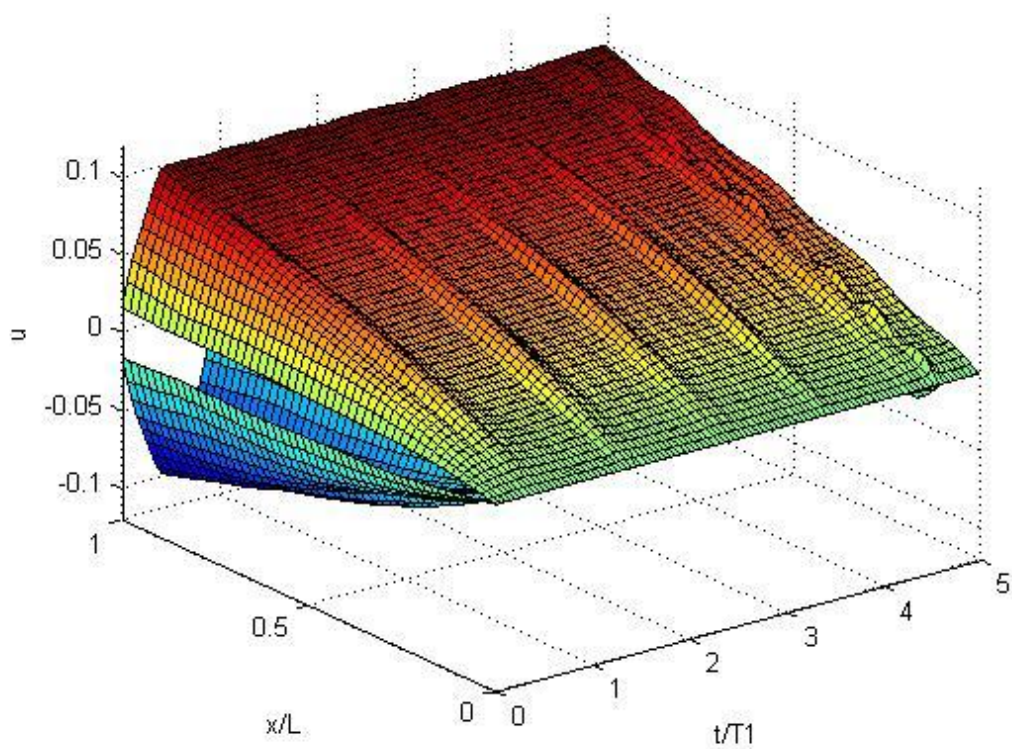
Φάσμα 15: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0,1$ χορδής με ένα σταθερά στερεωμένο και με συγκεντρωμένη μάζα στο άλλο άκρο



Φάσμα 16: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0,5$ χορδής με ένα σταθερά στερεωμένο και με συγκεντρωμένη μάζα στο άλλο άκρο



Φάσμα 17: Πλήγμα στη θέση $\xi = 1$ χορδής με ένα σταθερά στερεωμένο και με συγκεντρωμένη μάζα στο άλλο άκρο



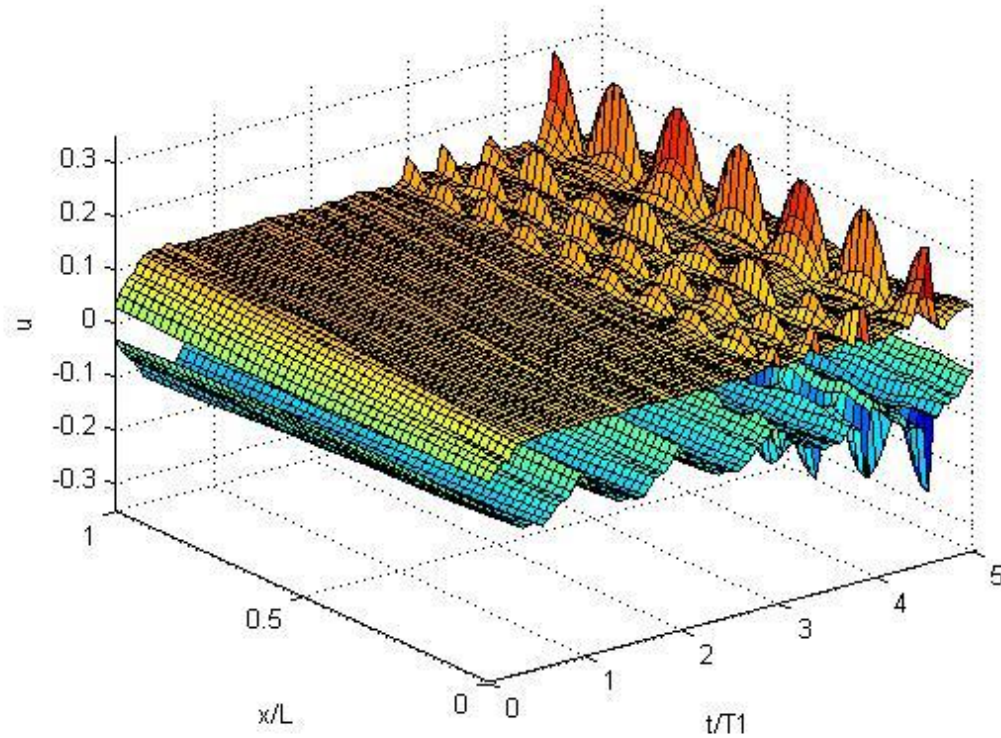
Σχολιασμός των φασμάτων απόκρισης χορδής ένα σταθερά στερεωμένο και με συγκεντρωμένη μάζα στο άλλο άκρο για τις διάφορες τιμές της θέσης του πλήγματος:

- Μέγιστο πλάτος ταλάντωσης έχει το σημείο της χορδής όπου εφαρμόζεται το πλήγμα και κάποια σημεία γύρω από αυτό.
- Για τις μέγιστες τιμές των φασμάτων της χορδής ισχύει ό,τι και προηγουμένως, δηλαδή πως όσο πιο κοντά στο σταθερά στερεωμένο άκρο της χορδής ασκείται το πλήγμα, τόσο πιο μικρή είναι η μέγιστη απόκριση της χορδής. Συγκεκριμένα, στο φάσμα 15 είναι $\bar{v}(0.1, \tau) \cong 0.01$, στο φάσμα 16 είναι $\bar{v}(0.5, \tau) \cong 0.05$ και στο φάσμα 11 $\bar{v}(1, \tau) \cong 0.1$.
- Η κλίση των επιφανειών του φάσματος στο άκρο $\xi = 1$ δίνεται από τον τύπο της οριακής συνθήκης $\frac{\partial \bar{v}(1, \tau)}{\partial \xi} + \bar{M} \frac{\partial^2 \bar{v}(1, \tau)}{\partial \tau^2} = 0$. Η παραμετρική μελέτη για τις διάφορες τιμές της \bar{M} βρίσκεται στο εδάφιο 3.9 του παρόντος κεφαλαίου. Στην ειδική περίπτωση όπου $\bar{M} = 0$, τότε το άκρο $\xi = 1$ θα ήταν ελεύθερο. Επιπλέον, στο σταθερά στερεωμένο άκρο ισχύει: $\bar{v}(0, \tau) = 0$.
- Όμοια με προηγουμένως, όσο πιο κοντά στο ένα σταθερά στερεωμένο άκρο ασκείται το πλήγμα, τόσο περισσότερο μήκος της χορδής είναι ελεύθερο να ταλαντωθεί.
- Σε όλα τα φάσματα, για διάρκεια πλήγματος $\tau \cong 4,8\bar{T}_1$ παρατηρείται διέγερση της 9ης ιδιομορφής. Αναλυτικός σχολιασμός του φαινομένου υπάρχει στο εδάφιο 3.8.2 του παρόντος κεφαλαίου.
- Οι θετικές επιφάνειες των φασμάτων έχουν σταθερές τιμές για $\tau > 0,3\bar{T}_1$, ενώ οι αρνητικές εμφανίζουν περιοδικότητα με περίοδο ίση με την πρώτη ιδιοπερίοδο του συστήματος \bar{T}_1 . Η εικόνα αυτή οφείλεται στο είδος του πλήγματος (ορθογωνικό) και σχολιάστηκε αναλυτικά στο εδάφιο 3.3 του παρόντος κεφαλαίου.

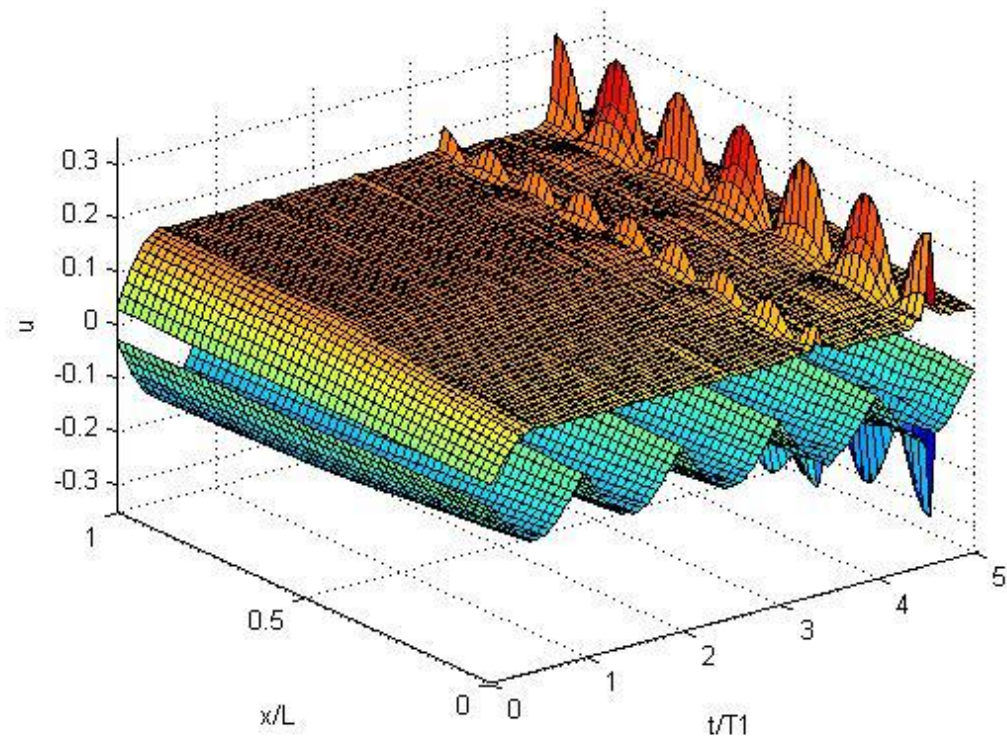
3.5.2.5.Χορδή με ένα ελαστικά στερεωμένο και ένα ελεύθερο άκρο

Το ελαστικά στερεωμένο άκρο είναι το $\xi = 0$ και το ελεύθερο άκρο το $\xi = 1$. Η παράμετρος \bar{k} , όπως και στο εδάφιο 3.5.2.3 του παρόντος κεφαλαίου επιλέγεται να έχει την τιμή 1. Ακολουθούν τα φάσματα.

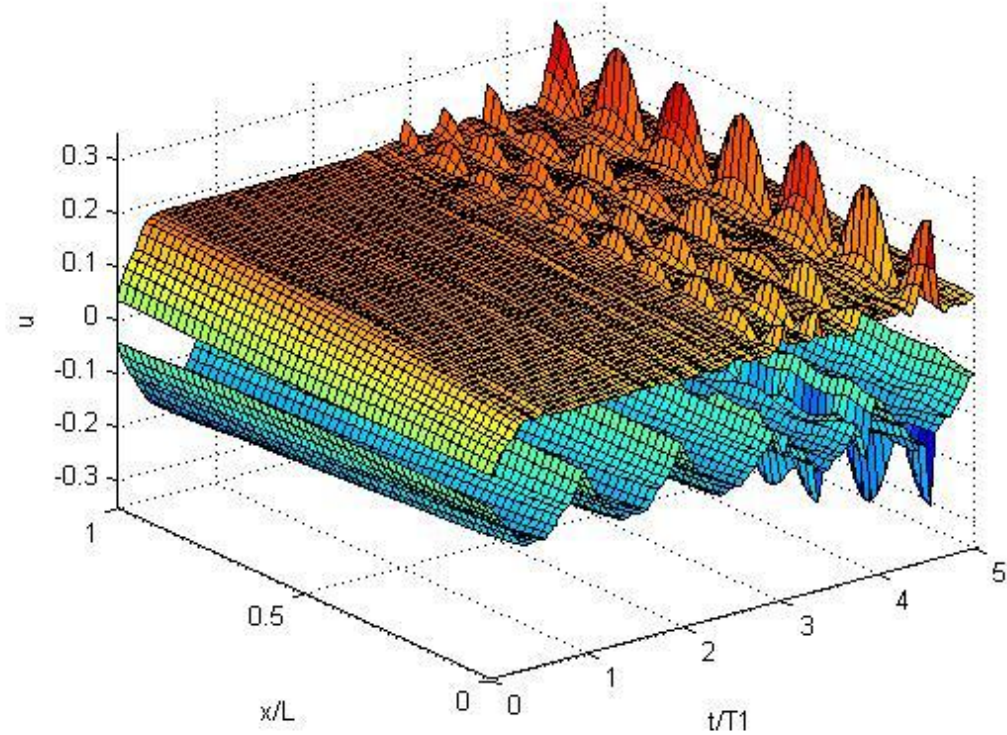
Φάσμα 18: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0$ χορδής με ένα ελαστικά στερεωμένο και ένα σταθερά στερεωμένο άκρο



Φάσμα 19: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0,5$ χορδής με ένα ελαστικά στερεωμένο και ένα σταθερά στερεωμένο άκρο



Φάσμα 20: Πλήγμα στη θέση $\xi = 1$ χορδής με ένα ελαστικά στερεωμένο και ένα σταθερά στερεωμένο άκρο



Σχολιασμός των φασμάτων απόκρισης χορδής ένα ελαστικά στερεωμένο και ένα ελεύθερο άκρο για τις διάφορες τιμές της θέσης του πλήγματος:

- Σε αντίθεση με τις άλλες περιπτώσεις οριακών συνθηκών, εδώ μέγιστη τιμή στο φάσμα εμφανίζει το ελεύθερο άκρο της χορδής, ανεξάρτητα από τη θέση που ασκείται το πλήγμα.
- Για τις μέγιστες τιμές των φασμάτων της χορδής ισχύει ό,τι και για τις προηγούμενες περιπτώσεις με ένα σταθερά στερεωμένο άκρο, δηλαδή πως όσο πιο κοντά στο ελαστικά στερεωμένο άκρο της χορδής ασκείται το πλήγμα, τόσο πιο μικρή είναι η μέγιστη απόκριση της χορδής.
- Η κλίση των επιφανειών του φάσματος κατά τη διεύθυνση του ξ στο άκρο $\xi = 1$ είναι οριζόντια, βάσει της οριακής συνθήκης για το ελεύθερο $\frac{\partial \bar{v}(1, \tau)}{\partial \xi} = 0$. Ακόμη, η κλίση των επιφανειών του φάσματος κατά τη διεύθυνση του ξ στο άκρο $\xi = 0$ δίνεται από τον τύπο της οριακής συνθήκης $\frac{\partial \bar{v}(0, \tau)}{\partial \xi} + \bar{k} \bar{v}(0, \tau) = 0$. Από εδώ συμπεραίνεται ότι όσο πιο μεγάλη είναι η σταθερά \bar{k} του ελατηρίου, τόσο πιο μεγάλη η κλίση της γραφικής παράστασης στο άκρο $\xi = 0$. Αυτό εξηγείται αναλυτικά στο εδάφιο 3.6 του παρόντος κεφαλαίου όπου γίνεται παραμετρική μελέτη ως προς την τιμή της σταθεράς \bar{k} .
- Αν ήταν $\bar{k} = 0$, τότε το άκρο $\xi = 1$ θα ήταν ελεύθερο όπως και το άκρο $\xi = 0$. Σε αυτήν την περίπτωση το πρόβλημα θα ήταν απροσδιόριστο.
- Το πλάτος της ταλάντωσης στο ελαστικά στερεωμένο άκρο $\xi = 0$ αυξάνεται καθώς το πλήγμα απομακρύνεται από το σημείο αυτό.
- Προφανώς η τιμή του φάσματος είναι μικρότερη στο ελαστικά στερεωμένο άκρο από ότι στο σταθερά στερεωμένο άκρο.
- Σε όλα τα φάσματα, για συγκεκριμένες διάρκειες πλήγματος παρατηρείται διέγερση των διαφόρων ιδιομορφών. Για παράδειγμα, στο φάσμα 18, για διάρκεια πλήγματος $\tau \cong 4.5\bar{T}_1$ παρατηρείται διέγερση της 7ης ιδιομορφής. Αναλυτικός σχολιασμός του φαινομένου υπάρχει στο εδάφιο 3.8.2 του παρόντος κεφαλαίου.
- Οι θετικές επιφάνειες των φασμάτων έχουν σταθερές τιμές για $\tau > 0.3\bar{T}_1$, ενώ οι αρνητικές εμφανίζουν περιοδικότητα με περίοδο ίση με την πρώτη ιδιοπερίοδο του συστήματος \bar{T}_1 . Η εικόνα αυτή οφείλεται στο είδος του πλήγματος (ορθογωνικό) και σχολιάστηκε αναλυτικά στο εδάφιο 3.3 του παρόντος κεφαλαίου.

3.6. Επίδραση της τιμής της σταθεράς του ελατηρίου στο ελαστικά στερεωμένο άκρο στην απόκριση και στο φάσμα της απόκρισης της χορδής

Θα εξεταστεί η περίπτωση της χορδής με ένα σταθερά στερεωμένο άκρο (το $\xi = 0$) και ένα ελαστικά στερεωμένο άκρο (το $\xi = 1$). Τα συμπεράσματα γενικεύονται και για τους υπόλοιπους συνδυασμούς οριακών συνθηκών με ένα ελαστικά στερεωμένο άκρο.

3.6.1. Απόκριση

Οι τιμές των υπολοίπων παραμέτρων είναι:

- Είδος πλήγματος: ορθογωνικό.
- Θέση πλήγματος: $\xi = 0,7$.
- Μέγιστη τιμή της δύναμης του πλήγματος: $\bar{F}_0 = 0,05$.
- Διάρκεια πλήγματος ίση με 1,5 ιδιοπερίοδο του συστήματος, δηλαδή $1,5\bar{T}_1 = 1,5 \frac{2\pi}{\omega_1}$.
- Χρονικό διάστημα μελέτης της ελεύθερης ταλάντωσης της χορδής μετά το πέρας του πλήγματος $4\bar{T}_1$.
- Κατανεμημένη μάζα του συστήματος: $\bar{m} = 0,05$.

Επισυνάπτονται τα σχετικά βίντεο:

| Όνομα αρχείου | Τιμή της σταθεράς του ελατηρίου k |
|---------------|-----------------------------------|
| Βίντεο 14 | 1 |
| Βίντεο 15 | 2 |
| Βίντεο 16 | 3 |
| Βίντεο 17 | 4 |

3.6.2. Φάσματα απόκρισης

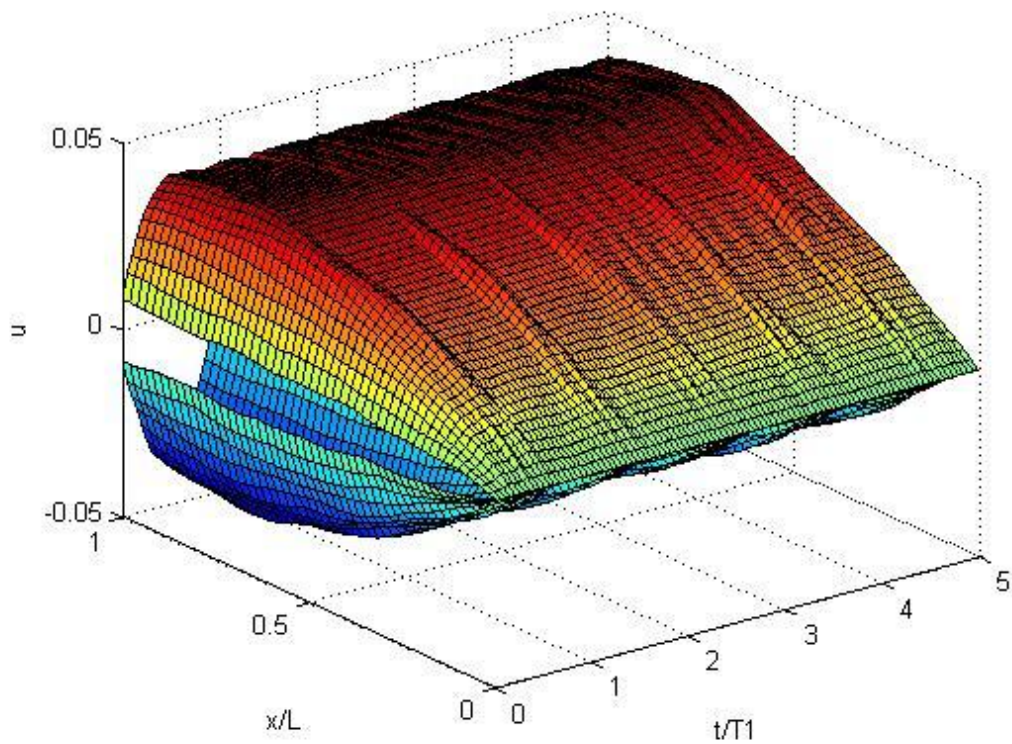
Οι τιμές των υπολοίπων παραμέτρων είναι:

- Είδος πλήγματος: ορθογωνικό.
- Θέση πλήγματος: 0,7.
- Μέγιστη τιμή της δύναμης του πλήγματος: $\bar{F}_0 = 0,05$.

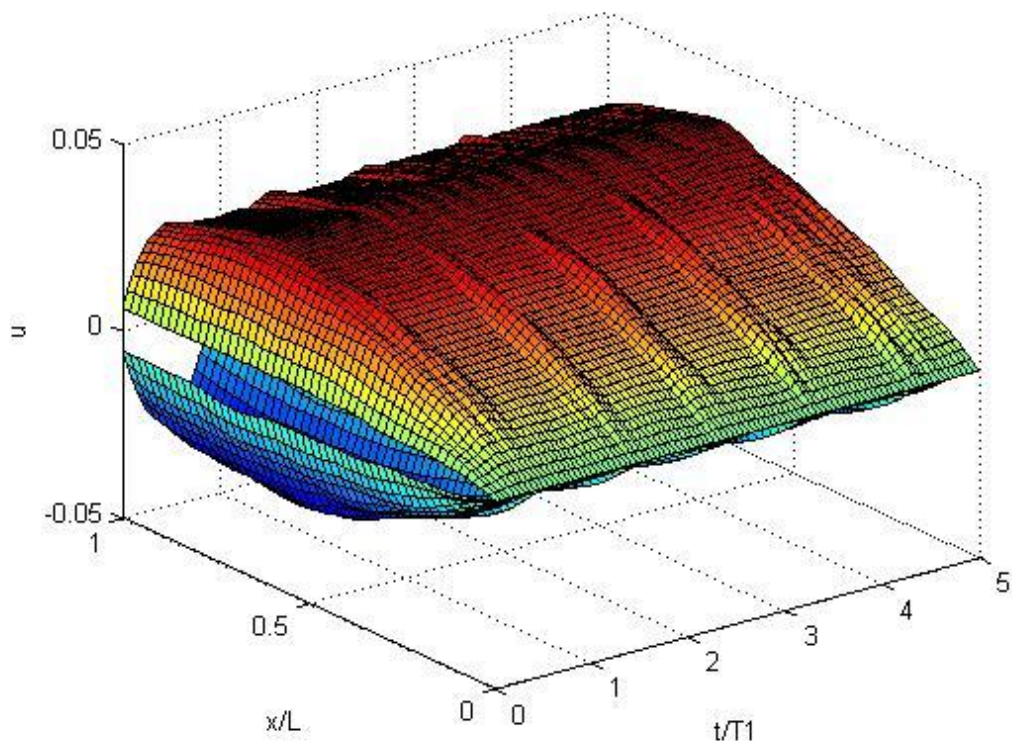
- Διάρκεια πλήγματος μέχρι 5 ιδιοπεριόδους του συστήματος.
- Κατανεμημένη μάζα του συστήματος: $\bar{m} = 0,05$.

Ακολουθούν τα φάσματα.

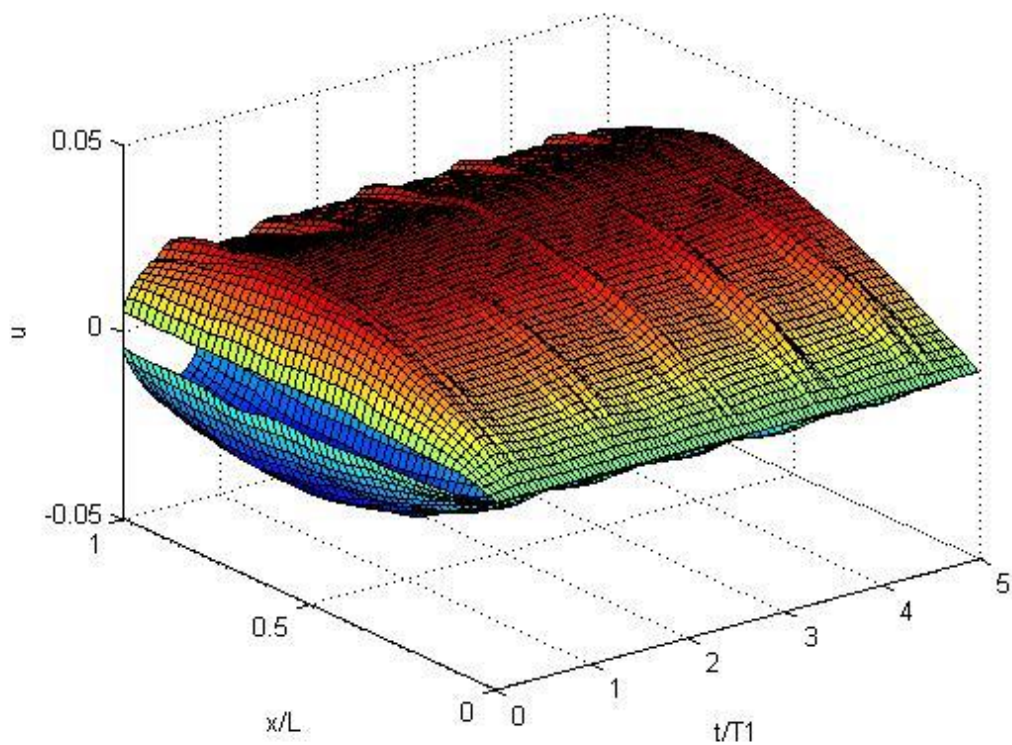
Φάσμα 21: Χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελαστικά στερεωμένο άκρο $\bar{k} = 1$



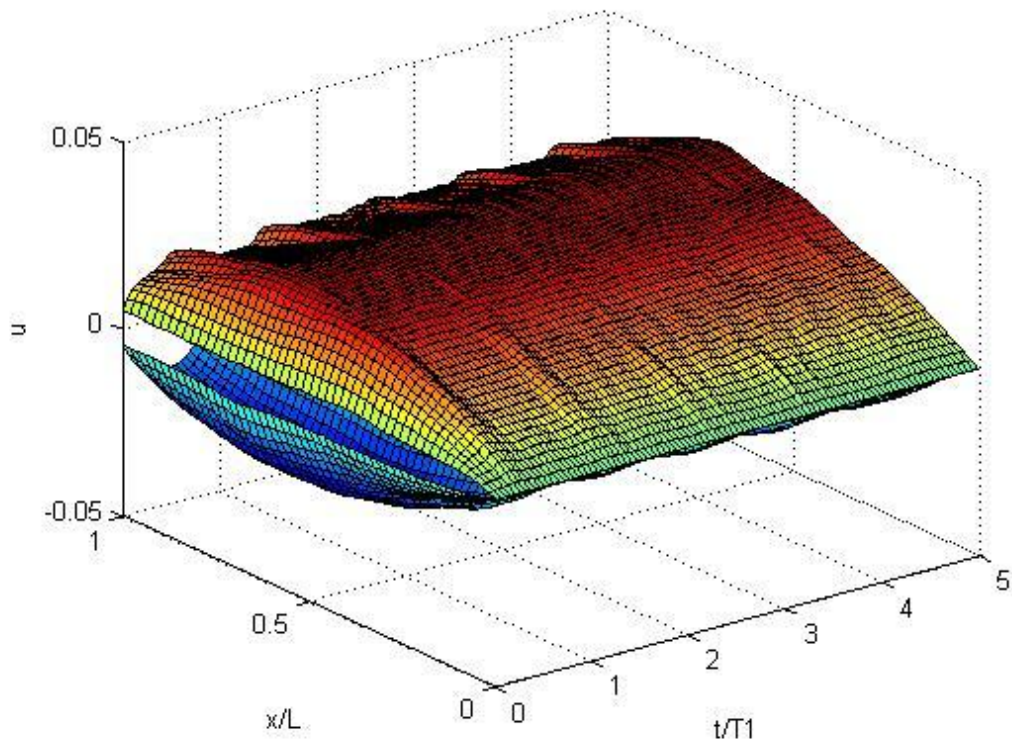
Φάσμα 22: Χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελαστικά στερεωμένο άκρο $\bar{k} = 2$



Φάσμα 23: Χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελαστικά στερεωμένο άκρο $\bar{k} = 3$



Φάσμα 24: Χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελαστικά στερεωμένο άκρο $\bar{k} = 4$



Σχολιασμός των βίντεο και των φασμάτων απόκρισης χορδής με ένα σταθερά στερεωμένο και ένα ελαστικά στερεωμένο άκρο για τις διάφορες τιμές της σταθεράς \bar{k} του ελατηρίου:

- Όσο μεγαλώνει η τιμή της σταθεράς \bar{k} του ελατηρίου στο ελαστικά στερεωμένο άκρο, τόσο ελαττώνεται η μέγιστη απόκριση της χορδής (φάσματα). Αυτό συμβαίνει επειδή η αύξηση της σταθεράς \bar{k} , δηλαδή πιο σκληρό συγκεντρωμένο ελατήριο, αυξάνει την ακαμψία του συστήματος. Από τη γραφική επίλυση της εξίσωσης ιδιοσυχνοτήτων (2.27)

$$\tan\left(\frac{\omega L}{c}\right) = \left(-\frac{T}{kL}\right)\left(\frac{\omega L}{c}\right)$$

(σχήμα 29, εδάφιο 1.4 του παρόντος κεφαλαίου) είναι εμφανές πως όσο αυξάνεται η τιμή της σταθεράς \bar{k} του ελατηρίου, τόσο οι ρίζες ρ_i της εξίσωσης ιδιοσυχνοτήτων μικραίνουν, άρα μικραίνουν και οι ιδιοσυχνότητες ω_i του συστήματος και κατά συνέπεια μεγαλώνουν οι ιδιοπερίοδοι \bar{T}_i .

- Η κλίση των επιφανειών του φάσματος κατά τη διεύθυνση του ξ στο άκρο $\xi = 1$ δίνεται, όπως ήδη έχει επισημανθεί, από τον τύπο της οριακής συνθήκης $\frac{\partial \bar{v}(1,\tau)}{\partial \xi} + \bar{k} \frac{\partial^2 \bar{v}(1,\tau)}{\partial \tau^2} = 0$. Είναι προφανές πως όσο πιο μεγάλο το \bar{k} τόσο πιο μεγάλη θα είναι η κλίση των επιφανειών του φάσματος στο άκρο $\xi = 1$. Επιπλέον, για το σταθερά στερεωμένο άκρο ισχύει: $\bar{v}(0,\tau) = 0$.
- Στην ειδική περίπτωση όπου $\bar{k} = 0$, τότε το άκρο $\xi = 1$ θα ήταν ελεύθερο, ενώ αν $\bar{k} = \infty$, τότε το άκρο $\xi = 1$ θα ήταν σταθερά στερεωμένο.
- Κατά την «άνοδο» της χορδής η κλίση των αποκρίσεων στο $\xi = 1$ είναι αρνητική, ενώ κατά την «κάθοδο» η κλίση είναι αρνητική. Αυτό είναι εμφανές στα επισυναπτόμενα βίντεο για την απόκριση.
- Η εικόνα της κίνησης της χορδής όσον αφορά την ταλάντωσή της αρχικά στα θετικά, μετά επιστροφή στη θέση ισορροπίας, ύστερα ξανά στα θετικά, κ.ο.κ. ερμηνεύεται στο εδάφιο 3.8.1 του παρόντος κεφαλαίου.

3.7. Επίδραση της τιμής της συγκεντρωμένης μάζας στο αντίστοιχο άκρο στην απόκριση και στο φάσμα της απόκρισης της χορδής

Θα εξεταστεί η περίπτωση της χορδής με ένα σταθερά στερεωμένο άκρο (το $\xi = 0$) και στο άλλο άκρο (το $\xi = 1$) να υπάρχει συγκεντρωμένη μάζα \bar{M} .

3.7.1. Απόκριση

Οι τιμές των υπολοίπων παραμέτρων είναι:

- Είδος πλήγματος: ορθογωνικό.
- Θέση πλήγματος: $\xi = 0,7$.
- Μέγιστη τιμή της δύναμης του πλήγματος: $\bar{F}_0 = 0,05$.
- Διάρκεια πλήγματος ίση με 1,5 ιδιοπερίοδο του συστήματος, δηλαδή $1,5\bar{T}_1 = 1,5 \frac{2\pi}{\omega_1}$.
- Χρονικό διάστημα μελέτης της ελεύθερης ταλάντωσης της χορδής μετά το πέρας του πλήγματος $4\bar{T}_1$.
- Κατανεμημένη μάζα του συστήματος: $\bar{m} = 0,05$.

Επισυνάπτονται τα σχετικά βίντεο:

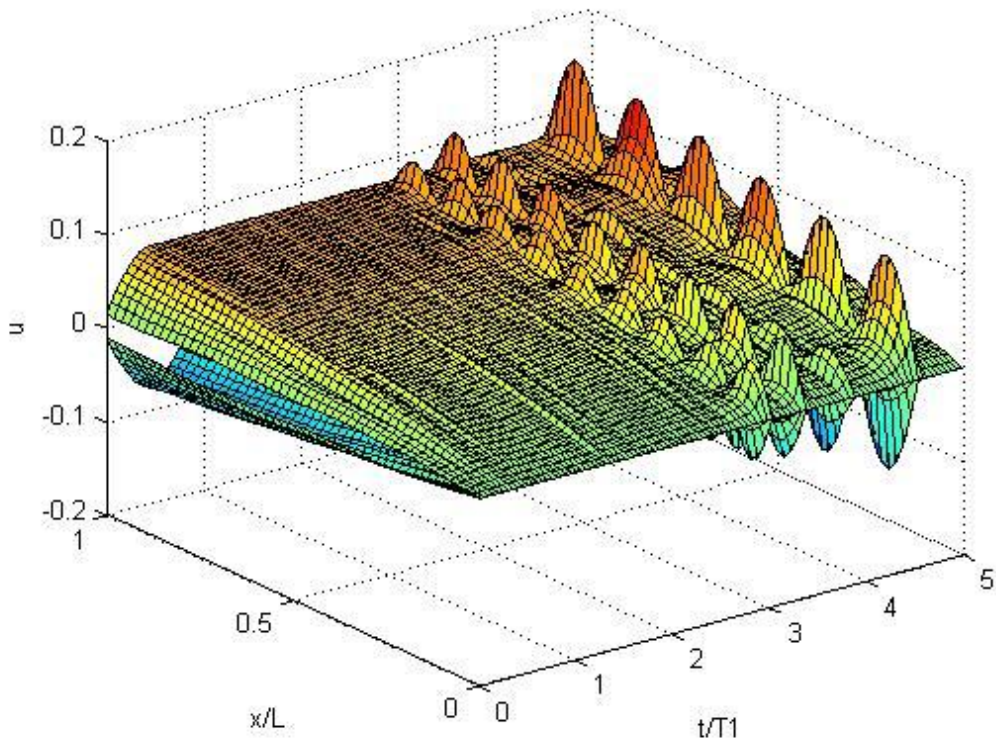
| Όνομα αρχείου | Τιμή της συγκεντρωμένης μάζας \bar{M} |
|---------------|---|
| Βίντεο 18 | $\bar{M} = 1\bar{m} = 0,05$ |
| Βίντεο 19 | $\bar{M} = 0,6\bar{m} = 0,03$ |
| Βίντεο 20 | $\bar{M} = 0,2\bar{m} = 0,01$ |

3.7.2. Φάσματα απόκρισης

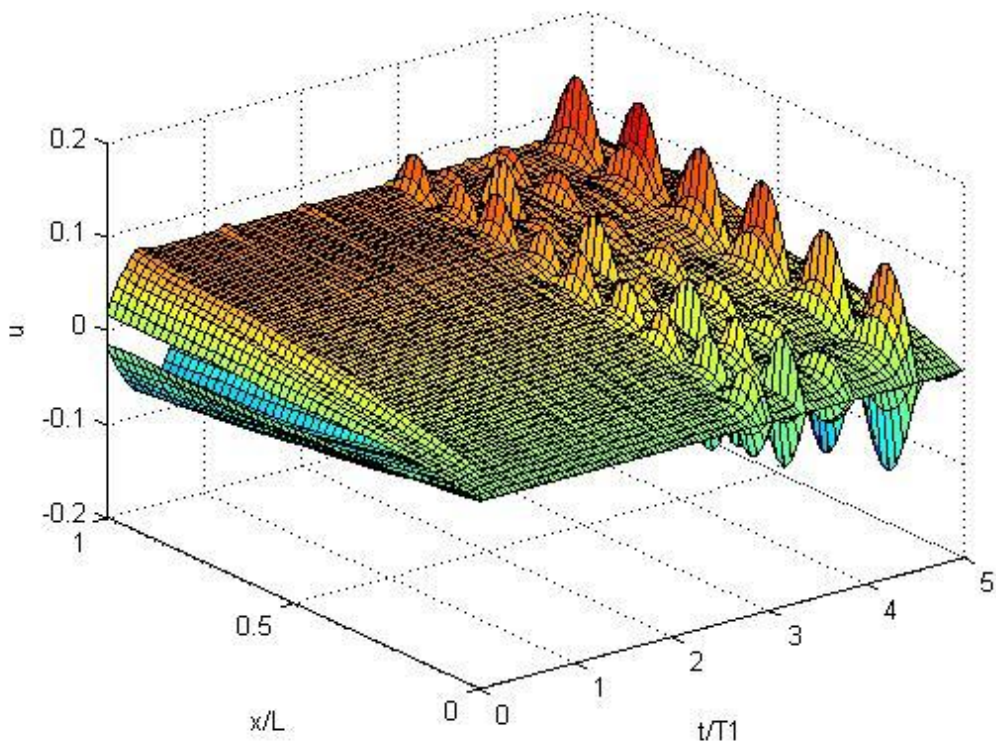
Οι τιμές των υπολοίπων παραμέτρων είναι:

- Είδος πλήγματος: ορθογωνικό.
- Θέση πλήγματος: $\xi = 0,7$.
- Μέγιστη τιμή της δύναμης του πλήγματος: $\bar{F}_0 = 0,05$.
- Διάρκεια πλήγματος μέχρι 5 ιδιοπεριόδους του συστήματος.
- Κατανεμημένη μάζα του συστήματος: $\bar{m} = 0,05$.

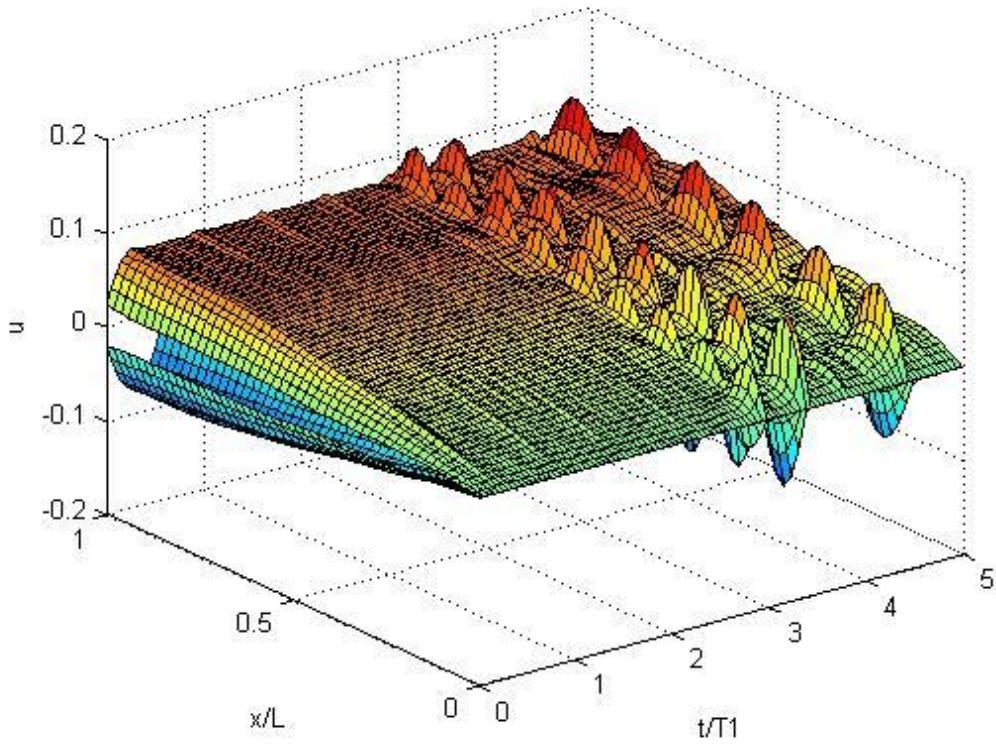
Φάσμα 25: Χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο άκρο και με συγκεντρωμένη μάζα $\bar{M} = 0.05$ στο άλλο άκρο



Φάσμα 26: Χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο άκρο και με συγκεντρωμένη μάζα $\bar{M} = 0.03$ στο άλλο άκρο



Φάσμα 27: Χορδή με ένα σταθερά στερεωμένο άκρο και με συγκεντρωμένη μάζα $\bar{M} = 0.01$ στο άλλο άκρο



Σχολιασμός των βίντεο και των φασμάτων απόκρισης χορδής με ένα σταθερά στερεωμένο άκρο και με συγκεντρωμένη μάζα στο άλλο άκρο για τις διάφορες τιμές της συγκεντρωμένης μάζας \bar{M} :

- Στα φάσματα απόκρισης παρατηρείται πως ο άξονας των χρόνων για μικρές τιμές της συγκεντρωμένης μάζας \bar{M} είναι ένα μικρότερο τμήμα του άξονα των χρόνων για τις μεγαλύτερες τιμές της \bar{M} . Από τη γραφική επίλυση της εξίσωσης ιδιοσυχνοτήτων (2.32)

$$\tan\left(\frac{\omega L}{c}\right) = \frac{\frac{mL}{\bar{M}}}{\frac{\omega L}{c}}$$

(σχήμα 31 του εδαφίου 1.5 του παρόντος κεφαλαίου) είναι εμφανές πως όσο αυξάνεται η τιμή της συγκεντρωμένης μάζας \bar{M} , τόσο οι ρίζες ρ_i της εξίσωσης ιδιοσυχνοτήτων μικραίνουν, άρα μικραίνουν οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος ω_i και κατά συνέπεια μεγαλώνουν οι ιδιοπερίοδοι \bar{T}_i . Επειδή η διάρκεια του πλήγματος είναι πολλαπλάσιο της πρώτης ιδιοπεριόδου \bar{T}_1 , τα φάσματα της χορδής για μικρές τιμές της συγκεντρωμένης μάζας \bar{M} είναι ένα μικρότερα τμήματα των φασμάτων για τις μεγαλύτερες τιμές της \bar{M} .

- Όσον αφορά τα βίντεο, όπως και στο εδάφιο 3.4 του παρόντος κεφαλαίου (παραμετρική μελέτη για την κατανεμημένη μάζα του συστήματος), έτσι και εδώ, όσο μεγαλώνει η τιμή της συγκεντρωμένης μάζας στο άκρο της χορδής, τόσο πιο «αργά» αυτή ταλαντώνεται, δηλαδή μεγαλώνει η πρώτη ιδιοπερίοδός της και μικραίνει η αντίστοιχη ιδιοσυχνότητα. Η εξήγηση του φαινομένου δόθηκε ακριβώς από πάνω.
- Σε όλα τα βίντεο το άκρο $\xi = 1$ της χορδής εμφανίζει παρόμοια κίνηση. Η χορδή με $\bar{M} = 0.03$ παρουσιάζει μεγαλύτερες διακυμάνσεις στο μήκος της σε σχέση με τη χορδή με $\bar{M} = 0.05$. Στη χορδή με $\bar{M} = 0.01$ επικρατεί η ταλάντωση του άκρου $\xi = 1$ με τη συγκεντρωμένη μάζα και δεν υπάρχουν πολλές διακυμάνσεις στο μήκος της χορδής.
- Η κλίση των επιφανειών των φασμάτων και των αποκρίσεων κατά τη διεύθυνση ξ στο άκρο $\xi = 1$ δίνεται από τον τύπο της σύνθετης οριακής συνθήκης $\frac{\partial \bar{v}(1,\tau)}{\partial \xi} + \bar{M} \frac{\partial^2 \bar{v}(1,\tau)}{\partial \tau^2} = 0$. Είναι προφανές πως όσο πιο μεγάλο το \bar{M} τόσο πιο μεγάλη θα είναι η κλίση των επιφανειών των φασμάτων στο άκρο $\xi = 1$. Επιπλέον, στο σταθερά στερεωμένο άκρο ισχύει: $\bar{v}(0,\tau) = 0$.
- Στην ειδική περίπτωση όπου $\bar{M} = 0$, τότε το άκρο $\xi = 1$ θα ήταν ελεύθερο, ενώ αν $\bar{M} = \infty$, το άκρο $\xi = 1$ θα ήταν σταθερά στερεωμένο.
- Παρατηρείται πως στο φάσμα 25, όταν η διάρκεια του πλήγματος είναι περίπου ίση με $\tau = 3\bar{T}_1$, τότε εμφανίζεται η ένατη ιδιομορφή $\bar{\varphi}_9(\xi)$ στο φάσμα απόκρισης της χορδής. Αντίστοιχα, άλλες ιδιομορφές εμφανίζονται σε όλα τα φάσματα για τις διάφορες τιμές της διάρκειας

του πλήγματος. Η εξήγηση του φαινομένου παρατίθεται στο επόμενο εδάφιο του παρόντος κεφαλαίου (3.8).

3.8. Επίδραση της διάρκειας του πλήγματος στην απόκριση και στο φάσμα απόκρισης της χορδής

Η παραμετρική μελέτη αφορά τη χορδή με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα.

3.8.1. Απόκριση

Οι τιμές των υπολοίπων παραμέτρων είναι:

- Είδος πλήγματος: ορθογωνικό.
- Θέση πλήγματος: $\xi = 0,7$.
- Μέγιστη τιμή της δύναμης του πλήγματος: $\bar{F}_0 = 0,05$.
- Χρονικό διάστημα μελέτης της ελεύθερης ταλάντωσης της χορδής μετά το πέρας του πλήγματος $4\bar{T}_1$.
- Κατανεμημένη μάζα του συστήματος: $\bar{m} = 0,05$.

Επισυνάπτονται τα σχετικά βίντεο:

| Όνομα αρχείου | Διάρκεια του πλήγματος |
|----------------------|-------------------------------|
| Βίντεο 21 | $0,5T_1$ |
| Βίντεο 22 | $0,7T_1$ |
| Βίντεο 23 | T_1 |
| Βίντεο 24 | $1,2T_1$ |
| Βίντεο 25 | $1,5T_1$ |

Σχολιασμός των βίντεο απόκρισης της χορδής με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα για τις διάφορες τιμές της διάρκειας του πλήγματος:

Στα βίντεο 24 και 25 παρατηρείται η εξής εικόνα: η χορδή ταλαντώνεται στα θετικά, επιστρέφει στη θέση ισορροπίας, ταλαντώνεται εκ νέου στα θετικά και μετά αρχίζει η «αναμενόμενη» ελεύθερη τλάντωσή της, δηλαδή από τα θετικά στα αρνητικά και το αντίστροφο. Το πρώτο μέρος της κίνησης, δηλαδή η

ταλάντωση στα θετικά και η επιστροφή στη θέση ισορροπίας, συμπίπτει χρονικά με την πρώτη ιδιοπερίοδο του συστήματος \bar{T}_1 . Η ταλάντωση εκ νέου στα θετικά οφείλεται στο ότι το πλήγμα εξακολουθεί να ασκείται, στο μεν βίντεο 24 για χρόνο $\tau = 0,2\bar{T}_1$, στο δε βίντεο 25 για χρόνο $\tau = 0,5\bar{T}_1$.

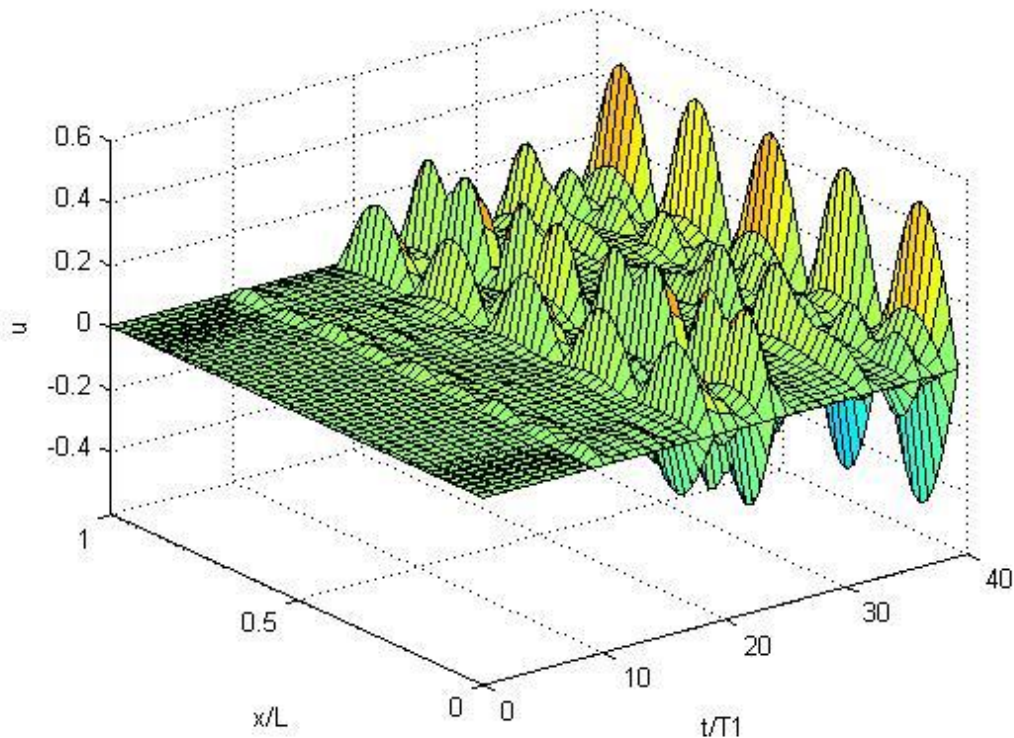
Στα βίντεο 21 και 22, όπου η διάρκεια του πλήγματος είναι μικρότερη από την πρώτη ιδιοπερίοδο του συστήματος δεν παρατηρείται κάτι ανάλογο, καθώς η ελεύθερη ταλάντωση της χορδής ξεκινά σε χρόνο μικρότερο της πρώτης ιδιοπεριόδου, δηλαδή τη χρονική στιγμή $\tau < \bar{T}_1$. Αντίστοιχα, στο βίντεο 23 (διάρκεια πλήγματος ίση με \bar{T}_1) η εκκίνηση της ελεύθερης ταλάντωσης της χορδής συμπίπτει χρονικά με το πέρας του χρόνου \bar{T}_1 .

3.8.2. Φάσμα απόκρισης

Παρατίθεται φάσμα για τη χορδή με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα. Οι τιμές των υπόλοιπων παραμέτρων εδώ είναι:

- Θέση πλήγματος: 0,7.
- Μέγιστη τιμή της δύναμης του πλήγματος: $\bar{F}_0 = 0,05$.
- Διάρκεια πλήγματος ίση με σαράντα ιδιοπεριόδους του συστήματος, δηλαδή $40\bar{T}_1 = 40 \frac{2\pi}{\omega_1}$.
- Κατανεμημένη μάζα του συστήματος: $\bar{m} = 0,05$.

Φάσμα 28: Διάρκεια πλήγματος ίση με 40 ιδιοπεριόδους του συστήματος (χορδή με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα)



Σχολιασμός του φάσματος 28: Διάρκεια πλήγματος ίση με 40 ιδιοπεριόδους του συστήματος (χορδή με δύο σταθερά στερεωμένα άκρα):

Για μεγάλες διάρκειες πλήγματος, $\tau > 10T_1$, το πρόβλημα ισοδυναμεί με αυτό της εγκάρσιας φόρτισης χορδής με συνάρτηση βήματος, δηλαδή εξωτερικό συγκεντρωμένο φορτίο που περιγράφεται από τη σχέση $\bar{F}(t) = \bar{F}_0$. Είναι γνωστό πως η απόκριση σε αυτήν την περίπτωση είναι ημιτονοειδής.

Στο φάσμα παρατηρείται μια επαναληψιμότητα, ίσως και περιοδικότητα στην απόκριση της χορδής. Συγκεκριμένα, για κάποιες διάρκειες πλήγματος εμφανίζονται οι κανονικές ιδιομορφές $\bar{\varphi}_i(x)$. Για παράδειγμα, όταν το πλήγμα διαρκεί περίπου $\tau = 18T_1$, τότε παρατηρείται διέγερση της πέμπτης ιδιομορφής $\bar{\varphi}_5(x)$, ενώ όταν το πλήγμα διαρκεί περίπου $\tau = 25T_1$, παρατηρείται διέγερση της τέταρτης ιδιομορφής $\bar{\varphi}_4(x)$. Πρόκειται για στάσιμα κύματα που δημιουργούνται στη χορδή, τη συμβολή δηλαδή των κυμάτων που δημιουργεί το

πλήγμα και αυτών που ανακλώνται στα άκρα της. Παρόμοια εικόνα παρουσιάζει το φάσμα και για τις υπόλοιπες περιπτώσεις οριακών συνθηκών.

Ακόμη, το πλάτος αυξάνει σημαντικά όσο αυξάνεται η διάρκεια του πλήγματος. Τούτο συμβαίνει επειδή στα σημεία εκείνα της χορδής συμβάλλουν τρία κύματα, άρα το πλάτος που εμφανίζεται είναι το διανυσματικό άθροισμα των πλατών των επιμέρους κυμάτων. Τα τρία αυτά κύματα είναι: εκείνο που προκαλείται από το πλήγμα, εκείνο που ανακλάται στο σταθερά στερεωμένο άκρο $\xi = 0$ και εκείνο που ανακλάται στο σταθερά στερεωμένο άκρο $\xi = 1$.

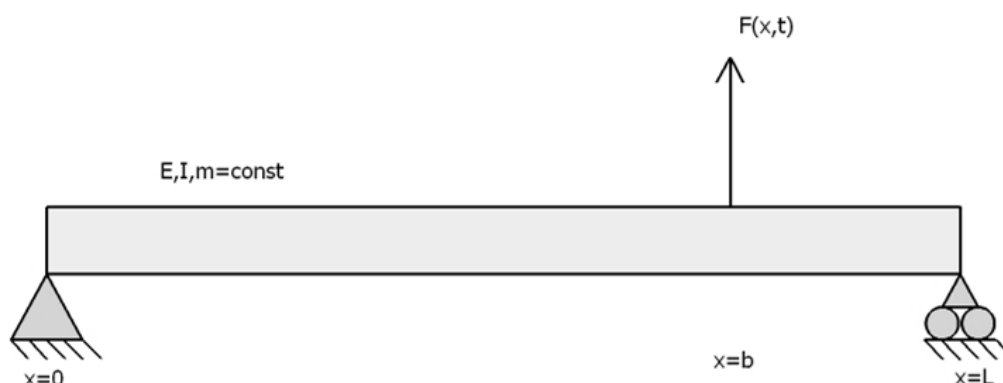
Είναι επίσης ενδιαφέρον ότι το σχήμα του φάσματος ποικίλει για τις διάφορες διάρκειες πλήγματος όπου παρατηρείται συντονισμός. Για παράδειγμα, για $\tau = 18\bar{T}_1$ (συντονισμός στη $\bar{\varphi}_5(x)$) το φάσμα έχει μονές κορυφές, ενώ για $\tau = 25\bar{T}_1$ (συντονισμός στη $\bar{\varphi}_4(x)$) το φάσμα εμφανίζει διπλές κορυφές.

Η μελέτη των φασμάτων απόκρισης για τόσο μεγάλες διάρκειες πλήγματος, ξεφεύγει από τους σκοπούς της παρούσας διπλωματικής εργασίας λόγω του ότι υπεισέρχεται το φαινόμενο της συμβολής κυμάτων και της δημιουργίας στάσιμων κυμάτων.

Εγκάρσιες ταλαντώσεις δοκού

1. Διατύπωση του προβλήματος των εγκαρσίων ταλαντώσεων δοκού και εξαγωγή των εξισώσεων για τις διάφορες περιπτώσεις οριακών συνθηκών

1.1. Αμφιέρειστη δοκός



Σχήμα 33: Αμφιέρειστη δοκός

Η μερική διαφορική εξίσωση 4^{ης} τάξης που περιγράφει τις εγκάρσιες ταλαντώσεις τεντωμένης χορδής με σταθερές κατανομές μάζας και ροπής αδράνειας είναι:

$$-EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + F(x, t) = m \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

Το **πρόβλημα ιδιοτιμών** που περιγράφει την ελεύθερη ταλάντωση δοκού περιλαμβάνει την εξίσωση

$$\frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} = \frac{1}{c^4} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2}, \quad c^4 = \frac{EI}{m} \quad (3.2)$$

τις αρχικές συνθήκες

$$\begin{cases} v(x, 0) = 0 \\ \left. \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

και τις οριακές συνθήκες

$$\begin{cases} v(0, t) = 0 \\ \frac{\partial^2 v(0, t)}{\partial x^2} = 0 \\ v(L, t) = 0 \\ \frac{\partial^2 v(L, t)}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Υποτίθεται σύγχρονη κίνηση, δηλαδή λύση της μορφής

$$v(x, t) = \varphi(x)f(t) \quad (3.5)$$

Αντικατάσταση της (3.5) στην εξίσωση (3.2) δίνει για σταθερά E, I, m :

$$\begin{cases} \ddot{f}(t) + \omega^2 f(t) = 0 \\ EI \frac{\partial^4 \varphi(x)}{\partial x^4} - \omega^2 m \varphi(x) = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Η δεύτερη εξίσωση γράφεται:

$$\frac{\partial^4 \varphi(x)}{\partial x^4} - \frac{\omega^2}{c^4} \varphi(x) = 0, \quad c^4 = \frac{EI}{m} \quad (3.7)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (3.7) είναι:

$$\rho^4 - \frac{\omega^2}{c^4} = 0 \Rightarrow \rho^4 = \frac{\omega^2}{c^4} e^{i2k\pi} \Rightarrow \rho = \frac{\sqrt{\omega}}{c} e^{\frac{ik\pi}{2}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Από την τελευταία προκύπτουν οι λύσεις:

$$\rho_1 = \frac{\sqrt{\omega}}{c}, \quad \rho_2 = -\frac{\sqrt{\omega}}{c}, \quad \rho_3 = i \frac{\sqrt{\omega}}{c}, \quad \rho_4 = -i \frac{\sqrt{\omega}}{c}$$

Επομένως, τέσσερις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης (3.7) είναι:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, \omega) &= e^{\frac{\sqrt{\omega}}{c}x}, & \varphi_2(x, \omega) &= e^{-\frac{\sqrt{\omega}}{c}x}, \\ \varphi_3(x, \omega) &= e^{i\frac{\sqrt{\omega}}{c}x}, & \varphi_4(x, \omega) &= e^{-i\frac{\sqrt{\omega}}{c}x}\end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, \omega) &= \cos\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}x\right), & \varphi_2(x, \omega) &= \sin\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}x\right), \\ \varphi_3(x, \omega) &= \cosh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}x\right), & \varphi_4(x, \omega) &= \sinh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}x\right)\end{aligned}$$

Επομένως, η γενική λύση της (3.7) είναι ο γραμμικός συνδυασμός των παραπάνω συναρτήσεων, δηλαδή:

$$\varphi(x) = c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}x\right) + c_3 \cosh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}x\right) + c_4 \sinh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}x\right) \quad (3.8)$$

Αντικατάσταση των οριακών συνθηκών (3.4) στην εξίσωση (3.5):

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi(0, t)}{\partial x^2} = 0 \\ \varphi(L) = 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi(L, t)}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Με αντικατάσταση της (3.8) στις οριακές συνθήκες (3.9) προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ \cos\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) & \sin\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) & \cosh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) & \sinh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) \\ -\cos\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) & -\sin\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) & \cosh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) & \sinh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Από τις δύο πρώτες εξισώσεις του συστήματος ισχύει ότι $c_1 = c_3 = 0$. Άρα οι επόμενες δύο εξισώσεις γράφονται ως εξής:

$$\begin{cases} c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) + c_4 \sinh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) = 0 \\ -c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) + c_4 \sinh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) = 0 \\ c_4 \sinh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) = 0 \end{cases}$$

Από τη δεύτερη σχέση, επειδή $\omega \neq 0$, είναι $c_4 = 0$. Επειδή όμως δε γίνεται να μηδενίζονται όλοι οι συντελεστές, πρέπει $c_2 \neq 0$. Άρα από την πρώτη σχέση προκύπτει η εξίσωση ιδιοσυχνοτήτων:

$$\sin\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{\omega}}{c}L = n\pi$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτουν οι ιδιοσυχνότητες της ελεύθερης ταλάντωσης ω_n , $n \in \mathbb{N}$:

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 \Rightarrow \omega_n = n^2 \frac{\pi^2 c^2}{L^2} \Rightarrow \omega_n = n^2 \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Σε καθεμιά από αυτές αντιστοιχεί μια ιδιομορφή $\varphi_n(x)$:

$$\varphi_n(x) = c_{2n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Από τη συνθήκη κανονικοποίησης προκύπτουν οι κανονικοποιημένοι συντελεστές $c_{2n} = \sqrt{\frac{2}{mL}}$, οι οποίοι όταν αντικατασταθούν στις συναρτήσεις $\varphi_n(x)$ προκύπτουν οι κανονικοποιημένες ιδιομορφές:

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{mL}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Το πρόβλημα των εγκάρσιων ταλαντώσεων αμφιέρειστης δοκού με σταθερές κατανομές υπό την επίδραση συγκεντρωμένου φορτίου (πλήγματος) στη θέση $x = b$, $0 \leq b \leq L$, θα επιλυθεί με τη μέθοδο των κανονικών μορφών και περιλαμβάνει τη ΜΔΕ 4ης τάξης (3.1), τις αρχικές συνθήκες (3.3) και τις οριακές συνθήκες (3.4). Έστω ότι η λύση της (3.1) είναι της μορφής:

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} n_i(t) \varphi_i(x) \quad (3.11)$$

όπου $n_i(t)$ είναι οι κανονικές συντεταγμένες. Η (3.11) αντικαθίσταται στην εξίσωση (3.1) και στη συνέχεια η (3.1) πολλαπλασιάζεται με $\varphi_j(x)$ και ολοκληρώνεται από 0 έως L , όπως στο εδάφιο 3.6.3 του κεφαλαίου 1. Προκύπτουν οι ασύζευκτες διαφορικές εξισώσεις:

$$\ddot{n}_j(t) + n_j(t) = N_j(t), \quad j = 1, 2, 3 \dots$$

η καθεμία από τις οποίες έχει λύση:

$$n_i(t) = n_i(0) \cos(\omega_i t) + \frac{\dot{n}_i(0)}{\omega_i} \sin(\omega_i t) + \frac{1}{\omega_i} \int_0^t N_i(\tau) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau$$

Από τις αρχικές συνθήκες (3.3) όμως, είναι $n_i(0) = 0$ και $\dot{n}_i(0) = 0$, άρα η τελευταία περιορίζεται μόνο στο ολοκλήρωμα Duhamel:

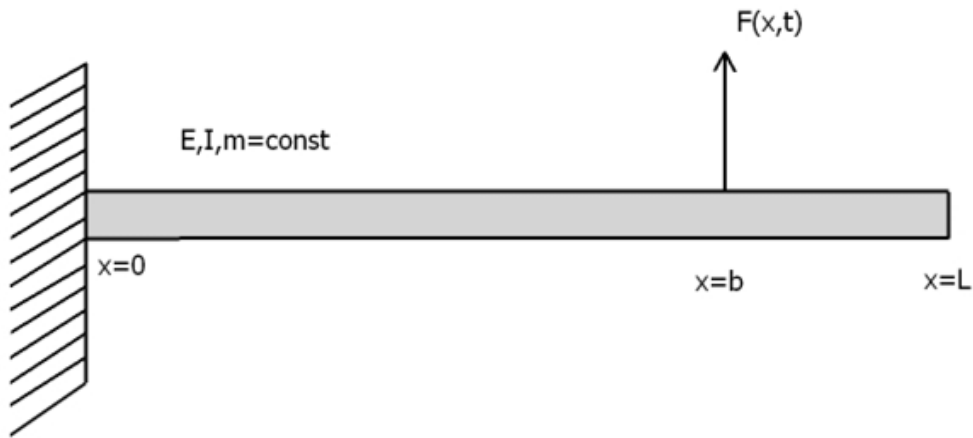
$$\begin{aligned} n_i(t) &= \frac{1}{\omega_i} \int_0^t N_i(\tau) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau = \\ &= \frac{1}{\omega_i} \int_0^t \left[\int_0^L F(x, \tau) \varphi_i(x) dx \right] \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau, \quad i = 1, 2, 3 \dots \end{aligned} \quad (3.12)$$

Επειδή υπάρχει πλήγμα στη θέση $x = b$, τα γενικευμένα φορτία (βλ. εδάφιο 6.1 του κεφαλαίου 1) γράφονται:

$$n_i(t) = \frac{\varphi_i(b)}{\omega_i} \int_0^t F(t) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau, \quad i = 1, 2, 3 \dots$$

Ανάλογα με το είδος του πλήγματος, τα παραπάνω παίρνουν μία από τις μορφές (1.80).

1.2. Πρόβολος



Σχήμα 34: Πρόβολος

Υποτίθεται πως το άκρο $x = 0$ της δοκού είναι πακτωμένο και πως το άκρο $x = L$ είναι ελεύθερο. Το πρόβλημα ιδιοτιμών περιλαμβάνει την εξίσωση (3.2), τις αρχικές συνθήκες (3.3) και τις παρακάτω οριακές συνθήκες:

$$\begin{cases} v(0, t) = 0 \\ \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 v(L, t)}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^3 v(L, t)}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

Υποτίθεται σύγχρονη κίνηση, δηλαδή λύση της μορφής

$$v(x, t) = \varphi(x)f(t) \quad (3.14)$$

Αντικατάσταση των οριακών συνθηκών (3.13) στην εξίσωση (3.14):

$$\begin{cases} \varphi(0, t) = 0 \\ \frac{\partial \varphi(0, t)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi(L, t)}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^3 \varphi(L, t)}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με το προηγούμενο εδάφιο, προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{\omega}}{c} & 0 & \frac{\sqrt{\omega}}{c} \\ -\cos\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) & -\sin\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) & \cosh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) & \sinh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) \\ \sin\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) & -\cos\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) & \sinh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) & \cosh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Το σύστημα (3.16), εφόσον $c_3 = -c_1$ και $c_4 = -c_2$, απλοποιείται στο εξής:

$$\begin{cases} c_1 \left(\cos\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) + \cosh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) \right) + c_2 \left(\sin\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) + \sinh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) \right) = 0 \\ c_1 \left(\sin\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) - \sinh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) \right) + c_2 \left(-\cos\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) - \cosh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) \right) = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Για να έχει το σύστημα (3.17) μη μηδενική λύση πρέπει η ορίζουσά του να μηδενίζεται, δηλαδή:

$$\begin{vmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) + \cosh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) & \sin\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) + \sinh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) \\ \sin\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) - \sinh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) & -\cos\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) - \cosh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) \end{vmatrix} = 0$$

Από την τελευταία προκύπτει η εξίσωση ιδιοσυχνοτήτων:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) \cosh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) &= -1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) &= -\frac{1}{\cosh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right)} \end{aligned} \quad (3.18)$$

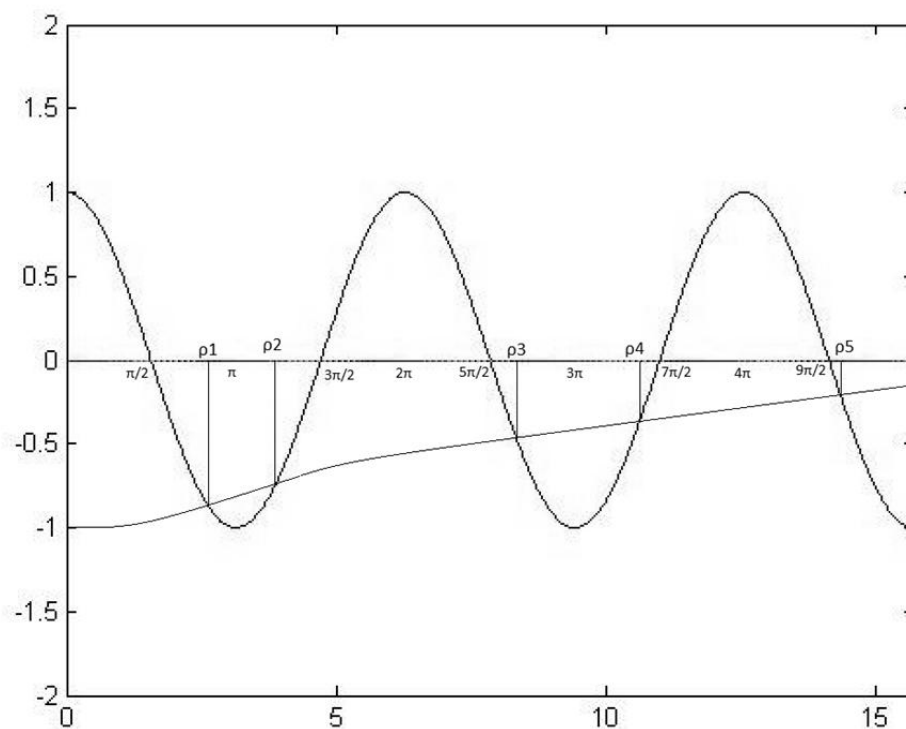
της οποίας οι ρίζες φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Προφανώς ισχύει:

$$\frac{\pi}{2} < \rho_1 = \frac{\sqrt{\omega_1}}{c} L < \pi$$

$$\pi < \rho_2 = \frac{\sqrt{\omega_2}}{c} L < \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} < \rho_3 = \frac{\sqrt{\omega_3}}{c} L < 3\pi$$

$$3\pi < \rho_4 = \frac{\sqrt{\omega_4}}{c} L < \frac{7\pi}{2}, \quad \text{κ. ο. κ.}$$



Σχήμα 35: Γραφική επίλυση της εξίσωσης ιδιοσυχνοτήτων (3.18) προβόλου

Οι ω_n , $n \in \mathbb{N}$ είναι οι ιδιοσυχνότητες της ελεύθερης ταλάντωσης. Σε καθεμιά από αυτές αντιστοιχεί μια ιδιομορφή $\varphi_n(x)$.

Από τη συνθήκη κανονικοποίησης προκύπτουν οι κανονικοποιημένοι συντελεστές c_{in} , $i = 1,2,3,4$, οι οποίοι όταν αντικατασταθούν στις συναρτήσεις $\varphi_n(x)$ προκύπτουν οι κανονικοποιημένες ιδιομορφές.

Το πρόβλημα των εγκάρσιων ταλαντώσεων προβόλου με σταθερές κατανομές υπό την επίδραση συγκεντρωμένου φορτίου (πλήγματος) στη θέση $x = b, 0 \leq b \leq L$, θα επιλυθεί με τη μέθοδο των κανονικών μορφών και περιλαμβάνει τη ΜΔΕ 4ης τάξης (3.1), τις αρχικές συνθήκες (3.3) και τις οριακές συνθήκες (3.13).

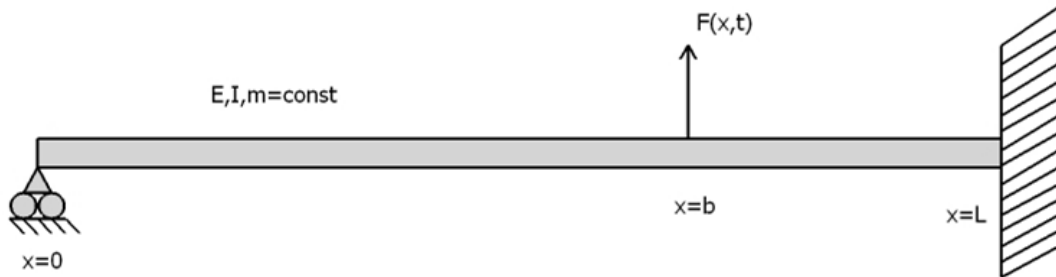
Όμοια με προηγουμένως, υποτίθεται λύση της μορφής (3.11)

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} n_i(t) \varphi_i(x)$$

και υπολογίζονται οι κανονικές συντεταγμένες $n_i(t)$:

$$n_i(t) = \frac{\varphi_i(b)}{\omega_i} \int_0^t F(\tau) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau, \quad i = 1,2,3 \dots$$

1.3. Μονόπακτη δοκός



Σχήμα 36: Μονόπακτη δοκός

Υποτίθεται ότι στο άκρο $x = 0$ υπάρχει η άρθρωση ή η κύλιση και στο άκρο $x = L$ η πάκτωση. Το πρόβλημα ιδιοτιμών περιλαμβάνει την εξίσωση (3.2), τις αρχικές συνθήκες (3.3) και τις παρακάτω οριακές συνθήκες:

$$\begin{cases} \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 v(0, t)}{\partial x^2} = 0 \\ v(L, t) = 0 \\ \frac{\partial v(L, t)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

Υποτίθεται σύγχρονη κίνηση, δηλαδή λύση της μορφής

$$v(x, t) = \varphi(x)f(t) \quad (3.20)$$

Αντικατάσταση των οριακών συνθηκών (3.18) στην εξίσωση (3.19):

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi(0, t)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi(0, t)}{\partial x^2} = 0 \\ \varphi(L, t) = 0 \\ \frac{\partial \varphi(L, t)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με το προηγούμενο εδάφιο, προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{\omega}}{c} & 0 & \frac{\sqrt{\omega}}{c} \\ 0 & -\frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{c^3} & 0 & \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{c^3} \\ \cos\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) & \sin\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) & \cosh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) & \sinh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) \\ \sin\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) & -\cos\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) & \sinh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) & \cosh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Το σύστημα (3.21), εφόσον $c_1 = c_3 = 0$, απλοποιείται στο εξής:

$$\begin{cases} c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) + c_4 \sinh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) = 0 \\ c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) + c_4 \cosh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) = 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

Για να έχει το σύστημα (3.22) μη μηδενική λύση πρέπει η ορίζουσά του να μηδενίζεται, δηλαδή:

$$\begin{vmatrix} \sin\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) & \sinh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) \\ \cos\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) & \cosh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) \end{vmatrix} = 0$$

Από την τελευταία προκύπτει η εξίσωση ιδιοσυχνοτήτων:

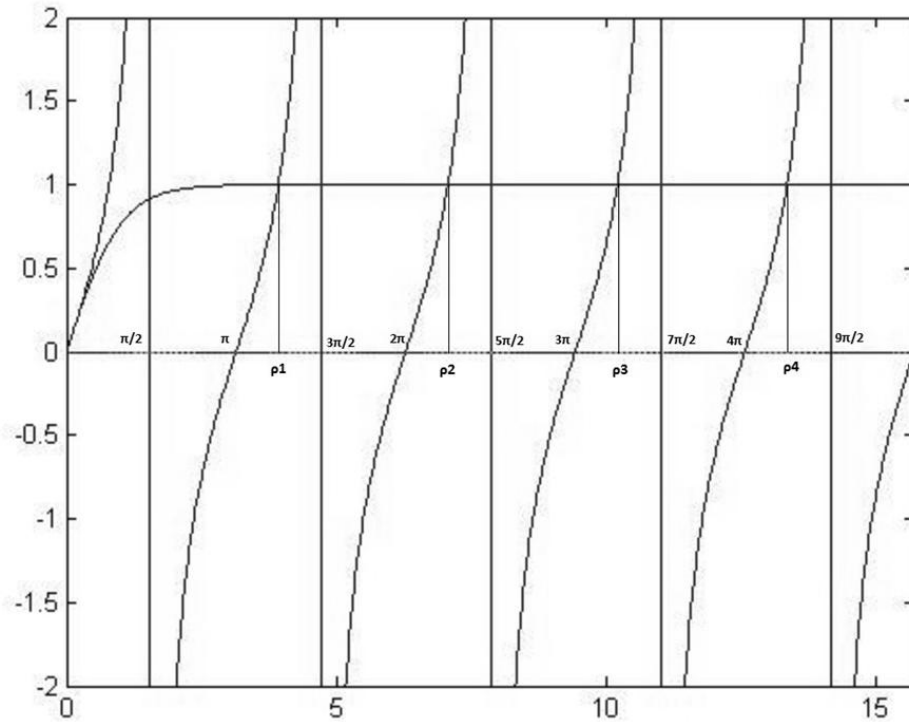
$$\tan\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) = \tanh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}L\right) \quad (3.24)$$

Οι λύσεις της τελευταίας φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Προφανώς είναι:

$$\pi < \rho_1 = \frac{\sqrt{\omega_1}}{c}L < \frac{3\pi}{2}$$

$$2\pi < \rho_2 = \frac{\sqrt{\omega_2}}{c}L < \frac{5\pi}{2}$$

$$3\pi < \rho_3 = \frac{\sqrt{\omega_3}}{c}L < \frac{7\pi}{2}, \quad \kappa. \sigma. \kappa.$$



Σχήμα 37: Γραφική επίλυση της εξίσωσης ιδιοσυχνοτήτων (3.24) μονόπακτης δοκού

Οι ω_n , $n \in \mathbb{N}$ είναι οι ιδιοσυχνότητες της ελεύθερης ταλάντωσης. Σε καθεμιά από αυτές αντιστοιχεί μια ιδιομορφή $\varphi_n(x)$:

$$\varphi_n(x) = c_{2n} \sin\left(\frac{\sqrt{\omega_n}}{c} x\right) + c_{4n} \sinh\left(\frac{\sqrt{\omega_n}}{c} x\right)$$

Επειδή όμως από την πρώτη εξίσωση του συστήματος (3.22) ισχύει

$$\frac{c_{4n}}{c_{2n}} = -\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{\omega_n}}{c} L\right)}{\sinh\left(\frac{\sqrt{\omega_n}}{c} L\right)}$$

τότε οι ιδιομορφές μπορούν να γραφούν:

$$\varphi_n(x) = c_{2n} \left[\sin\left(\frac{\sqrt{\omega_n}}{c} x\right) - \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{\omega_n}}{c} L\right)}{\sinh\left(\frac{\sqrt{\omega_n}}{c} L\right)} \sinh\left(\frac{\sqrt{\omega_n}}{c} x\right) \right]$$

Από τη συνθήκη κανονικοποίησης προκύπτουν οι κανονικοποιημένοι συντελεστές c_{2n} , οι οποίοι όταν αντικατασταθούν στις συναρτήσεις $\varphi_n(x)$ προκύπτουν οι *κανονικοποιημένες ιδιομορφές*.

Το **πρόβλημα των εγκάρσιων ταλαντώσεων μόνοπακτης δοκού** με σταθερές κατανομές υπό την επίδραση συγκεντρωμένου φορτίου (πλήγματος) στη θέση $x = b, 0 \leq b \leq L$, θα επιλυθεί με τη *μέθοδο των κανονικών μορφών* και περιλαμβάνει τη ΜΔΕ 4^{ης} τάξης (3.1), τις αρχικές συνθήκες (3.3) και τις οριακές συνθήκες (3.18).

Όμοια με προηγουμένως, υποτίθεται λύση της μορφής (3.11)

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} n_i(t) \varphi_i(x)$$

και υπολογίζονται οι κανονικές συντεταγμένες $n_i(t)$:

$$n_i(t) = \frac{\varphi_i(b)}{\omega_i} \int_0^t F(\tau) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau, \quad i = 1, 2, 3 \dots$$

2. Αδιαστατοποίηση των διαφόρων μεγεθών και των εξισώσεων για το πρόβλημα των εγκαρσίων ταλαντώσεων δοκού

Τα βασικά μεγέθη για την αδιαστατοποίηση είναι: το μήκος L [m], η δύναμη $\frac{EI}{L^2}$ [N] (όπου E $\left[\frac{N}{m^2}\right]$ το μέτρο ελαστικότητας και I [m⁴] η ροπή αδράνειας) και ο χρόνος $\sqrt{\frac{L}{g}}$ [s].

Αδιαστατοποίηση όλων των μεγεθών και εξισώσεων:

- Μάζα

$$\frac{EI}{L^2 g} \left[\frac{N s^2}{m} \right] = [kg]$$

- Εξωτερικό καταναμημένο φορτίο

$$\bar{F}(x, t) = F(x, t) \frac{L^3}{EI} \left[\frac{N}{m} \right]$$

- Τετμημένη

$$\xi = \frac{x}{L}$$

- Χρόνος

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{\left(\frac{L}{g}\right)}} = t \sqrt{\frac{g}{L}}$$

- Καταναμημένη μάζα

$$\bar{m} = m \frac{L}{\frac{EI}{L^2 g}} = m \frac{L^3 g}{EI}$$

- Συχνότητα

$$w = \omega \sqrt{\frac{L}{g}}$$

- Ταχύτητα μετάδοσης του κύματος στη δοκό:

$$c^4 = \frac{EI}{m} = \frac{EIL^3 g}{\bar{m}EI} = \frac{1}{\bar{m}} L^3 g = \bar{c}^4 L^3 g$$

άρα

$$\bar{c} = \sqrt[4]{\frac{1}{\bar{m}}}$$

- Το μέγεθος

$$\frac{\sqrt{\omega}}{c} = \frac{\sqrt{w}}{\bar{c}} \sqrt[4]{\frac{g}{L}} = \frac{\sqrt{w}}{\bar{c}L}$$

- Όρισμα

$$\frac{\sqrt{\omega}}{c} x = \frac{\sqrt{w}}{\bar{c}L} \xi L = \frac{\sqrt{w}}{\bar{c}} \xi$$

- Μετατόπιση

$$\bar{v}(\xi, \tau) = \frac{v(x, t)}{L}$$

- Η μερική διαφορική εξίσωση

$$-EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + F(x, t) = m \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} \left[\frac{N}{m} \right]$$

αδιαστατοποιείται αν αντικατασταθούν όλα τα μεγέθη με τα αντίστοιχα αδιάστατα:

$$\begin{aligned} -EI \frac{\partial^4 (\bar{v}(\xi, \tau)L)}{\partial (\xi L)^4} + \bar{F}(x, t) \frac{EI}{L^3} &= \bar{m} \frac{EI}{L^3 g} \frac{\partial^2 (\bar{v}(\xi, \tau)L)}{\partial \left(\tau \sqrt{\frac{L}{g}} \right)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{EIL}{L^4} \frac{\partial^4 \bar{v}}{\partial \xi^4} + \frac{EI}{L^3} \bar{F}(x, t) &= \frac{EI}{L^3 g} \frac{Lg}{L} \bar{m} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \tau^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{\partial^4 \bar{v}}{\partial \xi^4} + \bar{F}(x, t) &= \bar{m} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \tau^2} \end{aligned}$$

- Κανονικοποιημένη ιδιομορφή:

$$\bar{\varphi}_i(\xi) = \varphi_i(x) \sqrt{\frac{EI}{L^2} \frac{\sqrt{L}}{g}} = \varphi_i(x) \sqrt{\frac{EI}{gL^2}}$$

Παρομοίως,

$$c_{1i} = \bar{c}_{1i} \sqrt{\frac{gL^2}{EI}}, \quad c_{2i} = \bar{c}_{2i} \sqrt{\frac{gL^2}{EI}}, \quad c_{3i} = \bar{c}_{3i} \sqrt{\frac{gL^2}{EI}}, \quad c_{4i} = \bar{c}_{4i} \sqrt{\frac{gL^2}{EI}}$$

- Γενικευμένο φορτίο:

$$N_i(t) = \bar{N}_i(\tau) \sqrt{\frac{EIL}{L/g}} = \bar{N}_i(\tau) \sqrt{EIg}$$

- Κανονικές συντεταγμένες:

$$\bar{n}_i(\tau) = n_i(t) \frac{1}{\sqrt{\frac{EI}{L^2} L \frac{L}{g}}} = n_i(t) \sqrt{\frac{g}{EI}}$$

- Η αδιαστατοποίηση των ασύζευκτων διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{d^2 n_i(t)}{dt^2} + \omega_i^2 n_i(t) = N_i(t)$$

γίνεται αν αντικατασταθούν όλα τα μεγέθη με τα αντίστοιχα αδιάστατα:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d^2 \left(\bar{n}_i(\tau) \sqrt{\frac{EI}{L^2} L^2} \right)}{d \left(\tau \sqrt{\frac{L}{g}} \right)^2} + \left(w_i \sqrt{\frac{g}{L}} \right)^2 \bar{n}_i(\tau) \sqrt{\frac{EI}{L^2} L^2} &= \bar{N}_i(\tau) \sqrt{\frac{EI}{L^2} g} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d^2 \bar{n}_i(\tau)}{d\tau^2} \sqrt{\frac{EI}{L^2} g} + w_i^2 \bar{n}_i(\tau) \sqrt{\frac{EI}{L^2} g} &= \bar{N}_i(\tau) \sqrt{\frac{EI}{L^2} g} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d^2 \bar{n}_i(\tau)}{d\tau^2} + w_i^2 \bar{n}_i(\tau) &= \bar{N}_i(\tau) \end{aligned}$$

- Αδιαστατοποίηση της

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} n_i(t) \varphi_i(x)$$

είναι:

$$\begin{aligned} \bar{v}(\xi, \tau) L &= \sum_{i=1}^{\infty} \bar{n}_i(\tau) \sqrt{\frac{TL^2}{g}} \bar{\varphi}_i(\xi) \sqrt{\frac{g}{T}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{v}(\xi, \tau) &= \sum_{i=1}^{\infty} \bar{n}_i(\tau) \bar{\varphi}_i(\xi) \end{aligned}$$

3. Παραμετρική μελέτη δοκού

Η παραμετρική μελέτη του προβλήματος των εγκάρσιων ταλαντώσεων δοκού υπό την επίδραση πλήγματος γίνεται παρόμοια με την παραμετρική μελέτη της χορδής. Επισημαίνεται ότι η παραμετρική μελέτη γίνεται ως προς τα αδιάστατα μεγέθη.

3.1. Επίδραση του αριθμού των ιδιολύσεων που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της απόκρισης στην απόκριση και στο φάσμα της απόκρισης δοκού

Όμοια με τη χορδή, η προσέγγιση της ακριβούς λύσης είναι:

$$\bar{v}(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^n \bar{n}_i(\tau) \bar{\varphi}_i(\xi)$$

Η προσέγγιση που παρέχει σχετικά ακριβή αποτελέσματα για τα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι αυτή των 10 ιδιολύσεων.

3.2. Επίδραση της μέγιστης τιμής της έντασης \bar{F}_0 του πλήγματος στην απόκριση και στο φάσμα απόκρισης της δοκού

Η τελική λύση του προβλήματος των εγκάρσιων ταλαντώσεων δοκού, όπως ακριβώς και στη περίπτωση της ταλαντούμενης χορδής, είναι:

$$\bar{v}(\xi, \tau) = \bar{F}_0 \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\bar{\varphi}_i(b)}{w_i} \int_0^{\tau} \bar{f}(\tau) \sin[w_i(t - \tau)] d\tau \right] \bar{\varphi}_i(\xi)$$

Από την τελευταία σχέση είναι εμφανής η γραμμική εξάρτηση της απόκρισης από την τιμή της \bar{F}_0 . Επομένως, και εδώ τα διαγράμματα της απόκρισης και τα φάσματα έχουν ακριβώς το ίδιο σχήμα και για αυτό δεν παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον η μελέτη τους. Στο εξής, θα χρησιμοποιείται η τιμή $\bar{F}_0 = 1$.

3.3. Επίδραση του είδους του πλήγματος στο φάσμα απόκρισης και στην απόκριση της δοκού

3.3.1. Απόκριση

Η παραμετρική μελέτη αφορά την αμφιέρειστη δοκό, τον πρόβολο και τη μονόπακτη δοκό. Οι τιμές των υπόλοιπων παραμέτρων εδώ είναι:

- Θέση πλήγματος: $\xi = 0,7$.
- Μέγιστη τιμή της δύναμης του πλήγματος: $\bar{F}_0 = 1$.
- Διάρκεια πλήγματος ίση με $1,5\bar{T}_1$, όπου \bar{T}_1 η ιδιοπερίοδος του συστήματος.
- Διάρκεια μελέτης της ελεύθερης ταλάντωσης της χορδής μετά το πέρας του πλήγματος $4\bar{T}_1$, όπου \bar{T}_1 η ιδιοπερίοδος του συστήματος.
- Κατανεμημένη μάζα του συστήματος: $\bar{m} = 0,05$.

Επισυνάπτονται τα σχετικά βίντεο:

| Όνομα αρχείου | Είδος πλήγματος | Οριακές συνθήκες |
|---------------|----------------------|-------------------|
| Βίντεο 26 | Ορθογωνικό | Αμφιέρειστη δοκός |
| Βίντεο 27 | Μισό ημίτονο | Αμφιέρειστη δοκός |
| Βίντεο 28 | Αυξανόμενο τριγωνικό | Αμφιέρειστη δοκός |
| Βίντεο 29 | Μειούμενο τριγωνικό | Αμφιέρειστη δοκός |
| Βίντεο 30 | Ισοσκελές τριγωνικό | Αμφιέρειστη δοκός |
| Βίντεο 31 | Ορθογωνικό | Πρόβολος |
| Βίντεο 32 | Μισό ημίτονο | Πρόβολος |
| Βίντεο 33 | Αυξανόμενο τριγωνικό | Πρόβολος |
| Βίντεο 34 | Μειούμενο τριγωνικό | Πρόβολος |
| Βίντεο 35 | Ισοσκελές τριγωνικό | Πρόβολος |
| Βίντεο 36 | Ορθογωνικό | Μονόπακτη δοκός |
| Βίντεο 37 | Μισό ημίτονο | Μονόπακτη δοκός |
| Βίντεο 38 | Αυξανόμενο τριγωνικό | Μονόπακτη δοκός |
| Βίντεο 39 | Μειούμενο τριγωνικό | Μονόπακτη δοκός |
| Βίντεο 40 | Ισοσκελές τριγωνικό | Μονόπακτη δοκός |

Σχολιασμός των βίντεο απόκρισης δοκού για πλήγματα διαφόρων μορφών:

- Σε όλα τα βίντεο είναι εμφανείς οι εκάστοτε οριακές συνθήκες στα άκρα της δοκού.

Αμφιέρειστη δοκός: $v(0, \tau) = 0, \frac{\partial^2 v(0, \tau)}{\partial \xi^2} = 0, v(1, \tau) = 0, \frac{\partial^2 v(1, \tau)}{\partial \xi^2} = 0.$

Πρόβολος: $v(0, \tau) = 0, \frac{\partial v(0, \tau)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial^2 v(1, \tau)}{\partial \xi^2} = 0, \frac{\partial^3 v(1, \tau)}{\partial \xi^3} = 0.$

Μονόπακτη δοκός: $\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \frac{\partial^2 v(0, \tau)}{\partial \xi^2} = 0, v(1, \tau) = 0, \frac{\partial^2 v(1, \tau)}{\partial \xi^2} = 0.$

- Όταν στη δοκό ασκείται πλήγμα μισού ημιτόνου, σε αυτήν διεγείρονται περισσότερο κάποιες από τις ιδιομορφές της ελεύθερης ταλάντωσης. Το αποτέλεσμα αυτό είναι εμφανές για όλες τις εξεταζόμενες περιπτώσεις οριακών συνθηκών. Συγκεκριμένα, στην αμφιέρειστη δοκό (βίντεο 27) διεγείρεται περισσότερο η δεύτερη ιδιομορφή $\bar{\varphi}_2(\xi)$, ενώ στον πρόβολο και στη μονόπακτη δοκό (βίντεο 32 και 37) διεγείρεται περισσότερο η ένατη ιδιομορφή $\bar{\varphi}_9(\xi)$. Τούτο ερμηνεύεται από τη τελική λύση του προβλήματος και τη μορφή του ολοκληρώματος Duhamel για την περίπτωση του ημιτονοειδούς πλήγματος:

$$\bar{v}(\xi, \tau) = \bar{F}_0 \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\bar{\varphi}_i(b)}{w_i} \int_0^{\tau} \sin\left(\pi \frac{t}{t_1}\right) \sin[w_i(t - \tau)] dt \right] \bar{\varphi}_i(\xi)$$

Το γινόμενο των δύο ημιτόνων στο ολοκλήρωμα Duhamel είναι αυτό που κάνει τις εν λόγω ιδιομορφές να υπερισχύουν των υπολοίπων στις παραπάνω περιπτώσεις. Αξίζει επίσης να σημειωθεί πως όταν το πλήγμα ασκείται σε σημείο της δοκού όπου υπάρχει κόμβος της ιδιομορφής, τότε η συγκεκριμένη ιδιομορφή δεν διεγείρεται καθόλου. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, το πλήγμα ασκείται στη θέση $\xi = 0,7$, όπου υπάρχει κόμβος της δέκατης ιδιομορφής, οπότε η $\bar{\varphi}_{10}(x)$ δεν εμφανίζεται καθόλου, καθώς ο συντελεστής $\bar{\varphi}_i(b) = \bar{\varphi}_{10}(0.7)$ μηδενίζεται.

- Στις περιπτώσεις του αυξανόμενου και του ισοσκελούς τριγωνικού πλήγματος (βίντεο 28, 30, 33, 35, 38 και 40), είναι εμφανής η αύξηση της απόκρισης της δοκού καθώς η τιμή της εφαρμοζόμενης δύναμης αυξάνεται. Αντίθετα, στο ημιτονοειδές πλήγμα, η απόκριση δεν παρουσιάζει την παραπάνω εικόνα, καθώς στο συγκεκριμένο πλήγμα η τιμή της δύναμης αυξάνεται πιο απότομα, με αποτέλεσμα να μοιάζει περισσότερο με το αντίστοιχο του ορθογωνικού πλήγματος, παρά με του ισοσκελούς τριγωνικού.
- Η πρώτη ιδιομορφή κυριαρχεί στην αμφιέρειστη δοκό όταν σε αυτήν ασκείται ορθογωνικό και ισοσκελές τριγωνικό πλήγμα.
- Το πλάτος ταλάντωσης είναι εμφανώς μεγαλύτερο όταν το εφαρμοζόμενο πλήγμα έχει εξαρχής της μέγιστη τιμή του. Για παράδειγμα, η ταλάντωση πρόβολου υπό ορθογωνικό ή μειούμενο

τριγωνικό πλήγμα έχει πλάτος $\bar{v} \cong 0.4$, ενώ όταν σε αυτόν εφαρμοστούν τα υπόλοιπα πλήγματα, το πλάτος ταλάντωσής του είναι $\bar{v} < 0.3$. Κάτι ανάλογο ισχύει και για τις άλλες περιπτώσεις οριακών συνθηκών.

- Σε όλα τα βίντεο παρατηρείται η εξής εικόνα: η δοκός ταλαντώνεται στα θετικά, επιστρέφει στη θέση ισορροπίας, ταλαντώνεται εκ νέου στα θετικά και μετά αρχίζει η «αναμενόμενη» ελεύθερη ταλάντωσή της, δηλαδή από τα θετικά στα αρνητικά και το αντίστροφο. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η διάρκεια του πλήγματος είναι $\tau = 1.5\bar{T}_1$. Για αναλυτικό σχολιασμό του φαινομένου βλ. εδάφιο 3.6.1 του παρόντος κεφαλαίου.

3.3.2. Φάσματα απόκρισης

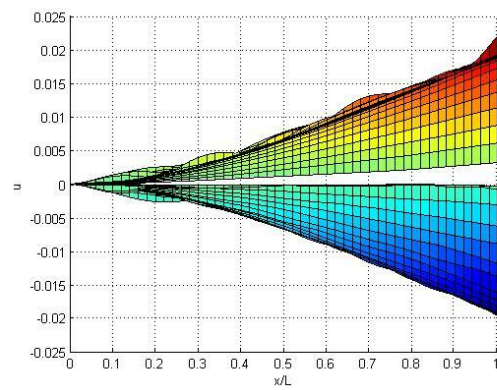
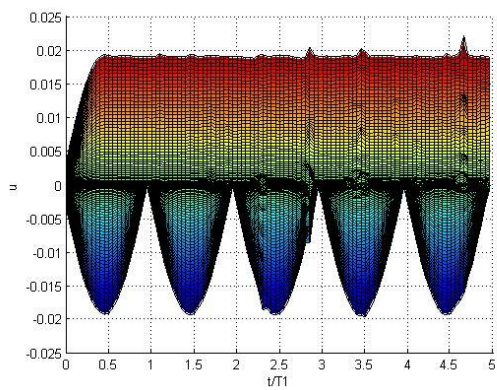
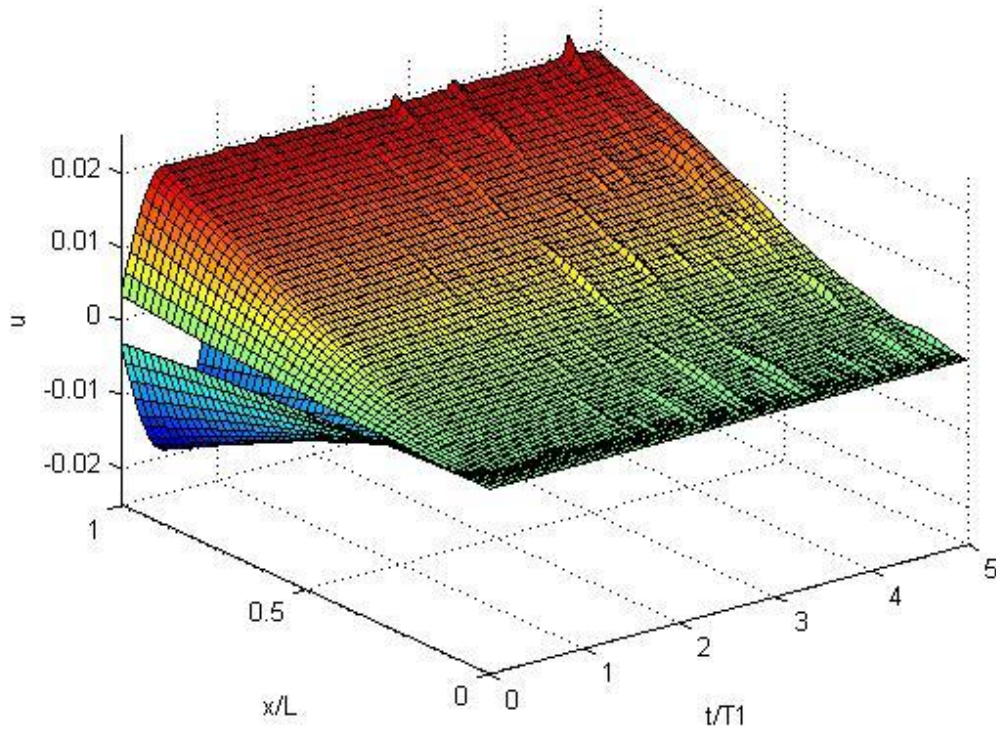
Η παραμετρική μελέτη γίνεται χωριστά για κάθε περίπτωση οριακών συνθηκών. Οι τιμές των υπόλοιπων παραμέτρων εδώ είναι:

- Θέση πλήγματος: $\xi = 0,7$.
- Μέγιστη τιμή της δύναμης του πλήγματος: $\bar{F}_0 = 1$.
- Διάρκεια πλήγματος ίση με πέντε ιδιοπεριόδους του συστήματος, δηλαδή $5\bar{T}_1 = 5 \frac{2\pi}{w_1}$.
- Κατανεμημένη μάζα του συστήματος: $\bar{m} = 0,05$.

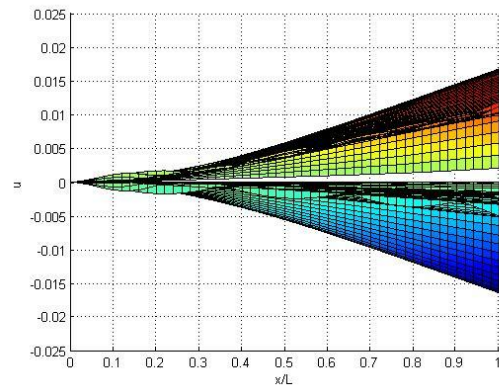
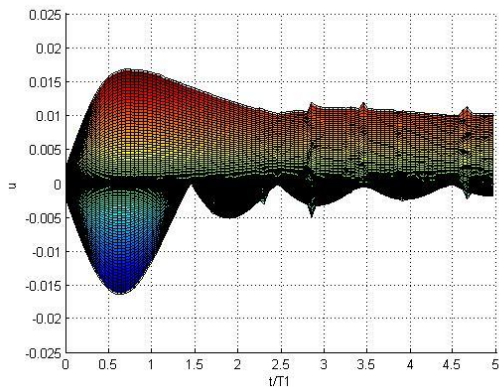
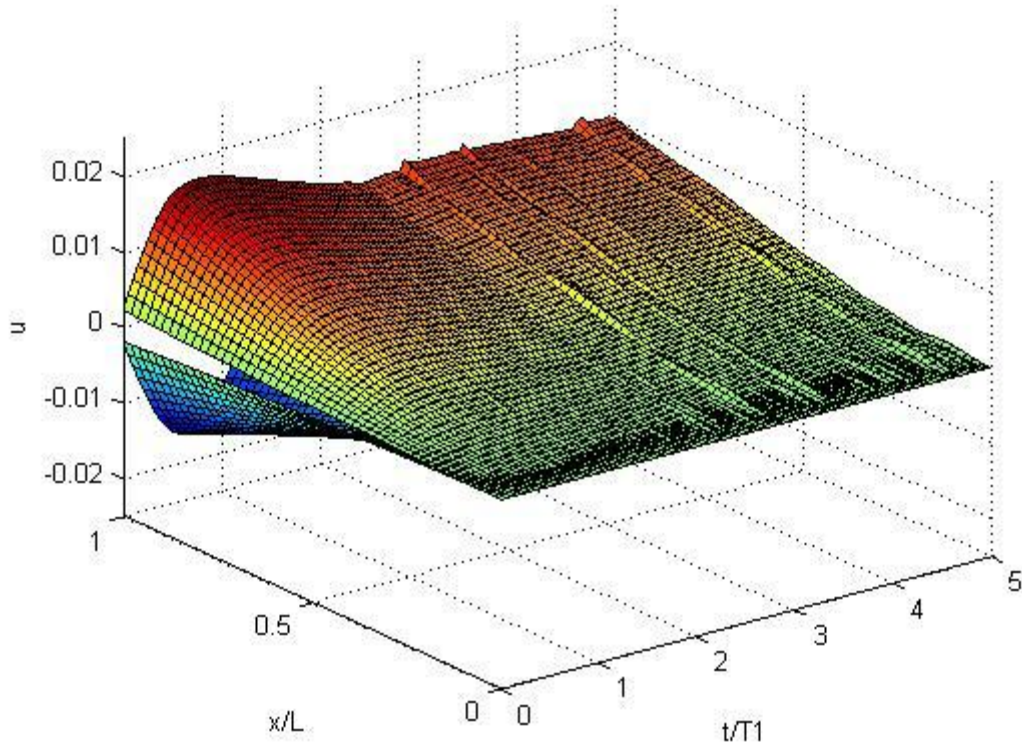
Ακολουθούν τα φάσματα. Κάθε φάσμα παρουσιάζεται από τρεις οπτικές γωνίες. Στην πρώτη είναι εμφανείς και οι τρεις άξονες, στη δεύτερη παρουσιάζεται μόνο το επίπεδο $v(\xi, \tau) - \tau$ και στην τρίτη μόνο το επίπεδο $v(\xi, \tau) - \xi$.

3.3.2.1. Πρόβολος

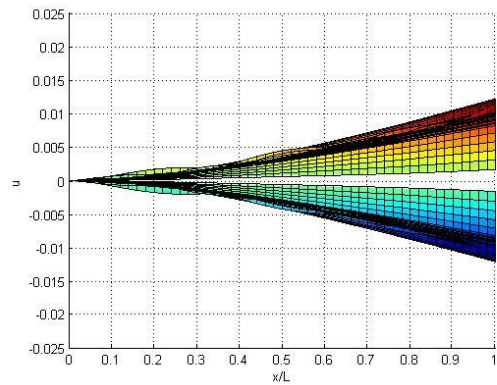
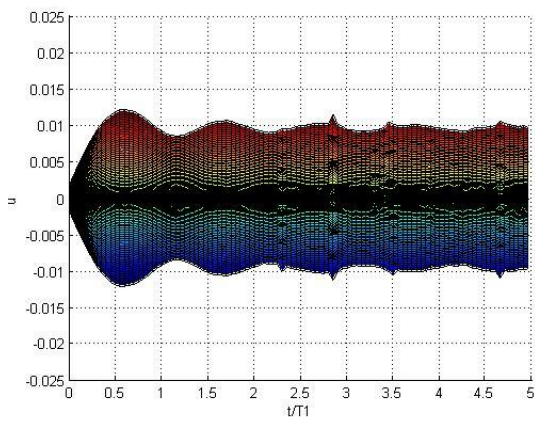
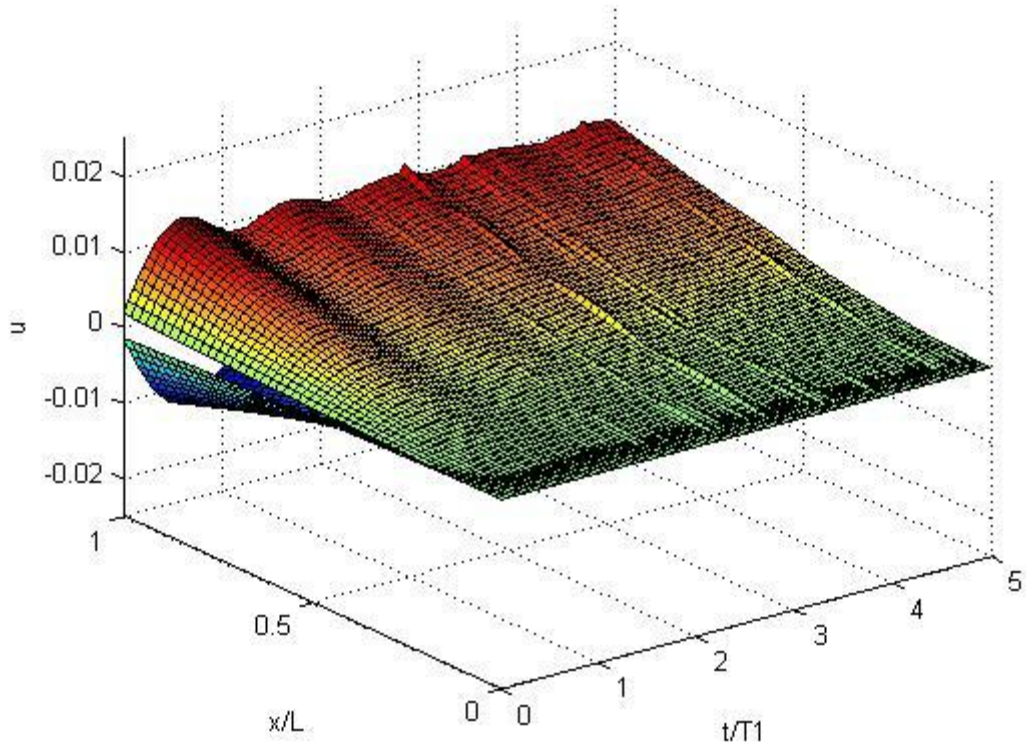
Φάσμα 29: Ορθογωνικό πλήγμα σε πρόβολο



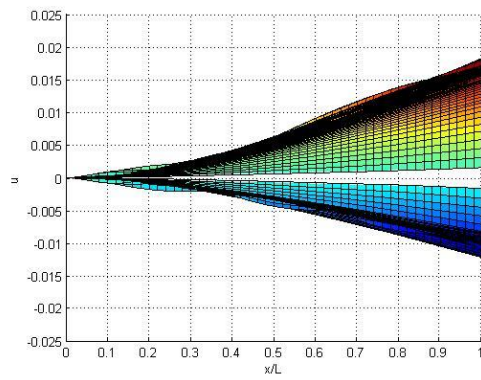
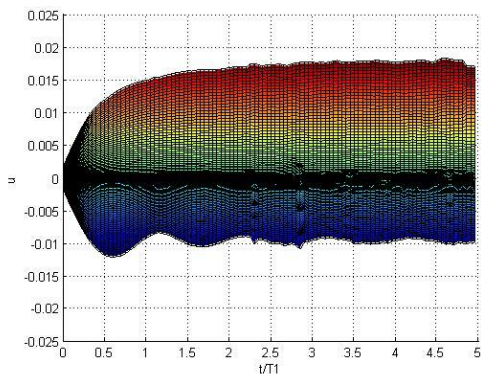
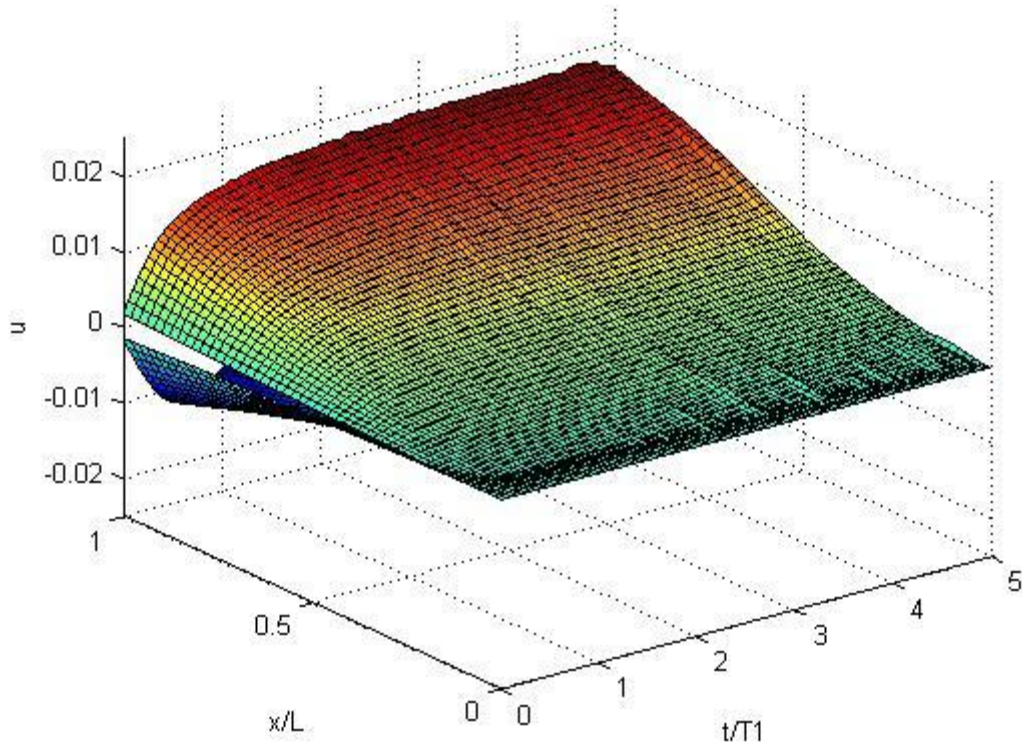
Φάσμα 30: Πλήγμα μισό ημίτονο σε πρόβολο



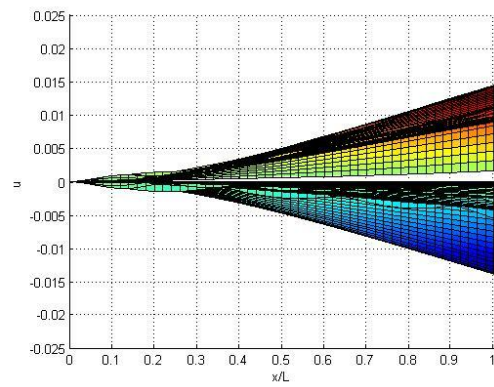
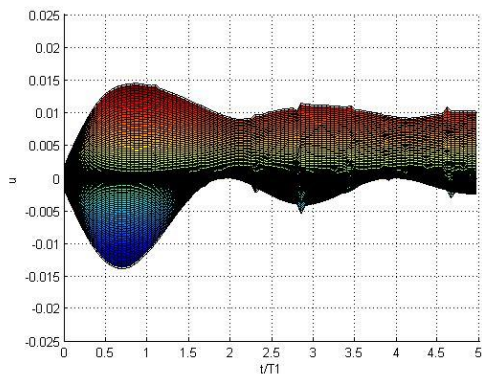
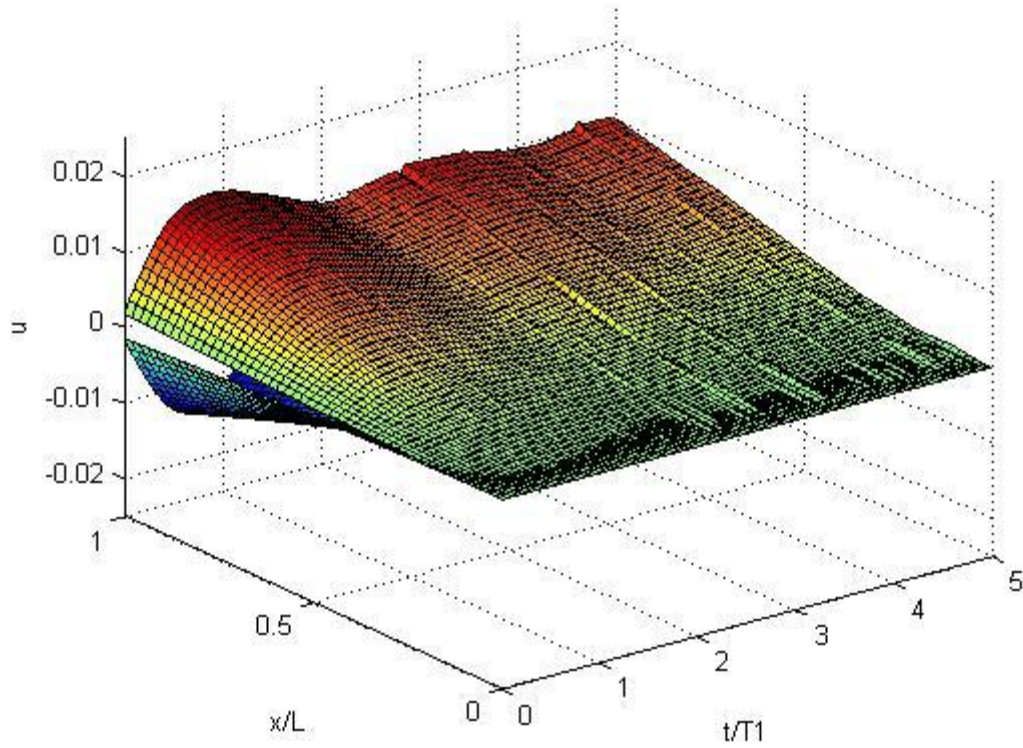
Φάσμα 31: Αυξανόμενο τριγωνικό πλήγμα σε πρόβολο



Φάσμα 32: Μειούμενο τριγωνικό πλήγμα σε πρόβολο



Φάσμα 33: Ισοσκελές τριγωνικό πλήγμα σε πρόβολο



Σχολιασμός των φασμάτων απόκρισης προβόλου για πλήγματα διαφόρων μορφών:

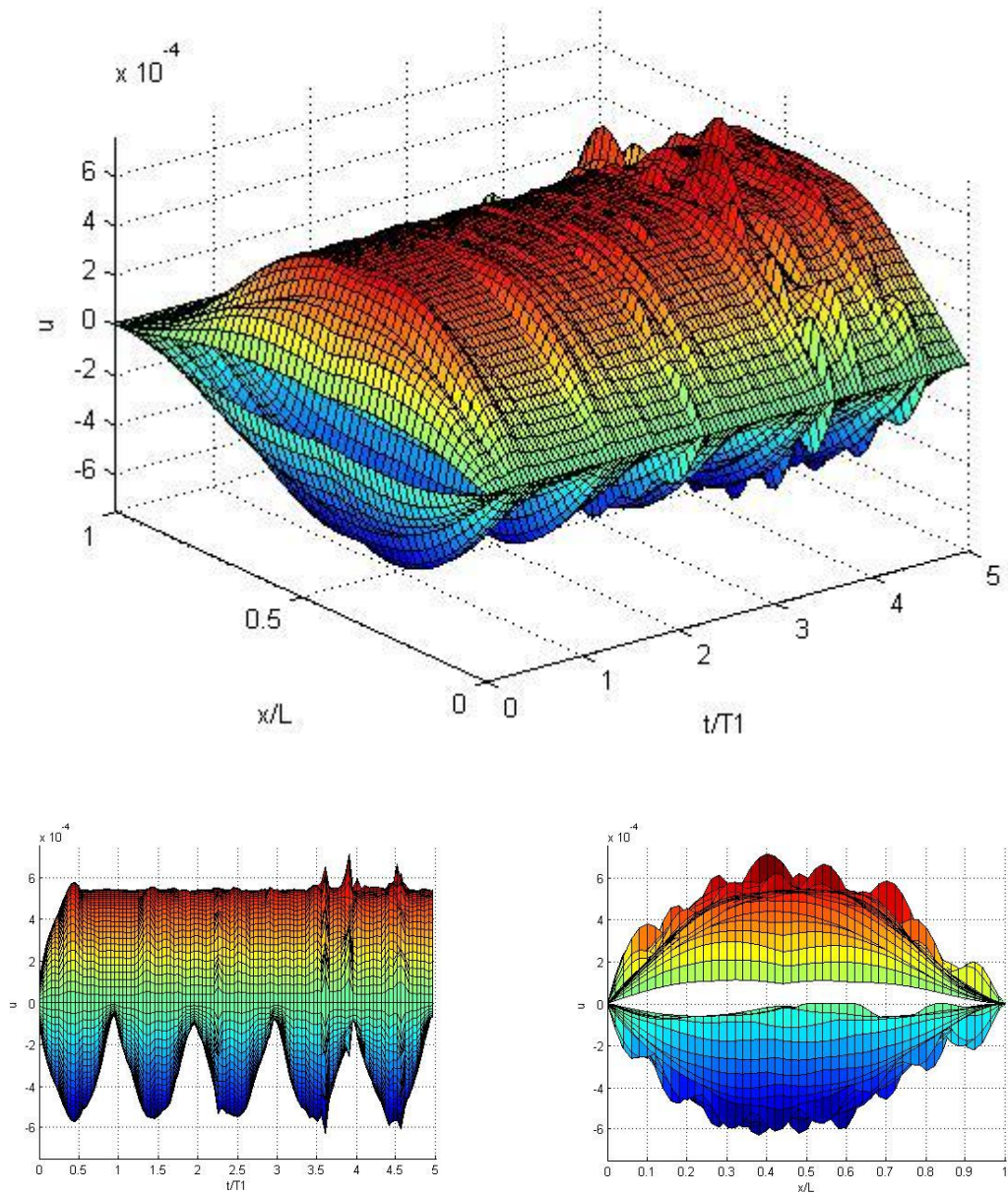
- Το σχήμα των φασμάτων προβόλου στο επίπεδο $v(\xi, \tau) - \tau$ είναι όμοιο με αυτό των φασμάτων της χορδής για κάθε είδος πλήγματος και κατ' επέκταση με τα αντίστοιχα φάσματα δύο διαστάσεων ταλαντωτών με πολλούς βαθμούς ελευθερίας.¹¹
- Μέγιστη απόκριση στα θετικά και στα αρνητικά αποκτά το σημείο με $\xi = 1$ του προβόλου, δηλαδή το ελεύθερο άκρο. Για την παραμετρική μελέτη της θέσης του πλήγματος για πρόβολο όταν σε αυτόν εφαρμόζεται ορθογωνικό πλήγμα, υπάρχουν αναλυτικά σχόλια στο εδάφιο 3.5.2.2 του παρόντος κεφαλαίου.
- Σε όλα τα φάσματα είναι εμφανείς οι οριακές συνθήκες στα άκρα του προβόλου: $v(0, \tau) = 0, \frac{\partial v(0, \tau)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial^2 v(1, \tau)}{\partial \xi^2} = 0, \frac{\partial^3 v(1, \tau)}{\partial \xi^3} = 0$.
- Στο ορθογωνικό πλήγμα (φάσμα 29), όταν η διάρκεια του πλήγματος είναι $\tau \geq 0,3\bar{T}_1$, τότε η μέγιστη θετική απόκριση είναι σταθερή, $\bar{v} = 0,019$. Αντίθετα, στα φάσματα 30, 31 και 33 (πλήγματα μισού ημιτόνου, αυξανόμενο τριγωνικό και ισοσκελές τριγωνικό) παρατηρείται μια περιοδικότητα στο σχήμα τους. Πιο συγκεκριμένα, στο πλήγμα μισού ημιτόνου η τιμή του φάσματος έχει μέγιστο για $\tau = 0,7$ και μετά έχει ημιτονοειδή μορφή με περίοδο $2\bar{T}_1$. Στο αυξανόμενο τριγωνικό πλήγμα, η τιμή του φάσματος είναι μέγιστη για $\tau = 0,6$ και στη συνέχεια ο θετικός κλάδος εμφανίζει επαναληψιμότητα με περίοδο ίση με της πρώτη ιδιοπερίοδο του συστήματος \bar{T}_1 . Τέλος, στο ισοσκελές τριγωνικό πλήγμα η τιμή του φάσματος έχει μέγιστο για $\tau = 0,8$ και μετά έχει ημιτονοειδή μορφή με περίοδο $2\bar{T}_1$.
- Εκτός από το μειούμενο τριγωνικό πλήγμα όπου υπάρχει μια μικρή απόκλιση της τάξης του $\Delta v \cong 0,06$, σε όλα τα υπόλοιπα φάσματα η μέγιστη θετική απόκριση είναι όση περίπου και η μέγιστη αρνητική.
- Στα πλήγματα στα οποία η μέγιστη δύναμη εφαρμόζεται εξ αρχής (ορθογωνικό και μειούμενο τριγωνικό πλήγμα), η μέγιστη απόκριση στα θετικά φτάνει μέχρι την τιμή $\bar{v} = 0,018$. Στις περιπτώσεις του αυξανόμενου και του ισοσκελούς τριγωνικού πλήγματος, επειδή η δύναμη αυξάνεται γραμμικά σε σχέση με το χρόνο, η μέγιστη απόκριση είναι σαφώς μικρότερη ($\bar{v} \cong 0,0125$).
- Οι δύο επιφάνειες των φασμάτων του ημιτονοειδούς και του ισοσκελούς τριγωνικού φάσματος μοιάζουν αρκετά, άρα συμπεραίνεται ότι το ημιτονοειδές τριγωνικό πλήγμα προσιδιάζει περισσότερο στο ισοσκελές τριγωνικό πλήγμα και όχι στο ορθογωνικό.

¹¹ Για περισσότερες πληροφορίες για τα φάσματα απόκρισης συστημάτων με πεπερασμένο αριθμό βαθμών ελευθερίας βλ. [6]

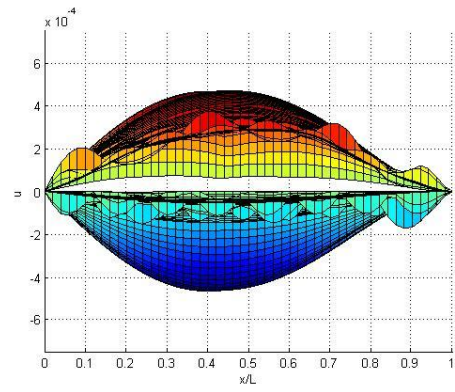
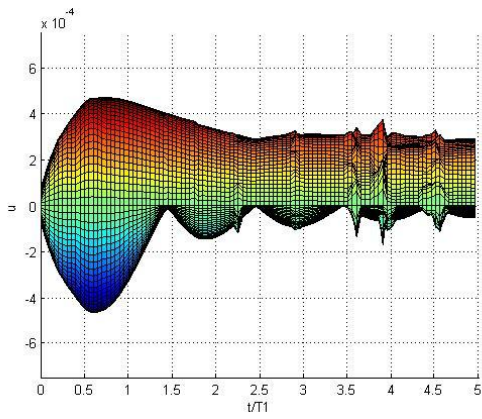
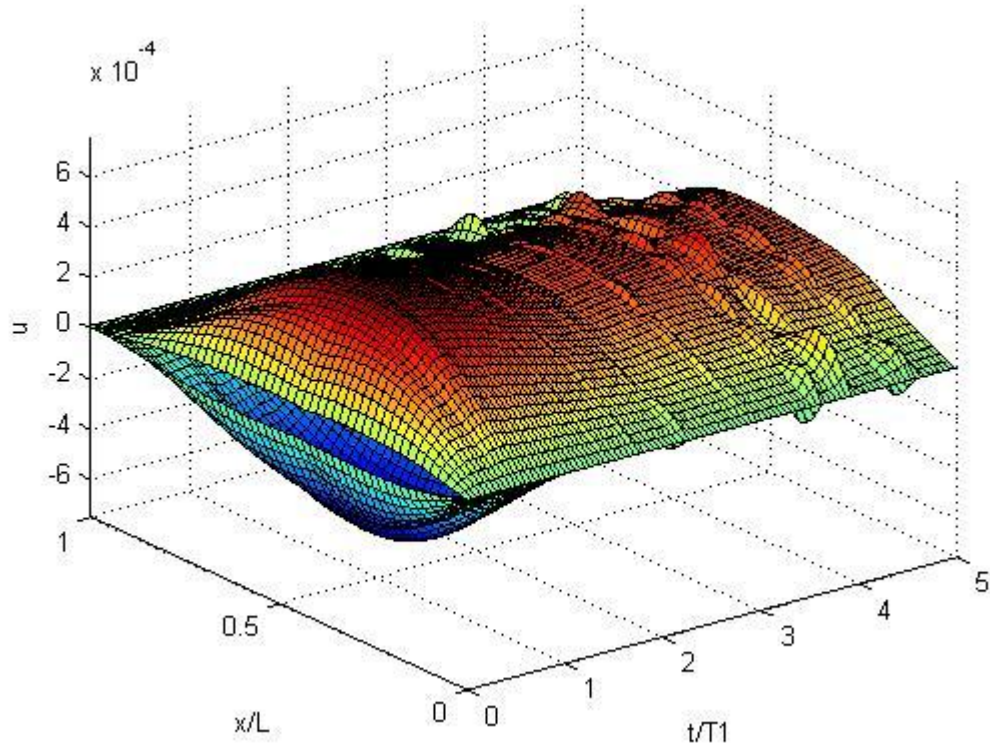
- Σε όλα τα πλήγματα ο αρνητικός κλάδος του φάσματος είναι περιοδικός με ημιτονοειδή μορφή. Στο μεν ορθογωνικό ο πρόβολος ταλαντώνεται με σταθερό μέγιστο πλάτος στα αρνητικά και το φάσμα εμφανίζει μια περιοδικότητα με περίοδο ίση με την πρώτη ιδιοπερίοδο του συστήματος \bar{T}_1 . Παρόμοια, για αυξανόμενο και μειούμενο τριγωνικό πλήγμα, ο πρόβολος ταλαντώνεται με σχεδόν σταθερό μέγιστο πλάτος στα αρνητικά και με περίοδο περίπου \bar{T}_1 . Για ημιτονοειδές και ισοσκελές τριγωνικό πλήγμα, παρατηρείται σταδιακή μείωση του πλάτους στα αρνητικά. Ειδικότερα, για το πλήγμα μισού ημιτόνου παρατηρείται πως ο πρόβολος αποκτά το μέγιστο πλάτος στα αρνητικά $\bar{v} \cong -0,018$ σε χρόνο $\tau \cong 0,6\bar{T}_1$ και στη συνέχεια το πλάτος στα αρνητικά μειώνεται με περίοδο περίπου ίση με την πρώτη ιδιοπερίοδο του συστήματος \bar{T}_1 . Ο αρνητικός κλάδος του φάσματος για το ισοσκελές τριγωνικό πλήγμα παρουσιάζει αντίστοιχη εικόνα με το ημιτονοειδές πλήγμα: ο πρόβολος αποκτά το μέγιστο πλάτος στα αρνητικά $\bar{v} \cong -0,014$ σε χρόνο $\tau \cong 0,6\bar{T}_1$ και στη συνέχεια το πλάτος στα αρνητικά μειώνεται με περίοδο περίπου ίση με το διπλάσιο της πρώτης ιδιοπεριόδου του συστήματος $2\bar{T}_1$.
- Όπως στα βίντεο της απόκρισης, έτσι και στα φάσματα, για ορισμένες διάρκειες πλήγματος διεγείρονται περισσότερο κάποιες από τις ιδιομορφές της ελεύθερης ταλάντωσης. Για παράδειγμα, στα φάσματα 29, 30, 31 και 33 για διάρκεια πλήγματος $\tau \cong 2,8$ διεγείρεται περισσότερο η ιδιομορφή $\bar{\varphi}_4(\xi)$.

3.3.2.2. Μονόπακτη δοκός

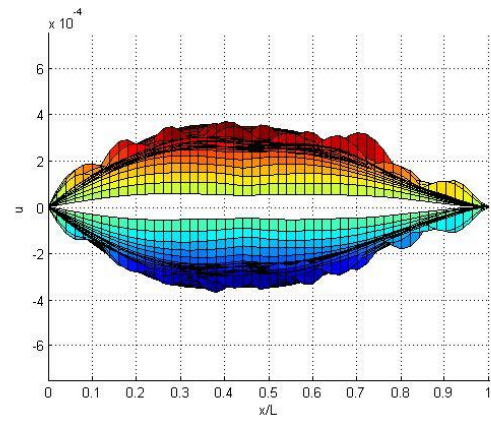
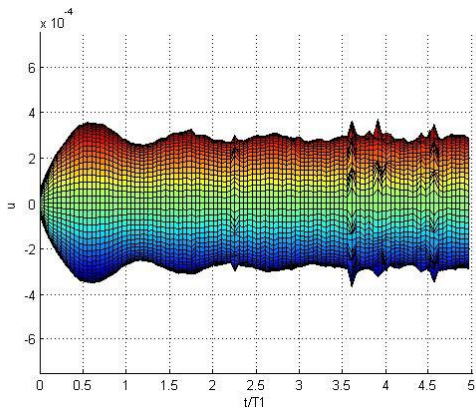
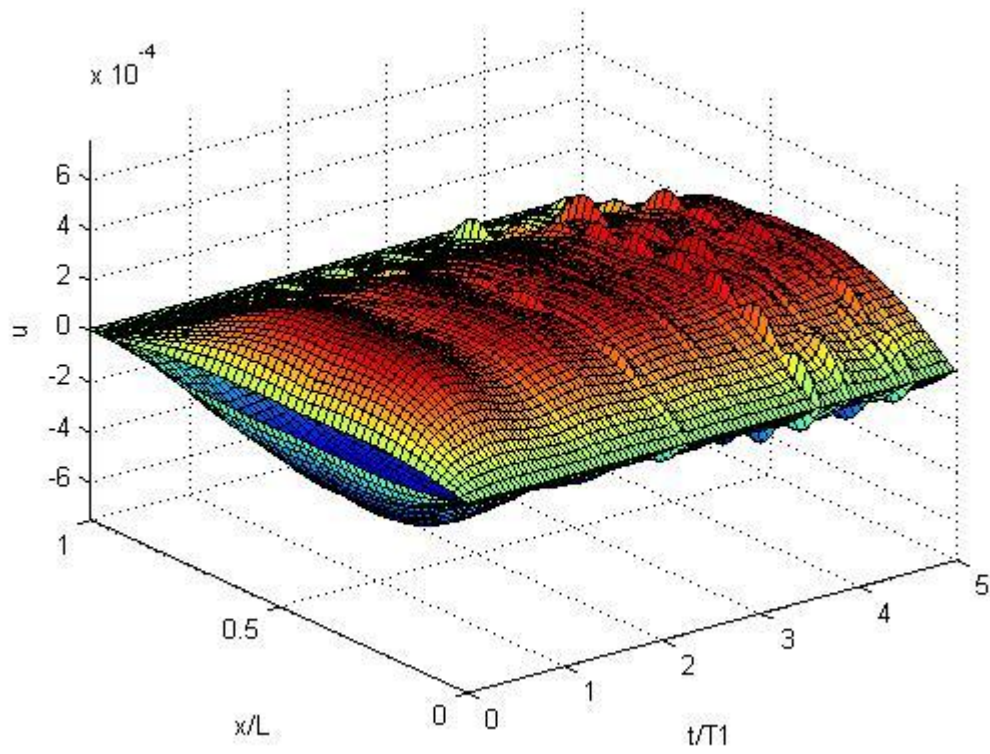
Φάσμα 34: Ορθογωνικό πλήγμα σε μονόπακτη δοκό



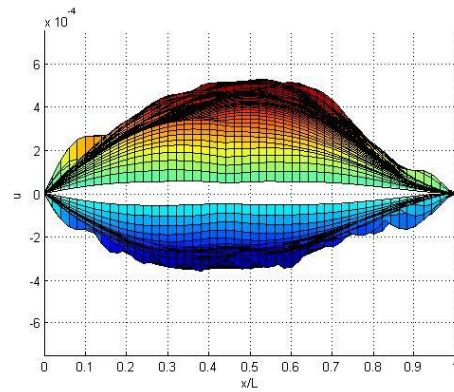
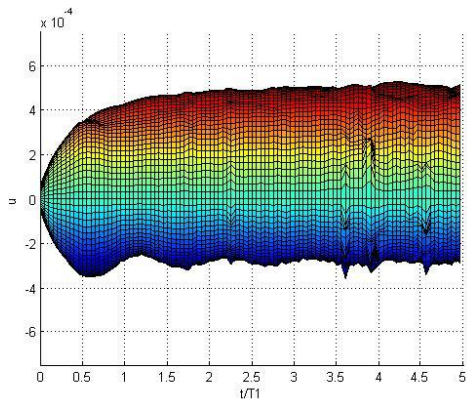
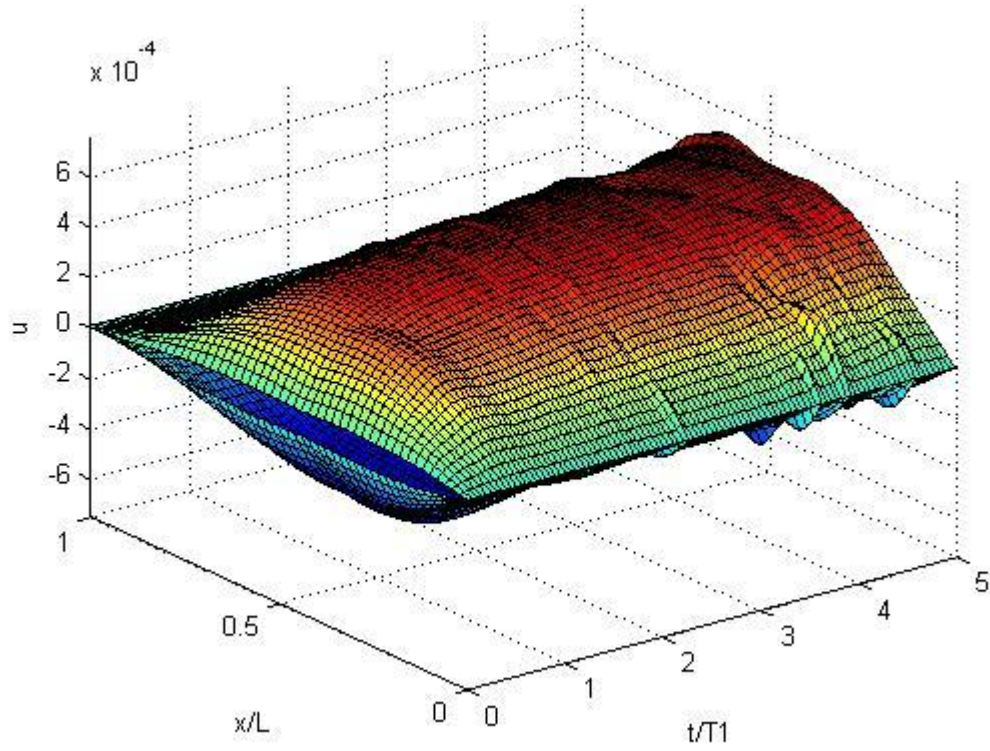
Φάσμα 35: Πλήγμα μισό ημίτονο σε μονόπακτη δοκό



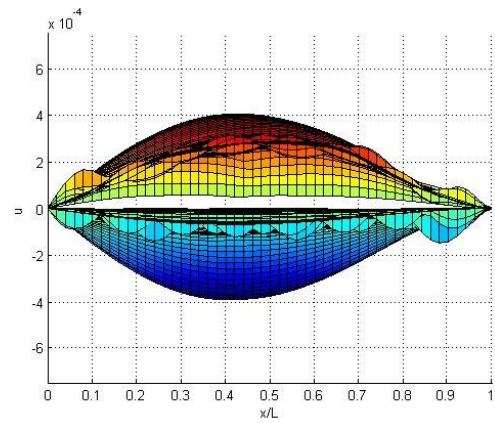
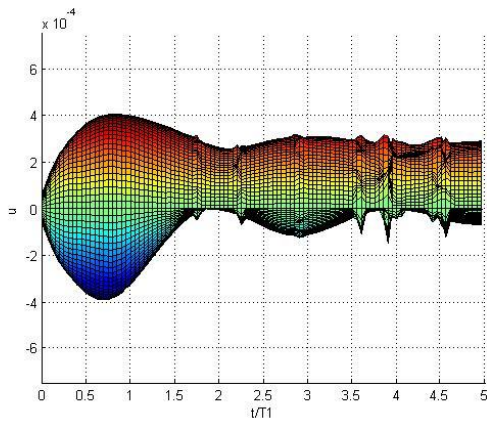
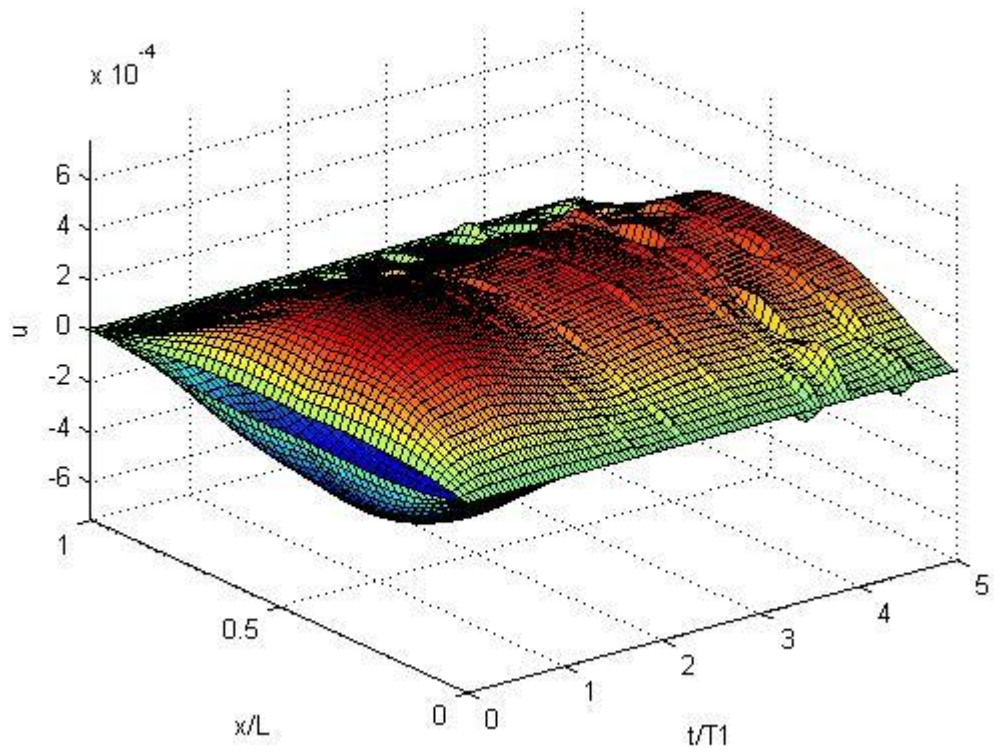
Φάσμα 36: Αυξανόμενο τριγωνικό πλήγμα σε μονόπακτη δοκό



Φάσμα 37: Μειούμενο τριγωνικό πλήγμα σε μονόπακτη δοκό



Φάσμα 38: Ισοσκελές τριγωνικό πλήγμα σε μονόπακτη δοκό



Σχολιασμός των φασμάτων απόκρισης μονόπακτης δοκού για πλήγματα διαφόρων μορφών:

- Το σχήμα των φασμάτων μονόπακτης δοκού στο επίπεδο $v(\xi, \tau) - \tau$ είναι όμοιο με αυτό των φασμάτων του προβόλου και της χορδής για κάθε είδος πλήγματος και κατ' επέκταση με τα αντίστοιχα φάσματα δύο διαστάσεων ταλαντωτών με πολλούς βαθμούς ελευθερίας.¹²
- Οι τιμές του φάσματος είναι σαφώς μικρότερες σε σχέση με αυτές του προβόλου, λόγω του ότι και τα δύο άκρα της δοκού είναι δεσμευμένα, ενώ στον πρόβολο υπάρχει ένα ελεύθερο άκρο.
- Σε όλα τα φάσματα είναι εμφανείς οι οριακές συνθήκες στα άκρα της μονόπακτης δοκού: $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \frac{\partial^2 v(0,\tau)}{\partial \xi^2} = 0, v(1, \tau) = 0, \frac{\partial^2 v(1,\tau)}{\partial \xi^2} = 0$.
- Στο ορθογωνικό πλήγμα (φάσμα 29), όταν η διάρκεια του πλήγματος είναι $\tau \geq 0,4\bar{T}_1$, τότε η μέγιστη θετική απόκριση είναι περίπου σταθερή, $\bar{v} = 0,00055$. Αντίθετα, στα φάσματα 35, 36 και 38 (πλήγματα μισού ημιτόνου, αυξανόμενο τριγωνικό και ισοσκελές τριγωνικό) παρατηρείται μια περιοδικότητα στο σχήμα τους. Πιο συγκεκριμένα, στο πλήγμα μισού ημιτόνου η τιμή του φάσματος έχει μέγιστο για $\tau = 0,6$ και μετά έχει ημιτονοειδή μορφή με περίοδο $2\bar{T}_1$. Στο αυξανόμενο τριγωνικό πλήγμα, η τιμή του φάσματος είναι μέγιστη επίσης για $\tau = 0,6$, αλλά στη συνέχεια ο θετικός κλάδος εμφανίζει επαναληψιμότητα με περίοδο ίση με την πρώτη ιδιοπερίοδο του συστήματος \bar{T}_1 . Τέλος, στο ισοσκελές τριγωνικό πλήγμα η τιμή του φάσματος έχει μέγιστο για $\tau = 0,8$ και μετά έχει ημιτονοειδή μορφή με περίοδο $2\bar{T}_1$.
- Εκτός από το μειούμενο τριγωνικό πλήγμα όπου υπάρχει μια μικρή απόκλιση της τάξης του $\Delta v \cong 0,0002$, σε όλα τα υπόλοιπα φάσματα η μέγιστη θετική απόκριση είναι όση περίπου και η μέγιστη αρνητική.
- Στα πλήγματα στα οποία η μέγιστη δύναμη εφαρμόζεται εξαρχής (ορθογωνικό και μειούμενο τριγωνικό πλήγμα), η μέγιστη απόκριση στα θετικά φτάνει μέχρι την τιμή $\bar{v} = 0,00055$. Στις περιπτώσεις του αυξανόμενου και του ισοσκελούς τριγωνικού πλήγματος, επειδή η δύναμη αυξάνεται γραμμικά σε σχέση με το χρόνο, η μέγιστη απόκριση είναι σαφώς μικρότερη ($\bar{v} \cong 0,00037$).
- Οι δύο επιφάνειες των φασμάτων του ημιτονοειδούς και του ισοσκελούς τριγωνικού πλήγματος μοιάζουν αρκετά, άρα συμπεραίνεται ότι το ημιτονοειδές τριγωνικό πλήγμα προσιδιάζει περισσότερο στο ισοσκελές τριγωνικό πλήγμα και όχι στο ορθογωνικό.
- Σε όλα τα πλήγματα ο αρνητικός κλάδος του φάσματος είναι περιοδικός με ημιτονοειδή μορφή. Στο μεν ορθογωνικό η μονόπακτη δοκός ταλαντώνεται με σταθερό μέγιστο πλάτος στα αρνητικά και το φάσμα

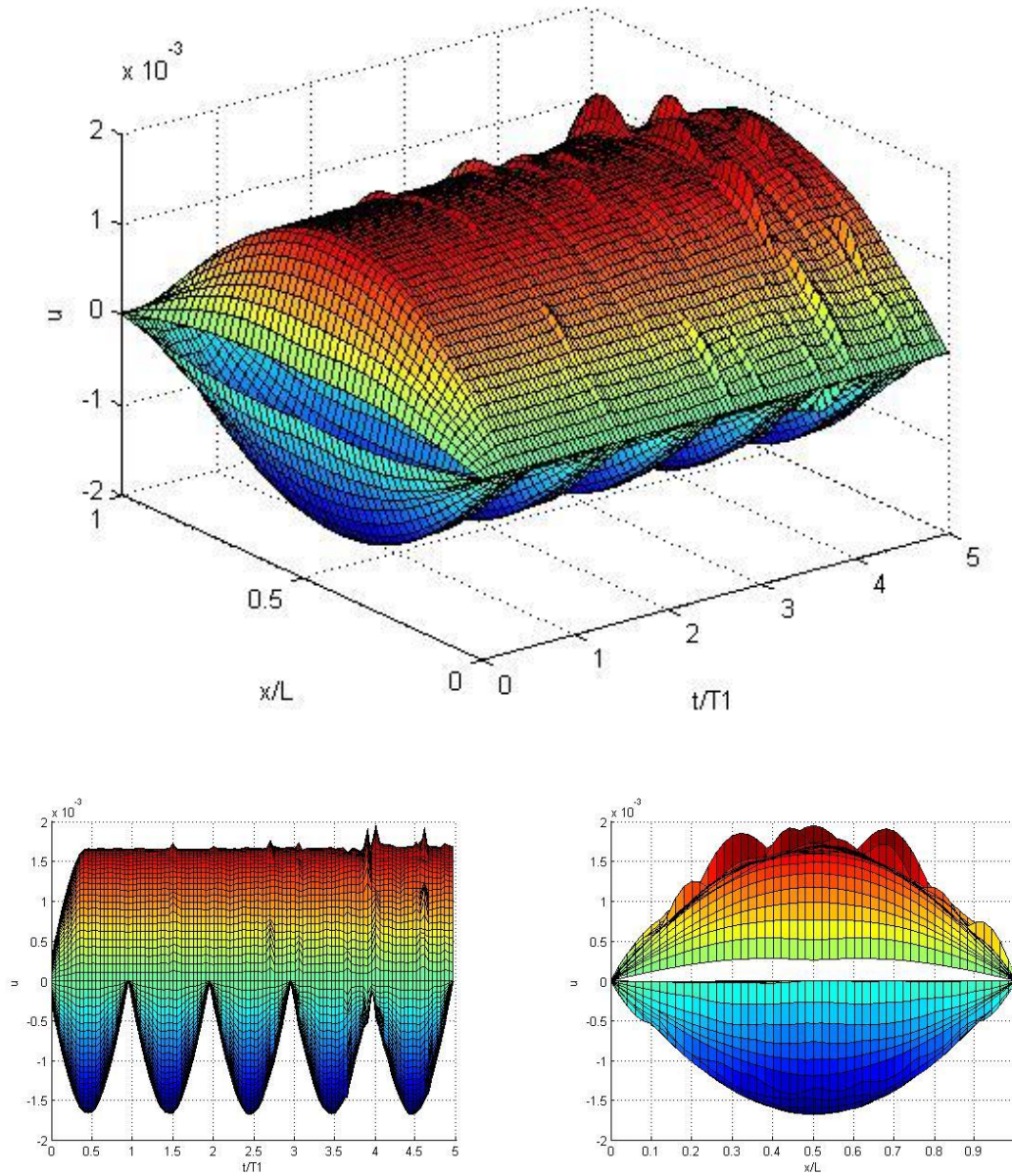
¹² Για περισσότερες πληροφορίες για τα φάσματα απόκρισης συστημάτων με πεπερασμένο αριθμό βαθμών ελευθερίας βλ. [6]

εμφανίζει μια περιοδικότητα με περίοδο ίση με την πρώτη ιδιοπερίοδο του συστήματος \bar{T}_1 . Παρόμοια, για αυξανόμενο και μειούμενο τριγωνικό πλήγμα, η δοκός ταλαντώνεται με σχεδόν σταθερό μέγιστο πλάτος στα αρνητικά και με περίοδο περίπου \bar{T}_1 . Για ημιτονοειδές και ισοσκελές τριγωνικό πλήγμα, παρατηρείται σταδιακή μείωση του πλάτους στα αρνητικά. Ειδικότερα, για το πλήγμα μισού ημιτόνου παρατηρείται πως η δοκός αποκτά το μέγιστο πλάτος στα αρνητικά $\bar{u} \cong -0,00048$ σε χρόνο $\tau \cong 0,6\bar{T}_1$ και στη συνέχεια το πλάτος στα αρνητικά μειώνεται με περίοδο περίπου ίση με την πρώτη ιδιοπερίοδο του συστήματος \bar{T}_1 . Ο αρνητικός κλάδος του φάσματος για το ισοσκελές τριγωνικό πλήγμα παρουσιάζει αντίστοιχη εικόνα με το ημιτονοειδές πλήγμα: η δοκός αποκτά το μέγιστο πλάτος στα αρνητικά $\bar{u} \cong -0,0004$ σε χρόνο $\tau \cong 0,6\bar{T}_1$ και στη συνέχεια το πλάτος στα αρνητικά μειώνεται με περίοδο περίπου ίση με το διπλάσιο της πρώτης ιδιοπεριόδου του συστήματος $2\bar{T}_1$.

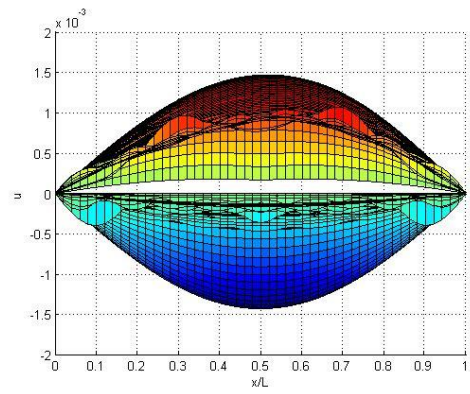
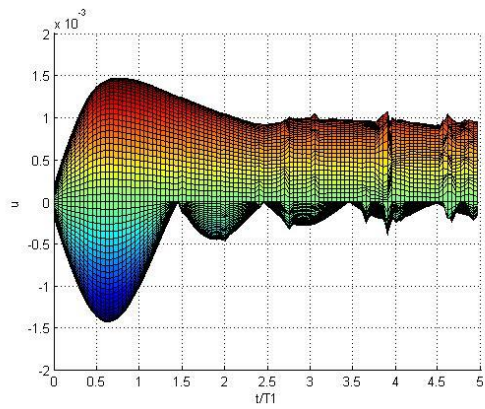
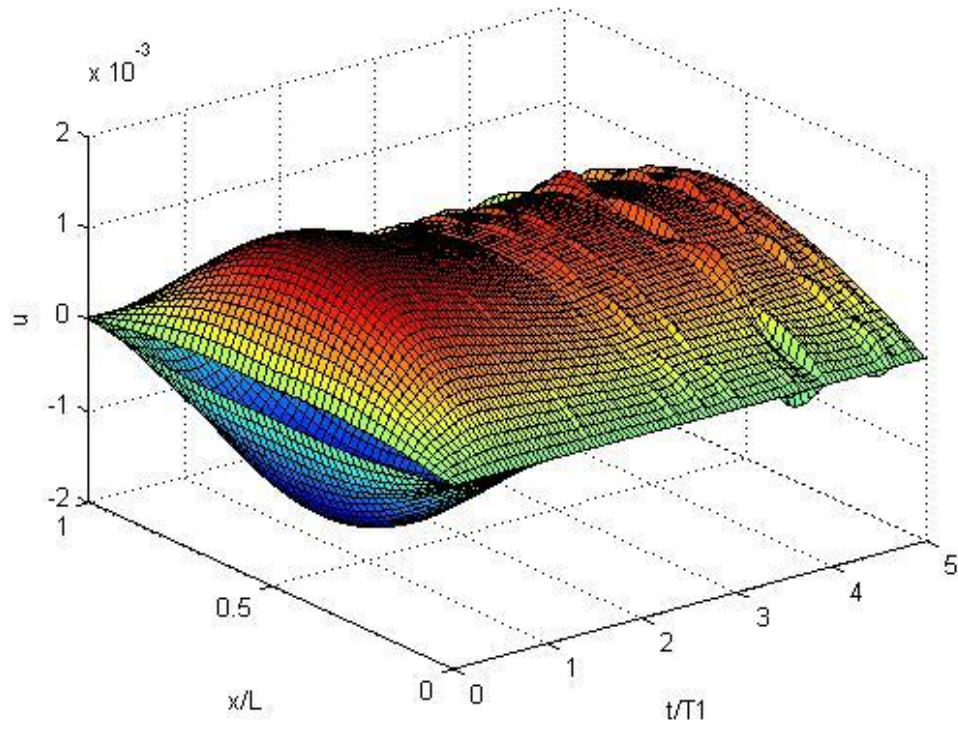
- Στην περίπτωση της μονόπακτης δοκού, το φαινόμενο της διέγερσης κάποιων ιδιομορφών περισσότερο από τις άλλες είναι πιο έντονο. Για παράδειγμα, στο φάσμα 34 (ορθογωνικό πλήγμα) για διάρκεια πλήγματος $\tau \cong 3,6$ διεγείρεται περισσότερο η ιδιομορφή $\bar{\varphi}_8(\xi)$, ενώ στο φάσμα 38 (ισοσκελές τριγωνικό πλήγμα), για διάρκεια πλήγματος $\tau \cong 3,8$ διεγείρεται περισσότερο η ιδιομορφή $\bar{\varphi}_7(\xi)$.
- Μέγιστη απόκριση αποκτά το σημείο με $\xi = 0,4$ της μονόπακτης δοκού, παρόλο που το πλήγμα ασκείται στη θέση με $\xi = 0,7$. Αυτό συμβαίνει επειδή το πλήγμα πιο κοντά στο πακτωμένο άκρο, παρά στο άκρο με την άρθρωση. Αναλυτικά η παραμετρική μελέτη για τη θέση του πλήγματος στη μονόπακτη δοκό στο εδάφιο 3.5.2.3 του παρόντος κεφαλαίου.

3.3.2.3. Αμφιέριστη δοκός

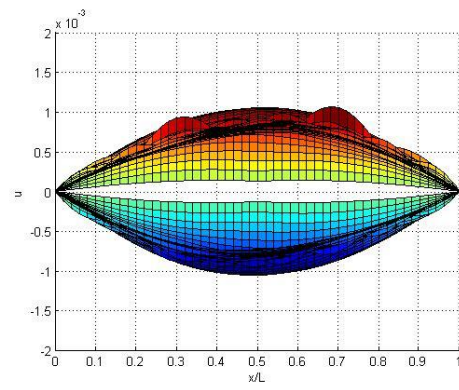
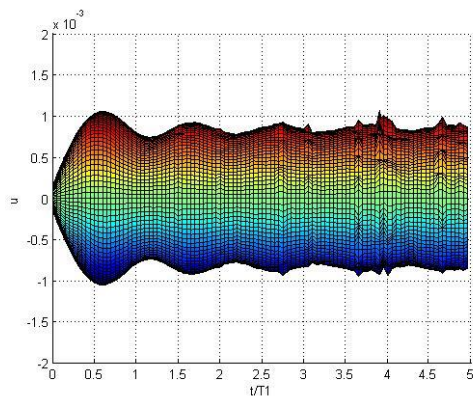
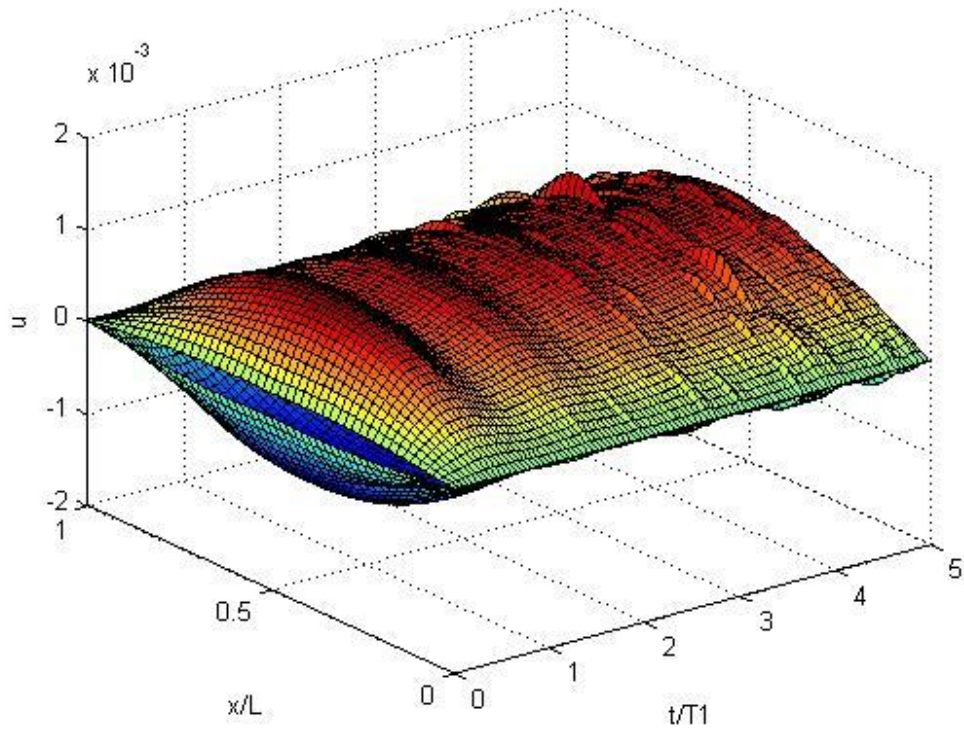
Φάσμα 39: Ορθογωνικό πλήγμα σε αμφιέριστη δοκό



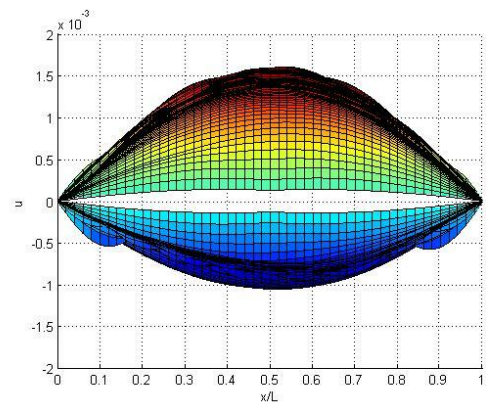
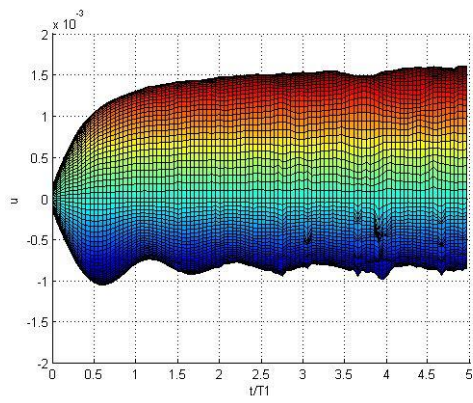
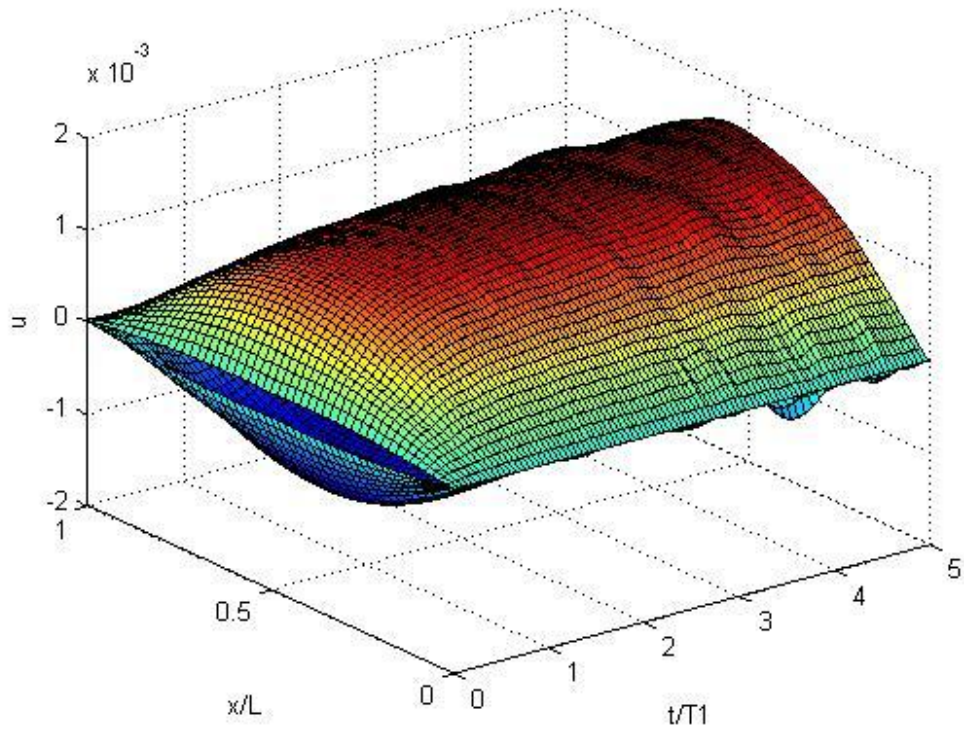
Φάσμα 40: Πλήγμα μισό ημίτονο σε αμφιέρειστη δοκό



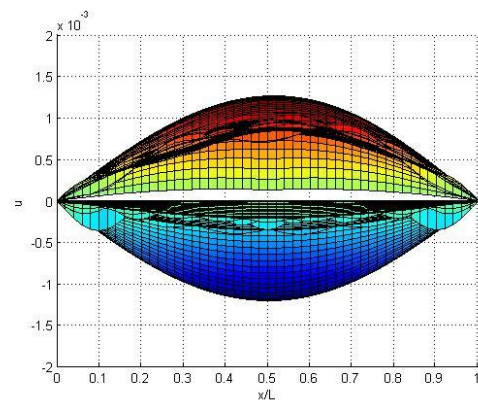
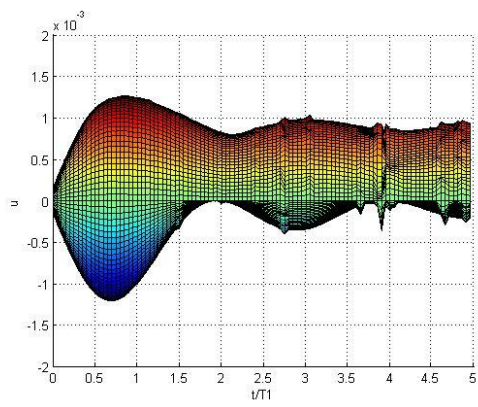
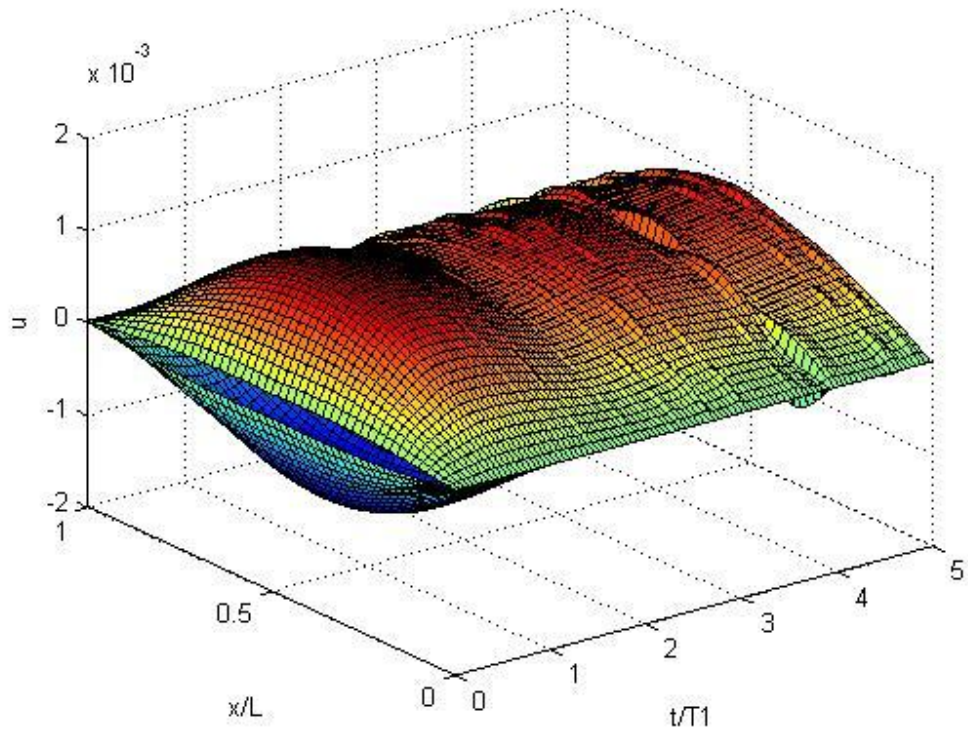
Φάσμα 41: Αυξανόμενο τριγωνικό πλήγμα σε αμφιέρειστη δοκό



Φάσμα 42: Μειούμενο τριγωνικό πλήγμα σε αμφιέρειστη δοκό



Φάσμα 43: Ισοσκελές τριγωνικό πλήγμα σε αμφιέρειστη δοκό



Σχολιασμός των φασμάτων απόκρισης αμφιέρειστης δοκού για πλήγματα διαφόρων μορφών:

- Το σχήμα των φασμάτων αμφιέρειστης δοκού στο επίπεδο $v(\xi, \tau) - \tau$ είναι όμοιο με αυτό των φασμάτων του προβόλου, της μονόπακτης δοκού, της χορδής για κάθε είδος πλήγματος και κατ' επέκταση με τα αντίστοιχα φάσματα δύο διαστάσεων ταλαντωτών με πολλούς βαθμούς ελευθερίας.¹³
- Οι τιμές του φάσματος είναι σαφώς μικρότερες σε σχέση με αυτές του προβόλου, λόγω του ότι και τα δύο άκρα της δοκού είναι δεσμευμένα, ενώ στον πρόβολο υπάρχει ένα ελεύθερο άκρο. Οι τιμές του φάσματος όμως είναι και μία τάξη μεγέθους μεγαλύτερες από αυτές της μονόπακτης δοκού, καθώς στην περίπτωση της αμφιέρειστης δοκού δεν υπάρχει πάκτωση.
- Σε όλα τα φάσματα είναι εμφανείς οι οριακές συνθήκες στα άκρα της αμφιέρειστης δοκού: $v(0, \tau) = 0, \frac{\partial^2 v(0, \tau)}{\partial \xi^2} = 0, v(1, \tau) = 0, \frac{\partial^2 v(1, \tau)}{\partial \xi^2} = 0$.
- Στο ορθογωνικό πλήγμα (φάσμα 39), όταν η διάρκεια του πλήγματος είναι $\tau \geq 0,3\bar{T}_1$, τότε η μέγιστη θετική απόκριση είναι περίπου σταθερή, $\bar{v} = 0,0017$. Αντίθετα, στα φάσματα 40, 41 και 43 (πλήγματα μισού ημιτόνου, αυξανόμενο τριγωνικό και ισοσκελές τριγωνικό) παρατηρείται μια περιοδικότητα στο σχήμα τους. Πιο συγκεκριμένα, στο πλήγμα μισού ημιτόνου η τιμή του φάσματος έχει μέγιστο για $\tau = 0,7$ και μετά έχει ημιτονοειδή μορφή με περίοδο $2\bar{T}_1$. Στο αυξανόμενο τριγωνικό πλήγμα, η τιμή του φάσματος είναι μέγιστη για $\tau = 0,6$ και στη συνέχεια ο θετικός κλάδος εμφανίζει επαναληψιμότητα με περίοδο ίση με της πρώτη ιδιοπερίοδο του συστήματος \bar{T}_1 . Τέλος, στο ισοσκελές τριγωνικό πλήγμα η τιμή του φάσματος έχει μέγιστο για $\tau = 0,8$ και μετά έχει ημιτονοειδή μορφή με περίοδο $2\bar{T}_1$.
- Εκτός από το μειούμενο τριγωνικό πλήγμα όπου υπάρχει μια μικρή απόκλιση της τάξης του $\Delta v \cong 0,004$, σε όλα τα υπόλοιπα φάσματα η μέγιστη θετική απόκριση είναι όση περίπου και η μέγιστη αρνητική.
- Στα πλήγματα στα οποία η μέγιστη δύναμη εφαρμόζεται εξαρχής (ορθογωνικό και μειούμενο τριγωνικό πλήγμα), η μέγιστη απόκριση στα θετικά φτάνει μέχρι την τιμή $\bar{v} = 0,0017$. Στις περιπτώσεις του αυξανόμενου και του ισοσκελούς τριγωνικού πλήγματος, επειδή η δύναμη αυξάνεται γραμμικά σε σχέση με το χρόνο, η μέγιστη απόκριση είναι σαφώς μικρότερη ($\bar{v} \cong 0,0011$).
- Οι δύο επιφάνειες των φασμάτων του ημιτονοειδούς και του ισοσκελούς τριγωνικού φάσματος μοιάζουν αρκετά, άρα συμπεραίνεται ότι το

¹³ Για περισσότερες πληροφορίες για τα φάσματα απόκρισης συστημάτων με πεπερασμένο αριθμό βαθμών ελευθερίας βλ. [6]

ημιτονοειδές τριγωνικό πλήγμα προσιδιάζει περισσότερο στο ισοσκελές τριγωνικό πλήγμα και όχι στο ορθογωνικό.

- Σε όλα τα πλήγματα ο αρνητικός κλάδος του φάσματος είναι περιοδικός με ημιτονοειδή μορφή. Στο μεν ορθογωνικό η αμφιέρειστη δοκός ταλαντώνεται με σταθερό μέγιστο πλάτος στα αρνητικά και το φάσμα εμφανίζει μια περιοδικότητα με περίοδο ίση με την πρώτη ιδιοπερίοδο του συστήματος \bar{T}_1 . Παρόμοια, για αυξανόμενο και μειούμενο τριγωνικό πλήγμα, η δοκός ταλαντώνεται με σχεδόν σταθερό μέγιστο πλάτος στα αρνητικά και με περίοδο περίπου \bar{T}_1 . Για ημιτονοειδές και ισοσκελές τριγωνικό πλήγμα, παρατηρείται σταδιακή μείωση του πλάτους στα αρνητικά. Ειδικότερα, για το πλήγμα μισού ημιτόνου παρατηρείται πως η δοκός αποκτά το μέγιστο πλάτος στα αρνητικά $\bar{u} \cong -0,00048$ σε χρόνο $\tau \cong 0,7\bar{T}_1$ και στη συνέχεια το πλάτος στα αρνητικά μειώνεται με περίοδο περίπου ίση με την πρώτη ιδιοπερίοδο του συστήματος \bar{T}_1 . Ο αρνητικός κλάδος του φάσματος για το ισοσκελές τριγωνικό πλήγμα παρουσιάζει αντίστοιχη εικόνα με το ημιτονοειδές πλήγμα: η δοκός αποκτά το μέγιστο πλάτος στα αρνητικά $\bar{u} \cong -0,0004$ σε χρόνο $\tau \cong 0,7\bar{T}_1$ και στη συνέχεια το πλάτος στα αρνητικά μειώνεται με περίοδο περίπου ίση με το διπλάσιο της πρώτης ιδιοπεριόδου του συστήματος $2\bar{T}_1$.
- Και στην περίπτωση της αμφιέρειστης δοκού παρατηρείται το φαινόμενο της διέγερσης κάποιων ιδιομορφών περισσότερο από τις άλλες. Για παράδειγμα, στο φάσμα 39 (ορθογωνικό πλήγμα) για διάρκεια πλήγματος $\tau \cong 3,9$ διεγείρεται περισσότερο η ιδιομορφή $\bar{\varphi}_5(\xi)$, ενώ στο φάσμα 43 (ισοσκελές τριγωνικό πλήγμα), για διάρκεια πλήγματος $\tau \cong 3,9$ διεγείρεται περισσότερο η ιδιομορφή $\bar{\varphi}_6(\xi)$.
- Τα φάσματα της αμφιέρειστης δοκού στο επίπεδο $u(\xi, \tau) - \xi$ εμφανίζουν μια συμμετρία ως προς τη μεσοκάθετο της δοκού στο σχήμα τους. Μέγιστη απόκριση αποκτά το σημείο με $\xi = 0,5$ της αμφιέρειστης δοκού, παρόλο που το πλήγμα ασκείται στη θέση με $\xi = 0,7$. Αναλυτικά η παραμετρική μελέτη για τη θέση του πλήγματος στην αμφιέρειστη δοκό στο εδάφιο 3.5.2.3 του παρόντος κεφαλαίου.

3.4. Επίδραση της τιμής της κατανεμημένης μάζας στην απόκριση της δοκού

Η παραμετρική μελέτη αφορά την αμφιέρειστη δοκό. Επιλέγονται οι παρακάτω τιμές για τις υπόλοιπες παραμέτρους:

- Θέση πλήγματος $\xi = 0,7$.
- Είδος πλήγματος: ορθογωνικό.
- Μέγιστη δύναμη πλήγματος $\overline{F_0} = 1$.
- Διάρκεια πλήγματος $0,7\overline{T_1}$, όπου $\overline{T_1}$ η ιδιοπερίοδος του συστήματος.
- Χρονικό διάστημα μελέτης της ελεύθερης ταλάντωσης της δοκού μετά το πέρας του πλήγματος $2,8\overline{T_1}$.

Η διάρκεια του πλήγματος, όπως ακριβώς και στην περίπτωση της χορδής, πρέπει να είναι κοινή και στα πέντε βίντεο. Όμως αυτή εξαρτάται από την ιδιοπερίοδο του συστήματος $\overline{T_1}$, η οποία με τη σειρά της εξαρτάται από την τιμή της κατανεμημένης μάζας \overline{m} . Για αυτό το λόγο γίνεται η παρακάτω προεργασία.

Έστω δύο δοκοί με κατανεμημένες μάζες \overline{m}_1 και \overline{m}_2 και όλες τις υπόλοιπες παραμέτρους κοινές. Αν οι δύο αυτές δοκοί υποβληθούν σε πλήγμα ίδιας διάρκειας $\tau_{\pi\lambda}$, τότε ισχύει:

$$\tau_{\pi\lambda 1} = 1\overline{T_{11}} = \alpha\overline{T_{12}}$$

όπου $\overline{T_{11}}$ και $\overline{T_{12}}$ οι πρώτες ιδιοπερίοδοι των δοκών. Επειδή οι θεμελιώδεις ιδιοσυχνότητες είναι ανάλογες της τετραγωνικής ρίζας της κατανεμημένης μάζας, ισχύει:

$$\frac{w_{11}}{w_{12}} = \sqrt{\frac{\overline{m}_2}{\overline{m}_1}} \Rightarrow \frac{\overline{T_{11}}}{\overline{T_{12}}} = \sqrt{\frac{\overline{m}_1}{\overline{m}_2}} = \alpha$$

Επομένως, βάσει της παραπάνω σχέσης, συμπληρώνεται ο πίνακας:

| Τιμή κατανεμημένης μάζας \overline{m} | Τιμή του συντελεστή α |
|---|--|
| 0,05 | 1 |
| 0,10 | 0,7071 |
| 0,15 | 0,5774 |
| 0,20 | 0,5 |
| 0,25 | 0,4472 |

Επισυνάπτονται τα σχετικά βίντεο:

| Όνομα αρχείου | Κατανεμημένη μάζα \bar{m} |
|---------------|-----------------------------|
| Βίντεο 41 | 0,05 |
| Βίντεο 42 | 0,10 |
| Βίντεο 43 | 0,15 |
| Βίντεο 44 | 0,20 |
| Βίντεο 45 | 0,25 |

Σχολιασμός των βίντεο απόκρισης προβόλου για τις διάφορες τιμές της κατανεμημένης μάζας:

- Όσο πιο μικρή η κατανεμημένη μάζα της δοκού, τόσο πιο γρήγορα αυτή ταλαντώνεται λόγω μικρής αδράνειας. Τούτο συμβαίνει επειδή η αδιάστατη θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα w_1 είναι αντιστρόφως ανάλογη της $\sqrt{\bar{m}}$, δηλαδή αύξηση της τιμής της κατανεμημένης μάζας σημαίνει μείωση της τιμής της w_1 , αύξηση της \bar{T}_1 και άρα πιο «αργή» ταλάντωση. Η σχέση των διαστατών μεγεθών που επιβεβαιώνει το παραπάνω συμπέρασμα είναι:

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Η αντίστοιχη αδιάστατη σχέση είναι:

$$w_n = \omega_n \sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\bar{m} \frac{EI}{L^3 g}}} \sqrt{\frac{L}{g}} = n^2 \pi^2 \frac{1}{\sqrt{\bar{m}}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

- Σε όλα τα βίντεο είναι εμφανείς οι οριακές συνθήκες στα άκρα της αμφιέριστης δοκού: $v(0, \tau) = 0, \frac{\partial^2 v(0, \tau)}{\partial \xi^2} = 0, v(1, \tau) = 0, \frac{\partial^2 v(1, \tau)}{\partial \xi^2} = 0$.
- Σε όλα τα βίντεο παρατηρείται η εξής εικόνα: η δοκός ταλαντώνεται στα θετικά, επιστρέφει στη θέση ισορροπίας, ταλαντώνεται εκ νέου στα θετικά και μετά αρχίζει η «αναμενόμενη» ελεύθερη ταλάντωση της, δηλαδή από τα θετικά στα αρνητικά και το αντίστροφο. Για αναλυτικό σχολιασμό του φαινομένου βλ. εδάφιο 3.6.1 του παρόντος κεφαλαίου.

3.5. Επίδραση της θέσης του πλήγματος στην απόκριση και στο φάσμα απόκρισης της δοκού για τις διάφορες περιπτώσεις οριακών συνθηκών

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη του φάσματος απόκρισης της δοκού σε σχέση με τη θέση στην οποία ασκείται το πλήγμα για τις διάφορες περιπτώσεις οριακών συνθηκών. Υπενθυμίζεται ότι μετά την αδιαστατοποίηση το μήκος της δοκού θεωρείται ίσο με 1, άρα για τις θέσεις στις οποίες μπορεί να ασκηθεί το πλήγμα ισχύει: $0 \leq \xi \leq 1$.

3.5.1. Απόκριση

Η μελέτη αφορά τον πρόβολο, δηλαδή τη δοκό με πακτωμένο το ένα άκρο ($\xi = 0$) και ελεύθερο το άλλο άκρο ($\xi = 1$). Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι:

- Είδος πλήγματος: ορθογωνικό.
- Μέγιστη τιμή της δύναμης του πλήγματος: $\bar{F}_0 = 1$.
- Διάρκεια πλήγματος $1.5\bar{T}_1$, όπου \bar{T}_1 η ιδιοπερίοδος του συστήματος.
- Χρονικό διάστημα μελέτης της ελεύθερης ταλάντωσης της χορδής μετά το πέρας του πλήγματος $4\bar{T}_1$.
- Κατανεμημένη μάζα του συστήματος: $\bar{m} = 0,05$.

Επισυνάπτονται τα σχετικά βίντεο:

| Όνομα αρχείου | Θέση πλήγματος |
|----------------------|-----------------------|
| Βίντεο 46 | 0,1 |
| Βίντεο 47 | 0,5 |
| Βίντεο 48 | 1,0 |

Σχολιασμός των βίντεο απόκρισης προβόλου για τις διάφορες τιμές της θέσης του πλήγματος:

- Όσο πιο κοντά στο πακτωμένο άκρο του προβόλου ασκείται το πλήγμα, τόσο πιο μικρή η απόκρισή του. Αναμενόμενο είναι λοιπόν να παρατηρείται μέγιστη απόκριση όταν το πλήγμα ασκείται στο ελεύθερο άκρο της δοκού (βίντεο 48), αλλά και σχεδόν μηδενική απόκριση όταν το πλήγμα ασκείται πολύ κοντά στο πακτωμένο άκρο (βίντεο 46).

- Οι οριακές συνθήκες είναι εμφανείς και στα δύο άκρα της δοκού:

$$u(0, \tau) = 0, \frac{\partial u(0, \tau)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial^2 u(1, \tau)}{\partial \xi^2} = 0, \frac{\partial^3 u(1, \tau)}{\partial \xi^3} = 0.$$
- Γενικά στα βίντεο παρατηρείται η εξής εικόνα: ο πρόβολος ταλαντώνεται στα θετικά, επιστρέφει στη θέση ισορροπίας, ταλαντώνεται εκ νέου στα θετικά και μετά το πέρας της διάρκειας του πλήγματος, αρχίζει η «αναμενόμενη» ελεύθερη ταλάντωσή του, δηλαδή από τα θετικά στα αρνητικά και το αντίστροφο. Για αναλυτικό σχολιασμό του φαινομένου βλ. εδάφιο 3.6.1.

3.5.2. Φάσματα απόκρισης

Ακολουθεί παραμετρική μελέτη για όλες τις περιπτώσεις οριακών συνθηκών χωριστά. Σε όλα τα επόμενα αποτελέσματα έχουν επιλεγεί οι εξής τιμές για τις υπόλοιπες παραμέτρους:

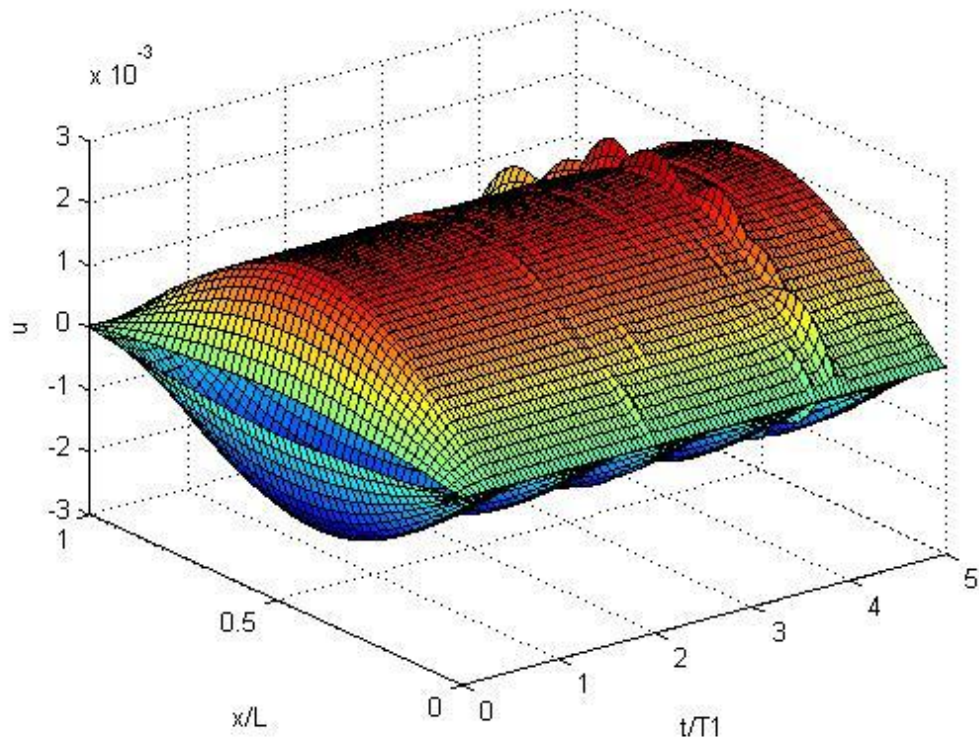
- Είδος πλήγματος: ορθογωνικό.
- Μέγιστη τιμή της δύναμης του πλήγματος: $\overline{F_0} = 1$.
- Διάρκεια πλήγματος μέχρι 5 ιδιοπεριόδους του συστήματος.
- Κατανεμημένη μάζα του συστήματος: $\overline{m} = 0,05$.

3.5.2.1. Αμφιέριστη δοκός

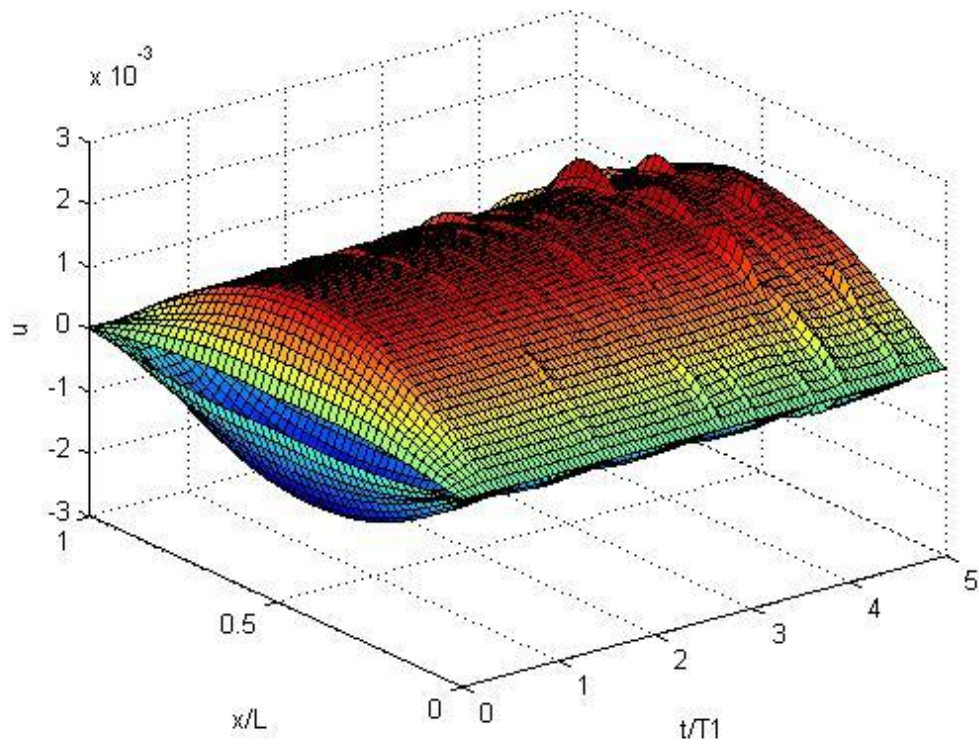
Είναι προφανής η συμμετρία του προβλήματος. Για αυτό το λόγο επιλέγονται οι θέσεις δεξιά του μέσου της δοκού, δηλαδή στο τμήμα $0.5 \leq \xi \leq 1$. Αν το πλήγμα ασκηθεί στις αντίστοιχες θέσεις αριστερά του μέσου της δοκού, προκύπτουν διαγράμματα συμμετρικά με τα παρακάτω.

Ακολουθούν τα φάσματα.

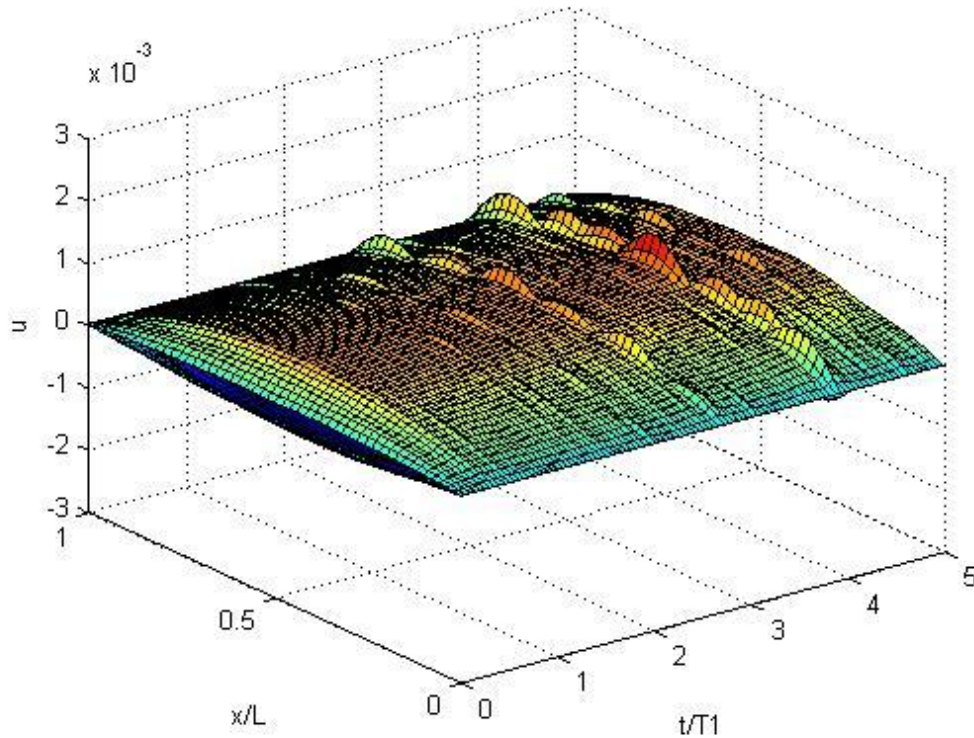
Φάσμα 44: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0.5$ αμφιέρειστης δοκού



Φάσμα 45: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0.7$ αμφιέρειστης δοκού



Φάσμα 46: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0.9$ αμφιέριστης δοκού



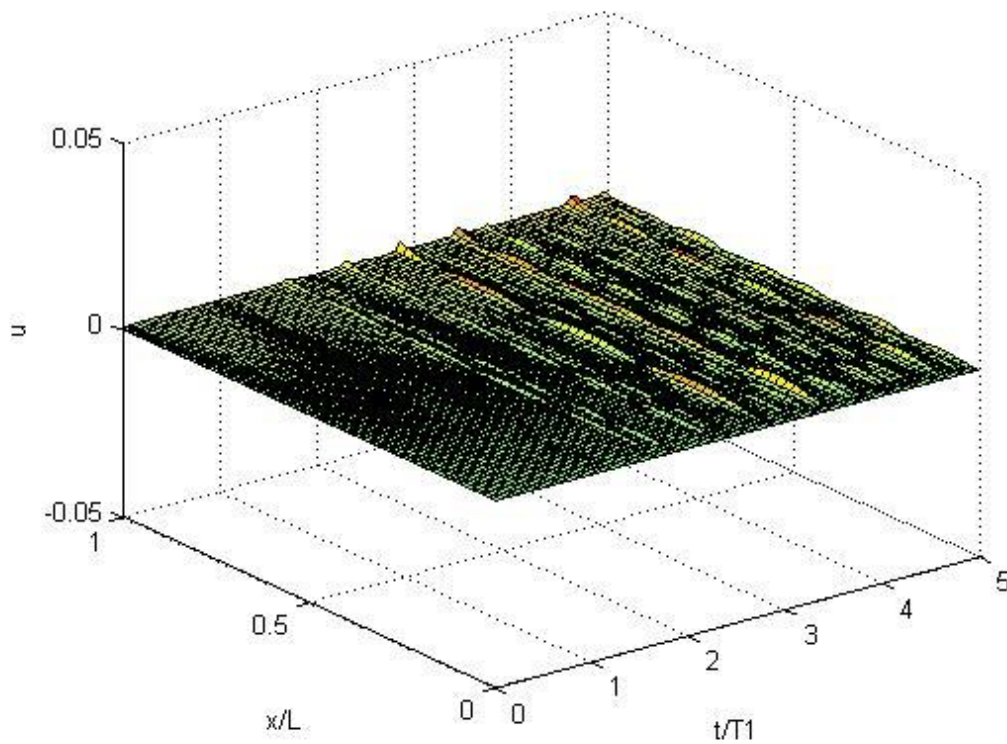
Σχολιασμός των φασμάτων απόκρισης αμφιέριστης δοκού για τις διάφορες τιμές της θέσης του πλήγματος:

- Όσο πιο κοντά στην άρθρωση ασκείται το πλήγμα, τόσο πιο μικρές είναι οι τιμές των φασμάτων της δοκού.
- Επειδή πρόκειται για συμμετρικό πρόβλημα, παρατηρείται ότι στα σημεία με $\xi = \frac{1}{2} + \xi_1$ και $\xi = \frac{1}{2} - \xi_1$ το φάσμα έχει περίπου ίδιες τιμές.
- Σε όλα τα φάσματα είναι εμφανές ότι ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες στα άκρα της αμφιέριστης δοκού: $v(0, \tau) = 0$, $\frac{\partial^2 v(0, \tau)}{\partial \xi^2} = 0$, $v(1, \tau) = 0$, $\frac{\partial^2 v(1, \tau)}{\partial \xi^2} = 0$.
- Και σε αυτά τα φάσματα για ορισμένες διάρκειες πλήγματος διεγείρονται περισσότερο κάποιες από τις ιδιομορφές της ελεύθερης ταλάντωσης. Για παράδειγμα, στο φάσμα 45 για διάρκεια πλήγματος $\tau \cong 4\bar{T}_1$ κυριαρχεί η πέμπτη ιδιομορφή $\bar{\varphi}_5(\xi)$, ενώ στο φάσμα 46 για διάρκεια πλήγματος $\tau \cong 2,8\bar{T}_1$ κυριαρχεί η έκτη ιδιομορφή $\bar{\varphi}_6(\xi)$. Αναλυτικός σχολιασμός του φαινομένου στο εδάφιο 3.6.2 του παρόντος κεφαλαίου.

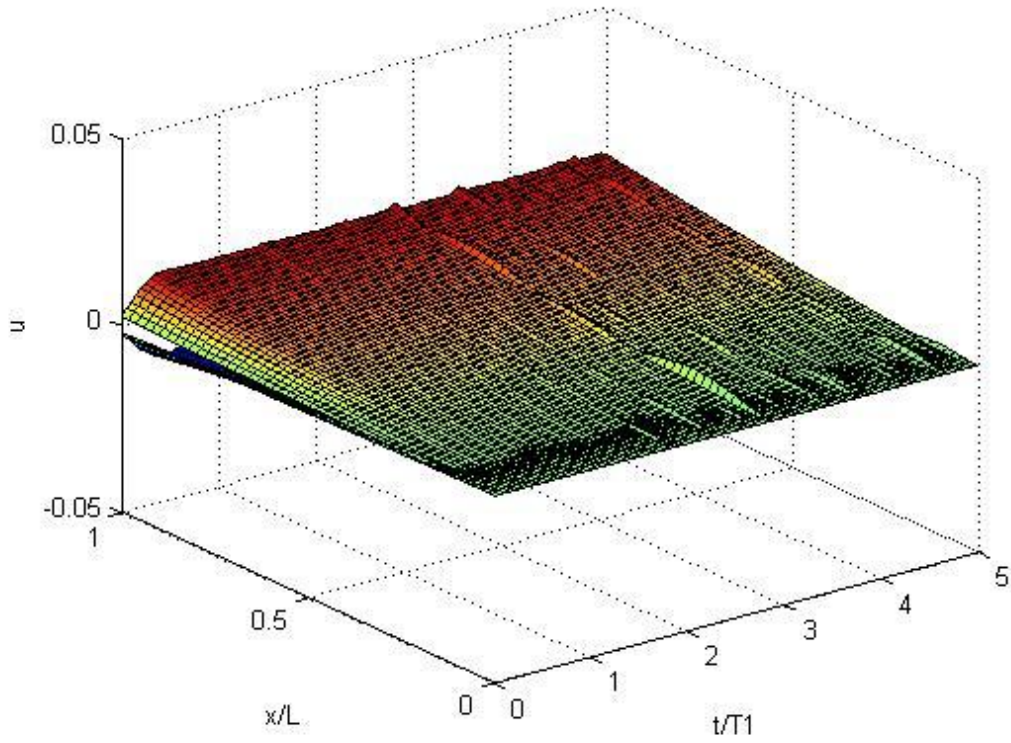
3.5.2.2. Πρόβολος

Το πακτωμένο άκρο είναι το $\xi = 0$ και το ελεύθερο το $\xi = 1$. Ακολουθούν τα φάσματα.

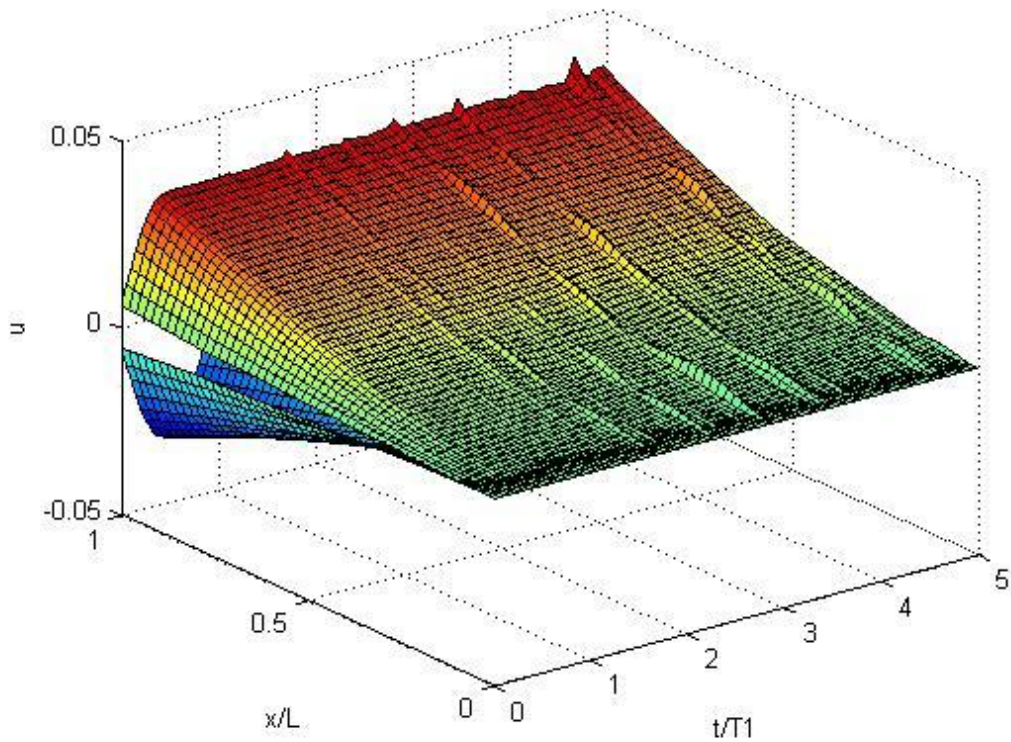
Φάσμα 47: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0.1$ προβόλου



Φάσμα 48: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0.5$ προβόλου



Φάσμα 49: Πλήγμα στη θέση $\xi = 1$ προβόλου



Σχολιασμός των φασμάτων απόκρισης προβόλου για τις διάφορες τιμές της θέσης του πλήγματος:

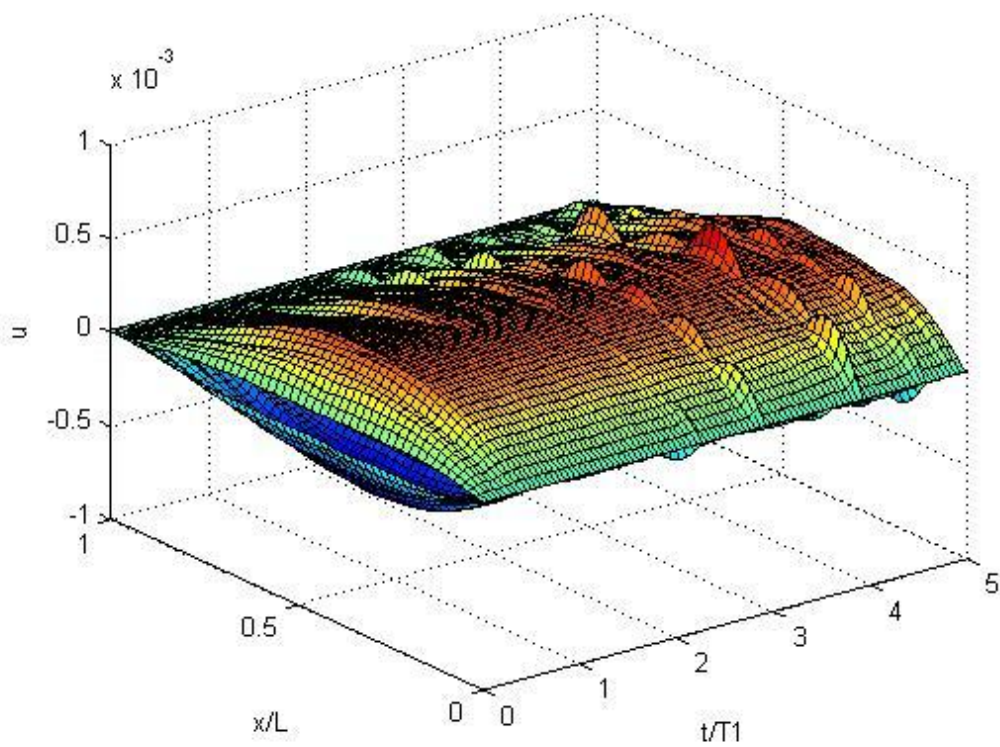
- Όσο πιο κοντά στην άρθρωση ασκείται το πλήγμα, τόσο πιο μικρές είναι οι τιμές των φασμάτων του προβόλου. Συγκεκριμένα, το φάσμα 49, όπου το πλήγμα ασκείται στο ελεύθερο άκρο, έχει πολύ μεγαλύτερες τιμές σε σχέση με το φάσμα 47, όπου το πλήγμα ασκείται πολύ κοντά στην πάκτωση και οι τιμές του είναι σχεδόν μηδενικές.
- Σε όλα τα φάσματα είναι εμφανές ότι ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες στα άκρα της αμφιέριστης δοκού: $v(0, \tau) = 0$, $\frac{\partial v(0, \tau)}{\partial \xi} = 0$, $\frac{\partial^2 v(1, \tau)}{\partial \xi^2} = 0$, $\frac{\partial^3 v(1, \tau)}{\partial \xi^3} = 0$.
- Και σε αυτά τα φάσματα για ορισμένες διάρκειες πλήγματος διεγείρονται περισσότερο κάποιες από τις ιδιομορφές της ελεύθερης ταλάντωσης. Για παράδειγμα, στο φάσμα 47 για διάρκεια πλήγματος $\tau \cong 2,8\bar{T}_1$ κυριαρχεί η τέταρτη ιδιομορφή $\bar{\varphi}_4(\xi)$, ενώ στο φάσμα 49 για διάρκεια πλήγματος $\tau \cong 4,7\bar{T}_1$ κυριαρχεί η έκτη ιδιομορφή $\bar{\varphi}_6(\xi)$. Αναλυτικός σχολιασμός του φαινομένου στο εδάφιο 3.6.2 του παρόντος κεφαλαίου.

3.5.2.3. Μονόπακτη δοκός

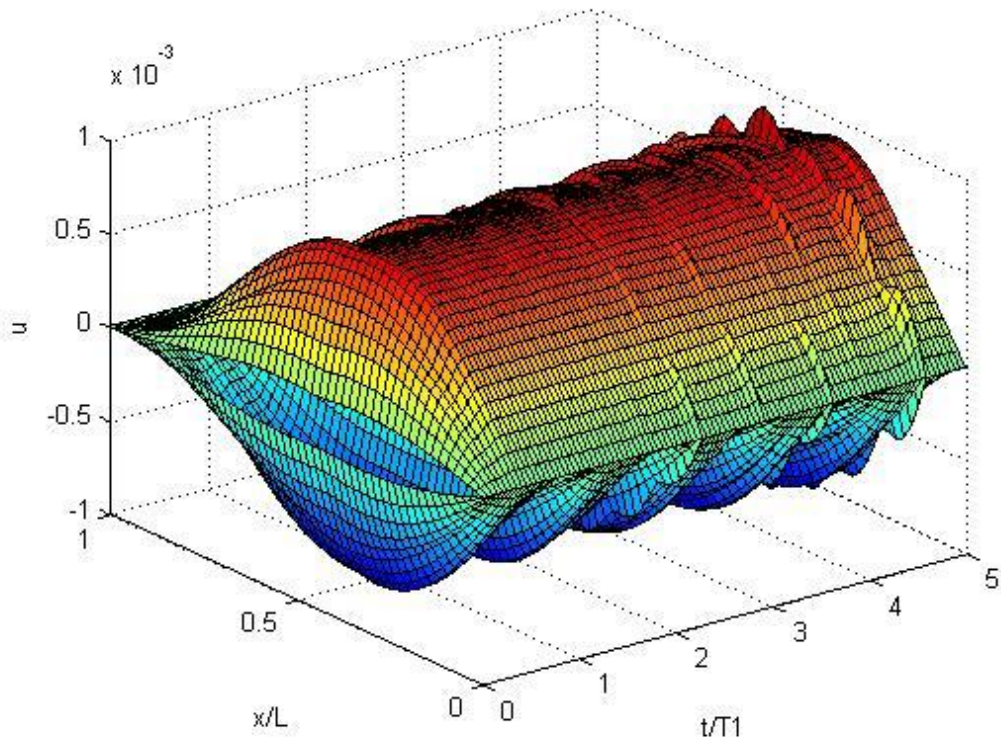
Η άρθρωση βρίσκεται στο άκρο $\xi = 0$ και η πάκτωση στο $\xi = 1$.

Ακολουθούν τα φάσματα.

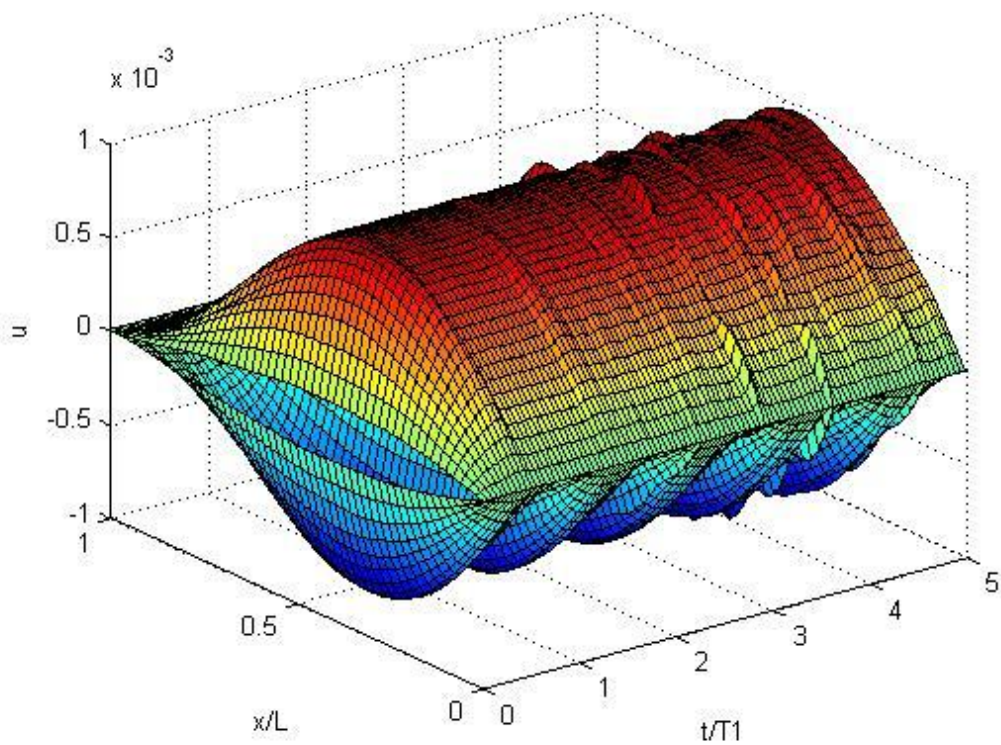
Φάσμα 50: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0, 1$ μονόπακτης δοκού



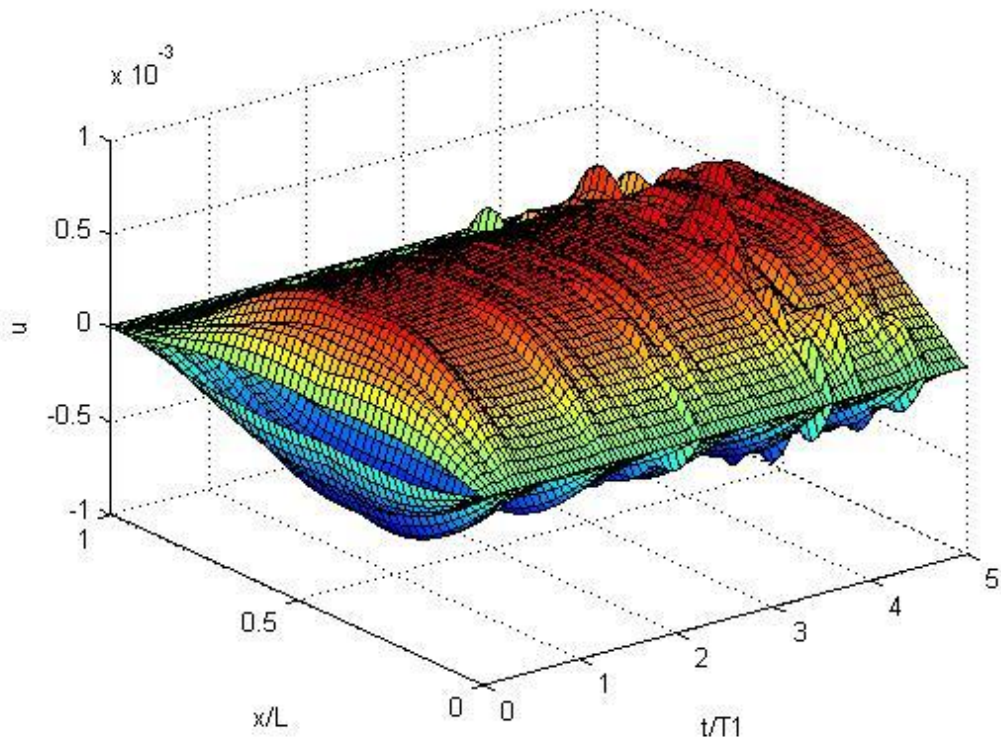
Φάσμα 51: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0,3$ μονόπακτης δοκού



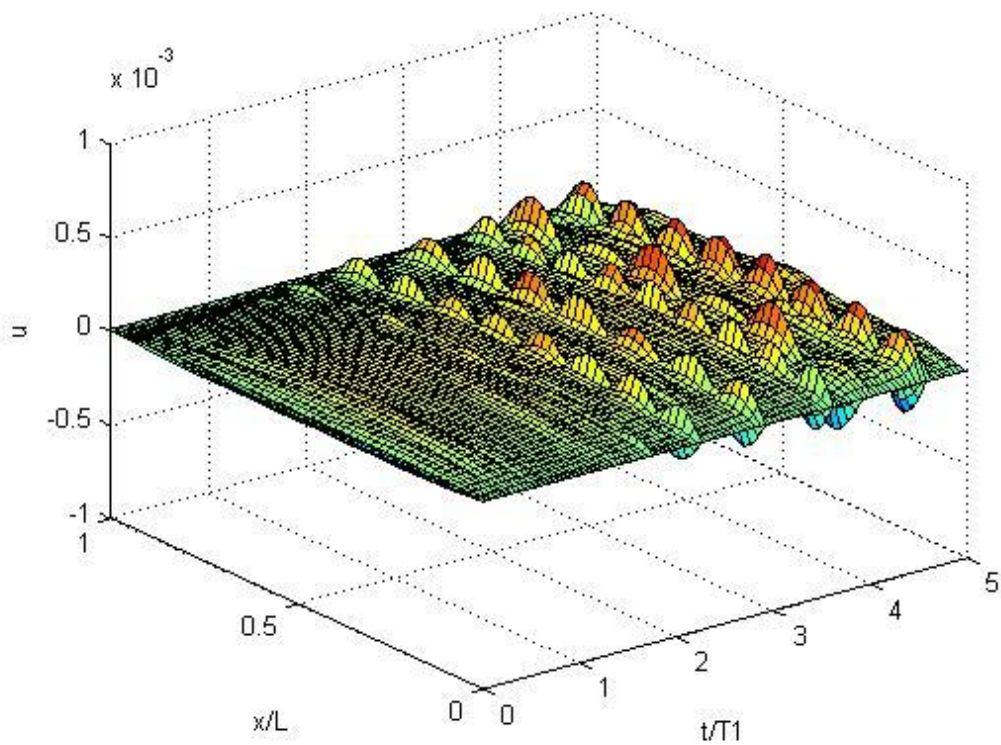
Φάσμα 52: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0,5$ μονόπακτης δοκού



Φάσμα 53: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0,7$ μονόπακτης δοκού



Φάσμα 54: Πλήγμα στη θέση $\xi = 0,9$ μονόπακτης δοκού



Σχολιασμός των φασμάτων απόκρισης μονόπακτης δοκού για τις διάφορες τιμές της θέσης του πλήγματος:

- Όσο πιο κοντά στην πάκτωση ή στην άρθρωση ασκείται το πλήγμα, τόσο πιο μικρές είναι οι τιμές των φασμάτων της δοκού.
- Σε όλα τα φάσματα είναι εμφανές ότι ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες στα άκρα της μονόπακτης δοκού: $v(0, \tau) = 0$, $\frac{\partial^2 v(0, \tau)}{\partial \xi^2} = 0$, $v(1, \tau) = 0$, $\frac{\partial^2 v(1, \tau)}{\partial \xi^2} = 0$.
- Και σε αυτά τα φάσματα για ορισμένες διάρκειες πλήγματος διεγείρονται περισσότερο κάποιες από τις ιδιομορφές της ελεύθερης ταλάντωσης. Για παράδειγμα, στο φάσμα 51 για διάρκεια πλήγματος $\tau \cong 4,5\bar{T}_1$ κυριαρχεί η έβδομη ιδιομορφή $\bar{\varphi}_7(\xi)$, ενώ στο φάσμα 54 για διάρκεια πλήγματος $\tau \cong 2,3\bar{T}_1$ κυριαρχεί η όγδοη ιδιομορφή $\bar{\varphi}_8(\xi)$. Αναλυτικός σχολιασμός του φαινομένου στο εδάφιο 3.6.2 του παρόντος κεφαλαίου.

3.6. Επίδραση της διάρκειας του πλήγματος στην απόκριση και στο φάσμα απόκρισης της δοκού

Η παραμετρική μελέτη αφορά την αμφιέρειστη δοκό.

3.6.1. Απόκριση

Οι τιμές των υπολοίπων παραμέτρων είναι:

- Είδος πλήγματος: ορθογωνικό.
- Θέση πλήγματος: $\xi = 0,7$.
- Μέγιστη τιμή της δύναμης του πλήγματος: $\bar{F}_0 = 1$.
- Χρονικό διάστημα μελέτης της ελεύθερης ταλάντωσης της χορδής μετά το πέρας του πλήγματος $4\bar{T}_1$.
- Κατανεμημένη μάζα του συστήματος: $\bar{m} = 0,05$.

Επισυνάπτονται τα σχετικά βίντεο:

| Όνομα αρχείου | Διάρκεια του πλήγματος |
|----------------------|-------------------------------|
| Βίντεο 49 | $0,5T_1$ |
| Βίντεο 50 | $0,7T_1$ |
| Βίντεο 51 | T_1 |
| Βίντεο 52 | $1,2T_1$ |
| Βίντεο 53 | $1,5T_1$ |

Σχολιασμός των βίντεο απόκρισης αμφιέρειστης δοκού για τις διάφορες τιμές της διάρκειας του πλήγματος:

Στα βίντεο 52 και 53 παρατηρείται η εξής εικόνα: η δοκός ταλαντώνεται στα θετικά, επιστρέφει στη θέση ισορροπίας, ταλαντώνεται εκ νέου στα θετικά και μετά αρχίζει η «αναμενόμενη» ελεύθερη ταλάντωσή της της, δηλαδή από τα θετικά στα αρνητικά και το αντίστροφο. Το πρώτο μέρος της κίνησης, δηλαδή η ταλάντωση στα θετικά και η επιστροφή στη θέση ισορροπίας, συμπίπτει χρονικά με την πρώτη ιδιοπερίοδο του συστήματος \bar{T}_1 . Η ταλάντωση εκ νέου στα θετικά οφείλεται στο ότι το πλήγμα εξακολουθεί να ασκείται, στο μεν βίντεο 52 για χρόνο $\tau = 0,2$, στο δε βίντεο 53 για χρόνο $\tau = 0,5$.

Στα βίντεο 49 και 50, όπου η διάρκεια του πλήγματος είναι μικρότερη από την πρώτη ιδιοπερίοδο του συστήματος δεν παρατηρείται κάτι ανάλογο, καθώς η ελεύθερη ταλάντωση της δοκού ξεκινά σε χρόνο μικρότερο της πρώτης ιδιοπεριόδου, δηλαδή τη χρονική στιγμή $\tau < \bar{T}_1$. Αντίστοιχα, στο βίντεο 48

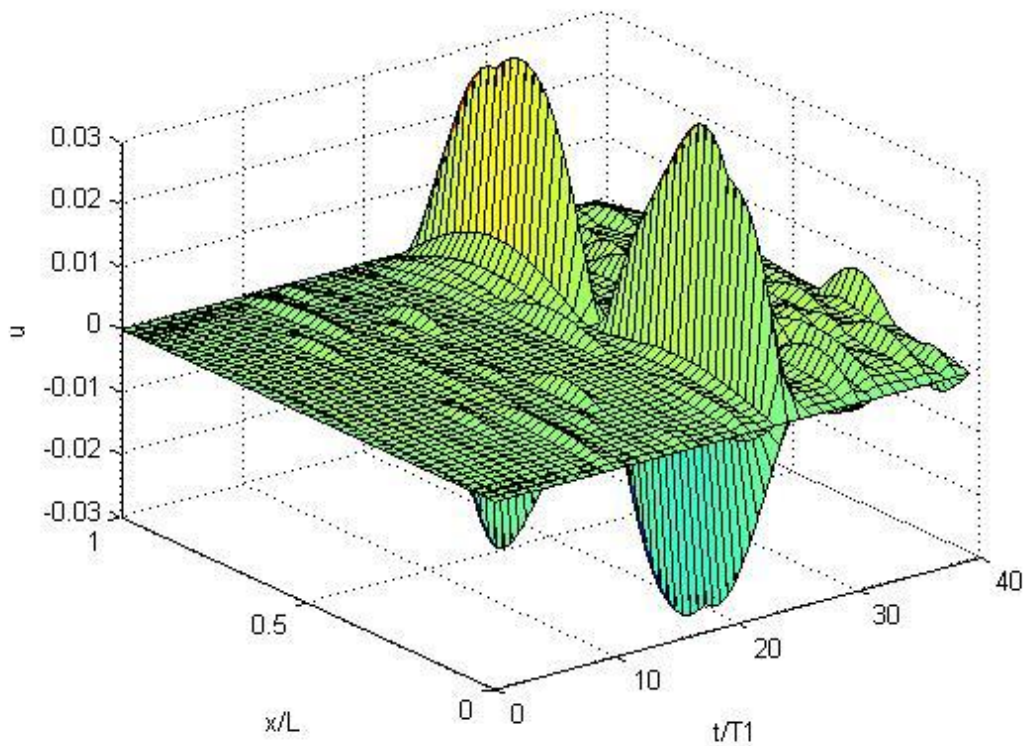
(διάρκεια πλήγματος ίση με \bar{T}_1) η εκκίνηση της ελεύθερης ταλάντωσης της δοκού συμπίπτει χρονικά με το πέρας του χρόνου \bar{T}_1 .

3.6.2. Φάσμα απόκρισης

Παρατίθεται φάσμα για τη μονόπακτη δοκό. Οι τιμές των υπόλοιπων παραμέτρων εδώ είναι:

- Θέση πλήγματος: $\xi = 0.7$.
- Μέγιστη τιμή της δύναμης του πλήγματος: $\bar{F}_0 = 1$.
- Διάρκεια πλήγματος ίση με σαράντα ιδιοπεριόδους του συστήματος, δηλαδή $40\bar{T}_1 = 40 \frac{2\pi}{\omega_1}$.
- Κατανεμημένη μάζα του συστήματος: $\bar{m} = 0,05$.

Φάσμα 55: Διάρκεια πλήγματος ίση με 40 ιδιοπεριόδους του συστήματος (μονόπακτη δοκός)



Σχολιασμός του φάσματος 55: Διάρκεια πλήγματος ίση με 40 ιδιοπεριόδους του συστήματος (μονόπακτη δοκός):

Για μεγάλες διάρκειες πλήγματος, $\tau > 10$, το πρόβλημα ισοδυναμεί με αυτό της εγκάρσιας φόρτισης δοκού με συνάρτηση βήματος, δηλαδή εξωτερικό συγκεντρωμένο φορτίο που περιγράφεται από τη σχέση $\bar{F}(t) = \bar{F}_0$. Είναι γνωστό πως η απόκριση σε αυτήν την περίπτωση είναι ημιτονοειδής.

Στο φάσμα παρατηρείται μια επαναληψιμότητα, ίσως και περιοδικότητα στην απόκριση της δοκού. Συγκεκριμένα, για κάποιες διάρκειες πλήγματος εμφανίζονται οι κανονικές ιδιομορφές $\bar{\varphi}_i(x)$. Για παράδειγμα, όταν το πλήγμα διαρκεί περίπου $\tau = 18\bar{T}_1$, τότε παρατηρείται διέγερση της δεύτερης ιδιομορφής $\bar{\varphi}_2(x)$, ενώ όταν το πλήγμα διαρκεί περίπου $\tau = 37\bar{T}_1$, παρατηρείται διέγερση της πέμπτης ιδιομορφής $\bar{\varphi}_5(x)$. Πρόκειται για στάσιμα κύματα που δημιουργούνται στη δοκό, τη συμβολή δηλαδή των κυμάτων που δημιουργεί το πλήγμα και αυτών που ανακλώνται στα άκρα της. Παρόμοια εικόνα παρουσιάζει το φάσμα και για τις υπόλοιπες περιπτώσεις οριακών συνθηκών.

Ακόμη, το πλάτος αυξάνει σημαντικά όσο αυξάνεται η διάρκεια του πλήγματος. Τούτο συμβαίνει επειδή στα σημεία εκείνα της δοκού συμβάλλουν τρία κύματα, άρα το πλάτος που εμφανίζεται είναι το διανυσματικό άθροισμα των πλατών των επιμέρους κυμάτων. Τα τρία αυτά κύματα είναι: εκείνο που προκαλείται από το πλήγμα, εκείνο που ανακλάται στην άρθρωση στο άκρο $\xi = 0$ και εκείνο που ανακλάται στην πάκτωση στο άκρο $\xi = 1$.

Είναι επίσης ενδιαφέρον ότι το σχήμα του φάσματος ποικίλει για τις διάφορες διάρκειες πλήγματος όπου παρατηρείται συντονισμός. Για παράδειγμα, για $\tau = 18\bar{T}_1$ (συντονισμός στη $\bar{\varphi}_2(x)$) το φάσμα έχει διπλές κορυφές, ενώ για $\tau = 37\bar{T}_1$ (συντονισμός στη $\bar{\varphi}_5(x)$) το φάσμα εμφανίζει μονές κορυφές.

Η μελέτη των φασμάτων απόκρισης για τόσο μεγάλες διάρκειες πλήγματος, ξεφεύγει από τους σκοπούς της παρούσας διπλωματικής εργασίας λόγω του ότι υπεισέρχεται το φαινόμενο της συμβολής κυμάτων και της δημιουργίας στάσιμων κυμάτων.

Συμπεράσματα

Από τη σύγκριση αποτελεσμάτων στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας, συμπεραίνεται καταρχήν ότι με τη χρήση των 10 πρώτων ιδιολύσεων του συστήματος στην έκφραση της απόκρισης παρέχεται ικανοποιητική ακρίβεια για την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων.

Για το ίδιο είδος πλήγματος, η μορφή των φασμάτων απόκρισης των συνεχών συστημάτων είναι η ίδια με τη μορφή των φασμάτων απόκρισης μονοβάθμιου ταλαντωτή.

Για μικρές διάρκειες πλήγματος, τα όλα τα φάσματα απόκρισης έχουν παρόμοια εικόνα. Για μεγαλύτερες διάρκειες πλήγματος όμως, όπως αναμένεται παρατηρούνται διαφοροποιήσεις ανάλογα με το είδος του πλήγματος τόσο στο θετικό όσο και στον αρνητικό του κλάδο. Στις περιπτώσεις του ορθογωνικού και του μειούμενου τριγωνικού πλήγματος, όπου το πλήγμα έχει εξαρχής τη μέγιστη ένταση, η θετική επιφάνεια του φάσματος έχει μια σταθερή ή σχεδόν σταθερή τιμή καθ' όλη τη διάρκεια του πλήγματος, ενώ η αρνητική επιφάνειά του είναι περιοδική με πλάτος σταθερό ή σχεδόν σταθερό και περίοδο ίση με την πρώτη ιδιοπερίοδο του συστήματος. Στις περιπτώσεις του αυξανόμενου και του ισοσκελούς τριγωνικού πλήγματος, και οι δύο επιφάνειες των φασμάτων εμφανίζουν περιοδικότητα με σταδιακή μείωση των μέγιστων τιμών του φάσματος και περίοδο στο μεν αυξανόμενο τριγωνικό ίση με την πρώτη ιδιοπερίοδο του συστήματος, στο δε ισοσκελές τριγωνικό διπλάσια. Τέλος, τα φάσματα του ημιτονοειδούς πλήγματος παρουσιάζουν την ίδια γενική εικόνα με αυτά του ισοσκελούς τριγωνικού, με τη διαφορά ότι η περίοδος επανάληψης της μορφής της αρνητικής επιφάνειας είναι μικρότερη.

Στα φάσματα και στα βίντεο απόκρισης των συνεχών συστημάτων παρατηρείται ότι κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες διεγείρονται περισσότερο κάποιες από τις ιδιομορφές της ελεύθερης ταλάντωσης έναντι των υπολοίπων. Σε αρκετές περιπτώσεις μάλιστα, κυριαρχεί μία μόνο ιδιομορφή. Το φαινόμενο αποδίδεται στον εκάστοτε συνδυασμό της διάρκειας του πλήγματος με τη θέση του συνεχούς συστήματος όπου ασκείται το πλήγμα και τις οριακές συνθήκες του συστήματος.

Η κατανεμημένη μάζα των συνεχών συστημάτων είναι φυσικό να επηρεάζει σημαντικά την απόκρισή τους. Όταν η τιμή της κατανεμημένης μάζας του συστήματος αυξάνεται, τότε αυξάνεται και η ιδιοπερίοδος τους συστήματος, με

αποτέλεσμα την πιο «αργή» κίνησή του κατά τη διάρκεια του πλήγματος, αλλά και μετά από αυτήν.

Τέλος, όπως αναμένεται, παρατηρήθηκε έντονη επίδραση των οριακών συνθηκών και της θέσης στην οποία ασκείται το πλήγμα τόσο στα φάσματα, όσο και στην απόκριση του συνεχούς συστήματος. Η απόκριση και τα φάσματα απόκρισης συστημάτων με σταθερά στερεωμένα άκρα έχουν πολύ μικρότερες τιμές σε σχέση με τις τιμές της απόκρισης και των φασμάτων συστημάτων στα οποία στο ένα άκρο υπάρχει συγκεντρωμένο ελατήριο ή συγκεντρωμένη μάζα και ακόμη περισσότερο όταν το ένα άκρο τους είναι ελεύθερο. Όταν το πλήγμα ασκείται κοντά σε κάποια στήριξη, οι τιμές της απόκρισης και των φασμάτων είναι κατά πολύ μικρότερες από την περίπτωση που το πλήγμα ασκείται μακριά από αυτές.

Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα

Από την εργασία αυτή προκύπτει ότι θέματα που θα μπορούσαν να αποτελέσουν αντικείμενο περαιτέρω μελέτης είναι τα εξής:

- Μελέτη των φασμάτων απόκρισης συνεχών συστημάτων λόγω κίνησης των στηρίξεών τους.
- Επίδραση της εξωτερικής και εσωτερικής απόσβεσης του συστήματος στην απόκρισή του και στα φάσματα απόκρισης.
- Ρύθμιση (control) της απόκρισης των συνεχών συστημάτων με τοποθέτηση δυναμικού αποσβεστήρα σε συγκεκριμένα σημεία τους.
- Χρήση αναλυτικών προσεγγιστικών μεθόδων για την κατασκευή φασμάτων απόκρισης συνεχών συστημάτων με μη σταθερές κατανομές μάζας και ακαμψίας.
- Κατασκευή και μελέτη των φασμάτων απόκρισης συνεχών συστημάτων δύο διαστάσεων (μεμβράνες, πλάκες).

Βιβλιογραφία

- [1] Timoshenko, S., Young, D. H., Weaver W. JR., *Vibration Problems in Engineering*, 4th ed., John Wiley and Sons, 1974
- [2] Meirovitch, L., *Elements of Vibration Analysis*, 2nd ed., McGraw – Hill, Inc., 1986
- [3] Clough, R. W., Penzien J., *Dynamics of Structures*, 3rd ed., Computers and Structures, Inc., USA, 2003
- [4] Harris, C. M., Crede C. E., *Shock and Vibration Handbook*, 3rd ed., McGraw – Hill, Inc., USA, 1998
- [5] Κατσικαδέλης, Ι. Θ., *Δυναμική των Κατασκευών*, Τόμος ΙΙ, εκδ. Συμμετρία, Αθήνα, 2002
- [6] Τόλης, Κ., *Φάσματα απόκρισης πολυβάθμιων Ταλαντωτών για Πλήγματα Διαφόρων Μορφών*, Διπλωματική Εργασία, Τομέας Μηχανικής, ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ, Αθήνα, 2009
- [7] Den Hartog, J., P., *Mechanical Vibrations*, Dover, USA, 1985
- [8] Rao, S., S., *Mechanical Vibrations*, Pearson Prendice Hall, USA, 2004
- [9] Thomson, W., T., *Theory of Vibration with Applications*, 4th ed., Prendice Hall, USA, 1993
- [10] Burden, R. L., Faires, J. D., Reynolds, A. C., *Numerical Analysis*, 2nd ed., Prindle, Weber & Schmidt, USA, 1981
- [11] Moler, C., B., *Numerical Computing with Matlab*, Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2004
- [12] Higham, D., J., Higham, N., J., *Matlab Guide*, 2nd ed., Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2005