



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Η προρρυθμισμένη μέθοδος των συζυγών
κλίσεων

Διπλωματική Εργασία

Γιάννης Μπάρτζης

Επιβλέπων : Χρυσάφινος Κωνσταντίνος, Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, 2024



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Η προρρυθμισμένη μέθοδος των συζυγών
κλίσεων

Διπλωματική Εργασία

Γιάννης Μπάρτζης

Εξεταστική Επιτροπή

Χρυσάφινος Κωνσταντίνος, Καθηγητής Ε.Μ.Π (επιβλέπων)

Γεωργούλης Εμμανουήλ, Καθηγητής Ε.Μ.Π

Κοκκίνης Βασίλειος, Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, 2024

Ευχαριστίες

Για τη διεκπεραίωση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κύριο Κωνσταντίνο Χρυσσαφίνο, τόσο για την ευκαιρία που μου έδωσε να εκπονήσω την εργασία αυτή όσο και για την επιλογή ενός θέματος που μου ταιριάζει και με έμαθε πάρα πολλά πάνω στο συγκεκριμένο αντικείμενο. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές που είχα κατά τη διάρκεια των φοιτητικών σπουδών μου στη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών (ΣΕΜΦΕ) και ιδιαίτερα του Τομέα Μαθηματικών, οι οποίοι μου έμαθαν πολλά και ταυτόχρονα σημαντικά πράγματα.

Ακόμα, θα ήθελα να πω ένα μεγάλο ευχαριστώ στους φίλους και τις φίλες που γνώρισα αυτά τα χρόνια και πέρασα μαζί τους υπέροχες στιγμές. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου και τον αδερφό μου, οι οποίοι με στήριξαν κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Περίληψη

Ο σκοπός της διπλωματικής αυτής εργασίας είναι η μελέτη της προρρυθμισμένης μεθόδου των συζυγών κλίσεων και πιο συγκεκριμένα, τους προρρυθμιστές της.

Στο πρώτο κεφάλαιο, εξηγούνται ορισμένες έννοιες από την Γραμμική Άλγεβρα, οι οποίες είναι απαραίτητες για την κατανόηση των επόμενων κεφαλαίων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, ορίζουμε επαναληπτικές μεθόδους μέσω των οποίων επιλύονται τα γραμμικά συστήματα. Επιπλέον, θα ορίσουμε τη μέθοδο των κλίσεων, καθώς και των συζυγών κλίσεων.

Στο τρίτο κεφάλαιο, θα αναλύσουμε το κύριο κομμάτι της διπλωματικής εργασίας. Θα ορίσουμε τους προρρυθμιστές και θα αναφερθούμε σε γνωστές μορφές προρρυθμιστών.

Στο τελευταίο κεφάλαιο, θα επιλύσουμε προβλήματα με τη βοήθεια του λογισμικού Octave-Matlab, με σκοπό να μελετήσουμε τη συμπεριφορά των προρρυθμιστών σε υπολογιστικά παραδείγματα.

Abstract

The aim of this diploma thesis is the study of preconditioned conjugate gradient method and more specifically its preconditioners.

At the first chapter, some basic definitions and preliminaries from the Linear Algebra will be introduced, which are necessary for the understanding of next chapters.

At the second chapter, we define iterative methods, which are also necessary for the analysis of the proposed methodology. Moreover, we will define the gradient method and the conjugate gradient method.

The third chapter focus on the main part of the diploma thesis. We will define the preconditioners and we will present its main properties.

Finally, at the last chapter, we will present numerical examples, using the software Octave-Matlab.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή στις βασικές έννοιες της Αριθμητικής Γραμμικής Άλγεβρας	1
1.1	Πίνακες	1
1.2	Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα	3
1.3	Νόρμα Διανύσματος	4
1.4	Νόρμα Πίνακα	6
1.5	Δείκτης Κατάστασης	8
1.6	Παραγοντοποίηση LU	9
1.7	Παραγοντοποίηση Cholesky	10
2	Γενικές επαναληπτικές μέθοδοι και η μέθοδος των συζυγών κλίσεων	12
2.1	Γενικές επαναληπτικές μέθοδοι	12
2.2	Οι μέθοδοι Jacobi, Gauss-Seidel και οι μέθοδοι χαλάρωσης	14
2.3	Η μέθοδος των κλίσεων	18
2.4	Η μέθοδος των συζυγών κλίσεων	21
3	Η προρρυθμισμένη μέθοδος των συζυγών κλίσεων	25
3.1	Εισαγωγή	25
3.2	Πολυωνυμικοί Προρρυθμιστές	28
3.2.1	Πολυώνυμα Neumann	28
3.2.2	Πολυώνυμα Chebyshev	29
3.3	Μη πλήρης παραγοντοποίηση LU	32
3.4	Μη πλήρης παραγοντοποίηση Cholesky	33
4	Υπολογιστικές Εφαρμογές	36
4.1	Επίλυση γραμμικού συστήματος με τριδιαγώνιο πίνακα	36
4.2	Επίλυση γραμμικού συστήματος με πίνακα Hilbert	49
4.3	Επίλυση γραμμικού συστήματος με τριδιαγώνιο πίνακα και παράμετρο ϵ	55
4.4	Επίλυση γραμμικού συστήματος με πενταδιαγώνιο πίνακα	64

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στις βασικές έννοιες της Αριθμητικής Γραμμικής Άλγεβρας

Σε αυτό το κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε ως πηγές τις [6], [7], [8], [13], [14] και [15].

1.1 Πίνακες

Πριν περάσουμε στο κύριο θέμα της εργασίας, οφείλουμε να παρουσιάσουμε ορισμένες έννοιες, οι οποίες είναι απαραίτητες για την εξήγηση της μεθόδου των συζυγών κλίσεων και ιδιαίτερα, της προρρυθμισμένης μεθόδου. Αυτές οι έννοιες προέρχονται από τον κλάδο της Γραμμικής Άλγεβρας. Πιο συγκεκριμένα, θα παρουσιάσουμε ορισμούς, οι οποίοι έχουν σχέση με τους Πίνακες.

Ορισμός 1.1. Ορίζουμε τον πίνακα A με διαστάσεις $m \times n$ ως την ορθογώνια διάταξη, η οποία αποτελείται από m γραμμές και n στήλες. Το στοιχείο της i -γραμμής και της j -στήλης συμβολίζεται με $\alpha_{ij} \forall i = 1, \dots, m$ και $\forall j = 1, \dots, n$, δηλαδή ο πίνακας είναι της μορφής:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}.$$

Τα στοιχεία $\{\alpha_{ij}\}$ ανήκουν σε έναν χώρο K , ο οποίος συνήθως είναι ο \mathbb{R} (ο χώρος των πραγματικών αριθμών) ή ο \mathbb{C} (ο χώρος των μιγαδικών αριθμών). Άρα, ένας

πίνακας θα είναι πραγματικός, μιγαδικός ή φανταστικός (το πραγματικό τους μέρος είναι ίσο με 0). Με άλλα λόγια, ο πίνακας A θα ανήκει στους χώρους $\mathbb{R}^{m \times n}$ και $\mathbb{C}^{m \times n}$ αντίστοιχα.

Ορισμός 1.2. Αν ισχύει ότι $m = n$, τότε λέμε ότι ο πίνακας A είναι τετραγωνικός.

Ορισμός 1.3. Ένας τετραγωνικός πίνακας A καλείται διαγώνιος αν τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του είναι μη μηδενικά και τα υπόλοιπα είναι ίσα με μηδέν. Όταν όλα τα στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν, ο τετραγωνικός πίνακας θα λέγεται κάτω-τριγωνικός ενώ αντίστοιχα άνω-τριγωνικός όταν όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν. Τέλος, ορίζουμε ως μοναδιαίο (συμβολίζεται με I) τον τετραγωνικό πίνακα, του οποίου τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου είναι ίσα με τη μονάδα.

Ορισμός 1.4. Ένας τετραγωνικός πίνακας A τάξης n θα είναι αντιστρέψιμος αν υπάρχει πίνακας B τάξης n τέτοιος ώστε $AB = BA = I$. Ο πίνακας B θα λέγεται αντίστροφος του A και θα συμβολίζεται με A^{-1} .

Ο αντιστρέψιμος πίνακας του A θα είναι επίσης αντιστρέψιμος και θα ισχύει $(A^{-1})^{-1} = A$. Αν δύο πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι, τότε το γινόμενο τους AB θα είναι επίσης αντιστρέψιμο και θα ισχύει ότι $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Ορισμός 1.5. Ορίζουμε τον πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Ως ανάστροφό του, θα ορίσουμε τον πίνακα που έχει διαστάσεις $n \times m$ και θα συμβολίζεται με A^T , του οποίου οι γραμμές και οι στήλες αντιμετατίθενται.

Παράδειγμα 1.1. Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 6 & 9 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ έχει ως ανάστροφο τον πίνακα

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 7 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & 5 \\ -4 & 9 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ορισμός 1.6. Ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι συμμετρικός αν $A^T = A$ και αντισυμμετρικός αν $A^T = -A$.

Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες ισχύει ότι: $A^{-1} = A^T$. Τότε ο πίνακας ονομάζεται ορθογώνιος και ικανοποιεί τη σχέση:

$$AA^T = A^T A = I.$$

Ορισμός 1.7. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ λέγεται θετικά ορισμένος αν

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq 0$$

και θετικά ημιορισμένος αν

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Παράδειγμα 1.2. Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ και το διάνυσμα $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ μη μηδενικό διάνυσμα. Τότε:

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2x_1^2 + 3x_2^2 > 0, \forall \mathbf{x} \neq 0.$$

Άρα ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένος.

1.2 Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα παίζουν ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στην ανάλυση αριθμητικών μεθόδων καθώς αποτελούν καινούρια εργαλεία για τη μελέτη ιδιοτήτων σύγκλισης.

Ορισμός 1.8. Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας A τάξης n , ο οποίος δέχεται πραγματικές ή μιγαδικές τιμές. Ο αριθμός $\lambda \in \mathbb{C}$ θα ονομάζεται ιδιοτιμή του πίνακα A αν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ τέτοιο ώστε

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Το διάνυσμα \mathbf{x} καλείται ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ . Το ζεύγος (λ, \mathbf{x}) ονομάζεται ιδιοζεύγος του A . Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A ονομάζονται χαρακτηριστικά ποσά του A .

Για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών του A , θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0,$$

όπου $p_A(\lambda)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Αφού αυτό το πολυώνυμο θα είναι n βαθμού, θα υπάρχουν n ιδιοτιμές του A .

Παράδειγμα 1.3. Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A θα είναι:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(3 - \lambda).$$

Παρατηρούμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 3$. Για $\lambda_1 = 1$ το διάνυσμα $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) είναι το ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$. Για $\lambda_2 = 3$ το διάνυσμα $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) είναι το ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$.

Ορισμός 1.9. Ορίζουμε ως φάσμα ενός πίνακα A το σύνολο των ιδιοτιμών ενός τετραγωνικού πίνακα A και γράφεται

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0\}.$$

Ορισμός 1.10. Ορίζουμε ως φασματική ακτίνα ενός πίνακα A την μέγιστη ιδιοτιμή του πίνακα A και γράφεται

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Στο Παράδειγμα 1.3 το $\sigma(A)$ είναι το $\{1, 3\}$ και το $\rho(A)$ είναι ίσο με 3.

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω διαδικασία εύρεσης ιδιοτιμών μέσω του χαρακτηριστικού πολυωνύμου δεν μπορεί να εφαρμοστεί στην πράξη καθώς δεν είναι εφικτός ο υπολογισμός των ριζών του $p_A(\lambda)$

1.3 Νόρμα Διανύσματος

Ορισμός 1.11. Η νόρμα ενός διανύσματος $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (συμβολίζεται με $\|\mathbf{x}\|$) είναι μία συνάρτηση από το \mathbb{R}^n στο \mathbb{R} , η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

- i) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- ii) $\|c\mathbf{x}\| = |c|\|\mathbf{x}\|$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$.
- iii) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Παρατηρούμε ότι η ισότητα της τρίτης ιδιότητας θα ισχύει στην περίπτωση που τα διανύσματα \mathbf{x} και \mathbf{y} είναι συγγραμμικά, δηλαδή θα υπάρχει ένα $\lambda \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}$.

Για όσα θα αναφέρουμε στη συνέχεια, θα χρειαστούμε τις νόρμες-p, οι οποίες ορίζονται ως:

$$\|\mathbf{x}\|_p = (x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

Οι πιο συνηθισμένες μορφές είναι για $p = 1, 2$ και ∞ :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\|_1 &= |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|, \\ \|\mathbf{x}\|_2 &= (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}, \\ \|\mathbf{x}\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.\end{aligned}$$

Για τις νόρμες- p ισχύει η ανισότητα Hölder:

$$|\mathbf{x}^T \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Μία ειδική περίπτωση της προηγούμενης ανισότητας αποτελεί η ανισότητα Cauchy-Schwarz (για $p = q = 2$):

$$|\mathbf{x}^T \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2.$$

Ισχύει ότι όλες οι νόρμες στον \mathbb{R}^n είναι ισοδύναμες. Με άλλα λόγια, δύο νόρμες $\|\cdot\|_\alpha$ και $\|\cdot\|_\beta$ θα είναι ισοδύναμες αν υπάρχουν c_1, c_2 τέτοια ώστε:

$$c_1 \|\mathbf{x}\|_\alpha \leq \|\mathbf{x}\|_\beta \leq c_2 \|\mathbf{x}\|_\alpha.$$

Οι πιο χαρακτηριστικές ανισότητες όπως η προηγούμενη είναι οι εξής:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\|_2 &\leq c \|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n} \|\mathbf{x}\|_2, \\ \|\mathbf{x}\|_\infty &\leq c \|\mathbf{x}\|_1 \leq n \|\mathbf{x}\|_\infty, \\ \|\mathbf{x}\|_\infty &\leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n} \|\mathbf{x}\|_\infty.\end{aligned}$$

Ιδιότητα 1.1. Έστω $\|\cdot\|$ μία νόρμα ορισμένη σε έναν χώρο V πεπερασμένης διάστασης. Τότε η $\|\cdot\|$ ορίζει μία συνεχή συνάρτηση, δηλαδή $\forall \epsilon > 0, \exists C > 0$ τέτοιο ώστε

$$\text{αν } \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| < \epsilon \text{ τότε } \left| \|\mathbf{x}\| - \|\hat{\mathbf{x}}\| \right| < C\epsilon, \quad \forall \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}} \in V.$$

Ιδιότητα 1.2. Έστω $\|\cdot\|$ μία νόρμα ορισμένη σε έναν χώρο V πεπερασμένης διάστασης. Τότε

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x} \iff \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| = 0,$$

όπου $\mathbf{x} \in V$, με $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ μία ακολουθία στοιχείων του χώρου V .

Παρατήρηση: Αν η σύγκλιση είναι σε χώρους πεπερασμένης διάστασης, τότε έχουμε σύγκλιση ως προς κάθε άλλη νόρμα. Επίσης, σε χώρους άπειρης διάστασης δεν ισχύει η ισοδυναμία των νορμών.

1.4 Νόρμα Πίνακα

Εκτός από τη νόρμα του διανύσματος, θα αναλύσουμε και την έννοια της νόρμας του πίνακα η οποία είναι χρήσιμη στα όσα θα αναφερθούμε στη συνέχεια.

Ορισμός 1.12. Η νόρμα ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (συμβολίζεται με $\|A\|$) είναι μία συνάρτηση από το \mathbb{R}^n στο \mathbb{R} , η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

i) $\|A\| \geq 0$, $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$.

ii) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$, $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \alpha \in \mathbb{R}$.

iii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, $\forall A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Ορισμός 1.13. Μία νόρμα πίνακα $\|\cdot\|$ είναι συμβατή ως προς τη διανυσματική νόρμα $\|\cdot\|$ αν ισχύει ότι:

$$\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\|.$$

Ορισμός 1.14. Μία νόρμα πίνακα $\|\cdot\|$ είναι υποπολλαπλασιαστική αν $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\forall B \in \mathbb{R}^{m \times q}$ ισχύει ότι:

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Αυτή η σχέση δεν ισχύει για όλες τις νόρμες πίνακα. Για παράδειγμα, αν ορίσουμε τη νόρμα $\|A\|_{\Delta} = \max |\alpha_{ij}|$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, παρατηρούμε ότι η παραπάνω σχέση δεν ικανοποιείται αν ορίσουμε τους πίνακες

$$A = B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

διότι $2 = \|AB\|_{\Delta} > \|A\|_{\Delta} \|B\|_{\Delta} = 1$.

Θεώρημα 1.1. Έστω $\|\cdot\|$ διανυσματική νόρμα. Τότε η συνάρτηση $\|A\| = \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$ ορίζει νόρμα πίνακα και ονομάζεται φυσική νόρμα πίνακα.

Απόδειξη. 1. Ισχύει $\|A\mathbf{x}\| \geq 0 \forall \mathbf{x}$. Άρα: $\|A\| = \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \|A\mathbf{x}\| \geq 0$. Επίσης,

$$\|A\| = \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0 \Leftrightarrow \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0 \forall \mathbf{x} \neq 0$$

και $A\mathbf{x} = 0 \forall \mathbf{x} \neq 0$ αν και μόνο εάν $A = 0$. Με άλλα λόγια προκύπτει ότι

$$\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0.$$

2. Για τυχαίο α , προκύπτει ότι :

$$\|\alpha A\| = \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\alpha A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = |\alpha| \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = |\alpha| \|A\|.$$

3. Αν $\mathbf{x} \neq 0$, τότε $\frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|A\| \Rightarrow \|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\|$. Αν πάρουμε τη νόρμα θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \|(A+B)\| &= \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|(A+B)\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\| + \|B\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|A\| \|\mathbf{x}\| + \|B\| \|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \\ &= \|A\| + \|B\|. \end{aligned}$$

Οι τρεις παραπάνω ιδιότητες αποδεικνύουν το ζητούμενο. \square

Μπορούμε να ορίσουμε τις p φυσικές νόρμες πίνακα ως:

$$\|A\|_p = \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p}.$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι ([8], Κεφάλαιο 1, σελ. 24):

$$\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^m |\alpha_{ij}|, \quad \|A\|_2 = \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \quad \text{και} \quad \|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|.$$

Για έναν πίνακα A θα ισχύει $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$. Αν είναι συμμετρικός θα έχουμε $\|A\|_2 = \rho(A)$ και αν είναι ορθογώνιος $\|A\|_2 = 1$.

Όπως συναντήσαμε ισοδυναμίες στις νόρμες διανυσμάτων, έτσι υπάρχουν ισοδυναμίες και στις νόρμες πινάκων ([8], Κεφάλαιο 1, σελ. 25), δηλαδή:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty &\leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_\infty, \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_1 &\leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1, \\ \|A\|_2 &\leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}. \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Η ισοδυναμία των νορμών των πινάκων ισχύει μόνο για πεπερασμένους χώρους διάστασης και όχι για απειροδιάστατους.

Θεώρημα 1.2. Έστω ότι $\|\cdot\|$ μία συνεπής νόρμα πίνακα. Τότε θα ισχύει $\rho(A) \leq \|A\|$, $\forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Απόδειξη. Έστω λ ιδιοτιμή του πίνακα A και $\mathbf{u} \neq 0$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Τότε

$$\|\lambda \mathbf{u}\| = |\lambda| \|\mathbf{u}\| = \|A\mathbf{u}\| \leq \|A\| \|\mathbf{u}\|.$$

Δηλαδή $|\lambda| \leq \|A\| \forall \lambda$. Άρα $\rho(A) = \max|\lambda| \leq \|A\|$. □

Ιδιότητα 1.3. Έστω $\{A^{(k)}\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ μία ακολουθία πινάκων. Θα λέμε ότι συγκλίνει σε έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ αν

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^{(k)} - A\| = 0.$$

Θεώρημα 1.3. ([8], Κεφάλαιο 1, σελ. 26) Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας. Τότε θα ισχύει

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0 \iff \rho(A) < 1.$$

1.5 Δείκτης Κατάστασης

Ο δείκτης κατάστασης ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ορίζεται ως:

$$K(A) = \|A\| \|A^{-1}\|.$$

Ο δείκτης κατάστασης $K(A)$ εξαρτάται από τη νόρμα που θα διαλέξουμε. Για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα A θα ισχύει ότι $K(A) \geq 1$ διότι

$$K(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \geq \|AA^{-1}\| = \|I\| = 1.$$

Λήμμα 1.1. Αν ο πίνακας A είναι ορθογώνιος, τότε $K(A) = 1$.

Απόδειξη. Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \|A\|_2 &= \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{\rho(I)} = 1 \text{ και} \\ \|A^{-1}\|_2 &= \|A^T\|_2 = \sqrt{\rho((A^T)^T A^T)} = \sqrt{\rho(AA^T)} = \sqrt{\rho(I)} = 1. \end{aligned}$$

Άρα, προκύπτει ότι:

$$K(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = 1.$$

□

Λήμμα 1.2. ([14], Διάλεξη 3, σελ. 1) Έστω ένας πίνακας A συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Τότε $K(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$.

Απόδειξη. Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}\|A\|_2 &= \rho(A) = \max\{\lambda, \lambda: \text{ιδιοτιμή του } A\} = \lambda_{\max} \text{ και} \\ \|A^{-1}\|_2 &= \rho(A^{-1}) = \frac{1}{\lambda_{\min}} \text{ (επειδή είναι θετικά ορισμένος, θα ισχύει} \\ &0 < \lambda_{\min} < \lambda_{\max} \Rightarrow \frac{1}{\lambda_{\min}} > \frac{1}{\lambda_{\max}} > 0).\end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι:

$$K(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}.$$

□

1.6 Παραγοντοποίηση LU

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται μία βασική μέθοδος επίλυσης γραμμικού συστήματος που βασίζεται στη μέθοδο απαλοιφής Gauss. Η παραγοντοποίηση LU (LU decomposition) αφορά τους τετραγωνικούς πίνακες και είναι της μορφής $A = LU$, όπου L ο κάτω τριγωνικός πίνακας με τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου ίσα με τη μονάδα και U ο άνω τριγωνικός πίνακας. Αυτή η παραγοντοποίηση είναι χρήσιμη για την επίλυση γραμμικών συστημάτων. Πιο συγκεκριμένα:

$$\begin{aligned}A\mathbf{x} &= b \Leftrightarrow \\ (LU)\mathbf{x} &= b \Leftrightarrow \\ L(U\mathbf{x}) &= b \Leftrightarrow \\ L\mathbf{y} &= b, \quad \mathbf{y} = U\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Το παραπάνω σύστημα λύνεται πιο εύκολα με την παραγοντοποίηση LU καθώς πρώτα λύνουμε το σύστημα $L\mathbf{y} = b$ και στη συνέχεια το $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Ο πίνακας L προκύπτει από τα στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν για την απαλοιφή Gauss.

Παράδειγμα 1.4. ([6], Κεφάλαιο 11, σελ. 205) Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$A\mathbf{x} = b, \text{ με } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ με την παραγοντοποίηση } LU.$$

Αρχικά, παίρνουμε τον πίνακα A και με τις κατάλληλες γραμμοπράξεις τον μετατρέπουμε σε άνω τριγωνικό, δηλαδή μέσω της διαδικασίας απαλοιφής Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -33 \end{bmatrix}.$$

Ο παραπάνω πίνακας θα είναι ο U (είναι άνω τριγωνικός) και ο L θα είναι ο:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι $LU = A$. Με βάση τα παραπάνω, θα πρέπει να βρούμε το διάνυσμα \mathbf{y} από το σύστημα:

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ 2y_1 + y_2 \\ 3y_1 - 5y_2 + y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Προκύπτει ότι $y_1 = 1$, $y_2 = 1$ και $y_3 = 3$. Για να βρούμε τη λύση του συστήματος, θα πρέπει:

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 3x_3 \\ -x_2 - 5x_3 \\ -33x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Η λύση του συστήματος είναι το διάνυσμα $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{8}{11} & -\frac{6}{11} & -\frac{1}{11} \end{bmatrix}^T$.

1.7 Παραγοντοποίηση Cholesky

Θεώρημα 1.4. ([7], Κεφάλαιο 4, σελ. 163) Αν ο τετραγωνικός πίνακας A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, τότε υπάρχει κάτω τριγωνικός πίνακας L με θετικά διαγώνια στοιχεία έτσι ώστε $A = LL^T$.

Αυτή η διαδικασία ονομάζεται παραγοντοποίηση Cholesky (Cholesky decomposition), η οποία πήρε το όνομά της από τον Γάλλο μαθηματικό André Cholesky και ο πίνακας L ονομάζεται παράγοντας Cholesky. Το γραμμικό σύστημα $A\mathbf{x} = b$ γράφεται ισοδύναμα ως:

$$\begin{aligned}(LL^T)\mathbf{x} &= b \Leftrightarrow \\ L(L^T\mathbf{x}) &= b.\end{aligned}$$

Επομένως, αρκεί να επιλύσουμε δύο συστήματα σχετικά με έναν κάτω τριγωνικό πίνακα L , το $L\mathbf{y} = b$ και με έναν άνω τριγωνικό πίνακα L^T , το $L^T\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Παρατηρούμε ότι η παραγοντοποίηση Cholesky αποτελεί μία ειδική περίπτωση της παραγοντοποίησης LU, καθώς $U = L^T$.

Παράδειγμα 1.5. ([14], Διάλεξη 6, σελ. 8) Έστω ότι έχουμε έναν συμμετρικό και θετικά ορισμένο πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Σκοπός μας είναι να τον παραγοντοποιήσουμε με τη μέθοδο Cholesky. Επομένως, θα ισχύει ότι:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{12} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{1n} & l_{2n} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1n} \\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}.$$

Κάνοντας τις απαραίτητες πράξεις, αποδεικνύεται ότι:

$$\begin{aligned}l_{ii} &= \sqrt{\alpha_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2} \text{ και} \\ l_{ij} &= \frac{\alpha_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}l_{jk}}{l_{jj}}, \text{ για } i > j.\end{aligned}$$

Κεφάλαιο 2

Γενικές επαναληπτικές μέθοδοι και η μέθοδος των συζυγών κλίσεων

Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι η μελέτη της μεθόδου των συζυγών κλίσεων, η οποία προτάθηκε από τους μαθηματικούς Magnus Hestenes και Eduard Stiefel το έτος 1952 και εφαρμόζεται στα συμμετρικά και θετικά ορισμένα συστήματα. Αυτή η μέθοδος μας ενδιαφέρει επειδή αποτελεί μία επαναληπτική μέθοδο για την επίλυση μεγάλων γραμμικών συστημάτων η οποία αποτελεί τη βάση για τον ορισμό της προ-ρυθμισμένης μεθόδου, η οποία θα μελετηθεί στο επόμενο κεφάλαιο. Σε αυτό το κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε ως πηγές τις [1], [2], [4], [7], [8], [9] και [14].

2.1 Γενικές επαναληπτικές μέθοδοι

Πριν ξεκινήσουμε τη μελέτη της μεθόδου αυτής, θα παρουσιάσουμε συνοπτικά τη θεωρία των γενικών επαναληπτικών μεθόδων.

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε το γραμμικό σύστημα $A\mathbf{x} = b$. Θα χωρίσουμε τον πίνακα A στη μορφή $A = P - N$, όπου οι P, N είναι πίνακες και ο P θα πρέπει να είναι αντιστρέψιμος. Για γνωστό $\mathbf{x}^{(0)}$ μπορούμε να υπολογίσουμε το $\mathbf{x}^{(k)} \forall k \geq 1$, λύνοντας το σύστημα

$$P\mathbf{x}^{(k+1)} = N\mathbf{x}^{(k)} + b. \quad (2.1)$$

Ο πίνακας επανάληψης αυτής της μεθόδου είναι ο

$$B = P^{-1}N = P^{-1}(P - A) = I - P^{-1}A. \quad (2.2)$$

Ισοδύναμα, η σχέση (2.1) μπορεί να γραφτεί με τη βοήθεια της σχέσης (2.2) ως

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + f, \quad f = P^{-1}b. \quad (2.3)$$

Ακόμα, το σύστημα μπορεί να γραφτεί με τη βοήθεια των σχέσεων (2.1) και (2.2) στην παρακάτω μορφή:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(k+1)} &= P^{-1}N\mathbf{x}^{(k)} + P^{-1}b \\
&= (I - P^{-1}A)\mathbf{x}^{(k)} + P^{-1}b \\
&= \mathbf{x}^{(k)} - P^{-1}A\mathbf{x}^{(k)} + P^{-1}b \\
&= \mathbf{x}^{(k)} + P^{-1}(b - A\mathbf{x}^{(k)}) \\
&= \mathbf{x}^{(k)} + P^{-1}\mathbf{r}^{(k)},
\end{aligned}
\tag{2.4}$$

όπου ως $\mathbf{r}^{(k)} = b - A\mathbf{x}^{(k)}$ ορίζεται το υπόλοιπο στο βήμα k .

Ορίζουμε ως σφάλμα του k -βήματος τη σχέση $\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}$. Για να συγκλίνει η επαναληπτική μέθοδος, θα πρέπει $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{e}^{(k)} = 0$ για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη $\mathbf{x}^{(0)}$.

Θεώρημα 2.1. ([8], Κεφάλαιο 4, σελ. 126) Έστω B ένας τετραγωνικός πίνακας. Τότε η μέθοδος θα είναι συγκλίνουσα για οποιαδήποτε $\mathbf{x}^{(0)}$ αν και μόνο εάν $\rho(B) < 1$.

Απόδειξη. Ισχύει ότι $\mathbf{e}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x} = B(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}) = B\mathbf{e}^{(k)}$. Τότε, εύκολα προκύπτει ότι

$$\mathbf{e}^{(k)} = B^k \mathbf{e}^{(0)}, \forall k = 0, 1, \dots$$

Από το **Θεώρημα 1.3** θα ισχύει ότι $\lim_{k \rightarrow \infty} B^k \mathbf{e}^{(0)} = 0$ για οποιαδήποτε $\mathbf{e}^{(0)}$ αν και μόνο εάν $\rho(B) < 1$.

Αν $\rho(B) > 1$, τότε θα υπάρχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή λ με μέτρο μεγαλύτερο της μονάδας. Αν το $\mathbf{e}^{(0)}$ είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ , θα ισχύει ότι $B\mathbf{e}^{(0)} = \lambda\mathbf{e}^{(0)}$ και επομένως $\mathbf{e}^{(k)} = \lambda^k \mathbf{e}^{(0)}$.

Ωστόσο, το $\mathbf{e}^{(k)}$ δεν θα συγκλίνει στο μηδέν, αφού $|\lambda| > 1$. □

Θεώρημα 2.2. ([9], Κεφάλαιο 4, σελ. 104) Έστω B ένας τετραγωνικός πίνακας τέτοιος ώστε $\rho(B) < 1$. Τότε ο πίνακας $I - B$ είναι αντιστρέψιμος και η σχέση (2.3) θα συγκλίνει για οποιαδήποτε αρχική επανάληψη $\mathbf{x}^{(0)}$. Αντίστροφα, αν η σχέση (2.3) συγκλίνει για οποιαδήποτε f και $\mathbf{x}^{(0)}$, τότε $\rho(B) < 1$.

Ιδιότητα 2.1. ([8], Κεφάλαιο 4, σελ. 128) Έστω $A = P - N$, όπου A, P είναι συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι πίνακες. Αν ο πίνακας $2P - A$ είναι θετικά ορισμένος, τότε η επαναληπτική μέθοδος θα είναι συγκλίνουσα για οποιαδήποτε αρχική επανάληψη $\mathbf{x}^{(0)}$ και επιπλέον θα ισχύει

$$\rho(B) = \|B\|_A = \|B\|_P < 1.$$

Ιδιότητα 2.2. ([8], Κεφάλαιο 4, σελ. 128) Έστω $A = P - N$, όπου A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας. Αν ο πίνακας $P + P^T - A$ είναι θετικά ορισμένος, τότε ο πίνακας P θα είναι αντιστρέψιμος και η επαναληπτική μέθοδος θα είναι συγκλίνουσα ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_A$ και επιπλέον θα ισχύει ότι

$$\rho(B) \leq \|B\|_A < 1.$$

Οι ιδιότητες θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια για τη σύγκλιση των μεθόδων Jacobi και Gauss-Seidel.

2.2 Οι μέθοδοι Jacobi, Gauss-Seidel και οι μέθοδοι χαλάρωσης

Οι πιο γνωστές επαναληπτικές μέθοδοι είναι η μέθοδος Jacobi και η μέθοδος Gauss-Seidel. Για τη μέθοδο Jacobi θα ισχύει ότι:

$$P = D \text{ και } N = P - A = -(L + U),$$

όπου D ο διαγώνιος πίνακας με τα διαγώνια στοιχεία του A , L ο κάτω τριγωνικός πίνακας με στοιχεία, τα στοιχεία του A που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο και U ο άνω τριγωνικός πίνακας με στοιχεία, τα στοιχεία του A που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο. Ο πίνακας P θα είναι αντιστρέψιμος εάν

$$\det(P) = \det(D) = \alpha_{11} * \alpha_{22} * \dots * \alpha_{nn} \neq 0.$$

Επομένως, για να οριστεί η μέθοδος Jacobi, θα πρέπει $\alpha_{ii} \neq 0, \forall i = 1, \dots, n$. Ο πίνακας επανάληψης για τη μέθοδο Jacobi θα είναι ο

$$B_J = -D^{-1}(L + U) = I - D^{-1}A. \quad (2.5)$$

Για τη μέθοδο Gauss-Seidel θα ισχύει ότι:

$$P = L + D \text{ και } N = P - A = -U.$$

Ο πίνακας επανάληψης για τη μέθοδο Gauss-Seidel θα είναι ο

$$B_{GS} = -(L + D)^{-1}U = I - (L + D)^{-1}A. \quad (2.6)$$

Θεώρημα 2.3. ([7], Κεφάλαιο 11, σελ. 615) Αν ο πίνακας A παρουσιάζει διαγώνια υπεροχή κατά γραμμές, τότε οι μέθοδοι *Jacobi* και *Gauss-Seidel* είναι συγκλίνουσες.

Απόδειξη. Αφού $B_J = -D^{-1}(L + U)$ τότε θα ισχύει ότι

$$\|B_J\|_\infty = \|D^{-1}(L + U)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}} |\frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ii}}| < 1,$$

δηλαδή η μέθοδος *Jacobi* είναι συγκλίνουσα. Με τον ίδιο τρόπο, προκύπτει η σύγκλιση της μεθόδου *Gauss-Seidel*. \square

Θεώρημα 2.4. ([8], Κεφάλαιο 4, σελ. 131) Αν οι πίνακες A και $2D - A$ είναι συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι, τότε η μέθοδος *Jacobi* είναι συγκλίνουσα και $\rho(B_J) = \|B_J\|_A = \|B_J\|_D$.

Απόδειξη. Από την **Ιδιότητα 2.1**, ισχύει το **Θεώρημα 2.4** για $P = D$. \square

Θεώρημα 2.5. ([8], Κεφάλαιο 4, σελ. 131) Αν ο πίνακας A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, τότε η μέθοδος *Gauss-Seidel* είναι συγκλίνουσα ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_A$.

Απόδειξη. Ισχύει ότι:

$$P + P^T - A = D + L + D + U - A = D$$

αφού $P^T = D + U$. \square

Ορισμός 2.1. ([8], Κεφάλαιο 4, σελ. 129) Ορίζουμε ως μέθοδο χαλάρωσης *Jacobi* (*JOR*) με παράμετρο χαλάρωσης $\omega \in (0, 2)$ την εξίσωση:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \omega D^{-1} \mathbf{r}^{(k)}. \quad (2.7)$$

Πρόκειται για μία μέθοδο, στην οποία πολλαπλασιάζουμε τον όρο διόρθωσης (το γινόμενο του πίνακα D με το υπόλοιπο $\mathbf{r}^{(k)}$) με την παράμετρο χαλάρωσης. Αν αναπτύξουμε την παραπάνω επαναληπτική μέθοδο, τότε:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \omega D^{-1} \mathbf{r}^{(k)} \\ &= \mathbf{x}^{(k)} + \omega D^{-1} (b - A\mathbf{x}^{(k)}) \\ &= \mathbf{x}^{(k)} + \omega D^{-1} b - \omega D^{-1} A\mathbf{x}^{(k)} \\ &= (I - \omega D^{-1} A)\mathbf{x}^{(k)} + \omega D^{-1} b. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας επανάληψης αυτής της μεθόδου είναι ο

$$B_J(\omega) = I - \omega D^{-1}A. \quad (2.8)$$

Για $\omega = 1$ προκύπτει η μέθοδος Jacobi. Αν συνεχίσουμε το ανάπτυγμα του πίνακα επανάληψης της μεθόδου JOR, προκύπτει ότι:

$$B_J(\omega) = (1 - \omega)I + \omega B_J. \quad (2.9)$$

Με την παραπάνω εξίσωση, προκύπτει ότι υπάρχει σχέση μεταξύ των επαναληπτικών μεθόδων Jacobi και JOR.

Για τη μέθοδο Gauss-Seidel, η επαναληπτική μέθοδος θα είναι της μορφής:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}[b - L\mathbf{x}^{(k+1)} - (D + U)\mathbf{x}^{(k)}], \quad (2.10)$$

δηλαδή ο όρος διόρθωσης της μεθόδου Gauss-Seidel είναι διαφορετικός από το $\mathbf{r}^{(k)}$. Άρα, η αντίστοιχη μέθοδος χαλάρωσης της Gauss-Seidel ή αλλιώς μέθοδος χαλάρωσης SOR θα είναι της μορφής:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \omega D^{-1}[b - L\mathbf{x}^{(k+1)} - (D + U)\mathbf{x}^{(k)}].$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι ο πίνακας επανάληψης της μεθόδου χαλάρωσης SOR θα είναι της μορφής:

$$B_{GS}(\omega) = (I + \omega D^{-1}L)^{-1}[(1 - \omega)I - \omega D^{-1}U]. \quad (2.11)$$

Το πρόβλημα που αντιμετωπίζουν οι μέθοδοι χαλάρωσης είναι ποιο ω θα πρέπει να διαλέξουμε κάθε φορά, ώστε αυτές οι μέθοδοι να συγκλίνουν στη λύση του προβλήματος. Για τον λόγο αυτό, θα αναφερθούμε σε θεωρήματα και ιδιότητες, τα οποία εξηγούν σε ποιες περιπτώσεις συγκλίνουν οι JOR και SOR, καθώς και σε ποιες τιμές κυμαίνεται το ω .

Θεώρημα 2.6. ([8], Κεφάλαιο 4, σελ. 131) Αν ο πίνακας A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, τότε η μέθοδος JOR θα είναι συγκλίνουσα αν $0 < \omega < \frac{2}{\rho(D^{-1}A)}$.

Θεώρημα 2.7. ([8], Κεφάλαιο 4, σελ. 132) Αν η μέθοδος Jacobi είναι συγκλίνουσα, τότε και η μέθοδος JOR θα είναι συγκλίνουσα αν $0 < \omega \leq 1$.

Ιδιότητα 2.3. (Ostrowski) ([8], Κεφάλαιο 4, σελ. 133) Αν ο πίνακας A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, τότε η μέθοδος SOR θα είναι συγκλίνουσα αν και μόνο εάν $0 < \omega < 2$.

Ιδιότητα 2.4. ([8], Κεφάλαιο 4, σελ. 133) Αν ο πίνακας A έχει αυστηρή διαγώνια υπεροχή κατά γραμμές, τότε η μέθοδος SOR θα είναι συγκλίνουσα αν $0 < \omega \leq 1$.

Θεώρημα 2.8. ([8], Κεφάλαιο 4, σελ. 133) Αν ο πίνακας A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος και ο πίνακας B_J έχει πραγματικές ιδιοτιμές, τότε η μέθοδος SOR συγκλίνει για οποιοδήποτε $\mathbf{x}^{(0)}$ αν και μόνο εάν $\rho(B_J) < 1$ και $0 < \omega < 2$. Επιπλέον, θα ισχύει ότι:

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(B_J)}} \text{ και}$$

$$\rho(B(\omega_{opt})) = \frac{1 - \sqrt{1 - \rho^2(B_J)}}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(B_J)}}.$$

Ορισμός 2.2. ([8], Κεφάλαιο 4, σελ. 138) Μία σταθερή μέθοδος *Richardson* θα είναι της μορφής:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha P^{-1} \mathbf{r}^{(k)}, \quad (2.12)$$

όπου το α είναι μία παράμετρος χαλάρωσης και η μη σταθερή μέθοδος *Richardson* προκύπτει από τον τύπο:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k P^{-1} \mathbf{r}^{(k)}, \quad (2.13)$$

όπου η παράμετρος είναι εξαρτώμενη από την κάθε επανάληψη.

Στη σταθερή μέθοδο *Richardson* ο πίνακας επανάληψης θα είναι ο

$$B_\alpha = I - \alpha P^{-1} A \quad (2.14)$$

και στη μη σταθερή μέθοδο *Richardson* ο

$$B_{\alpha_k} = I - \alpha_k P^{-1} A. \quad (2.15)$$

Αν $P = I$, τότε η επαναληπτική μέθοδος είναι μη προρρυθμισμένη. Παρατηρούμε ότι ο πίνακας επανάληψης για τη μη σταθερή μέθοδο *Richardson* εξαρτάται από τον αριθμό της επανάληψης (το k).

Θεώρημα 2.9. ([8], Κεφάλαιο 4, σελ. 139) Για οποιοδήποτε αντιστρέψιμο πίνακα P , η σταθερή μέθοδος *Richardson* θα είναι συγκλίνουσα αν και μόνο εάν

$$\frac{2\operatorname{Re}\lambda_i}{\alpha|\lambda_i|^2} > 1, \forall i = 1, \dots, n,$$

όπου λ_i είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα $P^{-1}A$.

Θεώρημα 2.10. ([8], Κεφάλαιο 4, σελ. 139) Έστω ότι ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος και ο πίνακας $P^{-1}A$ έχει θετικές και πραγματικές ιδιοτιμές, τέτοιες ώστε $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$. Τότε η μέθοδος Richardson θα είναι συγκλίνουσα αν και μόνο εάν $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_1}$. Επιπλέον, αν ορίσουμε ως ελάχιστο α το

$$\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n},$$

η αντίστοιχη φασματική ακτίνα για τον πίνακα $B_{\alpha_k} = I - \alpha_k P^{-1}A$ θα είναι ίση με

$$\rho_{opt} = \frac{\lambda_1 - \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n} = \frac{K_2(A) - 1}{K_2(A) + 1}.$$

Πόρισμα 2.1. ([8], Κεφάλαιο 4, σελ. 140) Έστω ότι ο πίνακας A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος με ιδιοτιμές τις $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ για τις οποίες ισχύει $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Τότε, αν $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_1}$, η μη προρρυθμισμένη μέθοδος Richardson είναι συγκλίνουσα και θα ισχύει

$$\|e^{(k+1)}\|_A \leq \rho(B_\alpha) \|e^{(k)}\|_A, \quad k \geq 0.$$

2.3 Η μέθοδος των κλίσεων

Έστω ότι ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι θετικά ορισμένος, $b \in \mathbb{R}^n$ και θέλουμε να επιλύσουμε το πρόβλημα

$$A\mathbf{x} = b. \tag{2.16}$$

Το πρόβλημά μας είναι ισοδύναμο με την επίλυση του προβλήματος

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}),$$

όπου $\Phi(\mathbf{x})$ είναι η συνάρτηση

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T A \mathbf{x} - b \mathbf{x} \tag{2.17}$$

και η κλίση του δίνεται από τον τύπο

$$\nabla \Phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} - b. \tag{2.18}$$

Αν $\nabla\Phi(\mathbf{x}) = 0$, τότε το διάνυσμα \mathbf{x} είναι η λύση της εξίσωσης που προσπαθούμε να λύσουμε. Για το διάνυσμα \mathbf{x} θα ισχύει επιπλέον ότι:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{y}) &= \Phi(\mathbf{x} + (\mathbf{y} - \mathbf{x})) \\ &= \frac{1}{2}[\mathbf{x} + (\mathbf{y} - \mathbf{x})]^T A[\mathbf{x} + (\mathbf{y} - \mathbf{x})] - b[\mathbf{x} + (\mathbf{y} - \mathbf{x})] \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T A(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x})^T A\mathbf{x} + \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x})^T A(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - b\mathbf{x} - b(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \\ &= \Phi(\mathbf{x}) + (\mathbf{y} - \mathbf{x})^T A\mathbf{x} + \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x})^T A(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - b(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \\ &= \Phi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x})^T A(\mathbf{y} - \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $\Phi(\mathbf{y}) > \Phi(\mathbf{x})$, για $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, δηλαδή το διάνυσμα \mathbf{x} είναι το ελάχιστο της συνάρτησης. Αν ορίσουμε ως ενεργειακή νόρμα τον τύπο:

$$\|\mathbf{x}\|_A^2 = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}, \quad (2.19)$$

θα έχουμε ότι

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|_A^2 = \Phi(\mathbf{y}) - \Phi(\mathbf{x}). \quad (2.20)$$

Όμως, για να βρούμε το ελάχιστο, θα πρέπει να ξεκινήσουμε από μία αρχική τιμή $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ και να διαλέξουμε κατάλληλες κατευθύνσεις, οι οποίες θα μας οδηγήσουν στην ακριβή λύση του προβλήματος.

Γι' αυτό το σκοπό, θα χρειαστούμε μία κατεύθυνση $\mathbf{p}^{(k)}$ και έναν συντελεστή α_k , τέτοια ώστε

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{p}^{(k)}. \quad (2.21)$$

Θέλουμε να διαλέξουμε την κατεύθυνση $\mathbf{p}^{(k)}$ και το α_k ώστε η επαναληπτική διαδικασία να συγκλίνει στο ελάχιστο της Φ . Η κατεύθυνση $\mathbf{p}^{(k)}$ επιλέγεται με τέτοιο τρόπο ώστε να φτάσουμε γρηγορότερα στο ελάχιστο \mathbf{x} . Ορίζεται ως η κατεύθυνση της μέγιστης καθόδου και είναι ίση με

$$\mathbf{p}^{(k)} = -\nabla\Phi(\mathbf{x}^{(k)}), \quad (2.22)$$

όπου $\nabla\Phi(\mathbf{x}^{(k)}) = A\mathbf{x}^{(k)} - b = -\mathbf{r}^{(k)}$. Άρα $\mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)}$. Επομένως,

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{r}^{(k)}. \quad (2.23)$$

Για να υπολογίσουμε την παράμετρο α_k , θα γράψουμε τη συνάρτηση $\Phi(\mathbf{x}^{(k+1)})$ ως συνάρτηση του α , δηλαδή:

$$\Phi(\mathbf{x}^{(k+1)}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{r}^{(k)})^T A(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{r}^{(k)}) - (\mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{r}^{(k)})^T \mathbf{b}.$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς το α , προκύπτει ότι:

$$\alpha_k = \frac{\mathbf{r}^{(k)T} \mathbf{r}^{(k)}}{\mathbf{r}^{(k)T} A \mathbf{r}^{(k)}}, \quad (2.24)$$

το οποίο εξαρτάται από το k -βήμα. Λόγω αυτής της ιδιότητας, αυτή η μη στάσιμη μέθοδος ονομάζεται και μέθοδος των κλίσεων.

Παρατηρούμε ότι ο παρακάτω αλγόριθμος είναι απλός, παρόλο που απαιτεί υπολογισμό του μη σταθερού α_k σε κάθε επανάληψη.

Αλγόριθμος 1: Η μέθοδος των κλίσεων

Δεδομένα $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, b , A γνωστά

- 1: $\mathbf{r}^{(0)} = b - A\mathbf{x}^{(0)}$
 - 2: **for** $k = 1 : n$ **do**
 - 3: $\alpha_k = \frac{\mathbf{r}^{(k)T} \mathbf{r}^{(k)}}{\mathbf{r}^{(k)T} A \mathbf{r}^{(k)}}$
 - 4: $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{p}^{(k)}$
 - 5: $\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A \mathbf{p}^{(k)}$
 - 6: **end for**
-

Θεώρημα 2.11. ([8], Κεφάλαιο 4, σελ. 149) Έστω A ένας συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας. Τότε η μέθοδος των κλίσεων θα είναι συγκλίνουσα για οποιαδήποτε επιλογή της αρχικής τιμής $\mathbf{x}^{(0)}$ και επιπλέον θα ισχύει

$$\|\mathbf{e}^{(k+1)}\|_A \leq \frac{K_2(A) - 1}{K_2(A) + 1} \|\mathbf{e}^{(k)}\|_A. \quad (2.25)$$

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{x}^{(k)}$ η λύση, η οποία προκύπτει με τη μέθοδο των κλίσεων στο k -βήμα και $\mathbf{x}_R^{(k+1)}$ η λύση που προκύπτει από την μη προρρυθμισμένη μέθοδο Richardson με τη βοήθεια της $\mathbf{x}^{(k)}$, δηλαδή ισχύει ότι

$$\mathbf{x}_R^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_{opt} \mathbf{r}^{(k)}.$$

Λόγω του Πορίσματος της προηγούμενης παραγράφου (**Πόρισμα 2.1**) και με τη βοήθεια από το **Θεώρημα 2.10** (αφού $\rho(B_\alpha) \leq \rho_{opt}$), θα έχουμε

$$\|\mathbf{e}_R^{(k+1)}\|_A \leq \frac{K_2(A) - 1}{K_2(A) + 1} \|\mathbf{e}^{(k)}\|_A,$$

όπου $\mathbf{e}_R^{(k+1)} = \mathbf{x}_R^{(k+1)} - \mathbf{x}$. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι το διάνυσμα $\mathbf{x}^{(k+1)}$ ελαχιστοποιεί την A -νόρμα του σφάλματος σε σχέση με τα στοιχεία της μορφής $\mathbf{x}^{(k)} + \beta \mathbf{r}^{(k)}$, $\beta \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$\|\mathbf{e}^{(k+1)}\|_A \leq \|\mathbf{e}_R^{(k+1)}\|_A.$$

Επομένως,

$$\|\mathbf{e}^{(k+1)}\|_A \leq \frac{K_2(A) - 1}{K_2(A) + 1} \|\mathbf{e}^{(k)}\|_A.$$

□

2.4 Η μέθοδος των συζυγών κλίσεων

Με αυτή τη μέθοδο μπορούμε να βρούμε καλύτερη κατεύθυνση, η οποία υποθέτουμε ότι είναι η $\mathbf{p}^{(k)}$. Τότε προκύπτει ότι ο συντελεστής α_k δίνεται από τον τύπο

$$\alpha_k = \frac{\mathbf{p}^{(k)T} \mathbf{r}^{(k)}}{\mathbf{p}^{(k)T} A \mathbf{p}^{(k)}}. \quad (2.26)$$

Επιπλέον, θα ισχύει η σχέση

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{p}^{(k)} \Leftrightarrow \\ b - A\mathbf{x}^{(k+1)} &= b - A\mathbf{x}^{(k)} - \alpha_k A\mathbf{p}^{(k)} \Leftrightarrow \\ \mathbf{r}^{(k+1)} &= \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A\mathbf{p}^{(k)}. \end{aligned}$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{(k)T} \mathbf{r}^{(k+1)} &= \mathbf{p}^{(k)T} (\mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A\mathbf{p}^{(k)}) \\ &= \mathbf{p}^{(k)T} \mathbf{r}^{(k)} - \frac{\mathbf{p}^{(k)T} \mathbf{r}^{(k)}}{\mathbf{p}^{(k)T} A \mathbf{p}^{(k)}} \mathbf{p}^{(k)T} A \mathbf{p}^{(k)} \\ &= \mathbf{p}^{(k)T} \mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{p}^{(k)T} \mathbf{r}^{(k)} = 0. \end{aligned}$$

Θα πρέπει να υπολογίσουμε ένα νέο διάνυσμα κατεύθυνσης $\mathbf{p}^{(k+1)}$ τέτοιο ώστε

$$(A\mathbf{p}^{(j)})^T \mathbf{p}^{(k+1)} = 0, \quad j = 0, \dots, k.$$

Έστω ότι τα διανύσματα $\mathbf{p}^{(0)}, \mathbf{p}^{(1)}, \dots, \mathbf{p}^{(k)}$ είναι ορθογώνια συζυγή ή A -ορθογώνια. Τότε θα ισχύει

$$(A\mathbf{p}^{(i)})^T \mathbf{p}^{(j)} = 0, \quad \forall i, j = 0, \dots, k, \quad i \neq j.$$

Υποθέτουμε επιπλέον, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι ισχύει

$$(\mathbf{p}^{(j)})^T \mathbf{r}^{(k)} = 0, \quad j = 0, \dots, k-1.$$

Ακόμη, λαμβάνουμε ως δεδομένο ότι

$$(\mathbf{p}^{(j)})^T \mathbf{r}^{(k+1)} = 0, \quad \forall j = 0, \dots, k.$$

Αυτό ισχύει επειδή για $k = 0$, $\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{r}^{(0)} - \alpha_0 A \mathbf{r}^{(0)}$ και

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}^{(0)})^T \mathbf{r}^{(1)} &= \mathbf{p}^{(0)T} \mathbf{r}^{(0)} - \alpha_0 \mathbf{p}^{(0)T} A \mathbf{r}^{(0)} \\ &= \mathbf{p}^{(0)T} \mathbf{r}^{(0)} - \frac{\mathbf{p}^{(0)T} \mathbf{r}^{(0)}}{\mathbf{p}^{(0)T} A \mathbf{r}^{(0)}} \mathbf{p}^{(0)T} A \mathbf{r}^{(0)} \\ &= \mathbf{p}^{(0)T} \mathbf{r}^{(0)} - \mathbf{p}^{(0)T} \mathbf{r}^{(0)} = 0. \end{aligned}$$

Το μόνο που μας απομένει είναι να ορίσουμε μία κατασκευη ακολουθίας $\{\mathbf{p}^{(k)}\}$, η οποία θα είναι της μορφής:

$$\mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)} - \beta_k \mathbf{p}^{(k)}.$$

Ο παραπάνω τύπος δημιουργεί μία ακολουθία από κατευθύνσεις $\{\mathbf{p}^{(k)}\}$, η οποία είναι A -ορθογώνια ([8], Κεφάλαιο 4, σελ. 153-154). Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε τα β_k , έτσι ώστε οι κατευθύνσεις να είναι A -ορθογώνιες. Δηλαδή να ισχύει (για $j = k$):

$$\begin{aligned} (A \mathbf{p}^{(k)})^T \mathbf{p}^{(k+1)} &= 0 \Leftrightarrow \\ \mathbf{p}^{(k)T} A (\mathbf{r}^{(k+1)} - \beta_k \mathbf{p}^{(k)}) &= 0 \Leftrightarrow \\ \mathbf{p}^{(k)T} A \mathbf{r}^{(k+1)} - \beta_k \mathbf{p}^{(k)T} A \mathbf{p}^{(k)} &= 0 \Leftrightarrow \\ \beta_k &= \frac{\mathbf{p}^{(k)T} A \mathbf{r}^{(k+1)}}{\mathbf{p}^{(k)T} A \mathbf{p}^{(k)}}. \end{aligned}$$

Με τον **Αλγόριθμο 2** ορίζουμε τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων για τον υπολογισμό της λύσης του προβλήματος.

Η μέθοδος των συζυγών κλίσεων είναι κατάλληλη για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος μεγάλων διαστάσεων.

Θεώρημα 2.12. ([8], Κεφάλαιο 4, σελ. 155) *Εστω A συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας. Τότε η μέθοδος των συζυγών κλίσεων τερματίζει το πολύ σε n βήματα, έχοντας υπολογίσει την ακριβή λύση.*

Αλγόριθμος 2: Η μέθοδος των συζυγών κλίσεων

Δεδομένα $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, b , A

- 1: $\mathbf{r}^{(0)} = b - A\mathbf{x}^{(0)}$
 - 2: $\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)}$
 - 3: **for** $k = 1 : n$ **do**
 - 4: $\alpha_k = \frac{\mathbf{p}^{(k)T}\mathbf{r}^{(k)}}{\mathbf{p}^{(k)T}A\mathbf{p}^{(k)}}$
 - 5: $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k\mathbf{p}^{(k)}$
 - 6: $\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A\mathbf{p}^{(k)}$
 - 7: $\beta_k = \frac{(A\mathbf{p}^{(k)})^T\mathbf{r}^{(k+1)}}{(A\mathbf{p}^{(k)})^T\mathbf{p}^{(k)}}$
 - 8: $\mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)} - \beta_k\mathbf{p}^{(k)}$
 - 9: **end for**
-

Παρατηρούμε στον **Αλγόριθμο 2** ότι σε κάθε επανάληψη, υπολογίζουμε μία φορά ένα διάνυσμα, το οποίο προκύπτει από το γινόμενο του πίνακα A και του διανύσματος κατεύθυνσης $\mathbf{p}^{(k)}$. Επιπλέον, είναι προφανές ότι στον **Αλγόριθμο 2** γίνονται περισσότερες πράξεις σε σχέση με τον **Αλγόριθμο 1**. Όμως, αυτό δεν σημαίνει ότι η μέθοδος των συζυγών κλίσεων δεν είναι μία πολύ καλή μέθοδος.

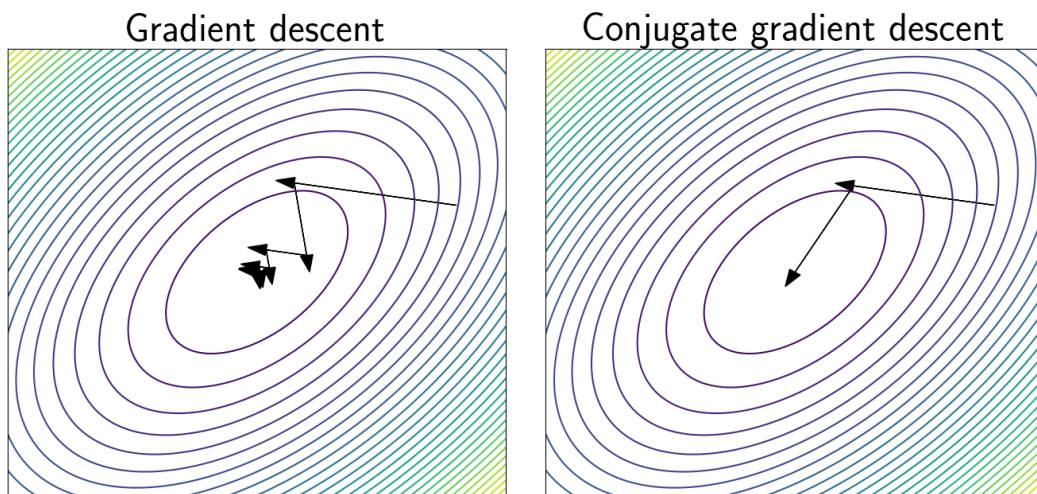
Θεώρημα 2.13. ([8], Κεφάλαιο 4, σελ. 155) *Εστω A συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας. Τότε το σφάλμα της μεθόδου των συζυγών κλίσεων $\mathbf{e}^{(k)}$ είναι κάθετο στο $\mathbf{p}^{(j)}$, $j = 0, 1, \dots, n - 1$ βήματα. Επιπλέον θα ισχύει*

$$\|\mathbf{e}^{(k)}\|_A \leq \frac{2c^k}{1 + c^{2k}} \|\mathbf{e}^{(0)}\|_A, \text{ όπου } c = \frac{\sqrt{K_2(A)} - 1}{\sqrt{K_2(A)} + 1}.$$

Θεώρημα 2.14. ([4]) *Εστω $\mathbf{x}^{(k)}$ η k -επανάληψη της μεθόδου των συζυγών κλίσεων και $\mathbf{x}^{(0)}$ η αρχική τιμή της επαναληπτικής μεθόδου. Τότε θα ισχύει*

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\|_A \leq 2\left(\frac{\sqrt{K_2(A)} - 1}{\sqrt{K_2(A)} + 1}\right)^k \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}\|_A, \quad k = 0, \dots$$

Παρατηρούμε ότι η σταθερά στη σύγκλιση της μεθόδου των συζυγών κλίσεων είναι μικρότερη από την αντίστοιχη σταθερά για τη σύγκλιση της μεθόδου των κλίσεων. Αυτό ισχύει διότι $\sqrt{K_2(A)} \leq K_2(A)$.



Σχήμα 2.1: Η μέθοδος των κλίσεων και των συζυγών κλίσεων.

Κεφάλαιο 3

Η προρρυθμισμένη μέθοδος των συζυγών κλίσεων

Για τη συγγραφή αυτού του κεφαλαίου χρησιμοποιήθηκαν οι πηγές [3], [4], [5], [6], [9], [10], [11] και [12].

3.1 Εισαγωγή

Ένα μειονέκτημα της μεθόδου των συζυγών κλίσεων είναι ότι για μεγάλο αριθμό επαναλήψεων, πολλές φορές στην πράξη, φαίνεται να συγχλίνει αργά. Για τη βελτίωση της ταχύτητας σύγκλισής της χρησιμοποιείται η μέθοδος της προρρυθμίσσης. Θα ορίσουμε ως προρρυθμιστή του πίνακα A έναν πίνακα M , τέτοιο ώστε ο πίνακας $M^{-1}A$ να έχει μικρότερο δείκτη κατάστασης από τον A .

Έτσι το σύστημα που θεωρούμε για επίλυση, αντί του $A\mathbf{x} = b$, είναι το:

$$M^{-1}A\mathbf{x} = M^{-1}b. \quad (3.1)$$

Το παραπάνω σύστημα είναι προρρυθμισμένο και ο πίνακας M θα λέγεται αριστερά προρρυθμισμένος. Αν ισχύει ότι:

$$AM^{-1}\mathbf{y} = b, \quad \mathbf{y} = M\mathbf{x}, \quad (3.2)$$

τότε ο πίνακας M θα λέγεται δεξιά προρρυθμισμένος και αν ισχύει η σχέση:

$$QAM^{-1}\mathbf{y} = Qb, \quad \mathbf{y} = M\mathbf{x}, \quad (3.3)$$

τότε το σύστημα θα είναι προρρυθμισμένο αμφίπλευρα.

Παρατηρούμε για την αμφίπλευρη προρρυθμίσση την περίπτωση που ο πίνακας A είναι συμμετρικός. Τότε, μπορούν να επιλεγούν κατάλληλοι πίνακες M, Q έτσι ώστε $Q^{-1} = M^T$. Σε αυτή την περίπτωση, ο πίνακας QAM^{-1} θα είναι συμμετρικός και

Αλγόριθμος 3: Η προρρυθμισμένη μεθόδος των συζυγών κλίσεων

Δεδομένα $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, b , A , M

- 1: $\mathbf{r}^{(0)} = b - A\mathbf{x}^{(0)}$
 - 2: $\mathbf{z}^{(0)} = M \setminus \mathbf{r}^{(0)}$
 - 3: $\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{z}^{(0)}$
 - 4: **for** $k = 1 : n$ **do**
 - 5: $\alpha_k = \frac{\mathbf{p}^{(k)T} \mathbf{z}^{(k)}}{\mathbf{p}^{(k)T} A \mathbf{p}^{(k)}}$
 - 6: $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{p}^{(k)}$
 - 7: $\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A \mathbf{p}^{(k)}$
 - 8: $\mathbf{z}^{(k+1)} = M \setminus \mathbf{r}^{(k+1)}$
 - 9: $\beta_k = \frac{\mathbf{z}^{(k+1)T} \mathbf{r}^{(k+1)}}{\mathbf{z}^{(k+1)T} \mathbf{r}^{(k+)}}$
 - 10: $\mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{z}^{(k+1)} + \beta_k \mathbf{p}^{(k)}$
 - 11: **end for**
-

αυτή η προρρύθμιση θα είναι επαρκής στην περίπτωση που $K(QAM^{-1}) \ll K(A)$ και θα λύνεται εύκολα το σύστημα $\mathbf{y} = M\mathbf{x}$.

Η επιλογή κατάλληλου προρρυθμιστή πίνακα M έχει τις ίδιες δυσκολίες που έχει κανείς στην επιλογή προρρυθμιστή στις γενικές επαναληπτικές μεθόδους. Λόγω της φύσης του A (πραγματικός, συμμετρικός και θετικά ορισμένος) υπάρχουν κάποιοι προρρυθμιστές που δεν είναι άλλοι παρά αυτοί που χρησιμοποιούνται στις κλασικές επαναληπτικές μεθόδους με την προϋπόθεση ότι είναι (πραγματικοί) συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι πίνακες.

Με βάση τις επαναληπτικές μεθόδους που έχουμε δει στο Κεφάλαιο 2, μπορεί να επιλέξει κάποιος τον προρρυθμιστή Jacobi, ο οποίος θα είναι:

$$M_J = D, \text{ όπου } D \text{ ο πίνακας με την κύρια διαγώνιο του πίνακα } A$$

ή τον προρρυθμιστή SSOR, ο οποίος θα είναι:

$$M_{SSOR} = \frac{\omega}{2-\omega} \left(L + \frac{1}{\omega} D \right) D^{-1} \left(U + \frac{1}{\omega} D \right), \quad 0 < \omega < 2.$$

Ο SSOR προρρυθμιστής είναι μία παραλλαγή, η οποία προκύπτει από τη μέθοδο SOR, καθώς ο SOR προρρυθμιστής $M = \left(\frac{1}{\omega} D + L \right)$ δεν είναι συμμετρικός, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να χρησιμοποιηθεί για έναν συμμετρικό και θετικά ορισμένο πίνακα.

Εύκολα μπορεί να επαληθεύσει κάποιος ότι ο πίνακας M_{SSOR} είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας.

Απόδειξη. Ως προς τη συμμετρία, θα ισχύει ότι:

$$M_{SSOR}^T = \frac{\omega}{2-\omega} (U + \frac{1}{\omega}D)^T (D^{-1})^T (L + \frac{1}{\omega}D)^T$$

Αφού ο D είναι διαγώνιος πίνακας, θα ισχύει ότι $D^T = D$ και επειδή ο A είναι συμμετρικός πίνακας, θα ισχύει ότι $U^T = L$ και $L^T = U$. Επομένως, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} M_{SSOR}^T &= \frac{\omega}{2-\omega} (U^T + \frac{1}{\omega}D^T)(D^{-1})^T (L^T + \frac{1}{\omega}D^T) \\ &= \frac{\omega}{2-\omega} (L + \frac{1}{\omega}D)D^{-1}(U + \frac{1}{\omega}D) \\ &= M_{SSOR}. \end{aligned}$$

Άρα, ο M_{SSOR} είναι συμμετρικός.

Για να δείξουμε ότι ο M_{SSOR} είναι θετικά ορισμένος, θα πρέπει να δείξουμε ότι $\mathbf{x}^T M_{SSOR} \mathbf{x} > 0$, $\forall \mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Αν ορίσουμε ως $C_1 = (L + \frac{1}{\omega}D)$ και $C_2 = (U + \frac{1}{\omega}D)$, τότε ο πίνακας M_{SSOR} θα είναι της μορφής:

$$M_{SSOR} = \frac{\omega}{2-\omega} C_1 D^{-1} C_2.$$

Παρατηρούμε ότι $C_1^T = C_2$. Επιπλέον, είναι αντιστρέψιμοι για κατάλληλο ω . Επειδή ο A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας, ο D θα είναι θετικά ορισμένος. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να είναι και ο D^{-1} θετικά ορισμένος. Επομένως:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T M_{SSOR} \mathbf{x} &= \mathbf{x}^T (C_1 D^{-1} C_2) \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T (C_2^T D^{-1} C_2) \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $\mathbf{y} = C_2 \mathbf{x}$, τότε:

$$\mathbf{x}^T M_{SSOR} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T D^{-1} \mathbf{y}.$$

Αφού ο D^{-1} είναι θετικά ορισμένος, θα ισχύει ότι:

$$\mathbf{y}^T D^{-1} \mathbf{y} > 0, \quad \forall \mathbf{0} \neq \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Επομένως, προκύπτει ότι:

$$\mathbf{x}^T M_{SSOR} \mathbf{x} > 0, \quad \forall \mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Με αυτό τον τρόπο, αποδεικνύεται ότι ο πίνακας M_{SSOR} είναι και θετικά ορισμένος. \square

Για $\omega = 1$, ο πίνακας που προκύπτει είναι ο

$$M_{PGS} = (D + L)D^{-1}(D + U).$$

Ο πίνακας M_{PGS} αποτελεί τον προρρυθμιστή της μεθόδου Gauss-Seidel.

Ένα ερώτημα που προκύπτει σχετικά με την προρρυθμισμένη μέθοδο των συζυγών κλίσεων είναι το τι συμβαίνει σχετικά με τη σύγκλιση της.

Θεώρημα 3.1. ([4]) *Εστω A, M συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι πίνακες, με τον M να είναι ο προρρυθμιστής, $\mathbf{x}^{(k)}$ η k -επανάληψη της προρρυθμισμένης μεθόδου των συζυγών κλίσεων και $\mathbf{x}^{(0)}$ η αρχική τιμή της επαναληπτικής μεθόδου. Τότε θα ισχύει*

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\|_A \leq 2 \left(\frac{\sqrt{K_2(M^{-1}A)} - 1}{\sqrt{K_2(M^{-1}A)} + 1} \right)^k \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}\|_A, \quad k = 0, \dots$$

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω σύγκλιση είναι παρόμοια με αυτή των συζυγών κλίσεων που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Επιπλέον, η σταθερά στη σύγκλιση της προρρυθμισμένης μεθόδου των συζυγών κλίσεων είναι μικρότερη από την αντίστοιχη σταθερά για τη σύγκλιση της μεθόδου των συζυγών κλίσεων. Αυτό ισχύει διότι $K_2(M^{-1}A) < K_2(A)$.

Σχόλιο: Εδώ πρέπει να επισημανθεί ότι αν $K_2(M^{-1}A) \ll K_2(A)$, η σταθερά είναι "μικρότερη".

3.2 Πολυωνυμικοί Προρρυθμιστές

Στην προρρύθμιση με τη βοήθεια ενός πολυωνύμου, ο πίνακας M ορίζεται ως

$$M^{-1} = s(A),$$

όπου $s(A)$ είναι ένα πολυώνυμο μικρού βαθμού. Με την παραπάνω σχέση, το προρρυθμισμένο σύστημα γράφεται ως

$$s(A)A\mathbf{x} = s(A)b.$$

Αυτή η μέθοδος εφαρμόζεται και στην προρρύθμιση από τα αριστερά και από τα δεξιά.

Αυτή η προσέγγιση ξεκίνησε στα μέσα της δεκαετίας του 1950 από τον Eduard Steifel για να υπολογίζει ιδιοτιμές. Στη συνέχεια, θα περιγράψουμε ορισμένα πολυώνυμα, τα οποία συμβάλλουν στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος με τη βοήθεια της προρρύθμισης.

3.2.1 Πολυώνυμα Neumann

Για τη μελέτη αυτών των πολυωνύμων, χρησιμοποιείται η πηγή [9] και πιο συγκεκριμένα, οι σελίδες 355 και 356 του Κεφαλαίου 12. Πρόκειται για την πιο απλή περίπτωση πολυωνύμων. Προκύπτουν από την ανάπτυξη της σειράς Neumann, η οποία μελετήθηκε από τον μαθηματικό Carl Neumann και είναι της μορφής

$$I + N + N^2 + \dots + N^r, \quad N = I - \omega A,$$

όπου το ω είναι μία παράμετρος. Για τον υπολογισμό του αντιστρόφου του ωA θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$\omega A = I - (I - \omega A)$$

ή ισοδύναμα

$$\omega A = D - (D - \omega A),$$

όπου D είναι ο διαγώνιος πίνακας του A . Τότε,

$$\begin{aligned} (\omega A)^{-1} &= (D[I - (I - \omega D^{-1}A)])^{-1} \\ &= [I - (I - \omega D^{-1}A)]^{-1} D^{-1} \\ &= (I - N)^{-1} D^{-1}, \end{aligned}$$

όπου $N = (I - \omega D^{-1}A)$. Για τον υπολογισμό του αντιστρόφου του ωA παίρνουμε προσεγγιστικά τον αντίστροφο του πίνακα M , δηλαδή

$$(\omega A)^{-1} \approx M^{-1} = (I + N + N^2 + \dots + N^r) D^{-1}.$$

Τότε, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} M^{-1}A &= (I + N + N^2 + \dots + N^r) D^{-1}A \\ &= \frac{1}{\omega} (I + N + N^2 + \dots + N^r) (I - N) \\ &= \frac{1}{\omega} (I - N^{r+1}), \end{aligned}$$

αφού $D^{-1}A = \frac{1}{\omega} (I - N)$.

Όταν το πολυώνυμο είναι μεγάλου βαθμού, τότε η αριθμητική επίλυση του συστήματος είναι δύσκολη.

3.2.2 Πολυώνυμα Chebyshev

Αποτελούν ένα είδος προρρυθμιστή, τα οποία συμβάλλουν στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος. Το πεδίο ορισμού τους είναι το διάστημα $[-1,1]$ και το σύνολο τιμών τους είναι το \mathbb{R} . Για αυτά τα πολυώνυμα ισχύει ο αναδρομικός τύπος:

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n \geq 2, \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x. \quad (3.4)$$

Ορισμένες ιδιότητες που έχουν αυτά τα πολυώνυμα είναι οι εξής:

i) $T_n(1) = 1$.

- ii) $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + O(x^{n-1})$.
- iii) Αν $|x| \leq 1$, τότε $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x))$, αλλιώς $T_n(x) = \cosh(n \cdot \operatorname{arccosh}(x))$.
- iv) Αν $|x| \leq 1$, τότε $T_n(x) \leq 1$.
- v) Το πολυώνυμο $T_n(x)$ μηδενίζεται στα σημεία $x_i = \cos((2i-1)\pi/(2n))$, $i = 1, \dots, n$.
- vi) Αν $|x| > 1$, τότε $T_n(x) = \frac{1}{2}[(x + \sqrt{x^2-1})^n + (x + \sqrt{x^2-1})^{-n}]$.
- vii) Αν $\epsilon > 0$, τότε $T_n(1 + \epsilon) \geq \frac{1}{2}(1 + n\sqrt{2\epsilon})$.

Παράδειγμα 3.1. Να βρεθούν τα πολυώνυμα Chebyshev μέχρι του βαθμού 4. Γνωρίζουμε ότι $T_0(x) = 1$ και $T_1(x) = x$. Με βάση τον αναδρομικό τύπο, θα έχουμε ότι:

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x(x) - 1 = 2x^2 - 1.$$

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x.$$

$$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

Το ερώτημα που προκύπτει είναι πώς συνδέονται τα πολυώνυμα Chebyshev με την προορρυθμισμένη μέθοδο των συζυγών κλίσεων. Για επαναληπτικές μεθόδους της μορφής:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + P^{-1}\mathbf{r}^{(k)},$$

τις οποίες συναντήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, το σφάλμα ικανοποιεί τον τύπο:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^{(k)} + P^{-1}\mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x} + P^{-1}(b - A\mathbf{x}^{(k)}) \\ &= \mathbf{e}^{(k)} + P^{-1}b - P^{-1}A\mathbf{x}^{(k)} + P^{-1}A\mathbf{x} - P^{-1}A\mathbf{x} \\ &= \mathbf{e}^{(k)} + P^{-1}(b - A\mathbf{x}) - P^{-1}A(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}) \\ &= \mathbf{e}^{(k)} - P^{-1}A\mathbf{e}^{(k)} \\ &= (I - P^{-1}A)\mathbf{e}^{(k)}. \end{aligned}$$

Επομένως, θα πρέπει να βρούμε ένα πολυώνυμο p βαθμού k , τέτοιο ώστε η ποσότητα

$$\max_{\lambda \in \sigma(A)} |1 - \lambda p_k(\lambda)|$$

να ελαχιστοποιείται. Επειδή το παραπάνω πρόβλημα είναι δύσκολο να επιλυθεί, προσπαθούμε να το κάνουμε πιο απλό και βρίσκουμε ένα πολυώνυμο q τέτοιο ώστε η ποσότητα

$$\max_{\lambda \in (\alpha, \beta)} |1 - \lambda p_k(\lambda)| = \max_{\lambda \in (\alpha, \beta), q(0)=1} |q_{k+1}(\lambda)|$$

να ελαχιστοποιείται και $\sigma(A) \subset (\alpha, \beta)$, $0 < \alpha \leq \beta$. Το πολυώνυμο που λύνει αυτό το πρόβλημα είναι το μετατοπισμένο και μεγεθυνόμενο πολυώνυμο Chebyshev βαθμού $k+1$, το οποίο θα έχει την εξής μορφή ([9], Κεφάλαιο 12, σελ. 356 και [3], Κεφάλαιο 3, σελ. 4):

$$q_{k+1}(x) = \frac{T_{k+1}\left(\frac{\alpha + \beta - 2x}{\beta - \alpha}\right)}{T_{k+1}\left(\frac{\alpha + \beta}{\beta - \alpha}\right)}. \quad (3.5)$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει $q_{k+1}(0) = 1 \forall k$.

Αφού βρούμε το πολυώνυμο q , εύκολα προκύπτει ότι $p_k(x) = x^{-1}(1 - q_{k+1}(x))$. Μπορούμε εύκολα να βρίσκουμε τα πολυώνυμα $\{p_k(x)\}$ μέσω μιας επανάληψης. Πρώτα απ'όλα, ορίζουμε:

$$\theta = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \delta = \frac{\beta - \alpha}{2} \quad \text{και} \quad \sigma = \frac{\theta}{\delta}.$$

Τότε, το πολυώνυμο q γράφεται ισοδύναμα ως

$$q_{k+1}(x) = \frac{T_{k+1}\left(\sigma - \frac{x}{\delta}\right)}{T_{k+1}(\sigma)} = \frac{T_{k+1}\left(\sigma - \frac{x}{\delta}\right)}{\sigma_{k+1}}, \quad (3.6)$$

όπου $\sigma_{k+1} = T_{k+1}(\sigma)$. Ο αναδρομικός τύπος για τα πολυώνυμα q θα είναι ([9], Κεφάλαιο 12, σελ. 357 και [3], Κεφάλαιο 3, σελ. 5):

$$q_{k+1}(x) = \frac{1}{\sigma_{k+1}} \left(2\left(\sigma - \frac{x}{\delta}\right) \sigma_k q_k(x) - \sigma_{k-1} q_{k-1}(x) \right), \quad k \geq 1, \quad (3.7)$$

όπου $q_0(x) = 1$ και $q_1(x) = 1 - \frac{x}{\theta}$. Παρατηρούμε ότι αν στη σχέση (3.4) βάλουμε στη θέση του x το σ , τότε θα προκύψει για $k \geq 1$ ότι:

$$\sigma_{k+1} = 2\sigma\sigma_k - \sigma_{k-1}, \quad \sigma_0 = 1, \quad \sigma_1 = \sigma. \quad (3.8)$$

Αν ορίσουμε τον λόγο $\rho_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_{k+1}}$, η σχέση (3.7) μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα ως ([3], Κεφάλαιο 3, σελ. 5):

$$q_{k+1}(x) = \rho_k \left(2\left(\sigma - \frac{x}{\delta}\right) q_k(x) - \rho_{k-1} q_{k-1}(x) \right) \quad (3.9)$$

και επιπλέον να ισχύει ότι:

$$\rho_k = \frac{1}{2\sigma - \rho_{k-1}}, \quad k \geq 1, \quad (3.10)$$

με $\rho_0 = \frac{1}{\sigma}$. Με τις παραπάνω εξισώσεις βρίσκουμε την ακολουθία πολυωνύμων $\{p_k(x)\}$. Έχοντας ορίσει τη σχέση $q_{k+1}(x) = 1 - xp_k(x)$, $k \geq 1$, $p_{-1} = 0$, $p_0 = \frac{1}{\theta}$ και με τη βοήθεια της σχέσης (3.7), προκύπτει ότι:

$$p_k(x) = \rho_k(2\sigma(1 - \frac{x}{\theta})p_{k-1}(x) - \rho_{k-1}p_{k-2}(x) + \frac{2}{\delta}), \quad k \geq 1. \quad (3.11)$$

Το πολυώνυμο Chebyshev βαθμού m , $P_m = p_m(A)$ εφαρμόζεται στον παρακάτω αλγόριθμο.

Αλγόριθμος 4: Υπολογισμός του προρρυθμισμένου υπολοίπου $\hat{\mathbf{r}} = P_m \mathbf{r}$ με τον προρρυθμιστή Chebyshev

- 1: Υπολογισμός ρ_k , $k = 1, \dots, m_{max}$ μέσω της σχέσης (3.10)
 - 2: $\mathbf{x}_{old} = \frac{\mathbf{r}}{\theta}$ (αν $m = 0$, τότε $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{x}_{old}$)
 - 3: $\mathbf{x} = \frac{2\rho_1}{\delta}(2\mathbf{r} - \frac{A\mathbf{r}}{\theta})$ (αν $m = 1$, τότε $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{x}$)
 - 4: **for** $k = 2 : m$ **do**
 - 5: $\mathbf{z} = \frac{2}{\delta}(\mathbf{r} - A\mathbf{x})$
 - 6: $\hat{\mathbf{r}} = \rho_{k+1}(2\sigma\mathbf{x} - \rho_k\mathbf{x}_{old} + \mathbf{z})$
 - 7: $\mathbf{x}_{old} = \mathbf{x}$
 - 8: $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{r}}$
 - 9: **end for**
-

3.3 Μη πλήρης παραγοντοποίηση LU

Στο πρώτο κεφάλαιο εξηγήσαμε τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η LU παραγοντοποίηση και το πώς μπορούμε να λύσουμε ευκολότερα τα γραμμικά συστήματα. Με αυτή την παραγοντοποίηση (incomplete LU decomposition ή πιο σύντομα ILU) προσπαθούμε να επιλύσουμε το γραμμικό σύστημα, εφαρμόζοντας μία μη πλήρη παραγοντοποίηση για τον πίνακα A , ώστε να προκύψει ο πίνακας $M = \tilde{L}\tilde{U}$, όπου \tilde{L}, \tilde{U} είναι ο κάτω και ο άνω τριγωνικός πίνακας αντίστοιχα. Αυτοί οι πίνακες είναι προσεγγίσεις των πινάκων L, U της παραγοντοποίησης LU του A και επιλέγονται με τέτοιο τρόπο ώστε ο πίνακας υπόλοιπο $R = A - M$ να ικανοποιεί κάποιες προϋποθέσεις, όπως να έχει μηδενικά στοιχεία σε ορισμένες θέσεις. Το γραμμικό σύστημα θα είναι της μορφής:

$$\begin{aligned} (\tilde{L}\tilde{U})^{-1}A\mathbf{x} &= (\tilde{L}\tilde{U})^{-1}b \Leftrightarrow \\ (\tilde{L}^{-1}A\tilde{U}^{-1})(\tilde{U}\mathbf{x}) &= \tilde{L}^{-1}b, \end{aligned}$$

Αλγόριθμος 5: Μη πλήρης παραγοντοποίηση LU

Δεδομένα A

```
1: for  $i = 2 : n$  do
2:   for  $j = 1 : i - 1$  do
3:     if  $\alpha_{i,j} \neq 0$  then
4:        $\alpha_{i,j} = \alpha_{i,j} / \alpha_{j,j}$ ;
5:       for  $k = j + 1 : n$  do
6:         if  $\alpha_{i,k} \neq 0$  then
7:            $\alpha_{i,k} = \alpha_{i,k} - \alpha_{i,j} * \alpha_{j,k}$ ;
8:         end if
9:       end for
10:    end if
11:  end for
12: end for
13:  $U$ =άνω τριγωνικός πίνακας του  $A$ 
14:  $L$ =κάτω τριγωνικός πίνακας του  $A$ 
15: for  $i = 1 : n$  do
16:    $l_{i,i} = 0$ ;
17: end for
```

δηλαδή $\tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}$, όπου $\tilde{A} = (\tilde{L}^{-1}A\tilde{U}^{-1})$, $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{U}\mathbf{x}$ και $\tilde{\mathbf{b}} = \tilde{L}^{-1}\mathbf{b}$.

Παρατήρηση: Ο Αλγόριθμος 5 αποτυγχάνει να υλοποιηθεί όταν υπάρχει μηδενικό στοιχείο στην κύρια διαγώνιο του πίνακα \tilde{U} . Τότε ο υπολογισμός της μη πλήρους παραγοντοποίησης LU γίνεται με μερική οδήγηση και προκύπτει η παραγοντοποίηση $P\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{U}$, δηλαδή $\tilde{A} = P^T\tilde{L}\tilde{U}$, όπου ο πίνακας P είναι ο πίνακας μετάθεσης.

3.4 Μη πλήρης παραγοντοποίηση Cholesky

Έστω ότι θέλουμε να επιλύσουμε το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ με τη βοήθεια ενός αριστερού προρρυθμιστή M , ο οποίος υποθέτουμε ότι είναι θετικά ορισμένος πίνακας. Ο πίνακας M παραγοντοποιείται με τη μέθοδο Cholesky, δηλαδή $M = L^T L$, όπου ο πίνακας L είναι θετικά ορισμένος και κάτω τριγωνικός πίνακας. Τότε θα ισχύει:

$$\begin{aligned} M^{-1}A\mathbf{x} &= M^{-1}\mathbf{b} \Leftrightarrow \\ (L^T L)^{-1}A\mathbf{x} &= (L^T L)^{-1}\mathbf{b} \Leftrightarrow \\ L^{-1}(L^T)^{-1}A\mathbf{x} &= L^{-1}(L^T)^{-1}\mathbf{b} \Leftrightarrow \\ (L^T)^{-1}A(L^{-1}L)\mathbf{x} &= (L^T)^{-1}\mathbf{b} \Leftrightarrow \\ ((L^T)^{-1}AL^{-1})(L\mathbf{x}) &= (L^T)^{-1}\mathbf{b}. \end{aligned}$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να μετατραπεί στη μορφή

$$\tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}, \text{ όπου } \tilde{A} = ((L^T)^{-1}AL^{-1}), \tilde{\mathbf{x}} = L\mathbf{x} \text{ και } \tilde{\mathbf{b}} = (L^T)^{-1}\mathbf{b}.$$

Παρατηρούμε ότι το σύστημα $\tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}$ μπορεί να επιλυθεί με τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων, υπολογίζοντας το $\tilde{\mathbf{x}}$ και στη συνέχεια βρίσκουμε τη λύση του συστήματος \mathbf{x} από το σύστημα $L\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}$.

Η μη πλήρης παραγοντοποίηση Cholesky (incomplete Cholesky decomposition) είναι μία μέθοδος, η οποία χρησιμοποιείται συχνά ως προρρυθμιστής για τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων. Πρόκειται για μία τροποποίηση του αρχικού αλγορίθμου για την Cholesky παραγοντοποίηση, στην οποία αν ένα στοιχείο α_{ij} το οποίο δεν βρίσκεται στην κύρια διαγώνιο και είναι ίσο με μηδέν, τότε το αντίστοιχο στοιχείο l_{ij} δέχεται την τιμή μηδέν. Ο πίνακας $M = L^T L$ που προκύπτει με την τροποποιημένη μέθοδο Cholesky επιτυγχάνεται η σχέση $K(M^{-1}A) < K(A)$.

Αλγόριθμος 6: Μη πλήρης παραγοντοποίηση Cholesky

Δεδομένα A

```

1: n=size(A,1);
2: for k = 1 : n do
3:    $\alpha_{k,k} = \sqrt{\alpha_{k,k}}$ ;
4:   for i = (k + 1) : n do
5:     if  $\alpha_{i,k} \neq 0$  then
6:        $\alpha_{i,k} = \alpha_{i,k}/\alpha_{k,k}$ ;
7:     end if
8:   end for
9:   for j = (k + 1) : n do
10:    for i = j : n do
11:      if  $\alpha_{i,j} \neq 0$  then
12:         $\alpha_{i,j} = \alpha_{i,j} - \alpha_{i,k} * \alpha_{j,k}$ ;
13:      end if
14:    end for
15:  end for
16: end for
17: for i = 1 : n do
18:   for j = (i + 1) : n do
19:      $\alpha_{i,j} = 0$ ;
20:   end for
21: end for

```

Για να επιλύσουμε το γραμμικό σύστημα με την προρρυθμισμένη μέθοδο των συζυγών κλίσεων και τη βοήθεια της μη πλήρους παραγοντοποίησης Cholesky, θα

χρησιμοποιήσουμε τον **Αλγόριθμο 3** και ως πίνακα M θα ορίσουμε το γινόμενο των πινάκων $A^T A$, όπου ο A προκύπτει από τον **Αλγόριθμο 6**.

Παρατήρηση: Στον **Αλγόριθμο 3**, η μη πλήρης παραγοντοποίηση Cholesky υπολογίζεται μόνο μία φορά. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να γίνονται λιγότεροι υπολογισμοί σε κάθε επανάληψη.

Κεφάλαιο 4

Υπολογιστικές Εφαρμογές

Σε αυτό το κεφάλαιο θα επιλύσουμε τέσσερα προβλήματα με τις μεθόδους που αναπτύξαμε στα προηγούμενα κεφάλαια με τη βοήθεια του λογισμικού Octave-Matlab.

4.1 Επίλυση γραμμικού συστήματος με τριδιαγώνιο πίνακα

Έστω ότι θέλουμε να επιλύσουμε το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, με τον τριδιαγώνιο πίνακα $A \in \mathbb{R}^{1000 \times 1000}$, με στοιχεία:

- $\alpha_{ii} = 12$, $1 \leq i \leq 1000$,
- $\alpha_{i,i+1} = -1$, $1 \leq i \leq 999$ και
- $\alpha_{i,i-1} = -1$, $2 \leq i \leq 1000$

και διάνυσμα $b \in \mathbb{R}^{1000}$, με στοιχεία:

- $b_1 = b_{1000} = 11$ και
- $b_i = 10$, $2 \leq i \leq 999$.

Σκοπός αυτού του προβλήματος είναι να βρούμε τη λύση του γραμμικού συστήματος με αρχικό διάνυσμα το $x_0 = [0, \dots, 0]^T$. Ο πίνακας A θα είναι της μορφής:

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 12 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 12 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 12 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι πρέπει να βρούμε τη λύση ενός συμμετρικού και θετικά ορισμένου πίνακα. Το παραπάνω σύστημα θα έχει την εξής μορφή:

$$\begin{bmatrix} 12 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 12 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 12 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{999} \\ x_{1000} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ \vdots \\ 10 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Η λύση αυτού του συστήματος είναι το διάνυσμα $\mathbf{x}_{real} = [1, 1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^{1000}$ (είναι προφανής).

Αρχικά, θα λύσουμε το πρόβλημα με τη μέθοδο Gauss-Seidel μέσω του Octave και ο κώδικας θα είναι της μορφής:

```
d1=[-1 0 1];
i1=[-1*ones(1000,1),12*ones(1000,1),-1*ones(1000,1)];
A=spdiags(i1,d1,1000,1000);
d2=[-1 0];
i2=[-1*ones(1000,1),12*ones(1000,1)];
L=spdiags(i2,d2,1000,1000);
U=A-L;
b=zeros(1000,1);
b(1)=b(1000)=11;
b(2:999)=10;
x=zeros(1000,1);
tic
for i=1:3
    x=L\b-U*x;
endfor
toc
x(1:5)
x(996:1000)
xreal=ones(1000,1);
norm(x-xreal)
```

Πρώτα από όλα, ορίζουμε τον τριδιαγώνιο πίνακα A με τη βοήθεια της εντολής `spdiags`. Στη συνέχεια, ορίζουμε ως L τον πίνακα με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως πριν, ο οποίος αποτελείται από την κύρια διαγώνιο και από τη διαγώνιο, η οποία βρίσκεται κάτω από την κύρια διαγώνιο και ως U τη διαφορά των πινάκων A και L . Επιπλέον, ορίζουμε το διάνυσμα b όπως μας δίνεται στο πρόβλημα και το αρχικό διάνυσμα \mathbf{x}_0 . Έπειτα, ορίζουμε την επαναληπτική μέθοδο Gauss-Seidel με σκοπό να βρούμε τη λύση του προβλήματος, αφού έχουμε ξεκινήσει τη χρονομέτρηση για την εύρεσή της. Μετά από την ολοκλήρωση των επαναλήψεων, εμφανίζονται ο χρόνος που χρειάστηκε για την εύρεση του διανύσματος με τη βοήθεια αυτής της μεθόδου,

τα 5 πρώτα και τα 5 τελευταία στοιχεία του διανύσματος \mathbf{x} (προφανώς επειδή είναι μεγάλης διάστασης) και υπολογίζουμε το τυπικό σφάλμα της λύσης που βρήκαμε από την πραγματική (την \mathbf{x}_{real}) με τη βοήθεια της νόρμας. Ο Πίνακας 4.1 μας παρουσιάζει τα αποτελέσματα για $n = 3, 5, 10$ και 20 επαναλήψεις.

n	3	5	10	20
x(1)	0.99932	0.99999	1.00000	1
x(2)	0.99925	0.99999	1.00000	1
x(3)	0.99925	0.99999	1.00000	1
x(4)	0.99925	0.99999	1.00000	1
x(5)	0.99925	0.99999	1.00000	1
x(996)	0.99925	1.00000	1.00000	1
x(997)	0.99925	1.00000	1.00000	1
x(998)	0.99983	1.00000	1.00000	1
x(999)	0.99998	1.00000	1.00000	1
x(1000)	1.00000	1.00000	1.00000	1
Τυπικό Σφάλμα ($\times 10^{-2}$)	2.3721	0.019586	0.012132×10^{-5}	0
Χρόνος Επίλυσης (σε sec)	0.029387	0.0336099	0.0340302	0.0281599

Πίνακας 4.1: Αποτελέσματα με τη μέθοδο Gauss-Seidel.

Επιλύοντας το παραπάνω γραμμικό σύστημα με τη μέθοδο Gauss-Seidel με 3, 5, 10 και 20 επαναλήψεις παρατηρούμε τα εξής στοιχεία. Πρώτα από όλα, όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων, τόσο προσεγγίζεται η ακριβής λύση του προβλήματος. Αυτό το διακρίνουμε στις 10 και στις 20 επαναλήψεις πάνω σε αυτή τη μέθοδο. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι με την αύξηση των επαναλήψεων, μειώνεται το τυπικό σφάλμα του προβλήματος, δηλαδή η νόρμα της διαφοράς της λύσης που βρήκαμε στον παραπάνω αλγόριθμο από την πραγματική λύση του προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα, στις 3 επαναλήψεις, το σφάλμα ισούται με 0.024, στις 5 επαναλήψεις είναι ίσο με 0.0002, στις 10 επαναλήψεις προσεγγίζει το μηδέν και στις 20 επαναλήψεις ισούται ακριβώς με μηδέν. Με άλλα λόγια, όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων, τόσο το τυπικό σφάλμα θα τείνει στο μηδέν. Τέλος, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων, τόσο αυξάνεται ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος. Ωστόσο, στις 20 επαναλήψεις, ο χρόνος εύρεσης του διανύσματος είναι μικρότερος από τον χρόνο για τις 3 επαναλήψεις.

Στη συνέχεια, θα λύσουμε το ίδιο πρόβλημα με τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων. Ο Πίνακας 4.2 μας παρουσιάζει τα αποτελέσματα για $n = 3, 5, 10$ και 20 επαναλήψεις.

```
d1=[-1 0 1];
i1=[-1*ones(1000,1),12*ones(1000,1),-1*ones(1000,1)];
```

```

A=spdiags(i1,d1,1000,1000);b=zeros(1000,1);
b(1)=b(1000)=11;
b(2:999)=10;
x=zeros(1000,1);
rold=b-A*x;
p=rold;
tic
for i=1:3
    alpha=rold'*rold/(p'*A*p);
    x=x+alpha*p;
    rnew=rold-alpha*A*p;
    beta=rnew'*rnew/(rold'*rold);
    p=rnew+beta*p;
    rold=rnew;
endfor
toc
x(1:5)
x(996:1000)
xreal=ones(1000,1);
norm(x-xreal)

```

Με τον παραπάνω κώδικα, επιλύουμε το ίδιο πρόβλημα αλλά με τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων.

n	3	5	10	20
x(1)	1.00001	1.0000	1.00000	1.00000
x(2)	1.00012	1.0000	1.00000	1.00000
x(3)	1.00069	1.0000	1.00000	1.00000
x(4)	1.00000	1.0000	1.00000	1.00000
x(5)	1.00000	1.0000	1.00000	1.00000
x(996)	1.00000	1.0000	1.00000	1.00000
x(997)	1.00000	1.0000	1.00000	1.00000
x(998)	1.00069	1.0000	1.00000	1.00000
x(999)	1.00012	1.0000	1.00000	1.00000
x(1000)	1.00001	1.0000	1.00000	1.00000
Τυπικό Σφάλμα ($\times 10^{-3}$)	0.98776	0.0069564	0.28954×10^{-7}	1.0649×10^{-12}
Χρόνος Επίλυσης (σε sec)	0.0878539	0.086273	0.079649	0.0788159

Πίνακας 4.2: Αποτελέσματα με τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων.

Παρατηρούμε ότι μόλις στην τρίτη επανάληψη, προσεγγίζεται πάρα πολύ η ακριβής λύση του προβλήματος. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να προσεγγιστεί γρηγορότερα

η λύση του προβλήματος με τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων παρά με την επαναληπτική μέθοδο Gauss-Seidel. Επίσης, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων, τόσο μειώνεται το τυπικό σφάλμα της λύσης που βρήκαμε με τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων από την πραγματική λύση. Πιο συγκεκριμένα, στις 3 επαναλήψεις, η απόκλιση ισούται με 0.0009, στις 5 επαναλήψεις είναι της τάξεως 10^{-5} , στις 10 επαναλήψεις είναι της τάξεως 10^{-10} και στις 20 επαναλήψεις ισούται με 1.07×10^{-15} . Παρατηρούμε μία μείωση του τυπικού σφάλματος, το οποίο τείνει στο μηδέν.

Επιπρόσθετα, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι τα τυπικά σφάλματα της μεθόδου των συζυγών κλίσεων είναι μικρότερα στις αντίστοιχες επαναλήψεις από αυτά της επαναληπτικής μεθόδου Gauss-Seidel, αποτελώντας ένα ακόμη στοιχείο της αποτελεσματικότητας αυτής της μεθόδου. Ωστόσο, οι χρόνοι επίλυσης της μεθόδου των συζυγών κλίσεων είναι μεγαλύτεροι στις αντίστοιχες επαναλήψεις από αυτούς της επαναληπτικής μεθόδου Gauss-Seidel. Αυτό οφείλεται στο ότι η μέθοδος Gauss-Seidel έχει λιγότερες πράξεις από τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων.

Ακόμα, θα λύσουμε το ίδιο πρόβλημα με την προρρυθμισμένη μέθοδο των συζυγών κλίσεων. Ως προρρυθμιστή θα χρησιμοποιήσουμε τον SSOR για $\omega = 0.1, 0.6, 1, 1.1, 1.7$ και 1.99 .

```
d1=[-1 0 1];
i1=[-1*ones(1000,1),12*ones(1000,1),-1*ones(1000,1)];
A=spdiags(i1,d1,1000,1000);
d2=[0];
i2=[12*ones(1000,1)];
D=spdiags(i2,d2,1000,1000);
U=triu(A)-D;
L=tril(A)-D;
omega=0.1;
M=omega/(2-omega)*(D/omega+L)*inv(D)*(D/omega+U);
b=zeros(1000,1);
b(1)=b(1000)=11;
b(2:999)=10;
x=zeros(1000,1);
rold=b-A*x;
zold=M\rold;
p=zold;
tic
for i=1:3
    alpha=rold'*zold/(p'*A*p);
    x=x+alpha*p;
    rnew=rold-alpha*A*p;
```



```

znew=M\rnew;
beta=rnew'*rnew/(rold'*zold);
p=znew+beta*p;
rold=rnew;
zold=znew;
endfor
toc
x(1:5)
x(996:1000)
xreal=ones(1000,1);
norm(x-xreal)
cond(inv(M)*A)
cond(A)

```

Αρχικά, θα εκτελέσουμε τον αλγόριθμο για $\omega = 0.1$. Ο Πίνακας 4.3 μας παρουσιάζει τα αποτελέσματα για $n = 3, 5, 10$ και 20 επαναλήψεις.

n	3	5	10	20
x(1)	1.0071	1.0070	1.0070	1.0070
x(2)	1.0075	1.0075	1.0075	1.0075
x(3)	1.0012	1.0012	1.0012	1.0012
x(4)	1.0011	1.0011	1.0011	1.0011
x(5)	1.0011	1.0011	1.0011	1.0011
x(996)	1.0011	1.0011	1.0011	1.0011
x(997)	1.0011	1.0011	1.0011	1.0011
x(998)	1.0012	1.0012	1.0012	1.0012
x(999)	1.0075	1.0075	1.0075	1.0075
x(1000)	1.0071	1.0070	1.0070	1.0070
Τυπικό Σφάλμα	0.037732	0.037733	0.037733	0.037733
Χρόνος Επίλυσης (σε sec)	0.107806	0.0977581	0.0966361	0.105275

Πίνακας 4.3: Αποτελέσματα με την προρρυθμισμένη μέθοδο των συζυγών κλίσεων για $\omega = 0.1$.

Για $\omega = 0.1$, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων, τόσο προσεγγίζεται η ακριβής λύση του προβλήματος. Αυτό το διακρίνουμε από την πέμπτη επανάληψη και έπειτα. Ωστόσο, παρατηρούμε ότι με την αύξηση των επαναλήψεων, αυξάνεται πολύ λίγο το τυπικό σφάλμα του προβλήματος, δηλαδή η νόρμα της διαφοράς της λύσης που βρήκαμε στον παραπάνω αλγόριθμο από την πραγματική λύση του προβλήματος. Τέλος, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων, τόσο μειώνεται ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος στις 5 και στις 10 επαναλήψεις, ενώ στις 20 επαναλήψεις παρουσιάζει μία αύξηση.

Στη συνέχεια, θα λύσουμε το ίδιο πρόβλημα για $\omega = 0.6$. Ο Πίνακας 4.4 μας παρουσιάζει τα αποτελέσματα για $n = 3, 5, 10$ και 20 επαναλήψεις.

n	3	5	10	20
x(1)	0.99925	0.99919	0.99919	0.99919
x(2)	1.00033	1.00024	1.00024	1.00024
x(3)	1.00009	1.00008	1.00008	1.00008
x(4)	1.00003	1.00002	1.00002	1.00002
x(5)	1.00002	1.00002	1.00002	1.00002
x(996)	1.00002	1.00002	1.00002	1.00002
x(997)	1.00002	1.00002	1.00002	1.00002
x(998)	1.00008	1.00008	1.00008	1.00008
x(999)	1.00031	1.00023	1.00023	1.00023
x(1000)	0.99932	0.99926	0.99926	0.99926
Τυπικό Σφάλμα	0.0012442	0.0012348	0.0012348	0.0012348
Χρόνος Επίλυσης (σε sec)	0.123028	0.093323	0.0910301	0.100848

Πίνακας 4.4: Αποτελέσματα με την προρρυθμισμένη μέθοδο των συζυγών κλίσεων για $\omega = 0.6$.

Για $\omega = 0.6$, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων, τόσο προσεγγίζεται η ακριβής λύση του προβλήματος. Αυτό το διακρίνουμε από την πέμπτη επανάληψη και έπειτα. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι με την αύξηση των επαναλήψεων, μειώνεται το τυπικό σφάλμα του προβλήματος στις 5 επαναλήψεις, χωρίς αυτό να μεταβάλλεται σε μεγαλύτερο αριθμό επαναλήψεων. Τέλος, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων, τόσο μειώνεται ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος στις 5 και στις 10 επαναλήψεις, ενώ στις 20 επαναλήψεις παρουσιάζει μία αύξηση.

Στη συνέχεια, δοκιμάζουμε να λύσουμε το σύστημα για $\omega = 1$. Ο Πίνακας 4.5 μας παρουσιάζει τα αποτελέσματα για $n = 3, 5, 10$ και 20 επαναλήψεις.

Για $\omega = 1$, παρατηρούμε ότι προσεγγίζουμε τη λύση του προβλήματος από την τρίτη επανάληψη. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι με την αύξηση των επαναλήψεων, μειώνεται αρκετά το τυπικό σφάλμα του προβλήματος, το οποίο τείνει στο μηδέν. Τέλος, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων, τόσο αυξάνεται ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος στις 5 επαναλήψεις, ενώ στις 10 και στις 20 επαναλήψεις παρουσιάζει μία μείωση.

Επιπρόσθετα, θα παρατηρήσουμε τι συμβαίνει όταν $\omega = 1.1$. Ο Πίνακας 4.6 μας παρουσιάζει τα αποτελέσματα για $n = 3, 5, 10$ και 20 επαναλήψεις.

n	3	5	10	20
x(1)	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
x(2)	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
x(3)	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
x(4)	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
x(5)	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
x(996)	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
x(997)	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
x(998)	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
x(999)	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
x(1000)	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
Τυπικό Σφάλμα ($\times 10^{-6}$)	0.72988	0.26493	0.26489	0.26489
Χρόνος Επίλυσης (σε sec)	0.105235	0.128633	0.128111	0.0935111

Πίνακας 4.5: Αποτελέσματα με την προρρυθμισμένη μέθοδο των συζυγών κλίσεων για $\omega = 1$.

n	3	5	10	20
x(1)	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
x(2)	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
x(3)	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
x(4)	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
x(5)	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
x(996)	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
x(997)	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
x(998)	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
x(999)	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
x(1000)	1.00001	1.00000	1.00000	1.00000
Τυπικό Σφάλμα ($\times 10^{-5}$)	0.74388	0.53517	0.53518	0.53518
Χρόνος Επίλυσης (σε sec)	0.0989101	0.09799	0.096422	0.099139

Πίνακας 4.6: Αποτελέσματα με την προρρυθμισμένη μέθοδο των συζυγών κλίσεων για $\omega = 1.1$.

Για $\omega = 1.1$, παρατηρούμε ότι προσεγγίζεται η ακριβής λύση του προβλήματος από την τρίτη επανάληψη. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι με την αύξηση των επαναλήψεων, το τυπικό σφάλμα του προβλήματος σταθεροποιείται από τις 10 επαναλήψεις και έπειτα. Ακόμα, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων, τόσο μειώνεται ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος στις 5 και στις 10 επαναλήψεις, ενώ στις 20 επαναλήψεις παρουσιάζει μία αύξηση. Τέλος, αξίζει να παρατηρήσουμε ότι για $\omega = 1$,

το τυπικό σφάλμα της λύσης του προβλήματος σε κάθε αριθμό επαναλήψεων είναι μικρότερο από τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προκύπτουν για $\omega = 1.1$.

Έπειτα, θα παρατηρήσουμε τι συμβαίνει όταν $\omega = 1.7$. Ο Πίνακας 4.7 μας παρουσιάζει τα αποτελέσματα για $n = 3, 5, 10$ και 20 επαναλήψεις.

n	3	5	10	20
x(1)	1.0021	1.0022	1.0022	1.0022
x(2)	1.0026	1.0026	1.0026	1.0026
x(3)	1.0008	1.0007	1.0007	1.0007
x(4)	1.0003	1.0002	1.0002	1.0002
x(5)	1.0001	1.0001	1.0001	1.0001
x(996)	1.0002	1.0002	1.0002	1.0002
x(997)	1.0003	1.0003	1.0003	1.0003
x(998)	1.0010	1.0010	1.0010	1.0010
x(999)	1.0035	1.0034	1.0034	1.0034
x(1000)	1.0018	1.0019	1.0019	1.0019
Τυπικό Σφάλμα	0.0066669	0.0066622	0.0066622	0.0066622
Χρόνος Επίλυσης (σε sec)	0.094331	0.103903	0.114256	0.103688

Πίνακας 4.7: Αποτελέσματα με την προρρυθμισμένη μέθοδο των συζυγών κλίσεων για $\omega = 1.7$.

Για $\omega = 1.7$, παρατηρούμε ότι υπάρχει μια καλή προσέγγιση της λύσης, χωρίς να έχουμε βρει την ακριβή λύση του προβλήματος. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι με την αύξηση των επαναλήψεων, μειώνεται το τυπικό σφάλμα του προβλήματος, το οποίο σταθεροποιείται από τις 5 επαναλήψεις και έπειτα. Τέλος, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων, τόσο αυξάνεται ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος στις 5 και στις 10 επαναλήψεις, ενώ στις 20 επαναλήψεις παρουσιάζει μία μείωση.

Τέλος, θα προσπαθήσουμε να λύσουμε το σύστημα και με μία τιμή κοντά στο 2, δηλαδή για $\omega = 1.99$. Ο Πίνακας 4.8 μας παρουσιάζει τα αποτελέσματα για $n = 3, 5, 10$ και 20 επαναλήψεις.

n	3	5	10	20
x(1)	0.94145	0.94145	0.94145	0.94145
x(2)	0.99251	0.99251	0.99251	0.99251
x(3)	1.00026	1.00026	1.00026	1.00026
x(4)	1.00143	1.00143	1.00143	1.00143
x(5)	1.00161	1.00161	1.00161	1.00161
x(996)	1.00160	1.00160	1.00160	1.00160
x(997)	1.00136	1.00136	1.00136	1.00136
x(998)	0.99976	0.99976	0.99976	0.99976
x(999)	0.98914	0.98914	0.98914	0.98914
x(1000)	0.91929	0.91929	0.91929	0.91929
Τυπικό Σφάλμα	0.11305	0.11305	0.11305	0.11305
Χρόνος Επίλυσης (σε sec)	0.0915091	0.0923278	0.106238	0.0998211

Πίνακας 4.8: Αποτελέσματα με την προρρυθμισμένη μέθοδο των συζυγών κλίσεων για $\omega = 1.99$.

Για $\omega = 1.99$, παρατηρούμε ότι υπάρχει μια κακή προσέγγιση της λύσης, η οποία προκύπτει από την τρίτη επανάληψη. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι όσο και αν αυξήσουμε τον αριθμό των επαναλήψεων, το τυπικό σφάλμα του προβλήματος θα παραμείνει σταθερό και θα είναι ίσο με 0.11. Τέλος, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων, τόσο αυξάνεται ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος στις 5 και στις 10 επαναλήψεις, ενώ στις 20 επαναλήψεις παρουσιάζει μία μείωση.

Ο **Πίνακας 4.9** μας παρουσιάζει για διαφορετικές τιμές του ω τους αντίστοιχους δείκτες κατάστασης. Παρατηρούμε ότι ισχύει $K_2(M^{-1}A) < K_2(A)$ για κάθε τιμή του ω , επιβεβαιώνοντας αυτό που ισχύει για τους προρρυθμιστές, το οποίο συναντήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

ω	0.1	0.6	1	1.1	1.7	1.99
$K_2(M^{-1}A)$	1.3541	1.1460	1.0083	1.0317	1.2637	1.3952
$K_2(A)$	1.4000	1.4000	1.4000	1.4000	1.4000	1.4000

Πίνακας 4.9: Δείκτες κατάστασης των πινάκων $K_2(M^{-1}A)$ και $K_2(A)$ για διαφορετικές τιμές του ω .

Μέσα από την προρρυθμισμένη μέθοδο των συζυγών κλίσεων, παρατηρούμε ότι η εύρεση της λύσης του προβλήματος είναι εφικτή, με την προϋπόθεση να βρεθεί το κατάλληλο ω .

Τέλος, θα προσπαθήσουμε να λύσουμε το παραπάνω πρόβλημα με την μη πλήρη παραγοντοποίηση LU.

```

A=diag(12*ones(1,1000),0)+diag(-1*ones(1,999),1)+diag
(-1*ones(1,999),-1);
for i=2:length(A)
    for j=1:i-1
        if A(i,j)~=0
            A(i,j)=A(i,j)/A(j,j);
            for k=j+1:length(A)
                if A(i,k)~=0
                    A(i,k)=A(i,k)-A(i,j)*A(j,k);
                endif
            endfor
        endif
    endfor
endfor
U=triu(A);
L=tril(A);
for i=1:length(L)
    L(i,i)=1;
endfor
b(1,1)=b(1000,1)=11;b(2:999,1)=10;
A=inv(L)*A*inv(U);
b=inv(L)*b;
x=A\b;
x=inv(U)*x;

```

Με τον παραπάνω κώδικα επιλύουμε το γραμμικό σύστημα. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι τα εξής:

```

x(1:5)
ans =

    0.99363
    0.92358
    0.92318
    0.92318
    0.92318

```

```
x(996:1000)
```

```
ans =
```

```
0.92318
```

```
0.92318
```

```
0.92322
```

```
0.92372
```

```
0.92963
```

```
norm(x-xreal)
```

```
ans = 2.4279
```

Παρατηρούμε ότι η λύση που βρήκαμε μέσω αυτής της μεθόδου είναι κοντά στην πραγματική λύση του προβλήματος. Ωστόσο, το τυπικό σφάλμα από την πραγματική λύση είναι αρκετά μεγάλο. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η μη πλήρης παραγοντοποίηση LU να μην χρησιμοποιείται τόσο συχνά.

Αν επαναλάβουμε τον αλγόριθμο της προρρυθμισμένης μεθόδου των συζυγών κλίσεων, ορίζοντας ως πίνακα προρρυθμιστή τον $M = LU$, με L και U τους πίνακες που προέκυψαν από την μη πλήρη παραγοντοποίηση LU, τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι τα εξής:

```
x(1:5)
```

```
ans =
```

```
0.99663
```

```
0.92637
```

```
0.92323
```

```
0.92319
```

```
0.92320
```

```
x(996:1000)
```

```
ans =
```

```
0.92320
```

```
0.92321
```

```
0.92325
```

```
0.92377
```

```
0.92990
```

```
norm(x-xreal)
```

```
ans = 2.4270
```

Παρατηρούμε ότι η λύση που βρήκαμε με την προρρυθμισμένη μέθοδο των συζυγών κλίσεων με προρρυθμιστή τον πίνακα $M = LU$ δεν διαφέρει από την απευθείας επίλυση του γραμμικού συστήματος με την μη πλήρη παραγοντοποίηση LU. Επιπλέον, οι δύο αυτές λύσεις παρουσιάζουν το ίδιο τυπικό σφάλμα.

Συμπεραίνοντας, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το παραπάνω πρόβλημα λύνεται με αρκετές μεθόδους. Ωστόσο, παρατηρούμε ότι η προρρυθμισμένη μέθοδος των συζυγών κλίσεων δεν είναι κατάλληλη μέθοδος επειδή με τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων, το πρόβλημα λύνεται πιο γρήγορα.

4.2 Επίλυση γραμμικού συστήματος με πίνακα Hilbert

Έστω ότι έχουμε να επιλύσουμε το γραμμικό σύστημα $A\mathbf{x} = b$, με τον A να είναι ένας πίνακας Hilbert (Hilbert matrix) διάστασης 8×8 και το διάνυσμα $b \in \mathbb{R}^8$ με στοιχεία:

$$\bullet b_i = \sum_{j=1}^8 \alpha_{ij}, \quad 1 \leq i \leq 8.$$

Ως πίνακα Hilbert H ορίζουμε τον τετραγωνικό πίνακα διάστασης n , του οποίου τα στοιχεία είναι ίσα με:

$$H_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Επίσης, τα στοιχεία του μπορούν να οριστούν από το ολοκλήρωμα

$$H_{ij} = \int_0^1 x^{i+j-2} dx, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Ο πίνακας αυτός ανακαλύφθηκε από τον Γερμανό μαθηματικό David Hilbert το 1894. Ένα αρνητικό στοιχείο αυτού του πίνακα είναι ότι έχει μεγάλο δείκτη κατάστασης και αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μην χρησιμοποιείται για αριθμητικούς υπολογισμούς. Για παράδειγμα, ισχύει ότι $K_2(H) > 4.8 \times 10^5$.

Επιπλέον, αυτός ο πίνακας είναι συμμετρικός, καθώς

$$H_{ji} = \frac{1}{j+i-1} = \frac{1}{i+j-1} = H_{ij}$$

και θετικά ορισμένος γιατί ισχύει ότι

$$\mathbf{x}^T H \mathbf{x} > 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq 0.$$

Για το πρόβλημά μας θα ορίσουμε ως αρχικό διάνυσμα το $\mathbf{x}_0 = [0, \dots, 0]^T$. Η λύση του προβλήματός μας θα είναι το διάνυσμα $\mathbf{x}_{real} = [1, 1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^8$. Αρχικά, θα λύσουμε το πρόβλημα με τη μέθοδο Gauss-Seidel.

```
A=hilb(8);
L=tril(A);
U=A-L;
b=sum(A,2);
x=zeros(8,1);
tic
for i=1:3
```

```

x=L\b-U*x);
endfor
toc
x
xreal=ones(8,1);
norm(x-xreal)

```

Ο Πίνακας 4.10 μας παρουσιάζει τα αποτελέσματα για $n = 3, 5, 10$ και 20 επαναλήψεις και ο Πίνακας 4.11 μας παρουσιάζει τα αποτελέσματα για $n = 1000, 2000, 5000$ και 10000 επαναλήψεις.

n	3	5	10	20
x(1)	0.83563	0.58186	0.75773	0.98091
x(2)	2.02328	1.85672	1.27992	0.79634
x(3)	1.37288	1.44181	1.38308	1.28585
x(4)	0.99886	1.11869	1.20905	1.25120
x(5)	0.75743	0.88133	1.01503	1.10941
x(6)	0.59156	0.70622	0.84681	0.95814
x(7)	0.47261	0.57483	0.70905	0.82214
x(8)	0.38451	0.47442	0.59773	0.70601
Τυπικό Σφάλμα	1.4477	1.2944	0.77309	0.56431
Χρόνος Επίλυσης (σε sec)	0.0275009	0.0325592	0.037776	0.0393529

Πίνακας 4.10: Αποτελέσματα με τη μέθοδο Gauss-Seidel.

n	1000	2000	5000	10000
x(1)	0.99724	0.99851	0.99986	1.00012
x(2)	1.03286	1.01701	1.00034	0.99718
x(3)	0.92716	0.96617	1.00687	1.01396
x(4)	1.00242	0.99122	0.98026	0.97990
x(5)	1.04582	1.02471	1.00235	0.99771
x(6)	1.04111	1.02971	1.01713	1.01345
x(7)	1.00353	1.00675	1.00988	1.00994
x(8)	0.94789	0.96476	0.98301	0.98762
Τυπικό Σφάλμα	0.11365	0.065529	0.033497	0.032324
Χρόνος Επίλυσης (σε sec)	0.036665	0.04739	0.0572329	0.0951519

Πίνακας 4.11: Αποτελέσματα με τη μέθοδο Gauss-Seidel.

Παρατηρούμε ότι αν αυξήσουμε σε μεγάλο βαθμό τον αριθμό των επαναλήψεων, θα προσεγγίσουμε τη λύση του προβλήματος. Αυτό διακρίνεται από τα στοιχεία του διανύσματος σε κάθε επανάληψη, καθώς και από το τυπικό σφάλμα από την πραγματική λύση του προβλήματος, το οποίο συνεχώς ελαττώνεται όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων. Επιπλέον, ο χρόνος εύρεσης του διανύσματος αυξάνεται, όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων.

Στη συνέχεια, θα λύσουμε το ίδιο πρόβλημα με τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων. Ο Πίνακας 4.12 μας παρουσιάζει τα αποτελέσματα για $n = 3, 5, 10$ και 20 επαναλήψεις.

```
A=hilb(8);
b=sum(A,2);
x=zeros(8,1);
rold=b-A*x;
p=rold;
tic
for i=1:3
    alpha=rold'*rold/(p'*A*p);
    x=x+alpha*p;
    rnew=rold-alpha*A*p;
    beta=rnew'*rnew/(rold'*rold);
    p=rnew+beta*p;
    rold=rnew;
endfor
toc
x
xreal=ones(8,1);
norm(x-xreal)
```

n	3	5	10	20
x(1)	1.00831	1.00002	1.00000	1.00000
x(2)	0.94994	0.99975	1.00001	1.00000
x(3)	1.02177	1.00129	0.99993	1.00000
x(4)	1.04518	0.99824	1.00020	1.00000
x(5)	1.03623	0.99941	0.99978	1.00000
x(6)	1.01048	1.00142	0.99994	1.00000
x(7)	0.97681	1.00147	1.00026	1.00000
x(8)	0.94001	0.99843	0.99988	1.00000
Τυπικό Σφάλμα	0.10319	0.0034368	0.00042358	0.69526×10^{-6}
Χρόνος Επίλυσης (σε sec)	0.0891471	0.078481	0.0796912	0.092427

Πίνακας 4.12: Αποτελέσματα με τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων.

Παρατηρούμε ότι στις 20 επαναλήψεις έχει προσεγγιστεί η λύση του προβλήματος με τυπικό σφάλμα κοντά στο μηδέν.

Τέλος, θα δοκιμάσουμε να επιλύσουμε αυτό το πρόβλημα και με την προρρυθμισμένη μέθοδο των συζυγών κλίσεων, ορίζοντας ως προρρυθμιστή τον Jacobi. Ο **Πίνακας 4.13** μας παρουσιάζει τα αποτελέσματα για $n = 3, 5, 10$ και 20 επαναλήψεις.

```
A=hilb(8);
M=diag(diag(A),0);
b=sum(A,2);
x=zeros(8,1);
rold=b-A*x;
zold=M\rold;
p=zold;
tic
for i=1:3
    alpha=rold'*zold/(p'*A*p);
    x=x+alpha*p;
    rnew=rold-alpha*A*p;
    znew=M\rnew;
    beta=rnew'*rnew/(rold'*zold);
    p=znew+beta*p;
    rold=rnew;
    zold=znew;
endfor
toc
x
```

```
xreal=ones(8,1);
norm(x-xreal)
cond(inv(M)*A)
cond(A)
```

n	3	5	10	20
x(1)	0.88102	0.94829	0.95541	0.97239
x(2)	1.18333	1.11137	1.09368	1.07202
x(3)	1.16684	1.06174	1.04039	1.01245
x(4)	1.09061	1.01260	0.99786	0.97910
x(5)	1.00394	0.97837	0.97408	0.97004
x(6)	0.92018	0.95625	0.96352	0.97569
x(7)	0.84308	0.94260	0.96137	0.98956
x(8)	0.77332	0.93466	0.96441	1.00776
Τυπικό Σφάλμα	0.40768	0.17027	0.13101	0.090546
Χρόνος Επίλυσης (σε sec)	0.100688	0.117654	0.088994	0.090848

Πίνακας 4.13: Αποτελέσματα με την προρρυθμισμένη μέθοδο των συζυγών κλίσεων.

Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων, τόσο προσεγγίζεται η ακριβής λύση του προβλήματος. Επιπλέον, όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων, τόσο μειώνεται το τυπικό σφάλμα.

$K_2(M^{-1}A)$	$K_2(A)$
74.93×10^8	152.58×10^8

Πίνακας 4.14: Δείκτες κατάστασης των πινάκων $M^{-1}A$ και A .

Με βάση τον **Πίνακα 4.14**, προκύπτει ότι ο δείκτης κατάστασης του πίνακα $M^{-1}A$ είναι μικρότερος από του A , επιβεβαιώνοντας την ιδιότητα που συναντήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ακόμη, επιβεβαιώνεται αυτό που προαναφέραμε για τον δείκτη κατάστασης του πίνακα Hilbert, καθώς και την τεράστια διαφορά του σε σχέση με τον τριδιαγώνιο πίνακα που συναντήσαμε στο προηγούμενο πρόβλημα. Αυτό συμβαίνει επειδή ο πίνακας Hilbert είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Με βάση το **Λήμμα 1.2**, ο δείκτης κατάστασης του πίνακα Hilbert θα είναι ίσος με:

$$K_2(H) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}.$$

Επειδή η ελάχιστη ιδιοτιμή του πίνακα Hilbert θα τείνει όλο και περισσότερο στο μηδέν όσο αυξάνεται η διάσταση του πίνακα, αυτό θα οδηγήσει σε έναν δείκτη κατάστασης, ο οποίος θα τείνει στο άπειρο.

Με βάση το παραπάνω πρόβλημα, συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας Hilbert δεν είναι κατάλληλος για αυτές τις μεθόδους γιατί είναι ένας πίνακας, ο οποίος αποτελείται από θετικά στοιχεία, με αποτέλεσμα να χρειάζονται πολλές πράξεις στους παραπάνω αλγορίθμους και η επίλυση του προβλήματος να μην γίνεται σε τόσο σύντομο χρονικό διάστημα όπως στο προηγούμενο πρόβλημα, το οποίο σχετιζόταν με έναν τριδιαγώνιο πίνακα. Επιπρόσθετα, λόγω του μεγάλου δείκτη κατάστασής του, δεν είναι εφικτή η χρήση του συγκεκριμένου πίνακα στην επίλυση υπολογιστικών προβλημάτων με αριθμητικές μεθόδους.

4.3 Επίλυση γραμμικού συστήματος με τριδιαγώνιο πίνακα και παράμετρο ϵ

Έστω ότι θέλουμε να επιλύσουμε το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, με τον τριδιαγώνιο πίνακα $A \in \mathbb{R}^{1000 \times 1000}$, με στοιχεία:

- $\alpha_{ii} = 2 + \epsilon$, $1 \leq i \leq 1000$, όπου $\epsilon = 0.1$,
- $\alpha_{i,i+1} = -1$, $1 \leq i \leq 999$ και
- $\alpha_{i,i-1} = -1$, $2 \leq i \leq 1000$

και διάνυσμα $b \in \mathbb{R}^{1000}$, με στοιχεία:

- $b_1 = b_{1000} = 1 + \epsilon$ και
- $b_i = \epsilon$, $2 \leq i \leq 999$.

Σκοπός αυτού του προβλήματος είναι να βρούμε τη λύση του γραμμικού συστήματος με αρχικό διάνυσμα το $x_0 = [0, \dots, 0]^T$. Ο πίνακας A θα είναι της μορφής:

$$A = \begin{bmatrix} 2 + \epsilon & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 + \epsilon & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 2 + \epsilon & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 + \epsilon \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι πρέπει να βρούμε τη λύση ενός συμμετρικού και θετικά ορισμένου πίνακα. Το παραπάνω σύστημα θα έχει την εξής μορφή:

$$\begin{bmatrix} 2 + \epsilon & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 + \epsilon & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 2 + \epsilon & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 + \epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{999} \\ x_{1000} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \epsilon \\ \epsilon \\ \vdots \\ \epsilon \\ 1 + \epsilon \end{bmatrix}.$$

Η λύση αυτού του συστήματος είναι το διάνυσμα $x_{real} = [1, 1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^{1000}$.

Αρχικά, θα λύσουμε το πρόβλημα με τη μέθοδο Gauss-Seidel μέσω του Octave και ο κώδικας θα είναι της μορφής:

```
epsilon=0.1;
d1=[-1 0 1];
i1=[-1*ones(1000,1), (2+epsilon)*ones(1000,1), -1*ones
(1000,1)];
A=spdiags(i1,d1,1000,1000);
d2=[-1 0];
i2=[-1*ones(1000,1), (2+epsilon)*ones(1000,1)];
```

```

L=spdiags(i2,d2,1000,1000);
U=A-L;
b=zeros(1000,1);
b(1)=b(1000)=1+epsilon;
b(2:999)=epsilon;
x=zeros(1000,1);
tic
for i=1:5
    x=L\b-U*x;
endfor
toc
x(1:5)
x(996:1000)
xreal=ones(1000,1);
norm(x-xreal)

```

Ο Πίνακας 4.15 μας παρουσιάζει τα αποτελέσματα για $n = 5, 20, 50$ και 100 επαναλήψεις.

n	5	20	50	100
x(1)	0.82427	0.97465	0.99889	0.99999
x(2)	0.68740	0.95238	0.99790	0.99998
x(3)	0.58633	0.93314	0.99701	0.99998
x(4)	0.51484	0.91678	0.99622	0.99997
x(5)	0.46604	0.90308	0.99552	0.99997
x(996)	0.40356	0.92630	0.99785	0.99999
x(997)	0.47246	0.94181	0.99833	0.99999
x(998)	0.58507	0.95744	0.99880	0.99999
x(999)	0.72445	0.97267	0.99923	1.00000
x(1000)	0.86878	0.98698	0.99963	1.00000
Τυπικό Σφάλμα	19.577	4.6703	0.26652	0.0022589
Χρόνος Επίλυσης (σε sec)	0.026185	0.027658	0.0296221	0.0298679

Πίνακας 4.15: Αποτελέσματα με τη μέθοδο Gauss-Seidel.

Επιλύοντας το παραπάνω γραμμικό σύστημα με τη μέθοδο Gauss-Seidel με $5, 20, 50$ και 100 επαναλήψεις παρατηρούμε τα εξής στοιχεία. Πρώτα από όλα, όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων, τόσο προσεγγίζεται η ακριβής λύση του προβλήματος. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι με την αύξηση των επαναλήψεων, μειώνεται το τυπικό σφάλμα του προβλήματος. Τέλος, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων, τόσο αυξάνεται ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος.

Στη συνέχεια, θα λύσουμε το ίδιο πρόβλημα με τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων. Ο Πίνακας 4.16 μας παρουσιάζει τα αποτελέσματα για $n = 5, 20, 50$ και 100 επαναλήψεις.

```

epsilon=0.1;
d1=[-1 0 1];
i1=[-1*ones(1000,1), (2+epsilon)*ones(1000,1), -1*ones
    (1000,1)];
A=spdiags(i1,d1,1000,1000);
b=zeros(1000,1);
b(1)=b(1000)=1+epsilon;
b(2:999)=epsilon;
x=zeros(1000,1);
rold=b-A*x;
p=rold;
tic
for i=1:5
    alpha=rold'*rold/(p'*A*p);
    x=x+alpha*p;
    rnew=rold-alpha*A*p;
    beta=rnew'*rnew/(rold'*rold);
    p=rnew+beta*p;
    rold=rnew;
endfor
toc
x(1:5)
x(996:1000)
xreal=ones(1000,1);
norm(x-xreal)

```

Με τον παραπάνω κώδικα, επιλύουμε το ίδιο πρόβλημα αλλά με τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων.

Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων, τόσο προσεγγίζεται η ακριβής λύση του προβλήματος και μειώνεται το τυπικό σφάλμα. Επιπρόσθετα, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι τα τυπικά σφάλματα της μεθόδου των συζυγών κλίσεων είναι μικρότερα στις αντίστοιχες επαναλήψεις από αυτά της επαναληπτικής μεθόδου Gauss-Seidel, αποτελώντας ένα ακόμη στοιχείο της αποτελεσματικότητας αυτής της μεθόδου. Ωστόσο, οι χρόνοι επίλυσης της μεθόδου των συζυγών κλίσεων είναι μεγαλύτεροι στις αντίστοιχες επαναλήψεις από αυτούς της επαναληπτικής μεθόδου Gauss-Seidel. Αυτό οφείλεται στο ότι η μέθοδος Gauss-Seidel έχει λιγότερες πράξεις από τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων.

n	5	20	50	100
x(1)	1.2302	1.0001	1.0000	1.00000
x(2)	1.4338	1.0001	1.0000	1.00000
x(3)	1.5769	1.0002	1.0000	1.00000
x(4)	1.6088	1.0002	1.0000	1.00000
x(5)	1.4509	1.0003	1.0000	1.00000
x(996)	1.4509	1.0003	1.0000	1.00000
x(997)	1.6088	1.0002	1.0000	1.00000
x(998)	1.5769	1.0002	1.0000	1.00000
x(999)	1.4338	1.0001	1.0000	1.00000
x(1000)	1.2302	1.0001	1.0000	1.00000
Τυπικό Σφάλμα	1.6324	0.013991	0.11037×10^{-5}	1.7300×10^{-13}
Χρόνος Επίλυσης (σε sec)	0.075623	0.0829511	0.082407	0.0839529

Πίνακας 4.16: Αποτελέσματα με τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων.

Ακόμα, θα λύσουμε το ίδιο πρόβλημα με την προρρυθμισμένη μέθοδο των συζυγών κλίσεων. Ως προρρυθμιστή θα χρησιμοποιήσουμε τον SSOR για $\omega = 0.2, 0.5, 1, 1.25, 1.6$ και 1.9 .

```

epsilon=0.1;
d1=[-1 0 1];
i1=[-1*ones(1000,1),(2+epsilon)*ones(1000,1),-1*ones
(1000,1)];
A=spdiags(i1,d1,1000,1000);
d2=[0];
i2=[(2+epsilon)*ones(1000,1)];
D=spdiags(i2,d2,1000,1000);
U=triu(A)-D;
L=tril(A)-D;
omega=0.2;
M=omega/(2-omega)*(D/omega+L)*inv(D)*(D/omega+U);
b=zeros(1000,1);
b(1)=b(1000)=1+epsilon;
b(2:999)=epsilon;
x=zeros(1000,1);
rold=b-A*x;
zold=M\rold;
p=zold;
tic
for i=1:5

```

```

alpha=rold'*zold/(p'*A*p);
x=x+alpha*p;
rnew=rold-alpha*A*p;
znew=M\rnew;
beta=rnew'*rnew/(rold'*zold);
p=znew+beta*p;
rold=rnew;
zold=znew;
endfor
toc
x(1:5)
x(996:1000)
xreal=ones(1000,1);
norm(x-xreal)
cond(inv(M)*A)
cond(A)

```

Αρχικά, θα εκτελέσουμε τον αλγόριθμο για $\omega = 0.2$. Ο Πίνακας 4.17 μας παρουσιάζει τα αποτελέσματα για $n = 5, 20, 50$ και 100 επαναλήψεις.

n	5	20	50	100
x(1)	3.43001	3.43046	3.43046	3.43046
x(2)	0.75619	0.75635	0.75635	0.75635
x(3)	0.43474	0.43482	0.43482	0.43482
x(4)	0.39773	0.39780	0.39780	0.39780
x(5)	0.39359	0.39366	0.39366	0.39366
x(996)	0.39359	0.39365	0.39365	0.39365
x(997)	0.39768	0.39775	0.39775	0.39775
x(998)	0.43433	0.43441	0.43441	0.43441
x(999)	0.75264	0.75281	0.75281	0.75281
x(1000)	3.40067	3.40112	3.40112	3.40112
Τυπικό Σφάλμα	19.456	19.455	19.455	19.455
Χρόνος Επίλυσης (σε sec)	0.101049	0.0955942	0.0959041	0.102738

Πίνακας 4.17: Αποτελέσματα με την προορρυθμισμένη μέθοδο των συζυγών κλίσεων για $\omega = 0.2$.

Για $\omega = 0.2$, παρατηρούμε ότι δεν μπορούμε να βρούμε την ακριβή λύση του προβλήματος, καθώς η λύση που προκύπτει σε κάθε αριθμό επαναλήψεων διαφέρει από την πραγματική λύση του προβλήματος. Αυτό διακρίνεται και από το τυπικό σφάλμα σε κάθε αριθμό επαναλήψεων, το οποίο είναι αρκετά μεγάλο και σταθεροποιείται στις

20 επαναλήψεις. Τέλος, ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος μειώνεται μέχρι τις 20 επαναλήψεις και στη συνέχεια, παρουσιάζει μία αύξηση.

Στη συνέχεια, θα λύσουμε το ίδιο πρόβλημα για $\omega = 0.5$. Ο Πίνακας 4.18 μας παρουσιάζει τα αποτελέσματα για $n = 5, 20, 50$ και 100 επαναλήψεις.

n	5	20	50	100
x(1)	4.40564	4.41364	4.41364	4.41364
x(2)	2.36603	2.38321	2.38321	2.38321
x(3)	1.41610	1.42793	1.42793	1.42793
x(4)	1.07360	1.08202	1.08202	1.08202
x(5)	0.96298	0.96999	0.96999	0.96999
x(996)	0.96024	0.96722	0.96722	0.96722
x(997)	1.06472	1.07304	1.07304	1.07304
x(998)	1.38927	1.40087	1.40087	1.40087
x(999)	2.29522	2.31215	2.31215	2.31215
x(1000)	4.27524	4.28479	4.28479	4.28479
Τυπικό Σφάλμα	5.7645	5.6965	5.6965	5.6965
Χρόνος Επίλυσης (σε sec)	0.0961151	0.0952518	0.100955	0.099643

Πίνακας 4.18: Αποτελέσματα με την προρρυθμισμένη μέθοδο των συζυγών κλίσεων για $\omega = 0.5$.

Για $\omega = 0.5$, παρατηρούμε ότι δεν μπορούμε να βρούμε την ακριβή λύση του προβλήματος, καθώς η λύση που προκύπτει σε κάθε αριθμό επαναλήψεων διαφέρει από την πραγματική λύση του προβλήματος. Αυτό διακρίνεται και από το τυπικό σφάλμα σε κάθε αριθμό επαναλήψεων, το οποίο είναι μεγάλο και σταθεροποιείται στις 20 επαναλήψεις. Τέλος, ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος μειώνεται μέχρι τις 20 επαναλήψεις, στις 50 επαναλήψεις παρουσιάζει μία αύξηση και στις 100 επαναλήψεις μειώνεται.

Στη συνέχεια, δοκιμάζουμε να λύσουμε το σύστημα για $\omega = 1$. Ο Πίνακας 4.19 μας παρουσιάζει τα αποτελέσματα για $n = 5, 20, 50$ και 100 επαναλήψεις.

Για $\omega = 1$, παρατηρούμε ότι δεν μπορούμε να βρούμε την ακριβή λύση του προβλήματος, καθώς η λύση που προκύπτει σε κάθε αριθμό επαναλήψεων διαφέρει από την πραγματική λύση του προβλήματος. Από τις 50 επαναλήψεις και έπειτα, το τυπικό σφάλμα του προβλήματος σταθεροποιείται. Τέλος, ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος μειώνεται μέχρι τις 20 επαναλήψεις και αυξάνοντας τον αριθμό των επαναλήψεων, παρουσιάζει μία αύξηση.

Επιπρόσθετα, θα παρατηρήσουμε τι συμβαίνει όταν $\omega = 1.25$. Ο Πίνακας 4.20 μας παρουσιάζει τα αποτελέσματα για $n = 5, 20, 50$ και 100 επαναλήψεις.

n	5	20	50	100
x(1)	0.76893	0.92006	0.92025	0.92025
x(2)	0.88132	0.49153	0.49144	0.49144
x(3)	1.05628	0.52727	0.52697	0.52697
x(4)	1.16349	0.70174	0.70140	0.70140
x(5)	1.20297	0.86705	0.86675	0.86675
x(996)	1.21881	0.92374	0.92346	0.92346
x(997)	1.20399	0.76490	0.76454	0.76454
x(998)	1.12760	0.55145	0.55108	0.55108
x(999)	0.95881	0.36866	0.36841	0.36841
x(1000)	0.72227	0.45904	0.45913	0.45913
Τυπικό Σφάλμα	3.0299	1.4992	1.4985	1.4985
Χρόνος Επίλυσης (σε sec)	0.0975759	0.0949841	0.0983579	0.102248

Πίνακας 4.19: Αποτελέσματα με την προρρυθμισμένη μέθοδο των συζυγών κλίσεων για $\omega = 1$.

n	5	20	50	100
x(1)	1.01825	1.06890	1.06890	1.06890
x(2)	0.95740	0.97203	0.97203	0.97203
x(3)	0.95292	0.93891	0.93891	0.93891
x(4)	0.96799	0.93783	0.93783	0.93783
x(5)	0.98600	0.94982	0.94982	0.94982
x(996)	1.00177	0.95769	0.95769	0.95769
x(997)	0.98099	0.93329	0.93329	0.93329
x(998)	0.94928	0.90550	0.90549	0.90549
x(999)	0.90671	0.88239	0.88239	0.88239
x(1000)	0.85987	0.88273	0.88273	0.88273
Τυπικό Σφάλμα	0.39714	0.24742	0.24743	0.24743
Χρόνος Επίλυσης (σε sec)	0.0964251	0.0981081	0.0982561	0.106199

Πίνακας 4.20: Αποτελέσματα με την προρρυθμισμένη μέθοδο των συζυγών κλίσεων για $\omega = 1.25$.

Για $\omega = 1.25$, παρατηρούμε ότι προσεγγίζουμε μία λύση του προβλήματος με μικρό τυπικό σφάλμα (περίπου ίσο με 0.25), χωρίς να είναι η πραγματική λύση. Από τις 50 επαναλήψεις και έπειτα, το τυπικό σφάλμα και η λύση του προβλήματος σταθεροποιούνται. Τέλος, ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος αυξάνεται, όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων.

Έπειτα, θα παρατηρήσουμε τι συμβαίνει όταν $\omega = 1.6$. Ο Πίνακας 4.21 μας

παρουσιάζει τα αποτελέσματα για $n = 5, 20, 50$ και 100 επαναλήψεις.

n	5	20	50	100
x(1)	1.0023	1.0000	1.00000	1.00000
x(2)	1.0026	1.0000	1.00000	1.00000
x(3)	1.0027	1.0000	1.00000	1.00000
x(4)	1.0027	1.0000	1.00000	1.00000
x(5)	1.0026	1.0000	1.00000	1.00000
x(996)	1.0029	1.0000	1.00000	1.00000
x(997)	1.0036	1.0000	1.00000	1.00000
x(998)	1.0042	1.0000	1.00000	1.00000
x(999)	1.0046	1.0000	1.00000	1.00000
x(1000)	1.0048	1.0000	1.00000	1.00000
Τυπικό Σφάλμα ($\times 10^{-4}$)	144.30	0.11049	0.23375×10^{-6}	0.67917×10^{-9}
Χρόνος Επίλυσης (σε sec)	0.102986	0.098794	0.1011	0.105247

Πίνακας 4.21: Αποτελέσματα με την προρρυθμισμένη μέθοδο των συζυγών κλίσεων για $\omega = 1.6$.

Για $\omega = 1.6$, παρατηρούμε ότι προσεγγίζουμε την ακριβή λύση του προβλήματος στις 20 επαναλήψεις. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι με την αύξηση των επαναλήψεων, μειώνεται το τυπικό σφάλμα του προβλήματος, το οποίο τείνει στο μηδέν. Ακόμα, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων, τόσο μειώνεται ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος στις 20 επαναλήψεις, ενώ στις 50 και στις 100 επαναλήψεις παρουσιάζει μία αύξηση. Τέλος, παρατηρούμε ότι με το συγκεκριμένο ω λύνεται καλύτερα το πρόβλημα σε σχέση με τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων, καθώς βρίσκουμε σε μικρότερο αριθμό επαναλήψεων τη λύση του προβλήματος και τα τυπικά σφάλματα της μεθόδου των συζυγών κλίσεων είναι μεγαλύτερα από αυτά της προρρυθμισμένης μεθόδου των συζυγών κλίσεων στον αντίστοιχο αριθμό επαναλήψεων.

Τέλος, θα προσπαθήσουμε να λύσουμε το σύστημα και για $\omega = 1.9$. Ο **Πίνακας 4.22** μας παρουσιάζει τα αποτελέσματα για $n = 5, 20, 50$ και 100 επαναλήψεις.

n	5	20	50	100
x(1)	0.96830	1.0000	1.0000	1.00000
x(2)	0.96968	1.0000	1.0000	1.00000
x(3)	0.97127	1.0000	1.0000	1.00000
x(4)	0.97300	1.0000	1.0000	1.00000
x(5)	0.97482	1.0000	1.0000	1.00000
x(996)	1.29498	1.00352	1.00000	1.00000
x(997)	1.22078	1.00252	1.00000	1.00000
x(998)	1.12270	1.00087	1.00000	1.00000
x(999)	0.99597	0.99894	1.00000	1.00000
x(1000)	0.83502	0.99744	1.00000	1.00000
Τυπικό Σφάλμα	1.6677	0.021832	0.39257×10^{-5}	0.12604×10^{-8}
Χρόνος Επίλυσης (σε sec)	0.0991721	0.098114	0.101072	0.103142

Πίνακας 4.22: Αποτελέσματα με την προρρυθμισμένη μέθοδο των συζυγών κλίσεων για $\omega = 1.9$.

Για $\omega = 1.9$, παρατηρούμε ότι προσεγγίζουμε την ακριβή λύση του προβλήματος στις 50 επαναλήψεις. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι με την αύξηση των επαναλήψεων, μειώνεται το τυπικό σφάλμα του προβλήματος, το οποίο τείνει στο μηδέν. Τέλος, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων, τόσο μειώνεται ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος στις 20 επαναλήψεις, ενώ στις 50 και στις 100 επαναλήψεις παρουσιάζει μία αύξηση.

Ο **Πίνακας 4.23** μας παρουσιάζει για διαφορετικές τιμές του ω τους αντίστοιχους δείκτες κατάστασης. Παρατηρούμε ότι ισχύει $K_2(M^{-1}A) < K_2(A)$ για κάθε τιμή του ω , επιβεβαιώνοντας αυτό που ισχύει για τους προρρυθμιστές, το οποίο συναντήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

ω	0.2	0.5	1	1.25	1.6	1.9
$K_2(M^{-1}A)$	27.976	15.525	5.8760	3.9003	3.4438	14.857
$K_2(A)$	40.996	40.996	40.996	40.996	40.996	40.996

Πίνακας 4.23: Δείκτες κατάστασης των πινάκων $K_2(M^{-1}A)$ και $K_2(A)$ για διαφορετικές τιμές του ω .

Με βάση το παραπάνω πρόβλημα, συμπεραίνουμε ότι λύνεται καλύτερα με την προρρυθμισμένη μέθοδο των συζυγών κλίσεων, χρησιμοποιώντας κατάλληλο ω , παρόλο που η συγκεκριμένη μέθοδος χρειάζεται περισσότερο χρόνο από τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων λόγω των υπολογισμών.

4.4 Επίλυση γραμμικού συστήματος με πενταδιαγώνιο πίνακα

Έστω ότι θέλουμε να επιλύσουμε το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, με τον πενταδιαγώνιο πίνακα $A \in \mathbb{R}^{100 \times 100}$, με στοιχεία:

- $\alpha_{ii} = 5, 1 \leq i \leq 100,$
- $\alpha_{i,i+1} = -1, 1 \leq i \leq 99,$
- $\alpha_{i,i+2} = -1, 1 \leq i \leq 98,$
- $\alpha_{i,i-2} = -1, 3 \leq i \leq 100$ και
- $\alpha_{i,i-1} = -1, 2 \leq i \leq 100$

και διάνυσμα $b \in \mathbb{R}^{100}$, με στοιχεία:

- $b_1 = b_{100} = 3$
- $b_2 = b_{99} = 2$ και
- $b_i = 1, 3 \leq i \leq 98.$

Ο πίνακας A θα είναι της μορφής:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Αρχικά, θα λύσουμε το πρόβλημα με τη μέθοδο Gauss-Seidel.

```
d1=[-2 -1 0 1 2];
i1=[-1*ones(100,1), -1*ones(100,1), 5*ones(100,1), -1*ones
(100,1), -1*ones(100,1)];
A=spdiags(i1,d1,100,100);
d2=[-2 -1 0];
i2=[-1*ones(100,1), -1*ones(100,1), 5*ones(100,1)];
L=spdiags(i2,d2,100,100);
U=A-L;
b=zeros(100,1);
b(1)=b(100)=3;
b(2)=b(99)=2;
b(3:98)=1;
x=zeros(100,1);
tic
```



```

for i=1:3
    x=L\b-U*x);
endfor
toc
x(1:5)
x(96:100)
xreal=ones(100,1);
norm(x-xreal)

```

Ο Πίνακας 4.24 μας παρουσιάζει τα αποτελέσματα για $n = 3, 5, 10$ και 20 επαναλήψεις.

n	3	5	10	20
x(1)	0.87448	0.95077	0.99429	0.99991
x(2)	0.82873	0.93113	0.99188	0.99987
x(3)	0.78253	0.91093	0.98934	0.99983
x(4)	0.75635	0.89840	0.98766	0.99980
x(5)	0.73721	0.88881	0.98631	0.99977
x(96)	0.74050	0.91948	0.99473	0.99997
x(97)	0.79117	0.93880	0.99613	0.99998
x(98)	0.84890	0.95701	0.99734	0.99998
x(99)	0.90816	0.97408	0.99840	0.99999
x(100)	0.95141	0.98622	0.99915	0.99999
Τυπικό Σφάλμα	2.8685	1.2594	0.16172	0.0026852
Χρόνος Επίλυσης (σε sec)	0.0280039	0.0257969	0.0270879	0.0263331

Πίνακας 4.24: Αποτελέσματα με τη μέθοδο Gauss-Seidel.

Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων, τόσο προσεγγίζεται η ακριβής λύση του προβλήματος. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι με την αύξηση των επαναλήψεων, μειώνεται το τυπικό σφάλμα του προβλήματος, το οποίο τείνει στο μηδέν.

Στη συνέχεια, θα λύσουμε το ίδιο πρόβλημα με τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων. Ο Πίνακας 4.25 μας παρουσιάζει τα αποτελέσματα για $n = 3, 5, 10$ και 20 επαναλήψεις.

```

d1=[-2 -1 0 1 2];
i1=[-1*ones(100,1), -1*ones(100,1), 5*ones(100,1), -1*ones
    (100,1), -1*ones(100,1)];
A=spdiags(i1,d1,100,100);
b=zeros(100,1);
b(1)=b(100)=3;

```

```

b(2)=b(99)=2;
b(3:98)=1;
x=zeros(100,1);
rold=b-A*x;
p=rold;
tic
for i=1:3
    alpha=rold'*rold/(p'*A*p);
    x=x+alpha*p;
    rnew=rold-alpha*A*p;
    beta=rnew'*rnew/(rold'*rold);
    p=rnew+beta*p;
    rold=rnew;
endfor
toc
x(1:5)
x(96:100)
xreal=ones(100,1);
norm(x-xreal)

```

Με τον παραπάνω κώδικα, επιλύουμε το ίδιο πρόβλημα αλλά με τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων.

n	3	5	10	20
x(1)	1.0491	1.0041	1.0000	1.00000
x(2)	1.1037	1.0060	1.0000	1.00000
x(3)	1.1138	1.0113	1.0000	1.00000
x(4)	1.1848	1.0120	1.0000	1.00000
x(5)	1.1537	1.0223	1.0000	1.00000
x(96)	1.1537	1.0223	1.0000	1.00000
x(97)	1.1848	1.0120	1.0000	1.00000
x(98)	1.1138	1.0113	1.0000	1.00000
x(99)	1.1037	1.0060	1.0000	1.00000
x(100)	1.0491	1.0041	1.0000	1.00000
Τυπικό Σφάλμα	0.46811	0.097754	0.0019619	0.74366×10^{-6}
Χρόνος Επίλυσης (σε sec)	0.0965731	0.0885351	0.0813079	0.102425

Πίνακας 4.25: Αποτελέσματα με τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων.

Παρατηρούμε ότι στις 10 επαναλήψεις προσεγγίζουμε την ακριβή λύση του προβλήματος. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να βρεθεί γρηγορότερα η λύση του προβλήματος

με τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων παρά με την επαναληπτική μέθοδο Gauss-Seidel. Επίσης, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων, τόσο μειώνεται το τυπικό σφάλμα της λύσης που βρήκαμε με τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων, το οποίο τείνει στο μηδέν. Τέλος, παρατηρούμε ότι ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος μειώνεται μέχρι τις 10 επαναλήψεις, ενώ στις 20 επαναλήψεις παρουσιάζει μία αύξηση.

Τέλος, θα λύσουμε το ίδιο πρόβλημα με την προρρυθμισμένη μέθοδο των συζυγών κλίσεων. Ως προρρυθμιστή θα χρησιμοποιήσουμε τον SSOR για $\omega = 0.3, 0.7, 1, 1.4$ και 1.8.

```
d1=[-2 -1 0 1 2];
i1=[-1*ones(100,1), -1*ones(100,1), 5*ones(100,1), -1*ones
    (100,1), -1*ones(100,1)];
A=spdiags(i1,d1,100,100);
d2=[0];
i2=[5*ones(100,1)];
D=spdiags(i2,d2,100,100);
U=triu(A)-D;
L=tril(A)-D;
omega=0.3;
M=omega/(2-omega)*(D/omega+L)*inv(D)*(D/omega+U);
b=zeros(100,1);
b(1)=b(100)=3;
b(2)=b(99)=2;
b(3:98)=1;
x=zeros(100,1);
rold=b-A*x;
zold=M\rold;
p=zold;
tic
for i=1:3
    alpha=rold'*zold/(p'*A*p);
    x=x+alpha*p;
    rnew=rold-alpha*A*p;
    znew=M\rnew;
    beta=rnew'*rnew/(rold'*zold);
    p=znew+beta*p;
    rold=rnew;
    zold=znew;
endfor
toc
x(1:5)
```

```

x(96:100)
xreal=ones(100,1);
norm(x-xreal)
cond(inv(M)*A)
cond(A)

```

Αρχικά, θα εκτελέσουμε τον αλγόριθμο για $\omega = 0.3$. Ο Πίνακας 4.26 μας παρουσιάζει τα αποτελέσματα για $n = 3, 5, 10$ και 20 επαναλήψεις.

n	3	5	10	20
x(1)	2.07650	2.07797	2.07799	2.07799
x(2)	1.55051	1.55204	1.55205	1.55205
x(3)	1.02315	1.02472	1.02474	1.02474
x(4)	0.94079	0.94214	0.94216	0.94216
x(5)	0.89408	0.89530	0.89531	0.89531
x(96)	0.89380	0.89502	0.89504	0.89504
x(97)	0.93958	0.94093	0.94095	0.94095
x(98)	1.02061	1.02217	1.02219	1.02219
x(99)	1.53727	1.53880	1.53882	1.53882
x(100)	2.05719	2.05866	2.05868	2.05868
Τυπικό Σφάλμα	2.0524	2.0485	2.0484	2.0484
Χρόνος Επίλυσης (σε sec)	0.0967729	0.097755	0.0980291	0.0968208

Πίνακας 4.26: Αποτελέσματα με την προρρυθμισμένη μέθοδο των συζυγών κλίσεων για $\omega = 0.3$.

Για $\omega = 0.3$, παρατηρούμε ότι δεν προσεγγίζεται η ακριβής λύση του προβλήματος. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι με την αύξηση των επαναλήψεων, μειώνεται το τυπικό σφάλμα του προβλήματος. Τέλος, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων, τόσο αυξάνεται ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος στις 5 και στις 10 επαναλήψεις, ενώ στις 20 επαναλήψεις παρουσιάζει μία μείωση.

Στη συνέχεια, θα λύσουμε το ίδιο πρόβλημα για $\omega = 0.7$. Ο Πίνακας 4.27 μας παρουσιάζει τα αποτελέσματα για $n = 3, 5, 10$ και 20 επαναλήψεις.

Για $\omega = 0.7$, παρατηρούμε ότι δεν προσεγγίζεται η ακριβής λύση του προβλήματος. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι με την αύξηση των επαναλήψεων, αυξάνεται το τυπικό σφάλμα του προβλήματος, το οποίο σταθεροποιείται στις 10 επαναλήψεις. Τέλος, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων, τόσο μειώνεται ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος στις 5 και στις 10 επαναλήψεις, ενώ στις 20 επαναλήψεις παρουσιάζει μία αύξηση.

Στη συνέχεια, δοκιμάζουμε να λύσουμε το σύστημα για $\omega = 1$. Ο Πίνακας 4.28 μας παρουσιάζει τα αποτελέσματα για $n = 3, 5, 10$ και 20 επαναλήψεις.

n	3	5	10	20
x(1)	1.4910	1.4755	1.4747	1.4747
x(2)	1.3807	1.3765	1.3763	1.3763
x(3)	1.2597	1.2663	1.2667	1.2667
x(4)	1.1820	1.1898	1.1903	1.1903
x(5)	1.1287	1.1372	1.1377	1.1377
x(96)	1.1215	1.1300	1.1305	1.1305
x(97)	1.1692	1.1773	1.1777	1.1777
x(98)	1.2401	1.2472	1.2476	1.2476
x(99)	1.3540	1.3524	1.3523	1.3523
x(100)	1.4639	1.4523	1.4517	1.4517
Τυπικό Σφάλμα	1.1647	1.2008	1.2028	1.2028
Χρόνος Επίλυσης (σε sec)	0.0944459	0.0941479	0.0938549	0.096478

Πίνακας 4.27: Αποτελέσματα με την προρρυθμισμένη μέθοδο των συζυγών κλίσεων για $\omega = 0.7$.

Για $\omega = 1$, παρατηρούμε ότι προσεγγίζουμε τη λύση του προβλήματος σε ικανοποιητικό βαθμό. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι με την αύξηση των επαναλήψεων, μειώνεται το τυπικό σφάλμα του προβλήματος. Τέλος, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων, τόσο αυξάνεται ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος στις 5 επαναλήψεις, ενώ στις 10 και στις 20 επαναλήψεις παρουσιάζει μία μείωση.

Έπειτα, θα παρατηρήσουμε τι συμβαίνει όταν $\omega = 1.4$. Ο **Πίνακας 4.29** μας παρουσιάζει τα αποτελέσματα για $n = 3, 5, 10$ και 20 επαναλήψεις.

Για $\omega = 1.4$, παρατηρούμε ότι υπάρχει μια καλή προσέγγιση της λύσης, χωρίς να έχουμε βρει την ακριβή λύση του προβλήματος. Ωστόσο, παρατηρούμε ότι με την αύξηση των επαναλήψεων, αυξάνεται το τυπικό σφάλμα του προβλήματος από τις 5 επαναλήψεις. Τέλος, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων, τόσο αυξάνεται ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος στις 5 και στις 20 επαναλήψεις, ενώ στις 10 επαναλήψεις παρουσιάζει μία μείωση.

Τέλος, θα λύσουμε το σύστημα για $\omega = 1.8$. Ο **Πίνακας 4.30** μας παρουσιάζει τα αποτελέσματα για $n = 3, 5, 10$ και 20 επαναλήψεις.

n	3	5	10	20
x(1)	1.0236	0.95256	0.93899	0.93888
x(2)	1.0553	1.00176	0.99079	0.99070
x(3)	1.0786	1.04546	1.03785	1.03779
x(4)	1.0741	1.05338	1.04828	1.04824
x(5)	1.0690	1.05697	1.05364	1.05361
x(96)	1.0638	1.0562	1.05389	1.05387
x(97)	1.0710	1.0575	1.05388	1.05384
x(98)	1.0783	1.0558	1.05030	1.05025
x(99)	1.0780	1.0402	1.03167	1.03160
x(100)	1.0649	1.0097	0.99815	0.99805
Τυπικό Σφάλμα	0.46891	0.44169	0.43418	0.43412
Χρόνος Επίλυσης (σε sec)	0.0958428	0.097338	0.0956349	0.093694

Πίνακας 4.28: Αποτελέσματα με την προρρυθμισμένη μέθοδο των συζυγών κλίσεων για $\omega = 1$.

n	3	5	10	20
x(1)	0.98575	0.99098	0.99176	0.99176
x(2)	0.98944	0.99334	0.99392	0.99392
x(3)	0.99224	0.99591	0.99639	0.99639
x(4)	0.99450	0.99712	0.99747	0.99747
x(5)	0.99661	0.99815	0.99837	0.99837
x(96)	1.0046	1.0014	1.0011	1.0011
x(97)	1.0050	1.0028	1.0025	1.0025
x(98)	1.0042	1.0035	1.0033	1.0033
x(99)	1.0023	1.0063	1.0065	1.0065
x(100)	1.0027	1.0064	1.0065	1.0065
Τυπικό Σφάλμα	0.031045	0.018931	0.019545	0.019547
Χρόνος Επίλυσης (σε sec)	0.096806	0.0984561	0.095681	0.100433

Πίνακας 4.29: Αποτελέσματα με την προρρυθμισμένη μέθοδο των συζυγών κλίσεων για $\omega = 1.4$.

Για $\omega = 1.8$, παρατηρούμε ότι υπάρχει μια προσέγγιση της λύσης. Ωστόσο, παρατηρούμε ότι αν αυξήσουμε τον αριθμό των επαναλήψεων, το τυπικό σφάλμα του προβλήματος θα αυξάνεται. Τέλος, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων, τόσο αυξάνεται ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος στις 5 επαναλήψεις, ενώ στις 10 και στις 20 επαναλήψεις παρουσιάζει μία μείωση.

n	3	5	10	20
x(1)	1.0771	1.0906	1.0948	1.0951
x(2)	1.0813	1.0921	1.0952	1.0954
x(3)	1.0859	1.0942	1.0962	1.0963
x(4)	1.0865	1.0925	1.0936	1.0936
x(5)	1.0861	1.0901	1.0903	1.0903
x(96)	1.10026	1.14479	1.16141	1.16250
x(97)	1.06472	1.11723	1.13740	1.13873
x(98)	1.02549	1.08521	1.10863	1.11018
x(99)	0.92429	0.99171	1.01888	1.02071
x(100)	0.87908	0.95255	0.98252	0.98454
Τυπικό Σφάλμα	0.71597	0.72541	0.72830	0.72847
Χρόνος Επίλυσης (σε sec)	0.0976059	0.118513	0.0933299	0.0967841

Πίνακας 4.30: Αποτελέσματα με την προρρυθμισμένη μέθοδο των συζυγών κλίσεων για $\omega = 1.8$.

Ο **Πίνακας 4.31** μας παρουσιάζει για διαφορετικές τιμές του ω τους αντίστοιχους δείκτες κατάστασης. Παρατηρούμε ότι ισχύει $K_2(M^{-1}A) < K_2(A)$ για κάθε τιμή του ω , επιβεβαιώνοντας αυτό που ισχύει για τους προρρυθμιστές, το οποίο συνηντήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

ω	0.3	0.7	1	1.4	1.8
$K_2(M^{-1}A)$	4.9002	2.7899	1.8025	1.5054	3.5921
$K_2(A)$	7.2120	7.2120	7.2120	7.2120	7.2120

Πίνακας 4.31: Δείκτες κατάστασης των πινάκων $K_2(M^{-1}A)$ και $K_2(A)$ για διαφορετικές τιμές του ω .

Μέσα από την προρρυθμισμένη μέθοδο των συζυγών κλίσεων, παρατηρούμε ότι η εύρεση της λύσης του προβλήματος είναι εφικτή, με την προϋπόθεση να βρεθεί το κατάλληλο ω .

Βιβλιογραφία

- [1] Grégoire Allaire and Sidi Mahmoud Kaber, Numerical Linear Algebra, Springer, 2008
- [2] Larisa Beilina, Evgenii Karchevskii and Mikhail Karchevskii, Numerical Linear Algebra: Theory and Applications, Springer, 2017
- [3] Luca Bergamaschi, Angeles Martinez Calomardo, Parallel Newton–Chebyshev polynomial preconditioners for the conjugate gradient method, John Wiley & Sons, 2021
- [4] Long Chen, <https://www.math.uci.edu/~chenlong/CAMtips/CG.html>
- [5] Biswa Nath Datta, Numerical Linear Algebra and Applications, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010
- [6] William Ford, Numerical Linear Algebra with Applications Using MATLAB, Academic Press, 2015
- [7] Gene H. Golub and Charles F. Van Loan, Matrix Computations, fourth ed., Johns Hopkins University Press, 2013
- [8] Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco, Fausto Saleri, Numerical Mathematics, Springer, 2007
- [9] Yousef Saad, Iterative Methods for Sparse Linear Systems, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003
- [10] Jennifer Scott, Miroslav Tůma, Algorithms for Sparse Linear Systems, Birkhäuser, 2023
- [11] Γ. Δ. Ακριβης, Β. Α. Δουγαλής, Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση, ΙΤΕ-Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2015
- [12] Β. Δουγαλής, Δ. Νούτσος, Α. Χατζηδήμος, Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα, 2016

- [13] Ν. Καδιανάκης, Σ.Καρανάσιος, Γραμμική Άλγεβρα Αναλυτική Γεωμετρία και Εφαρμογές, Εκδόσεις Τσότρας, 2017
- [14] Κωνσταντίνος Χρυσάφινος, Σημειώσεις στην Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα (πανεπιστημιακές παραδόσεις)
- [15] Παναγιώτης Ι. Ψαρράκος, Εισαγωγή στην Γραμμική Άλγεβρα, Εκδόσεις Τσότρας, 2021