

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



Υπολογισμός μέτρων ρίσκου για χαρτοφυλάκια
μέσω σύγχρονων αλγορίθμων διάχυσης και
μηχανικής μάθησης

Μαρία Ελένη Παπαδολιοπούλου

Επιβλέπων Καθηγητής: Σωτήριος Σαμπάνης

Τριμελής Επιτροπή:

Σωτήριος Σαμπάνης
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π

Χρυσή Καρώνη
ΟΜΟΤΙΜΗ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ Ε.Μ.Π

Βασίλειος Παπανικολάου
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, θα ήθελα πρωτίστως να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κύριο Σωτήριο Σαμπάνη για την καθοδήγηση, την υπομονή και την αδιάκοπη υποστήριξη του. Κατά την διάρκεια της εργασίας υπήρξε πραγματικός αρωγός και σύμβουλος. Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω την κυρία Χρυσήδα Καρώνη και τον κύριο Βασίλειο Παπανικολάου για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή της διπλωματικής μου. Στην συνέχεια, ευχαριστώ θερμά τους γονείς μου και τον αδελφό μου που με βοηθούν και με στηρίζουν με κάθε τρόπο να κατακτήσω τα όνειρά μου. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους φίλους που παραμένουν οι «σταθερές» στην ζωή μου.

© (2024) Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. All rights Reserved. Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σ' αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Πρόλογος

Κεντρικό αντικείμενο των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών αποτελεί η μελέτη και η επίλυση των Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων, καθώς τέτοιου είδους εξισώσεις εμφανίζονται πολύ συχνά σε μαθηματικά μοντέλα, που αφορούν ένα ευρύ φάσμα προβλημάτων της επιστήμης των δεδομένων, και των χρηματοοικονομικών. Τέτοιου είδους εξισώσεις δεν μπορούν να επιλυθούν, συνήθως, με αναλυτικές μεθόδους, κατά συνέπεια αναζητούμε αριθμητικές προσεγγίσεις. Στη παρούσα εργασία, η λύση τους προσεγγίζεται από έμμεσους αριθμητικούς αλγόριθμους, οι οποίοι είναι υψηλής υπολογιστικής απόδοσης σε σύγκριση με άμεσους αλγόριθμους. Υπό χαλαρές προϋποθέσεις, οι αλγόριθμοι έχουν μελετηθεί για προβλήματα στοχαστικής βελτιστοποίησης, τα οποία είναι δημοφιλή στην Bayesian στατιστική, στη μηχανική μάθηση και τα χρηματοοικονομικά. Τέλος, παρέχονται θεωρητικές εγγυήσεις για τη σύγκλιση των αλγορίθμων, με τη χρήση της στατιστικής.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	4
2	Κεφάλαιο 1: Value-at-Risk και Conditional Value-at-Risk ως μέτρα ρίσκου	6
2.1	Ορισμοί των Value-at-Risk και Conditional Value-at-Risk	6
2.2	Συνεπή Μέτρα Ρίσκου (Coherent Risk Measures)	8
2.3	Κυρτά Μέτρα Ρίσκου (Convex Risk Measures)	10
2.4	Το VaR στη Στατιστική	10
3	Βελτιστοποίηση των Value at Risk και Conditional Value at Risk και ο αλγόριθμος Stochastic Gradient Langevin Dynamics	13
3.1	Βελτιστοποίηση VaR, C-VaR (Rockafeller and Uryashev Model.)	13
3.2	\mathbb{L}_2 Regularization	16
3.3	Ο αλγόριθμος VaR-CVaR	17
3.4	Ο αλγόριθμος Stochastic Gradient Langevin Dynamics	19
3.5	Αποδείξεις κύριων αποτελεσμάτων για ανεξάρτητα δεδομένα	20
4	Μέθοδοι υπολογισμού VaR	27
4.1	Μέθοδος Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης	27
4.1.1	Μέθοδος Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης για τη πολυμεταβλητή κανονική κατανομή	27
4.2	Ιστορική Μέθοδος	28
4.2.1	Ιστορική Μέθοδος για τη πολυμεταβλητή κατανομή	29
4.3	Μέθοδος Monte Carlo	30
5	Εφαρμογές του SGLD αλγορίθμου σε χαρτοφυλάκια	31
5.1	Χαρτοφυλάκιο με δύο χρηματοοικονομικά προϊόντα γνωστών κατανομών	31
5.2	Χαρτοφυλάκιο με προϊόντα υψηλής συσχέτισης	32
5.3	Σύγκριση SGLD αλγορίθμου και Ιστορικής μεθόδου για τον υπολογισμό του VaR	33
6	Κώδικες Python	34
6.1	Κώδικας υλοποίησης SGLD αλγορίθμου για χαρτοφυλάκια με κανονικά κατανομημένα προϊόντα	34
6.2	Κώδικας υλοποίησης SGLD αλγορίθμου για πραγματικά χαρτοφυλάκια	35

1 Εισαγωγή

Ο ρόλος της διαχείρισης κινδύνου έχει γίνει ολοένα και πιο σημαντικός στις επιχειρήσεις τα τελευταία χρόνια. Σημαντικά γεγονότα, όπως η οικονομική κρίση του 2008 και η αυξημένη αστάθεια στο δεύτερο μισό του 2011 σε παγκόσμιο επίπεδο, ενισχύουν τη σημασία της διαχείρισης κινδύνων. Οι νέες παράμετροι, η παγκοσμιοποίηση και η αυξανόμενη εξάρτηση όλων των χρηματοοικονομικών αγορών δημιουργούν την ανάγκη για επαναξιολόγηση των συστημάτων διαχείρισης κινδύνων και των μοντέλων υπολογισμού κινδύνου των επιχειρήσεων. Κατ' επέκταση η βελτιστοποίηση κρίνεται αναγκαία για την παροχή μιας πιο ρεαλιστικής εικόνας της ποσότητας του χαρτοφυλακίου, που βρίσκεται σε κίνδυνο. Από μαθηματική σκοπιά, την οποία θεωρούμε στη παρούσα εργασία, η διαχείριση ρίσκου αποτελεί διαδικασία κατά την οποία διαμορφώνεται η κατανομή της απώλειας. Ανάμεσα σε μια πληθώρα μεθόδων που έχουν αναπτυχθεί κατά τα χρόνια, μόνο λίγα μοντέλα υιοθετούνται από επαγγελματίες, που διαχειρίζονται άμεσα το ρίσκο χαρτοφυλακίων. Το μέτρο Conditional value-at-risk (CVaR), το οποίο συστήθηκε πρώτη φορά από τους Rockafellar και Uryasev βλέπε [14], είναι ένα από τα δημοφιλέστερα εργαλεία διαχείρισης ρίσκου. Κατά συνέπεια, η ποσοτικοποίηση της έκθεσης σε κίνδυνο επιτυγχάνεται κατά κύριο λόγο με μέτρα όπως το Value at Risk (VaR) και Conditional Value at Risk (CVaR).

Σκοπός του VaR είναι η λειτουργία ως μέτρο για τον ποσοτικό προσδιορισμό του κινδύνου για ένα μεμονωμένο οικονομικό προϊόν ή χαρτοφυλάκιο. Καθορίζει τη χειρότερη δυνατή απώλεια στο χαρτοφυλάκιο κατά τη διάρκεια μιας συγκεκριμένης περιόδου και με καθορισμένη πιθανότητα να μην υπερβεί ένα συγκεκριμένο επίπεδο εμπιστοσύνης, σύμφωνα με τον Choudhry, βλέπε [5]. Για τον υπολογισμό του VaR υπάρχουν τρεις δημοφιλείς και συχνοί τρόποι, βλέπε [11]: η Ιστορική Προσομοίωση (Historical Simulation), η Μέθοδος Διασποράς-Συνδιασποράς (Variance-Covariance) και η μέθοδος Monte Carlo. Η Ιστορική Προσομοίωση, βασίζεται στις τάσεις της αγοράς, οι οποίες είχαν σημειωθεί τα προηγούμενα χρόνια, και θέτουν τη βάση για τον υπολογισμό του μέτρου ρίσκου. Η μέθοδος της Διασποράς-Συνδιασποράς βασίζεται στην υπόθεση, ότι οι αποδόσεις των χρηματοοικονομικών προϊόντων είναι κανονικά κατανομημένες γύρω από τη μέση τιμή της καμπανοειδούς κατανομής και χρησιμοποιεί τη διασπορά και τη συνδιασπορά των προϊόντων προκειμένου να υπολογιστεί το VaR. Κατά συνέπεια αποτελεί παραμετρική μέθοδο, αφού εξαρτάται από τις παραμέτρους της κατανομής των μεταβολών της τιμής ή απόδοσης. Τέλος η Μέθοδος Monte Carlo, αποτελεί τον απλούστερο τρόπο για να εκτιμηθεί το Value at Risk, εφόσον δημιουργούνται υποθετικές χρονοσειρές των αποδόσεων, οι οποίες προκύπτουν από τον υπολογισμό του χαρτοφυλακίου για πραγματικά ιστορικά δεδομένα και υπολογίζοντας τις μεταβολές που θα είχαν συμβεί κατά την κάθε χρονική περίοδο. Το CVaR παράλληλα, αποτελεί επέκταση του Value at Risk, εφόσον μπορεί να ερμηνευθεί ως η μέση τιμή του. Τα πλεονεκτήματά του, γίνονται προφανή όταν η κατανομή των απωλειών δεν είναι κανονική ή όταν το πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι πολυδιάστατο. Πιο συγκεκριμένα το CVaR είναι συνεπές μέτρο ρίσκου για κάθε κατανομή απώλειας, βλέπε [7]. Ακολούθως η άρρηκτη σχέση μεταξύ των δύο μέτρων είναι προφανής εξ' ορισμού, ωστόσο τα πλεονεκτήματά του δεύτερου υπερτερούν αφού αποτελεί συνεπές μέτρο κινδύνου για οποιαδήποτε κατανομή απωλειών.

Η διάδοση μεθόδων μηχανικής μάθησης και τεχνητής νοημοσύνης τόσο στους ακαδημαϊκούς χώρους πολλαπλών θετικών επιστημών όσο και στην αγορά έχει συντελέσει στην αναζωπύρωση του ερευνητικού ενδιαφέροντος, στην σχεδίαση και μελέτη αποτελεσματικών αλγορίθμων βελτιστοποίησης. Μια καινούργια προσέγγιση στη στοχαστική βελτιστοποίηση αποτελεί ο αλγόριθμος Stochastic Gradient Langevin Dynamics βλέπε [13], ο οποίος είναι επέκταση των μεθόδων στοχαστικής κλίσης (Stochastic Gradient decent) και επιτρέπει την προσέγγιση του ολικού ελάχιστου σε πιθανώς πολύπλοκα και

πολυδιάστατα προβλήματα. Η μέθοδος Στοχαστικής κλίσης (SGD) έχει ως αποτέλεσμα την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής της συνάρτησης, καθώς παράλληλα αποφεύγει τη Monte Carlo δειγματοληψία και αποτελεί άμεση εφαρμογή της στοχαστικής προσέγγισης των Robbins and Monro, βλέπε [8] για κυρτά στοχαστικά προβλήματα. Ο SGLD αλγόριθμος όμως, ως επέκταση της μεθόδου στοχαστικής κλίσης εφαρμόζει τεχνικές τυχαίας εξερεύνησης πάνω στην επιφάνεια της αντικειμενικής συνάρτησης, διαταράζοντας στοχαστικά το αντίστοιχο ντετερμινιστικό σχήμα. Αποτέλεσμα της διαταραχής, είναι η αποφυγή σαγματικών σημείων και τοπικών ελαχίστων, εφόσον ο ίδιος δεν κατευθύνεται αποκλειστικά στην κατεύθυνση της κλίσης. Ωστόσο και πάλι η σύγκλιση στο πραγματικό ελάχιστο δεν είναι εξασφαλισμένη και εν γέννη το σημείο που θα καταλήξει ο αλγόριθμος εξαρτάται από τις συνθήκες αρχικοποίησης. Έτσι οδηγούμαστε στον αλγόριθμο SGLD, βλέπε [4], για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και ορίζουμε διαδικασία τυχαίων μεταβλητών $(\theta_n^\lambda)_{n \in \mathbb{N}}$ με τιμές στο \mathbb{R}^d :

$$\theta_0^\lambda := \theta_0, \quad \theta_{n+1}^\lambda := \theta_n^\lambda - \lambda H(\theta_n^\lambda, X_{n+1}) + \sqrt{2\lambda\beta^{-1}}\xi_{n+1} \quad (1)$$

όπου $\lambda > 0$ το βήμα του αλγορίθμου, $\beta > 0$ μια παράμετρος κλίμακας στην οποία θα αναφερόμαστε ως παράμετρος θερμοκρασίας, $H: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$ είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί $\nabla U(\theta) = \mathbb{E}[H(\theta, X_0)]$ και $(\xi_n)_n \in \mathbb{N}$ είναι μια ανεξάρτητη ακολουθία από d-διάστατες Gaussian τυχαίες μεταβλητές.

Λαμβάνοντας αυτό υπόψιν, και έχοντας επεκτείνει την μη-ασυμπτωτική ανάλυση του SGLD αλγορίθμου στην περίπτωση ασυνεχούς στοχαστικής κλίσης, είμαστε σε θέση να παρουσιάσουμε μια προσέγγιση πλήρως βασισμένη σε δεδομένα για τη βέλτιστη κατανομή των βαρών προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί το VaR και CVaR ενός χαρτοφυλακίου.

Μέσω της παρούσας εργασίας, συνεπώς αναζητούμε $x^* \in \mathbb{R}^d$ τέτοιο ώστε:

$$x^* = \arg \min_x U(x) \quad (2)$$

όπου $U: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ η ποσότητα που επιθυμούμε να ελαχιστοποιήσουμε, δηλαδή η αντικειμενική μας συνάρτηση και στη προκειμένη περίπτωση το ζητούμενο μέτρο ρίσκου. Επίσης, καλούμαστε να ορίσουμε την εν λόγω αντικειμενική συνάρτηση προκειμένου να καταλήξουμε στον ορισμό του προβλήματος βελτιστοποίησης και τέλος στη λύση του μέσω του SGLD αλγορίθμου, η οποία είναι το βέλτιστο x^* .

Τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας, αποτελεί η υλοποίηση του αλγορίθμου SGLD, με χρήση της γλώσσας προγραμματισμού Python. Πλέον ο αλγόριθμος αποτελεί το μέσο για να γίνει η ελαχιστοποίηση των μέτρων ρίσκου, παράγοντας τα βέλτιστα βάρη για κάθε χρηματοοικονομικό προϊόν που ανήκει στο χαρτοφυλάκιο μας και κατά συνέπεια να επιτευχθεί η μικρότερη πιθανότητα έκθεση σε κίνδυνο κατά την παραγματοποίηση ακραίων συμβάντων στην αγορά. Με σκοπό να εκτεθούμε σε ρεαλιστικά δεδομένα, η υλοποίηση του αλγορίθμου θα γίνει με χρήση μετοχών ελληνικού χρηματιστηρίου, προκειμένου να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα του αλγορίθμου με αυτά των ντετερμινιστικών μεθόδων αξιολόγησης της αξία του χαρτοφυλακίου σε κίνδυνο.

2 Κεφάλαιο 1: Value-at-Risk και Conditional Value-at-Risk ως μέτρα ρίσκου

Στο παρόν κεφάλαιο εισάγουμε τα μέτρα ρίσκου Value-at-Risk και Conditional Value at Risk στις χρηματοοικονομικές αγορές. Στην ενότητα 2.1 δίνονται οι μαθηματικοί ορισμοί των μέτρων και ακολουθούν διασθητικές προσεγγίσεις στις ιδιότητες, που χαρακτηρίζουν τα μέτρα. Στην ενότητα 2.2 και 2.3, παρουσιάζονται τα αξιώματα, τα οποία πρέπει να ικανοποιούνται για να θεωρούνται τα μέτρα συνεπή. Τέλος στην ενότητα 2.4 εξερευνούμε τα παραπάνω μέτρα ρίσκου από πιθανοκρατική σκοπιά, ενώ παράλληλα ορίζουμε τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης ώστε να υπολογίσουμε το Value-at-Risk και Conditional Value-at-Risk.

2.1 Ορισμοί των Value-at-Risk και Conditional Value-at-Risk

Πρωτού θεμελιώσουμε αυστηρά τις έννοιες του VaR και CVaR, χρειάζεται να δώσουμε ορισμούς μαθηματικών εννοιών, που θα μας βοηθήσουν να καταλάβουμε καλύτερα τα μέτρα ρίσκου. Αρχικά, θα ορίσουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής και έπειτα την δεσμευμένη μέση τιμή.

Ορισμός 1 Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής

Εστω X τυχαία μεταβλητή (διακριτή ή συνεχή). Η συνάρτηση:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

η οποία εκφράζει την πιθανότητα να λάβει η τυχαία μεταβλητή X οποιαδήποτε τιμή μικρότερη από ή ίση με x καλείται αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (cumulative probability distribution function) ή απλά συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X .

Η παρακάτω πρόταση αποδεικνύει, ότι το όριο των αθροιστικών συναρτήσεων κατανομής είναι συνεχή από αριστερά.

Πρόταση 1 Για κάθε μη-μειούμενη ακολουθία $(x_n)_{n \geq 1}$ που συγκλίνει σε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_X(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq x_n) = P(X < x).$$

Απόδειξη.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X < x) &= P(X \in (-\infty, x)) = P\left(X \in \bigcup_{n \geq 1} (-\infty, x_n]\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(X \in (-\infty, x_n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_X(x_n). \end{aligned}$$

Ως συνέπεια της Πρότασης 1, το κενό που δημιουργείται από μία διακοπή της CDF σε ένα σημείο $x \in \mathbb{R}$ δίνεται από

$$F_X(x) - \lim_{y \nearrow x} F_X(y) = P(X \leq x) - P(X < x) = P(X = x).$$

Ορισμός 2 Δεσμευμένη Μέση Τιμή

Θεωρώντας X και Y , από κοινού διακριτές τυχαίες μεταβλητές, τότε η συνάρτηση μάζας δεσμευμένης πιθανότητας, με δεδομένο ότι $Y = y$, ορίζεται για όλα τα y , που ικανοποιούν τη σχέση $PY = y > 0$, ως

$$p_{X|Y}(x|y) = P[X = x|Y = y] = \frac{p(x, y)}{P_Y(y)}$$

Με φυσικό τρόπο ορίζεται ύστερα η έννοια της δεσμευμένης τιμής της X , με δεδομένο ότι $Y = y$, για όλες τις τιμές του y , που ικανοποιούν τη σχέση $p_Y(y) > 0$, ως

$$E[X|Y = y] = \sum_x xP[X = x|Y = y] = \sum_x xp_{X|Y}(x|y)$$

Ορισμός 3 Value at Risk

Θεωρούμε τυχαία μεταβλητή X με αθροιστική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $F_X(z) = P[X \leq z]$. Η μεταβλητή X ενδέχεται να έχει είτε την έννοια της απώλεια είτε του κέρδους. Στη προκειμένη περίπτωση, η μεταβλητή X αντιπροσωπεύει την απώλεια με αποτέλεσμα να έχει αντίκτυπο στο πρόσημο των συναρτήσεων, στους ορισμούς των Var και CVar Το VaR της μεταβλητής X με διάστημα εμπιστοσύνης $\alpha \in [0, 1]$ ορίζεται ως εξής, βλέπε [6]:

$$\text{VaR}_\alpha(X) = \min\{z | F_X(z) \geq \alpha\} \quad (3)$$

Εξ ορισμού το $\text{VaR}_\alpha(X)$ είναι το κατώτερο α -quantile της τυχαίας μεταβλητής X . Η αξία σε κίνδυνο (Value-at-Risk - VaR) χρησιμοποιείται συνήθως σε πολλά πεδία, που σχετίζονται με την αβεβαιότητα. Για παράδειγμα, οι οικονομικοί κανονισμοί, όπως η Βασιλεία I και η Βασιλεία II, βλέπε [10], χρησιμοποιούν την απόκλιση VaR μετρώντας το πλάτος της κατανομής των απωλειών ενός χαρτοφυλακίου. Για κανονικά κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές, το VaR είναι ανάλογο με την τυπική απόκλιση.

Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ και $F_X(z)$ είναι η συνάρτηση κατανομής του X , τότε (βλ. Rockafellar και Uryasev [19]),

$$\text{VaR}_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha) = \mu + k(\alpha)\sigma \quad (4)$$

όπου

$$k(\alpha) = \sqrt{2} \text{erf}^{-1}(2\alpha - 1)$$

και

$$\text{erf}(z) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \right) \int_0^z e^{-t^2} dt$$

Η ευκολία και η διαισθητικότητα του VaR αντισταθμίζονται από τις μαθηματικές του ιδιότητες. Ως συνάρτηση του επιπέδου εμπιστοσύνης, για διακριτές κατανομές, το $\text{VaR}_\alpha(X)$ είναι μια μη κυρτή, και ασυνεχής συνάρτηση.

Ένα εναλλακτικό μέτρο κινδύνου είναι το μέσο value at risk (AVaR) ή η Υπό Συνθήκη Αξία-Κινδύνου (CVaR) ή το expected shortfall (ES), οι όροι αυτοί χρησιμοποιούνται ευρέως στη βιβλιογραφία, προκειμένου να περιγράψουν ποσότητες ισοδύναμες με το AVaR. Θέλοντας να εξετάσουμε πώς μπορούμε

να τροποποιήσουμε τον ορισμό του VaR, ώστε να παράξουμε ένα μέτρο ρίσκου, που διατηρεί την α-πλότητα και λαμβάνοντας υπόψιν ολόκληρο το α -tail της κατανομής.

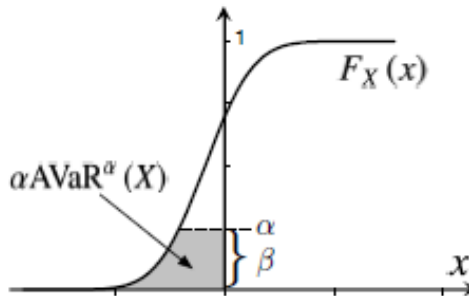
Θωρούμε ότι X δηλώνει το ασυνεχές κέρδος, κάποιου επενδυτικού πρότζεκτ.

Ορισμός 4 Average Value at Risk

Το AVaR του X , για $\alpha \in (0, 1)$ και $(1 - \alpha)$ διάστημα εμπιστοσύνης ορίζεται ως:

$$AVaR_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR_\beta(X) d\beta = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha q^\beta(X) d\beta$$

Στο Σχήμα 1 το ολοκλήρωμα στον ορισμό του $AVaR^\alpha(X)$ αποτελεί το γραμμοσκιασμένο τμήμα της απώλειας, που αντιστοιχεί στο tail της κατανομής.



Σχήμα 1: α επί $AVaR^\alpha(X)$ είναι η περιοχή για την απώλεια που αντιστοιχεί στο tail της κατανομής

Σε αντίθεση με το VaR_α , το $AVaR_\alpha$, λαμβάνει υπόψιν όλες τις απώλειες, που συμβαίνουν με πιθανότητα έως και α : παρέχει μια εκτίμηση των απωλειών που υπονοούνται από γεγονότα στην α -tail της κατανομής της X .

2.2 Συνεπή Μέτρα Ρίσκου (Coherent Risk Measures)

Ο Artzner et al. ανέλυσε τα μέτρα ρίσκου και όρισε ιδιότητες και αξιώματα, τα οποία πρέπει να ικανοποιούνται από τα μέτρα ρίσκου, βλέπε [2]. Κάθε μέτρο, που πληροί αυτά τα αξιώματα ονομάζεται συνεπές (coherent). Τα τέσσερα αξιώματα είναι τα εξής: μονοτονία, παράλληλη μετατόπιση της ισομεταβλητότητας (translation equivariance), υποπροσθετικότητα και θετική ομοιογένεια (positive homogeneity). Για τον ορισμό των παραπάνω αξιωμάτων θεωρούμε X και Y τυχαίες μεταβλητές που αντιπροσωπεύουν την απώλεια, $c \in \mathbb{R}$ βαθμωτή μεταβλητή που επίσης αντιπροσωπεύει την απώλεια και ρ μια συνάρτηση ρίσκου που μπορεί να χαρτογραφεί τη τυχαία μεταβλητή X στο σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} σύμφωνα με το ρίσκο που συνδέεται με την Y .

1. **Μονοτονία** (Monotonicity): Το μέτρο ρίσκου ρ είναι μονότονο εάν για κάθε X, Y :

$$X \leq Y \implies \rho(X) \leq \rho(Y)$$

2. **Ιδιότητα του αναλλοιώτου ως προς τις μεταφορές** (Translation invariance): Το μέτρο ρίσκου ρ είναι εάν για κάθε X και c :

$$\rho(X + c) = \rho(X) + c$$

3. **Υποπροσθετικότητα** (Subadditivity): Το μέτρο ρίσκου ρ είναι υποπροσθετικό εάν για κάθε X, Y :

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

4. **Θετική ομοιογένεια** (Positive homogeneity): Το μέτρο ρίσκου ρ είναι θετικά ομοιγενές, εάν για κάθε X και $\lambda \geq 0$:

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$$

Διαισθητικά, τα παραπάνω αξιώματα μπορούν να ερμηνευθούν ως εξής:

Η μονοτονία εξασφαλίζει, ότι μεγαλύτερη απώλεια συνδέεται με υψηλότερο ρίσκο. Παράλληλα, λόγω της ιδιότητας του αναλλοιώτου ως προς τις μεταφορές έχουμε, ότι η αύξηση της απώλειας συνεπάγεται με ισόποση αύξηση του ρίσκου και λόγω του αξιώματος της υποπροσθετικότητας, η διαφοροποίηση των χρηματοοικονομικών προϊόντων σε ένα χαρτοφυλάκιο, συνεπάγεται με μείωση του ρίσκου. Τέλος, το τέταρτο αξίωμα, δηλαδή η θετική ομοιογένεια, υποδεικνύει ότι πολλαπλασιάζοντας το μέγεθος του χαρτοφυλακίου τότε πολλαπλασιάζεται και το αντίστοιχο ρίσκο.

Θεωρώντας ότι, $\rho(X) = VaR_\alpha(X)$, δεν μπορούμε να το χαρακτηρίσουμε συνεπές μέτρο ρίσκου, αφού αποτυγχάνει να ικανοποιήσει το τρίτο αξίωμα. Έχει αποδειχτεί από τους Tasche [1] και Rockafellar και Uryasev [14], ότι για κάθε επίπεδο εμπιστοσύνης $\alpha \in [0, 1]$ το $\rho(X) = AVaR_\alpha(X)$ είναι συνεπές μέτρο ρίσκου.

Πόρισμα (Συνέπεια του AVaR)

Το AVaR πληρεί την ιδιότητα της υποπροσθετικότητας:

$$AVaR_\alpha(X + Y) \leq AVaR_\alpha(X) + AVaR_\alpha(Y).$$

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι για δύο συναρτήσεις $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$, όπου το U είναι ένα αυθαίρετο σύνολο,

$$\sup_{x \in U} \{f(x) + g(x)\} \leq \sup_{x \in U} f(x) + \sup_{x \in U} g(x). \quad (5)$$

Ας σταθεροποιήσουμε X και Y . Μπορούμε να εφαρμόσουμε την (5) παίρνοντας $U = P_\alpha$, $f(Q) = -\mathbb{E}_Q(X)$, και $g(Q) = -\mathbb{E}_Q(Y)$ για να αποκτήσουμε

$$\begin{aligned} AVaR_\alpha(X + Y) &= \sup\{-\mathbb{E}_Q(X + Y) : Q \in P_\alpha\} \\ &= \sup\{\mathbb{E}_Q(-X) + \mathbb{E}_Q(-Y) : Q \in P_\alpha\} \\ &\leq \sup\{\mathbb{E}_Q(-X) : Q \in P_\alpha\} + \sup\{\mathbb{E}_Q(-Y) : Q \in P_\alpha\} \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την (5)

$$= AVaR_\alpha(X) + AVaR_\alpha(Y),$$

όπως απαιτείται.

2.3 Κυρτά Μέτρα Πίσκου (Convex Risk Measures)

Τα κυρτά μέτρα κινδύνου αποτελούν επίσης σημαντικά εργαλεία για τη χρηματοοικονομική ανάλυση, καθώς πληρούν τα αξιώματα της συνέπειας, και κατ' επέκταση πραγματεύονται κυρτή συναρτήση κινδύνου, η οποία είναι επίσης αμετάβλητη και ομοιογενής.

Αξίζει να αναφερθεί ότι, το VaR_α σε α -επίπεδο εμπιστοσύνης δεν είναι κυρτό μέτρο κινδύνου και παρουσιάζει πολλά τοπικά ελάχιστα, καθιστώντας τη χρήση του περιορισμένη σε ορισμένες περιπτώσεις. Το Conditional Value at Risk ($CVaR_\alpha$) αποτελεί, ωστόσο ένα κυρτό μέτρο κινδύνου που προσφέρει την πληρέστερη εικόνα του κινδύνου, βλέπε [9].

Ορισμός: Μία συνάρτηση $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}$ θα καλείται κυρτό μέτρο κινδύνου αν ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

1. **Μονοτονία:** Αν $X \leq Y$, τότε, $\rho(X) \leq \rho(Y)$.
2. **Κυρτότητα:** $\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(X)$ για κάθε $\lambda \in [0, 1]$.
3. **Ιδιότητα του αναλλοίωτου ως προς τις μεταφορές (Translation invariance):** Αν $c \in \mathbb{R}$, τότε $\rho(X + c) = \rho(X) + c$.

Το X στον παραπάνω ορισμό είναι ο χώρος L^∞ .

2.4 Το VaR στη Στατιστική

Σε αυτήν την ενότητα, αναφερόμαστε στο έργο του Rockafellar [14]. Πολλές εφαρμογές στη μηχανική ασχολούνται με πιθανοτικούς περιορισμούς. Στη διαχείριση χαρτοφυλακίου, συχνά απαιτείται ο υπολογισμός της απώλειας που υφίσταται ένα χαρτοφυλάκιο σε ένα συγκεκριμένη χρονική στιγμή να είναι, με υψηλή αξιοπιστία, το πολύ ίση με μια συγκεκριμένη τιμή. Σε αυτές τις περιπτώσεις, ένα μοντέλο βελτιστοποίησης μπορεί να δημιουργηθεί έτσι ώστε οι περιορισμοί, που χρησιμοποιούνται να ικανοποιούνται με κάποιο επίπεδο πιθανότητας. Έστω $x \in \mathbb{R}^n$, για δεδομένο x , μπορούμε να απαιτήσουμε, ότι οι ορισμένες τυχαίες συναρτήσεις $f_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, ικανοποιούν την ανισότητα $f_i(x) \leq 0$, $i = 1, \dots, m$. Προσέγγιση πιθανοτήτων περιορισμών:

Έστω $f_i(x) \leq 0$, $i = 1, \dots, m$, για το μεγαλύτερο μέρος του χρόνου. Συνεπώς, επιθυμούμε το εξής:

$$P[f_i(x) \leq 0] \geq p_i, \quad \text{για } i = 1, \dots, m, \quad \text{όπου } 0 \leq p_1 \leq 1$$

Απαιτώντας αυτήν την πιθανότητα να είναι ίση με 1, είναι το ίδιο με το να απαιτείται $f_i(x, \omega) \leq 0$ σχεδόν πάντα. Στις περισσότερες εφαρμογές, αυτή η προσέγγιση μπορεί να οδηγήσει σε προβλήματα, καθώς κατά τη μοντελοποίηση προκύπτουν ερωτήματα αναφορικά με το ποιο επίπεδο εμπιστοσύνης είναι καταλληλότερο καθώς και την αλληλεπίδραση μεταξύ των περιορισμών, παραδείγματος χάρι αναδύεται το πρόβλημα αν είναι καταλληλότεροι οι περιορισμοί $P[f_1(x) \leq 0] \geq p_1 = 0.99$ και $P[f_2(x) \leq 0] \geq p_2 = 0.95$, ή αν είναι προτιμότερο να δουλέψουμε με τη συνθήκη $P[f_i(x) \leq 0] \geq p$. Η ενασχόληση με τη συνάρτηση $F_i(x) = P[f_i(x) \leq 0]$, μας οδηγεί στη διερεύνηση των ιδιοτήτων της συνάρτησης $F_i(x)$. Ένα σύννηθες πρόβλημα είναι η κυρτότητα της $F_i(x)$ ως προς το x .

Ορίζουμε $VaR_\alpha(x)$, ως το VaR_α της συνάρτησης απώλειας $f(x)$, δηλαδή:

$$VaR_\alpha(x) = \min\{z : P[f(x) \leq z] \geq \alpha\}$$

Επομένως, οι ακόλουθοι περιορισμοί να είναι ισοδύναμοι:

$$P[f(x) \leq z] \geq a \Leftrightarrow P[f(x) > z] \leq 1 - a \Leftrightarrow VaR_\alpha(x) \leq z$$

Γενικά, το $VaR_\alpha(x)$ είναι μη κυρτή συνάρτηση ως προς το x :
επομένως $VaR_\alpha(x) \leq z$ και $P[f(x) \leq z] \geq \alpha$, ενδέχεται να είναι μη κυρτοί περιορισμοί.

Πρόταση 2 Η συνάρτηση $p \mapsto V_p^X$ είναι μια μη-μειούμενη, αριστερά-συνεχής συνάρτηση του $p \in [0, 1]$, και ορίζονται όρια στα δεξιά. Ειδικότερα, αν F_X είναι συνεχής και αυστηρά αύξουσα τότε ορίζεται αντίστροφη F_X^{-1} , και σε αυτήν την περίπτωση V_p^X δίνεται από:

$$V_p^X = F_X^{-1}(p), \quad p \in (0, 1).$$

Πρόταση 3 *Gaussian Value at Risk.*

Δοθέντος $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$, έχουμε

$$V_p^X = \mu_X + \sigma_X q_p^Z$$

όπου το ποσοστημόριο της κανονικής κατανομής $q_p^Z = V_p^Z$ στο επίπεδο p ικανοποιεί

$$F(q_p^Z) = P(Z \leq q_p^Z) = p \text{ για } Z \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

δηλαδή

$$q_p^Z = F^{-1}(p) \text{ και } V_p^X = \mu_X + \sigma_X F^{-1}(p).$$

Απόδειξη. Αναπαριστούμε την τυχαία μεταβλητή $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ ως

$$X = \mu_X + \sigma_X Z,$$

όπου $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ είναι μια τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή, και χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$p = P(X \leq V_p^X) = P(\mu_X + \sigma_X Z \leq V_p^X) = P(Z \leq (V_p^X - \mu_X)/\sigma_X) = P(Z \leq q_p^Z),$$

η οποία ισχύει εφόσον $V_p^X = \mu_X + \sigma_X q_p^Z$.

Επίσης σημειώνουμε ότι αν $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ τότε $-X \sim \mathcal{N}(-\mu_X, \sigma_X^2)$, επομένως

$$V_p^{-X} = -\mu_X + \sigma_X q_p^Z = -\mu_X - \sigma_X q_{1-p}^Z = -V_{1-p}^X,$$

Η παρακάτω παρατήρηση δείχνει ότι, αν και το Value at Risk δεν είναι υπο-προσθετικό γενικά, είναι υπο-προσθετικό (και συνεπώς συνεκτικό) σε (όχι απαραίτητα ανεξάρτητες) Gaussian τυχαίες μεταβλητές.

Παρατήρηση

Αν X και Y είναι δύο Gaussian τυχαίες μεταβλητές, έχουμε

$$V_p^{X+Y} \leq V_p^X + V_p^Y.$$

Απόδειξη.

Για οποιεσδήποτε δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y , έχουμε

$$\sigma_{X+Y}^2 = \text{Var}[X + Y] = \dots = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2\text{Cov}(X, Y),$$

$$\Rightarrow \sigma_{X+Y} \leq \sigma_X + \sigma_Y.$$

Υποθέτοντας ότι X και Y είναι Gaussian, με τη χρήση της προηγούμενης πρότασης βρίσκουμε:

$$V_p^{X+Y} = \mu_{X+Y} + \sigma_{X+Y} q_p^Z \leq \mu_X + \mu_Y + (\sigma_X + \sigma_Y) q_p^Z = V_p^X + V_p^Y.$$

3 Βελτιστοποίηση των Value at Risk και Conditional Value at Risk και ο αλγόριθμος Stochastic Gradient Langevin Dynamics

3.1 Βελτιστοποίηση VaR, C-VaR (Rockafeller and Uryasev Model.)

Στην παρούσα ενότητα εισαγάγουμε τη προσέγγιση του Rockafeller και Uryasev για τον υπολογισμό του Value at Risk και Conditional Value at Risk. Το εν λόγω μοντέλο αναγάγει το παραπάνω πρόβλημα σε πρόβλημα βελτιστοποίησης και στοχεύει στην ελαχιστοποίηση των δύο ποσοτήτων. Σύμφωνα με τη παραπάνω προσέγγιση μοντελοποιείται η απώλεια του έκαστου χαρτοφυλακίου σε χώρο πιθανότητας ενώ παράλληλα γίνεται χρήση ενός δείγματος από τη κατανομή του χρηματοοικονομικού προϊόντος.

Περιγραφή της προσέγγισης:

Θεωρώντας ότι, η απώλεια ενός χαρτοφυλακίου σε καθορισμένο χρονικό ορίζοντα μπορεί να γραφτεί ως συνάρτηση ενός δομημένου, τυχαίου διανύσματος πεπερασμένης διάστασης, για παράδειγμα $L = f(X)$ όπου X διάνυσμα ορισμένο στον \mathbb{R}^d , σε χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{A}, P) και $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, συνάρτηση Borel. Η f μπορεί να θεωρηθεί η συνάρτηση που αντιπροσωπεύει τη σύνθεση του χαρτοφυλακίου που μένει αναλλοίωτη, ενώ παράλληλα το διάνυσμα X μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη μοντελοποίηση των τιμών της αγοράς, υπό ένα καθορισμένο χρονικό διάστημα. Ως εκ τούτου δεν χρειάζεται να καθορίσουμε τη δυναμική των τιμών της αγοράς, με αποτέλεσμα να μπορούμε να βασιστούμε στο γεγονός ότι είναι εφικτό να έχουμε δείγμα από την κατανομή της μεταβλητής X . Σε πιο πολύπλοκα μοντέλα ή χαρτοφυλάκια, η μεταβλητή X μπορεί να είναι διάνυσμα προσαυξήσεων Brown, που σχετίζονται με το σχήμα Euler.

Το VaR, σε διάστημα εμπιστοσύνης $a \in (0, 1)$ είναι το μικρότερο ποσοστημόριο (quantile) της κατανομής $f(X)$, δηλαδή:

$$\text{VaR}_\alpha(f(X)) := \inf\{z | P(f(X) \leq z) \geq \alpha\}$$

Αφού $\lim_{\xi \rightarrow \infty} P(f(X) \leq \xi) = 1$, και έχουμε $\{\xi | P(f(X) \leq \xi) \geq \alpha\} \neq \emptyset$. Επιπλέον, έχουμε $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} P(f(X) \leq \xi) = 0$, το οποίο υπονοεί ότι το $\{z | P(f(X) \leq z) \geq \alpha\}$ είναι φραγμένο από κάτω έτσι ώστε το VaR να υπάρχει πάντα.

Λήμμα 1 Για κάθε $\alpha \in (0, 1)$ και κάθε α -quantile q της μεταβλητής X :

$$\text{AVaR}_{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha} E[(q - X)^+] - q = \frac{1}{\alpha} \inf_{r \in \mathbb{R}} (E[(r - X)^+] - \alpha r)$$

Απόδειξη 1 Θεωρούμε q_x quantile συνάρτηση $q_x(\alpha) = q$

$$\frac{1}{\alpha} E[(q - X)^+] - q = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 (q - q_x(t))^+ dt - q = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha q_x(t) dt = \text{AVaR}_\alpha(X)$$

Το παραπάνω αποδεικνύει τη πρώτη ισότητα. Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το Λήμμα 1.

Λήμμα 2 Έστω X τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας F_x και quantile συνάρτηση q_x τέτοια ώστε $E[|X|] < \infty$. Τότε από τον μετασχηματισμό Fenchel-Legendre της κυρτής

συνάρτησης έχουμε:

$$\Psi(x) := \int_{-\infty}^x F_X(z) dz = E[(x - X)^+]$$

η οποία δίνεται από την σχέση:

$$\Psi^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (xy - \Psi(x)) = \begin{cases} \int_0^y q_x(t) dt & \text{εάν } 0 \leq y \leq 1 \\ \infty & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Επιπλέον, για $0 < y < 1$ το παραπάνω supremum επιτυγχάνεται εάν και μόνο εάν το x είναι y -quantile της μεταβλητής X .

Απόδειξη 2 Σημειώνεται από το θεώρημα Fubini και το Λήμμα 2,

$$\Psi(x) = E\left[\int_{-\infty}^x I_{X \leq z} dz\right] = E[(x - X)^+] = \int_0^1 (x - q_x(t))^+ dt \quad (1)$$

Ακολουθεί ότι, $\Psi^*(y) = \infty$ για $y < 0$, $\Psi^*(0) = -\inf_x \Psi(x) = 0$ και

$$\Psi^*(1) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (x - \Psi(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^1 x - (x - q_x(t))^+ dt = \int_0^1 q_x(t) dt$$

και $\Psi^*(y) = \infty$ για $y > 1$. Για να αποδείξουμε τη σχέση μας για $0 < y < 1$, σημειώνεται ότι το δεξί και το αριστερό μέλος προκύπτει από τη κοίλη συνάρτηση $f(x) = xy - \Psi(x)$, όπου $f'_+(x) = y - F_X(x)$ και $f'_-(x) = y - F_X(x-)$. Ένα σημείο x μεγιστοποιεί την συνάρτηση f εάν $f'_+(x) \leq 0$ και $f'_-(x) \geq 0$, το οποίο είναι ισοδύναμο με το x να είναι y -quantile.

Παίρνοντας $x = q_x(y)$ έχουμε:

$$\Psi(x) = \int_0^y (x - q_x(t)) dt = xy - \int_0^y q_x(t) dt$$

Λήμμα 3 Θεωρούμε U τυχαία μεταβλητή σε χώσορο πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) , με ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 1)$ τέτοιο ώστε $P[U \leq s]$, για κάθε $s \in (0, 1)$. Εάν το q αντίστροφη συνάρτηση της κανονικοποιημένης αύξουσας και δεξιά-συνεχούς συνάρτησης $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, τότε:

$$X(\omega) := q(U(\omega))$$

έχει συνάρτηση κατανομής F .

Απόδειξη 3 Αρχικά σημειώνεται, ότι κάθε αντίστροφη συνάρτηση για την F είναι μετρήσιμη διότι συμπίπτει με τη μετρήσιμη συνάρτηση q^+ έξω από το αριθμησιμο σύνολο $s \in (0, 1) | q^-(s) < q^+(s)$. Αφού $q(F(x)-) \leq x$, έχουμε $q(s) \leq x$ για $s < F(x)$. Επιπλέον από λήμμα έχουμε ότι $q(s) \leq x$ συνεπάγεται $F(x) \geq F(q(s)) = F(q(s)+) \leq s$.

Ακολουθεί ότι: Έτσι:

$$\begin{aligned} F(x) &= P[U \in (0, F(x))] \leq P[U \in s | q(s) \leq x] \\ &\leq P[U \in (0, F(x))] = F(x) \end{aligned}$$

Ο ισχυρισμός προκύπτει από την ταυτότητα $P[U \in s | q(s) \leq x] = P[X \leq x]$.

Οι τρεις πιο συνηθισμένες τιμές του α θεωρούνται οι 0.95, 0.99 και 0.995, έτσι ώστε το διάστημα εμπιστοσύνης να τείνει στη μονάδα. Συνεπώς, η «ουρά» (tail) της κατανομής που μας ενδιαφέρει έχει πιθανότητα $1 - \alpha$. Εάν, η πυκνότητα πιθανότητας της συνάρτησης είναι γνησίως αύξουσα, τότε η λύση είναι μοναδική, αλλιώς ενδέχεται να υπάρχουν περισσότερες από μία λύσεις, ακολούθως θα θεωρούμε ότι, κάθε λύση της εξίσωσης είναι το VaR .

Το κλειδί για την προσέγγιση μας είναι ο χαρακτηρισμός των $CVaR_\alpha(f(X))$ και $VaR_\alpha(f(X))$, στο πλαίσιο της συνάρτησης $F_\alpha(X)$ στον χώρο $X \times \mathbb{R}$, την οποία ορίζουμε ως:

$$F_\alpha(X, \theta) = \theta + \frac{1}{1 - \alpha} \int_{y \in \mathbb{R}^m} [f(x, y) - \theta]^+ p(y) dy$$

όπου y το διάνυσμα που αντιπροσωπεύει την αβεβαιότητα και $p(y)$ η κατανομή πιθανότητας των y στο \mathbb{R}^m

Αξίζει να σημειωθεί ότι η κυρτότητα, η οποία είναι κύριο χαρακτηριστικό στη βελτιστοποίηση, εξαλείφει την πιθανότητα τοπικού ελαχίστου, βλέπε Rockafeller (1970).

Θεώρημα 1 Ως συνάρτηση του θ , η F_α είναι κυρτή και συνεχώς διαφορίσιμη. Το $CVaR_\alpha$ των απωλειών που συνδέονται με κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ μπορεί να οριστεί από τον τύπο:

$$CVaR_\alpha(x) = \min_{\theta \in \mathbb{R}} F_\alpha(x, \theta)$$

Επιπλέον, θέτουμε $F_\alpha^*(x, \theta) := \operatorname{argmin} F_\alpha(x, \theta)$, δηλαδή $F_\alpha^*(x)$ είναι το σύνολο των σημείων που ελαχιστοποιούν την συνάρτηση F_α . Τότε:

$$VaR_\alpha(x) = \min\{c : c \in F_\alpha^*(x)\}$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις, το ακόλουθο ισχύει πάντα:

$$VaR_\alpha(x) = F_\alpha(x, VaR_\alpha(x))$$

Βάση του θεωρήματος οι Rockafeller και Uryasev, παρέθεσαν ένα επιπλέον θεώρημα, το οποίο διευκολύνει την υπολογιστική διαδικασία της εύρεσης του βέλτιστου $CVaR$ στο χαρτοφυλάκιο.

Θεώρημα 2 : Θεωρούμε S , κυρτό σύνολο των εφικτών σημείων x και υποθέτουμε ότι $f(x)$ κυρτή συνάρτηση ως προς το x . Τότε ελαχιστοποιώντας το $CVaR$ των απωλειών με $x \in S$, είναι ισοδύναμο με την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης $\phi_\alpha(x)$ για κάθε $x \in S$, δηλαδή:

$$\min_{x \in S} CVaR_\alpha(x) = \min_{(x, c) \in S \times \mathbb{R}} \phi_\alpha(x)$$

όπου το βέλτιστο x^* επιτυγχάνει την ελαχιστοποίηση του δεξιού μέλους εαν και μόνο εάν το x^* επιτυγχάνει την ελαχιστοποίηση στο αριστερό μέλος και $c^* \in F_\alpha^*(x)$. Συνεπώς, στη περίπτωση όπου

το διάστημα $F_\alpha^*(x)$ μειώνεται σε μοναδικό σημείο, η ελαχιστοποίηση του $\phi_\alpha(x, c)$ παράγει το ζευγάρι (x^*, c^*) , τέτοιο ώστε x^* να ελαχιστοποιεί το $CVaR_\alpha$, ενώ το c^* δίνει το αντίστοιχο VaR_α .

Πρόταση 4

Θεωρούμε συνάρτηση V , που να ορίζεται ως:

$$V(\theta) = \mathbb{E}[u(\theta, X)]$$

Όπου $u(\theta, X) := \theta + \frac{1}{1-\alpha}(f(X) - \theta)_+$.

Υποθέτουμε ότι η κατανομή της συνάρτησης $f(X)$ είναι συνεχής και $f(X) \in L^1(P)$. Τότε η συνάρτηση V είναι κυρτή, διαφορίσιμη και το $CVaR_\alpha(f(X))$ είναι κάθε σημείο του συνόλου:

$$\operatorname{argmin} V = \{\theta \in \mathbb{R} \mid V'(\theta) = 0\} = \{j \mid P(f(X) \leq \theta) = \alpha\}$$

Συνεπώς είμαστε σε θέση να ορίσουμε:

$$VaR_\alpha(f(X)) = \operatorname{arg} \min_V(\theta)$$

όπου V' είναι η παράγωγος της συνάρτησης V που ορίζεται για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ ως εξής:

$$V'(\theta) = \mathbb{E} \left[\frac{\partial u}{\partial \theta}(X, \theta) \right] \quad (6)$$

Επιπλέον:

$$CVaR_\alpha(f(X)) = \min_{x \in \mathbb{R}} V(\theta)$$

Η συνάρτηση (6), η οποία με φυσικό τρόπο μας οδηγεί στη στοχαστική κλίση, που έχει προκύψει από τη κυρτή συνάρτηση Lyapunov V , η οποία συγκλίνει στο

$$\theta^* := VaR_\alpha(f(X))$$

Αρχικά ορίζουμε:

$$H_1(\theta, x) := \frac{\partial u}{\partial \theta}(x, \theta) = 1 - \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{I}_{f(x) \geq \theta}$$

3.2 \mathbb{L}_2 Regularization

Η ελαχιστοποίηση των μέτρων ρίσκου, ενδέχεται να οδηγήσει σε υπερπροσαρμογή (overfitting), σε τέτοιο βαθμό που αποτυπώνεται ο θόρυβος και οι ακραίες τιμές, εμποδίζοντας τον αλγόριθμο μηχανικής μάθησης να γενικεύει σε νέα δεδομένα. Για αυτό τον λόγο θεωρείται χρήσιμο να προστεθεί ένας επιπλέον όρος στην αντικειμενική συνάρτηση:

$$V(X, \theta) = \mathbb{E} \left[\theta + \frac{1}{1-\alpha} [f(y) - \theta]^+ \right] + \gamma |\theta|^2$$

Όπου $\gamma \geq 0$ και ονομάζεται ποινή πολυπλοκότητας (complexity penalty), και παρατηρούμε ότι καθώς το γ μεγαλώνει, το σφάλμα στο σύνολο τως δεδομένων αυξάνεται, βλέπε [12]. Αυτή η τεχνική ονομάζεται \mathbb{L}_2 κανονικοποίηση ή αλλιώς \mathbb{L}_2 regularization.

Εφαρμόζοντας τον όρο $\gamma|\theta|^2$ στον αλγόριθμο οδηγούμαστε σε έναν πιο ευσταθή αλγόριθμο, ο οποίος δεν υπερπροσαρμόζεται στα δεδομένα και μετατρέπει την αντικειμενική συνάρτηση σε κυρτή, διευκολύνοντας την εύρεση του ελαχίστου, βλέπε [16].

3.3 Ο αλγόριθμος VaR-CVaR

Προκειμένου να αποκτήσουμε τις επιθυμητές ποσότητες, που θα ελαχιστοποιήσουμε τα μέτρα ρίσκου, θεωρούμε το εξής πρόβλημα βελτιστοποίησης, βλέπε [3]:

$$\min_{\theta} V(X, \theta) := \mathbb{E}[\theta + \frac{1}{1-a} [f(y) - \theta]^+] + \gamma|\theta|^2$$

Όπου $0 < \theta < 1$, η f είναι συνεχής και $f(X)$ ολοκληρώσιμη ως προς το μέτρο πιθανότητας. Επιπλέον, η συνάρτηση f αντιπροσωπεύει την απώλεια και έχει τη δυνατότητα να έχει και πιο πολύπλοκη δομή απόδοσης, ενώ παράλληλα το X ικανοποιεί ένα μεγάλο σύνολο κατανομών χρηματοοικονομικών προϊόντων. Έχοντας ορίσει:

$$VaR_{\alpha}(f(X)) = \arg \min V(\theta) \quad \text{και} \quad CVaR_{\alpha}(f(X)) = \min_{\xi \in \mathbb{R}} V(\theta)$$

Υπολογίζουμε το VaR, χρησιμοποιώντας τη στοχαστική κλίση $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ του αλγορίθμου SGLD, ο οποίος δίνεται από τον εξής τύπο:

$$H(\theta, x) = 1 - \frac{1}{1-a} \mathbf{1}_{f(x) \geq \theta} + 2\gamma\theta = -\frac{\alpha}{1-a} + \frac{1}{1-a} \mathbf{1}_{f(x) < \theta} + 2\gamma|\theta|^2$$

Ένα χρηματοοικονομικό προϊόν

Θεωρούμε $f(x) = x$, και η παραπάνω έκφραση παίρνει την μορφή:

$$H(\theta, x) = -\alpha + \mathbf{1}_{x < \theta} + 2\gamma|\theta|^2$$

Χαρτοφυλάκιο από χρηματοοικονομικά προϊόντα

Για να επιλύσουμε το παραπάνω πρόβλημα βελτιστοποίησης, και να ελαχιστοποιήσουμε το CVaR, ενός δοσμένου χαρτοφυλακίου, θεωρούμε το παρακάτω πρόβλημα:

$$\min_{\hat{\theta}} V(X, \hat{\theta}) := \mathbb{E}[\hat{\theta} + \frac{1}{1-a} \left[\sum_i^n g_i(\omega) X_i - \hat{\theta} \right]^+] + \gamma|\hat{\theta}|^2$$

όπου $\hat{\theta} := (\theta, \omega)^T = (\theta, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ και $g_i(\omega) := \frac{e^{\omega_i}}{\sum_{j=1}^n e^{\omega_j}}$ για $i = 1, \dots, n$.

Λύνοντας το παραπάνω πρόβλημα είμαστε σε θέση να λάβουμε όχι μόνο το VaR για το δοσμένο χαρτοφυλάκιο, αλλά επίσης το βέλτιστο βάρος για κάθε προϊόν του χαρτοφυλακίου έτσι ώστε να προκύπτει το ελάχιστο CVaR.

Στη προκειμένη περίπτωση, θεωρούμε ότι τα X_i για κάθε $i = 1, \dots, n$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες και μονοδιάστατες τυχαίες μεταβλητές, ωστόσο τα αποτελέσματα μπορούν να επεκταθούν και στη περίπτωση των εξαρτημένων μεταβλητών, βλέπε [15].

Είμαστε σε θέση να ορίσουμε πλέον την στοχαστική κλίση $H_{\hat{\theta}}(\hat{\theta}, x) : \mathbb{R}^n + 1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n + 1$ ως:

$$H_{\hat{\theta}}(\hat{\theta}, x) := (H_{\theta}(\hat{\theta}, x), H_{\omega_1}(\hat{\theta}, x), H_{\omega_2}(\hat{\theta}, x), \dots, H_{\omega_n}(\hat{\theta}, x))^T$$

όπου $H_{\theta}(\hat{\theta}, x) : \mathbb{R}^n + 1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ και $H_{\omega_j}(\hat{\theta}, x) : \mathbb{R}^n + 1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ για κάθε j δίνεται από το εξής:

$$H_{\theta}(\hat{\theta}, x) = 1 - \frac{1}{1 - \alpha} \mathbf{1}_{\sum_{i=1}^n g_i(\omega) x_i \geq \theta} + 2\gamma\theta$$

και

$$H_{\omega_j}(\hat{\theta}, x) = 1 - \frac{1}{1 - \alpha} g_j(\hat{\omega}, \theta) \mathbf{1}_{\sum_{i=1}^n g_i(\omega) x_i \geq \theta} + 2\gamma\omega_j$$

όπου

$$g_j(\hat{\omega}, \theta) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_i(\omega)}{\partial \omega_j} x_i \quad \text{για κάθε } j = 1, \dots, n$$

με

$$\frac{\partial g_j(\omega)}{\partial \omega_j} = \frac{e^{\omega_j} \sum_{i \neq j} e^{\omega_i}}{(\sum_{l=1}^n e^{\omega_l})^2}$$

και

$$\frac{\partial g_i(\omega)}{\partial \omega_j} = -\frac{e^{\omega_i} e^{\omega_j}}{(\sum_{l=1}^n e^{\omega_l})^2} \quad \text{για κάθε } i \neq j$$

3.4 Ο αλγόριθμος Stochastic Gradient Langevin Dynamics

Ο αλγόριθμος SGLD ανήκει στη νέα γενιά των αλγορίθμων στοχαστικής κλίσης, επιτρέποντας την εύρεση ολικών ελαχίστων σε πιθανώς πολύπλοκα και πολυδιάστατα προβλήματα, υπό κατάλληλες υποθέσεις κανονικότητας, βλ έπε [13]. Τέτοιοι αλγόριθμοι βασίζονται σε προβλήματα εύρεσης ελαχίστων σε μη-κυρτές αντικειμενικές συναρτήσεις U , οι οποίες συνδέονται με προβλήματα δειγματοληψίας από συγκεκριμένη κατανομή $\pi_\beta(d\theta) \propto \exp(-\beta u(\theta))d\theta$.

Εξετάζοντας μη κυρτά προβλήματα βελτιστοποίησης της μορφής:

$$\text{minimize } U(\theta) := \mathbb{E}[f(\theta, X)]$$

όπου η κλίση της συνάρτησης f είναι ασυνεχής για $\theta \in \mathbb{R}^d$, έχουμε θέσει τα πλαίσια για την επίλυση του προβλήματος της ελαχιστοποίηση του CVaR ενός χαρτοφυλακίου και της βέλτιστης επιλογής βάρων για τα προϊόντα σε αυτό.

Κάτω από ορισμένες συνθήκες για τη συνάρτηση $U(x)$, ορίζεται η αμετάβλητη κατανομή της Langevin στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$L_0 = \theta_0, \quad dL_t = -\nabla U(L_t)dt + \sqrt{2\beta^{-1}}dB_t, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (7)$$

όπου $(B_t)_t \geq 0$ αντιπροσωπεί την κίνηση Brown Ο αλγόριθμος SGLD δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\theta_{n+1}^{\text{SGLD}} = \theta_n^{\text{SGLD}} + \lambda H(\theta_n^{\text{SGLD}}, X_{n+1}) + \sqrt{2\lambda\beta^{-1}}\xi_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (8)$$

Όπου $\lambda > 0$ είναι το μέγεθος του βήματος, $(X_t)_{n \in \mathbb{N}_0}$ είναι μια ακολουθία από ισότιμες και ανεξάρτητες μεταβλητές, $\beta > 0$, και $\{\xi_{n+1}\}_{n \geq 1}$ είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες δισδιάστατες Gaussian τυχαίες μεταβλητές.

Ο SGLD αλγόριθμος, μπορεί να γίνει αντιληπτός ως η διακριτοποίηση της Langevin διαφορικής εξίσωσης, όπου ο όρος ∇U έχει αντικατασταθεί από την αμερόληπτη εκτιμήτρια H , η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$\nabla U = \mathbb{E}[H(\theta, X_0)]$$

3.5 Αποδείξεις κύριων αποτελεσμάτων για ανεξάρτητα δεδομένα

Για τη περίπτωση ανεξάρτητων δεδομένων, είναι αρκετό να υπολογιστεί η δεύτερη ροπή του σχήματος SGLD, πριν την εξέταση της σύγκλισης στην απόσταση Wasserstein. Το ακόλουθο Λήμμα παρέχει το άνω φράγμα στη δεύτερη ροπή του σχήματος SGLD με σαφώς ορισμένες σταθερές, βλέπε [3].

Υπόθεση 1 Υπάρχουν θετικές σταθερές L_1, L_2 και ρ έτσι ώστε, για όλα τα $x, x' \in \mathbb{R}^m$ και $\theta, \theta' \in \mathbb{R}^d$,

$$\|H(\theta, x) - H(\theta', x)\| \leq L_1(1 + \|x\|)^\rho \|\theta - \theta'\|,$$

$$\|H(\theta, x) - H(\theta, x')\| \leq L_2(1 + \|x\| + \|x'\|)^\rho (1 + \|\theta\|) \|x - x'\|.$$

Υπόθεση 2 Η διαδικασία $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι i.i.d. με $\|X_0\|^2(\rho + 1)$ και $\|\theta_0\|^2$ να είναι πεπερασμένα.

Υπόθεση 3 Υπάρχει μια απεικόνιση $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ έτσι ώστε

$$\langle y, A(x)y \rangle \geq 0,$$

για οποιαδήποτε $x, y \in \mathbb{R}^d$ (θετικά ημιορισμένη) και, για όλα τα $\theta, \theta' \in \mathbb{R}^d$ και $x \in \mathbb{R}^m$,

$$\langle \theta - \theta', H(\theta, x) - H(\theta', x) \rangle \geq \langle \theta - \theta', A(x)(\theta - \theta') \rangle$$

με τη μικρότερη ιδιοτιμή του πίνακα $E[A(X_0)]$ να είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός ο οποίος συμβολίζεται με a . Είναι σαφές τότε ότι οι ιδιότητες (B1) και (B2), βλέπε [3], παραμένουν ισχυρές για την κλίση $\langle h \rangle$ του U , με τη μόνη διαφορά ότι η σταθερά Lipschitz στο (B1) δίνεται από $L_1 E[(1 + \|X_0\|)^\rho]$.

Σε αυτό το σημείο χρειάζεται να παρατεθεί ο ορισμός της απόστασης Wasserstein, εφόσον μπορεί να θεωρηθεί η απόσταση μεταξύ δύο μέτρων πιθανότητας μ, ν .

Ορισμός 5 Θεωρούμε μετρικό χώρο (X, d) , και $p \in [1, \infty)$. Για δύο μέτρα πιθανότητας μ, ν ον X , η απόσταση Wasserstein τάξης p μεταξύ μ και ν ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} W_p(\mu, \nu) &= \left(\inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_X \int_X d(x, y)^p d\pi(x, y) \right)^{1/p} \\ &= \inf \{ \mathbb{E}[d(X, Y)^p] \mid \text{law}(X) = \mu, \text{law}(Y) = \nu \}. \end{aligned}$$

Λήμμα 4 Θεωρούμε ότι οι υποθέσεις 1, 2 και 3 ισχύουν, βλέπε [3], και

$$\lambda_0 := \min(a/2L_1^2 E[(1 + \|X_0\|)^{2\rho}], 1/a)$$

Για $\lambda \leq \lambda_0$, η συνάρτηση $V_1(\theta) := \|\theta - \theta^*\|^2$ ικανοποιεί

$$E[V_1(\theta_n^\lambda) \mid \theta_{n-1}^\lambda] \leq (1 - a\lambda)V_1(\theta_{n-1}^\lambda) + \lambda C$$

όπου

$$C := 4L_2^2(1 + \|\theta^*\|)^2 E[(1 + \|X_0\|)^{2\rho+2}] + 4(H^*)^2 + 2d$$

Ως αποτέλεσμα $\sup_{\lambda \leq \lambda_0} \sup_{n \in \mathbb{N}} E[V_1(\theta_n^\lambda)] < \infty$. Επιπλέον εάν $\rho = 0$ στην υπόθεση 1, τότε το παραπάνω αποτέλεσμα είναι αληθές για:

$$\lambda \leq \min(1/2L_1, 1/(\alpha + L_1))$$

Απόδειξη.

Χρησιμοποιώντας το σχήμα SGLD (5), είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε:

$$\begin{aligned} \|\theta_{n+1} - \theta^*\|^2 &= \|\theta_{n+1}\|^2 - 2\lambda\langle\theta_{n+1}, \theta^*\rangle + \|\theta^*\|^2 \\ &= \|\theta_n - \theta^*\|^2 - 2\langle\theta_n - \theta^*, -\lambda H(\theta_n, X_{n+1}) + \sqrt{2\lambda\beta^{-1}}\xi_{n+1}\rangle \\ &\quad + \|-\lambda H(\theta_n, X_{n+1}) + \sqrt{2\lambda\beta^{-1}}\xi_{n+1}\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\theta_{n+1} - \theta^*\|^2 &= \|\theta_n^\lambda - \theta^*\|^2 - 2\lambda\langle\theta_n^\lambda - \theta^*, H(\theta_n, X_{n+1}) - H(\theta^*, X_{n+1})\rangle \\ &\quad + 2\langle\theta_n - \theta^*, \sqrt{2\lambda\beta^{-1}}\xi_{n+1}\rangle - 2\lambda\langle\theta_n - \theta^*, H(\theta^*, X_{n+1})\rangle \\ &\quad + \lambda^2\|H(\theta_n, X_{n+1})\|^2 - 2\lambda\langle H(\theta_n, X_{n+1}), \sqrt{2\lambda\beta^{-1}}\xi_{n+1}\rangle \\ &\quad + 2\lambda\beta^{-1}\|\xi_{n+1}\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\theta_{n+1}^\lambda - \theta^*\|^2 &\leq \|\theta_n^\lambda - \theta^*\|^2 - 2\lambda\langle\theta_n^\lambda - \theta^*, A(X_{n+1}(\theta_n^\lambda - \theta^*))\rangle \\ &\quad + 2\langle\theta_n^\lambda - \theta^*, \sqrt{2\lambda\beta^{-1}}\xi_{n+1}\rangle - 2\lambda\langle\theta_n^\lambda - \theta^*, H(\theta^*, X_{n+1})\rangle \\ &\quad + \lambda^2\|H(\theta_n^\lambda, X_{n+1})\|^2 - 2\lambda\langle H(\theta_n^\lambda, X_{n+1}), \sqrt{2\lambda\beta^{-1}}\xi_{n+1}\rangle \\ &\quad + 2\lambda\beta^{-1}\|\xi_{n+1}\|^2 \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} E[\|\theta_{n+1}^\lambda - \theta^*\|^2 | \theta_n^\lambda] &\leq \|\theta_n^\lambda - \theta^*\|^2 - 2\lambda E[\langle\theta_n^\lambda - \theta^*, A(X_{n+1}(\theta_n^\lambda - \theta^*))\rangle | \theta_n^\lambda] \\ &\quad - 2\lambda\langle\theta_n^\lambda - \theta^*, h(\theta^*)\rangle + \lambda^2 E[\|H(\theta_n^\lambda, X_{n+1})\|^2 | \theta_n^\lambda] + 2\lambda\beta^{-1} \end{aligned} \quad (1)$$

όπου

$$\begin{aligned} E[\langle\theta_n^\lambda - \theta^*, H(\theta^*, X_{n+1})\rangle | \theta_n^\lambda] &= \sum_{i=1}^d (\theta_n - \theta^*)_i E[H_i(\theta^*, X_{n+1}) | \theta_n] \\ &= \sum_{i=1}^d (\theta_n - \theta^*)_i h_i(\theta^*, X_{n+1}) = (\theta_n - \theta^*)h(\theta^*, X_{n+1}) \end{aligned}$$

και

$$\|\xi_{n+1}\|^2 = \sqrt{\sum_{i=1}^d (\xi_{n+1}^i)^2}^2 \rightarrow E[\|\xi_{n+1}\|^2 | \theta_n^\lambda] = 1 + 1 \dots = d$$

$$\begin{aligned}
(1) &\rightarrow E[|\theta_{n+1}^\lambda - \theta^*|^2 | \theta_n^\lambda] \\
&\leq |\theta_n^\lambda - \theta^*|^2 - 2\lambda\alpha|\theta_n^\lambda - \theta^*|^2 + \lambda^2 E[|H(\theta_n^\lambda, X_{n+1}) \\
&\quad - H(\theta^*, X_{n+1}) + H(\theta^*, X_{n+1})|^2 | \theta_n^\lambda] + 2\lambda\beta^{-1}d \\
&\leq |\theta_n^\lambda - \theta^*|^2 - 2\lambda\alpha|\theta_n^\lambda - \theta^*|^2 + 2\lambda^2 E[|H(\theta_n^\lambda, X_{n+1}) - H(\theta^*, X_{n+1})|^2 | \theta_n^\lambda] \\
&\quad + 2\lambda^2 E[|H(\theta^*, X_{n+1})|^2 | \theta_n^\lambda] + 2\lambda\beta^{-1}d \\
&\leq (1 - \lambda\alpha)|\theta_n^\lambda - \theta^*|^2 + 2\lambda^2 E[|H(\theta_n^\lambda, X_{n+1}) - H(\theta^*, X_{n+1})|^2 | \theta_n^\lambda] \\
&\quad + 2\lambda^2 E[|H(\theta^*, X_{n+1})|^2 | \theta_n^\lambda] + 2\lambda\beta^{-1}d
\end{aligned} \tag{2}$$

Περιορισμοί:

$$(1 - \lambda\alpha) \geq 0 \rightarrow \lambda \leq 1/\alpha$$

Υπόθεση 1 \rightarrow

$$\begin{aligned}
&\|H(\theta_n^\lambda, X_{n+1}) - H(\theta^*, X_{n+1})\| \leq L_1(1 + \|X_{n+1}\|)^\rho \|\theta_n^\lambda - \theta^*\| \Rightarrow \\
&E[|H(\theta_n^\lambda, X_{n+1}) - H(\theta^*, X_{n+1})|^2] \leq L_1^2 E[(1 + \|X_{n+1}\|)^{2\rho}] \|\theta_n^\lambda - \theta^*\|^2 \Rightarrow \\
&E[|H(\theta_n^\lambda, X_{n+1}) - H(\theta^*, X_{n+1})|^2] + \|\theta_n^\lambda - \theta^*\|^2 \leq L_1^2 E[(1 + \|X_{n+1}\|)^{2\rho}] \|\theta_n^\lambda - \theta^*\|^2 \\
&\quad + \|\theta_n^\lambda - \theta^*\|^2 \Rightarrow \|\theta_n^\lambda - \theta^*\|^2 (1 + E[(1 + \|X_{n+1}\|)^{2\rho}]) \leq 0 \rightarrow \\
&\lambda \leq \alpha / (2E[L_1^2(1 + \|X_{n+1}\|^{2\rho})]) \xrightarrow{(X_n)_{n \in \mathbb{N}} i.d.d} \lambda \leq \alpha / 2E[L_1^2(1 + \|X_0\|^{2\rho})]
\end{aligned}$$

Συνεπώς για $\lambda \leq \min(\alpha/2E[L_1^2(1 + \|X_0\|^{2\rho})], 1/\alpha)$

$$\begin{aligned}
&E[|\theta_{n+1}^\lambda - \theta^*|^2 | \theta_n^\lambda] \leq (1 - \lambda\alpha)|\theta_n^\lambda - \theta^*|^2 + 4\lambda^2 L_2^2 (1 + \|\theta^*\|)^2 E(1 + \|X_0\|)^{2\rho+2} \\
&\quad + 4\lambda^2 \{H^*\}^2 + 2\lambda\beta^{-1}d \\
&E[|\theta_{n+1}^\lambda - \theta^*|^2 | \theta_n^\lambda] \leq (1 - \lambda\alpha)|\theta_n^\lambda - \theta^*|^2 + \lambda C
\end{aligned} \tag{3}$$

όπου $C = 4L_2^2(1 + \|\theta^*\|)^2 E[(1 + \|X_0\|^{2\rho+2})] + 4\lambda^2 \{H^*\}^2 + 2\lambda\beta^{-1}d$

Κατά συνέπεια για, κάθε $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
&E[E[|\theta_{n+1}^\lambda - \theta^*|^2 | \theta_n^\lambda]] \leq E[(1 - \lambda\alpha)|\theta_n^\lambda - \theta^*|^2 + \lambda C] \\
&E[|\theta_{n+1}^\lambda - \theta^*|^2] \leq (1 - \lambda\alpha) E[|\theta_n^\lambda - \theta^*|^2] + \lambda C \leq (1 - \lambda\alpha)[(1 - \lambda\alpha)E[|\theta_{n-1}^\lambda - \theta^*|^2] + \lambda C] \\
&E[|\theta_n^\lambda - \theta^*|^2] \leq (1 - \lambda\alpha)^n \|\theta_0^\lambda - \theta^*\|^2 + \frac{C}{\alpha} < \infty
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι, για $\rho = 0$ στην υπόθεση 1, τότε H είναι co-coercive, με την ακόλουθη ιδιότητα, για κάθε $x \in \mathbb{R}^m$ και $\theta, \theta^* \in \mathbb{R}^d$

$$\langle \theta - \theta', H(\theta, x) - H(\theta', x) \rangle \geq \frac{1}{L_1} \|H(\theta, x) - H(\theta', x)\|^2 \tag{4}$$

Από την (4), μπορούμε να αναδιατυπώσουμε τη (1) ως:

$$\begin{aligned} E[|\theta_{n+1}^2 - \theta^*|^2 | \theta_n^\lambda] &\leq \|\theta_n^\lambda - \theta^*\|^2 - \lambda E[\langle \theta_n^\lambda - \theta^*, A(X_{n+1})(\theta_n^\lambda - \theta^*) \rangle | \theta_n^\lambda] \\ &\quad - \frac{\lambda}{L_1} \|H(\theta_n^\lambda, X_{n+1}) - H(\theta^*, X_{n+1})\|^2 + 2\lambda \langle \theta_n^\lambda - \theta^*, h(\theta^*) \rangle \\ &\quad + \lambda^2 E[|H(\theta_n^\lambda, X_{n+1})|^2 | \theta_n^\lambda] + 2\lambda\beta^{-1}d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[|\theta_{n+1}^2 - \theta^*|^2 | \theta_n^\lambda] &\leq \|\theta_n^\lambda - \theta^*\|^2 - \lambda\alpha \|\theta_n^\lambda - \theta^*\|^2 \\ &\quad - \frac{\lambda}{L_1} \|H(\theta_n^\lambda, X_{n+1}) - H(\theta^*, X_{n+1})\|^2 \\ &\quad + \lambda^2 E[|H(\theta_n^\lambda, X_{n+1}) - H(\theta^*, X_{n+1}) + H(\theta^*, X_{n+1})|^2 | \theta_n^\lambda] \\ &\quad + 2\lambda\beta^{-1}d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[|\theta_{n+1}^2 - \theta^*|^2 | \theta_n^\lambda] &\leq (1 - \lambda\alpha) \|\theta_n^\lambda - \theta^*\|^2 + (2\lambda^2 - \frac{\lambda}{L_1}) E[|H(\theta_n^\lambda, X_{n+1}) - H(\theta^*, X_{n+1})|^2 | \theta_n^\lambda] \\ &\quad + 2\lambda^2 E[|H(\theta^*, X_{n+1})|^2 | \theta_n^\lambda] + 2\lambda\beta^{-1}d \\ &\leq (1 - \lambda\alpha) \|\theta_n^\lambda - \theta^*\|^2 + (2\lambda^2 - \frac{\lambda}{L_1}) \|H(\theta_n^\lambda, X_{n+1}) - H(\theta^*, X_{n+1})\|^2 \\ &\quad + 2\lambda^2 [H(\theta^*, X_{n+1}) | \theta_n^\lambda] + 2\lambda\beta^{-1}d \end{aligned}$$

το οποίο μας δίνει για $\lambda \leq \frac{1}{2L_1}$ το εξής:

$$\begin{aligned} E[|\theta_{n+1}^2 - \theta^*|^2 | \theta_n^\lambda] &\leq (1 - \lambda\alpha) \|\theta_n^\lambda - \theta^*\|^2 + 4\lambda^2 L_2^2 (1 + \|\theta^*\|)^2 E[1 + \|X_0\|^2] \\ &\quad + 4\lambda^2 \{H^*\}^2 + 2\lambda\beta^{-1}d \\ &\leq (1 - \lambda\alpha) \|\theta_n^\lambda - \theta^*\|^2 + \lambda C \end{aligned}$$

που $C = 4\lambda^2 L_2^2 (1 + \|\theta^*\|)^2 E[1 + \|X_0\|^2] + 4\{H^*\}^2 + 2\lambda\beta^{-1}d$ Απόδειξη θεωρήματος.

Παρατηρούμε ότι η **B1** ισχύει με τη διαφορά ότι η σταθερά Lipschitz δίνεται από τον τύπο $L_1 E[(1 + \|X_0\|^\rho)]$, και η **B2** ισχύει με α . Χρειάζεται να σημειωθεί, ότι τα ακόλουθα αποτελέσματα ισχύουν. Αρχικά, μπορούμε να παρατηρήσουμε, ότι τα ακόλουθα αποτελέσματα ισχύουν λόγω του Λήμματος 5.1.

$$\sup_{\lambda \in (0, \lambda_0)} \sup_{n \geq 0} E[|\theta_n^\lambda|^2] < c_0$$

όπου $c_0 = 2E\|\theta_0 - \theta^*\|^2 + 2\frac{C}{\alpha} + 2\|\theta^*\|^2$, και C δίνεται από το Λήμμα 5.1.

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
E[|\theta_n^\lambda - \theta^*|^2] &\leq (1 - \lambda\alpha)^n E[|\theta_0^\lambda - \theta^*|^2] + \frac{C}{\alpha} < \infty \Rightarrow \\
E\left[\frac{|\theta_n|}{2} - |\theta^*|^2\right] &\leq (1 - \lambda\alpha)^n E[|\theta_0^\lambda - \theta^*|^2] + \frac{C}{\alpha} \Rightarrow \\
\frac{1}{2}E[|\theta_n|^2] - E[|\theta^*|^2] &\leq (1 - \lambda\alpha)^n E[|\theta_0^\lambda - \theta^*|^2] + \frac{C}{\alpha} \Rightarrow \\
E[|\theta_n|^2] &\leq 2(1 - \lambda\alpha)^n E[|\theta_0^\lambda - \theta^*|^2] + 2\frac{C}{\alpha} + 2|\theta^*|^2 \Rightarrow \\
\sup_{n \geq 0} E[|\theta_n|^2] &\leq \sup_{n \geq 0} 2(1 - \lambda\alpha)^n E[|\theta_0^\lambda - \theta^*|^2] + 2\frac{C}{\alpha} + 2|\theta^*|^2 \\
&\leq 2E[|\theta_0^\lambda - \theta^*|^2] + 2\frac{C}{\alpha} + 2|\theta^*|^2 \Rightarrow \\
\sup_{\lambda \in (0, \lambda_0)} \sup_{n \geq 0} E[|\theta_n^\lambda|^2] &\leq 2E[|\theta_0^\lambda - \theta^*|^2] + 2\frac{C}{\alpha} + 2|\theta^*|^2 = c_0
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας ταυτόχρονα τα δύο σχήματα λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}
\theta_{n+1}^{-\lambda} &:= \bar{\theta}_n^{-\lambda} - \lambda h(\bar{\theta}_n^{-\lambda}) + \sqrt{2\lambda\beta^{-1}}\xi_{n+1} \text{ και } \theta_{n+1}^\lambda := \theta_n^\lambda - \lambda h(\theta_n^\lambda) + \sqrt{2\lambda\beta^{-1}}\xi_{n+1}, \text{ λαμβάνουμε:} \\
\|\theta_{n+1}^\lambda - \theta_{n+1}^{-\lambda}\|^2 &= \|\theta_n^\lambda - \bar{\theta}_n^{-\lambda} - \lambda(H(\theta_n^\lambda, X_{n+1}) - h(\bar{\theta}_n^{-\lambda}))\|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\theta_{n+1}^\lambda - \theta_{n+1}^{-\lambda}\|^2 &\leq \|\theta_n^\lambda - \bar{\theta}_n^{-\lambda}\|^2 - 2\lambda\langle \theta_n^\lambda - \bar{\theta}_n^{-\lambda}, H(\theta_n^\lambda) - h(\bar{\theta}_n^{-\lambda}) \rangle + \lambda^2 \|H(\theta_n^\lambda) - h(\bar{\theta}_n^{-\lambda})\|^2 \\
&\leq \|\theta_n^\lambda - \bar{\theta}_n^{-\lambda}\|^2 - 2\lambda\langle \theta_n^\lambda - \bar{\theta}_n^{-\lambda}, H(\theta_n^\lambda) - h(\theta_n^\lambda) + h(\theta_n^\lambda) - h(\bar{\theta}_n^{-\lambda}) \rangle \\
&\quad + \lambda^2 \|H(\theta_n^\lambda) - h(\theta_n^\lambda) + h(\theta_n^\lambda) - h(\bar{\theta}_n^{-\lambda})\|^2 \\
&\leq \|\theta_n^\lambda - \bar{\theta}_n^{-\lambda}\|^2 - 2\lambda\langle \theta_n^\lambda - \bar{\theta}_n^{-\lambda}, H(\theta_n^\lambda) - h(\theta_n^\lambda) \rangle - 2\lambda\langle \theta_n^\lambda - \bar{\theta}_n^{-\lambda}, h(\theta_n^\lambda) - h(\bar{\theta}_n^{-\lambda}) \rangle \\
&\quad + 2\lambda^2 \|H(\theta_n^\lambda, X_{n+1}) - h(\theta_n^\lambda)\|^2 + 2\lambda^2 \|h(\theta_n^\lambda) - h(\bar{\theta}_n^{-\lambda})\|^2
\end{aligned}$$

Παίρνοντας την μέση τιμή και για τα δύο μέλη και χρησιμοποιώντας

$\langle \theta - \theta', h(\theta) - h(\theta') \rangle \geq \tilde{\alpha} \|\theta - \theta'\|^2 + \frac{1}{\alpha + L_1} \|h(\theta) - h(\theta')\|^2$, όπου έχουμε θέσει: $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha L_1}{\alpha + L_1}$ οπότε λαμβάνουμε :

$$\begin{aligned}
E[\|\theta_{n+1}^\lambda - \theta_{n+1}^{-\lambda}\|^2 | \theta_n^\lambda, \bar{\theta}_n^{-\lambda}] &\leq \|\theta_n^\lambda - \bar{\theta}_n^{-\lambda}\|^2 - 2\lambda\tilde{\alpha} \|\theta_n^\lambda - \bar{\theta}_n^{-\lambda}\|^2 - \frac{2\lambda}{\alpha + L_1} \|h(\theta_n^\lambda) - h(\bar{\theta}_n^{-\lambda})\|^2 \\
&\quad + 2\lambda^2 E[\|H(\theta_n^\lambda, X_{n+1}) - h(\theta_n^\lambda)\|^2] + 2\lambda^2 \|h(\theta_n^\lambda) - h(\bar{\theta}_n^{-\lambda})\|^2
\end{aligned}$$

Περιορισμοί:

Δεδομένου ότι:

$$2\lambda \|h(\theta_n) - h(\bar{\theta}_n)\|^2 \left(\lambda - \frac{1}{\alpha + L_1}\right) \leq 0 \Rightarrow \lambda - \frac{1}{\alpha + L_1} \leq 0 \Rightarrow \lambda \leq \frac{1}{\alpha + L_1}$$

Έτσι, για: $\lambda \leq \frac{1}{\alpha + L_1}$,

$$\begin{aligned} & E[|\theta_{n+1}^\lambda - \bar{\theta}_{n+1}^\lambda|^2 | \theta_n^\lambda, \bar{\theta}_n^\lambda] \\ & \leq (1 - \lambda\tilde{\alpha}) \|\theta_n^\lambda - \bar{\theta}_n^\lambda\|^2 + 2\lambda^2 E[|H(\theta_n^\lambda, X_{n+1}) - E[H(\theta_n^\lambda, X_{n+1}) | \theta_n^\lambda, \bar{\theta}_n^\lambda]|^2 | \theta_n^\lambda, \bar{\theta}_n^\lambda] \end{aligned}$$

το οποίο ισχύει λόγω της παρακάτω ιδιότητας :

Μπορούμε να θεωρήσουμε $X \perp\!\!\!\perp Y$, τότε,

$E[h(Z, Y|Z)] = r(Z)$, όπου $r(X) = E[h(X, Y)]$, έτσι παίρνουμε:

$E[H(\theta_n^\lambda, X_{n+1}) | \theta_n^\lambda, \bar{\theta}_n^\lambda] = r(\theta_n^\lambda)$, όπου $r(x) = E[H(x, X_{n+1})]$

Λήμμα A.2

Έστω $G, H \subset F$, σ -άλγεβρα, και $p \geq 1$. Θεωρούμε ότι $X, Y \in \mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές στο \mathbb{L}^1 τέτοιες ώστε η Y να είναι μετρήσιμη ως το $H \cup G$. Τότε

$$E^{\frac{1}{p}}[|X - E[X|H \cup G]|^p | G] \leq 2E^{\frac{1}{p}}[|X - Y|^p | G]$$

Θέτουμε $p = 2$, $X = H(\theta_n^\lambda, X_{n+1})$ και $Y = H(\theta_n^\lambda, E[X_{n+1} | \theta_n^\lambda, \bar{\theta}_n^\lambda])$ και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} & E[|H(\theta_n^\lambda, X_{n+1}) - E[H(\theta_n^\lambda, X_{n+1}) | \theta_n^\lambda, \bar{\theta}_n^\lambda]|^2 | \theta_n^\lambda, \bar{\theta}_n^\lambda] \\ & \leq 4E[|H(\theta_n^\lambda, X_{n+1}) - H(\theta_n^\lambda, E[X_{n+1} | \theta_n^\lambda, \bar{\theta}_n^\lambda])|^2 | \theta_n^\lambda, \bar{\theta}_n^\lambda] \end{aligned}$$

Συνεπώς, λόγω του Λήμματος A.2,

$$\begin{aligned} & E[|\theta_{n+1}^\lambda - \bar{\theta}_{n+1}^\lambda|^2 | \theta_n^\lambda, \bar{\theta}_n^\lambda] \\ & \leq (1 - \lambda\tilde{\alpha}) \|\theta_n^\lambda - \bar{\theta}_n^\lambda\|^2 + 8\lambda^2 E[|H(\theta_n^\lambda, X_{n+1}) - H(\theta_n^\lambda, E[X_{n+1} | \theta_n^\lambda, \bar{\theta}_n^\lambda])|^2 | \theta_n^\lambda, \bar{\theta}_n^\lambda] \\ & \leq (1 - \lambda\tilde{\alpha}) \|\theta_n^\lambda - \bar{\theta}_n^\lambda\|^2 + 8\lambda^2 L_2^2 (1 + \|\theta_n^\lambda\|)^2 \text{Var}_{\mathbb{W}}(X_0) \end{aligned}$$

όπου $\text{Var}_{\mathbb{W}}(X_0) := E[(1 + \|X_0\| + \|E[X_0]\|)^2 \|X_0 - E[X_0]\|^2]$

Το οποίο ισχύει διότι:

$$|H(\theta, x) - H(\theta, x')| \leq L_2(1 + \|x\| + \|x'\|)^\rho (1 + \|\theta\|) \|x - x'\|$$

$$|H(\theta, X_{n+1}) - H(\theta, E[X_{n+1} | \theta_n^\lambda, \bar{\theta}_n^\lambda])| \leq L_2(1 + \|X_{n+1}\| + \|E[X_{n+1}]\|)^\rho (1 + \|\theta\|) \|X_{n+1} - E[X_{n+1}]\|$$

$$|H(\theta, X_{n+1}) - H(\theta, E[X_{n+1} | \theta_n^\lambda, \bar{\theta}_n^\lambda])| \leq L_2(1 + \|X_0\| + \|E[X_0]\|)^\rho (1 + \|\theta\|) \|X_0 - E[X_0]\|$$

Η ιδιότητα $E[X_0] = E[X_{n+1}]$, ισχύει στη περίπτωση ανεξάρτητων και ισόνομων μεταβλητών. Συνεπώς λαμβάνουμε για $\lambda = \frac{1}{\tilde{\alpha}}$:

$$H(\theta_n^\lambda, E[X_{n+1} | \theta_n^\lambda, \bar{\theta}_n^\lambda]) \leq +8\lambda^2 L_2^2 (1 + \sup_{n \geq 0} \|\theta_n^\lambda\|)^2 \text{Var}_{\mathbb{W}}(X_0)$$

Θεωρώντας $\bar{c} = \sqrt{8\lambda^2 L_2^2 (1 + c_0)^2 \text{Var}_{\mathbb{W}}(X_0) \frac{1}{\alpha}}$, λαμβάνουμε:

$$W_2(\text{Law}(\theta_n^\lambda), \text{Law}(\bar{\theta}_n^\lambda)) \leq \bar{c}\lambda^{1/2}$$

Τότε μαζί με το θεώρημα 4.11:

Έχοντας ισχύ οι υποθέσεις 3.1, 3.2, 3.3, βλέπε [4] και $\lambda < \bar{\lambda}$ όπου $\bar{\lambda}$ είναι ορισμένο. Τότε, από τη Μαρκοβιανή Αλυσίδα $\theta_n^\lambda \in \mathbb{N}$ προκύπει το αμετάβλητο μέτρο π_λ , το οποίο για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ ικανοποιεί:

$$W_2(\text{Law}(\bar{\theta}_n^\lambda), \pi_\lambda) \leq \hat{c}e^{-\alpha\lambda_n}$$

Η απόσταση Wasserstein W_p ικανοποιεί το αξιώμα της απόστασης

$$W_p(\mu_1, \mu_3) \leq W_p(\mu_1, \mu_2) + W_p(\mu_2, \mu_3)$$

Το οποίο προκύπτει ως εξής:

$$\begin{aligned} W_2(\text{Law}(\theta_n^\lambda, \pi) &\leq W_2(\text{Law}(\theta_n^\lambda, \text{Law}(\bar{\theta}_n^\lambda)) + W_2(\text{Law}(\bar{\theta}_n^\lambda), \pi) \Rightarrow \\ W_2(\text{Law}(\theta_n^\lambda, \pi) &\leq \bar{c}\lambda^{1/2} + \hat{c}e^{-\alpha\lambda_n} + c\lambda^{1/2} \Rightarrow \\ \hat{C}[\lambda^{1/2} + e^{-\alpha\lambda_n}] \end{aligned}$$

όπου $\hat{C} = \max\{\hat{c}, c_1, c\}$

4 Μέθοδοι υπολογισμού VaR

4.1 Μέθοδος Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης

Η μέθοδος διακύμανσης-συνδιακύμανσης είναι μια απλή και εύκολα εφαρμόσιμη παραμετρική μέθοδος VaR, η οποία χρησιμοποιήθηκε ευρέως στον χρηματοοικονομικό κλάδο στις αρχές του είκοστού αιώνα. Ωστόσο, δεν καταγράφηκε σωστά μέχρι τη δημοσίευση ενός τεχνικού εγγράφου διαχείρισης κινδύνου από την JP Morgan (Longerstaey & Spencer, 1996). Η μέθοδος διακύμανσης-συνδιακύμανσης υποθέτει ότι η απώλεια X_t υπακούει στην κανονική κατανομή και είναι σειριακά ανεξάρτητη μεταξύ των παρατηρήσεων. Υπό την υπόθεση της κανονικότητας, τα ποσοστημόρια (quantiles) είναι γνωστοί πολλαπλασιαστές της τυπικής απόκλισης. Με άλλα λόγια, το VaR_α μπορεί να ληφθεί από:

$$VaR_\alpha = \mu + \lambda\sigma,$$

όπου μ είναι ο μέσος όρος του δείγματος, σ είναι η τυπική απόκλιση του δείγματος, και λ είναι ένας πολλαπλασιαστής. Έτσι, ο υπολογισμός απαιτεί μόνο την εκτίμηση του μ και του σ . Η υπόθεση της σειριακής ανεξαρτησίας υπονοεί ότι η τιμή του X_{t-k} δεν επηρεάζει την τιμή του X_t . Με άλλα λόγια, ο X_t είναι ανεξάρτητος και ομοιόμορφα κατανομημένος. Κατά συνέπεια, μακροπρόθεσμες τυπικές αποκλίσεις μπορούν να ληφθούν πολλαπλασιάζοντας τυπικές αποκλίσεις καθημερινού ορίζοντα με την τετραγωνική ρίζα του αριθμού των ημερών στον μακρύτερο ορίζοντα. Η ίσης βαρύτητας κινούμενος μέσος όρος και ο εκθετικά βαρυμένος κινούμενος μέσος όρος (Hendricks, 1996) είναι δύο παραλλαγές της μεθόδου διακύμανσης-συνδιακύμανσης.

Ένα βασικό μειονέκτημα της μεθόδου διακύμανσης-συνδιακύμανσης είναι οι ισχυρές υποθέσεις σχετικά με τη συνάρτηση κατανομής F . Τα πραγματικά δεδομένα μπορεί να μην έχουν κανονική κατανομή.

4.1.1 Μέθοδος Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης για τη πολυμεταβλητή κανονική κατανομή

Εξετάζουμε, στη προκειμένη περίπτωση, το παραμετρικό VaR κάνοντας παραμετρικές υποθέσεις σχετικά με τις αποδόσεις των μεμονομένων χρηματοοικονομικών προϊόντων αντί για υποθέσεις σχετικά με τις αποδόσεις του χαρτοφυλακίου. Από πολλές απόψεις η προφανής υπόθεση που πρέπει να γίνει — ή τουλάχιστον η υπόθεση που θα θέλαμε να μπορούμε να κάνουμε — είναι ότι οι αποδόσεις των μεμονομένων χρηματοοικονομικών προϊόντων κατανέμονται ως πολυμεταβλητές κανονικές. Αυτή η υπόθεση είναι το αντίστοιχο της προηγούμενης υπόθεσης ότι οι αποδόσεις του χαρτοφυλακίου είναι κανονικές — και, πράγματι, η υπόθεση ότι οι αποδόσεις των μεμονομένων χρηματοοικονομικών προϊόντων είναι πολυμεταβλητές κανονικές συνεπάγεται ότι οι αποδόσεις του χαρτοφυλακίου θα είναι κανονικές.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από n διαφορετικά προϊόντα, των οποίων οι αποδόσεις κατανέμονται ως πολυμεταβλητές κανονικές με μέση τιμή μ και πίνακα διακύμανσης-συνδιακύμανσης Σ , όπου μ είναι ένας διάνυσμα $n \times 1$ και Σ είναι ένας πίνακας $n \times n$ με όρους διακύμανσης κατά μήκος της κύριας διαγωνίου και συνδιακυμάνσεις αλλού. Το διάνυσμα $1 \times n$ \mathbf{w} δίνει την αναλογία του χαρτοφυλακίου μας που επενδύεται σε κάθε περιουσιακό στοιχείο (δηλαδή, το πρώτο στοιχείο w_1 δίνει την αναλογία του χαρτοφυλακίου που επενδύεται στο περιουσιακό στοιχείο 1, και ούτω καθεξής, και το άθροισμα των όρων w_i είναι 1). Επομένως, η απόδοση του χαρτοφυλακίου μας έχει αναμενόμενη τιμή $\mathbf{w}\mu$, διακύμανση $\mathbf{w}\Sigma\mathbf{w}^T$, όπου \mathbf{w}^T είναι το διάνυσμα $n \times 1$ της μετατροπής της \mathbf{w} , και τυπική

απόκλιση $\sqrt{\mathbf{w}\Sigma\mathbf{w}^T}$. Εάν η τρέχουσα αξία του χαρτοφυλακίου μας είναι P , τότε το VaR για χρονική περίοδο ίση με τη μονάδα και επίπεδο εμπιστοσύνης α είναι:

$$\text{VaR}_\alpha = z_\alpha \sqrt{\mathbf{w}\Sigma\mathbf{w}^T} + \mathbf{w}\boldsymbol{\mu}$$

Κατ' επέκταση, στην ειδική περίπτωση, όπου το χαρτοφυλάκιο μας αποτελείται από δύο χρηματοοικονομικά προϊόντα, τα οποία ακολουθούν κανονική κατανομή με $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Η χρονική περίοδος, που μας αφορά ισούται με τη μονάδα, έχουμε:

$$\text{VaR}_\alpha = z_\alpha \sqrt{w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_1 \sigma_2} + w_1 \mu_1 + w_2 \mu_2$$

4.2 Ιστορική Μέθοδος

Η ιστορική προσομοίωση (HS), μια μη παραμετρική μέθοδος, αντιμετωπίζει την αδυναμία της μεθόδου διακύμανσης-συνδιακύμανσης χρησιμοποιώντας την εμπειρική συνάρτηση κατανομής για να προσεγγίσει την F . Η VaR μπορεί στη συνέχεια να υπολογιστεί ως:

$$\text{VaR}_\alpha = \hat{F}_N^{-1}(1 - \alpha),$$

όπου $\hat{F}_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(X_i \leq x)$ και N είναι το συνολικό μέγεθος του δείγματος.

Η μέθοδος HS έχει αρκετές παραλλαγές. Η χρονικά σταθμισμένη ιστορική προσομοίωση (Richardson, Boudoukh, & Whitelaw, 1998) εφαρμόζει εκθετικά φθίνοντα βάρη στις παρελθοντικές αποδόσεις, πριν από τον προσδιορισμό του κατάλληλου ποσοστιαίου σημείου αυτής της χρονικά σταθμισμένης εμπειρικής κατανομής. Η φιλτραρισμένη ιστορική προσομοίωση (FHS) (Barone-Adesi, Giannopoulos, & Vosper, 1999, 2002) εξετάζει τη μεταβλητότητα των αγορών για να φιλτράρει τις παρατηρήσεις και στη συνέχεια επαναδειγματίζει τα δεδομένα. Η υπό συνθήκη ιστορική προσομοίωση (CHS) (Hull & White, 1998; Ziković & Aktan, 2011) προτείνει τη βελτιστοποίηση για τον καθορισμό του βέλτιστου παράγοντα αποσύνθεσης για τη μέθοδο BRW.

Το πλεονέκτημα της HS είναι ότι δεν κάνει υποθέσεις σχετικά με τα δεδομένα, είναι συνήθως ακριβής για επαρκώς μεγάλα σύνολα δεδομένων, αλλά δεν έχει την ικανότητα επέκτασης για μικρά μεγέθη δειγμάτων. Επιπλέον, έχει υψηλή διακύμανση στα ακραία ποσοστιαία σημεία, καθώς οι παρελθούσες παρατηρήσεις στην ουρά είναι περιορισμένες (Pritsker, 2006).

Το παρόν λήμμα αποτελεί κλειδί για τον υπολογισμό του VaR μέσω της ιστορικής μεθόδου.

Λήμμα 5 Έστω X_1, X_2, \dots μια ακολουθία ανεξάρτητων και ταυτόσημα κατανομημένων (*i.i.d.*) τυχαίων μεταβλητών, $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, με την ίδια κατανομή όπως το X . Έστω $x \in \mathbb{R}$ σταθερό. Εάν πάρουμε μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $F_N(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ορισμένη ως

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 1\{X_i \leq x\},$$

τότε $F_N(x) \xrightarrow{P} F_X(x)$

Απόδειξη 4 Εισάγοντας την ακόλουθη σημειογραφία: $Y_i = 1\{X_i \leq x\}$ και $Y = 1\{X \leq x\}$. Σύμφωνα με τον ασθενή νόμο των μεγάλων αριθμών, $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i \xrightarrow{P} \mathbb{E}(Y)$, επομένως

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i \xrightarrow{P} \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(1\{X \leq x\}) = P(X \leq x) = F_X(x),$$

όπως απαιτείται. Ας υποθέσουμε τώρα ότι τα $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_N$ είναι αποτελέσματα προσομοιώσεων που ακολουθούν την ίδια κατανομή όπως το X και ας ορίσουμε

$$\hat{F}_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 1\{\hat{X}_i \leq x\}.$$

Σύμφωνα με Λήμμα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$F_X(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{F}_N(x).$$

Ας υποθέσουμε ότι το Y_N είναι η διακριτή τυχαία μεταβλητή με κατανομή

$$P(Y_N = \hat{X}_i) = \frac{1}{N} \text{ για } i = 1, \dots, N.$$

Η συνάρτηση κατανομής του Y_N είναι ίση με την \hat{F}_N . Παίρνοντας επαρκώς μεγάλο N , η $VaR_\alpha(X)$ μπορεί να προσεγγιστεί χρησιμοποιώντας την $VaR_\alpha(Y_N)$,

$$VaR_\alpha(X) \approx VaR_\alpha(Y_N).$$

Η $VaR_\alpha(Y_N)$ μπορεί εύκολα.

4.2.1 Ιστορική Μέθοδος για τη πολυμεταβλητή κατανομή

Η πιο διαδεδομένη μη παραμετρική προσέγγιση των πολυμεταβλητών μοντέλων VaR είναι η πολυμεταβλητή ιστορική προσομοίωση (*multivariate HS*). Κάτω από αυτή την προσέγγιση, η εκτίμηση του VaR βασίζεται στην εμπειρική κατανομή απωλειών. Όλες οι πληροφορίες σχετικά με την κατανομή των μελλοντικών αποδόσεων υποτίθεται πως αντανακλώνται από την εμπειρική κατανομή απωλειών. Αυτή η υπόθεση επιτρέπει την πρόβλεψη του μελλοντικού VaR απευθείας από τις ιστορικές παρατηρήσεις των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου, αντί της εκτίμησης της κατανομής απωλειών υπό κάποια συγκεκριμένα στατιστικά μοντέλα. Η πολυμεταβλητή έκδοση της ιστορικής προσομοίωσης είναι παρόμοια με την απλή *univariate* ιστορική προσομοίωση. Αλλά πριν από την διαδικασία της ιστορικής προσομοίωσης, οι αποδόσεις των χρηματοοικονομικών προϊόντων μετατρέπονται σε αποδόσεις χαρτοφυλακίου.

$$R_p = wR_a$$

όπου R_p δηλώνει τις συνθετικές αποδόσεις του χαρτοφυλακίου, w δηλώνει τα βάρη των χρηματοπιστωτικών περιουσιακών στοιχείων στο χαρτοφυλάκιο, R_a δηλώνει το διάνυσμα των ιστορικών αποδόσεων των συστατικών του χαρτοφυλακίου.

Στη συνέχεια, το VaR της επόμενης μέρας VaR_α^{t+1} εκτιμάται από την ποσοστιαία τιμή $1 - \alpha$ ($q_{1-\alpha}$) της ιστορικής κατανομής των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου R_p , πολλαπλασιασμένη με την τρέχουσα αξία του χαρτοφυλακίου (V_P).

$$VaR_\alpha^{t+1} = -q_{1-\alpha}(R_p(t); R_p(t-1); \dots; R_p(1))$$

4.3 Μέθοδος Monte Carlo

Οι μέθοδοι προσομοίωσης Monte Carlo είναι μακράν ένα από τα πιο ευέλικτα και ισχυρά εργαλεία για την εκτίμηση της αξίας κινδύνου VaR. Μπορούν να λάβουν υπόψη όλες τις μη γραμμικότητες της αξίας του χαρτοφυλακίου σε σχέση με τους βασικούς του παράγοντες κινδύνου. Ωστόσο, αυτή η μέθοδος έχει ακόμη ένα δυνητικό αδύνατο σημείο. Πριν από την προσομοίωση πρέπει να επιλεγούν συγκεκριμένες στοχαστικές διαδικασίες. Ως αποτέλεσμα, αυτή η μέθοδος είναι πολύ ευαίσθητη στην επιλογή των στοχαστικών διαδικασιών.

Η βασική ιδέα αυτής της προσέγγισης είναι να γίνεται επανειλημμένα προσομοίωση από στοχαστικές διαδικασίες που διέπουν τις αποδόσεις των χρηματοοικονομικών προϊόντων. Τα κύρια βήματα σε μια βασική προσέγγιση Monte Carlo για την εκτίμηση πιθανοτήτων ζημιών είναι τα εξής:

1. Δημιουργία N σεναρίων με δειγματοληψία μεταβολών στους παράγοντες κινδύνου $\Delta S(1), \dots, \Delta S(N)$ κατά τον ορίζοντα Δt .
2. Επαναξιολόγηση του χαρτοφυλακίου στο τέλος του ορίζοντα Δt στα σενάρια $S + \Delta S(1), \dots, S + \Delta S(N)$: προσδιορισμός των ζημιών $L(1), \dots, L(N)$ αφαιρώντας την επαναξιολόγηση σε κάθε σενάριο από την τρέχουσα αξία του χαρτοφυλακίου.
3. Υπολογισμός του κλάσματος των σεναρίων στα οποία οι ζημιές υπερβαίνουν το x : $\frac{1}{N} \sum I(L(i) > x)$, όπου $I(L(i) > x) = 1$ αν $L(i) > x$ και 0 διαφορετικά.

Για να εκτιμήσουμε το VaR, το τελευταίο βήμα χρειάζεται να επαναληφθεί για πολλαπλές τιμές του x : τα απαιτούμενα ποσοστημόρια μπορούν στη συνέχεια να εκτιμηθούν.

Θεωρώντας την απλή περίπτωση χαρτοφυλακίου με δύο χρηματοοικονομικά χρηματοοικονομικά προϊόντα. Το διάνυσμα των αποδόσεων μ , του πίνακα συνδιακύμανσης Σ και το διάνυσμα των βαρών του χαρτοφυλακίου w υποτίθεται ότι είναι:

$$\mu = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.4 & 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Η διαδικασία προσομοίωσης ξεκινά με τον ορισμό της τροχιάς για τη δημιουργία πιθανών σεναρίων αποδόσεων του χαρτοφυλακίου. Για λόγους απλότητας, η τροχιά προσδιορίζεται ως ο τυχαίος αριθμός που παράγεται από την πολυμεταβλητή κατανομή με μέση τιμή μ και πίνακα συνδιακύμανσης Σ . Σε κάθε επανάληψη, λαμβάνουμε μια προσομοιωμένη απόδοση του χαρτοφυλακίου. Και μετά από 100000 επανλήψεις, λαμβάνουμε την κατανομή πιθανότητας των προσομοιωμένων αποδόσεων του χαρτοφυλακίου. Το $VaR_{0.95}$ μπορεί να εξαχθεί ως το 95% ποσοστημόριο της κατανομής των απωλειών.

5 Εφαρμογές του SGLD αλγορίθμου σε χαρτοφυλάκια

Στο παρόν κεφάλαιο επιχειρούμε να εξετάσουμε την ισχύ του Stochastic Gradient Langevin Dynamics αλγορίθμου, και ως εκ τούτου εφαρμόζουμε αρχικά τον αλγόριθμο σε χαρτοφυλάκιο, που αποτελείται από χρηματοοικονομικά προϊόντα, τα οποία ακολουθούν γνωστές κατανομές. Στη συνέχεια, θα εξερευνήσουμε τις ικανότητες του αλγορίθμου εφαρμόζοντας τον σε χαρτοφυλάκιο με προσιόντα, που έχουν υψηλή συσχέτιση μεταξύ τους και κατ'επέκταση ανήκουν στον ίδιο κλάδο. Τέλος θα κληθούμε να συγκρίνουμε δύο χαρτοφυλάκια ως προς το VaR που παράγει ο αλγόριθμος SGLD και η Ιστορική Μέθοδος, για δύο διαφορετικές χρονικές περιόδους.

Για τα υπολογιστικά πειράματα, έχουμε θέσει $\theta_0 = 0, \beta = 10^8, \gamma = 10^{-8}, \lambda = 10^{-4}$ και ο αριθμός των επαναλήψεων έχει οριστεί $n = 10^6$, ενώ θεωρούμε διάστημα εμπιστοσύνης ίσο με 95% για τον υπολογισμό των μέτρων VaR και CVaR.

5.1 Χαρτοφυλάκιο με δύο χρηματοοικονομικά προϊόντα γνωστών κατανομών

Ο αντίστοιχος υπολογισμός για το Value at Risk, πρόκειται να συγκριθεί με τις τρεις ντετερμινιστικές μεθόδους: προσομοίωση Monte Carlo, ιστορική μέθοδος και μέθοδος Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης, καθώς και με τη πραγματική τιμή του VaR, που προκύπτει για Gaussian τυχαίες μεταβλητές και πραγματευόμαστε στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας. Διακρίνουμε έξι περιπτώσεις για διαφορετικές τιμές συσχέτισης $\rho = [0.5, -0.5, 0.2, -0.2, 0.8, -0.8]$, οπότε τα δύο προϊόντα που είναι κανονικά κατανομημένα ικανοποιούν τις εξής σχέσεις:

$$\begin{aligned} X_1 &= Z_1 \\ X_2 &= \rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_2 \end{aligned}$$

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί, ότι για κάθε υπολογισμό γίνεται χρήση ενός 95% διαστήματος εμπιστοσύνης.

Πίνακας 1: Σύγκριση Μεθόδων

Κατανομές	SGLD	Διακύμανση Συνδιακύμανση	Monte Carlo	Ιστορική	w1	w2
N(500,1) & N(683,1)	501,645	501,643	498,352	498,359	0.999995	0.000005
N(500,1) & N(183,1)	184,659	184,659	181,397	181,395	0.000006	0.999994
N(500,1) & N(589,1)	501,645	501,645	498,379	498,363	0.999991	0.000009
N(500,1) & N(389,1)	391,544	391,545	388,289	388,245	0.000009	0.999991
N(500,1) & N(700,1)	501,645	501,647	498,389	498,349	0.999996	0.000004
N(500,1) & N(-100,1)	-98.106	-98.103	-101.365	-101.394	0.000417	0.999583

Πίνακας 2: Πραγματική τιμή VaR

Κατανομές	VaR Formula
N(500,1) & N(683,1)	501,6460
N(500,1) & N(183,1)	184,6595
N(500,1) & N(589,1)	501,6457
N(500,1) & N(389,1)	391,5439
N(500,1) & N(700,1)	501,6457
N(500,1) & N(-100,1)	-98,1060

Τα παραπάνω αποτελέσματα έχουν υπολογιστεί για τα βέλτιστα βάρη, που υποδεικνύει ο αλγόριθμος SGLD προκειμένου να λαμβάνουμε το ελάχιστο VaR και είναι εμφανή στις δύο τελευταίες στήλες του Πίνακα 1.

Στο Πίνακα 2, εμφανίζονται οι πραγματικές τιμές του VaR, όπως υποδεικνύει ο τύπος για Gaussian τυχαίες μεταβλητές. Παρατηρούμε εύκολα ότι ο αλγόριθμος SGLD και η μέθοδος Διακύμανσης Συνδιακύμανσης συμωνούν και συγκλίνουν στη πραγματική τιμή του VaR, ενώ οι μέθοδοι Monte Carlo και Ιστορική έχουν μια μικρή αλλά σημαντική απόκλιση.

Το εν λόγω πείραμα, είναι ιδιαίτερα ενθαρρυντικό για την ισχύ του SGLD αλγορίθμου καθώς γνωρίζουμε την τιμή στόχο για το VaR, ενώ σε κάθε άλλη περίπτωση η αυξημένη πολυπλοκότητα καθιστά την λύση άγνωστη.

5.2 Χαρτοφυλάκιο με προϊόντα υψηλής συσχέτισης

Αυτή τη φορά αποπειρόμαστε να εξετάσουμε τον αλγόριθμο σε χαρτοφυλάκιο, το οποίο απαρτίζεται από χρηματοοικονομικά προϊόντα και πιο συγκεκριμένα από μετοχές Ελληνικού Χρηματιστηρίου, προερχόμενες από ορισμένο κλάδο. Στη προκειμένη περίπτωση έχει επιλεγθεί ο τραπεζικός κλάδος, ο οποίος κατά την οικονομική κρίση του 2009 είχε επηρεαστεί ιδιαίτερα. Μεγάλο ενδιαφέρον υπάρχει όχι μόνο στην τιμή του VaR κατά τη περίοδο της ύφεσης σε σύγκριση με την ύστερη περίοδο, αλλά και στην κατανομή των αντίστοιχων βαρών σε κάθε μετοχή.

Θα εκμεταλλευτούμε τις τιμές κλεισίματος των μετοχών των εξής τραπεζών: Τράπεζα Πειραιώς, Τράπεζα της Ελλάδος, Eurobank και Alpha Bank. Κατά τη περίοδο της οικονομικής ύφεσης έχουμε τα εξής αποτελέσματα, στον πρώτο πίνακα, ενώ παράλληλα κατά τη ύστερη περίοδο της οικονομικής ύφεσης έχουμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα στον δεύτερο πίνακα:

	Βάρος 1ης μετοχής	Βάρος 2ης μετοχής	Βάρος 3ης μετοχής	Βάρος 4ης μετοχής	Value at Risk
Αποτελέσματα	$2.93 \cdot 10^{-227}$	0.000003	0.000059	0.999938	3.197615

Πίνακας 3: Υπολογισμός Value at Risk και βαρών για την περίοδο 2009-2018

	Βάρος 1ης μετοχής	Βάρος 2ης μετοχής	Βάρος 3ης μετοχής	Βάρος 4ης μετοχής	Value at Risk
Αποτελέσματα	0.015614	0.133044	0.541495	0.309847	2.014983

Πίνακας 4: Υπολογισμός Value at Risk και βαρών για την περίοδο 2018-2024

Παρατηρούμε ότι κατά της περίοδο της κρίσης ο αλγόριθμος αποδίδει όλο το βάρος σε μια τράπεζα, στην Alpha Bank, ενώ στη περίοδο ανάκαμψης ο αλγόριθμος αποδίδει σημαντικά βάρη και στις υπόλοιπες τράπεζες, γεγονός που μας ωθεί στην υπόθεση ότι η Alpha Bank κατά τη περίοδο της κρίσης παρουσίαζε μεγαλύτερη σταθερότητα σε σύγκριση με τις υπόλοιπες τράπεζες.

5.3 Σύγκριση SGLD αλγόριθμου και Ιστορικής μεθόδου για τον υπολογισμό του VaR

Παρακάτω παρουσιάζεται η σύγκριση της ιστορικής μεθόδου με τον αλγόριθμό μας, για τον υπολογισμό του VaR. Αποτελεί ένα ακόμα πείραμα, το οποίο μπορούμε να υλοποιήσουμε προκειμένου να εξετάσουμε τον SGLD αλγόριθμο και διαφοροποιείται από το πρηγύγεμο καθώς αυτή τη φορά χρησιμοποιούμε πραγματικό χαρτοφυλάκιο, το οποίο απαρτίζεται από μετοχές των παρακάτω εταιριών: ΔΕΗ, Eurobank, Mytilineos SA, Aegean Airlines, Jumbo SA.

Το χαρτοφυλάκιο, που επιλέχθηκε αποτελείται από ελληνικές μετοχές καθώς θα θέλαμε να παρατηρήσουμε το πως η οικονομική ύφεση επηρέασε τις τιμές του VaR. Για αυτόν τον λόγο, διακρίνουμε δύο διαφορετικές χρονικές περιόδους, μία κατά την οικονομική ύφεση 2008-2018 και τη δεύτερη κατά την περίοδο της ανάκαμψης 2018-2024.

Μέθοδος	Value at Risk (VaR)
SGLD Αλγόριθμος	4.3348
Ιστορική Μέθοδος	0.05026

Πίνακας 5: Σύγκριση αποτελεσμάτων VaR για τη περίοδο 2008-2018

Μέθοδος	Value at Risk (VaR)
SGLD Αλγόριθμος	2.5211
Ιστορική Μέθοδος	0.0300

Πίνακας 6: Σύγκριση αποτελεσμάτων VaR για τη περίοδο 2018-2024

Παρατηρούμε, ότι η Ιστορική Μέθοδος παράγει πολύ μικρές τιμές για το VaR, όπως και στη ντετερμινιστική περίπτωση για χαρτοφυλάκια με κανονικά κατανομημένα προϊόντα και το γεγονός αυτό οφείλεται στις μικρές τιμές των αποδόσεων, που είχαν καταγραφεί κατά την έλαστη περίοδο.

6 Κώδικες Python

6.1 Κώδικας υλοποίησης SGLD αλγορίθμου για χαρτοφυλάκια με κανονικά κατανεμημένα προϊόντα

```
1 import numpy as np
2 import math as m
3 import pandas as pd
4 import yfinance as yf
5
6 class SGLD_portfolios:
7
8     def __init__(self, theta0, beta, gamma, lamda, q):
9         self.theta0 = theta0
10        self.beta = beta
11        self.gamma = gamma
12        self.lamda = lamda
13        self.q = q
14
15    def H0(self, x, theta):
16        h = -self.q/(1-self.q) + (1/(1-self.q))*(x < theta) + 2 * self.gamma * theta
17        return h
18
19    def cal_g(self, w):
20        g = np.zeros_like(w)
21        partial_g = np.zeros([len(w),len(w)])
22
23        for i in range(len(w)):
24            g[i] = m.exp(w[i])
25
26        denominator = sum(g)
27
28        for j in range(len(w)):
29            for k in range(len(w)):
30                if j == k:
31                    partial_g[j][k] = (g[j]*(denominator-g[j])) / (denominator**2)
32                else:
33                    partial_g[j][k] = -(g[j] * g[k]) / (denominator ** 2)
34
35        g = g/denominator
36        return g, partial_g
37
38    def H(self, x, theta, w):
39
40        g_w, partial_g_w = self.cal_g(w)
41        indicator = (np.dot(g_w.squeeze(), x) >= theta)
42        h_theta = 1 - (1/(1-self.q)) * indicator + 2 * self.gamma * theta
43        h_omega = ((1/(1-self.q)) * indicator * np.dot(partial_g_w, x))[:,np.newaxis
44 ] \
45         + 2 * self.gamma * w
46
47        return h_theta, h_omega
48
49    def estimate(self, x_array):
50
51        theta = self.theta0
```

```

51     w = np.zeros([x_array.shape[0], 1])
52     for i in range(x_array.shape[1]):
53         h_theta, h_omega = self.H(x_array[:, i], theta, w)
54         theta += -self.lamda * h_theta \
55             + m.sqrt((2 * self.lamda / self.beta)) * np.random.normal(0, 1)
56         w += -self.lamda * h_omega \
57             + m.sqrt((2 * self.lamda / self.beta)) * np.random.normal(0, 1,
x_array.shape[0])[:, np.newaxis]
58
59         g_w_exp, _ = self.cal_g(w)
60         expectation = self.gamma * (theta ** 2 + np.linalg.norm(w, ord=2))
61         for j in range(x_array.shape[1]):
62             x = x_array[:, j]
63             indicator = (np.dot(g_w_exp.squeeze(), x) >= theta)
64             expectation += (theta + (1 / (1 - self.q)) * (np.dot(g_w_exp.squeeze(),
x) - theta) * indicator) / (
65                 x_array.shape[1])
66
67         return np.hstack([g_w_exp.squeeze(), theta, expectation])
68
69
70 the0 = 0
71 bet = 1e+8
72 gam = 1e-8
73 lam = 1e-4
74
75 Model = SGLD_portfolios(the0, bet, gam, lam, 0.95)
76
77
78 asset1 = np.random.normal(500, 1, int(1e+6))[np.newaxis, :]
79 asset2 = np.random.normal(-100, 1, int(1e+6))[np.newaxis, :]
80
81
82
83 case = np.concatenate((asset1, asset2), axis=0)
84
85 results = Model.estimate(case)
86 Chart_df = pd.DataFrame(results.reshape(1, -1), columns=["g1(w)", "g2(w)", "VaR", "
CVaR"])
87 Chart_df.index = ["Case"]
88
89 print(Chart_df)

```

Listing 1: Python code for SGLD Portfolios

6.2 Κώδικας υλοποίησης SGLD αλγορίθμου για πραγματικά χαρτοφυλάκια

```

1 import numpy as np
2 import math as m
3 import pandas as pd
4 import yfinance as yf
5
6 class SGLD_portfolios:
7     def __init__(self, theta0, beta, gamma, lamda, q):
8         self.theta0 = theta0

```

```

9         self.beta = beta
10        self.gamma = gamma
11        self.lamda = lamda
12        self.q = q
13
14    def H0(self, x, theta):
15        h = -self.q/(1-self.q) + (1/(1-self.q))*(x < theta) + 2 * self.gamma * theta
16        return h
17
18    def cal_g(self, w):
19        g = np.zeros_like(w)
20        partial_g = np.zeros([len(w), len(w)])
21
22        for i in range(len(w)):
23            g[i] = m.exp(w[i])
24
25        denominator = sum(g)
26
27        for j in range(len(w)):
28            for k in range(len(w)):
29                if j == k:
30                    partial_g[j][k] = (g[j]*(denominator-g[j])) / (denominator**2)
31                else:
32                    partial_g[j][k] = -(g[j] * g[k]) / (denominator ** 2)
33
34        g = g/denominator
35        return g, partial_g
36
37    def H(self, x, theta, w):
38        g_w, partial_g_w = self.cal_g(w)
39        indicator = (np.dot(g_w.squeeze(), x) >= theta)
40        h_theta = 1 - (1/(1-self.q)) * indicator + 2 * self.gamma * theta
41        h_omega = ((1/(1-self.q)) * indicator * np.dot(partial_g_w, x))[:, np.
newaxis] + 2 * self.gamma * w
42        return h_theta, h_omega
43
44    def estimate(self, x_array):
45        theta = self.theta0
46        w = np.zeros([x_array.shape[0], 1])
47        for i in range(x_array.shape[1]):
48            h_theta, h_omega = self.H(x_array[:, i], theta, w)
49            theta += -self.lamda * h_theta + m.sqrt((2 * self.lamda / self.beta)) *
np.random.normal(0, 1)
50            w += -self.lamda * h_omega + m.sqrt((2 * self.lamda / self.beta)) * np.
random.normal(0, 1, x_array.shape[0])[:, np.newaxis]
51
52        g_w_exp, _ = self.cal_g(w)
53        expectation = self.gamma * (theta ** 2 + np.linalg.norm(w, ord=2))
54        for j in range(x_array.shape[1]):
55            x = x_array[:, j]
56            indicator = (np.dot(g_w_exp.squeeze(), x) >= theta)
57            expectation += (theta + (1 / (1 - self.q)) * (np.dot(g_w_exp.squeeze(),
x) - theta) * indicator) / (x_array.shape[1])
58
59        return np.hstack([g_w_exp.squeeze(), theta, expectation])
60
61    the0 = 0
62    bet = 1e+8

```

```

63 gam = 1e-8
64 lam = 1e-4
65
66 Model = SGLD_portfolios(the0, bet, gam, lam, 0.95)
67
68 asset1 = yf.download("PPC.AT", start="2018-01-01", end="2024-01-01")["Close"].values
        [np.newaxis, :]
69 asset2 = yf.download("EUROB.AT", start="2018-01-01", end="2024-01-01")["Close"].
        values[np.newaxis, :]
70 asset3 = yf.download("MYTIL.AT", start="2018-01-01", end="2024-01-01")["Close"].
        values[np.newaxis, :]
71 asset4 = yf.download("AEGN.AT", start="2018-01-01", end="2024-01-01")["Close"].
        values[np.newaxis, :]
72 asset5 = yf.download("BELA.AT", start="2018-01-01", end="2024-01-01")["Close"].
        values[np.newaxis, :]
73
74 min_size = min(asset1.shape[1], asset2.shape[1], asset3.shape[1], asset4.shape[1],
        asset5.shape[1])
75 asset1 = asset1[:, :min_size]
76 asset2 = asset2[:, :min_size]
77 asset3 = asset3[:, :min_size]
78 asset4 = asset4[:, :min_size]
79 asset5 = asset5[:, :min_size]
80
81 case = np.concatenate((asset1, asset2, asset3, asset4, asset5), axis=0)
82
83 results = Model.estimate(case)
84 Chart_df = pd.DataFrame(results.reshape(1, -1), columns=["g1(w)", "g2(w)", "g3(w)",
        "g4(w)", "g5(w)", "VaR", "CVaR"])
85 Chart_df.index = ["Case"]
86
87 print(Chart_df)

```

Listing 2: Python code for SGLD Portfolios

References

- [1] Carlo Acerbi and Dirk Tasche. Expected shortfall: a natural coherent alternative to value at risk. *Economic notes*, 31(2):379–388, 2002.
- [2] Philippe Artzner, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber, and David Heath. Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, 9(3):203–228, 1999.
- [3] Mathias Barkhagen, Ngoc Huy Chau, Éric Moulines, Miklós Rásonyi, Sotirios Sabanis, and Ying Zhang. On stochastic gradient langevin dynamics with dependent data streams in the logconcave case. 2021.
- [4] Ngoc Huy Chau, Éric Moulines, Miklos Rásonyi, Sotirios Sabanis, and Ying Zhang. On stochastic gradient langevin dynamics with dependent data streams: The fully nonconvex case. *SIAM Journal on Mathematics of Data Science*, 3(3):959–986, 2021.
- [5] Moorad Choudhry. *An introduction to value-at-risk*. John Wiley & Sons, 2013.
- [6] Gerard Cornuejols and Reha Tütüncü. *Optimization methods in finance*, volume 5. Cambridge University Press, 2006.
- [7] Freddy Delbaen. Coherent risk measures on general probability spaces. *Advances in finance and stochastics: essays in honour of Dieter Sondermann*, pages 1–37, 2002.
- [8] Václav Fabian. Stochastic approximation methods. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 10(1):123–159, 1960.
- [9] Hans Föllmer and Thomas Knispel. Convex risk measures: Basic facts, law-invariance and beyond, asymptotics for large portfolios. In *Handbook of the fundamentals of financial decision making: Part II*, pages 507–554. World Scientific, 2013.
- [10] John Hull. *Risk management and financial institutions, + Web Site*, volume 733. John Wiley & Sons, 2012.
- [11] P Jorion. Value at risk third edition. 2007.
- [12] Kevin P Murphy. *Machine learning: a probabilistic perspective*. MIT press, 2012.
- [13] Maxim Raginsky, Alexander Rakhlin, and Matus Telgarsky. Non-convex learning via stochastic gradient langevin dynamics: a nonasymptotic analysis. In *Conference on Learning Theory*, pages 1674–1703. PMLR, 2017.
- [14] R Tyrrell Rockafellar, Stanislav Uryasev, et al. Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of risk*, 2:21–42, 2000.
- [15] Sotirios Sabanis and Ying Zhang. A fully data-driven approach to minimizing cvar for portfolio of assets via sgld with discontinuous updating, 2020.
- [16] Shai Shalev-Shwartz and Shai Ben-David. *Understanding machine learning: From theory to algorithms*. Cambridge university press, 2014.