



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών

Τομέας Μηχανικής

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Αναλυτική και Υπολογιστική Μελέτη του
Προβλήματος Ενίσχυσης Χαλύβδινου Κυλίνδρου με
Περίβλημα Αλουμινίου»

Κανελάκη Βασιλική-Ευαγγελία (Εβελίνα)

Επιβλέπων καθηγητής:

Ευστάθιος Θεοτόκογλου

Αθήνα 2024

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κύριο Ευστάθιο Θεοτόκογλου, για την πολύτιμη καθοδήγηση του καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας μου.

Επίσης, ευχαριστώ θερμά τον συνταξιούχο αναπληρωτή καθηγητή, κύριο Αιμίλιο Σιδερίδη για τον χρόνο που διέθεσε και για τη συμβολή του στην επίβλεψη της παρούσας εργασίας, καθώς και τον υποψήφιο διδάκτορα κ. Παναγιώτη Λυμπερόπουλο για τη διαθεσιμότητα του και τη σημαντική βοήθεια που μου προσέφερε.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την υποστήριξη τους καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου καθώς και τους φίλους και τους συμφοιτητές μου, με τους οποίους μοιραστήκαμε αυτά τα χρόνια των σπουδών.

Εισαγωγή:

Η διαρκής ανάπτυξη των μεθόδων κατεργασίας και συνδυασμού των υλικών συνεπάγεται την ανάγκη διαρκούς μελέτης της μηχανικής συμπεριφοράς τους. Τα σύνθετα υλικά συμβάλλουν ιδιαίτερα στη βελτίωση της αντοχής των υλικών στις κατασκευές. Για τη βέλτιστη αξιοποίηση τους είναι σημαντικός ο ακριβής προσδιορισμός των ιδιοτήτων τους, που μπορεί να επιτευχθεί είτε πειραματικά, είτε μέσω της μελέτης τους με αναλυτικό τρόπο, είτε μέσω της μοντελοποίησης τους σε πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων.

Επιπροσθέτως, μέσω της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων είναι εφικτό να πραγματοποιηθούν προβλέψεις για τη διάδοση ατελειών, όπως είναι οι ρωγμές, στα υλικά, στο πλαίσιο της μελέτης της αντοχής τους υπό φόρτιση.

Στην διπλωματική αυτή εργασία μελετάται το πρόβλημα της ενίσχυσης του χάλυβα με επίστρωση προστατευτικού μετάλλου και η δημιουργία ενδιάμεσης φάσης ανάμεσα στα δύο μέταλλα κατά τη συγκόλληση τους.

Συγκεκριμένα, μελετώνται κυλινδρικά δοκίμια χάλυβα στα οποία συγκολλάται προστατευτική επίστρωση κράματος αλουμινίου με laser. Γίνεται η θεώρηση ότι κατά τη διάρκεια της συγκόλλησης προκύπτει η δημιουργία μιας ενδιάμεσης φάσης (Interphase), οι ιδιότητες της οποίας προσδιορίζονται από την αναλυτική λύση του τριφασικού κυλινδρικού μοντέλου. Επίσης προσδιορίζονται αναλυτικά τα ελαστικά μέτρα του δοκιμίου και στη συνέχεια το πρόβλημα μελετάται υπολογιστικά, με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (FEM).

Επίσης, μελετάται υπολογιστικά η συμπεριφορά του δοκιμίου υπό εφελκυστική φόρτιση θεωρώντας την ύπαρξη προϋπάρχουσας ρωγμής και προσδιορίζεται ο συντελεστής έντασης των τάσεων κατά τη διάδοση της ρωγμής στο προστατευτικό στρώμα.

Για την υπολογιστική ανάλυση χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό ANSYS 2021R1 [1]
[2]

Τα δοκίμια που μελετώνται στην παρούσα εργασία βασίστηκαν στη μελέτη:

«Influence of the interphase between laser-cladded metal layer and steel substrate on fatigue propagation of a short edge crack»

των *L. Malíková, Pavel Doubek, Petr Miarka, Stanislav Seitl* [3]

Η αναλυτική επίλυση του τριφασικού μοντέλου βασίστηκε σε μελέτες του αντίστοιχου επταφασικού μοντέλου με ενδιάμεσες φάσεις. [4], [5] και οι υπολογισμοί πραγματοποιήθηκαν μέσω του λογισμικού MATLAB. [6]

Abstract:

The continuous development of material processing and combination methods entails the need for the ongoing study of their mechanical behavior. Composite materials contribute significantly to the improvement of material strength in construction. For their optimal utilization, precise determination of their properties is crucial, which can be achieved either experimentally, by analytical solving methods, or by modeling them in programs that use the finite element method.

Additionally, through the finite element method, it is feasible to make predictions regarding the propagation of flaws, such as cracks, in materials within the context of studying their strength under loading.

In this thesis, the problem addressed is reinforcing steel with a protective metal coating and creating an intermediate phase between the two metals during their welding.

Specifically, cylindrical steel specimens are studied, to which a protective aluminum alloy coating is welded using a laser. It is assumed that during welding, the creation of an intermediate phase (Interphase) occurs, the properties of which are determined by the analytical solution of the three-phase cylindrical model. Additionally, the elastic measures of the specimen are analytically determined, and then the problem is studied computationally using the finite element method (FEM).

Furthermore, the behavior of the specimen under tensile loading is computationally studied, considering the presence of a pre-existing crack, and the stress intensity factor during crack propagation in the protective layer is determined.

For the computational analysis ANSYS 2021R1 [1] [2] software was used

The specimens studied in this thesis are based on the study:

«Influence of the interphase between laser-cladded metal layer and steel substrate on fatigue propagation of a short edge crack»

by L. Malíková, Pavel Doubek, Petr Miarka, Stanislav Seitl [3]

The analytical solution of the three-phase model was based on studies of the corresponding seven-phase model with intermediate phases [4] [5] and the calculations were performed using MATLAB software.

Κατάλογος εικόνων:

Εικόνα 1.1 Τύποι εγκλεισμάτων στα σύνθετα υλικά.....	13
Εικόνα 2.1 Διαδικασία συγκόλλησης με laser.....	17
Εικόνα 2.2 Λεπτομέρεια σε μεγέθυνση 50x κυλινδρικού δοκιμίου χάλυβα με επίστρωση χαλκοαλουμινίου μέσω laser Cladding. [3]	19
Εικόνα 3.1 Τύποι πεπερασμένων στοιχείων	22
Εικόνα 3.2 Παράδειγμα διακριτοποίησης πολύπλοκης κατασκευής [2]	22
Εικόνα 3.3 Το απλό ορθογωνικό στοιχείο [14].....	24
Εικόνα 3.4 Το τετραπλευρικό στοιχείο.....	28
Εικόνα 3.5 Τύποι ολοκλήρωσης Gauss.....	30
Εικόνα 3.6 Το απλό τετραεδρικό στοιχείο.....	34
Εικόνα 3.7 Στερεό εξάεδρο από πέντε τετράεδρα	37
Εικόνα 3.8 Το πρισματικό ορθογώνιο στοιχείο	37
Εικόνα 4.1 Φωτοελαστική απεικόνιση δοκιμίου με τριών ειδών ρωγμές.....	42
Εικόνα 4.2 Οι τρεις τύποι φόρτισης.....	43
Εικόνα 4.3 Περιοχές (contours) γύρω από τη ρωγμή.....	44
Εικόνα 4.4 Τύποι φόρτισης στην κόπωση: α)Αντιστρεφόμενη, β)Επαναλαμβανόμενη γ)Τυχαίος Κύκλος Τάσης.....	47
Εικόνα 4.5 Καμπύλες Τάσης - Κύκλων φόρτισης	47
Εικόνα 5.1 Πραγματικά κυλινδρικά δοκίμια χάλυβα με μεταλλικές προστατευτικές επιστρώσεις	48
Εικόνα 5.2 Το τριφασικό κυλινδρικό μοντέλο.....	48
Εικόνα 5.3 Το ισοδύναμο κυλινδρικό μοντέλο υπό εφελκυστική φόρτιση	50
Εικόνα 5.4 Το ισοδύναμο κυλινδρικό μοντέλο υπό εξωτερική πίεση.....	50
Εικόνα 6.1 Διατομή του διφασικού κυλινδρικού μοντέλου	52
Εικόνα 6.2 Διατομή του τριφασικού κυλινδρικού μοντέλου	55
Εικόνα 6.3 Ακτινική μετατόπιση U_r	69
Εικόνα 6.4 Τάση σ στην ακτινική διεύθυνση.....	69
Εικόνα 6.5 Τάση σ στη διεύθυνση θ	70
Εικόνα 7.1 Διάγραμμα σύγκλισης της ακρίβειας του ισοδύναμου κυλινδρικού μοντέλου	71
Εικόνα 7.2 Διακριτοποίηση του ισοδύναμου κυλινδρικού μοντέλου.....	72
Εικόνα 7.3 Κατανομή των τάσεων von Mises Equivalent Stress στο ισοδύναμο κυλινδρικό μοντέλο.....	72
Εικόνα 7.4 Περιεκτικότητες επιμέρους υλικών και ελαστικά μέτρα για ύψος ενδιάμεσης φάσης 1mm στο υπολογιστικό μοντέλο.....	73
Εικόνα 7.5 Περιεκτικότητες επιμέρους υλικών και ελαστικά μέτρα για ύψος ενδιάμεσης φάσης 0.75 mm στο υπολογιστικό μοντέλο	74
Εικόνα 7.6 Περιεκτικότητες επιμέρους υλικών και ελαστικά μέτρα για ύψος ενδιάμεσης φάσης 0.5 mm στο υπολογιστικό μοντέλο	74
Εικόνα 7.7 Προσδιορισμός εγκάρσιας τροπής στο Ansys Mechanical: 1ος τρόπος .	77
Εικόνα 7.8 Προσδιορισμός της εγκάρσιας τροπής στο Ansys Mechanical: 2ος τρόπος	77
Εικόνα 7.9 Διακριτοποίηση δισδιάστατου μοντέλου	82
Εικόνα 7.10 Διακριτοποίηση δισδιάστατου μοντέλου, λεπτομέρεια	83
Εικόνα 7.11 Διακριτοποίηση δισδιάστατου μοντέλου, λεπτομέρεια στην περιοχή της ρωγμής	83
Εικόνα 7.12 Συντελεστής έντασης των τάσεων K για διαφορετικά μήκη ρωγμής με ύψος ενδιάμεσης φάσης 1mm	85

Εικόνα 7.13 Συντελεστής έντασης των τάσεων K για διαφορετικά μήκη ρωγμής με ύψος ενδιάμεσης φάσης 0.75 mm	85
Εικόνα 7.14 Συντελεστής έντασης των τάσεων K για διαφορετικά μήκη ρωγμής με ύψος ενδιάμεσης φάσης 0.5 mm	86
Εικόνα 7.15 Σύγκριση των αποτελεσμάτων του συντελεστή K	86
Εικόνα 7.16 Σύγκριση των αποτελεσμάτων για τον συντελεστή έντασης των τάσεων K με τις τιμές $K_{threshold}$ και $K_{critical}$ του χάλυβα	87
Εικόνα 7.17 Σύγκριση των αποτελεσμάτων για τον συντελεστή έντασης των τάσεων K με τις τιμές $K_{threshold}$ και $K_{critical}$ του χαλκοαλουμινίου της επίστρωσης	88

Κατάλογος πινάκων:

Πίνακας 1.1 Ιδιότητες των υλικών	14
Πίνακας 5.1 Περιεκτικότητες των υλικών για τις υπό μελέτη περιπτώσεις	49
Πίνακας 5.2 Τα υλικά του δοκιμίου και τα ελαστικά μέτρα τους.....	51
Πίνακας 6.1 Υλικά του μοντέλου	53
Πίνακας 6.2 Διαμήκη ελαστικά μέτρα που προέκυψαν από την αναλυτική λύση για διάφορα ύψη της ενδιάμεσης φάσης.....	63
Πίνακας 6.3 Εγκάρσια ελαστικά μέτρα που προέκυψαν από την αναλυτική λύση για διάφορα ύψη της ενδιάμεσης φάσης.....	67
Πίνακας 6.4: Ιδιότητες Ινώδους υλικού	68
Πίνακας 6.5 Αποτελέσματα αναλυτικής λύσης για το ινώδες υλικό	68
Πίνακας 7.1 Περιπτώσεις για τα ύψη της ενδιάμεσης φάσης στο υπολογιστικό μοντέλο	79
Πίνακας 7.2 Εύρος μηκών ρωγμής ανά περίπτωση ύψους της ενδιάμεσης φάσης..	84
Πίνακας 7.3 Τιμές threshold και critical για τον συντελεστή έντασης των τάσεων των υλικών υποστρώματος και επίστρωσης.....	84

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	2
Κεφάλαιο 1 : Σύνθετα Υλικά	12
1.1 Βασικά στοιχεία:.....	12
1.2 Ταξινόμηση σύνθετων υλικών:.....	13
1.3 Πλεονεκτήματα των σύνθετων υλικών:.....	14
Κεφάλαιο 2 : Επιμετάλλωση χαλύβδινου υποστρώματος με χρήση laser	15
2.1 Επιμεταλλωμένα μέταλλα:	15
2.1.1 Πεδία εφαρμογής:.....	15
2.1.2 Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της επιμετάλλωσης:	15
2.2 Συγκόλληση με λέιζερ (laser cladding):	16
2.2.1 Βασικά στοιχεία:	16
2.2.2 Πλεονεκτήματα συγκόλλησης με laser:	16
2.2.3 Διαδικασία συγκόλλησης με laser:	17
2.3 Ενδιάμεση φάση (Interphase) στα επιμεταλλωμένα μέταλλα:.....	18
2.3.1 Εισαγωγικά στοιχεία:	18
2.3.2 Δημιουργία ενδιάμεσης φάσης κατά τη συγκόλληση με λέιζερ:	18
Κεφάλαιο 3 : Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων	20
3.1 Εισαγωγή:.....	20
3.2 Βασικές αρχές της μεθόδου:	20
3.3 Βήματα της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων:	21
• Διακριτοποίηση της κατασκευής	21
• Διαμόρφωση του τελικού συστήματος ακαμψίας:	23
• Επίλυση του συστήματος ακαμψίας	23
3.4 Τύποι δισδιάστατων στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν: Τετραπλευρικά στοιχεία.....	24
3.4.1 Απλό ορθογωνικό στοιχείο :	24
3.4.2 Το τετραπλευρικό στοιχείο:.....	28
3.4.3 Το οκτακομβικό τετραπλευρικό στοιχείο:	31
3.5 Τύποι τρισδιάστατων στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν: Τετραεδρικά και εξαεδρικά στοιχεία	34
3.5.1 Το απλό τετραεδρικό στοιχείο.....	34
3.5.2 Το οκτακομβικό τρισδιάστατο (brick) στοιχείο:	37
Κεφάλαιο 4 : Αστοχία των υλικών και μηχανική των θραύσεων	39
4.1 Εισαγωγή – ιστορική αναδρομή:	39

4.2 Θεμελιώδεις έννοιες:.....	41
4.2.1 Ορισμός της θραύσης.....	41
4.2.2 Συμπεριφορά υλικών υπό εφελκυσμό.....	41
4.3 Συγκέντρωση τάσεων	42
4.3.1 Τύποι μετατόπισης των επιφανειών της ρωγμής:	43
4.3.2 Συντελεστής έντασης τάσεων K	43
4.3.3 Τιμή κατωφλίου και κρίσιμη τιμή του συντελεστή έντασης των τάσεων. ...	45
4.4 Κόπωση.....	46
4.4.1 Ορισμός και γενικά στοιχεία.....	46
4.4.2 Τύποι χρονικών μεταβολών τάσης	46
Κεφάλαιο 5 : Περιγραφή του προβλήματος.....	48
5.1 Γεωμετρία και φόρτιση	48
5.2 Υλικά του δοκιμίου:	51
Κεφάλαιο 6 : Αναλυτική λύση	52
6.1 Παραδοχές.....	52
6.2 Διφασικό μοντέλο:.....	52
6.3 Τριφασικό μοντέλο:.....	55
6.3.1 Γεωμετρία και τασική συνάρτηση:.....	55
6.3.2 Εφελκυστική φόρτιση:.....	57
6.3.3 Φόρτιση με εξωτερική πίεση:.....	63
6.3.4 Έλεγχος ορθότητας αναλυτικής λύσης	68
6.3.5 Κατανομές τάσεων σ_r σ_θ και ακτινικής μετατόπισης	69
Κεφάλαιο 7 : Υπολογιστική μελέτη.....	71
7.1 Ισοδύναμο μοντέλο	71
7.2 Ελαστικά μέτρα από την υπολογιστική μελέτη:.....	73
7.2.1 1 ^{ος} τύπος φόρτισης: Εφελκυστική φόρτιση:.....	73
7.2.2 2 ^{ος} τύπος φόρτισης: Εγκάρσια πίεση	76
7.3 Μελέτη διάδοσης ρωγμής	79
7.3.1 Αναγωγή του μοντέλου σε δισδιάστατο:	79
7.3.2 Φόρτιση δοκιμίου.....	82
7.3.3 Διακριτοποίηση του δισδιάστατου μοντέλου	82
7.4 Αποτελέσματα και συμπεράσματα υπολογιστικής μελέτης.....	84
7.4.1 Συντελεστής K για διαφορετικά ύψη.....	85
7.4.2 Κρίσιμες τιμές και τιμές κατωφλίου	87
7.4.3 Συμπεράσματα υπολογιστικής μελέτης:.....	89
7.4.4 Γενικά συμπεράσματα:	90
Βιβλιογραφία:	92

Κεφάλαιο 1 : Σύνθετα Υλικά

1.1 Βασικά στοιχεία:

Ο συνδυασμός διαφορετικών υλικών πραγματοποιείται από αρχαιοτάτων χρόνων για να δώσει λύση σε προβλήματα αντοχής, ανθεκτικότητας, κόστους, βάρους κ.α. των κατασκευών. Στη σύγχρονη εποχή, ιδιαίτερα τις τελευταίες δεκαετίες, η ανάπτυξη των σύνθετων υλικών έχει εξελιχθεί σημαντικά, τόσο λόγω της καλύτερης κατανόησης των ιδιοτήτων των υλικών εν γένει, όσο και λόγω των νέων μεθόδων κατεργασίας και συνδυασμού τους.

Ως σύνθετο υλικό (composite material) μπορεί να χαρακτηριστεί οποιοδήποτε υλικό αποτελείται από περισσότερα του ενός διαφορετικά υλικά ή φάσεις. Ως φάση ορίζεται ένα ομοιογενές τμήμα ενός συστήματος με ομοιόμορφα φυσικά και χημικά χαρακτηριστικά. [7]

Συγκεκριμένα, η δημιουργία ενός σύνθετου υλικού προκύπτει από τη φυσική ανάμειξη σε μακροσκοπική κλίμακα δύο ή περισσότερων υλικών από την οποία προκύπτει ένα νέο υλικό με τελικές ιδιότητες διαφορετικές (και συνήθως βελτιωμένες) από τις ιδιότητες των υλικών που το αποτελούν.

Ο πλέον διαδεδομένος ορισμός για τα σύνθετα υλικά είναι εκείνος του Agarwal: [8]

ΟΡΙΣΜΟΣ: *Σύνθετα υλικά είναι τα υλικά τα οποία μακροσκοπικά αποτελούνται από δύο ή περισσότερα χημικά ευδιάκριτα συστατικά στοιχεία μεταξύ των οποίων υπάρχει διακριτή διαχωριστική επιφάνεια.*

Η διαχωριστική αυτή επιφάνεια μπορεί, κατά περίπτωση, να μελετηθεί ως ξεχωριστή ενδιάμεση φάση (interphase), καθώς μπορεί να παρουσιάζει διαφορετικές ιδιότητες από τα επιμέρους υλικά και να επηρεάζει τη συμπεριφορά της κατασκευής όταν αυτή καταπονείται.

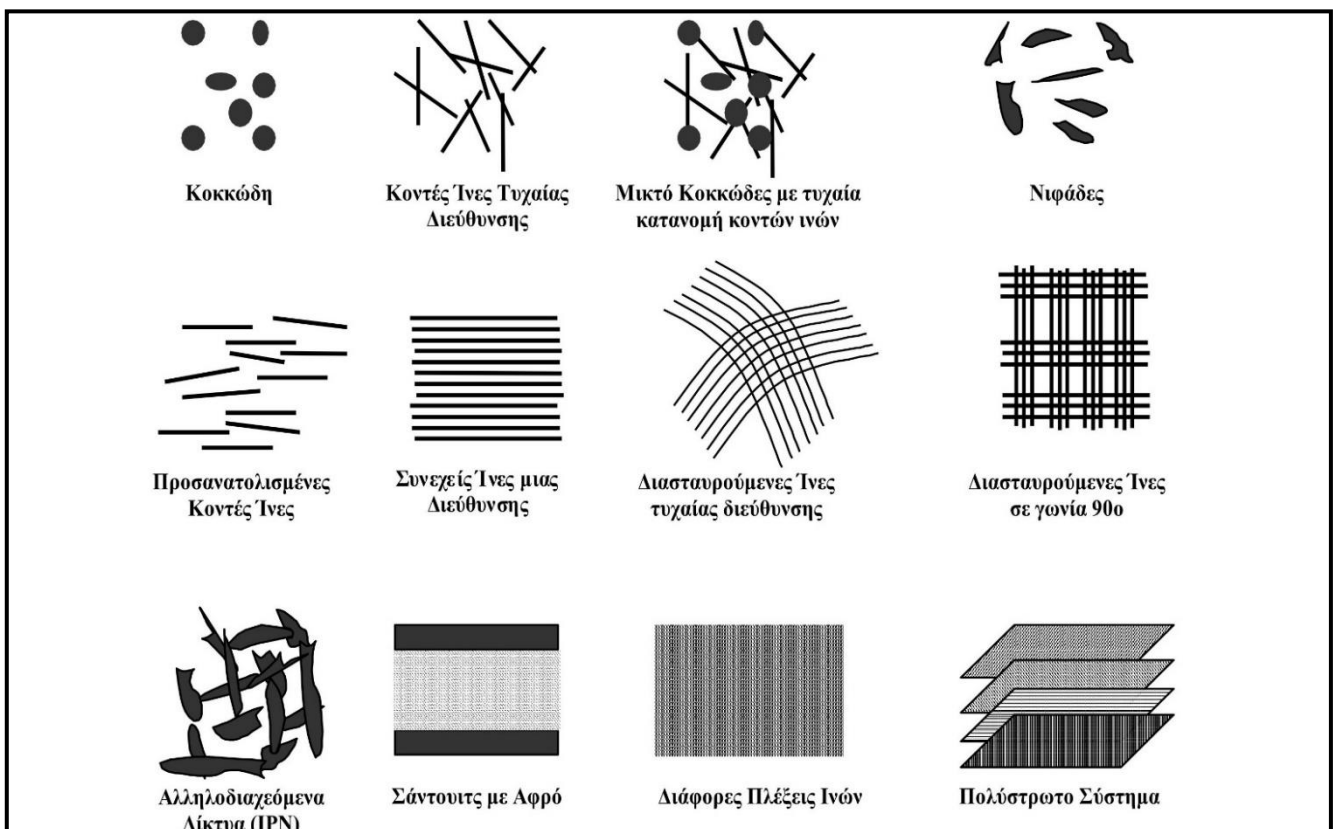
Στα διφασικά υλικά το ένα από τα συστατικά μέρη ονομάζεται συστατικό ενίσχυσης ή δευτερεύουσα φάση και συνήθως προσφέρει στο τελικό υλικό βελτιωμένες μηχανικές ιδιότητες, ενώ το άλλο συστατικό ονομάζεται μήτρα ή κύρια φάση και εξασφαλίζει την καλύτερη αξιοποίηση της ενίσχυσης. Όπως προαναφέρθηκε, ένα σύνθετο υλικό μπορεί να έχει περισσότερες από δύο φάσεις, είτε με τη μορφή περεταιίρω φάσεων ενίσχυσης, είτε με τη μορφή ενδιάμεσων φάσεων.

1.2 Ταξινόμηση σύνθετων υλικών:

Τα φυσικά υλικά κατηγοριοποιούνται σε τρεις οικογένειες: τα κεραμικά, τα μέταλλα και τα πολυμερή. Τα σύνθετα υλικά που προκύπτουν από τον συνδυασμό τους μπορούν να κατηγοριοποιηθούν με διάφορους τρόπους, ένας εκ των οποίων είναι βάσει του τύπου της ενίσχυσης. Με βάση αυτό το κριτήριο, υπάρχουν τρεις μεγάλες κατηγορίες σύνθετων υλικών:

- Ινώδη σύνθετα υλικά: Μία συνεχής φάση, η μήτρα (matrix) ενισχύεται με ίνες (fibers).
- Κοκκώδη σύνθετα υλικά: Η ενίσχυση έχει τη μορφή διασκορπισμένων σωματιδίων μέσα στη μήτρα.
- Πολύστρωτα ή στρωματικά σύνθετα υλικά: Η μήτρα και το έγκλεισμα έχουν τη μορφή φύλλων/στρώσεων. Τα πολύστρωτα σύνθετα υλικά προσφέρουν υψηλή αντοχή και δυσκαμψία και χρησιμοποιούνται σε πολλές βιομηχανικές εφαρμογές.

Στην παρακάτω εικόνα παρουσιάζονται ενδεικτικά κάποιες μορφές των διάφορων τύπων ενίσχυσης και συνδυασμοί αυτών: [9]



Εικόνα 1.1 Τύποι εγκλεισμάτων στα σύνθετα υλικά

Στην παρούσα εργασία μελετάται ένα δοκίμιο πολύστρωτου σύνθετου υλικού και συγκεκριμένα με ένα μοντέλο επιμεταλλωμένου μετάλλου.

1.3 Πλεονεκτήματα των σύνθετων υλικών:

Όπως αναφέρθηκε, τα σύνθετα υλικά δίνουν τη δυνατότητα να συνδυαστούν ιδιότητες κοινών υλικών ή να βελτιωθούν, ανάλογα με τις απαιτήσεις της εκάστοτε κατασκευής. Επιπλέον, το τελικό σύνθετο υλικό μπορεί να κατασκευαστεί ώστε να έχει ιδιότητες που κανένα από τα αρχικά υλικά δεν διαθέτει.

Οι ιδιότητες των υλικών διακρίνονται σε μηχανικές και μη μηχανικές. Τα σύνθετα υλικά συνήθως υπερτερούν των κοινών σε διάφορες επιμέρους ιδιότητες και των δύο κατηγοριών:

Πίνακας 1.1 Ιδιότητες των υλικών

Μηχανικές	Μη μηχανικές
Αντοχή	Αντίσταση σε διάβρωση και φθορά
Ακαμψία	Καλύτερη θερμική συμπεριφορά
Καλύτερη συμπεριφορά σε κόπωση	Ακουστική μόνωση

Οι τελικές ιδιότητες ενός σύνθετου υλικού εξαρτώνται από:

- Τις ιδιότητες του κάθε επιμέρους υλικού (μήτρας, ενίσχυσης, επιπλέον φάσεων ενίσχυσης ή ενδιάμεσων)
- Το ποσοστό της κάθε φάσης
- Τη γεωμετρία και τον προσανατολισμό της ενίσχυσης
- Την πρόσφυση μήτρας-ενίσχυσης
- Την τεχνολογία κατεργασίας των υλικών για την κατασκευή του σύνθετου

Συνεπώς, το κύριο πλεονέκτημα των σύνθετων υλικών είναι ότι προσφέρουν τεράστια ευελιξία στην κατασκευή τους, ώστε να δημιουργηθεί το ιδανικό υλικό που να ανταποκρίνεται στις ανάγκες της κατασκευής.

Επίσης, τα σύνθετα υλικά εξυπηρετούν σε μεγάλο βαθμό την εξοικονόμηση κόστους και βάρους. Αυτό τους το πλεονέκτημα είναι εύκολο να αξιολογηθεί από τις ειδικές ιδιότητες τους, τον λόγο, δηλαδή, μίας ιδιότητας του υλικού προς το βάρος του.

Κεφάλαιο 2 : Επιμετάλλωση χαλύβδινου υποστρώματος με χρήση laser

2.1 Επιμεταλλωμένα μέταλλα:

2.1.1 Πεδία εφαρμογής:

Η επιμετάλλωση του υποστρώματος γίνεται συνήθως με λεπτές στοιβάδες μετάλλου που έχουν προστατευτικό σκοπό. Στην παρούσα εργασία θα μελετηθεί υπολογιστικά ένα δοκίμιο χάλυβα στο οποίο η προστατευτική επίστρωση έχει συγκολληθεί με laser.

Τα επιμεταλλωμένα μέταλλα, και συγκεκριμένα ο επιμεταλλωμένος χάλυβας ο οποίος θα μελετηθεί στην παρούσα εργασία έχει πληθώρα εφαρμογών, όπως:

- Σε υποδομές (γέφυρες, κτήρια)
- Στην αυτοκινητοβιομηχανία
- Σε ηλεκτρικές συσκευές
- Σε συσκευασίες προϊόντων
- Στην αεροναυπηγική και τα αμυντικά συστήματα
- Σε ναυπηγικές κατασκευές
- Στη βιομηχανία της ενέργειας
- Στις μεταφορές και τους σιδηροδρόμους

2.1.2 Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της επιμετάλλωσης: [10]

Η επιμετάλλωση χαλύβδινου υποστρώματος έχει τα εξής πλεονεκτήματα:

- Προστατεύει το υπόστρωμα από τη διάβρωση
- Εμποδίζει να φτάσουν στο υπόστρωμα ατέλειες που λόγω της ανάληψης φορτίου δημιουργούνται στο υλικό της επίστρωσης
- Βελτιώνει τη συνολική ανθεκτικότητα στην τριβή και τη φθορά
- Μειώνει το κόστος κατασκευής καθώς απαιτεί μικρότερη ποσότητα ακριβών μετάλλων
- Χρησιμοποιείται για να βελτιωθεί η εμφάνιση της επιφάνειας

Ορισμένα μειονεκτήματα της επιμετάλλωσης είναι: [11]

- Η πιθανότητα αποκόλλησης των μετάλλων λόγω σφαλμάτων στην κατεργασία τους ή λόγω καταπόνησης από υψηλές τάσεις
- Η δημιουργία ασυνεχειών στην επιφάνεια της επίστρωσης κατά την εφαρμογή της
- Το πολύ μικρό πάχος των επιστρώσεων μπορεί να είναι ανεπαρκές σε βάθος χρόνου για να προστατεύσει το υπόστρωμα
- Κάποιοι μέθοδοι επιμετάλλωσης περιλαμβάνουν επικίνδυνες για το περιβάλλον ουσίες και δημιουργούν ανθυγιεινά απόβλητα

2.2 Συγκόλληση με λέιζερ (laser cladding):

2.2.1 Βασικά στοιχεία:

Η συγκόλληση με laser (laser cladding) είναι μία μέθοδος επίστρωσης κατά την οποία μία ή περισσότερες στρώσεις ενός υλικού εναποτίθενται στο βασικό μας υλικό (υπόστρωμα), δημιουργώντας μεταξύ τους ισχυρό μεταλλουργικό δεσμό στη διεπιφάνεια χωρίς σημαντική αλλοίωση της χημικής σύστασης των επιμέρους υλικών. [12]

Ο χάλυβας χρησιμοποιείται συχνά ως υλικό υποστρώματος, ενώ για την επίστρωση χρησιμοποιούνται συνήθως κράματα νικελίου, κοβαλτίου, τιτανίου, αλουμινίου κ.α.

Τα πλέον διαδεδομένα λέιζερ που χρησιμοποιούνται για τέτοιες συγκολλήσεις είναι: [13]

- Τα διοδικά λέιζερ
- Τα λέιζερ διοξειδίου του άνθρακα
- Τα λέιζερ στερεάς κατάστασης (Nd:YAG)
- Τα λέιζερ οπτικών ινών

2.2.2 Πλεονεκτήματα συγκόλλησης με laser:

Η κατεργασία υλικών με laser είναι πολύ διαδεδομένη στους τομείς της αεροναυπηγικής και της αυτοκινητοβιομηχανίας, καθώς τα lasers προσφέρουν υψηλή ενεργειακή πυκνότητα και εστίαση της δέσμης. Ειδικότερα, η συγκόλληση με laser είναι μία νέα και πολύ χρήσιμη τεχνολογία, ορισμένα πλεονεκτήματα της οποίας είναι:

- Η δημιουργία ισχυρών μεταλλουργικών δεσμών μεταξύ επίστρωσης και υποστρώματος, χωρίς αλλοίωση της σύστασης των υλικών. [14]
- Η δημιουργία λιγότερων ατελειών σε σχέση με άλλες μεθόδους συγκόλλησης.
- Η εξαιρετική ακρίβεια που προσφέρει στον έλεγχο του πάχους της επίστρωσης (συνήθως μια επίστρωση που συγκολλάται με laser μπορεί να έχει πάχος από 0.05 mm έως 2mm.) [15]
- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην επιδιόρθωση δοκιμών ή εργαλείων.
- Η αποτελεσματικότητα της στη δημιουργία επιστρώσεων σε χάλυβα υψηλής αντοχής καθώς και στην προστασία εργαλείων που χρησιμοποιούνται στην κατεργασία τέτοιων ειδών χάλυβα.
- Λόγω της μεγάλης ακρίβειας που προσφέρει συμβάλλει στην εξοικονόμηση των υλικών, είναι ευέλικτη και φιλική προς το περιβάλλον.

Συνεπώς, η μέθοδος αυτή συμβάλλει στο να αποφευχθούν πολλά από τα προβλήματα που προκύπτουν σε άλλες μεθόδους επιμετάλλωσης. Οι ατέλειες που μπορεί να δημιουργηθούν κατά τη συγκόλληση με λέιζερ μπορούν να αξιολογηθούν και αν είναι κρίσιμες για την αντοχή του δοκιμίου, να επισκευαστούν με την ίδια μέθοδο.

2.2.3 Διαδικασία συγκόλλησης με laser:

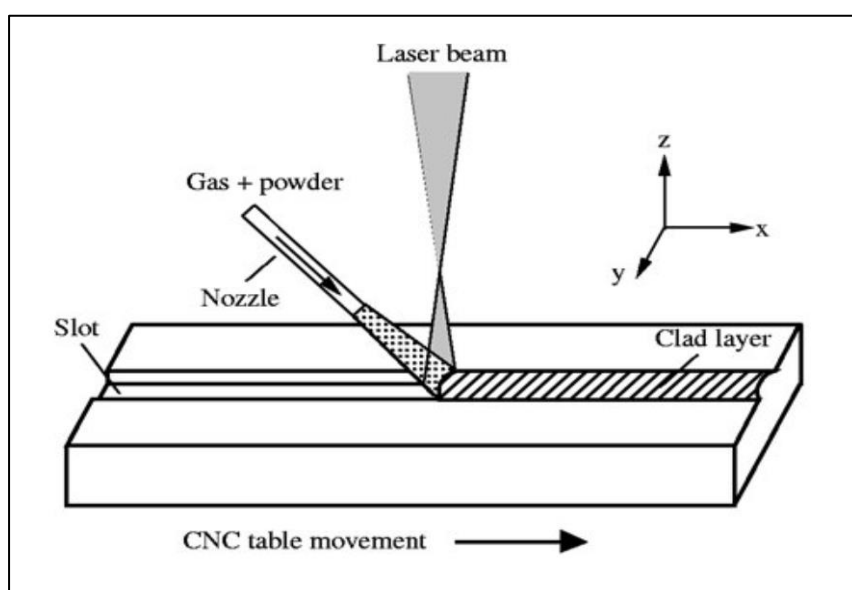
Το μέταλλο της επίστρωσης μπορεί να έχει τη μορφή σύρματος ή κόνεως. Μία δέσμη λέιζερ υψηλής ισχύος τροφοδοτείται από το μέταλλο αυτό, το οποίο τήκεται μαζί με το μέταλλο του υποστρώματος δημιουργώντας έτσι μια προστατευτική στρώση. [14]

Υπάρχουν τέσσερις διαφορετικοί τρόποι τροφοδοσίας της δέσμης λέιζερ με το μέταλλο πλήρωσης:

- Τροφοδοσία σύρματος
- Τροφοδοσία κόνεως εκτός άξονα
- Ομοαξονική τροφοδοσία κόνεως
- Προ-εναπόθεση κόνεως

Η τροφοδοσία σύρματος δεν προτιμάται συχνά λόγω της υψηλής αραίωσης του μετάλλου πλήρωσης στο υπόστρωμα.

Από τις μεθόδους τροφοδοσίας κόνεως η ομοαξονική και η τεχνική της προ-εναπόθεσης είναι οι πιο διαδεδομένες. Ωστόσο η μέθοδος της προ-εναπόθεσης αποτελείται από δύο φάσεις: αρχικά μεταφορά της ενέργειας της δέσμης λέιζερ στο στρώμα κόνεως και υγροποίηση αυτού και στη συνέχεια μεταφορά ενέργειας στο υπόστρωμα. Η διαδικασία αυτή είναι χρονοβόρα και μη αποτελεσματική σε υποστρώματα με περίπλοκες γεωμετρίες και συνεπώς δεν προτιμάται σε αρκετές περιπτώσεις. Στην **ομοαξονική μέθοδο εναπόθεσης κόνεως (powder injection method)** η δέσμη του λέιζερ δημιουργεί στο υπόστρωμα μια λίμνη συγκόλλησης λόγω τήξης ενώ ταυτόχρονα ένα ακροφύσιο τροφοδοτεί το σύστημα με το μέταλλο πλήρωσης, το οποίο αλληλεπιδρά με τη δέσμη λέιζερ και εισέρχεται στη λίμνη συγκόλλησης.



Εικόνα 2.1 Διαδικασία συγκόλλησης με laser

2.3 Ενδιάμεση φάση (Interphase) στα επιμεταλλωμένα μέταλλα:

2.3.1 Εισαγωγικά στοιχεία:

Όπως προαναφέρθηκε, οι ιδιότητες ενός σύνθετου υλικού είναι βελτιωμένες σε σχέση με αυτές των υλικών που το αποτελούν και μπορεί μάλιστα να είναι και εντελώς διαφορετικές. Αυτό συμβαίνει διότι εκτός από τα επιμέρους υλικά παίζει ρόλο και ο τρόπος με τον οποίο αυτά συντίθενται, ειδικά όταν πρόκειται για επιμεταλλωμένα μέταλλα.

Σε ορισμένες περιπτώσεις, ανάμεσα στα δύο μέταλλα μπορεί να υπάρχει και μία τρίτη περιοχή-φάση, που την ονομάζουμε ενδιάμεση φάση (interphase). Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Τεχνητή ενδιάμεση φάση: Εισάγεται κατά τη διαδικασία της δημιουργίας του σύνθετου υλικού από τον κατασκευαστή. Υπάρχουν πολλές μέθοδοι να επιτευχθεί αυτό, όπως η εμβάπτιση του υλικού της επίστρωσης σε κάποια ουσία. Η δημιουργία τεχνητής ενδιάμεσης φάσης μπορεί να βοηθήσει στην καλύτερη συγκόλληση των υλικών και στην καλύτερη σύνθεσή τους, ειδικά όταν οι ιδιότητές τους (μηχανικές, χημικές, θερμικές) είναι πολύ διαφορετικές.
- Φυσική ενδιάμεση φάση: Δημιουργείται ως απόρροια της διαδικασίας συνένωσης των μετάλλων, συνήθως λόγω των υψηλών θερμοκρασιών που αναπτύσσονται κατά την κατεργασία.

2.3.2 Δημιουργία ενδιάμεσης φάσης κατά τη συγκόλληση με λέιζερ:

Η δημιουργία ενδιάμεσης φάσης κατά τη συγκόλληση ενός μετάλλου σε ένα άλλο με τη μέθοδο του laser cladding ανήκει στην κατηγορία των ενδιάμεσων φάσεων που δημιουργούνται φυσικά, λόγω της μίξης των δύο υλικών.

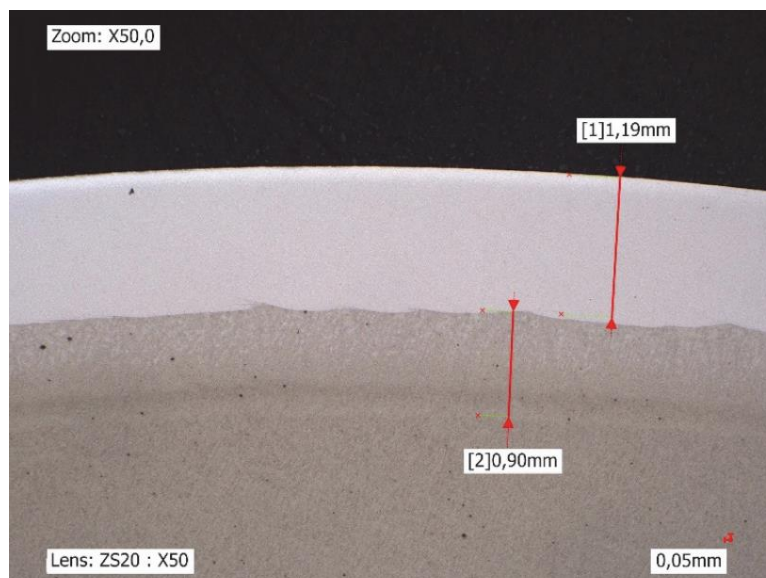
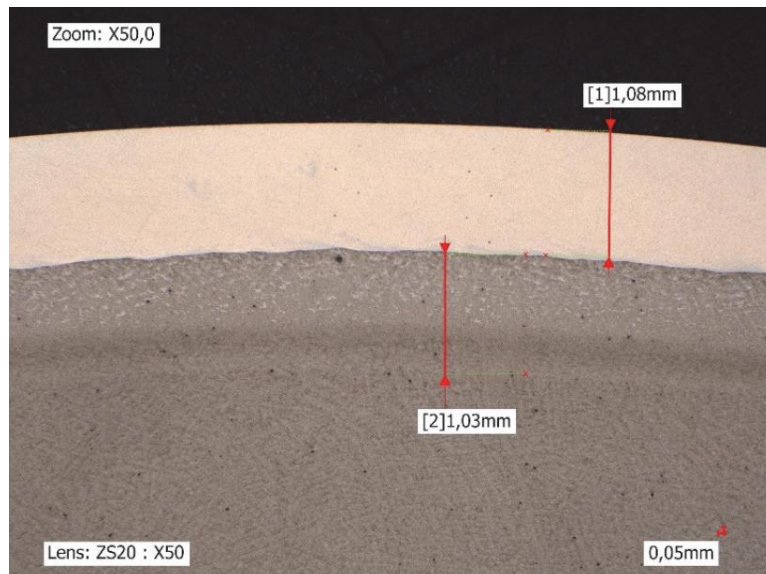
Κατά τη διαδικασία, τα δύο υλικά τήκονται μαζί, όπως αναφέρθηκε. Επειδή η ταχύτητα ψύξεως είναι μεγάλη έχουμε ταχεία στερεοποίηση στην περιοχή της συγκόλλησης. Συνεπώς, δημιουργείται μια λεπτή ενδιάμεση φάση, που καλείται και μεταλλουργική, καθώς είναι παράγοντας που ισχυροποιεί τη συγκόλληση.

Η ενδιάμεση φάση μπορεί να είναι αμελητέα, αν οι παράμετροι της διαδικασίας της συγκόλλησης είναι επιλεγμένες έτσι ώστε να υπάρχει μικρό ποσοστό ανάμιξης των υλικών (low dilution rate). Το κατά πόσο τα δύο υλικά θα αναμιχθούν εξαρτάται από την ισχύ του laser, τη σύσταση του υλικού επίστρωσης και την ταχύτητα τροφοδοσίας. Και σε αυτή την περίπτωση της ελάχιστης ανάμιξης, ο μεταλλουργικός δεσμός που δημιουργείται είναι ικανοποιητικά ισχυρός.

Η ενδιάμεση φάση μπορεί να λειτουργεί είτε θετικά είτε αρνητικά για το συνολικό σύνθετο υλικό. Στην παρούσα εργασία θα μελετηθούν μοντέλα πραγματικών κυλινδρικών δοκιμών στα οποία δημιουργήθηκε ενδιάμεση φάση κατά τη συγκόλληση των υλικών τους με τη μέθοδο του laser cladding και το πώς η ενδιάμεση φάση επηρεάζει τη συμπεριφορά τους υπό φόρτιση.

Θα θεωρηθεί ότι οι ιδιότητες της ενδιάμεσης φάσης κινούνται ανάμεσα στις ιδιότητες των συγκολλημένων μετάλλων του προβλήματος, όπως ισχύει για σύνθετα υλικά με ενδιάμεση φάση.

Ενδεικτικά, παρατίθενται δύο εικόνες πραγματικών δοκιμών χάλυβα με επίστρωση δύο διαφορετικών μετάλλων σε μεγέθυνση, όπου είναι διακριτή η διεπιφάνεια.



Εικόνα 2.2 Λεπτομέρεια σε μεγέθυνση 50x κυλινδρικού δοκιμίου χάλυβα με επίστρωση χαλκοαλουμινίου μέσω laser Cladding. [3]

Κεφάλαιο 3 : Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων

3.1 Εισαγωγή:

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (finite element method, FEM) είναι μία αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιείται για την επίλυση πολύπλοκων προβλημάτων μηχανικής και εφαρμοσμένης φυσικής. Επιτρέπει τη μοντελοποίηση ενός τεράστιου εύρους προβλημάτων και κατασκευών και την προσεγγιστική τους επίλυση με πολύ καλή ακρίβεια.

Είναι ιδιαίτερα χρήσιμη σε περιπτώσεις πολύπλοκων προβλημάτων, όπου η αναλυτική τους επίλυση θα ήταν ιδιαίτερα χρονοβόρα ή και πρακτικώς αδύνατη και μέσω αυτής μπορούν να γίνουν καλές προβλέψεις και μελέτες για ζητήματα αντοχής των υλικών στις κατασκευές.

Τα πρώτα πεπερασμένα στοιχεία που αναπτύχθηκαν ήταν δισδιάστατα για την επίλυση προβλημάτων επίπεδης εντατικής κατάστασης και στη συνέχεια ακολούθησαν και τρισδιάστατα στοιχεία, κελύφη κ.α.

3.2 Βασικές αρχές της μεθόδου:

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων βασίζεται στη μέθοδο της μητρικής ανάλυσης και έχει ως κεντρική ιδέα τη χρήση δισδιάστατων ή τρισδιάστατων στοιχείων για την προσομοίωση συνεχών μέσων. Τα στοιχεία αυτά συνδέονται μεταξύ τους με έναν πεπερασμένο αριθμό κόμβων. Η μέθοδος της μητρικής ανάλυσης χρησιμοποιείται για την επίλυση ραβδωτών φορέων (πλαϊσίων, δικτυωμάτων κ.α.), που έχουν διακριτά τμήματα και μελετώνται τμηματικά και κατά την αναλυτική τους επίλυση. Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων αναπτύχθηκε ως επέκταση της μεθόδου της μητρικής ανάλυσης στις ολόσωμες κατασκευές. [16]

Στα συνεχή μέσα, συνήθως, δεν υπάρχουν φυσικοί διαχωρισμοί. Κατά συνέπεια, τα πεπερασμένα στοιχεία συνδέονται μεταξύ τους κατά μήκος των πλευρών τους. Ως εκ τούτου το σχήμα των πεπερασμένων στοιχείων είναι συνήθως τριγωνικό ή τετραπλευρικό και οι κόμβοι βρίσκονται στα άκρα και τις κορυφές των πλευρών τους.

Η διαδικασία χωρισμού του συνεχούς μέσου σε στοιχεία ονομάζεται *διακριτοποίηση* και αποτελεί το πρωταρχικό στάδιο στην κατασκευή και επίλυση ενός μοντέλου με πεπερασμένα στοιχεία. Η κατάλληλη διακριτοποίηση εξαρτάται από την πολυπλοκότητα της γεωμετρίας που μελετάται, τα κρίσιμα σημεία της κατασκευής (π.χ. σημεία συγκέντρωσης τάσεων, γεωμετρικές ατέλειες, σημεία εφαρμογής εξωτερικά επιβαλλόμενων φορτίων κ.α.) και από τη διαθέσιμη υπολογιστική ισχύ.

Όπως και στη μητρική ανάλυση, έτσι και στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων επιλέγονται ως βασικές μεταβλητές του προβλήματος είτε οι κομβικές δυνάμεις είτε οι κομβικές μετατοπίσεις, συνεπώς έχουμε δύο μοντέλα ανάπτυξης της μεθόδου: [17]

- Το μοντέλο των δυνάμεων
- Το μοντέλο των μετατοπίσεων

Λόγω της μεγάλης ανάπτυξης της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων υπάρχει και το μικτό μοντέλο, που περιέχει και τους δύο προαναφερθέντες τύπους μεταβλητών και το, ακόμα πιο σύνθετο, υβριδικό μοντέλο.

Το πλέον χρησιμοποιούμενο από τα παραπάνω είναι το μοντέλο των μετατοπίσεων, το οποίο περιγράφεται στην ακόλουθη παράγραφο.

3.3 Βήματα της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων:

Τα βασικά βήματα μιας ανάλυσης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, βάσει του μοντέλου των μετατοπίσεων είναι τα εξής: [16]



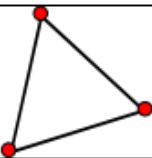
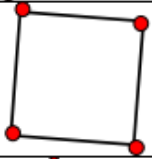
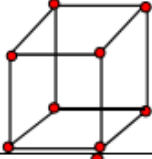
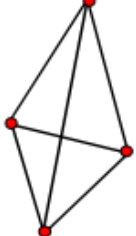
- **Διακριτοποίηση της κατασκευής**

Ο ολόσωμος φορέας χωρίζεται, όπως προαναφέρθηκε, σε στοιχεία που συνδέονται με κόμβους. Σε κάθε κόμβο αντιστοιχεί ένα πλήθος κομβικών παραμέτρων (μετατοπίσεις στις αξονικές διευθύνσεις και παράγωγοι αυτών).

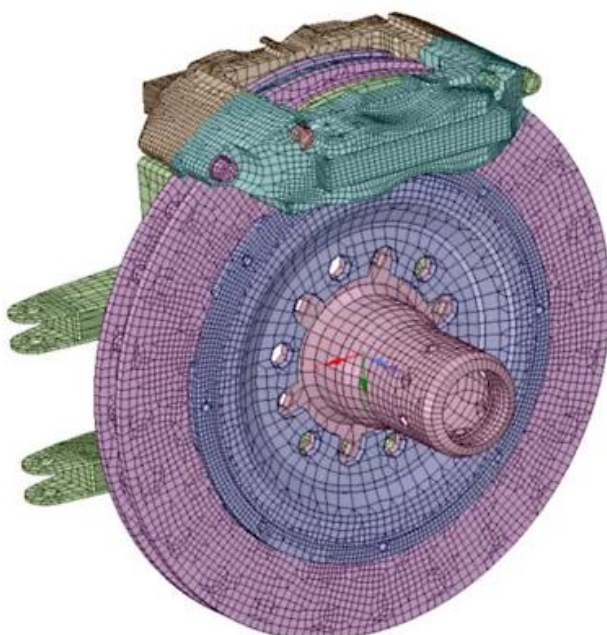
Όσο μικρότερα και πολυπληθέστερα είναι τα στοιχεία τόσο μεγαλύτερη ακρίβεια προσφέρουν και βοηθούν στη μελέτη επιμέρους περιοχών μικρών διαστάσεων που παρουσιάζουν ενδιαφέρον, όπως στη μελέτη διάδοσης ρωγμών, που θα εξεταστεί στην παρούσα εργασία. Ταυτόχρονα, όμως, όσο αυξάνεται το πλήθος των στοιχείων του εκάστοτε μοντέλου αυξάνεται και η απαιτούμενη υπολογιστική ισχύς.

Επομένως, είναι ιδιαίτερα σημαντικό για την καλή μοντελοποίηση και την εξαγωγή ορθών αποτελεσμάτων να επιλέγεται κάθε φορά η κατάλληλη διακριτοποίηση της κατασκευής (π.χ. χρήση μεγαλύτερων στοιχείων στον κύριο όγκο του σώματος και πύκνωση των στοιχείων σε πλευρές ή περιοχές που μελετώνται εκτενέστερα). Ο τύπος των στοιχείων που επιλέγονται είναι επίσης κρίσιμος παράγοντας που επηρεάζει την ορθότητα των αποτελεσμάτων.

Στην παρακάτω εικόνα παρουσιάζονται διαφορετικοί τύποι πεπερασμένων στοιχείων:

Finite element name	Type	Geometric Representation
One-dimensional finite element	Straight lines nodal	
	Curved lines nodal	
Two-dimensional finite element	triangular	
	quadrilateral	
Tridimensional finite element	hexahedron	
	Tetrahedron	

Εικόνα 3.1 Τύποι πεπερασμένων στοιχείων



Εικόνα 3.2
Παράδειγμα
διακριτοποίησης
πολύπλοκης
κατασκευής [2]

- **Υπολογισμός του μητρώου ακαμψίας του στοιχείου:**

Χρειάζεται μία σχέση που να συνδέει τις κομβικές παραμέτρους με τις αντίστοιχες κομβικές δυνάμεις, που καλείται μητρώο ακαμψίας. Ακολουθούνται τα εξής βήματα:

- **Προσδιορισμός των μετατοπίσεων σε κάθε στοιχείο:**

Αναζητείται μια σχέση που να συνδέει τις μετατοπίσεις σε κάθε στοιχείο με τις κομβικές παραμέτρους η οποία θα είναι προσεγγιστική. Με τη θεώρηση ότι είναι γνωστές οι μετατοπίσεις των κόμβων ενός στοιχείου, οι μετατοπίσεις ενός σημείου μέσα στο στοιχείο μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια μιας συνάρτησης παρεμβολής (συνήθως πολυωνυμικής).

- **Υπολογισμός των κομβικών φορτίων και του μητρώου ακαμψίας μέσω της αρχής των δυνατών έργων:**

Μέσω των σχέσεων μεταξύ κομβικών παραμέτρων και μετατοπίσεων υπολογίζονται οι τάσεις και οι παραμορφώσεις. Αν απομονωθεί ένα στοιχείο και θεωρηθεί ότι οι τάσεις που ασκούνται σε αυτό από την υπόλοιπη κατασκευή είναι εξωτερικά φορτία, τότε με την εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων στο στοιχείο ευρίσκονται οι κομβικές δυνάμεις που παράγουν έργο ίσο με αυτό του εξωτερικού φορτίου. Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζεται το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου.

- **Διαμόρφωση του τελικού συστήματος ακαμψίας:**

Γίνεται με εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων σε όλο το σώμα, εφόσον υπάρχουν εσωτερικοί κόμβοι στα στοιχεία και οι εξισώσεις ισορροπίας του κάθε κόμβου δεν επαρκούν.

- **Επίλυση του συστήματος ακαμψίας**

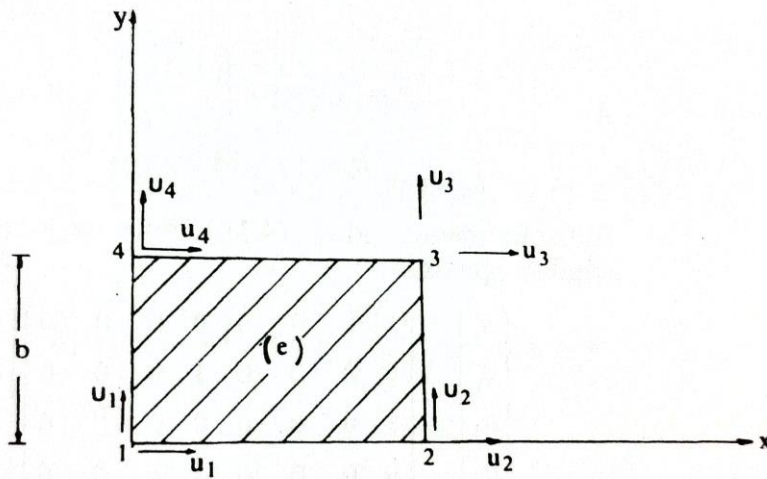
- **Υπολογισμός τάσεων και παραμορφώσεων από τις μετατοπίσεις.**

3.4 Τύποι δισδιάστατων στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν: Τετραπλευρικά στοιχεία

Στην εργασία αυτή χρησιμοποιήθηκαν τρισδιάστατα στοιχεία για τον υπολογιστικό προσδιορισμό των ελαστικών σταθερών του ισοδύναμου τριφασικού κυλινδρικού μοντέλου και δισδιάστατα στοιχεία για τη μελέτη της διάδοσης ρωγμής στο ανηγμένο στο επίπεδο μοντέλο.

Για το δισδιάστατο μοντέλο που θα παρουσιαστεί στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκαν τετραπλευρικά οκτακομβικά στοιχεία. Παρακάτω περιγράφονται τα τετραπλευρικά στοιχεία από το απλούστερο μέχρι το οκτακομβικό: [17]

3.4.1 Απλό ορθογωνικό στοιχείο :



Εικόνα 3.3 Το απλό ορθογωνικό στοιχείο [14]

Θεωρείται στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων x_1y_1 , το απλό ορθογωνικό στοιχείο του σχήματος με τέσσερις κόμβους $i = 1,2,3,4$ που ο καθένας έχει από δύο συνιστώσες μετατοπίσεων, άρα το στοιχείο έχει οχτώ συνιστώσες μετατοπίσεων, e , που γράφονται ως εξής:

$$\delta^e = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\text{όπου } \delta_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad i = 1,2,3,4$$

Το στοιχείο (e) έχει οκτώ βαθμούς ελευθερίας και το πεδίο μετατοπίσεων στο κομβικό σύστημα είναι:

$$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3xy + a_4y \quad (3.2)$$

$$v(x, y) = a_5 + a_6x + a_7xy + a_8y \quad (3.3)$$

Γραμμένο σε μητρική μορφή, το σύστημα είναι:

$$\delta(x, y) = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & xy & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & xy & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

Αντικαθιστώντας όπου x,y τις συντεταγμένες των κόμβων:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & ab & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & ab & b \\ 1 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

Λύνοντας ως προς α:

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{ab} & 0 & \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{ab} & 0 \\ -\frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{ab} & 0 & \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{ab} \\ 0 & -\frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

Θεωρούνται αδιάστατες συντεταγμένες: $\xi = \frac{x}{a}$, $\eta = \frac{y}{b}$ και αντικαθίσταται το δiάνυσμα α στην **(3.4)**. Προκύπτει:

$$\delta(x, y) = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = [N(\xi, \eta)\delta^e] = [N_1(\xi, \eta) \quad N_2(\xi, \eta) \quad N_3(\xi, \eta) \quad N_4(\xi, \eta)]\delta^e \quad (3.7)$$

Όπου $N_1(\xi, \eta) = v_i(\xi, \eta) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $i = 1,2,3,4$

Με $v_1(\xi, \eta) = (1 - \xi)(1 - \eta)$, $v_2(\xi, \eta) = \xi(1 - \eta)$, $v_3(\xi, \eta) = \xi\eta$, $v_4(\xi, \eta) = \eta(1 - \xi)$

Οι μετατοπίσεις μεταβάλλονται γραμμικά κατά μήκος των πλευρών του ορθογωνίου στοιχείου. Για δύο στοιχεία σε επαφή, η συμβιβαστικότητα των μετατοπίσεων των κόμβων στις κοινές τους κορυφές συνεπάγεται συμβιβαστικότητα μετατοπίσεων και στην κοινή τους πλευρά. Συνεπώς, το πεδίο των μετατοπίσεων είναι κινηματικά αποδεκτό και οι μετατοπίσεις είναι συνεχείς στις κοινές πλευρές των στοιχείων.

Για το πεδίο των παραμορφώσεων ισχύει:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = B_1\delta^e \quad (3.8)$$

Όπου $B_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1-\eta}{a} & 0 & \frac{1-\eta}{a} & 0 & \frac{\eta}{a} & 0 & -\frac{\eta}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{1-\xi}{b} & 0 & -\frac{\xi}{b} & 0 & \frac{\xi}{b} & 0 & \frac{1-\xi}{b} \\ -\frac{1-\xi}{b} & -\frac{1-\eta}{a} & -\frac{\xi}{b} & \frac{1-\eta}{a} & \frac{\xi}{b} & \frac{\eta}{a} & \frac{1-\xi}{b} & -\frac{\eta}{a} \end{bmatrix}$

$$\delta^{eT} = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4]$$

Για το πεδίο των τάσεων ισχύει:

$$\sigma = D\varepsilon = DB_1\delta^e \quad (3.9)$$

Όπου D το μητρώο ελαστικών σταθερών στην επίπεδη εντατική κατάσταση, επομένως το τασικό πεδίο είναι:

$$\sigma = \frac{E}{1-\nu^2} \times \begin{bmatrix} -\frac{1-\eta}{a} & -\nu\frac{1-\xi}{b} & \frac{1-\eta}{a} & -\nu\frac{\xi}{b} & \frac{\eta}{a} & \nu\frac{\xi}{b} & -\frac{\eta}{a} & \nu\frac{1-\xi}{b} \\ -\nu\frac{1-\eta}{a} & -\frac{1-\xi}{b} & \nu\frac{1-\eta}{a} & -\frac{\xi}{b} & \nu\frac{\eta}{a} & \frac{\xi}{b} & -\nu\frac{\eta}{a} & \frac{1-\xi}{b} \\ -\frac{(1-\nu)(1-\xi)}{2b} & -\frac{(1-\nu)(1-\eta)}{2a} & -\frac{(1-\nu)\xi}{2b} & \frac{(1-\nu)(1-\eta)}{2a} & \frac{(1-\nu)\xi}{2b} & \frac{(1-\nu)\eta}{2a} & \frac{(1-\nu)(1-\xi)}{2b} & -\frac{(1-\nu)\eta}{2a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

Το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{k}^e = \int_{V^e} B_1^T DB_1 dV = t \int_0^a \int_0^b B_1^T DB_1 dx dy \quad (3.11)$$

,όπου t το πάχος του στοιχείου

Επομένως τελικά:

$$\bar{k}^e = \frac{Et}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 2[\frac{2}{c} + c(1-\nu)] & \frac{3}{2}(1+\nu) & \frac{4}{c} + c(1-\nu) & -\frac{3}{2}(1-3\nu) & -\frac{1}{c} - c(1-\nu) & \frac{3}{2}(1+\nu) & \frac{3}{2}(1-3\nu) \\ \frac{3}{2}(1+\nu) & 2[2c + \frac{1}{c}(1-\nu)] & \frac{3}{2}(1-3\nu) & 2[\frac{1}{c} - \frac{1}{c}(1-\nu)] & \frac{3}{2}(1+\nu) & -2c - \frac{1-\nu}{c} & -\frac{1-\nu}{4c + \frac{1}{c}} \\ \frac{4}{c} + c(1-\nu) & \frac{3}{2}(1-3\nu) & 2[\frac{2}{c} + c(1-\nu)] & -\frac{3}{2}(1-3\nu) & 2[\frac{1}{c} - c(1-\nu)] & -\frac{1-\nu}{2} - \frac{1-\nu}{c} & \frac{3}{2}(1+\nu) \\ -\frac{3}{2}(1-3\nu) & 2[\frac{1}{c} - \frac{1}{c}(1-\nu)] & -\frac{3}{2}(1+\nu) & 2[2c + \frac{1}{c}(1-\nu)] & \frac{3}{2}(1-3\nu) & -4c + \frac{1-\nu}{c} & -\frac{1-\nu}{2} - \frac{1}{c}(1-3\nu) \\ -\frac{1}{c} - c(1-\nu) & \frac{3}{2}(1+\nu) & -\frac{3}{2}(1-3\nu) & 2[\frac{1}{c} - \frac{1}{c}(1-\nu)] & \frac{3}{2}(1+\nu) & -2c - \frac{1-\nu}{c} & \frac{3}{2}(1-3\nu) \\ \frac{3}{2}(1+\nu) & 2[2c + \frac{1}{c}(1-\nu)] & \frac{3}{2}(1-3\nu) & 2[\frac{1}{c} - \frac{1}{c}(1-\nu)] & -\frac{1-\nu}{2} - \frac{1-\nu}{c} & -4c + \frac{1-\nu}{c} & -\frac{1-\nu}{2} - \frac{1}{c}(1-3\nu) \\ \frac{3}{2}(1-3\nu) & 2[\frac{1}{c} - \frac{1}{c}(1-\nu)] & -\frac{3}{2}(1+\nu) & 2[2c + \frac{1}{c}(1-\nu)] & \frac{3}{2}(1-3\nu) & -4c + \frac{1-\nu}{c} & -\frac{1-\nu}{2} - \frac{1}{c}(1-3\nu) \\ -\frac{3}{2}(1-3\nu) & 2[\frac{1}{c} - \frac{1}{c}(1-\nu)] & 2[\frac{1}{c} - c(1-\nu)] & -\frac{3}{2}(1+\nu) & \frac{3}{2}(1-3\nu) & -4c + \frac{1-\nu}{c} & -\frac{1-\nu}{2} - \frac{1}{c}(1-3\nu) \\ \frac{1}{c} - c(1-\nu) & \frac{3}{2}(1+\nu) & -\frac{3}{2}(1-3\nu) & 2[\frac{1}{c} - \frac{1}{c}(1-\nu)] & \frac{3}{2}(1+\nu) & -2c - \frac{1-\nu}{c} & \frac{3}{2}(1-3\nu) \\ 2[\frac{1}{c} - c(1-\nu)] & -\frac{3}{2}(1+\nu) & -\frac{3}{2}(1-3\nu) & 2[2c + \frac{1}{c}(1-\nu)] & \frac{3}{2}(1-3\nu) & -4c + \frac{1-\nu}{c} & -\frac{1-\nu}{2} - \frac{1}{c}(1-3\nu) \\ \frac{3}{2}(1-3\nu) & 2[\frac{1}{c} - \frac{1}{c}(1-\nu)] & -\frac{3}{2}(1+\nu) & 2[2c + \frac{1}{c}(1-\nu)] & \frac{3}{2}(1-3\nu) & -4c + \frac{1-\nu}{c} & -\frac{1-\nu}{2} - \frac{1}{c}(1-3\nu) \\ -\frac{3}{2}(1-3\nu) & 2[\frac{1}{c} - \frac{1}{c}(1-\nu)] & 2[\frac{1}{c} - c(1-\nu)] & -\frac{3}{2}(1+\nu) & \frac{3}{2}(1-3\nu) & -4c + \frac{1-\nu}{c} & -\frac{1-\nu}{2} - \frac{1}{c}(1-3\nu) \end{bmatrix}$$

$$c = a/b$$

(3.12)

Στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων το μητρώο ακαμψίας είναι:

$$k^e = a_1^T \bar{k}^e a_1 \quad (3.13)$$

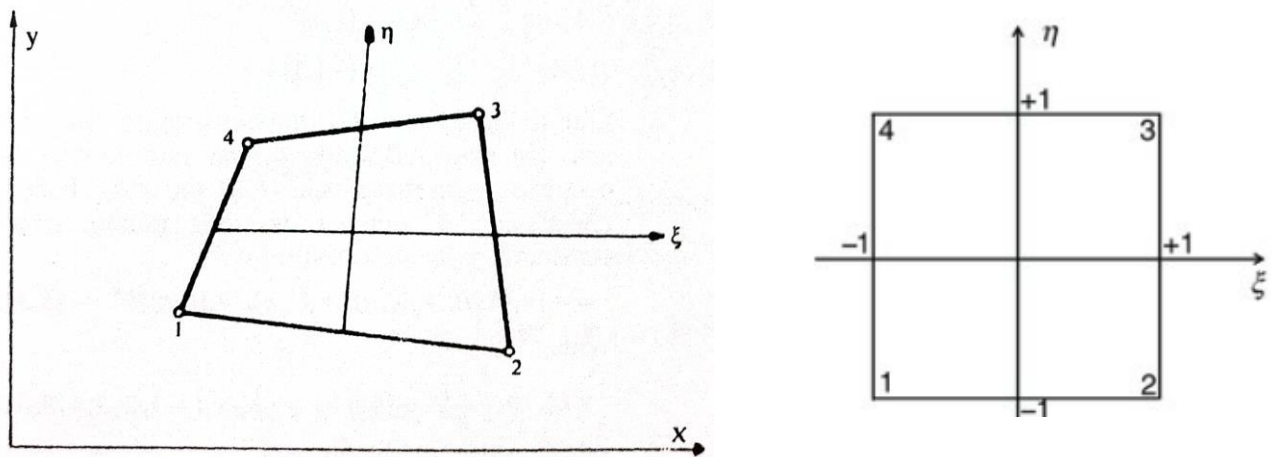
Όπου το a_1 είναι το μητρώο στροφής:

$$a_1 = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} \ell_x & m_x & n_x \\ \ell_y & m_y & n_y \\ \ell_z & m_z & n_z \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Και (ℓ_x, m_x, n_x) , (ℓ_y, m_y, n_y) , (ℓ_z, m_z, n_z) τα διευθύνοντα συννημίτονα των αξόνων x, y, z ως προς το καθολικό σύστημα συντεταγμένων X, Y, Z .

3.4.2 Το τετραπλευρικό στοιχείο:



Εικόνα 3.4 Το τετραπλευρικό στοιχείο

Το πεδίο των μετατοπίσεων θα μπορούσε να περιγραφεί από τη σχέση (3.4) του απλού ορθογωνικού στοιχείου, όμως τα διγραμμικά πολυώνυμα (3.2), (3.3) δεν εξασφαλίζουν τη συνέχεια των μετατοπίσεων κατά μήκος των κοινών πλευρών γειτονικών στοιχείων, λόγω της κλίσης που παρουσιάζουν οι κοινές πλευρές ως προς τα συστήματα αξόνων του κάθε στοιχείου.

Η ασυνέχεια μπορεί να ξεπεραστεί αν θεωρήσουμε ότι το πεδίο μετατοπίσεων εκφράζεται από ένα μη ορθογωνικό και αδιάστατο τοπικό σύστημα συντεταγμένων, με αρχή (ξ, η) το σημείο τομής των διαμέσων του τετραπλεύρου. Οι πλευρές του τετραπλεύρου ορίζονται από τις εξισώσεις $\xi = \pm 1$ $\eta = \pm 1$.

Η σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες (x, y) στο καθολικό σύστημα με τις συντεταγμένες (ξ, η) στο τοπικό σύστημα είναι:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_2 & 0 & p_3 & 0 & p_4 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & p_2 & 0 & p_3 & 0 & p_4 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

όπου (x_i, y_i) οι συντεταγμένες του κόμβου i στο (x, y) και:

$$p_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \quad \begin{matrix} |\xi|, |\eta| \leq 1 \\ i = 1, 2, 3, 4 \end{matrix} \quad (3.17)$$

Οι συντεταγμένες των κόμβων στο τοπικό σύστημα (ξ, η) είναι:

$$\begin{matrix} (\xi_1, \eta_1) = (-1, -1) & (\xi_3, \eta_3) = (1, 1) \\ (\xi_2, \eta_2) = (1, -1) & (\xi_4, \eta_4) = (-1, 1) \end{matrix} \quad (3.18)$$

Αν το πεδίο μετατοπίσεων μέσα στο στοιχείο (e) εκφραστεί συναρτήσει των (ξ, η) για κάθε βαθμό ελευθερίας δ του κάθε κόμβου ισχύει:

$$\delta = [N_1(\xi, \eta), N_2(\xi, \eta), N_3(\xi, \eta), N_4(\xi, \eta)] \delta^e \quad (3.19)$$

$$\text{όπου} \quad N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$\text{και} \quad \delta^e = [\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4]^T \quad (3.20)$$

οι μετατοπίσεις στους κόμβους του στοιχείου.

Η εισαγωγή του συστήματος (ξ, η) έχει σαν αποτέλεσμα τη συνέχεια των μετατοπίσεων κατά μήκος των κοινών πλευρών των στοιχείων αφού $p_i = v_i$

Χρησιμοποιείται μερική διαφοροποίηση σε κάθε συντεταγμένη:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = J \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

Η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού δίνεται από τη σχέση:

$$J = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\xi) & (1-\xi) & (1-\xi) & -(1-\xi) \\ -(1-\eta) & -(1+\eta) & (1+\eta) & (1-\eta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Με αντιστροφή της (3.21) έχουμε:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

Επιπλέον: $dA = dx dy = (\det J) d\xi d\eta$ (3.24)

Το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου (e) είναι:

$$k^e = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B_1^T D B_1 (\det J) d\xi d\eta \quad (3.25)$$

όπου t το πάχος του (e).

όπου το μητρώο συμβιβαστού των παραμορφώσεων είναι:

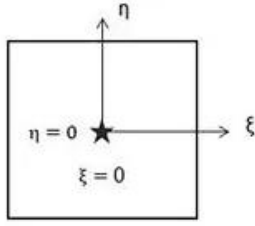
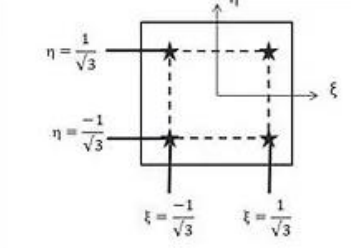
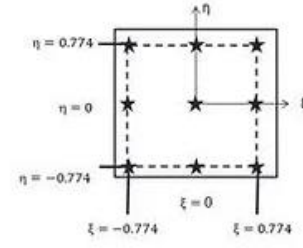
$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων προτιμάται η ολοκλήρωση Gauss, καθώς επιτυγχάνει ικανοποιητική ακρίβεια χρησιμοποιώντας τα ελάχιστα δυνατά σημεία ολοκλήρωσης. Ο κανόνας για τις δύο διαστάσεις είναι: [18]

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 d\eta \int_{-1}^1 F(\xi, \eta) d\xi \approx \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{j=1}^{p_2} w_i w_j F(\xi_i, \eta_i) \quad (3.27)$$

όπου w_i είναι τα βάρη ολοκλήρωσης και ξ_i οι θέσεις των σημείων.

Χρησιμοποιείται ολοκλήρωση Gauss 2x2 σημείων

		
1 X 1 Gauss point rule	2 X 2 Gauss point rule	3 X 3 Gauss point rule

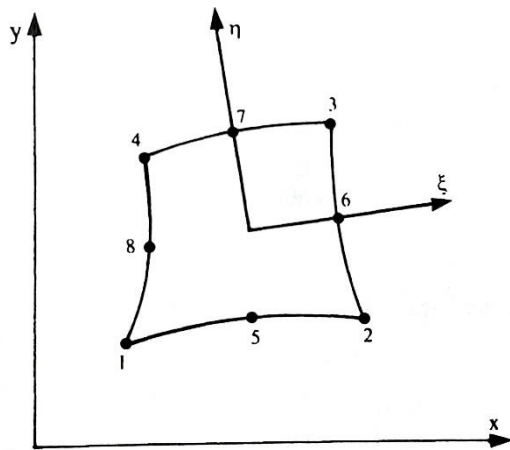
Εικόνα 3.5
Τύποι
ολοκλήρωσης
Gauss

3.4.3 Το οκτακομβικό τετραπλευρικό στοιχείο:

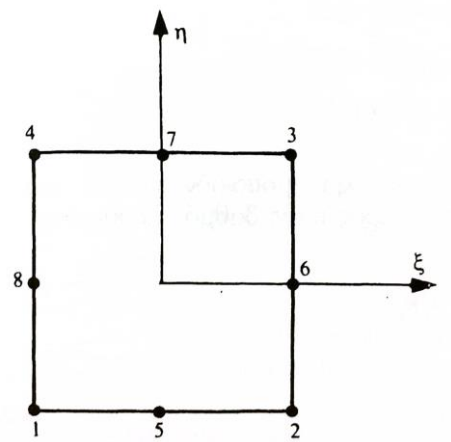
Προκύπτει από το τετρακομβικό με την προσθήκη ενός επιπλέον κόμβου στο μέσο της κάθε πλευράς.

Καλείται και τετραγωνικό, καθώς τα πολυώνυμα παρεμβολής που έχουν υιοθετηθεί ως προς το τοπικό σύστημα συντεταγμένων (ξ, η) είναι τετραγωνικά.

Στο δισδιάστατο μοντέλο που θα παρουσιαστεί στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκαν οκτακομβικά τετραπλευρικά στοιχεία.



Εικόνα 3.6 Το οκτακομβικό τετραπλευρικό στοιχείο στο καρτεσιανό σύστημα



Εικόνα 3.7 Το οκτακομβικό τετραπλευρικό στοιχείο στο τοπικό σύστημα (ξ, η)

Σύμφωνα με την ανάλυση της προηγούμενης παραγράφου για το πεδίο των μετατοπίσεων ισχύει αντιστοίχως η σχέση:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \\ x_5 \\ y_5 \\ x_6 \\ y_6 \\ x_7 \\ y_7 \\ x_8 \\ y_8 \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

Όπου οι συναρτήσεις σχήματος είναι:

$$\begin{aligned} N_1 &= (1 - \xi)(1 - \eta)(-\xi - \eta - 1)/4 \\ N_2 &= (1 + \xi)(1 - \eta)(\xi - \eta - 1)/4 \\ N_3 &= (1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1)/4 \\ N_4 &= (1 - \xi)(1 + \eta)(-\xi + \eta - 1)/4 \\ N_5 &= (1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \eta)/2 \\ N_6 &= (1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \eta)/2 \\ N_7 &= (1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \eta)/2 \\ N_8 &= (1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \eta)/2 \end{aligned}$$

(3.29)

Οι ίδιες συναρτήσεις σχήματος χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό των μετατοπίσεων προς κάθε βαθμό ελευθερίας.

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^8 N_i w_i \\ \theta_x &= \sum_{i=1}^8 N_i \theta_{xi} \\ \theta_y &= \sum_{i=1}^8 N_i \theta_{yi} \end{aligned}$$

(3.30)

Η ιακωβιανή του συστήματος είναι:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_8 & y_8 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Το διάνυσμα παραμορφώσεων δίνεται από τη σχέση:

$$\varepsilon = Bq \quad \varepsilon = \sum_{i=1}^8 B_i q_i \quad (3.32)$$

όπου

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & N_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & -N_i & 0 \end{bmatrix} \quad (3.33) \quad q_i = \begin{pmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Τα εντατικά μεγέθη της πλάκας είναι:

$$\sigma = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

και συναρτήσει των παραμορφώσεων

$$\sigma = D\varepsilon \quad (3.36) \quad \text{και με αντικατάσταση στην (3.32):} \quad \sigma = DBq \quad (3.37)$$

$$\sigma = D \sum_{i=1}^8 B_i q_i \quad (3.38)$$

Το μητρώο ακαμψίας δίνεται από τη σχέση:

$$k = \int \int B^T DB dx dy \quad (3.39)$$

και ως προς το τοπικό σύστημα συντεταγμένων:

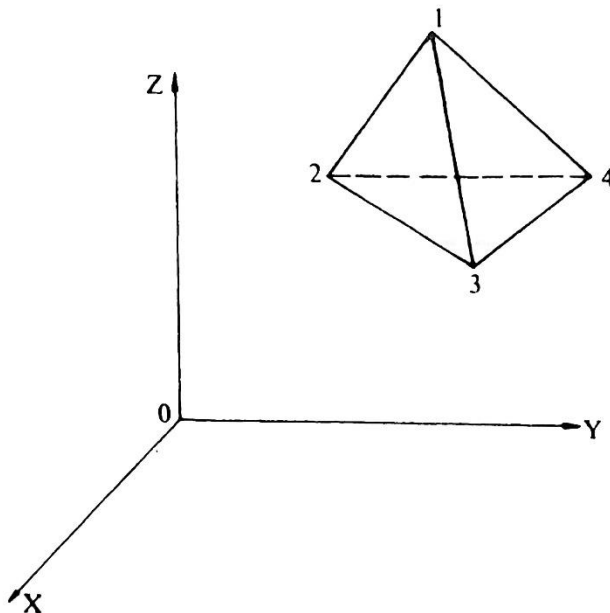
$$k = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T DB |J| d\xi d\eta \quad (3.40)$$

Η ολοκλήρωση γίνεται, όπως στην προηγούμενη παράγραφο με ολοκλήρωση Gauss 2x2 σημείων.

3.5 Τύποι τρισδιάστατων στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν: Τετραεδρικά και εξαεδρικά στοιχεία

Προχωρώντας στα πεπερασμένα στοιχεία τρισδιάστατης ελαστικότητας γίνεται αντιληπτό ότι οι υπολογιστικές απαιτήσεις αυξάνονται υπέρμετρα, καθώς τα στοιχεία έχουν περισσότερους κόμβους και περισσότερους βαθμούς ελευθερίας σε κάθε έναν από αυτούς. Παρακάτω αναλύεται το απλό τετραεδρικό στοιχείο, που είναι το λιγότερο πολύπλοκο στις τρεις διαστάσεις και στη συνέχεια το οκτακομβικό στοιχείο που προκύπτει από τετραεδρικά.

3.5.1 Το απλό τετραεδρικό στοιχείο



Εικόνα 3.6 Το απλό τετραεδρικό στοιχείο

Οι μετατοπίσεις του κάθε στοιχείου ορίζονται από τρεις συνιστώσες u, v και w , παράλληλες ως προς τους άξονες X, Y, Z αντίστοιχα.

Επομένως:

$$q(x, y, z) = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

Οι μετατοπίσεις του κόμβου i ($i=1,2,3,4$) συμβολίζονται:

$$q_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (3.42)$$

Το στοιχείο έχει δώδεκα συνιστώσες κομβικών μετατοπίσεων άρα σε μορφή μητρώου διανύσματος:

$$q^e = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} \quad (3.43) \quad \begin{array}{l} \text{και οι εσωτερικές} \\ \text{μετατοπίσεις} \\ \text{εκφράζονται από σχέση} \\ \text{της μορφής:} \end{array} \quad u(x, y, z) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z \quad (3.44)$$

Οπότε προκύπτει:

$$q(x, y, z) = \begin{Bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \vdots \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.45)$$

Αντικαθιστώντας όπου x, y, z τις συντεταγμένες των κόμβων:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_3 \\ \vdots \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Με λύση ως προς α και αντικατάσταση στην (3.45):

$$q(x, y, z) = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} = N(x, y, z)q^e \Rightarrow$$

$$q(x, y, z) = [N_1(x, y, z), N_2(x, y, z), N_3(x, y, z), N_4(x, y, z)]q^e \quad (3.47)$$

με

$$N_i(x, y, z) = \begin{bmatrix} v_i(x, y, z) & 0 & 0 \\ 0 & v_i(x, y, z) & 0 \\ 0 & 0 & v_i(x, y, z) \end{bmatrix} \quad i=1,2,3,4 \quad (3.48)$$

και

$$v_i(x, y, z) = (s_i + b_i x + c_i y + d_i z)/6V \quad (3.49)$$

όπου

$$s_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (3.50)$$

$$b_1 = - \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (3.51)$$

$$c_1 = \begin{vmatrix} x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \\ x_4 & 1 & z_4 \end{vmatrix} \quad (3.52)$$

$$d_1 = - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} \quad (3.53)$$

V είναι ο όγκος του τετραέδρου:

$$6V = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (3.54)$$

Το μητρώο συμβιβαστού των παραμορφώσεων είναι:

$$B_i = \frac{1}{6V^e} \begin{bmatrix} b_i & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \\ c_i & b_i & 0 \\ 0 & d_i & c_i \\ d_i & 0 & b_i \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

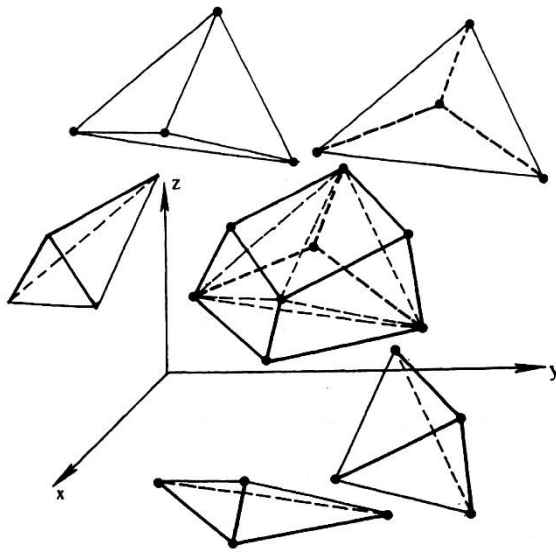
Το μητρώο ακαμψίας είναι:

$$[k^e] = \int_{V_e} [B]^T [E][B] dV_e \quad (3.56)$$

και με ολοκλήρωση προκύπτει:

$$[k^e] = V_e [B]^T [E][B] \quad (3.57)$$

3.5.2 Το οκτακομβικό τρισδιάστατο (brick) στοιχείο:



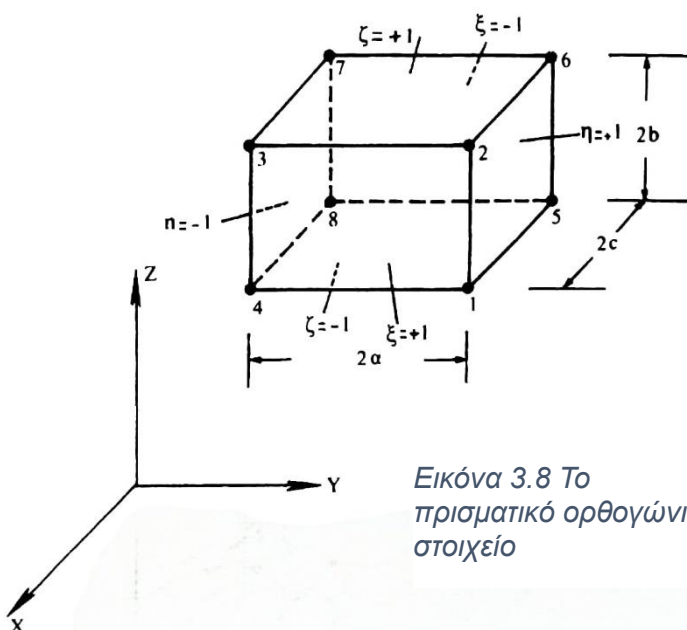
Εικόνα 3.7 Στερεό εξάεδρο από πέντε τετράεδρα.

Η μοντελοποίηση τρισδιάστατου στερεού με τετραεδρικά στοιχεία ενέχει τον κίνδυνο να υπάρχει επικάλυψη μεταξύ τους και εσφαλμένη αρίθμηση των κόμβων. Εάν, όμως, τα τετράεδρα συντεθούν, όπως στην παραπάνω εικόνα, σχηματίζουν εξαεδρικά στοιχεία τα οποία διευκολύνουν τη διακριτοποίηση των τρισδιάστατων στερεών. Τα εξαεδρικά στοιχεία καλούνται οκτακομβικά γιατί συνδέονται με οκτώ κόμβους που αριθμούνται ως προς το καθολικό σύστημα συντεταγμένων.

Οι βαθμοί ελευθερίας του στοιχείου είναι 24 (8 κόμβοι x 3 βαθμοί ελευθερίας στο καθένα) και η μετατόπιση είναι:

$$u(x, y, z) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5xy + a_6yz + a_7zx + a_8xyz \quad (3.58)$$

Στην περίπτωση πρισματικών ορθογωνίων στοιχείων είναι χρήσιμο να εισαχθούν οι αδιάστατες τοπικές συντεταγμένες (ξ, η, ζ) με αρχή τους το κέντρο (x_0, y_0, z_0) του στοιχείου:



Εικόνα 3.8 Το πρισματικό ορθογώνιο στοιχείο

$$x_0 = \frac{x_1 + x_4}{2} \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad z_0 = \frac{z_1 + z_5}{2} \quad (3.59)$$

$$\xi = \frac{x - x_0}{c} \quad \eta = \frac{y - y_0}{a} \quad \zeta = \frac{z - z_0}{b} \quad (3.60)$$

Από την (3.60) προκύπτει ότι $-1 \leq \xi \leq 1$, $-1 \leq \eta \leq 1$, $-1 \leq \zeta \leq 1$ και με αντικατάσταση στη (3.58), και προκύπτουν οι συναρτήσεις σχήματος:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) & N_5 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \\ N_2 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) & N_6 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) \\ N_3 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) & N_7 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\ N_4 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) & N_8 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \end{aligned} \quad (3.61)$$

Κεφάλαιο 4 : Αστοχία των υλικών και μηχανική των θραύσεων

4.1 Εισαγωγή – ιστορική αναδρομή:

Η μελέτη της αντοχής των υλικών και η προσπάθεια διατύπωσης κριτηρίων για την αστοχία τους είναι ζήτημα που απασχόλησε τους επιστήμονες από πολύ νωρίς, πριν ακόμα τη θεμελίωση του κλάδου της μηχανικής, όπως τον γνωρίζουμε σήμερα. Άλλωστε, η δημιουργία ανθεκτικών κατασκευών είναι θεμελιώδες κομμάτι του ανθρώπινου πολιτισμού το οποίο απασχόλησε τον άνθρωπο από τα αρχαία χρόνια και αναπτύχθηκε πρώτα εμπειρικά και μετέπειτα επιστημονικά. Παρατίθενται μερικά κομβικά σημεία της ιστορικής εξέλιξης του πεδίου: [19]

Από τον 18^ο αιώνα και έπειτα πολλοί μεγάλοι επιστήμονες μελέτησαν το πρόβλημα αυτό. Ο C.A. de Coulomb, το 1779 στην έρευνα του για τους νόμους της τριβής διατύπωσε ένα θεμελιώδες κριτήριο για την αστοχία των ψαθυρών υλικών.

Μετά τη βιομηχανική επανάσταση η χρήση των μετάλλων εκτοξεύθηκε και τα κριτήρια αστοχίας για ψαθυρά υλικά δεν ήταν επαρκή. Έτσι το 1832 ο G. Lamè διατύπωσε ένα κριτήριο αστοχίας που μπορεί να κωδικοποιηθεί ως «κριτήριο μέγιστης εφελκυστικής τάσης». Λίγο αργότερα ο J. C. Maxwell, σε επιστολές του, διατύπωσε την ιδέα ότι τα υλικά αστοχούν λόγω στρέβλωσης, δηλαδή επειδή αλλάζουν οι γωνίες του στοιχειώδους κύβου. Η ίδια ιδέα διατυπώθηκε αργότερα και από τον H. Tresca με το «κριτήριο μέγιστης διατμητικής τάσης» που χρησιμοποιείται ευρέως και σήμερα λόγω της απλότητας στην εφαρμογή του. Ακολούθησε, το 1909, το κριτήριο του R. von Mises, το οποίο ανταποκρίθηκε στις απαιτήσεις για ένα πιο μαθηματικό κριτήριο αστοχίας των υλικών.

Ωστόσο, τα παραπάνω πολύτιμα κριτήρια δεν επαρκούσαν για να εξηγήσουν την αστοχία ορισμένων κατασκευών, οι οποίες μακροσκοπικά φαίνονταν να μην έχουν κάποια ανωμαλία που θα μπορούσε να είναι υπεύθυνη για την κατάρρευση τους. Κατά συνέπεια και αφού είχε ανακαλυφθεί το ατομικό μοντέλο, οι επιστήμονες εστίασαν στην αναζήτηση της αιτίας αστοχίας στις μικροσκοπικές ανωμαλίες στα υλικά. Το 1907 ο K. F.D. Wiegardt ήταν ο πρώτος που μελέτησε το πρόβλημα μιας πραγματικής ρωγμής.

Είναι πολύ σημαντική η συμβολή του Άγγλου Ναυπηγού A. A. Griffith το 1919, που υπέθεσε ότι σε ένα πραγματικό υλικό με δομικές ανωμαλίες επιβάλλεται τεχνητά μια πολύ μεγαλύτερη (μακροσκοπική) γεωμετρική ανωμαλία, έτσι ώστε οι πραγματικές (μικροσκοπικές) ανωμαλίες να μην παίζουν κανένα ρόλο στη συμπεριφορά του υλικού. Ο Griffith υπέθεσε ως ανωμαλία μια ελλειπτική σπή και χρησιμοποίησε τη λύση του C.E. Inglis. Η προσέγγιση του Griffith ήταν ενεργειακή αφού διατύπωσε το εξής: **«Η ρωγμή εκκινεί (οδηγώντας το υλικό σε αστοχία), όταν η ελαστική ενέργεια που προσφέρεται στο υλικό από τα εξωτερικά φορτία γίνει αρκετή για να καλύψει την ενεργειακή δαπάνη δημιουργίας νέων ελευθέρων επιφανειών κατά μήκος της επέκτασης της ρωγμής»**. Η ενεργειακή προσέγγιση του Griffith απετέλεσε την αφετηρία του πρώτου κλάδου της Μηχανικής των Θραύσεων που καλείται **«Γραμμική Ελαστική Μηχανική των Θραύσεων»**.

Η προσέγγιση όμως του Griffith, που μπορεί να περιγραφεί ως προσέγγιση «ευθύγραμμης ρωγμής» δεν επαρκεί για όλες τις περιπτώσεις αφού μπορεί να έχουμε μη ευθύγραμμες ρωγμές. Σε τέτοιες περιπτώσεις ο ακριβής προσδιορισμός των πεδίων τάσεων και παραμορφώσεων στις αιχμές των ρωγμών γίνεται δυσκολότερος, ειδικά αν τα φορτία δεν είναι στατικά και είναι δυναμικά ή επαναλαμβανόμενα. Η ανάπτυξη της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων έχει μεγάλη χρησιμότητα στην αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων.

Το 1955, ο G.R. Irwin, βασισμένος στην ιδέα του Griffith, διατύπωσε ένα νέο κριτήριο για την εκκίνηση της ρωγμής. Με δεδομένο ότι οι τάσεις μεταβάλλονται συναρτήσει της ανηγμένης απόστασης από την αιχμή της ρωγμής κατά $(r/a)^{(1/2)}$ (και επομένως απειρίζονται στην αιχμή), εισήγαγε την έννοια του Συντελεστή Έντασης των Τάσεων, K .

$$KI = \sigma_{\infty} \sqrt{\pi a}$$

Σύμφωνα με τον Irwin: **«Η ρωγμή θα εκκινήσει, όταν ο συντελεστής έντασης των τάσεων πάρει μια κρίσιμη τιμή.»** και επομένως μπορεί να βρεθεί η κρίσιμη τιμή του συντελεστή των τάσεων για κάθε έναν από τους τρεις τύπους φόρτισης ρηγματωμένου δοκιμίου, οι οποίοι θα αναφερθούν παρακάτω. Για συνδυασμούς τύπων φόρτισης ο Irwin δεν εξήγαγε κάποιο συμπέρασμα, ωστόσο το κριτήριο του χρησιμοποιείται ακόμα και σήμερα σε ήδη ρηγματωμένα δοκίμια.

Επιπλέον δεν εξήχθη κάποιο συμπέρασμα για το τι συμβαίνει στην αιχμή της ρωγμής, όπου απειρίζονται οι τάσεις και τι πλαστικές παραμορφώσεις υπάρχουν. Η ανάγκη για κατανόηση του ρόλου των πλαστικών παραμορφώσεων στην εκκίνηση της ρωγμής συνετέλεσε στην ανάπτυξη ενός ακόμη κλάδου της μηχανικής των θραύσεων, την «Ελαστική-Πλαστική Μηχανική των Θραύσεων». Το 1960 ο W.F. Wells υπέθεσε ότι: **«Το άνοιγμα των χειλέων της ρωγμής, μετρημένο κοντά στην αιχμή της, παίρνει μια χαρακτηριστική τιμή, σταθερή για το υλικό, τη στιγμή της εκκίνησης της ρωγμής.»** Το 1968 υπήρξε πολύ σημαντική πρόοδος στη θεωρία. Οι J.W. Hutchinson, Rosengren και J. Rice βρήκαν μία μέθοδο υπολογισμού των πεδίων τάσεων-παραμορφώσεων σε πλάκα από υλικό μη γραμμικό ελαστικό, με την οποία έγινε πλέον δυνατός ο υπολογισμός των πλαστικών παραμορφώσεων στην αιχμή της ρωγμής. Την ίδια χρονιά, ο J. Rice παρουσίασε ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα για τον υπολογισμό του ρυθμού εκροής ελαστικής ενέργειας από την αιχμή μιας ρωγμής, σε μη γραμμικό ελαστικό υλικό.

Το πεδίο διατύπωσης κριτηρίων αστοχίας των υλικών και κατασκευών είναι ανοιχτό και συνεχώς εμπλουτιζόμενο στη σύγχρονη εποχή, ειδικά αν αναλογιστεί κανείς την πληθώρα νέων υλικών που διαρκώς κάνουν την εμφάνιση τους.

4.2 Θεμελιώδεις έννοιες:

4.2.1 Ορισμός της θραύσης

ΟΡΙΣΜΟΣ: Απλή θραύση είναι ο διαχωρισμός ενός σώματος σε δύο ή περισσότερα τμήματα, ως αποτέλεσμα μίας επιβαλλόμενης στατικής τάσης (δηλαδή σταθερής ή πολύ αργά μεταβαλλόμενης στο χρόνο), σε θερμοκρασίες χαμηλές σε σχέση με τη θερμοκρασία τήξης του υλικού.

Θραύση μπορεί να επέλθει και λόγω κόπωσης (κυκλικά επιβαλλόμενες τάσεις) ή ερπυσμού (χρονικά εξαρτώμενη παραμόρφωση, συνήθως σε υψηλές θερμοκρασίες). [7]

Η εφαρμοζόμενη τάση μπορεί να είναι εφελκυστική, θλιπτική, διατμητική, στρεπτική και συνδυασμός αυτών.

Κάθε διαδικασία θραύσης εμπεριέχει τα εξής βήματα:

- Τον σχηματισμό της ρωγμής
- Τη διάδοση της ρωγμής, ως αποτέλεσμα επιβολής τάσης

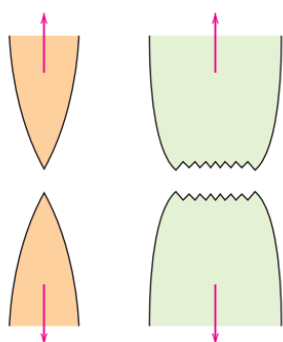
4.2.2 Συμπεριφορά υλικών υπό εφελκυσμό

Ανάλογα με τη συμπεριφορά τους σε εφελκυστική φόρτιση τα υλικά διακρίνονται σε:

- **Όλκιμα υλικά:**

Τα όλκιμα υλικά υφίστανται μεγάλες παραμορφώσεις και παρουσιάζουν κατ' επέκταση μεγάλη απορρόφηση ενέργειας πριν τη θραύση. Η διαδικασία της όλκιμης θραύσης είναι σχετικά αργή, καθώς στην περιοχή της ρωγμής υπάρχει μεγάλη πλαστική παραμόρφωση και εμποδίζεται έτσι η διάδοση της. Για να διαδοθεί η ρωγμή σε όλκιμο μέταλλο πρέπει να αυξηθεί η εφαρμοζόμενη τάση, γι' αυτό και αυτές οι ρωγμές καλούνται σταθερές. Όταν η φόρτιση είναι εφελκυστική, τα όλκιμα μέταλλα παρουσιάζουν μια χαρακτηριστική στένωση (necking) πριν τη θραύση. Τα μέταλλα είναι όλκιμα υλικά.

[7]



Εικόνα 4.1 Όλκιμη και μέτρια όλκιμη θραύση

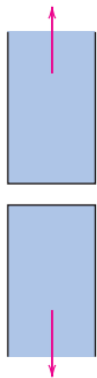
[20]



Εικόνα 4.2 Όλκιμη θραύση σε πραγματικό δοκίμιο

- **Ψαθυρά υλικά:**

Υπάρχει ελάχιστη έως και μηδενική παραμόρφωση, με μικρή απορρόφηση ενέργειας. Η διάδοση της ρωγμής είναι πολύ γρήγορη, κάθετα ως προς την εφαρμοζόμενη φόρτιση και η επιφάνεια της θραύσης φαίνεται μακροσκοπικά επίπεδη.



Εικόνα 4.3
Ψαθυρή
θραύση



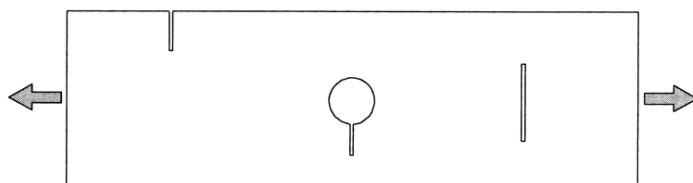
Εικόνα 4.4 Ψαθυρή
θραύση σε
πραγματικό δοκίμιο

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι έννοιες της ολκιμότητας και της ψαθυρότητας είναι σχετικές, από την άποψη ότι ένα υλικό μπορεί να είναι λιγότερο ή περισσότερο όλκιμο από ένα άλλο και αυτό εξαρτάται και από τις συνθήκες του περιβάλλοντος και τις συνθήκες φόρτισης. Υπάρχουν υλικά που κατατάσσονται στα όλκιμα και σε ορισμένες περιπτώσεις αστοχούν με ψαθυρό τρόπο.

4.3 Συγκέντρωση τάσεων

Όταν ένα υλικό με ατέλειες (ρωγμές, εγκοπές κ.α.) φορτίζεται, τότε οι τάσεις που επιδέχεται ενισχύονται ή συγκεντρώνονται στο άκρο της εκάστοτε ατέλειας. Γι' αυτό και συνήθως τα υλικά παρουσιάζουν μικρότερες τιμές αντοχής στη θραύση πειραματικά σε σύγκριση με τις θεωρητικές τιμές. Το μέγεθος της ενίσχυσης εξαρτάται από τη γεωμετρία της ρωγμής και τον προσανατολισμό της σε σχέση με τη φόρτιση.

[21]



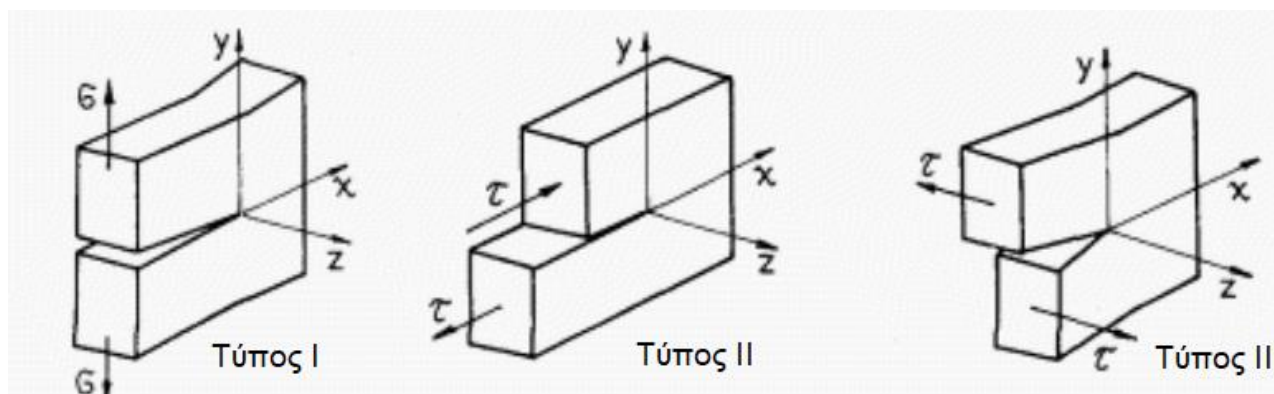
Εικόνα 4.1 Φωτοελαστική
απεικόνιση δοκιμίου με τριών
ειδών ρωγμές

4.3.1 Τύποι μετατόπισης των επιφανειών της ρωγμής:

Διακρίνονται τρεις τύποι μετατόπισης-ανοίγματος της ρωγμής ανάλογα με τον προσανατολισμό της σε σχέση με την εφαρμοζόμενη φόρτιση:

- Τύπος I: Τύπος διάνοιξης ή εφελκυστικός τύπος (opening mode).
- Τύπος II: Τύπος ολίσθισης (sliding mode).
- Τύπος III: Αποσχιστικός τύπος (shearing mode).

Οι τρεις τύποι φόρτισης παρουσιάζονται σχηματικά στην παρακάτω εικόνα: [22]



Εικόνα 4.2 Οι τρεις τύποι φόρτισης

4.3.2 Συντελεστής έντασης τάσεων K

Ο συντελεστής έντασης των τάσεων (stress intensity factor, συντομογραφία SIFS) K, είναι μια παράμετρος που χρησιμοποιείται στην μηχανική των θραύσεων για την περιγραφή του τασικού πεδίου στο άκρο της ρωγμής. [23]

Εξαρτάται από:

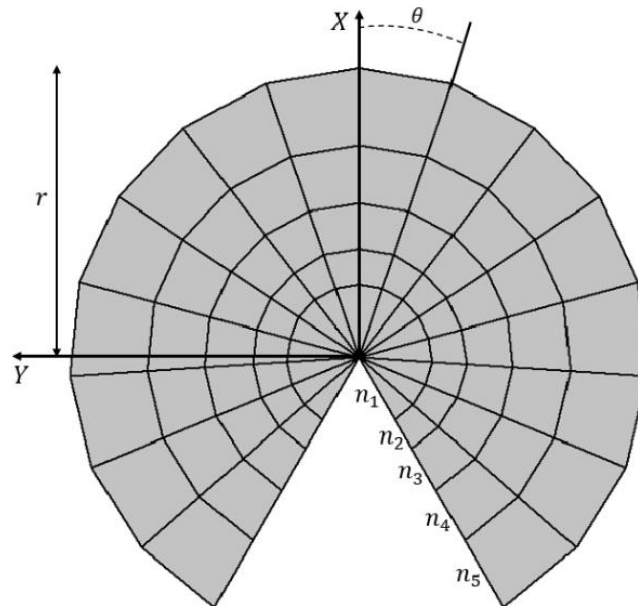
- Τη γεωμετρία του δοκιμίου
- Την τοποθεσία και το μέγεθος του ασκούμενου φορτίου
- Το μήκος, την τοποθεσία και τον προσανατολισμό της ρωγμής. Συγκεκριμένα για κάθε τύπο φόρτισης από τους προαναφερθέντες υπάρχει ο αντίστοιχος συντελεστής K (K_I , K_{II} , K_{III})

Η γενική σχέση που περιγράφει τον συντελεστή K είναι:

$$K = Y\sigma\sqrt{\pi a} \quad (4.1)$$

όπου ο παράγοντας Y περιγράφει τη γεωμετρία.

Στο Ansys Mechanical [20]ο υπολογισμός του συντελεστή έντασης των τάσεων γίνεται μέσω ενός επικαμπύλιου ολοκληρώματος (contour integral). Η ονομασία αυτή προκύπτει από το γεγονός ότι το ολοκλήρωμα υπολογίζεται για περισσότερες από μία διαδρομές γύρω από το άκρο της ρωγμής, οι οποίες ονομάζονται contours και βρίσκονται σε διαφορετικές αποστάσεις από το άκρο της ρωγμής, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα [24]:



Εικόνα 4.3 Περιοχές (contours) γύρω από τη ρωγμή

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται από τη σχέση:

$$I_0 = \frac{- \int_V q_{i,j} [\sigma_{kl} \varepsilon_{kl}^{aux} \delta_{ij} - \sigma_{kj}^{aux} u_{k,i} - \sigma_{kj} u_{k,i}^{aux}] dV}{\int_S \delta q_n dS} \quad (4.2)$$

,η οποία περιλαμβάνει τις τάσεις, τις παραμορφώσεις και τις μετατοπίσεις στο βοηθητικό πεδίο (auxiliary field).

Το βοηθητικό πεδίο βασίζεται σε σύστημα τοπικών συντεταγμένων στο άκρο της ρωγμής, όπου, όπως φαίνεται και από το παραπάνω σχήμα:

- Ο άξονας x έχει την ίδια κατεύθυνση με αυτή της διάδοσης της ρωγμής
- Ο άξονας y έχει διεύθυνση κάθετη στη διεύθυνση διάδοσης
- Ο άξονας z έχει διεύθυνση εφαπτομενική στην κορυφή της ρωγμής

Ο συντελεστής K υπολογίζεται από τη σχέση:

$$I = \frac{2}{E^*} (K_1 K_1^{aux} + K_2 K_2^{aux}) + \frac{1}{\mu} K_3 K_3^{aux} \quad (4.3)$$

Όπου οι δείκτες 1,2 και 3 αναφέρονται στα modes I, II και III του ανοίγματος της ρωγμής.

4.3.3 Τιμή κατωφλίου και κρίσιμη τιμή του συντελεστή έντασης των τάσεων.

Η τιμή κατωφλίου K_{th} του συντελεστή έντασης των τάσεων K είναι η τιμή για την οποία η ρωγμή διαδίδεται με πάρα πολύ αργό ρυθμό, με αποτέλεσμα η διάδοση της αυτή να είναι μη ανιχνεύσιμη.

Η κρίσιμη τιμή K_c του συντελεστή K είναι η τιμή για την οποία ο ρυθμός διάδοσης της ρωγμής αυξάνεται συνεχώς και επομένως η ρωγμή διαδίδεται ανεξέλεγκτα.

Στο διάστημα μεταξύ της τιμής κατωφλίου και της κρίσιμης τιμής η ρωγμή διαδίδεται με σταθερό ρυθμό.

Στην υπολογιστική μελέτη της εργασίας εξετάζεται το κατά πόσο τα αποτελέσματα του συντελεστή K για διάφορα μήκη ρωγμών εμπίπτουν στο διάστημα αυτό και αν ξεπερνούν την κρίσιμη τιμή. [25]

4.4 Κόπωση

4.4.1 Ορισμός και γενικά στοιχεία

Η κόπωση είναι μία μορφή αστοχίας των κατασκευών που προκύπτει από την επίδραση κυμαινόμενων τάσεων. Υπό τέτοιες συνθήκες μπορεί ένα υλικό να αστοχήσει για τάσεις πολύ χαμηλότερες από την τάση διαρροής τους. [7]

Ένα μέταλλο που έχει υποστεί επεξεργασία είναι πολύ πιθανό να έχει στην επιφάνεια του ατέλειες που, υπό συνθήκες κόπωσης, είναι πιθανό να διαδοθούν στο υλικό. Η διάδοση μίας ρωγμής είναι αργή για μικρό αριθμό κύκλων φόρτισης, όταν όμως το μήκος της ρωγμής γίνει αρκετά μεγάλο, αναλογικά με τη γεωμετρία, ο ρυθμός διάδοσης είναι αυξανόμενος και η αστοχία επέρχεται γρήγορα. [26]

Το πιο σημαντικό χαρακτηριστικό των αστοχιών από κόπωση είναι ότι στην περιοχή των ρωγμών υπάρχουν πολύ μικρές παραμορφώσεις, ακόμα και σε υλικά που υπό στατική φόρτιση παρουσιάζουν υψηλή ολκιμότητα. Συνεπώς, στην κόπωση, δεν εμφανίζεται κάποια ορατή ένδειξη της επερχόμενης αστοχίας, γεγονός που καθιστά τον εντοπισμό και την μελέτη των ατελειών υψίστης σημασίας.

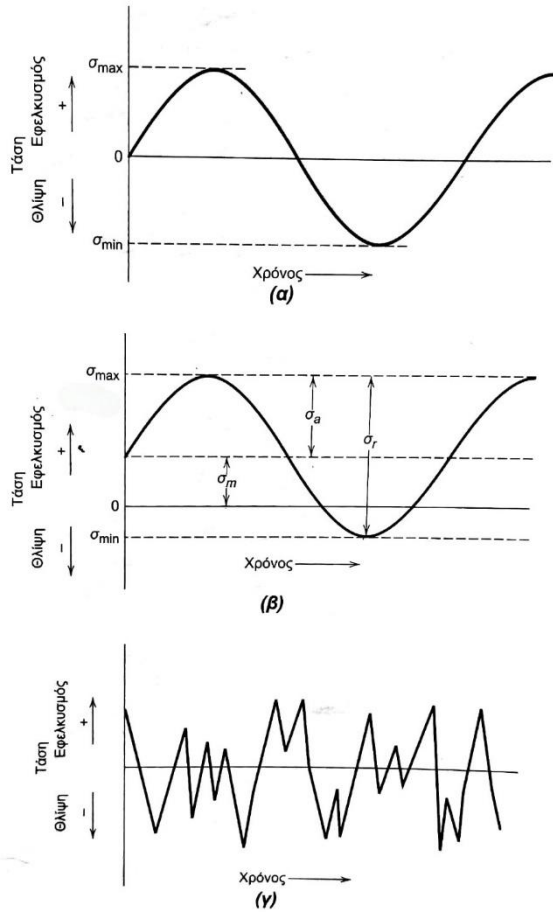
4.4.2 Τύποι χρονικών μεταβολών τάσης

Διακρίνονται τρεις τύποι χρονικής μεταβολής της τάσης στην κόπωση:

- **Αντιστρεφόμενη:** Η τάση εναλλάσσεται μεταξύ μίας μέγιστης εφελκυστικής και μίας ελάχιστης θλιπτικής τάσης ίσου μεγέθους.
- **Επαναλαμβανόμενη:** Η τάση εναλλάσσεται μεταξύ μίας μέγιστης εφελκυστικής και μίας ελάχιστης θλιπτικής τάσης διαφορετικού μεγέθους.

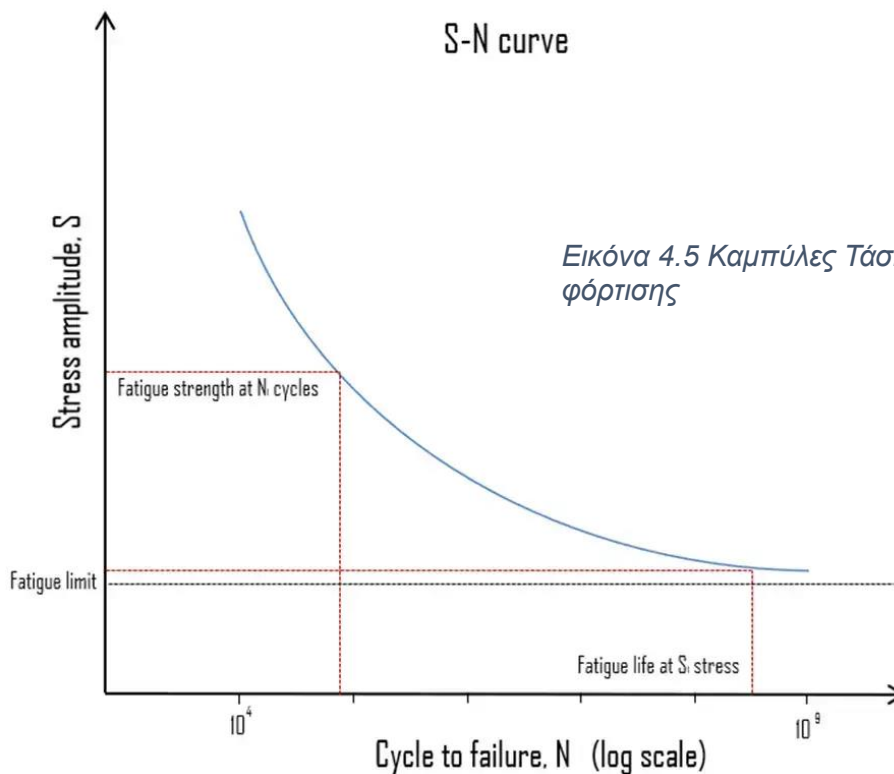
Μέση τάση:	$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$	(4.2)
Εύρος τάσεων:	$\sigma_r = \sigma_{max} - \sigma_{min}$	(4.3)
Πλάτος τάσης:	$\sigma_a = \frac{\sigma_r}{2} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$	(4.4)
Λόγος τάσεων:	$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$	(4.5)

- Τυχαίος κύκλος τάσης



Εικόνα 4.4 Τύποι φόρτισης στην κόπωση:
 α) Αντιστρεφόμενη, β) Επαναλαμβανόμενη
 γ) Τυχαίος Κύκλος Τάσης

Η πρόβλεψη της αστοχίας ενός υλικού υπό συνθήκες κόπωσης εξαρτάται από την αντοχή του σε πολλαπλούς κύκλους φόρτισης. Το πλήθος των κύκλων φόρτισης συμβολίζεται με N και η αντοχή του σε κόπωση εκφράζεται από τις καμπύλες τάσης-κύκλων φόρτισης (S-N curves) του Wöhler, οι οποίες έχουν την παρακάτω μορφή: [27]

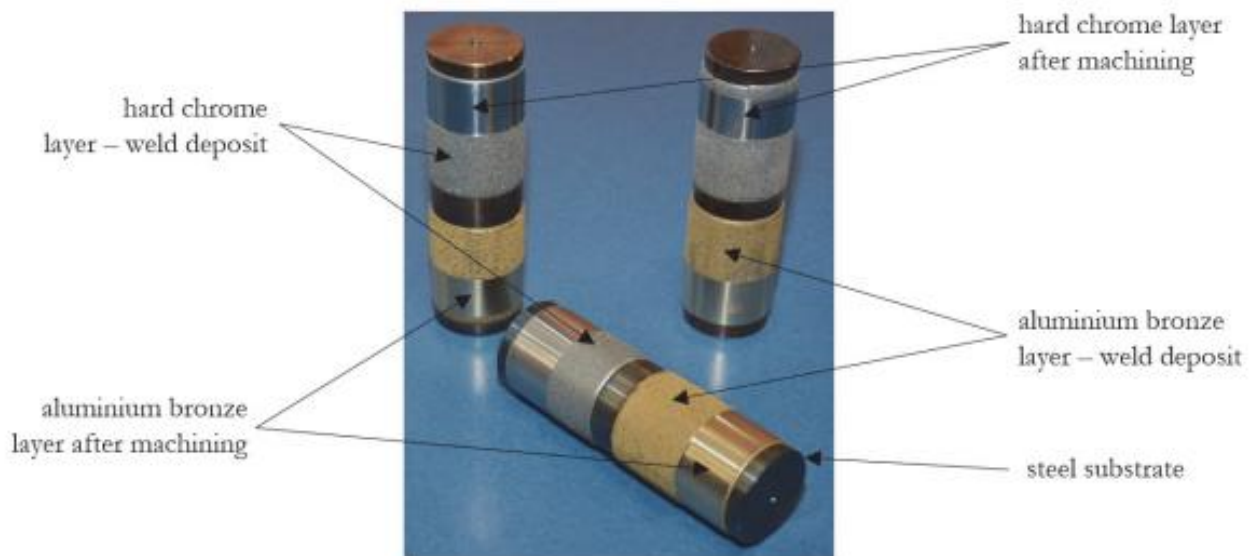


Εικόνα 4.5 Καμπύλες Τάσης - Κύκλων φόρτισης

Κεφάλαιο 5 : Περιγραφή του προβλήματος

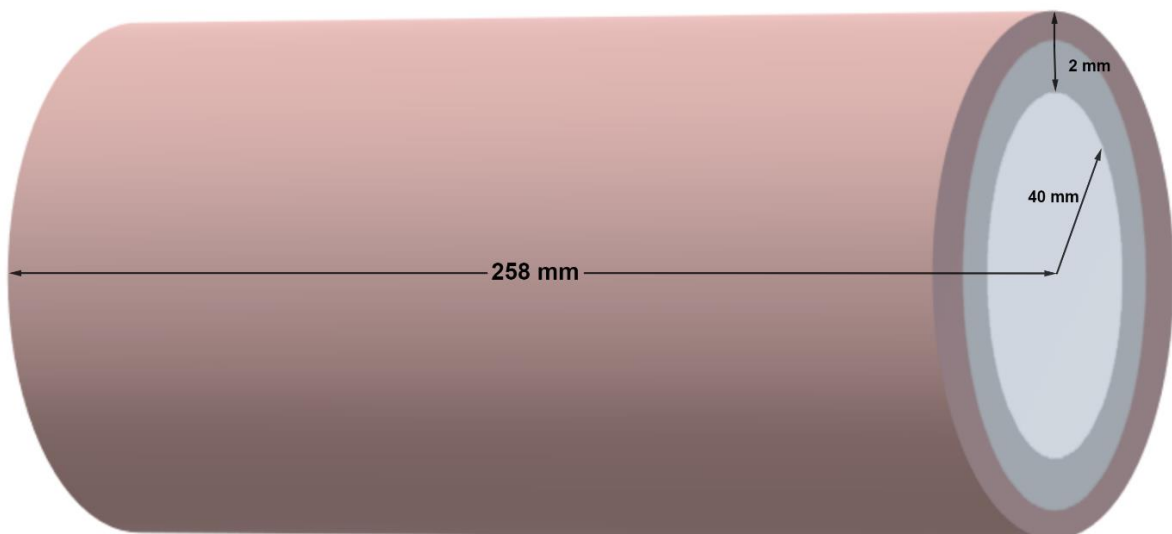
5.1 Γεωμετρία και φόρτιση

Η γεωμετρία των πραγματικών δοκιμών στα οποία θα βασιστεί η μελέτη της παρούσας εργασίας είναι κυλινδρική, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα: [3]



Εικόνα 5.1 Πραγματικά κυλινδρικά δοκίμια χάλυβα με μεταλλικές προστατευτικές επιστρώσεις

Η μοντελοποίηση του δοκιμίου, εφόσον η διεπιφάνεια θεωρείται ως ξεχωριστή φάση θα είναι:



Εικόνα 5.2 Το τριφασικό κυλινδρικό μοντέλο

Θα μελετηθεί το δοκίμιο, και συγκεκριμένα τα ελαστικά μέτρα της ενδιάμεσης φάσης, για διάφορα πάχη αυτής. Η ακτίνα και κατ' επέκταση η περιεκτικότητα του υποστρώματος είναι πάντα η ίδια, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το συνολικό πάχος της επίστρωσης και της ενδιάμεσης φάσης είναι επίσης σταθερό και θα μελετηθούν διαφορετικά ζεύγη τιμών για τις δύο περιεκτικότητες των περιοχών αυτών.

Πίνακας 5.1 Περιεκτικότητες των υλικών για τις υπό μελέτη περιπτώσεις

	Πάχος (mm)	Ακτίνα (mm)	Κατ' όγκον περιεκτικότητα U(%)
Επίστρωση	1	42	4,71
Διεπιφάνεια	1	41	4,59

	Πάχος (mm)	Ακτίνα (mm)	Κατ' όγκον περιεκτικότητα U(%)
Επίστρωση	1.25	42	5.86
Διεπιφάνεια	0.75	40.75	3.43

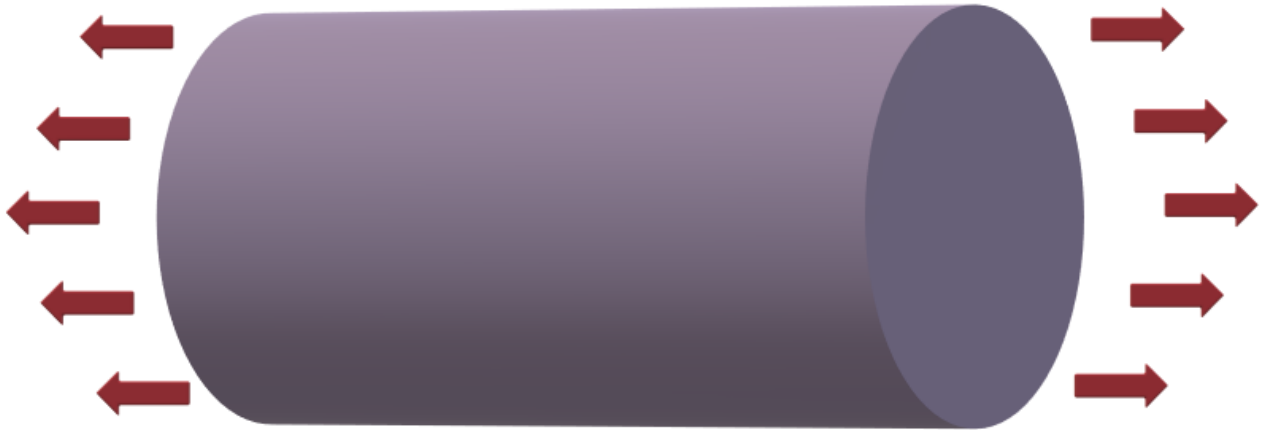
	Πάχος (mm)	Ακτίνα (mm)	Κατ' όγκον περιεκτικότητα U(%)
Επίστρωση	1.5	42	7.54
Διεπιφάνεια	0.5	40.5	2.28

Η κατ' όγκον περιεκτικότητα του υποστρώματος είναι σε κάθε περίπτωση 90,7%.

Για την υπολογιστική μελέτη θα μοντελοποιηθεί το τριφασικό δοκίμιο ως ένας κύλινδρος από ένα ισοδύναμο υλικό, με τη λειτουργία Material Combination του Ansys Mechanical.

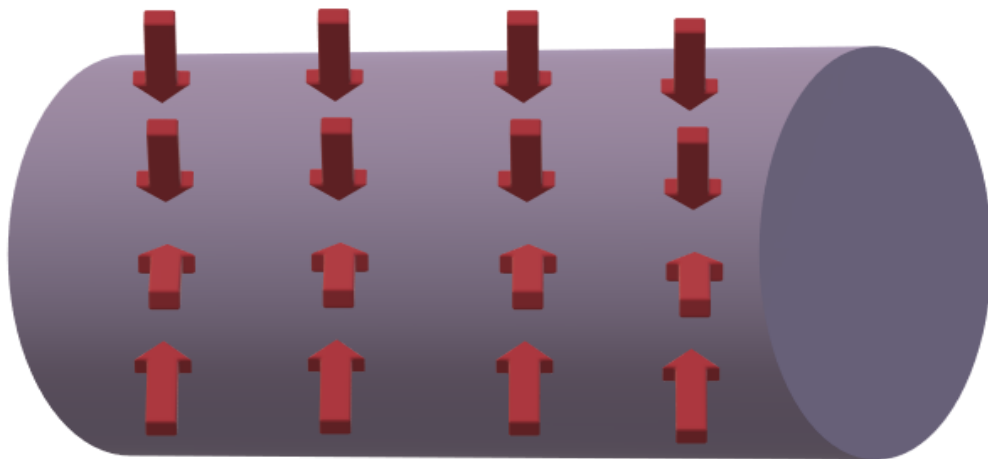
Θα εφαρμοστούν δύο είδη φορτίσεων στο μοντέλο:

- **Εφελκυστική φόρτιση:**



Εικόνα 5.3 Το ισοδύναμο κυλινδρικό μοντέλο υπό εφελκυστική φόρτιση

- **Εγκάρσια πίεση:**



Εικόνα 5.4 Το ισοδύναμο κυλινδρικό μοντέλο υπό εξωτερική πίεση

Για κάθε μία από αυτές τις φορτίσεις θα συγκριθεί το αντίστοιχο μέτρο ελαστικότητας που θα προκύψει υπολογιστικά με τα αποτελέσματα της αναλυτικής λύσης

5.2 Υλικά του δοκιμίου:

Πίνακας 5.2 Τα υλικά του δοκιμίου και τα ελαστικά μέτρα τους

Υλικά	Μέτρο ελαστικότητας (GPa)	Λόγος Poisson
Χάλυβας AISI 4340	200	0.29
Χαλκοαλουμίνιο AMPCO21	110	0.32

Χάλυβας AISI 4340: [28]

Ο χάλυβας AISI 4340 είναι χάλυβας υψηλής αντοχής και ανήκει στην κατηγορία των ελαφρώς κεκραμένων χαλύβων, καθώς οι προσμίξεις που περιέχει είναι σε ποσοστό μικρότερο του 5%.

Κάποια χαρακτηριστικά του που τον καθιστούν ευρέως διαδεδομένο στις κατασκευαστικές εφαρμογές είναι:

- Η υψηλή ολκιμότητα
- Η αντοχή του σε θραύση
- Η υψηλή τάση διαρροής του

Επίσης παρουσιάζει πολύ καλή αντίσταση στην κόπωση, τη φθορά και τη διάβρωση, ενώ μπορεί να υποβληθεί σε θερμικές κατεργασίες

Χρησιμοποιείται κυρίως στους τομείς της αεροναυπηγικής και της αυτοκινητοβιομηχανίας. Ενδεικτικά, ορισμένα εξαρτήματα που κατασκευάζονται από τέτοιο χάλυβα είναι: κιβώτια ταχυτήτων, άξονες μετάδοσης της κίνησης, στροφαλοφόροι άξονες, άτρακτοι κ.α.

Χαλκοαλουμίνιο Ampco 21: [29]

Τέτοια κράματα έχουν ως βάση τον χαλκό και η κύρια πρόσμιξη είναι το αλουμίνιο, ενώ σε μικρότερο ποσοστό μπορεί να εμπεριέχουν νικέλιο, μαγγάνιο, ψευδάργυρο και σίδηρο. Συγκεκριμένα, το Ampco 21 εμπεριέχει μεγαλύτερη ποσότητα αλουμινίου και σιδήρου, σε σχέση με άλλα κράματα της κατηγορίας του, καθώς είναι ειδικά σχεδιασμένο για να παρουσιάζει μεγάλη αντίσταση στη φθορά.

Ορισμένα χαρακτηριστικά του χαλκοαλουμινίου γενικά είναι:

- Καλή αντοχή στην ατμοσφαιρική οξείδωση και τη διάβρωση από θαλάσσιο νερό, καθώς το αλουμίνιο προσφέρει στο υλικό προστατευτικό στρώμα οξειδίων
- Υψηλή μηχανική αντοχή
- Καλή εμφάνιση και χρώμα

Το χαλκοαλουμίνιο χρησιμοποιείται:

- Στη ναυπηγική βιομηχανία (έλικες, αντλίες, άξονες αντλιών)
- Στην αεροναυπηγική
- Στη νομισματοκοπία
- Στη διακόσμηση επιφανειών ή κοσμημάτων

Κεφάλαιο 6 : Αναλυτική λύση

6.1 Παραδοχές

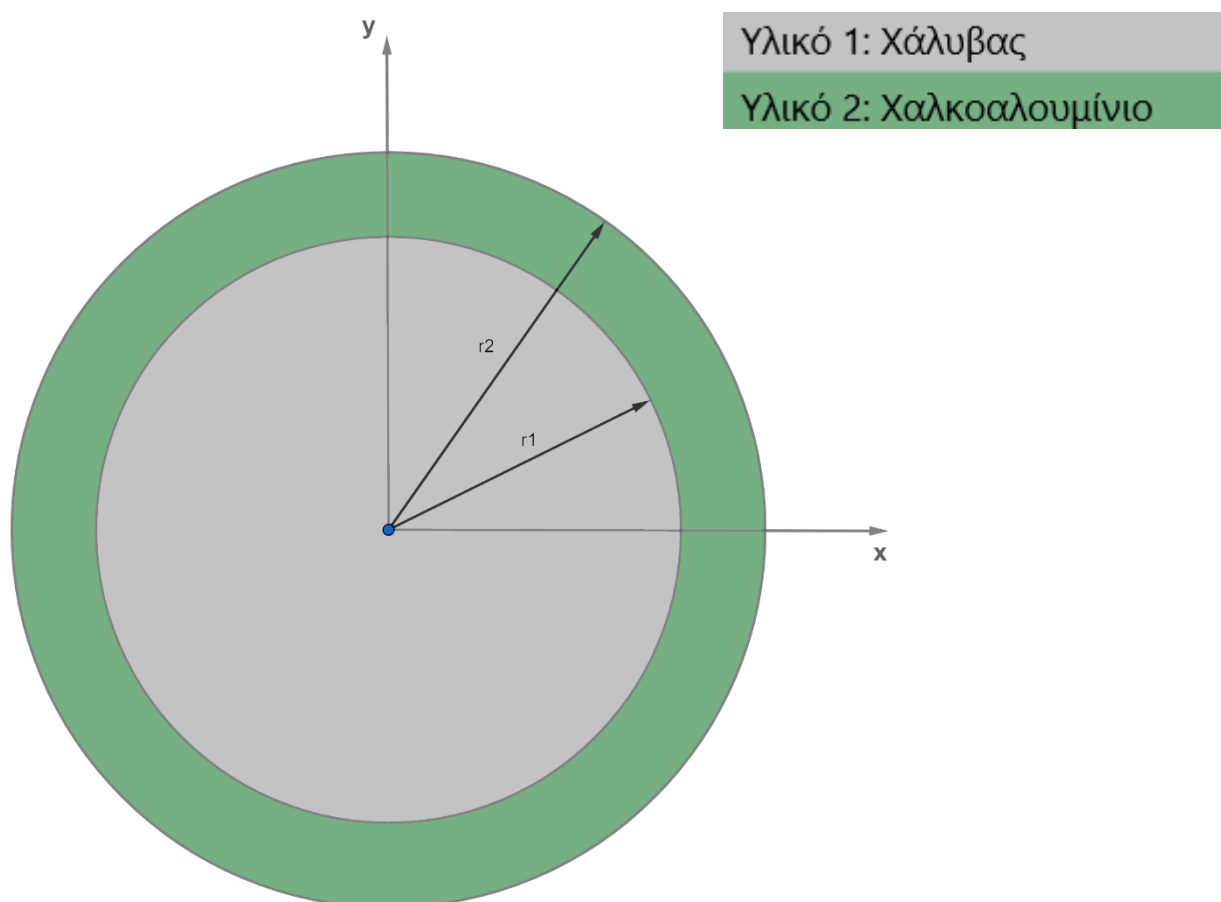
Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται ο αναλυτικός προσδιορισμός των στατικών μέτρων για το κυλινδρικό μοντέλο που μελετάμε σε δύο περιπτώσεις:

- Διφασικό μοντέλο: Χαλύβδινο υπόστρωμα με επίστρωση κράματος αλουμινίου χωρίς την παρουσία ενδιάμεσης φάσης
- Τριφασικό μοντέλο: Ύπαρξη ενδιάμεσης φάσης ανάμεσα στα δύο προαναφερθέντα υλικά του διφασικού μοντέλου.

Η θεωρητική μελέτη των μοντέλων αυτών προϋποθέτει τις εξής παραδοχές:

- Οι φάσεις θεωρούνται ελαστικά, ομογενή και ισότροπα υλικά.
- Οι παραμορφώσεις που αναπτύσσονται στο σύνθετο υλικό είναι αρκετά μικρές, έτσι ώστε να είναι επιτρεπτό να θεωρήσουμε ότι ισχύουν οι γραμμικές σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων.

6.2 Διφασικό μοντέλο:



Εικόνα 6.1 Διατομή του διφασικού κυλινδρικού μοντέλου

Πίνακας 6.1 Υλικά του μοντέλου

Υλικά	Μέτρο ελαστικότητας (GPa)	Λόγος Poisson	Ακτίνα (mm)
Χάλυβας AISI 4340	200	0.29	40
Χαλκοαλουμίνιο AMPCO21	110	0.32	42

Θεωρείται ότι το ύψος της επίστρωσης είναι 2 mm και υπολογίζονται τα διαμήκη και εγκάρσια στατικά μέτρα ως εξής:

Το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας δίνεται από τη σχέση:

$$E_L = E_1 U_1 + E_2 U_2 \quad (6.1)$$

Όπου U_1, U_2 είναι οι κατ' όγκον περιεκτικότητες της κάθε φάσης, δηλαδή:

$$U_1 = \frac{V_1}{V_{tot}} = \frac{\pi r_1^2 l}{\pi r_2^2 l} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

$$U_2 = \frac{V_2}{V_{tot}} = \frac{\pi(r_2^2 - r_1^2)l}{\pi r_2^2 l} = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2^2} \quad (6.2)$$

Αντίστοιχα, ο διαμήκης λόγος Poisson είναι:

$$\nu_{LT} = \nu_1 U_1 + \nu_2 U_2 \quad (6.3)$$

Το μέτρο διάτμησης δίνεται από τον τύπο Tsai-Hahn:

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{1}{U_1 + \eta_2 U_2} \left[\frac{U_1}{G_1} + \frac{\eta_2 U_2}{G_2} \right] \quad (6.4)$$

Ο εγκάρσιος λόγος Poisson δίνεται από τον τύπο του Foye:

$$\nu_{TT} = \nu_2 U_2 + \nu_1 U_1 \left[\frac{1 + \nu_1 - \nu_{LT} \left(\frac{E_1}{E_L} \right)}{1 - \nu_1^2 - \nu_1 \nu_{LT} \left(\frac{E_1}{E_L} \right)} \right] \quad (6.5)$$

Το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{1 - \nu_{TT}}{E_T} = \frac{1}{E_1} (1 - \nu_1 - 2\nu_1^2) U_1 + \frac{1}{E_2} (1 - \nu_2 - 2\nu_2^2) U_2 + \frac{2\nu_{LT}^2}{E_L} \quad (6.6)$$

Με αντικατάσταση των δεδομένων του κυλινδρικού τριφασικού μοντέλου που μελετάται στην εργασία αυτή καταλήγουμε στις παρακάτω τιμές:

$$E_L = 193.6116 \text{ GPa}$$

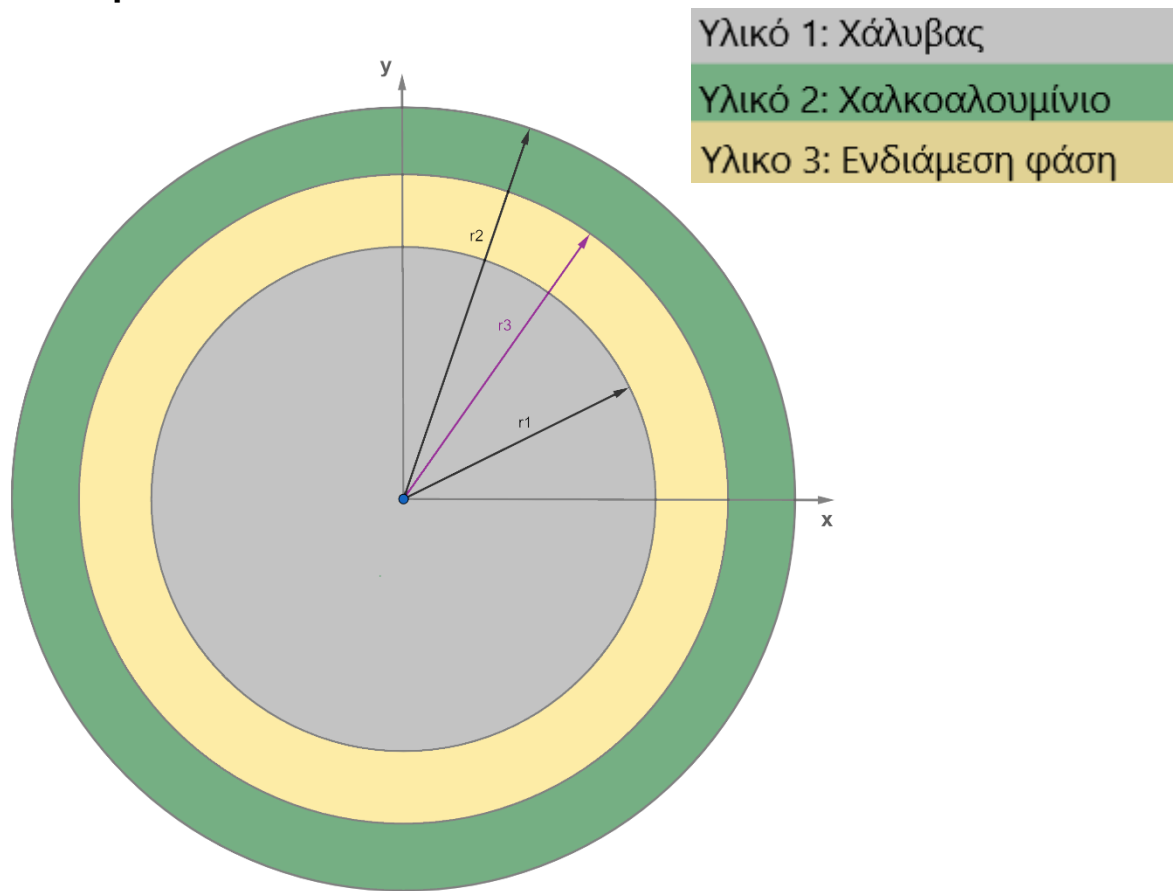
$$\nu_{LT} = 0.2921$$

$$\nu_{TT} = 0.2881$$

$$E_{TT} = 192.1631 \text{ GPa}$$

$$G_{LT} = 75.1402 \text{ GPa}$$

6.3 Τριφασικό μοντέλο:



Εικόνα 6.2 Διατομή του τριφασικού κυλινδρικού μοντέλου

6.3.1 Γεωμετρία και τασική συνάρτηση:

Στο τριφασικό μοντέλο τα υλικά του υποστρώματος και της επίστρωσης είναι ακριβώς τα ίδια και μελετάται η επιρροή της ενδιάμεσης φάσης στο μοντέλο.

Η συνολική ακτίνα του κυλίνδρου είναι 42 mm και του χαλύβδινου υποστρώματος 40 mm. Θα μελετηθούν διάφορα ύψη διεπιφάνειας παραμετρικά. Στους υπολογισμούς που ακολουθούν θεωρήθηκε ότι το ύψος της διεπιφάνειας είναι 1 mm και το ύψος της επίστρωσης επίσης 1 mm. Στους πίνακες στο τέλος της κάθε παραγράφου παρουσιάζονται τα αποτελέσματα και για άλλα ύψη επίστρωσης-ενδιάμεσης φάσης.

Η εξίσωση ισορροπίας σε κυλινδρικές συντεταγμένες ικανοποιείται από την τασική συνάρτηση του Airy:

$$\nabla^4 \Phi = \frac{d^4 \Phi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \Phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\Phi}{dr} = 0 \quad (6.7)$$

Η εξίσωση είναι εξίσωση τύπου Euler με λύση:

$$\Phi = c_1 \ln r + c_2 r^2 \ln r + c_3 r^2 + c_4 \quad (6.8)$$

Κάθε μία από τις τρεις φάσεις τού σύνθετου υλικού μπορεί να περιγραφεί από μία αντίστοιχη τασική συνάρτηση ως εξής:

$$\sigma_{r,1} = \frac{1}{r} \frac{d\Phi_1}{dr} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C \quad (6.9)$$

$$\sigma_{\theta,1} = \frac{d^2\Phi_1}{dr^2} = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \ln r) + 2C \quad (6.10)$$

$$\sigma_{r,2} = \frac{1}{r} \frac{d\Phi_2}{dr} = \frac{F}{r^2} + J(1 + 2 \ln r) + 2H \quad (6.11)$$

$$\sigma_{\theta,2} = \frac{d^2\Phi_2}{dr^2} = -\frac{F}{r^2} + J(3 + 2 \ln r) + 2H \quad (6.12)$$

$$\sigma_{r,3} = \frac{1}{r} \frac{d\Phi_3}{dr} = \frac{K}{r^2} + L(1 + 2 \ln r) + 2M \quad (6.13)$$

$$\sigma_{\theta,3} = \frac{1}{r} \frac{d^2\Phi_3}{dr^2} = -\frac{K}{r^2} + L(3 + 2 \ln r) + 2M \quad (6.14)$$

Για να μην υπάρχει απειρισμός των τάσεων στο σημείο $r=0$, θεωρείται ότι $A=B=0$ και επομένως οι σχέσεις (6.9) και (6.10) δίνουν:

$$\sigma_{r,1} = \sigma_{\theta,1} = 2C \quad (6.15)$$

Για το υπόστρωμα και την ενδιάμεση φάση (interphase) μπορούμε να θεωρήσουμε, λόγω των συνθηκών παραμόρφωσης ότι $J=L=0$, έτσι ώστε:

$$\sigma_{r,2} = \frac{F}{r^2} + 2H \quad (6.16)$$

$$\sigma_{\theta,2} = -\frac{F}{r^2} + 2H \quad (6.17)$$

$$\sigma_{r,3} = \frac{K}{r^2} + 2M \quad (6.18)$$

$$\sigma_{\theta,3} = -\frac{K}{r^2} + 2M \quad (6.19)$$

6.3.2 Εφελκυστική φόρτιση:

Αν εφαρμόσουμε μία εφελκυστική τάση σ_i κατά την διεύθυνση του άξονα z , λόγω της ισορροπίας δυνάμεων σε αυτή τη διεύθυνση:

$$\sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2 + \sigma_3 A_3 = \sigma_{tot} A_{tot} \quad (6.20)$$

Όπου $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ συμβολίζουμε τις τάσεις του υποστρώματος, της επίστρωσης και της ενδιάμεσης φάσης αντίστοιχα, κατά τη διεύθυνση z , ενώ A_1, A_2, A_3 τα αντίστοιχα εμβαδά της κάθε φάσης.

Αν διαιρέσουμε κατά μέλη την παραπάνω σχέση με το συνολικό εμβαδόν A_{tot} έχουμε:

$$\sigma_1 U_1 + \sigma_2 U_2 + \sigma_3 U_3 = \sigma_{tot} \quad (6.21)$$

Όπου U_1, U_2, U_3 είναι οι κατ' όγκον περιεκτικότητες της κάθε φάσης. Φυσικά ισχύει:

$$U_1 + U_2 + U_3 = 1$$

Από τις σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων προκύπτουν τα εξής για τις παραμορφώσεις στη διεύθυνση z :

$$\varepsilon_1 = [\sigma_1 - \nu_1(\sigma_{r,1} + \sigma_{\theta,1})]/E_1 = \varepsilon \quad (6.22)$$

$$\varepsilon_2 = [\sigma_2 - \nu_2(\sigma_{r,2} + \sigma_{\theta,2})]/E_2 = \varepsilon \quad (6.23)$$

$$\varepsilon_3 = [\sigma_3 - \nu_3(\sigma_{r,3} + \sigma_{\theta,3})]/E_3 = \varepsilon \quad (6.24)$$

Αντικαθιστώντας τις (6.15)-(6.19) στις παραπάνω σχέσεις έχουμε:

$$\varepsilon_1 = [\sigma_1 - \nu_1(2C + 2C)]/E_1 = \varepsilon \quad (6.25)$$

$$\varepsilon_2 = [\sigma_2 - \nu_2 \left(\frac{F}{r^2} + 2H - \frac{F}{r^2} + 2H \right)]/E_2 = \varepsilon \quad (6.26)$$

$$\varepsilon_3 = [\sigma_3 - \nu_3 \left(\frac{K}{r^2} + 2M - \frac{K}{r^2} + 2M \right)]/E_3 = \varepsilon \quad (6.27)$$

Και καταλήγουμε στις σχέσεις:

$$\varepsilon_1 = [\sigma_1 - 4\nu_1 C]/E_1 = \varepsilon \quad (6.28)$$

$$\varepsilon_2 = [\sigma_1 - 4\nu_2 H]/E_2 = \varepsilon \quad (6.29)$$

$$\varepsilon_3 = [\sigma_1 - 4\nu_3 M]/E_3 = \varepsilon \quad (6.30)$$

Επιπλέον, για τις γωνιακές συνιστώσες των παραμορφώσεων έχουμε:

$$\varepsilon_{\theta,1} = [\sigma_{\theta,1} - \nu_1(\sigma_{r,1} + \sigma_{z,1})]/E_1 = \varepsilon \quad (6.31)$$

$$\varepsilon_{\theta,2} = [\sigma_{\theta,2} - \nu_2(\sigma_{r,2} + \sigma_{z,2})]/E_2 = \varepsilon \quad (6.32)$$

$$\varepsilon_{\theta,3} = [\sigma_{\theta,3} - \nu_3(\sigma_{r,3} + \sigma_{z,3})]/E_3 = \varepsilon \quad (6.33)$$

Και με αντικατάσταση (6.9)-(6.14) έχουμε:

$$\varepsilon_{\theta,1} = \left[-\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \ln r) + 2C - \nu_1 \left(\frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C + \sigma_1 \right) \right] / E_1 \quad (6.34)$$

$$\varepsilon_{\theta,2} = \left[-\frac{F}{r^2} + J(3 + 2 \ln r) + 2H - \nu_2 \left(\frac{F}{r^2} + J(1 + 2 \ln r) + 2H + \sigma_2 \right) \right] / E_2 \quad (6.35)$$

$$\varepsilon_{\theta,3} = \left[-\frac{K}{r^2} + L(3 + 2 \ln r) + 2M - \nu_3 \left(\frac{K}{r^2} + L(1 + 2 \ln r) + 2M + \sigma_3 \right) \right] / E_3 \quad (6.36)$$

Αντίστοιχα, για τις γωνιακές συνιστώσες έχουμε:

$$\varepsilon_{r,1} = [\sigma_{r,1} - \nu_1(\sigma_{z,1} + \sigma_{\theta,1})]/E_1 = \varepsilon \quad (6.37)$$

$$\varepsilon_{r,2} = [\sigma_{r,2} - \nu_2(\sigma_{z,2} + \sigma_{\theta,2})]/E_2 = \varepsilon \quad (6.38)$$

$$\varepsilon_{r,3} = [\sigma_{r,3} - \nu_3(\sigma_{z,3} + \sigma_{\theta,3})]/E_3 = \varepsilon \quad (6.39)$$

Που με αντικατάσταση μας δίνουν:

$$\varepsilon_{r,1} = \left[\frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C - \nu_1 \left(\sigma_1 - \frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \ln r) + 2C \right) \right] / E_1 \quad (6.40)$$

$$\varepsilon_{r,2} = \left[\frac{F}{r^2} + J(1 + 2 \ln r) + 2H - \nu_2 \left(\sigma_2 - \frac{F}{r^2} + J(3 + 2 \ln r) + 2H \right) \right] / E_2 \quad (6.41)$$

$$\varepsilon_{r,3} = \left[\frac{K}{r^2} + L(1 + 2 \ln r) + 2M - \nu_3 \left(\sigma_3 - \frac{K}{r^2} + L(3 + 2 \ln r) + 2M \right) \right] / E_3 \quad (6.42)$$

Τελικά προκύπτουν τα εξής:

$$\varepsilon_{r,1} = [2C(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2) - \nu_1 E_1 \varepsilon] / E_1 \quad (6.43)$$

$$\varepsilon_{r,2} = \left[(1 + \nu_2) \frac{F}{r^2} + 2H(1 - \nu_2 - 2\nu_2^2) - \nu_2 E_2 \varepsilon \right] / E_2 \quad (6.44)$$

$$\varepsilon_{r,3} = \left[(1 + \nu_3) \frac{K}{r^2} + 2M(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2) - \nu_3 E_3 \varepsilon \right] / E_3 \quad (6.45)$$

$$\varepsilon_{\theta,1} = [2C(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2) - \nu_1 E_1 \varepsilon] / E_1 \quad (6.46)$$

$$\varepsilon_{\theta,2} = \left[-(1 + \nu_2) \frac{F}{r^2} + 2H(1 - \nu_2 - 2\nu_2^2) - \nu_2 E_2 \varepsilon \right] / E_2 \quad (6.47)$$

$$\varepsilon_{\theta,3} = \left[-(1 + \nu_3) \frac{K}{r^2} + 2M(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2) - \nu_3 E_3 \varepsilon \right] / E_3 \quad (6.48)$$

Ισχύει ότι $u_r = r\varepsilon_\theta$, επομένως οι ακτινικές μετατοπίσεις είναι:

$$u_{r,1} = \frac{r}{E_1} [2C - \nu_1(2C + 4\nu_1 C + E_1 \varepsilon)] \quad (6.49)$$

$$u_{r,2} = \frac{r}{E_2} \left[2H - \frac{F}{r^2} - \nu_2 \left(2H + \frac{F}{r^2} + 4\nu_2 H + E_2 \varepsilon \right) \right] \quad (6.50)$$

$$u_{r,3} = \frac{r}{E_3} \left[2M - \frac{K}{r^2} - \nu_3 \left(2M + \frac{K}{r^2} + 4\nu_3 M + E_3 \varepsilon \right) \right] \quad (6.51)$$

Οι συνοριακές συνθήκες είναι:

$$r = r_1 : \sigma_{r,1} = \sigma_{r,3} \rightarrow 2C = \frac{K}{r_1^2} + 2M \quad (6.52)$$

$$r = r_3 : \sigma_{r,3} = \sigma_{r,2} \rightarrow \frac{K}{r_3^2} + 2M = \frac{F}{r_3^2} + 2H \quad (6.53)$$

$$r = r_1 : u_{r,1} = u_{r,3} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} E_3 [2C(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2) - \nu_1 E_1 \varepsilon] \\ = E_1 [2M(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2) - (1 + \nu_3) \frac{K}{r_1^2} - \nu_3 E_3 \varepsilon] \end{aligned} \quad (6.54)$$

$$r = r_3 : \mathbf{u}_{r,3} = \mathbf{u}_{r,2} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} E_2 \left[2M(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2) - (1 + \nu_3) \frac{K}{r^2} - \nu_3 E_3 \varepsilon \right] \\ = E_3 \left[2H(1 - \nu_2 - 2\nu_2^2) - (1 + \nu_2) \frac{F}{r^2} - \nu_2 E_2 \varepsilon \right] \end{aligned} \quad (6.55)$$

$$r = r_2 : \sigma_{r,2} = \mathbf{0} \rightarrow -\frac{F}{r_2^2} = 2H \quad (6.56)$$

Από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων που προκύπτουν από τις συνοριακές συνθήκες, μπορούμε να βρούμε τις σταθερές C, F, H, K, M.

Ισχύει ότι η ενέργεια παραμόρφωσης του ολόκληρου του συστήματος πρέπει να είναι ίση με το άθροισμα της ενέργειας παραμόρφωσης στο υπόστρωμα, την ενδιάμεση φάση και την επίστρωση. Επομένως, για να υπολογίσουμε το διάμετρο μέτρο ελαστικότητας E_L έχουμε τη σχέση:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int E_L \varepsilon^2 dV &= \frac{1}{2} \int_{V_1} (\sigma_{r,1} \varepsilon_{r,1} + \sigma_{\theta,1} \varepsilon_{\theta,1} + \sigma_{z,1} \varepsilon_{z,1}) dV_1 \\ &+ \frac{1}{2} \int_{V_3} (\sigma_{r,3} \varepsilon_{r,3} + \sigma_{\theta,3} \varepsilon_{\theta,3} + \sigma_{z,3} \varepsilon_{z,3}) dV_3 \\ &+ \frac{1}{2} \int_{V_2} (\sigma_{r,2} \varepsilon_{r,2} + \sigma_{\theta,2} \varepsilon_{\theta,2} + \sigma_{z,2} \varepsilon_{z,2}) dV_2 \end{aligned} \quad (6.57)$$

Με αντικατάσταση των διάφορων συνιστωσών τάσεων και παραμορφώσεων της κάθε φάσης προκύπτει η σχέση:

$$\begin{aligned} \int_0^{r_2} E_L \varepsilon^2 r dr &= \frac{1}{E_1} \int_0^{r_1} [8C^2(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2) + E_1^2 \varepsilon^2] r dr \\ &+ \frac{1}{E_3} \int_{r_1}^{r_3} \left[\frac{2K^2}{r^4} (1 + \nu_3) + 8M^2(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2) + E_3^2 \varepsilon^2 \right] r dr \\ &+ \frac{1}{E_2} \int_{r_3}^{r_2} \left[\frac{2F^2}{r^4} (1 + \nu_2) + 8H^2(1 - \nu_2 - 2\nu_2^2) + E_2^2 \varepsilon^2 \right] r dr \end{aligned} \quad (6.58)$$

Με ολοκλήρωση προκύπτει:

$$E_L = E_1 U_1 + E_2 U_2 + \frac{2U_1}{r_1^2} \int_{r_1}^{r_3} E_3(r) r dr \quad (6.59)$$

Για το μέτρο ελαστικότητας της ενδιάμεσης φάσης θα θεωρήσουμε ότι ακολουθεί παραβολική μεταβολή τρίτου βαθμού, της μορφής:

$$E_3(r) = Ar^3 + Br^2 + Cr + D \quad (6.60)$$

Οπότε η σχέση για το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας είναι:

$$E_L = E_1 U_1 + E_2 U_2 + \frac{2U_1}{r_1^2} \left[\frac{A}{5} (r_3^5 - r_1^5) + \frac{B}{4} (r_3^4 - r_1^4) + \frac{C}{3} (r_3^3 - r_1^3) + \frac{D}{3} (r_3^2 - r_1^2) \right] \quad (6.61)$$

Έχουμε τις εξής συνοριακές συνθήκες:

$$r = r_1 : E_3(r) = E_1 \rightarrow Ar_1^3 + Br_1^2 + Cr_1 + D = 200 \quad (6.62)$$

$$r = r_3 : E_3(r) = E_2 \rightarrow Ar_3^3 + Br_3^2 + Cr_3 + D = 110 \quad (6.63)$$

$$r = r_1 : E_3'(r) = 0 \rightarrow 3Ar_1^2 + 2Br_1 + C = 0 \quad (6.64)$$

$$r = r_3 : E_3'(r) = 0 \rightarrow 3Ar_3^2 + 2Br_3 + C = 0 \quad (6.65)$$

Για ύψος της διεπιφάνειας 1mm, θα έχουμε $r_3=41$ mm και από την επίλυση του συστήματος οι τιμές για τις σταθερές A, B, C, D θα είναι:

$$A = 180 \quad B = -21870 \quad C = 885600 \quad D = -11951800$$

Επομένως, το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας θα είναι: $E_L = 193,6888 \text{ GPa}$

Με γνωστές αυτές τις σταθερές μπορεί τώρα να υπολογιστεί η μέση τιμή της συνάρτησης $E_3(r)$ της ενδιάμεσης φάσης:

$$\begin{aligned} \bar{E}_3 &= \frac{1}{V_3} \int_{r_1}^{r_3} E_3(r) dV = \frac{1}{V_3} \int_{r_1}^{r_3} (Ar^3 + Br^2 + Cr + D) 2\pi h r dr \Rightarrow \\ \bar{E}_3 &= \frac{2}{r_3^2 - r_1^2} \left[\frac{A}{5} (r_3^5 - r_1^5) + \frac{B}{4} (r_3^4 - r_1^4) + \frac{C}{3} (r_3^3 - r_1^3) + \frac{D}{2} (r_3^2 - r_1^2) \right] \quad (6.66) \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση των σταθερών προκύπτει ότι: $\bar{E}_3 = 154.7778 \text{ GPa}$

Μετά την θεώρηση της ενδιάμεσης φάσης, οι κατ' όγκον περιεκτικότητες της κάθε φάσης υπολογίζονται εκ νέου ως εξής:

$$U_1 = \frac{V_1}{V_{tot}} = \frac{\pi r_1^2 l}{\pi r_2^2 l} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = 0.907$$

$$U_2 = \frac{V_2}{V_{tot}} = \frac{\pi(r_2^2 - r_3^2)l}{\pi r_2^2 l} = \frac{r_2^2 - r_3^2}{r_2^2} = 0.0471$$

$$U_3 = \frac{V_3}{V_{tot}} = \frac{\pi(r_3^2 - r_1^2)l}{\pi r_2^2 l} = \frac{r_3^2 - r_1^2}{r_2^2} = 0.0459$$

Για τον υπολογισμό του λόγου Poisson της ενδιάμεσης φάσης θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε μία μεταβολή αντίστοιχη με εκείνη για το μέτρο ελαστικότητας. Όμως, επειδή οι λόγοι Poisson του υποστρώματος ($\nu_1 = 0.29$) και της επίστρωσης ($\nu_2 = 0.32$) είναι πολύ κοντά μπορούμε να θεωρήσουμε προσεγγιστικά τον λόγο Poisson της ενδιάμεσης φάσης με μία τιμή ανάμεσα σε αυτές της επίστρωσης και του υποστρώματος: $\nu_3 = 0.31$

Επίσης, λόγω της μικρής διαφοράς στους λόγους Poisson του υποστρώματος και της επίστρωσης μπορούμε να υπολογίσουμε τον διαμήκη λόγο Poisson με απλό νόμο των φάσεων, όπως και στο διφασικό μοντέλο:

$$\nu_{LT} = \nu_1 U_1 + \nu_2 U_2 + \nu_3 U_3 \Rightarrow \nu_{LT} = 0.2923$$

Το μέτρο διατμήσεως G_{LT} του τριφασικού μοντέλου δίνεται απο τον τύπο Tsai-Hahn:

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{1}{U_1 + U_3 + \eta_2 U_2} \left[\frac{U_1}{G_1} + \frac{U_3}{G_3} + \frac{\eta_2 U_2}{G_2} \right] \quad (6.67)$$

όπου $\eta_2 \approx 0.50$ και $G_i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)}$, $i = 1,2,3$

Υπολογίστηκε ότι : **$G_{LT} = 74.8681 \text{ GPa}$**

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα ελαστικά μεγέθη που υπολογίσαμε για διαφορετικά ύψη της διεπιφάνειας:

Πίνακας 6.2 Διαμήκη ελαστικά μέτρα που προέκυψαν από την αναλυτική λύση για διάφορα ύψη της ενδιάμεσης φάσης

Πάχος διεπιφάνειας (mm)	Μέτρο ελαστικότητας ενδιάμεσης φάσης \bar{E}_3 (GPa)	Διαμήκες μέτρο ελαστικότητας E_L (GPa)	Διαμήκης λόγος Poisson ν_{LT}	Μέτρο διατμήσεως G_{LT} (GPa)
1	154.7778	193.6888	0.2923	74.8681
0.75	154.8328	193.1719	0.2924	74.7523
0.5	154.8882	192.6569	0.2926	74.6355

Συμπεράσματα:

Το μέτρο ελαστικότητας της ενδιάμεσης φάσης παρουσιάζει μικρές μεταβολές ανάλογα με το ύψος της, αποτέλεσμα που είναι αναμενόμενο καθώς η ενδιάμεση φάση και η επίστρωση είναι μικρής περιεκτικότητας συγκριτικά με το υπόστρωμα. Κατ' επέκταση μικρές είναι και οι διαφορές που παρουσιάζουν τα διαμήκη ελαστικά μέτρα.

6.3.3 Φόρτιση με εξωτερική πίεση:

Στην περίπτωση αυτή θεωρείται ότι ασκείται στον κύλινδρο εξωτερική πίεση P , η οποία δημιουργεί κατάσταση επίπεδης παραμόρφωσης με $\epsilon_{zz}=0$.

Ο εγκάρσιος λόγος Poisson προκύπτει από την σχέση του Foye, τροποποιημένη ώστε να ληφθεί υπόψιν η ενδιάμεση φάση:

$$\nu_{TT} = \nu_2 U_2 + \nu_3 U_3 + \nu_1 U_1 \left[\frac{1 + \nu_1 - \nu_{LT} \left(\frac{E_1}{E_L} \right)}{1 - \nu_1^2 - \nu_1 \nu_{LT} \left(\frac{E_1}{E_L} \right)} \right] \quad (6.68)$$

Από την οποία προκύπτει: $\nu_{TT} = 0.2846$

Προχωράμε στον υπολογισμό του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας. Οι γωνιακές και ακτινικές συνιστώσες των τάσεων είναι οι ίδιες που προέκυψαν από την τασική συνάρτηση στον εφελκυστικό τύπο φόρτισης.

Λόγω της θεώρησης επίπεδης παραμόρφωσης, για τις παραμορφώσεις στη διεύθυνση z έχουμε:

$$\epsilon_1 = [\sigma_1 - \nu_1(\sigma_{r,1} + \sigma_{\theta,1})]/E_1 = 0 \quad (6.69)$$

$$\varepsilon_2 = [\sigma_2 - \nu_2(\sigma_{r,2} + \sigma_{\theta,2})]/E_2 = 0 \quad (6.70)$$

$$\varepsilon_3 = [\sigma_3 - \nu_3(\sigma_{r,3} + \sigma_{\theta,3})]/E_3 = 0 \quad (6.71)$$

Λύνοντας για τις αξονικές τάσεις προκύπτει:

$$\sigma_1 = 4C\nu_1 \quad (6.72)$$

$$\sigma_2 = 4H\nu_2 \quad (6.73)$$

$$\sigma_3 = 4M\nu_3 \quad (6.74)$$

Οι αξονικές μετατοπίσεις είναι:

$$u_{r,1} = r\varepsilon_{\theta,1} = \frac{2C}{E_1}(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2)r \quad (6.75)$$

$$u_{r,2} = r\varepsilon_{\theta,2} = \frac{r}{E_2} \left[-\frac{F}{r^2}(1 + \nu_2) + 2H(1 - \nu_2 - 2\nu_2^2) \right] \quad (6.76)$$

$$u_{r,3} = r\varepsilon_{\theta,3} = \frac{r}{E_3} \left[-\frac{K}{r^2}(1 + \nu_3) + 2M(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2) \right] \quad (6.77)$$

Οι συνοριακές συνθήκες είναι:

$$r = r_1 : \sigma_{r,1} = \sigma_{r,3} \rightarrow 2C = \frac{K}{r_1^2} + 2M \quad (6.78)$$

$$r = r_3 : \sigma_{r,3} = \sigma_{r,2} \rightarrow \frac{K}{r_3^2} + 2M = \frac{F}{r_3^2} + 2H \quad (6.79)$$

$$r = r_1 : u_{r,1} = u_{r,3} \rightarrow$$

$$E_3[2C(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2)] = E_1[2M(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2) - (1 + \nu_3)\frac{K}{r^2}] \quad (6.80)$$

$$r = r_3 : u_{r,3} = u_{r,2} \rightarrow$$

$$E_2 \left[2M(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2) - (1 + \nu_3)\frac{K}{r^2} \right] = E_3 \left[2H(1 - \nu_2 - 2\nu_2^2) - (1 + \nu_2)\frac{F}{r^2} \right] \quad (6.81)$$

$$r = r_2 : \sigma_{r,2} = -P \rightarrow -\frac{F}{r_2^2} + 2H = -P \quad (6.82)$$

Οι εκφράσεις των παραμορφώσεων για τις τρεις φάσεις προκύπτουν από τις σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων:

$$\varepsilon_{r,1} = \frac{2C}{E_1} (1 - \nu_1 - 2\nu_1^2) \quad (6.83)$$

$$\varepsilon_{\theta,1} = \frac{2C}{E_1} (1 - \nu_1 - 2\nu_1^2) \quad (6.84)$$

$$\varepsilon_{r,2} = \frac{1}{E_2} [2H(1 - \nu_2 - 2\nu_2^2) - (1 + \nu_2) \frac{F}{r^2}] \quad (6.85)$$

$$\varepsilon_{\theta,2} = \frac{1}{E_2} [2H(1 - \nu_2 - 2\nu_2^2) - (1 + \nu_2) \frac{F}{r^2}] \quad (6.86)$$

$$\varepsilon_{r,3} = \frac{1}{E_3} [2M(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2) - (1 + \nu_3) \frac{K}{r^2}] \quad (6.87)$$

$$\varepsilon_{\theta,3} = \frac{1}{E_3} [2M(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2) - (1 + \nu_3) \frac{K}{r^2}] \quad (6.88)$$

Με την υπόθεση ότι το σύνθετο υλικό μας υπακούει στον νόμο του Hooke, ισχύουν οι σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E_T} [\sigma_{xx} - \nu_{TT}\sigma_{yy}] - \frac{\nu_{LT}}{E_L} \sigma_{zz} \quad (6.89)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E_T} [\sigma_{yy} - \nu_{TT}\sigma_{xx}] - \frac{\nu_{LT}}{E_L} \sigma_{zz} \quad (6.90)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E_T} [\sigma_{zz} - \nu_{TT}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \quad (6.91)$$

Το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας του σύνθετου μπορεί να ευρεθεί με την εφαρμογή της ισότητας ενεργειών στο κυλινδρικό μοντέλο. Η ενέργεια παραμόρφωσης όλου του συστήματος ισούται με το άθροισμα των ενεργειών παραμόρφωσης των επιμέρους φάσεων:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \frac{P^2}{K_c} dV_c &= \frac{1}{2} \int_{V_1} (\sigma_{r,1} \varepsilon_{r,1} + \sigma_{\theta,1} \varepsilon_{\theta,1} + \sigma_{z,1} \varepsilon_{z,1}) dV_1 \\ &+ \frac{1}{2} \int_{V_3} (\sigma_{r,3} \varepsilon_{r,3} + \sigma_{\theta,3} \varepsilon_{\theta,3} + \sigma_{z,3} \varepsilon_{z,3}) dV_3 \\ &+ \frac{1}{2} \int_{V_2} (\sigma_{r,2} \varepsilon_{r,2} + \sigma_{\theta,2} \varepsilon_{\theta,2} + \sigma_{z,2} \varepsilon_{z,2}) dV_2 \end{aligned} \quad (6.92)$$

Όπου K_c το μέτρο διογκώσεως που προκύπτει ως εξής:

Ο συντελεστής του όγκου του σύνθετου μπορεί να βρεθεί από τη μεταβολή του όγκου που προκύπτει λόγω της πίεσης P .

$$1 + \Delta V = (1 + \varepsilon_{xx})(1 + \varepsilon_{yy})(1 + \varepsilon_{zz}) \approx \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} \quad (6.93)$$

αφού $\varepsilon_{zz}=0$

$$\text{Επομένως: } \sigma_{zz} = \nu_{LT}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (6.94)$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις υπολογίζουμε τον λόγο $\frac{\Delta V}{V}$:

$$\frac{\Delta V}{V} = 2P \left[\frac{1 - \nu_{TT}}{E_T} - \frac{2\nu_{LT}^2}{E_L} \right] \quad (6.95)$$

Έτσι, μπορούμε να υπολογίσουμε και το μέτρο διογκώσεως K_c :

$$K_c = \frac{P}{\Delta V/V} = \frac{1}{2 \left[\frac{1 - \nu_{TT}}{E_T} - \frac{2\nu_{LT}^2}{E_L} \right]} \quad (6.96)$$

Η τελική σχέση που προκύπτει για το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας είναι:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \nu_{TT}}{E_T} - \frac{2\nu_{LT}^2}{E_L} &= \frac{1}{E_1}(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2)U_1 + \frac{1}{E_2}(1 - \nu_2 - 2\nu_2^2)U_2 \\ &+ \frac{2U_1}{r_1^2}(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2) \int_{r_1}^{r_3} \frac{1}{E_3(r)} r dr \end{aligned}$$

(6.97)

Το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας υπολογίστηκε $E_T = 192,5037 \text{ GPa}$

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι τιμές των εγκάρσιων ελαστικών μέτρων για διαφορετικά ύψη της ενδιάμεσης φάσης:

Πίνακας 6.3 Εγκάρσια ελαστικά μέτρα που προέκυψαν από την αναλυτική λύση για διάφορα ύψη της ενδιάμεσης φάσης

Πάχος διεπιφάνειας (mm)	Εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας E_T (GPa)	Εγκάρσιος λόγος Poisson ν_{LT}
1	192.5037	0.2883
0.75	191.8212	0.2881
0.5	191.1460	0.2879

Συμπέρασμα:

Τα εγκάρσια ελαστικά μέτρα, όπως και τα διαμήκη παρουσιάζουν μικρές μεταβολές ανάλογα με το ύψος της ενδιάμεσης φάσης, λόγω της μικρής της περιεκτικότητας σε σχέση με το υπόστρωμα.

6.3.4 Έλεγχος ορθότητας αναλυτικής λύσης

Σε αυτή την παράγραφο εφαρμόζονται οι σχέσεις της αναλυτικής λύσης των προηγούμενων παραγράφων για τα ελαστικά μέτρα γνωστού ινώδους υλικού με ενδιάμεση φάση και συγκρίνονται με τις αναμενόμενες τιμές.

Επιπλέον, το διάμηκες και το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας, υπολογίζονται μέσω διαφορετικών σχέσεων και συγκρίνονται με τις τιμές της προηγούμενης παραγράφου.

Το ινώδες σύνθετο υλικό αποτελείται από τα εξής επιμέρους υλικά:

Πίνακας 6.4: Ιδιότητες Ινώδους υλικού

Φάσεις	Μέτρο ελαστικότητας (GPa)	Λόγος Poisson	Ακτίνα (mm)
Μήτρα	70	0.20	6.397
Έγκλεισμα	3.5	0.35	6
Ενδιάμεση Φάση	36.5		6.235

Στον παρακάτω πίνακα γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων και των αναμενόμενων τιμών για το ινώδες υλικό:

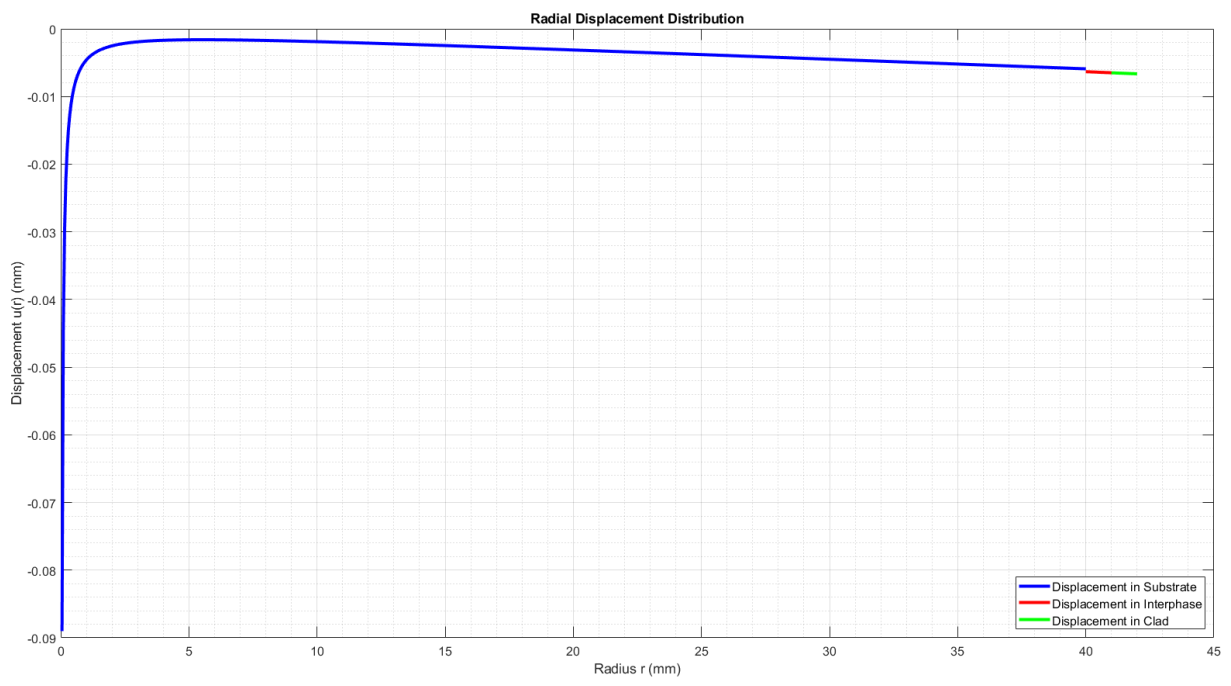
Πίνακας 6.5 Αποτελέσματα αναλυτικής λύσης για το ινώδες υλικό

	Αναμενόμενες τιμές	Αποτελέσματα
Διάμηκες μέτρο ελαστικότητας E_{LT} (GPa)	48-49	48.3
Διαμήκης λόγος Poisson ν_{LT}	0.2	0.24
Εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας E_T (GPa)	16	16.9

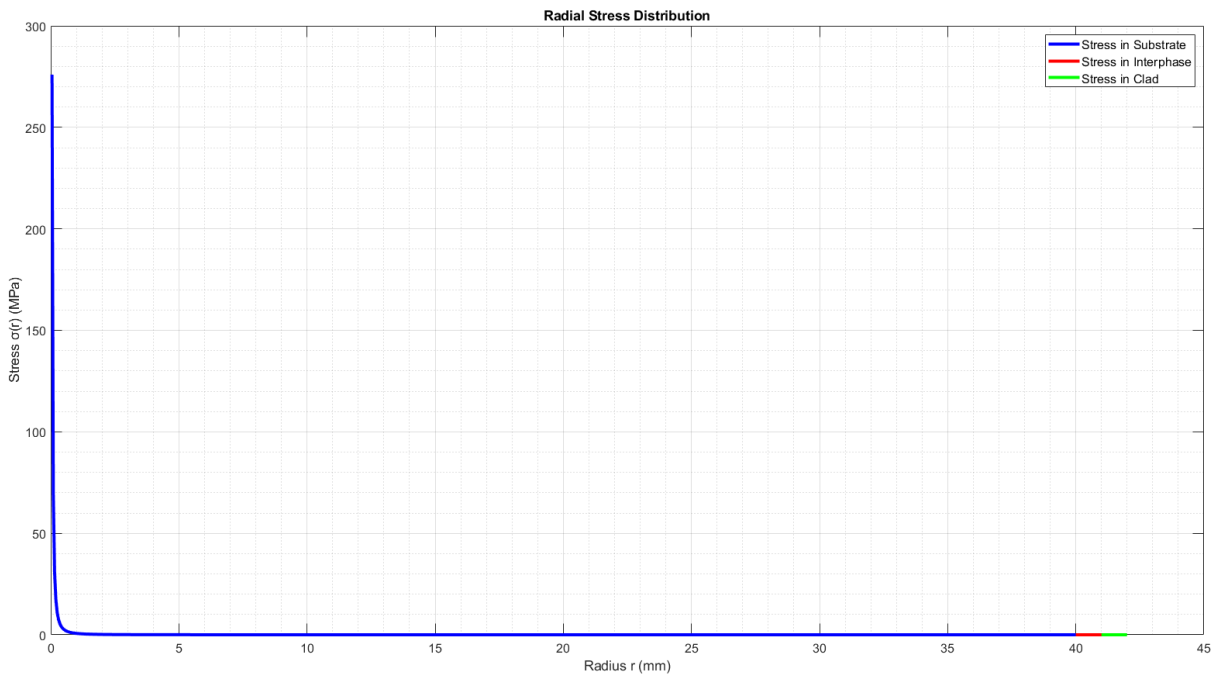
Συμπερασματικά, οι σχέσεις που χρησιμοποιήθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο έχουν ικανοποιητικά καλή ακρίβεια.

6.3.5 Κατανομές τάσεων σ_r , σ_θ και ακτινικής μετατόπισης

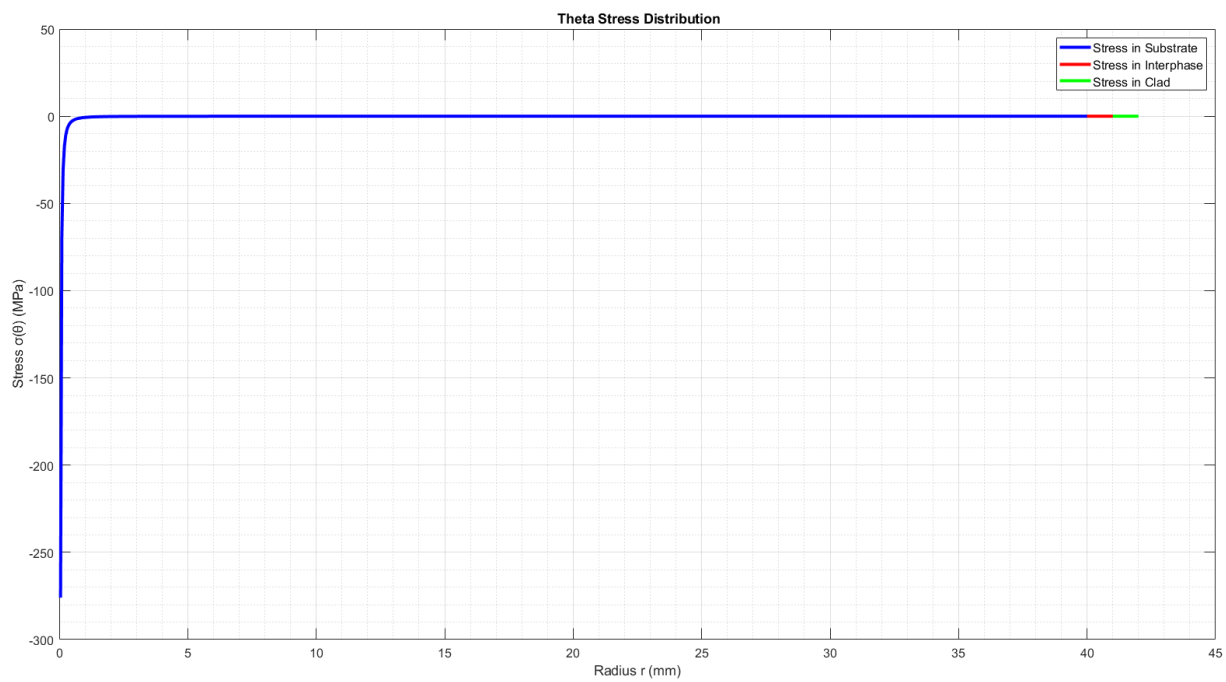
Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζονται οι κατανομές των τάσεων σ_r , σ_θ και της μετατόπισης U_r .



Εικόνα 6.3 Ακτινική μετατόπιση U_r



Εικόνα 6.4 Τάση σ στην ακτινική διεύθυνση



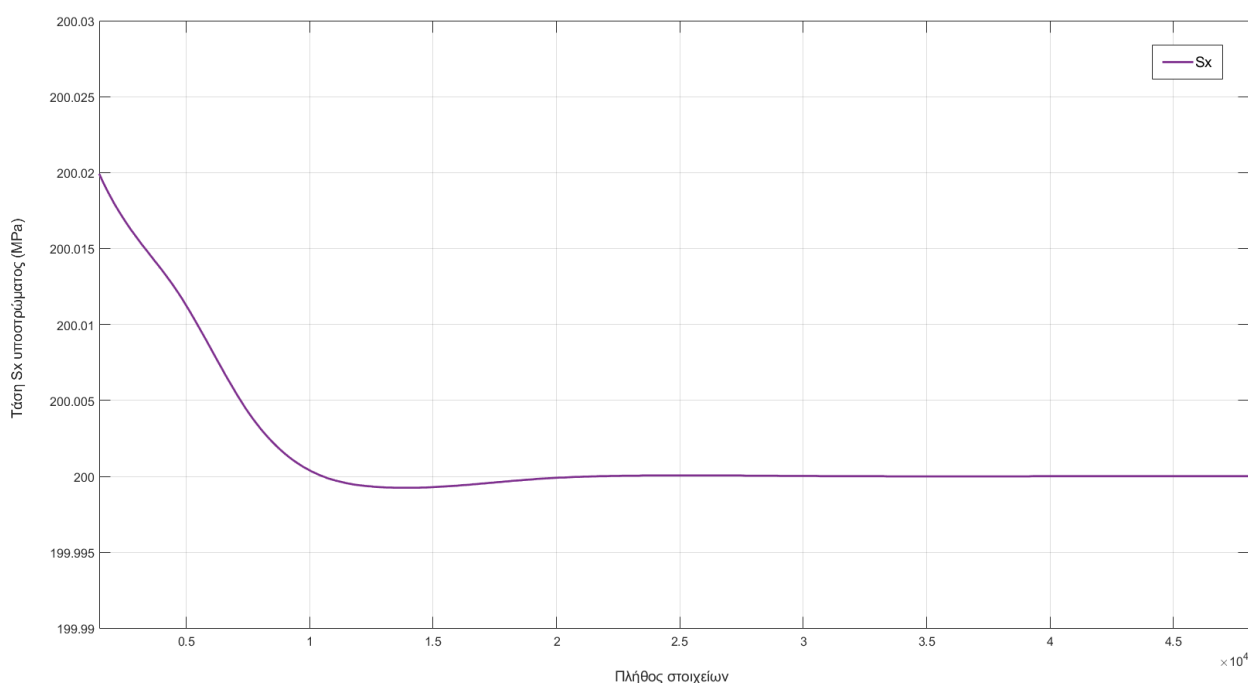
Εικόνα 6.5 Τάση σ στη διεύθυνση θ

Κεφάλαιο 7 : Υπολογιστική μελέτη

7.1 Ισοδύναμο μοντέλο

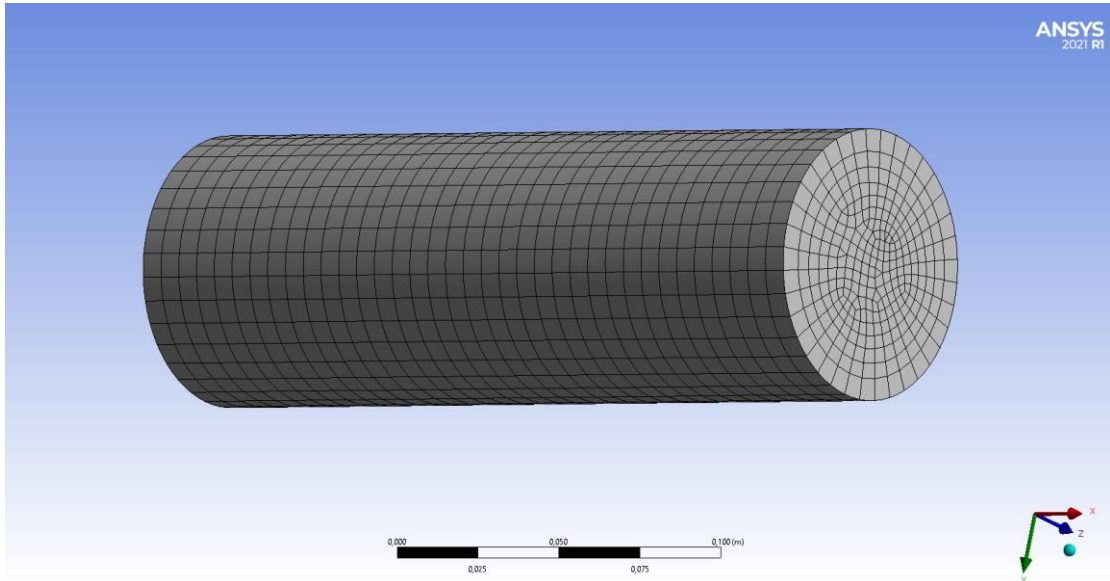
Το ισοδύναμο μοντέλο κατασκευάζεται με την μέθοδο Material Combination του Ansys, όπου εισάγονται τα υλικά και οι ιδιότητες τους και καθορίζεται η περιεκτικότητα του κάθε υλικού στον κύλινδρο.

Ελέγχεται η σύγκλιση του μοντέλου για διάφορα πλήθη στοιχείων διακριτοποίησης, για να ευρεθεί ένας ικανοποιητικός αριθμός στοιχείων.

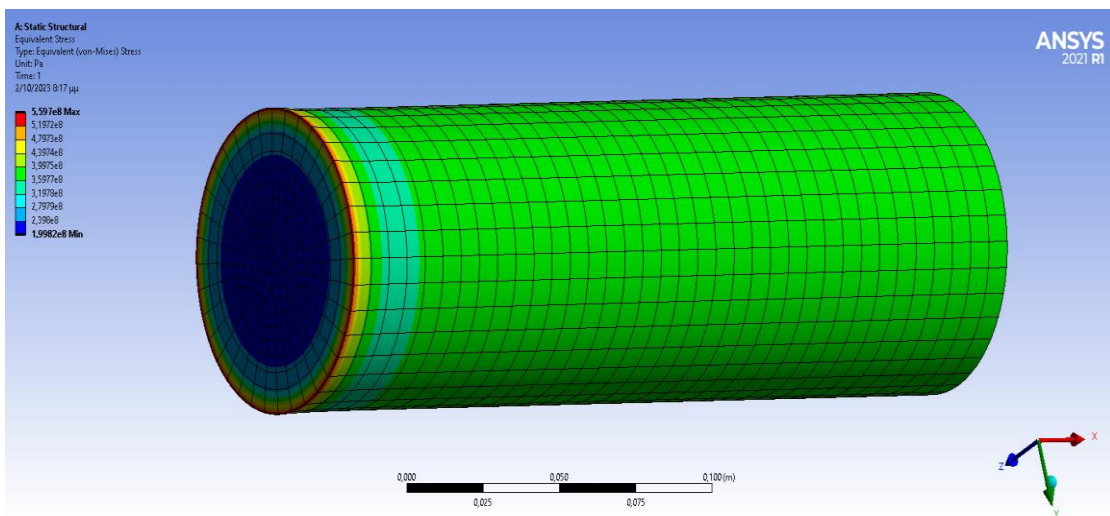


Εικόνα 7.1 Διάγραμμα σύγκλισης της ακρίβειας του ισοδύναμου κυλινδρικού μοντέλου

Το μοντέλο συγκλίνει για περισσότερα από 7500 στοιχεία. Επιλέγεται, επομένως, μια διακριτοποίηση 10188 στοιχείων.



Εικόνα 7.2 Διακριτοποίηση του ισοδύναμου κυλινδρικού μοντέλου



Εικόνα 7.3 Κατανομή των τάσεων von Mises Equivalent Stress στο ισοδύναμο κυλινδρικό μοντέλο

7.2 Ελαστικά μέτρα από την υπολογιστική μελέτη:

7.2.1 1^{ος} τύπος φόρτισης: Εφελκυστική φόρτιση:

Εφαρμόζεται στο ισοδύναμο κυλινδρικό μοντέλο πάκτωση στο ένα άκρο και σταθερή μετατόπιση στο άλλο. Εφόσον η φόρτιση είναι μόνο εφελκυστική, θα μελετηθεί το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας και θα συγκριθεί με τα αποτελέσματα της αναλυτικής λύσης για αυτόν τον τύπο φόρτισης.

Το Ansys κατά τη δημιουργία του ισοδύναμου μοντέλου, δίνει το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας E_L , τον διαμήκη λόγο Poisson ν_{LT} και το μέτρο διάτμησης G_{LT} . Για τις τρεις περιπτώσεις του πάχους της ενδιάμεσης φάσης τα ελαστικά μέτρα υπολογίστηκαν από το Ansys ως εξής:

- Για πάχος ενδιάμεσης φάσης 1 mm:

Materials	
Structural Steel	90,7%
Interphase	4,59%
Ampco 21	4,71%

$$E_L = 193.69 \text{ MPa}$$
$$\nu_{LT} = 0.29233$$
$$G_{LT} = 74.936$$

Material Combination	
Density	kg/m ³
Structural	
▼ Isotropic Elasticity	
Derive from	Young's Modulus and Poisson's Ratio
Young's Modulus	1,9369e+11 Pa
Poisson's Ratio	0,29233
Bulk Modulus	1,5544e+11 Pa
Shear Modulus	7,4936e+10 Pa
Isotropic Secant Coefficient of Thermal Expansion	1/°C

Εικόνα 7.4 Περιεκτικότητες επιμέρους υλικών και ελαστικά μέτρα για ύψος ενδιάμεσης φάσης 1mm στο υπολογιστικό μοντέλο

- Για πάχος ενδιάμεσης φάσης 0.75 mm:

Materials	
Structural Steel	90,7%
Interphase	3,43%
Ampco 21	5,86%

$$E_L = 193.16 \text{ MPa}$$

$$\nu_{LT} = 0.29242$$

$$G_{LT} = 74.727$$

Material Combination	
Density	kg/m ³
Structural	
▼ Isotropic Elasticity	
Derive from	Young's Modulus and Poisson's Ratio
Young's Modulus	1,9316e+11 Pa
Poisson's Ratio	0,29242
Bulk Modulus	3,0968e+11 Pa
Shear Modulus	1,4951e+11 Pa
Isotropic Secant Coefficient of Thermal Expansion	1/°C

Εικόνα 7.5 Περιεκτικότητες επιμέρους υλικών και ελαστικά μέτρα για ύψος ενδιάμεσης φάσης 0.75 mm στο υπολογιστικό μοντέλο

- Για πάχος ενδιάμεσης φάσης 0.5 mm:

Materials	
Structural Steel	90,7%
Interphase	2,28%
Ampco 21	7,02%

$$E_L = 192.65 \text{ MPa}$$

$$\nu_{LT} = 0.29256$$

$$G_{LT} = 74.727$$

Material Combination	
Density	kg/m ³
Structural	
▼ Isotropic Elasticity	
Derive from	Young's Modulus and Poisson's Ratio
Young's Modulus	1,9265e+11 Pa
Poisson's Ratio	0,29256
Bulk Modulus	1,5479e+11 Pa
Shear Modulus	7,4523e+10 Pa
Isotropic Secant Coefficient of Thermal Expansion	1/°C

Εικόνα 7.6 Περιεκτικότητες επιμέρους υλικών και ελαστικά μέτρα για ύψος ενδιάμεσης φάσης 0.5 mm στο υπολογιστικό μοντέλο

Συγκρίνονται οι τιμές του υπολογιστικού μοντέλου με τις τιμές που εξήχθησαν από την αναλυτική λύση:

Πίνακας 7.1 Σύγκριση διαμήκους μέτρου ελαστικότητας αναλυτικής και υπολογιστικής μελέτης

Πάχος ενδιάμεσης φάσης (mm)	Διάμηκες μέτρο ελαστικότητας E_L αναλυτικής λύσης (GPa)	Διάμηκες μέτρο ελαστικότητας E_L υπολογιστικού μοντέλου (GPa)
1	193.69	193.69
0.75	193.17	193.16
0.5	192.65	192.65

Πίνακας 7.2 Σύγκριση διαμήκους λόγου Poisson αναλυτικής και υπολογιστικής μελέτης

Πάχος ενδιάμεσης φάσης (mm)	Λόγος Poisson ν_{LT} αναλυτικής λύσης (GPa)	Λόγος Poisson ν_{LT} υπολογιστικού μοντέλου (GPa)
1	0.2923	0.2923
0.75	0.2924	0.2924
0.5	0.2926	0.2926

Πίνακας 7.3 Σύγκριση μέτρου διάτμησης αναλυτικής και υπολογιστικής μελέτης

Πάχος ενδιάμεσης φάσης (mm)	Μέτρο διάτμησης G_{LT} αναλυτικής λύσης (GPa)	Μέτρο διάτμησης G_{LT} υπολογιστικού μοντέλου (GPa)
1	74.868	74.936
0.75	74.752	74.727
0.5	74.646	74.523

Συμπέρασμα:

Τα αποτελέσματα της αναλυτικής και της υπολογιστικής μελέτης είναι σχεδόν όμοια. Συνεπώς, εφόσον σε προηγούμενη παράγραφο έχει επιβεβαιωθεί η ορθότητα της αναλυτικής λύσης, προκύπτει ότι η υπολογιστική προσέγγιση του ισοδύναμου μοντέλου παρέχει ακριβή αποτελέσματα και μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε αντίστοιχα προβλήματα μελέτης της συμπεριφοράς σύνθετων υλικών.

7.2.2 2^{ος} τύπος φόρτισης: Εγκάρσια πίεση

Εφαρμόζεται πάκτωση και στα δύο άκρα του κυλίνδρου και επιβάλλεται στην εξωτερική του επιφάνεια πίεση.

Το τριφασικό μοντέλο από το οποίο ξεκίνησε η παρούσα μελέτη αποτελείται από ομογενή και ισότροπα υλικά-φάσεις. Συνολικά ο τριφασικός κύλινδρος δεν είναι ομογενής και ισότροπος μικροσκοπικά. Όμως, λόγω της αξονοσυμμετρίας που παρουσιάζει, μπορεί να θεωρηθεί ότι ο κύλινδρος από το ισοδύναμο υλικό Material Combination είναι μακροσκοπικά ένα εγκαρσίως ισότροπο σώμα. Επομένως:

- Για να προσδιορισθεί ο εγκάρσιο λόγο Poisson ν_{LT} χρησιμοποιείται η σχέση:

$$\nu_{LT} = -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_{LT}}$$

Όπου ε_T είναι η εγκάρσια τροπή και $\varepsilon_{LT} = \varepsilon_Z$ είναι η διαμήκης τροπή

- i. Για να προσδιορισθεί το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας E_T χρησιμοποιούνται οι σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{E_T} - \nu_{TT} \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E_T} - \nu_{LT} \frac{\sigma_{ZZ}}{E_L}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E_T} - \nu_{TT} \frac{\sigma_{rr}}{E_T} - \nu_{LT} \frac{\sigma_{ZZ}}{E_L}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E_T} [\sigma_{ZZ} - \nu_{LT}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})]$$

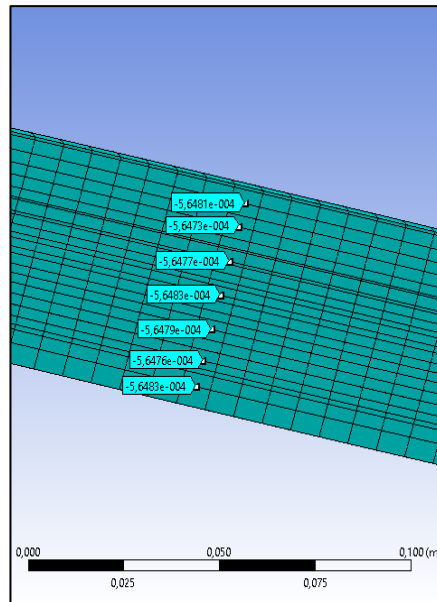
Εφόσον το μοντέλο είναι συμμετρικό γεωμετρικά και ως προς τη φόρτιση του θα ισχύει:

$$\varepsilon_T = \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{\theta\theta}$$

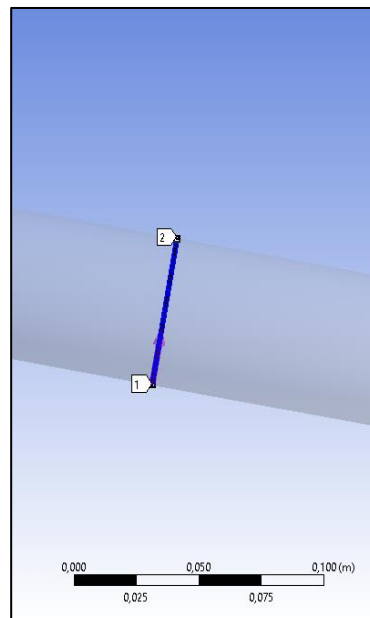
Επομένως, αρκεί να εξαχθούν από το υπολογιστικό μοντέλο την τροπή και την τάση στη διεύθυνση z σε μία από τις εγκάρσιες διευθύνσεις και την αντίστοιχη διαμήκη τροπή για να υπολογισθεί το μέγεθος E_T .

Η εγκάρσια τροπή μπορεί να υπολογισθεί παίρνοντας το μέσο όρο κάποιων ενδεικτικών τιμών στη διεύθυνση x, όπως φαίνεται παρακάτω:

Ένας πιο ακριβής τρόπος είναι η δημιουργία ενός path στην ίδια διεύθυνση, ώστε να εξαχθούν τα αποτελέσματα από το πρόγραμμα



Εικόνα 7.7 Προσδιορισμός εγκάρσιας τροπής στο Ansys Mechanical: 1ος τρόπος



Εικόνα 7.8 Προσδιορισμός της εγκάρσιας τροπής στο Ansys Mechanical: 2ος τρόπος

Η εγκάρσια τροπή στη διεύθυνση x που προέκυψε από το υπολογιστικό μοντέλο είναι $\epsilon_{xx} = 0.0005633$

Το παραπάνω αποτέλεσμα της εγκάρσιας τροπής αντιστοιχεί στην περίπτωση που το πάχος της ενδιάμεσης φάσης είναι 1mm. Αντίστοιχα ευρέθηκαν οι τιμές της εγκάρσιας τροπής για τις άλλες δύο περιπτώσεις και προσδιορίστηκαν οι τιμές των εγκαρσίων μέτρων ελαστικότητας σε κάθε περίπτωση. Γίνεται σύγκριση με τα αποτελέσματα της αναλυτικής λύσης.

Πίνακας 7.4 Σύγκριση εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας αναλυτικής και υπολογιστικής μελέτης

Πάχος ενδιάμεσης φάσης (mm)	Εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας E_T αναλυτικής λύσης (GPa)	Εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας E_T υπολογιστικού μοντέλου (GPa)
1	192.50	194.83
0.75	191.82	194.32
0.5	191.15	193.91

Συμπέρασμα:

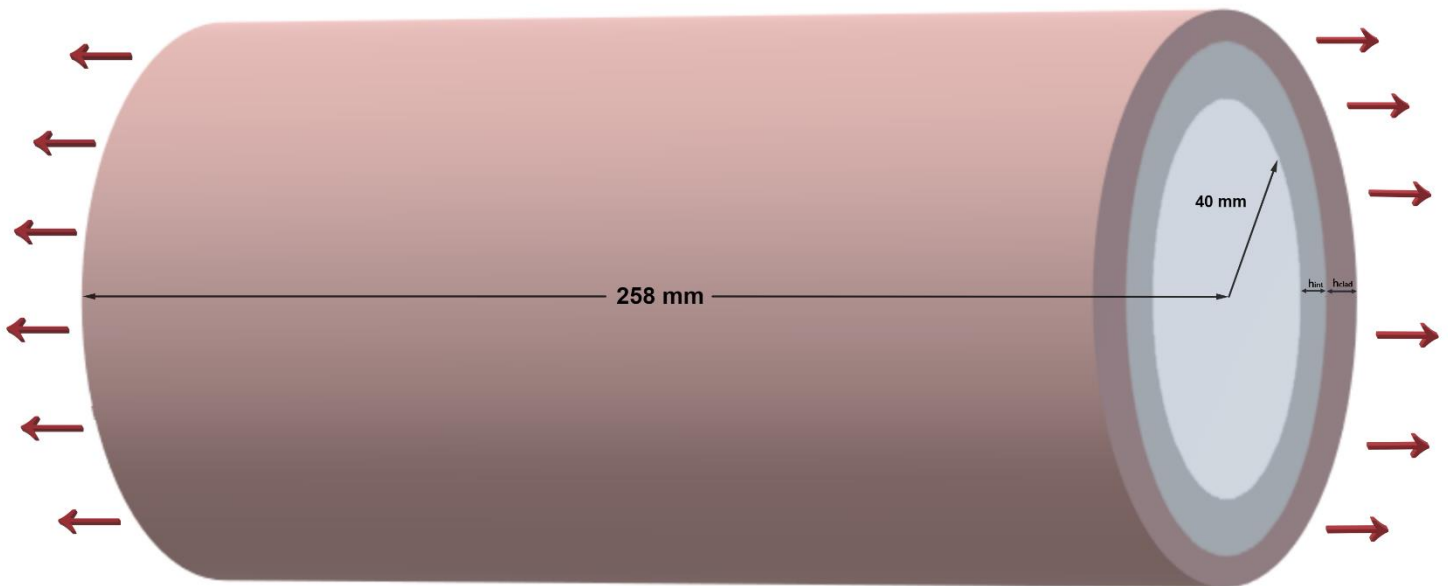
Παρατηρείται και πάλι μικρή απόκλιση των ελαστικών σταθερών αναλυτικής και υπολογιστικής μελέτης.

7.3 Μελέτη διάδοσης ρωγμής

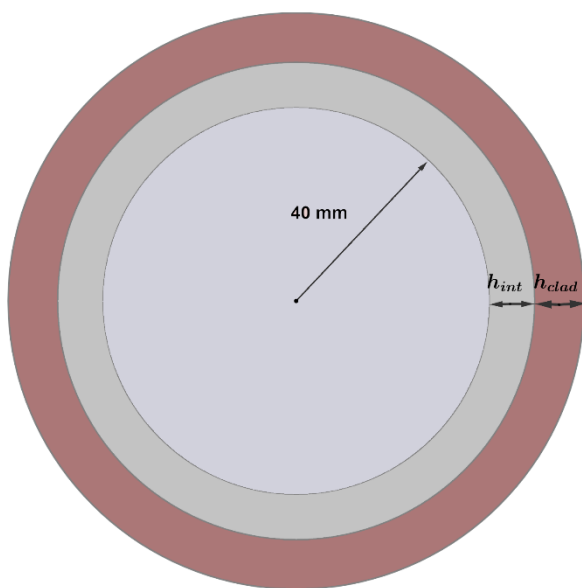
Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετηθεί η διάδοση ρωγμής στο τριφασικό μοντέλο υπό συνθήκες κόπωσης. Η ρωγμή θεωρείται κάθετη και βρίσκεται στο μέσο της επίστρωσης. Το μοντέλο ανάγεται σε δισδιάστατο και υπολογίζεται ο συντελεστής έντασης τάσεων για διάφορα μήκη ρωγμής.

7.3.1 Αναγωγή του μοντέλου σε δισδιάστατο:

Στην ενότητα αυτή εξετάζεται το δοκίμιο υπό εφελκυστική φόρτιση:



Εικόνα 7.9 Τριφασικό μοντέλο υπό εφελκυστική φόρτιση



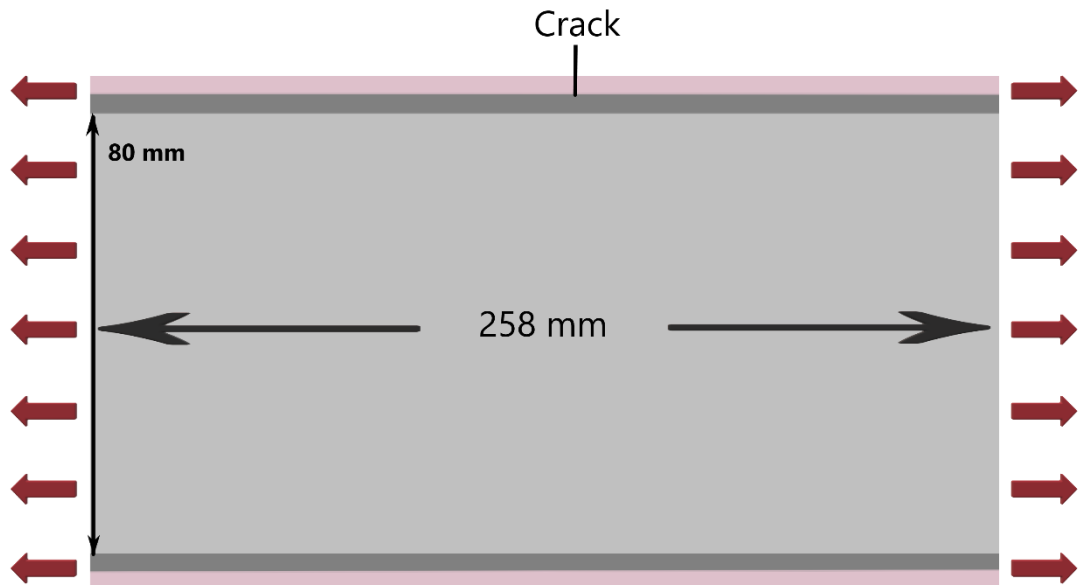
Θα εξεταστούν οι προαναφερθείσες τρεις περιπτώσεις για το ύψος της ενδιάμεσης φάσης h_{int} (interphase), και κατ' επέκταση και της επίστρωσης (clad), h_{clad} :

Πίνακας 7.1 Περιπτώσεις για τα ύψη της ενδιάμεσης φάσης στο υπολογιστικό μοντέλο

Περιπτώσεις	h_{int} (mm)	h_{clad} (mm)
1	1	1
2	0.75	1.25
3	0.5	1.5

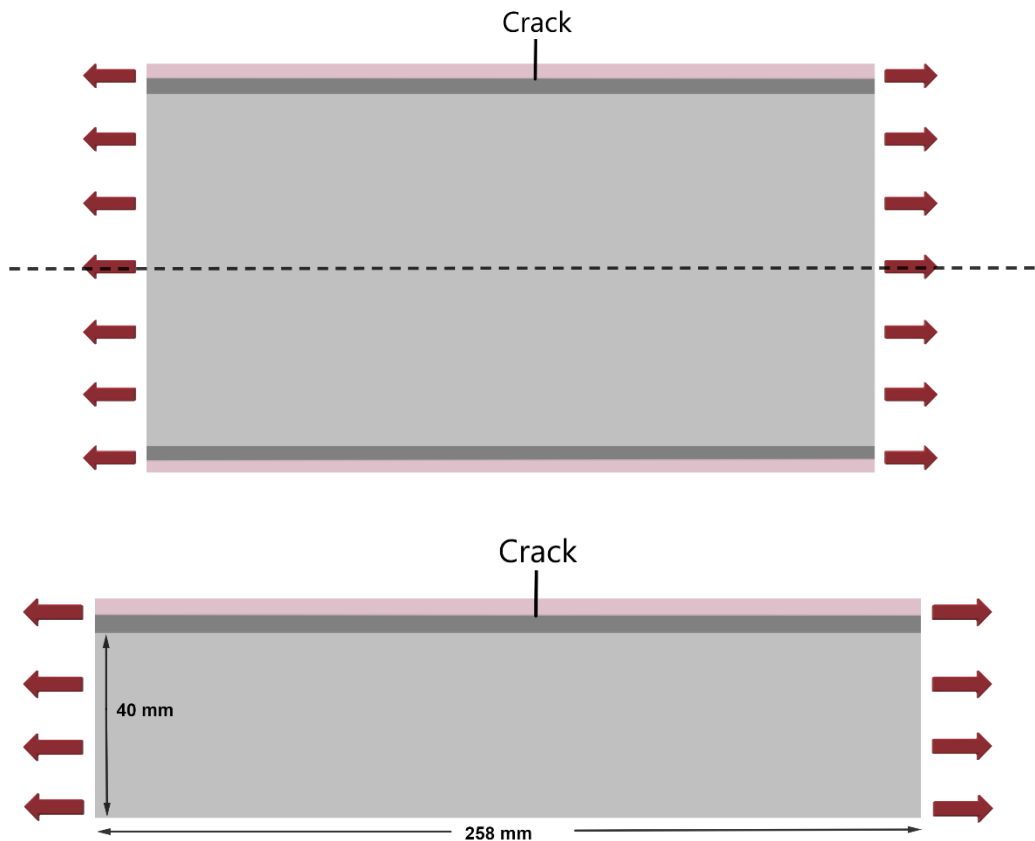
Εικόνα 7.10 Λεπτομέρεια διαστάσεων διατομής

Υπάρχει συμμετρία και ως προς τη γεωμετρία και ως προς την εφαρμοζόμενη φόρτιση, επομένως το πρόβλημα μπορεί να αναχθεί σε δισδιάστατο:



Εικόνα 7.11 Αρχική γεωμετρία δισδιάστατου προβλήματος

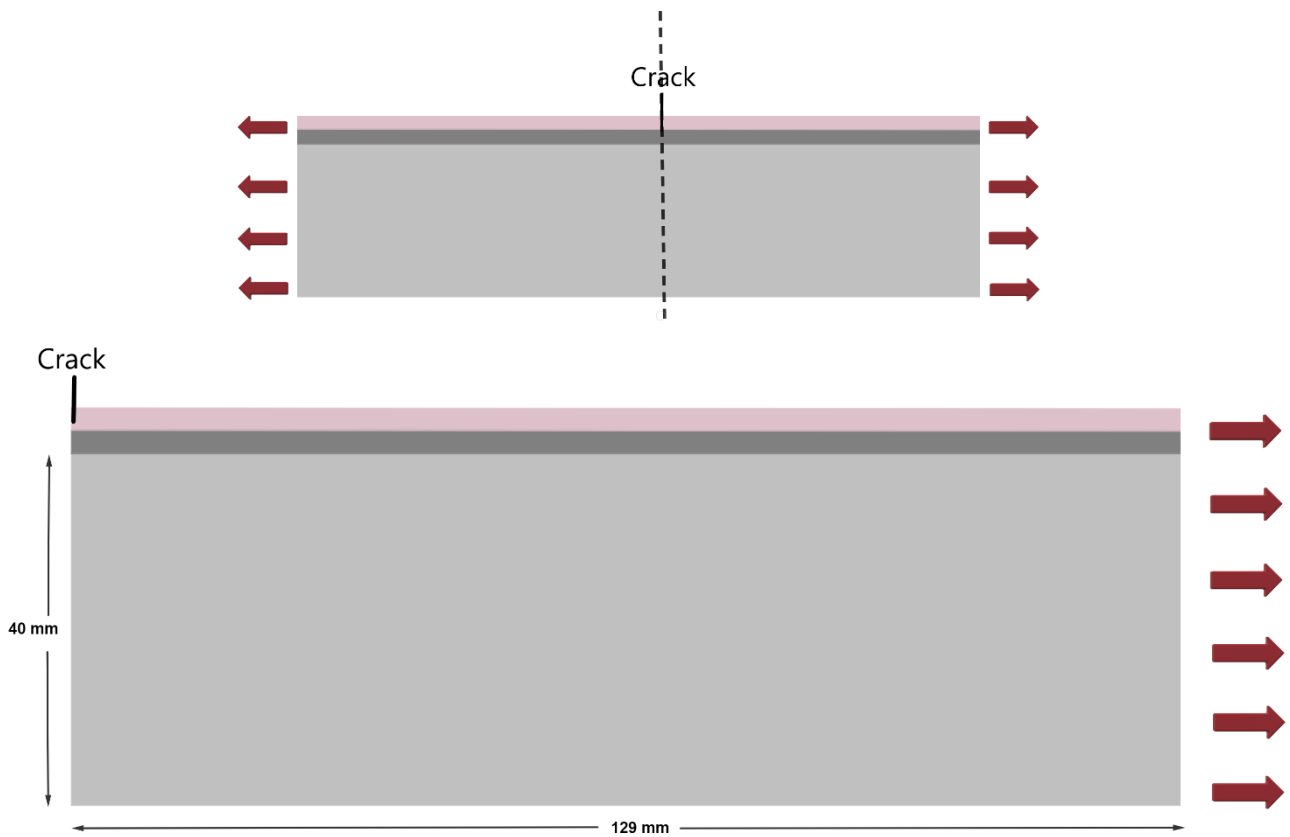
Λόγω συμμετρίας γεωμετρίας και φόρτισης ως προς οριζόντιο άξονα στο κέντρο του δοκιμίου, μπορεί να θεωρηθεί η παρακάτω τομή και η γεωμετρία να απλοποιηθεί ως εξής:



Εικόνα 7.12 Πρώτη απλοποίηση δισδιάστατου προβλήματος

Στη βάση του δοκιμίου εφαρμόζονται κυλίσεις, περιορίζεται δηλαδή ένας βαθμός ελευθερίας ως προς τον άξονα y .

Υπάρχει συμμετρία γεωμετρίας, στηρίξεων και φόρτισης και ως προς κάθετο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του απλοποιημένου δοκιμίου, επομένως θεωρείται κάθετη τομή και τελικά μελετάται το ήμισυ του προηγούμενου σχήματος:



Εικόνα 7.13 Δεύτερη απλοποίηση διαστάσεων προβλήματος - Τελική μορφή

Επομένως τελικά προκύπτει το παραπάνω επίπεδο πρόβλημα, όπου στο δεξί άκρο εφαρμόζεται εφελκυστική φόρτιση, στο αριστερό άκρο x και στη βάση του εφαρμόζονται κυλίσεις.

7.3.2 Φόρτιση δοκιμίου

Θεωρούμε ότι το δοκίμιο φορτίζεται εφελκυστικά και στη συνέχεια αποφορτίζεται πλήρως ($\sigma_{min} = 0$). Επομένως, ο λόγος των τάσεων είναι $R=0$ και $\Delta K = K_{max}$

Συνεπώς, αρκεί να υπολογίσουμε τον συντελεστή έντασης των τάσεων για τη μέγιστη τάση και η φόρτιση που εφαρμόζεται στο μοντέλο είναι η μέγιστη εφελκυστική.

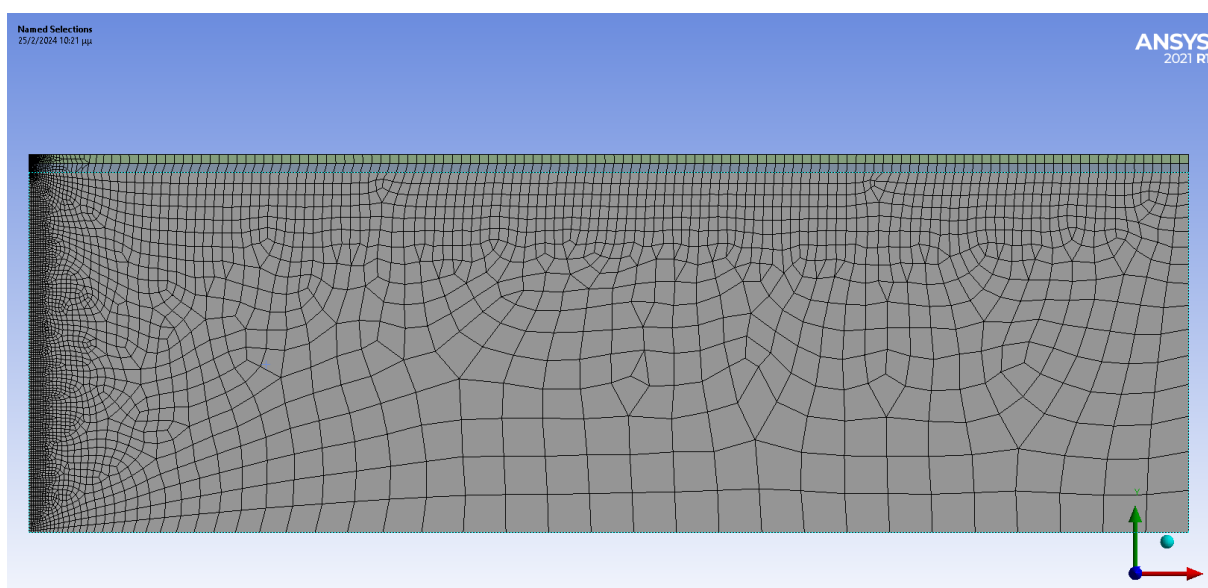
Η μελέτη μας είναι παραμετρική, με παράμετρο το μήκος της ρωγμής, το οποίο αυξάνεται. Με αυτόν τον τρόπο η φόρτιση που εφαρμόζεται για κάθε μήκος ρωγμής προσομοιάζει την κόπωση του υλικού και συνεπώς μπορούμε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα του συντελεστή έντασης τάσεων με τα μεγέθη $K_{threshold}$ και $K_{critical}$.

Επίσης, όλες οι περιοχές του δοκιμίου έχουν κοινή παραμόρφωση εφόσον τα επιμέρους υλικά είναι συγκολλημένα. Συνεπώς, για τη μοντελοποίηση στο Ansys Mechanical εφαρμόζουμε κοινή παραμόρφωση στη μία πλευρά του δοκιμίου, υπό τη μορφή κοινής μετατόπισης. Η παραμόρφωση που εφαρμόζεται αντιστοιχεί σε τάση 800 MPa, που είναι το όριο κόπωσης του υλικού του υποστρώματος.

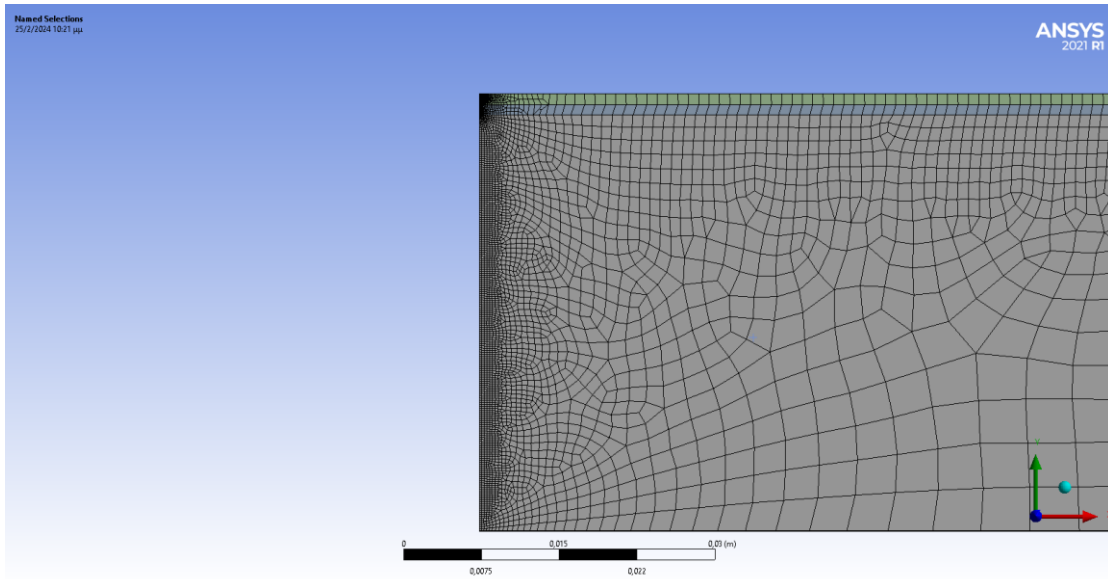
7.3.3 Διακριτοποίηση του δισδιάστατου μοντέλου

Όπως προαναφέρθηκε, σε σημεία που παρουσιάζουν ειδικό ενδιαφέρον σε μία υπολογιστική μελέτη, όπως είναι, στην περίπτωση της παρούσας εργασίας, η ρωγμή στην επίστρωση, επιλέγεται κατάλληλη διακριτοποίηση ώστε να επιτευχθεί καλή ακρίβεια υπολογισμών στην περιοχή.

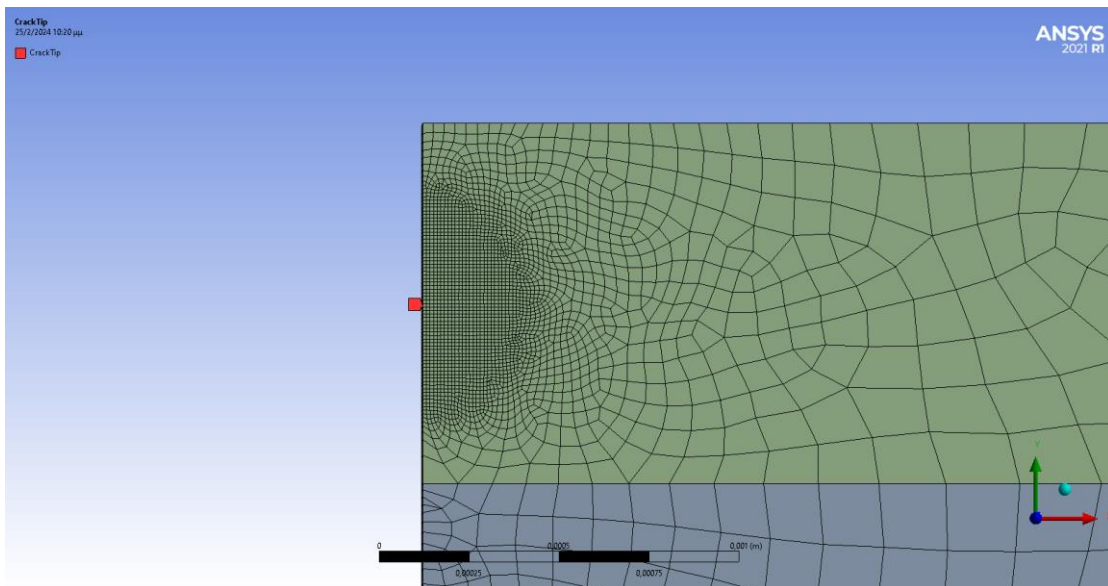
Η διακριτοποίηση με μεγάλη πύκνωση σε μία κυκλική περιοχή γύρω από τη ρωγμή και σχετικά πυκνό κάναβο στην πλευρά που συμπίπτει με την κατεύθυνση διάδοσης της προσφέρει ικανοποιητική σύγκλιση αποτελεσμάτων. Επιλέχθηκε μοντέλο με 5819 στοιχεία.



Εικόνα 7.9 Διακριτοποίηση δισδιάστατου μοντέλου



Εικόνα 7.10 Διακριτοποίηση δισδιάστατου μοντέλου, λεπτομέρεια



Εικόνα 7.11 Διακριτοποίηση δισδιάστατου μοντέλου, λεπτομέρεια στην περιοχή της ρωγμής

7.4 Αποτελέσματα και συμπεράσματα υπολογιστικής μελέτης

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τον συντελεστή έντασης τάσεων για τα παρακάτω ύψη:

Πίνακας 7.2 Εύρος μηκών ρωγμής ανά περίπτωση ύψους της ενδιάμεσης φάσης

Περιπτώσεις	h_{int} (mm)	h_{clad} (mm)	Μήκος ρωγμής (mm)
1	1	1	0.01÷0.98
2	0.75	1.25	0.01÷1.225
3	0.5	1.5	0.01÷1.49

Στη συνέχεια συγκρίνονται τα αποτελέσματα μεταξύ τους και εξάγονται συμπεράσματα για το πως τα διαφορετικά ύψη επηρεάζουν τον συντελεστή έντασης των τάσεων.

Επίσης, εξάγονται συμπεράσματα σχετικά με τη διάδοση της ρωγμής για το ισοδύναμο μοντέλο και για το υλικό της επίστρωσης, λαμβάνοντας υπόψιν την τιμή κατωφλίου και την κρίσιμη τιμή του συντελεστή K για την επίστρωση και το υπόστρωμα.

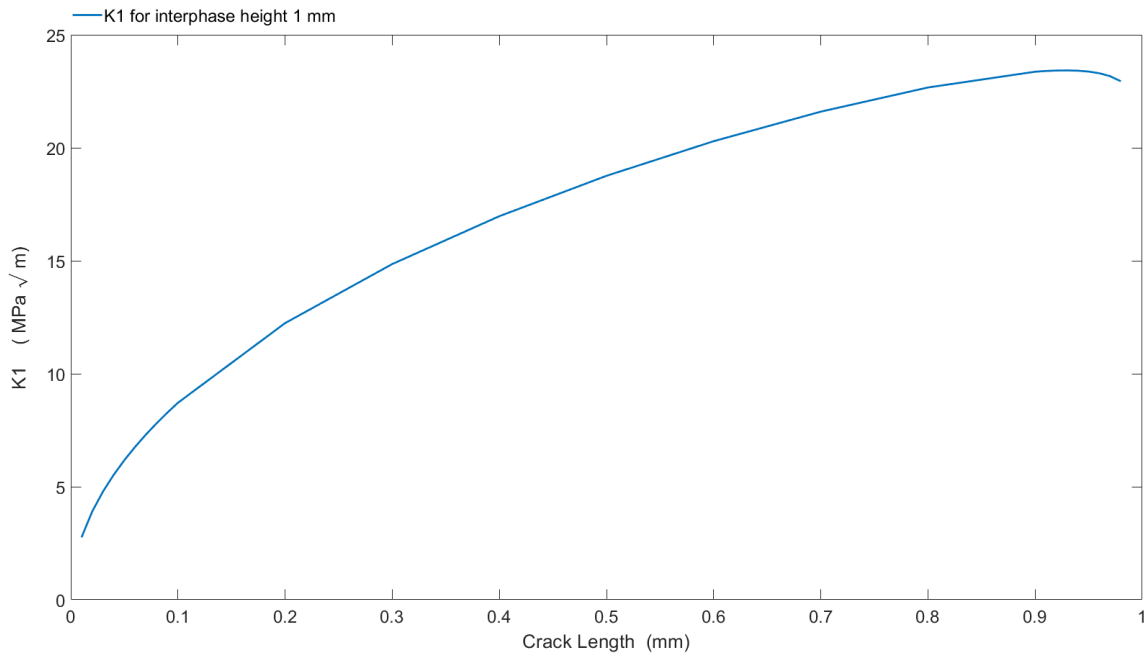
Οι τιμές $K_{threshold}$ και $K_{critical}$ για τα δύο υλικά παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 7.3 Τιμές *threshold* και *critical* για τον συντελεστή έντασης των τάσεων των υλικών υποστρώματος και επίστρωσης

Περιοχή	Υλικό	K_{th} ($MPa\sqrt{m}$)	K_c ($MPa\sqrt{m}$)
Υπόστρωμα	Χάλυβας AISI 4340	3.5	22.5
Επίστρωση	Χαλκοαλουμίνιο AMPCO 21	15	58

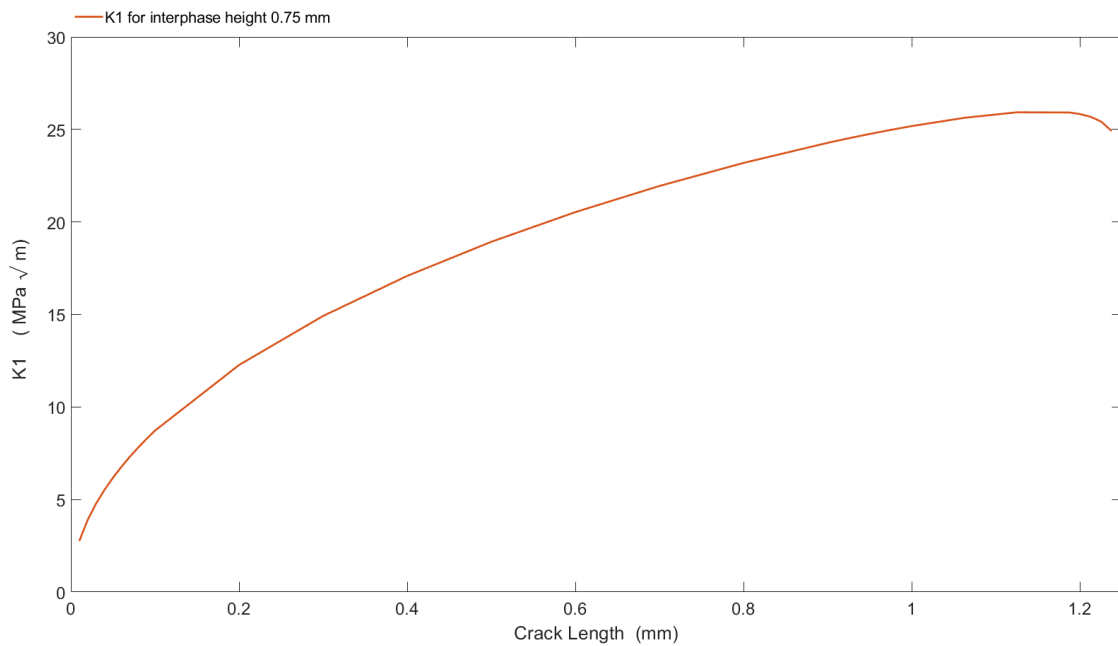
7.4.1 Συντελεστής K για διαφορετικά ύψη

Για ύψος της ενδιάμεσης φάσης 1 mm και ύψος επίστρωσης 1 mm, ο συντελεστής έντασης των τάσεων μεταβάλλεται ως εξής:



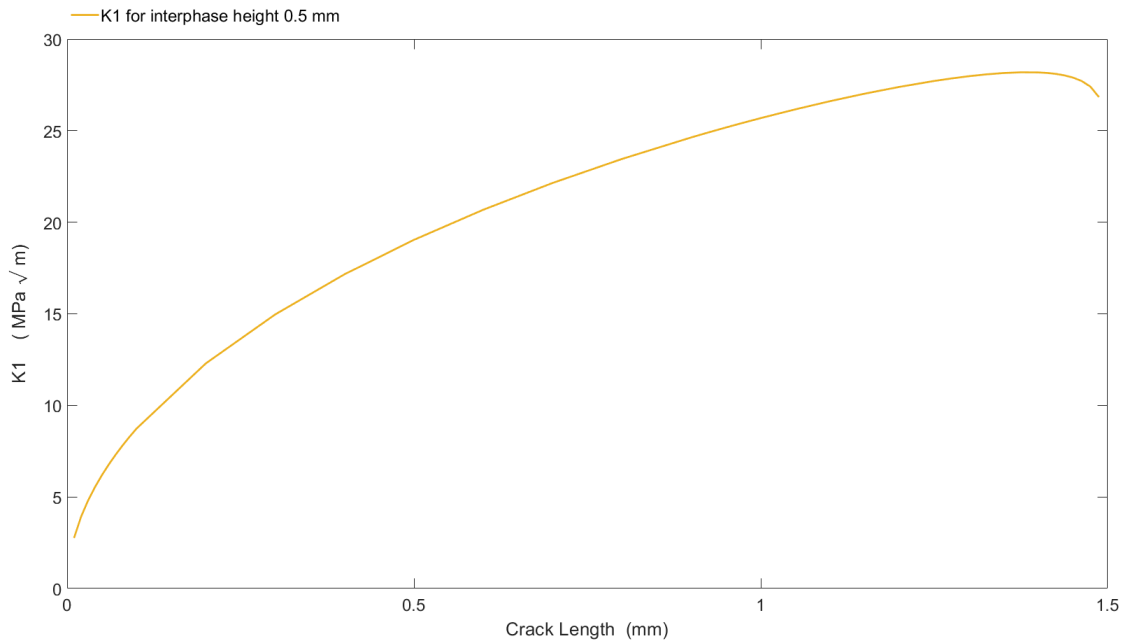
Εικόνα 7.12 Συντελεστής έντασης των τάσεων K για διαφορετικά μήκη ρωγμής με ύψος ενδιάμεσης φάσης 1mm

Για ύψος ενδιάμεσης φάσης 0.75 mm και ύψος επίστρωσης 1.25 mm



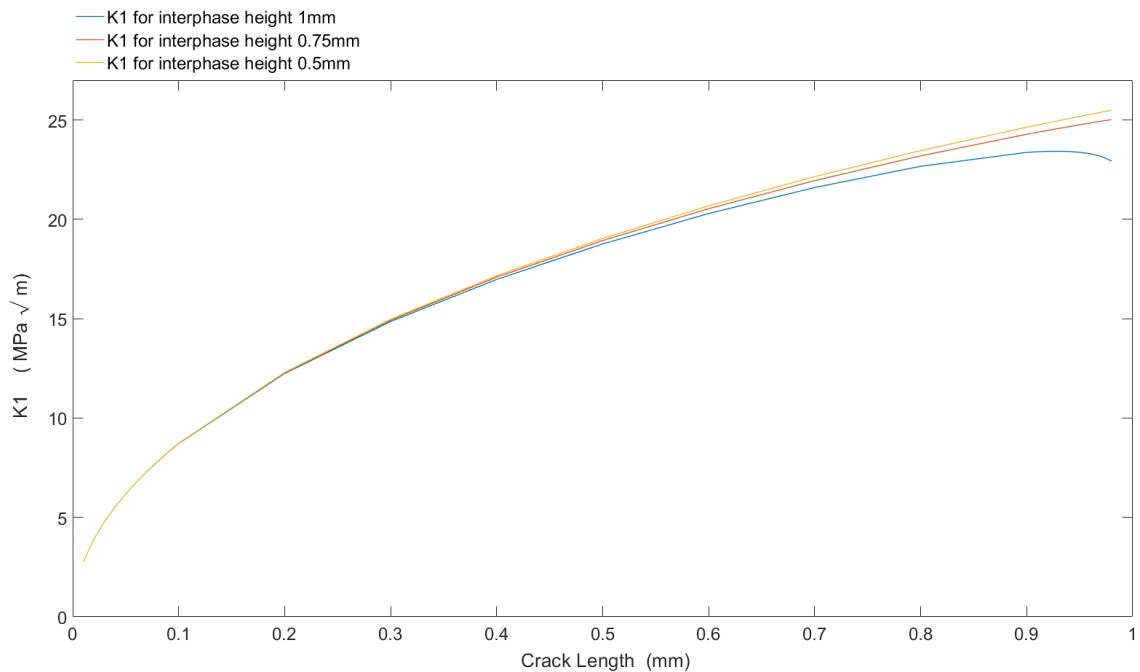
Εικόνα 7.13 Συντελεστής έντασης των τάσεων K για διαφορετικά μήκη ρωγμής με ύψος ενδιάμεσης φάσης 0.75 mm

Για ύψος ενδιάμεσης φάσης 0.5 mm και ύψος επίστρωσης 1.5 mm:



Εικόνα 7.14 Συντελεστής έντασης των τάσεων K για διαφορετικά μήκη ρωγμής με ύψος ενδιάμεσης φάσης 0.5 mm

Παραθέτονται οι συντελεστές K για τα διάφορα ύψη συγκριτικά:



Εικόνα 7.15 Σύγκριση των αποτελεσμάτων του συντελεστή K

Συμπέρασμα: Ο συντελεστής έντασης των τάσεων για ίδια μήκη ρωγμής αυξάνεται για μικρότερα ύψη της ενδιάμεσης φάσης και, συνεπώς για μεγαλύτερα ύψη της επίστρωσης.

7.4.2 Κρίσιμες τιμές και τιμές κατωφλίου

Το δισδιάστατο δοκίμιο που μελετήθηκε υπολογιστικά θα έχει συμπεριφορά που προσομοιάζει αυτή του κυλίνδρου από ισοδύναμο υλικό (material combination), το οποίο έχει πολύ κοντινό μέτρο ελαστικότητας με τον χάλυβα.

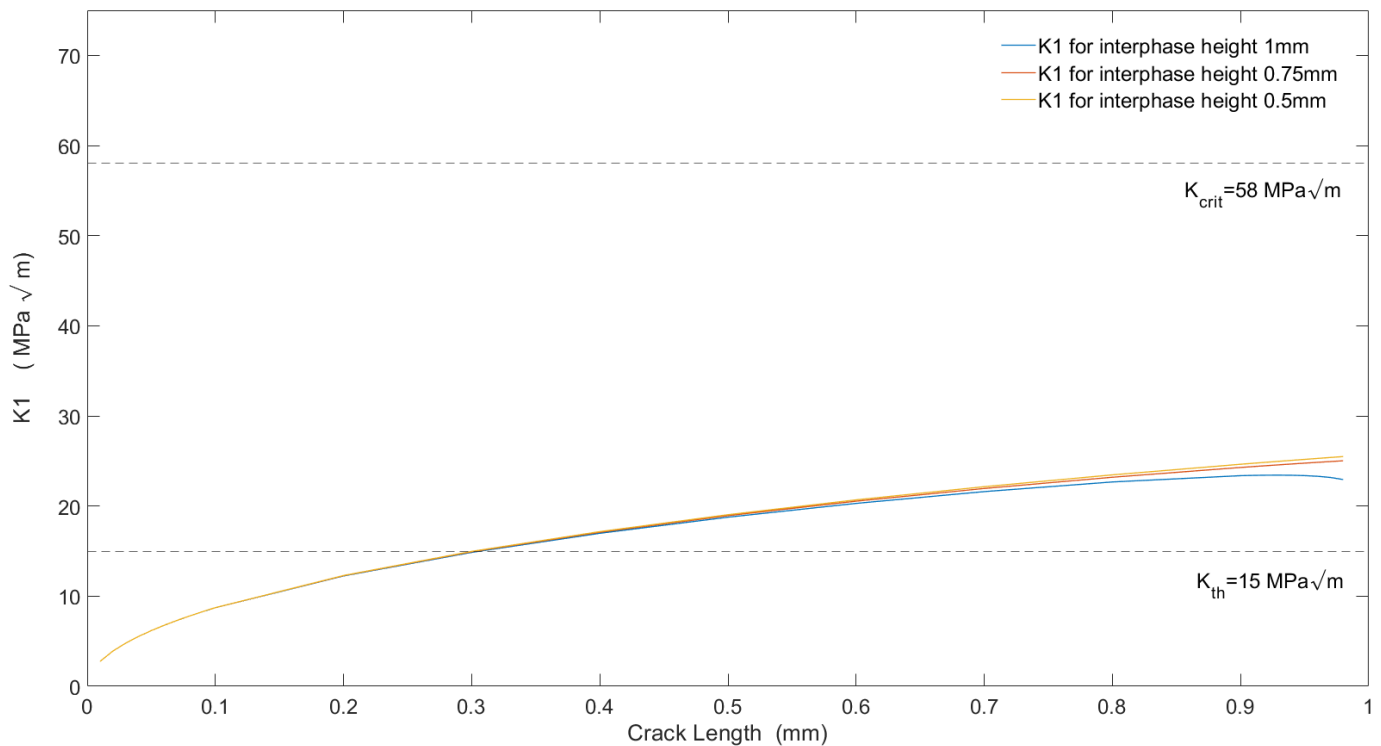
Σε προηγούμενη παράγραφο παρουσιάστηκε η αναλυτική επίλυση του τρισδιάστατου τριφασικού μοντέλου και ευρέθηκε το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας του:

$$E_L \cong 193 \text{ GPa}$$

Η τιμή αυτή επιβεβαιώθηκε από τον σχεδιασμό του μοντέλου στο Ansys Mechanical με τη μέθοδο Material Combination, με τη δημιουργία δηλαδή ενός ισοδύναμου υλικού με τις κατάλληλες περιεκτικότητες των τριών φάσεων ανάλογα με το πάχος τους.

Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο καθώς η περιεκτικότητα του υποστρώματος είναι πολύ μεγάλη συγκριτικά με αυτές της ενδιάμεσης φάσης και της επίστρωσης και η τιμή αυτή είναι πολύ κοντά στο μέτρο ελαστικότητας του χάλυβα του υποστρώματος $E_1 = 200 \text{ GPa}$.

Συνεπώς, οι τιμές threshold και critical του μοντέλου από ισοδύναμο υλικό θα είναι πολύ κοντά σε αυτές του χάλυβα και μπορούμε να κάνουμε με αρκετά καλή ακρίβεια μία σύγκριση με τις τιμές του συντελεστή που υπολογίστηκαν.



Εικόνα 7.16 Σύγκριση των αποτελεσμάτων για τον συντελεστή έντασης των τάσεων K με τις τιμές $K_{threshold}$ και $K_{critical}$ του χάλυβα

Συμπεράσματα:

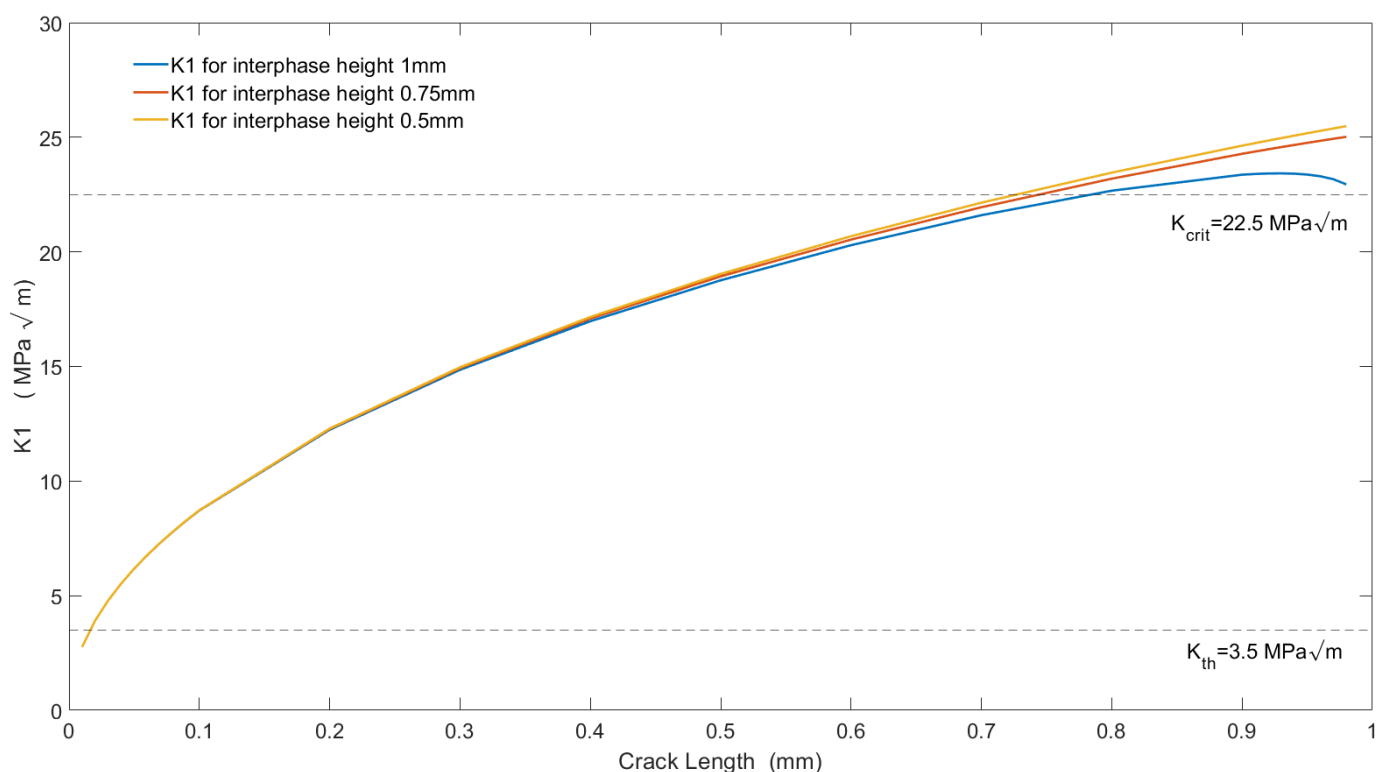
Ο συντελεστής έντασης των τάσεων δεν υπερβαίνει την κρίσιμη τιμή για κανένα από τα ύψη της ενδιάμεσης φάσης τα οποία μελετήθηκαν. Μάλιστα, οι μέγιστες τιμές του συντελεστή που υπολογίστηκαν απέχουν σημαντικά από την κρίσιμη τιμή.

Εκκίνηση διάδοσης της ρωγμής, δηλαδή η υπέρβαση της τιμής κατωφλίου σημειώνεται σε μήκος:

- 0.31 mm για ύψος ενδιάμεσης φάσης 1 mm
- 0.30 mm για ύψη ενδιάμεσης φάσης 0.75 και 0.5 mm

Για το υλικό της επίστρωσης, δηλαδή για το χαλκοαλουμίνιο AMPCO21:

Επειδή η ρωγή βρίσκεται στην επίστρωση, που αποτελείται από το χαλκοαλουμίνιο, είναι σκόπιμο να συγκριθούν τα αποτελέσματα για τον συντελεστή έντασης των τάσεων με τις K_{th} και K_{crit} τιμές του υλικού αυτού.



Εικόνα 7.17 Σύγκριση των αποτελεσμάτων για τον συντελεστή έντασης των τάσεων K με τις τιμές K_{th} και K_{crit} του χαλκοαλουμινίου της επίστρωσης

Συμπεράσματα:

- Για πολύ μικρά μήκη ρωγμής οι τιμές του συντελεστή K κάθε ύψους που μελετήθηκε είναι μικρότερες της τιμής κατωφλίου και άρα δεν θα υπάρχει διάδοση ρωγμής.
- Για ύψος ενδιάμεσης φάσης **0.5 mm** ο συντελεστής έντασης των τάσεων μετρήθηκε ότι ξεπερνάει την κρίσιμη τιμή του υλικού για μήκος ρωγμής 0.73 mm (critical crack length). Συνεπώς, αν ξεπεράσει αυτό το μήκος, η ρωγμή διαδίδεται ασταθώς.
- Για ύψος ενδιάμεσης φάσης **0.75 mm** ο συντελεστής έντασης των τάσεων ξεπερνάει την κρίσιμη τιμή και μπαίνει στην περιοχή ασταθούς διάδοσης, για μήκος ρωγμής 0.74 mm.
- Για ύψος ενδιάμεσης φάσης **1 mm** ο συντελεστής έντασης των τάσεων ξεπερνάει την κρίσιμη τιμή για κρίσιμο μήκος ρωγμής που μετρήθηκε 0.78 mm. Ωστόσο, στη συνέχεια, παρατηρείται πτώση του συντελεστή K και φαίνεται να επιστρέφει στη σταθερή περιοχή. Αυτό το φαινόμενο μπορεί να εξηγηθεί από το γεγονός ότι το υπόστρωμα έχει μεγαλύτερο μέτρο ελαστικότητας. Η διάδοση της ρωγμής είναι δυσκολότερη στο υπόστρωμα, συνεπώς, όταν η ρωγμή πλησιάζει στο σύνορο με το υλικό του υποστρώματος ο συντελεστής K μειώνεται.

7.4.3 Συμπεράσματα υπολογιστικής μελέτης:

Από την υπολογιστική μας μελέτη και τη σύγκριση των αποτελεσμάτων του εύρους του συντελεστή έντασης των τάσεων K για διαφορετικά ύψη της περιοχής της ενδιάμεσης φάσης που δημιουργείται κατά τη συγκόλληση των δύο μετάλλων, παρατίθενται τα εξής συμπεράσματα:

- Ο συντελεστής έντασης των τάσεων αυξάνεται περισσότερο για μικρότερα ύψη της ενδιάμεσης φάσης.
- Όσον αφορά τον χάλυβα και, κατ' επέκταση, το δοκίμιο που μελετήθηκε, που αποτελείται στο μεγαλύτερο του ποσοστό από χάλυβα, ο συντελεστής έντασης των τάσεων δεν υπερβαίνει την κρίσιμη τιμή για κανένα από τα ύψη της ενδιάμεσης φάσης τα οποία μελετήθηκαν. Μάλιστα, οι μέγιστες τιμές του συντελεστή που υπολογίστηκαν απέχουν σημαντικά από την κρίσιμη τιμή.
- Όσον αφορά το υλικό της επίστρωσης, το χαλκοαλουμίνιο AMPCO21, ο συντελεστής έντασης των τάσεων για ύψος ενδιάμεσης φάσης 1mm υπερβαίνει την τιμή κατωφλίου για μεγαλύτερο μήκος ρωγμής συγκριτικά με τις περιπτώσεις για ύψος 0.75 και 0.5.

7.4.4 Γενικά συμπεράσματα:

- Το δισδιάστατο δοκίμιο που μελετήθηκε υπολογιστικά θα έχει συμπεριφορά που προσομοιάζει αυτή του κυλίνδρου από ισοδύναμο υλικό, το οποίο έχει πολύ κοντινό μέτρο ελαστικότητας με τον χάλυβα. Επομένως, για την περίπτωση ρωγμής που μελετήθηκε προκύπτει ότι δεν θα υπάρχει ανεξέλεγκτη διάδοση αυτής και, συνεπώς, το δοκίμιο παρουσιάζει καλή αντοχή σε εφελκυσμό.
- Σύμφωνα με τη μελέτη του συντελεστή έντασης τάσεων για την επίστρωση, είναι προτιμότερο να έχουμε μεγαλύτερο ύψος της ενδιάμεσης φάσης, καθώς εξασφαλίζει καλύτερη αντοχή και μεγαλύτερη διάρκεια ζωής. Το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με το ότι η ενδιάμεση φάση ισχυροποιεί τη συγκόλληση καθιστούν τη δημιουργία ενδιάμεσης φάσης παράγοντα που επηρεάζει θετικά τη μηχανική αντοχή στο πρόβλημα που μελετήθηκε.

Βιβλιογραφία:

- [1] 'Ansys® Academic Research Mechanical, Release 17.1'.
- [2] 'www.ansys.com', © 2023 Copyright ANSYS, Inc.
- [3] Malikova L., Doubek P., Miarka P., και Seitzl S., 'Influence of the interphase between laser-cladded metal layer and steel substrate on fatigue propagation of a short edge crack', στο *Frattura ed Inegrita Strutturale*, 2021.
- [4] ΘΕΟΔΟΣΗΣ-ΚΟΝΤΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ και ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΚΥΤΟΠΟΥΛΟΣ ΒΙΚΤΩΡ, 'Μελέτη των δυναμικών ελαστικών σταθερών ινώδους σύνθετου υλικού με χρήση του τριφασικού μοντέλου με ενδιάμεση φάση', Μεταπτυχιακή Εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, ΑΘΗΝΑ, 2019.
- [5] Μακεδόνας Ιωάννης και Επιβλέπων καθηγητής: Ευστάθιος Θεοτόκογλου, 'Αναλυτική, πειραματική και υπολογιστική μελέτη των στατικών και δυναμικών ελαστικών σταθερών ινώδων σύνθετων υλικών με ενδιάμεση φάση', Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2020.
- [6] 'The MathWorks, Inc. (2022). MATLAB version: 23.2.0.2485118 (R2023b) Update 6. Accessed: January 01, 2023. Available: <https://www.mathworks.com>.'
- [7] J. William D. Callister και David G. Rethwisch, *Επιστήμη και Τεχνολογία των Υλικών*, 9η. Εκδόσεις Τζιόλα, 2016.
- [8] L. J. B. K. C. Bhagwan D. Agarwal, *Analysis and Performance of Fiber Composites*. John Wiley & Sons, 2006.
- [9] Παπανικολάου Γ. και Μουζάκης Δ., *Σύνθετα Υλικά*. ΑΘΗΝΑ: Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2007.
- [10] Σώκος Κων. Αλέξανδρος και Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Κόλλια Ε., 'Μελέτη μηχανικών ιδιοτήτων ηλεκτρολυτικών επικαλύψεων κασσίτερου για ηλεκτρομηχανολογικές εφαρμογές', *Επιστήμη και Τεχνολογία Υλικών*, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2011.
- [11] Κατρατζής Π., Κωνσταντακοπούλου Μ., και Φίλο Ν., 'Προστασία και Επιμεταλλώσεις'.
- [12] S. Paul, R. Singh, και W. Yan, *THERMO-MECHANICAL MODELLING OF LASER CLADDING OF CPM9V ON H13 TOOL STEEL*. 2014.
- [13] J. L. Ocaña και J. Grum, 'Laser Cladding', στο *Encyclopedia of Tribology*, Q. J. Wang και Y.-W. Chung, Επιμ., Boston, MA: Springer US, 2013, σσ. 1926–1934. doi: 10.1007/978-0-387-92897-5_695.
- [14] L. Zhu κ.ά., 'Recent research and development status of laser cladding: A review', *Opt Laser Technol*, τ. 138, σ. 106915, 2021, doi: <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2021.106915>.
- [15] Golder, 'Laser Cladding', Appropedia.
- [16] Σ. Ν. Μ. Μ. Τ. Θ. Κ. Πέτρος Α. Καρύδης Αναπληρωτής Καθηγητής, 'Υπολογιστικές Μέθοδοι και Εφαρμογές σε Λεπτότοιχες Κατασκευές'.

- [17] Γ.Ι. Τσαμασφύρος και Ε.Ε. Θεοτόκογλου, *Μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων*. Αθήνα: Εκδόσεις Συμμετρία, 2005.
- [18] Carlos A. Felippa, *Introduction to finite element methods, Chapter 17 Isoparametric Quadrilaterals*. Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures University of Colorado, 2004.
- [19] D. Gross, 'Some Remarks on the History of Fracture Mechanics', στο *The History of Theoretical, Material and Computational Mechanics - Mathematics Meets Mechanics and Engineering*, E. Stein, Επιμ., Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2014, σσ. 195–209. doi: 10.1007/978-3-642-39905-3_12.
- [20] Inc. ANSYS, *Fracture Analysis Guide*. Southpointe 2600 ANSYS Drive Canonsburg, PA 15317: ANSYS, Inc.
- [21] J. Schijve, Επιμ., 'Stress Intensity Factors of Cracks', στο *Fatigue of Structures and Materials*, Dordrecht: Springer Netherlands, 2009, σσ. 105–140. doi: 10.1007/978-1-4020-6808-9_5.
- [22] 'www.totalmateria.com'.
- [23] 'www.corrosionpedia.com'.
- [24] B. E. Westergren, 'Numerical Analysis of Crack Propagation and Lifetime Estimation Fracture Mechanics and Numerical Programming', 2015. [Έκδοση σε ψηφιακή μορφή]. Διαθέσιμο στο: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:121433512>
- [25] J. J. Zhang, 'Chapter 4 - Basic rock fracture mechanics', στο *Applied Petroleum Geomechanics*, J. J. Zhang, Επιμ., Gulf Professional Publishing, 2019, σσ. 133–161. doi: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-814814-3.00004-6>.
- [26] L. Zhou, L. Wang, και L. Jiang, 'Chapter 2 - Materials of steel structures', στο *Design of Steel Structures*, L. Zhou, L. Wang, και L. Jiang, Επιμ., Elsevier, 2022, σσ. 19–67. doi: <https://doi.org/10.1016/B978-0-323-91682-0.00016-9>.
- [27] 'material-properties.org'.
- [28] D. J. Barton, V. S. Bhattiprolu, G. B. Thompson, και L. N. Brewer, 'Laser assisted cold spray of AISI 4340 steel', *Surf Coat Technol*, τ. 400, σ. 126218, 2020, doi: <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2020.126218>.
- [29] 'www.ampcometal.com', © 2023 AMPCO METAL.