



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΣΗΣ

Σχεδιασμός απλών φιλαληθών
μηχανισμών για μεγιστοποίηση
εσόδων κατά τον έλεγχο αποδοχής
αιτημάτων σύνδεσης σε δίκτυα

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
του
Παπαγεωργίου Αντώνιου

Επιβλέπων: Φωτάκης Δημήτριος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2024



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΣΗΣ

Σχεδιασμός απλών φιλαληθών
μηχανισμών για μεγιστοποίηση
εσόδων κατά τον έλεγχο αποδοχής
αιτημάτων σύνδεσης σε δίκτυα

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Παπαγεωργίου Αντώνιου

Επιβλέπων: Δημήτριος Φωτάκης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή τη 23η Οκτωβρίου 2024.

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

.....
Δημήτριος Φωτάκης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Αριστείδης Παγουρτζής
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Ευάγγελος Μαρκάκης
Αναπλ. Καθηγητής
Ο.Π.Α

Αθήνα, Οκτώβριος 2024



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΣΗΣ

Copyright © – All rights reserved. Με την επιφύλαξη παντός δικαιώματος.
Αντώνιος Παπαγεωργίου, 2024.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα.

Το περιεχόμενο αυτής της εργασίας δεν απηχεί απαραίτητα τις απόψεις του Τμήματος, του Επιβλέποντα, ή της επιτροπής που την ενέκρινε.

ΔΗΛΩΣΗ ΜΗ ΛΟΓΟΚΛΟΠΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΗΨΗΣ ΠΡΟΣΩΠΙΚΗΣ ΕΥΘΥΝΗΣ

Με πλήρη επίγνωση των συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων, δηλώνω ε-
νυπογράφως ότι είμαι αποκλειστικός συγγραφέας της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας,
για την ολοκλήρωση της οποίας κάθε βοήθεια είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται
λεπτομερώς στην εργασία αυτή. Έχω αναφέρει πλήρως και με σαφείς αναφορές, όλες τις
πηγές χρήσης δεδομένων, απόψεων, θέσεων και προτάσεων, ιδεών και λεκτικών αναφορών,
είτε κατά κυριολεξία είτε βάσει επιστημονικής παράφρασης. Αναλαμβάνω την προσωπική
και ατομική ευθύνη ότι σε περίπτωση αποτυχίας στην υλοποίηση των ανωτέρω δηλωθέντων
στοιχείων, είμαι υπόλογος έναντι λογοκλοπής, γεγονός που σημαίνει αποτυχία στην Διπλω-
ματική μου Εργασία και κατά συνέπεια αποτυχία απόκτησης του Τίτλου Σπουδών, πέραν
των λοιπών συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων. Δηλώνω, συνεπώς, ότι
αυτή η Διπλωματική Εργασία προετοιμάστηκε και ολοκληρώθηκε από εμένα προσωπικά και
αποκλειστικά και ότι, αναλαμβάνω πλήρως όλες τις συνέπειες του νόμου στην περίπτωση
κατά την οποία αποδειχθεί, διαχρονικά, ότι η εργασία αυτή ή τμήμα της δεν μου ανήκει διότι
είναι προϊόν λογοκλοπής άλλης πνευματικής ιδιοκτησίας.

(Υπογραφή)

.....
Αντώνιος Παπαγεωργίου
23 Οκτωβρίου 2024

Περίληψη

Τα τελευταία χρόνια, η συνεχώς αυξανόμενη χρήση ηλεκτρικών αυτοκινήτων στην καθημερινότητα συνεπάγεται την εντεινόμενη ανάγκη για φόρτιση των συγκεκριμένων οχημάτων σε δίκτυα φόρτισης. Είναι αναγκαία η ικανότητα αποδοχής ή απόρριψης ενός οχήματος τη στιγμή που καταφθάνει στο δίκτυο. Χρειάζεται, επομένως, να αναπτυχθεί ένας μηχανισμός για τον έλεγχο αποδοχής αιτημάτων σύνδεσης σε δίκτυα.

Για τον λόγο αυτό, είναι λογικό να στραφούμε στον σχεδιασμό μηχανισμών, ένα κλάδο της θεωρίας παιγνίων, ο οποίος ασχολείται με τη δημιουργία κανόνων και μηχανισμών με σκοπό την επίτευξη επιθυμητών αποτελεσμάτων, λαμβάνοντας υπόψη τα τυχόν διαφορετικά κίνητρα που μπορεί να έχουν οι συμμετέχοντες.

Στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η ανάπτυξη ενός τέτοιου φιλαλήθους μηχανισμού. Θα δείξουμε πώς είναι εφικτό να επιτευχθεί κάτι τέτοιο μέσω της χρήσης ανισοτήτων του προφήτη, βασισμένων σε ισορροπημένες τιμές, αφού πρώτα μοντελοποιήσουμε το πρόβλημα ως συνδυαστική δημοπρασία με συμπληρωματικότητες και με αντικείμενα διαθέσιμα σε αρκετά αντίγραφα το καθένα. Εστιάζουμε στο πρόβλημα της μεγιστοποίησης της κοινωνικής ωφέλειας. Αξιολογούμε ακόμη πειραματικά το ποσοστό της κοινωνικής ωφέλειας που αντιστοιχεί στα συνολικά έσοδα του διαχειριστή του δικτύου.

Λέξεις Κλειδιά

Δίκτυα Φόρτισης, Ηλεκτρικά Αυτοκίνητα, Θεωρία Παιγνίων, Σχεδιασμός Μηχανισμών, Δημοπρασίες, Ανισότητες Προφήτη, Ισορροπημένες Τιμές, Κοινωνική Ωφέλεια, Έσοδα Πωλητή

Abstract

In recent years, the increasing use of electric vehicles in everyday life has led to a growing demand for charging these vehicles at charging networks. It is essential to have the capability to accept or reject a vehicle as it arrives at the network dynamically. Therefore, it is necessary to develop a mechanism for managing the acceptance of connection requests to these networks.

To address this issue, we turn to mechanism design, a branch of game theory that focuses on creating rules and mechanisms to achieve desired outcomes, taking into account the various incentives that participants may have.

The goal of this thesis is to develop such a truthful mechanism. We will demonstrate how this can be achieved through the application of prophet inequalities based on balanced prices, after modeling the problem as a combinatorial auction with complementarities and multiple copies of each item available. Our focus is on the problem of maximizing social welfare. Additionally, we experimentally evaluate the proportion of social welfare that corresponds to the total revenue of the network operator.

Keywords

Charging Networks, Electric Vehicles, Game Theory, Mechanism Design, Auctions, Prophet Inequalities, Balanced Prices, Social Welfare, Revenue

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον καθηγητή κ. Δημήτρη Φωτάκη, ο οποίος είχε την επίβλεψη της εργασίας αυτής, παρά τον περιορισμένο ελεύθερο χρόνο του. Επίσης, ευχαριστώ την Αγγελική Μαθιουδάκη, η οποία σε συνεργασία με τον κ. Φωτάκη μου παρείχε πρόσβαση σε ένα μη δημοσιευμένο, μέχρι στιγμής, ερευνητικό έργο το οποίο αποτέλεσε σημαντική πηγή έμπνευσης για την εργασία μου.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω την Όλγα Χαρτσά για τη βοήθειά της στη δημιουργία σημαντικών εικόνων που εμπλουτίζουν την εργασία. Τέλος, ευχαριστώ τους γονείς μου για την αδιάκοπη υποστήριξή τους καθ' όλη τη διάρκεια της ζωής μου.

Αθήνα, Οκτώβριος 2024
Αντώνιος Παπαγεωργίου

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων	9
Κατάλογος Πινάκων	11
1 Εισαγωγή	12
1.1 Αντικείμενο της διπλωματικής	12
1.2 Οργάνωση του τόμου	14
2 Σχεδιασμός Μηχανισμών	15
2.1 Εισαγωγή στη Θεωρία Παιγνίων	15
2.2 Εισαγωγή στο Σχεδιασμό Μηχανισμών	17
2.2.1 Δημοπρασίες Ενός Αντικειμένου	17
2.2.2 Δημοπρασίες Πρώτης και Δεύτερης Τιμής	18
2.3 Λήμμα του Myerson	20
2.3.1 Περιβάλλον Μοναδικής Παραμέτρου	20
2.3.2 Απόδειξη του Λήμματος Myerson	21
2.4 Δημοπρασίες Μεγιστοποίησης Εσόδων	23
2.4.1 Μπεϋζιανή Ανάλυση	23
2.4.2 Αναμενόμενα Έσοδα και Αναμενόμενη Εικονική Ωφέλεια	24
2.4.3 Μεγιστοποίηση Αναμενόμενης Εικονικής Κοινωνικής Ωφέλειας	24
2.5 Συνδυαστικές Δημοπρασίες	25
2.5.1 Ορισμός του Προβλήματος	25
2.5.2 Συναρτήσεις Αποτίμησης	26
2.5.3 Maximum over Positive Hypergraph (MPH) Ιεραρχία	26
2.6 Online Δημοπρασίες	27
2.6.1 Το Μοντέλο	27
2.6.2 Γενίκευση του Λήμματος Myerson	28
2.6.3 Competitive Ratio ως προς την Κοινωνική Ωφέλεια	30
2.6.4 Competitive Ratio ως προς τα Έσοδα	32
3 Ανισότητες του Προφήτη	33
3.1 Ανισότητα του Προφήτη για ένα Αντικείμενο	33
3.1.1 Μεγιστοποίηση Κοινωνικής Ωφέλειας με Ανισότητα του Προφήτη	34
3.1.2 Μεγιστοποίηση Εσόδων Πωλητή με Ανισότητα του Προφήτη	35
3.2 Ανισότητα του Προφήτη για Πολλαπλά Αντικείμενα	35
3.2.1 Online Συνδυαστικές Δημοπρασίες	36
3.2.2 Χρήσιμοι Συμβολισμοί	36
3.2.3 Ισοροπημένες Τιμές	37

3.2.4	Ανισότητα του Προφήτη για Συνδυαστικές Δημοπρασίες με MPH-k Αποτιμήσεις	41
3.2.5	Robustness	44
4	Ηλεκτρικά Αυτοκίνητα σε Δίκτυα Φόρτισης	45
4.1	Εισαγωγή στην Φόρτιση Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων	45
4.2	Μοντελοποίηση του Προβλήματος ως Συνδυαστική Δημοπρασία	45
4.2.1	Συμβολισμοί για Προγραμματισμό Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων	46
4.2.2	Περιορισμοί	47
4.3	Προσέγγιση Επίλυσης του Προβλήματος Μεγιστοποίησης Κοινωνικής Ωφέλειας	47
4.3.1	Εύρεση Θεωρητικών Ισορροπημένων Τιμών	47
4.3.2	Πειραματική Εύρεση Ισορροπημένων Τιμών	49
4.3.3	Σύγκριση Κοινωνικής Ωφέλειας σε Σχέση με το Πλήθος Δειγμάτων .	52
4.4	Πειραματικές Συγκρίσεις	53
4.4.1	Μεταβολή της Χωρητικότητας στους Σταθμούς Φόρτισης	53
4.4.2	Μεταβολή του Πλήθους των Οχημάτων που Καταφτάνουν	56
4.4.3	Μεταβολή της Χωρητικότητας και του Πλήθους των Οχημάτων . . .	57
4.5	Προσπάθεια Μεγιστοποίησης Εσόδων	59
4.5.1	Έσοδα με χρήση των ισορροπημένων τιμών	59
4.5.2	Αλλαγή της Παραμέτρου δ	60
4.6	Το πρόβλημα σε Μεγαλύτερα Δίκτυα και με Προορισμούς Παικτών	63
4.6.1	Συμβολισμοί για το Νέο Μοντέλο Προγραμματισμού Ηλεκτρικών Αυ- τοκινήτων	63
4.7	Πειραματικά Αποτελέσματα για το Νέο Μοντέλο	65
4.7.1	Σύγκριση Ισορροπημένων Τιμών και Κοινωνικής Ωφέλειας στο Νέο Δίκτυο	66
4.7.2	Μεταβολή της Χωρητικότητας στο Νέο Δίκτυο	67
4.7.3	Μεταβολή του Πλήθους των Οχημάτων στο Νέο Δίκτυο	69
4.7.4	Μεταβολή της Χωρητικότητας και του Πλήθους των Οχημάτων στο Νέο Δίκτυο	70
4.7.5	Έσοδα του Πωλητή στο Νέο Δίκτυο	71
5	Επίλογος	73
5.1	Σύνοψη και Συμπεράσματα	73
5.2	Μελλοντικές Επεκτάσεις	74
	Βιβλιογραφία	75

Κατάλογος Σχημάτων

2.1	Εικόνα για την απόδειξη ότι ο κανόνας πληρωμών (2.2) με έναν μονότονο κανόνα αποτελεσμάτων αποτελούν έναν φιλαλήθη μηχανισμό με μη αρνητική ωφέλεια για όλους τους παίχτες. Οι τρεις στήλες αντιπροσωπεύουν τις περιπτώσεις όπου ο παίκτης δηλώνει $b_i = v_i$, $b_i > v_i$ και $b_i < v_i$ αντίστοιχα. Στο (h) το κομμάτι με τις γραμμές συμβολίζει αρνητική ωφέλεια. Γενίκευση από το [34].	22
2.2	Παράδειγμα ενός Υπεργραφήματος	27
4.1	Παράδειγμα δικτύου πέντε σταθμών φόρτισης. Όπου (ενέργεια, χρόνος) τα διανύσματα κόστους μεταφοράς	49
4.2	Σύγκριση χρόνων σε λογαριθμική κλίμακα μεταξύ του αφελή και βελτιωμένου τρόπου επίλυσης του γραμμικού προγράμματος για τυχαίο δείγμα.	50
4.3	Σύγκριση ισορροπημένων τιμών ανάλογα με το πλήθος των δειγμάτων.	51
4.4	Σύγκριση της κοινωνικής ωφέλειας που επιτυγχάνεται σε σχέση με την βέλτιστη για έξι τυχαία δείγματα.	52
4.5	Σύγκριση ισορροπημένων τιμών υπολογισμένων από διαφορετικού πλήθους δείγματα ανάλογα με την χωρητικότητα για τον σταθμό CS_1	54
4.6	Σύγκριση της κοινωνικής ωφέλειας που επιτυγχάνεται για τιμές υπολογισμένες από διαφορετικού πλήθους δείγματα ανάλογα με την χωρητικότητα για ένα τυχαίο δείγμα.	55
4.7	Σύγκριση της μέσης κοινωνικής ωφέλειας που επιτυγχάνεται για τιμές υπολογισμένες από διαφορετικού πλήθους δείγματα ανάλογα με την χωρητικότητα για εκατό τυχαία δείγματα.	55
4.8	Σύγκριση ισορροπημένων τιμών υπολογισμένων από διαφορετικού πλήθους δείγματα ανάλογα με τον ρυθμό άφιξης παικτών για τον σταθμό CS_1	56
4.9	Σύγκριση της μέσης κοινωνικής ωφέλειας που επιτυγχάνεται για τιμές υπολογισμένες από διαφορετικού πλήθους δείγματα ανάλογα με τον ρυθμό λ για εκατό τυχαία δείγματα.	57
4.10	Σύγκριση ισορροπημένων τιμών υπολογισμένων από διαφορετικού πλήθους δείγματα ανάλογα με την χωρητικότητα και τον ρυθμό άφιξης για τον σταθμό CS_1	58
4.11	Σύγκριση της μέσης κοινωνικής ωφέλειας που επιτυγχάνεται για τιμές υπολογισμένες από διαφορετικού πλήθους δείγματα ανάλογα με την χωρητικότητα και τον ρυθμό λ για εκατό τυχαία δείγματα.	58
4.12	Σύγκριση των αντίστοιχων εσόδων του πωλητή που επιτυγχάνεται για τα 6 τυχαία δείγματα του σχήματος 4.4.	59
4.13	Διάγραμμα ισορροπημένων τιμών υπολογισμένων από 10 δείγματα και $\lambda=1$ ανά διάστημα φόρτισης.	60
4.14	Διάγραμμα σύγκρισης για κοινωνική ωφέλεια και έσοδα πωλητή ανάλογα με το δ για 6 τυχαία δείγματα.	61

4.15	Διάγραμμα σύγκρισης για κοινωνική ωφέλεια και έσοδα πωλητή ανάλογα με το δ	61
4.16	Διάγραμμα σύγκρισης μέσης κοινωνικής ωφέλειας και μέσων εσόδων πωλητή ανάλογα με το δ από 1000 δείγματα.	62
4.17	Διαγράμματα σύγκρισης μέσης κοινωνικής ωφέλειας και μέσων εσόδων πωλητή ανάλογα με το δ για διαφορετικές χωρητικότητες και λ από 1000 δείγματα.	62
4.18	Δίκτυο εννέα σταθμών φόρτισης	65
4.19	Σύγκριση ισορροπημένων τιμών ανάλογα με το πλήθος των δειγμάτων στο νέο δίκτυο.	66
4.20	Σύγκριση της κοινωνικής ωφέλειας και των εσόδων που επιτυγχάνεται σε σχέση με την βέλτιστη κοινωνική ωφέλεια για έξι τυχαία δείγματα στο νέο δίκτυο.	67
4.21	Σύγκριση ισορροπημένων τιμών υπολογισμένων από διαφορετικού πλήθους δείγματα ανάλογα με την χωρητικότητα για τον σταθμό CS_1 στο νέο δίκτυο.	68
4.22	Σύγκριση της μέσης κοινωνικής ωφέλειας που επιτυγχάνεται για τιμές υπολογισμένες από διαφορετικού πλήθους δείγματα ανάλογα με την χωρητικότητα για πενήντα τυχαία δείγματα στο νέο δίκτυο.	68
4.23	Σύγκριση ισορροπημένων τιμών υπολογισμένων από διαφορετικού πλήθους δείγματα ανάλογα με τον ρυθμό άφιξης παικτών για τον σταθμό CS_1 στο νέο δίκτυο.	69
4.24	Σύγκριση της μέσης κοινωνικής ωφέλειας που επιτυγχάνεται για τιμές υπολογισμένες από διαφορετικού πλήθους δείγματα ανάλογα με την χωρητικότητα για εκατό τυχαία δείγματα με κατάλληλο ρυθμό λ στο νέο δίκτυο.	69
4.25	Σύγκριση ισορροπημένων τιμών υπολογισμένων από διαφορετικού πλήθους δείγματα ανάλογα με την χωρητικότητα και τον ρυθμό άφιξης για τον σταθμό CS_1 στο νέο δίκτυο.	70
4.26	Σύγκριση της μέσης κοινωνικής ωφέλειας που επιτυγχάνεται για τιμές υπολογισμένες από διαφορετικού πλήθους δείγματα ανάλογα με την χωρητικότητα και τον ρυθμό λ για πενήντα τυχαία δείγματα στο νέο δίκτυο.	70
4.27	Διάγραμμα ισορροπημένων τιμών υπολογισμένων από 10 δείγματα και $\lambda=1$ ανά διάστημα φόρτισης στο νέο δίκτυο.	71
4.28	Διάγραμμα σύγκρισης μέσης κοινωνικής ωφέλειας και μέσων εσόδων πωλητή ανάλογα με το δ για 100 δείγματα.	72
4.29	Διαγράμματα σύγκρισης μέσης κοινωνικής ωφέλειας και μέσων εσόδων πωλητή ανάλογα με το δ για διαφορετικές χωρητικότητες και λ από 100 δείγματα στο νέο δίκτυο.	72

Κατάλογος Πινάκων

2.1 Το Δίλημμα του Φυλακισμένου	16
---	----

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Αντικείμενο της διπλωματικής

Ένα κλασικό πρόβλημα στις μέρες μας είναι πώς πρέπει να κατανεμηθούν περιορισμένα αγαθά σε άτομα που εμφανίζονται με δυναμικό τρόπο και επιθυμούν συγκεκριμένα αντικείμενα. Παρά το γεγονός ότι το πρόβλημα αυτό εμφανίζεται σε διάφορους τομείς, η παρούσα εργασία εστιάζει στο πρόβλημα αποδοχής αιτημάτων ηλεκτρικών οχημάτων σε δίκτυα φόρτισης. Συγκεκριμένα, επιδιώκουμε την ανάπτυξη φιλαλήθους μηχανισμού που θα μας επιτρέψει να αποδεχθούμε ή να απορρίψουμε έναν παίκτη τη στιγμή που φτάνει στο δίκτυο, με στόχο τη μεγιστοποίηση της κοινωνικής ωφέλειας ή των εσόδων του πωλητή.

Πιο αναλυτικά, ας υποθέσουμε ότι έχουμε στη διάθεσή μας έναν σταθμό φόρτισης, στον οποίο μπορούμε να εξυπηρετήσουμε ένα όχημα τη φορά. Ο σταθμός αυτός είναι λειτουργικός για έναν χρονικό ορίζοντα T , κατά τον οποίο καταφθάνουν με δυναμικό τρόπο οχήματα που επιθυμούν να φορτίσουν. Κάθε όχημα που καταφθάνει έχει προσωπικές μεταβλητές, τις οποίες γνωρίζει μόνο το ίδιο και τις εκφράζει με ένα αίτημα. Το αίτημα αυτό αποτελείται κυρίως από τις εξής μεταβλητές:

- τον χρόνο άφιξης του οχήματος,
- το μέγιστο χρονικό διάστημα που μπορεί να παραμείνει στον σταθμό,
- το ελάχιστο χρονικό διάστημα που απαιτείται για φόρτιση,
- και την αξία που αποκομίζει αν ολοκληρωθεί η απαραίτητη φόρτιση εντός του χρονικού διαστήματος παραμονής στον σταθμό.

Από τα παραπάνω, είναι σημαντικό να τονιστεί ότι τα οχήματα μπορούν να δηλώσουν ψευδή στοιχεία στο αίτημά τους με σκοπό να αυξήσουν την προσωπική τους ωφέλεια. Υπάρχει πλήθος ερευνών σχετικά με τον προγραμματισμό σε σταθμούς φόρτισης, με στόχο τη μεγιστοποίηση του αριθμού των οχημάτων που φορτίζουν ή της συνολικής ενέργειας που διανέμεται [33, 11, 35, 6]. Ωστόσο, η δυνατότητα των στρατηγικών παικτών να δηλώσουν ψευδή στοιχεία ή η αδυναμία ποσοτικοποίησης κάποιων μεταβλητών παραμένει ένα σημαντικό ζήτημα.

Επιπροσθέτως, το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε είναι δυναμικό. Για να μάθουμε τα αιτήματα των οχημάτων, πρέπει πρώτα αυτά να καταφθάσουν. Επισημαίνεται ότι δεν μπορούμε να γνωρίζουμε πότε ή ακόμα και αν θα εμφανιστεί κάποιος παίκτης. Εκτός αυτού, υπάρχει μεγάλος βαθμός συμπληρωματικότητας μεταξύ των χρονικών διαστημάτων φόρτισης

που επιθυμούν οι παίχτες. Για παράδειγμα, ένας παίκτης μπορεί να λαμβάνει αξία ίση με 10 αν προγραμματιστεί για πέντε χρονικά διαστήματα και 0 αν προγραμματιστεί για τέσσερα. Το πρόβλημα γίνεται αρκετά πιο ενδιαφέρον και περίπλοκο αν ο σταθμός μας έχει τη δυνατότητα να εξυπηρετήσει περισσότερα από ένα οχήματα ταυτόχρονα, καθώς και αν έχουμε στη διάθεσή μας πολλούς τέτοιους σταθμούς, οι οποίοι να αποτελούν ένα δίκτυο.

Η γενίκευση των κλασικών αποτελεσμάτων του Myerson στην online περίπτωση με πολλές μεταβλητές δεν επιφέρει καλά αποτελέσματα, και για αυτό η στροφή στις ανισότητες του προφήτη φαίνεται να είναι η καλύτερη προσέγγιση. Με τη βοήθειά τους, μπορούμε με έναν πολύ απλό τρόπο να δημιουργήσουμε φιλαλήθη μηχανισμούς σταθερής τιμής, με καλά αποτελέσματα ως προς την κοινωνική ωφέλεια.

Οι ανισότητες του προφήτη έχουν χρησιμοποιηθεί εκτενώς στην επίλυση παρόμοιων προβλημάτων online δημοπρασιών, όπως στην περίπτωση matroids [9, 21], συνδιαστηκών δημοπρασιών με XOS και MPH-k αποτημίσεις [15, 10], καθώς και στην περίπτωση unit-demand bidders [1]. Το πρόβλημα που εξετάζουμε ανήκει στην κατηγορία των συνδυαστικών δημοπρασιών με MPH-k αποτημίσεις, μόνο που στην περίπτωσή μας λόγω της πολύ ισχυρής συμπληρωματικότητας το k είναι πολύ μεγάλο. Η βασική διαφορά σε σχέση με την κλασική περίπτωση είναι ότι, λόγω χωρητικότητας, μπορούμε να παραχωρήσουμε ένα συγκεκριμένο αντικείμενο σε περισσότερους από έναν συμμετέχοντες.

Θα εξετάσουμε πώς, με τη χρήση ισορροπημένων τιμών, επιτυγχάνεται ένα ικανοποιητικό ποσοστό της κοινωνικής ωφέλειας και θα αναλύσουμε πώς διάφοροι παράγοντες του δικτύου, όπως η χωρητικότητα των σταθμών και ο αριθμός των οχημάτων που καταφθάνουν, επηρεάζουν τα αποτελέσματα. Πιο συγκεκριμένα, θα παρατηρήσουμε ότι καθώς η χωρητικότητα στους σταθμούς φόρτισης αυξάνεται, τόσο η βέλτιστη όσο και η επιτευχθείσα κοινωνική ωφέλεια βελτιώνονται. Ιδιαίτερα στην περίπτωση όπου η χωρητικότητα και ο αριθμός των οχημάτων αυξάνονται ταυτόχρονα, χωρίς σημαντικές αλλαγές στις ισορροπημένες τιμές, τα αποτελέσματα βελτιώνονται σημαντικά.

Επίσης, αν και δεν υπάρχει κάποιο θεωρητικό υπόβαθρο που να υποστηρίζει τα αποτελέσματα, θα δούμε ότι χρησιμοποιώντας τις ισορροπημένες τιμές αυτούσιες ως τιμές πώλησης μπορούμε να επιτύχουμε θετικά αποτελέσματα και στο πρόβλημα της μεγιστοποίησης των εσόδων του πωλητή.

1.2 Οργάνωση του τόμου

Η παρούσα διπλωματική εργασία είναι οργανωμένη σε πέντε κεφάλαια:

Στο Κεφάλαιο 1, γίνεται μία εισαγωγή στο πρόβλημα που εξετάζει η εργασία, καθώς και μια σύντομη παρουσίαση της συνολικής δομής της.

Στο Κεφάλαιο 2, γίνεται αναφορά στον σχεδιασμό μηχανισμών, ο οποίος αποτελεί τη βάση για την επίλυση προβλημάτων της μορφής που εξετάζουμε. Συγκεκριμένα, παρέχεται μια σύντομη εισαγωγή στη θεωρία παιγνίων και πώς, βάσει αυτής, το λήμμα του Myerson μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε φιλαλήθεις μηχανισμούς για δημοπρασίες στις απλές περιπτώσεις. Επιπλέον διαπιστώνουμε, πώς το πρόβλημα γίνεται πιο πολύπλοκο στις περιπτώσεις συνδυαστικών και online δημοπρασιών.

Στο Κεφάλαιο 3, που αποτελεί και τον θεωρητικό πυρήνα της εργασίας, διερευνάται πώς, μέσω της χρήσης των ανισοτήτων του προφήτη, μπορούν να κατασκευαστούν απλοί φιλαλήθεις μηχανισμοί. Μέσω της χρήσης ισορροπημένων τιμών, είναι δυνατόν να κατασκευαστούν μηχανισμοί που επιτυγχάνουν καλά αποτελέσματα όσον αφορά την κοινωνική ωφέλεια.

Στο Κεφάλαιο 4, παρουσιάζεται το πρόβλημα της φόρτισης ηλεκτρικών οχημάτων σε δίκτυα, ως παράδειγμα προβλήματος αποδοχής αιτημάτων σύνδεσης σε δίκτυα. Εξετάζεται πώς αυτό μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα πρόβλημα online δημοπρασίας και πώς η θεωρία του Κεφαλαίου 3 μπορεί να εφαρμοστεί. Πραγματοποιείται, επίσης, πειραματική εύρεση ισορροπημένων τιμών και της επιτευχθείσας κοινωνικής ωφέλειας για διαφορετικές παραμέτρους δικτύων. Τέλος, παρουσιάζονται πειραματικά αποτελέσματα που δείχνουν, με τη χρήση ισορροπημένων τιμών, πώς μπορούν να κατασκευαστούν μηχανισμοί που αυξάνουν τα έσοδα του πωλητή χωρίς να μειωθεί σημαντικά η κοινωνική ωφέλεια.

Στο Κεφάλαιο 5, παρατίθεται ο επίλογος της διπλωματικής εργασίας, όπου συνοψίζονται τα αποτελέσματα και τα βασικά συμπεράσματα. Τέλος, προτείνονται πιθανές μελλοντικές κατευθύνσεις που βασίζονται στην παρούσα εργασία.

Κεφάλαιο 2

Σχεδιασμός Μηχανισμών

2.1 Εισαγωγή στη Θεωρία Παιγνίων

Η θεωρία παιγνίων (Game Theory) αποτελεί έναν κλάδο των εφαρμοσμένων μαθηματικών, ο οποίος επικεντρώνεται στη μελέτη καταστάσεων όπου λογικοί παίκτες καλούνται να λάβουν αποφάσεις, συνήθως σε ανταγωνιστικά περιβάλλοντα, σύμφωνα με ορισμένους κανόνες. Η κατανόηση αυτών των αλληλεπιδράσεων έχει εφαρμογές σε διάφορους επιστημονικούς τομείς, όπως τα οικονομικά, τις κοινωνικές επιστήμες, τις πολιτικές επιστήμες, καθώς και την επιστήμη των υπολογιστών. Με τη βοήθεια του [30], ακολουθεί η παρακάτω σύντομη εισαγωγή.

Ορισμός 2.1.1. Ένα παίγνιο αποτελείται από τρεις βασικούς παράγοντες:

- Ένα σύνολο λογικών παικτών $N = \{1, 2, \dots, n\}$
- Ένα σύνολο στρατηγικών S_i για κάθε παίκτη $i \in N$
- Μια συνάρτηση ωφέλειας $u_i : \prod_{j=1}^n S_j \rightarrow \mathbb{R}$ για κάθε παίκτη $i \in N$

Για την κατανόηση της θεωρίας, ένα κλασικό εισαγωγικό παράδειγμα παιγνίου είναι το "Δίλημμα του Φυλαχισμένου", το οποίο παρουσιάζεται και στα [2],[28]. Στο συγκεκριμένο παίγνιο, η αστυνομία έχει συλλάβει δύο κακοποιούς και τους κρατάει για ανάκριση. Τα δύο αυτά άτομα κατηγορούνται για δύο εγκλήματα. Ένα για το οποίο προβλέπεται φυλάκιση ενός έτους και ένα για το οποίο προβλέπεται φυλάκιση πέντε ετών. Η αστυνομία, λόγω έλλειψης επαρκών στοιχείων, μπορεί να τους επιβάλει μόνο την ποινή του ενός έτους φυλάκισης. Ο μόνος τρόπος για να τους επιβληθεί η πενταετής φυλάκιση είναι να καταδώσει ο ένας κακοποιός τον άλλο. Για να το επιτύχει αυτό, η αστυνομία τους ανακρίνει ξεχωριστά, λέγοντάς τους ότι αν κάποιος από τους δύο καταδώσει τον συνεργό του, θα αφεθεί ελεύθερος, ενώ ο άλλος θα καταδικαστεί για επτά έτη. Επομένως, στο συγκεκριμένο παίγνιο ισχύουν τα εξής:

- $N = \{\text{Κακοποιός A, Κακοποιός B}\}$. Το σύνολο των παικτών.
- $S_A = \{\text{Ομολογεί, Δεν ομολογεί}\}$ και $S_B = \{\text{Ομολογεί, Δεν ομολογεί}\}$. Τα σύνολα στρατηγικών για τους παίκτες.
- $u_A : S_A \times S_B \rightarrow \mathbb{R}$ και $u_B : S_A \times S_B \rightarrow \mathbb{R}$. Οι συναρτήσεις ωφέλειας των παικτών, που υποδεικνύουν τα έτη φυλάκισης ανάλογα με τις επιλογές τους. Οι τιμές των συναρτήσεων φαίνονται στον πίνακα 2.1.

		Κακοποιός B	
		Ομολογεί	Δεν ομολογεί
Κακοποιός A	Ομολογεί	Ποινή A : 5 έτη Ποινή B : 5 έτη	Ποινή A : 0 έτη Ποινή B : 7 έτη
	Δεν ομολογεί	Ποινή A : 7 έτη Ποινή B : 0 έτη	Ποινή A : 1 έτη Ποινή B : 1 έτη

Πίνακας 2.1: Το Δίλημμα του Φυλακισμένου

Το αναμενόμενο αποτέλεσμα του παιγνίου, αν οι κακοποιοί είναι λογικοί και τους ενδιαφέρει το ατομικό τους συμφέρον, είναι να καταδώσει ο ένας τον άλλον, όπως φαίνεται παρακάτω:

- i . Αν ο B ομολογήσει, ο A θα ομολογήσει για να λάβει ποινή 5 αντί για 7 χρόνια.
- ii . Αν ο B δεν ομολογήσει, ο A θα ομολογήσει για να λάβει ποινή 0 αντί για 1 χρόνο.
- iii . Αν ο A ομολογήσει, ο B θα ομολογήσει για να λάβει ποινή 5 αντί για 7 χρόνια.
- iv . Αν ο A δεν ομολογήσει, ο B θα ομολογήσει για να λάβει ποινή 0 αντί για 1 χρόνο.

Αξίζει να παρατηρηθεί ότι οι κακοποιοί θα μπορούσαν να μεγιστοποιήσουν τη συνολική τους ωφέλεια και να φυλακιστούν μόνο για ένα έτος αν δρούσαν συνεργατικά και κανένας από τους δύο δεν ομολογούσε. Ωστόσο, αν είναι λογικοί, θα επιλέξουν το προφίλ στρατηγικών $(s_A, s_B) = (\text{Ομολογεί}, \text{Ομολογεί})$.

Για συντομία, οποιοδήποτε προφίλ στρατηγικών $(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n)$ θα γράφεται ως (s_i, s_{-i}) , δηλαδή η στρατηγική του παίκτη i και το διάνυσμα στρατηγικών όλων των υπολοίπων παικτών εκτός του i .

Ορισμός 2.1.2.

- Μία στρατηγική $s_i \in S_i$ λέγεται *αυστηρά κυρίαρχη* για τον παίκτη i , αν για κάθε άλλη στρατηγική του s'_i ισχύει :

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i}) \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

- Μία στρατηγική $s_i \in S_i$ λέγεται *ασθενώς κυρίαρχη* για τον παίκτη i , αν για κάθε άλλη στρατηγική του s'_i ισχύει :

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}) \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

Δηλαδή, μια στρατηγική είναι κυρίαρχη για τον παίκτη i αν τον συμφέρει να την επιλέξει ανεξάρτητα από τις επιλογές των υπολοίπων παικτών.

Ορισμός 2.1.3. Ένα προφίλ στρατηγικών (s_i^*, s_{-i}^*) λέγεται *ισορροπία Nash* αν κανένας παίκτης δεν έχει κίνητρο να αλλάξει στρατηγική. Ισοδύναμα για κάθε $i \in N$ ισχύει

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \forall s_i \in S_i, \quad \forall i \in N$$

2.2 Εισαγωγή στο Σχεδιασμό Μηχανισμών

Ο σχεδιασμός μηχανισμών, εμπνευσμένος από τη θεωρία παιγνίων, έχει ως στόχο να θέσει κάποιους κανόνες σε παίγνια, ώστε οι παίκτες να έχουν κίνητρο να δηλώσουν τα πραγματικά τους δεδομένα. Λαμβάνοντας υπόψη τα κίνητρα των παικτών, αυτός ο τομέας βρίσκει εφαρμογές σε διάφορες περιπτώσεις, όπως δημοπρασίες, ψηφοφορίες κ.ά. Για την εισαγωγή που ακολουθεί, θα βασιστούμε κυρίως στη δομή του [34], καθώς και στα [29],[7].

2.2.1 Δημοπρασίες Ενός Αντικειμένου

Ένα απλό παράδειγμα για να γίνει μια εισαγωγή στον σχεδιασμό μηχανισμών είναι οι δημοπρασίες ενός αντικειμένου. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, υπάρχει ένας πωλητής που έχει στη διάθεσή του μόνο ένα αντικείμενο. Υπάρχει ακόμα ένας αριθμός n στρατηγικών παικτών που ενδιαφέρονται να αγοράσουν το συγκεκριμένο αντικείμενο.

Για να αναλυθεί η συμπεριφορά των παικτών, είναι απαραίτητη η μοντελοποίηση των επιθυμιών τους. Η πρώτη υπόθεση είναι ότι κάθε παίκτης $i \in 1, 2, \dots, n$ έχει μια προσωπική εκτίμηση για την αξία του αντικειμένου, v_i , η οποία δηλώνει το μέγιστο ποσό που είναι πρόθυμος να πληρώσει και την γνωρίζει μόνο ο ίδιος. Κάθε παίκτης i επιθυμεί να αποκτήσει το αντικείμενο με το λιγότερο δυνατό κόστος, το οποίο είναι σίγουρα μικρότερο από v_i . Επομένως, η ωφέλεια u_i ενός παίκτη i εξαρτάται από το αν κερδίσει ή όχι το αντικείμενο. Πιο συγκεκριμένα, αν ένας παίκτης δεν κερδίσει τη δημοπρασία, η ωφέλειά του είναι 0. Αν κερδίσει το αντικείμενο και πληρώσει μια τιμή p_i , τότε η ωφέλειά του είναι $v_i - p_i$.

Ορισμός 2.2.1. Η ωφέλεια ενός στρατηγικού παίκτη i συμβολίζεται με u_i και υπολογίζεται από τον τύπο :

$$u_i = \begin{cases} v_i - p_i & \text{αν κερδίσει το αντικείμενο και πληρώσει } p_i \\ 0 & \text{αν δεν το κερδίσει} \end{cases}$$

Ο σκοπός του κάθε παίκτη είναι να μεγιστοποιήσει την προσωπική του ωφέλεια. Από την άλλη, ο στόχος του σχεδιαστή ενός μηχανισμού είναι να δώσει το αντικείμενο σε αυτόν που το επιθυμεί περισσότερο, δηλαδή να μεγιστοποιήσει την κοινωνική ωφέλεια.

Ορισμός 2.2.2. Η κοινωνική ωφέλεια συμβολίζεται με SW και ορίζεται ως το άθροισμα :

$$SW = \sum_{i=0}^n v_i x_i$$

όπου $x_i = 1$ αν ο παίκτης i είναι νικητής και 0 αν δεν είναι.

Η δημοπρασία του αντικειμένου θα πραγματοποιηθεί με τον εξής τρόπο :

1. Αρχικά, όλοι οι παίκτες γράφουν σε έναν φάκελο το ποσό που είναι διατεθειμένοι να πληρώσουν (b_i) για την απόκτηση του αντικειμένου και το δίνουν στον πωλητή.
2. Ο πωλητής βλέπει τα ποσά ταυτόχρονα και αποφασίζει σε ποιον θα δώσει το αντικείμενο.
3. Ο παίκτης που αποκτά το αντικείμενο, εφόσον υπάρχει, πληρώνει ένα ποσό p και παίρνει το αντικείμενο.

Η παραπάνω διαδικασία είναι γνωστή ως δημοπρασία σφραγισμένων προσφορών. Από τα βήματα που την αποτελούν προκύπτουν τα εξής σημαντικά ερωτήματα:

- Σε ποιον παίκτη θα δώσει ο πωλητής το αντικείμενο και πόσο πρέπει να πληρώσει ο συγκεκριμένος παίκτης;
- Τι εμποδίζει τους παίχτες να δηλώσουν ψευδή τιμή στον πωλητή ($b_i \neq v_i$);

Όσον αφορά τον παίκτη που θα αποκτήσει το αντικείμενο, η προφανής επιλογή του πωλητή είναι να δώσει το αντικείμενο στον παίκτη που δήλωσε τη μεγαλύτερη τιμή. Το πόσο θα πληρώσει ο συγκεκριμένος παίκτης δεν είναι τόσο προφανές και επηρεάζει σημαντικά τη συμπεριφορά των στρατηγικών παικτών, όπως θα δούμε παρακάτω.

2.2.2 Δημοπρασίες Πρώτης και Δεύτερης Τιμής

Μία λογική επιλογή για το ποσό που πρέπει να πληρώσει ο παίκτης που κερδίζει το αντικείμενο είναι η τιμή που δήλωσε στον πωλητή. Αυτή η δημοπρασία, στην οποία ο παίκτης που κερδίζει το αντικείμενο πληρώνει την τιμή που δήλωσε, είναι γνωστή ως δημοπρασία πρώτης τιμής. Δυστυχώς, με αυτόν τον τρόπο, ένας στρατηγικός παίκτης έχει κίνητρο να δηλώσει ψευδή τιμή στον πωλητή. Αυτό το κίνητρο γίνεται εύκολα κατανοητό μέσω του εξής παραδείγματος:

Έστω δύο παίχτες, A και B, οι οποίοι συμμετέχουν σε μία δημοπρασία σφραγισμένων προσφορών για ένα αντικείμενο. Οι πραγματικές αξίες των αντικειμένων για τους παίχτες είναι $v_A = 5$ και $v_B = 2$ αντίστοιχα. Αν δηλώσουν τις πραγματικές τους τιμές, το αντικείμενο θα το αποκτήσει ο παίκτης A και θα πληρώσει $p_A = 5$. Με αυτόν τον τρόπο, η ωφέλεια του παίκτη A είναι $v_A - p_A = 5 - 5 = 0$. Αν όμως ο παίκτης A δήλωνε ψευδώς $b_A = 3$, τότε το αντικείμενο θα το αποκτούσε πάλι ο παίκτης A και θα πλήρωνε 3. Με αυτόν τον τρόπο, η ωφέλεια του παίκτη A θα ήταν $v_A - p_A = 5 - 3 = 2$.

Άρα, η δημοπρασία πρώτης τιμής είναι ένας μηχανισμός στον οποίο οι παίχτες έχουν κίνητρο να δηλώσουν $b_i \neq v_i$. Για να εξαλείψει αυτό το κίνητρο και να ενθαρρύνει τους παίχτες να δηλώσουν τις πραγματικές τους τιμές, ο σχεδιαστής του μηχανισμού, εμπνευσμένος από τη θεωρία παιγνίων, πρέπει να διασφαλίσει ότι η δήλωση των πραγματικών τιμών θα είναι κυρίαρχη στρατηγική για όλους τους παίχτες.

Ορισμός 2.2.3. Ένας μηχανισμός ονομάζεται φιλαλήθης αν για κάθε παίκτη i και κάθε άλλο προφίλ b_{-i} των άλλων παικτών, η δήλωση της πραγματικής τιμής v_i είναι κυρίαρχη στρατηγική για τον i .

$$u_i(v_i, b_{-i}) \geq u_i(b_i, b_{-i}) \quad \forall b_i \neq v_i, \forall i$$

Ένας μηχανισμός που διαθέτει την ιδιότητα της φιλαλήθειας είναι η δημοπρασία δεύτερης τιμής. Σε αυτή τη δημοπρασία, ο παίκτης που κερδίζει το αντικείμενο θα πληρώσει όσο είναι η δεύτερη υψηλότερη προσφορά για το αντικείμενο.

Πρόταση 2.2.1. Στη δημοπρασία δεύτερης τιμής κάθε παίκτης i έχει ως κυρίαρχη στρατηγική να δηλώσει ως προσφορά b_i την πραγματική του τιμή v_i .

Απόδειξη. Έστω ένας τυχαίος παίκτης i και b_{-i} το διάνυσμα προσφορών όλων των άλλων παικτών. Συμβολίζουμε ως $b^* = \max_{j \neq i} b_j$ την μεγαλύτερη προσφορά που δόθηκε εκτός του παίκτη i . Τότε υπάρχουν τα εξής πιθανά ενδεχόμενα :

1. Ο παίκτης i να δηλώσει $b_i > v_i$ τότε :

- Αν $v_i < b_i \leq b^*$ τότε δεν παίρνει το αντικείμενο και άρα $u_i = 0$
- Αν $b_i \geq b^* > v_i$ τότε $u_i = v_i - b^* < 0$
- Αν $b_i > v_i \geq b^*$ τότε $u_i = v_i - b^* > 0$

2. Ο παίκτης i να δηλώσει $b_i < v_i$ τότε :

- Αν $b_i < v_i < b^*$ τότε τότε δεν παίρνει το αντικείμενο και άρα $u_i = 0$
- Αν $v_i > b_i \geq b^*$ τότε $u_i = v_i - b^* > 0$
- Αν $v_i \geq b^* > b_i$ τότε δεν παίρνει το αντικείμενο και άρα $u_i = 0$

3. Ο παίκτης i να δηλώσει $b_i = v_i$ τότε :

- Αν $b_i = v_i < b^*$ τότε δεν παίρνει το αντικείμενο και άρα $u_i = 0$
- Αν $b_i = v_i \geq b^*$ τότε $u_i = v_i - b^* > 0$

Άρα αν $v_i \geq b^*$ ισχύει $u_i(v_i, b_{-i}) \geq u_i(b_i, b_{-i})$ και αν $v_i < b^*$ ισχύει $u_i(v_i, b_{-i}) \geq u_i(b_i, b_{-i})$. Συνεπώς, το να δηλώσει ο τυχαίος παίκτης i την πραγματική του τιμή είναι κυρίαρχη στρατηγική.

□

Διαισθητικά, ο πωλητής δίνει το αντικείμενο στον παίκτη που έχει κάνει την μεγαλύτερη προσφορά και του κάνει τη μεγαλύτερη δυνατή έκπτωση. Με αυτόν τον τρόπο, αν οποιοσδήποτε παίκτης δηλώσει προσφορά μεγαλύτερη από την πραγματική του τιμή, το μόνο που μπορεί να επιτύχει είναι να πληρώσει περισσότερα από όσα είναι διατεθειμένος να δώσει για το αντικείμενο. Αντίθετα, εάν κάποιος δώσει προσφορά μικρότερη από την πραγματική του τιμή, το μόνο που μπορεί να πετύχει είναι να μην αποκτήσει το αντικείμενο.

Πρόταση 2.2.2. Σε μία δημοπρασία δεύτερης τιμής, κάθε παίκτης που δηλώνει την πραγματική του τιμή έχει μη αρνητική ωφέλεια.

Απόδειξη. Έστω ένας τυχαίος παίκτης i .

- Αν δεν πάρει το αντικείμενο, τότε έχει ωφέλεια ίση με 0.
- Αν πάρει το αντικείμενο, τότε η ωφέλειά του θα είναι $v_i - p$. Αφού ο παίκτης είπε αλήθεια $b_i = v_i$ και αφού κέρδισε $b_i \geq p$. Επομένως, $v_i \geq p \implies v_i - p \geq 0$

□

Άρα, στη δημοπρασία δεύτερης τιμής, κάθε παίκτης έχει πλέον κίνητρο να δηλώσει την πραγματική του τιμή, καθώς έτσι εξασφαλίζει ότι θα αποκομίσει τη μεγαλύτερη δυνατή ωφέλεια, η οποία θα είναι πάντα μη αρνητική. Έτσι, με πρόσβαση στις πραγματικές τιμές των παικτών, το αντικείμενο μπορεί να δοθεί στον παίκτη με την υψηλότερη προσφορά, εξασφαλίζοντας ταυτόχρονα και τη μέγιστη κοινωνική ωφέλεια.

2.3 Λήμμα του Myerson

2.3.1 Περιβάλλον Μοναδικής Παραμέτρου

Στις περισσότερες περιπτώσεις, δεν υπάρχει μόνο ένα αντικείμενο προς πώληση, αλλά πολλαπλά. Παρόλα αυτά, οι παίχτες εξακολουθούν να χαρακτηρίζονται από μια προσωπική μεταβλητή για την αξία, όπως η αξία ανά αντικείμενο.

Ορισμός 2.3.1. Ένα περιβάλλον μοναδικής παραμέτρου αποτελείται από:

- n παίχτες, όπου κάθε παίκτης i έχει μια προσωπική τιμή για την αξία ανά μονάδα αντικειμένου, v_i .
- Έναν χώρο εφικτών αποτελεσμάτων X , του οποίου κάθε στοιχείο είναι ένα n -διάστατο διάνυσμα (x_1, \dots, x_n) , όπου x_i συμβολίζει το πλήθος των αντικειμένων που παίρνει ο παίκτης i .

Από τον ορισμό φαίνεται ότι οι δημοπρασίες ενός αντικειμένου αποτελούν περιβάλλοντα μοναδικής παραμέτρου, όπου τα στοιχεία του X είναι n -διάστατα διανύσματα με τιμές 0 ή 1. Πιο συγκεκριμένα, οι τιμές του n -διάστατου διανύσματος είναι μηδέν σε όλες τις θέσεις, εκτός από αυτή που αντιστοιχεί στον παίκτη που κερδίζει το αντικείμενο, η οποία έχει τιμή 1.

Όπως και στην απλή περίπτωση, έτσι και εδώ, ένας μηχανισμός, αφού λάβει τις τιμές b_i όλων των παικτών, πρέπει να αποφασίσει σε ποιους παίχτες θα δώσει τα αντικείμενα και το ποσό πληρωμής που πρέπει να καταβάλουν οι παίχτες που κερδίζουν. Συγκεκριμένα, πρέπει να καταλήξει σε ένα εφικτό διάνυσμα $(x_1, \dots, x_n) \in X$, το οποίο εξαρτάται από τις τιμές (b_1, \dots, b_n) , καθώς και σε ένα διάνυσμα πληρωμών (p_1, \dots, p_n) .

Πιο φορμαλιστικά, ένας μηχανισμός αποτελείται από:

- Έναν κανόνα αποτελεσμάτων, ο οποίος επιλέγει ένα εφικτό διάνυσμα $x(b) = (x_1(b), \dots, x_n(b)) \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ ως συνάρτηση των προσφορών $b = (b_1, \dots, b_n)$.
- Έναν κανόνα πληρωμών, ο οποίος επιλέγει ένα διάνυσμα πληρωμών $p(b) = (p_1(b), \dots, p_n(b)) \in \mathbb{R}^n$ επίσης ως συνάρτηση των προσφορών $b = (b_1, \dots, b_n)$.

Ένας μηχανισμός με κανόνα αποτελεσμάτων x και κανόνα πληρωμών p θα συμβολίζεται με (x, p) . Πριν την διατύπωση και απόδειξη του λήμματος του Myerson, είναι αναγκαίοι οι παρακάτω ορισμοί:

Ορισμός 2.3.2. Ένας κανόνας αποτελεσμάτων x καλείται υλοποιήσιμος αν υπάρχει κανόνας πληρωμής p τέτοιος ώστε ο μηχανισμός σφραγισμένου φάκελου (x, p) να είναι φιλαλήθης και η ωφέλεια όλων των παικτών να είναι μη αρνητική.

Ορισμός 2.3.3. Ένας κανόνας αποτελεσμάτων x σε ένα περιβάλλον μοναδικής παραμέτρου καλείται μονότονος αν για κάθε παίκτη i και σταθερές τιμές b_{-i} από τους άλλους παίχτες, το $x_i(z, b_{-i})$ είναι μη-φθίνων ως προς το z .

Διαισθητικά, ένας κανόνας αποτελεσμάτων είναι μονότομος αν οποιοσδήποτε παίκτης με το να αυξήσει την τιμή που δηλώνει b_i μπορεί να πάρει μόνο περισσότερα ή τα ίδια αντικείμενα. Σε καμία περίπτωση λιγότερα.

2.3.2 Απόδειξη του Λήμματος Myerson

Το λήμμα του Myerson [27] αποτελεί βάση στον σχεδιασμό μηχανισμών. Πιο συγκεκριμένα, σε περιβάλλοντα μοναδικής παραμέτρου, η κλάση των κανόνων του ορισμού 2.3.2, που επιθυμούμε, ταυτίζεται με αυτήν του ορισμού 2.3.3, η οποία είναι αρκετά πιο διαχειρίσιμη.

Επιπλέον, για οποιοδήποτε μονότονο κανόνα αποτελεσμάτων, το λήμμα του Myerson όχι μόνο επισημαίνει ότι υπάρχει μοναδικός κανόνας πληρωμών που εξασφαλίζει τη δημιουργία φιλαλήθη μηχανισμού με μη αρνητική ωφέλεια για όλους τους παίκτες, αλλά παρέχει επίσης και τύπο για την εύρεσή του.

Θεώρημα 2.3.1 (Λήμμα του Myerson). *Για ένα περιβάλλον μοναδικής παραμέτρου ισχύει ότι:*

- Ένας κανόνας αποτελεσμάτων x είναι υλοποιήσιμος αν και μόνο αν είναι μονότονος.
- Αν ο x είναι μονότονος, τότε υπάρχει μοναδικός κανόνας πληρωμών τέτοιος ώστε ο μηχανισμός (x, p) να είναι φιλαλήθης και η ωφέλεια για όλους τους παίκτες να είναι μη αρνητική, θεωρώντας την κανονικοποίηση $b_i = 0 \implies p_i(b_i) = 0$. Για την εύρεση του μοναδικού αυτού κανόνα πληρωμών υπάρχει τύπος κλειστής μορφής.

Απόδειξη. Έστω ένα περιβάλλον μοναδικής παραμέτρου και ένας κανόνας αποτελεσμάτων x . Έστω ακόμα ότι υπάρχει κανόνας πληρωμών p τέτοιος ώστε ο μηχανισμός (x, p) να είναι φιλαλήθης και η ωφέλεια για όλους τους παίκτες να είναι μη αρνητική.

Έστω ακόμα ότι $z = y + h$ με $h > 0$. Τότε υπάρχουν δύο περιπτώσεις :

- Η πραγματική τιμή ενός παίκτη i είναι $v_i = z$ και λόγω φιλαλήθειας ισχύει :

$$\underbrace{z \cdot x(z) - p(z)}_{\text{ωφέλεια δηλώνοντας } b_i = z} \geq \underbrace{z \cdot x(y) - p(y)}_{\text{ωφέλεια δηλώνοντας } b_i = y}$$

$$\iff (y + h) \cdot x(y + h) - p(y + h) \geq (y + h) \cdot x(y) - p(y)$$

$$\iff (y + h) \cdot (x(y + h) - x(y)) \geq p(y + h) - p(y)$$

- Η πραγματική τιμή ενός παίκτη i είναι $v_i = y$ και λόγω φιλαλήθειας ισχύει :

$$\underbrace{y \cdot x(y) - p(y)}_{\text{ωφέλεια δηλώνοντας } b_i = y} \geq \underbrace{y \cdot x(z) - p(z)}_{\text{ωφέλεια δηλώνοντας } b_i = z}$$

$$\iff y \cdot x(y) - p(y) \geq y \cdot x(y + h) - p(y + h)$$

$$\iff p(y + h) - p(y) \geq y \cdot (x(y + h) - x(y))$$

Από τα παραπάνω συνεπάγεται ότι

$$(y + h) \cdot (x(y + h) - x(y)) \geq p(y + h) - p(y) \geq y \cdot (x(y + h) - x(y)) \quad (2.1)$$

$$\implies (y + h) \cdot (x(y + h) - x(y)) \geq y \cdot (x(y + h) - x(y))$$

$$\implies h \cdot (x(y + h) - x(y)) \geq 0$$

Δηλαδή ο κανόνας αποτελεσμάτων x είναι μονότονος.

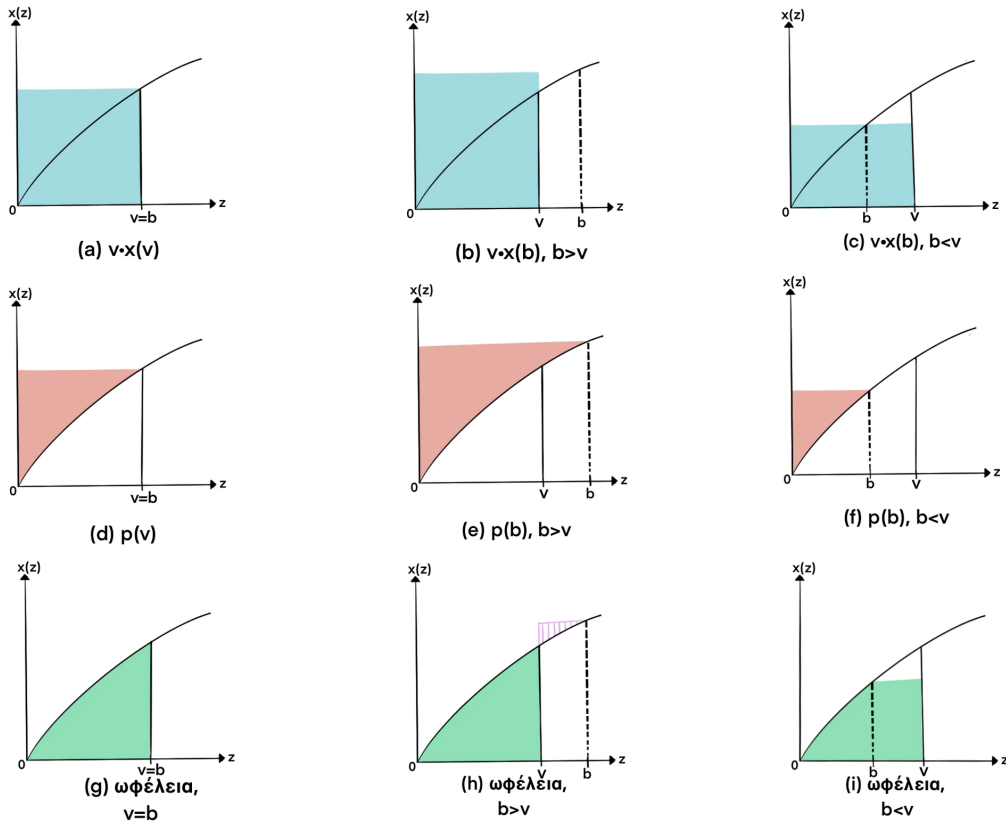
Από την (2.1) ισχύει ότι :

$$(y+h) \frac{x(y+h) - x(y)}{h} \geq \frac{p(y+h) - p(y)}{h} \geq y \frac{x(y+h) - x(y)}{h}$$

και παίρνοντας όριο καθώς $h \rightarrow 0^+$ ισχύει ότι $\frac{dp}{dy} = y \frac{dx}{dy}$ επομένως ολοκληρώνοντας από $y = 0$:

$$p_i(b_i, b_{-i}) = \int_0^{b_i} y \frac{dx}{dy} dy = b_i \cdot x(b_i) - \int_0^{b_i} x(y) dy \quad (2.2)$$

Με την χρήση του (2.2) ως κανόνα πληρωμών για έναν οποιοδήποτε μονότονο κανόνα αποτελεσμάτων, λαμβάνεται μηχανισμός με τις ιδιότητες που επιθυμούνται, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1 που ακολουθεί.



Σχήμα 2.1: Εικόνα για την απόδειξη ότι ο κανόνας πληρωμών (2.2) με έναν μονότονο κανόνα αποτελεσμάτων αποτελούν έναν φιλαλήθη μηχανισμό με μη αρνητική ωφέλεια για όλους τους παίχτες. Οι τρεις στήλες αντιπροσωπεύουν τις περιπτώσεις όπου ο παίχτης δηλώνει $b_i = v_i, b_i > v_i$ και $b_i < v_i$ αντίστοιχα. Στο (h) το κομμάτι με τις γραμμές συμβολίζει αρνητική ωφέλεια. Γενίκευση από το [34].

Παρατηρώντας τις εικόνες ανά στήλη, φαίνεται ότι η ωφέλεια του στρατηγικού παίχτη, η οποία είναι η διαφορά των εμβαδών των πρώτων δύο εικόνων, $u_i = v_i \cdot x(b_i) - p_i(b_i)$, μεγιστοποιείται στην περίπτωση που ο παίχτης είναι φιλαλήθης, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη. \square

Επομένως, με την χρήση του κανόνα πληρωμών από το λήμμα του Myerson, μπορεί να εξασφαλιστεί η φιλαλήθεια και άρα να μεγιστοποιηθεί η κοινωνική ωφέλεια σε δημοπρασίες

όπως αυτή των σφραγισμένων προσφορών, δίνοντας τα αντικείμενα στους παίκτες με την μεγαλύτερη προσφορά.

2.4 Δημοπρασίες Μεγιστοποίησης Εσόδων

Μέχρι στιγμής, σε ένα περιβάλλον μοναδικής παραμέτρου, εστίασαμε στη δημιουργία μηχανισμών με στόχο τη μεγιστοποίηση της κοινωνικής ωφέλειας. Στην παρούσα ενότητα, θα εξετάσουμε πώς ένας πωλητής μπορεί να σχεδιάσει μηχανισμούς με σκοπό τη μεγιστοποίηση των δικών του εσόδων, αξιοποιώντας πιθανοτικές κατανομές.

2.4.1 Μπεϋζιανή Ανάλυση

Έστω, για άλλη μία φορά, ένα περιβάλλον μοναδικής παραμέτρου, όπου κάθε παίκτης i έχει ως προσωπική πληροφορία την πραγματική του αξία v_i . Υποθέτουμε ότι οι τιμές v_i των παικτών προέρχονται από γνωστές κατανομές F_i , με σ.π.π. f_i και στήριγμα στο διάστημα $[0, v_{\max}]$, τις οποίες γνωρίζει ο πωλητής. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι οι κατανομές F_1, \dots, F_n είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Με αυτές τις πληροφορίες, ο πωλητής μπορεί να κατασκευάσει έναν μηχανισμό που θα μεγιστοποιήσει τα αναμενόμενα έσοδά του.

Όσον αφορά τον τρόπο με τον οποίο ο πωλητής μπορεί να επιτύχει τη μεγιστοποίηση των αναμενόμενων εσόδων του, παρουσιάζεται το ακόλουθο απλό παράδειγμα με έναν παίκτη και ένα αντικείμενο:

Έστω ότι ένας παίκτης έχει τιμή $v_i \sim U[0, 1]$, δηλαδή $F(v) = v$. Αν ο πωλητής ήθελε να μεγιστοποιήσει το κοινωνικό όφελος, θα έδινε το αντικείμενο στον μοναδικό παίκτη χωρίς να τον χρεώσει. Ωστόσο, σε αυτή την περίπτωση, ο στόχος του είναι να κοστολογήσει το αντικείμενο έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος του. Έστω ότι ορίζει μια τιμή r για το αντικείμενο. Τότε, αν η πραγματική αξία του παίκτη είναι μεγαλύτερη από r , θα αγοράσει το αντικείμενο και θα πληρώσει r . Διαφορετικά, δεν θα το αγοράσει. Άρα, τα αναμενόμενα έσοδα του πωλητή είναι:

$$\underbrace{r}_{\text{έσοδα του πωλητή}} \cdot \underbrace{1 - F(r)}_{\text{πιθανότητα πώλησης}}$$

Στην περίπτωση αυτή, τα αναμενόμενα έσοδα του πωλητή είναι $r(1 - r)$. Παραγωγίζοντας, βρίσκουμε ότι η τιμή που μεγιστοποιεί τα αναμενόμενα έσοδα είναι $r = \frac{1}{2}$, με αναμενόμενο αποτέλεσμα $\frac{1}{4}$. Αυτή η τιμή, η οποία μεγιστοποιεί τα αναμενόμενα έσοδα του πωλητή, ονομάζεται τιμή μονοπωλίου.

Το προηγούμενο παράδειγμα, αν και πειστικό όσον αφορά τη χρησιμότητα των υποκειμένων κατανομών, δεν αποκαλύπτει πλήρως τη δυσκολία εφαρμογής μιας τέτοιας μεθόδου. Ακόμα και στην περίπτωση όπου υπάρχει ένα αντικείμενο και δύο παίκτες, η ανάλυση γίνεται πολύ πιο περίπλοκη. Ωστόσο, αυτή η δυσκολία παύει να υπάρχει σε ορισμένες περιπτώσεις, παρατηρώντας ότι τα αναμενόμενα έσοδα είναι ακριβώς η αναμενόμενη εικονική ωφέλεια, όπως θα αποδειχθεί παρακάτω.

2.4.2 Αναμενόμενα Έσοδα και Αναμενόμενη Εικονική Ωφέλεια

Αρχικά θεωρείται ότι οι παίχτες δεν έχουν κίνητρο να δηλώσουν ψευδώς $b_i \neq v_i$. Τα αναμενόμενα έσοδα από μία δημοπρασία είναι ακριβώς οι αναμενόμενες πληρωμές των παικτών.

$$\mathbb{E}_{v \sim F}[\sum_{i=1}^n p_i(v)] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{v_{-i}}[\mathbb{E}_{v_i}[p_i(v_i, v_{-i})]]$$

Για έναν συγκεκριμένο παίκτη i με την βοήθεια του κανόνα πληρωμών του Myerson, ισχύει :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{v_i \sim F_i}[p_i(v)] &= \int_0^{v_{max}} p_i(v) f_i(v_i) dv_i = \int_0^{v_{max}} \left[\int_0^{v_i} z \cdot x'_i(z, v_{-i}) dz \right] f_i(v_i) dv_i \\ &= \int_0^{v_{max}} \left[\int_z^{v_{max}} f_i(v_i) dv_i \right] z \cdot x'_i(z, v_{-i}) dz = \int_0^{v_{max}} \underbrace{(1 - F_i(z))}_f z \cdot \underbrace{x'_i(z, v_{-i})}_{g'} dz \\ &= \underbrace{(1 - F_i(z)) z \cdot x_i(z, v_{-i}) \Big|_0^{v_{max}}}_{0-0} - \int_0^{v_{max}} x_i(z, v_{-i}) \cdot (1 - F_i(z) - z f_i(z)) dz \\ &= \int_0^{v_{max}} \underbrace{\left(z - \frac{1 - F_i(z)}{f_i(z)} \right)}_{\phi_i(z)} f_i(z) x_i(z, v_{-i}) dz = \mathbb{E}_{v_i \sim F_i}[\phi_i(v_i) x_i(v_i, v_{-i})] \end{aligned}$$

Δηλαδή τα αναμενόμενα έσοδα από έναν παίκτη μοιάζει αρκετά με την ωφέλεια του με την διαφορά ότι το v_i έχει αντικατασταθεί από ένα $\phi_i(v_i)$.

Ορισμός 2.4.1. Για έναν παίκτη i του οποίου η προσωπική αξία v_i προέρχεται από μία κατανομή F_i θα ονομάζουμε εικονική αξία την ποσότητα :

$$\phi_i(v_i) = v_i - \frac{1 - F_i(v_i)}{f_i(v_i)}$$

Επιστρέφοντας στα συνολικά αναμενόμενα έσοδα μίας δημοπρασίας λόγω ανεξαρτησίας εύκολα φαίνεται ότι :

$$\mathbb{E}_{v \sim F}[\sum_{i=1}^n p_i(v)] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{v \sim F}[\phi_i(v_i) x_i(v)] = \mathbb{E}_{v \sim F}[\sum_{i=1}^n \phi_i(v_i) x_i(v)]$$

Δηλαδή, τα αναμενόμενα έσοδα/κέρδος ενός πωλητή είναι ακριβώς ίσα με την αναμενόμενη εικονική κοινωνική ωφέλεια. Επομένως, για τη δημιουργία ενός μηχανισμού που στοχεύει στη μεγιστοποίηση των εσόδων, αρκεί η κατασκευή ενός μηχανισμού που στοχεύει στη μεγιστοποίηση της εικονικής ωφέλειας.

2.4.3 Μεγιστοποίηση Αναμενόμενης Εικονικής Κοινωνικής Ωφέλειας

Για τη δημιουργία του μηχανισμού, είναι απαραίτητο να προσδιοριστεί ένας κανόνας αποτελεσμάτων και ένας κανόνας πληρωμών. Όσον αφορά τον κανόνα αποτελεσμάτων, μια λογική προσέγγιση είναι να δοθούν τα αντικείμενα στα άτομα με τις μεγαλύτερες εικονικές τιμές, σύμφωνα με την περίπτωση της μεγιστοποίησης του κοινωνικού οφέλους που έχει

μελετηθεί. Δυστυχώς, αυτό δεν ισχύει πάντα, καθώς οι εικονικές τιμές μπορούν να είναι αρνητικές και άρα τον πωλητή δεν τον συμφέρει να δώσει το αντικείμενο. Επιπλέον, ανάλογα με την κατανομή, ο κανόνας αποτελεσμάτων που αναφέρθηκε μπορεί να μην είναι καν μονότονος.

Αν, παρ' όλα αυτά, ο κανόνας αποτελεσμάτων που δίνει τα αντικείμενα στα άτομα με τις μεγαλύτερες εικονικές αξίες είναι μονότονος, τότε, με τη χρήση του λήμματος Myerson, μπορεί να κατασκευαστεί ένας φιλαλήθης μηχανισμός. Όσον αφορά το πρόβλημα των αρνητικών τιμών, μπορούμε να θέσουμε ένα κατώτερο όριο το οποίο οι παίχτες θα πρέπει να υπερβούν. Για να διασφαλίσουμε ότι ο κανόνας αποτελεσμάτων είναι μονότονος, οι κατανομές των v_i θα πρέπει να έχουν μια καλή ιδιότητα.

Ορισμός 2.4.2. *Μια κατανομή F καλείται κανονική όταν η αντίστοιχη εικονική αξία της είναι αυστηρά αύξουσα.*

Για τις περισσότερες περιπτώσεις, ο ορισμός 2.4.2 μπορεί να χαλαρωθεί, επιτρέποντας μη-φθίνουσες συναρτήσεις εικονικής αξίας.

Έτσι, για παράδειγμα, στις δημοπρασίες μοναδικού αντικειμένου, εφόσον όλοι οι παίχτες ακολουθούν ανεξάρτητες και ισόνομες κανονικές κατανομές, θα χρησιμοποιηθεί ο κανόνας αποτελεσμάτων που δίνει το αντικείμενο στον παίκτη με τη μεγαλύτερη θετική εικονική αξία, σε συνδυασμό με τον κανόνα πληρωμών του Myerson. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο κανόνας αποτελεσμάτων είναι ίδιος με αυτόν που χρησιμοποιείται σε δημοπρασία δεύτερης τιμής με κατώτερη τιμή $\phi^{-1}(0)$. Επομένως, με αυτόν τον τρόπο μπορούν να μεγιστοποιηθούν τα αναμενόμενα έσοδα με έναν απλό και κομψό τρόπο.

Παρά την κομψότητα της παραπάνω μεθόδου, η απλή υπόθεση ότι οι κατανομές των παικτών δεν είναι ισόνομες καθιστά τη δημιουργία ενός επιθυμητού μηχανισμού εξαιρετικά δυσκολότερη. Για τον λόγο αυτό, αξίζει να έχουμε έναν πιο απλό μηχανισμό που να προσεγγίζει το επιθυμητό αποτέλεσμα. Ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για την επίτευξη αυτού του σκοπού είναι οι ανισότητες του προφήτη, οι οποίες θα αναλυθούν στο Κεφάλαιο 3.

2.5 Συνδυαστικές Δημοπρασίες

Όλα τα προηγούμενα αποτελέσματα αφορούν περιβάλλοντα μοναδικής παραμέτρου, όπου κάθε παίκτης έχει μια προσωπική παράμετρο, όπως η αξία ανά αντικείμενο v_i . Στην πραγματικότητα, κάθε παίκτης, ειδικά στην περίπτωση που τα αντικείμενα είναι διαφορετικά, έχει διαφορετική αξία για την απόκτησή τους. Ακόμη και στην περίπτωση ίδιων αντικειμένων, ένας παίκτης μπορεί να έχει διαφορετική αξία για διαφορετικό πλήθος αντικειμένων.

2.5.1 Ορισμός του Προβλήματος

Στο γενικό πρόβλημα, υπάρχει ένα σύνολο από n το πλήθος παίχτες, που συμβολίζεται με N και ένα σύνολο αντικειμένων, πλήθους m , τα οποία οι παίχτες επιθυμούν, χωρίς να είναι αναγκαστικά ίδια. Το σύνολο των αντικειμένων αυτών θα συμβολίζεται με M . Κάθε παίκτης i λαμβάνει ένα υποσύνολο $S_i \in X_i$ από αντικείμενα, όπου S_i μπορεί να είναι και το κενό σύνολο \emptyset .

Επομένως, ένα αποτέλεσμα μίας συνδυαστικής δημοπρασίας είναι ένα n -διάστατο διάνυσμα (S_1, \dots, S_n) , όπου S_i είναι το σύνολο των αντικειμένων που λαμβάνει ο παίκτης i , με την

προϋπόθεση ότι το ίδιο αντικείμενο δεν μπορεί να δοθεί σε περισσότερους από έναν παίκτη.

Κάθε παίκτης $i \in N$ έχει πλέον μια συνάρτηση αποτίμησης $v_i : X_i \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ που αποδίδει μη αρνητική αξία σε κάθε υποσύνολο S_i του M . Συνεπώς, κάθε παίκτης διαθέτει 2^m προσωπικές παραμέτρους. Γενικά, ισχύει ότι $v_i(\emptyset) = 0$ και $v_i(S) \leq v_i(T)$ όταν $S \subseteq T \subseteq M$.

2.5.2 Συναρτήσεις Αποτίμησης

Ανάλογα με το είδος των συναρτήσεων αποτίμησης, το πρόβλημα των συνδυαστικών δημοπρασιών μπορεί να είναι εύκολο ή όχι. Για παράδειγμα, στην περίπτωση αθροιστικών συναρτήσεων αποτίμησης έχουμε:

$$v_i(S) = \sum_{j \in S} v_{ij}, \text{ για κάθε } S \subseteq M$$

όπου v_{ij} είναι η αξία του αντικειμένου j για τον παίκτη i . Η συνάρτηση αποτίμησης ενός παίκτη i μπορεί να χαρακτηριστεί από το διάνυσμα (v_{i1}, \dots, v_{im}) , δηλαδή από m το πλήθος προσωπικές παραμέτρους. Σε τέτοιες περιπτώσεις, όπου η αξία ενός αντικειμένου δεν εξαρτάται από τα άλλα, μπορεί να γίνει μία δημοπρασία ενός αντικειμένου για κάθε ένα ξεχωριστά, κατά τα γνωστά.

Το πρόβλημα, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, προκύπτει όταν τα αντικείμενα έχουν κάποιο βαθμό συμπληρωματικότητας ή ομοιότητας μεταξύ τους. Δηλαδή, κάποια αντικείμενα μπορεί να είναι χρήσιμα μόνο σε συνδυασμό με άλλα, ή αποκτώντας ένα αντικείμενο, να μην χρειάζεται κάποιο άλλο με την ίδια χρήση. Μερικές σημαντικές κλάσεις συναρτήσεων αποτίμησης, εκτός από την αθροιστική που αναφέρθηκε, είναι οι εξής :

- Subadditive : $v_i(S \cup T) \leq v_i(S) + v_i(T)$ όπου $S, T \subseteq M, S \cap T = \emptyset$
- Submodular : $v_i(T \cup \{j\}) - v_i(T) \leq v_i(S \cup \{j\}) - v_i(S)$ όπου $S \subseteq T \subseteq M$ και $j \notin T$
- Superadditive : $v_i(S \cup T) \geq v_i(S) + v_i(T)$ όπου $S, T \subseteq M, S \cap T = \emptyset$

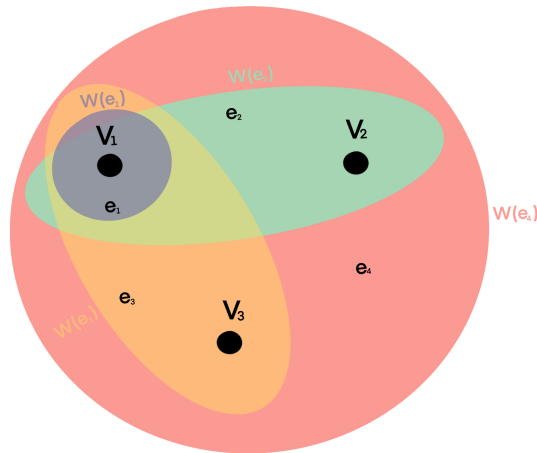
Για να συμπεριληφθούν επομένως όλες οι μονότονες συναρτήσεις αποτίμησης, θα γίνει αναφορά στην maximum over positive hypergraphs (MPH) ιεραρχία για μονότονες συνολοσυναρτήσεις [14], το επίπεδο της οποίας συλλαμβάνει τον βαθμό συμπληρωματικότητας.

2.5.3 Maximum over Positive Hypergraph (MPH) Ιεραρχία

Μια υπεργραφική αναπαράσταση w μιας συνάρτησης αποτίμησης $v : 2^M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ είναι μια συνολοσυνάρτηση που ικανοποιεί την συνθήκη $v(S) = \sum_{T \subseteq S} w(T)$. Κάθε συνάρτηση αποτίμησης v μπορεί να γραφεί σε μοναδική υπεργραφική αναπαράσταση και αντίστροφα. Ένα σύνολο S για το οποίο ισχύει $w(S) \neq 0$ λέγεται υπερακμή του w . Διαισθητικά, η υπεργραφική αναπαράσταση μπορεί να θεωρηθεί ως ένα υπεργράφημα με βάρη, όπου κάθε κορυφή αναπαριστά ένα αντικείμενο του M , και το βάρος κάθε υπερακμής $e \subseteq M$ είναι $w(e)$.

Η τιμή της συνάρτησης για οποιοδήποτε σύνολο $S \subseteq M$, δεν είναι παρά η συνολική αξία όλων των υπερακμών που περιέχονται σε αυτό. Ο βαθμός(rank) μιας υπεργραφικής αναπαράστασης w είναι το πλήθος k των κορυφών που περιέχονται στη μεγαλύτερη υπερακμή. Το rank μίας συνάρτησης αποτίμησης v είναι το rank του αντίστοιχου w . Μία συνάρτηση αποτίμησης με rank k θα ονομάζεται hypergraph- k αποτίμηση. Αν επιπλέον, η υπεργραφική αναπαράσταση του v είναι μη αρνητική, δηλαδή για οποιοδήποτε $S \subseteq M$, $w(S) \geq 0$, τότε η

συνάρτηση v θα λέγεται positive hypergraph- k (PH- k) αποτίμηση.



Σχήμα 2.2: Παράδειγμα ενός Υπεργραφήματος

Ορισμός 2.5.1. Μια μονότονη συνολοσυνάρτηση $v : 2^M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ λέγεται *Maximum over Positive Hypergraph- k (MPH- k)* αν μπορεί να εκφραστεί ως μέγιστο πάνω από ένα σύνολο PH- k συναρτήσεων. Δηλαδή, αν υπάρχουν PH- k συναρτήσεις $\{v_\ell\}_{\ell \in L}$ έτσι ώστε για κάθε σύνολο $S \subseteq M$,

$$v(S) = \max_{\ell \in L} v_\ell(S),$$

όπου L ένα σύνολο δεικτών.

Δύο σημαντικά παραδείγματα MPH- k συναρτήσεων είναι η MPH-1 και η MPH- m . Η MPH-1 είναι η κλάση συναρτήσεων που μπορούν να εκφραστούν ως μέγιστο πάνω σε ένα σύνολο αθροιστικών συναρτήσεων, δηλαδή η γνωστή κλάση των XOS αποτιμήσεων. Η MPH- m , από την άλλη πλευρά, συμπίπτει με την κλάση των μονότονων συναρτήσεων. Πιο συγκεκριμένα, δημιουργώντας ξεχωριστές PH- $|S|$ συναρτήσεις για κάθε σύνολο S με μοναδική υπερακμή ίση με το σύνολο S και βάρος $f(S)$, το μέγιστο από αυτές τις συναρτήσεις είναι ίσο με την τιμή της αρχικής συνάρτησης λόγω της μονοτονίας.

2.6 Online Δημοπρασίες

Εκτός από την περίπτωση των συνδυαστικών δημοπρασιών, δύσκολες είναι και οι περιπτώσεις όπου οι παίχτες καταφτάνουν και αναχωρούν με δυναμικό τρόπο. Οι δημοπρασίες αυτές είναι γνωστές και ως online.

2.6.1 Το Μοντέλο

Για την κατανόηση της δυσκολίας που παρουσιάζεται, θα εστιάσουμε στο πρόβλημα προγραμματισμού ενός επαναχρησιμοποιούμενου αντικειμένου σε ένα χρονικό διάστημα $[0, T]$, όπου ο χρόνος θεωρείται διακριτός, ακολουθώντας το [17].

Στο βασικό μοντέλο θα υπάρχουν n παίχτες. Κάθε παίκτης i μπορεί να χαρακτηριστεί πλήρως από ένα διάνυσμα $v_i = (a_i, d_i, w_i)$, το οποίο θα ονομάζεται είδος του παίκτη i . Το a_i

αντιπροσωπεύει τον χρόνο άφιξης του παίκτη, το d_i τον μέγιστο χρόνο αποχώρησης ή αλλιώς το deadline, και τέλος το w_i αντιπροσωπεύει την αξία που έχει ο επαρκής προγραμματισμός του μέχρι το deadline για τον παίκτη i . Επομένως, για οποιοδήποτε παίκτη i , πρέπει να ισχύει $0 \leq a_i \leq d_i \leq T$ και $0 \leq w_i < \infty$. Το σύνολο όλων των δυνατών ειδών των παικτών θα συμβολίζεται με V .

Ένας κανόνας αποτελεσμάτων θα είναι μία συνάρτηση $x = (x_1, \dots, x_n)$, η οποία αναθέτει σε κάθε παίκτη ένα υποσύνολο του χρονικού διαστήματος $[0, T]$. Τα υποσύνολα αυτά πρέπει να είναι ξένα μεταξύ τους, καθώς μπορεί να εξυπηρετείται ένας παίκτης τη φορά. Για παράδειγμα, για $n = 3$ παίκτες και διάστημα $[0, 5]$, ένας κανόνας αποτελεσμάτων μπορεί να είναι $x = ([1, 2) \cup [4, 5], [0, 1), [2, 4)$. Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων θα συμβολίζεται με X .

Καθώς κάθε παίκτη τον ενδιαφέρει να του κατανεμηθεί ένα υποσύνολο αρκετά μεγάλο ώστε να καλύψει τις ανάγκες του μέχρι το deadline του και όχι κάποιο συγκεκριμένο, για ευκολία, ο κανόνας αποτελεσμάτων μπορεί να συνοψιστεί από μία συνάρτηση $q : V^n \rightarrow \{0, 1\}^n$. Πιο συγκεκριμένα, για οποιοδήποτε $x = (x_1, \dots, x_n)$ ορίζεται:

$$q_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν το υποσύνολο είναι αρκετά μεγάλο για τον παίκτη } i \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Επομένως, από $x = (x_1, \dots, x_n)$ παράγεται ένα $q = (q_1(x), \dots, q_n(x))$. Για παράδειγμα, ένας συνοψισμένος κανόνας αποτελεσμάτων για $n = 3$ παίκτες και διάστημα $[0, 5]$ μπορεί να είναι $q = (1, 0, 1)$.

Με τη χρήση της q , η αξία που αποκτά ένας παίκτης i με βάση το αποτέλεσμα x μπορεί να γραφεί ως $q_i(x)w_i$. Δηλαδή, αν το υποσύνολο που κατανέμεται στον παίκτη i είναι αρκετά μεγάλο για αυτόν, τότε $q_i(x) = 1 \implies q_i(x)w_i = w_i$. Αντίθετα, εάν $q_i(x) = 0$, τότε $q_i(x)w_i = 0$.

Για έναν ντετερμινιστικό μηχανισμό, εκτός από έναν κανόνα αποτελεσμάτων, ο οποίος σε αυτή την περίπτωση μπορεί να γραφεί ως $q : V^n \rightarrow \{0, 1\}^n$, απαιτείται και ένας κανόνας πληρωμών $p : V^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^n$. Η ωφέλεια ενός παίκτη i , για δεδομένη κατανομή x , με πληρωμή p_i , θα είναι $q_i(x(v))w_i - p_i$. Επομένως, η κοινωνική ωφέλεια θα είναι, για άλλη μία φορά, η συνολική αξία όλων των παικτών, $\sum_{i=1}^n q_i(v)w_i$, και τα έσοδα του πωλητή θα είναι το σύνολο των πληρωμών $\sum_{i=1}^n p_i(v)$.

Το ερώτημα πλέον είναι αν υπάρχει κάποιος φιλαλήθης online μηχανισμός που να έχει καλά αποτελέσματα σε σχέση με τα κλασικά αποτελέσματα στην off-line περίπτωση, τόσο ως προς την μεγιστοποίηση της κοινωνικής ωφέλειας όσο και ως προς τα έσοδα του πωλητή.

2.6.2 Γενίκευση του Λήμματος Myerson

Πλέον, κάθε παίκτης έχει τρεις παραμέτρους: a_i, d_i και w_i . Θεωρώντας ότι ο χρόνος άφιξης a_i ενός παίκτη καταγράφεται αυτόματα από τον μηχανισμό όταν καταφτάσει, ο παίκτης μπορεί να δηλώσει ψευδή στοιχεία μόνο όσον αφορά την αξία και το deadline. Με την παραδοχή ότι κάποιος παίκτης δεν μπορεί να αποχωρήσει από το σύστημα πριν από το δηλωμένο του deadline, μπορεί να εξασφαλιστεί ακόμα ότι το d_i που θα δηλώσει δεν είναι μεγαλύτερο από το πραγματικό. Για παράδειγμα, στην περίπτωση φόρτισης ηλεκτρικού οχήματος, αν δηλώσει d_i μεγαλύτερο από το πραγματικό, ο παίκτης δεν θα φτάσει στον προορισμό του

εγκαίρως.

Επομένως για τον μηχανισμό πρέπει να ισχύει :

- Για κάθε $v \in V^n$ και κάθε παίκτη i , $p_i(v) \leq q_i(v)w_i$.
- Για κάθε $v \in V^n$ και κάθε παίκτη i με πραγματικό είδος $v_i = (a_i, d_i, w_i)$ ο οποίος δηλώνει είδος $v'_i = (a_i, d'_i, w'_i)$, με $d'_i \leq d_i$ να ισχύει $q_i(v_i, v_{-i})w_i - p_i(v_i, v_{-i}) \geq q_i(v'_i, v_{-i})w_i - p_i(v'_i, v_{-i})$.

Δηλαδή, η ωφέλεια για κάθε παίκτη πρέπει να είναι μη αρνητική, και η δήλωση του πραγματικού είδους να είναι κυρίαρχη στρατηγική για κάθε παίκτη.

Ορισμός 2.6.1. Λέμε ότι ένα είδος $v_i = (a_i, d_i, w_i)$ κυριαρχεί το είδος $v'_i = (a'_i, d'_i, w'_i)$ και συμβολίζουμε με $v_i > v'_i$, αν $a_i \leq a'_i$, $d_i \geq d'_i$ και $w_i \geq w'_i$.

Ορισμός 2.6.2. Λέμε ότι ένας κανόνας αποτελεσμάτων $q : V^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ είναι μονότονος αν για κάθε παίκτη i και $v, v' \in V$ με $v_i > v'_i$, $v_j = v'_j$ για $j \neq i$, έχουμε $q_i(v_i, v_{-i}) \geq q_i(v'_i, v_{-i})$.

Θεώρημα 2.6.1. Για δεδομένο κανόνα αποτελεσμάτων q υπάρχει κανόνας πληρωμών p τέτοιος ώστε ο μηχανισμός (q, p) να είναι φιλαλήθης και η ωφέλεια των παικτών να είναι μη αρνητική αν και μόνο αν το q είναι μονότονο.

Απόδειξη. Εμπνευσμένοι από την απόδειξη του Θεωρήματος 6 στο [17], έχουμε:

(\Rightarrow) Έστω κανόνας αποτελεσμάτων q και κανόνας πληρωμών p τέτοιοι ώστε ο μηχανισμός (q, p) να είναι φιλαλήθης. Έστω ακόμα $v, v' \in V^n$ με $v_i = (a_i, d_i, w_i) > v'_i = (a_i, d'_i, w'_i)$ και $v_{-i} = v'_{-i}$.

Αν v_i οι πραγματικές τιμές τότε :

$$q_i(v)w_i - p_i(v) \geq q_i(v')w_i - p_i(v')$$

Αν v'_i οι πραγματικές τιμές τότε :

$$q_i(v')w'_i - p_i(v') \geq q_i(v)w'_i - p_i(v)$$

Άρα

$$\begin{aligned} (q_i(v) - q_i(v'))w_i &\geq p_i(v) - p_i(v') \geq (q_i(v) - q_i(v'))w'_i \\ \implies (q_i(v) - q_i(v'))(w_i - w'_i) &\geq 0 \end{aligned}$$

και αφού $v_i > v'_i \implies w_i > w'_i$ ισχύει $q_i(v) \geq q_i(v')$ δηλαδή q μονότονο.

(\Leftarrow) Έστω τώρα q ένας μονότονος κανόνας αποτελεσμάτων και $v \in V^n$ με $v_i = (a_i, d_i, w_i)$ οι πραγματικές τιμές. Ορίζουμε κανόνα πληρωμών ως :

$$p_i(v) = \begin{cases} \min\{w'_i : q_i((a_i, d_i, w'_i), v_{-i}) = 1\} & \text{αν } q_i(v) = 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \quad (2.3)$$

1. Στην περίπτωση που δηλώσει $d_i \leq d'_i$ επειδή θα αναγκαστεί να παραμείνει μέχρι d'_i , δεν θα φτάσει στην ώρα του και άρα $u_i(v') = -w_{min}$ αν προγραμματιστεί.
2. Έστω $w_i \geq w'_i$ και $d_i \geq d'_i$ τότε :

- Αν $q_i(v) = 0$ και $q_i(v') = 0$ τότε $u_i(v) = u_i(v') = 0$
- Αν $q_i(v) = 1$ και $q_i(v') = 0$ τότε $u_i(v) = w_i - w_{min} \geq 0 = u_i(v')$
- Αν $q_i(v) = 1$ και $q_i(v') = 1$ τότε $u_i(v) = w_i - w_{min, d_i} \geq u_i(v') = w_i - w_{min, d'_i}$
- $w_i \geq w'_i$ και $d_i \geq d'_i \implies v > v' \implies q_i(v) > q_i(v')$ αφού q μονότονο και άρα δεν γίνεται $q_i(v) = 0$ και $q_i(v') = 1$.

3. Έστω $w_i \leq w'_i$ και $d_i \geq d'_i$ τότε :

- Αν $q_i(v) = 0$ και $q_i(v') = 0$ τότε $u_i(v) = u_i(v') = 0$
- Αν $q_i(v) = 1$ και $q_i(v') = 0$ τότε $u_i(v) = w_i - w_{min} \geq 0 = u_i(v')$
- Αν $q_i(v) = 0$ και $q_i(v') = 1$ τότε $u_i(v) = 0$ και $u_i(v') = w_i - w_{min} < 0$ καθώς αν $w_{min} \leq w_i \implies q_i(v) = 1$
- Αν $q_i(v) = 1$ και $q_i(v') = 1$ τότε $u_i(v) = w_i - w_{min, d_i} \geq u_i(v') = w_i - w_{min, d'_i}$

Άρα σε κάθε περίπτωση αν q είναι μονότονο $p_i(v) \geq p_i(v')$ □

Από την παραπάνω απόδειξη παρατηρείται ότι ένας μονότονος κανόνας αποτελεσμάτων q με κανόνα πληρωμών :

$$p_i(v) = \begin{cases} \min\{w'_i : q_i((a_i, d_i, w'_i), v_{-i}) = 1\} & \text{αν } q_i(v) = 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

αποτελεί έναν φιλαλήθη μηχανισμό με μη αρνητικές ωφέλειες για τους παίκτες. Ο συγκεκριμένος κανόνας πληρωμών μπορεί να γραφεί και ως :

$$p_i(v) = w_i q_i((a_i, d_i, w_i), v_{-i}) - \sum_{w'_i=0}^{w_i-1} q_i((a_i, d_i, w'_i), v_{-i}) \quad (2.4)$$

Διαισθητικά, αν ένας παίκτης με $v_i = (a_i, d_i, w_i)$ προγραμματιζόταν αν δήλωνε (a_i, d_i, w'_i) με $w'_i < w_i$ και δεν θα προγραμματιζόταν αν δήλωνε $(a_i, d_i, w'_i - 1)$, τότε θα πληρώσει w'_i . Καθώς για $w''_i < w'_i$ δεν θα προγραμματιζόταν, ισχύει ότι $\sum_{w''_i=0}^{w'_i-1} q_i((a_i, d_i, w'_i), v_{-i}) = 0$. Επιπλέον, για $w_i \geq w''_i \geq w'_i$ θα προγραμματιζόταν και άρα ισχύει ότι $\sum_{w''_i=w'_i}^{w_i} q_i((a_i, d_i, w'_i), v_{-i}) = \sum_{w''_i=w'_i}^{w_i} 1 = w_i - w'_i$. Συνολικά έχουμε $\sum_{w'_i=0}^{w_i-1} q_i((a_i, d_i, w'_i), v_{-i}) = w_i - w'_i$. Επομένως, όσον αφορά την πληρωμή ισχύει :

$$p_i(v) = w_i q_i((a_i, d_i, w_i), v_{-i}) - \sum_{w'_i=0}^{w_i-1} q_i((a_i, d_i, w'_i), v_{-i}) = \begin{cases} w'_i & \text{αν } q_i((a_i, d_i, w'_i)) = 1 \text{ και } q_i((a_i, d_i, w''_i)) = 0 \forall w''_i < w'_i \leq w_i \\ 0 & \text{αν } q_i((a_i, d_i, w_i)) = 0 \end{cases}$$

2.6.3 Competitive Ratio ως προς την Κοινωνική Ωφέλεια

Ορισμός 2.6.3. Ένας online μηχανισμός καλείται αυστηρά c -competitive ως προς την κοινωνική ωφέλεια αν είναι φιλαλήθης και δεν υπάρχει v τέτοιο ώστε

$$c \cdot SW(q(v)) < SW(OPT(v))$$

Για ευκολία, θα γίνει η υπόθεση ότι υπάρχει ένα μοναδικό επαναχρησιμοποιούμενο αγαθό, όπως ένας φορτιστής, και ότι όλοι οι παίκτες που καταφτάνουν χρειάζονται να προγραμματιστούν για μία χρονική μονάδα.

Πρόταση 2.6.1. Υπάρχει ένας *truthful 2-competitive* μηχανισμός σε σχέση με την κοινωνική ωφέλεια για την παραπάνω περίπτωση.

Απόδειξη. Ακολουθώντας την απόδειξη του Θεωρήματος 7 από το [17], έστω ότι σε κάθε βήμα προγραμματίζεται ο παίκτης με τη μεγαλύτερη αξία ο οποίος βρίσκεται παρόν και δεν έχει προγραμματιστεί σε προηγούμενο βήμα. Ο συγκεκριμένος κανόνας κατανομής είναι μονότονος. Πιο συγκεκριμένα, έστω παίκτης i και $v_i > v'_i$ και $v_j = v'_j$ για $j \neq i$:

1. Αν ο παίκτης i προγραμματίζεται με $v'_i = (a_i, d'_i, w'_i)$ τότε θα προγραμματιζόταν και δηλώνοντας $v_i = (a_i, d_i, w_i)$ αφού θα είχε μεγαλύτερη αξία στο $[a_i, d'_i] \subset [a_i, d_i]$ και άρα $q_i(v_i, v_{-i}) \geq q_i(v'_i, v_{-i})$.
2. Αν ο παίκτης i δεν προγραμματίζεται με $v'_i = (a_i, d'_i, w'_i)$ τότε δηλώνοντας $v_i = (a_i, d_i, w_i)$ είτε προγραμματίζεται είτε όχι. Άρα $q_i(v_i, v_{-i}) \geq q_i(v'_i, v_{-i})$.
3. Αν ο παίκτης i δεν προγραμματίζεται με $v_i = (a_i, d_i, w_i)$ τότε δεν θα προγραμματιζόταν ούτε δηλώνοντας $v'_i = (a_i, d'_i, w'_i)$, αφού έχει μικρότερη αξία σε μικρότερο διάστημα. Άρα $q_i(v_i, v_{-i}) \geq q_i(v'_i, v_{-i})$.

Δηλαδή q μονότονο αποτέλεσμα. Σε συνδυασμό με το κανόνα πληρωμών (2.4), όπως έχει αποδειχθεί στο θεώρημα 2.6.1, καταλήγουμε σε φιλαλήθη μηχανισμό με μη αρνητικές ωφέλειες.

Όσον αφορά την απόδοσή του σε σχέση με την καλύτερη κοινωνική ωφέλεια, παρατηρείται το εξής: Έστω μία off-line βέλτιστη λύση OPT. Έστω κάποιος παίκτης i ο οποίος προγραμματίζεται στην OPT και όχι με το A. Τότε, την χρονική στιγμή t στην οποία προγραμματίζεται στην OPT υπάρχει ένας παίκτης j με $w_j \geq w_i$, ο οποίος προγραμματίζεται με το A. Διαφορετικά, θα προγραμματιζόταν ο i . Η χειρότερη περίπτωση είναι να πάρει ο j την θέση του i , και κανένας άλλος την θέση του j αν προγραμματιζόταν και εκείνος στην OPT. Με αυτό τον τρόπο φαίνεται ότι στη χειρότερη περίπτωση το $w_i + w_j$ αντικαθιστάτε μόνο με $w_j \geq \frac{w_i + w_j}{2}$. Επομένως, η κοινωνική ωφέλεια στην OPT είναι το πολύ διπλάσια από αυτό του A.

□

Θεώρημα 2.6.2. Δεν υπάρχει φιλαλήθης online ντετερμινιστικός μηχανισμός ο οποίος να πετυχαίνει $(2 - \epsilon)$ -προσέγγιση ως προς την κοινωνική ωφέλεια για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$

Απόδειξη. Ακολουθώντας την απόδειξη του Θεωρήματος 10 από το [17], έστω ότι υπάρχει φιλαλήθης online ντετερμινιστικός μηχανισμός ο οποίος να πετυχαίνει $(2 - \epsilon)$ -προσέγγιση ως προς την κοινωνική ωφέλεια. Έστω i με $v_i = (1, 2, 1 + \delta)$ όπου $0 < \delta < \frac{\epsilon}{1 - \epsilon}$ και j με $v_j = (1, 3, 1)$. Αν οι τιμές που δήλωσαν οι παίκτες είναι οι πραγματικές, ο μηχανισμός θα πρέπει να προγραμματίσει τον i στο πρώτο διάστημα και τον j στο δεύτερο. Επίσης, ο μηχανισμός θα πρέπει να χρεώσει τον i λιγότερο από $1 + \delta$, για να μην έχει κίνητρο να πει ψέματα. Άρα ο i έχει θετική ωφέλεια για $\delta > 0$.

Έστω τώρα ένας παίκτης i' με $v_{i'} = (1, 3, 1 + \delta)$, ένας j' με $v_{j'} = (1, 3, 1)$ και τέλος ένας k' με $v_{k'} = (2, 3, \infty)$. Σε αυτή την περίπτωση, ο μηχανισμός θα πρέπει να προγραμματίσει

τον i' στο πρώτο διάστημα για να μην έχει κίνητρο να δηλώσει ψευδώς v_i αντί για $v_{i'}$. Τον k' στο δεύτερο και να μην προγραμματίσει τον j' .

Έστω τώρα παίχτες i'' με $v_{i''} = (1, 3, 1 + \delta)$, ένας j'' με $v_{j''} = (1, 2, 1)$ και τέλος ένας k'' με $v_{k''} = (2, 3, \infty)$. Σε αυτή την περίπτωση, ο μηχανισμός δεν πρέπει να προγραμματίσει τον j'' στο πρώτο διάστημα διότι ο παίχτης j'' θα είχε κίνητρο να δηλώσει j'' και να έχει θετική ωφέλεια. Αν ο παίχτης k'' τελικά δεν εμφανιστεί και ο παίχτης j'' δεν προγραμματιστεί, όπως πρέπει, η κοινωνική ωφέλεια που πετυχαίνει ο μηχανισμός είναι το πολύ $1 + \delta$, ενώ το βέλτιστο είναι $2 + \delta$. Καθώς $\frac{2+\delta}{1+\delta} > 2 - \epsilon$ καταλήγουμε σε άτοπο. \square

Από την πρόταση 2.6.1 και το θεώρημα 2.6.2, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ένας φιλαλήθης online νετερμιστικός μηχανισμός στην καλύτερη περίπτωση μπορεί να είναι 2-competitive ως προς την κοινωνική ωφέλεια της optimal off-line περίπτωσης.

2.6.4 Competitive Ratio ως προς τα Έσοδα

Όπως είδαμε, ο online μηχανισμός που αναφέραμε στην πρόταση 2.6.1 είναι ένας που πετυχαίνει το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα όσον αφορά την κοινωνική ωφέλεια. Όσον αφορά τα έσοδα, δυστυχώς το competitive ratio μπορεί να είναι αυθαίρετα μεγάλο, όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

Έστω ότι έχουμε $n + 2$ το πλήθος παίχτες $i \in \{1, 2, \dots, n + 2\}$. Ο κάθε παίχτης i έχει το εξής είδος :

$$v_i = \begin{cases} (1, 2, 1) & \text{αν } i = 1 \\ (i - 1, i + 1, 2) & \text{αν } 1 < i < n + 2 \\ (n + 1, n + 2, 1) & \text{αν } i = n + 2 \end{cases}$$

Στην off-line περίπτωση, ο βέλτιστος μηχανισμός χρεώνει όλους τους παίχτες $i = 2, \dots, n, n + 1$ με 1, συλλέγοντας έσοδα ίσα με n . Στην online περίπτωση, ο μηχανισμός χρεώνει τον παίχτη 2 με 1 και όλους τους άλλους με 0, συλλέγοντας έσοδα ίσα με 1. Καθώς το n μπορεί να είναι όσο μεγάλο θέλουμε, το competitive ratio δεν είναι φραγμένο από καμία σταθερά c .

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω και από το [31], τα αποτελέσματα, ακόμα και σε ένα πολύ απλό παράδειγμα στις online δημοπρασίες, δεν είναι θετικά. Πόσο μάλλον όταν υπάρχουν περισσότερα από ένα επαναχρησιμοποιούμενα αντικείμενα και οι παίχτες χρειάζεται να προγραμματιστούν για ένα χρονικό διάστημα που μόνο οι ίδιοι γνωρίζουν. Για τον λόγο αυτό, θα γίνει προσέγγιση του προβλήματος των online συνδυαστικών δημοπρασιών από την σκοπιά της optimal stopping θεωρίας, όπως στο [18], με τη χρήση ανισοτήτων του προφήτη.

Κεφάλαιο 3

Ανισότητες του Προφήτη

Έστω ένας παίκτης βρίσκεται σε μία τηλεοπτική εκπομπή και πρόκειται να παίξει το ακόλουθο παιχνίδι. Μπροστά του βρίσκονται με σειρά n το πλήθος σεντούκια ιθσαυρού. Κάθε σεντούκι είναι κλειδωμένο και περιέχει ένα χρηματικό έπαθλο, το οποίο δεν γνωρίζει κανένας. Ωστόσο, πάνω σε κάθε σεντούκι υπάρχει η κατανομή από την οποία προήλθε η τιμή που βρίσκεται στο εσωτερικό του. Ο οικοδεσπότης θα ξεκινήσει και θα ανοίγει τα σεντούκια, ένα τη φορά. Όταν ένα σεντούκι ανοίγει, ο παίκτης παρατηρεί την πραγματική τιμή που βρίσκεται μέσα και πρέπει να πάρει μία επιλογή. Μπορεί είτε να αποδεχθεί το έπαθλο και να αποχωρήσει με αυτό είτε να το απορρίψει, χωρίς να έχει την δυνατότητα να πάρει στο μέλλον και να συνεχίσει στο επόμενο. Πώς ένας παίκτης πρέπει να παίξει αυτό το παιχνίδι για να μεγιστοποιήσει τα αναμενόμενα κέρδη του ;

Η δυσκολία της απόφασης του παίκτη πηγάζει από τον συμβιβασμό μεταξύ του κινδύνου να αποδεχτεί ένα έπαθλο νωρίς και να χάσει αργότερα ένα σπουδαίο, και του κινδύνου να καταλήξει με ένα κακό έπαθλο σε ένα από τα τελευταία στάδια.

Βλέποντας τα σεντούκια ως παίχτες που έχουν κρυφές τις πραγματικές τιμές αξίας τους για ένα αντικείμενο, το πρόβλημα γίνεται πλέον ισοδύναμο με την επιλογή του παίκτη που θα μεγιστοποιήσει την κοινωνική ωφέλεια στην περίπτωση δημοπρασίας ενός αντικειμένου. Εκτός αυτού, αφού τα αντικείμενα έρχονται κατά κάποιον τρόπο με δυναμικό τρόπο και σε κάθε βήμα / χρονική στιγμή πρέπει να ληφθεί μία απόφαση, φαίνεται και η άμεση σχέση με τις online δημοπρασίες.

3.1 Ανισότητα του Προφήτη για ένα Αντικείμενο

Θα αποδειχθεί ότι υπάρχει μια στρατηγική κατώτατης τιμής που πετυχαίνει τουλάχιστον το μισό της αναμενόμενης μέγιστης αξίας όπως φαίνεται και στα [21], [20], [23]. Για απλοποίηση, θα συμβολίζεται με V^* η τυχαία μεταβλητή της οποίας η αξία είναι $\max_i v_i$, δηλαδή το μέγιστο από τα n πραγματοποιημένα έπαθλα. Η στρατηγική κατώτατης τιμής που θα εξεταστεί είναι αυτή που αποδέχεται το πρώτο έπαθλο του οποίου η αξία υπερβαίνει το $\frac{1}{2}\mathbb{E}[V^*]$, εάν υπάρχει.

Θεώρημα 3.1.1. *Η στρατηγική κατώτατης τιμής που αποδέχεται το πρώτο έπαθλο που είναι τουλάχιστον $\frac{1}{2}\mathbb{E}[V^*]$ έχει αναμενόμενη ανταμοιβή $\frac{1}{2}\mathbb{E}[V^*]$.*

Απόδειξη. Η στρατηγική κατώτατης τιμής ισοδυναμεί με τον ορισμό μιας τιμής $p = \frac{1}{2}\mathbb{E}[V^*]$ για ένα αγαθό προς πώληση, και στη συνέχεια να επιτραπεί σε n παίχτες, καθέναν με μια αξία v_i που προέρχεται από D_i , να επιλέγουν διαδοχικά αν θα αγοράσουν ή όχι το αντικείμενο. Η

αναμενόμενη ανταμοιβή αποτελείται από δύο μέρη. Το πρώτο είναι τα αναμενόμενα έσοδα του πωλητή και το δεύτερο το αναμενόμενο πλεόνασμα, που είναι το άθροισμα των ωφελειών των αγοραστών. Για τον λόγο αυτό, θα βρεθούν κάτω φράγματα για τις δύο αυτές ποσότητες ξεχωριστά.

Έσοδα Πωλητή : Τα αναμενόμενα έσοδα του πωλητή από αυτή την στρατηγική είναι απλά p φορές η πιθανότητα το αντικείμενο να πωληθεί. Δηλαδή :

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}[V^*] \cdot Pr[\text{Το αντικείμενο πωλείτε}] \quad (3.1)$$

Πλεόνασμα Αγοραστών : Αν το αντικείμενο δεν έχει αγοραστεί από κάποιον μέχρι να έρθει η στιγμή για τον παίκτη i να επιλέξει, τότε ο i μπορεί να επιλέξει αν θα το αγοράσει. Το αναμενόμενο όφελος του i είναι τουλάχιστον $\max\{v_i - p, 0\} := (v_i - p)^+$. Άρα το αναμενόμενο πλεόνασμα είναι τουλάχιστον :

$$\sum_i \mathbb{E}[(v_i - p)^+] \cdot Pr[\text{ο } i \text{ έχει την επιλογή να αγοράσει}] \quad (3.2)$$

Στην περίπτωση που το αντικείμενο δεν έχει πουληθεί μέχρι το τέλος της διαδικασίας, τότε κάθε παίκτης έχει την ευκαιρία να αγοράσει το αντικείμενο. Δηλαδή :

$$\begin{aligned} (3.2) &\geq \left(\sum_i \mathbb{E}[(v_i - p)^+]\right) \cdot Pr[\text{το αντικείμενο δεν πωλείται}] \geq \\ &\geq \mathbb{E}[\max_i (v_i - p)^+] \cdot Pr[\text{το αντικείμενο δεν πωλείται}] \geq \\ &\geq (\mathbb{E}[\max_i v_i] - p) \cdot Pr[\text{το αντικείμενο δεν πωλείται}] \geq \\ &\geq \frac{1}{2}\mathbb{E}[V^*] \cdot Pr[\text{το αντικείμενο δεν πωλείται}] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Αθροίζοντας τις (3.1) και (3.3) συμπεραίνεται ότι η αναμενόμενη ανταμοιβή είναι τουλάχιστον $\frac{1}{2}\mathbb{E}[V^*]$, όπως επιθυμείται.

□

3.1.1 Μεγιστοποίηση Κοινωνικής Ωφέλειας με Ανισότητα του Προφήτη

Στην κλασική περίπτωση δημοπρασίας ενός αντικειμένου, όλοι οι παίκτες χρειάζεται να δηλώσουν τιμές b_i για την απόκτηση του αντικειμένου. Το αντικείμενο θα δοθεί στον παίκτη με την μεγαλύτερη τιμή και για να εξασφαλιστεί η φιλαλήθεια των τιμών που δηλώθηκαν, ο νικητής θα πληρώσει την δεύτερη μεγαλύτερη τιμή. Ακόμα και σε αυτή την απλή περίπτωση, η βέλτιστη δημοπρασία για την μεγιστοποίηση της κοινωνικής ωφέλειας έχει αρκετά βήματα

Είναι σύνηθες φαινόμενο οι πωλητές να έχουν πρόσβαση στις κατανομές των πραγματικών αξιών από προηγούμενες δημοπρασίες. Η χρήση αυτών των δεδομένων έχει συμβάλει στη δημιουργία δημοπρασιών που στοχεύουν στη μεγιστοποίηση των εσόδων του πωλητή.

Με την χρήση των κατανομών αυτών και την βοήθεια της ανισότητας του προφήτη, μπορεί να δημιουργηθεί ένας πολύ απλούστερος μηχανισμός με αρκετά καλά αποτελέσματα

Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με την ανισότητα του προφήτη (θεώρημα 3.1.1), κοστολογώντας το αντικείμενο με τιμή $p = \frac{1}{2}\mathbb{E}[\max_i v_i]$ και αφήνοντας τους παίχτες με όποια σειρά θέλουν να επιλέξουν αν το αγοράσουν ή όχι, η κοινωνική ωφέλεια που επιφέρει ένας τόσο απλός μηχανισμός είναι τουλάχιστον το $\frac{1}{2}$ της κοινωνικής ωφέλειας του βέλτιστου μηχανισμού.

Εκτός από την ευκολία και τα αρκετά καλά αποτελέσματα ενός τέτοιου μηχανισμού σταθερής τιμής, αξίζει να παρατηρηθεί ότι ένας τέτοιος μηχανισμός είναι φιλαλήθης. Πιο συγκεκριμένα, η τιμή p δεν εξαρτάτε από τις τιμές των παιχτών, αφού οι παίχτες δεν τις δηλώνουν. Οι παίχτες αγοράζουν το αντικείμενο μόνο όταν η πραγματική τιμή τους είναι μεγαλύτερη από p , εξασφαλίζοντας ακόμα ότι έχουν μη αρνητική ωφέλεια.

3.1.2 Μεγιστοποίηση Εσόδων Πωλητή με Ανισότητα του Προφήτη

Για να δούμε πώς η ανισότητα του προφήτη μπορεί βοηθήσει στην μεγιστοποίηση των εσόδων ενός πωλητή, ακολουθώντας το [34] ας επιστρέψουμε στην περίπτωση ενός αντικειμένου για πώληση και n παιχτών των οποίων τα v_i προέρχονται από κατανομές F_i .

Η βασική ιδέα είναι να θεωρηθούν οι εικονικές αξίες $\phi_i(v_i)^+$, αν είναι μη αρνητικές, ως το i -οστό έπαθλο. Τα αναμενόμενα έσοδα της βέλτιστης δημοπρασίας είναι :

$$\mathbb{E}[\sum_i \phi_i(v_i)x_i(v)] = \mathbb{E}[\max_i \phi_i(v_i)^+]$$

Θεωρώντας έναν κανόνα αποτελεσμάτων ως εξής :

- Επιλέγεται p τέτοιο ώστε $Pr[\max_i \phi_i(v_i)^+ \geq p] = \frac{1}{2}$
- Το αντικείμενο δίνεται σε παίκτη i με $\phi_i(v_i) \geq p$, αν υπάρχει (σύμφωνα με την μονοτονία)

Από την ανισότητα του προφήτη (θεώρημα 3.1.1) για οποιαδήποτε δημοπρασία με κανόνα αποτελεσμάτων τον παραπάνω ισχύει :

$$\mathbb{E}[\sum_i \phi_i(v_i)^+ x_i(v)] \geq \frac{1}{2}\mathbb{E}[\max_i \phi_i(v_i)^+]$$

Για παράδειγμα, για τη μεγιστοποίηση των αναμενόμενων εσόδων, αρκεί να οριστούν κατώτατες τιμές $\phi_i^{-1}(t)$ για κάθε παίκτη ξεχωριστά, όπου t υπολογίζεται όπως πάνω. Στη συνέχεια το αντικείμενο δίνεται στον παίκτη με την μεγαλύτερη τιμή που ξεπερνάει το όριο του, αν υπάρχει.

3.2 Ανισότητα του Προφήτη για Πολλαπλά Αντικείμενα

Μέχρι στιγμής, έχουμε κάνει μια εισαγωγή στην περίπτωση ενός αντικειμένου και n παιχτών. Έχει γίνει φανερό ότι η ανισότητα του προφήτη αποτελεί ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο που μας επιτρέπει να δημιουργούμε απλούς μηχανισμούς σταθερής τιμής, οι οποίοι έχουν

αρκετά καλά αποτελέσματα σε σύγκριση με τους βέλτιστους. Επιπλέον, αναφέρθηκε πώς αυτοί οι μηχανισμοί μπορούν να βοηθήσουν στην περίπτωση που οι παίχτες καταφτάνουν με δυναμικό τρόπο.

Με βάση αυτά, το επόμενο βήμα είναι η γενίκευση των προηγούμενων, σε περιπτώσεις όπου έχουμε πολλά και διαφορετικά αντικείμενα, για τα οποία ενδιαφέρονται παίχτες που καταφτάνουν δυναμικά.

3.2.1 Online Συνδυαστικές Δημοπρασίες

Στο πρόβλημα των online συνδυαστικών δημοπρασιών, το οποίο είναι και το πρόβλημα με το οποίο θα ασχοληθούμε στη συνέχεια, υπάρχουν παίχτες που καταφτάνουν δυναμικά και m το πλήθος αντικείμενα, τα οποία μπορούν να δοθούν στους παίχτες.

Η δυσκολία του προβλήματος αυτού προέρχεται τόσο από τις πολλές προσωπικές μεταβλητές που έχουν οι παίχτες (συνδυαστικές δημοπρασίες) όσο και από τον δυναμικό τρόπο με τον οποίο καταφτάνουν αυτοί.

Καθώς καταφτάνει ένας παίχτης, πρέπει να αποφασιστεί ποια αντικείμενα θα του δοθούν, χωρίς να γνωρίζουμε με βεβαιότητα τι είδους παίχτες θα καταφτάσουν μετά από αυτόν. Αυτή η απόφαση είναι αμετάβλητη και επηρεάζει άμεσα τα αντικείμενα που μπορεί να αποκτήσει ένας μελλοντικός παίχτης.

Εστιάζοντας στους μηχανισμούς σταθερής τιμής, το ιδανικό είναι να βρεθούν τιμές για τα αντικείμενα που είναι αρκετά μεγάλες, ώστε οι παίχτες με χαμηλή αξία να μην μπορούν να αποκτήσουν τα αντικείμενα, και αρκετά μικρές, ώστε αυτά να αγοραστούν από κάποιον παίκτη. Με βάση αυτή την ισορροπία, θα δείξουμε πώς μπορούν να δημιουργηθούν νέες ανισότητες του προφήτη για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

3.2.2 Χρήσιμοι Συμβολισμοί

Έχοντας κάνει μία μικρή εισαγωγή των συνδυαστικών δημοπρασιών στο 2.5, θα επεκταθούμε με συμβολισμούς που θα βοηθήσουν για την online περίπτωση.

Για άλλη μία φορά, υπάρχει ένα σύνολο από n το πλήθος παίχτες που συμβολίζεται με N και ένα σύνολο από αντικείμενα, πλήθους m , τα οποία οι παίχτες επιθυμούν. Το σύνολο των αντικειμένων αυτών θα συμβολίζεται με M . Για κάθε παίκτη $i \in N$ υπάρχει ένα σύνολο από δυνατά υποσύνολα αντικειμένων που μπορεί να πάρει, συμπεριλαμβανόμενος του \emptyset . Το σύνολο αυτό, από δυνατά υποσύνολα θα συμβολίζεται με X_i και θα καλείται χώρος δυνατών αποτελεσμάτων του παίκτη i . Ο από κοινού χώρος αποτελεσμάτων για όλους τους παίχτες θα συμβολίζεται με X και δεν είναι παρά το καρτεσιανό γινόμενο των επιμέρους X_i , $X = X_1 \times \dots \times X_n$.

Για δεδομένο προφίλ από κοινού αποτελεσμάτων $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ και ένα υποσύνολο παικτών $I \subseteq N$, θα συμβολίζεται με x_I το από κοινού αποτέλεσμα στο οποίο κάθε παίκτης $i \in I$ λαμβάνει x_i και κάθε παίκτης $i \notin I$ λαμβάνει \emptyset . Πιο συγκεκριμένα, θα συμβολίζεται με $x_{[i-1]}$, για ένα αποτέλεσμα x , το αποτέλεσμα στο οποίο οι παίχτες από τον i και μετά

λαμβάνουν \emptyset .

Με το απλό παράδειγμα δυο παικτών που επιθυμούν το ίδιο αντικείμενο, εύκολα φαίνεται ότι υπάρχουν περιορισμοί στα από κοινού αποτελέσματα, όσον αφορά την πραγματοποιησιμότητά τους. Για τον λόγο αυτό, θα συμβολίζεται με $\mathcal{F} \subseteq X$ το σύνολο των από κοινού αποτελεσμάτων που είναι εφικτά. Για το \mathcal{F} ισχύει ότι $x \in \mathcal{F} \implies x_I \in \mathcal{F} \forall I \subseteq N$, δηλαδή είναι προς τα κάτω κλειστό σύνολο. Διαισθητικά, αυτό ισχύει καθώς αν ένα σύνολο παικτών μπορεί να πάρει τα αντικείμενα που επιθυμεί, θα εξακολουθεί να μπορεί και χωρίς την παρουσία μερικών παικτών.

Όσον αφορά τις αποτιμήσεις των παικτών, ο κάθε παίκτης $i \in N$ έχει μια συνάρτηση αποτίμησης $v_i : X_i \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, που αποδίδει μη αρνητική αξία σε κάθε υποσύνολο του M . Θεωρείται ότι η αξία που έχουν οι παίκτες για τα αντικείμενα είναι φραγμένη και ότι η τιμή προέρχεται από γνωστή κατανομή D_i , για κάθε παίκτη $i \in N$. Επομένως, οι τιμές για το σύνολο από προφίλ αποτίμησης $V = V_1 \times \dots \times V_n$ προέρχονται από την από κοινού κατανομή $D = D_1 \times \dots \times D_n$.

Η απεικόνιση κάθε προφίλ αποτίμησης $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in V$ σε ένα εφικτό αποτέλεσμα θα γίνεται με μία συνάρτηση ALG , η οποία θα ονομάζεται κανόνας αποτελεσμάτων. Δηλαδή, $(x_1, \dots, x_n) = (ALG_1(v), \dots, ALG_n(v))$ για δεδομένο v . Το αποτέλεσμα που μεγιστοποιεί το κοινωνικό όφελος, δηλαδή το $SW(x) = \sum_i v_i(x_i)$, θα συμβολίζεται με $OPT(v, \mathcal{F}) = \operatorname{argmax}_{x \in \mathcal{F}} \{v(x)\}$. Όσον αφορά το όφελος κάθε παίκτη, θεωρούμε ότι αν ο παίκτης i πάρει x_i και πληρώσει π_i , τότε το όφελός του είναι $u_i = v_i(x_i) - \pi_i$ και το συνολικά έσοδα που κερδίζει ο πωλητής είναι $Rev(x) = \sum_i \pi_i$.

Συνεχίζοντας με τα ποσά πληρωμής, ένας κανόνας πληρωμών θα συμβολίζεται με $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. Δηλαδή, ένας κανόνας πληρωμών είναι ένα προφίλ συναρτήσεων, το οποίο θα δηλώνει το ποσό πληρωμής κάθε παίκτη ανάλογα με το αποτέλεσμα x . Πιο συγκεκριμένα, θα συμβολίζεται με $p_i(x_i|y)$ το ποσό πληρωμής του παίκτη i για το αποτέλεσμα $x_i \in X_i$ για δεδομένο partial allocation $y \in \mathcal{F}$. Σε περίπτωση που το $(x_i, y_{-i}) \notin \mathcal{F}$ το $p_i(x_i|y) = \infty$. Εκτός αυτού, ορίζουμε με $p_i(x_i) = p_i(x_i|\emptyset)$. Ένας κανόνας πληρωμών λέγεται μονότονος και μη φθίνων αν $p_i(x_i|y) \geq p_i(x_i|y_I)$ για κάθε $i, x_i \in X_i, y \in X, (x_i, y_{-i}) \in \mathcal{F}$ και $I \subseteq N$. Τέλος, θα αναφέρονται τα ποσά πληρωμής τα οποία δεν εξαρτώνται από το partial allocation, εκτός από την πραγματοποιησιμότητα, ως στατικά και αυτά που δεν εξαρτώνται από τον παίκτη ως ανώνυμα.

3.2.3 Ισορροπημένες Τιμές

Η συγκεκριμένη υποενοτήτα πραγματεύεται το πώς μπορούν να βρεθούν ανισότητες του προφήτη με την εύρεση ισορροπημένων τιμών για το απλούστερο πλαίσιο πλήρους πληροφόρησης σύμφωνα με το [13]. Ένα σύνολο από προφίλ αποτελεσμάτων $H \subseteq X$ λέγεται exchange compatible με ένα $x \in \mathcal{F}$ αν για όλα τα $y \in H$ και για όλα τα $i \in N$ ισχύει $(y_i, x_{-i}) \in \mathcal{F}$. Αντίστοιχα, μια οικογένεια συνόλων $(\mathcal{F}_x)_{x \in X}$ λέγεται exchange compatible αν το \mathcal{F}_x είναι exchange compatible με το x για όλα τα $x \in X$.

Ορισμός 3.2.1. Έστω $\alpha > 0, \beta \geq 0$. Έστω ακόμα ένα δεδομένο σύνολο εφικτών αποτελεσμάτων \mathcal{F} και ένα προφίλ αποτίμησης v . Ένας κανόνας πληρωμών p λέγεται (α, β) -ισορροπημένος ως προς έναν κανόνα αποτελεσμάτων ALG , μια exchange compatible οικογένεια συνόλων $(\mathcal{F}_x)_{x \in X}$, και μια αρίθμηση των παικτών $i = 1, \dots, n$ αν για όλα τα $x \in \mathcal{F}$ ισχύει :

(α) $\sum_{i \in N} p_i(x_i | x_{[i-1]}) \geq \frac{1}{\alpha} \cdot (v(ALG(v)) - v(OPT(v, \mathcal{F}_x)))$, και

(β) για όλα τα $x' \in \mathcal{F}_x$: $\sum_{i \in N} p_i(x'_i | x_{[i-1]}) \leq \beta \cdot v(OPT(v, \mathcal{F}_x))$

Ο ορισμός της (α, β) -ισορροπίας προσφέρει επαρκείς συνθήκες για έναν μηχανισμό σταθερής τιμής να εγγυηθεί υψηλή κοινωνική ωφέλεια όταν οι παίκτες έχουν γνωστό προφίλ αποτίμησης. Το ενδιαφέρον κομμάτι είναι ότι το αποτέλεσμα αυτό για (α, β) -ισορροπημένους κανόνες πληρωμών μπορεί να επεκταθεί και σε μπεϋζιανά περιβάλλοντα.

Για παράδειγμα, στην κλασική περίπτωση που πρέπει να επιλέξουμε σε ποιον παίκτη να δώσουμε το μοναδικό αντικείμενο, ο χώρος δυνατών αποτελεσμάτων για οποιονδήποτε παίκτη i είναι $X_i = \{0, 1\} \sim D_i$ και ο χώρος εφικτών από κοινού αποτελεσμάτων είναι $F = \{x | \sum_i x_i \leq 1\}$. Σε αυτή την περίπτωση γίνεται χρήση των εξής τιμών:

$$p(0, x) = 0 \quad \forall x$$

και

$$p(1, x) = \begin{cases} \max_i v_i & \text{αν το } x \text{ δεν δίνει το αντικείμενο} \\ \infty & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Δηλαδή, έχει κατασκευαστεί ένας μηχανισμός σταθερής τιμής, με τιμή $\max_i v_i$. Ο συγκεκριμένος κανόνας πληρωμών είναι $(1, 1)$ -ισορροπημένος ως προς το OPT και την

$$F_x = \begin{cases} F & \text{αν το } x \text{ δεν δίνει το αντικείμενο} \\ \emptyset & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Πιο αναλυτικά, έστω x ένα τυχαίο από κοινού αποτέλεσμα.

- Αν το x δίνει το αντικείμενο, τότε $F_x = \emptyset$. Σε αυτή την περίπτωση η συνθήκη (β) ικανοποιείται τετριμμένα. Όσον αφορά την συνθήκη (α), παρατηρείται ότι $v(OPT(v, F_x)) = 0$ και $v(OPT(v)) = \sum_i p_i(x_i | x_{[i-1]}) = \max_i v_i$, αφού ακριβώς ένας παίκτης παίρνει το αντικείμενο.
- Αν το x δεν δίνει το αντικείμενο, τότε $v(OPT(v, F_x)) = v(OPT(v))$ και άρα η συνθήκη (α) ικανοποιείται τετριμμένα. Όσον αφορά την συνθήκη (β), παρατηρείται ότι για x' το πολύ ένας παίκτης παίρνει το αντικείμενο και άρα $\sum_i p_i(x_i | x_{[i-1]}) \leq \max_i v_i = v(OPT(v, F_x))$.

Θεώρημα 3.2.1. Έστω ότι η συλλογή από κανόνες πληρωμών $(p^v)_{v \in V}$ για εφικτά αποτελέσματα \mathcal{F} και προφίλ αποτίμησης $v \in V$ είναι (α, β) -ισορροπημένη ως προς τον κανόνα αποτελεσμάτων ALG και την αρίθμηση παικτών $i = 1, \dots, n$. Τότε για $\delta = \frac{\alpha}{1+\alpha\beta}$ ο μηχανισμός σταθερής τιμής με κανόνα πληρωμών δp , όπου $p_i(x_i | y) = \mathbb{E}_v[p_i^{\delta}(x_i | y)]$ επιτυγχάνει κοινωνική ωφέλεια τουλάχιστον $\frac{1}{1+\alpha\beta} \cdot \mathbb{E}_v[v(ALG(v))]$ όταν προσεγγίζει τους παίκτες με τη σειρά που έχουν αριθμηθεί.

Απόδειξη. Ακολουθώντας την απόδειξη του Θεωρήματος 3.1 από το [13], θα συμβολίζεται με $x(v)$ το αποτέλεσμα που επιστρέφεται από τον μηχανισμό σταθερής τιμής για δεδομένο προφίλ αποτίμησης v . Με $x'(v, v') = OPT(v', \mathcal{F}_{x(v)})$ θα συμβολίζεται το αποτέλεσμα που μεγιστοποιεί την κοινωνική ωφέλεια ως προς το προφίλ αποτίμησης v' υπό τον περιορισμό $\mathcal{F}_{x(v)}$. Καθώς η κοινωνική ωφέλεια μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα του συνολικού οφέλους των παικτών και των εσόδων του πωλητή έχουμε :

(Φράγμα Οφέλους) Παίρνοντας ένα δείγμα $v' \sim D$ ένας παίκτης i σκέφτεται να αγοράσει το $OPT_i((v_i, v'_{-i}), F_{x(v'_i, v_{-i})})$ στην τιμή $\delta \cdot p_i(OPT_i((v_i, v'_{-i}), F_{x(v'_i, v_{-i})}) | x[i-1](v))$. Παίρνοντας μέσες τιμές και καθώς το $x[i-1](v)$ δεν εξαρτάται από v_i , ισχύει :

$$\begin{aligned} E_v[u_i(v)] &\geq E_{v,v'}[v_i \left(OPT_i((v_i, v'_{-i}), F_{x(v'_i, v_{-i})}) \right) - \delta \cdot p_i \left(OPT_i((v_i, v'_{-i}), F_{x(v'_i, v_{-i})}) | x[i-1](v) \right)] \\ &= E_{v,v'}[v'_i \left(x'_i(v, v') \right) - \delta \cdot p_i \left(x'_i(v, v') | x[i-1](v) \right)] \end{aligned}$$

Αθροίζοντας για όλους τους παίκτες ισχύει :

$$\begin{aligned} E_v \left[\sum_{i \in N} u_i(v) \right] &\geq E_{v,v'} \left[\sum_{i \in N} v'_i \left(x'_i(v, v') \right) \right] - E_{v,v'} \left[\sum_{i \in N} \delta \cdot p_i \left(x'_i(v, v') | x[i-1](v) \right) \right] \\ &= E_{v,v'}[v' OPT(v', F_{x(v)})] - E_{v,v'} \left[\sum_{i \in N} \delta \cdot p_i \left(x'_i(v, v') | x[i-1](v) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Λόγω (α, β) -ισορροπίας ισχύει :

$$\sum_{i \in N} \delta \cdot p_i \left(x'_i(v, v') | x[i-1](v) \right) \leq \delta \beta E_{\tilde{v}}[\tilde{v} OPT(\tilde{v}, F_{x(v)})]$$

και άρα :

$$E_{v,v'} \left[\sum_{i \in N} \delta \cdot p_i \left(x'_i(v, v') | x[i-1](v) \right) \right] \leq \delta \beta E_{v,\tilde{v}}[\tilde{v} OPT(\tilde{v}, F_{x(v)})] \quad (3.5)$$

Αντικαθιστώντας v' με \tilde{v} στην (3.4) και με την παρατήρηση (3.5) ισχύει :

$$E_v[u_i(v)] \geq (1 - \delta \beta) E_{v,\tilde{v}}[\tilde{v} OPT(\tilde{v}, F_{x(v)})] \quad (3.6)$$

(Φράγμα Εσόδων) Λόγω (α, β) -ισορροπίας ισχύει :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} \delta \cdot p_i(x_i(v) | x_{[i-1]}(v)) &= \delta \cdot \sum_{i \in N} \mathbb{E}_{\tilde{v}} \left[p_i^{\tilde{v}}(x_i(v) | x_{[i-1]}(v)) \right] \\ &\geq \frac{\delta}{\alpha} \cdot \mathbb{E}_{\tilde{v}} \left[\tilde{v} (ALG(\tilde{v})) - \tilde{v} (OPT(\tilde{v}, F_{x(v)})) \right]. \end{aligned}$$

Παίρνοντας μέσες τιμές ως προς v ισχύει :

$$\mathbb{E}_v \left[\sum_{i \in N} \delta \cdot p_i(x_i(v) | x_{[i-1]}(v)) \right] \geq \frac{\delta}{\alpha} \cdot \mathbb{E}_{\tilde{v}} [\tilde{v} (ALG(\tilde{v}))] - \frac{\delta}{\alpha} \cdot \mathbb{E}_{\tilde{v},v} [\tilde{v} (OPT(\tilde{v}, F_{x(v)}))] \quad (3.7)$$

Συνδυάζοντας το φράγμα οφέλους και το φράγμα εσόδων (3.6),(3.7) και χρησιμοποιώντας $\delta = \frac{\alpha}{1+\alpha\beta}$ συμπεραίνεται ότι :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_v \left[\sum_{i \in N} v_i(x_i(v)) \right] &\geq \mathbb{E}_v \left[\sum_{i \in N} u_i(v) \right] + \mathbb{E}_v \left[\sum_{i \in N} \delta \cdot p_i(x_i(v) | x_{[i-1]}(v)) \right] \\ &\geq (1 - \delta \beta) \mathbb{E}_{v,\tilde{v}} [\tilde{v} (OPT(\tilde{v}, F_{x(v)}))] + \frac{\delta}{\alpha} \mathbb{E}_{\tilde{v}} [\tilde{v} (ALG(\tilde{v}))] - \frac{\delta}{\alpha} \mathbb{E}_{\tilde{v},v} [\tilde{v} (OPT(\tilde{v}, F_{x(v)}))] \\ &= \frac{1}{1 + \alpha \beta} \mathbb{E}_{\tilde{v}} [\tilde{v} (ALG(\tilde{v}))] \end{aligned}$$

□

Θέλοντας μια πιο αναλυτική έκφραση της ιδιότητας (β) παρέχεται και ένας εναλλακτικός ορισμός της ισορροπίας.

Ορισμός 3.2.2. Έστω $\alpha > 0$, $\beta_1, \beta_2 \geq 0$. Έστω ακόμα ένα δεδομένο σύνολο εφικτών αποτελεσμάτων \mathcal{F} και ένα προφίλ αποτίμησης v . Ένας κανόνας πληρωμών p λέγεται ασθενώς $(\alpha, \beta_1, \beta_2)$ -ισορροπημένος ως προς έναν κανόνα αποτελεσμάτων ALG , μια *exchange compatible* οικογένεια συνόλων $(\mathcal{F}_x)_{x \in X}$, και μια αρίθμηση των παικτών $i = 1, \dots, n$ αν για όλα τα $x \in F$ ισχύει :

$$(a) \sum_{i \in N} p_i(x_i | x_{[i-1]}) \geq \frac{1}{\alpha} \cdot (v(ALG(v)) - v(OPT(v, \mathcal{F}_x))), \text{ και}$$

$$(b) \text{ για όλα τα } x' \in \mathcal{F}_x: \sum_{i \in N} p_i(x'_i | x_{[i-1]}) \leq \beta_1 \cdot v(OPT(v, \mathcal{F}_x)) + \beta_2 \cdot v(ALG(v)).$$

Με την χρήση του εναλλακτικού ορισμού το Θεώρημα 3.2.1 αποκτά μία πιο αναλυτική έκφραση στο φράγμα της κοινωνικής ωφέλειας όπως φαίνεται παρακάτω.

Θεώρημα 3.2.2. Έστω ότι η συλλογή από κανόνες πληρωμών $(p^v)_{v \in V}$ για εφικτά αποτελέσματα \mathcal{F} και προφίλ αποτίμησης $v \in V$ είναι $(\alpha, \beta_1, \beta_2)$ -ισορροπημένη ως προς τον κανόνα αποτελεσμάτων ALG και την αρίθμηση παικτών $i = 1, \dots, n$ και ότι $\beta_1 + \beta_2 \geq \frac{1}{\alpha}$. Τότε για $\delta = \frac{1}{\beta_1 + \max\{2\beta_2, \frac{1}{\alpha}\}}$ ο μηχανισμός σταθερής τιμής με κανόνα πληρωμών δp , όπου $p_i(x_i | y) = \mathbb{E}_{\tilde{v}}[p_i^{\tilde{v}}(x_i | y)]$ επιτυγχάνει κοινωνική ωφέλεια τουλάχιστον $\frac{1}{\alpha(2\beta_1 + 4\beta_2)} \cdot \mathbb{E}_v[v(ALG(v))]$ όταν προσεγγίζει τους παίκτες με τη σειρά που έχουν αριθμηθεί.

Απόδειξη. Κατά αντιστοιχία με τα παραπάνω και ακολουθώντας την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2 από το [13], θα βρεθούν τα επιμέρους φράγματα.

(Φράγμα Οφέλους) Ισχύει ότι :

$$\mathbb{E}_v \left[\sum_{i \in N} u_i(v) \right] = \mathbb{E}_{v, v'} [v'(x'(v, v'))] - \mathbb{E}_{v, v'} \left[\sum_{i \in N} \delta \cdot p_i(x'_i(v, v') | x_{[i-1]}(v)) \right] \quad (3.8)$$

Για τον δεύτερο όρο λόγω ισορροπίας :

$$\sum_{i \in N} \delta \cdot p_i(x'_i(v, v') | x_{[i-1]}(v)) \leq \delta \beta_1 \cdot \mathbb{E}_{\tilde{v}} [\tilde{v}(OPT(\tilde{v}, F_{x(v)}))] + \delta \beta_2 \cdot \mathbb{E}_{\tilde{v}} [\tilde{v}(ALG(\tilde{v}))]$$

και άρα :

$$\mathbb{E}_{v, v'} \left[\sum_{i \in N} \delta \cdot p_i(x'_i(v, v') | x_{[i-1]}(v)) \right] \leq \delta \beta_1 \cdot \mathbb{E}_{v, \tilde{v}} [\tilde{v}(OPT(\tilde{v}, F_{x(v)}))] + \delta \beta_2 \cdot \mathbb{E}_{v, \tilde{v}} [\tilde{v}(ALG(\tilde{v}))] \quad (3.9)$$

Αντικαθιστώντας v' με \tilde{v} στην (3.8) και με την παρατήρηση (3.9) ισχύει:

$$\mathbb{E}_v \left[\sum_{i \in N} u_i(v) \right] \geq (1 - \delta \beta_1) \cdot \mathbb{E}_{v, \tilde{v}} [\tilde{v}(OPT(\tilde{v}, F_{x(v)}))] - \delta \beta_2 \cdot \mathbb{E}_{v, \tilde{v}} [\tilde{v}(ALG(\tilde{v}))] \quad (3.10)$$

(Φράγμα Εσόδων) Λόγω ισορροπίας ισχύει :

$$\mathbb{E}_v \left[\sum_{i \in N} \delta \cdot p_i(x_i(v) | x_{[i-1]}(v)) \right] \geq \frac{\delta}{\alpha} \cdot \mathbb{E}_{\tilde{v}} [\tilde{v}(ALG(\tilde{v}))] - \frac{\delta}{\alpha} \cdot \mathbb{E}_{\tilde{v}, v} [\tilde{v}(OPT(\tilde{v}, F_{x(v)}))] \quad (3.11)$$

Η ανάλυση πλέον θα διαχωριστεί στις περιπτώσεις όπου $\beta_2 \geq \frac{1}{2\alpha}$ και $\beta_2 < \frac{1}{2\alpha}$

- ($\beta_2 \geq \frac{1}{2\alpha}$) Αφού για κάθε $i \in N$ έχουμε $u_i(v) \geq 0$, ισχύει ότι $u_i(v) \geq \rho u_i(v)$ για όλα τα $0 \leq \rho \leq 1$. Χρησιμοποιώντας $\delta = \frac{1}{\beta_1 + 2\beta_2}$, $\rho = \frac{1}{2\alpha\beta_2}$, και τις ανισότητες (3.10), (3.11) συμπεραίνεται ότι :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_v \left[\sum_{i \in N} v_i(x_i(v)) \right] &\geq \rho \cdot \mathbb{E}_v \left[\sum_{i \in N} u_i(v) \right] + \mathbb{E}_v \left[\sum_{i \in N} \delta \cdot p_i(x_i(v) | x_{[i-1]}(v)) \right] \\ &\geq \rho(1 - \delta\beta_1) \cdot \mathbb{E}_{v, \tilde{v}} [\tilde{v}(OPT(\tilde{v}, F_{x(v)}))] - \rho\delta\beta_2 \cdot \mathbb{E}_{v, \tilde{v}} [\tilde{v}(ALG(\tilde{v}))] \\ &\quad + \frac{\delta}{\alpha} \cdot \mathbb{E}_{\tilde{v}} [\tilde{v}(ALG(\tilde{v}))] - \frac{\delta}{\alpha} \cdot \mathbb{E}_{\tilde{v}, v} [\tilde{v}(OPT(\tilde{v}, F_{x(v)}))] \\ &= \frac{1}{\alpha(2\beta_1 + 4\beta_2)} \cdot \mathbb{E}_{\tilde{v}} [\tilde{v}(ALG(\tilde{v}))] \end{aligned}$$

- ($\beta_2 < \frac{1}{2\alpha}$) Σε αυτή την περίπτωση για $\delta = \frac{1}{\alpha(\beta_1 + \frac{1}{\alpha})}$, από τις (3.10) και (3.11) συμπεραίνεται ότι :

$$\begin{aligned} E_v \left[\sum_{i \in N} v_i(x_i(v)) \right] &\geq E_v \left[\sum_{i \in N} u_i(v) \right] + E_v \left[\sum_{i \in N} \delta \cdot p_i(x_i(v) | x_{[i-1]}(v)) \right] \\ &\geq (1 - \delta\beta_1) \cdot E_{v, \tilde{v}} [\tilde{v}(OPT(\tilde{v}, F_{x(v)}))] - \delta\beta_2 \cdot E_{v, \tilde{v}} [\tilde{v}(ALG(\tilde{v}))] \\ &\quad + \frac{\delta}{\alpha} \cdot E_{\tilde{v}} [\tilde{v}(ALG(\tilde{v}))] - \frac{\delta}{\alpha} \cdot E_{\tilde{v}, v} [\tilde{v}(OPT(\tilde{v}, F_{x(v)}))] \\ &= \frac{1 - \alpha\beta_2}{1 + \alpha\beta_1} \cdot E_{\tilde{v}} [\tilde{v}(ALG(\tilde{v}))] \geq \frac{1}{\alpha(2\beta_1 + 4\beta_2)} \cdot E_{\tilde{v}} [\tilde{v}(ALG(\tilde{v}))] \end{aligned}$$

αφού $\beta_1 + \beta_2 \geq \frac{1}{\alpha}$ και $\beta_2 < \frac{1}{2\alpha}$

□

3.2.4 Ανισότητα του Προφήτη για Συνδυαστικές Δημοπρασίες με MPH-k Αποτιμήσεις

Έχοντας δει τον ορισμό των MPH-k αποτιμήσεων και των (α, β) -ισορροπημένων κανόνων πληρωμών, το επόμενο θεώρημα καθιερώνει μία πολυωνυμικού χρόνου $(4k - 2)$ -προσεγγιστική ανισότητα του προφήτη για MPH-k συνδυαστικές δημοπρασίες.

Θεώρημα 3.2.3. *Για συνδυαστικές δημοπρασίες με MPH-k αποτιμήσεις, ένας $(4k - 2 + \epsilon)$ -προσεγγιστικός μηχανισμός σταθερής τιμής μπορεί να υπολογιστεί σε $\text{poly}(n, m, 1/\epsilon)$ demand και MPH-k queries.*

Απόδειξη. Με οδηγό την απόδειξη του Θεωρήματος 1.1 από το [13], για την δημιουργία μηχανισμού σταθερής τιμής αρκεί να βρεθεί ένας $(1, 1, k - 1)$ -ισορροπημένος κανόνας πληρωμών.

Για δεδομένο κανόνα αποτελεσμάτων ALG και προφίλ αποτίμησης v , θα συμβολίζεται με \tilde{v} το στήριγμα των Hypergraph-k αποτιμήσεων για το $ALG(v)$. Με w_i θα συμβολίζεται η υπεργραφική αναπαράσταση του \tilde{v}_i , έτσι ώστε $\tilde{v}_i(ALG(v)) = \sum_{T \subseteq ALG_i(v)} w_i(T)$. Θα οριστούν τιμές για κάθε αντικείμενο $m \in M$ ως εξής :

$$p^v(\{m\}) = \sum_{T \ni m, T \subseteq \text{ALG}_i(v)} w_i(T) \quad (3.12)$$

Δηλαδή, η τιμή ενός αντικειμένου καθορίζεται από το άθροισμα των βαρών κάθε υπερακμής στην οποία περιέχεται το συγκεκριμένο αντικείμενο. Επεκτείνοντας γραμμικά, για κάθε σύνολο αντικειμένων S , θέτουμε $p^v(S) = \sum_{m \in S} p^v(\{m\})$. Τέλος, για κάθε παίκτη i και αποτέλεσμα x_i , θα έχουμε $p_i^v(x_i|z) = p^v(x_i)$ όταν x_i είναι ξένο με τα σύνολα του z και ∞ διαφορετικά.

Ο κανόνας πληρωμών που ορίζεται από την (3.12), είναι ασθενώς $(1, 1, k-1)$ -ισορροπημένος ως προς έναν αυθαίρετο κανόνα αποτελεσμάτων ALG και ένα MPH- k προφίλ αποτίμησης v , όπως επιθυμείται. Πιο συγκεκριμένα, έστω $F_x = \{y \in F : (\cup_i y_i) \cap (\cup_i x_i) = \emptyset\}$. Αρχικά παρατηρώντας ότι μπορεί να μειωθεί η τιμή του $\text{OPT}(v, F_x)$ αφαιρώντας όλα τα αντικείμενα που κατανέμονται από το x με την χρήση του $\text{ALG}(v)$ ισχύει :

$$v(\text{OPT}(v, F_x)) \geq \sum_{\ell \in N} v_\ell(\text{ALG}_\ell(v) \setminus (\cup_i x_i)) \geq \sum_{\ell} \sum_{T \subseteq \text{ALG}_\ell(v), \forall i: T \cap x_i = \emptyset} w_\ell(T).$$

Επιπλέον, καθώς το p^v είναι ένα σταθερός κανόνας πληρωμών, η τιμή ενός αποτελέσματος δεν αλλάζει εκτός αν αυτό γίνει μη εφικτό. Επομένως, για κάθε $y \in F_x$, ισχύει :

$$\begin{aligned} \sum_i p_i(y_i|x_{[i-1]}) &= \sum_i p_i(y_i|x) = \sum_i \sum_{m \in y_i} p^v(\{m\}) \\ &= \sum_i \sum_{\ell} \sum_{m \in \text{ALG}_\ell(v) \cap y_i} p^v(\{m\}) = \sum_{\ell} \sum_i \sum_{m \in \text{ALG}_\ell(v) \cap y_i} \sum_{T \ni m, T \subseteq \text{ALG}_\ell(v)} w_\ell(T). \end{aligned}$$

και άρα

$$\begin{aligned} \sum_i p_i^v(x_i|x_{[i-1]}) &\geq \sum_{\ell} \sum_{T \subseteq \text{ALG}_\ell(v), \exists i: T \cap x_i \neq \emptyset} w_\ell(T) \\ &= \left(\sum_{\ell} \sum_{T \subseteq \text{ALG}_\ell(v)} w_\ell(T) - \sum_{\ell} \sum_{T \subseteq \text{ALG}_\ell(v), \forall i: T \cap x_i = \emptyset} w_\ell(T) \right) \geq (v(\text{ALG}(v)) - v(\text{OPT}(v, F_x))) \end{aligned}$$

ικανοποιώντας έτσι την πρώτη συνθήκη της ισορροπίας. Όσον αφορά την δεύτερη συνθήκη, αφού $\sum_i p_i(y_i|x_{[i-1]}) = \sum_{\ell} \sum_i \sum_{m \in \text{ALG}_\ell(v) \cap y_i} \sum_{T \ni m, T \subseteq \text{ALG}_\ell(v)} w_\ell(T)$, για όλα τα x και όλα τα $x' \in F_x$, με κατάλληλο διαχωρισμό του αθροίσματος ανάλογα με το αν το σύνολο T τέμνει κάποιο από τα σύνολα του x ή όχι, ισχύει :

$$\begin{aligned} \sum_i p_i(x'_i|x_{[i-1]}) &= \sum_{\ell} \sum_i \sum_{m \in \text{ALG}_\ell(v) \cap x'_i} \sum_{T \ni m, T \subseteq \text{ALG}_\ell(v), T \cap (\cup_{i'} x_{i'}) = \emptyset} w_\ell(T) + \\ &\quad \sum_{\ell} \sum_i \sum_{m \in \text{ALG}_\ell(v) \cap x'_i} \sum_{T \ni m, T \subseteq \text{ALG}_\ell(v), T \cap (\cup_{i'} x_{i'}) \neq \emptyset} w_\ell(T) \end{aligned}$$

Στο πρώτο άθροισμα για ένα σταθερό σύνολο T , ο όρος $w_\ell(T)$ εμφανίζεται το πολύ $|T|$ φορές. Στο δεύτερο άθροισμα, μπορεί να εμφανιστεί μόνο $|T| - 1$ φορές επειδή η τομή των x και x' είναι κενή αλλά το x τέμνει το T . Καθώς $|T| \leq k$ όταν $w_\ell(T) > 0$ ισχύει ότι:

$$\sum_i p_i(x'_i|x_{[i-1]}) \leq \sum_{\ell} \sum_{T \subseteq \text{ALG}_\ell(v), T \cap (\cup_{i'} x_{i'}) = \emptyset} |T| w_\ell(T) + \sum_{\ell} \sum_{T \subseteq \text{ALG}_\ell(v), T \cap (\cup_{i'} x_{i'}) \neq \emptyset} (|T| - 1) w_\ell(T)$$

$$\begin{aligned}
&\leq k \sum_{\ell} \sum_{T \subseteq \text{ALG}_{\ell}(v), T \cap (\cup_{i'} x_{i'}) = \emptyset} w_{\ell}(T) + (k-1) \sum_{\ell} \sum_{T \subseteq \text{ALG}_{\ell}(v), T \cap (\cup_{i'} x_{i'}) \neq \emptyset} w_{\ell}(T) \\
&= \sum_{\ell} \sum_{T \subseteq \text{ALG}_{\ell}(v), T \cap (\cup_{i'} x_{i'}) = \emptyset} w_{\ell}(T) + (k-1) \sum_{\ell} \sum_{T \subseteq \text{ALG}_{\ell}(v)} w_{\ell}(T) \geq v(\text{OPT}(v, Fx)) + (k-1)v(\text{ALG}(v)).
\end{aligned}$$

Άρα όντως ο κανόνας πληρωμών 3.12, είναι ασθενώς $(1, 1, k-1)$ -ισορροπημένος.

Όσον αφορά το υπολογιστικό κομμάτι, αρχικά γίνεται η υπόθεση ότι για μία MPH- k αποτίμηση v με στήριγμα τις PH- k συναρτήσεις $\{v_{\ell}\}_{\ell \in L}$ μπορούμε να βρούμε τις τιμές των $v_{\ell}(T)$, $\forall T \subseteq M$ σε δεύτερο χρόνο. Επιπλέον με το παρακάτω LP (3.13) για γενικές συνδυαστικές δημοπρασίες μπορεί να υπολογιστεί μία fractional λύση που μεγιστοποιεί την κοινωνική ωφέλεια, σε πολυωνυμικό χρόνο. Η λύση αυτή θα συμβολίζεται με x^* .

$$\begin{aligned}
&\text{Maximize } \sum_{i,S} v_i(S) x_{i,S} \\
&\text{subject to:} \\
&\sum_S x_{i,S} \leq 1 \quad \forall i \in N \quad (3.13) \\
&\sum_{i,S:m \in S} x_{i,S} \leq 1 \quad \forall m \in M \\
&x_{i,S} \in [0, 1] \quad \forall i \in N, \forall S \subseteq M
\end{aligned}$$

Επεκτείνοντας το F για να συμπεριληφθούν όλα τα fractional allocations που ικανοποιούν το (3.13), το F_x επεκτείνεται σε όλα τα fractional allocations που χρησιμοποιούν το πολύ ένα κομμάτι ισοδύναμο με $1 - \sum_{i,S:m \in S} x_{i,S}$ για κάθε αντικείμενο $m \in M$.

Παρά την επέκταση αυτή, ένας κανόνας πληρωμών που είναι $(1, 1, k-1)$ -ισορροπημένος εξακολουθεί να μπορεί να βρεθεί με βάση το (3.12). Πιο συγκεκριμένα, για δεδομένο προφίλ v , ορίζονται τιμές με βάση την λύση x^* . Για κάθε παίκτη i και κάθε σύνολο S , το $w_{i,S}$ είναι η PH- k αναπαράσταση στο στήριγμα που μεγιστοποιεί την τιμή του παίκτη i για το S , δηλαδή $v_i(S) = \sum_{T \subseteq S} w_{i,S}(T)$. Το κάθε αντικείμενο $m \in M$ πλέον κοστολογείται ως εξής :

$$p(\{m\}) = \sum_i \sum_S x_{i,S}^* \sum_{T:m \in T, T \subseteq S} w_{i,S}(T)$$

Καθώς το $x_{i,S}^* \neq 0$ μόνο για πολυωνυμικά πολλά S και οι τιμές των $v_{\ell}(T)$, $\forall T \subseteq M$ μπορούν να υπολογιστούν σε δεύτερο χρόνο, το άθροισμα αυτό μπορεί να υπολογιστεί σε πολυωνυμικό χρόνο. Επεκτείνοντας γραμμικά ισχύει ότι για κάθε $x \in F$ και $x' \in F_x$, $p(x'_i|x) = \sum_S x'_{i,S} \sum_{m \in S} p(\{m\})$.

Άρα για το χώρο των fractional λύσεων, τιμές που είναι $(1, 1, k-1)$ -ισορροπημένες μπορούν να υπολογιστούν σε πολυωνυμικό χρόνο. Με την χρήση αυτών των τιμών σε έναν μηχανισμό σταθερής τιμής, όπου οι παίκτες μπορούν να αγοράσουν οποιοδήποτε fractional κομμάτι επιθυμούν, καταλήγουμε σε μία $(4k-2)$ - προσέγγιση ως προς την βέλτιστη fractional λύση.

Το πρόβλημα πλέον είναι ότι οι παίκτες μπορούν να πάρουν μόνο ολόκληρα αντικείμενα και άρα αντί για fractional χρειάζονται integral λύσεις. Παρατηρείται ότι για κάθε παίκτη i , αν όλοι οι προηγούμενοι παίκτες έχουν επιλέξει ακέραια αποτελέσματα, τότε για τον i υπάρχει εξίσου ένα ακέραιο αποτέλεσμα που μεγιστοποιεί την ωφέλειά του. Αυτό συμβαίνει

επειδή οποιοδήποτε fractional αποτέλεσμα μπορεί να ερμηνευθεί ως ένας κυρτός συνδυασμός από integral αποτελέσματα. Καθώς η προηγούμενη ανάλυση ισχύει ανεξάρτητα από το σύνολο που επιλέγει κάθε παίκτης, θα συνεχίσει να ισχύει ακόμα και αν περιορίσουμε τις επιλογές των παικτών σε μόνο ακέραιες. Αυτό σημαίνει ότι χρειάζεται μόνο να τιμολογηθούν integral αποτελέσματα. Έτσι συμπεραίνεται ότι οι τιμές που υπολογίζονται χρησιμοποιώντας το (3.13), παράγουν πραγματικά μια $(4k - 2)$ προσέγγιση για το αρχικό πρόβλημα. □

3.2.5 Robustness

Πολλές φορές, οι υποκείμενες κατανομές των παικτών είναι άγνωστες και προσεγγίζονται με διάφορους τρόπους μέσω δειγμάτων. Με τη δειγματοληψία που γίνεται, οι τιμές που θα υπολογιστούν θα είναι διαφορετικές από αυτές που θα είχαμε αν γνωρίζαμε ακριβώς τις κατανομές. Ωστόσο, παρατηρώντας ότι μικρές αποκλίσεις από τις πραγματικές τιμές επιφέρουν ακόμα μικρότερες αποκλίσεις στην κοινωνική ωφέλεια [25], μπορούμε να εκτιμήσουμε κατάλληλες τιμές ακόμα και με περιορισμένο αριθμό δειγμάτων κατανομών, χωρίς σημαντικές διαφορές στο αποτέλεσμα. Ένα ακραίο παράδειγμα της χρησιμότητας αυτής της ευνοϊκής ιδιότητας φαίνεται στο [3], όπου δημιουργούνται ανισότητες του προφήτη ακόμη και από ένα δείγμα από κάθε κατανομή σε συγκεκριμένες περιπτώσεις.

Κεφάλαιο 4

Ηλεκτρικά Αυτοκίνητα σε Δίκτυα Φόρτισης

4.1 Εισαγωγή στην Φόρτιση Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων

Η όλο και αυξανόμενη χρήση ηλεκτρικών αυτοκινήτων στην καθημερινότητα [22] έχει ως άμεση συνέπεια την αυξημένη ανάγκη για φόρτιση των συγκεκριμένων οχημάτων. Σε γενικές γραμμές, ένα ηλεκτρικό αυτοκίνητο έχει μια μπαταρία περιορισμένης χωρητικότητας και ταξιδεύει σε ένα οδικό δίκτυο εφοδιασμένο με σταθμούς φόρτισης.

Κάθε σταθμός φόρτισης έχει πιθανώς διαφορετικό κόστος ανά μονάδα ενέργειας σε σχέση με τους άλλους. Επίσης, η διαδρομή που τους ενώνει απαιτεί καθορισμένη ποσότητα ενέργειας, η οποία εξαρτάται τόσο από την απόσταση και το είδος της διαδρομής όσο και από το ίδιο το όχημα. Προφανώς, ένα αυτοκίνητο πρέπει να έχει αρκετή ενέργεια για να διασχίσει ένα οδικό τμήμα και δεν μπορεί να φορτίσει την μπαταρία του πέρα από το μέγιστο όριο που επιτρέπει η κατασκευή της. Για τον λόγο αυτό, ένας οδηγός πρέπει να επιλέξει μία διαδρομή στο δίκτυο και έναν προγραμματισμό φόρτισης που να καλύπτει τις ανάγκες του, έχοντας πάντα υπόψη του και το κόστος φόρτισης.

Με αφορμή τα παραπάνω, προκύπτουν τόσο προβλήματα δρομολόγησης σε δίκτυα [24],[32],[12] όσο και προβλήματα online προγραμματισμού και κοστολόγησης [4],[26]. Στην συγκεκριμένη διπλωματική εργασία θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα κοστολόγησης προγραμματισμών φόρτισης με την βοήθεια ισορροπημένων τιμών όπως στο [10], αλλά στη περίπτωση δικτύων. Θα εστιάσουμε κυρίως στη μεγιστοποίηση της κοινωνικής ωφέλειας, ενώ θα γίνει και μια πειραματική απόπειρα για μεγιστοποίηση των εσόδων του πωλητή.

4.2 Μοντελοποίηση του Προβλήματος ως Συνδυαστική Δημοπρασία

Για να βρεθεί λύση στα προβλήματα που αναφέρθηκαν προηγουμένως, το πρώτο βήμα είναι η μοντελοποίηση του προβλήματος φόρτισης ηλεκτρικών αυτοκινήτων ως ένα πρόβλημα online συνδυαστικής δημοπρασίας, ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί η θεωρία του Κεφαλαίου 3.

4.2.1 Συμβολισμοί για Προγραμματισμό Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων

Εστιάζοντας στο πρόβλημα προγραμματισμού αυτοκινήτων, ας υποθέσουμε ότι έχουμε στη διάθεσή μας ένα δίκτυο από σταθμούς φόρτισης $G = \langle V, E \rangle$, όπου V είναι το σύνολο των σταθμών φόρτισης και E το σύνολο των δρόμων που τους ενώνουν. Κάθε ένας από τους σταθμούς φόρτισης $v \in V$ έχει ένα συγκεκριμένο αριθμό από θέσεις για φόρτιση (capacity), Cap_v . Δηλαδή, ένας σταθμός φόρτισης v μπορεί να εξυπηρετεί ταυτόχρονα το πολύ Cap_v αυτοκίνητα.

Στο δίκτυο αυτό, στο οποίο ο χρόνος θεωρείται διακριτός, καταφτάνουν παίκτες με on-line τρόπο. Οι παίκτες αυτοί θέλουν να φορτίσουν τα οχήματά τους με σκοπό να φτάσουν στον προορισμό τους μέχρι μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Για να γίνει εμφανές πώς το συγκεκριμένο πρόβλημα μπορεί να θεωρηθεί ως πρόβλημα συνδυαστικής δημοπρασίας, αρκεί να θεωρήσουμε ότι τα οχήματα που καταφτάνουν είναι οι παίκτες $i \in N$ και τα αντικείμενα $m \in M$, προς πώληση δεν είναι παρά τα μοναδιαία διαστήματα φόρτισης σε κάθε διαθέσιμο σταθμό. Όσον αφορά τα διαστήματα φόρτισης $m \in M$, αυτά θα έχουν τη μορφή $(t, t+1, CS_v)$, όπου $[t, t+1)$ είναι το χρονικό διάστημα φόρτισης και $CS_v \in V$ ο κόμβος στον οποίο πραγματοποιείται η φόρτιση. Έτσι, το πλήθος των $m \in M$ εξαρτάται από τον χρονικό ορίζοντα λειτουργίας του δικτύου, καθώς και από τη χωρητικότητα των κόμβων.

Για παράδειγμα, στην περίπτωση όπου $V = \{CS_A, CS_B\}$, $T = 3$ και $Cap_{CS_A} = 1$, $Cap_{CS_B} = 2$, τα διαστήματα φόρτισης που θα μπορούσαν να δοθούν θα ήταν τα:

- $(0, 1, CS_A), (1, 2, CS_A), (2, 3, CS_A)$ για τον CS_A .
- $(0, 1, CS_B), (0, 1, CS_B), (1, 2, CS_B), (1, 2, CS_B), (2, 3, CS_B), (2, 3, CS_B)$ για τον CS_B .

Όσον αφορά τους παίκτες/αυτοκίνητα, κάθε ένα $i \in N$ καταφτάνει μία χρονική στιγμή a_i σε έναν κόμβο CS_v του δικτύου, με επίπεδο φόρτισης σ_i , και χρειάζεται να φορτίσει για τουλάχιστον l_i χρονικές περιόδους. Επιπλέον, έχει ένα deadline, δηλαδή θέλει να έχει αποχωρήσει μέχρι μία χρονική στιγμή d_i , διαφορετικά δεν θα προλάβει να φτάσει στον προορισμό του. Επομένως, αν το αυτοκίνητο i φορτίσει για τουλάχιστον όσο χρειάζεται πριν το deadline του, λαμβάνει μια αξία b_i , διαφορετικά 0.

Για ευκολία, θεωρείται ότι όλα τα αυτοκίνητα είναι παρόμοια, δηλαδή ότι η κατανάλωση ενέργειας, ο ρυθμός φόρτισης και το μέγιστο ποσό φόρτισης που μπορούν να εμφανιστούν είναι σταθερά και ίδια για όλους τους παίκτες. Επομένως, ένα αυτοκίνητο μπορεί να χαρακτηριστεί ως ένα διάνυσμα $r_i = (a_i, CS_v, \sigma_i, d_i, l_i, b_i)$

Τα αυτοκίνητα, για να διασχίζουν δρόμους $e \in E$, εκτός από έναν χρόνο u_e , καταναλώνουν και ενέργεια c_e . Κανονικά, η ενέργεια που καταναλώνεται εξαρτάται από το μοντέλο του οχήματος. Ωστόσο, με την υπόθεση ότι τα αυτοκίνητα είναι παρόμοια, αυτή η κατανάλωση εξαρτάται μόνο από τον δρόμο e .

Για κάθε παίκτη $i \in N$, ο χώρος δυνατών αποτελεσμάτων X_i αποτελείται από όλους τους δυνατούς συνδυασμούς από διάστημα φόρτισης που μπορεί να λάβει ο συγκεκριμένος παίκτης. Οι συνδυασμοί αυτοί θα ονομάζονται προγραμματισμοί φόρτισης (charging schedules). Για παράδειγμα, μερικά δυνατά αποτελέσματα μπορεί να είναι τα $x_i = ((0, 1, CS_A), (1, 2, CS_A))$,

$x_i = ((0, 1, CS_B), (2, 3, CS_B)), x_i = \emptyset$. Υποθέτοντας ότι ο κάθε παίκτης λαμβάνει αξία b_i με οποιοδήποτε προγραμματισμό φόρτισης που καλύπτει τις ανάγκες του και 0 διαφορετικά, οι συναρτήσεις αποτίμησης θα είναι της μορφής $v_i : X_i \rightarrow \{0, b_i\}$.

4.2.2 Περιορισμοί

Ο χώρος δυνατών αποτελεσμάτων X_i για κάθε παίκτη $i \in N$ είναι διαφορετικός και εξαρτάται τόσο από τις παραμέτρους του παίκτη όσο και από την μορφή του δικτύου. Αρχικά, υπάρχουν χρονικοί περιορισμοί λόγω δικτύου. Πιο συγκεκριμένα, εκτός από το να βρίσκεται μέσα στον χρονικό ορίζοντα λειτουργίας του δικτύου, για να είναι ένας προγραμματισμός φόρτισης εφικτός πρέπει και να λαμβάνει υπόψη το χρονικό κόστος μετακίνησης μεταξύ κόμβων. Για παράδειγμα, αν το χρονικό κόστος μετακίνησης μεταξύ των κόμβων A και B είναι 2 χρονικές μονάδες, ένας προγραμματισμός φόρτισης της μορφής $(0, 1, CS_A), (1, 2, CS_B)$ δεν μπορεί να υπάρξει για κανέναν παίκτη.

Ένας άλλος περιορισμός έχει να κάνει με τον αρχικό κόμβο στον οποίο καταφτάνει ο παίκτης, σε συνδυασμό με το χρονικό κόστος μεταφοράς. Πιο συγκεκριμένα, ένας παίκτης που καταφτάνει στον κόμβο A την χρονική στιγμή 0 δεν μπορεί να προγραμματιστεί για φόρτιση στο $(1, 2, CS_B)$ αν το χρονικό κόστος μετακίνησης μεταξύ των κόμβων A και B είναι 2 χρονικές μονάδες.

Εκτός από τον αρχικό κόμβο, ρόλο παίζει και το αρχικό επίπεδο φόρτισης, καθώς υπάρχει ένα ενεργειακό κόστος μεταφοράς. Για παράδειγμα, ένας παίκτης που φτάνει στον κόμβο A με επίπεδο φόρτισης μικρότερο από το απαιτούμενο κόστος μεταφοράς δεν μπορεί να προγραμματιστεί για φόρτιση στον κόμβο B, αν δεν έχει αποκτήσει τουλάχιστον την ενέργεια που απαιτείται για να ταξιδέψει από τον A στον B. Επίσης, αξίζει να σημειωθεί ότι ένας παίκτης δεν μπορεί να φορτίσει περισσότερο από ό,τι του επιτρέπει η χωρητικότητα της μπαταρίας του.

Τα παραπάνω συνοψίζουν τους περιορισμούς που εμφανίζονται στον χώρο δυνατών αποτελεσμάτων ενός παίκτη. Ωστόσο, για να είναι ένας προγραμματισμός φόρτισης επιθυμητός για έναν παίκτη, πρέπει επίσης να καλύπτει τις ανάγκες του. Πιο συγκεκριμένα, ένας προγραμματισμός φόρτισης πρέπει να βρίσκεται εντός του χρονικού διαστήματος στο οποίο είναι παρών στο δίκτυο $([a_i, d_i])$, καθώς και να του προσφέρει τουλάχιστον την απαιτούμενη ενέργεια $(> l_i)$.

4.3 Προσέγγιση Επίλυσης του Προβλήματος Μεγιστοποίησης Κοινωνικής Ωφέλειας

4.3.1 Εύρεση Θεωρητικών Ισορροπημένων Τιμών

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι κάθε παίκτης $i \in N$ έχει μη μηδενική αξία μόνο εάν επιλέξει από τους προγραμματισμούς φόρτισης που βρίσκονται στον χώρο δυνατών αποτελεσμάτων του και είναι επιθυμητοί από αυτόν. Το configuration LP που υπολογίζει το fractional allocation, που αποσκοπεί στη μεγιστοποίηση της κοινωνικής ωφέλειας, είναι το εξής :

$$\begin{aligned}
& \text{Maximize } \sum_{i,s} v_i(S) x_{i,s} \\
& \text{subject to:} \\
& \sum_S x_{i,s} \leq 1 \quad \forall i \in N \\
& \sum_i \sum_{S:(t,t+1,CS) \in S} x_{i,s} \leq \text{Cap}_{CS_v} \quad \forall t \in T, \forall CS_v \in V \\
& x_{i,s} \in [0, 1] \quad \forall i \in N, \forall S \subseteq M
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Όπου η μεταβλητή απόφασης $x_{i,s}$ δηλώνει ότι ο παίκτης i παίρνει τον προγραμματισμό φόρτισης S . Στο παραπάνω γραμμικό πρόγραμμα, όπως φαίνεται και από την αντικειμενική συνάρτηση, σκοπός είναι η μεγιστοποίηση της συνολικής αξίας που παίρνουν οι παίχτες ανάλογα με τον προγραμματισμό φόρτισης που τους παραχωρείται. Ο πρώτος περιορισμός, $\sum_S x_{i,s} \leq 1$ προκύπτει καθώς ο κάθε παίκτης μπορεί να επιλέξει το πολύ έναν προγραμματισμό από αυτούς που μπορεί και επιθυμεί, αν υπάρχει.

Κανονικά οι μεταβλητές απόφασης $x_{i,s}$ παίρνουν τιμές 0 ή 1, αφού ένας παίκτης είτε παίρνει έναν προγραμματισμό είτε κανέναν. Παρόλα αυτά με χρήση fractional relaxation για να αποφυγούμε ένα ILP, όπως φαίνεται στο [19], προκύπτει ο περιορισμός $x_{i,s} \in [0, 1]$.

Τέλος, όσον αφορά τον περιορισμό $\sum_i \sum_{S:(t,t+1,CS) \in S} x_{i,s} \leq \text{Cap}_{CS_v}$, σε κάθε κόμβο CS δεν μπορούμε να έχουμε την ίδια χρονική στιγμή προγραμματισμένους παίχτες περισσότερους από το πλήθος που επιτρέπεται στον κόμβο αυτό. Δηλαδή, το πλήθος των παιχτών με προγραμματισμό φόρτισης στο οποίο προβλέπεται φόρτιση σε ένα διάστημα $[t, t+1)$ στο CS_v δεν μπορεί να είναι περισσότερο από το capacity Cap_{CS_v} .

Ακολουθώντας την απόδειξη του 3.2.3, ορίζονται τιμές με βάση την βέλτιστη λύση του προηγούμενου γραμμικού προγράμματος, την x^* . Πιο συγκεκριμένα, για κάθε παίκτη $i \in N$ και κάθε σύνολο από διαστήματα φόρτισης που αποτελούν έναν προγραμματισμό S , έστω $w_{i,S}$ η υπεργραφική αναπαράσταση της PH-k συνάρτησης που ανήκει στο στήριγμα $\{v_\ell\}_{\ell \in L}$ και μεγιστοποιεί την αποτίμηση του παίκτη i για το S . Δηλαδή, $v_i(S) = \sum_{T \subseteq S} w_{i,S}(T)$. Καθώς οι συναρτήσεις αποτίμησης είναι μονότονες και μη φθίνουσες, η κάθε PH-k συνάρτηση θα έχει μοναδική υπερακμή ίση με το σύνολο S και βάρος $v_i(S)$. Άρα $v_i(S) = \sum_{T \subseteq S} w_{i,S}(T) = w_{i,S}(S)$ και $w_{i,S}(T) = 0$ για κάθε $T \subset S$. Επομένως, η τιμή για ένα συγκεκριμένο διάστημα φόρτισης $m \in M$ είναι :

$$p(\{m\}) = \sum_i \sum_S x_{i,S}^* \sum_{T:m \in T, T \subseteq S} w_{i,S}(T) = \sum_{i,S:m \in S} x_{i,S}^* v_i(S)$$

αφού

$$\begin{aligned}
\sum_{T:m \in T, T \subseteq S} w_{i,S}(T) &= \sum_{T:m \in T, T \subset S} w_{i,S}(T) + \sum_{S:m \in S} w_{i,S}(S) = 0 + \sum_{S:m \in S} w_{i,S}(S) \\
&= \begin{cases} v_i(S) & \text{αν } m \in S \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Αν το κάθε διάστημα φόρτισης ήταν μοναδικό, τότε οι τελικές τιμές θα δίνονταν από τον παραπάνω τύπο. Δυστυχώς, στο συγκεκριμένο πρόβλημα αν το capacity ενός κόμβου

είναι $Cap_{CS_v} = c > 1$ τότε τα διαστήματα φόρτισης που έχουμε στην διάθεση μας δεν είναι μοναδικά. Ένα διάστημα φόρτισης, για παράδειγμα το $(t, t+1, CS_v)$, εμφανίζεται c το πλήθος φορές. Άρα, κατά τον υπολογισμό της τιμής, αντί να υπολογίσουμε την τιμή ενός συγκεκριμένου από τα c πλήθους ίδια διαστήματα της μορφής $(t, t+1, CS_v)$, υπολογίζουμε την συνολική τιμή όλων αυτών. Πάραυτα, αφού τα διαστήματα αυτά είναι ακριβώς τα ίδια, η τελική τιμή για ένα συγκεκριμένο δεν θα είναι παρά η συνολική τιμή τους διαιρεμένη με c , καταλήγοντας έτσι στον τελικό τύπο :

$$p(\{(t, t+1, CS_v)\}) = \frac{\sum_{i,S:(t,t+1,CS_v) \in S} x_{i,S}^* v_i(S)}{Cap_{CS_v}} \quad (4.2)$$

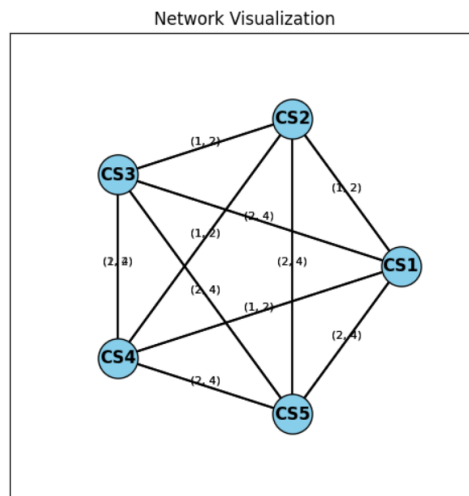
Τέλος, επεκτείνοντας γραμμικά, για κάθε $x \in F$ και $x' \in F_x$, ισχύει :

$$p(x'_i|x) = \sum_S x'_{i,S} \sum_{m \in S} p(\{m\})$$

Με τον τρόπο αυτό, βρίσκονται ισορροπημένες τιμές με βάση ένα δείγμα της από κοινού κατανομής D , που δεν γνωρίζουμε. Για την εύρεση τιμών που προσεγγίζουν τις ισορροπημένες τιμές αν ξέραμε τις κατανομές, δεν έχουμε παρά να υπολογίσουμε ισορροπημένες τιμές για διάφορα δείγματα και να πάρουμε τις μέσες τιμές αυτών. Με τον τρόπο αυτό, οι μέσες τιμές των ισορροπημένων τιμών θα συγκλίνουν όλο και περισσότερο στις πραγματικές, ανάλογα με το πλήθος των δειγμάτων. Τέλος, για την τελική κοστολόγηση, με βάση το θεώρημα 3.2.2, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε με κατάλληλο συντελεστή δ τις επιμέρους τιμές.

4.3.2 Πειραματική Εύρεση Ισορροπημένων Τιμών

Για την υποστήριξη του θεωρητικού μέρους της εύρεσης ισορροπημένων τιμών, καθώς και της μεγιστοποίησης της κοινωνικής ωφέλειας που επιτυγχάνεται με τη βοήθειά τους, το πρώτο βήμα ήταν η δημιουργία ενός δικτύου από σταθμούς φόρτισης. Πιο συγκεκριμένα, ήταν απαραίτητο να οριστούν οι παράμετροι του δικτύου, όπως το πλήθος των σταθμών, η χωρητικότητά τους, καθώς και το κόστος μεταφοράς μεταξύ αυτών, τόσο το χρονικό όσο και το ενεργειακό.

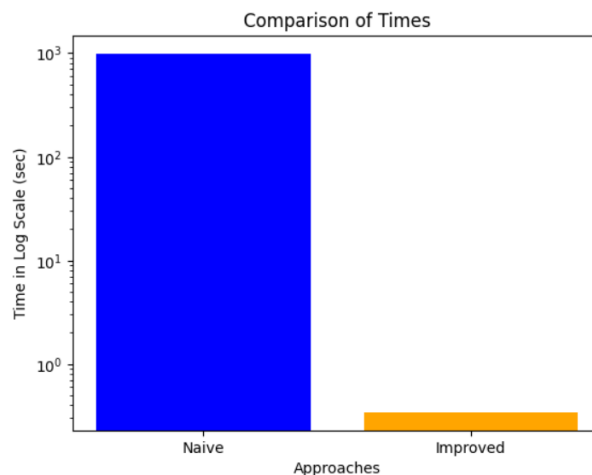


Σχήμα 4.1: Παράδειγμα δικτύου πέντε σταθμών φόρτισης. Όπου (ενέργεια, χρόνος) τα διανύσματα κόστους μεταφοράς

Μετά την κατασκευή του δικτύου, δημιουργήθηκε μία κατανομή για την παραγωγή διανυσμάτων της μορφής $r_i = (\alpha_i, CS_v, \sigma_i, d_i, l_i, b_i)$. Με τη βοήθεια της κατανομής αυτής, μπόρεσε να δημιουργηθεί μία προσομοίωση εμφάνισης παικτών στο δίκτυο. Η εμφάνιση των παικτών ακολουθούσε κατανομή Poisson με διαφορετική παράμετρο για κάθε σταθμό φόρτισης. Επομένως, θεωρώντας ανεξαρτησία, η συνολική εμφάνιση παικτών εξακολουθεί να είναι μία κατανομή Poisson με $\lambda = \sum_i \lambda_i$ [36].

Έχοντας πλέον ένα δίκτυο, καθώς και πρόσβαση σε δείγματα αυτοκινήτων που καταφτάνουν μέσα σε ένα χρονικό όριο λειτουργίας T , το επόμενο βήμα ήταν η επίλυση γραμμικού προγράμματος (4.1). Αξίζει να παρατηρηθεί, ότι το πλήθος των μεταβλητών απόφασης μπορεί να είναι πολύ μεγάλο. Για παράδειγμα στο δίκτυο του σχήματος 4.1, για $T = 10$ και μέγιστη χωρητικότητα μπαταρίας 5 μονάδες, το πλήθος των πιθανών προγραμματισμών φόρτισης, λαμβάνοντας υπόψη μόνο τους περιορισμούς του δικτύου, είναι 12.094. Αυξάνοντας το T κατά μία μόνο μονάδα, το πλήθος αυτό ανέρχεται σε 24.946. Επομένως, το πλήθος των μεταβλητών $x_{i,s}$, το οποίο είναι το πλήθος των πιθανών προγραμματισμών φόρτισης πολλαπλασιασμένο με το πλήθος των οχημάτων, καθιστά την επίλυση του (4.1) απαγορευτική.

Για την αποφυγή του συγκεκριμένου προβλήματος, πρέπει να παρατηρηθεί ότι για κάθε παίκτη, εξαιτίας των περιορισμών του, οι προγραμματισμοί φόρτισης που καλύπτουν τις ανάγκες του είναι περιορισμένοι, και άρα για όλους τους υπόλοιπους ο συντελεστής $v_i(S)$ είναι 0. Για τον λόγο αυτό, αντί να υπολογίσουμε εκ των προτέρων όλους τους δυνατούς προγραμματισμούς φόρτισης και να λύσουμε το γραμμικό πρόγραμμα, αρκεί να βρούμε μόνο τους προγραμματισμούς φόρτισης που καλύπτουν τις ανάγκες του κάθε παίκτη. Για παράδειγμα, στο δίκτυο 4.1, στην περίπτωση όπου $T = 10$ και η μέγιστη χωρητικότητα μπαταρίας είναι 5, για έναν παίκτη i' με $r'_i = (\alpha'_i, CS_v, \sigma'_i, d'_i, l'_i, b'_i) = (0, CS_1, 0, 1, 1, 2)$, το πλήθος των μεταβλητών $x_{i',s}$ που χρειάζεται να έχουμε είναι ακριβώς μία. Η μεταβλητή αυτή είναι η $x_{i',(0,1,CS_1)}$ και έτσι αποφεύγουμε τις 12.094 που θα είχαμε κανονικά. Επομένως, ο χρόνος επίλυσης του γραμμικού προγράμματος βελτιώνεται σημαντικά, όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.2



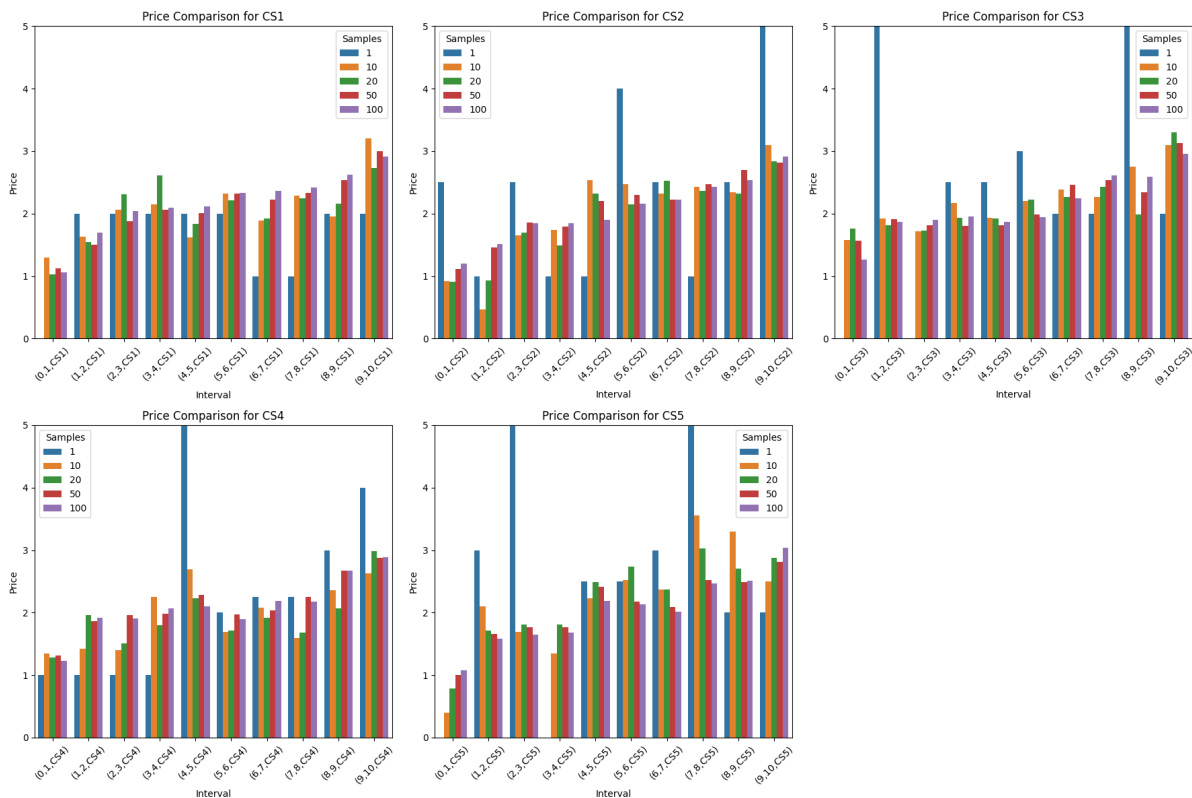
Σχήμα 4.2: Σύγκριση χρόνων σε λογαριθμική κλίμακα μεταξύ του αφελή και βελτιωμένου τρόπου επίλυσης του γραμμικού προγράμματος για τυχαίο δείγμα.

Έχοντας πλέον τρόπο για την επίλυση του (4.1) και εύρεση του x^* σε όχι απαγορευτικό χρόνο, μπορούν πλέον να υπολογιστούν ισορροπημένες τιμές με εύκολο τρόπο. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε διάστημα φόρτισης $(t, t + 1, CS_v)$, βλέπουμε όλες τις περιπτώσεις

όπου $x_{i,S} > 0$ και που το διάστημα αυτό περιέχεται στον προγραμματισμό S . Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε τις επιμέρους τιμές των $x_{i,S}$ με την αξία που λαμβάνει ο παίκτης i από τον προγραμματισμό S και τα προσθέτουμε. Τέλος, διαιρούμε το αποτέλεσμα με την χωρητικότητα του CS_v και καταλήγουμε σε ισορροπημένη τιμή για το διάστημα αυτό.

Ο υπολογισμός ισορροπημένων τιμών από ένα μόνο δείγμα μπορεί να είναι παραπλανητικός. Για να αποφύγουμε τυχόν ακραίες περιπτώσεις και να προσεγγίσουμε ακόμα καλύτερα τις ισορροπημένες τιμές, είναι απαραίτητο να έχουμε μεγαλύτερο μέγεθος δείγματος. Πιο συγκεκριμένα, επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία εύρεσης ισορροπημένων τιμών για πολλές προσομοιώσεις αύξησης οχημάτων και υπολογίζοντας τις τελικές ισορροπημένες τιμές ως τις μέσες τιμές των επιμέρους αποτελεσμάτων, αναμένουμε ότι η κοινωνική ωφέλεια που θα παραχθεί με τη χρήση αυτών των τιμών θα είναι καλύτερη για ένα τυχαίο δείγμα.

Για παράδειγμα, ας εξετάσουμε ένα δίκτυο όπως αυτό του σχήματος 4.1. Ο χρόνος λειτουργίας του δικτύου είναι $T = 10$ και η χωρητικότητα για κάθε σταθμό φόρτισης CS είναι ίση με 1. Οι ισορροπημένες τιμές που υπολογίστηκαν χρησιμοποιώντας δείγματα μεγεθών 1, 10, 20, 50 και 100 προσομοιώσεων παρουσιάζονται στο σχήμα 4.3. Αυτά τα δείγματα μας επιτρέπουν να συγκρίνουμε τις επιδράσεις του μεγέθους δείγματος στην ακρίβεια των υπολογισμένων ισορροπημένων τιμών.



Σχήμα 4.3: Σύγκριση ισορροπημένων τιμών ανάλογα με το πλήθος των δειγμάτων.

Από το σχήμα 4.3 παρατηρείται ότι καθώς αυξάνεται το πλήθος των δειγμάτων, οι μέσες τιμές των ισορροπημένων τιμών συγκλίνουν, όπως ήταν αναμενόμενο. Συγκεκριμένα, όταν οι τιμές υπολογίστηκαν από μόλις 1 δείγμα, οι αποκλίσεις σε σχέση με τις υπόλοιπες υλοποιήσεις ήταν σημαντικές, υποδεικνύοντας την αβεβαιότητα που εισάγει η περιορισμένη δειγματοληψία. Αξίζει ακόμα να παρατηρηθεί ότι οι τιμές συγκλίνουν αρκετά γρήγορα, κάτι που υποδηλώνει ότι δεν απαιτούνται πολλά δείγματα για να προσεγγιστούν αξιόπιστες εκτιμήσεις. Αυτό μπορεί

να είναι ιδιαίτερα χρήσιμο σε εφαρμογές όπου ο χρόνος και οι πόροι είναι περιορισμένοι, καθώς καθιστά τη διαδικασία υπολογισμού ισορροπημένων τιμών πιο εφικτή.

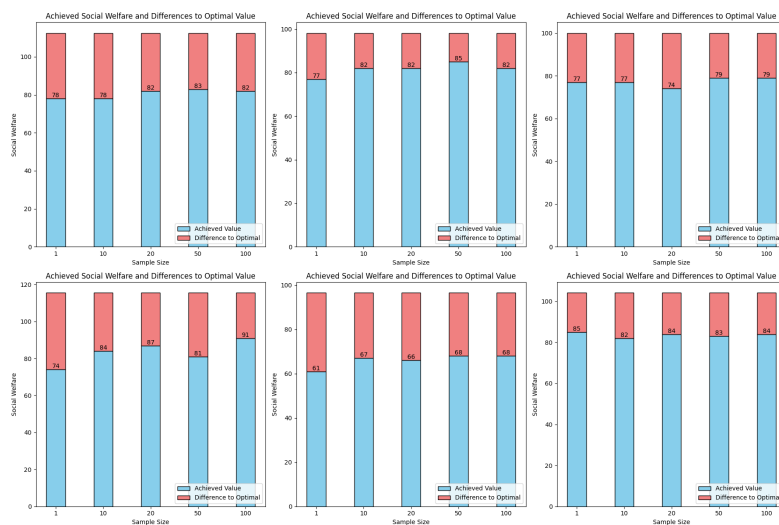
4.3.3 Σύγκριση Κοινωνικής Ωφέλειας σε Σχέση με το Πλήθος Δειγμάτων

Έχοντας υπολογίσει πλέον τις ισορροπημένες τιμές με διαφορετικά μεγέθη δειγμάτων, το επόμενο βήμα είναι η εφαρμογή τους στην κοστολόγηση των επιμέρους διαστημάτων φόρτισης, με σκοπό τη μεγιστοποίηση της κοινωνικής ωφέλειας. Σύμφωνα με το θεώρημα 3.2.2, για να επιτευχθεί αυτό, το μόνο που απαιτείται είναι να πολλαπλασιάσουμε τις ισορροπημένες τιμές με τον κατάλληλο συντελεστή δ .

Παρατηρώντας ότι η χωρητικότητα της μπαταρίας είναι 5, διαπιστώνουμε ότι ο μέγιστος αριθμός διαστημάτων που μπορεί να περιλαμβάνει ένας προγραμματισμός φόρτισης είναι επίσης 5. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημά μας ανήκει στην κατηγορία MPH-5. Στην περίπτωση αυτή, οι τιμές που έχουν υπολογιστεί είναι (1, 1, 5-1)-ισορροπημένες. Έτσι, το δ που προκύπτει από το θεώρημα 3.2.2 είναι ίσο με $\delta = \frac{1}{1 + \max\{2*4, \frac{1}{1}\}} = \frac{1}{9}$.

Με την χρήση των τελικών αυτών τιμών, αφήνουμε τους παίκτες να επιλέξουν όποιον προγραμματισμό φόρτισης επιθυμούν από τους διαθέσιμους. Με τον τρόπο αυτό, ο κάθε παίκτης παίρνει έναν προγραμματισμό που του επιφέρει την μεγαλύτερη ωφέλεια, πληρώνοντας τις επιμέρους τιμές των διαστημάτων του προγραμματισμού. Η κοινωνική ωφέλεια που επιτυγχάνεται με αυτόν τον απλό τρόπο σε σχέση με την βέλτιστη φαίνεται στο σχήμα 4.4 για έξι τυχαία δείγματα οχημάτων που καταφτάνουν.

Με τη χρήση των τελικών αυτών τιμών, επιτρέπουμε στους παίκτες να επιλέξουν όποιον προγραμματισμό φόρτισης επιθυμούν από τους διαθέσιμους. Με τον τρόπο αυτό, κάθε παίκτης επιλέγει έναν προγραμματισμό που του προσφέρει τη μεγαλύτερη ωφέλεια, πληρώνοντας τις αντίστοιχες τιμές για τα επιμέρους διαστήματα του προγραμματισμού του. Η κοινωνική ωφέλεια που επιτυγχάνεται μέσω αυτής της διαδικασίας συγκριτικά με την βέλτιστη ωφέλεια φαίνεται στο σχήμα 4.4, για έξι τυχαία δείγματα προσομοιώσεων οχημάτων που καταφτάνουν.



Σχήμα 4.4: Σύγκριση της κοινωνικής ωφέλειας που επιτυγχάνεται σε σχέση με την βέλτιστη για έξι τυχαία δείγματα.

Από το σχήμα 4.4, παρατηρούμε ότι η χρήση των ισορροπημένων τιμών, πολλαπλασιασμένων με τον κατάλληλο δ , επιτρέπει την επίτευξη ενός αρκετά ικανοποιητικού ποσοστού της βέλτιστης κοινωνικής ωφέλειας, ακόμη και στην περίπτωση ενός μόνο δείγματος. Σε γενικές γραμμές, με την αύξηση του αριθμού των δειγμάτων, η κοινωνική ωφέλεια που επιτυγχάνουμε φαίνεται να βελτιώνεται. Υπάρχουν, ωστόσο, περιπτώσεις όπου οι τιμές που υπολογίστηκαν από ένα δείγμα επιφέρουν καλύτερα αποτελέσματα. Αυτό δεν είναι κάτι ανησυχητικό, καθώς συμβαίνει σε περιπτώσεις που το τυχαίο δείγμα είναι παρόμοιο με αυτό που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό των ισορροπημένων τιμών. Επιπλέον, αξίζει να σημειωθεί ότι τα τελικά αποτελέσματα είναι παρόμοια, γεγονός που μας επιτρέπει να αποφεύγουμε τον υπολογισμό ισορροπημένων τιμών με υπερβολικά πολλά δείγματα.

4.4 Πειραματικές Συγκρίσεις

Τα παραπάνω αποτελέσματα είναι αρκετά ενθαρρυντικά όσον αφορά τη μέθοδο υπολογισμού ισορροπημένων τιμών και την ικανότητά τους να συμβάλλουν στην επίτευξη ενός ικανοποιητικού ποσοστού της μέγιστης κοινωνικής ωφέλειας. Το επόμενο βήμα είναι να εξετάσουμε πώς η αλλαγή παραμέτρων, όπως η χωρητικότητα στους σταθμούς φόρτισης και ο αριθμός των οχημάτων που καταφτάνουν, επηρεάζει τα αποτελέσματα.

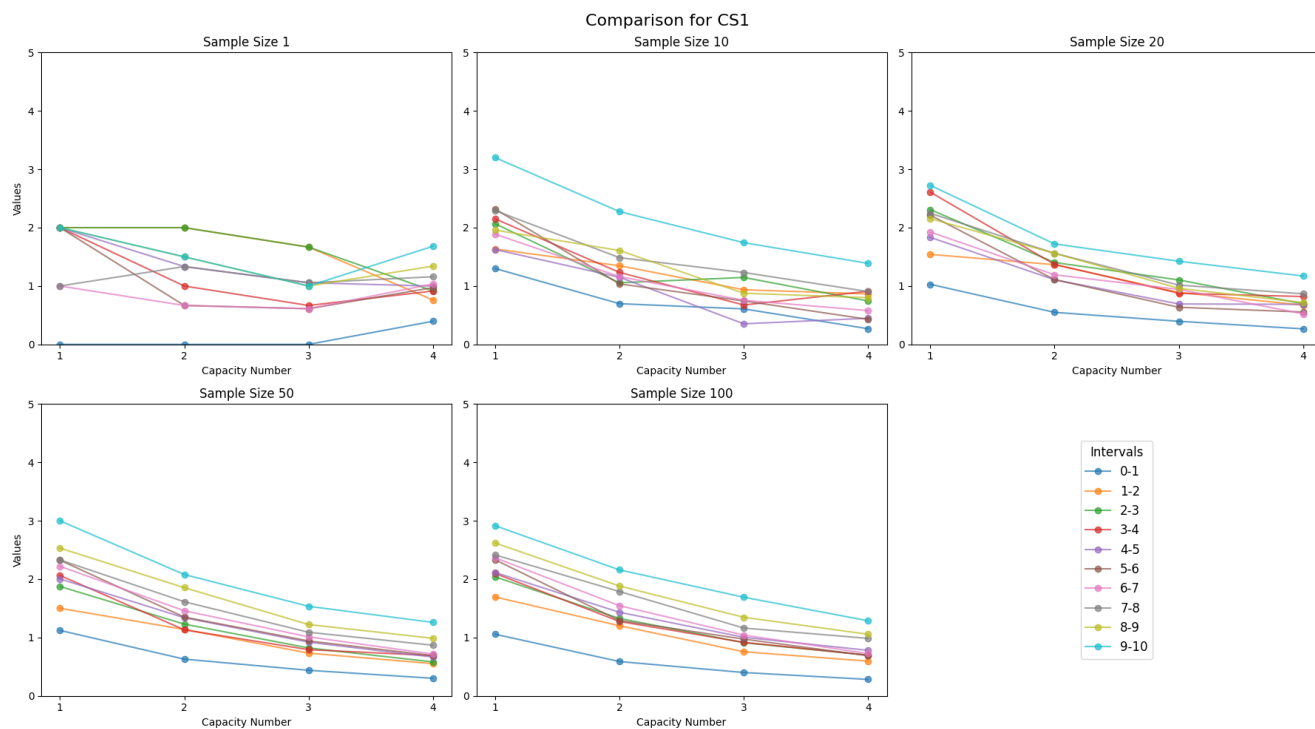
4.4.1 Μεταβολή της Χωρητικότητας στους Σταθμούς Φόρτισης

Το πλήθος των οχημάτων που μπορούν να εξυπηρετηθούν ταυτόχρονα σε έναν σταθμό επηρεάζει άμεσα τις τελικές ισορροπημένες τιμές. Από τον τύπο υπολογισμού των ισορροπημένων τιμών 4.2 φαίνεται ότι, καθώς αυξάνεται η χωρητικότητα, οι ισορροπημένες τιμές τείνουν να μειώνονται. Διαισθητικά, καθώς το πλήθος των οχημάτων που μπορούν να εξυπηρετηθούν στο δίκτυο αυξάνεται, οι απαιτήσεις σχετικά με τα κριτήρια επιλογής των οχημάτων που θα εξυπηρετηθούν γίνονται λιγότερο αυστηρές.

Για να εξετάσουμε ακριβώς την επίδραση της χωρητικότητας στις ισορροπημένες τιμές, θα εστιάσουμε στο δίκτυο του σχήματος 4.1. Διατηρώντας σταθερά τα δείγματα των παικτών που καταφτάνουν, θα αυξήσουμε σταδιακά την χωρητικότητα. Επιλέγοντας τυχαία τον πρώτο από τους πέντε σταθμούς, η διαφορά στις ισορροπημένες τιμές αναφορικά με την χωρητικότητα, για διαφορετικά μεγέθη δειγμάτων, παρουσιάζεται στο σχήμα 4.5.

Όπως αναμενόταν, καθώς η χωρητικότητα του σταθμού αυξάνεται από ένα έως τέσσερα, οι ισορροπημένες τιμές μειώνονται ανεξαρτήτως του πλήθους των δειγμάτων που χρησιμοποιήθηκαν. Τα αποτελέσματα για τους υπόλοιπους σταθμούς ήταν παρόμοια και για αυτό δεν συμπεριλήφθηκαν τα αντίστοιχα σχήματα.

Αξίζει να σημειωθεί ότι για άλλη μια φορά οι υπολογισμένες τιμές συγκλίνουν όλο και περισσότερο με την αύξηση του αριθμού των δειγμάτων. Η διαφορά που παρατηρείται στις περιπτώσεις με 20, 50 και 100 δείγματα προσομοιώσεων είναι ελάχιστη, ενώ ακόμη και με τη χρήση 10 δειγμάτων προκύπτουν παραπλήσιες τιμές για τα περισσότερα διαστήματα φόρτισης. Η μόνη περίπτωση όπου οι ισορροπημένες τιμές παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές είναι αυτή του ενός μόνο δείγματος.



Σχήμα 4.5: Σύγκριση ισορροπημένων τιμών υπολογισμένων από διαφορετικου πλήθους δείγματα ανάλογα με την χωρητικότητα για τον σταθμό CS_1 .

Παρατηρείται επίσης ότι οι ισορροπημένες τιμές για το διάστημα $(0,1,CS_1)$ είναι οι χαμηλότερες. Αυτό συμβαίνει επειδή το συγκεκριμένο διάστημα το επιθυμούν μόνο οι παίκτες που φτάνουν στο δίκτυο τη χρονική στιγμή 0, με αποτέλεσμα να υπάρχει χαμηλή ζήτηση. Αντίθετα, το διάστημα $(9,10,CS_1)$ έχει τη μεγαλύτερη τιμή, καθώς το επιθυμούν όλοι οι παίκτες που βρίσκονται στο δίκτυο τη χρονική στιγμή 9, ανεξαρτήτως της στιγμής άφιξής τους.

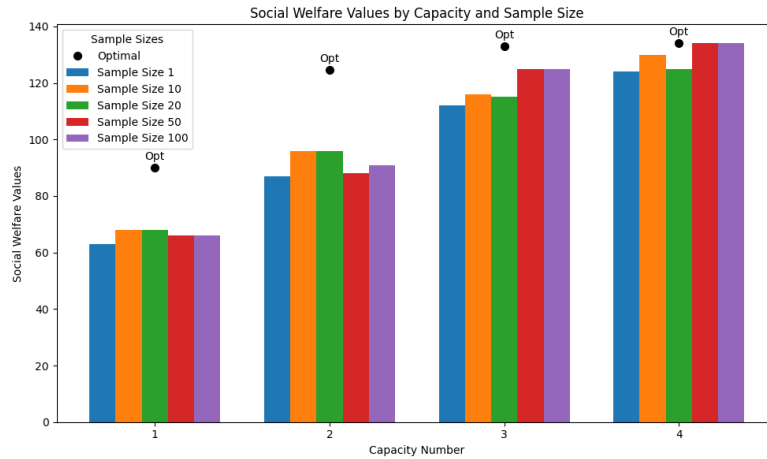
Το ερώτημα πλέον είναι πώς μεταβάλλεται η μέγιστη κοινωνική ωφέλεια καθώς αλλάζει η χωρητικότητα των σταθμών φόρτισης. Επιπλέον, ποιο ποσοστό αυτής της ωφέλειας μπορούμε να επιτύχουμε με τη χρήση των ισορροπημένων τιμών, όταν αυτές πολλαπλασιάζονται με κατάλληλο συντελεστή δ ;

Από τη στιγμή που το πλήθος των παικτών που μπορούμε να εξυπηρετήσουμε έχει αυξηθεί, η μέγιστη κοινωνική ωφέλεια που μπορεί να επιτευχθεί θεωρητικά πρέπει επίσης να αυξάνεται. Ωστόσο, η κατάσταση δεν είναι τόσο απλή όσον αφορά την κοινωνική ωφέλεια που θα επιτύχουμε. Αν μειώσουμε σημαντικά τις τιμές των διαστημάτων φόρτισης, το δίκτυο μπορεί να γεμίσει με παίκτες που έχουν χαμηλή αξία, με αποτέλεσμα να αποκλειστούν οι παίκτες με υψηλή αξία, γεγονός που θα μπορούσε να μειώσει τη συνολική ωφέλεια.

Ωστόσο, με τη χρήση των ισορροπημένων τιμών πολλαπλασιασμένων με $\delta = \frac{1}{9}$, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.6, αποφεύγεται αυτή η αρνητική συνέπεια. Το σχήμα δείχνει ότι η κοινωνική ωφέλεια παραμένει σε ικανοποιητικά επίπεδα, εξασφαλίζοντας την εξυπηρέτηση και των παικτών με υψηλή αξία.

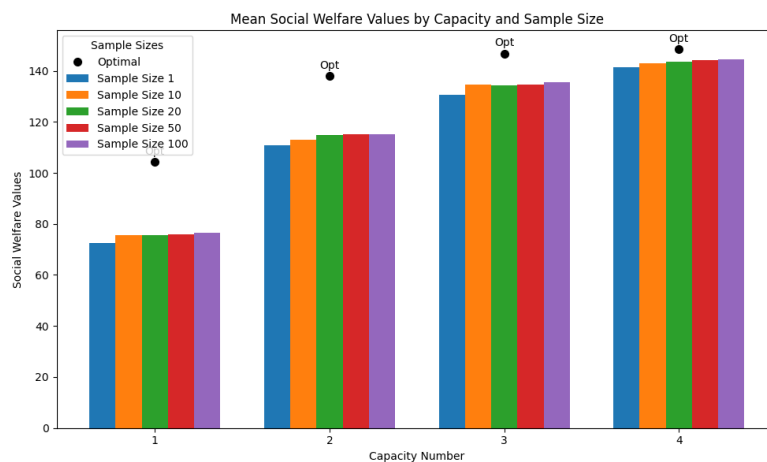
Με την αύξηση της χωρητικότητας, στο συγκεκριμένο τυχαίο παράδειγμα, παρατηρείται πράγματι αύξηση της μέγιστης κοινωνικής ωφέλειας, καθώς και της επιτευχθείσας κοινωνικής

ωφέλειας. Συγκεκριμένα, για οποιοδήποτε μέγεθος δείγματος, η αύξηση της χωρητικότητας οδηγεί σε αύξηση της επιτευχθείσας κοινωνικής ωφέλειας. Ιδιαίτερα, στην περίπτωση όπου η χωρητικότητα είναι 4 και το μέγεθος δείγματος είναι 50 ή 100, επιτυγχάνουμε την μέγιστη κοινωνική ωφέλεια.



Σχήμα 4.6: Σύγκριση της κοινωνικής ωφέλειας που επιτυγχάνεται για τιμές υπολογισμένες από διαφορετικού πλήθους δείγματα ανάλογα με την χωρητικότητα για ένα τυχαίο δείγμα.

Για να διασφαλίσουμε ότι τα θετικά αποτελέσματα δεν οφείλονταν στο τυχαίο δείγμα, επαναλάβαμε το πείραμα με εκατό τυχαία δείγματα και χρησιμοποιήσαμε τις μέσες τιμές των αποτελεσμάτων. Όπως φαίνεται στο σχήμα 4.7, τα συμπεράσματα που προήλθαν προηγουμένως δεν ήταν τυχαία. Παρατηρώντας τις μέσες τιμές, διαπιστώνεται ότι, κατά μέσο όρο, με την αύξηση του αριθμού των δειγμάτων για τον υπολογισμό των ισορροπημένων τιμών επιτυγχάνουμε καλύτερη κοινωνική ωφέλεια. Άρα παρά το ενδεχόμενο τιμές υπολογισμένες από μικρότερα δείγματα να επιφέρουν καλύτερη κοινωνική ωφέλεια σε μερικές προσομοιώσεις, συνολικά, όσο περισσότερα δείγματα χρησιμοποιούνται για την εύρεση των ισορροπημένων τιμών, τόσο καλύτερα ποσοστά της μέγιστης κοινωνικής ωφέλειας επιτυγχάνονται.



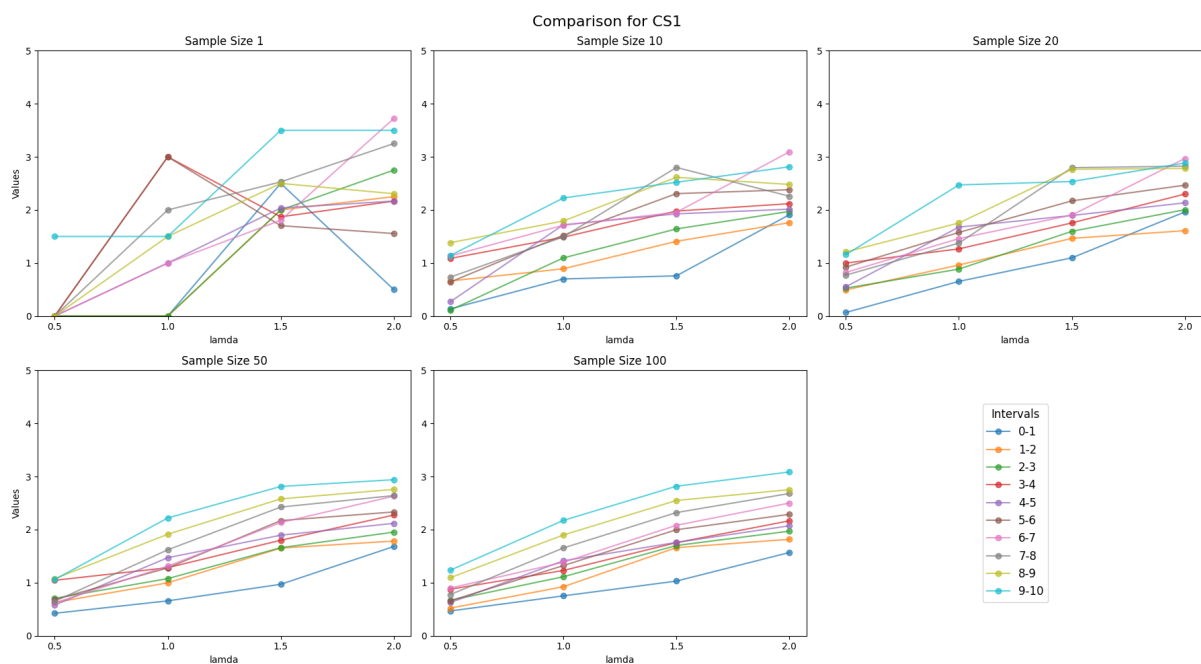
Σχήμα 4.7: Σύγκριση της μέσης κοινωνικής ωφέλειας που επιτυγχάνεται για τιμές υπολογισμένες από διαφορετικού πλήθους δείγματα ανάλογα με την χωρητικότητα για εκατό τυχαία δείγματα.

4.4.2 Μεταβολή του Πλήθους των Οχημάτων που Καταφθάνουν

Ένας επιπλέον παράγοντας που επηρεάζει τις τελικές ισορροπημένες τιμές είναι το πλήθος των παικτών που καταφθάνουν στο δίκτυο. Συγκεκριμένα, με την αύξηση των παικτών που ζητούν τις περιορισμένες θέσεις φόρτισης στους σταθμούς, αναμένεται να αυξηθούν τόσο οι ισορροπημένες τιμές όσο και η μέγιστη κοινωνική ωφέλεια. Καθώς το πλήθος των παικτών μεγαλώνει, είναι λογικό να υπάρχουν και περισσότεροι παίκτες με υψηλότερες αξίες, γεγονός που θα οδηγήσει σε αύξηση της μέγιστης κοινωνικής ωφέλειας.

Όσον αφορά την εικασία ότι οι ισορροπημένες τιμές θα αυξηθούν, αρκεί να σκεφτούμε ότι η χωρητικότητα παραμένει σταθερή και οι περιορισμένες θέσεις πρέπει να δοθούν στα άτομα με τις μεγαλύτερες αξίες. Για να συμβεί αυτό, το κόστος των διαστημάτων πρέπει να είναι αρκετά υψηλό, ώστε οι παίκτες με μικρότερες αξίες να μην μπορούν να τα αποκτήσουν.

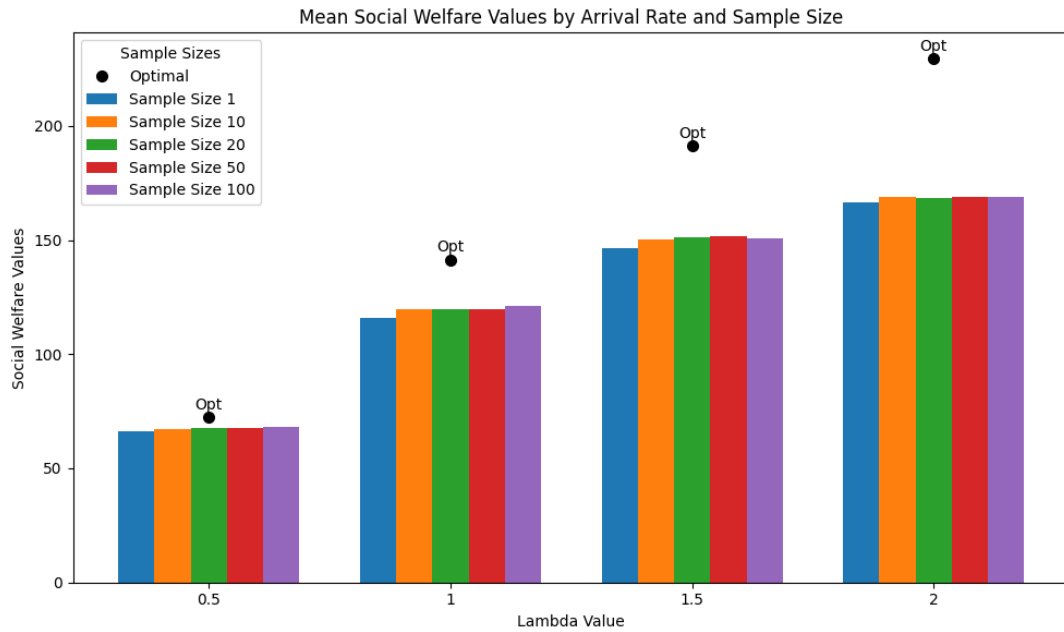
Κρατώντας την χωρητικότητα σταθερή, ίση με δύο για όλους τους σταθμούς, αυξάνουμε σταδιακά τον ρυθμό με τον οποίο καταφθάνουν τα οχήματα. Τα αποτελέσματα που φαίνονται στο σχήμα 4.8 επιβεβαιώνουν την εικασία μας για αύξηση των ισορροπημένων τιμών.



Σχήμα 4.8: Σύγκριση ισορροπημένων τιμών υπολογισμένων από διαφορετικού πλήθους δείγματα ανάλογα με τον ρυθμό άφιξης παικτών για τον σταθμό CS_1 .

Αξίζει, εκτός από την προφανή αύξηση των ισορροπημένων τιμών καθώς ο ρυθμός άφιξης μεγαλώνει, να παρατηρηθεί ότι για ακόμη μία φορά οι ισορροπημένες τιμές συγκλίνουν σχετικά γρήγορα. Επίσης, η περίπτωση του ενός δείγματος φαίνεται αναξιόπιστη για άλλη μία φορά.

Όσον αφορά τη μέγιστη κοινωνική ωφέλεια, καθώς και το ποσοστό της που επιτυγχάνουμε λαμβάνοντας εκατό τυχαία δείγματα για κάθε διαφορετικό ρυθμό λ και χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες τιμές, επιβεβαιώνεται επίσης η αύξηση της μέγιστης κοινωνικής ωφέλειας.



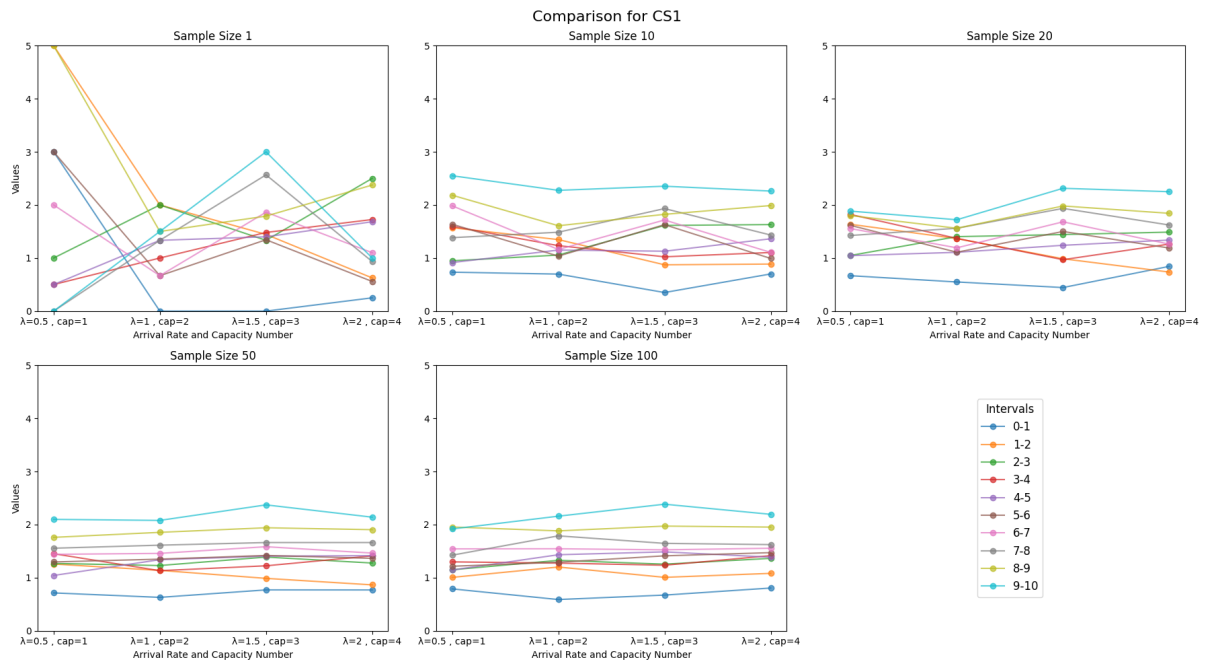
Σχήμα 4.9: Σύγκριση της μέσης κοινωνικής ωφέλειας που επιτυγχάνεται για τιμές υπολογισμένες από διαφορετικού πλήθους δείγματα ανάλογα με τον ρυθμό λ για εκατό τυχαία δείγματα.

Από το σχήμα 4.9, εκτός από την αύξηση της μέγιστης κοινωνικής ωφέλειας καθώς το λ μεγαλώνει, παρατηρείται εύκολα ότι αυξάνεται και η επιτευγμένη κοινωνική ωφέλεια. Σημαντικό είναι να σημειωθεί η διαφορά από το μέγιστο. Στις περιπτώσεις που καταφτάνουν ελάχιστοι παίχτες, βλέπουμε ότι πλησιάζουμε αρκετά κοντά στο βέλτιστο. Αυτό συμβαίνει διότι υπάρχει αρκετός χώρος ώστε να εξυπηρετηθούν σχεδόν όλα τα σχήματα. Αντίθετα, στην περίπτωση που καταφτάνουν περισσότεροι παίχτες από όσους μπορούν να εξυπηρετηθούν, η διαφορά είναι σημαντική. Αυτό υποδηλώνει ότι λόγω της πληθώρας των παικτών είναι δύσκολο να επιλεγούν ακριβώς αυτοί που πρέπει. Παρά τη δυσκολία αυτή, η κοινωνική ωφέλεια που επιτυγχάνεται είναι αρκετά ικανοποιητική.

4.4.3 Μεταβολή της Χωρητικότητας και του Πλήθους των Οχημάτων

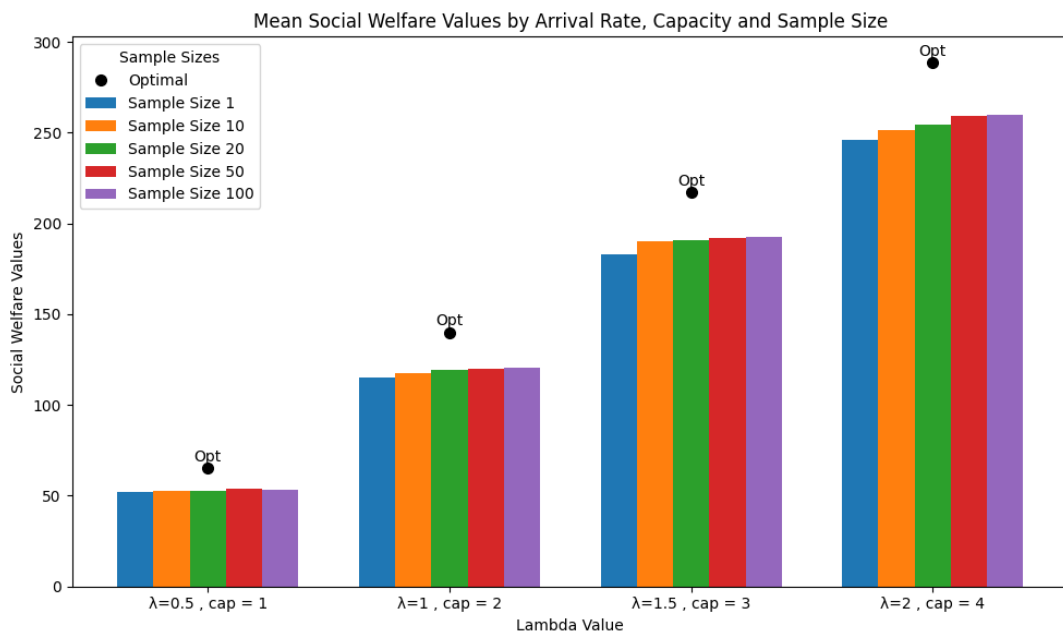
Συνεχίζοντας, θα εξετάσουμε πώς επηρεάζει η ταυτόχρονη αύξηση της χωρητικότητας και του πλήθους των οχημάτων τις ισορροπημένες τιμές, καθώς και την κοινωνική ωφέλεια.

Δεδομένου ότι με την αύξηση της χωρητικότητας οι ισορροπημένες τιμές τείνουν να μειώνονται, ενώ με την αύξηση των οχημάτων τείνουν να αυξάνονται, αναμένεται ότι με την ταυτόχρονη μεταβολή, οι ισορροπημένες τιμές θα παραμένουν σχετικά σταθερές. Πραγματοποιώντας το αντίστοιχο πείραμα και παρουσιάζοντας τα αποτελέσματα μόνο για το CS_1 (Σχήμα 4.10), λόγω ομοιότητας, παρατηρείται ότι όντως δεν υπάρχουν σημαντικές αλλαγές στις τιμές για όλες τις περιπτώσεις, εκτός από μία, η οποία υπολογίστηκε από ένα δείγμα.



Σχήμα 4.10: Σύγκριση ισορροπημένων τιμών υπολογισμένων από διαφορετικού πλήθους δείγματα ανάλογα με την χωρητικότητα και τον ρυθμό άφιξης για τον σταθμό CS_1 .

Η κοινωνική ωφέλεια που επιτυγχάνεται, σε σύγκριση με τη βέλτιστη, παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.11.



Σχήμα 4.11: Σύγκριση της μέσης κοινωνικής ωφέλειας που επιτυγχάνεται για τιμές υπολογισμένες από διαφορετικού πλήθους δείγματα ανάλογα με την χωρητικότητα και τον ρυθμό λ για εκατό τυχαία δείγματα.

Βλέπουμε ότι η κοινωνική ωφέλεια που επιτυγχάνεται με την ταυτόχρονη αύξηση της χωρητικότητας και του αριθμού των οχημάτων είναι εξαιρετική. Πιο συγκεκριμένα, σε αντίθεση με τις περιπτώσεις όπου μεταβάλλεται μόνο η μία από τις δύο μεταβλητές, στην παρούσα

περίπτωση αυξάνεται τόσο η βέλτιστη όσο και η επιτευχθείσα κοινωνική ωφέλεια με την αύξηση των μεταβλητών. Δηλαδή, όχι μόνο καταφέρνουμε να αυξήσουμε το βέλτιστο δυνατό αποτέλεσμα, αλλά αυξάνεται επίσης το ποσοστό της κοινωνικής ωφέλειας που επιτυγχάνεται, χωρίς σημαντικές αλλαγές στις ισορροπημένες τιμές.

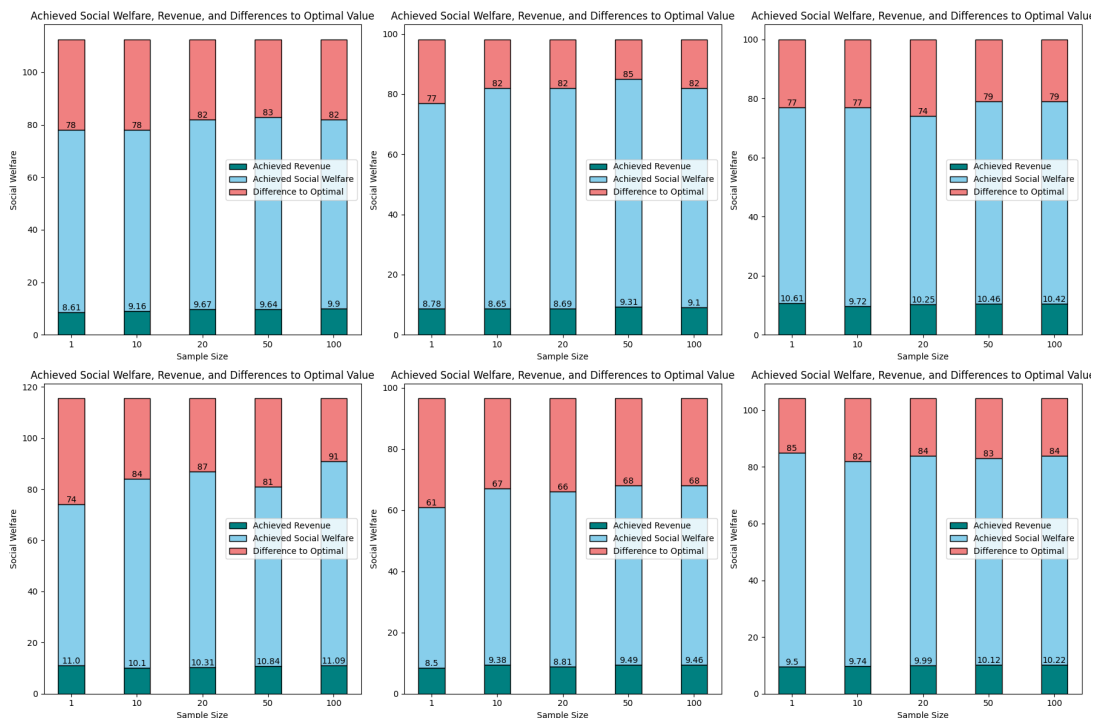
Αυτό δείχνει ότι, αν επιθυμούμε να μεγιστοποιήσουμε την κοινωνική ωφέλεια του δικτύου, αρκεί να αυξήσουμε τη χωρητικότητα των σταθμών, δηλαδή να κατασκευάσουμε περισσότερους φορτιστές, ανάλογα με τον αριθμό των οχημάτων που καταφθάνουν, χωρίς να χρειάζεται να μεταβάλλουμε σημαντικά τις ισορροπημένες τιμές.

4.5 Προσπάθεια Μεγιστοποίησης Εσόδων

Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι με τη χρήση ισορροπημένων τιμών μπορούμε, μέσω ενός απλού μηχανισμού σταθερής τιμής, να εγγυηθούμε ικανοποιητικά αποτελέσματα στη μεγιστοποίηση της κοινωνικής ωφέλειας. Αν και δεν διαθέτουμε θεωρητικά αποτελέσματα σχετικά με τη μεγιστοποίηση των εσόδων του πωλητή, το επόμενο βήμα είναι να διερευνήσουμε πειραματικά πώς οι ισορροπημένες τιμές μπορούν να συμβάλλουν σε αυτό τον τομέα.

4.5.1 Έσοδα με χρήση των ισορροπημένων τιμών

Το πρώτο ζήτημα που πρέπει να εξετάσουμε είναι τα έσοδα που προκύπτουν από έναν μηχανισμό σταθερής τιμής που χρησιμοποιεί ισορροπημένες τιμές, όπως αυτοί προηγουμένως. Καθώς οι ισορροπημένες τιμές πολλαπλασιάζονται με την παράμετρο δ , οι τελικές τιμές των διαστημάτων φόρτισης παραμένουν σχετικά χαμηλές, με αποτέλεσμα και τα έσοδα του πωλητή να είναι επίσης περιορισμένα. Για παράδειγμα, στα τυχαία δείγματα που παρουσιάζονται στο σχήμα 4.4, τα αντίστοιχα έσοδα του πωλητή φαίνονται στο σχήμα 4.12.



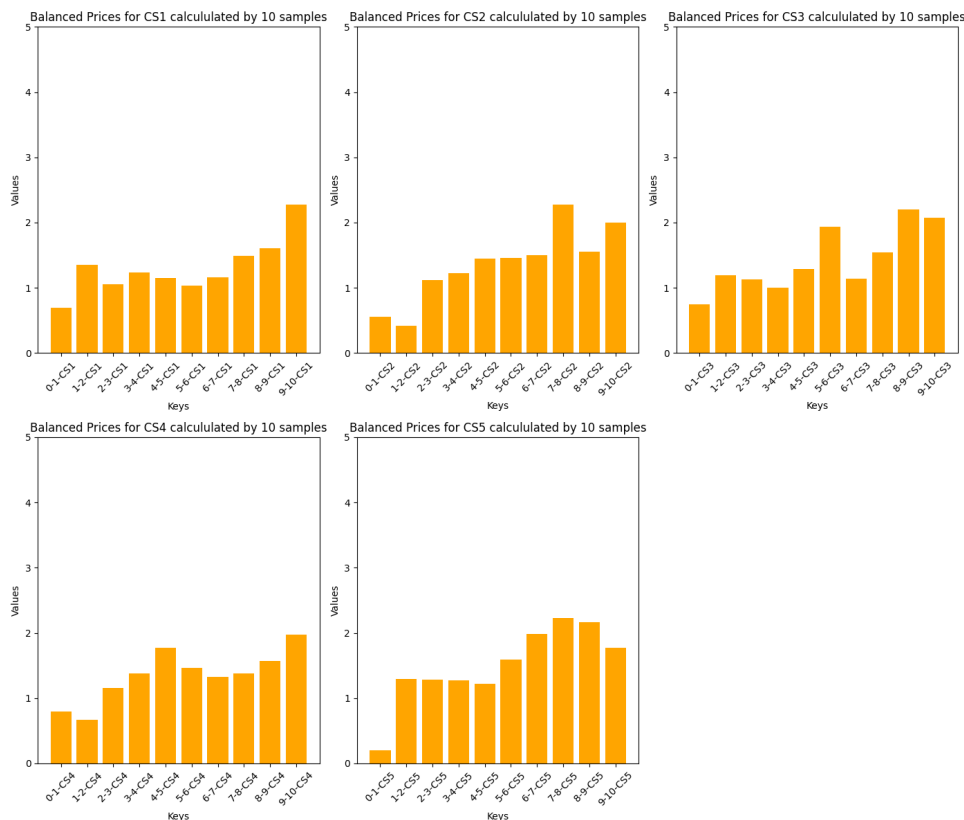
Σχήμα 4.12: Σύγκριση των αντίστοιχων εσόδων του πωλητή που επιτυγχάνεται για τα 6 τυχαία δείγματα του σχήματος 4.4.

Κατ' ουσίαν, οι τελικές τιμές λειτουργούν ως ένα κατώτατο όριο που διασφαλίζει ότι τα οχήματα που τελικά προγραμματίζονται είναι αυτά που έχουν τη μεγαλύτερη ανάγκη, κάτι που αντιπροσωπεύεται από την παράμετρο της αξίας τους. Αν επιθυμούμε να αυξήσουμε τα έσοδα του πωλητή, θα πρέπει να αναζητήσουμε τιμές που να προσεγγίζουν την πραγματική αξία των παικτών που θα έπρεπε ιδανικά να προγραμματιστούν, αντί να λειτουργούμε μόνο με ένα κατώτατο όριο. Με αυτόν τον τρόπο, η κοινωνική ωφέλεια θα παραμείνει ικανοποιητική και τα έσοδα του πωλητή θα αυξηθούν.

4.5.2 Αλλαγή της Παραμέτρου δ

Καθώς οι ισορροπημένες τιμές είναι από κατασκευής τους αρκετά μεγάλες για να καλύψουν μελλοντικές απώλειες και ταυτόχρονα αρκετά μικρές ώστε να είναι προσιτές στους χρήστες, το επόμενο βήμα είναι να εξετάσουμε πώς επηρεάζονται η κοινωνική ωφέλεια και τα έσοδα του πωλητή καθώς η παράμετρος δ πλησιάζει τη μονάδα.

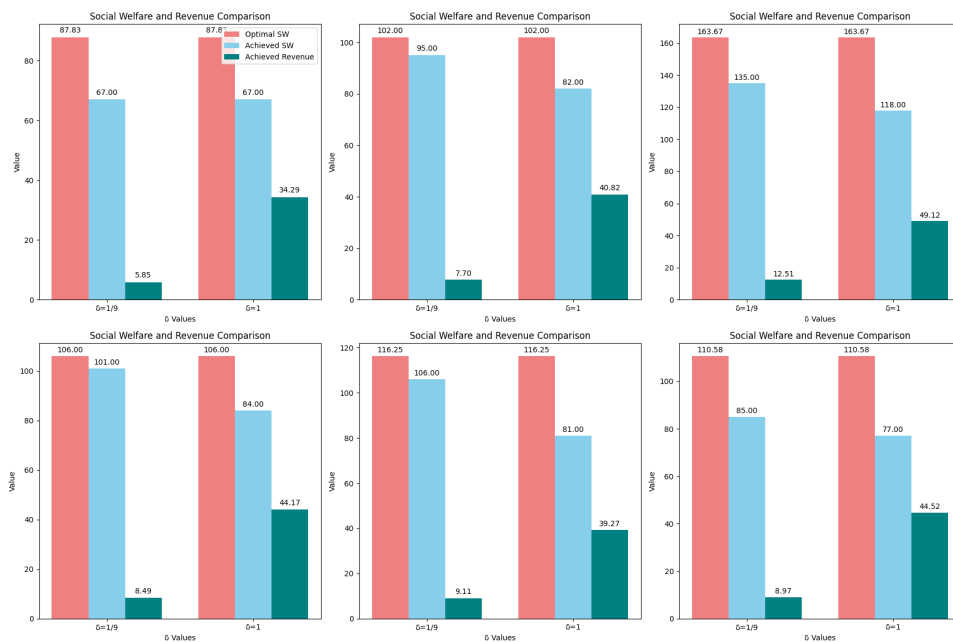
Έστω ένα δίκτυο όπως αυτό του σχήματος 4.1, με $T = 10$ και χωρητικότητα 2 σε κάθε CS . Οι ισορροπημένες τιμές υπολογισμένες από 10 δείγματα για το συγκεκριμένο παράδειγμα φαίνονται στο σχήμα 4.13.



Σχήμα 4.13: Διάγραμμα ισορροπημένων τιμών υπολογισμένων από 10 δείγματα και $\lambda=1$ ανά διάστημα φόρτισης.

Πλέον, η προηγούμενη παρατήρηση ότι τα αρχικά διαστήματα φόρτισης δεν είναι ακριβιά, καθώς επιθυμούνται μόνο από τα οχήματα που είναι παρόντα από την αρχή, είναι ξεκάθαρη.

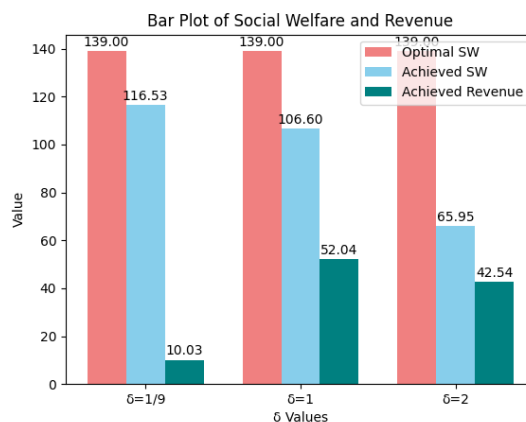
Χρησιμοποιώντας τις ισορροπημένες τιμές ως τιμές των διαστημάτων φόρτισης, τα αποτελέσματα για την κοινωνική ωφέλεια και τα έσοδα του πωλητή εμφανίζονται στο σχήμα 4.14.



Σχήμα 4.14: Διάγραμμα σύγκρισης για κοινωνική ωφέλεια και έσοδα πωλητή ανάλογα με το δ για 6 τυχαία δείγματα.

Από τα παραπάνω, όπως ήταν αναμενόμενο, η χρήση των ισορροπημένων τιμών χωρίς να πολλαπλασιαστούν με κάποιο συντελεστή οδήγησε σε αύξηση των εσόδων του πωλητή, εις βάρος της κοινωνικής ωφέλειας. Ωστόσο, λόγω των ευνοϊκών χαρακτηριστικών των ισορροπημένων τιμών, η κοινωνική ωφέλεια παραμένει σε ικανοποιητικά επίπεδα.

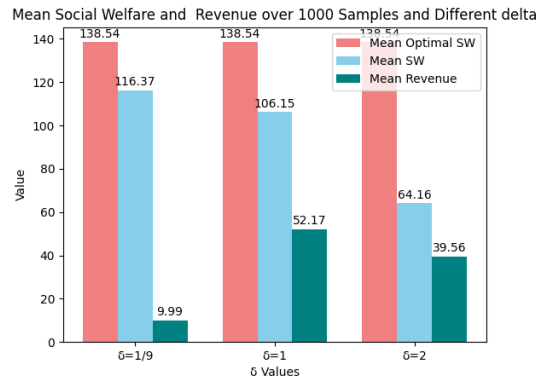
Ήταν προφανές ότι η αύξηση του κόστους των διαστημάτων φόρτισης θα οδηγούσε σε αύξηση των εσόδων του πωλητή. Ωστόσο, αν το κόστος αυτό αυξηθεί υπερβολικά, οι παίχτες δεν θα μπορούν να αποκτήσουν τα διαστήματα που επιθυμούν, με αποτέλεσμα να μειωθεί η κοινωνική ωφέλεια. Για παράδειγμα, για ένα τυχαίο παράδειγμα ελέγχοντας και για $\delta = 2$, παρατηρούμε τη συνολική σύγκριση στο σχήμα 4.15.



Σχήμα 4.15: Διάγραμμα σύγκρισης για κοινωνική ωφέλεια και έσοδα πωλητή ανάλογα με το δ .

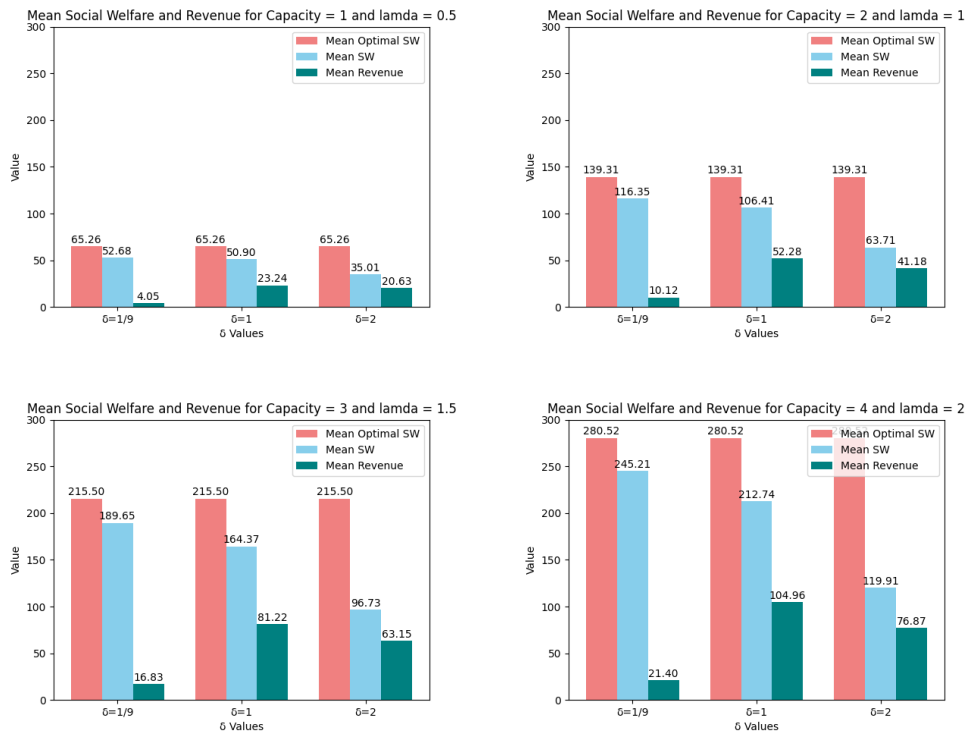
Καθώς έξι τυχαία παραδείγματα δεν είναι αρκετά για να μας πείσουν ότι με τον τρόπο

αυτό τα έσοδα του πωλητή αυξάνονται, διατηρώντας την κοινωνική ωφέλεια σε ικανοποιητικά επίπεδα, πραγματοποιήθηκε προσομοίωση για συνολικά 1000 δείγματα. Οι μέσες τιμές της κοινωνικής ωφέλειας και των εσόδων του πωλητή για τα διαφορετικά δ , οι οποίες απεικονίζονται στο σχήμα 4.16, επιβεβαιώνουν το επιθυμητό αποτέλεσμα.



Σχήμα 4.16: Διάγραμμα σύγκρισης μέσης κοινωνικής ωφέλειας και μέσων εσόδων πωλητή ανάλογα με το δ από 1000 δείγματα.

Καθώς η ταυτόχρονη αύξηση της χωρητικότητας και των οχημάτων, όπως είδαμε, έχει πολύ θετικά αποτελέσματα για τη μεγιστοποίηση της κοινωνικής ωφέλειας, στο Σχήμα 4.17 παρουσιάζεται και η επίδραση στα έσοδα του πωλητή.



Σχήμα 4.17: Διαγράμματα σύγκρισης μέσης κοινωνικής ωφέλειας και μέσων εσόδων πωλητή ανάλογα με το δ για διαφορετικές χωρητικότητες και λ από 1000 δείγματα.

Αντίστοιχα με την κοινωνική ωφέλεια, παρατηρούμε ότι τα έσοδα του πωλητή βελτιώνονται με την ταυτόχρονη αύξηση της χωρητικότητας και του αριθμού των οχημάτων. Είναι

εμφανές ότι, διπλασιάζοντας τη χωρητικότητα και τον ρυθμό άφιξης, για $\delta=1$, διπλασιάζονται και τα έσοδα του πωλητή.

Επομένως, αν επιθυμούμε να μεγιστοποιήσουμε τα έσοδα του πωλητή, όπως και στην περίπτωση της κοινωνικής ωφέλειας, αρκεί να αυξήσουμε τη χωρητικότητα των σταθμών ανάλογα με τον αριθμό των οχημάτων, χωρίς απαραίτητα να αλλάξουμε τις τιμές.

4.6 Το πρόβλημα σε Μεγαλύτερα Δίκτυα και με Προορισμούς Παικτών

Μέχρι στιγμής, στο πρόβλημα που έχουμε εξετάσει, κάθε παίκτης ενδιαφέρεται να φορτίσει το όχημά του για ένα αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα, το οποίο βρίσκεται ανάμεσα στον χρόνο άφιξης και την προθεσμία του (deadline). Δεν τον απασχολεί από ποιον σταθμό θα γίνει η φόρτιση, αλλά μόνο να εξασφαλίσει ότι θα φορτίσει για τον ελάχιστο προκαθορισμένο χρόνο που επιθυμεί.

Επιπλέον, λόγω του στόχου του παίκτη, δεν υπάρχει λόγος για κάποιον να μεταβαίνει από σταθμό σε σταθμό, εκτός αν υπάρχει έλλειψη χωρητικότητας ή αν βρει καλύτερη τιμή. Αυτή η μοντελοποίηση ταιριάζει περισσότερο σε προβλήματα διανομής online πόρων στο Cloud [4],[5], και όχι τόσο σε προβλήματα φόρτισης ηλεκτρικών οχημάτων.

Σε μεγαλύτερα δίκτυα φόρτισης ηλεκτρικών οχημάτων, λόγω του περιορισμού της χωρητικότητας της μπαταρίας, η μετάβαση από σταθμό σε σταθμό είναι αναγκαία αν ο παίκτης έχει κάποιον προορισμό για τον οποίο χρειάζεται συνολικά περισσότερη ενέργεια από αυτήν που του επιτρέπει η μπαταρία του. Επίσης, το χρονικό διάστημα φόρτισης που χρειάζεται ένας παίκτης εξαρτάται άμεσα τόσο από τον προορισμό στον οποίο θέλει να φτάσει όσο και από τον σταθμό στον οποίο βρίσκεται.

Για παράδειγμα, έστω ένα δίκτυο δύο σταθμών, CS_1 και CS_2 . Έστω ακόμα ότι ο προορισμός ενός παίκτη που καταφτάνει απέχει απόσταση που απαιτεί 1 μονάδα ενέργειας από τον CS_1 και 2 μονάδες ενέργειας από τον CS_2 . Σε αυτό το απλό παράδειγμα, αν ο παίκτης ολοκληρώσει τη φόρτισή του στον CS_1 , το χρονικό διάστημα φόρτισης που ζητάει, σύμφωνα με το προηγούμενο πρόβλημα, είναι $l_i = 1$, ενώ αν ολοκληρώσει τη φόρτισή του στον CS_2 , είναι $l_i = 2$. Δηλαδή, το χρονικό διάστημα φόρτισης που χρειάζεται ένας παίκτης διαφέρει ανάλογα με τον σταθμό στον οποίο βρίσκεται.

4.6.1 Συμβολισμοί για το Νέο Μοντέλο Προγραμματισμού Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, έχουμε στη διάθεσή μας ένα δίκτυο από σταθμούς φόρτισης, $G = \langle V, E \rangle$, και κάθε σταθμός φόρτισης $v \in V$ έχει έναν συγκεκριμένο αριθμό θέσεων φόρτισης, που συμβολίζεται με Cap_v . Οι παίκτες καταφτάνουν με online τρόπο και θέλουν να φορτίσουν για να φτάσουν στον προορισμό τους μέχρι μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Τα αντικείμενα $m \in M$ που είναι προς πώληση εξακολουθούν να είναι τα μοναδιαία διαστήματα φόρτισης της μορφής $(t, t+1, CS_v)$, από τα οποία προκύπτουν και οι προγραμματισμοί φόρτισης.

Η διαφορά από την προηγούμενη περίπτωση είναι ότι πλέον ένας παίκτης i χαρακτηρίζεται από ένα διάνυσμα $r_i = (\alpha_i, CS_v, \sigma_i, d_i, l_i^*, b_i, CS_v^*)$. Η τελευταία προσθήκη της μεταβλητής CS_v^* δηλώνει τον κοντινότερο σταθμό από τον προορισμό του παίκτη, ενώ η μεταβλητή l_i^* δηλώνει την ελάχιστη ενέργεια που χρειάζεται ο παίκτης i για να καλύψει τις ανάγκες του, δεδομένου ότι βρίσκεται στον κόμβο CS_v^* . Οι υπόλοιπες μεταβλητές $\alpha_i, CS_v, \sigma_i, d_i, b_i$ παραμένουν όπως πριν.

Με αυτόν τον τρόπο, η μεταφορά από σταθμό σε σταθμό δεν γίνεται πλέον μόνο λόγω έλλειψης χωρητικότητας, αλλά και για να καλυφθούν αποστάσεις μεγαλύτερες από αυτές που επιτρέπει η μπαταρία του οχήματος. Πιο συγκεκριμένα, στην προηγούμενη περίπτωση υπήρχε ένα μέγιστο ποσό ενέργειας που μπορούσε να ζητήσει κάποιος. Αυτό ήταν η διαφορά μεταξύ της μέγιστης ενέργειας που μπορούσε να έχει το όχημα και του επιπέδου μπαταρίας όταν ο παίκτης έφτανε στο δίκτυο. Με αυτόν τον τρόπο, η μεγαλύτερη απόσταση που μπορούσε να καλύψει κάποιος ήταν αυτή που του επέτρεπε η χωρητικότητα της μπαταρίας του οχήματός του. Στη νέα περίπτωση, η χωρητικότητα της μπαταρίας είναι το όριο για να ταξιδέψει κάποιος από σταθμό σε σταθμό, και όχι συνολικά. Δηλαδή, πλέον ένας παίκτης μπορεί να ζητήσει και να λάβει συνολικά περισσότερη ενέργεια από το όριο που επιτρέπει η μπαταρία του οχήματός του, κάνοντας τις κατάλληλες μεταφορές και φορτίσεις μέσα στο δίκτυο.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι καταφτάνει ένας παίκτης με διάνυσμα $r_i = (0, CS_1, 0, 13, 1, b_i, CS_3)$ σε ένα δίκτυο με τρεις σταθμούς. Η χωρητικότητα της μπαταρίας του οχήματος είναι 5 μονάδες ενέργειας και τα κόστη μετακίνησης μεταξύ των σταθμών είναι τα εξής:

- $CS_1 \longleftrightarrow CS_2 : (3, 3)$
- $CS_2 \longleftrightarrow CS_3 : (3, 3)$
- $CS_1 \longleftrightarrow CS_3 : (6, 6)$

Ο παίκτης θέλει να πάει από τον CS_1 στον CS_3 και να έχει επιπλέον 1 μονάδα ενέργειας, δηλαδή συνολικά χρειάζεται 7 μονάδες ενέργειας. Καθώς η μπαταρία του δεν του επιτρέπει να έχει ταυτόχρονα περισσότερες από 5, πρέπει αναγκαστικά να χρησιμοποιήσει τον ενδιάμεσο σταθμό στον προγραμματισμό φόρτισής του. Ένας προγραμματισμός φόρτισης που θα κάλυπτε τις ανάγκες του παίκτη θα ήταν ο εξής:

$$(0, 1, CS_1)(1, 2, CS_1)(2, 3, CS_1)(6, 7, CS_2)(7, 8, CS_2)(8, 9, CS_2)(9, 10, CS_2)$$

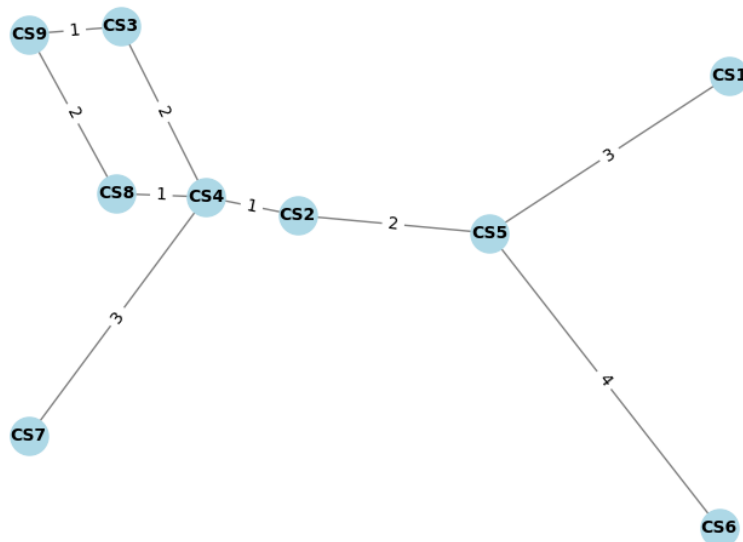
Στον συγκεκριμένο προγραμματισμό φόρτισης, ο παίκτης φορτίζει στον CS_1 μέχρι την χρονική στιγμή 3 και λαμβάνει συνολικά 3 μονάδες ενέργειας, αρκετές για να φτάσει στον CS_2 . Στη συνέχεια, ταξιδεύει για 3 χρονικές μονάδες και καταφτάνει στον CS_2 την χρονική στιγμή 6. Πραγματοποιεί φόρτιση μέχρι και την χρονική στιγμή 10, λαμβάνοντας 4 μονάδες ενέργειας, αρκετές για να φτάσει στον προορισμό του (3 μονάδες μέχρι τον CS_3 και 1 επιπλέον).

Όσον αφορά τους περιορισμούς που υπάρχουν για την εύρεση των δυνατών αποτελεσμάτων X_i για τους παίκτες που καταφτάνουν, εξακολουθούν να είναι όπως πριν, με τη μικρή διαφορά στο πότε ένας προγραμματισμός φόρτισης είναι επιθυμητός. Πιο συγκεκριμένα, εκτός από το να είναι μέσα στο χρονικό διάστημα $[a_i, d_i]$, πρέπει ο προγραμματισμός φόρτισης να προσφέρει αρκετή ενέργεια έτσι ώστε ο παίκτης να μπορεί να φτάσει στον σταθμό CS_v^* και να έχει φορτίσει επιπλέον για l_i^* χρονικά διαστήματα.

Λόγω της μικρής αυτής διαφοράς, ο τρόπος εύρεσης ισορροπημένων τιμών εξακολουθεί να είναι ο ίδιος με πριν, αρκεί να υπολογιστούν οι νέοι επιθυμητοί προγραμματισμοί φόρτισης. Τα αποτελέσματα, όπως φαίνονται παρακάτω, είναι παρόμοια με αυτά της αρχικής μοντελοποίησης.

4.7 Πειραματικά Αποτελέσματα για το Νέο Μοντέλο

Για να αποφύγουμε την αυθαίρετη δημιουργία ενός μεγαλύτερου δικτύου, χρησιμοποιούμε δεδομένα από ένα αποθετήριο δικτύων για έρευνα μεταφορών στο GitHub (Transportation Networks)[16]. Επιλέγοντας τυχαία το δίκτυο του Σιου Φολς (Sioux Falls) και παίρνοντας ένα τμήμα του, καταλήγουμε σε ένα δίκτυο με 9 σταθμούς, το οποίο φαίνεται στο σχήμα 4.18



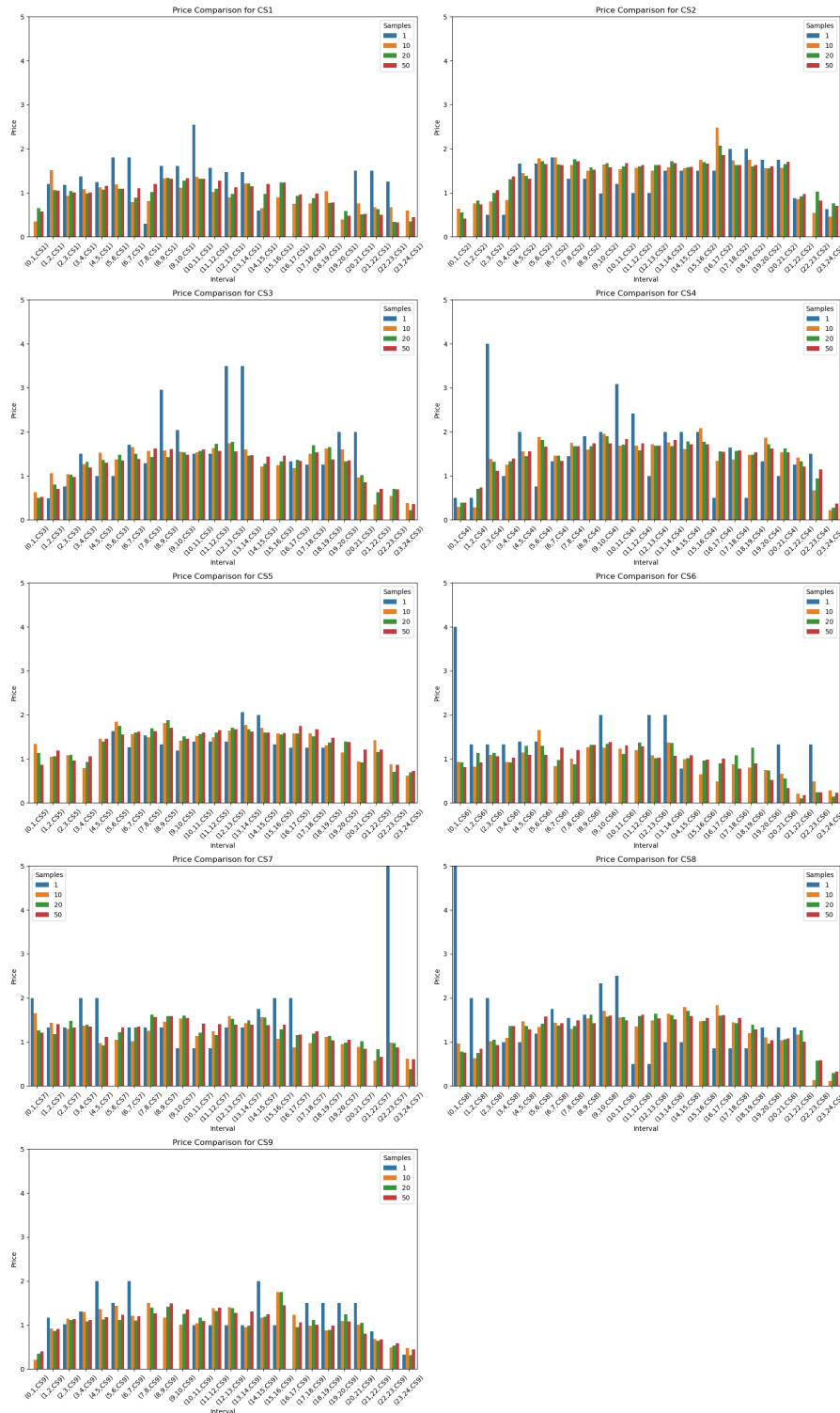
Σχήμα 4.18: Δίκτυο εννέα σταθμών φόρτισης .

Παρατηρούμε ότι για τη μεταφορά μεταξύ αρκετών από τους σταθμούς που απεικονίζονται, η συνολική ενέργεια ξεπερνά αρκετά τη χωρητικότητα της μπαταρίας, η οποία θα θεωρηθεί, για λόγους ευκολίας, ίση με πέντε για όλα τα οχήματα. Με αυτόν τον τρόπο, μπορούμε να βεβαιωθούμε ότι ένα μεγάλο μέρος των παικτών, για να φτάσουν στον προορισμό τους, χρειάζεται να προγραμματιστεί σε περισσότερους από έναν σταθμούς.

Θέτοντας τον χρόνο λειτουργίας του σταθμού $T = 24$, έτσι ώστε να υπάρχει αρκετός χρόνος για μεγάλους προγραμματισμούς, κατασκευάστηκε εκ νέου μια κατανομή για την παραγωγή των νέων διανυσμάτων μορφής $(\alpha_i, CS_v, \sigma_i, d_i, l_i^*, b_i, CS_v^*)$. Για τις προσομοιώσεις, η εμφάνιση των παικτών εξακολούθησε να ακολουθεί την κατανομή Poisson, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, ενώ το l_i^* παίρνει τυχαία ως τιμή το 1 ή 2.

4.7.1 Σύγκριση Ισορροπημένων Τιμών και Κοινωνικής Ωφέλειας στο Νέο Δίκτυο

Οι ισορροπημένες τιμές που υπολογίστηκαν για το νέο δίκτυο του σχήματος 4.18, με χωρητικότητα 1 για κάθε σταθμό, από δείγματα μεγέθους 1, 10, 20 και 50, παρουσιάζονται στο σχήμα 4.19.

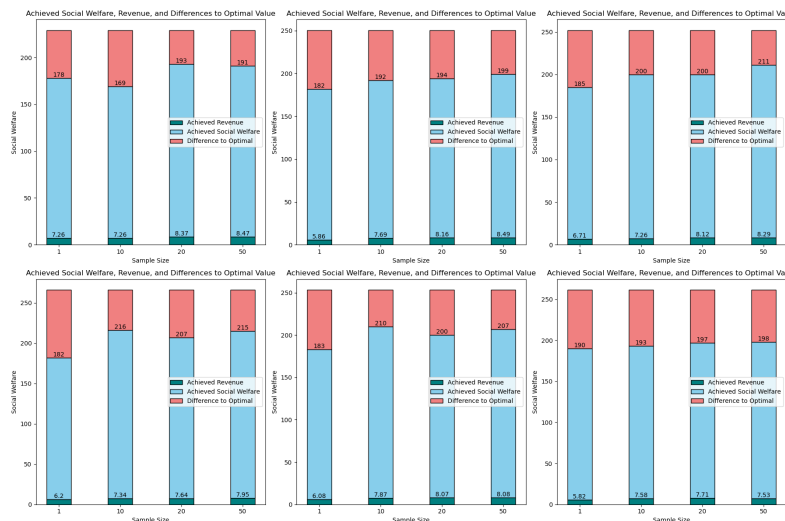


Σχήμα 4.19: Σύγκριση ισορροπημένων τιμών ανάλογα με το πλήθος των δειγμάτων στο νέο δίκτυο.

Για άλλη μια φορά διαπιστώνεται η σύγκλιση των υπολογισμένων τιμών καθώς αυξάνεται το πλήθος των δειγμάτων από τα οποία υπολογίστηκαν. Οι μόνες τιμές που αποκλίνουν σημαντικά από τις υπόλοιπες είναι αυτές που υπολογίστηκαν από ένα δείγμα.

Όσον αφορά την κοινωνική ωφέλεια, απαιτείται ο υπολογισμός του νέου δ για την εύρεση των τελικών τιμών των διαστημάτων φόρτισης. Λόγω της δομής του δικτύου, το μέγιστο ποσό ενέργειας που χρειάζεται ένας χρήστης για να μεταβεί από έναν σταθμό σε έναν άλλο είναι 10 μονάδες ενέργειας (π.χ. από τον CS_4 στον CS_7). Επίσης, το μέγιστο επιπλέον ποσό ενέργειας που μπορεί να ζητήσει ένας χρήστης είναι 2 μονάδες ενέργειας. Επομένως, ο μέγιστος αριθμός διαστημάτων που μπορεί να περιλαμβάνει ένας προγραμματισμός φόρτισης είναι 12, γεγονός που μας κατατάσσει στην κλάση MPH-12. Στην περίπτωση αυτή, οι τιμές που έχουν υπολογιστεί είναι (1, 1, 12-1)-ισορροπημένες. Έτσι, το δ που προκύπτει από το θεώρημα 3.2.2 είναι ίσο με $\delta = \frac{1}{1+\max 2*11, \frac{1}{1}} = \frac{1}{23}$.

Πολλαπλασιάζοντας τις ισορροπημένες τιμές με το δ αυτό, αφήνουμε τους παίχτες ελεύθερους να επιλέξουν όποιον προγραμματισμό φόρτισης επιθυμούν. Τα αποτελέσματα για έξι τυχαία δείγματα προσομοιώσεων οχημάτων που καταφτάνουν φαίνονται στο σχήμα 4.20, και συμφωνούν απόλυτα με αυτά της απλής περίπτωσης. Τα έσοδα του πωλητή, τα οποία επίσης συμπεριλάβαμε, για άλλη μια φορά είναι ελάχιστα, κάτι αναμενόμενο λόγω του μικρού δ .



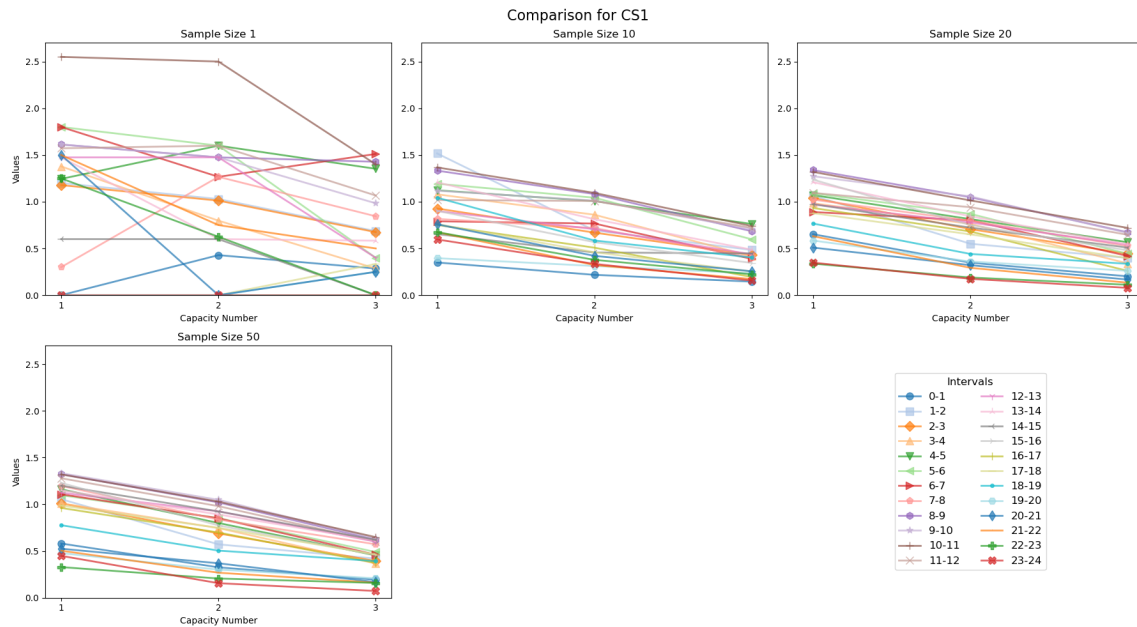
Σχήμα 4.20: Σύγκριση της κοινωνικής ωφέλειας και των εσόδων που επιτυγχάνεται σε σχέση με την βέλτιστη κοινωνική ωφέλεια για έξι τυχαία δείγματα στο νέο δίκτυο.

4.7.2 Μεταβολή της Χωρητικότητας στο Νέο Δίκτυο

Όσον αφορά την επίδραση που έχει η χωρητικότητα των σταθμών στις ισορροπημένες τιμές στο μεγαλύτερο δίκτυο, αντίστοιχα με τα αποτελέσματα στο 4.4.1, διατηρώντας τους παίχτες σταθερούς και μεταβάλλοντας την χωρητικότητα, παρατηρούμε για άλλη μία φορά τη μείωση των τιμών.

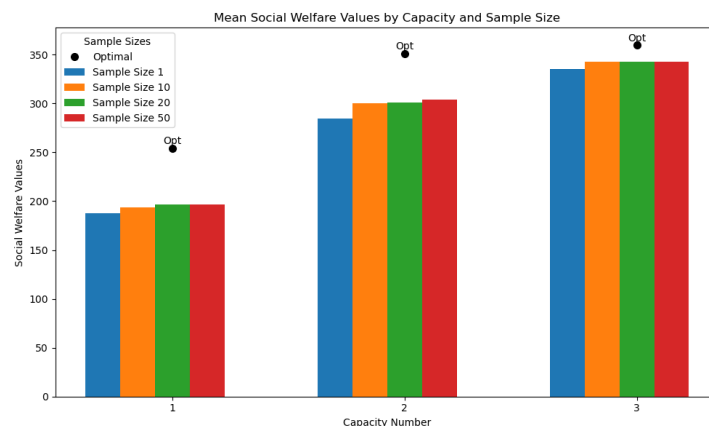
Πιο συγκεκριμένα, στο Σχήμα 4.21 βλέπουμε ότι καθώς η χωρητικότητα αυξάνεται σταδιακά από 1 σε 3, οι ισορροπημένες τιμές μειώνονται για τα 24 χρονικά διαστήματα στον CS_1 . Η μόνη εξαίρεση εξακολουθεί να είναι η τιμή που υπολογίστηκε από ένα δείγμα.

Αξίζει να παρατηρηθεί ότι πλέον δεν είναι μόνο τα αρχικά διαστήματα φόρτισης που έχουν μικρές τιμές, αλλά και τα τελευταία (π.χ. $(22, 23, CS_1)$, $(23, 24, CS_1)$). Ο λόγος που συμβαίνει κάτι τέτοιο στο μεγαλύτερο δίκτυο είναι οι προορισμοί των παικτών. Για να επιθυμεί ένας παίκτης i να προγραμματιστεί στα τελευταία χρονικά διαστήματα στον σταθμό CS_1 , θα πρέπει η αντίστοιχη μεταβλητή $CS_{i'}^*$ να είναι το CS_1 . Διαφορετικά, ο παίκτης αυτός δεν θα προλάβει να φτάσει στον προορισμό του.



Σχήμα 4.21: Σύγκριση ισορροπημένων τιμών υπολογισμένων από διαφορετικού πλήθους δείγματα ανάλογα με την χωρητικότητα για τον σταθμό CS_1 στο νέο δίκτυο.

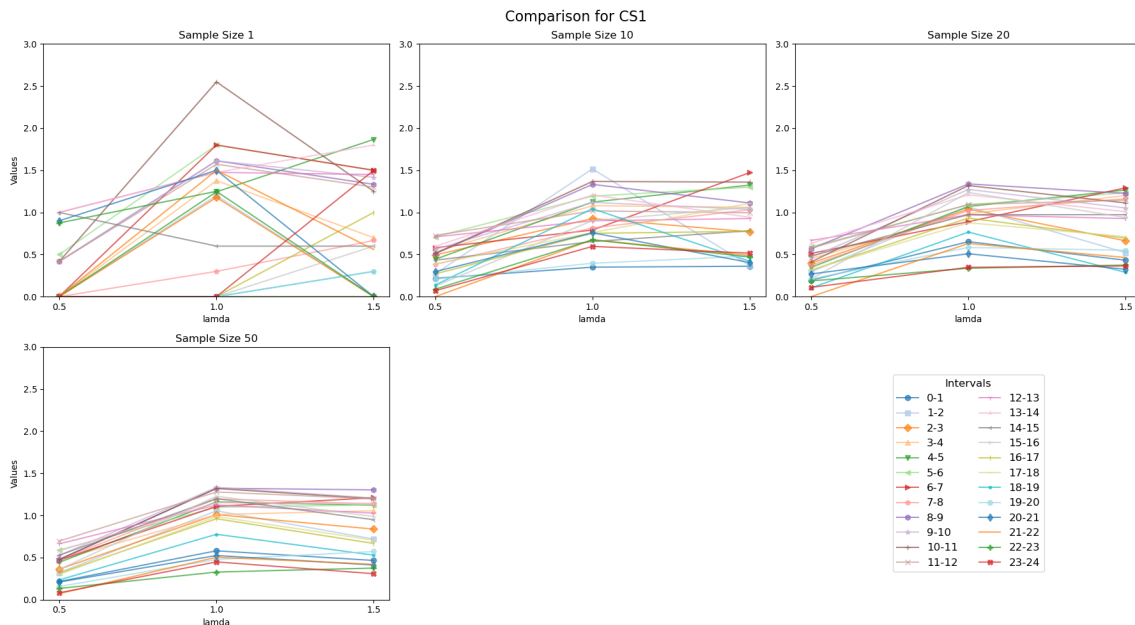
Υπολογίζοντας την κοινωνική ωφέλεια με τη βοήθεια των παραπάνω ισορροπημένων τιμών για 50 διαφορετικά τυχαία δείγματα και χρησιμοποιώντας τις μέσες τιμές των αποτελεσμάτων, παρατηρούμε ότι και στο μεγάλο δίκτυο, κατά μέσο όρο, η αύξηση της χωρητικότητας συνεπάγεται την αύξηση της μέγιστης κοινωνικής ωφέλειας, καθώς και της επιτευχθείσας (Σχήμα 4.22).



Σχήμα 4.22: Σύγκριση της μέσης κοινωνικής ωφέλειας που επιτυγχάνεται για τιμές υπολογισμένες από διαφορετικού πλήθους δείγματα ανάλογα με την χωρητικότητα για πενήντα τυχαία δείγματα στο νέο δίκτυο.

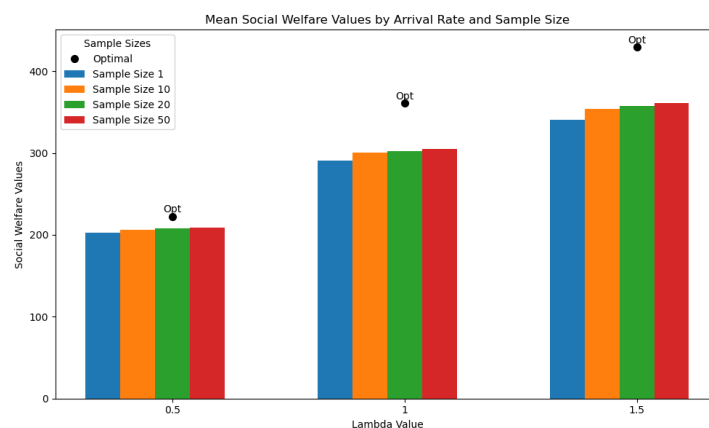
4.7.3 Μεταβολή του Πλήθους των Οχημάτων στο Νέο Δίκτυο

Η αύξηση ή η μείωση του ρυθμού με τον οποίο καταφτάνουν τα αυτοκίνητα στο δίκτυο, όπως είδαμε και προηγουμένως, επηρεάζει άμεσα τις ισορροπημένες τιμές. Στην περίπτωση του νέου μεγαλύτερου δικτύου παρατηρούνται αντίστοιχα αποτελέσματα. Σταθεροποιώντας την χωρητικότητα των σταθμών σε δύο, βλέπουμε στο Σχήμα 4.23 ότι με την αύξηση του ρυθμού εμφάνισης οχημάτων, οι ισορροπημένες τιμές μεγαλώνουν.



Σχήμα 4.23: Σύγκριση ισορροπημένων τιμών υπολογισμένων από διαφορετικού πλήθους δείγματα ανάλογα με τον ρυθμό άφιξης παικτών για τον σταθμό CS_1 στο νέο δίκτυο.

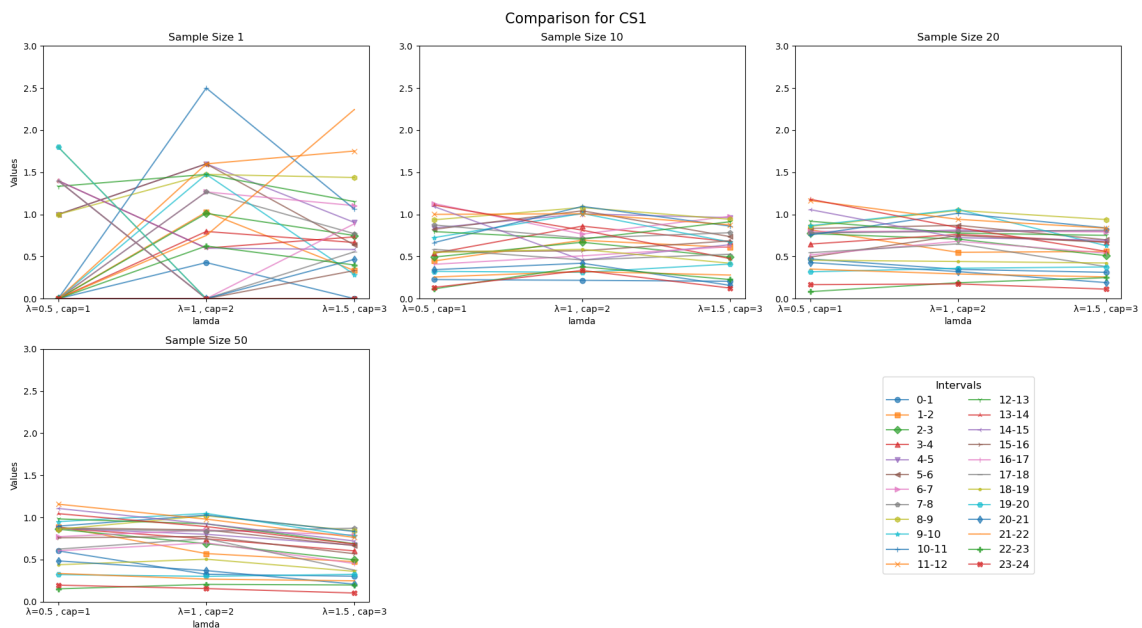
Όπως και στην απλή περίπτωση, η μέση κοινωνική ωφέλεια και το ποσοστό της που επιτυγχάνουμε από 50 τυχαία δείγματα παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.24.



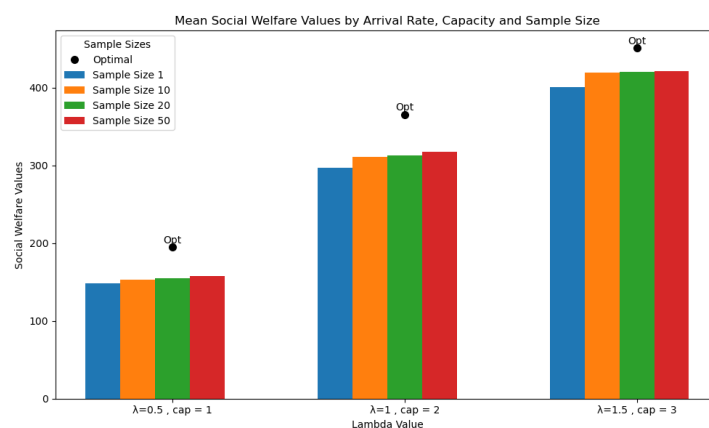
Σχήμα 4.24: Σύγκριση της μέσης κοινωνικής ωφέλειας που επιτυγχάνεται για τιμές υπολογισμένες από διαφορετικού πλήθους δείγματα ανάλογα με την χωρητικότητα για εκατό τυχαία δείγματα με κατάλληλο ρυθμό λ στο νέο δίκτυο.

4.7.4 Μεταβολή της Χωρητικότητας και του Πλήθους των Οχημάτων στο Νέο Δίκτυο

Συνεχίζοντας, στην περίπτωση της ταυτόχρονης αύξησης των δύο σημαντικών μεταβλητών, όπως και στην απλή περίπτωση, οι ισορροπημένες τιμές παραμένουν σχετικά σταθερές (Σχήμα 4.25), ενώ τόσο η βέλτιστη όσο και η επιτευχθείσα κοινωνική ωφέλεια είναι σημαντικά καλύτερες (Σχήμα 4.26) σε σχέση με τις περιπτώσεις όπου μεταβάλλεται μόνο μία από τις δύο μεταβλητές.



Σχήμα 4.25: Σύγκριση ισορροπημένων τιμών υπολογισμένων από διαφορετικού πλήθους δείγματα ανάλογα με την χωρητικότητα και τον ρυθμό άφιξης για τον σταθμό CS_1 στο νέο δίκτυο.



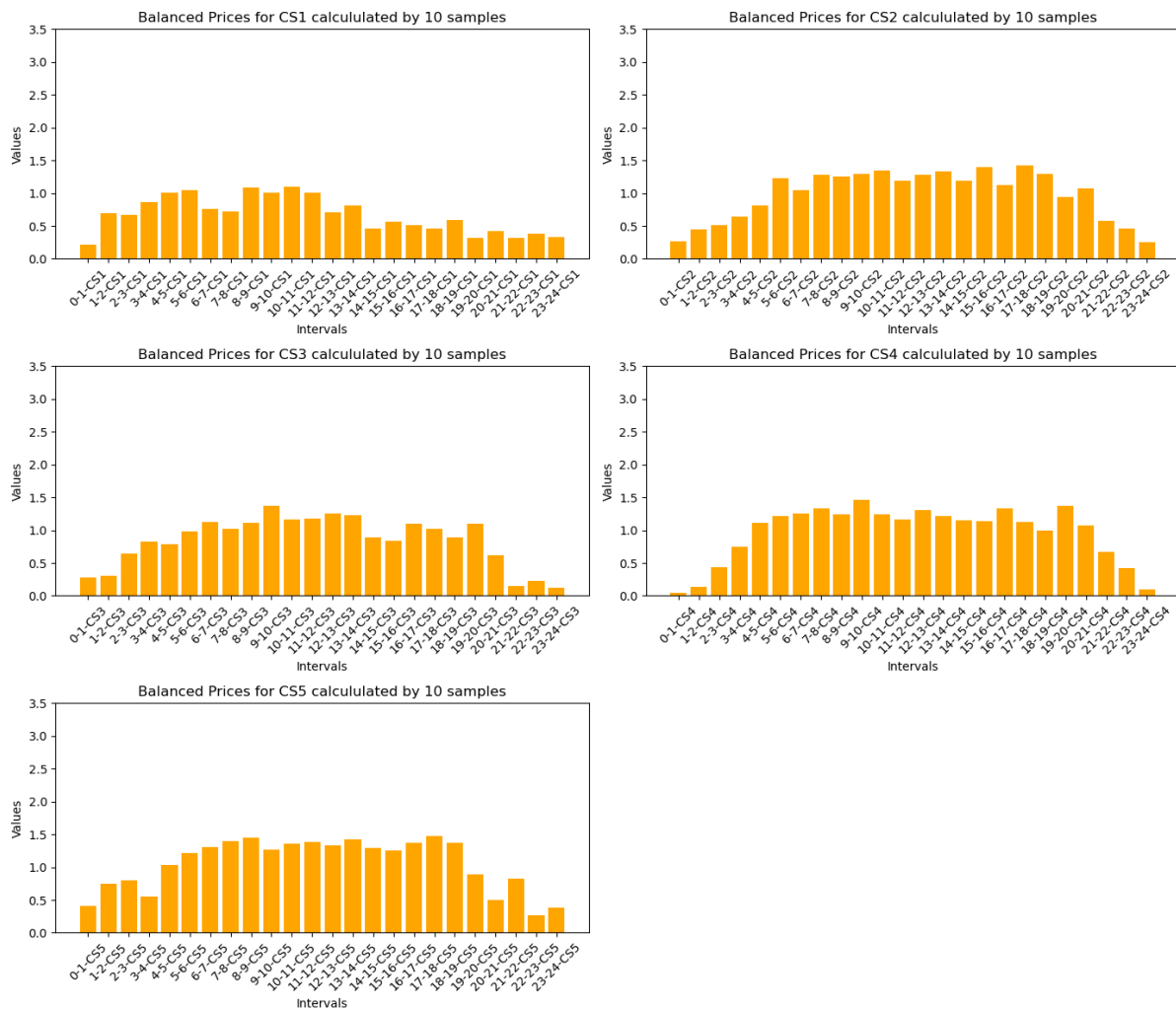
Σχήμα 4.26: Σύγκριση της μέσης κοινωνικής ωφέλειας που επιτυγχάνεται για τιμές υπολογισμένες από διαφορετικού πλήθους δείγματα ανάλογα με την χωρητικότητα και τον ρυθμό λ για πενήντα τυχαία δείγματα στο νέο δίκτυο.

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι η συμπεριφορά τόσο των ισορροπημένων τιμών όσο και της κοινωνικής ωφέλειας δεν επηρεάζεται από το μέγεθος του δικτύου και τους προορισμούς των παικτών, όπως επιθυμούμε.

4.7.5 Έσοδα του Πωλητή στο Νέο Δίκτυο

Όπως αναφέρθηκε και πριν, τα έσοδα του πωλητή με τη χρήση ισορροπημένων τιμών πολλαπλασιασμένων με το δ είναι ελάχιστα στην συγκεκριμένη περίπτωση, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4.20. Αυτό συμβαίνει διότι το δ είναι υπερβολικά μικρό. Τα ευρήματα της ενότητας 4.5 σχετικά με την αύξηση των εσόδων του πωλητή, χωρίς να επηρεαστεί σημαντικά η κοινωνική ωφέλεια, μας ωθούν στην επιλογή των ισορροπημένων τιμών αυτούσιων ως τιμές των διαστημάτων φόρτισης.

Οι ισορροπημένες τιμές υπολογισμένες από 10 τυχαία δείγματα στην περίπτωση που η χωρητικότητα είναι δύο σε όλους τους σταθμούς και το $\lambda=1$, παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.27.

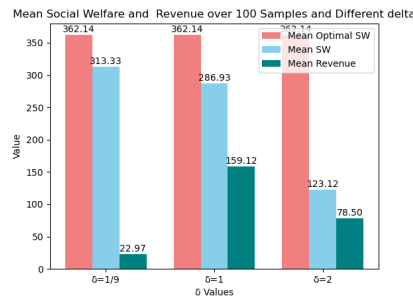


Σχήμα 4.27: Διάγραμμα ισορροπημένων τιμών υπολογισμένων από 10 δείγματα και $\lambda=1$ ανά διάστημα φόρτισης στο νέο δίκτυο.

Για άλλη μία φορά, είναι εύκολα εμφανής η προηγούμενη παρατήρηση ότι πλέον και τα τελικά διαστήματα φόρτισης έχουν χαμηλές ισορροπημένες τιμές. Αυτό συμβαίνει διότι, λόγω των προορισμών των παικτών, τα τελικά διαστήματα σε έναν σταθμό επιθυμούνται μόνο από άτομα που έχουν αυτόν τον σταθμό ως προορισμό.

Υπολογίζοντας την κοινωνική ωφέλεια και τα έσοδα του πωλητή για $\delta = \frac{1}{23}$, $\delta = 1$, $\delta = 2$,

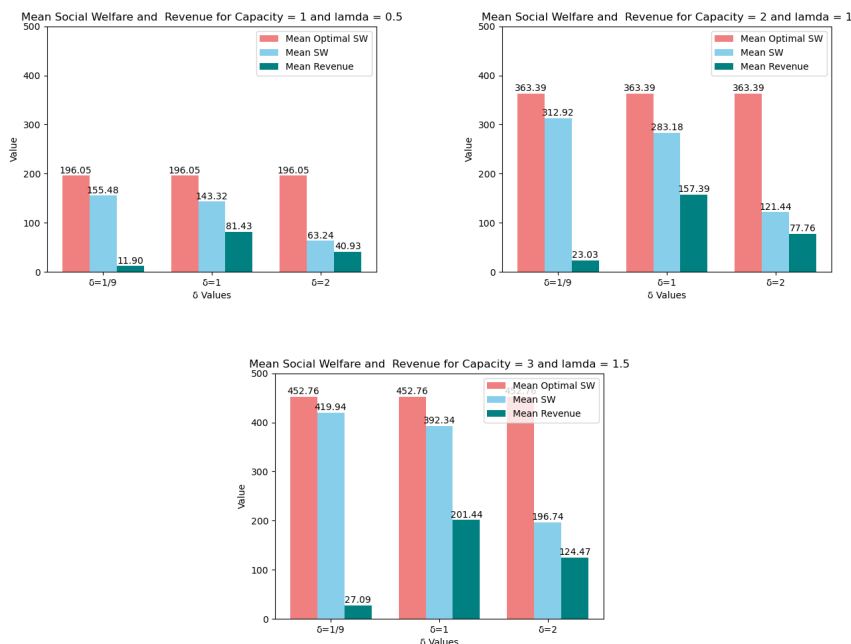
και υπολογίζοντας τη μέση τιμή αυτών, τα αποτελέσματα, τα οποία φαίνονται στο Σχήμα 4.28, είναι εξίσου ενθαρρυντικά.



Σχήμα 4.28: Διάγραμμα σύγκρισης μέσης κοινωνικής ωφέλειας και μέσων εσόδων πωλητή ανάλογα με το δ για 100 δείγματα.

Κατά αντιστοιχία με την απλή περίπτωση, χρησιμοποιώντας τις ισορροπημένες τιμές ως τιμές των διαστημάτων φόρτισης ($\delta=1$), επιτυγχάνουμε πολύ καλύτερα έσοδα για τον πωλητή χωρίς να μειώσουμε σε μεγάλο βαθμό την κοινωνική ωφέλεια. Με τη χρήση μεγαλύτερων τιμών ($\delta=2$), εμποδίζουμε παίχτες από το να προγραμματιστούν, ενώ έχουμε τη δυνατότητα να τους εξυπηρετήσουμε. Με αυτόν τον τρόπο, η κοινωνική ωφέλεια μειώνεται σημαντικά και τα έσοδα, αν και καλύτερα από την αρχική περίπτωση, είναι λιγότερα σε σύγκριση με όταν το $\delta=1$.

Τέλος, όπως ήταν αναμενόμενο, και σε αυτή την περίπτωση, με την ταυτόχρονη αύξηση της χωρητικότητας και του πλήθους των οχημάτων, τα έσοδα του πωλητή αυξάνονται σημαντικά (Σχήμα 4.29), επιβεβαιώνοντας για άλλη μια φορά ότι το μέγεθος του δικτύου και οι προορισμοί των παικτών δεν επηρεάζουν τα ευρήματα της απλής περίπτωσης.



Σχήμα 4.29: Διαγράμματα σύγκρισης μέσης κοινωνικής ωφέλειας και μέσων εσόδων πωλητή ανάλογα με το δ για διαφορετικές χωρητικότητες και λ από 100 δείγματα στο νέο δίκτυο.

Κεφάλαιο 5

Επίλογος

5.1 Σύνοψη και Συμπεράσματα

Το ζήτημα της δυναμικής διανομής πόρων που λήγουν με την πάροδο του χρόνου, όπως αναφέρθηκε, συναντάται σε πολλούς τομείς. Εστιάζοντας στο πρόβλημα αποδοχής αιτημάτων φόρτισης ηλεκτρικών οχημάτων σε δίκτυα φόρτισης, η παρούσα διπλωματική εργασία εξετάζει πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν φιλαλήθη μηχανισμό με σκοπό τη μεγιστοποίηση τόσο της κοινωνικής ωφέλειας όσο και των εσόδων του πωλητή.

Καθώς η γενίκευση των κλασικών τεχνικών σε ένα δυναμικό περιβάλλον με περισσότερες από μία μεταβλητές, που ενδέχεται να δηλωθούν εσχεμμένα ψευδώς από στρατηγικούς παίχτες, δεν επέφερε καλά θεωρητικά αποτελέσματα, στραφήκαμε στην κατεύθυνση των ανισοτήτων του προφήτη. Αρχικά κατανοήσαμε, πώς αυτές οι ανισότητες μπορούν να μας βοηθήσουν στην επίλυση προβλημάτων δυναμικής φύσης, δημιουργώντας μηχανισμούς με καλά αποτελέσματα. Στη συνέχεια, εξετάσαμε πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε από την αρχή ανισότητες για συνδυαστικές δημοπρασίες, χρησιμοποιώντας ισορροπημένες τιμές, και παρατηρήσαμε τα θετικά αποτελέσματα που επιτυγχάνονται στο πρόβλημα μεγιστοποίησης της κοινωνικής ωφέλειας.

Για την υποστήριξη του θεωρητικού μέρους, κατασκευάστηκε μια προσομοίωση άφιξης οχημάτων σε δίκτυα φόρτισης. Με τη χρήση του θεωρητικού πλαισίου, υπολογίστηκαν οι ισορροπημένες τιμές, και διαπιστώσαμε ότι μπορούμε να εξασφαλίσουμε ένα αρκετά μεγάλο μέρος της κοινωνικής ωφέλειας. Εξετάσαμε την επίδραση που έχουν ορισμένες σημαντικές παράμετροι του δικτύου, όπως η χωρητικότητα των σταθμών φόρτισης και ο αριθμός των οχημάτων που καταφτάνουν, στις ισορροπημένες τιμές, και παρατηρήσαμε για άλλη μια φορά την ισχύ της θεωρίας.

Διαπιστώσαμε ότι ο παράγοντας της χωρητικότητας είναι ιδιαίτερα σημαντικός. Έχοντας στη διάθεσή μας περισσότερα από ένα αντίτυπα από κάθε διάστημα φόρτισης, μπορούμε να επιτύχουμε καλύτερα αποτελέσματα. Με άλλα λόγια, οι λανθασμένες επιλογές του μηχανισμού δεν έχουν τόσο σοβαρές επιπτώσεις.

Λόγω των καλών ιδιοτήτων των ισορροπημένων τιμών, προχωρήσαμε και σε μια πειραματική προσπάθεια μεγιστοποίησης των εσόδων του πωλητή. Παρατηρήσαμε ότι, με τη χρήση των ισορροπημένων τιμών αυτούσιες ως τιμές πώλησης διαστημάτων, μπορούμε να αυξήσουμε σημαντικά τα έσοδα του πωλητή, διατηρώντας την κοινωνική ωφέλεια σε αποδεκτά επίπεδα.

Ενδιαφέρουσα ήταν η περίπτωση της ταυτόχρονης αύξησης των δύο παραμέτρων, της χωρητικότητας και του πλήθους των οχημάτων, όπου, χωρίς μεγάλες αλλαγές στις ισορροπημένες τιμές, επιτυγχάνονται εξαιρετικά αποτελέσματα τόσο στη μεγιστοποίηση της κοινωνικής ωφέλειας όσο και των εσόδων του πωλητή.

Τέλος, καθώς η αρχική μοντελοποίηση του προβλήματος δεν ανταποκρινόταν πλήρως σε πραγματικές συνθήκες, κατασκευάσαμε ένα πιο ρεαλιστικό μοντέλο, λαμβάνοντας υπόψη τους προορισμούς των παικτών σε μεγαλύτερα δίκτυα και με μεγαλύτερο χρόνο λειτουργίας. Τα αποτελέσματα και σε αυτή την περίπτωση ήταν αντίστοιχα με αυτά της απλούστερης περίπτωσης, αποδεικνύοντας τη γενική ισχύ των ευρημάτων.

5.2 Μελλοντικές Επεκτάσεις

Κλείνοντας την παρούσα εργασία, παρουσιάζουμε μερικές πιθανές επεκτάσεις για μελλοντική έρευνα.

- Αρχικά, θα μπορούσε κάποιος, με τη χρήση πραγματικών δεδομένων και κατάλληλης μοντελοποίησης, να εξετάσει την ισχύ της θεωρίας στον πραγματικό κόσμο.
- Μια άλλη κατεύθυνση είναι, με τη χρήση κατάλληλων τεχνικών, να προσεγγιστούν οι πραγματικές κατανομές οχημάτων και, με βάση αυτές, να υπολογιστούν καλύτερες ισορροπημένες τιμές.
- Θα μπορούσε κάποιος να εφαρμόσει τις παραπάνω ιδέες σε κάποιο αντίστοιχο πρόβλημα, όπως η online κατανομή πόρων [8].
- Τέλος, καθώς τα πειραματικά αποτελέσματα για τα έσοδα του πωλητή ήταν ενθαρρυντικά, θα μπορούσε κάποιος να εστιάσει στην ανάπτυξη αντίστοιχης θεωρίας για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Βιβλιογραφία

- [1] Saeed Alaei. Bayesian combinatorial auctions: Expanding single buyer mechanisms to many buyers. *SIAM Journal on Computing*, 43(2):930–972, 2014.
- [2] Robert Axelrod. Effective choice in the prisoner’s dilemma. *Journal of conflict resolution*, 24(1):3–25, 1980.
- [3] Pablo D Azar, Robert Kleinberg, and S Matthew Weinberg. Prophet inequalities with limited information. In *Proceedings of the twenty-fifth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pages 1358–1377. SIAM, 2014.
- [4] Yossi Azar, Inna Kalp-Shaltiel, Brendan Lucier, Ishai Menache, Joseph Naor, and Jonathan Yaniv. Truthful online scheduling with commitments. In *Proceedings of the Sixteenth ACM Conference on Economics and Computation*, pages 715–732, 2015.
- [5] Moshe Babaioff, Ronny Lempel, Brendan Lucier, Ishai Menache, Aleksandrs Slivkins, and Sam Chiu-wai Wong. Truthful online scheduling of cloud workloads under uncertainty. In *Proceedings of the ACM Web Conference 2022*, pages 151–161, 2022.
- [6] Eilyan Bitar and Yunjian Xu. Deadline differentiated pricing of deferrable electric loads. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 8(1):13–25, 2016.
- [7] Tilman Börger. *An introduction to the theory of mechanism design*. Oxford University Press, USA, 2015.
- [8] Abhishek Chandra, Weibo Gong, and Prashant Shenoy. Dynamic resource allocation for shared data centers using online measurements. In *Proceedings of the 2003 ACM SIGMETRICS international conference on Measurement and modeling of computer systems*, pages 300–301, 2003.
- [9] Shuchi Chawla, Jason D Hartline, David L Malec, and Balasubramanian Sivan. Multi-parameter mechanism design and sequential posted pricing. In *Proceedings of the forty-second ACM symposium on Theory of computing*, pages 311–320, 2010.
- [10] Shuchi Chawla, J Benjamin Miller, and Yifeng Teng. Pricing for online resource allocation: Intervals and paths. In *Proceedings of the Thirtieth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 1962–1981. SIAM, 2019.
- [11] Shiyao Chen, Lang Tong, and Ting He. Optimal deadline scheduling with commitment. In *2011 49th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing (Allerton)*, pages 111–118. IEEE, 2011.
- [12] Dani Dorfman, Haim Kaplan, Robert E Tarjan, Mikkel Thorup, and Uri Zwick. Minimum-cost paths for electric cars. In *2024 Symposium on Simplicity in Algorithms (SOSA)*, pages 374–382. SIAM, 2024.

- [13] Paul Dutting, Michal Feldman, Thomas Kesselheim, and Brendan Lucier. Prophet inequalities made easy: Stochastic optimization by pricing nonstochastic inputs. *SIAM Journal on Computing*, 49(3):540–582, 2020.
- [14] Uriel Feige, Michal Feldman, Nicole Immorlica, Rani Izsak, Brendan Lucier, and Vasilis Syrgkanis. A unifying hierarchy of valuations with complements and substitutes, 2014.
- [15] Michal Feldman, Nick Gravin, and Brendan Lucier. Combinatorial auctions via posted prices. In *Proceedings of the twenty-sixth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pages 123–135. SIAM, 2014.
- [16] Transportation Networks for Research Core Team. Transportation networks for research. <https://github.com/bstabler/TransportationNetworks>, 2023. Accessed: September 25, 2024.
- [17] Mohammad T Hajiaghayi. Online auctions with re-usable goods. In *Proceedings of the 6th ACM conference on Electronic commerce*, pages 165–174, 2005.
- [18] Mohammad Taghi Hajiaghayi, Robert Kleinberg, and Tuomas Sandholm. Automated online mechanism design and prophet inequalities. In *AAAI*, volume 7, pages 58–65, 2007.
- [19] Michael Jünger, Thomas M Lieblich, Denis Naddef, George L Nemhauser, William R Pulleyblank, Gerhard Reinelt, Giovanni Rinaldi, and Laurence A Wolsey. *50 Years of integer programming 1958-2008: From the early years to the state-of-the-art*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [20] Douglas P Kennedy. Prophet-type inequalities for multi-choice optimal stopping. *Stochastic Processes and their applications*, 24(1):77–88, 1987.
- [21] Robert Kleinberg and Seth Matthew Weinberg. Matroid prophet inequalities. In *Proceedings of the forty-fourth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 123–136, 2012.
- [22] Thilo Koslowski. The electric vehicle’s value chain and technology evolution. *Gartner, Stamford, CT, USA, Tech. Rep*, 2009.
- [23] Ulrich Krengel and Louis Sucheston. Semiamarts and finite values. 1977.
- [24] Gilbert Laporte. The vehicle routing problem: An overview of exact and approximate algorithms. *European journal of operational research*, 59(3):345–358, 1992.
- [25] Brendan Lucier. An economic view of prophet inequalities. *ACM SIGecom Exchanges*, 16(1):24–47, 2017.
- [26] Angeliki Mathioudaki, Georgios Tsaousoglou, Emmanouel Varvarigos, and Dimitris Fotakis. An online truthful algorithm for menu-based scheduling in electric vehicle charging networks. In *2022 International Conference on Smart Energy Systems and Technologies (SEST)*, pages 1–6. IEEE, 2022.
- [27] Roger B Myerson. Optimal auction design. *Mathematics of operations research*, 6(1):58–73, 1981.

- [28] Yadati Narahari, Dinesh Garg, Ramasuri Narayanam, and Hastagiri Prakash. *Game theoretic problems in network economics and mechanism design solutions*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [29] Noam Nisan and Amir Ronen. Algorithmic mechanism design. In *Proceedings of the thirty-first annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 129–140, 1999.
- [30] Martin J Osborne et al. *An introduction to game theory*, volume 3. Springer, 2004.
- [31] Mallesh M Pai and Rakesh Vohra. Optimal dynamic auctions and simple index rules. *Mathematics of Operations Research*, 38(4):682–697, 2013.
- [32] Sepideh Pourazarm, Christos G Cassandras, and Andreas Malikopoulos. Optimal routing of electric vehicles in networks with charging nodes: A dynamic programming approach. In *2014 IEEE international electric vehicle conference (IEVC)*, pages 1–7. IEEE, 2014.
- [33] Hua Qin and Wensheng Zhang. Charging scheduling with minimal waiting in a network of electric vehicles and charging stations. In *Proceedings of the Eighth ACM international workshop on Vehicular inter-networking*, pages 51–60, 2011.
- [34] Tim Roughgarden. *Twenty lectures on algorithmic game theory*. Cambridge University Press, 2016.
- [35] Bo Sun, Tongxin Li, Steven H Low, and Danny HK Tsang. Orc: An online competitive algorithm for recommendation and charging schedule in electric vehicle charging network. In *Proceedings of the Eleventh ACM International Conference on Future Energy Systems*, pages 144–155, 2020.
- [36] William J Thompson. Poisson distributions. *Computing in Science & Engineering*, 3(3):78–82, 2001.