

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΝΕΤΡΙΝΟ ΣΕ ΚΒΑΝΤΙΚΕΣ
ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΕΙΣ ΤΟΥ ΧΩΡΟΧΡΟΝΟΥ

ΓΕΩΡΓΙΟΣ Κ. ΚΑΡΑΝΑΝΑΣ

Ταλαντώσεις Νετρίνο σε Κβαντικές Διακυμάνσεις του
Χωρόχρονου

Διπλωματική Εργασία

Γεώργιος Κ. Καρανάνας[‡]

Επιβλέπων Καθηγητής: Κώστας Φαράκος

Τριμελής Επιτροπή: Γιώργος Κουτσούμπας

Νίκος Τράκας

Κώστας Φαράκος

Αθήνα, Οκτώβριος 2010

[‡]email: giorgws@hotmail.com

Physics is like sex: sure, it may give some practical results, but that's not why we do it.

-Richard P. Feynman

Περίληψη

Η εργασία αυτή αποσκοπεί στη μελέτη του φαινομένου των ταλαντώσεων των νετρίνο μέσα σε τετραδιάστατα μοντέλα κβαντικής βαρύτητας. Τα μοντέλα αυτά ενσωματώνουν την αφρώδη δομή του χωρόχρονου με τη μορφή κβαντικών διακυμάνσεων της μετρικής. Οι διακυμάνσεις προσδίδουν στο χώρο ιδιότητες παραπλήσιες με εκείνες ενός στοχαστικού μέσου. Όπως θα δούμε ένα τέτοιο περιβάλλον επιδρά στην ύλη με μη αντιστρεπτό τρόπο.

Αρχικά μιλάμε για τους μηχανισμούς που έχουν προταθεί ώστε τα νετρίνο να αποκτήσουν μάζα, όπως ο μηχανισμός Seesaw.

Έπειτα κάνουμε μία συνοπτική εισαγωγή στο συνήθη φορμαλισμό για τις ταλαντώσεις των νετρίνο, με σκοπό να παρουσιάσουμε με όσο το δυνατόν πιο διαυγή τρόπο ένα από τα κατ' εξοχήν κβαντομηχανικά φαινόμενα.

Κατόπιν εστιάζουμε στο πως τροποποιούνται οι νόμοι που διέπουν την ταλάντωση ανάμεσα στις γεύσεις των νετρίνο, όταν λάβουμε υπ' όψη μας την αφρώδη δομή του χωρόχρονου. Για το λόγο αυτό εξετάζουμε τις συνέπειες και υπό το πρίσμα ενός ρεαλιστικού μοντέλου για την περιγραφή του φαινομένου.

Η μετρική Minkowski συμβολίζεται με $\eta^{\mu\nu}$ και επιλέξαμε να είναι $diag(+1, -1, -1, -1)$. Ορίζουμε τη μετρική $g^{\mu\nu}$ ως $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}$, όπου $h^{\mu\nu}$ είναι στοχαστικές μεταβλητές που ακολουθούν κάποια στατιστική κατανομή, η οποία και καθορίζει το χωρόχρονο.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα κατ' αρχάς να ευχαριστήσω τον Αν.Καθηγητή Κ. Φαράκο, επιβλέποντα αυτής της διπλωματικής εργασίας, όχι μόνο για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, αλλά κυρίως για το χρόνο που μου διέθεσε, τις συμβουλές του, και τη διαρκή καθοδήγησή του κατά το τελευταίο έτος των σπουδών μου. Η εργασία αυτή δε θα ήταν δυνατό να πραγματοποιηθεί χωρίς τη βοήθεια και τις παρατηρήσεις του.

Ευχαριστώ επίσης τον Επ.Καθηγητή Κ. Αναγνωστόπουλο και τους Αν.Καθηγητές Α. Κεχαγιά, Γ. Κουτσούμπα, Ν. Τράκα, για τη βοήθειά που μου προσέφεραν σε διάφορα θέματα και για το χρόνο που πρόθυμα μου διέθεσαν όποτε τους χρειάστηκα.

Τέλος, οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ στους φίλους μου, για την αγάπη και την υποστήριξή τους.

Η εργασία είναι αφιερωμένη στους γονείς μου Κώστα και Μαρία και στα αδέρφια μου Βασίλη και Θέμο.

Γιώργος Καρανάνας
Αθήνα, Οκτώβριος 2010

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Μάζα Νετρίνο- Μηχανισμός Seesaw	2
2	Ταλάντωση Νετρίνο	5
2.1	Κβαντομηχανική Περιγραφή με Επίπεδα Κύματα	5
2.2	Εναλλακτική Περιγραφή με Κυματοπακέτα	10
3	Περιβάλλον Κβαντικής Βαρύτητας	16
3.1	Εισαγωγικές Έννοιες	17
3.2	Κβαντομηχανική Περιγραφή με Επίπεδα Κύματα	18
3.3	Εναλλακτική Περιγραφή με Κυματοπακέτα	23
	Βιβλιογραφία	29

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Σύμφωνα με το Καθιερωμένο Πρότυπο (Κ.Π.) τα νετρίνο είναι άμαζα σωματίδια. Είναι πειραματικά επιβεβαιωμένο ότι συναντώνονται στη φύση με αριστερόστροφη ελικότητα μόνο, δηλαδή το διάνυσμα του σπίν τους είναι αντιπαράλληλο προς το διάνυσμα της ταχύτητας τους.

Αυτό σημαίνει ότι τα δεξιόστροφα νετρίνο δεν συμπεριλαμβάνονται στους όρους Yukawa της Λαγκραντζιανής του Κ.Π. Κατά συνέπεια, μετά το Αυθόρμητο Σπάσιμο Συμμετρίας τα νετρίνο δεν παίρνουν μάζα μέσω του μηχανισμού Higgs, αφού δεν εμφανίζονται όροι της μορφής:

$$\bar{\nu}_L^\alpha \mathcal{M} \nu_R^\alpha$$

Την τελευταία δεκαετία έχει αλλάξει δραματικά η κατανόηση της φυσικής των νετρίνο. Πολλά πειράματα¹ έχουν δείξει ότι νετρίνο που παράγονται σε κάποια καθορισμένη λεπτονική γεύση, αφού διανύσουν κάποια απόσταση, ανιχνεύονται ως νετρίνο διαφορετικής λεπτονικής γεύσης. Η πιο απλή ερμηνεία στο παραπάνω είναι ότι τα νετρίνο έχουν μάζα και αναμειγνύονται: οι ιδιοκαταστάσεις γεύσης είναι δηλαδή διαφορετικές από τις ιδιοκαταστάσεις μάζας. Το φαινόμενο αυτό, είναι η πρώτη σοβαρή ένδειξη για την ύπαρξη Νέας Φυσικής Πέρα από το Καθιερωμένο Πρότυπο.

Αυτός είναι και ο λόγος που η επιστημονική κοινότητα έχει στραφεί εδώ και κάποια χρόνια στη μελέτη της ταλάντωσης των νετρίνο (neutrino oscillation).

¹Kamiokande, SuperKamiokande, IMB κ.ο.κ.

1.1 Μάζα Νετρίνο- Μηχανισμός Seesaw

Υπάρχουν δύο τρόποι ώστε τα νετρίνο να αποκτήσουν μάζα. Ο πρώτος και πιο απλός είναι να εισάγουμε δεξιόστροφα νετρίνο στους όρους Yukawa της Λαγκραντζιανής. Ο δεύτερος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε πολύ βαριά δεξιόστροφα νετρίνο, τα οποία εμφανίζονται π.χ. στις Μεγαλοενοποιημένες θεωρίες. Παρακάτω συζητάμε τους μηχανισμούς αυτούς.

Όρος μάζας Dirac:

Ο όρος μάζας στη Λαγκραντζιανή εισάγωντας δεξιόστροφα νετρίνο είναι:

$$\mathcal{L}_D^{mass} = -(\bar{\nu}_L^\alpha \mathcal{M} \nu_R^\alpha + \bar{\nu}_R^\alpha \mathcal{M}^\dagger \nu_L^\alpha) \quad (1.1)$$

όπου τα $\nu_{L,R}^\alpha$ δίνονται από

$$\nu_{L,R}^\alpha = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_{L,R} \quad (1.2)$$

και ο \mathcal{M} είναι μιγαδικός πίνακας μαζών. Για να έχουμε θετικές ιδιοτιμές για τις μάζες, διαγωνοποιούμε τον \mathcal{M} με τους μοναδιακούς πίνακες U και V που συνδέουν τις ιδιοκαταστάσεις μάζας $\nu_{L,R}^k$ με τις ιδιοκαταστάσεις γεύσης $\nu_{L,R}^\alpha$:

$$\begin{aligned} \nu_L^\alpha &= U \nu_L^k \\ \nu_R^\alpha &= V \nu_R^k \end{aligned} \quad (1.3)$$

Η διαγωνοποίηση είναι τετριμμένη και δίνει:

$$U^\dagger \mathcal{M} V \equiv m_D = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Η σχέση (1.1) καταλήγει στην:

$$\mathcal{L}_D^{mass} = -\bar{\nu}_L^k m_D \nu_R^k + \text{ε.σ.} \quad (1.5)$$

Η αλήθεια είναι ότι μόνο το ν_L^α συμμετέχει στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις άρα ο U δεν είναι άλλος από τον πίνακα ανάμειξης CKM. Παρ' όλα αυτά δύο είναι τα κύρια ερωτήματα που γεννιούνται αν τα νετρίνο είναι σωματίδια Dirac: α) γιατί τα δεξιόστροφα νετρίνο ν_R^α δεν έχουν μέχρι στιγμής παρατηρηθεί και β) γιατί οι μάζες των νετρίνο είναι τόσο μικρές ($\sim 10^6$ φορές μικρότερες από τις μάζες των *quarks*.)

Όρος μάζας Majorana:

Ένα μαζικό ουδέτερο φορτισμένο φερμιόνιο όπως το νεutrίνο, μπορεί να περιγραφεί από ένα σπινωριακό πεδίο ν^α και ισχύει η συνθήκη Majorana:

$$\nu^\alpha = (\nu^\alpha)^C \quad (1.6)$$

όπου $(\nu^\alpha)^C = C(\bar{\nu}^\alpha)^T \equiv C\gamma^0(\nu^\alpha)^*$ η πράξη συζυγίας φορτίου, με C τέτοιο ώστε:

$$C^{-1}\gamma^\mu C = (-\gamma^\mu)^T \quad C = -C^{-1} = -C^\dagger = -C^T \quad (1.7)$$

Εφ' οσον

$$C(\gamma^5)^T C^{-1} = \gamma^5, \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad (1.8)$$

αποδεικνύεται² ότι το $(\nu_L^\alpha)^C$ θα είναι δεξιόστροφο και το $(\nu_R^\alpha)^C$ αριστερόστροφο. Αυτό σημαίνει ότι στην περίπτωση που τα νεutrίνο είναι Majorana σωματίδια, ο όρος μάζας στη Λαγκραντζιανή θα είναι:

$$\mathcal{L}_M^{mass} = -\frac{1}{2} \left[(\bar{\nu}_L^\alpha)^C m_D \nu_L^\alpha + \bar{\nu}_L^\alpha m_D (\nu_L^\alpha)^C \right] \quad (1.9)$$

όπου ο m_D διαγωνοποιημένος πίνακας μαζών. Αν εισάγουμε $\nu_{Maj}^\alpha = \nu_L^\alpha + (\nu_L^\alpha)^C$, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\mathcal{L}_M^{mass} = -\frac{1}{2} \bar{\nu}_{Maj}^\alpha m_D \nu_{Maj}^\alpha \quad (1.10)$$

Όρος μάζας Dirac- Majorana:

Αν υπάρχουν και αριστερόστροφα και δεξιόστροφα νεutrίνο και είναι ανεξάρτητα, εκτός από τον όρο μάζας Dirac επιτρέπονται δύο ακόμη όροι Majorana, και η Λαγκραντζιανή θα είναι:

$$\mathcal{L}_{D-M}^{mass} = -\frac{1}{2} \left((\bar{\nu}_L^\alpha)^C \quad \bar{\nu}_R^\alpha \right) \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^\alpha \\ (\nu_R^\alpha)^C \end{pmatrix} + \epsilon.\sigma. \quad (1.11)$$

²Ορίζουμε τους προβολικούς τελεστές \mathcal{P}_R και \mathcal{P}_L ως:

$$\mathcal{P}_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \quad \mathcal{P}_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$$

Δρώντας με αυτούς στα $(\nu_L^\alpha)^C$ και $(\nu_R^\alpha)^C$ καταλήγουμε

$$\mathcal{P}_L(\nu_L^\alpha)^C = 0 \quad \mathcal{P}_L(\nu_R^\alpha)^C = (\nu_R^\alpha)^C \quad \mathcal{P}_R(\nu_L^\alpha)^C = (\nu_L^\alpha)^C \quad \mathcal{P}_R(\nu_R^\alpha)^C = 0$$

Διαγωνοποιώντας τον πίνακα που εμφανίζεται στην παραπάνω εξίσωση καταλήγουμε:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{4m_D^2 + (m_R - m_L)^2} - \frac{m_L + m_R}{2} \\ m_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{4m_D^2 + (m_R - m_L)^2} + \frac{m_L + m_R}{2} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Οι ιδιοκαταστάσεις μάζας στην περίπτωση αυτή θα ορίζονται ως

$$\begin{aligned} \nu^k &= \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_\nu & -\sin \theta_\nu \\ \sin \theta_\nu & \cos \theta_\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^\alpha \\ (\nu_R^\alpha)^c \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta_\nu \nu_L^\alpha & \sin \theta_\nu (\nu_R^\alpha)^c \\ -\sin \theta_\nu \nu_L^\alpha & \cos \theta_\nu (\nu_R^\alpha)^c \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.13)$$

με γωνία ανάμειξης θ_ν τέτοια ώστε

$$\tan(2\theta_\nu) = \frac{2m_D}{m_R - m_L} \quad (1.14)$$

Έχει ενδιαφέρον να εξετάσουμε την περίπτωση όπου $m_R \gg m_D, m_L$. Για $m_L = 0$ από τις σχέσεις (1.12) έχουμε:

$$\begin{aligned} m_1 &\sim \frac{m_D^2}{m_R} \\ m_2 &\sim m_R \end{aligned} \quad (1.15)$$

δηλαδή η μάζα m_1 θα είναι πολύ μικρή, ενώ η μάζα m_2 πολύ μεγάλη. Αυτός είναι ο λεγόμενος Μηχανισμός Seesaw [11].

ν	$m_\nu(eV)$
e	< 2.2
μ	$< 170 \times 10^3$
τ	$< 15.5 \times 10^3$

Πίνακας 1.1: Ανώτατα όρια μαζών σύμφωνα με τα τελευταία πειραματικά δεδομένα

Κεφάλαιο 2

Ταλάντωση Νετρίνο

Η πιθανότητα τα νετρίνο να έχουν μη μηδενική μάζα συνεπάγεται το φαινόμενο της ταλάντωσης: της μετάβασης δηλαδή από μία λεπτονική γεύση σε μία άλλη. Στην παράγραφο που ακολουθεί γίνεται μία σύντομη ανασκόπηση της βασικής θεωρίας.

2.1 Κβαντομηχανική Περιγραφή με Επίπεδα Κύματα

Σύμφωνα με τον κλασικό φορμαλισμό για το φαινόμενο της ταλάντωσης, τα νετρίνο κάποιας γεύσης α είναι στην ουσία μία επαλληλία ιδιοκαταστάσεων της Χαμιλτονιανής, με καθορισμένη μάζα [6,7,9,19]. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* |\nu_k\rangle \quad (2.1)$$

όπου $\alpha = e, \mu, \tau$ και $U_{\alpha k}$ μοναδιακός πίνακας ανάμειξης.

Εφ' όσον τα νετρίνο $|\nu_k\rangle$ έχουν καθορισμένη ενέργεια E_k , θα εξελίσσονται χρονικά σαν επίπεδα κύματα:

$$|\nu_k(t)\rangle = e^{-iE_k t} |\nu_k(t=0)\rangle \equiv e^{-iE_k t} |\nu_k\rangle \quad (2.2)$$

όπου η ενέργεια E_k δίνεται από τη γνωστή σχέση διασποράς για Minkowski χωρόχρονο:

$$E_k^2 = p_k^2 + m_k^2 \quad (2.3)$$

Από τα παραπάνω εύκολα καταλήγουμε στη χρονικά εξελιγμένη μορφή του νετρίνο γεύσης α :

$$\begin{aligned}
|v_\alpha(t)\rangle &= \sum_k U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} |v_k\rangle \\
&= \sum_k \sum_\beta U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} U_{\beta k} |v_\beta\rangle \\
&= \sum_\beta \left(\sum_k U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} U_{\beta k} \right) |v_\beta\rangle
\end{aligned} \tag{2.4}$$

διότι

$$|v_\beta\rangle = \sum_k U_{\beta k}^* |v_k\rangle \Leftrightarrow |v_k\rangle = \sum_\beta U_{\beta k} |v_\beta\rangle. \tag{2.5}$$

Η πιθανότητα ένα νετρίνο που παράχθηκε με γεύση α για $t=0$ να ανιχνευθεί μετά από χρόνο t ως νετρίνο με γεύση $\beta \neq \alpha$ θα είναι:

$$\begin{aligned}
P_{\alpha\beta}(t) &= |\langle v_\beta | v_\alpha(t) \rangle|^2 = \left| \sum_k U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} U_{\beta k} \right|^2 \\
&= \sum_{k,l} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha l} U_{\beta l}^* e^{-i(E_k - E_l)t}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Υποθέτουμε ότι οι ιδιοκαταστάσεις της Χαμιλτονιανής έχουν την ίδια ορμή \vec{p} ¹ και ότι $E = |\vec{p}|$ για $m_k \ll |\vec{p}|^2$ [6-9]. Η σχέση (2.3) γίνεται:

$$E_k = \sqrt{p^2 + m_k^2} = p + \frac{m_k^2}{2p} \equiv E + \frac{m_k^2}{2E} \tag{2.7}$$

και η διαφορά ενεργειών $E_k - E_l$ που εμφανίζεται στην πιθανότητα αλλαγής γεύσης είναι:

$$E_k - E_l = \frac{\Delta m_{kl}^2}{2E}, \text{ με } \Delta m_{kl}^2 = m_k^2 - m_l^2. \tag{2.8}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψην μας τα παραπάνω, η σχέση (2.6) για την πιθανότητα αλλαγής γεύσης γράφεται ως:

$$P_{\alpha\beta}(t, E) = \sum_{k,l} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha l} U_{\beta l}^* \exp\left(-i \frac{\Delta m_{kl}^2}{2E} t\right). \tag{2.9}$$

¹equal momentum assumption

²Δεδομένου ότι τα νετρίνο έχουν πολύ μικρές μάζες και ταξιδεύουν με ταχύτητες πολύ κοντά στην ταχύτητα του φωτός.

Στα περισσότερα πειράματα με ταλαντώσεις νετρίνο δε μετράται ο χρόνος t που μεσολαβεί ανάμεσα στην παραγωγή και την ανίχνευση του νετρίνο, αλλά η απόσταση X που αυτά διανύουν. Για το λόγο αυτό είναι πιο χρήσιμη μία σχέση για την πιθανότητα αλλαγής γεύσης $P_{\alpha\beta}$ ως συνάρτηση της απόστασης. Για υπερχετικιστικά σωματίδια ισχύει $t \sim X$, συνεπώς³:

$$P_{\alpha\beta}(X, E) = \sum_{k,l} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha l} U_{\beta l}^* \exp\left(-i \frac{\Delta m_{kl}^2}{2E} X\right). \quad (2.10)$$

Τα μήκη ταλάντωσης θα δίνονται από την έκφραση:

$$L_{kl}^{osc} = \frac{4\pi E}{\Delta m_{kl}^2} = \frac{2\pi}{E_k - E_l} = \frac{2\pi}{\Delta E_{kl}} \quad (2.11)$$

και η (2.10) μπορεί να γραφτεί και ως

$$P_{\alpha\beta}(X) = \sum_{k,l} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha l} U_{\beta l}^* \exp\left(-i \frac{\pi}{L_{kl}^{osc}} X\right). \quad (2.12)$$

Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα ταλαντώνεται συναρτήσει της απόστασης X από το σημείο παραγωγής του ν_e με μήκη ταλάντωσης L_{kl}^{osc} .

	Δm_{kl}^2
1,2	0.000079 eV^2 (<i>KamLand</i> – 2005)
2,3	0.0027 eV^2 (<i>MINOS</i> – 2006)

Πίνακας 2.1: Οι διαφορές μαζών Δm_{kl}^2 που έχουν μετρηθεί τα τελευταία χρόνια.

³time equals distance assumption

Στην περίπτωση της ανάμειξης δύο μόνο ειδών νετρίνο [3], ο πίνακας ανάμειξης θα είναι ο πίνακας στροφής στο διδιάστατο επίπεδο και θα ισχύει:

$$\begin{aligned} | \nu_e \rangle &= \cos \theta | \nu_1 \rangle + \sin \theta | \nu_2 \rangle \\ | \nu_\mu \rangle &= -\sin \theta | \nu_1 \rangle + \cos \theta | \nu_2 \rangle \end{aligned}$$

Συνεπώς μία αρχική κατάσταση $| \nu_a(t=0) \rangle = | \nu_e \rangle$ θα εξελιχθεί χρονικά ως

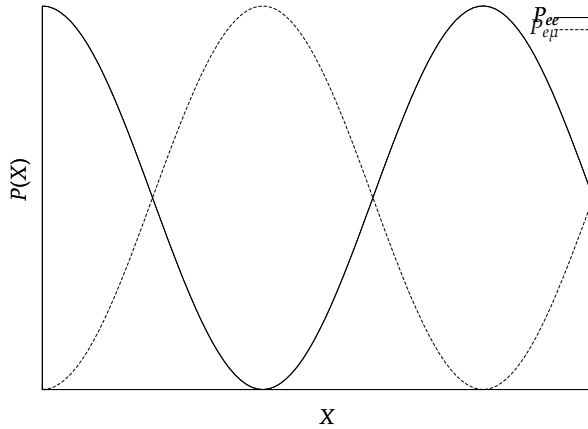
$$| \nu_e(t) \rangle = \cos \theta | \nu_1 \rangle e^{-iE_1 t} + \sin \theta | \nu_2 \rangle e^{-iE_2 t}$$

και η έκφραση για την πιθανότητα αλλαγής γεύσης θα είναι:

$$\begin{aligned} P_{ee}(X, E) &= 1 - \sin^2 2\theta_\nu \sin^2 \frac{\Delta m_{12}^2}{2E} X \\ P_{e\mu}(X, E) &= \sin^2 2\theta_\nu \sin^2 \frac{\Delta m_{12}^2}{2E} X \end{aligned} \quad (2.13)$$

Συναρτήσει του L_{12}^{osc} :

$$\begin{aligned} P_{ee}(X) &= 1 - \sin^2 2\theta_\nu \sin^2 \frac{\pi}{L_{12}^{osc}} X \\ P_{e\mu}(X) &= \sin^2 2\theta_\nu \sin^2 \frac{\pi}{L_{12}^{osc}} X \end{aligned} \quad (2.14)$$



Σχήμα 2.1: Η ταλάντωση των πιθανοτήτων για δύο είδη νετρίνο συναρτήσει της απόστασης. Η συχνότητα εξαρτάται από τη διαφορά των μαζών Δm_{12}^2 .

Παραπάνω αναπτύξαμε τον καθιερωμένο φορμαλισμό για το φαινόμενο της ταλάντωσης νετρίνο. Είδαμε ότι στην πιθανότητα αλλαγής γεύσης (2.10) εμφανίζεται ένας παράγοντας αντίστοιχος της φάσης, ο οποίος μας δείχνει πώς συνεισφέρει κάθε ιδιοκατάσταση της Χαμιλτονιανής $|ν_k\rangle$ στην ταλάντωση. Είδαμε επίσης ότι γίνονται οι κάτωθι παραδοχές:

- Τα νετρίνο κάποιας γεύσης είναι επαλληλία επίπεδων μονοχρωματικών κυμάτων, καθένα από τα οποία αντιστοιχεί σε ιδιοκατάσταση της Χαμιλτονιανής με καθορισμένη μάζα.
- Τα νετρίνο-ιδιοκαταστάσεις της Χαμιλτονιανής $|ν_k\rangle$ έχουν διαφορετικές ενέργειες, αλλά κοινή ορμή⁴ (equal momentum assumption).
- Ο χρόνος t που μεσολαβεί από την παραγωγή ενός νετρίνο μέχρι την ανίχνευσή του ισούται με την απόσταση X που αυτό διανύει (time equals distance assumption).

⁴Συνέπεια αυτού είναι ότι οι ιδιοκαταστάσεις γεύσης θα διαδίδονται με αυτή την ορμή.

2.2 Εναλλακτική Περιγραφή με Κυματοπακέτα

Μέχρι στιγμής θεωρήσαμε ότι τα νεutrino-ιδιοκαταστάσεις της Χαμιλτονιανής $|ν_k\rangle$ είναι επίπεδα κύματα με καθορισμένη ενέργεια και έχουν κοινή ορμή. Κάτι τέτοιο όμως δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα, αφού η παραγωγή (αλλά και η ανίχνευση) των νεutrino είναι ένα εντοπισμένο γεγονός. Συνέπεια αυτού είναι η κάθε ιδιοκατάσταση να διαδίδεται με διαφορετική ορμή, μέσα στα πλαίσια πάντα της Αρχής της Απροσδιοριστίας.

Σκοπός μας είναι να παρουσιάσουμε ένα συνεπές θεωρητικό πλαίσιο, στο οποίο τα νεutrino-ιδιοκαταστάσεις Χαμιλτονιανής περιγράφονται από κυματοπακέτα με χαρακτηριστικά που καθορίζονται από τη διαδικασία παραγωγής.

Έστω νεutrino γεύσης α , ($\alpha = e, \mu, \tau$) που παράγεται μέσω μίας ασθενούς αλληλεπίδρασης για $x=0$ και $t=0$. Για λόγους απλότητας περιοριζόμαστε σε μονοδιάστατη κίνηση⁵:

$$|ν_\alpha(x,t)\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* \psi(x,t) |ν_k\rangle \quad (2.15)$$

όπου $U_{\alpha k}$ μοναδιακός πίνακας ανάμειξης, $|ν_k\rangle$ νεutrino μάζας m_k και $\psi(x,t)$ η χρονικά εξελιγμένη κυματοσυνάρτηση του. Ίποθέτουμε ότι τα κυματοπακέτα είναι γκαουσιανά με την ίδια τυπική απόκλιση σ_p στο χώρο των ορμών, εντοπισμένα γύρω από τη μέση τιμή της ορμής $\langle p_k \rangle$ η οποία καθορίζεται από τη διαδικασία παραγωγής [8,15]. Η $\langle p_k \rangle$ στο κέντρο μάζας του συστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$\langle p_k \rangle^2 = \frac{(s - m_k^2 - m)^2 - 2m_k^2 m^2}{4s} \quad (2.16)$$

όπου m_k η μάζα του νεutrino, m η μάζα των άλλων παραγόμενων σωματιδίων και \sqrt{s} η ολική ενέργεια στο κέντρο μάζας του συστήματος αν η παραγωγή γίνεται μέσω κάποιας αντίδρασης. Στην περίπτωση διάσπασης, η ποσότητα \sqrt{s} είναι η μάζα του σωματιδίου που διασπάται.

Για τις κανονικοποιημένες ιδιοκαταστάσεις Χαμιλτονιανής στο

⁵Η γενίκευση στις τρεις διαστάσεις είναι τετριμμένη.

χώρο των ορμών μπορούμε να γράψουμε:

$$\psi_k(p) = \left(\sqrt{2\pi}\sigma_p\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(p - \langle p_k \rangle)^2}{4\sigma_p^2}\right] \quad (2.17)$$

με $\sigma_p\sigma_x = \frac{1}{2}$ ⁶. Η κυματοσυνάρτηση του $|v_k\rangle$ στο χώρο των θέσεων θα είναι:

$$\psi_k(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \psi_k(p) \exp[-i(E_k t - px)] \quad (2.18)$$

όπου η ενέργεια E_k θα δίνεται από:

$$E_k(p) = \sqrt{p^2 + m_k^2} \quad (2.19)$$

Με βάση τα παραπάνω η σχέση (2.15) γίνεται:

$$|v_\alpha(x, t)\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* \int_{-\infty}^{+\infty} dp \psi_k(p) \exp[-i(E_k t - px)] |v_k\rangle \quad (2.20)$$

Για τον υπολογισμό του παραπάνω ολοκληρώματος αναπτύσσουμε τη σχέση (2.19) κατά Taylor γύρω από τη μέση τιμή $\langle p_k \rangle$:

$$\begin{aligned} E_k(p) &= E_k \Big|_{p=\langle p_k \rangle} + \frac{dE_k}{dp} \Big|_{p=\langle p_k \rangle} (p - \langle p_k \rangle) + \frac{1}{2} \frac{d^2 E_k}{dp^2} \Big|_{p=\langle p_k \rangle} (p - \langle p_k \rangle)^2 + \dots \\ &= \langle E_k \rangle + \mathcal{V}_k (p - \langle p_k \rangle) + \frac{1}{2} \mathcal{S}_k (p - \langle p_k \rangle)^2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

όπου η ενέργεια $\langle E_k \rangle$, η φασική ταχύτητα \mathcal{V}_k και η διασπορά (spreading) \mathcal{S}_k των κυματοπακέτων δίνονται αντίστοιχα από:

$$\langle E_k \rangle = \sqrt{\langle p_k \rangle^2 + m_k^2} \quad \mathcal{V}_k = \frac{\langle p_k \rangle}{\langle E_k \rangle} \quad \mathcal{S}_k = \frac{m_k^2}{\langle E_k \rangle^3} \quad (2.22)$$

Σε πρώτη προσέγγιση, $E_k(p) = \langle E_k \rangle + \mathcal{V}_k (p - \langle p_k \rangle)$ και από τη (2.18), η πιθανότητα το νεutrino γεύσης α να ανιχνευθεί ως νεutrino γεύσης

⁶Το μέγεθος σ_x των κυματοπακέτων ποικίλει ανάλογα με τον τρόπο παραγωγής των νεutrino [11]. Για παράδειγμα, τα νεutrino που προέρχονται από Supernovae έχουν μέγεθος $\sigma_x \sim 10^{-9}$ cm, ενώ τα ατμοσφαιρικά νεutrino έχουν μέγεθος $\sigma_x \sim 10^2$ cm.

$\beta \neq \alpha$ σε απόσταση $x = X$ μετά από χρόνο $t = T$ θα είναι :

$$\begin{aligned}
P_{\alpha\beta}(X, T) &= |\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(X, T) \rangle|^2 = \left| \sum_k U_{\alpha k}^* \psi_k(X, T) U_{\beta k} \right|^2 = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} \sum_{k,l} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha l} U_{\beta l}^* \times \\
&\times \exp [i[(\langle p_k \rangle - \langle p_l \rangle)X - (\langle E_k \rangle - \langle E_l \rangle)T]] \times \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp \left[-\frac{1}{4\sigma_p^2} (p - \langle p_k \rangle)^2 + i(p - \langle p_k \rangle)X \right] \times \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} dq \exp \left[-\frac{1}{4\sigma_p^2} (q - \langle p_l \rangle)^2 - i(q - \langle p_l \rangle)X \right]
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Εκτελώντας τις ολοκληρώσεις, καταλήγουμε:

$$\begin{aligned}
P_{\alpha\beta}(X, T) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} \sum_{k,l} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha l} U_{\beta l}^* \times \\
&\times \exp [i[(\langle p_k \rangle - \langle p_l \rangle)X - (\langle E_k \rangle - \langle E_l \rangle)T]] \times \\
&\times \exp \left[-\frac{(X - \mathcal{V}_k T)^2}{4\sigma_x^2} - \frac{(X - \mathcal{V}_l T)^2}{4\sigma_x^2} \right]
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Η παραπάνω σχέση συναρτήσκει μόνο της θέσης θα δίνεται από:

$$\begin{aligned}
P_{\alpha\beta}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dT P_{\alpha\beta}(X, T) = \dots \\
&= \sum_{k,l} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha l} U_{\beta l}^* \times \left[\frac{2}{\mathcal{V}_k^2 + \mathcal{V}_l^2} \right]^{1/2} \times \\
&\times \exp \left[i \left[(\langle p_k \rangle - \langle p_l \rangle) - (\langle E_k \rangle - \langle E_l \rangle) \left[\frac{\mathcal{V}_k + \mathcal{V}_l}{\mathcal{V}_k^2 + \mathcal{V}_l^2} \right] \right] X \right] \times \\
&\times \exp \left[-\frac{X^2 (\mathcal{V}_k - \mathcal{V}_l)^2}{4\sigma_x^2 (\mathcal{V}_k^2 + \mathcal{V}_l^2)} - \frac{(\langle E_k \rangle - \langle E_l \rangle)^2}{4\sigma_p^2 (\mathcal{V}_k^2 + \mathcal{V}_l^2)} \right]
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Σε παρόμοιο αποτέλεσμα με το (2.25) θα καταλήγαμε υπολογίζοντας το στάσιμο σημείο του εκθετικού με τη μέγιστη συνεισφορά, δηλαδή

$$\frac{\partial}{\partial T} \left\{ \exp \left[-\frac{(X - \mathcal{V}_k T)^2}{4\sigma_x^2} - \frac{(X - \mathcal{V}_l T)^2}{4\sigma_x^2} \right] \right\} = 0 \Rightarrow T = \frac{\mathcal{V}_k + \mathcal{V}_l}{\mathcal{V}_k^2 + \mathcal{V}_l^2} X$$

Αυτό είναι το ανάλογο του $T \sim X$ για το μοντέλο με κυματοπακέτα.

Άς εξετάσουμε ξεχωριστά τον κάθε όρο που εμφανίζεται στην παραπάνω έκφραση:

1. Παράγοντας Φάσης

$$\exp \left[-i (\langle E_k \rangle - \langle E_l \rangle) \left[\frac{\mathcal{V}_k + \mathcal{V}_l}{\mathcal{V}_k^2 + \mathcal{V}_l^2} - \frac{\langle p_k \rangle - \langle p_l \rangle}{\langle E_k \rangle - \langle E_l \rangle} \right] X \right]$$

Μας δείχνει πώς ταλαντώνονται τα νετρίνο συναρτήσει της απόστασης X από την πηγή. Τα μήκη ταλάντωσης θα είναι:

$$L_{kl}^{osc} = \frac{2\pi}{|\langle E_k \rangle - \langle E_l \rangle|} \left[\frac{\mathcal{V}_k + \mathcal{V}_l}{\mathcal{V}_k^2 + \mathcal{V}_l^2} - \frac{\langle p_k \rangle - \langle p_l \rangle}{\langle E_k \rangle - \langle E_l \rangle} \right]^{-1} \quad (2.26)$$

Για υπερχετικιστικά νετρίνο η παράσταση στις αγκύλες γίνεται μονάδα και καταλήγουμε στη συνήθη έκφραση (2.11):

$$L_{kl}^{osc} = \frac{2\pi}{|\Delta \langle E_{kl} \rangle|}$$

2. Παράγοντας Απόσβεσης

$$\exp \left[-\frac{X^2 (\mathcal{V}_k - \mathcal{V}_l)^2}{4\sigma_x^2 (\mathcal{V}_k^2 + \mathcal{V}_l^2)} \right]$$

Μας δείχνει πώς συνεισφέρουν στο συσχετισμό (coherence) τα κυματοπακέτα των διαφορετικών ιδιοκαταστάσεων μάζας⁷. Τα μήκη συσχετισμού (coherence lengths) για $k \neq l$ είναι:

$$L_{kl}^{coh} \sim \sigma_x \left[\frac{\mathcal{V}_k^2 + \mathcal{V}_l^2}{(\mathcal{V}_k - \mathcal{V}_l)^2} \right]^{1/2} \quad (2.27)$$

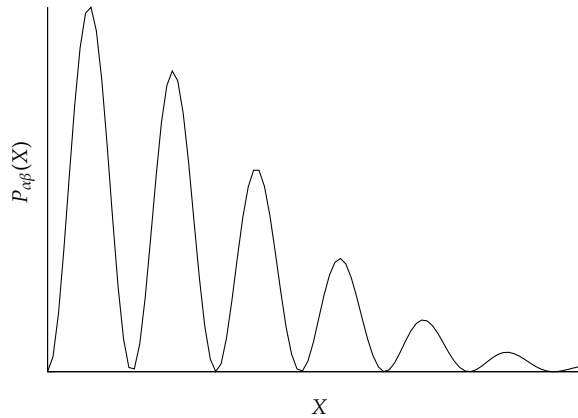
⁷Οι ιδιοκαταστάσεις μάζας περιγράφονται από κυματοπακέτα με καθορισμένο μέγεθος σ_x και διαδίδονται με διαφορετικές ταχύτητες \mathcal{V}_k και \mathcal{V}_l . Αυτό σημαίνει ότι τα κυματοπακέτα θα επικαλύπτονται (overlap) για κάποια απόσταση L_{kl}^{coh} , η οποία είναι [18]:

$$L_{kl}^{coh} \sim \frac{\sigma_x}{|\mathcal{V}_k - \mathcal{V}_l|}$$

Πέρα από αυτή την απόσταση τα κυματοπακέτα διαχωρίζονται εντελώς και πιθανότητα αλλαγής γεύσης είναι σταθερή και ανεξάρτητη της απόστασης:

$$P_{\alpha\beta}(X > L_{kl}^{coh}) \rightarrow \sum_{k,l} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha l} U_{\beta l}^*$$

Για να λάβει χώρα το φαινόμενο της ταλάντωσης θα πρέπει τα L_{kl}^{coh} να είναι πολύ μεγαλύτερα από το σ_x των κυματοπακέτων [10,18]. Αυτό συμβαίνει όταν οι ιδιοκαταστάσεις μάζας ν_k και ν_l είναι σχεδόν εκφυλισμένες, δηλαδή $|\mathcal{V}_k - \mathcal{V}_l| \ll 1$.



Σχήμα 2.2: Πιθανότητα το νεutrίνο γεύσης α να ανιχνευθεί ως νεutrίνο γεύσης $\beta \neq \alpha$ συναρτήσεως της απόστασης για $X < L_{kl}^{coh}$.

3. Εκθετικός Παράγοντας

$$\exp \left[-\frac{(\langle E_k \rangle - \langle E_l \rangle)^2}{4\sigma_p^2 (\mathcal{V}_k^2 + \mathcal{V}_l^2)} \right]$$

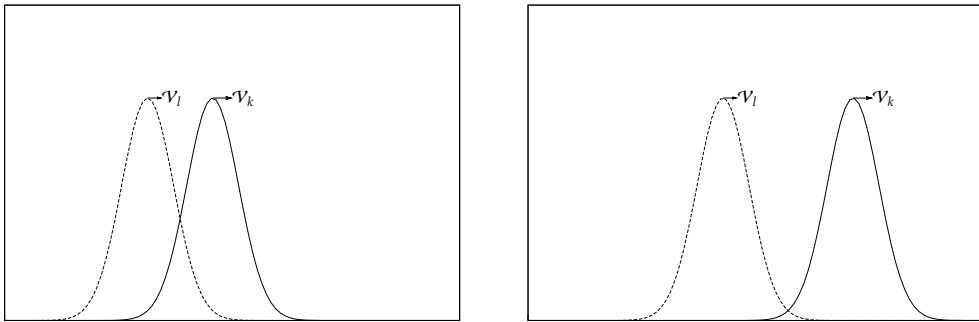
Ο συγκεκριμένος όρος εμφανίστηκε λόγω της ολοκλήρωσης στο χρόνο, και μας εγγυάται ότι η ενέργεια διατηρείται με απροσδιοριστία που εξαρτάται από το σ_p των κυματοπακέτων. Δεν εξαρτάται από την απόσταση X και η παρουσία του σημαίνει ότι αν $(\langle E_k \rangle - \langle E_l \rangle) \geq \sigma_p \sqrt{\mathcal{V}_k^2 + \mathcal{V}_l^2}$, η ολοκλήρωση στο χρόνο ελαττώνει την σύμπλεξη (interference) των διαφορετικών ιδιοκαταστάσεων μάζας.

4. Επιπλέον Παράγοντες

$$\left[\frac{2}{\mathcal{V}_k^2 + \mathcal{V}_l^2} \right]^{1/2}$$

Ο τελευταίος αυτός όρος είναι αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης στο χρόνο και εκφράζει ότι η πιθανότητα να βρούμε ένα νεutrίνο ως ιδιοκατάσταση μάζας σε απόσταση X είναι

αντιστρόφως ανάλογη της ταχύτητας του. Ο παράγοντας αυτός είναι πρακτικά μονάδα για σχετικιστικά νεutrίνο, αλλά διαφέρει από τη μονάδα όταν $|v_k| \ll 1$.



Σχήμα 2.3: Σε αποστάσεις μεγαλύτερες του L_{kl}^{coh} τα κυματοπακέτα διαχωρίζονται πλήρως λόγω των διαφορετικών φασικών ταχυτήτων τους.

Μέχρι στιγμής αγνοήσαμε τη διασπορά \mathcal{S}_k των κυματοπακέτων. Αν ο χρόνος διάδοσης είναι μεγαλύτερος από $T_k^{sprd} \sim \sigma_x \langle E_k \rangle^3 / m_k^2$ η διασπορά γίνεται σημαντική, ιδιαίτερα για μη σχετικιστικά νετρίνο όπου $\mathcal{V}_k T_k^{sprd} < L_{kl}^{coh}$. Τα κυματοπακέτα στο χώρο των θέσεων θα δίνονται ξανά από τη σχέση (2.18):

$$\psi_k(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \psi_k(p) \exp[-i(E_k t - px)] \quad (2.28)$$

όμως αυτή τη φορά η σχέση διασποράς για την ενέργεια $E_k(p)$ θα είναι:

$$E_k(p) = \langle E_k \rangle + \mathcal{V}_k(p - \langle p_k \rangle) + \frac{1}{2} \mathcal{S}_k(p - \langle p_k \rangle)^2 \quad (2.29)$$

Καταλήγουμε:

$$\begin{aligned} \psi_k(x, t) = & \left[\sqrt{2\pi\sigma_x} \left[1 + i \frac{\mathcal{S}_k}{2\sigma_x^2} t \right] \right]^{-1/2} \times \\ & \times \exp \left[i(\langle p_k \rangle x - \langle E_k \rangle t) - \frac{(x - \mathcal{V}_k t)^2}{4\sigma_x^2 + 2i\mathcal{S}_k t} \right] \end{aligned} \quad (2.30)$$

Η πιθανότητα αλλαγής γεύσης συναρτηθεί της απόστασης X και του χρόνου T ⁸ θα είναι:

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta}(X, T) \sim & \exp [i(\langle p_k \rangle - \langle p_l \rangle) X - i(\langle E_k \rangle - \langle E_l \rangle) T] \times \\ & \times \exp \left[-\frac{(X - \mathcal{V}_k T)^2}{4\sigma_x^2 + 2i\mathcal{S}_k T} - \frac{(X - \mathcal{V}_l T)^2}{4\sigma_x^2 - 2i\mathcal{S}_l T} \right] \end{aligned} \quad (2.31)$$

Λαμβάνοντας υπ'οψην τη διασπορά \mathcal{S} των κυματοπακέτων, αποδεικνύεται ότι το μήκος ταλάντωσης L_{kl}^{osc} παραμένει το ίδιο ενώ το μήκος συσχετισμού L_{kl}^{coh} θα μεγαλώσει εφ'οσον αυξάνεται η επικάλυψη των κυματοπακέτων [10].

⁸Η ολοκλήρωση στο χρόνο της παραπάνω σχέσης δε γίνεται, μπορούμε όμως να προσεγγίσουμε το αποτέλεσμα με το στάσιμο σημείο του εκθετικού που συνεισφέρει περισσότερο, κάτι τέτοιο όμως ξεφεύγει από τα πλαίσια της παρούσας εργασίας.

Κεφάλαιο 3

Περιβάλλον Κβαντικής Βαρύτητας

Μέχρι στιγμής δεν υπάρχει κάποια αποδεκτή θεωρία κβαντικής βαρύτητας. Τα τελευταία όμως χρόνια έχουν αναπτυχθεί μοντέλα τα οποία ενσωματώνουν την αφρώδη δομή του χωρόχρονου με τη μορφή στοχαστικών διακυμάνσεων γύρω από τη μετρική που τον περιγράφει.

Υποθέτουμε τετραδιάστατο επίπεδο χωρόχρονο και εισάγουμε κβαντικές διακυμάνσεις $h^{\mu\nu}$ γύρω από τη μετρική Minkowski $\eta^{\mu\nu}$

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu} \quad (3.1)$$

Για απλότητα επιλέγουμε οι στοχαστικές μεταβλητές $h^{\mu\nu}$ να είναι ανεξάρτητες από τις συντεταγμένες του χωρόχρονου, ο οποίος καθορίζεται από την κατανομή $F(\mathbf{h})$ που αυτές ακολουθούν. Επιλέγουμε επίσης οι $h^{\mu\nu}$ να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, άρα μπορούμε να γράψουμε:

$$F(\mathbf{h}) = f(h^{00}) \times f(h^{01}) \times \dots \times f(h^{33}) \quad (3.2)$$

όπου $f(h^{\mu\nu})$ συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για τη μεταβλητή $h^{\mu\nu}$, ίδια για όλα τα $h^{\mu\nu}$.

Η επιλογή στην κατανομή που ακολουθούν οι τυχαίες μεταβλητές $h^{\mu\nu}$ πρέπει να είναι τέτοια, ώστε οι φυσικές ποσότητες που υπολογίζονται να είναι πεπερασμένες και καλά ορισμένες. Με βάση τον περιορισμό αυτό, η κατανομή που μελετήθηκε στην εργασία αυτή είναι η Gaussian.

Κλείνοντας, πρέπει να αναφέρουμε ότι η διάδοση ύλης μέσα σε τέτοιο περιβάλλον έχει σα συνέπεια την εμφάνιση κβαντικού αποσυσχετισμού, με τρόπο που εξαρτάται άμεσα από την κατανομή που ακολουθούν οι $h^{\mu\nu}$.

3.1 Εισαγωγικές Έννοιες

Ένα μποζόνιο σε χωρόχρονο που περιγράφεται από τη μετρική $g^{\mu\nu}$ όπως ορίστηκε στην εξίσωση (3.1), υπακούει στην εξίσωση Klein-Gordon:

$$(g^{00}\partial_0\partial_0 + 2g^{0i}\partial_0\partial_i + g^{ij}\partial_i\partial_j + m^2)\Phi = 0 \quad (3.3)$$

Οι λύσεις θα είναι επίπεδα κύματα της μορφής:

$$\Phi(x, t) = \tilde{\Phi}(E, p)e^{i(px-Et)}, \quad (3.4)$$

όπου p η ορμή του βαθμωτού σωματιδίου σε Minkowski χωρόχρονο και υποθέσαμε κίνηση μόνο κατά τον x - άξονα. Εισάγωντας την εξίσωση (3.4) στην (3.3), καταλήγουμε:

$$g^{00}E^2 - 2g^{01}pE + g^{11}p^2 - m^2 = 0. \quad (3.5)$$

Κρατώντας τη θετική λύση για την ενέργεια, καταλήγουμε στη σχέση διασποράς:

$$E(p) = \frac{g^{01}}{g^{00}}p + \frac{1}{g^{00}}\sqrt{(g^{01})^2 p^2 - g^{00}(g^{11}p^2 - m^2)} \quad (3.6)$$

Αποδεικνύεται ότι σε περιβάλλοντα κβαντικής βαρύτητας όπως αυτά που μελετάμε εδώ, το σπίν ενός σωματιδίου δεν παίζει κανένα ρόλο [16], με αποτέλεσμα μποζόνια και φερμιόνια να ακολουθούν την ίδια σχέση διασποράς (3.6).

Αυτό απλοποιεί σημαντικά τη μελέτη του φαινομένου της ταλάντωσης νετρίνο όταν η διάδοση γίνεται σε τέτοιους χώρους.

3.2 Κβαντομηχανική Περιγραφή με Επίπεδα Κύματα

Είδαμε προηγουμένως ότι η πιθανότητα αλλαγής γεύσης σύμφωνα με τον συνήθη φορμαλισμό για την ταλάντωση νετρίνο σε Minkowski χωρόχρονο δίνεται από τη σχέση (2.6):

$$P_{\alpha\beta} = \sum_{k,l} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha l} U_{\beta l}^* e^{-i(E_k - E_l)t}. \quad (3.7)$$

Εδώ θα μελετήσουμε πώς επηρεάζεται η πιθανότητα αυτή όταν το φαινόμενο λαμβάνει χώρα σε χωρόχρονο με κβαντικές διακυμάνσεις γύρω από τη μετρική που τον περιγράφει.

΄Ας περιοριστούμε αρχικά στην περίπτωση δύο γενιών νετρίνο, έστω e, μ . Το χρονοεξαρτώμενο μέρος της παραπάνω είναι:

$$U_{\alpha 1}^* U_{\beta 1} U_{\alpha 2} U_{\beta 2}^* e^{-i(E_1 - E_2)t} + U_{\alpha 2}^* U_{\beta 2} U_{\alpha 1} U_{\beta 1}^* e^{-i(E_2 - E_1)t} \quad (3.8)$$

Η πιθανότητα αλλαγής γεύσης σε περιβάλλον όπου οι διακυμάνσεις $h^{\mu\nu}$ γύρω από τη μετρική Minkowski είναι στοχαστικές μεταβλητές, θα είναι:

$$\langle P_{\alpha\beta} \rangle = \sum_{k,l} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha l} U_{\beta l}^* \langle e^{-i(E_k - E_l)t} \rangle \quad (3.9)$$

όπου

$$\langle e^{-i(E_1 - E_2)t} \rangle = \int d\mathbf{h} F(\mathbf{h}) e^{-i(E_1 - E_2)t} \quad (3.10)$$

με $\mathbf{h} = h^{00}, h^{01}, \dots, h^{23}, h^{33}$ και $F(\mathbf{h})$ η συνάρτηση κατανομής που ακολουθούν οι $h^{\mu\nu}$. Αφού αυτές είναι ανεξάρτητες θα ισχύει:

$$F(\mathbf{h}) = f(h^{00}) \times f(h^{01}) \times \dots \times f(h^{33}) \quad (3.11)$$

και το παραπάνω ολοκλήρωμα γράφεται και ως

$$\langle e^{-i(E_1 - E_2)t} \rangle = \int dh^{00} f(h^{00}) \dots dh^{33} f(h^{33}) e^{-i(E_1 - E_2)t} \quad (3.12)$$

Η διαφορά ενεργειών $E_1 - E_2$ θα προσεγγιστεί από τη σχέση

διασποράς (3.6), με γραμμική ανάπτυξη γύρω από τις διακυμάνσεις

$$\begin{aligned}
E_1(\mathbf{h}) &= \frac{g^{01}}{g^{00}}p + \frac{1}{g^{00}} \sqrt{(g^{01})^2 p^2 - g^{00} (g^{11} p^2 - m_1^2)} \\
&= h^{01}p + (1 - h^{00}) \sqrt{p^2 + m_1^2} - (p^2 + m_1^2)h^{00} + p^2 h^{11} \\
&= h^{01}p + \sqrt{p^2 + m_1^2} - \frac{1}{2} \sqrt{p^2 + m_1^2} h^{00} - \frac{1}{2} \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + m_1^2}} h^{11}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

όπου κρατήσαμε μόνο τους γραμμικούς όρους. Όμοια για την E_2 θα πάρουμε:

$$E_2(\mathbf{h}) = h^{01}p + \sqrt{p^2 + m_2^2} - \frac{1}{2} \sqrt{p^2 + m_2^2} h^{00} - \frac{1}{2} \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + m_2^2}} h^{11} \tag{3.14}$$

Συνεπώς

$$E_1(\mathbf{h}) - E_2(\mathbf{h}) = \alpha - \frac{\alpha}{2} h^{00} - \frac{b}{2} h^{11} + \mathcal{O}(\mathbf{h}^2) \tag{3.15}$$

με

$$\alpha = \sqrt{p^2 + m_1^2} - \sqrt{p^2 + m_2^2} \quad b = \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + m_1^2}} - \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + m_2^2}} \tag{3.16}$$

Στην παραπάνω γραμμική έκφραση βλέπουμε ότι εμφανίζονται μόνο οι μεταβλητές h^{00} και h^{11} με αποτέλεσμα το ολοκλήρωμα (3.12) να γίνεται:

$$\begin{aligned}
\langle e^{-i(E_1 - E_2)t} \rangle &= \int dh^{00} f(h^{00}) dh^{11} f(h^{11}) \exp \left[-it \left(\alpha - \frac{\alpha}{2} h^{00} - \frac{b}{2} h^{11} \right) \right] \\
&= \Psi(\alpha t/2) \Psi(bt/2) \exp(-iat)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

όπου

$$\Psi(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i\xi x} f(x) \tag{3.18}$$

η χαρακτηριστική συνάρτηση της στοχαστικής μεταβλητής x με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$.

Έστω ότι οι στοχαστικές μεταβλητές ακολουθούν γκαουσιανή κατανομή

$$f(x) = \frac{e^{-x^2/\sigma_h^2}}{\sqrt{\pi\sigma_h^2}} \quad (3.19)$$

με μέση τιμή $\mu = 0$ και τυπική απόκλιση σ_h . Η χαρακτηριστική συνάρτηση υπολογίζεται από τη σχέση (3.18):

$$\begin{aligned} \Psi(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma_h^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(i\xi x - x^2/\sigma_h^2) \\ &= \exp(-\xi^2\sigma_h^2/4) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Από την εξίσωση (3.17) για την γκαουσιανή κατανομή παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \langle e^{-i(E_1-E_2)t} \rangle &= \exp\left(-\frac{\alpha^2 t^2 \sigma_h^2}{16}\right) \exp\left(-\frac{b^2 t^2 \sigma_h^2}{16}\right) \exp(-i\alpha t) \\ &= \exp\left[-i\alpha t - \frac{\sigma_h^2 t^2}{16} (\alpha^2 + b^2)\right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

Η πιθανότητα αλλαγής γεύσης (3.9) θα παρουσιάζει εκθετική απόσβεση συναρτήσει του χρόνου, η οποία εξαρτάται άμεσα από την ορμή του σωματιδίου:

$$\begin{aligned} \langle P_{\alpha\beta} \rangle &= \sum_{k,l} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha l} U_{\beta l}^* \exp\left[-i\alpha t - \frac{\sigma_h^2 t^2}{16} (\alpha^2 + b^2)\right] \\ &= \sum_{k,l} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha l} U_{\beta l}^* \exp[-i\alpha t] \times \exp\left[-\frac{\sigma_h^2 t^2}{16} (\alpha^2 + b^2)\right] \\ &\equiv P_{\alpha\beta} \times \exp\left[-\frac{\sigma_h^2 t^2}{16} (\alpha^2 + b^2)\right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

όπου το $P_{\alpha\beta}$ δίνεται από τις σχέσεις (2.6) και (3.7).

Η γενίκευση σε τρεις γενιές νετρίνο είναι τετριμμένη αλλά για λόγους πληρότητας θα την παρουσιάσουμε. Η πιθανότητα αλλαγής γεύσης δίνεται από τη σχέσεις (2.6) και (3.7):

$$P_{\alpha\beta} = \sum_{k,l} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha l} U_{\beta l}^* e^{-i(E_k-E_l)t} \quad (3.23)$$

με $\alpha = e, \mu, \tau$. Το χρονεξαρτώμενο μέρος είναι :

$$U_{\alpha 1}^* U_{\beta 1} U_{\alpha 2} U_{\beta 2}^* e^{-i(E_1-E_2)t} + U_{\alpha 2}^* U_{\beta 2} + U_{\alpha 3} U_{\beta 3}^* e^{-i(E_2-E_3)t} + U_{\alpha 3}^* U_{\beta 3} U_{\alpha 1} U_{\beta 1}^* e^{-i(E_3-E_1)t} \quad (3.24)$$

Πρέπει να υπολογίσουμε τα

$$\langle e^{-i(E_1-E_2)t} \rangle \quad \langle e^{-i(E_2-E_3)t} \rangle \quad \langle e^{-i(E_3-E_1)t} \rangle \quad (3.25)$$

Ακολουθώντας ακριβώς την ίδια διαδικασία με προηγουμένως, καταλήγουμε για διακυμάνσεις που ακολουθούν τη γκαουσιανή κατανομή:

$$\langle e^{-i(E_k-E_l)t} \rangle = \exp \left[-i\alpha_{kl}t - \frac{\sigma_h^2 t^2}{16} (\alpha_{kl}^2 + b_{kl}^2) \right] \quad (3.26)$$

με α_{kl} και b_{kl} που δίνονται από:

$$\alpha_{kl} = \sqrt{p^2 + m_k^2} - \sqrt{p^2 + m_l^2} \quad b_{kl} = \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + m_k^2}} - \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + m_l^2}} \quad (3.27)$$

Συνεπώς

$$\langle P_{\alpha\beta} \rangle = \sum_{k,l} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha l} U_{\beta l}^* \exp[-i\alpha_{kl}t] \times \exp \left[-\frac{\sigma_h^2 t^2}{16} (\alpha_{kl}^2 + b_{kl}^2) \right] \quad (3.28)$$

Προφανώς οι σχέσεις (3.22) και (3.28) κάνοντας το Time equals Distance Assumption γίνονται :

$$\langle P_{\alpha\beta} \rangle = \sum_{k,l} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha l} U_{\beta l}^* \exp[-i\alpha X] \times \exp \left[-\frac{\sigma_h^2 X^2}{16} (\alpha^2 + b^2) \right]$$

και

$$\langle P_{\alpha\beta} \rangle = \sum_{k,l} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha l} U_{\beta l}^* \exp[-i\alpha_{kl}X] \times \exp \left[-\frac{\sigma_h^2 X^2}{16} (\alpha_{kl}^2 + b_{kl}^2) \right]$$

για τις δύο και τρεις γενιές νετρίνο αντίστοιχα.

Για σχετικιστικά νεutrino όπου $m_i \ll p$, οι σχέσεις (3.21) και (3.26) μπορούν να γραφούν αντίστοιχα και ως:

$$\langle e^{-i(E_1-E_2)t} \rangle \sim \exp \left[-ipt\Delta_{12} \left(1 - \frac{m_1^2 + m_2^2}{4p^2} \right) \right] \exp \left[-\frac{\sigma_h^2(pt)^2}{8} \Delta_{12}^2 \right] \quad (3.29)$$

με

$$\Delta_{12} = \frac{m_1^2 - m_2^2}{2p^2} \ll 1 \quad (3.30)$$

και

$$\langle e^{-i(E_k-E_l)t} \rangle \sim \exp \left[-ipt\Delta_{kl} \left(1 - \frac{m_k^2 + m_l^2}{4p^2} \right) \right] \exp \left[-\frac{\sigma_h^2(pt)^2}{8} \Delta_{kl}^2 \right] \quad (3.31)$$

όπου

$$\Delta_{kl} = \frac{m_k^2 - m_l^2}{2p^2} \ll 1 \quad (3.32)$$

3.3 Εναλλακτική Περιγραφή με Κυματοπακέτα

Στο μοντέλο με κυματοπακέτα που παρουσιάσαμε στο 2^ο Κεφάλαιο, είδαμε ότι ένα νετρίνο μάζας m_k που παράγεται στο χώρο των ορμών ως

$$\psi_k(p) = \left(\sqrt{2\pi}\sigma_p\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(p - \langle p_k \rangle)^2}{4\sigma_p^2}\right] \quad (3.33)$$

έχει χρονικά εξελιγμένη κυματοσυνάρτηση στο χώρο των θέσεων που δίνεται από τη σχέση (2.18):

$$\psi_k(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \psi_k(p) \exp[-i(E_k t - px)] \quad (3.34)$$

με ενέργεια που αυτή τη φορά δεν είναι η συνηθισμένη έκφραση (2.19), αλλά δίνεται από τη σχέση (3.6):

$$E(p) = \frac{g^{01}}{g^{00}}p + \frac{1}{g^{00}} \sqrt{(g^{01})^2 p^2 - g^{00}(g^{11}p^2 - m^2)} \quad (3.35)$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος της (3.30) αναπτύσσουμε την παραπάνω σχέση κατά Taylor γύρω από τη μέση τιμή $\langle p_k \rangle$:

$$\begin{aligned} E_k(p) &= E_k \Big|_{p=\langle p_k \rangle} + \frac{dE_k}{dp} \Big|_{p=\langle p_k \rangle} (p - \langle p_k \rangle) + \dots \\ &= \langle \tilde{E}_k \rangle + \tilde{\mathcal{V}}_k (p - \langle p_k \rangle) + \dots \end{aligned} \quad (3.36)$$

Η ενέργεια $\langle \tilde{E}_k \rangle$ και η φασική ταχύτητα $\tilde{\mathcal{V}}_k$ ορίζονται ως:

$$\langle \tilde{E}_k \rangle = \frac{g^{01}}{g^{00}} \langle p_k \rangle + \frac{1}{g^{00}} \sqrt{(g^{01})^2 \langle p_k \rangle^2 - g^{00}(g^{11} \langle p_k \rangle^2 - m_k^2)} \quad (3.37)$$

και

$$\tilde{\mathcal{V}}_k = \frac{g^{01}}{g^{00}} + \frac{1}{g^{00}} \frac{((g^{01})^2 - g^{00}g^{11}) \langle p_k \rangle}{\sqrt{(g^{01})^2 \langle p_k \rangle^2 - g^{00}(g^{11} \langle p_k \rangle^2 - m_k^2)}} \quad (3.38)$$

Αναπτύσσοντας γραμμικά γύρω από τις διακυμάνσεις $h^{\mu\nu}$ τις παραπάνω σχέσεις, η (3.36) γίνεται:

$$\begin{aligned} E_k(p) &= [\langle E_k \rangle + \mathcal{V}_k (p - \langle p_k \rangle)] + \frac{1}{2} [-\langle E_k \rangle + \mathcal{V}_k (p - \langle p_k \rangle)] h^{00} + p h^{01} \\ &+ \left[\left(\frac{\mathcal{V}_k^3}{2} - \mathcal{V}_k \right) (p - \langle p_k \rangle) - \frac{\langle p_k \rangle \mathcal{V}_k}{2} \right] h^{11} \end{aligned} \quad (3.39)$$

με $\langle E_k \rangle$ και \mathcal{V}_k όπως τα ορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο:

$$\langle E_k \rangle = \sqrt{\langle p_k \rangle^2 + m_k^2} \quad \mathcal{V}_k = \frac{\langle p_k \rangle}{\langle E_k \rangle} \quad (3.40)$$

Με βάση όσα είπαμε, η πιθανότητα αλλαγής γεύσης θα είναι:

$$\begin{aligned} \langle P_{\alpha\beta}(X, T) \rangle &\sim \left\langle \sum_{k,l} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha l} U_{\beta l}^* \exp \{i(\langle p_k \rangle - \langle p_l \rangle)X\} \times \right. \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp \left\{ -\frac{1}{4\sigma_p^2} (p - \langle p_k \rangle)^2 + i(p - \langle p_k \rangle)X - iE_k T \right\} \times \\ &\times \left. \int_{-\infty}^{+\infty} dq \exp \left\{ -\frac{1}{4\sigma_p^2} (q - \langle p_l \rangle)^2 - i(q - \langle p_l \rangle)X + iE_l T \right\} \right\rangle \quad (3.41) \end{aligned}$$

Από την (3.39) η παραπάνω έκφραση γίνεται:

$$\begin{aligned} \langle P_{\alpha\beta}(X, T) \rangle &\sim \sum_{k,l} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha l} U_{\beta l}^* \exp \{i[(\langle p_k \rangle - \langle p_l \rangle)X - (\langle E_k \rangle - \langle E_l \rangle)T]\} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp \left\{ -\frac{1}{4\sigma_p^2} (p - \langle p_k \rangle)^2 + i(X - \mathcal{V}_k T)(p - \langle p_k \rangle) \right\} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} dq \exp \left\{ -\frac{1}{4\sigma_p^2} (q - \langle p_l \rangle)^2 - i(X - \mathcal{V}_l T)(q - \langle p_l \rangle) \right\} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} dh^{00} f(h^{00}) \exp \left\{ iT \frac{A}{2} h^{00} \right\} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} dh^{01} f(h^{01}) \exp \{ iT B h^{01} \} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} dh^{11} f(h^{11}) \exp \{ iT C h^{11} \} \quad (3.42) \end{aligned}$$

όπου τα A, B, C δίνονται αντίστοιχα από:

$$\begin{aligned} A &= (\langle E_k \rangle - \langle E_l \rangle) - \mathcal{V}_k(p - \langle p_k \rangle) + \mathcal{V}_l(q - \langle p_l \rangle) \\ B &= -(\langle p_k \rangle - \langle p_l \rangle) - (p - \langle p_k \rangle) + (q - \langle p_l \rangle) \\ C &= \frac{\langle p_k \rangle \mathcal{V}_k - \langle p_l \rangle \mathcal{V}_l}{2} - \left(\frac{\mathcal{V}_k^3}{2} - \mathcal{V}_k \right) (p - \langle p_k \rangle) + \left(\frac{\mathcal{V}_l^3}{2} - \mathcal{V}_l \right) (q - \langle p_l \rangle) \quad (3.43) \end{aligned}$$

Εκτελώντας τις ολοκληρώσεις στις $h^{\mu\nu}$ για $f(h^{\mu\nu})$ η γκαουσιανή κατανομή της (3.19) και χρησιμοποιώντας την (3.20),

καταλήγουμε:

$$\begin{aligned}
\langle P_{\alpha\beta}(X, T) \rangle &\sim \sum_{k,l} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha l} U_{\beta l}^* \exp \{i [(\langle p_k \rangle - \langle p_l \rangle)X - (\langle E_k \rangle - \langle E_l \rangle)T]\} \times \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp \left\{ -\frac{1}{4\sigma_p^2} (p - \langle p_k \rangle)^2 + i(X - \mathcal{V}_k T)(p - \langle p_k \rangle) \right\} \times \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} dq \exp \left\{ -\frac{1}{4\sigma_p^2} (q - \langle p_l \rangle)^2 - i(X - \mathcal{V}_l T)(q - \langle p_l \rangle) \right\} \times \\
&\times \exp \left\{ -\frac{T^2 \sigma_h^2}{4} \left[\left(\frac{A}{2} \right)^2 + B^2 + C^2 \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Στο σημείο αυτό καλό είναι να αναφέρουμε ότι παρουσιάζουμε μια πρώτη τάξης προσέγγιση για την πιθανότητα αλλαγής γεύσης. Οι υπολογισμοί που έγιναν για ανώτερες τάξεις συμφωνούν με τα αποτελέσματα στο [16], και είναι μικρές διορθώσεις πάνω στο αποτέλεσμα.

Κρατάμε μόνο γραμμικούς όρους από τα A, B, C για τις ορμές και αγνοούμε συνεισφορές $T^4 \sigma_h^4$:

$$\begin{aligned}
\langle P_{\alpha\beta}(X, T) \rangle &\sim \sum_{k,l} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha l} U_{\beta l}^* \exp \{i [(\langle p_k \rangle - \langle p_l \rangle)X - (\langle E_k \rangle - \langle E_l \rangle)T]\} \times \\
&\times \exp \left\{ -\frac{T^2 \sigma_h^2}{16} [\tilde{\alpha}_{kl}^2 + \tilde{b}_{kl}^2 + \tilde{c}_{kl}^2] \right\} \times \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp \left\{ -\frac{1}{4\sigma_p^2} (p - \langle p_k \rangle)^2 + i(X - \mathcal{V}_k T)(p - \langle p_k \rangle) \right\} \times \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} dq \exp \left\{ -\frac{1}{4\sigma_p^2} (q - \langle p_l \rangle)^2 - i(X - \mathcal{V}_l T)(q - \langle p_l \rangle) \right\} + O(T^4 \sigma_h^4)
\end{aligned} \tag{3.45}$$

όπου

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_{kl}^2 &= (\langle E_k \rangle - \langle E_l \rangle)^2 \\
\tilde{b}_{kl}^2 &= (\langle p_k \rangle \mathcal{V}_k - \langle p_l \rangle \mathcal{V}_l)^2 \\
\tilde{c}_{kl}^2 &= (\langle p_k \rangle - \langle p_l \rangle)^2
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Η τελική έκφραση για την πιθανότητα αλλαγής γεύσης στην

προσέγγιση που κάναμε θα είναι :

$$\begin{aligned} \langle P_{\alpha\beta}(X, T) \rangle &\sim \sum_{k,l} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha l} U_{\beta l}^* \exp \left\{ -\frac{T^2 \sigma_h^2}{16} \mathcal{A} \right\} \times \\ &\times \exp \{ i [(\langle p_k \rangle - \langle p_l \rangle) X - (\langle E_k \rangle - \langle E_l \rangle) T] \} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{(X - \mathcal{V}_k T)^2}{4\sigma_x^2} - \frac{(X - \mathcal{V}_l T)^2}{4\sigma_x^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.47)$$

όπου θέσαμε

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \tilde{a}_{kl}^2 + \tilde{b}_{kl}^2 + \tilde{c}_{kl}^2 \equiv \\ &\equiv (\langle E_k \rangle - \langle E_l \rangle)^2 + (\langle p_k \rangle \mathcal{V}_k - \langle p_l \rangle \mathcal{V}_l)^2 + (\langle p_k \rangle - \langle p_l \rangle)^2 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω σχέση (3.47) με τις (2.24) και (3.28) παρατηρούμε ότι η διάδοση σε ένα στοχαστικό περιβάλλον προκαλεί την εμφάνιση κβαντικού αποσυσχετισμού, ανεξάρτητα από το μοντέλο που χρησιμοποιούμε για την περιγραφή της ταλάντωσης των νετρίνο. Στην πιθανότητα αλλαγής γεύσης εμφανίζεται ένας επιπλέον παράγοντας απόσβεσης, ο οποίος εξαρτάται από την κατανομή που ακολουθούν οι διακυμάνσεις $h^{\mu\nu}$ και από τις ορμές και μάζες των νετρίνο.

Η (3.47) συναρτήσει της απόστασης X μόνο θα είναι :

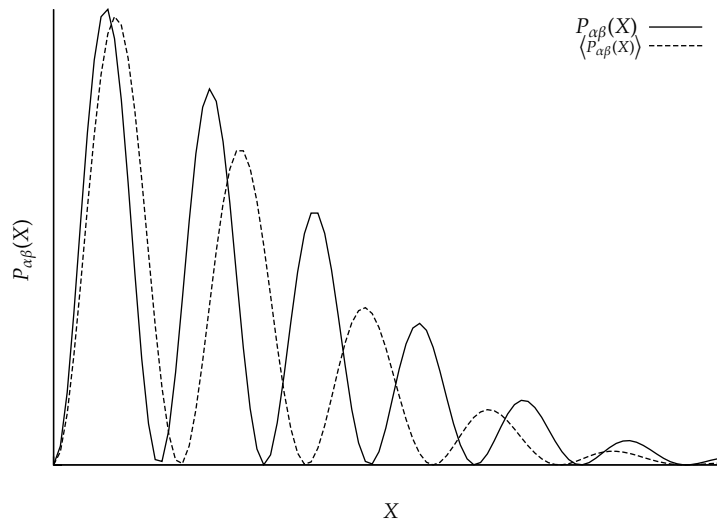
$$\begin{aligned} \langle P_{\alpha\beta}(X) \rangle &\sim \exp \left\{ i \left[(\langle p_k \rangle - \langle p_l \rangle) - (\langle E_k \rangle - \langle E_l \rangle) \left[\frac{\mathcal{V}_k + \mathcal{V}_l}{\sigma_h^2 \sigma_x^2 \mathcal{A} + \mathcal{V}_k^2 + \mathcal{V}_l^2} \right] \right] X \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{X^2}{\sigma_x^2} \left[\frac{(\mathcal{V}_k - \mathcal{V}_l)^2}{\mathcal{V}_k^2 + \mathcal{V}_l^2} + \frac{\sigma_h^2 \sigma_x^2}{2(\mathcal{V}_k^2 + \mathcal{V}_l^2)} \mathcal{A} \right] \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{(\langle E_k \rangle - \langle E_l \rangle)^2}{4\sigma_p^2 (\sigma_h^2 \sigma_x^2 \mathcal{A} + \mathcal{V}_k^2 + \mathcal{V}_l^2)} \right\} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Τα μήκη ταλάντωσης είναι μεγαλύτερα από αυτά της (2.26) και δίνονται από

$$\tilde{L}_{kl}^{osc} = \frac{2\pi}{|\langle E_k \rangle - \langle E_l \rangle|} \left[\frac{\mathcal{V}_k + \mathcal{V}_l}{\mathcal{V}_k^2 + \mathcal{V}_l^2} - \sigma_h^2 \sigma_x^2 \mathcal{A} \frac{\mathcal{V}_k + \mathcal{V}_l}{\mathcal{V}_k^2 + \mathcal{V}_l^2} - \frac{\langle p_k \rangle - \langle p_l \rangle}{\langle E_k \rangle - \langle E_l \rangle} \right]^{-1} \quad (3.50)$$

Τα μήκη συσχετισμού από την παραπάνω έκφραση για $\mathcal{V}_k \neq \mathcal{V}_l$ είναι μικρότερα από αυτά που βρήκαμε στην (2.27) και δίνονται από:

$$\tilde{L}_{kl}^{coh} \sim \sigma_x \left[\frac{\mathcal{V}_k^2 + \mathcal{V}_l^2}{(\mathcal{V}_k - \mathcal{V}_l)^2} - \sigma_h^2 \sigma_x^2 \mathcal{A} \frac{\mathcal{V}_k^2 + \mathcal{V}_l^2}{(\mathcal{V}_k - \mathcal{V}_l)^4} \right]^{1/2} \quad (3.51)$$



Σχήμα 3.1: Όταν έχουμε διάδοση σε περιβάλλον κβαντικής βαρύτητας το μήκος ταλάντωσης αυξάνεται, ενώ η εμφάνιση του $-\frac{X^2 \sigma_h^2 \mathcal{A}}{\mathcal{V}_k^2 + \mathcal{V}_l^2}$ στο εκθετικό αναγκάζει την πιθανότητα αλλαγής γεύσης να φθίνει πιο γρήγορα.

Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία κάναμε αρχικά μία συνοπτική παρουσίαση του καθιερωμένου κβαντομηχανικού φορμαλισμού για το φαινόμενο της ταλάντωσης των νετρίνο, και υπολογίσαμε την πιθανότητα να ανιχνεύσουμε ένα νεutrino συγκεκριμένης γεύσης ως νεutrino διαφορετικής γεύσης ύστερα από κάποια απόσταση X (2.6).

Έπειτα μελετήσαμε ένα ρεαλιστικό μοντέλο με κυματοπακέτα για την περιγραφή των ιδιοκαταστάσεων της Χαμιλτονιανής $|ν_k\rangle$, μέσω του οποίου διαπιστώσαμε ότι η πιθανότητα αλλαγής γεύσης (2.25) εξαρτάται από την επικάλυψη των κυματοπακέτων. Ορίσαμε ως μήκος συσχετισμού L_{kl}^{coh} την απόσταση πέρα από την οποία τα κυματοπακέτα σταματάνε να επικαλύπτονται, με αποτέλεσμα η πιθανότητα αλλαγής γεύσης να γίνεται σταθερή και ανεξάρτητη της απόστασης. Αυτό οδηγεί όπως είδαμε και στο 2^ο Κεφάλαιο στην εμφάνιση κβαντικού αποσυσχετισμού.

Στο τελευταίο Κεφάλαιο δείξαμε ότι οι κβαντικές διακυμάνσεις $h^{\mu\nu}$ γύρω από μετρική Minkowski που περιγράφει το χωρόχρονο, τροποποιούν την πιθανότητα αλλαγής γεύσης. Πιο συγκεκριμένα, εμφανίζεται ένας παράγοντας απόσβεσης, η μορφή του οποίου εξαρτάται από την κατανομή που επιλέξαμε να ακολουθούν οι διακυμάνσεις (3.28).

Στο μοντέλο με κυματοπακέτα, για την πρώτη τάξης προσέγγιση που παρουσιάσαμε εδώ, είδαμε ότι ο ήδη υπάρχων παράγοντας απόσβεσης στην πιθανότητα αλλαγής γεύσης (2.25) ενισχύεται. Άμεση συνεπεία είναι ότι το μήκος συσχετισμού (2.27) των κυματοπακέτων μικραίνει κατά μία ποσότητα που εξαρτάται μεταξύ άλλων από το σ_h^2 της κατανομής που ακολουθούν οι $h^{\mu\nu}$, και δίνεται από τη σχέση (3.50).

Βιβλιογραφία

- [1] Gordon A. Baym. *Lectures on Quantum Mechanics*. Westview, 1969.
- [2] David J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics*. Prentice Hall, Inc., 1995.
- [3] Κωνσταντίνος Ε. Βαγιονάκης. *Σωματιδιακή Φυσική: Μια Εισαγωγή στη Βασική Δομή της Ύλης*. Εκδόσεις Ε.Μ.Π., 2008.
- [4] Στέφανος Τραχανάς. *Κβαντομηχανική ΙΙ*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2008.
- [5] David J. Griffiths. *Introduction to Elementary Particles*. John Wiley and Sons, Inc., 1987.
- [6] Boris Kayser. On the quantum mechanics of neutrino oscillation. *Phys. Rev. D*, 24(1):110--116, Jul 1981.
- [7] J. Rich. Quantum mechanics of neutrino oscillations. *Phys. Rev. D*, 48(9):4318--4325, Nov 1993.
- [8] Carlo Giunti and Chung W. Kim. Quantum mechanics of neutrino oscillations. *Found. Phys. Lett.*, 14:213--229, 2001.
- [9] Carlo Giunti. Neutrino flavor states and oscillations. *J. Phys.*, G34:R93--R109, 2007.
- [10] C. Giunti, C. W. Kim, and U. W. Lee. When do neutrinos really oscillate? quantum mechanics of neutrino oscillations. *Phys. Rev. D*, 44(11):3635--3640, Dec 1991.
- [11] C. W. Kim. *Neutrino physics: Fundamentals of neutrino oscillations*. 1996.

- [12] C. Giunti, C. W. Kim, and U. W. Lee. When do neutrinos cease to oscillate? *Phys. Lett.*, B421:237--244, 1998.
- [13] C. Giunti and C. W. Kim. Coherence of neutrino oscillations in the wave packet approach. *Phys. Rev. D*, 58(1):017301, Jun 1998.
- [14] C. Giunti. Coherence and wave packets in neutrino oscillations. *Found. Phys. Lett.*, 17:103--124, 2004.
- [15] H. Burkhardt, J. Lowe, G.J. Stephenson Jr., and T. Goldman. The wavelength of neutrino and neutral kaon oscillations. *Physics Letters B*, 566(1-2):137 -- 141, 2003.
- [16] J. Alexandre, K. Farakos, N. E. Mavromatos, and P. Pasipoularides. Neutrino oscillations in a stochastic model for space-time foam. *Phys. Rev.*, D77:105001, 2008.
- [17] N. E. Mavromatos and Sarben Sarkar. Methods of approaching decoherence in the flavour sector due to space-time foam. *Phys. Rev.*, D74:036007, 2006.
- [18] Nussinov S. Solar neutrinos and neutrino mixing. *Physics Letters*, 63B, Jul 1976.
- [19] Carlo Giunti and Chung W.Kim. *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*. Oxford University Press, 2007.