

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ  
ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

**ΠΕΝΤΑΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ  
ΒΑΘΜΙΔΑΣ ΣΕ ΧΩΡΟΧΡΟΝΙΚΟ  
ΠΛΕΓΜΑ**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΣΠΥΡΟΥ ΒΡΕΝΤΖΟΥ

Διπλωματούχου Φυσικού, ΠΑΝ. ΚΡΗΤΗΣ

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:**

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΦΑΡΑΚΟΣ

Αναπλ.Καθηγητής Ε.Μ.Π

28 Μαρτίου 2012

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΠΕΝΤΑΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΒΑΘΜΙΔΑΣ  
ΣΕ ΧΩΡΟΧΡΟΝΙΚΟ ΠΛΕΓΜΑ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ  
ΣΠΥΡΟΥ ΒΡΕΝΤΖΟΥ  
Διπλωματούχου Φυσικού, ΠΑΝ. ΚΡΗΤΗΣ

**ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ  
ΕΠΙΤΡΟΠΗ:**

1. Κ.ΦΑΡΑΚΟΣ, Αν.Καθ.Ε.Μ.Π (Επιβλέπων)
2. Γ.ΚΟΥΤΣΟΥΜΠΑΣ, Αν.Καθ.Ε.Μ.Π
3. Κ.ΑΝΑΓΝΩΣΤΟΠΟΥΛΟΣ, Καθ.Ε.Μ.Π
4. ΦΩΤΗΣ ΔΙΑΚΟΝΟΣ, Επικ.Καθ.ΠΑΝ.Αθηνών
5. ΝΙΚΟΣ ΗΡΓΕΣ, Επικ.Καθ.Ε.Μ.Π
6. ΑΝΤΩΝΗΣ ΤΣΑΠΑΛΗΣ, Λεκ.Σχ.Ναυτ.Δοκ
7. ΙΩΑΝΝΗΣ ΜΠΑΚΑΣ, Καθ.ΠΑΝ.Πατρών

**ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ  
ΕΠΙΤΡΟΠΗ:**

1. Κ.ΦΑΡΑΚΟΣ, Αν.Καθ.Ε.Μ.Π (Επιβλέπων)
2. Γ.ΚΟΥΤΣΟΥΜΠΑΣ, Αν.Καθ.Ε.Μ.Π
3. Κ.ΑΝΑΓΝΩΣΤΟΠΟΥΛΟΣ, Καθ.Ε.Μ.Π

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Τεχνικές Monte – Carlo</b>	<b>6</b>
1.1	Εισαγωγικές σημειώσεις . . . . .	6
1.2	Ένα στατιστικό σύστημα . . . . .	6
1.3	Η κατάσταση ισορροπίας . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Οι προσομοιώσεις Monte – Carlo</b>	<b>8</b>
2.0.1	Επιλογή καταστάσεων . . . . .	8
2.0.2	Διεργασία Markov . . . . .	9
2.0.3	Εργοδικότητα . . . . .	9
2.0.4	Λεπτομερής ισορροπία . . . . .	9
2.0.5	Αναλογία αποδοχής . . . . .	10
2.1	Ο αλγόριθμος Metropolis . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Εργαλεία στατιστικής ανάλυσης.</b>	<b>11</b>
3.1	<i>JackKnife</i> . . . . .	11
3.2	Η μέθοδος πολλαπλού ιστογράμματος. . . . .	12
<b>4</b>	<b>Τα πεδία στο χωροχρονικό πλέγμα</b>	<b>14</b>
4.1	Το βαθμωτό πεδίο . . . . .	14
4.2	Τα φερμιόνια στο πλέγμα . . . . .	15
4.3	Τα αβελιανά πεδία βαθμίδας στο πλέγμα-Η περίπτωση της συμπαγούς <i>QED</i> . . . . .	17
4.4	Το δυναμικό αλληλεπίδρασης στατικού ζεύγους quark-antiquark και ο βρόχος του Wilson. . . . .	19
<b>5</b>	<b>Πολυδιάστατες θεωρίες</b>	<b>23</b>
5.1	Μεγάλες επιπλέον διαστάσεις - Το μοντέλο <i>ADD</i> . . . . .	25
5.2	Στρεβλές ( <i>warped</i> ) επιπλέον διαστάσεις-Μη παραγοντοποιήσιμη γεωμετρία . . . . .	26
5.2.1	Το μοντέλο των Randall-Shundrum . . . . .	26
<b>6</b>	<b>Το μοντέλο</b>	<b>27</b>
6.1	Τα φυσικά μεγέθη . . . . .	29
6.1.1	Η πλακέτα . . . . .	29
6.1.2	Το μέτρο ελικότητας(Helicity modulus) . . . . .	30
<b>7</b>	<b>Το διάγραμμα φάσης</b>	<b>32</b>
<b>8</b>	<b>Αποτελέσματα Monte Carlo</b>	<b>34</b>
8.1	Η ισχυρής ζεύξης-στρωματική μετάβαση τάξης . . . . .	34
8.2	Η Coulomb-Στρωματική μετάβαση φάσης . . . . .	41
<b>9</b>	<b>Η περίπτωση της μη μηδενικής θερμοκρασίας.</b>	<b>45</b>
9.1	Το μοντέλο . . . . .	45
9.2	Τα φυσικά μεγέθη . . . . .	46
9.2.1	Το μέτρο ελικότητας για την περίπτωση της μη μηδενικής θερμοκρασίας. . . . .	46
9.2.2	Ο βρόχος Polyakov ή η γραμμή Wilson. . . . .	49

<b>10 Τρεις οριακές περιπτώσεις</b>	<b>50</b>
10.1 Η περίπτωση της μηδενικής θερμοκρασίας . . . . .	50
10.2 Η περίπτωση $\beta' = 0$ . . . . .	51
10.3 Η περίπτωση $L_t = 1$ . . . . .	55
<b>11 Μελέτη του διαγράμματος φάσης για <math>L_t = 2</math></b>	<b>56</b>
11.1 Η γραμμή $\beta' = 0.20$ . . . . .	57
11.2 Η γραμμή $\beta = 1.10$ . . . . .	59
<b>12 Αναλυτική μελέτη της στρωματικής φάσης, υπολογισμός του δυναμικού αλληλεπίδρασης.</b>	<b>61</b>
12.1 Η περίπτωση των τεσσάρων διαστάσεων. . . . .	61
12.1.1 Μετρήσεις . . . . .	61
12.2 Πέντε διαστάσεις-Η περίπτωση της στρωματικής φάσης. . . . .	66
12.2.1 Η περίπτωση του $16 \times 10^4$ . . . . .	67
12.2.2 Η περίπτωση του $12^5$ . . . . .	71
12.2.3 Η επανακανονικοποιημένη σταθερά λεπτής υφής, συγκεντρωτικά αποτελέσματα . . . . .	73
12.2.4 Αποτελέσματα απο το μέτρο ελικότητας (helicity modulus). . . . .	74
12.2.5 Η πενταδιάστατη φάση <b>Coulomb</b> . . . . .	75
<b>13 Επίλογος</b>	<b>80</b>

## Εισαγωγή

Οι πολυδιάστατες θεωρίες εισήχθησαν από τους Kalousa και Klain σε μια προσπάθεια ενοποίησης όλων των μέχρι τότε γνωστών αλληλεπιδράσεων. Στο πλαίσιο αυτό αναπτύχθηκαν διάφορες θεωρίες με πιο διαδεδομένες την θεωρία χορδών και την αποκαλούμενη M-Theory. Η πρώτη απαιτεί την ύπαρξη ενός δεκαδιάστατου χωρόχρονου ενώ η δεύτερη έντεκα διαστάσεις. Παρόλο που απέχουμε πολύ από την πειραματική επιβεβαίωση της ύπαρξης έξι διαστάσεων οι θεωρίες αυτές έχουν βρει μεγάλη άνθηση τις τελευταίες δεκαετίες καθώς προσπαθούν να δώσουν λύσεις σε χρόνια ζητήματα, που μέχρι σήμερα δεν έχουν βρει ικανοποιητική απάντηση, όπως το ζήτημα της ιεράρχησης, της κοσμολογικής σταθεράς και της ιεράρχησης της μάζας των φερμιονίων. Οι θεωρίες μεμβρανών υιοθετούν την αντίληψη ότι ο κόσμος μας αποτελείται από μια τρισδιάστατη μεμβράνη (Brane) εμφυτευμένη σε έναν χώρο μεγαλύτερων διαστάσεων (Bulk).

Μία κατηγορία αυτών των θεωριών βασίζεται σε έναν  $(4+n)$ -διάστατο χώρο, με  $n$  επίπεδες και συμπαγείς έξι διαστάσεις (ADD scenario[1]), ενώ μια άλλη επικαλείται μή συμπαγείς και στρεβλές διαστάσεις

( Randall-Sundrum[2] πρώτο και δεύτερο μοντέλο). Παρόλο που οι θεωρίες αυτές είχαν ως στόχο, αρχικά, τις βαρυτικές αλληλεπιδράσεις γρήγορα επεκτάθηκαν και στα υπόλοιπα πεδία, αναζητώντας τρόπους παγίδευσής τους στην μεμβράνη. Ένας πολύ ισχυρός μηχανισμός παγίδευσης εκτεταμένων δομών σωματιδίων, όπως είναι τα φερμιόνια, τα βαθμωτά φορτισμένα σωματίδια και τα πεδία βαθμίδας βασίζεται στην 'καταστολή' των πεδίων στις επιπλέον διαστάσεις. Ένας τέτοιος μηχανισμός θα μπορούσε παραδείγματος χάριν να δημιουργηθεί από μια πολυδιάστατη βαρύτητα.

Απο τα μέσα της δεκαετίας του ογδόντα, οι Fu και Nielsen[3] πρότειναν ένα πενταδιάστατο αβελιανό μοντέλο βαθμίδας με άνισες συζεύξεις, στο πλέγμα, το οποίο θα μπορούσε να εξυπηρετήσει ως μια νέα μέθοδος επίτευξης διαστατικής ελάττωσης. Η βασική ιδέα πίσω από το μοντέλο αυτό ήταν ότι λόγω της ανισοτροπίας των αλληλεπιδράσεων ανάμεσα στις τέσσερις διαστάσεις και την επιπλέον (πέμπτη), το διάγραμμα φάσης του μοντέλου αυτού θα μπορούσε να δώσει και μια νέα φάση, πέρα από τις ήδη γνωστές. Χρησιμοποιώντας θεωρία μέσου πεδίου έδειξαν ότι μια νέα φάση όντως υπάρχει, η αποκαλούμενη στρωματική (Layer) φάση, η οποία έχει τα χαρακτηριστικά μιας Coulomb φάσης στις τέσσερις διαστάσεις ενώ καταστέλλει τα πεδία κατά την επιπλέον διάσταση. Ο περιορισμός αυτός των πεδίων οδηγεί σε έλλειψη αλληλεπιδράσεων μεταξύ των γειτονικών στρωμάτων και μέσω της έλλειψης αυτής σε έναν 'ενεργά' τετραδιάστατο χωρόχρονο.

Οι πολυδιάστατες θεωρίες βαθμίδας ανήκουν στην κατηγορία των μη επανακανονικοποιήσιμων. Για αυτόν τον λόγο μπορούν να αποκτήσουν ισχύ μόνο ως προϊόντα θεμελιωδών θεωριών, η φύση των οποίων δεν έχει ακόμη ξεκαθαριστεί. Ένας τρόπος για να παρακάμψει κάποιος το γεγονός αυτό είναι να υιοθετήσει την ύπαρξη ενός κατωφλιού  $\Lambda$  και να αντιμετωπίσει την θεωρία του ως μια προκύπτουσα θεωρία στο όριο των επαρκώς χαμηλών ενεργειών. Η θεωρία διαταραχών αδυνατεί να μας δώσει έναν μηχανισμό περιορισμού των πεδίων στην τρισδιάστατη υποπολλαπλότητα (submanifold) για αυτό και η χρήση μη διαταρακτικών μεθόδων κρίνεται επιβεβλημένη.

Η διδακτορική διατριβή ασχολείται με την μελέτη της προαναφερθείσας πενταδιάστατης αβελιανής θεωρίας βαθμίδας, με άνισες συζεύξεις, ανεξάρτητες μεταξύ τους και ανεξάρτητες από τις συντεταγμένες. Σαφής στόχος αποτελεί η διεξοδική μελέτη της νέας αυτής φάσης που ακριβώς λόγω της ιδιομορφίας της αφήνει ανοιχτό το ενδεχόμενο για την δημιουργία ενός μηχανισμού που θα επιτρέπει την παγίδευση των αβελιανών πεδίων βαθμίδας.

# 1 Τεχνικές *Monte – Carlo*

## 1.1 Εισαγωγικές σημειώσεις

Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση των τεχνικών *Monte – Carlo* ας κάνουμε μια σύντομη αναδρομή σε βασικές έννοιες και αρχές της στατιστικής φυσικής. Ο κλάδος της στατιστικής φυσικής ασχολείται κυρίως με τον υπολογισμό των ιδιοτήτων συστημάτων συμπυκνωμένης ύλης. Με εφαλτήριο τη μικροσκοπική περιγραφή της μηχανικής (ή πιο σωστά της κβαντομηχανικής) προσπαθεί να φτάσει στην μακροσκοπική θεώρηση της θερμοδυναμικής και τον υπολογισμό μηχανικών ποσοτήτων με μακροσκοπικό αντίκρουσμα και ενδιαφέρον. Η εγγενής δυσκολία στην προσπάθεια αυτή είναι ότι ακόμη και εάν τα μικροσκοπικά μέρη του συστήματος ικανοποιούν απλές φυσικές εξισώσεις ο πολύ μεγάλος αριθμός τους καθιστά αδύνατη την άμεση επίλυσή τους. Σε αυτό ακριβώς το σημείο η στατιστική μηχανική έρχεται να παρακάμψει το πρόβλημα υιοθετώντας μια πιθανοκρατική αντίληψη. Αντι να ασχολείται με την ακριβή επίλυση των εξισώσεων ασχολείται με την **πιθανότητα** το σύστημα να βρίσκεται στην μία ή την άλλη κατάσταση, να έχει αυτή την τιμή της πίεσης ή την άλλη.

## 1.2 Ένα στατιστικό σύστημα

Έστω ένα σύστημα με χαμιλτονιανή  $H$  που μας δίνει την συνολική ενέργεια του συστήματος για κάθε κατάσταση. Υποθέτουμε επίσης ότι το ενεργειακό φάσμα των καταστάσεων είναι διακριτό ( $E_0, E_1, \dots$ )

Ξεκινώντας από την ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης και ανεβαίνοντας. Συνδέουμε το σύστημα με μια θερμική δεξαμενή η οποία δρα ως πηγή και καταβόθρα θερμότητας, ανταλλάσσοντας συνεχώς ενέργεια με το σύστημά μας και το αναγκάζει να περνά από την μία ενεργειακή κατάσταση στην άλλη.

Έστω ότι τη χρονική στιγμή  $t$  το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση  $\mu$ . Ορίζουμε ως  $R(\mu \rightarrow \nu)dt$  την πιθανότητα το σύστημά μας να βρεθεί στην κατάσταση  $\nu$  μετά την πάροδο χρόνου  $dt$ . Το  $R(\mu \rightarrow \nu)$  συμβολίζει τον ρυθμό μετάβασης από την κατάσταση  $\mu$  στην  $\nu$  και για λόγους απλότητας υποθέτουμε ότι είναι ανεξάρτητος του χρόνου. Μπορούμε να ορίσουμε ένα  $R(\mu \rightarrow \nu)$  για κάθε κατάσταση  $\nu$  στην οποία δύναται να καταλήξει το σύστημα. Φυσικά, γνώση της αρχικής κατάστασης  $\mu$  του συστήματος δεν επαρκεί αφού μετά την πάροδο σύντομου χρονικού διαστήματος αυτό μπορεί να καταλήξει σε οποιαδήποτε, από έναν πολύ μεγάλο αριθμό δυνατών καταστάσεων,  $\nu$ . Σε αυτό το σημείο εισέρχεται η πιθανοκρατική θεώρηση. Ορίζουμε ένα σύνολο από ‘βάρη’  $w_\mu(t)$  που αναπαριστούν την **πιθανότητα** το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση  $\mu$  την χρονική στιγμή  $t$ . Τα  $w_\mu$  εμπεριέχουν όλη μας την γνώση για την κατάσταση του συστήματος. Μπορούμε να γράψουμε την **κύρια εξίσωση** (στην πραγματικότητα πρόκειται για ένα σύνολο εξισώσεων) για την εξέλιξη του  $w_\mu(t)$  συναρτήσει των  $R(\mu \rightarrow \nu)$ :

$$\frac{dw_\mu(t)}{dt} = \sum_\nu (w_\nu(t)R(\nu \rightarrow \mu) - w_\mu(t)R(\mu \rightarrow \nu)) \quad (1)$$

όπου το πρώτο μέρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης.1 αναπαριστά τον ρυθμό με τον οποίο το σύστημα πραγματοποιεί μεταβάσεις προς την κατάσταση  $\mu$  ενώ το δεύτερο τον ρυθμό που πραγματοποιεί μεταβάσεις από την  $\mu$  σε μια οποιαδήποτε άλλη κατάσταση  $\nu$ .

Τα  $w_\mu(t)$  ικανοποιούν την σχέση

$$\sum_{\mu} w_{\mu}(t) = 1 \quad (2)$$

για κάθε  $t$  αφού το σύστημα πρέπει κάθε χρονική στιγμή να βρίσκεται σε μια από τις καταστάσεις του.

Οι λύσεις της εξίσωσης (1) που υπόκεινται στον περιορισμό της (2) μας δίνουν την χρονική εξέλιξη των  $w_\mu(t)$ . Η αναμενόμενη τιμή ενός μεγέθους  $Q$ , την χρονική στιγμή  $t$ , που παίρνει την τιμή  $Q_\mu$  στην κατάσταση  $\mu$  δίνεται από την σχέση:

$$\langle Q \rangle = \sum_{\mu} Q_{\mu} w_{\mu}(t) \quad (3)$$

### 1.3 Η κατάσταση ισορροπίας

Εάν κάποια στιγμή το σύστημά μας βρεθεί σε μια κατάσταση όπου τα δύο μέρη του δεξιού μέλους της εξίσωσης (1) αλληλοεξουδετερωνθούν, τότε, οι ρυθμοί μεταβολής  $\frac{dw_{\mu}(t)}{dt}$  μηδενίζονται και τα βάρη  $w_{\mu}$  αποκτούν σταθερή τιμή για το υπόλοιπο του χρόνου. Αυτή είναι η **κατάσταση ισορροπίας**. Η φύση των εξισώσεων (1) και η συνθήκη (2) οδηγούν αργά η γρήγορα όποιο σύστημα τις ικανοποιεί σε κατάσταση ισορροπίας. Το σημαντικό κομμάτι βέβαια είναι ότι γνωρίζουμε από πρώτες αρχές την τιμή των  $w_{\mu}$  στην κατάσταση αυτή. Οι πιθανότητες κατάληψης (όπως ονομάζονται)

$$p_{\mu} = \lim_{t \rightarrow \infty} w_{\mu}(t)$$

για ένα σύστημα σε θερμική ισορροπία με μία δεξαμενή θερμότητας, σε θερμοκρασία  $T$ , δίνονται από:

$$p_{\mu} = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_{\mu}}{kT}} \quad (4)$$

όπου  $E_{\mu}$  είναι η ενέργεια της κατάστασης  $\mu$  και  $k$  η σταθερά του Boltzmann (Gibbs, 1902).

Η κατανομή πιθανότητας που ορίζεται από την εξίσωση (4) ονομάζεται κατανομή **Boltzmann**. Το  $Z$  είναι μια σταθερά κανονικοποίησης, που ονομάζεται και **συνάρτηση επιμερισμού** και δίνεται από την σχέση:

$$Z = \sum_{\mu} e^{-\frac{E_{\mu}}{kT}} = \sum_{\mu} e^{-\beta E_{\mu}} \quad \text{με} \quad \beta \equiv \frac{1}{kT} \quad (5)$$

Αποδεικνύεται ότι γνώση της εξάρτησης του  $Z$  από την θερμοκρασία ή οποια άλλη παράμετρο επηρεάζει την κατάσταση του συστήματος μπορεί να μας παράσχει ουσιαστικά οποιαδήποτε πληροφορία επιθυμούμε σχετικά με την μακροσκοπική συμπεριφορά του συστήματος.

Η αναμενόμενη τιμή μιας ποσότητας  $Q$  σε κατάσταση ισορροπίας δίνεται από την:

$$\langle Q \rangle = \sum_{\mu} p_{\mu} Q_{\mu} = \frac{1}{Z} \sum_{\mu} Q_{\mu} e^{-\beta E_{\mu}} \quad (6)$$

## 2 Οι προσομοιώσεις Monte – Carlo

Η βασική ιδέα πίσω από τις τεχνικές *Monte – Carlo* είναι η προσομοίωση των θερμικών διακυμάνσεων του συστήματος, καθώς αυτό διέρχεται από τις διάφορες καταστάσεις του, στην πορεία του πειράματος. Δημιουργούμε ένα μοντέλο του συστήματος στον υπολογιστή και το αναγκάζουμε να κινηθεί δια μέσου μιας ποικιλίας καταστάσεων με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε η πιθανότητα αυτό να βρεθεί σε μια κατάσταση  $\mu$  την χρονική στιγμή  $t$  να ισούται με  $w_\mu(t)$ , δηλαδή, με την πιθανότητα που θα είχε αυτή η κατάσταση στο πραγματικό σύστημα. Με άλλα λόγια προσπαθούμε να προσομοιώσουμε την πραγματική φυσική διεργασία που οδηγεί στην **κύρια εξίσωση**. Για το σκοπό αυτό επιλέγουμε τους ρυθμούς μετάβασης  $R(\mu \rightarrow \nu)$  με τέτοιο τρόπο ώστε οι λύση των εξισώσεων (1) σε κατάσταση ισορροπίας να είναι ακριβώς η κατανομή *Boltzmann*. Μετά χρησιμοποιούμε τους ρυθμούς αυτούς για την επιλογή των καταστάσεων από τις οποίες θα περάσει το σύστημα κατά την διάρκεια της προσομοίωσης και από αυτές αποκτάμε μια εκτίμηση για όποιο φυσικό μέγεθος μας ενδιαφέρει.

Υπολογίζουμε την αναμενόμενη τιμή της ποσότητας που μας ενδιαφέρει αθροίζοντας την τιμή της πάνω σε όλες τις καταστάσεις  $\mu$  του συστήματος ζυγίζοντας την κάθε μία με την δική της πιθανότητα *Boltzmann*.

$$\langle Q \rangle = \frac{\sum_{\mu} Q_{\mu} e^{-\beta E_{\mu}}}{\sum_{\mu} e^{-\beta E_{\mu}}}$$

Για μεγάλα συστήματα ο υπολογισμός αυτός είναι αδύνατος λόγω του πολύ μεγάλου αριθμού των δυνατών καταστάσεων. Σε αυτό το σημείο παρεμβαίνουν οι τεχνικές *Monte – Carlo*, επιλέγοντας ένα τυχαίο υποσύνολο καταστάσεων με δεδομένη κατανομή πιθανότητας ( $P_{\mu i}$ ). Έστω  $M$  τέτοιες καταστάσεις  $\{\mu_1, \dots, \mu_M\}$ . Η καλύτερη εκτίμηση που μπορούμε να κάνουμε τώρα για την ποσότητα  $Q$  είναι:

$$Q_M = \frac{\sum_{i=1}^M Q_{\mu_i} P_{\mu_i}^{-1} e^{-\beta E_{\mu_i}}}{\sum_{j=1}^M P_{\mu_j}^{-1} e^{-\beta E_{\mu_j}}} \quad (7)$$

Το  $Q_M$  ονομάζεται ο **εκτιμητής** του  $Q$  και έχει την ιδιότητα  $\langle Q \rangle = \lim_{M \rightarrow \infty} Q_M$  Το ζήτημα που παρουσιάζεται σε αυτό το σημείο είναι με ποια κριτήρια θα γίνει η επιλογή των ‘αντιπροσωπευτικών’ καταστάσεων  $M$ .

### 2.0.1 Επιλογή καταστάσεων

Η στρατηγική μας είναι η εξής: επιλέγουμε τις καταστάσεις  $M$  με τέτοιο τρόπο ώστε η πιθανότητα επιλογής της κάθε μιας να ακολουθεί την κατανομή *Boltzmann*,  $p_{\mu} = \frac{e^{-\beta E_{\mu}}}{Z}$ , έτσι ο εκτιμητής μας για την ποσότητα  $Q$  γίνεται:

$$Q_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M Q_{\mu_i} \quad (8)$$

που είναι μια ιδιαιτέρως απλή ποσότητα. Το πρόβλημα έγκειται στον τρόπο με τον οποίο θα γίνει η επιλογή των καταστάσεων έτσι ώστε αυτές να ικανοποιούν την κατανομή *Boltzmann*.



## 2.0.2 Διεργασία Markov

Σχεδόν όλες οι εκδοχές των τεχνικών *Monte – Carlo* χρησιμοποιούν την διεργασία *Markov* ως την γεννήτρια μηχανή των καταστάσεων που χρησιμοποιούν. Μια διεργασία *Markov*, δεδομένης αρχικής κατάστασης του συστήματος  $\mu$ , γεννά μια νέα κατάσταση  $\nu$  με τυχαίο τρόπο έτσι ώστε να μην παράγεται η ίδια τελική κατάσταση κάθε φορά που ξεκινάμε από την  $\mu$ . Η πιθανότητα μετάβασης  $P(\mu \rightarrow \nu)$  πρέπει να ικανοποιεί δύο συνθήκες: (1) πρέπει να μην μεταβάλλεται με τον χρόνο (2) να εξαρτάται μόνο από τις καταστάσεις  $\mu$  και  $\nu$  και όχι από οποιαδήποτε άλλη κατάσταση από την οποία έχει περάσει το σύστημα. Με αυτόν τον τρόπο εξασφαλίζεται ότι η πιθανότητα η διεργασία *Markov* να γεννήσει την κατάσταση  $\nu$  από την  $\mu$  είναι η ίδια κάθε φορά και ανεξάρτητη από την προηγούμενη ιστορία του συστήματος. Επίσης οι πιθανότητες μετάβασης πρέπει να ικανοποιούν την συνθήκη

$$\sum_{\nu} P(\mu \rightarrow \nu) = 1, \quad (9)$$

αφού πρέπει να παραχθεί κάποια τελική κατάσταση.

Σημειώνουμε εδώ ότι η πιθανότητα  $P(\mu \rightarrow \mu)$ , δηλαδή η πιθανότητα το σύστημα να παραμείνει στην ίδια κατάσταση, δεν είναι μηδενική.

Σε μια προσομοίωση *Monte – Carlo* χρησιμοποιούμε την διεργασία *markov* για να γεννήσουμε μια ακολουθία καταστάσεων οι οποίες μετά την πάροδο επαρκούς χρονικού διαστήματος θα εμφανίζονται με πιθανότητα που δίνεται από την κατανομή *Boltzmann*.

Η διεργασία *Markov* συμπληρώνεται από δύο ακόμη συνθήκες.

## 2.0.3 Εργοδικότητα

Η συνθήκη της εργοδικότητας μας εξασφαλίζει ότι οποιαδήποτε κατάσταση  $\nu$  είναι προσβάσιμη από οποιαδήποτε άλλη  $\mu$  εάν αφήσουμε το σύστημα να τρέξει για επαρκώς μεγάλο χρονικό διάστημα. Χωρίς την παραπάνω συνθήκη θα ήταν αδύνατο να φτάσουμε τον στόχο μας που είναι η παραγωγή καταστάσεων σύμφωνα με την κατανομή *Boltzmann*. Μπορούμε παρόλα αυτά να θέσουμε την πιθανότητα μετάβασης για ορισμένα από τα ‘μονοπάτια’ της διαδοχής των καταστάσεων στο μηδέν αρκεί να αφήσουμε τουλάχιστον μία διαδρομή μη μηδενικής πιθανότητας.

## 2.0.4 Λεπτομερής ισορροπία

Ένας άλλος περιορισμός που επιβάλλουμε στην διεργασία *Markov* είναι η συνθήκη της λεπτομερούς ισορροπίας. Η συνθήκη αυτή μας εξασφαλίζει ότι οι καταστάσεις μας, όταν το σύστημα φτάσει πια σε κατάσταση ισορροπίας, θα ικανοποιούν την κατανομή *Boltzmann*.

Στην ισορροπία οι ρυθμοί με τους οποίους το σύστημα πραγματοποιεί μεταβάσεις από και προς μια κατάσταση  $\mu$  είναι ίση. Αυτό εκφράζεται μαθηματικά ως εξής:

$$\sum_{\nu} p_{\mu} P(\mu \rightarrow \nu) = \sum_{\nu} p_{\nu} P(\nu \rightarrow \mu)$$

και με χρήση της εξίσωσης (9) έχουμε

$$p_{\mu} = \sum_{\nu} p_{\nu} P(\nu \rightarrow \mu)$$

Παρόλο που η παραπάνω συνθήκη μας εξασφαλίζει το ότι η κατανομή  $p_\mu$  θα είναι κατάσταση ισορροπίας της δυναμικής *Markov* δεν είναι επαρκής για να μας εξασφαλίσει ότι η κατανομή πιθανότητας θα τείνει στο  $p_\mu$  από οποιαδήποτε κατάσταση του συστήματος εάν το αφήσουμε να εξελιχθεί για μεγάλο χρονικό διάστημα<sup>1</sup>.

Για να παρακάμψουμε την δυσκολία αυτή εφαρμόζουμε μία ακόμη συνθήκη για τις πιθανότητες μετάβασης.

$$p_\mu P(\mu \rightarrow \nu) = p_\nu P(\nu \rightarrow \mu) \quad (10)$$

Αυτή είναι η συνθήκη της λεπτομερούς ισορροπίας και μας λέει ότι κατά μέσο όρο το σύστημα πραγματοποιεί μεταβάσεις από το  $\mu$  στο  $\nu$  σχεδόν όσες φορές ακολουθεί την αντίστροφη πορεία. Για  $p_\mu$  την κατανομή *Boltzmann* η συνθήκη αυτή γίνεται:

$$\frac{P(\mu \rightarrow \nu)}{P(\nu \rightarrow \mu)} = \frac{p_\mu}{p_\nu} = e^{-\beta(E_\nu - E_\mu)} \quad (11)$$

Οι εξισώσεις (9) και (11) αποτελούν τις απαραίτητες συνθήκες για την επιλογή των πιθανοτήτων μετάβασης  $P(\mu \rightarrow \nu)$ .

### 2.0.5 Αναλογία αποδοχής

Είδαμε μέχρι στιγμής ότι η δημιουργία ενός αλγόριθμου *Monte – Carlo* στηρίζεται στην επιλογή κατάλληλων πιθανοτήτων μετάβασης που ικανοποιούν τις εξισώσεις (9) και (11), στη συνέχεια μέσω μιας διεργασίας *Markov* παράγουμε καταστάσεις με αυτές ακριβώς τις πιθανότητες μετάβασης και καταλήγουμε με μια αλυσίδα καταστάσεων για το σύστημά μας που ικανοποιούν την κατανομή *Boltzmann*. Το βασικό ερώτημα όμως παραμένει ποια είναι η κατάλληλη επιλογή για τα  $P(\mu \rightarrow \nu)$ . Ευτυχώς οι συνθήκες (9) και (11) μας παρέχουν μεγάλη ελευθερία κινήσεων στην επιλογή αυτή.

Χωρίζουμε το  $P(\mu \rightarrow \nu)$  σε δύο μέρη

$$P(\mu \rightarrow \nu) = g(\mu \rightarrow \nu)A(\mu \rightarrow \nu)$$

όπου  $g(\mu \rightarrow \nu)$  είναι η **πιθανότητα επιλογής**, δηλαδή η πιθανότητα, δεδομένης της αρχικής κατάστασης  $\mu$  ο αλγόριθμός μας να γεννήσει την κατάσταση  $\nu$  και  $A(\mu \rightarrow \nu)$  η **πιθανότητα αποδοχής**. Η πιθανότητα αυτή μας λέει ότι εάν ξεκινήσουμε από την κατάσταση  $\mu$  και ο αλγόριθμός μας γεννήσει μια νέα κατάσταση  $\nu$  αυτή θα πρέπει να γίνει αποδεκτή και να πραγματοποιήσουμε την μετάβαση ένα μέρος του χρόνου  $A(\mu \rightarrow \nu)$ . Τον υπόλοιπο χρόνο θα πρέπει απλώς να παραμείνουμε στην κατάσταση  $\mu$ . Το  $A(\mu \rightarrow \nu)$  μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ μηδέν και ένα. Η συνθήκη της εξίσωσης (11) δεν μας περιορίζει στην επιλογή του  $g(\mu \rightarrow \nu)$  αφού καθορίζει μόνο τον λόγο των πιθανοτήτων μετάβασης

$$\frac{P(\mu \rightarrow \nu)}{P(\nu \rightarrow \mu)} = \frac{g(\mu \rightarrow \nu)A(\mu \rightarrow \nu)}{g(\nu \rightarrow \mu)A(\nu \rightarrow \mu)} \quad (12)$$

ενώ την ίδια στιγμή η συνθήκη της (9) ικανοποιείται αφού το σύστημα κατά την διεργασία *Markov* πάντοτε καταλήγει σε μια κατάσταση ακόμη και αν αυτή είναι η ίδια η αρχική.

Συνεπώς η κατασκευή του αλγόριθμού μας ανάγεται στην δημιουργία καταστάσεων  $\nu$  δεδομένων αρχικών  $\mu$ , με πιθανότητες  $g(\mu \rightarrow \nu)$  και λόγους αποδοχής  $A(\mu \rightarrow \nu)$  επιλεγμένους έτσι ώστε να ικανοποιούν την (12).

<sup>1</sup>Το πρόβλημα παρουσιάζεται κυρίως λόγω της ύπαρξης οριακών κύκλων (δες *Barkema* σελ 36).

## 2.1 Ο αλγόριθμος *Metropolis*

Στον αλγόριθμο *Metropolis* επιλέγουμε οι πιθανότητες  $g(\mu \rightarrow \nu)$  να είναι ίσες. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι δυνατές καταστάσεις  $\nu$  που μπορούν να παραχθούν από την αρχική  $\mu$  είναι ισοπίθανες. Η εξίσωση 12 γίνεται:

$$\frac{P(\mu \rightarrow \nu)}{P(\nu \rightarrow \mu)} = \frac{A(\mu \rightarrow \nu)}{A(\nu \rightarrow \mu)} = e^{-\beta(E_\nu - E_\mu)} \quad (13)$$

Η επιλογή των πιθανοτήτων αποδοχής επιδιώκει την όσο δυνατόν μεγαλύτερη ευκινησία του αλγορίθμου. Βασική επιδίωξή μας είναι το σύστημα να περάσει από όσο το δυνατόν μεγαλύτερο αριθμό διαφορετικών καταστάσεων. Για τον σκοπό αυτό δίνουμε στην μεγαλύτερη πιθανότητα την μέγιστη δυνατή τιμή (δηλαδή μονάδα) και προσαρμόζουμε την άλλη έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη της εξίσωσης (12).

$$A(\mu \rightarrow \nu) = \begin{cases} e^{-\beta(E_\nu - E_\mu)} & \text{εάν } E_\nu - E_\mu > 0 \\ 1 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (14)$$

Η εξίσωση (14) μας λέει ότι εάν οδηγηθούμε σε μια κατάσταση ( $\nu$ ) με χαμηλότερη ενέργεια από την αρχική ( $\mu$ ), τότε, πραγματοποιούμε πάντοτε την μετάβαση. Στην αντίθετη περίπτωση αποδεχόμαστε ή απορρίπτουμε την καινούργια κατάσταση με πιθανότητα που δίνεται από την (14). Η εξίσωση (14) είναι και η ουσία ενός αλγόριθμου *Metropolis*.

## 3 Εργαλεία στατιστικής ανάλυσης.

### 3.1 *JackKnife*

Κάθε εκτίμηση της μέσης τιμής ενός στατιστικού μεγέθους οφείλει, για να θεωρηθεί αξιόπιστη, να συνοδεύεται από μια εκτίμηση για το σφάλμα του αποτελέσματος. Την ποσότητα δηλαδή που καθορίζει πόσο ακριβές είναι το αποτέλεσμά μας. Όπως με κάθε πείραμα έτσι και οι προσομοιώσεις *MonteCarlo* συνοδεύονται από δύο ειδών σφάλματα, τα στατιστικά σφάλματα και τα συστηματικά. Το στατιστικό σφάλμα αφορά στις αλλαγές στις οποίες υπόκειται το υπό μελέτη σύστημα από μέτρηση σε μέτρηση και η συνήθης μέθοδος υπολογισμού του κάνει χρήση μεγάλου αριθμού μετρήσεων της ποσότητας που μας ενδιαφέρει με τον επακόλουθο υπολογισμό του εύρους των αποκτούμενων τιμών. Απο την άλλη μεριά το συστηματικό σφάλμα είναι ενσωματωμένο στην ίδια την μέθοδο που χρησιμοποιούμε για τις μετρήσεις μας και αφορά ολόκληρη την προσομοίωση. Στους υπολογισμούς *Monte Carlo* η κύρια πηγή στατιστικού σφάλματος στην μετρούμενη τιμή μιας ποσότητας είναι οι διακυμάνσεις της ποσότητας αυτής από το ένα χρονικό βήμα της διαδικασίας στο επόμενο. Έστω μια προσομοίωση ενός συστήματος κατά την οποία προσπαθούμε να υπολογίσουμε την μέση τιμή της φυσικής ποσότητας που μας ενδιαφέρει ( $\Phi$ ). Η καλύτερη εκτίμηση που μπορούμε να επιτύχουμε από ένα σύνολο  $N$  αποτελεσμάτων είναι:

$$\bar{\Phi} = \frac{\sum_{i=1}^N \Phi_i}{N} \quad (15)$$

και για την τυπική απόκλιση:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Phi_i - \bar{\Phi})^2}{(N-1)}} = \sqrt{\frac{1}{N-1} (\bar{\Phi}^2 - \bar{\Phi}^2)}. \quad (16)$$

Η παραπάνω έκφραση βασίζεται στην παραδοχή ότι το δείγμα μας ( $\Phi_i$ ) αποτελείται από στατιστικώς ανεξάρτητες μετρήσεις γεγονός που δεν δικαιολογείται από την ίδια την φύση της μεθόδου Monte Carlo. Επίσης, τις περισσότερες φορές, καλούμαστε να υπολογίσουμε μη γραμμικές συναρτήσεις των βασικών μεγεθών της θεωρίας  $f(\Phi)$ . Για τον λόγο αυτό ως η πλέον αποδεκτή μέθοδος για τον καθορισμό των στατιστικών σφαλμάτων έχει καθιερωθεί η μέθοδος **Jack Knife**.

Για την εφαρμογή της μεθόδου αυτής ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

Απο το σύνολο των  $N$  μετρήσεων πραγματοποιούμε μια εκτίμηση του μεγέθους που μας ενδιαφέρει  $f$ . Στην συνέχεια μπορούμε να αποκτήσουμε επιπλέον  $n$  εκτιμήσεις για το μέγεθος αυτό ( $f_i$ ) ακολουθώντας την εξής διαδικασία. Παίρνουμε  $n$  ανεξάρτητα υποσύνολα και υπολογίζουμε τα  $f_i$  όπου  $i = 1, \dots, n$  ως εξής: απο το σύνολο των  $n$  μετρήσεων αφαιρούμε την πρώτη και εν συνεχεία προχωρούμε στον υπολογισμό της ποσότητας που μας ενδιαφέρει,  $f_1$ , χρησιμοποιώντας τις υπόλοιπες  $n - 1$ . Τοποθετούμε την αρχική μέτρηση πίσω στο σύνολο και αφαιρούμε την δεύτερη. Απο το υποσύνολο που απομένει προχωρούμε στον υπολογισμό του  $f_2$ . Η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου εξαντληθούν οι μετρήσεις. Αποδεικνύεται ότι μια καλή εκτίμηση του σφάλματος είναι η

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n (f_i - f)^2} \quad (17)$$

όπου  $f_i$  είναι η εκτίμηση του μεγέθους που μας ενδιαφέρει έχοντας αφαιρέσει την  $i$  μέτρηση  $\Phi_i$  και χρησιμοποιώντας τις υπόλοιπες  $n - 1$ .

### 3.2 Η μέθοδος πολλαπλού ιστογράμματος.

Έστω ένα σύστημα με διακριτό ενεργειακό φάσμα καταστάσεων. Για μια προσομοίωση Monte Carlo με παραγωγή καταστάσεων που ικανοποιούν την κατανομή Boltzmann, η πιθανότητα παραγωγής μιας κατάστασης με ενέργεια  $E$ , σε οποιοδήποτε χρονικό στάδιο είναι  $p(E)$  και δίνεται από την έκφραση:

$$p(E) = \rho(E) \frac{e^{-\beta E}}{Z} \quad (18)$$

όπου  $\rho(E)$  είναι η ενεργειακή πυκνότητα καταστάσεων, ο αριθμός των καταστάσεων του συστήματος με ενέργεια  $E$ , και  $Z$  η συνάρτηση επιμερισμού. Αν πραγματοποιήσουμε μια προσομοίωση Monte Carlo για αντίστροφη τιμή της θερμοκρασίας  $\beta$  και πάρουμε  $n$  ανεξάρτητες μετρήσεις για την συνολική ενέργεια του συστήματος  $E$ , τότε, είμαστε σε θέση να αποκτήσουμε μια εκτίμηση για το  $p(E)$ :

$$p(E) = \frac{N(E)}{n} \quad (19)$$

όπου  $N(E)$  είναι ο αριθμός των φορών από τις  $n$  μετρήσεις όπου το σύστημα βρέθηκε να έχει ενέργεια  $E$ . Απο τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει για την ενεργειακή πυκνότητα καταστάσεων:

$$\rho(E) = \frac{N(E)}{n} \frac{Z}{e^{-\beta E}} \quad (20)$$

Αν στην συνέχεια πραγματοποιήσουμε μια προσομοίωση για διαφορετική τιμή της αντίστροφης θερμοκρασίας  $\beta_i$  θα αποκτήσουμε και μια διαφορετική εκτίμηση για την πυκνότητα των καταστάσεων:

$$\rho_i(E) = \frac{N_i(E)}{n_i} \frac{Z_i}{e^{-\beta_i E}} \quad (21)$$

Όμως η  $\rho(E)$  είναι μια ποσότητα που εξαρτάται μόνο από την φύση του υπό μελέτη συστήματος και όχι από την θερμοκρασία. Με άλλα λόγια τα  $\rho_i(E)$  αποτελούν διαφορετικές εκτιμήσεις της ίδιας συνάρτησης. Εύλογα προκύπτει η αξίωση του καθορισμού της πραγματικής πυκνότητας καταστάσεων δεδομένου ενός συνόλου διαφορετικών προσομοιώσεων, για διαφορετικές τιμές της αντίστροφης θερμοκρασίας  $\beta_i$ , με αλληλοεπικαλυπτόμενο εύρος ενεργειών. Είναι προφανές ότι η παραπάνω εξίσωση θα μας δώσει μια καλή προσέγγιση της πυκνότητας των καταστάσεων στις περιοχές όπου τα αντίστοιχα ιστογράμματα  $N_i(E)$  έχουν μεγάλο αριθμό δειγμάτων και φτωχή στις περιοχές όπου έχουν μικρό. Επομένως είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε την σταθμισμένη μέση τιμή των  $\rho_i(E)$  έτσι ώστε να αποκτήσουμε μια καλή προσέγγιση για ολόκληρο το εύρος των ενεργειών που καλύπτονται από τις προσομοιώσεις μας. Αποδεικνύεται ότι η μεταβλητότητα  $\sigma_i^2(E)$  της πυκνότητας καταστάσεων  $\rho_i(E)$  είναι ανάλογη του  $N_i^{-1}(E)$ . Δηλαδή μπορούμε να ζυγίσουμε κάθε ανεξάρτητη εκτίμηση σύμφωνα με τον αριθμό των δειγμάτων στο εκάστοτε ιστόγραμμα για την δεδομένη τιμή της ενέργειας.

$$\sigma_i^2 = \frac{\rho^2(E)}{N_i(E)} \quad (22)$$

όπου  $\rho(E)$  είναι η ακριβής ενεργειακή πυκνότητα καταστάσεων. Η σταθμισμένη μέση τιμή, που αποτελεί και την καλύτερη εκτίμησή μας, δίνεται από την:

$$\rho(E) = \frac{\sum_i N_i(E)}{\sum_j n_j Z_j^{-1} e^{-\beta_j E}} \quad (23)$$

Η συνάρτηση επιμερισμού δίνεται από την σχέση:

$$Z_k = \sum_E \rho(E) e^{-\beta_k E} = \sum_E \frac{\sum_i N_i(E)}{\sum_j n_j Z_j^{-1} e^{[(\beta_k - \beta_j)E]}} \quad (24)$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί και την ουσία της μεθόδου πολλαπλού ιστογράμματος. Ξεκινώντας από μια αρχική εκτίμηση των τιμών  $Z_k$  της συνάρτησης επιμερισμού για τις διαφορετικές τιμές της αντίστροφης θερμοκρασίας  $\beta_k$ . Τις εισάγουμε στην παραπάνω εκτίμηση και καταλήγουμε σε μια καλύτερη εκτίμηση για αυτές. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία πολλές φορές έως ότου επιτευχθεί σύγκλιση των τιμών σε κάποια σταθερή τιμή. Δεδομένων των τιμών αυτών μπορούμε να υπολογίσουμε την συνάρτηση επιμερισμού για οποιαδήποτε τιμή της θερμοκρασίας από την γενίκευση της σχέσης για το  $Z_k$ .

$$Z(\beta) = \sum_E \frac{\sum_i N_i(E)}{\sum_j n_j Z_j^{-1} e^{(\beta - \beta_j)E}} \quad (25)$$

Έχοντας την τιμή του  $Z(\beta)$  μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε άλλες ποσότητες όπως η εσωτερική ενέργεια του συστήματος:

$$U(\beta) = \sum_E E \rho(E) \frac{e^{-\beta E}}{Z(\beta)} = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_E E \frac{\sum_i N_i(E)}{\sum_j n_j Z_j^{-1} e^{(\beta - \beta_j)E}} \quad (26)$$

## 4 Τα πεδία στο χωροχρονικό πλέγμα

Το 1974 ο *Wilson* πρότεινε έναν επαναστατικό μηχανισμό για τον περιορισμό των κουαρκς. Αντικατέστησε τον συνεχή χωρόχρονο τοποθετώντας τα πεδία βαθμίδας σε ένα ευκλείδειο χωροχρονικό πλέγμα με σταθερά πλέγματος  $a$ . Η θεωρία που προκύπτει ενσωματώνει με φυσικό τρόπο ένα υπεριώδες κατώφλι (το αντίστροφο της σταθεράς πλέγματος) απομακρύνοντας τους απειρισμούς που μαστίζουν την κβαντική θεωρία πεδίων. Φυσικά για να μπορέσει ο μηχανισμός αυτός να δώσει πραγματικά αποτελέσματα θα πρέπει στο τέλος των υπολογισμών να αφαιρέσουμε την πλεγματοειδή δομή (παίρνοντας το όριο  $a \rightarrow 0$ ) μελετώντας το όριο της θεωρίας μας στο συνεχές. Η διαδικασία αυτή είναι κάθε άλλο παρά τετριμμένη είναι καθώς απαιτεί την ακριβή ρύθμιση των παραμέτρων της θεωρίας με την σταθερά πλέγματος, με τρόπο που καθορίζεται από την δυναμική του εκάστοτε συστήματος, έτσι ώστε τα φυσικά μεγέθη να χάσουν την εξάρτησή τους από την υποκείμενη δομή του πλέγματος.

### 4.1 Το βαθμωτό πεδίο

Η εξίσωση για ένα ελεύθερο πραγματικό βαθμωτό πεδίο είναι:

$$(\square + M^2)\Phi(x) = 0 \quad (27)$$

η οποία προκύπτει από την δράση

$$S = -\frac{1}{2} \int d^4x \Phi(x)(\square + M^2)\Phi(x) \quad (28)$$

με Λανγκρανζιανή πυκνότητα  $L = \frac{1}{2}\partial^\mu\Phi\partial_\mu\Phi - \frac{1}{2}M^2\Phi^2$ .

Οι συναρτήσεις *Green* της θεωρίας δίνονται από την έκφραση

$$G(x, y, \dots) = \langle \Omega | T(\Phi(x)\Phi(y) \dots) | \Omega \rangle \quad (29)$$

με  $\Omega$  την θεμελιώδη κατάσταση του συστήματος και  $T$  το χρονικά διατεταγμένο γινόμενο των τελεστών  $\Phi(x)$ . Η αναπαράσταση της παραπάνω έκφρασης στον φορμαλισμό των ολοκληρωμάτων διαδρομών (**path integrals**) είναι:

$$G(x, y, \dots) = \frac{\int D\Phi \Phi(x)\Phi(y) \dots e^{iS[\Phi]}}{\int D\Phi e^{iS[\Phi]}} \quad (30)$$

όπου το  $\int D\Phi$  συμβολίζει το άθροισμα πάνω σε όλες τις διαμορφώσεις του πεδίου  $\Phi$ . Εάν πραγματοποιήσουμε μια αναλυτική επέκταση σε φανταστικούς χρόνους ( $x_0 \rightarrow -ix_4$ ) οδηγούμαστε στον Ευκλείδειο φορμαλισμό της θεωρίας του οποίου το μεγάλο πλεονέκτημα έγκειται στην στενή σχέση μεταξύ του φορμαλισμού αυτού και της στατιστικής φυσικής. Οι παραπάνω σχέσεις γίνονται:

$$\langle \Phi(x)\Phi(y) \dots \rangle = \frac{\int D\Phi \Phi(x)\Phi(y) \dots e^{-S_E[\Phi]}}{\int D\Phi e^{-S_E[\Phi]}} \quad (31)$$

με  $S_E[\Phi]$  την ευκλείδεια μορφή της δράσης

$$S_E[\Phi] = \frac{1}{2} \int d^4x \Phi(x)(-\square + M^2)\Phi(x) \quad (32)$$

,με  $\square = \sum_{\mu=1}^4 \partial_{\mu} \partial_{\mu}$ ,  $\Phi(x) \equiv \Phi(\vec{x}, x_4)$  και  $D\Phi = \prod_{\vec{x}, x_4} d\Phi$ . Σε αυτό το σημείο είμαστε έτοιμοι για την εισαγωγή του χωροχρονικού πλέγματος με σταθερά πλέγματος  $\alpha$ . Κάθε σημείο στο πλέγμα αναπαριστάται από 4 ακέραιους αριθμούς που συμβολίζουμε συλλογικά ως  $n \equiv (n_1, n_2, n_3, n_4)$ . Το πέρασμα από το συνεχές στο πλέγμα πραγματοποιείται μέσω των αντικαταστάσεων:

$$x_{\mu} \rightarrow n_{\mu} \alpha \quad (33)$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi(n\alpha) \quad (34)$$

$$\int d^4x \rightarrow \alpha^4 \sum_n \quad (35)$$

$$\square \phi(x) \rightarrow \frac{1}{2} \hat{\square} \phi(n\alpha) \quad (36)$$

$$D\phi \rightarrow \prod_n d\phi(n\alpha) \quad (37)$$

και τον αδιάστατο λαπλασιανό τελεστή στο πλέγμα ορισμένο ως εξής:

$$\hat{\square} \phi(n\alpha) = \sum_{\mu} (\phi(n\alpha + \hat{\mu}\alpha) + \phi(n\alpha - \hat{\mu}\alpha) - 2\phi(n\alpha))$$

με  $\hat{\mu}$  το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την διεύθυνση  $\mu$ .

Για να μεταφέρουμε τις εκφράσεις του φορμαλισμού των ολοκληρωμάτων διαδρομών στο πλέγμα εισάγουμε τις αδιάστατες ποσότητες  $\hat{\phi}_n = \alpha \phi(n\alpha)$  και  $\hat{M} = \alpha M$ . Οι εξισώσεις (37) και (38) γίνονται:

$$\langle \hat{\phi}_n \hat{\phi}_m \dots \rangle = \frac{\int \prod_l d\hat{\phi}_l \hat{\phi}_n \hat{\phi}_m \dots e^{-S_E[\hat{\phi}]}}{\int \prod_l d\hat{\phi}_l e^{-S_E[\hat{\phi}]}} \quad (38)$$

με

$$S_E = -\frac{1}{2} \sum_{n, \hat{\mu}} \hat{\phi}_n \hat{\phi}_{n+\hat{\mu}} + \frac{1}{2} (8 + \hat{M}^2) \sum_n \hat{\phi}_n \hat{\phi}_n \quad (39)$$

και το άθροισμα πάνω στα  $\mu$  να εκτείνεται πάνω σε όλες τις θετικές και αρνητικές διευθύνσεις.

Ένα σημαντικό στοιχείο που πρέπει να επισημάνουμε εδώ είναι ότι η δράση της εξίσωσης (45) δεν είναι μοναδική είναι όμως η απλούστερη δυνατή. Ο μόνος περιορισμός που αντιμετωπίζει κανείς όταν προσπαθεί να διαμορφώσει μια θεωρία στο πλέγμα είναι η απαίτηση η θεωρία αυτή να δίνει τα σωστά αποτελέσματα στο συνεχές όριο. Δηλαδή παίρνοντας το όριο  $\alpha \rightarrow 0$  και ρυθμίζοντας κατάλληλα τις παραμέτρους της θεωρίας με την σταθερά πλέγματος θα πρέπει κανείς να παράγει τις σωστές εξισώσεις της θεωρίας στο συνεχές.

## 4.2 Τα φερμιόνια στο πλέγμα

Η εξίσωση *Dirac* για τα φερμιόνια στον χώρο *Minkowski* είναι:

$$(i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} - M)\psi(x) = 0 \quad (40)$$

και προκύπτει από την δράση

$$S^F[\psi, \bar{\psi}] = \int d^4x \bar{\psi}(x) (i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} - M)\psi(x) \quad (41)$$

με  $\gamma^\mu$  τους  $4 \times 4$  πίνακες *Dirac* που ικανοποιούν τις σχέσεις αντιμετάθεσης  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$  και  $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ .

Στον φορμαλισμό των ολοκληρωμάτων διαδρομής οι συναρτήσεις *Green* της θεωρίας δίνονται από την έκφραση

$$\langle \Omega | T \Psi_\alpha(x) \dots \bar{\Psi}_\beta(y) \dots | \Omega \rangle = \frac{\int D\bar{\psi} D\psi \psi_\alpha(x) \dots \bar{\psi}_\beta(y) \dots e^{iS_F}}{\int D\bar{\psi} D\psi e^{iS_F}}$$

Πραγματοποιώντας την επέκταση στον φανταστικό χρόνο οι παραπάνω σχέσεις γίνονται:

$$\langle \psi_\alpha(x) \dots \bar{\psi}_\beta(y) \dots \rangle = \frac{\int D\bar{\psi} D\psi (\psi_\alpha(x) \dots \bar{\psi}_\beta(y) \dots) e^{-S_F^{eucl}}}{\int D\bar{\psi} D\psi e^{-S_F^{eucl}}} \quad (42)$$

$$S_F^{eucl} = \int d^4x \bar{\psi}(x) (\gamma_\mu^E \partial_\mu + M) \psi(x) \quad (43)$$

όπου τώρα το νέο σύνολο των πινάκων  $\gamma$  ικανοποιούν τις σχέσεις  $\{\gamma_\mu^E, \gamma_\nu^E\} = 2\delta_{\mu\nu}$ .

Η εισαγωγή του χωροχρονικού πλέγματος, με τα πεδία να ζουν στα πλεγματικά σημεία  $n\alpha$  και το στοιχείο ολοκλήρωσης να δίνεται από την έκφραση

$$D\bar{\psi} D\psi = \prod_{\alpha, n} d\bar{\psi}_\alpha(n\alpha) \prod_{\beta, m} d\psi_\beta(m\alpha)$$

καθώς και η εισαγωγή αδιάστατων μεταβλητών μέσω των σχέσεων:

$$M \rightarrow \frac{1}{\alpha} \hat{M} \quad (44)$$

$$\psi_\alpha(x) \rightarrow \frac{1}{\alpha^{3/2}} \hat{\psi}_\alpha(n) \quad (45)$$

$$\bar{\psi}_\alpha(x) \rightarrow \frac{1}{\alpha^{3/2}} \bar{\hat{\psi}}^\alpha(n) \quad (46)$$

$$\partial_\mu \psi(x) \rightarrow \frac{1}{\alpha^{5/2}} \hat{\partial}_\mu \hat{\psi}(n) \quad (47)$$

με  $\hat{\partial}_\mu \hat{\psi}_\alpha(n) = \frac{1}{2} [\hat{\psi}_\alpha(n + \hat{\mu}) - \hat{\psi}_\alpha(n - \hat{\mu})]$  μας οδηγεί στην ακόλουθη μορφή για τις εξισώσεις (42) και (43)

$$S_F = \sum_{n, m_{\alpha, \beta}} \bar{\hat{\psi}}_\alpha(n) K_{\alpha\beta}(n, m) \hat{\psi}_\beta(m) \quad (48)$$

όπου

$$K_{\alpha\beta}(n, m) = \sum_{\mu} \frac{1}{2} (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} [\delta_{m, n+\hat{\mu}} - \delta_{m, n-\hat{\mu}}] + \hat{M} \delta_{mn} \delta_{\alpha\beta} \quad (49)$$

και

$$\langle \hat{\psi}_\alpha(n) \dots \bar{\hat{\psi}}_\beta(m) \dots \rangle = \frac{\int D\bar{\hat{\psi}} D\hat{\psi} (\hat{\psi}_\alpha(n) \dots \bar{\hat{\psi}}_\beta(m) \dots) e^{-S_F}}{\int D\bar{\hat{\psi}} D\hat{\psi} e^{-S_F}} \quad (50)$$



Δυστυχώς η εξίσωση (48) είναι ημιτελής. Εάν προσπαθήσει κάποιος να πάρει το συνεχές όριο της θεωρίας θα βρεθεί αντιμέτωπος με μια δυσάρεστη έκπληξη. Η θεωρία περιέχει διπλάσιο αριθμό φερμιονίων από τον κανονικό. Για τον σκοπό αυτό εισάγουμε έναν διορθωτικό όρο για την δράση (*Wilson* (1975)) και έχουμε:

$$S_F^{(W)} = S_F - \frac{r}{2} \sum_n \bar{\psi}(n) \hat{\square} \psi(n) \quad (51)$$

όπου  $r$  είναι η παράμετρος του *Wilson*. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι ο επιπλέον όρος μηδενίζεται γραμμικά με το  $\alpha$  στο όριο  $\alpha \rightarrow 0$  δίνοντας τις σωστές εξισώσεις στο συνεχές.

### 4.3 Τα αβελιανά πεδία βαθμίδας στο πλέγμα-Η περίπτωση της συμπαγούς *QED*.

Η δράση της *QED* στον φορμαλισμό του συνεχούς δίνεται από την:

$$S_{QED} = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \int d^4x \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - M) \psi \quad (52)$$

με  $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ .

Η δράση είναι αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας

$$\psi(x) \rightarrow G(x)\psi(x) \quad (53)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x)G^{-1}(x) \quad (54)$$

$$A_\mu \rightarrow G(x)A_\mu G^{-1}(x) - \frac{i}{e}G(x)\partial_\mu G^{-1}(x) \quad (55)$$

όπου  $G(x) = e^{i\Lambda(x)}$ , στοιχείο της  $U(1)$ .

Οι συναρτήσεις *Green* της θεωρίας μπορούν να υπολογιστούν από το συναρτησιοειδές

$$Z[J, n, \bar{n}] = \int DAD\bar{\psi}D\psi e^{iS_{QED} + i \int d^4x J^\mu A_\mu + i \int d^4x (\bar{n}\psi + \bar{\psi}n)} \quad (56)$$

Το πέρασμα στον ευκλείδειο φορμαλισμό για ακόμη μια φορά πραγματοποιείται μέσω των αντικαταστάσεων:  $x_0 \rightarrow ix_4$ ,  $\partial_0 \rightarrow +i\partial_4$  και  $A_0 \rightarrow +iA_4$ .

Η δράση μας τώρα γίνεται:

$$S_{QED}^E = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \int d^4x \bar{\psi} (\gamma_\mu D_\mu + M) \psi \quad (57)$$

Ο σκοπός μας τώρα είναι να μεταφέρουμε την θεωρία αυτή στο χωροχρονικό πλέγμα για το οποίο ήδη γνωρίζουμε ότι το φερμιονικό κομμάτι της δράσης δίνεται από την

$$S_F^w = (\bar{M} + 4r) \sum_n \bar{\psi}(n)\psi(n) - \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} [\bar{\psi}(n)(r - \gamma_\mu)\psi(n + \hat{\mu}) + \bar{\psi}(n + \hat{\mu})(r + \gamma_\mu)\psi(n)] \quad (58)$$

Η δράση αυτή είναι αναλλοίωτη κάτω από τους γενικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας  $\psi(n) \rightarrow G\psi(n)$  και  $\bar{\psi}(n) \rightarrow \bar{\psi}(n)G^{-1}$ , όπου  $G$  ένα στοιχείο της ομάδας  $U(1)$ . Εάν μετατρέψουμε τους μετασχηματισμούς σε τοπικούς, δηλαδή το στοιχείο  $G$  της ομάδας να εξαρτάται από το πλεγματοειδές σημείο ( $G(n)$ ), ο διγραμμικός όρος  $\bar{\psi}(n)\psi(n + \hat{\mu})$  θα μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\bar{\psi}(n)\psi(n + \hat{\mu}) \rightarrow \bar{\psi}(n)G^{-1}(n)G(n + \hat{\mu})\psi(n + \hat{\mu})$$

. Είναι απαραίτητο λοιπόν να εισάγει κανείς νέους βαθμούς ελευθερίας. Στο συνεχές το πρόβλημα λύνεται με την εισαγωγή ενός όρου που είναι γνωστός ως το **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του Schwinger**.

$$U(x, y) = e^{ie \int_x^y dz_\mu A_\mu(z)} \quad (59)$$

. Ο όρος αυτός αποτελεί στοιχείο της ομάδας  $U(1)$  και κάτω από έναν μετασχηματισμό βαθμίδας  $A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \Lambda(x)$  ( $G = e^{i\Lambda(x)}$ ) συμπεριφέρεται ως εξής:

$$U(x, y) \rightarrow G(x)U(x, y)G^{-1}(y)$$

με αποτέλεσμα η ποσότητα  $\bar{\psi}(x)U(x, y)\psi(y) = \bar{\psi}(x)(e^{ie \int_x^y dz_\mu A_\mu(z)})\psi(y)$  να παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τον μετασχηματισμό. Για μια απειροστή μετατόπιση  $x \rightarrow x + \epsilon$  το  $U(x, x + \epsilon) = e^{ie(\sum_\mu \epsilon_\mu A_\mu)}$ . Απο τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι για να επιτύχουμε την αναλλοιωτότητα του φερμιονικού κομματιού της δράσης πρέπει να γίνουν οι αντικαταστάσεις:

$$\bar{\psi}(n)(r - \gamma_\mu)\psi(n + \hat{\mu}) \rightarrow \bar{\psi}(n)(r - \gamma_\mu)U_{n, n+\hat{\mu}}\psi(n + \hat{\mu})$$

$$\bar{\psi}(n + \hat{\mu})(r + \gamma_\mu)\psi(n) \rightarrow \bar{\psi}(n + \hat{\mu})(r + \gamma_\mu)U_{n+\hat{\mu}, n}\psi(n)$$

όπου το  $U_{n+\hat{\mu}, n} = U_{n, n+\hat{\mu}}^\dagger$  στοιχείο της ομάδας  $U(1)$  και συνεπώς μπορεί να γραφεί ως:

$$U_{n, n+\hat{\mu}} = e^{i\phi_\mu(n)} \quad (60)$$

με το  $\phi_\mu(n)$  να παίρνει τιμές στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ .

Σε αντίθεση με τα πεδία ύλης τα  $U_{n, n+\hat{\mu}}$  κατοικούν στους συνδέσμους που ενώνουν δύο γειτονικά πλεγματοειδή σημεία για αυτό και αποκαλούνται μεταβλητές συνδέσμων.

Το φερμιονικό κομμάτι της δράσης τελικά γίνεται:

$$S_F^w = (\bar{M} + 4r) \sum_n \bar{\psi}(n)\psi(n) - \frac{1}{2} \sum_{n, \mu} \left[ \bar{\psi}(n)(r - \gamma_\mu)U_{n, n+\hat{\mu}}\psi(n + \hat{\mu}) + \bar{\psi}(n + \hat{\mu})(r + \gamma_\mu)U_{n+\hat{\mu}, n}^\dagger\psi(n) \right] \quad (61)$$

. Το τελευταίο κομμάτι της δράσης που έχει απομείνει είναι η μεταφορά των πεδίων βαθμίδας στο πλέγμα. Οι συνθήκες που πρέπει να εκπληρωθούν είναι

1) Να είναι αυστηρά αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας

2) Να είναι συνάρτηση μόνο των μεταβλητών συνδέσμων

Η απλούστερη ποσότητα που μπορεί να κατασκευαστεί κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις είναι το γινόμενο των μεταβλητών συνδέσμων κατά μήκος κλειστών βρόχων στο ευκλείδειο χωροχρονικό πλέγμα. Αν θεωρήσουμε μια στοιχειώδη πλακέτα στο επίπεδο ( $\mu$ - $\nu$ ) έχουμε:

$$U_{\mu\nu}(n) = U_\mu(n)U_\nu(n + \hat{\mu})U_\mu^\dagger(n + \hat{\nu})U_\nu^\dagger(n) \quad (62)$$

το διατεταγμένο γινόμενο των συνδέσμων.

Συνεπώς το κομμάτι της δράσης για το δυναμικό βαθμίδας γράφεται (στην συμπαγή μορφή του)

$$S_G[U] = \frac{1}{e^2} \sum_P \left[ 1 - \frac{1}{2}(U_P + U_P^\dagger) \right] \quad (63)$$

όπου το  $U_P$  συμβολίζει το γινόμενο των μεταβλητών συνδέσμων κατά μήκος του συνόρου μιας στοιχειώδους πλακέτας, κατά την φορά των δεικτών του ρολογιού.

Η μορφή της  $QED$  δράσης στο πλέγμα καταλήγει:

$$\begin{aligned} S_{QED}[U, \psi, \bar{\psi}] = & (\bar{M} + 4r) \sum_n \bar{\psi}(n)\psi(n) - \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} \left[ \bar{\psi}(n)(r - \gamma_\mu)U_{n,n+\hat{\mu}}\psi(n + \hat{\mu}) + \bar{\psi}(n + \hat{\mu})(r + \gamma_\mu)U_{n,n+\hat{\mu}}^\dagger\psi(n) \right] \\ & + \frac{1}{e^2} \sum_P \left[ 1 - \frac{1}{2}(U_P + U_P^\dagger) \right] \end{aligned} \quad (64)$$

#### 4.4 Το δυναμικό αλληλεπίδρασης στατικού ζεύγους quark-antiquark και ο βρόχος του Wilson.

Εισάγουμε ένα ‘βαρύ’ ζεύγος  $quark(Q) - antiquark(\bar{Q})$  στην θεμελιώδη κατάσταση ενός κβαντικού συστήματος του οποίου η δυναμική περιγράφεται από την δράση

$$S^{QED} = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + \int d^4x \bar{\Psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - M)\Psi(x) \quad (65)$$

με  $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$  την συναλλοίωτη παράγωγο.

Η ποσότητα που μας ενδιαφέρει είναι η ενέργεια του στατικού ζεύγους όταν αυτό συζεύγνεται με το δυναμικό βαθμίδας κατά τον συνήθη τρόπο. Για τον σκοπό εξετάζουμε την κατάσταση

$$|\Phi_{\alpha\beta}\rangle = \bar{\Psi}_\alpha^{(Q)}(\vec{x}, 0)U(\vec{x}, 0; \vec{y}, 0)\Psi_\beta^{(Q)}(\vec{y}, 0)|\Omega\rangle \quad (66)$$

όπου  $|\Omega\rangle$  η θεμελιώδη κατάσταση του συστήματος και  $|\Phi_{\alpha\beta}\rangle$  η κατάσταση που περιγράφει ένα ζεύγος  $Q - \bar{Q}$  στα σημεία  $\vec{x}$  και  $\vec{y}$  αντίστοιχα την χρονική στιγμή  $t = 0$ . Για μια αυθαίρετη χρονική στιγμή  $t$  το  $U(\vec{x}, t; \vec{y}, t)$  ορίζεται ως εξής:

$$U(\vec{x}, t; \vec{y}, t) = e^{ie \int_{\vec{x}}^{\vec{y}} dz_i A^i(\vec{z}, t)} \quad (67)$$

με το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα να υπολογίζεται κατά μήκος της ευθείας που ενώνει τα σημεία  $\vec{x}$  και  $\vec{y}$ . Ο παράγοντας αυτός φάσης είναι που εξασφαλίζει την αναλλοιωτότητα της κατάστασης κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας.

Για να εξάγουμε την ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης του στατικού ζεύγους  $Q - \bar{Q}$  πρέπει να μελετήσουμε την διάδοση της δοκιμαστικής κατάστασης (66) στο όριο της άπειρης μάζας και στην συνέχεια την συμπεριφορά του πλάτους διάδοσης για μεγάλους ευκλείδειους χρόνους.

Η συνάρτηση *Green* που περιγράφει την διάδοση της δοκιμαστικής μας κατάστασης είναι:

$$G_{\alpha'\beta',\alpha\beta}(\vec{x}', \vec{y}'; \vec{x}, \vec{y}; t) = \langle \Omega | T \left( \bar{\Psi}_{\beta'}^{(Q)}(\vec{y}', t) U(\vec{y}', t; \vec{x}', t) \Psi_{\alpha'}^{(Q)}(\vec{x}', t) \bar{\Psi}_{\alpha}^{(Q)}(\vec{x}, 0) U(\vec{x}, 0; \vec{y}, 0) \Psi_{\beta}^{(Q)}(\vec{y}, 0) \right) | \Omega \rangle \quad (68)$$

με  $T$  τον τελεστή χρονικής διάταξης.

Το δεξί μέλος της παραπάνω εξίσωσης έχει την ακόλουθη αναπαράσταση στον φορμαλισμό των ολοκληρωμάτων διαδρομής:

$$G_{\alpha'\beta',\alpha\beta} = \frac{1}{Z} \int DAD\psi D\bar{\psi} D\psi^{(Q)} D\bar{\psi}^{(Q)} \left( \bar{\psi}_{\beta'}^{(Q)}(\vec{y}', t) \dots \psi_{\beta}^{(Q)}(\vec{y}, 0) \right) e^{iS} \quad (69)$$

όπου  $Z$  σταθερά κανονικοποίησης που δίνεται από την σχέση

$$Z = \int DAD\psi D\bar{\psi} D\psi^{(Q)} D\bar{\psi}^{(Q)} e^{iS}$$

και  $S$  η δράση που περιγράφει το στατικό ζεύγος, τα δυναμικά φερμιόνια και το πεδίο βαθμίδας

$$S = S^{QED} + \int d^4x \bar{\psi}^{(Q)}(x) (i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) - M_Q) \psi^{(Q)}(x) \quad (70)$$

Πραγματοποιώντας την ολοκλήρωση ως προς τα πεδία  $\psi$  και  $\bar{\psi}$  έχουμε:

$$G_{\alpha'\beta',\alpha\beta} = \frac{1}{Z} \int DAD\psi D\bar{\psi} \left[ S_{\beta\beta'}(y, y'; A) S_{\alpha'\alpha}(x', x; A) - S_{\alpha'\beta'}(x', y'; A) S_{\beta\alpha}(y, x; A) \right] U(\vec{x}, 0; \vec{y}, 0) U(\vec{y}', t; \vec{x}', t) \det K^Q[A] e^{iS^{QED}} \quad (71)$$

όπου:

$$\begin{aligned} x &= (\vec{x}, 0) & y &= (\vec{y}, 0) \\ x' &= (\vec{x}', t) & y' &= (\vec{y}', t) \end{aligned} \quad (72)$$

Η συνάρτηση *Green*,  $S(z, z'; A)$ , περιγράφει την διάδοση ενός *quark* παρουσία του εξωτερικού πεδίου  $A_\mu$

$$[i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) - M_Q] S(z, z'; A) = \delta^{(3)}(\vec{z} - \vec{z}') \delta(t - t') \quad (73)$$

και  $\det k^{(Q)}[A]$  η ορίζουσα του πίνακα

$$K_{\alpha x, \beta y}^{(Q)}[A] = [i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) - M_Q]_{\alpha\beta} \delta^{(4)}(x - y)$$

που προκύπτει από την ολοκλήρωση πάνω στα 'βαριά' πεδία των *quarks*.

Στην θεωρία διαταραχών ο λογάριθμος αυτής της ορίζουσας αναπαρίσταται γραφικά από έναν φερμιονικό βρόχο με έναν αυθαίρετο αριθμό εξωτερικών πεδίων  $A_\mu$  προσκολλημένων πάνω σε αυτόν. Η ποσότητα αυτή προσεγγίζει μια άπειρη σταθερά καθώς το  $M_Q \rightarrow \infty$  αλλά ευτυχώς η συνεισφορά αυτή αναιρείται από την αντίστοιχη στον παρανομαστή ( $Z$ ). Για τον λόγο αυτό μπορούμε να θέσουμε  $\det k^{(Q)}[A] = 1$ .

Προκειμένου να μελετήσουμε την συμπεριφορά στο όριο  $M_Q \rightarrow \infty$  μπορούμε να αγνοήσουμε το χωρικό κομμάτι της συναλλοίωτης παραγωγού και να κρατήσουμε μόνο το χρονικό στην εξίσωση (73) (*Brown – Weinberg (1979)*) διατηρώντας με τον τρόπο αυτό την αναλλοιωτότητα κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας στην προσέγγιση αυτή.

$$[i\gamma^0(\partial_0 + ieA_0(z)) - M_Q]S(z, z'; A) = \delta^{(4)}(z - z') \quad (74)$$

με την μερική παράγωγο να δρα πάνω στο  $z$ .  
Χρησιμοποιώντας την ανάλυση

$$S(z, z'; A) = e^{ie \int_{z_0}^{z'} dt A_0(\vec{z}, t)} \hat{S}(z - z')$$

καταλήγουμε σε μια διαφορική εξίσωση για το  $\hat{S}(z - z')$  που δεν περιλαμβάνει το πεδίο βαθμίδας.

$$(i\gamma^0\partial_0 - M_Q)\hat{S}(z - z') = \delta^{(4)}(z - z') \quad (75)$$

Η λύση της εξίσωσης (75) που υπόκειται στον περιορισμό η επέκτασή της για φανταστικούς χρόνους ( $z_0 \rightarrow -iz_4, z'_0 \rightarrow -iz'_4$ ) να είναι πεπερασμένη στο όριο  $|z_4 - z'_4| \rightarrow \infty$  μας δίνει τελικά:

$$iS(z, z'; A) = \delta^{(3)}(\vec{z} - \vec{z}') e^{ie \int_{z_0}^{z'} dt A_0(\vec{z}, t)} \left\{ \theta(z_0 - z'_0) \left( \frac{1 + \gamma_0}{2} \right) e^{-iM_Q(z_0 - z'_0)} \right. \\ \left. + \theta(z'_0 - z_0) \left( \frac{1 - \gamma_0}{2} \right) e^{iM_Q(z_0 - z'_0)} \right\} \quad (76)$$

Η έκφραση αυτή μας αποκαλύπτει ότι η διάδοση ενός απείρως 'βαριού' ζεύγους *quark – antiquark* περιορίζεται στην συγκέντρωση μιας φάσης που καθορίζεται από το  $A_0$  και την μάζα των *quark*  $M_Q$ . Η χωρική συνάρτηση δέλτα μας υπενθυμίζει ότι ένα απείρως βαρύ *quark* δεν μπορεί να διαδοθεί στον χώρο. Εισάγουμε την έκφραση (76) στην εξίσωση (71) και έχουμε:

$$G_{\alpha'\beta',\alpha\beta} \xrightarrow{M_Q \rightarrow \infty} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \delta^{(3)}(\vec{y} - \vec{y}') (P_+)_{\alpha'\alpha} (P_-)_{\beta\beta'} e^{-2iM_Q t} \left\langle e^{ie \oint dz^\mu A_\mu(z)} \right\rangle \quad (77)$$

όπου

$$P_\pm = \left( \frac{1 \pm \gamma^0}{2} \right)$$

τελεστές προβολής και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα υπολογίζεται κατά μήκος του κλειστού παραλληλόγραμμου βρόχου με άκρα στα σημεία (72) και χωρική και χρονική έκταση  $R = |\vec{x} - \vec{y}|$  και  $t$  αντίστοιχα. Η μέση τιμή  $\langle \dots \rangle$  υπολογίζεται ως προς την θεμελιώδη κατάσταση του συστήματος απουσία του ζεύγους  $Q - \bar{Q}$  και δίνεται από την έκφραση:

$$\left\langle e^{ie \oint dz^\mu A_\mu(z)} \right\rangle = \frac{\int DAD\psi D\bar{\psi} e^{ie \oint dz^\mu A_\mu(z)} e^{iS^{QED}}}{\int DAD\psi D\bar{\psi} e^{iS^{QED}}} \quad (78)$$

Πραγματοποιώντας την επέκταση σε φανταστικούς χρόνους ( $t \rightarrow -iT, A_0 \rightarrow iA_4$ ) οι παραπάνω εξισώσεις παίρνουν την ακόλουθη μορφή:

$$[G_{\alpha'\beta',\alpha\beta}] \xrightarrow{M_Q \rightarrow \infty, t \rightarrow -iT} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \delta^{(3)}(\vec{y} - \vec{y}') (P_+)_{\alpha'\alpha} (P_-)_{\beta\beta'} e^{-2M_Q T} \langle W_C[A] \rangle_{eud} \quad (79)$$

όπου

$$W_C[A] = e^{ie \oint dz_\mu A_\mu(z)} \quad (80)$$

και

$$\langle W_C[A] \rangle_{eucl} = \frac{\int DAD\psi D\bar{\psi} W_C[A] e^{-S_{eucl}^{QED}}}{\int DAD\psi D\bar{\psi} e^{-S_{eucl}^{QED}}} \quad (81)$$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πραγματοποιείται κατά μήκος ενός παραλληλόγραμμου βρόχου  $C$  στον ευκλείδειο χωρόχρονο με άκρες στα σημεία  $(\vec{x}, 0)$ ,  $(\vec{y}, 0)$ ,  $(\vec{y}, T)$  και  $(\vec{x}, T)$ . Αυτός είναι και ο **βρόχος του Wilson**.

Για την εξαγωγή του δυναμικού αλληλεπίδρασης του στατικού ζεύγους  $Q - \bar{Q}$  απαιτείται η μελέτη της συμπεριφοράς της (79) για μεγάλους ευκλείδειους χρόνους  $T$ . Ο παράγοντας  $e^{-2M_Q T}$  αντιστοιχεί στην ενέργεια ηρεμίας του ζεύγους και συνεπώς αναμένεται η ακόλουθη συμπεριφορά:

$$W(R, T) = \langle W_C[A] \rangle \xrightarrow{T \rightarrow \infty} F(R) e^{-E(R)T}$$

όπου  $E(R)$  η ενέργεια αλληλεπίδρασης του στατικού ζεύγους quark-antiquark με απόσταση διαχωρισμού  $R$  και  $F(R)$  η συνάρτηση που περιγράφει την επικάλυψη της δοκιμαστικής μας κατάστασης με την θεμελιώδη κατάσταση του συστήματος παρουσία του ζεύγους.

Επομένως η ενέργεια αλληλεπίδρασης προκύπτει στο όριο:

$$E(R) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \langle W_C[A] \rangle \quad (82)$$

Για να αποκτήσουν οι παραπάνω εκφράσεις αυστηρά καθορισμένο μαθηματικό περιεχόμενο εισάγουμε ένα χωροχρονικό πλέγμα. Στο πλέγμα ο βρόχος του **Wilson** (80) αποτελείται από το διατεταγμένο γινόμενο μεταβλητών συνδέσμων,  $U_l$ , κατά μήκος του παραλληλόγραμμου βρόχου  $C$ .

$$W_C[U] = \prod_{l \in C} U_l \quad (83)$$

και

$$W(\hat{R}, \hat{T}) \equiv \langle W_C[U] \rangle = \frac{\int DU D\bar{\psi} D\psi W_C[U] e^{-S^{QED}[U, \bar{\psi}, \psi]}}{\int DU D\bar{\psi} D\psi e^{-S^{QED}[U, \bar{\psi}, \psi]}} \quad (84)$$

με την  $S^{QED}$  να δίνεται για την περίπτωση των φερμιονίων Wilson από την εξίσωση (64) και την  $W(\hat{R}, \hat{T})$  συνάρτηση των αδιάστατων μεταβλητών  $\hat{R} = \frac{R}{\alpha}$  και  $\hat{T} = \frac{T}{\alpha}$  με  $\alpha$  την σταθερά πλέγματος.

Η ενέργεια αλληλεπίδρασης ενός στατικού ζεύγους  $Q - \bar{Q}$ , μετρούμενη σε μονάδες πλέγματος δίνεται από την:

$$E(\hat{R}) = - \lim_{\hat{T} \rightarrow \infty} \frac{1}{\hat{T}} \ln W(\hat{R}, \hat{T}) \quad (85)$$

## 5 Πολυδιάστατες θεωρίες

Οι πολυδιάστατες θεωρίες εισήχθησαν από τους Kalouza και Klein σε μια προσπάθεια ενοποίησης των ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων με την βαρύτητα. Οι θεωρίες αυτές παρέμειναν ανενεργές μέχρι τα τέλη της δεκαετίας του ογδόντα, όπου η εμφάνιση της θεωρίας χορδών που στο μεταξύ είχε αποκτήσει μεγάλη δημοτικότητα, απαιτούσε την ύπαρξη ενός χωροχρόνου με επιπλέον διαστάσεις. Το τελευταίο διάστημα ιδιαίτερη έμφαση έχει δοθεί στις θεωρίες μεμβρανών οι οποίες υιοθετούν την άποψη ότι η συνηθισμένη ύλη (με πιθανή εξαίρεση τα γκραβιτόνια και άλλα υποθετικά σωματίδια τα οποία αλληλεπιδρούν ασθενώς με την ύλη) είναι παγιδευμένα σε μια τρισδιάστατη υποπολλαπλότητα -μεμβράνη- εμβαπτισμένη σε έναν θεμελιώδη πολυδιάστατο χώρο. Στα μοντέλα μεμβρανών οι επιπλέον διαστάσεις μπορεί να είναι μεγάλες ακόμη και άπειρες.

### Η κατάσταση μέχρι τα τέλη της δεκαετίας του 90.

Βασικό ζητούμενο στις πολυδιάστατες θεωρίες είναι η εύρεση ενός αποτελεσματικού μηχανισμού απόκρυψης των επιπλέον διαστάσεων έτσι ώστε τα αποτελέσματα της θεμελιώδους αυτής θεωρίας να μην έρχονται σε αντίθεση με την παρατηρούμενη τετραδιάστατη φύση του χωροχρόνου και των δυνάμεων που παρατηρούμε γύρω μας. Ένας τρόπος αντιμετώπισης του ζητήματος αυτού είναι η θεώρηση ότι, σε αντίθεση με τις παρατηρούμενες τέσσερις χωροχρονικές διαστάσεις οι οποίες είναι πολύ μεγάλες ή και άπειρες, οι υποθετικές επιπλέον διαστάσεις είναι πεπερασμένες, δηλαδή, συμπαγείς. Με αυτόν τον τρόπο για την εμφάνιση των διαστάσεων αυτών απαιτείται η εξερεύνηση σε μήκη της τάξεως των επιπλέον διαστάσεων και για επαρκώς μικρές διαστάσεις κάποιος θα χρειαζόταν πολύ μεγάλες ενέργειες προκειμένου να παρατηρήσει τις επιπτώσεις, στην φυσική, των διαστάσεων αυτών. Έτσι το μικρό μέγεθος των επιπλέον διαστάσεων μας διασφαλίζει την αποτελεσματική απόκρυψή τους. Το αμέσως επόμενο ζήτημα που προκύπτει είναι πόσο μικρές θα μπορούσαν να είναι οι επιπλέον διαστάσεις χωρίς η θεωρία να έρχεται σε αντίθεση με τις παρατηρήσεις μας για τον κόσμο στον οποίο ζούμε.

Έστω  $M_*$  η κλίμακα *Planck* της θεμελιώδους πολυδιάστατης θεωρίας,  $n$  ο αριθμός των επιπλέον διαστάσεων και  $r$  το μέγεθός τους. Η Einstein-Hilbert αδιάστατη μορφή της δράσης, πολλαπλασιασμένη με την κατάλληλη δύναμη της θεμελιώδους κλίμακας *Planck* είναι:

$$S_{4+n} = -M_*^{n+2} \int d^{4+n}x \sqrt{g^{(4+n)}} R^{(4+n)} \quad (86)$$

Σκοπός είναι να δούμε πως η τετραδιάστατη μορφή της δράσης

$$S_{4D} = -M_{Pl}^2 \int d^4x \sqrt{g^{(4)}} R^{(4)} \quad (87)$$

εμπεριέχεται στην παραπάνω εξίσωση. Με  $M_{Pl}$  συμβολίζεται η παρατηρούμενη  $4D$  κλίμακα *Planck*  $\sim 10^{19} GeV$ . Για επίπεδο χωρόχρονο και συμπαγείς επιπλέον διαστάσεις έχουμε:

$$ds^2 = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu - r^2 d\Omega_{(n)}^2 \quad (88)$$

όπου το  $d\Omega_{(n)}^2$  συμβολίζει το γραμμικό στοιχείο των επίπεδων και συμπαγών επιπλέον διαστάσεων σε κάποια παραμετροποίηση,  $\eta_{\mu\nu}$  είναι η συνηθής τετραδιάστατη μετρική Minkowski και  $h_{\mu\nu}$  οι  $4D$

διακυμάνσεις της μετρικής γύρω από το ελάχιστο.

Με χρήση της παραπάνω εξίσωσης παίρνουμε:

$$R^{(4+n)} = R^{(4)}, \quad \sqrt{g^{(4+n)}} = r^n \sqrt{g^{(4)}} \quad (89)$$

και η (87) γίνεται:

$$S_{4+n} = -M_*^{n+2} \int d^{4+n}x \sqrt{g^{(4+n)}} R^{(4+n)} = -M_*^{n+2} \int r^n d\Omega_{(n)} \int d^4x \sqrt{g^{(4)}} R^{(4)} \quad (90)$$

Ο όρος  $\int r^n d\Omega_{(n)}$  αποτελεί τον όγκο των επιπλέον διαστάσεων και τον συμβολίζουμε με  $V_{(n)}$ . Για την περίπτωση της τοροειδούς συμπαγοποίησης  $V_{(n)} = (2\pi r)^n$  η σχέση μεταξύ των βαρυτικών σταθερών σύζευξης δίνεται από την:

$$M_{Pl}^2 = M_*^{(n+2)} V_{(n)} = M_*^{(n+2)} (2\pi r)^n \quad (91)$$

Εάν υποθεθεί ότι και τα πεδία βαθμίδας ζουν στις επιπλέον διαστάσεις ακολουθώντας την ίδια διαδικασία έχουμε:

$$S^{(4+n)} = - \int d^{4+n}x \frac{1}{4g_*^2} F_{MN} F^{MN} \sqrt{g^{(4+n)}} \implies S^{(4)} = - \int d^4x \frac{V_{(n)}}{4g_*^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{g^{(4)}} \quad (92)$$

και για την ενεργή τετραδιάστατη σταθερά σύζευξης έχουμε<sup>2</sup>:

$$\frac{1}{g_4^2} = \frac{V_{(n)}}{g_*^2} \quad (93)$$

Απο την στιγμή που η σταθερά σύζευξης μιας θεωρίας με επιπλέον διαστάσεις δεν είναι αδιάστατη προκύπτουν ερωτήματα σχετικά με το φυσικό της μέγεθος. Θεωρώντας ότι η ίδια φυσική που καθορίζει την ένταση των βαρυτικών αλληλεπιδράσεων καθορίζει και το μέγεθος της σταθεράς σύζευξης έχουμε:

$$g_* \sim \frac{1}{M_*^{\frac{n}{2}}} \quad (94)$$

και συνεπώς:

$$r \sim \frac{1}{M_{Pl}} g_4^{\frac{n+2}{2}} \quad (95)$$

Η παραπάνω σχέση υπονοεί ότι για μια φυσική πολυδιάστατη θεωρία θα πρέπει  $r \sim \frac{1}{M_{Pl}}$  αποκλείοντας το ενδεχόμενο της ανίχνευσης των 'μικροσκοπικών' επιπλέον διαστάσεων στο προβλεπόμενο μέλλον.

Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι το όλο μέχρι στιγμής οικοδόμημα στηρίζεται στην υπόθεση ότι όλα τα πεδία κινούνται ελεύθερα στις επιπλέον διαστάσεις. Καινούργια χαρακτηριστικά για την θεωρία ανακύπτουν όταν θεωρήσει κανείς ότι κάποια ή όλα τα πεδία του καθιερωμένου μοντέλου είναι παγιδευμένα κατά τις επιπλέον διαστάσεις σε μια μεμβράνη και μόνο η βαρύτητα μπορεί να διαδοθεί ελεύθερα στις επιπλέον διαστάσεις.

<sup>2</sup>Η σταθερά σύζευξης μιας πολυδιάστατης θεωρίας δεν είναι αδιάστατη αλλά αντίθετα έχει διαστάσεις μήκους  $[g_*] = -n/2$ . Για αυτόν το λόγο η θεωρία δεν είναι επανακανονικοποιήσιμη αλλά μπορεί να αντιμετωπιστεί ως μια ενεργή θεωρία στο όριο των χαμηλών ενεργειών μιας θεμελιώδους πολυδιάστατης θεωρίας.



## 5.1 Μεγάλες επιπλέον διαστάσεις - Το μοντέλο ADD.

Με την παραπάνω συνθήκη η εικόνα διαφοροποιείται ως εξής: η νέα φυσική θα γίνει αισθητή μόνο στο βαρυτικό τομέα και για αποστάσεις της τάξης της επιπλέον διάστασης. Γνωρίζουμε ότι το πειραματικό όριο επαλήθευσης του νόμου του Νεύτωνα για την βαρύτητα είναι  $r \sim 0.1mm$  και συνεπώς η τιμή αυτή αποτελεί ένα όριο για το μέγεθος των επιπλέον διαστάσεων. Μια μεγάλη τιμή κοντά στο πειραματικό αυτό όριο επηρεάζει την θεμελιώδη κλίμακα του Planck. Απο την εξίσωση (91) έχουμε:  $M_{Pl}^2 \sim M_*^{(n+2)} r^n$  και εάν  $r > \frac{1}{M_{Pl}}$  συνεπάγεται για την θεμελιώδη κλίμακα Planck  $M_*$  τιμή μικρότερη από αυτήν της  $M_{Pl}$ . Εάν ίσχυε  $M_* < 1TeV$  τότε η κβαντική βαρύτητα θα έπρεπε να είχε ήδη γίνει αισθητή στα πειράματα των σύγχρονων επιταχυντών. Η απουσία όμως της πειραματικής επιβεβαίωσης μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι  $M_* \geq 1TeV$ . Συνεπώς η χαμηλότερη δυνατή τιμή (ή αντίστροφα το μεγαλύτερο δυνατό μέγεθος για τις επιπλέον διαστάσεις) είναι  $M_* \sim 1TeV$ . Θεωρίες για τις οποίες  $M_* \sim 1TeV$  ονομάζονται θεωρίες με Μεγάλες Επιπλέον Διαστάσεις και προτάθηκαν για πρώτη φορά από τους Arkani-Hamed, Dimopoulos και Dvali (ADD). Οι παραπάνω απαιτήσεις οδηγούν στην ακόλουθη σχέση:

$$r \sim 2 * 10^{-17} 10^{\frac{32}{n}} cm \quad (96)$$

από όπου προκύπτει ότι για να είναι συνεπής η θεωρία απαιτείται  $n > 2$  για τον αριθμό των επιπλέον διαστάσεων.

Στην ανάπτυξη της θεωρίας εμφανίζονται υπερεπιφάνειες πάνω στις οποίες είναι εντοπισμένα μερικά από τα σωματίδια και που ονομάζονται μεμβράνες. Για την περιοχή των ενεργειών που εξετάζουμε το ζήτημα της προέλευσης των υπερεπιφανειών αυτών περνά σε δεύτερη μοίρα. Υποθέτουμε την ύπαρξη μιας συνεπούς θεμελιώδους θεωρίας στις υψηλές ενέργειες που παράγει τα αντικείμενα αυτά. Συνεπώς η θεωρία μας έχει νόημα μέχρι κάποια ενεργειακή κλίμακα πάνω από την οποία η δυναμική που παράγει τις μεμβράνες δεν μπορεί να αγνοηθεί.

Έστω μια επίπεδη μεμβράνη εμφυτευμένη σε ένα επίπεδο χώρο  $4 + n$  διαστάσεων.  $G_{MN}(X)$  είναι η μετρική στις  $4 + n$  διαστάσεις και η οποία επάγει μια μετρική  $g_{\mu\nu}$  πάνω στην μεμβράνη. Για μια θεωρία με βαθμωτά πεδία ( $\Phi(x)$ ), πεδία βαθμίδας ( $A_\mu(x)$ ) και φερμιόνια ( $\Psi_L(x)$ ) παγιδευμένα σε μια μεμβράνη και την βαρύτητα να κινείται στις επιπλέον διαστάσεις η δράση έχει την ακόλουθη μορφή:

$$S^{bulk} = - \int d^{4+n} X \sqrt{|G|} (M_*^{n+2} R^{(4+n)} + \Lambda) \quad (97)$$

με  $G_{MN}(X)$  την μετρική στις  $4 + n$  διαστάσεις,  $X_M$  τις συντεταγμένες για το σύνολο του χωροχρόνου (*bulk*)  $\{M = 1, \dots, 4 + n\}$  και  $\Lambda$  την κοσμολογική σταθερά.

Η δράση στην μεμβράνη θα έχει την μορφή:

$$S^{brane} = \int d^4 x \sqrt{|g|} \left[ -f^4 - R^{(4)} + \frac{g^{\mu\nu}}{2} D_\mu \Phi D_\nu \Phi - V(\Phi) - \frac{g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}}{4} F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma} + \dots \right] \quad (98)$$

με  $g_{\mu\nu}$  την επαγόμενη μετρική στην μεμβράνη. Το  $f$  αντιστοιχεί στην ενεργειακή πυκνότητα της μεμβράνης και για αυτό το κομμάτι των θεωριών το θεωρούμε μικρό (σε μονάδες της θεμελιώδους κλίμακας *Planck*) παραβλέποντας ουσιαστικά την επίδραση της ίδιας της μεμβράνης στην διαμόρφωση της βαρύτητας στον χώρο.

Παρόλο που η μορφή των παραπάνω εξισώσεων είναι γενική υποθέτουμε ότι τόσο η μετρική στην μεμβράνη όσο και για τις επιπλέον διαστάσεις είναι επίπεδη.

Για τις αλληλεπιδράσεις των πεδίων στην μεμβράνη με την βαρύτητα στον χώρο αναπτύσσουμε σε διακυμάνσεις  $h_{\mu\nu}(x)$  γύρω από τον επίπεδο χώρο  $\eta_{\mu\nu}(x)$  για την επαγόμενη μετρική και παίρνουμε:

$$S^{int} = \int d^4x T^{\mu\nu} \frac{h_{\mu\nu}(x)}{M_*^{\frac{n}{2}+1}} \quad (99)$$

όπου  $T_{\mu\nu}$  ο ταυστής ενέργειας-ορμής

$$\sqrt{g}T_{\mu\nu} = \frac{\delta S^{brane}}{\delta g_{\mu\nu}} \quad (100)$$

Αναλύοντας το πεδίο των βαρυτονίων σε KK ‘συνιστώσες’ παίρνουμε τελικά για το κομμάτι των αλληλεπιδράσεων:

$$S^{int} = \sum_{\vec{k}} \int d^4x T^{\mu\nu} \frac{1}{M_*^{\frac{n}{2}+1}} \frac{h_{\mu\nu}^{\vec{k}}}{\sqrt{V_n}} = \sum_{\vec{k}} \int d^4x \frac{1}{M_{Pl}} T^{\mu\nu} h_{\mu\nu}^{\vec{k}} \quad (101)$$

με τα μεμονωμένα KK βαρυτόνια να συζεύγονται με τα πεδία στην μεμβράνη με δύναμη  $\frac{1}{M_{Pl}}$  αλλά με την συνολική ένταση σύζευξης (λόγω του αθροίσματος με όλες τις KK συνιστώσες) να είναι ανάλογη του  $1/M_*$ .

## 5.2 Στρεβλές (*warped*) επιπλέον διαστάσεις-Μη παραγοντοποιήσιμη γεωμετρία

Μέχρι στιγμής όλες οι θεωρίες που αναφέρθηκαν υιοθετούν την άποψη ότι οι επιπλέον διαστάσεις είναι επίπεδες. Με άλλα λόγια αγνοήθηκε η επίδραση των ίδιων των μεμβρανών στην διαμόρφωση της βαρύτητας στον χώρο, θεώρηση που αποτελεί μια καλή προσέγγιση μόνο εάν η ενεργειακή πυκνότητα της μεμβράνης είναι μικρή. Ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά όμως προκύπτουν εάν κάποιος επιτρέψει την ‘καμπύλωση’ των επιπλέον διαστάσεων, με την εισαγωγή μιας κοσμολογικής σταθεράς, κρατώντας επίπεδη την μεμβράνη. Τα μοντέλα αυτά ονομάζονται μοντέλα με στρεβλές επιπλέον διαστάσεις και οι πρώτοι που τα εισήγαγαν ήταν οι Rubakov και Shaposhnikov με θετική κοσμολογική σταθερά.

### 5.2.1 Το μοντέλο των Randall-Shundrum

Το πιο αντιπροσωπευτικό και αποδεκτό μοντέλο των θεωριών αυτών είναι το μοντέλο των Randall-Shundrum. Θεωρούμε μία επιπλέον διάσταση και αρνητική κοσμολογική σταθερά. Δηλαδή ο χώρος μας είναι ένας χώρος anti-de-Sitter ( $AdS_5$ ). Η λύση που μας ενδιαφέρει πρέπει να συμμορφώνεται με τα εξής: ενώ η επιπλέον διάσταση είναι καμπύλη (μη αρνητική  $5D$  κοσμολογική σταθερά) θα πρέπει η μεμβράνη να είναι επίπεδη και στατική, δηλαδή να διαθέτει συμμετρία κάτω από  $4D$  μετασχηματισμούς Lorentz. Με άλλα λόγια θα πρέπει η επαγόμενη μετρική σε κάθε σημείο κατά την επιπλέον διάσταση να είναι η συνήθης επίπεδη  $4D$  μετρική Minkowski ενώ οι συνιστώσες της πενταδιάστατης μετρικής να εξαρτώνται μόνο από την επιπλέον διάσταση. Επίσης η λύση πρέπει να διαθέτει και την επιπλέον συμμετρία ( $y \rightarrow -y$ ) όπου με  $y$  συμβολίζουμε την συντεταγμένη της επιπλέον διάστασης.

Η λύση των εξισώσεων του Einstein οδηγεί στην ύπαρξη δύο μεμβρανών με αντίθετη ενεργειακή πυκνότητα (τάση). Μια μεμβράνη με θετική τάση, που ονομάζεται και μεμβράνη Planck και μια με αρνητική όπου και περιέχει τα πεδία ύλης ( $TeV$  μεμβράνη). Όλες οι μάζες εμφανίζουν εκθετική μείωση πάνω στην μεμβράνη αρνητικής ενεργειακής πυκνότητας φτάνοντας την τάξη των  $TeV$  σε αντίθεση με την μεμβράνη Planck όπου η θεμελιώδης κλίμακα μάζας, ανεμπόδιστα, παίρνει τιμή της τάξεως της κλίμακας Planck. Η ύπαρξη των δύο αυτών μεμβρανών σε προκαθορισμένα σημεία σε συνδυασμό με την απαίτηση του μηδενισμού της  $4D$  κοσμολογικής σταθεράς από την ενεργειακή πυκνότητα της μεμβράνης, με την λεπτή ρύθμιση των παραμέτρων, οδηγεί στην ακόλουθη μορφή για την  $RS$  μετρική

$$ds^2 = e^{-2k|y|} dx_\mu dx_\nu n_{\mu\nu} - dy^2 \quad (102)$$

με  $k^2 = -\frac{\Lambda}{12M_*^3}$ .

Μια από τις συνέπειες της θεωρίας είναι:

$$M_{Pl}^2 = \frac{M_*^3}{k} (1 - e^{-2kb}) \quad (103)$$

όπου  $b$  το μέγεθος της επιπλέον διάστασης. Για μεγάλες τιμές του  $b$  η παραπάνω εξίσωση είναι σχεδόν ανεξάρτητη από το μέγεθος της επιπλέον διάστασης. Επίσης μας παρέχει μια εκθετική ιεραρχία ανάμεσα στην κλίμακα των ασθενών αλληλεπιδράσεων και την κλίμακα Planck. Σε ότι αφορά την ίδια την βαρύτητα για το μοντέλο των Randall-Sundrum από τις εξισώσεις του Einstein καταλήγουμε σε μια εξίσωση τύπου Schrodinger με ένα ελκτικό δυναμικό τύπου δέλτα συνάρτησης για την εγκάρσια εξάρτηση του τετραδιάστατου βαρυτονίου. Το δυναμικό αυτό υποστηρίζει μια δέσμια κατάσταση, ένα άμαζο τετραδιάστατο βαρυτόνιο. Πάνω από αυτό έχουμε ένα συνεχές φάσμα από καταστάσεις Kaluza-Klein των οποίων η περιοριστική συνεισφορά στην ενεργή τετραδιάστατη θεωρία οδηγεί στον συνήθη νόμο του Newton. Σε αυτό το μοντέλο υποθέτουμε ότι όλα τα πεδία του  $S_M$  είναι εντοπισμένα και διαδίδονται μόνο επάνω στην  $TeV$  μεμβράνη με αρνητική ενεργειακή πυκνότητα. Εάν τα πεδία μπορούν να διαδοθούν και στην επιπλέον διάσταση τότε χρειαζόμαστε έναν μηχανισμό εντοπισμού αυτών των πεδίων επάνω στην μεμβράνη. Έναν τέτοιο μηχανισμό είναι δυνατόν να δώσει η στρωματική φάση που μελετάμε στα επόμενα κεφάλαια.

## 6 Το μοντέλο

Η δράση του πενταδιάστατου  $U(1)$  αβελιανού μοντέλου στο πλέγμα, με διαφορετικές σταθερές σύζευξης  $\beta$  και  $\beta'$  είναι:

$$S_{gauge}^{5D} = \beta \sum_{x, 1 \leq \mu < \nu \leq 4} (1 - Re[U_{\mu\nu}(x)]) + \beta' \sum_{x, 1 \leq \mu \leq 4} (1 - Re[U_{\mu 5}(x)]) \quad (104)$$

όπου

$$U_{\mu\nu}(x) = U_\mu(x) U_\nu(x + \alpha_s \hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x + \alpha_s \hat{\nu}) U_\nu^\dagger(x)$$

$$U_{\mu 5}(x) = U_\mu(x) U_5(x + \alpha_s \hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x + \alpha_s \hat{5}) U_5^\dagger(x)$$

οι πλακέτες, ορισμένες στον 4-D υπόχωρο και στα αντίστοιχα επίπεδα που περιέχουν την εγκάρσια διεύθυνση ( $x_5$ ). Με  $\alpha_s$  και  $\alpha_5$  συμβολίζονται οι δύο διαφορετικές σταθερές πλέγματος. Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να γραφτούν ως συνάρτηση των μεταβλητών συνδέσμων  $U_\mu = e^{i\theta_\mu(x)}$ , για τον 4D υπόχωρο, και  $U_5 = e^{i\theta_5(x)}$  για την εγκάρσια διεύθυνση, ως εξής:

$$U_{\mu\nu}(x) = \exp(i\theta_{\mu\nu}(x)), \quad U_{\mu 5}(x) = \exp(i\theta_{\mu 5}(x))$$

κάνοντας χρήση των ορισμών:

$$\theta_{\mu\nu}(x) = \theta_\mu(x) + \theta_\nu(x + \alpha_s \hat{\mu}) - \theta_\mu(x + \alpha_s \hat{\nu}) - \theta_\nu(x)$$

$$\theta_{\mu 5}(x) = \theta_\mu(x) + \theta_5(x + \alpha_s \hat{\mu}) - \theta_\mu(x + \alpha_s \hat{5}) - \theta_5(x)$$

Στο μοντέλο που εξετάζουμε οι σταθερές σύζευξης  $\beta$  και  $\beta'$  είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και από τις συντεταγμένες με την σταθερά πλέγματος να καθορίζεται από την τιμή των σταθερών σύζευξης  $\beta$  και  $\beta'$ . Σε ορισμένες περιπτώσεις μπορούμε να έχουμε μια εξάρτηση από τις συντεταγμένες και είναι δυνατόν αυτή να συσχετιστεί με επιπλέον πεδία, όπως στην περίπτωση των μοντέλων μεμβρανών [5].

Στο αφελές συνεχές όριο ( $\alpha_s, \alpha_5 \rightarrow 0$ ) η δράση της εξίσωσης (104) με βάση τις παραπάνω σχέσεις γίνεται:

$$S_{gauge} = \frac{\beta}{2} \sum_{x, 1 \leq \mu < \nu \leq 4} \theta_{\mu\nu}^2(x) + \frac{\beta'}{2} \sum_{x, 1 \leq \mu \leq 4} \theta_{\mu 5}^2(x) + \mathcal{O}(\alpha^5)$$

Εισάγουμε τα πεδία του φορμαλισμού στο συνεχές μέσω των σχέσεων

$$\theta_\mu(x) = \alpha_s A_\mu(x) (\mu = 1, 2, 3, 4), \quad \theta_5(x) = \alpha_5 A_5(x)$$

Το κομμάτι της δράσης με τις εγκάρσιες συνιστώσες ξαναγράφεται στην μορφή

$$\frac{\beta' \alpha_5}{2\alpha_s^2} \sum_{\mu=1,2,3,4} \alpha_s^4 \alpha_5 \sum (F_{\mu 5})^2 \rightarrow \frac{\beta' \alpha_5}{2\alpha_s^2} \int d^5 x \sum_{\mu=1,2,3,4} (F_{\mu 5})^2$$

ενώ για το χωροειδές κομμάτι έχουμε

$$\frac{\beta \alpha_s^2}{2\alpha_5} \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} \alpha_s^4 \alpha_5 \sum (F_{\mu\nu})^2 \rightarrow \frac{\beta \alpha_s^2}{2\alpha_5} \int d^5 x \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} (F_{\mu\nu})^2 \quad (105)$$

Εάν ορίσουμε

$$\beta \equiv \frac{\alpha_5}{g_5^2}, \quad \beta' \equiv \frac{\alpha_s^2}{g_5^2 \alpha_5}$$

η μορφή της δράσης στο συνεχές γίνεται:

$$S_{gauge} = \frac{1}{2g_5^2} \int d^5 x \left[ \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} (F_{\mu\nu})^2 + \sum_{\mu=1,2,3,4} (F_{\mu 5})^2 \right] = \int d^5 x \frac{1}{2g_5^2} F_{MN}^2 \quad (106)$$

όπου  $M = 1, 2, 3, 4, 5$  και  $g_5$  η σταθερά σύζευξης στις πέντε διαστάσεις με διαστάσεις μήκους.

## 6.1 Τα φυσικά μεγέθη

### 6.1.1 Η πλακέτα

Δύο τελεστές οι οποίοι χρησιμοποιούνται κυρίως για τον καθορισμό των διαφορετικών φάσεων του μοντέλου καθώς και για τον προσδιορισμό του είδους των μεταβάσεων φάσης είναι: η χωροειδής  $\hat{P}_S$  και η εγκάρσια  $\hat{P}_5$  πλακέτα και δίνονται από τις ακόλουθες εκφράσεις

$$\hat{P}_S = \frac{1}{6L^5} \sum_{x, 1 \leq \mu < \nu \leq 4} \cos \theta_{\mu\nu}(x) \quad (107)$$

$$\hat{P}_5 = \frac{1}{4L^5} \sum_{x, 1 \leq \mu \leq 4} \cos \theta_{\mu 5}(x) \quad (108)$$

όπου με  $L$  συμβολίζεται το μήκος του πλέγματος και που στο μοντέλο που εξετάζεται είναι το ίδιο για όλες τις διευθύνσεις.

Απο τους τελεστές (107) και (108) μπορούμε να εξάγουμε τις ακόλουθες ποσότητες:

1. Την μέση τιμή της χωροειδούς πλακέτας:

$$P_S \equiv \langle \hat{P}_S \rangle \quad (109)$$

όπου το  $\langle \dots \rangle$  συμβολίζει την στατιστική μέση τιμή, υπολογισμένη με βάση την δράση της εξίσωσης (104)

2. Την μέση τιμή της εγκάρσιας πλακέτας:

$$P_5 \equiv \langle \hat{P}_5 \rangle \quad (110)$$

3. Τις κατανομές  $N(\hat{P}_S), N(\hat{P}_5)$  των  $\hat{P}_S$  και  $\hat{P}_5$  αντίστοιχα.

4. Τις επιδεκτικότητες των  $\hat{P}_S$  και  $\hat{P}_5$ :

$$S(\hat{P}_S) = V(\langle \hat{P}_S^2 \rangle - \langle \hat{P}_S \rangle^2), \quad S(\hat{P}_5) = V(\langle \hat{P}_5^2 \rangle - \langle \hat{P}_5 \rangle^2) \quad (111)$$

όπου με  $V$  συμβολίζεται ο όγκος του συστήματος, είτε για πέντε είτε για 4 διαστάσεις, αναλόγως την υπο μελέτη περίπτωση.

5. Τις κατανομές Binder [10] των  $\hat{P}_S$  και  $\hat{P}_5$  αντίστοιχα:

$$B(\hat{P}_S) \equiv 1 - \frac{\langle \hat{P}_S^4 \rangle}{3 \langle \hat{P}_S^2 \rangle^2}, \quad B(\hat{P}_5) \equiv 1 - \frac{\langle \hat{P}_5^4 \rangle}{3 \langle \hat{P}_5^2 \rangle^2} \quad (112)$$

### 6.1.2 Το μέτρο ελικότητας (Helicity modulus)

Επιπροσθέτως χρησιμοποιήθηκε το μέτρο ελικότητας (h.m), ένα μέγεθος το οποίο εισήχθη για πρώτη φορά ως εργαλείο για την μελέτη των αβελιανών πεδίων βαθμίδας στο πλέγμα στην [7]. Λειτουργεί ως μια παράμετρος τάξης και χαρακτηρίζει την απόκριση του συστήματος σε μια εξωτερική ηλεκτρομαγνητική ροή. Ως ποσότητα ισοδυναμεί με την καμπυλότητα της ελεύθερης ενέργειας του συστήματος, παρουσία της εξωτερικής ροής, ως προς την αρχή,  $\Phi=0$  (στην πραγματικότητα οποιοδήποτε σημείο  $\Phi_0 \neq 0$  εξυπηρετεί).

$$h(\beta) = \left. \frac{\partial^2 F(\Phi)}{\partial \Phi^2} \right|_{\Phi=0} \quad (113)$$

Το h.m παίρνει μηδενική τιμή στην φάση παγίδευσης και μη μηδενική στην Coulomb. Αφού η στρωματική φάση του μοντέλου αποτελεί μια μίξη αυτών των δύο ακολουθείται η εξής διαδικασία: επιβάλλουμε μια έξτρα ροή  $\Phi$  σε μια στοίβα (stack) από πλακέτες

$$stack = \{\theta_{\mu\nu} | \mu = 1, \nu = 2; x = 1, y = 1\} \quad (114)$$

και με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών μοιράζουμε την ροή αυτή, ομοιόμορφα, σε όλες τις πλακέτες των παράλληλων επιπέδων.

Η συνάρτηση επιμερισμού αποκτά την εξής μορφή:

$$Z(\Phi) = \int D\theta \ e^{\beta \sum_{(\mu\nu)-planes} \cos(\theta_{\mu\nu} + \frac{\Phi}{L_\mu L_\nu}) + \beta \sum_{(\overline{\mu\nu})-planes} \cos(\theta_{\mu\nu})} e^{\beta' \sum_{1 \leq \mu \leq 4} \cos(\theta_{\mu 5})} \quad (115)$$

με δράση την :

$$S(\theta; \Phi) = -\beta \sum_{(\mu\nu)planes} \cos\left(\theta_{\mu\nu} + \frac{\Phi}{L_\mu L_\nu}\right) - \beta \sum_{(\mu\nu)\overline{planes}} \cos(\theta_{\mu\nu}) - \beta' \sum_{x, 1 \leq \mu \leq 4} \cos(\theta_{\mu 5}) \quad (116)$$

Το  $\sum_{(\mu\nu)}$  συμβολίζει το άθροισμα όλων των πλακετών των παράλληλων στο αρχικό επίπεδο της επιλογής μας, ενώ με το  $\sum_{(\overline{\mu\nu})}$  εννοείται το άθροισμα πάνω στα εναπομείναντα επίπεδα.

Η ελεύθερη ενέργεια του συστήματος παρουσία της εξωτερικής ροής ορίζεται ως εξής:

$$F(\Phi) = -\log \frac{Z(\Phi)}{Z(0)} \quad (117)$$

και κάνοντας χρήση του ορισμού (113) έχουμε:

$$h(\beta) = \frac{1}{(L_\mu L_\nu)^2} \left( \left\langle \sum_P (\beta \cos(\theta_{\mu\nu})) \right\rangle - \left\langle \left( \sum_P (\beta \sin(\theta_{\mu\nu})) \right)^2 \right\rangle \right) \quad (118)$$

με το άθροισμα στην παραπάνω εξίσωση να πραγματοποιείται πάνω σε όλες τις πλακέτες τις παράλληλες στο επίπεδο  $(\mu\nu)$  ενώ η αγκύλες συμβολίζουν την μέση τιμή ως προς όλες τις διαμορφώσεις (configurations) του πεδίου με βάση την συνάρτηση επιμερισμού (115).

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για τις πλακέτες του επιπέδου  $(\mu 5)$  ορίζεται το εγκάρσιο h.m :

$$h_5(\beta') = \frac{1}{(L_\mu L_5)^2} \left( \left\langle \sum_{P'} (\beta' \cos(\theta_{\mu 5})) \right\rangle - \left\langle \left( \sum_{P'} (\beta' \sin(\theta_{\mu 5})) \right)^2 \right\rangle \right) \quad (119)$$

οπου τώρα το άθροισμα εκτείνεται πάνω σε όλες τις πλακέτες τις παράλληλες στο επίπεδο ( $\mu 5$ ). Λίγα λόγια για το κλασσικό ( $\beta \rightarrow \infty$ ) όριο της δράσης (116) στο οποίο όλες οι διακυμάνσεις εξαφανίζονται. Σε αυτό το όριο η ροή είναι κατανομημένη κατα ίσα μέρη σε όλες τις πλακέτες του κάθε επιπέδου και δεν αλλάζει τιμή καθώς διασχίζουμε τα παράλληλα επίπεδα. Αν αναπτύξουμε την δράση σε δυνάμεις της ροής, αφού στο θερμοδυναμικό όριο η ποσότητα  $\frac{\Phi}{L_\mu L_\nu}$  είναι πάντοτε μικρή, έχουμε:

$$S_{\text{κλασσική}}(\Phi) = \frac{1}{2}\beta\Phi^2 \frac{V_{5D}}{(L_\mu L_\nu)^2} + \text{σταθερά} \implies F_{\text{κλασσική}}(\Phi) - F_{\text{κλασσική}}(0) = \frac{1}{2}\beta\Phi^2 \frac{V_{5D}}{(L_\mu L_\nu)^2}$$

όπου  $V_{5D} = L_\mu L_\nu L_\rho L_\sigma L_5$  είναι ο πενταδιάστατος όγκος στο πλέγμα.

Η παραπάνω έκφραση για την ελεύθερη ενέργεια,  $F$ , παραμένει σε ισχύ μέχρι το σημείο της μετάβασης φάσης, όπου οι διακυμάνσεις είναι παρούσες, αν αντικατασταθεί η 'γυμνή' σταθερά σύζευξης από την επανακανονικοποιημένη σταθερά,  $\beta \rightarrow \beta_R(\beta)$  (για λεπτομέρειες [8]).

$$F_{[\text{πεπερασμένο } \beta]}(\Phi) - F_{[\text{πεπερασμένο } \beta]}(0) = \frac{\beta_R}{2}\Phi^2 \left( \frac{L_\rho L_\sigma L_5}{L_\mu L_\nu} \right) \quad (120)$$

Απο τις εξισώσεις (113) και (120) έχουμε την ακόλουθη σχέση βάρθμισης για το 'χωρικό'  $h.m$

$$h_s(\beta) \sim \beta_R L \quad (121)$$

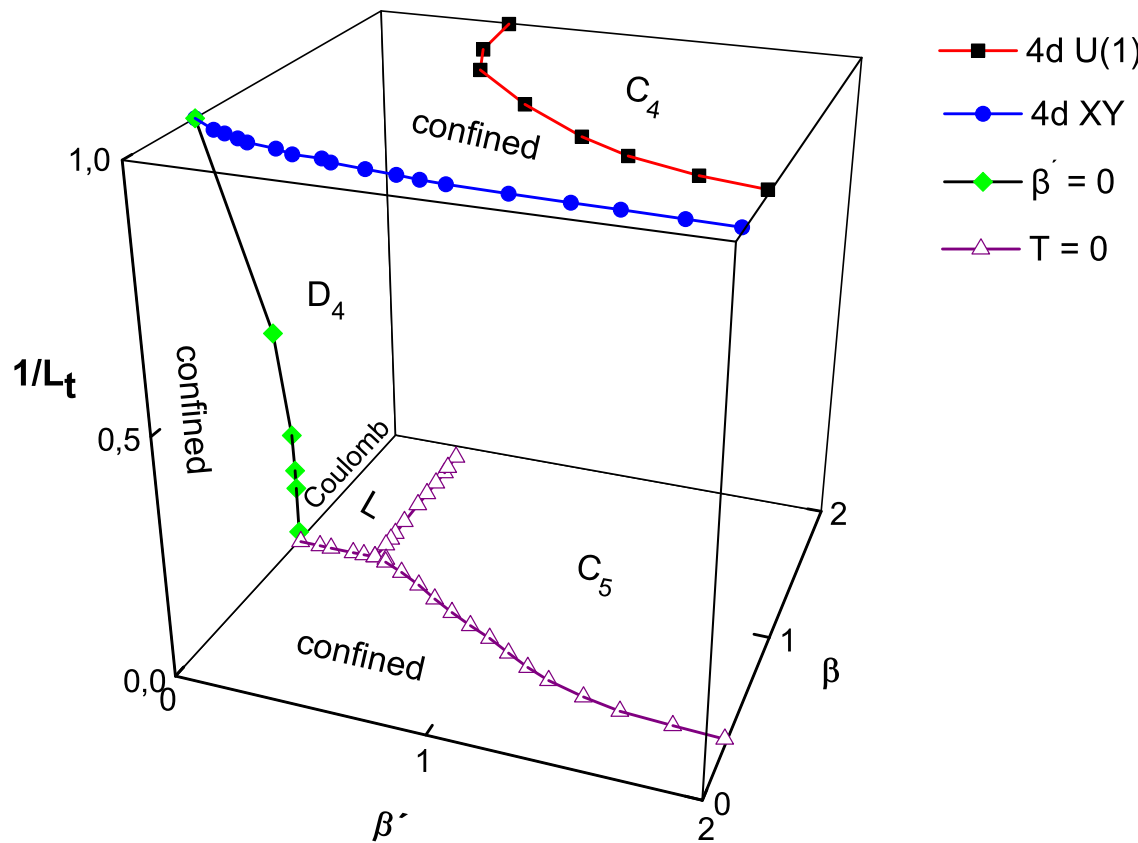
Τέλος σημειώνεται ότι η παρουσία της εξωτερικής ροής στο σύστημά μας μπορεί να υλοποιηθεί μέσω τροποποιημένων συνοριακών συνθηκών. Στην περίπτωση των μη-αβελιανών θεωριών βαθμίδας ( $SU(N)$ ) είναι δυνατή η τροποποίηση της ροής (μέσω κατάλληλων συνοριακών συνθηκών) σύμφωνα με την διακριτή ομάδα  $Z_N$ , κέντρο της  $SU(N)$ . Η τροποποίηση αυτή προκύπτει από την απαίτηση της αλλαγής των συνοριακών συνθηκών για ένα σύστημα βαθμίδας ορισμένο σε έναν υπερτόρο  $T_4$ , κατά τον πιο γενικό τρόπο συμβατό με την αναλλοιωτότητα κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας.

Η ιδέα αυτή (**t'Hooft**) μπορεί να επεκταθεί και στην περίπτωση των αβελιανών θεωριών με μόνη διαφορά ότι τώρα η μεταβολή της ροής πραγματοποιείται κατά συνεχή τρόπο.

$$U_2(x + L_1, y = 1, z, t) = U_2(x, y = 1, z, t)e^{i\phi}$$

## 7 Το διάγραμμα φάσης

Πριν την αναλυτική παρουσίαση του μοντέλου δίνεται η εικόνα του διαγράμματος φάσης καθώς και μια σύντομη περιγραφή της αναμενόμενης συμπεριφοράς των μεγεθών που χρησιμοποιήθηκαν για την περιγραφή των διαφόρων φάσεων. Το διάγραμμα φάσης παρουσιάζεται στο Σχ.(1).



Σχήμα 1: Το διάγραμμα φάσης του πενταδιάστατου ανισοτροπικού αβελιανού μοντέλου.



Στο σχήμα (1) και συγκεκριμένα στο επίπεδο  $\frac{1}{L_t} = 0$  (περίπτωση μηδενικής θερμοκρασίας) τα τρίγωνα αναπαριστούν τα αποτελέσματα απο βρόχους υστέρησης σε όγκους  $6^5$  και  $8^5$  και αναφέρονται στις χωροειδείς και χρονοειδείς πλακέτες καθώς και σε σημεία εκτεταμένης στατιστικής μελέτης. Το διάγραμμα φάσης περιλαμβάνει τρεις διακριτές φάσεις. Στην μία περιοχή, για μεγάλες τιμές των  $\beta$  και  $\beta'$  το σύστημα βρίσκεται σε μια πενταδιάστατη φάση Coulomb (**C**). Κρατώντας το  $\beta$  σταθερό και με τιμή μεγαλύτερη της μονάδας, καθώς το  $\beta'$  παίρνει ολοένα και μικρότερες τιμές, το σύστημα θα βρεθεί εντέλει σε μια κατάσταση όπου οι δυνάμεις στις τέσσερις διαστάσεις θα εξακολουθούν να έχουν την μορφή μιας δύναμης Coulomb αλλά κατά την πέμπτη διάσταση το σύστημα θα περιορίζει τα πεδία. Αυτό το καινούργιο χαρακτηριστικό της θεωρίας, αυτή η νέα φάση, ονομάζεται στρωματική φάση (**L**). Για μικρές τιμές των  $\beta$  και  $\beta'$  το σύστημα εμφανίζει δυνάμεις παγίδευσης των φορτισμένων σωματιδίων προς όλες τις διευθύνσεις ευρισκόμενο στην φάση ισχυρής ζεύξης(**S**) και σε συμφωνία με τα αναπτύγματα τις ισχυρής σταθεράς σύζευξης. Σύμφωνα με τα χαρακτηριστικά της στρωματικής φάσης θα πρέπει ένα δοκιμαστικό φορτίο να νιώθει την παρουσία μιας δύναμης Coulomb στις τέσσερις διαστάσεις, με σταθερά σύζευξης που δίνεται από το τετραδιάστατο  $\beta$ , ενώ κατά την πέμπτη διεύθυνση θα πρέπει να νιώθει μια ισχυρή δύναμη περιορισμού καθώς το  $\beta'$  παίρνει μικρές τιμές. Επομένως η στρωματική φάση μπορεί να εξυπηρετήσει ως ένας μηχανισμός περιορισμού του πεδίου βαθμίδας στον τετραδιάστατο υπόχωρο. Αξίζει να σημειωθεί σε αυτό το σημείο ότι ακόμη και στην περίπτωση όπου το σύστημα περιλαμβάνει φερμιόνια συζευγμένα με το πεδίο βαθμίδας τα ποιοτικά χαρακτηριστικά του διαγράμματος φάσης δεν αλλάζουν. Η στρωματική φάση παραμένει, έχοντας υποστεί μια ελαφριά υποχώρηση προς όφελος της Coulomb φάσης, γεγονός που εξηγείται από την παρουσία των φερμιονίων που οδηγούν σε μικρή εξασθένιση των δυνάμεων παγίδευσης που αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της στρωματικής φάσης.

Για την εξαγωγή του δυναμικού μεταξύ δύο φορτίων πολύτιμο εργαλείο αποτελούν οι βρόχοι του Wilson από όπου και περιμένουμε τις ακόλουθες συμπεριφορές [5]:

- $W_{\mu\nu}(L_1, L_2) \simeq \exp(-\sigma L_1 L_2)$  (Ισχυρή φάση (**S**),  $1 \leq \mu, \nu \leq 5$ )
- $W_{\mu\nu}(L_1, L_2) \simeq \exp(-\tau(L_1 + L_2))$  (Coulomb φάση (**C**),  $1 \leq \mu, \nu \leq 5$ )
- $W_{\mu\nu}(L_1, L_2) \simeq \exp(-\tau'(L_1 + L_2))$  και
- $W_{\mu 5}(L_1, L_2) \simeq \exp(-\sigma' L_1 L_2)$  ( Στρωματική φάση (**L**) ,  $1 \leq \mu, \nu \leq 4$ )

Απο την πλευρά του, το μέτρο ελικότητας αναμένεται να συμπεριφερθεί ως εξής:

(α) Στην ισχυρή φάση (κρατώντας το  $\beta'$  σταθερό) το χωροειδές μέτρο ελικότητας  $h_S(\beta)$ , θα πρέπει να έχει μηδενική τιμή ενώ καθώς περνάμε το κρίσιμο σημείο της μετάβασης στην στρωματική φάση, θα πρέπει να αποκτήσει μη μηδενικές τιμές, προσεγγίζοντας την μονάδα καθώς το  $\beta$  αυξάνει περαιτέρω. Απο την άλλη μεριά θα πρέπει το εγκάρσιο μέτρο ελικότητας  $h_S(\beta')$ , να διατηρήσει την μηδενική τιμή του για όλες τις τιμές του  $\beta$  αφού κατά την μετάβαση αυτή και οι δύο φάσεις επιδεικνύουν δυνάμεις παγίδευσης κατά την εγκάρσια διεύθυνση.

(β) Για την μετάβαση ανάμεσα στην Coulomb και την στρωματική φάση, περιμένουμε το  $h_S(\beta)$  να διατηρήσει μια τιμή κοντά στην μονάδα, αφού και για τις δύο φάσεις ο τετραδιάστατος υπόχωρος κυβερνάται από δυνάμεις Coulomb , ενώ το  $h_S(\beta')$  αναμένεται να ξεκινήσει από μηδενική τιμή (στρωματική φάση) για να αποκτήσει τιμή διάφορη του μηδενός καθώς εισέρχεται στην Coulomb , προσεγγίζοντας την μονάδα για μεγάλες τιμές του  $\beta'$ .

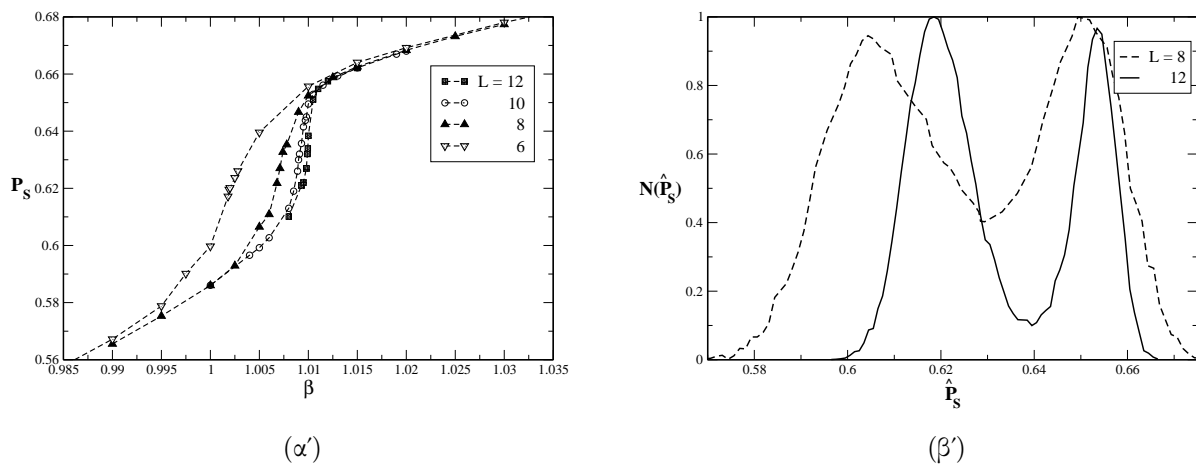
## 8 Αποτελέσματα Monte Carlo

Για την μελέτη του μοντέλου χρησιμοποιήθηκε ένας 5-hit αλγόριθμος metropolis συμπληρωμένος από μια μέθοδο overrelaxation. Για τις μετρήσεις χρησιμοποιήθηκαν οι όγκοι:  $6^5$ ,  $8^5$ ,  $10^5$ ,  $12^5$  και  $14^5$  ενώ περισσότερες από  $10^5$  μετρήσεις αφιερώθηκαν στην διαδικασία για την αποκατάσταση θερμικής ισορροπίας. Επίσης χρησιμοποιήθηκαν δύο αυτορυθμιζόμενες κλίμακες, μία για την διαδικασία ενημέρωσης των τιμών του πεδίου στον τετραδιάστατο υπόχωρο και μία για την εγκάρσια διεύθυνση ενώ για κάθε τιμή των παραμέτρων αποκτήθηκε ένα δείγμα από περίπου  $5 - 9 \times 10^4$  μετρήσεις. Ο υπολογισμός των σφαλμάτων έγινε με χρήση της μεθόδου Jack Knife . Στις ενότητες που ακολουθούν παρουσιάζεται αναλυτικά η μελέτη των μεταβάσεων ανάμεσα στην φάση ισχυρής ζεύξης και την στρωματική φάση καθώς και της στρωματικής προς την Coulomb. Η μετάβαση από την φάση ισχυρής ζεύξης προς την Coulomb μελετήθηκε στην [5] όπου και αναγνωρίστηκε ως μια ισχυρή μετάβαση πρώτης τάξης.

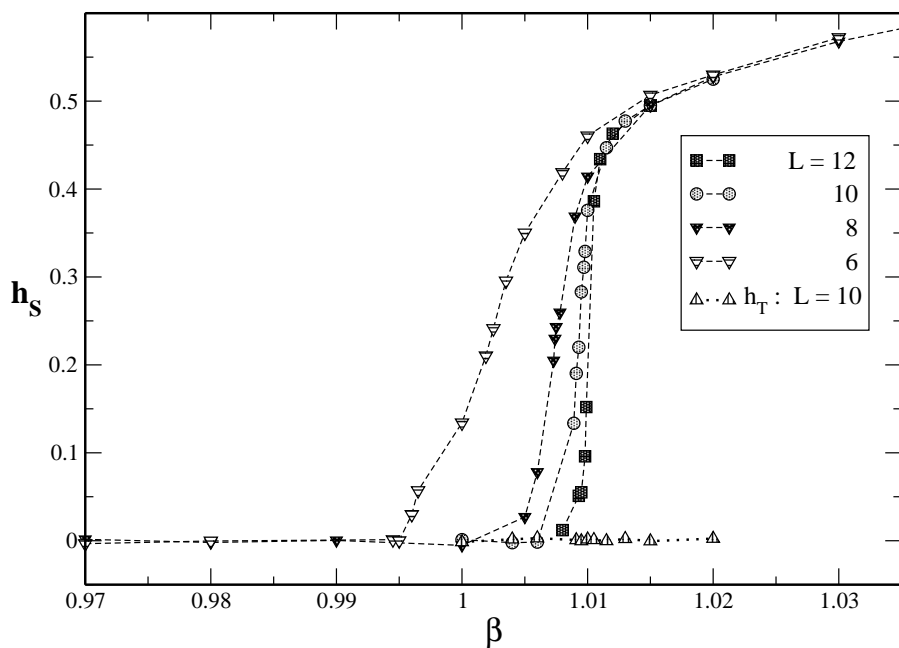
### 8.1 Η ισχυρής ζεύξης-στρωματική μετάβαση τάξης

Επιλέγουμε την σταθερή τιμή  $\beta' = 0.2$  αφήνουμε το  $\beta$  να μεταβάλλεται καθώς μελετάμε το σύστημα για τέσσερις διαφορετικούς όγκους:  $6^5, 8^5, 10^5$  και  $12^5$ . Για επαρκώς χαμηλές τιμές του  $\beta$  η πλακέτα  $P_S$  τείνει στην τιμή  $\beta/2$  σε συμφωνία με το όριο της ισχυρής σταθεράς σύζευξης ενώ καθώς η τιμή του  $\beta$  αυξάνει περαιτέρω, μπαίνοντας στην Coulomb φάση, η τιμή της προσεγγίζει το όριο της ασθενούς σύζευξης  $1 - 1/(d\beta)$  (Σχ.[2(α)]). Η μετάβαση γίνεται όλο και πιο έντονη καθώς αυξάνει ο όγκος του συστήματος. Ως μια πρώτη απόδειξη για τον χαρακτηρισμό της μετάβασης ως πρώτης τάξης παρουσιάζεται το Σχ.2(β) όπου και εμφανίζεται ένα ξεκάθαρο διπλό σήμα στην κατανομή της χωροειδούς πλακέτας, σήμα που γίνεται ακόμη πιο έντονο με την αύξηση του όγκου του συστήματος. Εδώ θα πρέπει να διευκρινιστεί ότι το σήμα αυτό εμφανίζεται μόνο κατά τον υπολογισμό του μεγέθους στους τετραδιάστατους υπόχωρους ( layers ) και όχι κατά τον υπολογισμό του στο σύνολο του όγκου του συστήματος. Ο λόγος για τον οποίο συμβαίνει αυτό είναι ότι καθώς το σύστημα περνά στην στρωματική φάση κατά μή συνεχή τρόπο, τα διάφορα μεγέθη μετρούμενα στους τετραδιάστατους υπόχωρους εμφανίζουν μια μη-σύμφωνη συμπεριφορά. Το γεγονός αυτό, για μια ισχυρή μετάβαση πρώτης τάξης οδηγεί στην εμφάνιση πολλαπλών σημάτων στις κατανομές ποσοτήτων μετρούμενων στο σύνολο του όγκου ενώ για ασθενείς μεταβάσεις πρώτης τάξης την θέση τους παίρνουν πλατιές κατανομές. Με την επισήμανση αυτή κατά νου και για να αποκτήσουμε ένα ξεκάθαρο σήμα μελετάμε την μετάβαση αυτή από την σκοπιά των τετραδιάστατων υπόχωρων.

Για την ίδια μετάβαση η συμπεριφορά του χωροειδούς μέτρου ελικότητας  $h_S$ , παρουσιάζεται στο Σχήμα 3. Όπως αναμενόταν το  $h_S$  παίρνει αυστηρά μηδενική τιμή στην φάση παγίδευσης των φορτισμένων σωματιδίων και μη μηδενική στην Coulomb, με την μετάβαση να γίνεται ολοένα και πιο έντονη καθώς ο όγκος του συστήματος αυξάνει. Συγκεκριμένα, για τον μεγαλύτερο όγκο που εξετάστηκε μια απότομη αλλαγή στην τιμή της συγκεκριμένης ποσότητας πραγματοποιείται για  $\beta \sim 1.01$ . Στην ίδια εικόνα συμπεριλαμβάνεται και το  $h_5$  (εγκάρσιο μέτρο ελικότητας) το οποίο έχει μηδενική τιμή και στις δύο φάσεις, ενδεικτικό των δυνάμεων παγίδευσης των πεδίων κατά την πέμπτη (εγκάρσια) διεύθυνση.



Σχήμα 2: (α): Οι μέσες τιμές για την χωροειδή πλακέτα (β) Η κατανομή της  $P_S$ ,  $N(P_S)$  για  $L = 8$  στο  $\beta' = 0.2$  και  $\beta = 1.0073$  και  $L = 12$  για  $\beta' = 0.2$  και  $\beta = 1.0099$ .

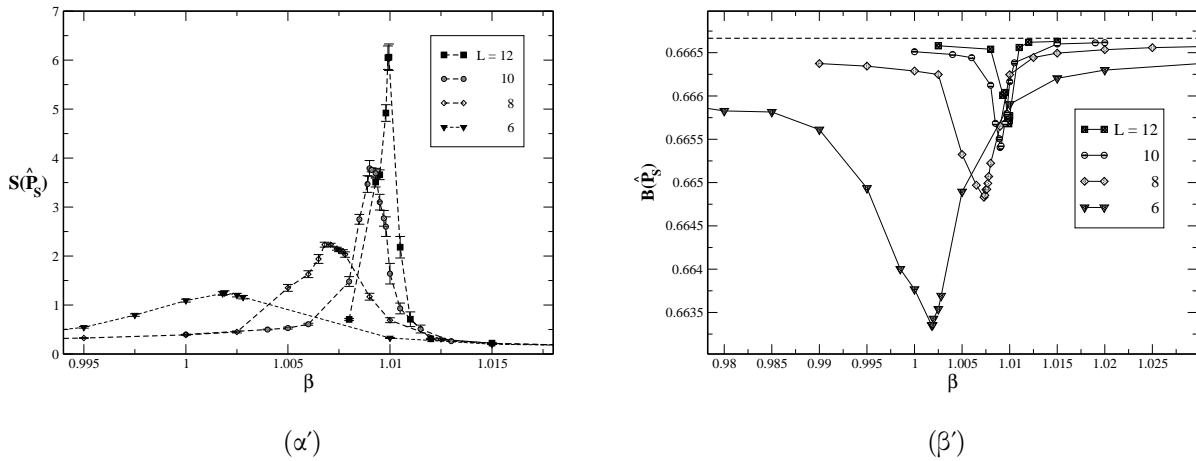


Σχήμα 3: Η εξάρτηση απο τον όγκο του χωροειδούς  $h.m, h_S$ . Παρουσιάζονται επίσης και τα αποτελέσματα για το εγχάρσιο  $h.m, h_5$  για  $L = 10$ .

Η εξάρτηση της επιδεικτικότητας  $S(\hat{P}_S)$  και της κατανομής Binder  $B(\hat{P}_S)$  από τον όγκο παρουσιάζονται στο Σχήμα.4 .Το  $S(\hat{P}_S)$  (μετρούμενο πάνω στον  $4 - D$  υπόχωρο) εμφανίζει μια ξεκάθαρη αύξηση με τον όγκο αλλά όχι γραμμικά. Επίσης, το ελάχιστο της κατανομής Binder αυξάνει και αυτό με τον όγκο αλλά μάλλον αρκετά αργά. Ενδεικτικό είναι ότι για τον μεγαλύτερο όγκο που εξετάστηκε ( $12^5$ ) η ελάχιστη τιμή,  $B^{min}(\hat{P}_S)$ , βρίσκεται αρκετά μακριά από την θεωρητική τιμή  $2/3$  του θερμοδυναμικού ορίου για μεταβάσεις υψηλότερης τάξης. Μια εκτίμηση του ορίου άπειρου όγκου (θερμοδυναμικό όριο) για το ελάχιστο της κατανομής Binder  $B^{min}(\hat{P}_S)$  μπορεί να αποκτηθεί κάνοντας χρήση του τύπου:

$$B_{min}(\hat{P}_S) = B_{min,\infty} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{C_{\kappa}}{V_4^{\kappa}}$$

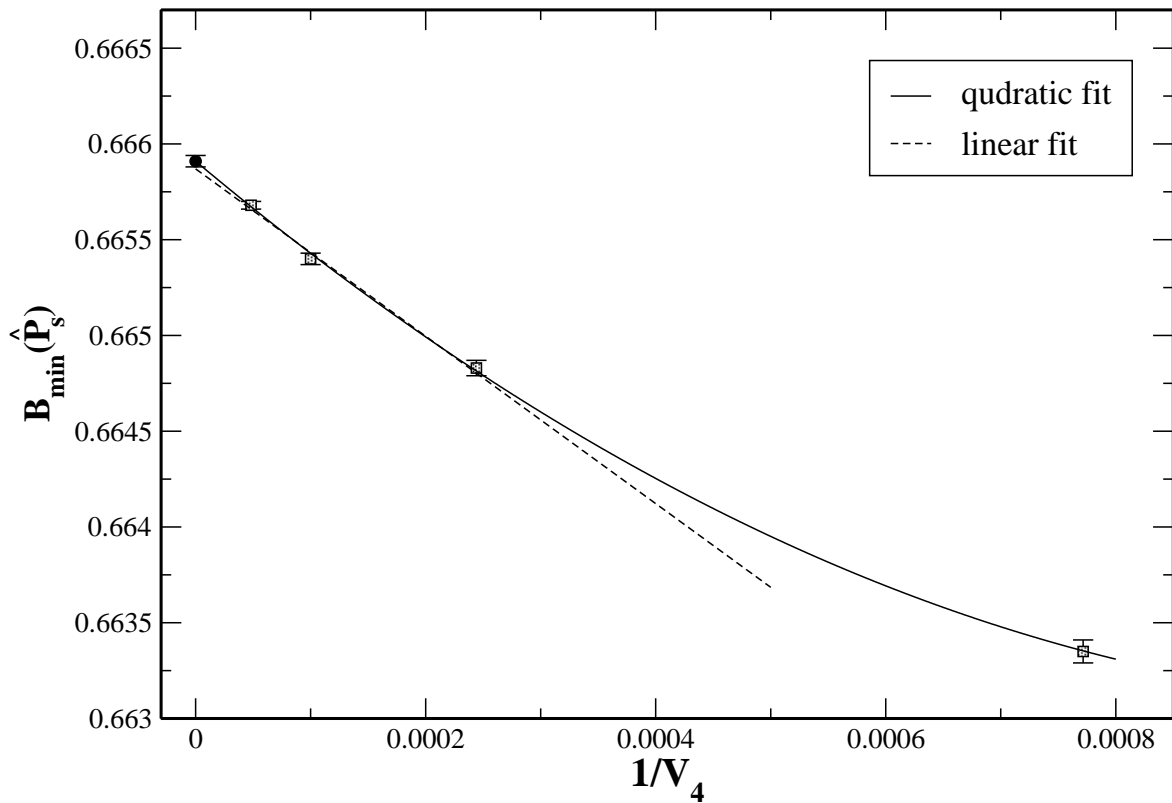
όπου το  $V_4$  συμβολίζει τον όγκο των τετραδιάστατων στρωμάτων και περιορίζουμε το άθροισμα στην παραπάνω σχέση σε όρους μέχρι  $\kappa = 2$ . Οι σχετικές τιμές που χρησιμοποιήθηκαν για την προσαρμογή αυτή δίνονται στον Πίνακα 1 ενώ στο Σχήμα.5 παρουσιάζεται η γραφική απεικόνιση των αποτελεσμάτων. Το αποτέλεσμα για το όριο του άπειρου όγκου που αποκτήθηκε κατά την εφαρμογή της παραπάνω σχέσης είναι:  $B_{min,\infty} = 0.66591(3)$  αρκετά μακριά από την τιμή  $2/3$  ενώ συμβατά αποτελέσματα δίνει και η γραμμική προσαρμογή για τους τρεις μεγαλύτερους όγκους. Η παρατηρούμενη συμπεριφορά και των δύο ποσοτήτων που εξετάστηκαν απομακρύνει, κατά τα φαινόμενα, την πιθανότητα ύπαρξης μιας μετάβασης υψηλότερης τάξης.



Σχήμα 4: Η εξάρτηση από τον όγκο της επιδεικτικότητας (a) και της κατανομής Binder (b) για την χωροειδή πλακέτα.

$L$	$\beta_c$	$B_{min}(\hat{P}_S)$	$S_{max}(\hat{P}_s)$	$E_S$	$E_L$
6	1.00180(6)	0.66335(6)	1.125( 8)	0.5925(7)	0.6484(8)
8	1.00710(4)	0.66483(4)	2.254(50)	0.6065(2)	0.6511(2)
10	1.00910(9)	0.66540(3)	3.784(40)	0.6141(2)	0.6528(1)
12	1.00995(3)	0.66568(2)	6.110(30)	0.6190(1)	0.6535(1)

Πίνακας 1: Οι ψευδοκρίσιμες τιμές της σταθεράς σύζευξης, τα ελάχιστα της κατανομής Binder,  $B(\hat{P}_S)$ , τα μέγιστα της χωροειδούς επιδεκτικότητας,  $S_{max}(\hat{P}_s)$ , και οι ενεργειακές κορυφές για την φάση ισχυρής ζεύξης και την στρωματική φάση για  $\beta' = 0.2$ .



Σχήμα 5: Η προσαρμογή του  $B_{min}(\hat{P}_S)$  στο όριο του άπειρου όγκου.

Στη συνέχεια ακολουθεί η ανάλυση πεπερασμένου μεγέθους (finite size analysis) για τα μέγιστα της επιδεκτικότητας της χωροειδούς πλακέτας. Ακολουθώντας την μέθοδο που προτείνεται στην [11] και εφαρμόστηκε στην περίπτωση του  $4D \quad U(1)$  μοντέλου στην [13], κάνουμε χρήση των σχέσεων:

$$\beta_c = \beta_\infty + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{A_\kappa}{V_4^\kappa}$$

$$\frac{\beta_c^2 S_{max}(\hat{P}_S)}{V_4} = \frac{1}{4} G_\infty^2 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{B_\kappa}{V_4^\kappa} \quad (122)$$

όπου το  $\beta_c$  συμβολίζει την ψευδοκρίσιμη τιμή της σταθεράς σύζευξης για τον εκάστοτε όγκο, το  $\beta_\infty$  συμβολίζει την τιμή της σταθεράς σύζευξης στο όριο του άπειρου όγκου και τέλος το  $G_\infty$  συμβολίζει το ενεργειακό χάσμα στην τιμή της πλακέτας για το ίδιο όριο. Οι τιμές για το  $\beta_c$  αποκτήθηκαν από την προσαρμογή των μετρήσεων σε μια γκαουσιανή καμπύλη για τιμές γύρω από το μέγιστο της επιδεκτικότητας ενώ συμβατά αποτελέσματα αποκτήθηκαν με χρήση της μεθόδου πολλαπλού ιστογράμματος. Όλες οι τιμές που χρησιμοποιήθηκαν παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.

Τα αποτελέσματα της διαδικασίας προσαρμογής των αποτελεσμάτων στην εξίσωση (122) με  $\kappa = 2$  είναι τα εξής:

$$\beta_\infty = 1.01072(5) \quad \text{kai} \quad G_\infty = 0.0297(5) \quad (123)$$

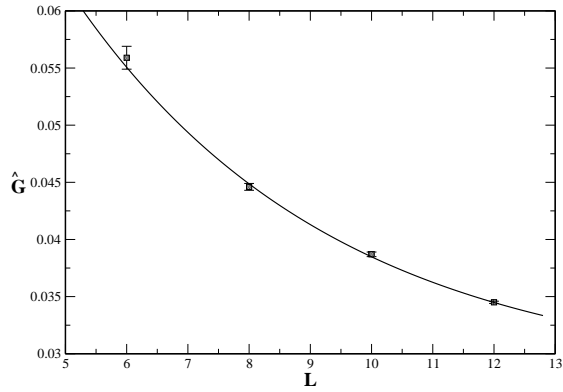
Η τιμή του  $\beta_\infty$  που αποκτήθηκε βρίσκεται πολύ κοντά σε αυτήν του  $4D \quad U(1)$  μοντέλου όπως αυτή εκτιμήθηκε στην [13]. Το γεγονός αυτό δεν προκαλεί έκπληξη αφού και για τα δύο μοντέλα η μετάβαση που πραγματοποιείται είναι ανάμεσα σε μια φάση παγίδευσης φορτισμένων σωματιδίων και μια τετραδιάστατη φάση Coulomb. Το αποτέλεσμα αυτό ενισχύει τον αρχικό ισχυρισμό ότι οι τετραδιάστατοι υπόχωροι περνούν στην Coulomb φάση με τρόπο, λίγο έως πολύ ανεξάρτητο, λόγω της ισχυρής φύσης των δυνάμεων κατά την πέμπτη διάσταση. Τα διάφορα 'στρώματα' της θεωρίας είναι σε πολύ μεγάλο βαθμό αποσυζευγμένα.

Το ενεργειακό χάσμα στο όριο του άπειρου όγκου μπορεί να μετρηθεί και με δύο ακόμη τρόπους. Ο πρώτος εξ αυτών κάνει χρήση των δύο κορυφών στα ιστογράμματα της κατανομής των πλακετών. Απο αυτά είναι δυνατή η εξαγωγή των τιμών των ενεργειακών κορυφών  $E_{i=S,L}$  που αντιστοιχούν στην φάση ισχυρής ζεύξης και την στρωματική φάση, με μια γκαουσιανή προσαρμογή των αποτελεσμάτων στην γειτονιά της κάθε κορυφής. Από αυτές υπολογίζεται η διαφορά  $\hat{G} = E_L - E_S$  για κάθε όγκο του συστήματος και στη συνέχεια οι τιμές αυτές προσαρμόζονται στην σχέση:

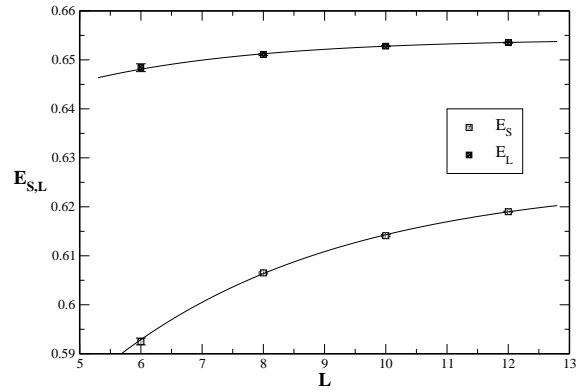
$$\hat{G} = G_\infty + G_1 e^{-G_2 L} \quad (124)$$

Στο Σχήμα 6(α) παρουσιάζεται η γραφική απεικόνιση των αποτελεσμάτων της παραπάνω μεθόδου. Η τιμή που αποκτάμε είναι:

$$G_\infty = 0.0278(13) \quad (125)$$



(α')



(β')

Σχήμα 6: (α): Αποτελέσματα για το ενεργειακό χάσμα,  $\hat{G}$ , σύμφωνα με την Εξισ.(124), (β): Τα αποτελέσματα για τις ενεργειακές κορυφές Εξισ.(103).

Η δεύτερη μέθοδος κάνει απευθείας χρήση των τιμών  $E_{i=S,L}$  των ενεργειακών κορυφών. Οι τιμές αυτές (Πίνακας.1) προσαρμόζονται σε σχέσεις της μορφής:

$$E_i(L) = E_{i,\infty} + c_{1,i}e^{-c_{2,i}L} \quad i = S, L \quad (126)$$

Απο τις παραπάνω σχέσεις έχουμε για το όριο του άπειρου όγκου:  $E_{S,\infty} = 0.6257(8)$  και  $E_{L,\infty} = 0.6543(4)$  και κατα συνέπεια για την τιμή του ενεργειακού χάσματος

$$G_\infty = 0.0286(9) \quad (127)$$

Η σύγκριση των αποτελεσμάτων (123),(125) και (127) οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι τρεις μέθοδοι δίνουν συμβατά αποτελέσματα και δίχως αμφιβολία διάφορα του μηδενός. Η ύπαρξη μη μηδενικής τιμής για το ενεργειακό χάσμα στην τιμή της πλακέτας αποτελεί μία ακόμη ένδειξη για τον χαρακτηρισμό αυτής της αλλαγής φάσης ως πρώτης τάξης.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η ενδεχόμενη επιρροή της παραμέτρου  $\beta'$  στην διαμόρφωση των αποτελεσμάτων. Για τον λόγο αυτό επαναλαμβάνουμε ολόκληρη την προηγούμενη ανάλυση αλλά αυτή τη φορά με τιμή για την εγκάρσια σταθερά σύζευξης  $\beta' = 0.01$ . Η επιλογή αυτή δεν είναι τυχαία καθώς μας φέρνει πολύ κοντά στην τετραδιάστατη περίπτωση όπου και βρέθηκε μια ασθενής μετάβαση πρώτης τάξης [35]. Η διαδικασία και τα βήματα που ακολουθούνται είναι ακριβώς τα ίδια με την περίπτωση του  $\beta' = 0.2$ .

Τα αποτελέσματα για τις ψευδοκρίσιμες τιμές των σταθερών σύζευξης, για τα μέγιστα της επιδεκτικότητας, το ενεργειακό χάσμα και τις ενεργειακές κορυφές παρουσιάζονται στον Πίνακα.2.

$L$	$\beta_c$	$S_{max}(P_S)$	$E_S$	$E_L$
6	1.00190(8)	1.125(20)	0.5900(9)	0.6467(8)
8	1.00750(6)	2.210( 3)	0.6061(7)	0.6510(6)
10	1.00930(4)	3.710( 9)	0.6144(5)	0.6531(4)
12	1.01010(3)	5.980(34)	0.6189(3)	0.6336(3)

Πίνακας 2: Η ψευδοκρίσιμες τιμές της σταθεράς σύζευξης, τα μέγιστα της χωροειδούς επιδεικτικότητας,  $S_{max}(P_S)$ , και οι τιμές των ενεργειακών κορυφών στην φάση ισχυρής ζεύξης και την στρωματική φάση για  $\beta' = 0.01$ .

$\beta'$	$\beta_\infty$	$G_\infty$
0.2	1.01072(5)	0.0297(5) / 0.0278(13) / 0.0286(9)
0.01	1.01077(5)	0.0305(20) / 0.0294(23) / 0.0303(14)

Πίνακας 3: Οι κρίσιμες τιμές για την χωροειδή σταθερά σύζευξης και για το ενεργειακό χάσμα υπολογισμένα με τρεις διαφορετικούς τρόπους για δύο τιμές της εγκάρσιας σταθεράς σύζευξης,  $\beta' = 0.2, 0.01$ .

Συγκεντρωτικά αποτελέσματα και για τις δύο τιμές της παραμέτρου  $\beta' = 0.2$  και  $\beta' = 0.01$  παρουσιάζονται στον Πίνακα.3 και οδηγούν στα εξής συμπεράσματα:

1. Η μετάβαση φάσης πραγματοποιείται για σχεδόν σταθερή τιμή της χωροειδούς σταθεράς σύζευξης  $\beta$ . Επιπλέον η κρίσιμη τιμή για την μετάβαση ανάμεσα στην 5D Coulomb και την στρωματική φάση βρίσκεται πολύ κοντά σε αυτήν του τετραδιάστατου αβελιανού μοντέλου.
2. Λόγω της μη μηδενικής τιμής του ενεργειακού χάσματος στο όριο του άπειρου όγκου και σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα της υπόλοιπης ανάλυσης η μετάβαση φάσης ανάμεσα στην φάση ισχυρής ζεύξης και την Coulomb αναγνωρίζεται ως ασθενής πρώτης τάξης.

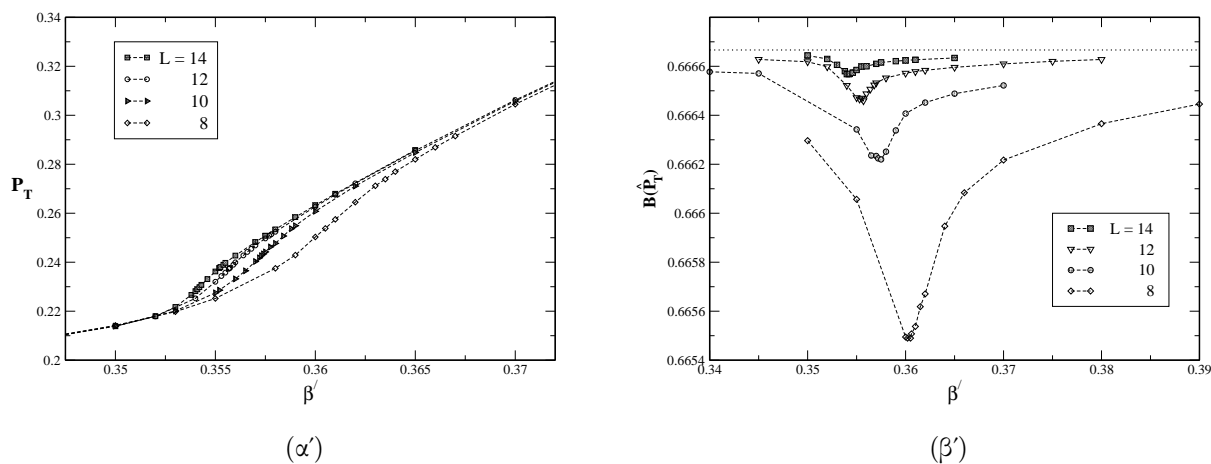


## 8.2 Η Coulomb-Στρωματική μετάβαση φάσης

Σε αυτό το κομμάτι της μελέτης εξετάστηκαν τέσσερις όγκοι:  $8^5, 10^5, 12^5$  και  $14^5$ . Η αναλλοίωτη, κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας, ποσότητα που χρησιμοποιήθηκε για την μελέτη της μετάβασης αυτής είναι η εγκάρσια πλακέτα, της οποίας οι τιμές τείνουν προς το όριο της ισχυρής σύζευξης,  $\beta'/2$ , στην φάση παγίδευσης των φορτισμένων σωματιδίων και αυξάνουν καθώς το σύστημα περνά στην Coulomb. Η χωροειδής πλακέτα δεν παρουσιάζει ουσιαστική αλλαγή στην τιμή της, κάτι το οποίο αναμενόταν άλλωστε αφού και για τις δύο φάσεις οι τετραδιάστατοι υπόχωροι διέπονται από δυνάμεις Coulomb [5].

Επιλέγουμε να κρατήσουμε το  $\beta$  σταθερό στην τιμή 1.4 και αφήνουμε το  $\beta'$  ελεύθερο να μεταβληθεί. Στο Σχ.7(α) παρουσιάζεται η εγκάρσια πλακέτα ως συνάρτηση του  $\beta'$  και για τους τέσσερις όγκους. Μια πρώτη παρατήρηση που αφορά το σχήμα είναι πως η μετάβαση κινείται προς μικρότερες τιμές της εγκάρσιας σταθεράς σύζευξης καθώς ο όγκος του συστήματος αυξάνει. Επίσης μικρή διαφορά στις τιμές του  $P_5$  παρατηρείται για τους δύο μεγαλύτερους όγκους στην περιοχή της μετάβασης υπονοώντας σύγκλιση στο όριο του άπειρου όγκου.

Στο Σχ.7(β) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για την κατανομή Binder,  $B(\hat{P}_5)$ , και για τους τέσσερις όγκους. Η ελάχιστη τιμή της ποσότητας αυτής, για τον μεγαλύτερο όγκο που χρησιμοποιήθηκε, είναι πολύ κοντά στην οριακή τιμή  $2/3$ . Παρόλο που το γεγονός αυτό υπονοεί την ύπαρξη μιας συνεχούς μετάβασης τάξης, εντούτοις δεν μπορεί να γίνει διαχωρισμός ανάμεσα σε μια μετάβαση δεύτερης τάξης και μια ομαλή μετάβαση (crossover).

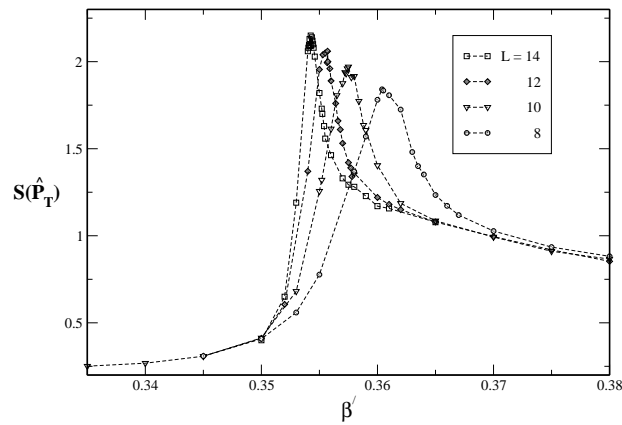


Σχήμα 7: (α): Η μέσες τιμές της εγκάρσιας πλακέτας,  $P_5$ , ως συνάρτηση του όγκου, (β): Η κατανομή Binder,  $B(\hat{P}_5)$ , ως συνάρτηση του όγκου.

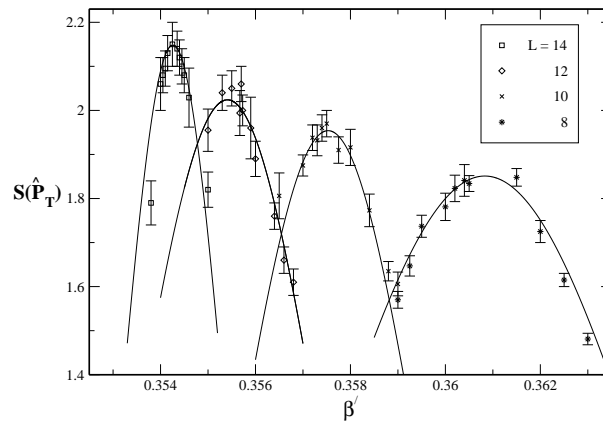
Η επιδεικτικότητα,  $S(\hat{P}_5)$ , ως συνάρτηση του πενταδιάστατου όγκου παρουσιάζεται στο Σχήμα 8. Οι κορυφές του σχήματος παρουσιάζουν βύθιση με τον όγκο. Οι τιμές του ψευδοκρίσιμου  $\beta'_c$  και τα μέγιστα της επιδεικτικότητας,  $S_{max}(\hat{P}_5)$ , βρέθηκαν από την προσαρμογή των σημείων σε γκαουσιανή καμπύλη στην γειτονιά της κορυφής και παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.

$L$	$\beta'_c$	$S_{max}(\hat{P}_T)$
8	0.36083(8)	1.857(10)
10	0.35746(6)	1.940(12)
12	0.35541(8)	2.024(14)
14	0.35426(3)	2.148(15)

Πίνακας 4: Οι ψευδοκρίσιμες τιμές  $\beta'_c$  και τα μέγιστα της εγκάρσιας επιδεκτικότητας,  $S_{max}(\hat{P}_5)$  για  $\beta = 1.4$ .

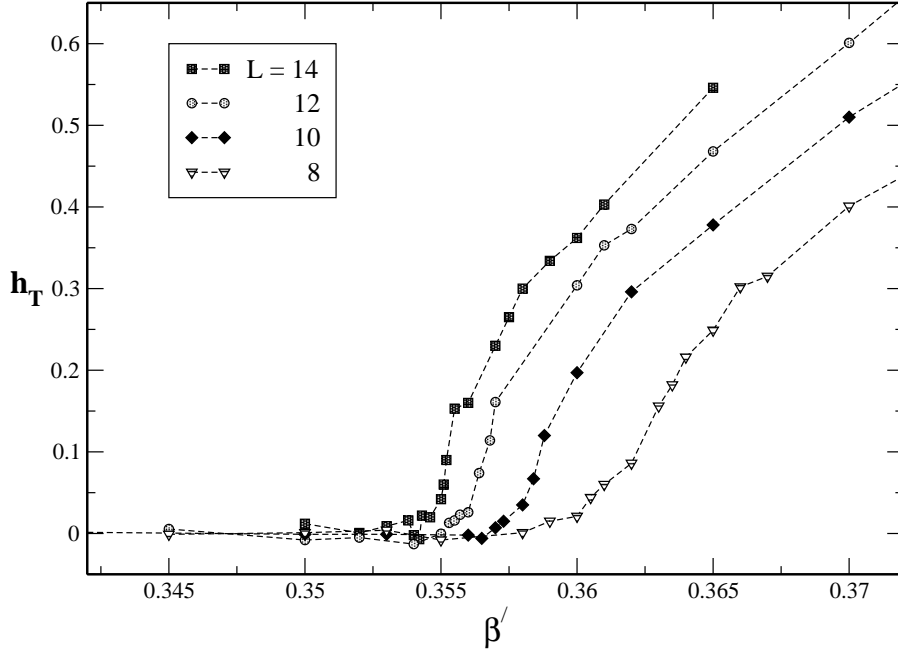


(α')



(β')

Σχήμα 8: (α) Η εξάρτηση απο τον όγκο για την επιδεκτικότητας της εγκάρσιας πλακέτας, (β) Τα αποτελέσματα της προσαρμογής των τιμών σε γκαουσιανή καμπύλη.



Σχήμα 9: Η εξάρτηση απο τον όγκο του εγκάρσιου μέτρου ελικότητας.

Το εγκάρσιο μέτρο ελικότητας  $h_T$ , προσφέρει μια πιο ξεκάθαρη εικόνα της αλλαγής φάσης καθώς ο όγκος αυξάνει. Όσο το σύστημα βρίσκεται στην στρωματική φάση οι δυνάμεις παγίδευσης μεταξύ των γειτονικών τετραδιάστατων υπόχωρων καθιστούν το σύστημα αναίσθητο στην παρουσία μιας εξωτερικής ροής. Συνεπώς το εγκάρσιο  $h.m$  έχει μηδενική τιμή. Όταν όμως το σύστημα περάσει στην Coulomb με την συνεπακόλουθη αλλαγή στην φύση των δυνάμεων, το  $h_T$  αποκτά μη μηδενική τιμή. Η συμπεριφορά του χωροειδούς μέτρου ελικότητας,  $h_S$ , είναι τελείως διαφορετική: από την σκοπιά των 4D υπόχωρων η μετάβαση από την στρωματική (Layer) στην Coulomb φάση είναι μια μετάβαση από ένα 4D σε ένα 5D νόμο Coulomb. Για τον λόγο αυτό αναμένεται το  $h_S$  να διατηρήσει μια σταθερή τιμή καθ' όλη την μετάβαση. Στο Σχ.9 παρουσιάζεται το εγκάρσιο  $h.m$  για τους τέσσερις όγκους. Καθώς ο όγκος αυξάνει η μετάβαση προς την Coulomb φάση γίνεται όλο και πιο απότομη επιτρέποντας, θεωρητικά, την εξαγωγή του κρίσιμου σημείου της μετάβασης. Μια σύγκριση μεταξύ του Σχ.7(α) και του Σχ.9 οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το σήμα που αποκτάται από το εγκάρσιο μέτρο ελικότητας  $h_T$ , υπερτερεί σε σχέση με αυτό της εγκάρσιας πλακέτας  $P_T$ .

Προϋποθέτοντας την ύπαρξη μιας μετάβασης δεύτερης τάξης κοντά στο κρίσιμο σημείο της μετάβασης το μήκος συσχετισμού θα δίνεται από μια έκφραση της μορφής:

$$\xi \sim |\beta' - \beta'_c|^{-\nu} \quad (128)$$

Επίσης υποθέτουμε ότι η ψευδοκρίσιμη τιμή της εγκάρσιας σταθεράς σύζευξης έχει την ακόλουθη εξάρτηση από το μήκος πλέγματος [14]:

$$\beta'(L) = \beta'_\infty(1 + C_1 L^{-\frac{1}{\nu}}) \quad (129)$$

ή ισοδύναμα

$$\ln |\beta'(L) - \beta'_\infty| = C_2 - \frac{1}{\nu} \ln(L) \quad (130)$$

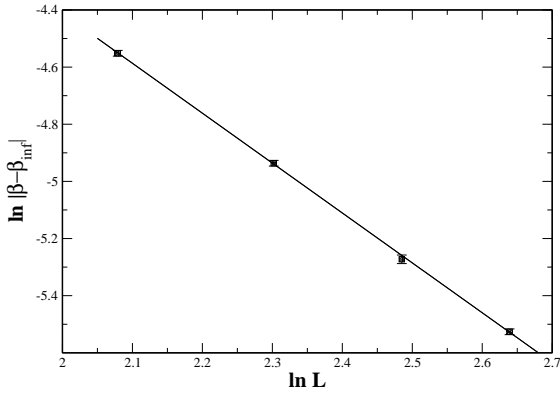
Χρησιμοποιώντας τις τιμές του Πίνακα 4 έχουμε (Σχ.10(α) ):

$$\nu = 0.57(5) \quad \beta'_\infty = 0.35028(53) \quad (131)$$

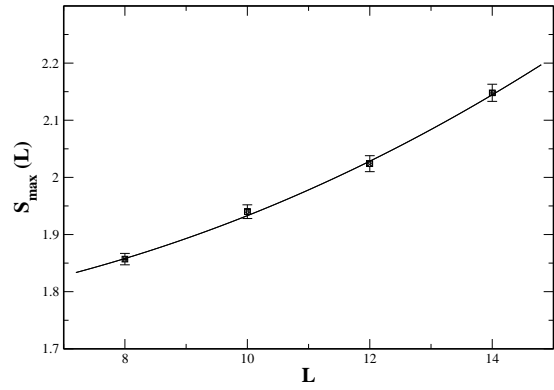
Ο ασυμπτωτικός scaling νόμος για την επιδεκτικότητα παίρνει την μορφή:

$$S_{max}(L) = C_1 + C_2 L^{\frac{\gamma}{\nu}} \quad (132)$$

Πάλι με χρήση του Πίνακα 4 παίρνουμε  $\frac{\gamma}{\nu} = 2.19(74)$  και με τη βοήθεια της Εξισ.(131)  $\gamma = 1.24(44)$ . Στο Σχήμα 10(β) αναπαρίστανται γραφικά τα αποτελέσματα της εφαρμογής της Εξισ.(132). Η ανάλυση οδηγεί σε έναν εκθέτη για τον όγκο ίσο με 0.44(15), πολύ κοντά στην τιμή 0.5 που χαρακτηρίζει τις μεταβάσεις δεύτερης τάξης.



(α)



(β)

Σχήμα 10: Η γραφική απεικόνιση της εφαρμογής των εξισώσεων (130) και (132) για τέσσερις διαφορετικούς όγκους  $V = 8^5, 10^5, 12^5$  και  $14^5$ .

Η εξέταση του αβελιανού μοντέλου στις 4+1 διαστάσεις με άνισες σταθερές σύζευξης αποκαλύπτει ενδιαφέροντα νέα χαρακτηριστικά. Η κύρια ιδιότητα αυτού του μοντέλου είναι η ύπαρξη μιας νέας φάσης, της αποκαλούμενης Στρωματικής φάσης, η οποία χαρακτηρίζεται από δυνάμεις τύπου Coulomb στις τέσσερις διαστάσεις και περιορισμό των πεδίων κατά την πέμπτη διάσταση. Οι άλλες δύο φάσεις του μοντέλου είναι η πενταδιάστατη Coulomb και η ισχυρή φάση παγίδευσης. Από την μελέτη των μεταβάσεων προκύπτει ότι η στρωματική φάση χωρίζεται από αυτήν της ισχυρής ζεύξης με μια ασθενή μετάβαση πρώτης τάξης της οποίας η κρίσιμη τιμή για την σταθερά σύζευξης βρίσκεται πολύ κοντά σε αυτήν του 4D  $U(1)$  μοντέλου. Σε ότι αφορά την Στρωματική-Coulomb μετάβαση εμφανίζονται σοβαρές ενδείξεις για την ύπαρξη μιας μετάβασης δεύτερης τάξης. Εάν η συμπεριφορά αυτή διατηρηθεί και για μεγαλύτερους όγκους, τότε, η ύπαρξη συνεχούς ορίου για την θεωρία και κατ επέκταση ενός βιώσιμου μηχανισμού παγίδευσης των πεδίων βαθμίδας είναι δυνατή.

Τέλος, πιθανή είναι η σύνδεση του συγκεκριμένου μοντέλου με το μοντέλο διήθησης (percolation) [15, 16]. Οι τιμές των κρίσιμων εκθετών  $\gamma$  και  $\nu$  που παρουσιάστηκαν βρίσκονται πολύ κοντά στις αντίστοιχες τιμές του 5D percolation μοντέλου που είναι:  $\gamma_{5Dperc} = 1.18$  και  $\nu_{5Dperc} = 0.57$ [17]. Παρόλο που από μόνο του το γεγονός αυτό δεν δικαιολογεί συμπεράσματα σχετικά με την κλάση οικουμενικότητας (universality class) του μοντέλου μας, ενδέχεται να συνεισφέρει ως μια νέα οπτική γωνία για τον μηχανισμό καταστολής των πεδίων κατά την επιπλέον διάσταση.

## 9 Η περίπτωση της μη μηδενικής θερμοκρασίας.

### 9.1 Το μοντέλο

#### Ορισμός

Το πενταδιάστατο ανισοτροπικό  $U(1)$  μοντέλο βαθμίδας με σταθερές σύζευξης  $\beta$  και  $\beta'$  ορίζεται ως εξής:

$$S_{5D}^{gauge} = \beta \sum_{x, 1 \leq \mu < \nu \leq 3} (1 - \text{Re}(U_{\mu\nu}(x))) + \beta \sum_{x, 1 \leq \mu \leq 3} (1 - \text{Re}(U_{\mu t}(x))) + \quad (133)$$

$$\beta' \sum_{x, 1 \leq \mu \leq 3} (1 - \text{Re}(U_{\mu 5}(x))) + \beta' \sum_x (1 - \text{Re}(U_{t5}(x)))$$

όπου

$$U_{\mu\nu}(x) = U_\mu(x)U_\nu(x + \alpha_s \hat{\mu})U_\mu^\dagger(x + \alpha_s \hat{\nu})U_\nu^\dagger(x)$$

$$U_{\mu t}(x) = U_\mu(x)U_t(x + \alpha_s \hat{\mu})U_\mu^\dagger(x + \alpha_s \hat{t})U_t^\dagger(x)$$

$$U_{\mu 5}(x) = U_\mu(x)U_5(x + \alpha_s \hat{\mu})U_\mu^\dagger(x + \alpha_s \hat{5})U_5^\dagger(x)$$

$$U_{t5}(x) = U_t(x)U_5(x + \alpha_t \hat{t})U_t^\dagger(x + \alpha_5 \hat{5})U_5^\dagger(x)$$

είναι οι πλακέτες που ορίζονται στους τετραδιάστατους υπόχωρους  $\{(\mu\nu = 1, 2, 3) - t\}$  και τα επίπεδα που περιέχουν την επιπλέον, πέμπτη διάσταση ( $x_5$ ). Κάνοντας χρήση ενός διάφανου συμβολισμού ονομάζουμε τις πλακέτες αυτές  $P_s, P_{st}, P'_{s5}$  και  $P'_{t5}$ .

Οι μεταβλητές συνδέσμων ορίζονται ως

$$U_\mu(x) = e^{i\theta_\mu(x)}, \quad U_t(x) = e^{i\theta_t(x)} \text{ και } U_5(x) = e^{i\theta_5(x)}$$

Ορισμένα σημεία αναφορικά με τον συμβολισμό που χρησιμοποιούμε. Η δράση ορίζεται σε έναν Ευκλείδειο όγκο στο πλέγμα, δηλαδή  $V = L_t \times L_s^3 \times L_5$  σε μονάδες πλέγματος.  $L_t$  είναι η συμπαγής χρονική διάσταση η οποία συνδέεται με την θερμοκρασία μέσω της σχέσης

$$T = \frac{1}{L_t \alpha_t} \quad (134)$$

με  $\alpha_t$  συμβολίζεται η σταθερά πλέγματος,  $L_t$  είναι ένας ακέραιος αριθμός,  $L_s = 1, 2, 3$  οι συνήθεις άπειρες χωρικές διαστάσεις και τέλος  $L_5$  είναι η επιπλέον, πέμπτη διάσταση, την οποία θεωρούμε επίσης άπειρη και ίση με την  $L_s$ . Υιοθετούμε περιοδικές συνοριακές συνθήκες για το  $U(1)$  πεδίο βαθμίδας σε όλες τις διευθύνσεις. Η προαναφερθήσα ανισοτροπία του μοντέλου δεν συσχετίζεται με την χρονική διάσταση. Σε αυτό το μοντέλο οι σταθερές πλέγματος  $\alpha_s$  και  $\alpha_t$  ίσες. Η ανισοτροπία εισάγεται μέσω των αλληλεπιδράσεων κατά την επιπλέον διάσταση. Έτσι έχουμε  $\alpha_s = \alpha_t = \alpha$  και  $\alpha_5 \neq \alpha$ , όπου  $\alpha_5$  είναι η σταθερά πλέγματος που σχετίζεται με την επιπλέον διάσταση.

## 9.2 Τα φυσικά μεγέθη

Ακολουθεί ο ορισμός των φυσικών μεγεθών, των αναλλοίωτων κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας ποσοτήτων, που χρησιμοποιήθηκαν για την μελέτη του μοντέλου.

### 9.2.1 Το μέτρο ελικότητας για την περίπτωση της μη μηδενικής θερμοκρασίας.

Ανάμεσα στις ποσότητες που χρησιμοποιούνται για το καθορισμό των διαφόρων φάσεων και των αντίστοιχων μεταβάσεων φάσης περίοπτη θέση κατέχουν οι αποκαλούμενες παράμετροι τάξης. Η μεγάλη σημασία των μεγεθών αυτών έγκειται στο ότι επιδεικνύουν εντελώς διαφορετική συμπεριφορά στις διάφορες φάσεις. Η 'θερμική' μέση τιμή τους είναι μηδενική στην μια πλευρά της μετάβασης και αποκτά μη μηδενικές τιμές στην άλλη. Για την περίπτωση μιας μετάβασης ανάμεσα στην φάση παγίδευσης και την Coulomb μια ποσότητα με τα χαρακτηριστικά παραμέτρου τάξης είναι το μέτρο ελικότητας ( $\mathbf{h} \cdot \mathbf{m}$ ). Η εισαγωγή του στο πλαίσιο των θεωριών βαθμίδας στο πλέγμα έγινε για πρώτη φορά από τους P.de.Forcrand και M.Vettorazzo και χαρακτηρίζει την απόκριση ενός συστήματος στην παρουσία εξωτερικής ροής. Παίρνει μηδενική τιμή στην φάση παγίδευσης και μη μηδενική στην Coulomb [7, 8].

Ας θεωρήσουμε ένα πενταδιάστατο σύστημα σύστημα με  $(L_\mu, L_\nu, L_\rho, L_t, L_5)$  και ας επιλέξουμε έναν συγκεκριμένο προσανατολισμό, έστω  $(\mu, \nu)$ . Μέσω των εναπομείναντων ορθογώνιων διευθύνσεων ορίζεται μια στοίβα (*stack*) από  $L_\rho \times L_t \times L_5$  πλακέτες, παράλληλες στον  $(\mu, \nu)$  προσανατολισμό. Προκειμένου να μελετήσουμε την αντίδραση του συστήματος στην επιβολή ενός στατικού εξωτερικού πεδίου υιοθετούμε την ύπαρξη μιας εξωτερικής ροής  $\Phi$  δια μέσω της στοίβας των πλακετών και με κατάλληλο μετασχηματισμό των μεταβλητών την απλώνουμε ομοιόμορφα σε όλα τα παράλληλα επίπεδα. Με άλλα λόγια προσθέτουμε την σταθερή τιμή  $\Phi_P = \frac{\Phi}{L_\mu L_\nu}$  σε κάθε πλακέτα του δεδομένου  $(\mu, \nu)$  προσανατολισμού. Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι ένας εναλλακτικός τρόπος επιβολής της εξωτερικής ροής στο σύστημα είναι μέσω των

αποκαλούμενων *twisted* συνοριακών συνθηκών αντί των καθαρά περιοδικών [7, 24]. Η συνάρτηση επιμερισμού παρουσία της εξωτερικής ροής γίνεται:

$$Z(\Phi) = \int D\theta e^{-S(\theta;\Phi)} \quad (135)$$

$$\begin{aligned} S(\theta;\Phi) = & -\beta \sum_{(\mu\nu)planes} \cos\left(\theta_{\mu\nu} + \frac{\Phi}{L_\mu L_\nu}\right) - \beta \sum_{(\bar{\mu}\bar{\nu})planes} \cos(\theta_{\bar{\mu}\bar{\nu}}) \\ & -\beta \sum_{x,1\leq\mu\leq 3} \cos(\theta_{\mu t}(x)) - \beta' \sum_{x,1\leq\mu\leq 3} \cos(\theta_{\mu 5}(x)) \\ & -\beta' \sum_x \cos(\theta_{t5}(x)) \end{aligned} \quad (136)$$

όπου το  $\sum_{(\mu\nu)planes}$  συμβολίζει το άθροισμα πάνω σε όλες τις πλακέτες του συγκεκριμένου προσανατολισμού  $(\mu,\nu)$ , που περιέχουν την εξωτερική ροή και το  $\sum_{(\bar{\mu}\bar{\nu})planes}$  αποτελεί το συμπληρωματικό άθροισμα, αποτελούμενο από όλες τις πλακέτες που παρέμειναν αναλλοίωτες (πλακέτες που ανήκουν στα άλλα επίπεδα).

Από την συνάρτηση επιμερισμού μπορούμε να αποκτήσουμε την ελεύθερη ενέργεια του συστήματος συναρτήσει της εξωτερικής ροής

$$F(\Phi) = -\ln(Z(\Phi)) = -\ln\left(\int D\theta e^{-S(\theta;\Phi)}\right) \quad (137)$$

Μια σημαντική παρατήρηση στα όσα αναφέρθηκαν μέχρι στιγμής είναι ότι τόσο η συνάρτηση επιμερισμού της εξίσωσης (135) όσο και η ελεύθερη ενέργεια παρουσία της εξωτερικής ροής ( $F(\Phi)$ ) είναι  $2\pi$  περιοδικές συναρτήσεις. Αυτό συνεπάγεται ότι η επιπλέον ροή που επιβάλαμε στο σύστημά μας ορίζεται μόνο ως  $mod(2\pi)$ .

Στην φάση παγίδευσης η  $F(\Phi)$  έχει σταθερή τιμή στο θερμοδυναμικό όριο λόγω του πεπερασμένου μήκους συσχετισμού και του γεγονότος ότι η επιπλέον ροή που εισάγεται μέσω των *twisted* συνοριακών συνδέσμων παρουσιάζει εκθετική μείωση. Η αντίθετη εικόνα εμφανίζεται στην Coulomb φάση όπου το μήκος συσχετισμού γίνεται άπειρο και συνεπώς η επιρροή των *twisted* συνοριακών συνθηκών καλύπτει όλη την έκταση του συστήματος. Ως αποτέλεσμα έχουμε την μη τετριμμένη εξάρτηση του  $F(\Phi)$  από την εξωτερική ροή  $\Phi$ . Το μέτρο ελικότητας ως γνωστών ορίζεται ως

$$h(\beta) = \left. \frac{\partial^2 F(\Phi)}{\partial \Phi^2} \right|_{\Phi=0} \quad (138)$$

δηλαδή ως ένα μέτρο της καμπυλότητας του προφίλ της ελεύθερης ενέργειας γύρω από το  $\Phi = 0$ .

Από την παραπάνω εξίσωση και για διαφορετικούς προσανατολισμούς, απόρροια της ανισοτροπίας του μοντέλου, έχουμε:

$$h_s(\beta) = \frac{1}{(L_\mu L_\nu)^2} \left( \left\langle \sum_{P_s} (\beta \cos(\theta_{\mu\nu})) \right\rangle - \left\langle (\sum_{P_s} (\beta \sin(\theta_{\mu\nu}))^2) \right\rangle \right) \quad (139)$$

$$h_t(\beta) = \frac{1}{(L_\mu L_t)^2} \left( \left\langle \sum_{P_{st}} (\beta \cos(\theta_{\mu t})) \right\rangle - \left\langle (\sum_{P_{st}} (\beta \sin(\theta_{\mu t}))^2) \right\rangle \right) \quad (140)$$

$$h_{s5}(\beta') = \frac{1}{(L_\mu L_5)^2} \left( \left\langle \sum_{P'_{s5}} (\beta' \cos(\theta_{\mu 5})) \right\rangle - \left\langle (\sum_{P'_{s5}} (\beta' \sin(\theta_{\mu 5}))^2) \right\rangle \right) \quad (141)$$

$$h_{t5}(\beta') = \frac{1}{(L_t L_5)^2} \left( \left\langle \sum_{P'_{t5}} (\beta' \cos(\theta_{t5})) \right\rangle - \left\langle (\sum_{P'_{t5}} (\beta' \sin(\theta_{t5}))^2) \right\rangle \right) \quad (142)$$

Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενη ενότητα στο κλασσικό ( $\beta \rightarrow \infty$ ) όριο της δράσης (136) όλες οι διακυμάνσεις εξαφανίζονται. Σε αυτό το όριο η ροή είναι κατανομημένη κατά ίσα μέρη σε όλες τις πλακέτες του κάθε επιπέδου και δεν αλλάζει τιμή καθώς διασχίζουμε τα παράλληλα επίπεδα. Αν αναπτύξουμε την δράση σε δυνάμεις της ροής, αφού στο θερμοδυναμικό όριο η ποσότητα  $\frac{\Phi}{L_\mu L_\nu}$  είναι πάντοτε μικρή, έχουμε:

$$S_{\text{κλασσική}}(\Phi) = \frac{1}{2} \beta \Phi^2 \frac{V_{5D}}{(L_\mu L_\nu)^2} + \text{σταθερά} \implies F_{\text{κλασσική}}(\Phi) - F_{\text{κλασσική}}(0) = \frac{1}{2} \beta \Phi^2 \frac{V_{5D}}{(L_\mu L_\nu)^2}$$

όπου  $V_{5D} = L_\mu L_\nu L_\rho L_t L_5$  είναι ο πενταδιάστατος όγκος στο πλέγμα.

Η παραπάνω έκφραση για την ελεύθερη ενέργεια,  $F$ , παραμένει σε ισχύ μέχρι το σημείο της μετάβασης φάσης, όπου οι διακυμάνσεις είναι παρούσες, αν αντικατασταθεί η 'γυμνή' σταθερά σύζευξης από την επανακανονικοποιημένη σταθερά,  $\beta \rightarrow \beta_R(\beta)$  ([8]).

$$F_{[\text{πεπερασμένο } \beta]}(\Phi) - F_{[\text{πεπερασμένο } \beta]}(0) = \frac{\beta_R}{2} \Phi^2 \left( \frac{L_\rho L_t L_5}{L_\mu L_\nu} \right) \quad (143)$$

Απο τις εξισώσεις (138) και (143) έχουμε για το 'χωρικό'  $h.m$

$$h_s(\beta) \sim \beta_R L_t \quad (144)$$

και ακολουθώντας τα ίδια βήματα αποκτάμε τις σχέσεις βάρθμισης (*scaling*) και για τις υπόλοιπες ποσότητες

$$h_t(\beta) \sim \beta_R \frac{L_\mu^2}{L_t} \quad (145)$$

$$h_{s5}(\beta') \sim \beta'_R L_t \quad (146)$$

$$h_{t5}(\beta') \sim \beta'_R \frac{L_\mu^2}{L_t} \quad (147)$$

Παρόλο που τα επιχειρήματα που παρουσιάστηκαν βασίζονται κυρίως την κλασσική προσέγγιση, εντούτοις, αυτή ακριβώς η εικόνα παρουσιάζεται στην φάση Coulomb και η συμπεριφορά των μέτρων ελικότητας ακολουθεί πλήρως τις προβλέψεις των παραπάνω εξισώσεων.



### 9.2.2 Ο βρόχος Polyakov ή η γραμμή Wilson.

Για τον υπολογισμό του δυναμικού μεταξύ ενός στατικού ζεύγους κουαρκ-αντικουαρκ, σε μηδενική θερμοκρασία, είναι απαραίτητος ο υπολογισμός της μέσης τιμής των βρόχων του Wilson στην θεμελιώδη κατάσταση του συστήματος για μεγάλους Ευκλείδειους χρόνους. Στην περίπτωση όπου η θερμοκρασία είναι μη μηδενική ( $L_t \ll L_s$ ) αυτή την πληροφορία μπορούμε να την αντλήσουμε από μια διαφορετική ποσότητα, τον βρόχο του Polyakov (ή γραμμή του Wilson όπως αλλιώς είναι γνωστός). Αποτελείται από το γινόμενο των μεταβλητών συνδέσμων κατά μήκος τοπολογικά μη τετριμμένων βρόχων, οι οποίοι 'τυλίγουν' το σύστημα κατά την χρονική διεύθυνση, λόγω των περιοδικών συνοριακών συνθηκών.

$$P_t(\vec{n}, n_5) = \prod_{n_t=1}^{L_t} U_t(\vec{n}, n_t, n_5)$$

$$P_t = \frac{1}{L_s^4} \sum_{(\vec{n}, n_5)} P_t(\vec{n}, n_5) \quad (148)$$

όπου το  $\{n\} \in Z^5$  υποδηλώνει ένα πλεγματοειδές σημείο. Από φυσικής άποψης η μέση τιμή του βρόχου του Polyakov καθορίζει την ελεύθερη ενέργεια ενός συστήματος παρουσία ενός 'βαριού' στατικού κουαρκ, αναφορικά με το κενό:

$$\langle |P_t| \rangle = e^{-L_t F_q} \quad (149)$$

όπου το  $|P|$  συμβολίζει την απόλυτη τιμή του  $P$  και με  $\langle \dots \rangle$  συμβολίζουμε την στατιστικά μέση τιμή, μετρούμενη ως προς την δράση της εξίσωσης (133). Η παραπάνω σχέση διατηρείται σε ισχύ ακόμη και κατά την περίπτωση όπου στο σύστημά μας έχουμε κουαρκ πεπερασμένης μάζας τα οποία συνδέονται με το πεδίο βαθμίδας, με την μόνη διαφορά ότι στην περίπτωση αυτή οι μέσες τιμές πρέπει να υπολογιστούν ως προς την δράση για πεπερασμένη θερμοκρασία η οποία θα περιλαμβάνει τα δυναμικά φερμιόνια.

Ο βρόχος του Polyakov αποτελεί κατά κάποιον τρόπο την κοσμική γραμμή ενός στατικού κουαρκ σε έναν βρόχο Wilson. Αυτό με την σειρά του υπονοεί ότι η ελεύθερη ενέργεια ενός ζεύγους κουαρκ-αντικουαρκ, τοποθετημένα στις θέσεις  $(\vec{n}_1, n_{51})$  και  $(\vec{n}_2, n_{52})$  αντίστοιχα, δίνεται από την συνάρτηση συσχετισμού δύο τέτοιων βρόχων, με βάση τα συγκεκριμένα σημεία και έχοντας αντίθετους προσανατολισμούς.

$$\langle P_{t_1}(\vec{n}_1, n_{51}) P_{t_2}^\dagger(\vec{n}_2, n_{52}) \rangle = e^{-L_t F_{q\bar{q}}(\{\vec{n}_1, n_{51}\}; \{\vec{n}_2, n_{52}\})} \quad (150)$$

κρατώντας το  $L_t$  σταθερό.

Για μεγάλες αποστάσεις διαχωρισμού μεταξύ του ζεύγους και υπο την προϋπόθεση ότι οι συναρτήσεις συσχετισμού ικανοποιούν την συνθήκη *clustering* η παραπάνω σχέση ανάγεται στην

$$\langle P_{t_1}(\vec{n}_1, n_{51}) P_{t_2}^\dagger(\vec{n}_2, n_{52}) \rangle \rightarrow |\langle P_t \rangle|^2 \text{ για } |\hat{R}| \rightarrow \infty \quad (\text{όπου } \hat{R} = \{\vec{n}_1, n_{51}\} - \{\vec{n}_2, n_{52}\}) \quad (151)$$

που δεν είναι τίποτε άλλο από την αυτοενέργεια δύο απομονωμένων κουαρκ.

Στην φάση παγίδευσης των φορτισμένων σωματιδίων η συνάρτηση συσχετισμού ενός βρόχου Polyakov μειώνεται εκθετικά για μεγάλες αποστάσεις

$$\langle P_t(0) P_t^\dagger(\hat{R}) \rangle \sim e^{-L_t \sigma |\hat{R}|} \quad (152)$$

δίνοντας ένα γραμμικό δυναμικό με τάση νήματος  $\sigma$  και  $F_{q\bar{q}} \simeq \sigma |\hat{R}|$ .

Η ελεύθερη ενέργεια ροής  $F_{q\bar{q}}$  αυξάνει, κατά κανόνα, για μεγάλες αποστάσεις διαχωρισμού των κουαρκ στην φάση παγίδευσης, δίνοντας εντέλει  $\langle |P_t| \rangle = 0$  και  $F_{q\bar{q}} = \infty$  στο θερμοδυναμικό όριο. Συνεπώς η περίπτωση  $\langle |P_t| \rangle = 0$  ερμηνεύεται ως σήμα για την ύπαρξη φάσης παγίδευσης στο σύστημα. Στην αντίθετη περίπτωση όπου  $\langle |P_t| \rangle \neq 0$  η ελεύθερη ενέργεια του στατικού ζεύγους κουαρκ-αντικουαρκ τείνει προς μια σταθερή τιμή, για μεγάλες αποστάσεις διαχωρισμού των φορτίων όπως δείχνουν και οι εξισώσεις (151) και (152), και αυτό αποτελεί ένδειξη κατάλυσης της παγίδευσης. Με άλλα λόγια η μέση τιμή του χρονικού βρόχου Polyakov λειτουργεί ως παράμετρος τάξης για τις θεωρίες βαθμίδας σε πεπερασμένη θερμοκρασία.

## 10 Τρεις οριακές περιπτώσεις

### 10.1 Η περίπτωση της μηδενικής θερμοκρασίας

Το πενταδιάστατο ανισοτροπικό  $U(1)$  μοντέλο βαθμίδας παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τους Fu και Nielsen σε μια προσπάθεια να εισάγουν ένα διαφορετικό τρόπο επίτευξης διαστατικής αναγωγής. Από τότε έχουν πραγματοποιηθεί πολλές αριθμητικές μελέτες του μοντέλου [26, 4]. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, το ενδιαφέρον που παρουσιάζει το μοντέλο αυτό έγκειται στην ύπαρξη μιας νέας φάσης, της αποκαλούμενης στρωματικής φάσης, απόρροια της εγγενούς ανισοτροπίας του μοντέλου. Η νέα αυτή φάση μπορεί να εξυπηρετήσει ως ένας μηχανισμός παγίδευσης των πεδίων βαθμίδας σε μία μεμβράνη. Είναι δυνατό να επιβάλουμε την ανισοτροπία στις σταθερές σύζευξης χρησιμοποιώντας, για παράδειγμα, μια μετρική Randall-Sundrum στις πέντε διαστάσεις. Η επίδραση του παράγοντα συστρωφής (warp factor) ενός  $RS$  υποστρώματος ή ενός γενικού anti-de-Sitter ( $AdS_5$ ) υποστρώματος στην  $U(1)$  θεωρία βαθμίδας είναι η δημιουργία διαφορετικής σταθεράς σύζευξης για την πέμπτη διάσταση.

Στο Σχ.1 παρουσιάστηκε το διάγραμμα φάσης της θεωρίας. Αποτελείται από τρεις διακριτές φάσεις. Για μεγάλες τιμές των  $\beta$  και  $\beta'$  το μοντέλο βρίσκεται σε μια *Coulomb* φάση (**C**) σε πέντε διαστάσεις. Τώρα, εάν κρατήσουμε το  $\beta$  σταθερό και μεγαλύτερο της μονάδας και ταυτόχρονα μειώσουμε το  $\beta'$ , κάποια στιγμή θα συναντήσουμε την νέα φάση, την στρωματική (**L**) φάση, στην οποία οι δυνάμεις στις τέσσερις διαστάσεις εξακολουθούν να είναι της μορφής Coulomb αλλά την ίδια στιγμή κατά την πέμπτη διάσταση το σύστημα εμφανίζει δυνάμεις παγίδευσης. Για μικρές τιμές των  $\beta$  και  $\beta'$  δυνάμεις παγίδευσης εμφανίζονται και κατά τις πέντε διευθύνσεις και η αντίστοιχη φάση ονομάζεται Ισχυρή (**S**). Τα χαρακτηριστικά των τριών φάσεων μπορούν να γίνουν πιο κατανοητά αν παρουσιαστούν από την σκοπιά δυο δοκιμαστικών φορτίων. Στην φάση Coulomb η δύναμη μεταξύ δύο 'βαριών' δοκιμαστικών φορτίων είναι πενταδιάστατη, τύπου Coulomb, και καταλήγει στον ακριβή πενταδιάστατο νόμο Coulomb πάνω στην διαγώνιο,  $\beta = \beta'$ , όπου και η ανισοτροπία του μοντέλου εξαφανίζεται (αριθμητική μελέτη [25]). Εντελώς αντίθετη εικόνα εμφανίζεται στην φάση ισχυρής ζεύξης. Εκεί οι δυνάμεις περιορισμού εκτείνονται και προς τις πέντε διευθύνσεις, απαιτώντας άπειρη ενέργεια για τον διαχωρισμό των δοκιμαστικών φορτίων προς οποιαδήποτε διεύθυνση. Τέλος, στην στρωματική φάση, τα δύο δοκιμαστικά φορτία θα βιώσουν μια δύναμη Coulomb στους τετραδιάστατους υπόχωρους, με σταθερά σύζευξης που δίνεται από το τετραδιάστατο  $\beta$  και ισχυρές ενδείξεις για ομοιότητα με τον συνήθη 4D νόμο Coulomb, ενώ ταυτόχρονα τα πεδία θα νιώσουν δυνάμεις περιορισμού κατά την πέμπτη διεύθυνση καθώς το  $\beta'$  παίρνει μικρές τιμές. Αυτό σημαίνει ότι τα

φορτισμένα σωματίδια στην στρωματική φάση θα κινηθούν κυρίως στον τετραδιάστατο υπόχωρο στον οποίο ανήκουν αφού οποιαδήποτε απόπειρα να τον εγκαταλείψουν θα αντιμετωπιστεί από δυνάμεις επαναφοράς ανάλογες με αυτές που ευθύνονται για τον περιορισμό των κουαρκς. Πάνω σε αυτό τον μηχανισμό στηρίζεται και όλη η ιδέα του εντοπισμού των πεδίων βαθμίδας. Προχωράμε τώρα στην περιγραφή των τριών φάσεων σε όρους του μέτρου ελικότητας. Για την περίπτωση της μηδενικής θερμοκρασίας ( $L_t = L_s \equiv L_5$ ) έχουμε μόνο δύο δυνατές επιλογές για την κατασκευή της ποσότητας αυτής. Την θέση των εξισώσεων (139)-(142) παίρνουν οι:

$$h_s(\beta) = \frac{1}{(L_\mu L_\nu)^2} \left( \left\langle \sum_P (\beta \cos(\theta_{\mu\nu})) \right\rangle - \left\langle \left( \sum_P (\beta \sin(\theta_{\mu\nu}))^2 \right) \right\rangle \right) \quad (153)$$

$$h_5(\beta') = \frac{1}{(L_\mu L_5)^2} \left( \left\langle \sum_{P'} (\beta' \cos(\theta_{\mu 5})) \right\rangle - \left\langle \left( \sum_{P'} (\beta' \sin(\theta_{\mu 5}))^2 \right) \right\rangle \right) \quad (154)$$

Η πρώτη,  $h_s(\beta)$ , χρησιμοποιείται για να περιγράψει την αντίδραση του συστήματος σε μια εξωτερική ροή κατά τα χωρικά επίπεδα (δηλαδή αυτά που ανήκουν στους τετραδιάστατους υπόχωρους) ενώ η δεύτερη,  $h_5(\beta')$ , για αυτά που περιέχουν την επιπλέον, πέμπτη διεύθυνση. (i) Στην φάση ισχυρής ζεύξης (κρατώντας το  $\beta'$  σταθερό) το χωροειδές μέτρο ελικότητας μηδενίζεται (ξεκάθαρο σήμα για φάση παγίδευσης) και καθώς πλησιάζουμε και εντέλει διασχίζουμε το σύνορο των φάσεων, γίνεται μη μηδενικό στην στρωματική με τιμή που προσεγγίζει την μονάδα καθώς το  $\beta$  αυξάνει περεταίρω. Απο την άλλη πλευρά το εγχάρσιο  $h.m$ ,  $h_5(\beta')$ , διατηρεί την μηδενική του τιμή καθ' όλη την διάρκεια της μετάβασης αφού και οι δύο φάσεις επιδεικνύουν δυνάμεις παγίδευσης κατά την πέμπτη διεύθυνση. (ii) Για την μετάβαση ανάμεσα στην  $5D$  Coulomb φάση και την στρωματική φάση το  $h_s(\beta)$  διατηρεί μια τιμή κοντά στην μονάδα για όλες τις τιμές του  $\beta'$ , αφού οι τετραδιάστατοι υπόχωροι βιώνουν μια  $4d$  δύναμη τύπου Coulomb και για τις δύο φάσεις. Αντίθετα, το  $h_5(\beta')$  έχει μηδενική τιμή στην στρωματική φάση και καθώς το σύστημα περνά στην Coulomb η τιμή του αυξάνει προσεγγίζοντας την μονάδα καθώς το  $\beta'$  αυξάνει περεταίρω [26, 25].

## 10.2 Η περίπτωση $\beta' = 0$ .

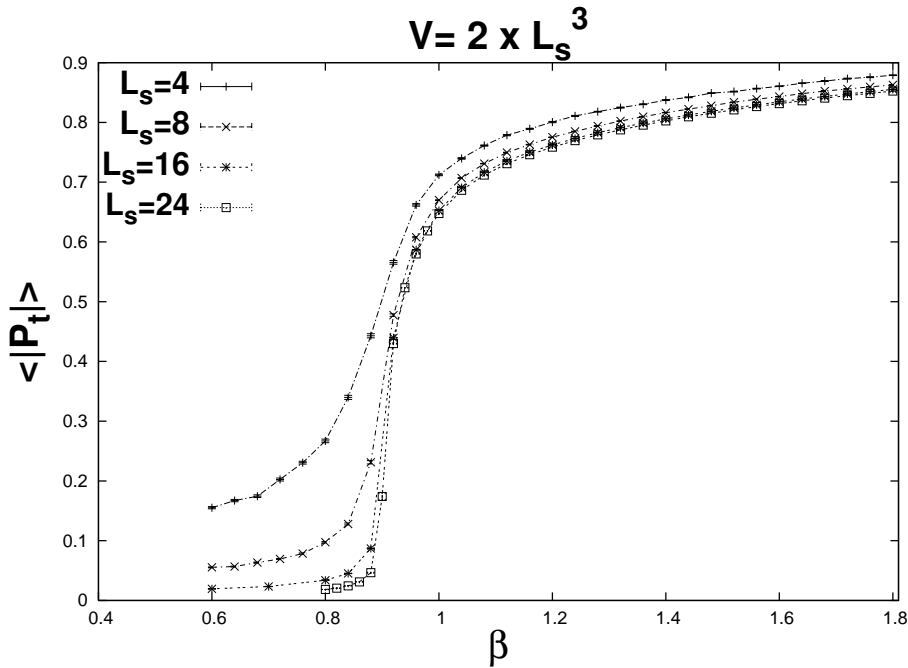
Πάνω στον άξονα που ορίζεται από το  $\beta' = 0$  βρίσκουμε το τετραδιάστατο  $U(1)$  μοντέλο. Τα ευρήματα της συγκεκριμένης διερεύνησης έρχονται να ενισχύσουν αυτά των συγγραφέων της [8]. Η αριθμητική μελέτη που πραγματοποιήθηκε φανερώνει ότι η Coulomb φάση εμφανίζεται μόνο για  $T=0$ , σε συμφωνία με την Εικ.12 της [8] και σε αντίθεση με τους συγγραφείς της [23] όπου δηλώνουν την ύπαρξη μιας φάσης Coulomb για  $L_t \geq 4$  και  $\beta \geq \beta_c$ . Τα αποτελέσματα των μετρήσεων δείχνουν ότι μια χωρική φάση παγίδευσης για επαρκώς μεγάλη χωρική έκταση  $L_s$  του πλέγματος συγκρινόμενη πάντα με την χρονική διεύθυνση  $L_t$  ( $L_s \gtrsim 4L_t$ ).

Η συμπεριφορά αυτή μπορεί να γίνει περισσότερο κατανοητή εάν ακολουθήσουμε τον συλλογισμό της αναφοράς [8] που βασίζεται σε απλά θεωρητικά επιχειρήματα. Προκειμένου να έχουμε  $h_s(\beta) \sim 0$  θα πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον δύο βρόχοι μονοπόλων, σε μακρινή απόσταση, που να τυλίγονται γύρω από το σύστημα την χρονική διεύθυνση και με αντίθετους προσανατολισμούς. Ένας μη τετριμμένος (*contractable*) χρονοειδής μονοπολικός βρόχος μπορεί, θεωρητικά, να διαταράξει όλα τα χωρικά επίπεδα του πλέγματος.

Η πιθανότητα εμφάνισης ενός τέτοιου βρόχου για ένα πλέγμα δεδομένης έκτασης είναι, χονδρικά,  $e^{-m_{mon}(\beta)L_t}$  όπου  $m_{mon}(\beta)$  είναι η μάζα του μονοπόλου. Επομένως για να έχουμε πιθανότητα εμφάνισης ενός (ή και δύο) τέτοιων βρόχων της τάξεως της μονάδας πρέπει:

$$L_s^3 \times e^{-m_{mon}(\beta)L_t} \sim 1 \implies e^{\frac{L_t}{3}m_{mon}(\beta)} \implies L_s \sim e^{\frac{L_t}{3}c\beta} \quad (155)$$

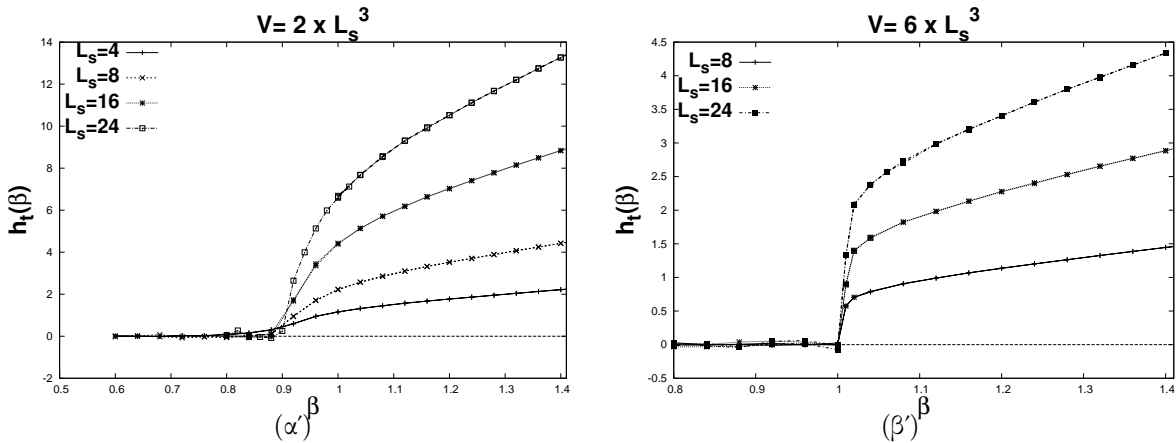
αφού το  $m_{mon}(\beta)$  είναι τάξεως  $\beta$ . Η παραπάνω σχέση οδηγεί στις ακόλουθες διαπιστώσεις: πρώτον, προβλέπει την ύπαρξη ενός ψευδοκρίσιμου  $\beta_c \sim \log(L_s)$ , γεγονός που επαληθεύεται και από τις μετρήσεις και δεύτερον, καθώς πηγαίνουμε σε χαμηλότερες θερμοκρασίες (μεγαλύτερο  $L_t$ ) για επαρκώς μεγάλο  $L_s$  η εξίσωση (155) ικανοποιείται και συνεπώς τα χωρικά επίπεδα γίνονται πλήρως διαταραγμένα και η Coulomb φάση εξαφανίζεται.



Σχήμα 11: Η μέση τιμή  $\langle |P_t| \rangle$  του χρονοειδούς βρόχου Polyakov για  $\beta' = 0$  και  $L_t = 2$ . Το  $\langle |P_t| \rangle$  πηγαίνει στο μηδέν στην φάση παγίδευσης για  $L_s \rightarrow \infty$ . Στην φάση κατάλυσης ( $\beta > \beta_c(L_t)$ )  $\langle |P_t| \rangle$  είναι μη μηδενικό, προσεγγίζοντας την μονάδα καθώς το  $\beta$  αυξάνει.

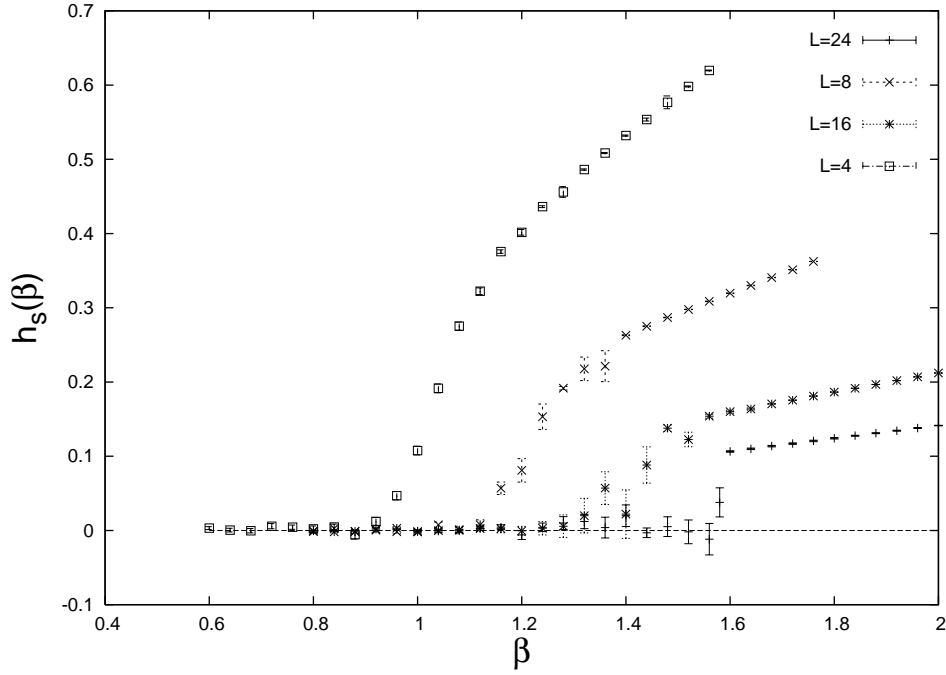
Στο Σχ.11 παρουσιάζεται η μέση τιμή του χρονοειδούς βρόχου Polyakov  $P_t(\beta)$  για  $L_t = 2$ . Υπάρχει μια εμφανής συνεχής αλλαγή φάσης από μια φάση παγίδευσης ( $\beta \leq \beta_c \simeq 0.90$ ), όπου το  $\langle |P_t| \rangle$  είναι μηδέν, σε μια φάση κατάλυσης της παγίδευσης (*deconfining*) όπου το  $\langle |P_t| \rangle$  πλησιάζει την μονάδα. Στην φάση παγίδευσης η ελεύθερη ενέργεια ενός μονού στατικού φορτίου, αναφορικά με το κενό, πηγαίνει στο άπειρο με το  $L_s$  ενώ αποκτά μια θετική τιμή στην φάση κατάλυσης της παγίδευσης η οποία πλησιάζει στο μηδέν καθώς το  $\beta$  αυξάνει. Η μέση τιμή του χρονοειδούς βρόχου Polyakov παραμένει πάντοτε μη μηδενική καθώς το  $\beta'$  παίρνει μη μηδενικές τιμές, όπως παρουσιάζεται στην υποενότητα (9.2.2). Παρόλα αυτά η παράμετρος τάξης αυτή δεν βοηθά στον περεταίρω χαρακτηρισμό των διαφόρων φάσεων. Ως προς την εξαγόμενη πληροφορία, από τα φυσικά μεγέθη που επιλέχθηκαν για την διερεύνηση του συστήματος, το μέτρο ελικότητας έχει περισσότερα πράγματα να προσφέρει στον χαρακτηρισμό του διαγράμματος φάσης του μοντέλου.

Στο Σχ.12 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για το χρονοειδές μέτρο ελικότητας  $h_t(\beta)$  για δύο διαφορετικές τιμές της θερμοκρασίας  $L_t = 2$  και  $L_t = 6$ . Το  $h_t(\beta)$  έχει μηδενική τιμή στην φάση παγίδευσης για  $\beta < \beta_c(L_t)$  και μη μηδενική στην φάση κατάλυσης της παγίδευσης,  $\beta \geq \beta_c(L_t)$ , σηματοδοτώντας μια *coulombic* συμπεριφορά. Το σήμα στην φάση παγίδευσης ενισχύεται με την αύξηση του  $L_s$ , σε συμφωνία με την σχέση  $h_t \sim \frac{L_s}{L_t}$ . Το σημείο μετάβασης παρουσιάζει μια ασθενή εξάρτηση από τον όγκο του πλέγματος υπονοώντας σύγκλιση σε μια κρίσιμη τιμή  $\beta_c(L_t)$  με το  $L_s$ . Είναι εμφανές επίσης ότι το  $\beta_c(L_t)$  τείνει προς μικρότερες τιμές καθώς το  $L_t$  μειώνεται<sup>3</sup>. Ένα άλλο σημείο άξιο αναφοράς είναι η διαφορετική συμπεριφορά του  $h_t(\beta)$  στην κρίσιμη περιοχή. Για  $L_t = 2$  το  $h_t$  οδηγείται με συνεχή τρόπο στο μηδέν καθώς το  $\beta$  προσεγγίζει το  $\beta_c$  από πάνω. Στην περίπτωση του  $L_t = 6$  όμως το  $h_t$  εμφανίζει ασυνέχεια καθώς το  $\beta$  πλησιάζει το  $\beta_c$  και ο όγκος αυξάνει. Είναι επομένως λογικό να συμπεράνει κανείς ότι η διαφορετική αυτή συμπεριφορά αντικατοπτρίζει την διαφορετική φύση των δύο αλλαγών φάσης. Μετάβαση δεύτερης τάξης για  $L_t = 2$  και πρώτης για  $L_t = 6$  ([8]). Στο Σχ.13 παρουσιάζεται το χωροειδές μέτρο ελικότητας  $h_s(\beta)$  για  $L_s = 4, 8, 16$  και  $24$ . Το  $h_s(\beta)$  παίρνει μηδενική τιμή για όλες τις τιμές του  $\beta < \beta_c(L_s)$  το οποίο παρουσιάζει ισχυρή εξάρτηση από το  $L_s$ . Το  $\beta_c(L_s)$  θα αναφέρεται στο εξής ως η ψευδοκρίσιμη τιμή για να διαχωριστεί από την πραγματική που δίνεται από το χρονοειδές μέτρο ελικότητας  $h_t(\beta)$ . Για  $\beta \geq \beta_c(L_s)$  το  $h_s$  παίρνει μη μηδενικές τιμές και αυξάνει γραμμικά καθώς το  $\beta$  μεγαλώνει. Από την άλλη πλευρά το μέγεθος της ποσότητας αυτής μειώνεται ακολουθώντας τον λόγο  $\sim \frac{L_t}{L_s}$  και τείνει στο μηδέν για  $L_s \rightarrow \infty$ . Η ψευδοκρίσιμη τιμή  $\beta_c(L_s)$  αυξάνει με το  $L_s$  ως  $\log(L_s)$  [8] και ο λόγος  $\frac{\beta_c(L_s)}{\log(L_s)}$  τείνει στο 0.5 για  $L_s \geq 16$ . Με αυτόν τον τρόπο το  $\beta_c(L_s)$  πηγαίνει στο άπειρο καθώς το  $L_s \rightarrow \infty$ . Συνεπώς το χωροειδές  $h.m$  είναι πάντοτε μηδέν στο όριο του άπειρου όγκου και ως εκτούτου το σύστημα καταλήγει σε μια χωρική φάση παγίδευσης των φορτισμένων σωματιδίων.



Σχήμα 12: Το χρονοειδές μέτρο ελικότητας  $h_t$  για  $L_t = 2$  (α) και  $L_t = 6$  (β) και  $\beta' = 0$ . Τα αποτελέσματα προέρχονται από τρεις διαφορετικούς όγκους. Η τιμή του  $h_t$  αυξάνει με  $L_s$  στην περιοχή κατάλυσης της παγίδευσης, για  $\beta$  μεγαλύτερο από μια κρίσιμη τιμή, σε συμφωνία με τις *scaling* προβλέψεις της προηγούμενης ενότητας. Η μετάβαση για  $L_t = 2$  είναι συνεχής σε αντίθεση με την περίπτωση  $L_t = 6$  όπου έχουμε εμφανίζεται μια ασυνεχής συμπεριφορά.

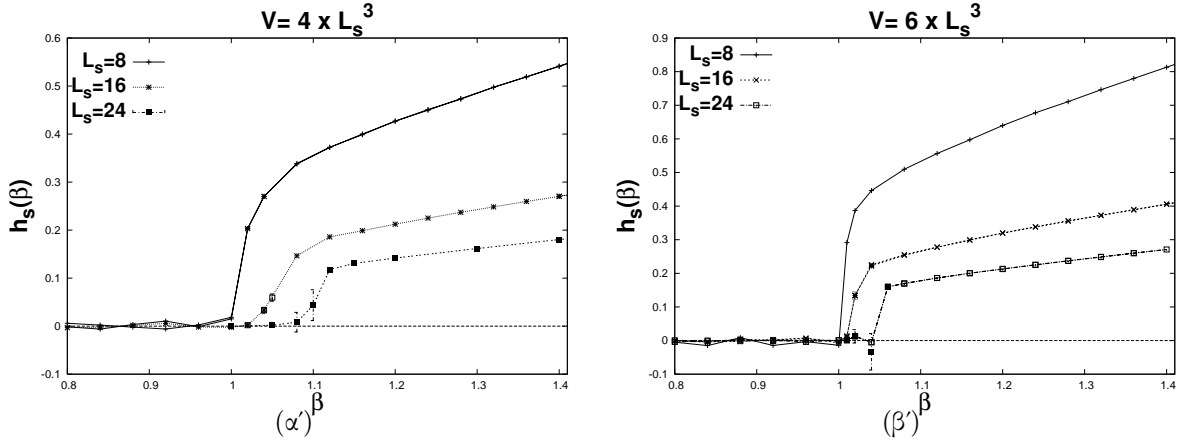
<sup>3</sup> $\beta_c[L_t = 2] = 0.9008(3)$ ,  $\beta_c[L_t = 4] = 1.00340(1)$  και  $\beta_c[L_t = 6] = 1.0094491(1)$ . Τα αποτελέσματα ανήκουν στην αναφορά [8]



Σχήμα 13: Το χωροειδές μέτρο ελικότητας  $h_s$  για  $L_t = 2$  και  $\beta' = 0$ , ως προς την τετραδιάστατη σταθερά σύζευξης  $\beta$ . Η ψευδοκρίσιμη τιμή του  $\beta$  αυξάνει πολύ γρήγορα, προς μια άπειρη τιμή, καθώς η χωρική έκταση του πλέγματος  $L_s$  αυξάνει. Η μετακίνηση του σημείου μετάβασης προς μεγαλύτερες τιμές του  $\beta$  είναι εμφανής ακόμη και από τους μικρούς όγκους.

Τέλος, εξετάζεται το χωροειδές μέτρο ελικότητας για  $L_t = 4$  και  $L_t = 6$ . Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα Σχ.14(α) ( $L_t = 4$ ) και Σχ.14(β) ( $L_t = 6$ ). Και σε αυτές τις περιπτώσεις παρουσιάζεται, εν γένει, η ίδια κατάσταση με την περίπτωση  $L_t = 2$ . Υπάρχει μια ψευδοκρίσιμη τιμή του  $\beta$  η οποία μετακινείται προς μεγαλύτερες τιμές καθώς το  $L_s$  αυξάνει παρουσιάζοντας ταυτόχρονα μια ισχυρή εξάρτηση από το  $L_t$ . Το σήμα για  $L_t = 4$  γίνεται εμφανές μόνο για  $L_s \geq 16$ . Για  $L_t = 6$  ακόμη και αυτή η συνθήκη δεν ικανοποιείται και πρέπει να φτάσει κανείς στο  $L_s \geq 24$  για να δει μια ξεκάθαρη μετακίνηση του  $\beta_c(L_s)$  προς τα δεξιά. Στην περιοχή  $\beta < \beta_c(L_s)$  το χωροειδές μέτρο ελικότητας είναι μηδέν (περιοχή παγίδευσης) ενώ για  $\beta \geq \beta_c$  κάνει *scaling* σύμφωνα με το  $\sim \frac{L_t}{L_s}$  τείνοντας στο μηδέν για  $L_s \rightarrow \infty$ . Η περίπτωση  $L_t = 8$  θα απαιτούσε ακόμη μεγαλύτερους όγκους, της τάξης του  $8 \times 32^3$ , προκειμένου να μπορέσει να παρατηρήσει κανείς την μετακίνηση του ψευδοκρίσιμου  $\beta_c$ . Το συμπέρασμα που προκύπτει ότι το  $h_s(\beta)$  έχει πάντοτε μηδενική τιμή στο όριο του άπειρου όγκου και συνεπώς το σύστημα παρουσιάζει χωρική παγίδευση για όλες τις τιμές της θερμοκρασίας, διαφορετικές του μηδενός. Το διάγραμμα φάσης του μοντέλου στο επίπεδο  $\beta, T = \frac{1}{L_t}$  περιλαμβάνει τρεις φάσεις: μια φάση παγίδευσης για  $\beta < \beta_c(L_t)$ , μια χρονικά *Coulomb*-χωρικά φάση παγίδευσης για  $\beta > \beta_c(L_t)$ <sup>4</sup> και μια καθαρά *Coulomb* φάση για  $L_t \rightarrow \infty$  και  $\beta > \beta_c$  [8, 12].

<sup>4</sup>Η φάση αυτή συνήθως ονομάζεται φάση αποπαγίδευσης.



Σχήμα 14: Στις εικόνες (α) και (β) παρουσιάζουμε το χωροειδές  $h.m$  ( $h_s$ ) για  $\beta' = 0$  και διαφορετικές χρονικές εκτάσεις  $L_t = 4$  και  $L_t = 6$ , για διάφορες τιμές του χωρικού όγκου. Η τιμή του  $h_s$  μειώνεται με το  $L_s$  για  $\beta$  μεγαλύτερο από την ψευδοκρίσιμη τιμή. Το σημείο μετάβασης κινείται εμφανώς προς τα δεξιά σε συμφωνία με την  $L_t = 2$  συμπεριφορά.

### 10.3 Η περίπτωση $L_t = 1$

Στην περίπτωση αυτή κάθε χρονικός σύνδεσμος αποτελεί έναν βρόχο Polyakov από μόνος του. Είναι δηλαδή μια ποσότητα αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας. Η χρονική πλακέτα γίνεται:

$$\theta_{\mu t}(x) = \theta_\mu(x) + \theta_t(x + \hat{\mu}) - \theta_\mu(x) - \theta_t(x)$$

Οι δύο χωρικοί σύνδεσμοι αλληλοαναιρούνται και για την περίπτωση του  $U(1)$  έχω:

$$\theta_{\mu t}(x) = \theta_t(x + \hat{\mu}) - \theta_t(x)$$

Η συνεισφορά στην δράση είναι:

$$S_t = -\beta \sum_{x, 1 \leq \mu \leq 3} \cos(\theta_t(x + \hat{\mu}) - \theta_t(x)) \quad (156)$$

Τα ίδια ακριβώς ισχύουν και για τις χρονο-εγκάρσιες πλακέτες και ακολουθώντας τα ίδια βήματα με προηγουμένως καταλήγουμε, για την δική τους συνεισφορά στην δράση, στο:

$$S_{t'} = -\beta' \sum_x \cos(\theta_t(x + \hat{5}) - \theta_t(x)) \quad (157)$$

Παρατηρούμε από τις παραπάνω εξισώσεις ότι οι χρονικές πλακέτες αποσυζευγονται τόσο από τις χωρικές όσο και από τις εγκάρσιες. Οι εξισώσεις (156) και (157) περιγράφουν ένα  $4D$   $\mathbf{XY}$  με ανισοτροπικές σταθερές σύζευξης ( $\beta, \beta'$ ). Οι τρεις χωρικοί σύνδεσμοι μαζί με τον εγκάρσιο σχηματίζουν ένα ξεχωριστό, τετραδιάστατο  $U(1)$  μοντέλο με άνισες σταθερές σύζευξης,  $\beta$  και  $\beta'$ . Ως αποτέλεσμα η συνάρτηση επιμερισμού του μοντέλου ανάγεται στην:

$$Z_{(L_t=1)} = Z_{\text{anisotropic } 4D-\mathbf{XY}} \times Z_{\text{anisotropic } 4D-U(1)} \quad (158)$$

η οποία περιγράφει δύο ανεξάρτητες θεωρίες πεδίου στο πλέγμα.

Το ανισοτροπικό  $4D - \mathbf{XY}$  μοντέλο για  $\beta' = 0$  ανάγεται στο τρισδιάστατο  $\mathbf{XY}$  μοντέλο το οποίο παρουσιάζει μια μετάβαση δεύτερης τάξης για  $\beta = 0.4542$ [19]. Το σύνορο της μετάβασης φάσης συνεχίζεται στο επίπεδο  $(\beta, \beta')$  για μικρότερες τιμές του  $\beta$  με την αύξηση του  $\beta'$  και η κρίσιμη τιμή του  $\beta$  φαίνεται να τείνει ασυμπτωτικά στην τιμή 0.1 καθώς το  $\beta'$  πηγαίνει στο άπειρο<sup>5</sup>.

Το  $4D$  μοντέλο βαθμίδας για  $\beta' = 0$  ανάγεται στην τρισδιάστατη  $U(1)$  θεωρία βαθμίδας η οποία βρίσκεται πάντοτε στην φάση παγίδευσης. Στο επίπεδο  $(\beta, \beta')$  υπάρχει μια κρίσιμη γραμμή που χωρίζει την ισχυρή, φάση παγίδευσης από την τετραδιάστατη Coulomb. Εάν κινηθούμε κατά μήκος της διαγωνίου,  $\beta = \beta'$ , συναντάμε την συνήθη, ασθενή μετάβαση πρώτης τάξης για  $\beta = \beta' = 1.001113$  [13, 26].

Η παραπάνω συζήτηση συνοψίζεται στην τρισδιάστατη γραφική απεικόνιση του Σχ.1. Ο κατακόρυφος άξονας αναπαριστά την θερμοκρασία μέσω της διακριτής μεταβλητής  $L_t$ . Το πάνω επίπεδο αντιστοιχεί σε  $L_t = 1$  και άρα σε άπειρη θερμοκρασία ενώ το κάτω σε  $L_s = L_t = L_5$ , δηλαδή στην περίπτωση της μηδενικής θερμοκρασίας.

## 11 Μελέτη του διαγράμματος φάσης για $L_t = 2$

Για την περίπτωση των πέντε διαστάσεων και μηδενική θερμοκρασία το διάγραμμα φάσης περιέχεται στο Σχ.1<sup>6</sup>. Για  $0 \leq \beta' \leq 0.40$  και  $\beta \simeq 1$  υπάρχει μια κρίσιμη οριζόντια γραμμή που χωρίζει την  $5D$  ισχυρή φάση από την στρωματική φάση. Για  $\beta > 1$  και  $\beta' \simeq 0.35$  υπάρχει μια κρίσιμη κατακόρυφη γραμμή που χωρίζει την στρωματική από την  $5D$  Coulomb φάση. Η πρόθεσή μας στην ενότητα αυτή είναι να ανακαλύψουμε τις επιπτώσεις της πεπερασμένης θερμοκρασίας στο σύστημα και πιο σημαντικά, την δυνατότητα ύπαρξης ή όχι μιας στρωματικής φάσης. Για τον σκοπό αυτό εξετάζονται οι αλλαγές (εάν υπάρχουν) στα σύνορα των φάσεων καθώς και στις φάσεις της ίδιες. Καταρχάς κινούμαστε πάνω στην γραμμή  $\beta' = 0.20$  με σκοπό την μελέτη της αλλαγής φάσης ανάμεσα στην φάση ισχυρής ζεύξης και την στρωματική, για την οποία γνωρίζουμε ότι για  $\beta' = 0$  (ενότητα 10.2) υπάρχει μια αλλαγή φάσης για  $\beta \simeq 0.90$ . Στην συνέχεια κινούμαστε πάνω στην γραμμή  $\beta = 1.10$  προκειμένου να μελετήσουμε την στρωματική-Coulomb μετάβαση φάσης σε πεπερασμένη θερμοκρασία<sup>7</sup>. Όπως θα εξηγήσουμε παρακάτω (ενότητα 11.2) η μελέτη του συστήματος για μεγαλύτερες τιμές του  $\beta$  απαιτεί την χρήση όγκων που προς το παρόν ξεπερνούν τις υπολογιστικές μας δυνατότητες.

Τα αποτελέσματα των ενοτήτων που ακολουθούν οδηγούν στην διαπίστωση ότι η στρωματική φάση εξαφανίζεται για  $L_t = 2$  και την θέση της παίρνει μια φάση αποπαγίδευσης με νέες ιδιότητες. Γενικεύοντας, ισχυριζόμαστε ότι η στρωματική φάση εξαφανίζεται για όλες τις τιμές της θερμοκρασίας διαφορετικές του μηδενός και αυτό γιατί η ύπαρξη της στρωματικής φάσης συνδέεται στενά με την ύπαρξη μιας φάσης Coulomb για  $\beta' = 0$ . Όμως, όπως ισχυρίζονται οι συγγραφείς της αναφοράς [8] και προκύπτει και από την ανάλυση που ακολουθεί, δεν υπάρχει Coulomb φάση για  $\beta' = 0$  και  $T \neq 0$ .

<sup>5</sup>Για παράδειγμα, για το  $4D \mathbf{XY}$  μοντέλο η κρίσιμη τιμή βρίσκεται στο  $\beta = \beta' = 0.29(1)$

<sup>6</sup>Κάτω επίπεδο ( $1/L_t = 0.0$ )

<sup>7</sup>Αναφερόμαστε στην περίπτωση του επιπέδου  $(\beta, \beta')$  για  $1/L_t = 0.5$  Σχ.1.



## 11.1 Η γραμμή $\beta' = 0.20$

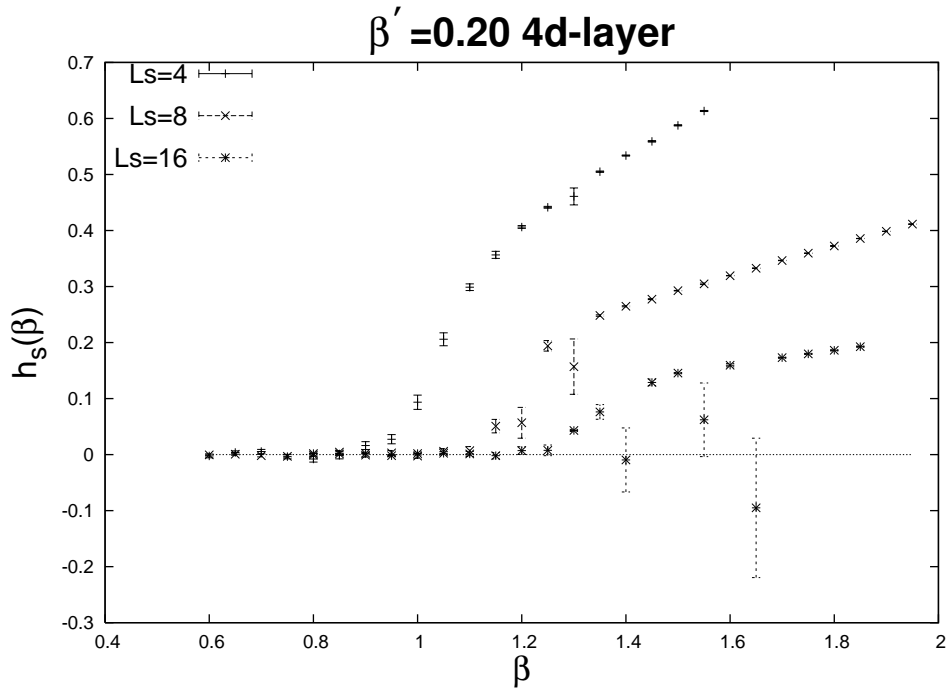
Η διερεύνηση του πενταδιάστατου, ανισοτροπικού,  $U(1)$  μοντέλου βαθμίδας σε πεπερασμένη θερμοκρασία ξεκινάει με την άλλοτε  $5D$  ισχυρής ζεύξης-στρωματική μετάβαση φάσης. Γίνεται εκτεταμένη χρήση των μέτρων ελικότητας  $h_s(\beta), h_t(\beta)$  προκειμένου να αναδειχθούν τα χαρακτηριστικά της μετάβασης και να γίνει σύγκριση με τα αποτελέσματα των περιπτώσεων  $T=0$  και  $\beta' = 0$ . Όπως είναι εμφανές στο Σχ.1 η πρώτη απόκλιση από την περίπτωση της μηδενικής θερμοκρασίας εντοπίζεται στο γεγονός ότι το σύνορο της μετάβασης μετακινείται προς την τιμή  $\beta = 0.90$  σε αντιδιαστολή με την προηγούμενη τιμή του  $\beta = 1.001113$ . Μια άλλη παρατήρηση αφορά τις τιμές του  $h_t(\beta)$  που είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με την περίπτωση  $\beta' = 0$ , με μόνη διαφορά την ελαφριά μετακίνηση του κρίσιμου σημείου μεταξύ των τιμών 0.85 και 0.90. Προχωρώντας στην ανάλυση του Σχ.15 και των αποτελεσμάτων του χωροειδούς μέτρου ελικότητας  $h_s(\beta)$  συναντά κάποιος πολλές ομοιότητες με την περίπτωση της μηδενικής θερμοκρασίας:

α) Υπάρχει μια ψευδοκρίσιμη τιμή  $\beta_c(L_s)$  για κάθε όγκο, με το  $h_s = 0$  για  $\beta \leq \beta_c(L_s)$ , γεγονός που μαρτυρά την ύπαρξη φάση παγίδευσης. Για  $\beta > \beta_c(L_s)$  το χωροειδές μέτρο ελικότητας  $h_s$  αυξάνει με το  $\beta$  όπως αναμένεται για την περίπτωση μιας φάσης Coulomb. Το σημείο μετάβασης όμως μετακινείται προς όλο και μεγαλύτερες τιμές του  $\beta$  καθώς η χωρική έκταση του πλέγματος ( $L_s$ ) αυξάνει. Συνεπώς η αλλαγή φάσης αυτή αποτελεί ένα προϊόν του πεπερασμένου μεγέθους του συστήματος και εξαφανίζεται στο θερμοδυναμικό όριο ( $L_s \rightarrow \infty$ ).

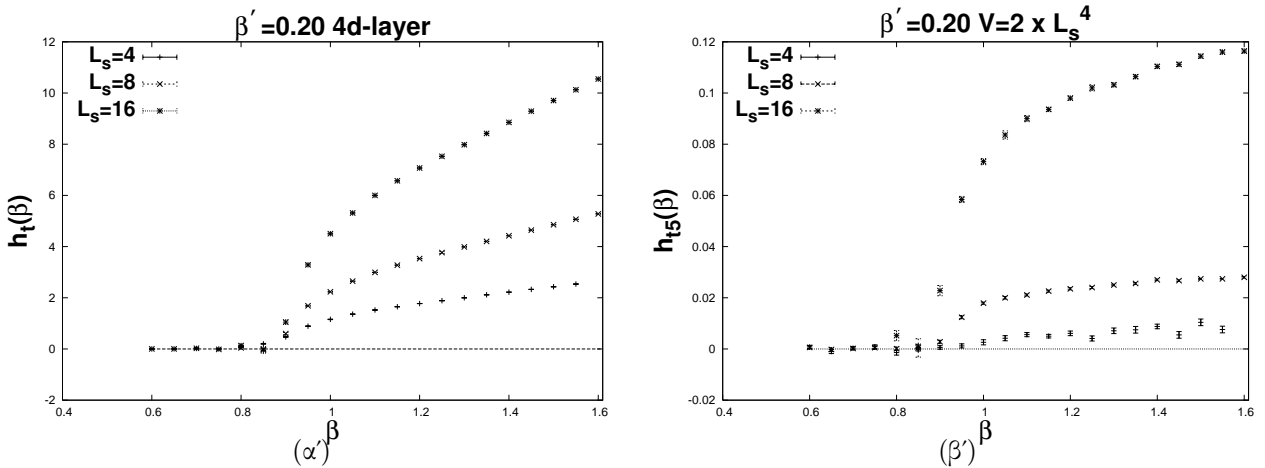
β) Το μέγεθος του  $h_s(\beta)$ , υπολογισμένο πάνω σε ένα μόνο τετραδιάστατο υπόχωρο (*layer*), μειώνεται με το  $L_s$ , για την ίδια τιμή του  $\beta > \beta_c(L_s)$ , ακολουθώντας τον λόγο  $\sim \frac{1}{L_s}$ . Συνεπώς περιμένουμε, όπως ακριβώς συνέβη και στην περίπτωση των τεσσάρων διαστάσεων, το χωροειδές μέτρο ελικότητας να πάει στο μηδέν για όλες τις τιμές του  $\beta$  καθώς το  $L_s \rightarrow \infty$  (σηματοδοτώντας παγίδευση). Επομένως η μετάβαση προς μια φάση Coulomb εξαφανίζεται, μαζί με την στρωματική φάση, στο όριο του άπειρου όγκου. Σημειώνεται επίσης ότι το χωρο-εγκάρσιο μέτρο ελικότητας ( $h_{s5}(\beta)$ ) διατηρεί μηδενική τιμή καθ' όλη την διάρκεια της μετάβασης.

Στο Σχ.16(α) παρουσιάζεται το χρονοειδές μέτρο ελικότητας  $h_t$  και στο Σχ.16(β) το χρονο-εγκάρσιο  $h_{t5}$  για τρεις διαφορετικούς όγκους. Και οι δύο ποσότητες εμφανίζουν την ίδια συμπεριφορά: παίρνουν μηδενική τιμή για  $\beta \leq 0.85$  και μη μηδενική για  $\beta > 0.85$  ενώ αυξάνουν με το  $L_s$  φανερώνοντας *coulombic* συμπεριφορά κατά την χρονική διεύθυνση. Συμπληρώνοντας σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφερθεί ότι και ο χρονοειδής βρόχος Polyakov (αποτέλεσμα που δεν παρουσιάζεται εδώ) έχει μηδενική τιμή για  $\beta$  μικρότερο από μια κρίσιμη τιμή ( $\beta \simeq 0.85$ ) και τείνει στην μονάδα για  $\beta > \beta_c$ . Η μετάβαση, όπως αυτή εμφανίζεται μέσα από τις τρεις ποσότητες  $h_t, h_{t5}, < |P_t| >$ , δείχνει να είναι συνεχής και παρόλο που δεν γίνονται περεταίρω ενέργειες για τον καθορισμό της τάξης της, θεωρείται απίθανη η περίπτωση μιας αλλαγής πρώτης τάξης.

Όλα τα αποτελέσματα συνηγορούν στην εξαφάνιση της στρωματικής φάσης για πεπερασμένη θερμοκρασία. Η στρωματική φάση δίνει την θέση της σε μια φάση που επιδεικνύει συμπεριφορά παγίδευσης στους  $4d$  υπόχωρους (αποτελούμενοι από τις τρεις χωρικές και την εγκάρσια διεύθυνση) και *coulombic* συμπεριφορά κατά την χρονική διεύθυνση.



Σχήμα 15: Το χωροειδές μέτρο ελικότητας  $h_s$  έχει αυστηρά μηδενική τιμή για κάθε όγκο  $V = 2 \times L_s^4$  μέχρι το ψευδοκρίσιμο σημείο  $\beta_c(L_s)$ . Για  $\beta > \beta_c(L_s)$  το  $h_s$  τείνει στο μηδέν ως  $\frac{1}{L_s}$  για σταθερό  $\beta$ .



Σχήμα 16: Το χρονοειδές μέτρο ελικότητας  $h_t$  ( $\alpha$ ) και το χρονο-εγκάρσιο μέτρο ελικότητας  $h_{t5}$  ( $\beta$ ) για  $L_t = 2$  και  $\beta' = 0.20$  με το  $\beta$ . Το  $h_t$  υπολογίστηκε πάνω στους 4d-υπόχωρους ( $L_t \times L_s^3$ ) και αυξάνει με το  $L_s$  για  $\beta > \beta_c$ . Το  $h_{t5}$  είναι υπολογισμένο πάνω σε ολόκληρο το πλέγμα και αυξάνει ως  $L_s^2$  για  $\beta > \beta_c$ .

## 11.2 Η γραμμή $\beta = 1.10$

Όπως παρουσιάστηκε ήδη το σύστημα περνά μια συνεχή αλλαγή φάσης από μια ισχυρή, φάση παγίδευσης σε μια νέα. Το σημείο μετάβασης για  $\beta' = 0$  βρίσκεται στο  $\beta_c \simeq 0.90$  και για  $\beta' = 0.20$  κάπου στην περιοχή  $0.85 \leq \beta_c \leq 0.90$ . Προκειμένου να μελετηθεί εις βάθος η φύση και η έκταση της νέας αυτής φάσης επιλέγεται η σταθερή τιμή  $\beta = 1.10$  με το  $\beta'$  ως ελεύθερη παράμετρο. Στα Σχ.17(α) και Σχ.17(β) παρουσιάζονται το χωροειδές μέτρο ελικότητας  $h_s(\beta')$  και το χωρο-εγκάρσιο  $h_{s5}(\beta')$  για τρεις διαφορετικούς όγκους. Τα  $h_s$  και  $h_{s5}$  έχουν μηδενική τιμή, μέσα τα όρια του σφάλματος, για  $\beta' = 0.445$  φανερώνοντας αταξία κατά τις χωρικές και την εγκάρσια διεύθυνση. Η φάση αυτή αποτελεί την επέκταση της  $\beta' = 0$  στην περίπτωση του μη μηδενικού  $\beta'$ . Η  $3d U(1)$  θεωρία που αποκτάται μέσω διαστατικής αναγωγής για  $\beta' = 0$ , επεκτείνεται (για  $0 \leq \beta' \leq 0.445$ ) σε μια  $4d$  ανηγμένη  $U(1)$  θεωρία στην φάση παγίδευσης. Παρατηρούμε ότι η στρωματική φάση, που αποτελεί ένα μείγμα από  $4d$  Coulomb με δυνάμεις παγίδευσης κατά την εγκάρσια διάσταση, μετατρέπεται σε μια φάση κατάλυσης της παγίδευσης αυτής.

Υπάρχει μια κρίσιμη περιοχή στο διάστημα  $0.445 \leq \beta' \leq 0.450$  όπου εμφανίζεται μια πεπερασμένη ασυνέχεια στις ποσότητες  $h_s$  και  $h_{s5}$ . Για  $\beta' > \beta'_c$  το χωροειδές μέτρο ελικότητας είναι μη μηδενικό και σχεδόν σταθερό, χαρακτηριστικό μιας φάσης Coulomb. Η τιμή του  $h_{s5}(\beta')$  αυξάνει γραμμικά με το  $\beta'$ , ακολουθώντας το ανάπτυγμα ασθενούς σύζευξης στο πλέγμα, πλησιάζοντας την τιμή του  $h_s(\beta')$  καθώς το  $\beta' \rightarrow \beta$ . Οι τιμές των  $h_s$  και  $h_{s5}$  του Σχ.17 είναι διαιρεμένες με το  $L_t$  και ανεξάρτητες από την χωρική έκταση του πλέγματος  $L_s$ . Το χωροειδές μέτρο ελικότητας δίνει την επανακανονικοποιημένη σταθερά σύζευξης  $\beta_R = \frac{1}{e^2 R}$  της  $5D U(1)$  θεωρίας στην Coulomb φάση η οποία καθορίζεται από την τιμή  $\beta = 1.10$ [25].

Το χρονοειδές και χρονο-εγκάρσιο μέτρο ελικότητας (δεν παρουσιάζονται εδώ) διατηρούν μη μηδενική τιμή η οποία αυξάνει με το  $\beta'$ . Επίσης ο χρονοειδής βρόχος του Polyakov είναι μη μηδενικός ενδεικτικό μιας φάσης πεπερασμένης θερμοκρασίας.

Εξετάζοντας τα Σχ.14 ( $\beta' = 0$ ) και Σχ.17 ( $\beta' = 0.20$ ) παρατηρούμε ότι, για δεδομένη τιμή του  $\beta$ , το χωροειδές μέτρο ελικότητας είναι μη μηδενικό για κάποιους από τους όγκους που εξετάσαμε και μηδενίζεται όταν ο χωρικός όγκος του συστήματος μεγαλώσει πέρα από κάποια συγκεκριμένη τιμή. Για  $\beta = 1.10$ , παραδείγματος χάριν, η χωρική έκταση του πλέγματος  $L_s = 16$  είναι επαρκής για να μας φανερώσει τη σωστή θερμοδυναμική συμπεριφορά του συστήματος. Εάν κινηθούμε προς μεγαλύτερες τιμές του  $\beta$  όπως το  $\beta = 1.40$  θα πρέπει να καταφύγουμε σε έκταση συστήματος της τάξης του  $L_s \geq 24$  προκειμένου να δούμε την σωστή συμπεριφορά.

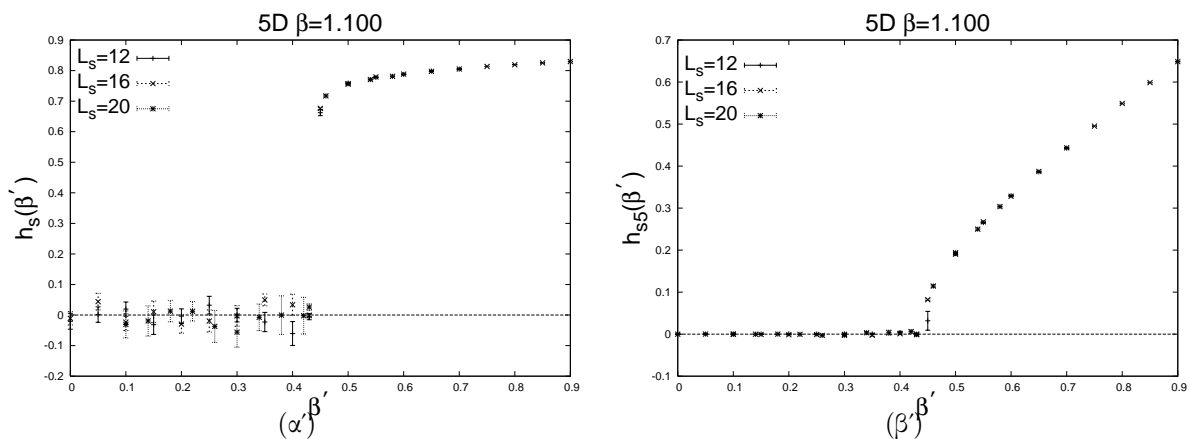
Στο Σχ.18 παρουσιάζουμε χονδρικά το διάγραμμα φάσης για  $L_t = 2$  στο επίπεδο  $(\beta, \beta')$ .

Υπάρχουν τρεις φάσεις με διαφορετική συμπεριφορά για τις ποσότητες που χρησιμοποιήθηκαν:

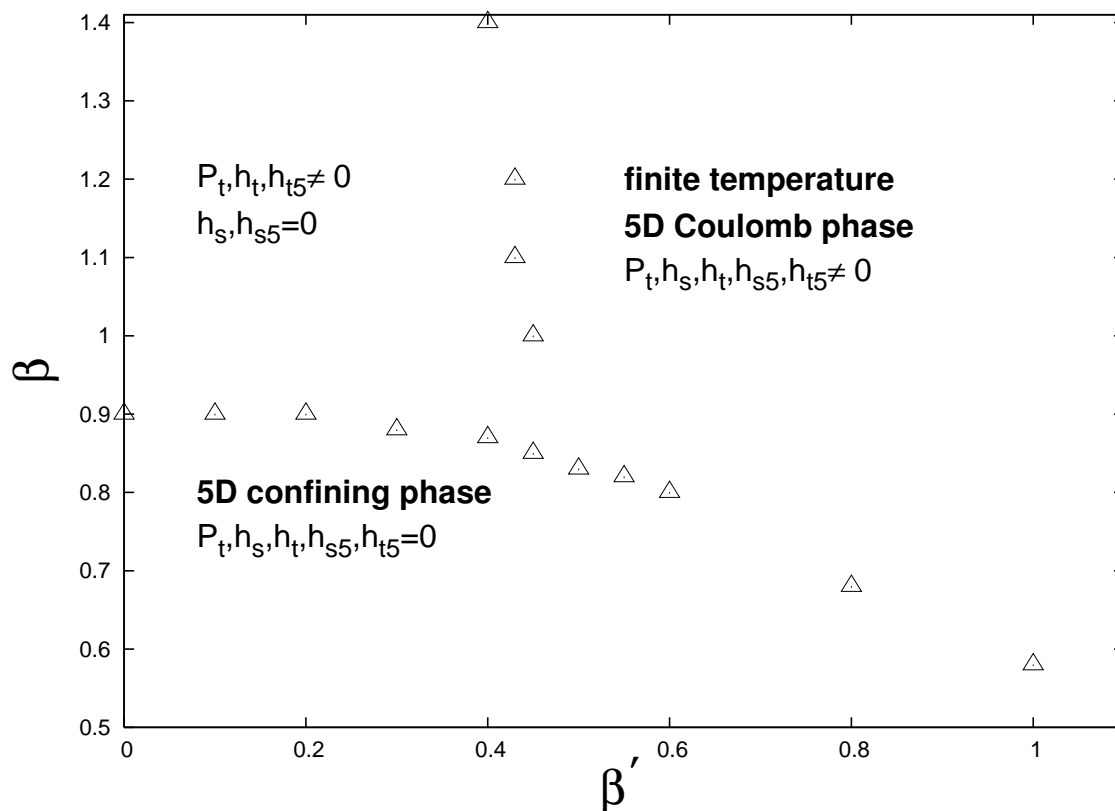
1)  $5D$  φάση παγίδευσης με  $P_t = 0$ ,  $h_t = 0$ ,  $h_{t5} = h_{s5} = 0$  και  $h_s = 0$

2)  $5D$  Coulomb φάση σε πεπερασμένη θερμοκρασία:  $P_t \neq 0$ ,  $h_t, h_s, h_{t5}$  και  $h_{s5} \neq 0$

3) Διαστατικά ανηγμένη  $4d$  φάση παγίδευσης - χρονικά Coulomb  
 $P_t \neq 0$ ,  $h_t \neq 0$ ,  $h_{t5} \neq 0$  και  $h_s = h_{s5} = 0$



Σχήμα 17: Το χωροειδές μέτρο ελικότητας ( $\alpha$ ) και το χωρο-εγκάρσιο μέτρο ελικότητας ( $\beta$ ) συναρτήσεως του  $\beta'$ , μετρούμενο για χρονική έκταση του πλέγματος  $L_t = 2$ . Η κρίσιμη τιμή του  $\beta'$  παραμένει σταθερή με τον όγκο του πλέγματος.



Σχήμα 18: Χονδρική περιγραφή του διαγράμματος φάσης του μοντέλου για  $L_t = 2$ . Υπάρχουν τρεις διαφορετικές φάσεις, μια  $5D$  φάση παγίδευσης, μια  $5D$  *Coulomb* φάση σε πεπερασμένη θερμοκρασία και μια νέα φάση που χαρακτηρίζεται ως χρονικά *Coulomb* -  $4d$  φάση παγίδευσης.

Ήδη από την συζήτηση της ενότητας 10.2 για  $\beta' = 0$  τέθηκε ο ισχυρισμός ότι η κρίσιμη θερμοκρασία για την εμφάνιση του διαγράμματος φάσης του Σχ.1-επίπεδο ( $\frac{1}{L_t} = 0$ ) είναι η μηδενική θερμοκρασία. Ο λόγος είναι ότι η στρωματική φάση στηρίζεται κυρίως στην ύπαρξη μιας μετάβασης προς μια φάση Coulomb για  $\beta' = 0$ . Όλα τα αποτελέσματα της 10.2 για  $T > 0$  και  $\beta' = 0$  συνηγορούν στην εμφάνιση μιας  $3d$  φάσης παγίδευσης, στο όριο του άπειρου όγκου, για  $\beta$  μεγαλύτερο από μια κρίσιμη τιμή  $\beta_c(L_t)$ , αποκλείοντας την εμφάνιση μιας φάσης Coulomb. Επίσης είναι φανερό ότι το διάγραμμα του Σχ.18 ισχύει για κάθε τιμή της θερμοκρασίας διάφορη του μηδενός. Ειδικά για  $\beta > \beta_c(L_t)$  και  $0 < \beta' < \beta'_c(L_t)$  έχουμε μια  $4d$  φάση παγίδευσης - χρονικά φάση Coulomb στην θέση της στρωματικής. Δύο δοκιμαστικά φορτία δεν θα παραμείνουν εντοπισμένα στον τρισδιάστατο υπόχωρο (μεμβράνη) επειδή η θερμοκρασία τους 'ανοίγει' τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των γειτονικών τρισδιάστατων υπόχωρων. Από ότι φαίνεται υπάρχουν δύο διαφορετικά μήκη συσχετισμού στην φάση κατάλυσης της παγίδευσης. Ένα που δίνεται από τη χωρική τάση νήματος (*string tension*) και ένα δεύτερο που χαρακτηρίζει το πάχος της μεμβράνης και δίνεται από τις αλληλεπιδράσεις στην εγκάρσια διεύθυνση και στην θερμοκρασία. Δεν ακολουθεί ποσοτική μελέτη των δύο αυτών μεγεθών αλλά αξίζει να γίνει αναφορά σε δύο οριακές περιπτώσεις. Για  $L_t = 1$  (περίπτωση άπειρης θερμοκρασίας) έχουμε μια  $4d$   $U(1)$  θεωρία βαθμίδας στην φάση ισχυρής ζεύξης και τα δύο μήκη συσχετισμού είναι μη διακρίσιμα και πλησιάζουν το ένα το άλλο. Για την περίπτωση της μηδενικής θερμοκρασίας από την άλλη πλευρά δεν έχουμε τη χωρική τάση νήματος αλλά ένα άμαζο φωτόνιο πάνω στις μεμβράνες. Σε αυτή την περίπτωση οι μεμβράνες χαρακτηρίζονται από μηδενικό πάχος. Στην ενδιάμεση περίπτωση αναμένει κανείς να υπάρχει μια συνεχής αλλαγή στην συμπεριφορά με ισχυρή εξάρτηση από την θερμοκρασία.

## 12 Αναλυτική μελέτη της στρωματικής φάσης, υπολογισμός του δυναμικού αλληλεπίδρασης.

### 12.1 Η περίπτωση των τεσσάρων διαστάσεων.

Σκοπός της ενότητας αυτής αποτελεί η διερεύνηση του κατά πόσον η στρωματική φάση μπορεί πράγματι να αποτελέσει μια βιώσιμη λύση για την ύπαρξη του συνήθους τετραδιάστατου χωρόχρονου. Για τον λόγο αυτό εξετάζεται το κατά πόσο η φυσική στα στρώματα του μοντέλου ταυτίζεται με την συνήθη  $4D$   $U(1)$  θεωρία. Προς αυτή τη κατεύθυνση σημαντικό βήμα αποτελεί η καθιέρωση του νόμου Coulomb στα στρώματα της θεωρίας.

#### 12.1.1 Μετρήσεις

Οι υπολογισμοί Monte-Carlo πραγματοποιήθηκαν για όγκους  $V = 12^4, 14^4$  και  $16^4$ . Για όλα τα μεγέθη του πλέγματος ακολουθήθηκε η δουλειά των Jersak et al[32]. Χρησιμοποιήθηκε ένας  $5 - hit$  αλγόριθμος **Metropolis** συμπληρωμένος από την μέθοδο overrelaxation. Περίπου  $10^5$  ενημερώσεις του συστήματος χρησιμοποιήθηκαν για την διαδικασία αποκατάστασης θερμικής ισορροπίας ενώ περισσότερες από  $2 \times 10^5$  μετρήσεις, με απόσταση 10 ενημερώσεων μεταξύ τους, πάρθηκαν για τον υπολογισμό των μέσων τιμών. Για την περίπτωση του  $V = 16^4$  υπολογίστηκαν όλοι οι επίπεδοι παραλληλόγραμμοι βρόχοι **Wilson** με  $R = 1, \dots, 6$  και  $T = 1, \dots, 8$  ενώ για

τους υπόλοιπους όγκους μόνο αυτοί με  $R, T \leq \frac{L}{2}$  σε μια προσπάθεια να ελαχιστοποιηθούν τα φαινόμενα που πλήττουν τις μετρήσεις λόγω του πεπερασμένου μεγέθους του συστήματος. Στην θεωρία, η εξαγωγή του δυναμικού από τους βρόχους **Wilson** πραγματοποιείται μέσω του λογαρίθμου της μέσης τιμής τους για μεγάλες τιμές του  $T$ .

$$-\ln \langle W_C[U] \rangle = V(R) \times T + const \quad (159)$$

Η σχέση αυτή όμως προϋποθέτει έναν πολύ μεγάλο όγκο για το σύστημα έτσι ώστε να αντιμετωπιστούν τα προβλήματα που συνοδεύουν τους υπολογισμούς στο πλέγμα. Το γεγονός ότι κάποιος προσπαθεί να εξάγει αποτελέσματα για το θερμοδυναμικό όριο από ένα σύστημα πεπερασμένου μεγέθους απειλεί να ακυρώσει την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων, εάν, η πεπερασμένη φύση του συστήματος δεν ληφθεί ορθά υπόψιν. Για το λόγο αυτό θα πρέπει να εξετάσει κάποιος την απόκλιση της παραπάνω σχέσης από την γραμμική εξάρτηση από το  $T$  και για το σκοπό αυτό ένας τρίτος όρος εισάγεται:

$$-\ln \langle W_C[U] \rangle = const + V(R) \times T + \frac{C}{T} \quad (160)$$

με το  $C$  να είναι στην πραγματικότητα μια συνάρτηση του  $R$ .

Η μορφή του διορθωτικού όρου μπορεί να γίνει αντικείμενο συζήτησης αλλά η επιλογή της μορφής ( $\sim \frac{1}{T}$ ) είναι η απλούστερη (αλλά και η πιο προφανής). Για τον υπολογισμό του δυναμικού χρησιμοποιήθηκε τόσο η γραμμική εξάρτηση των λογαρίθμων από το  $T$  (εξίσωση 159) όσο και την μη γραμμική (εξίσωση 160), για μεταβλητό αριθμό σημείων, σε συνάρτηση με τον εκάστοτε υπό μελέτη όγκο. Οι δύο μέθοδοι δίνουν συμβατά αποτελέσματα μέσα στα όρια του σφάλματος. Οι τιμές που αποκτήθηκαν προσαρμόστηκαν σε μια υπέρθεση ενός γραμμικού όρου και ενός δυναμικού **Coulomb**:

$$V(R) = \sigma_{cc}R - \frac{\alpha_{cc}}{R} + const \quad (161)$$

και

$$V(R) = \sigma_{lc}R - \alpha_{lc}V_{lc}(R) + const \quad (162)$$

με  $V_{lc}$  το μετασχηματισμένο κατά **Fourier**, στο πλέγμα, για άμαζο μποζονικό διαδότη, ο οποίος όχι μόνο σέβεται το κατώφλι στην ορμή αλλά λαμβάνει υπόψιν του και την περιοδικότητα του πλέγματος.

$$V_{lc}(R) = \frac{4\pi}{L_s^3} \sum_{\vec{k} \neq 0} \frac{e^{i\vec{k}\vec{R}}}{\sum_{j=1}^3 2(1 - \cos(k_j))}, \quad k_j = 0, \frac{2\pi}{L_s}, \dots, \frac{2\pi(L_s - 1)}{L_s} \quad (163)$$

Όλες οι μετρήσεις επικεντρώθηκαν στην **Coulomb** φάση ξεκινώντας από την γειτονιά του κρίσιμου σημείου και φτάνοντας μέχρι μεγάλες τιμές για το  $\beta$ . Στον Πίνακα 5 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τους διάφορους όγκους, χρησιμοποιώντας τόσο την μορφή του δυναμικού στο συνεχές (εξίσωση 161) όσο και την αντίστοιχή του στο πλέγμα (εξίσωση 162) πάνω στα αποτελέσματα που αποκτήθηκαν μετά από την χρήση μη γραμμικής προσαρμογής (εξίσωση 160). Ο συμβολισμός που παρουσιάζεται είναι ενδεικτικός. Το **cc** υποδηλώνει την χρήση της μορφής του δυναμικού **Coulomb** στο συνεχές ( $\frac{1}{R}$ ) ενώ με **lc** την μορφή του στο πλέγμα (εξίσωση 163).

Σε αυτό το σημείο χρήσιμες είναι λίγες παρατηρήσεις αναφορικά με τα αποτελέσματα. Πρώτα από όλα οι εκτιμήσεις για το  $\alpha$ , όπως αυτές αποκτώνται από τις δυο διαφορετικές μορφές του δυναμικού, παρουσιάζουν μια συστηματική απόκλιση της τάξης 0.010-0.020, γεγονός το οποίο παρατηρήθηκε και από τους Jersak et al [32]. Επίσης, όπως είναι εμφανές από τον Πίνακα 5, οι τιμές του  $\alpha$  παρουσιάζουν μια γρήγορη σύγκλιση προς το όριο του άπειρου όγκου, γεγονός που επιβεβαιώνεται από το ότι η διαφορά των τιμών του ανάμεσα στον μικρότερο και τον μεγαλύτερο όγκο που χρησιμοποιήθηκε βρίσκεται μέσα στα όρια του σφάλματος.

Αναφορικά με το γραμμικό όρο της τάσης νήματος, όπως λέγεται στην διεθνή ορολογία, ξεκινάει από μεγάλες τιμές, απόρροια του πεπερασμένου μεγέθους του συστήματος, για να πάρει την τελική του τιμή 0.003 για τον μεγαλύτερο όγκο που εξετάστηκε. Το αποτέλεσμα αυτό είναι ελαφρώς μεγαλύτερο από αυτό των Jersak et al [32] και ο λόγος για αυτήν την υπερεκτίμηση της τιμής του κρύβεται στην εισαγωγή του όρου  $\sim \frac{1}{T}$  της εξίσωσης (160). Ο επιπλέον αυτός όρος εισάγει μία ενεργή τάση νήματος η οποία προστίθεται στην μέτρηση. Στην [33] βρέθηκε ότι το στατικό δυναμικό, όπως αυτό αποκτάται από τους βρόχους του **Wilson**, περιέχει μια συνεισφορά παγίδευσης ( $\frac{cR}{T^2}$ ) για πεπερασμένο όγκο. Την ίδια όμως μορφή έχει και ο επιπλέον όρος που προστέθηκε με το χέρι ( $\frac{C}{T}$ ). Συνεπώς η εισαγωγή αυτή του επιπλέον όρου ενίσχυσε την ήδη υπάρχουσα συνιστώσα παγίδευσης του δυναμικού, αυξάνοντας την τιμή της τάσης νήματος. Για να διορθωθεί η κατάσταση αυτή απαιτείται η παρακολούθηση της συνεισφοράς του επιπλέον όρου και η αφαίρεσή της από το τελικό αποτέλεσμα έτσι ώστε να εξαλειφθεί η ασυνέπεια ανάμεσα στα αποτελέσματα των εξισώσεων 159 και 160 (Πίνακας 5 & 6). Δυστυχώς για τον σκοπό αυτό απαιτείται γνώση της ακριβούς συναρτησιακής εξάρτησης του  $C$  από το  $R$ , εγχείρημα το οποίο αποδεικνύεται άκρως απαιτητικό. Συνεπώς, στην προσπάθειά μας να επεκτείνουμε την ισχύ των αποτελεσμάτων μας, για το  $\alpha$ , στους μικρότερους όγκους, αναπόφευκτα ενισχύσαμε το σήμα για το  $\sigma$ . Παρόλα αυτά, το γεγονός αυτό δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα του  $\alpha$  όπως αποκαλύπτει η ακόλουθη ανάλυση.

Στον Πίνακα 6 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της γραμμικής προσαρμογής (εξίσωση 159) για  $L = 16$ . Η σύγκριση με τον Πίνακα 5, για την ίδια τιμή του  $L$ , οδηγεί στο συμπέρασμα ότι φτάνοντας σε επαρκώς μεγάλο όγκο για το σύστημα η συνεισφορά του επιπλέον όρου γίνεται αμελητέα.

Αναφορικά με το  $\alpha$  αξίζει να τονιστεί ότι τόσο η γραμμική όσο και μη γραμμική προσαρμογή δίνουν ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα μέσα στα όρια του σφάλματος (Σχήμα 19). Η τάση νήματος ( $\sigma$ ) εμφανίζεται μηδενική μέσα στα όρια του στατιστικού σφάλματος. Η γραμμική προσαρμογή δίνει μια πιο πιστική εικόνα για τον μηδενισμό του  $\sigma$  με τιμές συμβατές με αυτές των Jersak et al [32].

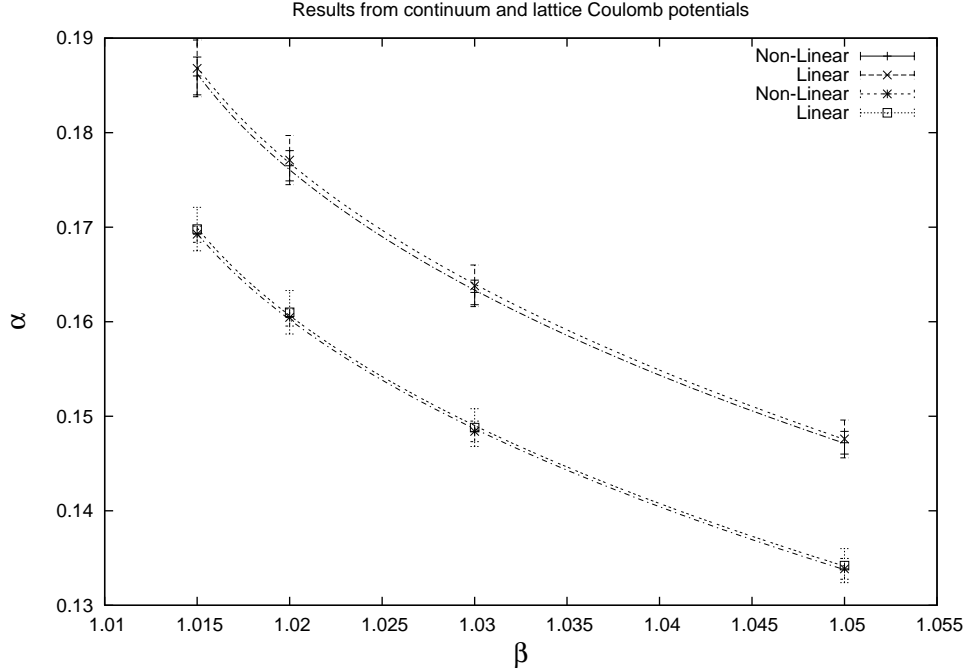
Πίνακας 5: Τα αποτελέσματα της μη γραμμικής προσαρμογής

$\Lambda=16$				
$\beta$	$\alpha_{cc}$	$\sigma_{cc}$	$\alpha_{lc}$	$\sigma_{lc}$
1.015	0.1860(20)	0.0033(5)	0.1693( 9)	0.0027(3)
1.020	0.1765(16)	0.0035(4)	0.1605( 9)	0.0030(3)
1.030	0.1631(13)	0.0036(3)	0.1484(11)	0.0030(3)
1.050	0.1472(12)	0.0033(3)	0.1339(11)	0.0027(3)
$\Lambda=14$				
$\beta$	$\alpha_{cc}$	$\sigma_{cc}$	$\alpha_{lc}$	$\sigma_{lc}$
1.015	0.1883(34)	0.0039(10)	0.1692(12)	0.0024(3)
1.025	0.1716(26)	0.0040(10)	0.1540(11)	0.0027(3)
1.030	0.1632(23)	0.0034(10)	0.1474(14)	0.0023(4)
1.040	0.1577(29)	0.0035(10)	0.1414(12)	0.0027(3)
1.050	0.1472(21)	0.0045(15)	0.1329(14)	0.0020(4)
$\Lambda=12$				
$\beta$	$\alpha_{cc}$	$\sigma_{cc}$	$\alpha_{lc}$	$\sigma_{lc}$
1.013	0.1975(2)	0.0060(10)	0.1765(12)	0.0041(3)
1.015	0.1906(2)	0.0060(10)	0.1708(14)	0.0040(3)
1.025	0.1730(2)	0.0055(20)	0.1552(12)	0.0040(2)
1.050	0.1537(2)	0.0055(10)	0.1366(10)	0.0038(2)
1.060	0.1466(2)	0.0055(10)	0.1307(10)	0.0034(2)
1.100	0.1338(2)	0.0050(10)	0.1182(10)	0.0035(2)
1.200	0.1087(2)	0.0050(10)	0.0968(10)	0.0026(2)

Πίνακας 6: Τα αποτελέσματα της γραμμικής προσαρμογής για  $L = 16$

$\Lambda=16$				
$\beta$	$\alpha_{cc}$	$\sigma_{cc}$	$\alpha_{lc}$	$\sigma_{lc}$
1.015	0.1868(30)	0.0010(7)	0.1698(23)	0.0020(6)
1.020	0.1771(26)	0.0005(6)	0.1610(23)	0.0010(6)
1.030	0.1638(22)	0.0003(5)	0.1488(20)	0.0010(5)
1.050	0.1476(20)	0.0003(4)	0.1342(18)	0.0008(5)





Σχήμα 19: Τα αποτελέσματα της γραμμικής και μη γραμμικής προσαρμογής για  $V = 16^4$  με χρήση της μορφής **Coulomb** στο συνεχές (πάνω καμπύλη) και της μορφής στο πλέγμα (κάτω καμπύλη).

Το 1982 ο **Luck**[34] επικαλούμενος την στενή σχέση ανάμεσα στο διδιάστατο **XY** μοντέλο και την  $4D$  συμπαγή  $QED$  κατέληξε, χρησιμοποιώντας αναπτύγματα στο όριο της ασθενούς σταθεράς σύζευξης, στην ακόλουθη μορφή για την επανακανονικοποιημένη σταθερά λεπτής υφής

$$\alpha(\beta) = \alpha_c - const \times \left(1 - \frac{\beta_c}{\beta}\right)^\lambda \quad (164)$$

με  $\alpha_c \simeq 0.15$  και  $\lambda \simeq 0.5$ . Η ανάλυσή του τον οδήγησε στο συμπέρασμα ότι το τετράγωνο του επανακανονικοποιημένου φορτίου παίρνει την παγκόσμια τιμή  $e_c^2 \equiv 4\pi\alpha_c = 1.90 \pm 0.10$  στο κρίσιμο σημείο.

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (164) και την πιο ακριβή τιμή (από όσο γνωρίζουμε) για την κρίσιμη τιμή του  $\beta$  στις τέσσερις διαστάσεις ( $\beta_c = 1.0111331(21)$ [13]) καταλήγουμε στον Πίνακα 7 όπου είναι συγκεντρωμένα τα αποτελέσματα για τα  $\alpha_c$  και  $\lambda$ , με την τελευταία γραμμή ( $L = 16$ ) να αναφέρεται στα αποτελέσματα της γραμμικής προσαρμογής και την  $L = 10$  να αντιστοιχεί στο  $V = 16 \times 10^3$ . Τα αποτελέσματα αυτά βρίσκονται σε καλή συμφωνία με αυτά της [32] και τις θεωρητικές προβλέψεις [34]. Το συστηματικό σφάλμα στην ανάλυση λόγω της ύπαρξης του  $\delta\beta_c$  αποδείχθηκε αμελητέο.

Πίνακας 7: Αποτελέσματα για τα  $\alpha_c$  και  $\lambda$

$\Lambda$	$\alpha_{c-cc}$	$\alpha_{c-lc}$	$\lambda_{cc}$	$\lambda_{lc}$	$\chi_{d.o.f}^2$
10	0.230(25)	0.208(24)	0.31( 8)	0.33(10)	1.05
12	0.209( 7)	0.200( 4)	0.38( 5)	0.34( 3)	0.80
14	0.211(23)	0.190(10)	0.44(20)	0.45(13)	0.75
16	0.211(16)	0.190( 9)	0.42(16)	0.43(10)	0.20
16	0.211(23)	0.192(21)	0.43(10)	0.42(15)	0.10

Ιδιαίτερα ευχάριστο αποδεικνύεται το γεγονός ότι και οι δύο μορφές του δυναμικού καταφέρνουν να περιγράψουν αρκετά επιτυχημένα τα δεδομένα δίνοντας ταυτόσημα αποτελέσματα (μέσα στα όρια του σφάλματος), συνηγορώντας στην ύπαρξη ενός άμαζου φωτονίου στην **Coulomb** φάση. Η μόνη αξιοσημείωτη διαφορά ανάμεσα στα δύο σύνολα εμφανίζεται στην συστηματική εξάρτηση από τον όγκο του  $\alpha_{c-lc}$ , απόδειξη της μεγαλύτερης ακρίβειας που παρέχει η εκδοχή του δυναμικού στο πλέγμα καθώς ενσωματώνει ενδογενώς την πληροφορία για τον όγκο του συστήματος. Τέλος, η εισαγωγή του επιπλέον όρου ( $\sim \frac{1}{T}$ ) αποδείχθηκε αρκετά προσοδοφόρα αφού μας επέτρεψε να αντλήσουμε την απαιτούμενη πληροφορία από μικρούς όγκους.

## 12.2 Πέντε διαστάσεις-Η περίπτωση της στρωματικής φάσης.

Οι υπολογισμοί της ενότητας αυτής είναι αφιερωμένοι αποκλειστικά στην μελέτη της στρωματικής φάσης για το εύρος των παραμέτρων  $\beta' = 0.2$  και  $1.015 \leq \beta \leq 1.40$ . Για να αναδειχθεί η ποιοτική και ποσοτική συμφωνία ανάμεσα στην στρωματική φάση του πενταδιάστατου μοντέλου και τα αντίστοιχα  $4d$  μοντέλα, επικεντρωνόμαστε στους όγκους  $V = 16 \times 10^4$  και  $12^5$  οι οποίοι στο πλαίσιο της στρωματικής φάσης αντιστοιχούν σε 10 και 12 υπόχωρους αντίστοιχα με όγκο  $V_i = 16 \times 10^3$  και  $12^4$  ο καθένας.<sup>8</sup>

Κάθε στρώμα είναι (σε πολύ μεγάλο βαθμό) αποσυζευγμένο από τα υπόλοιπα και κάθε ποσότητα μετρούμενη πάνω σε αυτό αποτελεί μια τυχαία μεταβλητή με δεδομένη κατανομή. Επομένως η επιλογή συγκεκριμένου υπόχωρου δεν παίζει ρόλο αφού κάθε ένας από αυτούς αναμένεται να επιδείξει την ίδια ακριβώς συμπεριφορά. Το να εξεταστεί το σύστημα στο σύνολό του οδηγεί απλά σε αύξηση της στατιστικής των μετρούμενων μεγεθών. Για την διερεύνηση της φυσικής στα στρώματα όλοι οι επίπεδοι, παραλληλόγραμμοι βρόχοι **Wilson** με  $R = 1, \dots, 5$  και  $T = 1, \dots, 8$  και  $R = 1, \dots, 6$  και  $T = 1, \dots, 6$  υπολογίστηκαν με γνώμονα το υπό μελέτη σύστημα. Η κατασκευή τους βασίστηκε στους συνδέσμους που ζουν αποκλειστικά στους τετραδιάστατους υπόχωρους ( $U_\mu$ ,  $\mu = 1, 2, 3, 4$ ).<sup>9</sup> Ταυτόχρονα, μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν στα αντίστοιχα τετραδιάστατα συστήματα ( $V_{4D} = 16 \times 10^3$  και  $12^4$ ) με σκοπό την απευθείας σύγκριση των αποτελεσμάτων. Ακολουθώντας την διαδικασία της προηγούμενης ενότητας διερευνώνται οι συσχετίσεις μεγάλης κλίμακας, για τα δύο αυτά συστήματα, όπως αυτές εκφράζονται μέσα από την αδιάστατη παράμετρο  $a(\beta)$ .

<sup>8</sup>Στο συμβολισμό που ακολουθεί με  $4D$  συμβολίζεται το τετραδιάστατο σύστημα ενώ με  $4d$  οι τετραδιάστατοι υπόχωροι(στρώματα) του  $5D$  συστήματος.

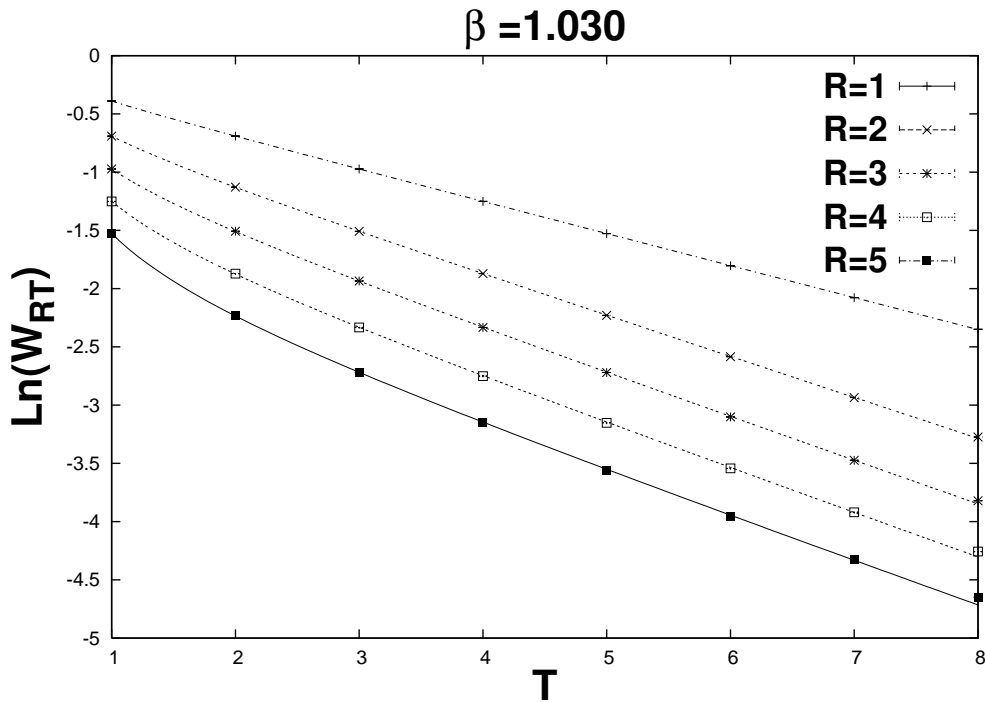
<sup>9</sup>Η ύπαρξη φαινομένων που συνδέονται με το πεπερασμένο μέγεθος του συστήματος εμποδίζει την χρησιμοποίηση των μέγιστων δυνατών βρόχων.

### 12.2.1 Η περίπτωση του $16 \times 10^4$

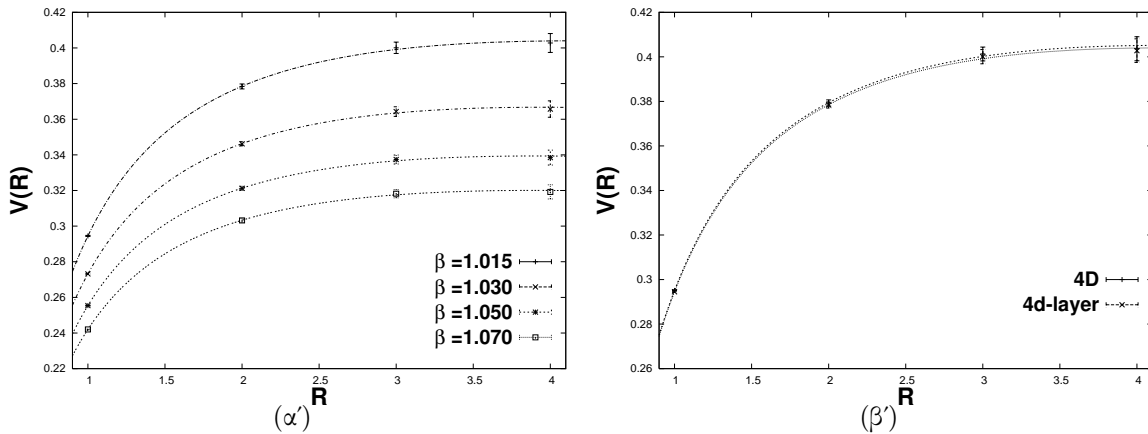
Η εξίσωση 160 χρησιμοποιήθηκε για την εξαγωγή του δυναμικού από την μέση τιμή των βρόχων του **Wilson**. Όλα τα σημεία με  $T=1,2$  εξαιρέθηκαν από την προσαρμογή των αποτελεσμάτων, ακόμη και αυτά με  $T=3$  για  $R \geq 4$  (Σχ.20)[25]. Δυνατός κατέστη ο υπολογισμός του δυναμικού  $V(R)$  μόνο για τέσσερα σημεία  $R = 1, 2, 3, 4$  (λόγω του θορύβου που εισήγαγε στις μετρήσεις το πεπερασμένο μέγεθος του συστήματος). Στη συνέχεια έγινε σύγκριση των τιμών αυτών με τις αντίστοιχες του τετραδιάστατου μοντέλου.

Οι τιμές που αποκτήθηκαν προσαρμόστηκαν σε μια υπέρθεση ενός γραμμικού και ενός δυναμικού **Coulomb** και για τις δύο μορφές του δεύτερου (συνεχής και πλέγμα). Η  $\sim \frac{1}{R}$  συμπεριφορά καταφέρνει να περιγράψει ικανοποιητικά τα δεδομένα (Σχ.21(α)) και δίνει αποτελέσματα συμβατά με εκείνα του  $4D$  μοντέλου (Σχ.21(β)). Αυτό θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μια πρώτη ένδειξη για την ύπαρξη ενός νόμου **Coulomb** στην στρωματική φάση. Επίσης πολύ ενθαρρυντικό είναι το γεγονός ότι εξίσου καλά αποτελέσματα αποκτήθηκαν και από τον τετραδιάστατο πλεγματοειδή διαδότη (Εξισ.(163)), μια ποσότητα που περιγράφει τις αλληλεπιδράσεις μακράς εμβέλειας στο πλέγμα. Το γεγονός αυτό από μόνο του θα μπορούσε να θεωρηθεί ως απόδειξη για την ύπαρξη ενός άμαζου μποζονίου, το οποίο δρα ως μεσάζοντας των δυνάμεων στους τετραδιάστατους υπόχωρους.

Η επιτυχία και των δύο μορφών στην περιγραφή των αποτελεσμάτων συνηγορεί στην τετραδιάστατη φύση των στρωμάτων και στην ύπαρξη ενός  $4d$  σωματιδίου βαθμίδας με όλα τα χαρακτηριστικά ενός φωτονίου. Στους Πίνακες 8&9 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των  $\alpha$  και  $\sigma$  για  $V = 16 \times 10^4$  και  $V = 16 \times 10^3$ . Η συμφωνία των αποτελεσμάτων ανάμεσα στα δύο σύνολα, ανεξάρτητα από την μορφή του δυναμικού που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό τους δεν μπορεί να περάσει απαρατήρητη.



Σχήμα 20: Οι λογάριθμοι των μέσων τιμών των βρόχων *Wilson* για  $\beta=1.030$  και όγκο πλέγματος  $V = 16 \times 10^4$ . Οι γραμμές είναι αποτέλεσμα της προσαρμογής στην εξίσωση (160). Τα σφάλματα συμπεριλαμβάνονται στο μέγεθος των συμβόλων.



Σχήμα 21: (α) Τα δυναμικά στην στρωματική φάση,  $V_{5D} = 16 \times 10^4$  από  $\beta=1.015$  (πάνω καμπύλη) μέχρι  $\beta=1.070$  (κάτω καμπύλη). Οι γραμμές προκύπτουν από την προσαρμογή στην εξίσωση (161) χρησιμοποιώντας την μορφή του δυναμικού *Coulomb* στο συνεχές.

(β) Σύγκριση του 4d στρωματικού δυναμικού με το σύνηθες 4D δυναμικό για  $\beta=1.015$ , όπως αυτό προκύπτει από την εξίσωση (161) χρησιμοποιώντας την μορφή του δυναμικού *Coulomb* στο συνεχές.

Πίνακας 8: Αποτελέσματα για την στρωματική φάση χρησιμοποιώντας την μορφή του δυναμικού *Coulomb* στο συνεχές.

$\beta$	$V = 16 \times 10^4$		$V = 16 \times 10^3$	
	$\alpha_{\lambda\alpha\psi\epsilon\rho}$	$\sigma_{\lambda\alpha\psi\epsilon\rho}$	$\alpha_{4D}$	$\sigma_{4D}$
1.015	0.1910(88)	0.0110(35)	0.1907(80)	0.0110(33)
1.030	0.1677(78)	0.0107(30)	0.1683(75)	0.0108(30)
1.050	0.1517(55)	0.0098(32)	0.1522(68)	0.0100(27)
1.070	0.1411(64)	0.0093(26)	0.1412(67)	0.0093(26)
1.080	0.1367(62)	0.0090(25)	0.1370(63)	0.0090(25)
1.090	0.1330(62)	0.0087(24)	0.1332(20)	0.0088(25)
1.100	0.1295(63)	0.0085(23)	0.1298(30)	0.0083(19)
1.200	0.1101(40)	0.0079(23)	0.1093(23)	0.0070(20)
1.300	0.0900(100)	0.0065(35)	0.0932(17)	0.0060(18)
1.400	0.0830(40)	0.0054(22)	0.0822(40)	0.0049(16)

Πίνακας 9: Χρησιμοποιώντας την μορφή του δυναμικού *Coulomb* στο πλέγμα

$\beta$	$V = 16 \times 10^4$		$V = 16 \times 10^3$	
	$\alpha_{\lambda\alpha\psi\epsilon\rho}$	$\sigma_{\lambda\alpha\psi\epsilon\rho}$	$\alpha_{4D}$	$\sigma_{4D}$
1.015	0.1747(80)	0.0097(34)	0.1753(73)	0.0097(34)
1.030	0.1541(70)	0.0096(29)	0.1546(70)	0.0096(28)
1.050	0.1394(64)	0.0089(27)	0.1397(63)	0.0090(27)
1.070	0.1296(61)	0.0083(25)	0.1322(69)	0.0083(25)
1.080	0.1256(59)	0.0080(24)	0.1258(59)	0.0081(25)
1.090	0.1221(59)	0.0078(24)	0.1223(54)	0.0079(24)
1.100	0.1189(56)	0.0075(23)	0.1192(50)	0.0075(22)
1.200	0.1065(60)	0.0068(24)	0.0981(48)	0.0062(20)
1.300	0.0792(96)	0.0057(20)	0.0855(44)	0.0054(17)
1.400	0.0763(38)	0.0048(16)	0.0754(39)	0.0043(16)

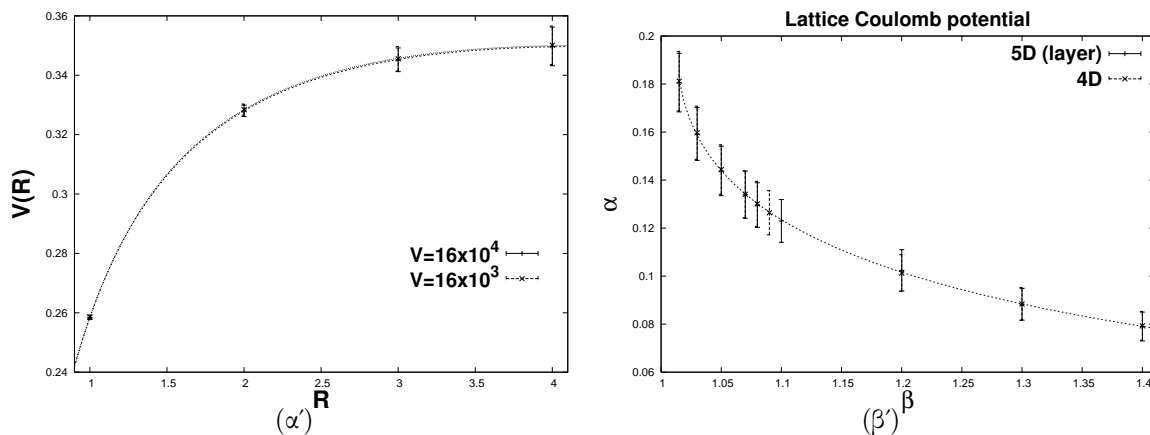
Η προηγούμενη ανάλυση επαναλαμβάνεται, αυτή τη φορά κάνοντας χρήση της εξίσωσης 159, αφού ο διορθωτικός όρος επηρεάζει μόνο την  $T$  διεύθυνση και όπως φανέρωσε η μελέτη του τετραδιάστατου μοντέλου η τιμή  $T=16$  αποδεικνύεται επαρκής. Η συμφωνία ανάμεσα στα σχετικά σύνολα (Πίνακες 10 & 11) είναι πολύ καλή (ταυτοτική μέσα στα όρια του σφάλματος) και απεικονίζεται γραφικά στα Σχήματα 22(α) & 22(β).

Πίνακας 10: Αποτελέσματα για τη μορφή του δυναμικού *Coulomb* στο συνεχές, γραμμική προσαρμογή

$\beta$	$V = 16 \times 10^4$		$V = 16 \times 10^3$	
	$\alpha_{\lambda\alpha\psi\epsilon\rho}$	$\sigma_{\lambda\alpha\psi\epsilon\rho}$	$\alpha_{4D}$	$\sigma_{4D}$
1.015	0.1967(133)	0.0097(51)	0.1974(136)	0.0098(52)
1.030	0.1734(120)	0.0095(46)	0.1741(115)	0.0095(45)
1.050	0.1567(112)	0.0088(43)	0.1574(112)	0.0089(43)
1.070	0.1459(107)	0.0083(41)	0.1462(106)	0.0083(41)
1.080	0.1413(101)	0.0080(39)	0.1418(103)	0.0081(40)
1.090	0.1372(101)	0.0079(35)	0.1378(100)	0.0078(33)
1.100	0.1341( 97)	0.0076(37)	0.1344( 95)	0.0077(35)
1.200	0.1115( 90)	0.0075(35)	0.1105( 83)	0.0063(32)
1.300	0.0961( 70)	0.0054(28)	0.0965( 75 )	0.0055(27)
1.400	0.0860( 66)	0.0048(25)	0.0864( 65)	0.0050(25)

Πίνακας 11: Αποτελέσματα για την μορφή του δυναμικού *Coulomb* στο πλέγμα, γραμμική προσαρμογή

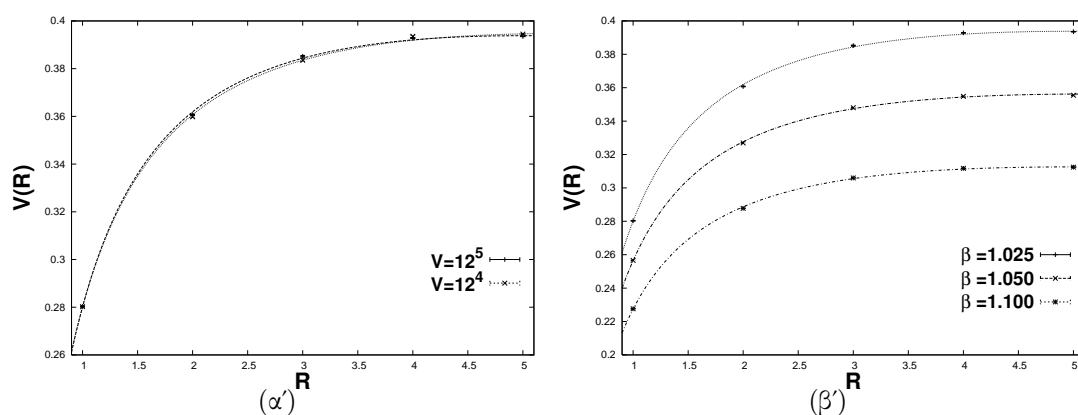
$\beta$	$V = 16 \times 10^4$		$V = 16 \times 10^3$	
	$\alpha_{\lambda\alpha\psi\epsilon\rho}$	$\sigma_{\lambda\alpha\psi\epsilon\rho}$	$\alpha_{4D}$	$\sigma_{4D}$
1.015	0.1806(122)	0.0083(50)	0.1812(124)	0.0080(50)
1.030	0.1592(110)	0.0082(45)	0.1597(111)	0.0080(50)
1.050	0.1438(103)	0.0076(43)	0.1444(103)	0.0076(40)
1.070	0.1339( 98)	0.0072(40)	0.1341( 98)	0.0073(40)
1.080	0.1296( 93)	0.0069(38)	0.1301( 94)	0.0070(40)
1.090	0.1259( 91)	0.0067(36)	0.1264( 92)	0.0068(40)
1.100	0.1230( 89)	0.0065(37)	0.1234( 85)	0.0064(35)
1.200	0.1024( 86)	0.0076(36)	0.1013( 76)	0.0055(33)
1.300	0.0883( 66)	0.0047(27)	0.0884( 69)	0.0051(30)
1.400	0.0790( 60)	0.0042(25)	0.0793( 60)	0.0040(20)



Σχήμα 22: (α) Η  $H \sim \frac{1}{R}$  συμπεριφορά του δυναμικού στην στρωματική φάση και σύγκριση με την αντίστοιχη 4D περίπτωση. (β) Αποτελέσματα για το  $\alpha$  τις 4D και 5D στην στρωματική φάση χρησιμοποιώντας γραμμική προσαρμογή ως προς το  $T$  για τους λογαρίθμους των βρόχων *Wilson* και την μορφή του δυναμικού στο πλέγμα. Οι καμπύλες που προκύπτουν από την εξίσωση (164) είναι ταυτοτικές.

### 12.2.2 Η περίπτωση του $12^5$

Η μελέτη επεκτάθηκε σε ένα μεγαλύτερο σύστημα,  $12^5$ , σε μια προσπάθεια να ενισχυθούν περαιτέρω τα συμπεράσματα της προηγούμενης ενότητας. Για την εξαγωγή του δυναμικού από τους βρόχους **Wilson** χρησιμοποιήθηκε μόνο η εξίσωση (134), λόγω της μικρής έκτασης του πλέγματος κατά την χρονική διεύθυνση ( $T$ ) ενώ ταυτόχρονα αυξήθηκε η στατιστική των μετρήσεων σε μια προσπάθεια αντιστάθμισης του γεγονότος αυτού. Και σε αυτή την περίπτωση η συμπεριφορά του συστήματος παρέμεινε αναλλοίωτη.



Σχήμα 23: (α) Σύγκριση του 4d στρωματικού δυναμικού με το σύνηθες 4D για  $\beta=1.025$  και όγκους πλέγματος  $12^5$  και  $12^4$ . (β) Η μορφή του δυναμικού στην 4d στρωματική φάση για όγκο πλέγματος  $12^5$ .

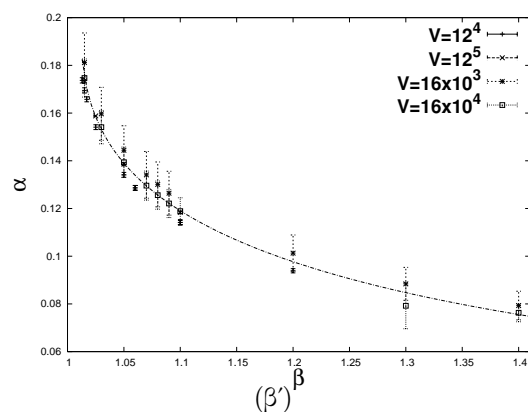
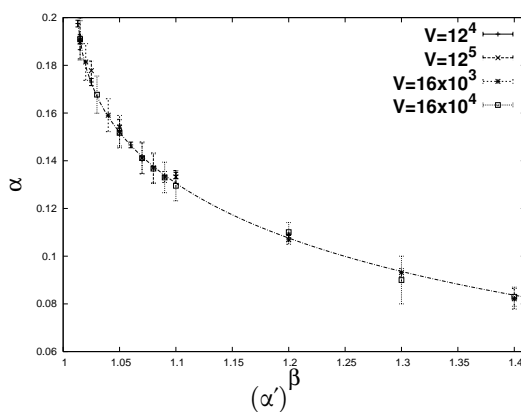
Στα σχήματα 23(α) & 23(β) αναπαριστώνται γραφικά τα αποτελέσματά για το δυναμικό  $V(R)$ . Η μορφή του δυναμικού **Coulomb** στο συνεχές ( $\frac{1}{R}$ ) χρησιμοποιήθηκε για την προσαρμογή των δεδομένων από  $R = 1$  έως  $R = 5$  με εξαιρετικά ικανοποιητική ακρίβεια, με το  $\chi^2$  στο διάστημα 0.8-1.1

Πίνακας 12: Αποτελέσματα για την μορφή του δυναμικού στο συνεχές.

$\beta$	$V = 12^5$		$V = 12^4$	
	$\alpha_{\lambda\alpha\psi\epsilon\rho}$	$\sigma_{\lambda\alpha\psi\epsilon\rho}$	$\alpha_{4D}$	$\sigma_{4D}$
1.015	0.1898(32)	0.0080(20)	0.1906(16)	0.0075(15)
1.025	0.1778(40)	0.0070(10)	0.1730(15)	0.0060(10)
1.050	0.1541(33)	0.0060(10)	0.1537(12)	0.0060(10)
1.100	0.1333(26)	0.0050( 5)	0.1338(13)	0.0050(10)

Πίνακας 13: Αποτελέσματα για την μορφή του δυναμικού στο πλέγμα.

$\beta$	$V = 12^5$		$V = 12^4$	
	$\alpha_{\lambda\alpha\psi\epsilon\rho}$	$\sigma_{\lambda\alpha\psi\epsilon\rho}$	$\alpha_{4D}$	$\sigma_{4D}$
1.015	0.1735(10)	0.0060(20)	0.1708(14)	0.0040(2)
1.025	0.1588(10)	0.0052(20)	0.1552(12)	0.0040(2)
1.050	0.1386( 6)	0.0045(14)	0.1366(10)	0.0038(2)
1.100	0.1184( 5)	0.0037(11)	0.1182(10)	0.0035(2)



Σχήμα 24: (α) Συγκεντρωτικά αποτελέσματα αυτής της ενότητας για το  $\alpha$  για την μορφή του δυναμικού στο συνεχές.

(β) Συγκεντρωτικά αποτελέσματα για το  $\alpha$  για την μορφή του δυναμικού στο πλέγμα.



Εξετάζοντας το Σχήμα 23 και τους Πίνακες 12 & 13, όπου και γίνεται η σύγκριση των δύο συστημάτων:  $12^4$  στην **Coulomb** φάση και το  $12^5$  στην στρωματική φάση, για τις ίδιες τιμές της παραμέτρου  $\beta$ , εμφανής είναι η παρατηρούμενη συμφωνία των αποτελεσμάτων. Δεν είναι μόνο τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της στρωματικής φάσης που συνηγορούν στην τετραδιάστατη φύση των δυνάμεων στους τετραδιάστατους υπόχωρους αλλά και η ποσοτική συμφωνία των αποτελεσμάτων με αυτά του τετραδιάστατου μοντέλου. Όλα τα αποτελέσματα αυτής της ενότητας αναφορικά με την τιμή της ενεργής σταθεράς λεπτής υφής κινούνται στην ίδια περιοχή τιμών (Σχήμα 24).

### 12.2.3 Η επανακανονικοποιημένη σταθερά λεπτής υφής, συγκεντρωτικά αποτελέσματα

Με χρήση των πινάκων 8 & 9 και της εξίσωσης 164 η προσαρμογή για το  $\alpha(\beta)$  με  $\beta_c = 1.0111331(21)$  δίνει:

- $\alpha_{c-cc}=0.230(30)$      $\lambda_{cc}=0.32(10)$      $\alpha_{c-lc}=0.210(30)$      $\lambda_{lc} = 0.32(10)$   
 $(V = 16 \times 10^4)$
- $\alpha_{c-cc}=0.230(25)$      $\lambda_{cc}=0.31(8)$      $\alpha_{c-lc}=0.208(24)$      $\lambda_{lc} = 0.33(10)$   
 $(V = 16 \times 10^3)$

Για την γραμμική προσαρμογή, από τους Πίνακες 10 & 11 έχουμε:

- $\alpha_{c-cc}=0.235(49)$      $\lambda_{cc}=0.32(16)$      $\alpha_{c-lc}=0.216(45)$      $\lambda_{lc} = 0.32(16)$   
 $(V = 16 \times 10^4)$
- $\alpha_{c-cc}=0.238(52)$      $\lambda_{cc}=0.31(16)$      $\alpha_{c-lc}=0.219(48)$      $\lambda_{lc} = 0.31(16)$   
 $(V = 16 \times 10^3)$

Τέλος από τους Πίνακες 12 & 13 έχουμε:

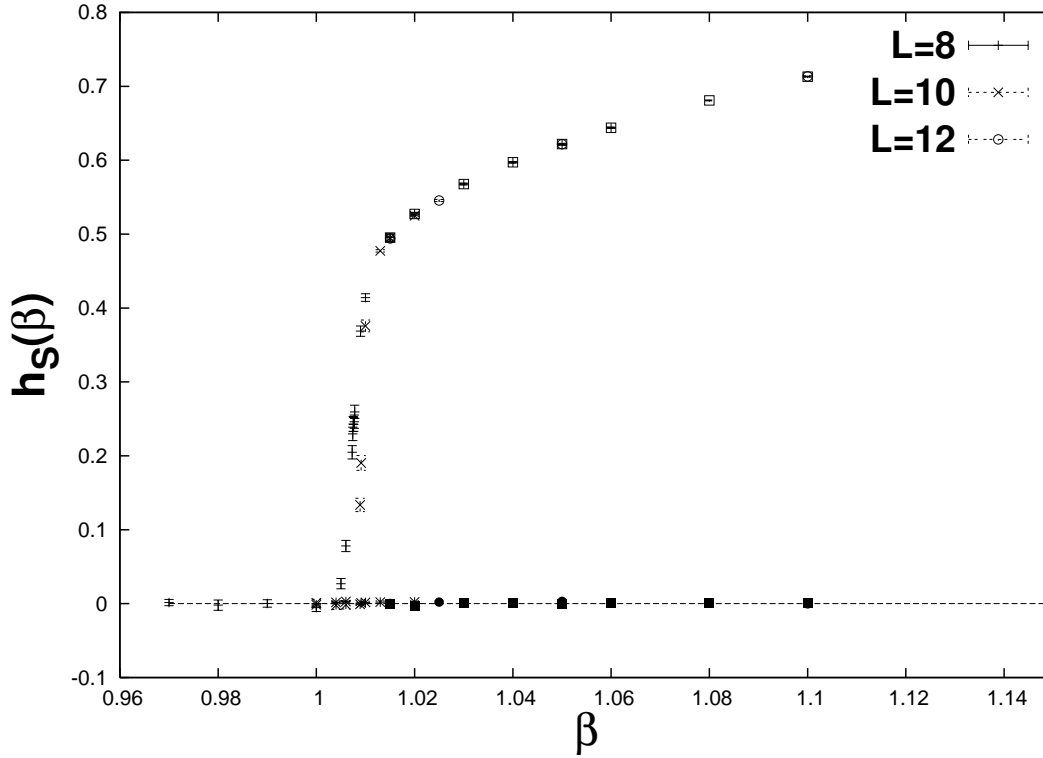
- $\alpha_{c-cc}=0.210(17)$      $\lambda_{cc}=0.45(18)$      $\alpha_{c-lc}=0.200(06)$      $\lambda_{lc} = 0.370(04)$      $(V = 12^5)$
- $\alpha_{c-cc}=0.221(05)$      $\lambda_{cc}=0.34(03)$      $\alpha_{c-lc}=0.200(04)$      $\lambda_{lc} = 0.334(25)$      $(V = 12^4)$

χρησιμοποιώντας την μορφή του δυναμικού **Coulomb** στο συνεχές (**cc**) και στο πλέγμα (**lc**) αντίστοιχα.<sup>10</sup> Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των διαφόρων στρωμάτων της θεωρίας είναι αμελητέα με αποτέλεσμα οι δυνάμεις μεταξύ δυο φορτίων στους τετραδιάστατους υπόχωρους να είναι **Coulomb** μακράς εμβέλειας με έναν άμαζο φορέα, το φωτόνιο.

<sup>10</sup>Παρόλο που οι τιμές για το  $\alpha_c$  βρίσκονται πολύ κοντά στην θεωρητική τιμή  $\frac{\pi}{12}$  για μεγάλο  $R$ , όπως αυτή προκύπτει από την εικόνα του *rough string*, το γεγονός αυτό θα πρέπει να αποδοθεί στον μικρό όγκο των τετραδιάστατων υπόχωρων

### 12.2.4 Αποτελέσματα απο το μέτρο ελικότητας (helicity modulus).

Οι μετρήσεις μας για το  $\mathbf{h} \cdot \mathbf{m}$  επικεντρώθηκαν κυρίως στους όγκους  $12^4$  και  $12^5$  για το τετραδιάστατο και το πενταδιάστατο σύστημα αντίστοιχα.



Σχήμα 25: Το χωρικό και το εγκάρσιο μέτρο ελικότητας (σημεία μηδενικών τιμών) καθώς πραγματοποιούμε την μετάβαση απο την  $5D$  ισχυρή φάση στην στρωματική, για διαφορετικούς όγκους και  $\beta' = 0.20$

Όπως φανερώνεται από το Σχήμα 25 και τον Πίνακα 14, οι  $4d$  υπόχωροι του μοντέλου βιώνουν την μετάβαση αυτή ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που βιώνει το  $4D$  σύστημα το πέρασμα από την φάση ισχυρής ζεύξης στην **Coulomb**. Το εγκάρσιο  $h \cdot m$  ( $h_5(\beta')$ ) διατηρεί μηδενική τιμή καθόλη την διάρκεια της μετάβασης σηματοδοτώντας την ύπαρξη δυνάμεων παγίδευσης των φορτισμένων σωματιδίων κατά την πέμπτη διεύθυνση, ενώ, το χωρικό  $h \cdot m$  ( $h_s(\beta)$ ), μετρούμενο πάνω στα στρώματα αποκτά τιμές αντίστοιχες με αυτές του τετραδιάστατου μοντέλου.

Απο τον Πίνακα 14 και με την παραδοχή της ισχύς της εξίσωσης (164) για την περίπτωση των τετραδιάστατων υπόχωρων έχουμε:

- $\alpha_{c\text{-layer}} = 0.198(4)$      $\lambda_{\text{layer}} = 0.28(2)$     ( $V = 12^5$ )
- $\alpha_{c\text{-}4D} = 0.201(2)$      $\lambda_{4D} = 0.276(8)$     ( $V = 12^4$ )

Η σύγκριση των αποτελεσμάτων αυτών με εκείνα της προηγούμενης υποενότητας τονίζει την ομοιότητα μεταξύ αυτών και όσων αποκτήθηκαν απο την μορφή του δυναμικού **Coulomb** στο πλέγμα.

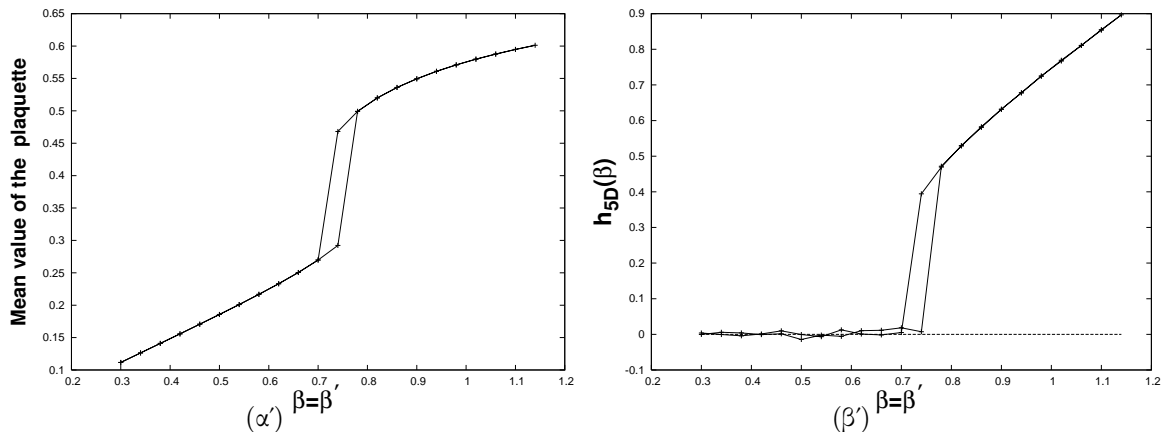
Πίνακας 14: Αποτελέσματα για το μέτρο ελικότητας και οι προκύπτουσες τιμές για το  $\alpha$

	$V = 12^5$		$V = 12^4$	
$\beta$	$h(\beta)_{\lambda\alpha\psi\epsilon\rho}$	$\alpha_{\lambda\alpha\psi\epsilon\rho}$	$h(\beta)_{4\Delta}$	$\alpha_{4\Delta}$
1.015	0.4941(22)	0.1611(7)	0.4908(8)	0.1622(4)
1.025	0.5455(15)	0.1460(5)	0.5462(5)	0.1458(3)
1.050	0.6216(14)	0.1281(4)	0.6196(4)	0.1285(2)
1.100	0.7134( 9)	0.1116(4)	0.6196(5)	0.1116(2)
1.200	0.8526( 6)	0.0934(3)	0.8520(3)	0.0935(1)

### 12.2.5 Η πενταδιάστατη φάση Coulomb

Για μεγάλες τιμές των παραμέτρων  $\beta$  και  $\beta'$  το πενταδιάστατο μοντέλο βρίσκεται στην  $5D$  **Coulomb** φάση. Για την εξερεύνηση της φάσης αυτής χρησιμοποιήθηκαν οι ήδη γνωστές τεχνικές για τον υπολογισμό του δυναμικού  $V(R)$  μεταξύ δύο δοκιμαστικών φορτίων. Κατά την διαγώνιο  $\beta = \beta'$  στο διάγραμμα φάσης απαντάται μια μετάβαση πρώτης τάξης μεταξύ της  $5D$  ισχυρής φάσης και της  $5D$  **Coulomb** για  $\beta = \beta' \simeq 0.74$  (Σχήμα 26).

Σκοπός της μελέτης είναι η εξερεύνηση 'βαθιά' μέσα στην **Coulomb** φάση ακολουθώντας την διαγώνιο  $\beta = \beta'$  για τον μεγαλύτερο υπό μελέτη όγκο ( $12^5$ ). Η ισότητα των σταθερών σύζευξης ( $\beta, \beta'$ ) αναιρεί την προηγούμενη ανισοτροπία του μοντέλου και συνεπώς οι περισσότερες σχέσεις των προηγούμενων ενοτήτων αποκτούν μια φυσική γενίκευση για τις πέντε διαστάσεις.



Σχήμα 26: (α) Βρόχος υστέρησης για την μέση τιμή της πλακέτας και όγκο πλέγματος  $V = 8^5$ . (β) Βρόχος υστέρησης για το μέτρο ελικότητας  $h_{5D}(\beta)$ , για τον ίδιο όγκο.

Ός γνωστών το πέρασμα απο τις (3+1) διαστάσεις στις (n+3+1) τροποποιεί τον νόμο του **Coulomb**. Η συμπεριφορά  $\sim \frac{1}{r}$  του δυναμικού αντικαθίσταται απο την  $\frac{1}{r^{1+n}}$  με τις επιπλέον διαστάσεις να προστίθενται στον εκθέτη του παρανομαστή. Υπενθυμίζουμε ότι:

$$V(r) \propto \int \frac{d^{3+n}k}{(2\pi)^{3+n}} \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{k^2} \text{ και για την περίπτωση } n=1 \text{ έχουμε } \frac{1}{4\pi^2 r^2}$$

χρησιμοποιώντας για τον υπολογισμό σφαιρικές συντεταγμένες:

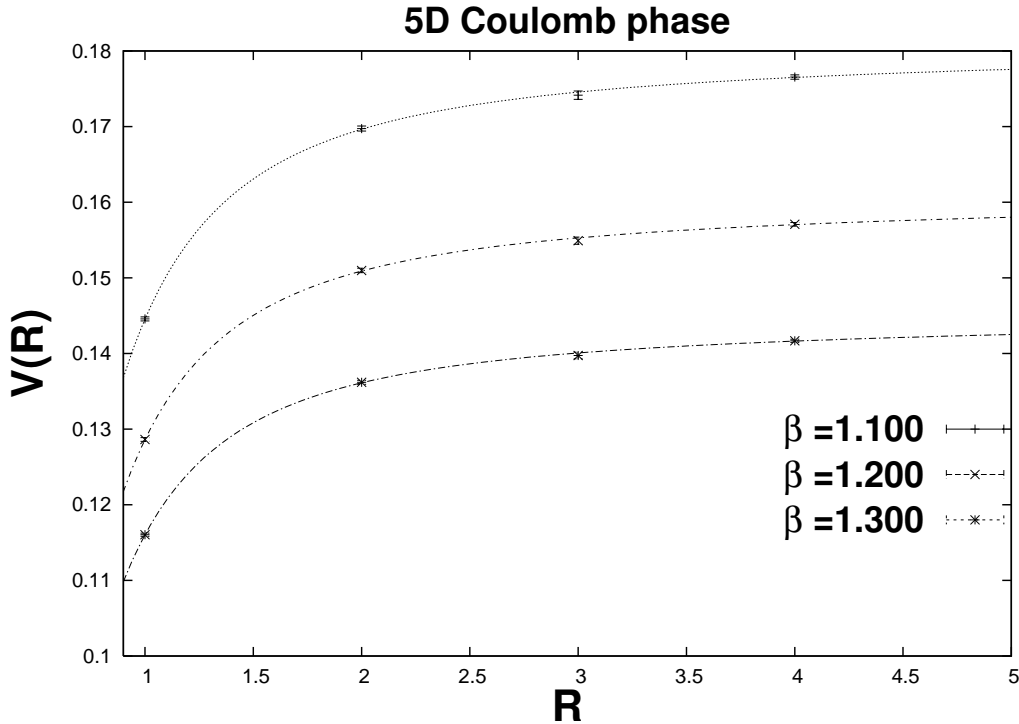
$$\vec{k} = (k \sin \theta_2 \sin \theta_1 \cos \phi, k \sin \theta_2 \sin \theta_1 \sin \phi, k \sin \theta_2 \cos \theta_1, k \cos \theta_2) \quad d^4k = k^3 dk d\phi \sin \theta_1 d\theta_1 \sin^2 \theta_2 d\theta_2$$

$$(0 < k < \infty, \quad 0 < \phi < 2\pi, \quad 0 < \theta_1 < \pi, \quad 0 < \theta_2 < \pi).$$

Με τα παραπάνω υποψιν μια γενίκευση της εξίσωσης (161) για το πενταδιάστατο δυναμικό Coulomb είναι η:

$$V_{5D}(R) = const + \sigma_{5D} R - \frac{\hat{\alpha}_{5D}}{R^2} \quad \mu\epsilon \quad \hat{\alpha}_{5D} = \frac{e^2}{4\pi^2} \equiv \frac{\alpha_{5D}}{\pi} \quad (165)$$

ς



Σχήμα 27: Το δυναμικό για την 5D Coulomb φάση, όγκος = 12<sup>5</sup> για τρεις διαφορετικές τιμές των σταθερών σύζευξης  $\beta = \beta'$ . Το σφάλμα είναι ενσωματωμένο στα σύμβολα.

Πίνακας 15: Αποτελέσματα για τα 5D **Coulomb** δυναμικά και  $V = 12^5$

$\beta$	$\hat{\alpha}_{5D}$	$\sigma_{5D}$	$\chi^2/\delta.o.\varphi$
1.100	0.0330(9)	0.00033(24)	0.67
1.200	0.0293(8)	0.00033(25)	0.74
1.300	0.0264(6)	0.00028(18)	0.66

Η εξίσωση (165) καταφέρνει να περιγράψει ικανοποιητικά τα δεδομένα (Πίνακες 15 & 16) ενώ ταυτόχρονα κάθε προσπάθεια περιγραφής με χρήση τετραδιάστατων δυναμικών απέτυχε, δίνοντας  $\chi^2_{d.o.f}$  μεταξύ 7 και 20, αποκλείοντας μια ενδεχόμενη διασύνδεση με κάποιον 4D νόμο. Ένα άλλο σημείο το οποίο αξίζει να σημειωθεί είναι ότι ακόμη και αν αφαιρεθεί η συνιστώσα παγίδευσης του δυναμικού ( $\sigma_{5D}R$ ) τα αποτελέσματά εξακολουθούν να είναι ικανοποιητικά ( $\chi^2_{d.o.f} \simeq 1 - 1.2$ ) με τις αλλαγές στην τιμή του  $\hat{\alpha}_{5D}$  να καλύπτονται από το σφάλμα.

Με την μορφή του δυναμικού υπολογισμένη στο  $\sim \frac{1}{r^2}$  συνεχίζουμε με την γενίκευση της εξίσωσης (163) στις 5 διαστάσεις.

$$V_{lc}^{5D}(R) = \frac{4\pi^2}{L_s^4} \sum_{\vec{k} \neq 0} \frac{\varepsilon^{i\vec{k}\vec{R}}}{\sum_{j=1}^4 2(1 - \cos(k_j))}, \quad k_j = 0, \frac{2\pi}{L_s}, \dots, \frac{2\pi(L_s - 1)}{L_s} \quad (166)$$

$$V_{5D}(R) = \sigma_{lc}^{5D} R - \hat{\alpha}_{lc}^{5D} V_{lc}^{5D}(R) + const \quad (167)$$

Πίνακας 16: Αποτελέσματα για το 5D δυναμικό **Coulomb** στο πλέγμα και  $V = 12^5$

$\beta$	$\hat{\alpha}_{lc}^{5D}$	$\sigma_{lc}^{5D}$	$\chi^2/\delta.o.\varphi$
1.100	0.0298( 4)	0.0005(3)	1.68
1.200	0.0265( 6)	0.0004(2)	1.90
1.300	0.0239(10)	0.0004(2)	1.80

Οι παραπάνω τιμές δεν έχουν την ίδια ποιότητα, σε ότι αφορά την τιμή του  $\chi^2_{d.o.f}$ , με τα προηγούμενα αποτελέσματα. Εμφανίζουν μια συστηματική απόκλιση της τάξης του 10 – 12% σε σύγκριση με αυτά αλλά η ίδια εικόνα εμφανίστηκε και στην προηγούμενη ενότητα. Αποτελούν και αυτά με την σειρά τους μία ακόμη εκτίμηση για την ενεργή σταθερά λεπτής υφής στις πέντε διαστάσεις.

Κλείνοντας ακολουθεί ο υπολογισμός του μέτρου ελικότητας για την 5D **Coulomb** φάση και η τελική εκτίμηση για το  $\alpha$ . Η ομογένεια του μοντέλου, στην γραμμή  $\beta = \beta'$ , καθιστά περιττή την επιλογή συγκεκριμένου επιπέδου για την εφαρμογή της εξωτερικής ροής, αφού τώρα όλα τα επίπεδα είναι ισοδύναμα. Κάθε δυνατή επιλογή οδηγεί στα ίδια ακριβώς αποτελέσματα (γεγονός που επιβεβαιώνεται και από τις μετρήσεις). Επομένως προχωράμε με την κατασκευή ενός γενικού μέτρου ελικότητας στις πέντε διαστάσεις ( $h_{5D}(\beta)$ ) μετρούμενο πάνω στα επίπεδα ( $\mu$ - $\nu$ ).

$$h_{5D}(\beta) = \frac{1}{(L_\mu L_\nu)^2} \left( \left\langle \sum_{(\mu\nu)\text{επιπεδα}} (\beta \cos(\theta_P)) \right\rangle - \left\langle \left( \sum_{(\mu\nu)\text{επιπεδα}} (\beta \sin(\theta_P)) \right)^2 \right\rangle \right) \quad (168)$$

Το κλασσικό όριο της παραπάνω εξίσωσης. Η καταστολή των διακυμάνσεων οδηγεί στα εξής:

$$\begin{aligned} S_{\text{κλασσικο}}^{5D}(\Phi) &= \frac{1}{2} \beta \Phi^2 \frac{V_{5D}}{(L_\mu L_\nu)^2} = \frac{1}{2} \beta \Phi^2 \frac{L_\mu L_\nu L_\rho L_\sigma L_\kappa}{(L_\mu L_\nu)^2} = \frac{1}{2} \beta \Phi^2 L_\kappa \\ &\rightarrow F_{\text{κλασσικο}}(\Phi) - F_{\text{κλασσικο}}(0) = \frac{1}{2} \beta \Phi^2 L_\kappa \end{aligned}$$

Με την αντικατάσταση  $\beta \rightarrow \beta_R$  και κάνοντας χρήση της εξίσωσης ορισμού του μέτρου ελικότητας :

$$h_{5D}(\beta) \sim \beta_R(\beta) L_\kappa \quad (169)$$

Συνεπώς το **h.m** κάνει βάθμιση με το μήκος του πλέγματος και όπως γίνεται κατανοητό, καθώς πλησιάζουμε το όριο του άπειρου όγκου το σήμα θα ενισχύεται συνεχώς πηγαίνοντας προς το άπειρο. Παρόλο που το επιχείρημα βασίζεται κυρίως σε μία κλασσική προσέγγιση, εντούτοις, επιβεβαιώνεται από τις μετρήσεις. Επομένως για την εξαγωγή του  $\beta_R$  απαιτείται η κατάλληλη ανακλιμάκωση. Για τον λόγο αυτό όλες οι μετρήσεις της ενότητας αυτής αναφορικά με το *h.m* είναι προϊόν μιας τέτοιας ανακλιμάκωσης ( $h_{5D}(\beta) \rightarrow \frac{h_{5D}(\beta)}{L_k}$ ). Στον Πίνακα 17 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για δύο πλεγματούς όγκους  $8^5$  και  $12^5$ .

Πίνακας 17: Το μέτρο ελικότητας και οι προκύπτουσες τιμές του  $\hat{\alpha}$  για την πενταδιάστατη **Coulomb** φάση και τους δύο πλεγματούς όγκους  $8^5$  και  $12^5$

	$V = 12^5$		$V = 8^5$	
$\beta = \beta'$	$h(\beta)_{5\Delta}$	$\hat{\alpha}_{5\Delta}$	$h(\beta)_{5\Delta}$	$\hat{\alpha}_{5\Delta}$
0.800	0.5017(4)	0.0505(2)	0.5014(4)	0.0506(2)
0.900	0.6312(4)	0.0402(2)	0.6306(5)	0.0402(3)
1.000	0.7460(3)	0.0339(2)	0.7458(3)	0.0340(2)
1.100	0.8547(3)	0.0297(1)	0.8539(7)	0.0297(1)
1.200	0.9611(2)	0.0264(1)	0.9610(2)	0.0264(1)
1.300	1.0653(3)	0.0238(1)	1.0657(2)	0.0238(1)
1.400	1.1693(2)	0.0217(1)	1.1694(2)	0.0217(1)

Όπως είναι εμφανές στον Πίνακα 17 η συμφωνία μεταξύ των αποτελεσμάτων που αποκτήθηκαν από το πενταδιάστατο μέτρο ελικότητας και την μορφή του δυναμικού **Coulomb** στο πλέγμα (Πίνακας 16) είναι εξαιρετική. Οι μετρήσεις για το  $\mathbf{h.m}$  επεκτάθηκαν μέχρι την κρίσιμη περιοχή σε μια προσπάθεια να σχηματιστεί η συμπεριφορά του ενεργού επανακανονικοποιημένου φορτίου  $\hat{\alpha}_{5D}(\beta)$  καθώς πλησιάζουμε το σημείο της μετάβασης. Δεν παρατηρείται κάποια εξάρτηση από τον όγκο του συστήματος καθώς τα αποτελέσματά για τους δύο διαφορετικούς όγκους είναι ταυτοτικά μέσα στα όρια του σφάλματος.

Καθόλη την διάρκεια της μελέτης δεν διαπιστώθηκαν ασυμφωνίες ανάμεσα στα δύο συστήματα που εξετάστηκαν. Τόσο το τετραδιάστατο  $U(1)$  μοντέλο βαθμίδας στην **Coulomb** φάση όσο και το πενταδιάστατο ανισοτροπικό μοντέλο στην στρωματική φάση επιδεικνύουν την ίδια ακριβώς συμπεριφορά. Από τις τιμές και την μορφή του δυναμικού, στις εκτιμήσεις για την επανακανονικοποιημένη σταθερά σύζευξης και τη τάση νήματος μέχρι τις τιμές των  $\alpha_c$  και  $\lambda$  η συμφωνία είναι κάτι παραπάνω από εμφανής. Όλες οι ενδείξεις οδηγούν στην τετραδιάστατη φύση των αλληλεπιδράσεων στα στρώματα και στην παρουσία ενός άμαζου σωματιδίου, του φωτονίου. Πάραυτα η ανάγκη για μεγαλύτερους όγκους δεν μπορεί να αγνοηθεί. Η παρατηρούμενη συμφωνία δίνει έμμεσα απάντηση και σε ένα άλλο ζήτημα, αυτό του ρόλου των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των διαφόρων στρωμάτων της θεωρίας και τον ρόλο που αυτές παίζουν στην διαμόρφωση της φυσικής σε αυτά. Στο βαθμό που το επιτρέπει η διακριτική μας ικανότητα δεν παρατηρείται κάποια σημαντική επιρροή που θα μπορούσε να οδηγήσει σε ουσιαστική παρέκκλιση από τους τετραδιάστατους νόμους. Για να γίνει το σημείο αυτό πιο κατανοητό κάποιες παρατηρήσεις αναφορικά με την φύση του σωματιδίου βαθμίδας. Οι **Fu** και **Nielsen**, σε δημοσίευσή τους που ακολούθησε [37], εξέτασαν διεξοδικά την φύση αυτού του σωματιδίου. Η ανάλυσή τους, βασισμένη σε αναπτύγματα στο όριο της ισχυρής σταθεράς σύζευξης, έδειξε ότι σε πρώτη τάξη ο διαδότης του φωτονίου είναι ταυτοτικός με αυτόν του  $4D U(1)$  αβελιανού μοντέλου. Όμως, μόλις κάποιος λάβει υπόψιν του τις διορθώσεις που προκύπτουν από τα γραφήματα που περιέχουν πλακέτες που ενώνουν τους γειτονικούς υπόχωρους (μέσω μιας ενεργού δράσης) η προαναφερθείσα εικόνα αλλάζει. Βρήκαν ότι σε τάξη  $\beta'^4$  έχουμε:

$$\text{διαδότης του φωτονίου} = \text{συνήθης διαδότης του φωτονίου} \times \left(1 - \frac{1}{48} \frac{\beta'^4}{\beta}\right)$$

για συνδέσμους που ανήκουν στα ίδια στρώματα<sup>11</sup>. Όμως, για το εύρος των μετρήσεων που πραγματοποιήθηκαν οι διορθώσεις αυτής της τάξης μεγέθους επισκιάζονται από το σφάλμα των μετρήσεων. Ενδεικτικά αναφέρεται ότι η τιμή του διορθωτικού όρου ξεκινάει από το 0.999967 (σημείο εκκίνησης) και φτάνει μέχρι την τιμή 0.999976 (τελικό σημείο). Επομένως προκύπτουν αμφιβολίες για το κατά πόσον μπορεί να προκύψει μια ουσιαστική απόκλιση από τον τετραδιάστατο νόμο.

Ένα δεύτερο σημείο άξιο αναφοράς είναι η χρήση του μέτρου ελικότητας για την εξαγωγή της επανακανονικοποιημένης σταθεράς σύζευξης ( $\beta_R(\beta)$ ). Η πληροφορία που αντλήθηκε από την ποσότητα αυτή βρίσκειται σε πολύ καλή συμφωνία με αυτή των παραδοσιακών μεθόδων (δηλαδή με χρήση των βρόχων **Wilson**) με μια σημαντική διαφορά: είναι πολύ πιο αποδοτική από πλευράς υπολογιστικής ισχύς και χρόνου. Η ζητούμενη πληροφορία αποχτάται μέσω μιας και μόνο μέτρησης χωρίς να καταφύγει κάποιος σε ενδιάμεσα βήματα, μειώνοντας έτσι δραστικά την

<sup>11</sup>Με τον όρο συνήθης διαδότης εννοούμε αυτόν για  $\beta' = 0$ , όπου όλα τα στρώματα είναι απομονωμένα το ένα από το άλλο

πολυπλοκότητα της μεθόδου. Για τον σκοπό αυτό και για τον χαρακτηρισμό των φάσεων του μοντέλου το μέτρο ελικότητας αποτελεί πολύ πιο χρήσιμο εργαλείο από τους βρόχους **Wilson**. Τέλος, στην  $5D$  **Coulomb** φάση φαίνεται ότι η τιμή του ενεργού  $\alpha_{5D}(= \pi \hat{\alpha}_{5D})$  είναι μικρότερη από αυτήν του ενεργού  $\alpha_{4D} = \alpha_{layer}$  καθώς επίσης και ότι το  $\alpha_{5D}$  είναι ελαφρώς μεγαλύτερο από την γυμνή σταθερά σύζευξης  $\alpha_0 = \frac{g_0^2}{4\pi} = \frac{1}{\beta} \frac{1}{4\pi}$ , όπου  $g_0^2 = \frac{g_5^2}{\alpha} \simeq g_5^2 \Lambda_{UV}$  η αδιάστατη, γυμνή  $5D$  σταθερά σύζευξης<sup>12</sup>. Οι τιμές του  $\beta$  που χρησιμοποιήθηκαν για τον καθορισμό του  $5D$  δυναμικού **Coulomb** βρίσκονται μακριά από την περιοχή αλλαγής φάσης. Για να μπορέσει κάποιος να επιτύχει μια ουσιαστική σύγκριση ανάμεσα στις  $4D$  και  $5D$  είναι απαραίτητο να επεκτείνει τις μετρήσεις του στην γειτονιά του κρίσιμου σημείου. Για τον σκοπό αυτό απαραίτητος είναι ο υπολογισμός των μέτρων ελικότητας για δύο διαφορετικούς όγκους (Πίνακας 17) και η προσαρμογή των αποτελεσμάτων στην εξίσωση (164) με την σιωπηλή υπόθεση ότι δεν πραγματοποιείται κάποια δραστική αλλαγή στην συμπεριφορά του  $\hat{\alpha}$  καθώς περνάμε στις πέντε διαστάσεις και συνεπώς η εν λόγω εξίσωση παραμένει σε ισχύ. Η κρίσιμη τιμή του  $\beta$  χρησιμοποιείται ως ελεύθερη παράμετρος. Προκύπτει ότι: (α) δεν υπάρχει εξάρτηση από τον όγκο και (β) η τιμή της επανακανονικοποιημένης σταθεράς λεπτής υφής παίρνει τιμή κοντά σε αυτήν του τετραδιάστατου μοντέλου  $\alpha_{c-5D} = 0.218(48)$  με  $\lambda = 0.49(37)$ . Δυστυχώς η ποιότητα των αποτελεσμάτων δεν είναι ενθαρρυντική ( $\chi_{d.o.f}^2 = 0.0007$ ) γεγονός που αιτιολογεί και το πολύ μεγάλο σφάλμα. Παρόλα αυτά κατάφερε να αναπαράγει την τιμή του κρίσιμου  $\beta$  στην σωστή περιοχή ( $\beta_c = 0.741$ ).

Επειδή η  $5D$  **QED** δεν είναι μια διαταρακτικά επανακανονικοποιήσιμη θεωρία πεδίου και η σταθερά σύζευξης έχει διαστάσεις μάζας ( $g_5^2 \sim M^{-1}$ ), δυνάμεις του κατωφλιού  $\Lambda_{UV}$  εμφανίζονται στους υπολογισμούς των διορθώσεων των βρόχων στα γραφήματα αυτοενέργειας και δινών. Στους υπολογισμούς στο πλέγμα το κατώφλι δεν εμφανίζεται ρητά αλλά έμμεσα μέσω της εξάρτησης των αποτελεσμάτων **Monte – Carlo** από τον όγκο. Συνεπώς περιμένει κάποιος ότι παρουσία πεδίων ύλης, θα κάνει την εμφάνισή της μια ισχυρή εξάρτηση από τον όγκο για το επανακανονικοποιημένο φορτίο  $\alpha_{5D}(\beta)$  στην επέκταση των τιμών του στην κρίσιμη περιοχή και το όριο του άπειρου όγκου, διαφορετική από αυτήν της περίπτωσης του καθαρού  $U(1)$  μοντέλου.

## 13 Επίλογος

Τα μοντέλα με επιπλέον διαστάσεις, όπως είναι το μοντέλο των μεμβρανών, μελετώνται κυρίως για την περίπτωση μηδενικής θερμοκρασίας. Αν φανταστούμε όμως ότι ο *brane* κόσμος μας αποτελεί μέρος της ιστορίας του Σύμπαντος τότε η μελέτη των μοντέλων μεμβρανών σε πεπερασμένη θερμοκρασία κρίνεται επιβεβλημένη. Σε αυτή την εργασία έγινε μια πρώτη προσέγγιση στο θέμα αγνοώντας τις βαρυτικές αλληλεπιδράσεις. Παρότι απλοϊκό το μοντέλο της πενταδιάστατης, ανισοτροπικής  $U(1)$  θεωρίας βαθμίδας στο πλέγμα διαθέτει όλα τα απαιτούμενα ποιοτικά χαρακτηριστικά. Διαθέτει ένα πολύ πλούσιο διάγραμμα φάσης ως προς την θερμοκρασία, όπως άλλωστε αναδείχθηκε και μέσα από την μελέτη που παρουσιάστηκε και μια στρωματική φάση που μπορεί να αποτελέσει ένα ελκυστικό μέσο επίτευξης της παγίδευσης των πεδίων βαθμίδας σε μια μεμβράνη.

<sup>12</sup>Εδώ  $\alpha$  είναι η  $5D$  σταθερά πλέγματος και  $\Lambda_{UV}$  είναι το υπεριώδες κατώφλι



Κλείνοντας σημειώνεται ότι αυτή η στρωματική φάση της μηδενικής θερμοκρασίας (με το άμαζο φωτόνιο στην μεμβράνη και την καταστολή των πεδίων κατά την επιπλέον διάσταση) δίνει την θέση της σε μια φάση κατάλυσης της παγίδευσης για μη μηδενική θερμοκρασία. Στην φάση αυτή οι τρεις χωρικές και η εγκάρσια διάσταση σχηματίζουν  $4d$  υπόχωρους με ιδιότητες παγίδευσης ενώ κατά την χρονική διεύθυνση το σύστημα επιδεικνύει συμπεριφορά τύπου **Coulomb**.

## Αναφορές

- [1] I.Antoniadis Phys.Lett.**B246**:377-384,1990;  
I.Antoniadis, K. Benakli Phys.Lett.**B326**:69-78,1994 [hep-th/9310151];  
Nima Arkani-Hamed,S.Dimopoulos,G.R.Dvali Phys.Rev.**D59**:086004,1999  
[hep-ph/9807344];  
Nima Arkani-Hamed,S.Dimopoulos,G.R.Dvali Phys.Lett.**B429**:263-272,1998  
[hep-ph/9803315];  
C. P. Bachas **JHEP9811**:023,1998 [hep-ph/9807415]
- [2] L.Randall , R.Sundrum Phys.Rev.Lett.**83**:4690-4693,1999. [hep-th/9906064];  
L.Randall , R.Sundrum Phys.Rev.Lett.**83**:3370-3373,1999. [hep-ph/9905221];  
B.Bajc, G.Gabadadze Phys.Lett.**B474**:282-291,2000. [hep-th/9912232];  
I.Oda Phys.Lett.**B496**:113-121,2000 [hep-th/0006203];  
A.Perez-Lorenzana . J.Phys.Conf.Ser.**18**:224-269,2005. [hep-ph/0503177]
- [3] Y.K. Fu and H.B. Nielsen, Nucl. Phys. **B 236**, 167 (1984); Nucl. Phys. **B254**, 127 (1985).
- [4] C.P. Korthals-Altes, S. Nicolis and J. Prades, Phys. Lett. **B316** 339 (1993)  
[hep-lat/9306017]; A. Hulsebos, C.P. Korthals-Altes and S. Nicolis, Nucl. Phys. **B450**  
437 (1995) [hep-th/9406003].
- [5] P. Dimopoulos, K. Farakos, A. Kehagias and G. Koutsoumbas,  
Nucl.Phys.**B617**:237-252,2001 [hep-th/0007079] .
- [6] P. Dimopoulos and K. Farakos, Phys.Rev.**D70**:045005,2004 [hep-ph/0404288];  
P.Dimopoulos, K.Farakos and S. Nicolis, Eur.Phys.J.**C24**:287-296,2002 [hep-lat/0105014].
- [7] M. Vettorazzo and P. Forcrand Nucl.Phys.Proc.Suppl.129:739-741,2004  
[hep-lat/0311007]; Nucl.Phys.**B686**:85-118,2004 [hep-lat/0311006];  
Phys.Lett.**B604**:82-90,2004 [hep-lat/0409135].
- [8] Michele Vettorazzo, Philippe de Forcrand Nucl.Phys.Proc.Suppl.**129**:739-741,2004  
[hep-lat/0311007]
- [9] S. Ejiri, J. Kubo and M. Murata, Phys.Rev.**D62**:105025,(2000) [hep-ph/0006217]; S.  
Ejiri, S. Fujimoto and J. Kubo, Phys.Rev.**D66**:036002,(2002) [hep-lat/0204022].
- [10] K. Binder and D.H Heermann, *Monte Carlo Simulation in Statistical Physics*,  
Springer-Verlag, 1992.

- [11] C.Borgs, R.Kotecky Phys.Rev.Lett.**68**:1734-1737,1992 ; C.Borgs, R.Kotecky and Miracle-Sole J.Stat.Phys. **62** 529,1991.
- [12] C. Borgs, Nucl. Phys. **B261** (1985) 455.
- [13] G. Arnold, B.Bunk, T. Lippert and K. Schilling Nucl.Phys.Proc.Suppl.119:864-866,2003 [hep-lat/0210010]; G. Arnold, T. Lippert, K. Schilling and T. Neuhaus Nucl.Phys.Proc.Suppl.94:651-656,2001. [hep-lat/0011058].
- [14] M.E.J. Newman and G.T. Barkema, *Monte Carlo Methods in Statistical Physics*, Chapter 8, Oxford University Press, 1999.
- [15] F. Gliozzi, S. Lottini, M. Panero and A. Rago, Nucl. Phys. **B719**:255, 2005 [cond-mat/0502339]; S. Lottini and F. Gliozzi PoSLAT2005:292, 2006 [hep-lat/0601011]; F.Gliozzi, *Where is the confining string in random percolation* [hep-lat/0510034].
- [16] R. Ziff, *A Simple Algorithm to test for linking to Wilson Loops in percolation* [cond-mat/0504260].
- [17] J. Adler, Y. Meir, A. Aharony, A.B. Harris, Phys. Rev. **B41**: 9183, 1990.
- [18] P.Dimopoulos,K.Farakos,C.P.Korthals-Altes,G.Koutsoumbas,S.Nicolis JHEP **0102**:005,2001 [hep-lat/0012028]
- [19] A. P. Gottlob and M. Hasenbusch, Physica **A201** (1993) 593.
- [20] M.N. Chernodub, Ernst-Michael Ilgenfritz, A. Schiller Phys.Rev.**D64**:054507,2001 [hep-lat/0105021];  
M.N. Chernodub, Ernst-Michael Ilgenfritz, A. Schiller Nucl.Phys.Proc.Suppl.**106**:703-705,2002 [hep-lat/0110038]
- [21] Thomas A. DeGrand, Doug Toussaint Phys.Rev.**D22**:2478,1980.
- [22] Bernd A. Berg, Alexei Bazavov Phys.Rev.**D74**:094502,2006 [hep-lat/0605019]
- [23] B. A. Berg and A. Bazavov, Phys. Rev.**D74**, 094502 (2006) [arXiv:hep-lat/0605019];  
B. A. Berg and A. Bazavov, PoS LAT2006, 061 (2006) [arXiv:hep-lat/0609006].
- [24] J.L.Cardy Nucl.Phys.**B170**:369-387,1980;  
G. 't Hooft Nucl.Phys.**B153**:141,1979.
- [25] hep-lat/0801.3722
- [26] P. Dimopoulos , K. Farakos, S. Vrentzos Phys.Rev.**D74**:094506,2006 [hep-lat/0607033]
- [27] V.A. Rubakov Phys.Usp.**44**:871-893 [hep-ph/0104152];  
S.L. Dubovsky, V.A. Rubakov Int.J.Mod.Phys.**A16**:4331-4350,2001 [hep-th/0105243]
- [28] K. Farakos, P. Pasipoularides Phys.Lett.**B621**:224-232,2005 [hep-th/0504014]
- [29] K. Farakos, P. Pasipoularides Phys.Rev.**D73**:084012,2006 [hep-th/0602200]

- [30] K. Farakos, P. Pasipoularides Phys.Rev.**D75**:024018,2007 [hep-th/0610010]
- [31] D.Berman, E.Rabinovici Phys.Lett.**B157**:292,1985  
Y.K. Fu, Liang-Xin Huang and Da-Xin Zhang Phys.Lett.**B335**:65-70,1994
- [32] J. Jersak, T. Neuhaus, P.M. Zerwas Nucl.Phys.**B251**:299,1985.;  
J. Jersak, T. Neuhaus, P.M. Zerwas Phys.Lett.**B133**:103,1983.
- [33] G. Cella, U.M.Heller, V.K.Mitrjushkin and A.Vicere Phys.Rev.**D56**:3896-3902,1997  
[hep-lat/9704012]
- [34] J.M. Luck Nucl.Phys.**B210**:111,1982
- [35] G. Arnold, B.Bunk, T.Lippert and K.Schilling Nucl.Phys.Proc.Suppl.**119**:864-866,2003  
[hep-lat/0210010]
- [36] M.Luscher,K.Symanzik and P.Weisz Nucl.Phys. **B173** (1980) 365;  
M.Luscher, Nucl.Phys. **B180** (1981) 317;  
Marco Panero JHEP **0505**:066, 2005 [hep-lat/0503024].
- [37] Y.K. Fu , Holger Bech Nielsen Nucl.Phys.**B236**:167,1984.;  
Y.K. Fu , Holger Bech Nielsen Nucl.Phys.**B254**:127,1985.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

### Ο αλγόριθμος Metropolis για την περίπτωση της U(1) θεωρίας βαθμίδας

Ός γνωστών η εξίσωση (14) αποτελεί την καρδιά μιάς προσομείωσης Monte-Carlo . Για την ειδική περίπτωση της πενταδιάστατης θεωρίας βαθμίδας, λόγω της ανισοτροπίας του μοντέλου, η μέθοδος απαιτεί την προσθήκη επιπλέον συνθηκών. Η δράση του μοντέλου μας, στο χωροχρονικό πλέγμα, συναρτηθεί των μεταβλητών συνδέσμων(link variables)<sup>13</sup> είναι:

$$S^{5D} = \beta \sum_{x, 1 \leq \mu < \nu \leq 4} (1 - \cos(\theta_{\mu\nu}(x))) + \beta' \sum_{x, 1 \leq \mu \leq 4} (1 - \cos(\theta_{\mu 5}(x))) \quad (170)$$

όπου

$$\theta_{\mu\nu}(x) = \theta_{\mu}(x) + \theta_{\nu}(x + \alpha_s \hat{\mu}) - \theta_{\mu}^{\dagger}(x + \alpha_s \hat{\nu}) - \theta_{\nu}^{\dagger}(x) \quad (171)$$

$$\theta_{\mu 5}(x) = \theta_{\mu}(x) + \theta_5(x + \alpha_s \hat{\mu}) - \theta_{\mu}^{\dagger}(x + \alpha_s \hat{5}) - \theta_5^{\dagger}(x) \quad (172)$$

με  $x$  σημείο του πλέγματος.

Η μέθοδος ξεκινά με την επιλογή διεύθυνσης ( $\mu$ ) στο πλέγμα και στη συνέχεια σε επιλογή τυχαίου πλεγματοειδούς σημείου  $x$ . Η μεταβλητή  $\theta_{\mu}$  που αντιστοιχεί στο σημείο αυτό πρόκειται να υποστεί τυχαία αλλαγή στην τιμή της,  $\theta_{\mu} \rightarrow \theta'_{\mu} = \theta_{\mu} + \delta$  αλλά πάντοτε μέσα στα όρια των επιτρεπτών της τιμών (στην περίπτωσή μας  $[0, 2\pi]$ ). Οι αλλαγές που προκύπτουν και κυρίως το εύρος των τιμών που καλύπτει η κάθε μεταβλητή, ως απόρροια του αλγόριθμου Metropolis, είναι ενδεικτικές της δυναμικής του συστήματος για δεδομένες τιμές των βασικών παραμέτρων. Λόγω της γνωστής ανισοτροπίας του συστήματός μας, απόρροια των διαφορετικών σταθερών σύζευξης, είναι δυνατόν να διαμορφωθούν τελείως διαφορετικές συνθήκες για τους τετραδιάστατους υπόχωρους από ότι για την εγκάρσια διεύθυνση. Για τον λόγο αυτό εισάγουμε δύο επιπλέον παραμέτρους,  $c_8$  και  $c_5$ , για την ξεχωριστή ρύθμιση των μεταβολών που συντελούνται στις 'τετραδιάστατες' και τις εγκάρσιες μεταβλητές. Κατά την προκαλούμενη μεταβολή το μοναδικό κομμάτι της δράσης (170) που επηρεάζεται είναι αυτό που περιλαμβάνει όλες τις πλακέτες που εμπεριέχουν την μεταβλητή  $\theta_{\mu}$ . Η αλλαγή αυτή δηλαδή αφορά τις πλακέτες  $\theta_{\mu\nu}(x)$  αλλά και τις  $\theta_{\nu\mu}(x)$ , αυτές που περιέχουν την μεταβλητή  $\theta_{\mu}(x)$  αλλά με αντίθετο προσανατολισμό<sup>14</sup>. Ορίζουμε τις ποσότητες:

$$\Delta\theta_{\mu\nu} = \theta_{\nu}(x + \alpha_s \hat{\mu}) - \theta_{\mu}^{\dagger}(x + \alpha_s \hat{\nu}) - \theta_{\nu}^{\dagger}(x)$$

$$\Delta\theta_{\mu 5} = \theta_5(x + \alpha_s \hat{\mu}) - \theta_{\mu}^{\dagger}(x + \alpha_s \hat{5}) - \theta_5^{\dagger}(x)$$

ώς το κομμάτι των πλακετών (171,172) το ανεξάρτητο από την μεταβαλλόμενη μεταβλητή.

<sup>13</sup> $U_{\mu}(x) = e^{i\theta_{\mu}(x)}$ ,  $U_5(x) = e^{i\theta_5(x)}$

<sup>14</sup>Αφού επι της ουσίας η δράση αποτελείται από το άθροισμα πάνω σε όλες της πλακέτες του πλέγματος.

Τώρα το νευραλγικό κομμάτι της δράσης (170) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$S^{5D} = -\beta \sum_{1 \leq \nu \neq \mu \leq 4} \cos(\Delta\theta_{\mu\nu} + \theta_\mu) - \beta \sum_{1 \leq \nu \neq \mu \leq 4} \cos(\Delta\theta_{\nu\mu} - \theta_\mu) \\ - \beta' \cos(\Delta\theta_{\mu 5} + \theta_\mu) - \beta' \cos(\Delta\theta_{5\mu} - \theta_\mu)$$

Με χρήση μιας γεννήτριας τυχαίων αριθμών αποκτάμε δύο αριθμούς  $\rho_1$  και  $\rho_2$  στο διάστημα  $[0,1]$ . Η επιβαλλόμενη μεταβολή στην τιμή του πεδίου προκύπτει από την:

$$\delta = (\rho_1 - 0.5) * c_S * \pi \quad (173)$$

και συνεπώς έχουμε:

$$\theta'_\mu = \theta_\mu + \delta \\ S'^{5D} = -\beta \sum_{1 \leq \nu \neq \mu \leq 4} \cos(\Delta\theta_{\mu\nu} + \theta'_\mu) - \beta \sum_{1 \leq \nu \neq \mu \leq 4} \cos(\Delta\theta_{\nu\mu} - \theta'_\mu) \\ - \beta' \cos(\Delta\theta_{\mu 5} + \theta'_\mu) - \beta' \cos(\Delta\theta_{5\mu} - \theta'_\mu)$$

Η μεταβολή στην δράση είναι:

$$\Delta S^{5D} = S'^{5D} - S^{5D}$$

Ο αλγόριθμος Metropolis γίνεται:

- (α) Εάν  $\Delta S^{5D} \leq 0$  τότε η μεταβολή γίνεται δεκτή
- (β) Εάν  $\Delta S^{5D} > 0$  τότε:

$$e^{-\Delta S^{5D}} \begin{cases} \geq \rho_2 & \text{γίνεται αποδεκτή} \\ < \rho_2 & \text{απορρίπτεται} \end{cases}$$

Στην περίπτωση απόρριψης της αλλαγής μπορεί να δοθεί η δυνατότητα να ξαναγίνει προσπάθεια καλώντας νέους τυχαίους αριθμούς ( $\rho_1$  και  $\rho_2$ ) και δοκιμάζοντας ξανά. Ακριβώς η ίδια διαδικασία ισχύει για την εγκάρσια διάσταση με μόνη αλλαγή την εγκάρσια κλίμακα  $c_5$ .

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2

### Η υπορουτίνα overrelaxation

Η μέθοδος που χρησιμοποιούμε, συμπληρωματικά της διαδικασίας αποκατάστασης θερμικής ισορροπίας, ονομάζεται overrelaxation και βασίζεται στη ακόλουθη διαδικασία:

Γράφουμε την δράση στην μορφή

$$C \cos(\phi + \theta_\mu)$$

ορίζοντας ως

$$P_1 \equiv C \cos(\phi) = \sum_s \cos \chi_s + q \sum_s \cos \chi_5$$

$$P_2 \equiv C \sin(\phi) = \sum_s \sin \chi_s + q \sum_s \sin \chi_5$$

με  $\chi_s$  και  $\chi_5$  τα επονομαζόμενα staples, δηλαδή το κομμάτι της πλακέτας που απομένει αν αφαιρεθεί ο σύνδεσμος  $\theta_\mu$ . Η παράμετρος  $q$  είναι το πηλίκο  $q \equiv \frac{\beta'}{\beta}$  για την περίπτωση χωροειδών συνδέσμων  $\theta_\mu$  και έχει τιμή ίση με την μονάδα σε διαφορετική περίπτωση. Η τιμή του νέου συνδέσμου δίνεται από τον κύριο τύπο έκφρασης της συγκεκριμένης μεθόδου [], που στην περίπτωση που μελετάμε γίνεται:  $\theta'_\mu = -\theta_\mu - 2\phi$ . Η αλλαγή γίνεται πάντα αποδεκτή. Σημαντικό στοιχείο της μεθόδου αποτελεί το εύρος του διαστήματος, γύρω από την παλιά τιμή των συνδέσμων, μέσα στο οποίο θα αναζητηθούν οι νέες τιμές. Είναι γνωστό ότι το διάστημα αυτό επηρεάζεται από τον ρυθμό αποδοχής του εκάστοτε μοντέλου. Στην δική μας περίπτωση, λόγω της ανισοτροπίας του μοντέλου, απόρροια των διαφορετικών παραμέτρων  $\beta$  και  $\beta'$  για τις χωρικές και την εγκάρσια διεύθυνση αντίστοιχα, είναι δυνατόν οι αντίστοιχοι ρυθμοί αποδοχής να εμφανίζουν τελείως διαφορετικές τιμές. Για τον λόγο αυτό στην μέθοδο overrelaxation χρησιμοποιούνται δύο διαφορετικά διαστήματα ανεύρεσης νέων τιμών αντικατοπτρίζοντας τους δύο διαφορετικούς ρυθμούς αποδοχής.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3

### Ο κώδικας

```
Program U1Dim5
implicit none

integer*4 nx,ny,nz,nw,nt,nv,nv2,ihit_u
integer*4 icol,id
include 'param.inc'
parameter(icol=2,id=5)

integer*4 ls,lv,lrnd
parameter(ls=nx,lv=5*ihit_u*2*ls**5,lrnd=lv)
real*8 s(lv),rn(lrnd),rl(lrnd)

real*8 u(nv2,icol,id)
real*8 \latintext{scale_u,scale_ut}
real*8 RANVEC,RMAX
real*8 S_dum_l_u_t(nt),S_dum_l_u_s(nt)
real*8 ave_l_u_t(nt),ave_l_u_s(nt)
real*8 dum_array_1(nt),dum_array_2(nt)
integer*4 i_Uneigh(nv2,icol,id),i_Dneigh(nv2,icol,id)
real*8 BC_l_s(nt),BC_l_t(nt),Suscl_u_s(nt),Suscl_u_t(nt)
real*8 ave_u,ave_u_s,ave_u_t,scal_s,scal_t,add_u,add_u_s,add_u_t
real*8 act_g,plaq_s,plaq_t,beta_g,beta_gt,step_bg
integer*4 i_plaq(5,4),ic,i,i_link_s,i_link_t,nhits,Im,n_start
integer*4 n_stop,i_site,i_color,i_d,I_meas,vol,n_total
integer*4 n_updt,input_seed,n_hyst_bg,n_heat,in,ib,ibg
real*8 ave_u_s2,ave_u_t2,ave_u_s4,ave_u_t4,Sus_u_s,Sus_u_t,BCs,BCt
real*8 add_u_s2,add_u_t2,add_u_s4,add_u_t4
real*8 corel(nt),dum_beta_g,n_hyst_bg2,xx,yy
real*8 randomx(nv2,ihit_u,id,icol),randomy(nv2,ihit_u,id,icol)
integer*4 mr,j1,j2,j3,li,nvl
integer*4 i1,i2,i3,i_measur,i_dum_conf
real*8 uu,dum_1,dum_2,dum_3

real*8 add_helic,ave_helic
real*8 dum_h1(nt),dum_h2(nt),add_h1(nt),add_h2(nt)
real*8 ave_h1(nt),ave_h2(nt),dum_htS,dum_htC
real*8 add_bulk,add_sin_bulk,ave_bulk,ave_bulk_sin

real*8 WLS1(nt),WLS2(nt),WLS3(nt),WLS4(nt)
```

```

common/links/u
common/neighbor/i_Uneighbor , i_Dneighbor
common/const/beta_g , beta_gt
common/heat/n_heat
common/scale/scale_u , scale_ut
common/pros/i_plaq
common/rndm/randomx , randomy , rmax

open ( unit=15, file='status' ,
*status='old' )

open ( unit=17, file='conf' ,
*form='unformatted' ,
*status='unknown' )

read(15,*) n_start , n_stop

read(15,*) n_heat
read(15,*) n_updt , input_seed
read(15,*) scale_u , scale_ut
read(15,*) step_bg , n_hyst_bg
read(15,*) i_dum_conf
close(15)

open ( unit=16, file='beta' ,
*status='old' )
read(16,*) beta_g , beta_gt
close(16)

print *, 'Lattice size' , nx , ny , nx , nw , nt
print *, 'beta_g=' , beta_g , 'beta_gt=' , beta_gt
print *, 'input_seed=' , input_seed

call neighbour

i_plaq(1,1)=2
i_plaq(1,2)=3
i_plaq(1,3)=4
i_plaq(1,4)=5
i_plaq(2,1)=1
i_plaq(2,2)=3

```



```

i_plaq(2,3)=4
i_plaq(2,4)=5
i_plaq(3,1)=1
i_plaq(3,2)=2
i_plaq(3,3)=4
i_plaq(3,4)=5
i_plaq(4,1)=1
i_plaq(4,2)=2
i_plaq(4,3)=3
i_plaq(4,4)=5
i_plaq(5,1)=1
i_plaq(5,2)=2
i_plaq(5,3)=3
i_plaq(5,4)=4

```

```

*****

```

```

*      DO ib=1,10

      IF(i_dum_conf.eq.1) then
        print*,'% Using old configuration '

        print*,'% Continue previous run '

        do i_site=1,nv2
          do i_color=1,icol
            do i_d=1,id
              read(17) i1 , i2 , i3 , uu , scale_u , scale_ut
              u(i1 , i2 , i3)=uu
            end do
          end do
        end do

        close(17)

        print*,'% n_heat=',n_heat , ' n_start=',n_start , ' n_stop=',n_stop
        print*,'% scale_u=',scale_u
        print*,'% scale_ut=',scale_ut

        call RCINIT(input_seed)
        call REPEATRANDOM(n_heat , n_start , n_updt)

        do Im=1,n_start
          read(20 ,*) i_mesur , dum_1 , dum_2
          read(21 ,*) i_mesur , dum_array_1 , dum_array_2

```

```

        end do

        open( unit=17, file='conf-bt1.8.hysterisis.N8',
*form='unformatted',
*status='unknown')

        ELSE
*ARXIKH CONFIGURATION*****

        do ic=1,icol

        do i=1,nv2
u(i,ic,1)=0.
u(i,ic,2)=0.
u(i,ic,3)=0.
u(i,ic,4)=0.
u(i,ic,5)=0.
        end do
        end do

        print*, 'Using a new trivial configuration'

        call RCINIT(input_seed)

        print*, 'n_heat=', n_heat, 'n_start=', n_start, 'n_stop=', n_stop

        print*, 'scale_u=', scale_u, 'scale_ut=', scale_ut

        print*, 'old seed=', input_seed

        print*, 'updt=', n_updt

        scal_s=0.
        scal_t=0.

        call therm(scal_s, scal_t)

        print*, 'Scales and Rates after thermalization'

        scal_s=scal_s/100.
        scal_t=scal_t/100.

        print*, 'scale_u_sp=', scale_u

```

```

print *, 'Rate_u_sp=', scal_s
print *, 'scale_u_t=', scale_ut
print *, 'Rate_u_t=', scal_t

```

```

END IF

```

```

*****METRHSEIS*****

```

```

open (20, file='SWEEPS-MEAN.bt1.8.hysterisis.N8')

```

```

l_meas=n_start
dum_beta_g=beta_g
n_hyst_bg2=2.*n_hyst_bg-1

```

```

DO ib=1,n_hyst_bg2
ibg=n_hyst_bg-1-iabs(ib-n_hyst_bg)
beta_g=dum_beta_g+ibg*step_bg

```

```

add_helic=0.

```

```

add_u=0.
add_u_s=0.
add_u_t=0.

```

```

ave_u=0.
ave_u_s=0.
ave_u_t=0.

```

```

i_link_s=0.
i_link_t=0.
nhits=0.

```

```

DO Im=n_start+1,n_stop

```

```

do in=1,n_updt

```

```

call metru(i_link_s, i_link_t)

```

```

call over

```

```

end do

call metra(ave_u ,ave_u_s ,ave_u_t ,ave_l_u_t ,
*ave_l_u_s ,Susc_l_u_s ,Susc_l_u_t ,BC_l_s ,BC_l_t)

*GRAFEI CONFIGURATION ANA 1000 METRHSEIS

if (mod(Im,1000).EQ.0) then
do i_site=1,nv2
do i_color=1,2
do i_d=1,5
write(17) i_site , i_color , i_d , u(i_site , i_color , i_d) ,
*scale_u , scale_ut
end do
end do
end do
rewind(17)
else
end if

* -----

I_meas=I_meas+1

add_u=add_u+ave_u
add_u_s=add_u_s+ave_u_s
add_u_t=add_u_t+ave_u_t

END DO
*(Telos broxou Im)

vol=nx*ny*nz*nw*nt
n_total=n_stop-n_start

act_g=add_u/n_total

plaq_s=add_u_s/n_total

plaq_t=add_u_t/n_total

write(20 ,*) beta_gt , beta_g , act_g , plaq_s , plaq_t

```

```

END DO
*(broxos ib)

```

```

close(17)
close(20)

```

```

STOP
END

```

```

subroutine neighbour

```

```

include 'param.inc'
parameter(icol=2,id=5)
integer*4 i_Uneigh(nv2,icol,id),i_Dneigh(nv2,icol,id)
common/neigh/i_Uneigh,i_Dneigh

```

```

do it=0,nt-1
do iw=0,nw-1
do iz=0,nz-1
do iy=0,ny-1
do ix=0,nx-1

```

```

ic=mod(ix+iy+iz+iw+it,2)+1
i=(ix+nx*(iy+ny*(iz+nz*(iw+nw*it))))/2+1

```

```

ixu=mod(ix+1,nx)
ixd=mod(ix-1+nx,nx)
iyu=mod(iy+1,ny)
iyd=mod(iy-1+ny,ny)
izu=mod(iz+1,nz)
izd=mod(iz-1+nz,nz)
iwu=mod(iw+1,nw)
iwd=mod(iw-1+nw,nw)
itu=mod(it+1,nt)
itd=mod(it-1+nt,nt)

```

```

i_Uneigh(i,ic,1)=(ixu+nx*(iy+ny*(iz+nz*(iw+nw*it))))/2+1
i_Dneigh(i,ic,1)=(ixd+nx*(iy+ny*(iz+nz*(iw+nw*it))))/2+1
i_Uneigh(i,ic,2)=(ix+nx*(iyu+ny*(iz+nz*(iw+nw*it))))/2+1
i_Dneigh(i,ic,2)=(ix+nx*(iyd+ny*(iz+nz*(iw+nw*it))))/2+1
i_Uneigh(i,ic,3)=(ix+nx*(iy+ny*(izu+nz*(iw+nw*it))))/2+1

```

```

i_Dneigh(i,ic,3)=(ix+nx*(iy+ny*(izd+nz*(iw+nw*it))))/2+1
i_Uneigh(i,ic,4)=(ix+nx*(iy+ny*(iz+nz*(iwu+nw*it))))/2+1
i_Dneigh(i,ic,4)=(ix+nx*(iy+ny*(iz+nz*(iwd+nw*it))))/2+1
i_Uneigh(i,ic,5)=(ix+nx*(iy+ny*(iz+nz*(iw+nw*itu))))/2+1
i_Dneigh(i,ic,5)=(ix+nx*(iy+ny*(iz+nz*(iw+nw*itd))))/2+1

```

```

end do
end do
end do
end do
end do

```

```

return
end

```

```

subroutine therm(scal_s,scal_t)
* THERMALIZATION
include 'param.inc'
parameter(icol=2,id=5)

implicit real*8 (a-h,o-z)
real*8 u(nv2,icol,id)
real*8 scale_u,scale_ut
integer*4 i_Uneigh(nv2,icol,id),i_Dneigh(nv2,icol,id)
common/links/u
common/neigh/i_Uneigh,i_Dneigh
common/const/beta_g,beta_gt
common/heat/n_heat
common/scale/scale_u,scale_ut
common/pros/i_plaq(5,4)

i_link_s=0.
i_link_t=0.
nhits=0.

do kth=1,n_heat

call metru(i_link_s,i_link_t)

scal_s=100.*i_link_s/real(nv2*icol*ihit_u*4)

if(scal_s.gt.70.0)then
scale_u=scale_u*1.05

```

```

end if

if (scale_u .gt. 3.0) then
scale_u=3.0
end if

if (scal_s .lt. 60.0) then
scale_u=scale_u*0.95
end if

if (scale_u .lt. 0.1) then
scale_u=0.1
end if

scal_t=100.*i_link_t/real(nv2*icol*ihit_u)

if (scal_t .gt. 70.0) then
scale_ut=scale_ut*1.05
end if

if (scale_ut .gt. 3.0) then
scale_ut=3.0
end if

if (scal_t .lt. 60.0) then
scale_ut=scale_ut*0.95
end if

if (scale_ut .lt. 0.1) then
scale_ut=0.1
end if

```

\*KALW OVERRELAXATION

```

call over

end do
*(Telos n_heat)

return
end

```

```

subroutine metru(i_link_s , i_link_t)
* METROPOLIS

```

```

implicit none
integer*4 nx,ny,nz,nw,nt,nv,nv2,ihit_u
integer*4 icol,id
integer*4 ls,lv,lrand
include 'param.inc'
parameter(icol=2,id=5)
parameter(ls=nx,lv=5*ihit_u*2*ls**5,lrand=lv)
*   implicit real*8 (a-h,o-z)
real*8 u(nv2,icol,id)
real*8 scale_u,scale_ut
real*8 s(lv),rn(lrand),rl(lrand),rmax
integer*4 i_Uneigh(nv2,icol,id),i_Dneigh(nv2,icol,id)
*   GIA MELLONTIKH PARALLHLOPOIHSH
real*8 randomx(nv2,ihit_u,id,icol),randomy(nv2,ihit_u,id,icol)
integer*4 i_l_s(nv2),i_l_t(nv2)
integer*4 k,idir,k1,k2,k3,k4,k5,ic,nic,i,mr
real*8 P2u,p2d,p3u,p3d,p4u,p4d,p5u,p5d,Sg_old,u_old,u_new
real*8 Sg_new,DSg,EDSg,x2,y2,x3,y3,diff_u,beta_g,beta_gt,PI
integer*4 i_plaq(5,4),i_link_s,i_link_t,ih,ihit,ii,l,n_heat
integer*4 j1,j2,j3,j4,i_d,i_site,i_color,i_h
real*8 xx,yy

common/links/u
common/neigh/i_Uneigh,i_Dneigh
common/const/beta_g,beta_gt
common/scale/scale_u,scale_ut
common/nheat/n_heat
common/pros/i_plaq
common/rndm/randomx,randomy,rmax

*   open(77,file='randomcluster.dat')
PI=3.141579

i_link_s=0.
i_link_t=0.

do k=1,nv2
i_l_s(k)=0.
i_l_t(k)=0.
end do

*****
rmax=1.
call rcarry(rn,lrand,rmax,1)
*****

```



```

*metrhths tyxaiwn arithmwn:mr
  mr=0

  do i_d=1,id
  do i_color=1,icol
  do i_site=1,nv2
  do i_h=1,ihit_u
  mr=mr+1
  randomx(i_site , i_h , i_d , i_color)=rn(mr)
*   write(77,*)mr,rn(mr)
  mr=mr+1
  randomy(i_site , i_h , i_d , i_color)=rn(mr)
*   write(77,*)mr,rn(mr)
  end do
  end do
  end do
  end do

*   close(77,status='keep')
*   STOP

do idir=1,4

k1=idir
k2=i_plaq(idir,1)
k3=i_plaq(idir,2)
k4=i_plaq(idir,3)
k5=i_plaq(idir,4)

do ic=1,icol
  nic=mod(ic,icol)+1

do i=1,nv2

  P2u=u(i_Uneigh(i,ic,k1),nic,k2)-u(i_Uneigh(i,ic,k2),nic,k1)
*-u(i,ic,k2)

  P2d=u(i_Dneigh(i,ic,k2),nic,k2)-
*u(i_Dneigh(i,ic,k2),nic,k1)-
*u(i_Uneigh(i_Dneigh(i,ic,k2),nic,k1),ic,k2)

```

P3u=u(i\_Uneigh(i, ic, k1), nic, k3)-u(i\_Uneigh(i, ic, k3), nic, k1)  
\*-u(i, ic, k3)

P3d=u(i\_Dneigh(i, ic, k3), nic, k3)-  
\*u(i\_Dneigh(i, ic, k3), nic, k1)-  
\*u(i\_Uneigh(i\_Dneigh(i, ic, k3), nic, k1), ic, k3)

P4u=u(i\_Uneigh(i, ic, k1), nic, k4)-u(i\_Uneigh(i, ic, k4), nic, k1)  
\*-u(i, ic, k4)

P4d=u(i\_Dneigh(i, ic, k4), nic, k4)-  
\*u(i\_Dneigh(i, ic, k4), nic, k1)-  
\*u(i\_Uneigh(i\_Dneigh(i, ic, k4), nic, k1), ic, k4)

P5u=u(i\_Uneigh(i, ic, k1), nic, k5)-u(i\_Uneigh(i, ic, k5), nic, k1)  
\*-u(i, ic, k5)

P5d=u(i\_Dneigh(i, ic, k5), nic, k5)-  
\*u(i\_Dneigh(i, ic, k5), nic, k1)-  
\*u(i\_Uneigh(i\_Dneigh(i, ic, k5), nic, k1), ic, k5)

u\_old=u(i, ic, k1)

Sg\_old=-beta\_g\*(cos(p2u+u\_old)+cos(p2d+u\_old)  
\*+cos(p3u+u\_old)+cos(p3d+u\_old)+cos(p4u+u\_old)  
\*+cos(p4d+u\_old))-beta\_gt\*(cos(p5u+u\_old)+cos(p5d+u\_old))

do ihit=1,ihit\_u

```
*      mr=mr+1
*      x2=rn(mr)
x2=randomx(i, ihit, idir, ic)
*      mr=mr+1
*      y2=rn(mr)
y2=randomy(i, ihit, idir, ic)
```

diff\_u=(x2-0.5)\*scale\_u\*PI  
u\_new=u(i, ic, k1)+diff\_u

Sg\_new=-beta\_g\*(cos(p2u+u\_new)+cos(p2d+u\_new)  
\*+cos(p3u+u\_new)+cos(p3d+u\_new)+cos(p4u+u\_new)  
\*+cos(p4d+u\_new))-beta\_gt\*(cos(p5u+u\_new)+cos(p5d+u\_new))

DSg=Sg\_new-Sg\_old

```

EDSg=exp(-DSg)

  if (EDSg.gt.y2) then
    u(i,ic,k1)=u_new
    Sg_old=Sg_new
    i_l_s(i)=i_l_s(i)+1
  end if
end do
*(telos ihit)

  end do
end do

  end do
*(telos idir)

*LINK IN THE FIFTH DIMENSION
  idir=5

  k1=idir
  k2=i_plaq(idir,1)
  k3=i_plaq(idir,2)
  k4=i_plaq(idir,3)
  k5=i_plaq(idir,4)

  do ic=1,icol
    nic=mod(ic,icol)+1

    do i=1,nv2

      P2u=u(i_Uneigh(i,ic,k1),nic,k2)-u(i_Uneigh(i,ic,k2),nic,k1)
      *-u(i,ic,k2)

      P2d=u(i_Dneigh(i,ic,k2),nic,k2)-u(i_Dneigh(i,ic,k2),nic,k1)
      *-u(i_Uneigh(i_Dneigh(i,ic,k2),nic,k1),ic,k2)

      P3u=u(i_Uneigh(i,ic,k1),nic,k3)-u(i_Uneigh(i,ic,k3),nic,k1)
      *-u(i,ic,k3)

      P3d=u(i_Dneigh(i,ic,k3),nic,k3)-u(i_Dneigh(i,ic,k3),nic,k1)
      *-u(i_Uneigh(i_Dneigh(i,ic,k3),nic,k1),ic,k3)

      P4u=u(i_Uneigh(i,ic,k1),nic,k4)-u(i_Uneigh(i,ic,k4),nic,k1)
      *-u(i,ic,k4)

```

```

P4d=u(i_Dneigh(i,ic,k4),nic,k4)-u(i_Dneigh(i,ic,k4),nic,k1)
*-u(i_Uneigh(i_Dneigh(i,ic,k4),nic,k1),ic,k4)

```

```

P5u=u(i_Uneigh(i,ic,k1),nic,k5)-u(i_Uneigh(i,ic,k5),nic,k1)
*-u(i,ic,k5)

```

```

P5d=u(i_Dneigh(i,ic,k5),nic,k5)-u(i_Dneigh(i,ic,k5),nic,k1)
*-u(i_Uneigh(i_Dneigh(i,ic,k5),nic,k1),ic,k5)

```

```

u_old=u(i,ic,k1)

```

```

Sg_old=-beta_gt*(cos(P2u+u_old)+cos(p2d+u_old)+cos(p3u+u_old)
*+cos(p3d+u_old)+cos(p4u+u_old)+cos(p4d+u_old)+cos(p5u+u_old)
*+cos(p5d+u_old))

```

```

do ih=1,ihit_u

```

```

*   mr=mr+1
*   x3=rn(mr)
x3=randomx(i,ih,idir,ic)
*   mr=mr+1
*   y3=rn(mr)
y3=randomy(i,ih,idir,ic)

```

```

diff_u=(x3-0.5)*scale_ut*PI
u_new=u(i,ic,k1)+diff_u

```

```

Sg_new=-beta_gt*(cos(p2u+u_new)+cos(p2d+u_new)
*+cos(P3u+u_new)+cos(p3d+u_new)+
*cos(p4u+u_new)+cos(p4d+u_new)+
*cos(p5u+u_new)+cos(p5d+u_new))

```

```

DSg=Sg_new-Sg_old
EDSg=exp(-DSg)

```

```

if(EDSg.GT.y3) then
u(i,ic,k1)=u_new
Sg_old=Sg_new
i_l_t(i)=i_l_t(i)+1
end if

```

```

end do
*(Telos ihit_u)

```

```

end do
end do

do ii=1,nv2
i_link_s=i_link_s+i_l_s(ii)
i_link_t=i_link_t+i_l_t(ii)
end do

return
end

subroutine metra(ave_u,ave_u_s,ave_u_t,ave_l_u_t,
*ave_l_u_s,Susc_l_u_s,Susc_l_u_t,BC_l_s,BC_l_t)

implicit none

integer*4 nx,ny,nz,nw,nt,nv,nv2,ihit_u
integer*4 icol,id,nvs
* METRHSEIS

include 'param.inc'
parameter(icol=2,id=5)
parameter(nvs=(nx*ny*nz*nw)/2)

* implicit real*8(a-h,o-z)
real*8 u(nv2,icol,id)
real*8 P(5,5),P2(5,5)
real*8 beta_g,beta_gt,S_dum_u,S_dum_u_s,S_dum_u_t
real*8 S_dum_l_u_t(nt),S_dum_l_u_s(nt)
real*8 ave_l_u_t(nt),ave_l_u_s(nt),ave_u,ave_u_t,ave_u_s
integer*4 i_Uneigh(nv2,icol,id),i_Dneigh(nv2,icol,id)
real*8 dum_l_u_t,dum_l_u_s,S_dum_l_u_t2(nt)
real*8 S_dum_l_u_s2(nt),S_dum_l_u_s4(nt),S_dum_l_u_t4(nt)
real*8 ave_l_u_s2(nt),ave_l_u_t2(nt),ave_l_u_s4(nt),ave_l_u_t4(nt)
real*8 Susc_l_u_s(nt),Susc_l_u_t(nt),BC_l_s(nt),BC_l_t(nt)
integer*4 ilay,i5,it,ix,ic,nic,k,l,vols,vol,i,itau,ilay_1
real*8 dum_u,dum_u_t,dum_u_s

common/links/u
common/neighbor/i_Uneigh,i_Dneigh
common/const/beta_g,beta_gt

```

```

S_dum_u=0.
S_dum_u_s=0.
S_dum_u_t=0.

```

```

do ilay=1,nt
dum_l_u_s=0.
dum_l_u_t=0.
S_dum_l_u_t(ilay)=0.
S_dum_l_u_s(ilay)=0.
ave_l_u_t(ilay)=0.
ave_l_u_s(ilay)=0.
BC_l_s(ilay)=0.
BC_l_t(ilay)=0.
end do

```

```

do ic=1,icol
nic=mod(ic,icol)+1

```

```

do i=1,nv2

```

```

do k=1,5
do l=k+1,5
P(k,l)=-u(i,ic,k)+u(i_Uneigh(i,ic,l),nic,k)
*+u(i,ic,l)-u(i_Uneigh(i,ic,k),nic,l)
P(l,k)=P(k,l)
end do
end do

```

```

dum_u_s=cos(P(1,2))+cos(P(1,3))+cos(P(1,4))
*+cos(P(2,3))+cos(P(2,4))+cos(P(3,4))

```

```

dum_u_t=cos(P(1,5))+cos(P(2,5))+cos(P(3,5))+
*cos(P(4,5))

```

```

dum_u=beta_g*(6.-dum_u_s)+beta_gt*(4.-dum_u_t)

```

```

dum_u_s=dum_u_s/6.
dum_u_t=dum_u_t/4.

```

```

S_dum_u=S_dum_u+dum_u
S_dum_u_s=S_dum_u_s+dum_u_s
S_dum_u_t=S_dum_u_t+dum_u_t

```

\*YPOLOGISMOS STA LAYERS

---

```
    itau=(i-1)/nvs
    do ilay=1,nt
    ilay_1=ilay-1
    if (itau.eq.ilay_1) then

        dum_l_u_t=(cos(P(1,5))+cos(P(2,5))+cos(P(3,5))+
* cos(P(4,5)))/4.

        dum_l_u_s=(cos(P(1,2))+cos(P(1,3))+cos(P(1,4))+
* cos(P(2,3))+cos(P(2,4))+cos(P(3,4)))/6.

        S_dum_l_u_t(ilay)=S_dum_l_u_t(ilay)+dum_l_u_t
        S_dum_l_u_s(ilay)=S_dum_l_u_s(ilay)+dum_l_u_s

        S_dum_l_u_t2(ilay)=S_dum_l_u_t2(ilay)+(dum_l_u_t**2)
        S_dum_l_u_s2(ilay)=S_dum_l_u_s2(ilay)+(dum_l_u_s**2)

        S_dum_l_u_t4(ilay)=S_dum_l_u_t4(ilay)+(dum_l_u_t**4)
        S_dum_l_u_s4(ilay)=S_dum_l_u_s4(ilay)+(dum_l_u_s**4)

    else
    end if
    end do
*Telos broxou ilay

    end do
    end do

    vol=nv2*icol

    ave_u=S_dum_u/vol
    ave_u_s=S_dum_u_s/vol
    ave_u_t=S_dum_u_t/vol

    vols=icol*nvs

    do ilay=1,nt
    ave_l_u_s(ilay)=S_dum_l_u_s(ilay)/vols
    ave_l_u_t(ilay)=S_dum_l_u_t(ilay)/vols
```

```

ave_l_u_s2(ilay)=S_dum_l_u_s2(ilay)/vols
ave_l_u_t2(ilay)=S_dum_l_u_t2(ilay)/vols

ave_l_u_s4(ilay)=S_dum_l_u_s4(ilay)/vols
ave_l_u_t4(ilay)=S_dum_l_u_t4(ilay)/vols

Susc_l_u_s(ilay)=(ave_l_u_s2(ilay)-(ave_l_u_s(ilay)**2))
Susc_l_u_t(ilay)=(ave_l_u_t2(ilay)-(ave_l_u_t(ilay)**2))

BC_l_s(ilay)=1.-(ave_l_u_s4(ilay)/(3.*(ave_l_u_s2(ilay)**2)))
BC_l_t(ilay)=1.-(ave_l_u_t4(ilay)/(3.*(ave_l_u_t2(ilay)**2)))

end do

```

```

RETURN
END

```

```

subroutine over
* OVERRELAXATION
implicit none
integer*4 nx,ny,nz,nw,nt,nv,nv2,ihit_u
integer*4 icol,id
include 'param.inc'
parameter(icol=2,id=5)
* implicit real*8(a-h,o-z)
real*8 u(nv2,icol,id)
Double precision S_st,C_st,st
integer*4 i_Uneigh(nv2,icol,id),i_Dneigh(nv2,icol,id)
real*8 p2u,p2d,p3u,p3d,p4u,p4d,p5u,p5d,u_old,u_new,Sg_old
real*8 Sg_new,DSg,EDSg,diff_u,beta_g,beta_gt,scale_u,scale_ut
integer*4 idir,k1,k2,k3,k4,k5,ic,nic,i
integer*4 i_plaq(5,4),n_heat
real*8 piliko

common/links/u
common/neigh/i_Uneigh,i_Dneigh
common/const/beta_g,beta_gt
common/scale/scale_u,scale_ut
common/heat/n_heat
common/pros/i_plaq

```



```

do idir=1,4

k1=idir
k2=i_plaq ( idir ,1)
k3=i_plaq ( idir ,2)
k4=i_plaq ( idir ,3)
k5=i_plaq ( idir ,4)

do ic=1,icol

nic=mod(ic , icol)+1

do i=1,nv2

P2u=u(i_Uneigh ( i , ic , k1 ) , nic , k2)-u(i_Uneigh ( i , ic , k2 ) , nic , k1)
*-u(i , ic , k2)

P2d=u(i_Dneigh ( i , ic , k2 ) , nic , k2)-u(i_Dneigh ( i , ic , k2 ) , nic , k1)
*-u(i_Uneigh ( i_Dneigh ( i , ic , k2 ) , nic , k1 ) , ic , k2)

P3u=u(i_Uneigh ( i , ic , k1 ) , nic , k3)-u(i_Uneigh ( i , ic , k3 ) , nic , k1)
*-u(i , ic , k3)

P3d=u(i_Dneigh ( i , ic , k3 ) , nic , k3)-u(i_Dneigh ( i , ic , k3 ) , nic , k1)
*-u(i_Uneigh ( i_Dneigh ( i , ic , k3 ) , nic , k1 ) , ic , k3)

P4u=u(i_Uneigh ( i , ic , k1 ) , nic , k4)-u(i_Uneigh ( i , ic , k4 ) , nic , k1)
*-u(i , ic , k4)

P4d=u(i_Dneigh ( i , ic , k4 ) , nic , k4)-u(i_Dneigh ( i , ic , k4 ) , nic , k1)
*-u(i_Uneigh ( i_Dneigh ( i , ic , k4 ) , nic , k1 ) , ic , k4)

P5u=u(i_Uneigh ( i , ic , k1 ) , nic , k5)-u(i_Uneigh ( i , ic , k5 ) , nic , k1)
*-u(i , ic , k5)

P5d=u(i_Dneigh ( i , ic , k5 ) , nic , k5)-u(i_Dneigh ( i , ic , k5 ) , nic , k1)
*-u(i_Uneigh ( i_Dneigh ( i , ic , k5 ) , nic , k1 ) , ic , k5)

C_st=cos ( p2u)+cos ( p2d)+cos ( p3u)+cos ( p3d)+cos ( p4u)+cos ( p4d)+
*beta_gt*( cos ( p5u)+cos ( p5d ))/ beta_gt

S_st=sin ( p2u)+sin ( p2d)+sin ( p3u)+sin ( p3d)+sin ( p4u)+sin ( p4d)+

```

```
*beta_gt*(sin(p5u)+sin(p5d))/beta_g
```

```
piliko=S_st/C_st  
st=ATAN(piliko)
```

```
* BRISKEI TO NEO LINK
```

```
*----->
```

```
u(i,ic,k1)=-2.*st-u(i,ic,k1)
```

```
end do
```

```
end do
```

```
end do
```

```
idir=5
```

```
k1=idir
```

```
k2=i_plaq(idir,1)
```

```
k3=i_plaq(idir,2)
```

```
k4=i_plaq(idir,3)
```

```
k5=i_plaq(idir,4)
```

```
do ic=1,icol
```

```
nic=mod(ic,icol)+1
```

```
do i=1,nv2
```

```
P2u=u(i_Uneigh(i,ic,k1),nic,k2)-u(i_Uneigh(i,ic,k2),nic,k1)  
*-u(i,ic,k2)
```

```
P2d=u(i_Dneigh(i,ic,k2),nic,k2)-u(i_Dneigh(i,ic,k2),nic,k1)  
*-u(i_Uneigh(i_Dneigh(i,ic,k2),nic,k1),ic,k2)
```

```
P3u=u(i_Uneigh(i,ic,k1),nic,k3)-u(i_Uneigh(i,ic,k3),nic,k1)  
*-u(i,ic,k3)
```

```
P3d=u(i_Dneigh(i,ic,k3),nic,k3)-u(i_Dneigh(i,ic,k3),nic,k1)  
*-u(i_Uneigh(i_Dneigh(i,ic,k3),nic,k1),ic,k3)
```

```
P4u=u(i_Uneigh(i,ic,k1),nic,k4)-u(i_Uneigh(i,ic,k4),nic,k1)  
*-u(i,ic,k4)
```

```
P4d=u(i_Dneigh(i,ic,k4),nic,k4)-u(i_Dneigh(i,ic,k4),nic,k1)
```

```

*-u(i_Uneigh(i_Dneigh(i,ic,k4),nic,k1),ic,k4)

P5u=u(i_Uneigh(i,ic,k1),nic,k5)-u(i_Uneigh(i,ic,k5),nic,k1)
*-u(i,ic,k5)

P5d=u(i_Dneigh(i,ic,k5),nic,k5)-u(i_Dneigh(i,ic,k5),nic,k1)
*-u(i_Uneigh(i_Dneigh(i,ic,k5),nic,k1),ic,k5)

C_st=cos(p2u)+cos(p2d)+cos(p3u)+cos(p3d)+cos(p4u)+cos(p4d)
*+cos(p5u)+cos(p5d)

S_st=sin(p2u)+sin(p2d)+sin(p3u)+sin(p3d)+sin(p4u)+sin(p4d)
*+sin(p5u)+sin(p5d)

piliko=S_st/C_st
st=ATAN(piliko)

u(i,ic,k1)=-2.*st-u(i,ic,k1)

end do
end do

RETURN
END

subroutine helicity(dum_h1,dum_h2,dum_htC,dum_htS)
include 'param.inc'
parameter(icol=2,id=5)
implicit real*8 (a-h,o-z)

real*8 u(nv2,icol,id)

real*8 sum_C(0:nz-1,0:nw-1),sum_S(0:nz-1,0:nw-1)

real*8 thp12,sum_cos,sum_sin
real*8 dum_h1(nt),dum_h2(nt)

real*8 sum_Ct(0:ny-1,0:nz-1,0:nw-1),sum_St(0:ny-1,0:nz-1,0:nw-1)
real*8 sum_cost,sum_sint,dum_htC,dum_htS

common/links/u
common/neigh/i_Uneigh(nv2,icol,id),i_Dneigh(nv2,icol,id)
common/const/beta_g,beta_gt

```

```

do it=0,nt-1
  il=it+1

  do i1=0,nw-1
    do i2=0,nz-1
      sum_C(i1 , i2)=0.
      sum_S(i1 , i2)=0.
    end do
  end do

  sum_cos=0.
  sum_sin=0.

  do iw=0,nw-1
    do iz=0,nz-1

      do iy=0,ny-1
        do ix=0,nx-1

          ic=mod(ix+iy+iz+iw+it ,2)+1
          nic=3-ic
          i=(ix+nx*(iy+ny*(iz+nz*(iw+nw*it))))/2+1

          thp12=u(i , ic ,1)+u(i_Uneigh(i , ic ,1) , nic ,2)
          * -u(i , ic ,2)-u(i_Uneigh(i , ic ,2) , nic ,1)

          sum_C(iz , iw)=sum_C(iz , iw)+cos(thp12)
          sum_S(iz , iw)=sum_S(iz , iw)+sin(thp12)

        end do
      end do

      sum_cos=sum_cos+sum_C(iz , iw)
      sum_sin=sum_sin+sum_S(iz , iw)

    end do
  end do

  nvl=nx*ny*nz*nw

  dum_h1(il)=((beta_g*sum_cos)-(beta_g*sum_sin)**2)/real(nvl)
  dum_h2(il)=(sum_sin*beta_g)/real(nx*ny)

```

```

end do

sum_cost=0.
sum_sint=0.

do i3=0,nz-1
do i2=0,ny-1
do i1=0,nx-1
sum_Ct(i1 , i2 , i3)=0.
sum_St(i1 , i2 , i3)=0.
end do
end do
end do

do iw=0,nw-1
do iz=0,nz-1
do iy=0,ny-1

do it=0,nt-1
do ix=0,nx-1

ic=mod(ix+iy+iz+iw+it ,2)+1
nic=3-ic
i=(ix+nx*(iy+ny*(iz+nz*(iw+nw*it))))/2+1

thp15=u(i , ic ,1)+u(i_Uneigh(i , ic ,1) , nic ,5)
*      -u(i , ic ,5)-u(i_Uneigh(i , ic ,5) , nic ,1)

sum_Ct(iy , iz , iw)=sum_Ct(iy , iz , iw)+cos(thp15)
sum_St(iy , iz , iw)=sum_St(iy , iz , iw)+sin(thp15)

end do
end do

sum_cost=sum_cost+sum_Ct(iy , iz , iw)
sum_sint=sum_sint+sum_St(iy , iz , iw)

end do
end do
end do

dum_htC=(beta_gt*sum_cost-(beta_gt*sum_sint)**2)/real(nvl)
dum_htS=(beta_gt*sum_sint/real(nv))/real(nx*ny)

```

Return  
End

```
subroutine wilson(WLS1,WLS2,WLS3,WLS4)

implicit none
integer*4 nx,ny,nz,nw,nt,nv,nv2,ihit_u
include 'param.inc'
integer*4 icol,id,nvs
parameter(icol=2,id=5,nvs=(nx*ny*nz*nz)/2)
real*8 u(nv2,icol,id),beta_g,beta_gt
integer*4 i_Uneigh(nv2,icol,id),i_Dneigh(nv2,icol,id)

integer*4 i,is,ic,icn,it,ir,i1,i2,i3,i4,i5,i6,i7,i8,i9,i10
real*8 dum_l_w1(nt),dum_l_w2(nt),dum_l_w3(nt),dum_l_w4(nt)
real*8 s_d_l_w1(nt),s_d_l_w2(nt),s_d_l_w3(nt),s_d_l_w4(nt)
real*8 WLS1(nt),WLS2(nt),WLS3(nt),WLS4(nt)

integer*4 k1,k2,k3,k,l,i11,i12,i13,i14
integer*4 i15,i16,i17,i18

real*8 w22(4,4),w33(4,4),w55(4,4)
real*8 w44(4,4)

common/links/u
common/neigh/i_Uneigh,i_Dneigh
common/const/beta_g,beta_gt

do k1=1,4
do k2=1,4

W33(k1,k2)=0.
W44(k1,k2)=0.
w55(k1,k2)=0.
w22(k1,k2)=0.

end do
end do

do k3=1,nt
```

```

dum_l_w1(k3)=0.
dum_l_w2(k3)=0.
dum_l_w3(k3)=0.
dum_l_w4(k3)=0.

```

```

s_d_l_w1(k3)=0.
s_d_l_w2(k3)=0.
s_d_l_w3(k3)=0.
s_d_l_w4(k3)=0.

```

```

WLS1(k3)=0.
WLS2(k3)=0.
WLS3(k3)=0.
WLS4(k3)=0.

```

```

end do

```

```

do ir=0,nt-1
  it=ir+1

```

```

  do ic=1,icol
    icn=mod(ic,icol)+1
    do is=1,nvs
      i=is+ir*nvs

```

```

    do k=1,4
      do l=k+1,4

```

```

*****2x2 wilson loop*****

```

```

  i1=i_Uneigh(i,ic,k)
  i2=i_Uneigh(i1,icn,k)
  i3=i_Uneigh(i2,ic,l)
  i4=i_Dneigh(i_Uneigh(i3,icn,l),ic,k)
  i5=i_Dneigh(i4,icn,k)
  i6=i_Uneigh(i,ic,l)

```

```

  w22(k,l)=u(i,ic,k)+u(i1,icn,k)+u(i2,ic,l)+u(i3,icn,l)
  *-u(i4,icn,k)-u(i5,ic,k)-u(i6,icn,l)-u(i,ic,l)

```

```

  w22(l,k)=w22(k,l)

```

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*3x3 wilson loop \*\*\*\*\*

```
i1=i_Uneigh(i , ic , k)
i2=i_Uneigh(i1 , icn , k)
i3=i_Uneigh(i2 , ic , k)
i4=i_Uneigh(i3 , icn , l)
i5=i_Uneigh(i4 , ic , l)
i6=i_Dneigh(i_Uneigh(i5 , icn , l) , ic , k)
i7=i_Dneigh(i6 , icn , k)
i8=i_Dneigh(i7 , ic , k)
i9=i_Dneigh(i8 , icn , l)
i10=i_Uneigh(i , ic , l)
```

```
w33(k , l)=u(i , ic , k)+u(i1 , icn , k)+u(i2 , ic , k)+u(i3 , icn , l)
*+u(i4 , ic , l)+u(i5 , icn , l)-u(i6 , icn , k)-u(i7 , ic , k)-u(i8 , icn , k)
*-u(i9 , ic , l)-u(i10 , icn , l)-u(i , ic , l)
```

```
w33(l , k)=w33(k , l)
```

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*4x4 wilson loop\*\*\*\*\*

```
i1=i_Uneigh(i , ic , k)
i2=i_Uneigh(i1 , icn , k)
i3=i_Uneigh(i2 , ic , k)
i4=i_Uneigh(i3 , icn , k)
i5=i_Uneigh(i4 , ic , l)
i6=i_Uneigh(i5 , icn , l)
i7=i_Uneigh(i6 , ic , l)
i8=i_Dneigh(i_Uneigh(i7 , icn , l) , ic , k)
i9=i_Dneigh(i8 , icn , k)
i10=i_Dneigh(i9 , ic , k)
i11=i_Dneigh(i10 , icn , k)
i12=i_Dneigh(i11 , ic , l)
i13=i_Dneigh(i12 , icn , l)
i14=i_Uneigh(i , ic , l)
```

```
w44(k , l)=u(i , ic , k)+u(i1 , icn , k)+u(i2 , ic , k)+u(i3 , icn , k)
*+u(i4 , ic , l)+u(i5 , icn , l)+u(i6 , ic , l)+u(i7 , icn , l)-u(i8 , icn , k)
*-u(i9 , ic , k)-u(i10 , icn , k)-u(i11 , ic , k)-u(i12 , icn , l)-u(i13 , ic , l)
*-u(i14 , icn , l)-u(i , ic , l)
```



w44(l , k)=w44(k , l)

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*5X5 WILSON LOOP\*\*\*\*\*

i1=i\_Uneigh(i , ic , k)  
i2=i\_Uneigh(i1 , icn , k)  
i3=i\_Uneigh(i2 , ic , k)  
i4=i\_Uneigh(i3 , icn , k)  
i5=i\_Uneigh(i4 , ic , k)  
i6=i\_Uneigh(i5 , icn , l)  
i7=i\_Uneigh(i6 , ic , l)  
i8=i\_Uneigh(i7 , icn , l)  
i9=i\_Uneigh(i8 , ic , l)  
i10=i\_Dneigh(i\_Uneigh(i9 , icn , l) , ic , k)  
i11=i\_Dneigh(i10 , icn , k)  
i12=i\_Dneigh(i11 , ic , k)  
i13=i\_Dneigh(i12 , icn , k)  
i14=i\_Dneigh(i13 , ic , k)  
i15=i\_Dneigh(i14 , icn , l)  
i16=i\_Dneigh(i15 , ic , l)  
i17=i\_Dneigh(i16 , icn , l)  
i18=i\_Uneigh(i , ic , l)

w55(k , l)=u(i , ic , k)+u(i1 , icn , k)+u(i2 , ic , k)+u(i3 , icn , k)  
\*+u(i4 , ic , k)+u(i5 , icn , l)+u(i6 , ic , l)+u(i7 , icn , l)+u(i8 , ic , l)  
\*+u(i9 , icn , l)-u(i10 , icn , k)-u(i11 , ic , k)-u(i12 , icn , k)-u(i13 , ic , k)  
\*-u(i14 , icn , k)-u(i15 , ic , l)-u(i16 , icn , l)-u(i17 , ic , l)-u(i18 , icn , l)  
\*-u(i , ic , l)

\*\*\*\*\*

end do  
end do

dum\_l\_w1(it)=(cos(W22(1,4))+cos(W22(2,4))+cos(W22(3,4))  
\* +cos(W22(1,2))+cos(W22(1,3))+cos(W22(2,3)))/6.

s\_d\_l\_w1(it)=s\_d\_l\_w1(it)+dum\_l\_w1(it)

```
dum_l_w2(it)=(cos(W33(1,4))+cos(W33(2,4))+cos(W33(3,4))
*+cos(W33(2,3))+cos(W33(1,3))+cos(W33(1,2)))/6.
```

```
s_d_l_w2(it)=s_d_l_w2(it)+dum_l_w2(it)
```

```
dum_l_w3(it)=(cos(W44(1,2))+cos(W44(1,3))+cos(W44(1,4))+
*cos(W44(2,3))+cos(W44(2,4))+cos(W44(3,4)))/6.
```

```
s_d_l_w3(it)=s_d_l_w3(it)+dum_l_w3(it)
```

```
dum_l_w4(it)=(cos(W55(1,2))+cos(W55(1,3))+cos(W55(1,4))+
*cos(W55(2,3))+cos(W55(2,4))+cos(W55(3,4)))/6.
```

```
s_d_l_w4(it)=s_d_l_w4(it)+dum_l_w4(it)
```

```
end do
```

```
end do
```

```
WLS1(it)=s_d_l_w1(it)/real(icol*nvs)
```

```
WLS2(it)=s_d_l_w2(it)/real(icol*nvs)
```

```
WLS3(it)=s_d_l_w3(it)/real(icol*nvs)
```

```
WLS4(it)=s_d_l_w4(it)/real(icol*nvs)
```

```
end do
```

```
Return
```

```
End
```

```
SUBROUTINE RCARRY(RANVEC,LEN,RMAX,ISKIP)
```

```
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
```

```
PARAMETER(ONE=1.,ZERO=0.,TWO=2.,
* TWOP24=16777216.,TWOM24=ONE/TWOP24)
```

```
PARAMETER(LVRC=1)
```

```
COMMON/RCBLK/REG(LVRC,24),CARRY(LVRC),IR,IS
SAVE/RCBLK/
```

```
DIMENSION SEED(LVRC,25) ,IND(2) ,RANVEC(LEN) ,IBIT(0:22)
```

```
NVRC=LEN/LVRC  
LEFT=LEN-LVRC*NVRC
```

```
IOFFS=0  
DO 100 N=1,NVRC  
  DO 10 I=1,LVRC  
    DELT=REG(I , IS)-REG(I , IR)-CARRY(I)
```

```
    IF (DELT.LT.ZERO) THEN  
      DELT=DELT+ONE  
      CARRY(I)=TWOM24  
    ELSE  
      CARRY(I)=ZERO  
    END IF
```

```
    REG(I , IR)=DELT  
    RANVEC(I+IOFFS)=DELT*RMAX  
10  CONTINUE  
    IOFFS=IOFFS+LVRC  
    IR=IR+1  
    IS=IS+1  
    IF (IR.EQ.25) IR=1  
    IF (IS.EQ.25) IS=1
```

```
*RUN WITHOUT USING RANDOM NUMBERS
```

```
  IF (IR.EQ.1) THEN  
    DO 400 NN=1,ISKIP  
    DO 410 I=1,LVRC  
      DELT=REG(I , IS)-REG(I , IR)-CARRY(I)
```

```
      IF (DELT.LT.ZERO) THEN  
        DELT=DELT+ONE  
        CARRY(I)=TWOM24  
      ELSE  
        CARRY(I)=ZERO  
      END IF
```

```
      REG(I , IR)=DELT  
410  CONTINUE  
      IR=IR+1  
      IS=IS+1
```

```

        IF (IR.EQ.25) IR=1
        IF (IS.EQ.25) IS=1
400    CONTINUE
        END IF

```

```

100    CONTINUE

```

\*THE LEFTOVER PART

```

        IF (LEFT.GT.0) THEN

        DO 200 I=1,LEFT
        DELT=REG(I,IS)-REG(I,IR)-CARRY(I)

        IF (DELT.LT.ZERO) THEN
        DELT=DELT+ONE
        CARRY(I)=TWOM24
        ELSE
        CARRY(I)=ZERO
        END IF

        REG(I,IR)=DELT
        RANVEC(I+IOFFS)=DELT*RMAX
200    CONTINUE

```

\*RUNNING THE REMAINDER TO HAVE ALL GENERATORS IN THE SAME STATE:

```

        DO 300 I=LEFT+1,LVRC
        DELT=REG(I,IS)-REG(I,IR)-CARRY(I)

        IF (DELT.LT.ZERO) THEN
        DELT=DELT+ONE
        CARRY(I)=TWOM24
        ELSE
        CARRY(I)=ZERO
        END IF

        REG(I,IR)=DELT
300    CONTINUE

        IR=IR+1
        IS=IS+1
        IF (IR.EQ.25) IR=1
        IF (IS.EQ.25) IS=1

```

END IF

RETURN

ENTRY RCGET(SEED,IND)

DO 55 N=1,LVRC

DO 50 I=1,24

print\*, 'perasa '

SEED(N, I)=REG(N, I)

50 CONTINUE

SEED(N,25)=CARRY(N)

55 CONTINUE

IND(1)=IS

IND(2)=IR

RETURN

ENTRY RCSET(SEED,IND)

DO 65 N=1,LVRC

DO 60 I=1,24

REG(N, I)=SEED(N, I)

60 CONTINUE

CARRY(N)=SEED(N, 25)

65 CONTINUE

IF (IND ( 1 ) .LT. 0) RETURN

IS=IND ( 1 )

IR=IND ( 2 )

IF (MOD(24+IR-IS , 24) .NE. 10) STOP 'RCSET'

RETURN

ENTRY RCINIT(INSEED)

IF (INSEED .GE. 2\*\*23 .OR. INSEED .LE. 0) STOP 'SEED'

JO=INSEED

DO 90 I=22,0,-1

JN=JO/2

IBIT ( I )=JO-JN\*2

JO=JN

90 CONTINUE

```

IR=0
IS=14
P=TWOM24
DO 150 I=1,LVRC
CARRY(I)=ZERO
DO 150 N=1,24
REG(I,N)=ZERO
P=TWOM24
DO 140 J=0,23
REG(I,N)=REG(I,N)+P*IBIT(IR)
IBIT(IR)=MOD(IBIT(IS)+IBIT(IR),2)
IR=MOD(IR+1,23)
IS=MOD(IS+1,23)
P=P*TWO
140 CONTINUE
150 CONTINUE

```

\*IR, IS FOR THE MARSAGLIA GENERATOR

```

IR=1
IS=15

```

```

END

```

```

subroutine REPEATRANDOM(n_heat, n_start, n_updt)

```

```

include 'param.inc'
parameter(icol=2,id=5)
parameter(ls=nx,lv=5*ihit_u*2*ls**5,lrand=lv)

```

```

implicit real*8(a-h,o-z)
real*8 s(lv),rn(lrands),rl(lrands),rmax

```

```

do ith=1,n_heat

```

```

rmax=1.
call rcarry(rn,lrands,rmax,1)

```

```

end do

```

```

do i_m=1,n_start
do i_r=1,n_updt

```

```

rmax=1.

```

```
call rcarry (rn , lrand , rmax , 1)

end do
end do

return
end
```