



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ  
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

---

Διπλωματική Εργασία  
Υγρόπουλος Γεώργιος – Λουκάς

«Επιτάχυνση της βελτιστοποίησης τοπολογίας με την  
βοήθεια νευρωνικών δικτύων»

**Επιβλέπων:**

Λαγαρός Νικόλαος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

**Τριμελής Επιτροπή:**

1. Λαγαρός Νικόλαος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.
2. Τσιάτας Γεώργιος, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.
3. Τριανταφύλλου Σάββας, Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2024

## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Νικόλαο Λαγαρό, επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας, για την υποστήριξη, την καθοδήγηση, την βοήθειά του και για τις γνώσεις και την εμπειρία που μου μετέδωσε καθ' όλη τη διάρκεια της προετοιμασίας και της συγγραφής της παρούσας εργασίας.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες απευθύνονται στα μέλη της εξεταστικής επιτροπής, τον κ. Γεώργιο Τσιάτα και τον κ. Σάββα Τριανταφύλλου για τον χρόνο τους και την βοήθειά τους.

Επιπροσθέτως, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Γεώργιο Καζάκη, για την βοήθεια, το χρόνο και τις συμβουλές του καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Τέλος, πάνω από όλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου και τους δικούς μου ανθρώπους για την στήριξη, την πιστή και την βοήθειά τους όλα αυτά τα χρονιά.

© (2024) Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. All rights Reserved. Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σ' αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η βελτιστοποίηση τοπολογίας είναι μια μαθηματική μέθοδος που έχει ως στόχο τον προσδιορισμό της βέλτιστης κατανομής υλικών σε έναν δεδομένο χώρο σχεδιασμού. Χρησιμοποιείται ευρέως σε διάφορους τομείς της μηχανικής για τη δημιουργία αποδοτικών και ελαφρών κατασκευών. Ωστόσο, οι παραδοσιακές μέθοδοι βελτιστοποίησης, όπως η Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP), αν και παρουσιάζουν καλά αποτελέσματα, απαιτούν πολλούς υπολογιστικούς πόρους. Η παρούσα διπλωματική εργασία επικεντρώνεται στην επιτάχυνση της διαδικασίας βελτιστοποίησης τοπολογίας μέσω της εφαρμογής των νευρωνικών δικτύων.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται αναλυτική εισαγωγή στο αντικείμενο της βελτιστοποίησης κατασκευών. Στη συνέχεια, στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται η τεχνική της βελτιστοποίησης τοπολογίας και η μαθηματική της διατύπωση ως πρόβλημα βελτιστοποίησης. Πιο συγκεκριμένα, γίνεται αναφορά στο θεωρητικό υπόβαθρο της βελτιστοποίησης τοπολογίας και παρουσιάζεται η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων. Επιπλέον, αναλύεται η μέθοδος επίλυσης προβλημάτων βελτιστοποίησης τοπολογίας ως πρόβλημα ελαχιστοποίησης της ενδοτικότητας. Ταυτόχρονα παρουσιάζεται η μέθοδος SIMP και η μέθοδος των βέλτιστων κριτηρίων.

Το τρίτο κεφάλαιο αποτελεί μια σύντομη εισαγωγή στις βασικές έννοιες, τις αρχιτεκτονικές καθώς και τις μεθόδους εκπαίδευσης των νευρωνικών δικτύων. Τα εν λόγω δίκτυα, και σε συνδυασμό με όλα τα προηγούμενα, οδηγούν στο τέταρτο κεφάλαιο, στο οποίο υλοποιούνται δυο μεθοδολογίες επιτάχυνσης της μεθόδου SIMP. Συγκεκριμένα, το βαθύ νευρωνικό δίκτυο ενσωματώνεται στη διαδικασία βελτιστοποίησης της μεθόδου SIMP και χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της ευαισθησίας του κάθε στοιχείου του πλέγματος σε κάθε επανάληψη.

Στο πέμπτο κεφάλαιο της εργασίας, οι παραπάνω υλοποιήσεις εφαρμόζονται σε διάφορα παραδείγματα και παρουσιάζονται τα αποτελέσματά τους. Συμπερασματικά, σε σύγκριση με τη συμβατική μέθοδο βελτιστοποίησης SIMP επιτυγχάνεται σημαντική μείωση του απαιτούμενου υπολογιστικού χρόνου, διατηρώντας παράλληλα την ακρίβεια των τελικών σχεδίων.

## ACKNOWLEDGEMENTS

The research was supported by the Hellenic Foundation for Research and Innovation (H.F.R.I.) under the “2nd Call for H.F.R.I. Research Projects to support Faculty Members and Researchers,” AMOSS project: “Additively Manufactured Optimized 3D Printed Steel Structures,” (Project Number: 02779).

# Περιεχόμενα

<b>1 Εισαγωγή.....</b>	<b>7</b>
1.1 Πρόλογος.....	7
1.2 Ιστορική Αναδρομή.....	7
1.3 Βελτιστοποίηση κατασκευών.....	9
1.3.1 Εισαγωγή στη βελτιστοποίηση κατασκευών.....	9
1.3.2 Μαθηματική διατύπωση βελτιστοποίησης κατασκευών.....	10
1.3.3 Κυρτός προγραμματισμός.....	12
1.3.5 Τύποι προβλημάτων βελτιστοποίησης κατασκευών.....	14
1.5 Τεχνικές επίλυσης προβλημάτων βελτιστοποίησης κατασκευών.....	15
1.4 Επίλογος.....	16
<b>2 Θεωρητικό υπόβαθρο βελτιστοποίησης τοπολογίας.....</b>	<b>17</b>
2.1 Πρόλογος.....	17
2.2 Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων - Finite Elements Method (FEM).....	17
2.2.1 Είδη πεπερασμένων στοιχείων.....	18
2.2.2 Μεθοδολογία της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων με γραμμικά στοιχεία.....	18
2.2.3 Μεθοδολογία της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων με 2Δ τετραγωνικά στοιχεία.....	25
2.2.4 Προκλήσεις της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων.....	30
2.3 Βελτιστοποίηση τοπολογίας ως πρόβλημα ελαχιστοποίησης ενδοτικότητας.....	32
2.4 Μέθοδος Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP).....	35
2.4.1 Μέθοδος των βέλτιστων κριτηρίων.....	38
2.4.2 Ύπαρξη της λύσης και αριθμητικές αστάθειες.....	44
2.5 Επίλογος.....	48
<b>3 Θεωρητικό υπόβαθρο νευρωνικών δικτύων.....</b>	<b>50</b>
3.1 Πρόλογος.....	50
3.2 Εισαγωγή στα νευρωνικά δίκτυα.....	50
3.3 Τεχνητός νευρώνας.....	50
3.4 Συναρτήσεις ενεργοποίησης.....	51
3.5 Αρχιτεκτονική Νευρωνικών Δικτύων.....	55
3.6 Εκπαίδευση νευρωνικών δικτύων.....	58
3.6.1 Μέθοδος κατάβασης κλίσης - Gradient Descent Method.....	58
3.6.2 Αλγόριθμος οπισθοδιάδοσης - Backpropagation.....	60
3.7 Επίλογος.....	63
<b>4 Επιτάχυνση της Βελτιστοποίησης Τοπολογίας με την βοήθεια Νευρωνικών Δικτύων.....</b>	<b>65</b>
4.1 Πρόλογος.....	65
4.2 Εισαγωγή στο πρόβλημα.....	65
4.3 Επιτάχυνση της μεθόδου SIMP.....	68

4.3.1 Προσέγγιση ενός πλέγματος.....	70
4.3.2 Προσέγγιση δυο πλεγμάτων.....	71
4.3.4 Εκπαίδευση του νευρωνικού δικτιού της προτεινομένης μεθοδολογίας.....	76
4.4 Επίλογος.....	78
<b>5 Προβολή και Ανάλυση Αποτελεσμάτων - Σύγκριση Μεθόδων .....</b>	<b>79</b>
5.1 Πρόλογος.....	79
5.2 Προβλήματα για την αξιολόγηση.....	79
5.2.1 MBB δοκός (half MBB beam) .....	80
5.2.2 L δοκός (L-shape beam) .....	85
5.3 Επίλογος.....	89
<b>6 Συμπεράσματα.....</b>	<b>90</b>
<b>Βιβλιογραφικές Αναφορές .....</b>	<b>92</b>

# ***1 Εισαγωγή***

## ***1.1 Πρόλογος***

Το παρόν κεφάλαιο αποτελεί την εισαγωγή σε βασικές έννοιες και μεθόδους καίριας σημασίας για κατανόηση του αντικειμένου της εργασίας. Αρχικά γίνεται μια ιστορική αναδρομή στην βελτιστοποίηση κατασκευών και ακολούθως παρουσιάζεται ο κλασικός τρόπος βελτιστοποίησης. Τέλος, διατυπώνεται το πρόβλημα βελτιστοποίησης κατασκευών σε μαθηματική μορφή και παρουσιάζεται το βασικό θεωρητικό υπόβαθρο της μαθηματικής βελτιστοποίησης.

## ***1.2 Ιστορική Αναδρομή***

Η βελτιστοποίηση των κατασκευών, ως επιστημονικός κλάδος και πρακτική κατεύθυνση στην μηχανική, έχει βαθιές ιστορικές ρίζες που χρονολογούνται από την αρχαιότητα. Από τότε, μηχανικοί και αρχιτέκτονες επιδίωκαν να δημιουργήσουν βιώσιμες και αποτελεσματικές δομές. Οι απαρχές της δομικής βελτιστοποίησης εντοπίζονται σε αρχαίους πολιτισμούς, όπως η Αίγυπτος, η Ελλάδα και η Ρώμη, όπου χρησιμοποιήθηκαν εμπειρικές μέθοδοι για τη δημιουργία ισχυρών και ανθεκτικών κατασκευών.

Τον 17ο και 18ο αιώνα, η βελτιστοποίηση των κατασκευών δεν αποτελούσε ακόμη ξεχωριστή επιστημονική ενότητα, αλλά ήταν ένα σύνολο προβλημάτων που μπορούσαν να αντιμετωπισθούν με εφαρμογή της μαθηματικής βελτιστοποίησης. Τα έργα του Galilei και του Newton, έθεσαν τα επιστημονικά θεμέλια για την περαιτέρω έρευνα στον τομέα της βελτιστοποίησης κατασκευών. Παράλληλα, οι μαθηματικές ανακαλύψεις του Fermat και του Descartes, όπως η ανάπτυξη της αναλυτικής γεωμετρίας και των μεθόδων εύρεσης ακροτάτων, συνέβαλαν στην εξέλιξη της θεωρίας της μαθηματικής βελτιστοποίησης.

Τον 19ο αιώνα, με την έναρξη της βιομηχανικής επανάστασης, η ανάγκη για τον σχεδιασμό και την κατασκευή αξιόπιστων και αποτελεσματικών δομών αυξήθηκε σημαντικά. Το πρώτο πρόβλημα βέλτιστου σχεδιασμού για μηχανικά συστήματα διατυπώθηκε και λύθηκε από τον Lagrange γύρω στο 1770 [Delfour & Huot-Chantal, 2019]. Η έννοια της δομικής βελτιστοποίησης, δηλαδή της έξυπνης και αποδοτικής χρήσης υλικών, έκανε τα πρώτα της βήματα στις αρχές του 20ού αιώνα. Ένα από τα πρωτοποριακά έργα ήταν του Michell, ο οποίος διερεύνησε την ελαχιστοποίηση της ποσότητας υλικού σε δομές όπως τα πλαίσια και τα δικτυώματα, χωρίς να επηρεάζεται η αντοχή τους [Michell, 1904]. Αυτό το έργο αποτέλεσε ένα σημαντικό ορόσημο στην ανάπτυξη της βελτιστοποίησης κατασκευών.

Με την είσοδο του 20ού αιώνα, οι θεωρητικές βάσεις της βελτιστοποίησης συνέχισαν να αναπτύσσονται, ωστόσο υπήρξε ένας διαχωρισμός μεταξύ της θεωρίας και των πρακτικών εφαρμογών. Αυτός ο διαχωρισμός διήρκεσε μέχρι την εμφάνιση των πρώτων ψηφιακών υπολογιστών στα τέλη της δεκαετίας του 1940. Η δραματική αύξηση της υπολογιστικής ισχύος, σε συνδυασμό με τις ανάγκες της πολεμικής βιομηχανίας κατά τον Β' Παγκόσμιο Πόλεμο, επιτάχυνε την ανάπτυξη των μεθόδων βελτιστοποίησης κατασκευών.

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (FEM) έπαιξε καθοριστικό ρόλο σε αυτή την πρόοδο. Το έργο του Αργύρη το 1944 αποτελεί μία από τις πρώτες εφαρμογές της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων με τη χρήση ψηφιακών υπολογιστών. Το 1947, η δημιουργία της μεθόδου Simplex από τον George Dantzig έφερε επανάσταση στη λύση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού [Dantzig, 1987], ενώ τα έργα του Kuhn και του Tucker το 1951 προσέφεραν τα μαθηματικά θεμέλια για τη βελτιστοποίηση προβλημάτων με περιορισμούς. Η εισαγωγή των συναρτήσεων ποινής από τον Courant το 1943 έθεσε τα θεμέλια για την επίλυση τοπικών προβλημάτων ελαχιστοποίησης [Williamson, 1980], ενώ ο Bellman το 1957 ανέπτυξε την μέθοδο δυναμικού προγραμματισμού, η οποία επέτρεψε την επίλυση προβλημάτων για συστήματα που εξελίσσονται με το χρόνο [Bellman & Dreyfus, 2010]. Κατά τις επόμενες δεκαετίες, οι τεχνικές μαθηματικής βελτιστοποίησης συνέχισαν να εξελίσσονται με την εισαγωγή νέων και πιο εξελιγμένων μεθόδων όπως η Προσομοιωμένη Ανόπτηση (Simulated Annealing) το 1983 και ο Γενετικός Αλγόριθμος (Genetic Algorithm) το 1975.

Στο σημείο αυτό, η δομική βελτιστοποίηση αρχίζει να θεωρείται ως ξεχωριστό πεδίο, το οποίο δεν συνδυάζει απλώς στοιχεία μαθηματικής βελτιστοποίησης και μηχανικής, αλλά απαιτεί ξεχωριστή και εξειδικευμένη προσέγγιση για την επίτευξη καλύτερων αποτελεσμάτων στην σχεδίαση μιας κατασκευής. Στη συνέχεια, διαμορφώνονται κατηγορίες προβλημάτων βελτιστοποίησης κατασκευών και δημιουργούνται μεθοδολογίες για την επίλυση αυτών των προβλημάτων. Σημαντικές μέθοδοι που αναπτύχθηκαν περιλαμβάνουν την μέθοδο SIMP, την ESO/BESO, την μέθοδο Level Set και τις μεθόδους επίλυσης (optimization solvers) όπως η Μέθοδος Βέλτιστων Κριτηρίων (OC) και η Μέθοδος των Κινούμενων Ασύμπτωτων (MMA) [Bendsoe, 1989; Rozvany & Zhou, 1991; Sigmund, 2007].

Η ευρεία υιοθέτηση της τρισδιάστατης εκτύπωσης στα τέλη της δεκαετίας του 2000 έδωσε νέα ώθηση στη βελτιστοποίηση κατασκευών, προσφέροντας νέες δυνατότητες για την υλοποίηση ακόμη και των πιο περίπλοκων και καινοτόμων σχεδίων. Η τρισδιάστατη εκτύπωση επέτρεψε την παραγωγή εξαρτημάτων με υψηλή απόδοση υλικού και μοναδικά χαρακτηριστικά, τα οποία παλαιότερα ήταν αδύνατο να κατασκευαστούν με τις παραδοσιακές μεθόδους παραγωγής.



Πιο πρόσφατα, η βελτιστοποίηση κατασκευών έχει εξελιχθεί περαιτέρω με την εισαγωγή της μηχανικής μάθησης (ML) και των νευρωνικών δικτύων (NN). Αυτές οι τεχνολογίες επιτρέπουν τη δημιουργία και ανάλυση σύνθετων κατασκευαστικών σχεδίων και προσφέρουν νέες προοπτικές για την ανάπτυξη αποδοτικών κατασκευών, μετασχηματίζοντας την παραδοσιακή προσέγγιση στη μηχανική.

### **1.3 Βελτιστοποίηση κατασκευών**

#### **1.3.1 Εισαγωγή στη βελτιστοποίηση κατασκευών**

Στη μηχανική, μια κατασκευή ορίζεται ως κάθε διάταξη υλικών ή δομικών στοιχείων που προορίζεται να παραλαμβάνει φορτία. Η βελτιστοποίηση, εξ ορισμού, αναφέρεται στη διαδικασία βελτίωσης και επίτευξης του βέλτιστου αποτελέσματος. Συνεπώς, η βελτιστοποίηση κατασκευών αφορά τη διασφάλιση ότι μια διάταξη υλικών, δηλαδή μια κατασκευή, μπορεί να αντιμετωπίσει με τον καλύτερο δυνατό τρόπο τα ασκούμενα φορτία. Η βελτιστοποίηση αποτελεί αναπόσπαστο μέρος κάθε διαδικασίας σχεδιασμού μιας κατασκευής ή ενός σχεδίου και μπορεί να χαρακτηριστεί ως μια σύνθετη διαδικασία που έχει ως στόχο τη δημιουργία του αποδοτικότερου σχεδίου που ανταποκρίνεται σε όλες τις δεδομένες απαιτήσεις και περιορισμούς.

Ο παραδοσιακός και ακόμη κυρίαρχος τρόπος της βελτιστοποίησης μιας κατασκευής μπορεί να χαρακτηριστεί ως μια επαναληπτική-διαισθητική διαδικασία η οποία μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

- 1) Προτείνεται ένα αρχικό σχέδιο ή μια κατασκευή
- 2) Τα χαρακτηριστικά του αξιολογούνται σύμφωνα με τις απαιτήσεις, συνήθως με τη χρήση προγραμμάτων CAD και της μεθόδου FEM.
- 3) Εάν ο σχεδιασμός δεν πληροί τις απαιτήσεις πρέπει να προταθεί νέος σχεδιασμός.
- 4) Το νέο σχέδιο υποβάλλεται και πάλι σε στάδιο αξιολόγησης

Η διαδικασία αυτή βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στη διαίσθηση του μηχανικού και επιτρέπει τη σταδιακή σύγκλιση σε έναν αποδεκτό τελικό σχέδιο [Christensen & Klarbing, 2009].

Η επαναληπτική-διαισθητική μέθοδος βελτιστοποίησης έχει αρκετά σημαντικά μειονεκτήματα. Πρώτον, εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την εμπειρία και τη διαίσθηση του μηχανικού, γεγονός που μπορεί να οδηγήσει σε υποκειμενικότητα και αυξημένη πιθανότητα σφαλμάτων. Δεύτερον, η μέθοδος αυτή είναι απρόβλεπτη και αναποτελεσματική καθώς μπορεί να χρειαστούν πολλές επαναλήψεις για να βρεθεί μια ικανοποιητική λύση. Και τρίτον, τέτοια βελτιστοποίηση δεν είναι πλήρως ορισμένη και περιορισμένη δηλαδή σε κάθε επανάληψη

προσπαθούμε να καταλήξουμε στη βέλτιστη λύση μη γνωρίζοντας τι είναι το βέλτιστο για το δεδομένο πρόβλημα και πόσο μακριά ή κοντά είναι η προτεινομένη λύση από την βέλτιστη.

Για να ξεπεραστούν οι παραπάνω αδυναμίες, χρησιμοποιούνται οι μέθοδοι της μαθηματικής βελτιστοποίησης. Η μαθηματική μέθοδος βελτιστοποίησης είναι εννοιολογικά διαφορετική από την επαναληπτική-διαισθητική. Στη μέθοδο αυτή διατυπώνεται ένα μαθηματικό πρόβλημα βελτιστοποίησης, όπου οι απαιτήσεις λειτουργούν ως περιορισμοί και η έννοια «όσο το δυνατόν καλύτερο» λαμβάνει ακριβή μαθηματική μορφή.

### 1.3.2 Μαθηματική διατύπωση βελτιστοποίησης κατασκευών

Η επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης κατασκευών (BK) ως προβλήματος μαθηματικής βελτιστοποίησης απαιτεί πρώτα την διατύπωση του δεδομένου προβλήματος ως ένα μαθηματικό πρόβλημα. Η διατύπωση αυτή απαιτεί να ορίσουμε μια αντικειμενική συνάρτηση, που απεικονίζει την παράμετρο που βελτιστοποιούμε, ένα σύνολο μεταβλητών σχεδιασμού το οποίο σχηματίζει μια τελική λύση, και ένα σύνολο περιορισμών. Επομένως σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης ψάχνουμε ένα σύνολο μεταβλητών σχεδιασμού οι οποίοι μεγιστοποιούν/ελαχιστοποιούν την αντικειμενική συνάρτηση τηρώντας όλους τους περιορισμούς. Η μαθηματική διατύπωση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης κατασκευών μπορεί να οριστεί με παρακάτω τρόπο:

$$(BK) \begin{cases} \min/\max f(x), & \text{με } x = [x_i] \text{ και } i = 1, \dots, n \\ \text{περιορισμοί} \begin{cases} g_i(x) \leq 0, & \text{όπου } i = 1, \dots, p \\ h_j(x) = 0, & \text{όπου } j = 1, \dots, m \\ x_i \in [x_l, x_u] \\ \text{equilibrium} \end{cases} \end{cases}$$

Οπού η συνάρτηση  $f$  είναι η αντικειμενική συνάρτηση η οποία προσπαθεί να εκφράσει με ένα μετρήσιμο τρόπο τον στόχο του προβλήματος. Για κάθε πιθανή λύση η  $f$  επιστρέφει μια τιμή που υποδηλώνει την απόδοση του σχεδίου, δηλαδή κάθε λύση του προβλήματος έχει αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και με βάση αυτή αποφαίνεται αν η λύση είναι βέλτιστη. Συνήθως στα προβλήματα BK επιλέγουμε την  $f$  έτσι ώστε μια μικρή τιμή να είναι καλύτερη από μια μεγάλη τιμή (πρόβλημα ελαχιστοποίησης). Η  $f$  συνήθως περιγράφει το βάρος, την μετατόπιση, την τάση ή ενδοτικότητα της κατασκευής [Bendsoe, 1989].

Επίσης σε ένα πρόβλημα BK μπορούν να υπάρχουν περισσότερες από μια λύσεις. Δηλαδή μια αντικειμενική συνάρτηση μπορεί να παρουσιάζει ένα, κανένα ή πολλά τοπικά ελάχιστα,

όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα 1.1. Αν για μια συνάρτηση  $f$  υπάρχει μόνο ένα ελάχιστο τότε πρέπει να ισχύει:

$$f(x_{min}) < f(x) \forall x$$

Στην περίπτωση που υπάρχουν πολλά τοπικά ελάχιστα πρέπει να προσδιοριστεί το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης  $f$ :

$$f((x_{local\ min})_j) < \min((x_{local\ min})_i) \text{ όπου } i = 1, 2, \dots, j, \dots, n$$

Και όταν δεν υπάρχει κανένα ελάχιστο της  $f$ , δηλαδή είναι σταθερή, είναι αδύνατη η εύρεση ελαχίστου οπότε δεν υπάρχει δυνατότητα βελτιστοποίησης.



Διάγραμμα 1.1: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης με δυο τοπικά ελάχιστα και ένα ολικό.

Το  $x$  είναι το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού  $x_i$  που ορίζουν με σαφή τρόπο τις ποσότητες που μεταβάλλονται κατά την διάρκεια της βελτιστοποίησης, προκειμένου να σχηματιστεί μια βέλτιστη λύση, και μπορούν να παίρνουν διακριτές ή συνεχείς τιμές. Οι μεταβλητές σχεδιασμού περιγράφουν κάποιες ιδιότητες και χαρακτηριστικά της κατασκευής: γεωμετρία, υλικό, μέγεθος και περισσότερα. Σε ένα πρόβλημα μπορεί να υπάρχουν μερικά σύνολα μεταβλητών σχεδιασμού, για παράδειγμα το μήκος της ράβδου και η επιφάνια διατομής ή το υλικό κατασκευής. Συνηθώς όμως στα προβλήματα μαθηματικής βελτιστοποίησης, προσπαθούμε να ορίσουμε το πρόβλημα με τέτοιο τρόπο ώστε να περιλαμβάνει όσο λιγότερες μεταβλητές σχεδιασμού γίνεται.

Ακολούθως, με  $g_i(x)$  και  $h_j(x)$  συμβολίζονται οι ανισοτικοί και ισοτικοί περιορισμοί αντίστοιχα. Δυστυχώς η μαθηματική βελτιστοποίηση δεν έχει την δυνατότητα να αναγνωρίσει αυτόματα την φύση του προβλήματος που επιθυμούμε λύσουμε, δηλαδή κάθε πρόβλημα εξετάζεται από καθαρά μαθηματική οπτική. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, ότι η βέλτιστη λύση δεν μπορεί πάντα να εφαρμοστεί στη πραγματικότητα. Οπότε πρέπει να ορίσουμε κάποιες

«οδηγίες» που θα εξασφαλίσουν ότι η μαθηματική προσέγγιση του προβλήματος αντιστοιχεί στο πραγματικό πρόβλημα και ότι η βέλτιστη λύση της προσέγγισης θα είναι βέλτιστη στο πραγματικό πρόβλημα. Οι εν λόγω οδηγίες ορίζονται μέσω των περιορισμών, και από την μαθηματική πλευρά οι περιορισμοί περιορίζουν το σύνολο δυνατών λύσεων, διασφαλίζοντας την ύπαρξη της λύσης.

### 1.3.3 Κυρτός προγραμματισμός

Ο κυρτός προγραμματισμός αποτελεί την βασική αρχή πολλών τεχνικών βελτιστοποίησης, ειδικά στη βελτιστοποίηση κατασκευών όπου η διασφάλιση ότι οι λύσεις είναι τόσο εφικτές όσο και βέλτιστες είναι κρίσιμης σημασίας.

#### 1.3.3.1 Τοπικά και ολικά ελάχιστα

Μια λύση του προβλήματος βελτιστοποίησης, έστω  $x^*$ , λέγεται τοπικό ελάχιστο αν ισχύει το παρακάτω:

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \text{ σε μια περιοχή γύρω από το } x^*$$

Αν η  $x^*$  είναι βέλτιστη λύση σε όλο το σύνολο δυνατών λύσεων τότε  $x^*$  λέγεται ολικό ελάχιστο:

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x$$

όπου η  $f(x)$  είναι η αντικειμενική συνάρτηση.

#### 1.3.3.2 Κυρτότητα

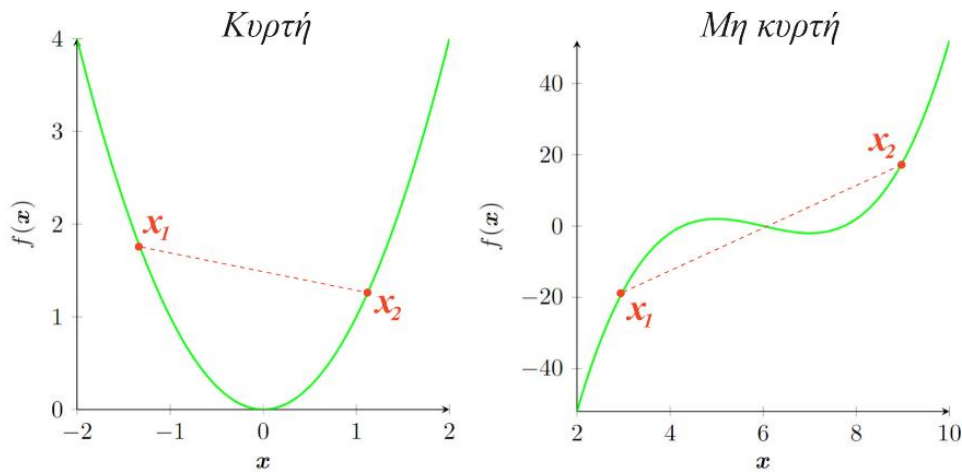
Ένα σύνολο  $C$  είναι κυρτό αν για κάθε  $x_1, x_2 \in C$  ισχύει το ακόλουθο:

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in C \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

Μια συνάρτηση  $f(x)$  λέγεται κυρτή αν  $\forall x_1, x_2 \in C$  με  $x_1 \neq x_2$  ισχύει το παρακάτω:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

Αν όμως μια συνάρτηση είναι κυρτή, τότε κάθε τοπικό ελάχιστο είναι επίσης ολικό ελάχιστο, γεγονός που διευκολύνει πάρα πολύ την διαδικασία βελτιστοποίησης. Όμως τα περισσότερα και ειδικά προβλήματα βελτιστοποίησης κατασκευών δεν είναι κυρτά. Σε τέτοιες περιπτώσεις συνήθως προσεγγίζουμε το αρχικό μας πρόβλημα σε ένα κυρτό. Η προσέγγιση αυτή μπορεί να υλοποιηθεί με διαφορετικές μεθόδους όπως η μέθοδος των κινούμενων ασύμπτωτων (MMA), ο διαδοχικός γραμμικός προγραμματισμός (SLP), ο διαδοχικός τετραγωνικός προγραμματισμός (SQP) και η μέθοδος Conlin.



Διάγραμμα 1.2: Διάγραμμα κυρτής και μη κυρτής συνάρτησης.

### 1.3.3.3 Συνθήκες Karush–Kuhn–Tucker (KKT)

Οι συνθήκες KKT είναι ένα σύνολο εξισώσεων και ανισοτήτων που αποτελούν αναγκαίες συνθήκες για να είναι μια λύση βέλτιστη σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης με περιορισμούς. Αρχικά θεωρούμε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης όπου η  $f(\mathbf{x})$  είναι μια κυρτή συνάρτηση:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\ & \text{subject to} \\ & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Αν υπάρχει  $\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}$  τέτοιο ώστε να ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

- $\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j \nabla h_j(\mathbf{x}^*) = 0$
- $g_i(\mathbf{x}^*) \leq 0, \quad h_j(\mathbf{x}^*) = 0,$
- $\lambda_i \geq 0,$
- $\lambda_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \quad \forall i$

Τότε η Λαγκρανζιανή συνάρτηση  $L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{x}^*)$  λαμβάνει τοπικό ελάχιστο που λόγω κυρτότητας της  $f(\mathbf{x})$  είναι και ολικό ελάχιστο στο  $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda})$ . Επίσης το ολικό ελάχιστο της  $L$  είναι και το ολικό ελάχιστο  $f$  οπότε η βέλτιστη λύση του προβλήματος είναι η  $\mathbf{x}^*$ .

### 1.3.3.4 Δυικό πρόβλημα Lagrange

Ένας άλλος τρόπος εύρεσης ολικού ελάχιστου είναι να μετασχηματίσουμε το αρχικό πρόβλημα σε υποπροβλήματα (δυικό πρόβλημα) τα οποία είναι πιο ευκολά να λυθούν:

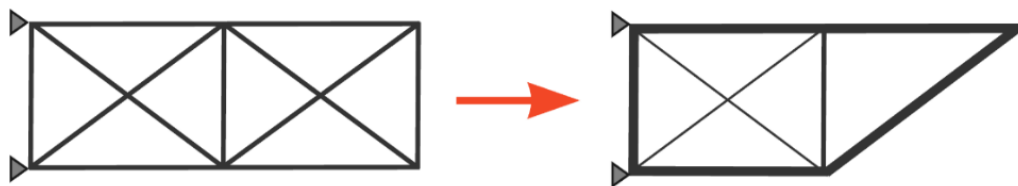
$$\begin{aligned} & \max_{\lambda} \min_x L(x, \lambda) \\ & \text{subject to } \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Το δυικό πρόβλημα μας δίνει τη δυνατότητα να λύσουμε το αρχικό (ενδεχομένως μη κυρτό) πρόβλημα βελτιστοποίησης με άλλο, συνήθως πιο απλό, τρόπο.

### 1.3.5 Τύποι προβλημάτων βελτιστοποίησης κατασκευών

Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης κατασκευών μπορούν να χωριστούν σε τρεις βασικές κατηγορίες με βάση το πώς και τί πρόβλημα βελτιστοποίησης αντιμετωπίζουν αλλά και με ποια λογική βελτιώνουν την δεδομένη κατασκευή:

- Βελτιστοποίηση μεγέθους: Αυτός ο τύπος βελτιστοποίησης επικεντρώνεται στον προσδιορισμό των βέλτιστων διαστάσεων, μεγεθών των δομικών στοιχείων μιας κατασκευής. Δηλαδή η διάταξη της κατασκευής είναι προσδιορισμένη και το πεδίο σχεδιασμού είναι σταθερό. Κατά την διάρκεια βελτιστοποίησης μεταβάλλονται οι διαστάσεις των επιμέρους στοιχείων της κατασκευής όπως το πάχος, το μήκος ή η επιφάνεια διατομής. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η βελτιστοποίηση ενός δικτυώματος, όπου οι βασικές διαστάσεις και η διάταξη δεν μπορούν να αλλάξουν, οπότε η βελτιστοποίηση γίνεται μέσω προσδιορισμού των γεωμετρικών χαρακτηριστικών των ράβδων.



Διάγραμμα 1.3: Βελτιστοποίηση μεγέθους

- Βελτιστοποίηση σχήματος: Αυτός ο τύπος βελτιστοποίησης αποσκοπεί στην αλλαγή του σχήματος της κατασκευής για τη βελτίωση της απόδοσής της. Το πεδίο σχεδιασμού μπορεί να μεταβάλλεται κατά την διάρκεια της βελτιστοποίησης, όπως τα εξωτερικά και εσωτερικά σύνορα της κατασκευής.



Διάγραμμα 1.4: Βελτιστοποίηση σχήματος

- Τοπολογική βελτιστοποίηση: Είναι η πιο γενική μορφή της βελτιστοποίησης κατασκευών. Στόχος της τοπολογικής βελτιστοποίησης είναι η εύρεση της βέλτιστης κατανομής του υλικού σε ένα δεδομένο πεδίο σχεδιασμού.



Διάγραμμα 1.5: Βελτιστοποίηση τοπολογίας

Η βελτιστοποίηση της τοπολογίας παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον λόγω της ικανότητάς της τόσο για τη βελτίωση των υπάρχουσών κατασκευών όσο και για τον αρχικό σχεδιασμό βέλτιστων σχεδίων. Στην παρούσα εργασία η τοπολογική βελτιστοποίηση θα μελετηθεί πιο αναλυτικά στα παρακάτω κεφαλιά.

### 1.5 Τεχνικές επίλυσης προβλημάτων βελτιστοποίησης κατασκευών

Υπάρχουν πολλές μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων ΒΚ. Όλες οι μέθοδοι μπορούν να χωριστούν σε δύο βασικές κατηγορίες: άμεσες και έμμεσες μέθοδοι. Πιο συγκεκριμένα αν ο σκοπός του προβλήματος βελτιστοποίησης είναι η ελαχιστοποίηση του βάρους, τότε στις άμεσες μεθόδους η αντικειμενική συνάρτηση είναι το βάρος. Αντίστροφα στις έμμεσες μεθόδους επιλέγουμε κάποια παράμετρο, η ελαχιστοποίηση της οποίας οδηγεί και στην ελαχιστοποίηση του βάρους. Συνήθως η εν λόγω παράμετρος επιλέγεται να είναι κάποιο ενεργειακό κριτήριο πχ. η εσωτερική ενέργεια. Επίσης οι άμεσες μέθοδοι μπορούν να χωριστούν σε δυο μεγάλες κατηγορίες: ντετερμινιστικές και στοχαστικές. Παρακάτω παρουσιάζονται μερικοί μέθοδοι επίλυσης:

#### Άμεσες ντετερμινιστικές μέθοδοι

- Γραμμικός προγραμματισμός (LP).
- Μη – γραμμικός προγραμματισμός (NLP).
- Ακέραιος προγραμματισμός (IP).

- Διαδοχικός γραμμικός προγραμματισμός (SLP).
- Τετραγωνικός προγραμματισμός (SQP).

#### *Άμεσες στοχαστικές μέθοδοι*

- Γενετικοί Αλγόριθμοι (Genetic Algorithms).
- Στρατηγικές Εξέλιξης (Evolution Strategy).
- Προσομοιωμένη Ανόπτηση (Simulated Annealing).
- Η μέθοδος Tabu (Tabu Search).

#### *Έμμεσες Μέθοδοι*

- Μέθοδοι βέλτιστων κριτηρίων (Optimality Criteria Methods - OC).
- Μέθοδος των κινούμενων ασυμπτωτών (Method of Moving Asymptotes - MMA).

Παρόλο που οι παραπάνω άμεσοι ντετερμινιστικοί μέθοδοι αποτελούν πολύ ισχυρά εργαλεία μαθηματικής βελτιστοποίησης συνήθως είναι δύσκολο να προσαρμοστούν για την αποτελεσματική επίλυση προβλημάτων ΒΚ, τα οποία συνήθως αποτελούν πολυδιάστατα μη-γραμμικά προβλήματα με αντικειμενική συνάρτηση που κατά κανόνα περιλαμβάνει πολλά τοπικά ακρότατα και δεν είναι κυρτή [Christensen & Klarbing, 2009].

### **1.4 Επίλογος**

Σε αυτό το κεφαλαίο έγινε μια σύντομη εισαγωγή στην διαδικασία και τις μεθόδους βελτιστοποίησης κατασκευών. Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος βελτιστοποίησης κατασκευών είναι αναγκαία προκειμένου να είναι αποτελεσματική και η έννοια της κυρτότητας αποτελεί σημαντικό χαρακτηριστικό των παραπάνω προβλημάτων. Τέλος γίνεται αναφορά στις βασικές μαθηματικές μεθόδους επίλυσης του προβλήματος βελτιστοποίησης κατασκευών, με τις έμμεσες μεθόδους να χρησιμοποιούνται ευρέως για την επίλυση του εν λόγω προβλήματος, όπως θα παρουσιαστεί και στα επόμενα κεφάλαια.



## **2 Θεωρητικό υπόβαθρο βελτιστοποίησης τοπολογίας**

### **2.1 Πρόλογος**

Το παρόν κεφάλαιο αποτελείται μια αναλυτική εισαγωγή στη βελτιστοποίηση τοπολογίας και συγκεκριμένα στα προβλήματα ελαχιστοποίησης ενδοτικότητας. Αρχικά γίνεται μελέτη της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων η οποία αποτελεί ένα πολύ βασικό μέρος της διαδικασίας βελτιστοποίησης τοπολογίας. Στη συνέχεια παρουσιάζονται μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων ΤΟ. Δίνεται ιδιαίτερη προσοχή στα προβλήματα ελαχιστοποίησης ενδοτικότητας και στην μέθοδο βέλτιστων κριτήριων.

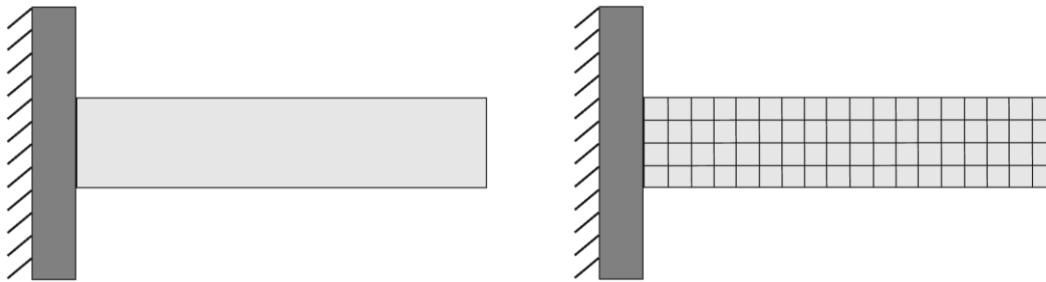
### **2.2 Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων - Finite Elements Method (FEM)**

Εκτελώντας την διαδικασία βελτιστοποίησης κατασκευής οποιουδήποτε τύπου, σε κάθε βήμα πρέπει να εξετάζεται η προτεινομένη λύση ώστε να υπάρχει η δυνατότητα να ποσοτικοποιηθεί η απόδοσή της. Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο η απόδοση της λύσης συνήθως εκφράζεται μέσω μιας ή πολλών αντικειμενικών συναρτήσεων. Αλλά ανεξάρτητα από την ένδειξη της αντικειμενικής συνάρτησης είναι αναγκαίο να προσδιορίσουμε τις μηχανικές αποκρίσεις της προτεινόμενης κατασκευής, διότι μια λύση μπορεί να έχει αποδοτική τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αλλά πολύ μεγάλη τάση ή παραμόρφωση. Συνήθως όμως η αντικειμενική συνάρτηση ορίζεται ώστε να εξαρτάται από τις μηχανικές αποκρίσεις της κατασκευής.

Άρα κατά την διάρκεια της βελτιστοποίησης, πρέπει να αναλύσουμε την συμπεριφορά της κατασκευής υπό δεδομένο φορτίο, δηλαδή πρέπει να προσδιοριστούν οι αντίστοιχες μετατοπίσεις, τάσεις και παραμορφώσεις. Υπάρχουν πολλές διαφορετικές αναλυτικές μέθοδοι που μπορούν να χρησιμοποιήσουν οι μηχανικοί για την ανάλυση μιας κατασκευής η δομής. Συχνά όμως αντιμετωπίζουμε προβλήματα τα οποία δεν μπορούν να επιλυθούν με παραδοσιακούς τρόπους, επειδή η γεωμετρία, τα φορτία ή τα υλικά είναι πολύ περίπλοκα. Για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων και την απόκτηση των απαραίτητων πληροφοριών απαιτούνται αριθμητικές μέθοδοι. Μια τέτοια μέθοδος είναι η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων (ΜΠΣ).

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων προσεγγίζει το δύσκολο έργο της επίλυσης των εξισώσεων που διέπουν ένα συνεχές σύστημα, χωρίζοντας το σώμα που αναλύεται σε μια συλλογή μικρών στοιχείων, τα οποία συνδέονται μεταξύ τους σε κόμβους και αυτά τα στοιχεία ονομάζονται πεπερασμένα. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται διακριτοποίηση και η συλλογή

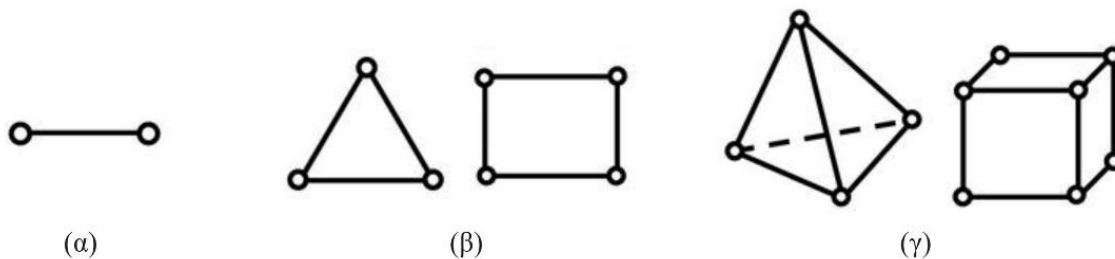
στοιχείων και κόμβων ονομάζεται πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων. Στη συνέχεια η ΜΠΣ θα προσδιορίσει μια προσεγγιστική λύση αναλύοντας κάθε πεπερασμένο στοιχείο [Logan, 2016].



Διάγραμμα 2.1: Διακριτοποίηση ράβδου με τετραγωνικά πεπερασμένα στοιχεία.

### 2.2.1 Είδη πεπερασμένων στοιχείων

Ανάλογα με το μέγεθος, τη φύση και την πολυπλοκότητα του προβλήματος, επιλέγεται το είδος των πεπερασμένων στοιχείων. Όλα τα πεπερασμένα στοιχεία μπορούν να χωριστούν σε τρεις βασικές κατηγορίες: Μονοδιάστατα ή Γραμμικά στοιχεία, Δισδιάστατα ή Επιφανειακά στοιχεία και Τρισδιάστατα στοιχεία [Logan, 2016].



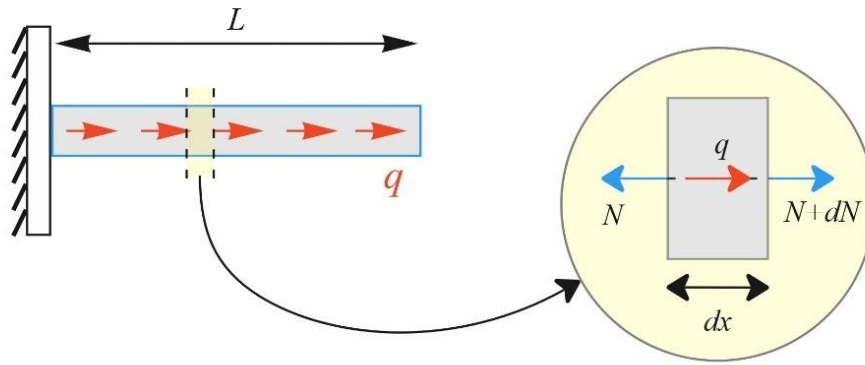
Διάγραμμα 2.2: Βασικές μορφές πεπερασμένων στοιχείων.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τρόποι επίλυσης προβλημάτων με διαφορετικά πεπερασμένα στοιχεία.

### 2.2.2 Μεθοδολογία της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων με γραμμικά στοιχεία

Για να καταλάβουμε πως λειτουργεί η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων, μπορούμε αρχικά να μελετήσουμε την επίλυση των προβλημάτων με εφαρμογή των γραμμικών στοιχείων. Αν και μπορούν να θεωρηθούν ως η απλούστερη μορφή πεπερασμένου στοιχείου, τα βασικά βήματα της μεθόδου είναι ίδια και με πιο πολύπλοκες παραλλαγές των στοιχείων.

Αρχικά έστω ότι έχουμε μια ράβδο από γραμμικώς ελαστικό υλικό με μέτρο ελαστικότητας  $E$ , πακτωμένη από μια πλευρά, και πάνω στην ράβδο ασκείται μια ομοιόμορφα κατανομημένη αξονική δύναμη. Η επιφάνεια διατομής της ράβδου είναι  $A$ . Θεωρούμε ένα διαφορικό «κομμάτι» της ράβδου απειροελάχιστου μήκους  $dx$ . Επομένως οι εσωτερικές αξονικές αντιδράσεις που δρουν στα άκρα αυτού του διαφορικού κομματιού είναι  $N$  και  $N+dN$ .



Διάγραμμα 2.3: Πακτωμένη ράβδος με ομοιόμορφα κατανεμημένη αξονική δύναμη

Επομένως από την ισορροπία των δυνάμεων έχουμε ότι:

$$(N + dN) + qdx - N = 0$$

Στη συνέχεια, διαιρώντας την παραπάνω εξίσωση με  $dx$  και λαμβάνοντας όριο για  $dx \rightarrow 0$ :

$$\frac{dN}{dx} + q = 0$$

Η σχέση μεταξύ την ανοιγμένη παραμόρφωση – μετατόπιση και τον νόμο του Hooke για ένα γραμμικώς-ελαστικό υλικό είναι:

$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} \rightarrow \sigma(x) = E\varepsilon(x) = E \frac{du(x)}{dx}$$

Επομένως μπορούμε να εκφράσουμε την αξονική δύναμη συναρτήσει των παραπάνω σχέσεων:

$$N = \sigma(x)A \rightarrow N = EA \frac{du(x)}{dx}$$

Και αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στη εξίσωση ισορροπίας προκύπτει μια διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d}{dx} \left( EA \frac{du(x)}{dx} \right) + q = 0, \quad 0 < x < L$$

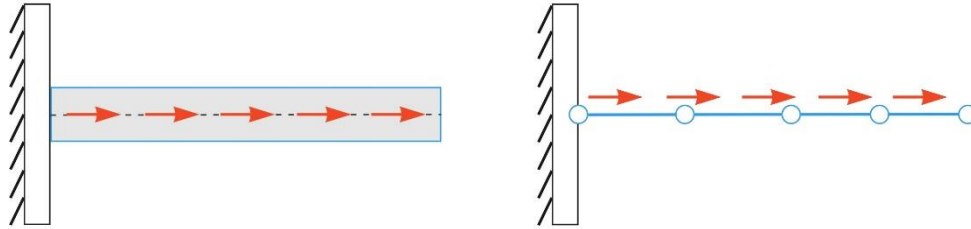
με οριακές συνθήκες

$$\text{Για } x = 0: u(0) = 0$$

$$\text{Για } x = L: EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = 0$$

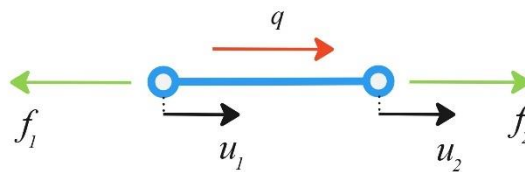
Η παραπάνω διαφορική εξίσωση (governing equation) περιγράφει την συμπεριφορά της δοκού υπό την επίδραση αξονικής ομοιόμορφα κατανεμημένης δύναμης. Μαζί με τις οριακές συνθήκες, η έκφραση της διαφορικής εξίσωσης αποτελεί την ισχυρή διατύπωση.

Συνοψίζοντας, γίνεται διακριτοποίηση της ράβδου σε πεπερασμένα στοιχεία, ώστε να έχουμε την δυνατότητα να διαχειριστούμε το δεδομένο πρόβλημα ως σειρά μικρότερων προβλημάτων. Ακολούθως, λύνοντας τα μικρά προβλήματα μπορούμε να προσδιορίσουμε την λύση για όλη την ράβδο.



Διάγραμμα 2.4: Διακριτοποίηση ράβδου με γραμμικά πεπερασμένα στοιχεία.

Κάθε γραμμικό στοιχείο μπορεί έχει μόνο αξονική παραμόρφωση και επίσης έχει μόνο δύο σενάρια φόρτισης: στη πρώτη περίπτωση έχουμε σημειακά αξονικά φορτία ( $f_1, f_2$ ) σε κάθε κόμβο και στη δεύτερη έχουμε καταναμημένο αξονικό φορτίο  $q$  κατά μήκος του στοιχείου. Σύμφωνα με την υπόθεση που κάνουμε εφαρμόζοντας την ΜΠΣ και σύμφωνα με την εκφώνηση του προβλήματος, σε κάθε στοιχείο υπάρχουν μόνο αξονικές μετατοπίσεις ( $u_1, u_2$ ) στον κόμβο 1 και 2. Δηλαδή κάθε κόμβος έχει μόνο μια κατεύθυνση στην οποία μπορεί να «κινείται». Οπότε το συγκεκριμένο πεπερασμένο στοιχείο έχει μόνο δυο βαθμούς ελευθέριας. Υπολογίζοντας τις εν λόγω κομβικές μετατοπίσεις, μας επιτρέπει να βρούμε την μετατόπιση του στοιχείου.



Διάγραμμα 2.5: Διάγραμμα γραμμικού πεπερασμένου στοιχείου.

Τώρα επιστρέφουμε πίσω στην διαφορική εξίσωση που βρήκαμε παραπάνω. Για να εφαρμόσουμε την ΜΠΣ πρέπει να επαναδιατυπωθεί η διαφορική εξίσωση σε μια ολοκληρωτική μορφή που ονομάζεται ασθενή διατύπωση. Με την βοήθεια της ασθενής διατύπωσης είναι δυνατόν να βρεθεί μια διατύπωση του προβλήματος, η οποία είναι χαμηλότερης πολυπλοκότητας. Για να κάνουμε μετατροπή από την ισχυρή διατύπωση σε ασθενή μπορούμε να εφαρμόσουμε την Αρχή των Δυνατών Έργων. Η αρχή των δυνατών έργων μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

Όταν ένας φορέας φορτίζεται με εξωτερικά φορτία ισορροπεί, τότε για οποιαδήποτε «μικρή» δυνατή παραμόρφωση του φορέα, συμβιβαστή με τις συνθήκες στηρίζεώς του, το δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων ισούται με το δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων:

$$\int_V \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \bar{\boldsymbol{U}}^T \boldsymbol{f}^B dV + \int_S \bar{\boldsymbol{U}}_s^T \boldsymbol{f}^S dS + \sum_i \bar{\boldsymbol{U}}_i^T \boldsymbol{R}_C^i$$

όπου  $\boldsymbol{f}^B, \boldsymbol{f}^S, \boldsymbol{R}_C^i$  είναι τα εξωτερικά φορτία,  $\bar{\boldsymbol{U}}$  το διάνυσμα των δυνατών μετατοπίσεων ενός τυχαίου σημείου του φορέα,  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$  οι δυνατές ανηγμένες παραμορφώσεις. Οι εκθέτες  $S$  και  $i$  υποδηλώνουν αντίστοιχα τις μετατοπίσεις των κόμβων της επιφάνειας και τις μετατοπίσεις των σημείων που εφαρμόζονται τα φορτία  $\boldsymbol{R}_C^i$ .

Οπότε εφαρμόζοντας την αρχή δυνατών έργων για το αρχικό μας πρόβλημα έχουμε:

$$\delta W_{int} = \delta W_{ext}$$

$$\text{όπου } \delta W_{int} = A \int_0^L \sigma \cdot \delta \epsilon dx, \quad \delta W_{ext} = \int_0^L q \cdot \delta u dx, \quad \delta \epsilon(x) = \frac{\delta(du)}{dx}, \quad \sigma(x) = E \frac{du}{dx}$$

Επομένως, η ασθενής διατύπωση του προβλήματος ορίζεται ως εξής:

$$A \int_0^L E \frac{du}{dx} \delta \left( \frac{du}{dx} \right) dx = \int_0^L q \cdot \delta u dx$$

Παρατηρούμε ότι η ασθενής διατύπωση περιλαμβάνει παραγώγους μικρότερης τάξης από την αρχική ισχυρή διατύπωση.

Εκτός από την αρχή των δυνατών έργων μπορούμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο του Galerkin (Galerkin Weighted Residual Method). Αρχικά θέτουμε μια ομαλή αυθαίρετη συνάρτηση  $w(x)$ . Εν συνεχεία πολλαπλασιάζουμε την διαφορική εξίσωση με την  $w(x)$  και ολοκληρώνουμε πάνω στο μήκος της ράβδου:

$$\int_0^L w(x) EA \frac{d^2 u}{dx^2} dx = \int_0^L w(x) \cdot (-q) dx$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες, προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$EA \left[ w \frac{du}{dx} \right]_0^L - \int_0^L \frac{dw}{dx} EA \frac{du}{dx} dx = \int_0^L w (-q) dx$$

$$\rightarrow \int_0^L \frac{dw}{dx} EA \frac{du}{dx} dx = EAw(L) \frac{du}{dx} \Big|_L - EAw(0) \frac{du}{dx} \Big|_0 - \int_0^L w(x) (-q) dx$$

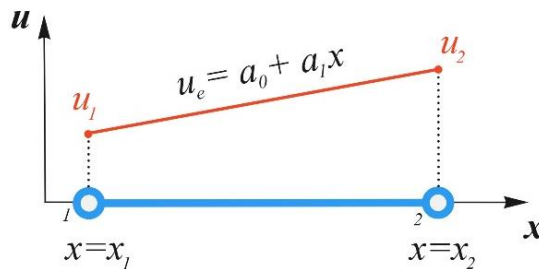
$$\begin{aligned} \rightarrow \int_0^L \frac{dw}{dx} EA \frac{du}{dx} dx &= - \int_0^L w(x) (-q) dx \\ \rightarrow \int_0^L \frac{dw}{dx} EA \frac{du}{dx} dx &= \int_0^L w(x) q dx \end{aligned}$$

Σημειώνεται ότι τα βήματα που εκτελούνται με τη μέθοδο Galerkin οδηγούν στην ουσία στο ίδιο είδος της ασθενούς διατύπωσης που είχαμε λάβει μέσω της αρχής των δυνατών έργων. Και στη συνέχεια θα εργαστούμε με την διατύπωση από την μέθοδο Galerkin.

Η συνάρτηση  $w(x)$  στην ΜΠΣ ορίζεται σύμφωνα με το είδος και την τάξη του πεπερασμένου στοιχείου και λέγεται συνάρτηση σχήματος  $N_i$ :

$$\int_0^L \frac{dN_i}{dx} EA \frac{du}{dx} dx = \int_0^L N_i q dx$$

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε την συνάρτηση σχήματος για δεδομένο στοιχείο. Σύμφωνα με την αρχική υπόθεση ότι το γραμμικό στοιχείο είναι πρώτης τάξης, δηλαδή υπάρχει μόνο ένα ζεύγος κόμβων [1,2] στα άκρα του στοιχείου. Έστω ότι οι κόμβοι βρίσκονται σε αποστάσεις  $x_1, x_2$  από την αρχή του συστήματος αντίστοιχα και το μήκος του στοιχείου είναι  $L$ . Υποθέτουμε ότι η ασκούμενη δύναμη προκαλεί τις κομβικές μετατοπίσεις  $u_1, u_2$  στους κόμβους 1 και 2 αντίστοιχα.



Διάγραμμα 2.6: Διάγραμμα κομβικών μετατοπίσεων σε ένα γραμμικό πεπερασμένο στοιχείο 1<sup>ης</sup> τάξης.

Για γραμμικά στοιχεία 1<sup>ης</sup> τάξης η μετατόπιση μπορεί να προσδιοριστεί ως μια γραμμική συνάρτηση βασισμένη σε κομβικές μετατοπίσεις. Δηλαδή  $u_e = a_0 + a_1 x$  όπου  $u_e$  είναι η μετατόπιση του στοιχείου. Στη συνέχεια πρέπει να βρούμε τα  $a_0, a_1$  με την βοήθεια των  $u_1, u_2$ :

$$\begin{aligned} u(x_1) = a_0 + a_1 x_1 = u_1 \\ u(x_2) = a_0 + a_1 x_2 = u_2 \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{u_2 x_1 - u_1 x_2}{x_2 - x_1} \\ a_1 = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} \end{cases}$$

Οπότε η προσέγγιση της μετατόπισης του στοιχείου είναι:

$$u_e = u = \frac{u_2 x_1 - u_1 x_2}{x_2 - x_1} + \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} x$$

$$\rightarrow u = \left[ \frac{(x_2 - x)}{x_2 - x_1} \right] u_1 + \left[ \frac{(x - x_1)}{x_2 - x_1} \right] u_2$$

Άρα οι συναρτήσεις σχήματος για ένα γραμμικό στοιχείο μπορούν να οριστούν ως εξής:

$$N_1 = \left[ \frac{(x_2 - x)}{x_2 - x_1} \right], \quad N_2 = \left[ \frac{(x - x_1)}{x_2 - x_1} \right] u_2$$

$$\rightarrow u = N_1 u_1 + N_2 u_2$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση σχήματος αντιστοιχεί σε κάθε κόμβο του στοιχείου και μπορεί να παίρνει μόνο δυαδικές τιμές, δηλαδή 1 ή 0. Δηλαδή  $N_1 = 1$  όταν το  $x = x_1$  και  $N_1 = 0$  όταν το  $x \neq x_1$ .

Επομένως η παράγωγος της  $u$  ως προς  $x$  είναι :

$$\frac{du}{dx} = \frac{dN_1}{dx} u_1 + \frac{dN_2}{dx} u_2 \rightarrow \frac{du}{dx} = \left[ \frac{dN_1}{dx} \quad \frac{dN_2}{dx} \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

τώρα θα αντικαταστήσουμε την έκφραση της μετατόπισης που βρήκαμε στην διατύπωση από την μέθοδο Galerkin:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \int_0^L \frac{dN_i}{dx} EA \left[ \frac{dN_1}{dx} \quad \frac{dN_2}{dx} \right] dx = \int_0^L N_i q dx$$

Το αριστερό ολοκλήρωμα λέγεται μητρώο δυσκαμψίας και το δεξί μητρώο κομβικών δυνάμεων. Στη συνέχεια πρέπει να διατυπώσουμε το μητρώο δυσκαμψίας σε πιο κατάλληλη μορφή. Παρατηρούμε ότι η παραπάνω εξίσωση αποτελεί ένα σύστημα δυο εξισώσεων, αφού  $i = 1,2$  δηλαδή μια εξίσωση για κάθε συνάρτηση σχήματος. Επομένως θα υπολογίσουμε τις παραγώγους των συναρτήσεων σχήματος:

$$N_1 = \frac{(x_2 - x)}{x_2 - x_1} \rightarrow \frac{dN_1}{dx} = -\frac{1}{x_2 - x_1} = -\frac{1}{L}$$

$$N_2 = \frac{(x - x_1)}{x_2 - x_1} \rightarrow \frac{dN_2}{dx} = \frac{1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{L}$$

Και κάνοντας την αντικατάσταση στην ασθενή διατύπωση έχουμε το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases} EA \int_0^L \frac{dN_1}{dx} \left[ -\frac{1}{L} \frac{1}{L} \right] dx = EA \int_0^L \left( -\frac{1}{L} \right) \left[ -\frac{1}{L} \frac{1}{L} \right] dx = \frac{EA}{L} [1 \quad -1] \\ EA \int_0^L \frac{dN_2}{dx} \left[ -\frac{1}{L} \frac{1}{L} \right] dx = EA \int_0^L \left( \frac{1}{L} \right) \left[ -\frac{1}{L} \frac{1}{L} \right] dx = \frac{EA}{L} [-1 \quad 1] \end{cases}$$

Οπότε το μητρώο δυσκαμψίας ενός γραμμικού πεπερασμένου στοιχείου 1<sup>ης</sup> τάξης ή τοπικό μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου  $e$  είναι:

$$\mathbf{k}_e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Το πρόβλημα που αντιμετωπίζει η ΜΠΣ περιλαμβάνουν τα πλέγματα από πολλά στοιχεία, και κάθε στοιχείο αποτελεί ένα μέρος του πλέγματος. Επειδή τα στοιχεία είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους, το μητρώο δυσκαμψίας ενός στοιχείου είναι εξαρτημένο από τα γειτονικά στοιχεία. Οπότε θέλουμε να έχουμε ένα μητρώο δυσκαμψίας που μπορεί να περιγράψει την δυσκαμψία ολόκληρης της κατασκευής που μελετάμε και όχι μεμονωμένου στοιχείου. Για αυτό το λόγο ορίζουμε συνολικό μητρώο δυσκαμψίας.

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{k}_e)_i, \text{ όπου } n \text{ είναι η αριθμός των στοιχείων}$$

Συγκεκριμένα, έστω ότι η ράβδος μας αποτελείται μόνο από δυο γραμμικά στοιχεία 1<sup>ης</sup> τάξης με  $(\mathbf{k}_e)_1, (\mathbf{k}_e)_2$  τα αντίστοιχα τοπικά μητρώα δυσκαμψίας. Το άθροισμα των τοπικών μητρώων δυσκαμψίας γίνεται με βάση τους αντίστοιχους βαθμούς ελευθερίας ή με βάση του κοινού κόμβου:

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Η διάσταση του συνολικού μητρώου δυσκαμψίας εξαρτάται από το συνολικό πλήθος των βαθμών ελευθερίας της κατασκευής. Συγκεκριμένα το παραπάνω παράδειγμα αντιστοιχεί σε σύστημα με τρεις βαθμούς ελευθερίας, οπότε η διάσταση του ολικού μητρώου δυσκαμψίας είναι  $3 \times 3$ .

Αντίστοιχο τοπικό και ολικό μητρώο δυνάμεων για το αρχικό πρόβλημα είναι:

$$\mathbf{f}_e = \frac{qL}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{F} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{f}_e)_i$$

Τώρα σύμφωνα με όλα τα παραπάνω η θεμελιώδης έκφραση της ΜΠΣ ορίζεται ως εξής:



$$\mathbf{u}K = \mathbf{F}$$

όπου το  $\mathbf{u}$  είναι το μητρώο των μετατοπίσεων.

Τώρα λύνοντας το παραπάνω σύστημα βρίσκουμε το μητρώο των μετατοπίσεων. Συνήθως όταν κάνουμε μια στατική ανάλυση εκτός από τις μετατοπίσεις μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε τις τάσεις  $\sigma$  και τις ανοιγμένες παραμορφώσεις  $\varepsilon$ . Από την στιγμή που βρήκαμε τις μετατοπίσεις, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τις ζητούμενες ανοιγμένες παραμορφώσεις και τάσεις:

$$\varepsilon_e = \frac{du_e}{dx} = \frac{d}{dx} \left( [N_1 \quad N_2] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \right) = \left[ \frac{dN_1}{dx} \quad \frac{dN_2}{dx} \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = [B][u_e]$$

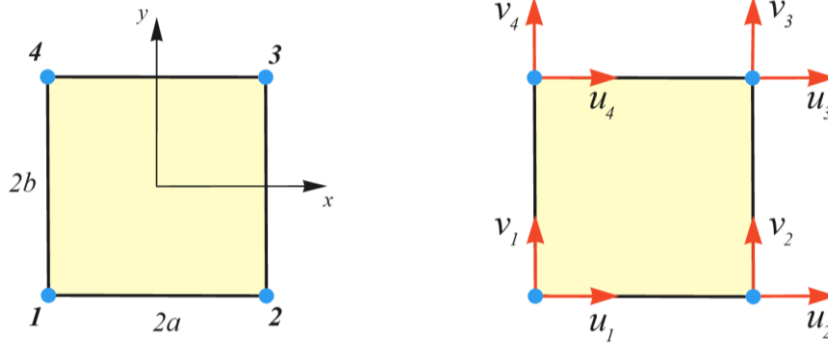
$$\sigma_\varepsilon = E\varepsilon_e$$

Η παραπάνω διατύπωση του μονοδιάστατου προβλήματος περιγράφει πλήρως τα βασικά βήματα της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Όπως είδαμε, η πολυπλοκότητα του προβλήματος προκύπτει όχι μόνο από την γεωμετρία, τα υλικά της κατασκευής και τα ασκούμενα φόρτια, αλλά σε μεγάλο βαθμό και από την επιλογή του πεπερασμένου στοιχείου. Παρόλο που τα μονοδιάστατα γραμμικά πεπερασμένα στοιχεία 1<sup>ης</sup> τάξης είναι το πιο απλό είδος πεπερασμένων στοιχείων, μπορούν να περιγράψουν πλήρως τη μεθοδολογία της ΜΠΣ. Στη συνέχεια, προκειμένου να γενικεύσουμε την μεθοδολογία της ΜΠΣ, παρουσιάζεται η υλοποίηση της μεθόδου με δισδιάστατα τετραγωνικά στοιχεία.

### 2.2.3 Μεθοδολογία της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων με 2D τετραγωνικά στοιχεία

Σε αυτή την εργασία θα δώσουμε ιδιαίτερη προσοχή στη ανάλυση δισδιάστατων κατασκευών οπότε είναι αναγκαστικό να μελετήσουμε και την εφαρμογή της ΜΠΣ στα δισδιάστατα προβλήματα στέρων. Συγκεκριμένα σε αυτή την ενότητα θα παρουσιαστεί η ανάλυση στέρων εφαρμόζοντας τα επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία 1<sup>ης</sup> τάξης.

Θεωρούμε τετραγωνικό πεπερασμένο στοιχείο 1<sup>ης</sup> τάξης. Κάθε πεπερασμένο στοιχείο πρέπει να έχει καλά ορισμένες διαστάσεις οπότε υποθέτουμε ότι το δεδομένο τετραγωνικό στοιχείο έχει ύψος  $2b$  και πλάτος  $2a$ , όπου  $b, a$  είναι θετικές σταθερές.

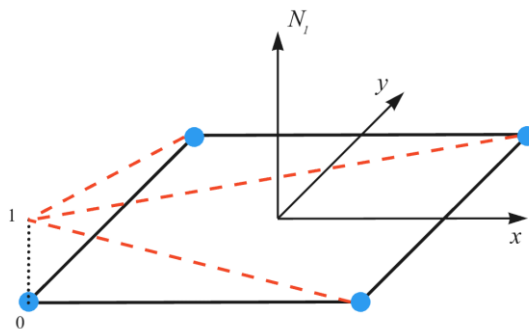


Διάγραμμα 2.7: Διάγραμμα επίπεδου τετραγωνικού πεπερασμένου στοιχείου  $I^{ns}$  τάξης.

Όπως βλέπουμε το τετραγωνικό στοιχείο περιλαμβάνει τέσσερις κόμβους και επειδή βρισκόμαστε στο επίπεδο, κάθε κόμβος τώρα έχει δυο βαθμούς ελευθερίας. Όπως είδαμε στα γραμμικά στοιχεία δεν ψάχνουμε την μετατόπιση ολόκληρου του στοιχείου, αλλά την προσεγγίζουμε με την βοήθεια των κομβικών μετατοπίσεων και συναρτήσεων του σχήματος. Οπότε θεωρούμε ότι η προσέγγιση της μετατόπισης είναι:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 N_1 + u_2 N_2 + u_3 N_3 + u_4 N_4 \\ v_1 N_1 + v_2 N_2 + v_3 N_3 + v_4 N_4 \end{bmatrix}$$

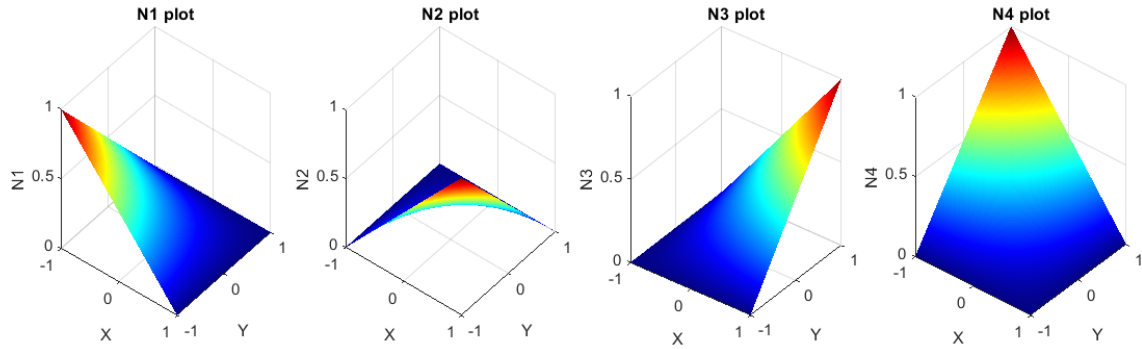
Στη συνέχεια πρέπει να προσδιορίσουμε τις συναρτήσεις σχήματος για το δεδομένο στοιχείο. Κάθε συνάρτηση σχήματος σε οποιαδήποτε στοιχείο πρέπει να διατηρεί μια βασική ιδιότητα: η συνάρτηση  $N_i$  που αντιστοιχεί στον κόμβο  $i$  πρέπει να έχει τιμή 1 σε αυτόν τον κόμβο, δηλαδή  $N_i(i) = 1$ , και 0 σε οποιοδήποτε άλλον κόμβο  $N_i(j) = 0$  όπου  $j \neq i$ .



Διάγραμμα 2.6: Διάγραμμα συνάρτησης σχήματος για το επίπεδο τετραγωνικό στοιχείο  $I^{ns}$  τάξης.

Ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία, όπως στα γραμμικά στοιχεία, μπορούμε να ορίσουμε τις συναρτήσεις μορφής για κάθε κόμβο του τετραγωνικού στοιχείου ως εξής:

$$N_1 = \frac{(a-x)(b-y)}{4ab}, N_2 = \frac{(a+x)(b-y)}{4ab}, N_3 = \frac{(a+x)(b+y)}{4ab}, N_4 = \frac{(a-x)(b+y)}{4ab}$$



Διάγραμμα 2.8: Τρισδιάστατο Διάγραμμα συνάρτησης σχήματος για το κάθε κόμβο επίπεδου τετραγωνικού στοιχείου  $I^{ns}$  τάξης.

Επομένως μπορούμε να γράψουμε την κομβική μετατόπιση σε μητρική μορφή:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = [N] \mathbf{u}_e$$

Στη συνέχεια για να ολοκληρώσουμε την διατύπωση της προσέγγισης για τα τετραγωνικά στοιχεία πρέπει να ορίσουμε το μητρώο δυσκαμψίας και το μητρώο δυνάμεων. Εφαρμόζοντας παρόμοια με το γραμμικό στοιχείο την διαδικασία, δηλαδή προσδιορίζοντας την ασθενή μορφή του προβλήματος, μπορούμε να βρούμε τις εκφράσεις του μητρώου δυσκαμψίας και του μητρώου δυνάμεων. Συγκεκριμένα θα εφαρμόσουμε την αρχή δυνατών έργων (ή αρχή ελάχιστης δυναμικής ενέργειας) για να διατυπώσουμε την γενική έκφραση ΜΠΣ για δισδιάστατο πεπερασμένο στοιχείο [Παπαδρακάκης, 2001]. Θα ξεκινήσουμε με την συνολική δυναμική ενέργεια:

$$\Pi = U + \Omega_b + \Omega_p + \Omega_s$$

όπου η ενέργεια παραμόρφωσης είναι:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\varepsilon}^T [C] \boldsymbol{\varepsilon} dV$$

όπου το  $[C]$  είναι το μητρώο κατάστασης και θα μελετηθεί η έννοιά του στη συνέχεια.

Η δυναμική ενέργεια που παράγεται από δυνάμεις του σώματος είναι:

$$\Omega_b = - \iiint_V \mathbf{u}^T \boldsymbol{\rho} dV, \quad \text{όπου } \boldsymbol{\rho} \text{ είναι ο πίνακας πυκνοτήτων}$$

Η δυναμική ενέργεια που παράγεται από ασκούμενα σημειακά φορτία είναι:

$$\Omega_p = -\mathbf{u}_e^T \mathbf{P}, \quad \text{όπου το } \mathbf{P} \text{ είναι ο πίνακας σημειακών εξωτερικών φορτίων}$$

Τέλος, η δυναμική ενέργεια που προκύπτει από εξωτερικά κατανομημένα φορτία δίνεται από τη σχέση:

$$\Omega_s = - \iint_S \mathbf{u}_s^T \mathbf{T}_s dS$$

Επομένως κάνουμε αντικατάσταση  $\mathbf{u} = [N]\mathbf{u}_e$ ,  $\mathbf{u}_s = [N_s]\mathbf{u}_e$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon} = [B]\mathbf{u}_e$  και:

$$\Pi = \frac{1}{2} \iiint_V ([B]^T \mathbf{u}_e^T [C]) [B] \mathbf{u}_e dV - \iiint_V [N]^T \mathbf{u}_e^T \boldsymbol{\rho} dV - \mathbf{u}_e^T \mathbf{P} - \iint_S [N_s]^T \mathbf{u}_e^T \mathbf{T}_s dS$$

όπου το  $[B]$  είναι ο πίνακας των μερικών παραγώγων των συναρτήσεων σχήματος.

Με την ίδια λογική, όπως στα γραμμικά στοιχεία, προκύπτει ότι οι τρεις τελευταίοι όροι της παραπάνω εξίσωσης αντιστοιχούν στο μητρώο κομβικών δυνάμεων:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_e &= \iiint_V [N]^T \boldsymbol{\rho} dV + \mathbf{P} + \iint_S [N_s]^T \mathbf{T}_s dS \rightarrow \\ \rightarrow \Pi &= \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \left( \iiint_V [B]^T [C] [B] dV \right) \mathbf{u}_e - \mathbf{u}_e^T \mathbf{f}_e \end{aligned}$$

Επομένως παίρνουμε την μερική παράγωγο της  $\Pi$  ως προς τις κομβικές μετατοπίσεις  $\mathbf{u}_e$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{u}_e} &= \mathbf{u}_e \left( \iiint_V [B]^T [C] [B] dV \right) - \mathbf{f}_e = 0 \rightarrow \\ \rightarrow \mathbf{u}_e &\left( \iiint_V [B]^T [C] [B] dV \right) = \mathbf{f}_e \end{aligned}$$

Οπότε, κατά συνέπεια καταλήγουμε σε μια γνωστή μορφή της εξίσωσης, όπου από την αριστερή πλευρά έχουμε τις κομβικές μετατοπίσεις και το τοπικό μητρώο δυσκαμψίας, ενώ από δεξιά έχουμε το μητρώο κομβικών δυνάμεων:

$$\mathbf{k}_e = \iiint_V [B]^T [C] [B] dV \rightarrow \mathbf{u}_e \mathbf{k}_e = \mathbf{f}_e$$

Επαναδιατυπώνοντας την παραπάνω εξίσωση τοπικού μητρώου δυσκαμψίας, στην περίπτωση τετραγωνικού στοιχείου 1ης τάξης ύψους  $2b$  και πλάτους  $2a$  με σταθερό πάχος  $t$ , έχουμε:

$$\mathbf{k}_e = t \int_{-a}^a \int_{-b}^b [B]^T [C] [B] dx dy$$

Αντίστοιχα το μητρώο κομβικών δυνάμεων παίρνει την μορφή:

$$\mathbf{f}_e = t \int_{-a}^a \int_{-b}^b [N]^T \boldsymbol{\rho} dy dx + \mathbf{P} + t \int_{-b}^b [N_s]^T \mathbf{T}_s dy$$

Και τελικά μπορούμε να γράψουμε το ολικό μητρώο δυσκαμψίας και το διάνυσμα ολικών φορτίων:

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{k}_e)_i$$

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{f}_e)_i$$

Άρα η τελική έκφραση της ΜΠΣ είναι:

$$\mathbf{u}\mathbf{K} = \mathbf{F}$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα προσδιορίζουμε τις άγνωστες μετατοπίσεις  $\mathbf{u}$ . Επομένως αφού βρήκαμε τις μετατοπίσεις μπορούμε να βρούμε τις παραμορφώσεις και τις τάσεις εφαρμόζοντας τους τύπους  $\boldsymbol{\varepsilon} = [B]\mathbf{u}_e$ ,  $\boldsymbol{\sigma} = [C][B]\mathbf{u}_e$  αντίστοιχα.

Επίσης αξίζει να μελετηθούν οι σχέσεις τάσης – παραμόρφωσης αφού όπως έχει σημειωθεί παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην διατύπωση του μητρώου δυσκαμψίας. Οι παραπάνω σχέσεις βασίζονται στην υπόθεση ότι έχουμε επίπεδες τάσεις ή επίπεδες παραμορφώσεις. Συγκεκριμένα:

- Επίπεδη τάση είναι μια κατάσταση τάσης, στην οποία οι ορθές και διατμητικές τάσεις που είναι κάθετες στο επίπεδο είναι μηδέν, δηλαδή  $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ .
- Επίπεδη παραμόρφωση είναι μια κατάσταση παραμόρφωσης, στην οποία η κάθετη στο επίπεδο  $XY$  παραμόρφωση και οι διατμητικές παραμορφώσεις είναι μηδέν, δηλαδή  $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$ .

Επομένως, η έκφραση της ανοιγμένης παραμόρφωσης σε δυο διαστάσεις είναι:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = [B]\mathbf{u}_e$$

Και στη συνέχεια η διατύπωση της τάσης είναι:

- Για συνθήκες επίπεδης τάσης έχουμε:

$$\sigma_{plane\ stress} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = [C]\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

- Για συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης έχουμε:

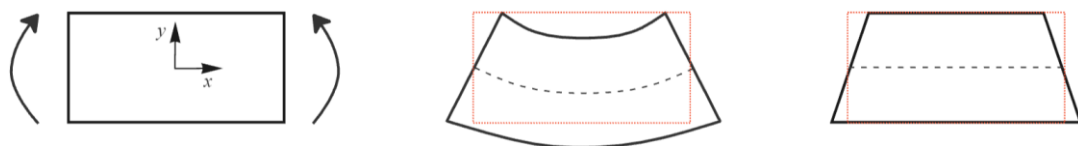
$$\sigma_{plane\ strain} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = [C]\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

Το  $[C]$  ονομάζεται καταστατικό μητρώο και  $E$  είναι το μέτρο ελαστικότητας και  $\nu$  είναι ο λόγος Poisson. Και σε γενική μορφή η έκφραση της τάσης μπορεί να γραφτεί με τον παρακάτω τρόπο:

$$\boldsymbol{\sigma} = [C]\boldsymbol{\varepsilon} = [C][B]\mathbf{u}_e$$

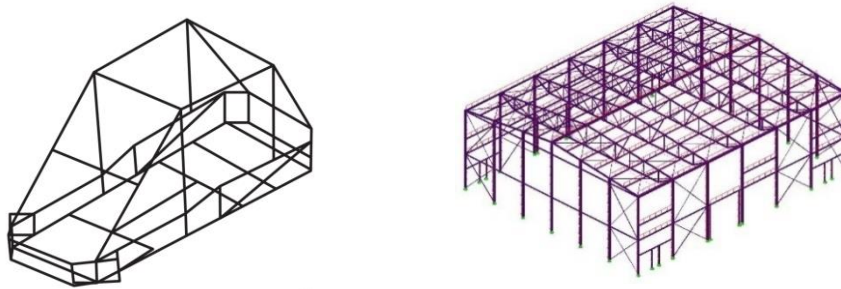
#### 2.2.4 Προκλήσεις της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων

Όπως αναφέρθηκε στην αρχή του κεφαλαίου, η ΜΠΣ είναι μια προσεγγιστική μέθοδος. Και όπως μπορούμε να καταλάβουμε έχει τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά της. Το πιο βασικό πλεονέκτημα είναι ότι μας δίνει την δυνατότητα να λύσουμε τα προβλήματα στα οποία είναι πάρα πολύ δύσκολο ή αδύνατο να βρεθεί μια λύση με παραδοσιακές μεθόδους, όπως ενεργειακές. Το πρώτο μειονέκτημα της μεθόδου κρύβεται στη φύση του. Όπως καταλαβαίνουμε μια προσέγγιση πάντα θα αποκλίνει από την πραγματικότητα. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι τα τετραγωνικά στοιχεία 1<sup>ης</sup> τάξης στην κατάσταση καθαρής κάμψης. Όπως αναφέραμε προηγουμένως η μετατόπιση μεταξύ των κόμβων στα στοιχεία 1<sup>ης</sup> τάξης ακολουθεί την γραμμική συνάρτηση ή με άλλα λόγια, οι πλευρές του στοιχείου είναι πάντα ευθείες. Οπότε στην περίπτωση καθαρής κάμψης, μπορεί να προκύψει το πρόβλημα που τα πεπερασμένα στοιχεία δεν μπορούν να προσεγγίσουν την ρεαλιστική συμπεριφορά της κατασκευής, αφού τα στοιχεία παραμορφώνονται λιγότερο, καθώς η γραμμική συνάρτηση έχει μεγάλη απόκλιση από την πραγματική. Ως αποτέλεσμα έχουμε το φαινόμενο υπερβολικής δυσκαμψίας που συνήθως ονομάζεται παρασιτική διάτμηση ή κλείδωμα διάτμησης [Logan, 2016].



Διάγραμμα 2.9: Φαινόμενο υπερβολικής δυσκαμψίας.

Για να ξεπεράσουμε τέτοια φαινόμενα μπορούμε να αυξήσουμε τον αριθμό των στοιχείων ή να χρησιμοποιήσουμε στοιχεία 2<sup>ης</sup> τάξης. Γενικά η επιλογή του είδους στοιχείου και του αριθμού των στοιχείων είναι πολύ σημαντικό μέρος της ΜΠΣ. Για παράδειγμα οι κατασκευές που αποτελούν δικτυώματα και πλαίσια καλύτερα να μοντελοποιηθούν εφαρμόζοντας τα γραμμικά στοιχεία 1<sup>ης</sup> ή 2<sup>ης</sup> τάξης, παρόλο που θεωρούνται το πιο απλό είδος πεπερασμένων στοιχείων, έχουν την καλύτερη προσαρμοστικότητα στην προσέγγιση της συμπεριφοράς των δικτυωμάτων και πλαισίων σε σχέση με πιο σύνθετα στοιχεία που κάνουν το πρόβλημα υπολογιστικά πιο δύσκολο με ελάχιστο έως καθόλου κέρδος στην ακρίβεια της τελικής ανάλυσης της κατασκευής.



Διάγραμμα 2.10: Παραδείγματα εφαρμογής γραμμικών πεπερασμένων στοιχείων [Logan, 2016].

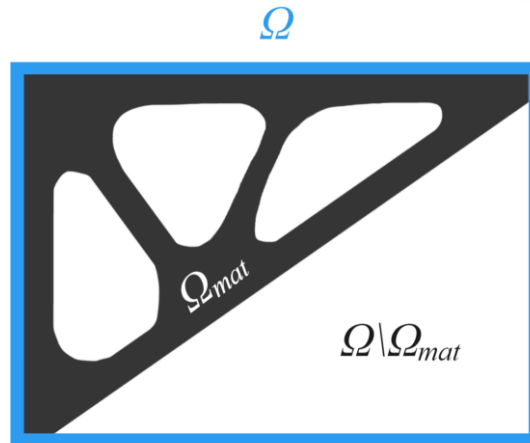
Με άλλα λόγια, με την σωστή επιλογή των παραμέτρων της ΜΠΣ, μπορούμε να μειώσουμε δραστικά τα σφάλματα που προκύπτουν κατά την διάρκεια της επίλυσης και να καταφέρουμε να μοντελοποιήσουμε την συμπεριφορά της κατασκευής, ώστε να είναι πολύ κοντά στη πραγματικότητα. Επίσης τα πολύπλοκα μοντέλα, με πολύ πυκνά πλέγματα, δεν οδηγούν πάντα στα καλύτερα αποτελέσματα, όμως οδηγούν σε τεράστια αύξηση της πολυπλοκότητας του προβλήματος.

Το δεύτερο μεγάλο μειονέκτημα της μεθόδου είναι η πολυπλοκότητα του. Συγκεκριμένα η πολυπλοκότητα της ΜΠΣ στη χειρότερη περίπτωση είναι  $O(N^3)$  όπου το  $N$  είναι ο συνολικός αριθμός των βαθμών ελευθέριας. Η ανάλυση της κατασκευής με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων απαιτεί πολλούς υπολογιστικούς πόρους και χρόνο. Προφανώς, κατάλληλη μοντελοποίηση και διακριτοποίηση μπορεί να μειώσει τον απαιτούμενο χρόνο ανάλυσης μιας κατασκευής αλλά η εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων παραμένει υπολογιστικά ακριβή. Στα προβλήματα τοπολογικής βελτιστοποίησης όπου η λύση εξαρτάται άμεσα από την ανάλυση των πεπερασμένων στοιχείων, η μεγάλη πολυπλοκότητα οδηγεί σε σημαντική αύξηση του χρόνου εκτέλεσης της βελτιστοποίησης και καθιστά πρακτικά αδύνατη τη βελτιστοποίηση για μεγάλες και γεωμετρικά πολύπλοκες κατασκευές. Στην επόμενη ενότητα θα παρουσιαστεί αναλυτικότερα ο ρόλος της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων στην επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης τοπολογίας.

### 2.3 Βελτιστοποίηση τοπολογίας ως πρόβλημα ελαχιστοποίησης ενδοτικότητας

Η βελτιστοποίηση τοπολογίας (BT) μπορεί να χαρακτηριστεί ως μια μεθοδολογία η οποία επικεντρώνεται στην εύρεση της βέλτιστης κατανομής του υλικού που απαρτίζει την κατασκευή στο δεδομένο πεδίο σχεδιασμού υπό δεδομένες συνθήκες, όπως τα φορτία, οι στηρίξεις, ο τελικός όγκος της κατασκευής και ενδεχομένως ορισμένοι σχεδιαστικοί περιορισμοί.

Συγκεκριμένα, έστω  $\Omega$  το πεδίο σχεδιασμού. Το εν λόγω πεδίο περιλαμβάνει το υποσύνολο  $\Omega_{mat}$  που περιέχει τα σημεία του πεδίου στα οποία υπάρχει υλικό (στερεά σημεία), ενώ το υπόλοιπο  $\Omega \setminus \Omega_{mat}$  περιλαμβάνει τα σημεία τα οποία πρέπει να είναι κενά.



Διάγραμμα 2.11: Διάγραμμα πεδίου σχεδιασμού.

Επομένως το πρόβλημα BT μπορεί να περιγραφεί ως ένα δυαδικό πρόβλημα, στο οποίο πρέπει να προσδιορίσουμε το υποσύνολο  $\Omega_{mat}$  του πεδίου σχεδιασμού, το οποίο «περιλαμβάνει» το υλικό. Αρχικά χρειάζεται να ορίσουμε κατάλληλη μαθηματική έκφραση του είδους του σημείου, δηλαδή τον τρόπο με τον οποίο τα σημεία χαρακτηρίζονται ως στερεά ή κενά. Τέτοιο κριτήριο μπορεί να είναι το μέτρο ελαστικότητας, δηλαδή αν το δεδομένο υλικό έχει μέτρο ελαστικότητας  $E_0$ , τότε κάθε στερεό σημείο αντίστοιχα, θα έχει αυτό το μέτρο ελαστικότητας. Αντίθετα, το κενό σημείο θα έχει μέτρο ελαστικότητας μηδέν. Άρα το μέτρο ελαστικότητας πλέον δεν είναι σταθερό και εξαρτάται από την θέση του σημείου στο πεδίο σχεδιασμού. Οπότε για κάθε σημείο  $x$  στο πεδίο  $\Omega$  ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$E_{\text{σημειου}} = \mathbb{1}_{\Omega_{mat}} E_0, \quad \mu\epsilon \quad \mathbb{1}_{\Omega_{mat}} = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_{mat} \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_{mat} \end{cases}$$

$$\text{και} \quad \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\Omega_{mat}} d\Omega = \text{Volume}(\Omega_{mat}) \leq V$$



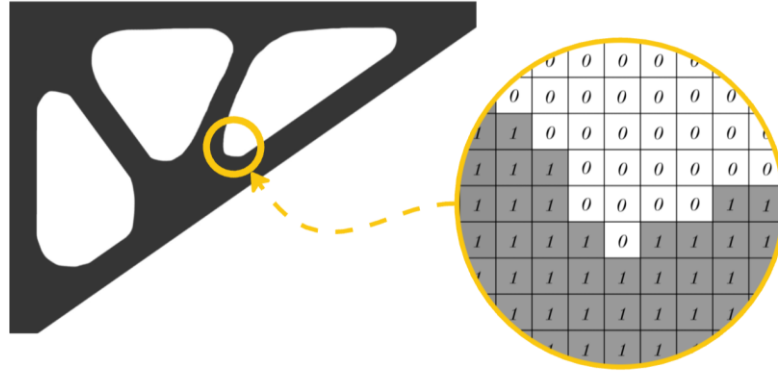
όπου το  $V$  είναι το άνω φράγμα του συνολικού όγκου της τελικής κατασκευής.

Η παραπάνω διατύπωση αποτελεί ένα διακριτό πρόβλημα σε ένα συνεχές πεδίο και όπως αναφέρθηκε προηγουμένως τέτοια προβλήματα είναι δύσκολο να λυθούν. Με άλλα λόγια, πρέπει να βρούμε αν θα υπάρχει ή όχι το υλικό σε κάθε σημείο του χώρου, όμως σε ένα συνεχές σύστημα το πλήθος τέτοιων σημείων είναι άπειρο. Οπότε χρειάζεται μια διακριτοποίηση του πεδίου σχεδιασμού ώστε το πλήθος των σημείων να γίνει πεπερασμένο και τα σημεία να διατυπωθούν ως πεπερασμένα στοιχεία.

Στη συνέχεια, με βάση το διακριτοποιημένο πεδίο σχεδιασμού, μπορούμε να διατυπώσουμε το πρόβλημα BT ως πρόβλημα μαθηματικής βελτιστοποίησης. Αρχικά πρέπει να ορίσουμε την αντικειμενική συνάρτηση. Όπως προαναφέρθηκε, ο σκοπός της BT είναι να βρει μια βέλτιστη κατασκευή υπό δεδομένες συνθήκες, και το βέλτιστο για μια κατασκευή συνήθως ορίζεται ως το ελάχιστο βάρος και τη μέγιστη δυσκαμψία. Προφανώς η επίλυση του προβλήματος με δυο αντικειμενικές συναρτήσεις (βάρος και δυσκαμψία), που επίσης σχετίζονται άμεσα μεταξύ τους, είναι αρκετά δύσκολο πρόβλημα το οποίο θα θέλαμε να αποφύγουμε και καλύτερα να επιλέξουμε μια εκ των δύο ως αντικειμενική συνάρτηση. Μια επιλογή θα ήταν η ελαχιστοποίηση της μάζας (ή του όγκου) ως αντικειμενική συνάρτηση, το οποίο θα έδινε προτεραιότητα στην μείωση του πλήθους των στερεών στοιχείων, χωρίς να βελτιώνει άμεσα την αντοχή της κατασκευής. Επομένως θα χρειαζόταν να διατυπωθούν περιορισμοί που θα εξασφαλίζουν την διατήρηση της αντοχής και κατ' επέκταση της αποτελεσματικότητας της κατασκευής. Τότε όμως, η αύξηση του αριθμού περιορισμών μπορεί προκαλέσει μεγάλη αύξηση στην πολυπλοκότητα του προβλήματος. Από την άλλη πλευρά, η επιλογή της δυσκαμψίας δίνει προτεραιότητα στη ενίσχυση της αποδοτικότητας της κατασκευής και η ελαχιστοποίηση της μάζας γίνεται με περιορισμό του συνολικού όγκου (ή επιφάνειας) της κατασκευής. Οπότε η επιλογή της δυσκαμψίας ως αντικειμενική συνάρτηση συνήθως είναι μια λογική απόφαση. Στα πλαίσια αυτής της εργασίας, η ανάλυση BT θα επικεντρωθεί στην επίλυση προβλημάτων μεγιστοποίησης της δυσκαμψίας της κατασκευής, μέσω της ελαχιστοποίησης του έργου που παράγεται από τα εξωτερικά φορτία, δηλαδή μέσω της ελαχιστοποίησης ενδοτικότητας (compliance minimization). Επομένως σε ένα διακριτοποιημένο σύστημα η ενδοτικότητα ορίζεται ως εξής:

$$W_{ext} = C = \mathbf{F}\mathbf{u} = \mathbf{u}^T \mathbf{F}\mathbf{u}$$

όπου  $\mathbf{F}$  και  $\mathbf{u}$  είναι το διάνυσμα ολικών φορτίων και ολικών μετατοπίσεων αντίστοιχα.



Διάγραμμα 2.12: Διάγραμμα κατασκευής με διακριτές μεταβλητές σχεδιασμού.

Επομένως αφού έχει επιλεχθεί η αντικειμενική συνάρτηση, πρέπει να προσδιοριστούν οι μεταβλητές σχεδιασμού. Προηγουμένως διατυπώσαμε την έκφραση για στερεό και κενό σημείο σε συνεχές πεδίο, αντίστοιχα μπορούμε να κάνουμε και για διακριτοποιημένο πεδίο. Δηλαδή κάθε πεπερασμένο στοιχείο μπορεί να περιλαμβάνει υλικό ή να είναι κενό, οπότε μπορούμε να ορίσουμε μια δυαδική μεταβλητή  $x_e = 1$  ή  $0$  με  $e = 1, \dots, n$  ώστε η μέτρο ελαστικότητας του στοιχείου να παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$E_e(x_e) = x_e E_0$$

Άρα, το καταστατικό μητρώο τώρα εξαρτάται από την μεταβλητή  $x_e$ :

$$[C]_{2D} = \frac{x_e E_0}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad [C]_{2D} = \frac{x_e E_0}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Επομένως και το τοπικό μητρώο δυσκαμψίας είναι μια συνάρτηση του  $x_e$ :

$$\mathbf{k}_e(x_e) = x_e \iiint_V [B]^T [C] [B] dV = x_e \mathbf{k}_e^0$$

Και προφανώς η αντικειμενική συνάρτηση εξαρτάται από τις μεταβλητές σχεδιασμού, καθώς:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^n \mathbf{k}_e(x_e) \rightarrow \mathbf{u}(x_e) = \mathbf{K}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{F} \rightarrow C(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u}$$

Τελικά, όταν η αντικειμενική συνάρτηση και οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι ορισμένες, το πρόβλημα ΒΤ μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$(BT) \begin{cases} \min_x C(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} = \sum_{e=1}^n (x_e) \mathbf{u}_e^T k_e^0 \mathbf{u}_e \\ \text{subject to} \begin{cases} \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F} \\ x_e = 1 \text{ ή } 0, \quad e = 1, \dots, n \\ \mathbf{x}^T \mathbf{v} = \sum_{e=1}^n x_e v_e \leq V \end{cases} \end{cases}$$

όπου  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  και  $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  είναι το διάνυσμα της μεταβλητής σχεδιασμού και το διάνυσμα των όγκων των πεπερασμένων στοιχείων αντίστοιχα.

## 2.4 Μέθοδος *Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP)*

Το πρόβλημα που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα μπορεί να θεωρηθεί ως ένα πρόβλημα δυαδικού μη-γραμμικού ακεραίου προγραμματισμού ή διακριτό πρόβλημα βελτιστοποίησης. Δυστυχώς υπάρχουν ορισμένες δυσκολίες που σχετίζονται με αυτού του είδους τα προβλήματα. Πρώτον, όταν η μεταβλητή  $x_e$  είναι μηδέν, παράγονται τα πεπερασμένα στοιχεία με μηδενική δυσκαμψία που οδηγούν στη δημιουργία των ιδιάζόντων προβλημάτων που δεν έχουν μοναδική λύση. Και δεύτερον η επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης με διακριτές μεταβλητές σχεδιασμού μπορεί να είναι αρκετά δύσκολη, ειδικά όταν ο αριθμός των στοιχείων είναι πολύ μεγάλος όπως στα προβλήματα BT όπου μπορεί να υπάρχουν εκατομμύρια στοιχεία.

Για να αποφύγουμε την επίλυση των προβλημάτων BT με τους κλασικούς μεθόδους μαθηματικής βελτιστοποίησης έχουν αναπτυχθεί ειδικές τεχνικές που είναι σχεδιασμένες συγκεκριμένα για την αντιμετώπιση προβλημάτων BT, μια από τις πιο διαδεδομένες τεχνικές είναι η μέθοδος *Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP)*.

Η μέθοδος αυτή είναι μια από τις πρώτες μεθόδους BT, οι ρίζες της προέρχονται από την μέθοδο ομογενοποίησης που παρουσιάστηκε για πρώτη φορά στην εργασία των Bendsoe και Kikuchi [Bendsoe & Kikuchi, 1988]. Η μέθοδος ομογενοποίησης είναι μια παλαιότερη προσέγγιση βελτιστοποίησης τοπολογίας, όπου η κατανομή του υλικού μοντελοποιείται ως σύνθετη σύνθεση διαφορετικών μικροδομών. Αν και η μέθοδος ομογενοποίησης κατάφερε να βρίσκει τις βέλτιστες λύσεις σε προβλήματα TO είχε μερικά μειονεκτήματα που περιορίζουν σημαντικά την πρακτική εφαρμογή της. Τα επόμενα χρόνια διαμορφώθηκε μια νέα μέθοδος, η μέθοδος SIMP [Bendsoe, 1989; Zhou & Rozvany 1991].

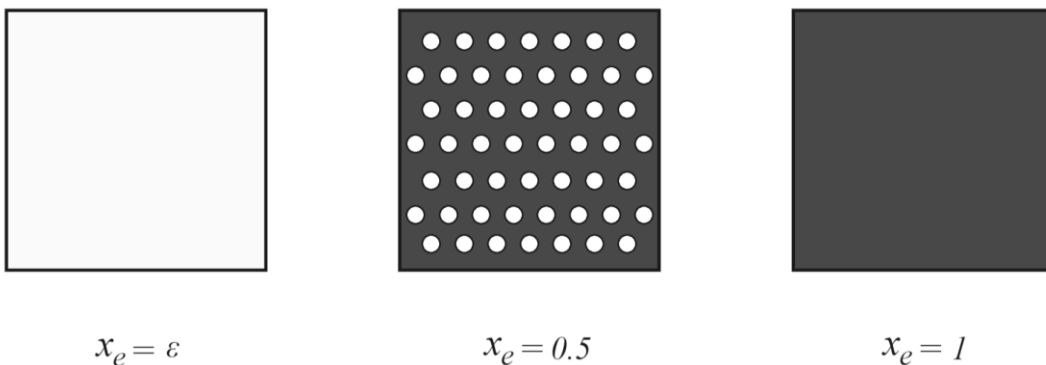
Η μέθοδος SIMP βασίζεται σε δυο βασικές αρχές:

- Η κατανομή του υλικού εντός του πεδίου σχεδιασμού εκφράζεται από μια συνεχή μεταβλητή σχεδιασμού.
- Η ποινικοποίηση των μεταβλητών σχεδιασμού για την προώθηση λύσης σε δυαδική μορφή.

Συγκεκριμένα, για να αποφύγει την επίλυση του προβλήματος ακέραιου προγραμματισμού, η SIMP απεικονίζει διακριτές μεταβλητές σχεδιασμού σε συνεχές πεδίο ορισμού, ώστε να έχουν δυνατότητα να παίρνουν τιμές στο διάστημα  $[0,1]$ . Επίσης, συνήθως ορίζεται το κάτω όριο του συνεχούς πεδίου να είναι μια πάρα πολύ μικρή θετική σταθερά. Επομένως η ύπαρξη του υλικού περιγράφεται από συνεχή μεταβλητές και όχι διακριτές:

$$x_e \in [\varepsilon, 1], \quad \varepsilon > 0$$

Τώρα όμως οι μεταβλητές σχεδιασμού δεν μπορούν να αντιστοιχούν σε στερεά ή κενά στοιχεία, οπότε θεωρούμε ότι υπάρχει ένα νέο τεχνητό υλικό και οι μεταβλητές σχεδιασμού περιγράφουν την πυκνότητα των πεπερασμένων στοιχείων, δηλαδή την ποσότητα του υλικού που περιλαμβάνεται στο όγκο ενός πεπερασμένου στοιχείου. Για  $x_e = 1$  υπάρχει υλικό σε όλο το όγκο, για  $x_e = \varepsilon$  υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει υλικό, και το στοιχείο αντιστοιχεί στο κενό. Για ενδιάμεσες τιμές μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το στοιχείο λαμβάνει μια «πορώδη» δομή. Πρέπει να σημειωθεί ότι ανεξάρτητα από την πυκνότητα που έχει το κάθε στοιχείο ή γενικά ολόκληρη η κατασκευή, το υλικό θεωρείται πάντα ισότροπο.

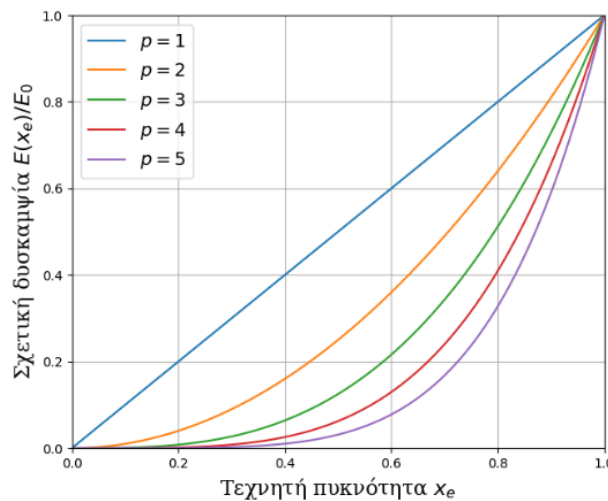


Διάγραμμα 2.13: Απεικόνιση ενός στοιχείου με διαφορετικές πυκνότητες

Προφανώς η έννοια της πυκνότητας ή τεχνητής πυκνότητας στην μέθοδο SIMP δεν αντιστοιχεί στην πραγματική πυκνότητα και είναι περισσότερο μια προσέγγιση/θεώρηση την οποία πρέπει να λαμβάνουμε ώστε να μειώσουμε την πολυπλοκότητα της διαδικασίας βελτιστοποίησης. Δηλαδή θεωρούμε ότι τα στοιχεία με ενδιάμεσες πυκνότητες δεν μπορούν να

υπάρχουν στην πραγματικότητα. Οπότε θέλουμε κάπως να εξασφαλίσουμε ότι η βέλτιστη λύση δεν θα περιλαμβάνει τέτοια στοιχεία. Το πρόβλημα είναι ότι η δυσκαμψία, δηλαδή μέτρο ελαστικότητας του στοιχείου, εξαρτάται γραμμικά από την πυκνότητα του. Δηλαδή ένα στοιχείο με πυκνότητα 0.5 έχει δυο φορές μικρότερη δυσκαμψία όμως και δυο φορές μικρότερη μάζα (όγκο), οπότε ισοπίθανα ένα στοιχείο με οποιαδήποτε πυκνότητα μπορεί να περιλαμβάνεται σε μια βέλτιστη λύση. Επομένως για να εξασφαλίσουμε ότι η λύση θα περιλαμβάνει μόνο τα στερεά και κενά στοιχεία, μπορούμε να μετασχηματίσουμε την σχέση δυσκαμψίας - πυκνότητας σε μια μη γραμμική συνάρτηση. Συγκεκριμένα θεωρούμε ένα θετικό ακέραιο  $p$  και επομένως υψώνοντας την πυκνότητα στη δύναμη  $p$  διατυπώνουμε μια καινούρια σχέση για το μέτρο ελαστικότητας:

$$E_e(x_e) = x_e^p E_0, \quad p \in \mathbb{N}$$



Διάγραμμα 2.14: Διάγραμμα σχετικής δυσκαμψίας ως συνάρτηση της πυκνότητας για διαφορετικές τιμές του συντελεστή ποιινής

Το  $p$  είναι ο συντελεστής ποιινής και πρακτικά μειώνει τη συνεισφορά των στοιχείων με ενδιάμεσες πυκνότητες στη συνολική δυσκαμψία. Δηλαδή, αφού τώρα το μέτρο ελαστικότητας εξαρτάται μη γραμμικά από την πυκνότητα των στοιχείων, η επιλογή του «γκρι» στοιχείου είναι αναποτελεσματική αφού προσφέρει ελάχιστη δυσκαμψία σε σχέση με τον χώρο που καταλαμβάνει. Συνήθως επιλέγουμε το  $p$  να είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το 3.



Διάγραμμα 2.15: Βέλτιστες λύσεις για διαφορετικές τιμές του συντελεστή ποιότητος

Λαμβάνοντας υπόψιν τον συντελεστή ποιότητος, το τοπικό και το ολικό μητρώο δυσκαμψίας επαναδιατυπώνονται ως εξής:

$$\mathbf{k}_e(x_e) = x_e^p \mathbf{k}_e^0 \rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^n \mathbf{k}_e(x_e) = \sum_{e=1}^n x_e^p \mathbf{k}_e^0$$

όπου το  $\mathbf{k}_e^0$  είναι το αρχικό τοπικό μητρώο δυσκαμψίας.

Οπότε η μέθοδος SIMP προσεγγίζει το πρόβλημα ελαχιστοποίησης δυσκαμψίας ως εξής:

$$(BT_{SIMP}) \begin{cases} \min_x C(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} = \sum_{e=1}^n (x_e)^p \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_e^0 \mathbf{u}_e \\ \text{subject to} \begin{cases} \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F} \\ 0 < \varepsilon \leq x_e \leq 1, \quad e = 1, \dots, n \\ \frac{V(x_e)}{V_0} = f, \quad 0 < f \leq 1 \end{cases} \end{cases}$$

όπου  $V_0$  είναι ο όγκος του πεδίου σχεδιασμού, και  $f$  ο λόγος του όγκου της κατασκευής ως προς τον όγκο του πεδίου σχεδιασμού, και  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{x})$  με  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ .

Η μέθοδος SIMP εκτελεί την βελτιστοποίηση επαναληπτικά, βρίσκοντας σε κάθε επανάληψη το διάνυσμα των πυκνοτήτων  $\mathbf{x}$ , ώστε να ελαχιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση και να πληροί όλους τους περιορισμούς. Όμως η SIMP δεν έχει την δυνατότητα υπολογισμού των νέων πυκνοτήτων, οπότε χρειάζεται ένας επιλυτής, μια επιπρόσθετη μέθοδος, που θα εκτελεί τους υπολογισμούς. Οι δύο πιο διαδεδομένοι επιλυτές είναι η μέθοδος των βέλτιστων κριτηρίων (Optimality criteria method) και η μέθοδος των κινουμένων ασύμπτωτων (Method of moving asymptotes).

#### 2.4.1 Μέθοδος των βέλτιστων κριτηρίων

Η μέθοδος των βέλτιστων κριτηρίων (OC) είναι μια επαναληπτική προσεγγιστική μέθοδος που χρησιμοποιείται ευρέως στην βελτιστοποίηση της τοπολογίας, κυρίως για την επίλυση προβλημάτων ελαχιστοποίησης της ενδοτικότητας. Η OC ανήκει στην κατηγορία μεθόδων που

στηρίζονται στην κλίση (gradient based), για τον προσδιορισμό της λύσης. Οι αλγόριθμοι που βασίζονται στην κλίση είναι αποτελεσματικοί στην εύρεση τοπικών ελαχίστων στα πολυδιάστατα προβλήματα με μη γραμμικούς περιορισμούς [Kirsch, 1993]. Γενικά, οι εν λόγω αλγόριθμοι είναι πιο αποδοτικοί από τους αλγόριθμους που δεν στηρίζονται στην κλίση (gradient-free).

Η μέθοδος OC ξεκινά με μια αρχική εκτίμηση για τις μεταβλητές σχεδιασμού, συνήθως υποθέτοντας ομοιόμορφη κατανομή του υλικού σε όλο το πεδίο σχεδιασμού. Με βάση τις αρχικές μεταβλητές σχεδιασμού, επιλύεται η εξίσωση ισορροπίας ώστε να αποκτήσουμε πληροφορία για τις τοπικές μετατοπίσεις, και στη συνέχεια προσδιορίζεται η ενδοτικότητα του αρχικού σχεδιασμού. Στη συνέχεια γίνεται ο προσδιορισμός των ευαισθησιών. Αρχικά ορίζεται η μερική παράγωγος της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητή σχεδιασμού:

$$\frac{\partial C(\mathbf{x})}{\partial x_e} = \frac{\partial (\mathbf{f}^T \mathbf{u}_e)}{\partial x_e} = \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial x_e} \mathbf{u}_e + \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial x_e} \mathbf{f}^T = \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial x_e} \mathbf{f}^T = \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_e \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial x_e}$$

όπου  $\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_e(x_e)$ ,  $\mathbf{k}_e = \mathbf{k}_e(x_e)$

Το πρόβλημα είναι ότι δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγωγο της μετατόπισης ως προς την πυκνότητα  $\frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial x_e}$ , αλλά μπορούμε να την προσεγγίσουμε από την εξίσωση ισορροπίας:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_e \mathbf{k}_e &= \mathbf{f} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_e} (\mathbf{u}_e \mathbf{k}_e - \mathbf{f}) = 0 \\ &\rightarrow \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial x_e} \mathbf{k}_e + \frac{\partial \mathbf{k}_e}{\partial x_e} \mathbf{u}_e - 0 = 0 \\ &\rightarrow \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial x_e} = -\mathbf{k}_e^{-1} \frac{\partial \mathbf{k}_e}{\partial x_e} \mathbf{u}_e \end{aligned}$$

Στη συνέχεια η παραπάνω έκφραση αντικαθίσταται στην παράγωγο της αντικειμενικής συνάρτησης:

$$\frac{\partial C(\mathbf{x})}{\partial x_e} = \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_e \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial x_e} = -\mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{k}_e^{-1} \frac{\partial \mathbf{k}_e}{\partial x_e} \mathbf{u}_e = -\mathbf{u}_e^T \frac{\partial \mathbf{k}_e}{\partial x_e} \mathbf{u}_e$$

Και τελικά έχουμε:

$$\frac{\partial C(\mathbf{x})}{\partial x_e} = -\mathbf{u}_e^T (p x_e^{p-1} \mathbf{k}_e^0) \mathbf{u}_e$$

Η παραπάνω μερική παράγωγος ορίζεται ως συνάρτηση ευαισθησίας της ενδοτικότητας.

Μια δυσκολία που αφορά συνηθώς όλα τα προβλήματα ΒΤ είναι ότι αυτά τα προβλήματα δεν είναι κυρτά, άρα η εύρεση του ολικού ελαχίστου μπορεί να είναι αρκετά δύσκολη, αφού ο επιλυτής μπορεί να συγκλίνει σε διαφορετικά τοπικά ελάχιστα. Δυστυχώς δεν υπάρχει άμεσος τρόπος μετατροπής του μη-κυρτού προβλήματος σε αντίστοιχο κυρτό, όμως η ΟC εφαρμόζει μια στρατηγική που προσεγγίζει τοπικά το μη κυρτό πρόβλημα χρησιμοποιώντας κυρτές προσεγγίσεις, δηλαδή χρησιμοποιεί μια τεχνική γραμμικοποίησης για να δημιουργηθεί μια τοπική κυρτή προσέγγιση του αρχικού μη κυρτού προβλήματος.

Συγκεκριμένα, θεωρούμε την νέα μεταβλητή:

$$y_e = x_e^{-a}, \text{ όπου } a > 0$$

Πραγματοποιώντας αλλαγή μεταβλητής, η συνάρτηση ευαισθησίας λαμβάνει την παρακάτω μορφή:

$$C(\mathbf{x}) \approx C(\mathbf{x}^k) + \sum_{e=1}^n \left. \frac{\partial C}{\partial y_e} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^k} (y_e - y_e^k)$$

όπου

$$\frac{\partial C}{\partial y_e} = \frac{\partial C}{\partial x_e} \frac{\partial x_e}{\partial y_e} = \frac{\partial C}{\partial x_e} \frac{dx_e}{dx_e^{-a}} = -\frac{x_e^{1+a}}{a} \frac{\partial C}{\partial x_e} = \frac{x_e^{1+a}}{a} \mathbf{u}_e^T (px_e^{p-1} \mathbf{k}_e^0) \mathbf{u}_e$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} C(\mathbf{x}) &\approx C(\mathbf{x}^k) + \sum_{e=1}^n \left( \frac{x_e^{1+a}}{a} \mathbf{u}_e^T (px_e^{p-1} \mathbf{k}_e^0) \mathbf{u}_e \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^k} (y_e - y_e^k) = \\ &= C(\mathbf{x}^k) + \sum_{e=1}^n b_e^k (x_e^{-a} - (x_e^k)^{-a}) = \\ &= C(\mathbf{x}^k) - \sum_{e=1}^n b_e^k ((x_e^k)^{-a}) + \sum_{e=1}^n b_e^k (x_e^{-a}) \end{aligned}$$

όπου  $b_e^k = \frac{x_e^{1+a}}{a} \mathbf{u}_e^T (px_e^{p-1} \mathbf{k}_e^0) \mathbf{u}_e$ .

Το πρώτο άθροισμα εκφράζει την τιμή της ενδοτικότητας στην τρέχουσα επανάληψη και είναι μια σταθερά. Το δεύτερο άθροισμα είναι η νέα προσέγγιση της ενδοτικότητας με βάση τις ενημερωμένες μεταβλητές σχεδιασμού. Οπότε ισχύει ότι:

$$C(\mathbf{x}) \approx c + \sum_{e=1}^n b_e^k (x_e^{-a})$$



όπου το  $c$  είναι μια σταθερά που περιλαμβάνει την πληροφορία από το προηγούμενο βήμα τις μεθόδου. Στη συνέχεια με βάση την καινούρια έκφραση της  $C(\mathbf{x})$ , μπορούμε να διατυπώσουμε ένα προσεγγιστικό υποπρόβλημα:

$$(BT_{SIMP})_{at\ k\ iteration}^{OC} \begin{cases} \min_{\mathbf{x}} \sum_{e=1}^n b_e^k(x_e^{-a}) \\ \text{subject to} \begin{cases} 0 < \varepsilon \leq x_e \leq 1, \quad e = 1, \dots, n \\ \frac{V(x_e)}{V_0} = f, \quad 0 < f \leq 1 \end{cases} \end{cases}$$

Το παραπάνω υποπρόβλημα είναι κυρτό οπότε μπορεί να επιλυθεί με την αρχή της δυϊκότητας του Lagrange. Άρα ορίζουμε την λαγκρανζιανή συνάρτηση:

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = \sum_{e=1}^n b_e^k(x_e^{-a}) + \lambda(\mathbf{x}^T \mathbf{v} - V) = \sum_{e=1}^n b_e^k(x_e^{-a}) + \lambda \mathbf{x}^T \mathbf{v} - \lambda V$$

Και ορίζεται το αντίστοιχο δυϊκό πρόβλημα:

$$\begin{cases} \max_{\lambda} \varphi(\lambda) \\ \lambda \in R \end{cases}$$

Όπου η  $\varphi(\lambda)$  είναι η δυϊκή αντικειμενική συνάρτηση:

$$\varphi(\lambda) = \min_{\varepsilon \leq x_e \leq 1} L(\mathbf{x}, \lambda)$$

Στη συνέχεια η  $\varphi(\lambda)$  μπορεί να προσεγγιστεί ως συνδυασμός  $n$  τοπικών προβλημάτων:

$$\varphi_e(x_e, \lambda) = b_e^k x_e^{-a} + \lambda v_e x_e$$

Και το ελάχιστο μπορεί να βρεθεί υπολογίζοντας το στάσιμο σημείο της  $\varphi_e(x_e, \lambda)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_e(x_e, \lambda)}{\partial x_e} &= -ab_e^k x_e^{-a-1} + \lambda v_e = 0 \rightarrow \\ \rightarrow x_e &= x_e(\lambda) = \left( \frac{\lambda v_e}{ab_e^k} \right)^{\frac{1}{a+1}} = \left( \frac{ab_e^k}{\lambda v_e} \right)^{\frac{1}{a+1}} \end{aligned}$$

Επομένως επαναδιατυπώνουμε της δυϊκή αντικειμενική συνάρτηση κάνοντας την αντικατάσταση της  $x_e(\lambda)$ :

$$\varphi(\lambda) = \sum_{e=1}^n \varphi_e(x_e(\lambda), \lambda) - \lambda V$$

Τώρα μπορούμε να λύσουμε το δυϊκό πρόβλημα μέσω της αναζήτησης του στάσιμου σημείου της  $\varphi(\lambda)$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial \lambda} &= \sum_{e=1}^n \left( \frac{\partial \varphi_e}{\partial x_e} \frac{\partial x_e}{\partial \lambda} + \frac{\partial \varphi_e}{\partial \lambda} \right) - V = \\ &= \sum_{e=1}^n v_e x_e(\lambda) - V = 0\end{aligned}$$

Άρα η δυϊκή αντικειμενική συνάρτηση έχει στάσιμο σημείο όταν ικανοποιείται ο περιορισμός του όγκου  $\sum_{e=1}^n v_e x_e(\lambda) = V$ . Για να επιλύσουμε το αρχικό πρόβλημα πρέπει να προσδιορίσουμε το κατάλληλο  $\lambda$ . Επομένως η προσέγγιση των πυκνοτήτων σε κάθε επανάληψη της μεθόδου διατυπώνεται ως εξής:

$$x_e^{k+1} = \min \left[ \max \left[ x_e^k \left( \frac{(\mathbf{u}_e^k)^T (p(x_e^k)^{p-1} \mathbf{k}_e^0) \mathbf{u}_e^k}{\lambda v_e} \right)^{\frac{1}{1+a}}, \varepsilon \right], 1 \right]$$

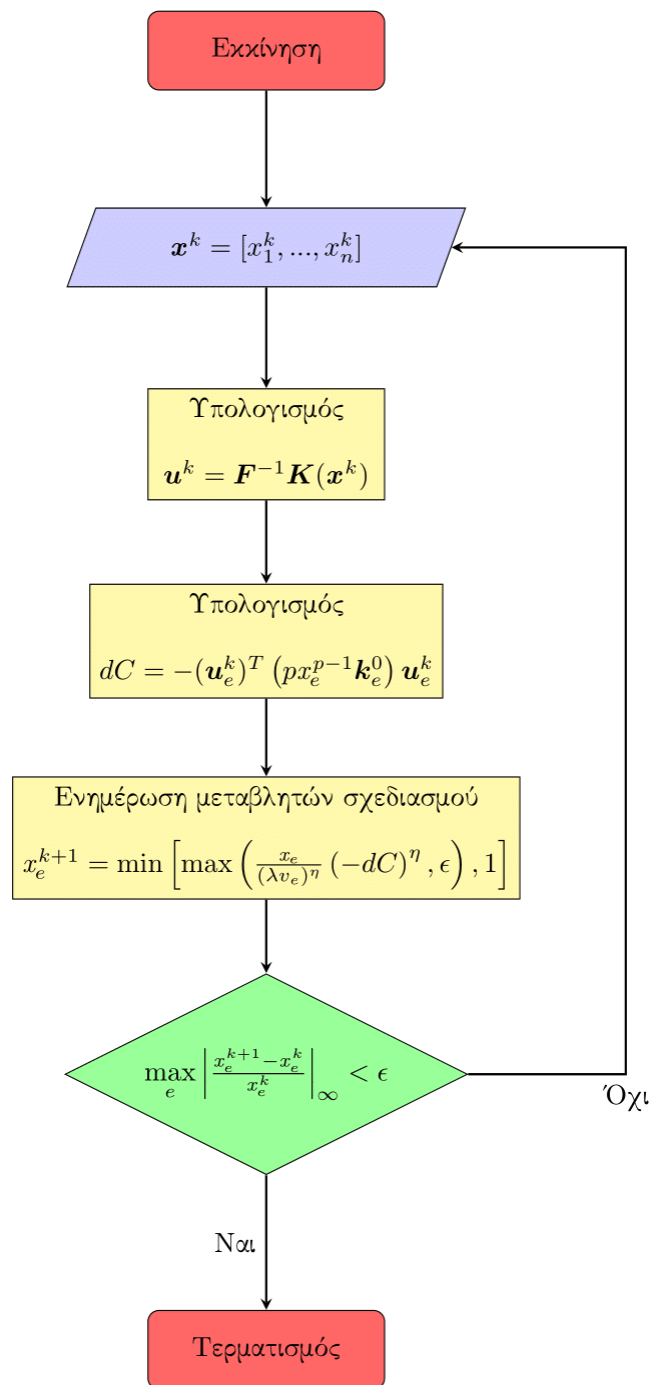
όπου το  $\kappa$  είναι το βήμα της επαναληπτικής διαδικασίας, το  $p$  είναι ο συντελεστής ποινής, το  $a$  είναι μια θετική σταθερά και το  $\lambda$  είναι ο συντελεστής Lagrange υπολογισμένος ώστε να ικανοποιεί τον περιορισμό του όγκου.

Επίσης ορίζεται η συνθήκη βέλτιστου η οποία δηλώνει ότι η διαδικασία βελτιστοποίησης λειτουργεί σωστά και εξασφαλίζει ότι το υλικό κατανέμεται με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται η αντικειμενική συνάρτηση. Το κριτήριο βελτιστότητας για το πρόβλημα της ελάχιστης ενδοτικότητας διατυπώνεται ως εξής:

$$\frac{(\mathbf{u}_e^k)^T (p x_e^{p-1} \mathbf{k}_e^0) \mathbf{u}_e^k}{\lambda v_e} = 1$$

Αφού η OC αποτελεί μια επαναληπτική μέθοδος, υπάρχει η ανάγκη ορισμού του κριτηρίου τερματισμού/σύγκλισης. Τα κριτήρια σύγκλισης αξιολογούν εάν η επαναληπτική διαδικασία έχει φτάσει σε ένα σημείο όπου ο σχεδιασμός είναι αρκετά κοντά στο βέλτιστο, δηλαδή εάν η αντικειμενική συνάρτηση ή οι μεταβλητές σχεδιασμού μεταβάλλονται ελάχιστα μεταξύ των επαναλήψεων. Ένα γενικό κριτήριο σύγκλισης είναι η σχετική μεταβολή των μεταβλητών σχεδιασμού μεταξύ διαδοχικών επαναλήψεων, να είναι κάτω από ένα καθορισμένο όριο:

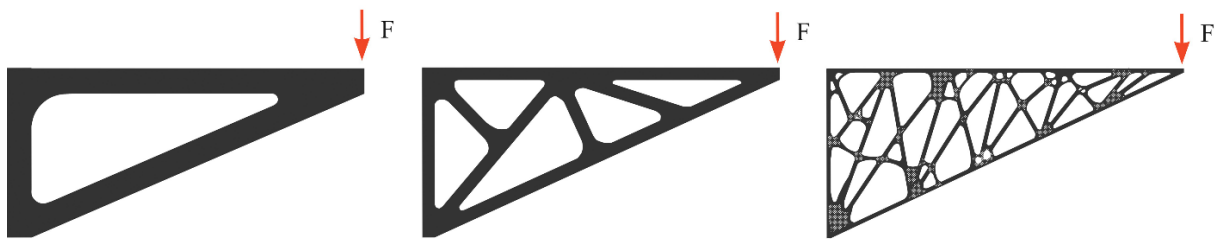
$$\max_e \left| \frac{x_e^{k+1} - x_e^k}{x_e^k} \right|_{\infty} < \varepsilon, \text{ για κάποιο } \varepsilon > 0$$



Διάγραμμα 2.16: Διάγραμμα ροής μεθόδου βέλτιστων κριτήριων

## 2.4.2 Ύπαρξη της λύσης και αριθμητικές αστάθειες

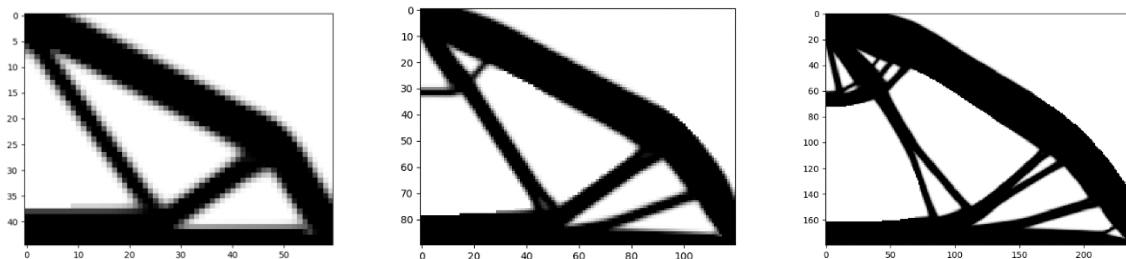
Κατά την διάρκεια της επίλυσης κάθε προβλήματος βελτιστοποίησης, το βασικότερο ερώτημα είναι αν υπάρχει η λύση του δεδομένου προβλήματος, δηλαδή αν το πρόβλημα είναι καλώς διατυπωμένο. Στην περίπτωση μας, που μελετάμε το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης της ενδοτικότητας με την μέθοδο του SIMP, άλλα και γενικότερα, τα προβλήματα της ΒΤ δεν είναι καλώς διατυπωμένα. Δηλαδή σε μια κατασκευή μπορούμε να αντικαταστήσουμε ένα μεγάλο άνοιγμα με δυο μικρότερα ώστε να αποκτήσουμε μεγαλύτερη δυσκαμψία και μικρότερη μάζα, επομένως αντί για δυο μικρά ανοίγματα κάνουμε τέσσερα ακόμα πιο μικρά και πάλι έχουμε μεγαλύτερη δυσκαμψία και μικρότερη μάζα. Η διαδικασία αυτή σχεδόν ποτέ δεν σταματάει, αφού ποτέ δεν μπορεί να φτάσει στο ολικό ελάχιστο. Οπότε πρακτικά δεν υπάρχει λύση τέτοιου προβλήματος.



*Διάγραμμα 2.17: Η εισαγωγή περισσότερων και πιο λεπτών ράβδων δίνει μια καλύτερη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης, αλλά δεν υπάρχει τέλος σε αυτή τη διαδικασία.*

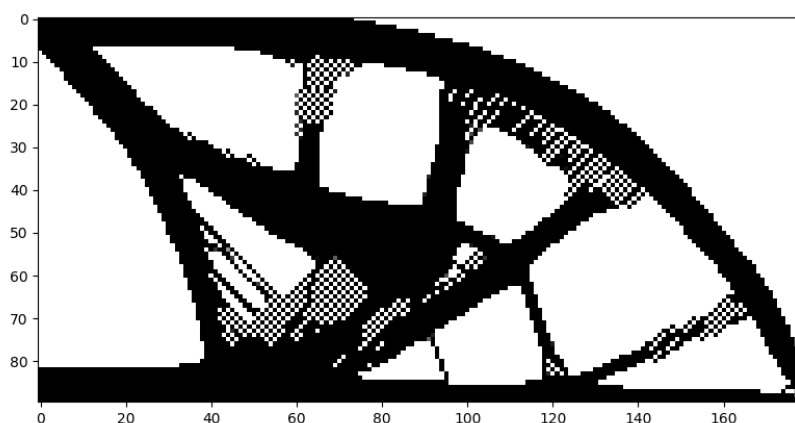
Με άλλα λόγια, εφόσον ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μειώνεται, η κατασκευή θα λαμβάνει όλο και περισσότερα τα χαρακτηριστικά της μικροδομής. Και όπως αναφέραμε προηγουμένως, θέλουμε να αποφύγουμε την εμφάνιση των κατασκευών με μικροδομικά στοιχεία, αφού δίνουν «ψεύτικη» δυσκαμψία στην κατασκευή και δεν υπάρχει δυνατότητα να κατασκευαστούν τέτοια υλικά.

Η παραπάνω συμπεριφορά δημιουργεί μερικές αριθμητικές αστάθειες, συγκεκριμένα μεγάλη εξάρτηση των αποτελεσμάτων από το μέγεθος του πλέγματος, δηλαδή η επίλυση ενός προβλήματος με τα πλέγματα διαφορετικών μεγεθών θα οδηγήσει σε διαφορετικές «βέλτιστες» κατασκευές.



*Διάγραμμα 2.18: Λύση ίδιου προβλήματος με διαφορετικό μέγεθος του πλέγματος πεπερασμένων στοιχείων.*

Επιπροσθέτως, κατά την διάρκεια της βελτιστοποίησης, παράγονται τα σχέδια με πολύ λεπτά κατασκευαστικά στοιχεία ή απομονωμένα σημεία υλικών που είναι δύσκολο ή αδύνατο να κατασκευαστούν. Επίσης, εμφανίζονται περιοχές με εναλλασσόμενα στερεά και κενά στοιχεία σε μια διάταξη που είναι παρόμοια με σκακιέρα (checkerboard pattern).



*Διάγραμμα 2.19: Το μοτίβο σκακιέρας σε μια λύση.*

Το μοτίβο σκακιέρας δεν αντιστοιχεί σε κάποια πραγματική διάταξη υλικών και είναι συνήθως μια τεχνητή δομή που προκύπτει κατά την διάρκεια της βελτιστοποίησης και δεν αποτελεί μέρος του πραγματικού βέλτιστου σχεδίου. Η πιο άμεση εξήγηση στο γιατί εμφανίζεται το μοτίβο σκακιέρας σε μια κατασκευή είναι ότι τέτοιες διατάξεις έχουν τεχνητά υψηλή δυσκαμψία και λιγότερο όγκο/μάζα, σε σχέση με μια στέρα διάταξη ίδιας δυσκαμψίας, λόγω προσέγγισης πεπερασμένων στοιχείων. Οπότε κατά την διάρκεια της επίλυσης μπορεί να προκύψει ως μια βέλτιστη επιλογή.

Η αντιμετώπιση αυτών των προβλημάτων είναι απαραίτητη για την επίτευξη βέλτιστων και αξιόπιστων κατασκευών. Ένας από τους πιο λογικούς τρόπους είναι να εισαχθούν πρόσθετοι περιορισμοί μέσω των οποίων θα διασφαλιστεί ότι η λύση είναι ανεξάρτητη από το μέγεθος του πλέγματος και επίσης θα αποτραπεί η εμφάνιση του μοτίβου σκακιέρας. Για παράδειγμα, μπορούμε να περιορίσουμε το μήκος της περιμέτρου της κατασκευής, περιορίζοντας με αυτόν τον τρόπο τον αριθμό των οπών που μπορούν να εμφανιστούν στην περιοχή σχεδιασμού.

Αν και οι παραπάνω μέθοδοι παρουσιάζουν καλά αποτελέσματα, δηλαδή ύπαρξη λύσης και σύγκλιση, η αύξηση του αριθμού των καθολικών περιορισμών οδηγεί σε σημαντική αύξηση της πολυπλοκότητας του προβλήματος, γεγονός που είναι ιδιαίτερα κρίσιμο στα προβλήματα ΤΟ και θα θέλαμε να το αποφύγουμε. Εν γένει οι τεχνικές που εισάγουν περισσότερους περιορισμούς είναι δύσκολο να χρησιμοποιηθούν επειδή απαιτούν την επιλογή και τον έλεγχο της τιμής του περιορισμού ανάλογα με το πρόβλημα και τη γεωμετρία. Μια εναλλακτική και πιο συνηθισμένη τεχνική είναι η μέθοδος φιλτραρίσματος (filtering). Οι δυο πιο συνηθισμένες τεχνικές είναι το φίλτρο ευαισθησίας και πυκνότητας:

- Φίλτρο ευαισθησίας

Ο βασικός στόχος του φίλτρου ευαισθησίας είναι η εξομάλυνση των ραγδαίων μεταβολών στις ευαισθησίες, που θα μπορούσαν να οδηγήσουν σε αριθμητικές αστάθειες. Συγκεκριμένα γίνεται τροποποίηση τοπικών ευαισθησιών με τον παρακάτω τρόπο:

$$\frac{\partial \widehat{C}}{\partial x_e} = \frac{1}{x_e \sum_{i=1}^n H_i} \sum_{i=1}^n H_i x_i \frac{\partial C}{\partial x_i}$$

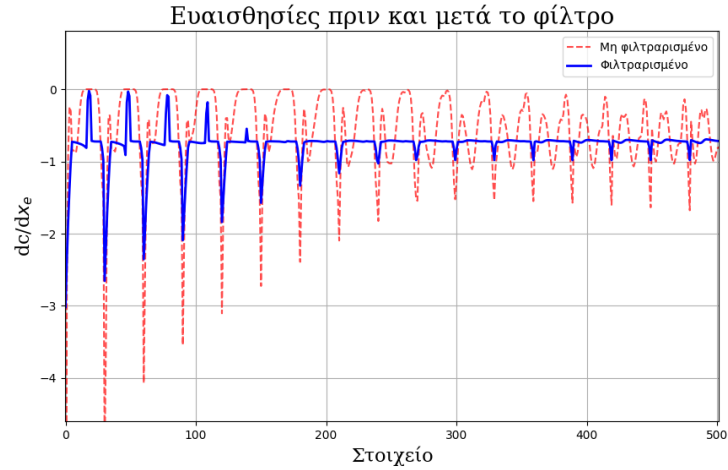
όπου το  $n$  είναι ο συνολικός αριθμός των πεπερασμένων στοιχείων και το  $H_i$  είναι η συνάρτηση βάρους:

$$H_i = r_{min} - dist(e, i), \quad \{i \in n \mid dist(k, i) \leq r_{min}\}, \quad e = 1, \dots, N$$

Το  $dist(k, i)$  είναι η απόσταση μεταξύ των κέντρων των στοιχείων  $e$  και  $i$ . Με  $r_{min}$  συμβολίζεται η προκαθορισμένη ακτίνα φίλτρου.

Η ακτίνα του φίλτρου καθορίζεται από τον χρήστη και πρέπει να είναι μεγαλύτερη από το μέγεθος του (μικρότερου) πεπερασμένου στοιχείου. Το μέγεθος της ακτίνας του φίλτρου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον έλεγχο του ελάχιστου μεγέθους των νέων χαρακτηριστικών (πχ. των οπών) που εμφανίζονται στο πεδίο σχεδιασμού [Gordoa, Querin, & Victoria, 2017].

Η εφαρμογή του φίλτρου ευαισθησίας έχει ως αποτέλεσμα τον υπολογισμό των νέων ευαισθησιών για κάθε στοιχείο ως σταθμισμένο μέσο όρο των αρχικών ευαισθησιών στην προκαθορισμένη περιοχή η οποία καθορίζεται από την ακτίνα του φίλτρου. Η διαδικασία αυτή εξομαλύνει αποδοτικά τις τιμές των ευαισθησιών σε όλη την περιοχή σχεδιασμού, μειώνοντας τις απότομες αλλαγές, με τρόπο παρόμοιο με το φιλτράρισμα μιας εικόνας.



Διάγραμμα 2.20: Διάγραμμα ευαισθησιών πριν και μετά εφαρμογή του φίλτρου.

- Φίλτρο πυκνοτήτων

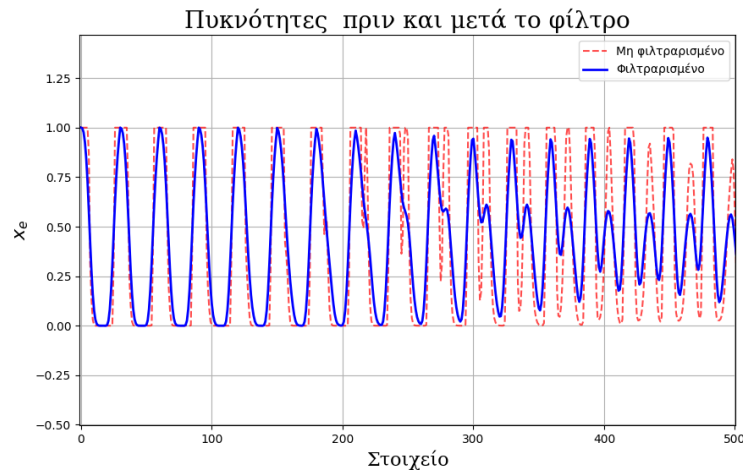
Το φιλτράρισμα πυκνότητας είναι μια συμπληρωματική τεχνική του φίλτρου ευαισθησίας, η οποία δρα απευθείας στις μεταβλητές σχεδιασμού, συγκεκριμένα στις πυκνότητες των στοιχείων. Ο στόχος του φίλτρου πυκνότητας είναι να εξομαλύνει την κατανομή του υλικού στο πεδίο σχεδιασμού, αποτρέποντας με τον τρόπο αυτό τον σχηματισμό μοτίβων σκακιέρας και εξασφαλίζοντας ότι η διάταξη του υλικού είναι συνεπής και υλοποιήσιμη [Gordoa, Querin, & Victoria, 2017]. Οπότε το φίλτρο πυκνοτήτων διατυπώνεται ως εξής:

$$\hat{x}_e = \frac{1}{\sum_{i=1}^n H_i v_i} \sum_{i=1}^n H_i x_i v_i$$

όπου το  $H_i$  είναι η συνάρτηση βάρους:

$$H_i = r_{min} - dist(e, i), \quad \{i \in n \mid dist(k, i) \leq r_{min}\}, \quad e = 1, \dots, N$$

Και το  $v_i$  είναι όγκος του στοιχείου  $i$ .



Διάγραμμα 2.21: Διάγραμμα πυκνοτήτων πριν και μετά εφαρμογή του φίλτρου.

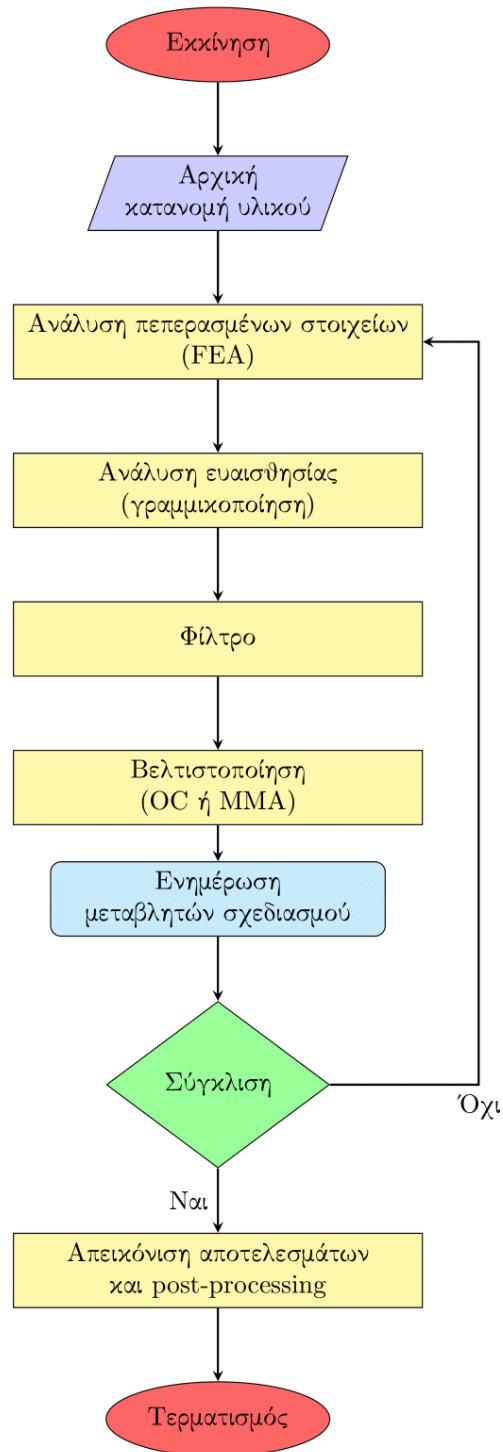
Όπως και οι άλλες τεχνικές, η εφαρμογή των φίλτρων μπορεί εξασφαλίζει την ύπαρξη λύσης και τη σύγκλιση. Ένα χαρακτηριστικό και των δυο μεθόδων είναι ότι οδηγούν σε βελτιστοποιημένες τοπολογίες που έχουν γκρι (πορώδες υλικό), περιοχές μετάβασης μεταξύ στερεών και κενών περιοχών. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η παρουσία στοιχείων με ενδιάμεσες πυκνότητες είναι ανεπιθύμητη, αλλά σε αυτή την περίπτωση υποθέτουμε ότι η επίδραση τέτοιων περιοχών στην τελική λύση είναι ασήμαντη. Επιπλέον, σε ένα τυπικό πρόβλημα TO με τη μέθοδο SIMP, τέτοιες περιοχές εξαφανίζονται όταν εφαρμόζεται μετεπεξεργασία των αποτελεσμάτων [Sigmound, 2007]. Όταν είναι αναγκαστικό να αποκτήσουμε την λύση σε διακριτή μορφή, δηλαδή μόνο με στερεά και κενά στοιχεία χωρίς την εμφάνιση ενδιάμεσων πυκνοτήτων, μπορούμε σταδιακά να μειώνουμε την επίδραση του φίλτρου κατά τη διάρκεια της διαδικασίας βελτιστοποίησης [Sigmound, 2007]. Εναλλακτικές μέθοδοι φιλτραρίσματος μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν, για την επίτευξη καλύτερου αποτελέσματος, όπως για παράδειγμα το φίλτρο πυκνότητας με βηματική συνάρτηση Heaviside [Andreassen et al., 2021].

Η εφαρμογή μεθόδων φιλτραρίσματος, ιδιαίτερα των φίλτρων ευαισθησίας και πυκνότητας, αποτελεί μια κρίσιμη τεχνική για την αντιμετώπιση των αριθμητικών ασταθειών. Πιο συγκεκριμένα και με βάση τα παραπάνω, οι εν λόγω αστάθειες προκύπτουν από την εξάρτηση της λύσης από το μέγεθος του πλέγματος και τον σχηματισμό μη φυσικών διατάξεων υλικού, όπως το μοτίβο σκακιέρας.

## **2.5 Επίλογος**

Σε αυτό το κεφάλαιο πραγματοποιήθηκε μια αναλυτική εισαγωγή στον θεωρητικό υπόβαθρο της βελτιστοποίησης τοπολογίας. Παρουσιάστηκε λεπτομερής ανάλυση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων και της εφαρμογής της στα πλαίσια βελτιστοποίησης τοπολογίας. Επιπλέον πραγματοποιήθηκε διατύπωση των προβλημάτων βελτιστοποίησης τοπολογίας ως προβλημάτων ελαχιστοποίησης ενδοτικότητας και στη συνέχεια εφαρμογή της μεθόδου SIMP για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων. Τέλος έγινε αναφορά στην μέθοδο βέλτιστων κριτηρίων και στις τεχνικές φιλτραρίσματος.





Διάγραμμα 2.22: Διάγραμμα ροής βελτιστοποίησης τοπολογίας μέσω μεθόδου SIMP

## **3 Θεωρητικό υπόβαθρο νευρωνικών δικτύων**

### **3.1 Πρόλογος**

Το παρόν κεφάλαιο αποτελεί μια σύντομη εισαγωγή σε βασικές θεωρητικές έννοιες των νευρωνικών δικτύων. Στη αρχή παρουσιάζεται το βασικότερο στοιχείο κάθε νευρωνικού δικτύου - ο τεχνητός νευρώνας. Στην συνέχεια παρουσιάζεται η αρχιτεκτονική των νευρωνικών δικτύων και συγκεκριμένα των feedforward δικτύων. Τέλος γίνεται αναφορά στην διαδικασία εκπαίδευσης με την μέθοδο κατάβασης κλίσης.

### **3.2 Εισαγωγή στα νευρωνικά δίκτυα**

Τα νευρωνικά δίκτυα είναι μια κατηγορία μοντέλων μηχανικής μάθησης που αντλούν έμπνευση από τη δομή και τη λειτουργία του ανθρώπινου εγκεφάλου. Αυτά τα μοντέλα έχουν γίνει βασικά εργαλεία στον τομέα της τεχνητής νοημοσύνης (AI), επιτρέποντας στις υπολογιστές να αναγνωρίζουν μοτίβα, να λαμβάνουν αποφάσεις και να προβλέπουν αποτελέσματα.

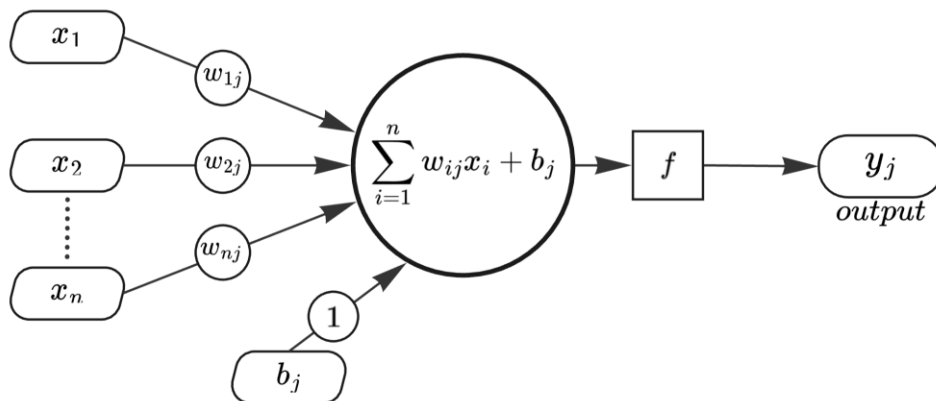
Στον πυρήνα ενός νευρωνικού δικτύου βρίσκεται μια συλλογή από διασυνδεδεμένες μονάδες, γνωστές ως νευρώνες και οργανωμένες σε στρώματα. Αυτά τα στρώματα χωρίζονται συνήθως σε τρεις κύριους τύπους: το στρώμα εισόδου, τα κρυφά στρώματα και το στρώμα εξόδου. Στο στρώμα εισόδου εισέρχονται τα δεδομένα στο δίκτυο, με κάθε νευρώνα να αντιστοιχεί σε ένα χαρακτηριστικό ή στοιχείο αυτών των δεδομένων. Τα κρυφά στρώματα επεξεργάζονται τα δεδομένα μέσω μιας σειράς μετασχηματισμών, επιτρέποντας στο δίκτυο να μαθαίνει περίπλοκα μοτίβα και μη γραμμικές σχέσεις. Το στρώμα εξόδου παράγει στη συνέχεια την τελική πρόβλεψη ή απόφαση με βάση αυτά τα μετασχηματισμένα δεδομένα. Δηλαδή ένα νευρωνικό δίκτυο μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μαθηματικό μοντέλο που προσεγγίζει μια συνάρτηση απεικόνισης  $F: R^n \rightarrow R^m$ , όπου  $n$  είναι η διάσταση του χώρου εισόδου και  $m$  είναι η διάσταση του χώρου εξόδου.

### **3.3 Τεχνητός νευρώνας**

Το βασικότερο στοιχείο οποιαδήποτε νευρωνικού δικτύου είναι ο τεχνητός νευρώνας ή απλά νευρώνας (artificial neuron). Κάθε νευρώνας δέχεται εισόδους (inputs), στη συνέχεια πολλαπλασιάζει κάθε είσοδο με ένα αντίστοιχο βάρος, κατόπιν προσθέτει μια μεροληψία και τελικά εφαρμόζει μια συνάρτηση ενεργοποίησης ώστε να παραχθεί μια έξοδος (output) που μεταβιβάζεται σε άλλους νευρώνες στα επόμενα στρώματα [Russell & Norvig, 2009]. Μαθηματικά, η λειτουργία ενός νευρώνα μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

$$(Neuron_j) \begin{cases} z_j = \sum_{i=1}^n w_{ij}x_i + b_j \\ y_j = f(z_j) \end{cases}$$

όπου  $z_j$  είναι το σταθμισμένο άθροισμα των εισόδων του νευρώνα  $j$ , το  $w_{ij}$  είναι το αντίστοιχο συνοπτικό βάρος, το  $x_i$  είναι τα δεδομένα στην είσοδο, το  $b_j$  είναι η μεροληψία του νευρώνα  $j$ ,  $f$  είναι η συνάρτηση ενεργοποίησης και το  $a_j$  είναι η έξοδος του νευρώνα  $j$ . Επίσης μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η μεροληψία είναι μια επιπλέον είσοδος με συνοπτικό βάρος ίσο με την μονάδα. Στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζεται αναλυτικά η δομή του νευρώνα.



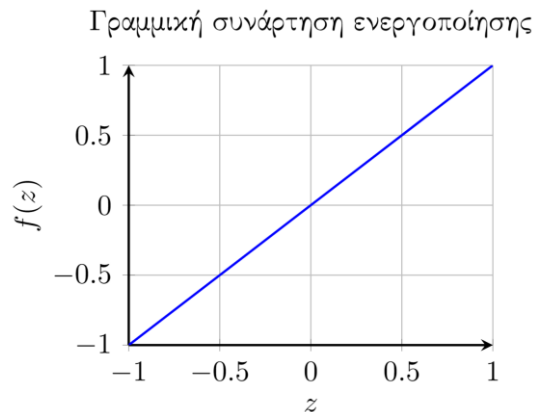
Διάγραμμα 3.1: Δομή του τεχνητού νευρώνα.

Όπως παρουσιάστηκε παραπάνω, κάθε νευρώνας παίρνει στην είσοδο κάποια δεδομένα και παράγει κάποιο αποτέλεσμα ή κάποια απόφαση στην έξοδο βασίζοντας στα χαρακτηριστικά εισόδου. Εδώ μπορούμε να βρούμε έναν σαφή παραλληλισμό με την ανθρώπινη συμπεριφορά, δηλαδή όταν ένα άτομο λαμβάνει μια απόφαση θα βασίζεται σε πολλούς παράγοντες, αλλά ορισμένοι παράγοντες θα έχουν περισσότερη αξία, περισσότερο βάρος, για την τελική απόφαση. Στη δομή ενός νευρώνα, η αξία της πληροφορίας καθορίζεται με τη βοήθεια του συναπτικού βάρους. Η τελική απόφαση σχηματίζεται από το σταθμισμένο άθροισμα  $\sum_{i=1}^n w_{ij}x_i + b_j$ . Η μεροληψία,  $b_j$ , δεν σχετίζεται άμεσα με τα πραγματικά δεδομένα εισόδου, αλλά είναι περισσότερο μια πρόσθετη παράμετρος που επιτρέπει στο μοντέλο να προβλέπει με περισσότερη ακρίβεια την τελική απόφαση.

### 3.4 Συναρτήσεις ενεργοποίησης

Όπως αναφέραμε παραπάνω, υπολογίζοντας το σταθμισμένο άθροισμα μπορούμε καταλήξουμε σε κάποια απόφαση/λύση, όμως το σταθμισμένο άθροισμα αποτελεί μια γραμμική συνάρτηση και μπορεί να προσεγγίζει μόνο κάποιο γραμμικό μετασχηματισμό. Αυτό μπορεί να είναι αρκετό για προβλήματα γραμμικής παλινδρόμησης ή άλλα γραμμικά

προβλήματα, αλλά συχνά τα πραγματικά προβλήματα είναι μη γραμμικά. Προκειμένου να έχουμε την δυνατότητα να μελετάμε τα μη γραμμικά προβλήματα, χρησιμοποιούμε την συνάρτηση ενεργοποίησης. Σκοπός της συνάρτησης ενεργοποίησης είναι να εισαγάγει μη γραμμικότητα στο μοντέλο, επιτρέποντας στο νευρωνικό δίκτυο να μαθαίνει και να μοντελοποιεί σύνθετα πρότυπα. Χωρίς τη μη γραμμικότητα, ανεξάρτητα από το πόσα επίπεδα και νευρώνες έχει το δίκτυο, θα μπορούσε να αναπαραστήσει μόνο γραμμικούς μετασχηματισμούς.



*Διάγραμμα 3.2: Γραμμική συνάρτηση ενεργοποίησης. Ουσιαστικά αντιστοιχεί στην περίπτωση όταν δεν εφαρμόζεται καμία συνάρτηση ενεργοποίησης.*

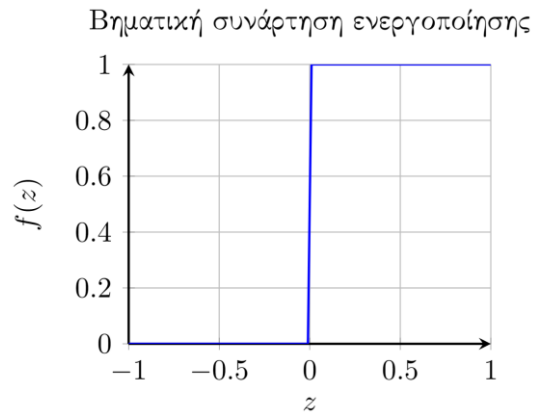
Υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί τύποι συναρτήσεων ενεργοποίησης. Οι πιο συχνές και ευρέως χρησιμοποιούμενες συναρτήσεις ενεργοποίησης είναι οι εξής:

- Βηματική συνάρτηση ενεργοποίησης

Η βηματική συνάρτηση συγκρίνει τις τιμές εισόδου που λαμβάνει με ένα κατώφλι και αποφασίζει αν ο νευρώνας πρέπει να ενεργοποιηθεί ή όχι, επιστρέφοντας μονάδα ή μηδέν αντίστοιχα. Επομένως η συνάρτηση ενεργοποίησης ορίζεται ως εξής:

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{αν } z < 0 \\ 1 & \text{αν } z \geq 0 \end{cases}$$

Η βηματική συνάρτηση χρησιμοποιείται συχνά σε προβλήματα δυαδικής ταξινόμησης, όπου ο στόχος είναι να ταξινομηθεί μια είσοδος σε μία από τις δύο κατηγορίες.



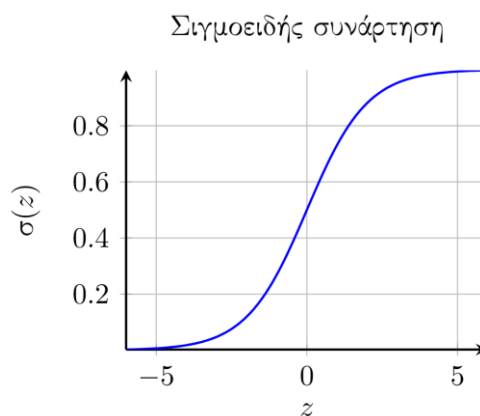
*Διάγραμμα 3.3: Βηματική συνάρτηση ενεργοποίησης.*

- Σιγμοειδής συνάρτηση ενεργοποίησης

Η σιγμοειδής συνάρτηση είναι μία από τις πιο παλιές και ευρέως χρησιμοποιούμενες συναρτήσεις ενεργοποίησης, ορίζεται ως εξής:

$$\sigma(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$

Η βηματική και η σιγμοειδής είναι αρκετά παρόμοιες, με την διαφορά ότι η σιγμοειδής επιστρέφει μια τιμή στο διάστημα  $[0,1]$ . Για αυτό τον λόγο η σιγμοειδής συνάρτηση ενεργοποίησης χρησιμοποιείται συχνά σε προβλήματα ταξινόμησης πολλαπλών κατηγοριών, όπου ο στόχος είναι να ταξινομηθεί μια είσοδος σε μια από πολλές κατηγορίες, με την λογική ότι μετατρέπει τις τιμές εισόδου σε πιθανότητες που μπορούν να ερμηνευθούν ως πιθανότητα να ανήκει το αντικείμενο σε κάποια κλάση.



*Διάγραμμα 3.4: Σιγμοειδής συνάρτηση ενεργοποίησης*

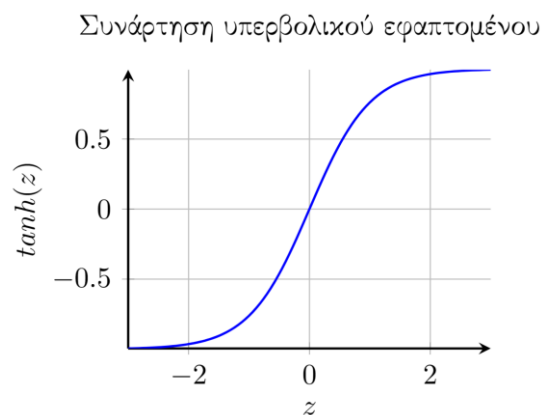
Όμως στις περιπτώσεις όπου οι τιμές εισόδου είναι πολύ μεγαλύτερες ή μικρότερες του μηδενός, οι κλίσεις της συνάρτησης μπορεί να γίνουν τόσο μικρές που δεν κάνουν σημαντικές αλλαγές στα βάρη κατά την διάρκεια της εκπαίδευσης. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε σημαντική επιβράδυνση της διαδικασίας εκπαίδευσης, και αναφέρεται ως το πρόβλημα της εξαφανιζόμενης κλίσης.

- Συνάρτηση ενεργοποίησης υπερβολικής εφαπτομένης (tanh)

Η συνάρτηση tanh είναι παρόμοια με τη σιγμοειδή συνάρτηση, αλλά μπορεί να λαμβάνει και τις αρνητικές τιμές.

$$\tanh z = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}$$

Σε αντίθεση με τη σιγμοειδή συνάρτηση, η tanh είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων. Αυτό θεωρείται συνήθως πλεονέκτημα, καθώς μπορεί να επιταχύνει τη σύγκλιση. Παρόλο που η συνάρτηση tanh προσφέρει πολλά πλεονεκτήματα, εξακολουθεί να υποφέρει από το πρόβλημα της εξαφανιζόμενης κλίσης.



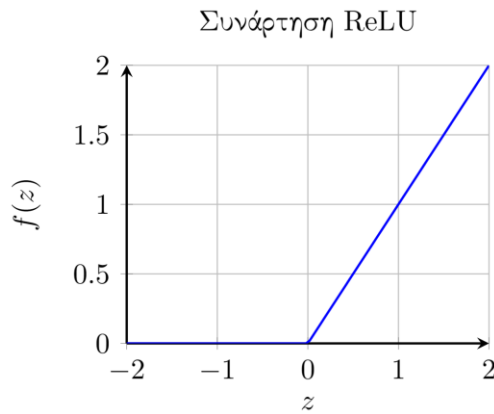
*Διάγραμμα 3.5: Συνάρτηση ενεργοποίησης υπερβολικού εφαπτομένου*

- ReLU συνάρτηση ενεργοποίησης

Η ReLU (Rectified Linear Unit) είναι μια από τις πιο διαδεδομένες συναρτήσεις ενεργοποίησης που χρησιμοποιείται τόσο σε δίκτυα με χαμηλό αριθμό στρωμάτων όσο και σε μοντέλα βαθιάς μάθησης. Η συνάρτηση αντικαθιστά όλες τις αρνητικές τιμές με μηδέν και μεταβιβάζει τις θετικές τιμές αμετάβλητες, συγκεκριμένα:

$$f(z) = \max(0, z)$$

Παρόλο που για τις αρνητικές τιμές εισόδου η συνάρτηση παρουσιάζει γραμμική συμπεριφορά, πρακτικά είναι μη γραμμική. Οι κλίσεις για τις θετικές τιμές παραμένουν μη μηδενικές, επιτρέποντας την αποτελεσματική διάδοση της κλίσης και την ενημέρωση των βαρών κατά τη διάρκεια της εκπαίδευσης. Με τον τρόπο αυτό αποφεύγεται το πρόβλημα της εξαφανιζόμενης κλίσης.



Διάγραμμα 3.6: Συνάρτηση ενεργοποίησης ReLU

Η συνάρτηση ReLU είναι υπολογιστικά εύκολη, επιτρέποντας στα δίκτυα να επεκτείνονται σε περισσότερα στρώματα χωρίς σημαντική αύξηση του υπολογιστικού κόστους, σε σύγκριση με τις εκθετικές συναρτήσεις όπως η  $\tanh$  ή η σιγμοειδής.

Κλείνοντας, τονίζεται ότι η επιλογή της κατάλληλης συνάρτησης ενεργοποίησης δεν είναι πάντα ξεκάθαρη και εξαρτάται από τις ειδικές απαιτήσεις του τεχνητού νευρωνικού δικτύου σε κάθε πρόβλημα. Διαφορετικές συναρτήσεις έχουν διαφορετικά πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα. Για παράδειγμα, η συνάρτηση ReLU είναι ευρέως διαδεδομένη σε δίκτυα βαθιάς μάθησης λόγω της αποδοτικότητάς της στην αποτροπή του φαινομένου εξαφάνισης της κλίσης. Επομένως, η επιλογή της σωστής συνάρτησης ενεργοποίησης απαιτεί προσεκτική ανάλυση της φύσης του προβλήματος, της δομής του δικτύου και της επιθυμητής συμπεριφοράς του μοντέλου.

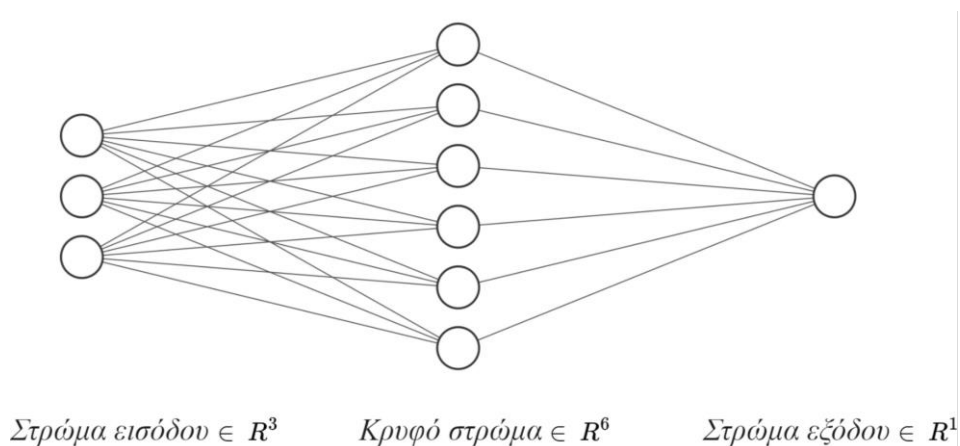
### 3.5 Αρχιτεκτονική Νευρωνικών Δικτύων

Όπως αναφέρθηκε στις προηγούμενες ενότητες, ένας τεχνητός νευρώνας είναι μια ανεξάρτητη υπολογιστική μονάδα και είναι ικανός να εκτελεί ορισμένες απλές πράξεις, όπως η σταθμισμένη άθροιση των τιμών εισόδου και η εφαρμογή μιας μη γραμμικής συνάρτησης ενεργοποίησης ώστε να επιστρέφει κάποιο αποτέλεσμα. Ωστόσο, όπως και ένας βιολογικός νευρώνας, ένας τεχνητός αξιοποιεί την πλήρη ισχύ του μόνο ως μέρος ενός δικτύου [Goodfellow et al., 2016].

Όταν οι τεχνητοί νευρώνες συνδυάζονται σε ένα δίκτυο, σχηματίζουν μια δομή ικανή να εκτελεί πολύπλοκους υπολογισμούς και να επιλύει προβλήματα που δεν μπορούν να επιλυθούν από έναν μεμονωμένο νευρώνα. Μια σημαντική πτυχή εδώ είναι η αρχιτεκτονική του δικτύου, η οποία καθορίζει τον τρόπο διασύνδεσης των νευρώνων και τον τρόπο μετάδοσης των πληροφοριών μέσω του δικτύου.

Όπως είναι γνωστό, ένα νευρωνικό δίκτυο αποτελείται από πολλά στρώματα νευρώνων, καθένα από τα οποία αναλαμβάνει συγκεκριμένο ρόλο στην επεξεργασία των δεδομένων εισόδου και στη δημιουργία της τελικής απόφασης/λύσης. Η αρχιτεκτονική ενός δικτύου περιλαμβάνει συνήθως τρεις τύπους στρωμάτων:

- Στρώμα εισόδου: Το πρώτο στρώμα που λαμβάνει τα χαρακτηριστικά/δεδομένα εισόδου.
- Κρυφά στρώματα: Τα κρυφά στρώματα είναι τοποθετημένα μεταξύ των στρωμάτων εισόδου και εξόδου, και εξάγουν χαρακτηριστικά από τα δεδομένα. Η ικανότητα του δικτύου να μοντελοποιεί πολύπλοκα πρότυπα αυξάνεται με τον αριθμό των κρυφών στρωμάτων και των νευρώνων μέσα σε αυτά.
- Στρώμα εξόδου: Το τελικό επίπεδο που παράγει την πρόβλεψη ή τελική απόφαση. Ο αριθμός των νευρώνων σε αυτό το στρώμα εξαρτάται από το πρόβλημα που μελετάμε, δηλαδή μπορούμε να έχουμε έναν νευρώνα για δυαδική ταξινόμηση ή πολλαπλούς νευρώνες για τα προβλήματα αναγνώρισης εικόνας



Διάγραμμα 3.7: Δομή νευρωνικού δικτύου με ένα κρυφό στρώμα.

Το βάθος ενός νευρωνικού δικτύου αναφέρεται στον αριθμό των στρωμάτων που περιέχει. Τα βαθιά νευρωνικά δίκτυα με πολλά κρυφά στρώματα είναι ικανά να μαθαίνουν ιεραρχικά χαρακτηριστικά, καθιστώντας τα αποτελεσματικά για πολύπλοκες λειτουργίες όπως η αναγνώριση εικόνας και ομιλίας [Russell & Norvig, 2009].

Επίσης, η αρχιτεκτονική του δικτύου καθορίζεται από την κατεύθυνση στην οποία «ρέουν» τα δεδομένα. Σύμφωνα με αυτό το κριτήριο καθορίζονται δυο αρχιτεκτονικές/τοπολογίες των νευρωνικών δικτύων:



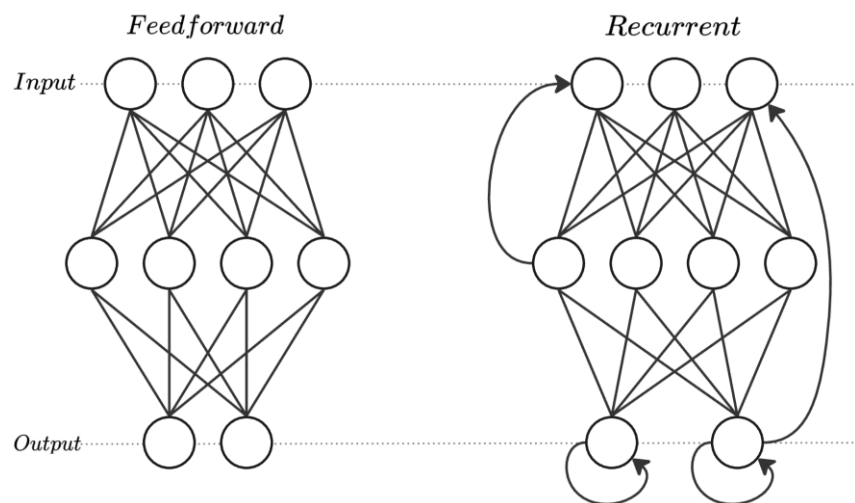
- Δίκτυα εμπρόσθιας τροφοδότησης (Feedforward neural networks - FNN)

Τα νευρωνικά δίκτυα εμπρόσθιας τροφοδότησης χαρακτηρίζονται από μονόδρομη ροή των δεδομένων. Τα δεδομένα διαδίδονται από το στρώμα εισόδου, μέσω ενός ή περισσότερων κρυφών στρωμάτων, στο στρώμα εξόδου χωρίς βρόχους ανατροφοδότησης. Κάθε στρώμα του δικτύου εκτελεί έναν μετασχηματισμό στα δεδομένα πριν τα προωθήσει στο επόμενο στρώμα. Σημειώνουμε ότι καμία πληροφορία από τα επόμενα στρώματα δεν επιστρέφει στα προηγούμενα στρώματα, εξασφαλίζοντας ροή δεδομένων μόνο σε μια κατεύθυνση.

- Δίκτυα αναδρομικής τροφοδότησης (Recurrent neural networks - RNN)

Σε αντίθεση με την μονόδρομη αρχιτεκτονική των FNN, τα αναδρομικά νευρωνικά δίκτυα έχουν σχεδιαστεί για να χειρίζονται διαδοχικά ή διαχρονικά δεδομένα. Τα RNN περιλαμβάνουν βρόχους ανατροφοδότησης που επιτρέπουν την επιστροφή πληροφοριών στο δίκτυο από προηγούμενες εξόδους ή από προηγούμενα στρώματα, προσδίδοντας στο δίκτυο μια μορφή μνήμης. Αυτή η μνήμη επιτρέπει στα RNN να διατηρούν πληροφορίες σε πολλαπλά χρονικά βήματα, καθιστώντας τα ιδιαίτερα ικανά σε θέματα όπου η σχέση μεταξύ των τρεχουσών και των προηγούμενων εισόδων/εξόδων είναι κρίσιμη.

Τα FNN είναι ιδανικά για προβλήματα όπου τα δεδομένα εισόδου είναι στατικά, δηλαδή η τάξη των εισόδων δεν επηρεάζει την έξοδο. Αυτά τα δίκτυα είναι υπολογιστικά αποδοτικά και τυπικά είναι ευκολότερα στην εκπαίδευσή τους. Από την άλλη πλευρά, τα RNN έχουν αναπτυχθεί για τα προβλήματα που περιλαμβάνουν διαδοχικά δεδομένα, όπου η είσοδος σε κάθε βήμα εξαρτάται από τις προηγούμενες εισόδους. Ο μηχανισμός ανατροφοδότησης στα RNN επιτρέπει την αναγνώριση των χρονικών εξαρτήσεων.



Διάγραμμα 3.8: Δίκτυα εμπρόσθιας και αναδρομικής τροφοδότησης

Ωστόσο η εκπαίδευση των RNN μπορεί να είναι αρκετά πιο δύσκολη σε σύγκριση με τα FNN. Μπορούν να προκύψουν προβλήματα όπως η εξαφάνιση των κλίσεων. Οπότε, παρόλο που το FNN έχει λιγότερες δυνατότητες παραμένει πιο συνηθισμένη επιλογή.

### 3.6 Εκπαίδευση νευρωνικών δικτύων

Η διαδικασία εκπαίδευσης σε ένα νευρωνικό δίκτυο επικεντρώνεται στην προσαρμογή των βαρών και των μεροληψιών ώστε να ελαχιστοποιηθεί η διαφορά μεταξύ των προσεγγίσεων του δικτύου και των πραγματικών λύσεων/στόχων. Ο χειροκίνητος προσδιορισμός όλων αυτών των παραμέτρων είναι ένα εξαιρετικά δύσκολο ζήτημα, αλλά με τη χρήση μηχανικής μάθησης η διαδικασία αυτή απλοποιείται σημαντικά, με την έννοια ότι το νευρωνικό δίκτυο είναι σε θέση να προσδιορίσει από μόνο του τις βέλτιστες τιμές των παραμέτρων. Αυτό συνήθως επιτυγχάνεται μέσω ενός αλγορίθμου οπισθοδιάδοσης (backpropagation) σε συνδυασμό με μια μέθοδο βελτιστοποίησης όπως η Gradient Descent [Ruder, 2016].

Για να διαπιστώσουμε πόσο διαφέρει η πραγματική λύση από αυτή που προσεγγίζει το νευρωνικό δίκτυο, χρησιμοποιούμε μια συνάρτηση κόστους (ή απώλειας). Η πιο διαδεδομένη και ευέλικτη συνάρτηση είναι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE):

$$C(\mathbf{w}) = MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - y_i)^2$$

όπου το  $\mathbf{w}$  είναι οι παράμετροι του δικτύου, το  $y_i$  είναι η πραγματική τιμή για το  $i$ -οστό δείγμα και το  $\hat{y}_i$  είναι η αντίστοιχη έξοδος του δικτύου. Άρα όσο καλύτερα είναι επιλεγμένο το σύνολο των παραμέτρων του δικτύου, τόσο μικρότερη είναι η τιμή της συνάρτησης κόστους και τόσο καλύτερη είναι η ακρίβεια του δικτύου. Οπότε η διαδικασία εκπαίδευσης ουσιαστικά διατυπώνεται ως ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης, στο οποίο πρέπει να προσδιορίσουμε κατάλληλο σύνολο βαρών και μεροληψιών, ώστε να ελαχιστοποιείται το μέσο τετραγωνικό σφάλμα:

$$\mathbf{w}^* = \arg \min_{\mathbf{w}} MSE$$

#### 3.6.1 Μέθοδος κατάβασης κλίσης - Gradient Descent Method

Οι πιο συχνά χρησιμοποιούμενες μέθοδοι βελτιστοποίησης στα νευρωνικά δίκτυα είναι οι αλγόριθμοι που βασίζονται στην κλίση. Συγκεκριμένα, η βελτιστοποίηση συνήθως εκτελείται με την μέθοδο κατάβασης κλίσης (gradient descent), είναι ένας από τους πιο θεμελιώδεις και ευρέως χρησιμοποιούμενους αλγορίθμους βελτιστοποίησης στη μηχανική μάθηση, ιδιαίτερα για την εκπαίδευση των νευρωνικών δικτύων.

Η βασική ιδέα πίσω από την μέθοδο κατάβασης κλίσης είναι να κάνουμε βήματα προς την κατεύθυνση που μειώνει την τιμή της συνάρτησης κόστους, και η κατεύθυνση αυτή καθορίζεται από την μερική παραγωγή της συνάρτησης κόστους ως προς παραμέτρους του δικτύου, δηλαδή από την κλίση της συνάρτησης αυτής. Αρχικά η μέθοδος αντιστοιχεί μια τυχαία τιμή σε κάθε παράμετρο και υπολογίζει την κλίση της συνάρτησης κόστους ως εξής:

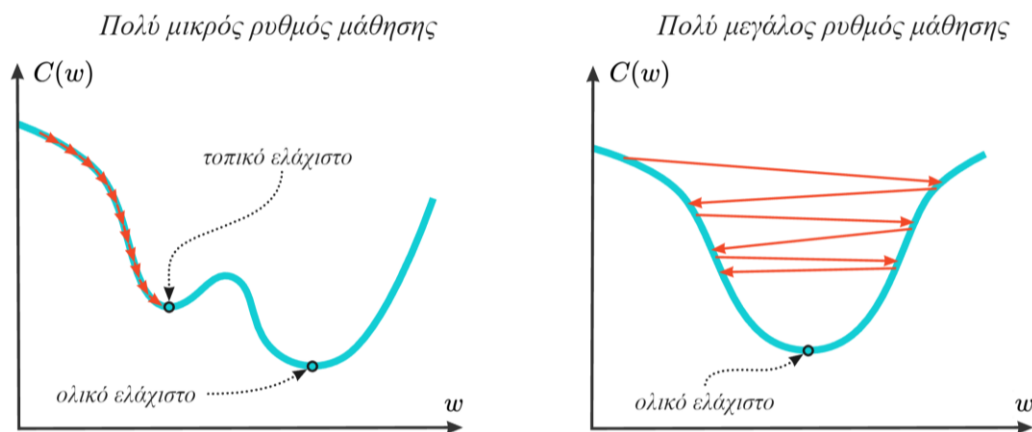
$$\nabla C(\mathbf{w}) = \left[ \frac{\partial C(\mathbf{w})}{\partial w_1}, \frac{\partial C(\mathbf{w})}{\partial w_2}, \dots, \frac{\partial C(\mathbf{w})}{\partial w_n} \right]^T$$

Εδώ κάθε μερική παράγωγος  $\frac{\partial C(\mathbf{w})}{\partial w_j}$  εκφράζει πώς μεταβάλλεται η συνάρτηση κόστους καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος  $w_j$ . Επομένως αφού η κλίση έχει υπολογιστεί μπορούμε να βρούμε το νέο σύνολο παραμέτρων σύμφωνα με παρακάτω επαναληπτικό σχήμα:

$$w_j^{(t+1)} = w_j^{(t)} - \alpha \frac{\partial C(\mathbf{w}^{(t)})}{\partial w_j}, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

οπου το  $t$  είναι η επανάληψη της μεθόδου και το  $\alpha$  είναι ο ρυθμός μάθησης.

Η επιλογή του ρυθμού μάθησης  $\alpha$  έχει σημαντικό ρόλο στην αποτελεσματικότητα και την επιτυχία του αλγορίθμου Gradient Descent. Εάν ο ρυθμός μάθησης είναι πολύ μικρός, τα βήματα που γίνονται προς το ελάχιστο της συνάρτησης κόστους θα είναι πολύ μικρά, και ενώ ο αλγόριθμος θα συγκλίνει στο ελάχιστο, θα το κάνει πολύ αργά. Αυτή η αργή εξέλιξη μπορεί να κάνει τη διαδικασία εκπαίδευσης να διαρκεί αρκετά περισσότερο από όσο χρειάζεται. Από την άλλη πλευρά, εάν ο ρυθμός μάθησης είναι πολύ μεγάλος, τα βήματα που θα γίνουν θα είναι πολύ μεγάλα. Αντί να κάνει σταθερή πρόοδο προς το ελάχιστο, ο αλγόριθμος μπορεί να το ξεπεράσει. Αυτή η υπέρβαση μπορεί να προκαλέσει ταλάντωση του αλγορίθμου γύρω από το ελάχιστο ή ακόμη και απόκλιση, πράγμα που σημαίνει ότι η συνάρτηση κόστους μπορεί να αρχίσει να αυξάνεται αντί να μειώνεται.



Διάγραμμα 3.9: Απεικόνιση των περιπτώσεων όταν ο ρυθμός μάθησης είναι πολύ μεγάλος ή πολύ μικρός

Όταν ο ρυθμός μάθησης είναι κατάλληλος, η μέθοδος μπορεί να συγκλίνει αποτελεσματικά στο ελάχιστο της συνάρτησης κόστους, οδηγώντας σε ταχύτερη και πιο αξιόπιστη εκπαίδευση. Ωστόσο, η επιλογή του σωστού ρυθμού εκμάθησης μπορεί να είναι δύσκολη και συχνά απαιτεί κάποια πειράματα. Μια συνήθης προσέγγιση είναι να δοκιμάσουμε διαφορετικούς ρυθμούς μάθησης και να εξετάζουμε πόσο γρήγορα και σταθερά μειώνεται η συνάρτηση κόστους για κάθε ρυθμό. Ως εναλλακτική λύση μπορούμε να εφαρμόσουμε τους αλγόριθμους προσαρμοστικού ρυθμού μάθησης, όπως ο Adam. Τέτοιοι αλγόριθμοι μπορούν να προσαρμόζουν αυτόματα τον ρυθμό μάθησης για κάθε παράμετρο [Kingma & Ba, 2017].

Το κριτήριο τερματισμού για την κατάβαση κλίσης είναι ένα άλλο σημαντικό ζήτημα. Μια ιδέα είναι να στηριζόμαστε στη σύγκλιση της συνάρτησης κόστους. Δηλαδή να σταματάει ο αλγόριθμος όταν η μεταβολή της συνάρτησης κόστους μεταξύ διαδοχικών επαναλήψεων γίνεται μικρότερη από ένα προκαθορισμένο κατώφλι  $\epsilon$ . Μαθηματικά, αυτό μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$|C(\mathbf{w}^{(t+1)}) - C(\mathbf{w}^{(t)})| < \epsilon$$

Εναλλακτικά, ως κριτήριο τερματισμού μπορεί να αξιοποιηθεί η τιμή της κλίσης, όταν αυτή γίνει πολύ μικρή, σχεδόν μηδέν. Με την λογική ότι, μια σχεδόν μηδενική κλίση δείχνει ότι ο αλγόριθμος έχει φτάσει σε μια επίπεδη περιοχή της συνάρτησης κόστους η οποία αντιστοιχεί στο ελάχιστο. Το εν λόγω κριτήριο μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$\|\nabla C(\mathbf{w}^{(t)})\| < \delta, \quad \text{όπου } \delta > 0$$

### 3.6.2 Αλγόριθμος οπισθοδιάδοσης - *Backpropagation*

Η οπισθοδιάδοση (backpropagation) είναι ένας αλγόριθμος που υπολογίζει αποτελεσματικά την κλίση της συνάρτησης απώλειας σε σχέση με κάθε βάρος στο δίκτυο [Russell & Norvig, 2009]. Αυτή η κλίση χρησιμοποιείται στη συνέχεια για την ενημέρωση των βαρών στη μέθοδο. Όπως αναφέραμε προηγουμένως, ένα τυπικό νευρωνικό δίκτυο αποτελείται από ένα στρώμα εισόδου, ένα ή περισσότερα κρυφά στρώματα και ένα στρώμα εξόδου. Κάθε στρώμα αποτελείται από νευρώνες και κάθε νευρώνας σε ένα στρώμα συνδέεται με κάθε νευρώνα στο επόμενο στρώμα μέσω σταθμισμένων συνδέσεων. Όταν μια είσοδος τροφοδοτείται στο δίκτυο, πρέπει να διέρχεται από αυτά τα στρώματα, όπου σε κάθε στρώμα κάθε νευρώνας εφαρμόζει έναν γραμμικό μετασχηματισμό στα δεδομένα που λαμβάνει για να παράγει μια έξοδο. Η διαδικασία αυτή είναι γνωστή ως forward pass. Στη συνέχεια, η έξοδος του δικτύου συγκρίνεται με τον πραγματικό στόχο/λύση χρησιμοποιώντας μια συνάρτηση κόστους. Η διαφορά μεταξύ της προβλεπόμενης εξόδου και του πραγματικού, είναι το σφάλμα που το δίκτυο στοχεύει να

ελαχιστοποιήσει κατά την εκπαίδευση. Σημειώνεται ότι το forward pass δεν έχει σχέση με την αρχιτεκτονική του δικτύου, όπως FNN, και αφορά μόνο την διαδικασία υπολογισμού που διατρέχει όλους τους νευρώνες από το πρώτο έως το τελευταίο επίπεδο.

Όπως παρουσιάστηκε προηγουμένως, η ανανέωση των παραμέτρων του δικτύου γίνεται μέσω ενός επαναληπτικού σχήματος που εξαρτάται από την κλίση την συνάρτησης κόστους. Όμως στα νευρωνικά δίκτυα, η έξοδος κάθε στρώματος εξαρτάται από τις παραμέτρους των προηγούμενων στρωμάτων, οπότε η συσχέτιση μεταξύ εισόδων και εξόδων είναι εξαιρετικά ισχυρή. Κατά συνέπεια, ο υπολογισμός των κλίσεων απευθείας με τη χρήση απλών μεθόδων παραγωγίσης θα ήταν υπολογιστικά ανέφικτος. Ο αλγόριθμος οπισθοδιάδοσης υπολογίζει αποτελεσματικά τις κλίσεις της συνάρτησης κόστους σε σχέση με κάθε βάρος εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας με συστηματικό τρόπο.

Συγκεκριμένα, στο πρώτο βήμα ο αλγόριθμος εκφράζει την μερική παράγωγο της συνάρτησης κόστους ως προς το βάρος εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας:

$$\frac{\partial C}{\partial w_{ij}^k} = \frac{\partial C}{\partial z_j^k} \frac{\partial z_j^k}{\partial w_{ij}^k}$$

Ο πρώτος όρος της παραπάνω έκφρασης ονομάζεται συνήθως σφάλμα και συμβολίζεται ως εξής:

$$\delta_j^k = \frac{\partial C}{\partial z_j^k}$$

Επομένως εφαρμόζοντας την γνωστή έκφραση για το  $z_j^{(k)}$  ο δεύτερος ορός λαμβάνει την παρακάτω μορφή:

$$\frac{\partial z_j^k}{\partial w_{ij}^k} = \frac{\partial}{\partial w_{ij}^k} \left( \sum_{l=0}^{r_{k-1}} w_{lj}^k x_l^k \right) = x_i^{k-1}$$

Οπότε

$$\frac{\partial C}{\partial w_{ij}^k} = \delta_j^k x_i^{k-1}$$

Παρατηρούμε ότι η μερική παραγωγός της συνάρτησης κόστους ως προς το βάρος είναι το γινόμενο του σφάλματος στον  $j$  νευρώνα του στρώματος  $k$  και της εξόδου στον  $i$  νευρώνα του στρώματος  $k-1$ . Στη συνέχεια, για τον προσδιορισμό του σφάλματος  $\delta_j^k$ , αξίζει να σημειωθεί ότι ο υπολογισμός των παραπάνω σφαλμάτων θα πραγματοποιείται αντίστροφα, από το στρώμα εξόδου προς το στρώμα εισόδου.

- Το στρώμα εξόδου

Έστω για λόγους απλότητας, ότι στο εξωτερικό στρώμα περιλαμβάνεται μόνο ένας νευρώνας. Επομένως η συνάρτηση κόστους στον νευρώνα του στρώματος εξόδου ορίζεται ως εξής:

$$C = \frac{1}{2}(\hat{y} - y)^2 = \frac{1}{2}(f(z_1^m) - y)^2$$

Το ζητούμενο σφάλμα είναι:

$$\delta_1^m = (f(z_1^m) - y)f'(z_1^m) = (\hat{y} - y)f'(z_1^m)$$

Και τελικά η μερική παράγωγος της συνάρτησης κόστους  $C$  ως προς το βάρος  $w_{i1}^m$  στο τελικό στρώμα ορίζεται ως εξής:

$$\frac{\partial C}{\partial w_{i1}^m} = \delta_1^m x_i^{m-1} = (\hat{y} - y)f'(z_1^m)x_i^{m-1}$$

- Τα κρυφά στρώματα

Στη συνέχεια πρέπει να προσδιορίσουμε την μερική παραγωγή της συνάρτησης κόστους για τα κρυφά στρώματα. Παρόμοια, εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε ότι:

$$\delta_j^k = \frac{\partial C}{\partial z_j^k} = \sum_{l=1}^{r_{k+1}} \frac{\partial C}{\partial z_l^{k+1}} \frac{\partial z_l^{k+1}}{\partial z_j^k} = \sum_{l=1}^{r_{k+1}} \delta_l^{k+1} \frac{z_l^{k+1}}{z_j^k}, \text{ για } 1 \leq k < 0 \text{ και } 1 \leq l \leq r_{k+1}$$

όπου το  $r_{k+1}$  είναι ο αριθμός των νευρώνων στο επόμενο κρυφό στρώμα.

Επομένως:

$$\frac{\partial z_l^{k+1}}{\partial z_j^k} = \frac{\partial}{\partial z_j^k} \left( \sum_{j=1}^{r_k} w_{jl}^{k+1} f(z_j^k) \right) = w_{jl}^{k+1} f'(z_j^k)$$

Οπότε:

$$\delta_j^k = \sum_{l=1}^{r_{k+1}} \delta_l^{k+1} w_{jl}^{k+1} f'(z_j^k) = f'(z_j^k) \sum_{l=1}^{r_{k+1}} w_{jl}^{k+1} \delta_l^{k+1}$$

Τελικά η μερική παράγωγος της συνάρτησης κόστους ως προς το βάρος  $w_{ij}^k$  στα κρυφά στρώματα ορίζεται ως εξής:

$$\frac{\partial C}{\partial w_{ij}^k} = \delta_j^k x_i^{k-1} = x_i^{k-1} f'(z_j^k) \sum_{l=1}^{r_{k+1}} w_{jl}^{k+1} \delta_l^{k+1}$$

Αρα, συνδυάζοντας και τις δυο εκφράσεις έχουμε το εξής:

$$\frac{\partial C}{\partial w} = \begin{cases} \frac{\partial C}{\partial w_{ij}^k} = \delta_j^k x_i^{k-1} = x_i^{k-1} f'(z_j^k) \sum_{l=1}^{r_{k+1}} w_{jl}^{k+1} \delta_l^{k+1} \\ \frac{\partial C}{\partial w_{i1}^m} = \delta_1^m x_i^{m-1} = (\hat{y} - y) f'(z_1^m) x_i^{m-1} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι το σφάλμα  $\delta_j^k$  στο στρώμα  $k$  εξαρτάται από το σφάλμα  $\delta_l^{k+1}$  στο επόμενο στρώμα. Δηλαδή τα σφάλματα ρέουν προς τα πίσω, από το τελευταίο στρώμα στο πρώτο στρώμα. Οπότε έχοντας υπολογίσει το σφάλμα στο στρώμα εξόδου έχουμε την δυνατότητα να προσδιορίσουμε τα σφάλματα διαδοχικά στα υπόλοιπα στρωματά.

### 3.7 Επίλογος

Σε αυτό το κεφάλαιο, πραγματοποιήθηκε λεπτομερής ανασκόπηση του θεωρητικού υπόβαθρου των τεχνητών νευρωνικών δικτύων. Αρχικά, παρουσιάστηκε η λειτουργία του τεχνητού νευρώνα, τόσο ως μεμονωμένου μαθηματικού μοντέλου, όσο και ως βασικού δομικού στοιχείου στο πλαίσιο ενός νευρωνικού δικτύου. Στη συνέχεια, εξετάστηκαν οι βασικές αρχιτεκτονικές και η τοπολογία των νευρωνικών δικτύων, καθώς και οι διαδικασίες εκπαίδευσής τους. Συνοψίζοντας, τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα εμφανίζουν υψηλή αποδοτικότητα και ευελιξία στην προσαρμογή τους σε διάφορα προβλήματα, όπως η δημιουργία και ταξινόμηση εικόνων, καθώς και η γραμμική και μη γραμμική παλινδρόμηση. Αυτό οφείλεται στη δυνατότητα προσαρμογής των δικτύων μέσω πολλαπλών παραμέτρων και ρυθμίσεων, οι οποίες επιτρέπουν την αντιμετώπιση του κάθε συγκεκριμένου ζητήματος με βέλτιστο τρόπο.

Παρά τα πλεονεκτήματα αυτά, η εφαρμογή των νευρωνικών δικτύων συνοδεύεται από ορισμένες προκλήσεις. Μία από τις σημαντικότερες δυσκολίες είναι η ανάγκη συλλογής μεγάλων και κατάλληλων συνόλων δεδομένων για την εκπαίδευση του δικτύου. Η ποιότητα και η ποσότητα των δεδομένων παίζουν κρίσιμο ρόλο στην απόδοση του μοντέλου, και η συλλογή ενός επαρκούς συνόλου δεδομένων μπορεί να είναι ιδιαίτερα χρονοβόρα ή δαπανηρή. Ένα επιπλέον ζήτημα αφορά την πολυπλοκότητα της διαδικασίας εκπαίδευσης. Τα μεγάλα και βαθιά δίκτυα απαιτούν σημαντικούς υπολογιστικούς πόρους και χρόνο, ειδικά όταν εφαρμόζονται σε σύνθετα προβλήματα που περιλαμβάνουν μεγάλο όγκο δεδομένων.

Ζητήματα όπως η εξαφάνιση ή η έκρηξη των κλίσεων κατά την εκπαίδευση, ειδικά σε βαθιά δίκτυα, δυσχεραίνουν τη σύγκλιση του αλγορίθμου βελτιστοποίησης. Η επιλογή των κατάλληλων υπερπαραμέτρων, όπως ο ρυθμός μάθησης, ο αριθμός των κρυφών στρωμάτων

και οι συναρτήσεις ενεργοποίησης, αποτελούν μια επιπλέον κρίσιμη πρόκληση, καθώς οι λανθασμένες επιλογές μπορεί να επηρεάσουν σημαντικά την απόδοση του μοντέλου.

Παρά τις δυσκολίες αυτές, η συνεχής πρόοδος στην έρευνα και την ανάπτυξη των νευρωνικών δικτύων έχει οδηγήσει στη δημιουργία ισχυρών και ευέλικτων μοντέλων, που μπορούν να προσαρμοστούν σε ποικίλες και πολύπλοκες εφαρμογές. Σήμερα, τα νευρωνικά δίκτυα θεωρούνται από τα πιο ισχυρά μοντέλα τεχνητής νοημοσύνης, ικανά να επιλύουν προβλήματα που προηγουμένως ήταν απροσπέλαστα για τις παραδοσιακές μεθόδους.



## ***4 Επιτάχυνση της Βελτιστοποίησης Τοπολογίας με την Βοήθεια Νευρωνικών Δικτύων***

### ***4.1 Πρόλογος***

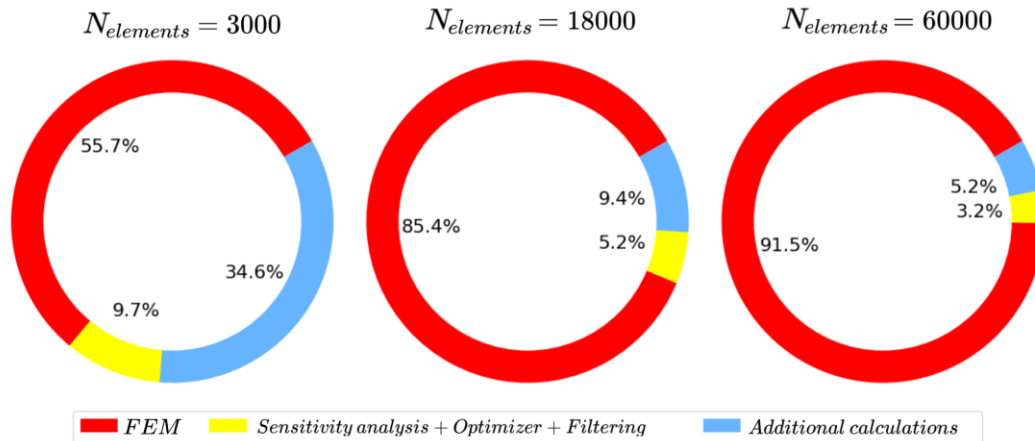
Το παρόν κεφάλαιο αποτελεί μια εισαγωγή στην μεθοδολογία επιτάχυνσης της βελτιστοποίησης τοπολογίας με την βοήθεια των νευρωνικών δικτύων. Αρχικά αναλύουμε γιατί η επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης τοπολογίας είναι μια εξαιρετικά απαιτητική και χρονοβόρα διαδικασία. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τρόποι για την μείωση του χρόνου που απαιτείται για την επίλυση αυτών των προβλημάτων, και προτείνεται μια μέθοδος επιτάχυνσης της επανάληψης στην οποία η ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων και η ανάλυση ευαισθησίας πραγματοποιούνται με τη χρήση νευρωνικού δικτύου. Επίσης παρουσιάζονται δύο προσεγγίσεις για την εκτέλεση της εκτεταμένης μεθόδου, με τη χρήση ενός ή δύο πλεγμάτων διακριτοποίησης. Τέλος, παρουσιάζεται το βαθύ νευρωνικό δίκτυο που χρησιμοποιείται στην προτεινομένη μεθοδολογία.

### ***4.2 Εισαγωγή στο πρόβλημα***

Όπως παρουσιάστηκε στα προηγούμενα κεφάλαια, η βελτιστοποίηση τοπολογίας (BT) είναι μια ισχυρή υπολογιστική τεχνική σχεδιασμού και βελτιστοποίησης που καθορίζει τη βέλτιστη κατανομή υλικών σε ένα δεδομένο πεδίο σχεδιασμού με σκοπό την επίτευξη της καλύτερης δυνατής απόδοσης της κατασκευής για συγκεκριμένα φορτία, οριακές συνθήκες και περιορισμούς.

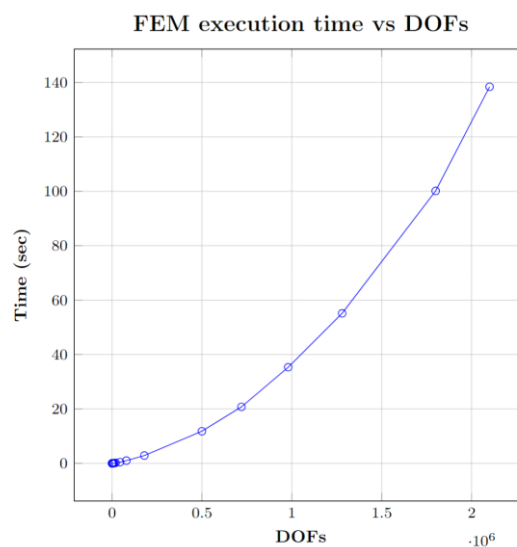
Στο επίκεντρο της BT βρίσκεται ένα πρόβλημα μαθηματικής βελτιστοποίησης, το οποίο είναι συχνά μη γραμμικό και μη κυρτό. Η μη κυρτή φύση του προβλήματος δημιουργεί πολλαπλά τοπικά ελάχιστα, γεγονός που απαιτεί τη χρήση εξελιγμένων αλγορίθμων και τεχνικών για την εξασφάλιση μιας λύσης η οποία βρίσκεται όσο το δυνατόν πιο κοντά στο ολικό ελάχιστο, δηλαδή στη βέλτιστη κατασκευή. Επίσης η διαδικασία βελτιστοποίησης απαιτεί ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων σε κάθε βήμα της, δηλαδή επίλυση μη γραμμικών συστημάτων μερικών διαφορικών εξισώσεων. Όλα τα παραπάνω οδηγούν σε μεγάλη αύξηση της πολυπλοκότητας της μεθόδου και στο γεγονός ότι η εφαρμογή της BT αποτελεί μια εξαιρετικά χρονοβόρα διαδικασία. Ως εκ τούτου, η εφαρμογή της BT για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων βελτιστοποίησης κατασκευών μπορεί να απαιτεί από μερικές ώρες έως ημέρες [Rade et al., 2020].

Για την καλύτερη κατανόηση του προβλήματος αξίζει να αναλυθεί ο απαιτούμενος χρόνος για την εκτέλεση μιας επανάληψης της ΒΤ. Συγκεκριμένα σε κάθε επανάληψη της ΒΤ εκτελούνται τα τέσσερα βασικά βήματα: ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων, ανάλυση ευαισθησίας, εφαρμογή φίλτρου και υλοποίηση αλγορίθμου βελτιστοποίησης.



Διάγραμμα 4.1: Ποσοστό του χρόνου που απαιτείται για την ολοκλήρωση μιας επανάληψης.

Παρατηρούμε στο παραπάνω διάγραμμα ότι σε κάθε επανάληψη περισσότερος χρόνος αφιερώνεται στην ανάλυση των πεπερασμένων στοιχείων. Επίσης παρατηρούμε ότι η αύξηση του πλήθους των στοιχείων στο πλέγμα οδηγεί στην σημαντική αύξηση του χρόνου που απαιτείται για την εκτέλεση της επανάληψης. Πιο συγκεκριμένα ο χρόνος που απαιτείται για την επίλυση ενός προβλήματος με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από τον πλήθος των βαθμών ελευθερίας του μοντέλου. Βλέπουμε στο παρακάτω διάγραμμα ότι ο χρόνος εκτέλεσης αυξάνεται εκθετικά με την αύξηση των βαθμών ελευθερίας.



Διάγραμμα 4.2: Χρόνος εκτέλεσης της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων σε σχέση με τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας του προβλήματος.

Άρα συμπεραίνουμε ότι η πολυπλοκότητα της ΒΤ κυρίως οφείλεται στην ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων. Επομένως, αν καταφέρουμε να μειώσουμε την υπολογιστική επιβάρυνση της ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων, αυτό μπορεί να επιφέρει σημαντική μείωση στον συνολικό χρόνο υλοποίησης της διαδικασίας ΒΤ.

Υπάρχουν πολλές τεχνικές που σκοπεύουν να μειώσουν τον απαιτούμενο χρόνο εκτέλεσης βελτιστοποίησης τοπολογίας, όπως η χρήση προσαρμοστικών μεθόδων ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων, που επιτρέπουν την αναπροσαρμογή του πλέγματος σε περιοχές υψηλού ενδιαφέροντος, ενώ σε άλλες περιοχές μειώνεται η πυκνότητα του πλέγματος [You et.al, 2015]. Επιπλέον, οι τεχνικές παράλληλου υπολογισμού και η χρήση προηγμένων υπολογιστικών αρχιτεκτονικών, όπως οι μονάδες επεξεργασίας γραφικών (GPU) ή οι κατανεμημένες υπολογιστικές πλατφόρμες [Homenyk & Kozub, 2021], συμβάλλουν στην δραστική μείωση του χρόνου εκτέλεσης. Τέλος, μια άλλη στρατηγική για την ταχύτερη σύγκλιση, είναι η χρήση μοντέλων μειωμένης τάξης (reduced-order models), τα οποία περιορίζουν τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας που απαιτούνται για την επίλυση του προβλήματος προσφέροντας ταχύτερη επίλυση με ανεκτή μείωση της ακρίβειας [Lucia et. al, 2004; Kallioras, Nordas, & Lagaros, 2021].

Μια σχετικά νέα προσέγγιση είναι η εφαρμογή των νευρωνικών δικτύων για την επιτάχυνση της διαδικασίας τοπολογικής βελτιστοποίησης [Shin et al., 2023]. Συγκεκριμένα οι εφαρμογές των νευρωνικών δικτύων στα προβλήματα βελτιστοποίησης τοπολογίας μπορούν να χωριστούν σε δυο βασικές κατηγορίες:

- Επιτάχυνση της επανάληψης

Η επιτάχυνση της επαναληπτικής διαδικασίας συνεπάγεται την εισαγωγή νευρωνικών δικτύων, για τη επιτάχυνση των υπολογισμών μέσα στο πλαίσιο του επαναληπτικού σχήματος. Δηλαδή, ο βασικός αλγόριθμος της μεθόδου τοπολογικής βελτιστοποίησης παραμένει αμετάβλητος, αλλά ορισμένες διαδικασίες, όπως για παράδειγμα εκτέλεση της ΜΠΣ ή της μεθόδου βέλτιστων κριτηρίων, εκτελούνται με την βοήθεια ενός ή πολλών νευρωνικών δικτύων. Τέτοιες εφαρμογές μειώνουν δραστικά τον απαιτούμενο χρόνο εκτέλεσης χωρίς να θυσιάζεται η ακρίβεια [Chi et al., 2021; Deng et al., 2022; Lagaros et al., 2020].

Επιπλέον, η επιτάχυνση μπορεί να επιτευχθεί με μεθοδολογίες που μπορούν να προβλέψουν την τελική βέλτιστη κατασκευή, στηριζόμενες σε δεδομένα από ορισμένες αρχικές επαναλήψεις της κλασσικής μεθοδολογίας. Αυτό μειώνει σημαντικά τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται για την επίτευξη του βέλτιστου αποτελέσματος. Η προσέγγιση αυτή βασίζεται στην παρατήρηση ότι τα κύρια χαρακτηριστικά και η

γεωμετρία/τοπολογία της δομής διαμορφώνονται κατά τα αρχικά στάδια της βελτιστοποίησης, ενώ στις μεταγενέστερες επαναλήψεις οι αλλαγές είναι λιγότερες και λαμβάνουν περισσότερο τοπικό χαρακτήρα [Sosnovik & Oseledets, 2017]

- Μη επαναληπτική βελτιστοποίηση

Οι μεθοδολογίες αυτού του τύπου βασίζονται στη χρήση νευρωνικών δικτύων για τον άμεσο προσδιορισμό της βέλτιστης δομής που ικανοποιεί όλες τις δεδομένες συνθήκες σχεδιασμού, όπως τα ασκούμενα φορτία και οι οριακές συνθήκες [Wang et al., 2021; Kallioras & Lagaros, 2021; Kallioras & Lagaros, 2020]. Σε αντίθεση με τις παραδοσιακές επαναληπτικές μεθόδους, όπου η κατασκευή βελτιώνεται σταδιακά μέσω πολλαπλών επαναλήψεων, σε αυτή την μεθοδολογία το κατάλληλο νευρωνικό δίκτυο εκπαιδεύεται σε ένα μεγάλο σύνολο εκπαίδευσης, ώστε να έχει την δυνατότητα να προβλέπει άμεσα την βέλτιστη διάταξη βασιζόμενη λ.χ. μόνο στα ασκούμενα φορτία και στις συνθήκες στήριξης [Li et al., 2019; Nie et al., 2020; Erzmman et al., 2023].

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται η μεθοδολογία της επιτάχυνσης της επανάληψης της μεθόδου SIMP με την βοήθεια του βαθύ νευρωνικού δικτύου (BND). Συγκεκριμένα σε κάθε επανάληψη ο υπολογισμός της αντικειμενικής συνάρτησης και η ανάλυση ευαισθησίας εκτελείται μέσω του BND χωρίς την εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.

### **4.3 Επιτάχυνση της μεθόδου SIMP**

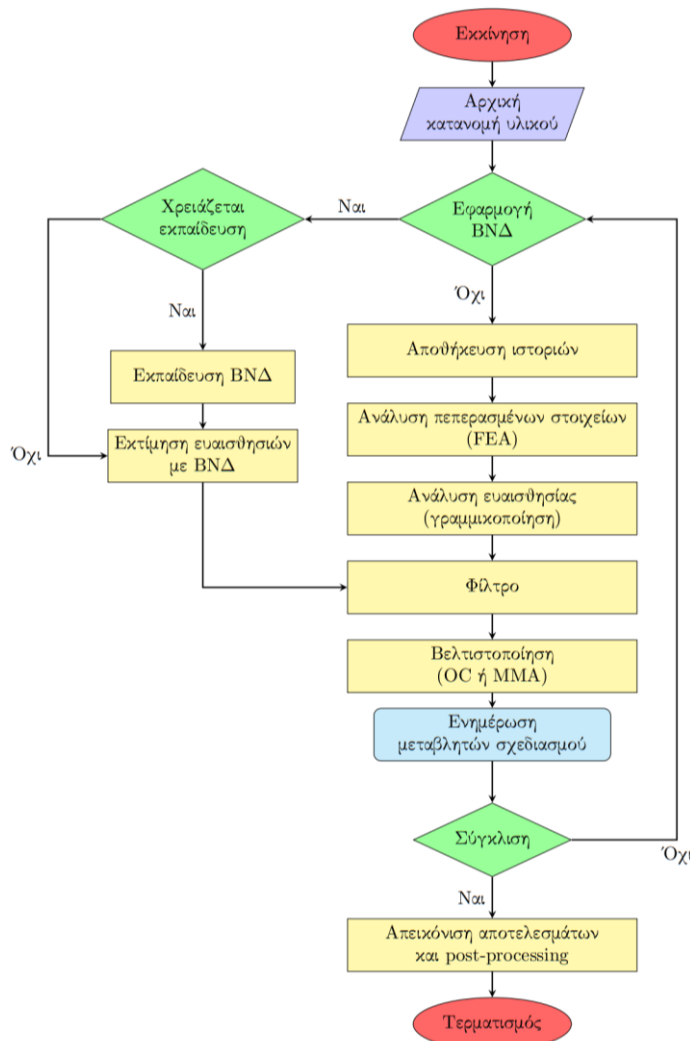
Η βασική ιδέα της προτεινόμενης μεθοδολογίας στηρίζεται στην εκτίμηση των ευαισθησιών σε κάθε βήμα της μεθόδου βελτιστοποίησης, χρησιμοποιώντας το βαθύ νευρωνικό δίκτυο. Συγκεκριμένα, τα πρώτα βήματα της βελτιστοποίησης εκτελούνται με τον κλασικό τρόπο της μεθόδου SIMP, μαζί με την μέθοδο των βέλτιστων κριτηρίων (OC), με την διαφορά ότι ταυτόχρονα γίνεται συλλογή των δεδομένων σε κάθε βήμα της μεθόδου. Τα δεδομένα αυτά αξιοποιούνται στη συνέχεια για την εκπαίδευση του νευρωνικού δικτύου. Μετά την ολοκλήρωση του σταδίου της εκπαίδευσης, το νευρωνικό δίκτυο είναι σε θέση να υπολογίζει αυτόνομα τις ευαισθησίες κάθε στοιχείου, γεγονός που εξαλείφει την ανάγκη για περαιτέρω εφαρμογή της ΜΠΣ και τον υπολογισμό ευαισθησιών. Η προσέγγιση αυτή όχι μόνο απλοποιεί την διαδικασία βελτιστοποίησης, αλλά και την επιταχύνει σημαντικά.

Επιπροσθέτως, το συγκεκριμένο BND είναι προσαρμοσμένο να λειτουργεί με σχετικά μικρά σύνολα δεδομένων εκπαίδευσης και δεν απαιτεί ξεχωριστή προεπεξεργασία εκπαίδευσης. Σε αντίθεση με την κλασική προσέγγιση, οι διαδικασίες συλλογής δεδομένων για την εκπαίδευση, καθώς και η εκπαίδευση του δικτύου, είναι ενσωματωμένες απευθείας στη διαδικασία της βελτιστοποίησης. Με τον τρόπο αυτό, η εκπαίδευση του δικτύου γίνεται ταυτόχρονα με τη

βελτιστοποίηση, επιτρέποντας στο μοντέλο να προσαρμόζεται αποτελεσματικότερα στις αλλαγές και τις απαιτήσεις του δεδομένου προβλήματος.

Για να εξασφαλιστεί η δυνατότητα γενίκευσης και να αποφευχθεί η απόκλιση κατά τη διάρκεια της βελτιστοποίησης, η μέθοδος περιλαμβάνει δυναμική ενημέρωση του νευρωνικού δικτύου. Συγκεκριμένα, σε ορισμένα στάδια της βελτιστοποίησης η διαδικασία μεταβαίνει προσωρινά σε αρκετές προκαθορισμένες επαναλήψεις της κλασικής μεθόδου με ταυτόχρονη συλλογή των δεδομένων. Με βάση τα δεδομένα που λαμβάνονται, το δίκτυο επανεκπαιδεύεται, επιτρέποντάς του να προσαρμόζεται και να διατηρεί την ακρίβεια.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι δυο προσεγγίσεις της προτεινόμενης μεθοδολογίας. Κάθε προσέγγιση αποτελεί ολοκληρωμένη στρατηγική που μπορεί να εφαρμοστεί για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης τοπολογίας.



Διάγραμμα 4.3: Διάγραμμα ροής της προτεινόμενης μεθοδολογίας

### 4.3.1 Προσέγγιση ενός πλέγματος.

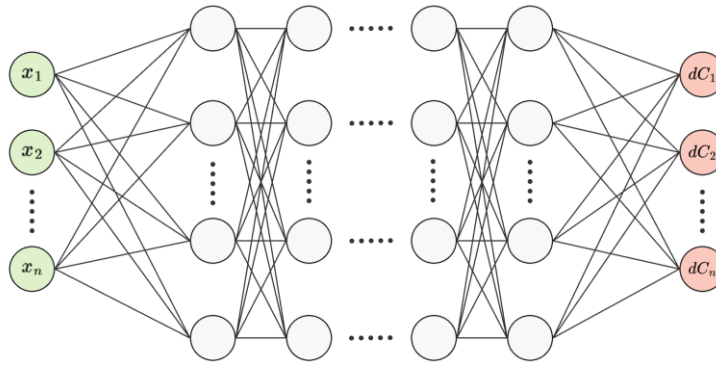
Η προσέγγιση αυτή απαρτίζεται από την εφαρμογή του BND για την εκτίμηση της ευαισθησίας κάθε στοιχείου του πλέγματος, στηριζόμενο στις αντίστοιχες μεταβλητές σχεδιασμού. Συγκεκριμένα το δίκτυο λαμβάνει ως είσοδο το διάνυσμα μεταβλητών σχεδιασμού  $\mathbf{x}^{(i-1)}$  στην  $i - 1$  επανάληψη της μεθόδου SIMP και επιστρέφει το αντίστοιχο διάνυσμα ευαισθησιών  $\mathbf{dc}^{(i)}$  στην τρέχουσα επανάληψη. Παρακάτω γίνεται αναλυτική περιγραφή των βημάτων της μεθοδολογίας.

Στη αρχή εκτελούνται  $N_{init}$  επαναλήψεις με την κλασική διαδικασία του SIMP με την μέθοδο OC, δηλαδή εφαρμόζοντας την ΜΠΣ για τον υπολογισμό της αντικειμενικής συνάρτησης και την μέθοδο των βέλτιστων κριτηρίων για την εκτέλεση της βελτιστοποίησης. Εν συνεχεία οι ιστορίες, δηλαδή οι μεταβλητές σχεδιασμού και οι αντίστοιχες ευαισθησίες, από τις  $N_{train}$  τελευταίες επαναλήψεις αποθηκεύονται και χρησιμοποιούνται για την εκπαίδευση του νευρωνικού δικτύου.

Όταν ολοκληρωθεί η διαδικασία εκπαίδευσης, δηλαδή από το  $N_{init} + 1$  βήμα, αξιοποιούμε το BND για την προσέγγιση των ευαισθησιών, χωρίς εκτέλεση της ΜΠΣ, χρησιμοποιώντας ως είσοδο τις μεταβλητές σχεδιασμού της τρέχουσας επανάληψης. Σημειώνεται ότι η δομή της μεθόδου SIMP παραμένει αμετάβλητη, όμως το αποτέλεσμα της ΜΠΣ και ο υπολογισμός των ευαισθησιών προσεγγίζονται από το βαθύ νευρωνικό δίκτυο.

Επίσης για να εξασφαλιστεί η ακρίβεια των προσεγγίσεων και η σύγκλιση της μεθόδου, εκτελείται επανεκπαίδευση του δικτύου. Δηλαδή σε κάθε  $N_{step}$  επανάληψη μετά από την αρχική εκπαίδευση, ή μετά από την τελευταία επανεκπαίδευση, ο αλγόριθμος επιστρέφει στην κλασική διαδικασία βελτιστοποίησης για  $N_{update}$  βήματα, ώστε να συλλέξουμε νέα δεδομένα για εκπαίδευση και να επιλύσουμε τυχόν σφάλματα που εμφανίστηκαν κατά τη χρήση του νευρωνικού δικτύου. Αφού ολοκληρωθεί η διαδικασία επανεκπαίδευσης, χρησιμοποιούμε ξανά το νευρωνικό δίκτυο για να εκτελέσουμε τους υπολογισμούς της ευαισθησίας μέχρι το επόμενο στάδιο της επανεκπαίδευσης.

Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να επιτευχθεί η σύγκλιση ή να ικανοποιηθεί το κριτήριο τερματισμού. Μετά την ολοκλήρωση της κύριας διαδικασίας βελτιστοποίησης, εκτελούνται  $N_{finalize}$  βήματα χρησιμοποιώντας πάλι την κλασική προσέγγιση, για να οριστικοποιηθεί η λύση που προκύπτει.



Διάγραμμα 4.4: Απεικόνιση του νευρωνικό δικτιού στην προσέγγιση ενός πλέγματος, όπου στην είσοδο λαμβάνονται μεταβλητές σχεδιασμού (πυκνότητες) και στη έξοδο επιστρέφονται αντίστοιχες ευαισθησίες.

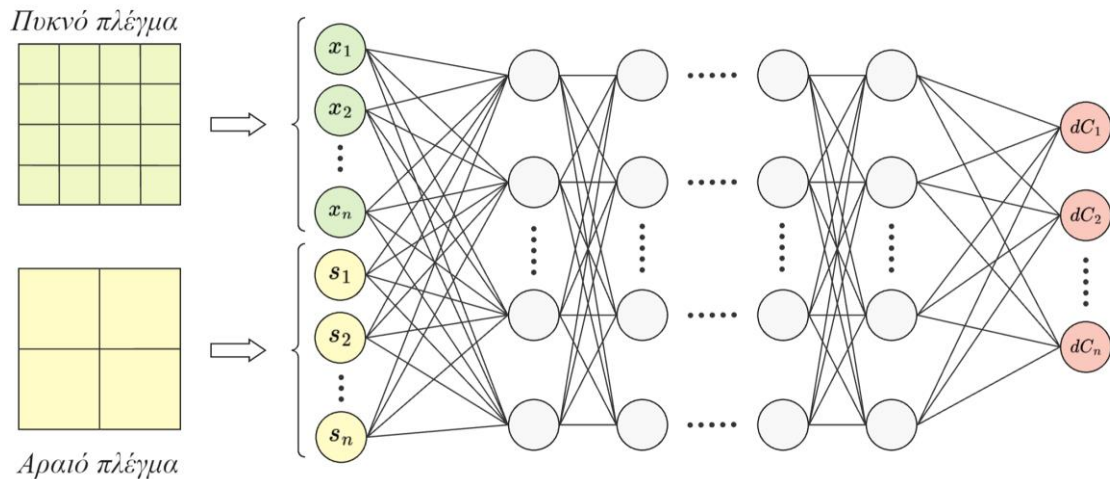
#### 4.3.2 Προσέγγιση δυο πλεγμάτων.

Ο κύριος στόχος της προσέγγισης των δύο πλεγμάτων, είναι να βελτιώσει την ακρίβεια και την επεκτασιμότητα της προτεινόμενης μεθοδολογίας. Συγκεκριμένα η ιδέα αυτής της προσέγγισης είναι να προσφέρει παραπάνω πληροφορία στην είσοδο του BND, δηλαδή περισσότερα δεδομένα/χαρακτηριστικά εισόδου, ώστε η λύση στην έξοδο να έχει περισσότερη ακρίβεια και γενικά το δίκτυο να έχει καλύτερη προσαρμοστικότητα σε διάφορα είδη προβλημάτων βελτιστοποίησης τοπολογίας, σε σχέση με την προσέγγιση ενός πλέγματος.

Επομένως η υλοποίηση της εν λόγω μεθοδολογίας είναι πολύ παρόμοια με την προσέγγιση ενός πλέγματος, με την διάφορα ότι σε κάθε βήμα όπου συλλέγονται τα δεδομένα για την εκπαίδευση, πρέπει να προσφέρουμε στο σύνολο εκπαίδευσης εκτός από τις μεταβλητές σχεδιασμού και τις μεταβλητές κατάστασης. Ωστόσο, οι πληροφορίες σχετικά με τις μεταβλητές κατάστασης κάθε στοιχείου δεν είναι διαθέσιμες εκτός εάν λύσουμε την εξίσωση ισορροπίας  $\mathbf{uK} = \mathbf{F}$ . Προκειμένου να παρέχουμε επαρκείς πληροφορίες στο μοντέλο, και ταυτόχρονα, για να αποφύγουμε το βήμα επίλυσης της εξίσωσης ισορροπίας με την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων, εισάγουμε μια διατύπωση βελτιστοποίησης τοπολογίας με δύο πλέγματα διακριτοποίησης: ένα πυκνό και ένα αραιό πλέγμα

Το πυκνό πλέγμα μπορεί να θεωρηθεί ως το βασικό στο οποίο γίνεται η βελτιστοποίηση, εκεί δηλαδή όπου συμβαίνει η ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού σε κάθε βήμα. Αντίθετα, η επίλυση της εξίσωσης ισορροπίας εκτελείται μόνο στα βήματα όπου γίνεται συλλογή των δεδομένων για εκπαίδευση. Το αραιό πλέγμα θεωρείται περισσότερο υποστηρικτικό, και η ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού δεν εκτελείται σε αυτό, αλλά επιλύεται η εξίσωση ισορροπίας σε κάθε βήμα ώστε να παρέχει κατάλληλη πληροφορία στην είσοδο του νευρωνικού δικτύου. Ως μεταβλητές κατάστασης που μπορούν εφαρμοστούν στην είσοδο του δικτύου, χρησιμοποιούνται κυρίως οι ανοιγμένες παραμορφώσεις ή εναλλακτικά οι

μετατοπίσεις. Επειδή το πλήθος των πεπερασμένων στοιχείων στο αραιό πλέγμα είναι αρκετά μικρότερο σε σχέση με το πυκνό πλέγμα, ο χρόνος που χρειάζεται για την επίλυση της εξίσωσης ισορροπίας στο αραιό πλέγμα είναι αμελητέος.



Διάγραμμα 4.5: Απεικόνιση του νευρικού δικτύου στην προσέγγιση δυο πλεγμάτων, όπου στην είσοδο λαμβάνονται οι μεταβλητές σχεδιασμού και οι μεταβλητές κατάστασης, στη έξοδο επιστρέφονται οι αντίστοιχες ευαισθησίες.

Το πυκνό και το αραιό πρέπει κατασκευάζονται από το ίδιο είδος πεπερασμένων στοιχείων και στην παρούσα εργασία επιλέγουμε το τετραγωνικό στοιχείο 1<sup>ης</sup> τάξης. Σύμφωνα με αυτή την υπόθεση, και λόγω της κανονικότητας, κάθε στοιχείο στο αραιό πλέγμα αντιστοιχεί σε έναν αριθμό στοιχείων του πυκνού. Πιο συγκεκριμένα, ορίζουμε την παράμετρο *block size*, που διατυπώνει σε πόσα στοιχεία του πυκνού πλέγματος αντιστοιχεί ένα στοιχείο του αραιού. Δηλαδή αν το *block size* = 3, τότε το «αραιό» στοιχείο αντιστοιχεί σε μια 3 × 3 διάταξη στοιχείων στο πυκνό πλέγμα.

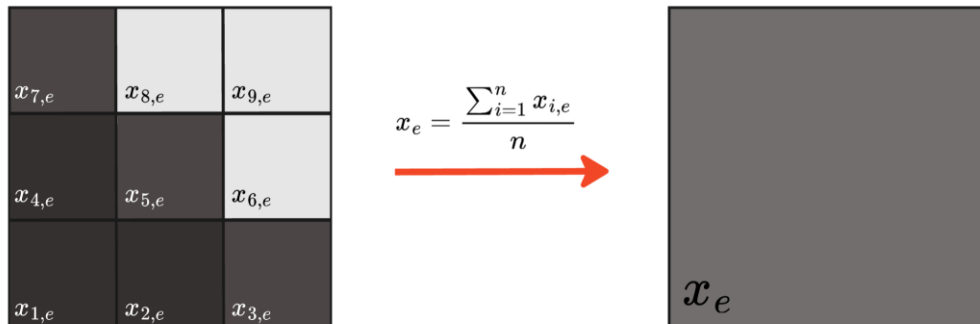
Επιπροσθέτως, επειδή η ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού γίνεται μόνο στο πυκνό πλέγμα, χρειάζεται να μεταφερθούν οι πυκνότητες/δυσκαμψίες από το πυκνό πλέγμα στο αραιό, προκειμένου να μπορέσει να επιλυθεί η εξίσωση ισορροπίας του αραιού πλέγματος. Η πυκνότητα ενός στοιχείου στο αραιό πλέγμα μπορεί να εκτιμηθεί ως την μέση τιμή των πυκνοτήτων αντίστοιχων στοιχείων του πυκνού πλέγματος:

$$x_e = \frac{\sum_{i=1}^n x_{i,e}}{n}$$

όπου το  $x_e$  είναι η πυκνότητα του στοιχείου  $e$  στο αραιό πλέγμα, το  $x_{i,e}$  είναι η πυκνότητα του  $i$  στοιχείου στο πυκνό πλέγμα, που αντιστοιχεί στην διάταξη του στοιχείου  $e$  του αραιού



πλέγματος, και το  $n$  είναι το πλήθος στοιχείων σε μια διάταξη, για παράδειγμα όταν  $block\ size = 3$  το  $n = 9$ .



Διάγραμμα 4.6: Μετασχηματισμός διάταξης στοιχείων στο πυκνό πλέγμα στο στοιχείο του αραιού πλέγματος.

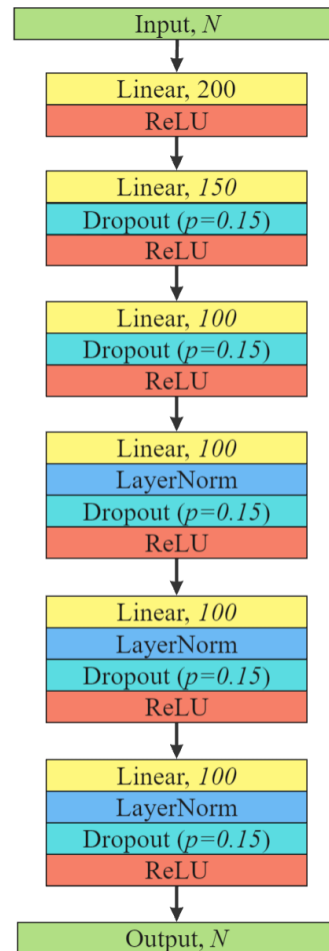
Σημειώνεται ότι η επιλογή της παραμέτρου  $block\ size$  είναι καίριας σημασίας για την σωστή λειτουργία της μεθοδολογίας. Αν η  $block\ size$  είναι πολύ μικρή, τότε η επίλυση της εξίσωσης ισορροπίας στο αραιό πλέγμα απαιτεί πολύ χρόνο. Αν όμως είναι πολύ μεγάλη, τότε το σχήμα στο αραιό πλέγμα δεν θα αντιστοιχεί στο σχήμα του πυκνού πλέγματος, δηλαδή τα πλέγματα δεν θα αντιστοιχούν στο ίδιο πρόβλημα.

#### 4.3.3 Δομή του νευρωνικού δικτιού της προτεινομένης μεθοδολογίας

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, το νευρωνικό δίκτυο των παραπάνω μεθοδολογιών, αποτελεί ένα μέρος της διαδικασίας βελτιστοποίησης, αφού η συλλογή των δεδομένων, εκπαίδευση και εφαρμογή του δικτύου εκτελείται σε ορισμένα βήματα της βελτιστοποίησης. Επομένως για να επιταχύνουμε πραγματικά την επίλυση των προβλημάτων τυπολογικής βελτιστοποίησης, οι παραπάνω διαδικασίες πρέπει να είναι ορισμένες με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι αποτελεσματικές και ταυτόχρονα χρονικά βέλτιστες.

Το βαθύ νευρωνικό δίκτυο πρέπει να έχει απλή αρχιτεκτονική, ώστε να εκπαιδεύεται και να εκτελεί πράξεις γρήγορα, ενώ ταυτόχρονα να έχει την δυνατότητα να περιγράφει κατάλληλα την σύνδεση μεταξύ των δεδομένων εισόδου και εξόδου, προκειμένου να προσεγγίσει τις επιθυμητές λύσεις. Συγκεκριμένα, το προτεινόμενο βαθύ νευρωνικό δίκτυο εμπρόσθιας τροφοδότησης αποτελείται από ένα στρώμα εισόδου, ένα στρώμα εξόδου και έξι πλήρως συνδεδεμένα κρυφά στρώματα. Τα δυο πρώτα κρυφά στρώματα περιλαμβάνουν 200 και 150 νευρώνες αντίστοιχα, ενώ τα υπόλοιπα περιλαμβάνουν 100 νευρώνες το καθένα. Ως συνάρτηση ενεργοποίησης χρησιμοποιείται η ReLU. Η επιλογή της είναι σκόπιμη, καθώς αυτή η συνάρτηση ενεργοποίησης εισάγει την μη γραμμικότητα, αποφεύγοντας το πρόβλημα της

εξαφάνιση της κλίσης. Ο μη γραμμικός μετασχηματισμός που παρέχεται από την ReLU, είναι απαραίτητος για την ικανότητα του δικτύου να εντοπίζει και να μαθαίνει περίπλοκα μοτίβα μέσα στα δεδομένα.



Διάγραμμα 4.7: Αρχιτεκτονική του BNA της προτεινομένης μεθοδολογίας.

Επιπλέον, για να διατηρηθεί η σταθερότητα της εκπαίδευσης, εφαρμόζεται κανονικοποίηση στρώματος (layer normalization) σε ορισμένα στρώματα. Η κανονικοποίηση στρώματος είναι μια τεχνική που τυποποιεί τις εισόδους σε ένα στρώμα, εξασφαλίζοντας ότι έχουν μια συνεπή κατανομή. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό στα βαθιά δίκτυα, όπου η κατανομή των εισόδων μπορεί να μεταβληθεί καθώς τα δεδομένα εξελίσσονται μέσω των στρωμάτων. Αυτό σημαίνει ότι η μέση τιμή και η διασπορά των ενεργοποιήσεων υπολογίζονται για κάθε στρώμα ξεχωριστά και στη συνέχεια οι ενεργοποιήσεις κλιμακώνονται και μετατοπίζονται ώστε να ακολουθούν την τυπική κατανομή (μέσος όρος 0 και διακύμανση 1). Συγκεκριμένα, έστω ότι σε ένα στρώμα  $l$  με  $n$  νευρώνες εισάγονται  $x_i$  χαρακτηριστικά, τότε η κανονικοποίηση στρώματος ορίζεται ως εξής:

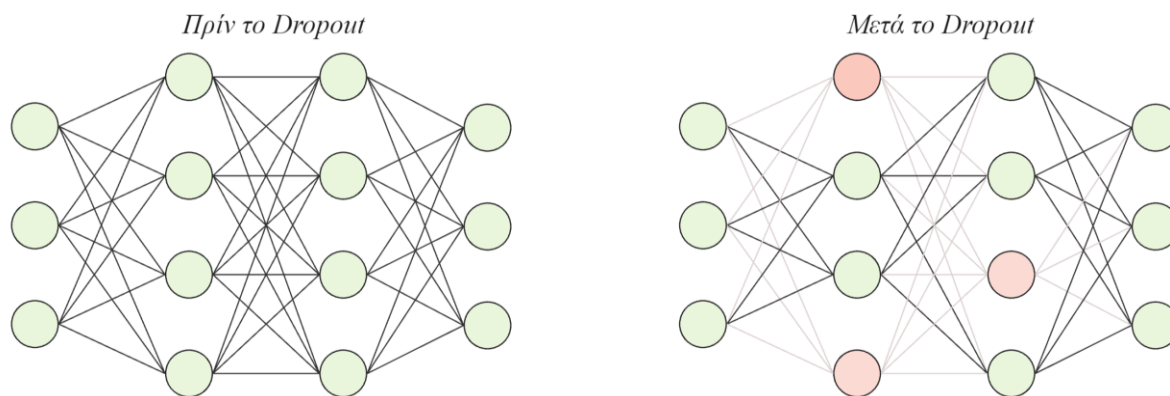
$$\mu_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \sigma_l^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_l)^2$$

Και τελικά:

$$\hat{x}_i = \frac{x_i - \mu_l}{\sqrt{\sigma_l^2}}$$

Αυτή η διαδικασία κανονικοποίησης μειώνει την πιθανότητα οποιουδήποτε μεμονωμένου νευρώνα να έχει δυσανάλογη επιρροή, συμβάλλοντας περαιτέρω στη συνολική σταθερότητα και την ικανότητα γενίκευσης του δικτύου.

Προκειμένου να διασφαλίσουμε ότι το δίκτυο θα εκπαιδευτεί σωστά και δεν θα υποφέρει από την υπερπροσαρμογή, χρησιμοποιούμε την τεχνική Dropout. Η υπερβολική προσαρμογή στη μηχανική μάθηση είναι ένα συνηθισμένο φαινόμενο όπου ένα μοντέλο που εκπαιδεύεται σε ένα σύνολο δεδομένων ταιριάζει ακριβώς στα δεδομένα εκπαίδευσης. Όταν συμβαίνει υπερπροσαρμογή, το μοντέλο προσαρμόζεται υπερβολικά καλά στα δεδομένα εκπαίδευσης, καταγράφοντας όχι μόνο μοτίβα αλλά και θόρυβο ή τυχαίες διακυμάνσεις των δεδομένων. Η ιδέα της τεχνικής Dropout είναι ότι ορισμένοι νευρώνες αγνοούνται τυχαία, με αποτέλεσμα να αλλάζει η δομή του δικτύου.



Διάγραμμα 4.8: Απεικόνιση της τεχνικής Dropout

Αυτή η διαδικασία αναγκάζει κάθε νευρώνα να δέχεται περισσότερα ή λιγότερα δεδομένα προς επεξεργασία σε κάθε επανάληψη της εκπαίδευσης, εμποδίζοντάς τον να «μάθει» να επεξεργάζεται συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Ως αποτέλεσμα, το δίκτυο γενικεύεται καλύτερα, καθώς δεν στηρίζεται μόνο σε λίγους νευρώνες για την αναγνώριση των μοτίβων

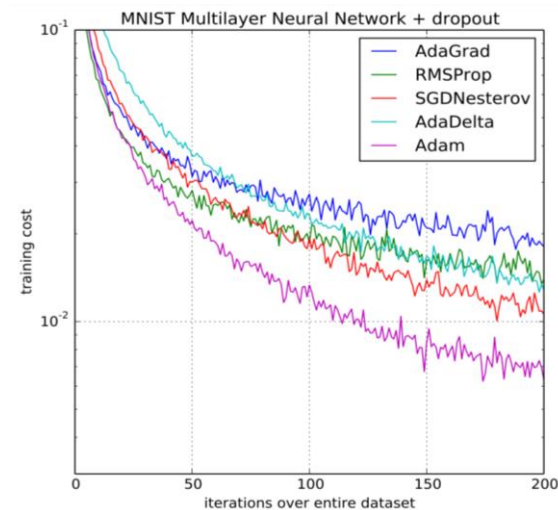
Μαθηματικά η τεχνική Dropout ορίζεται ως εξής:

$$\begin{cases} r_i^k \sim \text{Bernoulli}(p) \\ \tilde{\mathbf{x}}^k = \mathbf{r}^k \mathbf{x}^k \\ z_j^{k+1} = \mathbf{w}_j^{k+1} \mathbf{x}^k + b_j^{k+1} \\ y_j^{k+1} = f(z_j^{k+1}) \end{cases}$$

όπου το  $r$  είναι μια τυχαία μεταβλητή της κατανομής Bernoulli με παράμετρο  $p$ , το  $k$  δηλώνει το κρυφό στρώμα και το  $i$  του νευρώνα στη θέση  $i$  του στρώματος  $k$ .

#### 4.3.4 Εκπαίδευση του νευρωνικού δικτιού της προτεινομένης μεθοδολογίας

Προηγουμένως αναφέρθηκε ότι το βαθύ νευρωνικό δίκτυο που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία βασίζεται στην επιβλεπομένη μάθηση και εκπαιδεύεται πάνω στις ιστορίες των μεταβλητών σχεδιασμού στη προσέγγιση ενός πλέγματος, ενώ στην προσέγγιση δυο πλεγμάτων προστίθενται και οι μεταβλητές κατάστασης. Ως αποτέλεσμα τα σύνολα εκπαίδευσης αποτελούνται από μεγάλο αριθμό παρατηρήσεων (έως και εκατομμύρια), γεγονός που επιβαρύνει σημαντικά την διαδικασία της εκπαίδευσης. Προκειμένου να διασφαλιστεί η αποτελεσματικότητα της υπό εξέταση μεθοδολογίας, απαιτείται η σωστή επιλογή μεθόδων εκπαίδευσης.



Διάγραμμα 4.9: Εκπαίδευση πολυστρωματικών νευρωνικών δικτύων σε εικόνες MNIST με διαφορετικούς αλγορίθμους βελτιστοποίησης [Kingma & Ba, 2017].

Ως μέθοδο βελτιστοποίησης στο προτεινόμενο δίκτυο χρησιμοποιείται η μέθοδος Adam (Adaptive Moment Estimation). Η Adam βασίζεται στα θεμέλια που τέθηκαν από προηγούμενες μεθόδους βελτιστοποίησης, όπως η στοχαστική κατάβαση κλίσης (stochastic gradient descent), η AdaGrad και η RMSProp, και συνδυάζει τα δυνατά σημεία αυτών των μεθόδων για να δημιουργήσει μια πιο ισχυρή και αποτελεσματική διαδικασία βελτιστοποίησης.

Η μέθοδος Adam βασίζεται σε δύο κρίσιμες αρχές:

- Ροπή πρώτης τάξης

Η ροπή πρώτης τάξης της κλίσης, περιγράφει την κατεύθυνση και το μέγεθος του διανύσματος της κλίσης. Μέσω της διατήρησης ενός κινούμενου μέσου όρου των κλίσεων, η Adam εξομαλύνει την εξέλιξη της διαδικασίας βελτιστοποίησης, μειώνοντας τις ταλαντώσεις που μπορεί να εμφανιστούν. Ως αποτέλεσμα επιτυγχάνεται η σύγκλιση ακόμα και σε περιπτώσεις όπου η κλίση έχει πολλά τοπικά ελάχιστα. Επομένως η ροπή πρώτης τάξης ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{m}^{(t)} = \beta_1 \mathbf{m}^{(t-1)} + (1 - \beta_1) \mathbf{g}^{(t)}, \quad \text{με } \mathbf{m}^{(0)} = \mathbf{0}$$

όπου το  $t$  είναι η επανάληψη της μεθόδου, το  $\beta_1$  είναι ο ρυθμός αποσύνθεσης και είναι θετική σταθερά (συνήθως  $\beta_1 = 0.9$ ). Το  $\mathbf{g}^{(t)}$  είναι η κλίση στο βήμα  $t$ , δηλαδή  $\mathbf{g}^{(t)} = \nabla \mathcal{C}(\mathbf{w}^{(t)})$

- Ροπή δεύτερης τάξης

Η ροπή δεύτερης τάξης, η οποία παρέχει πληροφορίες για την διακύμανση των κλίσεων. Ελέγχοντας τη διακύμανση των κλίσεων, η Adam προσαρμόζει το ρυθμό μάθησης με βάση την ιστορική συμπεριφορά των κλίσεων. Οι παράμετροι με μεγάλες κλίσεις λαμβάνουν μικρότερες ενημερώσεις, αποτρέποντας την υπέρβαση που μπορεί να συμβεί με υψηλούς ρυθμούς μάθησης, ενώ οι παράμετροι με μικρότερες κλίσεις ενημερώνονται πιο δραστικά, εξασφαλίζοντας ότι συνεχίζουν να συμβάλλουν στη διαδικασία βελτιστοποίησης. Επομένως η ροπή δεύτερης τάξης ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{v}^{(t)} = \beta_2 \mathbf{v}^{(t-1)} + (1 - \beta_2) (\mathbf{g}^{(t)})^2, \quad \text{με } \mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{0}$$

όπου το  $\beta_2$  είναι ο ρυθμός αποσύνθεσης και είναι θετική σταθερά (συνήθως  $\beta_1 = 0.999$ ).

Στη συνέχεια η μέθοδος Adam βασισμένη στις παραπάνω ροπές διατυπώνει διορθωμένες ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης:

$$\hat{\mathbf{m}}^{(t)} = \frac{\mathbf{m}^{(t)}}{1 - \beta_1^t}, \quad \hat{\mathbf{v}}^{(t)} = \frac{\mathbf{v}^{(t)}}{1 - \beta_2^t}$$

Με την βοήθεια των παραπάνω διορθωμένων ροπών, διατυπώνεται το επαναληπτικό σχήμα της μεθόδου Adam:

$$\mathbf{w}^{(t+1)} = \mathbf{w}^{(t)} - \alpha \frac{\hat{\mathbf{m}}^{(t)}}{\sqrt{\hat{\mathbf{v}}^{(t)} + \epsilon}}$$

όπου το  $\alpha$  είναι ο ρυθμός μάθησης και το  $\epsilon$  είναι μια μικρή σταθερά για την αποτροπή διαίρεσης με το μηδέν.

Με λίγα λόγια, η ικανότητα της μεθόδου Adam να προσαρμόζει τον ρυθμό μάθησης, οδηγεί σε πιο αποτελεσματική και σταθερή εκπαίδευση, ιδιαίτερα σε πολύπλοκα νευρωνικά δίκτυα, υπερτερώντας από την παραδοσιακή μέθοδο Gradient Descent [Kingma & Ba, 2017]. Ο αλγόριθμος της μεθόδου Adam παρουσιάζεται ακολούθως:

---

**Αλγόριθμος:** Η μέθοδος Adam

---

**Input:**  $\alpha, \beta_1, \beta_2, w^{(0)}$   
 $m_0 \leftarrow 0$   
 $v_0 \leftarrow 0$   
 $t \leftarrow 0$   
**while**  $w^{(t)}$  not converged:  
 $t \leftarrow t + 1$   
 $g^{(t)} \leftarrow \nabla C(w^{(t-1)})$   
 $m^{(t)} \leftarrow \beta_1 m^{(t-1)} + (1 - \beta_1)g^{(t)}$   
 $v^{(t)} \leftarrow \beta_2 v^{(t-1)} + (1 - \beta_2)(g^{(t)})^2$   
 $\hat{m}^{(t)} \leftarrow m^{(t)} / (1 - \beta_1^t)$   
 $\hat{v}^{(t)} \leftarrow v^{(t)} / (1 - \beta_2^t)$   
 $w^{(t)} \leftarrow w^{(t-1)} - \alpha \cdot \hat{m}^{(t)} / (\sqrt{\hat{v}^{(t)}} - \epsilon)$   
**end while**  
**return**  $w^{(t)}$

---

Σημειώνεται ότι η μέθοδος Adam, όπως και η μέθοδος Gradient Descent, βασίζεται στον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης για τον υπολογισμό των κλίσεων  $\nabla C(w^{(t)})$ .

Επιπλέον ως συνάρτηση κόστους χρησιμοποιείται το μέσο απόλυτο σφάλμα (MAE):

$$C(\mathbf{w}) = MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)$$

Το MAE μετρά τη μέση απόλυτη διαφορά μεταξύ των προβλεπόμενων και των πραγματικών τιμών. Το MSE αντιμετωπίζει όλα τα σφάλματα με την ίδια αξία, που σημαίνει ότι οι ακραίες τιμές έχουν σημαντικό αντίκτυπο στον υπολογισμό του κόστους. Σε αντίθεση με το MSE, το MAE δεν υψώνει τις διαφορές στο τετράγωνο, γεγονός που το καθιστά λιγότερο ευαίσθητο στις ακραίες/ανώμαλες τιμές.

#### 4.4 Επίλογος

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάστηκαν οι δυσκολίες που αυξάνουν την υπολογιστική δυσκολία της βελτιστοποίησης τοπολογίας. Συγκεκριμένα η περισσότερη επιβάρυνση προκύπτει από την ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων και ως αποτέλεσμα οδηγεί σε μεγάλη αύξηση του απαιτούμενου χρόνου τυπολογικής βελτιστοποίησης μιας κατασκευής. Ως μια λύση προτείνεται η επιτάχυνση της διαδικασίας βελτιστοποίησης με την βοήθεια του βάθι νευρωνικού δικτύου. Επίσης παρουσιάζονται δυο στρατηγικές εφαρμογής νευρωνικού δικτύου: με ένα και δυο πλέγματα/επίπεδα διακριτοποίησης.

## 5 Προβολή και Ανάλυση Αποτελεσμάτων - Σύγκριση Μεθόδων

### 5.1 Πρόλογος

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται η εφαρμογή της προτεινόμενης μεθοδολογίας επιτάχυνσης της μεθόδου SIMP. Αναλύεται η απόδοσή της, και συγκρίνονται οι διαφορετικές προσεγγίσεις, εξετάζοντας την αποδοτικότητα σε σχέση με τις διάφορες παραμέτρους. Ειδικότερα, γίνεται σύγκριση των μεθόδων που βασίζονται σε ένα και δύο πλέγματα.

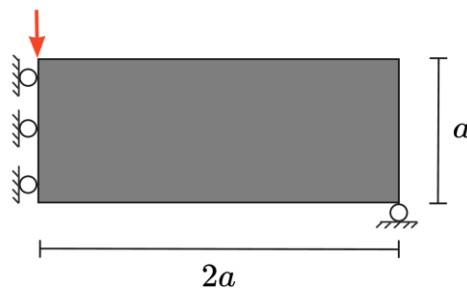
### 5.2 Προβλήματα για την αξιολόγηση

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάστηκαν τρόποι επιτάχυνσης της διαδικασίας βελτιστοποίησης τοπολογίας, και στο παρόν κεφάλαιο αναλύεται η προτεινόμενη μέθοδος σε σύγκριση με την κλασική προσέγγιση. Συγκεκριμένα, οι εν λόγω προσεγγίσεις εφαρμόζονται στην επίλυση δισδιάστατων προβλημάτων. Είναι σημαντικό να σημειωθεί, ότι από την στιγμή που η ταχύτητα επίλυσης εξαρτάται μόνο από τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας, τα αποτελέσματα για τα δισδιάστατα προβλήματα είναι αντιπροσωπευτικά της πραγματικής απόδοσης των συγκρινόμενων μεθόδων. Ως εκ τούτου, τα αποτελέσματα που προκύπτουν για δισδιάστατα προβλήματα γενικεύονται και στις τρεις διαστάσεις. Επιπλέον, κάθε πρόβλημα εξετάζεται σε διάφορους βαθμούς διακριτοποίησης, ώστε να αναλυθεί η επίδραση των προτεινόμενων μεθόδων κατά την επίλυση του ίδιου προβλήματος με διαφορετικό αριθμό πεπερασμένων στοιχείων, και να αξιολογηθεί ο χρόνος που απαιτείται σε σχέση με τον αριθμό των στοιχείων.

Σε κάθε παράδειγμα το υλικό θεωρείται ισότροπο με  $E_{max} = 1$  και  $E_{min} = 10^{-9}$ . Ως πεπερασμένο στοιχείο επιλέγουμε το δισδιάστατο τετραγωνικό στοιχείο πρώτης τάξης, ενώ όλα τα στοιχεία στο πλέγμα είναι ίδιας διάστασης. Επομένως, ως προβλήματα για την ανάλυση και αξιολόγηση χρησιμοποιούνται οι διατάξεις MBB-δοκού και L-δοκού. Ως κλασική μέθοδος χρησιμοποιείται η SIMP, σε συνδυασμό με την μέθοδο των βέλτιστων κριτηρίων. Οι παράμετροι και για τις δυο προσεγγίσεις είναι επιλεγμένοι ως εξής:  $N_{init} = 15$ ,  $N_{train} = 10$ ,  $N_{step} = 15$ ,  $N_{update} = 2$ . Για την προσέγγιση των δυο πλεγμάτων, το μέγεθος του αραιού πλέγματος καθορίζεται από την παράμετρο  $block\ size = 6$ . Τέλος, ως επιπλέον δεδομένα εκπαίδευσης για την προσέγγιση δυο πλεγμάτων χρησιμοποιούνται οι ανοιγμένες παραμορφώσεις  $s_x, s_y, s_{xy}$ .

### 5.2.1 MBB δοκός (half MBB beam)

Το παράδειγμα της δοκού MBB (Messerschmitt-Bölkow-Blohm) είναι ένα από τα πιο κλασικά παραδείγματα στη δομική βελτιστοποίηση, ιδιαίτερα στον τομέα της βελτιστοποίησης τοπολογίας. Είναι ένα τυπικό πρόβλημα που χρησιμοποιείται για την αξιολόγηση διαφορετικών αλγορίθμων και στρατηγικών βελτιστοποίησης. Το πρόβλημα της ημιδοκού MBB, είναι μια απλοποιημένη παραλλαγή του προβλήματος της πλήρους δοκού MBB. Αξιοποιεί τη συμμετρία στη δομή και τις συνθήκες φόρτισης, επιτρέποντας στη βελτιστοποίηση να εκτελεστεί μόνο για την μισή δοκό. Αυτό όχι μόνο μειώνει το υπολογιστικό κόστος, αλλά και διατηρεί τα βασικά χαρακτηριστικά του προβλήματος.



Διάγραμμα 5.1: Διάταξη της MBB δοκού

Η αριστερή πλευρά (το μέσο της αρχικής πλήρους δοκού MBB) περιορίζεται, ώστε να επιτρέπεται μόνο η κατακόρυφη μετατόπιση. Αντίθετα, η κάτω δεξιά γωνία περιορίζεται κατακόρυφα και ένα σημειακό κατακόρυφο φορτίο εφαρμόζεται στην πάνω αριστερή γωνιά. Υποθέτουμε ότι το ύψος και το μήκος της ράβδου είναι  $a$  και  $2a$  αντίστοιχα.

Επομένως για κάθε μέθοδο, ο περιορισμός του όγκου της τελικής κατασκευής ορίζεται να είναι στο 40% του αρχικού. Συνολικά εξετάζονται τρία πλέγματα πεπερασμένων στοιχείων:  $180 \times 90$ ,  $300 \times 150$ ,  $600 \times 300$ . Σε κάθε πλέγμα εφαρμόζεται το φίλτρο πυκνότητας και επιλέγεται ακτίνα φίλτρου: 5.0, 3.5, 10.0 αντίστοιχα.

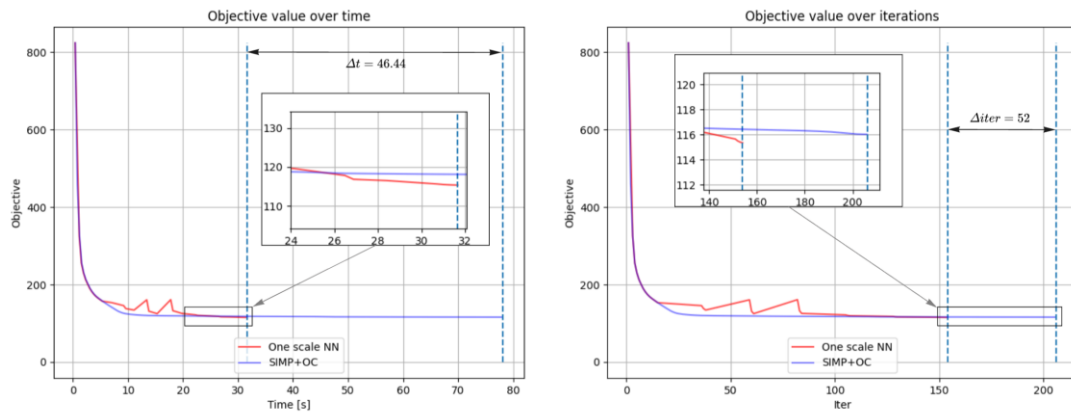
Διάσταση	# Βαθμών ελευθερίας	Ακτίνα φίλτρου	Τελικός όγκος
180×90	16473	5.0	0.4
300×150	90902	3.5	0.4
600×300	361802	10.0	0.4

Πίνακας 5.1: Χαρακτηριστικά πλέγματος και παράμετροι βελτιστοποίησης τοπολογίας της δοκού MBB

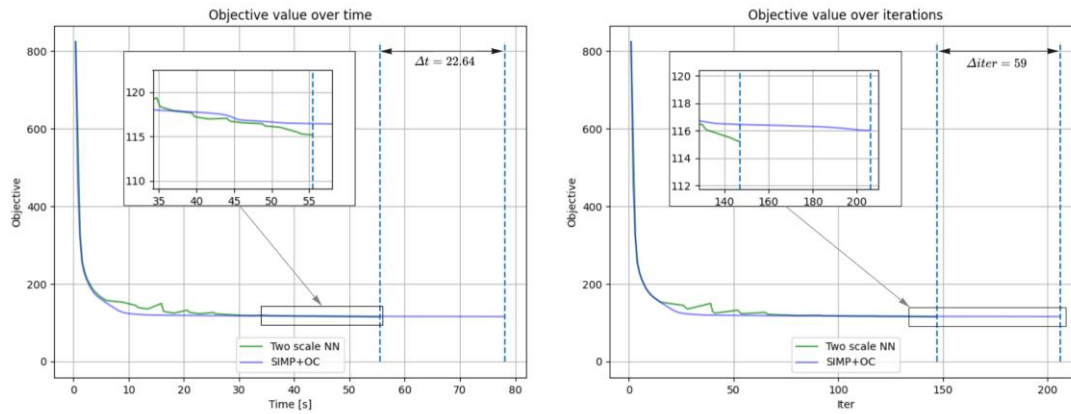
Η απόδοση των μεθόδων αξιολογείται με βάση την ταχύτητα σύγκλησης της αντικειμενικής συνάρτησης σε σχέση με τις απαιτούμενες επαναλήψεις της, αλλά και σε σχέση με τον απαιτούμενο χρόνο. Στην συνέχεια, παρουσιάζονται οι βέλτιστες λύσεις για κάθε μέθοδο και τα αποτελέσματα επίλυσης του παραδείγματος της δοκού MBB παρουσιάζονται ακολούθως.



### 5.2.1.1 MBB δοκός 180×90



Διάγραμμα 5.2: Εξέλιξη της αντικειμενικής συνάρτησης σε σχέση με τον χρόνο και με τις επαναλήψεις εφαρμόζοντας την προσέγγιση ενός πλέγματος.



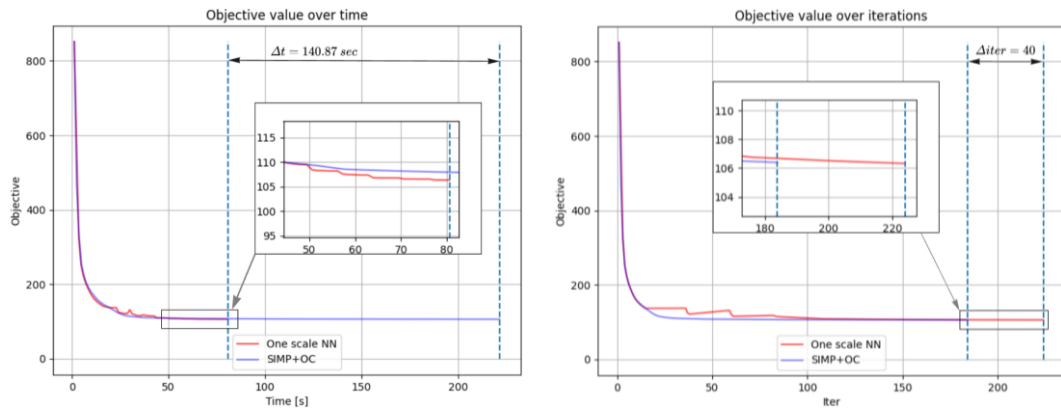
Διάγραμμα 5.3: Εξέλιξη της αντικειμενικής συνάρτησης σε σχέση με τον χρόνο και τις επαναλήψεις εφαρμόζοντας την προσέγγιση δυο πλεγμάτων.

Η προσέγγιση ενός πλέγματος συγκλίνει κατά 57.50 % λιγότερο χρόνο, από την άλλη πλευρά η προσέγγιση δυο πλεγμάτων προτείνει μείωση του χρόνου κατά 29.12 % όμως προσφέρει πιο μικρή τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (115.209) σε σχέση με την άλλη προσέγγιση (116.017). Στον παρακάτω πίνακα παρατηρούμε τα αποτελέσματα από την εφαρμογή της προτεινόμενης μεθοδολογίας.

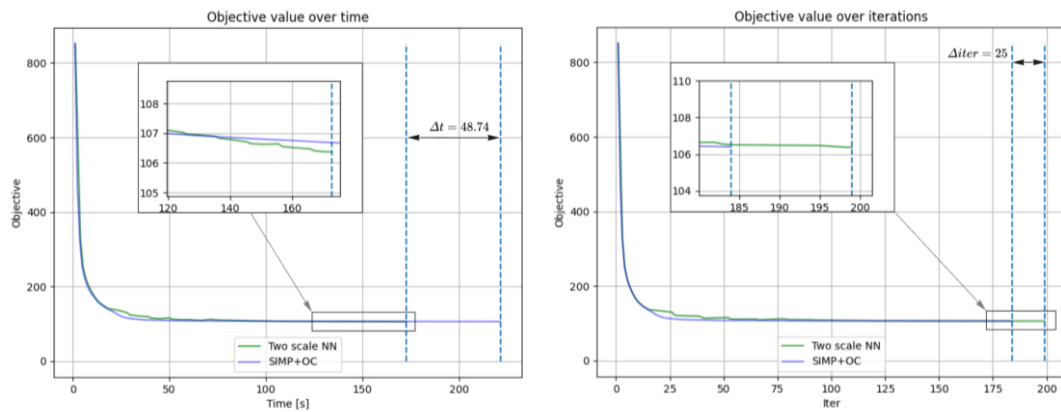
<i>180×90 MBB beam</i>				
<b>Method</b>	<b>Time(sec)</b>	<b>Time diff (%)</b>	<b>Obj</b>	<b>Iterations</b>
SIMP+OC	80.78	0	116.017	206
One Scale NN	34.33	-57.50	115.341	154
Two Scale NN	57.25	-29.12	115.209	147

Πίνακας 5.2: Αποτελέσματα της 180×90 MBB δοκού

### 5.2.1.2 MBB δοκός 300×150



Διάγραμμα 5.4: Εξέλιξη της αντικειμενικής συνάρτησης σε σχέση με τον χρόνο και με τις επαναλήψεις εφαρμόζοντας την προσέγγιση ενός πλέγματος.



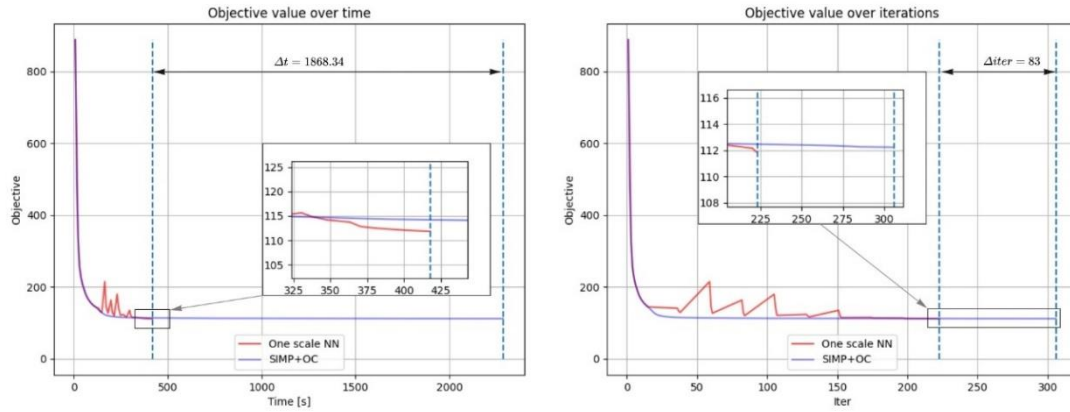
Διάγραμμα 5.5: Εξέλιξη της αντικειμενικής συνάρτησης σε σχέση με τον χρόνο και με τις επαναλήψεις εφαρμόζοντας την προσέγγιση δυο πλεγμάτων.

Παρατηρούμε ότι η προσέγγιση ενός πλέγματος παρουσιάζει τα καλύτερα αποτελέσματα, συγκεκριμένα την μείωση του χρόνου κατά 62,24%. Παρόλα αυτά και οι δυο προσεγγίσεις απαιτούν περισσότερες επαναλήψεις για να συγκλίνουν σε σχέση με την κλασική μέθοδο. Και συγκλίνουν στην περίπου ίδια τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Στον παρακάτω πίνακα παρατηρούμε τα αποτελέσματα εφαρμογής της προτεινόμενης μεθοδολογίας.

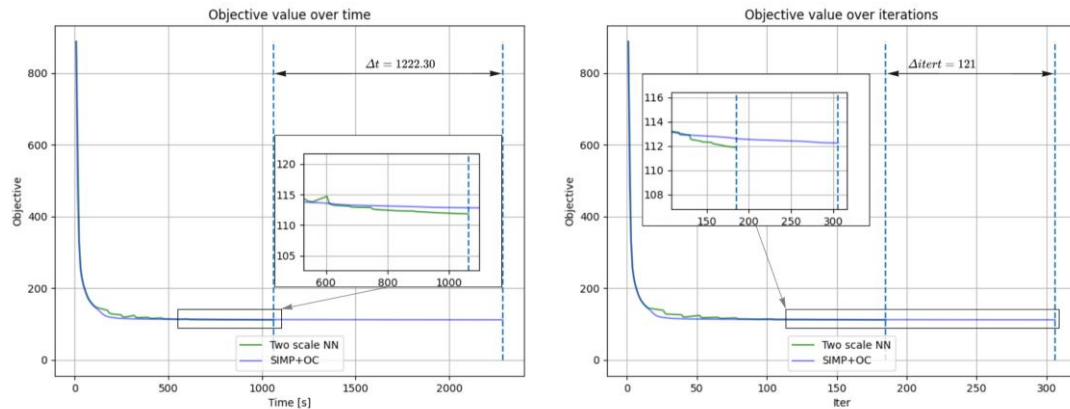
<b>300×150 MBB beam</b>				
<b>Method</b>	<b>Time(sec)</b>	<b>Time diff (%)</b>	<b>Obj</b>	<b>Iterations</b>
SIMP+OC	226.28	0	106.393	184
One Scale NN	85.45	-62,24	106.325	224
Two Scale NN	174.05	-23.08	106.366	199

Πίνακας 5.3: Αποτελέσματα της 300×150 MBB δοκού

### 5.2.1.3 MBB δοκός 600×300



Διάγραμμα 5.6: Εξέλιξη της αντικειμενικής συνάρτησης σε σχέση με τον χρόνο και με τις επαναλήψεις εφαρμόζοντας την προσέγγιση ενός πλέγματος.



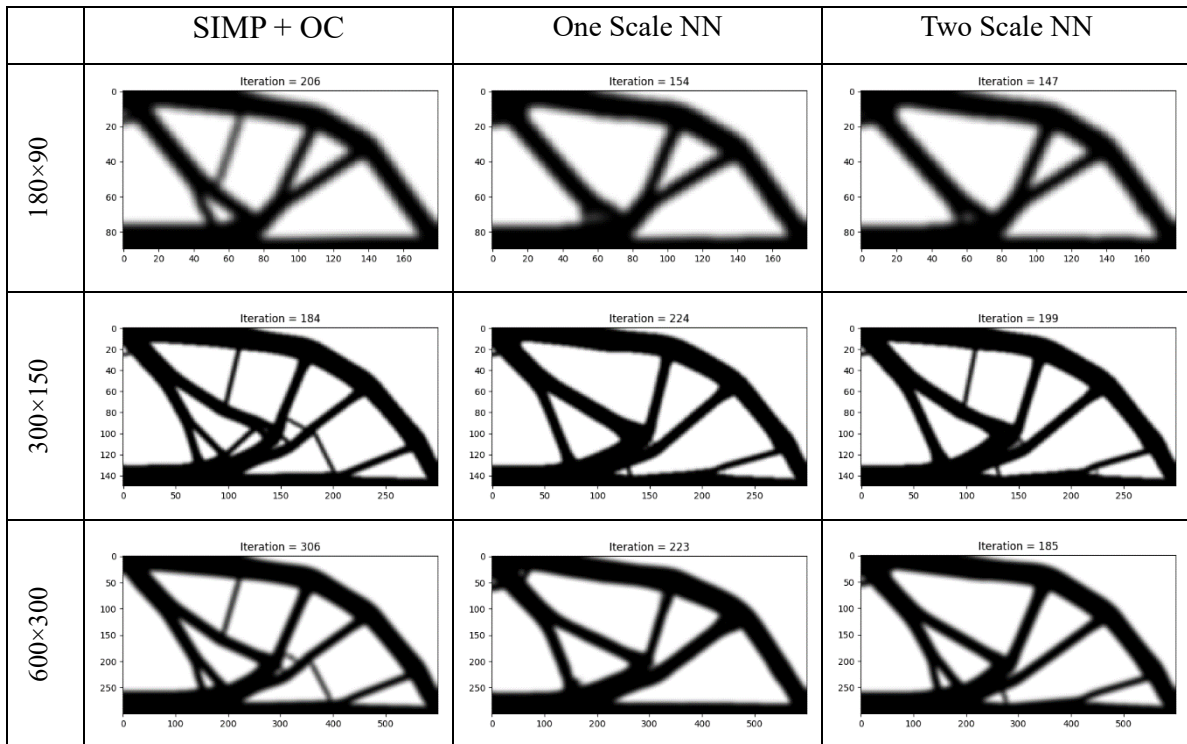
Διάγραμμα 5.7: Εξέλιξη της αντικειμενικής συνάρτησης σε σχέση με τον χρόνο και με τις επαναλήψεις εφαρμόζοντας την προσέγγιση δυο πλεγμάτων.

Όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα η προσέγγιση ενός πλέγματος παρουσιάζει την καλύτερη ταχύτητα (κατά 77.38% μείωση του χρόνου), αλλά παρατηρούμε ότι απαιτεί περισσότερες επαναλήψεις για να συγκλίνει σε σχέση με την άλλη προσέγγιση η οποία επίσης προσφέρει διπλάσια επιτάχυνση. Όλοι οι μέθοδοι συγκλίνουν περίπου στην ίδια τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, και οι δυο προσεγγίσεις συγκλίνουν με λιγότερες επαναλήψεις.

<b>600×300 MBB beam</b>				
<b>Method</b>	<b>Time(sec)</b>	<b>Time diff (%)</b>	<b>Obj</b>	<b>Iterations</b>
SIMP+OC	2415.25	0	112.242	306
One Scale NN	546.41	-77.38	111.837	223
Two Scale NN	1168.88	-51.60	111.860	185

Πίνακας 5.4: Αποτελέσματα της 600×300 MBB δοκού

Το ακόλουθο διάγραμμα παρουσιάζει γραφικά τις βέλτιστες κατασκευές για κάθε μέθοδο και πλέγμα του παραδείγματος με MBB-δοκό:



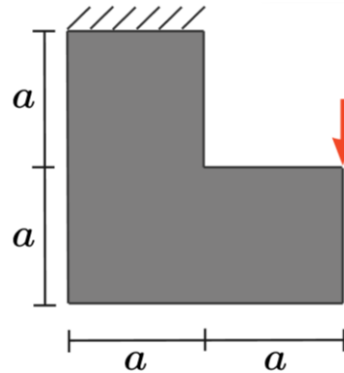
Διάγραμμα 5.8: Βέλτιστες κατασκευές της κάθε μεθόδου, σε κάθε εξεταζόμενο πλέγμα του παραδείγματος με MBB-δοκό.

Παρατηρούμε ότι οι κατασκευές που παράγονται και στις δυο προσεγγίσεις παρουσιάζουν πιο απλή δομή, δηλαδή απλούστερη γεωμετρία με λιγότερες «ράβδους». Αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως πλεονέκτημα, αφού τέτοιες δομές είναι πιο απλές στην κατασκευή. Επίσης η προτεινόμενη μέθοδος, συγκλίνει σε παρόμοιες λύσεις για διαφορετικά πλέγματα και διαφορετικές ακτίνες φίλτρου. Με βάση τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι δεν παρατηρείται σημαντική εξάρτηση της λύσης από το μέγεθος του πλέγματος.

Επιπλέον, από τα διαγράμματα της αντικειμενικής συνάρτησης παρατηρούμε ότι υπάρχουν περιοχές στις οποίες εμφανίζεται ταλάντωση της αντικειμενικής συνάρτησης. Συνήθως αυτό οφείλεται στο γεγονός, ότι κάποιες φορές η εκτίμηση των ευαισθησιών που κάνει το νευρωνικό δίκτυο, αποκλίνει σημαντικά από την πραγματική έκφραση των ευαισθησιών, με αποτέλεσμα σε κάθε επανάληψη η κατασκευή να περιλαμβάνει ολοένα και περισσότερες «ανωμαλίες». Αυτό συνεχίζεται έως ότου ο αλγόριθμος να εισέλθει στο στάδιο της επανεκπαίδευσης και να «διορθώσει» την κατασκευή. Επίσης, βλέπουμε ότι το μέγεθος της ταλάντωσης είναι μικρότερο στην προσέγγιση των δύο πλεγμάτων, το οποίο υποδεικνύει ότι οι μεταβλητές κατάστασης, ως επιπλέον δεδομένα εκπαίδευσης, συμβάλλουν στη βελτίωση της σταθερότητας της μεθόδου, αλλά ταυτόχρονα την επιβραδύνουν.

### 5.2.2 L δοκός (L-shape beam)

Η δοκός σχήματος L, όπως και η MBB-δοκός, αποτελεί ένα σημαντικό πρόβλημα που χρησιμοποιείται στον τομέα της δομικής βελτιστοποίησης, ιδίως για την αξιολόγηση μεθόδων βελτιστοποίησης τοπολογίας και αριθμητικών μοντέλων. Το πρόβλημα αυτό περιλαμβάνει μια δοκό με διατομή σχήματος L, η οποία παρουσιάζει μοναδικές προκλήσεις για την ανάλυση και τη βελτίωση της δομικής απόδοσης.



Διάγραμμα 5.9: Διάταξη της L δοκού

Η γεωμετρία της δοκού, που χαρακτηρίζεται από την αιχμηρή γωνία της, δημιουργεί σημαντικές συγκεντρώσεις τάσεων και ανομοιόμορφες κατανομές φορτίου. Η πάνω πλευρά του σχήματος είναι πακτωμένη και μια εξωτερική δύναμη ασκείται στην πάνω δεξιά πλευρά.

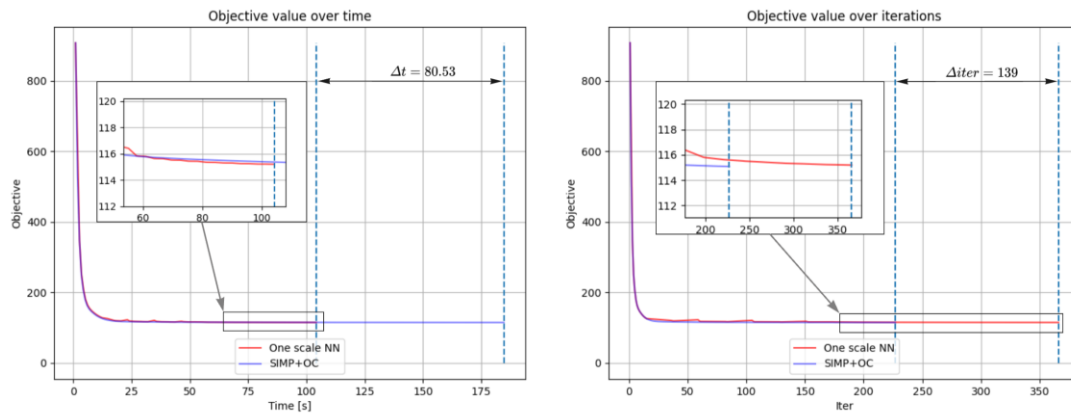
Επομένως για κάθε μέθοδο ο περιορισμός του όγκου της τελικής κατασκευής ορίζεται στο 40% του αρχικού όγκου. Συνολικά εξετάζονται τρία πλέγματα πεπερασμένων στοιχείων: 180×180, 300×300, 600×600. Σε κάθε πλέγμα εφαρμόζεται το φίλτρο πυκνότητας και επιλέγεται ακτίνα φίλτρου: 1.5, 3.5, 6.0 αντιστοίχια.

Διάσταση	# Βαθμών ελευθερίας	Ακτίνα φίλτρου	Τελικός όγκος
180×180	65522	3.0	0.4
360×360	260642	4.0	0.4
480×480	462722	6.0	0.4

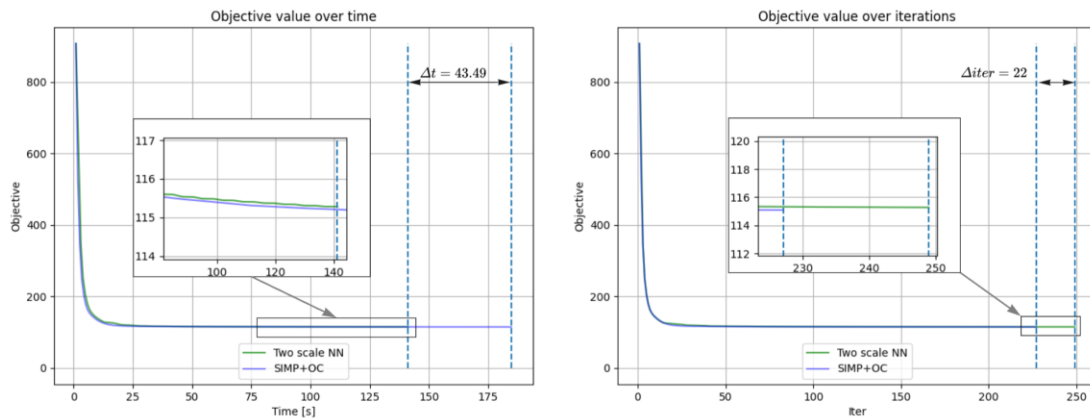
Πίνακας 5.5: Χαρακτηριστικά πλέγματος και παράμετροι βελτιστοποίηση τοπολογίας της δοκού L

Η σύγκριση των αποτελεσμάτων γίνεται με τον παρόμοιο τρόπο όπως και για την MBB δοκό. Παρακάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα επίλυσης του παραδείγματος της L-δοκού.

### 5.2.2.1 L-δοκός 180×180



Διάγραμμα 5.10: Εξέλιξη της αντικειμενικής συνάρτησης σε σχέση με τον χρόνο και με τις επαναλήψεις εφαρμόζοντας την προσέγγιση ενός πλέγματος.



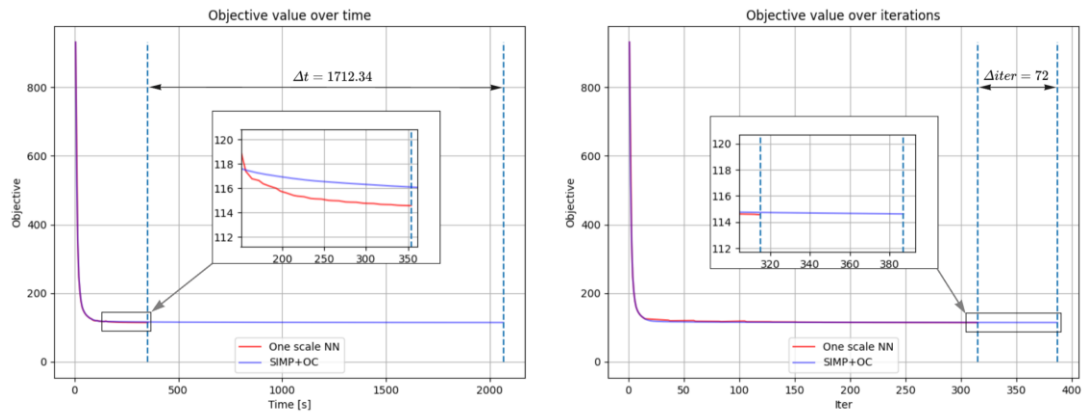
Διάγραμμα 5.11: Εξέλιξη της αντικειμενικής συνάρτησης σε σχέση με τον χρόνο και με τις επαναλήψεις εφαρμόζοντας την προσέγγιση δυο πλεγμάτων.

Βλέπουμε ότι η προσέγγιση ενός πλέγματος προσφέρει μείωση του απαιτούμενου χρόνου κατά 43.19% σε σχέση με την κλασσική μέθοδο, αντίθετος η προσέγγιση δυο πλεγμάτων παρουσιάζει μικρότερη επιτάχυνση (25.32%). Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την εφαρμογή της προτεινόμενης μεθοδολογίας.

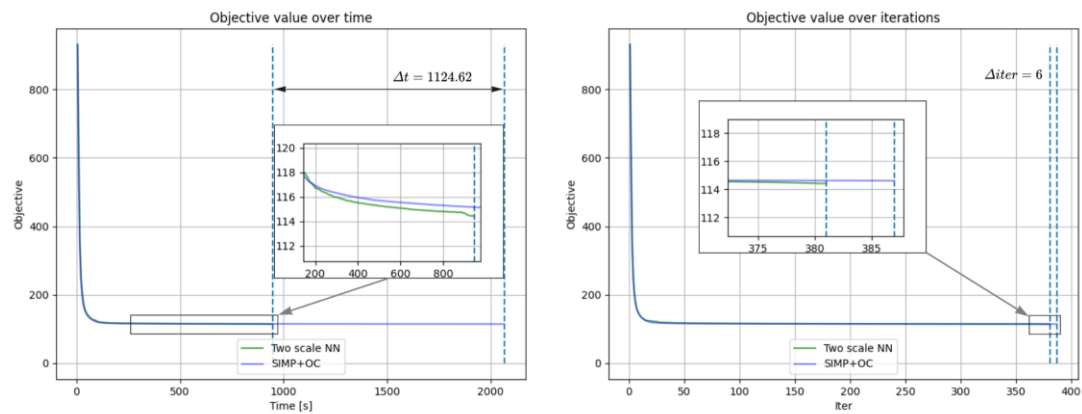
<b>180×180 L-beam</b>				
<b>Method</b>	<b>Time(sec)</b>	<b>Time diff (%)</b>	<b>Obj</b>	<b>Iterations</b>
SIMP+OC	186.77	0	115.089	227
One Scale NN	106.11	-43.19	115.197	366
Two Scale NN	140.23	-25.32	115.279	249

Πίνακας 5.6: Αποτελέσματα της 180×180 L δοκού

### 5.2.2.2 L-δοκός 360×360



Διάγραμμα 5.12: Εξέλιξη της αντικειμενικής συνάρτησης σε σχέση με τον χρόνο και με τις επαναλήψεις εφαρμόζοντας την προσέγγιση ενός πλέγματος.



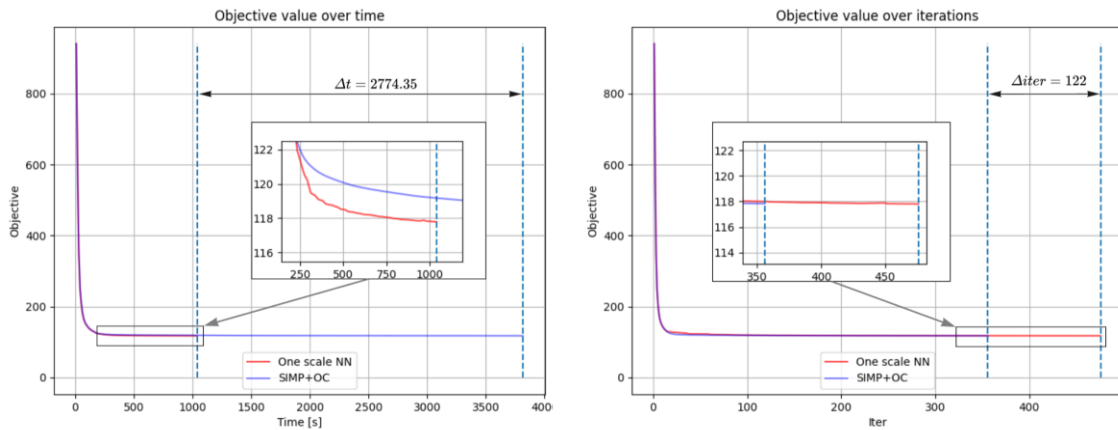
Διάγραμμα 5.13: Εξέλιξη της αντικειμενικής συνάρτησης σε σχέση με τον χρόνο και με τις επαναλήψεις εφαρμόζοντας την προσέγγιση δυο πλεγμάτων.

Παρατηρούμε ότι κάθε μέθοδος συγκλίνει περίπου στην ίδια τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Σε αυτό το παράδειγμα η προσέγγιση ενός πλέγματος έχει παρουσίαση σημαντική μείωση του απαιτούμενου χρόνου, κατά 82.34%. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την εφαρμογή της προτεινόμενης μεθοδολογίας.

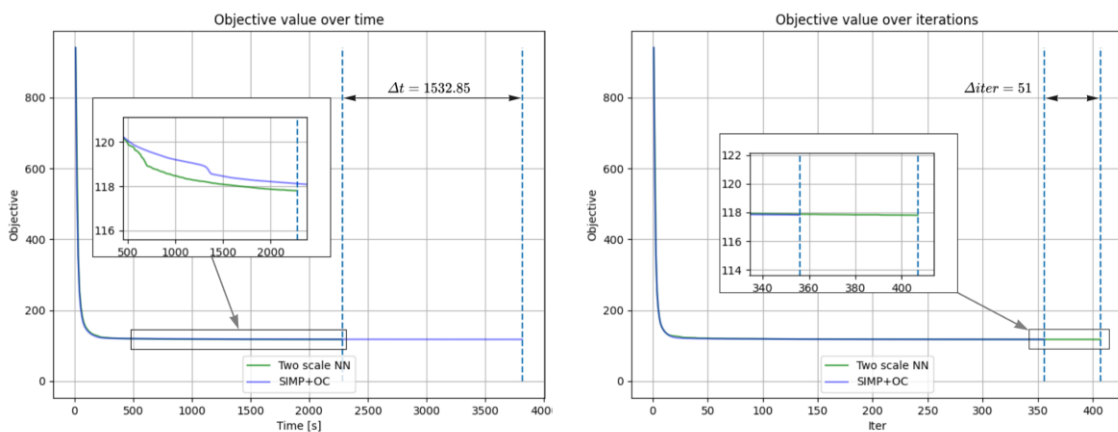
360×360 L-beam				
Method	Time(sec)	Time diff (%)	Obj	Iterations
SIMP+OC	2079.56	0	114.619	387
One Scale NN	367.18	-82.34	114.565	315
Two Scale NN	945.94	-54.51	114.421	381

Πίνακας 5.6: Αποτελέσματα της 360×360 L δοκού

### 5.2.2.3 L-δοκός 480×480



Διάγραμμα 5.14: Εξέλιξη της αντικειμενικής συνάρτησης σε σχέση με τον χρόνο και με τις επαναλήψεις εφαρμόζοντας την προσέγγιση ενός πλέγματος.



Διάγραμμα 5.15: Εξέλιξη της αντικειμενικής συνάρτησης σε σχέση με τον χρόνο και με τις επαναλήψεις εφαρμόζοντας την προσέγγιση δυο πλεγμάτων.

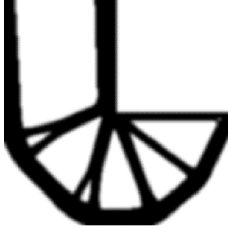
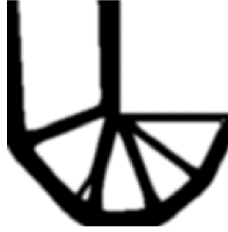


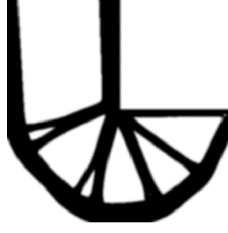

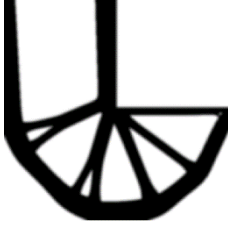
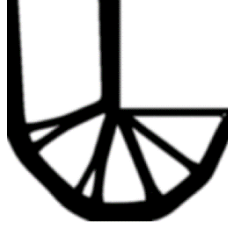

Εδώ παρατηρούμε παρόμοια αποτελέσματα όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα, συγκεκριμένα η καλύτερη επιτάχυνση παρουσιάζει η προσέγγιση ενός πλέγματος. Όμως, σε αντίθεση με την MBB δοκό, δεν παρατηρούμε την μέγιστη επιτάχυνση στο μεγαλύτερο πλέγμα. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την εφαρμογή της προτεινόμενης μεθοδολογίας.

480×480 L-beam				
Method	Time(sec)	Time diff (%)	Obj	Iterations
SIMP+OC	3869.96	0	117.829	356
One Scale NN	1094.87	-71.71	117.789	476
Two Scale NN	2305.41	-40,43	117.805	407

Πίνακας 5.7: Αποτελέσματα της 480×480 L δοκού



Τα ακόλουθα διαγράμματα παριστάνουν γραφικά τις βέλτιστες κατασκευές για κάθε μέθοδο και για κάθε πλέγμα του παραδείγματος με L-δοκό:

	SIMP + OC	One Scale NN	Two Scale NN
180×180			
360×360			
480×480			

Διάγραμμα 5.16: Βέλτιστες κατασκευές της κάθε μεθόδου για κάθε εξεταζόμενο πλέγμα του παραδείγματος με L-δοκό.

Παρατηρούμε ότι όλες οι λύσεις αντιπροσωπεύουν το ίδιο σχήμα, οπότε συμπεραίνουμε ότι στο συγκεκριμένο παράδειγμα η προτεινομένη μεθοδολογία δεν παρουσιάζει εξάρτηση από το μέγεθος του πλέγματος και επιστρέφει τα ίδια αποτελέσματα με την κλασική μέθοδο σε λιγότερο χρόνο. Επίσης και στις δυο προσεγγίσεις η ταλάντωση της αντικειμενικής συνάρτησης ήταν ελάχιστη και πιο μικρή, σε σχέση με το παράδειγμα της MBB-δοκού.

### 5.3 Επίλογος

Σε αυτό το κεφάλαιο έγινε ανάλυση και σύγκριση της προτεινομένης μεθοδολογίας με την κλασική μέθοδο SIMP. Η σύγκριση πραγματοποιήθηκε στα δυο δισδιάστατα προβλήματα και με τρία διαφορετικά πλέγματα για κάθε πρόβλημα. Η στρατηγική επιτάχυνσης της βελτιστοποίησης τοπολογίας, με την βοήθεια του βαθύ νευρωνικού δικτύου, παρουσιάζει καλή απόδοση, ενώ ταυτόχρονα επιταχύνει σημαντικά την διαδικασία της βελτιστοποίησης και προσφέρει την δυνατότητα γενίκευσης.

## 6 Συμπεράσματα

Σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας ήταν να παρουσιαστεί ο τρόπος επιτάχυνσης της βελτιστοποίησης τοπολογίας με την βοήθεια του βαθύ νευρωνικό δικτύου. Η κύρια πρόκληση που αντιμετωπίστηκε ήταν η μείωση του υψηλού υπολογιστικού κόστους που απαιτείται κατά τη διαδικασία της βελτιστοποίησης, ειδικά όταν αυτή υλοποιείται με την βοήθεια της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων (FEM). Σε σύνθετα προβλήματα, το κόστος αυτό μπορεί να οδηγήσει σε πολύωρες ή ακόμη και πολυήμερες αναμονές για την επίτευξη μιας βέλτιστης λύσης. Για την αντιμετώπιση αυτής της πρόκλησης και την επιτάχυνση της διαδικασίας, προτάθηκε η ενσωμάτωση βαθιών νευρωνικών δικτύων στη μέθοδο SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization).

Η παρουσιαζόμενη στρατηγική σκοπεύει να χρησιμοποιεί το νευρωνικό δίκτυο για εκτίμηση των ευαισθησιών κατά την διάρκεια διαδικασίας βελτιστοποίησης, αντί εφαρμογή της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων. Το βαθύ νευρωνικό δίκτυο ενσωματώνεται με την διαδικασία βελτιστοποίησης, συγκεκριμένα η προτεινομένη μεθοδολογία χρησιμοποιεί ταυτόχρονα την κλασική μέθοδο βελτιστοποίησης και την μέθοδο εκτίμησης ευαισθησιών με το νευρωνικό δίκτυο. Στο αρχικό στάδιο της μεθόδου, πραγματοποιούνται επαναλήψεις με τη χρήση της μεθόδου SIMP και της μεθόδου Optimality Criteria (OC), και τα αποτελέσματα αυτών των επαναλήψεων χρησιμεύουν ως δεδομένα εκπαίδευσης για το νευρωνικό δίκτυο. Όταν το νευρωνικό δίκτυο ολοκληρώσει την εκπαίδευσή του, η διαδικασία βελτιστοποίησης συνεχίζεται με τη χρήση των εκτιμήσεων που παρέχει το δίκτυο αντί των παραδοσιακών αναλύσεων FEM. Επιπλέον για να εξασφαλιστεί η δυνατότητα γενίκευσης και να αποφευχθεί η απόκλιση κατά τη διάρκεια βελτιστοποίησης, η μέθοδος περιλαμβάνει δυναμική ενημέρωση του νευρωνικού δικτύου.

Τα αποτελέσματα στο τελευταίο κεφάλαιο αποδεικνύουν ότι η προτεινομένη μεθοδολογία μπορεί να μειώσει τον απαιτούμενο χρόνο επίλυσης έως και 82%, ανάλογα με την πολυπλοκότητα του προβλήματος, χωρίς να μειωθεί η ακρίβεια. Τα πειράματα με MBB-δοκό και L-δοκό δείχνουν ότι οι λύσεις που λαμβάνονται με τη βοήθεια των νευρωνικών δικτύων είναι ανάλογες με αυτές που παράγονται με τις κλασικές μεθόδους, με την διαφορά ότι απαιτούν σημαντικά λιγότερους υπολογιστικούς πόρους. Επιπλέον, η μεθοδολογία αυτή αποδεικνύεται ιδιαίτερα ευέλικτη, επιτρέποντας την προσαρμογή της σε διαφορετικά είδη προβλημάτων.

Τέλος, θα πρέπει να σημειωθεί ότι αυτή η μελέτη δεν εξαντλεί τις δυνατότητες της προσέγγισης που παρουσιάστηκε. Η επέκταση της μεθόδου σε τρισδιάστατα προβλήματα

βελτιστοποίησης τοπολογίας και η εφαρμογή στα πρακτικά προβλήματα αποτελεί το επόμενο βήμα. Επίσης, μία από τις πιθανές βελτιώσεις είναι η αυτοματοποίηση της επιλογής των παραμέτρων της προτεινόμενης μεθόδου, συγκεκριμένα του αριθμού των αρχικών επαναλήψεων, της συχνότητας ενημέρωσης του νευρωνικού δικτύου και της τιμής του παραμέτρου *block size* στην προσέγγιση δυο πλεγμάτων. Μια σημαντική βελτίωση στο μέλλον θα μπορούσε να είναι ο συνδυασμός των προσεγγίσεων ενός και δύο πλεγμάτων σε ένα πιο ολοκληρωμένο μοντέλο για την επίλυση πιο σύνθετων προβλημάτων βελτιστοποίησης τοπολογίας. Επιπλέον, η ενσωμάτωση άλλων τεχνολογιών μηχανικής μάθησης και άλλων αρχιτεκτονικών, όπως τα δίκτυα CNN και RNN, θα μπορούσε να ενισχύσει περαιτέρω την αποδοτικότητα και την προσαρμοστικότητα της μεθόδου.

## **Βιβλιογραφικές Αναφορές**

- Andreassen, E., Clausen, A., Schevenels, M., Lazarov, B., & Sigmund, O. (2011). Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 43(1), 1-16. <https://doi.org/10.1007/s00158-010-0594-7>.
- Bellman, R., & Dreyfus, S. (2010). *Dynamic Programming* (Vol. 33). Princeton University Press. <https://doi.org/10.2307/j.ctv1nxcw0f>.
- Bendsoe, M.P. (1989). Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural Optimization*, 1, 193-202.
- Bendsoe, M.P., & Kikuchi, N. (1988). Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71(2), 197-224.
- Chi, H., Zhang, Y., Tang, T. L. E., Mirabella, L., Dalloro, L., Song, L., & Paulino, G. H. (2021). Universal machine learning for topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.
- Christensen, P. W., & Klarbing, A. (2009). *An Introduction to Structural Optimization, Solid Mechanics and its Applications*.
- Dantzig, G.B. (1982). Reminiscences about the origins of linear programming. *Operations Research Letters*, 1(2), 193-199.
- Delfour, M., & Huot-Chantal, F. (2019). On the figure of columns of Lagrange revisited. *Journal of Convex Analysis*, 26.
- Deng, C., Wang, Y., Qin, C., & others. (2022). Self-directed online machine learning for topology optimization. *Nature Communications*, 13, 388. <https://doi.org/10.1038/s41467-021-27713-7>.
- Erzmann, D., Dittmer, S., Harms, H., & Maaß, P. (2023). DL4TO: A deep learning library for sample-efficient topology optimization. In F. Nielsen & F. Barbaresco (Eds.), *Geometric Science of Information*. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-38271-0\\_54](https://doi.org/10.1007/978-3-031-38271-0_54).
- Gordoa, C.A., Querin, O.M., & Victoria, M. (2017). *Topology Design Methods for Structural Optimization*.
- Homenyk, S., & Kozub, V. (2021). Application of parallel computing in finite element analysis of constructions.
- Kallioras, N. A., & Lagaros, N. D. (2020). DzAIN: Deep learning-based generative design. *Procedia Manufacturing*, 44, 591-598.
- Kallioras, N. A., & Lagaros, N. D. (2021). MLGen: Generative design framework based on machine learning and topology optimization. *Applied Sciences*, 11(24), 12044. <https://doi.org/10.3390/app112412044>.

- Kallioras, N. A., Nordas, A. N., & Lagaros, N. D. (2021). Deep learning-based accuracy upgrade of reduced order models in topology optimization. *Applied Sciences*, *11*(24), 12005. <https://doi.org/10.3390/app112412005>.
- Kingma, D.P., & Ba, J. (2017). Adam: A method for stochastic optimization. *arXiv preprint arXiv:1412.6980*.
- Kirsch, U. (1993). *Structural Optimization—Fundamentals and Applications*. Springer, Berlin.
- Lagaros, N., Kallioras, N., & Kazakis, G. (2020). Accelerated topology optimization by means of deep learning. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, *62*, Article 25. <https://doi.org/10.1007/s00158-020-02545-z>.
- Li, B., Huang, C., Li, X., Zheng, S., & Hong, J. (2019). Non-iterative structural topology optimization using deep learning. *Computer-Aided Design*, *115*, 172-180. <https://doi.org/10.1016/j.cad.2019.05.038>.
- Logan, D.L. (2016). *A First Course in the Finite Element Method*.
- Lucia, D., Beran, P., & Silva, W. (2004). Reduced-order modeling: New approaches for computational physics.
- Michell, A.G.M. (1904). The limits of economy of material in frame-structures. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, *8*(47), 589-597. <https://doi.org/10.1080/14786440409463229>.
- Nie, Z., Lin, T., Jiang, H., & Kara, L. (2020). TopologyGAN: Topology optimization using generative adversarial networks based on physical fields over the initial domain. <https://doi.org/10.1115/DETC2020-22675>.
- Rade, J., Balu, A., Herron, E., Pathak, J., Ranade, R., Sarkar, S., & Krishnamurthy, A. (2020). Physics-consistent deep learning for structural topology optimization. *arXiv preprint arXiv:2012.05359*.
- Ruder, S. (2016). An overview of gradient descent optimization algorithms. *arXiv preprint arXiv:1609.04747*.
- Russell, S., & Norvig, P. (2009). *Artificial Intelligence: A Modern Approach* (3rd ed.). Prentice Hall Press, USA.
- Shin, S., Shin, D., & Kang, N. (2023). Topology optimization via machine learning and deep learning: A review. *Journal of Computational Design and Engineering*, *10*. <https://doi.org/10.1093/jcde/qwad072>.
- Sigmund, O. (2007). Morphology-based black and white filters for topology optimization. *Structural Multidisciplinary Optimization*, *33*, 401-424. <https://doi.org/10.1007/s00158-006-0087-x>.
- Sosnovik, I., & Oseledets, I. (2017). Neural networks for topology optimization.

- Wang, D., Cheng, X., Pan, Y., Chen, A., Zhou, X., & Zhang, Y. (2021). A deep convolutional neural network for topology optimization with perceptible generalization ability. *Engineering Optimization*, 54(1), 1-16. <https://doi.org/10.1080/0305215X.2021.1902998>.
- Williamson, F. (1980). Richard Courant and the finite element method: A further look. *Historia Mathematica*, 0315-0860.
- You, Y.H., Kou, X.Y., & Tan, S.T. (2015). Adaptive meshing for finite element analysis of heterogeneous materials.
- Παπαδρακάκης, Μ. (2001). Ανάλυση Φορέων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων.