



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

---

Αλγοριθμική ασυμπτωτική ανάλυση πεπερασμένης  
αργής πολλαπλότητας:  
**Ο ελκυστής Rössler**

---

Συντάκτης: ΜΑΡΗΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

Επιβλέπων Καθηγητής: ΓΚΟΥΣΗΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

ΑΘΗΝΑ 2012



## Περίληψη

Η ανάπτυξη αποσβετικών χρονοκλιμάκων, οι οποίες είναι πολύ πιο γρήγορες από τις υπόλοιπες, κάνουν την λύση ενός συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων να συγκλίνει προς μία αργή αναλοιώτη πολλαπλότητα και μετά να εξελίσσεται πάνω σε αυτή. Η "αργή" εξέλιξη επί της πολλαπλότητας μπορεί να προσεγγιστεί από ένα απλοποιημένο σύστημα, το οποίο είναι απαλλαγμένο από τις γρήγορες χρονοκλίμακες. Η δυναμική αυτού του συστήματος συγκρίνεται στην παρούσα εργασία με την δυναμική του αρχικού συστήματος, όταν η λύση εξελίσσεται πάνω στην "αργή" αυτή πολλαπλότητα. Η σύγκριση αυτή γίνεται στη βάση του συστήματος Rössler, το οποίο παρουσιάζει έναν χαοτικό ελκυστή που χαρακτηρίζεται από "αποσβετικές" και "εκρηκτικές" φάσεις. Μελετούμε την "αποσβετική" φάση, κατά την οποία η λύση εξελίσσεται πάνω σε μία αναλοιώτη αργή πολλαπλότητα και το κατά πόσο μπορεί να προβλεφθεί η "εκρηκτική" φάση που ακολουθεί από τα δυναμικά χαρακτηριστικά του συστήματος Rössler. Δείχνουμε ότι μία πρόβλεψη της "εκρηκτικής" αυτής φάσης είναι δυνατή μόνο μέσω της δυναμικής του απλοποιημένου συστήματος. Η ικανότητα πρόβλεψης της επερχόμενης "εκρηκτικής" φάσης είναι πολύ σημαντική, όταν επιθυμούμε να ορίσουμε τις φυσικές διεργασίες που διέπουν την γενικότερη συμπεριφορά του συστήματος.

## Abstract

The development of dissipative time scales, which are much faster than the rest, force the solution of 1st order ODEs to land and then evolve on a slow invariant manifold. The slow evolution on this manifold can be approximated by a simplified system, which is free of fast scales. The dynamics of this system are compared here with the dynamics of the original system, when the solution evolves on the slow manifold. This study is based on the Rössler model, which exhibits a chaotic attractor that is characterized by dissipative and explosive phases. We examine the dissipative phase, during which the solution evolves on a slow invariant manifold and the dynamics of the Rössler model cannot predict the explosive phase that follows. It is shown that such a prediction is only possible through the dynamics of the simplified system. Predicting the approach of the explosive phase is very important when it is desired to identify the underlying physical mechanisms that control the process.



# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Η αλγοριθμική μέθοδος CSP</b>	<b>11</b>
2.1	Μαθηματική περιγραφή της μεθόδου CSP . . . . .	11
2.2	Εφαρμογή των CSP refinements . . . . .	14
2.2.1	Πρώτη φάση . . . . .	15
2.2.2	Δεύτερη φάση . . . . .	16
2.2.3	Χρονικές παράγωγοι της Ιακωβιανής . . . . .	18
2.3	Η τροποποιημένη μέθοδος CSP . . . . .	18
2.3.1	Ο αλγόριθμος AE για την αναγνώριση του SIM . . . . .	20
2.3.2	Ο αλγόριθμος κατασκευής του απλοποιημένου συστήματος με τον $\mathbf{G}_s^r$ πίνακα . . . . .	20
2.3.3	Η σχέση μεταξύ των δύο ειδών της CSP διανυσματικής βάσης . . . . .	22
2.3.4	Υπολογισμός του $\mathbf{G}_s^r$ πίνακα . . . . .	24
2.3.5	Υπολογισμός του $\mathbf{R}_r^s$ πίνακα . . . . .	25
2.4	Διαγνωστικά εργαλεία της CSP . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Ανάλυση του ελκυστή Rössler</b>	<b>27</b>
3.1	Δυναμική του Συστήματος Rössler και η λύση του . . . . .	29
3.2	Ιδιοτιμές και Χρονοκλίμακες . . . . .	33
3.3	Ανάλυση με χρήση CSP . . . . .	39
3.4	Το απλοποιημένο μοντέλο της CSP . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Συμπεράσματα</b>	<b>47</b>
<b>5</b>	<b>Παραρτημα: Υπολογιστικό πρόγραμμα Mathematica</b>	<b>49</b>



# 1 Εισαγωγή

Στην Μηχανική, στην Φυσική, στην Βιολογία, στην Επιστήμη των Υπολογιστών κ.α. συναντούμε μαθηματικά μοντέλα πολλαπλών χρονοκλιμάκων. Τα μοντέλα αυτά προσομοιάζουν φυσικά προβλήματα στα οποία αναπτύσσονται *αργές* και *γρήγορες* χρονοκλίμακες. Ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων στο οποίο αναπτύσσονται *αργές* και *γρήγορες* χρονοκλίμακες ονομάζεται δύσκαμπτο (*stiff*) όταν (i) οι *γρήγορες* χρονοκλίμακες είναι *αποσβητικές* (*dissipative*) και (ii) η περιοχή του πεδίου της λύσης στην οποία υπερισχύουν οι *αργές* χρονοκλίμακες είναι συγκριτικά πολύ μεγαλύτερη από την περιοχή στην οποία υπερισχύουν οι *γρήγορες* χρονοκλίμακες [1]. Συνεπώς, οι *γρήγορες* χρονοκλίμακες χαρακτηρίζουν την εξέλιξη των δύσκαμπτων δυναμικών συστημάτων στη διάρκεια μιας μικρής μόνο περιοχής. Στο μεγαλύτερο μέρος του πεδίου της λύσης, το σύστημα εξελίσσεται σύμφωνα με τις *αργές* χρονοκλίμακες, ενώ οι *γρήγορες* χρονοκλίμακες παίζουν ένα παθητικό ρόλο. Η ύπαρξη των *γρήγορων* χρονοκλιμάκων στις περιόδους όπου η λύση χαρακτηρίζεται από τις *αργές* δημιουργεί τις αριθμητικές δυσκολίες που χαρακτηρίζουν τα δύσκαμπτα προβλήματα και επιβάλλει τη χρήση των έμμεσων υπολογιστικών αλγορίθμων [1]. Ο υπόχωρος στον οποίο οι *αργές* χρονοκλίμακες χαρακτηρίζουν την εξέλιξη του συστήματος και η λύση ορίζεται από ένα μη-δύσκαμπτο (αργό) σύστημα ονομάζεται εκθετικά έλκουσα Αργή Αναλοιώτη Πολλαπλότητα (*exponentially attracting Slow Invariant Manifold, SIM*) [2, 3, 4].

Ο χώρος των φάσεων κατά μήκος της εκθετικά έλκουσας Αργής Αναλοιώτης Πολλαπλότητας (ΑΑΠ) ονομάζεται *εφαπτόμενος χώρος* (*tangent space*) και αναλύεται σε *γρήγορο* και *αργό* υπόχωρο, εντός των οποίων δρουν οι *γρήγορες* και *αργές* χρονοκλίμακες. Στη περίπτωση ενός μη-γραμμικού συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων, κατά την κίνηση της ροής κατά μήκος της ΑΑΠ οι δύο υπόχωροι περιστρέφονται.

Η ΑΑΠ ορίζεται από γραμμικά ανεξάρτητες σχέσεις οι οποίες προκύπτουν από την αμελητέα προβολή του διανυσματικού πεδίου στις διευθύνσεις που ορίζουν τον γρήγορο υπόχωρο του εφαπτόμενου χώρου, δηλαδή στις διευθύνσεις των "γρήγορων" ινών ροής (*fast fibers*) που ξεκινούν από το ΑΑΠ [3, 5, 6, 7]. Το μη-δύσκαμπτο (αργό) σύστημα που προσομοιάζει τη ροή πάνω στην ΑΑΠ ορίζεται από την προβολή του διανυσματικού πεδίου στις διευθύνσεις που ορίζουν τον αργό υπόχωρο του εφαπτόμενου χώρου, δηλαδή στις διευθύνσεις που ορίζουν τον εφαπτόμενο στην ΑΑΠ υπόχωρο [5, 6, 7].

Η ύπαρξη της ΑΑΠ και του "αργού" συστήματος μας επιτρέπει την κατασκευή απλοποιη-

μένων και μη-δύσκαμπτων μοντέλων, κάνοντας την λύση αρχικά "μεγάλων" και δύσκαμπτων προβλημάτων εύκολη. Επίσης επιτρέπει την αναγνώριση των φυσικών διεργασιών που συνιστούν στη δημιουργία της ΑΑΠ και του "αργού" συστήματος.

Γενικά, η ΑΑΠ και το "αργό" σύστημα αναγνωρίζονταν με ασυμπτωτικές μεθόδους, συγκεκριμένα τη *θεωρία ιδιόμορφων διαταραχών*. Αυτές οι τεχνικές συστηματικοποιήθηκαν αρχικά από τους Tihonov και Levinson [8, 9] και αργότερα από τους Vasil'eva και O'Malley [10, 11]. Μια σημαντική πρόοδος στην κατανόηση αυτών των μεθόδων έγινε με την δημιουργία μιας γεωμετρικής θεωρίας για το SIM [12, 13, 14, 15]. Όμως αυτές οι μέθοδοι δεν μπορούν να χειριστούν μεγάλα και πολύπλοκα μαθηματικά μοντέλα. Για τον λόγο αυτόν δημιουργήθηκαν αλγοριθμικές μεθοδολογίες [5, 16, 17, 18, 19, 20] που παράγουν την ΑΑΠ και το "αργό" σύστημα. Αυτές οι μεθοδολογίες αναπαράγουν τα αποτελέσματα των παραδοσιακών προβλημάτων ιδιόμορφων διαταραχών και δεν έχουν περιορισμό στο μέγεθος και στην πολυπλοκότητα των μαθηματικών μοντέλων που μπορούν να χειριστούν.

Μία από αυτές τις μεθοδολογίες είναι και η υπολογιστική μέθοδος *Computational Singular Perturbation* (CSP) αναπτύχθηκε από τους S.H. Lam και Δ.Α. Γκούση [5, 6, 21, 22, 23, 24]. Έχοντας για μελέτη ένα N-διάστατο δύσκαμπτο πρόβλημα, η CSP παρέχει την έκφραση που προσομοιάζει την ΑΑΠ και το μη-δυσκαμπτο "αργό" σύστημα που προσομοιάζει την ροή πάνω στο ΑΑΠ [5, 6, 21, 22, 23, 24]. Η CSP πετυχαίνει αυτήν την περιγραφή με την αλγοριθμική προσέγγιση των συντεταγμένων του γρήγορου και αργού υπόχωρου του εφαπτόμενου χώρου (tangent space) [5, 6]. Η CSP παρέχει αλγοριθμικά όλες τις απαραίτητες πληροφορίες που αφορούν τις συνιστώσες του μαθηματικού μοντέλου που είναι κυρίως υπεύθυνες για την δημιουργία του ΑΑΠ και για τις συνιστώσες που οδηγούν τη ροή πάνω στην ΑΑΠ.

Στην παρούσα εργασία θα μελετηθεί ο *χαοτικός ελκυστής* του O. Rössler [25, 26, 27, 28]. Ο Rössler εισήγαγε τον ελκυστή αυτόν στην προσπάθεια του να εξηγήσει τη δυναμική συμπεριφορά του κλασσικού μοντέλου του E.N. Lorenz [29]. Ο ελκυστής του Rössler χαρακτηρίζεται από αργές και γρήγορες φάσεις. Στη διάρκεια της αργής φάσης η λύση κινείται πάνω σε μία ΑΑΠ, η οποία δημιουργείται υπό την επίδραση μίας πολύ γρήγορης αποσβετικής χρονοκλίμακας.

Κατ' αρχάς, θα δοθεί μία παρουσίαση του αλγόριθμου της CSP. Στην συνέχεια θα μελετηθεί η δυναμική του *ελκυστή Rössler*, όπως αυτή αποτυπώνεται στο αρχικό και στο "αργό" σύστημα με την βοήθεια της CSP, στη φάση του ελκυστή κατά την οποία η λύση κινείται στην ΑΑΠ. Θα εξεταστεί ο βαθμός με τον οποίο η δυναμική του "αργού" συστήματος προσεγγίζει την αργή



δυναμική του αρχικού συστήματος. Επίσης, θα εξεταστεί το κατά πόσον το "αργό" σύστημα μπορεί να προβλέψει το τέλος της ΑΑΠ και την "εκρηκτική" φάση που ακολουθεί.

Η παρούσα εργασία αποτελεί εφαρμογή της ανάλυσης των δυναμικών χαρακτηριστικών του "αργού" συστήματος που περιγράφει την κίνηση επί της ΑΑΠ που αναπτύσσεται στα πλαίσια του van der Pol συστήματος, που έγινε πρόσφατα [30].



## 2 Η αλγοριθμική μέθοδος CSP

Το βασικό μέρος της μεθόδου CSP περιλαμβάνει μια επαναληπτική διαδικασία σχεδιασμένη να προσεγγίσει τα διανύσματα βάσης που παράγουν τους δύο υποχώρους του εφαπτόμενου χώρου (*tangent space*), στους οποίους δρουν οι γρήγορες και οι αργές χρονοκλίμακες. Η διαδικασία ξεκινά με μια τυχαία αρχική εκτίμηση των "γρήγορων" και "αργών" διανυσμάτων βάσης  $\mathbf{A}_r$  και  $\mathbf{A}_s$ , τα οποία παράγουν τον "γρήγορο" και "αργό" υπόχωρο του εφαπτομενικού χώρου, καθώς και τα δυικά τους  $\mathbf{B}^r$  και  $\mathbf{B}^s$ . Κάθε επανάληψη παρέχει καλύτερες προσεγγίσεις των "γρήγορων" και "αργών" υποχώρων. Υπάρχουν δυο ειδών επαναλήψεις ανεξάρτητες μεταξύ τους: η  $\mathbf{a}_r$ - και  $\mathbf{b}^r$ -βελτίωση. Η  $\mathbf{b}^r$ -βελτίωση βελτιώνει την ακρίβεια περιγραφής του SIM, με το να προσεγγίζει καλύτερα τον "αργό" υπόχωρο, ενώ η  $\mathbf{a}_r$ -βελτίωση εξαλείφει την δυσκαμψία του προβλήματος προσεγγίζοντας καλύτερα τον "γρήγορο" υπόχωρο. Όπως θα φανεί στη συνέχεια, η  $\mathbf{b}^r$ -βελτίωση μειώνει την επίδραση των "αργών" χρονοκλιμάκων στην προσέγγιση του "γρήγορου" υποχώρου, ενώ η  $\mathbf{a}_r$ -βελτίωση μειώνει τη επίδραση των "γρήγορων" χρονοκλιμάκων στην προσέγγιση του "αργού" υποχώρου.

Με κάθε επανάληψη των  $\mathbf{a}_r$  και  $\mathbf{b}^r$ -βελτιώσεων, η ακρίβεια στην προσέγγιση του αργού και του γρήγορου υποχώρου αυξάνει κατά  $\mathcal{O}(\epsilon)$ , όπου  $\epsilon$  ορίζεται από τη σχέση:

$$\epsilon = \frac{\tau_M}{\tau_{M+1}} \quad (2.0.1)$$

όπου  $\tau_M$  είναι η πιο 'αργή' χρονοκλίμακα από τις 'γρήγορες' του αρχικού συστήματος και η  $\tau_{M+1}$  είναι η πιο γρήγορη του 'αργού' συστήματος.

### 2.1 Μαθηματική περιγραφή της μεθόδου CSP

Θεωρούμε ότι η εξέλιξη ενός φυσικού φαινομένου αναπαρίσταται από το N-διάστατο σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) \quad (2.1.1)$$

όπου  $\mathbf{y}$  είναι το N-διάστατο διάνυσμα των εξαρτημένων μεταβλητών και  $\mathbf{g}$  μια μη-γραμμική αλγεβρική συνάρτηση του  $\mathbf{y}$ . Θεωρούμε ότι το σύστημα αυτό είναι αριθμητικά δύσκαμπτο. Σύμφωνα με την αλγοριθμική μέθοδο CSP, σε κάθε σημείο του εφαπτόμενου χώρου το διάνυσμα  $\mathbf{g}$  μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνισταμένες, την αργή και τη γρήγορη (από την προβολή του διανύσματος  $\mathbf{g}$  στον "γρήγορο" υπόχωρο διάστασης  $M$  και στον "αργό" υπόχωρο διάστασης

$N-M$ ). Ο  $M$ -διάστατος υπόχωρος όπου δρουν οι γρήγορες χρονοκλίμακες παράγεται απο τα διανύσματα:  $\mathbf{a}_i$  ( $i=1, \dots, M$ ) τα οποία αποτελούν στήλες του  $(N \times M)$  πίνακα:

$$\mathbf{A}_r(k, m) = [\mathbf{a}_1(k, m), \mathbf{a}_2(k, m), \dots, \mathbf{a}_M(k, m)] \quad (2.1.2)$$

Ο  $(N-M)$ -διάστατος υπόχωρος όπου δρουν οι αργές χρονοκλίμακες παράγεται απο τα  $\mathbf{a}_j$  ( $j=M+1, \dots, N$ ) τα οποία αποτελούν στήλες του  $N \times (N-M)$  πίνακα:

$$\mathbf{A}_s(k, m) = [\mathbf{a}_{M+1}(k, m), \mathbf{a}_{M+2}(k, m), \dots, \mathbf{a}_N(k, m)] \quad (2.1.3)$$

Οι δείκτες  $k$  και  $m$  δηλώνουν τα επίπεδα των  $\mathbf{a}_r$  και  $\mathbf{b}^r$ -βελτιώσεων, αντίστοιχα. Οι χρονοκλίμακες συνδέονται με τις ιδιοτιμές με την σχέση:

$$\tau_n = \left( \sqrt{\lambda_{n,r}^2 + \lambda_{n,m}^2} \right)^{-1}$$

όπου τα  $\lambda_{n,r}$  και  $\lambda_{n,m}$  δηλώνουν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος, αντίστοιχα, της  $n$ -ιοστής ιδιοτιμής του συστήματος ( $n = 1, \dots, N$ ). Οι χρονοκλίμακες  $\tau_n$  με  $n=1, \dots, M$  συνδέονται με τον "γρήγορο" υπόχωρο διάστασης  $M$ , ενώ οι χρονοκλίμακες  $\tau_n$  με  $n = M+1, \dots, N$  συνδέονται με τον "αργό" υπόχωρο διάστασης  $N - M$ .

Το δυϊκά διανύσματα βάσης,  $\mathbf{b}^i$  ( $i=1, \dots, M$ ) και  $\mathbf{b}^j$  ( $j=M+1, \dots, N$ ) ορίζονται από τις εκφράσεις:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^r(k, m) &= [\mathbf{b}^1(k, m), \mathbf{b}^2(k, m), \dots, \mathbf{b}^M(k, m)]^T \\ \mathbf{B}^s(k, m) &= [\mathbf{b}^{M+1}(k, m), \mathbf{b}^{M+2}(k, m), \dots, \mathbf{b}^N(k, m)]^T \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

και λόγω ορθογωνιότητας ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^r(k, m)\mathbf{A}_r(k, m) &= \mathbf{I}_M^M & \mathbf{B}^r(k, m)\mathbf{A}_s(k, m) &= \mathbf{0}_{N-M}^M \\ \mathbf{B}^s(k, m)\mathbf{A}_r(k, m) &= \mathbf{0}_M^{N-M} & \mathbf{B}^s(k, m)\mathbf{A}_s(k, m) &= \mathbf{I}_{N-M}^{N-M} \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

και

$$\mathbf{A}_r(k, m)\mathbf{B}^r(k, m) + \mathbf{A}_s(k, m)\mathbf{B}^s(k, m) = \mathbf{I}_N^N \quad (2.1.6)$$

όπου  $\mathbf{I}_N^N$  ο μοναδιαίος πίνακας διαστάσεων  $(N \times N)$  και  $\mathbf{0}_N^M$  ο μηδενικός πίνακας διαστάσεων  $(M \times N)$ .

Έχοντας ορίσει τα διανύσματα βάσης που περιγράφουν τον γρήγορο και αργό υπόχωρο, το διανυσματικό πεδίο της Εξ. (2.1.1) αναλύεται στη γρήγορη και αργή συνιστώσα:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}_r(k, m)\mathbf{f}^r(k, m) + \mathbf{A}_s(k, m)\mathbf{f}^s(k, m) \quad (2.1.7)$$

όπου τα ανύσματα  $\mathbf{f}^r(k, m)$  και  $\mathbf{f}^s(k, m)$  διαστάσεων  $N$  και  $(N-M)$  αντίστοιχα, αποτελούν τα γρήγορα και αργά εύρη, ορίζονται ως εξής:

$$\mathbf{f}^r(k, m) = [f^1(k, m), f^2(k, m), \dots, f^M(k, m)]^T$$

και

$$\mathbf{f}^s(k, m) = [f^{M+1}(k, m), f^{M+2}(k, m), \dots, f^N(k, m)]^T \quad (2.1.8)$$

όπου κάθε  $f^i$  ορίζεται ως:

$$f^i(k, m) = \mathbf{b}^i(k, m) * \mathbf{g} \quad (2.1.9)$$

Στην ΑΑΠ τα εύρη των  $M$  γρήγορων διανυσμάτων βάσης λαμβάνουν αμελητέο μέτρο, δηλαδή:

$$\mathbf{f}^r(k, m) = \mathbf{B}^r(k, m) * \mathbf{g} \approx \mathbf{0}_1^M \quad (2.1.10)$$

Η παραπάνω εξίσωση προσεγγίζει την ΑΑΠ διάστασης  $(N-M)$ , όπου η Εξ. (2.1.7) απλοποιείται στη μορφή:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} \approx \mathbf{A}_s(k, m)\mathbf{f}^s(k, m) = [I - \mathbf{A}_r(k, m)\mathbf{B}^r(k, m)] * \mathbf{g} \quad (2.1.11)$$

Η Εξ. (2.1.11) αποτελεί το "αργό"-σύστημα που περιγράφει τη ροή επί της ΑΑΠ. Σημειωτέον ότι η δεύτερη ισότητα της Εξ. (2.1.11) προέκυψε απο τη σχέση ορθογωνιότητας (2.1.6). Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι  $M$  "γρήγορες" χρονοκλίμακες δεν παίζουν κανένα ρόλο στην κίνηση επί της ΑΑΠ. Το απλοποιημένο-"αργό" σύστημα Εξ. (2.1.11) είναι αριθμητικά μη-δύσκαμπτο, διότι δεν περιλαμβάνει τα εύρη των γρήγορων χρονοκλιμάκων.

Απο τις Εξ. (2.1.10) και (2.1.11) διαπιστώνεται ότι για την κατασκευή των εξισώσεων που περιγράφουν την πολλαπλότητα και τη ροή επ' αυτής, τα μόνα που χρειάζονται είναι τα "γρήγορα"  $\mathbf{A}_r$  και  $\mathbf{B}^r$ .

Η  $\mathbf{b}^r$ -βελτίωση επιτυγχάνεται μέσω των σχέσεων:

$$\mathbf{B}^r(k_1 + 1, m_1) = \mathbf{T}_r^r(k_1, m_1) \left[ \frac{d\mathbf{B}^r(k_1, m_1)}{dt} + \mathbf{B}^r(k_1, m_1)\mathbf{J} \right] \quad (2.1.12)$$

$$\mathbf{A}_r(k_1 + 1, m_1) = \mathbf{A}_r(k_1, m_1) \quad (2.1.13)$$

$$\mathbf{B}^s(k_1 + 1, m_1) = \mathbf{B}^s(k_1, m_1) \quad (2.1.14)$$

$$\mathbf{A}_s(k_1 + 1, m_1) = [\mathbf{I} - \mathbf{A}_r(k_1 + 1, m_1)\mathbf{B}^r(k_1 + 1, m_1)]\mathbf{A}_s(k_1, m_1) \quad (2.1.15)$$

όπου

$$\mathbf{T}_r^r(k_1, m_1) = [\mathbf{A}_r^r(k_1, m_1)]^{-1} = \left[ \left( \frac{d\mathbf{B}^r(k_1, m_1)}{dt} + \mathbf{B}^r(k_1, m_1)\mathbf{J} \right) \mathbf{A}_r(k_1 + 1, m_1) \right]^{-1} \quad (2.1.16)$$

Η  $\mathbf{a}_r$ -βελτίωση επιτυγχάνεται μέσω των σχέσεων:

$$\mathbf{A}_r(k_2, m_2 + 1) = \left[ -\frac{d\mathbf{A}^r(k_2, m_2)}{dt} + \mathbf{J}\mathbf{A}_r(k_2, m_2) \right] \mathbf{T}_r^r(k_2, m_2) \quad (2.1.17)$$

$$\mathbf{B}^r(k_2, m_2 + 1) = \mathbf{B}^r(k_2, m_2) \quad (2.1.18)$$

$$\mathbf{B}^s(k_2, m_2 + 1) = \mathbf{B}^s(k_2, m_2)[\mathbf{I} - \mathbf{A}_r(k_2, m_2 + 1)\mathbf{B}^r(k_2, m_2 + 1)] \quad (2.1.19)$$

$$\mathbf{A}_s(k_2, m_2 + 1) = \mathbf{A}_s(k_2, m_2) \quad (2.1.20)$$

όπου

$$\mathbf{T}_r^r(k_2, m_2) = [\mathbf{\Lambda}_r^r(k_2, m_2)]^{-1} = \left[ \left( \frac{d\mathbf{B}^r(k_2, m_2)}{dt} + \mathbf{B}^r(k_2, m_2)\mathbf{J} \right) \mathbf{A}_r(k_2, m_2) \right]^{-1} \quad (2.1.21)$$

Τα  $k_i$  και  $m_i$  υποδηλώνουν των αριθμό των  $\mathbf{b}^r$ - και  $\mathbf{a}_r$ -βελτιώσεων, αντίστοιχα.

## 2.2 Εφαρμογή των CSP refinements

Η εφαρμογή των CSP-βελτιώσεων χωρίζεται σε δύο φάσεις: στην πρώτη φάση όπου τα χρονικά παράγωγα των διανυσμάτων βάσης αγνοούνται και στην δεύτερη φάση όπου τα χρονικά παράγωγα των διανυσμάτων λαμβάνονται υπ' όψιν. Στη περίπτωση ενός μη-γραμμικού συστήματος, η πρώτη φάση των βελτιώσεων έχει νόημα να γίνει μία μόνο φορά, δεδομένου ότι τα χρονικά παράγωγα των διανυσμάτων συνεισφέρουν στην ακρίβεια ανωτέρας τάξης [23]. Αντίθετα, η δεύτερη φάση των βελτιώσεων μπορεί να γίνει πολλές φορές. Όμως, πρακτικοί λόγοι περιορίζουν τον αριθμό των βελτιώσεων της δεύτερης φάσης σε ένα μικρό σχετικά αριθμό.

Διαφορίζοντας την Εξ. (2.1.9) ως προς το χρόνο κατα μήκος της λύσης μίας τροχιάς  $\mathbf{y}(t)$  έχουμε:

$$\frac{df^i}{dt} = \sum_{j=1}^N \lambda_j^i f^j \quad (2.2.1)$$

όπου  $i=1, \dots, N$  και

$$\lambda_j^i \equiv \left( \frac{d\mathbf{b}^i}{dt} + \mathbf{b}^i * \mathbf{J} \right) * \mathbf{a}_j \quad (2.2.2)$$

όπου  $i, j = 1, \dots, N$ . Έτσι, η Εξ. (2.2.1) μπορεί να γραφτεί στην ανυσματική μορφή:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{f}^r \\ \mathbf{f}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_r^r & \boldsymbol{\lambda}_s^r \\ \boldsymbol{\lambda}_r^s & \boldsymbol{\lambda}_s^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}^r \\ \mathbf{f}^s \end{bmatrix} \quad (2.2.3)$$

όπου  $r=1, \dots, M$  και  $s=M+1, \dots, N$ . Ο ρόλος της  $\mathbf{b}^r$ -βελτίωσης είναι να μειώσει την τάξη της  $\boldsymbol{\lambda}_s^r$ , ενώ ο ρόλος της  $\mathbf{a}_r$ -βελτίωσης είναι να μειώσει την τάξη της  $\boldsymbol{\lambda}_r^s$ , επιτυγχάνοντας με αυτό τον τρόπο (i) την αποσύζευξη των γρήγορων από τις αργές χρονικλίμακες (όταν  $\boldsymbol{\lambda}_s^r \rightarrow 0$ ) και (ii) την αποσύζευξη των αργών από τις γρήγορες χρονικλίμακες (όταν  $\boldsymbol{\lambda}_r^s \rightarrow 0$ ) [23].

### 2.2.1 Πρώτη φάση

Έστω ότι η αρχική επιλογή για τα διανύσματα βάσης είναι τα  $\mathbf{B}^r(0, 0)$  και  $\mathbf{A}_r(0, 0)$  είναι να είναι σταθερά, άρα:

$$\frac{d\mathbf{B}^r(0, 0)}{dt} = 0, \quad \frac{d\mathbf{A}_r(0, 0)}{dt} = 0 \quad (2.2.4)$$

Στην περίπτωση αυτή, ο αλγόριθμος της  $\mathbf{b}^r$ -βελτίωσης γίνεται:

$$\mathbf{B}^r(1, 0) = \boldsymbol{\lambda}_r^r(0, 0)\mathbf{B}^r(0, 0)\mathbf{J}$$

$$\mathbf{A}_r(1, 0) = \mathbf{A}_r(0, 0)$$

$$\mathbf{B}^s(1, 0) = \mathbf{B}^s(0, 0)$$

$$\mathbf{A}_s(1, 0) = [\mathbf{I} - \mathbf{A}_r(1, 0)\mathbf{B}^r(1, 0)]\mathbf{A}_s(0, 0) = [\mathbf{I} - \mathbf{A}_r(0, 0)\mathbf{B}^r(1, 0)]\mathbf{A}_s(0, 0)$$

όπου:

$$\boldsymbol{\lambda}_r^r(0, 0) = \mathbf{B}^r(0, 0)\mathbf{J}\mathbf{A}_r(0, 0) \quad \boldsymbol{\tau}_r^r(0, 0) = [\boldsymbol{\lambda}_r^r(0, 0)]^{-1}$$

Το αποτέλεσμα της  $\mathbf{b}^r$ -βελτίωσης είναι να μειώσει τη νόρμα  $\boldsymbol{\lambda}_s^r$  (όπου  $(d\mathbf{B}^r(1, 0)/dt)*\mathbf{A}_s(1, 0) = \mathbf{0}_s^r$ ):

$$\boldsymbol{\lambda}_s^r(1, 0) = \mathbf{B}^r(1, 0)\mathbf{J}\mathbf{A}_s(1, 0) = \mathcal{O}(\epsilon\boldsymbol{\lambda}_s^r(0, 0))$$

κατά μία τάξη του  $\epsilon = |\tau_M/\tau_{M+1}| < 1$ , μειώνοντας έτσι τη σύζευξη των "γρήγορων" χρονοκλιμάκων από τις "αργές". Αντιθέτως, το επίπεδο σύζευξης των "αργών" με τις "γρήγορες" χρονοκλίμακες δεν αλλάζει:

$$\boldsymbol{\lambda}_r^s(1, 0) = \mathbf{B}^s(1, 0)\mathbf{J}\mathbf{A}_r(1, 0) = \mathbf{B}^s(0, 0)\mathbf{J}\mathbf{A}_r(0, 0) = \boldsymbol{\lambda}_r^s(0, 0)$$

Δεδομένων των διανυσμάτων που προκύπτουν από την  $\mathbf{b}^r$ -βελτίωση, ο αλγόριθμος της

$\mathbf{a}_r$ -βελτίωσης γίνεται:

$$\mathbf{A}_r(1, 1) = \mathbf{J}\mathbf{A}_r(0, 0)\boldsymbol{\tau}_r^r(1, 0)$$

$$\mathbf{B}^r(1, 1) = \mathbf{B}^r(1, 0)$$

$$\mathbf{A}_s(1, 1) = \mathbf{A}_s(1, 0)$$

$$\mathbf{B}^s(1, 1) = \mathbf{B}^s(1, 0)[\mathbf{I} - \mathbf{A}_r(1, 1)\mathbf{B}^r(1, 1)] = \mathbf{B}^s(0, 0)[\mathbf{I} - \mathbf{A}_r(1, 1)\mathbf{B}^r(1, 0)]$$

όπου:

$$\boldsymbol{\lambda}_r^r(1, 0) = \mathbf{B}^r(1, 0)\mathbf{J}\mathbf{A}_r(0, 0) \quad \boldsymbol{\tau}_r^r(1, 0) = [\boldsymbol{\lambda}_r^r(1, 0)]^{-1}$$

Το αποτέλεσμα της  $\mathbf{a}_r$ -βελτίωσης είναι να μειώσει τη νόρμα  $\boldsymbol{\lambda}_r^s$ :

$$\boldsymbol{\lambda}_r^s(1, 1) = \left[ \frac{d\mathbf{B}^s(1, 1)}{dt} + \mathbf{B}^s(1, 1)\mathbf{J} \right] \mathbf{A}_r(1, 1) = \mathcal{O}(\epsilon\boldsymbol{\lambda}_r^s(1, 0)) = \mathcal{O}(\epsilon\boldsymbol{\lambda}_r^s(0, 0))$$

κατά μία τάξη του  $\epsilon = |\tau_M/\tau_{M+1}| < 1$ , μειώνοντας έτσι τη σύζευξη των "αργών" χρονοκλιμάκων από τις "γρήγορες". Αντιθέτως, το επίπεδο σύζευξης των "γρήγορων" με τις "αργές" χρονοκλίμακες δεν αλλάζει:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}_s^r(1, 1) &= \left[ \frac{d\mathbf{B}^r(1, 1)}{dt} + \mathbf{B}^r(1, 1)\mathbf{J} \right] \mathbf{A}_s(1, 1) = \left[ \frac{d\mathbf{B}^r(1, 0)}{dt} + \mathbf{B}^r(1, 0)\mathbf{J} \right] \mathbf{A}_s(1, 0) \\ &= \boldsymbol{\lambda}_s^r(1, 0) = \mathcal{O}(\epsilon\boldsymbol{\lambda}_s^r(0, 0)) \end{aligned}$$

### 2.2.2 Δεύτερη φάση

Στην δεύτερη φάση υπολογίζουμε στις βελτιώσεις και τα χρονικά παράγωγα. Δεδομένων των διανυσμάτων βάσης από την πρώτη φάση, ο αλγόριθμος της  $\mathbf{b}^r$ -βελτίωσης γίνεται:

$$\mathbf{B}^r(2, 1) = \boldsymbol{\tau}_r^r(1, 1) \left[ \frac{d\mathbf{B}^r(1, 1)}{dt} + \mathbf{B}^r(1, 1)\mathbf{J} \right] = \boldsymbol{\tau}_r^r(1, 1) \left[ \frac{d\mathbf{B}^r(1, 0)}{dt} + \mathbf{B}^r(1, 0)\mathbf{J} \right]$$

$$\mathbf{A}_r(2, 1) = \mathbf{A}_r(1, 1)$$

$$\mathbf{B}^s(2, 1) = \mathbf{B}^s(1, 1)$$

$$\mathbf{A}_s(2, 1) = [\mathbf{I} - \mathbf{A}_r(2, 1)\mathbf{B}^r(2, 1)] \mathbf{A}_s(1, 1) = [\mathbf{I} - \mathbf{A}_r(1, 1)\mathbf{B}^r(2, 1)] \mathbf{A}_s(1, 0)$$

όπου:

$$\boldsymbol{\lambda}_r^r(1, 1) = \left[ \frac{d\mathbf{B}^r(1, 1)}{dt} + \mathbf{B}^r(1, 1)\mathbf{J} \right] \mathbf{A}_r(1, 1) \quad \boldsymbol{\tau}_r^r(1, 1) = [\boldsymbol{\lambda}_r^r(1, 1)]^{-1}$$



Το αποτέλεσμα αυτής της  $\mathbf{b}^r$ -βελτίωσης είναι να μειώσει ακόμη περισσότερο τη νόρμα  $\boldsymbol{\lambda}_s^r$ :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda}_s^r(2, 1) &= \left[ \frac{d\mathbf{B}^r(2, 1)}{dt} + \mathbf{B}^r(2, 1)\mathbf{J} \right] \mathbf{A}_s(2, 1) = \mathcal{O}(\epsilon \boldsymbol{\lambda}_s^r(1, 1)) = \mathcal{O}(\epsilon \boldsymbol{\lambda}_s^r(1, 0)) \\ &= \mathcal{O}(\epsilon^2 \boldsymbol{\lambda}_s^r(0, 0))\end{aligned}$$

κατά μία ακόμη τάξη του  $\epsilon = |\tau_M/\tau_{M+1}| < 1$ , μειώνοντας ακόμη περισσότερο τη σύζευξη των "γρήγορων" χρονοκλιμάκων από τις "αργές". Αντιθέτως, το επίπεδο σύζευξης των "αργών" με τις "γρήγορες" χρονοκλίμακες δεν αλλάζει:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda}_r^s(2, 1) &= \left[ \frac{d\mathbf{B}^s(2, 1)}{dt} + \mathbf{B}^s(2, 1)\mathbf{J} \right] \mathbf{A}_r(2, 1) = \left[ \frac{d\mathbf{B}^s(1, 1)}{dt} + \mathbf{B}^s(1, 1)\mathbf{J} \right] \mathbf{A}_r(1, 1) \\ &= \boldsymbol{\lambda}_r^s(1, 1) = \mathcal{O}(\epsilon \boldsymbol{\lambda}_r^s(1, 0)) = \mathcal{O}(\epsilon \boldsymbol{\lambda}_r^s(0, 0))\end{aligned}$$

Δεδομένων των διανυσμάτων βάσης που προέκυψαν από την ανωτέρω  $\mathbf{b}^r$ -βελτίωση, μία  $\mathbf{a}_r$ -βελτίωση δίνει τα ακόλουθα διανύσματα:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_r(2, 2) &= \left[ \frac{d\mathbf{A}_r(2, 1)}{dt} + \mathbf{B}^r(2, 1)\mathbf{J} \right] \boldsymbol{\tau}_r^r(2, 1) = \left[ \frac{d\mathbf{A}_r(1, 1)}{dt} + \mathbf{J}\mathbf{A}_r(1, 1) \right] \boldsymbol{\tau}_r^r(2, 1) \\ \mathbf{B}^r(2, 2) &= \mathbf{B}^r(2, 1) \\ \mathbf{A}_s(2, 2) &= \mathbf{A}_s(2, 1) \\ \mathbf{B}^s(2, 2) &= \mathbf{B}^s(2, 1)[\mathbf{I} - \mathbf{A}_r(2, 2)\mathbf{B}^r(2, 2)] = \mathbf{B}^s(1, 1)[\mathbf{I} - \mathbf{A}_r(2, 2)\mathbf{B}^r(2, 1)]\end{aligned}$$

όπου:

$$\boldsymbol{\lambda}_r^r(2, 1) = \left[ \frac{d\mathbf{B}^r(2, 1)}{dt} + \mathbf{B}^r(2, 1)\mathbf{J} \right] \mathbf{A}_r(2, 1) \quad \boldsymbol{\tau}_r^r(2, 1) = [\boldsymbol{\lambda}_r^r(2, 1)]^{-1}$$

Το αποτέλεσμα της  $\mathbf{a}_r$ -βελτίωσης είναι να μειώσει ακόμη περισσότερο τη νόρμα  $\boldsymbol{\lambda}_s^s$ :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda}_s^s(2, 2) &= \left[ \frac{d\mathbf{B}^s(2, 2)}{dt} + \mathbf{B}^s(2, 2)\mathbf{J} \right] \mathbf{A}_r(2, 2) = \mathcal{O}(\epsilon \boldsymbol{\lambda}_s^s(2, 1)) \\ &= \mathcal{O}(\epsilon^2 \boldsymbol{\lambda}_s^s(1, 0)) = \mathcal{O}(\epsilon^2 \boldsymbol{\lambda}_s^s(0, 0))\end{aligned}$$

κατά μία ακόμη τάξη του  $\epsilon = |\tau_M/\tau_{M+1}| < 1$ , μειώνοντας έτσι ακόμη περισσότερο τη σύζευξη των "αργών" χρονοκλιμάκων από τις "γρήγορες". Αντιθέτως, το επίπεδο σύζευξης των "γρήγορων" με τις "αργές" χρονοκλίμακες δεν αλλάζει:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda}_s^r(2, 2) &= \left[ \frac{d\mathbf{B}^r(2, 2)}{dt} + \mathbf{B}^r(2, 2)\mathbf{J} \right] \mathbf{A}_s(2, 2) = \left[ \frac{d\mathbf{B}^r(2, 1)}{dt} + \mathbf{B}^r(2, 1)\mathbf{J} \right] \mathbf{A}_s(2, 1) \\ &= \boldsymbol{\lambda}_s^r(2, 1) = \mathcal{O}(\epsilon \boldsymbol{\lambda}_s^r(1, 1)) = \mathcal{O}(\epsilon \boldsymbol{\lambda}_s^r(1, 0)) = \mathcal{O}(\epsilon^2 \boldsymbol{\lambda}_s^r(0, 0))\end{aligned}$$

### 2.2.3 Χρονικές παράγωγοι της Ιακωβιανής

Για να υπολογίσουμε τα διανυσματα στην δεύτερη φάση χρειάζεται να υπολογίσουμε έναν αριθμό χρονικών παραγώγων των CSP διανυσμάτων. Οι απαιτούμενες εκφράσεις είναι:

$$\frac{d\mathbf{B}^r(1,1)}{dt} = \frac{d\mathbf{B}^r(1,0)}{dt} = \boldsymbol{\tau}_r^r(0,0)\mathbf{B}^r(0,0)\frac{d\mathbf{J}}{dt} [\mathbf{I} - \mathbf{A}_r(0,0)\mathbf{B}^r(1,0)] \quad (2.2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}_r(2,1)}{dt} = \frac{d\mathbf{A}_r(1,1)}{dt} &= [\mathbf{I} - \mathbf{A}_r(1,1)\mathbf{B}^r(1,0)]\frac{d\mathbf{J}}{dt}\mathbf{A}_r(0,0)\boldsymbol{\tau}_r^r(1,0) \\ &\quad - \mathbf{A}_r(1,1)\frac{d\mathbf{B}^r(1,0)}{dt}\mathbf{A}_r(1,1) \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{B}^r(2,1)}{dt} &= \boldsymbol{\tau}_r^r(1,1) \left[ \frac{d\mathbf{B}^r(1,0)}{dt}\mathbf{J} + \mathbf{B}^r(1,0)\frac{d\mathbf{J}}{dt} + \frac{d^2\mathbf{B}^r(1,0)}{dt^2} \right] [\mathbf{I} - \mathbf{A}_r(1,1)\mathbf{B}^r(2,1)] \\ &\quad - \mathbf{B}^r(2,1)\frac{d\mathbf{A}_r(1,1)}{dt}\mathbf{B}^r(2,1) \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

όπου

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{B}^r(1,0)}{dt^2} &= \left[ \frac{d\boldsymbol{\tau}_r^r(0,0)}{dt}\mathbf{B}^r(0,0)\frac{d\mathbf{J}}{dt} + \boldsymbol{\tau}_r^r(0,0)\mathbf{B}^r(0,0)\frac{d^2\mathbf{J}}{dt^2} \right] [\mathbf{I} - \mathbf{A}_r(0,0)\mathbf{B}^r(1,0)] \\ &\quad - \boldsymbol{\tau}_r^r(0,0)\mathbf{B}^r(0,0)\frac{d\mathbf{J}}{dt}\mathbf{A}_r(0,0)\frac{d\mathbf{B}^r(1,0)}{dt} \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Οι παράγωγοι απαιτούν την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της Ιακωβιανής  $\mathbf{J}$ . Οι σχετικές εκφράσεις των  $d\mathbf{J}/dt$  και  $d^2\mathbf{J}/dt^2$  είναι:

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \sum_{i=1, N_s} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial y^i} \frac{dy^i}{dt} = \sum_{i=1, N_s} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial y^i} \mathbf{g}^i \quad (2.2.9)$$

$$\frac{d^2\mathbf{J}}{dt^2} = \sum_{i,j=1, N_s} \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{J}}{\partial y^i \partial y^j} \mathbf{g}^i + \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial y^i} \mathbf{J} \right] \mathbf{g}^j \quad (2.2.10)$$

Το γεγονός ότι χρειάζονται οι παράγωγοι της Ιακωβιανής για την περιγραφή της ΑΑΠ και του "αργού" συστήματος στη δεύτερη μόνο φάση προσέγγισης, δείχνει ότι η καμπυλότητα και οι παράγωγοι αυτής συνεισφέρουν στην ακρίβεια ανώτερης μόνο τάξης.

## 2.3 Η τροποποιημένη μέθοδος CSP

Η μέθοδος CSP επιδέχεται και έναν άλλο τρόπο παρουσίασης, που αρμόζει καλύτερα στη γεωμετρική θεώρηση του προβλήματος [24]. Υποθέτουμε αρχικά ότι η ΑΑΠ είναι μια (N-M)-διάστατη επιφάνεια στο N-διάστατο χώρο των φάσεων. Οι M-γρηγορότερες χρονοκλίμακες

που σχετίζονται με όλα τα διανυσματα θέσεως (*state vectors*) που ανήκουν στην ΑΑΠ είναι εξαντλημένες (*exhausted*). Έστω ότι υπάρχουν  $s^j (j = 1, N - M)$  ομαλές συναρτήσεις του  $\mathbf{y}$ , έτσι ώστε:

$$s^j = s^j(\mathbf{y}) = s^j(y^1, \dots, y^N) \quad j = 1, \dots, N - M \quad (2.3.1)$$

και το διάνυσμα θέσεως στην ΑΑΠ να μπορεί να υπολογιστεί από

$$y^i = y^i(\mathbf{s}) = y^i(s^1, \dots, s^{N-M}), \quad i = 1, \dots, N \quad (2.3.2)$$

όπου  $\mathbf{s} = (s^1, \dots, s^{N-M})^T$ . Η διανυσματική συνάρτηση  $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{y})$  είναι μια απεικόνιση του διανύσματος θέσεως απο το N-διάστατο χώρο φάσεων στην (N-M)-διάστατη ΑΑΠ. Παραγωγίζοντας την Εξ. (2.3.2) ως προς το χρόνο:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{Y}_s \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) \quad (2.3.3)$$

όπου

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{S}_y \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{S}_y \mathbf{g}(\mathbf{y}) \quad (2.3.4)$$

και οι  $\mathbf{Y}_s, \mathbf{S}_y$  είναι N x (N-M) και (N-M) x N πίνακες:

$$\mathbf{Y}_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial s^1} & \dots & \frac{\partial y^1}{\partial s^{N-M}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y^N}{\partial s^1} & \dots & \frac{\partial y^N}{\partial s^{N-M}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_y = \begin{bmatrix} \frac{\partial s^1}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial s^1}{\partial y^N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial s^{N-M}}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial s^{N-M}}{\partial y^N} \end{bmatrix} \quad (2.3.5)$$

έτσι ώστε:

$$\mathbf{S}_y \mathbf{Y}_s = \mathbf{I}_s^s \quad (2.3.6)$$

όπου ο  $\mathbf{I}_s^s$  είναι (N - M)x(N - M) μοναδιαίος πίνακας. Με αντικατάσταση της Εξ. (2.3.4) στην Εξ. (2.3.3) έχουμε το N-διάστατο σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων:

$$[\mathbf{I}_N^N - \mathbf{Y}_s \mathbf{S}_y] \mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}^N \quad (2.3.7)$$

Απο αυτήν την σχέση μόνο οι M συνιστώσες είναι γραμμικά ανεξάρτητες, ικανές για να περιγράψουν την ΑΑΠ. Συνεπώς, η λύση πάνω στην ΑΑΠ υπόκειται στο N-διάστατο σύστημα:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{Y}_s \mathbf{S}_y \mathbf{g}(\mathbf{y}) \quad (2.3.8)$$

στο οποίο μόνο οι (N - M) συνιστώσες είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

### 2.3.1 Ο αλγόριθμος ΑΕ για την αναγνώριση του SIM

Έστω ότι οι ομαλές συναρτήσεις  $s^j$  είναι οι  $N - M$  τελευταίες συνιστώσες του  $\mathbf{y}$ :

$$\mathbf{s} = (y^{M+1}, \dots, y^N)^T \quad (2.3.9)$$

και ότι το  $M$  - διάστατο διάνυσμα  $\mathbf{z}$  ορίζεται από τις πρώτες  $M$  συνιστώσες του  $\mathbf{y}$ :

$$\mathbf{z} = (y^1(\mathbf{s}), \dots, y^M(\mathbf{s}))^T = \mathbf{z}(\mathbf{s}) \quad (2.3.10)$$

Τότε η Εξ. (2.3.7) παίρνει τη μορφή:

$$\mathbf{g}^r(\mathbf{z}, \mathbf{s}) - \mathbf{G}_s^r(\mathbf{z}, \mathbf{s})\mathbf{g}^s(\mathbf{z}, \mathbf{s}) = 0 \quad (2.3.11)$$

όπου  $\mathbf{g}^r = (g^1, \dots, g^M)^T$  και  $\mathbf{g}^s = (g^{M+1}, \dots, g^N)^T$  είναι τα  $M$  και  $(N - M)$  - διάστατα διανύσματα που αποτελούνται από τα πρώτα  $M$  και τα τελευταία  $N - M$  στοιχεία, αντίστοιχα του διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{g}$ . Ο  $M \times (N - M)$   $\mathbf{G}_s^r$  πίνακας περιλαμβάνει τις μερικές παραγώγους των  $M$  συνιστωσών του  $\mathbf{y}$  στο  $\mathbf{z}$  ως προς τις υπόλοιπες  $N - M$  συνιστώσες του  $\mathbf{y}$  στο  $\mathbf{s}$ :

$$\mathbf{G}_s^r(\mathbf{z}, \mathbf{s}) = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z^1}{\partial s^1} & \dots & \frac{\partial z^1}{\partial s^{N-M}} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial z^M}{\partial s^1} & \dots & \frac{\partial z^M}{\partial s^{N-M}} \end{bmatrix} \quad (2.3.12)$$

Η Εξ. (2.3.11) ονομάζεται "Αναλοίωτη Εξίσωση" (*Invariance Equation*) και αποτελείται από  $M$  εξισώσεις με  $M$  αγνώστους (τις συνιστώσες του  $\mathbf{z}$ ). Η  $(n + 1)$  επανάληψη  $\mathbf{z}_{n+1}$  μπορεί να υπολογιστεί, για δοσμένο  $\mathbf{s}$  και αρχική εκτίμηση  $\mathbf{z}_0$ , από την έμμεση μέθοδο:

$$\mathbf{g}^r(\mathbf{z}_{n+1}, \mathbf{s}) - \mathbf{G}_s^r(\mathbf{z}_n, \mathbf{s})\mathbf{g}^s(\mathbf{z}_{n+1}, \mathbf{s}) = 0 \quad (2.3.13)$$

### 2.3.2 Ο αλγόριθμος κατασκευής του απλοποιημένου συστήματος με τον $\mathbf{G}_s^r$ πίνακα

Η Αναλοίωτη Εξίσωση (2.3.11) μπορεί να τεθεί στη μορφή:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & -\mathbf{G}_s^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}^r(\mathbf{z}, \mathbf{s}) \\ \mathbf{g}^s(\mathbf{z}, \mathbf{s}) \end{bmatrix} = 0 \quad (2.3.14)$$

γεγονός που μας συνιστά να ορίσουμε τους πίνακες:

$$\mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{R}_r^s \\ -\mathbf{R}_r^s \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_s^r \\ \mathbf{I}_s^s \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^r = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r^r & -\mathbf{G}_s^r \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_r^s & \mathbf{I}_s^s - \mathbf{R}_r^s \mathbf{G}_s^r \end{bmatrix} \quad (2.3.15)$$

όπου ο  $M \times (N - M)$  πίνακας  $\mathbf{G}_s^r$  έχει οριστεί απο την Εξ. (2.3.12) και ο  $(N - M) \times M$  πίνακας  $\mathbf{R}_r^s$  θα οριστεί στην συνέχεια.

Οι διαστάσεις των πινάκων  $\mathbf{A}_r$ ,  $\mathbf{A}_s$ ,  $\mathbf{B}^r$  και  $\mathbf{B}^s$  είναι  $N \times M$ ,  $N \times (N - M)$ ,  $M \times N$  και  $(N - M) \times N$ , αντιστοίχως, ενώ ικανοποιούν τις σχέσεις ορθογωνιότητας:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_r & \mathbf{A}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^r \\ \mathbf{B}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^r \\ \mathbf{B}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_r & \mathbf{A}_s \end{bmatrix} = \mathbf{I}_N^N.$$

Σύμφωνα με τις Εξ. (2.3.15) η αρχική Εξ. (2.1.1) μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\frac{dy}{dt} = \mathbf{A}_r \mathbf{F}^r + \mathbf{A}_s \mathbf{F}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{R}_r^s \\ -\mathbf{R}_r^s \end{bmatrix} \mathbf{F}^r + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_s^r \\ \mathbf{I}_s^s \end{bmatrix} \mathbf{F}^s \quad (2.3.16)$$

όπου τα εύρη  $\mathbf{F}^r$  και  $\mathbf{F}^s$  ορίζονται από τις σχέσεις:

$$\mathbf{F}^r = \mathbf{B}^r \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r^r & -\mathbf{G}_s^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}^r \\ \mathbf{g}^s \end{bmatrix} = (\mathbf{g}^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{g}^s) \quad (2.3.17)$$

$$\mathbf{F}^s = \mathbf{B}^s \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_r^s & \mathbf{I}_r^r - \mathbf{G}_s^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}^r \\ \mathbf{g}^s \end{bmatrix} = (\mathbf{R}_r^s \mathbf{g}^r + (\mathbf{I}_s^s + \mathbf{R}_r^s \mathbf{G}_s^r) \mathbf{g}^s) \quad (2.3.18)$$

Όταν η λύση βρίσκεται στην ΑΑΠ, η Αδιάστατη Εξίσωση (2.3.11) ικανοποιείται αυτόματα και διασφαλίζει ότι το  $\mathbf{F}^r$  είναι ταυτοτικά ίσο με το μηδέν:

$$\mathbf{F}^r = \mathbf{g}^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{g}^s = 0 \quad (2.3.19)$$

Συνεπώς, μόνο ο "αργός" όρος που περιλαμβάνει το  $\mathbf{F}^s$  διατηρείται στην Εξ. (2.3.16):

$$\frac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_s^r \\ \mathbf{I}_s^s \end{bmatrix} (\mathbf{R}_r^s \mathbf{g}^r + (\mathbf{I}_s^s - \mathbf{R}_r^s \mathbf{G}_s^r) \mathbf{g}^s) \quad (2.3.20)$$

Οι Εξ. (2.3.19) και οι Εξ. (2.3.20) περιγράφουν την ΑΑΠ και την απλοποιημένη μη-δύσκαμπτη εξίσωση στην οποία υπόκειται η κίνηση της λύσης πάνω στην ΑΑΠ, αντίστοιχα.

### 2.3.3 Η σχέση μεταξύ των δύο ειδών της CSP διανυσματικής βάσης

Θεωρούμε ότι οι πίνακες που περιλαμβάνουν τα αρχικά CSP διανύσματα βάσης, που ορίστηκαν στο Κεφάλαιο 2.2, μπορούν να γραφούν στη μορφή:

$$\mathbf{a}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_r^r \\ \mathbf{a}_r^s \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_s^r \\ \mathbf{a}_s^s \end{bmatrix} \quad (2.3.21)$$

$$\mathbf{b}^r = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_r^r & \mathbf{b}_r^s \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_r^s & \mathbf{b}_s^s \end{bmatrix} \quad (2.3.22)$$

όπου  $\mathbf{a}_r^r$  και  $\mathbf{b}_r^r$  είναι  $M \times M$  πίνακες,  $\mathbf{a}_r^s$  και  $\mathbf{b}_r^s$  είναι  $(N - M) \times M$ ,  $\mathbf{a}_s^r$  και  $\mathbf{b}_s^r$  είναι  $M \times (N - M)$  και  $\mathbf{a}_s^s$ ,  $\mathbf{b}_s^s$  είναι  $(N - M) \times (N - M)$  πίνακες. Τότε, η Εξ. (2.1.7) γράφεται:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_r^r \\ \mathbf{a}_r^s \end{bmatrix} \mathbf{f}^r + \begin{bmatrix} \mathbf{a}_s^r \\ \mathbf{a}_s^s \end{bmatrix} \mathbf{f}^s \quad (2.3.23)$$

όπου εδώ τα εύρη  $\mathbf{f}^r$  και  $\mathbf{f}^s$  παίρνουν τη μορφή:

$$\mathbf{f}^r = \mathbf{b}^r \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_r^r & \mathbf{b}_r^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}^r \\ \mathbf{g}^s \end{bmatrix} = (\mathbf{b}_r^r \mathbf{g}^r + \mathbf{b}_r^s \mathbf{g}^s) \quad (2.3.24)$$

$$\mathbf{f}^s = \mathbf{b}^s \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_r^s & \mathbf{b}_s^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}^r \\ \mathbf{g}^s \end{bmatrix} = (\mathbf{b}_r^s \mathbf{g}^r + \mathbf{b}_s^s \mathbf{g}^s) \quad (2.3.25)$$

Οι εξισώσεις που περιγράφουν την ΑΑΠ και το απλοποιημένο μη-δύσκαμπτο σύστημα είναι:

$$\mathbf{b}_r^r \mathbf{g}^r + \mathbf{b}_r^s \mathbf{g}^s = 0 \quad (2.3.26)$$

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_r^r \\ \mathbf{a}_r^s \end{bmatrix} (\mathbf{b}_r^s \mathbf{g}^r + \mathbf{b}_s^s \mathbf{g}^s) \quad (2.3.27)$$

Οι δύο μορφές τις αρχικής Εξ. (2.1.1), δηλαδή οι Εξ. (2.3.16) και (2.3.23) είναι πανομοιότυπες όταν ισχύουν οι σχέσεις:

$$\mathbf{G}_s^r = \mathbf{a}_s^r (\mathbf{a}_s^s)^{-1} = -(\mathbf{b}_r^r)^{-1} \mathbf{b}_r^s \quad (2.3.28)$$

$$\mathbf{R}_s^r = \mathbf{a}_s^s \mathbf{b}_r^s = -\mathbf{a}_r^s \mathbf{b}_r^r \quad (2.3.29)$$

υπό τη προϋπόθεση ότι τα  $(\mathbf{a}_s^s)^{-1}$  και  $(\mathbf{b}_r^r)^{-1}$  υπάρχουν. Δεδομένων των Εξ. (2.3.28) και (2.3.29), οι εξισώσεις που περιγράφουν την ΑΑΠ και το "αργό" μη-δύσκαμπτο πρόβλημα στη βάση των

δύο διανυσματικών βάσεων της CSP είναι ταυτόσημες:

$$\mathbf{g}^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{g}^s = \mathbf{0}^r \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_s^r \\ \mathbf{I}_s^s \end{bmatrix} (\mathbf{R}_r^s \mathbf{g}^r + (\mathbf{I}_s^s - \mathbf{R}_r^s \mathbf{G}_s^r) \mathbf{g}^s) \quad (2.3.30)$$

$$\mathbf{b}_r^r \mathbf{g}^r + \mathbf{b}_s^r \mathbf{g}^s = \mathbf{0}^r \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_s^r \\ \mathbf{a}_s^s \end{bmatrix} (\mathbf{b}_r^s \mathbf{g}^r + \mathbf{b}_s^s \mathbf{g}^s) \quad (2.3.31)$$

Προκειμένου να εξετάσουμε την σημασία των Εξ. (2.3.28) και (2.3.29), εξετάζουμε τη σχέση μεταξύ των δύο συνόλων διανυσμάτων βάσης της CSP που αποτυπώνονται από τις σχέσεις:

$$\mathbf{B}^r = (\mathbf{b}_r^r)^{-1} \mathbf{b}^r \quad \mathbf{A}_r = \mathbf{a}_r \mathbf{b}_r^r + \mathbf{a}_s \mathbf{N}_r^s \quad \mathbf{B}^s = \mathbf{M}_r^s \mathbf{b}^r + \mathbf{a}_s^s \mathbf{b}^s \quad \mathbf{A}_s = \mathbf{a}_s (\mathbf{a}_s^s)^{-1}$$

όπου:

$$\mathbf{N}_r^s = -(\mathbf{a}_s^s)^{-1} [\mathbf{R}_r^s + \mathbf{a}_r^s \mathbf{b}_r^r] \quad \mathbf{M}_r^s = [\mathbf{R}_r^s + \mathbf{a}_r^s \mathbf{b}_r^r] (\mathbf{b}_r^r)^{-1}$$

όταν θεωρήσουμε δεδομένη την Εξ. (2.3.28) (αλλά όχι ακόμη την Εξ. (2.3.29)). Από τις σχέσεις αυτές διαπιστώνουμε ότι τα διανύσματα στα  $\mathbf{B}^r$  και  $\mathbf{A}_s$  παράγουν τους ίδιους υπόχωρους με εκείνα των  $\mathbf{b}^r$  και  $\mathbf{a}_s$  αντίστοιχα, τα οποία είναι αυτά που επηρεάζονται από την  $\mathbf{b}^r$ -βελτίωση. Αντίθετα, τα διανύσματα στα  $\mathbf{B}^s$  και  $\mathbf{A}_r$  δεν παράγουν τον ίδιο υπόχωρο με αυτά των  $\mathbf{b}^s$  και  $\mathbf{a}_r$ , τα οποία είναι αυτά που επηρεάζονται από την  $\mathbf{a}^r$ -βελτίωση.

Στη περίπτωση που θεωρήσουμε δεδομένη την Εξ. (2.3.29) (αλλά όχι ακόμη την Εξ. (2.3.28)), οι σχέσεις μεταξύ των δύο συνόλων διανυσμάτων βάσης της CSP αποτυπώνονται τώρα από τις σχέσεις:

$$\mathbf{B}^r = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r^r & -\mathbf{G}_s^r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_r = \mathbf{a}_r \mathbf{b}_r^r + \begin{bmatrix} (\mathbf{a}_s^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{a}_s^s) \mathbf{b}_r^s \\ \mathbf{0}_r^s \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_r^s & \mathbf{a}_r^s (\mathbf{b}_r^r \mathbf{G}_s^r + \mathbf{b}_s^r) \end{bmatrix} + \mathbf{a}_s^s \mathbf{b}^s, \quad \mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_s^r \\ \mathbf{I}_s^s \end{bmatrix}$$

Διαπιστώνουμε τώρα ότι οι υπόχωροι που παράγουν τα σύνολα των διανυσμάτων στα  $\mathbf{B}^r$ ,  $\mathbf{B}^s$ ,  $\mathbf{A}_s$ ,  $\mathbf{A}_r$  δεν είναι ίδιοι με αυτούς που παράγουν τα σύνολα των διανυσμάτων στα  $\mathbf{b}^r$ ,  $\mathbf{a}_s$ ,  $\mathbf{b}^s$  και  $\mathbf{a}_r$  αντίστοιχα. Οι υπόχωροι ταυτίζονται αν εφαρμοστεί και η Εξ. (2.3.28).

Για τον προσδιορισμό της ΑΑΠ και την κατασκευή του απλοποιημένου συστήματος, ο τροποποιημένος αυτός CSP αλγόριθμος απαιτεί τον υπολογισμό των πινάκων  $\mathbf{G}_s^r$  και  $\mathbf{R}_r^s$ .

### 2.3.4 Υπολογισμός του $\mathbf{G}_s^r$ πίνακα

Ο πίνακας  $\mathbf{G}_s^r$  κατά κανόνα μπορεί να υπολογιστεί με διάφορους τρόπους, οι οποίοι μπορούν παρολαυτά να οδηγήσουν σε αριθμητικά "αδιέξοδα" [16, 31]. Ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού του  $\mathbf{G}_s^r$  που δεν αντιμετωπίζει προβλήματα προκύπτει παραγωγίζοντας την "Αναλοιώτη Εξίσωση"  $\mathbf{B}^r \mathbf{g} = 0$  ως προς τον χρόνο:

$$\Lambda_r^r \mathbf{F}^r + \Lambda_s^r \mathbf{F}^s = \mathbf{0} \quad (2.3.32)$$

όπου

$$\Lambda_r^r = \left( \frac{d\mathbf{B}^r}{dt} + \mathbf{B}^r \mathbf{J} \right) \mathbf{A}_r \quad \Lambda_s^r = \left( \frac{d\mathbf{B}^r}{dt} + \mathbf{B}^r \mathbf{J} \right) \mathbf{A}_s \quad (2.3.33)$$

από το οποίο έπεται ότι:

$$\frac{d\mathbf{B}^r}{dt} + \mathbf{B}^r \mathbf{J} = \Lambda_r^r \mathbf{B}^r + \Lambda_s^r \mathbf{B}^s \quad (2.3.34)$$

Επειδή επί της ΑΑΠ ισχύουν  $\mathbf{F}^r = \mathbf{B}^r \mathbf{g} = 0$  και  $\mathbf{F}^s \neq 0$ , η Εξ. (2.3.32) υποδεικνύει ότι  $\Lambda_s^r = \mathbf{0}_s^r$ , έτσι ώστε η Εξ. (2.3.34) να απλοποιείται στη μορφή:

$$\frac{d\mathbf{B}^r}{dt} + \mathbf{B}^r \mathbf{J} = \Lambda_r^r \mathbf{B}^r \quad (2.3.35)$$

Ας σημειωθεί ότι αυτή η εξίσωση είναι όμοια με εκείνη στην οποία υπόκειται η εξέλιξη των CSP διανυσμάτων  $\mathbf{b}_r^r$ , Εξ. (2.1.12). Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του  $\mathbf{B}^r$ , Εξ. (2.3.15), και ξαναγράφοντας την Ιακωβιανή ορίζουσα  $\mathbf{J}$  του διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{g}$  στην μορφή:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_r^r & \mathbf{J}_s^r \\ \mathbf{J}_r^s & \mathbf{J}_s^s \end{bmatrix} \quad (2.3.36)$$

η Εξ. (2.3.35) υποδεικνύει την διανυσματική εξίσωση:

$$\left[ \mathbf{0}_s^r \quad - \frac{d\mathbf{G}_s^r}{dt} \right] + \left[ \mathbf{J}_r^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{J}_r^s \quad \mathbf{J}_s^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{J}_s^s \right] = \Lambda_r^r \left[ \mathbf{I}_r^r \quad - \mathbf{G}_s^r \right] \quad (2.3.37)$$

της οποίας οι δύο συνιστώσες δίνουν:

$$\mathbf{J}_r^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{J}_r^s = \Lambda_r^r \quad (2.3.38)$$

$$\frac{d\mathbf{G}_s^r}{dt} + \mathbf{G}_s^r \mathbf{J}_s^s - \mathbf{J}_s^r = \Lambda_r^r \mathbf{G}_s^r \quad (2.3.39)$$

Έτσι λαμβάνουμε την ακόλουθη εξίσωση εξέλιξης του πίνακα  $\mathbf{G}_s^r$ :

$$\frac{d\mathbf{G}_s^r}{dt} + \mathbf{G}_s^r \mathbf{J}_s^s - \mathbf{J}_s^r = \left[ \mathbf{J}_r^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{J}_r^s \right] \mathbf{G}_s^r \quad (2.3.40)$$



Η παραπάνω εξίσωση, όντας δύσκαμπτη, μπορεί να λυθεί επαναληπτικά ως εξής:

$$\mathbf{G}_s^r(n+1) = (\mathbf{J}_r^r - \mathbf{G}_s^r(n)\mathbf{J}_r^s)^{-1} \left[ \mathbf{G}_s^r(n)\mathbf{J}_s^s - \mathbf{J}_s^r + \frac{d\mathbf{G}_s^r(n)}{dt} \right] \quad (2.3.41)$$

Παρατηρούμε ότι, αρχίζοντας με  $\mathbf{G}_s^r(0) = \mathbf{0}_s^r$ , η ανωτέρω εξίσωση δίνει σε πρώτη προσέγγιση:

$$\mathbf{G}_s^r(1) = -(\mathbf{J}_r^r)^{-1}\mathbf{J}_s^r \quad (2.3.42)$$

### 2.3.5 Υπολογισμός του $\mathbf{R}_r^s$ πίνακα

Η εξέλιξη των "αργών" πλατών  $F^s$  ορίζεται απο την εξίσωση:

$$\frac{d\mathbf{F}^s}{dt} = \mathbf{\Lambda}_r^s\mathbf{F}^r + \mathbf{\Lambda}_s^s\mathbf{F}^s \quad (2.3.43)$$

όπου

$$\mathbf{\Lambda}_r^s = \left[ \frac{d\mathbf{B}^s}{dt} + \mathbf{B}^s\mathbf{J} \right] \mathbf{A}_r \quad \mathbf{\Lambda}_s^s = \left[ \frac{d\mathbf{B}^s}{dt} + \mathbf{B}^s\mathbf{J} \right] \mathbf{A}_s \quad (2.3.44)$$

Για να μην έχουν επιρροή στη εξέλιξη του  $\mathbf{F}^s$  οι "γρήγορες" χρονοκλίμακες θέλουμε να ισχύει  $\mathbf{\Lambda}_r^s = \mathbf{0}_r^s$ . Σε αυτήν την περίπτωση, η χρονική εξέλιξη του  $\mathbf{A}_r$  ορίζεται από τη σχέση:

$$-\frac{d\mathbf{A}_r}{dt} + \mathbf{J}\mathbf{A}_r = \mathbf{A}_r\mathbf{\Lambda}_r^r \quad (2.3.45)$$

Αντικαθιστώντας από τον ορισμό του  $\mathbf{A}_r$ , Εξ. (2.3.15), προκύπτει η ακόλουθη σχέση εξέλιξης για τον πίνακα  $\mathbf{R}_r^s$ :

$$\frac{d\mathbf{R}_r^s}{dt} + \mathbf{J}_r^s(\mathbf{I}_r^r - \mathbf{G}_s^r\mathbf{R}_r^s) - \mathbf{J}_s^s\mathbf{R}_r^s = -\mathbf{R}_r^s\mathbf{\Lambda}_r^r \quad (2.3.46)$$

όπου το  $\mathbf{\Lambda}_r^r$  ορίζεται απο την Εξ. (2.3.33). Δεδομένου ότι η Εξ. (2.3.46) είναι δύσκαμπτη, το  $\mathbf{R}_r^s$  μπορεί να υπολογιστεί επαναληπτικά απο την σχέση:

$$\mathbf{R}_r^s(j+1) = \left[ \mathbf{J}_s^s\mathbf{R}_r^s(j) - \mathbf{J}_r^s(\mathbf{I}_r^r - \mathbf{G}_s^r\mathbf{R}_r^s(j)) - \frac{d\mathbf{R}_r^s(j)}{dt} \right] [\mathbf{\Lambda}_r^r(n)]^{-1} \quad (2.3.47)$$

όπου το  $\mathbf{\Lambda}_r^r(n) = \mathbf{J}_r^r - \mathbf{G}_s^r(n)\mathbf{J}_r^s$ . Παρατηρούμε ότι, αρχίζοντας με  $\mathbf{R}_r^s(0) = \mathbf{0}_r^s$ , η Εξ. (2.3.47) δίνει:

$$\mathbf{R}_r^s(1) = -\mathbf{J}_r^s(\mathbf{J}_r^r - \mathbf{G}_s^r(n)\mathbf{J}_r^s)^{-1} \quad (2.3.48)$$

## 2.4 Διαγνωστικά εργαλεία της CSP

Η CSP παρέχει έναν αριθμό από υπολογιστικά εργαλεία με τα οποία μπορούμε να κατανοήσουμε φυσικά τους εμπλεκόμενους μηχανισμούς που συμβάλουν στην δημιουργία της ΑΑΠ

και στον τρόπο που εξελίσσεται το σύστημα πάνω σε αυτήν.

Έστω ότι έχουμε  $K$ -διεργασίες τότε το  $N$ -διάστατο διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{g}(\mathbf{y})$  που περιγράφεται από την Εξ. (2.1.1) γράφεται:

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{S}_1 R^1 + \mathbf{S}_2 R^2 + \dots + \mathbf{S}_k R^k \quad (2.4.1)$$

όπου  $\mathbf{S}_k$  είναι το  $N$ -διάστατο στοιχειομετρικό διάνυσμα-στήλη της  $k$ -οστής διεργασίας και το  $R^k$  ο ρυθμός της  $k$ -οστής διεργασίας με  $k=1, \dots, K$ .

Αν αντικαταστήσουμε την Εξ. (2.4.1) στην Εξ. (2.1.10) εξάγεται η σχέση:

$$f^m = q_1^m R^1 + q_2^m R^2 + \dots + q_k^m R^k \approx 0 \quad (2.4.2)$$

η οποία περιγράφει την ΑΑΠ, όπου  $q_k^m = \mathbf{b}^m \mathbf{S}^k$  με  $m=1, \dots, M$  και  $k=1, \dots, K$ .

Θέλοντας να βρούμε ποιές συγκεκριμένες μεταβλητές επηρεάζονται περισσότερο από τις αντίστοιχες  $M$ -γρήγορες χρονοκλίμακες και ασκούν μεγάλη επιρροή στους όρους της Εξ. (2.4.2) χρησιμοποιούμε τον *CSP Pointer* [21]:

$$D = \frac{1}{M} \text{diag} \left[ \sum_{m=1}^M \boldsymbol{\alpha}_m \mathbf{b}^m \right] = \frac{1}{M} \text{diag} \left[ \sum_{m=1}^M \boldsymbol{\alpha}_m^1 \mathbf{b}_1^m, \dots, \sum_{m=1}^M \boldsymbol{\alpha}_m^N \mathbf{b}_N^m \right] \quad (2.4.3)$$

όπου  $\boldsymbol{\alpha}_m = [\alpha_m^1, \alpha_m^2, \dots, \alpha_m^N]^T$  και  $\mathbf{b}^m = [b_1^m, b_2^m, \dots, b_N^m]$  είναι τα  $m$ -οστά CSP διανύσματα βάσης με  $m=1, \dots, M$  και ισχύει ότι:

$$D^1 + D^2 + \dots + D^N = \alpha_m^1 b_1^m + \alpha_m^2 b_2^m + \dots + \alpha_m^N b_N^m = 1 \quad (2.4.4)$$

Δεδομένης της Εξ. (2.4.4), τα  $M$  στοιχεία του ανύσματος  $\mathbf{y}$  που αντιστοιχούν στα  $M$  μεγαλύτερα στοιχεία του  $\mathbf{D}$  είναι αυτά που σχετίζονται περισσότερο με τις  $M$  γρήγορες αποσβετικές χρονοκλίμακες.

### 3 Ανάλυση του ελκυστή Rössler

Η λέξη "Χαος" αναφέρεται ως η άμορφη κατάσταση πριν από τη δημιουργία του σύμπαντος ή ειδικότερα το αρχικό κενό που δημιουργήθηκε από τον αρχικό διαχωρισμό του ουρανού και της γής. Η έννοια "Χάος" χρησιμοποιείται για τον χαρακτηρισμό του απρόβλεπτου. Επιστημονικά η έννοια "Χάος" χαρακτηρίζει την συγκεκριμένη συμπεριφορά πολύπλοκων μη-γραμμικών δυναμικών συστημάτων, όπου με τη λέξη "πολύπλοκων" εννοούμε μη-σταθερών και μη-περιοδικών [26, 32, 33, 34].

Οι διαστάσεις που πρέπει να έχει ένα δυναμικό σύστημα για να μπορεί να εμφανίσει χαοτική συμπεριφορά έχει αποδειχθεί πως πρέπει να είναι τουλάχιστον τρεις [26, 27]. Ο χαρακτηρισμός μίας κίνησης ως χαοτικής είναι ένα αρκετά δύσκολο πρόβλημα [32]. Οι χαοτικές κινήσεις χαρακτηρίζονται από τα εξής:

- Ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες: Ξεκινώντας από ελάχιστα διαφορετικά σημεία λαμβάνονται εντελώς διαφορετικές τροχιές [32, 33, 34].
- Τοπολογική ανάμειξη: το σύστημα θα εξελιχθεί με την πάροδο του χρόνου, έτσι ώστε οποιαδήποτε συγκεκριμένη περιοχή ή ανοικτό σύνολο του χώρου φάσεων τελικά να επικαλυφθεί με κάποια άλλη περιοχή του χώρου φάσεων [32, 33, 34].
- Πυκνότητα των περιοδικών τροχιών: κάθε σημείο στον χώρο φάσεων προσεγγίζεται αυθαίρετα κλειστά από περιοδικές τροχιές [25, 26, 34]

Τα *Εκθετικά του A.M. Lyapunov* είναι ποσότητες που χαρακτηρίζουν το βαθμό του διαχωρισμού των τροχιών μιας ροής που είναι απειροστά κοντά. Το μεγαλύτερο από τα εκθετικά του Lyapunov, (*Maximal Lyapunov Exponent*, MLE), όταν εμφανίζει θετική τιμή θεωρείται ως ένδειξη ότι το σύστημα είναι χαοτικό [35]. Το πιο σημαντικό κριτήριο για το αν μία κίνηση είναι χαοτική δόθηκε από τους J.L. Kaplan και J.A. Yorke (1979) και ονομάζεται *Kaplan-Yorke conjecture* [36]. Οι J.L. Kaplan και J.A. Yorke εισήγαγαν μια ποσότητα σε όρους Εκθετικών Lyapunov, η οποία ονομάζεται *Διάσταση Lyapunov*  $D_L$  [37]. Η υπόθεση που έκαναν οι J.L. Kaplan και J.A. Yorke (*Kaplan-Yorke conjecture*) είναι ότι η διάσταση Lyapunov ( $D_L$ ) είναι ίση με την *Διάσταση Πληροφορίας* ( $D_1$ ) [36, 37]. Η ισότητα αυτή είναι πολύ σημαντική διότι συνδέει την δυναμική του συστήματος που εκφράζεται μέσω των εκθετικών Lyapunov με την γεωμετρία του ελκυστή που εκφράζεται μέσω της διάστασης πληροφορίας ( $D_1$ ) [36].

Οι *χαοτικοί χάρτες* (*chaotic maps*) είναι δυναμικά συστήματα διακριτού χρόνου που παρουσιάζουν χαοτική συμπεριφορά. Ένας χαοτικός χάρτης είναι και ο *χάρτης-πέταλο* (*horseshoe map*) [25, 38], ο οποίος είναι θεμελιώδης στην μελέτη δυναμικών συστημάτων. Η δημιουργία του χάρτη-πέταλο (*horseshoe-map*) περιγράφεται γεωμετρικά στο χώρο  $x$ - $y$ - $z$  ως εξής: "πιέζεις" (*squizing*) την επιφάνεια σου κατά τον  $y$ -άξονα, "τραβάς" (*stretching*) το αποτέλεσμα κατά τον  $x$ -άξονα και τέλος διπλώνεις (*folding*) την "λωρίδα" ώστε να πάρει την μορφή πέταλου. Οι τρεις αυτές φάσεις (*squizing*, *stretching*, *folding*) είναι χαρακτηριστικές στις χαοτικές κινήσεις. Μαθηματικά ο χάρτης-πέταλο είναι ένας *διαφορομορφισμός* (*diffeomorphism*), δηλαδή μια αντιστρέψιμη συνάρτηση που απεικονίζει μία διαφορίσιμη πολλαπλότητα σε μία άλλη έτσι ώστε η συνάρτηση και η αντιστροφή της να είναι λείες [39]. Ο χάρτης-πέταλο είναι ένας διαφορομορφισμός που ορίζεται από μία περιοχή του επιπέδου στον ευατό της [38, 39].

Ένα σύστημα που καταλήγει να εκτελεί την ίδια κίνηση ανεξάρτητα από τις αρχικές συνθήκες σε μια περιοχή γύρω από την κίνηση σχεδόν σαν το ίδιο το σύστημα να προσελκύει την κίνηση ονομάζεται *ελκυστής* του συστήματος [25, 28, 34]. Ένας *ελκυστής* καλείται "περίεργος" *Strange attractor* όταν έχει μη-ακέραιη διάσταση. Συχνά αυτό σημαίνει ότι η δυναμική του είναι χαοτική αλλά υπάρχουν και περιπτώσεις στις οποίες "περίεργοι" *ελκυστές* δεν είναι χαοτικοί. Πρώτη φορά ο όρος "περίεργος" χρησιμοποιήθηκε από τους D. Ruelle και F. Takens για να περιγράψουν ένα *ελκυστή* που προέκυψε από μία σειρά διακλαδώσεων στην κίνηση ροής ενός υγρού [40].

Στην παρούσα εργασία θα μελετηθεί ένας *περίεργος* *ελκυστής* μιας χαοτικής κίνησης. Οι *χαοτικοί* *ελκυστές* είναι μέρος της περιγραφής φυσικών φαινομένων οπότε το ενδιαφέρον στην ανάπτυξη μεθόδων για την καλύτερη κατανόηση τους είναι μεγάλο. Συγκεκριμένα, θα μελετηθεί με την βοήθεια της CSP ο *χαοτικός* *ελκυστής* *Rössler* [25].

Ένα μοντέλο ονομάζεται *Ντετερμινιστικό* όταν με συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες παράγει πάντα το ίδιο αποτέλεσμα. Τα *χαοτικά* συστήματα είναι και *ντετερμινιστικά*, γεγονός που καταδικνύει ότι η *ντετερμινιστική* φύση αυτών των συστημάτων δεν τα κάνει και *προβλέψιμα* [37]. Ο E.N. Lorentz, με το μοντέλο ροής που ονομάζεται *μοντέλο Lorentz* [29], μελέτησε μια *ντετερμινιστική* μη-περιοδική ροή (*χαοτική*). Ο Otto Rössler μελετώντας το μοντέλο του Lorentz και προσπαθώντας να εξηγήσει τη δυναμική της κίνησης του δημιούργησε μια πιο απλή εξίσωση, η οποία περιγράφει μια παρόμοια ροή με αυτή του Lorentz. Όμως το σύστημα του Rössler σχηματίζει μόνο μια σπείρα, έτσι ώστε να είναι πολύ πιο απλή η μελέτη της δυναμικής της *χαοτικής* κίνησης.

Το σύστημα Rössler αποτελείται από τρεις μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Αυτό το σύστημα ορίζει ένα συνεχές χρονό-δυναμικό σύστημα το οποίο παρουσιάζει χαοτική συμπεριφορά. Κάποιες ιδιότητες του συστήματος Rössler μπορούν να προκύψουν μέσω γραμμικών μεθόδων, όπως τη μέθοδο των ιδιοδιανυσμάτων, αλλά τα κύρια χαρακτηριστικά του συστήματος απαιτούν μη-γραμμικές μεθόδους, όπως Poincare χάρτες και διαγράμματα διακλάδωσης [28].

Οι εξισώσεις που ορίζουν το σύστημα είναι:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y - z \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay \\ \frac{dz}{dt} &= b + z(x - c)\end{aligned}\tag{3.0.1}$$

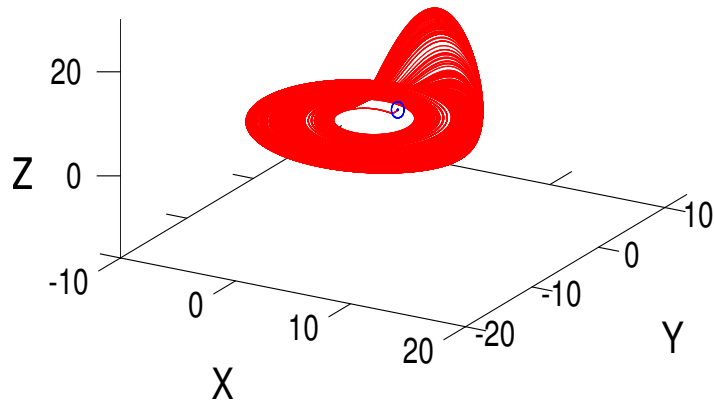
Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις του Rössler (3.0.1) έχουν μόνο έναν μη-γραμμικό όρο, τον  $(zx)$ , σε αντίθεση με τις εξισώσεις Lorentz όπου έχουν δύο μη-γραμμικούς όρους και είναι δυσκολότερες στην μελέτη.

### 3.1 Δυναμική του Συστήματος Rössler και η λύση του

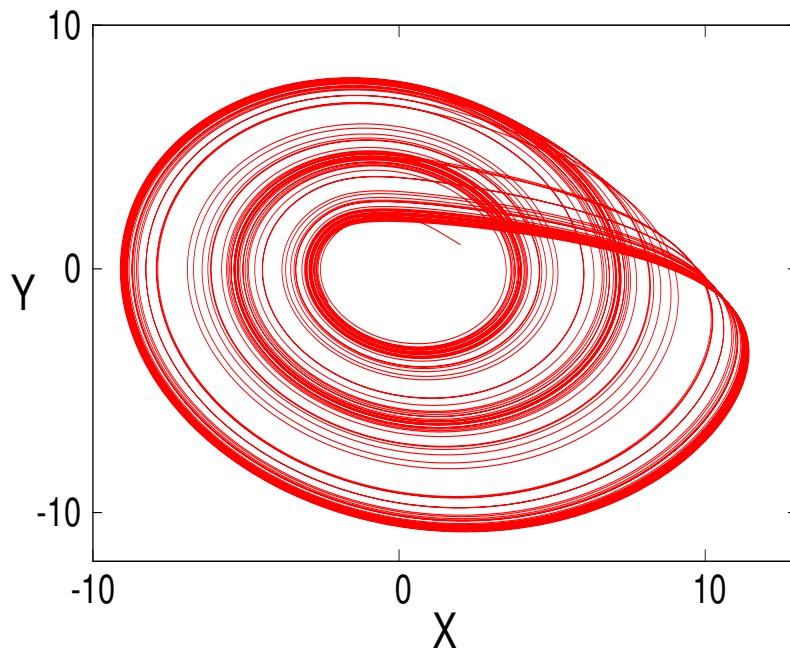
Ο Rössler μελέτησε το σύστημα (3.0.1) με τις τιμές  $a = 0.2$ ,  $b = 0.2$ ,  $c = 5.7$ . Η επίλυση του συστήματος (3.0.1) με τις παραπάνω τιμές των  $a$ ,  $b$  και  $c$  παρέχει τη λύση που εμφανίζεται στο Σχήμα 1.

Παρατηρούμε στο Σχήμα 1 ότι κατά τη διάρκεια κάθε περιστροφής η λύση εκτελεί μια περιστροφική κίνηση στο επίπεδο  $x - y$  (για περίπου  $z = 0$ ) εκτός από ένα σύντομο διάστημα στο οποίο εκτελεί μία κίνηση κατά μήκος του θετικού άξονα  $z$  (αρχικά προς τα πάνω και μετά προς τα κάτω). Όπως θα συζητηθεί λεπτομερώς στη συνέχεια, η κίνηση της λύσης στο  $x - y$  επίπεδο γίνεται σε μία ΑΑΠ. Σε μία συγκεκριμένη περιοχή του επιπέδου  $x - y$  η ΑΑΠ εκφυλίζεται, οπότε η λύση εκτελεί μία κίνηση κατά μήκος του άξονα των  $z$ , απομακρυνόμενη αρχικά από την ΑΑΠ και επιστρέφοντας μετά σε αυτήν.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η προβολή του ελκυστή στο  $x - y$  επίπεδο που παρουσιάζεται στο Σχήμα 2, όπου φαίνεται η περιοχή στην οποία εκφυλίζεται η ΑΑΠ. Επιπλέον, το Σχήμα 2 απεικονίζει τις γειτονικές τροχιές να κάνουν σπειροειδείς κινήσεις προς τα έξω (stretching), μετά διπλώνουν χωρίς να τμήσουν η μία την άλλη (folding) και τέλος κινούνται κοντά στο

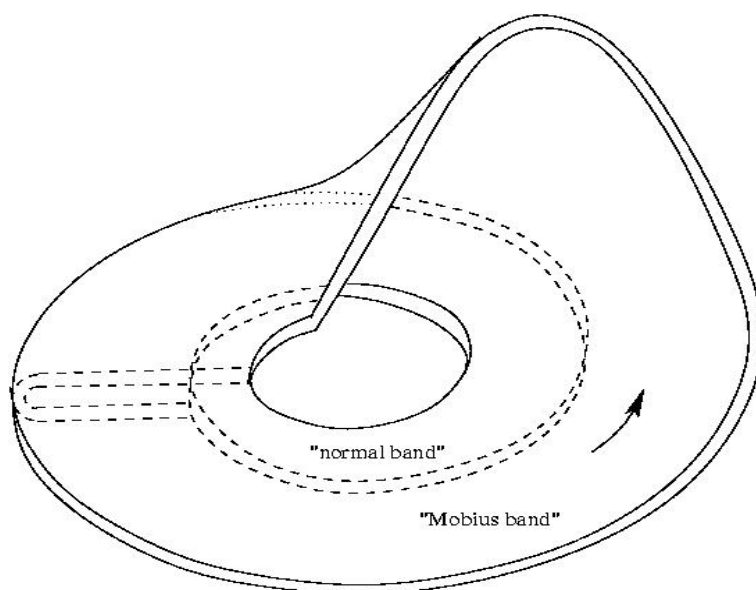


Σχήμα 1: Ο ελκυστής στον χώρο των φάσεων  $x - y - z$ , όπου το σημείο με το μπλέ χρώμα είναι η αρχική συνθήκη.



Σχήμα 2: Η προβολή του ελκυστή στο επίπεδο  $x - y$  του πεδίου των φάσεων.

αρχικό τους σημείο εκκίνησης (re-injection) [25]. Στο Σχήμα 3 όπου παρουσιάζεται μία σχηματική απεικόνιση του ελκυστή, παρατηρούμε ότι η ροή στην ΑΑΠ χωρίζεται σε δύο "περιοχέσταινιες", (bands), στην εσωτερική (η οποία είναι περίπου κυκλική) και στην εξωτερική (η οποία



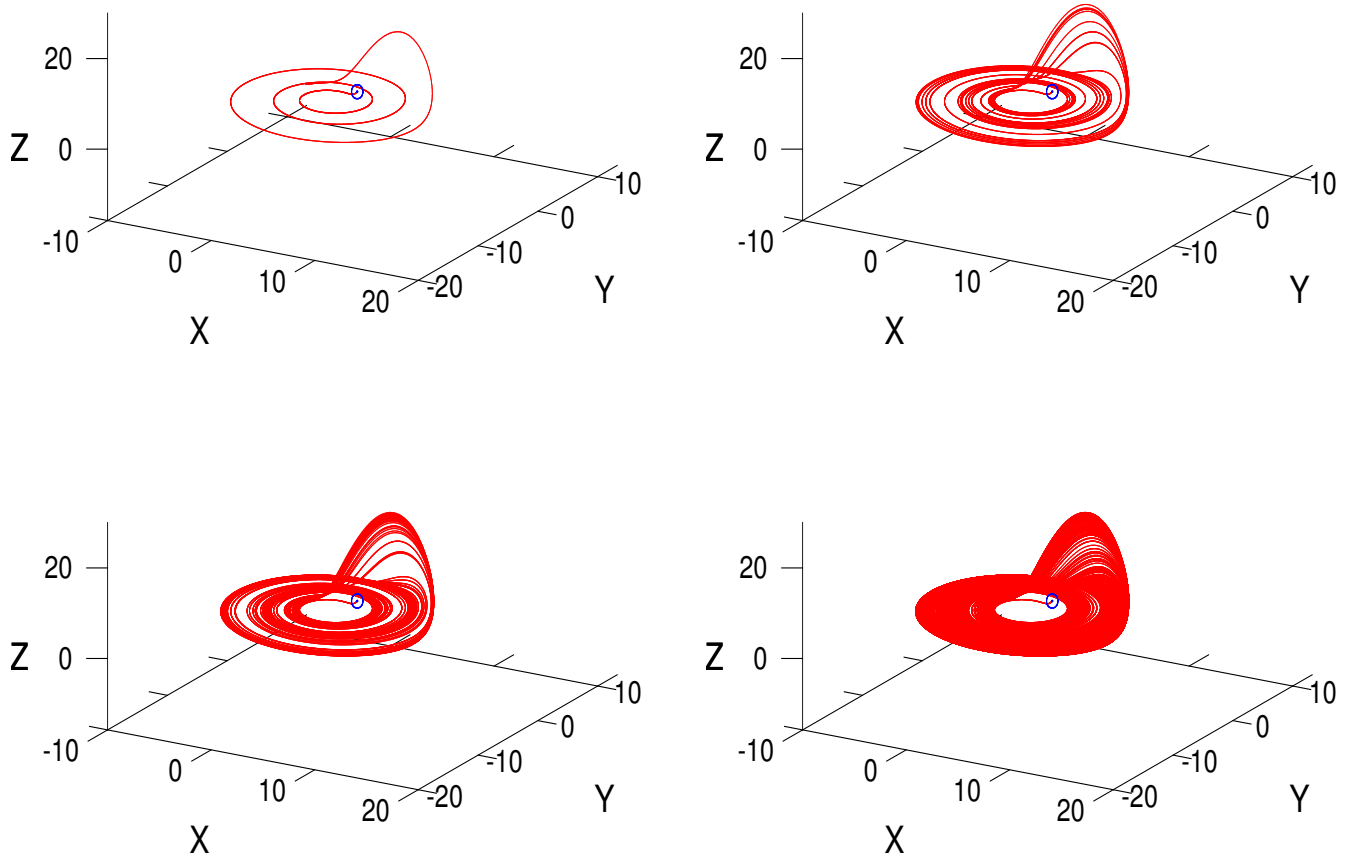
Σχήμα 3: Σχηματική απεικόνιση του ελκυστή στο πεδίο των φάσεων.

συμπεριφέρεται όπως την "ταινία του Möbius") [41]. Επίσης αν παρατηρήσουμε το Σχήμα 3 βλέπουμε ότι εκτός από τα 2 "bands" η ροή περιορίζεται σε έναν διπλωμένο (folded) δίσκο πεπερασμένου πλάτους [26, 28]. Έτσι κάθε τομή δια μέσου της ροής είναι δισδιάστατη και ορίζει την δημιουργία ενός "horseshoe map" [38].

Στο Σχήμα 4 απεικονίζεται η σταδιακή δημιουργία του ελκυστή. Παρατηρούμε ότι εμφανίζονται οι περιστροφικές κινήσεις στο επίπεδο  $x - y$ , οι 'εκρήξεις' στον  $z$  άξονα και οι επιστροφές στο επίπεδο. Καθώς ο χρόνος  $t \rightarrow +\infty$  το Σχήμα 4 προσεγγίζει το Σχήμα 1.

Μία άλλη παρατήρηση που μπορεί να κάνει κανείς κοιτώντας τα στιγμιότυπα του Σχήματος 4 είναι ότι αρχικά σχηματίζονται τρεις δακτύλιοι στο επίπεδο  $x - y$ , στους οποίους έλκεται η λύση με την πάροδο του χρόνου. Καθώς ο χρόνος  $t \rightarrow +\infty$  η λύση τείνει να γεμίσει όλο το χώρο ανάμεσα σε αυτούς τους δακτυλίους.

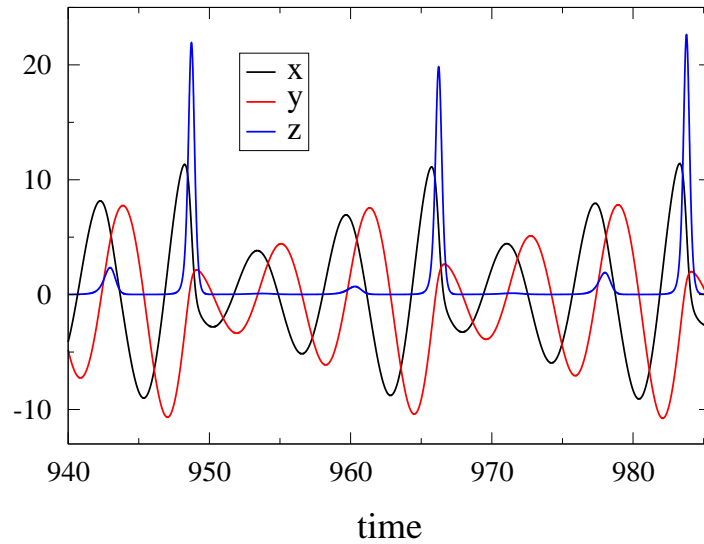
Οι "εκρήξεις" της λύσης κατά τον άξονα των  $z$  εμφανίζονται στο διάγραμμα των λύσεων  $x, y, z$  συναρτήση του χρόνου στο Σχήμα 5. Το ενδιαφέρον που παρατηρούμε είναι ότι η ένταση της "έκρηξης" που λαμβάνει χώρα σε κάθε κύκλο ποικίλει. Δηλαδή, σε κάθε κύκλο το κάθε "peak" του  $z$  λαμβάνει διαφορετική τιμή, με αποτέλεσμα για χρόνο  $t \rightarrow +\infty$  να γεμίσει το κενό από το επίπεδο  $x - y$  έως τα σημεία των πιο υψηλών "peaks", Σχήμα 1. Ένα υψηλό "peak" φαίνεται κοντά στο  $t = 949$  και ένα μικρό "peak" κοντά στο  $t = 960$ .



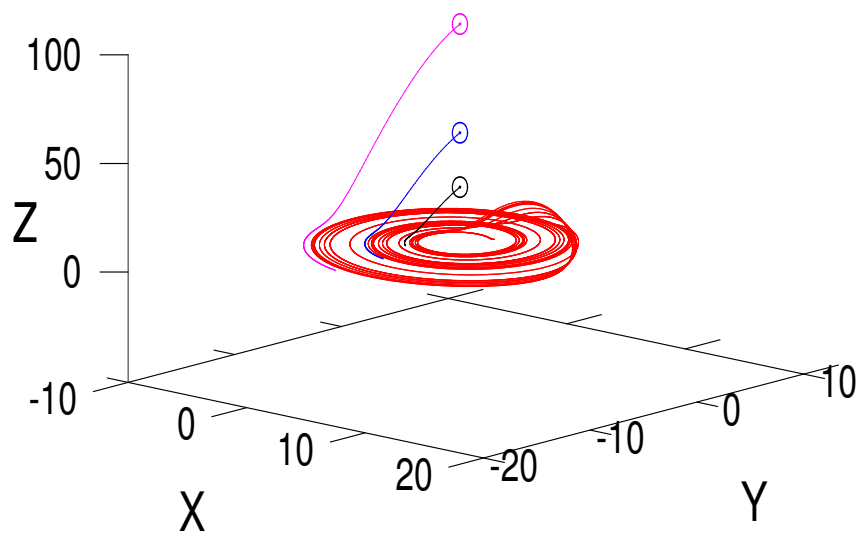
Σχήμα 4: Στιγμιότυπα στα οποία φαίνεται η σταδιακή δημιουργία του ελκυστή 1.

Οι αρχικές συνθήκες που ληφθησαν υπ' όψιν μέχρι τώρα είναι  $x = 2$ ,  $y = 1$  και  $z = 2$ , οι οποίες επιλέχτηκαν τυχαία. Ενδιαφέρον παρουσιάζει να δούμε το τρόπο με τον οποίο η λύση πλησιάζει τον ελκυστή για άλλες αρχικές συνθήκες. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε τις αρχικές συνθήκες  $(x = 0, y = 0, z = 30)$ ,  $(x = 0, y = 0, z = 50)$  και  $(x = 0, y = 0, z = 100)$ . Το Σχήμα 6 μας βεβαιώνει για την ικανότητα της ΑΑΠ του ελκυστή Rössler να ελκύει τις γειτονικές τροχιές.





Σχήμα 5: Κίνηση των  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ως προς χρόνο στο διαστημα  $t=(940-985)$



Σχήμα 6: Λύση του συστήματος Rössler (3.0.1) με αρχικές συνθηκες  $(x = 0, y = 0, z = 30)$ ,  $(x = 0, y = 0, z = 50)$  και  $(x = 0, y = 0, z = 100)$  σε κοινό σχήμα.

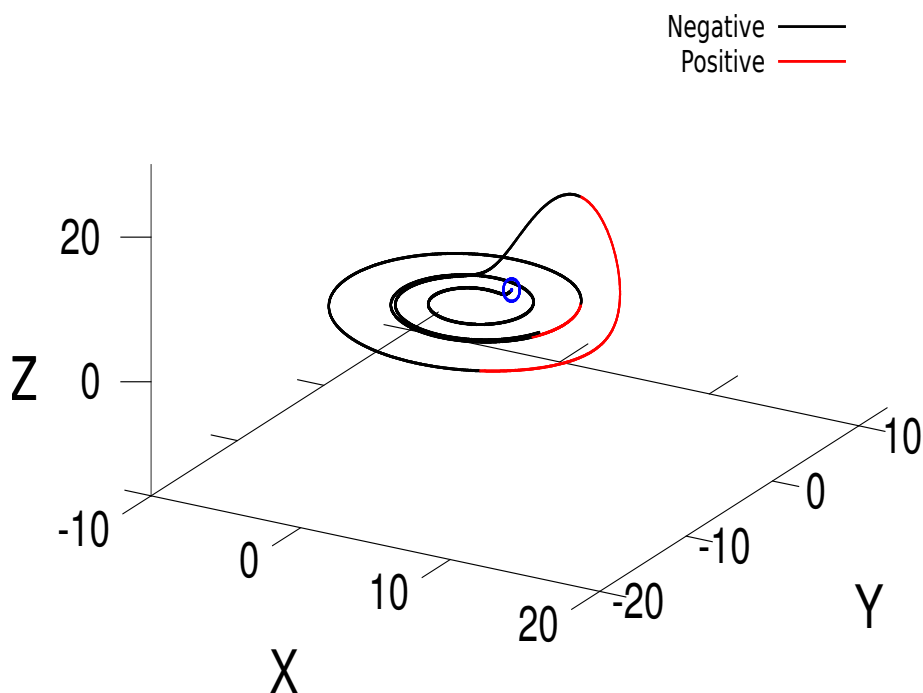
### 3.2 Ιδιοτιμές και Χρονοκλίμακες

Για να μελετήσουμε καλύτερα τη συμπεριφορά του συστήματος Rössler, θα εξετάσουμε στη συνέχεια τις ιδιοτιμές του συστήματος, τις αντίστοιχες χρονοκλίμακες και τον τρόπο που αυτές

μεταβάλλονται με το χρόνο. Υπενθυμίζεται ότι οι χρονοκλίμακες ορίζονται από τη σχέση:

$$\tau_n = |\lambda_n|^{-1} \quad (3.2.1)$$

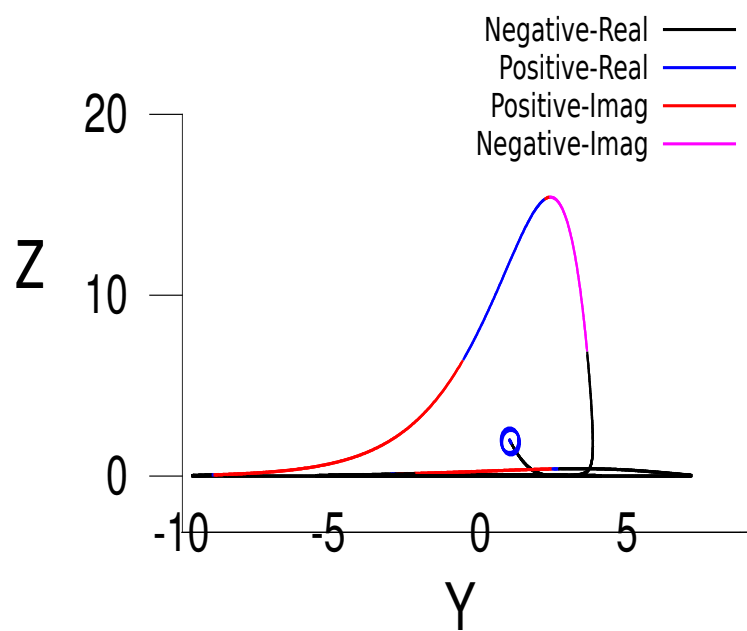
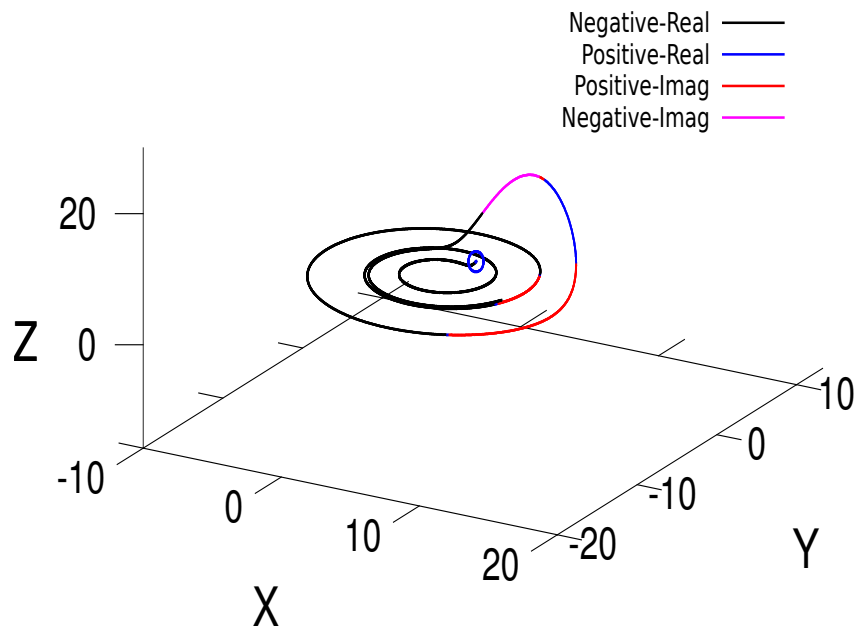
όπου το  $n = 1, 2, \dots$  το  $|\lambda_n|$  δηλώνει το modulo του  $\lambda_n = \lambda_{nr} + i\lambda_{ni}$  και το  $\tau_n$  τις αντιστοιχες χρονοκλίμακες. Στο σύστημα Rössler υπάρχουν 3 ιδιοτιμές, 1 πραγματική και 2 μιγαδικές. Στο Σχήμα 7 παρουσιάζεται η συμπεριφορά του πραγματικού μέρους της μεγαλύτερης ιδιοτιμής  $\lambda_1$  κατά μήκος της κίνησης.



Σχήμα 7: Η συμπεριφορά του πραγματικού μέρους της μεγαλύτερης ιδιοτιμής  $\lambda_1$  κατά μήκος της κίνησης στον χώρο των φάσεων  $x - y - z$ . Ο μπλέ κύκλος υποδεικνύει την αρχική συνθήκη.

Παρατηρούμε στο Σχήμα 7 ότι στη περιοχή που η λύση έλκεται προς την ΑΑΠ ή κινείται επί της ΑΑΠ το πραγματικό μέρος της  $\lambda_1$  είναι αρνητικό. Αντίθετα, στην περιοχή όπου δεν υπάρχει ΑΑΠ και η λύση εμφανίζει τα "peaks" στον άξονα των  $z$ , το πραγματικό μέρος της  $\lambda_1$  γίνεται θετικό.

Αν τώρα εξετάσουμε το είδος της ιδιοτιμής (πραγματική ή ζεύγος μιγαδικών) που παρέχει τη συμπεριφορά που αποτυπώνεται στο Σχήμα 7, θα διαπιστώσουμε ότι σύμφωνα με το Σχήμα 8 κατά την κίνηση εκτός της ΑΑΠ:



Σχήμα 8: Η συμπεριφορά του πραγματικού μέρους της μεγαλύτερης ιδιοτιμής  $\lambda_1$  και το είδος της ιδιοτιμής (πραγματική ή ζεύγος μιγαδικών) κατά μήκος της κίνησης στον χώρο των φάσεων  $x - y - z$ . Ο μπλέ κύκλος υποδεικνύει την αρχική συνθήκη.

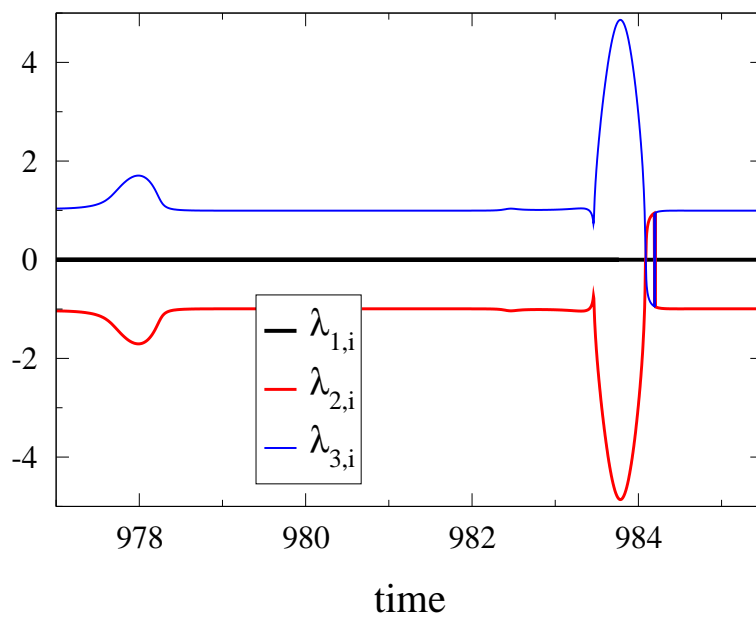
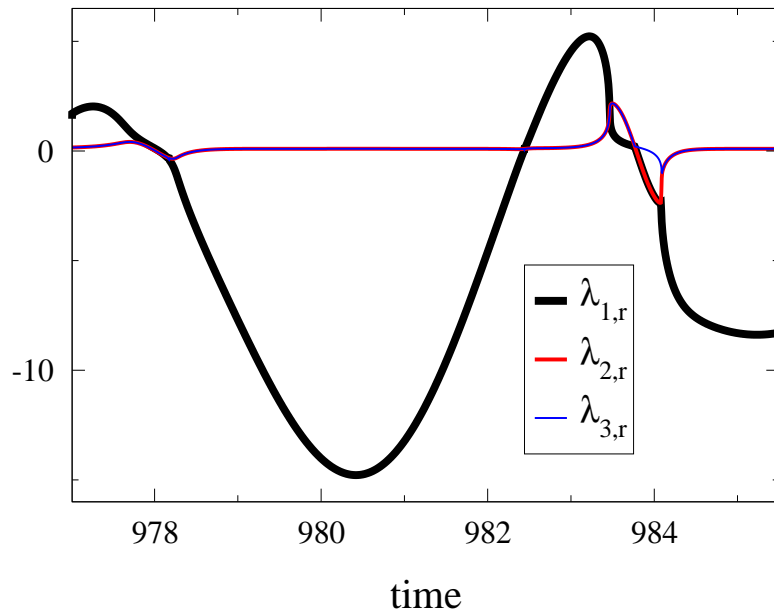
- στη περίπτωση που έχουμε μικρό "peak" στο  $z$ , η ιδιοτιμή από 'αρνητική-πραγματική' που είναι επί της ΑΑΠ γίνεται στιγμιαία 'θετική-πραγματική' αφού έχει εκφυλιστεί η ΑΑΠ, μετά γίνεται 'θετική-φανταστική' κατά την κίνηση εκτός ΑΑΠ, στιγμιαία πάλι 'θετική-πραγματική' και τέλος κατά την επιστροφή της στο ΑΑΠ γίνεται 'αρνητική-πραγματική'.
- στη περίπτωση που έχουμε μεγάλο "peak" στο  $z$ , η ιδιοτιμή από 'αρνητική-πραγματική' που είναι επί της ΑΑΠ γίνεται στιγμιαία 'θετική-πραγματική' αφού έχει εκφυλιστεί η ΑΑΠ, μετά γίνεται 'θετική-φανταστική' κατά την κίνηση εκτός ΑΑΠ, μετά γίνεται 'θετική-πραγματική' και μετά στιγμιαία 'θετική-φανταστική', στη συνέχεια 'αρνητική-φανταστική' και τέλος κατά την επιστροφή της στο ΑΑΠ γίνεται 'αρνητική-πραγματική'.

Το ιδιαίτερα σημαντικό στοιχείο που αναδεικνύει το Σχήμα 8 είναι ότι στο διάστημα της κίνησης εκτός ΑΑΠ, όταν το  $z$  αυξάνεται (δηλ. όταν η λύση απομακρύνεται από το επίπεδο  $x - y$  στο  $z = 0$ , όπου βρίσκεται η ΑΑΠ) το πραγματικό μέρος της  $\lambda_1$  είναι θετικό. Αντίθετα, όταν το  $z$  μειώνεται (δηλ. όταν η λύση πλησιάζει το επίπεδο  $x - y$  στο  $z = 0$ , όπου βρίσκεται η ΑΑΠ) το πραγματικό μέρος της  $\lambda_1$  είναι αρνητικό.

Στο Σχήμα 9 παρουσιάζεται η εξέλιξη του πραγματικού και φανταστικού μέρους των τριών ιδιοτιμών του συστήματος Rössler, για ένα διάστημα λίγο μεγαλύτερο του ενός κύκλου γύρω από τον ελκυστή. Η λύση κινείται προς και ακολούθως επί της ΑΑΠ όταν το πραγματικό μέρος της  $\lambda_1$  είναι αρνητικό και παράλληλα υπάρχει μία μεγάλη απόσταση από αυτήν και τις δύο μικρότερες. Επίσης, το Σχήμα 9 υποδηλώνει ότι το φανταστικό μέρος του ζεύγους των μιγαδικών ιδιοτιμών γίνεται τοπικά μέγιστο όταν η λύση κινείται εκτός ΑΑΠ και το  $z$  γίνεται μέγιστο.

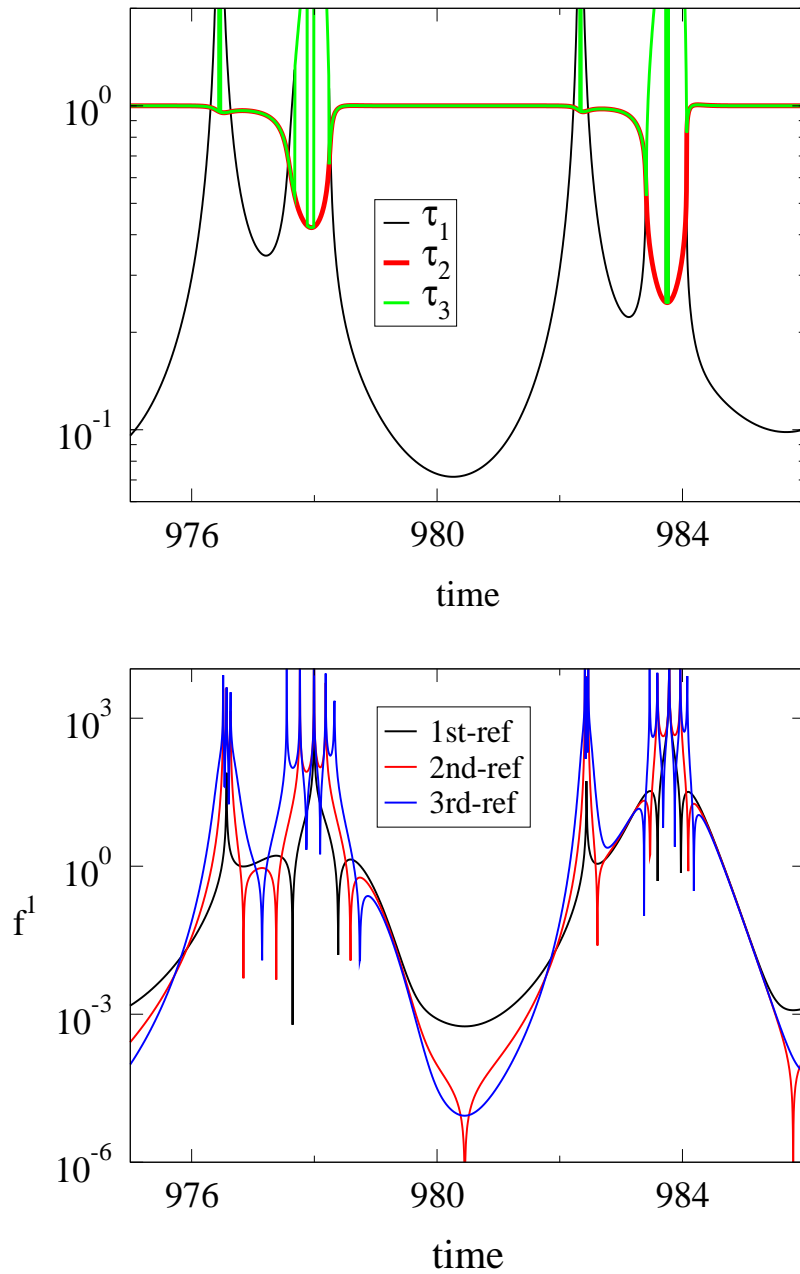
Στο Σχήμα 10 παρουσιάζεται η χρονική εξέλιξη των τριών χρονοκλιμάκων του συστήματος Rössler για ένα διάστημα λίγο μεγαλύτερο από αυτό του Σχήματος 9. Σε συνδιασμό με το Σχήμα 9, το Σχήμα 10 δηλώνει ότι υπάρχει μόνο μία γρήγορη αποσβετική χρονοκλίμακα, για ένα περιορισμένο χρονικό διάστημα του κύκλου. Στο διάστημα αυτό ο αριθμός  $M$  των γρήγορων αποσβετικών χρονοκλιμάκων ισούται με 1 και η διάσταση του αργού υποχώρου (δηλαδή της ΑΑΠ) είναι  $N - M = 2$ . Το γεγονός ότι η λύση κινείται επί της ΑΑΠ στο διάστημα αυτό δηλώνεται και από το μέτρο του εύρους  $f^1$  το οποίο γίνεται αμελητέο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 10.

Αναφορικά με την αποτελεσματικότητα των  $\mathbf{b}^r$ -βελτιώσεων, το Σχήμα 10 υποδηλώνει ότι η δεύτερη βελτίωση μειώνει σημαντικά το μέτρο του  $f^1$ , άρα βελτιώνει σημαντικά την ακρίβεια



Σχήμα 9: Η εξέλιξη των πραγματικών και φανταστικών μερών των  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  ως προς τον χρόνο.

με την οποία προσεγγίζεται η ΑΑΠ και το απλοποιημένο μοντέλο. Αντίθετα, η τρίτη βελτίωση δεν παρέχει σημαντική μείωση του μέτρου του  $f^1$ . Ο λόγος που προκαλεί αυτή την εξέλιξη θα εξεταστεί στη συνέχεια.



Σχήμα 10: Χρονική εξέλιξη των χρονοκλιμάκων  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  και  $\tau_3$  του συστήματος Rössler και του εύρους  $f^1$  στην πρώτη, στην δεύτερη και στην τρίτη  $\mathbf{b}^r$ -βελτίωση.

### 3.3 Ανάλυση με χρήση CSP

Για την ανάλυση του μοντέλου του Rössler θα χρησιμοποιηθεί ο τροποποιημένος αλγόριθμος CSP. Δεδομένου ότι στην προηγούμενη παράγραφο διαπιστώσαμε ότι το σύστημα χαρακτηρίζεται από 1 γρήγορη και 2 αργές χρονοκλίμακες όταν η λύση κινείται επί της ΑΑΠ, πρέπει να επιλέξουμε κατάλληλα μία γρήγορη και δύο αργές μεταβλητές. Για το θέμα αυτό ο CSP Pointer υποδεικνύει ότι η γρήγορη μεταβλητή είναι η  $z$ , γεγονός που επιβεβαιώνεται και από τη συμπεριφορά των τριών μεταβλητών, όπως αποτυπώνεται στο Σχήμα 5.

Τα βασικά στοιχεία του τροποποιημένου CSP αλγορίθμου που χρησιμοποιούμε εδώ είναι οι  $\mathbf{G}_s^r$  και  $\mathbf{R}_r^s$  πίνακες. Για την εύρεση των εκφράσεων αυτών των δύο πινάκων, καθώς και των μεγεθών της CSP, χρησιμοποιήθηκε το πακέτο Mathematica. Ο τρόπος υπολογισμού των πινάκων αυτών και των άλλων μεγεθών της CSP παρουσιάζεται στο παράρτημα.

Οι εκφράσεις για το εύρος  $f^1$ , όπως φαίνεται και στο Παράρτημα, μετά από μία, δύο και τρεις  $\mathbf{b}^r$ -βελτιώσεις είναι:

$$f_{1st-ref}^1 = \mathbf{b}^1 \cdot \mathbf{g} \quad f_{2nd-ref}^1 = \mathbf{b}^2 \cdot \mathbf{g} \quad f_{3rd-ref}^1 = \mathbf{b}^3 \cdot \mathbf{g} \quad (3.3.1)$$

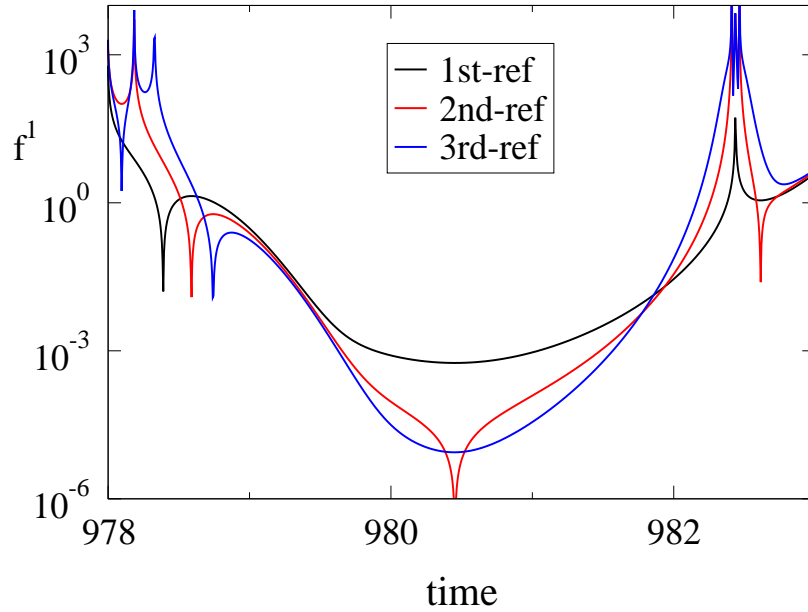
Ενδεικτικά οι εκφράσεις του  $f_{1st-ref}^1$  και του  $f_{2nd-ref}^1$ , όπως υπολογίστηκαν από το πακέτο Mathematica, είναι:

$$f_{1st-ref}^1 = b + z(x - c) + \frac{z(y + z)}{c - x} \quad (3.3.2)$$

$$f_{2nd-ref}^1 = b + z(x - c) - \frac{(x + ay)z}{(c - x)^2 - z} + \frac{(y + z)(b(-c + x) + z(2(c - x)^2 + y + z))}{(c - x)^3 + (-c + x)z} \quad (3.3.3)$$

Η έκφραση του  $f_{3rd-ref}^1$  είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη και για αυτό δεν παρουσιάζεται εδώ.

Η χρονική εξέλιξη στην περιοχή της ΑΑΠ του εύρους που αντιστοιχεί στην πιο γρήγορη αποσβετική χρονοκλίμακα  $f^1$  παρουσιάζεται στα Σχήματα 10 και 11. Το  $f^1$  υπολογίζεται με μία, δύο και τρεις  $\mathbf{B}^r$ -βελτιώσεις. Όπως αναμενόταν, η εφαρμογή κάθε επιπλέον βελτίωσης μειώνει το μέτρο του  $f^1$ , παρέχει δηλαδή καλύτερη ακρίβεια. Όπως δηλώθηκε και στην προηγούμενη παράγραφο, η δεύτερη βελτίωση μειώνει σημαντικά το μέτρο του  $f^1$ , ενώ η τρίτη βελτίωση δεν παρέχει ίδιας τάξης μείωση του μέτρου του  $f^1$ .



Σχήμα 11: Χρονική εξέλιξη του  $f^1$  στην πρώτη, στην δεύτερη και στην τρίτη  $\mathbf{b}^r$ -βελτίωση.

### 3.4 Το απλοποιημένο μοντέλο της CSP

Σύμφωνα με την CSP μέθοδο μπορούμε να παραστήσουμε το σύστημα μας στην μορφή:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{a}_1 f^1 + \mathbf{a}_2 f^2 + \mathbf{a}_3 f^3 \quad (3.4.1)$$

όπου οι όροι  $\mathbf{a}_1 f^1$ ,  $\mathbf{a}_2 f^2$  και  $\mathbf{a}_3 f^3$  συσχετίζονται άμεσα με τις "γρήγορες" και "αργές" αντίστοιχα χρονοκλίμακες και τα  $f^i$  ορίζονται ως:

$$f^i = \mathbf{b}^i * \mathbf{g}(\mathbf{y}) \quad (3.4.2)$$

Όταν η λύση κινείται επί της ΑΑΠ, το εύρος  $f^1$  το οποίο αντιστοιχεί στην γρήγορη χρονοκλίμακα  $\tau_1$  λαμβάνει αμελητέες τιμές εξαιτίας της επίδρασης της χρονοκλίμακας αυτής.

Παρατηρούμε στο Σχήμα 11 ότι όταν η λύση κινείται στην ΑΑΠ, μετά απο κάθε  $\mathbf{b}^r$ -βελτίωση το μέγεθος του  $f^1$  μειώνεται, γεγονός που οφείλεται στην καλύτερη προσέγγιση του αργού υπόχωρου του εφαιπόμενου χώρου. Γεγονός είναι ότι όταν οι γρήγορες χρονοκλίμακες εξαπληθούν και συνεπώς η λύση κινείται επί της ΑΑΠ, το  $f^1$  γίνεται αμελητέως μικρό:

$$f^1 \approx 0 \quad (3.4.3)$$

έτσι ώστε η Εξ. (3.4.1) απλοποιείται στη μορφή:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{a}_2 f^2 + \mathbf{a}_3 f^3 \quad (3.4.4)$$



Η Εξ.(3.4.4), απαλλαγμένη από τον όρο  $\mathbf{a}_1 f^1$ , αποτελεί την απλοποιημένη εξίσωση που εκφράζει το "αργό" σύστημα που προσομοιάζει τη ροή πάνω στην ΑΑΠ.

Ενδεικτικά, οι εκφράσεις των 3 ευρών  $f^1$ ,  $f^2$  και  $f^3$ , όπως αυτά υπολογίστηκαν μέσω του πακέτου Mathematica για την πρώτη  $\mathbf{b}^r$ -βελτίωση είναι:

$$f^1 = b + (-c + x)z + \frac{z(y + z)}{c - x} \quad f^2 = \frac{c - x}{(c - x)^2 - z} [b + (c - x)y] \quad f^3 = x + ay \quad (3.4.5)$$

Τα αντίστοιχα CSP διανύσματα βάσης  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  και  $\mathbf{a}_3$  (πάντα για την πρώτη  $\mathbf{b}^r$ -βελτίωση) είναι:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} \frac{(c - x)}{(c - x)^2 - z} \\ 0 \\ \frac{(c - x)^2}{(c - x)^2 - z} \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{z}{c - x} \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4.6)$$

Δεδομένων των διανυσμάτων βάσης  $\mathbf{a}_i$  και των ευρών  $f^i$  για  $i = 2, 3$ , μπορεί να κατασκευαστεί η ακόλουθη έκφραση του "αργού" συστήματος της Εξ.(3.4.4) για την πρώτη  $\mathbf{b}^r$ -βελτίωση:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{a}_2 f^2 + \mathbf{a}_3 f^3 = \begin{bmatrix} -\frac{(c - x)(b + (c - x)y)}{(c - x)^2 - z} \\ x + ay \\ -\frac{(b + (c - x)y)z}{(c - x)^2 - z} \end{bmatrix} \quad (3.4.7)$$

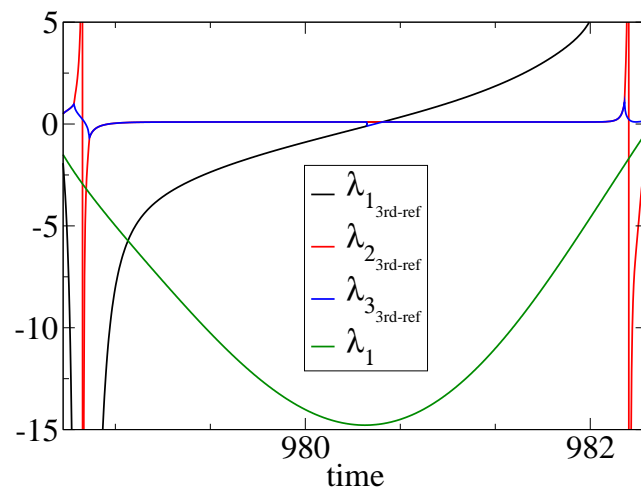
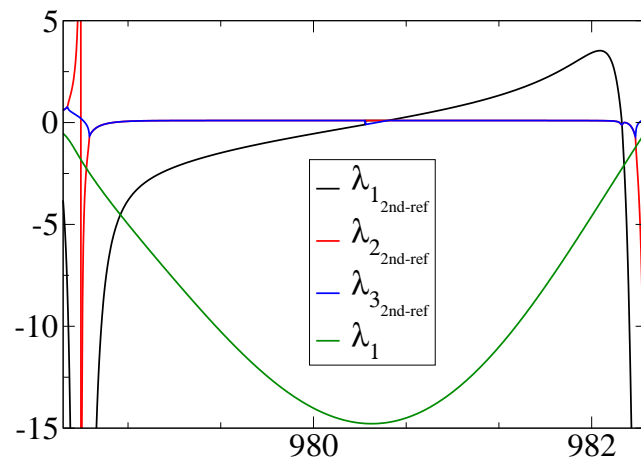
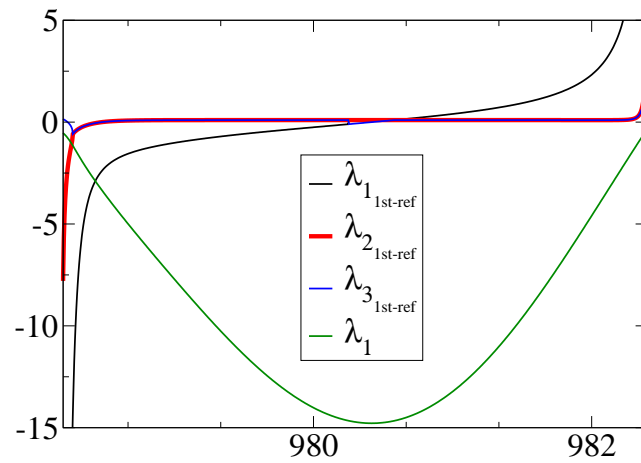
Η εξέλιξη του πραγματικού μέρους των τριών ιδιοτιμών  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  και  $\lambda_3$  του "αργού" συστήματος, κατασκευασμένο με μία, δύο και τρεις  $\mathbf{b}^r$ -βελτιώσεις, παρουσιάζεται στο Σχήμα 12 για το διάστημα που η λύση κινείται επί της ΑΑΠ, μαζί με την εξέλιξη του πραγματικού μέρους της  $\lambda_1$  του αρχικού συστήματος.

Τα αποτελέσματα των τριών περιπτώσεων που εξετάζονται στο Σχήμα 12 υποδεικνύουν ότι επί της ΑΑΠ οι δύο αργές ιδιοτιμές του "αργού" συστήματος παρουσιάζουν την εξής συμπεριφορά:

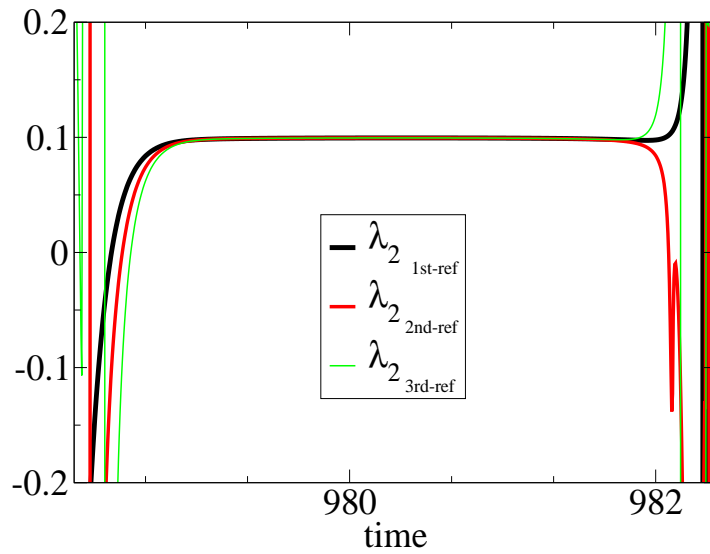
$$\lambda_{2r,1st-ref} \approx \lambda_{2r,2nd-ref} \approx \lambda_{2r,3rd-ref} \approx \lambda_{2r} \quad (3.4.8)$$

$$\lambda_{3r,1st-ref} \approx \lambda_{3r,2nd-ref} \approx \lambda_{3r,3rd-ref} \approx \lambda_{3r} \quad (3.4.9)$$

όπου όπως δείχνει το Σχήμα 9, επί της ΑΑΠ οι δύο μικρότερες ιδιοτιμές του αρχικού συστήματος αποτελούν συζυγές ζεύγος, δηλαδή  $\lambda_{2r} = \lambda_{3r}$ . Συνεπώς, το "αργό" σύστημα αναπαράγει σωστά την αργή δυναμική του αρχικού συστήματος, Εξ. 3.0.1. Η ικανότητα του "αργού"



Σχήμα 12: Η χρονική εξέλιξη των τριών ιδιοτιμών του απλοποιημένου συστήματος κατασκευασμένου με μία (άνω) δύο (μέση) και τρεις (κάτω)  $\mathbf{b}^r$ -βελτιώσεις και της πρώτης ιδιοτιμής  $\lambda_1$  του αρχικού συστήματος.



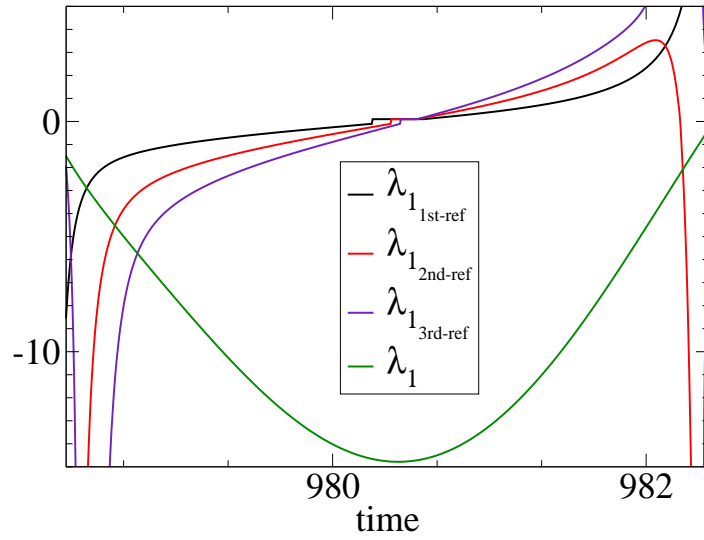
Σχήμα 13: Συγκριτικό διάγραμμα της  $\lambda_2$  για 3  $\mathbf{b}^r$ -βελτιώσεις.

συστήματος να αναπαράγει την αργή δυναμική του συστήματος Rössler παρουσιάζεται ευκρινέστερα στο Σχήμα 13 για την περίπτωση της  $\lambda_2$ . Η ίδια συμπεριφορά παρουσιάζεται και για την περίπτωση της  $\lambda_3$ .

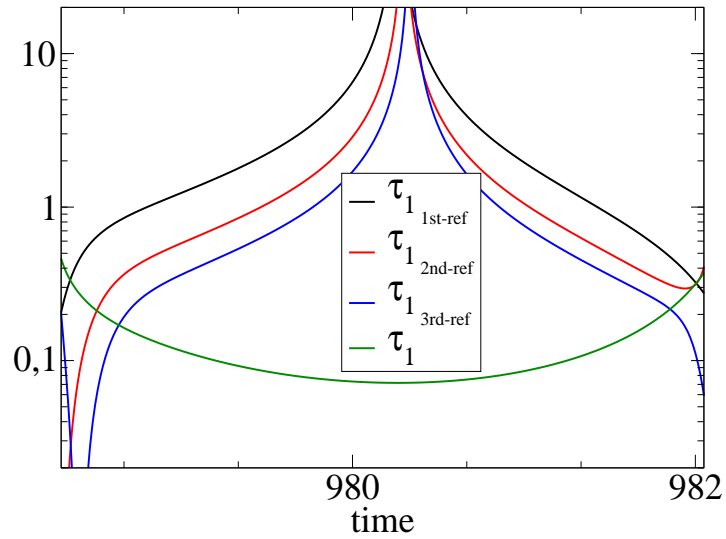
Όμως, το "αργό" σύστημα εισάγει και μία επιπλέον ιδιοτιμή, η οποία είναι η μεγαλύτερη σε μέτρο και λαμβάνει αποσβετικό χαρακτήρα ( $\lambda_{1,slow} < 0$ ) στο πρώτο μισό της ΑΑΠ και εκρηκτικό ( $\lambda_{1,slow} > 0$ ) στο δεύτερο. Στο Σχήμα 14 απεικονίζεται η εξέλιξη με το χρόνο επί της ΑΑΠ αυτής της ιδιοτιμής του "αργού" συστήματος, όταν αυτό κατασκευάστηκε με μία, δύο και τρεις  $\mathbf{b}^r$ -βελτιώσεις. Για λόγους σύγκρισης, στο Σχήμα 14 απεικονίζεται και η εξέλιξη της πρώτης ιδιοτιμής του αρχικού συστήματος Rössler.

Από το Σχήμα 14 συνάγεται ότι επί της ΑΑΠ ο αποσβετικός ή εκρηκτικός χαρακτήρας της ιδιοτιμής  $\lambda_{1,slow}$  εντείνεται με κάθε μία επιπλέον  $\mathbf{b}^r$ -βελτίωση, δηλαδή το μέτρο της  $\lambda_{1,slow}$  μεγαλώνει. Αυτό σημαίνει ότι η απόσταση μεταξύ της γρήγορης χρονοκλίμακας του αρχικού συστήματος  $\tau_1$  και της γρήγορης χρονοκλίμακας  $\tau_{1,slow}$  του αργού συστήματος μειώνεται με κάθε επιπλέον  $\mathbf{b}^r$ -βελτίωση.

Ο βαθμός μείωσης της απόστασης μεταξύ της  $\tau_1$  και της  $\tau_{1,slow}$  παρουσιάζεται στο Σχήμα 15. Δεδομένου ότι η αύξηση της ακρίβειας που παρέχει η κάθε  $\mathbf{b}^r$ -βελτίωση είναι ευθέως ανάλογη της απόστασης μεταξύ των δύο αυτών χρονοκλιμάκων (όσο μεγαλύτερη η απόσταση



Σχήμα 14: Συγκριτικό διάγραμμα της  $\lambda_1$  του "αργού" συστήματος για 3  $\mathbf{b}^r$ -βελτιώσεις και της  $\lambda_1$  του αρχικού συστήματος.



Σχήμα 15: Συγκριτικό διάγραμμα της  $\tau_1$  του "αργού" συστήματος για 3  $\mathbf{b}^r$ -βελτιώσεις και της  $\tau_1$  του αρχικού συστήματος.

τόσο μεγαλύτερη η αύξηση της ακρίβειας [30]), τα αποτελέσματα του Σχήματος 15 συνάγουν ότι:

1. η αύξηση της ακρίβειας που επιφέρει η επιπλέον  $\mathbf{b}^r$ -βελτίωση μειώνεται και
2. η περιοχή στο επίπεδο  $x - y$  η οποία μπορεί να χαρακτηριστεί ως ΑΑΠ μειώνεται.

Το πρώτο από τα δύο συμπεράσματα επιβεβαιώνεται από τα αποτελέσματα του Σχήματος 10, όπου παρατηρείται ότι εντός της ΑΑΠ η μείωση του  $f^1$  που επιτυγχάνεται από τη πρώτη στη δεύτερη  $\mathbf{b}^r$ -βελτίωση είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτήν που επιτυγχάνεται από την δεύτερη στην τρίτη  $\mathbf{b}^r$ -βελτίωση. Το δεύτερο από τα δύο ανωτέρω συμπεράσματα επιβεβαιώνεται από τα αποτελέσματα του Σχήματος 15, όπου παρατηρείται ότι η περιοχή στην οποία  $\tau_1 < \tau_{1,slow}$  μειώνεται με κάθε μία επιπλέον  $\mathbf{b}^r$ -βελτίωση.



## 4 Συμπεράσματα

Το ζητούμενο στη παρούσα εργασία ήταν να εξεταστεί στο κατά πόσον είναι δυνατόν να προβλεφθεί ο επερχόμενος εκφυλισμός της ΑΑΠ από τα δυναμικά χαρακτηριστικά του συστήματος Rössler, ενόσω η λύση κινείται επί της ΑΑΠ.

Για το σκοπό αυτό έγινε σύγκριση των χρονοκλιμάκων του "αργού" συστήματος με αυτές του αρχικού συστήματος, όταν η λύση κινείται επί της ΑΑΠ. Αποδείχθηκε ότι:

1. το "αργό" σύστημα αναπαράγει σωστά τις αργές χρονοκλίμακες του αρχικού συστήματος και
2. αντί της γρήγορης αποσβετικής χρονοκλίμακας του αρχικού συστήματος, στο "αργό" σύστημα αναπτύσσεται μία νέα χρονοκλίμακα η οποία, σύμφωνα με τα αποτελέσματα του Σχήματος 12:
  - 2.1 είναι χαρακτηριστική του "αργού" συστήματος κατά μήκος της ΑΑΠ,
  - 2.2 στην αρχή της ΑΑΠ είναι αποσβετικού χαρακτήρα ενώ προς το τέλος της ΑΑΠ είναι εκρηκτικού χαρακτήρα, και
  - 2.3 επιταχύνει (γίνεται πιο γρήγορη) με κάθε επιπλέον  $\mathbf{b}^T$ -βελτίωση, όπως φαίνεται και στα Σχήματα 14 και 15.

Το γεγονός ότι η νέα χρονοκλίμακα του "αργού" συστήματος είναι αποσβετική στην αρχή της ΑΑΠ (και επειδή είναι αρκετά πιο γρήγορη από τις υπόλοιπες) σημαίνει ότι ουσιαστικά επιτρέπει στην αργή δυναμική του αρχικού συστήματος να χαρακτηρίζει την εξέλιξη επί της ΑΑΠ. Όμως, το γεγονός ότι η χρονοκλίμακα αυτή είναι εκρηκτικού χαρακτήρα προς το τέλος της ΑΑΠ (και επειδή είναι πάλι αρκετά πιο γρήγορη από τις υπόλοιπες) σημαίνει ότι η αργή δυναμική του αρχικού συστήματος δεν έχει καθοριστική επιρροή στην συμπεριφορά του συστήματος στην περιοχή αυτή, όπου συντελείται ο εκφυλισμός της ΑΑΠ.

Δεδομένου ότι η χρονοκλίμακα αυτή επιταχύνει με κάθε επιπλέον  $\mathbf{b}^T$ -βελτίωση, η επιρροή της αργής δυναμικής του αρχικού συστήματος στην αρχή της ΑΑΠ και η απουσία επιρροής της στο τέλος της ΑΑΠ γίνεται πιο εμφανής.

Βέβαια, όπως δείχνει και το Σχήμα 10, η επιτάχυνση της νέας χρονοκλίμακας που επιτυγχάνεται με κάθε  $\mathbf{b}^T$ -βελτίωση προκαλεί:

1. μείωση στην αύξηση της ακρίβειας που επιφέρει η επιπλέον  $\mathbf{b}^T$ -βελτίωση και

2. μείωση της περιοχής στο επίπεδο  $x - y$  η οποία μπορεί να χαρακτηριστεί ως ΑΑΠ.

Όπως αναφέρεται και στην [30] και αποδεικνύεται και στο Σχήμα 15 της παρούσας εργασίας, αυτό συμβαίνει επειδή με κάθε  $\mathbf{b}^r$ -βελτίωση η απόσταση μεταξύ του μέτρου της γρήγορης χρονοκλίμακας του αρχικού συστήματος και του μέτρου της πιο γρήγορης χρονοκλίμακας του "αργού" συστήματος μειώνεται. Δεδομένου ότι η απόσταση μεταξύ των μέτρων των δύο χρονοκλιμάκων είναι ανάλογη της αύξησης της ακρίβειας που επιφέρει κάθε  $\mathbf{b}^r$ -βελτίωση (όσο πιο μεγάλη η απόσταση τόσο πιο μεγάλη η αύξηση της ακρίβειας), οι ανωτέρω δύο διαπιστώσεις που προκύπτουν από το Σχήμα 10 επιβεβαιώνουν το θεωρητικά αναμενόμενο αποτέλεσμα.

Όσον αφορά τον εκφυλισμό της ΑΑΠ, συνάγεται από τα Σχήματα 9 και 12 ότι αυτός δεν μπορεί να συνδεθεί με κάποια από τις τρεις χρονοκλίμακες του αρχικού συστήματος αλλά με την εκρηκτικού χαρακτήρα πιο γρήγορη χρονοκλίμακα του "αργού" συστήματος. Το γεγονός ότι ο εκφυλισμός της ΑΑΠ επιταχύνεται με αυξανόμενο αριθμό  $\mathbf{b}^r$ -βελτιώσεων είναι φυσιολογική συνέπεια της συνεπαγόμενης μείωσης της απόστασης μεταξύ της γρήγορης χρονοκλίμακας του αρχικού συστήματος και της πιο γρήγορης χρονοκλίμακας του "αργού" συστήματος.

Τέλος, σχετικά με το μηχανισμό στον οποίον οφείλεται η χαοτική κίνηση που προκαλεί το σύστημα του Rössler, τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας υποδεικνύουν ότι αυτός έχει σχέση με τη δυναμική του συστήματος κατά την κίνηση επί της ΑΑΠ. Τούτο προκύπτει από το γεγονός ότι η λύση εγκαταλείπει την ΑΑΠ κάθε φορά σε διαφορετικό σημείο, το οποίο συνεπάγεται την επαναφορά της λύσης στην ΑΑΠ (μετά την σύντομη κίνηση κατά τον άξονα του  $z$ ). Το κατά πόσον το φαινόμενο αυτό σχετίζεται με την εκρηκτική ιδιοτιμή του "αργού" συστήματος απομένει να αναλυθεί.



## 5 Παραρτημα: Υπολογιστικό πρόγραμμα Mathematica

(\* Οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος Rössler, Εξ. (3.0.1): \*)

$$dz = b + z(x - c);$$

$$dx = -y - z;$$

$$dy = x + ay;$$

(\* Το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{g}$  όπως προκύπτει απο τις Εξ. (3.0.1): \*)

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} dz \\ dx \\ dy \end{bmatrix};$$

(\* Ο πίνακας  $\mathbf{J}$  (Jacobian) του διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{g}$ :\*)

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} D[dz, z] & D[dz, x] & D[dz, y] \\ D[dx, z] & D[dx, x] & D[dx, y] \\ D[dy, z] & D[dy, x] & D[dy, y] \end{bmatrix};$$

(\* Ορίζουμε τους τέσσερεις υποπίνακες  $\mathbf{J}_{rr}$ ,  $\mathbf{J}_{rs}$ ,  $\mathbf{J}_{sr}$  και  $\mathbf{J}_{ss}$  που παράγονται απο τον  $\mathbf{J}$ . \*)

$$\mathbf{J}_{rr} = \begin{bmatrix} D[dz, z] \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{J}_{rs} = \begin{bmatrix} D[dz, x] & D[dz, y] \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{J}_{sr} = \begin{bmatrix} D[dx, z] \\ D[dy, z] \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{J}_{ss} = \begin{bmatrix} D[dx, x] & D[dx, y] \\ D[dy, x] & D[dy, y] \end{bmatrix};$$

(\* Αρχικά ορίζουμε την αρχική συνθήκη για τον πίνακα  $\mathbf{G}$ . \*)

$$\mathbf{G}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix};$$

(\* Και υπολογίζουμε τους 3 πίνακες  $\mathbf{G}$  έναν για κάθε βελτίωση χρησιμοποιώντας την επαναληπτική σχέση (2.4.44): \*)

(\* Πρώτη επανάληψη χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη  $\mathbf{G}_0$ . \*)

$$xi = Inverse[\mathbf{J}_{rr} - \mathbf{G}_0.\mathbf{J}_{sr}];$$

$$\mathbf{G}_1 = xi.(\mathbf{G}_0.\mathbf{J}_{ss} - \mathbf{J}_{rs});$$

(\* Δεύτερη επανάληψη χρησιμοποιώντας το  $\mathbf{G}_1$  που υπολογίσαμε παραπάνω και λαμβάνοντας υπόψη μας και την μερική παράγωγο του  $\mathbf{G}_1$ . \*)

$$xi = Inverse[\mathbf{J}_{rr} - \mathbf{G}_1.\mathbf{J}_{sr}];$$

$$\mathbf{G}_1 d = D[\mathbf{G}_1, z]dz + D[\mathbf{G}_1, x]dx + D[\mathbf{G}_1, y]dy;$$

$$G2 = xi.(G1.Jss - Jrs + G1d);$$

(\* Τρίτη επανάληψη χρησιμοποιώντας το  $\mathbf{G}_2$  που υπολογίσαμε παραπάνω και λαμβάνοντας υπόψη μας την μερική παράγωγο του  $\mathbf{G}_2$ . \*)

$$xi = Inverse[Jrr - G2.Jsr];$$

$$G2d = D[G2, z]dz + D[G2, x]dx + D[G2, y]dy;$$

$$G3 = xi.(G2.Jss - Jrs + G2d);$$

(\* Δίνουμε την αρχική συνθήκη για τον υπολογισμό του πίνακα  $\mathbf{R}$ . \*)

$$R0 = 0;$$

(\* Για να υπολογίσουμε τον πίνακα  $R$  θα χρησιμοποιήσουμε την υπολογιστική Εξ. (2.4.55) λόγω της αρχικής συνθήκης  $\mathbf{R}_0 = 0$ . \*)

$$xi = Inverse[Jrr - G1.Jsr];$$

(\* Αρχικά υπολογίζουμε τον  $\mathbf{R}_1$  και αντίστοιχα τους  $\mathbf{R}_2$  και  $\mathbf{R}_3$ . \*)

$$R1 = -Jsr.xi;$$

$$xi = Inverse[Jrr - G2.Jsr];$$

$$R2 = -Jsr.xi;$$

$$xi = Inverse[Jrr - G3.Jsr];$$

$$R3 = -Jsr.xi;$$

$$xi = Inverse[Jrr - G4.Jsr];$$

(\* Στην συνέχεια θέλουμε να υπολογίσουμε τα διανύσματα βάσης  $\mathbf{A}_r$  και  $\mathbf{A}_s$  και τα αντίστοιχα  $\mathbf{B}^r$  και  $\mathbf{B}^s$  το οποίο το κάνουμε μέσω των Εξ. (2.3.15) για την πρώτη βελτίωση: \*)

$$HE = R1.G1;$$

$$he11 = 1 - HE[[1]][[1]];$$

$$he12 = -HE[[1]][[2]];$$

$$he21 = -HE[[2]][[1]];$$

$$he22 = 1 - HE[[2]][[2]];$$

$$R11 = R1[[1]][[1]];$$

$$R21 = R1[[2]][[1]];$$

$$G11 = G1[[1]][[1]];$$

$$G12 = G1[[1]][[2]];$$

$$Ar1 = \begin{bmatrix} 1 - G1.R1 \\ -R11 \\ -R21 \end{bmatrix};$$

$$As1 = \begin{bmatrix} G11 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$At1 = \begin{bmatrix} G12 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$Br1 = \begin{bmatrix} 1 & -G11 & -G12 \end{bmatrix};$$

$$Bs1 = \begin{bmatrix} R11 & he11 & he12 \end{bmatrix};$$

$$Bt1 = \begin{bmatrix} R21 & he21 & he22 \end{bmatrix};$$

(\* Υπολογισμός των  $\mathbf{A}_r$  και  $\mathbf{A}_s$  και των αντίστοιχων  $\mathbf{B}^r$  και  $\mathbf{B}^s$  για την δεύτερη βελτίωση. \*)

$$HE = R2.G2;$$

$$he11 = 1 - HE[[1]][[1]];$$

$$he12 = -HE[[1]][[2]];$$

$$he21 = -HE[[2]][[1]];$$

$$he22 = 1 - HE[[2]][[2]];$$

$$R11 = R2[[1]][[1]];$$

$$R21 = R2[[2]][[1]];$$

$$G11 = G2[[1]][[1]];$$

$$G12 = G2[[1]][[2]];$$

$$Ar2 = \begin{bmatrix} 1 - G2.R2 \\ -R11 \\ -R21 \end{bmatrix};$$

$$As2 = \begin{bmatrix} G11 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$At2 = \begin{bmatrix} G12 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$Br2 = \begin{bmatrix} 1 & -G11 & -G12 \end{bmatrix};$$

$$Bs2 = \begin{bmatrix} R11 & he11 & he12 \end{bmatrix};$$

$$Bt2 = \begin{bmatrix} R21 & he21 & he22 \end{bmatrix};$$

(\* Υπολογισμός των  $\mathbf{A}_r$  και  $\mathbf{A}_s$  και των αντίστοιχων  $\mathbf{B}^r$  και  $\mathbf{B}^s$  για την τρίτη βελτίωση. \*)

$$HE = R3.G3;$$

$$he11 = 1 - HE[[1]][[1]];$$

$$he12 = -HE[[1]][[2]];$$

$$he21 = -HE[[2]][[1]];$$

$$he22 = 1 - HE[[2]][[2]];$$

$$R11 = R3[[1]][[1]];$$

$$R21 = R3[[2]][[1]];$$

$$G11 = G3[[1]][[1]];$$

$$G12 = G3[[1]][[2]];$$

$$Ar3 = \begin{bmatrix} 1 - G3.R3 \\ -R11 \\ -R21 \end{bmatrix};$$

$$As3 = \begin{bmatrix} G11 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$At3 = \begin{bmatrix} G12 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$Br3 = \begin{bmatrix} 1 & -G11 & -G12 \end{bmatrix};$$

$$Bs3 = \begin{bmatrix} R11 & he11 & he12 \end{bmatrix};$$

$$Bt3 = \begin{bmatrix} R21 & he21 & he22 \end{bmatrix};$$

(\* Εύρεση των  $\mathbf{f}_r$ ,  $\mathbf{f}_s$  για τις 3 βελτιώσεις χρησιμοποιώντας τις Εξ. (2.4.16) και (2.4.17).\*)

$$fr1 = Br1.g;$$

$$fs1 = Bs1.g;$$

$$ft1 = Bt1.g;$$

$$fr2 = Br2.g;$$

$$fs2 = Bs2.g;$$

$$ft2 = Bt2.g;$$

$$fr3 = Br3.g;$$

$$fs3 = Bs3.g;$$

$$ft3 = Bt3.g;$$

(\* Τέλος έχουμε την κατασκευή του "αργού" συστήματος για την πρώτη δεύτερη και τρίτη βελτίωση Εξ. (2.4.15): \*)

$$gs1 = As1.fs1 + At1.ft1;$$

$$gs2 = As2.fs2 + At2.ft2;$$

$$gs3 = As3.fs3 + At3.ft3;$$

## Αναφορές

- [1] C. W. Gear, *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, NJ, 1971.
- [2] N. Fenichel, "Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations", *J. Diff. Eqs.*, 31 (1979), pp. 53-98.
- [3] T.J. Kaper, "An introduction to geometric methods and dynamical systems theory for singular perturbation problems", in *Analyzing Multiscale Phenomena Using Singular Perturbation Methods*, J. Cronin and R.E. O' Malley Jr. Eds., AMS, Rhode Island, 1999, pp. 85-132.
- [4] F. Verhulst, *Methods and Applications of Singular Perturbations*, Springer, New York, 2005.
- [5] S.H. Lam, D.A. Goussis, "Understanding complex chemical kinetics with computational singular perturbation", *Proc. Comb. Inst.*, 22 (1988), pp. 931-941
- [6] S.H. Lam, D.A. Goussis, "Conventional asymptotics and computational singular perturbation for simplified kinetics modeling", in *Reduced Kinetic Mechanisms and Asymptotic Approximations for Methane-air Flames*, M.O. Smooke Ed., Springer Verlag, Berlin, 1991, pp. 227-242.
- [7] A. Zagaris, H.G. Kaper, T.J. Kaper, "Fast and slow dynamics for the computational singular perturbation method", *SIAM Multiscale Model. Simul.*, 2 (2004), pp. 613-638.
- [8] A.N. Tikhonov, "Systems of differential equations containing a small parameter multiplying the derivative", *Mat. Sb.*, 31 (1952), pp. 575-586.
- [9] N. Levinson, "Small periodic perturbations of an autonomous system with a stable orbit", *Ann. of Math.*, 52 (1950), pp. 727-738.
- [10] A.B. Vassil'eva, "Asymptotic behavior of solutions to certain problems involving nonlinear differential equations containing a small parameter multiplying the highest derivatives", *Russ. Math. Surv.*, 18 (1963), pp. 13-84.
- [11] R.E. O' Malley Jr., *Introduction to asymptotics and special functions*, Academic Press, New York, 1974.

- [12] M. Hirsch, C. Pugh, M. Shub, *Invariant manifolds*, Lecture Notes in Mathematics 583, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [13] K. Nipp, "Invariant manifolds of singularly perturbed ordinary differential equations", *Z.A.M.P.*, 36 (1985), pp. 309-320.
- [14] C.K.R.T. Jones, "Geometric singular perturbation theory", in *Dynamical Systems*, R. Johnson ed., Lecture Notes in Mathematics, 1609, Springer Verlag, Berlin, (1995), pp. 44-118.
- [15] F. Verhulst, "Periodic solutions and slow manifolds", *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 17 (2007), pp. 2533-2540.
- [16] M.R. Roussel, S.J. Fraser, "Geometry of the steady-state approximation: perturbation and accelerated convergence methods", *J. Chem. Phys.*, 93 (1990), pp. 1072-1081.
- [17] U. Maas, S.B. Pope, "Simplifying chemical kinetics - intrinsic low dimensional manifolds in composition space", *Combust. Flame*, 88 (1992), pp. 239-264.
- [18] A.N. Gorban, I. V. Karlin, "Method of invariant manifold for chemical kinetics", *Chem. Eng. Sci.*, 58 (2003), pp. 4751-4768.
- [19] C.W. Gear, I.G. Kevrekidis, "Constraint-defined manifolds: A legacy code approach to low-dimensional computation", *J. Scientific Computing*, 25 (2005), pp. 17-28
- [20] M.N. Contou-Carrere, P. Daoutidis, "Model reduction and control of multi-scale reaction-convection processes", *Chem. Eng. Sci.*, 63 (2008), pp. 4012-4025.
- [21] S.H. Lam, D.A. Goussis, "The CSP method for simplifying kinetics", *International Journal of Chemical Kinetics*, 26 (1994), pp. 461-486.
- [22] M. Hadjinicolaou, D.A. Goussis, "Asymptotic solution of stiff pdes with the CSP method: The Reaction diffusion Equation", *SIAM J. Sci. Comp.*, 20 (1998), pp. 781-810.
- [23] M. Valorani, D.A. Goussis, F. Creta, H.N. Najim, "Higher order corrections in the approximation of low-dimensional manifolds and the construction of simplified problems with the CSP method", *J. Comp. Physics*, 209 (2005), pp. 758-764.

- [24] D.A. Goussis, M. Valorani, "An efficient iterative algorithm for the approximation of the fast and slow dynamics of stiff systems", *J. Comp. Physics*, 214 (2006), pp. 317-325.
- [25] O.E. Rössler, "An equation for continuous chaos", *Physics Letters*, 57A, (1976), pp. 397-398.
- [26] S.H. Strogatz, *Non-Linear Dynamics and Chaos*, Perseus Books, Canada, 1991.
- [27] Jean-Marc Ginoux and Christophe Letellier, "Flow curvature manifolds for shaping chaotic attractors: I. Rossler-like systems", *J.Physics*, 4 (2009), Num. 28.
- [28] [http://en.wikipedia.org/wiki/Rossler\\_attractor](http://en.wikipedia.org/wiki/Rossler_attractor)
- [29] E.N. Lorenz, "Determenistic nonperiodic flow", *J. Atmos. Sci.*, 20 (1963), pp. 130-141.
- [30] D.A. Goussis, "The role of slow system dynamics in predicting the degeneracy of slow invariant manifolds: the case of vdP relaxation-oscillations", submitted.
- [31] M.R. Roussel, "Forced convergence iterative schemes for the approximation of invariant manifolds", *J. Math. Chem.*, 21 (1997), pp. 385–393.
- [32] <http://www.crystalinks.com/chaos.html>
- [33] <http://www.scholarpedia.org/chaos>
- [34] [http://en.wikipedia.org/wiki/Chaos\\_theory](http://en.wikipedia.org/wiki/Chaos_theory)
- [35] [http://en.wikipedia.org/wiki/Lyapunov\\_exponents](http://en.wikipedia.org/wiki/Lyapunov_exponents)
- [36] J.L. Kaplan and J.A. Yorke, "Chaotic behavior of multidimensional difference equations", in *Functional Differential Equations and Approximations of Fixed Points*, H.O. Peitgen and H.O. Walther. eds., Lecture notes in Mathematics 730, Springer Verlag, 1979, pp. 204-227.
- [37] [http://www.scholarpedia.org/article/Attractor\\_dimensions](http://www.scholarpedia.org/article/Attractor_dimensions)
- [38] [http://en.wikipedia.org/wiki/Horseshoe\\_map](http://en.wikipedia.org/wiki/Horseshoe_map)
- [39] <http://en.wikipedia.org/wiki/Diffeomorphism>
- [40] D. Ruelle, F. Takens, "On the nature of turbulence" *Comm. Math. Phys.*, 20 (1971) pp. 167–192.
- [41] [http://en.wikipedia.org/wiki/Mobius\\_strip](http://en.wikipedia.org/wiki/Mobius_strip)