ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ

ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΤΗΤΑ ΣΕ ΧΩΡΟΥΣ HILBERT

Διπλωματική εργασία

ΣΠΥΡΟΥ ΜΑΗ

Επιβλέπων: Δ.Χ. Κραββαρίτης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Μάρτιος 2012

Πρόλογος - Ευχαριστίες

Οι σελίδες που ακολουθούν αποτελούν μια εισαγωγή στην Θεωρία των χώρων Hilbert και στη Θεωρία Τελεστών σε χώρους Hilbert.

Οι χώροι Hilbert αποτελούν το πρώτο βήμα γενίκευσης, σε άπειρες διαστάσεις, των Ευκλείδειων χώρων. Έτσι, επιτρέπουν την χρήση ιδεών και μεθόδων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας για την ανάλυση χώρων συναρτήσεων. Από την άλλη μεριά, οι Τελεστές σε διανυσματικούς χώρους με νόρμα, αποτελούν μια φυσική γενίκευση των πραγματικών συναρτήσεων. Επιπλέον, η δομή του χώρου των τελεστών σε ένα χώρο Hilbert είναι πολύ πλουσιότερη σε σύγκριση με άλλους χώρους της Συναρτησιακής Ανάλυσης· επιτυγχάνεται έτσι κατάλληλη γενίκευση αποτελεσμάτων της Γραμμικής Άλγεβρας, η οποία γενίκευση έχει απολύτως κεντρικό ρόλο στην Ανάλυση και τις εφαρμογές της.

Η θεωρία των χώρων Hilbert απαιτεί πολύ λίγα θεωρητικά εφόδια για την κατανόησή της. Στην εργασία αυτή, οι προαπαιτούμενες γνώσεις είναι ελάχιστες. Με εξαίρεση το 3ο Κεφάλαιο, δεν χρειάζεται παρά μια καλή κατανόηση των βασικών εννοιών της Γραμμικής Άλγεβρας, του Απειροστικού Λογισμού και της Πραγματικής Ανάλυσης (στοιχειώδης θεωρία μετρικών χώρων). Άλλωστε ο στόχος μας είναι να παραθέσουμε τις βασικές ιδέες και τα αποτελέσματα της θεωρίας των χώρων Hilbert και της συναρτησιακής ανάλυσης και να εισάγουμε τον αναγνώστη στην έννοια του Γραμμικού Τελεστή.

Στα Κεφάλαια 1, 2 θα γίνει η εισαγωγή στους διανυσματικούς χώρους με εσωτερικό γινόμενο (που ορίζεται από νόρμα) και στους χώρους Hilbert δίνοντας ιδιαίτερη σημασία στα ορθοκανονικά συστήματα. Στο Κεφάλαιο 3 θα εισαχθεί η έννοια του Γραμμικού Τελεστή και θα παρουσιαστούν παραδείγματα, ιδιότητες και απλές εφαρμογές αυτών.

Θα ήθελα, τέλος, να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της εργασίας κ. Κραββαρίτη που, από την πρώτη στιγμή, με δέχθηκε και μου έδωσε την ευκαιρία να μελετήσω βαθύτερα τις βασικές αυτές έννοιες (της συναρησιακής ανάλυσης) μέσω του θέματος που μου πρότεινε.

Σπύρος Μάης

Περίληψη

- Στην παράγραφο 1.1 γίνεται η εισαγωγή και δίνονται οι ορισμοί και οι βασικές ιδιότητες των διανυσματικών χώρων.

- Στην παράγραφο 1.2 παρουσιάζονται οι ορισμοί των χώρων με εσωτερικό γινόμενο καθώς και της νόρμας σε χώρο με εσωτερικό γινόμενο. Επίσης γίνεται αναφορά των βασικών θεωρημάτων των χώρων εσωτερικού γινομένου.

- Στην παράγραφο 1.3 δίνεται ο ορισμός και μία σειρά βασικών παραδειγμάτων χώρων Hilbert. Επίσης, παρουσιάζεται ο ορισμός της ασθενούς και της ισχυρής σύγκλισης σε συνδιασμό με έναν αριθμό βασικών θεωρημάτων που στηρίζονται σε αυτές.

- Στην παράγραφο 2.1 δίνονται οι ορισμοί των ορθογώνιων και των ορθοκανονικών συστημάτων, της ορθοκανονικής ακολουθίας καθώς και ένα πλήθος παραδειγμάτων τους. Στη συνέχεια, περιγράφεται η μέθοδος ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt.

- Στην παράγραφο 2.2 παρατίθενται οι ορισμοί της πλήρους ορθοκανονικής ακολουθίας και της ορθοκανονικής βάσης. Δίνεται ο τύπος του Parseval, η ισότητα και η ανισότητα του Bessel, καθώς επίσης οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι συναρτήσεις Walsh. Στην συνέχεια, δίνονται οι ορισμοί των διαχωρίσιμων χώρων και των ισομορφικών χώρων Hilbert μαζί με μία σειρά θεωρημάτων και παραδειγμάτων που σχετίζονται με αυτούς.

- Στην παράγραφο 2.3 δίνεται ο ορισμός των αθροιστικών πυρήνων και τα σχετικά θεωρήματα καθώς επίσης ο ορισμός των σειρών Fourier και ο τρόπος που προκύπτουν.

- Στην παράγραφο 2.4 παρουσιάζονται οι ορισμοί του ορθογώνιου συμπληρώματος και των κυρτών συνόλων. Γίνεται αναφορά στην ιδιότητα του οριακού σημείου καθώς και στα θεωρήματα προβολής.

- Η παράγραφος 2.5 αναφέρεται στα γραμμικά συναρτησιακά, καθώς και στο θεώρημα απεικόνισης του Riesz.

- Στην παράγραφο 3.1 γίνεται η εισαγωγή στην έννοια των φραγμένων γραμμικών τελεστών. Δίνονται ορισμοί και παραδείγματα.

- Στην παράγραφο 3.2 παρουσιάζονται τα διγραμμικά συναρτησιακά και οι τετραγωνικές μορφές. Ακόμη αποδεικνύεται το θεώρημα Lax-Milgram, το οποίο είναι μια σημαντική γενίκευση του Θεωρήματος Riesz.

- Στην παράγραφο 3.3 εξετάζονται σημαντικές κατηγορίες των φραγμένων γραμμικών τελεστών σε χώρους Hilbert, οι λεγόμενοι συζυγείς και αυτοσυζυγείς τελεστές.

- Στην παράγραφο 3.4 παρουσιάζονται ειδικοί γραμμικοί τελεστές: οι αντιστρέψιμοι, οι κανονικοί, οι ισομετρικοί και οι ορθομοναδιαίοι.

- Η παράγραφος 3.5 αφιερώνεται σε έναν σημαντικό τελεστή πανω στον $L2$: το μετασχηματισμό Fourier.

Summary

- In paragraph 1.1 the definitions and the basic properties of vector spaces are presented.
- In paragraph 1.2 the definitions of inner product spaces as well as norms in inner product spaces are given.
- In paragraph 1.3 the definition and a series of basic examples of Hilbert spaces are given. Also, the definition of strong and weak converage is presented in combination to a number of basic theorems based on them.
- In paragraph 2.1 the definitions of orthogonal and orthonormal systems, the definition of orthonormal sequence are given, as well as a number of examples. The Gram-Schmidt othonormalization process is described.
- In paragraph 2.2 the definitions of complete orthonormal sequence and othonormal basis are given. The Parseval's formula, the Bessel's equality and inequality are given as well as the Rademacher functions and Walsh functions. Also, the definitions of seperable spaces and isomorphic Hilbert spaces are given in combination to a number of theorems related to them.
- In paragraph 2.3 the definition of summability kernel is given as well as the related theorems. Also, the definition of Fourier series and the method with wich these series are produced.
- In paragraph 2.4 the definition of orthogonal complement and convex sets are presented. The closest point property and the orthogonal complements and projections are introduced.
- In paragraph 2.5 linear functonal and the Riesz representation theorem are presented.

- In paragraph 3.1 linear Operators are introduced. Definitions and examples are given.
- In paragraph 3.2 bilinear functionals and quadratic forms are presented. Also, the Lax-Milgram theorem is proved.
- In paragraph 3.3 definitions of Adjoint and self-adjoint Operators are given as well as examples of them.
- In paragraph 3.4 special linear Operators are presented: Invertible, Normal, Isometric and Uitary Operators.
- In paragraph 3.5 the Fourier Transform is presented.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Διανυσματικοί Χώροι

1.1 Εισαγωγή

Οι βασικές αλγεβρικές έννοιες στη θεωρία των χώρων Hilbert είναι ο διανυσματικός χώρος και το εσωτερικό γινόμενο. Το εσωτερικό γινόμενο ορίζει μια νόρμα και έτσι κάθε χώρος Hilbert είναι ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα. Από την στιγμή που η νόρμα παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στη θεωρία, είναι αδύνατο να μελετήσει κανείς θεωρία χώρων Hilbert χωρίς να ειναι εξοικειωμένος με τις βασικές έννοιες και τις ιδιότητες των χώρων με νόρμα. Σε αυτό το κεφάλαιο δίνονται οι ορισμοί του διανυσματικού χώρου και οι βασικές του ιδιότητες.

Διανυσματικοί χώροι

Θα εξετάσουμε και τους πραγματικούς και τους μιγαδικούς διανυσματικούς χώρους. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών θα δηλώνεται με το $\mathbb{R}$ και το συνολο των μιγαδικών με το $\mathbb{C}$. Ένα στοιχείο του $\mathbb{R}$ ή του $\mathbb{C}$ ονομάζεται βαθμωτό μέγεθος. Συνήθως ειναι προτιμότερο να δίνεται ένας ορισμός ή να διατυπώνεται ένα θεώρημα χωρίς να δηλώνεται το πεδίο των μεταβλητών. Σε αυτή την περίπτωση θα χρησιμοποιούμε $\mathbb{F}$ και θα εννοούμε το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$. Για παράδειγμα αν σε ένα θεώρημα αναφέρεται το σύνολο $\mathbb{F}$, αυτό σημαίνει ότι το θεώρημα ισχύει για το σύνολο των πραγματικών $\mathbb{R}$ και των μιγαδικών $\mathbb{C}$.

Ορισμός 1.1.1. *(διανυσματικός χώρος) Διανυσματικός χώρος ονομάζεται ένα μη κενό σύνολο* $\mathbb{E}$ *με δύο πράξεις:*

την απεικόνιση $+ : (x, y) \to x + y : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{E}$
που καλείται πρόσθεση

και την απεικόνιση $\cdot : (\lambda, x) \to \lambda x : \mathbb{F} \times \mathbb{E} \to \mathbb{E}$
που καλείται βαθμωτός πολλαπλασιασμός

ώστε για κάθε $x, y \in \mathbb{E}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *να ισχύουν οι ιδιότητες:*
(α) $x + y = y + x$
(β) $(x + y) + z = x + (y + z)$
(γ) *Για κάθε* $x, y \in \mathbb{E}$ *υπάρχει* $z \in \mathbb{E}$*, τέτοιο ώστε* $x + y = z$
(δ) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
(ε) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
(στ) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
(ζ) $1x = x$

Τα στοιχεία του $\mathbb{E}$ καλούνται διανύσματα. Αν $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ τότε το $\mathbb{E}$ καλείται πραγματικός διανυσματικός χωρος, ενώ αν $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ τότε ο $\mathbb{E}$ καλείται μιγαδικός διανυσματικός χώρος.

Από την (γ) έπεται ότι για κάθε $x \in \mathbb{E}$ υπάρχει ένα $z_x \in \mathbb{E}$ τέτοιο ώστε $x + z_x = x$. Θα δείξουμε ότι το z_x είναι μοναδικό και ισούται με το 0 που ονομάζεται μηδενικό διάνυσμα.

Ας υποθέσουμε ότι $x + z_x = x$ και $y + z_y = y$. Από (γ) και (α), υπάρχει ω τέτοιο ώστε $y = x + \omega$. Τότε, από (α) και (β),
$y + z_x = (x + \omega) + z_x = (x + z_x) + \omega = x + \omega = y$
Αυτό δείχνει ότι εάν $x + z = x$ για κάποιο $x \in \mathbb{E}$, τότε $y + z = y$ για κάθε διάνυσμα $y \in \mathbb{E}$. Χρειάζεται επίσης να δείξουμε ότι το z είναι μοναδικό. Πράγματι, αν z_1 και z_2 είναι τέτοιοι αριθμοί, τότε $z_1 + z_2 = z_1$ και $z_1 + z_2 = z_2$. Άρα $z_1 = z_2$. Η μοναδικότητα του μηδενικού διανύσματος δηλώνει ότι το διάνυσμα z της ιδιότητας (γ) είναι μοναδικό για κάθε ζεύγος διανυσμάτων $x, y \in \mathbb{E}$: Έστω $x + z_1 = y$ και $x + z_2 = y$. Τότε υπάρχει $\omega \in \mathbb{E}$ τέτοιο ώστε $x + \omega = 0$. Τότε
$z_1 = z_1 + (x + \omega) = (x + z_1) + \omega = y + \omega = (x + z_2) + \omega = z_2 + (x + \omega) = z_2$
Η μοναδική λύση της $x + y = z$ δηλώνεται ως $y - x$. Σύμφωνα με τον ορισμό του μηδενικού διανύσματος έχουμε $x - x = 0$ Το διάνυσμα $0 - x$ δηλώνεται ως $-x$ (αντίθετο στοιχείο). Θα χρησιμοποιούμε 0 για να δηλώσουμε τον αριθμό 0 ή το μηδενικό διάνυσμα.

Οι ακόλουθες ιδιότητες προκύπτουν εύκολα από τον ορισμό του διανυσματικού χώρου:
Αν $\lambda \neq 0$ και $\lambda x = 0$, τότε $x = 0$.

Αν $x \neq 0$ και $\lambda x = 0$, τότε $\lambda = 0$.
$0x = 0$ και $(-1)x = -x$.

Παράδειγμα 1.1.1. *Τα βαθμωτά πεδία $\mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$ είναι οι πιο απλοί μη τετριμμένοι διανυσματικοί χώροι. Το $\mathbb{R}$ είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος· το $\mathbb{C}$ μπορεί να χειρισθεί είτε ως πραγματικός είτε ως μιγαδικός διανυσματικός χώρος. Ακολουθούν μερικά απλά παραδείγματα διανυσματικών χώρων:*

$$\mathbb{R}^N = \{(x_1, ..., x_N) : x_1, ..., x_N \in \mathbb{R}\}.$$
$$\mathbb{C}^N = \{(z_1, ..., z_N) : z_1, ..., z_N \in \mathbb{C}\}$$
$$\{(z_1, z_2, z_1 + z_2) : z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}.$$

Παράδειγμα 1.1.2. *(χώροι συναρτήσεων) Για ένα μη κενό σύνολο $\mathbb{X}$, ο χώρος $\mathcal{F}(X)$ όλων των πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $X(f : X \to \mathbb{R})$ με πράξεις ορισμένες κατά σημείο, δηλαδή από τις σχέσεις:*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

Παράδειγμα 1.1.3. *Ο χώρος P όλων των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές.*

Παράδειγμα 1.1.4. *Για κάθε n ο χώρος P_n όλων των πολυωνύμων με βαθμό μικρότερο ή ίσο του n και πραγματικούς συντελεστές.*

Παράδειγμα 1.1.5. *Ο χώρος $C(\mathbb{R})$ των συνεχών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι διανυσματικός χώρος. Εδώ χρησιμοποιείται το γνωστό αποτέλεσμα της ανάλυσης ότι το άθροισμα δύο συνεχών συναρτήσεων, καθώς και το βαθμωτό γινόμενο πραγματικού αριθμού με συνεχή συνάρτηση είναι συνεχής συνάρτηση. Αντίστοιχα ορίζεται και ο χώρος $C[\alpha, \beta]$ για κάθε κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του $\mathbb{R}$.*

Παράδειγμα 1.1.6. *Ο χώρος $c_{00}(N)$ των τελικά μηδενικών ακολουθιών πραγματικών αριθμών αποτελείται από όλες τις ακολουθίες πραγματικών αριθμών της μορφής $\vec{x} = (x_1, x_2, ...)$ για τις οποίες υπάρχει $i_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $x_i = 0$ για κάθε $i \geq i_0$. Η πρόσθεση και το βαθμωτό γινόμενο ορίζονται* *κατά σημείο, δηλαδή από τις σχέσεις*

$$(x_1, x_2, ...) + (y_1, y_2, ...) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ...)$$
$$\lambda(x_1, x_2, ...) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ...)$$

Επίσης πρέπει να σημειώσουμε ότι το άθροιμα δυο τελικά μηδενικών ακολουθιών καθώς και το γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού με μια τελικά μηδενική ακολουθία είναι τελικά μηδενική ακολουθία και άρα οι πράξεις, όπως ορίστηκαν προηγουμένως είναι καλά ορισμένες στο $c_{00}(N)$. Ο διανυσματικός χώρος $c_{00}(\mathbb{N})$ είναι η φυσιολογική επέκταση κάθε $\mathbb{R}^k$ με $k \in \mathbb{N}$ υπό την έννοια ότι για κάθε k ο $\mathbb{R}^k$ μπορεί να ταυτιστεί με το σύνολο των στοιχείων $\vec{x} = (x_i), i \in \mathbb{N}$ του $c_{00}(\mathbb{N})$ για τα οποία $x_i = 0$ για κάθε $i \geq k + 1$.

Παράδειγμα 1.1.7. *(Χώροι ℓ^p) Ο ℓ^p για $p \geq 1$ είναι ο χώρος όλων των άπειρων ακολουθιών z_n των μιγαδικών αριθμών για τις οποίες ισχύει*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^p < \infty$$

Θα δείξουμε ότι ένας τέτοιος χώρος είναι διανυσματικός. Αφού ο ℓ^p είναι υποσύνολο του διανυσματικού χώρου όλων των ακολουθιών μιγαδικών αριθμών, αρκεί να δείξουμε ότι: αν $(x_n), (y_n) \in \ell^p$ και $\ell \in \mathbb{C}$ τότε $(x_n + y_n) \in \ell_p$ και $(lx_n) \in \ell_p$. Για την αλήθεια της δεύτερης ιδιότητας αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda x_n|^p = |\lambda|^p \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$$

Όσο για την πρώτη, έπεται άμεσα από την ανισότητα Minkowski:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Η απόδειξη της ανισότητας Minkowski βασίζεται στην ανισότητα Hölder. Και οι δύο ανισότητες αποδεικνύονται παρακάτω.

Θεώρημα 1.1.1. *(Ανισότητα Hölder) Έστω $p > 1$, $q > 1$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Για κάθε δύο ακλουθίες* *μιγαδικών αριθμών* $(x_n), (y_n)$ *έχουμε:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Απόδειξη:

Αρχικως παρατηρούμε ότι:

$$x^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{p}x + \frac{1}{q}, \text{ για } 0 \leq x \leq 1$$

Έστω a και b μη αρνητικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $a^p \leq b^q$. Τότε $0 \leq \frac{a^b}{b^q} \leq 1$ και άρα έχουμε:

$$ab^{\frac{-q}{p}} \leq \frac{1}{p}\frac{a^p}{b^q} + \frac{1}{q}$$

αφού

$$\frac{-q}{p} = 1 - q$$
$$ab^{1-q} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{a^p}{b^q} + \frac{1}{q}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με b^q παίρνουμε:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Αποδείξαμε το θεώρημα για την περίπτωση $a^p \leq b^q$. Αντίστοιχα αποδεικνύεται η περίπτωση $b^q \leq a^p$. Άρα η ανισότητα ισχύει για κάθε $a, b \geq 0$.
Θέτωντας:

$$a = \frac{|x_j|}{\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}}, \ b = \frac{|y_j|}{\left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}}, \text{ όπου } n \in \mathbb{N} \text{ και } 1 \leq j \leq n$$

παίρνουμε:

$$\frac{|x_j|}{\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}}\frac{|y_j|}{\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}}\leq\frac{1}{p}\frac{|x_j|^p}{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p}+\frac{1}{q}\frac{|y_j|^q}{\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q}$$

Αθροίζοντας τις ανισότητες για $j=1,...,n$ παίρνουμε:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}|x_j||y_j|}{\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}}\leq\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

όπου για $n\to\infty$ παίρνουμε την ανισότητα Hölder.

Θεώρημα 1.1.2. *(Ανισότητα Minkowski) Έστω $p\geq 1$. Για κάθε δύο ακολουθίες μιγαδικών αριθμών $(x_n),(y_n)$ έχουμε:*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)^{1/p}$$

Απόδειξη:

Για $p=1$ τότε υπάρχει q τέτοιο ώστε $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Από ανισότητα Hölder έχουμε:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p=&\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n||x_n+y_n|^{p-1}\leq\\ &\leq\sum_{n=1}^{\infty}|x_n||x_n+y_n|^{p-1}+\sum_{n=1}^{\infty}|y_n||x_n+y_n|^{p-1}\leq\\ &\leq\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

αφού $q(p-1)=p$, έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p\leq\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

από όπου παίρνουμε την ανισότητα Minkowski.

Παράδειγμα 1.1.8. *(Καρτεσιανό γινόμενο διανυσματικών χώρων) Έστω $E_1, ..., E_n$ διανυσματικοί χώροι. Ορίζουμε:*

$$E = \{(x_1, ..., x_n) : x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, ..., x_n \in E_n\}$$

με τις πράξεις:

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$
$$\lambda(x_1, ..., x_n) = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$$

Τότε το E είναι ένας διανυσματικός χώρος που ονομάζεται καρτεσιανό γινόμενο των $E_1, .., E_n$. Το καρτεσιανό γινόμενο γράφεται ως $E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$.

Ορισμός 1.1.2. *(Γραμμικός Συνδιασμός) Έστω $x_1, ..., x_k$ διανύσματα ενός διανυσματικού χώρου E. Το διάνυσμα $x \in E$ θα ονομάζεται γραμμικός συνδυασμός των $x_1, ..., x_k$ αν υπάρχουν $a_1, ..., a_k \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:*

$$x = a_1 x_1 + ... + a_k x_k$$

Για παραδειγμα, κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}^N$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων:

$$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., e_N = (0, 0, ..., 0, 1)$$

Ορισμός 1.1.3. *(Γραμμική ανεξαρτησία) Έστω X ένα γραμμικός χώρος.*

(i) Ένα πεπερασμένο υποσύνολο $\{x_1, ..., x_n\}$ του X λέγεται γραμμικά ανεξάρτητο αν για κάθε $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ ώστε $\lambda_1 x_1, ..., \lambda_n x_n = 0$ έπεται ότι $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$. Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή αν υπάρχουν $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ όχι όλα ίσα με μηδέν ώστε $\lambda x_1 + ... + \lambda_n x_n = 0$, το σύνολο λέγεται γραμμικά εξαρτημένο.

(ii) Ένα $A \subset X$, λέγεται γραμμικά ανεξάρτητο αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι γραμμικά ανεξάρτητο, διαφορετικά αν έχει ένα γραμμικά εξαρτημένο πεπερασμένο υποσύνολο, λέγεται γραμμικά εξαρτημένο.

Παράδειγμα 1.1.9. *Δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν δεν ειναι συνευθειακά και τρία διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν δεν είναι συνεπίπεδα.*

Παράδειγμα 1.1.10. *Σε κάθε διανυσματικό χώρο το* $\{0\}$ *είναι γραμμικά εξαρτημένο ενώ για* $x \in X$ *με* $x \neq 0$ *το* $\{x\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Το* $\emptyset$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Παράδειγμα 1.1.11. *Αν το* A *είναι γραμμικά ανεξάρτητο και* $B \subset A$ *τότε και το* B *είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Η γραμμική ανεξαρτησία είναι μια ιδιαίτερα σημαντική έννοια στη θεωρία γραμμικών χώρων. Ο ορισμός ειναι ισοδύναμος με το ότι κάθε $x \in A$ για A γραμμικά ανεξάρτητο παράγει τη δική του διάσταση που παραμένει ανεξάρτητη από όλες τις διαστάσεις του γραμμικού χώρου των υπολοίπων.

Ορισμός 1.1.4. *Έστω* X *ένα γραμμικός χώρος. Ένα* $B \subset X$ *ονομάζεται* $Hamel$ *βάση (ή αλγεβρική βάση) του* X*, αν το* B *είναι γραμμικά ανεξάρτητο και* $spanB = X$.

1.2 Νόρμες σε χώρους με εσωτερικό γινόμενο

Ορισμός 1.2.1. *(χώρος με εσωτερικό γινόμενο) Έστω ότι* E *είναι ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος. Το σύμβολο* $< \cdot, \cdot >: E \times E \to \boldsymbol{C}$ *ονομάζεται εσωτερικό γινόμενο στον* E *εάν για κάθε* $x, y, z \in E$ *και* $\alpha, \beta \in \boldsymbol{C}$ *ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:*

(α) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

(β) $\langle \alpha x + \beta y, zy\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$

(γ) $\langle x, x\rangle \geq 0$

(δ) $\langle x, x\rangle = 0$ *αν* $x = 0$

Ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο ονομάζεται χώρος με εσωτερικό γινόμενο.

Με βάση τον ορισμό, το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων είναι ένας μιγαδικός αριθμός. Από το (α) έχουμε $\langle x, x\rangle$ = $\overline{\langle x, x\rangle}$, το όποιο σημαίνει ότι $\langle x, x\rangle$ είναι ένας πραγματικός αριθμός για κάθε $x \in E$. Προκύπτει από το (β) ότι

$$\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\langle \alpha y + \beta z, x\rangle} = \overline{\alpha\langle y, x\rangle + \beta\langle z, x\rangle} = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \overline{\beta}\langle x, z\rangle.$$

Ειδικότερα,

$$\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle \text{ και } \langle x, \alpha y\rangle = \bar{\alpha}\langle x, y\rangle$$

Αν $a = 0$, έχουμε

$$\langle 0, y\rangle = \langle x, 0\rangle = 0.$$

Παράδειγμα 1.2.1. *Το απλό αλλά σημαντικό παράδειγμα χώρου με εσωτερικό γινόμενο είναι ο χώρος των μιγαδικών αριθμών* $\boldsymbol{C}$*. Το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως* $\langle x, y\rangle = x\bar{y}$*.*

Παράδειγμα 1.2.2. *Ο χώρος* $\boldsymbol{C}^N$ *αποτελείται από τα διανύσματα* $x = (x_1 ...., x_N)$*, όπου* $x_l, i = l, 2, ..., N$*, μιγαδικοί αριθμοί με το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως εξής:*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{N} x_k \bar{y}_k,\ x = (x_1, ..., x_N),\ y = (y_1, ..., y_N),$$

είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο.

Παράδειγμα 1.2.3. *Ο χώρος* ℓ^2 *των ακολουθιών* $(x_1, x_2, x_3, ...)$ *των μιγαδικών αριθμών έτσι ώστε*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$$

με το εσωτερικό γινόμενο να ορίζεται ως εξής:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k, \quad x = (x_1, x_2, x_3, ...), \quad y = (y_1, y_2, y_3, ...).$$

είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο άπειρης διάστασης. Όπως θα δούμε αργότερα, είναι κατά μια έννοια το πιο σημαντικό παράδειγμα χώρου με εσωτερικό γινόμενο.

Παράδειγμα 1.2.4. *Έχουμε τον χώρο των ακολουθιών μιγαδικών αριθμών με μόνο έναν πεπερασμένο αριθμό από μη μηδενικά στοιχεία. Αυτός είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο, με το εσωτερικό γινόμενο ορισμένο όπως στο παράδειγμα 1.2.2.*

Παράδειγμα 1.2.5. *Ο χώρος* $\boldsymbol{C}[\alpha, \beta]$ *των συνεχών συναρτήσεων με μιγαδικές τιμές στο διάστημα* $[\alpha, \beta]$*, με το εσωτερικό γινόμενο*

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx,$$

είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο.

Παράδειγμα 1.2.6. *Ο χώρος με το εσωτερικό γινόμενο ορισμένο ως*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx,$$

και γενικότερα ο χώρος με το εσωτερικό γινόμενο να ορίζεται ως

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\overline{g(x)}dx,$$

είναι πολύ σημαντικοί χώροι με εσωτερικό γινόμενο.
Στις εφαρμογές συχνά χρησιμοποιούμε το υποσύνολο Ω του R^N και τον χώρο $L^2(\Omega)$, με το εσωτερικό γινόμενο να ορίζεται με το ολοκλήρωμα στο Ω. Για παράδειγμα ο χώρος $L^2([\alpha,\beta])$ είναι το κατάλληλο σύνολο για πολλές περιπτώσεις.

Παράδειγμα 1.2.7. *Έστω E ότι είναι το Καρτεσιανό γινόμενο των χώρων με εσωτερικό γινόμενο E_1 και E_2 ,τέτοιο ώστε:*

$$E = E_1 \times E_2 = \{(x,y) : x \in E_1, y \in E_2\}.$$

Ο χώρος E είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο, με το εσωτερικό γινόμενο να ορίζεται ως:

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = \langle x_1,x_2\rangle + \langle y_1,y_2\rangle.$$

Τα E_1 και E_2 μπορούν να ταυτιστούν με τους υποχώρους $E_1 \times \{0\}$ και $\{0\} \times E_2$ αντίστοιχα. Παρόμοια, μπορούμε να ορίσουμε το εσωτερικό γινόμενο στον $E_1 \times ... \times E_n$. Αυτή η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δημιουργήσουμε νέα παραδείγματα χώρων με εσωτερικό γινόμενο.

Ένας χώρος εσωτερικού γινομένου είναι ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Συνεπάγεται ότι κάθε χώρος με εσωτερικό γινόμενο είναι επίσης ένας **χώρος με νόρμα**, με την νόρμα να ορίζεται ως εξής:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}.$$

Αρχικά παρατηρούμε ότι η συνάρτηση είναι καλά ορισμένη γιατί $\langle x,x\rangle$ είναι πάντοτε ένας μη αρνητικός (πραγματικός) αριθμός. Λαμβάνοντας υπόψιν τον ορισμό 1.2.1 συμπεραίνουμε ότι:

$$\|x\| = 0 \text{ αν και μόνο αν } x = 0.$$

Επιπλέον,

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\|.$$

Παραμένει να αποδείξουμε την τριγωνική ανισότητα. Αυτό δεν είναι τόσο απλό όσο στις δυο πρώτες περιπτώσεις. Αρχικά αποδεικνύουμε την λεγόμενη ανισότητα του Schwarz, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε για την απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας.

Θεώρημα 1.2.1. *(ανισότητα του Schwarz). Για οποιαδήποτε δυο στοιχεία x και y ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο, έχουμε ότι:*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|. \tag{1.1}$$

Η ισότητα $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$ ισχύει αν και μόνον αν τα x, y είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Απόδειξη:

Αν $y = 0$, τότε η (1.1) ικανοποιείται καθώς και τα δύο τμήματα της ισότητας είναι ίσα με μηδέν.
Αν $y \neq 0$,προκύπτει η σχέση (1.2)

$$0 \leq \langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle = \langle x, x \rangle + \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \alpha \langle y, x \rangle + |\alpha|^2 \langle y, y \rangle. \tag{1.2}$$

Θέτουμε

$$\alpha = -\langle x, y \rangle / \langle y, y \rangle$$

στην (1.2) και πολλαπλασιάζοντας με το $\langle y, y \rangle$ παρατηρούμε

$$0 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - |\langle x, y \rangle|^2.$$

Έτσι παίρνουμε την ανισότητα του Schwarz.
Αν x και y είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε $x = \alpha y$ για κάποια $\alpha \in \boldsymbol{C}$.

Τότε,

$$|\langle x,y\rangle| = |\langle x,\alpha x\rangle| = |\overline{\alpha}|\langle x,x\rangle = |\alpha|\|x\|\|x\| = \|x\|\|\alpha x\| = \|x\|\|y\|.$$

Τώρα, έστω x και y διανύσματα τέτοια ώστε: $|\langle x,y\rangle| = \|x\|\|y\|$, ή ισοδύναμα

$$\langle x,y\rangle\langle y,x\rangle = \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle. \tag{1.3}$$

Θα δείξουμε ότι: $\langle y,y\rangle x - \langle x,y\rangle y = 0$, το οποίο αποδεικνύει ότι x και y είναι γραμμικά εξαρτημένα.
Από την (1.3) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
&\langle \langle y,y\rangle x - \langle x,y\rangle y, \langle y,y\rangle x - \langle x,y\rangle y\rangle \\
&= \langle y,y\rangle^2\langle x,x\rangle - \langle y,y\rangle\langle y,x\rangle\langle x,y\rangle - \langle x,y\rangle\langle y,y\rangle\langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle\langle y,x\rangle\langle y,y\rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

Πόρισμα 1.2.1. *(τριγωνική ανισότητα) Για οποιαδήποτε δυο στοιχεία x και y ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο, έχουμε ότι:*

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Απόδειξη:

Αν $a = 1$, η εξίσωση (1.2) μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2Re\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \\
&\leq \langle x,x\rangle + 2|\langle x,y\rangle| + \langle y,y\rangle \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
&= \left(\|x\| + \|y\|\right)^2,
\end{aligned}$$

όπου Rez συμβολίζει το πραγματικό μέρος του $z \in \boldsymbol{C}$.
Τα παραπάνω αιτιολογούν τον ακόλουθο ορισμό.

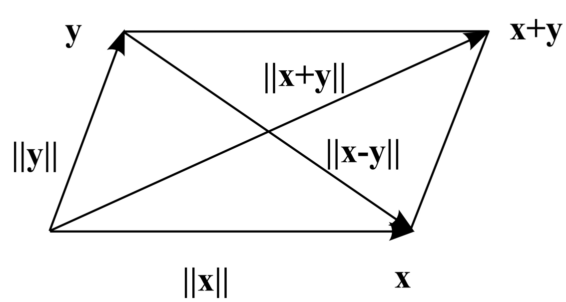
Ορισμός 1.2.2. *(νόρμα σε έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο). Με τον όρο νόρμα σε έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο E, εννοούμε την συνάρτηση που ορίζεται ως εξής:*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Έχουμε αποδείξει ότι κάθε χώρος με εσωτερικό γινόμενο είναι ένας χώρος με νόρμα. Είναι φυσικό να αναρωτιόμαστε αν κάθε χώρος με νόρμα, είναι και χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Θα εξετάσουμε αν είναι πιθανό να ορίζεται σε έναν χώρο με νόρμα $(E, ||\cdot||)$, ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ έτσι ώστε $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, για κάθε $x \in E$. Γενικότερα η απάντηση είναι αρνητική.
Στο ακόλουθο θεώρημα θα αποδείξουμε την ιδιότητα μιας νόρμας σε χώρο με εσωτερικό γινόμενο, η οποία είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένας χώρος με νόρμα, χώρος με εσωτερικό γινόμενο.

Θεώρημα 1.2.2. *(νόμος του παραλληλογράμμου). Για οποιαδήποτε δυο στοιχεία x και y ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο, έχουμε ότι:*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$



Σχήμα 1.1: Νόμος του παραλληλογράμμου.

Απόδειξη:

Έχουμε

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle$$

Και τότε

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2. \tag{1.4}$$

Αντικαθιστώντας το y από το $-y$ στην (1.4) παρατηρούμε ότι

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \|y\|^2. \tag{1.5}$$

Προσθέτοντας την (1.4) και (1.5) έχουμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

Μία από τις πιο σημαντικές συνέπειες του χώρου με εσωτερικό γινόμενο είναι η δυνατότητα του να ορίζουμε την ορθογωνιότητα των διανυσμάτων. Αυτό κάνει την θεωρία των χώρων Hilbert πολύ διαφορετική από την θεωρία των χώρων Banach.

Ορισμός 1.2.3. *(ορθογώνια διανύσματα). Δύο διανύσματα x και y σε έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο ονομάζονται ορθογώνια και συμβολίζονται $x \perp y$ αν $\langle x, y\rangle = 0$.*

Αν $x \perp y$ τότε $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle} = 0$. Με άλλα λόγια η σχέση $\perp$ είναι συμμετρική. Το επόμενο θεώρημα είναι ένα άλλο παράδειγμα του γεωμετρικού χαρακτήρα μιας νόρμας ορισμένης με εσωτερικό γινόμενο.

Θεώρημα 1.2.3. *Για κάθε ζεύγος ορθογωνίων διανυσμάτων ισχύει ότι:*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Απόδειξη:

Αν $x \perp y$ τότε $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle = 0$ και τότε η εξίσωση προκύπτει άμεσα από την (1.4).

Στον ορισμό του χώρου με εσωτερικό γινόμενο θεωρούμε ότι ο E είναι ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος. Μπορούμε να ορίσουμε έναν πραγματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο. Τότε η περίπτωση (α) του ορισμού (1.2.1) γίνεται $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.
Τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν στην περίπτωση των πραγματικών αριθμών. Αν στα παραδείγματα 1.2.1-1.2.6, η λέξη μιγαδικός αντικατασταθεί από τη λέξη πραγματικός και ο $\boldsymbol{C}$ από τον R, παίρνουμε έναν αριθμό παραδειγμάτων πραγματικών χώρων με εσωτερικό γινόμενο.
Ένας πραγματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης ονομάζεται Ευκλείδιος χώρος.

Αν $x = (x_1, ..., x_N)$ και $y = (y_1, ..., y_N)$ είναι διανύσματα στον R^N, τότε το εσωτερικό γινόμενο

$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k$ μπορεί να ορισθεί ισοδύναμα ως $\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|\cos\theta$, όπου θ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων x, y.
Σε αυτήν την περίπτωση η ανισότητα του Schwarz προκύπτει από τη σχέση:

$$\frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\|\|y\|} = |\cos\theta| \leq 1,\ x \neq 0, y \neq 0.$$

1.3 Εισαγωγή στους χώρους Hilbert

Ορισμός 1.3.1. *(χώρος Hilbert) Ένας πλήρης χώρος με εσωτερικό γινόμενο ονομάζεται χώρος Hilbert.*

Με τον όρο πληρότητα ενός χώρου E με εσωτερικό γινόμενο, εννοούμε την πληρότητα του E ως χώρου με νόρμα, με την νόρμα να ορίζεται με το εσωτερικό γινόμενο. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την πληρότητα του χώρου με εσωτερικό γινόμενο που αναφέραμε στην παράγραφο 1.2 και επίσης θα δώσουμε κάποια παραδείγματα χώρων με εσωτερικό γινόμενο και χώρων Hilbert.

Παράδειγμα 1.3.1. *Αν ο $\boldsymbol{C}$ είναι πλήρης τότε είναι και χώρος Hilbert. Το ίδιο ισχύει και για τον $\boldsymbol{C}^N$.*

Παράδειγμα 1.3.2. *Ο ℓ^2 είναι χώρος Hilbert.*

Παράδειγμα 1.3.3. *Ο χώρος E που περιγράψαμε στο 1.2.4 είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο, που δεν είναι χώρος Hilbert λόγω του ότι δεν είναι πλήρης. Η ακολουθία*

$$x_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, 0, 0, ...)$$

είναι ακολουθία Cauchy:

$$\lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\| = \lim_{n,m\to\infty} \left[\sum_{k=min\{m,n\}+1}^{max\{m,n\}} 1 \right]^{1/2} = 0.$$

Η ακολουθία δεν συγκλίνει στον E, επειδή τα όριά της $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...)$ δεν είναι στοιχεία του E. (Η ακολουθία x_n συγκλινει στον ℓ^2.)

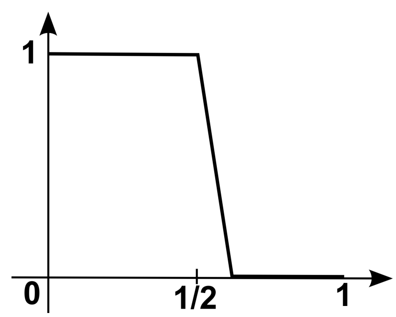
Παράδειγμα 1.3.4. *Ο χώρος* $\boldsymbol{C}([\alpha,\beta])$ *αποτελεί ένα ακόμα παράδειγμα μη πλήρους χώρου με εσωτερικό γινόμενο. Έχουμε τη επόμενη ακολουθία από συναρτήσεις στον* $\boldsymbol{C}([0,1])$

$$f_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & , \quad 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1 - 2n(x - \frac{1}{2}), & \frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} \\ 0 & , \quad \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{array} \right\}$$

Προφανώς οι f_n *είναι συνεχείς. Επιπλέον*

$$\|f_n - f_m\| \le \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)^{1/2} \to 0, \textit{καθώς}\ m, n \to \infty$$

Άρα η (f_n) *είναι μια ακολουθία Cauchy.*



Σχήμα 1.2: Μια συνάρτηση f_k στο παράδειγμα 1.3.4.

Είναι εύκολο να δούμε ότι η ακολουθία έχει οριο την

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{array} \right\}$$

Η οριακή συνάρτηση $f(x)$ *δεν είναι συνεχής και επομένως δεν είναι στοιχείο του χώρου* $\boldsymbol{C}([0,1])$. *Η ακολουθία* (f_n) *δεν είναι συγκλίνουσα στον* $\boldsymbol{C}([0,1])$. *Συνεπώς ο* $\boldsymbol{C}([0,1])$ *δεν είναι χώρος Hilbert.*

Παράδειγμα 1.3.5. *Οι χώροι* $L^2(R)$ *και* $L^2([a,b])$ *είναι χώροι Hilbert.*

Παράδειγμα 1.3.6. *Έστω* ρ *μια μετρήσιμη συνάρτηση που ορίζεται στο διάστημα* $([a,b])$ *με* $\rho(x) > 0$ *σχεδόν παντού στο* $([a,b])$. *Με* $L^{2,\rho}([a,b])$ *συμβολίζουμε τον χώρο των μετρήσιμων συναρτήσεων* *με μιγαδικές τιμές στο* $[a, b]$, *τέτοιες ώστε*

$$\int_a^b |f(x)|^2 \rho(x) dx < \infty.$$

Αυτός είναι ένας χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\rho(x) dx.$$

Για να αποδείξουμε την πληρότητα θεωρούμε ακολουθία Cauchy (f_n) *στον* $L^{2,\rho}([a, b])$. *Ώστε,*

$$\|f_m - f_n\|^2_{L^{2,\rho}(|a,b|)} \int_a^b |f_m(x) - f_n(x)|^2 \rho(x) dx \to 0, \text{ όταν } n \to \infty.$$

Ορίζουμε

$$F_n = f_n \sqrt{\rho}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} \|F_m - F_n\|^2_{L^2(|a,b|)} &= \int_a^b |F_m(x) - F_n(x)|^2 \, dx \\ &= \int_a^b \left| f_m(x)\sqrt{\rho(x)} - f_n(x)\sqrt{\rho(x)} \right|^2 dx \\ &= \int_a^b |f_m(x) - f_m(x)|^2 \, \rho(x) dx \\ &= \|f_m - f_n\|^2_{L^{2,\rho}(|a,b|)} \end{aligned}$$

(F_n) *είναι μια ακολουθία Cauchy στον* $L^2(|a, b|)$. *Τότε υπάρχει* $F \in L^2(|a, b|)$ *τέτοια ώστε,*

$$\|F_n - F\|^2_{L^2(|a,b|)} = \int_a^b |F_n(x) - F(x)|^2 \, dx \to 0.$$

Με αντίστοιχο ισχυρισμό μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\frac{F}{\sqrt{\rho}} \in L^{2,\rho}(|a, b|) \text{ και } f_n \to \frac{F}{\sqrt{\rho}}$$

αποδεικνύοντας την πληρότητα του $L^{2,\rho}(|a, b|)$.

Παράδειγμα 1.3.7. *(Χώροι Sobolev)*
Για $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ όπου a_i είναι μη αρνητικοί ακέραιοι, συμβολίζουμε

$$|a| = a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

Έστω Ω ένα ανοιχτό σύνολο στον R^N, συμβολίζουμε με $\widetilde{H}^m(\Omega)$, $m = 1, 2, 3, ...$ τον χώρο των συναρτήσεων μιγαδικών τιμών $f \in \boldsymbol{C}^m(\Omega)$ με την ιδιότητα $D^a f \in L^2(\Omega)$ για όλα τα $|a| \leq m$, όπου

$$D^a f = \frac{\partial^{|a|} f}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a^2} \cdots \partial x_N^{a_N}}.$$

Για παράδειγμα, εάν $N = 2, a = (2, 1)$ έχουμε

$$D^a f = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}$$

Έτσι, για $f \in \widetilde{H}^m(\Omega)$, έχουμε

$$\int_\Omega \left| \frac{\partial^{|a|} f}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \cdots \partial x_N^{a_N}} \right|^2 < \infty$$

για κάθε πολυδείκτη $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ έτσι ώστε $|a| \leq m$. Το εσωτερικό γινόμενο στον $\widetilde{H}^m(\Omega)$ ορίζεται από τη σχέση:

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega \sum_{|a| \leq m} D^a f \overline{D^a g}.$$

Ειδικότερα:
Εάν $\Omega \subseteq R^2$, τότε το εσωτερικό γινόμενο στον $\widetilde{H}^2(\Omega)$ είναι:

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega (f\overline{g} + f_x \overline{g_x} + f_y \overline{g_y} + f_{xx} \overline{g_{xx}} + f_{yy} \overline{g_{yy}} + f_{xy} \overline{g_{xy}})$$

Εάν $\Omega = (a, b) \subset R$ τότε το εσωτερικό γινόμενο στον $\widetilde{H}^m(a, b)$ είναι:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \sum_{n=0}^m \frac{d^n f}{dx^n} \frac{\overline{d^n g}}{dx^n}.$$

Ο $\widetilde{H}^m(\Omega)$ είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου αλλά δεν είναι χώρος Hilbert γιατί δεν είναι πλήρης. Η πληρότητα του $\widetilde{H}^m(\Omega)$,που υποδηλώνεται από τον $H^m(\Omega)$ είναι ένας χώρος Hilbert. Λόγω των εφαρμογών των χώρων $H^m(\Omega)$ στις μερικές διαφορικές εξισώσεις, οι χώροι αποτελούν ένα από τα πιο σημαντικά παραδείγματα χώρων Hilbert.

Από τη στιγμή που κάθε χώρος εσωτερικού γινομένου είναι χώρος με νόρμα, είναι εφοδιασμένος με μια σύγκλιση, ή διαφορετικά, η σύγκλιση καθορίζεται από την νόρμα. Αυτή η σύγκλιση θα καλείται ισχυρή σύγκλιση.

Ορισμός 1.3.2. *(Ισχυρή σύγκλιση) Μια ακολουθία (x_n) από διανύσματα σε έναν χώρο εσωτερικού γινομένου E καλείται ισχυρώς συγκλίνουσα σε ένα διάνυσμα x στον E εάν:*

$$\|x_n - x\| \to 0 \text{ όταν } n \to \infty$$

(Η λέξη ισχυρή χρησιμοποιήθηκε για να διαχωρίσουμε την ισχυρή από την ασθενή σύγκλιση.)

Ορισμός 1.3.3. *(Ασθενής σύγκλιση) Μια ακολουθία (x_n) από διανύσματα σε έναν χώρο εσωτερικού γινομένου E καλείται ασθενώς συγκλίνουσα σε ένα διάνυσμα x στον E εάν:*

$$\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle \text{ όταν } n \to \infty \text{ για κάθε } y \in E.$$

Η συνθήκη στον παραπάνω ορισμό διατυπώνεται επίσης ως εξής: $\langle x_n - x, y\rangle \to 0$ όταν $n \to \infty$ για κάθε $y \in E$.
Χάριν ευκολίας, χρησιμοποιούμε τον μαθηματικό συμβολισμό ¨$x_n \to x$¨ για την ισχυρή σύγκλιση και τον συμβολισμό ¨$x_n \xrightarrow{w} x$¨ την ασθενή σύγκλιση.

Θεώρημα 1.3.1. *Μία ισχυρώς συγκλίνουσα ακολουθία είναι ασθενώς συγκλίνουσα (στο ίδιο όριο), το οποίο σημαίνει ότι όταν $x_n \to x$ τότε ισχύει επίσης και ότι $x_n \xrightarrow{w} x$.*

Απόδειξη:

Έστω ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει ισχυρά στο x. Αυτό σημαίνει ότι $\|x_n - x\| \to 0$ όταν $n \to \infty$. Από την ανισότητα του Schwarz έχουμε ότι:

$$|\langle x_n - x, y\rangle| \leq \|x_n - x\| \cdot \|y\| \to 0 \text{ όταν } n \to \infty$$

και έτσι

$$\langle x_n - x, y\rangle \to 0 \text{ όταν } n \to \infty \text{ για κάθε } y \in E.$$

Για κάθε σταθερό y σε έναν χώρο εσωτερικού γινομένου E, ο συμβολισμός $\langle \cdot\,, y\rangle : E \to \boldsymbol{C}$ είναι μία γραμμική απεικόνιση στον E. Το θεώρημα 1.3.1 υποστηρίζει ότι μια τέτοια απεικόνιση είναι συνεχής για κάθε $y \in E$. Προφανώς, η αναπαράσταση $\langle x, \cdot\,\rangle : E \to \boldsymbol{C}$ είναι επίσης συνεχής. Γενικά, δεν ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος 1.3.1.

Θεώρημα 1.3.2. *Εάν $x_n \to x$ και $y_n \to y$, τότε $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$.*

Απόδειξη:

Εάν $x_n \to x$ και $y_n \to y$, τότε

$$\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &\le |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \\
&= |\langle x_n - x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n - y\rangle| \\
&\le \|x_n - x\|\|y_n\| + \|x\|\|y_n - y\| \to 0,
\end{aligned}$$

από την στιγμή που η ακολουθία (y_n) είναι φραγμένη.
Άμεση συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι η ακόλουθη σημαντική συνθήκη για την ύπαρξη ισχυρής σύγκλισης:

$$x_n \to x \text{ συνεπάγεται ότι } \|x_n\| \to \|x\| \tag{1.6}$$

Γενικά, το θεώρημα 1.3.2. και η συνθήκη 1.6 δεν ισχύουν για την ασθενή σύγκλιση.

Θεώρημα 1.3.3. *Εάν $x_n \xrightarrow{w} x$ και $\|x_n\| \to \|x\|$, τότε $x_n \to x$.*

Απόδειξη:

Εάν $x_n \xrightarrow{w} x$,τότε για όλα τα y έχουμε

$$\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle \text{ καθώς } n \to \infty$$

Ως εκ τούτου,

$$\langle x_n, x\rangle \to \langle x, x\rangle = \|x\|^2.$$

Τώρα,

$$\begin{aligned}\|x_n - x\|^2 &= \langle x_n - x, x_n - x\rangle \\ &= \langle x_n, x_n\rangle - \langle x_n, x\rangle - \langle x, x_n\rangle + \langle x, x\rangle \\ &= \|x_n\|^2 - 2Re\langle x_n, x\rangle + \|x\|^2 \to \|x\|^2 - 2\|x\|^2 + \|x\|^2 = 0\end{aligned}$$

καθώς $n \to \infty$.
Για αυτό τον λόγο η ακολουθία (x_n) είναι ισχυρώς συγκλίνουσα στο x.
Το επόμενο θεώρημα είναι χρήσιμο για την απόδειξη της ασθενούς σύγκλισης.

Θεώρημα 1.3.4. *Έστω S ένα υποσύνολο ενός χώρου εσωτερικού γινομένου E. Έτσι ώστε $spanS$ να είναι πυκνό στον E. Εάν (x_n) είναι φραγμένη ακολουθία στον E και $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ για κάθε $y \in S$ τότε $x_n \xrightarrow{w} x$.*

Απόδειξη:

Προφανώς, αν $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ για κάθε $y \in S$, τότε $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ για κάθε $y \in spanS$. Έστω ότι $z \in E$ και ϵ ένας αυθαίρετος θετικός αριθμός. Από τη στιγμή που το $spanS$ είναι πυκνό στο E, υπάρχει ένα $y_0 \in spanS$ έτσι ώστε :

$$\|z - y_0\| < \frac{\epsilon}{3M},$$

όπου M είναι μία θετική σταθερά τέτοια ώστε $\|x\| \leq M$ και $\|x_n\| \leq M$ για όλα τα $n \in N$. Αφού, $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ για κάθε $y \in spanS$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|\langle x_n, y_0\rangle - \langle x, y_0\rangle| < \frac{\epsilon}{3} \text{ για όλα τα } n > n_0.$$

Τώρα, για κάθε $n > n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}|\langle x_n, z\rangle - \langle x, z\rangle| &\leq |\langle x_n, z\rangle - \langle x_n, y_0\rangle| + |\langle x_n, y_0\rangle - \langle x, y_0\rangle| + |\langle x, y_0\rangle - \langle x, z\rangle| \\ &< \|x_n\|\|z - y_0\| + \frac{\epsilon}{3} + \|x\|\|y_0 - z\| \\ &< M\frac{\epsilon}{3M} + \frac{\epsilon}{3} + M\frac{\epsilon}{3M} = \epsilon.\end{aligned}$$

Από τη στιγμή που τα z και ϵ είναι αυθαίρετα συμπεραίνουμε ότι $x_n \xrightarrow{w} x$.

Το ακόλουθο θεώρημα αποτελεί σημαντική συνθήκη για την ασθενή σύγκλιση στους χώρους Hilbert .Η απόδειξη βασίζεται στο θεώρημα Banach-Steinhaus.

Θεώρημα 1.3.5. *Οι ασθενώς συγκλίνουσες ακολουθίες σε έναν χώρο Hilbert είναι φραγμένες, δηλαδή αν* (x_n) *είναι μια ασθενώς συγκλίνουσα ακολουθία, τότε υπάρχει ένας αριθμός* M *τέτοιος ώστε* $\|x_n\| \leq M$ *για όλα τα* $n \in N$.

Απόδειξη:

Έστω ότι (x_n) είναι μια ασθενώς συγκλίνουσα ακολουθία σε έναν χώρο Hilbert H. Ορίζουμε,

$$f_n(x) = \langle x, x_n \rangle \quad n \in \mathbb{N}.$$

Τότε, η $f_n : H \to \boldsymbol{C}$ είναι μια γραμμική φραγμένη απεικόνιση για κάθε $n \in N$, από το Θεώρημα 1.3.1. Από τη στιγμή που για κάθε $x \in H$, η ακολουθία $(\langle x, x_n \rangle)$ συγκλίνει, είναι φραγμένη, επομένως υπάρχει μια σταθερά M_x, τέτοια ώστε $|f_n(x)| = |\langle x, x_n \rangle| \leq M_x$ για όλα τα $n \in N$. Από το θεώρημα Banach-Steinhaus, υπάρχει μια σταθερά M τέτοια ώστε

$$\|f_n\| \leq M \quad \text{για όλα τα } n \in N$$

Αφού

$$|f_n(x)| = |\langle x, x_n \rangle| \leq \|x\| \|x_n\|$$

για κάθε $x \in H$, έχουμε

$$\|f_n\| \leq \|x_n\|.$$

Από την άλλη μεριά,

$$|f_n(x_n)| = |\langle x_n, x_n \rangle| = \|x_n\|^2.$$

Συνεπώς

$$\|f_n\| = \|x_n\|,$$

και άρα

$$\|x_n\| \leq M, \quad \text{για όλα τα } n \in N.$$

Παράδειγμα 1.3.8. *Έστω (x_n) μια πλήρης ορθοκανονική ακολουθία σ' έναν χώρο Hilbert. Τότε:*

$$x_n \xrightarrow{w} 0$$

Απόδειξη:

Από τον τύπο Parseval γνωρίζουμε ότι $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2$, για κάθε $x \in H$.
Άρα $\lim\langle x, x_n \rangle = 0$ για κάθε $x \in X$, και άρα $x_n \xrightarrow{w} 0$.

Κεφάλαιο 2

Ορθογωνιότητα σε χώρους Hilbert

2.1 Ορθογώνια και ορθοκανονικά συστήματα

Ορισμός 2.1.1. *Ορίζουμε βάση του διανυσματικού χώρου E μία γραμμική οικογένεια B από διανύσματα του E έτσι ώστε κάθε διάνυσμα $x \in E$, να μπορεί να γραφεί ως $x = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n x_n$ όπου $x_n \in B$ και λ βαθμωτά μεγέθη.*

Σε χώρους με εσωτερικό γινόμενο, οι ορθοκανονικές βάσεις έχουν μεγάλη σημασία. Αντί για τα πεπερασμένα στοιχεία εισάγουμε τα πεπερασμένα αθροίσματα $x = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n x_n$ και η συνθήκη της γραμμικής ανεξαρτησίας αντικαθίσταται από την ορθογωνιότητα.
Ένα από τα άμεσα πλεονεκτήματα αυτών των αλλαγών είναι η δυνατότητα περιγραφής ορθομοναδιαίων βάσεων. Για παράδειγμα, ο χώρος $L^2([-\pi, \pi])$ έχει αριθμήσιμες ορθοκανονικές βάσεις που αποτελούνται από απλές εξισώσεις καθώς κάθε βάση του $L^2([-\pi, \pi])$ είναι μη αριθμήσιμη και το μόνο που μπορούμε να αποδείξουμε είναι ότι μια τέτοια βάση υπάρχει χωρίς να είναι ικανή να περιγράφει τα στοιχεία της.
Στη συνέχεια, θα δώσουμε όλους τους απαραίτητους ορισμούς καθώς και τις βασικές προϋποθέσεις των ορθοκανονικων βάσεων.

Ορισμός 2.1.2. *(ορθογώνια και ορθοκανονικά συστήματα) Έστω E ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Μία οικογένεια S από μη μηδενικά διανύσματα καλείται ορθογώνιο σύστημα αν $x \perp y$ δηλαδή $\langle x, y \rangle = 0$ για κάθε διάφορα ανά δύο στοιχεία του S.*
Εάν επίσης, $||x|| = 1$ για όλα τα $x \in S$, τότε το S καλείται ορθοκανονικό σύστημα.

Κάθε ορθογώνιο σύνολο από μη μηδενικά διανύσματα μπορεί να κανονικοποιηθεί. Εάν το S *είναι ένα ορθογώνιο σύστημα, τότε η οικογένεια* $S_1 = \{\frac{x}{||x||} : x \in S\}$ *αποτελεί ένα ορθοκανονικό σύστημα.Και τα δύο συστήματα είναι ισοδύναμα υπό την έννοια ότι η γραμμική θήκη τους παράγει τον ίδιο υπόχωρο του* E.
Σημειώνουμε ότι εάν το x *είναι κάθετο σε κάθε ένα από τα* $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ *τότε το* x *είναι κάθετο σε κάθε γραμμικό συνδυασμό από τα διανύσματα* $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$.

Πράγματι, εάν $y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k, k = 1, 2, ..., n$ τότε θα έχουμε:

$$\langle x, y\rangle = \left\langle x, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{\lambda_k} \langle x, y_k\rangle = 0.$$

Θεώρημα 2.1.1. *Τα ορθογώνια συστήματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Απόδειξη:

Έστω S ένα ορθογώνιο σύστημα. Αν υποθέσουμε ότι $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0$ για $k = 1, 2..., n$ για κάποια $x_1, x_2, x_3, ..., x_n \in S$ και $a_1, a_2, a_3, ...a_n \in \boldsymbol{C}$, τότε

$$0 = \sum_{m=1}^{n} \langle 0, \alpha_m x_m\rangle = \sum_{m=1}^{n} \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_k x_k, a_m x_m \right\rangle = \sum_{m=1}^{n} |a_m|^2 ||x_m||^2.$$

Από αυτό προκύπτει ότι $a_m = 0$ για κάθε $m \in N$. Επιπλέον, τα $x_1, x_2, ..., x_n \in S$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Ορισμός 2.1.3. *(Ορθοκανονική ακολουθία) Μία ακολουθία διανυσμάτων τα οποία αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύστημα καλείται ορθοκανονική ακολουθία.*

Η συνθήκη ορθογωνιότητας της ακολουθίας (x_n) μπορεί να εκφραστεί με τα σύμβολα δ του Kronecker

$$\langle x_n, x_m\rangle = \delta_{mn} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\}$$

όπου $\delta_{mn} = 0$ αν $m \neq n$ και $\delta_{mn} = 1$ αν $m = n$.

Παράδειγμα 2.1.1. *Το $e_n = (0, 0, ..., 0, 1, 0...)$ με το 1 στην n-οστή θέση, το σύνολο $S = \{e_1, e_2, e_3, ...\}$ είναι ένα ορθοκανονικό σύστημα στον ℓ^2.*

Παράδειγμα 2.1.2. *Έστω $\phi_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, n \in \boldsymbol{Z}$. Το σύνολο των $\{\phi_n : n \in \boldsymbol{Z}\}$ αποτελεί ένα ορθοκανονικό σύστημα στον $L^2([-\pi, \pi])$. Πράγματι, για $m \neq n$ έχουμε*

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx = \frac{e^{\pi i(m-n)} - e^{-\pi i(m-n)}}{2\pi i(m-n)} = 0.$$

Επίσης, ισχύει ότι

$$\langle \phi_n, \phi_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx = 1.$$

Επομένως,

$$\langle \phi_n, \phi_n \rangle = \delta_{mn} \text{ για κάθε ζεύγος από ακεραίους } m, n.$$

Παράδειγμα 2.1.3. *Τα πολυώνυμα Legendre τα οποία ορίζονται από τους τύπους*

$$\begin{aligned} &P_0(x) = 1, \\ &P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 1, 2, 3, ... \end{aligned} \tag{2.1}$$

συνιστούν ένα ορθογώνιο σύστημα στον χώρο $L^2([-1, 1])$.
Για διευκόλυνση γράφουμε $(x^2 - 1)^n = p_n(x)$ έτσι ώστε :

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) x^m dx = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{1} p_n^{(n)}(x) x^m dx. \tag{2.2}$$

Ο υπολογισμός του παραπάνω ολοκληρώματος για $m < n$ γίνεται με επαναληπτικό τρόπο. Αρχικά, έχουμε ότι

$$p^{(k)}(x) = 0 \text{ για } x \pm 1 \text{ και } k = 0, 1, 2, .., n-1$$

Λαμβάνοντας υπόψιν την παραπάνω υπόθεση και τη σχέση (2.2) έχουμε ότι

$$\int_{-1}^{1} p_n^{(n)}(x) x^m dx = -m \int_{-1}^{1} p_n^{(n-1)}(x) x^{m-1} dx.$$

Με επαναληπτικό τρόπο οδηγούμαστε στη σχέση

$$(-1)^m m! \int_{-1}^{1} p_n^{(n-m)}(x)dx = (-1)^m m! \left[p_n^{(n-m-1)}(x)\right]_{-1}^{1} = 0 \quad (m < n).$$

Συνεπώς

$$\int_{-1}^{1} p_n(x)x^m dx = 0 \text{ για } m < n \tag{2.3}$$

Γνωρίζοντας ότι P_m *πολυώνυμο βαθμού* m, *συνεπάγεται:*

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0, \text{ για } n \neq m. \tag{2.4}$$

Το παραπάνω αποδεικνύει την ορθογωνιότητα των πολυωνύμων Legendre.
Για τη δημιουργία ενός ορθοκανονικού συστήματος χρειάζεται να υπολογίσουμε την νόρμα των P_n *στον χώρο* $L^2([-1,1])$

$$||P_n|| = \sqrt{\int_{-1}^{1} (P_n(x))^2 dx}.$$

Με επαναλαμβανόμενη ολοκλήρωση, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx &= \int_{-1}^{1} (1-x)^n (1+x)^n dx \\
&= \frac{n}{n+1} \int_{-1}^{1} (1-x)^{n-1}(1+x)^{n+1})dx = \ldots \\
&= \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{(n+1)(n+2)\cdots 2n} \int_{-1}^{1} (1+x)^{2n} dx \\
&= \frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Με ανάλογο τρόπο,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}(p_n^{(n)}(x))^2dx &= 0-\int_{-1}^{1}p_n^{(n-1)}(x)p_n^{(n+1)}(x)dx \\
&= \ldots \\
&= (-1)^n\int_{-1}^{1}p_n(x)p_n^{(2n)}(x)dx \\
&= (2n)!\int_{-1}^{1}(1-x)^n(1+x)^ndx. \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Για την απόδειξή της λάβαμε υπόψιν ότι η δεύτερη παράγωγος του $p_n(x) = (x^2-1)^n$ είναι η ίδια με την παράγωγο με εκθέτη $2n$.Οι δεύτερες παράγωγοι όλων των άλλων όρων του αθροίσματος είναι μηδενικές. Από τις σχέσεις (2.1), (2.5) και (2.6)

$$\int_{-1}^{1}(P_n(x))^2dx = \frac{1}{(2^nn!)^2}(2n)!\frac{(n\ )^22^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)} = \frac{2}{2n+1}. \qquad (2.7)$$

Επιπλέον, τα πολυώνυμα $\sqrt{n+\frac{1}{2}}P_n(x)$ ορίζουν ένα ορθοκανονικό σύστημα στον $L^2([-1,1])$.

Παράδειγμα 2.1.4. *Συμβολίζουμε με H_n τα Ερμιτιανά πολυώνυμα βαθμού n όπου*

$$H_n(x) = (-1)^ne^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}. \qquad (2.8)$$

Οι συναρτήσεις $\phi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)$ ορίζουν ένα ορθοκανονικό σύστημα στον $L^2(R)$.
Το εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle\phi_n,\phi_m\rangle = (-1)^{n+m}\int_{-\infty}^{\infty}e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\frac{d^m}{dx^m}e^{-x^2}dx$$

μπορεί να υπολογιστεί με ολοκλήρωση κατά μέλη, η οποία μας δίνει

$$(-1)^{n+m}\langle\phi_n,\phi_m\rangle = \left[e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}e^{-x^2}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dx}\left[e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\right]\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}e^{-x^2}dx, \qquad (2.9)$$

Παρατηρούμε ότι όλοι οι ανομοιογενείς όροι περιέχουν τον παράγοντα e^{-x^2}. Για κάθε $k \in N$, ισχύει ότι $x^ke^{-x^2} \to 0$ όταν $x \to \infty$ και επομένως ο πρώτος όρος της σχέσης (2.9) μηδενίζεται. Με επαναλαμβανόμενη ολοκλήρωση κατά μέλη οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι $\langle\phi_n,\phi_m\rangle = 0$ για $n \neq m$.

Για τη δημιουργία ορθοκανονικού συστήματος υπολογίζουμε τη νόρμα:

$$||\phi_n||^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \left(H_n(x)\right)^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \left[e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}\right]^2 dx.$$

Με ολοκλήρωση κατά μέλη n φορές οδηγούμαστε στη σχέση:

$$||\phi_n||^2 = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left[e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}\right] dx.$$

Από τη στιγμή που το H_nείναι ένα πολυώνυμο βαθμού n, η άμεση παραγώγιση δίνει:

$$e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = (-2x)^n + \cdots$$

και

$$\frac{d^n}{dx^n} \left[e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}\right] = \frac{d^n}{dx^n} \left((-2x)^n + \cdots\right) = (-1)^n 2^n n!.$$

Συνεπώς,

$$||\phi_n||^2 = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}. \tag{2.10}$$

Επομένως, οι συναρτήσεις

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-x^2/2} H_n(x) \tag{2.11}$$

ορίζουν ένα ορθοκανονικό σύστημα στον $L^2(R)$.

Στα προηγούμενα παραδείγματα, η πραγματική ακολουθία συναρτήσεων είναι ορθογώνια αλλά όχι ορθοκανονική. Παρόλο που οι υπολογισμοί μπορεί να ήταν περίπλοκοι, είναι δυνατόν να κανονικοποιήσουμε τις συναρτήσεις και να αποκτήσουμε μια ορθοκανονική ακολουθία.
Αποδεικνύεται ότι εάν η αρχική ακολουθία των συναρτήσεων (ή, γενικά, μια ακολουθία από διανύσματα σε έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο) είναι γραμμικά ανεξάρτητη, όχι όμως απαραίτητα ορθογώνια, μπορεί επίσης να κανονικοποιηθεί. Η διαδικασία μετασχηματισμού μιας τέτοιας ακολουθίας σε μια ορθοκανονική ακολουθία καλείται μέθοδος ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt.
Η διαδικασία μπορεί να περιγράφει ως εξής: Έστω μια ακολουθία (y_n) από γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα σε έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο. Ορίζουμε τις ακολουθίες (ω_n) και (x_n) ως εξής:

$$w_1 = y_1, \qquad x_1 = \frac{w_1}{||w_1||},$$
$$w_k = y_k - \sum_{n=1}^{k-1} \langle y_k, x_n \rangle x_n, \quad x_k = \frac{w_k}{||w_k||},$$

για $k = 2, 3, ...$
Η ακολουθία (ω_n) είναι ορθογώνια. Πράγματι, παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}\langle w_2, w_1 \rangle &= \langle y_2 - \langle y_2, x_1 \rangle x_1, y_1 \rangle = \langle y_2, y_1 \rangle - \langle y_2, x_1 \rangle \langle x_1, y_1 \rangle \\ &= \langle y_2, y_1 \rangle - \frac{\langle y_2, y_1 \rangle \langle y_1, y_1 \rangle}{||y_1||^2} = 0.\end{aligned}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $\omega_1, ..., \omega_{k-1}$, είναι ορθογώνια. Τότε, για κάθε $m < k$:

$$\begin{aligned}\langle w_k, w_m \rangle &= \langle y_k, w_m \rangle - \frac{\sum_{n=1}^{k-1} \langle y_k, w_n \rangle \langle w_n, w_m \rangle}{||w_m||^2} \\ &= \langle y_k, w_m \rangle - \frac{\langle y_k, w_m \rangle \langle w_m, w_m \rangle}{||w_m||^2} = 0.\end{aligned}$$

Για αυτό τον λόγο, τα διανύσματα $\omega_1, ..., \omega_k$ είναι ορθογώνια. Ακολούθως, από υπόθεση, η ακολουθία (ω_n) είναι ορθογώνια, και επιπλέον, η (x_n) είναι ορθοκανονική.
Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι κάθε γραμμικός συνδυασμός από διανύσματα $x_1, ..., x_n$ είναι επίσης ένας γραμμικός συνδυασμός των $y_1, ..., y_n$ και αντίστροφα. Επομένως,

$$span\{x_1, ..., x_n\} = span\{y_1, ..., y_n\} \text{ για κάθε } n \in N$$

2.2 Ιδιότητες ορθοκανονικών συστημάτων

Το Πυθαγόρειο θεώρημα εφαρμόζεται σε κάθε ζεύγος από κάθετα διανύσματα σε έναν χώρο εσωτερικού γινομένου. Αυτό μπορεί να γενικευθεί σε κάθε πεπερασμένο αριθμό από κάθετα διανύσματα.

Θεώρημα 2.2.1. *(Πυθαγόρειο Θεώρημα) Έστω ότι $x_1, ..., x_n$ είναι ορθογώνια διανύσματα σε έναν* *χώρο εσωτερικού γινομένου. Τότε,*

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} ||x_k||^2. \tag{2.12}$$

Απόδειξη:

Εάν $x_1 \perp x_2$, τότε $||x_1 + x_2||^2 = ||x_1||^2 + ||x_2||^2$. Επιπλέον, το θεώρημα ισχύει για $n = 2$. Έστω ότι η (2.12) ισχύει για $n-1$, δηλαδή:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n-1} x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n-1} ||x_k||^2.$$

Θέτουμε $x = \sum_{k=1}^{n-1} x_k$ και $y = x_n$. Αφού $x \perp y$, έχουμε

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 = ||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 = \sum_{k=1}^{n-1} ||x_k||^2 + ||x_n||^2 = \sum_{k=1}^{n} ||x_k||^2.$$

Θεώρημα 2.2.2. *(Η ισότητα και ανισότητα του Bessel) Έστω ότι $x_1, ..., x_n$ αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύνολο από διανύσματα σε έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο E. Τότε, για κάθε $x \in E$ έχουμε:*

$$\left\|x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k\rangle x_k\right\|^2 = ||x||^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k\rangle|^2 \tag{2.13}$$

και

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k\rangle|^2 \leq ||x||^2. \tag{2.14}$$

Απόδειξη:

Με βάση το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} ||a_k x_k||^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2$$

για οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς $a_1, ..., a_n$.

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\left\|x-\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\right\|^2 &= \left\langle x-\sum_{k=1}^{n}a_kx_k, x-\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\right\rangle \\ &= ||x||^2-\left\langle x,\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\right\rangle-\left\langle \sum_{k=1}^{n}a_kx_k, x\right\rangle+\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2||x_k||^2 \\ &= ||x||^2-\sum_{k=1}^{n}\overline{a_k}\langle x,x_k\rangle-\sum_{k=1}^{n}a_k\overline{\langle x,x_k\rangle}+\sum_{k=1}^{n}a_k\overline{a_k} \\ &= ||x||^2-\sum_{k=1}^{n}|\langle x,x_k\rangle|^2+\sum_{k=1}^{n}|\langle x,x_k\rangle-a_k|^2. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Ειδικότερα, εάν $a_k=\langle x,x_k\rangle$, οδηγούμαστε στην σχέση (2.13). Από την (2.13) συνεπάγεται ότι:

$$0\leq ||x||^2-\sum_{k=1}^{n}|\langle x,x_k\rangle|^2,$$

το οποίο μας οδηγεί στην (2.14) .

Παρατηρήσεις:

1. Σημειώνουμε ότι η παράσταση (2.15) ελαχιστοποιείται θέτοντας $a_k=\langle x,x_k\rangle$. Αυτή η επιλογή των a_k ελαχιστοποιεί την $\left\|x-\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\right\|$ και κατά αυτόν τον τρόπο, μας δίνει τη καλύτερη προσέγγιση των x από έναν γραμμικό συνδυασμό των $x_1,...,x_n$.
2. Εάν (x_n) είναι μια ορθοκανονική ακολουθία από διανύσματα σε έναν χώρο εσωτερικού γινομένου E, τότε από την (2.13) όταν $n\to\infty$ παίρνουμε:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x,x_k\rangle|^2\leq ||x||^2 \tag{2.16}$$

και κατά συνέπεια $\lim_{n\to\infty}\langle x,x_n\rangle=0$. Επομένως, οι ορθοκανονικές ακολουθίες συγκλίνουν ασθενώς στο μηδέν. Αντίστοιχα, από τη στιγμή που $||x_n||=1$ για όλα τα $n\in N$, οι ορθοκανονικές ακολουθίες συγκλίνουν ισχυρώς. Η σχέση (2.16) μας δείχνει ότι οι σειρές ορθοκανονικοποίησης $\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x,x_k\rangle|^2$ συκλίνουν για κάθε $x\in E$. Με άλλα λόγια, η ακολουθία $(\langle x,x_n\rangle)$ είναι ένα στοιχείο του ℓ^2. Μπορούμε να πούμε ότι μία ορθοκανονική ακολουθία στον E καταφέρνει να

μας οδηγήσει από τον χώρο E στον ℓ^2.
Η επέκταση:

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n \tag{2.17}$$

καλείται γενικευμένη σειρά Fourier των x. Τα μεγέθη $a_n = \langle x, x_n \rangle$ καλούνται γενικευμένοι συντελεστές Fourier των x όσον αφορά την ορθοκανονική ακολουθία (x_n). Όπως παρατηρούμε αυτό το σύνολο από συντελεστές δίνει την καλύτερη προσέγγιση. Γενικά, δεν γνωρίζουμε εάν οι σειρές στην (2.17) είναι συγκλίνουσες. Ωστόσο, όπως δείχνει το επόμενο θεώρημα, η πληρότητα του χώρου διασφαλίζει την σύγκλιση.

Θεώρημα 2.2.3. *Έστω (x_n) είναι μία ορθοκανονική ακολουθία σε έναν χώρο Hilbert H και έστω επίσης ότι (a_n) είναι μία ακολουθία από μιγαδικούς αριθμούς. Τότε, οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ συγκλίνουν αν και μόνο αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n < \infty$ και σε αυτήν την περίπτωση*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{n} |a_n|^2. \tag{2.18}$$

Απόδειξη:

Για κάθε $m > k > 0$ έχουμε:

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} a_n x_n \right\|^2 = \sum_{n=k}^{m} |a_n|^2. \tag{2.19}$$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$, τότε η ακολουθία $s_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ είναι ακολουθία Cauchy από την (2.19). Αυτό υποδηλώνει την σύγκλιση των σειρών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ εξαιτίας της πληρότητας του H.
Αντίστροφος, εάν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ συγκλίνουν, τότε από την (2.19) και οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ συγκλίνουν, επειδή η ακολουθία αριθμών $\sigma_m = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ είναι μία Cauchy ακολουθία στον R.
Για να καταλήξουμε στην (2.18) είναι αρκετό να θέσουμε $k = 1$ και $m \to \infty$ στην (2.19).
Το προηγούμενο θεώρημα και η σχέση (2.16) δείχνουν ότι σε έναν χώρο Hilbert H οι σειρές

$\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, x_n\rangle x_n$ συγκλίνουν για κάθε $x \in H$. Παρόλα αυτά, μπορεί και να συγκλίνουν σε ένα στοιχείο διαφορετικό του x.

Παράδειγμα 2.2.1. *Έστω $H = L^2[(-\pi, \pi)]$ και έστω $x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt$ για $n = 1, 2, \ldots$. Η ακολουθία (x_n) είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο στον H. Από την άλλη μεριά, για $x(t) = \cos(t)$, έχουμε:*

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, x_n\rangle x_n(t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\sin t dt\right]\frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 0 \cdot \sin nt = 0 \neq \cos t.\end{aligned}$$

Ορισμός 2.2.1. *(πλήρης ορθοκανονική ακολουθία) Μία ορθοκανονική ακολουθία (x_n) σε έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο E λέμε ότι είναι πλήρης εάν για κάθε $x \in E$ έχουμε:*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, x_n\rangle x_n. \tag{2.20}$$

Τονίζουμε ότι από τη στιγμή που στο δεξιό μέλος της (2.20) έχουμε μία άπειρη σειρά, συνεπάγεται ότι:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left|x - \sum_{k=1}^{n}\langle x, x_k\rangle x_k\right|\right| = 0,$$

όπου $||\cdot||$ είναι νόρμα στον E. Για παράδειγμα, εάν $E = L^2[(-\pi, \pi)]$ και (f_n) είναι μία ορθοκανονική ακολουθία στον E, τότε με τη σχέση:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty}\langle f, f_n\rangle f_n,$$

εννοούμε

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(t) - \sum_{k=1}^{n}a_k f_k(t)\right|^2 dt = 0 \text{ όπου } a_k \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{f_k(t)}dt$$

Αυτό γενικά, δεν σημαίνει κατά σημείο σύγκλιση όσον αφορά την

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x).$$

Ορισμός 2.2.2. *(Ορθοκανονική βάση) Ένα ορθοκανονικό σύστημα B σε έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο E καλείται ορθοκανονική βάση εάν κάθε $x \in E$ έχει μία μοναδική αναπαράσταση*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n,$$

όπου $a \in \boldsymbol{C}$ και x_n είναι διαφορετικά μεταξύ τους στοιχεία του B.

Παρατηρήσεις

1. Σημειώνουμε ότι μία πλήρης ορθοκανονική ακολουθία (x_n) σε έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο E αποτελεί μία ορθοκανονική βάση στον E. Αρκεί να αποδείξουμε την μοναδικότητα. Πράγματι, εάν

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$$

και

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n$$

τότε

$$0 = ||x - x||^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n \right\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \beta_n) x_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n - \beta_n|^2.$$

από το θεώρημα 2.2.3. Αυτό σημαίνει ότι $\alpha_n = \beta_n$ για όλα τα $n \in N$, αποδεικνύοντας την μοναδικότητα.

2. Εάν (x_n) είναι μία πλήρης ορθοκανονική ακολουθία σε έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο E, τότε το σύνολο

$$span\{x_1, x_2, ...\} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k x_k : n \in \mathbb{N}, a_1, ..., a_k \in \mathbb{C} \right\}$$

είναι πυκνό στον E. Τα δύο ακόλουθα θεωρήματα δίνουν σημαντικά χαρακτηριστικά για τις πλήρεις ορθοκανονικές ακολουθίες στους χώρους Hilbert.

Θεώρημα 2.2.4. *Μία ορθοκανονική ακολουθία (x_n) σε έναν χώρο Hilbert H είναι πλήρης αν και μόνο αν $\langle x, x_n \rangle = 0$ για όλα τα $n \in N$ έχουμε $x = 0$.*

Απόδειξη:

Υποθέτουμε ότι (x_n) είναι μία πλήρης ορθοκανονική ακολουθία στον H. Τότε κάθε $x \in H$ απεικονίζεται ως

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n.$$

Επιπλέον, εάν $\langle x, x_n \rangle = 0$ για κάθε $n \in N$, τότε $x = 0$.
Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι εάν $\langle x, x_n \rangle = 0$ για όλα τα $n \in N$ τότε $x = 0$.
Έστω x ένα στοιχείο του H. Ορίζουμε,

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n.$$

Το άθροισμα y υπάρχει στον H από το (2.16) και το θεώρημα (2.2.3).
Αφού για κάθε $n \in N$,

$$\begin{aligned}
\langle x - y, x_n \rangle &= \langle x, x_n \rangle - \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle x_k, x_n \right\rangle \\
&= \langle x, x_n \rangle - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle \langle x_k, x_n \rangle \\
&= \langle x, x_n \rangle - \langle x, x_n \rangle = 0,
\end{aligned}$$

έχουμε $x - y = 0$, και συνεπώς

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n.$$

Θεώρημα 2.2.5. *(Ο τύπος του Parseval) Μία ορθοκανονική ακολουθία (x_n) σε έναν χώρο Hilbert*

H είναι πλήρης αν και μόνο αν

$$||x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \quad \text{για κάθε } x \in H \tag{2.21}$$

Απόδειξη:

Έστω $x \in H$. Από την (2.13) για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\left|\left| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k \rangle x_k \right|\right|^2 = ||x||^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k \rangle|^2. \tag{2.22}$$

Εάν η (x_n) είναι μια πλήρης ακολουθία, τότε η έκφραση στο αριστερό μέλος της ισότητας (2.22) συγκλίνει στο μηδέν όταν $n \to \infty$. Συνεπώς,

$$\lim_{n \to \infty} \left[||x||^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k \rangle|^2 \right] = 0.$$

Για αυτό τον λόγο η σχέση (2.21) ισχύει.
Αντίστροφα, εάν ισχύει η (2.21) τότε η έκφραση στο δεξί μέλος της ισότητας (2.22) συγκλίνει στο μηδέν όταν $n \to \infty$, και έτσι,

$$\lim_{n \to \infty} \left|\left| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k \rangle x_k \right|\right|^2 = 0.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η (x_n) είναι πλήρης.

Παράδειγμα 2.2.2. *Το ορθοκανονικό σύστημα:*

$$\phi_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...,$$

είναι πλήρες στον χώρο $L^2([-\pi, \pi])$.
Η απόδειξη της πληρότητας δεν είναι απλή. Θα συζητηθεί στην παράγραφο 2.3. Μια απλή αλλαγή της ορολογίας μας επιτρέπει να παρουσιάσουμε μια συνάρτηση $f \in L^2([0, a])$ με τύπο

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{2n\pi i x/\alpha}$$

όπου

$$\beta_n = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} f(t)e^{-2n\pi it/\alpha}dt.$$

Παράδειγμα 2.2.3. *Η ακολουθία από συναρτήσεις*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

είναι ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα στον $L^2([-\pi,\pi])$. *Η ορθογωνιότητα επάγεται από τις ακόλουθες ταυτότητες με ολοκλήρωση:*

$$\begin{aligned} 2\cos nx\cos mx &= \cos(n+m)x + \cos(n-m)x, \\ 2\sin nx\sin mx &= \cos(n-m)x - \cos(n+m)x, \\ 2\cos nx\sin mx &= \sin(n+m)x - \sin(n-m)x, \end{aligned}$$

επειδή ισχύει,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mxdx = \pi$$

η σειρά είναι επίσης ορθοκανονική.
Η πληρότητα προκύπτει από την ακολουθία του παραδείγματος 2.2.2, με βάση τις ακόλουθες ταυτοτήτες:

$$e^0 = 1$$

και

$$e^{inx} = (\cos nx + i\sin nx).$$

Παράδειγμα 2.2.4. *Κάθε μία από τις παρακάτω δύο ακολουθίες συναρτήσεων είναι ένα πλήρες* *ορθοκανονικό σύστημα στον* $L2([0,\pi])$*:*

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos 2x, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos 3x, ...,$$
$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 2x, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 3x, ...$$

Παράδειγμα 2.2.5. *(τριγωνομετρικές συναρτήσεις και Walsh συναρτήσεις). Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις* $R(m,x)$ *μπορούν να περιγραφούν με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό που βασίζεται στην ημιτονοειδή συνάρτηση,*

$$R(m,x) = sgn\left(\sin(2^m \pi x)\right), \quad m = 0,1,2,...,x \in [0,1].$$

όπου το σύμβολο sgn *δηλώνει την σημειακή συνάρτηση η οποία ορίζεται ως:*

$$sgn(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{αν } x > 0, \\ 0 & \text{αν } x = 0, \\ -1 & \text{αν } x < 0, \end{array} \right\}$$

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ορίζουν ένα ορθοκανονικό σύστημα στον $L^2([0,1])$*. Προφανώς,*

$$\int_0^1 |R(m,x)|^2 dx = 1 \text{ για όλα τα } m.$$

Για να αποδείξουμε ότι για $m \neq n$*, έχουμε*

$$\int_0^1 R(m,x)\overline{R(n,x)}dx = 0.$$

Αρχικά παρατηρούμε ότι $\int_a^b R(m,x)dx = 0$ *όποτε* $2^m(b-a)$ *είναι ένας άρτιος αριθμός. Κατά αυτόν* *τον τρόπο, για* $m > n \geq 0$ *έχουμε,*

$$\begin{aligned}\int_0^1 R(m,x)\overline{R(n,x)}dx &= \int_0^1 R(m,x)R(n,x)dx \\ &= \sum_{k=1}^{2^n}\int_{(k-1)/2^n}^{k/2^n} R(m,x)R(n,x)dx \\ &= \sum_{k=1}^{2^n} sgn\left(R\left(n,\frac{2k-1}{2}\right)\right)\int_{(k-1)/2^n}^{k/2^n} R(m,x)dx = 0,\end{aligned}$$

επειδή όλα τα ολοκληρώματα είναι ίσα με μηδέν.

Η ακολουθία από τριγωνομετρικές συναρτήσεις δεν είναι πλήρης. Πράγματι, εάν ορίσουμε την συνάρτηση

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ 1 & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ 0 & \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{array}\right\}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\int_0^1 R(0,x)f(x)dx = \frac{1}{2}$$

και

$$\int_0^1 R(m,x)f(x)dx = 0 \text{ για } m \geq 1 \text{ αλλά } f(x) \neq \frac{1}{2}R(0,x).$$

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να κατασκευαστούν οι συναρτήσεις Walsh, οι οποίες συνιστούν ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα.

Οι συναρτήσεις Walsh συμβολίζονται με $W(m,x), m = 0,1,2,....$

Για $m = 0$ *θέτουμε* $W(0,x) = 1$

. Για τις άλλες τιμές του m*, αρχικά παρουσιάζουμε το* m *σαν έναν δυαδικό αριθμό έτσι ώστε,*

$$m = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}a_k = a_1 + 2^1a_2 + 2^2a_3 + ... + 2^{n-1}a_n,$$

όπου $a_1, a_2, ..., a_n = 0$ *ή* 1. *Ύστερα, ορίζουμε*

$$W(m,x) = \prod_{k=1}^{n} (R(k,x))^{a_k} = (R(1,x))^{a_1} (R(2,x))^{a_2} \cdots (R(n,x))^{a_n}$$

όπου $(R(m,x))^0 = 1$. *Για παράδειγμα, αφού το* 53 *γράφεται σαν* 110101 *στο δυαδικό σύστημα, έχουμε*

$$W(53,x) = R(1,x)R(3,x)R(5,x)R(6,x)$$

Προφανώς, έχουμε

$$R(n,x) = W(2^{n-1},x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Κάποιες συναρτήσεις Walsh απεικόνιζονται στο Σχήμα 2.1

Ορισμός 2.2.3. *(διαχωρίσιμοι χώροι) Ένας χώρος Hilbert καλείται διαχωρίσιμος εάν περιέχει μία πλήρη ορθοκανονική ακολουθία. Χώροι Hilbert πεπερασμένης διάστασης είναι διαχωρίσιμοι.*

Παράδειγμα 2.2.6. *Ο χώρος* $L^2([-\pi,\pi])$ *είναι διαχωρίσιμος. Το παράδειγμα 2.2.2 μας δίνει μία πλήρη ορθοκανονική ακολουθία στον* $L^2([-\pi,\pi])$.

Παράδειγμα 2.2.7. *Ο χώρος* ℓ^2 *είναι διαχωρίσιμος*

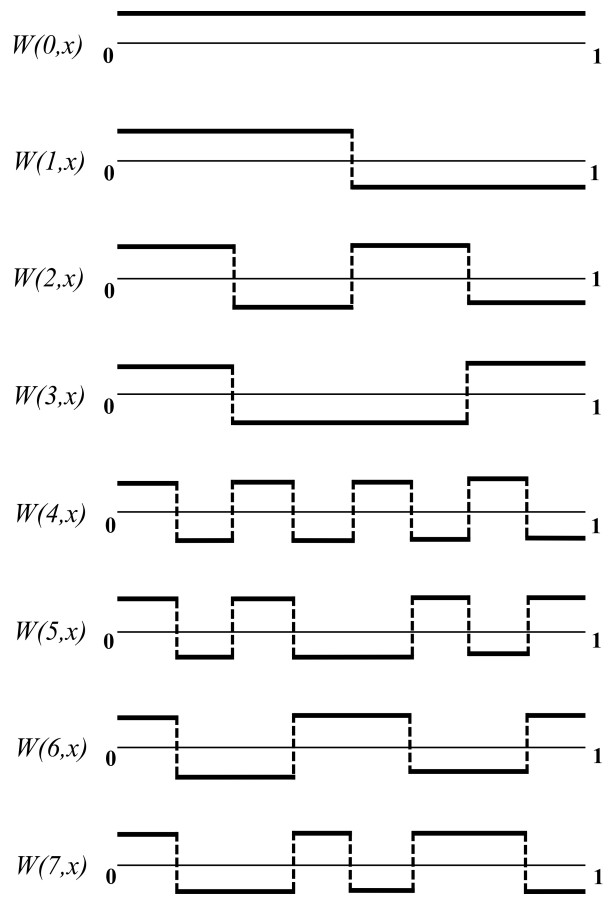
Παράδειγμα 2.2.8. *(Μη διαχωρίσιμοι χώροι Hilbert) Έστω ότι* H *είναι ο χώρος όλων των συναρτήσεων στο* R, *οι οποίες είναι μηδενικές παντού εκτός από ένα μετρήσιμο αριθμό σημείων στο* R *έτσι ώστε:*

$$\sum_{f(x)\neq 0} |f(x)|^2 < \infty$$

Το εσωτερικό γινόμενο στον H *μπορεί να οριστεί ως*

$$\langle f,g \rangle = \sum_{f(x)g(x)\neq 0} f(x)\overline{g(x)}.$$

Αυτός ο χώρος δεν είναι διαχωρίσιμος επειδή για κάθε ακολουθία από συναρτήσεις $f_n \in H$ *υπάρχουν μη μηδενικές συναρτήσεις* f *έτσι ώστε* $\langle f, f_n \rangle = 0$ *για όλα τα* $n \in N$. *Στη συνέχεια, θα αναφερόμαστε μόνο σε χώρους Hilbert.*



Σχήμα 2.1: Συναρτήσεις Walsh.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα σύνολο S σε έναν χώρο Banach E καλείται πυκνό στο E εάν κάθε στοιχείο του E μπορεί να προσεγγιστεί από μία ακολουθία στοιχείων του S. Για την ακρίβεια, για κάθε $x \in E$ υπάρχει $x_n \in S$ έτσι ώστε $||x - x_n|| \to 0$ όταν $n \to \infty$.

Θεώρημα 2.2.6. *Κάθε διαχωρίσιμος χώρος Hilbert περιέχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο.*

Απόδειξη:

Έστω (x_n) μία πλήρης ορθοκανονική ακολουθία σε έναν χώρο Hilbert H. Το σύνολο

$$S = \{(\alpha_1 + i\beta_1)x_1 + \cdots (\alpha_n + i\beta_n)x_n : \alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}$$

είναι προφανώς αριθμήσιμο. Από τη στιγμή που για κάθε $x \in H$,

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k \rangle x_k - x \right\| \to 0 \text{ όταν } n \to \infty$$

το S είναι πυκνό στον H.
Το θεώρημα 2.2.6 χρησιμοποιείται συνήθως για να ορίσουμε την διαχωρισιμότητα.

Θεώρημα 2.2.7. *Κάθε ορθογώνιο σύνολο σε έναν διαχωρίσιμο χώρο Hilbert είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη:

Έστω ότι το S είναι ένα ορθογώνιο σύνολο σε έναν διαχωρίσιμο χώρο Hilbert H, και έστω ότι S_1, είναι ένα σύνολο από κανονικοποιημένα διανύσματα από το S, έτσι ώστε $S_1 = \left\{ \frac{x}{||x||} : x \in S \right\}$. Για οποιαδήποτε διαφορετικά $x, y \in S_1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} ||x - y||^2 &= \langle x - y, x - y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= 1 - 0 - 0 + 1 \text{ από την ορθογωνιότητα} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι η απόσταση ανάμεσα σε οποιαδήποτε δύο διαφορετικά στοιχεία του S_1, είναι $\sqrt{2}$.

Στην συνέχεια, θεωρούμε μία συλλογή $1/\sqrt{2}$-γειτονικών περιοχών από κάθε στοιχείο του S_1. Προφανώς, καμία από αυτές τις δύο γειτονικές περιοχές δεν μπορεί να έχει ένα κοινό σημείο. Από τη στιγμή που κάθε πυκνό υποσύνολο του H πρέπει να έχει τουλάχιστον ένα σημείο σε κάθε γειτονική περιοχή και το H έχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο, το S_1, πρέπει να είναι αριθμήσιμο.
Κατά αυτό τον τρόπο, το S είναι αριθμήσιμο.

Ορισμός 2.2.4. *(Ισομορφικοί χώροι Hilbert) 'Ενας χώρος Hilbert H_1 καλείται ισομορφικός με έναν χώρο Hilbert H_2 εάν υπάρχει μία ένα προς ένα απεικόνιση T από τον H_1, στον H_2 έτσι ώστε:*

$$\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

για κάθε $x, y \in H_1$.

Αυτή η απεικόνιση T καλείται ισομορφισμός από τον H_1 στον H_2.
Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι $||T|| = 1$ επειδή $||T(x)|| = x$ για κάθε $x \in H_1$.

Θεώρημα 2.2.8. *Έστω ότι H είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.*
1. Εάν ο H είναι απειροδιάστατος, τότε είναι ισομορφικός στον ℓ^2.
2. Εάν $dimH = N$, τότε είναι ισομορφικός στον $\boldsymbol{C}^N$.

Απόδειξη:

Έστω (x_n) είναι μία πλήρης ορθοκανονική ακολουθία στον H. Εάν ο H είναι απειροδιάστατος, τότε η (x_n) είναι μία άπειρη ακολουθία. Έστω ότι x είναι ένα στοιχείο του H. Ορίζουμε $T(x) = (a_n)$ όπου $a_n = \langle x, x_n \rangle, n = 1, 2, ...$ Από τον ορισμό (2.2.4) ο T είναι μία ένα προς ένα απεικόνιση από τον H στον ℓ^2 η οποία προφανώς είναι γραμμική. Επίσης, για $a_n = \langle x, x_n \rangle$ και $\beta_n = \langle y, x_n \rangle, x, y \in H, n \in N$ έχουμε

$$\begin{aligned}\langle T(x), T(y) \rangle &= \langle (\alpha_n), (\beta_n) \rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \overline{\beta_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle \overline{\langle y, x_n \rangle} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \langle y, x_n \rangle x_n \rangle = \left\langle x, \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, x_n \rangle x_n \right\rangle = \langle x, y \rangle.\end{aligned}$$

Συνεπώς, ο T είναι ένας ισομορφισμός από τον H στον ℓ^2.
Είναι εύκολο να δειχθεί ότι ο ισομορφισμός στον χώρο Hilbert αποτελεί ισοδυναμία. Από τη στιγμή που κάθε απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert είναι ισομορφικός στον ℓ^2 συνεπάγεται ότι δύο οποιοιδήποτε τέτοιοι χώροι είναι ισομορφικοί. Το ίδιο ισχύει και για τους πραγματικούς χώρους Hilbert. Κάθε πραγματικός απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert είναι ισομορφικός στον πραγματικό χώρο ℓ^2. Γενικά, υπάρχει μόνο ένας πραγματικός και ένας μιγαδικός απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.

2.3 Τριγωνομετρικές σειρές Fourier

Σε αυτήν την παράγραφο θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία

$$\phi_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

είναι μια πλήρης ορθοκανονική ακολουθία στον $L^2([-\pi,\pi])$.

Η ορθογωνιότητα έχει αποδειχτεί στο παράδειγμα 2.1.2. Η απόδειξη της πληρότητας είναι αρκετά πιο πολύπλοκη. Γι' αυτόν τον σκοπό θα μας διευκόλυνε να αναγνωρίσουμε στοιχεία του $L^1([-\pi,\pi])$ με 2π-περιοδικές τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στον R, γιατί τότε θα έχουμε:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t-x)dt$$

για κάθε $f \in L^1([-\pi,\pi])$ και για κάθε $x \in R$.

Έστω $f \in L^1([-\pi,\pi])$ και

$$f_n = \sum_{k=-n}^{n} \langle f, \phi_k\rangle \phi_k, \quad n = 0,1,2,...$$

Τότε

$$f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dte^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ik(x-t)}dt.$$

Μένει να δείξουμε ότι για κάθε $f \in L^1([-\pi,\pi])$ ισχύει:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_0+f_1+\cdots+f_n}{n+1} = f \text{ στην } L^1([-\pi,\pi]) \text{ νόρμα.}$$

Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{f_0(x)+f_1(x)+\cdots+f_n(x)}{n+1} &= \sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)\langle f,\phi_k\rangle\phi_k(x) \\
&= \sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dte^{ikx} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)e^{ik(x-t)}\right)dt.
\end{aligned}$$

Λήμμα 2.3.1. *Για κάθε $n \in N$ και $x \in R$ έχουμε*

$$\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)e^{ikx} = \frac{1}{n+1}\frac{\sin^2\frac{(n+1)x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}$$

Απόδειξη:

Αρχικά έχουμε ότι

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos x) = -\frac{1}{4}e^{-ix} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{ix}.$$

Με υπολογισμούς, προκύπτει

$$\left(-\frac{1}{4}e^{-ix} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{ix}\right) \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikx}$$
$$= \frac{1}{n+1} \left(-\frac{1}{4}e^{-i(n+1)x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{i(n+1)x}\right)$$

Ορισμός 2.3.1. *(αθροιστικοί πυρήνες) Με τον όρο αθροιστικοί πυρήνες εννοούμε μια ακολουθία (k_n) από 2π-περιοδικές συνεχείς συναρτήσεις, οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \kappa_n(t)dt = 2\pi \text{ για κάθε } n \in N \tag{2.23}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\kappa_n(t)|dt \leq M \text{ για κάποια } M \text{ και για κάθε } n \in N \tag{2.24}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} |\kappa_n(t)|dt = 0 \text{ για όλα τα } \delta \in (0, \pi) \tag{2.25}$$

Λήμμα 2.3.2. *Η ακολουθία των συναρτήσεων*

$$K_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikt}$$

είναι ενας συνοπτικος πυρήνας.

Απόδειξη:

Επειδή $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}dt = 2\pi$, αν $\kappa = 0$ και $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}dt = 0$, για οποιαδήποτε άλλη τιμή του κ προκύπτει ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}dt = 2\pi.$$

Από το λήμμα 2.3.2. συνεπάγεται ότι $k_n \geq 0$ και τότε

$$\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(t)|dt = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = 2\pi.$$

Έστω $\delta \in (0, \pi)$, για $t \in (\delta, 2\pi - \delta)$ έχουμε $\sin \frac{t}{2} \geq \sin \frac{\delta}{2}$ και τότε:

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2 \frac{(n+1)x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} \leq \frac{1}{(n+1)\sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

Επομένως,

$$\int_{\delta}^{2\pi-\delta} K_n(t)dt \leq \frac{2\pi}{(n+1)\sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

για ένα συγκεκριμένο δ, το δεξί μέλος τείνει στο 0 όταν $n \to \infty$.
Ο πυρήνας στο λήμμα 2.3.2 ονομάζεται πυρήνας του Fejer (Lirot Fejer (1880-1959)) .Ο λόγος για τον οποίο εισάγουμε εδώ την έννοια του αθροιστικού πυρήνα, είναι το ακόλουθο σημαντικό θεώρημα.

Θεώρημα 2.3.1. *Έστω (k_n) ένας αθροιστικός πυρήνας και έστω $f \in L^1([-\pi, \pi])$.Τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_n(t) f(x-t)dt = f(x)$$

Για τη νόρμα $L^1([-\pi, \pi])$, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_n(t) f(x-t)dt - f(x) \right| dx = 0. \tag{2.26}$$

Απόδειξη:

Από το (2.3.2) έχουμε

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_n(t) f(x)dt$$

Επομένως

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\kappa_n(t)f(x-t)dt - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\kappa_n(t)\left(f(x-t)-f(x)\right)dt.$$

Συνεπώς

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\kappa_n(t)f(x-t)dt - f(x)\right|dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\kappa_n(t)\left(f(x-t)-f(x)\right)dt\right|dx =$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\kappa_n(t)\left(f(x-t)-f(x)\right)dt\right|dx + \int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}\kappa_n(t)\left(f(x-t)-f(x)\right)dt\right|dx$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\left|\kappa_n(t)\left(f(x-t)-f(x)\right)\right|dtdx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}\left|\kappa_n(t)\left(f(x-t)-f(x)\right)\right|dtdx.$$

Εφόσον

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\left|\kappa_n(t)\left(f(x-t)-f(x)\right)\right|dtdx$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\left(\max_{|t|\leq\delta}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)-f(x)|dt\right)\int_{-\pi}^{\pi}|\kappa_n(t)|dt,$$

Και επειδή από θεώρημα ισχύει ότι

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)-f(x)|dx = 0,$$

Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένα $\delta > 0$ αρκετά μικρό ,τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\left|\kappa_n(t)\left(f(x-t)-f(x)\right)\right|dtdx < \epsilon \tag{2.27}$$

για κάθε $n \in N$. Αφού το ολοκλήρωμα $\int_{-\pi}^{\pi}|\kappa_n(t)|dt$ είναι φραγμένο.
Επίσης ,από την (2.25) έχουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}\left|\kappa_n(t)\left(f(x-t)-f(x)\right)\right|dtdx$$
$$\leq \left(\max_{|t|\leq\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)-f(x)|dx\right)\int_{\delta}^{2\pi-\delta}|\kappa_n(t)|dt$$
$$\leq 2\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|dx\int_{\delta}^{2\pi-\delta}|\kappa_n(t)|dt \to 0 \tag{2.28}$$

Με συνδυασμό των σχέσεων (2.27) και (2.28) έχουμε την απόδειξη της σχέσης (2.26).

Θεώρημα 2.3.2. *Αν $f \in L^1([-\pi,\pi])$ και $\langle f, \phi_n \rangle = 0$, για όλους τους ακεραίους n, τότε $f = 0$.*

Απόδειξη:

Αν

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt = 0, \text{ για κάθε ακέραιο } n,$$

τότε

$$f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ik(x-t)}dt = 0,$$

και συνεπώς

$$\frac{f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x)}{n+1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ik(x-t)} \right) dt = 0.$$

Επίσης, επειδή η f και οι συναρτήσεις της μορφής e^{ikx} είναι 2π-περιοδικές έχουμε ότι

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ik(x-t)} \right) dt \\ = &\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \left(\sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikt} \right) dt \end{aligned}$$

Και συνεπώς, από το θεώρημα (2.3.1) και το λήμμα (2.3.2) ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_0 + f_1 + \cdots + f_n}{n+1} = f$$

στον $L^1([-\pi,\pi])$ χώρο με νόρμα. Άρα $f = 0$.

Θεώρημα 2.3.3. *Η ακολουθία*

$$\phi_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...,$$

είναι πλήρης.

Απόδειξη:

Αν $f \in L^2([-\pi,\pi])$,τότε $f \in L^1([-\pi,\pi])$. Επομένως, από το θεώρημα (2.3.2), αν $\langle f, \phi_n \rangle = 0$ για κάθε ακέραιο n,ισχύει $f = 0$. Αυτό σημαίνει ότι $f = 0$ στον χώρο $f \in L^2([-\pi,\pi])$.
Το παραπάνω αποδεικνύει την πληρότητα της ακολουθίας. Το θεώρημα 2.3.3 υπαγορεύει ότι για κάθε $f \in L^2([-\pi,\pi])$, ισχύει ότι

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_n \phi_n \tag{2.29}$$

όπου

$$\phi_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \text{ και } \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$$

Σε αυτήν την περίπτωση ο τύπος του Parseval

$$||f||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2,$$

Οι σειρές (2.29) ονομάζονται Σειρές Fourier και οι αριθμοί α_n ονομάζονται συντελεστές Fourier της f. Τονίζουμε ότι η (2.29) δεν υπαγορεύει σημειακή σύγκλιση.
Το πρόβλημα της σημειακής σύγκλισης στις σειρές Fourier είναι αρκετά πιο πολύπλοκο. Το 1966 ο L.Carleson απέδειξε ότι οι σειρές Fourier των συναρτήσεων στον $L^2([-\pi,\pi])$, συγκλίνουν σχεδόν παντού.

2.4 Ορθογώνια συμπληρώματα και θεωρήματα

Με την έκφραση υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H, εννοούμε έναν διανυσματικό υπόχωρο του H. Ένας υπόχωρος ενός χώρου Hilbert είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Υποθέτωντας ότι το S είναι ένας κλειστός υπόχωρος του H, τότε το S είναι ένας χώρος Hilbert, καθώς κάθε κλειστός υπόχωρος ενός πλήρη χώρου με νόρμα είναι πλήρης.

Ορισμός 2.4.1. *(Ορθογώνιο συμπλήρωμα) Έστω S ένα μη κενό υποσύνολο του χώρου Hilbert H. Ένα στοιχείο $x \in H$ καλείται κάθετο στον S, και συμβολίζεται $x \perp S$,αν $(x, y) = 0$ για κάθε $y \in S$. Το σύνολο από όλα τα στοιχεία του H που είναι κάθετα στον S ,συμβολίζεται με $S^{\perp}$ και ονομάζεται ορθογώνιο συμπλήρωμα του S.*

Ορίζουμε

$$S^{\perp} = \{x \in H, x \perp S\}$$

Το ορθογώνιο συμπλήρωμα του $S^{\perp}$ συμβολίζεται $S^{\perp\perp} = (S^{\perp})^{\perp}$.

Ο συμβολισμός $S^{\perp}$ είναι ανακριβής γιατί η πληρότητα εξαρτάται από τον E. Αν E_1 και E_2 είναι δυο διαφορετικοί χώροι εσωτερικού γινομένου και $S \subset E_1 \cap E_2$, τότε προφανώς τα συμπληρώματα του S στον E_1 δεν είναι ίδια με τα συμπληρώματα του S στον E_2.Ο συμβολισμός $S^{\perp}$ χρησιμοποιείται όταν είναι εμφανές τι είναι ο χώρος εσωτερικού γινομένου S. Για παράδειγμα στον ορισμό 2.4.1, ο χώρος που εμφανίζεται είναι ο H, και έτσι όλα τα συμπληρώματα είναι με βάση τον H.
Αν $x \perp y$ για κάθε $y \in H$, τότε $x = 0$. Έτσι $H^{\perp} = \{0\}$. Παρόμοια $\{0\}^{\perp} = H$.
Δύο υποσύνολα A και B ενός χώρου Hilbert ονομάζονται ορθογώνια αν $x \perp y$ για κάθε $x \in A$ και $y \in B$. Αυτό συμβολίζεται ως $A \perp B$.
Σημειώστε ότι αν $A \perp B$ τότε $A \cap B = \{0\}$ ή $\emptyset$.

Θεώρημα 2.4.1. *Για οποιαδήποτε υποσύνολα S ενός χώρου Hilbert H,το σύνολο $S^{\perp}$ είναι ένα κλειστό υποσύνολο του H.*

Απόδειξη:

Αν $\alpha, \beta \in \boldsymbol{C}$ και $x, y \in S^{\perp}$ τότε

$$\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle = 0$$

για κάθε $z \in S$. Ο $S^{\perp}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του H. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι ο $S^{\perp}$ είναι κλειστός.
Έστω $(x_n) \in S^{\perp}$ και $x_n \to x$ για κάποια $x \in H$. Λόγω της συνέχειας του εσωτερικού γινομένου, έχουμε

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} x_n, y\right\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x_n, y\rangle = 0.$$

για κάθε $y \in S$. Από την παραπάνω σχέση συνεπάγεται ότι $x \in S^{\perp}$ και άρα $S^{\perp}$ είναι κλειστός.
Το προηγούμενο θεώρημα αποδεικνύει ότι ο $S^{\perp}$ είναι ένας χώρος Hilbert για κάθε υποσύνολο S ενός χώρου Hilbert H. Τονίζουμε ότι το S δεν χρειάζεται να είναι διανυσματικός χώρος. Επειδή $S \perp S^{\perp}$,ισχύει ότι $S \cap S^{\perp} = \{0\}$ ή $S \cap S^{\perp} = \emptyset$.

Ορισμός 2.4.2. *(κυρτά σύνολα) Ένα σύνολο U σε ένα διανυσματικό χώρο ονομάζεται κυρτό σύνολο αν για οποιαδήποτε $x, y \in U$ και $\alpha \in (0,1)$, ισχύει ότι*

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in U.$$

Σημειώνουμε ότι κάθε διανυσματικός υπόχωρος είναι κυρτό σύνολο.

Θεώρημα 2.4.2. *(ιδιότητα του πλησιέστερου σημείου) Έστω ότι S είναι ένα κλειστό κυρτό υποσύνολο ενός χώρου Hilbert H. Για κάθε σημείο $x \in H$ υπάρχει ένα μοναδικό σημείο $y \in S$ τέτοιο ώστε*

$$||x-y|| = \inf_{z\in S} ||x-z|| \tag{2.30}$$

Απόδειξη:

Έστω (y_n) μια ακολουθία στον S τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} ||x-y_n|| = \inf_{z\in S} ||x-z||.$$

Συμβολίζουμε με $d = \inf_{z\in S} ||x-z||$.Επειδή $\frac{1}{2}(y_m+y_n) \in S$, έχουμε ότι

$$\left|\left|x - \frac{1}{2}(y_m+y_n)\right|\right| \geq d \text{ για κάθε } m, n \in N.$$

Επιπλέον, με βάση τον νόμο του παραλληλογράμμου

$$\begin{aligned}
||y_m - y_n||^2 &= 4\left|\left|x - \frac{1}{2}(y_m+y_n)\right|\right|^2 + ||y_m-y_n||^2 - 4\left|\left|x - \frac{1}{2}(y_m+y_n)\right|\right|^2 \\
&= ||(x-y_m)+(x-y_n)||^2 + ||(x-y_m)-(x-y_n)||^2 \\
&\quad - 4\left|\left|x - \frac{1}{2}(y_m+y_n)\right|\right|^2 \\
&= 2\left(||x-y_m||^2 + ||x-y_n||^2\right) - 4\left|\left|x - \frac{1}{2}(y_m+y_n)\right|\right|^2
\end{aligned}$$

Τότε,

$$2\left(||x-y_m||^2 + ||x-y_n||^2\right) \to 4d^2, \text{ όταν } m, n \to \infty$$

και

$$\left|\left|x - \frac{1}{2}(y_m + y_n)\right|\right|^2 \geq d^2,$$

έχουμε $||y_m - y_n||^2 \to 0$ όταν $m, n \to \infty$. Τότε η (y_n) είναι ακολουθία Cauchy. Ο χώρος H είναι πλήρης και το S είναι κλειστό, επομένως το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ υπάρχει και $y \in S$. Από την συνέχεια της νόρμας παρατηρούμε

$$||x - y|| = \left|\left|x - \lim_{n\to\infty} y_n\right|\right| = \lim_{n\to\infty} ||x - y_n|| = d.$$

Έχουμε αποδείξει ότι υπάρχει ένα σημείο στο S που ικανοποιεί την (2.30).
Παραμένει να αποδείξουμε την μοναδικότητα. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα άλλο σημείο y_1, στο S το οποίο ικανοποιεί την (2.30). Τότε, επειδή $\frac{1}{2}(y + y_1) \in S$, έχουμε

$$||y - y_1||^2 = 4d^2 - 4\left|\left|x - \frac{y + y_1}{2}\right|\right|^2 \leq 0.$$

το οποίο ισχύει μόνο όταν $y = y_1$.
Η ύπαρξη και η μοναδικότητα του y στο παραπάνω θεώρημα βοηθά στην επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης.
Ωστόσο δεν μας βοηθά στην εύρεση του βέλτιστου σημείου. Οι ιδιότητες του βέλτιστου σημείου σε έναν πραγματικό χώρο εσωτερικού γινομένου παρουσιάζονται στο ακόλουθο θεώρημα και είναι συχνά χρήσιμες σε τέτοια προβλήματα.

Θεώρημα 2.4.3. *Έστω S κλειστό κυρτό υποσύνολο ενός πραγματικού χώρου Hilbert H, $y \in S$ και έστω $x \in S$. Τότε οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*
(α) $||x - y|| = inf_{z\in S}||x - z||$
(β) $\langle x - y, z - y\rangle \leq 0$, *για κάθε* $z \in S$

Απόδειξη:

Έστω $z \in S$. Επειδή το S είναι κυρτό, ισχύει ότι $\lambda z + (1 - \lambda)y \in S$ για κάθε $\lambda \in (0, 1)$.
Τότε από το (α) έχουμε

$$||x - y|| \leq ||x - \lambda z - (1 - \lambda)y|| = ||(x - y) - \lambda(z - y)||.$$

Επίσης αν H είναι ένας πραγματικός χώρος Hilbert, έχουμε

$$||x-y||^2 \leq ||x-y||^2 - 2\lambda\langle x-y, z-y\rangle + \lambda^2||z-y||^2.$$

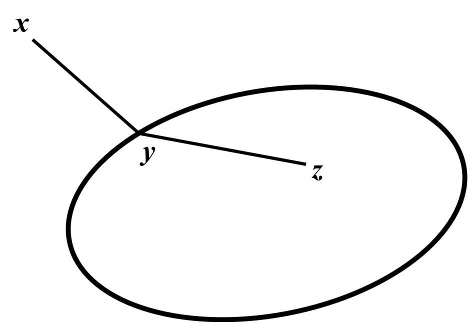
και συνεπώς

$$\langle x-y, z-y\rangle \leq \frac{\lambda}{2}||z-y||^2.$$

Τότε το (β) προκύπτει για $\lambda \to 0$
Αντίστροφα, αν υπάρχουν $x \in H$ και $y \in S$ που ικανοποιούν το (β), τότε για κάθε $z \in S$ έχουμε

$$||x-y||^2 - ||x-z||^2 = 2\langle x-y, z-y\rangle - ||z-y||^2 \leq 0.$$

Άρα τα x και y ικανοποιούν το (α).
Αν $H = R^2$ και S κλειστό κυρτό υποσύνολο του R^2, τότε η πρόταση (β) έχει μια καθαρή γεωμετρική σημασία: η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ της ευθείας των x, y και της ευθείας των z, y είναι πάντοτε αμβλεία (βλ. σχήμα 2.2)



Σχήμα 2.2: Γεωμετρική απεικόνιση του Θεωρήματος 2.4.3 στον R^2.

Θεώρημα 2.4.4. *Αν H_1 είναι κλειστό υποσύνολο ενός χώρου Hilbert H, τότε κάθε στοιχείο $x \in H$ έχει μία μοναδική ανάλυση της μορφής $x = y + z$, όπου $y \in H_1$ και $z \in H_1^{\perp}$.*

Απόδειξη:

Αν $x \in H_1$, τότε η προφανής ανάλυση είναι $x = x + 0$. Υποθέτουμε τώρα ότι $x \notin H_1$.
Έστω y το μοναδικό σημείο του H_1 που ικανοποιεί τη σχέση $||x-y|| = inf_{\omega\in H_1}||x-\omega||$, όπως στο θεώρημα 2.4.2. Θα δείξουμε ότι $x = y + (x-y)$ είναι η επιθυμητή ανάλυση.

Αν $\omega \in H_1$, και $\lambda \in \boldsymbol{C}$ τότε $y + \lambda\omega \in H_1$ και

$$||x-y||^2 \leq ||x-y-\lambda\omega||^2 = ||x-y||^2 - Re\lambda\langle\omega, x-y\rangle + |\lambda|^2||\omega||^2.$$

Άρα

$$-2Re\lambda\langle\omega, x-y\rangle + |\lambda|^2||\omega||^2 \geq 0.$$

Αν $\lambda > 0$, τότε διαιρώντας με λ και θέτοντας $\lambda \to 0$, έχουμε

$$Re\langle\omega, x-y\rangle \leq 0. \tag{2.31}$$

Αν αντικαταστήσουμε το λ με $-i\lambda(\lambda > 0)$ και στη συνέχεια διαιρέσουμε με λ θέτοντας $\lambda \to \infty$, προκύπτει ότι

$$Im\langle\omega, x-y\rangle \leq 0. \tag{2.32}$$

Αν $y \in H_1$, τότε και το $-y \in H_1$. Επομένως οι σχέσεις (2.31) και (2.32) ισχύουν αν αντί για ω θέσουμε $-\omega$. Τότε, $\langle\omega, x-y\rangle = 0$ για κάθε $\omega \in H_1$, το οποίο σημαίνει ότι $x - y \in H_1^{\perp}$. Για να αποδείξουμε την μοναδικότητα, σημειώνουμε ότι αν $x = y_1 + z_1, y_1 \in H_1$ και $z_1 \in H_1^{\perp}$, τότε $y - y_1 \in H_1$ και $z - z_1 \in H_1^{\perp}$.
Επειδή $y - y_1 = z_1 - z$, πρέπει να ισχύει $y - y_1 = z_1 - z = 0$.
Το παραπάνω θεώρημα μπορεί επίσης να διατυπωθεί ως εξής: Αν H_1 είναι ένα κλειστό υποσύνολο ενός χώρου Hilbert H, τότε ο H είναι το ευθύ άθροισμα του H_1 και $H_1^{\perp}$ δηλαδή

$$H = H_1 \oplus H_1^{\perp} \tag{2.33}$$

Η απεικόνιση του H ως $H_1 \oplus H_1^{\perp}$ ονομάζεται ορθογώνια ανάλυση του H.
Σημειώνουμε ότι η ένωση μιας βάσης του H_1 και μιας βάσης του $H_1^{\perp}$, αποτελεί μια βάση του H. Το θεώρημα (2.4.2) μας βοηθάει να ορίσουμε μια απεικόνιση $P_{H_1}(x) = y$,όπου το $y \in H_1$, είναι μοναδικό τέτοιο ώστε $||x-y|| = \inf_{z\in S}||x-z||$.
Η απεικόνιση P_{H_1},ονομάζεται ορθογώνια προβολή στον H_1.

Θεώρημα 2.4.5. *Αν S είναι ένα κλειστό υποσύνολο ενός χώρου Hilbert, τότε $S^{\perp\perp} = S$.*

Απόδειξη:

Έστω $x \in S$, τότε για κάθε $z \in S^{\perp}$ έχουμε $\langle x, y\rangle = 0$, το οποίο σημαίνει ότι $x \in S^{\perp\perp}$. Ε-

πομένως $S \subset S^{\perp\perp}$. Για να δείξουμε ότι $S^{\perp\perp} \subset S$ παίρνουμε ένα $x \in S^{\perp\perp}$. Επειδή το S είναι κλειστό, ισχύει: $x = y + z$ για κάποια $y \in S$ και $z \in S^{\perp}$.
Επειδή $S \subset S^{\perp\perp}$, συνεπάγεται ότι $y \in S^{\perp\perp}$ και έτσι $z = x - y \in S^{\perp\perp}$, επειδή το $S^{\perp\perp}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος. Όμως $z \in S^{\perp}$, γι' αυτό πρέπει να ισχύει $z = 0$, το οποίο σημαίνει ότι $x = y \in S$. Η τελευταία σχέση μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $S^{\perp\perp} \subset S$.

2.5 Γραμμικά συναρτησιακά και το θεώρημα απεικόνισης του Riesz

Στην παράγραφο 1.3 σημειώσαμε ότι για οποιαδήποτε σταθερό διάνυσμα x_0 σε έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο E, η σχέση $f(x) = \langle x, x_0 \rangle$ ορίζει ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό στον E.
Προκύπτει ότι, αν E είναι ένας χώρος Hilbert, τότε κάθε φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό είναι της μορφής $f(x) = \langle x, x_0 \rangle$. Το παραπάνω είναι γνωστό ως θεώρημα απεικόνισης του Riesz.

Παράδειγμα 2.5.1. *Έστω $H = L^2([\alpha, \beta])$ $-\infty < a < b < \infty$*
Ορίζουμε ένα γραμμικό συναρτησιακό f στον H με τη σχέση

$$f(x) = \int_a^b x(t)dt.$$

Αν x_0 υποδηλώνει την συνεχή συνάρτηση 1 στο (α, β), τότε $f(x) = \langle x, x_0 \rangle$ και f είναι φραγμένο συναρτησιακό.

Παράδειγμα 2.5.2. *Έστω $H = L^2([\alpha, \beta])$ και έστω t_0 ένα σταθερό σημείο στο (a, b). Έστω f ένα συναρτησιακό στον H που ορίζεται ως $f(x) = x(t_0)$. Το συναρτησιακό είναι γραμμικό,αλλά όχι φραγμένο.*

Παράδειγμα 2.5.3. *Έστω $H = \boldsymbol{C}^n$ και έστω $n_0 \in \{1, 2, ..., n\}$. Η f ορίζεται από την σχέση*

$$f\left((x_1, ..., x_n)\right) = x_{n_0}$$

Έχουμε

$$f\left((x_1, ..., x_n)\right) = (x_1, ..., x_n), e_{n_0} \ ,$$

Όπου e_{n_0} είναι ένα διάνυσμα το οποίο έχει 1 στη n_0-στη θέση και μηδέν στις υπόλοιπες. Τότε f είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό.

Παράδειγμα 2.5.4. *Έστω E ο χώρος όλων των ακολουθιών από μιγαδικούς αριθμούς οι οποίες έχουν μόνο έναν πεπερασμένο αριθμό από μη μηδενικούς όρους με το εσωτερικό γινόμενο ορισμένο στον ℓ^2 να είναι ίσο με*

$$\langle (x_n), (y_n) \rangle = \sum_{n}^{\infty} x_n \overline{y_n}.$$

Τότε, η σχέση

$$f(x) = \sum_{n}^{\infty} \frac{x_n}{n}$$

ορίζει ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό στον E, αλλά δεν υπάρχει (z_n) $\in E$ τέτοιο ώστε να ισχύει $(f) = ((x_n), (z_n))$, για κάθε $(x_n) \in E$. (Σημειώνουμε ότι ο E δεν είναι χώρος Hilbert.)

Λήμμα 2.5.1. *Αν f είναι ένα μη τετριμμένο φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό στον χώρο Hilbert H τότε $dim N(f)^{\perp} \leq 1$.*

Αφού f είναι συνεχής, το $N(f)$ είναι ένας κλειστός γνήσιος υπόχωρος του H και έτσι το $N(f)^{\perp}$ είναι μη κενό. Έστω $x_1, x_2 \in N(f)^{\perp}$ μη μηδενικά διανύσματα. Επειδή $f(x_1) \neq 0$ και $f(x_2) \neq 0$,υπάρχει σταθερά $\alpha \neq 0$ τέτοια ώστε

$$f(x_1) + \alpha f(x_2) = f(x_1 + \alpha x_2) = 0.$$

Έτσι $x_1 + \alpha x_2 \in N(f)$. Από την άλλη, αφού $N(f)^{\perp}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος και $x_1, x_2 \in N(f)^{\perp}$, πρέπει να ισχύει $x_1 + \alpha x_2 \in N(f)^{\perp}$. Αυτό ισχύει μόνο όταν $x_1 + \alpha x_2 = 0$, το οποίο συνεπάγεται ότι x_1, x_2 είναι γραμμικά εξαρτημένα, από τη στιγμή που $\alpha \neq 0$.

Θεώρημα 2.5.1. *(θεώρημα απεικόνισης του Riesz) Έστω f φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό στον χώρο Hilbert H. Τότε υπάρχει μοναδικό $x_0 \in H$ τέτοιο ώστε $f(x) = \langle x, x_0 \rangle$, για όλα τα $x \in H$.*
Επιπλέον ισχύει ότι $||f|| = ||x_0||$.

Απόδειξη:

Αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in H$, τότε το $x_0 = 0$ πληρεί τις απαραίτητες προϋποθέσεις. Έστω f ένα μη τετριμμένο συναρτησιακό. Τότε $dimN(f)^{\perp} = l$, με βάση το λήμμα (2.5.1).Έστω z_0 ένα μοναδιαίο διάνυσμα στον $N(f)^{\perp}$
Τότε ,για κάθε $x \in H$, έχουμε

$$x = x - \langle x, z_0 \rangle z_0 + \langle x, z_0 \rangle z_0.$$

Επειδή $\langle x, z_0 \rangle z_0 \in N(f)^{\perp}$, πρέπει να έχουμε $x - \langle x, z_0 \rangle z_0 \in N(f)$, το οποίο σημαίνει ότι

$$f\left(x - \langle x, z_0 \rangle z_0\right) = 0.$$

Συνεπώς

$$f(x) = f\left(\langle x, z_0 \rangle z_0\right) = \langle x, z_0 \rangle f(z_0) = \langle x, \overline{f(z_0)} z_0 \rangle.$$

Επίσης, αν θέσουμε

$$x_0 = \overline{f(z_0)} z_0,$$

Τότε $f(x) = \langle x, x_0 \rangle$ για όλα τα $x \in H$.
Υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχει ένα άλλο σημείο x_1 τέτοιο ώστε $f(x) = \langle x, x_1 \rangle$ για κάθε $x \in H$.
Τότε $\langle x, x_0 - x_1 \rangle = 0$ για κάθε $x \in H$ και $\langle x_0 - x_1, x_0 - x_1 \rangle = 0$.
Αυτό ισχύει μόνο όταν $x_0 = x_1$.
Τελικά έχουμε

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, x_0 \rangle| \leq \sup_{\|x\|=1} \left(\|x\| \|x_0\|\right) = ||x_0||$$

και

$$\|x_0\|^2 = \langle x_0, x_0 \rangle = |f(x_0)| \leq \|f\| \|x_0\|$$

Άρα $\|f\| = \|x_0\|$

Το σύνολο H' όλων των φραγμένων γραμμικών συναρτησιακών σε έναν χώρο Hilbert είναι

ένας χώρος Banach. Από το θεώρημα απεικόνισης του Riesz έχουμε ότι $H' = H$, ή ειδικότερα ότι H' είναι ισομορφισμός. Το στοιχείο x_0, το οποίο αντιστοιχίζεται σε μια συνάρτηση f, κάποιες φορές ονομάζεται αντιπρόσωπος του y.
Σημειώνουμε, ότι το συναρτησιακό f, το οποίο ορίζεται ως $f(x) = \langle x_0, x \rangle$, όπου $x_0 \neq 0$ είναι ένα σταθερό στοιχείο ενός μιγαδικού χώρου Hilbert H, δεν είναι γραμμικό. Πράγματι, έχουμε $f(ax + by) = \bar{a}f(x) + \bar{b}f(y)$
Συναρτησιακά τέτοιας μορφής συχνά ονομάζονται μη γραμμικά.
Ένα από τα πιο σημαντικά θεωρήματα στην συναρτησιακή ανάλυση είναι το θεώρημα Hahn - Banach σύμφωνα με το οποίο ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό σε έναν υπόχωρο ενός χώρου με νόρμα E μπορεί να επεκταθεί σε φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό στον E. Η απόδειξη δεν είναι δυνατή, μπορούμε μόνο να αποδείξουμε ότι κάτι τέτοιο είναι πιθανό, αλλά γενικότερα δεν μπορούμε να σχηματίσουμε μια τέτοια επέκταση. Η απόδειξη του παραπάνω στην περίπτωση των χώρων Hilbert είναι πολύ πιο απλή .

Θεώρημα 2.5.2. *Έστω f ότι φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό ορισμένο σε έναν υπόχωρο E ενός χώρου Hilbert H.*
Τότε υπάρχει ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό g ορισμένο στον H τέτοιο ώστε:
(α) $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in E$
(β) $||f|| = ||g||$

Απόδειξη:

Αν E είναι ένας κλειστός υπόχωρος, τότε είναι ένας χώρος Hlbert H, και με βάση το θεώρημα απεικόνισης του Riesz, υπάρχει ένα $x_0 \in E$ τέτοιο ώστε $f(x) = \langle x, x_0 \rangle$ για όλα τα $x \in E$.
Αλλά τότε η g μπορεί να οριστεί ως $g(x) = \langle x, x_0 \rangle$.
Προφανώς τα (α) και (β) ικανοποιούνται.
Αν ο E δεν είναι κλειστός ,τότε αρχικά επεκτείνουμε το f σε ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό ορισμένο στην κλειστότητα του E.

Κεφάλαιο 3

Φραγμένοι τελεστές

3.1 Παραδείγματα τελεστών

Σε αυτό το κεφάλαιο, μας ενδιαφέρει η περίπτωση, $E = E_1 = E_2$ ή $E_1 \subset E_2 = E$, όπου E είναι ένας χώρος με νόρμα ή ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Σε αυτή την περίπτωση το όνομα «γραμμικός τελεστής» ή «γραμμικός μετασχηματισμός» χρησιμοποιείται συνήθως. Δεδομένου ότι οι μη γραμμικοί τελεστές δεν θα ληφθούν υπόψη σε αυτή την εργασία, θα λέμε απλά τελεστές, που σημαίνει γραμμικοί τελεστές. Θα ξεκινήσουμε με μερικά παραδείγματα τελεστών. Σε κάθε περίπτωση, μας ενδιαφέρει ο εν λόγω τελεστής να είναι φραγμένος. Υπενθυμίζουμε ότι ένας τελεστής A ονομάζεται φραγμένος αν υπάρχει αριθμός K τέτοιος ώστε $||Ax|| \leq K||x||, \forall x$ στο πεδίο ορισμού του A. Η νόρμα του A ορίζεται ώς, η ελάχιστη απ 'όλους αυτούς τους αριθμούς K, ή ισοδύναμα, από :

$$||A|| = \sup_{||x||=1} ||Ax||.$$

Συχνά είναι πολύ πιο δύσκολο να βρούμε τη νόρμα ενός τελεστή από το να αποδείξουμε ότι είναι φραγμένος.

Παράδειγμα 3.1.1. *(Ταυτοτικός τελεστής και μηδενικός τελεστής) Το απλούστερο παράδειγμα ενός τελεστή είναι ο ταυτοτικός τελεστής I, ο οποίος αφήνει κάθε στοιχείο αναλλοίωτο: $Ix = x$ για όλα τα $x \in E$ και ο μηδενικός τελεστής, ο οποίος θέτει το μηδενικό διάνυσμα σε κάθε στοιχείο του E. Η μηδενικός τελεστής θα συμβολίζεται με το 0. Προφανώς ο ταυτοτικός τελεστής, και ο μηδενικός τελεστής είναι φραγμένοι και έχουμε $||I|| = 1$ και $||0|| = 0$. Το βαθμωτό γινόμενο aI του ταυτοτικού τελεστή είναι ο τελεστής ο οποίος πολλαπλασιάζει κάθε στοιχείο με το a : $(aI)x = ax$.*

Παράδειγμα 3.1.2. *Έστω A ένας τελεστής στον $\mathbb{C}^N$ και έστω $e_1, ..., e_N$ είναι η πρότυπη ορθοκανονική βάση στο $\mathbb{C}^N$ δηλαδή,*

$$\begin{aligned} e_1 &= (1.0, 0, ..., 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, ..., 0) \\ &... \\ e_N &= (0, 0, ..., 0, 1). \end{aligned}$$

Ορίζουμε, για $i, j \in \{1, 2, ..., N\}$,

$$a_{ij} = \langle Ae_j, e_i \rangle.$$

Τότε για $x = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j e_j$ $x \in \mathbb{C}^N$, έχουμε $Ax = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j Ae_j$, και ως εκ τούτου

$$\langle Ax, e_j \rangle = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \langle Ae_j, e_i \rangle = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\lambda_j. \tag{3.1}$$

Έτσι, κάθε τελεστής στον $\mathbb{C}^N$ χώρο ορίζεται από έναν πίνακα $N \times N$. Αντιστρόφως, $\forall N \times N$ πίνακα (a_{ij}) ,ο τύπος 3.1 ορίζει έναν τελεστή στον $\mathbb{C}^N$. Έχουμε έτσι μια «1-1» αντιστοιχία μεταξύ των τελεστών σε έαν N-διάστατο διανυσματικό χώρο και στους $N \times N$ πίνακες.

Αν ο τελεστής A ορίζεται από τον πίνακα (a_{ij}), τότε:

$$||A|| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} |a_{ij}|^2}.$$

Αυτό σημαίνει ότι κάθε τελεστής στον $\mathbb{C}^N$, και συνεπώς και κάθε τελεστής σε οποιονδήποτε πεπερασμένης διαστάσεως χώρο Hilbert, είναι φραγμένος.

Παράδειγμα 3.1.3. *(Διαφορικός τελεστής) Ένας απο τους σημαντικότερους τελεστές είναι ο διαφορικός τελεστής,*

$$(Df)(x) = \frac{df}{dx}(x) = f'(x)$$

που ορίζεται σε ένα χώρο διαφορίσιμων συναρτήσεων. Θεωρούμε τον διαφορικό τελεστή στον χώρο

$$E_1 = f \in L^2([-\pi, \pi]) : f' \in L^2([-\pi, \pi])$$

Με τη νόρμα

$$||f|| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx}$$

Για $f_n(x) = \sin nx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, έχουμε

$$||f_n|| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |\sin nx|^2 \, dx} = \sqrt{\pi} \text{ και } ||Df_n|| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |n \cos nx|^2 \, dx} = n\sqrt{\pi}$$

Ως εκ τούτου, $||Df_n|| = n||f_n||$, που αποδεικνύουν ότι ο διαφορικός τελεστής δεν είναι φραγμένος. Σαφώς, αυτό το παράδειγμα, μπορεί εύκολα να γενικευθεί σε ένα αυθαίρετο διάστημα $[a, b]$, ή ακόμα και στο $(-\infty, \infty)$.

Παράδειγμα 3.1.4. *(Ολοκληρωτικός τελεστής) Άλλο ένα σημαντικό είδος τελεστή είναι ο ολοκληρωτικός τελεστής T που ορίζεται ως*

$$(Tx)(s) = \int_a^b K(s, t)x(t)dt,$$

όπου α και β είναι πεπερασμένα ή άπειρα, $a < b$, και K είναι μια συνάρτηση που ορίζεται στο $(a, b) \times (a, b)$. Η συνάρτηση K καλείται ο πυρήνας ενός τελεστή. Το πεδίο ορισμού ενός ολοκληρωτικού τελεστή εξαρτάται από το K. Αν

$$\sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 \, dtds} < \infty,$$

τότε ο T ένας φραγμένος τελεστής στον $L^2([a,b])$ και

$$||T|| \leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 dtds}$$

Πράγματι, $\forall x \in L^2[(a,b])$, έχουμε

$$\begin{aligned} ||Tx||^2 &= \int_a^b \left| \int_a^b (K(s,t)x(t)dt \right|^2 ds \\ &\leq \int_a^b \left(\int_a^b |K(s,t)|^2 \, dt \int_a^b |x(t)|^2 dt \right) ds \text{ ανισότητα } Schwarz's \\ &\leq \int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 dtds \int_a^b |x(t)|^2 dt \end{aligned}$$

Έτσι,

$$||Tx|| \leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 dtds ||x||}.$$

Παράδειγμα 3.1.5. *(πολλαπλασιαστικός τελεστής) Έστω $z \in C([a,b])$. Ο τελεστής A στόν $L^2([a,b])$ που ορίζεται από την $(Ax)(t) = z(t)x(t)$ είναι σαφώς γραμμικός. Η συνάρτηση z ονομάζεται ο πολλαπλασιαστής. Από την*

$$||Ax||^2 = \int_a^b |x(t)|^2 |z(t)|^2 dt \leq \max_{[a,b]} |z(t)|^2 \int_a^b |x(t)|^2 dt,$$

Έχουμε

$$||Ax|| \leq \max_{[a,b]} |z(t)| \|x\|,$$

Συνεπώς ο A είναι φραγμένος.
Δύο τελεστές A και B σε ένα διανυσματικό χώρο E λέμε ότι είναι ίσοι, $A = B$, αν $Ax = Bx$ $\forall x \in E$. Το σύνολο όλων των τελεστών αποτελεί ένα διανυσματικό χώρο με την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό που ορίζεται από τις:

$$(A+B)x = Ax + Bx \text{ και } (aA)x = a(Ax)$$

Το γινόμενο AB των τελεστών A και B ορίζεται από την:

$$(AB)x = A(Bx).$$

Έτσι, το AB δηλώνει απλά τη σύνθεση των A και B. Παραδοσιακά, στο πλαίσιο των τελεστών, η λέξη «γινόμενο» χρησιμοποιείται αντί του όρου «σύνθεση». Όταν ένας τελεστής A πολλαπλασιάζεται με ένα βαθμωτό μέγεθος λ, τότε το αποτέλεσμα μπορεί επίσης να θεωρηθεί ως το γινόμενο του πολλαπλασιαστικού τελεστή λI και του A : $\lambda A = (I\lambda)A$. Αυτή η διαφορετική ερμηνεία δεν αλλάζει τις ιδιότητες ενός τελεστή. Σε ορισμένες περιπτώσεις, μπορεί να είναι βολικό να προσδιορίσουμε σταθερές με την βοήθεια πολλαπλασιαστικών τελεστών. Από την $IA = 1A$, ο μοναδιαίος τελεστής συχνά συμβολίζεται με 1.

Οι τελεστές που ορίσαμε έχουν τις ακόλουθες προφανείς ιδιότητες:

$$\begin{array}{rclcrclcrcl}
A+B &=& B+A &,& (A+B)+C &=& A+(B+C) &,& A+0 &=& A, \\
\alpha(A+B) &=& \alpha A+\alpha B &,& (\alpha+\beta)A &=& \alpha A+\beta A &,& A0 &=& 0, \\
A(BC) &=& (AB)C &,& (A+B)C &=& AC+BC &,& AI &=& IA.
\end{array}$$

Σε γενικές γραμμές, ο AB δεν χρειάζεται να ισούται με τον BA. Οι τελεστές A και B, για τους οποίους $AB = BA$ ονομάζονται αντιμεταθετικοί τελεστές.

Παράδειγμα 3.1.6. *(Μη αντιμεταθετικοί τελεστές) Θεωρούμε το χώρο των διαφορίσιμων συναρτήσεων στον M και τους τελεστές*

$$Af(x) = xf(x) \text{ και } D = \frac{d}{dx}.$$

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι $AD \neq DA$.

Το τετράγωνο ενός τελεστή A ορίζεται ως $A^2x = A(Ax)$. Με την επαγωγή, μπορούμε να ορίσουμε

$$A^n x = A(A^{n-1}x) \ \forall \text{ θετικό ακέραιο } n.$$

Ως συνήθως, $A^1 = A$ και $A^0 = I$.

Θεώρημα 3.1.1. *Το γινόμενο AB των φραγμένων τελεστών A και B είναι φραγμένο και*

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

Απόδειξη :

Έστω A και B φραγμένοι τελεστές σε έναν χώρο με νόρμα E, $||A|| = K_1$ και $||B|| = K_2$. Τότε

$$||ABx|| \leq K_1||Bx|| \leq K_1K_2||x|| \; \forall x \in E.$$

Θεώρημα 3.1.2. *Ένας φραγμένος τελεστής A σε έναν διαχωρίσιμα απειροδιάστατο χώρο Hilbert μπορεί να αντικατασταθεί από μια άπειρη μήτρα.*

Απόδειξη :

Έστω A ένας φραγμένος τελεστής σε έναν χώρο Hilbert H και έστω $(e_n), n = 1, 2, ...,$ να είναι μια πλήρης ορθοκανονική βάση στον H. Για $i, j \in N$, ορίζουμε

$$a_{ij} = \langle Ae_j, e_i \rangle$$

Για κάθε $x \in H$, έχουμε

$$\begin{aligned} Ax &= A\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\langle x, e_j\rangle e_j\right) \\ &= \left(\lim_{n\to\infty} A\sum_{j=1}^{n}\langle x, e_j\rangle e_j\right) \text{ (από τη συνέχεια του } A) \\ &= \left(\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\langle x, e_j\rangle Ae_j\right) \text{ (από τη γραμμικότητα του } A) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\langle x, e_j\rangle Ae_j \end{aligned}$$

Τώρα,

$$\langle Ax, e_i\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{\infty}\langle x, e_j\rangle Ae_j, e_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{\infty}\langle Ae_j, e_i\rangle\langle x, e_j\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\langle x, e_j\rangle$$

Έτσι, ο A αντικαθίσταται απο τον πίνακα (a_{ij}).

3.2 Διγραμμικά συναρτησιακά και τετραγωνικές μορφές

Οι έννοιες του διγραμμικού συναρτησιακού και μιάς τετραγωνικής μορφής δεν απαιτούν τη δομή ενός χώρου εσωτερικού γινομένου. Μπορούν να οριστούν σε κάθε διανυσματικό χώρο.

Ορισμός 3.2.1. *(Διγραμμικά συναρτησιακά) Διγραμμικό συναρτησιακό ϕ σε ένα μιγαδικό διανυσματικό χώρο E, εννοούμε την απεικόνιση $\phi : E \times E \to \mathbb{C}$ ικανοποιώντας τις ακόλουθες δύο συνθήκες:*

$$\phi(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha\phi(x_1, y) + \beta\phi(x_2, y),$$
$$\phi(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \bar{\alpha}\phi(x, y_1) + \bar{\beta}\phi(x, y_2),$$

για κάθε σταθερά α και β και κάθε $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in E$.
Τα διγραμμικά συναρτησιακά συχνά αποκαλούνται ημιαντι-διγραμμικά. Σημειώνουμε ότι ένα διγραμμικό συναρτησιακό είναι γραμμικό σε σχέση με την πρώτη μεταβλητή και αντιγραμμικό σε σχέση με τη δεύτερη μεταβλητή. Είναι σαφές ότι όλα τα διγραμμικά συναρτησιακά στον E αποτελούν ένα διανυσματικό χώρο.

Παράδειγμα 3.2.1. *Το εσωτερικό γινόμενο είναι διγραμμικό συναρτησιακό.*

Παράδειγμα 3.2.2. *Έστω A και B τελεστές σε ένα χώρο εσωτερικού γινομένου E. Τότε, $\phi_1(x, y) = \langle Axy\rangle, \phi_2(x, y) = \langle xBy\rangle$ και $\phi_3(x, y) = \langle AxBy\rangle$ είναι διγραμμικά συναρτησιακά στον E.*

Παράδειγμα 3.2.3. *Έστω f και g γραμμικά συναρτησιακά σε ένα διανυσματικό χώρο E. Τότε, $\phi(y) = f(x)g(y)$ είναι ένα διγραμμικό συναρτησιακό στον E.*

Ορισμός 3.2.2. *(α) Το ϕ λέγεται συμμετρικό αν $\phi(y) = \overline{\phi}(y, x)$ για όλα τα $x, y \in E$*
(β) Το ϕ ονομάζεται θετικό αν $\phi(x, x) > 0 \forall x \in E$.
(γ) Το ϕ ονομάζεται γνήσια θετικό, αν είναι θετικό και $\phi(x, x) > 0$ για όλα τα $x \neq 0$.
(δ) Αν E είναι ένας χώρος με νόρμα, τότε το ϕ ονομάζεται φραγμένο αν $|\phi(x, y)| \leq K||x|||y||$ για κάποια $K > 0$ και όλα τα $x, y \in E$. Η νόρμα ενός διγραμμικού συναρτησιακού ορίζεται από

$$||\phi|| = \sup_{||x||=||y||=1} |\phi(x, y)|.$$

Αν $f = g$ στο παράδειγμα 3.2.3, τότε ο ϕ είναι συμμετρικός και θετικός. Το εσωτερικό γινόμενο είναι αυστηρά θετικό. Αν οι τελεστές A και B στο Παράδειγμα 3.2.2 είναι φραγμένοι, τότε $\phi_1, \phi_2,$

και ϕ_3 είναι φραγμένοι. Ομοίως, αν f και g στο Παράδειγμα 3.2.3 είναι φραγμένοι, τότε το ορισμένο διγραμμικό συναρτησιακό είναι επίσης φραγμένο. Σημειώνουμε ότι για ένα φραγμένο διγραμμικό συναρτησιακό ϕ στον E έχουμε

$$|\phi(x, y)| \leq \|\phi\|\|x\|\|y\| \text{ για όλα τα } x, y \in E$$

Ορισμός 3.2.3. *(Τετραγωνική μορφή) Έστω ϕ ένα διγραμμικό συναρτησιακό στον διανυσματικό χώρο E. Η συνάρτηση $\Phi : E \to \mathbb{C}$ που ορίζεται από την $\Phi(x) = \phi(x, x)$ καλείται η τετραγωνική μορφή που σχετίζεται με το ϕ. Μια τετραγωνική μορφή Φ σε ένα χώρο με νόρμα καλείται φραγμένη αν υπάρχει σταθερά $k > 0$ τέτοια ώστε $|\phi(x)| \leq k||x||^2$ για όλα τα $x, y \in E$. Η νόρμα μιας τετραγωνικής μορφής ορίζεται απο την*

$$||\Phi|| = \sup_{||x||=1} |\Phi(x)|.$$

Σημειώνουμε ότι για μια φραγμένη τετραγωνική μορφή Φ σε έναν χώρο με νόρμα έχουμε $|\Phi(x)| \leq ||\Phi||||x||^2$. Ένα διγραμμικό συναρτησιακό και η σχετική τετραγωνική μορφή έχουν ιδιότητες παρόμοιες με ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y\rangle$ και του τετραγώνου της νόρμας που ορίζεται από το εν λόγω εσωτερικό γινόμενο $||x||^2 = \langle x, x\rangle$, αντίστοιχα.

Θεώρημα 3.2.1. *(Ταυτότητα πολικότητας). Έστω ϕ ένα διγραμμικό συναρτησιακό στον E και έστω Φ η τετραγωνική μορφή που συνδέεται με τη ϕ. Τότε*

$$4\phi(x, y) = \Phi(x + y) - \Phi(x - y) + i\Phi(x + iy) - i\Phi(x - iy) \tag{3.2}$$

για όλα τα $x, y \in E$.

Απόδειξη:

Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, έχουμε

$$\Phi(\alpha x + \beta y) = \phi(\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) = |\alpha|^2\Phi(x) + \alpha\bar{\beta}\phi(x, y) + \bar{\alpha}\beta\phi(y, x) + |\beta|^2\Phi(y)$$

Χρησιμοποιώντας αυτή την ισότητα στη συνέχεια για $\alpha = \beta = 1, \alpha = 1$ και $\beta = -1, \alpha = 1$ και

$\beta = i, \alpha = 1$ και $\beta = -i$. Παίρνουμε

$$\begin{aligned} \Phi(x+y) =& \Phi(x) + \phi(x,y) + \phi(y,x) + \Phi(y), \\ -\Phi(x-y) =& -\Phi(x) + \phi(x,y) + \phi(y,x) - \Phi(y), \\ i\Phi(x+iy) =& i\Phi(x) + \phi(x,y) - \phi(y,x) + i\Phi(y), \\ i\Phi(x-iy) =& -i\Phi(x) + \phi(x,y) - \phi(y,x) - i\Phi(y), \end{aligned}$$

Με την πρόσθεση αυτών των ισοτήτων παίρνουμε την (3.2.1).

Πόρισμα 3.2.1. *Έστω ϕ_1 και ϕ_2 διγραμμικά συναρτησιακά στον E. Αν $\phi_1(x,x) = \phi_2(x,x)$ για όλα τα $x \in E$, τότε $\phi_1 = \phi_2$ δηλ $\phi_1(x,y) = \phi_2(x,y)$ για όλα τα $x, y \in E$. Ομοίως, εάν A και B, τελεστές στον E έτσι ώστε $\langle Ax, x\rangle = \langle Bx, x\rangle$ για όλα τα $x \in E$, τότε $A = B$.*

Απόδειξη:

Αν $\phi_1(x,x) = \phi_2(x,x) \forall x \in E$, τότε οι τετραγωνικές μορφές Φ_1 και Φ_2 είναι ίσες, και ως εκ τούτου, από την (3.2.1), τα συναρτησιακά ϕ_1 και ϕ_2 είναι ίσα. Η απόδειξη για τους τελεστες προκύπτει θετωντας $\phi_1(x,y) = \langle Ax, y\rangle$ και $\phi_1(x,y) = \langle x, By\rangle$.

Θεώρημα 3.2.2. *Ένα διγραμμικό συναρτησιακό ϕ στον E είναι συμμετρικό αν και μόνο αν η σχετική τετραγωνική μορφή του Φ είναι πραγματική.*

Απόδειξη:

Εάν $\phi(x,y) = \overline{\phi(y,x)}$ για όλα τα $x, y \in E$, τότε

$$\Phi(x) = \phi(x,x) = \overline{\phi(x,x)} = \overline{\Phi(x)},$$

$\forall x \in E$ και ως εκ τούτου το Φ είναι πραγματικό.
Ας υποθέσουμε τώρα $\Phi(x) = \overline{\Phi(x)}$ για όλα τα $x \in E$. Ορίζουμε ένα διγραμμικό συναρτησιακό ψ στον E ώς

$$\psi(x,y) = \overline{\phi(y,x)}$$

Στη συνέχεια, για τις αντίστοιχες τετραγωνικές μορφές Ψ έχουμε:

$$\Psi(x) = \overline{\phi(x,x)} = \overline{\Phi(x)} = \Phi(x)$$

Έτσι, από το 3.2.1 πόρισμα, $\phi(y) = \psi(x,y)$ για όλα τα $x, y \in E$. Σαφώς, αυτό σημαίνει ότι $\phi(y) = \phi(y,x)$ για όλα τα $x, y \in E$.

Θεώρημα 3.2.3. *Ένα διγραμμικό συναρτησιακό ϕ σε ένα χώρο με νόρμα E είναι φραγμένο αν και μόνο αν η σχετική τετραγωνική μορφή Φ είναι φραγμένη. Επιπλέον, έχουμε*

$$||\Phi|| \le ||\phi|| \le 2||\Phi|| \tag{3.3}$$

Απόδειξη:

Από

$$||\Phi|| = \sup_{||x||=1} |\Phi(x)| = \sup_{||x||=1} |\phi(x,x)| \le \sup_{||x||=||y||=1} |\phi(x,y)| = ||\Phi||,$$

αν ϕ είναι φραγμένο, τότε Φ είναι φραγμένη και η πρώτη ανισότητα προκύπτει.
Ας υποθέσουμε τώρα ότι η Φ είναι φραγμένη. Σύμφωνα με τη (3.2.1), έχουμε:

$$\begin{aligned}|\phi(x,y)| &= \frac{1}{4}|\Phi(x,y) - \Phi(x-y) + i\Phi(x+iy) - i\Phi(x-iy)| \\ &\le \frac{1}{4}||\Phi||(||x+y||^2 + ||x-y||^2 + ||x+iy||^2 + ||x-iy||^2).\end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, από τον κανόνα του παραλληλογράμμου,

$$|\phi(x,y)| \le \|\Phi\|(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Κατά συνέπεια,

$$\sup_{||x||=||y||=1} |\phi(x,y)| \le \sup_{||x||=||y||=1} ||\Phi||x||^2 + ||y||^2) = 2||\Phi||.$$

Έτσι, αν Φ είναι φραγμένη, τότε ϕ είναι φραγμένο και η δεύτερη ανισότητα στην (3.2.2) προκύπτει.

Θεώρημα 3.2.4. *Εάν ένα διγραμμικό συναρτησιακό ϕ σε ένα χώρο με νόρμα E είναι φραγμένο και συμμετρικό για την σχετιζόμενη τετραγωνική μορφή Φ έχουμε $||\phi|| = ||\Phi||$.*

Απόδειξη:

Απο το Θεώρημα 3.2.3, $||\Phi|| \leq ||\phi||$. Πρέπει να δείξουμε ότι ισχύει και η αντίθετη ανισότητα. Αφού ϕ είναι συμμετρικό, Φ είναι πραγματική, από θεώρημα 3.2.2. Τότε, από την ταυτότητα πολικότητας, παίρνουμε

$$\Re\phi(x,y) = \frac{1}{4}\left[\Phi(x+y) - \Phi(x-y)\right],$$

και ως εκ τούτου

$$\begin{aligned}|\Re\phi(x,y)| \leq \frac{1}{4}\|\Phi\|\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) \\ + \frac{1}{2}\|\Phi\|\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right),\end{aligned}$$

από τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Έστω x και y αυθαίρετα σταθερά στοιχεία του E τέτοια ώστε $||x|| = ||y|| = 1$, και έστω θ ένας μιγαδικός αριθμός τέτοιος ώστε $|\theta| = 1$ και $|\phi(x,y)| = \theta\phi(x,y)$. Τότε:

$$|\phi(x,y)| = \theta\phi(x,y) = \phi(\theta x,y) = |\Re\phi(\theta x,y)| \leq \frac{1}{2}\|\Phi\|\left(\|\theta x\|^2 + \|y\|\right) = ||\Phi||,$$

και ως εκ τούτου

$$||\phi|| = \sup_{||x||=||y||=1} |\phi(x,y)| \leq ||\Phi||$$

Θεώρημα 3.2.5. *Έστω A ένας φραγμένος τελεστής σε χώρο Hilbert H. Τότε το διγραμμικό συναρτησιακό που ορίζεται από $\phi(x,y) = (x, Ay)$ είναι φραγμένο και $||\phi|| = ||A||$.*

Απόδειξη:

Για κάθε $x, y \in H$ από την ανισότητα Schwarz, έχουμε:

$$|\phi(x,y)| \leq |\langle x, Ay\rangle| \leq \|x\|\|Ay\| \leq \|A\|\|x\|\|y\|.$$

Έτσι, το ϕ είναι φραγμένο και $\|\phi\| \leq \|A\|$. Από την άλλη πλευρά έχουμε:

$$||Ax||^2 = |\langle Ax, Ax\rangle| = |\phi\langle Ax, x\rangle| \leq \|\phi\|\|Ax\|\|x\|.$$

Ως εκ τούτου, για $Ax \neq 0$, έχουμε

$$||Ax|| \leq \|\phi\|\|x\|.$$

Δεδομένου ότι η παραπάνω ανισότητα ικανοποιείται ασθενώς όταν $Ax = 0$, παίρνουμε

$$||A|| \leq ||\phi||.$$

Θεώρημα 3.2.6. *Έστω ϕ ένα φραγμένο διγραμμικό συναρτησιακό σε ένα χώρο Hilbert H. Υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής A στον H, έτσι ώστε:*

$$\phi(x, y) = \langle x, Ay\rangle \text{ για κάθε } x, y \in H$$

Απόδειξη:

Για ένα σταθερό στοιχείο $y \in H$, το $\phi(x, y)$ είναι ένα φραγμένο διγραμμικό συναρτησιακό στον H. Συνεπώς από το θεώρημα Riesz, υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο $Ay \in H$ τέτοιο ώστε $\phi(x, y) = (Ax, y)$ για όλα τα $x \in H$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση $y \to Ay$ είναι ένας φραγμένος τελεστής στον E. Πράγματι, για κάθε $x, y_1, y_2 \in H$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\langle x, A(\alpha y_1 + \beta y_2)\rangle &= \phi\langle x, \alpha y_1 + \beta y_2\rangle\\ &= \bar{\alpha}\phi(x, y_1) + \bar{\beta}\phi(x, y_2)\\ &= \langle x, \alpha Ay_1 + \beta Ay_2\rangle,\end{aligned}$$

και ως εκ τούτου

$$A(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha Ay_1 + \beta Ay_2.$$

Τώρα θα δείξουμε ότι ο A είναι φραγμένος. Αφού το ϕ είναι φραγμένο, έχουμε:

$$|\langle x, Ay\rangle| = |\phi(x, y)| \leq k\|x\|\|y\|$$

για κάποια $k > 0$ και για όλα τα $x, y \in H$. Συγκεκριμένα, για $x = Ay$ παίρνουμε

$$||Ay||^2 = |\langle Ay, Ay\rangle| = |\phi(Ay, y)| \leq k\|Ay\|\|y\|$$

Ως εκ τούτου, αν $Ay \neq 0$, παίρνουμε

$$||Ay|| \leq k||y||$$

η οποία έχει τετριμμένη λύση όταν $Ay = 0$. Αυτό αποδεικνύει ότι ο A είναι φραγμένος. Για να αποδείξουμε τη μοναδικότητα, παρατηρούμε ότι

$$\langle x, Ay\rangle = \langle x, By\rangle \text{ για κάθε } x, y \in H$$

συνεπάγεται ότι $A = B$.

Ορισμός 3.2.4. *(Συνεκτικό συναρτησιακό) Ένα διγραμμικό συναρτησιακό ϕ σε ένα χώρο με νόρμα καλείται συνεκτικό (ή ελλειπτικό) αν υπάρχει μια θετική σταθερά K, έτσι ώστε*

$$\phi(x, x) \geq K||x||^2 \text{ για κάθε } x \in E.$$

Παράδειγμα 3.2.4. *Αν z είναι μια συνεχής συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής στο $[0, 1]$, τέτοια ώστε $\min_{t\in[0,1]} z(t) > 0$ τότε το διγραμμικό συναρτησιακό ϕ ορίζεται στον $L^2([0, 1])$ με*

$$\phi(x, y) = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}z(t)dt$$

να είναι συνεκτικό. Πράγματι, έχουμε

$$\phi(x, x) = \int_0^1 |x(t)|^2 z(t)dt \geq K||x||^2,$$

όπου $K = \min_{t\in[0,1]} z(t)$. Το επόμενο θεώρημα, αποδείχθηκε από τον P. Lax και A. N Milgram το 1954, είναι μια σημαντική γενίκευση του θεωρήματος Riesz.

Θεώρημα 3.2.7. *(Lax-Milgram θεώρημα).*

Έστω ϕ ένα φραγμένο, συνεκτικό, διγραμμικό συναρτησιακό σε ένα χώρο Hilbert H. Για κάθε *φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό f στον H, υπάρχει ένα μοναδικό $x_f \in H$ τέτοιο ώστε:*

$$f(x) = \phi(x, x_f) \text{ για όλα τα } x \in H.$$

Απόδειξη:

Απο το Θεώρημα 3.2.6, υπάρχει ένας φραγμένος τελεστής A τέτοιος ώστε

$$\phi(x, y) = \langle x, Ay \rangle \text{ για κάθε } x, y \in H.$$

Το ϕ είναι συνεκτικό, άρα έχουμε

$$K||x||^2 \leq \phi(x, x) = \langle x, Ax \rangle \leq \|Ax\|\|x\|,$$

και ως εκ τούτου $K||x|| \leq ||Ax||$ για κάθε $x \in H$. Έστω $x_1, x_2 \in H$.Αν $Ax_1 = Ax_2$, τότε $A(x_1 - x_2) = 0$, και έτσι

$$||x_1 - x_2|| \leq \frac{1}{K}||A(x_1 - x_2)|| = 0,$$

πράγμα που συνεπάγεται $x_1 = x_2$. Ως εκ τούτου, ο A είναι «1-1».
Συμβολίζουμε το σύνολο τιμών του A με $\mathcal{R}(A)$. Έστω (x_n) είναι μια ακολουθία από στοιχεία του H. Αν $||Ax_n - y|| \to 0$ για κάποιο $y \in H$, τότε

$$||x_n - x_m|| \leq \frac{1}{K}||Ax_n - Ax_m|| \to 0,$$

Ως εκ τούτου, η x_n είναι μια ακολουθία Cauchy στον H. Επειδή το H είναι πλήρης, υπάρχει $x \in H$ τέτοιο ώστε $||x_n - x|| \to 0$. Ως εκ τούτου, $||Ax_n - Ax|| \to 0$, δεδομένου ότι η ο A είναι συνεχής. Ως εκ τούτου, $Ax = y$, και συνεπώς, $y \in \mathcal{R}(A)$. Αυτό αποδεικνύει ότι $\mathcal{R}(A)$ είναι ένας κλειστός υπόχωρος του H. Θα αποδείξουμε ότι $\mathcal{R}(A) = H$. Υποθέσουμε ότι $\mathcal{R}(A)$ είναι ένας κατάλληλος υπόχωρος του H. Τότε, υπάρχει ένα μη μηδενικό $x \in H$ που είναι ορθογώνιο στο $\mathcal{R}(A)$, δηλαδή,

$$\langle x, Ay \rangle = 0 \quad \forall \quad y \in H$$

Πιο συγκεκριμένα, έχουμε

$$0 = |\langle x, Ax\rangle| = |\phi(x,x)| \geq K||x||^2,$$

η οποία έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση $x \neq 0$.
Αν f είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό στον H, τότε υπάρχει ένα μοναδικό $x_0 \in H$ τέτοιο ώστε $f(x) = (x, x_0)$ για όλα τα $x \in H$. Δεδομένου ότι ο A είναι «1-1» απεικόνιση και, $\mathcal{R}(A) = H$ υπάρχει ένα μοναδικό $x_f \in H$ τέτοιο ώστε $x_0 = Ax_f$, και ως εκ τούτου

$$f(x) = \langle x, Ax_f\rangle = \phi(x, x_f) \text{ για όλα τα } x \in H$$

3.3 Συζυγείς και αυτοσυζυγείς τελεστές

Έστω A ένας φραγμένος τελεστής σε έναν χώρο Hilbert H. Για κάθε σταθερό $x_0 \in H$, το συναρτησιακό f που ορίζεται στον H από

$$f(x) = \langle Ax, x_0\rangle$$

είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό στον H. Έτσι, από το θεώρημα αναπαράστασης Riesz, υπάρχει μοναδικό $y_0 \in H$ τέτοιο ώστε $f(x) = (x, y_0)$ για όλα τα $x \in H$, ή, ισοδύναμα, $(Ax, x_0) = (x, y_0)$ για κάθε $x \in H$. Αν συμβολίζουμε με A^* τον τελεστή οπου σε κάθε $x_0 \in H$ εκχωρεί το μοναδικό y_0, τότε θα έχουμε $(Ax, y) = \langle x, A^*y\rangle$ για κάθε τα $x, y \in H$.

Ορισμός 3.3.1. *(Συζυγής τελεστής) 'Εστω A φραγμένος τελεστής σε χώρο Hilbert H. Ο τελεστής $A^* : H \to H$ που ορίζεται ώς*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle \text{ για καθε } x, y \in E.$$

καλείται ο συζυγής τελεστής του A.
Οι ακόλουθες ιδιότητες είναι άμεσες συνέπειες του παραπάνω ορισμού:

$$\begin{aligned}(A+B)^* = A^* + B^*, \quad (\alpha A)^* = \bar{\alpha}A^*, \quad (A^*)^* = A,\\ I^* = I, \quad (AB)^* = B^*A^*\end{aligned}$$

για αυθαίρετους τελεστές A και B και μια σταθερά α.

Θεώρημα 3.3.1. *Ο συζυγής τελεστής A^* ενός φραγμένου τελεστή A είναι φραγμένος. Επιπλέον, έχουμε $||A| = ||A^*||$ και $||A^*A|| = ||A||^2$.*

Απόδειξη:

Από την ανισότητα Schwarz, $\forall x, y \in H$, έχουμε

$$|\langle A^*x, y\rangle| = |\langle x, Ay\rangle| \leq \|A\|\|x\|\|y\|.$$

Ως εκ τούτου, για $y = A^*x$ παίρνουμε

$$||A^*x||^2 = \langle A^*x, A^*x\rangle \leq \|A\|\|x\|\|A^*x\|. \quad \text{Συνεπώς } ||A^*|| \leq ||A||. \tag{3.4}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι ο συζυγής ενός φραγμένου τελεστή είναι φραγμένος. Ως εκ τούτου,στην ανισότητα (3.4) μπορεί να χρησιμοποιηθεί A^* αντί του A, το οποίο δίνει

$$||A|| = ||(A^*)^*|| \leq ||A^*||$$

Έτσι, $||A| = ||A^*||$.
Από το θεώρημα 3.1.1 προκύπτει ότι:

$$||AA^*|| \leq \|A^*\|\|A\| = ||A||^2.$$

Από την άλλη πλευρά, $\forall x \in H$, έχουμε

$$||Ax||^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle \leq \|A^*Ax\|\|x\| \leq \|A^*A\|\|x\|^2.$$

Ως εκ τούτου, $||A^*A|| = ||A||^2$.
Σε γενικές γραμμές A και A^*, δεν χρειάζεται να είναι ίσοι. Για παράδειγμα, έστω $H = \mathbb{C}^2$ και έστω A να ορίζεται ώς:

$$A(z_1, z_2) = (0, z_1).$$

Τότε

$$\langle A(x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 \overline{y_2} \quad \text{και} \quad \langle (x_1, x_2), A(y_1, y_2) \rangle = x_2 \overline{y_1}$$

Οι τελεστές για τους οποίους $A = A^*$ έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Ορισμός 3.3.2. *(Αυτοσυζυγής τελεστής) Αν $A = A^*$, δηλαδή, $(Ax, y) = (x, Ay) \forall x, y \in H$, τότε ο A ονομάζεται αυτοσυζυγής.*

Παράδειγμα 3.3.1. *Έστω $H = \mathbb{C}^N$ και $e_1, ..., e_N$ είναι η τυπική ορθοκανονική βάση στον H. Έστω A ένας τελεστής που παριστάνεται από τον πίνακα (a_{ij}), όπου $(a_{ij}) = \langle Ae_j, e_i \rangle$ (βλ. παράδειγμα 3.1.2). Στη συνέχεια, ο συζυγής τελεστής A^* παριστάνεται από τον πίνακα $b_{kj} = \langle A^* ej, e_k \rangle$. Ως εκ τούτου,*

$$b_{kj} = \langle e_j, Ae_k \rangle = \overline{\langle Ae_k, e_j \rangle} = \overline{\alpha_{jk}}.$$

Συνεπώς, ο τελεστής A είναι αυτοσυζυγής, αν και μόνο αν $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Ένας πίνακας που ικανοποιεί την προϋπόθεση αυτή καλείται συχνά ερμητιανός.

Παράδειγμα 3.3.2. *Έστω H διαχωρίσιμος, απειροδιάστατος χώρος Hilbert και έστω $e_1, e_2, e_3, ...$ να είναι μια πλήρης ορθοκανονική ακολουθία στον H. Έστω A ένας φραγμένος τελεστής στον H που αναπαριστάται από έναν πίνακα (a_{ij}) (Θεώρημα 3.1.2.). Όπως και στη περίπτωση πεπερασμένης διαστάσεως, ο συζυγής τελεστής A^* αναπαριστάται από μια άπειρη μήτρα $b_{kj} = \langle A^* e_j, e_k \rangle$. Ο A είναι αυτοσυζυγής αν και μόνο αν $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ για όλα τα $i, j \in N$.*

Παράδειγμα 3.3.3. *Έστω T ένας Fredholm τελεστής στο $L^2([a, b])$ που ορίζεται ώς*

$$(Tx)(s) \int_a^b K(s, t) x(t) dt,$$

όπου K είναι μια συνάρτηση που ορίζεται στο $[a, b] \times [a, b]$ τέτοια ώστε

$$(Tx)(s) \int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 ds dt < \infty.$$

Σημειώνουμε ότι η συνθήκη ικανοποιείται αν ο K είναι συνεχής. Έχουμε

$$
\begin{aligned}
\langle Tx, y\rangle &= \int_a^b \int_a^b K(s,t)x(t)\overline{y(s)}dsdt \\
&= \overline{\int_a^b \int_a^b \overline{K(s,t)x(t)}y(s)dsdt} \\
&= \int_a^b x(t)\overline{\int_a^b \overline{K(s,t)}y(s)dsdt}.
\end{aligned}
$$

Αυτό δείχνει ότι

$$
(T^*x)(s) = \int_a^b \overline{K(t,s)}x(t)dt.
$$

Έτσι, ένας τελεστής Fredholm είναι αυτοσυζυγής αν ο πυρήνας του ικανοποιεί την ισότητα $K(s,t) = \overline{K(t,s)}$.

Παράδειγμα 3.3.4. *Έστω A τελεστής στον $L^2([a,b])$ που ορ0ίζεται από $(Ax)(t) = tx(t)$. Έχουμε*

$$
\langle Ax, y\rangle = \int_a^b tx(t)\overline{y(t)}dt = \int_a^b x(t)\overline{ty(t)}dt = \langle x, Ay\rangle,
$$

Άρα ο A είναι αυτοσυζυγής.

Παράδειγμα 3.3.5. *Θεωρούμε τον τελεστή A ορισμένο στον $L^2(\mathbb{R})$ που καθορίζεται από την*

$$
(Ax)(t) = e^{-|t|}x(t).
$$

Αυτός είναι ένας φραγμένος αυτοσυζυγής τελεστής. Μπορεί να αποδειχθεί, όπως στο παράδειγμα 3.1.5 ότι είναι φραγμένος. Επιπλέον, έχουμε

$$
\langle Ax, y\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}x(t)\overline{y(t)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)[\overline{e^{-|t|}y(t)}]dt = \langle x, Ay\rangle,
$$

Έτσι, ο A είναι αυτοσυζυγής.

Παράδειγμα 3.3.6. *Έστω ϕ ένα φραγμένο διγραμμικό συναρτησιακό στον H, και έστω A ένας τελεστής στον H τέτοιος ώστε $\phi(x,y) = \langle x, Ay\rangle$ για όλα τα $x, y \in H$. Τότε ο A είναι αυτοσυζυγής* *αν και μόνο αν ο ϕ είναι συμμετρικός. Στην πραγματικότητα, για όλα τα $x, y \in H$ έχουμε:*

$$\langle x, Ay\rangle = \phi(x, y) = \overline{\phi(y, x)} = \overline{\langle y, Ax\rangle} = \langle Ax, y\rangle \text{(αν } \phi \text{ είναι συμμετρικό)},$$

Και

$$\phi(x, y) = \langle x, Ay\rangle = \langle Ax, y\rangle = \overline{\langle y, Ax\rangle} = \overline{\phi(y, x)} \text{(αν } A \text{ είναι αυτοσυζυγής)}.$$

Θεώρημα 3.3.2. *Έστω A ένας φραγμένος τελεστής σε χώρο Hilbert H. Οι τελεστές $T_1 = A^*A$ και $T_2 = A + A^*$ είναι αυτοσυζυγείς.*

Απόδειξη:

Για όλα τα $x, y \in H$, έχουμε

$$\langle T_1x, y\rangle = \langle A^*Ax, y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, A^*Ay\rangle = \langle x, T_1y\rangle$$

και

$$\langle T_2x, y\rangle = \langle (A + A^*)x, y\rangle = \langle x, (A + A^*)^*y\rangle = \langle x, (A + A^*)y\rangle = \langle x, T_2y\rangle$$

Θεώρημα 3.3.3. *Το γινόμενο δύο αυτοσυζυγών τελεστών είναι αυτοσυζυγής αν και μόνο αν οι τελεστές αντιμετατίθενται.*

Απόδειξη:

Έστω A και B αυτοσυζυγείς τελεστές. Τότε

$$\langle ABx, y\rangle = \langle Bx, Ay\rangle = \langle x, BAy\rangle.$$

Έτσι, αν $AB = BA$, τότε ο AB είναι αυτοσυζυγής. Αντιστρόφως, εάν ο AB είναι αυτοσυζυγής, τότε απο την παραπάνω σχέση συνεπάγεται $AB = (AB)^* = BA$.

Πόρισμα 3.3.1. *Αν ο A είναι αυτοσυζυγής, τότε είναι και το τυχόν πολυώνυμο του A*

$$a_nA^n + ... + a_1A + a_0I$$

με πραγματικούς συντελεστές $a_n, ..., a_0$.

Στον ορισμό του συζυγή τελεστή A έχουμε υποθέσει ότι το πεδίο ορισμού του A είναι ολόκληρος ο χώρος H. Στη συνέχεια, η ύπαρξη και η μοναδικότητα του συζυγή τελεστή A^* ήταν εγγυημένη από το θεώρημα αναπαράστασης Riesz. Στην πράξη, έχουμε συχνά ασχοληθεί με τελεστές που ορίζονται σε ένα κατάλληλο υπόχωρο του H, για παράδειγμα, ο διαφορικός τελεστής. Σε μια τέτοια περίπτωση ο συζυγής τελεστής μπορεί να οριστεί ως εξής. Έστω $A : \mathcal{D}(A) \to H$ και $B : \mathcal{D}(B) \to H$ τελεστές, $\mathcal{D}(A)$,και $\mathcal{D}(B) \in H$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι και $\mathcal{D}(A)$,και $\mathcal{D}(B)$ είναι διανυσματικοί χώροι. Στη συνέχεια, ο B καλείται συζυγής τελεστής του A εάν

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle \forall x \in \mathcal{D}(A) \text{ και } x \in \mathcal{D}(B)$$

Στην περίπτωση αυτή, ο συζυγής τελεστής δεν χρειάζεται να είναι μοναδικός. Μπορεί να αποδειχθεί ότι, εάν $\mathcal{D}(A)$ είναι πυκνό στον H, ο συζυγής είναι μοναδικός.

Παράδειγμα 3.3.7. *Έστω ο διαφορικός τελεστής D στο χώρο όλων των διαφορίσιμων συναρτήσεων στον $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το άπειρο. Τότε*

$$\begin{aligned}\langle Dx, y\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)\overline{y(t)}dt = -\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\left(\frac{d}{dt}\overline{y(t)}\right)dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}x(t)\overline{\left(-\frac{d}{dt}y(t)\right)}dt = \langle x, -Dy\rangle.\end{aligned}$$

Έτσι, ο $-D$ είναι ο συζυγής του D.

Παράδειγμα 3.3.8. *Έστω ο τελεστής $T = i(d/dt)$ στο χώρο όλων των διαφορίσιμων συναρτήσεων στον $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το άπειρο. Έχουμε*

$$\begin{aligned}\langle Tx, y\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} i\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)\overline{y(t)}dt = -i\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\left(\frac{d}{dt}\overline{y(t)}\right)dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}x(t)\overline{\left(i\frac{d}{dt}y(t)\right)}dt = \langle x, Ty\rangle.\end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, ο T είναι συζυγής τελεστής.

Θεώρημα 3.3.4. *Για κάθε φραγμένο τελεστή T σε ένα χώρο Hilbert H, υπάρχουν μοναδικοί αυτοσυζυγείς τελεστές A και B τέτοιοι ώστε $T = A + iB$ και $T^* = A - iB$.*
Απόδειξη :

Έστω T φραγμένος τελεστής στον H. Ορίζουμε

$$A = \frac{1}{2}(T + T^*) \quad \text{και} \quad B = \frac{1}{2i}(T - T^*).$$

Σαφώς, A και B είναι η αυτοσυζυγείς και $T = A + iB$. Επιπλέον, για κάθε $x, y \in H$ έχουμε

$$\begin{aligned}\langle Tx, y\rangle &= \langle (A + iB)x, y\rangle \\ &= \langle Ax, y\rangle + i\langle Bx, y\rangle \\ &= \langle x, Ay\rangle + i\langle x, By\rangle \\ &= \langle x, (A - iB)y\rangle.\end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, $T^* = A - iB$. Έυκολα με απαγωγή εις άτοπον αποδεικνύεται η μοναδικότητα. Συγκεκριμένα, αν ο T είναι αυτοσυζυγής, τότε $A = T$ και $B = 0$. Οι αυτοσυζυγείς τελεστές είναι σαν πραγματικοί αριθμοί στο $\mathbb{C}$.
Η ακόλουθη ιδιότητα των αυτοσυζυγών τελεστών θα είναι χρήσιμη για τη διερεύνηση των φασματικών ιδιοτήτων των εν λόγω τελεστών στη παράγραφο 1.8.

Θεώρημα 3.3.5. *Έστω T φραγμένος τελεστής στον χώρο Hilbert H .Τότε*

$$||T|| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle| \,.$$

Απόδειξη.
Έστω

$$M = \sup_{||x||=1} |\langle Tx, x\rangle| \,.$$

Εάν, $||x|| = 1$ τότε

$$|\langle Tx, x\rangle| \le \|Tx\|\|x\| = ||Tx|| \le \|T\|\|x\| = ||T||.$$

Έτσι,

$$M \le ||T|| \tag{3.5}$$

Έστω $x \in H$ τέτοιο ώστε $Tx \neq 0$. Ορίζουμε

$$a = \sqrt{\frac{||Tx||}{||x||}} \quad \textit{και } z = \frac{Tx}{\alpha}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} ||Tx||^2 = \langle T(ax), z\rangle &= \frac{1}{4}\left[\langle T(ax+z), ax+z\rangle - \langle T(ax-z), ax-z\rangle\right] \\ &\leq \frac{1}{4}M\left(||ax+z||^2, ||ax-z||^2\right) = \frac{1}{2}M\left(||ax||^2 + ||z||^2\right) \\ &= \frac{1}{2}M\left[a^2||x||^2 + \frac{1}{a^2}||Tx||^2\right] = M\|x\|\|Tx\|. \end{aligned}$$

Έτσι, $||Tx|| \leq M||x||$. Επειδή αυτή η ανισότητα ικανοποιείται ασθενώς όταν $Tx = 0$, έχουμε $T \leq M$. Αυτό, σε συνδυασμό με την (3.5), αποδεικνύει την επιθυμητή ισότητα.

Ορισμός 3.3.3. *Αντιερμητιανοί τελεστές (Anti-Hermitian).*
Ο τελεστής A ονομάζεται αντιερμητιανός αν $A = -A^*$.
Ο τελεστής στο Παράδειγμα 3.3.7 είναι αντιερμητιανός.

3.4 Αντιστρέψιμοι, κανονικοί, ισομετρικοί, και ορθομοναδιαίοι τελεστές

Ορισμός 3.4.1. *(Αντίστροφος τελεστής) Έστω A ένας τελεστής που ορίζεται σε έναν διανυσματικό υπόχωρο του E. Ένας τελεστής B ορισμένος στο $\mathcal{R}(A)$ ονομάζεται αντίστροφος του A εάν $ABx = x$ για όλα τα $x \in \mathcal{R}(A)$ και $BAx = x$ για όλα τα $x \in \mathcal{D}(A)$. Ο τελεστής που έχει έναν αντίστροφο καλείται αντιστρέψιμος. Ο αντίστροφος του A δηλώνεται από ένα A^{-1}.*

Εάν ένας τελεστής έχει αντίστροφο, τότε είναι μοναδικός. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι B_1 και B_2 είναι αντίστροφοι του A. Τότε,

$$B_1 = B_1 I = B_1 A B_2 = i B_2 = B_2.$$

Σημειώνουμε επίσης ότι:

$$\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{R}(A) \quad \text{και το} \quad \mathcal{R}(A^{-1}) = \mathcal{D}(A).$$

Πρώτα θα υπενθυμίσουμε μερικές απλές αλγεβρικές ιδιότητες των αντιστρέψιμων τελεστών.

Θεώρημα 3.4.1. *(α) Ο αντίστροφος ενός γραμμικού τελεστή είναι ένας γραμμικός τελεστής.*
(β) Ο τελεστής A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $Ax = 0$ που συνεπάγεται $x = 0$.
(γ) Εάν ο τελεστής A είναι αντιστρέψιμος και τα διανύσματα $x_1, ..., x_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε και τα $Ax_1, ..., Ax_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
(δ) Αν οι τελεστές A και B είναι αντιστρέψιμοι, τότε ο τελεστής AB είναι αντιστρέψιμος και έχουμε $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Απόδειξη:

(α) Για κάθε $x, y \in \mathcal{R}(A)$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ έχουμε

$$\begin{aligned} A^{-1}(\alpha x + \beta y) &= A^{-1}(\alpha AA^{-1}x + \beta AA^{-1}y) \\ &= A^{-1}(\alpha A^{-1}x + \beta A^{-1}y) \\ &= \alpha A^{-1}x + \beta A^{-1}y. \end{aligned}$$

(β) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος και $Ax = 0$, τότε $x = A^{-1}Ax = A^{-1}0 = 0$. Υποθέτουμε τώρα ότι $Ax = 0$ που συνεπάγεται $x = 0$. Αν $Ax_1 = Ax2$, τότε $A(x_1 - x_2) = 0$, και έτσι $x_1 - x_2 = 0$. Συνεπώς $x_1 = x_2$, πράγμα που αποδεικνύει ότι ο A είναι αντιστρέψιμος.
(γ) Υποθέτουμε ότι $a_1Ax_1 + ... + a_nAx_n = 0 = 0$. Τότε $A(a_1x_1 + ... + a_nx_n) = 0$, και επειδή ο A είναι αντιστρέψιμος, $a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0$. Η γραμμική ανεξαρτησία των $x_1, ..., x_n$ συνεπάγεται $a_1 = ... = a_n = 0$. Έτσι, τα διανύσματα $Ax_1, ..., Ax_n$, είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
(δ) Λόγω του (β), εάν το $A(Bx)$ = 0, τότε $Bx = 0$, διότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Αν $Bx = 0$, τότε $x = 0$, διότι ο B είναι αντιστρέψιμος. Έτσι, ο AB είναι αντιστρέψιμος, απο (β).
Επιπλέον,

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I.$$

Ομοίως, $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$. Αυτό αποδεικνύει ότι $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
Προκύπτει από το (γ) στο παραπάνω θεώρημα ότι, αν E είναι ένας πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος και A είναι ένας γραμμικός αντιστρέψιμος τελεστής στον E, τότε $\mathcal{R}(A) = E$. Όπως δείχνει το ακόλουθο παράδειγμα, σε έναν απειροδιάστατο διανυσματικό χώρο αυτό δεν ισχύει απαραίτητα.

Παράδειγμα 3.4.1. *Έστω $E = l^2$. Ορίζουμε ένα τελεστή A στον E ώς*

$$A(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...).$$

Σαφώς, αυτός είναι ένας γραμμικός αντιστρέψιμος τελεστής στον l^2 η έκταση του οποίου είναι κατάλληλος υπόχωρος του l^2.
Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι ο αντίστροφος ενός φραγμένου τελεστή δεν είναι αναγκαστικά φραγμένος.

Παράδειγμα 3.4.2. *Έστω $E = l^2$. Ορίζουμε ένα τελεστή A στον E ώς*

$$A(x_1, x_2, ...) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ..., \frac{x_n}{n}, ...).$$

Έχουμε

$$||A(x_1, x_2, ...)|| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{n^2}} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} = ||(x_1, x_2, ...)||,$$

Άρα ο A είναι φραγμένος τελεστής. Παράλληλα, ο A είναι αντιστρέψιμος:

$$A^{-1}(x_1, x_2, ...) = (x_1, 2x_2, 3x_3, ..., nx_n, ...).$$

Ωστόσο, ο A^{-1} δεν είναι φραγμένος. Στην πραγματικότητα, θεωρούμε την ακολουθία (e_n) στοιχείων του l^2, όπου β η είναι η ακολουθία της οποίας ο $n-$ οστός όρος είναι 1 και όλοι οι υπόλοιποι όροι είναι 0. Τότε $||e_n|| = 1$ και $\|A^{-1}e_n\| = n$. Ως εκ τούτου, ο A^{-1} είναι μη φραγμένος.
Αν ο E είναι πεπερασμένης διαστάσεως, τότε ο αντίστροφος κάθε αντιστρέψιμου τελεστή στον E είναι φραγμένος, επειδή κάθε τελεστής σε πεπερασμένης διαστάσεως χώρο είναι φραγμένος.

Θεώρημα 3.4.2. *Έστω A είναι φραγμένος τελεστής στον χώρο Hilbert H, τέτοιος ώστε $\mathcal{R}(A) = H$. Αν ο A έχει ένα φραγμένο αντίστροφο, τότε ο συζυγής A^* είναι αντιστρέψιμος και $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.*

Απόδειξη:

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$(A^{-1})^* A^* x = A^*(A^{-1})^* x = x \tag{3.6}$$

$\forall x \in H$. Πράγματι, $\forall y \in H$ έχουμε

$$\langle y, (A^{-1})^* A^* x \rangle = \langle A^{-1} y, A^* x \rangle = \langle A A^{-1} y, x \rangle = \langle y, x \rangle$$

και

$$\langle y, A^* (A^{-1})^* x \rangle = \langle A y, (A^{-1})^* x \rangle = \langle A^{-1} A y, x \rangle = \langle y, x \rangle$$

Έτσι,

$$\langle y, (A^{-1})^* A^* x \rangle = \langle y, A^* (A^{-1})^* x \rangle = \langle y, x \rangle \quad \text{για όλα τα } y \in H, \tag{3.7}$$

πράγμα που συνεπάγεται την (3.6).

Πόρισμα 3.4.1. *Εάν ένας φραγμένος αυτοσυζυγής τελεστής A έχει φραγμένο αντίστροφο A^{-1}, τότε ο A^{-1} είναι αυτοσυζυγής.*

Απόδειξη:

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = A^{-1}.$$

Ορισμός 3.4.2. *(κανονικός τελεστής).*
Ένας φραγμένος τελεστής T λέγεται κανονικός εάν αντιμετατίθεται με το συζυγή του, δηλαδή, $TT^* = T^*T$.
Προφανώς, κάθε αυτοσυζυγής τελεστής είναι κανονικός. Το επόμενο θεώρημα θα μας βοηθήσει να βρούμε παραδείγματα κανονικών τελεστών που δεν είναι αυτοσυζυγείς.

Θεώρημα 3.4.3. *Ένας φραγμένος τελεστής T είναι κανονικός αν και μόνο αν $||Tx|| = ||T^*x||$ για όλα τα $x \in H$.*

Απόδειξη.
Έχουμε

$$\langle T^*Tx, x \rangle = \langle Tx, Tx \rangle = ||Tx||^2.$$

Αν ο T είναι κανονικός, τότε επίσης έχουμε

$$\langle T^*Tx, x \rangle = \langle TT^*x, x \rangle = \langle T^*x, T^*x \rangle = ||T^*x||^2, \quad \forall x \in H.$$

Έτσι,

$$||Tx|| = ||T^*x||$$

Ας υποθέσουμε τώρα $||Tx|| = ||T^*x||$. Απο την παραπάνω υπόθεση έχουμε

$$\langle TT^*x, x\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \quad \text{για όλα τα } x \in H$$

Ως εκ τούτου, απο το πόρισμα 3.2.1, $TT^* = T^*T$.
Σημειώνουμε εδώ ότι η συνθήκη $||Tx|| = ||T^*x||$ είναι ισχυρότερη από ότι η $||T|| = ||T^*||$.

Παράδειγμα 3.4.3. *Έστω H ένας χώρος Hilbert και έστω $Tx = ix$ για όλα τα $x \in H$. Δεδομένου ότι $T^*x = -ix = -Tx$, ο T δεν είναι αυτοσυζυγής. Από την άλλη πλευρά, $||Tx|| = ||T^*x||$ για όλα τα $x \in H$ και επομένως ο T είναι κανονικός.*

Θεώρημα 3.4.4. *Αν ο A είναι κανονικός, τότε ο $(\alpha I - A)$ είναι κανονικός $\forall \alpha \in \mathbb{C}$.*

Απόδειξη.
Από την $(\alpha I - A)^*$ = $(\bar{\alpha} I - A^*)$, έχουμε

$$(\alpha I - A)(\alpha I - A)^* = |\alpha|^2 I - \bar{\alpha}A - \alpha A^* + AA^* = (\alpha I - A)^*(\alpha I - A).$$

Θεώρημα 3.4.5. *Έστω T ένας φραγμένος τελεστής στον χώρο Hilbert H και έστω A και B είναι αυτοσυζυγείς τελεστές στον H τέτοιοι ώστε $T = A + iB$. Τότε, ο T είναι κανονικός αν και μόνο αν οι A και B αντιμετατίθενται.*

Απόδειξη:

Έστω ότι ο T είναι κανονικός. Δεδομένου ότι η $T^* = A - i\beta$, έχουμε

$$TT^* = (A + iB)(A - iB) = A^2 + B^2 - i(AB - BA) \tag{3.8}$$

και

$$T^*T = (A - iB)(A + iB) = A^2 + B^2 + i(AB - BA) \tag{3.9}$$

Έτσι, $AB - BA = 0$, το οποίο αποδεικνύει ότι οι A και B αντιμετατίθενται.
Από την άλλη πλευρά, αν A και B αντιμετατίθενται, τότε από την (3.8) και (3.9) έχουμε

$$T^*T = A^2 + B^2 = TT^*.$$

Ορισμός 3.4.3. *(Τελεστής ισομετρία) Ο φραγμένος τελεστής T στον χώρο Hilbert H ονομάζεται ισομετρία αν $||Tx|| = ||x|| \forall x \in H$.*

Παράδειγμα 3.4.4. *Έστω $(e_n), n \in N$, είναι μια πλήρης ορθοκανονική ακολουθία σε ένα χώρο Hilbert H. Υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής A τέτοιος ώστε $Ae_n = e_{n+1}$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Στην πραγματικότητα, αν $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$, τότε $Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_{n+1}$. Είναι σαφές ότι ο A είναι γραμμικός και $||Ax||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 = ||x||^2$. Ως εκ τούτου, ο A είναι ένας τελεστής ισομετρία. Ο τελεστής A ονομάζεται τελεστής μονόπλευρη μετατόπιση.*

Θεώρημα 3.4.6. *Ο φραγμένος τελεστής T στον χώρο Hilbert H ονομάζεται ισομετρία αν και μόνο αν $T^*T = I$ στον H.*

Απόδειξη.
Αν ο T είναι ισομετρία , τότε $\forall x \in H$ έχουμε $||Tx||^2 = ||x||^2$, και ως εκ τούτου

$$\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, x\rangle \quad \text{για όλα τα } x \in H.$$

Αυτό συνεπάγεται, από το πόρισμα 3.2.1, $T^*T = I$, στη συνέχεια,

$$||Tx|| = \sqrt{\langle Tx, Tx\rangle} = \sqrt{\langle T^*Tx, x\rangle} = \sqrt{\langle x, x\rangle} = ||x||.$$

Σημειώνουμε ότι οι τελεστές ισομετρία 'διατηρούν το εσωτερικό γινόμενο': $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$. Ειδικότερα, $x \perp y$ αν και μόνο αν $Tx \perp Ty$. Ο τελεστής στο Παράδειγμα 3.4.1 είναι τελεστής ισομετρία.

Ορισμός 3.4.4. *(Ορθομονοδιαίος τελεστής) Ο φραγμένος τελεστής T στον χώρο Hilbert H ονομάζεται ορθομονοδιαίος, αν $T^*T = TT^* = I$ στον H.*
Στο παραπάνω ορισμό είναι σημαντικό ότι το σύνολο αφετηρίας και σύνολο αφήξεως του T είναι το σύνολο του χώρου H.

Θεώρημα 3.4.7. *Ένας τελεστής T είναι ορθομοναδιαίος, αν και μόνο αν είναι αναστρέψιμος και $T^{-1} = T^*$.*

Απόδειξη:

Υποθέτωντας ότι ο T είναι αντιστρέψιμος τελεστής σε ένα χώρο Hilbert H, έτσι ώστε $T^{-1} = T^*$. Στη συνέχεια, $T^*T = T^{-1}T = I$ και $TT^* = TT^{-1} = I$. Ως εκ τούτου, ο T είναι ορθομοναδιαίος. Η απόδειξη για το αντίστροφο είναι παρόμοια.

Θεώρημα 3.4.8. *Έστω T ένας ορθομοναδιαίος τελεστής. Τότε*
(α) T είναι η ισομετρία.
(β) T είναι φυσιολογικός.
(γ) T^{-1} και T^* είναι ορθομοναδιαίοι.

Απόδειξη:

(α) Προκύπτει απο το Θεώρημα 3.4.6. (β) Είναι άμεση συνέπεια των ορισμών. Για να αποδείξουμε το (γ), σημειώνουμε ότι

$$(T^{-1})^*T^{-1} = T^{**}T^{-1} = TT^{-1} = I.$$

Ομοίως, $T^{-1}(T^{-1})^* = I$, και ως εκ τούτου T^{-1} είναι ορθομοναδιαίος. Δεδομένου ότι $T^* = T^{-1}$ από το θεώρημα 3.4.7, ο T^* είναι επίσης ορθομοναδιαίος.
Σημειώνουμε ότι ένας φυσιολογικός τελεστής δεν είναι απαραίτητα ορθομοναδιαίος: θεωρούμε κάθε αυτοσυζυγή τελεστή A τέτοιο ώστε $||A|| \neq 1$.

Παράδειγμα 3.4.5. *Θέτουμε H να είναι ο χώρος Hilbert όλων των ακολουθιών των μιγαδικών αριθμών $x = (..., x_{-1}, x_0, x_1, ...)$ τέτοιων ώστε $\|x\| = \sum_{-\infty}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$. Το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται από την*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} x_n \overline{y_n}.$$

Ορίζουμε έναν τελεστή T από την $T(x_n) = (x_{n-1})$.

Λύση: Ο T είναι ένας ορθομοναδιαίος τελεστής. Ο T είναι αντιστρέψιμος και

$$\langle Tx, y\rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} x_{n-1}\overline{y_n} = \sum_{-\infty}^{\infty} x_n \overline{y_{n+1}} = \langle x, T^{-1}y\rangle,$$

πράγμα που σημαίνει $T^* = T^{-1}$.

Παράδειγμα 3.4.6. *Έστω $H = L^2([0,1])$. Ορίζουμε έναν τελεστή T στον H από $(Tx)(t) = x(1-t)$. Αυτός ο τελεστής είναι μια ένα-προς-ένα απεικόνιση του H πάνω στον H. Επιπλέον, έχουμε $T = T^* = T^{-1}$. Έτσι, ο T είναι ορθομοναδιαίος.*

3.5 Ο μετασχηματισμός Fourier

Στην ενότητα αυτή εισάγουμε το μετασχηματισμό Fourier στον $L^2(\mathbb{R})$ και θα συζητήσουμε τις βασικές του ιδιότητες. Ο ορισμός του μετατασχηματισμού στον $L^2(\mathbb{R})$ δεν είναι τετρημένος. Το ολοκλήρωμα

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx$$

δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ορισμός του μετασχηματισμού Fourier στον $L^2(\mathbb{R})$, επειδή δεν είναι όλες οι συναρτήσεις στον $L^2(\mathbb{R})$ ολοκληρώσιμες. Είναι, ωστόσο, δυνατό να επεκτείνουμε το μετασχηματισμό Fourier από τον $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ στον $L^2(\mathbb{R})$. Στο πρώτο μέρος αυτού του τμήματος θα συζητήσουμε τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Φουριερ στον $L^1(\mathbb{R})$. Στη συνέχεια, δείχνουμε ότι είναι δυνατή η επέκταση στον $L^2(\mathbb{R})$ και θα μελετήσουμε τις ιδιότητες της εν λόγω επέκτασης.

Έστω f μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}$. Θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx, \tag{3.10}$$

Δεδομένου ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{-i\omega x}$ είναι συνεχής, το γινόμενο είναι μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση $\forall \omega \in \mathbb{R}$. Επιπλέον, δεδομένου ότι $|e^{-i\omega x}| = 1$ για όλα τα $\omega, x \in \mathbb{R}$ έχουμε $|e^{-i\omega x} f(x)| = |f(x)|$, και ως εκ τούτου, το ολοκλήρωμα (**;;**) υπάρχει για όλα τα $\omega \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 3.5.1. *(Μετασχηματισμός Fourier στον $L^1(\mathbb{R})$). Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Η συνάρτηση $\hat{f}$ ορίζεται από την*

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx, \tag{3.11}$$

και ονομάζεται ο μετασχηματισμός Fourier της f.

Μια άλλη εκδοχή είναι ο ορισμός χωρίς το σύμβολο «-» στον εκθέτη, δηλαδή, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x) dx$.

Αυτές οι λεπτομέριες δεν αλλάζουν καθόλου τη θεωρία του μετασχηματισμού Fourier.
Αντί του ¨$\hat{f}$¨ χρησιμοποιείται επίσης ο συμβολισμός ¨$\mathcal{F}\{f(x)\}$¨ . Το τελευταίο είναι ιδιαίτερα βολικό, αν αντί για το γράμμα ¨f ή ¨g¨ θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε έναν τύπο που περιγράφει μια συνάρτηση, για παράδειγμα $\mathcal{F}\{e^{-x^2}\}$. Θα χρησιμοποιήσουμε ελεύθερα και τα δύο σύμβολα.

Παράδειγμα 3.5.1. *(α) Έστω $a > 0$. Τότε*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{e^{-a|x|}\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}e^{-a|x|}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{x(a-i\omega)}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-x(a+i\omega)}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega}\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\omega^2}\end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{e^{-ax^2}\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-a(x+\frac{i\omega}{2a})^2 - \frac{\omega^2}{4a}\right]dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\omega^2/4a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-au^2}du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\omega^2/4a}\end{aligned}$$

Το ακόλουθο θεώρημα είναι μια άμεση συνέπεια του Ορισμού (3.5.1).

Θεώρημα 3.5.1. *Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Τότε*

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{F}(f) + \beta\mathcal{F}(g).$$

Θεώρημα 3.5.2. *Ο μετασχηματισμός Fourier μίας ολοκληρώσιμης συνάρτησης είναι μια συνεχής συνάρτηση.*

Απόδειξη.
Έστω $f \in L^{-1}(\mathbb{R})$. Για οποιαδήποτε $\omega, \lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\left|\hat{f}(\omega+\lambda) - \hat{f}(\omega)\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}(e^{-i\lambda x}-1)f(x)dx\right| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-i\lambda x}-1||f(x)|dx. \tag{3.12}$$

Από την

$$|e^{-i\lambda x-1}||f(x)| \le 2|f(x)|$$

και

$$\lim_{\lambda\to 0} |e^{-i\lambda x} - 1| = 0 \quad \text{για όλα τα } x \in \mathbb{R}$$

καταλήγουμε στο συμπέρασμα

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-i\lambda x} - 1||f(x)|dx = 0,$$

από το Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης. Αυτό αποδεικνύει τη συνέχεια του $\hat{f}$. (Στην πραγματικότητα, δεδομένου ότι η ανισότητα στην (3.12) είναι ανεξάρτητη του ω, έχουμε αποδείξει ότι $\hat{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.)

Θεώρημα 3.5.3. *Αν $f_1, f_2, ... \in L^1(\mathbb{R})$ και $||f_n - f||_1 \to 0$ καθως $n \to \infty$, τότε $\hat{f}_n \to \hat{f}$ ομοιόμοφρα στο $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη:

Πρώτα σημειώνουμε ότι

$$|\hat{f}(\omega)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-i\omega x} f(x)|dx \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Έτσι,

$$\sup_{\omega\in\mathbb{R}} |\hat{f}_n(\omega) - \hat{f}(\omega)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)|dx = ||f_n - f||_1 \to 0,$$

αποδεικνύει το θεώρημα.

Θεώρημα 3.5.4. *(Riemann-Lebesgue Λήμμα) Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$, τότε $\lim_{|\omega|\to\infty} |\hat{f}(\omega)| = 0$.*

Απόδειξη:

Δεδομένου ότι $e^{-i\omega x} = -e^{-i\omega x - i\pi}$ έχουμε

$$\hat{f}(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(x+\frac{\pi}{\omega})} f(x)dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \frac{\pi}{\omega})dx.$$

Ως εκ τούτου,

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x-\frac{\pi}{\omega})dx\right] \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}(f(x) - f(x-\frac{\pi}{\omega}))dx.\end{aligned}$$

Έτσι έχουμε,

$$|\hat{f}(\omega)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}(f(x) - f(x-\frac{\pi}{\omega}))dx.$$

και επειδή

$$\lim_{|\omega|\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x) - f(x-\frac{\pi}{\omega})|dx = 0,$$

έχουμε $\lim\limits_{|\omega|\to\infty}|\hat{f}(\omega)| = 0.$

Σημειώνουμε ότι ο χώρος $C_0(\mathbb{R})$ όλων των συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ που μηδενίζονται στο άπειρο είναι ένας χώρος με νόρμα και οσον αφορά τη νόρμα, ορίζεται από την

$$||f|| = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|.$$

Τα Θεωρήματα 3.5.1 - 3.5.4 δείχνουν ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι ένας συνεχής γραμμικός τελεστής από το $L^1(\mathbb{R})$ στο $C_0(\mathbb{R})$.

Θεώρημα 3.5.5. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ Τότε*
(α) $\mathcal{F}\{e^{iax}f(x)\} = \hat{f}(\omega - a)$ (παράλληλη μετατόπιση),
(β) $\mathcal{F}\{f(x-x_0)\} = \hat{f}(\omega)e^{-i\omega x_0}$ (μετατόπιση),
(γ) $\mathcal{F}\{f(ax)\} = \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\omega}{a})$, $a > 0$ (κλίμακα),
(δ)$\mathcal{F}\{\overline{f}(x) = \overline{\mathcal{F}f(-x)}$ (συζυγής).

Παράδειγμα 3.5.2. *(Διαμορφωμένη συνάρτηση Gauss).*

$$\textit{Αν } f(x) = e^{i\omega_0 x - x^2/2}, \textit{ τότε } \hat{f}(\omega) = e^{-(\omega-\omega_o)^2/2}.$$

Αυτό προκύπτει άμεσα από το παράδειγμα 3.5.1 (β) σε συνδυασμό με την ιδιότητα παράλληλης μετατόπισης του μετασχηματισμού Fourier.

Θεώρημα 3.5.6. *Αν f είναι μια τμηματικά συνεχής συνάρτηση, $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$, και $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, τότε $\mathcal{F}\{f'\} = i\omega\mathcal{F}\{f\}$.*

Απόδειξη:

Απλή ολοκλήρωση κατά παράγοντες δίνει

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[f(x)e^{-i\omega x}]_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}f(x)dx = i\omega\hat{f}\omega.$$

Πόρισμα 3.5.1. *Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση, n-φορές τμηματικά διαφορίσιμη, και $f, f', ..., f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$, και*

$$\lim_{|x|\to\infty} f^{(k)}(x) = 0 \quad \text{για } k = 0, ..., n-1.$$

τότε

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}\} = (i\omega)^n\mathcal{F}\{f\}.$$

Λόγω του ορισμού για το μετασχηματισμό Fourier, είναι καλύτερα να επαναπροσδιορίσουμε τη συνέλιξη δύο συναρτήσεων $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ ως εξής:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)g(u)du.$$

Θεώρημα 3.5.7. *(Θεώρημα Συνέλιξης).*
Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Τότε

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g).$$

Απόδειξη.

Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ *και* $h = f * g$. *Τότε* $h \in L^1(\mathbb{R})$, *και έχουμε*

$$\begin{aligned}
\hat{h}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u) g(u) du dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x-u) dx du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(x+u)} f(x) dx du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-i\omega u} du \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx = \hat{g}(\omega) \hat{f}(\omega).
\end{aligned}$$

Θα συζητήσουμε τώρα την επέκταση του μετασχηματισμού Φουριερ στον $L^2(\mathbb{R})$. *Στο παρακάτω θεώρημα, και στο υπόλοιπο μέρος του παρόντος τμήματος, η* $||\cdot||_2$ *δηλώνει την νόρμα στον* $L^2(\mathbb{R})$, *δηλαδή,*

$$||f||_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx} \text{ για } f \in L^2(\mathbb{R})$$

Θεώρημα 3.5.8. *Έστω* f *μια συνεχής συνάρτηση στον* $\mathbb{R}$ *που μηδενίζεται εκτός ενός κλειστού διαστήματος. Τότε* $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, *και*

$$||\hat{f}||_2 = ||f||_2$$

Απόδειξη.
Υποθέτουμε πρώτα ότι η f *μηδενίζεται έξω από το διάστημα* $[-\pi, \pi]$. *Χρησιμοποιώντας τον τύπο Parseval για την ορθοκανονική ακολουθία των συναρτήσεων στο* $[-\pi, \pi]$

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...,$$

παίρνουμε

$$\|\hat{f}\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-inx} f(x) dx \right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2.$$

Από την παραπάνω ανισότητα που ισχύει και για $g(x) = e^{-i\xi x} f(x)$ *αντί για* $f(x)$, *παίρνουμε*

$$\|\hat{f}\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \hat{f}(n+\xi) \right|^2.$$

Λόγω του ότι $\|\hat{f}\|_2^2 = \|\hat{g}\|_2^2$. Με ολοκλήρωση και των δύο μελών ως προς ξ από 0 έως 1 δίνει

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 |\hat{f}(n+\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|\hat{f}\|_2^2$$

Εάν η f δεν μηδενίζεται εκτός του $[-\pi, \pi]$, τότε παίρνουμε ένα θετικό αριθμό λ για τον οποίο η συνάρτηση $g(x) = f(\lambda x)$ μηδενίζεται εκτός του $[-\pi, \pi]$. Τότε

$$\hat{g}(x) = \frac{1}{\lambda}\hat{f}(\frac{x}{\lambda}),$$

και ως εκ τούτου

$$\|f\|_2^2 = \lambda\|g\|_2^2 = \lambda\|\hat{g}\|_2^2 = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{\lambda}\hat{f}(\frac{\xi}{\lambda})\right|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 dx = \|\hat{f}\|_2^2.$$

Ο χώρος όλων των συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ με συμπαγή φορέα είναι πυκνός στο $L^2(\mathbb{R})$. Το Θεώρημα 3.5.8 δείχνει ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι μια συνεχής απεικόνιση από εκείνο το χώρο στον $L^2(\mathbb{R})$. Δεδομένου ότι η απεικόνιση είναι γραμμική, έχει μια μοναδική επέκταση σε μια γραμμική απεικόνιση από τον $L^2(\mathbb{R})$ στον εαυτό του. Η επέκταση αυτή θα ονομάζεται μετασχηματισμός Fourier στον $L^2(\mathbb{R})$.

Ορισμός 3.5.2. *(Μετασχηματισμός Fourier στον $L^2(\mathbb{R})$). Έστω $f \in L^2(\mathbb{R})$ και έστω (ϕ_n) είναι μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων με συμπαγές στήριγμα που συγκλίνουν στην f στον $L^2(\mathbb{R})$, δηλαδή $||f - \phi_n||_2 \to 0$. Ο μετασχηματισμός Fourier του f ορίζεται από*

$$\hat{f} = \lim_{n\to\infty} \hat{\phi}_n, \tag{3.13}$$

Όπου το όριο είναι ως προς τη νόρμα στον $L^2(\mathbb{R})$.

Το Θεώρημα 3.5.8 διασφαλίζει ότι το όριο υπάρχει και είναι ανεξάρτητο από μια συγκεκριμένη ακολουθία που προσεγγίζει την f. Είναι σημαντικό να θυμόμαστε ότι η σύγκλιση στον $L^2(\mathbb{R})$ δεν συνεπάγεται κατά σημείο σύγκλιση και συνεπώς ο μετασχηματισμός Fourier μιάς τετραγωνικά ολοκληρώσιμης συνάρτησης δεν έχει οριστεί σε κάθε σημείο, σε αντίθεση με το μετασχηματισμό Fourier μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης. Ο μετασχηματισμός Fourier μιας τετραγωνικά ολοκληρώσιμης συνάρτησης ορίζεται σχεδόν παντού. Για το λόγο αυτό δεν μπορούμε να πούμε ότι, αν $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier ορίζεται από την (3.13) και αυτός που ορίζεται απο την (3.11) είναι ίσοι. Για την ακρίβεια, πρέπει να πούμε ότι η συνάρτηση που ορίζεται από την

(3.13) ανήκει στην κλάση ισοδυναμίας των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων που ορίζει η (3.11). Παρά τη διαφορά αυτή, θα χρησιμοποιήσουμε το ίδιο σύμβολο για να συμβολίσουμε τους δύο μετασχηματισμούς. Το ακόλουθο θεώρημα είναι μια άμεση συνέπεια του Ορισμού 3.5.2 και του Θεωρήματος 3.5.8.

Θεώρημα 3.5.9. *(Σχέση του Parseval).*
Αν $f \in L^2(\mathbb{R})$, τότε

$$||\hat{f}||_2 = ||f||_2,$$

Σε φυσικά προβλήματα, η ποσότητα $||f||_2$ είναι ένα μέτρο της ενέργειας, και η $||\hat{f}||_2$ αντιπροσωπεύει το φάσμα ισχύος της f.

Θεώρημα 3.5.10. *Έστω $f \in L^2(\mathbb{R})$, Τότε*

$$\hat{f}(\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} e^{-i\omega x} f(x)dx \tag{3.14}$$

όπου η σύγκλιση είναι ως προς την νόρμα στον $L^2(\mathbb{R})$.

Απόδειξη:

Για $n = 1, 2, 3, ...$, ορίζουμε

$$f_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} f(x) & |x| < n, \\ 0 & |x| \geq n. \end{array} \right\}$$

Τότε $||f - f_n||_2 \to 0$, και έτσι $||\hat{f} - \hat{f}_n||_2 \to 0$, καθώς $n \to \infty$.

Θεώρημα 3.5.11. *Αν $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, τότε*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)g(x)dx \tag{3.15}$$

Απόδειξη:

Για $n = 1, 2, 3, ...$, ορίζουμε

$$f_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} f(x) & |x| < n, \\ 0 & |x| \geq n. \end{array} \right\}$$

και

$$g_n(x) = \left\{ \begin{array}{cc} g(x) & |x| < n, \\ 0 & |x| \geq n. \end{array} \right\}$$

Από την

$$\hat{f_m}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f_m(\xi) d\xi$$

εχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_m(x) g_n(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f_m(\xi) d\xi dx$$

Η συνάρτηση

$$e^{-i\xi x} g_n(x) f_m(\xi)$$

είναι ολοκληρώσιμη πάνω στον $\mathbb{R}^2$, και έτσι μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα Fubini. Κατά συνέπεια,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f_m}(x) g_n(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_m(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} g_n(x) dx d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f_m(\xi) \hat{g_n}(\xi) d\xi$$

Δεδομένου ότι $||g - g_n||_2 \to 0$ και $||\hat{g} - \hat{g}_n||_2 \to 0$ καθώς $n \to 0$, παίρνουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f_m}(x) g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_m(x) \hat{g}(x) dx,$$

από τη συνέχεια του εσωτερικού γινομένου. Για τον ίδιο λόγο, θέτωντας $m \to \infty$, παίρνουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \hat{g}(x) dx.$$

Το ακόλουθο τεχνικό λήμμα θα είναι χρήσιμο για την απόδειξη του σημαντικού θεωρήματος αντιστροφής για το μετασχηματισμό Fourier στον $L^2(\mathbb{R})$.

Λήμμα 3.5.1. *Έστω $f \in L^2(\mathbb{R})$, και έστω $g = \bar{\hat{f}}$. Τότε, $f = \bar{\hat{g}}$.*

Απόδειξη:

Από τα Θεωρήματα 3.5.9 και 3.5.11 και την ισότητα $g = \bar{\hat{f}}$, παίρνουμε

$$\langle f, \bar{\hat{g}} \rangle = \langle \hat{f}, \bar{g} \rangle = \langle \hat{f}, \hat{f} \rangle = \|\hat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2 \tag{3.16}$$

επίσης,

$$\overline{\langle f, \bar{\hat{g}} \rangle} = \|f\|_2^2.$$

Τέλος από την ισότητα Parseval,

$$\|\hat{g}\|_2^2 = \|g\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2 \tag{3.17}$$

Αυτό δείχνει ότι $f = \bar{\hat{g}}$.

Θεώρημα 3.5.12. *(Αντιστροφή του μετασχηματισμού Fourier στον $L^2(\mathbb{R})$).*
Έστω $f \in L^2(\mathbb{R})$. Τότε

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) d\omega,$$

όπου η σύγκλιση είναι ως προς τη νόρμα στον $L^2(\mathbb{R})$.
Απόδειξη:

Έστω $f \in L^2(\mathbb{R})$. Αν $g = \bar{\hat{f}}$, τότε, από το λήμμα 3.5.1,

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} e^{i\omega x} \overline{g(\omega)} d\omega = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) d\omega$$

Πόρισμα 3.5.2. *Αν $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, τότε η ισότητα*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) d\omega \tag{3.18}$$

ισχύει σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.
Ο μετασχηματισμός που ορίζεται από την (3.18) ονομάζεται αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier.

Ένας από τους κύριους λόγους για την εισαγωγή του συντελεστή $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ στον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier είναι η συμμετρία του μετασχηματισμού και του αντιστρόφου του:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)dx,$$
$$\mathcal{F}^{-1}\{f(\omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(\omega)d\omega.$$

Πόρισμα 3.5.3. *(Δυϊκότητα).*
Αν $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, τότε η $\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f(x)\}\} = f(-x)$, σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.

Αρκεί να αντικαταστήσουμε το x από το $-x$ στην (3.18).

Θεώρημα 3.5.13. *(Γενική σχέση του Parseval). Αν $f, g \in L^2(\mathbb{R})$,τότε*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega}d\omega.$$

Απόδειξη:

Απο την ταυτότητα πολικότητας

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{4}(|f+g|^2 - |f-g|^2 + i|f+ig|^2 - i|f-ig|^2)$$

συνεπάγεται ότι κάθε ισομετρία διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο. Δεδομένου ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι μια ισομετρία στον $L^2(\mathbb{R}), \langle f, g\rangle = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle$.
Το επόμενο θεώρημα συνοψίζει τα αποτελέσματα αυτού του τμήματος.

Θεώρημα 3.5.14. *(Θεώρημα του Plancherel).*
Για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R})$, υπάρχει $f \in L^2(\mathbb{R})$, τέτοια που:
(α) Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$, τότε $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)dx$,
(β) $||\hat{f}(\omega) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n} e^{-i\omega x} f(x)dx||_2 \to 0$ καθώς $n \to 0$,
(γ) $||f(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n} e^{-\omega x} \hat{f}(\omega)d\omega||_2 \to 0$ καθώς $n \to 0$,
(δ) $||\hat{f}||_2^2 = ||f||_2^2$,
(ε) Η αντιστοιχία $f \longmapsto \hat{f}$ είναι ένας χώρος Hilbert ισόμορφος του $L^2(\mathbb{R})$ πάνω στον $L^2(\mathbb{R})$. Απόδειξη.

Το μόνο μέρος αυτού του θεωρήματος που μένει να αποδειχθεί είναι το γεγονός ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι ¨επί¨. Έστω $f \in L^2(\mathbb{R})$ και ορίζουμε $h = \hat{f}$ και $g = \bar{\hat{h}}$.

Τότε, από το λήμμα 3.5.1, $\bar{f} = h = \bar{\hat{g}}$. Αυτό δείχνει ότι κάθε τετραγωνικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση είναι ο μετασχηματισμός Fourier μιας τετραγωνικά ολοκληρώσιμης συνάρτησης.

Θεώρημα 3.5.15. *Ο μετασχηματισμός Fourier είναι ένας ορθομοναδιάιος τελεστής στον $L^2(\mathbb{R})$.*

Πρώτα, σημειώνουμε ότι $\forall g \in L^2(\mathbb{R})$, έχουμε

$$\mathcal{F}\{\bar{g}\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\overline{g(x)}dx = \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} g(x)dx} = \overline{\mathcal{F}^{-1}g(\omega)}.$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.5.11, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}\{f\}, g\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{f\}(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathcal{F}\overline{g}(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\mathcal{F}^{-1}g(x)}dx = \langle f, \mathcal{F}^{-1}g\rangle.\end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$ και ως εκ τούτου ο $\mathcal{F}$ είναι ορθομοναδιαίος.
Ο μετασχηματισμός Fourier μπορεί να οριστεί για συναρτήσεις στον $L^1(\mathbb{R}^N)$ από την

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\omega x} f(x)dx,$$

όπου $\omega = (\omega_1, ..., \omega_N), x = (x_1, ..., x_N)$ και $\omega x = \omega_1 x_1 + ... + \omega\ _N x_N$. Η θεωρία του μετασχηματισμού Fourier στον $L^1(\mathbb{R}^N)$ είναι παρόμοια με τη μονοδιάστατη περίπτωση. Επιπλέον, η επέκταση στον $L^2(\mathbb{R}^N)$ είναι δυνατή και έχει παρόμοιες ιδιότητες, όπως το Θεώρημα αντιστροφή και το θεώρημα του Plancherel.

Παράδειγμα 3.5.3. *(Δεύτερη παράγωγος συνάρτησης Gauss).*
Αν

$$f(x) = (1 - x^2)e^{-x^2/2}.$$

τότε

$$\hat{f}(\omega) = \omega^2 e^{-\omega^2/2}.$$

Πράγματι, έχουμε

$$\mathcal{F}\{(1-x^2)e^{-x^2/2}\} = -\mathcal{F}\{\frac{d^2}{dx^2}e^{-x^2/2}\} = -(i\omega)^2\mathcal{F}\{e^{-x^2/2}\} = \omega^2 e^{-\omega^2/2}$$

Παράδειγμα 3.5.4. *(Η συνάρτηση Haar).*
Η συνάρτηση Haar ορίζεται από την

$$f_n(x) = \left\{ \begin{array}{ccl} 1 & \textit{αν} & 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ -1 & \textit{αν} & \frac{1}{2} < 1, \\ 0 & \textit{αλλιώς} . & \end{array} \right\}$$

Σαφώς,

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\int_0^{1/2} e^{-i\omega x}dx - \int_{1/2}^{1} e^{-i\omega x}dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{i\omega}(1-2e^{-i\omega/2}+e^{-i\omega}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-i\omega/2}}{i\omega}(e^{-i\omega/2}-2+e^{-i\omega}) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\omega/2}\frac{\sin^2(\omega/4)}{\omega/4}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.5.5. *(Η συνάρτηση Shannon).*
Η συνάρτηση Shannon ορίζεται από την

$$f(x) = \frac{\sin 2\pi x - \sin \pi x}{\pi x}.$$

Ο μετασχηματισμός Fourier της $f(x)$ είναι

$$\hat{f}(\omega) = \left\{ \begin{array}{ll} 1/\sqrt{2\pi} & \pi < |\omega| < 2\pi \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{array} \right\}$$

Βιβλιογραφία

[1] Lokenath Debnath and Piotr Mikusinski, *Introduction to Hilbert Spaces with applications*, Academic Press.

[2] Σπύρος Αργυρός, *Σημειώσεις Παραδόσεων Συναρτησιακής Αναλυσης*.

[3] Αγγελάκου Αναστασία, Στενού Δήμητρα,*Χώροι Hilbert και Ολοκληρωτικές Εξισώσεις*, Διπλωματική Εργασία, επιβλέπων καθηγητής Κραββαρίτης Χ. Δημήτριος