



Δυναμικός Προγραμματισμός

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Σπυρίδων Α. Γκίνιος

Επιβλέπων: Ιωάννης Κολέτσος
Επίκουρος καθηγητής Ε. Μ. Π.

Αθήνα, Μάρτιος 2012



Δυναμικός Προγραμματισμός

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Σπυρίδων Α. Γκίνιος

Επιβλέπων: Ιωάννης Κολέτσος
Επίκουρος καθηγητής Ε. Μ. Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 21^η Μαρτίου 2012.

.....
Ίων Χρυσοβέργης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Βασίλειος Κοκκίνης
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Ιωάννης Κολέτσος
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Μάρτιος 2012

Περιεχόμενα

| | |
|---|------------|
| Κεφάλαιο 1 : Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα | 15 |
| 1.1 Εισαγωγή..... | 9 |
| 1.2 Ιστορία | 9 |
| 1.3 Συστήματα- Μοντέλα..... | 10 |
| Κεφάλαιο 2 : Εισαγωγή στον Δυναμικό Προγραμματισμό | 15 |
| 2.1 Γενικά..... | 17 |
| 2.2 Κόστος..... | 18 |
| 2.3 Χαρακτηριστικά προβλημάτων Δυναμικού Προγραμματισμού | 18 |
| Κεφάλαιο 3 : Δυναμικός Προγραμματισμός | 21 |
| 3.1 Δυναμικός Προγραμματισμός..... | 21 |
| 3.1 Δυναμικός Προγραμματισμός..... | 23 |
| 3.2 Αναδρομική φύση των υπολογισμών του Δυναμικού Προγραμματισμού | 23 |
| 3.3 Προς τα εμπρός και προς τα πίσω αναδρομική μέθοδος | 28 |
| 3.4 Επιλεγμένες εφαρμογές Δυναμικού Προγραμματισμού | 30 |
| Κεφάλαιο 4 : Το πρόβλημα του Σακιδίου | 33 |
| 4.1 Πρόβλημα Σακιδίου | 35 |
| 4.2 Αναπαράσταση σε Δίκτυο το Πρόβλημα του Σακιδίου | 40 |
| 4.3 Λύση του προβλήματος του Σάκου σε φύλο εργασίας | 41 |
| Κεφάλαιο 5 : Το πρόβλημα της Απογραφής Αποθεμάτων | 47 |
| 5.1 Πρόβλημα Απογραφής Αποθεμάτων | 49 |
| 5.2 Αναπαράσταση σε Δίκτυο το Πρόβλημα Απογραφής Αποθεμάτων..... | 56 |
| 5.3 Λύση του προβλήματος απογραφής αποθεμάτων σε φύλλο εργασίας | 58 |
| 5.4 Ο αλγόριθμος Wanger-Whitin και ο ευριστικός αλγόριθμος Silver-Meal..... | 61 |
| Κεφάλαιο 6 : Το πρόβλημα του Πλανόδιου Πωλητή | 71 |
| 6.1 Πρόβλημα Πλανόδιου Πωλητή..... | 73 |
| Κεφάλαιο 7 : Το Μοντέλο Μεγέθους Εργατικού Δυναμικού | 79 |
| 7.1 Μοντέλο Μεγέθους Εργατικού Δυναμικού | 81 |
| Κεφάλαιο 8 : Το Μοντέλο Αντικατάστασης Εξοπλισμού | 85 |
| 8.1 Μοντέλο Αντικατάστασης Εξοπλισμού..... | 87 |
| Κεφάλαιο 9 : Το Επενδυτικό Μοντέλο | 93 |
| 9.1 Επενδυτικό μοντέλο | 95 |
| Κεφάλαιο 10 : Τα Προβλήματα Διαστάσεων..... | 101 |
| 10.1 Προβλήματα Διαστάσεων | 103 |
| Κεφάλαιο 11 : Πιθανοθεωρητικός Δυναμικός Προγραμματισμός | 109 |
| 11.1 Πιθανοθεωρητικός Δυναμικός Προγραμματισμός | 111 |
| ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ | 121 |

Κεφάλαιο 1^ο

Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα

1.1 Εισαγωγή

1.2 Ιστορία

1.3 Συστήματα- Μοντέλα

1.1 Εισαγωγή

Με τον όρο **Επιχειρησιακή Ερεύνα (Operations Research)**, εννοούμε την “*επιστήμη που ασχολείται με τη βελτιστοποίηση (optimization) της απόδοσης ενός συστήματος*”. Ειδικότερα, “*πρόκειται για ένα σύνολο από τεχνικές, οι οποίες χρησιμοποιώντας μαθηματικά μοντέλα, δημιουργούν μια ποσοτική και ορθολογιστική βάση για την λήψη αποφάσεων που θα βελτιστοποιήσουν τη λειτουργία του υπό μελέτη συστήματος*”.

1.2 Ιστορία

Αν και αναφορές σε μοντέλα-τεχνικές Επιχειρησιακής Έρευνας υπάρχουν από την αρχή του προηγούμενου αιώνα, είναι γενικά παραδεκτό ότι η αρχή της ως επιστήμη, προσδιορίζεται στη διάρκεια του Δεύτερου Παγκοσμίου Πολέμου. Ακριβώς λόγω πολέμου, υπήρχε άμεση ανάγκη για την αποτελεσματική κατανομή των λιγοστών πόρων στις διάφορες στρατιωτικές εξορμήσεις. Έτσι, αρχικά στην Αγγλία και στη συνεχεία στις ΗΠΑ και στον Καναδά, συγκροτήθηκαν ομάδες επιστημόνων με σκοπό την πραγματοποίηση επιστημονικών ερευνών στις στρατιωτικές επιχειρήσεις (*research on military operations*). Αυτές ήταν οι πρώτες ομάδες επιχειρησιακών ερευνητών.

Η αξιοσημείωτη επιτυχία τους είχε ως αποτέλεσμα να γίνουν γρήγορα ευρέως αποδεκτές, να πολλαπλασιαστούν και να εμπλακούν στην επίλυση πάσης φύσεως στρατιωτικών προβλημάτων, όπως την τοποθέτηση των ραντάρ στην Αγγλία για τον αντιαεροπορικό έλεγχο του νησιού, ως τον προσδιορισμό του βέλτιστου μεγέθους των νησοπομπών, τον εντοπισμό και βομβαρδισμό των εχθρικών υποβρυχίων, κλπ. Μάλιστα, ακριβώς λόγω της ποικιλίας των προβλημάτων που αντιμετώπιζαν, η διασπορά των επιστημονικών ειδικοτήτων σ' αυτές τις ομάδες ήταν τόσο μεγάλη, που μια από τις πρώτες που

αναπτύχθηκαν υπό το φυσικό P.M.S. Blackett (βραβείο Nobel 1948) έγινε ευρέως γνωστή ως «το τσίρκο του Blackett».

Η βιομηχανική έκρηξη που ακολούθησε το τέλος του πολέμου, έφερε στην επιφάνεια πολύπλοκα προβλήματα διοίκησης, παραγωγής, εμπορίου προϊόντων, κλπ. Σύντομα, πολλοί από τους επιστήμονες που συμμετείχαν στις στρατιωτικές ομάδες επιχειρησιακών ερευνητών και μετέπειτα απασχολήθηκαν σε θέσεις κλειδιά στον ιδιωτικό ή τον ερευνητικό τομέα, διαπίστωσαν ότι τα νέα προβλήματα ήταν σε γενικές γραμμές αυτά που είχαν αντιμετωπίσει και κατά τη διάρκεια του πολέμου, απλά το πεδίο εφαρμογής είχε αλλάξει. Τα άτομα αυτά μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του 1950, κατάφεραν να καθιερώσουν τη χρήση της Επιχειρησιακής Έρευνας σ' ένα σημαντικό αριθμό μεγάλων οργανισμών, επιχειρήσεων και βιομηχανιών (research on operations).

Στη συνέχεια, αφενός μεν η γρήγορη ανάπτυξη νέων μεθοδολογιών (πολλά από τα πιο γνωστά εργαλεία της Επιχειρησιακής Έρευνας όπως π.χ. ο γραμμικός και δυναμικός προγραμματισμός, η θεωρία ουρών αναμονής, η θεωρία αποθεμάτων, κλπ. Αναπτύχθηκαν πριν το 1960), αφετέρου δε η εμφάνιση των ηλεκτρονικών υπολογιστών, οδήγησαν στη ραγδαία διάδοση της Επιχειρησιακής Έρευνας. Στις μέρες μας, είναι απίθανο να υπάρχει επιχείρηση, βιομηχανία, κρατική υπηρεσία και οργανισμός παροχής υπηρεσιών (ανεξαρτήτου μεγέθους) που να μην κάνει χρήση κάποιας/ων τεχνικής/κών Επιχειρησιακής Έρευνας.

1.3 Συστήματα- Μοντέλα

Πολλές φορές στην καθημερινή μας ζωή χρησιμοποιούμε τη λέξη **σύστημα**. Σύστημα, κατά το λεξικό του Webster (New World Dictionary), είναι “ένα σύνολο από τοποθετήσεις αντικειμένων και υποκειμένων τα οποία σχετίζονται κατά τέτοιο τρόπο ώστε να αποτελούν μια ολότητα”. Όλοι είμαστε μέλη πολλών

και διαφορετικών συστημάτων, για παράδειγμα της οικογένειας μας, του πανεπιστημίου, της κοινωνίας,... . Η έννοια του συστήματος συναντιέται σε όλες τις επιστήμες, κοινωνικές, φυσικές, βιολογικές, κλπ.

Ιδιαίτερα για την Επιχειρησιακή Έρευνα, με τη λέξη σύστημα, αναφερόμαστε στις πάσης φύσεως επιχειρήσεις, βιομηχανίες, κρατικές υπηρεσίες, οργανισμούς παροχής υπηρεσιών, κλπ. Η επιστημονική πρακτική για τη μελέτη των συστημάτων είναι η χρήση του κατάλληλου για την κάθε περίπτωση μαθηματικού μοντέλου, “μιας αναπαράστασης του συστήματος στην οποία οι σημαντικές σχέσεις μεταξύ των πραγματικών χαρακτηριστικών, έχουν αντικατασταθεί με παρόμοιες σχέσεις μεταξύ μαθηματικών στοιχείων, ενώ οι μη-σημαντικές έχουν αγνοηθεί”. Το μοντέλο δεν μπορεί, αλλά ούτε και επιδιώκεται, να απεικονίζει με ακρίβεια κάθε πτυχή της λειτουργίας του συστήματος. Η βασική επιδίωξη είναι να υπάρχει ισομορφία με όλες τις σημαντικές για το σύστημα πλευρές: να αναπαριστώνται δηλαδή ικανοποιητικά από το μοντέλο εκείνα τα στοιχεία τα οποία πιστεύουμε ότι καθορίζουν ένα κριτήριο απόδοσης του συστήματος, καθώς επίσης και οι συνθήκες μέσα στις οποίες θα πρέπει αυτό να βελτιστοποιηθεί. Έτσι, η τυπική μορφή ενός μαθηματικού μοντέλου (στην Επιχειρησιακή Έρευνα) έχει την εξής οργάνωση: βελτιστοποίηση κριτηρίου (maximize ή minimize) κάτω από τις συνθήκες.

Φυσικά, τόσο το κριτήριο απόδοσης όσο και οι αντίστοιχες περιοριστικές του συνθήκες, εξαρτώνται άμεσα από το εξεταζόμενο σύστημα.

Αν και η βελτιστοποίηση της λειτουργίας του συστήματος είναι ο βασικός λόγος για τον οποίο προχωρούμε στην κατασκευή ενός μαθηματικού μοντέλου του, με τη χρήση του επιδιώκουμε παράλληλα να :

- περιγράψουμε το σύστημα και να εμβαθύνουμε στις διάφορες πτυχές του,
- προβλέψουμε τη μελλοντική συμπεριφορά του συστήματος,

- ορίσουμε δείκτες λειτουργικότητας των επί μέρους τμημάτων του συστήματος,
- προβούμε σε εκτεταμένη μελέτη της συμπεριφοράς του συστήματος κάτω από διαφορετικές υποθετικές συνθήκες λειτουργίας (*what-if analysis*),
- βρούμε λύσεις σε διάφορα ζητήματα – προβλήματα,
- αποφύγουμε την εμφάνιση προβληματικών καταστάσεων στο σύστημα προειδοποιώντας έγκαιρα για την εμφάνισή τους,
- συνδράμουμε στον σχεδιασμό καλύτερων (ανάλογων) συστημάτων ή να βελτιώσουμε τον υπάρχοντα.

(Τα παραπάνω αποτελούν συγχρόνως και κριτήρια καταλληλότητας του μοντέλου ενός συστήματος).

Τα μαθηματικά μοντέλα, ανάλογα με το βαθμό ενσωμάτωσης της αβεβαιότητας του περιβάλλοντος που περιέχουν, διακρίνονται σε **προσδιοριστικά** (deterministic) και **στοχαστικά** (stochastic). Στα προσδιοριστικά μοντέλα δεχόμαστε ότι όλες οι πληροφορίες που χρειαζόμαστε για την κατασκευή τους είναι γνώστες με βεβαιότητα, ενώ στα στοχαστικά κάποιες από αυτές περιγράφονται μόνο με τη βοήθεια των πιθανοτήτων.

Στη διαδικασία λήψης των αποφάσεων για τη βελτιστοποίηση της λειτουργίας ενός συστήματος ακολουθούμε μια σειρά βημάτων τα οποία διαδοχικά αναφέρονται στην:

1. αναγνώριση του προβλήματος και την συλλογή των δεδομένων ,
2. κατασκευή του σχετικού με το εξεταζόμενο πρόβλημα μοντέλου ,
3. επίλυση του προτεινόμενου μοντέλου ,
4. εφαρμογή και αξιολόγηση της προτεινόμενης λύσης.

Ο ορισμός του προβλήματος αναφέρεται στη μελέτη του συστήματος, μέσω της οποίας επιδιώκετε η καταγραφή μιας λεπτομερούς διατύπωσης του υπάρχοντος προβλήματος (παράλληλα με την παραδοχή της ύπαρξης του). Στη φάση αυτή, και σε στενή συνεργασία με τους ενδιαφερόμενους οι επιθυμητοί στόχοι, εντοπίζονται οι περιορισμοί που επιβάλλονται από τη λειτουργία του συστήματος, συγκεντρώνονται τα απαραίτητα για την ποσοτικοποίησης των στόχων και περιορισμών δεδομένων και γίνεται έλεγχος της αξιοπιστίας τους.

Η ανάπτυξη του μοντέλου στοχεύει στη μετατροπή όλων των βασικών παραμέτρων του προβλήματος, όπως αυτές διατυπώθηκαν και προσδιορίστηκαν στο προηγούμενο βήμα, σε μαθηματικές και/ή λογικές σχέσεις.

Η επίλυση του μοντέλου αποτελεί το ευκολότερο μέρος της όλης διαδικασίας μιας και συνήθως γίνεται με τη χρήση καλώς τεκμηριωμένων τεχνικών- αλγορίθμων ενσωματωμένων σε κάποιο κατάλληλο λογισμικό. Οι τεχνικές αυτές μπορεί να οδηγήσουν στον εντοπισμό βέλτιστων τιμών για τις μεταβλητές απόφασης (optimal methods) ή απλά παραδεκτών τιμών (heuristic methods).

Η λύση πρέπει να συνοδεύεται πάντα από ανάλυση ευαισθησίας (sensitivity analysis) των τιμών της. Με την ανάλυση ευαισθησίας επιχειρούμε να εντοπίσουμε τις παραμέτρους του προβλήματος που είναι κρίσιμες για την λύση που βρήκαμε (μεταβολή των τιμών τους συνεπάγεται και μεταβολή της λύσης).

Με την εφαρμογή και αξιολόγηση της προτεινόμενης λύσης επιχειρείται να ελεγχθεί προσεκτικά η λύση για να διαπιστωθεί αν οι τιμές της έχουν νόημα και μπορούν να εφαρμοστούν. Συνιστώσες του προβλήματος που παραβλέφθηκαν ή υπέρ -απλουστεύθηκαν και δεδομένα που εκτιμήθηκαν λάθος είναι οι συνήθεις λόγοι που οδηγούν στην ύπαρξη μιας μη -παραδεκτής λύσης. Σε αυτές τις περιπτώσεις το μοντέλο θα πρέπει να αναθεωρηθεί κι ολόκληρη η διαδικασία να επαναληφθεί εκ νέου.

Συνοψίζοντας, από την μια μεριά έχουμε τον πραγματικό – καθημερινό κόσμο και από την άλλη το συμβολικό κόσμο που κατασκευάζουμε με τα μαθηματικά. Ιστορικά τουλάχιστον, η διοίκηση έπαιρνε τις όποιες αποφάσεις βασιζόμενη στην διαίσθηση. Αντ’ αυτής, η Επιχειρησιακή Έρευνα ήρθε για να προτείνει την κατασκευή ενός ποσοτικού προτύπου- μοντέλου (μαθηματικού κορμού).

Ωστόσο, το μαθηματικό μοντέλο, ως μια συμβολική αναπαράσταση πραγματικού κόσμου, καταγράφει μόνο τα κύρια στοιχεία του (είναι ανέφικτο να επιχειρηθεί η συμμετοχή όλων των πτυχών του). Συνεπώς, η επίλυση του μοντέλου που θα κατασκευαστεί, οδηγεί σε προτάσεις οι οποίες απορρέουν αποκλειστικά από αυτό. Δεν λαμβάνεται υπόψη ούτε ο βαθμός απλοποίησης που περικλείει, ούτε επιλογή των βασικών παραμέτρων που έχει γίνει.

Στο τελικό στάδιο, τα αποτελέσματα του μοντέλου ερμηνεύονται κάτω από τις συνθήκες πραγματικότητας, ενσωματώνεται δηλαδή ότι παραλήφθηκε στη φάση της κατασκευής του. Η διαδικασία αυτή, επαυξημένη με την διαίσθηση και την εμπειρία της διοίκησης, εξασφαλίζει σωστότερες – καλύτερες αποφάσεις.

Κεφάλαιο 2^ο

Εισαγωγή στον Δυναμικό
Προγραμματισμό

2.1 Γενικά

2.2 Κόστος

2.3 Χαρακτηριστικά Προβλήματα

Δυναμικού Προγραμματισμού

2.1 Γενικά

Ο όρος Δυναμικός Προγραμματισμός (**Dynamic Programming**) χρησιμοποιήθηκε αρχικά την δεκαετία του '40 από τον Richard Bellman για να περιγράψει τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων. Μέχρι το 1953, το είχε καθορίσει με την σύγχρονη έννοια.

Αρχικά η λήξη “Προγραμματισμός” στο “Δυναμικό Προγραμματισμό” δεν έχει καμία σύνδεση με τον προγραμματισμό υπολογιστών, και προήλθε αντ' αυτού από τον όρο “Μαθηματικός Προγραμματισμός”-ένα συνώνυμο για την βελτιστοποίηση. Εντούτοις, σήμερα πολλά προβλήματα βελτιστοποίησης λύνονται καλύτερα με την δημιουργία ενός προγράμματος στον υπολογιστή, που εφαρμόζει έναν δυναμικό αλγόριθμο προγραμματισμού, παρά την πραγματοποίηση των εκατοντάδων κουραστικών υπολογισμών με το χέρι.

Ο Δυναμικός Προγραμματισμός είναι μία υπολογιστική μέθοδος η οποία εφαρμόζεται όταν πρόκειται να ληφθεί μία σύνθετη απόφαση η οποία προκύπτει από τη σύνθεση επιμέρους αποφάσεων που αλληλοεξαρτώνται. Η μέθοδος επίλυσης τέτοιων προβλημάτων βασίζεται στη διασύνδεση των επιμέρους αποφάσεων με κατάλληλη αναδρομική σχέση ώστε η σύνθεση των επιμέρους αποφάσεων να δίνει την τελικά ζητούμενη απόφαση. Το αρχικό πρόβλημα διασπάται σε επιμέρους υποπροβλήματα τα οποία συνδέονται με τη βοήθεια κατάλληλων αναδρομικών σχέσεων.

Για να καλυφθούν όλες οι εκδοχές από τη διασύνδεση των επιμέρους προβλημάτων, τα υποπροβλήματα αυτά λύνονται παραμετρικά, δηλαδή για όλες τις δυνατές τιμές ορισμένων παραμέτρων.

2.2 Κόστος

Η παραμετρική λύση των υποπροβλημάτων αποτελεί και το κυρίως υπολογιστικών κόστος της μεθόδου, το οποίο, αν και είναι σημαντικό, είναι πάντως πολύ μικρότερο από το κόστος της πλήρους απαρίθμησης και αξιολόγησης όλων δυνατών λύσεων.

Επειδή το κόστος της υπολογιστικής προσπάθειας στα προβλήματα Δυναμικού Προγραμματισμού είναι αρκετά υψηλό, η μέθοδος χρησιμοποιείται για προβλήματα που δεν είναι δυνατό να αντιμετωπισθούν με τη μεθόδους Γραμμικού ή Ακέραιου Προγραμματισμού.

Από τη σκοπιά αυτή η μέθοδος Δυναμικού Προγραμματισμού παρουσιάζει μεγαλύτερη ευελιξία από άλλες μεθόδους, το τίμημα όμως για την ευελιξία αυτή είναι συνήθως το αυξημένο υπολογιστικό κόστος.

2.3 Χαρακτηριστικά προβλημάτων Δυναμικού Προγραμματισμού

Η αρχή της βελτιστοποίησης του Bellman

Τα προβλήματα Δυναμικού Προγραμματισμού παρουσιάζουν τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

1. Οι αποφάσεις λαμβάνονται διαδοχικά.
2. Το πρόβλημα μπορεί να διαιρεθεί σε βήματα (φάσεις) και σε κάθε βήμα απαιτείται να ληφθεί μια “στρατηγική” απόφαση.
3. Κάθε βήμα έχει ένα ορισμένο αριθμό “καταστάσεων” που συνδέονται με αυτό.
4. Το αποτέλεσμα μιας στρατηγικής απόφασης που λαμβάνεται σε κάθε βήμα είναι να μετατρέπει την παρούσα κατάσταση σε μια κατάσταση που συνδέεται με το επόμενο βήμα.

5. Με κάθε απόφαση συνδέεται ένα κέρδος ή μία ζημιά (κόστος).
6. Ο αντικειμενικός σκοπός, που εκφράζεται από την αντικειμενική συνάρτηση, είναι να μεγιστοποιηθεί το συνολικό κέρδος ή να ελαχιστοποιηθεί η συνολική ζημιά, η γενικότερο να επιτευχθεί το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα.
7. Τέλος, ο τρόπος με τον οποίο βρεθήκαμε σε μια κατάσταση ενός βήματος είναι άσχετος με τις αποφάσεις που θα επακολουθήσουν. Δηλαδή οι αποφάσεις που θα επακολουθήσουν εξαρτώνται μόνο από την κατάσταση στην οποία βρισκόμαστε και όχι από τον τρόπο με τον οποίο βρεθήκαμε σ' αυτήν την κατάσταση.

Τέτοια προβλήματα διέπονται από τη ακόλουθη “αρχή του Bellman” που χαρακτηρίζει τη βέλτιστη λύση: “*Mια βέλτιστη διαδοχή αποφάσεων έχει την ιδιότητα ότι, ανεξάρτητα από τις αρχικές αποφάσεις, οι αποφάσεις που απομένουν πρέπει να συνιστούν μια βέλτιστη στρατηγική (πολιτική) σε σχέση με την κατάσταση που απορρέει από τις αρχικές αποφάσεις*”.

Κεφάλαιο 3^ο

Δυναμικός Προγραμματισμός

- 3.1 Δυναμικός Προγραμματισμός
- 3.2 Αναδρομική Φύση Των Υπολογισμών
Του Δυναμικού Προγραμματισμού
(Βέλτιστη Διαδρομή)
- 3.3 Προς Τα Εμπρός Και Προς Τα Πίσω
Αναδρομική Μέθοδος
- 3.4 Επιλεγμένες Εφαρμογές Δυναμικού
Προγραμματισμού

3.1 Δυναμικός Προγραμματισμός

Ο Δυναμικός Προγραμματισμός καθορίζει τη βέλτιστη λύση σε ένα πρόβλημα n -μεταβλητών αναλύοντας το σε n -στάδια, με κάθε στάδιο να αποτελεί ένα υποπρόβλημα με μια μεταβλητή. Το υπολογιστικό πλεονέκτημα του Δυναμικού Προγραμματισμού είναι ότι βελτιστοποιεί τα υποπροβλήματα μιας μεταβλητής. Ωστόσο, επειδή το κάθε στάδιο από τη φύση του διαφέρει ανάλογα με το πρόβλημα βελτιστοποίησης, ο Δυναμικός Προγραμματισμός δεν παρέχει τις υπολογιστικές λεπτομέρειες για την βελτιστοποίηση κάθε σταδίου.

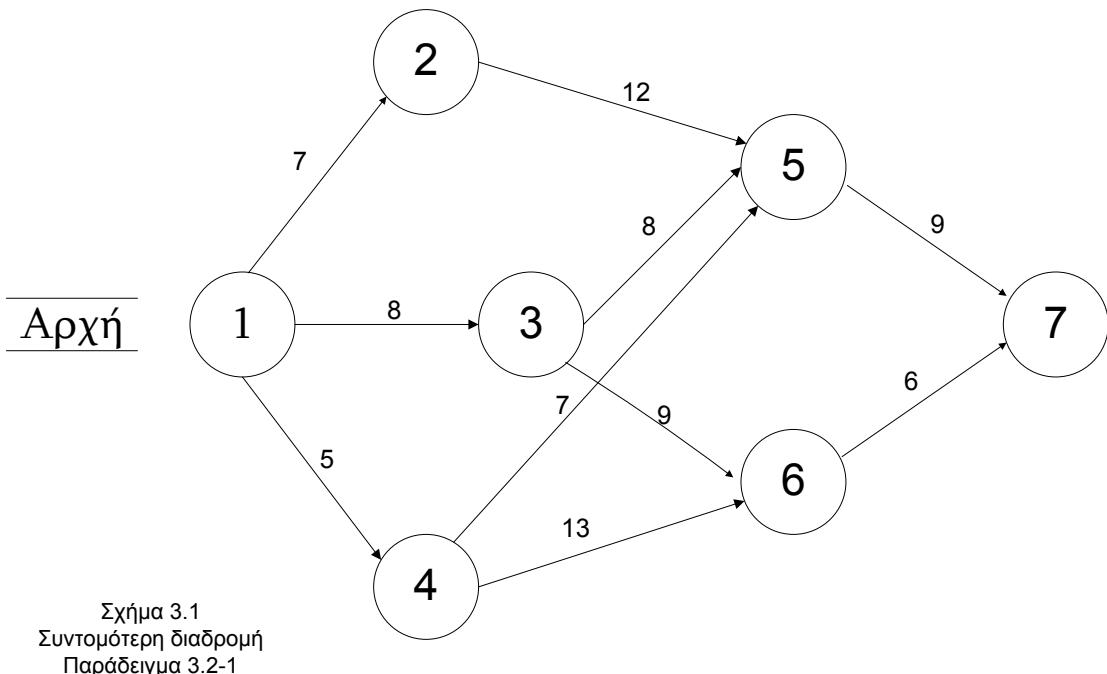
3.2 Αναδρομική φύση των υπολογισμών του Δυναμικού Προγραμματισμού

Οι υπολογισμοί στον Δυναμικό Προγραμματισμό γίνονται αναδρομικά, με την έννοια ότι η βέλτιστη λύση ενός υποπροβλήματος χρησιμοποιείται σαν δεδομένο εισόδου για το επόμενο υποπρόβλημα. Από τη στιγμή που το τελευταίο υποπρόβλημα λύνεται, η βέλτιστη λύση για όλο το πρόβλημα είναι δεδομένη. Ο τρόπος με τον οποίο οι αναδρομικοί υπολογισμοί πραγματοποιούνται εξαρτάται από το πώς θα αποσυνθέσουμε το αρχικό πρόβλημα. Ειδικότερα, υποπροβλήματα που συνδέονται με κοινούς περιορισμούς. Καθώς προχωράμε από το ένα υποπρόβλημα στο επόμενο, η σκοπιμότητα αυτών των κοινών περιορισμών πρέπει να διατηρείται.

Παράδειγμα 3.2-1 (Πρόβλημα Βέλτιστης Διαδρομής)

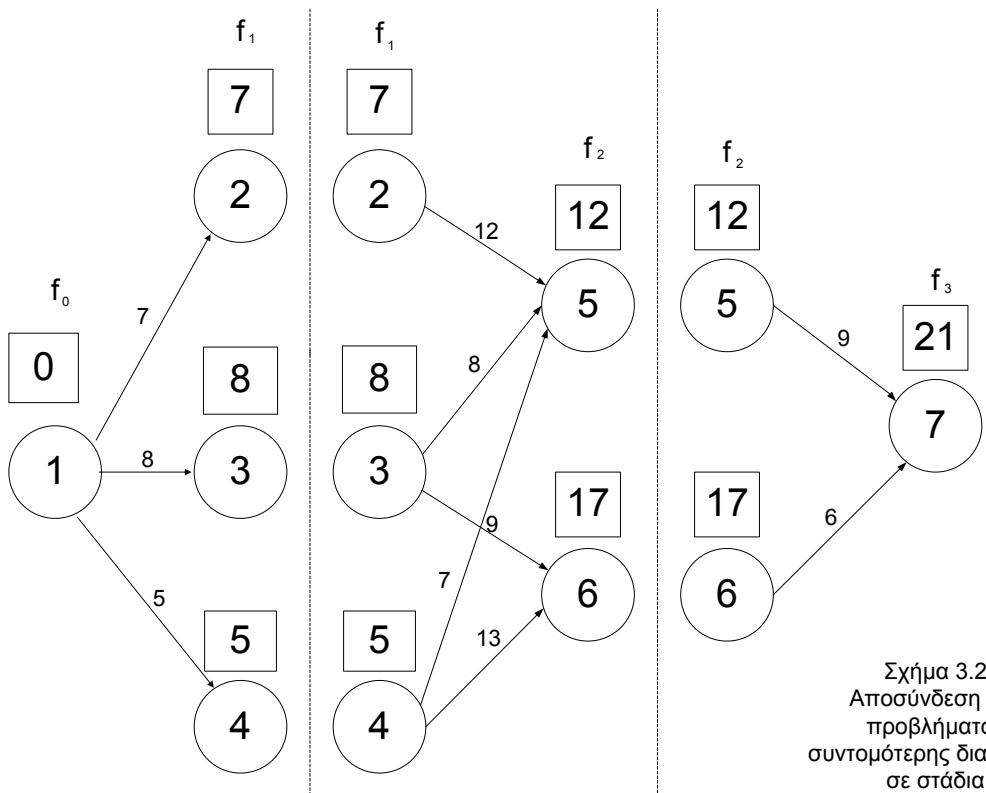
Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να επιλέξουμε τη συντομότερη διαδρομή μεταξύ δύο πόλεων. Στο σχήμα 3.1 δίνεται το δίκτυο με τις πιθανές διαδρομές μεταξύ των πόλεων ξεκινώντας από την πόλη -κόμβος 1 με προορισμό την πόλη-κόμβος 7. Οι διαδρομές περνούν από ενδιάμεσες πόλεις που ορίζονται από τους κόμβους 2 έως 6.

Μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα με τρόπο εξαντλητικό απαριθμώντας όλα τα δρομολόγια μεταξύ των κόμβων 1 και 7 (υπάρχουνε πέντε τέτοιες διαδρομές). Ωστόσο, σε ένα μεγάλο δίκτυο, αυτός ο τρόπος θα ήταν υπολογιστικά αδύνατος.



Για να λύσουμε το πρόβλημα με Δυναμικό Προγραμματισμό, αρχικά αποσυνθέτουμε το πρόβλημα σε στάδια, όπως οριοθετούνται από τις κάθετες διακεκομένες γραμμές στο σχήμα 3.2 . Στη συνέχεια εκτελούμε τους υπολογισμούς για κάθε στάδιο ξεχωριστά.

Η γενική ιδέα είναι να υπολογιστεί η συντομότερη (αθροιστικά) απόσταση σε όλους τους τελικούς κόμβους σε κάθε στάδιο και στη συνέχεια να χρησιμοποιηθούν αυτές οι αποστάσεις, ως δεδομένα εισόδου στο αμέσως επόμενο στάδιο. Το στάδιο 1 περιλαμβάνει τρείς τελικούς κόμβους (2, 3, και 4) και οι υπολογισμοί είναι απλοί.



Σχήμα 3.2
Αποσύνδεση του
προβλήματος
συντομότερης διαδρομής
σε στάδια

Στάδιο 1 συνοπτικά αποτελέσματα.

Συντομότερη απόσταση προς τον κόμβο 2 = 7 (από τον κόμβο 1)

Συντομότερη απόσταση προς τον κόμβο 3 = 8 (από τον κόμβο 1)

Συντομότερη απόσταση προς τον κόμβο 4 = 5 (από τον κόμβο 1)

Στη συνέχεια, το δεύτερο στάδιο έχει δύο τελικούς κόμβους (5 και 6).

Παίρνοντας πρώτα τον κόμβο 5, βλέπουμε από το σχήμα 2.2 ότι υπάρχουν τρείς πιθανές διαδρομές για να φτάσουμε σε αυτόν τον κόμβο και συγκεκριμένα είναι οι (2,5), (3,5) και (4,5). Έχοντας αυτή την πληροφορία και μαζί με τις συντομότερες αποστάσεις στους κόμβους 2,3 και 4 καθορίζεται η συντομότερη απόσταση για τον κόμβο 5

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{l} \text{Συντομότερη απόσταση} \\ \text{προς τον κόμβο 5} \end{array} \right) = \\
 & \min_{i=2,3,4} \left\{ \left(\begin{array}{l} \text{Συντομότερη απόσταση} \\ \text{προς τον κόμβο } i \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{Απόσταση απο} \\ \text{τον κόμβο } i \text{ στον 5} \end{array} \right) \right\} \\
 & = \min_{i=2,3,4} \left\{ \begin{array}{l} 7+12=19 \\ 8+8=16 \\ 5+7=12 \end{array} \right\} = 12 (\text{απο τον κόμβο 4})
 \end{aligned}$$

Παρομοίως, για τον κόμβο 6 έχουμε

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{l} \text{Συντομότερη απόσταση} \\ \text{προς τον κόμβο 6} \end{array} \right) = \\
 & \min_{i=3,4} \left\{ \left(\begin{array}{l} \text{Συντομότερη απόσταση} \\ \text{προς τον κόμβο } i \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{Απόσταση απο} \\ \text{τον κόμβο } i \text{ στον 6} \end{array} \right) \right\} \\
 & = \min_{i=3,4} \left\{ \begin{array}{l} 8+9=17 \\ 5+13=18 \end{array} \right\} = 17 (\text{απο τον κόμβο 3})
 \end{aligned}$$

Στάδιο 2 συνοπτικά αποτελέσματα.

Συντομότερη απόσταση προς τον κόμβο 5 = 12 (από τον κόμβο 4)

Συντομότερη απόσταση προς τον κόμβο 6 = 17 (από τον κόμβο 3)

Το τελευταίο βήμα είναι να εξεταστεί το στάδιο 3. Ο κόμβος προορισμού είναι ο κόμβος 7, στον οποίον μπορούμε να φτάσουμε από τον κόμβο 5 ή 6.
 Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα από το στάδιο 2 και τις αποστάσεις από τον κόμβο 5 και 6 προς τον κόμβο 7, έχουμε

$$\begin{pmatrix} \text{Συντομότερη απόσταση} \\ \text{προς τον κόμβο } 7 \end{pmatrix} = \min_{i=5,6} \begin{cases} 12+9=21 \\ 17+6=23 \end{cases} = 21 (\text{από τον κόμβο } 5)$$

Στάδιο 3 συνοπτικά αποτελέσματα.

Συντομότερη απόσταση προς τον κόμβο $7 = 21$ (από τον κόμβο 5)

Βάση των υπολογισμών μας βλέπουμε ότι η συντομότερη απόσταση μεταξύ των κόμβων 1 και 7 είναι 21. Οι πόλεις που καθορίζουν την βέλτιστη απόσταση είναι οι εξής: από το στάδιο 3, ο κόμβος 7 συνδέεται με τον κόμβο 5. Στη συνέχεια από το στάδιο 2, ο κόμβος 4 συνδέεται με τον κόμβο 5. Τέλος, από το πρώτο στάδιο, ο κόμβος 4 συνδέεται με τον κόμβο 1. Έτσι, η συντομότερη διαδρομή ορίζεται: $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 7$.

Τώρα μπορούμε να δούμε πως οι αναδρομικοί υπολογισμοί του Δυναμικού Προγραμματισμού μπορούν να εκφραστούν μαθηματικά. Έστω $f_i(x_i)$ είναι η συντομότερη απόσταση στον κόμβο X_i , όπου i το στάδιο, και ορίζουμε $d(x_{i-1}, x_i)$ την απόσταση από τον κόμβο X_{i-1} στον κόμβο X_i . Τότε η f_i υπολογίζεται από την f_{i-1} με την ακόλουθη αναδρομική εξίσωση:

$$f_i(x_i) = \min_{\substack{\text{ολες} \\ \text{οι} \\ \text{εφικτες} \\ (x_{i-1}, x_i) \\ \text{διαδρομες}}} \{d(x_{i-1}, x_i) + f_{i-1}(x_{i-1})\}, i=1,2,3$$

Ξεκινώντας από $i=1$, η αναδρομική εξίσωση δίνει $f_0(x_0) = 0$. Η εξίσωση μας δείχνει ότι η συντομότερη απόσταση $f_i(x_i)$ στο στάδιο i πρέπει να εκφραστεί σε όρους στον επόμενο κόμβο X_i . Στην ορολογία του Δυναμικού Προγραμματισμού, το X_i αναφέρεται ως η κατάσταση του συστήματος κατά το στάδιο i . Στην πραγματικότητα η κατάσταση του συστήματος στο στάδιο i θεωρείται ως η πληροφορία που συνδέει τα στάδια μεταξύ τους, έτσι ώστε η βέλτιστη απόφαση για τα υπόλοιπα στάδια μπορεί να γίνει χωρίς να επανεξετάσουμε το πώς οι αποφάσεις για τα προηγούμενα στάδια έχουν παρθεί.

Ο κατάλληλος ορισμός της κατάστασης του συστήματος μας επιτρέπει να εξετάζουμε κάθε στάδιο ξεχωριστά και μας εγγυάται ότι η λύση είναι εφικτή για όλα τα στάδια.

Ο ορισμός της κατάστασης οδηγεί στο ακόλουθο συνοπτικό συμπέρασμα για το Δυναμικό Προγραμματισμό.

Αρχή του Βέλτιστου. Μελλοντικές αποφάσεις για τις υπόλοιπες φάσεις θα αποτελέσουν μια βέλτιστη πολιτική, ανεξαρτήτου των αποφάσεων σε προηγούμενα στάδια.

Η εφαρμογή της Αρχής είναι εμφανής στους υπολογισμούς του παραδείγματος 3.2-1. Για παράδειγμα, στο στάδιο 3, χρησιμοποιούμε μόνο τη συντομότερη απόσταση από τους κόμβους 5 και 6, και δεν ασχολούμαστε με το πώς αυτοί οι κόμβοι επιτεύχθηκαν από τον κόμβο 1. Αν και η Αρχή του Βέλτιστου είναι “ασαφής” σχετικά με τις λεπτομέρειες για το πώς κάθε στάδιο έχει βελτιστοποιηθεί, η εφαρμογή της διευκολύνει σε μεγάλο βαθμό την επίλυση αρκετών πολύ σύνθετων προβλημάτων που διαφορετικά δεν είναι επιλύσιμα.

3.3 Προς τα εμπρός και προς τα πίσω αναδρομική μέθοδος

Στο παράδειγμα 3.2-1 χρησιμοποιήσαμε την προς τα εμπρός αναδρομική μέθοδο στην οποία οι υπολογισμοί προχωράνε από το στάδιο 1 στο στάδιο 3. Το ίδιο παράδειγμα μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο προς τα πίσω, ζεκινώντας από το στάδιο 3 και τελειώνοντας στο στάδιο 1.

Τόσο η προς τα εμπρός όσο και η προς τα πίσω μέθοδος δίνουν την ίδια λύση. Παρόλο ότι η προς τα εμπρός μέθοδος εμφανίζεται πιο λογική, χρησιμοποιείται σχεδόν πάντα η προς τα πίσω μέθοδος. Ο λόγος για την προτίμηση αυτή είναι, ότι σε γενικές γραμμές, η προς τα πίσω μέθοδος μπορεί να είναι πιο υπολογιστικά αποδοτική. Θα επιδείξουμε την χρήση της προς τα πίσω

μέθοδος εφαρμόζοντας την στο παράδειγμα 3.3-1. Η επίδειξή θα μας παρέχει την ευκαιρία να δείξουμε τους υπολογισμούς σε μορφή συμπυκνωμένου πίνακα.

Παράδειγμα 3.3-1

Η εξίσωση της προς τα πίσω μεθόδου για το παράδειγμα 3.3-1 είναι η

$$f_i(x_i) = \min_{\substack{\text{ολες} \\ \text{οι} \\ \text{εφικτες} \\ (x_i, x_{i+1}) \\ \text{διαδρομες}}} \{d(x_i, x_{i+1}) + f_{i+1}(x_{i+1})\}, i=1,2,3$$

όπου $f_4(x_4) = 0$ για $x_4 = 7$. Η συνδεδεμένη σειρά των υπολογισμών είναι

$$f_3 \rightarrow f_2 \rightarrow f_1.$$

Στάδιο 3. Επειδή ο κόμβος 7 ($x_4 = 7$) είναι συνδεδεμένος με τους κόμβους 5 και 6 ($x_3 = 5$ και 6) με ακριβός ένα δρομολόγιο η κάθε μια, δεν υπάρχει εναλλακτική επιλογή, τα αποτελέσματα για το στάδιο 3 συνοψίζονται ως

| $d(x_3, x_4)$ | | Βέλτιστη λύση | |
|---------------|-----------|---------------|---------|
| x_3 | $x_4 = 7$ | $f_3(x_3)$ | x_4^* |
| 5 | 9 | 9 | 7 |
| 6 | 6 | 6 | 7 |

Στάδιο 2. Η διαδρομή (2,6) έχει αποκλειστεί, επειδή δεν υπάρχει. Δεδομένου της $f_3(x_3)$ από το στάδιο 3, μπορούμε να συγκρίνουμε τις εφικτές εναλλακτικές λύσεις, όπως φαίνεται στο ακόλουθο πίνακα:

| $d(x_3, x_4)$ | | | Βέλτιστη λύση | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------|
| x_2 | $x_3 = 5$ | $x_3 = 6$ | $f_2(x_2)$ | x_3^* |
| 2 | $12 + 9 = 21$ | -- | 21 | 5 |
| 3 | $8 + 9 = 17$ | $9 + 6 = 15$ | 15 | 6 |
| 4 | $7 + 9 = 16$ | $13 + 6 = 19$ | 16 | 5 |

Η βέλτιστη λύση στο στάδιο 2 έχει ως εξής: αν ήμαστε σε μια από τις πόλεις 2 ή 4, η συντομότερη διαδρομή περνά μέσα από το τη πόλη 5, εάν ήμαστε στη πόλη 3, η συντομότερη διαδρομή περνά μέσα από τη πόλη 6.

Στάδιο 1. Από τον κόμβο 1, έχουμε τρείς εναλλακτικές διαδρομές: (1,2), (1,3), και (1,4). Χρησιμοποιώντας την $f_2(x)$ από το στάδιο 2, μπορούμε να υπολογίσουμε τα ακόλουθα.

| | $d(x_1, x_2) + f_2(x_2)$ | | | Βέλτιστη Λύση | |
|-------|--------------------------|---------------|---------------|---------------|---------|
| x_1 | $x_2 = 2$ | $x_2 = 3$ | $x_2 = 4$ | $f_1(x_1)$ | x_2^* |
| 1 | $7 + 21 = 28$ | $8 + 15 = 23$ | $5 + 16 = 21$ | 21 | 4 |

Η βέλτιστη λύση στο στάδιο 1 δείχνει ότι η πόλη 1 ενώνεται με την πόλη 4. Στη συνέχεια, η βέλτιστη λύση στο στάδιο 2 συνδέει την πόλη 4 με την πόλη 5. Τέλος, η βέλτιστη λύση στο στάδιο 3 συνδέει την πόλη 5 με την πόλη 7. Έτσι η πλήρης διαδρομή δίνεται ως $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 7$, και η συνδεόμενη απόσταση είναι 21.

3.4 Επιλεγμένες εφαρμογές Δυναμικού Προγραμματισμού

Στα επόμενα καφάλαια παρουσιάζοντε διάφορες εφαρμογές, η κάθε μια είναι μια νέα ιδέα στην υλοποίηση του δυναμικού προγραμματισμού. Καθώς μελετάμε κάθε μια εφαρμογή, πρέπει να δίνουμε ιδιαίτερη προσοχή στα τρία βασικά στοιχεία ενός μοντέλου Δυναμικού Προγραμματισμού:

1. Καθορισμός των σταδίων
2. Ορισμό των εναλλακτικών λύσεων, σε κάθε στάδιο
3. Καθορισμός των καταστάσεων του συστήματος σε κάθε στάδιο

Από τα τρία στοιχεία, ο καθορισμός των καταστάσεων είναι συνήθως και το πιο δύσκολο. Οι εφαρμογές που παρουσιάζονται εδώ δείχνουν ότι ο καθορισμός

των καταστάσεων ποικίλει ανάλογα με το πώς έχουν διαμορφωθεί οι καταστάσεις. Παρόλα αυτά, καθώς θα διερευνούμε κάθε εφαρμογή, θα ήταν χρήσιμο να εξεταστούν τα ακόλουθα ερωτήματα:

1. Ποιες σχέσεις συνδέουν τα στάδια;
2. Ποιες πληροφορίες είναι απαραίτητες ώστε να ληφθούν εφικτές αποφάσεις στο τρέχον στάδιο χωρίς επανεξέταση των αποφάσεων που πάρθηκαν σε προηγούμενα στάδια;

Κεφάλαιο 4^ο

Το πρόβλημα του Σακιδίου

- 4.1 Πρόβλημα Σακιδίου
- 4.2 Αναπαράσταση σε Δίκτυο το
 Πρόβλημα του Σακιδίου
- 4.3 Λύση των Προβλήματος του
 Σακιδίου σε Φύλλο Εργασίας

4.1 Πρόβλημα Σακιδίου

Το πρόβλημα του σακιδίου ασχολείται κλασικά με την κατάσταση ενός οδοιπόρου που πρέπει να αποφασίσει για το ποια πολύτιμα αντικείμενα θα βάλει στο σακίδιο του. Το πρόβλημα παραφράζεται ως ένα γενικό πρόβλημα κατανομής των πόρων κατά το οποίο ένας περιορισμένος αριθμός πόρων αντιστοιχεί σε μια σειρά εναλλακτικών λύσεων (π.χ συγκεκριμένοι πόροι που θα διατεθούν για την υλοποίηση έργων) με στόχο τη μεγιστοποίηση της συνολικής απόδοσης.

Η προς τα πίσω αναδρομική εξίσωση έχει αναπτυχθεί για ένα γενικό πρόβλημα με n -αντικείμενα και με W συνολικό επιτρεπόμενο βάρος σακιδίου. Έστω m_i είναι ο αριθμός των μονάδων του i αντικειμένου στο σακίδιο. Κάθε αντικείμενο έχει ένα βάρος w_i και ένα κέρδος r_i . Όπου το γενικό πρόβλημα μοντελοποιείται ως εξής:

$$\text{Maximize } Z = r_1 m_1 + r_2 m_2 + \dots + r_n m_n$$

υπό τούς περιορισμούς :

$$\begin{aligned} w_1 m_1 + w_2 m_2 + \dots + w_n m_n &\leq W \\ m_1, m_2, \dots, m_n &\geq 0, \quad \text{και} \quad \text{ακέραιοι} \end{aligned}$$

Τα τρία στοιχεία του μοντέλου είναι:

1. Το στάδιο i αποτελείται από i αντικείμενα, $i=1,2,\dots,n$.
2. Η εναλλακτική λύση στο στάδιο i αποτελείται από m_i , όπου m_i είναι ο αριθμός των μονάδων του αντικειμένου i που περιλαμβάνονται

στο σακίδιο. Η αναμενόμενη απόδοση είναι $r_i m_i$. Όπου $\left[\frac{W}{w_i} \right]$, ορίζεται ως ο μεγαλύτερος ακέραιος αριθμός αντικειμένων που μπορούν να τοποθετηθούν στο σακίδιο, οπότε το $m_i = 1, 2, \dots, \left[\frac{W}{w_i} \right]$.

3. Η κατάσταση του συστήματος αποτελείται από X_i , όπου X_i το συνολικό βάρος στο στάδιο i , $i+1, \dots$, και n . Όπου ο περιορισμός βάρους είναι ο μόνος περιορισμός που συνδέει όλα τα στάδια n .

Οπότε ορίζουμε

$$f_i(X_i) = \text{η μέγιστη απόδοση για τα στάδια } i, i+1, \text{ και } n, \text{ της δεδομένης κατάστασης } X_i.$$

Ο απλούστερος τρόπος για να προσδιοριστεί η αναδρομική εξίσωση είναι μια διαδικασία με δύο στάδια.

Στάδιο 1. Εκφράζουμε την $f_i(X_i)$ συναρτήσει της $f_i(X_{i+1})$ ως εξής:

$$f_i(X_i) = \max_{\substack{m_i=0,1,\dots,\left[\frac{W}{w_i}\right] \\ X_i \leq W}} \{r_i m_i + f_{i+1}(X_{i+1})\}, i=1,2,\dots,n$$

$$f_{n+1}(X_{n+1}) \equiv 0$$

Στάδιο 2. Εκφράζουμε το X_{i+1} συναρτήσει του X_i ώστε να εξασφαλιστεί ότι η αριστερή πλευρά της $f_i(X_i)$ είναι συναρτήσει μόνο του X_i . Εξ ορισμού το $X_i - X_{i+1} = w_i m_i$ αντιστοιχεί στο βάρος που χρησιμοποιείτε στο στάδιο i . Έτσι $X_{i+1} = X_i - w_i m_i$ και η ορθή αναδρομική εξίσωση δίνεται ως:

$$f_i(X_i) = \max_{\substack{m_i=0,1,\dots,\left[\frac{W}{w_i}\right] \\ X_i \leq W}} \{r_i m_i + f_{i+1}(X_i - w_i m_i)\}, i=1,2,\dots,n$$

Παράδειγμα 4.1-1

Ένα σκάφος με συνολικό φορτίο 4 τόνους μπορεί να φορτωθεί με ένα ή περισσότερα από τα τρία αντικείμενα. Ο παρακάτω πίνακας μας δίνει το βάρος w_i , σε τόνους και τα έσοδα ανά μονάδα σε χιλιάδες χρηματικές μονάδες r_i , για

το αντικείμενο i. Πόσα αντικείμενα πρέπει να φορτωθούν στο σκάφος για να μεγιστοποιήσουμε την συνολική απόδοση;

| Αντικείμενο i | W_i | r_i |
|---------------|-------|-------|
| 1 | 2 | 31 |
| 2 | 3 | 47 |
| 3 | 1 | 14 |

Επειδή η μονάδα βάρους W_i και το μέγιστο βάρος W είναι ακέραιοι αριθμοί, η κατάσταση X_i πρέπει να παίρνει και αυτή μόνο ακέραιες τιμές.

Στάδιο 3. Το ακριβές βάρος που θα διατεθεί για το στάδιο 3 (αντικείμενο 3) σε άγνωστα εκ των προτέρων αντικείμενο, μπορεί να έχει τις τιμές 0,1,...και 4 (επειδή $W=4$ τόνους). Η κατάσταση $X_3 = 0$ και $X_3 = 4$ αντίστοιχα, αντιπροσωπεύουν τις ακραίες περιπτώσεις όπου δεν φορτώνεται κανένα αντικείμενο 3 καθόλου και στην περίπτωση που καταχωρείται ολόκληρη η χωρητικότητα του φορτίου στο αντικείμενο 3. Οι υπόλοιπες τιμές του $X_3 (=1,2,$ και $3)$ συνεπάγονται σε μια μερική καταχώρηση της χωρητικότητας του σκάφους με το αντικείμενο 3. Στην πραγματικότητα, το συγκεκριμένο εύρος τιμών για το X_3 καλύπτει όλες τις πιθανές κατανομές της χωρητικότητας του σκάφους με το αντικείμενο 3.

Επειδή $W_3 = 1$ τόνο, η μέγιστος αριθμός από το αντικείμενο 3 που μπορεί να φορτωθεί είναι $\frac{4}{1} = 4$, που σημαίνει ότι η δυνατές τιμές του m_3 είναι 0,1,2,3, και 4.

Με εναλλακτικές λύσεις m_3 μόνο αν $W_3 m_3 \leq X_3$. Έτσι εξαιρούνται όλες οι μη-εφικτές λύσεις (αυτές για τις οποίες ισχύει $W_3 m_3 > X_3$). Η παρακάτω εξίσωση είναι η βάση για τη σύγκριση των εναλλακτικών λύσεων του σταδίου 3.

$$f_3(x_3) = \max_{m_3} \{14m_3\}, \quad \max \{m_3\} = \left[\frac{4}{1} \right] = 4$$

Ο ακόλουθος πίνακας συγκρίνει τις εφικτές λύσεις για κάθε τιμή του x_3 .

| x_3 | 14m ₃ | | | | | Βέλτιστη Λύση | |
|-------|------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------------|---------|
| | $m_3 = 0$ | $m_3 = 1$ | $m_3 = 2$ | $m_3 = 3$ | $m_3 = 4$ | $f_3(x_3)$ | m_3^* |
| 0 | 0 | - | - | - | - | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 14 | - | - | - | 14 | 1 |
| 2 | 0 | 14 | 28 | - | - | 28 | 2 |
| 3 | 0 | 14 | 28 | 42 | - | 42 | 3 |
| 4 | 0 | 14 | 28 | 42 | 56 | 56 | 4 |

Στάδιο 2.

$$f_2(x_2) = \max_{m_2} \{47m_2 + f_3(x_2 - 3m_2)\}, \quad \max \{m_2\} = \left[\frac{4}{3} \right] = 1$$

| x_2 | 47m ₂ + f ₃ (x ₂ - 3m ₂) | | Βέλτιστη Λύση | |
|-------|---|----------------|---------------|---------|
| | $m_2 = 0$ | $m_2 = 1$ | $f_2(x_2)$ | m_2^* |
| 0 | $0 + 0 = 0$ | - | 0 | 0 |
| 1 | $0 + 14 = 14$ | - | 14 | 0 |
| 2 | $0 + 28 = 28$ | - | 28 | 0 |
| 3 | $0 + 42 = 42$ | $47 + 0 = 47$ | 47 | 1 |
| 4 | $0 + 56 = 56$ | $47 + 14 = 61$ | 61 | 1 |

Στάδιο 1.

$$f_1(x_1) = \max_{m_1} \{31m_1 + f_2(x_1 - 2m_1)\}, \quad \max \{m_1\} = \left[\frac{4}{2} \right] = 2$$

| x_1 | $31m_1 + f_2(x_1 - 2m_1)$ | | | Βέλτιστη Λύση | |
|-------|---------------------------|----------------|---------------|---------------|---------|
| | $m_1 = 0$ | $m_1 = 1$ | $m_1 = 2$ | $f_1(x_1)$ | m_1^* |
| 0 | $0 + 0 = 0$ | - | - | 0 | 0 |
| 1 | $0 + 14 = 14$ | - | - | 14 | 0 |
| 2 | $0 + 28 = 28$ | $31 + 0 = 31$ | - | 31 | 1 |
| 3 | $0 + 47 = 47$ | $31 + 14 = 45$ | - | 47 | 0 |
| 4 | $0 + 61 = 61$ | $31 + 28 = 59$ | $62 + 0 = 62$ | 62 | 2 |

Η βέλτιστη λύση μπορεί τώρα να προσδιοριστεί με τον ακόλουθο τρόπο:

δεδομένου ότι $W = 4$ τόνους, από το στάδιο 1, $x_1 = 4$ δίνει την καλύτερη εφικτή

λύση $m_1^* = 2$, το οποίο σημαίνει ότι 2 μονάδες από το αντικείμενο 1 θα

φορτωθούν στο σκάφος. Η λύση αυτή αφήνει $x_2 = x_1 - 2m_1^* = 4 - 2 \times 2 = 0$. Από το

στάδιο 2, $x_2 = 0$ το οποίο αποδίδει $m_2^* = 0$ το οποίο, με την σειρά του δίνει

$x_3 = x_2 - 3m_2^* = 0 - 3 \times 0 = 0$. Συνεχίζοντας, από το στάδιο 3, $x_3 = 0$ δίνει $m_3^* = 0$.

Έτσι η πλήρης βέλτιστη λύση είναι $m_1^* = 2, m_2^* = 0$ και $m_3^* = 0$. Το αναμενόμενο

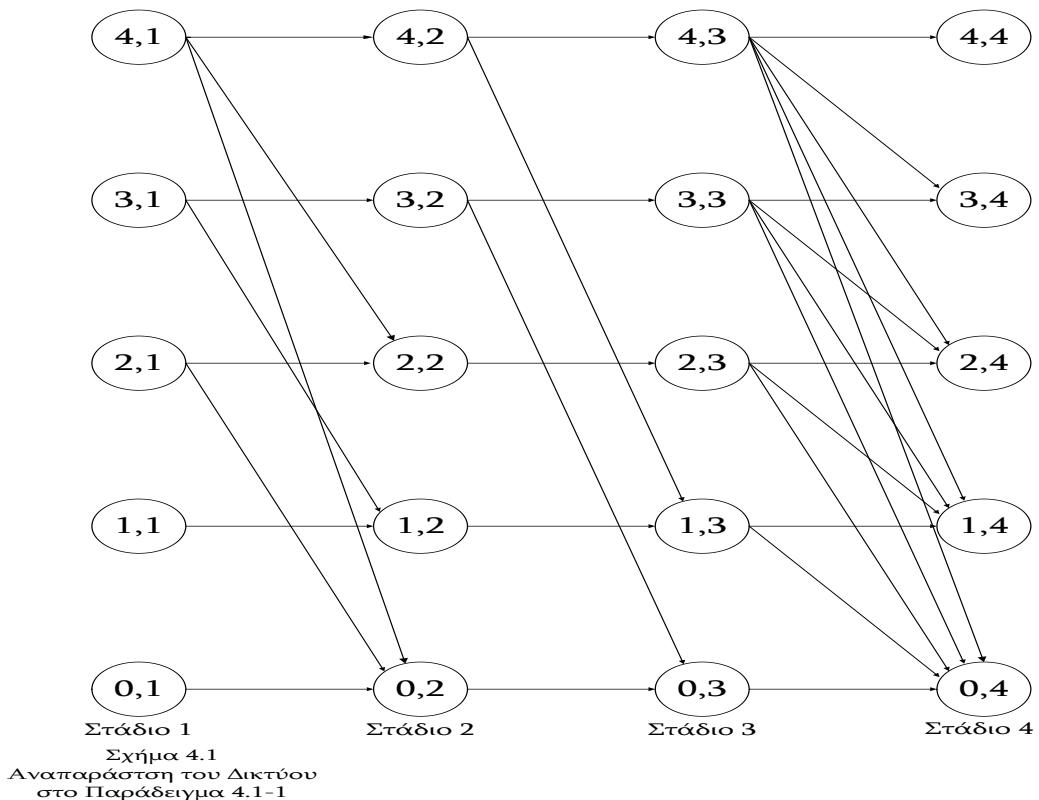
κέρδος είναι 62,000 χρηματικές μονάδες.

Στον πίνακα για το στάδιο 1, στην πραγματικότητα εμείς το μόνο που χρειαζόμαστε για να υπολογίσουμε τη βέλτιστη λύση είναι το $x_1 = 4$. Ωστόσο, οι υπολογισμοί για $x_1 = 0, 1, 2$ και 3 περιλαμβάνονται για την ανάλυση ευαισθησίας.

Για παράδειγμα, τι θα συνέβαινε αν η χωρητικότητα του σκάφους ήταν 3 τόνοι αντί για 4; Η νέα βέλτιστη λύση μπορεί να προσδιοριστεί ξεκινώντας από το $x_1 = 3$ στο στάδιο 1 και συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο όπως κάναμε και για $x_1 = 4$.

Το παράδειγμα του Σακιδίου αντιπροσωπεύει ένα τυπικό μοντέλο τοποθέτησης αντικειμένων στο οποίο περιορισμένα αντικείμενα μοιράζονται ανάμεσα σε περιορισμένο αριθμό (οικονομικών) δραστηριοτήτων. Σκοπός μας είναι να μεγιστοποιήσουμε μια σχετική απόδοση.

4.2 Αναπαράσταση σε Δίκτυο το Πρόβλημα του Σακιδίου



Η εξεύρεση της βέλτιστης λύσης στο Παράδειγμα 4.1-1 ισοδυναμεί με την εύρεση της μεγαλύτερης διαδρομής στο σχήμα 4.1 από τον κόμβο $(4,1)$ σε κάποιο κόμβο στο στάδιο 4. Στο σχήμα 4.1, για $t \leq 3$, ο κόμβος (d, t) αντιπροσωπεύει μια κατάσταση στην οποία d είναι τα κιλά του χώρου που μπορεί να διατεθούν για τα αντικείμενα του τύπου $t, t+1, \dots, 3$. Ο κόμβος $(d, 4)$ αντιπροσωπεύει d κιλά αχρησιμοποίητα στο σάκο. Κάθε τόξο από έναν κόμβο στάδιου t σε άλλο κόμβο στάδιου $t+1$ αντιπροσωπεύει μια απόφαση του πόσα αντικείμενα του τύπου t τοποθετήθηκαν στο σακίδιο. Για παράδειγμα, το τόξο

από το (4,1) στο (2,2) αντιπροσωπεύει την τοποθέτηση ενός αντικειμένου τύπου 1 στο σακίδιο. Αυτό αφήνει $4-2 = 2$ τόνους για τα αντικείμενα του τύπου 2 και 3. Το τόξο αυτό έχει μήκος 31, που αντιπροσωπεύει το όφελος που λαμβάνεται με την τοποθέτηση ενός αντικειμένου τύπου 1 στο σακίδιο. Η λύση μας για το Παράδειγμα 4.1-1 δείχνει ότι η μεγαλύτερη διαδρομή στο σχήμα 4.1 από τον κόμβο (4,1) σε έναν από τους κόμβους στο στάδιο 4 είναι (4,1) - (0,2) - (0,3) - (0,4). Σημειώνουμε ότι η βέλτιστη λύση σε ένα πρόβλημα σακιδίου μπορεί να μην χρειαστεί να χρησιμοποιήσει πάντα όλο το διαθέσιμο βάρος. Για παράδειγμα, αν το κέρδος από το αντικείμενο τύπου 2 ήταν 63 χρηματικές μονάδες, και το βάρος του αντικειμένου τύπου 3 ήταν 2, τότε η βέλτιστη λύση θα ήταν να συμπεριλάβουμε ένα τύπου 2 αντικείμενο, που αντιστοιχεί στο μονοπάτι (4,1) - (4,2) - (1, 3) - (1,4). Η λύση αυτή αφήνει 1 τόνο που δεν έχει χρησιμοποιηθεί.

4.3 Λύση του προβλήματος του Σάκου σε φύλο εργασίας

Η φύση των υπολογισμών του Δυναμικού Προγραμματισμού καθιστά αδύνατη την ανάπτυξη ενός γενικού κώδικα υπολογιστή που να μπορεί να χειριστεί όλα τα προβλήματα Δυναμικού Προγραμματισμού. Ίσως αυτό εξηγεί και την απουσία ενός εμπορικού λογισμικού Δυναμικού Προγραμματισμού.

Σε αυτό το σημείο, θα παρουσιάσουμε από το EXCEL τον αλγόριθμο για τον χειρισμό υποκατηγορίας προβλημάτων Δυναμικού Προγραμματισμού: το πρόβλημα του Σακιδίου που έχει έναν μόνο περιορισμό. Ο αλγόριθμος δεν είναι ορισμένος για συγκεκριμένα δεδομένα. Έτσι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για οποιοδήποτε πρόβλημα σε αυτήν την κατηγορία (που υπόκεινται σε περιορισμό μεγέθους).

Στο σχήμα 4.2 φαίνεται η αρχική οθόνη του προβλήματος του Σακιδίου (με την προς τα πίσω μέθοδο αναδρομής) του Δυναμικού Προγραμματισμού. Η οθόνη χωρίζεται σε δύο τμήματα: το δεξί τμήμα (στήλες K:P) χρησιμοποιείται για να συνοψίσει τη λύση. Στο αριστερό τμήμα, το άνω μέρος (γραμμές 3 έως 6) παρέχουν

τα δεδομένα εισόδου για το τρέχων στάδιο, και το κάτω μέρος (από τη γραμμή 7 και κάτω) θα χρησιμοποιηθεί για τους υπολογισμούς. Τα σύμβολα των δεδομένων εισόδου αντιστοιχούν στη μαθηματική σημειογραφία που χρησιμοποιείται για την ανάπτυξη μοντέλων Δυναμικού Προγραμματισμού και είναι αυτονόητα.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P |
|----|--|---|------|-----|-----|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Δυναμικός Προγραμματισμός Πρόβλημα Σάκου (προς τα πίσω μέθοδος) | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | Δεδομένα εισόδου και Υπολογισμοί | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | Αριθμός σταδίων $N =$ | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | Τρέχων στάδιο = | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | Πόσα αντικείμενα? | | w= | | r= | | | | | | | | | | | |
| 6 | | | vαι | vαι | vai | vai | | | | | | | | | | |
| 7 | | | m= | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | | | r*m= | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | | | w*m= | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 15 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 17 | | | | | | | | | | | | | | | | |

Σχήμα 4.2

Αρχική οθόνη Excel γενικού Προβλήματος Σακιδίου Δυναμικού Προγραμματισμού

Τα σχήμα 4.3,4.4 και 4.5 μας δείχνουν τους υπολογισμούς για κάθε στάδιο που παράγεται από το αλγόριθμο για το παράδειγμα 4.1-1. Οι υπολογισμοί εκτελούνται ανά στάδιο και εμείς πρέπει να παρέχουμε τα βασικά στοιχεία που οδηγούν κάθε στάδιο. Αρχίζοντας από το στάδιο 3, και χρησιμοποιώντας το συμβολισμό και τα δεδομένα από το παράδειγμα 4.1-1, έχουμε τα ακόλουθα:

| Εισάγοντας | Κελιά |
|-------------------------|-------|
| Αριθμός σταδίων $N = 3$ | D3 |
| Όριο βάρους $W = 4$ | G3 |
| Τρέχων στάδιο = 3 | C4 |
| $W_3 = 1$ | E4 |
| $r_3 = 14$ | G4 |
| $m_3 = (0,1,2,3,4)$ | D6:H6 |

Στάδιο 3:

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P |
|--|--------|-----|---------|-------|-------|-------|----|----|---|---|---|---|---|---|---|
| Δυναμικός Προγραμματισμός Πρόβλημα Σάκου (προς τα πίσω μέθοδος) | | | | | | | | | | | | | | | |
| Δεδομένα εισόδου και γηπευτικοί | | | | | | | | | | | | | | | |
| Αριθμός σταδίων N = | 3 | | Όριο W= | 4 | | Μέγι | | | | | | | | | |
| Τρέχων στάδιο = | 3 | w3= | 1 | r3= | 14 | στο | | | | | | | | | |
| Πόσα αντικείμενα? | 4 | vai | vai | vai | vai | | | | | | | | | | |
| m3= | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | | | | | | | | | | |
| Στάδιο 4 | r3*m3= | 0 | 14 | 28 | 42 | 56 | | | | | | | | | |
| f4 | w3*m3= | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | f3 | m3 | | | | | | | |
| x3= | 0 | 0 | 11111 | 11111 | 11111 | 11111 | 0 | 0 | | | | | | | |
| x3= | 1 | 0 | 14 | 11111 | 11111 | 11111 | 14 | 1 | | | | | | | |
| x3= | 2 | 0 | 14 | 28 | 11111 | 11111 | 28 | 2 | | | | | | | |
| x3= | 3 | 0 | 14 | 28 | 42 | 11111 | 42 | 3 | | | | | | | |
| x3= | 4 | 0 | 14 | 28 | 42 | 56 | 56 | 4 | | | | | | | |

Σχήμα 4.3

Στάδιο 2:

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P |
|----------------------------|--------|-----|-------|-----|-----|------|----|----|---|---|---|---|---|---|---|
| Αριθμός σταδίων N = | | | | | | | | | | | | | | | |
| Τρέχων στάδιο = | 2 | w2= | 3 | r2= | 47 | Μέγι | | | | | | | | | |
| Πόσα αντικείμενα? | 1 | vai | vai | οχι | οχι | οχι | | | | | | | | | |
| m2= | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | | | | | | | | | | |
| Στάδιο 3 | r2*m2= | 0 | 47 | | | | | | | | | | | | |
| f3 | w2*m2= | 0 | 3 | | | | f2 | m2 | | | | | | | |
| x2= | 0 | 0 | 11111 | | | | 0 | 0 | | | | | | | |
| x2= | 1 | 14 | 11111 | | | | 14 | 0 | | | | | | | |
| x2= | 2 | 28 | 11111 | | | | 28 | 0 | | | | | | | |
| x2= | 3 | 42 | 47 | | | | 47 | 1 | | | | | | | |
| x2= | 4 | 56 | 61 | | | | 61 | 1 | | | | | | | |

Σχήμα 4.4

Στάδιο 1:

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P |
|----------------------------|--------|-----|-------|-------|-----|------|----|----|---|---|---|---|---|---|---|
| Αριθμός σταδίων N = | | | | | | | | | | | | | | | |
| Τρέχων στάδιο = | 1 | w1= | 2 | r1= | 31 | Μέγι | | | | | | | | | |
| Πόσα αντικείμενα? | 2 | vai | vai | vai | οχι | οχι | | | | | | | | | |
| m1= | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | | | | | | | | | | |
| Στάδιο 2 | r1*m1= | 0 | 31 | 62 | | | f1 | m1 | | | | | | | |
| f2 | w1*m1= | 0 | 2 | 4 | | | 0 | 0 | | | | | | | |
| x1= | 0 | 0 | 11111 | 11111 | | | 14 | 0 | | | | | | | |
| x1= | 1 | 14 | 11111 | 11111 | | | 31 | 1 | | | | | | | |
| x1= | 2 | 28 | 31 | 11111 | | | 47 | 0 | | | | | | | |
| x1= | 3 | 47 | 45 | 11111 | | | 62 | 2 | | | | | | | |
| x1= | 4 | 61 | 59 | 62 | | | | | | | | | | | |

Σχήμα 4.5

Excel του Προβλήματος Σακιδίου Δυναμικού Προγραμματισμού του παραδείγματος 4.1-1

Σημειώνετε ότι οι εφικτές τιμές για τη μεταβλητή m_3 είναι $0, 1, \dots$, και $\left[\frac{W}{W_3} \right] = \left[\frac{4}{1} \right] = 4$,

όπως κάναμε και στο παράδειγμα 2.3.1-1. Το φύλλο του Excel ελέγχει αυτόματα αν η τιμή που δόθηκε στη μεταβλητή m_i είναι σωστή και αυτόματα βγάζει ένα από τα μηνύματα “ναι” ή “όχι” στη γραμμή 5.

Όταν εισάγουμε στο Στάδιο 3 τα δεδομένα, το φύλλο του Excel θα εκτελέσει όλους τους απαραίτητους υπολογισμούς αυτόματα (στήλες B έως P). Όπου η αναδρομική εξίσωση γράφεται

```
IF($C5>=E6;IF(E8<=$C9;IF(MOD(E8;$C9)=0;$A9+E7;IF($C9-
E8=1;E7+$A10;IF($C9-E8=2;E7+$A11;IF($C9-E8=3;E7+$A12;IF($C9-
E8=4;E7+$A13;"11111"))));"11111");" " ).
```

Η ένδειξη 11111 χρησιμοποιείται για να δείξει ότι η αντίστοιχη καταχώρηση δεν είναι εφικτή. Η βέλτιστη λύση (f_3, m_3) για το Στάδιο 3 δίνεται στις στήλες I και J. Η στήλη A παρέχει τις τιμές του f_4 . Επειδή οι υπολογισμοί ξεκινούν από το Στάδιο 3, $f_4 = 0$ για όλες τις τιμές του x_3 . Μπορούμε να αφήσουμε κενά τα κελιά ή να εισάγουμε σε όλα μηδενικές τιμές.

Τώρα που έχουμε τους υπολογισμούς για το Στάδιο 3, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα για να δημιουργήσουμε ένα μόνιμο αρχείο της βέλτιστης λύσης του τρέχοντος σταδίου και να προετοιμάσουμε το φύλλο του Excel για τους υπολογισμούς για το επόμενο στάδιο:

Βήμα 1. Αντιγράφουμε τις τιμές της x_3 από τα κελιά C9:C13, και τις επικολλούμε στα κελιά K5:K9 στο τμήμα περίληψης λύσης. Στη συνέχεια αντιγράφουμε τις τιμές των (f_3, m_3) από τα κελιά I9:J13 και τις επικολλούμε στα κελιά L5:M9.

Βήμα 2. Αντιγράφουμε τις τιμές της f_3 από τα κελιά L5:L9 και τα επικολλούμε στα κελιά A9:A13.

Βήμα 3. Αλλάζουμε το κελί C4 σε 2 και εισάγουμε τις νέες τιμές για τα W_2, r_2 και m_2 για να καταγραφούν τα δεδομένα για στο Στάδιο 2.

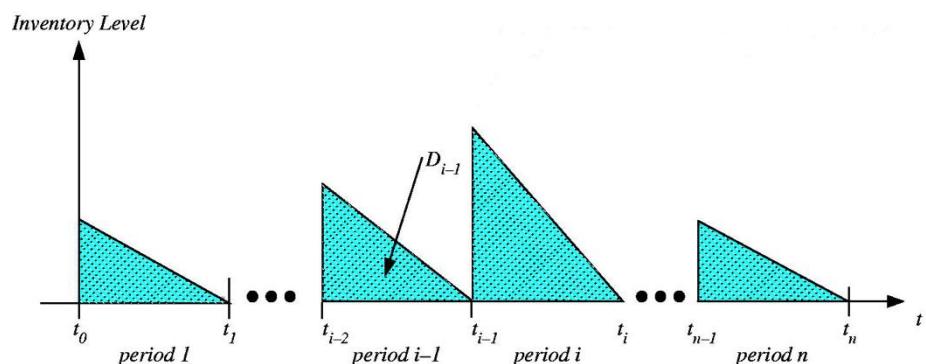
Το Βήμα 2 τοποθετεί $f_{i+1}(x_i - w_i m_i)$ στην στήλη A στο πλαίσιο της προετοιμασίας για τον υπολογισμό των $f_i(x_i)$ στο στάδιο i (βλ. τον αναδρομικό τύπο για το Πρόβλημα του Σακιδίου στο παράδειγμα 2.3.1-1). Αυτό εξηγεί το λόγο για την είσοδο μηδενικών τιμών, που αντιπροσωπεύουν το f_4 , στη στήλη A του Σταδίου 3.

Όταν οι υπολογισμοί από το Στάδιο 2 είναι διαθέσιμοι, μπορούμε να προετοιμάσουμε την οθόνη για το Στάδιο 1 με παρόμοιο τρόπο. Όταν και το Στάδιο 1 ολοκληρωθεί, η περιληψη της βέλτιστης λύσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να διαβαστεί η λύση, όπως εξηγήθηκε στο παράδειγμα 4.1-1

Κεφάλαιο 5^o

Το πρόβλημα της Απογραφής Αποθεμάτων

- 5.1 Πρόβλημα Απογραφής Αποθεμάτων
- 5.2 Αναπαράσταση σε Δίκτυο του Προβλήματος
Απογραφής Αποθεμάτων
- 5.3 Λύση του Προβλήματος Απογραφής Αποθεμάτων σε
Φύλλο Εργασίας
- 5.4 Ο αλγόριθμος Wanger-Whitin και ο ευριστικός
αλγόριθμος Silver-Meal



5.1 Πρόβλημα Απογραφής Αποθεμάτων

Σε αυτή την ενότητα, θα δείξουμε πως ο Δυναμικός Προγραμματισμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να λύσει προβλήματα απογραφής αποθεμάτων με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

1. Ο χρόνος χωρίζεται σε περιόδους, η παρούσα περίοδος είναι 1, η επόμενη περίοδος 2 και η τελική περίοδος T. Ξεκινάμε από την περίοδο 1, η ζήτηση κατά τη διάρκεια κάθε περιόδου είναι γνωστή.
2. Στην αρχή της κάθε περιόδου, η επιχείρηση πρέπει να καθορίσει πόσες μονάδες θα πρέπει να παράγονται. Η παραγωγική ικανότητα κατά τη διάρκεια κάθε περιόδου είναι περιορισμένη.
3. Η ζήτηση κάθε περιόδου πρέπει να καλυφθεί εγκαίρως, από την αποθήκη ή την τρέχουσα παραγωγή. Κατά την διάρκεια οποιασδήποτε περιόδου κατά την οποία η παραγωγή πραγματοποιείται, υπάρχει ένα σταθερό κόστος παραγωγής, καθώς και ένα μεταβλητό ανά μονάδα κόστος που προκύπτει.
4. Η επιχείρηση έχει περιορισμένη χωρητικότητα αποθήκευσης. Αυτό αντανακλάται από ένα όριο όσο αφορά την απογραφή στο τέλος της περιόδου. Ένα κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα προκύπτει στο τέλος της κάθε περιόδου κατά την απογραφή.
5. Στόχος της επιχείρησης είναι να ελαχιστοποιήσει το συνολικό κόστος παραγωγής για τις ανάγκες της ζήτησης σε κάθε περίοδο 1,2,...,T.

Σε αυτό το μοντέλο, η απογραφή της επιχείρησης επανεξετάζεται στο τέλος κάθε περιόδου (ας πούμε, στο τέλος κάθε μήνα) και στη συνέχεια αποφασίζεται η παραγωγή. Ένα τέτοιο μοντέλο λέγεται *μοντέλο περιοδικής επανεξέτασης*. Αυτό το μοντέλο είναι σε αντίθεση με τα *συνεχή μοντέλα αναθεώρησης* όπου η επιχείρηση γνωρίζει την κατάσταση των αποθεμάτων ανά πάσα στιγμή και μπορεί να κάνει μια παραγγελία ή να αρχίσει την παραγωγή ανά πάσα στιγμή.

Αν εξαιρέσουμε το κόστος εγκατάστασης για την παραγωγή οποιαδήποτε μονάδας, το πρόβλημα μπορεί να περιγραφεί και σαν ένα πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού. Εδώ, εμείς θα δείξουμε τον τρόπο που ο Δυναμικός Προγραμματισμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να καθοριστεί ένα χρονοδιάγραμμα παραγωγής που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος που συνεπάγεται από ένα πρόβλημα απογραφής αποθεμάτων που ικανοποιεί την προηγούμενη περιγραφή.

Παράδειγμα 5.1-1

Μια εταιρεία γνωρίζει ότι η ζήτηση για το προϊόν της κατά τη διάρκεια των επόμενων τεσσάρων μηνών θα είναι ως εξής: 1^o μήνα: 1 μονάδα, 2^o μήνα: 3 μονάδες, 3^o μήνα: 2 μονάδες, 4^o μήνα: 4 μονάδες. Στην αρχή κάθε μήνα, η εταιρεία πρέπει να καθορίσει πόσες μονάδες θα πρέπει να παράγονται κατά τον τρέχοντα μήνα. Κατά τη διάρκεια ενός μήνα κατά τον οποίο παράγονται μονάδες, το κόστος εγκατάστασης της παραγωγικής διαδικασίας είναι 3 χρηματικές μονάδες. Επιπλέον, υπάρχει ένα μεταβλητό κόστος 1 χρηματικής μονάδας για κάθε μονάδα που παράγεται. Στο τέλος κάθε μήνα προκύπτει ένα κόστος αποθήκευσης 1/2 χρηματικής μονάδας για κάθε προϊόν που υπάρχει στην αποθήκη. Ο περιορισμός της παραγωγικής ικανότητας επιτρέπει μέχρι 5 μονάδες να μπορούν να παραχθούν κατά τη διάρκεια κάθε μήνα. Το μέγεθος της αποθήκης της εταιρείας επιτρέπει να αποθηκεύονται 4 μονάδες το πολύ στο τέλος κάθε μήνα. Η εταιρεία θέλει να καθορίσει ένα χρονοδιάγραμμα παραγωγής που θα πληρούνται έγκαιρα όλες οι απαιτήσεις ζήτησης σε κάθε περίοδο και θα ελαχιστοποιήσει το αθροιστικό κόστος παραγωγής και αποθήκευσης κατά τη διάρκεια των τεσσάρων μηνών. Υποθέτουμε ότι 0 μονάδες είναι διαθέσιμες κατά την έναρξη του πρώτου μήνα.

Για να χρησιμοποιήσουμε Δυναμικό Προγραμματισμό για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα, πρέπει να προσδιορίσουμε κατάλληλα τις καταστάσεις, τα στάδια,

και τις αποφάσεις. Τα στάδια θα πρέπει να καθοριστούν έτσι ώστε όταν ένα στάδιο παραμένει, το πρόβλημα θα είναι εφικτό να λυθεί. Αν είμαστε στην αρχή του 4^{ου} μήνα, τότε η επιχείρηση θα καλύψει τη ζήτηση, με ελάχιστο κόστος, απλά παράγοντας ακριβώς τις μονάδες που χρειάζονται ώστε να εξασφαλίσει ότι: (η παραγωγή του 4^{ου} μήνα) + (τα προϊόντα της αποθήκης στο τέλος του 3^{ου} μήνα) = (ζήτηση του 4^{ου} μήνα). Έτσι, όταν ένας μήνας παραμένει, το πρόβλημα της επιχείρησης, είναι εύκολο να λυθεί. Ορίζουμε λοιπόν ότι το στάδιο θα αντιπροσωπεύει τον χρόνο. Στα περισσότερα προβλήματα Δυναμικού Προγραμματισμού, το στάδιο έχει να κάνει με το χρόνο.

Σε κάθε στάδιο (ή μήνα), η εταιρεία πρέπει να αποφασίσει πόσες μονάδες θα παράγει. Για να λάβει την απόφαση αυτή, η εταιρεία χρειάζεται μόνο να γνωρίζει το επίπεδο αποθεμάτων στην αρχή του τρέχοντος μήνα (ή στο τέλος του προηγούμενου μήνα). Συνεπώς, αφήνουμε την κατάσταση σε κάθε στάδιο να είναι το επίπεδο αποθεμάτων στην αρχή του επόμενου σταδίου.

Πριν γράψουμε την αναδρομική σχέση που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να "δημιουργήσει" το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής, θα πρέπει να ορίσουμε την $f_t(j)$ να είναι το ελάχιστο κόστος των αιτημάτων για τους μήνες $t, t+1, \dots, 4$, όπου j οι μονάδες που βρίσκονται διαθέσιμες στις αρχές του μήνα t . Ορίζουμε $a(x)$ να είναι το κόστος παραγωγής των μονάδων κατά τη διάρκεια μιας περιόδου. Και στη συνέχεια $a(0) = 0$, και για $x > 0$, $a(x) = 3 + x$. Λόγω της περιορισμένης χωρητικότητας και το γεγονός ότι όλη ζήτηση πρέπει να πληρείται, οι πιθανές καταστάσεις κατά τη διάρκεια κάθε περιόδου είναι 0, 1, 2, 3 και 4. Έτσι, ξεκινάμε με τον προσδιορισμό $f_4(0), f_4(1), f_4(2), f_4(3)$ και $f_4(4)$. Τότε θα χρησιμοποιήσουμε αυτές τις πληροφορίες για τον προσδιορισμό των $f_3(0), f_3(1), f_3(2), f_3(3)$ και $f_3(4)$. Επειτα θα καθορίσουμε $f_2(0), f_2(1), f_2(2), f_2(3)$ και $f_2(4)$. Τέλος, έχουμε καθορίσει το $f_1(0)$. Έτσι έχουμε καθορίσει ένα βέλτιστο επίπεδο παραγωγής για κάθε μήνα. Ορίζουμε $\chi_t(j)$ να είναι ένα επίπεδο παραγωγής κατά τη διάρκεια του μήνα t που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος

κατά τη διάρκεια των μηνών $t, t+1, \dots, 4$, αν i είναι οι μονάδες που είναι σε ετοιμότητα στις αρχές του μήνα t . Τώρα αρχίζουμε να εργαζόμαστε προς τα πίσω.

Στάδιο 4.

Κατά την διάρκεια του 4^{ου} μήνα, η επιχείρηση θα πρέπει να παράγει όσες μονάδες υπολείπονται για να διασφαλίσει τη ζήτηση που είναι 4 μονάδες.

| Κατάσταση | $c(x)$ | Βέλτιστη Λύση | |
|-----------|-------------|---------------|------------|
| | $3 + x$ | $f_4(i)$ | $x_4^*(i)$ |
| 0 | $3 + 4 = 7$ | 7 | 4 |
| 1 | $3 + 3 = 6$ | 6 | 3 |
| 2 | $3 + 2 = 5$ | 5 | 2 |
| 3 | $3 + 1 = 4$ | 4 | 1 |
| 4 | $0 + 0 = 0$ | 0 | 0 |

Στάδιο 3.

Πώς μπορούμε να καθορίσει τώρα την $f_3(i)$; Το $f_3(i)$ είναι το ελάχιστο δυνατό κόστος που προέκυψε κατά τον 3^ο και 4^ο μήνα, εάν η απογραφή κατά την έναρξη του 3^{ου} μήνα είναι i. Για κάθε πιθανό επίπεδο παραγωγής κατά τη διάρκεια του 3^{ου} μήνα, το συνολικό κόστος κατά την διάρκεια του 3^{ου} και 4^{ου} μήνα είναι:

$$\frac{1}{2}(i+x-2) + c(x) + f_4(i+x-2)$$

Αυτό προκύπτει από το ότι, αν X μονάδες παράγονται κατά τη διάρκεια του 3^{ου} μήνα, η κατάληξη απογραφής για τον 3^ο μήνα θα είναι $i+X-2$. Τότε τον 3^ο μήνα

το κόστος διατήρησης θα είναι $\frac{1}{2}(i+x-2)$, και το κόστος παραγωγής θα είναι

$c(x)$. Τότε μπαίνουμε στον 4^o μήνα με $i+x-2$ μονάδες σε ετοιμότητα. Αφού συνεχίζουμε με τον βέλτιστο τρόπο από αυτό το σημείο και μετέπειτα (αρχή της βελτιστοποίησης) το κόστος για τον 4^o μήνα θα είναι $f_4(i+x-2)$. Εμείς θέλουμε να επιλέξουμε εκείνα τα επίπεδα παραγωγής για τον 3^o μήνα, ώστε να ελαχιστοποιείτε το κόστος παραγωγής, έτσι γράφουμε:

$$f_3(i) = \min_x \left\{ \frac{1}{2}(i+x-2) + c(x) + f_4(i+x-2) \right\}$$

Το x πρέπει να είναι ένας από τους αριθμούς $(0,1,2,3,4,5)$, και πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $4 \geq i+x-2 \geq 0$. Αυτό αντανακλά το γεγονός ότι η ζήτηση του τρέχοντος μήνα, πρέπει να ικανοποιεί ($i+x-2 \geq 0$), και το απόθεμα δεν μπορεί να υπερβαίνει τη χωρητικότητα που είναι 4 ($4 \geq i+x-2$). Οπότε έχουμε:

| Κατάσταση | $\frac{1}{2}(i+x-2) + c(x) + f_4(i+x-2)$ | | | | | | Βέλτιστη Λύση | |
|-----------|--|-------|-------|-------|-------|-------|---------------|------------|
| | $x=0$ | $x=1$ | $x=2$ | $x=3$ | $x=4$ | $x=5$ | $f_3(x)$ | $x_3^*(i)$ |
| 0 | — | — | 12 | 12,5 | 13 | 13,5 | 12 | 2 |
| 1 | — | 11 | 11,5 | 12 | 12,5 | 10 | 10 | 5 |
| 2 | 7 | 10,5 | 11 | 11,5 | 9 | — | 7 | 0 |
| 3 | 6,5 | 10 | 10,5 | 8 | — | — | 6,5 | 0 |
| 4 | 6 | 9,5 | 7 | — | — | — | 6 | 0 |

Στάδιο 2.

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε το $f_2(i)$ που είναι το ελάχιστο κόστος που προκλήθηκε κατά το $2^o, 3^o$ και 4^o μήνα δεδομένου ότι στην αρχή του 2^o μήνα η απογραφή είναι i μονάδες. Ας υποθέσουμε ότι η παραγωγή του 2^o μήνα ισούται με x . Επειδή η ζήτηση του 2^o μήνα είναι 3 μονάδες το κόστος διατήρησης κατά

το τέλος του 2^o μήνα είναι $\frac{1}{2}(i+x-3)$. Έτσι το συνολικό κόστος του 2^o μήνα

είναι $\frac{1}{2}(i+x-3) + c(x)$. Κατά την διάρκεια του 3^o και 4^o μήνα ακολουθούμε μια

βέλτιστη πολιτική.

Εφόσον ο 3^o μήνας ξεκινάει με απόθεμα $i+x-3$, το κόστος που προκύπτει είναι ίσο με $f_3(i+x-3)$. Τώρα γράφουμε

$$f_2(i) = \min_x \left\{ \frac{1}{2}(i+x-3) + c(x) + f_3(i+x-3) \right\}$$

Όπου το x πρέπει να είναι ένα από τους αριθμούς $(0,1,2,3,4,5)$ και το x πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $0 \leq i+x-3 \leq 4$. Οπότε έχουμε :

| Κατάσταση | $\frac{1}{2}(i+x-3) + c(x) + f_3(i+x-3)$ | | | | | | Βέλτιστη Λύση | |
|-----------|--|-------|-------|-------|-------|-------|---------------|------------|
| | $x=0$ | $x=1$ | $x=2$ | $x=3$ | $x=4$ | $x=5$ | $f_2(x)$ | $x_2^*(i)$ |
| 0 | — | — | — | 18 | 17,5 | 16 | 16 | 5 |
| 1 | — | — | 17 | 16,5 | 15 | 16 | 15 | 4 |
| 2 | — | 16 | 15,5 | 14 | 15 | 16 | 14 | 3 |
| 3 | 12 | 14,5 | 13 | 14 | 15 | — | 12 | 0 |
| 4 | 10,5 | 12 | 13 | 14 | — | — | 10,5 | 0 |

Στάδιο 1.

Εύκολα πλέων μπορούμε να αποδείξουμε ότι η $f_1(i)$ μπορεί να καθοριστεί μέσω της αναδρομικής σχέσης:

$$f_1(i) = \min_x \left\{ \frac{1}{2}(i+x-1) + c(x) + f_2(i+x-1) \right\}$$

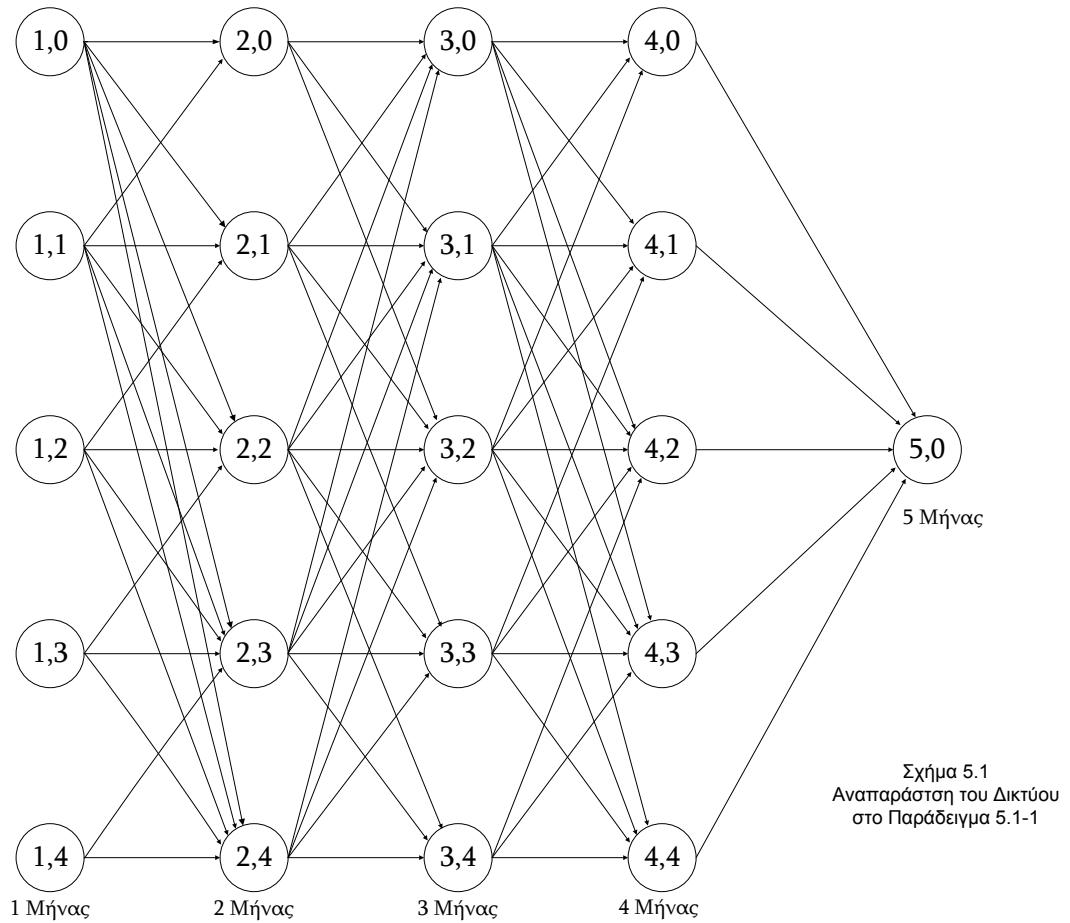
Όπου το X πρέπει να είναι ένα από τους αριθμούς $(0,1,2,3,4,5)$ και το X πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $0 \leq i+x-1 \leq 4$. Δεδομένου ότι η απογραφή στην αρχή του 1^{ου} μήνα είναι 0 μονάδες. Έχουμε :

| Κατάσταση | $\frac{1}{2}(i+x-1) + c(x) + f_2(i+x-1)$ | | | | | | Βέλτιστη Λύση | |
|-----------|--|-------|-------|-------|-------|-------|---------------|---------------|
| | $x=0$ | $x=1$ | $x=2$ | $x=3$ | $x=4$ | $x=5$ | $f_1(x)$ | $\chi_1^*(i)$ |
| 0 | — | 20 | 20,5 | 21 | 20,5 | 20,5 | 20 | 1 |
| 1 | 16 | 19,5 | 20 | 19,5 | 19,5 | 19,5 | 16 | 0 |
| 2 | 16,5 | 19 | 18,5 | 18,5 | — | — | 16,5 | 0 |
| 3 | 15 | 17,5 | 17,5 | — | — | — | 15 | 0 |
| 4 | 13,5 | 16,5 | — | — | — | — | 13,5 | 0 |

Τώρα μπορούμε να καθορίσουμε ένα πρόγραμμα παραγωγής που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος και καλύπτει τη ζήτηση για τους τέσσερις μήνες. Από την αρχική απογραφή μας έχουμε 0 μονάδες, το ελάχιστο κόστος για τους τέσσερις μήνες θα είναι $f_1(0) = 20$ χρηματικές μονάδες. Για την επίτευξη του $f_1(0)$, θα πρέπει να παράγουμε $\chi_1(0) = 1$ μονάδα κατά τη διάρκεια του πρώτου μήνα. Τότε το απόθεμα στην αρχή του δεύτερου μήνα θα είναι 0 μονάδες. Έτσι, το δεύτερο μήνα, θα πρέπει να παράγουμε $\chi_2(0) = 5$ μονάδες. Τότε στις αρχές του τρίτου μήνα, η απογραφή των αποθεμάτων θα είναι 2 μονάδες. Ως εκ τούτου, κατά τη διάρκεια του τρίτου μήνα,

πρέπει να παράγουμε $\chi_3(2) = 0$ μονάδες. Τότε στο τέταρτο μήνα θα ξεκινήσει με 0 μονάδες σε ετοιμότητα. Έτσι θα πρέπει να παράγουμε $\chi_4(0) = 4$ μονάδες κατά την διάρκεια του τέταρτου μήνα. Συνοψίζοντας, το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής συνεπάγει συνολικό κόστος 20 χρηματικές μονάδες και παράγει 1 μονάδα κατά τη διάρκεια του πρώτου μήνα, 5 μονάδες εντός του δεύτερου μήνα, 0 μονάδες κατά τη διάρκεια του τρίτου μήνα και 4 μονάδες κατά τη διάρκεια του τέταρτου μήνα.

5.2 Αναπαράσταση σε Δίκτυο το Πρόβλημα Απογραφής Αποθεμάτων



Να σημειωθεί ότι η εύρεση της λύσης στο παράδειγμα 5.1-1 είναι ισοδύναμη με την εύρεση της μικρότερης διαδρομής που ενώνει το σημείο $(1,0)$ με το σημείο $(5,0)$ στο σχήμα 5.1. Κάθε σημείο στο σχήμα 5.1, αντιστοιχεί με ένα στάδιο, και κάθε στήλη σημείων αντιστοιχεί με όλα τα πιθανά στάδια που σχετίζονται με μια

δεδομένη κατάσταση. Για παράδειγμα, αν είμαστε στο σημείο (2,3), τότε βρισκόμαστε στην αρχή του 2 μήνα, και η απογραφή στην αρχή του δευτέρου μήνα είναι 3 μονάδες. Κάθε βέλος στο δίκτυο αντιπροσωπεύει τον τρόπο με τον οποίον μια απόφαση (πόση να είναι η παραγωγή των τρέχοντα μήνα) μετατρέπει το τρέχον στάδιο σε αυτό του επόμενου μηνός. Για παράδειγμα, το βέλος που συνδέει τα σημεία (1,0) και (2,2) (ας το ονομάσουμε βέλος 1) αντιστοιχεί με το να παράγονται 3 μονάδες στον 1^o μήνα. Για να το διαπιστώσει κανείς, να σημειωθεί ότι αν παραχθούν 3 μονάδες στον 1^o μήνα, τότε ξεκινάμε τον 2^o μήνα με $0+3-1=2$ μονάδες. Το μήκος του κάθε βέλους είναι απλά το σύνολο της παραγωγής και των εξόδων της απογραφής στην τρέχουσα περίοδο, με βάση το τωρινό στάδιο και την απόφαση που σχετίζεται με το αντίστοιχο βέλος. Για παράδειγμα, το

κόστος που σχετίζεται με το βέλος 1, θα είναι $6+\frac{1}{2}2=7$. Να σημειωθεί ότι μερικά σημεία σε γειτονικές καταστάσεις δεν ενώνονται με βέλος. Για παράδειγμα, το σημείο (2,4) δεν ενώνεται με το σημείο (3,0). Ο λόγος είναι ότι αν ξεκινήσουμε τον 2^o μήνα με 4 μονάδες, τότε στην αρχή του 3^{oυ} μήνα, θα έχουμε τουλάχιστον 4-3 = 1 μονάδα στο χέρι. Επίσης να σημειωθεί ότι έχουμε χαράξει βέλη που ενώνουν όλα τα στάδια του 4^{oυ} μήνα με το σημείο(5,0), αφού το να έχουμε ένα θετικό αριθμό σε απόθεμα στο τέλος του 4^{oυ} μήνα δεν είναι βέλτιστη λύση.

Επιστρέφοντας στο παράδειγμα 5.1-1, το πρόγραμμα με το ελάχιστο κόστος παραγωγής αντιστοιχεί στην μικρότερη διαδρομή που ενώνει τα (1,0) και (5,0). Όπως έχουμε ήδη δει, αυτό θα είναι η διαδρομή που αντιστοιχεί στα επίπεδα παραγωγής 1,5,0 και 4. Στο σχήμα 5.1, αυτό θα αντιστοιχούσε με τη διαδρομή που αρχίζει στο (1,0), μετά συνεχίζει στο $(2,0 + 1-1) = (2,0)$, έπειτα στο $(3,0 + 5-3) = (3,2)$, ύστερα στο $(4,2 + 0 - 2) = (4,0)$ και τελικά στο $(5,0 + 4 - 4) = (5,0)$. Έτσι, το πρόγραμμα με την βέλτιστη παραγωγή αντιστοιχεί στη διαδρομή (1,0)-(2,0)-(3,2)-(4,0)-(5,0) στο σχήμα 5.1.

5.3 Λύση του προβλήματος απογραφής αποθεμάτων σε φύλλο εργασίας

Τώρα θα δείξουμε το πώς καθορίζεται η βέλτιστη πολιτική παραγωγής για το παράδειγμα 5.1-1. Μια σημαντική πτυχή του προβλήματος της παραγωγής είναι ότι το μηνιαίο κλείσιμο της απογραφής αποθεμάτων πρέπει να είναι μεταξύ 0 και 4 μονάδων. Μπορούμε να διασφαλίσουμε ότι αυτό συμβαίνει με τον αυτόματο καθορισμό των επιτρεπόμενων μονάδων παραγωγής σε κάθε κατάσταση. Εμείς θα σχεδιάσουμε το φύλλο εργασίας μας να μεριμνεί ώστε η παύση της απογραφής για κάθε μήνα να είναι μεταξύ 0 και 4 μονάδων παραγωγής.

Το πρώτο μας βήμα στη δημιουργία του φύλλου εργασίας (σχήμα 5.2) είναι να εισάγουμε το κόστος παραγωγής για κάθε δυνατό επίπεδο παραγωγής (0,1,2,3,4,5)

στα κελία B1:G2. Τότε μπορούμε να ορίσουμε την $f_t(i)$ να είναι το ελάχιστο κόστος που συνεπάγεται για να ικανοποιηθεί η ζήτηση για τους μήνες $t, t+1, \dots, 4$ όταν i είναι οι μονάδες που βρίσκονται σε ετοιμότητα στην αρχή του μήνα t . Αν d_t είναι η ζήτηση του μήνα t , τότε για $t=1,2,3,4$ μπορούμε να γράψουμε

$$f_t(i) = \min_{x/0 \leq i+x-d_t \leq 4} \{0.5(i+x-d_t) + c(x) + f_{t+1}(i+x-d_t)\}$$

Όπου $c(x)$ = με το κόστος x μονάδων κατά την διάρκεια του μήνα, και $f_5(i) = 0$ για $(i=0,1,2,3,4)$.

Αν ορίσουμε $J_t(i, x) = 0.5(i+x-d_t) + c(x) + f_{t+1}(i+x-d_t)$ τότε μπορούμε να γράψουμε

$$f_t(i) = \min_{x/0 \leq i+x-d_t \leq 4} \{J_t(i, x)\}$$

Τώρα υπολογίζουμε το $J_t(i, x)$ στα κελία A13:AF16. Για παράδειγμα για να

υπολογίσουμε το $J_4(0, 2)$, εισάγουμε τη παρακάτω συνάρτηση στο κελί E13:

=HLOOKUP(E\$11,\$B\$1:\$G\$2,2)+0.5*+1MAX(E\$10+E\$11-\$A13,0)

+HLOOKUP(E\$10+E\$11-\$A13,\$B\$4:\$H\$8,1+\$AL13)

Γκίνιος Σπυρίδων

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N |
|----|-------------------|-----------|-------|-------|-------|-------|------|-------|-------|-------|-------|------|------|---------|
| 1 | Επιπεδό Παραγωγής | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | | | | | |
| 2 | Κόστος Παραγώγης | 0 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | Τιμή | -5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | | | | |
| 5 | M5 | 10000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10000 | | | | | | |
| 6 | M4 | 10000 | 7 | 6 | 5 | 4 | 0 | 10000 | | | | | | |
| 7 | M3 | 10000 | 13 | 12 | 10 | 7 | 6,5 | 10000 | | | | | | |
| 8 | M2 | 10000 | 16,5 | 15,5 | 13 | 12,5 | 11 | 10000 | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | | Κατάσταση | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 11 | | Εκτέλεση | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 12 | Zήτηση | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | 4 | | 10000 | 10004 | 10005 | 10006 | 7 | 8,5 | 10000 | 10004 | 10005 | 6 | 7,5 | 9 |
| 14 | 3 | | 10000 | 10004 | 10005 | 13 | 13,5 | 14 | 10000 | 10004 | 12 | 12,5 | 13 | 13,5 |
| 15 | 2 | | 10000 | 10004 | 18 | 18,5 | 18 | 16,5 | 10000 | 17 | 17,5 | 17 | 15,5 | 16,5 |
| 16 | 1 | | 10000 | 20,5 | 21 | 20 | 21 | 21 | 16,5 | 20 | 19 | 20 | 20 | 10010,5 |

| N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
|---------|-------|-------|------|------|---------|---------|-------|------|------|---------|---------|---------|
| | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 9 | 10000 | 10004 | 5 | 6,5 | 8 | 9,5 | 10000 | 4 | 5,5 | 7 | 8,5 | 10 |
| 13,5 | 10000 | 11 | 11,5 | 12 | 12,5 | 10 | 7 | 10,5 | 11 | 11,5 | 9 | 10010,5 |
| 16,5 | 13 | 16,5 | 16 | 14,5 | 15,5 | 10010,5 | 12,5 | 15 | 13,5 | 14,5 | 10009,5 | 10011 |
| 10010,5 | 16 | 18 | 19 | 19 | 10009,5 | 10011 | 14 | 18 | 18 | 10008,5 | 10010 | 10011,5 |

| AA | AB | AC | AD | AE | AF | AG | AH | AI | AJ | AK | AL |
|-----|------|---------|---------|---------|---------|------|------|------|------|------|----|
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | | | | | |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | F(0) | F(1) | F(2) | F(3) | F(4) | |
| 0 | 4,5 | 6 | 7,5 | 9 | 10010,5 | 7 | 6 | 5 | 4 | 0 | 1 |
| 6,5 | 10 | 10,5 | 8 | 10009,5 | 10011 | 13 | 12 | 10 | 7 | 6,5 | 2 |
| 11 | 12,5 | 13,5 | 10008,5 | 10010 | 10011,5 | 16,5 | 15,5 | 13 | 12,5 | 11 | 3 |
| 14 | 17 | 10007,5 | 10009 | 10010,5 | 10012 | 20 | 16,5 | 16 | 14 | 14 | 4 |

Σχήμα 5.2

Excel του Προβλήματος Απογραφής Αποθεμάτων του παραδείγματος 5.1-1

Ο πρώτος όρος είναι το κόστος παραγωγής $c(x)$ (με το E\$11να είναι το επίπεδο της παραγωγής), ο δεύτερος όρος δίνει το κόστος αποθήκευσης για το μήνα (όπου το

$E\$10 + E\$11 - \$A13$ είναι το τέλος της απογραφή του μήνα). Ο τελικός όρος

$f_{t+1}(i+x-d_t)$. Αυτό συμβαίνει επειδή (φόρμουλα) είναι το αρχικό απόθεμα για τον μήνα $t+1$. Ο τελικός όρος $1+..$ βεβαιώνει ότι θα πάρουμε την τιμή του $f_{t+1}(i+x-d_t)$. από την σωστή γραμμή (οι τιμές του $f_{t+1}()$ θα υπολογιστούν στα κελιά C5:G8).

Αντιγράφοντας την φόρμουλα από το κελί E13 σε όλο το εύρος των κελιών C13:AF16 υπολογίζει όλα τα $J_t(i, x)$.

Στα κελία AG13:AK16, υπολογίζουμε το $f_t(d)$. Ξεκινάμε εισάγοντας τις παρακάτω συναρτήσεις στα κελία AG13:AK13

| | |
|----------------------|------------------------|
| AG13:=MIN(C13:H14) | Υπολογίζει το $f_4(0)$ |
| AH13:=MIN(I13:N13) | Υπολογίζει το $f_4(1)$ |
| AI13:=MIN(O13:T13) | Υπολογίζει το $f_4(2)$ |
| AJ13:=MIN(U13:Z13) | Υπολογίζει το $f_4(3)$ |
| AK13:=MIN(AA13:AF13) | Υπολογίζει το $f_4(4)$ |

Για να υπολογίσουμε όλα τα $f_t(j)$ αντιγράφουμε από τα κελιά AG13:AK13 στα κελιά AG13:AK16. Για να επιτύχει αυτό πρέπει να έχουμε τις σωστές τιμές του $f_t(j)$ στα κελιά B5:H8. Στις στήλες Β και Η των γραμμών 5-8, τοποθετούμε την τιμή 10,000 (ή κάποιο μεγάλο θετικό αριθμό). Αυτό βεβαιώνει ότι κοστίζει πολύ να τελειώνουμε ένα μήνα με αρνητικό απόθεμα ή απόθεμα που ξεπερνάει τα 4 προϊόντα. Αυτό βεβαιώνει ότι το τελικό απόθεμα κάθε μήνα θα είναι μεταξύ 0 και 4 μονάδων. Στο εύρος κελιών C5:G5 βάζουμε την τιμή 0 σε κάθε κελί. Αυτό γίνεται επειδή $f_5(j)=0$ για $j=0,1,2,3,4$. Στο κελί C6 βάζουμε +AG13; αυτό τοποθετεί την τιμή του $f_1(0)$.

Αντιγράφοντας αυτήν την φόρμουλα στα κελιά C6:G8 έχουμε δημιουργήσει ένα πίνακα του $f_t(d)$, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί (στις γραμμές 13-16) για να βρούμε το $f_t(d)$.

Για οποιοδήποτε αρχικό επίπεδο αποθεμάτων, μπορούμε να υπολογίσουμε τώρα το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι η απογραφή κατά την έναρξη του 1^{ου} μήνα είναι 0. Τότε $f_1(0)=20=J_1(0,1)$. Έτσι, η βέλτιστη

παραγωγή είναι 1 μονάδα κατά τη διάρκεια του 1^{ου} μήνα. Στη συνέχεια

$f_2(0+1-1)=16=J_2(0,5)$, έτσι παράγουμε 5 μονάδες κατά τη διάρκεια του 2^{ου} μήνα.

Συνεχίζοντας $f_1(0+5-3)=7=J_3(2,0)$, όπου παράγουμε 0 μονάδες κατά τη διάρκεια του 3^{ου} μήνα. Και λύνοντας $f_1(2+0-2)=J_4(0,4)$, παράγουμε 4 μονάδες κατά τη διάρκεια του 4^{ου} μήνα.

5.4 Ο αλγόριθμος Wanger-Whitin και ο ευριστικός αλγόριθμος Silver-Meal

Η ενότητα αυτή είναι μια ειδική περίπτωση του μοντέλου Δυναμικού

Υπολογισμού Ποσότητας Αποθέματος (Dynamic Lot-Size Model).

Περιγραφή του μοντέλου Δυναμικού Υπολογισμού Ποσότητας Αποθέματος

1. Η ζήτηση d_t κατά τη διάρκεια της περιόδου $t(t=1,2,\dots,T)$ είναι γνωστή από την αρχή της πρώτης περιόδου.
2. Η ζήτηση για την περίοδο t θα πρέπει να επιτευχθεί εγκαίρως, ή από το απόθεμα ή από την παραγωγή της τρέχουσας περιόδου t . Το κόστος $c(x)$ των μονάδων παραγωγής x κατά τη διάρκεια κάθε περιόδου είναι ίσο με $c(0)=0$, και για $x>0$, $c(x)=K+cx$, όπου K είναι ένα σταθερό κόστος για την σύσταση της παραγωγής κατά τη διάρκεια μιας περιόδου, και c το μεταβλητό κόστος ανά μονάδα παραγωγής.
3. Στο τέλος της περιόδου t , παρατηρείται ότι το επίπεδο αποθεμάτων είναι i_t , όπου υπάρχει και ένα κόστος συντήρησης hi_t . Ορίζουμε i_t να είναι το επίπεδο των αποθεμάτων πριν από την πρώτη περίοδο παραγωγής.
4. Ο στόχος είναι να καθοριστεί ένα επίπεδο παραγωγής X_i για κάθε περίοδο t που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος παραγωγής όπου θα ικανοποιούνται οι απαιτήσεις των περιόδων $1,2,\dots,T$.

5. Υπάρχει ένα όριο αποθεμάτων C_t για κάθε περίοδο t .

6. Υπάρχει ένα όριο παραγωγής L_t για κάθε περίοδο t .

Στο τμήμα αυτό, θα δουλέψουμε μόνο τα πρώτα τέσσερα σημεία. Ορίζουμε X_t την παραγωγή της περιόδου t . Η παραγωγή της περιόδου t μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να καλύψει τη ζήτηση μόνο της περιόδου t .

Παράδειγμα 5.4-1

Έχουμε καθορίσει τώρα ένα βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής για μια πενταετή περίοδο με το μοντέλο Δυναμικού Υπολογισμού Ποσότητας Αποθέματος (dynamic lot-size model) όπου $K = 250$ χρηματικές μονάδες, $C = 2$ χρηματικές μονάδες, $h = 1$ χρηματική μονάδα, $d_1 = 220$, $d_2 = 280$, $d_3 = 360$, $d_4 = 140$, και $d_5 = 270$. Υποθέτουμε ότι το αρχικό επίπεδο αποθεμάτων είναι μηδέν. Η λύση σε αυτό το παράδειγμα δίνεται στη συνέχεια σε αυτήν την ενότητα.

Ανάλυση του Αλγόριθμου Wagner-Whitin. Αν η προσέγγιση του Δυναμικού Προγραμματισμού που περιγράψαμε στη παράγραφο 5.1 χρησιμοποιηθεί για να βρούμε τη βέλτιστη πολιτική παραγωγής για το παράδειγμα 5.1-1, θα έπρεπε να εξετάσουμε τη δυνατότητα να παράγουμε οποιοδήποτε ποσό μεταξύ 0 και $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = 1,270$ μονάδες κατά την 1^η περίοδο. Έτσι, θα ήταν δυνατό για το στάδιο 2 (2^{ης} περιόδου) η παραγωγή να ανέλθει σε $0,1,\dots,1,270 - d_1 = 1,050$ μονάδες, και θα πρέπει να καθοριστούν τα $f_2(0), f_2(1), \dots, f_2(1,050)$. Για να βρούμε το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής στο παράδειγμα 5.4-1 με την προσέγγιση του Δυναμικού Προγραμματισμού που αναπτύξαμε στη παράγραφο 5.1 θα απαιτηθεί μεγάλη υπολογιστική προσπάθεια. Ευτυχώς όμως, οι Wagner και Whitin (1958) ανάπτυξαν μια μέθοδο που απλοποιεί σε μεγάλο βαθμό τον υπολογισμό του βέλτιστου χρονοδιαγράμματος παραγωγής για το μοντέλο Δυναμικού Υπολογισμού Ποσότητας Αποθέματος (dynamic lot-size models). Τα

λήμματα 1 και 2 είναι απαραίτητα για την ανάπτυξή του Αλγόριθμου Wagner-Whitin.

Λήμμα 1

Υποθέτουμε ότι η βέλτιστη παραγωγή κατά τη διάρκεια μιας περιόδου t είναι θετικός αριθμός. Τότε για κάποιο $J = 0, 1, \dots, T-t$, η ποσότητα που παράγεται κατά τη διάρκεια της περιόδου t πρέπει να είναι τέτοια ώστε μετά την παραγωγή της την περίοδο t , η ποσότητα $d_t + d_{t+1} + \dots + d_{t+j}$ να είναι διαθέσιμη σε απόθεμα. Με άλλα λόγια, η παραγωγή κατά τη διάρκεια της περιόδου t , πρέπει (για κάποιο j) να παράγει ένα ποσό που θα αρκεί για να ικανοποιήσει τη ζήτηση για τις περιόδους $t, t+1, \dots, t+j$.

Απόδειξη

Έστω ότι το λήμμα δεν ισχύει, τότε για κάποιο t , και για κάποιο $j = 0, 1, \dots, T-t-1$, και όπου το x ικανοποιεί την σχέση $0 < x < d_{t+j+1}$, η περίοδος παραγωγής t πρέπει να φέρει το επίπεδο αποθεμάτων σε $d_t + d_{t+1} + \dots + d_{t+j} + x$, και στην αρχή της περιόδου $t+j+1$, το επίπεδο αποθεμάτων θα είναι $x < d_{t+j+1}$. Έτσι η παραγωγή πρέπει να πραγματοποιηθεί κατά τη διάρκεια της περιόδου $t+j+1$. Από την αναβολή της παραγωγής x μονάδων από την t περίοδο στην περίοδο $t+j+1$ (με αμετάβλητα τα άλλα επίπεδα παραγωγής), θα έχουμε $h(j+1)x$ κόστος αποθήκευσης, ενώ δεν θα έχουμε κόστος εγκατάστασης παραγωγής (επειδή η παραγωγή έχει ήδη πραγματοποιηθεί τη περίοδο $t+j+1$). Έτσι δεν ήταν εφικτό να φέρουμε το αποτέλεσμα μας την περίοδο t σε επίπεδο $d_t + d_{t+1} + \dots + d_{t+j} + x$.

Πράγμα άτοπο.

Λήμμα 2

Αν είναι βέλτιστο να παραχθεί οτιδήποτε κατά τη διάρκεια της περιόδου t , τότε $i_{t-1} < d_t$. Με άλλα λόγια, η παραγωγή δεν μπορεί να συμβεί κατά τη διάρκεια t , εκτός αν δεν υπάρχουν αποθέματα για την κάλυψη της ζήτησης της περιόδου t .

Απόδειξη

Έστω ότι το λήμμα δεν ισχύει, τότε πρέπει να υπάρχει μια βέλτιστη πολιτική που (για κάποιο t) έχουμε $x_t > 0$ και $i_{t-1} \geq d_t$. Αν αυτό ισχύει τότε με την μετάθεσή της παραγωγής x μονάδων της περιόδου t για την περίοδο $t+1$, γλιτώνουμε hx_t κόστος αποθήκευσης και πιθανός K κόστος εγκατάστασης (αν η βέλτιστη πολιτική παράγει κατά τη διάρκεια της περιόδου $t+1$), ως εκ τούτου οποιοδήποτε πρόγραμμα παραγωγής έχοντας $x_t > 0$ και $i_{t-1} \geq d_t$ δεν είναι βέλτιστο.

Το λήμμα 2 μας δείχνει ότι η παραγωγή δεν θα συμβεί μέχρι την πρώτη περίοδο t για την οποία $i_{t-1} < d_t$, έτσι η παραγωγή πρέπει να πραγματοποιηθεί κατά τα τη διάρκεια της περιόδου t (ή αλλιώς η ζήτηση της περιόδου t δε θα επιτευχθεί εγκαίρως). Το λήμμα 1 υποδεικνύει ότι για κάποιο $j=0,1,2,\dots,T-t$, για κάποια περίοδο t , μετά την περίοδος παραγωγής t , το επίπεδο αποθέματος θα είναι $d_t + d_{t+1} + \dots + d_{t+j}$. Το λήμμα 2, υποδεικνύει ότι κανένα προϊόν δε θα παραχθεί μέχρι την περίοδο $t+j+1$. Το επίπεδο αποθεμάτων κατά την έναρξη της περιόδου $t+j+1$ είναι ίσο με μηδέν, άρα η παραγωγή πρέπει να πραγματοποιηθεί κατά τη διάρκεια της περιόδου $t+j+1$. Κατά τη διάρκεια της περιόδου $t+j+1$, από το λήμμα 1 συνεπάγεται ότι την περίοδο $t+j+1$ η παραγωγή (για ορισμένα k) θα είναι $d_{t+j+1} + d_{t+j+2} + \dots + d_{t+j+k}$. Τότε την περίοδο $t+j+k+1$ θα έχει μηδέν αρχικό απόθεμα και θα ξεκινήσει ξανά η παραγωγή, και ούτω καθεξής. Με εξαίρεση της πρώτης περιόδου, η παραγωγή θα πρέπει θα συμβαίνει σε περιόδους που τα αρχικά αποθέματα θα είναι μηδέν, κατά τη διάρκεια της περιόδου που το απόθεμα είναι μηδέν (και $d_t \neq 0$) η παραγωγή πρέπει να γίνεται.

Χρησιμοποιώντας αυτήν την άποψη, ο Wagner και ο Whitin ανάπτυξαν μια αναδρομική σχέση που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να καθοριστεί η

βέλτιστη πολιτική παραγωγής. Υποθέτουμε ότι το αρχικό επίπεδο αποθεμάτων είναι μηδέν. Ορίζεται f_t ως το ελάχιστο κόστος που προέκυψε κατά τη διάρκεια της περιόδων $t, t+1, \dots, T$, δεδομένου ότι κατά την διάρκεια της περιόδου t , το επίπεδο των αποθεμάτων είναι μηδέν. Τότε τα f_1, f_2, \dots, f_T ορίζονται ως

$$f_t = \min_{j=0,1,2,\dots,T-t} (c_{ij} + f_{t+j+1})$$

όπου $f_{T+1} = 0$ και c_{ij} είναι το συνολικό κόστος που προέκυψε κατά τη διάρκεια των περιόδων $t, t+1, \dots, t+j$ εάν η παραγωγή κατά την περίοδο t είναι ακριβώς επαρκής για να ανταποκριθεί στις απαιτήσεις για τις περιόδου $t, t+1, \dots, t+j$. Έτσι,

$$c_{ij} = K + \alpha(d_t + d_{t+1} + \dots + d_{t+j}) + h[jd_{t+j} + (j-1)d_{t+j-1} + \dots + d_{t+1}]$$

όπου K είναι το κόστος εγκατάστασης που προκύπτει κατά τη διάρκεια της περιόδου t , $\alpha(d_t + d_{t+1} + \dots + d_{t+j})$ είναι το μεταβλητό κόστος παραγωγής που πραγματοποιείται κατά τη διάρκεια της περιόδου t , και $hd_{t+j} + (j-1)d_{t+j-1} + \dots + d_{t+1}$ είναι το κόστος αποθήκευσης για την περίοδο $t, t+1, \dots, t+j$. Για παράδειγμα, εάν d_{t+j} είναι η ζήτηση κατά τη διάρκεια της περιόδου t και αυτή ικανοποιηθεί από το απόθεμα τις περιόδου j (ή κατά τη διάρκεια περιόδων $t, t+1, \dots, t+j-1$), τότε θα υποστούμε ένα κόστος αποθήκευσης hjd_{t+j} .

Για να βρούμε το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής με τον αλγόριθμο Wagner-Whitin, αρχίζουμε με την χρήση του αναδρομικού τύπου για να βρούμε f_T , και ομοίως τον χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε και τα $f_{T-1}, f_{T-2}, \dots, f_1$. Όπου το πρώτο f_1 έχει καθοριστεί, οπότε το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής μπορεί να υπολογιστεί εύκολα.

Παράδειγμα 5.4-1... (συνέχεια)

Για την ανάδειξη του αλγόριθμου Wagner-Whitin, βρίσκουμε το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής για το παράδειγμα 5.4-1. Οι υπολογισμού ακολουθούν

$$f_6 = 0$$

$$f_5 = 250 + 2(270) + f_6 = 760^* \quad (\text{παραγωγή για την περίοδο } 5)$$

Αν αρχίσουμε την 5^η περίοδο με μηδενικό απόθεμα, θα πρέπει να παράγουμε τόσα ώστε να ικανοποιηθεί η ζήτηση της 5^{ης} περιόδου.

$$f_4 = \min \begin{cases} 250 + 2(140) + f_5 = 1,320^* \\ (\text{παραγωγή για την περίοδο } 4) \\ 250 + 2(140 + 270) + 270 + f_6 = 1,340 \\ (\text{παραγωγή για τις περιόδους } 4,5) \end{cases}$$

Αν αρχίσουμε την 4^η περίοδο με μηδενικό απόθεμα, πρέπει κατά τη διάρκεια της 4^{ης} περιόδου να παράγουμε αρκετά ώστε να ανταποκριθούμε στη ζήτηση της 4^{ης} περιόδου.

$$f_3 = \min \begin{cases} 250 + 2(360) + f_4 = 2,290 \\ (\text{παραγωγή για την περίοδο } 3) \\ 250 + 2(360 + 140) + 140 + f_5 = 2,180^* \\ (\text{παραγωγή για τις περιόδους } 3,4) \\ 250 + 2(360 + 140 + 270) + 140 + 2(270) + f_6 = 1,340 \\ (\text{παραγωγή για τις περιόδους } 3,4,5) \end{cases}$$

Αν αρχίσουμε την 3^η περίοδο με μηδενικό απόθεμα, πρέπει κατά τη διάρκεια της 3^{ης} περιόδου να παράγουμε αρκετά ώστε να ανταποκριθούμε στη ζήτηση της 3^{ης} και 4^{ης} περιόδου.

$$f_2 = \min \left\{ \begin{array}{l} 250 + 2(280) + f_3 = 2,990^* \\ \text{(παραγωγή για την περίοδο 2)} \\ 250 + 2(360 + 140) + 140 + f_5 = 3,210 \\ \text{(παραγωγή για τις περιόδους 2,3)} \\ 250 + 2(280 + 360 + 140) + 360 + 2(140) + f_5 = 3,240 \\ \text{(παραγωγή για τις περιόδους 2,3,4)} \\ 250 + 2(280 + 360 + 140 + 270) + 360 + 2(140) + 3(270) + f_6 = 3,800 \\ \text{(παραγωγή για τις περιόδους 2,3,4,5)} \end{array} \right.$$

Αν αρχίσουμε την 2^η περίοδο με μηδενικό απόθεμα, πρέπει κατά τη διάρκεια της 2^{ης} περιόδου να παράγουμε αρκετά ώστε να ανταποκριθούμε στη ζήτηση της 2^{ης} περιόδου.

$$f_1 = \min \left\{ \begin{array}{l} 250 + 2(220) + f_2 = 3,680^* \\ \text{(παραγωγή για την περίοδο 1)} \\ 250 + 2(220 + 280) + 280 + f_3 = 3,710 \\ \text{(παραγωγή για τις περιόδους 1,2)} \\ 250 + 2(220 + 280 + 360) + 280 + 2(360) + f_4 = 4,290 \\ \text{(παραγωγή για τις περιόδους 1,2,3)} \\ 250 + 2(220 + 280 + 360 + 140) + 280 + 2(360) + 3(140) + f_5 = 4,460 \\ \text{(παραγωγή για τις περιόδους 1,2,3,4)} \\ 250 + 2(220 + 280 + 360 + 140 + 270) + 280 + 2(360) + 3(140) + 4(270) + f_6 = 5,290 \\ \text{(παραγωγή για τις περιόδους 1,2,3,4,5)} \end{array} \right.$$

Αν αρχίσουμε με μηδενικό απόθεμα την 1^η περίοδο, η βέλτιστη παραγωγή είναι $d_1 = 220$ μονάδες κατά τη διάρκεια της 1^{ης} περιόδου. Όπου τότε αρχίζουμε την 2^η περίοδο με μηδενικό απόθεμα, δεδομένου ότι επιτυγχάνεται η απαιτούμενη ζήτηση της 2^{ης} περιόδου, θα πρέπει να παράγουμε $d_2 = 280$ μονάδες κατά τη διάρκεια της 2^{ης} περιόδου. Τότε μπαίνουμε με μηδενικό απόθεμα την 3^η περίοδο και αφού επιταχύνεται η απαιτούμενη ζήτηση της 3^{ης} και 4^{ης} περιόδου, θα πρέπει

να παράγουμε $d_3 + d_4 = 500$ μονάδες κατά τη διάρκεια της 3^{ης} περιόδου. Οπότε ξεκινάμε την 5^η περίοδο με μηδενικό απόθεμα, δεδομένου ότι επιτυγχάνεται και η απαιτούμενη ζήτηση της 5^{ης} περιόδου, θα πρέπει να παράγουμε $d_5 = 270$ μονάδες. Το συνολικό κόστος που επιβαρύνεται από το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής είναι $f_1 = 3,680$ χρηματικές μονάδες.

Στο παράδειγμα 15, οποιοδήποτε βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής θα πρέπει να παράγει $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = 1,270$ μονάδες, καθορίζοντας το μεταβλητό κόστος παραγωγής $2(1,270) = 2,540$ χρηματικές μονάδες. Έτσι, κατά τον υπολογισμό του βέλτιστου προγράμματος παραγωγής, μπορούμε να αγνοήσουμε το μεταβλητό κόστος παραγωγής. Αυτό απλοποιεί σημαντικά τους υπολογισμούς.

Ο ευριστικός αλγόριθμος Silver-Meal.

Ο ευριστικός αλγόριθμος Silver-Meal (S-M) περιλαμβάνει λιγότερη εργασία από τον αλγόριθμο Wagner-Whitin και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρεθεί ένα κοντά στο βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής. Ο ευριστικός S-M αλγόριθμος βασίζεται στο γεγονός ότι ο στόχος μας είναι η ελαχιστοποίηση του μέσο κόστους ανά περίοδο (για τους λόγους που αναφέρθηκαν, το μεταβλητό κόστος παραγωγής μπορεί να αγνοηθεί). Ας υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε στην αρχή της 1^{ης} περιόδου και προσπαθούμε να βρούμε σε πόσες περιόδους μπορούμε να ικανοποιήσουμε τη ζήτηση από την παραγωγή της 1^{ης} περιόδου. Αν Κατά τη διάρκεια της 1^{ης} περιόδου, η παραγωγή είναι επαρκής για να καλύψει την ζήτηση για τις επόμενες t περιόδους, τότε το κόστος που θα προκύψει θα είναι

$TC(t) = K + HC(t)$ (αγνοώντας το μεταβλητό κόστος). Όπου, $HC(t)$ είναι το κόστος αποθήκευσης που προέκυψε κατά τους t προηγούμενους μήνες (συμπεριλαμβανομένης και της τρέχουσας περιόδου), εάν η παραγωγή κατά την τρέχουσα περίοδο είναι επαρκής για να ικανοποιήσει τη ζήτηση για τις επόμενες περιόδους t.

Ας είναι $AC(t) = \frac{TC(t)}{t}$ ο μέσος όρος κόστους ανά περίοδο που προέκυψε

κατά τη διάρκεια των επόμενων t περιόδων. Όπου, το $\frac{1}{t}$ είναι μια κυρτή

φθίνουσα συνάρτηση, όπου όταν το t αυξάνεται, το $\frac{K}{t}$ μειώνεται με φθίνοντα ρυθμό. Στις περισσότερες περιπτώσεις, η $\frac{HC(t)}{t}$ τείνει να είναι μια αύξουσα συνάρτηση του t . Έτσι, μπορεί να βρεθεί ένας ακέραιος t^* τέτοιος ώστε για $t < t^*$, $AC(t+1) \leq AC(t)$ και $AC(t^*+1) \geq AC(t^*)$. Ο ευριστικός αλγόριθμος S-M συνιστά η παραγωγή της 1^{ης} περιόδου να είναι επαρκής ώστε να ικανοποιηθεί η ζήτηση για τις περιόδους 1,2,3,..., t^* (σε περίπτωση που δεν υπάρχει t^* , η παραγωγή κατά το χρονικό διάστημα της 1^{ης} περιόδου θα πρέπει να ικανοποιεί τη ζήτηση των περιόδων 1,2,...,T). Δεδομένου ότι το t^* είναι τοπικό (και πιθανός ολικό) ελάχιστο για την $AC(t)$, φαίνεται λογικό ότι η παραγωγή $d_1 + d_2 + \dots + d_{t^*}$ μονάδων της 1^{ης} περιόδου θα έρθει στην ελαχιστοποιήσει του μέσου κόστους ανά περίοδο που προκύπτει κατά τις περιόδους 1,2,3,..., t^* . Στην συνέχεια εφαρμόζουμε τον ευριστικό αλγόριθμο S-M λαμβάνοντας υπόψη την περίοδο t^*+1 , ως στην αρχική περίοδο. Διαπιστώνουμε ότι κατά τη διάρκεια της περιόδου t^*+1 , η ζήτηση για τις επόμενες περιόδους t_1^* θα πρέπει να παραχθεί. Συνεχίζουμε με αυτό τον τρόπο μέχρι η ζήτηση για την περίοδο T να έχει παραχθεί.

Για να δείξουμε την εφαρμογή του ευριστικού αλγόριθμου S-M στο παράδειγμα 5.4-1. Εμείς έχουμε

$$TC(1) = 250 \quad AC(1) = \frac{250}{1} = 250$$

$$TC(2) = 250 + 280 = 530 \quad AC(2) = \frac{530}{2} = 265$$

Δεδομένου ότι $AC(2) \geq AC(1)$, $t^* = 1$ ο ευριστικός αλγόριθμος S-M υποδηλώνει ότι εμείς θα παράγουμε $d_1 = 220$ μονάδες κατά την διάρκεια της 1^{ης} περιόδου.

Τότε

$$TC(1) = 250$$

$$AC(1) = \frac{250}{1}$$

$$TC(2) = 250 + 360 = 610$$

$$AC(2) = \frac{610}{2} = 305$$

Δεδομένου ότι $AC(2) \geq AC(1)$ ο ευριστικός αλγόριθμος S-M υποδηλώνει ότι εμείς θα παράγουμε $d_2 = 280$ μονάδες κατά την διάρκεια της 1^{ης} περιόδου.

Τότε

$$TC(1) = 250$$

$$AC(1) = \frac{250}{1}$$

$$TC(2) = 250 + 140 = 390$$

$$AC(2) = \frac{390}{2} = 195$$

$$TC(3) = 250 + 2(270) + 140 = 930$$

$$AC(3) = \frac{930}{3} = 310$$

Δεδομένου ότι $AC(3) \geq AC(2)$, την 3^η περίοδο θα πρέπει να παράγουμε για να ικανοποιήσουμε την ζήτηση για τις επόμενες δύο περιόδους (3^η και 4^η περίοδος).

Κατά τη διάρκεια της 3^{ης} περιόδου, εμείς πρέπει να παράγουμε $d_3 + d_4 = 500$ μονάδες. Αυτό μας οδηγεί στη 5^η περίοδο. Η 5^η περίοδος είναι και η τελευταία, όπου $d_5 = 270$ μονάδες πρέπει να παράγουμε κατά τη διάρκεια της 5^{ης} περιόδου.

Στο παράδειγμα 5.4-1 (και σε πολλά άλλα προβλήματα μοντέλου Δυναμικού Υπολογισμού Αποθεμάτων “dynamic lot-size”) ο ευριστικός αλγόριθμος S-M προσεγγίζει το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής. Μετά από εκτενείς δοκιμές, ο ευριστικός αλγόριθμος S-M προσέγγιζε συνήθως ένα βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής με 1% απόκλιση από το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής που έδινε ο αλγόριθμος Wagner-Whitin.

Κεφάλαιο 6^ο

Το πρόβλημα του Πλανόδιου Πωλητή

6.1 Πρόβλημα Πλανόδιου Πωλητή



6.1 Πρόβλημα Πλανόδιου Πωλητή

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε ένα κλασικό πρόβλημα που λύνεται με τη μέθοδο του Δυναμικού Προγραμματισμού και που παραδοσιακά είναι γνωστό σαν το πρόβλημα του “Πλανόδιου Πωλητή”.

Το εποπτικό φυσικό πρόβλημα για το πρόβλημα είναι ότι έχουμε ένα πλανόδιο πωλητή που ξεκίνα από μια πόλη και έχει να επισκεφτεί S πόλεις μια φορά την κάθε μία και μετά να γυρίσει στη βάση του. Ζητάμε να βρούμε τη σειρά με την οποία πρέπει να τις επισκεφτεί ώστε το κόστος που θα προκύψει για τον πλανόδιο πωλητή να είναι ελάχιστο.

Στη γενική του διατύπωση το πρόβλημα δίνεται σαν ένα πρόβλημα N κόμβων, τους οποίους αριθμούμε αυθαίρετα, είναι γνωστές οι αποστάσεις μεταξύ τους και θέλουμε να βρούμε τη βέλτιστη διαδρομή με την οποία θα ξεκινήσουμε από τον κόμβο 1, θα μεταβούμε σε όλους μόνο μια φορά και θα ξαναγυρίσουμε στον κόμβο 1.

Για να αντιληφθούμε σε μεγαλύτερο βαθμό το πρόβλημα θα δώσουμε τώρα ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 6.1-1

Το τελευταίο Σαββατοκύριακο της εκλογικής εκστρατεία του 2012, ένας υποψήφιος είναι στην Αθήνα. Πριν από την ημέρα των εκλογών, ο υποψήφιος πρέπει να επισκεφθείτε την Θεσσαλονίκη, Πάτρα, και το Ηράκλειο και στη συνέχεια να επιστρέψει στην έδρα του την Αθήνα. Ο υποψήφιος μας θέλει να ελαχιστοποιηθεί η συνολική απόσταση που πρέπει να ταξιδέψει. Με ποια σειρά θα πρέπει να επισκεφθεί τις πόλεις; Οι αποστάσεις μεταξύ των τεσσάρων πόλεων είναι σε χιλιόμετρα και δίνονται στον πίνακα 6.1.

Γνωρίζουμε ότι ο υποψήφιος μας πρέπει να επισκεφτείτε κάθε πόλη ακριβώς μια φορά, η τελευταία πόλη που πρέπει να επισκεφθεί είναι η Αθήνα, και η περιοδεία του ξεκινά από την Αθήνα. Όταν ο υποψήφιος μας έχει μόνο μία πόλη με φορά

αριστερά για να επισκεφθείτε, το πρόβλημά του είναι τετριμμένο: απλά να πάει από την τρέχουσα θέση του στην Αθήνα. Μπορούμε να εργαστούμε με την προς τα πίσω μέθοδο σε ένα πρόβλημα στο οποίο είναι σε κάποια πόλη και έχει μόνο δύο πόλεις αριστερά για να επισκεφθείτε, και τελικά μπορούμε να βρούμε τη συντομότερη περιοδεία που ξεκινά από την Αθήνα και έχει τέσσερις πόλεις αριστερά για να επισκεφθείτε. Γι 'αυτό ο αριθμός των στάδιων πρέπει να αναπροσαρμόζεται από τον αριθμό των πόλεων που ο υποψήφιος μας έχει ήδη επισκεφθεί. Σε οποιοδήποτε στάδιο, για να καθορίσει σε ποια πόλη θα πρέπει στη συνέχεια να επισκεφθεί, πρέπει να γνωρίζουμε δύο πράγματα: την τρέχουσα θέση του υποψηφίου μας και τις πόλεις που έχει ήδη επισκεφθεί. Η κατάσταση σε οποιοδήποτε στάδιο αποτελείται από την τελευταία επίσκεψη του στην πόλη και το σύνολο των πόλεων που έχουν ήδη επισκεφθεί. Ορίζουμε $f_t(i, S)$ να είναι η ελάχιστη απόσταση που πρέπει να διανύσει για να ολοκληρώσει έναν γύρο, εάν έχουν $t-1$ πόλεις στο σύνολο S έχουν επισκεφθεί. Με c_{ij} συμβολίζουμε την απόσταση μεταξύ των πόλεων i και j .

Πίνακας 6.1

| Πόλη | Αθήνα | Θεσσαλονίκη | Πάτρα | Ηράκλειο |
|---------------|-------|-------------|-------|----------|
| 1 Αθήνα | — | 306 | 178 | 317 |
| 2 Θεσσαλονίκη | 306 | — | 284 | 625 |
| 3 Πάτρα | 178 | 284 | — | 445 |
| 4 Ηράκλειο | 317 | 625 | 445 | — |

Στάδιο 4.

Σημειώνουμε ότι, στο στάδιο 4, θα πρέπει να ισχύει ότι $S = \{2, 3, 4\}$, και οι μόνες δυνατές καταστάσεις είναι $(2, \{2, 3, 4\}), (3, \{2, 3, 4\})$ και $(4, \{2, 3, 4\})$. Στο στάδιο 4, πρέπει να πάμε από την τρέχουσα τοποθεσία στην Αθήνα. Όπου προκύπτουν τα εξής

$$f_4(2, \{2, 3, 4\}) = c_{21} = 306^* \quad (\text{πηγαίνοντας από την Πόλη 2 στη Πόλη 1})$$

$$f_4(3, \{2, 3, 4\}) = c_{31} = 178^* \quad (\text{πηγαίνοντας από την Πόλη 3 στη Πόλη 1})$$

$$f_4(4, \{2, 3, 4\}) = c_{41} = 317^* \quad (\text{πηγαίνοντας από την Πόλη 4 στη Πόλη 1})$$

Στάδιο 3.

Εργαζόμαστε με την προς τα πίσω μέθοδο, και η αναδρομική σχέση του μοντέλου του Δυναμικού Προγραμματισμού είναι

$$f_3(i, S) = \min_{\substack{j \notin S \\ \text{και } j \neq i}} \{c_{ij} + f_4[j, S \cup \{j\}]\}$$

Αυτό το αποτέλεσμα προκύπτει, γιατί αν ο υποψήφιος μας βρίσκεται τώρα στη πόλη i και ταξιδεύει στην πόλη j, όπου το ταξίδι αυτό έχει απόσταση c_{ij} . Τότε στο στάδιο 4, έχει επισκεφθεί την τελευταία πόλη j, και έχει επισκεφθεί τις πόλεις $S \cup \{j\}$. Ως εκ τούτου, το μήκος της υπόλοιπης περιοδείας του θα πρέπει να είναι $f_4(j, S \cup \{j\})$. Χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση, σημειώνουμε ότι στο στάδιο 3, ο υποψήφιος μας πρέπει να έχει επισκεφθεί τις $\{2, 3\}, \{2, 4\}$, ή $\{3, 4\}$ πόλεις. Χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση μπορούμε να προσδιορίσουμε την $f_3(\square)$ για όλες τις δυνατές καταστάσεις :

$$f_3(2, \{2, 3\}) = c_{24} + f_4(4, \{2, 3, 4\}) = 625 + 317 = 945^* \quad (\text{πηγαίνει από την 2 στη 4})$$

$$f_3(3, \{2, 3\}) = c_{34} + f_4(4, \{2, 3, 4\}) = 445 + 317 = 762^* \quad (\text{πηγαίνει από την 3 στη 4})$$

$$f_3(2, \{2, 4\}) = c_{23} + f_4(3, \{2, 3, 4\}) = 284 + 178 = 462^* \quad (\text{πηγαίνει από την 2 στη 3})$$

$$f_3(4, \{2, 4\}) = c_{43} + f_4(3, \{2, 3, 4\}) = 445 + 178 = 623^* \quad (\text{πηγαίνει από την 4 στη 3})$$

$$f_3(3, \{3, 4\}) = c_{32} + f_4(2, \{2, 3, 4\}) = 284 + 306 = 590^* \quad (\text{πηγαίνει από την 3 στη 2})$$

$$f_3(4, \{3, 4\}) = c_{42} + f_4(2, \{2, 3, 4\}) = 625 + 306 = 921^* \quad (\text{πηγαίνει από την 4 στη 2})$$

Μπορούμε να γενικεύσουμε την αναδρομική σχέση και έχουμε

$$f_t(i, S) = \min_{\substack{j \notin S \\ \text{και } j \neq i}} \{c_{ij} + f_{t+1}[j, S \cup \{j\}]\}$$

Αυτό το αποτέλεσμα προκύπτει, γιατί αν ο υποψήφιος μας βρίσκεται στη πόλη i και ταξιδεύει στην πόλη j, όπου το ταξίδι αυτό έχει απόσταση c_{ij} . Το υπόλοιπο

της περιοδείας του θα προέρχονται από την πόλη j , και θα έχει επισκεφθεί τις πόλεις σε $S \cup \{j\}$. Ως εκ τούτου, το μήκος του το υπόλοιπο της περιοδείας του είναι $f_{t+1}(j, S \cup \{j\})$.

Στάδιο 2.

Στο στάδιο 2, ο υποψήφιος μας έχει επισκεφθεί μόνο μια πόλη, οπότε οι μόνες δυνατές καταστάσεις είναι οι $(2, \{2\}), (3, \{3\}),$ και $(4, \{4\})$. Εφαρμόζοντας τον αναδρομικό σχέση έχουμε:

$$f_2(2, \{2\}) = \min \begin{cases} c_{23} + f_3(3, \{2, 3\}) = 284 + 762 = 1,046^* & (\text{πηγαίνει από την } 2 \text{ στη } 3) \\ c_{24} + f_3(4, \{2, 4\}) = 625 + 623 = 1,248 & (\text{πηγαίνει από την } 2 \text{ στη } 4) \end{cases}$$

$$f_2(3, \{3\}) = \min \begin{cases} c_{34} + f_3(4, \{3, 4\}) = 445 + 921 = 1,366 & (\text{πηγαίνει από την } 3 \text{ στη } 4) \\ c_{32} + f_3(2, \{2, 3\}) = 284 + 945 = 1,229^* & (\text{πηγαίνει από την } 3 \text{ στη } 2) \end{cases}$$

$$f_2(4, \{4\}) = \min \begin{cases} c_{42} + f_3(2, \{2, 4\}) = 625 + 462 = 1,087 & (\text{πηγαίνει από την } 4 \text{ στη } 2) \\ c_{43} + f_3(3, \{3, 4\}) = 445 + 590 = 1,035^* & (\text{πηγαίνει από την } 4 \text{ στη } 3) \end{cases}$$

Στάδιο 1.

Τέλος, είμαστε πίσω στο στάδιο 1 (όπου δεν έχει επισκεφθεί τις πόλεις). Οπότε ο υποψήφιος μας αυτή τη στιγμή είναι στην Αθήνα και δεν έχει επισκεφθεί καμία πόλη, άρα θα υπολογίσουμε το $f_1(1, \{\})$. Εφαρμόζοντας την αναδρομική σχέση έχουμε:

$$f_1(1, \{\}) = \min \begin{cases} c_{12} + f_2(2, \{2\}) = 306 + 1,046 = 1,352^* & (\text{πηγαίνει από την } 1 \text{ στη } 2) \\ c_{13} + f_2(3, \{3\}) = 178 + 1,229 = 1,407 & (\text{πηγαίνει από την } 1 \text{ στη } 3) \\ c_{14} + f_2(4, \{4\}) = 317 + 1,035 = 1,352^* & (\text{πηγαίνει από την } 1 \text{ στη } 4) \end{cases}$$

Έτσι από την πόλη 1 (Αθήνα), ο υποψήφιος μας μπορεί να πάει στην πόλη 2 (Θεσσαλονίκη) ή την πόλη 4 (Ηράκλειο). Μπορούμε αυθαίρετα να επιλέξει για να πάει στην πόλη 4. Τότε θα πρέπει να επιλέξει να επισκεφθείτε την πόλη επίτευξης $f_4(4, \{4\})$, η οποία απαιτεί την επόμενη επίσκεψη της πόλης 3 (Πάτρα). Τότε θα πρέπει να επισκεφθείτε την πόλη επίτευξης $f_3(3, \{3, 4\})$, η οποία απαιτεί την

επόμενη επίσκεψη της πόλης 2 (Θεσσαλονίκη). Ο υποψήφιος μας τότε πρέπει να επισκεφθείτε την πόλη επίτευξης $f_4(2, \{2, 3, 4\})$, που σημαίνει, ότι πρέπει να ταξιδέψει στη πόλη 1 (Αθήνα). Η βέλτιστη διαδρομή τώρα έχει ολοκληρωθεί και είναι 1-4-3-2-1, αλλιώς Αθήνα - Ηράκλειο - Πάτρα - Θεσσαλονίκη - Αθήνα. Η συνολική απόσταση αυτής της περιοδείας είναι $f_1(1, \{\}) = 1,352$. Σημειώνουμε ότι

Η απόσταση Αθήνα, Ηράκλειο = 317 χιλιόμετρα

Η απόσταση Ηράκλειο, Πάτρα = 445 χιλιόμετρα

Η απόσταση Πάτρα, Θεσσαλονίκη = 284 χιλιόμετρα

Η απόσταση Θεσσαλονίκη, Αθήνα = 306 χιλιόμετρα

οπότε η συνολική απόσταση που θα ταξιδέψει ο υποψήφιος μας είναι $317+445+284+306 = 1,352$ χιλιόμετρα. Φυσικά, αν είχαμε στείλει στην αρχή στη πόλης 2, θα είχε αποκτήσει μία άλλη βέλτιστη διαδρομή (1-2-3-4-1) που στην ουσία είναι απλά η αντιστροφή της αρχικής περιοδείας.

Κεφάλαιο 7^ο

Το Μοντέλο Μεγέθους Εργατικού
Δυναμικού

7.1 Μοντέλο Μεγέθους Εργατικού Δυναμικού



7.1 Μοντέλο Μεγέθους Εργατικού Δυναμικού

Σε ορισμένα κατασκευαστικά έργα, οι προσλήψεις και οι απολύσεις πραγματοποιούνται για να διατηρήσουν το εργατικό δυναμικό που είναι χρήσιμο για την αποπεράτωση του έργου. Δεδομένου ότι οι δραστηριότητες των προσλήψεων και των απολύσεων επιβαρύνουν και οι δύο με επιπλέον κόστος, πώς θα πρέπει το εργατικό δυναμικό να διατηρηθεί καθ' όλη τη διάρκεια ζωής του έργου;

Ας υποθέσουμε ότι το έργο θα πραγματοποιηθεί μέσα σε ένα εύρος χρόνου n εβδομάδων και ότι το ελάχιστο εργατικό δυναμικό που απαιτείται την i εβδομάδα είναι b_i εργάτες. Υπό ιδανικές συνθήκες, θα θέλαμε το μέγεθος του εργατικού δυναμικού στην i εβδομάδα να είναι ακριβώς b_i . Ωστόσο, ανάλογα με τις παραμέτρους του κόστους, μπορεί να είναι πιο οικονομικό να επιτρέπεται το μέγεθος του εργατικού δυναμικού να παρουσιάζει διακυμάνσεις. Δεδομένου ότι X_i είναι ο αριθμός των εργατών που απασχολούνται την εβδομάδα i , δύο είναι τα κόστη που μπορεί να προκύψουν στην εβδομάδα i : $C_1(X_i - b_i)$ το κόστος διατήρησης μιας επιπλέον εργατικής δύναμης $X_i - b_i$, και $C_2(X_i - X_{i-1})$, το κόστος πρόσληψης επιπλέον $X_i - X_{i-1}$ εργατών.

Τα στοιχεία του μοντέλου του Δυναμικού Προγραμματισμού ορίζονται ως εξής:

1. Το στάδιο i αντιπροσωπεύει την i εβδομάδα, $i = 1, 2, 3, \dots, n$.
2. Οι δυνατές τιμές στο στάδιο i είναι X_i , όπου X_i ο αριθμός των εργατών την i εβδομάδα.
3. Η κατάσταση του συστήματος i αποτελείται από τον αριθμό των εργαζόμενων που είναι διαθέσιμοι στο στάδιο ($i-1$ εβδομάδα) $i-1, X_{i-1}$.

Η αναδρομική εξίσωση του Δυναμικού Προγραμματισμού είναι:

$$f_i(x_{i-1}) = \min_{x_i \geq b_i} \{ C_1(x_i - b_i) + C_2(x_i - x_{i-1}) + f_{i+1}(x_i) \}, i=1,2,\dots,n$$

$$f_{n+1}(x_n) \equiv 0$$

Οι υπολογισμοί ξεκινάνε από το στάδιο n με $x_n = b_n$ και τερματίζουν στο στάδιο 1.

Παράδειγμα 7.1-1

Ένας εργολάβος κατασκευής εκτιμά το μέγεθος του εργατικού δυναμικού που απαιτείται για τις επόμενες 5 εβδομάδες ότι είναι 5,7,8,4 και 6 εργαζόμενοι, αντίστοιχα. Το πλεονάζον εργατικό δυναμικό που παραμένει στη δύναμη κοστίζει 300 χρηματικές μονάδες ανά εργαζόμενο και ανά εβδομάδα, και οι νέες προσλήψεις σε οποιαδήποτε εβδομάδα έχουν σταθερό κόστος 400 χρηματικές μονάδες συν 200 χρηματικές μονάδες ανά εργαζόμενο ανά εβδομάδα.

Τα δεδομένα του προβλήματος συνοψίζονται παρακάτω

$$b_1 = 5, \quad b_2 = 7, \quad b_3 = 8, \quad b_4 = 4, \quad b_5 = 6$$

$$C_1(x_i - b_i) = 3(x_i - b_i), \quad x_i > b_i, \quad i=1,2,\dots,5$$

$$C_2(x_i - x_{i-1}) = 4 + 2(x_i - x_{i-1}), \quad x_i > x_{i-1}, \quad i=1,2,\dots,5$$

Τα C_1 και C_2 είναι εκφρασμένα σε χιλιάδες χρηματικές μονάδες.

Στάδιο 5 ($b_5 = 6$)

| | $C_1(x_5 - 6) + C_2(x_5 - x_4)$ | Βέλτιστη Λύση | |
|---|---------------------------------|---------------|---------|
| | | $f_5(x_4)$ | x_5^* |
| 4 | $3(0) + 4 + 2(2) = 8$ | 8 | 6 |
| 5 | $3(0) + 4 + 2(1) = 6$ | 6 | 6 |
| 6 | $3(0) + 0 = 0$ | 0 | 6 |

Στάδιο 4($b_4 = 4$)

| $\mathcal{C}_1(x_4 - 4) + \mathcal{C}_2(x_4 - x_3) + f_5(x_4)$ | | | Βέλτιστη Λύση | | |
|--|--------------------|--------------------|--------------------|------------|---------|
| x_3 | $x_4 = 4$ | $x_4 = 5$ | $x_4 = 6$ | $f_4(x_3)$ | x_4^* |
| 8 | $3(0) + 0 + 8 = 8$ | $3(1) + 0 + 6 = 9$ | $3(2) + 0 + 0 = 6$ | 6 | 6 |

Στάδιο 3($b_3 = 8$)

| $\mathcal{C}_1(x_3 - 8) + \mathcal{C}_2(x_3 - x_2) + f_4(x_3)$ | | | Βέλτιστη Λύση | |
|--|------------|----------------------------|---------------|---------|
| x_2 | $x_3 = 8$ | | $f_3(x_2)$ | x_3^* |
| 7 | | $3(0) + 4 + 2(1) + 6 = 12$ | 12 | 8 |
| 8 | $3(0) + 0$ | $+ 6 = 6$ | 6 | 8 |

Στάδιο 2($b_2 = 7$)

| $\mathcal{C}_1(x_2 - 7) + \mathcal{C}_2(x_2 - x_1) + f_3(x_2)$ | | | Βέλτιστη Λύση | | | |
|--|-----------------------------|----------------------------|----------------------------|-----------|---|---|
| x_1 | $x_2 = 7$ | $x_2 = 8$ | $f_2(x_1)$ | x_2^* | | |
| 5 | $3(0) + 4 + 2(2) + 12 = 20$ | $3(1) + 4 + 2(3) + 6 = 19$ | 19 | 8 | | |
| 6 | $3(0) + 4 + 2(1) + 12 = 18$ | $3(1) + 4 + 2(2) + 6 = 17$ | 17 | 8 | | |
| 7 | $3(0) + 0$ | $+ 12 = 12$ | $3(1) + 4 + 2(1) + 6 = 15$ | 12 | 7 | |
| 8 | $3(0) + 0$ | $+ 12 = 12$ | $3(1) + 0$ | $+ 6 = 9$ | 9 | 8 |

Στάδιο 1($b_1 = 5$)

| $\mathcal{C}_1(x_1 - 5) + \mathcal{C}_2(x_1 - x_0) + f_2(x_1)$ | | | | | Βέλτιστη Λύση | |
|--|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|---------------|---------|
| x_0 | $x_1 = 5$ | $x_1 = 6$ | $x_1 = 7$ | $x_1 = 7$ | $f_1(x_0)$ | x_1^* |
| 0 | $3(0) + 4 + 2(5)$ | $3(1) + 4 + 2(6)$ | $3(2) + 4 + 2(7)$ | $3(2) + 4 + 2(8)$ | | |
| | $+ 19 = 33$ | $+ 17 = 36$ | $+ 12 = 36$ | $+ 9 = 35$ | 33 | 5 |

Η βέλτιστη λύση προσδιορίζεται ως εξής

$$\chi_0 = 0 \rightarrow \chi_1^* = 5 \rightarrow \chi_2^* = 8 \rightarrow \chi_3^* = 8 \rightarrow \chi_4^* = 6 \rightarrow \chi_5^* = 6$$

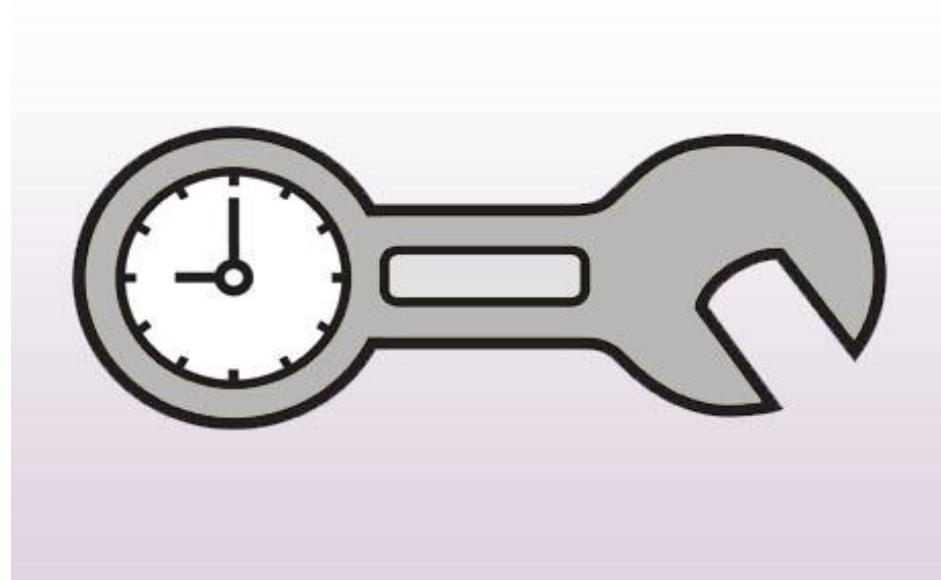
Η λύση αναλύεται με το ακόλουθο πρόγραμμα:

| Εβδομάδα i | Ελάχιστο | Πραγματικό | Απόφαση |
|------------|--------------------|-----------------------|----------------|
| | Εργατικό | Εργατικό | |
| | Δυναμικό (b_i) | Δυναμικό (χ_i) | |
| 1 | 5 | 5 | Προσλαμβάνει 5 |
| 2 | 7 | 8 | Προσλαμβάνει 3 |
| 3 | 8 | 8 | Καμία Αλλαγή |
| 4 | 4 | 6 | Απολύει 2 |
| 5 | 6 | 6 | Καμία Αλλαγή |

Κεφάλαιο 8^ο

Το Μοντέλο Αντικατάστασης
Εξοπλισμού

8.1 Μοντέλο Αντικατάστασης Εξοπλισμού



8.1 Μοντέλο Αντικατάστασης Εξοπλισμού

Όσο περισσότερο μια μηχανή μένει σε λειτουργία, τόσο αυξάνεται το κόστος συντήρησης της και τόσο μειώνεται η παραγωγικότητα της. Όταν μια μηχανή φθάσει σε κάποιο όριο ηλικίας, μπορεί να είναι πιο οικονομικό να την αντικαταστήσουμε. Το πρόβλημα λοιπόν αναλύεται στο να καθορίζει την πιο οικονομική ηλικία μιας μηχανής.

Ας υποθέσουμε ότι μελετούμε ένα πρόβλημα αντικατάστασης μηχανής μέσα σε ένα εύρος n χρόνων. Στην αρχή κάθε έτους, θα αποφασίσουμε αν θα κρατήσουμε τη μηχανή σε λειτουργία έναν επιπλέον χρόνο ή αν θα την αντικαταστήσουμε με μια καινούρια. Αν $r(t)$, $c(t)$ και $s(t)$ αντιστοιχούν στα ετήσια έσοδα, το λειτουργικό κόστος και την τιμή διατήρησης της μηχανής για ένα χρόνο, όταν αυτή είναι ηλικίας t στην αρχή του χρόνου. Το κόστος απόκτησης μιας καινούριας μηχανής, σε κάθε χρόνο είναι I.

Τα στοιχεία του μοντέλου του Δυναμικού Προγραμματισμού είναι

1. Το στάδιο i αντιστοιχεί στην i χρονιά, $i = 1, 2, \dots, n$.
2. Οι εναλλακτικές στο στάδιο (χρόνος) i είναι η αντικατάσταση ή η διατήρηση της μηχανής στην αρχή του χρόνου i
3. Η κατάσταση του συστήματος στο στάδιο i είναι η ηλικία της μηχανής στην αρχή του χρόνου i.

Ορίζουμε

$$f_i(t) = \text{μέγιστο καθαρό εισόδημα για χρόνια } i, i+1, \dots, n$$

δεδομένου ότι η μηχανή είναι t χρόνων κατά την έναρξή της χρονιάς i.

Η αναδρομική εξίσωση προκύπτει ως εξής

$$f_i(t) = \max \begin{cases} r(t) - c(t) + f_{i+1}(t+1), & \text{Αν κρατήσουμε τη μηχανή} \\ r(0) + s(t) - l - c(0) + f_{i+1}(1), & \text{Αν την αντικαταστήσουμε} \end{cases}$$

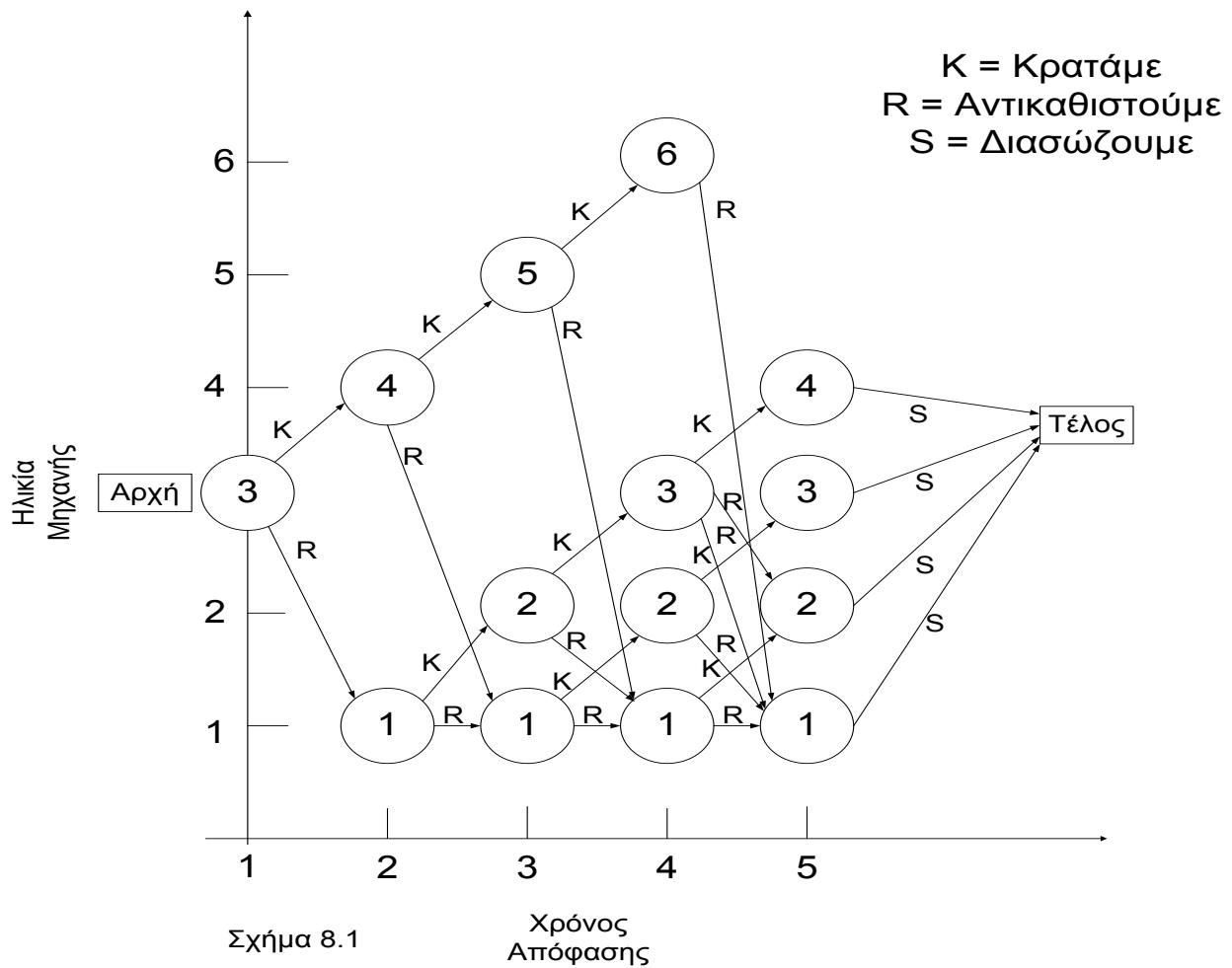
$$f_{n+1}(.) \equiv 0$$

Παράδειγμα 8.1-1

Μια εταιρία πρέπει να καθορίσει τη βέλτιστη πολιτική που θα ακολουθήσει για μια τριών ετών μηχανή για τα επόμενα 4 χρόνια ($n=4$). Ο ακόλουθος πίνακας δίνει τα δεδομένα του προβλήματος. Η εταιρία απαιτεί μια μηχανή έτι χρονών να αντικαθίστατε. Το κόστος μιας νέας μηχανής είναι 100,000 χρηματικές μονάδες.

| Χρόνος, t | Έσοδα, $r(t)$ | Λειτουργικό Κόστος, $c(t)$ | Τιμή Διατήρησης, $s(t)$ |
|-------------|---------------|-------------------------------|----------------------------|
| 0 | 20,000 | 200 | -- |
| 1 | 19,000 | 600 | 80,000 |
| 2 | 18,500 | 1200 | 60,000 |
| 3 | 17,200 | 1500 | 50,000 |
| 4 | 15,500 | 1700 | 30,000 |
| 5 | 14,000 | 1800 | 10,000 |
| 6 | 12,200 | 2200 | 5,000 |

Ο καθορισμός των δυνατών τιμών για την ηλικία της μηχανής σε κάθε στάδιο είναι δύσκολος. Το σχήμα 8.1 συνοψίζει το δίκτυο που αντιστοιχεί στο πρόβλημα. Κατά την έναρξη του πρώτου έτους, έχουμε μια μηχανή 3 ετών. Μπορούμε είτε να αντικαταστήσουμε (R) ή να κρατήσουμε (K) τη μηχανή για άλλη μια χρονιά.



Την επόμενη χρονιά, εάν είχαμε αντικαταστήσει τη μηχανή, η νέα μηχανή θα είναι ενός έτους αλλιώς η παλιά μηχανή θα είναι 4 ετών. Η ιδία λογική ισχύει σε κάθε νέα χρονιά. Εάν μια ενός χρόνου μηχανή αντικατασταθεί κατά την έναρξη μια καινούριας χρονιάς, η αντικατάσταση της θα είναι ενός έτους στην αρχή της νέας χρονιάς. Επίσης, κατά την έναρξη της 4 χρονιάς εάν η μηχανή μας είναι 6 χρονών τότε πρέπει να αντικατασταθεί, και στο τέλος της 4 χρονιάς εμείς διασώζουμε (S) τις μηχανές.

Το δίκτυο μας δείχνει ότι στην αρχή του δεύτερου χρόνου, η πιθανή ηλικία της μηχανής είναι 1 και 4 ετών. Για την έναρξή του οικονομικού έτους 3, η πιθανή ηλικία είναι 1,2 και 5 ετών, και για την έναρξη του 4 χρόνου, η πιθανές ηλικίες είναι 1,2,3 και 6 ετών.

Η λύση του δικτύου του σχήματος 8.1 είναι ισοδύναμη με την εύρεση της μεγαλύτερης διαδρομής από την αρχή των ετών 1 έως το τέλος του χρόνου 4. Θα χρησιμοποιήσουμε την μορφή πινάκων για την λύση του προβλήματος. Όλες οι τιμές είναι σε χιλιάδες χρηματικές μονάδες. Σημείωση ότι εάν μια μηχανή αντικατασταθεί σε 4 χρόνια (δηλαδή στο τέλος του χρονικού σχεδιασμού), τα έσοδα της συμπεριλαμβάνουν τη τιμή διατήρησης της μηχανής που αντικαταστάθηκε καθώς και τη τιμή διατήρησης της καινούριας μηχανής.

Στάδιο 4.

| t | K | | R | | Βέλτιστη Λύση |
|---|--------------------------|-----------------------------------|----------|---------|---------------|
| | $r(t) + s(t+1) - c(t)$ | $r(0) + s(t) + s(1) - c(0) - l$ | $f_4(t)$ | Απόφαση | |
| 1 | $19.0 + 60 - 0.6 = 78.6$ | $20 + 80 + 80 - 0.2 - 100 = 79.8$ | 79.8 | R | |
| 2 | $18.5 + 50 - 1.2 = 67.3$ | $20 + 60 + 80 - 0.2 - 100 = 59.8$ | 67.3 | K | |
| 3 | $17.2 + 30 - 1.5 = 45.7$ | $20 + 50 + 80 - 0.2 - 100 = 49.8$ | 49.8 | R | |
| 6 | Πρέπει να αντικατασταθεί | $20 + 5 + 80 - 0.2 - 100 = 4.8$ | 4.8 | R | |

Στάδιο 3.

| t | K | | R | | Βέλτιστη Λύση |
|---|----------------------------|-------------------------------------|----------|---------|---------------|
| | $r(t) - c(t) + f_4(t+1)$ | $r(0) + s(t) - c(0) - l + f_4(1)$ | $f_3(t)$ | Απόφαση | |
| 1 | $19.0 - 0.6 + 67.3 = 85.7$ | $20 + 80 - 0.2 - 100 + 79.8 = 79.6$ | 85.7 | K | |
| 2 | $18.5 - 1.2 + 67.1 = 67.1$ | $20 + 60 - 0.2 - 100 + 79.8 = 59.6$ | 67.1 | K | |
| 5 | $14.0 + 1.8 + 4.8 = 17.0$ | $20 + 10 - 0.2 - 100 + 79.8 = 19.6$ | 49.8 | R | |

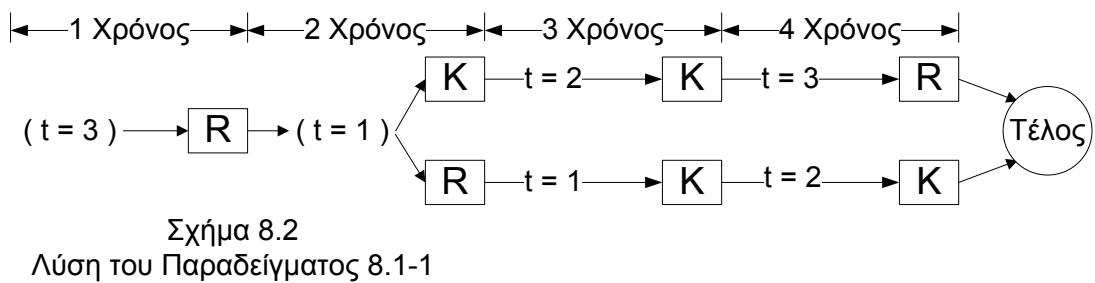
Στάδιο 2.

| | <i>K</i> | <i>R</i> | Βέλτιστη Λύση | |
|----------|-------------------------------|--|---------------|---------------------|
| <i>t</i> | $r(t) - \alpha(t) + f_3(t+1)$ | $r(0) + s(t) - \alpha(0) - l + f_3(l)$ | $f_2(t)$ | Απόφαση |
| 1 | $19.0 - 0.6 + 67.1 = 85.5$ | $20 + 80 - 0.2 - 100 + 85.7 = 85.5$ | 85.5 | <i>R</i> ή <i>K</i> |
| 4 | $15.5 - 1.7 + 19.6 = 33.4$ | $20 + 30 - 0.2 - 100 + 85.5 = 35.5$ | 35.5 | <i>R</i> |

Στάδιο 1.

| | <i>K</i> | <i>R</i> | Βέλτιστη Λύση | |
|----------|-------------------------------|--|---------------|----------|
| <i>t</i> | $r(t) - \alpha(t) + f_2(t+1)$ | $r(0) + s(t) - \alpha(0) - l + f_2(l)$ | $f_1(t)$ | Απόφαση |
| 1 | $17.2 - 1.5 + 35.5 = 51.2$ | $20 + 50 - 0.2 - 100 + 85.5 = 85.5$ | 55.3 | <i>R</i> |

Το σχήμα 8.2 συνοψίζει τη βέλτιστη λύση. Κατά έναρξή της πρώτης χρονιάς, η βέλτιστη απόφαση όταν η μηχανή είναι 3 ετών είναι η αντικατάσταση της. Έτσι η καινούργια μηχανή θα είναι 1 έτους στην αρχή του δεύτερου χρόνου, ($t=1$) και κατά την έναρξη του δεύτερου χρόνου μπορούμε είτε να διατηρήσουμε τη μηχανή ή να την αντικαταστήσουμε. Αν αντικαταστήσουμε τη μηχανή κατά την έναρξη της 3 χρονιάς η μηχανή μας θα είναι 1 έτους, διαφορετικά αν κρατήσουμε τη μηχανή τότε θα είναι 2 ετών. Η διαδικασία συνεχίζεται με αυτό τον τρόπο μέχρι να φτάσουμε στον 4 χρόνο.



Σχήμα 8.2
Λύση του Παραδείγματος 8.1-1

Η εναλλακτικές λύσεις βέλτιστης απόφασης, αρχής γενομένου από τον 1 χρόνο είναι (R, K, K, R) και (R, R, K, K) . Το συνολικό κόστος είναι 55,300 χρηματικές μονάδες.

Κεφάλαιο 9^ο

Το Επενδυτικό Μοντέλο

9.1 Επενδυτικό Μοντέλο



9.1 Επενδυτικό μοντέλο

Ας υποθέσουμε ότι θέλετε να επενδύσετε τα ποσά P_1, P_2, \dots, P_n στην αρχή του έτους για τα επόμενα n έτη. Έχετε δυο πιθανές επενδύσεις σε δύο τράπεζες: η Πρώτη Τράπεζα πληρώνει r_1 επιτόκιο και η Δεύτερη Τράπεζα πληρώνει r_2 επιτόκιο, και τα δύο ανατοκίζονται ανά χρόνο. Οι δύο τράπεζες, ενθαρρύνουν τις κατάθεσης, πληρώνοντας μπόνους σε νέες επενδύσεις με τη μορφή ενός ποσοστού επί του επενδυόμενου ποσού. Τα ποσοστά μπόνους ποικίλουν από χρονιά σε χρονιά και δίνουν για το i χρόνο q_{i1} η Πρώτη Τράπεζα και q_{i2} η Δεύτερη Τράπεζα. Τα μπόνους καταβάλλονται στο τέλος του έτους κατά το οποίο πραγματοποιήθηκε η επένδυση και μπορούν να επενδυθούν ξανά σε οποιαδήποτε τράπεζα στο αμέσως επόμενο έτος. Αυτό σημαίνει ότι μόνο τα μπόνους και νέα ποσά χρημάτων μπορούν να επενδυθούν σε οποιαδήποτε τράπεζα. Ωστόσο, όταν μια επένδυση έχει κατατεθεί, θα πρέπει να παραμείνει στη τράπεζα μέχρι το τέλος του n έτους. Η σχεδίαση του προγράμματος επένδυσης για τα επόμενα n έτη είναι:

Τα στοιχεία του μοντέλου του Δυναμικού Προγραμματισμού είναι

1. Το στάδιο i αντιπροσωπεύεται από τον χρόνο $i, i=1, 2, \dots, n$
2. Οι εναλλακτικές λύσεις στο στάδιο i είναι I_i και \bar{I}_i , τα ποσά που επενδύονται από τη Πρώτη Τράπεζα και τη Δεύτερη Τράπεζα αντίστοιχα.
3. Η κατάσταση του συστήματος, X_i στο στάδιο i αντιπροσωπεύεται από το διαθέσιμο κεφάλαιο για επενδύσεις κατά την έναρξη του i έτους.

Σημειώνουμε ότι $\bar{I}_i = X_i - I_i$, εξ ορισμού. Έτσι

$$X_1 = P_1$$

$$\begin{aligned} X_i &= P_i + q_{i-1} I_{i-1} + q_{i-1,2} (X_{i-1} - I_{i-1}) \\ &= P_i + (q_{i-1,1} - q_{i-1,2}) I_{i-1} + q_{i-1,2} X_{i-1}, i=2, 3, \dots, n \end{aligned}$$

Το επενδυόμενο ποσό X_i περιλαμβάνει μόνο νέα χρήματα συν κάποιο μπόνους από επενδύσεις που πραγματοποιήθηκαν κατά το έτος $i-1$.

Ορίζουμε

$f_i(x_i) =$ τη βέλτιστη αξία των επενδύσεων για τα χρόνια $i, i+1, \dots$ και n ,

δεδομένου x_i .

Στη συνέχεια, ορίζουμε s_i το συσσωρευμένο ποσό στο τέλος του έτους n , δεδομένου I_i και $(x_i - I_i)$ οι επενδύσεις που πραγματοποιήθηκαν κατά το τέλος του i έτους στη Πρώτη και Δεύτερη Τράπεζα, αντίστοιχα. Αφήνοντας $a_k = (1 + r_k)$, $k = 1, 2$, το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως

$$\text{Maximize } Z = s_1 + s_2 + \dots + s_n$$

Όπου

$$\begin{aligned} s_i &= I_i a_1^{n+1-i} + (x_i - I_i) a_2^{n+1-i} \\ &= (a_1^{n+1-i} - a_2^{n+1-i}) I_i + a_2^{n+1-i} x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ s_n &= (a_1 + q_{n1} - a_2 - q_{n2}) I_n + (a_2 + q_{n2}) x_n \end{aligned}$$

Οι όροι q_{n1} και q_{n2} στο s_n προστέθηκαν διότι το πριμ για το έτος n αποτελεί μέρος του συσσωρευμένου τελικού ποσού των χρημάτων από την επένδυση.

Η προς τα πίσω αναδρομική εξίσωση του Δυναμικού Προγραμματισμού δίνεται ως εξής

$$\begin{aligned} f_i(x_i) &= \max_{0 \leq I_i \leq x_i} \{s_i + f_{i+1}(x_{i+1})\}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ f_{n+1}(x_{n+1}) &\equiv 0 \end{aligned}$$

Όπως έχει ξανά δοθεί, x_{i+1} έχει ορισθεί από το x_i .

Παράδειγμα 9.1-1

Ας υποθέσουμε ότι θέλετε να επενδύσετε τώρα 4000 χρηματικές μονάδες και 2000 χρηματικές μονάδες κατά την έναρξη του έτους 2, 3, και 4. Το επιτόκιο που

προσφέρει η Πρώτη Τράπεζα είναι 8%, που ανατοκίζεται κάθε χρόνο, και τα μπόνους για τα επόμενα 4 χρόνια είναι 1.8%, 1.7%, 2.1%, και 2.5%, αντίστοιχα. Το επήσιο επιτόκιο που προσφέρει η Δεύτερη Τράπεζα είναι χαμηλότερο κατά 0.2% από αυτό της Πρώτης Τράπεζας, αλλά τα μπόνους είναι υψηλότερα κατά 0.5%. Στόχος είναι η μεγιστοποίηση του συσσωρευμένου κεφαλαίου στο τέλος του 4 έτους.

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό που εισάγαμε προηγουμένως, έχουμε

$$\begin{aligned}P_1 &= 4,000 \quad , P_2 = P_3 = P_4 = 2,000 \\a_1 &= (1+0.08) = 1.08 \\a_2 &= (1+0.078) = 1.078 \\q_{11} &= 0.018, q_{21} = 0.017, q_{31} = 0.021, q_{41} = 0.025 \\q_{12} &= 0.023, q_{22} = 0.022, q_{32} = 0.026, q_{42} = 0.030\end{aligned}$$

Στάδιο 4.

$$f_4(x_4) = \max_{0 \leq l_4 \leq x_4} \{s_4\}$$

Όπου

$$s_4 = (a_1 + q_{41} - a_2 - q_{42})l_4 + (a_2 + q_{42})x_4 = -0.003l_4 + 1.108x_4$$

Η λειτουργία s_4 είναι γραμμική στο l_4 στη περιοχή $0 \leq l_4 \leq x_4$, και το ανώτατο όριο στο $l_4 = 0$, λόγω του αρνητικού συντελεστή l_4 . Έτσι η βέλτιστη λύση του σταδίου 4 μπορεί να συνοψιστεί ως

| Βέλτιστη Λύση | | |
|---------------|------------|---------|
| Κατάσταση | $f_4(x_4)$ | l_4^* |
| x_4 | $1.108x_4$ | 0 |

Στάδιο 3.

$$f_3(x_3) = \max_{0 \leq l_3 \leq x_3} \{ s_3 + f_4(x_4) \}$$

Όπου

$$s_3 = (1.08^2 - 1.078^2) l_3 + 1.078^2 x_3 = 0.00432 l_3 + 1.1621 x_3$$

$$x_4 = 2000 - 0.005 l_3 + 0.026 x_3$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} f_3(x_3) &= \max_{0 \leq l_3 \leq x_3} \{ 0.00432 l_3 + 1.1621 x_3 + 1.108(2000 - 0.005 l_3 + 0.026 x_3) \} \\ &= \max_{0 \leq l_3 \leq x_3} \{ 2216 - 0.00122 l_3 + 1.1909 x_3 \} \end{aligned}$$

| Βέλτιστη Λύση | | |
|---------------|---------------------|---------|
| Κατάσταση | $f_3(x_3)$ | l_3^* |
| x_3 | $2216 + 1.1909 x_3$ | 0 |

Στάδιο 2.

$$f_2(x_2) = \max_{0 \leq l_2 \leq x_2} \{ s_2 + f_3(x_3) \}$$

Όπου

$$s_2 = (1.08^3 - 1.078^3) l_2 + 1.078^3 x_2 = 0.006985 l_2 + 1.25273 x_2$$

$$x_3 = 2000 - 0.005 l_2 + 0.022 x_2$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} f_2(x_2) &= \max_{0 \leq l_2 \leq x_2} \{ 0.006985 l_2 + 1.25273 x_2 + 2216 + 1.1909(2000 - 0.005 l_2 + 0.022 x_2) \} \\ &= \max_{0 \leq l_2 \leq x_2} \{ 4597.8 + 0.010305 l_2 + 1.27893 x_2 \} \end{aligned}$$

| Βέλτιστη Λύση | | |
|---------------|-----------------------|---------|
| Κατάσταση | $f_2(x_2)$ | I_2^* |
| x_2 | $4597.8 + 1.27996x_2$ | x_2 |

Στάδιο 1.

$$f_1(x_1) = \max_{0 \leq I_1 \leq x_1} \{s_1 + f_2(x_2)\}$$

Όπου

$$s_1 = (1.08^4 - 1.078^4)I_1 + 1.078^4x_1 = 0.01005I_1 + 1.3504x_1$$

$$x_2 = 2000 - 0.005I_1 + 0.023x_1$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= \max_{0 \leq I_1 \leq x_1} \{0.01005I_1 + 1.3504x_1 + 4597.8 + 1.27996(2000 - 0.005I_1 + 0.023x_1)\} \\ &= \max_{0 \leq I_1 \leq x_1} \{7157.7 + 0.00365I_1 + 1.37984x_1\} \end{aligned}$$

| Βέλτιστη Λύση | | |
|---------------|-----------------------|---------|
| Κατάσταση | $f_1(x_1)$ | I_1^* |
| $x_1 = 4000$ | $7157.7 + 1.38349x_1$ | 4000 |

Με την προς τα πίσω μέθοδο και σημειώνοντας ότι $I_1^* = 4000$, $I_2^* = x_2$, $I_3^* = 0$,

παίρνουμε

$$x_2 = 2000 - 0.005 \times 4000 + 0.023 \times 4000 = 2072$$

$$x_3 = 2000 - 0.005 \times 2072 + 0.022 \times 2072 = 2035.22$$

$$x_4 = 2000 - 0.005 \times 0 + 0.026 \times 2035.22 = 2052.92$$

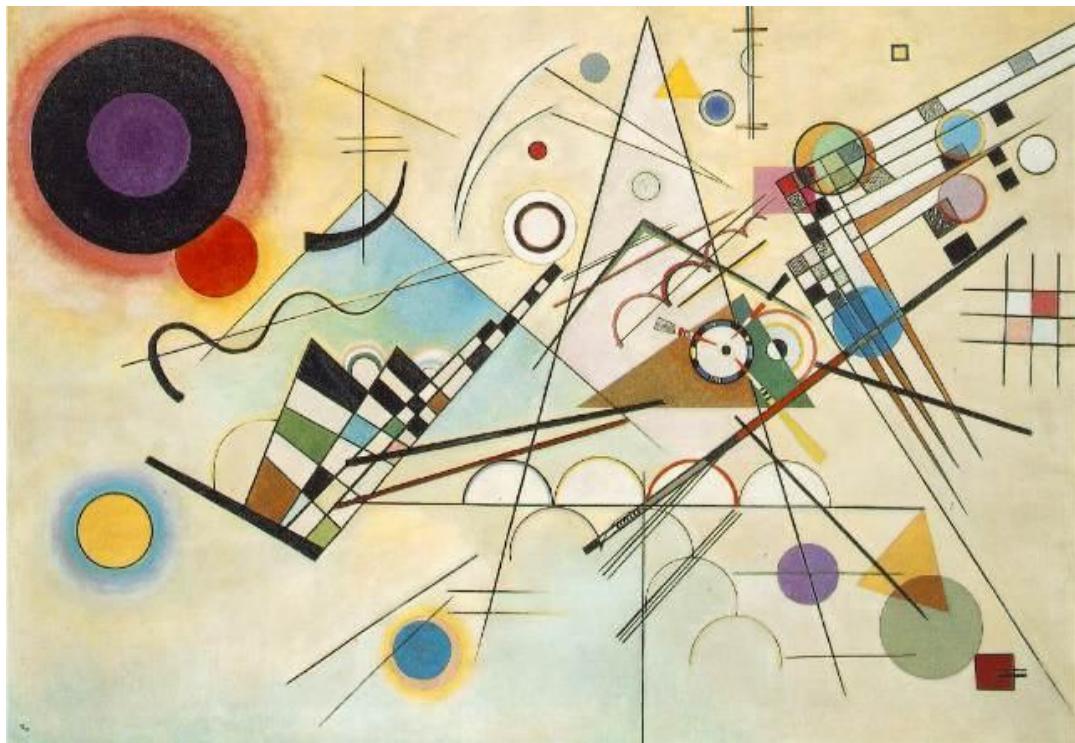
Η βέλτιστη λύση συνοψίζεται ως εξής

| Έτος | Βέλτιστη Λύση | Απόφαση | Κέρδος |
|--|--|---------|-----------------|
| 1 | $I_1^* = \chi_1$ Επένδυση $\chi_1 = 4000$ στη Πρώτη Τράπεζα | | $s_1 = 5441.80$ |
| 2 | $I_2^* = \chi_2$ Επένδυση $\chi_2 = 2072$ στη Πρώτη Τράπεζα | | $s_2 = 2610.13$ |
| 3 | $I_3^* = 0$ Επένδυση $\chi_3 = 2035.22$ στη Δεύτερη Τράπεζα | | $s_3 = 2365.13$ |
| 4 | $I_4^* = 0$ Επένδυση $\chi_4 = 2052.92$ στη Δεύτερη Τράπεζα | | $s_4 = 2274.64$ |
| Συνολικό Κέρδος = 12,691.70 χρηματικές μονάδες | | | |

Κεφάλαιο 10°

Τα Προβλήματα Διαστάσεων

10.1 Προβλήματα Διαστάσεων



10.1 Προβλήματα Διαστάσεων

Σε όλα τα μοντέλα Δυναμικού Προγραμματισμού που παρουσιάσαμε, η κατάσταση σε οποιοδήποτε στάδιο αντιπροσωπεύεται από μια μεταβλητή. Για παράδειγμα στο Πρόβλημα του Σακιδίου (κεφάλαιο 4^o, ενότητα 4.1), το πρόβλημα που καθορίζει το βάρος του αντικειμένου είναι ο μόνος περιορισμός. Πιο ρεαλιστικά, ο όγκος του σάκου μπορεί επίσης να είναι άλλος ένας βιώσιμος περιορισμός. Σε μια τέτοια περίπτωση, η κατάσταση σε οποιοδήποτε στάδιο θα είναι δύο διαστάσεων, επειδή αποτελείτε από δύο μεταβλητές: το βάρος και τον όγκο.

Η αύξηση του αριθμού των μεταβλητών αυξάνει και τους υπολογισμούς σε κάθε στάδιο. Αυτό είναι ιδιαίτερα εμφανές στους πίνακες υπολογισμών στα μοντέλα του Δυναμικού Προγραμματισμού, όπου ο αριθμός των γραμμών αντιστοιχεί σε όλους τους πιθανούς συνδυασμούς των μεταβλητών κατάστασης. Αυτή η υπολογιστική δυσκολία είναι τόσο εμφανής στο Δυναμικό Προγραμματισμό που στην βιβλιογραφία αναφέρεται ως “The Curse of Dimensionality” (Η Κατάρα των Διαστάσεων).

Το πρόβλημα που ακολουθεί έχει επιλεχθεί για να μας παρουσιάσει *το πρόβλημα των διαστάσεων*. Χρησιμεύει επίσης για να μας δείξει πως ένα πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού μπορεί να λυθεί με Δυναμικό Προγραμματισμό.

Παράδειγμα 10.1-1

Μια εταιρία παράγει δύο προϊόντα. Η ημερήσια δυναμικότητα της παραγωγικής διαδικασίας είναι 430 λεπτά. Το προϊόν 1 απαιτεί 2 λεπτά ανά μονάδα, και το προϊόν 2 απαιτεί 1 λεπτό ανά μονάδα. Η μέγιστη ημερήσια ζήτηση για το προϊόν 2 είναι 230 μονάδες ενώ για το προϊόν 1 δεν υπάρχει όριο. Το κέρδος ανά μονάδα από τα προϊόντα είναι 2 χρηματικές μονάδες και του προϊόντος 2 είναι 5 χρηματικές μονάδες. Βρείτε την βέλτιστη λύση με Δυναμικό Προγραμματισμό.

Το πρόβλημα στο Γραμμικό Προγραμματισμό αναλύεται ως:

$$\text{Maximize } Z = 2x_1 + 5x_2$$

Υπό τους περιορισμούς

$$2x_1 + x_2 \leq 430$$

$$x_2 \leq 230$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Τα στοιχεία του μοντέλου του Δυναμικού Προγραμματισμού είναι

1. Το στάδιο i αντιπροσωπεύει το προϊόν i, i=1,2.
2. Οι εναλλακτικές λύσεις x_i είναι οι ποσότητες του προϊόντος i, i=1,2.
3. Η κατάσταση (V_2, W_2) αντιπροσωπεύει τα ποσά των πόρων 1 και 2 (χρόνος παραγωγής και τα όρια της ζήτησης), που χρησιμοποιούνται στο στάδιο 2.
4. Η κατάσταση (V_1, W_1) αντιπροσωπεύει τα ποσά των πόρων 1 και 2 (χρόνος παραγωγής και τα όρια της ζήτησης), που χρησιμοποιούνται στο στάδιο 1 και 2.

Στάδιο 2.

Ορίζουμε $f_2(V_2, W_2)$ ως το μέγιστο κέρδος για το στάδιο 2 (προϊόν 2), δεδομένου της κατάστασης (V_2, W_2) . Τότε

$$f_2(V_2, W_2) = \max_{\substack{0 \leq x_2 \leq V_2 \\ 0 \leq x_2 \leq W_2}} \{5x_2\}$$

Έτσι, $\max \{5x_2\}$ εμφανίζεται στο $x_2 = \min \{V_2, W_2\}$, και η λύση στο στάδιο 2 είναι

| Βέλτιστη Λύση | | |
|---------------|-----------------------|---------------------|
| Κατάσταση | $f_2(V_2, W_2)$ | x_2 |
| (V_2, W_2) | $5 \min \{V_2, W_2\}$ | $\min \{V_2, W_2\}$ |

Στάδιο 1.

$$\begin{aligned} f_1(V_1, W_1) &= \max_{0 \leq 2\chi_1 \leq V_1} \{2\chi_1 + f_2(V_1 - 2\chi_1, W_1)\} \\ &= \max_{0 \leq 2\chi_1 \leq V_1} \{2\chi_1 + 5 \min(V_1 - 2\chi_1, W_1)\} \end{aligned}$$

Η βέλτιστοποίηση του σταδίου 1 επιβάλει τις λύσεις (γενικά δύσκολο) σε minimax προβλήματα. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, θέτουμε $V_1 = 430$ και $W_1 = 230$, το οποίο δίνει $0 \leq 2\chi_1 \leq 430$. Επειδή $\min(430 - 2\chi_1, 230)$ είναι το χαμηλότερο σημείο στις δυο τεμνόμενες γραμμές (επαλήθευση), έπεται ότι

$$\min(430 - 2\chi_1, 230) = \begin{cases} 230, & 0 \leq \chi_1 \leq 100 \\ 430 - 2\chi_1, & 100 \leq \chi_1 \leq 215 \end{cases}$$

και

$$f_1(430, 230) = \max_{\chi_1} \begin{cases} 2\chi_1 + 1150, & 0 \leq \chi_1 \leq 100 \\ -8\chi_1 + 2150, & 100 \leq \chi_1 \leq 215 \end{cases}$$

Μπορούμε να το επαληθεύσουμε με μια γραφική παράσταση ότι η βέλτιστη λύση της τιμής $f_1(430, 230)$ εμφανίζεται στο $\chi_1 = 100$.

Έτσι, παίρνουμε

| Βέλτιστη Λύση | | |
|---------------|-----------------|----------|
| Κατάσταση | $f_1(V_1, W_1)$ | χ_1 |
| (430, 230) | 1350 | 100 |

Για να καθοριστεί η βέλτιστη τιμή του χ_2 , παρατηρούμε ότι

$$V_2 = V_1 - 2\chi_1 = 430 - 200 = 230$$

$$W_2 = W_1 - 0 = 230$$

Κατά συνέπεια,

$$x_2 = \min(v_2, w_2) = 230$$

Έτσι η πλήρη βέλτιστη λύση συνοψίζεται ως:

$x_1 = 100$ μονάδες προϊόντος 1 , $x_2 = 230$ μονάδες προϊόντος 2, $z = 1350$

χρηματικές μονάδες.

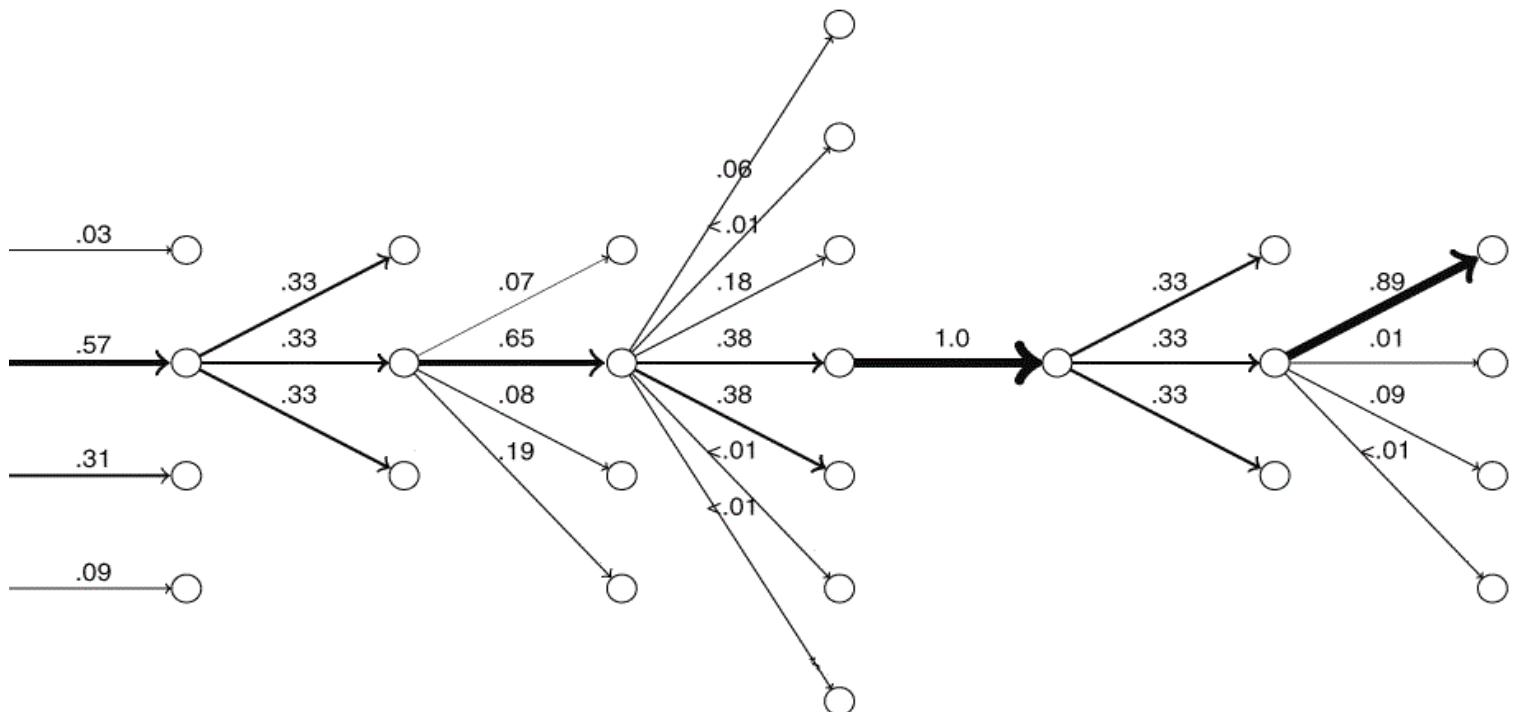
Κεφάλαιο 11°

Πιθανοθεωρητικός Δυναμικός
Προγραμματισμός

11.1 Πιθανοθεωρητικός

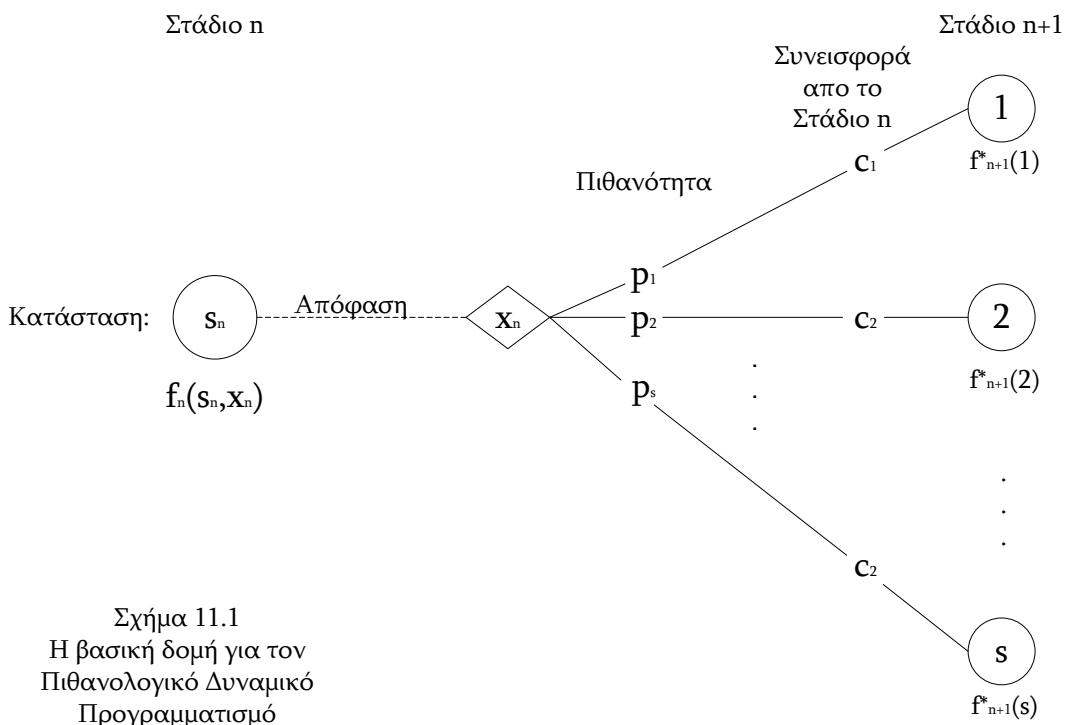
Δυναμικός

Προγραμματισμός



11.1 Πιθανοθεωρητικός Δυναμικός Προγραμματισμός

Ο Πιθανοθεωρητικός Δυναμικός Προγραμματισμός διαφέρει από τον Ντετερμινιστικό Δυναμικό Προγραμματισμό, όπου η κατάσταση στο επόμενο στάδιο δεν είναι εντελώς καθορισμένη από την κατάσταση και την απόφαση στο παρόν στάδιο. Αντίθετα, υπάρχει μια κατανομή πιθανότητας για το ποια θα είναι η επόμενη κατάσταση. Ωστόσο, αυτή η κατανομή πιθανοτήτων εξακολουθεί να είναι εντελώς καθορισμένη από την κατάσταση και την πολιτική απόφαση στο παρόν στάδιο. Η βασική δομή που προκύπτει για τον Πιθανοθεωρητικό Δυναμικό Προγραμματισμό περιγράφεται διαγραμματικά στο σχήμα 11.1.



Στο παραπάνω διάγραμμα το S δηλώνει τον αριθμό των πιθανών καταστάσεων στο στάδιο $n+1$, τις καταστάσεις τις απεικονίζουμε στη δεξιά πλευρά ως $1, 2, \dots, S$. Το σύστημα πηγαίνει στην i κατάσταση με πιθανότητα $p_i (i=1, 2, 3, \dots, S)$ δεδομένου της κατάστασης S_n και της απόφασης X_n στο

στάδιο n . Εάν το σύστημα πηγαίνει στην κατάσταση i, C_i , είναι η συνεισφορά του σταδίου n στην αντικειμενική συνάρτηση.

Όταν το σχήμα 11.1 επεκτείνεται προκειμένου να συμπεριλάβει όλες τις πιθανές καταστάσεις και τις αποφάσεις σε όλα τα στάδια, αυτό αναφέρεται και ως δέντρο απόφασης. Αν το δέντρο απόφασης δεν είναι πολύ μεγάλο, παρέχει μια χρήσιμη σύνθεση των διαφόρων δυνατοτήτων.

Λόγω της πιθανοθεωρητικής δομής, η σχέση μεταξύ των $f_n(s_n, x_n)$ και $f_{n+1}^*(s_{n+1})$ είναι αναγκαστικά κάπως πιο περίπλοκη από εκείνη του Ντετερμινιστικού Δυναμικού Προγραμματισμού. Η ακριβής μορφή αυτής της σχέσης θα εξαρτηθεί από τη μορφή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Για επίδειξη, ας υποθέσουμε ότι ο στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του αναμενόμενου αθροίσματος από τα επιμέρους στάδια. Σε αυτή την περίπτωση η $f_n(s_n, x_n)$ αντιπροσωπεύει το ελάχιστο ποσό που αναμένεται από το στάδιο n και εμπρός, δεδομένου ότι η πολιτική απόφασης και η κατάσταση στο στάδιο n είναι s_n και x_n , αντίστοιχα. Κατά συνέπεια

$$f_n(s_n, x_n) = \sum_{i=1}^s p_i [C_i + f_{n+1}^*(i)],$$

με

$$f_{n+1}^*(i) = \min_{x_{n+1}} f_{n+1}(i, x_{n+1}),$$

όπου η ελαχιστοποίηση επέρχεται για τις διάφορες εφικτές τιμές του x_{n+1} .

Το Παράδειγμα 11.1-1 έχει την ίδια μορφή. Το παράδειγμα 11.1-2 θα παρουσιάσει μια άλλη μορφή.

Παράδειγμα 11.1-1 (καθορισμός περιθωρίων επιτρεπτών ζημιών)

Μια εταιρία παραγωγής, έχει λάβει μια παραγγελία για την προμήθεια ενός προϊόντος συγκεκριμένου τύπου. Ωστόσο, ο πελάτης έχει καθορίσει τέτοιες αυστηρές απαιτήσεις ποιότητας που η εταιρία μπορεί να χρειαστεί να παράγει περισσότερα από ένα προϊόντα για να κατασκευάσει ένα προϊόν που θα είναι

αποδεκτό. Ο αριθμός των επιπλέον στοιχείων που παράγονται σε ένα κύκλο παραγωγής ονομάζεται επιτρεπτή ζημιά. Ο συνυπολογισμός της ζημιάς είναι κοινή πρακτική για μια προσαρμοσμένη σειρά παραγωγής, και κρίνεται σκόπιμη σε αυτή την περίπτωση.

Ο κατασκευαστής υπολογίζει ότι κάθε προϊόν αυτού του τύπου που παράγεται θα είναι αποδεκτό με πιθανότητα $1/2$ και ελαττωματικό (χωρίς δυνατότητα να επεξεργασθεί εκ νέου) με πιθανότητα $1/2$. Έτσι, ο αριθμός των αποδεκτών στοιχείων που παράγονται σε ένα μέγεθος παραγωγής L θα ακολουθούν μια διωνυμική κατανομή δηλαδή, η πιθανότητα παραγωγής μη αποδεκτών προϊόντων σε μια τέτοια παρτίδα είναι $(\frac{1}{2})^L$.

Το οριακό κόστος παραγωγής αυτού του προϊόντος εκτιμάται ότι θα είναι 100 χρηματικές μονάδες ανά μονάδα προϊόντος (έστω και αν είναι ελαττωματικό), και τα επιπλέον στοιχεία είναι άνευ αξίας. Επιπλέον, το κόστος εγκατάστασης είναι 300 χρηματικές μονάδες και θα πρέπει να πραγματοποιείται κάθε φορά που η παραγωγική διαδικασία έχει συσταθεί για αυτό το προϊόν, και μια εντελώς καινούργια εγκατάσταση, με το ίδιο κόστος, χρειάζεται για κάθε νέα παραγωγή προϊόντος που θα απαιτηθεί εάν μια μακρά διαδικασία παρακολούθησης αποκαλύψει ότι έχουν ολοκληρωθεί πολλά προϊόντα χωρίς κανένα αποδεκτό στοιχείο. Ο κατασκευαστής έχει το χρόνο να κάνει όχι περισσότερες από τρείς περιόδους παραγωγής. Αν κανένα αποδεκτό προϊόν δεν έχει ληφθεί μέχρι το τέλος της τρίτης περιόδου παραγωγής, το κόστος για τον κατασκευαστή σε χαμένο εισόδημα πωλήσεων και του κόστους σε ποινή θα είναι 1.600 χρηματικές μονάδες.

Ο στόχος είναι να καθοριστεί η πολιτική σχετικά με το μέγεθος της παραγωγής για την απαιτούμενη περίοδο παραγωγής που ελαχιστοποιεί το συνολικό αναμενόμενο κόστος για τον κατασκευαστή.

Τα στοιχεία του μοντέλου του Δυναμικού Προγραμματισμού είναι

1. Το στάδιο n αντιστοιχεί στην n περίοδο παραγωγής, $n=1,2,3$.
2. Με X_n συμβολίζουμε το μέγεθος της παραγωγής για το στάδιο n .
3. Η κατάσταση του συστήματος S_n είναι ο αριθμός των αποδεκτών προϊόντων που εξακολουθούν να χρειάζονται (0 ή 1) στην αρχή του σταδίου n .

Έτσι, στο στάδιο 1 , κατάσταση $S_1 = 1$. Όταν τουλάχιστον ένα αποδεκτό προϊόν λαμβάνεται, η κατάσταση αλλάζει σε $S_2 = 0$, μετά την οποία κανένα επιπλέον κόστος δε θα πρέπει να πραγματοποιείται.

Λόγω του στόχου του προβλήματος,

$f_n(S_n, X_n) =$ είναι το συνολικό αναμενόμενο κόστος για τα στάδια $n, \dots, 3$, εάν το σύστημα ξεκινήσει σε κατάσταση S_n στο στάδιο n , με άμεση λήψη απόφασης X_n και βέλτιστες αποφάσεις που λαμβάνονται,

$$f_n^*(S_n) = \min_{X_n=0,1,\dots} f_n(S_n, X_n),$$

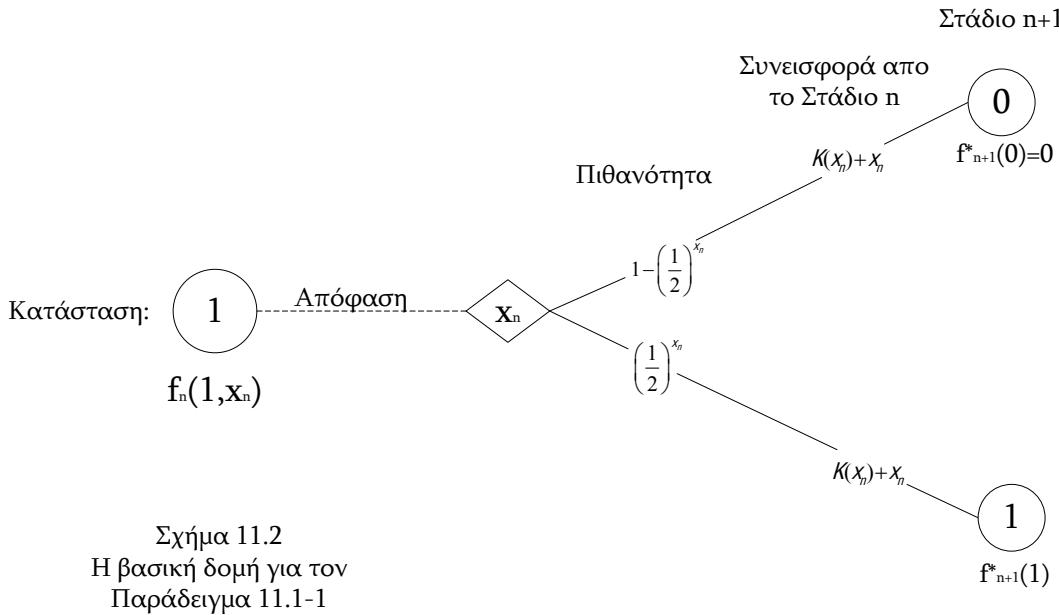
όπου $f_n^*(0) = 0$. Χρησιμοποιώντας το 100 ως μονάδα του χρήματος, η συνεισφορά στο κόστος από το στάδιο n είναι $[K(X_n) + X_n]$, ανεξάρτητα από την επόμενη κατάσταση, όπου $K(X_n)$ είναι μια συνάρτηση του X_n τέτοια ώστε

$$K(X_n) = \begin{cases} 0, & \alpha \nu - X_n = 0 \\ 3, & \alpha \nu - X_n > 0 \end{cases}$$

Επομένως, για $S_n = 1$

$$\begin{aligned} f_n(1, X_n) &= K(X_n) + X_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{X_n} f_{n+1}^*(1) + \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{X_n}\right] f_{n+1}^*(0) \\ &= K(X_n) + X_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{X_n} f_{n+1}^*(1) \end{aligned}$$

Όπου $f_4^*(1)$ ορίζεται να είναι 16 , το τερματικό κόστος, εάν κανένα αποδεκτό προϊόν δεν έχει παραχθεί. Όλα αυτά τα στοιχεία συνοψίζονται στο σχήμα 11.2



Κατά συνέπεια, η αναδρομική σχέση του Δυναμικού Προγραμματισμού υπολογίζεται ως εξής

$$f_n^*(1) = \min_{x_n=0,1,\dots} \left\{ K(x_n) + x_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{x_n} f_{n+1}^*(1) \right\}$$

για $n=1,2,3$.

Οι υπολογισμοί της αναδρομική σχέσης δίνονται συνοπτικά

Στάδιο 3 (n=3).

| $f_3(1, x_3) = K(x_3) + x_3 + 16\left(\frac{1}{2}\right)^{x_3}$ | | | | | | | Βέλτιστη Λύση | |
|---|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------------|---------|
| s_3 | $x_3 = 0$ | $x_3 = 1$ | $x_3 = 2$ | $x_3 = 3$ | $x_3 = 4$ | $x_3 = 5$ | $f_3^*(s_3)$ | x_3^* |
| 0 | 0 | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| 1 | 16 | 12 | 9 | 8 | 8 | 8.5 | 8 | 3 ή 4 |

Στάδιο 2 (n=2).

| $f_2(1, \chi_2) = K(\chi_2) + \chi_2 + f_3^*(1) \left(\frac{1}{2}\right)^{\chi_2}$ | | | | | | Βέλτιστη Λύση | |
|--|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------|------------|
| s_2 | $\chi_2 = 0$ | $\chi_2 = 1$ | $\chi_2 = 2$ | $\chi_2 = 3$ | $\chi_2 = 4$ | $f_2^*(s_2)$ | χ_2^* |
| 0 | 0 | - | - | - | - | 0 | 0 |
| 1 | 8 | 8 | 7 | 7 | 7.5 | 7 | 2 ή 3 |

Στάδιο 1 (n=1).

| $f_1(1, \chi_1) = K(\chi_1) + \chi_1 + f_2^*(1) \left(\frac{1}{2}\right)^{\chi_1}$ | | | | | | Βέλτιστη Λύση | |
|--|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------|------------|
| s_1 | $\chi_1 = 0$ | $\chi_1 = 1$ | $\chi_1 = 2$ | $\chi_1 = 3$ | $\chi_1 = 4$ | $f_1^*(s_1)$ | χ_1^* |
| 1 | 7 | 7.5 | 6.75 | 6.875 | 7.4375 | 6.75 | 2 |

Έτσι, η βέλτιστη πολιτική είναι να παραχθούν δύο προϊόντα στην πρώτη περίοδο παραγωγής. Αν κανένα δεν είναι αποδεκτό, παράγονται στη συνέχεια, είτε δύο ή τρία προϊόντα για τη δεύτερη περίοδο παραγωγής. Αν κανένα δεν είναι αποδεκτό, παράγονται στη συνέχεια, είτε τρία ή τέσσερα προϊόντα στην τρίτη και τελευταία περίοδο παραγωγής. Το συνολικό αναμενόμενο κόστος αυτής της πολιτικής είναι 675 χρηματικές μονάδες.

Παράδειγμα 11.1-2

Ένας φιλόδοξος νεαρός στατιστικολόγος πιστεύει ότι έχει αναπτύξει ένα σύστημα για να κερδίσει ένα δημοφιλές παιχνίδι. Οι συνάδελφοι του δε πιστεύουν ότι το σύστημα του θα δουλέψει, έτσι βάζουν ένα στοίχημα μαζί του, ότι αν ξεκινήσει με τρείς μάρκες, μετά από τρείς παρτίδες του παιχνιδιού αυτός δε θα έχει τουλάχιστον πέντε μάρκες. Κάθε παρτίδα του παιχνιδιού περιλαμβάνει στοιχήματα οποιουδήποτε αριθμού των διαθέσιμων μαρκών και στη συνέχεια είτε κερδίζει ή χάνει αυτό τον αριθμό από μάρκες. Ο στατιστικολόγος πιστεύει ότι το σύστημα του δίνει μια πιθανότητα 2/3 να κερδίσει κάθε παρτίδα του παιχνιδιού.

Ας υποθέσουμε ότι η θεωρία του στατιστικολόγου είναι σωστή, χρησιμοποιώντας Δυναμικό Προγραμματισμό θα προσδιορίσουμε τη βέλτιστη πολιτική σχετικά με τις πόσες μάρκες θα ποντάρει σε κάθε μία από τις τρείς παρτίδες του παιχνιδιού. Σε κάθε παρτίδα θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη του τα αποτελέσματα των προηγούμενων παρτίδων. Στόχος είναι να μεγιστοποιηθεί η πιθανότητα να κερδίσει το στοίχημα με τους συναδέλφους του.

Τα στοιχεία του μοντέλου του Δυναμικού Προγραμματισμού είναι

1. Το στάδιο n αντιστοιχεί στη n -οστή παρτίδα του παιχνιδιού, $n=1,2,3$.
2. Το X_n είναι ο αριθμός μαρκών που στοιχηματίστηκαν στο στάδιο n .
3. Η κατάσταση του συστήματος S_n είναι ο αριθμός μαρκών που έχει στο χέρι του για να ξεκινήσει το στάδιο n .

Ο ορισμός της κατάστασης παρέχει τις απαραίτητες πληροφορίες σχετικά με την τρέχουσα κατάσταση για να βελτιστοποιήσει την απόφαση σχετικά με το πόσες μάρκες να ποντάρει στη συνέχεια.

Επειδή ο στόχος είναι να μεγιστοποιηθεί η πιθανότητα ο στατιστικολόγος να κερδίσει το στοίχημα του, η αντικειμενική συνάρτηση που πρέπει να βελτιστοποιηθεί σε κάθε στάδιο πρέπει να είναι η πιθανότητα τερματισμού των τριών παρτίδων με τουλάχιστον πέντε μάρκες. (σημειώστε ότι η αξία του να τελειώσει με περισσότερες από πέντε μάρκες είναι ακριβώς το ίδιο τελειώνοντας με ακριβώς πέντε, δεδομένου ότι το στοίχημα κερδίζεται.) Ως εκ τούτου,

$f_n(S_n, X_n) = \text{πιθανότητα τερματισμού τριών παρτίδων παιχνιδιού με τουλάχιστον πέντε μάρκες, δεδομένου ότι ο στατιστικολόγος αρχίζει από το } n \text{ στάδιο, στην κατάσταση } S_n, \text{ με άμεση απόφαση } X_n, \text{ και καθιστά τη βέλτιστη απόφαση στη συνέχεια,}$

$$f_n^*(S_n) = \max_{X_n=0,1,\dots,S_n} f_n(S_n, X_n).$$

Η έκφραση $f_n(S_n, X_n)$ αντικατοπτρίζει το γεγονός ότι μπορεί να είναι ακόμη δυνατόν να συσσωρεύονται πέντε μάρκες τελικά ακόμη και αν ο

στατιστικολόγος χάσει το επόμενο παιχνίδι. Αν χάσει, η κατάσταση στο επόμενο στάδιο θα είναι $s_n - x_n$, και η πιθανότητα τερματισμού με τουλάχιστον πέντε μάρκες θα είναι $f_{n+1}^*(s_n - x_n)$. Αν κερδίσει την επόμενη παρτίδα αντ' αυτού, η κατάσταση θα γίνει $s_n + x_n$, και η αντίστοιχη πιθανότητα θα είναι $f_{n+1}^*(s_n + x_n)$. Επειδή η υποτιθέμενη πιθανότητα να κερδίσει μια παρτίδα είναι 2 / 3, προκύπτει τώρα ότι

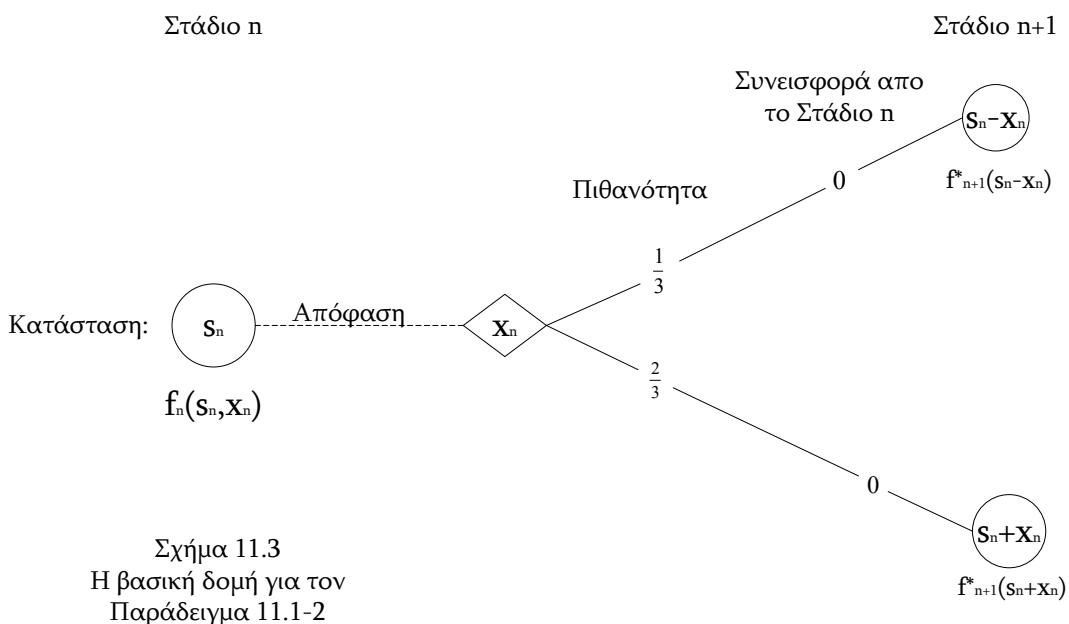
$$f_n(s_n, x_n) = \frac{1}{3} f_{n+1}^*(s_n - x_n) + \frac{2}{3} f_{n+1}^*(s_n + x_n)$$

Όπου $f_4^*(s_4)$ ορίζεται να είναι 0 για και 1 για $s_4 \geq 5$. Κατά συνέπεια, δεν υπάρχει καμία άμεση συμβολή στην επίτευξη του στόχου από το στάδιο n, εκτός από την επίδραση του στην επόμενη κατάσταση. Αυτές οι βασικές σχέσεις συνοψίζεται στο σχήμα 11.3

Συνεπώς, η αναδρομική σχέση του μοντέλου του Δυναμικού Προγραμματισμού γι' αυτό το πρόβλημα είναι

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n=0,1,\dots,s_n} \left\{ \frac{1}{3} f_{n+1}^*(s_n - x_n) + \frac{2}{3} f_{n+1}^*(s_n + x_n) \right\}$$

για $n=1,2,3$, με $f_4^*(s_4)$ έτσι ακριβώς όπως ορίστηκε.



Από την αναδρομική σχέση οδηγούμαστε στους παρακάτω υπολογισμούς

Στάδιο 3(n=3)

| s_3 | $f_3^*(s_3)$ | x_3^* |
|----------|--------------|-----------------------|
| 0 | 0 | — |
| 1 | 0 | — |
| 2 | 0 | — |
| 3 | 2/3 | 2 (ή περ/ρες) |
| 4 | 2/3 | 1 (ή περ/ρες) |
| ≥ 5 | 1 | 0 (ή $\leq s_3 - 5$) |

Στάδιο 2 (n=2).

| s_2 | $f_2(s_2, x_2) = \frac{1}{3} f_3^*(s_2 - x_2) + \frac{2}{3} f_3^*(s_2 + x_2)$ | | | | | Βέλτιστη Λύση | |
|----------|---|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------------|
| | $x_2 = 0$ | $x_2 = 1$ | $x_2 = 2$ | $x_2 = 3$ | $x_2 = 4$ | $f_2^*(s_2)$ | x_2^* |
| 0 | 0 | — | — | — | — | 0 | — |
| 1 | 0 | 0 | — | — | — | 0 | — |
| 2 | 0 | $\frac{4}{9}$ | $\frac{4}{9}$ | — | — | $\frac{4}{9}$ | 1 ή 2 |
| 3 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | — | $\frac{2}{3}$ | 0, 2, ή 3 |
| 4 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{8}{9}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{8}{9}$ | 1 |
| ≥ 5 | 1 | | | | | 1 | 0 ($\leq s_2 - 5$) |

Στάδιο 1 (n=1).

| $f_1(s_1, \chi_1) = \frac{1}{3} f_2^*(s_1 - \chi_1) + \frac{2}{3} f_2^*(s_1 + \chi_1)$ | | | | | Βέλτιστη Λύση | |
|--|---------------|-----------------|---------------|---------------|-----------------|------------|
| s_1 | $\chi_1 = 0$ | $\chi_1 = 1$ | $\chi_1 = 2$ | $\chi_1 = 3$ | $f_1^*(s_1)$ | χ_1^* |
| 3 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{20}{27}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{20}{27}$ | 1 |

Συνεπώς, η βέλτιστη πολιτική είναι

$$\chi_1^* = 1 \begin{cases} \alpha \nu \text{ κερδίσει}, & x_2^* = 1 \begin{cases} \alpha \nu \text{ κερδίσει}, & x_3^* = 0 \\ \alpha \nu \text{ χάσει}, & x_3^* = 2 \text{ ή } 3 \end{cases} \\ \alpha \nu \text{ χάσει}, & x_2^* = 1 \text{ ή } 2 \begin{cases} \alpha \nu \text{ κερδίσει}, & x_3^* = \begin{cases} 2 & \text{ή } 3 & (\gamma \alpha \ x_2^* = 1) \\ 1, 2, 3, \text{ή } 4 & (\gamma \alpha \ x_2^* = 2) \end{cases} \\ \alpha \nu \text{ χάσει}, & \text{το στοιχημα είναι χαμένο} \end{cases} \end{cases}$$

Αυτή η πολιτική δίνει στον στατιστικολόγο $\frac{20}{27}$ πιθανότητα να κερδίσει το στοίχημα με τους συναδέλφους του.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Bertsekas, D., *Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1987.
- [2] Denardo, E., *Dynamic Programming Theory and Applications*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1982.
- [3] Dreyfus, S., and A. Law, *The Art and Theory of Dynamic Programming*, Academic Press, New York, 1977.
- [4] Sniedovich, M., *Dynamic Programming*, Marcel Dekker, New York, 1991.
- [5] Howard, R. A., *Dynamic Programming*, Management Science, 12: 317-345, 1966.
- [6] Smith D. K., *Dynamic Programming: A practical Introduction*, Ellis Horwood, London, 1991.
- [7] Nemhauser, G., *Introduction to Dynamic Programming*, Wiley, New York, 1966.
- [8] Wagner, H., *Principles of Operations Research*, 2d ed. Englewood Cliffs, N.J, 1975.
- [9] Bellman, R., *Dynamic programming*, Princeton University Press, Princeton, N.J, 1957.
- [10] Bellman, R., and S. Dreyfus, *Applied Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton, N.J, 1962.
- [11] Bersetkas, D., *Dynamic Programming and Optimal Control*, vol. 1. Athena Scientific, Cambridge, Mass, 2000.
- [12] Whittle, P., *Optimization Over Time: Dynamic Programming and Stochastic Control*, vol. 1. Wiley, New York, 1982.
- [13] Morton, T., *Planning Horizons for Dynamic Programs*, Operations Research, 27: 730-745. A discussion of turnpike theorems.

- [14] Peterson, R., and E. Silver, *Decision Systems of Inventory Management and Production Planning*, Wiley, New York, 1998. Discusses the Silver-Meal method.
- [15] Waddell, R., *A Model for Equipment Replacement Decisions and Policies*, Interface 13 : 1-8. 1983. An application of the equipment replacement model.
- [16] Wagner, H., and T. Whitin, *Dynamic Version of the Economic Lot Size Model*, Management Science 5: 89- 96, 1958. Discusses Wagner-Whitin method.
- [17] Τσάντας, Ν.Δ., και Βασιλείου, Π.-Χ.Γ., *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα*, Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2000.
- [18] Βασιλείου, Π.-Χ.Γ., *Στοχαστικές Μέθοδοι στις Επιχειρησιακές Έρευνες*, Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2000.
- [19] Μηλιώτης Π.Α, *Επιχειρησιακή Έρευνα Μέθοδοι και Προβλήματα*, Σταμούλης Α., Αθήνα-Πειραιάς, 1994.

- [14] Peterson, R., and E. Silver, *Decision Systems of Inventory Management and Production Planning*, Wiley, New York, 1998. Discusses the Silver-Meal method.
- [15] Waddell, R., *A Model for Equipment Replacement Decisions and Policies*, Interface 13 : 1-8. 1983. An application of the equipment replacement model.
- [16] Wagner, H., and T. Whitin, *Dynamic Version of the Economic Lot Size Model*, Management Science 5: 89- 96, 1958. Discusses Wagner-Whitin method.
- [17] Τσάντας, Ν.Δ., και Βασιλείου, Π.-Χ.Γ., *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα*, Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2000.
- [18] Βασιλείου, Π.-Χ.Γ., *Στοχαστικές Μέθοδοι στις Επιχειρησιακές Έρευνες*, Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2000.
- [19] Μηλιώτης Π.Α, *Επιχειρησιακή Έρευνα Μέθοδοι και Προβλήματα*, Σταμούλης Α., Αθήνα-Πειραιάς, 1994.