



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Φυσικής

Μελέτη της σκέδασης του φωτός απο ανομοιογενή
και ανισοτροπικά νανοσωματίδια

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αντώνογλου Ιάκωβος

Επιβλέπων: Κόντος Αθανάσιος
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2024



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Φυσικής

Μελέτη της σκέδασης του φωτός απο ανομοιογενή και
ανισοτροπικά νανοσωματίδια

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αντώνογλου Ιάκωβος

Η εργασία εκπονήθηκε υπό την επιστημονική επίβλεψη του
Δρ. Αλμπάνη Ευάγγελου,
Εντεταλμένου Διδάσκοντα ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ

Μέλος Επιτροπής, Επιβλέπων:

Κόντος Αθανάσιος,
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π. _____

Μέλος Επιτροπής:

Γιαννόπαπας Βασίλειος,
Καθηγητής Ε.Μ.Π. _____

Μέλος Επιτροπής:

Παπανικολάου Νικόλαος,
Διευθυντής Ερευνών, INN, ΕΚΕΦΕ Δημόκριτος _____

Αθήνα, Οκτώβριος 2024

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Σκέδαση του φωτός	1
1.2	Εισαγωγή στη Μέθοδο Υπολογισμού της Σκέδασης μέσω του Πίνακα T . . .	2
1.3	Μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων	2
2	Θεωρία	5
2.1	ΗΜ Πεδίο σε Ομοιογενές Μέσο	5
2.2	Λύσεις της κυματικής εξίσωσης σε γυροηλεκτρικά ομοιογενή μέσα	8
2.3	Πίνακας σκέδασης T για ομοιογενή και ισοτροπικό σφαιρικό σχεδαστή	11
2.4	Πίνακας T για σφαιρικό πολυστρωματικό (ανομοιογενή) σχεδαστή	12
2.5	Πίνακας T για ανισοτροπικό (γυροηλεκτρικό) σφαιρικό σχεδαστή	13
2.6	Ενεργός διατομή σκέδασης, απόσβεσης και απορρόφησης	15
2.6.1	Υπολογισμός με τη μέθοδο FEM	17
3	Εφαρμογές	19
3.1	Σκέδαση από Διηλεκτρική Σφαίρα Υψηλού Δείκτη Διάθλασης	19
3.1.1	Σκέδαση από Σφαίρα Πυριτίου	24
3.2	Μεταλλικά νανοσωματίδια - πλασμόνια	26
3.2.1	Πλασμόνια νανοσωματιδίων χρυσού	27
3.3	Πλασμόνια νανοσωματιδίων αργύρου	30
3.4	Σκέδαση από ανομοιογενείς σχεδαστές	33
3.5	Σφαιρικοί διπλοθλαστικοί σχεδαστές	37
3.6	Σκέδαση από Γυροηλεκτρικούς Σχεδαστές	42
3.6.1	Συμμετρίες σε γυροηλεκτρικές σφαίρες	43
3.6.2	Μαγνητο-οπτική απόκριση μικροσωματιδίου από γρανάτη	46
4	Συμπεράσματα	51
	ΠαράρτημαΑ' Σφαιρικές Αρμονικές	53
	ΠαράρτημαΒ' Συναρτήσεις Bessel	57
	ΠαράρτημαΓ' Γραφικό Περιβάλλον μεθόδου Πίνακα T (TMMS)	61
	ΠαράρτημαΔ' Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (COMSOL)	65

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμά τα μέλη της τριμελούς επιτροπής κ. Γιαννόπαπα Βασίλειο και κ. Παπανικολάου Νικόλαο για τις εύστοχες προτάσεις και σχόλια τους που βελτίωσαν την παρούσα εργασία και ιδιαιτέρως τον κ. Αθανάσιο Κοντό για την διαρκή θετική του διάθεση και ανατροφοδότηση. Ευχαριστώ επίσης τον κάλο μου φίλο και δεξί μου χέρι Θάνο Λουκανάρη, χωρίς την βοήθεια του οποίου η παρούσα εργασία δεν θα μπορούσε να έχει ολοκληρωθεί. Τέλος, ευχαριστώ από καρδιάς τον Δρ. Ευάγγελο Αλμπάνη, χάρη στην διαρκή καθοδήγηση και βοήθεια του οποίου μπόρεσα να κατανοήσω και να εντρυφήσω στο θέμα που μελετήθηκε καθώς και να πάρω μια πρώτη εικόνα από τον όμορφο κόσμο της επιστημονικής έρευνας.

Περίληψη

Η παρούσα εργασία ασχολείται με τη σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από σφαιρικούς σχεδαστές, εστιάζοντας κυρίως σε διηλεκτρικούς και μεταλλικούς σχεδαστές, καθώς και σε πιο σύνθετα συστήματα, όπως τα νανοσωματίδια με πυρήνα και κέλυφος (ανομοιογενείς σχεδαστές), καθώς και τα μαγνητο-οπτικά νανοσωματίδια (γυροηλεκτρικοί σχεδαστές). Η σκέδαση φωτός αποτελεί ένα σημαντικό φαινόμενο στη φυσική, με πολλές εφαρμογές σε τεχνολογίες όπως η ιατρική απεικόνιση, τα ραντάρ και η νανοτεχνολογία. Εδώ, αναλύεται διεξοδικά η σκέδαση Mie, η οποία αναφέρεται σε σωματίδια με μέγεθος συγκρίσιμο με το μήκος κύματος. Αναπτύσσεται η θεωρία της μεθόδου του πίνακα T (T-matrix), η οποία χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των ενεργών διατομών σκέδασης, απορρόφησης και απόσβεσης στους σχεδαστές υπό εξέταση. Παράλληλα, τα αποτελέσματα της μεθόδου του πίνακα T παρουσιάζονται συγκριτικά με προσομοιώσεις που έχουμε εκτελέσει μέσω της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων.

Το πρώτο μέρος της εργασίας εστιάζει στους διηλεκτρικούς σχεδαστές υψηλού δείκτη διάθλασης και στη σύγκρισή τους με μεταλλικά νανοσωματίδια, όπως αυτά του χρυσού και του αργύρου. Οι διηλεκτρικοί σχεδαστές, σε αντίθεση με τα μεταλλικά νανοσωματίδια, παρουσιάζουν συντονισμούς μαγνητικών πολυπόλων, γεγονός που τους καθιστά ιδανικούς για εφαρμογές σε μεταϋλικά και νανοκεραίες. Τα μεταλλικά νανοσωματίδια, και ιδιαίτερα τα νανοσωματίδια χρυσού και αργύρου, παρουσιάζουν επιφανειακά πλασμονία, τα οποία επιτρέπουν την ενίσχυση του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνειά τους, γεγονός που βρίσκει εφαρμογές σε αισθητήρες, στην ιατρική απεικόνιση και σε φωτοκαταλυτικές διεργασίες. Στο δεύτερο μέρος, αναλύονται οι ιδιότητες των σύνθετων σχεδαστών με διηλεκτρικό πυρήνα και μεταλλικό κέλυφος, όπου παρατηρείται αλληλεπίδραση των πλασμονίων στις δύο διεπιφάνειες. Μελετάται ο υβριδισμός των πλασμονίων καθώς και η αλληλεπίδρασή μεταξύ τους αλλά και με το περιβάλλον μέσο. Στο τρίτο μέρος μελετώνται ανισοτροπικοί σχεδαστές που εμφανίζουν διπλοθλαστικότητα. Οι διπλοθλαστικοί σχεδαστές είναι υλικά που παρουσιάζουν διαφορετικούς δείκτες διάθλασης ανάλογα με την κατεύθυνση διάδοσης του φωτός μέσα τους. Μελετήσαμε περιπτώσεις τόσο για μικρή όσο και για μεγάλη διαφορά μεταξύ των δύο δεικτών διάθλασης σε ένα σφαιρικό νανοσωματίδιο. Στο τελευταίο μέρος, μελετήσαμε σχεδαστές που εμφανίζουν γυροτροπία. Πιο συγκεκριμένα, μελετήσαμε σχεδαστές από μαγνητο-οπτικό υλικό το οποίο παρουσία εξωτερικού μαγνητικού πεδίου γίνεται γυροηλεκτρικό. Η μελέτη αυτών των σχεδαστών παρουσιάζει ενδιαφέρον, καθώς υπό την επίδραση εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, οι ιδιότητες σκέδασης τους μπορούν να μεταβάλλονται σημαντικά λόγω του φαινομένου Faraday. Αυτό το φαινόμενο έχει εφαρμογές σε οπτικές διατάξεις όπως οι οπτικοί απομονωτές, καθώς και στη ρύθμιση της πόλωσης του φωτός. Παράλληλα, εφαρμόσαμε επιχειρήματα συμμετρίας για να ερμηνεύσουμε τους συντονισμούς που εμφανίζονται, και το πως αυτοί διεγείρονται, σε τέτοιους σχεδαστές.

Abstract

This work deals with the scattering of electromagnetic waves by spherical scatterers, focusing primarily on dielectric and metallic scatterers, as well as more complex systems such as core-shell nanoparticles (inhomogeneous scatterers) and magneto-optical nanoparticles (gyroelectric scatterers). Light scattering is a significant phenomenon in physics, with numerous applications in technologies such as medical imaging, radar, and nanotechnology. Here, Mie scattering, which refers to particles with sizes comparable to the wavelength, is thoroughly analyzed. The theory of the T-matrix method is developed, which is used to calculate the scattering, absorption, and extinction cross sections of the scatterers under consideration. Additionally, the results of the T-matrix method are presented in comparison with simulations we have performed using the finite element method.

The first part of this work focuses on high-refractive-index dielectric scatterers and compares them to metallic nanoparticles, such as gold and silver. Unlike metallic nanoparticles, dielectric scatterers exhibit magnetic multipole resonances, making them ideal for applications in metamaterials and nanoantennas. Metallic nanoparticles, particularly gold and silver nanoparticles, exhibit surface plasmons, which allow for the enhancement of the electric field at their surface, a feature that finds applications in sensors, medical imaging, and photocatalytic processes. In the second part, the properties of composite scatterers with a dielectric core and metallic shell are analyzed, where interactions of plasmons at the two interfaces are observed. We study the hybridization of plasmons and their interaction with each other as well as with the surrounding medium. In the third part, anisotropic scatterers exhibiting birefringence are studied. Birefringent scatterers are materials that have different refractive indices depending on the direction of light propagation within them. We studied cases with both small and large differences between the two refractive indices in a spherical nanoparticle. In the final part, we studied scatterers exhibiting gyrotropy. Specifically, we examined scatterers made of magneto-optical material which, in the presence of an external magnetic field, becomes gyroelectric. The study of these scatterers is of interest because, under the influence of an external magnetic field, their scattering properties can change significantly due to the Faraday effect. This phenomenon has applications in optical devices such as optical isolators and the control of light polarization. Additionally, symmetry arguments were applied to interpret the resonances observed and how they are excited in such scatterers.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Σκέδαση του φωτός

Η σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών (ΗΜ) κυμάτων είναι ένα σημαντικό φαινόμενο στη φυσική που περιγράφει την αλληλεπίδραση των κυμάτων αυτών με σωματίδια ή αντικείμενα που μπορούν να θεωρηθούν ως σκεδαστές. Αυτή η αλληλεπίδραση μπορεί να αλλάξει την κατεύθυνση διάδοσης, την ένταση και την πόλωση των κυμάτων. Το θέμα της σκέδασης ΗΜ κυμάτων καλύπτει διάφορες θεωρίες και εφαρμογές που ποικίλει ανάλογα με το μέγεθος και τις ιδιότητες των σκεδαστών σε σχέση με το μήκος κύματος του προσπίπτοντος κύματος.

Τύποι Σκέδασης

- Σκέδαση Rayleigh: Αφορά τη σκέδαση από σωματίδια πολύ μικρότερα από το μήκος κύματος του φωτός. Είναι το φαινόμενο που εξηγεί, για παράδειγμα, γιατί ο ουρανός φαίνεται μπλε. Η ένταση της σκέδασης είναι αντιστρόφως ανάλογη της τέταρτης δύναμης του μήκους κύματος, γι' αυτό τα μικρότερα μήκη κύματος (μπλε) σκεδάζονται πιο έντονα.
- Σκέδαση Mie: Περιλαμβάνει σωματίδια με μέγεθος συγκρίσιμο με το μήκος κύματος. Εδώ η σκέδαση είναι πιο περίπλοκη και εξαρτάται από το μέγεθος, το σχήμα και τη σύσταση του σκεδαστή. Η σκέδαση Mie εξηγεί φαινόμενα όπως η λευκή εμφάνιση των νεφών.
- Σκέδαση Thomson: Αφορά την ελαστική σκέδαση φωτός από ελεύθερα ηλεκτρόνια. Εδώ, η συχνότητα του φωτός δεν αλλάζει, αλλά η κατεύθυνση του διασκορπισμένου φωτός μεταβάλλεται.
- Σκέδαση Compton: Πρόκειται για ένα φαινόμενο που συμβαίνει όταν ένα φωτόνιο αλληλεπιδρά με ένα ελεύθερο ή ασθενώς συνδεδεμένο ηλεκτρόνιο, με αποτέλεσμα την αλλαγή συχνότητας (και συνεπώς της ενέργειας) του φωτός.

Εφαρμογές

Η κατανόηση της σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων έχει πολλές πρακτικές εφαρμογές:

- Ραντάρ και LIDAR: Η σκέδαση χρησιμοποιείται για την ανίχνευση αντικειμένων και τον υπολογισμό αποστάσεων.

- **Ιατρική Απεικόνιση:** Η σκέδαση του φωτός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απεικόνιση της μικροκυκλοφορίας και της αιμοδυναμικής των ιστών, αποκαλύπτοντας σημαντικές πληροφορίες για την υγεία των ιστών και των αγγείων.
- **Οπτική Αστρονομία:** Η σκέδαση εξηγεί φαινόμενα όπως η διάχυση του φωτός από τα νέφη σκόνης στο διάστημα.

Η σκέδαση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων είναι ένα ευρύ και πολύπλευρο θέμα που συνδέεται με πολλούς κλάδους της φυσικής και της μηχανικής, με καθοριστική σημασία σε τεχνολογικές εφαρμογές και στη θεωρητική κατανόηση του τρόπου με τον οποίο το φως αλληλεπιδρά με την ύλη. Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με τη σκέδαση τύπου Mie που αφορά στην αλληλεπίδραση ΗΜ κυμάτων με σωματίδια που έχουν μέγεθος συγκρίσιμο με το μήκος κύματος του φωτός. Η θεωρία αυτή πήρε το όνομά της από τον Gustav Mie, ο οποίος το 1908 ανέπτυξε τη λύση της σκέδασης από μια ομοιογενή διηλεκτρική σφαίρα [1]. Θα ξεκινήσουμε από τη λύση αυτού του αναλυτικού προβλήματος της σκέδασης από ομοιογενή και ανισοτροπική σφαίρα σε μορφή του πίνακα σχεδσης T (T-matrix). Στη συνέχεια θα επεκτείνουμε τη μέθοδο του πίνακα T σε πιο σύνθετα προβλήματα που αφορούν ανομοιογενείς ή ανισοτροπικούς σφαιρικούς σχεδαστές. Θα δούμε εφαρμογές αυτής της θεωρίας και θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματά μας με υπολογισμούς πεπερασμένων στοιχείων (COMSOL).

1.2 Εισαγωγή στη Μέθοδο Υπολογισμού της Σκέδασης μέσω του Πίνακα T

Η μέθοδος του πίνακα T (T-matrix) είναι ένα από τα πιο ισχυρά εργαλεία για τον υπολογισμό της σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από σωματίδια, μέσα στα πλαίσια ισχύος της σκέδασης Mie, δηλαδή με συγκρίσιμο μέγεθος με αυτό του μήκους κύματος. Η μέθοδος του πίνακα T επιτρέπει την επίλυση των εξισώσεων Maxwell με το να αναλύει τόσο το προσπίπτον όσο και το σκεδαζόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο σε όρους πολυπολικών αναπτύξεων, δηλαδή αναλύσεων με βάση σφαιρικές αρμονικές. Ο πίνακας T συνδέει τα πεδία σκέδασης με τα πεδία διέγερσης με τρόπο που εξαρτάται αποκλειστικά από τις ιδιότητες του σωματιδίου (γεωμετρία, υλικό). Η μέθοδος του πίνακα T έχει επεκταθεί ώστε να υποστηρίζει και μη ομογενή ή ανισότροπα σωματίδια, καθώς και την αλληλεπίδραση με σύνθετα ηλεκτρομαγνητικά πεδία, όπως αυτά που παρουσιάζουν πολώσεις και άλλες ιδιαιτερότητες. Η μέθοδος αυτή εμφανίζει ιδιαίτερο πλεονέκτημα όσον αφορά την ταχύτητα και την ακρίβεια των αποτελεσμάτων σε σχέση με μεθόδους όπως η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων ή των πεπερασμένων διαφορών.

1.3 Μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (Finite Element Method - FEM) αποτελεί μια ισχυρή και ευέλικτη αριθμητική μέθοδο για την επίλυση των εξισώσεων Maxwell, που περιγράφουν τη σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από διάφορες δομές. Η FEM χρησιμοποιείται ευρέως για τον υπολογισμό της σκέδασης κυμάτων από σωματίδια ή δομές αυθαίρετου σχήματος και υλικών, προσφέροντας μεγάλη ακρίβεια ακόμα και σε πολύπλοκα γεωμετρικά προβλήματα.

Η FEM επιλύει τα προβλήματα σκέδασης με τη διακριτοποίηση της χωρικής περιοχής σε ένα πλήθος μικρών, αλληλοσυνδεόμενων υποπεριοχών, γνωστών ως πεπερασμένα στοιχεία.

Σε κάθε στοιχείο, οι εξισώσεις του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου προσεγγίζονται με απλοποιημένες εκφράσεις που βασίζονται σε πολυωνυμικά σχήματα, και η λύση του συνολικού προβλήματος προκύπτει από την αλληλεπίδραση των στοιχείων.

Το πρώτο βήμα της FEM είναι η διακριτοποίηση της γεωμετρίας της δομής σκέδασης. Η περιοχή που μας ενδιαφέρει διαιρείται σε πεπερασμένα στοιχεία (π.χ., τρίγωνα ή τετράεδρα), στα οποία θα εφαρμοστεί η ανάλυση. Στην περιοχή αυτή περιλαμβάνεται το σωματίδιο ή η δομή που προκαλεί σκέδαση, καθώς και το περιβάλλον του, που συνήθως είναι ο ελεύθερος χώρος ή ένα μέσο με γνωστές ιδιότητες. Οι εξισώσεις Maxwell, οι οποίες περιγράφουν τη διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, διακριτοποιούνται και επιλύονται για κάθε στοιχείο. Οι εξισώσεις γράφονται με τη μορφή ασθενών διατυπώσεων (weak form), που επιτρέπουν την προσέγγιση με πολυωνυμικές συναρτήσεις. Κάθε πεπερασμένο στοιχείο αντιπροσωπεύει μία μικρή περιοχή του συνολικού προβλήματος, και η συνεισφορά του στο πεδίο σκέδασης υπολογίζεται από την αλληλεπίδραση με τα γειτονικά στοιχεία. Οι κατάλληλες οριακές συνθήκες εφαρμόζονται στις επιφάνειες του πεδίου σκέδασης, όπως οι συνθήκες απορρόφησης (absorbing boundary conditions) ή συνθήκες τέλεις αντιστοιχίας στρώματος (Perfectly Matched Layer - PML), ώστε να προσομοιωθεί ο ελεύθερος χώρος και να αποτραπούν ανακλάσεις κυμάτων πίσω προς την περιοχή σκέδασης. Το πρόβλημα σκέδασης καταλήγει σε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων, το οποίο επιλύεται αριθμητικά για να προκύψει το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο σε κάθε σημείο του πλέγματος. Στη συνέχεια, από τα πεδία αυτά εξάγονται τα χαρακτηριστικά σκέδασης, όπως η ενεργός διατομή σκέδασης (scattering cross-section)

Η FEM είναι ιδιαίτερα κατάλληλη για σωματίδια ή δομές μη κανονικού σχήματος, όπως ελλειψοειδή, κυλινδρικά ή ακόμη και πολύπλοκες επιφάνειες και σύνθετες διατάξεις σωματιδίων. Επιτρέπει επίσης την εύκολη αντιμετώπιση υλικών με διαφορετικές οπτικές ιδιότητες, όπως ανισοτροπικά, απορροφητικά ή μεταϊλικά. Μπορεί επίσης να ενσωματώσει διατάξεις με υλικά μεταβλητής αγωγιμότητας ή πολωσιμότητας. Η FEM παρέχει εξαιρετική ακρίβεια, ειδικά όταν απαιτούνται λεπτομερείς αναλύσεις γύρω από μικρά χαρακτηριστικά της σκέδασης. Η ακρίβεια αυξάνεται με τη βελτίωση της διακριτοποίησης και τη χρήση πιο πολύπλοκων μορφών βάσης στα στοιχεία.

Ωστόσο, για πολύπλοκα τρισδιάστατα προβλήματα σκέδασης ή για υψηλές συχνότητες, η FEM μπορεί να απαιτεί μεγάλο αριθμό στοιχείων, αυξάνοντας σημαντικά τις υπολογιστικές απαιτήσεις σε μνήμη και χρόνο, ενώ παρά τις τεχνικές όπως τα PML, η σωστή αντιμετώπιση των ανοικτών συνόρων (π.χ., ελεύθερος χώρος) παραμένει πρόκληση, καθώς μπορεί να προκύψουν τεχνητές ανακλάσεις που επηρεάζουν την ακρίβεια των αποτελεσμάτων.

Κεφάλαιο 2

Θεωρία

2.1 ΗΜ Πεδίο σε Ομοιογενές Μέσο

Το ΗΜ πεδίο περιγράφεται κλασικά από τις τέσσερις μακροσκοπικές εξισώσεις του Maxwell. Στο σύστημα SI οι εξισώσεις γράφονται ως:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (2.4)$$

Συμβολίζονται με \mathbf{D} η ηλεκτρική μετατόπιση, \mathbf{B} η μαγνητική επαγωγή, \mathbf{E} το ηλεκτρικό πεδίο και \mathbf{H} το μαγνητικό πεδίο. Με ρ και \mathbf{j} συμβολίζονται οι πυκνότητες φορτίου και ρεύματος αντιστοίχως.

Αρχικά θα μας απασχολήσουν υλικά τα οποία μπορούν να θεωρηθούν ομοιογενή και ισότροπα. Επίσης θα μελετήσουμε σχετικά ασθενή πεδία ώστε να αγνοηθούν φαινόμενα μη γραμμικότητας. Ζητούμε έτσι λύσεις των εξισώσεων του Maxwell απουσία ελεύθερων φορτίων και ρευμάτων, της μορφής μονοχρωματικών αρμονικών κυμάτων συχνότητας ω , δηλαδή πεδία που έχουν την μορφή:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{Re}[\mathbf{F}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)] \quad (2.5)$$

Στο εύρος συχνοτήτων που θα μελετήσουμε το μήκος κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας θα είναι πολύ μεγαλύτερο από την πλεγματική σταθερά του υλικού και τη μέση ελεύθερη διαδρομή σκέδασης των ηλεκτρονίων. Μπορούμε άρα να υποθέσουμε ότι η ηλεκτρική μετατόπιση $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ και η μαγνητική επαγωγή $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ εξαρτώνται αντιστοίχως από το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο βάσει των τοπικών καταστατικών εξισώσεων της μορφής:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.6)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (2.7)$$

όπου ϵ και μ η σχετική διηλεκτρική επιδεκτικότητα και η σχετική μαγνητική διαπερατότητα του υλικού αντιστοίχως. οι οποίες μπορούν να εξαρτώνται από τη συχνότητα του πεδίου,

ϵ_0 και μ_0 είναι η διηλεκτρική επιδεκτικότητα και η μαγνητική διαπερατότητα του κενού, αντίστοιχα, και συνδέονται μέσω της ταχύτητάς του φωτός c βάσει της σχέσης $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. Με βάση τα παραπάνω οι εξισώσεις του Maxwell [Εξ. (2.1)-(2.4)] μετασχηματίζονται ως εξής:

$$\epsilon \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.8)$$

$$\mu \nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mu_0\mu\mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (2.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -i\omega\epsilon_0\epsilon\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.11)$$

Τέλος, απαλείφοντας το μαγνητικό πεδίο $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ προκύπτουν οι διανυσματικές κυματικές εξισώσεις του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου $\mathbf{E}(\mathbf{r})$:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + q^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.12)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) + q^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.13)$$

όπου $q = \omega\sqrt{\epsilon\mu}/c$. Ένα πλήρες σύνολο λύσεων της Εξ.(2.12) αποτελούν τα επίπεδα κύματα

$$\mathbf{E}_{\mathbf{q}p}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{q}) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}), \quad (2.14)$$

με $\mathbf{E}_0(\mathbf{q}) = E_0(\mathbf{q})\hat{\mathbf{e}}_p$, όπου $\hat{\mathbf{e}}_p(\mathbf{q})$, $p = 0, 1, 2$ συμβολίζουν το ακτινικό, πολικό και αζιμουθιακό μοναδιαίο διάνυσμα, αντίστοιχα για ένα δεδομένο κυματόνυσμα \mathbf{q} , και καθορίζουν την πόλωση. Σημειώνεται ότι το διάμηκες κύμα $\hat{\mathbf{e}}_0(\mathbf{q}) = \hat{\mathbf{q}}$ αποτελεί λύση μόνο αν $\omega = 0$, ή αν $\epsilon\mu = 0$, επομένως δεν συνιστά οδεύον κύμα. Μολονότι οι τετριμμένες διαμήκεις λύσεις δεν υπεισέρχονται στην έκφραση ενός εγκάρσιου ΗΜ κύματος δεδομένης συχνότητας $\omega \neq 0$, αποτελούν εντούτοις ουσιώδεις μαθηματικές λύσεις της κυματικής εξίσωσης.

Εναλλακτικά, οι λύσεις της κυματικής εξίσωσης (2.12) μπορούν να αναπτυχθούν σε μια πλήρη βάση διανυσματικών σφαιρικών κυμάτων για δεδομένο q . Η βάση αυτή περιλαμβάνει:

(α) Διαμήκεις κυματοσυναρτήσεις ($\nabla \times \mathbf{F}_{Llm} = 0$)

$$\mathbf{F}_{Llm}(\mathbf{r}) = \frac{1}{q} \nabla [f_l(qr)Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})], \quad l = 0, 1, 2, \dots; m = -l, \dots, l, \quad (2.15)$$

όπου Y_{lm} είναι οι συνήθεις σφαιρικές αρμονικές (βλ. Παράρτημα Α) και f_l είναι οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός των σφαιρικών συναρτήσεων Hankel και Bessel, h_l^+ και j_l αντίστοιχως (βλ. Παράρτημα Β).

(β) εγκάρσιες κυματοσυναρτήσεις ($\nabla \cdot \mathbf{F}_{Hlm} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{F}_{Elm} = 0$):

$$\mathbf{F}_{Hlm}(\mathbf{r}) = f_l(qr)\mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}), \quad l = 1, 2, \dots; m = -l, \dots, l \quad (2.16)$$

και

$$\mathbf{F}_{Elm}(\mathbf{r}) = \frac{i}{q} \nabla \times [f_l(qr)\mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}})], \quad l = 1, 2, \dots; m = -l, \dots, l \quad (2.17)$$

όπου \mathbf{X}_{lm} είναι οι διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές. Οι διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές \mathbf{X}_{lm} ορίζονται ως εξής (βλ. Παράρτημα Α):

$$\mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \hat{\mathbf{L}} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}), \quad l \neq 0 \quad (2.18)$$

$$\mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = 0, \quad l = 0 \quad (2.19)$$

όπου $\hat{\mathbf{L}} = -i(\mathbf{r} \times \nabla)$ ο διαφορικός τελεστής της στροφορμής. Οι διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές γράφονται στις σφαιρικές συντεταγμένες ως εξής:

$$\mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \left[-\frac{m}{\sin \theta} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \hat{\boldsymbol{\theta}} - i \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \hat{\boldsymbol{\phi}} \right] \quad (2.20)$$

Επίσης οι διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές υπακούουν στις εξής σχέσεις ορθογωνιότητας:

$$\int d\hat{\mathbf{r}} \mathbf{X}_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (2.21)$$

$$\int d\hat{\mathbf{r}} [\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{r}})] \cdot \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = 0 \quad (2.22)$$

Το σύνολο των διανυσματικών σφαιρικών κυμάτων [Εξ.(2.16),(2.17)] αποτελεί πλήρη βάση ανάπτυξης οποιουδήποτε διανυσματικού πεδίου. Οι διανυσματικές σφαιρικές κυματοσυναρτήσεις ικανοποιούν τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F}_{Llm}(\mathbf{r}) &= -q f_l(qr) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \\ \nabla \times \mathbf{F}_{Hlm}(\mathbf{r}) &= -iq \mathbf{F}_{Elm}(\mathbf{r}) \\ \nabla \times \mathbf{F}_{Elm}(\mathbf{r}) &= iq \mathbf{F}_{Hlm}(\mathbf{r}) \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{F}_{Hlm}(\mathbf{r}) &= q^2 \mathbf{F}_{Hlm}(\mathbf{r}) \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{F}_{Elm}(\mathbf{r}) &= q^2 \mathbf{F}_{Elm}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.23)$$

καθώς και τις σχέσεις ορθογωνιότητας.

Η ιδιότητα $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ σημαίνει ότι το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να αναπτυχθεί στη βάση των εγχάρσιων κυματοσυναρτήσεων \mathbf{F}_{Hlm} και \mathbf{F}_{Elm} , χωρίς να υπεισέρχονται οι \mathbf{F}_{Llm} . Γράφουμε λοιπόν τη λύση της κυματικής εξίσωσης (2.12) ως εξής

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l [a_{Hlm} \mathbf{F}_{Hlm}(\mathbf{r}) + a_{Elm} \mathbf{F}_{Elm}(\mathbf{r})], \quad (2.24)$$

όπου a_{Hlm} και a_{Elm} συντελεστές που έχουν διαστάσεις ηλεκτρικού πεδίου.

Έστω τώρα ένα εγχάρσιο επίπεδο κύμα της μορφής (2.14). Δεδομένου ότι ένα τέτοιο κύμα είναι πεπερασμένο παντού στο χώρο, η πολυπολική του ανάπτυξη σε σφαιρικά κύματα δεν μπορεί παρά να περιέχει μόνο τις j_l που είναι πεπερασμένες παντού στο χώρο (βλ. Παράρτημα Β). Επομένως

$$\mathbf{E}_{qp}(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \left[a_{Hlm}^0 j_l(qr) \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) + \frac{i}{q} a_{Elm}^0 \nabla \times j_l(qr) \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \right] \quad (2.25)$$

και

$$\mathbf{H}_{\mathbf{q}P}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 \mu}} \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \left[-\frac{i}{q} a_{Hlm}^0 \nabla \times j_l(qr) \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) + a_{Elm}^0 j_l(qr) \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \right]. \quad (2.26)$$

Γράφουμε του συντελεστές a_{Plm}^0 , $P = H, E$ στη μορφή

$$a_{Plm}^0 = \mathbf{A}_{Plm}^0(\hat{\mathbf{q}}) \mathbf{E}_0(\mathbf{q}), \quad (2.27)$$

με τα διανύσματα \mathbf{A}_{Plm}^0 να ορίζονται στο επίπεδο των $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$. Αντικαθιστώντας στην Εξ.(2.25) και κάνοντας χρήση του αναπτύγματος [2]

$$\exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) = 4\pi \sum_{lm} i^l j_l(qr) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{q}}) \quad (2.28)$$

καθώς και σχέσεων του Παραρτήματος Α, καταλήγουμε στις ακόλουθες εκφράσεις για τα \mathbf{A}_{Plm}^0

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{Hlm}^0(\hat{\mathbf{q}}) &= \frac{4\pi i^l (-1)^{m+1}}{\psi_l} \\ &\times \left\{ [\alpha_l^m \cos \theta e^{i\phi} Y_{l-m-1}(\hat{\mathbf{q}}) + m \sin \theta Y_{l-m}(\hat{\mathbf{q}}) \right. \\ &+ \alpha_l^{-m} \cos \theta e^{-i\phi} Y_{l-m+1}(\hat{\mathbf{q}})] \hat{\mathbf{e}}_1(\mathbf{q}) \\ &+ i [\alpha_l^m e^{i\phi} Y_{l-m-1}(\hat{\mathbf{q}}) - \alpha_l^{-m} e^{-i\phi} Y_{l-m+1}(\hat{\mathbf{q}})] \hat{\mathbf{e}}_2(\mathbf{q}) \left. \right\} \\ &= 4\pi i^l (-1)^{m+1} \mathbf{X}_{l-m}(\hat{\mathbf{q}}) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{Elm}^0(\hat{\mathbf{q}}) &= \frac{4\pi i^l (-1)^{m+1}}{\psi_l} \\ &\times \left\{ i [\alpha_l^m e^{i\phi} Y_{l-m-1}(\hat{\mathbf{q}}) - \alpha_l^{-m} e^{-i\phi} Y_{l-m+1}(\hat{\mathbf{q}})] \hat{\mathbf{e}}_1(\mathbf{q}) \right. \\ &- [\alpha_l^m \cos \theta e^{i\phi} Y_{l-m-1}(\hat{\mathbf{q}}) + m \sin \theta Y_{l-m}(\hat{\mathbf{q}}) \\ &+ \alpha_l^{-m} \cos \theta e^{-i\phi} Y_{l-m+1}(\hat{\mathbf{q}})] \hat{\mathbf{e}}_2(\mathbf{q}) \left. \right\} \\ &= 4\pi i^l (-1)^{m+1} \mathbf{X}_{l-m}(\hat{\mathbf{q}}) \times \hat{\mathbf{q}}, \end{aligned}$$

όπου $\psi = \sqrt{l(l+1)}$, $\alpha_l^m = [(l-m)(l+m+1)]^{1/2}/2$, θ, ϕ είναι οι γωνιακές μεταβλητές του \mathbf{q} και $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ είναι, θυμίζουμε, το πολικό και αξιμουθιακό μοναδιαίο διάνυσμα, αντιστοίχως, που είναι κάθετα στο \mathbf{q} στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων. Σημειώνουμε ότι η συνιστώσα z του κυματανύσματος, q_z , μπορεί να είναι πραγματική ή φανταστική. Στη δεύτερη περίπτωση το $\cos \theta$ στις εκφράσεις των $Y_{lm}(\hat{\mathbf{q}})$ (βλ. Παράρτημα Α) αντικαθίσταται από το q_z/q .

2.2 Λύσεις της κυματικής εξίσωσης σε γυροηλεκτρικά ομοιογενή μέσα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα περιγράψουμε το Η.Μ. πεδίο σε γυροηλεκτρικό (ανιστροπικό) μέσο του οποίου η σχετική διηλεκτρική σταθερά ϵ_g περιγράφεται από έναν ταυστή

$$\boldsymbol{\epsilon}_g = \epsilon_z \begin{pmatrix} \epsilon_r & -i\epsilon_\kappa & 0 \\ i\epsilon_\kappa & \epsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

παρουσία ενός στατικού εξωτερικού μαγνητικού πεδίου κατά τον άξονα z , και μια βαθμωτή μαγνητική διαπερατότητα μ_g . Ξεκινώντας από τις εξισώσεις Maxwell για το χωρικό μέρος ενός μονοχρωματικού HM πεδίου γωνιακής συχνότητας ω σε ένα τέτοιο μέσο χωρίς πηγές: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$, $\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mathbf{B}$, $\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\mathbf{D}$ και τις καταστατικές εξισώσεις $\mathbf{B} = \mu_0\mu_g\mathbf{H}$ και $\mathbf{D} = \epsilon_0\boldsymbol{\epsilon}_g\mathbf{E}$, καταλήγουμε στην κυματική εξίσωση

$$\nabla \times \nabla \times [\boldsymbol{\epsilon}_z\boldsymbol{\epsilon}_g^{-1}\mathbf{D}(\mathbf{r})] - q_g^2\mathbf{D}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.30)$$

όπου $q_g^2 = \omega^2\epsilon_z\mu_g\epsilon_0\mu_0 = \epsilon_z\mu_g\omega_2/c^2$.

Θα λύσουμε την Εξ.(2.30) αναπτύσσοντας το κυματικό πεδίο στη συγκεκριμένη βάση διανυσματικών σφαιρικών κυμάτων που ορίσαμε με τις Εξ.(2.15), (2.16) και (2.17). Η ιδιότητα $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ σημαίνει ότι η ηλεκτρική μετατόπιση μπορεί να αναπτυχθεί στη βάση των εγκάρσιων κυματοσυναρτήσεων \mathbf{F}_{Hlm} και \mathbf{F}_{Elm} , χωρίς να υπεισέρχονται οι \mathbf{F}_{Llm} . Γράφουμε τη λύση της Εξ.(2.30) ως εξής

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \frac{q^2}{q_g^2}\epsilon_0\epsilon_z \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [a_{Hlm}\mathbf{F}_{Hlm}(\mathbf{r}) + a_{Elm}\mathbf{F}_{Elm}(\mathbf{r})] \quad (2.31)$$

όπου a_{Hlm} και a_{Elm} είναι κατάλληλοι συντελεστές με διαστάσεις ηλεκτρικού πεδίου. Ο παράγοντας $q^2\epsilon_0\epsilon_z/q_g^2$ είναι, προς το παρόν, αυθαίρετος. Εισάγεται όμως εδώ γιατί έτσι θα καταλήξουμε, όπως θα δούμε αργότερα, σε μια απλή μορφή για τις μαγνητικές και ηλεκτρικές πολυπολικές συνιστώσες του HM πεδίου, ίδια με αυτή που έχουμε στην περίπτωση απλών ιστροπικών υλικών. Μπορεί ναδειχθεί ότι

$$\begin{aligned} \epsilon_z\boldsymbol{\epsilon}_g^{-1}\mathbf{D}(\mathbf{r}) &= \frac{q^2}{q_g^2}\epsilon_0\epsilon_z\bar{w}_{00}\mathbf{F}_{L00}(\mathbf{r}) \\ &+ \frac{q^2}{q_g^2}\epsilon_0\epsilon_z \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [\bar{w}_{lm}\mathbf{F}_{Llm}(\mathbf{r}) + \bar{d}_{lm}\mathbf{F}_{Hlm}(\mathbf{r}) + \bar{c}_{lm}\mathbf{F}_{Elm}(\mathbf{r})] \end{aligned} \quad (2.32)$$

για

$$\bar{w}_{00} = -\sqrt{\frac{2}{3}}\epsilon'_\kappa a_{H10} - \sqrt{\frac{2}{15}}\epsilon'_r a_{E20} \quad (2.33)$$

$$\bar{w}_{lm} = \sum_{l'=1}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} \left(\tilde{f}_{lm}^{l'm'} a_{Hl'm'} + \bar{f}_{lm}^{l'm'} a_{El'm'} \right) \quad (2.34)$$

$$\bar{d}_{lm} = \sum_{l'=1}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} \left(\tilde{g}_{lm}^{l'm'} a_{Hl'm'} + \bar{g}_{lm}^{l'm'} a_{El'm'} \right) \quad (2.35)$$

$$\bar{c}_{lm} = \sum_{l'=1}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} \left(\tilde{e}_{lm}^{l'm'} a_{Hl'm'} + \bar{e}_{lm}^{l'm'} a_{El'm'} \right) \quad (2.36)$$

με $\bar{\epsilon}'_r = \epsilon'_r - 1$, $\epsilon'_r = \epsilon_r / (\epsilon_r^2 - \epsilon_\kappa^2)$, $\epsilon'_\kappa = -\epsilon_\kappa / (\epsilon_r^2 - \epsilon_\kappa^2)$. Αναλυτικές εκφράσεις για τους συντελεστές \tilde{f}'_{lm} , \bar{f}'_{lm} , \tilde{g}'_{lm} , \bar{g}'_{lm} , \tilde{e}'_{lm} , \bar{e}'_{lm} βρίσκονται στις Αναφ. [3, 4].

Αντικαθιστώντας τις Εξ.(2.31) και (2.32) στην κυματική εξίσωση (2.30) και λαμβάνοντας υπόψη τις Εξ.(2.24) καταλήγουμε στη σχέση

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[(q^2 \bar{d}_{lm} - q_g^2 a_{Hlm}) \mathbf{F}_{Hlm}(\mathbf{r}) + (q^2 \bar{c}_{lm} - q_g^2 a_{Elm}) \mathbf{F}_{Elm}(\mathbf{r}) \right] = 0 \quad (2.37)$$

η οποία δίνει την εξίσωση ιδιοτιμών

$$\sum_{P'=H,E} \sum_{l'=1}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} A_{Plm;P'l'm'} a_{P'l'm'} = \frac{q_g^2}{q^2} a_{Plm} \quad (2.38)$$

όπου $A_{Hlm;H'l'm'} = \tilde{g}'_{lm}$, $A_{Hlm;E'l'm'} = \bar{g}'_{lm}$, $A_{Elm;H'l'm'} = \tilde{e}'_{lm}$, $A_{Elm;E'l'm'} = \bar{e}'_{lm}$. Αφού η Εξ.(2.30) ικανοποιείται αν η ηλεκτρική μετατόπιση έχει τη μορφή της Εξ.(2.31) με τους συντελεστές του αναπτύγματος να δίνονται από κάθε $j = 1, 2, \dots$ ιδιοδύνασμα $a_{Plm;j}$ του πίνακα A και διανυσματικά σφαιρικά κύματα κυματαριθμού q_j που ορίζεται από την αντίστοιχη ιδιοτιμή, η γενική λύση της ηλεκτρικής μετατόπισης παίρνει την μορφή

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \sum_j b_j \frac{q_j^2}{q_g^2} \epsilon_0 \epsilon_z \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [a_{Hlm;j} \mathbf{F}_{Hlm}(\mathbf{r}) + a_{Elm;j} \mathbf{F}_{Elm}(\mathbf{r})], \quad (2.39)$$

με τους συντελεστές του αναπτύγματος b_j να ορίζονται από τις συνοριακές συνθήκες.

Με την ηλεκτρική μετατόπιση να δίνεται από την Εξ.(2.39), χρησιμοποιώντας τις καταστατικές εξισώσεις, τις Εξ.(2.32) έως (2.38) και την εξίσωση Maxwell $\mathbf{H} = \frac{-i}{\omega \mu_0 \mu_g} \nabla \times \mathbf{E}$ προκύπτει ότι το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο παίρνουν αντιστοίχως την μορφή

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & \sum_j b_j \left\{ \frac{q_j^2}{q_g^2} \bar{w}_{00;j} \mathbf{F}_{L00}(\mathbf{r}) \right. \\ & \left. + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[\frac{q_j^2}{q_g^2} w_{lm;j} \mathbf{F}_{Llm}(\mathbf{r}) + a_{Hlm;j} \mathbf{F}_{Hlm}(\mathbf{r}) + a_{Elm;j} \mathbf{F}_{Elm}(\mathbf{r}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.40)$$

και

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \sum_j b_j \frac{q_j}{\omega \mu_0 \mu_g} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [a_{Elm;j} \mathbf{F}_{Hlm}(\mathbf{r}) - a_{Hlm;j} \mathbf{F}_{Elm}(\mathbf{r})] \quad (2.41)$$

όπου

$$\bar{w}_{lm;j} = \sum_{l'=1}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} \left(\tilde{f}'_{lm} a_{Hl'm';j} + \bar{f}'_{lm} a_{El'm';j} \right)$$

και

$$\bar{w}_{00;j} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \epsilon'_\kappa a_{H10;j} - \sqrt{\frac{2}{15}} \bar{\epsilon}'_r a_{E20;j}$$

2.3 Πίνακας σκέδασης T για ομοιογενή και ισοτροπικό σφαιρικό σκεδαστή

Έστω σφαιρικό σωματίδιο ακτινας S , διηλεκτρικής συναρτησης ϵ_1 και μαγνητικής διαπερατότητας μ_1 . Οι αντιστοιχες τιμές του περιβάλλοντος χώρου είναι ϵ και μ αντιστοίχως. Το ηλεκτρικό πεδίο του προσπίπτοντος κύματος θα αναπτυχθεί σε συναρτήσεις Bessel ώστε να είναι πεπερασμένο στο εσωτερικό της σφαίρας. Το ηλεκτρικό πεδίο του σκεδαζόμενου κύματος θα αναπτυχθεί σε συναρτήσεις Hankel για να συγκλίνει στο άπειρο. Με συνδυασμό των παραπάνω προκύπτουν οι εξής εξισώσεις για τα ηλεκτρικά πεδία των προσπίπτοντων και σκεδαζόμενων κυμάτων:

$$\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \left[\frac{i}{q} a_{Elm}^0 \nabla \times j_l(qr) \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) + a_{Hlm}^0 j_l(qr) \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \right]. \quad (2.42)$$

$$\mathbf{E}_{\text{sc}}(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \left[\frac{i}{q} a_{Elm}^+ \nabla \times h_l^+(qr) \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) + a_{Hlm}^+ h_l^+(qr) \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \right] \quad (2.43)$$

Στο εσωτερικό του υλικού το ηλεκτρικό πεδίο θα έχει την ίδια μορφή με το αυτή του προσπίπτοντος, με τις αντίστοιχες μεταβλητές a_{Elm} , a_{Hlm} και q που καθορίζονται απο τα χαρακτηριστικά του υλικού. Οπότε προκύπτει

$$\mathbf{E}_{\text{mat}}(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \left[\frac{i}{q_{\text{mat}}} a_{Elm}^{\text{mat}} \nabla \times j_l(q_{\text{mat}}r) \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) + a_{Hlm}^{\text{mat}} j_l(q_{\text{mat}}r) \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \right] \quad (2.44)$$

Με χρήση της συνθήκης συνέχειας στο όριο της επιφάνειας του υλικού, δηλαδή για $r = S$ προκύπτουν οι εξής σχέσεις για το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{E}_{\text{mat}}(\mathbf{r}) &= \mathbf{X}_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{E}_{\text{out}}(\mathbf{r}) \\ [\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}})] \cdot \mathbf{E}_{\text{mat}}(\mathbf{r}) &= [\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}})] \cdot \mathbf{E}_{\text{out}}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{X}_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{H}_{\text{mat}}(\mathbf{r}) &= \mathbf{X}_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{H}_{\text{out}}(\mathbf{r}) \\ [\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}})] \cdot \mathbf{H}_{\text{mat}}(\mathbf{r}) &= [\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}})] \cdot \mathbf{H}_{\text{out}}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.45)$$

όπου $\mathbf{E}_{\text{out}} = \mathbf{E}_{\text{sc}} + \mathbf{E}_0$ και $\mathbf{H}_{\text{out}} = \mathbf{H}_{\text{sc}} + \mathbf{H}_0$. Καταλήγουμε έτσι στις παρακάτω λύσεις:

$$a_{Elm}^+ = T_{El} a_{Elm}^0 \quad (2.46)$$

$$a_{Hlm}^+ = T_{Hl} a_{Hlm}^0 \quad (2.47)$$

Όπου T_{El} και T_{Hl} :

$$T_{El} = \left[\frac{j_l(q_{\text{mat}}r) \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(qr)] \epsilon_1 - j_l(qr) \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(q_{\text{mat}}r)] \epsilon}{h_l^+(qr) \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(q_{\text{mat}}r)] \epsilon - j_l(q_{\text{mat}}r) \frac{\partial}{\partial r} [r h_l^+(qr)] \epsilon_1} \right]_{r=S} \quad (2.48)$$

$$T_{Hl} = \left[\frac{j_l(q_{\text{mat}}r) \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(qr)] \mu_1 - j_l(qr) \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(q_{\text{mat}}r)] \mu}{h_l^+(qr) \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(q_{\text{mat}}r)] \mu - j_l(q_{\text{mat}}r) \frac{\partial}{\partial r} [r h_l^+(qr)] \mu_1} \right]_{r=S} \quad (2.49)$$

Οι πίνακες T_{El} και T_{Hl} αποτελούν τους πίνακες σκέδασης για ένα σφαιρικό σωματίδιο. Όταν το q δεν είναι πολύ μεγαλύτερο της μονάδας το σκεδαζόμενο πεδίο μπορεί να υπολογιστεί

με μεγάλη ακρίβεια για $l < l_{max}$. Συγκεκριμένα, όπως θα δούμε στα προβλήματα που θα επιλυθούν παρακάτω, αναλόγως με ποιούς συντονισμούς θέλουμε να μελετήσουμε συχνά μπορούμε να λαβούμε ακριβή λύση για $1 \leq l \leq 3$.

2.4 Πίνακας Γ για σφαιρικό πολυστρωματικό (α-νομοιογενή) σκεδαστή

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τους πίνακες Γ που προκύπτουν για έναν πολυστρωματικό σφαιρικό σκεδαστή. Το πεδίο στον πυρήνα του σκεδαστή είναι πεπερασμένο άρα αναπτύσσεται αμιγώς σε συναρτήσεις Bessel $j_l(x)$. Όμως για όλα τα υπόλοιπα επίπεδα το πεδίο θα περιγράφεται ως άθροισμα συναρτήσεων τόσο Bessel όσο και Hankel λόγω των σκεδαζόμενων κυμάτων από τους προηγούμενους φλοιούς. Οπότε για πολυστρωματικό σκεδαστή N στρωμάτων και ακτίνες $S_n, 1 \leq n \leq N$, το πεδίο περιγράφεται όπως θα περιγράψουμε παρακάτω. Συγκεκριμένα, στον πυρήνα θα είναι:

$$\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[\frac{i}{q_1} a_{Elm}^{0(1)} \nabla \times j_l(q_1 r) \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) + a_{Hlm}^{0(1)} j_l(q_1 r) \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \right] \quad (2.50)$$

$$\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_1}{\mu_0 \mu_1}} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[a_{Elm}^{0(1)} j_l(q_1 r) \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) - \frac{i}{q_1} a_{Hlm}^{0(1)} \nabla \times j_l(q_1 r) \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \right] \quad (2.51)$$

και στα λοιπά στρωματα, συμπεριλαμβανομένου του πεδίο έξω από τον σκεδαστή που περιγράφεται από τον δείκτη $N + 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(n)}(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l & \left[\frac{i}{q_n} a_{Elm}^{0(n)} \nabla \times j_l(q_n r) \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) + a_{Hlm}^{0(n)} j_l(q_n r) \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) + \right. \\ & \left. + \frac{i}{q_n} a_{Elm}^{+(n)} \nabla \times h_l^+(q_n r) \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) + a_{Hlm}^{+(n)} h_l^+(q_n r) \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \right] \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{(n)}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_n}{\mu_0 \mu_n}} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l & \left[a_{Elm}^{0(n)} j_l(q_n r) \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) - \right. \\ & - \frac{i}{q_n} a_{Hlm}^{0(n)} \nabla \times j_l(q_n r) \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) + a_{Elm}^{+(n)} h_l^+(q_n r) \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) - \\ & \left. - \frac{i}{q_n} a_{Hlm}^{+(n)} \nabla \times h_l^+(q_n r) \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \right] \end{aligned} \quad (2.53)$$

Με χρήση της συνθήκης συνέχειας στις διαχωριστικές επιφάνειες των φλοιών, δηλαδή για $r = S_n$, προκύπτουν οι εξής σχέσεις για το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο σε αυτές:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{E}^{(n)}(\mathbf{r}) &= \mathbf{X}_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{E}^{(n+1)}(\mathbf{r}) \\ [\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}})] \cdot \mathbf{E}^{(n)}(\mathbf{r}) &= [\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}})] \cdot \mathbf{E}^{(n+1)}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{X}_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{H}^{(n)}(\mathbf{r}) &= \mathbf{X}_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{H}^{(n+1)}(\mathbf{r}) \\ [\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}})] \cdot \mathbf{H}^{(n)}(\mathbf{r}) &= [\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}})] \cdot \mathbf{H}^{(n+1)}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.54)$$

Και τα αντίστοιχα πλάτη των πεδίων είναι:

$$\begin{aligned} a_{Elm}^{+(n+1)} &= T_{El}^{(n)} a_{Elm}^{0(n+1)} \\ a_{Hlm}^{+(n+1)} &= T_{Hl}^{(n)} a_{Hlm}^{0(n+1)} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Τέλος, οι πίνακες του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου παίρνουν την μορφή:

$$T_{El}^{(n)} = \frac{A_E^{(n,n+1)} + T_{El}^{(n-1)} \cdot B_E^{(n,n+1)}}{\Gamma_E^{(n,n+1)} + T_{El}^{(n-1)} \cdot \Delta_E^{(n,n+1)}} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} A_E^{(n,n+1)} &= j_l(q_n r) \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(q_{n+1} r)] \epsilon_n - j_l(q_{n+1} r) \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(q_n r)] \epsilon_{n+1} \\ B_E^{(n,n+1)} &= h_l^+(q_n r) \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(q_{n+1} r)] \epsilon_n - j_l(q_{n+1} r) \frac{\partial}{\partial r} [r h_l^+(q_n r)] \epsilon_{n+1} \\ \Gamma_E^{(n,n+1)} &= h_l^+(q_{n+1} r) \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(q_n r)] \epsilon_{n+1} - j_l(q_n r) \frac{\partial}{\partial r} [r h_l^+(q_{n+1} r)] \epsilon_n \\ \Delta_E^{(n,n+1)} &= h_l^+(q_{n+1} r) \frac{\partial}{\partial r} [r h_l^+(q_n r)] \epsilon_{n+1} - h_l^+(q_n r) \frac{\partial}{\partial r} [r h_l^+(q_{n+1} r)] \epsilon_n \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$T_{Hl}^{(n)} = \frac{A_H^{(n,n+1)} + T_{Hl}^{(n-1)} \cdot B_H^{(n,n+1)}}{\Gamma_H^{(n,n+1)} + T_{Hl}^{(n-1)} \cdot \Delta_H^{(n,n+1)}} \quad (2.58)$$

για

$$\begin{aligned} A_H^{(n,n+1)} &= j_l(q_n r) \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(q_{n+1} r)] \mu_n - j_l(q_{n+1} r) \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(q_n r)] \mu_{n+1} \\ B_H^{(n,n+1)} &= h_l^+(q_n r) \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(q_{n+1} r)] \mu_n - j_l(q_{n+1} r) \frac{\partial}{\partial r} [r h_l^+(q_n r)] \mu_{n+1} \\ \Gamma_H^{(n,n+1)} &= h_l^+(q_{n+1} r) \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(q_n r)] \mu_{n+1} - j_l(q_n r) \frac{\partial}{\partial r} [r h_l^+(q_{n+1} r)] \mu_n \\ \Delta_H^{(n,n+1)} &= h_l^+(q_{n+1} r) \frac{\partial}{\partial r} [r h_l^+(q_n r)] \mu_{n+1} - h_l^+(q_n r) \frac{\partial}{\partial r} [r h_l^+(q_{n+1} r)] \mu_n \end{aligned} \quad (2.59)$$

Παρατηρούμε ότι για $n = 1$, δηλαδή για τον απλό σφαιρικό σκεδαστή, λαμβάνουμε τις σχέσεις για την ομοιογενή σφαίρα όπως αναμενόταν.

2.5 Πίνακας T για ανισοτροπικό (γυροηλεκτρικό) σφαιρικό σκεδαστή

Έστω γυροηλεκτρικός σφαιρικός σκεδαστής ακτίνας S , με διηλεκτρικό ταυυστή ϵ_g , σχετική μαγνητική διαπερατότητα μ_g σε ομοιογενές περιβάλλον με σχετική ηλεκτρική και μαγνητική σταθερά ϵ και μ αντιστοίχως. Για προσπίπτουσα ακτινοβολία επίπεδου μονοχρωματικού κύματος το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του σκεδαστή είναι αντιστοίχως, σύμφωνα με τις Εξ.(2.40),(2.41), το πεδίο στο εσωτερικό της σφαίρας γράφεται

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{in}(\mathbf{r}) = & \sum_j b_j \left\{ \frac{q_j^2}{q_g^2} \bar{w}_{00;j} \frac{1}{q_j} \nabla [j_0(q_j r) Y_{00}(\hat{r})] \right. \\
& + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[\frac{q_j^2}{q_g^2} w_{lm;j} \frac{1}{q_j} \nabla [j_l(q_j r) Y_{lm}(\hat{r})] + a_{Hlm;j} j_l(q_j r) \mathbf{X}_{lm}(\hat{r}) \right. \\
& \left. \left. + a_{Elm;j} \frac{i}{q_j} \nabla \times j_l(q_j r) \mathbf{X}_{lm}(\hat{r}) \right] \right\} \quad (2.60)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{H}_{in}(\mathbf{r}) = \sum_j b_j \frac{q_j}{\omega \mu_0 \mu_g} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[a_{Elm;j} j_l(q_j r) \mathbf{X}_{lm}(\hat{r}) - a_{Hlm;j} \frac{i}{q_j} \nabla \times j_l(q_j r) \mathbf{X}_{lm}(\hat{r}) \right] \quad (2.61)$$

Το ηλεκτρικό πεδίο στον περιβάλλοντα χώρο, προκύπτει ως το άθροισμα του προσπίπτοντος κύματος και του σχεδαζόμενου κύματος, και συνεπώς είναι της μορφής

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{out}(\mathbf{r}) = & \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[a_{0Hlm} j_l(qr) \mathbf{X}_{lm}(\hat{r}) + \frac{i}{q} a_{0Elm} \nabla \times j_l(qr) \mathbf{X}_{lm}(\hat{r}) \right. \\
& \left. + a_{Hlm}^+ h_l^+(qr) \mathbf{X}_{lm}(\hat{r}) + \frac{i}{q} a_{Elm}^+ \nabla \times h_l^+(qr) \mathbf{X}_{lm}(\hat{r}) \right] \quad (2.62)
\end{aligned}$$

όπου $q = \omega \sqrt{\epsilon \mu} / c$

Με χρήση των συνοριακών συνθηκών λαμβάνουμε τις εξής εξισώσεις

$$a_{Hlm}^0 = -\frac{h_l^+(qS)}{j_l(qS)} a_{Hlm}^+ + \sum_j \frac{j_l(q_j S)}{j_l(qS)} a_{Hlm;j} b_j \quad (2.63)$$

$$a_{Elm}^0 = -\frac{h_l^+(qS)}{j_l(qS)} a_{Elm}^+ + \sum_j \frac{\mu q_j j_l(q_j S)}{\mu_g q j_l(qS)} a_{Elm;j} b_j \quad (2.64)$$

$$a_{Hlm}^0 = -\frac{[x h_l^+(x)]'_{qS}}{[x j_l(x)]'_{qS}} a_{Hlm}^+ + \sum_j \frac{\mu [x j_l(x)]'_{q_j S}}{\mu_g [x j_l(x)]'_{qS}} a_{Hlm;j} b_j \quad (2.65)$$

$$a_{Elm}^0 = -\frac{[x h_l^+(x)]'_{qS}}{[x j_l(x)]'_{qS}} a_{Elm}^+ + \sum_j \left\{ \frac{q [x j_l(x)]'_{q_j S}}{q_j [x j_l(x)]'_{qS}} a_{Elm;j} - \frac{\sqrt{l(l+1)} q_j q j_l(q_j S)}{q_g^2 [x j_l(x)]'_{q_g S}} \bar{w}_{lm;j} \right\} b_j \quad (2.66)$$

οι οποίες μπορούν να γραφούν με την μορφή πινάκων

$$\mathbf{a}^0 = \Lambda \mathbf{a}^+ + \mathbf{U} \mathbf{b} \quad (2.67)$$

$$\mathbf{a}^0 = \Lambda' \mathbf{a}^+ + \mathbf{V} \mathbf{b} \quad (2.68)$$

όπου

$$\Lambda_{Plm;P'l'm'} = -\frac{h_l^+(qS)}{j_l(qS)} \delta_{PP'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (2.69)$$

$$\Lambda'_{Plm;P'l'm'} = -\frac{[xh_l^+(x)]'_{qS}}{[xj_l(x)]'_{qS}} \delta_{PP'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (2.70)$$

$$U_{Hlm;j} = \frac{j_l(q_j S)}{j_l(qS)} a_{Hlm;j} \quad (2.71)$$

$$U_{Elm;j} = \frac{\mu q_j j_l(q_j S)}{\mu_g q j_l(qS)} a_{Elm;j} \quad (2.72)$$

$$V_{Hlm;j} = \frac{\mu [xj_l(x)]'_{q_j S}}{\mu_g [xj_l(x)]'_{qS}} a_{Hlm;j} \quad (2.73)$$

$$V_{Elm;j} = \frac{q [xj_l(x)]'_{q_j S}}{q_j [xj_l(x)]'_{qS}} a_{Elm;j} - \sqrt{l(l+1)} \frac{q_j q j_l(q_j S)}{q_g^2 [xj_l(x)]'_{qS}} \bar{w}_{lm;j} \quad (2.74)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{R} \mathbf{a}_0 \quad (2.75)$$

$$\mathbf{a}_+ = \mathbf{T} \mathbf{a}_0 \quad (2.76)$$

όπου

$$\mathbf{R} = (\mathbf{U} + \mathbf{\Lambda Z})^{-1}, \mathbf{Z} = (\mathbf{\Lambda} - \mathbf{\Lambda}')^{-1}(\mathbf{V} - \mathbf{U}), \mathbf{T} = \mathbf{Z} \mathbf{R} \quad (2.77)$$

Η Εξ.(2.76) ορίζει τον πίνακα σκέδασης του ανισοτροπικού σκεδαστή. Ο πίνακας σκέδασης είναι διαγώνιος κατά τμήματα, ικανοποιώντας την σχέση $T_{Plm;P'l'm'} = T_{Pl;P'l'}^{(m)} \delta_{mm'}$. Επίσης, $T_{Pl;P'l'}^{(m)} = 0$ όταν τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πολύπολα, που αντιστοιχούν στα Pl και $P'l'$, δέν έχουν κοινή αρτιότητα. Σε αυτή την περίπτωση ο πίνακας σκέδασης μπορεί να αναχθεί σε δυο περαιτέρω υποπίνακες. Αυτές οι ιδιότητες συμμετρίας όμως δεν ισχύουν σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων.

2.6 Ενεργός διατομή σκέδασης, απόσβεσης και απορρόφησης

Πολλές φορές είναι χρήσιμη η περιγραφή της σκέδασης από ένα σωματίδιο με όρους ενέργειας που σκεδάζεται ή απορροφάται από αυτό. Η ενεργός διατομή σκέδασης (απορρόφησης) εκφράζει τη ροή της ενέργειας που σκεδάζεται (απορροφάται) από το σκεδαστή προς την προσπίπτουσα ροή ενέργειας του κύματος ανά μονάδα επιφάνειας. Η προσπίπτουσα ροή ενέργειας εκφράζεται από τη συνιστώσα του διανύσματος Poynting κατά τη διεύθυνση διάδοσης της ακτινοβολίας. Για μονοχρωματικό κύμα, η μέση τιμή του διανύσματος Poynting σε μια περίοδο γράφεται

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r})], \quad (2.78)$$

ενώ η μέση τιμή της ισχύος που διέρχεται από μια επιφάνεια S' , μπορεί να γραφεί

$$P = \int_{S'} dS \hat{\mathbf{n}} \cdot \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle. \quad (2.79)$$

Για το επίπεδο προσπίπτον κύμα η ροή ενέργειας κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης γράφεται [5]

$$\langle \mathbf{S}_0 \rangle \cdot \hat{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} |\mathbf{E}_0|^2. \quad (2.80)$$

Εξάλλου, η ισχύς της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας προκύπτει από την ολοκλήρωση του διανύσματος Poynting για το σκεδαζόμενο πεδίο πάνω στην επιφάνεια S' , σφαίρας που περιβάλλει το σωματίδιο. Εκτελώντας τις πράξεις προκύπτει ότι

$$P_{sc} = \frac{1}{2} Re \int_{S'} dS \hat{\mathbf{r}} \cdot [\mathbf{E}_{sc}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_{sc}^*(\mathbf{r})] = \frac{1}{2q^2} \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} \sum_{Plm} |a_{Plm}^+|^2. \quad (2.81)$$

Λόγω διατήρησης της ενέργειας, η ενέργεια που απορροφάται από το σωματίδιο θα ισούται με το αντίθετο της ενέργειας που εκπέμπεται συνολικά από την επιφάνεια, S' , σφαίρας που περιβάλλει το σωματίδιο. Η ενέργεια αυτή γράφεται

$$P_{out} = \frac{1}{2} Re \int_{S'} dS \hat{\mathbf{r}} \cdot [\mathbf{E}_{out}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_{out}^*(\mathbf{r})] = P_0 + P_{sc} - P_{ext}, \quad (2.82)$$

όπου $P_0 = \frac{1}{2} Re \int_{S'} dS \hat{\mathbf{r}} \cdot [\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_0^*(\mathbf{r})] = 0$
και

$$P_{ext} = -\frac{1}{2} Re \int_{S'} dS \hat{\mathbf{r}} \cdot [\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_{sc}^*(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_{sc}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_0^*(\mathbf{r})] = -\frac{1}{2q^2} \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} \sum_{Plm} Re(a_{Plm}^+ a_{Plm}^{0*}), \quad (2.83)$$

η ενέργεια που σχετίζεται με την αλληλεπίδραση του προσπίπτοντος με το σκεδαζόμενο πεδίο και ονομάζεται *ενέργεια απόσβεσης*. Λόγω της αρχής διατήρησης της ενέργειας θα ισχύει $P_{abs} = P_{ext} - P_{sc}$, δηλαδή η ενέργεια απόσβεσης εκφράζει τη συνολική ενέργεια που παρέχεται από την πηγή του εισερχόμενου κύματος στο σωματίδιο. Προκύπτει λοιπόν ότι

$$\sigma_{sc} = \frac{1}{q^2} \sum_{Plm} \left| \sum_{P'l'm'} T_{PlmP'l'm'} A_{P'l'm';p}^0 \right|^2$$

$$\sigma_{ext} = -\frac{1}{q^2} Re \sum_{Plm} (A_{Plm;p}^0)^* \sum_{P'l'm'} T_{PlmP'l'm'} A_{P'l'm';p}^0, \quad (2.84)$$

όπου ο δείκτης p εκφράζει την πόλωση του προσπίπτοντος κύματος [$p = 1(2)$, πόλωση $p(s)$], ενώ η ενεργός διατομή απορρόφησης είναι $\sigma_{abs} = \sigma_{ext} - \sigma_{sc}$. Είναι ξεκάθαρο ότι, εκτός από την περίπτωση των σφαιρών, η ενεργός διατομή εξαρτάται από την πόλωση και τη διεύθυνση διάδοσης του προσπίπτοντος κύματος.

Για την περίπτωση απλού ισοτροπικού σκεδαστή μπορεί εύκολα να αποδειχτεί ότι η ενεργός διατομή σκέδασης σ_{sc} και η ενεργός διατομή απορρόφησης σ_{abs} συνδέονται με τους πίνακες σκέδασης μέσω των σχέσεων:

$$\sigma_{sc} = \frac{2}{(qS)^2} \sum_l (2l+1) (|T_{El}|^2 + |T_{Hl}|^2) \quad (2.85)$$

$$\sigma_{abs} = -\frac{2}{(qS)^2} \sum_l (2l+1) [\text{Re}(T_{El} + T_{Hl}) + |T_{El}|^2 + |T_{Hl}|^2] \quad (2.86)$$

2.6.1 Υπολογισμός με τη μέθοδο FEM

Ο υπολογισμός των ενεργών διατομών σκέδασης και απορρόφησης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων δεν μπορεί να έχει την αναλυτική μορφή που προέκυψε από τη μέθοδο του πίνακα σκέδασης T . Θα πρέπει λοιπόν, συγκεκριμένα για το σ_{sc} να γίνει αριθμητική ολοκλήρωση του διανύσματος Rayleigh πάνω σε μια περιβάλλουσα επιφάνεια S' , όπως φαίνεται στην παρακάτω σχέση:

$$\sigma_{sc} = \frac{1}{I_0} \int_{S'} dS (\hat{\mathbf{n}} \cdot \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle), \quad (2.87)$$

όπου $\hat{\mathbf{n}}$ το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια S' που κοιτάζει προς τα έξω, και I_0 η ένταση της προσπίπτουσας ακτινοβολίας.

Για την ενεργό διατομή απορρόφησης θα έχουμε

$$\sigma_{abs} = \frac{1}{I_0} \int_V Q dV, \quad (2.88)$$

όπου Q είναι η πυκνότητα απώλειας ισχύος μέσα στο σωματίδιο και V ο όγκος του σωματιδίου.

Κεφάλαιο 3

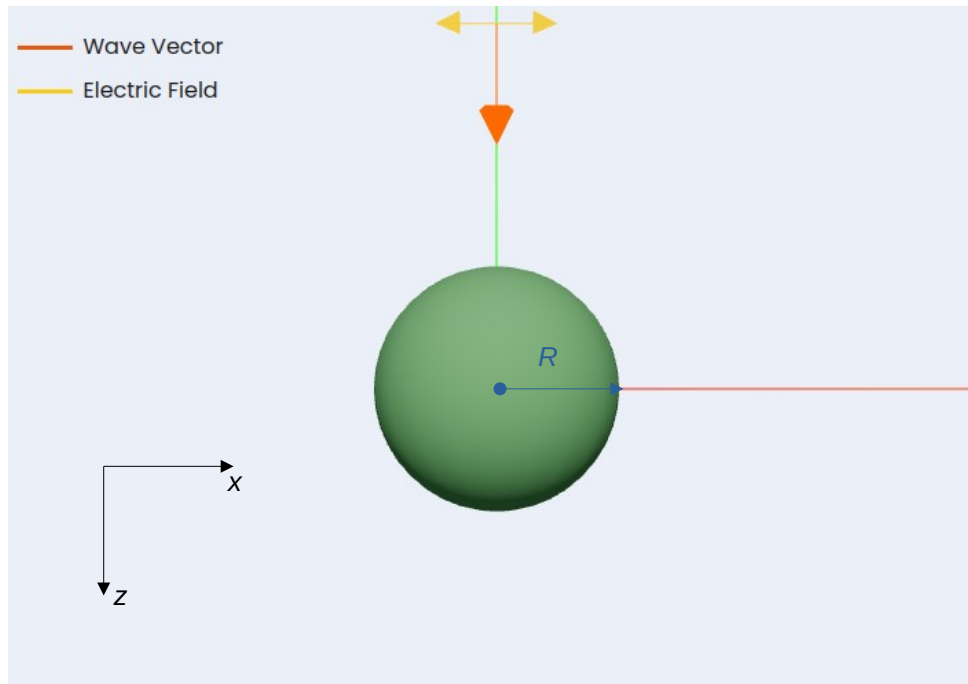
Εφαρμογές

3.1 Σκέδαση από Διηλεκτρική Σφαίρα Υψηλού Δείκτη Διάθλασης

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε την σκέδαση από ομοιογενή διηλεκτρικό σφαιρικό σχεδαστή με τη μέθοδο TMMS (T-Matrix Multipolar Scattering) που αναπτύξαμε στο Κεφάλαιο 1 και θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα μας με αυτά της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων FEM (COMSOL Multiphysics).

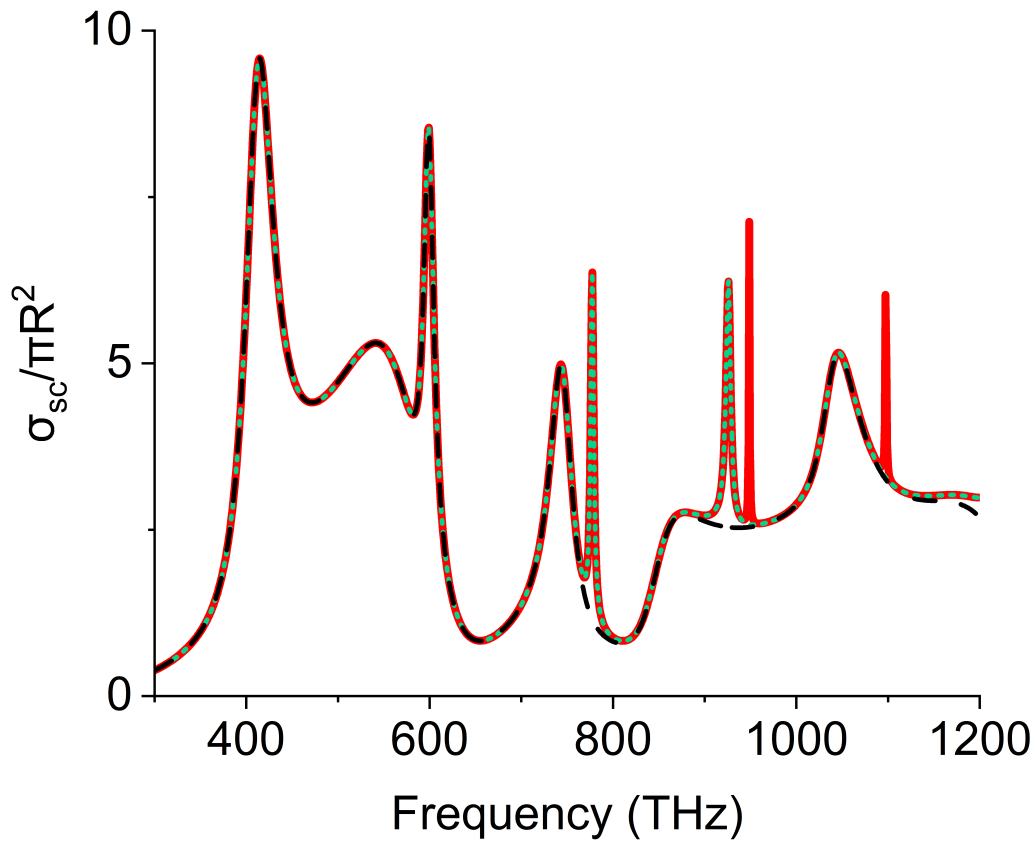
Η σκέδαση του φωτός από διηλεκτρικούς σχεδαστές υψηλού δείκτη διάθλασης (high-index dielectric scatterers) είναι ένα ενεργό πεδίο έρευνας στην οπτική και τη νανοτεχνολογία, καθώς τέτοιου είδους σχεδαστές προσφέρουν μοναδικές δυνατότητες ελέγχου της διάδοσης και σκέδασης του φωτός χωρίς τις απώλειες που συναντώνται στα μεταλλικά υλικά. Τυπικά υλικά με υψηλό δείκτη διάθλασης περιλαμβάνουν το πυρίτιο (Si), το διοξείδιο του τιτανίου (TiO_2), και άλλα ημιαγώγιμα υλικά. Σε αντίθεση με τα μεταλλικά σωματίδια, οι διηλεκτρικοί σχεδαστές υψηλού δείκτη διάθλασης δεν παρουσιάζουν ωμικές απώλειες λόγω της απορρόφησης του φωτός. Αυτό σημαίνει ότι οι σχεδαστές αυτοί έχουν πολύ χαμηλή απώλεια ενέργειας και είναι κατάλληλοι για εφαρμογές που απαιτούν υψηλή απόδοση σκέδασης ή μετάδοσης. Λόγω του υψηλού δείκτη διάθλασης, τέτοιοι σχεδαστές μπορούν να δημιουργήσουν μαγνητικές ροπές από την επαγωγή ηλεκτρικών ρευμάτων στο εσωτερικό τους. Αυτό είναι ένα σημαντικό χαρακτηριστικό, καθώς οι μαγνητικοί συντονισμοί σε διηλεκτρικούς σχεδαστές δεν προκαλούν απώλειες, σε αντίθεση με τις μαγνητικές αποχρίσεις σε μεταλλικούς σχεδαστές. Ως εκ τούτου, οι διηλεκτρικοί σχεδαστές υψηλού δείκτη διάθλασης χρησιμοποιούνται σε μεταύλικά και μεταεπιφάνειες για τον έλεγχο της φάσης, της πόλωσης και της κατεύθυνσης του φωτός [6]. Μπορούν να λειτουργούν ως βασικά στοιχεία σε νανοκεραίες και σε συσκευές ελέγχου της σκέδασης για φωτονικές συσκευές στην νανκλίμακα.

Στο πρώτο παράδειγμα θα μελετήσουμε μια σφαίρα ακτίνας R με διηλεκτρική σταθερά $\epsilon = 12$ και μαγνητική διαπερατότητα $\mu = 1$, στο κενό. Σχηματικά τη βλέπουμε στο Σχήμα 3.1, όπου το φως προσπίπτει κατά τη z διεύθυνση και η πόλωση είναι γραμμική κατά τη x κατεύθυνση.



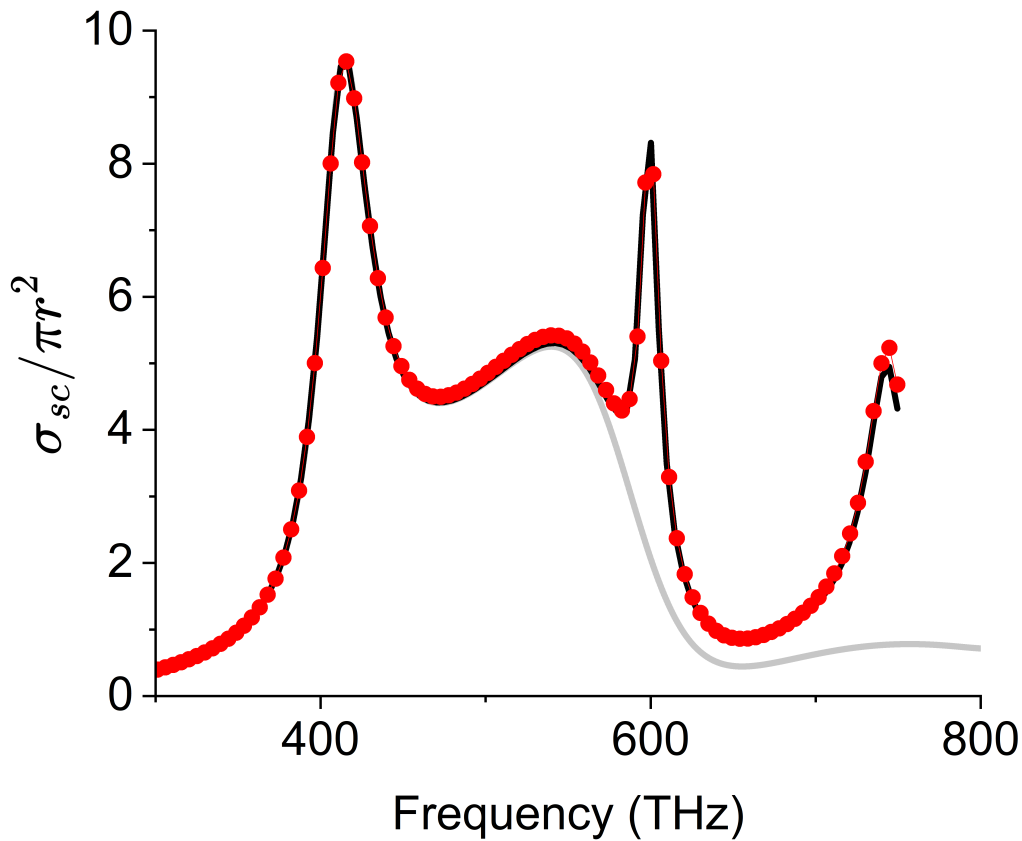
Σχήμα 3.1: Σχηματική απεικόνιση μιας ομοιογενούς και ιστροπικής σφαίρας υψηλού δείκτη διάθλασης στο κενό. Το φως προσπίπτει γραμμικά πολωμένο κατά τη διεύθυνση του άξονα z . Στο συγκεκριμένο παράδειγμα κάθε άλλη κατεύθυνση είναι ισοδύναμη λόγω της σφαιρικής συμμετρίας του συστήματος.

Στο Σχ.3.3 βλέπουμε την ενεργό διατομή σκέδασης για μια σφαίρα ακτίνας $R = 100$ nm με διηλεκτρική επιδεκτικότητα $\epsilon = 12$ και μαγνητική διαπερατότητα $\mu = 1$ αντιστοίχως, στον αέρα. Όπως είπαμε και στη Θεωρία, η πολυπολική ανάπτυξη είναι εγγενής στη μέθοδο TMMS, οπότε μπορούμε, ρυθμίζοντας την παράμετρο l , να αντλήσουμε πληροφορίες σχετικά με την πολυπολική τάξη του κάθε συντονισμού. Έτσι, με μαύρο χρώμα βλέπουμε το αποτέλεσμα του υπολογισμού για $l = 2$, με πράσινο εμφανίζονται τα αποτελέσματα για $l = 3$ και με κόκκινο εμφανίζονται τα αποτελέσματα για $l = 4$. Αυτό που παρατηρούμε ότι στις υψηλότερες ενέργειες, περισσότεροι πολυπολικοί όροι είναι απαραίτητοι προκειμένου να έχουμε σύγκλιση των αποτελεσμάτων. Επίσης, βλέπουμε ότι οι υψηλότερης τάξης συντονισμοί είναι πιο οξείς, που σημαίνει ότι έχουν μεγαλύτερο συντελεστή ποιότητας Q και συνεπώς, εντοπίζουν το φως πιο ισχυρά μέσα στο σχεδιαστή.



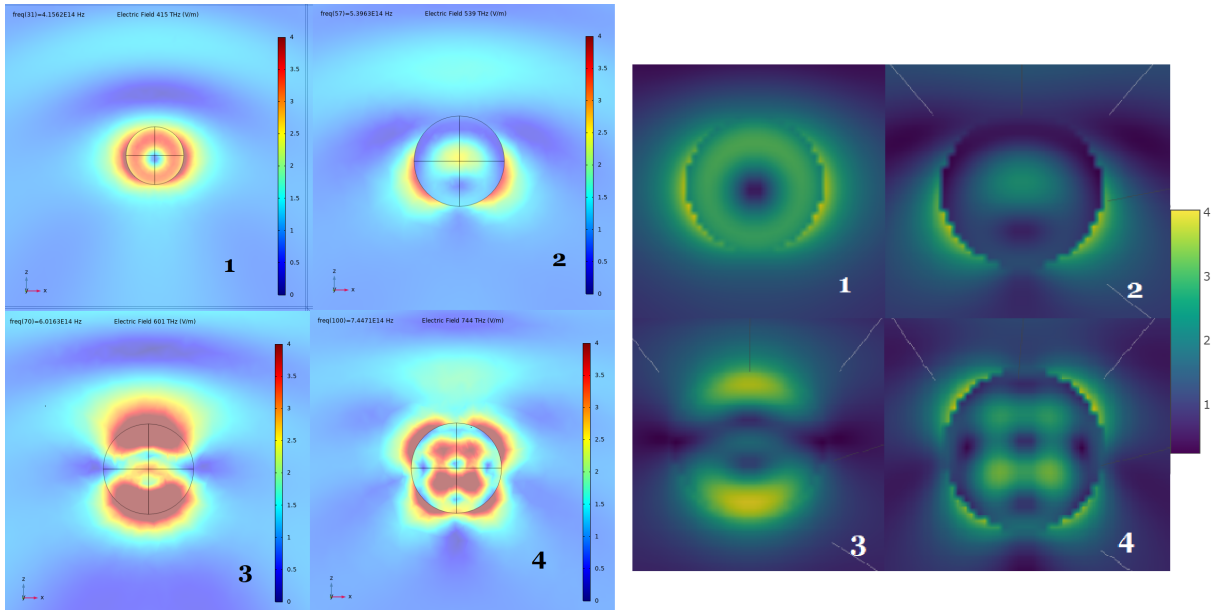
Σχήμα 3.2: Ενεργός διατομή σκέδασης για σκεδαστή ακτίνας $R = 100$ nm με διηλεκτρική επιδεκτικότητα $\epsilon = 12$ και μαγνητική διαπερατότητα $\mu = 1$ αντιστοίχως, στον αέρα. Ο υπολογισμός έγινε με τη μέθοδο TMMS. Με μαύρο εμφανίζονται τα αποτελέσματα για $l = 2$, με πράσινο εμφανίζονται τα αποτελέσματα για $l = 3$ και με κόκκινο εμφανίζονται τα αποτελέσματα για $l = 4$.

Στη συνέχεια, θέλουμε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματά μας με τη μέθοδο FEM. Ως γνωστόν, η μέθοδος FEM δυσκολεύεται αρκετά στο να προσομοιώσει συντονισμούς υψηλού Q , οπότε θα επικεντρωθούμε στους συντονισμούς πρώτης τάξης, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.3. Η μαύρη καμπύλη είναι ο υπολογισμός με TMMS, ενώ με κόκκινα σημεία τα αποτελέσματα της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων (FEM). Παρατηρούμε ότι η σύμπτωση των δύο μεθόδων είναι εξαιρετική. Ωστόσο, πρέπει να σημειώσουμε ότι ο υπολογισμός αυτών των σημείων με τη μέθοδο FEM διήρκεσε περίπου δύο ώρες σε συμβατικό υπολογιστή (3.6 GHz (6-πύριος), 32GB physical RAM, 80GB virtual RAM) ενώ αντίθετα η πλήρης καμπύλη με τη μέθοδο TMMS διαρκεί λίγα δευτερόλεπτα.



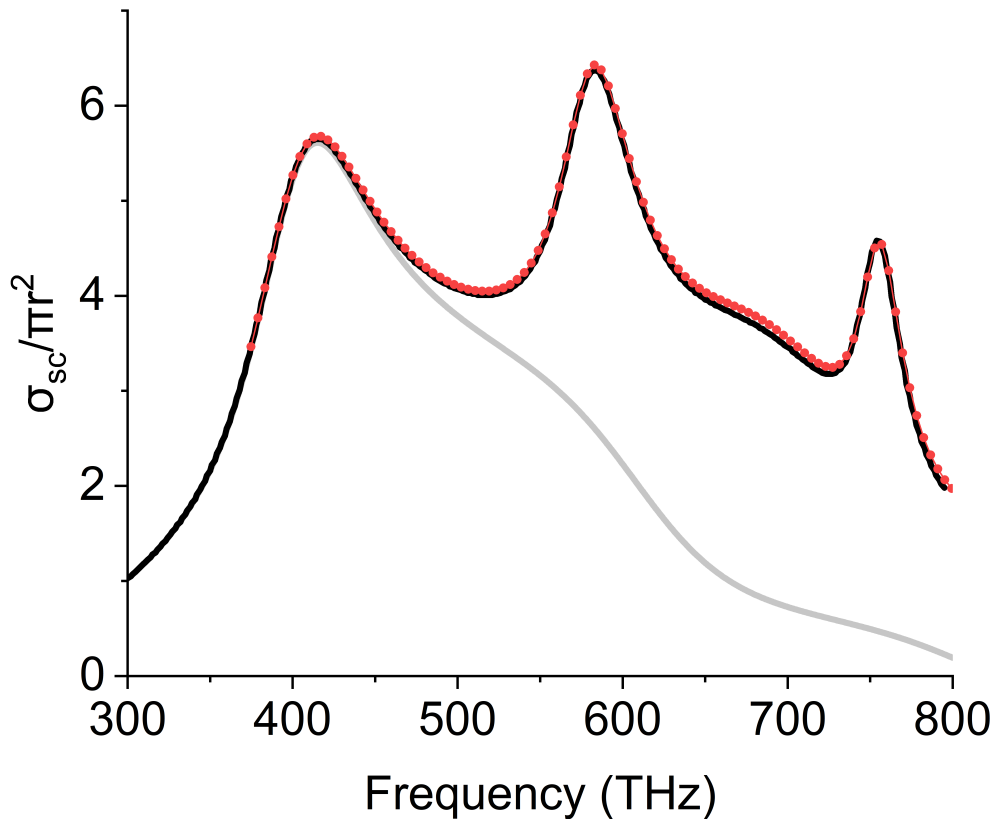
Σχήμα 3.3: Ενεργός διατομή σκέδασης για σκεδαστή ακτίνας $R = 100$ nm με διηλεκτρική επιδεκτικότητα $\epsilon = 12$ και μαγνητική διαπερατότητα $\mu = 1$ αντιστοίχως, στον αέρα, για $l = 2$. Με γκρι εμφανίζονται τα αποτελέσματα της TMMS για $l = 1$. Με μαύρο σημειώνονται τα αποτελέσματα της TMMS ενώ με κόκκινο τα αποτελέσματα της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων (FEM).

Στο Σχ. 3.3 επίσης βλέπουμε και μια γκριζα γραμμή, η οποία αντιστοιχεί στον υπολογισμό με TMMS για $l = 1$. Παρατηρούμε ότι για $l = 1$ έχουμε δύο συντονισμούς. Αυτό είναι αναμενόμενο από τη θεωρία, μιας και ο ένας πρέπει να είναι ο μαγνητικός (H) και ο άλλος ο ηλεκτρικός (E). Αυτό θα μπορούσαμε εύκολα να το διαπιστώσουμε αν ζωγραφίζαμε ξεχωριστά τα στοιχεία του πίνακα T από τις Εξ.(2.48), (2.49). Επιλέγουμε όμως έναν εναλλακτικό τρόπο, και αυτός είναι να ζωγραφίσουμε τις αντίστοιχες κατανομές πεδίου αυτών των συντονισμών. Στο σχήμα 3.4 εμφανίζεται το ηλεκτρικό πεδίο για τους 4 πρώτους συντονισμούς. Οι υπολογισμοί των κατανομών του ηλεκτρικού πεδίου έγιναν και με τις δύο μεθόδους.



Σχήμα 3.4: Κατανομή ηλεκτρικού πεδίου ($|\mathbf{E}|$ σε μονάδες V/m , όταν $|\mathbf{E}_{in}| = 1V/m$) στους 4 πρώτους συντονισμούς για το σκεδαστή ακτίνας $R = 100$ nm με διηλεκτρική επιδεκτικότητα $\epsilon = 12$ και μαγνητική διαπερατότητα $\mu = 1$ αντιστοίχως, στον αέρα. Αριστερά: Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (FEM) Δεξιά: TMMS (Fortran) .

Μελετώντας το ηλεκτρικό πεδίο του πρώτου συντονισμού στο Σχ. 3.4 βλέπουμε ότι αυτό σχηματίζει έναν κλειστό βρόχο. Η κατανομή αυτή του ηλεκτρικού πεδίου δημιουργεί μια μαγνητική διπολική ροπή κάθετα στο επίπεδο που κοιτάμε. Συνεπώς, αυτός είναι ο μαγνητικός διπολικός συντονισμός της σφαίρας. Αντίστοιχα, κοιτάζοντας τον δεύτερο συντονισμό, βλέπουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο σχηματίζει δύο λοβούς, αριστερά και δεξιά, κάτι που προσομοιάζει με ηλεκτρικό δίπολο. Συνεπώς, αυτός είναι ο ηλεκτρικός διπολικός συντονισμός της σφαίρας. Από τις κατανομές των πεδίων μπορούμε να βγάλουμε και επιπλέον συμπεράσματα όμως. Αρχικά, παρατηρούμε ότι ο μαγνητικός διπολικός συντονισμός έχει εντοπισμένο το πεδίο στο εσωτερικό του σκεδαστή, κάτι που ερμηνεύει το γιατί είναι πιο οξύς συντονισμός στο φάσμα σκέδασης, σε σχέση με τον ηλεκτρικό διπολικό ο οποίος έχει το πεδίο του περισσότερο στον περιβάλλοντα χώρο.



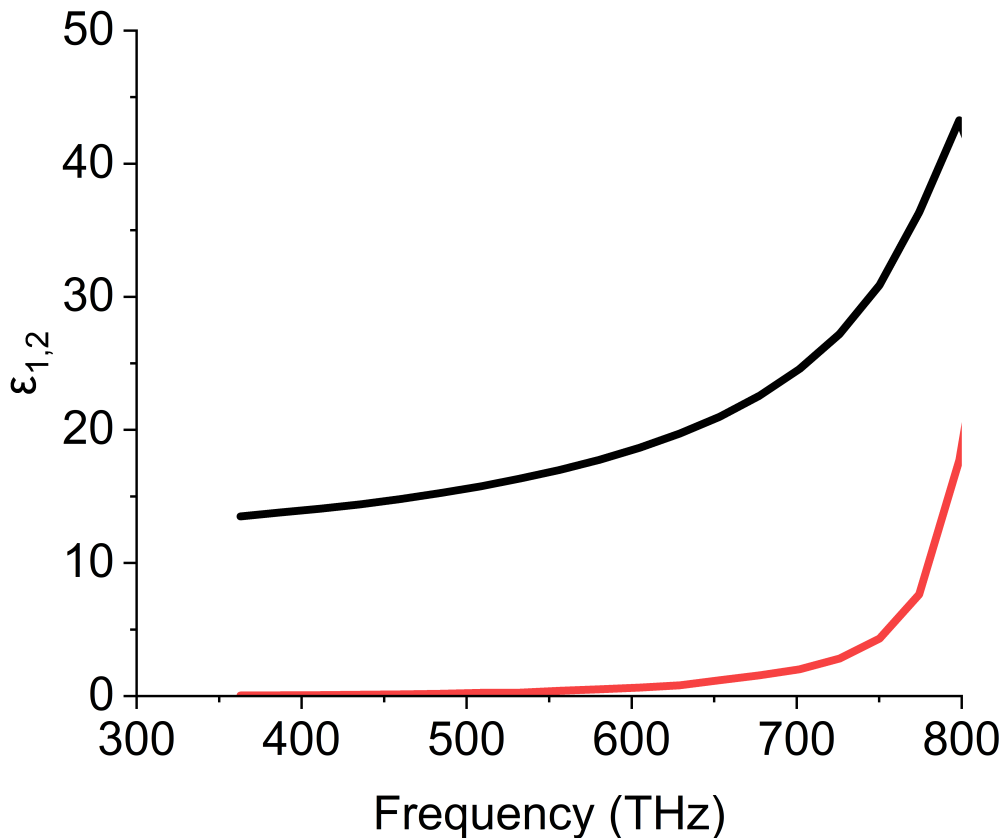
Σχήμα 3.5: Ενεργός διατομή σκέδασης σφαιρικού σχεδαστή με διηλεκτρική και μαγνητική σταθερά $\epsilon = 12, \mu = 1$ αντιστοίχως, ακτίνας 100nm σε περιβάλλον γυαλιού ($\epsilon = 1.5$) για $l = 1$ (γκρι) και $l = 2$ (μαύρο). Με κόκκινο σημειώνονται τα αποτελέσματα της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων.

Συνεχίζουμε τη μελέτη μας τοποθετώντας τον ίδιο σχεδαστή μέσα σε περιβάλλον γυαλιού ($n = 1.5$) και επαναλαμβάνουμε τον υπολογισμό τόσο με την TMMS όσο και με τη FEM. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο Σχ.3.5. Συγκρίνοντας το Σχήμα 3.5 με το Σχήμα 3.3 παρατηρούμε ότι είναι ευδιάκριτοι μόνο 3 από τους 4 πρώτους συντονισμούς. Αυτό συμβαίνει διότι λόγω της μικρότερης διαφοράς του δείκτη διάθλασης του περιβάλλοντος και του σχεδαστή έχουμε εντονότερο το φαινόμενο διαρροής (*leaking*), δηλαδή σημαντικό τμήμα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, ειδικότερα για τον ηλεκτρικό διπολικό συντονισμό, διαρρέει στο περιβάλλον μέσο. Αυτό μπορεί να γίνει πιο εμφανές αν εκτελέσουμε τον υπολογισμό για $l = 1$ (γκρίζα γραμμή στο Σχ.3.5), όπου πράγματι παρατηρούμε ότι ο ηλεκτρικός διπολικός συντονισμός έχει εξαιρετικά χαμηλό συντελεστή ποιότητας Q και μόλις που διακρίνεται γύρω στα 550 nm .

3.1.1 Σκέδαση από Σφαίρα Πυριτίου

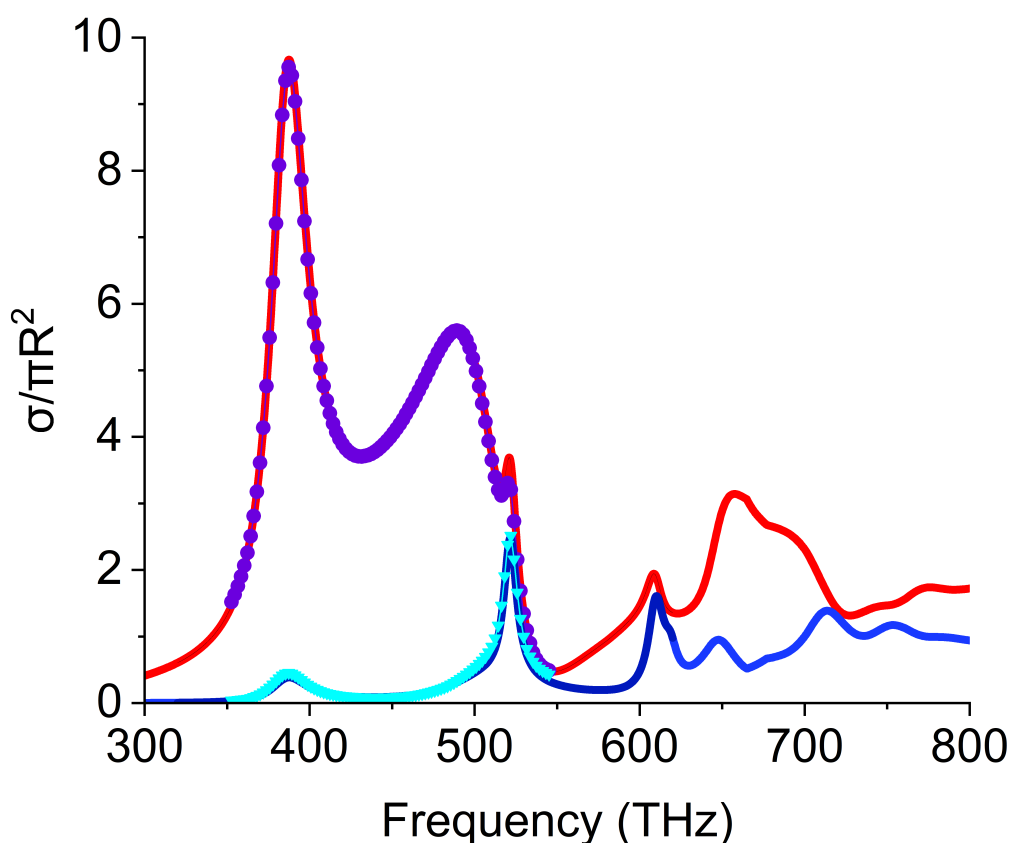
Μέχρι τώρα μελετήσαμε έναν διηλεκτρικό σχεδαστή με σταθερή διηλεκτρική συνάρτηση, ωστόσο στη φύση συνήθως τα υλικά εμφανίζουν κάποια διασπορά στη διηλεκτρική συνάρτηση. Οπότε τώρα θα μελετήσουμε έναν σφαιρικό σχεδαστή από πυρίτιο βάσει των πειραματικών τιμών κατά Aspnes [7]. Στο Σχ. 3.6 βλέπουμε το πραγματικό ϵ_1 (μαύρη καμπύλη) και το

φανταστικό ϵ_2 (κόκκινη καμπύλη) μέρος της διηλεκτρικής συνάρτησης αντίστοιχα, σε όλο το ορατό φάσμα. Σημειώνουμε εδώ ότι το φανταστικό μέρος της διηλεκτρικής συνάρτησης ($\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2$) συνδέεται με τις απώλειες. Ως εκ τούτου, από τη στιγμή που τώρα έχουμε και απώλειες, θα πρέπει να υπολογίσουμε και την ενεργό διατομή απορρόφησης.



Σχήμα 3.6: Τιμές του πραγματικού (μαύρο, ϵ_1) και φανταστικού (κόκκινο, ϵ_2) μέρους της διαπερατότητας του πυριτίου (Aspnies) [7].

Στο Σχ. 3.7 βλέπουμε τα φάσματα σκέδασης και απορρόφησης για μια σφαίρα πυριτίου ακτίνας $R = 100$ nm. Συγκρίνοντας το Σχήμα 3.7 με το Σχήμα 3.3 παρατηρούμε ότι για τα πειραματικά δεδομένα του πυριτίου κατά Aspnes οι συχνότητες συντονισμού μετατοπίζονται στις χαμηλότερες συχνότητες. Το φαινόμενο είναι ποιο έντονο για τους συντονισμούς μεγαλύτερης τάξης.



Σχήμα 3.7: Ενεργός διατομές απορρόφησης (μπλέ) και σκέδασης (κόκκινη) σφαιρικού σχεδαστή πυριτίου κατά Aspnes, ακτίνας 100nm σε περιβάλλον αέρα. Με γαλάζιο και μοβ αντιστοίχως σημειώνονται τα αποτελέσματα της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων.

Κοιτώντας την ενεργό διατομή απορρόφησης παρατηρούμε ότι εμφανίζει πιο έντονες κορυφές στους συντονισμούς που εντοπίζουν το φως περισσότερο μέσα στο σχεδαστή. Για παράδειγμα, το φάσμα απορρόφησης εμφανίζει κορυφή κοντά στα 390 nm που είναι ο μαγνητικός διπολικός συντονισμός (που είδαμε στο Σχ.3.4 ότι εντοπίζει το πεδίο κυρίως μέσα στο σχεδαστή), ενώ για τον ηλεκτρικό διπολικό συντονισμό κοντά στα 500 nm (που είδαμε στο Σχ.3.4 ότι εντοπίζει το πεδίο κυρίως έξω από το σχεδαστή) δεν παρατηρούμε κάποια εμφανή κορυφή. Αυτό ερμηνεύεται ως εξής: όταν το φως παραμένει για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα μέσα στον σχεδαστή τότε απορροφάται περισσότερο από αυτόν.

3.2 Μεταλλικά νανοσωματίδια - πλασμόνια

Τα πλασμόνια είναι συλλογικές ταλαντώσεις των ελεύθερων ηλεκτρονίων σε ένα αγωγικό υλικό. Αυτές οι ταλαντώσεις προκύπτουν όταν ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα (όπως το φως) αλληλεπιδρά με το ηλεκτρονικό νέφος του υλικού, προκαλώντας τα ηλεκτρόνια να κινηθούν ομαδικά με συγκεκριμένη συχνότητα. Ο όρος πλασμόνιο εισήχθη το 1956 από τον Pines [8] και έκτοτε χρησιμοποιούμε αυτό τον όρο για να περιγράψουμε το κβάντο της στοιχειώδους διέγερσης που σχετίζεται με αυτήν την συλλογική κίνηση υψηλής συχνότητας. Οι δύο βασικές κατηγορίες είναι αυτές των πλασμονίων όγκου (bulk plasmons), τα οποία συναντώνται στο σύνολο του υλικού, και τα επιφανειακά πλασμόνια (surface plasmons) τα οποία

συναντώνται στην επιφάνεια ενός αγωγού[9].

Μια ειδική κατηγορία επιφανειακών πλασμονίων είναι τα εντοπισμένα (σωματιδιακά) επιφανειακά πλασμόνια (localized surface plasmons, LSPs) τα οποία εμφανίζονται όταν το φως αλληλεπιδρά με μεταλλικά νανοσωματίδια. Η συχνότητα συντονισμού της συλλογικής ταλάντωσης του ΗΜ πεδίου και των ελεύθερων ηλεκτρονίων του νανοσωματιδίου (Localized Surface Plasmon Resonance, LSRP) , που αντιστοιχεί στην ενέργεια του εντοπισμένου επιφανειακού πλασμονίου, καθορίζεται από τους εξής παράγοντες:

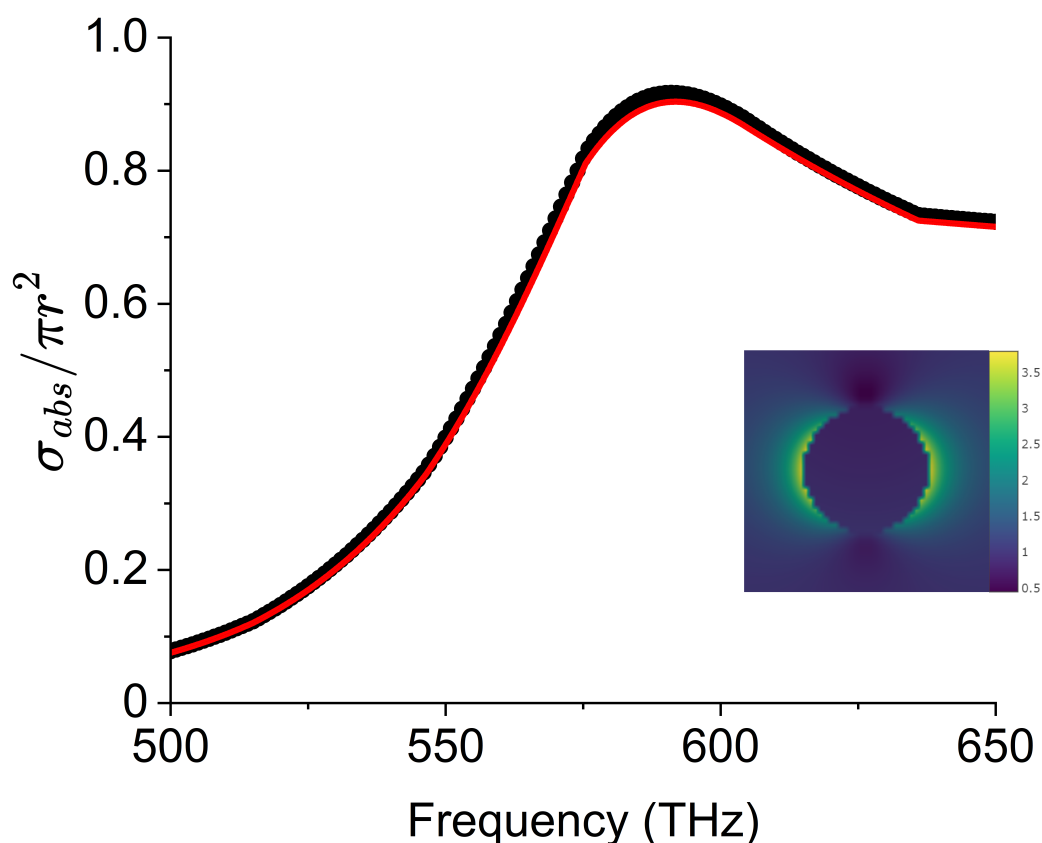
- Διηλεκτρικές ιδιότητες του νανοσωματιδίου και των περιβάλλοντων μέσων.
- Μέγεθος νανοσωματιδίου.
- Σχήμα νανοσωματιδίου.

Η συλλογική ταλάντωση του φορτίου προκαλεί μια σημαντική ενίσχυση του τοπικού πεδίου στην επιφάνεια του νανοσωματιδίου, σε διαστάσεις πολύ μικρότερες του μήκους κύματος. Αυτή η ενίσχυση μπορεί να είναι ιδιαίτερα χρήσιμη σε τεχνικές όπως η επιφανειακά ενισχυμένη φασματοσκοπία Raman (SERS), όπου η σχεδιασμένη ακτινοβολία από μόρια κοντά στο νανοσωματίδιο ενισχύεται δραματικά. Τα σωματιδιακά πλασμόνια παίζουν έναν κρίσιμο ρόλο στη νανοτεχνολογία και στις σύγχρονες εφαρμογές φωτονικής, λόγω της ικανότητάς τους να περιορίζουν και να ενισχύουν το φως σε πολύ μικρές κλίμακες. Μερικές εφαρμογές των σωματιδιακών πλασμονίων είναι:

- Αισθητήρες: Η μεταβολή της συχνότητας συντονισμού των πλασμονίων σε απόκριση στις αλλαγές του περιβάλλοντος μέσου επιτρέπει τη χρήση των νανοσωματιδίων ως εξαιρετικά ευαίσθητους αισθητήρες για την ανίχνευση μορίων ή άλλων ουσιών.
- Ιατρική Απεικόνιση και Θεραπεία: Τα νανοσωματίδια χρυσού που υποστηρίζουν πλασμόνια χρησιμοποιούνται σε απεικονιστικές τεχνικές και σε θεραπείες, όπως η φωτοθερμική θεραπεία καρκίνου, όπου η απορρόφηση του φωτός μετατρέπεται σε θερμότητα.
- Φωτοκαταλύση: Τα σωματιδιακά πλασμόνια χρησιμοποιούνται σε φωτοκαταλυτικές διεργασίες, όπου η ενέργεια από το φως μετατρέπεται σε χημική ενέργεια, ενισχύοντας αντιδράσεις σε νανοκλίμακα.

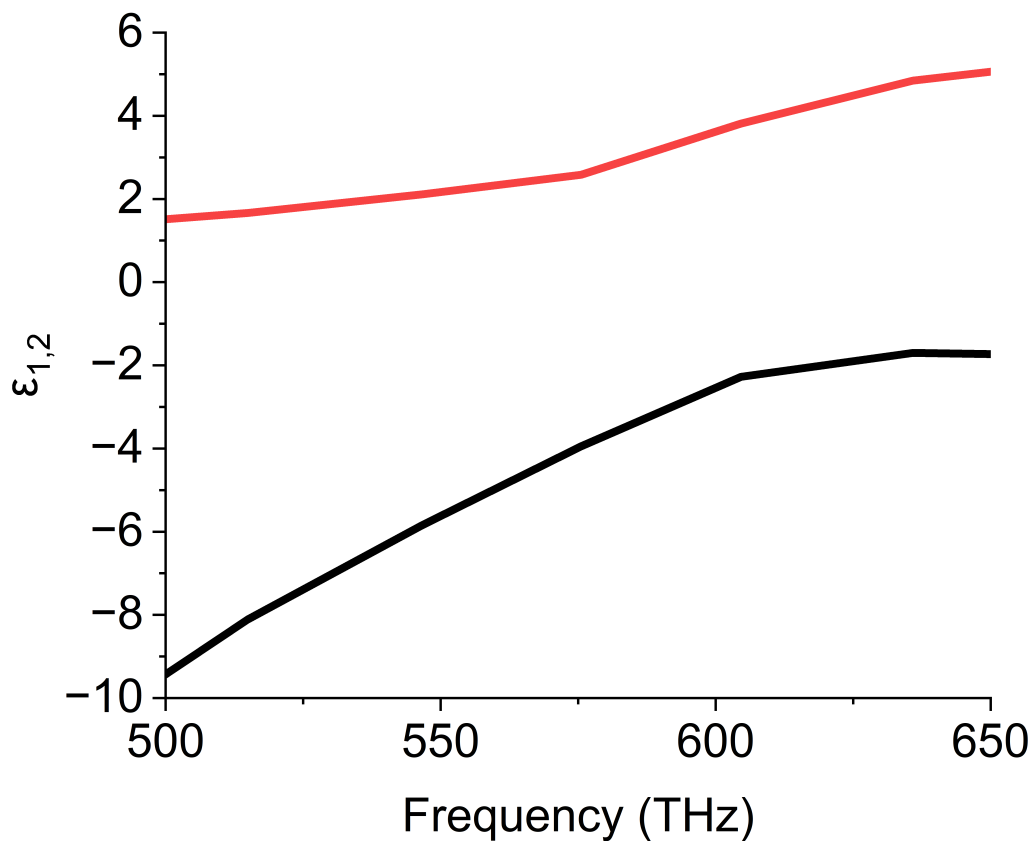
3.2.1 Πλασμόνια νανοσωματιδίων χρυσού

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε νανοσωματίδια χρυσού κατά Jonhson and Christy [10] σε απλούς και πολυστρωματικούς σχεδιαστές στον αέρα και σε περιβάλλοντα με δείκτη διάθλασης $1 < n < 1.5$. Στο Σχ. 3.8 βλέπουμε το φάσμα απορρόφησης για μια σφαίρα χρυσού ακτίνας $r = 20$ nm. Παρατηρούμε ένα συντονισμό στα 592 THz ο οποίος είναι μια κορυφή στο φάσμα απορρόφησης. Κοιτάζοντας το πεδίο σε αυτή τη συχνότητα βλέπουμε τη χαρακτηριστική κατανομή πεδίου που έχει ένα ηλεκτρικός διπολικός συντονισμός, δηλαδή δύο λοβούς στα δεξιά και τα αριστερά του σωματιδίου. Το πεδίο είναι ενισχυμένο σε αυτές τις περιοχές του χώρου, δηλαδή στην εξωτερική επιφάνεια του σωματιδίου. Σε αντίθεση με τα διηλεκτρικά σωματίδια, που εντοπίζουν το πεδίο στο εσωτερικό του σχεδιαστή, εδώ πλέον έχουμε ισχυρό πεδίο στην εξωτερική επιφάνεια του αγωγίμου σωματιδίου. Παρατηρούμε επίσης, ότι τώρα το μέγεθος του σωματιδίου είναι πολύ μικρότερο από το μήκος κύματος. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση μας το μήκος κύματος του συντονισμού είναι $\lambda = 507$ nm ενώ η διάμετρος του σωματιδίου είναι 40 nm.



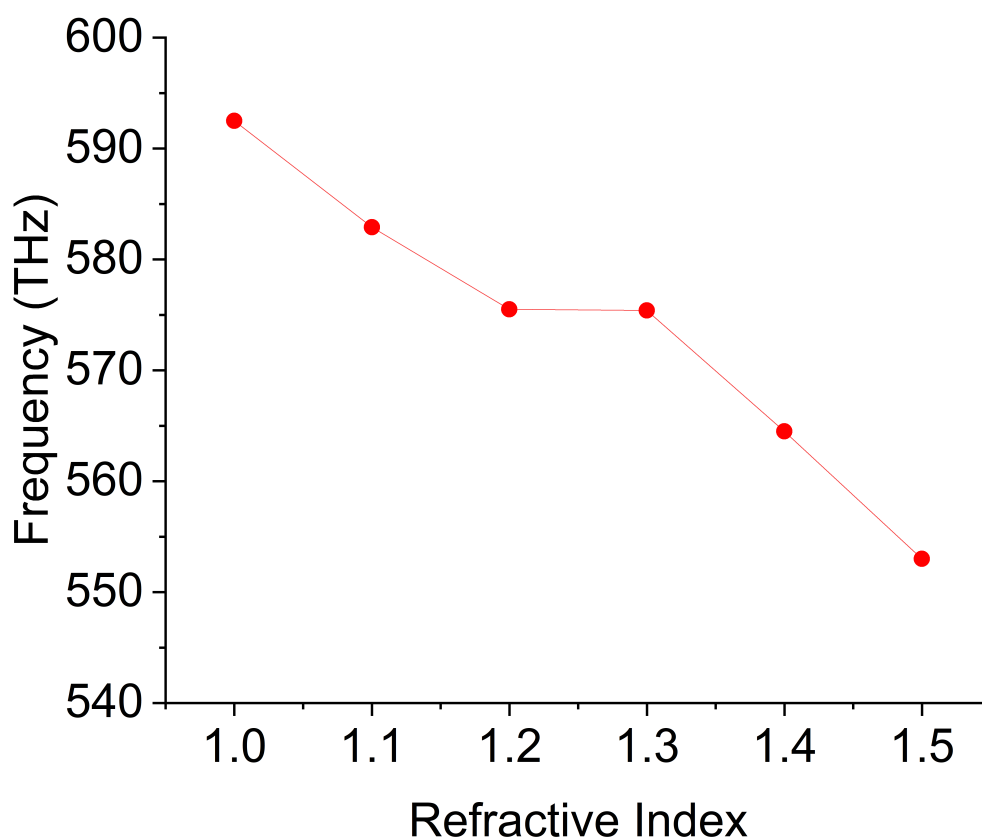
Σχήμα 3.8: Ενεργός διατομή απορρόφησης χρυσού κατά Jonhson and Christy για σφαίρα $r = 20$ nm, $l=1$, σε περιβάλλον αέρα. Η κόκκινη γραμμή είναι ο υπολογισμός με τη μέθοδο TMMS. Με μαύρο σημειώνονται τα αποτελέσματα της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων. Ένθετο: Το ηλεκτρικό πεδίο στην συχνότητα συντονισμού ($\lambda = 592$ THz). Ο συντονισμός είναι ηλεκτρικού διπολικού τύπου.

Στο Σχ. 3.9 βλέπουμε το πραγματικό ϵ_1 (μαύρη καμπύλη) και το φανταστικό ϵ_2 (κόκκινη καμπύλη) μέρος της διηλεκτρικής συνάρτησης αντίστοιχα, στο παράθυρο συχνοτήτων που μας ενδιαφέρει. Παρατηρούμε ότι το πραγματικό μέρος της διηλεκτρικής συνάρτησης είναι αρνητικό σε όλο το φασματικό παράθυρο που μελετάμε, δηλώνοντας έτσι τον αγωγίμο χαρακτήρα του υλικού (ο αγωγός αντανακλά το εισερχόμενο HM κύμα αντί να το αφήσει να περάσει). Παράλληλα, το φανταστικό κομμάτι της διηλεκτρικής συνάρτησης είναι σημαντικά θετικό, γεγονός που σχετίζεται με τις απώλειες του υλικού λόγω του φαινομένου Joule.



Σχήμα 3.9: Τιμές του πραγματικού (μαύρο, ϵ_1) και φανταστικού (κόκκινο, ϵ_2) μέρους της διαπερατότητας του χρυσού (από Johnson and Christy [10]).

Είδαμε προηγουμένως ότι οι πλασμονικοί συντονισμοί των μεταλλικών νανοσωματιδίων εντοπίζουν το φως στην εξωτερική τους επιφάνεια, δηλαδή η μεγάλη ένταση του πεδίου βρίσκεται στο περιβάλλον μέσο. Αυτή η ιδιότητα καθιστά τους πλασμονικούς συντονισμούς εξαιρετικά ευαίσθητους σε αλλαγές του δείκτη διάθλασης του περιβάλλοντος μέσου. Αυτή είναι και η αρχή λειτουργίας των πλασμονικών αισθητήρων [11]. Εδώ θα μελετήσουμε την εξάρτηση της πλασμονικής συχνότητας συντονισμού, για τη νανοσφαίρα χρυσού, από το δείκτη διάθλασης του περιβάλλοντος μέσου

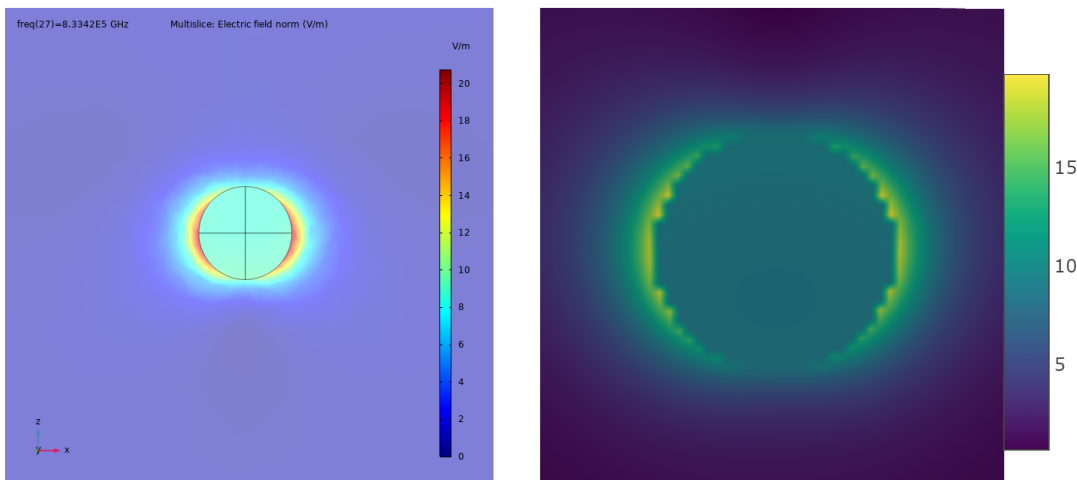
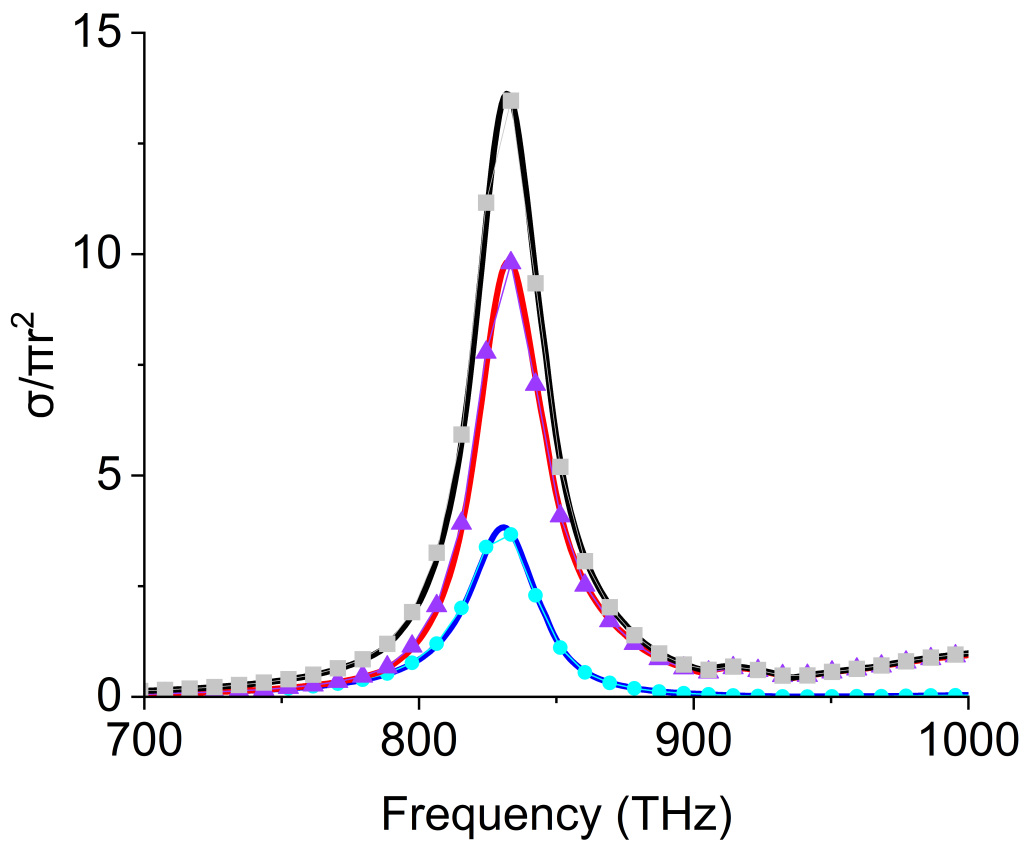


Σχήμα 3.10: Μεταβολή της συχνότητας συντονισμού (LSRP) για σφαιρικό σχεδιαστή χρυσού (Johnson and Christy [10]), ακτίνας 20 nm για δείκτη διάθλασης $1 \leq n \leq 1.5$.

Στο Σχ. 3.10 βλέπουμε τη μετατόπιση της συχνότητας συντονισμού για ένα νανοσωματίδιο χρυσού ακτίνας 20 nm συναρτήσει της αλλαγής στο δείκτη διάθλασης του περιβάλλοντος μέσου. Παρατηρούμε ότι η συχνότητα συντονισμού κατεβαίνει όσο αυξάνουμε το δείκτη διάθλασης του περιβάλλοντος μέσου. Η αλλαγή είναι σχεδόν γραμμική.

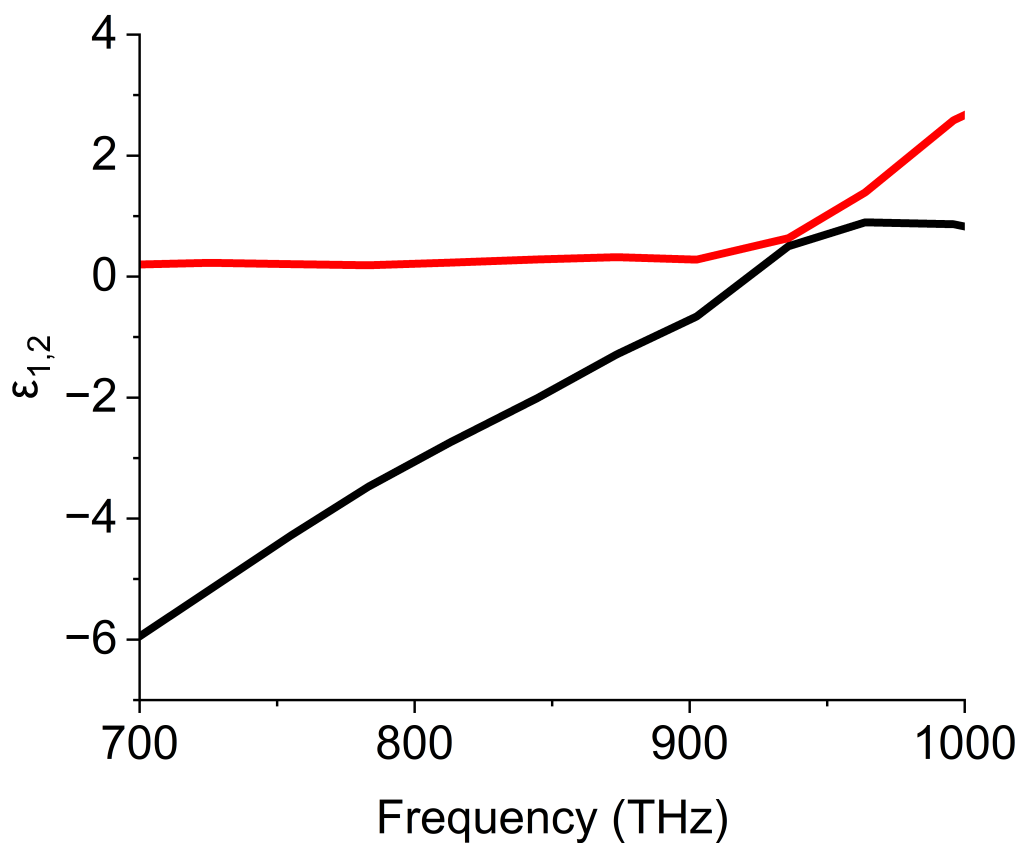
3.3 Πλασμόνια νανοσωματιδίων αργύρου

Τώρα θα μελετήσουμε νανοσωματίδια αργύρου στον αέρα. Ο άργυρος έχει το χαρακτηριστικό ότι εμφανίζει μικρότερες απώλειες στο ορατό φάσμα, πράγμα που τον καθιστά προτιμότερο σε κάποιες εφαρμογές. Στο Σχ. 3.11 βλέπουμε τα αντίστοιχα φάσματα σκέδασης, απορρόφησης και απόσβεσης για ένα νανοσωματίδιο αργύρου ακτίνας 20 nm. Επίσης, στο ένθετο βλέπουμε και την κατανομή της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου. Παρατηρούμε ότι το μέγιστο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου είναι μεγαλύτερο σε σχέση με αυτό του νανοσωματιδίου χρυσού ίδιας διάστασης.



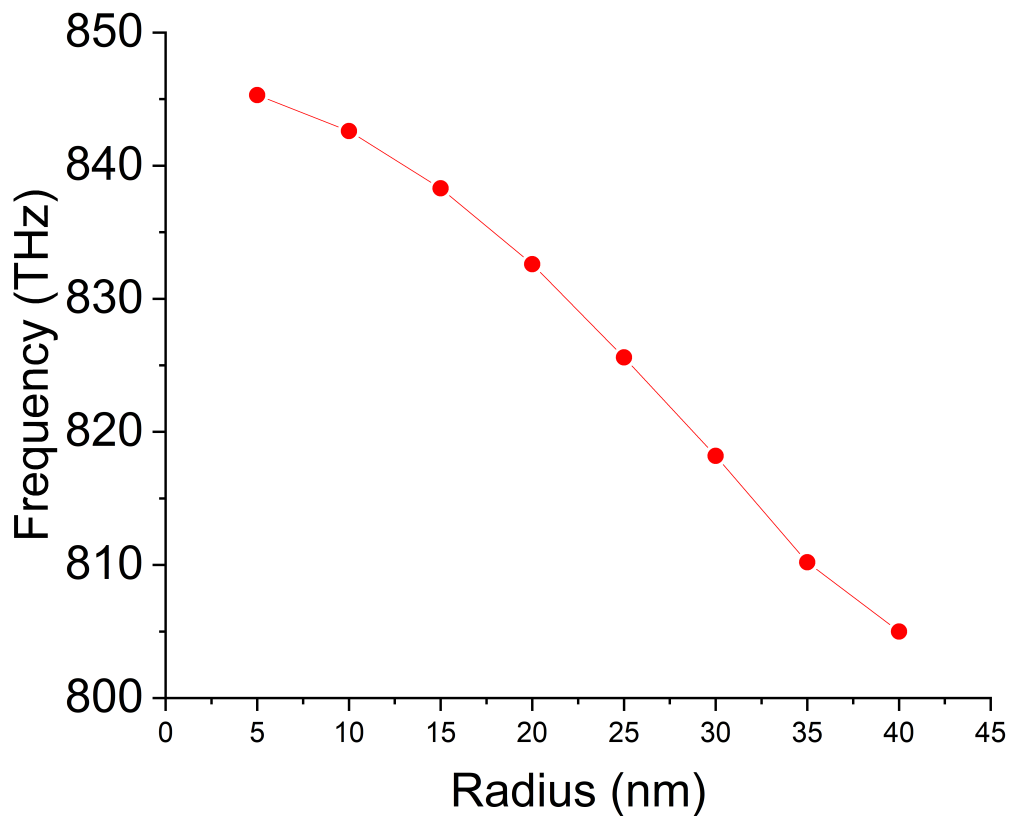
Σχήμα 3.11: Πάνω: Ενεργές διατομές σκέδασης (μπλε), απορρόφησης (κόκκινο) και απόσβεσης (μαύρο) σφαιρικού σχεδαστή αργύρου (Jonhson and Christy [10]) για σφαίρα ακτίνας 20 nm, $l=2$, στο αέρα. Με γαλάζιο, μοβ και γκρι σημειώνονται τα αντίστοιχα αποτελέσματα της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων (FEM). Κάτω: Το ηλεκτρικό πεδίο στην συχνότητα συντονισμού (833 THz) με τη μέθοδο FEM (αριστερά) και TMMS (δεξιά).

Στο Σχ. 3.14 βλέπουμε τη διηλεκτρική συνάρτηση ($\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2$) του αργύρου, η οποία πράγματι έχει πολύ μικρό φανταστικό μέρος ϵ_2 (μικρές απώλειες) στο ορατό φάσμα. Για το λόγο αυτό θα το προτιμήσουμε στις εφαρμογές που ακολουθούν.



Σχήμα 3.12: Τιμές του πραγματικού (μαύρο, ϵ_1) και φανταστικού (κόκκινο, ϵ_2) μέρους της διαπερατότητας του αργύρου (Johnson and Christy).

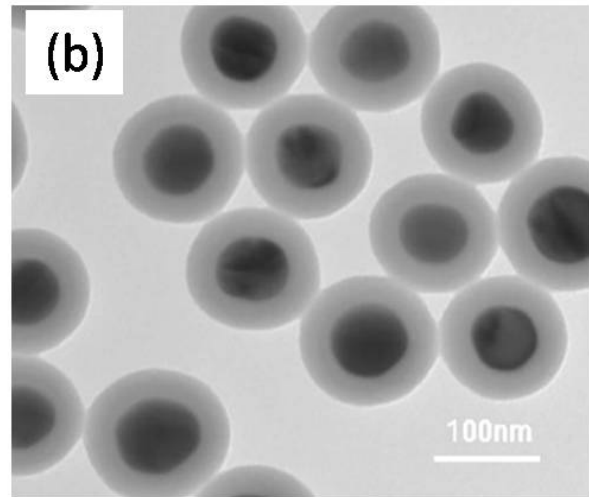
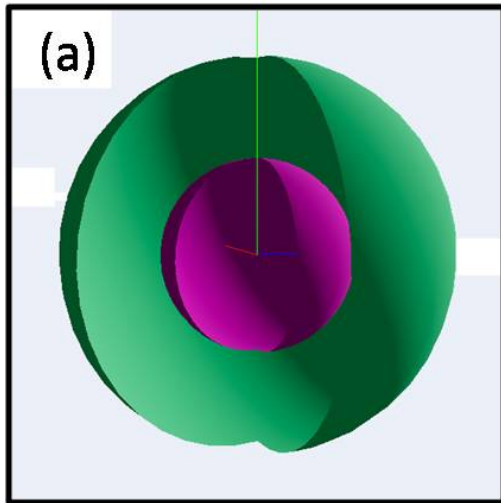
Τώρα, θα μελετήσουμε την εξάρτηση που έχει η συχνότητα του πλασμονίου από την ακτίνα του σωματιδίου από άργυρο. Στο Σχ. 3.13 βλέπουμε ότι ο πλασμονικός συντονισμός μετατοπίζεται προς χαμηλότερες συχνότητες καθώς η ακτίνα του σωματιδίου αυξάνεται, ακολουθώντας μια σχεδόν γραμμική μεταβολή. Επειδή ο συντονισμός αυτός απορροφά τις αντίστοιχες συχνότητες (όπως είδαμε στο αντίστοιχο φάσμα απορρόφησης), οι συλλογές από όμοια νανοσωματίδια έχουν κάποιο χαρακτηριστικό χρώμα το οποίο είναι διαφορετικό για συλλογές που έχουν διαφορετικό μέγεθος νανοσωματιδίων.



Σχήμα 3.13: Εξάρτηση της συχνότητας πλασμονίου από την ακτίνα του σωματιδίου για ένα σφαιρικό νανοσωματίδιο αργύρου.

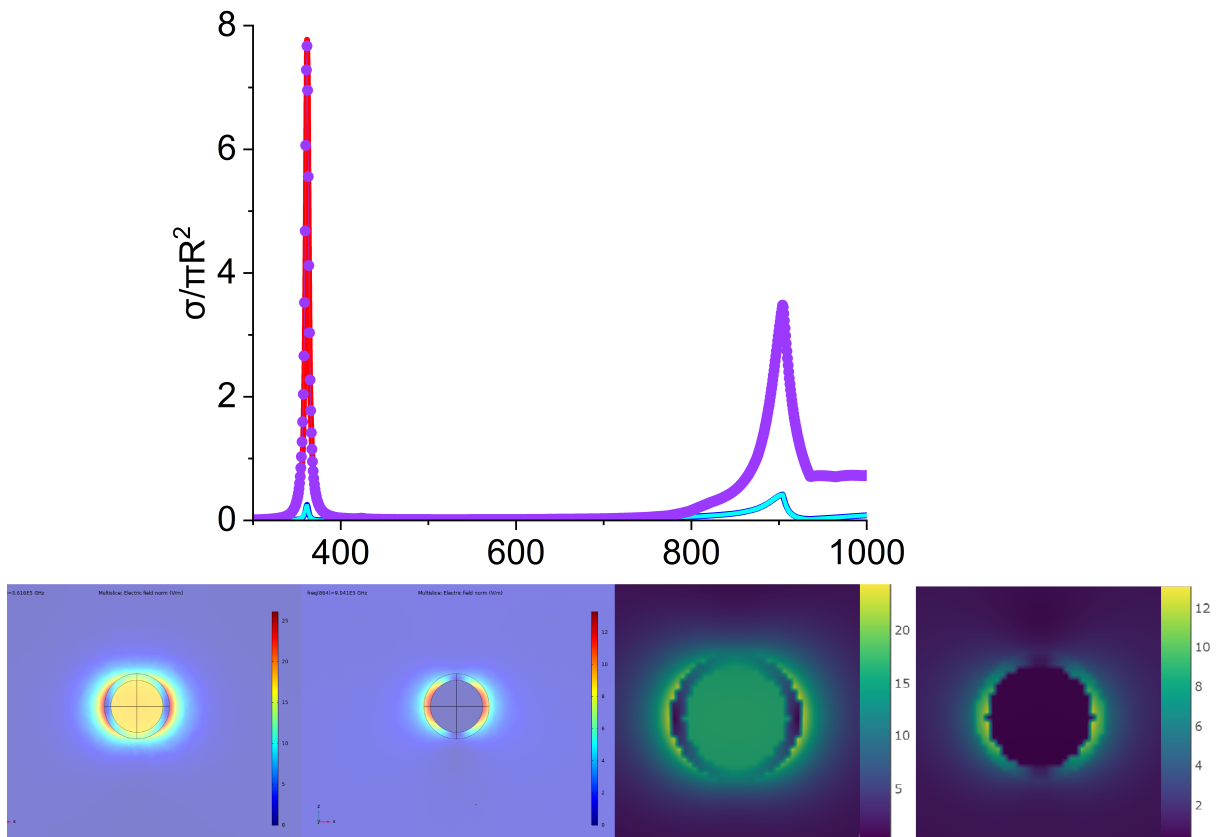
3.4 Σκέδαση από ανομοιογενείς σκεδαστές

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε σύνθετα (ανομοιογενή) σωματίδια που αποτελούνται από έναν εσωτερικό πυρήνα (core) και ένα εξωτερικό κέλυφος (shell). Αυτά τα σύνθετα σωματίδια έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον στις επιστήμες των υλικών, τη νανοτεχνολογία, και τις εφαρμογές στην οπτική λόγω των μοναδικών ιδιοτήτων τους.



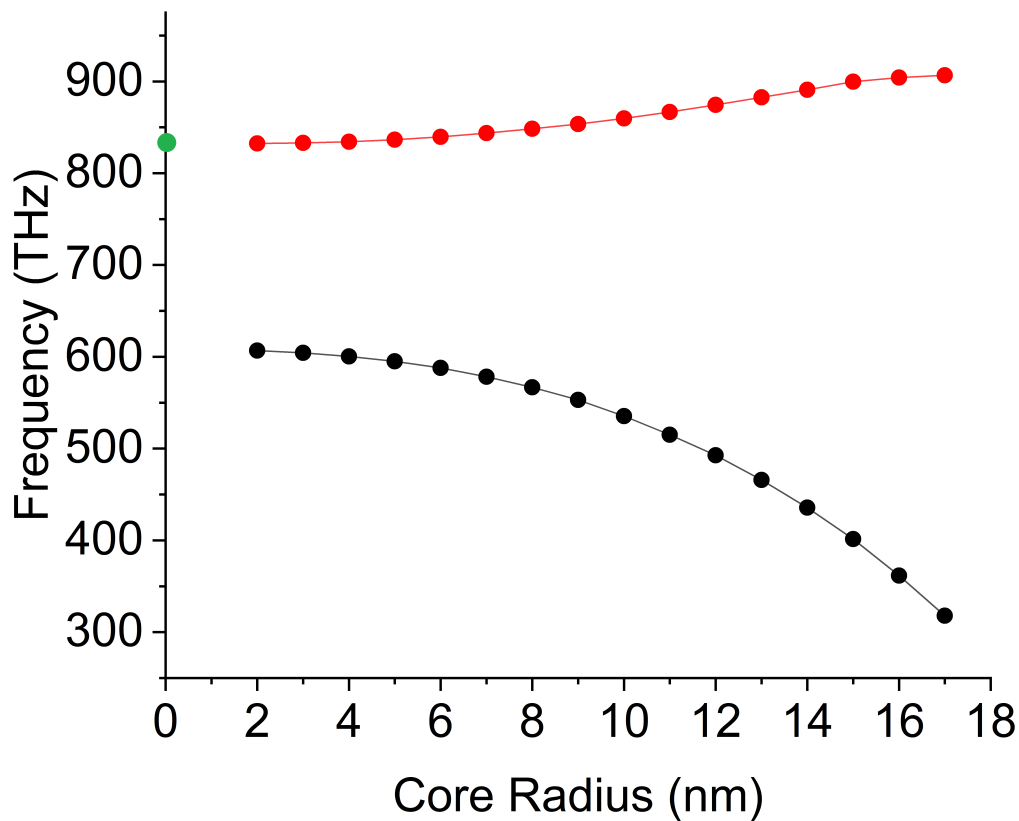
Σχήμα 3.14: (a) Σχηματική αναπαράσταση σωματιδίου πυρήνα-κελύφους. (b) Φωτογραφία σωματιδίων από πυρήνα Ag και κέλυφος Ag_2Se τα οποία υπάρχουν εμπορικά διαθέσιμα [12]

Στο Σχ. 3.15 έχουμε απεικονίσει τις ενεργές διατομές σκέδασης και απορρόφησης για ένα διστρωματικό σχεδαστή που αποτελείται από πυρήνα πυριτίου και κέλυφος αργύρου. Η ακτίνα του πυρήνα είναι 16 nm, ενώ του κελύφους 20 nm. Στο Σχήμα 3.15 παρατηρούμε ότι εμφανίζονται δύο συχνότητες συντονισμού LSRP. Έχουμε δηλαδή την εμφάνιση δύο πλασμονίων, ένα στην διεπιφάνεια αέρα - αργύρου και ένα στην διεπιφάνεια αργύρου - πυριτίου. Ο συντονισμός στις ψηλότερες συχνότητες αντιστοιχεί στο εξωτερικό πλασμόνιο ενώ ο συντονισμός στις χαμηλότερες στο εσωτερικό πλασμόνιο. Αυτό γίνεται εμφανές και από την ύπαρξη έντονου ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό του σχεδαστή στον συντονισμό χαμηλών συχνοτήτων. Θα πρέπει να τονίσουμε ωστόσο, ότι επειδή οι αποστάσεις είναι της τάξης των νανομέτρων (μικρότερες από το πάχος διείσδυσης (skin depth) των πλασμονίων) τα δύο πλασμόνια αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και υβριδοποιούνται. Συνεπώς, στο εξής θα αναφερόμαστε σε αυτά τα υβριδικά πλασμόνια.



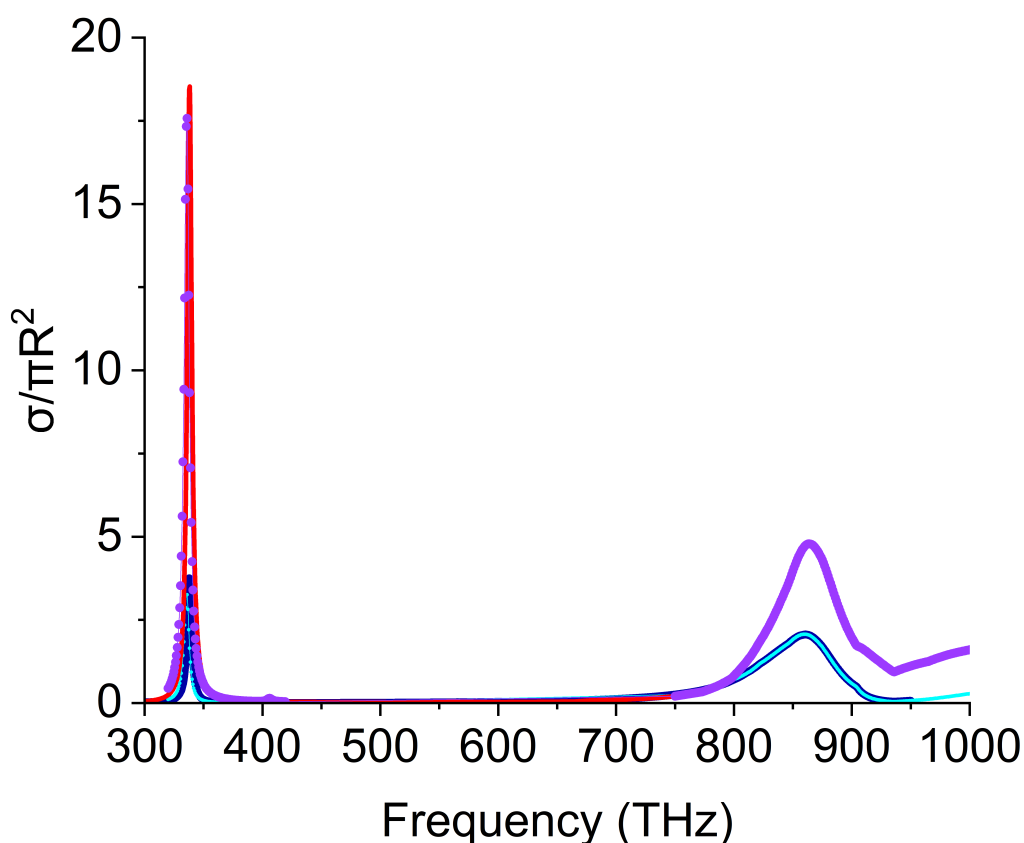
Σχήμα 3.15: Πάνω: Ενεργές διατομές απορρόφησης (κόκκινη) και σκέδασης (μπλέ) νανοσωματιδίου αποτελούμενο από φλοιό 4 nm αργύρου και πυρήνα 16 nm πυριτίου, (συνολική ακτίνα σωματιδίου $r = 20$ nm), για $l=2$, στον αέρα και σύγκριση με την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων. Με μοβ και γαλάζιο αντιστοιχώς σημειώνονται τα αποτελέσματα της μεθόδου FEM. Κάτω: το ηλεκτρικό πεδίο στους 2 πρώτους συντονισμούς βάσει της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων (αριστερά) και TMMS (δεξιά).

Στη συνέχεια αποτυπώνουμε τις συχνότητες συντονισμού των δύο πλασμονίων συναρτήσει της ακτίνας του πυρήνα. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο Σχ. 3.16. Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει η ακτίνα του πυρήνα τα δύο πλασμόνια αλληλεπιδρούν όλο και περισσότερο μεταξύ τους με αποτέλεσμα το πλασμόνιο της διεπιφάνειας πυρήνα-κελύφους να μετατοπίζεται προς χαμηλότερες συχνότητες. Όταν ο πυρήνας λαμβάνει την ελάχιστη τιμή του το σύστημα προσεγγίζει την μορφή ενός ομογενούς σχεδαστή αργύρου. Παρατηρούμε ότι σε αυτή την περίπτωση η συχνότητα συντονισμού του πολυστρωματικού σχεδαστή (832 THz, είναι περίπου ίση με την συχνότητα συντονισμού ενός όμοιου ομογενούς σχεδαστή αργύρου σε περιβάλλον αέρα (831 THz, Σχήμα 3.11). Επιβεβαιώνουμε έτσι ότι σε αυτόν τον συντονισμό αντιστοιχεί το εξωτερικό πλασμόνιο.



Σχήμα 3.16: Μεταβολή της συχνότητας των συντονισμών (κόκκινο για το εξωτερικό πλασμόνιο και μαύρο για το εσωτερικό)(LSRP) για πολυστρωματικό σχεδιαστή αποτελούμενο από πυρήνα πυριτίου κατά Aspnes και φλοιό αργύρου κατά Johnson and Christy. Με πράσινο σημειώνεται η συχνότητα πρώτου συντονισμού συμπαγούς σχεδιαστή αργύρου.

Στη συνέχεια τοποθετούμε το διστρωματικό σχεδιαστή του Σχ. 3.15 μέσα σε περιβάλλον γυαλιού. Τα αντίστοιχα φάσματα σκέδασης φαίνονται στο Σχ. 3.17. Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι το υβριδικό πλασμόνιο που έχει περισσότερο χαρακτήρα διεπιφάνειας αργύρου-αέρα μετατοπίζεται από τη συχνότητα κοντά στα 900 nm στη συχνότητα κοντά στα 850 nm. Αυτό είναι αναμενόμενο μιας και αυτό που αλλάζει είναι ο δείκτης διάθλασης του εξωτερικού μέσου (από αέρα σε γυαλί).



Σχήμα 3.17: Ενεργός διατομές νανοσωματιδίου αποτελούμενο από φλοιό 4 nm αργύρου και πυρήνα 16 nm πυριτίου σε γυαλί ($n = 1.5$), (συνολική ακτίνα σωματιδίου $r = 20$ nm), για $l=2$ και σύγκριση με την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων.

3.5 Σφαιρικοί διπλοθλαστικοί σκεδαστές

Οι σφαιρικοί διπλοθλαστικοί σκεδαστές είναι σωματίδια τα οποία εμφανίζουν διπλή διάθλαση (ή διπλοθλαστικότητα), δηλαδή η διάδοση του φωτός μέσα από αυτά εξαρτάται από την κατεύθυνση της πόλωσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Σε αντίθεση με τα ιστροπικά υλικά, όπου οι οπτικές τους ιδιότητες είναι ίδιες προς όλες τις κατευθύνσεις, τα διπλοθλαστικά υλικά παρουσιάζουν διαφορετικούς δείκτες διάθλασης ανάλογα με την κατεύθυνση και την πόλωση του προσπίπτοντος φωτός.

Τα διπλοθλαστικά υλικά έχουν δύο άξονες διάθλασης: Ο κύριος άξονας (ή οπτικός άξονας) χαρακτηρίζεται από τον λεγόμενο κανονικό δείκτη διάθλασης. Ο δευτερεύων άξονας εμφανίζει διαφορετικό δείκτη διάθλασης, γνωστός και ως έκτακτος δείκτης διάθλασης. Αυτό το φαινόμενο σημαίνει ότι, εν γένει, όταν το φως διαδίδεται μέσω ενός διπλοθλαστικού υλικού, διαχωρίζεται σε δύο ακτίνες, την κανονική και την έκτακτη, οι οποίες διαδίδονται με διαφορετικές ταχύτητες και σε διαφορετικές κατευθύνσεις.

Για ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων και για μονοαξονικά διπλοθλαστικά υλικά, όπου υπάρχει ένας κύριος οπτικός άξονας, η διηλεκτρική σταθερά μπορεί να γραφεί ως διαγώνιος ταυσοστής:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

όπου, ϵ_{\perp} η διηλεκτρική σταθερά για το φως που διαδίδεται κάθετα προς τον οπτικό άξονα (κανονικός δείκτης διάθλασης) και ϵ_{\parallel} η διηλεκτρική σταθερά για το φως που διαδίδεται παράλληλα προς τον οπτικό άξονα (έκτακτος δείκτης διάθλασης).

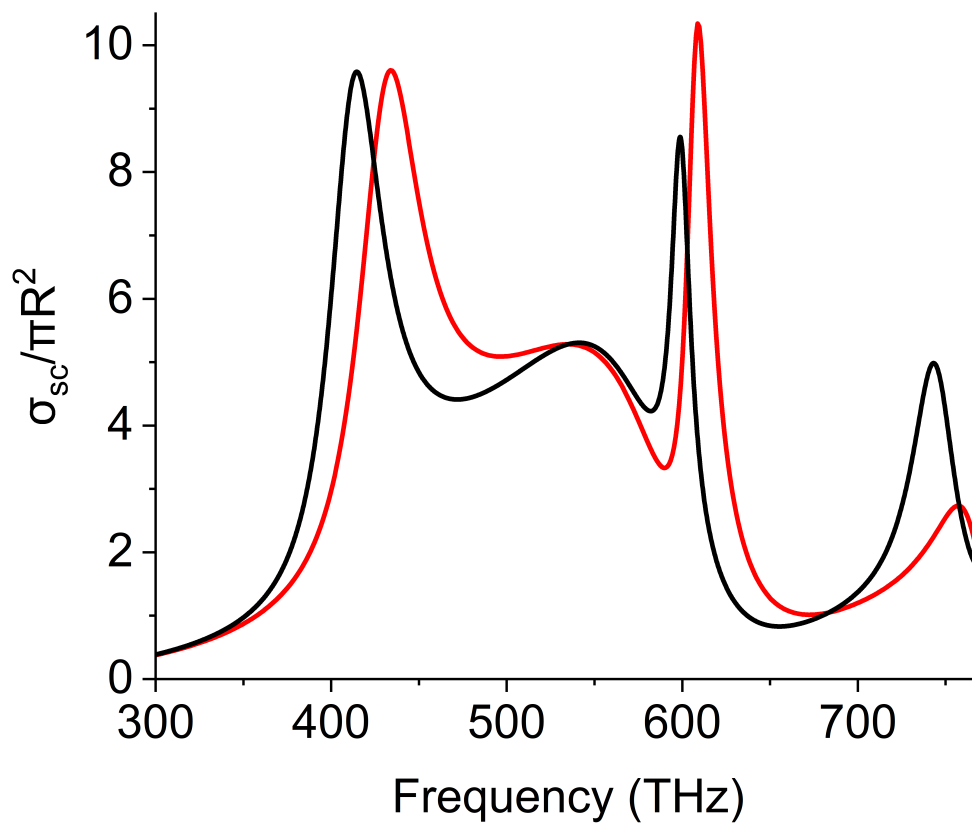
Εμείς μελετήσαμε έναν σφαιρικό διπλοθλαστικό σχεδαστή ακτίνας $r = 100$ nm με διηλεκτρική σταθερά

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

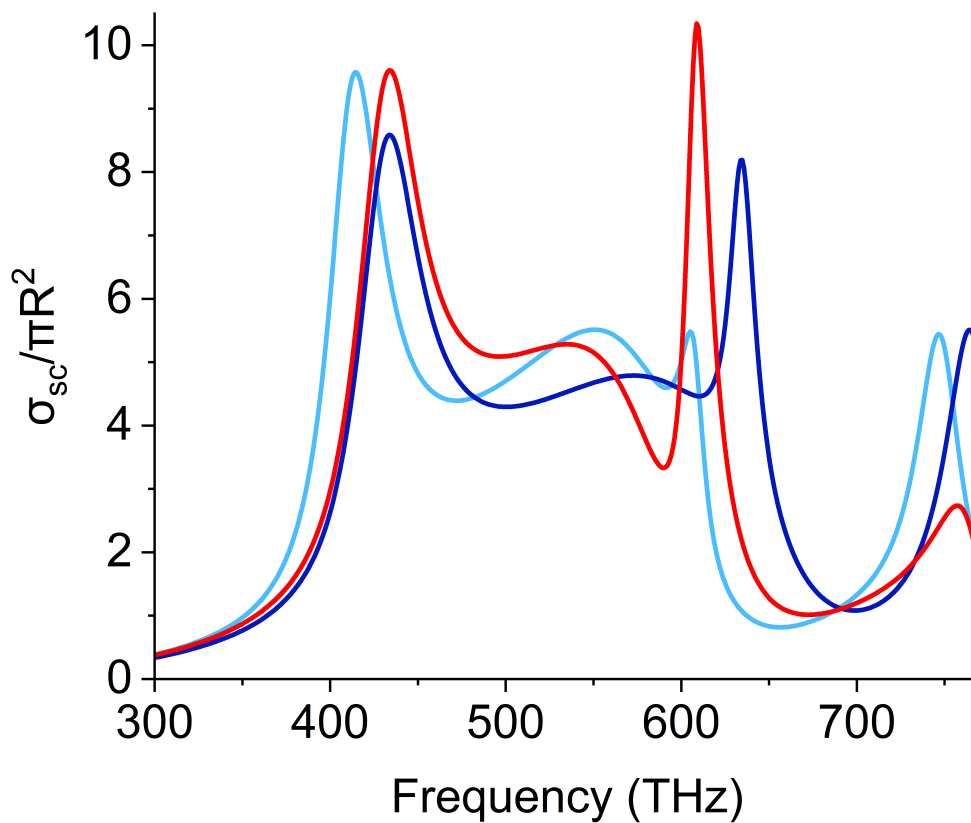
και μαγνητική διαπερατότητα $\mu = 1$, στο κενό. Στο Σχ. 3.18 βλέπουμε την ενεργό διατομή σκέδασης του εν λόγω διπλοθλαστικού σχεδαστή για πρόσπτωση του φωτός κατά μήκος του άξονα z (κόκκινη καμπύλη). Για σύγκριση δείχνουμε με τη μαύρη καμπύλη στο Σχ. 3.18 το φάσμα σκέδασης για τον απλό ισοτροπικό σχεδαστή με $\epsilon = 12$. Αυτό που παρατηρούμε είναι μια μικρή μετατόπιση των κορυφών συντονισμού προς μεγαλύτερες συχνότητες.

Στη συνέχεια, στο Σχ. 3.19 κρατάμε με κόκκινο χρώμα το φάσμα σκέδασης για τον διπλοθλαστικό σχεδαστή με πρόσπτωση του φωτός κατά τον άξονα z και επιπλέον σχεδιάζουμε τα φάσματα σκέδασης για πρόσπτωση κατά τον άξονα x , για πόλωση p και s , με μπλε και γαλάζιο, αντίστοιχα. Σημειώνουμε εδώ ότι στην πρόσπτωση του φωτός κατά τον άξονα x , η πόλωση p (μπλε) είναι κατά τον άξονα z , ενώ η πόλωση s (γαλάζιο) είναι κατά τον άξονα y . Παρατηρούμε ότι για πρόσπτωση κατά τον άξονα x και πόλωση s , τόσο η πρόσπτωση όσο και η πόλωση βρίσκονται στο επίπεδο xy , οπότε αυτό που βλέπει κυρίως το φως είναι τα $\epsilon_x x = 12$ και $\epsilon_y y = 12$. Και πράγματι, αν δούμε τις θέσεις των συντονισμών της γαλάζιας καμπύλης του Σχ. 3.19 και τις συγκρίνουμε με αυτές του απλού ισοτροπικού σχεδαστή με $\epsilon = 12$ (μαύρη καμπύλη στο Σχ. 3.18) βλέπουμε ότι είναι σε πάρα πολύ κοντινές θέσεις.

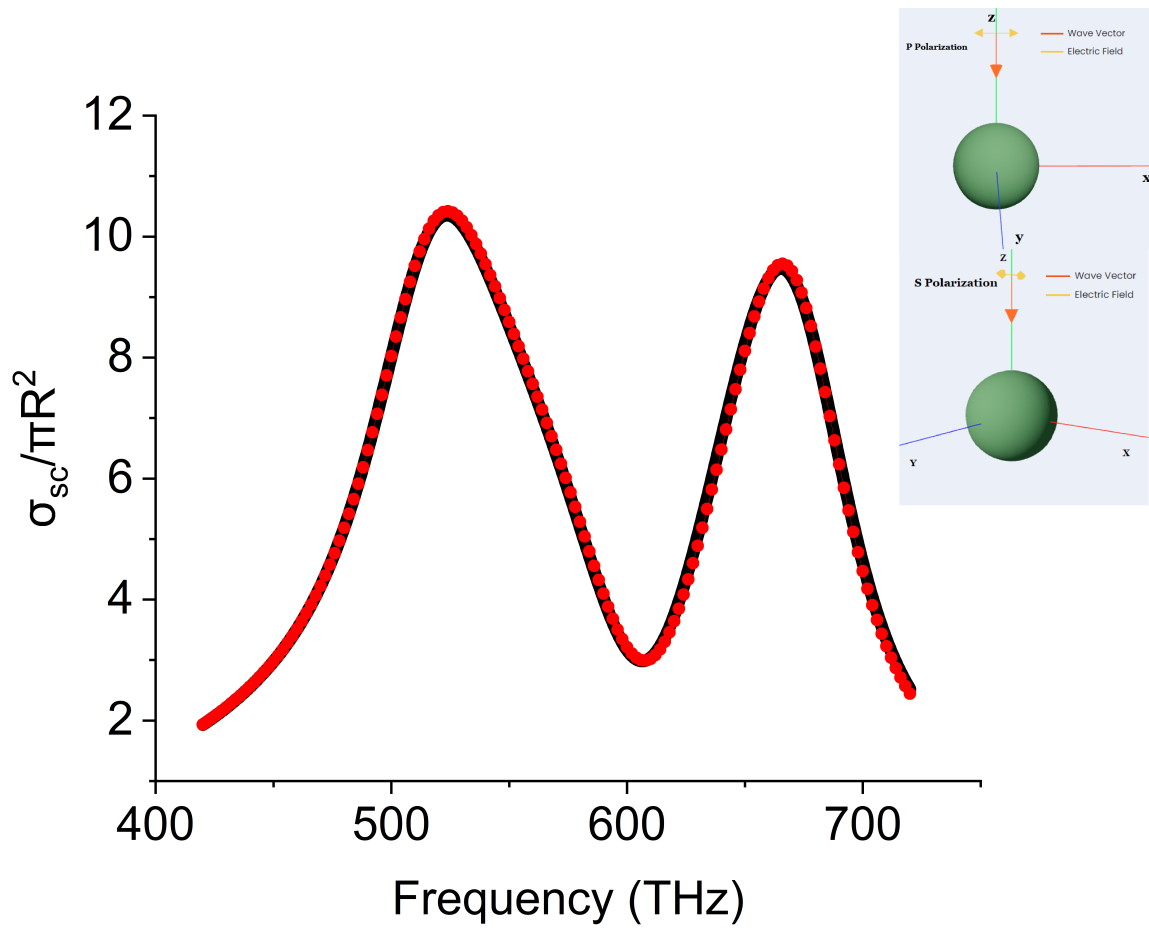
Στη συνέχεια, εξετάσαμε ένα παράδειγμα στο οποίο η διπλοθλαστικότητα είναι πολύ μεγάλη, δηλαδή το στοιχείο $\epsilon_{zz} = 5$. Για αυτή την περίπτωση μελετήσαμε τη σύγκλιση της μεθόδου TMMS με τη μέθοδο FEM. Στα Σχ. 3.20, 3.21 βλέπουμε την μεταβολή της έντασης και της θέσης των συντονισμών όταν μεταβάλλεται η διεύθυνση διάδοσης και η πόλωση του προσπίπτοντος κύματος.



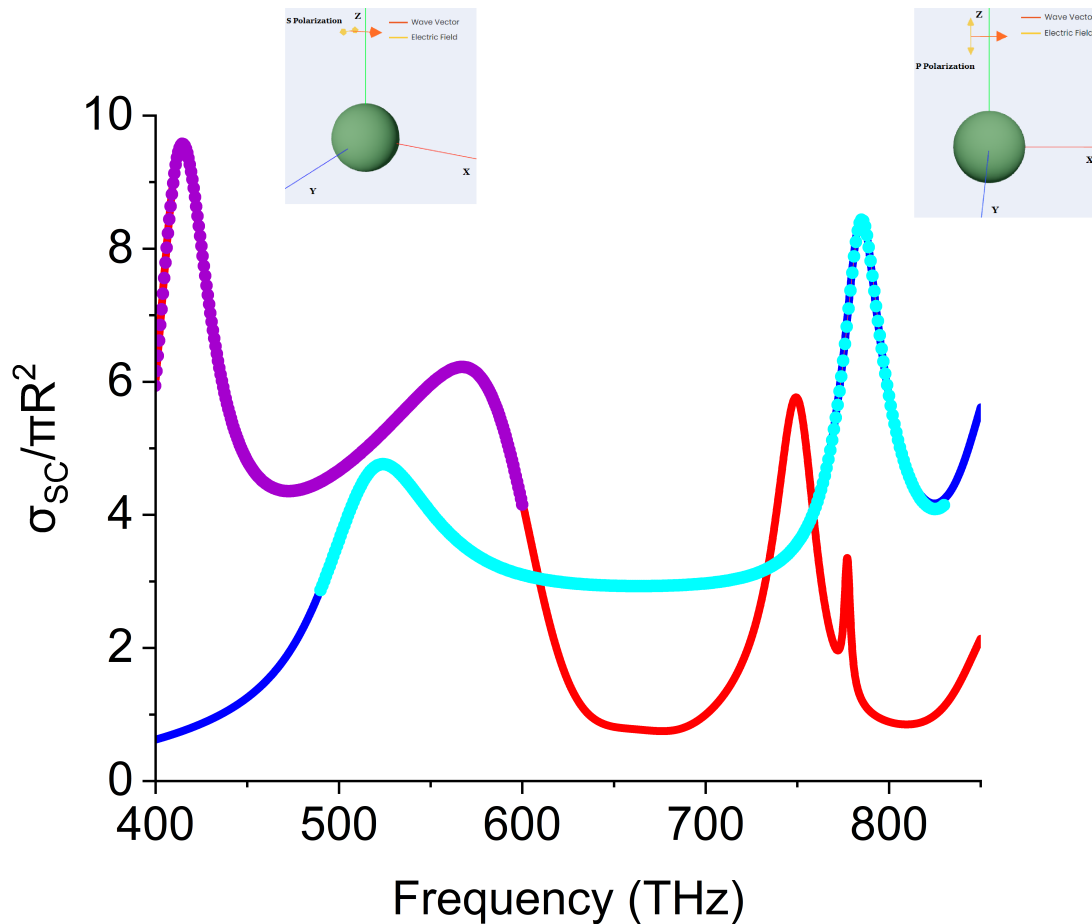
Σχήμα 3.18: Ενεργός διατομή σκέδασης για σχεδαστή ακτίνας 100 nm, στον αέρα για $l = 4$. Με μαύρο σημειώνονται τα αποτελέσματα για διηλεκτρικό τανυστή $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = 12$ και μαγνητική σταθερά $\mu = 1$ ενώ με κόκκινο σημειώνονται τα αποτελέσματα για διηλεκτρικό τανυστή $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = 12$ και $\epsilon_{zz} = 10$, και μαγνητική διαπερατότητα $\mu = 1$.



Σχήμα 3.19: Ενεργός διατομή σκέδασης για σκεδαστή ακτίνας 100 nm με διηλεκτρικό τα-
 νυστή $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = 12$ και $\epsilon_{zz} = 10$ και μαγνητική διαπερατότητα $\mu = 1$ στον αέρα για $l = 4$.
 Με κόκκινο σημειώνονται τα αποτελέσματα με διάδοση της HM ακτινοβολίας κατά τον άξονα
 z , ενώ με μπλε και γαλάζιο σημειώνονται τα αποτελέσματα για διάδοση της HM ακτινοβολίας
 κατά τον άξονα x και πόλωση p και s αντιστοίχως.



Σχήμα 3.20: Ενεργός διατομή σκέδασης διπλοθλαστικού σφαιρικού σχεδαστή με $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = 12$ και $\epsilon_{zz} = 5$, ακτίνας 100 nm, στον αέρα. Η διάδοση της ΗΜ ακτινοβολίας γίνεται κατά z και πόλωση s ή p (ταυτίζονται). Με μαύρο σημειώνεται η μέθοδος TMMS και με κόκκινο η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων.



Σχήμα 3.21: Ενεργός διατομή σκέδασης ιδανικού ανισοτροπικού σφαιρικού σκεδαστή με $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = 12$ και $\epsilon_{zz} = 5$, ακτίνας 100 nm, στον αέρα. Η διάδοση της H/M ακτινοβολίας γίνεται κατά x και πόλωση s (αριστερά) και p (δεξιά). Με μοβ και γαλάζιο σημειώνονται τα αποτελέσματα της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων.

3.6 Σκέδαση από Γυροηλεκτρικούς Σκεδαστές

Υλικά τα οποία έχουν ταχυστική διηλεκτρική συνάρτηση της μορφής της Εξ. (2.29), όπου τα μη-διαγώνια στοιχεία είναι μη μηδενικά, ονομάζονται γυροηλεκτρικά, όπως είδαμε στο αντίστοιχο κομμάτι της θεωρίας. Στην πράξη, γυροτροπική οπτική απόκριση έχουν στο ορατό και το κοντινό υπέρυθρο τα συνήθη μαγνητο-οπτικά υλικά, όπως το Yttrium Iron Garnet (YIG), παρουσία ενός εξωτερικού στατικού μαγνητικού πεδίου. Τα υλικά αυτά, απουσία του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, έχουν ισοτροπική οπτική απόκριση.

Στον ταχυστή της Εξ. (2.29), ο μη διαγώνιος όρος $f = \epsilon_z \epsilon_K$, ονομάζεται σταθερά Faraday, προς τιμήν του Βρετανού Φυσικού Michael Faraday (1791–1867), ο οποίος είναι ένας από τους σημαντικότερους επιστήμονες στην ιστορία. Το 1845, ο Faraday ανακάλυψε το φαινόμενο που αργότερα έγινε γνωστό ως φαινόμενο Faraday. Ήταν το πρώτο παράδειγμα της σχέσης μεταξύ του μαγνητισμού και του φωτός, κάτι που άνοιξε το δρόμο για την ανάπτυξη της θεωρίας του ηλεκτρομαγνητισμού και την κατανόηση του φωτός ως ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Πιο συγκεκριμένα, βρήκε ότι η πόλωση του φωτός μπορεί να περιστραφεί όταν το φως διέρχεται μέσα από ένα διαφανές υλικό που βρίσκεται υπό την επίδραση ενός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Συγκεκριμένα, διαπίστωσε ότι όταν φως διερχόταν μέσω γυαλιού ή υγρών, και ένα ισχυρό μαγνητικό πεδίο εφαρμόζονταν παράλληλα με τη διεύθυνση

της διάδοσης του φωτός, η πόλωση του φωτός περιστρεφόταν. Το μέγεθος της περιστροφής εξαρτάται από το πάχος του υλικού, την ένταση του μαγνητικού πεδίου, και τη μαγνητο-οπτική σταθερά (σταθερά Faraday) του υλικού. Η περιστροφή αυτή είναι γραμμική ως προς το μαγνητικό πεδίο και είναι μεγαλύτερη σε μαγνητο-οπτικά υλικά όπως το YIG.

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τη σκέδαση του φωτός από μαγνητο-οπτικές σφαίρες. Η γυροτροπία που επάγεται από το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο μεταβάλλει τις ιδιότητες σκέδασης, όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω. Προτού όμως περάσουμε σε συγκεκριμένους υπολογισμούς είναι χρήσιμο να κάνουμε μια μελέτη από τη σκοπιά των συμμετριών, με τη βοήθεια της θεωρίας ομάδων.

3.6.1 Συμμετρίες σε γυροηλεκτρικές σφαίρες

Η μελέτη της συμμετρίας ενός συστήματος μέσω της θεωρίας ομάδων μπορεί να βοηθήσει στην βαθύτερη κατανόηση και μελέτη του προβλήματος της σκέδασης του φωτός από έναν σκεδαστή που χαρακτηρίζεται από κάποιες συμμετρίες. Όπως έχουμε δει, στην περίπτωση του ομογενούς σφαιρικού σκεδαστή η διεύθυνση πρόσπτωσης και η πόλωση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας δεν επηρεάζουν την σκέδαση και απορρόφηση της ακτινοβολίας λόγω σφαιρικής συμμετρίας. Δεν συμβαίνει το ίδιο όταν ο σκεδαστής παρουσιάζει ανισοτροπία του δείκτη διάθλασης, οπότε και προκύπτουν νέοι κανόνες συμμετρίας.

Συγκεκριμένα, ψάχνουμε μετασχηματισμούς συμμετρίας \hat{P} που να αφήνουν τον διηλεκτρικό ταυιστή αναλλοίωτο κάτω από τον μετασχηματισμό ομοιότητας, δηλαδή $\mathbf{P}\epsilon_g\mathbf{P}^{-1} = \epsilon_g$, όπου \mathbf{P} ο αντίστοιχος 3×3 πίνακας μετασχηματισμού. Η αζιμούθια περιστροφή για τυχαία γωνία αντιστοιχεί στην διαδικασία συμμετρίας (\hat{C}_ϕ) καθώς

$$\mathbf{C}_\varphi \epsilon_g \mathbf{C}_\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon & if & 0 \\ -if & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \epsilon_g. \quad (3.3)$$

Ομοίως, για την αντιστροφή \hat{I} έχουμε

$$\mathbf{I}\epsilon\mathbf{I}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon & if & 0 \\ -if & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \epsilon_g. \quad (3.4)$$

Αντίστοιχα, η διαδικασία ($\hat{I}\hat{C}_\varphi$) είναι επίσης μετασχηματισμός ομοιότητας και μαζί με την ταυτοτική διαδικασία \hat{E} σχηματίζουν την ομάδα $C_{\infty h}$ που εμφανίζεται στον Πίνακα 3.1. Η ομάδα αποτελείται από τις άρτιες (gerade) (A_g, E_{mg}) και περιπτές (ungerade) A_u, E_{mu} μονοδιάστατες μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις. Οι A_g, A_u αναφέρονται στο $m = 0$ ενώ οι E_{mg}, E_{mu} στο $m = \pm 1, \pm 2, \dots$

Πίνακας 3.1: Πίνακας χαρακτήρων για την ομάδα $C_{\infty h}$.

$C_{\infty h}$	\hat{E}	\hat{C}_φ	\hat{I}	$\hat{I}\hat{C}_\varphi$
A_g	1	1	1	1
A_u	1	1	-1	-1
E_{mg}	1	$e^{im\varphi}$	1	$e^{im\varphi}$
E_{mu}	1	$e^{im\varphi}$	-1	$-e^{im\varphi}$

Θα προβάλλουμε τώρα τις διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές στις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της $C_{\infty h}$ χρησιμοποιώντας κατάλληλους τελεστές προβολής [13]

$$\hat{P}^{(\lambda)} = \frac{d_\lambda}{4\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \left[X^{(\lambda)}(\hat{C}_\varphi \hat{T}_j) \right]^* \hat{C}_\varphi \hat{T}_j \quad (3.5)$$

όπου το λ συμβολίζει την εκάστοτε μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση, $\hat{T}_1 = \hat{E}$ και $\hat{T}_2 = \hat{I}$, d_λ την διάσταση της αναπαράστασης (άρα $d_\lambda = 1$) και $X^{(\lambda)}(\hat{C}_\varphi \hat{T}_j)$ οι χαρακτήρες που προκύπτουν από τον Πίνακα 3.1.

Εξετάζουμε την δράση της $\hat{P}^{(A_g)}$ πάνω στις βαθμωτές σφαιρικές αρμονικές $Y_{lm}(\theta, \phi)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \hat{P}^{(A_g)} Y_{lm}(\theta, \phi) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \left(\hat{C}_\varphi \hat{E} + \hat{C}_\varphi \hat{I} \right) Y_{lm}(\theta, \phi) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi [Y_{lm}(\theta, \phi - \varphi) + Y_{lm}(\pi - \theta, \pi + \phi - \varphi)] \\ &= \frac{1}{4\pi} (1 + (-1)^{l+m} e^{i\pi m}) Y_{lm}(\theta, \phi) \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e^{-im\varphi} = \frac{1 + (-1)^l}{2} Y_{l0}(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (3.6)$$

με χρήση της ταυτότητας $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e^{-im\varphi} = \delta_{m0}$. Ομοίως υπολογίζουμε και την προβολή των $Y_{lm}(\theta, \phi)$ πάνω στις υπόλοιπες μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις. Έχουμε έτσι συνολικά ότι

$$\begin{aligned} \hat{P}^{(A_g)} Y_{lm}(\theta, \phi) &= \frac{1 + (-1)^l}{2} Y_{l0}(\theta, \phi) \\ \hat{P}^{(A_u)} Y_{lm}(\theta, \phi) &= \frac{1 - (-1)^l}{2} Y_{l0}(\theta, \phi) \\ \hat{P}^{(E_{mg})} Y_{lm}(\theta, \phi) &= \frac{1 + (-1)^l}{2} Y_{lm}(\theta, \phi) \\ \hat{P}^{(E_{mu})} Y_{lm}(\theta, \phi) &= \frac{1 - (-1)^l}{2} Y_{lm}(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Από τις Εξ. (3.7) βρίσκουμε την προβολή των διανυσματικών σφαιρικών κυμάτων στις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της $C_{\infty h}$. Μία διαδικασία \hat{P} μετασχηματίζει μια βαθμωτή (f) ή μία διανυσματική (\mathbf{F}) συνάρτηση ως εξής

$$\begin{aligned} \hat{P}f(\mathbf{r}) &= f(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{r}) \quad \text{ή} \\ \hat{P}\mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \mathbf{P}\mathbf{F}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Εφαρμόζουμε την κανονική (\hat{P}) και αντικανονική ($\hat{I}\hat{P}$) στροφή στα διανυσματικά σφαιρικά κύματα. Σημειώνεται ότι παρόλο που τα πολικά διανύσματα αντιμετωπίζονται με τον \hat{P} (δηλ. $\hat{P}\mathbf{r} = \mathbf{r}\hat{P}$ ή $\hat{P}\nabla = \nabla\hat{P}$) το γινόμενο τους είναι ένα ψευδοδιάνυσμα (δηλ. $\hat{P}(\mathbf{r} \times \nabla) = \det\{\mathbf{P}\}(\mathbf{r} \times \nabla)\hat{P}$). Βάσει αυτών, μια διανυσματική σφαιρική συνάρτηση ηλεκτρικού τύπου που μπορεί να γραφτεί στην μορφή $[f_1(\mathbf{r})\mathbf{r}] + [f_2(\mathbf{r})\nabla]Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$ μετασχηματίζεται σε ένα βαθμωτό σφαιρικό κύμα Y_{lm} . Όμως μία αντίστοιχη συνάρτηση μαγνητικού τύπου, η οποία γράφεται ως $f(\mathbf{r})(\mathbf{r} \times \nabla)Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$ μετασχηματίζεται ως Y_{lm} για κανονικές περιστροφές και με το αντίθετο πρόσημο για αντικανονικές περιστροφές. Άρα έχουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{P}^{(A_g)} \mathbf{F}_{lm}(\mathbf{r}) &= \frac{1 + (-1)^{l+1}}{2} \mathbf{F}_{l0}(\mathbf{r}) \\
\widehat{P}^{(A_u)} \mathbf{F}_{lm}(\mathbf{r}) &= \frac{1 - (-1)^{l+1}}{2} \mathbf{F}_{l0}(\mathbf{r}) \\
\widehat{P}^{(E_{mg})} \mathbf{F}_{lm}(\mathbf{r}) &= \frac{1 + (-1)^{l+1}}{2} \mathbf{F}_{lm}(\mathbf{r}) \\
\widehat{P}^{(E_{mu})} \mathbf{F}_{lm}(\mathbf{r}) &= \frac{1 - (-1)^{l+1}}{2} \mathbf{F}_{lm}(\mathbf{r})
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Για $l = 1, 3, 5, \dots$ το \mathbf{F}_{Hl0} κύμα προβάλλεται πάνω στην απεικόνιση A_g και το \mathbf{F}_{El0} πάνω στην A_u απεικόνιση. Αντιστρόφως, Για $l = 2, 4, 6, \dots$ το \mathbf{F}_{Hl0} προβάλλεται πάνω στην απεικόνιση A_u και το \mathbf{F}_{El0} πάνω στην A_g απεικόνιση. Για $l = 1, 3, 5, \dots$ το \mathbf{F}_{Hlm} κύμα προβάλλεται πάνω στην απεικόνιση E_{mg} και το \mathbf{F}_{Elm} πάνω στην E_{mu} απεικόνιση. Ομοίως, για $l = 2, 4, 6, \dots$ το \mathbf{F}_{Hlm} κύμα προβάλλεται πάνω στην απεικόνιση E_{mu} και το \mathbf{F}_{Elm} πάνω στην E_{mg} απεικόνιση.

Για να διεγείρουμε έναν συγκεκριμένο οπτικό συντονισμό η συμμετρία του προσπίπτοντος πεδίου πρέπει να είναι συμβατή με αυτή του ρυθμού του συντονισμού. Για προσπίπτον κατά την διεύθυνση της μαγνήτισης, (όπου και θεωρούμε $\theta = 0$), με πόλωση p και αντίστοιχο διάνυσμα $\hat{\mathbf{e}}_1$ έχουμε ότι

$$\mathbf{A}_{Hlm} \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{\sqrt{2l+1}\sqrt{4\pi}i^l(-1)^{m+1}}{\sqrt{l(l+1)}} (\alpha_l^m e^{i\phi} \delta_{m-1} + \alpha_l^{-m} e^{-i\phi} \delta_{m1}) \tag{3.10}$$

Με μόνους μη μηδενικούς όρους τα

$$\mathbf{A}_{Hl,-1} \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 = \sqrt{2l+1}\sqrt{\pi}i^l e^{i\phi} \tag{3.11}$$

και

$$\mathbf{A}_{Hl1} \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 = \sqrt{2l+1}\sqrt{\pi}i^l e^{-i\phi}. \tag{3.12}$$

Ομοίως για πόλωση s έχουμε ότι

$$\mathbf{A}_{Hlm} \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 = i \frac{\sqrt{2l+1}\sqrt{4\pi}i^l(-1)^{m+1}}{\sqrt{l(l+1)}} (\alpha_l^m e^{i\phi} \delta_{m-1} + \alpha_l^{-m} e^{-i\phi} \delta_{m1}) \tag{3.13}$$

με μη μηδενικούς όρους τα

$$\mathbf{A}_{Hl,-1} \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 = i\sqrt{2l+1}\sqrt{\pi}i^l e^{i\phi} \tag{3.14}$$

και

$$\mathbf{A}_{Hl1} \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 = -i\sqrt{2l+1}\sqrt{\pi}i^l e^{-i\phi} \tag{3.15}$$

Εργαζόμενοι κατά τον ίδιο τρόπο εξάγουμε τις αντίστοιχες σχέσεις για $\mathbf{A}_{Elm} \cdot \hat{\mathbf{e}}_1$ και $\mathbf{A}_{Elm} \cdot \hat{\mathbf{e}}_2$. Έχουμε έτσι, χωρίς βλάβη της γενικότητας και για $\mathbf{P}=[\mathbf{H},\mathbf{E}]$ ότι για $\phi = 0$ ισχύει

$$|\mathbf{A}_{Plm} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{1,2}|^2 = (2l+1)\pi\delta_{|m|1} \tag{3.16}$$

Η παραπάνω ισχύει, λόγω συμμετρίας, και για $\theta = \pi$. Από την παραπάνω διαπιστώνουμε ότι για διεύθυνση σκέδασης κατα τον άξονα μαγνήτισης, τόσο για s όσο και για p πόλωση,

οι μόνες καταστάσεις που μπορούν να διεγερθούν είναι οι συμμετρικές καταστάσεις $E_{\pm 1g}$ και $E_{\pm 1u}$ ($m \pm 1$).

Για $\theta = \pi/2$ και πόλωση s διεγείρονται οι ρυθμοί με $P + l + m$ άρτιο ενώ για πόλωση p διεγείρονται μόνο οι ρυθμοί με $P + l + m$ περιττό. Αυτό συμβαίνει διότι μόνο τότε έχουμε $|\mathbf{A}_{Plm} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{1,2}|^2 \neq 0$. Για $\theta \neq 0, \pi, \pi/2$ και οι δύο πολώσεις μπορούν να διεγείρουν όλους τους ρυθμούς αλλά σε διαφορετικό βαθμό. Τα παραπάνω παρατίθενται αναλυτικά στον Πίνακα 3.2.

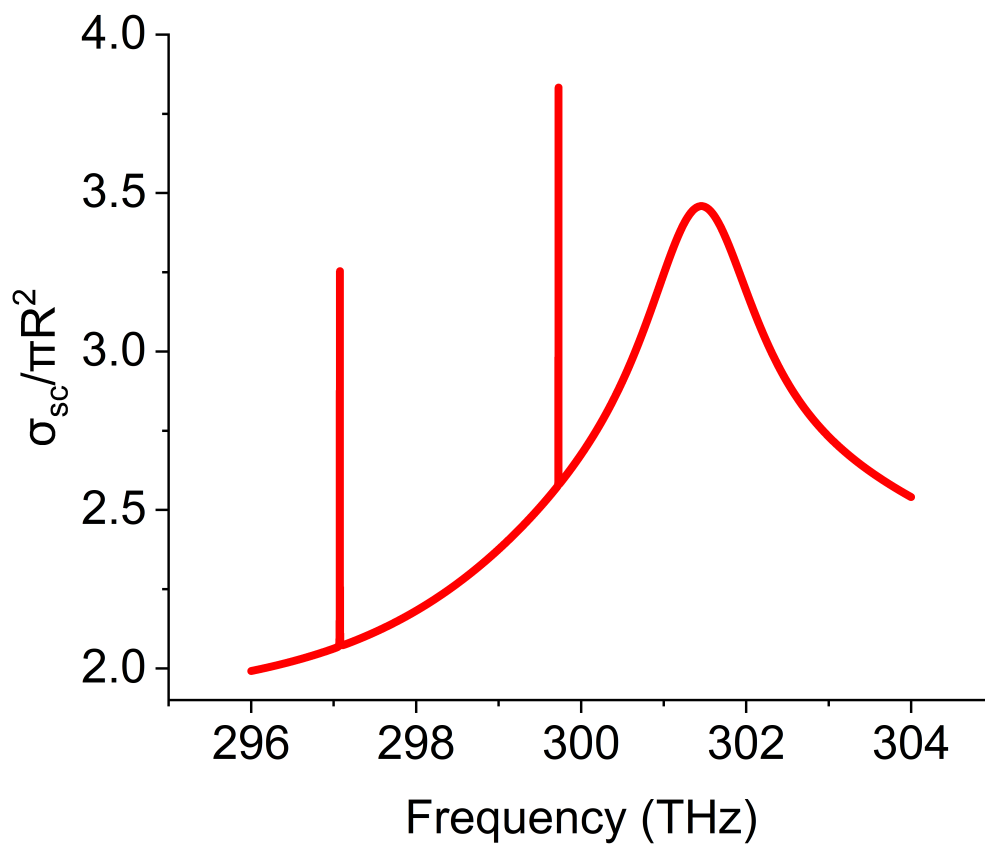
Πίνακας 3.2: Προβολή του επίπεδου HM κύματος με γωνία πρόσπτωσης θ ως προς τον άξονα z , πόλωσης s ή p , πάνω στην βάση των μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων της $\hat{C}_{\infty h}$.

Γωνία πρόσπτωσης	Πόλωση	$C_{\infty h}$
$\theta = 0, \pi$	s ή p	$E_{\pm 1g}, E_{\pm 1u}$
$\theta \neq 0, \pi/2, \pi$	s	$A_u, A_g, E_{\pm 1g}, E_{\pm 1u}, E_{\pm 2g}, E_{\pm 2u}, \dots$
	p	$A_u, A_g, E_{\pm 1g}, E_{\pm 1u}, E_{\pm 2g}, E_{\pm 2u}, \dots$
$\theta = \pi/2$	s	$A_u, E_{\pm 1g}, E_{\pm 2u}, E_{\pm 3g}, E_{\pm 4u}, \dots$
	p	$A_g, E_{\pm 1u}, E_{\pm 2g}, E_{\pm 3u}, E_{\pm 4g}, \dots$

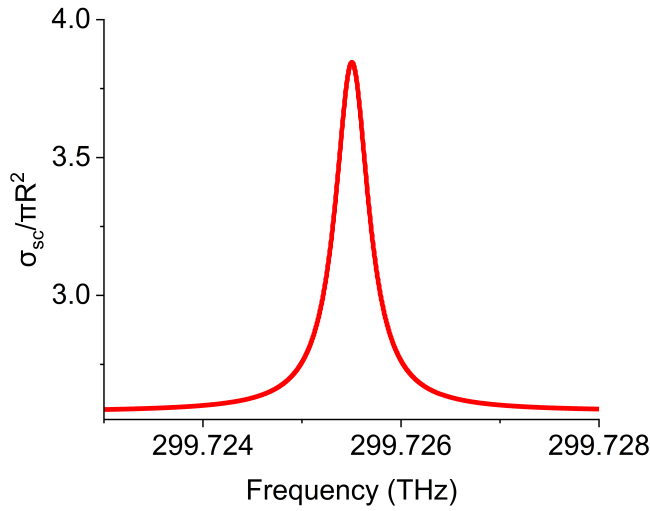
3.6.2 Μαγνητο-οπτική απόκριση μικροσωματιδίου από γρανάτη

Τυπικά υλικά που παρουσιάζουν διηλεκτρική και γυροηλεκτρική οπτική απόκριση, με χαμηλές σχετικά απώλειες, είναι οι γρανάτες σιδήρου - σπάνιων γαιών, όπως ο γρανάτης σιδήρου - υτρίου (YIG). Όσο παραμένει αμαγνήτιστος ο YIG συμπεριφέρεται σαν ένα τυπικό διηλεκτρικό, με βαθμωτή ηλεκτρική διαπερατότητα ϵ . Όταν όμως μαγνητιστεί η ηλεκτρική διαπερατότητα παίρνει την μορφή τανυστή της μορφής Εξ. (2.29). Υπό μαγνητισμό κορεσμού όμως ο συντελεστής f (συντελεστής Faraday) είναι σχετικά μικρός, έτσι για μαγνητο-οπτικές εφαρμογές στο ορατό και κοντινό υπέρυθρο συχνά χρησιμοποιούνται ντοπαρισμένοι γρανάτες YIG, οι οποίοι αυξάνουν σημαντικά την σχετική απόδοση στο κοντινό υπέρυθρο και ορατό.

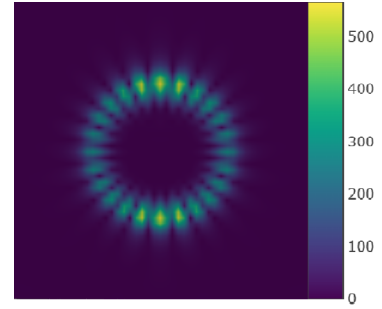
Αρχικά θεωρούμε μια αμαγνήτιστη σφαίρα από Bi:YIG (γρανάτη νοθευμένο με βισμούθιο) ακτίνας $1 \mu\text{m}$ στον αέρα. Η διηλεκτρική συνάρτηση του Bi:YIG στις συχνότητες που εξετάζουμε μπορεί να προσεγγιστεί από το $\epsilon = 6.5$ και $\mu = 1$. Στο Σχ. 3.22 έχουμε την ενεργό διατομή σκέδασης για αυτό το σωματίδιο, σε ένα επιλεγμένο παράθυρο συχνοτήτων. Αυτό που είναι χαρακτηριστικό σε αυτό το φάσμα είναι ότι βλέπουμε δύο συντονισμούς πάρα πολύ μεγάλου συντελεστή ποιότητας Q . Τέτοιου είδους συντονισμοί είναι συντονισμοί τύπου Mie που αντιστοιχούν σε υψηλή τιμή του δείκτη l .



Σχήμα 3.22: Ενεργός διατομή σκέδασης για αμαγνήτιστο σκεδαστή διηλεκτρικής σταθεράς $\epsilon = 6.5$, μαγνητικής διαπερατότητας $\mu = 1$ και ακτίνας $1 \mu\text{m}$. Για να συγκλίνει το φάσμα χρειάζεται $l = 12$.



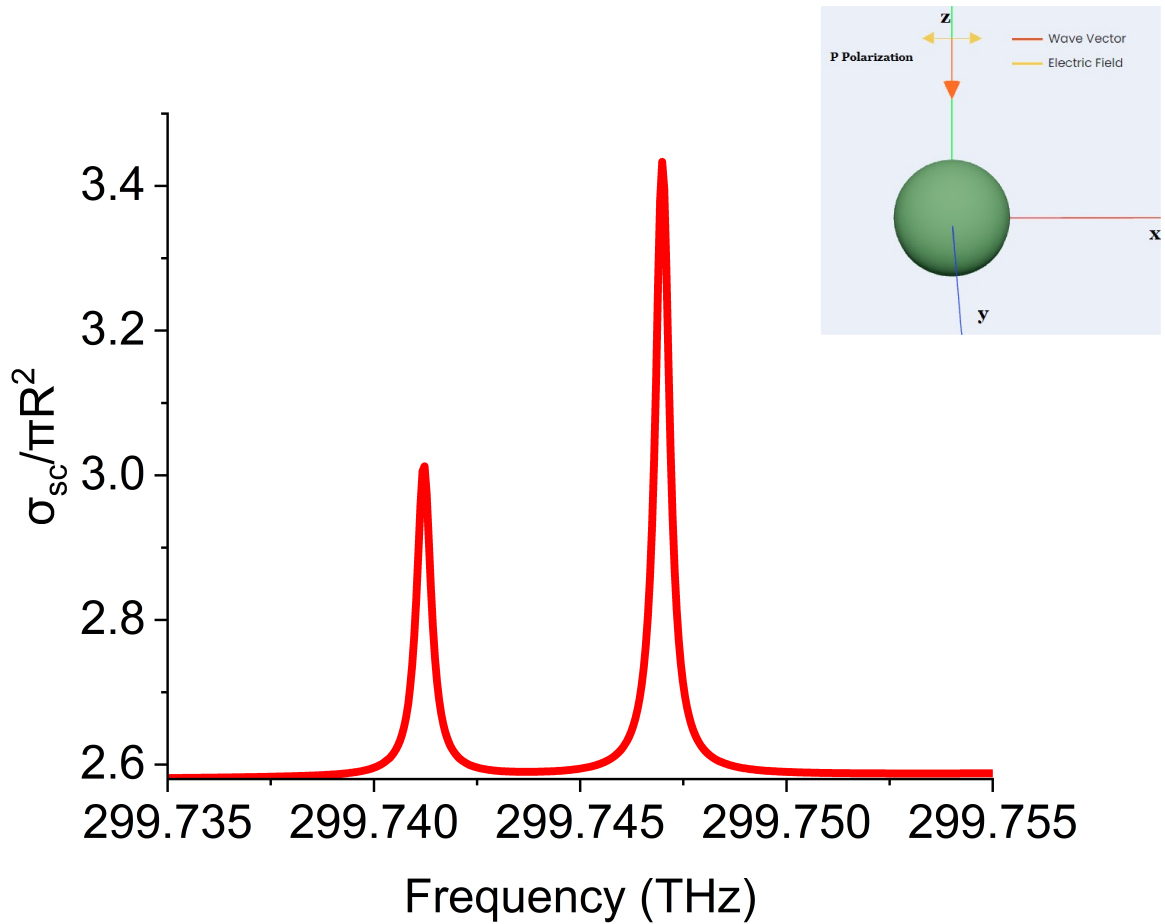
Σχήμα 3.23: Περιοχή συντονισμού 299.7 THz για τον παραπάνω αμαγνήτιστο σχεδαστή. Ο συντονισμός είναι μαγνητικού τύπου (H) και έχει δείκτη $l = 12$.



Σχήμα 3.24: Ένταση ηλεκτρικού πεδίου για τον συντονισμό TE_{12} .

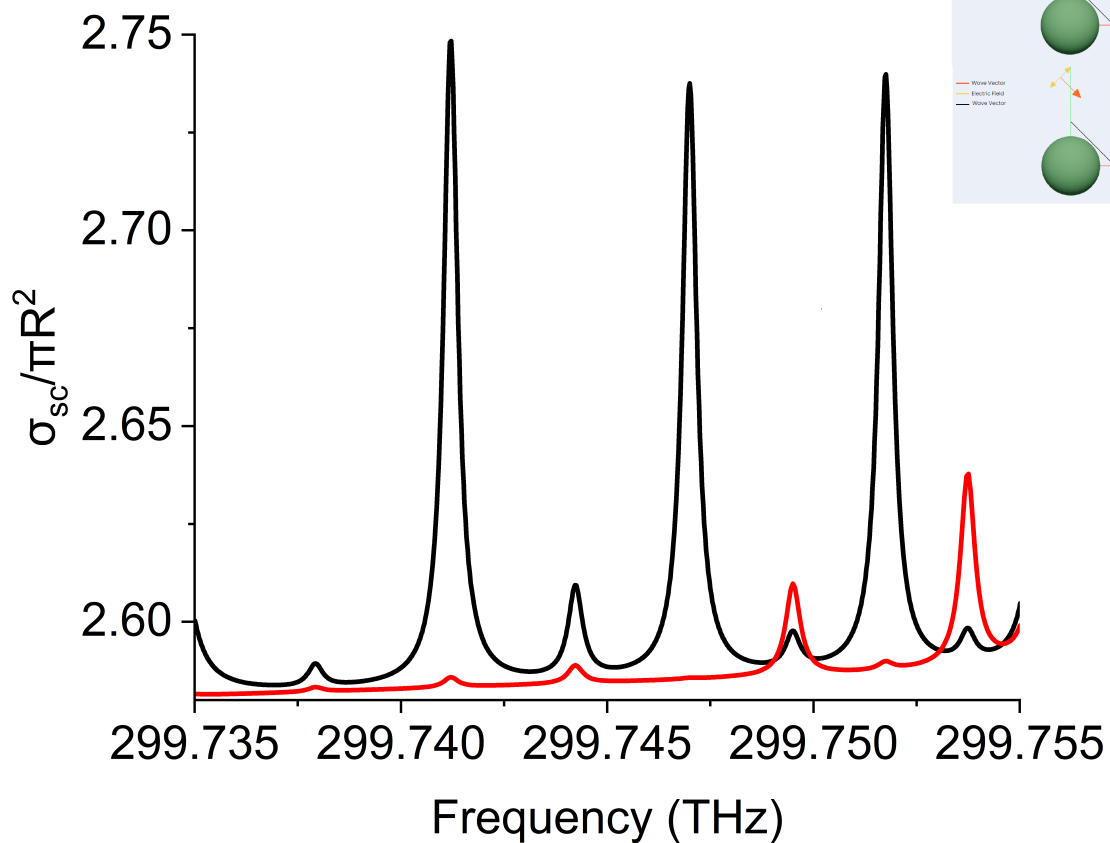
Θα επιλέξουμε έναν από αυτούς και θα επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας γύρω από αυτόν. Στο Σχ. 3.23 επικεντρωνόμαστε στο συντονισμό γύρω από τα 299.7255 THz, ο οποίος είναι συντονισμός μαγνητικού τύπου με $l = 12$. Αυτός ο συντονισμός ονομάζεται (ως εγχάρσιος ηλεκτρικός) TE_{12} για συντομία. Στο Σχ. 3.24 βλέπουμε την κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου σε αυτό το συντονισμό. Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας και της ισοτροπίας που έχει ο αμαγνήτιστος σχεδαστής, ο δείκτης m είναι εκφυλισμένος, ενώ η τάξη του εκφυλισμού του είναι $2l + 1 = 25$. Η ομοτιμία¹ σ του συντονισμού είναι $\sigma = P + l = 1 + 12 = 13 =$ περιττή (ungerade).

¹Για τον υπολογισμό της ομοτιμίας ως προς τον δείκτη $P = H, E$ είναι $H = 1$ και $E = 2$.



Σχήμα 3.25: Ενεργός διατομή σκέδασης στην περιοχή δεύτερου συντονισμού, για τον μαγνητισμένο σχεδαστή ακτίνας 1 μm με $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = 6.5$, $f = -0.02$ και $\mu = 1$, στον αέρα, για $l = 12$ και $l_{cut} = 14$. Η διάδοση της HM ακτινοβολίας γίνεται κατά \mathbf{z} (οι δύο γραμμικές πολώσεις ταυτίζονται).

Από τη στιγμή που θα μαγνητίσουμε τη σφαίρα όμως, θα γίνει ανιστροπική, και συνεπώς ο εκφυλισμός του δείκτη m θα χαθεί. Θα πρέπει λοιπόν να προκύψουν 25 συντονισμοί σε λίγο διαφορετική συχνότητα ο καθένας. Πιο συγκεκριμένα, θα θεωρήσουμε ότι το υπό εξέταση σωματίδιο είναι τώρα μαγνητικά κορεσμένο, οπότε θα έχουμε το μη-διαγώνιο όρο στον ταυστή της διηλεκτρικής επιδεκτικότητας (σταθερά Faraday) $f = -0.02$ [14]. Επίσης, θεωρούμε πρόσπτωση του φωτός κατά τον άξονα z . Σύμφωνα με τον πίνακα 3.2 λοιπόν, θα πρέπει για $\theta = 0$ να περιμένουμε τη διέγερση μόνο δύο συντονισμών, δηλαδή αυτών που έχουν συμμετρία E_{1g} και E_{-1g} (οι υπόλοιπες 23 καταστάσεις θα μένουν ανενεργές για αυτή τη γωνία πρόσπτωσης). Πράγματι, στο Σχ. 3.25 παρατηρούμε δύο χαρακτηριστικές κορυφές, όπου η αριστερή αντιστοιχεί σε $m = -1$, ενώ η δεξιά σε $m = 1$. Ως εκ τούτου, η συμμετρία της αριστερής κορυφής είναι η E_{-1g} , ενώ της δεξιάς κορυφής η E_{1g} .



Σχήμα 3.26: Ενεργός διατομή σκέδασης για τον μαγνητισμένο σκεδαστή του παραδείγματος που μελετάμε όταν η πρόσπτωση γίνεται κατά γωνία $\theta = 45^\circ$ και πόλωση s (μαύρη καμπύλη) ή p (κόκκινη καμπύλη).

Σύμφωνα με τον πίνακα 3.2, όταν η πρόσπτωση του φωτός έχει μια άλλη διεύθυνση ($\theta \neq 0, \pi/2, \pi$) τότε δύναται να διεγερθούν οι συντονισμοί όλων των συμμετριών με οποιαδήποτε πόλωση. Πράγματι, στο Σχ. 3.26 βλέπουμε ότι πέρα από τους δύο συντονισμούς που είχαμε στο Σχ. 3.25, διεγείρονται και πολλοί άλλοι. Παρατηρούμε επίσης ότι ο κάθε συντονισμός διεγείρεται με διαφορετική ένταση, τόσο μεταξύ τους, όσο και για διαφορετική πόλωση. Ωστόσο, αυτή είναι μια πληροφορία ποσοτικού χαρακτήρα την οποία μπορεί να μας δώσει μόνο ο πλήρης υπολογισμός (όπως και κάναμε) και δεν μπορεί να προέλθει από τη μελέτη των συμμετριών μέσω της θεωρίας ομάδων μιας και από εκεί μπορούμε να πάρουμε μόνο ποιοτικά χαρακτηριστικά και όχι ποσοτικά.

Κεφάλαιο 4

Συμπεράσματα

Η σύγκριση μεταξύ της μεθόδου TMMS (T-Matrix Multipolar Scattering) και της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων (FEM) αναδεικνύει τα πλεονεκτήματα και τις αδυναμίες κάθε προσέγγισης για τον υπολογισμό της σκέδασης φωτός από νανοσωματίδια. Η μέθοδος TMMS, βασισμένη στη χρήση του πίνακα T, προσφέρει σημαντική ακρίβεια και ταχύτητα υπολογισμού σε προβλήματα που αφορούν σφαιρικά νανοσωματίδια. Αυτή η μέθοδος είναι ιδανική για την ανάλυση πολυπολικών συντονισμών και τη γρήγορη επίλυση προβλημάτων που σχετίζονται τόσο με ομοιογενείς, όσο και με ανομοιογενείς (πολυστρωματικούς) ή και ανισοτροπικούς σφαιρικούς σχεδαστές, όπως δείξαμε. Η μέθοδος FEM μπορεί και αυτή να προσομοιώσει τις οπτικές ιδιότητες αυτών των σχεδαστών, όμως το κόστος υπολογισμού αυξάνεται σημαντικά, ειδικά σε προσομοιώσεις ανισοτροπικών σχεδαστών. Επιπλέον, οι απαιτήσεις σε πόρους και χρόνο είναι απαγορευτικές όταν έχουμε συντονισμούς υψηλού δείκτη ποιότητας Q , όπως αυτοί της τελευταίας εφαρμογής που δείξαμε. Ωστόσο, η μέθοδος FEM μπορεί να προσομοιώσει και σχεδαστές που αποκλίνουν σημαντικά από το σφαιρικό σχήμα και αυτό είναι το βασικό της πλεονέκτημα σε σχέση με την TMMS.

Η μελέτη του διηλεκτρικού σχεδαστή υψηλού δείκτη διάθλασης, από υλικά όπως το πυρίτιο ή το διοξείδιο του τιτανίου, αποκάλυψε τα σημαντικά πλεονεκτήματα αυτών των σχεδαστών για εφαρμογές στη νανοφωτονική. Μέσω της ανάλυσης των πολυπολικών όρων, φάνηκε ότι οι διηλεκτρικοί σχεδαστές μπορούν να δημιουργήσουν τόσο ηλεκτρικούς όσο και μαγνητικούς συντονισμούς που εντοπίζουν το πεδίο στο εσωτερικό του σχεδαστή. Επιπλέον, οι διηλεκτρικοί σχεδαστές είναι σχεδόν απαλλαγμένοι από απώλειες απορρόφησης, καθιστώντας τους ιδανικούς για εφαρμογές όπου απαιτείται αποδοτική σκέδαση ή μετάδοση φωτός. Τέλος, οι σχεδαστές αυτοί προσφέρουν τη δυνατότητα ρύθμισης των συντονισμών μέσω της μεταβολής της γεωμετρίας τους, επιτρέποντας την προσαρμογή τους σε διάφορες εφαρμογές.

Από την άλλη πλευρά, τα μεταλλικά νανοσωματίδια παρουσιάζουν μοναδικά οπτικά χαρακτηριστικά που συνδέονται με το φαινόμενο των πλασμονίων, δηλαδή των συλλογικών ταλαντώσεων των ελεύθερων ηλεκτρονίων που ενεργοποιούνται όταν το φως αλληλεπιδρά με την επιφάνειά τους. Αυτό το φαινόμενο οδηγεί σε ισχυρή σκέδαση και απορρόφηση του φωτός, καθιστώντας τα μεταλλικά νανοσωματίδια εξαιρετικά χρήσιμα σε πλήθος εφαρμογών. Ένα από τα κύρια ευρήματα είναι ότι τα μεταλλικά νανοσωματίδια, ιδιαίτερα του χρυσού και του αργύρου, παρουσιάζουν εξαιρετικά ισχυρούς συντονισμούς πλασμονίων στην οπτική περιοχή του φάσματος. Αυτοί οι συντονισμοί οδηγούν σε έντονη τοπική ενίσχυση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, γεγονός που καθιστά τα μεταλλικά νανοσωματίδια ιδανικά για εφαρμογές όπως οπτικοί αισθητήρες, φωτοκαταλύτες και ενίσχυση φασματοσκοπίας Raman (SERS). Ειδικά τα νανοσωματίδια αργύρου, λόγω των ιδιοτήτων τους, προσφέρουν ακόμα

μεγαλύτερη ενίσχυση σε σχέση με τα νανοσωματίδια χρυσού, αν και είναι πιο επιρρεπή σε οξείδωση και φθορά. Παράλληλα, η μελέτη έδειξε ότι τα μεταλλικά νανοσωματίδια έχουν σημαντικές ωμικές απώλειες λόγω της απορρόφησης του φωτός, οι οποίες περιορίζουν την αποδοτικότητά τους σε εφαρμογές που απαιτούν χαμηλή απώλεια ενέργειας. Παρ' όλα αυτά, η δυνατότητα ρύθμισης των οπτικών ιδιοτήτων τους μέσω της αλλαγής του μεγέθους, του σχήματος και του περιβάλλοντος μέσου προσφέρει μεγάλες δυνατότητες προσαρμογής και βελτιστοποίησης σε συγκεκριμένες εφαρμογές.

Όσον αφορά τη μελέτη των νανοσωματιδίων πυρήνα-κελύφους (core-shell), αυτή παρουσιάζει ενδιαφέρον λόγω των μοναδικών ιδιοτήτων τους, οι οποίες προκύπτουν από τον συνδυασμό των δύο διαφορετικών υλικών – ενός πυρήνα και ενός εξωτερικού κελύφους. Αυτό επιτρέπει την προσαρμογή των συντονισμών σκέδασης και την επίτευξη ειδικών χαρακτηριστικών, όπως η ενίσχυση της πλασμονικής απόκρισης ή η μείωση των απωλειών. Πιο συγκεκριμένα, τα νανοσωματίδια με διηλεκτρικό πυρήνα και μεταλλικό κέλυφος μπορούν να παρουσιάσουν εξαιρετικά έντονες επιφανειακές πλασμονικές ταλαντώσεις, που ενισχύουν το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στις δύο επιφάνειες του μεταλλικού κελύφους. Τα υβριδικά αυτά πλασμόνια μπορούν να ρυθμιστούν μέσω της αλλαγής των γεωμετρικών διαστάσεων του πυρήνα ή/και του κελύφους. Επίσης αποτέλεσμα αυτού του υβριδισμού είναι πλασμόνια με διαφορετικά χαρακτηριστικά (π.χ. θέση συντονισμού, ένταση απορρόφησης ή σκέδασης) από τα αντιστοίχως αναμενόμενα βάσει των συμπαγών σχεδιαστών.

Μια ιδιαίτερη κατηγορία σχεδιαστών αποτελούν οι διπλοθλαστικοί σχεδιαστές, οι οποίοι παρουσιάζουν ανισοτροπία στις οπτικές τους ιδιότητες, δηλαδή η διηλεκτρική τους επιδεκτικότητα εξαρτάται από την κατεύθυνση διάδοσης του φωτός. Αυτό το φαινόμενο της διπλοθλαστικότητας επιτρέπει το διαχωρισμό ενός εισερχόμενου φωτεινού κύματος σε δύο διαφορετικά πολωμένα κύματα που διαδίδονται με διαφορετικές ταχύτητες μέσα στον σχεδιαστή. Αυτή η συμπεριφορά των διπλοθλαστικών υλικών προσφέρει ιδιαίτερες δυνατότητες για τον έλεγχο της πόλωσης και της κατεύθυνσης του φωτός. Στη μελέτη των διπλοθλαστικών σχεδιαστών, ιδιαίτερη σημασία έχει ο σχεδιασμός και η γεωμετρία τους. Σε αντίθεση με τους ιστροπικούς σχεδιαστές, όπου οι ιδιότητες της σκέδασης εξαρτώνται μόνο από το μέγεθος και το υλικό του σωματιδίου, οι διπλοθλαστικοί σχεδιαστές προσφέρουν επιπλέον βαθμούς ελευθερίας για τη ρύθμιση της σκέδασης, χάρη στην εξάρτηση των ιδιοτήτων τους από την κατεύθυνση. Αυτή η ανισοτροπία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή πιο πολύπλοκων φαινομένων σκέδασης και για την επίτευξη εξειδικευμένων εφαρμογών. Ωστόσο, η μοντελοποίηση και η ανάλυση των διπλοθλαστικών σχεδιαστών απαιτεί πιο σύνθετες θεωρητικές μεθόδους, γι' αυτό και η μέθοδος TMMS έχει προσαρμοστεί για να υπολογίζει τα φαινόμενα σκέδασης σε ανισοτροπικούς και διπλοθλαστικούς σχεδιαστές, παρέχοντας έτσι ακριβείς προβλέψεις για τη σκέδαση και την απορρόφηση του φωτός.

Η δεύτερη κατηγορία ανισοτροπικών σχεδιαστών είναι οι γυροηλεκτρικοί σχεδιαστές, οι οποίοι συνήθως αποτελούνται από μαγνητο-οπτικά υλικά που τοποθετούνται μέσα σε εξωτερικό σταθερό μαγνητικό πεδίο. Οι συντονισμοί μεγάλης τάξης (π.χ. $l = 12$), όταν ο σχεδιαστής είναι αμαγνήτιστος, είναι εκφυλισμένοι λόγω της σφαιρικής συμμετρίας. Όταν όμως ο σχεδιαστής τοποθετηθεί σε μαγνητικό πεδίο οι ρυθμοί διαχωρίζονται μέσα σε ένα πολύ στενό φάσμα συχνοτήτων αναλόγως με την διεύθυνση πρόσπτωσης του φωτός σχετικά με την διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου. Μέσω της θεωρίας ομάδων μπορούμε να γνωρίζουμε πόσους συντονισμούς αναμένουμε για στις διαφορετικές κατηγορίες γωνιών πρόσπτωσης, όπως $\theta = 0, \pi$ ή $\theta = \pi/2$ ή $\theta \neq 0, \pi, \pi/2$. Λόγω της διαφορετικής συμπεριφοράς τους κατά την παρουσία μαγνητικού πεδίου τα γυροηλεκτρικά υλικά έχουν πολλές εφαρμογές ως φίλτρα συχνοτήτων ή απομονωτές (οπτικούς ή μικροκυμάτων), αισθητήρες για την ανίχνευση μαγνητικών πεδίων καθώς και σε διάφορες εφαρμογές της μη γραμμικής οπτικής.

Παράρτημα Α'

Σφαιρικές Αρμονικές

Οι σφαιρικές αρμονικές $Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$ αποτελούν το γωνιακό τμήμα των λύσεων της εξίσωσης Helmholtz, και ικανοποιούν την ακόλουθη διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned}\nabla^2 Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) &= \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\mathbf{L}^2}{r^2} \right] Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \\ &= -\frac{\mathbf{L}^2}{r^2} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = -\frac{l(l+1)}{r^2} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}),\end{aligned}\quad (\text{A'.1})$$

όπου \mathbf{L} είναι ο τελεστής της στροφορμής και το όρισμα $\hat{\mathbf{r}}$ δηλώνει την εξάρτηση από τις γωνίες θ, ϕ του διανύσματος \mathbf{r} στις σφαιρικές συντεταγμένες. Οι σφαιρικές αρμονικές $Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$ δίνονται από την έκφραση

$$Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}, \quad (\text{A'.2})$$

με $l = 0, 1, 2, \dots$, $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$ και με $P_l^m(\cos\theta)$ τα προσαρτημένα πολυώνυμα Legendre

$$P_l^m(x) = \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l, \quad x = \cos\theta, \text{ για } m > 0, \quad (\text{A'.3})$$

ενώ για $m < 0$ υπολογίζονται από την

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x). \quad (\text{A'.4})$$

Από τις παραπάνω προκύπτει

$$Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}) = (-1)^m Y_{l-m}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (\text{A'.5})$$

και

$$Y_{lm}(-\hat{\mathbf{r}}) = (-1)^l Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\text{A'.6})$$

$$Y_{lm}(\theta=0, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0}. \quad (\text{A'.7})$$

Οι $Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$ πληρούν μια σειρά από σημαντικές σχέσεις ορθογωνιότητας και πληρότητας

$$\int d\Omega Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{r}}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (\text{A'.8})$$

$$\sum_{lm} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}') = \delta(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}'), \quad (\text{A'.9})$$

το θεώρημα άθροισης σφαιρικών αρμονικών

$$\sum_{m=-l}^l |Y_{lm}|(\mathbf{r})^2 = \frac{2l+1}{4\pi}, \quad (\text{A'.10})$$

οι ακόλουθες που συνδέουν σφαιρικές αρμονικές διαφόρων τάξεων

$$\cos \theta Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = \zeta_{l+1}^m Y_{l+1m}(\hat{\mathbf{r}}) + \zeta_l^m Y_{l-1m}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\text{A'.11})$$

$$e^{i\phi} \sin \theta Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = 2 (\gamma_l^{-m} Y_{l-1m+1}(\hat{\mathbf{r}}) - \gamma_{l+1}^{m+1} Y_{l+1m+1}(\hat{\mathbf{r}})) \quad (\text{A'.12})$$

$$e^{-i\phi} \sin \theta Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = 2 (\gamma_{l+1}^{-m+1} Y_{l+1m-1}(\hat{\mathbf{r}}) - \gamma_l^m Y_{l-1m-1}(\hat{\mathbf{r}})) \quad (\text{A'.13})$$

$$m \cot \theta Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = - [\alpha_l^m e^{-i\phi} Y_{lm+1}(\hat{\mathbf{r}}) + \alpha_l^{-m} e^{i\phi} Y_{lm-1}(\hat{\mathbf{r}})], \quad (\text{A'.14})$$

καθώς και οι

$$\frac{\partial Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial \theta} = \alpha_l^m e^{-i\phi} Y_{lm+1}(\hat{\mathbf{r}}) - \alpha_l^{-m} e^{i\phi} Y_{lm-1}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\text{A'.15})$$

$$= i\psi_l X_{lm,\phi}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\text{A'.16})$$

$$\frac{\partial Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial \phi} = im Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\text{A'.17})$$

$$= -i\psi_l \sin \theta X_{lm,\theta}(\hat{\mathbf{r}}). \quad (\text{A'.18})$$

Τέλος, ισχύει

$$\begin{aligned} \nabla [f_l(qr) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})] &= f_l(qr) \nabla Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) + q f_l'(qr) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \\ &= i\psi_l \frac{f_l(qr)}{r} (X_{lm,\phi}(\hat{\mathbf{r}}) \hat{\boldsymbol{\theta}} - X_{lm,\theta}(\hat{\mathbf{r}}) \hat{\boldsymbol{\phi}}) \\ &\quad + q f_l'(qr) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (\text{A'.19})$$

Στις παραπάνω σχέσεις είναι

$$\psi_l = \sqrt{l(l+1)}, \quad (\text{A'.20})$$

$$\alpha_l^m = \frac{1}{2} [(l-m)(l+m+1)]^{1/2}, \quad (\text{A'.21})$$

$$\gamma_l^m = \frac{[(l+m)(l+m-1)]^{1/2}}{2 [(2l-1)(2l+1)]^{1/2}} \quad (\text{A'.22})$$

$$\zeta_l^m = \frac{[(l+m)(l-m)]^{1/2}}{[(2l-1)(2l+1)]^{1/2}} \quad (\text{A'.23})$$

και $X_{lm,\theta}(\hat{\mathbf{r}})$, $X_{lm,\phi}(\hat{\mathbf{r}})$ είναι οι συνιστώσες των διανυσματικών σφαιρικών αρμονικών, $\mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$, που ορίζονται από την

$$\psi_l \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = \mathbf{L} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \equiv -i\mathbf{r} \times \nabla Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}). \quad (\text{A'.24})$$

Εξ' ορισμού $\mathbf{X}_{00}(\hat{\mathbf{r}}) = 0$, ενώ για $l \geq 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} \psi_l \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) &= [\alpha_l^{-m} \cos \theta e^{i\phi} Y_{lm-1}(\hat{\mathbf{r}}) - m \sin \theta Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \\ &\quad + \alpha_l^m \cos \theta e^{-i\phi} Y_{lm+1}(\hat{\mathbf{r}})] \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &\quad + i [\alpha_l^{-m} e^{i\phi} Y_{lm-1}(\hat{\mathbf{r}}) - \alpha_l^m e^{-i\phi} Y_{lm+1}(\hat{\mathbf{r}})] \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (\text{A'.25})$$

$$\begin{aligned} &= \alpha_l^{-m} Y_{lm-1}(\hat{\mathbf{r}}) (\hat{\mathbf{e}}_x + i\hat{\mathbf{e}}_y) + m Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{e}}_z \\ &\quad + \alpha_l^m Y_{lm+1}(\hat{\mathbf{r}}) (\hat{\mathbf{e}}_x - i\hat{\mathbf{e}}_y). \end{aligned} \quad (\text{A'.26})$$

Από τις $\mathbf{L}^2 Y_{lm} = l(l+1)Y_{lm}$ και $\mathbf{L}^2 \mathbf{L} = \mathbf{L}\mathbf{L}^2$ θα ισχύει $\mathbf{L}^2 \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = l(l+1)\mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$. Από τις (Α'.24) προκύπτει ότι

$$\mathbf{X}_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}) = (-1)^{m+1} \mathbf{X}_{l-m}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (\text{Α'.27})$$

καθώς και ότι

$$\mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}} = X_{lm,\phi}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\boldsymbol{\theta}} - X_{lm,\theta}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{-ir\nabla Y_{lm}}{\psi_l} \quad (\text{Α'.28})$$

και

$$\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}). \quad (\text{Α'.29})$$

Οι παρακάτω σχέσεις περιγράφουν τη δράση των τελεστών $\nabla \times$ και $\nabla \cdot$ στις $\mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{r} \left[i\psi_l Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - X_{lm,\phi}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\boldsymbol{\theta}} + X_{lm,\theta}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\boldsymbol{\phi}} \right] \\ &= \frac{1}{r} [i\psi_l Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}}] \\ &= \frac{i}{\psi_l} \left[\frac{\psi_l^2}{r} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} + \nabla Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \right] \end{aligned} \quad (\text{Α'.30})$$

και

$$\nabla \cdot \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = 0, \quad (\text{Α'.31})$$

ενώ με τη βοήθειά τους προκύπτουν οι

$$\nabla \times f_l(x)\mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = q \left\{ i\psi_l \frac{f_l(x)}{x} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \left[f_l'(x) + \frac{f_l(x)}{x} \right] \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}} \right\} \quad (\text{Α'.32})$$

$$\nabla \cdot [f_l(x)\mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}})] = 0 \quad (\text{Α'.33})$$

$$\nabla^2 [f_l(x)\mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}})] = -\nabla \times [\nabla \times f_l(x)\mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}})] = -q^2 f_l(x)\mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\text{Α'.34})$$

με $x = qr$. Για την τελευταία χρησιμοποιήσαμε τη σχέση

$$\begin{aligned} \nabla \{ \nabla \cdot [f_l(x)\mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}})] \} &= \nabla [\nabla f_l(x) \cdot \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) + f_l(x)\nabla \cdot \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}})] \\ &= \nabla [\nabla f_l(x) \cdot \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}})] = 0. \end{aligned} \quad (\text{Α'.35})$$

Οι διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές πληρούν τις ακόλουθες σχέσεις ορθογωνιότητας

$$\int d\Omega \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{X}_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{r}}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (\text{Α'.36})$$

$$\int d\Omega \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot [\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{r}})] = 0, \quad (\text{Α'.37})$$

απ' όπου προκύπτει

$$\begin{aligned} \sum_{lm} \left\{ \mathcal{A}_{lm}^{(1)}(r)\mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) + \mathcal{A}_{lm}^{(2)}(r) [\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}})] \right\} &= 0 \\ \Rightarrow \mathcal{A}_{lm}^{(1)}(r) = 0 = \mathcal{A}_{lm}^{(2)}(r). \end{aligned} \quad (\text{Α'.38})$$

Τέλος, μπορεί να αποδειχτεί ότι

$$\int d\Omega \mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \nabla \times [f(r)\mathbf{X}_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{r}})] = 0, \quad (\text{Α'.39})$$

και με τη βοήθεια των (A'.8), (A'.26) ότι

$$\int d\Omega Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \mathbf{X}_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{\delta_{l'l}}{\psi_l} \left[\delta_{m+1m'} \alpha_{l'}^{-m'} (\hat{\mathbf{e}}_x - i\hat{\mathbf{e}}_y) + \delta_{mm'} m \hat{\mathbf{e}}_z + \delta_{m-1m'} \alpha_{l'}^{m'} (\hat{\mathbf{e}}_x + i\hat{\mathbf{e}}_y) \right], \quad (\text{A'.40})$$

και

$$\int d\Omega Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} = \delta_{m+1m'} (-\gamma_{l+1}^{m+1} \delta_{l+1l'} + \gamma_l^{-m} \delta_{l-1l'}) (\hat{\mathbf{e}}_x - i\hat{\mathbf{e}}_y) + \delta_{m-1m'} (\gamma_{l+1}^{-m+1} \delta_{l+1l'} - \gamma_l^m \delta_{l-1l'}) (\hat{\mathbf{e}}_x + i\hat{\mathbf{e}}_y) + \delta_{mm'} (\zeta_{l+1}^m \delta_{l+1l'} + \zeta_l^m \delta_{l-1l'}) \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (\text{A'.41})$$

Παράρτημα Β'

Συναρτήσεις Bessel

Η εξίσωση Laplace για βαθμωτά πεδία, $\nabla^2 F(\mathbf{r}) = 0$, επιδέχεται σε κυλινδρικές συντεταγμένες λύσεις της μορφής $F(\mathbf{r}) = F_\nu(x) \exp(\pm qz + i\nu\phi)$, όπου $\mathbf{r} = (\rho, \phi, z)$ το διάνυσμα θέσης σε κυλινδρικές συντεταγμένες, $x = q\rho$ και $F_\nu(x)$ η ακτινική λύση που δίνεται μέσω της εξίσωσης Bessel

$$F_\nu''(x) + 1/x F_\nu'(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) F_\nu(x) = 0. \quad (\text{B'.1})$$

όπου ο τόνος συμβολίζει παραγώγιση ως προς το όρισμα της συνάρτησης. Η (B'.1) είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως και έχει, για τη συγκεκριμένη τιμή του ν , δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις. Για μη ακέραιες τιμές του ν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις είναι οι συναρτήσεις Bessel 1^{ου} είδους, τάξης $\pm\nu$

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! \Gamma(s + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s} \quad (\text{B'.2})$$

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! \Gamma(s - \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s} \quad (\text{B'.3})$$

Για ακέραιες τιμές του $\nu = n$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (\text{B'.4})$$

και μια δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση είναι η συνάρτηση Bessel 2^{ου} είδους

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}, \quad (\text{B'.5})$$

η οποία υπολογίζεται οριακά για $\nu \rightarrow n$. Τονίζουμε ότι, από όλες τις δυνατές λύσεις της (B'.1), μόνο η συνάρτηση Bessel 1^{ου} είδους δεν απειρίζεται στο $x = 0$. Δίνουμε στη συνέχεια μερικές χρήσιμες αναγωγικές σχέσεις που πληρούν οι συναρτήσεις της μορφής Bessel

$$F_{\nu-1}(x) + F_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} F_\nu(x) \quad (\text{B'.6})$$

$$F_{\nu-1}(x) - F_{\nu+1}(x) = 2F_\nu'(x) \quad (\text{B'.7})$$

Οι συναρτήσεις Bessel 1^{ου} είδους μπορούν να υπολογιστούν και από τις ολοκληρωτικές εκφράσεις

$$J_\nu(x) = \pi \int_0^\pi d\phi \cos(x \sin \phi - \nu\phi) \quad (\text{B'.8})$$

$$= \pi^\nu \int_0^\pi d\phi e^{(x \cos \phi)} \cos(\nu\phi) \quad (\text{B'.9})$$

$$= 2\pi^\nu \int_0^{2\pi} d\phi e^{(z \cos \phi + \nu\phi)}, \quad (\text{B'.10})$$

ενώ ικανοποιούν και ορισμένες σημαντικές αθροιστικές ταυτότητες

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(x) = 1 \quad (\text{B'.11})$$

$$e^{(x \cos \phi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{(n\phi)}. \quad (\text{B'.12})$$

Η εξίσωση Helmholtz για βαθμωτά πεδία, $\nabla^2 F(\mathbf{r}) + q^2 F(\mathbf{r}) = 0$, επιδέχεται λύσεις της μορφής $F(\mathbf{r}) = \sum_{lm} f_l(qr) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$, όπου $Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$ είναι οι σφαιρικές αρμονικές, με το $\hat{\mathbf{r}}$ να δηλώνει την εξάρτηση από τις γωνίες θ, ϕ του διανύσματος \mathbf{r} στις σφαιρικές συντεταγμένες και $f_l(qr)$ είναι το ακτινικό τμήμα των λύσεων της εξίσωσης Helmholtz

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + q^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] f_l(qr) = 0, \quad (\text{B'.13})$$

ή ισοδύναμα

$$f_l''(x) + \frac{2}{x} f_l'(x) + \left[1 - \frac{l(l+1)}{x^2} \right] f_l(x) = 0, \quad x = qr, \quad (\text{B'.14})$$

αν εκφράσουμε τον ∇^2 στις σφαιρικές συντεταγμένες. Η (B'.14) έχει, για συγκεκριμένη τιμή του l , δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις. Γνωστές μορφές τέτοιων λύσεων είναι οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel, Neumann, Hankel 1^{ου} ή 2^{ου} είδους που δίνονται αντίστοιχα από τις

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x) = (2x)^l \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (s+l)!}{s!(2s+2l+1)!} x^{2s} \quad (\text{B'.15})$$

$$n_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{l+1/2}(x) = 2(-2x)^{-l-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (s-l)!}{s!(2s-2l)!} x^{2s} \quad (\text{B'.16})$$

$$h_l^+(x) = j_l(x) + i n_l(x) \quad (\text{B'.17})$$

$$h_l^-(x) = j_l(x) - i n_l(x). \quad (\text{B'.18})$$

Τονίζουμε ότι, από όλες τις λύσεις, μόνο η σφαιρική συνάρτηση Bessel δεν απειρίζεται στο $x = 0$. Δίνουμε στη συνέχεια μερικές χρήσιμες αναγωγικές σχέσεις που πληρούν οι σφαιρικές συναρτήσεις

$$x f_l'(x) = l f_l(x) - x f_{l+1}(x) \quad (\text{B'.19})$$

$$(2l+1) f_l(x) = x f_{l-1}(x) + x f_{l+1}(x) \quad (\text{B'.20})$$

$$x f_{l-1}(x) = x f_l'(x) + (l+1) f_l(x) \quad (\text{B'.21})$$

$$(2l+1) f_l'(x) = l f_{l-1}(x) - (l+1) f_{l+1}(x). \quad (\text{B'.22})$$

Χρήσιμη επίσης είναι και η ορίζουσα Wronski

$$\begin{vmatrix} j_l(x) & n_l(x) \\ j_l'(x) & n_l'(x) \end{vmatrix} = \frac{1}{x^2}. \quad (\text{B'.23})$$

Η ασυμπτωτική τους συμπεριφορά ($x \gg 1$) είναι

$$j_l(x \gg 1) \sim \frac{1}{x} \sin\left(x - \frac{l\pi}{2}\right) \quad (\text{B'.24})$$

$$n_l(x \gg 1) \sim -\frac{1}{x} \cos\left(x - \frac{l\pi}{2}\right) \quad (\text{B'.25})$$

$$h_l^+(x \gg 1) \sim (-i)^{l+1} \frac{e^{ix}}{x} \quad (\text{B'.26})$$

$$h_l^-(x \gg 1) \sim i^{l+1} \frac{e^{-ix}}{x}, \quad (\text{B'.27})$$

ενώ για μικρά ορίσματα ($x \ll 1$) ισχύουν οι

$$j_l(x \ll 1) \sim \frac{x^l}{(2l+1)!!} \quad (\text{B'.28})$$

$$n_l(x \ll 1) \sim -\frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}}. \quad (\text{B'.29})$$

Παράρτημα Γ'

Γραφικό Περιβάλλον μεθόδου Πίνακα T (TMMS)

Μέσω το γραφικού περιβάλλοντος (GUI) που αναπτύχθηκε από τον Δρ. Παναγιωτίδη Εμμανουήλ μπορέσαμε με ευκολία να υπολογίσουμε τις τιμές και να έχουμε εικόνα για τις καμπύλες των ενεργών διατομών καθώς και για την μορφή των ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων. Ακολουθούν μερικά ενδεικτικά παραδείγματα.

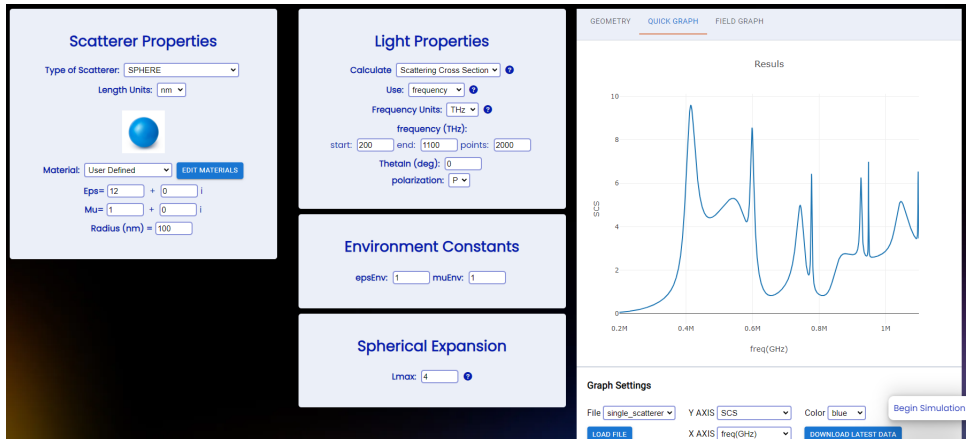
Ομοιογενής Σφαιρικός Σκεδαστής

Στο Σχήμα Γ.1 βλέπουμε το γραφικό περιβάλλον για τον υπολογισμό των ενεργών διατομών ενός ομοιογενούς σφαιρικού σκεδαστή. Οι διαθέσιμες επιλογές περιλαμβάνουν

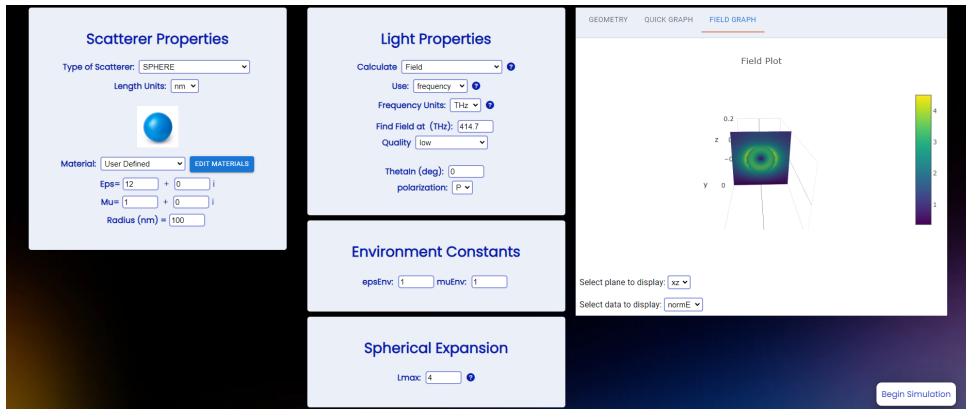
1. Ηλεκτρική και μαγνητική διαπερατότητα σκεδαστή και περιβάλλοντος
2. Ακτίνα σκεδαστή
3. Εύρος προσπίπτουσας ακτινοβολίας (σε συχνότητα ή μήκος κύματος)
4. Γωνία πρόσπτωσης
5. Πόλωση
6. τάξη δείκτη στροφορμής l
7. Λήψη αρχείου με τις υπολογισμένες τιμές

Επίσης μπορούμε να σχεδιάσουμε την γραφική παράσταση με παραμέτρους την συχνότητα (Hz), την ενέργεια (eV), το μήκος κύματος (m) και τις κανονικοποιημένες ενεργούς διατομές.

Επίσης μπορούμε να σχεδιάσουμε το ηλεκτρικό ή το μαγνητικό πεδίο μέσω της σχετικής επιλογής Field στην κατηγορία Calculate (Σχήμα 3.2). Το πεδίο θα εμφανιστεί στην καρτέλα Field Graph και μπορούμε να επιλέξουμε σε ποιο επίπεδο θέλουμε να εμφανίσουμε το πεδίο μέσω της επιλογής Select plane to display. Επίσης μπορούμε να επιλέξουμε ανάμεσα στο ηλεκτρικό (normE) ή μαγνητικό (NormH) πεδίο μέσω της επιλογής Select data to display.

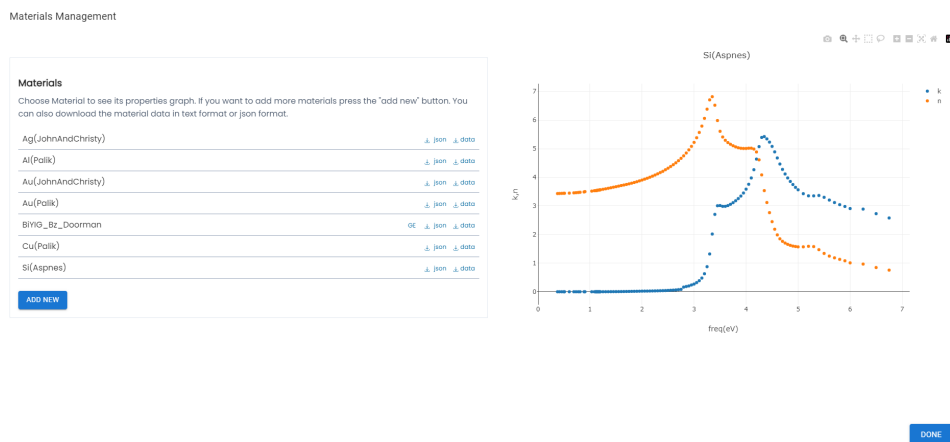


Σχήμα Γ'.1: Γραφικό περιβάλλον για τον υπολογισμό των ενεργών διατομών για σφαιρικό σκεδαστή. Εμφανίζονται οι σχετικές επιλογές που αναφέρονται στο κείμενο.



Σχήμα Γ'.2: Υπολογισμός ηλεκτρικού ή μαγνητικού πεδίου και οι αντίστοιχες επιλογές.

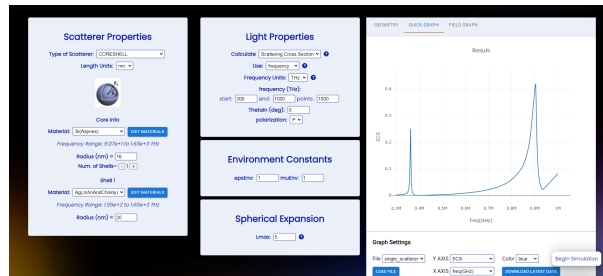
Επιπλέον, μέσω της επιλογής EDIT MATERIALS μπορούμε να μελετήσουμε τις τιμές των υπάρχοντων υλικών ή να εισάγουμε νέα υλικά, βάσει της πραγματικής και φανταστικής τιμής του δείκτη διάθλασης (Σχήμα 3.3).



Σχήμα Γ'.3: Γραφικό περιβάλλον προσθήκης υλικών

Πολυστρωματικός Σκεδαστής

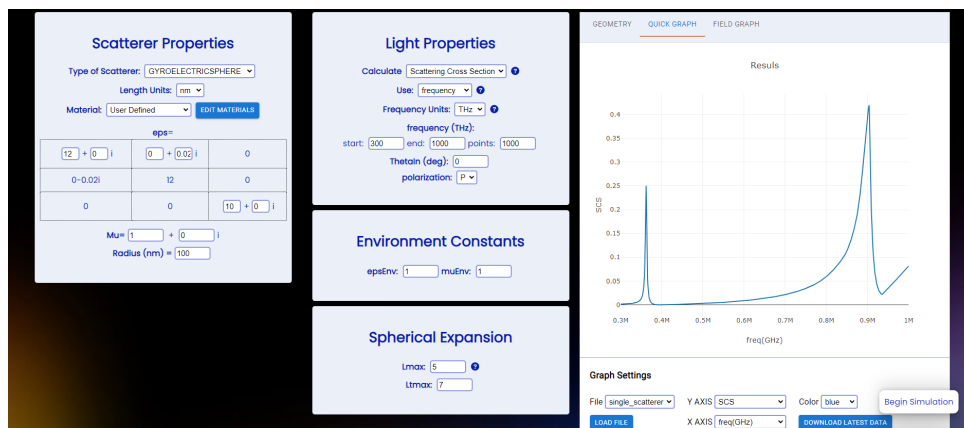
Για πολυστρωματικούς σκεδαστές εμφανίζονται οι επιλογές για το πλήθος των στρωμάτων και το υλικό αυτών (Σχήμα Γ.4).



Σχήμα Γ.4: Γραφικό περιβάλλον για πολυστρωματικό σκεδαστή

Ανισοτροπικός Σκεδαστής

Για διπλοθλαστικά και γυροηλεκτρικά υλικά η διηλεκτρική σταθερά παίρνει την μορφή τανυστή και τα αντίστοιχα μεγέθη ($\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy}$ ή $\epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx}$) μπορούν να μεταβληθούν (Σχήμα Γ.5)



Σχήμα Γ.5: Γραφικό περιβάλλον για διηλεκτρική σταθερά μορφής τανυστή για την μελέτη διπλοθλαστικών και γυροηλεκτρικών υλικών.

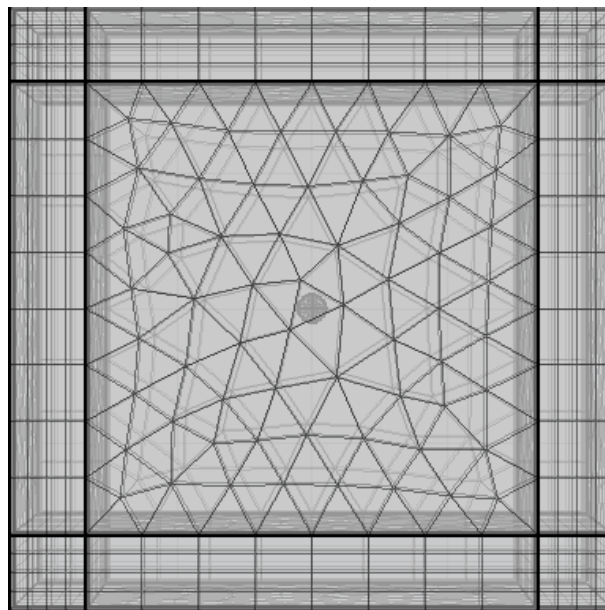
Παράρτημα Δ΄

Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (COMSOL)

Το εμπορικό πρόγραμμα COMSOL αποτελεί το ποιό διαδεδομένο εργαλείο για υπολογισμούς διαφόρων φυσικών μεγεθών (π.χ. ενεργών διατομών) μέσω της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων. Οι βασικές παράμετροι που επηρεάζουν την ποιότητα των αποτελεσμάτων και το υπολογιστικό κόστος είναι το πλήθος των μετρήσεων που λαμβάνουμε (steps), η γεωμετρία του σχεδαστή που μελετάται καθώς και η πυκνότητα του πλέγματος (mesh) που επιλέγεται.

Perfectly Matched Layer (PML)

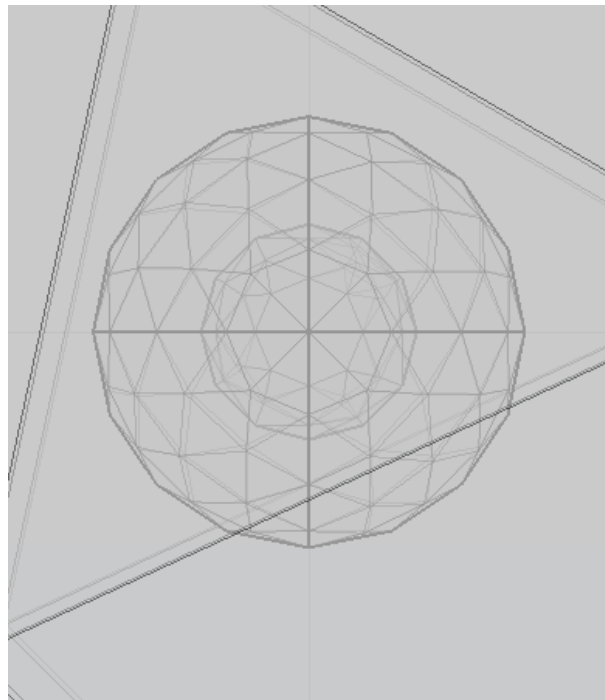
Το Perfectly Matched Layer (PML) αποτελεί ένα τεχνητό σύνορο με το οποίο περικλείουμε τον χώρο μέσα στον οποίο βρίσκεται ο σχεδαστής. Αυτό είναι αναγκαίο για να προσομοιώσουμε την διάδοση των σχεδαζόμενων κυμάτων στο άπειρο καθώς απουσία αυτού, θα υπεισέρχονταν ανακλάσεις στα όρια του κουτιού. Απορροφώντας όλες τις προσπίπτουσες ακτινοβολίες στο PML επιλύεται το πρόβλημα των ανακλάσεων (Σχήμα Δ΄.1).



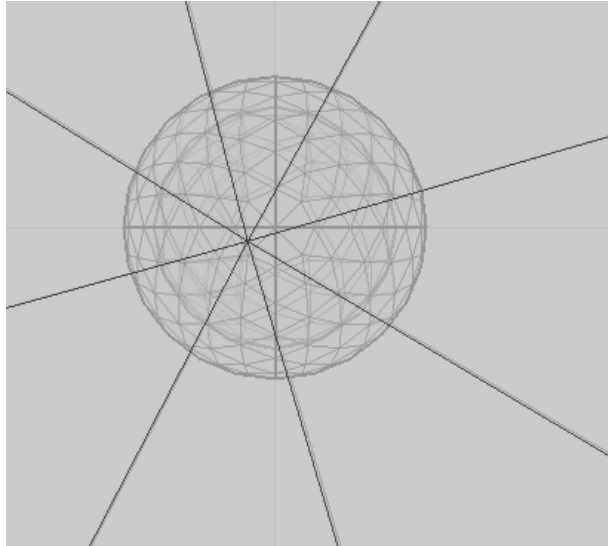
Σχήμα Δ΄.1: Σφαιρικός σχεδαστής μέσα σε κυβικό κουτί που περιβάλλεται από Perfectly Matched Layer (PML) (ορθογώνια παραλληλόγραμμα). Είναι εμφανής η ανάγκη για πολύ πυκνότερο πλέγμα για τον σχεδαστή συγκριτικά με τον περιβάλλοντα χώρο του.

Διαστάσεις πλέγματος

Οι διαστάσεις των (πεπερασμένων) στοιχείων του πλέγματος (mesh) παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην ακρίβεια των τιμών που θα λάβουμε και είναι αντιστρόφως ανάλογες του υπολογιστικού κόστους. Όσο στενότεροι είναι οι συντονισμοί του υπολογισθέντος φαινομένου (π.χ. συχνότητες συντονισμού) τόσο πυκνότερο πρέπει να είναι το πλέγμα, δηλαδή οι διαστάσεις των κυψελίδων να μικραίνουν. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να πρέπει να επαναληφθούν υπολογισμοί για στενές καμπύλες με μικρότερες διαστάσεις για να ληφθεί η ακριβής μορφή τους. Επίσης, στις περιοχές που περιμένουμε να έχουμε εντονότερη μεταβολή των φυσικών φαινομένων που μελετάμε (π.χ. ηλεκτρικό πεδίο σε διεπιφάνεια όπου εμφανίζονται επιφανειακά πλασμόνια) ή όταν έχουμε έντονη αλλαγές της γεωμετρίας ή των φυσικών χαρακτηριστικών το μέγεθος του πλέγματος πρέπει να μειωθεί σημαντικά (Σχήματα Δ'.1, Δ'.2, Δ'.3)



Σχήμα Δ'.2: Πυκνότητα πλέγματος για πολυστρωματικό σχεδιαστή. Είναι εμφανής η μεγαλύτερη πυκνότητα πλέγματος συγκριτικά με τον περιβάλλοντα χώρο.



Σχήμα Δ'.3: Πυκνότητα πλέγματος για πολυστρωματικό σχεδαστή. Παρατηρούμε ότι συγκριτικά με τον σχεδαστή του Σχήματος Δ'.2 εδώ ήταν αναγκαίο να ληφθεί πολύ πυκνότερο πλέγμα ώστε να υπάρξει καλή προσέγγιση των ακριβών τιμών που λαμβάνονται μέσω της TMMS.

Βιβλιογραφία

- [1] Mie, Gustav. "Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen." *Annalen der Physik* 330.3 (1908): 377-445.
- [2] Arfken, George B., and Hans-Jurgen Weber. "Mathematical methods for physicists." (1972).
- [3] Χριστοφή, Αρίστη. *Ανισοτροπικά νανοσύνθετα φωτονικά υλικά. Διδακτορική Διατριβή. Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών (ΕΚΠΑ). Σχολή Θετικών Επιστημών. Τμήμα Φυσικής. Τομέας Φυσικής Στερεάς Κατάστασης, 2014.*
- [4] Christofi, A., and N. Stefanou. "Layer multiple scattering calculations for nonreciprocal photonic structures." *International Journal of Modern Physics B* 28.02 (2014): 1441012.
- [5] Jackson, John David. *Classical electrodynamics*. John Wiley and Sons, 2021.
- [6] Jahani, Saman, and Zubin Jacob. "All-dielectric metamaterials." *Nature nanotechnology* 11.1 (2016): 23-36.
- [7] Aspnes, David E., and A. A. Studna. "Dielectric functions and optical parameters of si, ge, gap, gaas, gasb, inp, inas, and insb from 1.5 to 6.0 ev." *Physical review B* 27.2 (1983): 985.
- [8] Pines, David. "Collective energy losses in solids." *Reviews of modern physics* 28.3 (1956): 184.
- [9] Maier, Stefan A., and Stefan A. Maier. "Surface plasmon polaritons at metal/insulator interfaces." *Plasmonics: Fundamentals and Applications* (2007): 21-37.
- [10] Johnson, Peter B., and R-WJPrB Christy. "Optical constants of the noble metals." *Physical review B* 6.12 (1972): 4370.
- [11] Duan, Qilin, et al. "Surface plasmonic sensors: Sensing mechanism and recent applications." *Sensors* 21.16 (2021): 5262.
- [12] <https://www.indiamart.com/proddetail/ag-ag2se-core-shell-nanoparticles-20711906233.html>
- [13] Cornwell, John F. *Group theory in physics: An introduction*. Academic press, 1997.
- [14] Almpanis, Evangelos, ed. *Optomagnonic Structures: Novel Architectures for Simultaneous Control of Light and Spin Waves*. World Scientific, 2021.

