ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΧΗΜΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΔΠΜΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΡΟΗ ΣΤΕΡΕΑ

ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΑΡΧΗΣ HAMILTON ΜΕ ΣΥΝΕΛΙΞΗ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΔΠΜΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΕΜΠ

ΕΠΙΒΛΕΨΗ:

ΚΑΛΠΑΚΙΔΗΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ, Καθηγητής ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες i

Εισαγωγή ii

Abstract iii

1. Σκοπός 1

2. Θεωρητικό Μέρος 2

   2.1. Μεταβολικός Λογισμός 2

   2.2. Θεμελιώδες Λήμμα του Μεταβολικού Λογισμού 6

   2.3. Εξισώσεις Euler 7

   2.4. Συνέλιξη 12

   2.5. Εξισώσεις Euler-Lagrange 13

   2.6. Συνοριακές Συνθήκες 14

3. Αρχή Hamilton 16

   3.1. Κλασματική Παράγωγος στην Αρχή Hamilton 17

   3.2. Προηγούμενες Μελέτες 19

   3.3. Προβλήματα Ελαστοδυναμικής για 1-D και 2-D προβλήματα 26

4. Μεταβολικό Θεώρημα των Hu-Washizu 34

5. Μεταβολικό Θεώρημα των Hellinger-Reisner 37

6. Μικτά προβλήματα στην Δυναμική 40

   6.1. Χωρική Διακριτοποίηση της ασθενούς μορφής 46

   6.2. Χρονική διακριτοποίηση της ασθενούς μορφής 48

7. Συμπεράσματα 51

Βιβλιογραφία 53

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέπων καθηγητή κ. Καλπακίδη Βασίλειο για την ανάθεση του θέματος, τις υποδείξεις και την συμβολή του κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας.

Τέλος ευχαριστώ την οικογένειά μου και τους φίλους μου για τη βοήθεια κατά τη διάρκεια της πραγματοποίησης της μεταπτυχιακής εργασίας.

Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία γίνεται μια βιβλιογραφική αναφορά γύρω από εφαρμογές της αρχής Hamilton, παρουσιάζοντας τις αδυναμίες αυτής καθώς και μεθόδους τροποποίησης της για να ελαχιστοποιηθεί η επίδραση αυτών των αδυναμιών.

Οι κύριες δυσκολίες της Αρχής Hamilton είναι οι εξής: η πρώτη είναι η αδυναμία της να ενσωματώσει όρους διάχυσης, δηλαδή όρους που έχουν πρώτη παράγωγο, εφαρμόζεται με αξιοπιστία μόνο σε συντηρητικά συστήματα. Η δεύτερη δυσκολία σχετίζεται με τον χειρισμό των αρχικών συνθηκών και τους περιορισμούς στις μεταβολές των συναρτήσεων. Ειδικότερα, η αρχή του Hamilton απαιτεί οι μεταβολές να εξαφανίζονται στα τελικά σημεία του χρονικού διαστήματος, το οποίο για λόγους συνέπειας σημαίνει ότι οι συναρτήσεις είναι γνωστές σε αυτές τις δύο στιγμές. Σε ένα πρόβλημα δυναμικής όμως, υπό κανονικές συνθήκες, δεν γνωρίζει κανείς τη λύση στο τέλος του χρονικού διαστήματος. Αντίθετα, αυτός είναι συχνά ο κύριος στόχος της ανάλυσης.

Με βάση τα παραπάνω, υπάρχει προσπάθεια να απλοποιηθούν και να μειωθεί η επίδραση αυτών των αδυναμιών. Αυτό γίνεται μέσω της χρήσης του ολοκληρώματος της συνέλιξης για να απαλειφθεί η επίδραση των συναρτήσεων στα τελικά σημεία του χρονικού διαστήματος, καθώς δεν είναι γνωστές. Επίσης χρησιμοποιούνται και οι κλασματικές παράγωγοι για την αντιμετώπιση αυτών των δυσκολιών της Hamilton.

Επιπλέον, στην μεταπτυχιακή εργασία γίνεται μία παρουσίαση κάποιων βασικών θεωρητικών στοιχείων γύρω από την θεωρητική μηχανική, τις εξισώσεις Euler-Lagrange. Χρησιμοποιείται για την εξαγωγή των καταστατικών και κινηματικών σχέσεων το θεμελιώδες λήμμα του λογισμού των μεταβολών.

Τέλος, γίνεται παρουσίαση διαφόρων προβλημάτων ελαστοδυναμικής, αρχικά για 1-D, 2-D προβλήματα στην ισορροπία και στην δυναμική εξάγοντας από το συναρτησιακό της αρχής Hamilton την καταστατική και την κινηματική σχέση για το απλό πρόβλημα, ενώ γίνεται και μια αναφορά για τα μικτά προβλήματα. Αρχικά, παρουσιάζονται οι αρχές των Hu-Washizu (1) και Hellinger-Reissner (1) για την ισορροπία, ενώ παρουσιάζεται και ένα μικτό πρόβλημα στην δυναμική από την εργασία των Dargush και Darall (2)πραγματοποιώντας την χρονική και χωρική διακριτοποίηση της ασθενούς μορφής του προβλήματος για την αριθμητική επίλυση του, διαμορφώνοντας το γραμμικό σύστημα: $Ku = f$.

Abstract

In this paper, a bibliographic reference is made around applications of Hamilton's principle, presenting its weaknesses as well as methods of its modification to minimize the effect of these weaknesses.

The main difficulties of Hamilton's Principle are the following: the first is its inability to incorporate diffusion terms, i.e. terms that have a first derivative, it applies reliably only to conservative systems. The second difficulty is related to the handling of initial conditions and the constraints on the transformations of the functions. In particular, Hamilton's principle requires that the variations vanish at the endpoints of the time interval, which for consistency means that the functions are known at these two instants. In a dynamics problem, however, under normal conditions, one does not know the solution at the end of the time interval. Rather, this is often the main focus of the analysis.

Based on the above, there is an effort to simplify and reduce the impact of these weaknesses. This is done by using the integral of the convolution to remove the effect of the functions at the endpoints of the time interval, as they are not known. Fractional derivatives are also used to deal with these Hamiltonian difficulties.

In addition, the master's thesis presents some basic theoretical elements surrounding theoretical mechanics, the Euler-Lagrange equations. The fundamental lemma of the calculus of changes is used to derive the static and kinematic relations.

Finally, various problems of elastodynamics are presented, initially for 1-D, 2-D problems in equilibrium and dynamics by extracting from the functional of Hamilton's principle the static and kinematic relation for the simple problem, while a report is also made for mixed problems . First, the principles of Hu-Washizu (1) and Hellinger-Reissner (1) for equilibrium are presented, while a mixed problem in dynamics is presented from the work of Dargush and Darall (2) performing the temporal and spatial discretization of the weak form of the problem for its numerical solution, formulating the linear system: Ku=f.

1. Σκοπός

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία είχε ως στόχο την παρουσίαση του προβλήματος της Αρχής Hamilton στην ελαστοδυναμική, παρουσιάζοντας τις αδυναμίες της αλλά και μεθόδους τροποποίησης αυτής. Γίνεται αναφορά σε εργασίες πάνω στο συγκεκριμένο αντικείμενο από διάφορους επιστήμονες που χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα της συνέλιξης ή κλασματικές παραγώγους προσπάθησαν να εξάγουν καταστατικές και κινηματικές σχέσεις, συνοριακές συνθήκες για ένα πρόβλημα ελαστοδυναμικής προσπαθώντας να ‘’παραμερίσουν’’ τις αδυναμίες της Hamilton που θα παρουσιαστούν παρακάτω.

2. Θεωρητικό Μέρος

2.1. Μεταβολικός Λογισμός

Ο λογισμός των μεταβολών (ή λογισμός μεταβλητών) είναι ένα πεδίο μαθηματικής ανάλυσης που χρησιμοποιεί μεταβολές, οι οποίες είναι μεταβολές σε συναρτήσεις και συναρτησιακά, για να υπολογισθούν μέγιστα και ελάχιστα συναρτησιακών: αντιστοιχίες από ένα σύνολο συναρτήσεων στους πραγματικούς αριθμούς. (3)

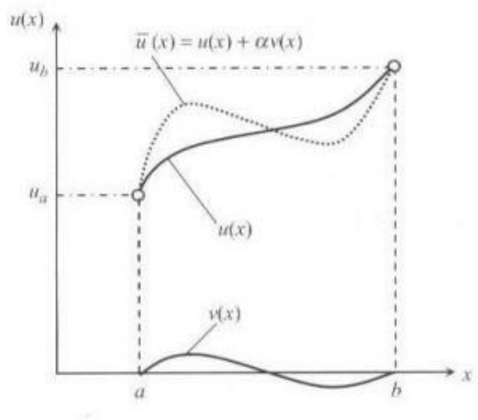
Το πεδίο της μηχανικής των στερεών εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη χρήση ενεργειακών αρχών που δηλώνονται με όρους εύρεσης των ακροτάτων ή στάσιμων σημείων συναρτησιακών για την κατασκευή μοντέλων πεπερασμένων στοιχείων. Οι μέθοδοι λογισμού των μεταβολών, όπως η μέθοδος Ritz, χρησιμοποιούν μεταβολικές αρχές για να λάβουν κατά προσέγγιση λύσεις. (3)

Έστω η συνάρτηση $F(x, u, u')$. Για μια αυθαίρετη σταθερή τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής x, η F εξαρτάται από το u και το u'. Η αλλαγή εv, όπου ε είναι ένας πραγματικός αριθμός και v μια συνάρτηση, λέγεται η μεταβολή του u και συμβολίζεται με δu. (3)

$$\delta u = \varepsilon v$$

Ο τελεστής δ ονομάζεται μεταβολικός τελεστής. Η μεταβολή δu μια συνάρτησης u αντιπροσωπεύει μια αποδεκτή αλλαγή στην συνάρτηση $u(x)$ για μια σταθερή τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής x. Αν η u είναι καθορισμένη σε ένα σημείο (συνήθως στο σύνορο), η μεταβολή του u είναι 0 σε εκείνο το σημείο. Έτσι η μεταβολή του u θα πρέπει να ικανοποιεί την ομογενή μορφή των συνοριακών συνθηκών του u. Η μεταβολή δu αντιπροσωπεύει μια αποδεκτή αλλαγή στο u. Συνδεδεμένη με αυτήν την αλλαγή στο u υπάρχει και μια αλλαγή στην F. (3)

$$\Delta F = F(x, u + \varepsilon v, u' + \varepsilon v') - F(x, u, u')$$



Εικόνα 1: Γραφική Παράσταση για την u*=u+ε*v

Κάνοντας το ανάπτυγμα Taylor για την ΔF καταλήγουμε :

$$\Delta F = F(x,u,u') + \varepsilon v\frac{\partial F}{\partial u} + \varepsilon v' \frac{\partial F}{\partial u'} + (\varepsilon v)^2 \frac{1}{2!} \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{(\varepsilon v)(\varepsilon v')}{2!} \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial u'} + (\varepsilon v')^2 \frac{1}{2!} \frac{\partial F}{\partial u'}\frac{\partial F}{\partial u'} + \ldots - F(x,u,u') = \varepsilon v\frac{\partial F}{\partial u} + \varepsilon v' \frac{\partial F}{\partial u'} + \varepsilon R_1(\varepsilon)$$

Όπου $\lim_{\varepsilon\to 0} R_1(\varepsilon) = 0$

Η πρώτη μεταβολή της F ορίζεται ως:

$$\delta F = \varepsilon \left[\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(x,u+\varepsilon v,u'+\varepsilon v') - F(x,u,u')}{\varepsilon}\right] = \varepsilon \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\Delta F}{\varepsilon}$$

$$\delta F = \varepsilon \left[\frac{d}{d\varepsilon}(F(u+\varepsilon v))\right]_{\varepsilon=0} = \frac{\partial F}{\partial u}\, \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'}\, \delta u'$$

Η πρώτη μεταβολή της F μπορεί να γραφεί με όρους της μεταβολής της εξαρτημένης μεταβλητής u και τις παραγώγους της. Το ολικό διαφορικό της F είναι,

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}\, dx + \frac{\partial F}{\partial u}\, du + \frac{\partial F}{\partial u'}\; du'$$

Το x δεν μεταβάλλεται κατά την διάρκεια της μεταβολής του u σε $u + \delta u$, $dx = 0$ και η αναλογία του dF με το δF γίνεται εμφανής.

Σε περίπτωση που οι συναρτήσεις u και v είναι συναρτήσεις 2 μεταβλητών δηλαδή $u(x, y)$ και $v(x, y)$ τότε υπάρχει η $F(x, y, u, v, u_x, v_x, u_y, v_y)$

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u}\, \delta u + \frac{\partial F}{\partial v}\; \delta v + \frac{\partial F}{\partial u_x}\, \delta u_x + \frac{\partial F}{\partial v_x}\; \delta v_x + \frac{\partial F}{\partial u_y}\, \delta u_y + \frac{\partial F}{\partial v_y}\; \delta v_y$$

Μπορεί εύκολα να επαληθευτεί ότι οι κανόνες της μεταβολής των αθροισμάτων, των γινομένων, των λόγων, των δυνάμεων και ούτω καθεξής είναι εντελώς ανάλογοι με τους αντίστοιχους κανόνες διαφόρισης. Για παράδειγμα, αν $F_1 = F_1(u)$ και $F_2 = F_2(u)$, τότε:

$$\delta(F_1 \pm F_2) = \delta F_1 \pm \delta F_2$$

$$\delta(F_1 F_2) = \delta F_1 F_2 + F_1\; \delta F_2$$

$$\delta(\frac{F_1}{F_2}) = (\delta F_1\, F_2 + F_1\; \delta F_2)/F_2^2$$

$$\delta(F_1)^n = nF_1^{n-1}\, \delta F_1$$

Επιπλέον, ο μεταβολικός τελεστής μπορεί να αντιμετατεθεί με διαφορικούς και ολοκληρωματικούς τελεστές.

$$\frac{d}{dx}(\delta u) = \frac{d}{dx}(\varepsilon v) = \varepsilon\, \frac{dv}{dx} = \varepsilon v' = \delta u' = \delta(\frac{du}{dx})$$

$$\delta \int_a^b u(x)\, dx = \int_a^b \delta u(x)\, dx$$

Η πρώτη μεταβολή του συναρτησιακού $I[u]$ μπορεί να υπολογιστεί:

$$\delta I[u] = \delta \int_a^b F(x,u,u')dx = \int_a^b \delta F(x,u,u')dx = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'}\delta u'\right)dx$$

2.2. Θεμελιώδες Λήμμα του Μεταβολικού Λογισμού

Το θεμελιώδες λήμμα του λογισμού των μεταβολών μπορεί να διατυπωθεί: για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $G(x)$, αν

$$\int_a^b G(x)\,\eta(x)\,dx \;=0\;\forall\,\eta(x)\;\in\;C(a,b)$$

ισχύει για μια αυθαίρετη συνεχής συνάρτηση $\eta(x)$, για όλα τα $x \in (a,b)$, τότε ισχύει ότι $G(x) = 0\ \sigma\tau o\ (a,b)$.

Ένα απλό παράδειγμα είναι θεωρώντας δύο διανύσματα $\tilde{u}$ και $\tilde{v}$ που ανήκουν στο C. Αν $\tilde{u} * \tilde{v} = 0$ για κάθε $\tilde{v} \in C$ τότε πρέπει $\tilde{u} = 0$.

2.3. Εξισώσεις Euler

Όπως αναφέρθηκε, ορισμένα προβλήματα διατυπώνονται ως προβλήματα αναζήτησης των ακροτάτων των συναρτησιακών. Για παράδειγμα, τα προβλήματα της μηχανικής των στερεών μπορούν να διατυπωθούν ως προβλήματα ελαχιστοποίησης της συνολικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος. Τυπικά, η συνολική δυναμική ενέργεια γράφεται με βάση το πεδίο μετατόπισης και τα εφαρμοζόμενα φορτία. Στη συνέχεια, είναι χρήσιμο να εξαχθούν οι διαφορικές εξισώσεις που διέπουν το πεδίο μετατόπισης από αυτήν την αρχή ελαχιστοποίησης.

Για παράδειγμα, το πρόβλημα εύρεσης συνάρτησης $u = u(x)$ όπως:

$$u(a) = u_a \, , u(b) = u_b$$

$$\text{και} \quad I[u] = \int_a^b F(x, u(x), u'(x)) \, dx$$

είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Αναλύοντας το πρόβλημα, δεν ερευνώνται όλες οι συναρτήσεις u αλλά μόνο αυτές οι συναρτήσεις που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες. Το πρόβλημα είναι να αναζητηθεί μια συνάρτηση u στον χώρο C που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό I. Αν η u ανήκει στο C τότε η $(u + \varepsilon v)$ ανήκει στο C για κάθε v που ικανοποιεί τις συνθήκες $v(a) = v(b) = 0$. Ο χώρος όλων αυτών των συναρτήσεων ονομάζεται ο χώρος των αποδεκτών μεταβολών. Στο διάγραμμα της Εικόνας 1 φαίνεται μια τέτοια συνάρτηση $u^*(x) = u(x) + \varepsilon v(x)$ και μια τυπική αποδεκτή μεταβολή $v(x)$. (3)

Αν $I(u)$ είναι ένα παραγωγίσιμο συναρτησιακό τότε το

$$\frac{dI[u + \varepsilon v, u' + \varepsilon v']}{d\varepsilon}$$

υπάρχει και ο C είναι ο χώρος αυτών των συναρτήσεων. Μια συνάρτηση u που ανήκει στον C λέγεται ότι δίνει αποτέλεσμα ένα σχετικό ελάχιστο (ή μέγιστο) για το $I[u^*]$ στον C αν

$$I[u*] - I[u] \geq 0 \ (\leq 0)$$

Αν $I[u^*]$ είναι τοπικό ελάχιστο (ή μέγιστο) για την συνάρτηση $u \ \in \ C$ τότε ισχύει για τον χώρο H όλων των αποδεκτών μεταβολών ότι

$$I[u + \varepsilon v] - I[u] \geq 0 \ (\leq 0)$$

για όλα τις συναρτήσεις v που ανήκουν στον H με ε έναν πραγματικό αριθμό. Αφού η συνάρτηση u είναι αυτή που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό, κάθε άλλη συνάρτηση $u \ \in \ C$ είναι της μορφής $u^*(x) = u(x) + \varepsilon v(x)$ και η πραγματική συνάρτηση που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό βρίσκεται θέτοντας το $\varepsilon = 0$. Αφού οι u και v έχουν οριστεί, το $I[u^*]$ είναι μια συνάρτηση του ε οπότε $I(\varepsilon)$. Απαραίτητη συνθήκη ώστε $I[u^*] = I(\varepsilon)$ να παίρνει ελάχιστη τιμή είναι (3)

$$\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon}[I(u + \varepsilon v)] == 0$$

Το $I[u^*]$ παίρνει ελάχιστη τιμή στην u με $\varepsilon = 0$. Αυτές οι δυο συνθήκες μαζί οδηγούν στο $\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}_{\varepsilon=0}$ που είναι το

$$\delta I[u] = 0$$

Είναι καθαρό ότι κάθε υποψήφια συνάρτηση για την ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού πρέπει να ικανοποιεί τις τελικές συνθήκες και να είναι επαρκώς παραγωγίσιμη. Όλες αυτές οι συναρτήσεις είναι οι αποδεκτές συναρτήσεις για αυτήν την περίπτωση. Αυτές οι συναρτήσεις πρέπει να διέρχονται από τα σημεία (a, u_a) και (b, u_b). Κάθε τέτοια συνάρτηση είναι της μορφής (3)

$$u^*(x) = u(x) + \varepsilon v(x)$$

όπου ε είναι ένας πραγματικός αριθμός και v πρέπει να είναι επαρκώς παραγωγίσιμη και να ικανοποιεί τις τελικές συνθήκες. Στην περίπτωση μας:

- $\Sigma\tau o(a, u_a): u^*(a) = u_a \rightarrow u(a) + \varepsilon v(a) = u_a \rightarrow v(a) = 0$
- $\Sigma\tau o\ (b, u_b): u^*(b) = u_b \rightarrow u(b) + \varepsilon v(b) = u_b \rightarrow v(b) = 0$

Υποθέτοντας ότι για κάθε αποδεκτή συνάρτηση u^*, υπάρχει $F(x, u^*, u^{*\prime})$ και είναι συνεχώς παραγωγίσιμη με σεβασμό στα στοιχεία του και $I[u^*]$ έχει μία πραγματική τιμή, αναζητείται η συνάρτηση $u(x)$ που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό. (3)

Η απαραίτητη συνθήκη για να ελαχιστοποιείται το I είναι

$$\frac{dI(u+\varepsilon v)}{d\varepsilon}_{\varepsilon=0} = 0$$

$$[\frac{d}{d\varepsilon}\int_a^b F(x, u*, u*') \, dx]_{\varepsilon=0} = 0$$

$$\int_a^b (\frac{\partial F}{\partial u} v + \frac{\partial F}{\partial u'} v')dx = 0$$

όπου $u^*(x) = u(x) + \varepsilon v(x)$. Ολοκληρώνοντας τον όρο $\frac{\partial F}{\partial u'} v'$ ώστε να μεταφερθεί η παραγώγιση από το v στο u, λαμβάνεται

$$\int_a^b v \, [\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial u'})]dx + (\frac{\partial F}{\partial u'} v)_a^b$$

Όμως ο όρος $(\frac{\partial F}{\partial u'} v)_a^b$ εξαφανίζεται γιατί μηδενίζεται η $v(x)$ στα $x = a$ και $x = b$ με βάση τις συνοριακές συνθήκες. Επιπλέον με βάση το θεμελιώδες λήμμα του λογισμού των μεταβολών: (3)

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial u'}) = 0 \; \sigma\tau o \; a < x < b$$

Η παραπάνω εξίσωση ονομάζεται εξίσωση Euler του συναρτησιακού.

Για δισδιάστατο πρόβλημα, δηλαδή για την εύρεση των u και v στο χωρίο Ω, ώστε το παρακάτω συναρτησιακό να ελαχιστοποιείται:

$$I[u,v] = \iint F(x,y,u,v,u_x,v_x,u_y,v_y)dxdy$$

όπου $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$. Θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις u και v είναι καθορισμένες στο σύνορο Γ του Ω. Η πρώτη μεταβολή του συναρτησιακού I γράφεται ως

$$\delta I[u,v] = \delta_u I[u,v] \ + \ \delta_v I[u,v] \ = \ 0$$

όπου δ_u και δ_v είναι οι μερικές παράγωγοι ώς προς την u και την v. (3)

$$\delta I = \iint [\frac{\partial F}{\partial u} \ \delta u + \ \frac{\partial F}{\partial v} \ \ \delta v \ + \frac{\partial F}{\partial u_x} \ \delta u_x + \ \frac{\partial F}{\partial v_x} \ \ \delta v_x \ + \ \frac{\partial F}{\partial u_y} \ \delta u_y + \ \frac{\partial F}{\partial v_y} \ \ \delta v_y] \ dxdy$$

Στην συνέχεια γίνεται παραγοντοποίηση στους όρους που έχουμε τα δu_x, δu_y, δv_x, δv_y, δηλαδή πιο συγκεκριμένα για τον όρο $\frac{\partial F}{\partial u_x}$ δu_x θα έχουμε:

$$\iint \frac{\partial F}{\partial u_x} \ \delta u_x \ dxdy = \oint \frac{\partial F}{\partial u_x} \ \delta u \ n_x \ dS \ - \iint \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial F}{\partial u_x}) \delta u \ dxdy$$

Αντίστοιχη διαδικασία γίνεται για τους άλλους τρεις όρους. Επομένως λαμβάνεται η ακόλουθη εξίσωση:

$$\iint \{ \ [\frac{\partial F}{\partial u} \ - \ \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial F}{\partial u_x}) - \frac{\partial}{\partial y} (\frac{\partial F}{\partial u_y})]\delta u + [\frac{\partial F}{\partial v} - \ \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial F}{\partial v_x}) - \frac{\partial}{\partial y} (\frac{\partial F}{\partial v_y})]\delta v\} \ dxdy \ +$$

$$\oint [\ (\frac{\partial F}{\partial u_x} \ n_x + \frac{\partial F}{\partial u_y} \ n_y) \ \delta u \ \ + (\ \frac{\partial F}{\partial v_x} \ n_x + \frac{\partial F}{\partial v_y} \ n_y) \ \delta v \ ]dS = 0$$

Αφού u και v είναι καθορισμένες στο σύνορο Γ τότε $\delta u = \delta v = 0$ και ο όρος $\oint[\ (\frac{\partial F}{\partial u_x}\ n_x + \frac{\partial F}{\partial u_y}\ n_y)\ \delta u + (\ \frac{\partial F}{\partial v_x}\ n_x + \ \frac{\partial F}{\partial v_y}\ n_y)\ \delta v\ ]dS$ εξαφανίζεται. Επομένως, αφού τα δu και δv είναι αυθαίρετες συναρτήσεις και ανεξάρτητες μεταξύ τους στον χώρο Ω, με βάση το θεμελιώδες λήμμα του λογισμού των μεταβολών καταλήγουμε στις παρακάτω εξισώσεις Euler:

$$\delta u: \quad \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial F}{\partial u_x}) - \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial F}{\partial u_y}) = 0$$

$$\delta v: \quad \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial F}{\partial v_x}) - \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial F}{\partial v_y}) = 0 \quad (3)$$

2.4. Συνέλιξη

Στα μαθηματικά (ιδιαίτερα, στη συναρτησιακή ανάλυση), η συνέλιξη είναι μια μαθηματική πράξη με δύο συναρτήσεις (f και g) που παράγει μια τρίτη συνάρτηση.

Ο όρος συνέλιξη αναφέρεται τόσο στη συνάρτηση αποτελέσματος όσο και στη διαδικασία υπολογισμού της. Ορίζεται ως το ολοκλήρωμα του γινομένου των δύο συναρτήσεων αφού η μία ανακλαστεί γύρω από τον άξονα y και μετατοπιστεί. Το ολοκλήρωμα αξιολογείται για όλες τις τιμές μετατόπισης, παράγοντας τη συνάρτηση συνέλιξης. Η επιλογή της συνάρτησης που ανακλάται και μετατοπίζεται πριν από το ολοκλήρωμα δεν αλλάζει το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος. Γραφικά, εκφράζει πώς το «σχήμα» μιας συνάρτησης τροποποιείται από την άλλη.

Η συνέλιξη των f και g γράφεται $f * g$, δηλώνοντας τον τελεστή με το σύμβολο $*$, ορίζεται ως το ολοκλήρωμα του γινομένου των δύο συναρτήσεων αφού η μία ανακλαστεί γύρω από τον άξονα y και μετατοπιστεί. Ως εκ τούτου, είναι ένα συγκεκριμένο είδος ολοκληρωτικού μετασχηματισμού:

$$(f * g)(t) = \int f(t) g(T - t) dt$$

Ενώ ισοδύναμη έκφραση είναι:

$$(f * g)(t) = \int f(T - t) g(t) dt$$

Χρήσιμες ιδιότητες της συνέλιξης είναι:

- $f * g = g * f$
- $f * (g * h) = (f * g) * h$
- $f * (g + h) = f * g + f * h$
- $a(f * g) = (af) * g$ $με\ α\ πραγματικό\ αριθμό$

2.5. Εξισώσεις Euler-Lagrange

Στον λογισμό των μεταβολών και την κλασική μηχανική, οι εξισώσεις Euler-Lagrange είναι ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης των οποίων οι λύσεις είναι σταθερά σημεία της δεδομένης συνάρτησης δράσης. Οι εξισώσεις ανακαλύφθηκαν τη δεκαετία του 1750 από τον Ελβετό μαθηματικό Leonhard Euler και τον Ιταλό μαθηματικό Joseph-Louis Lagrange.

Επειδή μια διαφορίσιμη συνάρτηση είναι ακίνητη στα τοπικά της άκρα, η εξίσωση Euler-Lagrange είναι χρήσιμη για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης στα οποία, με δεδομένο κάποιο συναρτησιακό, αναζητείται η συνάρτηση που το ελαχιστοποιεί ή μεγιστοποιεί. Αυτό είναι ανάλογο με το θεώρημα του Fermat στον λογισμό, που δηλώνει ότι σε οποιοδήποτε σημείο μια διαφορίσιμη συνάρτηση επιτυγχάνει ένα τοπικό άκρο, η παράγωγός της είναι μηδέν. Στη μηχανική του Lagrange, σύμφωνα με την αρχή του Hamilton, η εξέλιξη ενός φυσικού συστήματος περιγράφεται από τις λύσεις της εξίσωσης Euler για τη δράση του συστήματος. Σε αυτό το πλαίσιο οι εξισώσεις Euler ονομάζονται συνήθως εξισώσεις Lagrange. Στην κλασική μηχανική, είναι ισοδύναμο με τους νόμους της κίνησης του Νεύτωνα. Πράγματι, οι εξισώσεις Euler-Lagrange θα παράγουν τις ίδιες εξισώσεις με τους Νόμους του Νεύτωνα. Αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο όταν αναλύονται συστήματα των οποίων τα διανύσματα δύναμης είναι ιδιαίτερα περίπλοκα. Έχει το πλεονέκτημα ότι παίρνει την ίδια μορφή σε οποιοδήποτε σύστημα γενικευμένων συντεταγμένων και ταιριάζει καλύτερα σε γενικεύσεις.

2.6. Συνοριακές Συνθήκες

Για την εξίσωση $\frac{d\tau}{dx} + F = \rho\ddot{u}$, τα τρία σημαντικότερα είδη συνοριακών συνθηκών είναι τα εξής:

<u>Συνθήκες του Dirichlet:</u> προκαθορίζεται η λύση u στο σύνορο $\partial\Omega$ (δηλαδή οι τιμές της στο σύνορο) πχ για τις εξισώσεις μετατόπισης

$$u(\tilde{x}, t) = u_0(\tilde{x}, t) \text{ για } x \in \partial\Omega, t \geq t_0$$

όπου u_0 μία δεδομένη συνάρτηση.

<u>Συνθήκες του Neumann:</u> προκαθορίζεται η κατά κατεύθυνση παράγωγος στην κατεύθυνση του εξωτερικού κανονικού διανύσματος n (το οποίο είναι κάθετο στο $\partial\Omega$) πχ στην ελαστοδυναμική

$$\frac{\partial u}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, t) = v_0(\tilde{x}, t) \text{ για } x \in \partial\Omega, t \geq t_0$$

όπου v_0 μία δεδομένη συνάρτηση.

<u>Συνθήκες του Robin:</u> για δεδομένη συνάρτηση a, προκαθορίζεται ο γραμμικός συνδυασμός $\frac{\partial u}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, t) + a(\tilde{x}, t)u(\tilde{x}, t)$ στο $\partial\Omega$ πχ για την εξίσωση της ελαστοδυναμικής

$$\frac{\partial u}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, t) + a(\tilde{x}, t)u(\tilde{x}, t) = g(\tilde{x}, t) \text{ για } x \in \partial\Omega, t \geq t_0$$

Οι συνοριακές συνθήκες Dirichlet λέγονται και ουσιώδεις συνοριακές συνθήκες ή συνοριακές συνθήκες πρώτου είδους, οι συνοριακές συνθήκες του Neumann λέγονται φυσικές συνοριακές συνθήκες ή συνοριακές συνθήκες δευτέρου είδους ενώ οι Robin λέγονται μικτές συνοριακές συνθήκες ή συνοριακές συνθήκες τρίτου είδους.

Στην περίπτωση των μονοδιάστατων προβλημάτων, όπου Ω=[0,L], οι συνοριακές συνθήκες του Dirichlet, του Neumann και του Robin γράφονται στην μορφή:

Dirichlet: $u(0,t) = g(t)\ και\ u(L,t) = h(t)$

Neumann: $u_x(0,t) = g(t)\ και\ u_x(L,t) = h(t)$

Robin: $u_x(0,t) + a(0,t)u(0,t) = g(t)\ και\ u_x(L,t) + a(L,t)u(L,t) = h(t)$

Για την περίπτωση της παλλόμενης χορδής, οι συνοριακές συνθήκες του Dirichlet σημαίνουν ότι τα άκρα της χορδής κινούνται κατά έναν συγκεκριμένο τρόπο, ιδιαίτερα οι ομογενείς συνθήκες Dirichlet $u(0,t) = u(L,t) = 0$ σημαίνουν ότι τα άκρα της χορδής παραμένουν σταθερά, δεν κινούνται καθόλου. Οι συνοριακές συνθήκες του Neumann σημαίνουν ότι προκαθορίζουμε την κλίση της χορδής στα άκρα της. Ιδιαίτερα οι ομογενείς συνθήκες Neumann $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$ σημαίνουν ότι η χορδή στα άκρα της έχει οριζόντια κλίση, δηλαδή ότι τα άκρα της χορδής κινούνται ελεύθερα και χωρίς τριβή κατακόρυφα, κάθετα στην κατεύθυνση του άξονα των x. Οι συνοριακές συνθήκες του Robin σημαίνουν ότι προκαθορίζεται κάποιος γραμμικός συνδυασμός της θέσης των άκρων της χορδής και της κλίσης στα άκρα της. (4)

3. Αρχή Hamilton

Στη φυσική, η αρχή του Hamilton είναι η διατύπωση του William Rowan Hamilton για την αρχή της στατικής δράσης. Δηλώνει ότι η δυναμική ενός φυσικού συστήματος καθορίζεται από ένα μεταβλητό πρόβλημα για μια συνάρτηση που βασίζεται σε μια μοναδική συνάρτηση, τη Lagrangian, η οποία μπορεί να περιέχει όλες τις φυσικές πληροφορίες που αφορούν το σύστημα και τις δυνάμεις που δρουν σε αυτό. Το μεταβολικό πρόβλημα είναι ισοδύναμο και επιτρέπει την εξαγωγή των διαφορικών εξισώσεων κίνησης του φυσικού συστήματος. Αν και διατυπώθηκε αρχικά για την κλασική μηχανική, η αρχή του Hamilton ισχύει επίσης και για κλασικά πεδία όπως τα ηλεκτρομαγνητικά και βαρυτικά πεδία και παίζει σημαντικό ρόλο στην κβαντική μηχανική, την κβαντική θεωρία πεδίων και τις θεωρίες κρισιμότητας.

Λόγω της μεταβλητής t (του χρόνου) εμφανίζεται αδυναμία στην αρχή Hamilton σε ότι έχει να κάνει με την εμφάνιση του πεδίου των μετατοπίσεων για την τελική στιγμή. Για την απαλοιφή αυτών των στοιχείων χρησιμοποιείται η συνέλιξη.

3.1. Κλασματική Παράγωγος στην Αρχή Hamilton

Αν και η αρχή του Hamilton εφαρμόζεται πολλά χρόνια και βρήκε εξαιρετική σημασία σε όλη τη μαθηματική φυσική, πάσχει από δύο κύριες δυσκολίες. Το πρώτο σχετίζεται με την αδυναμία του να ενσωματώσει όρους διάχυσης. Η αρχή του Hamilton εφαρμόζεται μόνο σε συντηρητικά συστήματα. Η δεύτερη δυσκολία είναι πιο λεπτή, σχετίζεται με τον χειρισμό των αρχικών συνθηκών και τους περιορισμούς στις μεταβολές των συναρτήσεων. Ειδικότερα, η αρχή του Hamilton απαιτεί οι μεταβολές να εξαφανίζονται στα τελικά σημεία του χρονικού διαστήματος, το οποίο για λόγους συνέπειας σημαίνει ότι οι συναρτήσεις είναι γνωστές σε αυτές τις δύο στιγμές. Σε ένα δυναμικό πρόβλημα όμως, υπό κανονικές συνθήκες, δεν γνωρίζει κανείς τη λύση στο τέλος του χρονικού διαστήματος. Αντίθετα, αυτός είναι συχνά ο κύριος στόχος της ανάλυσης. (5)

Στην αρχή προτάθηκε να αντικατασταθούν τα εσωτερικά γινόμενα της Αρχής Hamilton με την συνέλιξη για την ανάπτυξη μεταβολικών μεθόδων για προβλήματα αρχικών τιμών, ενώ στην συνέχεια προτάθηκε η χρήση κλασματικών παραγώγων για να επιτρέψει την ανάπτυξη ενός διανυσματικού συναρτησιακού για δυναμικά συστήματα που υπάρχει διάχυση. (5)

Για παράδειγμα για ένα πρόβλημα της ελαστοδυναμικής με μικτές μεταβλητές, όπου u είναι η μετατόπιση και Σ είναι η ώθηση της τάσης. Επίσης ρ είναι η πυκνότητα και $\bar{f}$ είναι οι γνωστές ασκούμενες δυνάμεις. Το συναρτησιακό που χαρακτηρίζει το πρόβλημα είναι το εξής:

$$I\left[u, \breve{u}, \dot{u}, \Sigma, \breve{\Sigma}, \dot{\Sigma}; t\right] = \frac{1}{2}(\dot{u} * \rho\dot{u})(t) - \frac{1}{2}\left(\dot{\Sigma} * D^{-1}\dot{\Sigma}\right)(t) + \left(\breve{\Sigma} * \breve{u}\right)(t) - \left(u * \bar{f}\right)(t) - u(t)\bar{J}(0)$$

$\dot{u}, \dot{\Sigma}$ είναι οι παράγωγοι ως προς τον χρόνο της μετατόπισης και της ώθησης από τις τάσεις, ενώ το $\breve{u}, \breve{\Sigma}$ είναι οι αριστερές κλασματικές ημιπαράγωγοι Riemann-Liouville των μετατοπίσεων και της ώθησης των τάσεων, αντίστοιχα. Ο όρος $\bar{J}(0)$ εκφράζει την ώθηση των μαζικών δυνάμεων στην αρχική στιγμή του προβλήματος $t = 0$. Το σύμβολο $*$ συμβολίζει το ολοκλήρωμα της συνέλιξης μεταξύ δυο συναρτήσεων.

Έστω ένα χωρίο Ω=[a,b] ($-\infty < 0 < x_1 < \infty$) στον χώρο των πραγματικών αριθμών R. Υπάρχει η δεξιά ($D_{x_1-}^{\alpha} f$) και αριστερή ($D_{0+}^{\alpha} f$) κλασματική παράγωγος Riemann-Liouville τάξης α. (6)

<u>Αριστερή κλασματική Παράγωγος:</u> $D_{0+}^{\alpha} f(x) = (\frac{d}{dt})^n \int_0^x \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{f(t)dt}{(x-t)^{a-n+1}}$

$$(x > 0 \,;\; n = [\alpha] + 1)$$

Για την ημιπαράγωγο των μετατοπίσεων,

$$\breve{u}(t) = (D_{0+}^{1/2} u)(t) = \frac{d}{dt} \int_0^T \frac{1}{\Gamma(1/2)} \frac{u(t)}{(T-t)^{1/2}} dt$$

το Γ είναι η συνάρτηση Gamma. Η θεωρία για την συνάρτηση Gamma αναπτύχθηκε στην προσπάθεια της γενίκευσης του παραγοντικού φυσικών αριθμών, δηλαδή θέλοντας να βρεθεί μια έκφραση, που να επεκτείνει το n! (n φυσικός αριθμός)σε οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό.

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x}\, dx$$

Με κάποιες χαρακτηριστικές τιμές να είναι: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \Gamma(5/2) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}, \Gamma(7/2) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$. (7)

3.2. Προηγούμενες Μελέτες

Όπως αναφέρει ο Tonti (8), μια μεταβολική διατύπωση για προβλήματα αρχικής τιμής δεν είναι δυνατή στο κλασικό πλαίσιο του λογισμού των μεταβολών. Ο λόγος έγκειται στο ότι επιμένουμε να χρησιμοποιούμε το εσωτερικό γινόμενο που δίνεται από τον τύπο:

$$\int_0^T u(t)\, v(t)\, dt$$

Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι με αυτό το εσωτερικό γινόμενο τα προβλήματα αρχικής τιμής δεν ταιριάζουν στις απαραίτητες συνθήκες ώστε να υπάρχει μια μεταβλητή διαμόρφωση.

$$\int_0^T u(T-t)\, v(t)\, dt$$

Με την παραπάνω μορφή μπορεί να εφαρμοστεί και σε προβλήματα αρχικής τιμής. (8)

Για παράδειγμα, ο τελεστής διαφορικού δεύτερης τάξης στο [0,T] που είναι τυπικά συμμετρικός με σεβασμό στον L^2, αποτυγχάνει να είναι συμμετρικός όταν λαμβάνονται οι αρχικές συνθήκες υπόψη. Σε γενικές γραμμές, μετά από ολοκλήρωση κατά μέρη δύο φορές, η αντίστοιχη μορφή θα εμφανίζει τιμές της εμπλεκόμενης συνάρτησης και της παραγώγου της στο τελικό σημείο Τ για το οποίο δεν υπάρχουν διαθέσιμα δεδομένα. Συνοψίζοντας, η αρχή του Hamilton μπορεί να εξάγει τη σωστή εξίσωση πεδίου, αλλά αποτυγχάνει να παράγει τις αντίστοιχες αρχικές συνθήκες. (8)

Έστω η παρακάτω διατύπωση για ένα πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\ddot{u}(t) = f(t) \;\mu\varepsilon\; u(0) = 0 \;\kappa\alpha\iota\; \dot{u}(0) = 0 \;\gamma\iota\alpha\; 0 \le t \le T$$

Το συναρτησιακό είναι το εξής:

$$G[u] = \frac{1}{2}\int_0^T \frac{du(t)}{dt}\frac{du(t)}{dt}dt - \int_0^T u(t)f(t)\,dt$$

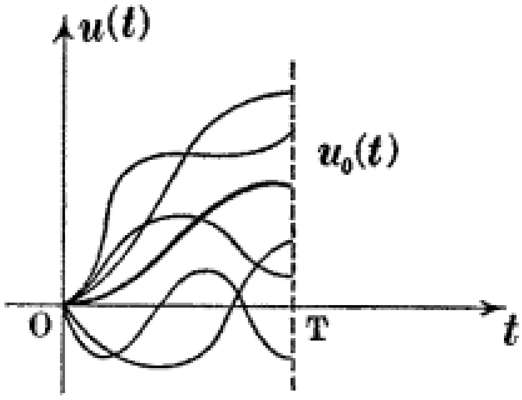
$$G[u] = \frac{1}{2}\int_0^T \frac{du(T-t)}{dt}\frac{du(t)}{dt}dt - \int_0^T u(T-t)f(t)\,dt$$

Τώρα αρκεί να φανεί ότι η συνάρτηση $u_0(t)$ που λύνει το παραπάνω πρόβλημα αρχικών κάνει το συναρτησιακό G[u] να παίρνει ακρότατο με σεβασμό σε όλες τις συναρτήσεις $u(t)$ που ικανοποιούν την αρχική συνθήκη $u(0) = 0$ και αντίστροφα. Η δεύτερη συνθήκη $u'(0) = 0$ είναι η φυσική συνθήκη για το συναρτησιακό.

Η πρώτη μεταβολή του συναρτησιακού $G[u]$ είναι:

$$\delta G[u] = \int_0^T \delta u(T-t)[\ddot{u}(t) - f(t)]dt - \delta u(0)\dot{u}(T) + \delta u(T)\dot{u}(0)$$

Αν απαιτήσουμε ότι αυτή η μεταβολή εξαφανίζεται για κάθε $u(t)$ που ικανοποιεί την συνθήκη $u(0) = 0$ λαμβάνεται η διαφορική εξίσωση $\ddot{u}(t) = f(t)$ και η αρχική συνθήκη $u'(0) = 0$.



Εικόνα 2: Διάγραμμα για την επίλυση της διαφορικής

Το δεύτερο έλλειμμα της αρχής του Hamilton θα αποκαλυφθεί όταν κάποιος πάει να ερευνήσει ένα μη συντηρητικό σύστημα, όπου η παράγωγος πρώτης τάξης εμπλέκεται στην διαφορική εξίσωση. Για παράδειγμα, σε περιπτώσεις τριβής ή οποιουδήποτε είδους ανελαστικής συμπεριφοράς, η τυπική αρχή του Hamilton αποτυγχάνει, όχι μόνο όσον αφορά τις αρχικές συνθήκες, αλλά και στην εξαγωγή της εξίσωσης πεδίου. (9)

Για παράδειγμα:

$$v\ddot{u}(t) - b\dot{u}(t) + 1 = 0 \; \gamma\iota\alpha \; 0 \leq t \leq T \; \kappa\alpha\iota \; u(0) = u'(0) = 0$$

Χρησιμοποιείται το συναρτησιακό:

$$I[u] = \frac{v}{2}\int_0^T \frac{du(t)}{dt}\frac{du(t)}{dt}dt - \int_0^T b\dot{u}(t)\,dt + \int_0^T u(t)dt$$

$$I[u] = \frac{v}{2}\int_0^T \frac{du(T-t)}{dt}\frac{du(t)}{dt}dt - \int_0^T b\dot{u}(T-t)\,dt + \int_0^T u(t)dt$$

Αντίστοιχα με το προηγούμενο παράδειγμα, θα πρέπει να βρεθεί μία συνάρτηση $u_0(t)$ που να ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες. Η πρώτη μεταβολή του συναρτησιακού είναι:

$$\delta I[u] = \frac{v}{2}\int_0^T \delta\dot{u}\,(T-t)\dot{u}(t)dt - \int_0^T b\delta u^{(1/2)}(T-t)u^{(1/2)}(t)\,dt + \int_0^T \delta u(t)dt$$

$$\delta I[u] = \frac{v}{2}\int_0^T \delta u\,(T-t)\ddot{u}(t)dt - \frac{v}{2}[\delta u(0)\dot{u}(T) - \delta u(T)\dot{u}(0)] - \int_0^T b\delta u^{(1/2)}(T-t)u^{(1/2)}(t)\,dt + \int_0^T \delta u(t)dt$$

Επομένως, παρατηρώντας το παραπάνω συναρτησιακό δεν μπορεί να εξαχθεί η διαφορική εξίσωση και οι αρχικές συνθήκες με αυτόν τον τρόπο, λόγω του ότι εισέρχεται και ο όρος με την πρώτη παράγωγο που δεν μπορεί να τον διαχειριστούμε με τον παραπάνω τρόπο.

Αναφέρουν ο Arthurs και ο Jones ότι προβλήματα αρχικής τιμής προκύπτουν στη διάχυση, την κλασική μηχανική και άλλους τομείς της μαθηματικής φυσικής και έχει κάποιο ενδιαφέρον να παρέχεται μια μεταβολική διατύπωσή τους. Πρώιμες προσπάθειες, που εκπροσωπούνται από την αρχή Hamilton και άλλες αρχές δράσης, είναι ανεπαρκείς γιατί στην πραγματικότητα αναφέρονται σε προβλήματα οριακών τιμών, στα οποία πρέπει να συμφωνούν οι καμπύλες σύγκρισης με την κρίσιμη καμπύλη και στα δύο άκρα του χρονικού διαστήματος. Προκύπτει εσωτερικό γινόμενο στην επίλυση αυτών των προβλημάτων μεταξύ δυο συναρτήσεων. (10)

Με αυτή τη μορφή ο τελεστής ∂/∂t είναι συμμετρικός και είναι δυνατό να δίνει μια μεταβολική διατύπωση προβλημάτων αρχικής τιμής. Τα αποτελέσματα του Tonti αναφέρονται στη διατύπωση Euler-Lagrange ορισμένων προβλημάτων και αυτά συνεπάγονται βασικές προϋποθέσεις ή περιορισμούς στις αποδεκτές συναρτήσεις. Δείχνουν πώς αυτοί οι περιορισμοί μπορούν να αφαιρεθούν έτσι ώστε οι αρχικές συνθήκες να προκύψουν ως φυσικές συνθήκες από τη θεωρία μεταβολών. (10)

Για παράδειγμα μελετώντας την εξίσωση:

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = f \;\gamma\iota\alpha\; t > 0$$

$$\text{με } q(0) = a \;\kappa\alpha\iota\; \dot{q}(0) = b$$

Έστω ότι f,a και b είναι διανύσματα με n στοιχεία και A,B και C είναι συμμετρικοί πίνακες διάστασης n×n. Για την επίλυση του συγκεκριμένου συστήματος θα χρησιμοποιηθεί συνέλιξη για το ολοκλήρωμα του χρόνου.

$$[\varphi, \psi] = \int_0^T \varphi(t)\psi(T-t)dt$$

Έστω, ότι η λύση είναι η $q *= q + \eta\delta q$ και ότι $\delta I[q *] = 0$.

Το συναρτησιακό $I[q]$ είναι το εξής:

$$I[q] = \frac{1}{2}[\dot{q}, A\dot{q}] + \frac{1}{2}[q, B\dot{q}] + \frac{1}{2}[q, Cq] - [f, q] + [\dot{q}, A(q - a)] - [q, Ab] + \frac{1}{2}[q, Bq] - [q, Ba]$$

Χρησιμοποιείται η πρώτη μεταβολή για την επίλυση του συναρτησιακού.

$$\delta I = [\frac{d}{d\eta} I(q + \eta\delta q)]_{\eta=0}$$

$$\delta I = [\delta\dot{q}, A\dot{q}] + \frac{1}{2}[q, B\delta\dot{q}] + \frac{1}{2}[\delta q, B\dot{q}] - [\delta q, f] + [\delta q, Cq] + [\delta\dot{q}, A(q - a)] + [\dot{q}, A\delta q] - [\delta q, Ab] + \frac{1}{2}[\delta q, Bq] + \frac{1}{2}[q, B\delta q] - [\delta q, Ba]$$

$$\delta I = [\delta q, A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq - f] + [\delta\dot{q}, A(q - a)] + [\delta q, A(\dot{q} - b)] + [\delta q, B(q - a)]$$

Οι Sandhu και Pister παρουσίασαν μια διαδικασία για τη δημιουργία μεταβολικών αρχών για μια σειρά προβλημάτων γραμμικού πεδίου στη μηχανική συνεχούς μέσου. Εξέτασαν μερικές γενικεύσεις της αρχής και την σχέση τους με τα υπάρχοντα μεταβολικά θεωρήματα καθώς και εναλλακτικά σχήματα χρήσιμα για άμεσες μεθόδους λύσης. Παρουσίασαν παραδείγματα που περιλαμβάνουν τυπικές εφαρμογές, όπου θα δοθεί έμφαση στην ελαστοδυναμική.

Η χρήση μεταβολικών μεθόδων για την απόκτηση προσεγγιστικών λύσεων σε προβλήματα πεδίου και για τον καθορισμό καταστατικών σχέσεων και εξισώσεων στη μηχανική συνεχούς έχει καθιερωθεί. Έχουν περιγραφεί αρκετές εναλλακτικές συνθέσεις για συγκεκριμένες ομάδες προβλημάτων. Οι Sandhu και Pister παρουσίασαν μια μεταβολική αρχή που εφαρμόζεται σε μια ευρεία σειρά προβλημάτων γραμμικού συζευγμένου πεδίου. Η προσέγγισή τους βασίζεται σε μια γενίκευση του βασικού μεταβολικού προβλήματος στην περίπτωση συναρτήσεων πολλών εξαρτημένων μεταβλητών. (11)

Στην ελαστοδυναμική, κατά την εφαρμογή άμεσων μεθόδων για την κατασκευή κατά προσέγγιση λύσεων, οι διατυπώσεις που χρησιμοποιούνται συνήθως είναι: ελάχιστη δυναμική ενέργεια , όπου η αποδεκτή Ui είναι τέτοια ώστε οι συστατικές εξισώσεις και οι οριακές συνθήκες μετατόπισης να ικανοποιούνται πανομοιότυπα και η αρχή της μεταβολής είναι ισοδύναμη με την εξίσωση, οι εξισώσεις τάσεων της ισορροπίας, και η ελάχιστη συμπληρωματική ενέργεια, όπου fij είναι τέτοιες ώστε η εξίσωση ισορροπίας τάσεων και η οριακή συνθήκη τάσης να ικανοποιούνται πανομοιότυπα και η αρχή της μεταβλητής είναι ισοδύναμη με τη συστατική εξίσωση. (11)

Ο Gurtin μελέτησε το τυπικό πρόβλημα μικτών συνοριακών-αρχικών τιμών της γραμμικής ελαστοδυναμικής που συνίσταται στην εύρεση μιας "κατάστασης" -- δηλαδή μιας μετατόπισης, μιας τάσης και ενός πεδίου τάσης – που ικανοποιεί τις εξισώσεις που διέπουν το πεδίο σε ένα δεδομένο χωροχρονικό πεδίο και συναντά ορισμένες αρχικές και συνοριακές συνθήκες. Η κλασική μεταβολική αρχή της ελαστοδυναμικής διαμορφώνεται σύμφωνα με την αρχή του Hamilton. Ισχυρίζονται ότι η μεταβολή μιας καθορισμένης συνάρτησης σε ένα σύνολο «αποδεκτών» καταστάσεων εξαφανίζεται σε μια συγκεκριμένη κατάσταση εάν και μόνο εάν αυτή η κατάσταση πληροί τις εξισώσεις πεδίου και τις συνοριακές συνθήκες, οι αποδεκτές καταστάσεις υποχρεούνται να πληρούν ορισμένες των εξισώσεων πεδίου και των συνοριακών συνθηκών και να υποθέσουμε μια δεδομένη κατανομή μετατόπισης τόσο στην αρχική όσο και σε μεταγενέστερη στιγμή. Αυτό το είδος αρχής είναι σαφώς ανεφάρμοστο στο μικτό πρόβλημα της ελαστοδυναμικής αφού δεν λαμβάνει υπόψη την αρχική κατανομή ταχύτητας και προϋποθέτει τη γνώση των μετατοπίσεων σε μεταγενέστερο χρόνο.

Επιπλέον, ο Gurtin μελέτησε στην εργασία του μεταβολικές αρχές οι οποίες, σε αντίθεση με τα προαναφερθέντα αποτελέσματα, χαρακτηρίζουν πλήρως το μικτό πρόβλημα για ένα γενικό (ανομοιογενές και ανισότροπο) γραμμικό ελαστικό στερεό.

Ο Dargush εφάρμοσε την αρχή της συνέλιξης στα μικτά προβλήματα που παρέχει έναν νέο, αυστηρό φορμαλισμό μεταβλητών για ένα ευρύ φάσμα προβλημάτων αρχικής τιμής στη μαθηματική φυσική και μηχανική. Εδώ η εστίαση είναι αρχικά στους κλασικούς ταλαντωτές ενός βαθμού ελευθερίας που ενσωματώνουν είτε στοιχεία Kelvin-Voigt είτε Maxwell και στη συνέχεια σε συστήματα που χρησιμοποιούν μοντέλα κλασματικής παραγώγου. Σε κάθε περίπτωση, διατυπώνεται μια αντίστοιχη ασθενής μορφή χρησιμοποιώντας συναρτήσεις χρονικού σχήματος για να παραχθεί ένας αλγόριθμος κατάλληλος για αριθμητική λύση. Για συστήματα χωρίς απόσβεση, ο αλγόριθμος βρέθηκε ότι είναι απλοϊκός και άνευ όρων σταθερός σε σχέση με το χρονικό βήμα. Στην περίπτωση των συστημάτων διάχυσης, η προσέγγιση φαίνεται να είναι ισχυρή και ακριβής με καλά χαρακτηριστικά σύγκλισης τόσο για τα κλασικά όσο και για μοντέλα που βασίζονται σε κλασματική παράγωγο. (5)

3.3. Προβλήματα Ελαστοδυναμικής για 1-D και 2-D προβλήματα

Για την εξίσωση $\frac{d\tau}{dx} + F = \rho\ddot{u}$ με $u(x,0) = u_0(x),\ u(0,t) = u(t),\ \dot{u}(x,0) = v_0(x)$ $E\frac{du}{dx}(l,t) = p(t)$ για

x στο [0,l] και t στο [0,T]

Θα χρησιμοποιηθεί το συναρτησιακό $I = Lagrangian = K - \Pi$ όπου $K = \frac{\rho}{2}\dot{u}^2\ και$

$\Pi = \frac{E}{2}(u')^2\ + f\ u$ οπότε:

$$I[u] = \int_0^l \int_0^T \frac{\rho}{2}\dot{u}\,\dot{u}dt\,dx - \int_0^l \int_0^T [\frac{E}{2}\frac{du}{dx}\frac{du}{dx} + fu]dt\,dx$$

Θα υπολογιστεί το $\delta I[u,\delta u] = \delta K[u,\delta u] - \delta\Pi[u,\delta u] == 0$

Θα χρησιμοποιηθεί το ολοκλήρωμα της συνέλιξης όπου ισχύει ότι:

$$[f,g] = \int_0^T f\,(t)g(t)dt = \int_0^T f\,(t)g(T-t)dt$$

<u>Για την κινητική ενέργεια:</u>

$$\delta K[u,\delta u] = \frac{d}{d\varepsilon}[K(u+\varepsilon\delta u)]_{\varepsilon=0}$$

$\rightarrow \delta K = \frac{d}{d\varepsilon}\ [\int_0^l \int_0^T [\frac{\rho}{2}(\dot{u}\ (x,t) + \varepsilon\delta\dot{u}(x,t))(\dot{u}\ (x,T-t) + \varepsilon\delta\dot{u}(x,T-t))dt\ dx]$

$$\rightarrow \frac{d}{d\varepsilon}\ [(\dot{u}\ (x,t) + \varepsilon\delta\dot{u}(x,t))(\dot{u}\ (x,T-t) + \varepsilon\delta\dot{u}(x,T-t))]_{\varepsilon=0}$$

$$\rightarrow \delta\dot{u}(x,t)[\dot{u}\ (x,T-t) + \varepsilon\delta\dot{u}(x,T-t)] + \delta\dot{u}(x,T-t)[\dot{u}\ (x,t) + \varepsilon\delta\dot{u}(x,t)]$$

$\rightarrow \delta\dot{u}(x,t) * \dot{u}\ (x,T-t) + \delta\dot{u}(x,T-t) * \dot{u}\ (x,t)$

$$\delta K = \int_0^l \int_0^T \frac{\rho}{2}(\delta\dot{u}(x,t) * \dot{u}\ (x,T-t) +\ \delta\dot{u}(x,T-t) * \dot{u}\ (x,t))dtdx$$

$\rightarrow \delta K = \frac{\rho}{2}\int_0^l [\delta u(x,t)\dot{u}\ (x,T-t) - \delta u(x,T-t)\dot{u}(x,t)]dx\ + \int_0^l \int_0^T \frac{\rho}{2}(\delta u(x,t) * \ddot{u}\ (x,T-t) +\ \delta u(x,T-t) * \ddot{u}\ (x,t))dtdx$

$\rightarrow \delta K = \int_0^l \int_0^T \rho(\delta u(x,T-t) * \ddot{u}\ (x,t))dtdx + \frac{\rho}{2}\int_0^l [\delta u(x,T)\dot{u}\ (x,0) - \delta u(x,0)\dot{u}(x,T) - \delta u(x,0)\dot{u}(x,T) - \delta u(x,T)\dot{u}(x,0)]dx$

$\rightarrow \delta K[\mathrm{u},\delta\mathrm{u}] = \int_0^l \int_0^T \rho(\delta u(x,t) * \ddot{u}\ (x,t))dtdx\ +\ \rho\int_0^l [\delta u(x,T)Vo(x)\ dx$

<u>Για την δυναμική ενέργεια</u>

$$\delta\Pi[u,\delta u] = \frac{d}{d\varepsilon}[\Pi(u+\varepsilon\delta u)]_{\varepsilon=0}$$

$\rightarrow \delta\Pi = \frac{d}{d\varepsilon}[\int_0^T \int_0^l \frac{E}{2}(\frac{du}{dx} + \varepsilon\frac{d\delta u}{dx})(\frac{du}{dx} + \varepsilon\frac{d\delta u}{dx})dtdx] + \frac{d}{d\varepsilon}\int_0^T \int_0^l [f(u+\varepsilon\delta u)]dt\ dx$

$\rightarrow \frac{d}{d\varepsilon}\ [(\frac{du}{dx} + \varepsilon\frac{d\delta u}{dx})(\frac{du}{dx} + \varepsilon\frac{d\delta u}{dx})]_{\varepsilon=0} + \frac{d}{d\varepsilon}\ [(f(u+\varepsilon\delta u)]_{\varepsilon=0}$

$\rightarrow [\frac{d\delta u}{dx}\ (\frac{du}{dx} + \varepsilon \frac{d\delta u}{dx}) + \ \frac{d\delta u}{dx}\ (\frac{du}{dx} + \varepsilon \frac{d\delta u}{dx})] + f\delta u$

$\rightarrow 2\,\frac{d\delta u}{dx}\ \frac{du}{dx} + \mathrm{f}\ \delta u$

$$\delta\Pi = \int_0^T \int_0^l E(\frac{d\delta u}{dx}\ \frac{du}{dx})dtdx + \ \int_0^T \int_0^l f\ \delta u\ dtdx$$

$$\rightarrow\ \delta\Pi = \int_0^T E[\delta u(l,t)\frac{du}{dx}(l,t) - \delta u(0,t)\frac{du}{dx}(0,t)] - \int_0^T \int_0^l E(\delta u\ \frac{d^2u}{dx^2})dtdx + \ \int_0^T \int_0^l f\ \delta u\ dtdx$$

$\rightarrow \delta\Pi = -\int_0^T [\delta u(l,t)\ p\ (t)]dt\ \ + \int_0^T \int_0^l E(\delta u\ \frac{d^2u}{dx^2})dtdx + \ \int_0^T \int_0^l f\ \delta u\ dtdx$

$$\delta I = 0 \rightarrow\ \delta(K - \Pi) = 0$$

$$\int_0^l \int_0^T \rho\delta u(x,t) * \ddot{u}\ (x,t)dtdx\ \ +\ \rho \int_0^l [\delta u(x,T)Vo(x)\ dx - \int_0^T \int_0^l E(\delta u\ \frac{d^2u}{dx^2})dtdx - \ \int_0^T \int_0^l f\ \delta u\ dtdx + \int_0^T [\delta u(l,t)\ p\ (t)]dt = 0$$

Με βάση το θεμελιώδες λήμμα του λογισμού των μεταβολών:

$\int_0^l [f\ (x,t), \delta u(x,t)] = 0 \rightarrow f(x,t) = 0\ για\ όλα\ τα\ x \in (0,l)\ και\ t \in [0,T]$

Επομένως: $\rho\ddot{u} - \frac{d\tau}{dx} = f$ και ισχύει ότι $\rho \int_0^l [\delta u(x,T) Vo(x)\, dx + \int_0^t [\delta u(l,t)\; p\,(t)]dt = 0$

Στην περίπτωση ενός δισδιάστατου προβλήματος, υπάρχουν δύο ζητούμενες συναρτήσεις u και v στο χωρίο Ω, με στόχο την ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού Lagrange $I = K - \Pi$. Έστω ότι η u εκφράζει το πεδίο των μετατοπίσεων στην διεύθυνση του άξονα x και η v στον άξονα y. Επιπλέον το χωρίο που θα μελετηθεί το πρόβλημα είναι το $[0,l] \times [0,h]$ και στο πεδίο του χρόνου $[0,T]$.

$$Lagrangian = I[u,v] = K[u,v] - \Pi[u,v]$$

$$\delta I[u,v] = \delta Ku[u,v] + \delta Kv[u,v] - \delta \Pi u[u,v] - \delta \Pi v[u,v]$$

Όπου $u = u(x,y,t)$ και $v = v(x,y,t)$

<u>Για την κινητική ενέργεια</u>

$$K = \frac{\rho}{2}[(\frac{du}{dt})^2 + (\frac{dv}{dt})^2]$$

$$K[u,v] = \int_0^h \int_0^l \int_0^T \{\frac{\rho}{2}[\,(\frac{du}{dt})^2 + (\frac{dv}{dt})^2]\}dtdxdy$$

$$\delta K[u,v,\delta u,\delta v] = \frac{d}{d\varepsilon}[\,K(u+\varepsilon\delta u)]_{\varepsilon=0} \quad + \quad \frac{d}{d\varepsilon}[\,K(v+\varepsilon * \delta v)]_{\varepsilon=0}$$

$\rightarrow \quad \delta K = \frac{\rho}{2}\frac{d}{d\varepsilon}\,[\int_0^h \int_0^l \int_0^T \{[\dot{u}\,(x,y,t) + \varepsilon\delta\dot{u}(x,y,t)][\dot{u}\,(x,y,T-t) + \varepsilon\delta\dot{u}(x,y,T-t)] + [\dot{v}\,(x,y,t) + \varepsilon\delta\dot{v}(x,y,t)][\dot{v}\,(x,y,T-t) + \varepsilon\delta\dot{v}(x,y,T-t)]\}dt\;dxdy]$

$\rightarrow \; \frac{d}{d\varepsilon}\,\{[\dot{u}\,(x,y,t) + \varepsilon\delta\dot{u}(x,y,t)][\dot{u}\,(x,y,T-t) + \varepsilon\delta\dot{u}(x,y,T-t)]\}_{\varepsilon=0} + \frac{d}{d\varepsilon}\,\{[\dot{v}\,(x,y,t) + \varepsilon\delta\dot{v}(x,y,t)][\dot{v}\,(x,y,T-t) + \varepsilon\delta\dot{v}(x,y,T-t)]\}_{\varepsilon=0}$

$\rightarrow \delta\dot{u}(x,y,t)\dot{u}\ (x,y,T-t)+\delta\dot{u}(x,y,T-t)\dot{u}\ (x,y,t)+\delta\dot{v}(x,y,t)\dot{v}\ (x,y,T-t)+$
$\delta\dot{v}(x,y,T-t)\dot{v}\ (x,y,t)$

$\delta K=\frac{\rho}{2}\int_0^h\int_0^l\int_0^T\{[\delta\dot{u}(x,y,t)*\dot{u}\ (x,y,T-t)+\ \delta\dot{u}(x,y,T-t)\dot{u}\ (x,y,t)]+$
$[\delta\dot{v}(x,y,t)*\dot{v}\ (x,y,T-t)+\delta\dot{v}(x,y,T-t)*\dot{v}\ (x,y,t)]\}dtdxdy$

$\rightarrow \delta K=\rho\ \int_0^h\int_0^l[\delta u(x,y,0)\dot{u}(x,y,T)-\delta u(x,y,T)\dot{u}(x,y,0)]dxdy\ +$
$\rho\int_0^h\int_0^l\int_0^T[\delta u(x,y,T-t)\ddot{u}(x,y,t)]dtdxdy+\ \rho\ \int_0^h\int_0^l[\delta v(x,y,0)\dot{v}(x,y,T)-$
$\delta v(x,y,T)\dot{v}(x,y,0)]dxdy\ +\rho\int_0^h\int_0^l\int_0^T[\delta v(x,y,T-t)\ddot{v}(x,y,t)]dtdxdy$

$\rightarrow \delta K=\rho\int_0^h\int_0^l\int_0^T[\delta u(x,y,T-t)\ddot{u}(x,y,t)]dtdxdy+\rho\int_0^h\int_0^l\int_0^T[\delta v(x,y,T-$
$t)\ddot{v}(x,y,t)]dtdxdy+\rho\ \int_0^h\int_0^l[\delta u(x,y,0)\dot{u}(x,y,T)-\delta u(x,y,T)\dot{u}(x,y,0)]dxdy+$
$\rho\ \int_0^h\int_0^l[\delta v(x,y,0)\dot{v}(x,y,T)-\delta v(x,y,T)\dot{v}(x,y,0)]dxdy$

<u>Για την δυναμική ενέργεια</u>

Η δυναμική ενέργεια στο δισδιάστατο πρόβλημα ορίζεται ως:

$$\Pi[u,v]=\frac{E}{2}\ [(\frac{du}{dx})^2+(\frac{dv}{dy})^2+\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\frac{dv}{dy}]\ +\ f(u+v)$$

$$\delta\Pi[u,v,\delta u,\delta v]=\ \frac{d}{d\varepsilon}[\Pi(u+\varepsilon*\delta u)]_{\varepsilon=0}+\frac{d}{d\varepsilon}[\Pi(v+\varepsilon*\delta v)]_{\varepsilon=0}$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}[(\frac{du}{dx}+\varepsilon\frac{d\delta u}{dx})(\frac{du}{dx}+\varepsilon\frac{d\delta u}{dx})+(\frac{dv}{dy}+\varepsilon\frac{d\delta v}{dy})(\frac{dv}{dy}+\varepsilon\frac{d\delta v}{dy})+(\frac{du}{dx}+\varepsilon\frac{d\delta u}{dx})(\frac{du}{dy}+\varepsilon\frac{d\delta u}{dy})+(\frac{dv}{dy}+\varepsilon\frac{d\delta v}{dy})(\frac{dv}{dx}+\varepsilon\frac{d\delta v}{dx})]+\ \frac{d}{d\varepsilon}\ [(f(u+\varepsilon\delta u)+f(v+\varepsilon\delta v)]$$

$\rightarrow 2\ \frac{d\delta u}{dx}\ \frac{du}{dx} + 2\ \frac{d\delta v}{dy}\ \frac{dv}{dy} + \frac{d\delta u}{dx}\ \frac{du}{dy} + \frac{d\delta u}{dy}\ \frac{du}{dx} + \frac{d\delta v}{dy}\ \frac{dv}{dx} + \frac{d\delta v}{dx}\ \frac{dv}{dy} + f\ \delta u + \ f\ \delta v$

- $E\int_0^T\int_0^h\int_0^l \frac{d\delta u}{dx}\ \frac{du}{dx}\ dxdydt = \ E\int_0^T\int_0^h\int_0^l\ (\frac{du}{dx})^2\ dxdydt\ - E\int_0^T \oiint_S \frac{du}{dx}\delta u n_x\ dSdt$

- $\frac{E}{2}\int_0^T\int_0^h\int_0^l \frac{d\delta u}{dx}\ \frac{du}{dy}\ dxdydt = \ \frac{E}{2}\int_0^T\int_0^h\int_0^l \frac{du}{dx}\ \frac{du}{dy}\ dxdydt\ - \frac{E}{2}\int_0^T \oiint_S \frac{du}{dy}\ \delta u n_x\ dSdt$

- $\frac{E}{2}\int_0^T\int_0^h\int_0^l \frac{d\delta u}{dy}\ \frac{du}{dx}\ dxdydt = \ \frac{E}{2}\int_0^T\int_0^h\int_0^l \frac{du}{dx}\ \frac{du}{dy}\ dxdydt\ - \frac{E}{2}\int_0^T \oiint_S \frac{du}{dx}\ \delta u n_y\ dSdt$

Αντίστοιχα για την συνάρτηση v οπότε το διαφορικό του συναρτησιακού Π καταλήγει:

- $\delta\Pi[u,v,\delta u,\delta v] = \ E\int_0^T\int_0^h\int_0^l\ (\frac{du}{dx})^2\,\delta u\ dxdydt\ - E\int_0^T \oiint_S \frac{du}{dx}\delta u n_x\ dSdt + E\int_0^T\int_0^h\int_0^l \frac{du}{dx}\ \frac{du}{dy}\delta u\ dxdydt\ - \frac{E}{2}\int_0^T \oiint_S \frac{du}{dy}\ \delta u n_x\ dSdt\ - \frac{E}{2}\int_0^T \oiint_S \frac{du}{dx}\ \delta u n_y\ dSdt\ + \ E\int_0^T\int_0^h\int_0^l\ (\frac{dv}{dy})^2\,\delta v\ dxdydt\ - E\int_0^T \oiint_S \frac{dv}{dy}\delta v n_y\ dSdt\ + E\int_0^T\int_0^h\int_0^l \frac{dv}{dx}\ \frac{dv}{dy}\delta v\ dxdydt - \frac{E}{2}\int_0^T \oiint_S \frac{dv}{dx}\ \delta v n_y\ dSdt\ - \ \frac{E}{2}\int_0^T \oiint_S \frac{dv}{dy}\ \delta v n_x\ dSdt\ + \int_0^T\int_0^h\int_0^l f(\delta u + \delta v)dxdydt$

Επομένως αφού $\delta I = \delta K - \delta \Pi = 0$ ισχύει:

- $\delta I = \rho \int_0^h \int_0^l \int_0^T [\delta u(x,y,t)\ddot{u}(x,y,t)]dtdxdy +$
  $\rho \int_0^h \int_0^l \int_0^T [\delta v(x,y,t)\ddot{v}(x,y,t)]dtdxdy - \; E \int_0^T \int_0^h \int_0^l (\frac{du}{dx})^2 \, \delta u \, dxdydt \; +$
  $E \int_0^T \oiint_S \frac{du}{dx} \delta u n_x \, dSdt - E \int_0^T \int_0^h \int_0^l \frac{du}{dx} \frac{du}{dy} \delta u \, dxdydt \; +$
  $\frac{E}{2} \int_0^T \oiint_S \frac{du}{dy} \, \delta u n_x \, dSdt \; + \; \frac{E}{2} \int_0^T \oiint_S \frac{du}{dx} \, \delta u n_y \, dSdt \; -$
  $E \int_0^T \int_0^h \int_0^l (\frac{dv}{dy})^2 \, \delta v \, dxdydt \; + E \int_0^T \oiint_S \frac{dv}{dy} \delta v n_y \, dSdt \; -$
  $E \int_0^T \int_0^h \int_0^l \frac{dv}{dx} \frac{dv}{dy} \delta v \, dxdydt + \frac{E}{2} \int_0^T \oiint_S \frac{dv}{dx} \, \delta v n_y \, dSdt \; +$
  $\frac{E}{2} \int_0^T \oiint_S \frac{dv}{dy} \, \delta v n_x \, dSdt \; - \int_0^T \int_0^h \int_0^l f(\delta u + \delta v)dxdydt +$
  $\rho \; \int_0^h \int_0^l [\delta u(x,y,0)\dot{u}(x,y,T) - \delta u(x,y,T)\dot{u}(x,y,0)]dxdy +$
  $\rho \; \int_0^h \int_0^l [\delta v(x,y,0)\dot{v}(x,y,T) - \delta v(x,y,T)\dot{v}(x,y,0)]dxdy$

Με βάση το θεμελιώδες λήμμα του λογισμού των μεταβολών ισχύει:

$$\delta u\colon \rho \ddot{u} - E[(\frac{du}{dx})^2 + \frac{du}{dx}\frac{du}{dy}] = f \quad \sigma\tau o \; \chi\omega\rho\acute{\iota}o \; \Omega \; \gamma\iota\alpha \; t \in [0,T]$$

$$\delta v\colon \rho \ddot{v} - E[(\frac{dv}{dy})^2 + \frac{dv}{dx}\frac{dv}{dy}] = f \quad \sigma\tau o \; \chi\omega\rho\acute{\iota}o \; \Omega \; \gamma\iota\alpha \; t \in [0,T]$$

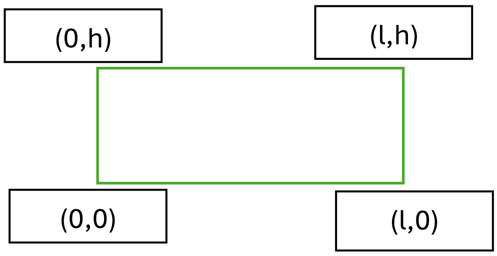
Επιπλέον, πρέπει να ισχύουν συνοριακές και αρχικές συνθήκες τέτοιες ώστε το άθροισμα των ολοκληρωμάτων που αφορούν το σύνορο και τις αρχικές και τελικές συνθήκες να ισούνται με μηδέν.

Για παράδειγμα αν οι συναρτήσεις u και v είναι καθορισμένες στο σύνορο Γ του χωρίου Ω τότε $\delta u = \delta v = 0$ επομένως εξαλείφονται από την εξίσωση οι παρακάτω όροι:

- $E\int_0^T \oiint_S \frac{du}{dx}\delta u n_x\, dSdt + \frac{E}{2}\int_0^T \oiint_S \frac{du}{dy}\, \delta u n_x\, dSdt\ +$
  $\frac{E}{2}\int_0^T \oiint_S \frac{du}{dx}\, \delta u n_y\, dSdt$

- $E\int_0^T \oiint_S \frac{dv}{dy}\delta v n_y\, dSdt + \frac{E}{2}\int_0^T \oiint_S \frac{dv}{dx}\, \delta v n_y\, dSdt\ \ +$
  $\frac{E}{2}\int_0^T \oiint_S \frac{dv}{dy}\, \delta v n_x\, dSdt$

Όπου S είναι η περιφέρεια του ορθογωνίου με μήκος l και πλάτος h (η πράσινη επιφάνεια του παρακάτω σχήματος).



4. Μεταβολικό Θεώρημα των Hu-Washizu

Στο μεταβολικό θεώρημα των Hu-Washizu, όπως το παρουσίασε ο Robert Taylor στο manual του Finite Element Analysis Program, το συναρτησιακό εκφράζεται ως προς τις συναρτήσεις των u, σ, ε και ισχύει η παρακάτω σχέση (1):

$$I[u,\sigma,\varepsilon] = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \varepsilon^T D\varepsilon \, dV - \int_{\Omega} \sigma^T \left(\nabla^{(s)} u - \varepsilon\right) dV - \int_{\Omega} u^T b_v dV - \int_{S_t} u^T \tilde{t} d\Gamma - \int_{S_u} t^T (u - \tilde{u}) d\Gamma$$

Αντίστοιχα με το συναρτησιακό που εφαρμόζεται στο θεώρημα των Hellinger-Reisner, τα u, σ, ε είναι συναρτήσεις, οι οποίες είναι άγνωστες, ανήκουν στον χώρο Ω. Είναι γνωστό ότι στο σύνορο S_t είναι το σύνορο που εφαρμόζονται δυνάμεις $\tilde{t}$ και ισχύει ότι: $t = \tilde{t}$, δηλαδή ισχύουν οι συνθήκες Neumann. Το σύνορο S_u είναι το σύνορο που ισχύει ότι: $u = \tilde{u}$, δηλαδή ισχύουν οι συνθήκες Dirichlet. Το b_v είναι οι μαζικές δυνάμεις. Τα ολοκληρώματα εφαρμόζονται στο Ω και στα σύνορα S_u και S_t.

Ισχύουν:

$$\nabla u = \nabla^{(s)} u + \nabla^{(a)} u = u_{i,j}$$

$$\nabla^{(s)} u = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$\nabla^{(a)} u = \frac{1}{2}(\nabla u - (\nabla u)^T) = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})$$

Έστω οι παρακάτω συναρτήσεις με η έναν πραγματικό αριθμό όπως και στα προηγούμενα υποκεφάλαια:

$$u^* = u + \eta \delta u$$

$$\varepsilon^* = \varepsilon + \eta \delta \varepsilon$$

$$\sigma^* = \sigma + \eta \delta \sigma$$

$$\rightarrow I[u^*, \sigma^*, \varepsilon^*] = \frac{1}{2}\int_{\Omega} (\varepsilon_{ji} + \eta\delta\varepsilon_{ji})D_{ijkl}(\varepsilon_{kl} + \eta\delta\varepsilon_{kl})dV$$

$$- \int_{\Omega} (\sigma_{ji} + \eta\delta\sigma_{ji})[\nabla^{(s)}(u_i + \eta\delta u_i) - (\varepsilon_{ij} + \eta\delta\varepsilon_{ij})]\ dV$$

$$- \int_{\Omega} (u_j + \eta\delta u_j)b_{vi}dV - \int_{S_t} (u_j + \eta\delta u_j)\tilde{t}_j d\Gamma$$

$$- \int_{S_u} (t_j + \eta\delta t_j)[(u_j + \eta\delta u_j) - \tilde{u}_j]d\Gamma$$

$$\rightarrow \delta I = \frac{d}{d\eta}(I[u^*, \sigma^*, \varepsilon^*])_{\eta=0} == 0$$

$$\rightarrow \delta I = \frac{1}{2}\int_{\Omega} [\delta\varepsilon_{ji}D_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \varepsilon_{ji}D_{ijkl}\delta\varepsilon_{kl}]dV$$

$$- \int_{\Omega} [\delta\sigma_{ji}(\nabla^{(s)}u_i - \varepsilon_{ij}) + \sigma_{ji}(\nabla^{(s)}\delta u_i - \delta\varepsilon_{ij})]dV - \int_{\Omega} [\delta u_j b_{vi}]\ dV$$

$$- \int_{S_t} [\delta u_i \tilde{t}_i]\ d\Gamma - \int_{S_u} [\delta t_i(u_i - \tilde{u}_i) + t_i\delta u_i]\ d\Gamma$$

$$\rightarrow \int_{\Omega} [\sigma_{ji}\nabla^{(s)}\delta u_i]\ dV = -\int_{\Omega} [\delta u_j \nabla\sigma_{ij}]dV + \int_{S_t} [t_i\delta u_i]d\Gamma + \int_{S_u} [t_i\delta u_i]d\Gamma$$

$$\rightarrow \delta I = \int_{\Omega} [\delta\varepsilon_{ji}(D_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \sigma_{ij})]dV - \int_{\Omega} [\delta\sigma_{ji}(\nabla^{(s)}u_i - \varepsilon_{ij})]dV$$

$$- \int_{\Omega} [\sigma_{ji}\nabla^{(s)}\delta u_i]dV - \int_{\Omega} [\delta u_j b_{vi}]dV - \int_{S_t} [\delta u_i \tilde{t}_i]d\Gamma$$

$$- \int_{S_u} [\delta t_i(u_i - \tilde{u}_i) + t_i\delta u_i]d\Gamma$$

$$\delta I = \int_{\Omega} [\delta\varepsilon_{ji}(D_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \sigma_{ij})]dV - \int_{\Omega} [\delta\sigma_{ji}(\nabla^{(s)}u_i - \varepsilon_{ij})]dV + \int_{\Omega} [\delta u_j \nabla\sigma_{ij}]dV + \int_{\Omega} [\delta u_j b_{vi}]dV - \int_{S_t} [\delta u_i(t_i - \tilde{t}_i)]d\Gamma - \int_{S_u} [\delta t_i(u_i - \tilde{u}_i)]d\Gamma$$

$$\delta I = \int_{\Omega} [\delta\varepsilon_{ji}(D_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \sigma_{ij})]dV - \int_{\Omega} \{\delta\sigma_{ji}[\frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) - \varepsilon_{ij}]\}dV + \int_{\Omega} [\delta u_j \nabla\sigma_{ij}]dV + \int_{\Omega} [\delta u_j b_{vi}]dV - \int_{S_t} [\delta u_i(t_i - \tilde{t}_i)]d\Gamma - \int_{S_u} [\delta t_i(u_i - \tilde{u}_i)]d\Gamma$$

Χρησιμοποιώντας το θεμελιώδες λήμμα του λογισμού των μεταβολών προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\delta\varepsilon: (D_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \sigma_{ij}) = 0$$

$$\delta\sigma: \nabla^{(s)}u_i - \varepsilon_{ij} = 0 \rightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$$

$$\delta u: \nabla\sigma_{ij} + b_{vi} = 0 \rightarrow \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_{vi} = 0$$

5. Μεταβολικό Θεώρημα των Hellinger-Reisner

Στο συγκεκριμένο θεώρημα, το συναρτησιακό διατυπώνεται ως προς τις συναρτήσεις u, σ, t και ισχύει ότι (1):

$$I[u,\sigma,t] = -\frac{1}{2}\int_{\Omega} [\sigma^T D^{-1}\sigma\,]\,dV + \int_{\Omega} [\sigma^T \nabla^{(s)} u] dV - \int_{\Omega} [u^T b_v] dV - \int_{S_t} [u^T \tilde{t}] d\Gamma - \int_{S_u} [t^T (u - \tilde{u})] d\Gamma$$

Για το συγκεκριμένο συναρτησιακό τα u, σ, t είναι συναρτήσεις, οι οποίες είναι άγνωστες, ανήκουν στον χώρο Ω. Είναι γνωστό ότι στο σύνορο S_t είναι το σύνορο που εφαρμόζονται δυνάμεις $\tilde{t}$ και ισχύει ότι: $t = \tilde{t}$, δηλαδή ισχύουν οι συνθήκες Neumann. Το σύνορο S_u είναι το σύνορο που ισχύει ότι: $u = \tilde{u}$, δηλαδή ισχύουν οι συνθήκες Dirichlet. Το b_v είναι οι μαζικές δυνάμεις. Τα ολοκληρώματα εφαρμόζονται στο Ω και στα σύνορα S_u και S_t.

Έστω οι παρακάτω συναρτήσεις με η έναν πραγματικό αριθμό όπως και στα προηγούμενα υποκεφάλαια:

$$u^* = u + \eta\delta u$$

$$\sigma^* = \sigma + \eta\delta\sigma$$

$$\begin{aligned} I[u^*,\sigma^*] = -\frac{1}{2}\int_{\Omega} &[\,(\sigma_{ji} + \eta\delta\sigma_{ji}) D^{-1}_{ijkl} (\sigma_{kl} + \eta\delta\sigma_{kl})] dV \\ &+ \int_{\Omega} \{(\sigma_{ji} + \eta\delta\sigma_{ji})[\nabla^{(s)}(u_i + \eta\delta u_i)]\} dV - \int_{\Omega} [(u_j + \eta\delta u_j) b_{vi}] dV \\ &- \int_{S_t} [(u_j + \eta\delta u_j)\tilde{t}_j] d\Gamma - \int_{S_u} \{(t_j + \eta\delta t_j)[(u_j + \eta\delta u_j) - \tilde{u}_j]\} d\Gamma \end{aligned}$$

$$\rightarrow \delta I = \frac{d}{d\eta}(I[u^*,\sigma^*])_{\eta=0} == 0$$

$$\rightarrow \delta I = -\frac{1}{2}\int_{\Omega} [\delta\sigma_{ji} D_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} + \sigma_{ji} D_{ijkl}^{-1} \delta\sigma_{kl}] dV$$

$$+ \int_{\Omega} [\delta\sigma_{ji}(\nabla^{(s)} u_i) + \sigma_{ji}(\nabla^{(s)} \delta u_i)] dV - \int_{\Omega} [\delta u_j b_{vi}] dV$$

$$- \int_{S_t} [\delta u_i \tilde{t}_i] d\Gamma - \int_{S_u} [\delta t_i (u_i - \tilde{u}_i) + t_i \delta u_i] d\Gamma$$

$$\rightarrow \int_{\Omega} [\sigma_{ji} \nabla^{(s)} \delta u_i]\, dV = -\int_{\Omega} [\delta u_j \nabla \sigma_{ij}] dV + \int_{S_t} [t_i \delta u_i] d\Gamma + \int_{S_u} [t_i \delta u_i] d\Gamma$$

$$\rightarrow \delta I = \int_{\Omega} [\delta\sigma_{ji}(D_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} - \nabla^{(s)} u_i)] dV + \int_{\Omega} [\sigma_{ji}(\nabla^{(s)} \delta u_i)] dV - \int_{\Omega} [\delta u_j b_{vi}] dV$$

$$- \int_{S_t} [\delta u_i \tilde{t}_i] d\Gamma - \int_{S_u} [\delta t_i (u_i - \tilde{u}_i) + t_i \delta u_i] d\Gamma$$

$$\rightarrow \delta I[u, \sigma] = \int_{\Omega} [\delta\sigma_{ji}(D_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} - \nabla^{(s)} u_i)] dV - \int_{\Omega} [\delta u_j \nabla \sigma_{ij}] dV - \int_{\Omega} [\delta u_j b_{vi}] dV$$

$$- \int_{S_t} [\delta u_i (t_i - \tilde{t}_i)] d\Gamma - \int_{S_u} [\delta t_i (u_i - \tilde{u}_i)] d\Gamma$$

Χρησιμοποιώντας το θεμελιώδες λήμμα του λογισμού των μεταβολών προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\delta\sigma: D_{ijkl}^{-1}\sigma_{kl} - \nabla^{(s)}u_i = 0 \rightarrow \sigma_{ij} = \frac{1}{2}D_{ijkl}(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k})$$

$$\delta u: \nabla\sigma_{ij} + b_{vi} = 0 \rightarrow \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_{vi} = 0$$

6. Μικτά προβλήματα στην Δυναμική

Με βάση την εργασία των Dargush και Darall (2) για την ελαστοδυναμική χρησιμοποιώντας την αρχή του Hamilton, καταλήγουν σε ένα συναρτησιακό $I = K - V$, όπου K αντιπροσωπεύει την κινητική και το V την δυναμική. Το συναρτησιακό I είναι το εξής:

$$I = \int_{\Omega}^{\square} \int_0^T [\frac{1}{2}\dot{u}_i(t)\rho\dot{u}_i(t) - \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}(t)D_{ijkl}\varepsilon_{kl}(t)]\, dtdV + \int_{\Omega}^{\square} \int_0^T [u_i(t)\bar{f}_j(t)]\, dt\, dV + \int_{S}^{\square} \int_0^T [u_i(t)\bar{f}_i(t)]\, dt\, d\Gamma$$

Όπου τα δυο τελευταία ολοκληρώματα δίνουν την συμβολή των μαζικών δυνάμεων στο σώμα Ω και των εφαρμοζόμενων τάσεων στο σύνορο S.

Κάνοντας τους κατάλληλους μετασχηματισμούς οι Dargush και Darall (2) κατέληξαν στο παρακάτω συναρτησιακό:

$$I = \int_{\Omega}^{\square} \int_0^T [\frac{1}{2}\dot{u}_i(t)\rho\dot{u}_i(t) - \frac{1}{2}\dot{\Sigma}_{ij}(t)D^{-1}{}_{ijkl}\dot{\Sigma}_{kl}(t) + \Sigma_{ij}(t)\varepsilon_{ij}(t)]\, dtdV + \int_{\Omega}^{\square} \int_0^T [u_i(t)\bar{f}_j(t)]\, dt\, dV + \int_{S}^{\square} \int_0^T [u_i(t)\bar{f}_i(t)]\, dt\, d\Gamma$$

Όπου το Σ_{ij} αντιπροσωπεύει την ώθηση των τάσεων, δηλαδή

$$\Sigma_{ij}(t) = \int_0^T \sigma_{ij}(t)\, dt$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέρη λαμβάνονται οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\rho\ddot{u}_i - \frac{1}{2}(\dot{\Sigma}_{ij,j} + \dot{\Sigma}_{ji,i}) - \bar{f}_i = 0$$

$$-D_{ijkl}^{-1}\ddot{\Sigma}_{kl} + \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) = 0$$

Όπως διατύπωσαν οι Dargush και Darall (2), χρησιμοποιώντας τις αρχές που εφαρμόστηκαν παραπάνω και έχοντας ως ανεξάρτητες μεταβλητές, τις μετατοπίσεις u_i και την ώθηση των ελαστικών τάσεων Σ_{ij}, μετατρέπονται τα εσωτερικά γινόμενα που εμφανίζονται στα παραπάνω συναρτησιακά σε συνελίξεις.

Ξεκινώντας από το συναρτησιακό I της ελαστοδυναμικής απέδειξαν ότι καλύπτει εξισώσεις όπως και τις αρχικές αλλά και συνοριακές συνθήκες του προβλήματος.

Το συναρτησιακό μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$
\begin{aligned}
I[u,\Sigma] = \int_{\Omega} &\left[\frac{1}{2}\rho\dot{u}_i * \dot{u}_i - \frac{1}{2}\dot{\Sigma}_{ij} * {D^{-1}}_{ijkl}\dot{\Sigma}_{kl}\right] dV \\
&+ \int_{\Omega} [\frac{1}{4}\left(\breve{\Sigma}_{ij} * \left(\breve{u}_{i,j} + \breve{u}_{j,i}\right) - \breve{u}_i * \left(\breve{\Sigma}_{ij,i} + \breve{\Sigma}_{ij,j}\right)\right] dV - \int_{\Omega} \left[\breve{u}_i * \breve{F}_i\right] dV \\
&- \frac{1}{2}\int_{S_t} \left[\breve{u}_i * \bar{\breve{T}}_i\right] d\Gamma + \frac{1}{2}\int_{S_u} \left[\breve{T}_i * \bar{\breve{u}}_i\right] d\Gamma
\end{aligned}
$$

Όπου Σ_{ij} είναι η ώθηση των ελαστικών τάσεων, F_j είναι η ώθηση των μαζικών δυνάμεων ενώ T_i είναι η ώθηση των τάσεων στο σύνορο που ισχύουν οι συνθήκες Neumann (S_t). Δεδομένες είναι οι συναρτήσεις $\bar{u}_i$ στο σύνορο S_u όπως και $\bar{T}$ στο σύνορο S_t. Για το σύνορο ισχύει ότι:

- $S_u \cup S_t = S$
- $S_u \cap S_t = \emptyset$

Δεν υπόκεινται σε μεταβολή οι μαζικές δυνάμεις καθώς και οι γνωστές συνοριακές συνθήκες.

Η πρώτη μεταβολή του συναρτησιακού γράφεται ως εξής:

$$
\begin{aligned}
\delta I[u,\Sigma] = \int_{\Omega} &\left[\rho\delta\dot{u}_i * \dot{u}_i - \delta\dot{\Sigma}_{ij} * D^{-1}_{ijkl}\dot{\Sigma}_{kl}\right] dV \\
&+ \int_{\Omega} \{\frac{1}{4}[\left(\delta\breve{\Sigma}_{ij} * \left(\breve{u}_{i,j} + \breve{u}_{j,i}\right) - \delta\breve{u}_i * \left(\breve{\Sigma}_{ij,j} + \breve{\Sigma}_{ji,i}\right) + (\delta\breve{u}_{i,j} + \delta\breve{u}_{j,i}\right) \\
&* \breve{\Sigma}_{ij} - \left(\delta\breve{\Sigma}_{ij,j} + \delta\breve{\Sigma}_{ji,i}\right) * \breve{u}_i]\} dV - \int_{\Omega} \left[\delta\breve{u}_i * \breve{F}_j\right] dV \\
&- \frac{1}{2}\int_{S_t} \left[\delta\breve{u}_i * \bar{\breve{T}}_i\right] d\Gamma + \frac{1}{2}\int_{S_u} \left[\delta\breve{T}_i * \bar{\breve{u}}_i\right] d\Gamma
\end{aligned}
$$

Χρειάζεται να γίνει ολοκλήρωση κατά μέρη για όλους τους όρους, αλλά απαιτείται και χωρική ολοκλήρωση κατά μέρη στους όρους $(\delta\breve{u}_{i,j} + \delta\breve{u}_{j,i}) * \breve{\Sigma}_{ij}$ και $\left(\delta\breve{\Sigma}_{ij,j} + \delta\breve{\Sigma}_{ji,i}\right) * \breve{u}_i$. Γι' αυτήν την ολοκλήρωση θα χρησιμοποιηθεί ο ορισμός του Cauchy για τις επιφανειακές τάσεις, όπου $\dot{T}_i = \dot{\Sigma}_{ij} n_j$.

Για τον όρο $\frac{1}{2}(\boldsymbol{\delta\breve{u}_{i,j}} + \boldsymbol{\delta\breve{u}_{j,i}}) * \boldsymbol{\breve{\Sigma}_{ij}}$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left[\frac{1}{2}\left(\delta\breve{u}_{i,j} + \delta\breve{u}_{j,i}\right) * \breve{\Sigma}_{ij}\right] dV &= \int_{\Omega} [\delta\breve{u}_{k,j} * \breve{\Sigma}_{kj}] dV \\
&= \int_{\Omega} \left[\delta\breve{u}_k * \breve{\Sigma}_{kj}\right]_{,j} dV - \int_{\Omega} \left[\delta\breve{u}_k * \breve{\Sigma}_{kj,j}\right] dV \\
&= \int_{S} [\delta\breve{u}_k * \breve{\Sigma}_{kj} n_j]\, d\Gamma - \int_{\Omega} \left[\delta\breve{u}_k * \breve{\Sigma}_{kj,j}\right] dV \\
&= \int_{S} [\delta\breve{u}_k * \breve{T}_k] d\Gamma - \int_{\Omega} \left[\delta\breve{u}_k * \breve{\Sigma}_{kj,j}\right] dV \\
&= \int_{S} [\delta\breve{u}_k * \breve{T}_k] d\Gamma - \frac{1}{2}\int_{\Omega} [\delta\breve{u}_k * (\breve{\Sigma}_{ij,j} + \breve{\Sigma}_{ji,i})] dV
\end{aligned}$$

Για τον όρο $\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\delta\breve{\Sigma}_{ij,i}} + \boldsymbol{\delta\breve{\Sigma}_{ij,j}}\right) * \boldsymbol{\breve{u}_i}$ παρόμοια:

$$\int_{\Omega} [\frac{1}{2}\left(\delta\breve{\Sigma}_{ij,j} + \delta\breve{\Sigma}_{ji,i}\right) * \breve{u}_i]\, dV = \int_{S} [\delta\breve{T}_k * \breve{u}_k] d\Gamma - \frac{1}{2}\int_{\Omega} [\delta\breve{\Sigma}_{ij} * (\breve{u}_{i,j} + \breve{u}_{j,i})] dV$$

Επομένως, οι Dargush και Darall κάνοντας ολοκλήρωση κατά μέρη στον χώρο, η πρώτη μεταβολή του συναρτησιακού καταλήγει να είναι η εξής (2):

$$
\begin{aligned}
\delta I[u,\Sigma] = \int_{\Omega} & \left[\rho\delta\dot{u}_i * \dot{u}_i - \delta\dot{\Sigma}_{ij} * D^{-1}_{ijkl}\dot{\Sigma}_{kl}\right]dV \\
& + \int_{\Omega} [\frac{1}{2}\left(\delta\breve{\Sigma}_{ij} * \left(\breve{u}_{i,j} + \breve{u}_{j,i}\right) - \delta\breve{u}_i * \left(\breve{\Sigma}_{ij,j} + \breve{\Sigma}_{ji,i}\right)\right)\Big]dV \\
& + \frac{1}{2}\int_{S} [\delta\breve{u}_i * \breve{T}_i - \delta\breve{T}_i * \breve{u}_i]d\Gamma - \int_{\Omega}\left[\delta\breve{u}_i * \breve{F}_j\right]dV \\
& - \frac{1}{2}\int_{S_t}\left[\delta\breve{u}_i * \bar{\bar{T}}_i\right]d\Gamma + \frac{1}{2}\int_{S_u}\left[\delta\breve{T}_i * \bar{\bar{u}}_i\right] d\Gamma
\end{aligned}
$$

Στην συνέχεια πραγματοποιούνται οι χρονικές παράγωγοι κατά μέρη, ενώ υπολογίζονται και συνελίξεις των ημιπαραγώγων με τον παρακάτω τρόπο:

$$
(\breve{u} * \breve{v})(t) = (u * \dot{v})(t) + u(t)v(0)
$$

Η πρώτη μεταβολή του συναρτησιακού καταλήγει ως εξής:

$$
\begin{aligned}
\delta I = \int_{\Omega} & [\rho\delta u_i * \ddot{u}_i + \rho\delta u_i(T)\dot{u}_i(0) - \rho\delta u_i(0)\dot{u}_i(T)]dV \\
& - \int_{\Omega} \left[\delta\Sigma_{ij} * D_{ijkl}^{-1}\ddot{\Sigma}_{kl} + \delta\Sigma_{ij}(T) * D_{ijkl}^{-1}\dot{\Sigma}_{kl}(0) - \delta\Sigma_{ij}(0) \right. \\
& \left. * D_{ijkl}^{-1}\dot{\Sigma}_{kl}(T)\right] dV + \frac{1}{2}\int_{\Omega} [\delta\Sigma_{ij} * (\dot{u}_{j,i} + \dot{u}_{i,j}) + \delta\Sigma_{ij}(T)(\dot{u}_{i,j}(0) \\
& + \dot{u}_{j,i}(0)) - \delta u_i * (\dot{\Sigma}_{ij,j} + \dot{\Sigma}_{ji,i}) - \delta u_i(T)(\dot{\Sigma}_{ij,j}(0) + \dot{\Sigma}_{ji,i}(0))]dV \\
& + \frac{1}{2}\int_{S} [\delta u_i * \dot{T}_i + \delta u_i(T)T_i(0) - \delta T_i * \dot{u}_i + \delta T_i(T)u_i(0)]d\Gamma \\
& - \int_{\Omega} \left[\delta u_i * \bar{f}_j + \delta u_i(T)\bar{f}_j(0)\right]dV - \frac{1}{2}\int_{S_t} [\delta u_i * \bar{T}_i + \delta u_i(T)\bar{T}_i(0)]d\Gamma \\
& + \frac{1}{2}\int_{S_u} [\delta T_i * \bar{u}_i + \delta T_i(T)\bar{u}_i(0)]d\Gamma = 0
\end{aligned}
$$

Από το παραπάνω συναρτησιακό λαμβάνονται οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\delta u_i: \rho\ddot{u}_i - \frac{1}{2}\left(\dot{\Sigma}_{ji,i} + \dot{\Sigma}_{ij,j}\right) - \bar{f}_i = 0$$

$$\delta\Sigma_{ij}: - D_{ijkl}^{-1}\ddot{\Sigma}_{kl} + \frac{1}{2}\left(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}\right) = 0$$

Ενώ ικανοποιούνται και οι φυσικές και ουσιώδεις συνοριακές συνθήκες:

$$t_i = \bar{t}_i$$

$$u_i = \bar{u}_i$$

Για τις αρχικές συνθήκες ισχύει:

$$\delta u_i(T){:}\ \rho \dot{u}_i(0) - \frac{1}{2}\Big(\Sigma_{ij,j}(0) + \Sigma_{ji,i}(0)\Big) - \bar{f}_i(0) = 0$$

$$\delta \Sigma_{ij}(T){:}\ - D^{-1}_{ijkl}\dot{\Sigma}_{kl}(0)\ + \frac{1}{2}\big(u_{i,j}(0) + u_{j,i}(0)\big) = 0$$

Και οι αρχικές συνθήκες στο σύνορο είναι

$$T_i(0) = \bar{T}_i(0)$$

$$u_i(0) = \bar{u}_i(0)$$

6.1. Χωρική Διακριτοποίηση της ασθενούς μορφής

Στην εργασία τους οι Dargush και Darall (2) πραγματοποίησαν ολοκλήρωση στον χώρο για έναν τυχαίο τρίκομβο τριγωνικό στοιχείο στο χωρίο x-y. Τα ολοκληρώματα σε κάθε στοιχείο μετατρέπονται στις παρακάτω μορφές:

$$\int \delta\dot{u}_i * \rho\dot{u}_i dV = \delta\dot{u}^T * \ M\dot{u}$$

$$\int \delta\dot{\Sigma}_{ij} * D^{-1}_{ijkl}\dot{\Sigma}_{kl}\, dV = \delta\dot{\Sigma}^T * D^{-1}\dot{\Sigma}$$

$$\int [\frac{1}{2}\left(\delta\breve{\Sigma}_{ij} * \left(\breve{u}_{i,j} + \breve{u}_{j,i}\right) + \left(\delta\breve{u}_{i,j} + \delta\breve{u}_{j,i}\right) * \breve{\Sigma}_{ij}\right]dV = \delta\breve{\Sigma}^T * B\breve{u} \ + \delta\breve{u}^T B^T * \breve{\Sigma}$$

Για ένα ισοτροπικό στερεό, οι πίνακες είναι οι παρακάτω:

$$M = \rho A b I_6/3$$

$$B = \frac{b}{2}\begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix}$$

Όπου x_i και y_i είναι οι συντεταγμένες του κόμβου i του τριγωνικού στοιχείου, A είναι το εμβαδόν του τριγωνικού στοιχείου, b είναι το πάχος και I_6 είναι ο μοναδιαίος πίνακας διαστάσεων 6 x 6.

Αντίστοιχα, για τον όρο των μαζικών δυνάμεων

$$\int \delta\breve{u}_i * \breve{F}_i dV = \delta\breve{u}^T * \breve{F}$$

Ενώ οι όροι των συνοριακών συνθηκών μπορούν να μετασχηματιστούν ως εξής:

$$\int \frac{1}{2}[\delta\breve{u}_i * (\breve{\bar{\bar{T}}}_i + \breve{T}_\imath)]\, d\Gamma = \frac{1}{2}\delta\breve{u}^T * (\breve{\bar{\bar{T}}} + \breve{T})$$

$$\int \frac{1}{2}[\delta\breve{T}_i * (\breve{\bar{\bar{u}}}_i - \breve{u}_\imath)]\, d\Gamma = \frac{1}{2}\delta\breve{T}^T * (\breve{\bar{\bar{u}}} - \breve{u})$$

Λόγω των συνοριακών συνθήκων στο σύνορο Γ, δηλαδή $\breve{T} = \bar{\breve{T}}$ στο Γ_t και $\breve{u} = \bar{\breve{u}}$ στο Γ_u, τα παραπάνω ολοκληρώματα γίνονται ως εξής:

$$\int \frac{1}{2} [\delta \breve{u}_i * (\bar{\breve{T}}_i + \breve{T}_i)] \, d\Gamma = \delta \breve{u}^T * \bar{\breve{T}}$$

$$\int \frac{1}{2} [\delta \breve{T}_i * (\bar{\breve{u}}_i - \breve{u}_i)] \, d\Gamma = 0$$

Οι Dargush και Darall (2) αντικαθιστώντας τα χωρικά ολοκληρώματα με τις παραπάνω σχέσεις λαμβάνεται η παρακάτω εξίσωση για την πρώτη μεταβολή του συναρτησιακού στο κάθε στοιχείο:

$$\delta \dot{u}^T * \; M \dot{u} - \delta \dot{\Sigma}^T * D^{-1} \dot{\Sigma} + \delta \breve{\Sigma}^T * B \breve{u} \; + \delta \breve{u}^T B^T * \breve{\Sigma} - \delta \breve{u}^T * \breve{F} - \delta \breve{u}^T * \bar{\breve{T}} = 0$$

6.2. Χρονική διακριτοποίηση της ασθενούς μορφής

Για την χρονική διακριτοποίηση της ασθενούς μορφής του προβλήματος, με ανεξάρτητες μεταβλητές το πεδίο των μετατοπίσεων και της ώθησης από τις τάσεις, οι Dargush και Darall (2) χρησιμοποίησαν γραμμικές συναρτήσεις μορφής.

Οι συναρτήσεις μορφής είναι οι εξής για ένα χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq \Delta t$:

$$N_0(t) = 1 - \frac{t}{\Delta t}$$

$$N_1(t) = \frac{t}{\Delta t}$$

Το άθροισμα των συναρτήσεων μορφής για το κάθε στοιχείο ισούται με 1.

Για το πεδίο των μετατοπίσεων και για τις τάσεις λήφθηκαν οι παρακάτω εξισώσεις, ώστε να περαστούν στο μητρώο του κάθε στοιχείου οι τάσεις και οι μετατοπίσεις:

$$u(t) = u_0 N_0(t) + u_1 N_1(t)$$

$$\Sigma(t) = \Sigma_0 N_0(t) + \Sigma_1 N_1(t)$$

Αντίστοιχα, γίνεται για τις γνωστές συναρτήσεις των μαζικών δυνάμεων και των διανυσματικών τάσεων στο σύνορο Γ του χωρίου που μελετάται.

$$\bar{f}(t) = \bar{f}_0 N_0(t) + \bar{f}_1 N_1(t)$$

$$\bar{T}(t) = \bar{T}_0 N_0(t) + \bar{T}_1 N_1(t)$$

Μετά από αντικατάσταση έχουμε το παρακάτω σύστημα για την ασθενή μορφή:

$$\{\delta u_0^T \; \delta u_1^T \; \delta \Sigma_0^T \; \delta \Sigma_1^T\} \left(\frac{1}{2\Delta t} \begin{bmatrix} 2M & -2M & -\Delta t\, B^T & \Delta t\, B^T \\ -2M & 2M & -\Delta t\, B^T & \Delta t\, B^T \\ -\Delta t\, B & \Delta t\, B & -2\, D^{-1} & 2\, D^{-1} \\ \Delta t\, B & \Delta t\, B & 2\, D^{-1} & -2\, D^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \Sigma_0 \\ \Sigma_1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(F_1 - F_0) \\ \frac{1}{2}(F_1 + F_0) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) = 0$$

Τα $F_1 \; και \; F_0$ είναι το άθροισμα των μαζικών δυνάμεων και των διανυσματικών τάσεων στο σύνορο την χρονική στιγμή t=0 και t=Δt αντίστοιχα. Για το χρονικό βήμα από t=0 έως t=Δt είναι γνωστές οι συναρτήσεις u_0 και Σ_0 και είναι άγνωστες οι u_1 και Σ_1. Με βάση αυτά, τα δu_0 και $\delta \Sigma_0$ ισούνται με μηδέν, ενώ οι δu_1 και $\delta \Sigma_1$ είναι αυθαίρετες.

Με βάση τα παραπάνω λαμβάνεται το παρακάτω αλγεβρικό σύστημα για το κάθε στοιχείο:

$$\frac{4}{\Delta t^2} \begin{bmatrix} M & \frac{\Delta t}{2} B^T \\ \frac{\Delta t}{2} B & -D^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \Sigma_1 \end{Bmatrix} = \frac{2}{\Delta t} \begin{Bmatrix} F_1 + F_0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{4}{\Delta t^2} \begin{bmatrix} M & -\frac{\Delta t}{2} B^T \\ -\frac{\Delta t}{2} B & -D^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ \Sigma_0 \end{Bmatrix}$$

Επομένως, οι Dargush και Darall παρουσίασαν το παρακάτω σετ εξισώσεων (2):

$$\frac{4}{\Delta t^2} (M\, u_1 \; + \frac{\Delta t}{2} B^T\, \Sigma_1 = \frac{2}{\Delta t} (F_1 + F_0) + \frac{4}{\Delta t^2} (M\, u_0 \; - \frac{\Delta t}{2} B^T\, \Sigma_0)$$

$$\frac{\Delta t}{2} B\, u_1 \; - D^{-1}\, \Sigma_1 = \; -\frac{\Delta t}{2} B\, u_0 \; - D^{-1} \Sigma_0$$

Επομένως, λαμβάνεται το παρακάτω γραμμικό σύστημα:

$$K_1^e\, u_1 = f_1^e$$

Πιο συγκεκριμένα, με βάση τις παραπάνω εξισώσεις τα K_1 και f_1 έχουμε:

$$K_1^e = \frac{4}{\Delta t^2} M + B^T D\, B$$

$$f_1^e = \frac{2}{\Delta t}(F_1 + F_0) - K_0^e\, u_0 - \frac{4}{\Delta t} B_0^T\, \Sigma_0$$

$$K_0^e = -\frac{4}{\Delta t^2} M + B^T D\, B$$

$$B_0^T = B^T(I_3)$$

Γενικεύοντας τις παραπάνω εξισώσεις για n βήματα γνωρίζοντας τις συναρτήσεις u και Σ την χρονική στιγμή t_{n-1} και αναζητώντας τις αντίστοιχες συναρτήσεις την χρονική στιγμή t_n με $\Delta t = t_{n-1} - t_n$.

$$K_1^e\, u_n = f_n^e$$

$$f_n^e = \frac{2}{\Delta t}(F_n + F_{n-1}) - K_0^e\, u_{n-1} - \frac{4}{\Delta t} B_0^T\, \Sigma_{n-1}$$

7. Συμπεράσματα

Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα της συνέλιξης και την κλασματική παράγωγο τάξης ½ γίνεται τροποποίηση της αρχής Hamilton και δίνεται η δυνατότητα να εφαρμοστεί σε προβλήματα ελαστοδυναμικής, προσπερνώντας τις δυσκολίες που αυτή έχει. Πιο συγκεκριμένα, όπως είδαμε και στις αντίστοιχες ενότητες ακολουθούνται οι παρακάτω διατυπώσεις:

Για την συνέλιξη:

$$[u, \delta u] = \int_0^T u(t)\delta u(t)\, dt = \int_0^T u(t)\delta u(T-t)\, dt$$

Για την κλασματική παράγωγο:

$$\breve{u}(t) = (D_{0+}^{1/2}u)(t) = \frac{d}{dt}\int_0^T \frac{1}{\Gamma(1/2)}\frac{u(t)}{(T-t)^{1/2}}dt$$

Σημαντικό ρόλο στην επίλυση του συναρτησιακού και στην εξαγωγή των αντιστοίχων σχέσεων έχει το θεμελιώδες λήμμα του λογισμού των μεταβολών, όπου για κάθε μεταβολική συνάρτηση δu που ανήκει σε ένα χωρίο Ω για χρονικό διάστημα από [0,T] για ένα απλό πρόβλημα εξάγεται η καταστατική σχέση.

Για παράδειγμα:

$$\int_{\Omega}\int_0^T \{[\rho\ddot{u}_i - f_i - \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}]\delta u\}dtdV = 0 \leftrightarrow \rho\ddot{u}_i - f_i - \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω εργαλεία εξάγονται οι σχέσεις για τα προβλήματα της ελαστοδυναμικής, τόσο στο μικτό πρόβλημα (ανεξάρτητες μεταβλητές u, σ, ε) όσο και στο απλό (ανεξάρτητη μεταβλητή το u). Ξεκινώντας από την γενική ασθενή μορφή του προβλήματος λαμβάνοντας υπόψη την κινητική ενέργεια του σώματος, την ενέργεια παραμόρφωσης, την ενέργεια που προκαλούν οι μαζικές δυνάμεις αλλά και οι εξωτερικές (πχ οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύνορο του υλικού σώματος) καταλήγουμε σε πιο αυστηρές διατυπώσεις του προβλήματος (καταστατική σχέση, κινηματική σχέση), ενώ πρέπει να εξάγονται οι σχέσεις για τις συνοριακές και αρχικές συνθήκες του προβλήματος μας. Όσον αφορά τις συνοριακές συνθήκες, μελετήθηκαν τρία είδη αυτών, οι ουσιώδεις (ή Dirichlet), οι φυσικές (ή Neumann) και οι μικτές (ή Robin).

Για την αριθμητική επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων προτιμάται η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων, με πληθώρα λογισμικών να έχουν αναπτυχθεί. Πραγματοποιείται χωρική και χρονική διακριτοποίηση της ασθενούς μορφής χρησιμοποιώντας συναρτήσεις μορφής, το άθροισμα των οποίων πρέπει να ισούται με 1 εντός του πεπερασμένου στοιχείου. Στην παρούσα εργασία παρουσιάστηκε η χωρική διακριτοποίηση για ένα τριγωνικό στοιχείο, προσπαθώντας να χτιστεί ένα μητρώο δυσκαμψίας K και ένα διάνυσμα f ώστε στο τέλος να λυθεί το γραμμικό σύστημα: $Ku = f$.

Βιβλιογραφία

1. **Taylor, Robert.** *FEAP-Finite Element Analysis Program.* Berkeley : s.n., 2011.

2. **Gary F. Dargush, Bradley T. Darrall , Jinkyu Kim , Georgios Apostolakis.** *Mixed convolved action principles in linear continuum dynamics.*

3. **Reddy, J. N.** *An Introduction to the Finite Element Method, 3rd Edition.* s.l. : McGraw-Hill, 2006.

4. **Ακριβής, Γεώργιος Δ.** *ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.* ΙΩΑΝΝΙΝΑ : s.n., 2008.

5. **Dargush, G. F.** Mixed convolved action for classical and fractional derivative dissipative dynamical systems. *Phys. Rev. E.* 2012.

6. **Manuel D. Ortigueira, J.A. Tenreiro Machado.** What is a fractional derivative? *Journal of Computational Physics.* 2015, 293.

7. **Reis, Mario.** Useful Mathematical Functions. *Fundamentals of Magnetism.* 2013.

8. **Tonti, Enzo.** On the variational formulation for linear initial value problems. 19 November 1971, σσ. 1-2.

9. **VASSILIOS K. KALPAKIDES, ANTONIOS CHARALAMBOPOULOS.** ON HAMILTON'S PRINCIPLE FOR DISCRETE AND CONTINUOUS SYSTEMS: A CONVOLVED ACTION PRINCIPLE. *REPORTS ON MATHEMATICAL PHYSICS.* 11 Decemer 2020, σσ. 1-7.

10. **A. M. Arthurs, M. E. Jones.** On Variational Principles for Linear Initial Value Problems . *JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS* . 1976, σ. 1.

11. **RANBIR S. SANDHU, KARL S. PISTER.** VARIATIONAL PRINCIPLES FOR BOUNDARY VALUE AND INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN CONTINUUM MECHANICS. *Solids Structures.* s.l. : Pergamon Press, 1971.

12. **Susanne C. Brenner, L. Ridgway Scott.** *The Mathematical Theory of Finite Element Methods, 3rd Esdition.* s.l. : J.E. Marsden, L. Sirovich,S.S. Antman.

13. **Chaskalovic, Joel.** *Mathematical and Numerical Methods for Partial Differential Equations.* s.l. : Claus Hillermeier, Jörg Schröder, Bernhard Weigand.

14. **Kim, Jinkyu.** Higher order temporal finite element methods through mixed formalisms. *Springerplus.* 3, 2014.

15. **Dargush, G. F.** *Phys. Rev. E* . 2012, 86.