

ΕΝΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΥΠΕΡΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

Ιάσωνας Τοψής

Μάρτης, 2012

Contents

1	Η ΟΜΑΔΑ $SU(5)$	7
1.1	ΑΝΑΓΚΗ ΕΝΟΠΟΙΗΣΗΣ	8
1.2	$SU(5)$ Η ΕΚΛΕΚΤΗ!	9
1.3	FERMION CONTENT.	10
1.4	$SU(5)$ REPRESENTATIONS.	13
1.5	CHARGE QUANTIZATION.	17
1.6	ANOMALY CANCELLATION.	19
1.7	GAUGE BOSONS.	20
2	ΑΥΘΟΡΜΗΤΟ ΣΠΑΣΙΜΟ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ	21
2.1	ΣΠΑΣΙΜΟ ΤΗΣ $SU(5)$	21
2.2	ΕΝΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΖΕΥΞΗΣ.	26
2.3	ΔΙΑΣΠΑΣΗ ΠΡΩΤΟΝΙΟΥ.	30
2.4	ΜΑΖΕΣ ΦΕΡΜΙΟΝΙΩΝ.	32
3	ΟΜΟΓΕΝΕΣ LORENTZ GROUP & SPINORS	39
3.1	ΟΜΟΓΕΝΕΣ LORENTZ GROUP, DIRAC SPINORS.	40
3.2	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ WEYL.	41
3.2.1	Αναπαράσταση Weyl και HLG.	42
3.2.2	Weyl σπίνορες.	43
3.2.3	Πίνακες Pauli.	48
4	WESS - ZUMINO MODEL	53
4.1	ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ WESS - ZUMINO	54
4.1.1	Lagrangian & SUSY transformations.	54
4.1.2	Λίγα μαθηματικά.	55
4.1.3	Invariance κάτω από SUSY transformations.	56
4.2	ΚΛΕΙΣΙΜΟ ΣΧΕΣΕΩΝ ΜΕΤΑΘΕΣΗΣ	58
4.2.1	Fierz rearrangement.	59
4.2.2	Commutation relations.	61
4.2.3	Προσθήκη όρων μάζας.	68

5	SUPER POINCARÉ GROUP, SUPERSPACE, SUPERFIELDS	71
5.1	SUPER POINCARÉ GROUP.	72
5.1.1	Ένα παράδειγμα από την $SU(2)$	72
5.1.2	SUSY generators.	73
5.1.3	Κλείσιμο της άλγεβρας.	76
5.2	SUPERSPACE.	78
5.2.1	Supertranslation.	79
5.2.2	SUSY generators.	81
5.3	SUPERFIELDS.	85
5.3.1	Covariant derivatives.	86
5.3.2	Chiral superfield.	89
5.3.3	Wess - Zumino.	93

GUT

Chapter 1

H O M A Δ A $SU(5)$

1.1 ΑΝΑΓΚΗ ΕΝΟΠΟΙΗΣΗΣ

Γιατί θέλουμε ενοποίηση; Η πρώτη απάντηση είναι γιατί πολύ απλά η ίδια η φύση το ζητάει! Αυτό φαίνεται πολύ καλά εάν ρίξει κανείς μια ματιά στο Standard Model. Μία θεωρία βαθμίδας (gauge theory) κατανοείται από κάποια ομάδα και τις αναπαραστάσεις στις οποίες ανήκουν τα σωματίδια της ύλης. Το SM λοιπόν έχει τα group $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$. Όσον αφορά στα σωματίδια για παράδειγμα τα αριστερόστροφα up και down quarks $\begin{pmatrix} u^a \\ d^a \end{pmatrix}_L$ ανήκουν σε μία doublet ως προς την $SU(2)$, έχουν από 3 χρώματα και το υπερφορτίο τους είναι $\frac{1}{2}Y = \frac{1}{6}$. Συμβολικά λοιπόν μπορούμε να γράψουμε εκφράζοντας το πώς μετασχηματίζεται κάθε πεδίο κάτω από την αντίστοιχη ομάδα $(\mathbf{3}, \mathbf{2}, 1/6)_L$. Αντίστοιχα το δεξιόστροφο up quark u_R^a είναι triplet κάτω από $SU(3)$, singlet κάτω από $SU(2)$ και έχει hypercharge $\frac{1}{2}Y = \frac{2}{3}$. Δηλαδή θα συμβολίσουμε $(\mathbf{3}, \mathbf{1}, 2/3)_R$. Συγκεντρώνοντας όλα τα σωματίδια (για 1 γεννιά) και γράφοντας όπως πάνω τις αναπαραστάσεις τους στο SM η εικόνα που θα έχουμε είναι η εξής (αντίστοιχα και για τις άλλες οικογένειες):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u^a \\ d^a \end{pmatrix}_L &\longrightarrow (\mathbf{3}, \mathbf{2}, 1/6)_L \\ u_R^a &\longrightarrow (\mathbf{3}, \mathbf{1}, 2/3)_R \\ d_R^a &\longrightarrow (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -1/3)_R \\ \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L &\longrightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1/2)_L \\ e_R &\longrightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1)_R \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

Όπως φαίνεται έχουμε $6 + 3 + 3 + 2 + 1 = 15$ πεδία συνολικά. Η εικόνα μιλάει από μόνη της. Σίγουρα αυτός που έφτιαξε το Σύμπαν δεν πέταξε ένα τέτοιο συνοθύλευμα περιεργων αναπαραστάσεων. Σίγουρα υπάρχει χώρος για μεγαλύτερη ενοποίηση. Όπως είναι γνωστό, τα σωστά αποτελέσματα και η σωστή φυσική, είναι πάντα και δείχνει πάντα όμορφη και απλή. Όμως τα πεδία αυτά που παρουσιάσαμε και υπάρχουν όλα και τα έχουμε μετρήσει με ακρίβεια στα διάφορα πειράματα. Πώς θα μπορούσε να μοιάζει και ποιά η ουσία μίας ενοποιημένης θεωρίας; Η ιδέα λοιπόν είναι ότι υπάρχει ένα group μεγαλύτερο από αυτό του SM, δηλαδή έστω:

$$G \supset SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1) \quad (1.1.2)$$

Το G ελπίζουμε να μπορεί να μαζέψει όλες τις παραπάνω αναπαραστάσεις σε μία, ή τουλάχιστον σε μία πιο ενοποιημένη μορφή. Επίσης η φυσική του G θα ισχύει σε μεγάλες ενέργειες και θα σπάει ψηλά στην ενεργειακή κλίμακα έτσι ώστε να δώσει το SM στις πιο χαμηλές ενέργειες. Ελπίζουμε λοιπόν μέσω των μποζονίων βαθμίδας του G (και προφανώς όχι αυτών της $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$) να επιτευχθεί κάποια σύζευξη των αναπαραστάσεων. Πριν όμως πάμε στο ψάξιμο του κατάλληλου group θα πρέπει να αναφέρουμε το εξής: Επειδή οι μετασχηματισμοί βαθμίδας μετατίθενται με την ομάδα Lorentz, τότε δε θα μπορούμε να μετασχηματίσουμε αριστερόστροφα σε δεξιόστροφα σωματίδια. Έτσι λοιπόν θα πρέπει να αλλάξουμε λίγο το συμβολισμό μας και να μετατρέψουμε όλα τα σωματίδια σε αριστερόστροφα, έτσι ώστε από εδώ και στο εξής να έχουμε να κάνουμε μόνο με left - handed particles. Όπως γνωρίζουμε από τη συζυγία φορτίου:

$$\psi^c = C\gamma^0\psi^* = i\gamma^2\psi^* \quad (1.1.3)$$

οπότε θα είναι:

$$(\psi_R)^c = (\psi^c)_L = \psi_L^c \quad (1.1.4)$$

Η εικόνα των αναπαραστάσεων των σωματιδίων μας λοιπόν κάτω από τις ομάδες του SM και με όλα

τα σωματίδια αριστερόστροφα, θα είναι:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} u^\alpha \\ d^\alpha \end{pmatrix}_L &\longrightarrow (\mathbf{3}, \mathbf{2}, 1/6) \\
 u_L^{\alpha c} &\longrightarrow (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}, -2/3) \\
 d_L^{\alpha c} &\longrightarrow (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}, 1/3) \\
 \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L &\longrightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1/2) \\
 e_L^c &\longrightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1)
 \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

Όπως φαίνεται εκεί όπου είχαμε δεξιόστροφα σωματίδια πήραμε τα αντισωματίδιά τους και στις αναπαράστασεις θεωρήσαμε την conjugate representation κάτω από το αντίστοιχο group. Επιπλέον δε γράφουμε την ελικότητα πλέον αφού όλα τα σωματίδια είναι αριστερόστροφα.

1.2 $SU(5)$ Η ΕΚΛΕΚΤΗ!

Επανερχόμαστε λοιπόν στο ζητούμενο. Ποιά θα είναι αυτή η μεγαλύτερη συμμετρία; Ας κοιτάξουμε το SM. Το μοντέλο $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ έχει $rank = 4$. Δηλαδή περιέχει 4 generators οι οποίοι διαγωνοποιούνται ταυτόχρονα. Αυτοί προφανώς είναι οι 2 generators της $SU(3)$ καθώς και ο γαννήτορας του ασθενούς *isospin* T_3 και ο γεννήτορας του υπερφορτίου Y . Το group G που ψάχνουμε λοιπόν θα πρέπει να έχει τουλάχιστον $rank = 4$. Άρα:

$$rank G \geq 4 \tag{1.2.1}$$

Πληθώρα επιλογών! Όμως θα πρέπει παράλληλα να κοιτάμε να μη χάσουμε σε απλότητα. Μία πρώτη γρήγορη σκέψη θα ήταν να θεωρήσουμε ένα group της μορφής:

$$SU(3) \otimes W \tag{1.2.2}$$

Αυτή η εκλογή είναι σε λάθος κατεύθυνση από την αρχή γιατί όλα τα groups αυτής της μορφής δεν μπορούν να περιγράψουν αδρόνια. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο γεννήτορας του ηλεκτρικού φορτίου που προκύπτει από αυτές τις ομάδες δε δέχεται κλασματικές τιμές. Για να περιγράψουμε πρωτόνια ή νετρόνια όμως χρειαζόμαστε κλασματικές τιμές για τα ηλεκτρικά φορτία των quarks. Άρα η επιλογή αυτή δε μας κάνει. Το επόμενο βήμα είναι να σκεφτούμε το εξής: Ας πάμε πρώτα να θεωρήσουμε όλα τα groups τα οποία έχουν $rank$ ακριβώς ίσο με 4. Από τη λίστα αυτή θα επιλέξουμε το group με το οποίο θα ασχοληθούμε. Οι ομάδες με $rank = 4$ είναι οι εξής:

$$[SU(2)]^4, [O(5)]^2, [SU(3)]^2, [G_2]^2, O(8), O(9), Sp(8), F_4, SU(5) \tag{1.2.3}$$

Οι 2 πρώτες ομάδες $[SU(2)]^4, [O(5)]^2$ δε μας κάνουν γιατί απλούστατα δεν περιέχουν ως υποομάδα τους την $SU(3)$. Όπως είπαμε εφόσον ψάχνουμε μεγαλύτερη συμμετρία δεν μπορεί σε καμία περίπτωση να μην περιέχεται κάποια από τις χαμηλότερες συμμετρίες. Θα πρέπει η ομάδα G να περιέχει τις ομάδες του SM. Όσον αφορά στην $[SU(3)]^2$, ούτε αυτή μπορεί να γίνει αποδεκτή αφού είναι της μορφής $SU(3) \times W$, οπότε και δεν μπορεί να περιγράψει αδρόνια, όπως εξηγήθηκε πιο πάνω. Για τις επόμενες 5 υποψήφιες ομάδες $[G_2]^2, O(8), O(9), Sp(8), F_4$, η απάντηση και πάλι είναι αρνητική. Ο λόγος έρχεται εάν ανατρέξουμε στην προηγούμενη παράγραφο και δούμε τις αναπαραστάσεις των σωματιδίων μας. Όπως βλέπουμε για τα up και down antiquarks έχουμε $u_L^c : (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}, -2/3)$ και $d_L^c : (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}, 1/3)$. Η αναπαράσταση των συγκεκριμένων σωματιδίων στην $SU(3)$ είναι μία $\mathbf{3}^*$. Το group το οποίο ψάχνουμε εμείς θα πρέπει προφανώς να δέχεται όλες τις αναπαραστάσεις που εμφανίζονται στο SM. Το πρόβλημα με τα groups που αναφέραμε λοιπόν είναι το γεγονός ότι κανένα από αυτά δε δέχεται μιγαδικές αναπαραστάσεις. Δηλαδή δεν μπορούμε να εκφράσουμε τα πεδία αυτά σε αυτές τις ομάδες. Άρα δε χρειάζεται περαιτέρω έρευνα. Καταλήγουμε έτσι στην τελευταία ομάδα. Την $SU(5)$. Πληροί όλα τα παραπάνω κριτήρια. Είναι η εκλεκτή. Υπενθυμίζουμε βέβαια το ότι όλη η διαδικασία που ακολουθήθηκε για την επιλογή της $SU(5)$ αφορούσε μόνο στις ομάδες εκείνες οι οποίες είχαν $rank = 4$. Προφανώς ομάδες με μεγαλύτερο βαθμό οι οποίες ικανοποιούν τις απαιτήσεις που παρουσιάσαμε παραπάνω είναι εξίσου αποδεκτές.

1.3 FERMION CONTENT.

Ήρθε λοιπόν η ώρα να πάμε και να εξετάσουμε λεπτομερώς την ομάδα $SU(5)$ και να δούμε εάν όντως μία τέτοια επιλογή είναι σωστή. Θα μελετήσουμε τις αναπαράστασεις της και θα ελέγξουμε εάν μπορούμε σε αυτές να βάλουμε τις αναπαράστασεις των σωματιδίων του SM. Όπως γνωρίζουμε λοιπόν η $SU(5)$ έχει $n^2 - 1 = 24$ γεννήτορες. Πιο αναλυτικά, οι γεννήτορες αυτοί έχουν αναπαράστασεις οι οποίες είναι 5×5 hermitian και traceless πίνακες, οι οποίοι δρουν πάνω στα 5 στοιχεία τα οποία συμβολίζουμε με ψ^μ , όπου $\mu = 1, 2, \dots, 5$. Τα 5 αυτά αντικείμενα συγκροτούν τη fundamental αναπαράσταση της $SU(5)$ την οποία συμβολίζουμε ως **5**. Κοιτάζουμε τώρα το περιεχόμενο των αναπαράστασεων των γεννητόρων της $SU(5)$ και προσπαθούμε να βρούμε το περιεχόμενο τους στις ομάδες του SM. Από τους 24 γεννήτορες λοιπόν οι $3^2 - 1 = 8$ θα έχουν τη μορφή $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, με A τους 3×3 hermitian πίνακες Gell - Mann της $SU(3)$. Θα υπάρχουν επίσης $2^2 - 1 = 3$ πίνακες της μορφής $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, με B τους 3×2 πίνακες Pauli της $SU(2)$. Όσον αφορά στη $U(1)$ ο αντίστοιχος γεννήτορας θα είναι ο 5×5 πίνακας:

$$\frac{1}{2}Y = \begin{pmatrix} -1/3 & & & & \\ & -1/3 & & & \\ & & -1/3 & & \\ & & & 1/2 & \\ & & & & 1/2 \end{pmatrix} \quad (1.3.1)$$

Όπως συμβολίσαμε κίτρινος αυτός είναι το γνωστό μας υπερφορτίο. Εκφράσαμε λοιπόν τους 12 γεννήτορες του SM σε γεννήτορες της $SU(5)$. Μας μένουν προφανώς άλλοι 12 γεννήτορες οι οποίοι όμως δεν ανήκουν στο SM. Αυτό που ψάχνουμε τώρα λοιπόν είναι να δούμε με ποιό τρόπο αναλύεται η fundamental representation της $SU(5)$ στις ομάδες $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$. Το ζήτημα αυτό έχει ιδιαίτερη βαρύτητα, καθώς όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, από τη στιγμή που θα υπολογίσουμε την ανάλυση της fundamental, τότε θα είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε την ανάλυση οποιασδήποτε άλλης αναπαράστασης του SM στις ομάδες του SM, καθώς κάθε αναπαράσταση προκύπτει από τη fundamental. Για να δουλέψουμε λοιπόν, μπορούμε να χωρίσουμε τους δείκτες μ ως εξής:

$$\mu = \{\alpha, i\}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad i = 4, 5 \quad (1.3.2)$$

Έτσι λοιπόν, με τον παραπάνω συμβολισμό, η $SU(3)$ δρα πάνω στο δείκτη α , ενώ η $SU(2)$ δρα πάνω στο δείκτη i του ψ . Η $U(1)$ προφανώς πάνω σε όλους τους δείκτες. Οπότε με τον παραπάνω διαχωρισμό τα 3 αντικείμενα ψ^α μετασχηματίζονται σαν μία 3 dim αναπαράσταση κάτω από την $SU(3)$ οπότε και μπορεί να είναι μία **3** ή **3***. Η επιλογή είναι δική μας. Ας επιλέξουμε λοιπόν ότι μετασχηματίζεται σαν **3**. Θα δούμε στη συνέχεια ότι με το δεδομένο πίνακα υπερφορτίου που έχουμε επιλέξει, αυτή είναι και η σωστή επιλογή. Τα 3 αντικείμενα ψ^α λοιπόν μετασχηματίζονται σαν **3** κάτω από την $SU(3)$. Κάτω από την $SU(2)$ προφανώς δε μετασχηματίζονται καθόλου, οπότε και κάθε ένα από τα 3 αντικείμενα αυτά ανήκει σε μία singlet αναπαράσταση **1**. Επιπλέον όσον αφορά στη $U(1)$, από τον πίνακα υπερφορτίου που έχουμε κατευθείαν μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι κάθε ένα από τα 3 αντικείμενα έχει υπερφορτίο $-1/3$. Συγκεντρώνοντας τα στοιχεία που αναφέραμε έχουμε ότι τα 3 πρώτα αντικείμενα ψ^α της fundamental representation ψ^μ αναλύονται στις ομάδες του SM $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ ως **(3, 1, -1/3)**. Όσον αφορά τώρα στα υπόλοιπα 2 στοιχεία της fundamental **5**, τα ψ^i , όπως φαίνεται με αντίστοιχο τρόπο, μετασχηματίζονται σαν singlet (δηλαδή **1**) κάτω από την $SU(3)$, σαν doublet (δηλαδή **2**) κάτω από την $SU(2)$ και τέλος έχουν υπερφορτίο $1/2$. Αντίστοιχα δηλαδή τα 2 στοιχεία ψ^i κάτω από τις συμμετρίες του SM μετασχηματίζονται ως **(1, 2, 1/2)**. Τι καταφέραμε μέσω της παραπάνω διαδικασίας; Το πιο σημαντικό βήμα. Μπορέσαμε να ενσωματώσουμε την $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ μέσα στην $SU(5)$, προσδιορίζοντας με ποιόν ακριβώς τρόπο αναλύεται η fundamental representation **5** της $SU(5)$ στις αναπαράστασεις της $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$. Συγκεκριμένα όπως είδαμε είναι:

$$\mathbf{5} \longrightarrow (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -1/3) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}, 1/2) \quad (1.3.3)$$

Κοιτάζουμε τις αναπαράστασεις των σωματιδίων του SM που έχουμε εξάγει στη σχέση (1.5). Συγκρίνουμε με τις αναπαράστασεις που βρήκαμε μόλις τώρα. Όπως βλέπουμε κανένα από τα σωματίδια

δεν ταιριάζει. Εάν όμως θεωρήσουμε την complex conjugate αναπαράσταση της $\mathbf{5}$, την $\mathbf{5}^*$, θα είναι:

$$\mathbf{5}^* \longrightarrow (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}, 1/3) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1/2) \quad (1.3.4)$$

Όπου εδώ όπως βλέπουμε κάτω από την $SU(2)$ η complex conjugate της $\mathbf{2}$, είναι η ίδια με τη $\mathbf{2}$, δηλαδή $\mathbf{2}^* = \mathbf{2}$. Αυτό φαίνεται και από τα αντίστοιχα *young tableaux*:

$$SU(2): \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \equiv \mathbf{1}, \quad \square = \mathbf{2}, \quad \text{οπότε } \mathbf{2}^* = \square \quad (1.3.5)$$

Κάτι τέτοιο όμως δε συμβαίνει για την $\mathbf{3}$ της $SU(3)$ όπου εκεί έχουμε:

$$SU(3): \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \equiv \mathbf{1}, \quad \square = \mathbf{3}, \quad \text{ενώ } \mathbf{3}^* = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \neq \mathbf{3} \quad (1.3.6)$$

Υπενθυμίζουμε εδώ ότι τα *young tableaux* μας δίνουν τη διάσταση μίας αναπαράστασης ανάλογα με το σε ποιά ομάδα ανήκει, καθώς και όπως θα δούμε στη συνέχεια είναι ιδιαίτερα χρήσιμα στον υπολογισμό άμεσου γινομένου αναπαράστασεων. Για να βρούμε το *young tableaux* της conjugate της \mathbf{n} αναπαράστασης (δηλαδή διάστασης \mathbf{n}), τότε υπολογίζουμε πρώτα τη singlet $\mathbf{1}$, βρίσκουμε το *tableaux* που εάν ενωθεί με αυτό της \mathbf{n} μας δίνει την $\mathbf{1}$ και το στρέφουμε 180° . Αυτό θα είναι το *tableaux* της \mathbf{n}^* . Επιστρέφοντας τώρα πίσω στην $\mathbf{5}^*$ της οποίας υπολογίσαμε την ανάλυση στο $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ και συγκρίνοντας με τις αναπαράστασεις των σωματιδίων του SM βλέπουμε ότι πλέον υπάρχει ταύτιση. Η ιδέα μας φαίνεται να δουλεύει! 5 από τα 15 πεδία που παρουσιάσαμε αρχικά φαίνεται να χωρούν μέσα σε μόνο 1 αναπαράσταση της $SU(5)$. Συγκεκριμένα τα πεδία που μπαίνουν στην $\mathbf{5}^*$ είναι τα $d_L^{ac}, \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$. Όχι μόνο λοιπόν καταφέραμε να υπολογίσουμε πώς αναλύονται η fundamental και η conjugate αναπαράστασεις $\mathbf{5}$ και $\mathbf{5}^*$ σε αναπαράστασεις του $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$, αλλά επιπλέον μπορέσαμε να ταυτοποιήσουμε 5 από τα 15 πεδία μας και να τα χωρέσουμε σε μία μόνο αναπαράσταση (την $\mathbf{5}^*$). Μας έχουμε μείνει λοιπόν 10 επιπλέον πεδία τα $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, u_L^{ac}, e_L^c$ με αναπαράστασεις στο $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ όπως υπολογίσαμε, τις:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L : (\mathbf{3}, \mathbf{2}, 1/6), \quad u_L^{ac} : (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -2/3), \quad e_L^c : (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1) \quad (1.3.7)$$

Είναι προφανές λοιπόν πως αντίστοιχα θα πορευτούμε στη συνέχεια. Ψάχνουμε κάποια άλλη αναπαράσταση μεγαλύτερης διάστασης που να ανήκει στην $SU(5)$ και να μπορεί να περιέχει τις αναπαράστασεις που μας έχουν μείνει. Το ιδανικό θα ήταν να μπορούσαμε να χωρέσουμε και τα 10 πεδία σε μία. Έχουμε 10 πεδία, οπότε και η διάσταση της αναπαράστασης αυτής θα πρέπει να είναι 10. Ανατρέχουμε στη θεωρία ομάδων. Οι αναπαράστασεις μίας ομάδας κατασκευάζονται με τη βοήθεια τανυστών για οποιαδήποτε διάσταση. Οι μη αναγωγίσιμες αναπαράστασεις που μας ενδιαφέρουν και συγκεκριμένα μίας ομάδας $SU(N)$, είναι traceless τανυστές με συγκεκριμένες συμμετρίες κάτω από την εναλλαγή των δεικτών τους. Από όλες τις περιπτώσεις ξεχωρίζουν γενικά οι αναπαράστασεις (τανυστές): ψ^i (όπως η ψ^μ που ήδη είδαμε), ψ^{ij} (αντισυμμετρική στην εναλλαγή των δεικτών), ψ^{ij} (συμμετρική), ψ_j^i (ή *adjoint representation*) και η ψ_k^{ij} (αντισυμμετρική στους πάνω δείκτες). Οι διαστάσεις τους δίνονται παρακάτω για μία ομάδα $SU(N)$ καθώς και γίνεται εφαρμογή για την $SU(5)$:

$$\begin{aligned} \psi^i &\longrightarrow N \xrightarrow{SU(5)} \mathbf{5} \quad (\text{fundamental}) \\ \psi^{ij}(\text{antis}) &\longrightarrow \frac{N(N-1)}{2} \xrightarrow{SU(5)} \mathbf{10} \quad (\text{antis}) \\ \psi^{ij}(\text{symm}) &\longrightarrow \frac{N(N+1)}{2} \xrightarrow{SU(5)} \mathbf{15} \quad (\text{symm}) \\ \psi_j^i &\longrightarrow N^2 - 1 \xrightarrow{SU(5)} \mathbf{24} \quad (\text{adjoint}) \\ \psi_k^{ij} &\longrightarrow \frac{1}{2}N^2(N-1) - N \xrightarrow{SU(5)} \mathbf{45} \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Κοιτάζοντας τα παραπάνω κανείς αντιλαμβάνεται ότι θα πρέπει κατευθείαν να πάμε να κοιτάσουμε την αντισυμμετρική $\mathbf{10}$. Έχει τη διάσταση που επιθυμούμε για να “αγκαλιάσει” όλα τα υπόλοιπα σωματίδια

μας. Πώς όμως αναλύεται αυτή στις αναπαραστάσεις του $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$; Η διαδικασία εδώ δεν είναι η ίδια με την περίπτωση της fundamental. Όμως όπως αναφέραμε πιο πάνω, από τη στιγμή που έχει υπολογιστεί η ανάλυση της fundamental τότε μπορούμε να βρούμε την ανάλυση οποιασδήποτε άλλης αναπαράστασης. Για το σκοπό αυτό ας μιλήσουμε λίγο με τη γλώσσα των ταυιστών. Εάν πάρουμε το ταυιστικό γινόμενο δύο fundamental αναπαραστάσεων, δηλαδή $\psi^i \phi^j$, τότε προκύπτει ο ταυιστής T^{ij} . Αυτός όπως φαίνεται από τον πίνακα αναπαραστάσεων που γράψαμε παραπάνω, μπορεί να αναλυθεί σε ευθύ άθροισμα 2 αναπαραστάσεων ψ^{ij} , μίας συμμετρικής και μίας αντισυμμετρικής (μίας **10** και μίας **15**). Δηλαδή:

$$\mathbf{5} \otimes \mathbf{5} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{15} \quad (1.3.9)$$

Όπως είδαμε παραπάνω η **10** είναι αντισυμμετρική και η **15** συμμετρική. Άρα λοιπόν για να βρούμε την ανάλυση της **10** σε αναπαραστάσεις της $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$, αφού γνωρίζουμε την ανάλυση της **5**, θα πρέπει να υπολογίσουμε το γινόμενο $\mathbf{5} \otimes \mathbf{5}$ και από αυτό να πάρουμε το αντισυμμετρικό κομμάτι. Αυτή θα είναι η **10**. Αυτό που θα μείνει θα είναι η **15**. Για τον υπολογισμό των γινομένων αναπαραστάσεων είναι όπως αναφέραμε χρήσιμα τα young tableaux που είδαμε παραπάνω. Είναι λοιπόν:

$$\mathbf{5} \longrightarrow (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -1/3) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}, 1/2) \quad (1.3.10)$$

όπως δείξαμε στην αρχή. Παίρνουμε το αντισυμμετρικό γινόμενο 2 fundamentals:

$$\begin{aligned} \mathbf{5} \otimes_A \mathbf{5} &= \left\{ (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -1/3) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}, 1/2) \right\} \otimes_A \left\{ (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -1/3) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}, 1/2) \right\} \\ &= \left\{ (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -1/3) \otimes_A (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -1/3) \right\} \oplus \left\{ (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -1/3) \otimes_A (\mathbf{1}, \mathbf{2}, 1/2) \right\} \oplus \\ &\quad \oplus \left\{ (\mathbf{1}, \mathbf{2}, 1/2) \otimes_A (\mathbf{1}, \mathbf{2}, 1/2) \right\} \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

Τα γινόμενα προφανώς είναι γινόμενα μεταξύ των αναπαραστάσεων της ίδιας ομάδας. Έτσι η παραπάνω παράσταση θα γίνει:

$$\begin{aligned} \mathbf{5} \otimes_A \mathbf{5} &= (\mathbf{3} \otimes_A \mathbf{3}, \mathbf{1} \otimes_A \mathbf{1}, -\frac{1}{3} \otimes_A -\frac{1}{3}) \oplus (\mathbf{3} \otimes_A \mathbf{1}, \mathbf{1} \otimes_A \mathbf{2}, -\frac{1}{3} \otimes_A \frac{1}{2}) \oplus \\ &\quad \oplus (\mathbf{1} \otimes_A \mathbf{1}, \mathbf{2} \otimes_A \mathbf{2}, \frac{1}{2} \otimes_A \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

Όσον αφορά στα υπερφορτία, αυτά απλώς τα προσθέτουμε, οπότε θα είναι:

$$-\frac{1}{3} \otimes_A -\frac{1}{3} = -\frac{2}{3}, \quad -\frac{1}{3} \otimes_A \frac{1}{2} = \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{2} \otimes_A \frac{1}{2} = 1 \quad (1.3.13)$$

Επίσης τα γινόμενα με singlet αναπαραστάσεις μένουν ίδια:

$$SU(2) : \quad \mathbf{1} \otimes_A \mathbf{1} = \mathbf{1}, \quad \mathbf{1} \otimes_A \mathbf{2} = \mathbf{2} \quad (1.3.14)$$

και

$$SU(3) : \quad \mathbf{3} \otimes_A \mathbf{1} = \mathbf{3}, \quad \mathbf{1} \otimes_A \mathbf{1} = \mathbf{1} \quad (1.3.15)$$

Μας έχουν μείνει λοιπόν 2 γινόμενα, 1 $SU(3)$ και 1 $SU(2)$, τα οποία υπολογίζονται με τη βοήθεια των young tableaux:

$$SU(3) : \quad \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} = \mathbf{6} \oplus \mathbf{3}^* \quad (1.3.16)$$

όπου αναγνωρίζουμε τις διαστάσεις των αναπαραστάσεων της $SU(3)$ ως την **6** και **3***. Όπως γνωρίζουμε όμως σε ένα young tableaux οι γραμμές δηλώνουν συμμετρικούς δείκτες (συμμετρικές αναπαραστάσεις), ενώ οι στήλες αντισυμμετρικούς. Οπότε:

$$\mathbf{3} \otimes_A \mathbf{3} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes_A \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} = \mathbf{3}^* \quad (1.3.17)$$

και αντίστοιχα:

$$\mathbf{3} \otimes_S \mathbf{3} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes_S \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline \end{array} = \mathbf{6} \quad (1.3.18)$$

Άρα για το ζητούμενο αντισυμμετρικό γινόμενο κρατάμε μόνο την $\mathbf{3}^*$. Αντίστοιχα εργαζόμαστε για το γινόμενο στην $SU(2)$:

$$SU(2) : \quad \mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \square \otimes \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \diagup a \\ \hline \end{array} = \mathbf{3} \oplus \mathbf{1} \quad (1.3.19)$$

οπότε:

$$\mathbf{2} \otimes_A \mathbf{2} = \square \otimes_A \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \diagup a \\ \hline \end{array} = \mathbf{1} \quad (1.3.20)$$

$$\mathbf{2} \otimes_S \mathbf{2} = \square \otimes_S \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline \end{array} = \mathbf{3} \quad (1.3.21)$$

και για το αντισυμμετρικό γινόμενο κρατάμε την $\mathbf{1}$. Έτσι εάν συγκεντρώσουμε τα αποτελέσματά μας θα είναι:

$$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, -1/3) \otimes_A (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -1/3) = (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}, -\frac{2}{3}) \quad (1.3.22)$$

$$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, -1/3) \otimes_A (\mathbf{1}, \mathbf{2}, 1/2) = (\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6}) \quad (1.3.23)$$

$$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, 1/2) \otimes_A (\mathbf{1}, \mathbf{2}, 1/2) = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1) \quad (1.3.24)$$

Η $\mathbf{10}$, η οποία όπως δείξαμε είναι το αντισυμμετρικό γινόμενο των 2 fundamentals της $SU(5)$, αναλύεται σε αναπαράστασεις του $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ ως:

$$\mathbf{10} = \mathbf{5} \otimes_A \mathbf{5} = (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}, -\frac{2}{3}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1) \quad (1.3.25)$$

Παρατηρούμε κατευθείαν από εδώ ότι και οι 3 αναπαράστασεις που εμφανίζονται αντιστοιχούν στα υπόλοιπα 10 πεδία του SM: $u_L^{\alpha c}$, $\begin{pmatrix} u^\alpha \\ d^\alpha \end{pmatrix}_L$ και e_L^c αντίστοιχα. Έχουμε δηλαδή πλέον καταφέρει να συμπεριλάβουμε όλα τα πεδία μας μέσα σε μόνο 2 αναπαράστασεις της $SU(5)$, τις $\mathbf{5}^*$ και $\mathbf{10}$. Η εικόνα των σωματιδίων μας είναι πλέον σαφώς καλύτερη. Ο αρχικός μας στόχος φαίνεται εδώ να στέφεται με απόλυτη επιτυχία. Εάν μάλιστα πάμε να συμπληρώσουμε τα στοιχεία των αναπαράστασεων στη “γλώσσα” των πεδίων του SM, τότε οι αναπαράστασεις μας θα είναι:

$$\mathbf{5}^* : \quad \psi^\mu = \begin{pmatrix} \psi^\alpha \\ \psi^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^{c1} \\ d^{c2} \\ d^{c3} \\ e \\ -\nu_e \end{pmatrix} \quad (1.3.26)$$

και

$$\mathbf{10} : \quad \psi_{\mu\nu} = \{\psi_{\alpha\beta}, \psi_{\alpha i}, \psi_{ij}\} = \begin{pmatrix} 0 & u^{c3} & -u^{c2} & u_1 & d_1 \\ -u^{c3} & 0 & u^{c1} & u_2 & d_2 \\ u^{c2} & -u^{c1} & 0 & u_3 & d_3 \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^c \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^c & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3.27)$$

Πολύ πιο όμορφη συλλογή, είναι αλήθεια! Όλα τα φερμιονία μας κατατάχθηκαν στην conjugate $\mathbf{5}^*$ και την αντισυμμετρική $\mathbf{10}$. Με την εισαγωγή και των υπόλοιπων φερμιονικών γενεών, κάθε μία από αυτές θα αντιστοιχηθεί σε μία $\mathbf{5}^* \oplus \mathbf{10}$ αναπαράσταση με αντίστοιχη μορφή.

1.4 $SU(5)$ REPRESENTATIONS.

Στο σημείο αυτό θα ήταν καλό να γίνει μία ανασκόπηση της τακτικής που εφαρμόσαμε στο SM και που εφαρμόζεται και εδώ, όσον αφορά στο ρόλο των αναπαράστασεων των σωματιδίων και της σημασίας τους από φυσική πλευρά. Στο Standard Model είχαμε τοποθετήσει τα φερμιονικά (τα “υλικά”) πεδία

μας στις *fundamental* ή *singlet* αναπαράστασεις των ομάδων του $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ ανάλογα με το εάν αυτά συμμετέχουν ή όχι στις αντίστοιχες των ομάδων αλληλεπιδράσεις (ισχυρές ή ηλεκτροσθενείς). Έτσι λοιπόν όπως είδαμε, τα λεπτόνια δε συμμετέχουν στις ισχυρές αλληλεπιδράσεις, οπότε και είναι singlets ως προς την $SU(3)$. Τα quarks συμμετέχουν κανονικά ευρισκόμενα σε μία από τις 3 καταστάσεις χρώματος, οπότε και τοποθετούνται σε triplets κάτω από την $SU(3)$. Τα αριστερόστροφα quarks και λεπτόνια είναι doublets κάτω από την $SU(2)$, ενώ το ίδιο δεν ισχύει για τα δεξιόστροφα, τα οποία είναι singlets. Τέλος όλα τα σωματίδιά μας έχουν ένα υπερφορτίο κάτω από τη $U(1)$ συμμετρία. Έτσι ακριβώς προέκυπτε ο πίνακας που εξήχθη στην αρχή του κεφαλαίου. Επιπλέον έχουμε τα αντισωματίδια. Αυτά τα τοποθετούμε στην *complex conjugate* αναπαράσταση της fundamental ή singlet, ανάλογα που τα έχουμε κατατάξει πιο πριν. Ακόμη, όσον αφορά στα πεδία βαθμίδας της θεωρίας μας, αυτά τοποθετούνται στην *adjoint* αναπαράσταση της κάθε ομάδας. Προχωρώντας, οι διάφορες αντιδράσεις μέσω συγκεκριμένων αλληλεπιδράσεων αντιστοιχούν σε μετακίνηση των σωματιδίων μέσα στην αναπαράσταση στην οποία “ζουν”, μέσω της δράσης των αντίστοιχων τελεστών, δηλαδή των αντίστοιχων μποζονίων βαθμίδας. Επιπλέον, συνδυασμοί των παραπάνω αναπαράστασεων, που σημαίνει ευθύ γινόμενο των αναπαράστασεων, σχηματίζουν αναπαράστασεις ανώτερης τάξης οι οποίες αντιστοιχούν σε σύνθετα σωματίδια, πχ μεσόνια κτλ. Έτσι λοιπόν πορευτήκαμε και στην περίπτωση της $SU(5)$. Βρήκαμε την fundamental **5**, είδαμε το περιεχόμενό της (την ανάλυσή της σε $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$) και είδαμε ότι τα γνωστά μας πεδία χωράνε *ακριβώς όλα* σε μία $\mathbf{5}^*$ και μία $\mathbf{10}$. Όπως και στο SM θα θέλουμε να τοποθετήσουμε τα μποζόνια βαθμίδας μας στην adjoint $\mathbf{24}$ (όπως δείξαμε πιο πάνω). Επιπλέον θα ήταν σωστό να πάμε να δούμε γινόμενα αναπαράστασεων των $\mathbf{5}, \mathbf{5}^*, \mathbf{10}$ αφού όπως καταλαβαίνει κανείς θα εμφανίζονται συχνά μιάς και τα σωματίδιά μας (οι παραπάνω αναπαράστασεις δηλαδή), θα αλληλεπιδρούν. Στην παράγραφο αυτή λοιπόν ασχολούμαστε με τον υπολογισμό αναπαράστασεων της $SU(5)$ μεγαλύτερης τάξης, καθώς και με την εύρεση της ανάλυσής τους στις αναπαράστασεις $SU(3) \otimes SU(2)$ (αφήνουμε προς στιγμήν τη $U(1)$ αφού όπως είπαμε τα υπερφορτία απλά αθροίζονται). Ξεκινάμε και γράφουμε ξανά τις ήδη γνωστές μας αναπαράστασεις και την ανάλυσή τους σε $SU(3) \otimes SU(2)$:

$$\boxed{\mathbf{5} \longrightarrow (\mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2})} \quad (1.4.1)$$

$$\boxed{\mathbf{5}^* \longrightarrow (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2})} \quad (1.4.2)$$

Ενώ με τη βοήθεια τανυστών βρήκαμε:

$$\mathbf{5} \otimes \mathbf{5} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{15}^* \quad (1.4.3)$$

με τη $\mathbf{10}$ αντισυμμετρική και τη $\mathbf{15}^*$ συμμετρική. Για τη ανάλυση σε $SU(3) \otimes SU(2)$ εκτελούμε τα γινόμενα:

$$\begin{aligned} \mathbf{5} \otimes \mathbf{5} &= \{(\mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2})\} \otimes \{(\mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2})\} \\ &= (\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2} \otimes \mathbf{2}) \\ &= (\mathbf{3}^* \oplus \mathbf{6}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1} \oplus \mathbf{3}) \\ &= \{(\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})\} \oplus \{(\mathbf{6}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3})\} \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

όπου χωρίσαμε το αντισυμμετρικό και συμμετρικό κομμάτι με βάση τα young tableaux που είδαμε πιο πάνω, οπότε:

$$\boxed{\mathbf{10} \longrightarrow (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})} \quad (1.4.5)$$

$$\boxed{\mathbf{15}^* \longrightarrow (\mathbf{6}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3})} \quad (1.4.6)$$

Κατευθείαν από αυτές μπορούμε να βρούμε τις conjugate τους, απλά θυμίζουμε ότι στην $SU(2)$: $\mathbf{2}^* = \mathbf{2}$. Οπότε:

$$\mathbf{5}^* \otimes \mathbf{5}^* = \mathbf{10}^* \oplus \mathbf{15} \quad (1.4.7)$$

όπου:

$$\boxed{\mathbf{10}^* \longrightarrow (\mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})} \quad (1.4.8)$$

$$\boxed{\mathbf{15} \longrightarrow (\mathbf{6}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3}^*)} \quad (1.4.9)$$

Επίσης μπορούμε να κοιτάξουμε το ευθύ γινόμενο της fundamental με την conjugate αυτής. Με χρήση ταυιστών θα είναι:

$$\mathbf{5} \otimes \mathbf{5}^* = \phi_i \eta^j = T_i^j \quad (1.4.10)$$

και μπορούμε να ξεχωρίσουμε από αυτήν μόνο ένα ίχνος T_i^i , οπότε:

$$\mathbf{5} \otimes \mathbf{5}^* = \mathbf{1} \oplus \mathbf{24} \quad (1.4.11)$$

Μας δίνεται λοιπόν η δυνατότητα να υπολογίσουμε την ανάλυση της adjoint αναπαράστασης:

$$\begin{aligned} \mathbf{5} \otimes \mathbf{5}^* &= \{(\mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2})\} \otimes \{(\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2})\} \\ &= (\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2} \otimes \mathbf{2}) \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

Όπως έχουμε υπολογίσει: $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3}$ (για την $SU(2)$), ενώ για το άλλο γινόμενο με χρήση των young tableaux:

$$SU(3) : \quad \mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline \end{array} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \quad (1.4.13)$$

οπότε λοιπόν θα πάρουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{5} \otimes \mathbf{5}^* &= (\mathbf{1} \oplus \mathbf{8}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3} \oplus \mathbf{1}) \\ &= \{(\mathbf{1}, \mathbf{1})\} \oplus \{(\mathbf{8}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})\} \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

Υπολογίσαμε συνεπώς την ανάλυση και της adjoint:

$$\boxed{\mathbf{24} \longrightarrow (\mathbf{8}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})} \quad (1.4.15)$$

Προχωρώντας τώρα παρακάτω, μπορούμε να πάμε και να μελετήσουμε το ευθύ γινόμενο των 2 αναπαράστασεων στις οποίες έχουμε τοποθετήσει τα σωματίδιά μας. Ξεκινώντας πάλι με χρήση ταυιστών:

$$\mathbf{5}^* \otimes \mathbf{10} = \phi_k \eta^{ij} = T_k^{ij} \quad (1.4.16)$$

Το μόνο που μπορούμε να κάνουμε πάλι, είναι να ξεχωρίσουμε το T_k^{ik} το οποίο αντιστοιχεί στην $\mathbf{5}$. Έτσι λοιπόν:

$$\mathbf{5}^* \otimes \mathbf{10} = \mathbf{5} \oplus \mathbf{45} \quad (1.4.17)$$

Και όπως πριν μπορούμε να βρούμε την ανάλυση της $\mathbf{45}$ εκτελώντας το γινόμενο:

$$\begin{aligned} \mathbf{5}^* \otimes \mathbf{10} &= \{(\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2})\} \otimes \{(\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})\} \\ &= (\mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2} \otimes \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}) \end{aligned} \quad (1.4.18)$$

Έχουμε ήδη υπολογίσει τα $\mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$ και $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3}$ στις $SU(3)$ και $SU(2)$ αντίστοιχα, ενώ για το 3ο ευθύ γινόμενο, είναι:

$$\begin{aligned} SU(3) : \quad \mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3}^* &= \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array} = \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline \end{array} \right\} \otimes \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array} \\ &= \begin{array}{|c|c|} \hline \square & b \\ \hline a & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline \square & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array} \\ &= \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline \square & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array} \\ &= \mathbf{6}^* \oplus \mathbf{3} \end{aligned} \quad (1.4.19)$$

όπου το 1ο young tableaux έχει διαγραφεί καθώς δε σέβεται τους αντίστοιχους κανόνες αφού έχει ακολουθία χαρακτήρων ba, δηλαδή ξεκινά από b, όπως και το 4ο το οποίο έχει 4 κουτάκια στη στήλη

του, ενώ μία αναπαράσταση της $SU(3)$ μπορεί να έχει μέχρι 3 (που είναι και η singlet). Επιπλέον στο 3ο young tableaux μπορούμε να διαγράψουμε την 1η στήλη και να μας μείνει 1 κουτάκι, που είναι η $\mathbf{3}$ όπως έχουμε δει. Έτσι λοιπόν η παράσταση θα γίνει:

$$\begin{aligned} \mathbf{5}^* \otimes \mathbf{10} &= (\mathbf{6}^* \oplus \mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1} \oplus \mathbf{8}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{1} \oplus \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}) \\ &= \{(\mathbf{6}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{8}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{3})\} \oplus \\ &\quad \oplus \{(\mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2})\} \end{aligned} \quad (1.4.20)$$

όπου στη 2η αγχύλη όπως φαίνεται ξεχωρίσαμε την $\mathbf{5}$ από το γινόμενο, οπότε η ανάλυση της $\mathbf{45}$ θα είναι:

$$\boxed{\mathbf{45} \longrightarrow (\mathbf{8}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{6}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2})} \quad (1.4.21)$$

Τέλος, μπορούμε να αναλύσουμε με την ίδια διαδικασία και το γινόμενο δύο $\mathbf{10}$ αναπαραστάσεων:

$$\mathbf{10} \otimes \mathbf{10} = \phi^{ij} \eta^{kl} = \phi^{ij} \epsilon_{mnhkl} \eta^{kl} = T_{mnh}^{ij} \quad (1.4.22)$$

Εδώ μπορούμε να εξάγουμε τις T_{mij}^{ij} η οποία αντιστοιχεί στην $\mathbf{5}^*$ και την T_{mnj}^{ij} που αντιστοιχεί στην $\mathbf{45}^*$ όπως μόλις είδαμε. Οπότε:

$$\mathbf{10} \otimes \mathbf{10} = \mathbf{5}^* \oplus \mathbf{45}^* \oplus \mathbf{50}^* \quad (1.4.23)$$

Η ανάλυση της $\mathbf{45}^*$ προκύπτει κατευθείαν από τον υπολογισμό της $\mathbf{45}$ που έγινε πιο πάνω, αρκεί κανείς να δει, ότι $\mathbf{8}^* = \mathbf{8}$ κάτω από την $SU(3)$ και $\mathbf{3}^* = \mathbf{3}$ κάτω από την $SU(2)$, σύμφωνα με τους κανόνες εύρεσης της conjugate από ένα young tableaux που δώσαμε πιο πριν. Έτσι λοιπόν θα είναι:

$$\boxed{\mathbf{45}^* \longrightarrow (\mathbf{8}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{6}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2})} \quad (1.4.24)$$

Κατά τα γνωστά από δω και πέρα εκτελούμε τα γινόμενα:

$$\begin{aligned} \mathbf{10} \otimes \mathbf{10} &= \{(\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})\} \otimes \{(\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})\} \\ &= (\mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}^*, \mathbf{2}) \oplus \\ &\quad \oplus (\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}, \mathbf{2} \otimes \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}) \end{aligned} \quad (1.4.25)$$

με όλα τα γινόμενα υπολογισμένα:

$$SU(3): \quad \mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3}^* = \mathbf{6}^* \oplus \mathbf{3}, \quad \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6} \oplus \mathbf{3}^*, \quad \mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \quad (1.4.26)$$

και

$$SU(2): \quad \mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \quad (1.4.27)$$

οπότε παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{10} \otimes \mathbf{10} &= (\mathbf{6}^* \oplus \mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1} \oplus \mathbf{8}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1} \oplus \mathbf{8}, \mathbf{2}) \oplus \\ &\quad \oplus (\mathbf{6} \oplus \mathbf{3}^*, \mathbf{1} \oplus \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}) \\ &= (\mathbf{6}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{8}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{8}, \mathbf{2}) \oplus \\ &\quad \oplus (\mathbf{6}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{6}, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus \\ &\quad \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}) \end{aligned} \quad (1.4.28)$$

Διαχωρίσουμε όπως και στα προηγούμενα τις $\mathbf{5}^*$ και $\mathbf{45}^*$:

$$\begin{aligned} \mathbf{10} \otimes \mathbf{10} &= \{(\mathbf{8}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{6}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2})\} \oplus \\ &\quad \oplus \{(\mathbf{8}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{6}, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{6}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})\} \oplus \\ &\quad \oplus \{(\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2})\} \end{aligned} \quad (1.4.29)$$

Η 1η γραμμή είναι η $\mathbf{45}^*$ και η 3η η $\mathbf{5}^*$, οπότε τελικώς βρέθηκε και η ανάλυση της $\mathbf{50}^*$ στις αναπαραστάσεις του $SU(3) \otimes SU(2)$:

$$\boxed{\mathbf{50}^* \longrightarrow (\mathbf{8}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{6}, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{6}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})} \quad (1.4.30)$$

1.5 CHARGE QUANTIZATION.

Μέχρι στιγμής λοιπόν έχουμε δει ποιό είναι το περιεχόμενο σε φερμιόνια της $SU(5)$ και έχουμε μελετήσει τις πιο χρήσιμες αναπαράστασεις της και την ανάλυσή τους στις αναπαράστασεις του $SU(3) \otimes SU(2)$. Όλα λοιπόν τα φερμιόνιά μας καταφέραμε να τα χωρέσουμε μέσα σε μόνο 2 αναπαράστασεις της $SU(5)$. Επόμενο μέλημα είναι να καταφέρουμε να βρούμε τι γίνεται και με τα μποζόνια (είδαμε πιο πριν όσον αφορά στο SM την τοποθέτηση των μποζονίων στην conjugate αναπαράσταση, οπότε κάτι ανάλογο αναμένεται να γίνει και εδώ). Πριν όμως προχωρήσουμε στην παραπάνω διαδικασία αξίζει να σταματήσουμε λίγο και να δούμε το πρώτο πολύ σημαντικό **φυσικό** αποτέλεσμα που κερδίζουμε με την ιδέα της ενοποίησης. Ένα από τα αναπάντητα ερωτήματα (ερώτημα στο οποίο ούτε το ίδιο το SM μπορούσε να δώσει απάντηση) είναι η χβάντωση του ηλεκτρικού φορτίου. Τα φορτία που αποδίδουμε στα quarks και γενικά στα σωματίδιά μας όλα προέρχονται μέσα απο την παρατήρηση και όχι σαν συνέπεια της θεωρίας. Γιατί λοιπόν το φορτίο είναι χβαντωμένο; Θα δούμε ότι άμεση συνέπεια της $SU(5)$ είναι ακριβώς αυτή η χβάντωση του ηλεκτρικού φορτίου. Τα quarks αποκτούν το σωστό χβαντωμένο ηλεκτρικό φορτίο και ως εφαρμογή θα επαληθεύσουμε το +1 φορτίο του πρωτονίου. Είναι όμως η $SU(5)$ η μοναδική θεωρία που μας δίνει εξήγηση για την χβάντωση του ηλεκτρικού φορτίου; Και ακόμη, γιατί το SM αδυνατεί να την εξηγήσει; Η απάντηση και στα 2 αυτά ερωτήματα έρχεται άμεσα με χρήση της θεωρίας ομάδων. Η δυναμική της $SU(5)$ πηγάζει από το γεγονός ότι το group αυτό είναι simple. Simple group καλείται οποιοδήποτε group δεν περιέχει ως υποομάδα τη $U(1)$. Η σημαντική ιδιότητα που έχουν τα *simple non Abel groups* είναι ότι οι ιδιοτιμές τους είναι διακριτές. Οι ιδιοτιμές που δέχεται η $U(1)$ είναι συνεχείς. Ο generator του ηλεκτρικού φορτίου είναι ένας προσθετικός χβαντικός αριθμός, οπότε και θα είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των διαγώνιων γεννητόρων του group. Όπως ήδη θυμόμαστε από το SM είναι:

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} \quad (1.5.1)$$

Εδώ ακριβώς φαίνεται και το πρόβλημα του SM, όπου εκεί ο $Y/2$ παίρνει συνεχείς τιμές και αναγκαζόμαστε εμείς να του ορίσουμε ποιές θα είναι αυτές. Δεν προκύπτουν άμεσα από τη θεωρία. Αντίθετα οι γεννήτορες του $SU(5)$ παίρνουν διακριτές τιμές και όπως θα δούμε το ηλεκτρικό φορτίο τελικά παίρνει διακριτές τιμές και έτσι εξηγείται σωστά η χβάντωση του ηλεκτρικού φορτίου. Βέβαια όπως μπορεί κανείς πολύ εύκολα να διαπιστώσει αυτό δεν είναι αποκλειστικό γνώρισμα της $SU(5)$, αλλά οποιοδήποτε unification gauge group είναι simple, οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα.

Ας πάμε λοιπόν τώρα να υπολογίσουμε το γεννήτορα του ηλεκτρικού φορτίου. Όπως αναφέραμε και πιο πάνω, αυτός, ως προσθετικός χβαντικός αριθμός, θα είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των διαγώνιων γεννητόρων της $SU(5)$. Η $SU(5)$ έχει $rank = 4$ που σημαίνει όπως είπαμε ότι έχει 4 διαγώνιους γεννήτορες. Αυτοί είναι οι:

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{\lambda_0}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{15}} \text{diag}(2, 2, 2, -3, -3), & \in U(1) \\ T_3 &= \frac{\lambda_3}{2} = \frac{1}{2} \text{diag}(0, 0, 0, 1, -1), & \in SU(2) \\ T_6 &= \frac{\lambda_6}{2} = \frac{1}{2} \text{diag}(1, -1, 0, 0, 0), & \in SU(3) \\ T_{11} &= \frac{\lambda_{11}}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} \text{diag}(1, 1, -2, 0, 0), & \in SU(3) \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

Όμως όπως γνωρίζουμε οι διαφορετικές καταστάσεις χρώματος ενός quark έχουν το ίδιο ηλεκτρικό φορτίο. Αυτό σημαίνει ότι ο Q μετατίθεται με τους generators της $SU(3)$. Άρα λοιπόν το Q θα είναι τελικά ένας γραμμικός συνδυασμός των υπόλοιπων generators της $U(1)$ και $SU(2)$. Θα είναι δηλαδή:

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} = T_3 + cT_0 \quad (1.5.3)$$

Όπως παρατηρούμε το $Y/2$ δεν είναι κάποιος γεννήτορας της $SU(5)$. Αυτό σημαίνει ότι δεν είναι κατάλληλα κανονικοποιημένος για είναι τέτοιος. Θα πρέπει όπως γνωρίζουμε να υπακούει την άλγεβρα της $SU(5)$:

$$\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right] = iC^{abc} \frac{\lambda^c}{2}, \quad \text{tr} \left(\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right) = 2\delta^{ab}, \quad a, b, c = 0, 1, \dots, 23 \quad (1.5.4)$$

Για τον υπολογισμό λοιπόν της σταθεράς c που εμφανίζεται πιο πάνω, θα πάρουμε τη *fundamental* $Y(\mathbf{5})/2$ και εξισώνοντας με cT_0 :

$$\frac{1}{2}Y(\mathbf{5}) = \text{diag}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = c\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{15}}\text{diag}(2, 2, 2, -3, -3) = cT_0 \quad (1.5.5)$$

και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} &= c\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{15}} \cdot 2 \\ c &= -\sqrt{\frac{5}{3}} \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

Έτσι λοιπόν πολύ ευκολα μπορέσαμε να υπολογίσουμε το φορτίο Q της *fundamental* $\mathbf{5}$ της $SU(5)$ το οποίο θα είναι:

$$\begin{aligned} Q &= T_3 + \frac{Y}{2} = \frac{1}{2}\text{diag}(0, 0, 0, 1, -1) + \text{diag}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ \mathbf{5}: \quad Q &= Q(\psi_i) = \text{diag}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0\right) = Q_i\delta_{ij} \end{aligned} \quad (1.5.7)$$

Άμεσα πλέον υπολογίζουμε το φορτίο της *conjugate* $\mathbf{5}^*$:

$$\mathbf{5}^*: \quad Q(\psi^i) = \text{diag}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1, 0\right) = -Q_i\delta_{ij} \quad (1.5.8)$$

Μπορούμε στο σημείο αυτό να κάνουμε έναν έλεγχο των αποτελεσμάτων μας. Η $\mathbf{5}^*$ όπως είδαμε αντιστοιχεί σε 5 φερμιονικά πεδία του SM:

$$\mathbf{5}^*: \quad \psi^\mu = \begin{pmatrix} \psi^\alpha \\ \psi^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^{c1} \\ d^{c2} \\ d^{c3} \\ e \\ -\nu_e \end{pmatrix} \quad (1.5.9)$$

και πράγματι βλέπουμε ότι σωστά τα 3 χρώματα του down antiquark παίρνουν φορτίο $1/3$, το ηλεκτρόνιο φορτίο -1 και το νεutrino παραμένει αφόρτιστο. Αντίστοιχα και με τα όσα έχουμε λεχθεί παραπάνω πλέον μπορούμε να βρούμε τα φορτία και των υπολοίπων αναπαραστάσεων. Συγκεκριμένα μας ενδιαφέρει η άλλη αναπαράσταση που περιέχει τα υπόλοιπα σωματίδιά μας, δηλαδή η $\mathbf{10}$, αλλά και όπως θα δούμε παρακάτω (και προαναφέραμε στην αρχή της παραγράφου αυτής) μας ενδιαφέρει και η *adjoint* $\mathbf{24}$ η οποία θα φιλοξενήσει τα μποζόνια της θεωρίας μας. Αντίστοιχα λοιπόν θα είναι:

$$\mathbf{10}: \quad Q(\psi_{ij}) = Q_i + Q_j \quad (1.5.10)$$

$$\mathbf{24}: \quad Q(\psi_i^j) = Q_i - Q_j \quad (1.5.11)$$

όπου αναφερόμαστε στο συμβολισμό στα διαγώνια στοιχεία των πινάκων φορτίου.

Πρόβλεψη φορτίου πρωτονίου: Όλα πλέον έχουν φανεί ξεκάθαρα όσον αφορά στην επιτυχία αυτή της $SU(5)$. Η χβάντωση του ηλεκτρικού φορτίου εξηγήθηκε με φυσικό τρόπο και μάλιστα πήραμε τις αναμενόμενες τιμές: Από την

$$\mathbf{5}: \quad (d_1, d_2, d_3, e^+, -\nu) \quad (1.5.12)$$

εάν εφαρμόσουμε τη συνθήκη το ίχνος του πίνακα φορτίων (της $\mathbf{5}$) να είναι $\text{tr}Q = 0$ (όπως άλλωστε πρέπει να υπακούουν όλοι οι γεννήτορες της $SU(5)$), θα πάρουμε:

$$\begin{aligned} \text{tr}Q &= 3Q_d + Q_{e^+} = 0 \\ Q_d &= -\frac{1}{3}Q_{e^+} \end{aligned} \quad (1.5.13)$$

Πήραμε δηλαδή αυτό που είπαμε από την αρχή. Το down quark έχει το $1/3$ του φορτίου του e . Και αυτό ακριβώς είναι όπως είπαμε και πιο πάνω συνέπεια του χρώματος. Τα πάντα λοιπόν βρίσκουν

φυσική ερμηνεία στο επίπεδο αυτο! Παραπέρα από τη σύνθεση του πρωτονίου, θα υπολογίσουμε το ηλεκτρικό του φορτίο:

$$\begin{aligned}
 p &= uud \\
 Q_p &= 2Q_u + Q_d \\
 &= 2(Q_d + 1) + Q_d \\
 &= 3\left(-\frac{1}{3}Q_{e^+}\right) + 2 \\
 Q_p &= +1
 \end{aligned} \tag{1.5.14}$$

Όπως είπαμε δηλαδή παίρνουμε το σωστό φορτίο για το πρωτόνιο και εξηγείται μέσα από τη θεωρία ο ακριβής λόγος για τον οποίο αυτό παίρνει τη συγκεκριμένη τιμή.

1.6 ANOMALY CANCELLATION.

Ένα άλλο επίσης πολύ σημαντικό πλεονέκτημα της $SU(5)$ είναι ότι είναι *renormalizable*. Η μεγάλη πληγή πολλών θεωριών εδώ γιατρεύεται και κάνει τη θεωρία αυτή ακόμη πιο ελκυστική. Ας πάμε όμως να το δείξουμε και αυτο το στοιχείο υπολογίζοντας την ανωμαλία της θεωρίας. Αυτή δίνεται από τον ακόλουθο τύπο για κάθε φερμιονική αναπαράσταση:

$$\frac{1}{2}A(R)d^{abc} = \text{tr}(\{T^a(R), T^b(R)\}, T^c(R)) \tag{1.6.1}$$

όπου $T^a(R)$ ένας πίνακας αναπαράστασης του R . Όμως αυτό που ισχύει εδώ είναι ότι η $A(R)$ είναι normalized σε μία από τις fundamental representations και ανεξάρτητη του R . Έτσι λοιπόν αρκεί να πάρουμε μία απλή αναπαράσταση και να δείξουμε ότι για φερμιόνια έχουμε αναίρεση των ανωμαλιών. Θα δουλέψουμε με τις $\mathbf{5}^*$ και $\mathbf{10}$ στην αναπαράσταση του φορτίου Q . Από αυτά που ειπώθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{5}^* : \quad Q(\psi^i) &= \text{diag}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1, 0\right) \\
 \text{tr}Q^3(\psi^i) &= 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + (-1)^3 = -\frac{8}{9}
 \end{aligned} \tag{1.6.2}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{10} : \quad Q(\psi_{ij}) &= Q_i + Q_j \\
 \text{tr}Q^3(\psi_{ij}) &= 3 \cdot \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)^3 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3} + 1\right)^3 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3} + 0\right)^3 + (1 - 0)^3 \\
 \text{tr}Q^3(\psi_{ij}) &= \frac{8}{9}
 \end{aligned} \tag{1.6.3}$$

Και παίρνοντας το λόγο των ανωμαλιών αυτών:

$$\frac{A(\mathbf{5}^*)}{A(\mathbf{10})} = \frac{\text{tr}Q^3(\psi^i)}{\text{tr}Q^3(\psi_{ij})} = \frac{-8/9}{8/9} = -1 \tag{1.6.4}$$

οπότε κατευθείαν παίρνουμε:

$$\boxed{A(\mathbf{5}^*) + A(\mathbf{10}) = 0} \tag{1.6.5}$$

δηλαδή οι ανωμαλίες μεταξύ τους αλληλοαναιρούνται για τα φερμιόνια! Αυτό σημαίνει ότι η θεωρία μας είναι renormalizable και μπορούμε με επανακανονικοποίηση να απορροφήσουμε όλους τους απειρισμούς. Μία τελευταία αλλά με πολύ μεγάλη βαρύτητα παρατήρηση εδώ έχει να κάνει με αυτό ακριβώς το αποτέλεσμα που πήραμε μόλις τώρα. Αφού λοιπόν είδαμε ότι οι ανωμαλίες των $\mathbf{5}^*$ και $\mathbf{10}$ αλληλοαναιρούνται, μπορούμε εδώ να σκεφτούμε περαιτέρω ενοποίηση! Θα ήταν πολύ ωραίο (και ακόμη πιο συμμετρικό) οι δύο αυτές αναπαραστάσεις των φερμιονίων μας να χωρούσαν μαζί σε μία και μοναδική αναπαράσταση. Αυτό προφανώς απαιτεί ένα group μεγαλύτερο της $SU(5)$ που θα χωράει τις παραπάνω αναπαραστάσεις. Τότε όπως μόλις δείξαμε πάλι δε θα υπάρχει πρόβλημα απειρισμών και η θεωρία θα είναι επίσης renormalizable. Η διαδικασία εξέτασης του group αυτού θα είναι όπως αναμένεται αντίστοιχη της διαδικασίας που παρουσιάζουμε εδώ. Τέτοιο group υπάρχει και είναι η ομάδα $SO(10)$.

1.7 GAUGE BOSONS.

Τώρα μπορούμε να περάσουμε στην εύρεση των μποζονίων της $SU(5)$. Θα πρέπει όπως πια είναι σαφές και από τη μελέτη των φερμιονίων, να περιέχονται μέσα στα μποζόνια αυτά όλα τα μποζόνια του SM. Βέβαια εκεί είχαμε συνολικά 12 μποζόνια, ενώ στην $SU(5)$ ο αριθμός τους όπως γνωρίζουμε θα είναι $n^2 - 1 = 5^2 - 1 = 24$. Άρα η θεωρία προβλέπει 12 νέα πεδία βαθμίδας. Όπως είπαμε τα μποζόνια αυτά αντιστοιχίζονται στην *adjoint* αναπαράσταση της ομάδας. Η διάσταση όπως βρήκαμε της *adjoint* αναπαράστασης της $SU(5)$ είναι 24. Περιμένουμε λοιπόν να χωρέσει όλα τα μποζόνια της θεωρίας μας. Όσον αφορά στο SM τα πεδία βαθμίδας που έχουμε εκεί είναι: 1 πεδίο B της $U(1)$ το οποίο μετασχηματίζεται ως singlet κάτω από τις $SU(3)$ και $SU(2)$, δηλαδή είναι $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$, 3 W μποζόνια των ασθενών αλληλεπιδράσεων της $SU(2)$, τα οποία μετασχηματίζονται ως triplets κάτω από $SU(2)$ και ως singlets κάτω από μετασχηματισμούς $SU(3)$, δηλαδή είναι $(\mathbf{1}, \mathbf{3})$ και τέλος 8 gluons G_β^α των ισχυρών αλληλεπιδράσεων της $SU(3)$, τα οποία θα μετασχηματίζονται σαν *8plets* κάτω από $SU(3)$ και σαν singlets κάτω από $SU(2)$. Επανερχόμενοι τώρα στην *adjoint* $\mathbf{24}$ αναπαράσταση της $SU(5)$ και κάνοντας χρήση των αποτελεσμάτων που βγάλαμε στην παράγραφο 1.4, παίρνουμε την ανάλυση της $\mathbf{24}$ στις αναπαράστασεις του SM:

$$\boxed{\mathbf{24} \longrightarrow (\mathbf{8}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})} \quad (1.7.1)$$

Κατευθείαν εδώ αναγνωρίζουμε τα πεδία του SM που περιγράψαμε πιο πάνω αλλά επίσης αναγνωρίζουμε και την ανάλυση των αναπαράστασεων των υπόλοιπων 12 πεδίων βαθμίδας της $SU(5)$. Όλα τα πεδία βαθμίδας μας βρίσκονται στην *adjoint* αναπαράσταση. Τιοθετώντας το συμβολισμό δεικτών που επεξηγήσαμε στην αρχή του κεφαλαίου, με τους δείκτες $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ και τους δείκτες $r, s = 4, 5$, μπορούμε να κάνουμε την αντιστοίχιση των πεδίων του SM και των νέων πεδίων βαθμίδας μας, εισάγοντας νέο συμβολισμό:

- $(\mathbf{1}, \mathbf{1}) \longrightarrow -\frac{1}{\sqrt{15}}A_\alpha^\alpha + \sqrt{\frac{3}{20}}A_r^r \longrightarrow$ το $U(1)$ πεδίο B
- $(\mathbf{1}, \mathbf{3}) \longrightarrow A_s^r \longrightarrow$ τα 3 W bosons με $W^\pm = \frac{1}{2}(W^1 \mp W^2)$
- $(\mathbf{8}, \mathbf{1}) \longrightarrow A_\beta^\alpha \longrightarrow$ τα 8 gluons G_β^α
- $(\mathbf{3}, \mathbf{2}) \longrightarrow A^r_\alpha \equiv (X_\alpha, Y_\alpha) \longrightarrow$ 6 νέα πεδία
- $(\mathbf{3}^*, \mathbf{2}) \longrightarrow A^\alpha_r \equiv \begin{pmatrix} X^\alpha \\ Y^\alpha \end{pmatrix} \longrightarrow$ 6 νέα πεδία

Επιπλέον θα μπορούσαμε με τον παραπάνω συμβολισμό να χωρέσουμε όλα τα πεδία βαθμίδας μας σε έναν πίνακα και να πάρουμε μία συγκντρωτική μορφή της αναπαράστασης αυτής ως εξής:

$$A = \sum_{\alpha=0}^{23} A^\alpha \frac{\lambda^\alpha}{2}$$

$$A = \begin{pmatrix} & & & X_1 & & Y_1 \\ & & & X_2 & & Y_2 \\ & & & X_3 & & Y_3 \\ X^1 & & & W^3/\sqrt{2} + 3B/\sqrt{30} & & W^+ \\ Y^1 & X^2 & X^3 & W^- & & -W^3/\sqrt{2} + 3B/\sqrt{30} \\ & Y^2 & Y^3 & & & \end{pmatrix} \quad (1.7.2)$$

όπου επίσης ανατρέχοντας στην παράγραφο 1.5 βλέπουμε ότι επιπλέον έχουμε υπολογίσει και τις ιδιοτιμές του φορτίου για την *adjoint* $\mathbf{24}$ της $SU(5)$ και έτσι λοιπόν για τα νέα πεδία X και Y που έχουν εισαχθεί τα αντίστοιχα ηλεκτρικά φορτία θα είναι:

$$Q_X = -\frac{4}{3}, \quad Q_Y = -\frac{1}{3} \quad (1.7.3)$$

Chapter 2

ΑΥΘΟΡΜΗΤΟ ΣΠΑΣΙΜΟ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

2.1 ΣΠΑΣΙΜΟ ΤΗΣ $SU(5)$.

Μέχρι στιγμής λοιπόν έχουμε καταφέρει να επιλέξουμε μία ομάδα που όπως αποδείχτηκε είναι ιδιαίτερα ελπιδοφόρα όσον αφορά στην ενοποίηση των αλληλεπιδράσεων. Είδαμε πώς στην $SU(5)$ μπορούμε να περιγράψουμε όλα τα φερμιονικά μας πεδία με μόνο 2 αναπαράστασεις. Είδαμε επίσης πως όλα τα μποζονικά μας πεδία χωράνε μέσα σε μία **24** αναπαράσταση. Τέλος φάνηκαν τα πρώτα δείγματα της δυναμικής της $SU(5)$, καθώς ξεφύγαμε από την εξάρτηση του group μας από την $U(1)$ και κερδίσαμε την εξήγηση της κβάντωσης του ηλεκτρικού φορτίου, ενώ δε χάνουμε σε renormalizability αφού όπως δείξαμε η θεωρία μας είναι επανακανονικοποιήσιμη. Τι μένει για να προχωρήσουμε στην ανάλυσή μας; Έχουμε διατυπώσει μία θεωρία συμμετρίας $SU(5)$. Μπορούμε να γράψουμε δηλαδή μία Lagrangian η οποία θα έχει τη συγκεκριμένη τοπική συμμετρία με τα σωματίδιά μας (μποζόνια και φερμιόνια) στις αναπαράστασεις που βρήκαμε παραπάνω. Υπάρχουν όμως τα εξής δύο προβλήματα. Το πρώτο είναι το αντίστοιχο πρόβλημα που είχαμε και όταν δημιουργούσαμε το SM: Η απόδοση μάζας στα σωματίδιά μας. Πράγματι η θεωρία μας (η Lagrangian) που θα πάμε να γράψουμε, αυτή τη στιγμή περιέχει μόνο κινητικούς όρους. Το δεύτερο ζήτημα που πρέπει να μας απασχολήσει είναι το γεγονός ότι όπως γνωρίζουμε στις ενέργειες του SM ισχύουν αυτά που προβλέπει το SM (μάζες σωματιδίων κλπ). Αυτά που περιγράφουμε εμείς βέβαια ισχύουν σε μία ενεργειακή κλίμακα τάξεις μεγέθους παραπάνω από το SM. Για να αποδειχθεί η ορθότητα των όσων λοιπόν περιγράφουμε θα πρέπει να μπορέσουμε να δείξουμε πώς η θεωρία μας κατεβαίνοντας σε ενεργειακή κλίμακα δίνει τελικά το SM και τις κατάλληλες μάζες στα σωματίδια του SM, τα οποία είναι και τα μόνα παρατηρήσιμα όπως είπαμε σε αυτές τις κλίμακες, καθώς τα νέα μας σωματίδια είναι πολύ βαριά. Η ιδέα είχε σκιαγραφηθεί στην αρχή του προηγούμενου κεφαλαίου και είναι παρόμοια με αυτή που υιοθετήσαμε στο SM. Απαιτούνται δηλαδή δύο στάδια εφαρμογής του μηχανισμού Higgs. Χρειαζόμαστε λοιπόν 2 πεδία Higgs. Το πρώτο πεδίο Higgs θα είναι η διαταραχή η οποία σπάει την $SU(5)$ συμμετρία πολύ ψηλά στην ενεργειακή κλίμακα και προσδίδει μάζες στα νέα πεδία μας και επίσης το σπάσιμο αυτό μας δίνει την ομάδα του $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$, με αναμενόμενη τιμή ως προς το κενό (VEV) έστω u_1 , ενώ το δεύτερο πεδίο Higgs είναι το Higgs το οποίο σπάει στην ενεργειακή κλίμακα του SM τη συμμετρία αυτή στην $SU(3) \otimes U(1)$, δίνοντας τις αντίστοιχες μάζες, με VEV u_2 . Σχηματικά:

$$SU(5) \xrightarrow{u_1} SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1) \xrightarrow{u_2} SU(3) \otimes U(1) \quad (2.1.1)$$

όπου όπως αναφέραμε θα είναι: $u_1 \gg u_2$ και $M_{X,Y} \gg M_{W,Z}$ όσον αφορά στα μποζόνια της θεωρίας στις δύο αυτές ενεργειακές κλίμακες. Αυτός βέβαια δεν είναι και ο μοναδικός τρόπος που μπορεί να γίνει το σπάσιμο της συμμετρίας από τη GUT κλίμακα προς τη SM κλίμακα, καθώς θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε Higgs και να πάμε σε άλλες ενδιάμεσες ομάδες πριν φτάσουμε στο group του SM. Η διαδικασία που γίνεται όμως το σπάσιμο σε κάθε περίπτωση είναι παρόμοια, οπότε εδώ θα παρουσιαστεί ο τρόπος που αναφέραμε παραπάνω. Χρειαζόμαστε όπως είπαμε 2 πεδία Higgs. Ας διαλέξουμε λοιπόν

και ας βάλουμε στο πρώτο σπάσιμο πεδία στην adjoint αναπαράσταση (24) όπου έχουμε τοποθετήσει τα μποζόνια μας, ενώ στο 2ο σπάσιμο θα τοποθετήσουμε πεδία στη διανυσματική (5) αναπαράσταση. Διαγραμματικά θα είναι:

$$SU(5) \xrightarrow{\langle H \rangle} SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1) \xrightarrow{\langle \Phi \rangle} SU(3) \otimes U(1) \quad (2.1.2)$$

όπου $H \in adjoint \mathbf{24} (H_j^i)$, $\Phi \in vector \mathbf{5} (\Phi_i)$. Θέλουμε λοιπόν να γράψουμε έναν όρο δυναμικού στη Lagrangian για τα πεδία H και Φ . Ο όρος δυναμικού $V(H, \Phi)$, για μία θεωρία ϕ^4 (όπως έχει αναλυθεί σε συζητήσεις περί της θεωρίας επανακανονικοποίησης, έχουμε δει ότι η θεωρία ϕ^4 είναι κατάλληλη θεωρία καθώς είναι η μόνη η οποία παραμένει επανακανονικοποιήσιμη μαζί βέβαια με την ϕ^3 , η οποία όμως δεν έχει τη συμμετρία $\phi \rightarrow -\phi$), θα περιέχει όρους των πεδίων μας H και Φ μέχρι το πολύ την 4η τάξη. Επιπλέον η απαίτηση της συμμετρίας $H \rightarrow -H$ και $\Phi \rightarrow -\Phi$ επιβάλλει την απόριψη όρων 1ης και 3ης τάξης ως προς H και Φ αντίστοιχα. Η μορφή λοιπόν που θα πάρει ο δυναμικός όρος της Lagrangian αναλλοίωτος κάτω από μία $SU(N)$ ομάδα, όταν αναπτύξουμε ως προς H και Φ θα είναι:

$$V(H, \Phi) = V(H) + V(\Phi) + \lambda_4 (tr H^2) \Phi^\dagger \Phi + \lambda_5 \Phi^\dagger (tr H^2) \Phi \quad (2.1.3)$$

όπου υπενθυμίζουμε ότι ο H είναι ένας hermitian traceless πίνακας αφαού ανήκει στην adjoint αναπαράσταση. Επίσης θα είναι:

$$V(H) = -m_1^2 tr H^2 + \lambda_1 (tr H^2)^2 + \lambda_2 tr H^4 \quad (2.1.4)$$

και

$$V(\Phi) = -m_2^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda_3 (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (2.1.5)$$

Παρακάτω λοιπόν θα παρουσιάσουμε το σπάσιμο της συμμετρίας στα 2 στάδια που παρουσιάσαμε. Συγκεκριμένα στο πρώτο στάδιο, το πεδίο Φ απουσιάζει οπότε θεωρούμε $\Phi = 0$ και ψάχνουμε την αναμενόμενη τιμή του H ως προς το κενό, δηλαδή την τιμή $\langle H \rangle \neq 0$ του H η οποία ελαχιστοποιεί το δυναμικό. Δηλαδή:

$$SU(5) \xrightarrow{\langle H \rangle} SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1), \quad \left. \frac{\partial V}{\partial H} \right|_{\substack{H=\langle H \rangle \neq 0 \\ \Phi=0}} = 0 \quad (2.1.6)$$

Έπειτα, περνώντας στο δεύτερο στάδιο, ψάχνουμε για βαθύτερα ελάχιστα σε μικρές πλέον αλλά όχι μηδενικές τιμές του Φ :

$$SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1) \xrightarrow{\langle \Phi \rangle} SU(3) \otimes U(1), \quad \left. \frac{\partial V}{\partial \Phi} \right|_{\Phi=\langle \Phi \rangle} = 0 \quad (2.1.7)$$

Ας πάμε λοιπόν να εξετάσουμε το 1ο στάδιο του αυθόρμητου σπασίματος συμμετρίας (Spontaneous Symmetry Breaking) που περιγράψαμε. Για $\Phi = 0$ θα είναι:

$$V(H, 0) = -m_1^2 tr H^2 + \lambda_1 (tr H^2)^2 + \lambda_2 tr H^4 \quad (2.1.8)$$

Ψάχνουμε τιμές $H = \langle H \rangle$ που να ελαχιστοποιούν το δυναμικό (βέβαια μη μηδενικές). Όπως δείχτηκε από τον L.F. Li μπορούμε εφαρμόζοντας ένα μοναδιακό μετασχηματισμό, να διαγωνοποιήσουμε το H , δηλαδή $U H U^{-1} = H_j^i = H_i \delta_j^i$, ενώ ο πίνακας H παραμένει άχνος ($\sum H_i = 0$). Οι εξισώσεις για την εύρεση του ελαχίστου του δυναμικού $\partial V / \partial H_i = 0$ μας δίνουν εξισώσεις 3ης τάξης ως προς τα διαγώνια στοιχεία του H , οι οποίες μπορούν να πάρουν μέχρι το πολύ 3 διαφορετικές τιμές. Έτσι λοιπόν για τιμές των coupling constants $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 > (-7/30)\lambda_2$, το δυναμικό ελαχιστοποιείται για 2 μόνον διαφορετικές τιμές των H_i και μπορούμε να τις ομαδοποιήσουμε:

$$\langle H \rangle = u_1 \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & -3 \\ & & & & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } u_1^2 = \frac{m_1^2}{60\lambda_1 + 14\lambda_2} \quad (2.1.9)$$

Το $H = \langle H \rangle = u_1 \text{diag}(2, 2, 2, -3, -3)$ είναι το κενό της θεωρίας μας στην GUT ενεργειακή κλίμακα. Τι κάνουμε λοιπόν έπειτα; Διαταράσσουμε το κενό της θεωρίας μας. Τοποθετώντας τα 24 πεδία διαταραχές γύρω από το κενό που επιλέξαμε παραπάνω, σε συμβολισμό αντίστοιχο με αυτόν που υιοθετήθηκε για την παρουσίαση της adjoint αναπαράστασης, θα έχουμε τώρα:

$$H' = H - \langle H \rangle = \begin{pmatrix} [H_8]^\alpha_\beta - 2H_0/\sqrt{30} & H_{X_1} & H_{Y_1} \\ H_{X_2} & H_{Y_2} \\ H_{X_3} & H_{Y_3} \\ H_{X_1}^\dagger & H_{X_2}^\dagger & H_{X_3}^\dagger & [H_3]_s^r + 3H_0/\sqrt{30} \\ H_{Y_1}^\dagger & H_{Y_2}^\dagger & H_{Y_3}^\dagger & \end{pmatrix} \quad (2.1.10)$$

Το φάσμα μάζας των πεδίων αυτών μπορεί να υπολογιστεί απευθείας μέσω της 2ης παραγώγου του δυναμικού στο σημείο $H = \langle H \rangle$. δηλαδή:

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial H^2} \right|_{H=\langle H \rangle} \longrightarrow \text{mass spectrum} \quad (2.1.11)$$

Τα πεδία H_{X_i}, H_{Y_i} είναι τα γνωστά μας would-be Goldstone bosons, τα οποία θα φαγωθούν όταν εκτελέσουμε μετασχηματισμό και μεταφερθούμε στη φυσική βαθμίδα (unitary gauge). Όσον αφορά στα υπόλοιπα πεδία της θεωρίας μας όπως είπαμε από τη 2η παράγωγο του δυναμικού θα πάρουμε τις τιμές που φαίνονται και στον πίνακα 2.1:

$$[H_8]^\alpha_\beta = 20\lambda_2 u_1^2, \quad [H_3]_s^r = 80\lambda_2 u_1^2, \quad H_0 = 4m_1^2 \quad (2.1.12)$$

Επιπλέον η εφαρμογή του μηχανισμού higgs θα προσδώσει μάζα και στα υπόλοιπα μποζονικά πεδία της θεωρίας μας στο συγκεκριμένο στάδιο, δηλαδή θα αποκτήσουν μάζα τα πεδία που βρίσκονται στη Φ καθώς και τα πεδία X και Y που βρίσκονται στο A_μ . Παρακάτω θα υπολογίσουμε ακριβώς τις μάζες τους. Όσον αφορά στις μάζες του Φ θυμούμαστε ότι αυτή είναι μία $\mathbf{5}$ αναπαράσταση, μπορούμε να χωρίσουμε τα 5 στοιχεία της λοιπόν σε μία triplet (δείκτης $\alpha = 1, 2, 3$) και μία doublet (δείκτης $r = 1, 2$) για προφανείς φυσικούς λόγους που έχουμε γίνει αντιληπτοί με την παραπάνω συζήτηση. Δηλαδή γράφουμε:

$$\Phi = (\Phi_1 \ \Phi_2 \ \Phi_3 \ \Phi_4 \ \Phi_5)^T = (\Phi_{t\alpha} \ \Phi_{dr})^T, \quad \alpha = 1, 2, 3, \ r = 1, 2 \quad (2.1.13)$$

Επίσης αξίζει εδώ να αναφέρουμε πως μπορεί μεν να θεωρήσαμε στο πρώτο αυτό σπάσιμο σε υψηλή ενεργειακή κλίμακα αμελητέα την παρουσία του πεδίου Φ , αυτό όμως δεν σημαίνει ότι δεν υπάρχει και δεν αποκτά κάποιο όρο μάζας. Από το δυναμικό $V(H, \Phi)$ που γράψαμε λοιπόν, παίρνουμε τους όρους μάζας για τα πεδία της Φ , δηλαδή τους όρους εκείνους οι οποίοι είναι τετραγωνικοί ως προς Φ , δηλαδή ανάλογοι του $\Phi^\dagger \Phi$. Αυτοί είναι οι:

$$V_{M_\Phi} = -m_2^2(\Phi^\dagger \Phi) + \lambda_4(\text{tr} H^2)(\Phi^\dagger \Phi) + \lambda_5 \Phi^\dagger H^2 \Phi \quad (2.1.14)$$

Για $H = \langle H \rangle$ λοιπόν όπως βλέπουμε θα είναι:

$$H^2 = u_1^2 \cdot \text{diag}(4, 4, 4, 9, 9) \rightarrow \text{tr} H^2 = 30u_1^2 \quad (2.1.15)$$

Οπότε οι όροι του δυναμικού θα γίνουν:

$$\Phi^\dagger \Phi = (\Phi_{t\alpha} \ \Phi_{dr})^\dagger \begin{pmatrix} \Phi_{t\alpha} \\ \Phi_{dr} \end{pmatrix} = \Phi_{t\alpha}^\dagger \Phi_{t\alpha} + \Phi_{dr}^\dagger \Phi_{dr} \quad (2.1.16)$$

και:

$$\Phi^\dagger H^2 \Phi = u_1^2 (\Phi_{t\alpha} \ \Phi_{dr})^\dagger \begin{pmatrix} 4 & & & & \\ & 4 & & & \\ & & 4 & & \\ & & & 9 & \\ & & & & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{t\alpha} \\ \Phi_{dr} \end{pmatrix} = 4\Phi_{t\alpha}^\dagger \Phi_{t\alpha} u_1^2 + 9\Phi_{dr}^\dagger \Phi_{dr} u_1^2 \quad (2.1.17)$$

Table 2.1: Φάσμα μάζας των βαθμωτών πεδίων της $SU(5)$, $H : \mathbf{24}$ και $\Phi : \mathbf{5}$. Τα άμαζα ($H_{X_\alpha}, H_{Y_\alpha}$) είναι τα γνωστά μας would-be Goldstone bosons.

<i>scalar fields</i>	$SU(3) \otimes SU(2)$	$[mass]^2$
$[H_8]_\beta^\alpha$	$(\mathbf{8}, \mathbf{1})$	$20\lambda_2 u_1^2$
$[H_3]_s^r$	$(\mathbf{1}, \mathbf{3})$	$80\lambda_2 u_1^2$
H_0	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})$	$4m_1^2$
$(H_{X_\alpha}, H_{Y_\alpha})$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2})$	0
$(H_{X_\alpha}^\dagger, H_{Y_\alpha}^\dagger)$	$(\mathbf{3}^*, \mathbf{2})$	0
$\Phi_{t\alpha}$	$(\mathbf{3}, \mathbf{1})$	$-m_2^2 + (30\lambda_4 + 4\lambda_3)u_1^2$
Φ_{dr}	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})$	$-m_2^2 + (30\lambda_4 + 9\lambda_3)u_1^2$

Από τα παραπάνω το δυναμικό των όρων μάζας παίρνει τη μορφή:

$$V_{M_\Phi} \Big|_{H=\langle H \rangle} = [-m_2^2 + (30\lambda_4 + 4\lambda_3)u_1^2] (\Phi_{t\alpha}^\dagger \Phi_{t\alpha}) + [-m_2^2 + (30\lambda_4 + 9\lambda_3)u_1^2] (\Phi_{dr}^\dagger \Phi_{dr}) \quad (2.1.18)$$

Όπως φωναρίζουμε οι όροι μπροστά από τους $\Phi^\dagger \Phi$ είναι το τετράγωνο των αντίστοιχων όρων μάζας, δηλαδή:

$$m_{\Phi_{t\alpha}}^2 = -m_2^2 + (30\lambda_4 + 4\lambda_3)u_1^2 \quad (2.1.19)$$

$$m_{\Phi_{dr}}^2 = -m_2^2 + (30\lambda_4 + 9\lambda_3)u_1^2 \quad (2.1.20)$$

Όσον αφορά τώρα στα μποζόνια της θεωρίας μας, παρατηρούμε ότι αφού το H ανήκει στην adjoint αναπαράσταση, μπορούμε να σχηματίσουμε συναλλοίωτη παράγωγο, η οποία θα είναι, σύμφωνα με τη γνωστή από το SM συνταγή:

$$\begin{aligned} D_\mu H &= \partial_\mu H + ig[A_\mu, H] \xrightarrow{H'=\langle H \rangle} \\ &= \partial_\mu(H' + \langle H \rangle) + ig[A_\mu, H' + \langle H \rangle] \\ &= \partial_\mu H' + ig[A_\mu, H'] + ig[A_\mu, \langle H \rangle] \\ D_\mu H &= D_\mu H' + ig[A_\mu, \langle H \rangle] \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

Οι όροι μάζας λοιπόν θα προκύψουν από το $|D_\mu H|^2$. Αναπτύσσοντας την παράσταση αυτή, τελικά ο όρος που θα μας δώσει τις μάζες, θα είναι ο $-g^2 | [A_\mu, \langle H \rangle] |^2$. Παρουσιάζουμε παρακάτω τη διαδικασία. Αρχικά υπενθυμίζουμε το A_μ :

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} & & & X_1 & Y_1 \\ & \mathcal{G}_\beta^\alpha & & X_2 & Y_2 \\ X^1 & X^2 & X^3 & \mathcal{W}^{3+} & W^+ \\ Y^1 & Y^2 & Y^3 & W^- & \mathcal{W}^{3-} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G}_\beta^\alpha = (G - 2B/\sqrt{30})^\alpha{}_\beta, \quad \mathcal{W}^{3\pm} = \pm W^3/\sqrt{2} + 3B/\sqrt{30} \quad (2.1.22)$$

Είναι:

$$\begin{aligned}
[A_\mu, \langle H \rangle] &= A_\mu \langle H \rangle - \langle H \rangle A_\mu \\
&= \frac{u_1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2\mathcal{G}_1^1 & 2\mathcal{G}_2^1 & 2\mathcal{G}_3^1 & -3X_1 & -3Y_1 \\ 2\mathcal{G}_1^2 & 2\mathcal{G}_2^2 & 2\mathcal{G}_3^2 & -3X_2 & -3Y_2 \\ 2\mathcal{G}_1^3 & 2\mathcal{G}_2^3 & 2\mathcal{G}_3^3 & -3X_3 & -3Y_3 \\ 2X^1 & 2X^2 & 2X^3 & -3W^{3+} & -3W^+ \\ 2Y^1 & 2Y^2 & 2Y^3 & -3W^- & -3W^{3-} \end{pmatrix} \\
&\quad - \frac{u_1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2\mathcal{G}_1^1 & 2\mathcal{G}_2^1 & 2\mathcal{G}_3^1 & 2X_1 & 2Y_1 \\ 2\mathcal{G}_1^2 & 2\mathcal{G}_2^2 & 2\mathcal{G}_3^2 & 2X_2 & 2Y_2 \\ 2\mathcal{G}_1^3 & 2\mathcal{G}_2^3 & 2\mathcal{G}_3^3 & 2X_3 & 2Y_3 \\ -3X^1 & -3X^2 & -3X^3 & -3W^{3+} & -3W^+ \\ -3Y^1 & -3Y^2 & -3Y^3 & -3W^- & -3W^{3-} \end{pmatrix} \\
[A_\mu, \langle H \rangle] &= \frac{u_1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -5X_1 & -5Y_1 \\ 0 & 0 & 0 & -5X_2 & -5Y_2 \\ 0 & 0 & 0 & -5X_3 & -5Y_3 \\ 5X^1 & 5X^2 & 5X^3 & 0 & 0 \\ 5Y^1 & 5Y^2 & 5Y^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.1.23}
\end{aligned}$$

Οπότε για τη μάζα θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
-g^2 | [A_\mu, \langle H \rangle] |^2 &= -g^2 \frac{u_1^2}{2} \left| (-5X_1)(5X^1) + (-5Y_1)(5Y^1) + (-5X_2)(5X^2) + \dots \right| \\
-g^2 | [A_\mu, \langle H \rangle] |^2 &= -\frac{25u_1^2}{2} (X^2 + Y^2) \tag{2.1.24}
\end{aligned}$$

Απευθείας παίρνουμε από την παραπάνω τις μάζες για τα βαριά X και Y μποζόνια:

$$M_X = M_Y = \frac{5\sqrt{2}}{2} g u_1 \tag{2.1.25}$$

Μέχρι το σημείο αυτό έχουμε περιγράψει πλήρως το 1ο αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας όπως υποσχεθήκαμε. Το φάσμα μάζας της θεωρίας μας φαίνεται συγκεντρωτικά στον πίνακα 2.1 πιο πάνω. Όπως λοιπόν δείξαμε και είχαμε εκτιμήσει από την αρχή της διαδικασίας, όλες οι μη μηδενικές τιμές μάζας μετά το 1ο αυτό σπάσιμο, είναι της τάξης u_1 (έστω M_X), δηλαδή πολύ μεγάλες. Έχουμε μέχρι στιγμής καλύψει τη μισή διαδρομή. Το επόμενο βήμα είναι να φτάσουμε σε χαμηλές ενέργειες (μπαίνοντας στην περιοχή ισχύος του SM, δηλαδή $\sim 250\text{GeV}$) και εκεί να σπάσουμε την $SU(2)$ συμμετρία με 2ο μηχανισμό higgs, όπου η αναμενόμενη τιμή ως προς το κενό θα είναι πλέον της τάξης του $u_1 \ll u_2$. Προφανώς για το 2ο σπάσιμο χρειαζόμαστε μία $SU(2)$ doublet (εδώ φαίνεται ακόμη πιο ξεκάθαρα ο αρχικός λόγος διαχωρισμού της 5 αναπαράστασης Φ πιο πριν), με αναμενόμενη μάζα $m_{\Phi_d} \ll M_X$. Η ιδέα εδώ είναι η “αντίστροφη” αυτής του 1ου σπασίματος. Θεωρούμε ότι σε χαμηλές ενέργειες τα πολύ βαριά μποζόνια σταματούν να αλληλεπιδρούν με τα σωματίδια της θεωρίας μας (δεν υπάρχει coupling) και τελικώς επιζούν μόνο τα ελαφρά μποζόνια (δηλαδή η doublet που ορίσαμε πιο πάνω, η Φ_d). Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **decoupling** και θα την αναπτύξουμε λίγο περισσότερο παρακάτω.

Decoupling theorem: Εάν μία gauge invariant Lagrangian μίας θεωρίας περιέχει 2 τάξεις μαζών m και M με $m \ll M$ και είναι renormalizable, σε ενέργειες $E \ll M$ η θεωρία περιγράφεται πλήρως από μία renormalizable Lagrangian που περιέχει μόνο τα ελαφρά σωματίδια. Η δράση των βαριών σωματιδίων της θεωρίας το μόνο που επιφέρει είναι απλά ένα rescale στις coupling constants και στις renormalization parameters της θεωρίας.

Από την οπτική γωνία της Κοσμολογίας (και για να αποδώσουμε κάποιο φυσικό νόημα στα παραπάνω) μπορούμε να αναφέρουμε τα εξής: Ένα σωματίδιο προκειμένου να διατηρηθεί σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας (δηλαδή να παράγονται όσα καταστρέφονται μέσω διαφόρων αντιδράσεων), πρέπει να αντιδρά “αρκετά”. Η διαστολή του σύμπαντος οδηγεί σε πτώση της θερμοκρασίας και κατά συνέπεια

της κινητικής ενέργειας των σωματιδίων. Αυτό οδηγεί σε πτώση του ρυθμού παραγωγής ειδικά των βαρύτερων σωματιδίων, με αποτέλεσμα αυτά να ξεφεύγουν από τη θερμοδυναμική ισορροπία, οπότε και ο ρυθμός διάσπασής τους υπερβαίνει το ρυθμό παραγωγής τους. Μετά από αρκετό χρόνο τα σωματίδια αυτά ουσιαστικά “παύουν να υπάρχουν”, δεν αλληλεπιδρούν πλέον και έτσι πια η φυσική καθορίζεται κυρίως από τα ελαφρά σωματίδια. Έτσι, με βάση τα παραπάνω μπορούμε να γράψουμε την “ενεργή” (effective) Lagrangian η οποία ισχύει στην περιοχή ενέργειας $\sim 250\text{GeV}$.

$$V_{\text{eff}}(\phi) = -m_d^2(\phi^\dagger\phi) + \lambda_3(\phi^\dagger\phi)^2 \quad (2.1.26)$$

όπου πλέον συμβολίζουμε με ϕ τη doublet του Φ που ορίσαμε πιο πριν και επίσης με βάση τα παραπάνω και τον πίνακα μαζών που βρήκαμε για τη μάζα της $\Phi_d = \phi$, βάλουμε $m_d^2 \simeq m_2^2$. Το δυναμικό που γράψαμε παραπάνω είναι ακριβώς το Higgs δυναμικό του SM. Η διαδικασία λοιπόν από εδώ και κάτω είναι το γνωστό σπάσιμο συμμετρίας του SM με VEV $u_2 \ll u_1$. Το βαθύτερο κενό της θεωρίας μας λοιπόν θα γίνει:

$$\langle \phi_d \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = (m_d^2/\lambda_3)^{1/2} \simeq 250\text{GeV} \quad (2.1.27)$$

Περιγράψαμε στο σημείο αυτό και το 2ο στάδιο του σπασίματος:

$$SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1) \xrightarrow{u_2} SU(3) \otimes U(1) \quad (2.1.28)$$

Εδώ θα πρέπει να αναφέρουμε κάποιες παρατηρήσεις οι οποίες μπορούν να αμφισβητήσουν τη συνέπεια των μέχρι τώρα λεχθέντων. Παρουσιάζεται μία πολύ μεγάλη διαφορά στις 2 τάξεις μεγέθους των ενεργειών που αναφέραμε. Η σχέση τους είναι $u_1 \sim 10^{12}u_2$, διαφορά η οποία φαίνεται μη φυσική. Επιπλέον ο περιορισμός μας σε χαμηλά σωματίδια μπορεί να γίνει σε όλες τις τάξεις της θεωρίας διαταραχών; Η απάντηση είναι ότι όντως μπορούμε να περιοριστούμε στα ελαφρά σωματίδια αλλά απαιτείται fine tuning σε κάθε τάξη. Τελική λύση βέβαια στο παραπάνω πρόβλημα (**gauge hierarchy problem**) παρέχεται από τη θεωρία της Supersymmetry.

2.2 ΕΝΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΖΕΥΞΗΣ.

Μετά από την παρουσίαση των παραπάνω μπορούμε να προχωρήσουμε πιο βαθιά στη θεωρία μας και να την εξετάσουμε πλέον στην ουσία της. Δηλαδή στις προβλέψεις της. Εδώ θα κριθεί η ισχύς της και η απόρριψή της ή όχι. Ποιά είναι η ουσία της ενοποίησης; Όπως έχουμε δει από το SM οι ισχυρές και ηλεκτροσθενείς αλληλεπιδράσεις περιγράφονται (στο SM) από 3 σταθερές ζεύξης. Αυτές είναι οι g_s , g , g' αντίστοιχα, μία για κάθε ομάδα του μοντέλου. Όπως έχει βρεθεί και πειραματικά αυτές οι τρεις coupling constants έχουν διαφορετική ένταση, καθώς και όπως έχουμε δει από τη θεωρία επανακανονικοποίησης διαφορετική εξέλιξη με την ενέργεια. Συγκεκριμένα οι $SU(3)$ και $SU(2)$ coupling constants μειώνονται λογαριθμικά με την αύξηση της ενέργειας, ενώ η g' που αντιστοιχεί στην Abel $U(1)$ αυξάνει με την αύξηση της ενέργειας. Στα πλαίσια του SM δεν παρέχεται καμία απολύτως εξήγηση για ποιόν λόγο αυτές οι 3 σταθερές αλληλεπίδρασης έχουν διαφορετικές εντάσεις. Ερχόμαστε τώρα στη θεωρία ενοποίησης που εξετάζουμε. Εξ' ορισμού μία θεωρία ενοποίησης έχει μόνο 1 σταθερά ζεύξης (έστω εδώ g_5 για την $SU(5)$). Βέβαια αυτό θα πρέπει να ισχύει σε μία ενεργειακή κλίμακα αρκετά ψηλά (στην περιοχή ισχύος της ενοποιημένης θεωρίας -GUT scale-). Όταν μεταφερθούμε χαμηλά στην ενεργειακή κλίμακα (SM) θα πρέπει η θεωρία μας να μας δίνει το SM, αφού είναι και πειραματικά αποδεδειγμένο ότι σε χαμηλές ενέργειες το SM έχει πλήρη ισχύ. Το πώς μπορεί αυτό να επιτευχθεί το είδαμε ακριβώς πριν. Το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας (1ο στάδιο) μας παρέχει τη δυνατότητα να έχουμε μία αρχικά σταθερά ζεύξης, η οποία να χωρίζεται σε τρεις όταν κατέβουμε σε χαμηλές ενέργειες, μία για κάθε υποομάδα της $SU(5)$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι σε κάποια ψηλή ενεργειακή κλίμακα οι τρεις παραπάνω coupling constants συμπίπτουν και οι τρεις ($\sim M_X$) και από εκεί και έπειτα η θεωρία μας περιγράφεται από μία ενοποιημένη coupling constant, την g_5 . Δηλαδή:

$$\begin{array}{ccc} SU(5) & \longrightarrow & SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1) \\ g_5(\sim M_X) & & g_s, g, g'(\sim M_Z) \end{array} \quad (2.2.1)$$

Τα παραπάνω συνοψίζονται σχηματικά στην εικόνα 2.2.1.

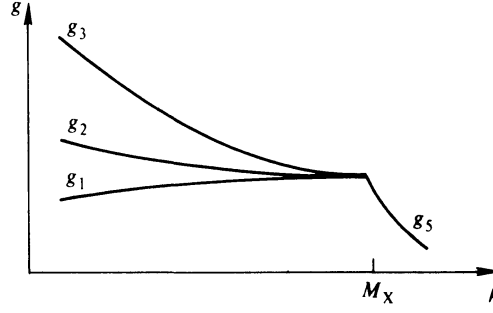


Figure 2.2.1: Ενοποίηση των coupling constants σε ψηλή ενεργειακή κλίμακα.

Θα πρέπει όμως να τονίσουμε εδώ ότι αυτή είναι μία υπόθεση που κάναμε και κανείς δεν μας εγγυάται ότι αυτό ισχύει. Δύο γραμμές προφανώς τέμνονται μεταξύ τους. Εμείς όμως υποθέσαμε ότι και οι τρεις αυτές γραμμές τέμνονται στο ίδιο σημείο. Αυτή λοιπόν είναι μία συνθήκη που επιβάλλουμε και θα δούμε ότι οδηγεί σε ορισμένες πολύ σημαντικές προβλέψεις.

Ξεκινάμε την ανάλυση της υπόθεσης που κάναμε παραπάνω πρώτα εξετάζοντας τι συμβαίνει ψηλά στην ενεργειακή κλίμακα, όπου η θεωρία μας είναι η $SU(5)$ και έπειτα θα προσπαθήσουμε με τη χρήση των όσων γνωρίζουμε από τη θεωρία επανακανονικοποίησης να δούμε πώς συμπεριφέρεται η θεωρία μας (στην ουσία πώς δηλαδή “μεταφράζεται” η ύπαρξη της συγκεκριμένης συμμετρίας ψηλά) στις χαμηλές ενέργειες όπου ισχύει το SM και οι οποίες είναι ελέγξιμες και πειραματικά. τι γίνεται λοιπόν στη GUT scale; Θα γράψουμε εδώ τις συναλλοίωτες παραγώγους της $SU(5)$ (θεωρώντας ενοποιημένη σταθερά ζεύξης g_5) και αντίστοιχα αυτές του SM στην ενεργειακή κλίμακα ενοποίησης:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_5 \sum_{\alpha=0}^{23} A_\mu^\alpha \lambda^\alpha / 2 \quad (2.2.2)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s \sum_{\alpha=1}^8 G_\mu^\alpha \frac{\lambda^\alpha}{2} + ig \sum_{r=1}^3 W_\mu^r \frac{\tau^r}{2} + ig' B_\mu \frac{Y}{2} \quad (2.2.3)$$

Πώς θα είναι οι coupling constants g_s, g, g' του SM στη GUT scale; Ας υποθέσουμε ότι αυτές θα είναι οι g_3 (ισχυρή $SU(3)$), g_2 (ασθενής $SU(2)$), g_1 (ηλ/χη $U(1)$). Ο ορισμός της σχέσης των σταθερών ζεύξης εξαρτάται από την κανονικοποίηση των γεννητόρων του group που έχουμε επιβάλλει. Έτσι όσον αφορά στα non-abel groups εκεί δεν έχουμε κάποιο πρόβλημα, καθώς έχουν ίδιες συνθήκες κανονικοποίησης, που είναι οι άλγεβρες Lie:

$$SU(5) : \quad tr(\lambda^\alpha \lambda^\beta) = 2\delta^{\alpha\beta}, \quad \text{γενικ.πίνακες Gell - Mann} \quad (2.2.4)$$

$$SU(3) : \quad tr(\lambda^a \lambda^b) = 2\delta^{ab}, \quad \text{πίνακες Gell - Mann} \quad (2.2.5)$$

$$SU(2) : \quad tr(\tau^r \tau^m) = 2\delta^{rm}, \quad \text{πίνακες Pauli} \quad (2.2.6)$$

επιπλέον από την υπόθεση που κάναμε περί ενοποίησης, θα είναι προφανώς:

$$\boxed{g_3 = g_2 = g_1 = g_5} \quad (2.2.7)$$

Αυτές οι σταθερές ζεύξης είναι δηλαδή συγκεντρωμένες στη συναλλοίωτη παράγωγο (2.2.2). Οπότε φάχνοντας τη σύνδεση των σταθερών ζεύξης της $SU(5)$ με αυτές του SM όπως αναφέραμε δεν έχουμε κάποια δυσκολία όσον αφορά στις μη Αβελιανές ομάδες. Με βάση τις σχέσεις κανονικοποίησης των γεννητόρων που έχουμε επιβάλλει και γράψαμε πιο πάνω, θα είναι:

$$g_3 \equiv g_s, \quad g_2 \equiv g \quad (2.2.8)$$

τι γίνεται τώρα με τη $U(1)$; Συγκρίνοντας τις (2.2.2) και (2.2.3) κατευθείαν εξάγεται η σχέση τους (υπενθυμίζουμε ότι τώρα θα γράψουμε $g_5 \equiv g_1$):

$$ig_1 A_\mu^0 \frac{\lambda^0}{2} = ig' B_\mu \frac{Y}{2} \quad (2.2.9)$$

Δηλαδή το πεδίο A_μ^0 ταυτοποιείται με το πεδίο της $U(1)$, B_μ , πριν από τη μίξη της με την $SU(2)$ όπως θυμόμαστε από το SM. Οπότε:

$$g_1 \lambda^0 = g' Y \quad (2.2.10)$$

Το θέμα που ανακύπτει εδώ σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση, είναι το γεγονός πως η $U(1)$ ως Αβελιανή ομάδα έχει τετριμμένη άλγεβρα και δεν υπάρχει κανένας περιορισμός στην κανονικοποίηση του γεννήτορά της. Αυτό το πρόβλημα είχαμε και στην απόδοση του υπερφορτίου στη μελέτη του SM, όπου τελικά αναγκαστήκαμε να επιβάλλουμε (να διαλέξουμε ουσιαστικά) εμείς “με το χέρι” τα φορτία που επιθυμούσαμε, χωρίς να υπάρχει κάποια φυσική - μαθηματική απαίτηση. Τα Y και λ^0 μπορούν να μεταβάλλονται ανεξάρτητα. Όμως εδώ το πολύ σημαντικό στοιχείο που έχουμε στη διαθεσή μας και μπορεί να οδηγήσει σε επιβολή συνθήκης είναι το γεγονός ότι όπως είδαμε από το 1ο κεφάλαιο έχουμε ήδη υπολογίσει τον πίνακα Y για την fundamental **5** αναπαράσταση. Μπορούμε λοιπόν με βάση την ταυτοποίηση των σωματιδίων που έχουμε κάνει για την $SU(5)$ να απαιτήσουμε εισάγοντας μία σταθερά c :

$$Y = c \lambda^0 \quad (2.2.11)$$

Υπενθυμίζουμε εδώ ότι έχουμε υπολογίσει για την:

$$\mathbf{5}: (\psi_i)_R = (d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad e^+ \quad -\nu_1^c)_R \quad (2.2.12)$$

τον τελεστή του υπερφορτίου και βρήκαμε:

$$Y = \begin{pmatrix} -2/3 & & & & \\ & -2/3 & & & \\ & & -2/3 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.13)$$

Ενώ επίσης από την άλγεβρα της ομάδας $SU(5)$ και τις αναπαράστάσεις της σε 5×5 πίνακες, είναι (βλ. παράρτημα):

$$\lambda^0 = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & -3 & \\ & & & & -3 \end{pmatrix} \quad (2.2.14)$$

Πλέον είμαστε έτοιμοι και έχουμε στα χέρια μας ένα ακλόνητο χαρτί. Σε αντίθεση με το SM μπορούμε να επιβάλλουμε συνθήκη. Το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε τη σταθερά c αυτή για την οποία παίρνουμε $Y = c \lambda^0$. Και το ακόμη πιο σημαντικό είναι το γεγονός ότι εάν κανείς παρατηρήσει τη σχέση $g_1 \lambda^0 = g' Y$ που γράψαμε πιο πάνω, προίον της υπόθεσης ενοποίησης, βλέπουμε ότι με την επιβολή της συνθήκης μας έχουμε ένα ακόμη μεγαλύτερο κέρδος: μπορούμε να υπολογίσουμε ακριβώς τη σχέση των δυο σταθερών ζεύξης των ασθενών και ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων! Η ενοποίηση ήδη αποκτά υπόσταση και θα δούμε αμέσως τι μεγάλες συνέπειες έχει αυτή η παρατήρηση για τη θεωρία. Έχουμε λοιπόν $Y = c \lambda^0$. Κάνοντας τις πράξεις για ένα στοιχείο των πινάκων (και επαληθεύοντας μετά εάν το ίδιο ισχύει για τα υπόλοιπα τέσσερα):

$$\begin{aligned} 1 &= c \frac{-3}{\sqrt{15}} \\ c &= -(5/3)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Εάν πολλαπλασιάσουμε όλα τα στοιχεία του λ^0 με τον c βλέπουμε ότι παίρνουμε τον Y . Πηγαίνοντας τώρα στη σχέση που προέκυψε από την υπόθεση συμμετρίας, θα είναι:

$$\begin{aligned} g_1 \lambda^0 &= g' Y \\ g_1 \lambda^0 &= -(5/3)^{1/2} \lambda^0 g' \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

και πλέον εξάγουμε τη σχέση μεταξύ των δύο σταθερών ζεύξης:

$$g' = -\sqrt{\frac{3}{5}} g_1 \quad (2.2.17)$$

Μένει τώρα να δούμε τι συμβαίνει κάτω από τη GUT scale, δηλαδή όταν πάμε σε $\mu < M_X$.

- Θεωρούμε ότι η εξέλιξη των coupling constants καθορίζεται από τις εξισώσεις renormalization σε όλη την ενδιαμέση περιοχή από EW μέχρι GUT scale:

$$\frac{dg_n}{d(\ln\mu)} = -b_n g_n^3 \quad \text{όπου:} \quad b_n = \frac{(11n - 2N_F)}{48\pi^2}, \quad b_1 = -\frac{N_F}{24\pi^2}$$

$$b_n - b_1 = \frac{11n}{48\pi^2}$$

- Έχουμε αγνοήσει συνεισφορές higgs (αλλά θα έκαναν rescale).

- Επιλύουμε: $\int_{\mu_0}^{\mu} g_n^{-3} dg_n = -\int_{\mu_0}^{\mu} b_n d\ln\mu \rightarrow g_n^{-2}(\mu) = g_n^{-2}(\mu_0) + 2b_n \ln \frac{\mu}{\mu_0}$

- Μεταφερόμαστε χαμηλά στην EW scale παίρνοντας $\mu_0 = M_X$ ψηλά:

$$g_3 \rightarrow g_s, \quad g_2 \rightarrow g, \quad g_1 \rightarrow -\sqrt{5/3} g', \quad \tan\theta_w = \frac{g'}{g} \rightarrow g^2 \sin^2\theta_w = g'^2 \cos^2\theta_w$$

$$g_s^2 \equiv \alpha_s(\mu) 4\pi, \quad g^2 \sin^2\theta_w \equiv \frac{3}{5} g_1^2 \cos^2\theta_w \equiv \alpha(\mu) 4\pi, \quad \text{GUT: } g_i(M_X) = g_5 \rightarrow \alpha_i(M_X) = \alpha_5$$

οπότε:

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} \cos^2\theta_w \alpha^{-1}(\mu) &= \alpha_5^{-1}(M_X) + 8\pi b_1 \ln\left(\frac{\mu}{M_X}\right) \\ \sin^2\theta_w \alpha^{-1}(\mu) &= \alpha_5^{-1}(M_X) + 8\pi b_2 \ln\left(\frac{\mu}{M_X}\right) \\ \alpha_s^{-1}(\mu) &= \alpha_5^{-1}(M_X) + 8\pi b_3 \ln\left(\frac{\mu}{M_X}\right) \end{aligned}$$

- Παίρνοντας γραμμικούς συνδυασμούς των παραπάνω εξάγουμε τις σχέσεις:

$$\sin^2\theta_w = \frac{1}{6} + \frac{5\alpha(\mu)}{9\alpha_s(\mu)}, \quad \ln \frac{\mu}{M_X} = \frac{\pi}{11} \left(\frac{1}{\alpha(\mu)} - \frac{3}{8\alpha_s(\mu)} \right)$$

- Επιλύοντας τη 2η ως προς α_s και αντικαθιστώντας στην πρώτη:

$$\sin^2\theta_w = \frac{3}{8} - \frac{55}{24\pi} \alpha(\mu) \ln \frac{M_X}{\mu} \quad \xrightarrow{\text{+higgs contributions}} \quad \sin^2\theta_w = \frac{3}{8} - \frac{109}{48\pi} \alpha(\mu) \ln \frac{M_X}{\mu}$$

- Μεταφερόμαστε χαμηλά στην $\mu = m_W$:

$$M_X \sim 4 \cdot 10^{14} \text{ GeV} \xrightarrow{\text{RGE}} \alpha(m_W) \approx \frac{1}{128} \rightarrow \sin^2\theta_w^{\text{th}} \approx 0,21$$

- Υπάρχει ασυμφωνία με το πείραμα:

$$\sin^2\theta_w^{\text{exp}} \approx 0,23$$

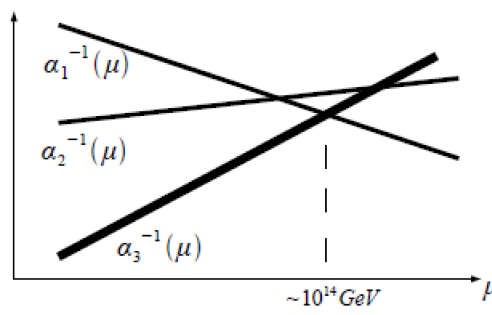


Figure 2.2.2: Οι coupling constants τελικά δε φαίνεται να συγκλίνουν σε ένα μόνο σημείο...

2.3 ΔΙΑΣΠΑΣΗ ΠΡΩΤΟΝΙΟΥ.

- Η συναλλοίωτη παράγωγος: $D_\mu = \partial_\mu + ig \sum_{\alpha=0}^{23} A_\mu^\alpha \frac{\lambda^\alpha}{2}$
- Οπότε η Lagrangian αλληλεπίδρασης:

$$\begin{aligned}
 L_{\text{int}} = & -\frac{g_5}{2} G_\mu^a (\bar{u} \gamma^\mu \lambda^a u + \bar{d} \gamma^\mu \lambda^a d) - \\
 & -\frac{g_5}{2} W_\mu^i (\bar{Q}_L \gamma^\mu \tau^i Q_L + \bar{L} \gamma^\mu \tau^i L) - \frac{g_5}{2} \sqrt{\frac{3}{5}} B_\mu \sum_{\text{fermions}} \bar{f} \gamma^\mu Y f - \\
 & -\frac{g_5}{2} X_{\mu,a} (\bar{d}_R \gamma^\mu e_R^c + \bar{d}_L^a \gamma^\mu e_L^c + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{\alpha\gamma} \gamma^\mu u_L^\beta) + h.c. - \\
 & -\frac{g_5}{2} Y_{\mu,a} (\bar{d}_R \gamma^\mu \nu_R^c + \bar{u}_L^a \gamma^\mu e_L^c + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{\alpha\beta} \gamma^\mu d_L^\gamma) + h.c.
 \end{aligned}$$

Υπάρχουν όροι αλληλεπίδρασης λεπτονίων με quarks!

- Αλλιώς μπορούμε να γράψουμε τα παραπάνω ορίζοντας:

$$L_{\text{int}} = g \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu^T \psi + tr (g \bar{\chi} \gamma^\mu (A_\mu, \chi)), \quad \psi \equiv (\psi^i)_L, (\mathbf{5}^*), \quad \chi \equiv (\chi_{ij})_L, (\mathbf{10})$$

$$X_{aa} = (X_a, Y_a), \quad q_{aa} = (u_a, d_a), \quad l_a = (\nu, e)$$

1 generation

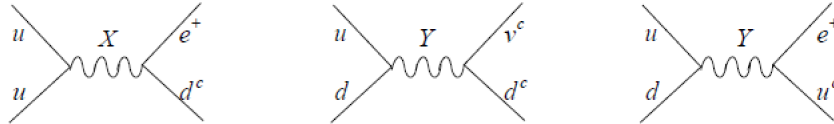
$$L_{\text{int}} = -\frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ (\bar{\nu} \gamma^\mu e + \bar{u}_a \gamma^\mu d_a) + \frac{g}{\sqrt{2}} X_{\mu,a} [\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \bar{u}^c \gamma^\mu q_{\beta\alpha} + \varepsilon^{ab} (\bar{q}_{ab} \gamma^\mu e^+ - \bar{l}_b \gamma^\mu d_a^c)] + \dots$$

- Ανταλλαγή X και Y και παραβίαση της διατήρησης του baryon number!

- Από την πάνω Lagrangian παίρνουμε τα Feynman graphs:



- Ένα κανάλι λοιπόν με $B = -1/3$ μετατρέπεται $2/3$:

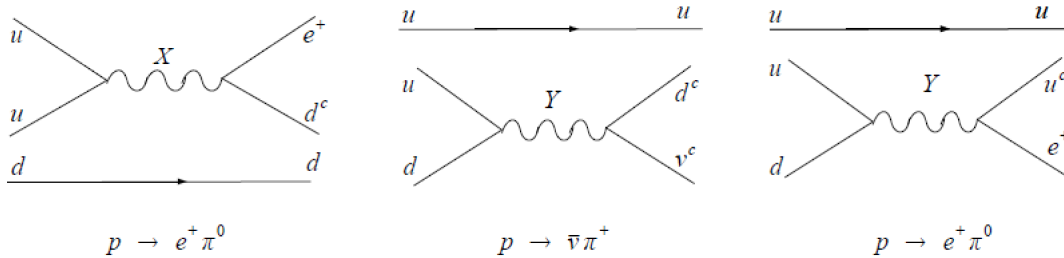


- Γράφουμε τις αντιδράσεις 4 fermions από τη Lagrangian και επειδή η M_X είναι πολύ μεγάλη σε σχέση με τις μάζες των fermions μπορούμε να πάρουμε το effective κομμάτι της το οποίο παραβιάζει τη διατήρηση του baryon number ($\Delta B=1$):

$$L_{\Delta B=1} = \frac{g^2}{2M_X^2} \epsilon^{abc} \epsilon^{def} (\bar{u}_a^c \gamma^\mu q_{b\mu}) (\bar{d}_e^c \gamma^\nu l_f + \bar{e}^+ \gamma^\nu q_{d\nu})$$

- $\rightarrow \Delta(B-L) = 0 \rightarrow$ διατήρηση της διαφοράς του baryon - lepton number.
- $\rightarrow G_{321}$ invariance και διατήρηση του ηλεκτρικού φορτίου (λόγω effective)

- Επιτρεπόμενες διασπάσεις p (uud):



- Επίλυση όπως και στη διάσπαση μιονίου:

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2}, \quad \Gamma(\mu \rightarrow e \bar{\nu}_e \nu_\mu) \sim G^2 m_\mu^5 = \left(\frac{g^2}{M_W^2}\right)^2 m_\mu^5$$

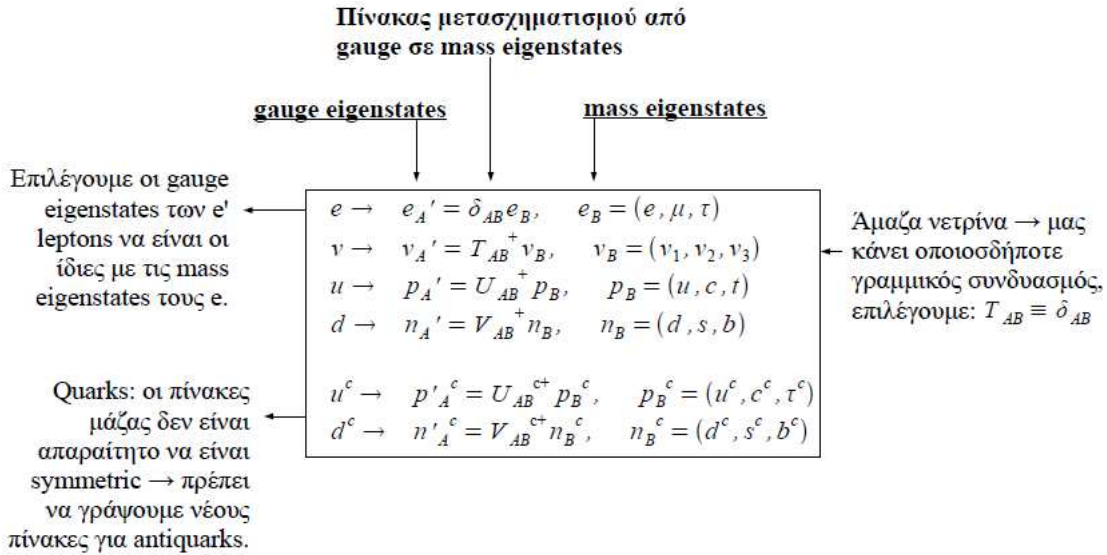
οπότε:
$$\Gamma \sim \left(\frac{g^2}{M_X^2}\right)^2 m_p^5 \rightarrow \tau = \frac{1}{\Gamma} \rightarrow \tau \sim \left(\frac{M_X^2}{g^2}\right)^2 \frac{1}{m_p^5}$$

Όμως: $M_X \sim M_{GUT} \sim 10^{15} GeV \rightarrow \tau \sim 10^{30} years \neq \tau_{exp} \geq 10^{32} years$

ξανά ελπίδα από SUSY.

2.4 ΜΑΖΕΣ ΦΕΡΜΙΟΝΙΩΝ.

- Εισάγουμε όλες τις generations για fermions (5*, 10):



Όπου γενικά θα είναι: $U_{AB} \neq U_{AB}^c, V_{AB} \neq V_{AB}^c$

Kinship hypothesis

- SM → well defined families + CKM matrix.

$e - family: (e, \nu_1, d, u)$	Πολύ μικρή probability για family mixing από CKM.
$\mu - family: (\mu, \nu_2, s, c)$	
$\tau - family: (\tau, \nu_3, b, t)$	

- Επεκτείνεται αυτό το γνώρισμα και σε GUTs?
- Not trivial → νέα flavour changing currents μέσω X και Y bosons.
- **Kinship hypothesis:** „Όλες οι μεταπτώσεις μεταξύ των γενεών των σωματιδίων εκτελούνται με τις κατάλληλα μικρές γωνίες μίξης.“
- Γράφουμε τη Lagrangian αλληλεπίδρασης και μεταφερόμαστε στις mass eigenstates:

$$L_{int} = -\frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ (\bar{\nu} \gamma^\mu e + \bar{p}_a \gamma^\mu d_a) + \frac{g}{\sqrt{2}} X_{\mu,a}^a [\varepsilon^{ab\gamma} \bar{p}^c \gamma^\mu q_{\beta a} + \varepsilon^{ab} (\bar{q}_{ab} \gamma^\mu e^+ - \bar{l}_b \gamma^\mu d_a^c)] + \dots$$

Gauge eigenstates, 3 families:

$$L_{int} = W (\bar{\nu}'_A e'_A + \bar{p}'_A n'_A) + X (p'^c_A p'_A + n'^c_A e'^+_A + \bar{e}'_A n'^c_A) + Y (\bar{p}'_A n'_A + \bar{p}'_A e'^+_A + \bar{\nu}'_A n'^c_A) + \dots$$

Mass eigenstates, 3 families:

$$L_{\text{int}} = W[\bar{\nu}_A e_A + \bar{p}_A (U V^+)_{AB} n_B] + X[p_A^c (U^{c+} U)_{AB} p_A + \bar{n}_A V_{AB} e_B^+ + \bar{e}_A V_{AB}^{c+} n_B^c] \\ + Y[\bar{p}_A^c (U^c V^+)_{AB} n_B + \bar{p}_A U_{AB}^+ e_B^+ + \bar{\nu}_A V_{AB}^{c+} n_B^c] + \dots$$

- Ο UV+ είναι ο CKM matrix των weak interactions του SM.
- Τίποτα δεν επιβάλλει οι υπόλοιποι να έχουν την ίδια μορφή με τον CKM.
- Οπότε θα μπορούσαν να προκύψουν πολύ διαφορετικές mixing angles.
- Όμως αυτό είναι αντίθετο με την Kinship hypothesis!
- Τελικά στο minimal SU(5) με την απλή higgs structure οι mixing angles γίνονται τελικά αυτές που πρέπει από Kinship hypothesis (θα δειχθεί πιο κάτω).

Yukawa couplings

- Οι πιθανοί συνδυασμοί που μπορούν να δώσουν Yukawa couplings:

$$5^+ \otimes 5^+ = 10 \oplus 15^+$$

$$5^+ \otimes 10 = 5 \oplus 45$$

$$10 \otimes 10 = 5^+ \oplus 45^+ \oplus 50$$

- Όμως μόνο οι 5 και 45 από τις παραπάνω περιέχουν (1, 2) που θέλουμε για το higgs.
- Minimal SU(5) → higgs στις 5 και 24.
- Η 5 δίνει το σπάσιμο SU(3)×SU(2)×U(1) → SU(3)×U(1) και δίνει μάζα στα fermions.
- Οι αντίστοιχες Yukawa couplings:

$$f_{AB}^{(1)} (\chi_{A,ij})^T C (\chi_{B,kl}) \Phi_m \varepsilon^{ijklm} + f_{AB}^{(2)} (\chi_{A,ij})^T C \psi_B^i \Phi^{j+}$$

Επίσης:

$$C = i \gamma^2 \gamma^0 \text{ (antisymmetric)} \rightarrow f_{AB}^{(1)} \text{ symmetric} \rightarrow f_{AB}^{(1)} = f_{BA}^{(1)} \\ + \text{ (fermion fields anticommute)}$$

- Δίνουμε VEV στο higgs Φ : $\langle \Phi \rangle = (0, 0, 0, 0, u_2)$
- Και παίρνουμε τετραγωνικούς ως προς τα πεδία όρους (όρους μάζας):

$$u_2 f_{AB}^{(1)} (\bar{p}_A p_B) + u_2 f_{AB}^{(2)} (\bar{n}_A n_B + \bar{e}_A e_B)$$

- Όπου οι αντίστοιχοι πίνακες μαζών θα είναι:

$$\begin{array}{l} u_2 f_{AB}^{(1)} \equiv M_{AB}^{(p)} = M_{BA}^{(p)} \\ u_2 f_{AB}^{(2)} \equiv M_{AB}^{(n)} = M_{AB}^{(e)} \end{array}$$

- Ερμηνεύουμε:

$$\begin{array}{l} M_{AB}^{(p)} = M_{BA}^{(p)} \rightarrow U^+ U^c = (\text{diagonal \& unitary}) \\ M_{AB}^{(n)} = M_{AB}^{(e)} \rightarrow (\text{ταυτόχρονη διαγωνοποίηση}) \end{array}$$

Όμως για leptons έχουμε gauge = mass eigenstates $\rightarrow n_A$: $V, V^c \equiv \delta_{AB}$

- Άρα μας απέμειναν μόνον οι UV^* που είναι οι weak rotations του CKM.
- Επαλήθευση και ισχύς της Kinship hypothesis για minimal SU(5).

lepton – quark mass relations

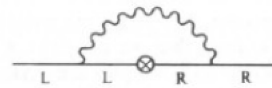
- Από τον πίνακα μαζών:

$$M_{AB}^{(n)} = M_{AB}^{(e)} \begin{array}{l} \text{same} \\ \text{eigenstates} \\ \rightarrow \\ \text{same} \\ \text{eigenvalues} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} m_e = m_d \\ m_\mu = m_s \\ m_\tau = m_b \end{array} \right\}$$

- **Renormalization corrections:**

Από fermion self energy graph παίρνουμε:

$$m(\mu) = m(\mu_0) - m(\mu_0) g_n^2 b_m^n \ln \frac{\Lambda}{\mu}$$



Οπότε mass renormalization group equation:

$$\frac{d \ln m(\mu)}{d \ln \mu} = b_m^{(n)} g_n^2(\mu)$$

Όπου το g προκύπτει από coupling constant renormalization group equations:

$$\frac{d g_n}{d \ln \mu} = -b_n g_n^3(\mu) \rightarrow \frac{d g_n^2}{d \ln \mu} = -2b_n g_n^4(\mu) \xrightarrow{\text{solution}} g_n^2(\mu) = \frac{g_n^2(\mu_0)}{1 + 2b_n g_n^2(\mu_0) \ln \frac{\mu}{\mu_0}}$$

- Όπου όπως είδαμε πριν: $b_n = \frac{(11n - 2N_F)}{48\pi^2}$, $b_1 = -\frac{N_F}{24\pi^2}$
- Από τα παραπάνω θα πάρουμε:

$$\frac{m(\mu)}{m(\mu_0)} = \left[\frac{g_n(\mu)}{g_n(\mu_0)} \right]^{\frac{-b_n^{(n)}}{b_n}}$$

- Μας έμειναν για υπολογισμό τα b_m .

$$b_m^{(n)} = \frac{-3}{8\pi^2} \sum_a (T^a T^a)_{ij} \rightarrow SU(n): \sum_a (T^a T^a)_{ij} = \frac{n^2 - 1}{2n} \delta_{ij}, \quad U(1): (T^0)^2 = \frac{3}{5} \left(\frac{Y}{2} \right)$$

- Και παίρνουμε τελικά:

$$\frac{m_p(\mu)}{m_p(\mu_0)} = \left[\frac{g_3(\mu)}{g_3(\mu_0)} \right]^{\frac{8}{11-2N_F/3}} \left[\frac{g_1(\mu)}{g_1(\mu_0)} \right]^{\frac{6}{10N_F}}$$

$$\frac{m_n(\mu)}{m_n(\mu_0)} = \left[\frac{g_3(\mu)}{g_3(\mu_0)} \right]^{\frac{8}{11-2N_F/3}} \left[\frac{g_1(\mu)}{g_1(\mu_0)} \right]^{\frac{3}{10N_F}}$$

$$\frac{m_e(\mu)}{m_e(\mu_0)} = \left[\frac{g_1(\mu)}{g_1(\mu_0)} \right]^{\frac{-27}{10N_F}}$$

- Από τις 2 τελευταίες:

$$\frac{m_n(\mu)/m_n(\mu_0)}{m_e(\mu)/m_e(\mu_0)} = \left[\frac{g_3(\mu)}{g_3(\mu_0)} \right]^{\frac{8}{11-2N_F/3}} \left[\frac{g_1(\mu)}{g_1(\mu_0)} \right]^{\frac{3}{N_F}}$$

- **GUT** \rightarrow

$$\mu_0 \sim M_X \rightarrow m_e(M_X) = m_n(M_X), \quad g_1(M_X) = g_3(M_X) = g_5$$

- Και η παραπάνω γίνεται:

$$\frac{m_n(\mu)}{m_e(\mu)} = \left[\frac{g_3(\mu)}{g_5} \right]^{\frac{8}{11-2N_F/3}} \left[\frac{g_1(\mu)}{g_5} \right]^{\frac{3}{N_F}}$$

- Εφαρμόζοντας για $n = b$, $e = \tau$, στην περιοχή των $\mu \sim 10\text{GeV}$ έχουμε:

$$\frac{m_b}{m_\tau} \approx 3$$

- **Σωστή πρόβλεψη!** Αλλά όμως όχι και οι:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_e = m_d \\ m_\mu = m_s \end{array} \right\} \rightarrow \frac{m_\mu}{m_e} = \frac{m_s}{m_d}$$

που όμως διαφέρουν πειραματικά κατά έναν παράγοντα 10.

SUSY

Chapter 3

OMOΓENEΣ LORENTZ GROUP & SPINORS

3.1 ΟΜΟΓΕΝΕΣ LORENTZ GROUP, DIRAC SPINORS.

Όπως γνωρίζουμε, οι Dirac σπίνορες αποτελούν βάση για μία αναπαράσταση του Lorentz group. Εννοούμε βέβαια το ομογενές Lorentz group το οποίο περιλαμβάνει τις τρεις στροφές και τα τρία Lorentz boosts στο χώρο. Έτσι λοιπόν όπως έχουμε γράψει σε προηγούμενο κεφάλαιο, οι 6 generators του HLG υπακούουν την άλγεβρα:

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i(g_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}) \quad (3.1.1)$$

Στη βάση λοιπόν των Dirac σπινόρων ψάχνουμε μία αναπαράσταση των generators του HLG. Μία αναπαράσταση σε πίνακες των generators είναι η εξής:

$$\Sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (3.1.2)$$

οι οποίοι ικανοποιούν την άλγεβρα Lie της ομάδας Lorentz. Τα στοιχεία λοιπόν του Lorentz group θα είναι:

$$S(\Lambda) = \exp\left\{\frac{i}{2}\lambda_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{8}\lambda_{\mu\nu}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\right\} \quad (3.1.3)$$

όπου $\lambda_{\mu\nu} = -\lambda_{\nu\mu}$ οι 6 παράμετροι του HLG. Όπως είπαμε, τα στοιχεία $S(\Lambda)$, δρουν στο χώρο που ορίζεται από τους Dirac σπίνορες. Ας δούμε ποιο είναι το αποτέλεσμα της δράσης τους πάνω στους σπίνορες (υπενθυμίζουμε ότι οι Dirac σπίνορες είναι σπίνορες 4 συνιστωσών):

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \quad \Psi(x) \longrightarrow \Psi'(x') = S(\Lambda)\Psi(x) \quad (3.1.4)$$

Βρήκαμε δηλαδή το νόμο μετασχηματισμού για έναν Dirac σπίνορα κάτω από το HLG. Πάμε τώρα να ελέγξουμε και πώς μετασχηματίζεται και ο $\bar{\Psi}$. Θα δουλέψουμε στη Standard Representation των γ -πινάκων. Παρακάτω υπενθυμίζουμε τη standard representation και αναφέρουμε κάποιες ιδιότητες που θα χρησιμοποιηθούν στις πράξεις:

$$\text{S.R.} \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.5)$$

ενώ επίσης εύκολα προκύπτουν:

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \quad \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i, \quad [\gamma^i, \gamma^j]^\dagger = -[\gamma^i, \gamma^j], \quad [\gamma^0, \gamma^i]^\dagger = [\gamma^0, \gamma^i] \quad (3.1.6)$$

και κάνοντας τις πράξεις θα πάρουμε:

$$\bar{\Psi}' = \Psi'^\dagger \gamma^0 = (S\Psi)^\dagger \gamma^0 = \Psi^\dagger (S^\dagger \gamma^0) \quad (3.1.7)$$

οπότε πρέπει να υπολογιστεί ο παράγοντας στην παρένθεση:

$$\begin{aligned} S^\dagger \gamma^0 &= \exp\left\{-\frac{1}{8}\lambda_{\mu\nu}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\right\} \gamma^0 = \exp\left\{-\frac{1}{8}(\lambda_{ij}[\gamma^i, \gamma^j]^\dagger + 2\lambda_{0i}[\gamma^0, \gamma^i]^\dagger)\right\} \gamma^0 \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{8}(-\lambda_{ij}[\gamma^i, \gamma^j] + 2\lambda_{0i}[\gamma^0, \gamma^i])\right\} \gamma^0 \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Αναπτύσσοντας τώρα το εκθετικό και εκτελώντας τις πράξεις με τον γ -πίνακα που υπάρχει από δεξιά και συμπύσσοντας ξανά, καθώς και από τις σχέσεις:

$$[\gamma^i, \gamma^j]\gamma^0 = \gamma^0[\gamma^i, \gamma^j], \quad [\gamma^0, \gamma^i]\gamma^0 = -\gamma^0[\gamma^0, \gamma^i] \quad (3.1.9)$$

θα πάρουμε τελικά:

$$S^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \exp\left\{-\frac{1}{8}(-\lambda_{ij}[\gamma^i, \gamma^j] - 2\lambda_{0i}[\gamma^0, \gamma^i])\right\} = \gamma^0 S^{-1} \quad (3.1.10)$$

και έτσι ο σπίνορας $\bar{\Psi}$ κάτω από HLG μετασχηματίζεται ως:

$$\bar{\Psi}' = \Psi^\dagger (S^\dagger \gamma^0) = \Psi^\dagger (\gamma^0 S^{-1}) = \bar{\Psi} S^{-1} \quad (3.1.11)$$

Δηλαδή βλέπουμε πως ο σπίνορας αυτός μετασχηματίζεται διαφορετικά από τον Ψ . Όμως εμείς θέλουμε ο συζυγής σπίνορας (που θα αντιστοιχίσουμε τα αντισωματίδια στη συνέχεια) να μετασχηματίζεται κάτω από HLG με τον ίδιο τρόπο όπως και ο Ψ . Άρα ψάχνουμε σπίνορα που να έχει προφανώς σχέση με τον προηγούμενο και να μετασχηματίζεται όπως ο Ψ . Αυτός θα είναι ο $\Psi^c = C\bar{\Psi}^T$. Όπου ο C είναι ο πίνακας συζυγίας φορτίου με ιδιότητες:

$$\begin{aligned} C^T &= -C, & C\gamma^{\mu T}C^{-1} &= -\gamma^\mu, \\ [\gamma^\mu, \gamma^\nu]^T &= -[\gamma^{\mu T}, \gamma^{\nu T}] = -C^{-1}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]C \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Αρκεί να δείξουμε ότι μετασχηματίζεται όπως και ο Ψ .

$$\Psi'^c = (C\bar{\Psi}'^T)' = C\bar{\Psi}'^T = C(\bar{\Psi}S^{-1})^T = (CS^{-1T})\bar{\Psi}^T \quad (3.1.13)$$

Πρέπει δηλαδή τώρα να υπολογίσουμε τον παράγοντα στην παρένθεση. Θα είναι:

$$\begin{aligned} CS^{-1T} &= C \exp\left\{\frac{1}{8}\lambda_{\mu\nu}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\right\}^T \\ &= C \exp\left\{\frac{1}{8}\lambda_{\mu\nu}[\gamma^{\mu T}, \gamma^{\nu T}]\right\} \\ &= C \exp\left\{-\frac{1}{8}\lambda_{\mu\nu}C^{-1}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]C\right\} \end{aligned}$$

Αναπτύσσουμε το εκθετικό και αντίστροφα:

$$\begin{aligned} CS^{-1T} &= C \left(1 - \frac{1}{8}\lambda_{\mu\nu}C^{-1}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]C + \dots\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{8}\lambda_{\mu\nu}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] + \dots\right) C = SC \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

οπότε για τη μεταβολή του συζυγούς σπίνορα θα πάρουμε:

$$\Psi'^c = (CS^{-1T})\bar{\Psi}'^T = SC\bar{\Psi}'^T = S\Psi^c \quad (3.1.15)$$

Δείξαμε ότι ο σπίνορας μετασχηματίζεται κάτω από το HLG σωστά όπως θέλαμε (ακριβώς όπως ο Ψ). Έτσι λοιπόν κάνοντας μία σύντομη αναφορά στην ερμηνεία των παραπάνω σπινόρων μπορούμε να πούμε πως εάν ο Ψ περιγράφει ένα σωματίδιο, τότε ο Ψ^c θα περιγράφει ένα αντισωματίδιο. Θα πρέπει όμως εδώ να αναφέρουμε και την περίπτωση όπου εξετάζουμε ένα ουδέτερο spin 1/2 σωματίδιο. Τότε προφανώς το σωματίδιο είναι ουσιαστικά το αντισωματίδιό του. Η συνθήκη λοιπόν που θα πρέπει οι σπίνορες να ικανοποιούν είναι:

$$\Psi = \Psi^c \quad (3.1.16)$$

Οι σπίνορες που ικανοποιούν τη συνθήκη αυτή λέγονται *Majorana spinors* και αντίστοιχα η συνθήκη. Θα γίνει εκτεταμένη χρήση τους στη συνέχεια. Ένα παράδειγμα Majorana σπίνορα αποτελεί η θεώρηση των νετρίνων ως Majorana σωματιδίων.

3.2 ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ WEYL.

Όπως γνωρίζουμε η αναπαράσταση των γ - πινάκων που δώσαμε παραπάνω (S.R.) δεν είναι και η μοναδική. Οποιοσδήποτε μετασχηματισμός ομοιότητας στους γ - πίνακες θα μας δώσει μία ισοδύναμη αναπαράσταση, η οποία βέβαια θα ικανοποιεί την άλγεβρα Clifford:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \quad (3.2.1)$$

Σημαντική λοιπόν πέρα από τη Standard Representation είναι η αναπαράσταση Weyl (ή Chiral). Σε αυτήν οι γ - πίνακες παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} \text{Weyl.} \quad \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^5 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Από το Standard Model θυμόμαστε τη μεγάλη χρησιμότητα της Weyl αναπαράστασης. Η διαγώνια μορφή του γ^5 πίνακα την έκανε κατάλληλη για την περιγραφή καταστάσεων διαφορετικής ελίκωσης, καθώς ξεχωρίζει το δεξιόστροφο (2 πάνω συνιστώσες) από το αριστερόστροφο (2 κάτω συνιστώσες) ενός σπίνορα Dirac. Ας πάμε να δούμε τα χαρακτηριστικά αυτά πιο αναλυτικά και να κάνουμε τη σύνδεση με τα παραπάνω και με το HLG.

3.2.1 Αναπαράσταση Weyl και HLG.

Κατ' αρχήν, μπορούμε να πάρουμε μία πιο συγκεντρωτική μορφή για τους γ - πίνακες στην αναπαράσταση αυτή, ως εξής:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{όπου:} \quad \begin{cases} \sigma^\mu = (\sigma^0, \sigma^i) = (-1, \sigma^i) \\ \bar{\sigma}^\mu = (\bar{\sigma}^0, \bar{\sigma}^i) = (-1, -\sigma^i) \end{cases} \quad (3.2.3)$$

Όπως και πριν βρίσκουμε μία αναπαράσταση των generators του ομογενούς Lorentz group σε πίνακες. Αυτή όπως αναφέραμε είναι:

$$\Sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (3.2.4)$$

Κάνοντας τις πράξεις στο μεταθέτη:

$$\begin{aligned} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\nu \\ \bar{\sigma}^\nu & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\nu \\ \bar{\sigma}^\nu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \\ [\gamma^\mu, \gamma^\nu] &= \begin{pmatrix} \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

και ορίζοντας την ποσότητα $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{4} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)$, παίρνουμε τελικά για την αναπαράσταση των generators σε πίνακες:

$$\Sigma^{\mu\nu} \equiv i \begin{pmatrix} \sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix} \quad (3.2.6)$$

Σε τι όμως χρησιμεύει η Weyl αναπαράσταση; Για να το δούμε αυτό, γράφουμε ένα στοιχείο του HLG όπως κάναμε και πριν:

$$S(\Lambda) = \exp\left\{\frac{i}{2} \lambda_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu}\right\} = \begin{pmatrix} \exp\left\{-\frac{1}{2} \lambda_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}\right\} & 0 \\ 0 & \exp\left\{-\frac{1}{2} \lambda_{\mu\nu} \bar{\sigma}^{\mu\nu}\right\} \end{pmatrix} \quad (3.2.7)$$

Παρατηρούμε λοιπόν πως οι μετασχηματισμοί της ομάδας Lorentz παίρνουν διαγώνια μορφή. Όπως θυμόμαστε από τα προηγούμενα ο νόμος μετασχηματισμού για έναν σπίνορα Dirac κάτω από το HLG είναι $\Psi \rightarrow \Psi' = S\Psi$. Άρα είναι σαφές πως η μορφή του S στη Weyl αναπαράσταση αυτό που κάνει είναι να ξεχωρίζει τις 2 πάνω με τις 2 κάτω συνιστώσες ενός σπίνορα Dirac. Όταν βέβαια λέμε “ξεχωρίζει” εννοούμε ότι οι πάνω συνιστώσες ενός σπίνορα Dirac, μετασχηματίζονται διαφορετικά από τις κάτω, κάτω από μετασχηματισμούς της ομάδας Lorentz. Σε αυτό ακριβώς το στοιχείο θα πάμε αμέσως τώρα να ρίξουμε λίγο παραπάνω φως.

Όπως θυμόμαστε από προηγούμενη ανάλυση το ομογενές Lorentz group αποτελείται από 3 στροφές στο χώρο και 3 Lorentz boosts. Η μορφή που έχουμε γράψει παραπάνω για το στοιχείο της ομάδας S

δεν κάνει φανερή αυτή τη δομή. Θα μπορούσαμε όμως να εκφράσουμε αυτά τα στοιχεία εάν χωρίσουμε τις συνιστώσες του παραπάνω πίνακα, ορίζοντας:

$$2\varepsilon_{ijk}\lambda_{ij} = \lambda_k, \quad \lambda_{0i} = \frac{m_i}{4} \quad (3.2.8)$$

και έτσι τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα S γίνονται:

$$\exp\{-\frac{1}{2}\lambda_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\} = \exp\{\frac{i}{2}\vec{\sigma} \cdot (\vec{\lambda} + i\vec{m})\} \quad (3.2.9)$$

$$\exp\{-\frac{1}{2}\lambda_{\mu\nu}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\} = \exp\{\frac{i}{2}\vec{\sigma} \cdot (\vec{\lambda} - i\vec{m})\} \quad (3.2.10)$$

ενώ ο μετασχηματισμός S που ανήκει στο HLG παίρνει τη μορφή:

$$S(\Lambda) = \begin{pmatrix} \exp\{\frac{i}{2}\vec{\sigma} \cdot (\vec{\lambda} + i\vec{m})\} & 0 \\ 0 & \exp\{\frac{i}{2}\vec{\sigma} \cdot (\vec{\lambda} - i\vec{m})\} \end{pmatrix} \quad (3.2.11)$$

Πλέον είναι φανερή η σύνδεση με το Lorentz group. Οι 3 συνιστώσες του λ είναι οι 3 παράμετροι (γωνίες) στροφής στο χώρο, ενώ οι 3 συνιστώσες του m τα 3 Lorentz boosts (οι 3 ταχύτητες). Προχωρώντας παρακάτω τώρα, θα μπορούσαμε να ορίσουμε ένα νέο μέγεθος για να γράψουμε τα παραπάνω πιο οικονομικά:

$$s = \exp\{\frac{i}{2}\vec{\sigma} \cdot (\vec{\lambda} + i\vec{m})\} \quad (3.2.12)$$

Πολύ εύκολα επίσης παίρνουμε:

$$s^{-1} = \exp\{-\frac{i}{2}\vec{\sigma} \cdot (\vec{\lambda} + i\vec{m})\}, \quad s^{-1\dagger} = \exp\{\frac{i}{2}\vec{\sigma} \cdot (\vec{\lambda} - i\vec{m})\} \quad (3.2.13)$$

οπότε ο πίνακας S γίνεται:

$$S(\Lambda) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1\dagger} \end{pmatrix} \quad (3.2.14)$$

Επίσης μπορούμε να δούμε:

$$s^{-1T} = \exp\{-\frac{i}{2}\vec{\sigma}^T \cdot (\vec{\lambda} + i\vec{m})\} \quad (3.2.15)$$

ενώ εκμεταλλευόμενοι τη σχέση $\sigma^2\sigma^{iT}\sigma^2 = -\sigma^i$, παίρνουμε:

$$\sigma^2 s^{-1T} \sigma^2 = s, \quad \sigma^2 s^{-1\dagger} \sigma^2 = s^* \quad (3.2.16)$$

Εδώ παρατηρούμε λοιπόν πως τα δύο διαγώνια στοιχεία του S δε συνδέονται μεταξύ τους με μετασχηματισμό ομοιότητας, αλλά συνδέονται με τα αντίστοιχα μιγαδικά συζυγή (δηλαδή το s συνδέεται με το s^{-1T} αλλά όχι με το $s^{-1\dagger}$ και αντίστροφα). Το γεγονός αυτό έχει μεγάλη σημασία γιατί όπως αναφέραμε, τα στοιχεία ενός Dirac σπίνορα μετασχηματίζονται διαφορετικά κάτω από τους HLG. Άρα λοιπόν και αποτελούν βάσεις για μη ισοδύναμες αναπαραστάσεις. Έτσι λοιπόν στις μεν πάνω συνιστώσες του Ψ αντιστοιχούμε σωματίδια, στις δε κάτω αντισωματίδια. Ακριβώς αυτό το στοιχείο είναι που κρίνει κατάλληλη τη χρήση της Weyl αναπαράστασης. Ότι δηλαδή ξεχωρίζει τις βάσεις για μη ισοδύναμες αναπαραστάσεις. Μας δίνει τη δυνατότητα να μεταχειριστούμε ξεχωριστά τις συνιστώσες αυτές λόγω της διαγώνιας μορφής του.

3.2.2 Weyl σπίνορες.

Με βάση λοιπόν τα παραπάνω εύλογα σκεφτόμαστε ότι μπορούμε να υιοθετήσουμε έναν άλλο τρόπο γραφής για τους σπίνορες dirac. Από τη συζήτηση που κάναμε φαίνεται ότι μπορούμε να θεωρήσουμε το σπίνορα:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} \quad (3.2.17)$$

όπου κάθε ένας από τους 2 σπίνορες είναι σπίνορας 2 συνιστωσών. Αυτούς τους σπίνορες τους ονομάζουμε Weyl spinors. Για να δείξουμε όσα αναφέραμε με λόγια πιο πάνω, ας δοκιμάσουμε να δράσουμε με ένα στοιχείο του Lorentz group πάνω στον Ψ . Να σημειωθεί επίσης ότι η σημασία του “bar” που βάζουμε πάνω από τον η σπίνορα θα φανεί αργότερα. Μετασχηματίζουμε τον Ψ λοιπόν κατά Lorentz.

$$\Psi \longrightarrow \Psi' = S\Psi = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\chi \\ s^{-1\dagger}\bar{\eta} \end{pmatrix} \quad (3.2.18)$$

Όπως βλέπουμε δηλαδή, ο χ σπίνορας μετασχηματίζεται διαφορετικά από τον $\bar{\eta}$ κάτω από το Lorentz group. Αυτό επίσης σημαίνει πως αποτελούνε βάσεις για μη ισοδύναμες αναπαραστάσεις της ομάδας Lorentz. Ξανατονίζουμε ότι η μη ισοδυναμία προκύπτει από το γεγονός ότι οι s και $s^{-1\dagger}$ δε συνδέονται με μετασχηματισμό ομοιότητας. Έχει λοιπόν νόημα όπως φάνηκε να μελετήσουμε τους 2 αυτούς σπίνορες ξεχωριστά κάτω από το Lorentz group και να βρούμε τις ιδιότητες τους, αλλά και να προσπαθήσουμε να εξάγουμε κάποια σχέση μεταξύ τους. Αυτό θα μας απασχολήσει στο επόμενο αυτής της παραγράφου.

Transformation properties of χ : Από τη σχέση που βγάλαμε για το μετασχηματισμό του Ψ βλέπουμε πως οι 2 πάνω συνιστώσες του, ο Weyl σπίνορας χ δηλαδή, μετασχηματίζεται ως:

$$\chi \longrightarrow \chi' = s\chi \quad (3.2.19)$$

Ψάχνουμε τώρα να βρούμε μία Lorentz invariant ποσότητα. Από τη σχέση που συνδέει τους πίνακες s έχουμε βρει ότι $s = \sigma^2 s^{-1T} \sigma^2$ οπότε πολλαπλασιάζοντας από δεξιά με σ^2 και από το γεγονός ότι $\sigma^2 \sigma^2 = 1$ θα πάρουμε:

$$\sigma^2 s = s^{-1T} \sigma^2 \quad (3.2.20)$$

Άρα λοιπόν μπορούμε να εξετάσουμε πλέον την ποσότητα $i\sigma^2\chi$ κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz:

$$i\sigma^2\chi \longrightarrow i\sigma^2\chi' = i\sigma^2 s\chi = s^{-1T}(i\sigma^2\chi) \quad (3.2.21)$$

και παίρνοντας την ανάστροφη ποσότητα θα έχουμε:

$$(i\sigma^2\chi)^T \longrightarrow [s^{-1T}(i\sigma^2\chi)]^T = (i\sigma^2\chi)^T s^{-1} \quad (3.2.22)$$

Παρατηρούμε έτσι ότι το μέγεθος:

$$(i\sigma^2\chi)^T \chi \longrightarrow (i\sigma^2\chi)^T s^{-1} s\chi = (i\sigma^2\chi)^T \chi \quad (3.2.23)$$

παραμένει Lorentz invariant κάτω από τους μετασχηματισμούς της ομογενούς ομάδας Lorentz. Μπορούμε λοιπόν να θέσουμε δείκτες στους σπίνορές μας ως εξής:

$$\chi \equiv \chi_\alpha = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \quad (3.2.24)$$

και από την προηγούμενη σχέση μπορούμε να δώσουμε αντίστοιχους πάνω δείκτες στον σπίνορα χ :

$$\chi^\alpha = \begin{pmatrix} \chi^1 \\ \chi^2 \end{pmatrix} = i\sigma^2\chi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_2 \\ -\chi_1 \end{pmatrix} \quad (3.2.25)$$

Έτσι λοιπόν το αναλλοίωτο κατά Lorentz μέγεθος γράφεται:

$$(i\sigma^2\chi)^T \chi = \chi^\alpha \chi_\alpha : \quad \text{Lorentz invariant} \quad (3.2.26)$$

Επιπλέον στο χώρο που ορίζουν οι Weyl σπίνορες χ , μπορούμε να ορίσουμε έναν μετρικό τανυστή, ο οποίος θα ανεβάζει και θα κατεβάζει τους δείκτες. Αυτός είναι ουσιαστικά εμφανής στη σχέση που εξήγηθη για τη σύνδεση του χ^α με το χ_α και είναι:

$$\chi^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} \chi_\beta, \quad \varepsilon^{\alpha\beta} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.27)$$

Αντίστοιχα ο τανυστής που κατεβάζει τους δείκτες:

$$\chi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} \chi^\beta, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.28)$$

Οι δύο τανυστές αυτοί είναι αντίστροφοι ο ένας του άλλου αφού έχουμε:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma \quad (3.2.29)$$

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε οι τανυστές που έχουμε ορίσει είναι αντισυμμετρικοί. Το γεγονός αυτό διαδραματίζει σπουδαίο ρόλο στη φύση των Weyl σπινόρων, γιατί από την αντισυμμετρικότητα αυτή πηγάζει η Grassmann φύση τους. Αυτό το βλέπουμε καθαρά από το Lorentz invariant μέγεθος που υπολογίσαμε:

$$\chi^\alpha \chi_\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} \chi_\beta \varepsilon_{\alpha\gamma} \chi^\gamma = -\varepsilon^{\beta\alpha} \varepsilon_{\alpha\gamma} \chi_\beta \chi^\gamma = -\delta_\gamma^\beta \chi_\beta \chi^\gamma = -\chi_\alpha \chi^\alpha \quad (3.2.30)$$

όπου θέσαμε $\varepsilon^{\alpha\beta} = -\varepsilon^{\beta\alpha}$ ακριβώς λόγω της αντισυμμετρικότητας και ξαναβάλαμε τους δείκτες α στο τέλος αφού είναι “βουβοί” δείκτες. Βρήκαμε λοιπόν:

$$\chi^\alpha \chi_\alpha = -\chi_\alpha \chi^\alpha \Rightarrow \{\chi_\alpha, \chi^\alpha\} = 0 \quad (3.2.31)$$

Δηλαδή οι σπίνορες Weyl αντιμετατίθενται. Δεν ισχύει όπως στα κλασσικά μας τετρανύσματα $A_\mu A^\mu = A^\mu A_\mu$ όπου εκεί έχουμε το συμμετρικό μετρικό τανυστή του χωροχρόνου $g_{\mu\nu}$. Αυτή ακριβώς η ιδιότητα είναι ιδιότητα των αριθμών Grassmann και έτσι οι Weyl σπίνορες είναι Grassmann ποσότητες, ως απόρροια της αντισυμμετρικότητας του μετρικού τανυστή του χώρου που ορίζουν. Είμαστε επίσης σε θέση να ορίσουμε και την ποσότητα $(\chi)^2$ ως εξής:

$$\begin{aligned} (\chi)^2 &= \chi^\alpha \chi_\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} \chi_\alpha \chi_\beta = \varepsilon_{\alpha\beta} \chi^\alpha \chi^\beta \\ &= -\chi^1 \chi^2 + \chi^2 \chi^1 = -2\chi^1 \chi^2 = 2\chi^2 \chi^1 \\ &= 2\chi_2 \chi_1 = -2\chi_1 \chi_2 \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

ενώ για 2 Weyl σπίνορες χ και η θα έχουμε:

$$\chi\eta = \chi^\alpha \eta_\alpha = -\chi_\alpha \eta^\alpha = \eta^\alpha \chi_\alpha = \eta\chi \quad (3.2.33)$$

Αυτά για τους σπίνορες χ . Μας έμεινε βέβαια η αντίστοιχη διαδικασία και για τους σπίνορες $\bar{\eta}$. Στο σημείο αυτό ήδη φαίνεται πια καθαρά ο λόγος για τον οποίον έχουμε βάλει το “bar” πάνω από τους $\bar{\eta}$ σπίνορες. Ο λόγος είναι προφανώς το γεγονός ότι κάτω από το Lorentz group μετασχηματίζονται διαφορετικά. Οπότε και θα έχουν διαφορετικές ιδιότητες ενώ επίσης θα συγκροτούν άλλη βάση για αναπαραστάσεις. Γι αυτό λοιπόν θα πρέπει να συμβολίζονται διαφορετικά ώστε να υπάρχει σαφής διαχωρισμός για το ποιά ποσότητα μας ενδιαφέρει. Ας πάμε να δούμε και τις δικίες τους ιδιότητες τώρα.

Transformation properties of $\bar{\eta}$: Σε αντιστοιχία με τα προηγούμενα, μπορούμε να υιοθετήσουμε ανάλογο συμβολισμό δεικτών, όπου τώρα τους δείκτες μας θα τους γράφουμε με ένα “dot” από πάνω για τους λόγους που μόλις αναφέραμε (ξανατονίζουμε ότι οι χ και $\bar{\eta}$ αποτελούν βάσεις διαφορετικών χώρων). Κατ’ αντιστοιχία τους Weyl σπίνορες που ορίζονται στο χώρο που ορίζουν τα χ_α θα τους λέμε “undotted”, ενώ τους Weyl σπίνορες που ορίζονται στο χώρο που ορίζουν οι $\bar{\eta}$ θα τους λέμε “dotted”. Έτσι λοιπόν κατ’ αντιστοιχία συμβολίζουμε:

$$\bar{\eta} \equiv \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} = \begin{pmatrix} \bar{\eta}^{\dot{1}} \\ \bar{\eta}^{\dot{2}} \end{pmatrix} \quad (3.2.34)$$

ενώ παράλληλα υπενθυμίζουμε το νόμο μετασχηματισμού για τους dotted σπίνορες:

$$\bar{\eta} \longrightarrow \bar{\eta}' = s^{-1\dagger} \bar{\eta} \quad (3.2.35)$$

Όπως και στην περίπτωση του χ σπίνορα, τώρα ψάχνουμε τη Lorentz invariant παράσταση. Παρατηρούμε λοιπόν ότι:

$$-i\sigma^2\bar{\eta} \longrightarrow -i\sigma^2\bar{\eta}' = -i\sigma^2 s^{-1\dagger}\bar{\eta} \quad (3.2.36)$$

ενώ από τις σχέσεις για τους s πίνακες που έχουμε υπολογίσει πιο πάνω, $\sigma^2 s^{-1\dagger}\sigma^2 = s^*$ και πολλαπλασιάζοντας από δεξιά με σ^2 παίρνουμε:

$$\sigma^2 s^{-1\dagger} = s^* \sigma^2 \quad (3.2.37)$$

έτσι λοιπόν θα είναι:

$$-i\sigma^2\bar{\eta} \longrightarrow -is^*\sigma^2\bar{\eta} = s^*(-i\sigma^2\bar{\eta}) \quad (3.2.38)$$

Παίρνοντας το μετασχηματισμό κάτω από το HLG της ανάστροφης ποσότητας:

$$(-i\sigma^2\bar{\eta})^T \longrightarrow [s^*(-i\sigma^2\bar{\eta})]^T = (-i\sigma^2\bar{\eta})^T s^\dagger \quad (3.2.39)$$

Η Lorentz invariant ποσότητα λοιπόν θα είναι:

$$(-i\sigma^2\bar{\eta})^T \bar{\eta} \longrightarrow (-i\sigma^2\bar{\eta})^T s^\dagger s^{-1\dagger}\bar{\eta} = (-i\sigma^2\bar{\eta})^T \bar{\eta} \quad (3.2.40)$$

Από τα παραπάνω μπορούμε να αποδώσουμε και κάτω δείκτες στους dotted σπίνορες:

$$\bar{\eta}_{\dot{\alpha}} = \begin{pmatrix} \bar{\eta}_{\dot{1}} \\ \bar{\eta}_{\dot{2}} \end{pmatrix} = -i\sigma^2\bar{\eta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\eta}^{\dot{1}} \\ \bar{\eta}^{\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{\eta}^{\dot{2}} \\ \bar{\eta}^{\dot{1}} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \bar{\eta}_{\dot{1}} \\ \bar{\eta}_{\dot{2}} \end{pmatrix} \quad (3.2.41)$$

Άρα λοιπόν το Lorentz invariant είναι:

$$(-i\sigma^2\bar{\eta})^T \bar{\eta} \equiv \bar{\eta}_{\dot{\alpha}}\bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \quad \text{Lorentz invariant} \quad (3.2.42)$$

Επιπλέον ο χώρος που ορίζουν οι dotted Weyl σπίνορες, ορίζει με τη σειρά του ένα νέο μετρικό ταυυστή του οποίου τα στοιχεία είναι:

$$\bar{\eta}^{\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\eta}_{\dot{\beta}} \longrightarrow \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.43)$$

και αντίστοιχα:

$$\bar{\eta}_{\dot{\alpha}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\eta}^{\dot{\beta}} \longrightarrow \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.44)$$

Παρατηρούμε εδώ πως και αυτοί οι μετρικοί ταυυστές είναι αντισυμμετρικοί, πράγμα που σημείνει πως και αυτοί οι σπίνορες είναι Grassmann ποσότητες (υπακούουν την Grassmann άλγεβρα), δηλαδή αντιμετατίθενται. Υπάρχει επίσης όπως φαίνεται και άμεση σύνδεση με τους μετρικούς ταυυστές του χώρου που ορίζουν οι undotted σπίνορες, καθώς:

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = i\sigma^2, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -i\sigma^2 \quad (3.2.45)$$

Κλείνουμε την παράγραφο αυτή, αναφέροντας πως όπως είδαμε μέχρι στιγμής έχουμε 4 τύπους Weyl σπινόρων: $\chi_\alpha, \chi^\alpha, \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}$ και $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$. Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να εξάγουμε μία σχέση μεταξύ των dotted και undotted σπινόρων.

Σχέση dotted - undotted σπινόρων: Όπως δείξαμε πιο πάνω το χ_α κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz γίνεται:

$$\chi_\alpha \longrightarrow \chi'_\alpha = s_\alpha{}^\beta \chi_\beta \quad (3.2.46)$$

Αντίστοιχα για τους χ^α σπίνορες θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \chi^\alpha \longrightarrow \chi'^\alpha &= \varepsilon^{\alpha\beta} \chi'_\beta = \varepsilon^{\alpha\beta} s_\beta{}^\gamma \chi_\gamma = \varepsilon^{\alpha\beta} s_\beta{}^\gamma \varepsilon_\gamma{}^\delta \chi^\delta \\ &= [(i\sigma^2) s (-i\sigma^2)]^\alpha{}_\delta \chi^\delta = (\sigma^2 s \sigma^2)^\alpha{}_\delta \chi^\delta \\ &= (s^{-1T})^\alpha{}_\beta \chi^\beta \end{aligned} \quad (3.2.47)$$

εδώ παρατηρούμε από τις 2 τελευταίες ισότητες πως οι s και s^{-1T} συνδέονται μεταξύ τους με μετασχηματισμό ομοιότητας. Αυτό σημαίνει ότι οι χ_α και χ^α αποτελούν βάσεις για ισοδύναμες αναπαράστασεις. Όμοια λειτουργούμε για τους dotted σπίνορες:

$$\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \longrightarrow \bar{\chi}'^{\dot{\alpha}} = (s^{-1\dot{\dagger}})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{\chi}^{\dot{\beta}} \quad (3.2.48)$$

και για κάτω dotted δείκτες:

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \longrightarrow \bar{\chi}'_{\dot{\alpha}} &= \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\chi}^{\dot{\beta}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} (s^{-1\dot{\dagger}})^{\dot{\beta}}_{\dot{\gamma}} \bar{\chi}^{\dot{\gamma}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} (s^{-1\dot{\dagger}})^{\dot{\beta}}_{\dot{\gamma}} \varepsilon^{\dot{\gamma}\dot{\delta}} \bar{\chi}_{\dot{\delta}} \\ &= [(-i\sigma^2)s^{-1\dot{\dagger}}(i\sigma^2)]^{\dot{\delta}}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}_{\dot{\delta}} = (\sigma^2 s^{-1\dot{\dagger}} \sigma^2)^{\dot{\delta}}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}_{\dot{\delta}} \\ &= (s^*)^{\dot{\delta}}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}_{\dot{\delta}} \end{aligned} \quad (3.2.49)$$

και πάλι παρατηρώντας τις 2 τελευταίες ισότητες φαίνεται πως ο s^* προκύπτει ως μετασχηματισμός ομοιότητας από τον $s^{-1\dot{\dagger}}$. Αυτό επίσης σημαίνει ότι οι $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$ και $\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}$ αποτελούν βάσεις για ισοδύναμες αναπαράστασεις. Τώρα συγκρίνοντας τις 4 παραπάνω σχέσεις βλέπουμε ότι οι dotted σπίνορες έχουν πίνακα μετασχηματισμού ο οποίος είναι το complex conjugate του πίνακα μετασχηματισμού των undotted σπινόρων. Οπότε η σχέση που συνδέει τις 2 κατηγορίες αυτές, είναι προφανώς ότι οι dotted σπίνορες είναι το μιγαδικό συζυγές των undotted σπινόρων. Μαθηματικά τα παραπάνω αποτυπώνονται από τις σχέσεις:

$$\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = (\chi_\alpha)^* \quad (3.2.50)$$

$$\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = (\chi^\alpha)^* \quad (3.2.51)$$

και εδώ πια φαίνεται καθαρά η χρησιμότητα του “bar” πάνω από τους dotted σπίνορες. Σημαίνει ότι οι σπίνορες αυτοί είναι το μιγαδικό συζυγές των undotted. Προχωρώντας τώρα πιο κάτω, έχει σημασία να πάμε και να εκφράσουμε τη Majorana condition σε γλώσσα με σπίνορες 2 συνιστωσών (Weyl) αντί για σπίνορες Dirac όπως είχαμε δει πιο πάνω.

Majorana condition: Κατ’ αρχήν πριν πάμε να επιβάλλουμε τη Majorana condition, υπενθυμίζουμε τους majorana σπίνορες 4 συνιστωσών που είδαμε πιο πάνω.

$$\Psi^c \equiv C\bar{\Psi}^T, \quad C\gamma^{\mu T}C^{-1} = -\gamma^\mu, \quad C^T = -C \quad (3.2.52)$$

Πάμε λοιπόν τώρα να εκφράσουμε τα παραπάνω με σπίνορες 2 συνιστωσών. Πρώτα όμως πρέπει να υπολογίσουμε τον charge conjugation matrix C . Για την Weyl αναπαράσταση των γ - πινάκων στην οποία δουλεύουμε (όπου οι γ^0 και γ^2 είναι διαγώνιοι) ο πίνακας C παίρνει τη μορφή:

$$C \equiv i\gamma^2\gamma^0 = i \begin{pmatrix} -\sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = -i \begin{pmatrix} -\sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} \quad (3.2.53)$$

Οπότε μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το συζυγή σπίνορα. Ο Ψ εκφράζεται όπως είδαμε σε σπίνορες 2 συνιστωσών ως $\Psi = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$ οπότε:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}^T &= (\Psi^\dagger \gamma^0)^T = [(\chi_\alpha^* \quad \bar{\eta}^{\dot{\alpha}*})\gamma^0]^T = [(\bar{\chi}_\alpha \quad \eta^\alpha)\gamma^0]^T \\ &= (\eta^\alpha \quad \bar{\chi}_\alpha)^T = \begin{pmatrix} \eta^\alpha \\ \bar{\chi}_\alpha \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.54)$$

και έτσι ο συζυγής σπίνορας θα είναι:

$$\Psi^c \equiv C\bar{\Psi}^T = i \begin{pmatrix} -\sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^\alpha \\ \bar{\chi}_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma^2\eta^\alpha \\ i\sigma^2\bar{\chi}_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (3.2.55)$$

Άρα λοιπόν όταν μιλούμε για Majorana σωματίδια, η συνθήκη που επιβάλλουμε απαιτεί:

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \equiv \Psi^c \quad (3.2.56)$$

ή αλλιώς όπως φαίνεται καθαρά $\chi=\eta$. Οπότε για ένα Majorana σωματίδιο:

$$\Psi = \Psi^c = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (3.2.57)$$

γενικά μπορούμε να γράψουμε:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\chi}_c^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \Psi^c = \begin{pmatrix} \chi_{c\alpha} \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (3.2.58)$$

με Majorana condition $\chi = \chi_c$.

3.2.3 Πίνακες Pauli.

Το κομμάτι αυτό είναι καθαρά φορμαλιστικό και θα εξάγουμε κάποιες πολύ χρήσιμες σχέσεις για τους πίνακες Pauli και την έκφρασή τους με dotted και undotted δείκτες, για αναφορά στη συνέχεια και χρήση στους μετέπειτα υπολογισμούς. Για αρχή θα εξετάσουμε πώς μετασχηματίζονται οι πίνακες Pauli κάτω από μετασχηματισμούς της ομογενούς ομάδας Lorentz. Προς τούτο, ας πάρουμε για αρχή τη συναλλοίωτη (covariant) εξίσωση του Dirac και ας επιβάλλουμε μετασχηματισμό κάτω από την ομάδα Lorentz:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi(x) = m\Psi(x) \longrightarrow i\gamma^\mu \partial'_\mu \Psi'(x') = m\Psi'(x') \quad (3.2.59)$$

όπου:

$$\Psi(x) \longrightarrow \Psi'(x') = S(\Lambda)\Psi(x) \quad (3.2.60)$$

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (3.2.61)$$

και θυμίζουμε τον κανόνα παραγώγισης:

$$\partial'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu \quad (3.2.62)$$

οπότε και η μετασχηματισμένη παράσταση θα γίνει:

$$i\gamma^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu S(\Lambda)\Psi(x) = mS(\Lambda)\Psi(x) \quad (3.2.63)$$

Από το νόμο μετασχηματισμού του x^μ ($\Lambda^\mu{}_\nu$ είναι ο πίνακας των συντελεστών των μετασχηματισμών Lorentz) παίρνουμε πολλαπλασιάζοντας από αριστερά και τα 2 μέλη με $(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu$:

$$(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu x'^\mu = (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = \delta^\rho{}_\nu x^\nu = x^\rho \quad (3.2.64)$$

και συγκρίνοντας με τον κανόνα παραγώγισης που δώσαμε πιο κάτω θα είναι:

$$(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \quad (3.2.65)$$

Αντικαθιστούμε:

$$i\gamma^\mu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu S(\Lambda)\Psi(x) = mS(\Lambda)\Psi(x) \quad (3.2.66)$$

Από το γεγονός ότι η μερική παράγωγος στο 1ο μέλος δρα μόνο στο Ψ , μπορούμε να περάσουμε το $S(\Lambda)$ απ' έξω. Παράλληλα πολλαπλασιάζουμε και τα 2 μέλη με $S^{-1}(\Lambda)$ από αριστερά και κάνουμε ένα relabelling στους βουβούς δείκτες, οπότε παίρνουμε:

$$i \left\{ S^{-1}(\Lambda)\gamma^\nu (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu S(\Lambda) \right\} \partial_\mu \Psi(x) = m\Psi(x) \quad (3.2.67)$$

Όμως πέρα από αυτά ισχύει προφανώς και η εξίσωση Dirac $i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi(x) = m\Psi(x)$, οπότε εξισώνοντας τα 2 μέλη παίρνουμε:

$$\gamma^\mu = S^{-1}(\Lambda)\gamma^\nu (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu S(\Lambda) \quad (3.2.68)$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα από δεξιά με $\Lambda^\rho{}_\mu$, από τη $\Lambda^\rho{}_\mu (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \delta^\rho{}_\nu$ παίρνουμε:

$$\Lambda^\rho{}_\mu \gamma^\mu = S^{-1}(\Lambda) \gamma^\rho S(\Lambda) \quad (3.2.69)$$

και τέλος πολλαπλασιάζοντας με S από αριστερά και S^{-1} από δεξιά έχουμε:

$$\gamma^\rho = S(\Lambda) \Lambda^\rho{}_\mu \gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) \quad (3.2.70)$$

επίσης να αναφέρουμε εδώ πως η αναλλοiotητα κατά Lorentz του $x^\mu x_\mu$ μας δίνει:

$$x^\mu x_\mu = x'^\mu x'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \Lambda_\mu{}^\gamma x_\gamma \Rightarrow \Lambda_\mu{}^\gamma = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \quad (3.2.71)$$

Παραπέρα τώρα, όπως είδαμε στην αρχή του κεφαλαίου, είναι:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad S(\Lambda) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1\dagger} \end{pmatrix} \quad (3.2.72)$$

οπότε αντικαθιστώντας θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\rho \\ \bar{\sigma}^\rho & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1\dagger} \end{pmatrix} \Lambda^\rho{}_\mu \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1\dagger} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \Lambda^\rho{}_\mu \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & s^\dagger \end{pmatrix} \\ &= \Lambda^\rho{}_\mu \begin{pmatrix} 0 & s\sigma^\mu s^\dagger \\ s^{-1\dagger} \bar{\sigma}^\mu s^{-1} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.73)$$

Άρα οι πίνακες Pauli ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \sigma^\rho &= \Lambda^\rho{}_\mu s \sigma^\mu s^\dagger \\ \bar{\sigma}^\rho &= \Lambda^\rho{}_\mu s^{-1\dagger} \bar{\sigma}^\mu s^{-1} \end{aligned} \quad (3.2.74)$$

Σχέσεις dotted - undotted πινάκων Pauli: Είμαστε τώρα σε θέση να αποδώσουμε δείκτες στους πίνακες Pauli. Για να το κάνουμε αυτό ανακαλούμε τη συζήτηση για το νόμο μετασχηματισμού κάτω από το lorentz group των Weyl σπινόρων. Όπως είδαμε οι s και s^{-1} παίρνουν undotted δείκτες, ενώ αντίστοιχα οι s^\dagger , $s^{-1\dagger}$ παίρνουν dotted. Επιπλέον οι σ^μ πίνακες θα έχουν φυσικά κάτω δείκτες και οι $\bar{\sigma}^\mu$ πάνω δείκτες. Έτσι θα είναι:

$$\sigma^\mu \equiv \sigma^\mu_{\alpha\beta}, \quad \bar{\sigma}^\mu \equiv \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\dot{\beta}} \quad (3.2.75)$$

Η σχέση τους προκύπτει με χρήση των μετρικών τανυστών:

$$\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \sigma^\mu_{\beta\dot{\beta}} \quad (3.2.76)$$

Αντίστοιχα οι σχέσεις που γράψαμε πριν θα γίνουν:

$$\sigma^\rho_{\alpha\dot{\beta}} = \Lambda^\rho{}_\mu s_\alpha{}^\gamma \sigma^\mu_{\gamma\dot{\delta}} (s^\dagger)^\delta{}_{\dot{\beta}} \quad (3.2.77)$$

Μπορούμε επίσης να εξάγουμε μία σχέση μεταξύ τους με μόνο κάτω δείκτες:

$$\bar{\sigma}^\mu_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\delta}} \varepsilon_{\beta\rho} \bar{\sigma}^{\mu\dot{\delta}\rho} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\delta}} \bar{\sigma}^{\mu\dot{\delta}\rho} \varepsilon_{\rho\beta}^T \quad (3.2.78)$$

Όμως εύκολα βλέπουμε ότι $\varepsilon_{\rho\beta}^T = i\sigma^2$ οπότε:

$$\bar{\sigma}^\mu_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = [(-i\sigma^2) \bar{\sigma}^\mu (i\sigma^2)]_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = (\sigma^2 \bar{\sigma}^\mu \sigma^2)_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \quad (3.2.79)$$

Εκτελώντας ξεχωριστά για κάθε συνιστώσα, βρίσκουμε:

$$\sigma^2 \bar{\sigma}^0 \sigma^2 = \sigma^{0T}, \quad \sigma^2 \bar{\sigma}^1 \sigma^2 = \sigma^{1T}, \quad \sigma^2 \bar{\sigma}^2 \sigma^2 = \sigma^{2T}, \quad \sigma^2 \bar{\sigma}^3 \sigma^2 = \sigma^{3T} \quad (3.2.80)$$

Δηλαδή είναι γενικά $\sigma^2 \bar{\sigma}^\mu \sigma^2 = \sigma^{\mu T}$ και έτσι παίρνουμε τη σχέση με κάτω δείκτες:

$$\bar{\sigma}^\mu_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \left(\sigma^\mu_{\alpha\beta} \right)^T = \sigma^\mu_{\beta\dot{\alpha}} \quad (3.2.81)$$

Σχέσεις πληρότητας (completeness relations): Σημαντικές για τους υπολογισμούς μας είναι επίσης και 2 σχέσεις πληρότητας που μπορούν να εξαχθούν για τους πίνακες που παρουσιάστηκαν μόλις τώρα. Για την 1η εξ' αυτών ξεκινάμε από την άλγεβρα που ικανοποιούν οι γ - πίνακες:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} I_{2 \times 2}, \quad \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.82)$$

Αντικαθιστούμε και κάνουμε τις πράξεις:

$$\begin{pmatrix} \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \end{pmatrix} = 2\eta^{\mu\nu} I_{2 \times 2} \quad (3.2.83)$$

και εξισώνοντας:

$$\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu = \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} I_{2 \times 2} \quad (3.2.84)$$

Παρατηρούμε ότι ουσιαστικά έχουμε πάρει το ίχνος του παραπάνω πίνακα:

$$Tr(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu) = 4\eta^{\mu\nu} \quad (3.2.85)$$

Εύκολα επίσης μπορούμε να δούμε:

$$\begin{aligned} Tr(\sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu) &= Tr(\sigma^\nu \sigma^2 \sigma^\mu \sigma^2) = Tr(\sigma^2 \sigma^\nu \sigma^2 \sigma^\mu) \\ &= Tr(\bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu) = Tr(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu) \end{aligned} \quad (3.2.86)$$

οπότε:

$$Tr(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu) = 2Tr(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu) = 4\eta^{\mu\nu} \quad (3.2.87)$$

Η 1η λοιπόν σχέση πληρότητας είναι:

$$Tr(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu) = \sigma_{\alpha\beta}^\mu \bar{\sigma}^{\nu\beta\alpha} = 2\eta^{\mu\nu} \quad (3.2.88)$$

(υπενθυμίζουμε τη μορφή της μετρικής του χωροχρόνου $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1 \ -1 \ -1 \ -1)$).

Για την εξαγωγή της 2ης σχέσης πληρότητας χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι κάθε 2×2 πίνακας A , μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$A = \frac{1}{2} (Tr A) I_{2 \times 2} + \frac{1}{2} [Tr(\sigma^i A)] \sigma^i \quad (3.2.89)$$

Γράφουμε τους παραπάνω όρους σε άλλη μορφή με δείκτες. Υπενθυμίζουμε εδώ και παρουσιάζουμε συγκεντρωτικά τα στοιχεία των σ^μ και $\bar{\sigma}^\mu$ όπως τους ορίσαμε στην αρχή του κεφαλαίου:

$$\sigma^0 = \sigma_0 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\sigma}^0 = \bar{\sigma}_0 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2.90)$$

$$\sigma^1 = -\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\sigma}^1 = -\bar{\sigma}_1 = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.91)$$

$$\sigma^2 = -\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\sigma}^2 = -\bar{\sigma}_2 = -\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.92)$$

$$\sigma^3 = -\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\sigma}^3 = -\bar{\sigma}_3 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.2.93)$$

Οπότε για τον 1ο όρο θα είναι:

$$\bar{\sigma}^{0\dot{\alpha}\beta} A_{\beta\dot{\alpha}} = \bar{\sigma}^{0\dot{1}1} A_{1\dot{1}} + \bar{\sigma}^{0\dot{2}2} A_{2\dot{2}} = -(A_{1\dot{1}} + A_{2\dot{2}}) = -Tr A \quad (3.2.94)$$

οπότε:

$$(Tr A) I_{2 \times 2} = \sigma_0 \bar{\sigma}^{0\dot{\alpha}\beta} A_{\beta\dot{\alpha}} \quad (3.2.95)$$

για τον άλλο όρο είναι:

$$Tr(\sigma^i A) = -\bar{\sigma}^{i\dot{\rho}\sigma} A_{\sigma\dot{\rho}} \quad (3.2.96)$$

και πολλαπλασιάζοντας με σ^i παίρνουμε:

$$\sigma^i Tr(\sigma^i A) = -\sigma^i \bar{\sigma}^{i\dot{\rho}\sigma} A_{\sigma\dot{\rho}} = \sigma_i \bar{\sigma}^{i\dot{\rho}\sigma} A_{\sigma\dot{\rho}} \quad (3.2.97)$$

Αντικαθιστούμε στην αρχική σχέση και θα έχουμε τελικά:

$$\begin{aligned} A_{\rho\dot{\sigma}} &= \frac{1}{2} \sigma_{0\rho\dot{\sigma}} \bar{\sigma}^{0\dot{\alpha}\beta} A_{\beta\dot{\alpha}} + \frac{1}{2} \sigma_{i\rho\dot{\sigma}} \bar{\sigma}^{i\dot{\rho}\sigma} A_{\sigma\dot{\rho}} \\ &= \frac{1}{2} \sigma_{\mu\rho\dot{\sigma}} \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta} A_{\beta\dot{\alpha}} \end{aligned} \quad (3.2.98)$$

και αφού όπως είπαμε αρχικά ο A είναι τυχαίος πίνακας, παίρνουμε τη 2η σχέση πληρότητας:

$$\sigma_{\mu\rho\dot{\sigma}} \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta} = 2\delta_{\rho}^{\beta} \delta_{\dot{\sigma}}^{\dot{\alpha}} \quad (3.2.99)$$

Chapter 4

WESS - ZUMINO MODEL

4.1 ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ WESS - ZUMINO

Η Supersymmetry (SUSY) είναι η συμμετρία η οποία αναμιγνύει μποζόνια με φερμιόνια. Άρα λοιπόν για να πάμε να κάνουμε θεωρία θα πρέπει πρώτα να καθορίσουμε το πλαίσιο στο οποίο θα δουλέψουμε. Αυτό σημαίνει πως θα πρέπει να φτιάξουμε μία Lagrangian αρχικά. Προφανώς αυτή θα πρέπει να περιέχει μποζόνια και φερμιόνια. Ως πρώτη παρατήρηση εδώ αναφέρουμε το γεγονός ότι αφού μιλάμε για συμμετρία μποζονίων - φερμιονίων συνεπώς θα πρέπει και οι βαθμοί ελευθερίας μποζονίων και φερμιονίων να είναι ίσοι στη Lagrangian μας. Έπειτα εφόσον μιλάμε για συμμετρία, θα πρέπει να ορίσουμε και τους κατάλληλους μετασχηματισμούς οι οποίοι θα αφήνουν τη δράση αναλλοίωτη. Προφανώς πάλι αφού μιλάμε για συμμετρία μποζονίων - φερμιονίων (SUSY) θα πρέπει αυτοί οι μετασχηματισμοί να αναμιγνύουν τα μποζονικά με τα φερμιονικά πεδία. Το μοντέλο που προκύπτει ονομάζεται Wess - Zumino και η εξαγωγή και ο έλεγχός του, θα μας απασχολήσει σε αυτό το κεφάλαιο.

4.1.1 Lagrangian & SUSY transformations.

Ξεκινάμε με τη Lagrangian. Όπως τονίσαμε, θέλουμε φερμιονικά και μποζονικά πεδία. Η πιο απλή μορφή που μπορεί να σχεφτεί κανείς είναι η εξής:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu A)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu B)^2 + \frac{i}{4}\bar{\Psi}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Psi \quad (4.1.1)$$

όπου: $\overleftrightarrow{\partial}_\mu = \overrightarrow{\partial}_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu$. Οπότε δηλαδή ο 3ος όρος θα γίνει:

$$\frac{i}{4}\bar{\Psi}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Psi = \frac{i}{4}\bar{\Psi}\gamma^\mu (\partial_\mu \Psi) - \frac{i}{4}(\partial_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi \quad (4.1.2)$$

Εδώ τα πεδία A , B είναι *πραγματικά βαθμωτά*, ενώ το Ψ είναι ένας *Majorana σπίνορας 4 συνιστωσών*. Θα πρέπει εδώ να τονίσουμε το εξής: Είχαμε πει πιο πάνω πως αφού θέλουμε συμμετρία μεταξύ μποζονίων και φερμιονίων, θα πρέπει οι βαθμοί ελευθερίας των πεδίων που θα εισάγουμε στη Lagrangian να είναι ίσοι. Εδώ αν μετρήσουμε βαθμούς ελευθερίας θα δούμε πως έχουμε 2 για μποζόνια (2 scalars) και 4 για φερμιόνια (1 Dirac spinor). Θα δούμε αργότερα πως η ίδια η θεωρία θα απαιτήσει την εισαγωγή δύο ακόμα βαθμωτών πεδίων (ή όρου μάζας) με φυσικό τρόπο. Προς το παρόν όμως μεταχειριζόμαστε τη Lagrangian ως έχει. Θα μπορούσαμε αντί για 2 πραγματικά βαθμωτά πεδία να θεωρήσουμε ένα μιγαδικό βαθμωτό (οι βαθμοί ελευθερίας δεν αλλάζουν):

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(A - iB) \quad (4.1.3)$$

οπότε και η Lagrangian θα γίνει:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi^*) + \frac{i}{4}\bar{\Psi}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Psi \quad (4.1.4)$$

Τώρα λοιπόν, αφού έχουμε πάρει τη γενική μορφή της Lagrangian είμαστε σε θέση να ψάξουμε και να βρούμε μετασχηματισμούς υπερσυμμετρίας οι οποίοι θα αναμιγνύουν τα μποζονικά και φερμιονικά πεδία. Προσοχή χρειάζεται εδώ στις διαστάσεις καθώς θέλουμε μετασχηματισμούς από πεδία βαθμωτά σε πεδία σπινωρικά. Οπότε οι παράμετροι των μετασχηματισμών δε θα είναι αριθμοί, αλλά κατάλληλοι σπίνορες. Για παράδειγμα όταν μετασχηματίζεται το πεδίο A στο Ψ , θα πρέπει το αποτέλεσμα της μεταβολής να είναι βαθμωτό μέγεθος. Δηλαδή ο Ψ θα πρέπει να πολλαπλασιαστεί κατάλληλα ώστε να δώσει αριθμό. Έτσι λοιπόν οι παράμετροί μας θα είναι Majorana σπίνορες 4 συνιστωσών. Η διαδικασία θα ακολουθηθεί κάπως αντίστροφα εδώ. Θα θεωρήσουμε μετασχηματισμούς υπερσυμμετρίας και θα δείξουμε έπειτα ότι αυτοί αφήνουν τη δράση αναλλοίωτη. Έτσι λοιπόν οι SUSY μετασχηματισμοί είναι:

$$\delta A = \bar{\epsilon}\Psi \quad (4.1.5)$$

$$\delta B = i\bar{\epsilon}\gamma^5\Psi \quad (4.1.6)$$

$$\delta\Psi = -i\gamma^\mu\epsilon(\partial_\mu A) + \gamma^\mu\gamma^5\epsilon(\partial_\mu B) \quad (4.1.7)$$

$$\delta\bar{\Psi} = i\bar{\epsilon}\gamma^\mu(\partial_\mu A) - \bar{\epsilon}\gamma^5\gamma^\mu(\partial_\mu B) \quad (4.1.8)$$

Όπως λοιπόν τονίσαμε, για να έχουμε SUSY, θέλουμε οι μετασχηματισμοί αυτοί να αφήνουν τη δράση αναλλοίωτη. Ή ισοδύναμα να αφήνουν τη Lagrangian αναλλοίωτη, ή να της αφήνουν μία ολική παράγωγο (tot.div). Άρα, αυτό που έχουμε τώρα να κάνουμε είναι να θεωρήσουμε μεταβολές στα πεδία μας, όπως αυτές υπαγορεύονται από πιο πάνω και να δούμε το αποτέλεσμα που έχουν στη Lagrangian. Για να μπορέσουμε όμως να κάνουμε τις πράξεις χρειάζεται πρώτα να αποδείξουμε κάποια πολύ χρήσιμα μαθηματικά, τα οποία θα χρησιμοποιηθούν ευρέως στην υπόλοιπη συζήτηση.

4.1.2 Λίγα μαθηματικά.

Παρατηρώντας του μετασχηματισμούς που δώσαμε πιο πάνω είναι εμφανές πως δεν έχουμε κάνει καμία αναφορά σε εξάρτηση από το χωρόχρονο. Αυτό όπως γνωρίζουμε ήδη από το Standard Model σημαίνει ότι έχουμε θεωρήσει *global SUSY transformations* (ολικούς μετασχηματισμούς). Η θεώρηση τοπικών μετασχηματισμών υπερσυμμετρίας οδηγεί στη θεωρία της Supergravity και δε θα μας απασχολήσει στην παρούσα εργασία. Η θεώρηση global μετασχηματισμών όμως έχει μία πολύ σημαντική συνέπεια. Αυτή είναι ότι μπορούμε να θέσουμε για ένα τυχαίο πεδίο a :

$$\delta(\partial a) = \partial(\delta a) \quad (4.1.9)$$

αφού όπως είπαμε το x^μ δεν επηρεάζεται από τους μετασχηματισμούς. Μία ποσότητα της οποίας θα χρειαζοίμαστε τη μεταβολή είναι η εξής: Έστω 2 πεδία a, b τότε:

$$\delta(a \overleftrightarrow{\partial} b) = \delta[a\partial b - (\partial a)b] = \delta a(\partial b) + a\delta(\partial b) - \delta(\partial a)b - (\partial a)\delta b \quad (4.1.10)$$

Επίσης είναι:

$$\begin{aligned} \partial[a\delta b - (\delta a)b] &= (\partial a)\delta b + a\delta(\delta b) - \partial(\delta a)b - \delta a(\partial b) \\ &= (\partial a)\delta b + a\delta(\partial b) - \delta(\partial a)b - \delta a(\partial b) \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

και αφαιρώντας τις 2 παραπάνω παίρνουμε:

$$\delta(a \overleftrightarrow{\partial} b) - \partial[a\delta b - (\delta a)b] = 2[\delta a(\partial b) - (\partial a)\delta b] \quad (4.1.12)$$

Καταφέραμε δηλαδή να ξεχωρίσουμε μία ολική παράγωγο:

$$\delta(a \overleftrightarrow{\partial} b) = 2[\delta a(\partial b) - (\partial a)\delta b] + \text{tot.div} \quad (4.1.13)$$

Κρατάμε τη σχέση αυτή γιατί θα τη χρησιμοποιήσουμε άμεσα, ενώ παράλληλα πάμε να βγάλουμε και μία άλλη πολύ σημαντική για Majorana σπίνορες. Έστω λοιπόν ξ και η Majorana spinors. Υπενθυμίζουμε:

$$\Psi^c = C\bar{\Psi}^T, \quad \Psi = \Psi^c \longrightarrow \xi = \xi^c, \quad \eta = \eta^c \quad (4.1.14)$$

Οπότε θα είναι:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}\gamma^\mu\eta &= \bar{\xi}\gamma^\mu\eta^c = \bar{\xi}\gamma^\mu C\bar{\eta}^T \\ &= \xi_i^* [\gamma^0\gamma^\mu C\gamma^{0T}]_{ij} \eta_j^* \\ &= \xi_i^* \eta_j^* M_{ij} \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

Ο ορισμός του M_{ij} είναι προφανής. Για τις σχέσεις όπως φαίνεται έχουμε κάνει χρήση των ιδιοτήτων που εξήχθησαν για τους Majorana σπίνορες στο προηγούμενο κεφάλαιο, ενώ στην τελευταία ισότητα το η_j^* περνάει μπροστά λόγω του ότι ο M_{ij} είναι αριθμός οπότε και μετατίθενται. Παραπέρα, οι σπίνορες η και ξ , όπως έχουμε δείξει είναι Grassmann ποσότητες και έτσι τα στοιχεία τους αντιμετατίθενται. Δηλαδή εδώ θα είναι: $\xi_i^* \eta_j^* = -\eta_j^* \xi_i^*$. Εάν επίσης πάρουμε τον ανάστροφο πίνακα M^T , τότε θα είναι:

$$\begin{aligned} M^T &= [\gamma^0\gamma^\mu C\gamma^{0T}]^T = \gamma^0 C^T \gamma^{\mu T} \gamma^{0T} \\ &= \gamma^0\gamma^\mu C\gamma^{0T} = M \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

όπου έχει γίνει χρήση των ιδιοτήτων του C πίνακα $C^T = -C$, $C\gamma^{\mu T} = -\gamma^{\mu}C$, τις οποίες είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Το αποτάλεσμα λοιπόν $M^T = M$ σημαίνει ότι ο πίνακας M είναι συμμετρικός, οπότε και θα είναι: $M_{ij} = M_{ji}$. Έτσι τελικά θα έχουμε:

$$\bar{\xi}\gamma^{\mu}\eta = \xi_i^* \eta_j^* M_{ij} = -\eta_j^* \xi_i^* M_{ij} = -\eta_j^* M_{ij} \xi_i^* = -\eta_j^* M_{ji} \xi_i^* \quad (4.1.17)$$

όπου στο τελευταίο βήμα εκμεταλλευτήκαμε τη συμμετρικότητα του M και το ότι ο ξ είναι Majorana σπινόρας. Δηλαδή βλέπουμε ότι μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά των ξ και η αλλάζοντας όμως το πρόσημο. Αυτή η σχέση είναι ιδιαίτερα σημαντική σε υπολογισμούς.

$$\bar{\xi}\gamma^{\mu}\eta = -\bar{\eta}\gamma^{\mu}\xi \quad (4.1.18)$$

4.1.3 Invariance κάτω από SUSY transformations.

Είμαστε τώρα σε θέση να ελέγξουμε εάν οι μετασχηματισμοί υπερσυμμετρίας που δώσαμε αφήνουν τη Lagrangian αναλλοίωτη (ή με μία tot.div) ή όχι. Παίρνουμε λοιπόν τη Lagrangian που γράψαμε:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_{\mu}A)^2 + \frac{1}{2}(\partial_{\mu}B)^2 + \frac{i}{4}\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\overleftrightarrow{\partial}_{\mu}\Psi \quad (4.1.19)$$

και εφαρμόζουμε μία μεταβολή. Θα είναι:

$$\delta\mathcal{L} = \delta\left[\frac{1}{2}(\partial_{\mu}A)^2 + \frac{1}{2}(\partial_{\mu}B)^2\right] + \frac{i}{4}\delta\left[\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\overleftrightarrow{\partial}_{\mu}\Psi\right] \quad (4.1.20)$$

Ας πάμε λοιπόν να υπολογίσουμε κάθε μία μεταβολή ξεχωριστά. Για τον πρώτο όρο, οι SUSY μεταβολές όπως είδαμε είναι:

$$\delta A = \bar{\epsilon}\Psi, \quad \delta B = i\bar{\epsilon}\gamma^5\Psi \quad (4.1.21)$$

Έχουμε συνεπώς:

$$\begin{aligned} \delta\left[\frac{1}{2}(\partial_{\mu}A)^2 + \frac{1}{2}(\partial_{\mu}B)^2\right] &= (\partial_{\mu}A)\delta(\partial^{\mu}A) + (\partial_{\mu}B)\delta(\partial^{\mu}B) \\ &= (\partial_{\mu}A)\partial^{\mu}(\delta A) + (\partial_{\mu}B)\partial^{\mu}(\delta B) \\ &= (\partial_{\mu}A)\partial^{\mu}(\bar{\epsilon}\Psi) + (\partial_{\mu}B)\partial^{\mu}(i\bar{\epsilon}\gamma^5\Psi) \\ &= \bar{\epsilon}\left[(\partial_{\mu}A) + i(\partial_{\mu}B)\gamma^5\right]\partial^{\mu}\Psi \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

όπου το $\bar{\epsilon}$ περνάει έξω αφού δεν παραγωγίζεται επειδή δεν εξαρτάται από το χωρόχρονο (global SUSY transformations) και τα A και B είναι scalars. Για τον άλλο όρο από τις δύο σχέσεις που βγάλαμε στην προηγούμενη παράγραφο, εάν θεωρήσουμε ως a και b τα $\bar{\Psi}$ και Ψ αντίστοιχα:

$$\delta\left[\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\overleftrightarrow{\partial}_{\mu}\Psi\right] = 2\left[(\delta\bar{\Psi})\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}\Psi) - (\partial_{\mu}\bar{\Psi})\gamma^{\mu}(\delta\Psi)\right] + tot.div \quad (4.1.23)$$

και κάνοντας αλλαγή των Majorana σπινόρων (Majorana flip) του 2ου όρου στην αγκύλη, σύμφωνα με όσα έχουμε πει $-(\partial\bar{\Psi})\gamma^{\mu}(\delta\Psi) = +(\delta\bar{\Psi})\gamma^{\mu}(\partial\Psi)$, οπότε:

$$\delta\left[\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\overleftrightarrow{\partial}_{\mu}\Psi\right] = 4(\delta\bar{\Psi})\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}\Psi) + tot.div \quad (4.1.24)$$

και αντικαθιστώντας τη SUSY μεταβολή του $\bar{\Psi}$:

$$\delta\bar{\Psi} = i\bar{\epsilon}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}A) - \bar{\epsilon}\gamma^5\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}B) \quad (4.1.25)$$

παίρνουμε (προσέχοντας να έχουμε σωστούς δείκτες):

$$\begin{aligned} \delta\left[\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\overleftrightarrow{\partial}_{\mu}\Psi\right] &= 4\left[i\bar{\epsilon}\gamma^{\rho}(\partial_{\rho}A) - \bar{\epsilon}\gamma^5\gamma^{\rho}(\partial_{\rho}B)\right]\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}\Psi) + tot.div \\ &= 4i\bar{\epsilon}\left[\gamma^{\rho}(\partial_{\rho}A) + i\gamma^5\gamma^{\rho}(\partial_{\rho}B)\right]\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}\Psi) + tot.div \\ &= 4i\bar{\epsilon}\left[\gamma^{\rho}\gamma^{\mu}(\partial_{\rho}A)(\partial_{\mu}\Psi) + i\gamma^5\gamma^{\rho}\gamma^{\mu}(\partial_{\rho}B)(\partial_{\mu}\Psi)\right] + tot.div \end{aligned}$$

Παίρνοντας επίσης ολική παράγωγο για το $A\Psi$ (αντίστοιχα και για το $B\Psi$) βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}\partial_\rho \partial_\mu (A\Psi) &= \partial_\rho [\partial_\mu (A\Psi)] = \partial_\rho [(\partial_\mu A)\Psi + A(\partial_\mu \Psi)] \\ &= (\partial_\rho \partial_\mu A)\Psi + (\partial_\mu A)(\partial_\rho \Psi) + (\partial_\rho A)(\partial_\mu \Psi) + A(\partial_\rho \partial_\mu \Psi) \\ &= (\partial_\rho \partial_\mu A)\Psi + (\partial_\rho A)(\partial_\mu \Psi) + \partial_\mu (A\partial_\rho \Psi)\end{aligned}\quad (4.1.26)$$

οπότε στην περίπτωση μας:

$$\begin{aligned}(\partial_\rho A)(\partial_\mu \Psi) &= \partial_\rho \partial_\mu (A\Psi) - (\partial_\rho \partial_\mu A)\Psi - \partial_\mu (A\partial_\rho \Psi) \\ &= -(\partial_\rho \partial_\mu A)\Psi + \text{tot.div}\end{aligned}\quad (4.1.27)$$

Όπως παρατηρούμε η σειρά των δεικτών ρ και μ δεν πάίζει καμία σημασία στη συγκεκριμένη περίπτωση. Υπάρχει δηλαδή συμμετρία ως προς την εναλλαγή των δεικτών. Έτσι το γινόμενο των γ - πινάκων που εμφανίζεται στους 2 όρους μπορούμε να το γράψουμε ως εξής:

$$\gamma^\rho \gamma^\mu = \frac{1}{2} \{\gamma^\rho, \gamma^\mu\} = \eta^{\rho\mu}\quad (4.1.28)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την άλγεβρα των γ - πινάκων. Όλα τα παραπάνω εφαρμόζονται και στην περίπτωση του $B\Psi$, οπότε τελικά θα πάρουμε:

$$\begin{aligned}\delta \left[\bar{\Psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Psi \right] &= 4i\bar{\epsilon} [\eta^{\rho\mu} (\partial_\rho A)(\partial_\mu \Psi) + i\gamma^5 \eta^{\rho\mu} (\partial_\rho B)(\partial_\mu \Psi)] + \text{tot.div} \\ &= 4i\bar{\epsilon} [(\partial_\rho A)(\partial^\rho \Psi) + i\gamma^5 (\partial_\rho B)(\partial^\rho \Psi)] + \text{tot.div} \\ &= 4i\bar{\epsilon} [(\partial_\mu A) + i\gamma^5 (\partial_\mu B)] (\partial^\mu \Psi) + \text{tot.div}\end{aligned}\quad (4.1.29)$$

Έτσι λοιπόν υπολογίζουμε την ολική μεταβολή στη Lagrangian:

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{L} &= \delta \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu A)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu B)^2 \right] + \frac{i}{4} \delta \left[\bar{\Psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Psi \right] \\ &= \bar{\epsilon} [(\partial_\mu A) + i(\partial_\mu B)\gamma^5] \partial^\mu \Psi + \\ &\quad + \frac{i}{4} \{ 4i\bar{\epsilon} [(\partial_\mu A) + i\gamma^5 (\partial_\mu B)] (\partial^\mu \Psi) \} + \text{tot.div} \\ &= \bar{\epsilon} [(\partial_\mu A) + i(\partial_\mu B)\gamma^5] \partial^\mu \Psi - \bar{\epsilon} [(\partial_\mu A) + i(\partial_\mu B)\gamma^5] \partial^\mu \Psi + \text{tot.div} \\ &= \text{tot.div}\end{aligned}\quad (4.1.30)$$

όπου στο τελευταίο βήμα περάσαμε τον γ^5 πίνακα μπροστά, αφού το B είναι scalar. Έτσι λοιπόν όπως ακριβώς θέλαμε, η Lagrangian μας αφήνει μόνο μία ολική παράγωγο κάτω από global μετασχηματισμούς υπερσυμμετρίας. Αυτό όπως τονίσαμε σημαίνει ότι η αντίστοιχη δράση είναι αναλλοίωτη κάτω από SUSY, αφού:

$$\delta S = \delta \int \mathcal{L} d^4x = 0\quad (4.1.31)$$

Άλλη μορφή για τη Lagrangian: Μπορούμε τώρα να γράψουμε τη Lagrangian που έχουμε θεωρήσει σε μία διαφορετική μορφή, όπου αντί για σπίνορες 4 θα έχουμε σπίνορες Weyl 2 συνιστωσών. Όπως έχουμε δει, θα είναι:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \Psi^\dagger = (\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \quad \psi^\alpha), \quad \bar{\Psi} = -\Psi^\dagger \gamma^0 = (\psi^\alpha \quad \bar{\psi}_{\dot{\alpha}})\quad (4.1.32)$$

όπου στη 2η σχέση, έχουμε εκμεταλλευτεί το γεγονός ότι οι σπίνορες είναι Majorana. Έτσι λοιπόν για τον 3ο όρο της Lagrangian που έχουμε θεωρήσει, θα είναι με χρήση Weyl σπινόρων 2 συνιστωσών:

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi &= (\psi^\alpha \quad \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}) \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\mu\psi_\beta \\ \partial_\mu\bar{\psi}^{\dot{\beta}} \end{pmatrix} \\ &= \psi^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu\partial_\mu\bar{\psi}^{\dot{\beta}} + \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta}\partial_\mu\psi_\beta\end{aligned}\quad (4.1.33)$$

Από τις σχέσεις που βγάλαμε για τους γ - πίνακες $\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta} = \sigma^{\mu\beta\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\beta\alpha}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu$, οπότε:

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi &= \psi^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu\partial_\mu\bar{\psi}^{\dot{\beta}} + \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\varepsilon^{\beta\alpha}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu\partial_\mu\psi_\beta \\ &= \psi^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu\partial_\mu\bar{\psi}^{\dot{\beta}} + \bar{\psi}^{\dot{\beta}}\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu\partial_\mu\psi^\alpha \\ &= \psi^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu\partial_\mu\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} + \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu\partial_\mu\psi^\alpha \\ &= \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu\psi^\alpha\partial_\mu\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} - \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu(\partial_\mu\psi^\alpha)\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \\ &= \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu[\psi^\alpha\partial_\mu\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} - (\partial_\mu\psi^\alpha)\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}]\end{aligned}\quad (4.1.34)$$

όπου έχει γίνει χρήση της $\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu\psi^\alpha = -(\partial_\mu\psi^\alpha)\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$ αφού είναι Grassmann ποσότητες, ενώ τα στοιχειά των σ - πινάκων περνούν μπροστά και στις 2 περιπτώσεις αφού είναι απλοί αριθμοί. Στο 3ο βήμα έχει γίνει ένα απλό relabelling των δεικτών. Με ακριβώς ανάλογο τρόπο:

$$(\partial_\mu\bar{\Psi})\gamma^\mu\Psi = \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu[(\partial_\mu\psi^\alpha)\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} - \psi^\alpha\partial_\mu\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}]\quad (4.1.35)$$

και έτσι ο αντίστοιχος όρος στη Lagrangian θα γίνει:

$$\begin{aligned}\frac{i}{4}\bar{\Psi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\Psi &= \frac{i}{4}[\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - (\partial_\mu\bar{\Psi})\gamma^\mu\Psi] \\ &= \frac{i}{2}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu[\psi^\alpha\partial_\mu\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} - (\partial_\mu\psi^\alpha)\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}] \\ &= \frac{i}{2}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu[\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}(\partial_\mu\psi^\alpha) - (\partial_\mu\bar{\psi}^{\dot{\alpha}})\psi^\alpha] \\ &= \frac{i}{2}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi^\alpha\end{aligned}\quad (4.1.36)$$

Στο 3ο βήμα για άλλη μία φορά εκμεταλλευτήκαμε τη Grassmann φύση των σπινόρων. Έτσι λοιπόν τελικά η Wess - Zumino Lagrangian παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu A)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu B)^2 + \frac{i}{2}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi^\alpha \\ &= (\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi^*) + \frac{i}{2}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi^\alpha\end{aligned}\quad (4.1.37)$$

4.2 ΚΛΕΙΣΙΜΟ ΣΧΕΣΕΩΝ ΜΕΤΑΘΕΣΗΣ

Το πρώτο σκέλος της δουλειάς μας έχει ουσιαστικά ολοκληρωθεί. Βρήκαμε μία Lagrangian η οποία περιέχει μποζόνια και φερμιόνια και έχει παράλληλα δράση η οποία παραμένει αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς υπερσυμμετρίας (SUSY) οι οποίοι αναμιγνύουν τα φερμιονικά και μποζονικά πεδία.

Τώρα λοιπόν θα πρέπει να προχωρήσουμε λίγο τη σκέψη μας. Ας κάνουμε έναν απλό παραλληλισμό

με την περίπτωση της αναλλοιότητας κάτω από μετασχηματισμούς της ομάδας Lorentz. Προφανώς κάθε Lagrangian που γράφουμε θα πρέπει να είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz, καθώς και κάτω από περιστροφές στο χώρο. Οι μετασχηματισμοί Lorentz καθώς και οι στροφές στο χώρο, αποτελούν ομάδα. Το ομογενές Lorentz group που έχουμε εξετάσει. Έτσι και η Lagrangian και αντίστοιχα η δράση, θα πρέπει να είναι αναλλοίωτες κάτω από αυτή την ομάδα. Αυτό σημαίνει ότι τα διάφορα πεδία τα οποία εμφανίζονται στη Lagrangian (scalars, spinors, vectors, ...) θα πρέπει με τη σειρά τους να μετασχηματίζονται ως αναπαραστάσεις αυτής της ομάδας (γενικά irreducible representations). Πρακτικά αυτό σημαίνει πως εάν φτιάχναμε μία Lagrangian η οποία περιείχε πεδία spin $1/2$ και όχι $-1/2$ για ένα φερμιόνιο, τότε ουσιαστικά έχουμε σπάσει τη συμμετρία περιστροφής (μία στροφή μετατρέπει το up σε down). Δηλαδή θα πρέπει στη Lagrangian να βρίσκονται όλα τα πεδία εκείνα τα οποία απαιτεί η αντίστοιχη κάθε φορά αναλλοιότητα.

Επιστρέφοντας τώρα στη SUSY, όπως είδαμε εμείς βρήκαμε μία Lagrangian η οποία είναι αναλλοίωτη κάτω από SUSY μετασχηματισμούς, ενώ παράλληλα για την περιγραφή της έχουμε εισάγει τα πεδία A, B, Ψ . Η ίδια λοιπόν σκέψη με τα προηγούμενα πρέπει να γίνει και εδώ. Οι SUSY μετασχηματισμοί επιβάλλονται ουσιαστικά επιπλέον των μετασχηματισμών Lorentz και κατ' απόλυτη αντιστοιχία θα πρέπει και αυτοί να αποτελούν ομάδα. Δηλαδή θα πρέπει να αποτελούν ένα κλειστό σύνολο μέσω της δράσης τους κάτω από κατάλληλους συνδυασμούς. Θα πρέπει λοιπόν τώρα να βρούμε τη δομή αυτής της ομάδας και επίσης να ελέγξουμε εάν τα πεδία που έχουμε εισάγει αποτελούν βάση για δημιουργία αναπαραστάσεων της SUSY. Θα δούμε λοιπόν πως τελικά τα πεδία αυτά δεν αποτελούν βάση. Η άλγεβρα δεν κλείνει. Θα πρέπει να προσθέσουμε 2 νέα "βοηθητικά" πεδία F και G . Για να δούμε όμως τα παραπάνω, θα πρέπει πάλι να δούμε κάποιες χρήσιμες μαθηματικές σχέσεις.

4.2.1 Fierz rearrangement.

Η Fierz formula βασίζεται στους πίνακες Dirac. Υπάρχουν 16 4×4 πίνακες οι οποίοι συγκροτούν τη λεγόμενη Άλγεβρα Clifford, την οποία συμβολίζουμε:

$$\begin{aligned}\gamma^A &= \{1, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5, \Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], i\gamma^5\} \\ \gamma_A &= \{1, \gamma_\mu, -\gamma_\mu \gamma^5, \Sigma_{\mu\nu}, -i\gamma^5\}\end{aligned}\quad (4.2.1)$$

Έτσι λοιπόν εάν 2 πίνακες γ^μ, γ'^μ ικανοποιούν την άλγεβρα $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$, τότε υπάρχει μη μοναδικός πίνακας S τέτοιος ώστε $\gamma'^\mu = S\gamma^\mu S^{-1}$. Έτσι λοιπόν εάν γ_A, γ'_A 2 οποιαδήποτε σύνολα πινάκων Dirac, τότε $\gamma'_A S = S\gamma_A$, με τον πίνακα S : $S = \sum_{B=1}^{16} \gamma'_B F \gamma^B$, με F οποιονδήποτε 4×4 πίνακα. Αφού λοιπόν όπως είπαμε μιλάμε για οποιαδήποτε σύνολα πινάκων γ , μπορούμε να επικεντρωθούμε στην περίπτωση όπου έχουμε $\gamma'_A = \gamma_A$, οπότε και $S = k1$ και αντίστοιχα να διαλέξουμε τον πίνακα F να έχει τη μορφή $F_{jk} = \delta_{jm}\delta_{kn}$. Θα είναι λοιπόν:

$$\begin{aligned}\sum_{B=1}^{16} \gamma_B F \gamma^B &= k1 \\ \sum_{B=1}^{16} (\gamma_B)_{ij} F_{jk} (\gamma^B)_{kl} &= k\delta_{il} \\ \sum_{B=1}^{16} (\gamma_B)_{ij} \delta_{jm} \delta_{kn} (\gamma^B)_{kl} &= k\delta_{il} \\ \sum_{B=1}^{16} (\gamma_B)_{im} (\gamma^B)_{nl} &= k_{mn} \delta_{il}\end{aligned}\quad (4.2.2)$$

Θέτοντας τώρα $i=1$ και αθροίζοντας πάνω στα i ($i=1 \dots 4$) θα πάρουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{B=1}^{16} (\gamma_B \gamma^B)_{mn} &= 4k_{mn} \\ 16\delta_{mn} &= 4k_{mn} \\ k_{mn} &= 4\delta_{mn} \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Έτσι λοιπόν εξήχθη η σχέση:

$$\sum_{A=1}^{16} \gamma_{Aim} \gamma_{nl}^A = 4\delta_{mn} \delta_{il} \quad (4.2.4)$$

Από αυτήν τώρα, πολλαπλασιάζοντας με $\chi_n \psi_l$ που είναι σπίνορες 4 συνιστωσών και Grassmann ποσότητες, παίρνουμε:

$$\sum_{A=1}^{16} \gamma_{Aim} (\chi_n \gamma_{nl}^A \psi_l) = 4\delta_{mn} \delta_{il} \chi_n \psi^l = 4\chi_m \psi_i \quad (4.2.5)$$

Τώρα περνάμε στο πρώτο μέρος το γ μπροστά από την παρένθεση, χωρίς αλλαγή προσήμου, αφού το $\chi_n \gamma_{nl}^A \psi_l = \chi^T \gamma^A \psi$ είναι αριθμός. Παράλληλα αλλάζουμε και τη σειρά των παραγόντων στο 2ο μέλος βάζοντας τώρα πρόσημο -, αφού οι σπίνορες είναι Grassmann και αντιμετατίθενται. Οπότε:

$$\begin{aligned} \sum_{A=1}^{16} (\chi^T \gamma^A \psi) \gamma_{Aim} &= -4\psi_i \chi_m = -4(\psi \chi^T)_{im} \\ \psi \chi^T &= -\frac{1}{4} \sum_{A=1}^{16} (\chi^T \gamma^A \psi) \gamma_A \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Αντικαθιστώντας τώρα $\psi = \varepsilon_2$ και $\chi^T = \bar{\varepsilon}_1$ και παράλληλα βάζοντας όλους τους πίνακες γ , παίρνουμε τη *Fierz Rearrangement Formula*:

$$\varepsilon_2 \bar{\varepsilon}_1 = -\frac{1}{4} \left[\bar{\varepsilon}_1 \varepsilon_2 \mathbb{I} + \bar{\varepsilon}_1 \gamma^\mu \varepsilon_2 \gamma_\mu - \bar{\varepsilon}_1 \gamma^\mu \gamma^5 \varepsilon_2 \gamma_\mu \gamma^5 + 2\bar{\varepsilon}_1 \Sigma^{\mu\nu} \varepsilon_2 \Sigma_{\mu\nu} + \bar{\varepsilon}_1 \gamma^5 \varepsilon_2 \gamma^5 \right] \quad (4.2.7)$$

Majorana flips: Επιπλέον μπορούμε με αντίστοιχη ακριβώς διαδικασία όπως είχαμε κάνει στην παράγραφο 1.2 αυτού του κεφαλαίου, να εξάγουμε σχέσεις χρήσιμες για να αντιστρέψουμε τους όρους ενός γινομένου Grassmann σπινόρων, το οποίο περιέχει μέσα και στοιχεία του συνόλου των πινάκων γ που είδαμε μόλις τώρα. Η διαδικασία όπως είπαμε είναι ακριβώς η ίδια. Τις σχέσεις αυτές θα τις ονομάζουμε “Majorana flips”. Έτσι, συγκεντρωτικά έχουμε:

$$\bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu \varepsilon_1 = -\bar{\varepsilon}_1 \gamma^\mu \varepsilon_2 \quad (4.2.8)$$

$$\bar{\varepsilon}_2 \varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1 \varepsilon_2 \quad (4.2.9)$$

$$\bar{\varepsilon}_2 \Sigma^{\mu\nu} \varepsilon_1 = -\bar{\varepsilon}_1 \Sigma^{\mu\nu} \varepsilon_2 \quad (4.2.10)$$

$$\bar{\varepsilon}_2 \gamma^5 \varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1 \gamma^5 \varepsilon_2 \quad (4.2.11)$$

$$\bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu \gamma^5 \varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1 \gamma^\mu \gamma^5 \varepsilon_2 \quad (4.2.12)$$

όπου οι αντίστοιχοι πίνακες M_{ij} που έχουμε θεωρήσει για την κάθε διαδικασία είναι:

$$M = \gamma^0 \gamma^\mu C \gamma^{0T} = M^T \quad (4.2.13)$$

$$M = \gamma^0 C \gamma^{0T} = -M^T \quad (4.2.14)$$

$$M = \gamma^0 \Sigma^{\mu\nu} C \gamma^{0T} = M^T \quad (4.2.15)$$

$$M = \gamma^0 \gamma^5 C \gamma^{0T} = -M^T \quad (4.2.16)$$

$$M = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^5 C \gamma^{0T} = -M^T \quad (4.2.17)$$

Τα παραπάνω Majorana flips θα χρησιμοποιηθούν εκτενώς στους επόμενους υπολογισμούς.

4.2.2 Commutation relations.

Τώρα λοιπόν μπορούμε να προχωρήσουμε και να ελέγξουμε εάν οι SUSY μετασχηματισμοί κλείνουν μεταξύ τους. Αυτό θα πρέπει να συμβαίνει όπως είπαμε έτσι ώστε να αποτελούν ομάδα. Επίσης θα ελέγξουμε και το εάν τα πεδία τα οποία έχουμε θεωρήσει αποτελούν βάση για δημιουργία αναπαραστάσεων. Προφανώς εάν οι μετασχηματισμοί κλείνουν, τότε τα A, B, Ψ αποτελούν βάση για την SUSY. Θα δούμε όμως ότι κάτι τέτοιο τελικά δε συμβαίνει, οπότε και θα πρέπει να προσθέσουμε νέα πεδία “βοηθητικά” στην αρχική Lagrangian. Ξεκινώντας, εάν ονομάσουμε δ_1 τη μεταβολή του πεδίου που αντιστοιχεί στον Majorana σπινόρα ε_1 , από τους SUSY μετασχηματισμούς που έχουμε θεωρήσει θα είναι:

$$\begin{aligned}\delta_1 A &= \bar{\varepsilon}_1 \Psi, & \delta_1 B &= i\bar{\varepsilon}_1 \gamma^5 \Psi \\ \delta_1 \Psi &= -i\gamma^\rho \varepsilon_1 (\partial_\rho A) + \gamma^\rho \gamma^5 \varepsilon_1 (\partial_\rho B) \\ \delta_1 \bar{\Psi} &= i\bar{\varepsilon}_1 \gamma^\rho (\partial_\rho A) - \bar{\varepsilon}_1 \gamma^5 \gamma^\rho (\partial_\rho B)\end{aligned}\tag{4.2.18}$$

και αντίστοιχα για μία άλλη μεταβολή δ_2 :

$$\begin{aligned}\delta_2 A &= \bar{\varepsilon}_2 \Psi, & \delta_2 B &= i\bar{\varepsilon}_2 \gamma^5 \Psi \\ \delta_2 \Psi &= -i\gamma^\rho \varepsilon_2 (\partial_\rho A) + \gamma^\rho \gamma^5 \varepsilon_2 (\partial_\rho B) \\ \delta_2 \bar{\Psi} &= i\bar{\varepsilon}_2 \gamma^\rho (\partial_\rho A) - \bar{\varepsilon}_2 \gamma^5 \gamma^\rho (\partial_\rho B)\end{aligned}\tag{4.2.19}$$

Αυτό που θα κάνουμε στο εξής είναι ο υπολογισμός της δράσης του μεταθέτη των 2 αυτών μεταβολών, πάνω σε κάθε πεδίο. Θα δούμε ότι η δράση του μας δίνει μετατόπιση για τα A και B και το ίδιο θα θέλαμε για το Ψ, ώστε οι μετασχηματισμοί να κλείσουν.

Έλεγχος για A, B, Ψ: Όπως είπαμε λοιπόν ψάχνουμε να υπολογίσουμε το $[\delta_1, \delta_2]A$. Είναι:

$$[\delta_1, \delta_2]A = \delta_1 \delta_2 A - \delta_2 \delta_1 A\tag{4.2.20}$$

Υπολογίζουμε ξεχωριστά, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}\delta_1 \delta_2 A &= \delta_1 (\bar{\varepsilon}_2 \Psi) \\ &= \bar{\varepsilon}_2 \delta_1 \Psi\end{aligned}\tag{4.2.21}$$

Ο σπινόρας $\bar{\varepsilon}_1$ πέρασε έξω από τη μεταβολή γιατί όπως έχουμε τονίσει πιο πάνω, είναι σταθερός σπινόρας οπότε και δε μεταβαλλεται. Συνεχίζουμε:

$$\begin{aligned}\delta_1 \delta_2 A &= \bar{\varepsilon}_2 \delta_1 \Psi \\ &= \bar{\varepsilon}_2 [-i\gamma^\rho \varepsilon_1 (\partial_\rho A) + \gamma^\rho \gamma^5 \varepsilon_1 (\partial_\rho B)] \\ &= -i\bar{\varepsilon}_2 \gamma^\rho \varepsilon_1 (\partial_\rho A) + \bar{\varepsilon}_2 \gamma^\rho \gamma^5 \varepsilon_1 (\partial_\rho B)\end{aligned}\tag{4.2.22}$$

Αντίστοιχα:

$$\delta_2 \delta_1 A = i\bar{\varepsilon}_1 \gamma^\rho \varepsilon_2 (\partial_\rho A) - \bar{\varepsilon}_1 \gamma^\rho \gamma^5 \varepsilon_2 (\partial_\rho B)\tag{4.2.23}$$

και ο αντιμεταθέτης είναι:

$$\begin{aligned}[\delta_1, \delta_2]A &= -i\bar{\varepsilon}_2 \gamma^\rho \varepsilon_1 (\partial_\rho A) + \bar{\varepsilon}_2 \gamma^\rho \gamma^5 \varepsilon_1 (\partial_\rho B) + \\ &\quad + i\bar{\varepsilon}_1 \gamma^\rho \varepsilon_2 (\partial_\rho A) - \bar{\varepsilon}_1 \gamma^\rho \gamma^5 \varepsilon_2 (\partial_\rho B) \\ &= i(\bar{\varepsilon}_1 \gamma^\rho \varepsilon_2 - i\bar{\varepsilon}_2 \gamma^\rho \varepsilon_1) (\partial_\rho A) - \\ &\quad - i(\bar{\varepsilon}_1 \gamma^\rho \gamma^5 \varepsilon_2 - \bar{\varepsilon}_2 \gamma^\rho \gamma^5 \varepsilon_1) (\partial_\rho B)\end{aligned}\tag{4.2.24}$$

Από τα Majorana flips όμως έχουμε:

$$\bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu \epsilon_1 = -\bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \epsilon_2, \quad \bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu \gamma^5 \epsilon_1 = \bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \gamma^5 \epsilon_2 \quad (4.2.25)$$

οπότε:

$$\boxed{[\delta_1, \delta_2]A = -2i (\bar{\epsilon}_2 \gamma^\rho \epsilon_1) (\partial_\rho A)} \quad (4.2.26)$$

Όπως βλέπουμε, ο όρος $\bar{\epsilon}_2 \gamma^\rho \epsilon_1$ δεν είναι τίποτα άλλο παρά ένας αριθμός. Επίσης το $-i\partial_\mu$ είναι όπως γνωρίζουμε ο γεννήτορας των μετατοπίσεων στο χώρο P_μ . Κάνοντας την ίδια διαδικασία για το πεδίο B παίρνουμε:

$$\begin{aligned} [\delta_1, \delta_2]B &= \delta_1 \delta_2 B - \delta_2 \delta_1 B \\ &= \delta_1 (i\bar{\epsilon}_2 \gamma^5 \Psi) - \delta_2 (i\bar{\epsilon}_1 \gamma^5 \Psi) \\ &= i\bar{\epsilon}_2 \gamma^5 \delta_1 \Psi - i\bar{\epsilon}_1 \gamma^5 \delta_2 \Psi \\ &= i\bar{\epsilon}_2 \gamma^5 [-i\gamma^\rho \epsilon_1 (\partial_\rho A) + \gamma^\rho \gamma^5 \epsilon_1 (\partial_\rho B)] - \\ &\quad - i\bar{\epsilon}_1 \gamma^5 [-i\gamma^\rho \epsilon_2 (\partial_\rho A) + \gamma^\rho \gamma^5 \epsilon_2 (\partial_\rho B)] \\ &= [\bar{\epsilon}_2 \gamma^5 \gamma^\rho \epsilon_1 - \bar{\epsilon}_1 \gamma^5 \gamma^\rho \epsilon_2] (\partial_\rho A) - \\ &\quad - [\bar{\epsilon}_2 \gamma^\rho \epsilon_1 - \bar{\epsilon}_1 \gamma^\rho \epsilon_2] (\partial_\rho B) \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την $-\gamma^5 \gamma^\rho \gamma^5 = \gamma^\rho$. Επίσης, από Majorana flips ξανά είναι:

$$\bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu \epsilon_1 = -\bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \epsilon_2, \quad \bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu \gamma^5 \epsilon_1 = \bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \gamma^5 \epsilon_2 \quad (4.2.28)$$

οπότε:

$$\boxed{[\delta_1, \delta_2]B = -2i (\bar{\epsilon}_2 \gamma^\rho \epsilon_1) (\partial_\rho B)} \quad (4.2.29)$$

Πάλι λοιπόν βλέπουμε ότι η δράση του μεταθέτη 2 μεταβολών στο πεδίο B ουσιαστικά παράγει μία μετατόπιση και μάλιστα με τον ίδιο συντελεστή μπροστά. Άρα λοιπόν με τα πεδία A και B είμαστε ικανοποιημένοι και ευελπιστούμε και η μεταβολή του Ψ να μας δώσει ίδια αποτελέσματα ώστε να κλείσει το σύνολο των μετασχηματισμών. Είναι λοιπόν:

$$\begin{aligned} [\delta_1, \delta_2]\Psi &= \delta_1 \delta_2 \Psi - \delta_2 \delta_1 \Psi \\ &= \delta_1 [-i\gamma^\rho \epsilon_2 (\partial_\rho A) + \gamma^\rho \gamma^5 \epsilon_2 (\partial_\rho B)] - \\ &\quad - \delta_2 [-i\gamma^\rho \epsilon_1 (\partial_\rho A) + \gamma^\rho \gamma^5 \epsilon_1 (\partial_\rho B)] \\ &= -i\gamma^\rho \epsilon_2 \partial_\rho (\delta_1 A) + \gamma^\rho \gamma^5 \epsilon_2 \partial_\rho (\delta_1 B) - \\ &\quad - i\gamma^\rho \epsilon_1 \partial_\rho (\delta_2 A) + \gamma^\rho \gamma^5 \epsilon_1 \partial_\rho (\delta_2 B) \\ &= -i\gamma^\rho \epsilon_2 \partial_\rho (\bar{\epsilon}_1 \Psi) + \gamma^\rho \gamma^5 \epsilon_2 \partial_\rho (i\bar{\epsilon}_1 \gamma^5 \Psi) - \\ &\quad - i\gamma^\rho \epsilon_1 \partial_\rho (\bar{\epsilon}_2 \Psi) + \gamma^\rho \gamma^5 \epsilon_1 \partial_\rho (i\bar{\epsilon}_2 \gamma^5 \Psi) \\ &= -i\gamma^\rho \epsilon_2 \bar{\epsilon}_1 (\partial_\rho \Psi) + i\gamma^\rho \gamma^5 \epsilon_2 \bar{\epsilon}_1 \gamma^5 (\partial_\rho \Psi) - \\ &\quad - i\gamma^\rho \epsilon_1 \bar{\epsilon}_2 (\partial_\rho \Psi) + i\gamma^\rho \gamma^5 \epsilon_1 \bar{\epsilon}_2 \gamma^5 (\partial_\rho \Psi) \\ &= -i\gamma^\rho [\epsilon_2 \bar{\epsilon}_1 - \epsilon_1 \bar{\epsilon}_2 - \gamma^5 (\epsilon_2 \bar{\epsilon}_1 - \epsilon_1 \bar{\epsilon}_2) \gamma^5] (\partial_\rho \Psi) \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

Για τον υπολογισμό της ποσότητας στην αγκύλη κάνουμε χρήση της Fierz Rearrangement formula, οπότε:

$$\begin{aligned} \epsilon_2 \bar{\epsilon}_1 &= -\frac{1}{4} \left[\bar{\epsilon}_1 \epsilon_2 + \bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \epsilon_2 \gamma_\mu - \bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \gamma^5 \epsilon_2 \gamma_\mu \gamma^5 + \right. \\ &\quad \left. + 2\bar{\epsilon}_1 \Sigma^{\mu\nu} \epsilon_2 \Sigma_{\mu\nu} + \bar{\epsilon}_1 \gamma^5 \epsilon_2 \gamma^5 \right] \end{aligned} \quad (4.2.31)$$

ενώ επίσης:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \bar{\varepsilon}_2 &= -\frac{1}{4} \left[\bar{\varepsilon}_2 \varepsilon_1 + \bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu \varepsilon_1 \gamma_\mu - \bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu \gamma^5 \varepsilon_1 \gamma_\mu \gamma^5 + \right. \\ &\quad \left. + 2\bar{\varepsilon}_2 \Sigma^{\mu\nu} \varepsilon_1 \Sigma_{\mu\nu} + \bar{\varepsilon}_2 \gamma^5 \varepsilon_1 \gamma^5 \right] \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 \bar{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1 \bar{\varepsilon}_2 &= -\frac{1}{4} \left[(\bar{\varepsilon}_1 \varepsilon_2 - \bar{\varepsilon}_2 \varepsilon_1) + (\bar{\varepsilon}_1 \gamma^\mu \varepsilon_2 - \bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu \varepsilon_1) \gamma_\mu - \right. \\ &\quad - (\bar{\varepsilon}_1 \gamma^\mu \gamma^5 \varepsilon_2 - \bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu \gamma^5 \varepsilon_1) \gamma_\mu \gamma^5 + \\ &\quad + 2(\bar{\varepsilon}_1 \Sigma^{\mu\nu} \varepsilon_2 - \bar{\varepsilon}_2 \Sigma^{\mu\nu} \varepsilon_1) \Sigma_{\mu\nu} + \\ &\quad \left. + (\bar{\varepsilon}_1 \gamma^5 \varepsilon_2 - \bar{\varepsilon}_2 \gamma^5 \varepsilon_1) \gamma^5 \right] \end{aligned} \quad (4.2.33)$$

Εφαρμόζουμε τα Majorana flips τα οποία έχουμε υπολογίσει πιο πάνω, σε κάθε όρο, οπότε:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_1 \varepsilon_2 &= \bar{\varepsilon}_2 \varepsilon_1, \quad \bar{\varepsilon}_1 \gamma^\mu \gamma^5 \varepsilon_2 = \bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu \gamma^5 \varepsilon_1, \quad \bar{\varepsilon}_1 \gamma^5 \varepsilon_2 = \bar{\varepsilon}_2 \gamma^5 \varepsilon_1 \\ \bar{\varepsilon}_1 \gamma^\mu \varepsilon_2 &= -\bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu \varepsilon_1, \quad \bar{\varepsilon}_1 \Sigma^{\mu\nu} \varepsilon_2 = -\bar{\varepsilon}_2 \Sigma^{\mu\nu} \varepsilon_1 \end{aligned}$$

οπότε λοιπόν:

$$\varepsilon_2 \bar{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1 \bar{\varepsilon}_2 = -\frac{1}{2} \bar{\varepsilon}_1 \gamma^\mu \varepsilon_2 \gamma_\mu - \bar{\varepsilon}_1 \Sigma^{\mu\nu} \varepsilon_2 \Sigma_{\mu\nu} \quad (4.2.34)$$

και αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} \gamma^5 (\varepsilon_2 \bar{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1 \bar{\varepsilon}_2) \gamma^5 &= \gamma^5 \left(-\frac{1}{2} \bar{\varepsilon}_1 \gamma^\mu \varepsilon_2 \gamma_\mu - \bar{\varepsilon}_1 \Sigma^{\mu\nu} \varepsilon_2 \Sigma_{\mu\nu} \right) \gamma^5 \\ &= \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}_1 \gamma^\mu \varepsilon_2 \gamma_\mu - \bar{\varepsilon}_1 \Sigma^{\mu\nu} \varepsilon_2 \Sigma_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.2.35)$$

Έτσι τελικά θα πάρουμε:

$$\varepsilon_2 \bar{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1 \bar{\varepsilon}_2 - \gamma^5 (\varepsilon_2 \bar{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1 \bar{\varepsilon}_2) \gamma^5 = -\bar{\varepsilon}_1 \gamma^\mu \varepsilon_2 \gamma_\mu \quad (4.2.36)$$

Μπορούμε τώρα να γυρίσουμε πίσω στον υπολογισμό του μεταθέτη. Θα είναι με βάση τα παραπάνω:

$$[\delta_1, \delta_2] \Psi = i \gamma^\mu \bar{\varepsilon}_1 \gamma^\rho \varepsilon_2 \gamma_\rho (\partial_\mu \Psi) \quad (4.2.37)$$

Όμως όπως γνωρίζουμε η ποσότητα $\bar{\varepsilon}_1 \gamma^\rho \varepsilon_2$ είναι ένας αριθμός, οπότε και μπορεί να περάσει μπροστά από τον γ^μ πίνακα. Έτσι:

$$\begin{aligned} [\delta_1, \delta_2] \Psi &= i \bar{\varepsilon}_1 \gamma^\rho \varepsilon_2 \gamma^\mu \gamma_\rho (\partial_\mu \Psi) \\ &= i \bar{\varepsilon}_1 \gamma_\rho \varepsilon_2 \gamma^\mu \gamma^\rho (\partial_\mu \Psi) \\ &= -i \bar{\varepsilon}_2 \gamma_\rho \bar{\varepsilon}_1 \gamma^\mu \gamma^\rho (\partial_\mu \Psi) \end{aligned} \quad (4.2.38)$$

Από την άλγεβρα των γ - πινάκων θα πάρουμε:

$$\begin{aligned} \{\gamma^\mu, \gamma^\rho\} &= 2\eta^{\mu\rho} \\ \gamma^\mu \gamma^\rho + \gamma^\rho \gamma^\mu &= 2\eta^{\mu\rho} \\ \gamma^\mu \gamma^\rho &= 2\eta^{\mu\rho} - \gamma^\rho \gamma^\mu \end{aligned} \quad (4.2.39)$$

Εφαρμόζοντας στην παραπάνω:

$$[\delta_1, \delta_2] \Psi = -i \bar{\varepsilon}_2 \gamma_\rho \bar{\varepsilon}_1 [2\eta^{\mu\rho} - \gamma^\rho \gamma^\mu] (\partial_\mu \Psi) \quad (4.2.40)$$

Οπότε η δράση του μεταθέτη 2 μεταβολών πάνω στο Ψ δίνει:

$$\boxed{[\delta_1, \delta_2]\Psi = -2i(\bar{\epsilon}_2\gamma^\mu\bar{\epsilon}_1)(\partial_\mu\Psi) + i(\bar{\epsilon}_2\gamma_\rho\bar{\epsilon}_1)\gamma^\rho\gamma^\mu(\partial_\mu\Psi)} \quad (4.2.41)$$

Παρατηρούμε λοιπόν εδώ πως η δράση του μεταθέτη μας δίνει όπως περιμέναμε μία μετατόπιση, αλλά υπάρχει και ένας ανεπιθύμητος όρος. Θα μπορούσαμε να εξαφανίσουμε τον ανεπιθύμητο αυτόν όρο παίρνοντας εξισώσεις πεδίου $\gamma_\mu\partial^\mu\Psi = 0$, αλλά αυτό δεν είναι το ζητούμενο, καθώς οι εξισώσεις πεδίου είναι ειδική περίπτωση, ενώ εμείς θα θέλαμε τα αποτελέσματά μας να ισχύουν γενικά. Έτσι λοιπόν θα προσπαθήσουμε να εξαφανίσουμε τον όρο αυτόν. Για να γίνει αυτό, ο μόνος τρόπος που μπορούμε να δράσουμε, είναι μέσω της εισαγωγής 2 επιπλέον βαθμωτών βοηθητικών πεδίων (άρα και εισαγωγής 2 επιπλέον βαθμών ελευθερίας).

Προσθήκη πεδίων F, G: Η εισαγωγή των πεδίων αυτών επιπλέον επεκτείνει και τον ορισμό της μεταβολής του πεδίου Ψ , αφού θα είναι τώρα:

$$\delta\Psi = -i\gamma^\mu\epsilon(\partial_\mu A) + \gamma^\mu\gamma^5\epsilon(\partial_\mu B) - \epsilon F - i\gamma^5\epsilon G \quad (4.2.42)$$

όπου F και G τα νέα πεδία. Αφού λοιπόν εισήχθησαν 2 νέα πεδία, θα πρέπει να θεωρήσουμε και μεταβολές για τα πεδία αυτά:

$$\delta F = i\bar{\epsilon}\gamma^\rho\partial_\rho\Psi, \quad \delta G = -\bar{\epsilon}\gamma^5\gamma^\rho\partial_\rho\Psi \quad (4.2.43)$$

Ελπίζουμε λοιπόν τώρα, η εισαγωγή αυτών των νέων πεδίων να έχει αφήσει τις δράσεις των μεταθετών στα A και B αναλλοίωτες, ενώ παράλληλα να δώσει σωστά μόνο μετατόπιση για τη δράση του μεταθέτη στο Ψ όπως περιμένουμε. Επίσης θα πρέπει να υπολογιστεί και η δράση των μεταθετών πάνω στα F και G αφού έχουμε επιπλέον πεδία και με τη σειρά της να δίνει και αυτή μετατόπιση. Ξεκινούμε με τα A και B:

$$\begin{aligned} [\delta_1, \delta_2]A &= \delta_1\delta_2 A - \delta_2\delta_1 A \\ &= \bar{\epsilon}_2\delta_1\Psi - \bar{\epsilon}_1\delta_2\Psi \\ &= \bar{\epsilon}_2(-i\gamma^\mu\epsilon_1(\partial_\mu A) + \gamma^\mu\gamma^5\epsilon_1(\partial_\mu B) - \epsilon_1 F - i\gamma^5\epsilon_1 G) - \\ &\quad -\bar{\epsilon}_1(-i\gamma^\mu\epsilon_2(\partial_\mu A) + \gamma^\mu\gamma^5\epsilon_2(\partial_\mu B) - \epsilon_2 F - i\gamma^5\epsilon_2 G) \\ &= \{[\delta_1, \delta_2]A\}_0 - (\bar{\epsilon}_2\epsilon_1 - \bar{\epsilon}_1\epsilon_2)F - i(\bar{\epsilon}_2\gamma^5\epsilon_1 - \bar{\epsilon}_1\gamma^5\epsilon_2)G \end{aligned} \quad (4.2.44)$$

όπου $\{[\delta_1, \delta_2]A\}_0$ είναι το $[\delta_1, \delta_2]A$ που είχαμε πριν την εισαγωγή των πεδίων και μας έδινε μετατόπιση. Παράλληλα εφαρμόζουμε τα γνωστά Majorana flips στους άλλους 2 όρους και παρατηρούμε ότι αυτά μηδενίζονται. Έτσι λοιπόν τελικά η δράση του μεταθέτη στο A παραμένει αμετάβλητη και δίνει ξανά μετατόπιση:

$$\boxed{[\delta_1, \delta_2]A = -2i(\bar{\epsilon}_2\gamma^\rho\epsilon_1)(\partial_\rho A)} \quad (4.2.45)$$

Ακριβώς ίδια διαδικασία ακολουθούμε για το B το οποίο επίσης παραμένει ως έχει:

$$\boxed{[\delta_1, \delta_2]B = -2i(\bar{\epsilon}_2\gamma^\rho\epsilon_1)(\partial_\rho B)} \quad (4.2.46)$$

Ελέγχουμε το Ψ τώρα και περιμένουμε να πάρουμε μετατόπιση μετά από την εισαγωγή των πεδίων. Είναι:

$$\begin{aligned}
[\delta_1, \delta_2]\Psi &= \delta_1\delta_2\Psi - \delta_2\delta_1\Psi \\
&= \delta_1[-i\gamma^\mu\varepsilon_2(\partial_\mu A) + \gamma^\mu\gamma^5\varepsilon_2(\partial_\mu B) - \varepsilon_2 F - i\gamma^5\varepsilon_2 G] - \\
&\quad -\delta_2[-i\gamma^\mu\varepsilon_1(\partial_\mu A) + \gamma^\mu\gamma^5\varepsilon_1(\partial_\mu B) - \varepsilon_1 F - i\gamma^5\varepsilon_1 G] \\
&= \{[\delta_1, \delta_2]\Psi\}_0 + \varepsilon_1\delta_2 F - \varepsilon_2\delta_1 F + i\gamma^5\varepsilon_1\delta_2 G - i\gamma^5\varepsilon_2\delta_1 G \\
&= \{[\delta_1, \delta_2]\Psi\}_0 + i(\varepsilon_1\bar{\varepsilon}_2 - \varepsilon_2\bar{\varepsilon}_1)\gamma^\rho\partial_\rho\Psi - \\
&\quad -i\gamma^5(\varepsilon_1\bar{\varepsilon}_2 - \varepsilon_2\bar{\varepsilon}_1)\gamma^5\gamma^\rho\partial_\rho\Psi \\
&= \{[\delta_1, \delta_2]\Psi\}_0 - i[\varepsilon_2\bar{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1\bar{\varepsilon}_2 - \gamma^5(\varepsilon_2\bar{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1\bar{\varepsilon}_2)\gamma^5]\gamma^\rho(\partial_\rho\Psi) \\
&= -2i(\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\bar{\varepsilon}_1)(\partial_\mu\Psi) + i(\bar{\varepsilon}_2\gamma_\rho\bar{\varepsilon}_1)\gamma^\rho\gamma^\mu(\partial_\mu\Psi) - \\
&\quad -i[\varepsilon_2\bar{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1\bar{\varepsilon}_2 - \gamma^5(\varepsilon_2\bar{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1\bar{\varepsilon}_2)\gamma^5]\gamma^\rho(\partial_\rho\Psi) \tag{4.2.47}
\end{aligned}$$

Την παράσταση στις αγκύλες την έχουμε ήδη υπολογίσει πιο πάνω, οπότε αντικαθιστώντας:

$$\begin{aligned}
[\delta_1, \delta_2]\Psi &= -2i(\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\bar{\varepsilon}_1)(\partial_\mu\Psi) + i(\bar{\varepsilon}_2\gamma_\rho\bar{\varepsilon}_1)\gamma^\rho\gamma^\mu(\partial_\mu\Psi) + \\
&\quad + i(\bar{\varepsilon}_1\gamma^\rho\varepsilon_2\gamma_\rho)\gamma^\mu(\partial_\mu\Psi) \\
&= -2i(\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\bar{\varepsilon}_1)(\partial_\mu\Psi) + i(\bar{\varepsilon}_2\gamma_\rho\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_1\gamma_\rho\varepsilon_2)\gamma^\rho\gamma^\mu(\partial_\mu\Psi) \tag{4.2.48}
\end{aligned}$$

Με χρήση Majorana flips ($\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1 = -\bar{\varepsilon}_1\gamma^\mu\varepsilon_2$) βλέπουμε ότι ο 2ος όρος μηδενίζεται και έτσι παίρνουμε τη ζητούμενη μετατόπιση:

$$\boxed{[\delta_1, \delta_2]\Psi = -2i(\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\bar{\varepsilon}_1)(\partial_\mu\Psi)} \tag{4.2.49}$$

Η προσθήκη λοιπόν των 2 βοηθητικών πεδίων αποκατέστησε την τάξη στη συμπεριφορά του Ψ . Ο μεταθέτης 2 μεταβολών δρα στο Ψ και δίνει μετατόπιση και μάλιστα με τον ίδιο συντελεστή μπροστά όπως στα A και B. Εάν λοιπόν οι υπόλοιπες 2 δράσεις των αντίστοιχων μεταθετών στα πεδία F και G δίνουν και αυτές μετατόπιση όπως στα παραπάνω, τότε έχουμε πετύχει το στόχο μας. Το σύνολο κλείνει και το πιο σημαντικό, έχουμε καταφέρει να βρούμε μία βάση για τη δημιουργία μη αναγωγίμων αναπαράστασεων της ομάδας της SUSY. Ελέγχουμε για F και G:

$$\begin{aligned}
[\delta_1, \delta_2]F &= \delta_1\delta_2 F - \delta_2\delta_1 F \\
&= \delta_1(i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\rho\partial_\rho\Psi) - \delta_2(i\bar{\varepsilon}_1\gamma^\rho\partial_\rho\Psi) \\
&= i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\rho\partial_\rho(\delta_1\Psi) - i\bar{\varepsilon}_1\gamma^\rho\partial_\rho(\delta_2\Psi) \tag{4.2.50}
\end{aligned}$$

Ασχολούμαστε για συντομία με τον 1ο όρο και ο άλλος θα προκύψει απλά αλλάζοντας τους δείκτες των ε σπινόρων:

$$\begin{aligned}
i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\rho\partial_\rho(\delta_1\Psi) &= i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\rho\partial_\rho[-i\gamma^\mu\varepsilon_1(\partial_\mu A) + \gamma^\mu\gamma^5\varepsilon_1(\partial_\mu B) - \varepsilon_1 F - i\gamma^5\varepsilon_1 G] \\
&= \bar{\varepsilon}_2\gamma^\rho\gamma^\mu\varepsilon_1(\partial_\rho\partial_\mu A) + i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^5\varepsilon_1(\partial_\rho\partial_\mu B) - \\
&\quad -i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\rho\varepsilon_1(\partial_\rho F) + \bar{\varepsilon}_2\gamma^\rho\gamma^5\varepsilon_1(\partial_\rho G) \tag{4.2.51}
\end{aligned}$$

Για τους 2 πρώτους όρους εκμεταλλευόμαστε την άλγεβρα των γ -πινάκων ξανά, καθώς και το γεγονός ότι όπως παρατηρούμε η σειρά των δεικτών στην ποσότητα που πρέπει να υπολογίσουμε έχει συμμετρία εναλλαγής, που σημαίνει ότι δεν παίζει ρόλο εάν είναι πρώτα το μ και μετά το ν ή αντίστροφα. Αυτό εδώ συμβαίνει γιατί όπως βλέπουμε οι δείκτες αθροίζονται. Μπορούμε δηλαδή από την άλγεβρα να γράψουμε:

$$\gamma^\rho\gamma^\mu = \frac{1}{2}\{\gamma^\rho, \gamma^\mu\} = \eta^{\rho\mu} \tag{4.2.52}$$

Ξανατονίζουμε όμως ότι χρησιμοποιούμε την παραπάνω σχέση λόγω της συμμετρίας που προαναφέραμε. Έτσι:

$$\begin{aligned}
i\bar{\epsilon}_2\gamma^\rho\partial_\rho(\delta_1\Psi) &= \bar{\epsilon}_2\epsilon_1\eta^{\rho\mu}(\partial_\rho\partial_\mu A) + i\bar{\epsilon}_2\gamma^5\epsilon_1\eta^{\rho\mu}(\partial_\rho\partial_\mu B) - \\
&\quad -i\bar{\epsilon}_2\gamma^\rho\epsilon_1(\partial_\rho F) + \bar{\epsilon}_2\gamma^\rho\gamma^5\epsilon_1(\partial_\rho G) \\
&= \bar{\epsilon}_2\epsilon_1(\partial^\mu\partial_\mu A) + i\bar{\epsilon}_2\gamma^5\epsilon_1(\partial^\mu\partial_\mu B) - \\
&\quad -i\bar{\epsilon}_2\gamma^\mu\epsilon_1(\partial_\mu F) + \bar{\epsilon}_2\gamma^\mu\gamma^5\epsilon_1(\partial_\mu G)
\end{aligned} \tag{4.2.53}$$

Αντίστοιχα για το $i\bar{\epsilon}_1\gamma^\rho\partial_\rho(\delta_2\Psi)$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
i\bar{\epsilon}_1\gamma^\rho\partial_\rho(\delta_2\Psi) &= \bar{\epsilon}_1\epsilon_2(\partial^\mu\partial_\mu A) + i\bar{\epsilon}_1\gamma^5\epsilon_2(\partial^\mu\partial_\mu B) - \\
&\quad -i\bar{\epsilon}_1\gamma^\mu\epsilon_2(\partial_\mu F) + \bar{\epsilon}_1\gamma^\mu\gamma^5\epsilon_2(\partial_\mu G)
\end{aligned} \tag{4.2.54}$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τη δράση του μεταθέτη στο πεδίο F:

$$\begin{aligned}
[\delta_1, \delta_2]F &= (\bar{\epsilon}_2\epsilon_1 - \bar{\epsilon}_1\epsilon_2)\square A + i(\bar{\epsilon}_2\gamma^5\epsilon_1 - \bar{\epsilon}_1\gamma^5\epsilon_2)\square B - \\
&\quad -i(\bar{\epsilon}_2\gamma^\mu\epsilon_1 - \bar{\epsilon}_1\gamma^\mu\epsilon_2)(\partial_\mu F) + \\
&\quad + (\bar{\epsilon}_2\gamma^\mu\gamma^5\epsilon_1 - \bar{\epsilon}_1\gamma^\mu\gamma^5\epsilon_2)(\partial_\mu G)
\end{aligned} \tag{4.2.55}$$

Εφαρμόζοντας Majorana flips, οι 2 πρώτοι και ο τελευταίος όρος μηδενίζονται, ενώ μας μένει ο 3ος και παίρνουμε σωστά μετατόπιση και για το F:

$$\boxed{[\delta_1, \delta_2]F = -2i(\bar{\epsilon}_2\gamma^\mu\epsilon_1)(\partial_\mu F)} \tag{4.2.56}$$

Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε:

$$\boxed{[\delta_1, \delta_2]G = -2i(\bar{\epsilon}_2\gamma^\mu\epsilon_1)(\partial_\mu G)} \tag{4.2.57}$$

Invariance της νέας Lagrangian: Έτσι λοιπόν οι μετασχηματισμοί κλείνουν μεταξύ τους. Η δράση του μεταθέτη 2 μεταβολών πάνω στα πεδία μας (A, B, Ψ , F, G) δίνει πάντοτε μετατόπιση με τον ίδιο σταθερό συντελεστή. Όμως για να καταφέρουμε να το πετύχουμε αυτό χρειάστηκε η εισαγωγή 2 νέων πεδίων. Αυτά προφανώς θα εμφανίζονται και στη Lagrangian. Αυτό σημαίνει όμως ότι ενδέχεται η νέα αυτή Lagrangian να μην αφήνει πια μία ολική παράγωγο όταν μετασχηματιστεί, οπότε και έχει σπάσει η SUSY. Θα πρέπει λοιπόν να ελέγξουμε και αυτή την περίπτωση. Η Lagrangian με την εισαγωγή των 2 βοηθητικών πεδίων:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu A)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu B)^2 + \frac{i}{4}\bar{\Psi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\Psi + \frac{1}{2}F^2 + \frac{1}{2}G^2 \tag{4.2.58}$$

Η απουσία κινητικού όρου για τα F και G αντικατοπτρίζει ακριβώς το γεγονός ότι τα πεδία αυτά είναι όπως είπαμε βοηθητικά. Παίρνοντας variation οι 2πρώτοι όροι δεν αλλάζουν σε σχέση με τον αρχικό μας υπολογισμό, ενώ επηρεάζεται ο 3ος αφού η μεταβολή του Ψ περιέχει τα νέα πεδία. Συμφέρει εδώ να ξεχωρίσουμε επίσης το παλαιό κομμάτι της μεταβολής του Ψ (για το οποίο και πάλι οι υπολογισμοί έχουν γίνει πιο πάνω) από τους extra terms:

$$\begin{aligned}
\delta\Psi &= \{-i\gamma^\mu\epsilon(\partial_\mu A) + \gamma^\mu\gamma^5\epsilon(\partial_\mu B)\} + \{-\epsilon F - i\gamma^5\epsilon G\} \\
&= \delta_0\Psi + \delta_{ex}\Psi
\end{aligned} \tag{4.2.59}$$

και αντίστοιχα για το $\delta\bar{\Psi}$ και έχουμε:

$$\delta_{ex}\Psi = -\epsilon F - i\gamma^5\epsilon G, \quad \delta_{ex}\bar{\Psi} = -\bar{\epsilon}F - i\bar{\epsilon}\gamma^5 G \tag{4.2.60}$$

Εφαρμόζουμε στον 3ο όρο της Lagrangian:

$$\begin{aligned}
\delta \left(\frac{i}{4} \bar{\Psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Psi \right) &= 2 \frac{i}{4} [(\delta \bar{\Psi}) \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - (\partial_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \delta \Psi] + \text{tot.div} \\
&= i(\delta \bar{\Psi}) \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + \text{tot.div} \\
&= i(\delta_0 \bar{\Psi} + \delta_{ex} \bar{\Psi}) \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + \text{tot.div} \\
&= i(-\bar{\varepsilon} F - i\bar{\varepsilon} \gamma^5 G) \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + \text{tot.div} \\
&= -i\bar{\varepsilon} F \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + \bar{\varepsilon} \gamma^5 G \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + \text{tot.div} \tag{4.2.61}
\end{aligned}$$

Παραλείψαμε εδώ στο 4ο βήμα τη δ_0 μεταβολή, καθώς προστιθέμενη στη μεταβολή των 2 πρώτων όρων της Lagrangian μας δίνει ένα tot.div. Για τις μεταβολές των 2 τελευταίων όρων:

$$\begin{aligned}
\delta \left(\frac{1}{2} F^2 + \frac{1}{2} G^2 \right) &= F \delta F + G \delta G \\
&= F i \bar{\varepsilon} \gamma^\rho \partial_\rho \Psi + G (-\bar{\varepsilon} \gamma^5 \gamma^\rho \partial_\rho \Psi) \\
&= i \bar{\varepsilon} F \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \bar{\varepsilon} \gamma^5 G \gamma^\mu \partial_\mu \Psi \tag{4.2.62}
\end{aligned}$$

Η μεταβολή όλης της Lagrangian είναι λοιπόν:

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L} &= \text{tot.div} - i \bar{\varepsilon} F \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + \bar{\varepsilon} \gamma^5 G \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + \\
&\quad + i \bar{\varepsilon} F \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \bar{\varepsilon} \gamma^5 G \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + \text{tot.div} \\
\delta \mathcal{L} &= \text{tot.div} \tag{4.2.63}
\end{aligned}$$

Έτσι λοιπόν δείξαμε ότι η Lagrangian:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu A)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu B)^2 + \frac{i}{4} \bar{\Psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Psi + \frac{1}{2} F^2 + \frac{1}{2} G^2 \tag{4.2.64}$$

αφήνει μία ολική παράγωγο κάτω από τους μετασχηματισμούς υπερσυμμετρίας (SUSY):

$$\begin{aligned}
\delta A &= \bar{\varepsilon} \Psi, & \delta B &= i \bar{\varepsilon} \gamma^5 \Psi \\
\delta F &= i \bar{\varepsilon} \gamma^\rho \partial_\rho \Psi, & \delta G &= -\bar{\varepsilon} \gamma^5 \gamma^\rho \partial_\rho \Psi \\
\delta \Psi &= -i \gamma^\rho \varepsilon (\partial_\rho A) + \gamma^\rho \gamma^5 \varepsilon (\partial_\rho B) - \varepsilon F - i \gamma^5 \varepsilon G \\
\delta \bar{\Psi} &= i \bar{\varepsilon} \gamma^\rho (\partial_\rho A) - \bar{\varepsilon} \gamma^5 \gamma^\rho (\partial_\rho B) - \bar{\varepsilon} F - i \bar{\varepsilon} \gamma^5 G \tag{4.2.65}
\end{aligned}$$

Η δράση αντίστοιχα παραμένει αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς της ομάδας της υπερσυμμετρίας:

$$\delta S = 0 \tag{4.2.66}$$

Οι μετασχηματισμοί αυτοί όπως είδαμε πιο πάνω κλείνουν μεταξύ τους, οπότε τα πεδία τα οποία έχουν εισαχθεί (A, B, Ψ , F, G) όπως είπαμε αποτελούν βάση για δημιουργία μη αναγώγιμων αναπαράστασεων της SUSY. Επιπλέον στο σημείο αυτό μπορούμε να δούμε κάτι για το οποίο είχαμε προειδεαστεί στην αρχή της συζήτησης και συγκεκριμένα όταν ξεκινήσαμε και γράψαμε την πρώτη Lagrangian. Όπως βλέπουμε, μέσω της εισαγωγής των 2 επιπλέον πεδίων F και G, ουσιαστικά αποκαταστήσαμε και την έλλειψη των 2 βαθμών ελευθερίας που υπήρχε. Είχαμε αναφέρει ότι αφού μελετάμε SUSY, θα πρέπει εκτός της Lagrangian που θα περιέχει bosons και fermions, να έχουν τα πεδία και τους ίδιους βαθμούς ελευθερίας. Παρατηρούμε λοιπόν πως μέσω φυσικής απαίτησης, για να κλείσει το σύνολο των μετασχηματισμών αναγκαστήκαμε να εισάγουμε 2 νέα βαθμωτά πεδία στη Lagrangian. Μετράμε και έχουμε 4 βαθμούς ελευθερίας από τα 4 βαθμωτά πεδία και 4 βαθμούς από τον σπίνορα Ψ . Ίσοι

βαθμοί ελευθερίας για μποζόνια και φερμιόνια. Τέλος, μία άλλη μορφή για τη Lagrangian με σπίνορες 2 συνιστωσών και με 2 μιγαδικά πεδία αντί για 4 βαθμωτά είναι η εξής:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi^*) + \frac{i}{2} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu (\bar{\Psi}^{\dot{\alpha}} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi^\alpha) + \mathbf{H}^* \mathbf{H} \quad (4.2.67)$$

όπου ορίσαμε:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(A - iB), \quad H = \frac{1}{\sqrt{2}}(F + iG) \quad (4.2.68)$$

4.2.3 Προσθήκη όρων μάζας.

Όπως παρατηρούμε στην παραπάνω Lagrangian στα 2 πεδία τα οποία έχουμε προσθέσει, απουσιάζει ο κινητικός όρος, ενώ επίσης δεν υπάρχει καμία αλληλεπίδραση με τα υπόλοιπα πεδία. Γι αυτό και ο όρος “βοηθητικά πεδία”. Θα δούμε στη συνέχεια με ποιόν τρόπο μπορούμε να “αφομοιώσουμε” τα πεδία αυτά. Συνεχίζοντας τώρα, μπορούμε να προσθέσουμε όρους μάζας στη Lagrangian. Προφανώς οι όροι μάζας που θα γράψουμε θα πρέπει να είναι αναλλοίωτοι κάτω από μετασχηματισμούς του SUSY group. Έτσι λοιπόν τα πεδία μας αποκτάνε μάζα εάν θεωρήσουμε το επιπλέον κομμάτι στη Lagrangian:

$$\mathcal{L}_m = \left(\frac{1}{2} \bar{\Psi} \Psi + AF + BG \right) m \quad (4.2.69)$$

Το ότι αυτό είναι SUSY invariant φαίνεται εάν θεωρήσουμε μία μεταβολή του:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{m} &= \frac{1}{2} (\delta \bar{\Psi}) \Psi + \frac{1}{2} \bar{\Psi} (\delta \Psi) + (\delta A) F + A (\delta F) + (\delta B) G + B (\delta G) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ i \bar{\epsilon} \gamma^\rho (\partial_\rho A) \Psi - \bar{\epsilon} \gamma^5 \gamma^\rho (\partial_\rho B) \Psi - \bar{\epsilon} \Psi F - i \bar{\epsilon} \gamma^5 \Psi G - \right. \\ &\quad \left. - i \bar{\Psi} \gamma^\rho \epsilon (\partial_\rho A) + \bar{\Psi} \gamma^\rho \gamma^5 \epsilon (\partial_\rho B) - \bar{\Psi} \epsilon F - i \bar{\Psi} \gamma^5 \epsilon G \right\} + \\ &\quad + \bar{\epsilon} \Psi F + i A \bar{\epsilon} \gamma^\rho (\partial_\rho \Psi) + i \bar{\epsilon} \gamma^5 \Psi G - B \bar{\epsilon} \gamma^5 \gamma^\rho (\partial_\rho \Psi) \end{aligned} \quad (4.2.70)$$

Χρησιμοποιώντας τα Majorana flips θα είναι:

$$-\frac{1}{2} \bar{\epsilon} \Psi F - \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \Psi F - \bar{\Psi} \epsilon F = 0 \quad (4.2.71)$$

$$-\frac{1}{2} i \bar{\epsilon} \gamma^5 \Psi G - \frac{1}{2} i \bar{\Psi} \gamma^5 \epsilon G + i \bar{\epsilon} \gamma^5 \Psi G = 0 \quad (4.2.72)$$

$$\frac{1}{2} \left\{ i \bar{\epsilon} \gamma^\rho \Psi (\partial_\rho A) - i \bar{\Psi} \gamma^\rho \epsilon (\partial_\rho A) \right\} = i \bar{\epsilon} \gamma^\rho \Psi (\partial_\rho A) \quad (4.2.73)$$

$$\frac{1}{2} \left\{ -\bar{\epsilon} \gamma^5 \gamma^\rho \Psi (\partial_\rho B) + \bar{\Psi} \gamma^\rho \gamma^5 \epsilon (\partial_\rho B) \right\} = \bar{\epsilon} \gamma^5 \gamma^\rho \Psi (\partial_\rho B) \quad (4.2.74)$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{m} &= i \bar{\epsilon} \gamma^\rho \Psi (\partial_\rho A) + \bar{\epsilon} \gamma^5 \gamma^\rho \Psi (\partial_\rho B) + \\ &\quad + i \bar{\epsilon} \gamma^\rho A (\partial_\rho \Psi) - B \bar{\epsilon} \gamma^5 \gamma^\rho (\partial_\rho \Psi) \end{aligned} \quad (4.2.75)$$

όμως είναι $\gamma^5 \gamma^\rho = -\gamma^\rho \gamma^5$ και έτσι:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{m} &= i \bar{\epsilon} \gamma^\rho \left\{ \Psi (\partial_\rho A) + A (\partial_\rho \Psi) \right\} + \\ &\quad + \bar{\epsilon} \gamma^\rho \gamma^5 \left\{ \Psi (\partial_\rho B) + B (\partial_\rho \Psi) \right\} \\ &= \partial_\rho \left\{ i \bar{\epsilon} \gamma^\rho A \Psi + \bar{\epsilon} \gamma^\rho \gamma^5 B \Psi \right\} \\ &= \text{tot.div} \end{aligned} \quad (4.2.76)$$

Άρα οι όροι που προσθέσαμε είναι αναλλοίωτοι κάτω από το SUSY group, οπότε και είναι αποδεκτοί όροι μάζας. Έτσι η ολική Lagrangian πλέον, με όρους μάζας για τα πεδία, γίνεται:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu A)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu B)^2 + \frac{i}{4}\bar{\Psi}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Psi + \frac{1}{2}F^2 + \frac{1}{2}G^2 + \\ & + \frac{m}{2}\bar{\Psi}\Psi + mA F + mBG \end{aligned} \quad (4.2.77)$$

Απαλοιφή των F, G: Όπως φαίνεται παραπάνω, οι όροι μάζας που προσθέσαμε, όσον αφορά στα βαθμωτά πεδία, παρουσιάζονται ως γινόμενο AF και BG. Δεν είναι δηλαδή όροι μάζας. Μάζα έχει πάρει μόνο ο σπίνορας Ψ. Θα μπορούσαμε να εξαφανίσουμε τα “βοηθητικά” πεδία και ουσιαστικά να απορροφήσουμε το βαθμό ελευθερίας τους δίνοντας μάζα στα πεδία A και B. Αυτό θα γίνει με χρήση των εξισώσεων Euler - Lagrange για τα πεδία F και G. Είναι:

$$E.L. \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu F)} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu G)} \quad (4.2.78)$$

Εκτελώντας τις παραγωγίσεις από την παραπάνω Lagrangian παίρνουμε:

$$F = -mA, \quad G = -mB \quad (4.2.79)$$

Αντικαθιστούμε στη Lagrangian και έτσι απαλείφονται τα πεδία F και G και η νέα Lagrangian με όρους μάζας για τα A και B:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu A)^2 - m^2 A^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu B)^2 - m^2 B^2 + \frac{i}{4}\bar{\Psi}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Psi + \frac{m}{2}\bar{\Psi}\Psi \quad (4.2.80)$$

Βέβαια μπορούμε να γράψουμε τα παραπάνω ορίζοντας το γνωστό μας μιγαδικό πεδίο φ, οπότε:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi^*) - m^2 \varphi^* \varphi + \frac{i}{4}\bar{\Psi}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Psi + \frac{m}{2}\bar{\Psi}\Psi \quad (4.2.81)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι καταφέραμε να απορροφήσουμε τα βοηθητικά πεδία, τα οποία δεν είχαν κάποιο φυσικό νόημα και να δώσουμε μάζα στα πεδία A και B. Οι βαθμοί ελευθερίας διατηρούνται αφού κάθε βαθμωτό με μάζα έχει 2 βαθμούς, ή αντίστοιχα μιγαδικό με μάζα 4 βαθμούς. Βέβαια το κόστος το οποίο πληρώνουμε εδώ, είναι 'οτι για να προσδώσουμε μάζα, αναγκαστήκαμε να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις Euler - Lagrange. Το πρόβλημα είναι το ίδιο με την περίπτωση που χρησιμοποιήσαμε εξισώσεις πεδίου. Δεν ισχύουν πάντα αλλά σε συγκεκριμένο όριο. Θέλουμε η θεωρία μας να έχει γενική και καθολική ισχύ. Θα συνεχίσουμε στο επόμενο κεφάλαιο, εξετάζοντας τα ζητήματα της ομάδας υπερσυμμετρίας πιο μαθηματικά και πιο αυστηρά.

Chapter 5

SUPER POINCARÉ GROUP, SUPERSPACE, SUPERFIELDS

5.1 SUPER POINCARÉ GROUP.

Οι μετασχηματισμοί τους οποίους παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο (οι SUSY μετασχηματισμοί) δημιουργούν μία “γενικευμένη” ομάδα. Δηλαδή μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια κάποιων γεννητόρων. Οι γεννήτορες αυτοί ικανοποιούν μία κλειστή άλγεβρα, όπως θα δείξουμε, μία γενικευμένη άλγεβρα Lie. Παρακάτω θα προσπαθήσουμε να βρούμε αυτή την άλγεβρα, τους γεννήτορες της ομάδας και τα πεδία που ορίζουν.

5.1.1 Ένα παράδειγμα από την $SU(2)$.

Είναι όμως χρήσιμο να ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα από την $SU(2)$, το οποίο θα εφαρμόσουμε στη δικιά μας περίπτωση για την εύρεση των γεννητόρων. Στην $SU(2)$ λοιπόν έχουμε 3 παραμέτρους $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ και 3 γεννήτορες J_1, J_2, J_3 , οι οποίοι ικανοποιούν την άλγεβρα $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$. Επίσης έστω ότι τα πεδία ψ ορίζουν κατάλληλη βάση για αναπαραστάσεις της $SU(2)$. Η δράση των στοιχείων της ομάδας πάνω στο ψ είναι:

$$\psi \longrightarrow \psi' = e^{i\theta_n J_n} \psi \quad (5.1.1)$$

Παίρνοντας απειροστές παραμέτρους:

$$\begin{aligned} \psi \longrightarrow \psi' &= (1 + i\theta_n J_n) \psi \\ \delta\psi &= i\theta_n J_n \psi \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

Εκτελώντας 2 διαδοχικές μεταβολές στο ψ με παραμέτρους θ_m^1, θ_n^2 αντίστοιχα θα πάρουμε:

$$\begin{aligned} \delta_1 \delta_2 \psi &= \delta_1 (i\theta_m^2 J_m \psi) \\ &= i\theta_m^2 J_m \delta_1 \psi \\ &= -\theta_m^2 \theta_n^1 J_m J_n \psi \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

και αντίστοιχα:

$$\delta_1 \delta_2 \psi = -\theta_n^1 \theta_m^2 J_n J_m \psi \quad (5.1.4)$$

(τα στοιχεία των παραμέτρων περνούν μπροστά αφού είναι απλοί αριθμοί και μετατίθενται, επίσης δεν έχει σημασία η σειρά τους). Εάν πάρουμε τη δράση του μεταθέτη 2 μεταβολών πάνω στο ψ , θα είναι:

$$\begin{aligned} [\delta_1, \delta_2] \psi &= -\theta_n^1 \theta_m^2 (J_m J_n - J_n J_m) \psi \\ &= -\theta_n^1 \theta_m^2 [J_m, J_n] \psi \\ &= (-i\epsilon_{nmp} \theta_n^1 \theta_m^2) J_p \psi \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

δηλαδή βλέπουμε ότι το αποτέλεσμα είναι ένας αριθμός $(-i\epsilon_{nmp} \theta_n^1 \theta_m^2)$ επί έναν γεννήτορα. Άρα μπορούμε να γράψουμε το μεταθέτη με μορφή τελεστή, ως:

$$[\delta_1, \delta_2] = (-i\epsilon_{nmp} \theta_n^1 \theta_m^2) J_p \quad (5.1.6)$$

Όπως μπορεί κανείς να παρατηρήσει, τα αποτελέσματα που βγάλαμε έχουν γενική ισχύ. Δηλαδή δεν έχουμε θεωρήσει συγκεκριμένη μορφή στα ψ καθώς και δεν έχουμε πάρει συγκεκριμένη μορφή στους γεννήτορες (συγκεκριμένη αναπαράσταση). Μπορούμε λοιπόν να πούμε πως το αποτέλεσμα της δράσης του πάνω μεταθέτη θα είναι ένας αριθμός ο οποίος εξαρτάται τετραγωνικά από τις παραμέτρους της ομάδας επί έναν γεννήτορα. Σε αυτό συνηγορούν και τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου, όπου είχαμε εξετάσει αναλυτικά τις εκφράσεις αυτές και τη δράση τους πάνω στα πεδία A, B, Ψ, F, G . Σε κάθε περίπτωση αυτό που βρήκαμε ήταν ο ίδιος τετραγωνικός ως προς τις παραμέτρους συντελεστής (βέβαια στην περίπτωση αυτή οι παράμετροι του group ήταν οι Majorana spinors ϵ), πολλαπλασιασμένος με την ποσότητα $-i\partial_\mu$, την οποία ταυτοποιήσαμε ως το γεννήτορα των μετατοπίσεων P_μ . Έχουμε δηλαδή:

$$\begin{aligned} [\delta_1, \delta_2] &= -2i (\bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu \epsilon_1) \partial_\mu \\ &= (2\bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu \epsilon_1) P_\mu \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

Όμως εδώ προκύπτει το εξής: Ο γεννήτορας των μετατοπίσεων που προκύπτει εδώ, είναι γεννήτορας του Poincaré group. Δηλαδή έχουμε μέσα στις εκφράσεις μας στοιχεία από άλλο group. Υπενθυμίζουμε εδώ κάποια στοιχεία της ομάδας Poincaré. Είναι η ομάδα η οποία περιέχει τα στοιχεία της ομογενούς ομάδας Lorentz με 3 στροφές και 3 Lorentz boosts, καθώς και τις μετατοπίσεις στο χωροχρόνο, δηλαδή άλλα 4 στοιχεία, σύνολο 10 generators. Η άλγεβρα που ικανοποιεί η ομάδα Poincaré είναι:

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i(g_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}) \quad (5.1.8)$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \quad (5.1.9)$$

$$[P_\mu, J_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\rho}J_\sigma - g_{\mu\sigma}J_\rho) \quad (5.1.10)$$

Το αποτέλεσμα της εμφάνισης του γεννήτορα του Poincaré group στους SUSY μετασχηματισμούς έχει ιδιαίτερη σημασία. Πρώτα όμως θα πρέπει να παρατηρήσουμε το εξής. Σε όλη την προηγούμενη διαδικασία έχει γίνει αναφορά στις παραμέτρους της SUSY οι οποίοι είναι οι Majorana σπίνορες ϵ . Δεν έχει γίνει όμως η παραμικρή αναφορά σε γεννήτορες SUSY. Προφανώς θα πρέπει να βρούμε ποιό είναι οι γεννήτορες της υπερσυμμετρίας. Να βρούμε την ακριβή μορφή τους καθώς και την άλγεβρα τους. Την άλγεβρα της SUSY. Για το σκοπό αυτό θα μας φανεί χρήσιμη η σχέση του μεταθέτη που υπολογίσαμε πιο πριν. Όμως όπως είπαμε εμφανίζονται γεννήτορες του Poincaré group. Αυτό λοιπόν στην περίπτωση μας σημαίνει πως η άλγεβρα των SUSY γεννητόρων δεν κλείνει, οπότε και δεν αποτελούν από μόνοι τους ομάδα, αλλά ουσιαστικά η SUSY αποτελεί μία επέκταση του Poincaré group. Θα πρέπει δηλαδή για να κλείσει η άλγεβρα να θεωρήσουμε και όλους τους generators του Poincaré group. Αυτά λοιπόν θα μας απασχολήσουν στα επόμενα. Προς το παρόν ας αρχίσουμε θεωρώντας γεννήτορες της SUSY.

5.1.2 SUSY generators.

Αφού λοιπόν μιλάμε για SUSY μετασχηματισμούς και ομάδα υπερσυμμετρίας, προφανώς θα πρέπει να υπάρχουν και κάποιοι γεννήτορες που γεννούν τα στοιχεία της SUSY. Σε αυτήν την παράγραφο θα ασχοληθούμε με την εύρεση της άλγεβρας που ικανοποιούν οι γεννήτορες της υπερσυμμετρίας. Αργότερα στο κεφάλαιο αυτό θα ακολουθήσει και η εύρεση της ακριβούς μορφής τους. Έτσι ξεκινάμε θεωρώντας πρώτα ότι υπάρχουν οι γεννήτορες αυτοί και τους συμβολίζουμε με Q . Ο Q θα πρέπει να είναι ένας Majorana σπίνορας και Grassmann ποσότητα όπως έχουμε δει. Θα ψάξουμε να βρούμε πώς θα είναι μία μεταβολή ως προς τη SUSY. Για το σκοπό αυτό, από τη μορφή που δείξαμε για την $SU(2)$, όπου είχαμε $\delta(field) = i\theta_n J_n(field)$, δηλαδή παράμετρος του group επί έναν γεννήτορα, έτσι και για τη SUSY θα γράψουμε αντίστοιχα:

$$\delta(field) = i(\epsilon^A Q_A)(field) \quad (5.1.11)$$

όπου οι ϵ^A είναι οι παράμετροι του group όπως έχουμε δει και επίσης είναι Grassmann ποσότητες, Majorana spinors. Μπορούμε να γράψουμε τους γεννήτορες και τις παραμέτρους με Weyl σπίνορες 2 συνιστωσών ως εξής:

$$\epsilon^A = \begin{pmatrix} \eta^\alpha \\ \bar{\eta}_\beta \end{pmatrix}, \quad Q_A = \begin{pmatrix} Q_\alpha \\ \bar{Q}^\beta \end{pmatrix} \quad (5.1.12)$$

Έτσι μία μεταβολή θα γράφεται με Weyl σπίνορες:

$$\delta = i\epsilon^A Q_A = i \left[\eta^\alpha Q_\alpha + \bar{\eta}_\beta \bar{Q}^\beta \right] = i [\eta Q + \bar{\eta} \bar{Q}] \quad (5.1.13)$$

Επανερχόμαστε τώρα στο σκοπό μας. Θέλουμε να βρούμε την άλγεβρα που υπακούουν οι SUSY generators. Έχουμε καταφέρει με την εισαγωγή τους να γράψουμε μία variation σε όρους Weyl σπινόρων. Η ιδέα από και κάτω είναι η εξής: Στο προηγούμενο κεφάλαιο είχαμε υπολογίσει τη μορφή που παίρνει ο μεταθέτης 2 μεταβολών υπερσυμμετρίας. Έχουμε λοιπόν:

$$[\delta_1, \delta_2] = (2\bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu \epsilon_1) P_\mu \quad (5.1.14)$$

Επίσης μόλις ορίσαμε και generators και υπολογίσαμε τη μορφή που παίρνει μία SUSY μεταβολή με τους γεννήτορες αυτούς. Δεν έχουμε να κάνουμε λοιπόν τίποτα άλλο από την εύρεση του $[\delta_1, \delta_2]$ με SUSY generators και να το συναληθεύσουμε με το παραπάνω. Βέβαια όπως βλέπουμε θα πρέπει να μετατρέψουμε και το αποτέλεσμα του μεταθέτη (14) σε Weyl σπινόρες 2 συνιστωσών αντίστοιχα έτσι ώστε να μπορεί να γίνει η σύγκριση. Ξεκινούμε πρώτα με τον υπολογισμό του μεταθέτη με χρήση των γεννητόρων Q . Από τη μεταβολή που υπολογίσαμε, για 2 διαφορετικές παραμέτρους, θα είναι:

$$\delta_1 = i \left(\eta_1^\alpha Q_\alpha + \bar{\eta}_{1\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} \right) \quad (5.1.15)$$

$$\delta_2 = i \left(\eta_2^\alpha Q_\alpha + \bar{\eta}_{2\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} \right) \quad (5.1.16)$$

Οπότε (προσέχοντας τους δείκτες):

$$\begin{aligned} [\delta_1, \delta_2] &= -[\eta_1^\alpha Q_\alpha + \bar{\eta}_{1\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}}, \eta_2^\alpha Q_\alpha + \bar{\eta}_{2\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}}] \\ &= -\left(\eta_1^\alpha Q_\alpha \eta_2^\beta Q_\beta + \eta_1^\alpha Q_\alpha \bar{\eta}_{2\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} + \bar{\eta}_{1\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} \eta_2^\alpha Q_\alpha + \bar{\eta}_{1\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} \bar{\eta}_{2\dot{\gamma}} \bar{Q}^{\dot{\gamma}} - \right. \\ &\quad \left. - \eta_2^\beta Q_\beta \eta_1^\alpha Q_\alpha - \bar{\eta}_{2\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} \eta_1^\alpha Q_\alpha - \eta_2^\alpha Q_\alpha \bar{\eta}_{1\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} - \bar{\eta}_{2\dot{\gamma}} \bar{Q}^{\dot{\gamma}} \bar{\eta}_{1\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} \right) \\ &= \eta_1^\alpha Q_\alpha Q_\beta \eta_2^\beta - \eta_2^\beta Q_\beta Q_\alpha \eta_1^\alpha + \eta_1^\alpha Q_\alpha \bar{Q}^{\dot{\beta}} \bar{\eta}_{2\dot{\beta}} - \bar{\eta}_{2\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} Q_\alpha \eta_1^\alpha + \\ &\quad + \bar{\eta}_{1\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} Q_\alpha \eta_2^\alpha - \eta_2^\alpha Q_\alpha \bar{Q}^{\dot{\beta}} \bar{\eta}_{1\dot{\beta}} + \bar{\eta}_{1\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\gamma}} \bar{\eta}_{2\dot{\gamma}} - \bar{\eta}_{2\dot{\gamma}} \bar{Q}^{\dot{\gamma}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} \bar{\eta}_{1\dot{\beta}} \\ &= -\eta_2^\beta (Q_\alpha Q_\beta + Q_\beta Q_\alpha) \eta_1^\alpha - \bar{\eta}_{2\dot{\beta}} (\bar{Q}^{\dot{\gamma}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} + \bar{Q}^{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\gamma}}) \bar{\eta}_{1\dot{\gamma}} - \\ &\quad - \eta_2^\alpha (Q_\alpha \bar{Q}^{\dot{\beta}} + \bar{Q}^{\dot{\beta}} Q_\alpha) \bar{\eta}_{1\dot{\beta}} + \eta_1^\alpha (Q_\alpha \bar{Q}^{\dot{\beta}} + \bar{Q}^{\dot{\beta}} Q_\alpha) \bar{\eta}_{2\dot{\beta}} \\ &= -\eta_2^\beta \{Q_\alpha, Q_\beta\} \eta_1^\alpha - \bar{\eta}_{2\dot{\beta}} \{\bar{Q}^{\dot{\beta}}, \bar{Q}^{\dot{\gamma}}\} \bar{\eta}_{1\dot{\gamma}} - \\ &\quad - \eta_2^\alpha \{Q_\alpha, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\} \bar{\eta}_{1\dot{\beta}} + \eta_1^\alpha \{Q_\alpha, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\} \bar{\eta}_{2\dot{\beta}} \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

όπου στις πράξεις χρησιμοποιήθηκε η Grassmann φύση των σπινόρων, οπότε $\{\eta, Q\} = 0$ καθώς επίσης και $\eta_\alpha Q^\alpha = -\eta^\alpha Q_\alpha$. Έτσι το αποτέλεσμα του μεταθέτη με χρήση των γεννητόρων της υπερσυμμετρίας που μόλις περιγράψαμε είναι:

$$[\delta_1, \delta_2] = -\eta_2^\beta \{Q_\alpha, Q_\beta\} \eta_1^\alpha - \bar{\eta}_{2\dot{\beta}} \{\bar{Q}^{\dot{\beta}}, \bar{Q}^{\dot{\gamma}}\} \bar{\eta}_{1\dot{\gamma}} - \eta_2^\alpha \{Q_\alpha, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\} \bar{\eta}_{1\dot{\beta}} + \eta_1^\alpha \{Q_\alpha, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\} \bar{\eta}_{2\dot{\beta}} \quad (5.1.18)$$

αυτήν ακριβώς τη σχέση όπως αναφέραμε θα θέλαμε να τη συγκρίνουμε με την $[\delta_1, \delta_2] = (2\bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu \epsilon_1) P_\mu$ που έχουμε υπολογίσει από πριν. Πρέπει λοιπόν να φέρουμε και αυτή σε μορφή Weyl σπινόρων. Αντίστοιχα λοιπόν έχουμε:

$$\epsilon^A = \epsilon = \begin{pmatrix} \eta^\alpha \\ \bar{\eta}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \epsilon^\dagger = \begin{pmatrix} \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} & \eta_\alpha \end{pmatrix} \quad (5.1.19)$$

$$\bar{\epsilon} = \epsilon^\dagger \gamma^0 = \begin{pmatrix} \eta_\alpha & \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu\dot{\alpha}\beta} \\ \bar{\sigma}^{\dot{\alpha}\beta\mu} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.1.20)$$

Για την έκφραση αυτή θα είναι:

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu \varepsilon_1 &= \begin{pmatrix} \eta_{2\alpha} & \bar{\eta}_2^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu\alpha\dot{\beta}} \\ \bar{\sigma}^{\mu}_{\dot{\alpha}\beta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1^\beta \\ \bar{\eta}_{1\dot{\beta}} \end{pmatrix} \\
&= \eta_{2\alpha} \sigma^{\mu\alpha\dot{\beta}} \bar{\eta}_{1\dot{\beta}} + \bar{\eta}_2^{\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^{\mu}_{\dot{\alpha}\beta} \eta_1^\beta \\
&= \eta_{2\alpha} \sigma^{\mu\alpha\dot{\beta}} \bar{\eta}_{1\dot{\beta}} + \bar{\eta}_2^{\dot{\alpha}} \sigma^{\mu}_{\beta\dot{\alpha}} \eta_1^\beta \\
&= -\eta_2^\alpha \sigma_\alpha^{\mu\dot{\beta}} \bar{\eta}_{1\dot{\beta}} + \eta_1^\beta \sigma_\beta^{\mu\dot{\alpha}} \bar{\eta}_{2\dot{\alpha}} \\
&= -\eta_2^\alpha \sigma_\alpha^{\mu\dot{\beta}} \bar{\eta}_{1\dot{\beta}} + \eta_1^\alpha \sigma_\alpha^{\mu\dot{\beta}} \bar{\eta}_{2\dot{\beta}}
\end{aligned} \tag{5.1.21}$$

όπου ξανά εκμεταλλευτήκαμε το γεγονός ότι οι ποσότητες είναι Grassmann και τις σχέσεις που είχαμε εξάγει για τους σ πίνακες σε προηγούμενο κεφάλαιο. Οπότε ο μεταθέτης θα γίνει:

$$[\delta_1, \delta_2] = -\eta_2^\alpha \left(2\sigma_\alpha^{\mu\dot{\beta}} P_\mu \right) \bar{\eta}_{1\dot{\beta}} + \eta_1^\alpha \left(2\sigma_\alpha^{\mu\dot{\beta}} P_\mu \right) \bar{\eta}_{2\dot{\beta}} \tag{5.1.22}$$

Όπως λοιπόν είχαμε πει, από απλή σύγκριση των μεταθετών, παίρνουμε την άλγεβρα των γεννητόρων της υπερσυμμετρίας:

$$\begin{aligned}
\{Q_\alpha, Q_\beta\} &= 0, & \{\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\} &= 0 \\
\{Q_\alpha, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\} &= 2\sigma_\alpha^{\mu\dot{\beta}} P_\mu
\end{aligned} \tag{5.1.23}$$

Θα μπορούσαμε να εξάγουμε επίσης την τελευταία σχέση με μόνο πάνω ή μόνο κάτω δείκτες:

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu P_\mu \tag{5.1.24}$$

και πολλαπλασιάζοντας με τους αντίστοιχους μετρικούς τανυστές:

$$\begin{aligned}
\{Q^\alpha, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\} &= \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} \\
\{Q^\alpha, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\} &= 2\sigma^{\mu\alpha\dot{\beta}} P_\mu
\end{aligned} \tag{5.1.25}$$

$$\{Q^\alpha, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\} = 2\bar{\sigma}^{\mu\dot{\beta}\alpha} P_\mu \tag{5.1.26}$$

Τέλος, μπορούμε να βρούμε τις ίδιες σχέσεις αντιμετάθεσης με χρήση σπινόρων 4 συνιστωσών, εάν ορίσουμε:

$$Q_A = \begin{pmatrix} Q_\alpha \\ \bar{Q}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \bar{Q}_A = \begin{pmatrix} Q^\alpha & \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{5.1.27}$$

Τότε:

$$Q_A \bar{Q}_B = \begin{pmatrix} Q_\alpha Q^\beta & Q_\alpha \bar{Q}_{\dot{\beta}} \\ \bar{Q}^{\dot{\alpha}} Q^\beta & \bar{Q}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\beta}} \end{pmatrix} \quad \bar{Q}_B Q_A = Q^\beta Q_\alpha + \bar{Q}^{\dot{\beta}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \tag{5.1.28}$$

Έτσι λοιπόν ο αντιμεταθέτης τους θα γίνει:

$$\begin{aligned}
\{Q_A, \bar{Q}_B\} &= \begin{pmatrix} \{Q_\alpha, Q^\beta\} & \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} \\ \{\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, Q^\beta\} & \{\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu P_\mu \\ 2\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta} P_\mu & 0 \end{pmatrix} \\
&= 2 \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta} & 0 \end{pmatrix} P_\mu \\
\{Q_A, \bar{Q}_B\} &= 2\gamma_{AB}^\mu P_\mu
\end{aligned} \tag{5.1.29}$$

Για τον αντιμεταθέτη $\{Q_A, Q_B\}$ εργαζόμαστε ως εξής: Αφού ο Q είναι Majorana σπινόρας, από τον ορισμό των Majorana σπινόρων θα έχουμε:

$$\begin{aligned} Q_B &= (C\bar{Q})_B = C_{BA}\bar{Q}_A^T \\ C_{DB}Q_B &= C_{DB}C_{BA}\bar{Q}_A^T \\ &= (C^2)_{DA}\bar{Q}_A^T \\ C_{DB}Q_B &= \eta\bar{Q}_D^T \end{aligned} \quad (5.1.30)$$

όπου αφού $C^2 = \pm 1$ συμβολίζουμε $\eta = \pm 1$. Οπότε:

$$\bar{Q}_B = \eta C_{BD}Q_D \quad (5.1.31)$$

Ο αντιμεταθέτης που υπολογίστηκε πιο πριν θα γίνει (τονίζουμε ότι το στοιχείο C_{BD} είναι αριθμός, οπότε και μπορεί να περάσει στο τέλος της παράστασης):

$$\begin{aligned} \{Q_A, \bar{Q}_B\} &= \eta(Q_A C_{BD}Q_D + C_{BD}Q_D Q_A) \\ 2\gamma_{AB}^\mu P_\mu &= \eta\{Q_A, Q_D\}C_{BD} \\ 2\gamma_{AB}^\mu P_\mu &= \eta\{Q_A, Q_D\}C_{BD} \\ -2\gamma_{AB}^\mu P_\mu &= \eta\{Q_A, Q_D\}C_{DB} \\ -2\gamma_{AB}^\mu C_{BF}P_\mu &= \eta\{Q_A, Q_D\}C_{DB}C_{BF} \\ -2(\gamma^\mu C)_{AF}P_\mu &= \eta\{Q_A, Q_F\}\eta \\ -2(\gamma^\mu C)_{AF}P_\mu &= \eta^2\{Q_A, Q_F\} \end{aligned} \quad (5.1.32)$$

Όμως $\eta^2 = 1$, οπότε υπολογίσαμε και αυτόν τον αντιμεταθέτη:

$$\{Q_A, Q_B\} = -2(\gamma^\mu C)_{AB}P_\mu \quad (5.1.33)$$

Συγκεντρώνοντας, η άλγεβρα με Majorana spinors θα είναι:

$$\boxed{\begin{aligned} \{Q_A, \bar{Q}_B\} &= 2\gamma_{AB}^\mu P_\mu \\ \{Q_A, Q_B\} &= -2(\gamma^\mu C)_{AB}P_\mu \end{aligned}} \quad (5.1.34)$$

5.1.3 Κλείσιμο της άλγεβρας.

Όπως υποστηρίξαμε και στην αρχή, φαίνεται πια καθαρά, ότι η άλγεβρα των γεννητόρων της SUSY δεν κλείνει. Δεν κλείνει γιατί εμφανίζεται στην άλγεβρα γεννήτορας από άλλο group, το Poincare. Άρα η SUSY που έχουμε δει μέχρι τώρα δεν μπορεί να αποτελέσει ομάδα. Αφού εμφανίζεται ο γεννήτορας των μετατοπίσεων, θα πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν και το poincare group. Άρα θα θεωρήσουμε επιπλέον και τους 10 generators του Poincare group. Ελπίζουμε εξετάζοντας την άλγεβρα των γεννητόρων με τα στοιχεία της ομάδας poincare, να μην προκύπτει στοιχείο από άλλο group, έτσι ώστε η άλγεβρα να κλείσει, ώστε το σύνολο αυτό να αποτελεί την ομάδα της SUSY. Θα έχουμε οπυσιαστικά δηλαδή, επεκτείνει το Poincare group σε ένα νέο group που περιέχει και SUSY, το super - Poincare group. Θα εξετάσουμε λοιπόν τώρα την άλγεβρα αυτή.

Μετάθεση με τα $J_{\mu\nu}$: Το poincare group όπως γνωρίζουμε, αποτελείται από 10 generators, οι οποίοι αντιστοιχούν σε 4 μετατοπίσεις (στις 4 διαστάσεις του χωροχρόνου) και είναι οι P_μ , σε 3 στροφές ως προς τους 3 άξονες και 3 Lorentz boosts τα οποία γκρουπάρονται στους $J_{\mu\nu}$. Σε αυτούς όπως είπαμε προσθέτουμε τους SUSY generators που μόλις εξετάσαμε. Βρήκαμε την άλγεβρα των Q μεταξύ τους. Εδώ θα εξετάσουμε την άλγεβρα με τους $J_{\mu\nu}$ γεννήτορες. Η ιδέα εδώ είναι πρώτα

να εξάγουμε μία σχέση μετάθεσης του $J_{\mu\nu}$ με έναν τυχαίο σπινόρα $\psi(x)$ και έπειτα να ειδικεύσουμε στους σπινόρες Q . Έτσι λοιπόν εάν θυμηθούμε λίγο QFT, ο τελεστής \mathbf{J} δίνεται από μία έκφραση της μορφής:

$$\mathbf{J} = \int \psi^\dagger \mathbf{s} \psi d^3x \quad (5.1.35)$$

ενώ παράλληλα ισχύουν οι σχέσεις αντιμετάθεσης για τους σπινόρες ψ :

$$\{\psi_i(\mathbf{x}, t), \psi_j(\mathbf{x}', t)\} = \{\psi_i^\dagger(\mathbf{x}, t), \psi_j^\dagger(\mathbf{x}', t)\} = 0 \quad (5.1.36)$$

Από τις 2 παραπάνω κατ' ευθείαν μπορεί κανείς να δει ότι θα ισχύει:

$$[\mathbf{J}, \psi(x)] = -\mathbf{s}\psi(x) \quad (5.1.37)$$

Αυτή είναι η αρχική σχέση στην οποία θέλαμε να καταλήξουμε. Πρέπει να μεταφερθούμε όμως στη γλώσσα των Weyl σπινόρων. Όπως λοιπόν είχαμε πει στο κεφάλαιο που εισήχθησαν οι Weyl σπινόρες, η αναπαράσταση των γεννητόρων του Lorentz group (3 στροφές και 3 boosts) σε πίνακες, είναι:

$$J_{\mu\nu} = \Sigma_{\mu\nu} = i \begin{pmatrix} \sigma_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_{\mu\nu} \end{pmatrix} \quad (5.1.38)$$

Οπότε στην αντίστοιχη βάση που γεννά την παραπάνω αναπαράσταση, δηλαδή για Weyl σπινόρες, η σχέση μετάθεσης που βγάλαμε, γίνεται:

$$[J_{\mu\nu}, \psi_\alpha] = -i(\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta \psi_\beta \quad (5.1.39)$$

όπου $(\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta = \sigma_{\mu\alpha}^\dot{\alpha} \bar{\sigma}_{\nu\dot{\alpha}}^\beta - \sigma_{\nu\alpha}^\dot{\alpha} \bar{\sigma}_{\mu\dot{\alpha}}^\beta$. Έτσι λοιπόν αφού υπολογίσαμε τον μεταθέτη αυτόν για έναν τυχαίο σπινόρα Weyl, το ίδιο ακριβώς θα ισχύει και για το Q . Θα έχουμε λοιπόν:

$$[J_{\mu\nu}, Q_\alpha] = -i(\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta \quad (5.1.40)$$

$$[J_{\mu\nu}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] = -i(\bar{\sigma}_{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}^\beta \bar{Q}_{\dot{\beta}} \quad (5.1.41)$$

Μετάθεση με τα P_μ : Αφού λοιπόν βρέθηκαν οι μεταθέτες με τα $J_{\mu\nu}$, θα πρέπει τώρα να εξετάσουμε και τις σχέσεις μετάθεσης με τους γεννήτορες των μετατοπίσεων. Η διαδικασία εδώ θα γίνει κάπως διαφορετικά. Ξεκινάμε προσέχοντας την ακριβή μορφή των μεταθετών που μόλις βρήκαμε. Οι μεταθέτες που ψάχνουμε δεν μπορούν να έχουν άλλη μορφή από την:

$$[Q_\alpha, P_\mu] = e(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} \quad (5.1.42)$$

όπου μένει να υπολογιστεί ο αριθμός e μπροστά από τη σχέση. Παίρνοντας και το συζυγές και θυμίζοντας ότι $\sigma_\mu^\dagger = \sigma_\mu$ και από το γεγονός ότι οι Q είναι Majorana σπινόρες:

$$\begin{aligned} [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, P_\mu] &= e^*(\sigma_\mu^T)_{\dot{\alpha}\beta} Q^\beta \\ &= e^*(\sigma_\mu)_{\beta\dot{\alpha}} Q^\beta \end{aligned} \quad (5.1.43)$$

Προχωράμε παίρνοντας τη Jacobi identity οπότε θα είναι:

$$[[Q_\alpha, P_\mu], P_\nu] + [[P_\mu, P_\nu], Q_\alpha] + [[P_\nu, Q_\alpha], P_\mu] = 0 \quad (5.1.44)$$

Ο δεύτερος μεταθέτης μηδενίζεται κατ' ευθείαν αφού από την άλγεβρα του Poincaré group γνωρίζουμε ότι $[P_\mu, P_\nu] = 0$. Αντικαθιστώντας τους υπόλοιπους θα πάρουμε:

$$\begin{aligned} e(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} [\bar{Q}^{\dot{\beta}}, P_\nu] - e(\sigma_\nu)_{\alpha\dot{\beta}} [\bar{Q}^{\dot{\beta}}, P_\mu] &= 0 \\ e(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} e^*(\sigma_\nu)^{\beta\dot{\beta}} Q_\beta - e(\sigma_\nu)_{\alpha\dot{\beta}} e^*(\sigma_\mu)^{\beta\dot{\beta}} Q_\beta &= 0 \\ |e|^2 \left[(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} (\sigma_\nu)^{\beta\dot{\beta}} - (\sigma_\nu)_{\alpha\dot{\beta}} (\sigma_\mu)^{\beta\dot{\beta}} \right] Q_\beta &= 0 \\ |e|^2 (\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta &= 0 \\ |e|^2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.1.45)$$

Η ισότητα λοιπόν ικανοποιείται μόνο για $e = 0$. Οπότε ο μεταθέτης που ψάχνουμε είναι:

$$[Q_\alpha, P_\mu] = 0 \quad (5.1.46)$$

Η super-Poincaré άλγεβρα: Η άλγεβρα λοιπόν που έχουμε είναι συγκεντρωτικά η εξής:

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i(g_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}) \quad (5.1.47)$$

$$[P_\mu, J_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\rho}J_\sigma - g_{\mu\sigma}J_\rho) \quad (5.1.48)$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \quad (5.1.49)$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\} = 0 \quad (5.1.50)$$

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu P_\mu \quad (5.1.51)$$

$$\{Q^\alpha, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\} = 2\bar{\sigma}^{\mu\dot{\beta}\alpha} P_\mu \quad (5.1.52)$$

$$[Q_\alpha, P_\mu] = 0 \quad (5.1.53)$$

$$[J_{\mu\nu}, Q_\alpha] = -i(\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_\beta \quad (5.1.54)$$

$$[J_{\mu\nu}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] = -i(\bar{\sigma}_{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \bar{Q}_{\dot{\beta}} \quad (5.1.55)$$

Όπως μπορεί κανείς να παρατηρήσει η άλγεβρα κλείνει. Δεν υπάρχει κανείς νέος γεννήτορας. Άρα καταφέραμε να βρούμε την άλγεβρα της υπερσυμμετρίας. Η SUSY αποτελεί ομάδα. Η Lie άλγεβρα της ομάδας αυτής είναι η παραπάνω. Στην πραγματικότητα η άλγεβρα καλείται “grated Lie algebra”, καθώς όπως βλέπουμε περιέχει πέρα από τις σχέσεις μετάθεσης και σχέσεις αντιμετάθεσης. Θα μπορούσε επίσης κανείς να ελέγξει την ορθότητα των παραπάνω σχέσεων επαληθεύοντας τη Jacobi identity για μία grated Lie algebra:

$$\{[Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}], J_{\mu\nu}\} = \{Q_\alpha, [\bar{Q}_{\dot{\beta}}, J_{\mu\nu}]\} + \{\bar{Q}_{\dot{\beta}}, [Q_\alpha, J_{\mu\nu}]\} \quad (5.1.56)$$

Η ομάδα αυτή, όπως είδαμε αποτελεί ουσιαστικά μία επέκταση του Poincaré group. Πρέπει τώρα να προσπαθήσουμε να δώσουμε και κάποιο φυσικό νόημα στα παραπάνω, δηλαδή να βρούμε την ακριβή μορφή των γεννητόρων της υπερσυμμετρίας. Ως μία πρώτη σκέψη θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε από τη ρητή σχέση που φαίνεται να έχουν οι γεννήτορες της υπερσυμμετρίας που θεωρήσαμε με τους γεννήτορες των μετατοπίσεων. Η ιδέα είναι να θεωρήσουμε ότι ακριβώς όπως οι P_μ γεννούν μετατοπίσεις στον κανονικό χώρο, έτσι και οι Q να γεννούν μετατοπίσεις στον superspace. Όπου ως superspace έχουμε επεκτείνει τον 4 διαστάσεων χώρο με επιπλέον 4 διαστάσεις (μία για τη δράση του κάθε γεννήτορα υπερσυμμετρίας). Εάν λοιπόν οι επιπλέον συντεταγμένες του νέου χώρου είναι οι $\vartheta^\alpha, \bar{\vartheta}_{\dot{\alpha}}$, τότε με βάση τα παραπάνω θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε:

$$Q_\alpha \sim \frac{\partial}{\partial \vartheta^\alpha}, \quad \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \sim \frac{\partial}{\partial \bar{\vartheta}_{\dot{\alpha}}} \quad (5.1.57)$$

Θα δούμε στη συνέχεια πως μία τέτοια επιλογή τελικά είναι λανθασμένη. Οι Q γεννούν μετατοπίσεις, αλλά δεν έχουν ακριβώς τη μορφή που γράψαμε πιο πάνω, γιατί όπως θα δούμε οι supertranslations επηρεάζουν και μεταβλητές του κανονικού χώρου. Για την εύρεση λοιπόν της ακριβούς μορφής των Q θα πρέπει πρώτα να ορίσουμε τον superspace που αναφέραμε πιο πάνω, να ορίσουμε ένα μετασχηματισμό κάτω από το super Poincaré group και να υπολογίσουμε το αποτέλεσμα της δράσης των Q στις συντεταγμένες του 8D πλέον χώρου.

5.2 SUPERSPACE.

Ξεκινάμε λοιπόν επεκτείνοντας το χώρο μας. Προσθέτουμε στις γνωστές μας 4 x^μ συντεταγμένες του χωρόχρονου, άλλες 4 Grassmann ποσότητες $\vartheta^\alpha, \bar{\vartheta}_{\dot{\alpha}}$, οπότε οι συντεταγμένες μας πλέον θα είναι:

$$z^m = (x^\mu, \vartheta^\alpha, \bar{\vartheta}_{\dot{\alpha}}) \quad (5.2.1)$$

όπου όπως μπορεί κανείς να παρατηρήσει υπάρχουν 4 μποζονικές και 4 φερμιονικές συντεταγμένες. Τώρα θα θέλαμε να εκφράσουμε έναν μετασχηματισμό που ανήκει στο super Poincare group. Η κατασκευή του θα είναι αντίστοιχη με την περίπτωση του Poincare group. Όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία ομάδων, το ομογενές Lorentz group αποτελεί υποομάδα του poincare group. Θυμίζουμε ότι το Poincare group αποτελείται από 3 στροφές και 3 boosts (δηλαδή το ομογενές Lorentz group) και 4 μετατοπίσεις. Έτσι λοιπόν ένας μετασχηματισμός του poincare group μπορεί να αναλυθεί και να γραφεί ως γινόμενο ενός μετασχηματισμού του ομογενούς Lorentz group $L(\omega_{\mu\nu})$ με μία μετατόπιση $S(\alpha)$. Δηλαδή:

$$\text{poincare : } \quad S(\alpha)L(\omega_{\mu\nu}), \quad \text{όπου: } S(\alpha) = e^{i\alpha_\mu P^\mu} \quad (5.2.2)$$

Ο μετασχηματισμός $S(\alpha)$ έχει ως αποτέλεσμα να μετατοπιστεί το τετράνυσμα x^μ του χωροχρόνου κατά α^μ , δηλαδή: $x^\mu \rightarrow x^\mu + \alpha^\mu$.

5.2.1 Supertranslation.

Αντίστοιχα λοιπόν και στο super Poincare group, το ομογενές Lorentz group είναι υποομάδα, οπότε και μπορούμε να εκφράσουμε έναν μετασχηματισμό ως γινόμενο ενός μετασχηματισμού κάτω από το ομογενές Lorentz group με μία μετατόπιση στο superspace, δηλαδή:

$$\text{superpoincare : } \quad S(\alpha, \xi, \bar{\xi})L(\omega_{\mu\nu}) \quad (5.2.3)$$

όπου αντίστοιχα ο μετασχηματισμός της μετατόπισης στο SPG θα έχει τη μορφή:

$$S(\alpha, \xi, \bar{\xi}) = e^{i(\alpha^\mu P_\mu + \xi^\alpha Q_\alpha + \bar{\xi}_\alpha \bar{Q}^\alpha)} \quad (5.2.4)$$

Δηλαδή εδώ οι γεννήτορες P_μ γεννούν τις “κανονικές” μετατοπίσεις, ενώ οι Q γεννούν τις supertranslations. Οι μετασχηματισμοί που παρουσιάσαμε δρουν πάνω σε ένα στοιχείο του super Poincare group το οποίο έχει μορφή:

$$g(x, \vartheta, \bar{\vartheta}) = e^{i(x^\mu P_\mu + \vartheta^\alpha Q_\alpha + \bar{\vartheta}_\alpha \bar{Q}^\alpha)} \quad (5.2.5)$$

Η ακριβής μορφή των γεννητόρων θα προέλθει μέσα από την εξέταση της δράσης του μετασχηματισμού που γράψαμε παραπάνω πάνω στο στοιχείο που μόλις αναφέραμε. Περιμένουμε οι “κανονικές” μετατοπίσεις να μην έχουν καμία επίδραση πάνω στις επιπλέον συντεταγμένες του χώρου μας και είναι ακριβώς έτσι. Η μορφή του γεννήτορα P_μ είναι $P_\mu = -i\partial_\mu$. Η δράση λοιπόν του γεννήτορα πάνω στις συντεταγμένες ϑ και $\bar{\vartheta}$ θα δώσει 0, αφού η παραγωγή γίνεται ως προς τις x^μ συντεταγμένες. Εάν η δράση των SUSY generators δώσει αντίστοιχα αποτελέσματα, τότε η αρχική υπόθεση που είχαμε κάνει για τη μορφή αυτών των γεννητόρων θα αληθεύει. Εάν όχι θα έχουν μία κάπως διαφορετική μορφή. Αυτό ακριβώς θα εξετάσουμε στα επόμενα. Γράφουμε τη δράση του μετασχηματισμού πάνω σε ένα στοιχείο του super Poincare group:

$$Sg = e^{i(\alpha \cdot P + \xi Q + \bar{\xi} \bar{Q})} e^{i(x \cdot P + \vartheta Q + \bar{\vartheta} \bar{Q})} \quad (5.2.6)$$

Για τον υπολογισμό του γινομένου των 2 εκθετικών βλέπουμε ότι εμφανίζονται γινόμενα πινάκων. Το αποτέλεσμα μας παρέχεται με χρήση της Baker - Campbell - Hausdorff formula:

$$e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}[A,[A,B]] - \frac{1}{12}[B,[B,A]] + \dots} \quad (5.2.7)$$

όπου όπως βλέπουμε εδώ είναι:

$$A = i(\alpha \cdot P + \xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}) \quad (5.2.8)$$

$$B = i(x \cdot P + \vartheta Q + \bar{\vartheta} \bar{Q}) \quad (5.2.9)$$

και εκτελώντας ξεχωριστά τους όρους που εμφανίζονται στη BCH formula θα πάρουμε:

$$A + B = i[(\alpha + x) \cdot P + (\xi + \vartheta)Q + (\bar{\xi} + \bar{\vartheta})\bar{Q}] \quad (5.2.10)$$

ενώ για τον πρώτο μεταθέτη θα είναι:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}[A, B] &= -\frac{1}{2}[\alpha \cdot P + \xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}, x \cdot P + \vartheta Q + \bar{\vartheta} \bar{Q}] \\
&= -\frac{1}{2} \left\{ [\alpha P, xP] + [\alpha P, \vartheta Q] + [\alpha P, \bar{\vartheta} \bar{Q}] + [\xi Q, xP] + \right. \\
&\quad \left. + [\xi Q, \vartheta Q] + [\xi Q, \bar{\vartheta} \bar{Q}] + [\bar{\xi} \bar{Q}, xP] + [\bar{\xi} \bar{Q}, \vartheta Q] + [\bar{\xi} \bar{Q}, \bar{\vartheta} \bar{Q}] \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \left\{ [\xi Q, \vartheta Q] + [\xi Q, \bar{\vartheta} \bar{Q}] + [\bar{\xi} \bar{Q}, \vartheta Q] + [\bar{\xi} \bar{Q}, \bar{\vartheta} \bar{Q}] \right\} \tag{5.2.11}
\end{aligned}$$

όπου έγινε προφανώς χρήση της super Poincaré άλγεβρας και έφυγαν πολλοί όροι αφού:

$$[P_\mu, P_\nu] = [Q_\alpha, P_\mu] = [\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, P_\mu] = 0 \tag{5.2.12}$$

Όσον αφορά τώρα στους υπόλοιπους μεταθέτες της BCH formula, εκμεταλλευόμαστε τη φύση Grassmann των σπινόρων μας. Αυτό σημαίνει ότι γινόμενα 3ης τάξης και πάνω κάνουν 0. Δηλαδή $\vartheta\vartheta\vartheta = 0$, $\bar{\vartheta}\bar{\vartheta}\bar{\vartheta} = 0$. Άρα λοιπόν η ανάπτυξη σταματάει στο σημείο όπου έχουμε φτάσει. Όλοι οι υπόλοιποι όροι δίνουν μηδέν. Έτσι, η δράση μίας supertranslation σε ένα στοιχείο του super Poincaré group μας δίνει:

$$\begin{aligned}
S(\alpha, \xi, \bar{\xi})g(x, \vartheta, \bar{\vartheta}) &= \exp\{i [(\alpha + x) \cdot P + (\xi + \vartheta)Q + (\bar{\xi} + \bar{\vartheta})\bar{Q}] - \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\{ [\xi Q, \vartheta Q] + [\xi Q, \bar{\vartheta} \bar{Q}] + [\bar{\xi} \bar{Q}, \vartheta Q] + [\bar{\xi} \bar{Q}, \bar{\vartheta} \bar{Q}] \right\}\} \tag{5.2.13}
\end{aligned}$$

Οπότε αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε τους μεταθέτες που εμφανίζονται στην παραπάνω παράσταση. Η ιδέα και ο σκοπός μας σε κάθε υπολογισμό που ακολουθεί είναι η εξής: Αφού γνωρίζουμε την άλγεβρα του super Poincaré group, θα προσπαθήσουμε με χρήση της Grassmann φύσης των σπινόρων που εμφανίζονται να φέρουμε τα διάφορα γινόμενα σε τέτοια μορφή που να εμφανίζονται μέσα οι γνωστοί μας αντιμεταθέτες των Q. Γι αυτό αλλάζουμε τη σειρά των ξ, ϑ, \bar{Q} κατάλληλα, προσέχοντας πάντα τα διάφορα πρόσημα. Είναι λοιπόν:

$$\begin{aligned}
[\xi Q, \bar{\vartheta} \bar{Q}] &= \xi^\alpha Q_\alpha \bar{\vartheta}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}} - \bar{\vartheta}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}} \xi^\alpha Q_\alpha \\
&= -\xi^\alpha Q_\alpha \bar{Q}^{\dot{\alpha}} \bar{\vartheta}_{\dot{\alpha}} - \xi^\alpha \bar{Q}^{\dot{\alpha}} Q_\alpha \bar{\vartheta}_{\dot{\alpha}} \\
&= \xi^\alpha Q_\alpha \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} + \xi^\alpha \bar{Q}_{\dot{\alpha}} Q_\alpha \bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \\
&= \xi^\alpha \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} \bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \\
&= \xi^\alpha 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P_\mu \bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \\
&= 2(\xi\sigma^\mu\bar{\vartheta}) P_\mu \tag{5.2.14}
\end{aligned}$$

Με χρήση των ιδιοτήτων ενός μεταθέτη:

$$\begin{aligned}
[\bar{\xi} \bar{Q}, \vartheta Q] &= -[\vartheta Q, \bar{\xi} \bar{Q}] \\
&= -2(\vartheta\sigma^\mu\bar{\xi}) P_\mu \tag{5.2.15}
\end{aligned}$$

Για τους άλλους 2 μεταθέτες, θα είναι:

$$\begin{aligned}
[\xi Q, \vartheta Q] &= \xi^\alpha Q_\alpha \vartheta^\beta Q_\beta - \vartheta^\beta Q_\beta \xi^\alpha Q_\alpha \\
&= -\xi^\alpha Q_\alpha Q_\beta \vartheta^\beta - \xi^\alpha Q_\beta Q_\alpha \vartheta^\beta \\
&= -\xi^\alpha \{Q_\alpha, Q_\beta\} \vartheta^\beta \\
&= 0 \tag{5.2.16}
\end{aligned}$$

και με τον ίδιο τρόπο:

$$[\overline{\xi}Q, \overline{\vartheta}Q] = 0 \quad (5.2.17)$$

Έτσι λοιπόν έχουμε καταφέρει να υπολογίσουμε πλήρως το αποτέλεσμα που θα έχει η δράση μίας υπερμετατόπισης πάνω σε στοιχείο του superPoincare group και αντίστοιχα μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε επακριβώς ποιό θα είναι το αποτέλεσμα ενός τέτοιου μετασχηματισμού πάνω στις συνιστώσες του χώρου αλλά και του superspace. Έχουμε δηλαδή:

$$\begin{aligned} S(\alpha, \xi, \overline{\xi})g(x, \vartheta, \overline{\vartheta}) &= g(x', \vartheta', \overline{\vartheta}') \\ &= \exp\{i[(\alpha + x)^\mu \cdot P_\mu + (\xi + \vartheta)Q + (\overline{\xi} + \overline{\vartheta})\overline{Q}] - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ 2(\xi\sigma^\mu\overline{\vartheta})P_\mu - 2(\vartheta\sigma^\mu\overline{\xi})P_\mu \right\}\} \\ &= \exp\{i[x^\mu + \alpha^\mu + i(-\xi\sigma^\mu\overline{\vartheta} + \vartheta\sigma^\mu\overline{\xi})]P_\mu + \\ &\quad + i(\xi + \vartheta)Q + i(\overline{\xi} + \overline{\vartheta})\overline{Q}\} \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

Οπότε όπως φαίνεται κατ' ευθείαν από την παραπάνω:

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu + \alpha^\mu + i(\xi\sigma^\mu\overline{\vartheta} - \vartheta\sigma^\mu\overline{\xi}) \rightarrow \\ \delta x^\mu &= \alpha^\mu + i(\vartheta\sigma^\mu\overline{\xi} - \xi\sigma^\mu\overline{\vartheta}) \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

$$\begin{aligned} \vartheta'_\alpha &= \xi_\alpha + \vartheta_\alpha \rightarrow \\ \delta\vartheta_\alpha &= \xi_\alpha \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

$$\begin{aligned} \overline{\vartheta}'^{\dot{\alpha}} &= \overline{\xi}^{\dot{\alpha}} + \overline{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \rightarrow \\ \delta\overline{\vartheta}^{\dot{\alpha}} &= \overline{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

Η δράση λοιπόν μίας supertranslation όπως φαίνεται από τα παραπάνω προφανώς μετατοπίζει τις ϑ και $\overline{\vartheta}$ του superspace κατά ξ και $\overline{\xi}$ αντίστοιχα, αλλά επιπλέον έχει και επίδραση στις κανονικές συντεταγμένες του χωροχρόνου, στις οποίες προσθέτει μία extra μετατόπιση κατά $i(\xi\sigma^\mu\overline{\vartheta} - \vartheta\sigma^\mu\overline{\xi})$. Τις παραπάνω σχέσεις θα εκμεταλλευτούμε στην επόμενη παράγραφο με σκοπό την εξαγωγή της ακριβούς μορφής των γεννητόρων της SUSY, όπως είχαμε υποσχεθεί.

5.2.2 SUSY generators.

Η αρχική υπόθεση που είχαμε κάνει, να θεωρήσουμε δηλαδή αντίστοιχη μορφή για τα Q όπως τα P του κανονικού χώρου, υποστηρίζεται από τις μορφές των μεταβολών που υπολογίσαμε για τις συντεταγμένες του superspace. Η παράγωγος ως προς τις συντεταγμένες του superspace αρχικά φαίνεται σωστή. Εάν όμως κανείς κοιτάξει τη μορφή της μεταβολής στις κανονικές συντεταγμένες του χωροχρόνου, τότε αυτόματα η υπόθεση αυτή δεν ευσταθεί. Εάν οι SUSY γεννήτορες ήταν απλά παράγωγοι στις συντεταγμένες του superspace, τότε δε θα μπορούσαν να έχουν καμία επίδραση στον συνηθισμένο χωρόχρονο, καθώς οποιαδήποτε παράγωγος στις συντεταγμένες του κανονικού χώρου θα έδινε μηδέν. Δηλαδή καμία μετατόπιση. Εδώ παρατηρούμε όμως επίδραση της supertranslation και στο συνηθισμένο χώρο. Αυτό από μόνο του μας λέει πως οι γεννήτορες που ψάχνουμε θα έχουν μία κάπως πιο πολύπλοκη μορφή. Προφανώς για να έχουν επίδραση και στο χωρόχρονο θα πρέπει σίγουρα να περιέχουν μέσα τους και μία παράγωγο ως προς τα x^μ . Η μορφή των μεταβολών των συντεταγμένων του superspace μας δείχνει πως ο ένας όρος θα είναι σίγουρα $-i\partial_\alpha$ και αντίστοιχα για τα "bars". Τέλος, θα πρέπει οι γεννήτορες που θα βρούμε να ικανοποιούν και την super Poincare άλγεβρα που έχουμε υπολογίσει πιο πάνω. Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε στην παράγραφο αυτή είναι η εξής: Θα δώσουμε τη σωστή μορφή των SUSY generators και πρώτα θα δείξουμε ότι πράγματι αυτοί δίνουν τις σωστές μεταβολές που υπολογίστηκαν στην προηγούμενη παράγραφο και έπειτα, ότι ικανοποιούν τη σωστή άλγεβρα. Οι σωστοί γεννήτορες της υπερσυμμετρίας είναι λοιπόν:

$$\boxed{iQ_\alpha = \partial_\alpha - i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \overline{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu} \quad (5.2.22)$$

και αντίστοιχα:

$$\boxed{i\bar{Q}^{\dot{\alpha}} = \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} + i\vartheta^{\alpha}\sigma_{\alpha}^{\mu\dot{\alpha}}\partial_{\mu}} \quad (5.2.23)$$

όπου οι $\partial_{\alpha} \equiv \partial/\partial\vartheta^{\alpha}$, $\bar{\partial}^{\dot{\alpha}} = \partial/\partial\bar{\vartheta}_{\dot{\alpha}}$ είναι *left derivatives*. Έτσι λοιπόν τώρα όπως είπαμε πάμε να επαληθεύσουμε ότι οι εκφράσεις αυτές μας δίνουν τις σωστές μεταβολές. Γενικά εάν $f(x^{\mu}, \vartheta, \bar{\vartheta})$ είναι μία συνάρτηση ορισμένη στο superspace, τότε εφαρμόζοντας ένα supertranslation θα πάρουμε:

$$f'(x'^{\mu}, \vartheta', \bar{\vartheta}') = e^{i(a^{\mu}P_{\mu} + \xi^{\alpha}Q_{\alpha} + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}})} f(x^{\mu}, \vartheta, \bar{\vartheta}) \quad (5.2.24)$$

και θεωρώντας απειροστές μεταβολές ($\alpha, \xi, \bar{\xi}$ πολύ μικρά), παίρνουμε τη μεταβολή της f :

$$\delta f = \left(ia^{\mu}P_{\mu} + i\xi^{\alpha}Q_{\alpha} + i\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}} \right) f \quad (5.2.25)$$

οπότε θα πρέπει αντικαθιστώντας στην f τις αντίστοιχες συναρτήσεις να πάρουμε τις μεταβολές που υπολογίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Αντικαθιστώντας λοιπόν για αρχή $f = \vartheta^{\alpha}$ θα πάρουμε:

$$\begin{aligned} \delta\vartheta^{\alpha} &= \left(ia^{\mu}P_{\mu} + i\xi^{\beta}Q_{\beta} + i\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}} \right) \vartheta^{\alpha} \\ &= i\xi^{\beta}Q_{\beta}\vartheta^{\alpha} \\ &= \xi^{\beta} \left(\partial_{\beta} - i\sigma_{\beta\dot{\alpha}}^{\mu}\bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}}\partial_{\mu} \right) \vartheta^{\alpha} \\ &= \xi^{\beta}\partial_{\beta}\vartheta^{\alpha} \\ &= \xi^{\beta}\delta_{\beta}^{\alpha} \\ \delta\vartheta^{\alpha} &= \xi^{\alpha} \end{aligned} \quad (5.2.26)$$

Όπως μπορεί κανείς πολύ εύκολα να καταλάβει, όταν παράγωγοι ως προς άλλες συντεταγμένες του χώρου χτυπούν πάνω σε άλλες, τότε το αποτέλεσμα θα είναι 0. Γι αυτό λοιπόν το $P_{\mu}\vartheta^{\alpha} = \bar{Q}^{\dot{\alpha}}\vartheta^{\alpha} = 0$, κτλ. Έτσι, κάνοντας τις πράξεις, είδαμε ότι για την πρώτη μεταβολή έχουμε πάρει το σωστό αποτέλεσμα. Εάν τώρα, $f = \bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}}$, τότε αντίστοιχα θα πάρουμε (προσέχοντας πάλι τις παραγωγίσεις):

$$\begin{aligned} \delta\bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} &= \left(ia^{\mu}P_{\mu} + i\xi^{\alpha}Q_{\alpha} + i\bar{\xi}_{\dot{\beta}}\bar{Q}^{\dot{\beta}} \right) \bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \\ &= i\bar{\xi}_{\dot{\beta}}\bar{Q}^{\dot{\beta}}\bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \\ &= \bar{\xi}_{\dot{\beta}} \left(\bar{\partial}^{\dot{\beta}} + i\vartheta^{\alpha}\sigma_{\alpha}^{\mu\dot{\beta}}\partial_{\mu} \right) \bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \\ &= \bar{\xi}_{\dot{\beta}}\bar{\partial}^{\dot{\beta}}\bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \\ &= \bar{\xi}_{\dot{\beta}}\bar{\partial}^{\dot{\beta}}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\bar{\vartheta}_{\dot{\gamma}} = \bar{\xi}_{\dot{\beta}}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}(\bar{\partial}^{\dot{\beta}}\bar{\vartheta}_{\dot{\gamma}}) \\ &= \bar{\xi}_{\dot{\beta}}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\delta_{\dot{\gamma}}^{\dot{\beta}} = \bar{\xi}_{\dot{\beta}}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \\ \delta\bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} &= \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{aligned} \quad (5.2.27)$$

Και αυτή η μετατόπιση βγήκε ακριβώς όπως θα θέλαμε. Για την τελευταία τώρα $f = x^{\mu}$ οπότε:

$$\delta x^{\mu} = \left(ia^{\nu}P_{\nu} + i\xi^{\alpha}Q_{\alpha} + i\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}} \right) x^{\mu} \quad (5.2.28)$$

και θα πρέπει να κάνουμε τις πράξεις για κάθε όρο ξεχωριστά, αφού δε μηδενίζεται κάποιος όρος κατ' ευθείαν. Έχουμε:

$$\begin{aligned} ia^\nu P_\nu x^\mu &= ia^\nu (-i) \partial_\nu x^\mu \\ &= a^\nu \delta_\nu^\mu \\ &= a^\mu \end{aligned} \quad (5.2.29)$$

μία απλή μετατόπιση στο 4D χώρο όπως περιμένουμε. Για τους άλλους:

$$\begin{aligned} i\xi^\alpha Q_\alpha x^\mu &= \xi^\alpha \left(\partial_\alpha - i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\nu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\nu \right) x^\mu \\ &= -i\xi^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\nu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\nu x^\mu \\ &= -i\xi^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\nu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \delta_\nu^\mu \\ &= -i\xi^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \\ &= -i (\xi \sigma^\mu \bar{\theta}) \end{aligned} \quad (5.2.30)$$

και

$$\begin{aligned} i\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}} x^\mu &= \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \left(\bar{\partial}^{\dot{\alpha}} + i\theta^\alpha \sigma_\alpha^{\nu\dot{\alpha}} \partial_\nu \right) x^\mu \\ &= i\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \theta^\alpha \sigma_\alpha^{\nu\dot{\alpha}} \partial_\nu x^\mu \\ &= i\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \theta^\alpha \sigma_\alpha^{\nu\dot{\alpha}} \delta_\nu^\mu \\ &= i\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \theta^\alpha \sigma_\alpha^{\mu\dot{\alpha}} \\ &= i\theta^\alpha \sigma_\alpha^{\mu\dot{\alpha}} \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \\ &= i (\theta \sigma^\mu \bar{\xi}) \end{aligned} \quad (5.2.31)$$

και συγκεντρώνοντας τη μεταβολή:

$$\delta x^\mu = a^\mu + i (\theta \sigma^\mu \bar{\xi} - \xi \sigma^\mu \bar{\theta}) \quad (5.2.32)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι καταφέραμε να επαληθεύσουμε τις μετατοπίσεις μας. Άρα πλέον για την απόλυτη αποδοχή της μορφής των γεννητόρων που δώσαμε δεν μας μένει τίποτε άλλο από την επαλήθευση της άλγεβρας που ικανοποιούν. Θα πρέπει δηλαδή να δείξουμε ότι ικανοποιούν τις:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0 = \{\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\} \quad (5.2.33)$$

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu P_\mu \quad (5.2.34)$$

$$\{Q^\alpha, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\} = 2\bar{\sigma}^{\mu\dot{\beta}\alpha} P_\mu \quad (5.2.35)$$

Η 1η εξ' αυτών είναι προφανής και εξάγεται κατ' ευθείαν από τη μορφή των γεννητόρων που έχουμε θεωρήσει. Η 3η επίσης προφανής αφού εξάγεται από τη 2η μέσω εισαγωγής των αντίστοιχων μετρικών τανυστών για να ανεβάσουμε του dotted και undotted δείκτες. Άρα αρκεί να δείξουμε τη 2η σχέση. Εδώ χρειαζόμαστε να γράψουμε το \bar{Q} με κάτω δείκτη, ενώ το έχουμε δώσει στον ορισμό με πάνω. Για να βρούμε το ζητούμενο θα πολλαπλασιάσουμε με τα αντίστοιχα ε , όμως θα πρέπει εδώ να θυμηθούμε τα εξής:

$$\varepsilon^{\alpha\dot{\beta}} \partial_{\dot{\beta}} = -\partial^\alpha, \quad \varepsilon^{\dot{\alpha}\beta} \partial_\beta = -\partial^{\dot{\alpha}} \quad (5.2.36)$$

Οπότε λοιπόν μπορούμε να προχωρήσουμε και θα έχουμε:

$$\begin{aligned} i\bar{Q}^{\dot{\alpha}} &= \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} + i\theta^\alpha \sigma_\alpha^{\mu\dot{\alpha}} \partial_\mu \\ i\bar{Q}_{\dot{\alpha}} &= -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \end{aligned} \quad (5.2.37)$$

$$iQ_\alpha = \partial_\alpha - i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \quad (5.2.38)$$

Υπολογίζουμε τα 2 γινόμενα που εμφανίζονται στον αντιμεταθέτη:

$$\begin{aligned}
-Q_\alpha \bar{Q}_{\dot{\alpha}} &= \left(\partial_\alpha - i\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu \right) \left(-\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + i\theta^\beta \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\nu \partial_\nu \right) \\
&= -\partial_\alpha \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + i\sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\nu \partial_\alpha \theta^\beta \partial_\nu + \\
&\quad + i\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \partial_\mu + \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\nu \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \theta^\beta \partial_\mu \partial_\nu
\end{aligned} \tag{5.2.39}$$

$$\begin{aligned}
-\bar{Q}_{\dot{\alpha}} Q_\alpha &= \left(-\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + i\theta^\beta \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\nu \partial_\nu \right) \left(\partial_\alpha - i\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu \right) \\
&= -\partial_\alpha \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + i\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu + \\
&\quad + i\sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\nu \theta^\beta \partial_\alpha \partial_\nu + \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\nu \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \theta^\beta \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\nu \partial_\mu
\end{aligned} \tag{5.2.40}$$

Ο αντιμεταθέτης που φάχνουμε λοιπόν (με τα σωστά πρόσημα τώρα):

$$\begin{aligned}
\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} &= Q_\alpha \bar{Q}_{\dot{\alpha}} + \bar{Q}_{\dot{\alpha}} Q_\alpha \\
&= \{\partial_\alpha, \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\} - i\sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\nu \left(\partial_\alpha \theta^\beta + \theta^\beta \partial_\alpha \right) \partial_\nu - \\
&\quad - i\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \left(\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} + \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \right) \partial_\mu - \\
&\quad - \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\nu \left(\theta^\beta \bar{\theta}^{\dot{\beta}} + \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \theta^\beta \right) \partial_\mu \partial_\nu
\end{aligned} \tag{5.2.41}$$

Θα ασχοληθούμε με κάθε όρο ξεχωριστά. Για τον πρώτο, εύκολα γνωρίζουμε ότι οι παράγωγοι αντιμετατίθενται, οπότε:

$$\{\partial_\alpha, \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\} = 0 \tag{5.2.42}$$

Όμοια και για τον τελευταίο (4ο) όρο:

$$\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\nu \left(\theta^\beta \bar{\theta}^{\dot{\beta}} + \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \theta^\beta \right) \partial_\mu \partial_\nu = \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\nu \{\theta^\beta, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\} \partial_\mu \partial_\nu = 0 \tag{5.2.43}$$

Για τους 2 μεσαίους όρους τώρα, εργαζόμαστε διαφορετικά. Υποθέτουμε (για τον 2ο και αντίστοιχα μετά για τον 3ο) δράση της παράστασης πάνω σε ένα θ^γ , οπότε:

$$\begin{aligned}
i\sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\nu \left(\partial_\alpha \theta^\beta + \theta^\beta \partial_\alpha \right) \partial_\nu \theta^\gamma &= i\sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\nu \partial_\nu \left(\partial_\alpha \theta^\beta + \theta^\beta \partial_\alpha \right) \theta^\gamma \\
&= i\sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\nu \partial_\nu \left[(\partial_\alpha \theta^\beta) \theta^\gamma - \theta^\beta \partial_\alpha \theta^\gamma + \theta^\beta \partial_\alpha \theta^\gamma \right] \\
&= i\sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\nu \partial_\nu \delta_\alpha^\beta \theta^\gamma \\
&= i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\nu \partial_\nu \theta^\gamma
\end{aligned} \tag{5.2.44}$$

όπου στο 2ο βήμα κάναμε χρήση του γεγονότος ότι χρησιμοποιούμε *left derivatives* οπότε και έτσι ηγείται το αρνητικό πρόσημο στην παραγωγή του γινομένου. Ακριβώς η ίδια διαδικασία ακολουθείται και για τον άλλο όρο, οπότε τα αποτελέσματα που παίρνουμε (χωρίς το θ^γ τώρα) είναι:

$$\partial_\alpha \theta^\beta + \theta^\beta \partial_\alpha \equiv \delta_\alpha^\beta \tag{5.2.45}$$

και

$$\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} + \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \equiv \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \tag{5.2.46}$$

Έτσι λοιπόν συγκεντρώνοντας θα πάρουμε για το μεταθέτη:

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} &= -i\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \delta_\alpha^\beta \partial_\mu - i\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \delta_{\dot{\alpha}}^\beta \partial_\mu \\ &= (\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu + \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu) (-i\partial_\mu) \\ \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} &= 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P_\mu \end{aligned} \quad (5.2.47)$$

που είναι ακριβώς το ζητούμενο. Ικανοποιήσαμε δηλαδή και τη 2η απαίτηση. Άρα αποδείξαμε ότι η σωστή μορφή των γεννητόρων των supertranslations είναι αυτή που δώσαμε πιο πάνω και μάλιστα όπως είδαμε γεννούν πέρα από μετατοπίσεις στο superspace και επιπλέον όρους στον κανονικό μας χώρο. Έχουμε όπως έχει γίνει καθαρό μέχρι το συγκεκριμένο σημείο, αναλύσει σε διεξοδικό βαθμό τη superpoicare άλγεβρα, έχουμε δει τη μορφή και τα αποτελέσματα της δράσης των γεννητόρων της. Η ομάδα της SUSY έχει λοιπόν εξεταστεί και κατανοηθεί σε ικανοποιητικό φυσικό και μαθηματικό βάθος. Τι μας μένει;

5.3 SUPERFIELDS.

Αφού λοιπόν έχουμε μιλήσει εκτενώς και έχουμε μελετήσει το superspace αυτό που μένει είναι να πάμε και να ορίσουμε πεδία πάνω σε αυτόν τον χώρο. Προφανώς τα πεδία αυτά θα ονομάζονται superfields. Ο σκοπός μας όπως έχουμε ήδη αναφέρει και από το προηγούμενο κεφάλαιο είναι να μπορέσουμε να βρούμε το πεδίο εκείνο το οποίο θα μας δώσει τη Wess - Zumino Lagrangian την οποία έχουμε υπολογίσει από πριν. Γι αυτό λοιπόν ας θεωρήσουμε μία βαθμωτή συνάρτηση ορισμένη πάνω στο superspace, $\Phi(x, \theta, \bar{\theta})$, η οποία όπως βλέπουμε εξαρτάται από τις μεταβλητές του superspace $x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$. Αυτό που μπορούμε τώρα να κάνουμε είναι να την αναπτύξουμε κατά Taylor ως προς τις μεταβλητές θ και $\bar{\theta}$. Οι $\theta, \bar{\theta}$ θυμίζουμε ότι είναι Grassmann ποσότητες, πράγμα που σημαίνει ότι όροι 3ης τάξης και πάνω δίνουν μηδέν ($\theta\theta = \bar{\theta}\bar{\theta} = 0$). Άρα λοιπόν το ανάπτυγμα θα σταματά σε όρους $O(\theta^2, \bar{\theta}^2)$. Θα έχουμε δηλαδή:

$$\begin{aligned} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) &= C(x) + \theta^\alpha \chi_\alpha(x) + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{\eta}^{\dot{\alpha}}(x) + \theta^2 M(x) + \bar{\theta}^2 N(x) + \\ &+ \theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} A_\mu(x) + \bar{\theta}^2 \theta^\alpha \lambda_\alpha(x) + \theta^2 \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{\xi}^{\dot{\alpha}}(x) + \theta^2 \bar{\theta}^2 \Delta(x) \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, τα πεδία αυτά συγκροτούν μία supermultiplet. Συγκεκριμένα έχουμε συνολικά:

- 4 scalars: $C(x), M(x), N(x), \Delta(x) \longrightarrow 4 \text{ d.f.}$
- 1 vector: $A_\mu(x) \longrightarrow 4 \text{ d.f.}$
- 4 spinors: $\chi_\alpha(x), \bar{\eta}^{\dot{\alpha}}(x), \lambda_\alpha(x), \bar{\xi}^{\dot{\alpha}}(x) \longrightarrow 8 \text{ d.f.}$

Βλέπουμε ότι έχουμε συνολικά 8 φερμιονικούς και 8 μποζονικούς βαθμούς ελευθερίας. Είναι ακριβώς διπλάσιοι από τους βαθμούς ελευθερίας που υπολογίσαμε στο μοντέλο Wess - Zumino. Ο λόγος για αυτό είναι ακριβώς το γεγονός ότι όπως είπαμε τα πεδία που εμφανίζονται στο Wess - Zumino συγκροτούν μία βάση για *Irreducible Representations (IRREPs)* του SUSY group. Τα συγκεκριμένα πεδία που έχουν εισαχθεί εδώ από το ανάπτυγμα της συνάρτησης Φ , δημιουργούν γενικά *Αναγωγίσιμες Αναπαραστάσεις*. Ως γνωστόν θα μπορέσουμε να πάρουμε *Μη Αναγωγίσιμες Αναπαραστάσεις (IR-REPs)* μόνο μέσα από την επιβολή ορισμένων *constraints* (περιορισμών) που θα πρέπει τα πεδία μας να ικανοποιούν. Η διαδικασία αυτή θα ακολουθηθεί παρακάτω και είναι αυτή που θα μας οδηγήσει στην εύρεση του *chiral superfield* μέσα από την απαίτηση το πεδίο αυτό να ικανοποιεί συγκεκριμένες συνθήκες. Το chiral superfield θα δούμε στη συνέχεια ότι είναι το πεδίο εκείνο το οποίο αναπαράγει το Wess - Zumino model.

5.3.1 Covariant derivatives.

Ο 1η συνθήκη που μπορούμε να πάρουμε προέρχεται κατ' ευθείαν από το προφανές ότι το πεδίο Φ που αναπτύξαμε είναι βαθμωτό. Αφού λοιπόν είναι βαθμωτό αυτό σημαίνει ότι θα είναι και αναλλοίωτο κάτω από τους SUSY μετασχηματισμούς. Οπότε θα δράσουμε πάνω στο πεδίο με ένα στοιχείο του super Poincaré group και επιβάλλοντας τη συνθήκη συναλλοιότητας θα μπορέσουμε να βρούμε τελικά το νόμο μετασχηματισμού του Φ κάτω από SUSY transformations. Η SUSY invariance απαιτεί:

$$\Phi'(z') = \Phi(z) \quad (5.3.2)$$

δηλαδή:

$$\Phi'(x', \vartheta', \bar{\vartheta}') = \Phi(x, \vartheta, \bar{\vartheta}) \quad (5.3.3)$$

και αντικαθιστώντας τις μεταβολές που έχουμε υπολογίσει:

$$\Phi'(x + \alpha + i(\vartheta\sigma\bar{\xi} - \xi\sigma\bar{\vartheta}), \vartheta + \xi, \bar{\vartheta} + \bar{\xi}) = \Phi(x, \vartheta, \bar{\vartheta}) \quad (5.3.4)$$

ενώ ο νόμος μετασχηματισμού για το πεδίο Φ , δίνεται από την:

$$\delta\Phi(z) = \Phi'(z) - \Phi(z) \quad (5.3.5)$$

Προσοχή χρειάζεται εδώ στο γεγονός ότι όταν πάρουμε μεταβολή για τη 2η περίπτωση παρατηρούμε ότι έχουμε z και όχι z' . Αυτή είναι όπως λέμε μία “ενεργή” (active) μεταβολή στο Φ . Για τον υπολογισμό του $\delta\Phi$ μπορούμε να γράψουμε τη σχέση (3.3.4) σε μία διαφορετική μορφή:

$$\begin{aligned} \Phi'(y, \eta, \bar{\eta}) &= \Phi(y - \alpha - i(\eta\sigma\bar{\xi} - \xi\sigma\bar{\eta}), \eta - \xi, \bar{\eta} - \bar{\xi}) \\ &= \Phi(y, \eta, \bar{\eta}) - [\alpha + i(\vartheta\sigma\bar{\xi} - \xi\sigma\bar{\vartheta})]^\mu \partial_\mu \Phi - \\ &\quad - \xi^\alpha \partial_\alpha \Phi - \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} \Phi \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

Επιστρέφοντας πάλι στον προηγούμενο συμβολισμό, όπως βλέπουμε έχουμε βρει ότι:

$$\begin{aligned} \delta\Phi(z) &= -[\alpha + i(\vartheta\sigma\bar{\xi} - \xi\sigma\bar{\vartheta})]^\mu \partial_\mu \Phi - \xi^\alpha \partial_\alpha \Phi - \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} \Phi \\ &= -\alpha^\mu (\partial_\mu \Phi) - i(\vartheta\sigma^\mu\bar{\xi}) \partial_\mu \Phi + i(\xi\sigma^\mu\bar{\vartheta}) \partial_\mu \Phi - \xi^\alpha (\partial_\alpha \Phi) - \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} (\bar{\partial}^{\dot{\alpha}} \Phi) \\ &= -\alpha^\mu (\partial_\mu \Phi) - \xi^\alpha \left(\partial_\alpha - i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \right) \Phi - \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \left(\bar{\partial}^{\dot{\alpha}} + i\vartheta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \right) \Phi \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

Κατ' ευθείαν παρατηρούμε εύκολα ότι οι όροι μέσα στις παρενθέσεις είναι οι SUSY generators που ορίσαμε πριν από λίγο. Επίσης ο πρώτος όρος εάν πολλαπλασιαστεί με i μας δίνει το γεννήτορα των μετατοπίσεων στον κανονικό χώρο. Άρα λοιπόν η μεταβολή ενός βαθμωτού πεδίου Φ κάτω από SUSY μετασχηματισμούς θα είναι τελικά:

$$\delta\Phi(z) = -i \left(\alpha^\mu P_\mu + \xi^\alpha Q_\alpha + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}} \right) \Phi(z) \quad (5.3.8)$$

Τώρα λοιπόν αφού βρήκαμε το νόμο μετασχηματισμού για ένα βαθμωτό πεδίο, θα πρέπει να κοιτάξουμε και τις παραγώγους του. Η ερμηνεία είναι ακριβώς η ίδια με το Standard Model όπου θέλαμε οι παράγωγοι των πεδίων να μετασχηματίζονται ακριβώς όπως και τα πεδία. Έτσι και εδώ. Εάν το Φ είναι superfield, τότε θέλουμε και τα $\partial_\mu \Phi, \partial_\alpha \Phi, \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} \Phi$ να είναι superfields. Δηλαδή θέλουμε οι παράγωγοι που γράψαμε να μετασχηματίζονται ακριβώς όπως το Φ (ο νόμος μετασχηματισμού που γράψαμε παραπάνω). Άρα πάμε να ελέγξουμε εάν αυτό όντως συμβαίνει. Για το $\partial_\mu \Phi$ η περίπτωση είναι απλή και έχουμε:

$$\begin{aligned} \delta(\partial_\mu \Phi) &= \partial_\mu (\delta\Phi) \\ &= -i \partial_\mu (\alpha \cdot P + \xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}) \Phi \\ &= -i (\alpha \cdot P + \xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}) \partial_\mu \Phi \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

όπου η παράγωγος περνάει μπροστά όπως πολύ εύκολα μπορεί κανείς να διαπιστώσει. Παρατηρούμε τη μορφή της μεταβολής. Είναι ακριβώς η ίδια με την (3.3.8). Άρα το $\partial_\mu \Phi$ μετασχηματίζεται ακριβώς όπως το Φ και έτσι είναι superfield. Τώρα μπορούμε να εξετάσουμε και το $\partial_\alpha \Phi$. Είναι:

$$\begin{aligned} \delta(\partial_\alpha \Phi) &= \partial_\alpha(\delta\Phi) \\ &= -\partial_\alpha(i\alpha^\mu P_\mu + i\xi^\beta Q_\beta + i\bar{\xi}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}})\Phi \\ &= -\left(i\alpha^\mu \partial_\alpha P_\mu + i\xi^\beta \partial_\alpha Q_\beta + i\bar{\xi}_{\dot{\beta}} \partial_\alpha \bar{Q}^{\dot{\beta}}\right)\Phi \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

Για τον 1ο όρο δεν έχουμε να πούμε τίποτα, το ∂_α περνάει μπροστά. Εξετάζουμε ξεχωριστά τους υπόλοιπους 2 όρους και αυτό που θέλουμε, είναι να μπορέσει το ∂_α να περάσει μπροστά από τα Q . Για τον 2ο λοιπόν αντικαθιστώντας το iQ_α από τον ορισμό του, θα πάρουμε:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha(iQ_\beta) &= \partial_\alpha\left(\partial_\beta - i\sigma_{\beta\dot{\beta}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu\right) \\ &= -\partial_\beta \partial_\alpha + i\sigma_{\beta\dot{\beta}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\alpha \partial_\mu \\ &= -\left(\partial_\beta - i\sigma_{\beta\dot{\beta}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu\right) \partial_\alpha \\ &= -iQ_\beta \partial_\alpha \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

οπότε:

$$\partial_\alpha(\xi^\beta Q_\beta)\Phi = +\xi^\beta Q_\beta \partial_\alpha \Phi \quad (5.3.12)$$

Η μεταβολή του 2ου όρου είναι αυτή που θέλουμε, το ∂_α περνά μπροστά και παίρνουμε μεταβολή ακριβώς όπως του Φ . Για τον 3ο όρο:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha(i\bar{Q}^{\dot{\beta}}) &= \partial_\alpha\left(\bar{\partial}^{\dot{\beta}} + i\theta^\beta \sigma_\beta^{\mu\dot{\beta}} \partial_\mu\right) \\ &= -\bar{\partial}^{\dot{\beta}} \partial_\alpha + i\partial_\alpha\left(\theta^\beta \sigma_\beta^{\mu\dot{\beta}} \partial_\mu\right) \\ &= -\bar{\partial}^{\dot{\beta}} \partial_\alpha + i\delta_\alpha^\beta \sigma_\beta^{\mu\dot{\beta}} \partial_\mu - i\theta^\beta \sigma_\beta^{\mu\dot{\beta}} \partial_\alpha \partial_\mu \\ &= -\left(\bar{\partial}^{\dot{\beta}} + i\theta^\beta \sigma_\beta^{\mu\dot{\beta}} \partial_\mu\right) \partial_\alpha + i\sigma_\alpha^{\mu\dot{\beta}} \partial_\mu \\ &= -i\bar{Q}^{\dot{\beta}} \partial_\alpha + i\sigma_\alpha^{\mu\dot{\beta}} \partial_\mu \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

όπως μπορεί κανείς να δει εδώ υπάρχει πρόβλημα.

$$\partial_\alpha(\bar{\xi}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}})\Phi \neq \bar{\xi}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} \partial_\alpha \Phi \quad (5.3.14)$$

Το $\partial_\alpha \Phi$ λοιπόν όπως φάνηκε δεν είναι superfield. Θα πρέπει να ψάξουμε να βρούμε μία γενίκευση του ∂_α , μία συναλλοίωτη παράγωγο D_α δηλαδή, η οποία να είναι τέτοια ώστε το $D_\alpha \Phi$ να μετασχηματίζεται ακριβώς όπως το Φ . Με βάση όσα είδαμε παραπάνω, θα πρέπει να είναι:

$$D_\alpha \bar{Q}^{\dot{\beta}} = \bar{Q}^{\dot{\beta}} D_\alpha \quad (5.3.15)$$

Η σωστή γενίκευση για την παράγωγο, η σωστή συναλλοίωτη παράγωγος δηλαδή, είναι η εξής:

$$\boxed{D_\alpha = \partial_\alpha + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu} \quad (5.3.16)$$

Παρακάτω ακολουθεί απόδειξη του ότι αυτή που δώσαμε είναι η σωστή συναλλοίωτη παράγωγος. Συγκεκριμένα θα προσπαθήσουμε να δείξουμε ότι παίρνουμε:

$$i \left(D_\alpha \bar{Q}^{\dot{\beta}} + \bar{Q}^{\dot{\beta}} D_\alpha \right) = 0 \quad (5.3.17)$$

οπότε και κατευθείαν παίρνουμε το ζητούμενο. Για να γίνει λοιπόν αυτό, εξετάζουμε κάθε όρο ξεχωριστά:

$$\begin{aligned} D_\alpha i \bar{Q}^{\dot{\beta}} &= \left(\partial_\alpha + i \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \right) \left(\bar{\partial}^{\dot{\beta}} + i \vartheta^\beta \sigma_\beta^{\gamma\dot{\beta}} \partial_\gamma \right) \\ &= \partial_\alpha \bar{\partial}^{\dot{\beta}} + i \sigma_\beta^{\gamma\dot{\beta}} \partial_\alpha \vartheta^\beta \partial_\gamma + i \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}^{\dot{\beta}} \partial_\mu - \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \sigma_\beta^{\gamma\dot{\beta}} \bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \vartheta^\beta \partial_\mu \partial_\gamma \end{aligned} \quad (5.3.18)$$

Αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} i \bar{Q}^{\dot{\beta}} D_\alpha &= \left(\bar{\partial}^{\dot{\beta}} + i \vartheta^\beta \sigma_\beta^{\gamma\dot{\beta}} \partial_\gamma \right) \left(\partial_\alpha + i \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \right) \\ &= \bar{\partial}^{\dot{\beta}} \partial_\alpha + i \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\partial}^{\dot{\beta}} \bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu + i \sigma_\beta^{\gamma\dot{\beta}} \vartheta^\beta \partial_\alpha \partial_\gamma - \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \sigma_\beta^{\gamma\dot{\beta}} \vartheta^\beta \bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \partial_\gamma \end{aligned} \quad (5.3.19)$$

Προσθέτοντας λοιπόν και συγκεντρώνοντας κατάλληλα τους όρους:

$$\begin{aligned} i \left(D_\alpha \bar{Q}^{\dot{\beta}} + \bar{Q}^{\dot{\beta}} D_\alpha \right) &= \{ \partial_\alpha, \bar{\partial}^{\dot{\beta}} \} + i \sigma_\beta^{\gamma\dot{\beta}} \left(\partial_\alpha \vartheta^\beta + \vartheta^\beta \partial_\alpha \right) \partial_\gamma + \\ &\quad + i \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \left(\bar{\partial}^{\dot{\beta}} \bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} + \bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}^{\dot{\beta}} \right) \partial_\mu - \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \sigma_\beta^{\gamma\dot{\beta}} \{ \bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}}, \vartheta^\beta \} \partial_\mu \partial_\gamma \end{aligned} \quad (5.3.20)$$

Οι αντιμεταθέτες κατα τα γνωστά κάνουν 0, ενώ τις παραστάσεις στις αγκύλες τις έχουμε υπολογίσει πιο πάνω, όταν είχαμε δράσει με αυτές πάνω σε ένα ϑ^γ . Θυμίζουμε λοιπόν ότι είναι:

$$\partial_\alpha \vartheta^\beta + \vartheta^\beta \partial_\alpha = \delta_\alpha^\beta \quad (5.3.21)$$

$$\bar{\partial}^{\dot{\beta}} \bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} + \bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}^{\dot{\beta}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \quad (5.3.22)$$

Έτσι λοιπόν:

$$\begin{aligned} i \left(D_\alpha \bar{Q}^{\dot{\beta}} + \bar{Q}^{\dot{\beta}} D_\alpha \right) &= i \sigma_\beta^{\gamma\dot{\beta}} \delta_\alpha^\beta \partial_\gamma + i \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \partial_\mu \\ &= i \sigma_\alpha^{\gamma\dot{\beta}} \partial_\gamma + i \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu\dot{\beta}} \partial_\mu \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.3.23)$$

Δείξαμε λοιπόν ότι $D_\alpha \bar{Q}^{\dot{\beta}} = \bar{Q}^{\dot{\beta}} D_\alpha$, όπως θέλαμε. Αντίστοιχα μπορούμε να ορίσουμε και dotted συναλλοίωτη παράγωγο (γενίκευση της $\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}$):

$$\boxed{\bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - i \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \vartheta^\alpha \partial_\mu} \quad (5.3.24)$$

η οποία προφανώς ικανοποιεί τη σχέση:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} Q_\beta = Q_\beta \bar{D}_{\dot{\alpha}} \quad (5.3.25)$$

Ακόμη, με χρήση του κατάλληλου μετρικού ταυυστή, μπορούμε να πάρουμε τις συναλλοίωτες παραγώγους με πάνω δείκτες. Προσοχή χρειάζεται μόνο στη δράση των μετρικών ταυυστών πάνω στις παραγώγους του superspace, γιατί όπως έχουμε δείξει, αλλάζουν πρόσημο όταν ανεβάζουμε το δείκτη κτλ. Έτσι θα έχουμε:

$$D^\alpha = -\partial^\alpha + i \sigma_{\dot{\alpha}}^{\mu\alpha} \bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu, \quad \bar{D}^{\dot{\alpha}} = \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} - i \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \vartheta^\alpha \partial_\mu \quad (5.3.26)$$

Οι σχέσεις αντιμετάθεσης που ικανοποιούν οι covariant derivatives αυτές μπορούν εύκολα να βρεθούν και είναι:

$$\{D_\alpha, D_\beta\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = 0 \quad (5.3.27)$$

και

$$\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\} = -2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \quad (5.3.28)$$

Υπενθυμίζουμε τέλος ότι όπως δείξαμε, τελικά οι συναλλοίωτες παράγωγοι έχουν την ιδιότητα να κάνουν τα $D_\alpha \Phi$ και $\bar{D}_{\dot{\alpha}} \Phi$ να μετασχηματίζονται ακριβώς όπως το Φ . Είναι δηλαδή superfields. Τις παραγωγούς αυτές θα θεωρήσουμε στη συνέχεια έτσι ώστε να μπορέσουμε να επιβάλλουμε περιορισμούς στα πεδία μας και να πάρουμε τελικά το chiral superfield.

5.3.2 Chiral superfield.

Αφού λοιπόν ορίσαμε τις συναλλοίωτες παραγωγούς και είδαμε τις ιδιότητες και την άλγεβρα που ικανοποιούν, μπορούμε τώρα να γυρίσουμε πίσω στην επιβολή των διαφόρων constraints. Όπως έχουμε πει, τα πεδία $C(x)$, $M(x)$, $N(x)$, $\Delta(x)$, $A_\mu(x)$, $\chi_\alpha(x)$, $\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}(x)$, $\lambda_\alpha(x)$, $\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}(x)$, αποτελούν βάση για Αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της SUSY. Θα μπορέσουμε να βρούμε Μη Αναγωγίσιμες Αναπαραστάσεις επιβάλλοντας κατάλληλους περιορισμούς. Το πρώτο πράγμα που μπορεί κανείς να σκεφτεί είναι να απαιτήσουμε το πεδίο Φ να είναι πραγματικό. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} \Phi(x, \vartheta, \bar{\vartheta}) &= C(x) + \vartheta^\alpha \chi_\alpha(x) + \bar{\vartheta}_{\dot{\alpha}} \bar{\eta}^{\dot{\alpha}}(x) + \vartheta^2 M(x) + \bar{\vartheta}^2 N(x) + \\ &\quad + \vartheta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} A_\mu(x) + \bar{\vartheta}^2 \vartheta^\alpha \lambda_\alpha(x) + \vartheta^2 \bar{\vartheta}_{\dot{\alpha}} \bar{\xi}^{\dot{\alpha}}(x) + \vartheta^2 \bar{\vartheta}^2 \Delta(x) \\ &= \Phi^*(x, \vartheta, \bar{\vartheta}) \end{aligned} \quad (5.3.29)$$

Αυτόματα η συνθήκη αυτή μας δίνει:

$$C^* = C, \quad M^* = M, \quad N^* = N, \quad \Delta^* = \Delta, \quad A_\mu^* = A_\mu, \quad \chi = \bar{\eta}, \quad \lambda = \bar{\xi} \quad (5.3.30)$$

και αντίστοιχα αντικαθιστούμε τις τιμές αυτές στο πεδίο μας. Η supermultiplet που δημιουργείται έτσι ονομάζεται *vector supermultiplet* και συμβολίζουμε το νέο πεδίο μας ως $V(x, \vartheta, \bar{\vartheta})$. Επιπλέον θα μπορούσαμε να επιβάλλουμε και άλλες συνθήκες. Θα μπορούσαμε για παράδειγμα να απαιτήσουμε το πεδίο μας να ικανοποιεί τις:

$$D_\alpha \Phi_- = 0 \text{ (antichiral)}, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}} \Phi_+ = 0 \text{ (chiral)} \quad (5.3.31)$$

όπου με chiral και antichiral έχουμε ονομάσει τα αντίστοιχα πεδία που εμφανίζονται στις πάνω εξισώσεις. Στα επόμενα θα ασχοληθούμε με την επιβολή της συνθήκης της chirality μόνο, αφού το πεδίο αυτό θα μας δώσει το Wess - Zumino. Για να δούμε όμως πώς ακριβώς επιβάλλεται αυτή η συνθήκη και τι σημαίνει θα πρέπει να ορίσουμε πρώτα τον τελεστή U :

$$U = \exp\{i\vartheta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu\} \quad (5.3.32)$$

ο οποίος δημιουργεί μία μετατόπιση στο x^μ όταν δράσει πάνω σε ένα superfield:

$$\begin{aligned} U\Phi(x, \vartheta, \bar{\vartheta}) &= \Phi(x + i\vartheta\sigma\bar{\vartheta}, \vartheta, \bar{\vartheta}) \\ &= \Phi(x_+, \vartheta, \bar{\vartheta}) \end{aligned} \quad (5.3.33)$$

με $x_+ = x + i\vartheta\sigma\bar{\vartheta}$. Μπορούμε επίσης να αναπτύξουμε το εκθετικό του U , οπότε και θα πάρει τη μορφή (θυμίζουμε ότι λόγω Grassmann φύσης των σπινόρων το ανάπτυγμα τερματίζει στη 2η τάξη):

$$U = 1 + i\vartheta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu - \frac{1}{2}\vartheta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \vartheta^\beta \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\nu \bar{\vartheta}^{\dot{\beta}} \partial_\nu \quad (5.3.34)$$

Όσον αφορά στον 3ο όρο της παράστασης, η απόδειξη δίνεται στο παράρτημα και όπως μπορεί να δει κανείς εκεί έχουμε:

$$\begin{aligned} (\vartheta^\mu \bar{\vartheta})(\vartheta^\nu \bar{\vartheta}) &= \left(\vartheta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \right) \left(\vartheta^\beta \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\nu \bar{\vartheta}^{\dot{\beta}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \vartheta^2 \bar{\vartheta}^2 \eta^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (5.3.35)$$

Έτσι λοιπόν εδώ θα πάρουμε:

$$\begin{aligned} U &= 1 + i\vartheta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \vartheta^2 \bar{\vartheta}^2 \eta^{\mu\nu} \right) \partial_\mu \partial_\nu \\ &= 1 + i\vartheta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu - \frac{1}{4} \vartheta^2 \bar{\vartheta}^2 \square \end{aligned} \quad (5.3.36)$$

Ενώ ο αντίστροφός του, θα είναι:

$$U^{-1} = 1 - i\vartheta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu - \frac{1}{4} \vartheta^2 \bar{\vartheta}^2 \square \quad (5.3.37)$$

Πράγματι, είναι:

$$\begin{aligned} UU^{-1} &= \left[\left(1 - \frac{1}{4} \vartheta^2 \bar{\vartheta}^2 \square \right) + i\vartheta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \right] \left[\left(1 - \frac{1}{4} \vartheta^2 \bar{\vartheta}^2 \square \right) - i\vartheta^\beta \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\mu \bar{\vartheta}^{\dot{\beta}} \partial_\nu \right] \\ &= \left(1 - \frac{1}{4} \vartheta^2 \bar{\vartheta}^2 \square \right)^2 - \left(i\vartheta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \right)^2 \\ &= 1 - 2 \left(\frac{1}{4} \vartheta^2 \bar{\vartheta}^2 \square \right) + \left(\frac{1}{4} \vartheta^2 \bar{\vartheta}^2 \square \right)^2 + (\vartheta^\mu \bar{\vartheta})(\vartheta^\nu \bar{\vartheta}) \partial_\mu \partial_\nu \\ &= 1 - \frac{1}{2} \vartheta^2 \bar{\vartheta}^2 \square + 0 + \frac{1}{2} \vartheta^2 \bar{\vartheta}^2 \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \\ &= 1 \end{aligned} \quad (5.3.38)$$

Ο λόγος για τον οποίο εισήχθη αυτός ο τελεστής θα φανεί αμέσως πιο κάτω. Συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι ισχύει $U^{-1} \bar{D}_\alpha U = -\bar{\partial}_\alpha$. Όπως είδαμε είναι $\bar{D}_\alpha = -\bar{\partial}_\alpha - i\vartheta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu$, οπότε υπολογίζοντας πρώτα το κομμάτι $\bar{D}_\alpha U$ εκτελούμε τις πράξεις στους 2 όρους ξεχωριστά και είναι:

$$\begin{aligned} -\bar{\partial}_\alpha U &= -\bar{\partial}_\alpha \left(1 + i\vartheta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu - \frac{1}{4} \vartheta^2 \bar{\vartheta}^2 \square \right) \\ &= -\bar{\partial}_\alpha + i\vartheta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \partial_\mu - i\vartheta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\vartheta}^{\dot{\beta}} \bar{\partial}_\alpha \partial_\mu - \frac{1}{2} \vartheta^2 \bar{\partial}_\alpha \square + \frac{1}{4} \vartheta^2 \bar{\vartheta}^2 \square \bar{\partial}_\alpha \end{aligned} \quad (5.3.39)$$

ενώ για τον άλλο:

$$\begin{aligned} -i\vartheta^\beta \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu U &= -i\vartheta^\beta \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \left(1 + i\vartheta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \partial_\nu - \frac{1}{4} \vartheta^2 \bar{\vartheta}^2 \square \right) \\ &= -i\vartheta^\beta \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu + \vartheta^\beta \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\mu \vartheta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\vartheta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu \partial_\nu \end{aligned} \quad (5.3.40)$$

Οι υπόλοιποι όροι 0, αφού περιέχουν 3 ϑ s. Έτσι συνολικά θα πάρουμε:

$$\begin{aligned} \bar{D}_\alpha U &= -\bar{\partial}_\alpha + i\vartheta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \partial_\mu - i\vartheta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\vartheta}^{\dot{\beta}} \bar{\partial}_\alpha \partial_\mu - \frac{1}{2} \vartheta^2 \bar{\partial}_\alpha \square + \\ &\quad + \frac{1}{4} \vartheta^2 \bar{\vartheta}^2 \square \bar{\partial}_\alpha - i\vartheta^\beta \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu + \vartheta^\beta \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\mu \vartheta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\vartheta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu \partial_\nu \\ &= -\bar{\partial}_\alpha - i(\vartheta^\mu \bar{\vartheta}) \bar{\partial}_\alpha \partial_\mu + (\vartheta^\mu)_{\dot{\alpha}} (\vartheta^\nu \bar{\vartheta}) \partial_\mu \partial_\nu - \frac{1}{2} \vartheta^2 \bar{\partial}_\alpha \square + \frac{1}{4} \vartheta^2 \bar{\vartheta}^2 \square \bar{\partial}_\alpha \end{aligned} \quad (5.3.41)$$

Πολλαπλασιάζοντας με τον U^{-1} από αριστερά:

$$\begin{aligned}
U^{-1}\bar{D}_{\dot{\alpha}}U &= \left(1 - i(\vartheta\sigma^{\mu}\bar{\vartheta})\partial_{\mu} - \frac{1}{4}\vartheta^2\bar{\vartheta}^2\Box\right) \times \\
&\quad \left(-\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - i(\vartheta\sigma^{\mu}\bar{\vartheta})\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\partial_{\mu} + (\vartheta\sigma^{\mu})_{\dot{\alpha}}(\vartheta\sigma^{\nu}\bar{\vartheta})\partial_{\mu}\partial_{\nu} - \frac{1}{2}\vartheta^2\bar{\vartheta}_{\dot{\alpha}}\Box + \frac{1}{4}\vartheta^2\bar{\vartheta}^2\Box\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\right) \\
&= -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - i(\vartheta\sigma^{\mu}\bar{\vartheta})\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\partial_{\mu} + (\vartheta\sigma^{\mu})_{\dot{\alpha}}(\vartheta\sigma^{\nu}\bar{\vartheta})\partial_{\mu}\partial_{\nu} - \frac{1}{2}\vartheta^2\bar{\vartheta}_{\dot{\alpha}}\Box + \frac{1}{4}\vartheta^2\bar{\vartheta}^2\Box\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + \\
&\quad + i(\vartheta\sigma^{\mu}\bar{\vartheta})\partial_{\mu}\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - (\vartheta\sigma^{\mu}\bar{\vartheta})(\vartheta\sigma^{\nu}\bar{\vartheta})\partial_{\mu}\partial_{\nu}\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + \frac{1}{4}\vartheta^2\bar{\vartheta}^2\Box\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \\
&= -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - \frac{1}{2}\vartheta^2\bar{\vartheta}_{\dot{\alpha}}\Box + (\vartheta\sigma^{\mu})_{\dot{\alpha}}(\vartheta\sigma^{\nu}\bar{\vartheta})\partial_{\mu}\partial_{\nu} + \\
&\quad + \frac{1}{2}\vartheta^2\bar{\vartheta}^2\Box\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - (\vartheta\sigma^{\mu}\bar{\vartheta})(\vartheta\sigma^{\nu}\bar{\vartheta})\partial_{\mu}\partial_{\nu}\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}
\end{aligned} \tag{5.3.42}$$

όμως όπως δείξαμε πιο πάνω:

$$\begin{aligned}
-(\vartheta\sigma^{\mu}\bar{\vartheta})(\vartheta\sigma^{\nu}\bar{\vartheta})\partial_{\mu}\partial_{\nu}\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{1}{2}\vartheta^2\bar{\vartheta}^2\eta^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \\
&= -\frac{1}{2}\vartheta^2\bar{\vartheta}^2\Box\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}
\end{aligned} \tag{5.3.43}$$

οπότε:

$$U^{-1}\bar{D}_{\dot{\alpha}}U = -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - \frac{1}{2}\vartheta^2\bar{\vartheta}_{\dot{\alpha}}\Box + (\vartheta\sigma^{\mu})_{\dot{\alpha}}(\vartheta\sigma^{\nu}\bar{\vartheta})\partial_{\mu}\partial_{\nu} \tag{5.3.44}$$

Όσον αφορά στον 3ο όρο, έχουμε:

$$\begin{aligned}
(\vartheta\sigma^{\mu})_{\dot{\alpha}}(\vartheta\sigma^{\nu}\bar{\vartheta})\partial_{\mu}\partial_{\nu} &= \vartheta^{\alpha}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu}\vartheta^{\beta}\sigma_{\beta\dot{\beta}}^{\nu}\bar{\vartheta}^{\dot{\beta}}\partial_{\mu}\partial_{\nu} \\
&= \vartheta^{\alpha}\vartheta^{\beta}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu}\sigma_{\beta\dot{\beta}}^{\nu}\bar{\vartheta}^{\dot{\beta}}\partial_{\mu}\partial_{\nu}
\end{aligned} \tag{5.3.45}$$

όμως $\vartheta^{\alpha}\vartheta^{\beta} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\vartheta^2$ και $\varepsilon^{\alpha\beta} = -\varepsilon^{\beta\alpha}$, οπότε:

$$\begin{aligned}
(\vartheta\sigma^{\mu})_{\dot{\alpha}}(\vartheta\sigma^{\nu}\bar{\vartheta})\partial_{\mu}\partial_{\nu} &= -\frac{1}{2}\vartheta^2\varepsilon^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu}\sigma_{\beta\dot{\beta}}^{\nu}\bar{\vartheta}^{\dot{\beta}}\partial_{\mu}\partial_{\nu} \\
&= +\frac{1}{2}\vartheta^2\varepsilon^{\beta\alpha}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu}\sigma_{\beta\dot{\beta}}^{\nu}\bar{\vartheta}^{\dot{\beta}}\partial_{\mu}\partial_{\nu} \\
&= +\frac{1}{2}\vartheta^2\sigma^{\mu\beta}_{\dot{\alpha}}\sigma_{\beta\dot{\beta}}^{\nu}\bar{\vartheta}^{\dot{\beta}}\partial_{\mu}\partial_{\nu}
\end{aligned} \tag{5.3.46}$$

και από τις ιδιότητες των σ πινάκων:

$$\begin{aligned}
(\vartheta\sigma^{\mu})_{\dot{\alpha}}(\vartheta\sigma^{\nu}\bar{\vartheta})\partial_{\mu}\partial_{\nu} &= +\frac{1}{2}\vartheta^2\sigma_{\dot{\alpha}}^{\mu\beta}\sigma_{\beta\dot{\beta}}^{\nu}\bar{\vartheta}^{\dot{\beta}}\partial_{\mu}\partial_{\nu} \\
&= +\frac{1}{2}\vartheta^2(\bar{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\vartheta}^{\dot{\beta}}\partial_{\mu}\partial_{\nu}
\end{aligned} \tag{5.3.47}$$

όπου λόγω συμμετρίας εναλλαγής των μ και ν δεικτών και πάλι από την αλληλεξάρτηση των σ πινάκων:

$$\begin{aligned}
(\vartheta\sigma^{\mu})_{\dot{\alpha}}(\vartheta\sigma^{\nu}\bar{\vartheta})\partial_{\mu}\partial_{\nu} &= +\frac{1}{2}\vartheta^2\frac{1}{2}(\bar{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu} + \bar{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\vartheta}^{\dot{\beta}}\partial_{\mu}\partial_{\nu} \\
&= +\frac{1}{2}\vartheta^2\eta^{\mu\nu}\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\vartheta}^{\dot{\beta}}\partial_{\mu}\partial_{\nu} \\
&= +\frac{1}{2}\vartheta^2\bar{\vartheta}_{\dot{\alpha}}\Box
\end{aligned} \tag{5.3.48}$$

οπότε παίρνουμε και το επιθυμητό αποτέλεσμα:

$$U^{-1}\bar{D}_{\dot{\alpha}}U = -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \quad (5.3.49)$$

και πολλαπλασιάζοντας με U από αριστερά και U^{-1} από δεξιά παίρνουμε:

$$\boxed{-\bar{D}_{\dot{\alpha}} = U\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}U^{-1}} \quad (5.3.50)$$

Μπορούμε τώρα να επιστρέψουμε πίσω στην επιβολή των constraints που είχαμε θεωρήσει για να πάρουμε IRREPs. Για το chiral superfield είναι όπως είπαμε:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi_+ = 0 \quad (5.3.51)$$

και με βάση τα παραπάνω:

$$U\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}(U^{-1}\Phi_+) = 0 \quad (5.3.52)$$

Εδώ όμως φαίνεται καθαρά το εξής: Εάν ορίσουμε ένα πεδίο $T = U^{-1}\Phi_+$ τότε από την παραπάνω συνθήκη φαίνεται ότι $\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}(U^{-1}\Phi_+) = \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}T = 0$, δηλαδή το νέο πεδίο που ορίσαμε είναι ανεξάρτητο των bar. Δηλαδή:

$$T = T(x, \vartheta) \quad (5.3.53)$$

Ενώ αντίστοιχα το chiral superfield δίνεται σε σχέση με το T πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με U :

$$\Phi_+(x, \vartheta, \bar{\vartheta}) = UT(x, \vartheta) \quad (5.3.54)$$

Για την εύρεση λοιπόν του chiral δεν έχουμε παρά να αναπτύξουμε κατά τα γνωστά κατά Taylor το πεδίο T ως προς ϑ και το αποτέλεσμα να το πολλαπλασιάσουμε με τον πίνακα U που έχουμε μελετήσει. Έτσι λοιπόν (θυμίζουμε ότι το ανάπτυγμα τερματίζει στη 2η τάξη λόγω Grassmann φύσης):

$$T(x, \vartheta) = \varphi(x) + \sqrt{2}\vartheta^\alpha\psi_\alpha(x) + \vartheta^2 H(x) \quad (5.3.55)$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε εισάγει 2 scalars και 1 spinor πεδίο. Το chiral superfield θα είναι:

$$\begin{aligned} \Phi_+(x, \vartheta, \bar{\vartheta}) &= UT(x, \vartheta) \\ &= \left(1 + i(\vartheta\sigma^\mu\bar{\vartheta})\partial_\mu - \frac{1}{4}\vartheta^2\bar{\vartheta}^2\Box\right) \times \\ &\quad \left(\varphi(x) + \sqrt{2}\vartheta^\alpha\psi_\alpha(x) + \vartheta^2 H(x)\right) \\ &= \varphi(x) + \sqrt{2}\vartheta^\alpha\psi_\alpha(x) + \vartheta^2 H(x) + \\ &\quad + i(\vartheta\sigma^\mu\bar{\vartheta})\partial_\mu\varphi + i\sqrt{2}(\vartheta\sigma^\mu\bar{\vartheta})\vartheta^\alpha\partial_\mu\psi_\alpha - \frac{1}{4}\vartheta^2\bar{\vartheta}^2\Box\varphi \end{aligned} \quad (5.3.56)$$

Προφανώς και εδώ όροι με πάνω από 2 ϑ δίνουν 0. Ασχολούμαστε με τον 5ο όρο:

$$\begin{aligned} (\vartheta\sigma^\mu\bar{\vartheta})\vartheta^\alpha &= \vartheta^\beta\sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\mu\bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}}\vartheta^\alpha \\ &= -\vartheta^\beta\vartheta^\alpha\sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\mu\bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\beta\alpha}\vartheta^2\sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\mu\bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \\ &= -\frac{1}{2}\vartheta^2\varepsilon^{\alpha\beta}\sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\mu\bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \\ &= -\frac{1}{2}\vartheta^2\sigma_{\dot{\alpha}}^{\mu\alpha}\bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \end{aligned} \quad (5.3.57)$$

οπότε:

$$\begin{aligned} i\sqrt{2}(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\theta^\alpha\partial_\mu\psi_\alpha &= -i\frac{\sqrt{2}}{2}\theta^2\sigma^{\mu\alpha}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu\psi_\alpha \\ &= \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^2\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\sigma^{\mu}_{\dot{\alpha}\alpha}\partial_\mu\psi^\alpha(x) \end{aligned} \quad (5.3.58)$$

Το chiral superfield είναι λοιπόν:

$$\begin{aligned} \Phi_+(x, \theta, \bar{\theta}) &= \varphi(x) + \sqrt{2}\theta^\alpha\psi_\alpha(x) + \theta^2 H(x) + i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu\varphi + \\ &\quad + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^2\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\sigma^{\mu}_{\dot{\alpha}\alpha}\partial_\mu\psi^\alpha(x) - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box\varphi \end{aligned} \quad (5.3.59)$$

Ας δούμε ποιά πεδία υπάρχουν συνολικά στο chiral superfield. Έχουμε όπως φαίνεται 1 complex scalar $\varphi(x)$, 1 Weyl spinor $\psi_\alpha(x)$ και 1 complex auxiliary $H(x)$. Αυτό που είχαμε αρχικά υποστηρίζει και θα δείξουμε στην επόμενη παράγραφο, είναι ότι παίρνοντας τη δράση του chiral superfield και μεταφέροντα τα αποτελέσματά μας στις 4 διαστάσεις του χωροχρόνου, δηλαδή ολοκληρώνοντας ως προς τις 4 Grassmann μεταβλητές του superspace, θα πάρουμε τελικά τη δράση της Lagrangian του Wess - Zumino.

5.3.3 Wess - Zumino.

Η δράση λοιπόν του chiral superfield θα είναι η:

$$S = \int \Phi_+^*(x, \theta, \bar{\theta})\Phi_+(x, \theta, \bar{\theta})d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \quad (5.3.60)$$

Για να μεταφερθούμε στις 4 διαστάσεις θα πρέπει να εκτελέσουμε τις ολοκληρώσεις ως προς τα θ . Τα θ όμως ως Grassmann ποσότητες έχουν συγκεκριμένες ιδιότητες και η ολοκλήρωσή τους διαφέρει αρκετά σε σχέση με μία τυπική ολοκλήρωση. Για το λόγο αυτό αναφέρουμε παρακάτω ορισμένες ιδιότητες ολοκλήρωσης Grassmann μεταβλητών. Γενικά λοιπόν εάν C_i είναι μία μεταβλητή Grassmann, τότε είναι:

$$\int dC_i = 0, \quad \int dC_i C_i = 1 \quad (5.3.61)$$

Εδώ εμείς έχουμε την αντιστοιχία $C_i = \theta^1, \theta^2, \bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2$, όπου:

$$(\theta)^2 = -2\theta^1\theta^2, \quad (\bar{\theta})^2 = 2\bar{\theta}^1\bar{\theta}^2 \quad (5.3.62)$$

Ορίζουμε κατάλληλα το μέτρο $d^2\theta$ έτσι ώστε να μας δώσει σε συμφωνία με τα παραπάνω:

$$\int d^2\theta\theta^2 = 1, \quad \int d^2\bar{\theta}\bar{\theta}^2 = 1 \quad (5.3.63)$$

Θα είναι λοιπόν:

$$\begin{aligned} d^2\theta &= -\frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta}d\theta^\alpha d\theta^\beta \\ d^2\bar{\theta} &= -\frac{1}{4}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}d\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} d\bar{\theta}^{\dot{\beta}} \end{aligned} \quad (5.3.64)$$

Πράγματι είναι:

$$\begin{aligned}
\int d^2\vartheta d^2\vartheta^2 &= \int \left(-\frac{1}{4}\right)\varepsilon_{\alpha\beta} d\vartheta^\alpha d\vartheta^\beta (-2)\vartheta^1\vartheta^2 \\
&= \frac{1}{2} \int d\vartheta^\alpha d\vartheta_\alpha \vartheta^1\vartheta^2 \\
&= \frac{1}{2} \int (-d\vartheta^1 d\vartheta^2 + d\vartheta^2 d\vartheta^1)\vartheta^1\vartheta^2 \\
&= \frac{1}{2} \left\{ + \int d\vartheta^1\vartheta^1 \int d\vartheta^2\vartheta^2 + \int d\vartheta^2\vartheta^2 \int d\vartheta^1\vartheta^1 \right\} \\
&= 1
\end{aligned} \tag{5.3.65}$$

σε απόλυτη συμφωνία με την υπόθεσή μας. Τα ωραία όμως έρχονται εδώ. Εάν πάμε να κάνουμε μία ολοκλήρωση στην ποσότητα:

$$f(\vartheta) = a + \vartheta^\alpha b_\alpha + c\vartheta^2 \tag{5.3.66}$$

η οποία έχει και τη μεγαλύτερη τάξη ως προς ϑ που μπορούμε να βρούμε, λόγω Grassmann nature, θα πάρουμε:

$$\int d^2\vartheta (a + \vartheta^\alpha b_\alpha + c\vartheta^2) = c \tag{5.3.67}$$

όπως κατευθείαν μπορεί κανείς να διαπιστώσει πολύ εύκολα. Αυτό το αποτέλεσμα μας λύνει τα χέρια στις ολοκληρώσεις που έχουμε στη δράση του chiral superfield. Προφανώς τα ακριβώς αντίστοιχα ισχύουν και στην περίπτωση των bar σπινόρων. Μόνο οι όροι που είναι ανάλογοι του ϑ^2 και $\bar{\vartheta}^2$ ολοκληρώνονται και μας δίνουν απλά το συντελεστή τους, ενώ όλοι οι υπόλοιποι όροι δίνουν 0. Άρα το μόνο που έχουμε πλέον για την ολοκλήρωση είναι να ψάξουμε στο γινόμενο $\Phi_+^* \Phi_+$ που εμφανίζεται στη δράση και να εντοπίσουμε τους όρους που είναι ανάλογοι του $\vartheta^2, \bar{\vartheta}^2$. Το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης θα είναι απλά ον συντελεστής τους. Όλες οι άλλες ολοκληρώσεις θα δώσουν 0. Ξαναγράφουμε λοιπόν το Φ_+ και το Φ_+^* :

$$\begin{aligned}
\Phi_+(x, \vartheta, \bar{\vartheta}) &= \begin{array}{ccc} I & II & III \\ \varphi(x) + & \sqrt{2}\vartheta^\alpha \psi_\alpha(x) & +\vartheta^2 H(x) + \\ & +i(\vartheta\sigma^\mu\bar{\vartheta})\partial_\mu\varphi + & \frac{i}{\sqrt{2}}\vartheta^2\bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu\partial_\mu\psi^\alpha(x) & -\frac{1}{4}\vartheta^2\bar{\vartheta}^2\Box\varphi \\ & IV & V & VI \end{array} \\
\end{aligned} \tag{5.3.68}$$

και το συζυγές (υπενθυμίζουμε ότι το $i\partial_\mu$ είναι hermitian):

$$\begin{aligned}
\Phi_+^*(x, \vartheta, \bar{\vartheta}) &= \begin{array}{ccc} VII & VIII & IX \\ \varphi^*(x) + & \sqrt{2}\bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}}\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}(x) & +\bar{\vartheta}^2 H^*(x) + \\ & -i(\vartheta\sigma^\mu\bar{\vartheta})\partial_\mu\varphi^* + & \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\vartheta}^2\partial_\mu\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu\vartheta^\alpha & -\frac{1}{4}\vartheta^2\bar{\vartheta}^2\Box\varphi^* \\ & X & XI & XII \end{array} \\
\end{aligned} \tag{5.3.69}$$

Οι όροι που δίνουν μη μηδενική ολοκλήρωση είναι οι εξής:

$$\begin{aligned}
I \times XII + VI \times VII &= -\frac{1}{4}(\varphi\Box\varphi^* + \varphi^*\Box\varphi)\vartheta^2\bar{\vartheta}^2 \\
&= \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi^*) + \text{tot.div} \right] \vartheta^2\bar{\vartheta}^2
\end{aligned} \tag{5.3.70}$$

και

$$III \times IX = HH^*\vartheta^2\bar{\vartheta}^2 \tag{5.3.71}$$

και

$$\begin{aligned}
IV \times X &= (\vartheta \sigma^\mu \bar{\vartheta})(\vartheta \sigma^\nu \bar{\vartheta}) \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi^* \\
&= \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi^* \vartheta^2 \bar{\vartheta}^2 \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi^*) \vartheta^2 \bar{\vartheta}^2
\end{aligned} \tag{5.3.72}$$

και τέλος:

$$\begin{aligned}
II \times XI + V \times VIII &= i \vartheta^\alpha \psi_\alpha \bar{\vartheta}^2 \partial_\mu \bar{\Psi}^{\dot{\alpha}} \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\mu \vartheta^\beta + i \vartheta^2 \bar{\vartheta}^{\dot{\alpha}} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \psi^\alpha \bar{\vartheta}^{\dot{\beta}} \bar{\Psi}_{\dot{\beta}} \\
&= i \vartheta^\alpha \vartheta^\beta \psi_\alpha \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \bar{\Psi}^{\dot{\alpha}} \bar{\vartheta}^2 - i \vartheta^{\dot{\alpha}} \bar{\vartheta}^{\dot{\beta}} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \psi^\alpha \bar{\Psi}_{\dot{\beta}} \vartheta^2 \\
&= -\frac{i}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} \psi_\alpha \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \bar{\Psi}^{\dot{\alpha}} \vartheta^2 \bar{\vartheta}^2 - \frac{i}{2} \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \psi^\alpha \bar{\Psi}_{\dot{\beta}} \vartheta^2 \bar{\vartheta}^2 \\
&= \frac{i}{2} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \left[\psi^\alpha (\partial_\mu \bar{\Psi}^{\dot{\alpha}}) - (\partial_\mu \psi^\alpha) \bar{\Psi}^{\dot{\alpha}} \right] \vartheta^2 \bar{\vartheta}^2 \\
&= \frac{i}{2} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \left(\bar{\Psi}^{\dot{\alpha}} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi^\alpha \right) \vartheta^2 \bar{\vartheta}^2
\end{aligned} \tag{5.3.73}$$

Οι 4 παραπάνω παραστάσεις λοιπόν είναι οι μοναδικές οι οποίες ολοκληρώνονται. Όλες οι άλλες δίνουν 0. Όπως βλέπουμε έχουν όλες τη μορφή $c \cdot \vartheta^2 \bar{\vartheta}^2$ οπότε η ολοκλήρωσή τους θα μας δώσει τη μπροστινή ποσότητα. Επίσης πετάμε και τον όρο tot.div αφού θα εξαφανιστεί όταν ολοκληρωθεί στις 4 διαστάσεις. Έτσι λοιπόν παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
S &= \int \Phi_+^*(x, \vartheta, \bar{\vartheta}) \Phi_+(x, \vartheta, \bar{\vartheta}) d^4 x d^2 \vartheta d^2 \bar{\vartheta} \\
S &= \int d^4 x \left\{ (\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi^*) + HH^* + \frac{i}{2} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \left(\bar{\Psi}^{\dot{\alpha}} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi^\alpha \right) \right\}
\end{aligned} \tag{5.3.74}$$

και επειδή $S = \int \mathcal{L} d^4 x$, όπως βλέπουμε συγκρίνοντας με το προηγούμενο κεφάλαιο, έχουμε αναπαράγει τη Wess - Zumino Lagrangian όπως ακριβώς υποσχθήκαμε:

$$\boxed{\mathcal{L}_{WZ} = (\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi^*) + HH^* + \frac{i}{2} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \left(\bar{\Psi}^{\dot{\alpha}} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi^\alpha \right)} \tag{5.3.75}$$