



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**ΕΛΕΓΧΟΣ ΒΙΩΣΙΜΟΤΗΤΑΣ ΣΕ ΜΗ ΟΛΟΝΟΜΙΚΑ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΗ  
ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ ΥΠΟΒΡΥΧΙΩΝ ΡΟΜΠΟΤΙΚΩΝ  
ΟΧΗΜΑΤΩΝ**

**ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ**

της

**ΔΗΜΗΤΡΑΣ Ι. ΠΑΝΑΓΟΥ**

**Διπλωματούχου Μηχανολόγου Μηχανικού Ε.Μ.Π.**

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:**

**Κ. Κυριακόπουλος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.**

Αθήνα, Απρίλιος 2012



## ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΚΑΙ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

Έλεγχος Βιωσιμότητας σε Μη Ολονομικά Συστήματα. Εφαρμογή στην Αντιστάθμιση Διαταραχών Υποβρύχιων Ρομποτικών Οχημάτων

### ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

της

**ΔΗΜΗΤΡΑΣ Ι. ΠΑΝΑΓΟΥ**

Διπλωματούχου Μηχανολόγου Μηχανικού Ε.Μ.Π.

#### Συμβουλευτική Επιτροπή

1. Κ. Κυριακόπουλος, Καθ. Ε.Μ.Π.  
(Επιβλέπων)
2. Ευ. Παπαδόπουλος, Καθ. Ε.Μ.Π.
3. Ν. Κρικέλης, Καθ. Ε.Μ.Π.

#### Εξεταστική Επιτροπή

1. Κ. Κυριακόπουλος, Καθ. Ε.Μ.Π.  
(Επιβλέπων)
2. Ευ. Παπαδόπουλος, Καθ. Ε.Μ.Π.
3. Ν. Κρικέλης, Καθ. Ε.Μ.Π.
4. Γ. Παπαβασιλόπουλος, Καθ. Ε.Μ.Π.
5. Κ. Τζαφέστας, Επ. Καθ. Ε.Μ.Π.
6. Γ. Παπαλάμπρου, Λέκτορας Ε.Μ.Π.
7. Δ. Δημαρόγκωνας, Επ. Καθ. Κ.Τ.Η.

Αθήνα, Απρίλιος 2012

Η έγκριση της διδακτορικής διατριβής από την Ανώτατη Σχολή  
Μηχανολόγων Μηχανικών του Ε.Μ.Π. δεν υποδηλώνει αποδοχή των  
γνωμών του συγγραφέα (Ν. 5343/1932, Άρθρο 202)

Σα βγεις στον πηγαιμό για την Ιθάκη,  
να εύχεται νάναι μακρύς ο δρόμος,  
γεμάτος περιπέτειες, γεμάτος γνώσεις.  
Τους Λαιστρυγόνας και τους Κύκλωπας,  
τον θυμωμένο Ποσειδώνα μη φοβάσαι,  
τέτοια στον δρόμο σου ποτέ σου δεν θα βρεις,  
αν μὲν ἡ σκέψις σου υψηλή, αν εκλεκτή  
συγκίνησις το πνεύμα και το σώμα σου αγγίζει.

Η Ιθάκη σ' ἔδωσε τ' ωραίο ταξίδι.  
Χωρίς αυτήν δεν θάβγαινες στον δρόμο.  
Ἄλλα δεν ἔχει να σε δώσει πια.  
Κι αν πτωχική την βρεις, η Ιθάκη δεν σε γέλασε.  
Ἐτσι σοφός που έγινες, με τόση πείρα,  
ἤδη θα το κατάλαβες οι Ιθάκες τι σημαίνουν.

Κ. Π. Καβάφης

---

## Πρόλογος

Η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε στο Εργαστήριο Αυτομάτου Ελέγχου του Τομέα Μηχανολογικών Κατασκευών και Αυτομάτου Ελέγχου της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου, από το Νοέμβριο 2006 έως τον Απρίλιο 2012.

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές και ειλικρινείς μου ευχαριστίες στον Επιβλέποντα Καθηγητή Κωνσταντίνο Ι. Κυριακόπουλο, για την ουσιαστική και πολύτιμη καθοδήγηση και συμπαράσταση που μου προσέφερε καθόλη τη διάρκεια των προπτυχιακών και μεταπτυχιακών σπουδών μου στο Εργαστήριο Αυτομάτου Ελέγχου. Οι ιδέες του κατά τις συνεχείς μας συζητήσεις και ο ενθουσιασμός που πάντοτε μου εμφυσούσε για την επίτευξη όσο πιο υψηλών στόχων υπήρξαν διδακτικά, εποικοδομητικά και καταλυτικά στοιχεία για την ολοκλήρωση αυτής της προσπάθειας. Εξίσου ευχαριστώ τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς επιτροπής, τους Καθηγητές Ε. Παπαδόπουλο και Ν. Κρικέλη.

Επίσης, θα ήθελα να απευθύνω τις θερμές ευχαριστίες μου στον Καθηγητή Herbert G. Tanner, για την πρόσκλησή του να επισκεφθώ το University of Delaware και να εργαστώ μαζί του για τις ανάγκες ενός ερευνητικού προγράμματος κατά το Εαρινό Εξάμηνο 2009, αλλά και για τη μέχρι σήμερα συνεργασία μας. Η συμβολή του στη διαμόρφωση των τεχνικών κατευθύνσεων και των γνώσεών μου υπήρξε καθοριστική για την εξέλιξη και την ολοκλήρωση αυτής της προσπάθειας. Ομοίως, ευχαριστώ τον καθηγητή Vijay Kumar, για την πρόσκλησή του να επισκεφθώ το University of Pennsylvania και να συνεργαστώ με την ομάδα του στο πλαίσιο ενός ερευνητικού προγράμματος κατά το Χειμερινό Εξάμηνο 2010.

Θα ήταν παράλειψη να μην αναφερθώ στη συμβολή των μελών του Εργαστηρίου Αυτομάτου Ελέγχου στη δημιουργία ενός εποικοδομητικού και ευχάριστου κλίματος εργασίας και συνεργασίας όλα αυτά τα χρόνια. Κυρίως θα ήθελα να ευχαριστήσω όσους με στήριξαν ενόσω βρισκόμουν στο δύσκολο στάδιο του ξεκινήματος αυτής της περιπέτειας.

Τέλος, επιθυμώ να αφιερώσω την προσπάθεια αυτή στην οικογένειά μου, τον πατέρα μου, Γιάννη, τη μητέρα μου, Έλσα και τον αδελφό μου, Κώστα. Χωρίς την αγάπη, την κατανόηση και την αμέριστη συμπαράστασή τους όλα αυτά τα χρόνια, τόσο την υλική αλλά κυρίως την ηθική, είναι βέβαιο ότι δε θα είχα φτάσει στο σημείο που βρίσκομαι σήμερα. Τους ευχαριστώ ειλικρινά που με έμαθαν να μην εγκαταλείπω ποτέ τον αγώνα, παρά τις όποιες δυσκολίες, που στηρίζουν έμπρακτα και ουσιαστικά κάθε μου εγχείρημα, και που πάντοτε είμαστε ενωμένοι σαν γροθιά, ακόμα κι όταν βρισκόμαστε μακριά, στα τέσσερα σημεία του ορίζοντα.

Αθήνα, Απρίλιος 2012

---

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Σχεδίαση Ελέγχου με Διανυσματικά Πεδία Διπολικού Τύπου: Κίνητρο και Προκαταρκτικά Αποτελέσματα</b>	<b>11</b>
1.1	Περιορισμοί σε Pfaffian μορφή	11
1.2	Το Διανυσματικό Πεδίο Διπολικού τύπου	12
1.2.1	Το Ηλεκτρικό Δίπολο	12
1.3	Διπολικά Πεδία και Μη-Ολονομικά Συστήματα	14
1.3.1	Μονόκυκλο	14
1.3.2	Διπλός Μη-Ολονομικός Ολοκληρωτής του Brockett	16
<b>2</b>	<b>Πρακτική Σταθεροποίηση ενός Μονόκυκλου υπό Ρεύμα μέσω Διακοπτόμενου Ελέγχου</b>	<b>18</b>
2.1	Διατύπωση Προβλήματος	18
2.2	Στρατηγική Διακοπτόμενου Ελέγχου	19
2.3	Σχεδίαση Ελέγχου	22
2.3.1	Σχεδίαση του νόμου ελέγχου $\mathbf{u} = \psi_1(\mathbf{q})$	22
2.3.2	Σχεδίαση των νόμων ελέγχου $\mathbf{u} = \psi_2(\mathbf{q}), \mathbf{u} = \psi_3(\mathbf{q})$	22
2.3.3	Ευστάθεια του διακοπτόμενου συστήματος $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}_\sigma(\mathbf{q}, \psi_\sigma)$	23
2.3.4	Ευρωστία του συστήματος κλειστού βρόχου	23
2.4	Αποτελέσματα Προσομοιώσεων του Συστήματος	23
<b>3</b>	<b>Σχεδίαση Μη-Ολονομικού Ελέγχου με χρήση Διπολικών Διανυσματικών Πεδίων Αναφοράς και Ρύθμισης Εξόδου</b>	<b>26</b>
3.1	Διπολικά Διανυσματικά Πεδία	30
3.1.1	Ιδιότητες του Κρίσιμου Σημείου ενός Διπολικού Διανυσματικού Πεδίου	30
3.2	Συστήματα με έναν μη-ολονομικό περιορισμό	32
3.2.1	Μονόκυκλος	32
3.2.2	Διπλός Μη-ολονομικός Ολοκληρωτής	35
3.3	Αλυσιδωτά Συστήματα	36
3.4	Μη-ολονομικά Συστήματα με Drift Vector Field	36
3.5	Συμπεράσματα	36

<b>4</b>	<b>Σχεδίαση Ελέγχου για Μη-Ολονομικά Συστήματα με Περιορισμούς βάσει της Θεωρίας Βιωσιμότητας . . . . .</b>	<b>37</b>
4.1	Έννοιες από τη Θεωρία Βιωσιμότητας . . . . .	38
4.2	Βιώσιμες Μη-ολονομικές Είσοδοι . . . . .	40
4.3	Έλεγχος Υποεπενεργούμενου Υποβρυχίου Οχήματος με Περιορισμένη Δυνατότητα Αίσθησης . . . . .	41
4.3.1	Μοντελοποίηση . . . . .	42
4.3.2	Σχεδίαση μη-ολονομικού ελέγχου . . . . .	43
4.3.3	Σχεδίαση Βιώσιμων Ελεγκτών . . . . .	44
4.4	Σχεδίαση Βιώσιμων Ελεγκτών στην Περίπτωση Φραγμένων Εξωτερικών Διαταραχών	47
4.5	Συμπεράσματα . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Διατήρηση Ορατότητας σε Σχηματισμούς Ηγέτη-Οπαδού σε Περιβάλλοντα με Εμπόδια . . . . .</b>	<b>50</b>
5.1	Μαθηματική Μοντελοποίηση . . . . .	50
5.1.1	Κινηματική Μοντελοποίηση Ηγέτη-Οπαδού . . . . .	50
5.1.2	Περιορισμοί Ορατότητας . . . . .	51
5.2	Σχεδίαση Ελέγχου . . . . .	51
5.2.1	Διατήρηση ορατότητας . . . . .	52
5.3	Προγραμματισμός κίνησης σε περιβάλλοντα με εμπόδια . . . . .	52
5.3.1	Σχεδίαση Ελέγχου . . . . .	52
5.3.2	Αποτελέσματα Προσομοιώσεων . . . . .	53
<b>6</b>	<b>Διατύπωση Βιωσιμότητας μέσω Βέλτιστου Ελέγχου . . . . .</b>	<b>56</b>
	<b>Βιβλιογραφία . . . . .</b>	<b>57</b>

## Κατάλογος Σχημάτων

1	Το όχημα πρέπει να οδηγηθεί και να παραμείνει σε μια περιοχή γύρω από το σημείο $\mathbf{q}_G = [0 \ 0 \ 0]^T$ , παρά την επίδραση του ρεύματος $\mathbf{v}$ . . . . .	7
1.1	Οι γραμμές ροής ενός σημειακού ηλεκτρικού διπόλου. . . . .	13
1.2	Το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}_1(x, y)$ και το διπολικό διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x, y)$ . . . .	14
2.1	Τα πεδία $\mathbf{F}_n(x, y)$ και $\mathbf{F}_p(x, y)$ για $\lambda = 3$ , $\mathbf{p}_n = [p_1 \ 0]^T$ , $\mathbf{p}_p = [p_1 \ v_y]^T$ , $p_1 = v_x = 1$ m/sec, $v_y = 1$ m/sec. . . . .	20
2.2	Περιοχές λειτουργίας ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\mathcal{G}$ . . . . .	20
2.3	Απόκριση του συστήματος για γνωστό $\mathbf{v} = [-0.1 \ 0.2]^T$ . . . . .	24
2.4	Απόκριση του συστήματος για άγνωστο $\mathbf{v} = [-0.1 \ 0.2]^T$ . . . . .	25
3.1	Το διπολικό διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(\cdot)$ για $(\alpha) \mathbf{p} = [1 \ 0]$ (αριστερά) και $(\beta) \mathbf{p} = \frac{1}{\sqrt{2}} [1 \ 1]$ (δεξιά). . . . .	31
3.2	Το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(\mathbf{q})$ είναι εξ' ορισμού εφαπτόμενο στον υπόχωρο $T_{\mathbf{q}}\mathcal{S} \subset T_{\mathbf{q}}\mathcal{C}$ , για κάθε $\mathbf{q} \in \mathcal{S}$ . . . . .	32
3.3	Η φύλλωση $\mathcal{F}$ του 3-διαστατου χώρου παράστασης $\mathcal{C}$ για το μονόκυκλο, $\mathcal{F} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ . . . . .	33
3.4	Το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ για τον μονόκυκλο. . . . .	34
3.5	Απόκριση κλειστού βρόχου. . . . .	35
4.1	Ένας νόμος ελέγχου $\gamma(\cdot) = (\gamma_1(\cdot), \dots, \gamma_m(\cdot)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ τέτοιος ώστε $\gamma(\mathbf{z}) \in \mathbf{U}(\mathbf{z})$ , $\dot{\mathbf{z}} = \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{z})\gamma_i(\cdot) \in (\mathcal{C} \cap T_K(\mathbf{z}))$ είναι βιώσιμος στο $\mathbf{z} \in \partial K$ . . . . .	41
4.2	Μοντελοποίηση των περιορισμών ένεκα του συστήματος αίσθησης . . . . .	42
4.3	Οι τροχιές $\mathbf{x}(t)$ του συστήματος κλειστού βρόχου. . . . .	45
4.4	Οι είσοδοι ελέγχου και δυνάμεις πρόωσης. . . . .	46
4.5	Η λύση $\boldsymbol{\eta}(t)$ υπό τον έλεγχο (4.12) μπορεί να παραβιάσει τη βιωσιμότητα του συστήματος. . . . .	47
4.6	Το σήμα διακοπτόμενου ελέγχου $\sigma_j(c_j)$ . . . . .	47
4.7	Η πορεία $x(t), y(t)$ του συστήματος υπό το νόμο ελέγχου ( $;$ ). Το όχημα συγκλίνει σε ένα σημείο του συνόλου $G$ . . . . .	48
4.8	Η τιμή των συναρτήσεων περιορισμών παραμένει αρνητική. . . . .	49
4.9	Το όχημα κινείται υπό το νόμο ελέγχου (4.18) όπου $\sigma^* = 1$ . Όταν ο περιορισμός $c_2(\cdot)$ τείνει στο μηδέν, το σήμα ελέγχου $\sigma_2$ γίνεται $< 1$ . Το όχημα συγκλίνει τελικά στο $\boldsymbol{\eta}_d = [-0.5 \ 0 \ 0]^T$ . . . . .	49



5.1	Το σύστημα μέσα σε ένα περιβάλλον με εμπόδια. . . . .	51
5.2	Αφότου εξέλθει από το κελί $i$ , ο ηγέτη κινείται μέσα στο κελί $i + 1$ κατά μήκος ενός κύκλου με ακτίνα $R_L$ που ικανοποιεί (5.7). . . . .	53
5.3	Το σύστημα εκκινεί από ένα σημείο $\mathbf{q} \in \mathcal{C}$ στο όριο του ελεύθερου χώρου, όπου ο δεύτερος περιορισμός ορατότητας είναι ενεργός για τον F. . . . .	54
5.4	Η τιμή των συναρτήσεων των περιορισμών παραμένει αρνητική. . . . .	55

# ΕΛΕΓΧΟΣ ΒΙΩΣΙΜΟΤΗΤΑΣ ΣΕ ΜΗ ΟΛΟΝΟΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΗ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ ΥΠΟΒΡΥΧΙΩΝ ΡΟΜΠΟΤΙΚΩΝ ΟΧΗΜΑΤΩΝ

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διατριβή εισάγει ένα πλαίσιο σχεδίασης ελέγχου για μία κλάση υπο-επενεργούμενων οχημάτων που υπόκεινται σε μη-ολονομικούς περιορισμούς κίνησης, σε περιορισμούς συναρτήσεων των μεταβλητών κατάστασης και σε επιπρόσθετες φραγμένες διαταραχές. Το πλαίσιο βασίζεται σε έννοιες από τη θεωρία βιωσιμότητας συστημάτων και σε μία νέα μέθοδο σχεδίασης ελέγχου για μη-ολονομικά συστήματα. Η συνολική ιδέα συνίσταται στο ότι το αρχικό πρόβλημα ελέγχου για υπο-επενεργούμενα συστήματα που υπόκεινται σε περιορισμούς κατάστασης ανάγεται στη σχεδίαση ελέγχου έτσι ώστε οι τροχιές του συστήματος να παραμένουν στο υποσύνολο  $K$  του χώρου κατάστασης που ορίζεται από τους περιορισμούς κατάστασης, και να συγκλίνουν σε ένα υποσύνολο  $G$  του συνόλου  $K$ . Πιο συγκεκριμένα, οι συνιστώσες και τα βασικά επιτεύγματα της διατριβής συνίστανται σε:

□ Μία καινοτόμο μέθοδο για τη σχεδίαση ελέγχου σε μία κλάση  $n$ -διάστατων μη-ολονομικών συστημάτων, η οποία βασίζεται αφενός σε μία καινοτόμο έννοια και κατασκευή  $N$ -διάστατων διπολικών διανυσματικών πεδίων, όπου  $N \leq n$ , αφετέρου στη διασύνδεσή των διανυσματικών πεδίων με τους μη-ολονομικούς περιορισμούς σε Pfaffian μορφή.

Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι ότι, δοθέντος ενός  $n$ -διάστατου κινηματικού μη-ολονομικού συστήματος που υπόκειται σε  $\kappa$  Πφαφφιαν περιορισμούς  $\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}(\mathbf{q})$ , ορίζεται ένα  $N$ -διάστατο διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}(\cdot)$  σε έναν υπόχωρο  $\mathcal{L}$  του χώρου παράστασης  $\mathcal{C}$ , το οποίο δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του χώρου  $\mathcal{L}$  εκτός από την αρχή των αξόνων του τοπικού συστήματος συντεταγμένων στον  $\mathcal{L}$ . Η αρχή αποτελεί συνεπώς το μοναδικό κρίσιμο σημείο του διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{F}(\cdot)$ , το οποίο είναι διπολικού τύπου εκ κατασκευής, κάτι που συνεπάγεται ότι όλες οι γραμμές ροής συγκλίνουν στην αρχή των αξόνων.

Η διάσταση  $N$  του διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{F}$  καθορίζεται από τη μορφή των Πφαφφιαν περιορισμών κατά την ακόλουθη έννοια: με βάση τη δομή των στηλών του πίνακα  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ , ο χώρος παράστασης  $\mathcal{C}$  αναλύεται ως  $\mathcal{L} \times \mathcal{T}$ , όπου  $\mathcal{L}$  είναι ο χώρος των φύλλων (leaf space),  $\mathcal{T}$  είναι ο χώρος των ινών (fiber space),  $n = \dim \mathcal{L} + \dim \mathcal{T}$ ,  $N = \dim \mathcal{L}$ . Οι συντεταγμένες  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  του χώρου  $\mathcal{L}$  ονομάζονται leafwise συντεταγμένες, και οι συντεταγμένες  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{n-N}$  του χώρου  $\mathcal{T}$  ονομάζονται transverse συντεταγμένες. Το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}$  ορίζεται συναρτήσεως των λεαφωισε συντεταγμένων  $\mathbf{x}$ , εφαπτόμενο στο χώρο των φύλλων  $\mathcal{L}$ , ενώ δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του  $\mathcal{L}$  εκτός από την αρχή  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Η βασική ιδιότητα του διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{F}(\cdot)$  είναι ότι το σημείο  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  είναι κρίσιμο σημείο διπολικού τύπου, που συνεπάγεται ότι όλες οι γραμμές ροής του πεδίου συγκλίνουν στο σημείο  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}(\cdot)$  χρησιμοποιείται ως αναφορά για το μη-ολονομικό σύστημα: σε κάθε σημείο  $\mathbf{q} \in \mathcal{C}$  του χώρου παράστασης, ο έλεγχος σχεδιάζεται έτσι ώστε το διανυσματικό πεδίο του συστήματος  $\dot{\mathbf{q}} \in T_{\mathbf{q}}\mathcal{C}$  να γίνεται παράλληλο με το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}$ . Η σχεδίαση αυτή πραγματοποιείται με τον ορισμό της εξόδου  $\mathbf{h}(\mathbf{q}) \triangleq \mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{F}(\cdot)$ , η οποία εκφράζει την απόκλιση του διανυσματικού πεδίου του συστήματος σε σχέση με το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}(\cdot)$ , και την επιλογή

των εισόδων ελέγχου έτσι ώστε  $\mathbf{h}(\mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{0}$ . Έτσι, το αρχικό πρόβλημα της οδήγησης των μη-ολονομικών τροχιών σε σημείο αναδιατυπώνεται ως ένα πρόβλημα ρύθμισης εξόδου. Κατά αυτήν την έννοια, οι είσοδοι ελέγχου σχεδιάζονται ώστε το σύστημα να εξελίσσεται στην εφαιπτόμενη δέσμη του διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{F}(\cdot)$ , έως ότου συγκλίνει στην αρχή. Η κατασκευή του πεδίου και της εξόδου  $\mathbf{h}(\cdot)$  υποδεικνύουν την επιλογή συγκεκριμένων συναρτήσεων τύπου Λυάπουνοφ, που χρησιμοποιούνται στην απόδειξη της σύγκλισης των τροχιών στην αρχή με χρήση κλασικών τεχνικών ανάλυσης και σχεδιασμού ελέγχου.

Η μέθοδος έχει εφαρμοστεί στη σχεδίαση ελέγχου για κινηματικά μη-ολονομικά συστήματα σε αλυσιδωτή μορφή, και επεκταθεί στον έλεγχο υπο-επενεργούμενων δυναμικών συστημάτων (μοντέλο κίνησης υπο-επενεργούμενου θαλάσσιου οχήματος). Η ευρωστία των ελεγκτών ως προς άγνωστες, φραγμένες διαταραχές έχει επίσης μελετηθεί.

□ Μια προσέγγιση διακοπτόμενου ελέγχου (switching control), βάσει της θεωρίας βιωσιμότητας, για μια κλάση μη-ολονομικών συστημάτων που υπόκεινται σε ανισοτικούς περιορισμούς κατάστασης. Η μέθοδος βασίζεται σε έννοιες από τη θεωρία βιωσιμότητας. Οι ανισοτικοί περιορισμοί χαρακτηρίζονται ως περιορισμοί βιωσιμότητας και ορίζουν ένα κλειστό υποσύνολο  $K$  του χώρου κατάστασης (σύνολο βιωσιμότητας). Οι λύσεις που προκύπτουν από την παραπάνω προσέγγιση επανασχεδιάζονται μέσω διακοπτόμενου ελέγχου, ώστε οι τροχιές που ξεκινούν στο σύνολο  $K$  να παραμένουν πάντοτε στο  $K$  και επιπλέον να συγκλίνουν σε ένα υποσύνολο  $G$  του συνόλου  $K$ . Το σήμα διακοπτόμενου ελέγχου που καθορίζει την εναλλαγή μεταξύ βιώσιμων λύσεων και λύσεων που συγκλίνουν στο  $G$  εξαρτάται από την τιμή των συναρτήσεων περιορισμών. Η προσέγγιση μπορεί να εφαρμοστεί για τις κλάσεις των προβλημάτων όπου οι τροχιές ενός μη-ολονομικού συστήματος πρέπει πάντοτε να εξελίσσονται μέσα σε ένα υποσύνολο του χώρου κατάστασης, έως ότου συγκλίνουν σε ένα σύνολο  $G$ .

Η μέθοδος εφαρμόζεται στη σχεδίαση του ελέγχου της κίνησης ενός υπο-επενεργούμενου θαλάσσιου οχήματος εντός ενός συνόλου καταστάσεων  $K$ , το οποίο περιγράφει τις επιτρεπόμενες καταστάσεις (συναρτήσεως της θέσης και του προσανατολισμού) του συστήματος, εξαιτίας ενός συστήματος αισθητήρων με περιορισμένη εμβέλεια και περιορισμένη γωνία θέασης. Επιπλέον, μελετάται η ευρωστία των λύσεων ως προς μία κλάση άγνωστων, φραγμένων διαταραχών.

Η μέθοδος χρησιμοποιείται επίσης στον συνεργατικό προγραμματισμό της κίνησης και τον έλεγχο ενός σχηματισμού ηγέτη - οπαδού, ο οποίος κινείται σε ένα περιβάλλον με εμπόδια υπό περιορισμούς ορατότητας. Οι περιορισμοί ορατότητας προκύπτουν ένεκα της περιορισμένης δυνατότητας αίσθησης του οπαδού, και μοντελοποιούνται ως μη γραμμικές ανισοτικές σχέσεις ως προς τις μεταβλητές κατάστασης του συστήματος, οι οποίες ορίζουν το σύνολο ορατότητας  $K$ . Η διατήρηση της οπτικής επαφής μεταξύ του ηγέτη και του οπαδού διατυπώνεται ως ο έλεγχος του συστήματος έτσι ώστε οι τροχιές που εκκινούν εντός του  $K$  να παραμένουν για πάντα στο εσωτερικό του συνόλου  $K$ . Το κεφάλαιο παρουσιάζει αναλυτικά τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες για τη διατήρηση της οπτικής επαφής, καθώς και ένα σχήμα ελέγχου που εξασφαλίζει την οδήγηση του οπαδού σε μια περιοχή ως προς τον ηγέτη, με ταυτόχρονη διατήρηση της οπτικής επαφής. Επιπλέον, παρουσιάζεται ένα σχήμα συνεργατικού ελέγχου για την κίνηση του σχηματισμού μέσα σε ένα γνωστό περιβάλλον με εμπόδια, που εξασφαλίζει αμφότερες τη διατήρηση της οπτικής επαφής και την αποφυγή συγκρούσεων. Οι νόμοι ελέγχου είναι αποκεντρωμένοι, υπό την έννοια ότι δεν υπάρχει ευθεία επικοινωνία μεταξύ των ρομπότ.

# Έλεγχος Βιωσιμότητας σε Μη Ολονομικά Συστήματα. Εφαρμογή στην Αντιστάθμιση Διαταραχών Υποβρύχιων Ρομποτικών Οχημάτων

## ΕΚΤΕΤΑΜΕΝΗ ΠΕΡΙΛΗΨΗ / ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ

Από θεωρητικής απόψεως, ο έλεγχος μη-ολονομικών συστημάτων έχει υπάρξει και εξακολουθεί να αποτελεί ένα ιδιαίτερος ενδιαφέρον και απαιτητικό ερευνητικό αντικείμενο. Η σχετική έρευνα κατά τις δύο τελευταίες δεκαετίες έχει συνεισφέρει ποικίλες μεθοδολογίες σχεδίασης για τον έλεγχο μη-ολονομικών συστημάτων, οι οποίες αντιμετωπίζουν προβλήματα όπως η σταθεροποίηση και η ακολούθηση τροχιάς και πορείας για μη-ολονομικά συστήματα, και οι οποίες σήμερα συνιστούν ένα συμπαγές πλαίσιο στη θεωρία ελέγχου μη γραμμικών συστημάτων.

Ως γνωστόν, τα μη-ολονομικά συστήματα δεν ικανοποιούν τη συνθήκη του Brockett, και συνεπώς δεν μπορούν να σταθεροποιηθούν σε σημείο (κατά την έννοια του Lyapunov) με ανάδραση κατάστασης συνεχώς παραγωγίσιμη και χρονικά μη-μεταβαλλόμενη. Ενδεικτική περίπτωση της ιδιαιτερότητας με την οποία αντιμετωπίζεται το πρόβλημα της σταθεροποίησης σε σημείο για μη-ολονομικά συστήματα, αποτελεί ο ορισμός της ασυμπτωτικής ευστάθειας κατά [LS93], ο οποίος περιλαμβάνει **περιοχές** του σημείου ισορροπίας και όχι σφαίρες, όπως στον κλασσικό ορισμό της ασυμπτωτικής ευστάθειας κατά Lyapunov.

Ο περιορισμός που απορρέει από την συνθήκη του Brockett, δηλαδή η μη ύπαρξη συνεχών και χρονικά μη μεταβαλλόμενων λύσεων για τη σταθεροποίηση μη-ολονομικών συστημάτων, αντιμετωπίζεται με λύσεις οι οποίες γενικά ταξινομούνται σε δύο κατηγορίες:

1. σε λύσεις οι οποίες περιλαμβάνουν **χρονικά μεταβαλλόμενη ανάδραση**, είτε ομαλή (smooth) ως προς τις μεταβλητές κατάστασης [Pom92, TMW95, Sam95, Jia99, TL02, MS03, MS09], είτε μη-ομαλή (non-smooth) ως προς τις μεταβλητές κατάστασης [SE95, MS96, GE97, MM97, MS00, OV05],
2. σε λύσεις οι οποίες περιλαμβάνουν **χρονικά αμετάβλητη, μη-ομαλή** ανάδραση συναρτήσεως των μεταβλητών κατάστασης. Η κατηγορία αυτή περιλαμβάνει λύσεις κατά διαστήματα συνεχείς [BRM92, tdWS92], ασυνεχείς [Ast96, BD96, TTR97b, TTR97a, BDK98, LT98, WHX99, XM01, MA03] και λύσεις μέσω υβριδικού ή διακοπτόμενου ελέγχου [LO96, KRM96, KM96, HM99, SGHL01, CAP05].

Η κλάση των αλυσιδωτών συστημάτων (chained systems) [MS93] έχει απασχολήσει ιδιαίτερος την ερευνητική κοινότητα, κυρίως επειδή μοντελοποιεί την κινηματική διαφόρων ρομποτικών συστημάτων, όπως: τα τροχοφόρα ρομπότ με διαφορική οδήγηση, τα οποία μοντελοποιούνται ως μονόκυκλα (unicycles), τα αυτοκίνητα, καθώς και τα ρομποτικά οχήματα που φέρουν ρυμουλκούμενα (tractor-trailer systems). Επιπλέον, οι λύσεις που περιλαμβάνουν χρονικά αμετάβλητη, μη-ομαλή ανάδραση ως προς τις μεταβλητές κατάστασης μπορούν να αποδώσουν εκθετική σύγκλιση των μεταβλητών κατάστασης, και έτσι είναι συνήθως πιο κατάλληλες για πρακτική εφαρμογή και υλοποίηση, σε σχέση με τις λύσεις που περιλαμβάνουν χρονικά μεταβαλλόμενη, ομαλή ανάδραση, που συγκριτικά παρουσιάζουν πολύ πιο αργή σύγκλιση.

Ωστόσο, η σχεδίαση του ελέγχου στην πρώτη περίπτωση συνήθως περιλαμβάνει μη-γραμμικούς μετασχηματισμούς των μεταβλητών κατάστασης, [Ast96, TTR97a, WHX99, Jia99, SGHL00, XM01,

MA03], και οι νόμοι ελέγχου ορίζονται στις νέες συντεταγμένες χρησιμοποιώντας είτε τεχνικές γραμμικού ελέγχου [Ast96], είτε μη γραμμικού ελέγχου [TTR97b], είτε τεχνικές βασισμένες στην έννοια της αμετάβλητης πολλαπλότητας (invariant manifold) [TTR97a].

Ωστόσο, η εύρεση ενός κατάλληλου μετασχηματισμού συντεταγμένων δεν είναι συνήθως μια απλή διαδικασία, και συνεπώς η σχεδίαση του ελέγχου γενικά δεν είναι ασήμαντη από πλευράς δυσκολίας.

## Συνεισφορά

Το Κεφάλαιο 3 περιγράφει μία από τις βασικές συνεισφορές της παρούσας διατριβής, η οποία έγκειται στην εισαγωγή μιας ομοιόμορφης λογικής και στρατηγικής ελέγχου για μια ευρεία κλάση μη-ολονομικών συστημάτων.

Η στρατηγική ελέγχου περιλαμβάνει συγκεκριμένες κατευθυντήριες γραμμές (control design guidelines) για τη σχεδίαση χρονικά αμετάβλητων, ασυνεχών νόμων ελέγχου για  $n$ -διαστατα μη-ολονομικά συστήματα, που υπόκεινται είτε σε κινηματικούς, είτε σε δυναμικούς περιορισμούς σε μορφή Pfaffian (Pfaffian constraints). Η μέθοδος βασίζεται σε μια γεωμετρική άποψη του προβλήματος της οδήγησης του μονόκυκλου σε σημείο, και στη γενίκευση μιας προκαταρκτικής σχεδίασης ελέγχου για το μονόκυκλο, η οποία περιγράφεται στο Κεφάλαιο 1. Η προκαταρκτική αυτή σχεδίαση βασίστηκε στη μορφή της Διπολικής Συνάρτησης Πλοήγησης, η οποία ορίζεται για πρώτη φορά στο [TK00].

Σε σχέση με άλλες μεθόδους για τη σχεδίαση μη ολονομικών ελεγκτών, η βασική καινοτομία της μεθόδου μας είναι η αναδιατύπωση του προβλήματος της οδήγησης ενός μη-ολονομικού συστήματος σε σημείο, σε ένα πρόβλημα **ρύθμισης εξόδου (output regulation)**. Η ρυθμιζόμενη έξοδος εκφράζει την απόκλιση του διανυσματικού πεδίου του συστήματος σε σχέση με ένα διανυσματικό πεδίο αναφοράς, το οποίο εκ' κατασκευής έχει ένα μοναδικό, μεμονωμένο κρίσιμο σημείο διπολικού τύπου. Συνεπώς, η γεωμετρική γενίκευση έγκειται στη θεώρηση συστημάτων υψηλότερης τάξης και στη ρύθμιση ενός διανύσματος εξόδου στο μηδέν, η οποία χρησιμοποιείται μαζί με μια κατάλληλα επιλεγμένη Lyapunov-like συνάρτηση, στην απόδειξη της σύγκλισης των τροχιών του συστήματος στο σημείο ισορροπίας. Η προτεινόμενη διατύπωση του προβλήματος και η μέθοδος για τη σχεδίαση του ελέγχου προσδίδει μια γεωμετρική αιτιολόγηση στην επιλογή των νόμων ελέγχου, η οποία μεταφέρεται ομοιόμορφα σε ένα πλήθος μη-ολονομικών συστημάτων, τα οποία υπόκεινται είτε σε κινηματικούς (πρώτης τάξεως) είτε δυναμικούς (δεύτερης τάξεως) περιορισμούς.

Σε κάποιες από τις περιπτώσεις που αναλύονται στη διατριβή, οι νόμοι ελέγχου που προκύπτουν είναι παρόμοιοι με άλλους στην ήδη υπάρχουσα σχετική βιβλιογραφία. Για παράδειγμα, στην περίπτωση των αλυσιδωτών συστημάτων (Παράγραφος 3.3), οι νόμοι ελέγχου μοιάζουν με τη μέθοδο που προτείνεται στην εργασία [Ast96]. Ωστόσο, η μέθοδος [Ast96] χρησιμοποιεί ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων, γνωστό ως  $\sigma$  process, ενώ με τη δική μας προσέγγιση ο σχεδιασμός των ελεγκτών λαμβάνει χώρα στις αρχικές συντεταγμένες, χρησιμοποιώντας ένα διανυσματικό πεδίο αναφοράς και μια τεχνική singular perturbations .

Η μάλλον ευρεία εφαρμοσιμότητα της προτεινόμενης στρατηγικής και σχεδίασης ελέγχου μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η δομή των συστημάτων που υπόκεινται σε Pfaffian περιορισμούς μπορεί να αποδέχεται ένα ενιαίο πλαίσιο σχεδίασης ελέγχου. ■

Από τη σκοπιά των πρακτικών εφαρμογών, τα μη-ολονομικά συστήματα τυγχάνουν ιδιαίτερου ενδιαφέροντος στα πεδία της ρομποτικής, της μηχανοτρονικής και των πολυ-πρακτορικών συστημάτων (multi-agent systems), εν μέρει επειδή μοντελοποιούν μια ευρεία κλάση μηχανικών συστη-

μάτων, όπως τα τροχοφόρα ρομπότ με ρυμουλκούμενα, τα ρομποτικά φίδια, υπο-επενεργούμενους ρομποτικούς βραχίονες και υπο-επενεργούμενα μη-επανδρωμένα οχήματα (εναέρια, υποβρύχια, εδάφους), θαλάσσια οχήματα και διαστημικά οχήματα, αλλά και το χειρισμό αντικειμένων με ρομποτικά χέρια.

Στη βιβλιογραφία συναντώνται άφθονες εργασίες και λύσεις για μη-ολονομικά συστήματα που υπόκεινται σε καταστατικούς Pfaffian περιορισμούς.<sup>1</sup> Στην περίπτωση αυτή, οι νόμοι ελέγχου σχεδιάζονται συνήθως με την υπόθεση ότι το σύστημα δεν υπόκειται σε αβεβαιότητα μοντελοποίησης και σε επιπρόσθετες εξωτερικές διαταραχές.

Ωστόσο, οι υποθέσεις αυτές συνήθως αποτελούν σημαντική απλούστευση για ένα πολύπλοκο πραγματικό σύστημα. Συνεπώς, η ευρωστία του συστήματος κλειστού βρόχου ως προς εξωτερικές διαταραχές και ως προς την παραμετρική αβεβαιότητα στη μοντελοποίηση αποτελεί μία σημαντική παράμετρο, η οποία επηρεάζει έντονα την επίδοση, ή ακόμα και την ασφάλεια, του συστήματος. Εν μέρει γι' αυτόν το λόγο, η ανάπτυξη εύρωστων μη-ολονομικών ελεγκτών έχει εξίσου αποτελέσει αντικείμενο εκτεταμένης έρευνας. Η παραμετρική αβεβαιότητα αντιμετωπίζεται είτε με προσαρμοστικό, είτε με διακοπτόμενο έλεγχο (switching control) στις εργασίες [BR95, CBG98, HLM99, DXH00, DDZB01, MTX02].

Επιπλέον, ο έλεγχος μη ολονομικών συστημάτων που υπόκεινται σε επιπρόσθετες (εξωτερικές) διαταραχές έχει προσελκύσει το ενδιαφέρον της ερευνητικής κοινότητας: λύσεις για περιπτώσεις που οι διαταραχές μηδενίζονται στο επιθυμητό σημείο ισορροπίας *vanishing perturbations parousi'azontai stis ergas'ies* [tdWK95, Jia00, DDZB01, LAN03, GWL03, PA03, Guo05, WZ08], ενώ περιπτώσεις που οι διαταραχές δεν μηδενίζονται *non-vanishing* στο επιθυμητό σημείο ισορροπίας αντιμετωπίζονται στις εργασίες [CLO99, GWLZ01, LO01, MS03, FBP03, VA03, ZDCH07].

Η περίπτωση των *non-vanishing* διαταραχών θεωρείται τυπικά πιο δύσκολη, υπό την έννοια ότι ένα επιθυμητό σημείο λειτουργίας μπορεί πλέον να μην είναι σημείο ισορροπίας του συστήματος [Kha02]. Σε αυτήν την περίπτωση, κανείς πρέπει να επιδιώκει τη σχεδίαση ελέγχου ώστε οι τροχιές του συστήματος να παραμένουν φραγμένες σε μια περιοχή του επιθυμητού σημείου λειτουργίας: το πρόβλημα αυτό συχνά συναντάται και ως πρακτική σταθεροποίηση (**practical stabilization**). Οι σχετικές εργασίες συνήθως θεωρούν ότι οι διαταραχές είναι μικρές και φραγμένες, ή ότι το διανυσματικό πεδίο της διαταραχής (perturbation vector field) ανήκει στο διανυσματικό χώρο που καλύπτεται από τα διανυσματικά πεδία ελέγχου (control vector fields).

Τέλος, σημειώνεται ότι η ανάπτυξη της έννοιας της ευσταθούς κατάστασης από είσοδο (input-to-state stability) ως μιας θεμελιώδους έννοιας για την ανάλυση και σχεδίαση ελέγχου σε μη-γραμμικά συστήματα, έχει επιτρέψει, μεταξύ άλλων, τη διατύπωση προβλημάτων ευρωστίας για μη-ολονομικά συστήματα, βλέπε στις εργασίες [LSW02, Tan04, LA05, AHP07b].

Ένα ενδιαφέρον πρακτικό πρόβλημα όπου οι εξωτερικές διαταραχές δρουν ως *non-vanishing perturbations* σε ένα επιθυμητό σημείο λειτουργίας συναντάται στο πρόβλημα της δυναμικής τοποθέτησης (**dynamic positioning**) υπο-επενεργούμενων θαλάσσιων οχημάτων (πλοίων, σκαφών, υποβρυχίων οχημάτων), υπό την επίδραση περιβαλλοντικών διαταραχών.

Η δυναμική τοποθέτηση τυπικά αναφέρεται σε ένα σύστημα αυτόματης διατήρησης της θέσης και του προσανατολισμού του οχήματος, με χρήση των πηδαλίων και των προπελών. Συνεπώς, από πλευράς ελέγχου η δυναμική τοποθέτηση ανάγεται σε ένα πρόβλημα εύρεσης νόμων ελέγχου για

---

<sup>1</sup>Οι Pfaffian περιορισμοί δίνονται ως  $\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}(\mathbf{q})$ , όπου  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  είναι το διάνυσμα των μεταβλητών κατάστασης,  $\mathbf{A}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{k \times n}$  και  $\mathbf{b}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^k$ . Όταν  $\mathbf{b}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$  οι περιορισμοί ονομάζονται καταστατικοί, ενώ όταν  $\mathbf{b}(\mathbf{q}) \neq \mathbf{0}$  οι περιορισμοί ονομάζονται μη-καταστατικοί.

την ασυμπωτική σταθεροποίηση της θέσης και του προσανατολισμού του οχήματος σε επιθυμητές σταθερές τιμές.

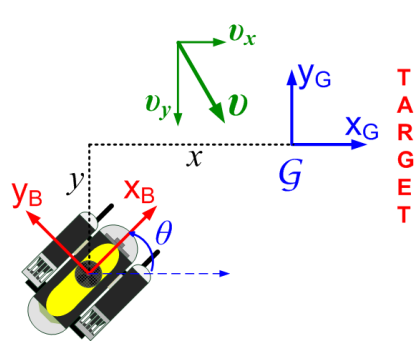
Ο έλεγχος των υπο-επενεργούμενων θαλασσίων οχημάτων έχει μελετηθεί αρκετά τα τελευταία 15 χρόνια, με βασικό κίνητρο την εκτενή χρήση τους στη βιομηχανία εξόρυξης πετρελαίου, σε επιστημονικές αποστολές σχετικές με την ωκεανογραφία, τη γεωλογία, τη θαλάσσια βιολογία, την έρευνα ενάλιων αρχαιοτήτων, σε αποστολές έρευνας και διάσωσης, κλπ. Η σχεδίαση ελέγχου για τη σταθεροποίηση αυτής της κλάσης των συστημάτων θεωρείται απαιτητική, κυρίως επειδή τα υπο-επενεργούμενα οχήματα υπόκεινται σε δεύτερης τάξεως μη ολονομικούς περιορισμούς, και συνεπώς δεν ικανοποιούν τη συνθήκη του Brockett. Επιπλέον, οι δυναμικές εξισώσεις κίνησης περιλαμβάνουν μη-γραμμικούς, πολύπλοκους υδροδυναμικούς όρους, οι οποίοι δεν πρέπει να αμεληθούν κατά τη σχεδίαση του ελέγχου. Τέλος, οι περιβαλλοντικές διαταραχές πρέπει επίσης να λαμβάνονται υπόψη στη σχεδίαση του ελέγχου, ώστε η συμπεριφορά του συστήματος κλειστού βρόχου να είναι ικανοποιητική σε πραγματικές συνθήκες λειτουργίας.

Η σταθεροποίηση υπο-επενεργούμενων θαλασσίων οχημάτων έχει αντιμετωπιστεί με διάφορες στρατηγικές ελέγχου. Πρωτοπόρος εργασία ήταν η [WSE95], όπου με χρήση ομαλής ανάδρασης των μεταβλητών κατάστασης, ένα υπο-επενεργούμενο πλοίο σταθεροποιείται σε μια πολλαπλότητα ισορροπίας (equilibrium manifold). Το πρόβλημα της ασυμπωτικής σταθεροποίησης με χρήση ομαλής, χρονικά μεταβαλλόμενης ανάδρασης αντιμετωπίζεται στις εργασίες των [PE99, PF00, DJPN02, DG05], ενώ ασυνεχείς νόμοι ελέγχου προτείνονται στις εργασίες των [Rey96, FLMP00, AP01, GMBD06, CYZ02]. Τέλος, οι εργασίες [KBH02, AP02b, GH08] χρησιμοποιούν σχήματα υβριδικού ελέγχου.

Ωστόσο, καμία από τις παραπάνω μελέτες δεν λαμβάνει υπόψη την επίδραση των περιβαλλοντικών διαταραχών. Πρωτοπόρος εργασία σε αυτήν την κατεύθυνση ήταν η [PN00], η οποία πραγματεύεται την δυναμική τοποθέτηση ενός πλοίου, και παρουσιάζει έναν χρονικά μεταβαλλόμενο νόμο ελέγχου που αποδίδει ημι-ολική πρακτική ευστάθεια στο σύστημα. Η εργασία των [AP07] πραγματεύεται τη δυναμική σταθεροποίηση ενός υπο-επενεργούμενου AUV υπό την επίδραση ενός σταθερού, άγνωστου ρεύματος. Με χρήση προσαρμοστικού ελέγχου το όχημα συγκλίνει σε μια επιθυμητή θέση, ενώ ο τελικός προσανατολισμός του οχήματος ευθυγραμμίζεται με τη διεύθυνση του ρεύματος. Η ίδια φιλοσοφία αναφορικά με τον τελικό προσανατολισμό του οχήματος συναντάται και στην εργασία των [PDS08], η οποία πραγματεύεται τη διατήρηση της θέσης ενός σκάφους επιφανείας υπό την επίδραση διαταραχών λόγω του ανέμου. Στην εργασία των [AHP07a] προτείνεται ένα σχήμα διακοπτόμενου ελέγχου βάσει των μεταβλητών κατάστασης (state-based switching control), το οποίο σταθεροποιεί ένα υπο-επενεργούμενο AUV γύρω από μια περιοχή του επιθυμητού σημείου ισορροπίας, αποδίδοντας πρακτική ευστάθεια από είσοδο (input-to-state practical stability) υπό την επίδραση διαταραχών και θορύβου στις μετρήσεις.

Παρά τη σημαντική συνεισφορά των παραπάνω εργασιών, είναι κοινή ομολογία ότι η σταθεροποίηση των υπο-επενεργούμενων υποβρυχίων οχημάτων υπό την επίδραση διαταραχών έχει αντιμετωπιστεί μερικώς έως τώρα, και ότι παραμένει ανοιχτό πρόβλημα από πολλές απόψεις.

Για παράδειγμα, ο καθορισμός του τελικού προσανατολισμού του οχήματος με βάση τη διεύθυνση των εξωτερικών διαταραχών, όπως συμβαίνει στις εργασίες [PF00, PN01, PDS08] μπορεί να μην είναι αποδεκτός σε διάφορες εφαρμογές, είτε για λόγους ασφάλειας του συστήματος, είτε για λόγους αποδοτικότητας. Ένα ενδεικτικό παράδειγμα είναι η περίπτωση ενός υποβρυχίου οχήματος, ή ενός σκάφους, που διαθέτει δύο προωητήρες για την κίνηση στο οριζόντιο επίπεδο, υπό την επίδραση ενός ρεύματος  $v$ , το οποίο επιθεωρεί έναν στόχο μέσω της κάμερας που διαθέτει, βλέπε Σχήμα 1. Έστω ότι για την αποτελεσματική επιθεώρηση του στόχου, το όχημα πρέπει να οδηγηθεί



Σχήμα 1: Το όχημα πρέπει να οδηγηθεί και να παραμείνει σε μια περιοχή γύρω από το σημείο  $\mathbf{q}_G = [0 \ 0 \ 0]^T$ , παρά την επίδραση του ρεύματος  $\mathbf{v}$

στην αρχή των αξόνων  $\mathbf{q}_G = [0 \ 0 \ 0]^T$  ενός αδρανειακού συστήματος συντεταγμένων, όπως φαίνεται στο σχήμα. Όμως, η διατάραξη (perturbation) που οφείλεται στο ρεύμα  $\mathbf{v}$  είναι non-vanishing στο σημείο  $\mathbf{q}_G$ , και συνεπώς το σημείο  $\mathbf{q}_G$  δεν είναι σημείο ισορροπίας. Άρα, είναι άσκοπη η αναζήτηση νόμων ελέγχου για την ασυμπτωτική ευστάθεια του συστήματος ως προς το σημείο  $\mathbf{q}_G$ . Αντ' αυτού, κανείς μπορεί να στοχεύσει στη σχεδίαση ελεγκτών που καθιστούν τις τροχιές του συστήματος φραγμένες σε μια περιοχή του επιθυμητού σημείου, λύνοντας έτσι ένα πρόβλημα πρακτικής σταθεροποίησης.

## Συνεισφορά

Το Κεφάλαιο 2 παρουσιάζει μια στρατηγική διακοπόμενου ελέγχου με υστέρηση (hysteresis-based switching control strategy), η οποία επιφέρει ολική, πρακτική σταθεροποίηση για ένα υποβρύχιο όχημα που μοντελοποιείται ως μονόκυκλο, υπό την επίδραση ενός σταθερού ρεύματος. Το όχημα συγκλίνει και παραμένει σε ένα σύνολο  $G$  γύρω από την αρχή  $\mathbf{q}_G = \mathbf{0}$ . Η επιθυμητή συμπεριφορά του συστήματος επιτυγχάνεται μέσω διαδοχικών αλλαγών (switching) μεταξύ τριών ελεγκτών. Ο πρώτος ελεγκτής είναι ενεργός εκτός του συνόλου  $G$ , και οδηγεί τις τροχιές του συστήματος στο εσωτερικό του  $G$  χρησιμοποιώντας ένα διπολικό διανυσματικό πεδίο. Οι άλλοι δύο ελεγκτές γίνονται ενεργοί μέσα στο σύνολο  $G$ , και εναλλάξ ρυθμίζουν τη θέση και τον προσανατολισμό του οχήματος. Το συνολικό σύστημα αποδεικνύεται εύρωστο, υπό την έννοια ότι οι τροχιές του συστήματος οδηγούνται και παραμένουν στο  $G$  ακόμα και στην περίπτωση που η ταχύτητα και η διεύθυνση του ρεύματος είναι άγνωστα, αρκεί να είναι γνωστό το άνω φράγμα  $\|\mathbf{v}\|$ .

Σε σύγκριση με προηγούμενες εργασίες που αφορούν στη δυναμική τοποθέτηση υπο-επενεργούμενων οχημάτων, οι οποίες δεν εξετάζουν τη ρύθμισή του τελικού προσανατολισμού σε μια επιθυμητή τιμή, η παρούσα στρατηγική ελέγχου επιτρέπει και τη σύγκλιση του προσανατολισμού στο μηδέν κατά τα χρονικά διαστήματα που ο αντίστοιχος ελεγκτής είναι ενεργός. Το χαρακτηριστικό αυτό, μαζί με την ευρωστία ως προς τη θέση του οχήματος, καθιστούν την προτεινόμενη λύση κατάλληλη για εφαρμογές όπου τόσο η θέση, όσο και ο προσανατολισμός του ρομπότ είναι σημαντικά, π.χ. σε διαδικασίες επιθεώρησης υποθαλάσσιων κατασκευών. ■

Από πρακτικής σκοπιάς επιπροσθέτως, κατά κανόνα τα συστήματα ελέγχου υπόκεινται σε ανισοτικούς ή/και ισοτικούς περιορισμούς συναρτήσεων των μεταβλητών κατάστασης, που κωδικοποιούν διάφορα κριτήρια απόδοσης ή ασφάλειας. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το κλασσικό πρό-



βλημα προγραμματισμού της κίνησης ενός (ή περισσοτέρων) ρομπότ σε ένα χώρο εργασίας με εμπόδια, με ταυτόχρονη αποφυγή συγκρούσεων. Ο χώρος των εμποδίων αναπαριστά ένα υπο-σύνολο του συνόλου παράστασης (configuration space) του συστήματος, στο οποίο οι τροχιές του συστήματος (δηλαδή το ρομπότ) δεν πρέπει ποτέ να βρεθούν. Έτσι, ο χώρος των εμποδίων (ή αντίστοιχα ο ελεύθερος χώρος του συστήματος) μπορούν να κωδικοποιηθούν με ανισοτικούς περιορισμούς συναρτήσει των μεταβλητών κατάστασης, οι οποίοι πρέπει να ικανοποιούνται πάντοτε κατά την εξέλιξη του συστήματος. Για το πρόβλημα του προγραμματισμού της κίνησης ρομποτικών συστημάτων, η βιβλιογραφία είναι πλούσια και περιλαμβάνει διάφορες μεθοδολογίες [CLH<sup>+</sup>05].

Ένα άλλο παράδειγμα συστήματος που υπόκειται σε ανισοτικούς περιορισμούς συναρτήσει των μεταβλητών κατάστασης είναι η περίπτωση ρομπότ που πρέπει να ολοκληρώσουν ένα έργο διαθέτοντας περιορισμένες δυνατότητες αίσθησης. Για παράδειγμα, έστω ένα υπο-επενεργούμενο ρομποτικό όχημα που φέρει αισθητήρες (κάμερες) με περιορισμένη εμβέλεια και γωνία θέασης, το οποίο πρέπει συνεχώς να επιθεωρεί ένα στόχο. Η απαίτηση αυτή, δηλαδή ότι ο στόχος πρέπει πάντοτε να βρίσκεται στο οπτικό πεδίο της κάμερας, επιβάλλει ένα σύνολο ανισοτικών περιορισμών συναρτήσει των μεταβλητών κατάστασης στο σύστημα, οι οποίοι πρέπει πάντοτε να ικανοποιούνται. Αυτό το πρόβλημα, που συνήθως διατυπώνεται ως διατήρηση ορατότητας, συναντάται σε σχηματισμούς ηγέτη-οπαδού (leader-follower formations), όπου ο ηγέτης πρέπει πάντοτε να είναι ορατός στον οπαδό, [DFK<sup>+</sup>02, CSVS03, MBP11], στην πλοήγηση βάσει όρασης μέσω διακριτικών σημάτων (landmark-based navigation) για ρομποτικά οχήματα [KR05, BMCH07, LK07], ή σε προβλήματα καταδίωξης-διαφυγής βάσει ορατότητας [DFB10]. Παρόμοιες προδιαγραφές συναντώνται σε προβλήματα διατήρησης συνδεσιμότητας που περιλαμβάνουν ρομπότ με περιορισμένες δυνατότητες αίσθησης ή/και επικοινωνίας, τα οποία πρέπει να ολοκληρώσουν ένα έργο ενώ ταυτόχρονα παραμένουν συνδεδεμένα [B<sup>+</sup>M09].

Είναι αξιοσημείωτο ότι όλα τα παραπάνω προβλήματα, τα οποία αναφέρονται σε διαφορετικά συστήματα και στόχους, έχουν ως κοινό χαρακτηριστικό το ότι η σχεδίαση του ελέγχου αναφέρεται σε μη γραμμικά συστήματα που υπόκεινται σε μη-ολονομικούς περιορισμούς και σε ανισοτικούς περιορισμούς συναρτήσει των μεταβλητών κατάστασης.

## Συνεισφορά

Το Κεφάλαιο 4 παρουσιάζει μια μεθοδολογία ελέγχου για μια κλάση μη-ολονομικών συστημάτων με περιορισμούς συναρτήσει των μεταβλητών κατάστασης. Οι περιορισμοί εκφράζονται ως ανισότητες συναρτήσει των μεταβλητών κατάστασης, οι οποίες ορίζουν ένα κλειστό υποσύνολο  $K$  του χώρου κατάστασης  $\mathcal{Q}$ . Συνεπώς, το σύνολο  $K$  αναπαριστά το υποσύνολο του χώρου κατάστασης μέσα στο οποίο πρέπει να εξελίσσονται οι τροχιές του συστήματος, για κάθε  $t \geq 0$ . Οι τροχιές του συστήματος που είτε ξεκινούν εκτός του  $K$ , είτε διαφεύγουν από το  $K$  για κάποιο  $t > 0$  παραβιάζουν τους περιορισμούς, και συνεπώς δεν είναι αποδεκτές. Έτσι, το πρόβλημα ελέγχου ανάγεται στην εύρεση ενός σχήματος ελέγχου με ανάδραση μεταβλητών κατάστασης, έτσι ώστε οι τροχιές του συστήματος που ξεκινούν μέσα στο σύνολο  $K$  να συγκλίνουν σε ένα σύνολο  $G \subset K$ , χωρίς να διαφεύγουν από το  $K$ .

Η προσέγγισή μας συνδυάζει έννοιες από τη θεωρία βιωσιμότητας συστημάτων (viability theory) και τη μεθοδολογία μας για τη σχεδίαση ελέγχου για  $n$ -διαστατα μη-ολονομικά συστήματα (Κεφάλαιο 3). Στη συνέχεια, ακολουθώντας τη σημειογραφία των [Aub91], οι περιορισμοί συναρτήσει των μεταβλητών κατάστασης ονομάζονται περιορισμοί βιωσιμότητας, το σύνολο  $K$  ονομάζεται το

σύνολο βιωσιμότητας του συστήματος, και οι τροχιές του συστήματος που παραμένουν πάντοτε στο  $K$  ονομάζονται βιώσιμες.

Πιο συγκεκριμένα, υιοθετούμε την έννοια της εφαπτομένης σε ένα σύνολο  $K$  που ορίζεται από ανισοτικούς περιορισμούς, και δίνουμε τις αναγκαίες συνθήκες υπό τις οποίες οι αποδεκτές λύσεις ενός κινηματικού συστήματος είναι βιώσιμες στο σύνολο  $K$ , καθώς και τις αναγκαίες συνθήκες για την επιλογή βιώσιμων εισόδων ελέγχου. Επιπλέον, προτείνουμε μία μέθοδο ανασχεδίασης των λύσεων που προκύπτουν από τη μεθοδολογία στο Κεφάλαιο 3, ώστε οι τροχιές του συστήματος να είναι βιώσιμες στο  $K$  και επιπλέον να συγκλίνουν σε ένα τελικό σύνολο  $G$  μέσα στο  $K$ .

Η μέθοδος εφαρμόζεται στην περίπτωση του προγραμματισμού της κίνησης ενός υπο-επενεργούμενου θαλάσσιου οχήματος, το οποίο υπόκειται σε περιορισμούς συναρτήσεων των μεταβλητών παράστασης (configuration constraints) εξαιτίας της περιορισμένης δυνατότητας αίσθησης, ως εξής: Υποθέτουμε ότι το διαθέσιμο σύστημα αισθητήρων αποτελείται από μία κάμερα με περιορισμένη γωνία θέασης και δύο προβολείς laser (laser pointers) με περιορισμένη εμβέλεια. Το ζητούμενο είναι ο έλεγχος της κίνησης του οχήματος έτσι ώστε το όχημα να συγκλίνει σε μία επιθυμητή θέση με επιθυμητό προσανατολισμό ως προς ένα στόχο, ο οποίος πρέπει να παραμένει πάντοτε ορατός στο οπτικό πεδίο της κάμερας· υπό αυτήν την έννοια, το πρόβλημα μπορεί να χαρακτηριστεί και ως πρόβλημα διατήρησης ορατότητας. Η διατήρηση της ορατότητας με το στόχο, σε συνδυασμό με τους περιορισμούς από το σύστημα αισθητήρων του οχήματος επιβάλλουν ένα σύνολο ανισοτικών περιορισμών στο σύστημα, οι οποίοι ορίζουν το σύνολο βιωσιμότητας  $K$  του συστήματος. Η ευρωστία του προτεινόμενων λύσεων ως προς μία κλάση φραγμένων εξωτερικών διαταραχών εξετάζεται επίσης στο τέλος του κεφαλαίου.

Σημειώνεται ότι η διατύπωση του προβλήματος είναι παρεμφερής με το χαρακτηρισμό των βιώσιμων capture basins ενός συνόλου  $C$  μέσα σε ένα σύνολο περιορισμών  $K$  [Aub01], ο οποίος βασίζεται στη μέθοδο Frankowska που χαρακτηρίζει την ανεξαρτησία υποσυνόλων και την βιωσιμότητα μέσω της συνάρτησης αξίας (value function) ενός προβλήματος βέλτιστου ελέγχου. Ωστόσο, η δική μας προσέγγιση χρησιμοποιεί την έννοια της ανεξαρτησίας συνόλου κατά [Bla99, BM08], ενώ ο στόχος είναι να σχεδιαστεί ένα σχήμα ανάδρασης μεταβλητών κατάστασης, ώστε αφενός το σύνολο βιωσιμότητας  $K$  να καταστεί ένα θετικά ανεξάρτητο (ή ανεξάρτητο μέσω ελέγχου) σύνολο, και αφετέρου το σύνολο  $G$  να καταστεί το μεγαλύτερο ανεξάρτητο σύνολο του συστήματος.

Η έννοια της ανεξαρτησίας ενός συνόλου μέσω ελέγχου για γραμμικά συστήματα έχει χρησιμοποιηθεί στην εργασία [MBP11] στο σχεδιασμό του ελέγχου ενός μη-ολονομικού συστήματος με πρώτης τάξεως (κινηματικούς) περιορισμούς, με γραμμικοποίηση του αρχικού συστήματος ως προς το σημείο ισορροπίας. Σε σχέση με αυτήν την εργασία, η προτεινόμενη μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μία ευρύτερη κλάση υπο-επενεργούμενων συστημάτων με περιορισμούς κατάστασης, συμπεριλαμβανομένης της κλάσης των μη-ολονομικών συστημάτων με περιορισμούς δεύτερης τάξεως, δίχως να απαιτείται η γραμμικοποίηση του συστήματος γύρω από σημείο.

Τέλος, ο έλεγχος της κίνησης υπο-επενεργούμενων θαλάσσιων οχημάτων έχει αντιμετωπιστεί με διάφορες τεχνικές ελέγχου στις εργασίες [Leo95, PE99, PF00, AP02a, DJPN04], ωστόσο καμία από αυτές δεν λαμβάνει υπόψη της επιπρόσθετους περιορισμούς κατάστασης. ■

Η σχεδίαση ελέγχου που παρουσιάζεται στα Κεφάλαια 3, 4 εφαρμόζεται και σε άλλες περιπτώσεις ελέγχου κίνησης. Ενδεικτικά, στο κεφάλαιο 5 παρουσιάζεται η περίπτωση δύο τροχοφόρων ρομπότ με διαφορετική οδήγηση, τα οποία μοντελοποιούνται κινηματικά ως μονόκυκλα, και τα οποία κινούνται σε σχηματισμό ηγέτη-οπαδού σε ένα γνωστό περιβάλλον με εμπόδια, ενώ ταυτόχρονα δεν υπάρχει επικοινωνία μεταξύ τους. Υποθέτουμε ότι ο ηγέτης διαθέτει ένα σχέδιο υψηλού επιπέδου για

την κίνησή του από μια αρχική σε μία τελική θέση στον ελεύθερο χώρο, ενώ ο οπαδός πρέπει να κινείται μέσα στον ελεύθερο χώρο διατηρώντας σταθερή απόσταση και προσανατολισμό ως προς τον ηγέτη, αποφεύγοντας τις συγκρούσεις, χρησιμοποιώντας ανάδραση κατάστασης από την κάμερά του μόνο. Εφόσον δεν υπάρχει επικοινωνία μεταξύ των ρομπότ, τα ρομπότ παραμένουν συνδεδεμένα αν και μόνο αν ο ηγέτης είναι ορατός στον οπαδό. Η απαίτηση αυτή επιβάλλει ένα σύνολο περιορισμών ορατότητας, οι οποίοι δεν πρέπει να παραβιάζονται ώστε ο οπαδός να μπορεί πάντοτε να διατηρεί την ορατότητα με τον ηγέτη. Επιπλέον, η αποφυγή συγκρούσεων μεταξύ των ρομπότ, αλλά και με τα εμπόδια του χώρου, θα πρέπει να εξασφαλιστεί για την κίνηση και των δύο ρομπότ.

## Συνεισφορά

Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζεται ένα σχήμα συνεργατικού ελέγχου για την κίνηση ενός σχηματισμού ηγέτη-οπαδού σε ένα γνωστό περιβάλλον με εμπόδια, που εγγυάται την αποφυγή συγκρούσεων και τη διατήρηση της ορατότητας μεταξύ των ρομπότ. Ακολουθώντας τη μέθοδο που παρουσιάζεται στα Κεφάλαια 3, 4, οι περιορισμοί ορατότητας μοντελοποιούνται ως μη-γραμμικοί ανισοτικοί περιορισμοί συναρτήσεων των μεταβλητών κατάστασης, που ορίζουν ένα κλειστό υποσύνολο  $K$  του χώρου κατάστασης. Η διατήρηση της ορατότητας αναδιατυπώνεται ως ένα πρόβλημα ελέγχου των δύο ρομπότ έτσι ώστε οι τροχιές του συστήματος που ξεκινούν μέσα στο  $K$  να παραμένουν για πάντα στο  $K$ . Χρησιμοποιώντας έννοιες από τη θεωρία βιωσιμότητας και την έννοια του διπολικού διανυσματικού πεδίου, αφενός διατυπώνονται οι συνθήκες για τη διατήρηση της ορατότητας, αφετέρου αναπτύσσεται ένα σχήμα ελέγχου που οδηγεί τον οπαδό σε ένα σύνολο επιθυμητών θέσεων και προσανατολισμών ως προς τον ηγέτη, με ταυτόχρονη διατήρηση της ορατότητας. Επιπλέον, με χρήση του μοντέλου κίνησης ενός οχήματος με ρυμουλκούμενο, παρουσιάζεται ένα σχήμα συνεργατικού ελέγχου για την κίνηση του σχηματισμού σε ένα γνωστό περιβάλλον με εμπόδια, που εγγυάται την αποφυγή συγκρούσεων και τη διατήρηση της ορατότητας. Οι νόμοι ελέγχου είναι αποκεντρωμένοι, υπό την έννοια ότι δεν υπάρχει ευθεία επικοινωνία μεταξύ των ρομπότ, ενώ ο ηγέτης δεν γνωρίζει την κατάσταση του οπαδού. ■

Τέλος, στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάζεται μια διατύπωση του προβλήματος βιωσιμότητας ως ενός προβλήματος βέλτιστου ελέγχου, με εφαρμογή στον έλεγχο ενός υπο-επενεργούμενου υποβρύχιου οχήματος υπό την επίδραση ενός γνωστού, σταθερού ρεύματος. Η λύση που προτείνεται υιοθετεί τα θεωρητικά αποτελέσματα της εργασίας [Lyg04], η οποία εκφράζει τη βιωσιμότητα ενός συστήματος μέσω ενός κατάλληλα διαμορφωμένου προβλήματος βέλτιστου ελέγχου. Η λύση που προκύπτει είναι της μορφής bang-bang optimal control.

---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

# Σχεδίαση Ελέγχου με Διανυσματικά Πεδία Διπολικού Τύπου: Κίνητρο και Προκαταρκτικά Αποτελέσματα

## Περίληψη

Το παρόν κεφάλαιο παρουσιάζει την αναλυτική κατασκευή μιας προκαταρκτικής μορφής των διπολικών διανυσματικών πεδίων, η οποία βασίζεται στη μορφή των γραμμών ροής του σημειακού ηλεκτρικού διπόλου. Η μορφή αυτή χρησιμεύει ως η βάση για τον ορισμό των  $n$ -διάστατων διπολικών πεδίων στο Κεφάλαιο 3. Επιπλέον, παρουσιάζεται μια πρώτη διασύνδεση μεταξύ του διπολικού διανυσματικού πεδίου και ενός μη-ολονομικού περιορισμού σε Pfaffian μορφή, η οποία δρα ως το κίνητρο για την περαιτέρω γεωμετρική γενίκευση της ιδέας και της στρατηγικής ελέγχου, που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 3. Σε αυτό το κεφάλαιο, οι προκαταρκτικές κατευθυντήριες γραμμές για το σχεδιασμό του ελέγχου εφαρμόζονται στο μονόκυκλο και στον διπλό ολοκληρωτή του Brockett .

### 1.1 Περιορισμοί σε Pfaffian μορφή

Έστω η κλάση των μη-γραμμικών συστημάτων που περιγράφονται ως

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{u}), \quad (1.1)$$

όπου  $\mathbf{q} \in \mathcal{C}$  το διάνυσμα των μεταβλητών παράστασης,  $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$  ο χώρος παράστασης,  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$  το διάνυσμα των  $m < n$  εισόδων ελέγχου,  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  ο χώρος ελέγχου,  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  μια διανυσματική συνάρτηση που περιγράφει τη δυναμική του συστήματος. Το διάνυσμα των μεταβλητών παράστασης  $\mathbf{q} = [q_1 \ \cdots \ q_n]^\top$  ονομάζεται και διάνυσμα των γενικευμένων συντεταγμένων [Blo03].

Έστω επίσης ότι το σύστημα (1.1) υπόκειται σε  $\kappa < n$  ισοτικών περιορισμούς. Κάθε περιορισμός  $i$  γράφεται στη μορφή

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(q_1, \dots, q_n, t) \dot{q}_j + b_i(q_1, \dots, q_n, t) = 0. \quad (1.2)$$

Η διαφορική ή Pfaffian μορφή της σχέσης (1.2) δίνεται ως

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(q_1, \dots, q_n, t) \delta q_j + b_i(q_1, \dots, q_n, t) \delta t = 0, \quad (1.3)$$

και αναπαριστά τον περιορισμό στη μεταβολή των γενικευμένων συντεταγμένων στο χρονικό διάστημα  $\delta t$ .

## 1.2 Το Διανυσματικό Πεδίο Διπολικού τύπου

Η αναλυτική έκφραση των προτεινόμενων 2-διάστατων και 3-διάστατων διανυσματικών πεδίων διπολικού τύπου είναι εμπνευσμένη από το διανυσματικό πεδίο του σημειακού ηλεκτρικού διπόλου σε έναν Ευκλείδειο χώρο  $W$ : Η χαρακτηριστική ιδιότητα του διανυσματικού πεδίου του σημειακού ηλεκτρικού διπόλου, η οποία αποτελεί το κίνητρο για την προτεινόμενη στρατηγική ελέγχου, είναι το γεγονός ότι όλες οι γραμμές ροής συγκλίνουν σε μια συγκεκριμένη θέση στο χώρο  $W$ , εφαπτόμενες σε μια συγκεκριμένη διεύθυνση.

### 1.2.1 Το Ηλεκτρικό Δίπολο

Το ηλεκτρικό διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{E}_{\text{dip}}(\mathbf{r})$  του σημειακού διπόλου ορίζεται ως η αρνητική κλίση του ηλεκτρικού δυναμικού  $V_{\text{dip}}(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{E}_{\text{dip}} = -\nabla V_{\text{dip}}$ . Η ένταση του πεδίου στο σημείο  $A$  γράφεται σε πολικές συντεταγμένες ως [Gri99]

$$\mathbf{E}_{\text{dip}}(r, \theta) = E_r \hat{\mathbf{r}} + E_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} = \left( \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left( \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (1.4)$$

όπου  $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$  είναι τα μοναδιαία διανύσματα κατά τη διεύθυνση των πολικών συντεταγμένων  $(r, \theta)$ , αντίστοιχα.

Οι γραμμές ροής, ή γραμμές πεδίου, είναι καμπύλες εφαπτόμενες στο διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{E}_{\text{dip}}$  σε κάθε σημείο του χώρου. Από τον ορισμό της γραμμής ροής, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{rd\theta} = \frac{E_r}{E_\theta} &\Rightarrow \frac{dr}{rd\theta} = \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} \Rightarrow \frac{1}{r} dr = \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} d\theta \Rightarrow \ln r = 2 \ln(\sin \theta) + \text{constant} \Rightarrow \\ &\ln r = \ln(\sin^2 \theta) + \ln R \Rightarrow \\ &\ln r = \ln(R \sin^2 \theta) \Rightarrow r = R \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

όπου  $R > 0$  μια σταθερά που σχετίζεται με μια συγκεκριμένη γραμμή ροής [dW01]. Έτσι, για  $r \rightarrow 0$ , προκύπτει ότι  $\sin \theta \rightarrow 0 \Rightarrow \theta \rightarrow 0$  εάν  $x \geq 0$ , ή  $\theta \rightarrow \pi$  εάν  $x < 0$ , δηλαδή ότι οι γραμμές ροής του σημειακού ηλεκτρικού διπόλου συγκλίνουν στην αρχή των αξόνων  $(x, y) = (0, 0)$  με διεύθυνση παράλληλη στον άξονα  $x$ , βλέπε Σχήμα 1.1. Ομοίως αποδεικνύεται ότι οι γραμμές ροής ενός σημειακού διπόλου με διπολική ροπή  $\mathbf{p}$ , όπου  $(p, \theta_1)$  οι πολικές συντεταγμένες του διανύσματος  $\mathbf{p}$ , συγκλίνουν στην αρχή  $(x, y) = (0, 0)$  με διεύθυνση παράλληλη στο διάνυσμα  $\mathbf{p}$ , εφόσον περιγράφονται από την εξίσωση  $r = R \sin^2(\theta - \theta_1)$ .

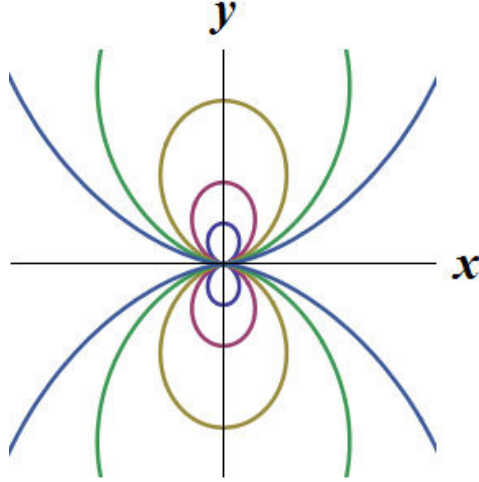
Γενικά, το διανυσματικό πεδίο ενός σημειακού ηλεκτρικού διπόλου που ορίζεται από τη διπολική ροπή  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$  σε ένα χώρο  $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^3$  δίνεται ως [Gri99]

$$\mathbf{E}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}) - \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{p} \delta^3(\mathbf{r}), \quad (1.5)$$

όπου  $\delta^3(\cdot)$  είναι μια 3-διαστατη συνάρτηση Dirac.

Με βάση την εξίσωση (1.5), προτείνουμε την κλάση των διανυσματικών πεδίων διπολικού τύπου:

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \underbrace{\lambda(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})\mathbf{q} - \mathbf{p}}_{\mathbf{F}_1(\mathbf{q})} + \underbrace{\mathbf{p} \exp^{-\|\mathbf{q}\|^2}}_{\mathbf{F}_2(\mathbf{q})}, \quad (1.6)$$



Σχήμα 1.1: Οι γραμμές ροής ενός σημειακού ηλεκτρικού διπόλου.

όπου  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  είναι το διάνυσμα των γενικευμένων συντετεγμένων,  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  είναι το διάνυσμα της διπολικής ροπής,  $\|\mathbf{q}\|$  είναι η Ευκλείδεια νόρμα του διανύσματος  $\mathbf{q}$  και  $\lambda \geq 2$  μια σταθερά.

Για την αναπαράσταση του διπολικού πεδίου (1.6), έστω  $\mathbf{q} = [x \ y]^\top \in \mathbb{R}^2$ , όπου  $x, y$  οι συντεταγμένες θέσης ως προς ένα καρτεσιανό σύστημα συντεγμένων  $\mathcal{G}$  σε ένα χώρο  $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\lambda = 3$  ανδ  $\mathbf{p} = [1 \ 0]^\top$ . Η αναλυτική έκφραση του (1.6) δίνεται ως  $\mathbf{F}(x, y) = F_x \hat{\mathbf{x}} + F_y \hat{\mathbf{y}}$ , όπου

$$F_x = 3x^2 - 1 + e^{-(x^2+y^2)}, \quad (1.7\alpha')$$

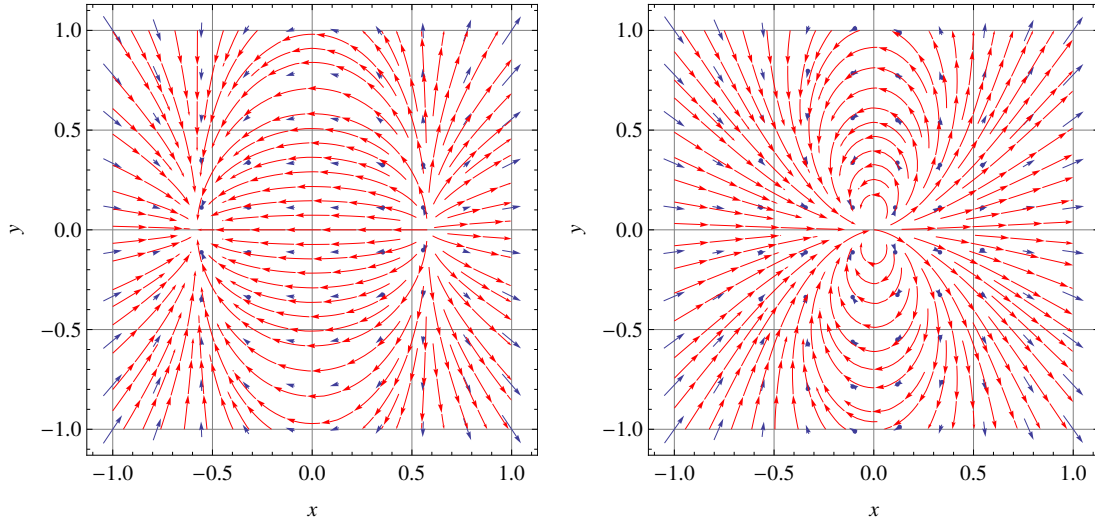
$$F_y = 3xy. \quad (1.7\beta')$$

Το διανυσματικό πεδίο (1.7) απεικονίζεται στο Σχήμα 1.2(β'), και μηδενίζεται μόνο στην αρχή των αξόνων, δηλαδή  $\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$  αν και μόνο αν  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ . Με άλλα λόγια, η αρχή  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$  είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο του διπολικού διανυσματικού πεδίου.

Η μορφή των γραμμών ροής του διπολικού διανυσματικού πεδίου (1.7) γύρω από την αρχή  $(0, 0)$  αποτελεί την ιδέα για τη στρατηγική ελέγχου που εφαρμόζεται στο μονόκυκλο.

Έστω ότι μια διπολική ροπή  $\mathbf{p} = [p_x \ p_y] \in \mathbb{R}^2$  ορίζεται στην επιθυμητή θέση  $\mathbf{r}_G = [x_G \ y_G]^\top$  έτσι ώστε η διεύθυνση  $\phi_p = \text{atan2}(p_y, p_x)$  του διανύσματος  $\mathbf{p}$  να συμπίπτει με τον επιθυμητό προσανατολισμό  $\theta_G$ . Συνεπώς, οι γραμμές ροής συγκλίνουν στη θέση  $\mathbf{r}_G$  με διεύθυνση  $\phi_p \pm \xi\pi$ ,  $\xi = 0, 1$ .

Συνεπώς, ο έλεγχος κίνησης για το μονόκυκλο ανάγεται στη σχεδίαση ενός σχήματος ελέγχου με ανάδραση μεταβλητών κατάστασης έτσι ώστε το σύστημα να συγκλίνει στην επιθυμητή κατάσταση  $\mathbf{q}_G = [x_G \ y_G \ \theta_G]^\top$  ακολουθώντας τις γραμμές ροής ως πορείες αναφοράς.



Σχήμα 1.2: Το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}_1(x, y)$  και το διπολικό διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}(x, y)$

### 1.3 Διπολικά Πεδία και Μη-Ολονομικά Συστήματα

#### 1.3.1 Μονόκυκλο

Η κίνηση ενός ρομπότ που μοντελοποιείται κινηματικά ως μονόκυκλο περιγράφεται ως:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2, \quad (1.8)$$

όπου  $\mathbf{q} = [x \ y \ \theta]^\top \in \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$  το διάνυσμα παράστασης,  $\mathcal{C}$  ο χώρος παράστασης,  $x, y$  οι συντεταγμένες θέσης και  $\theta$  ο προσανατολισμός του ρομπότ ως προς ένα καρτεσιανό αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων  $\mathcal{G}$ , και  $u_1, u_2$  η γραμμική και η γωνιακή ταχύτητα του ρομπότ, αντίστοιχα.

Το σύστημα (1.8) υπόκειται σε  $\kappa = 1$  μη-ολονομικό περιορισμό:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}^\top(\mathbf{q})} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{a}^\top(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0, \quad (1.9)$$

ο οποίος εκφράζει ότι ο υπόξωρος των επιτρεπόμενων γενικευμένων ταχυτήτων  $\dot{\mathbf{q}}$  σε κάποιο σημείο  $\mathbf{q}$  ισούται με τον πυρήνα του  $\mathbf{a}^\top(\mathbf{q})$ ,  $\ker(\mathbf{a}^\top(\mathbf{q}))$ , όπου  $\dim \ker(\mathbf{a}^\top(\mathbf{q})) = n - \kappa$ .

Έχοντας υπόψη τη γεωμετρική ερμηνεία του περιορισμού, ζητούμε να σχεδιάσουμε ένα διπολικού-τύπου πεδίο  $\mathbf{F}(\mathbf{q})$  (1.6), έτσι ώστε οι γραμμές ροής

- να συγκλίνουν στο επιθυμητό σημείο  $\mathbf{q}_G$ ,
- να είναι συνεπείς με τον περιορισμό.

Μία γραμμή ροής καλείται συνεπής με τον περιορισμό σε κάποιο σημείο  $\mathbf{q} \in \mathcal{C}$  αν το εφαπτόμενο διάνυσμα σε αυτο το σημείο ικανοποιεί τον περιορισμό. Για το μονόκυκλο, οι γραμμές ροής ενός πεδίου (1.6) που ορίζεται ως  $\mathbf{F}(x, y, \theta) = F_x \hat{\mathbf{x}} + F_y \hat{\mathbf{y}} + F_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$  θα πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}^\top(\mathbf{q})} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_\theta \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow F_x \sin \theta - F_y \cos \theta = 0. \quad (1.10)$$

Παρατηρούμε ότι η συνιστώσα  $F_\theta$  δεν επηρεάζει το αν ο περιορισμός ικανοποιείται, κι έτσι μπορούμε να ορίσουμε ένα πεδίο διάστασης  $N = 2$ , συναρτήσε των  $F_x, F_y$ , όπου  $F_\theta = 0$ .

Το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}(\cdot)$  ορίζεται από το διάνυσμα της διπολικής ροπής  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^N$ , το οποίο πρέπει να ικανοποιεί τον μη-ολονομικό περιορισμό στο σημείο  $\mathbf{q}_G$ :

$$\langle \mathbf{a}^\top(\mathbf{q}_G), \mathbf{p} \rangle = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -\sin(0) & \cos(0) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_\theta \end{bmatrix} = 0, \quad (1.11)$$

όπου θέτουμε  $p_\theta = 0$ , για τον ίδιο λόγο που θέσαμε  $F_\theta = 0$ . Η συνθήκη (3.9) ικανοποιείται για κάθε  $p_x \in \mathbb{R}$  και για  $p_y = 0$ . Θέτουμε  $\mathbf{p} \triangleq [p_x \ 0]^\top$ , όπου  $p_x \neq 0$ .

Συνεπώς, ορίζουμε το διπολικό πεδίο από την οικογένεια (1.5) για  $\mathbf{p} = [1 \ 0]^\top$  και αμελώντας τον παράγοντα  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ , ώστε να έχουμε την ακόλουθη έκφραση σε πολικές συντεταγμένες:

$$F_x = 2 \cos^2 \phi - \sin^2 \phi, \quad F_y = 3 \sin \phi \cos \phi, \quad F_\theta = 0, \quad (1.12)$$

όπου  $(r, \phi)$  οι πολικές συντεταγμένες του σημείου  $(x, y)$ .

Δεδομένου του διανυσματικού πεδίου (1.12), σχεδιάζουμε ένα νόμο ελέγχου ώστε το μονόκυκλο να ευθυγραμμιστεί με το πεδίο και να ακολουθήσει τις γραμμές ροής έως ότου συγκλίνει στο σημείο  $(0, 0)$ . Για να το επιτύχουμε αυτό, εκφράζουμε την απόκλιση μεταξύ του διανυσματικού πεδίου του μονόκυκλου  $\dot{\mathbf{q}} \in T_{\mathbf{q}}(\mathcal{C})$  και του διπολικού πεδίου  $\mathbf{F}(\mathbf{q})$  μέσω της προβολής του πεδίου  $\mathbf{F}(\mathbf{q})$  πάνω στο διάνυσμα  $\mathbf{a}(\mathbf{q})$ , και ορίζουμε την έξοδο του συστήματος:

$$h(\mathbf{q}) \triangleq \langle \mathbf{a}^\top, \mathbf{F} \rangle = 0.5[3 \sin(2\phi - \theta) - \sin \theta].$$

Έτσι, η σχεδίαση του ελέγχου ανάγεται στην εύρεση ενός νόμου ελέγχου που σταθεροποιεί την έξοδο  $h(\mathbf{q})$  στο μηδέν, το οποίο συνεπάγεται ότι το σύστημα ευθυγραμμίζεται με το πεδίο  $\mathbf{F}(\mathbf{q})$ . Έτσι, επιβάλλουμε η δυναμική του  $h(\mathbf{q})$  να είναι εκθετικά ευσταθής:  $\dot{h} = -kh$ , το οποίο επιτυγχάνεται μέσω της εισόδου ελέγχου:

$$u_2 = \frac{2kh(\mathbf{q})}{3 \cos(2\phi - \theta) + \cos \theta} - \frac{6u_1(x \sin \theta - y \cos \theta) \cos(2\phi - \theta)}{r^2(3 \cos(2\phi - \theta) + \cos \theta)}, \quad (1.13)$$

για  $k > 0$ . Στην περίπτωση που ο όρος  $3 \cos(2\phi - \theta) + \cos \theta$  στον παρανομαστή γίνει ίσος με μηδέν, κανείς μπορεί να χρησιμοποιήσει τη στρατηγική ελέγχου:

$$u_2 = \begin{cases} \frac{2kh(\mathbf{q}) - 6u_1 r^{-2} (x \sin \theta - y \cos \theta) \cos(2\phi - \theta)}{r^2(3 \cos(2\phi - \theta) + \cos \theta)}, & |3 \cos(2\phi - \theta) + \cos \theta| > \epsilon \\ k(\theta_d - \theta), & |3 \cos(2\phi - \theta) + \cos \theta| \leq \epsilon, \end{cases} \quad (1.14)$$

όπου  $\theta_d$  η διεύθυνση του  $\mathbf{F}$ , και  $\epsilon$  μία μικρή σταθερά. Επιπλέον, κανείς μπορεί να ορίσει μία συνεχώς θετική ταχύτητα για το μονόκυκλο,  $u_1 = \tanh r$ , και να συγκλίνει στο σημείο  $\mathbf{q}_G = \mathbf{0}$  ακολουθώντας τις γραμμές ροής του  $\mathbf{F}$ .



### 1.3.2 Διπλός Μη-Ολονομικός Ολοκληρωτής του Brockett

Στο σημείο αυτό, δεδομένης της κλάσης των  $n$ -διάστατων πεδίων (1.6), της διαδικασίας για τον ορισμό του  $N = 2$ -διάστατου πεδίου για το μονόκυκλο, και της προτεινόμενης στρατηγικής ελέγχου, αναζητούμε εάν οι ιδέες αυτές μπορούν να εφαρμοστούν και σε άλλα (κινηματικά) μη-ολονομικά συστήματα. Έστω ο μη-ολονομικός διπλός ολοκληρωτής

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -x_2 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ x_1 \end{bmatrix} u_2, \quad (1.15)$$

όπου  $\mathbf{q} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^\top$  το διάνυσμα κατάστασης,  $\mathbf{g}_1(\mathbf{q}) = [1 \ 0 \ -x_2]^\top$  και  $\mathbf{g}_2(\mathbf{q}) = [0 \ 1 \ x_1]^\top$  τα διανυσματικά πεδία ελέγχου. Το σύστημα υπόκειται στον  $\kappa = 1$  περιορισμό

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_2 & -x_1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}^\top(\mathbf{q})} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \langle \mathbf{a}^\top(\mathbf{q}), \dot{\mathbf{q}} \rangle = 0. \quad (1.16)$$

Όπως παραπάνω, αναζητούμε ένα πεδίο  $\mathbf{F}(\mathbf{q}) = F_{x_1} \hat{\mathbf{x}}_1 + F_{x_2} \hat{\mathbf{x}}_2 + F_{x_3} \hat{\mathbf{x}}_3$  έτσι ώστε να ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_2 & -x_1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}^\top(\mathbf{q})} \begin{bmatrix} F_{x_1} \\ F_{x_2} \\ F_{x_3} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow F_{x_1} x_2 - F_{x_2} x_1 + F_{x_3} = 0. \quad (1.17)$$

Παρατηρούμε ότι σε αυτήν την περίπτωση όλες οι συνιστώσες  $F_{x_j}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , εμφανίζονται στην σχέση (1.17). Συνεπώς, ορίζουμε ένα  $N = 3$ -διάστατο πεδίο συναρτήσεων των  $F_{x_1}$ ,  $F_{x_2}$ ,  $F_{x_3}$ , δηλαδή συναρτήσει όλων των μεταβλητών κατάστασης  $\mathbf{q}$ .

Η διπολική ροπή  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$  ορίζεται ώστε να ικανοποιεί τον μη-ολονομικό περιορισμό στο σημείο  $\mathbf{q}\mathcal{G}$ :  $\langle \mathbf{a}^\top(\mathbf{q}\mathcal{G}), \mathbf{p} \rangle = 0$ , που συνεπάγεται ότι  $\mathbf{p} = [p_1 \ p_2 \ 0]^\top$ , όπου  $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ . Έστω  $\mathbf{p} = [1 \ 0 \ 0]^\top$  και  $\lambda = 1$ , τότε:  $F_{x_1} = x_1^2 - 1 + \exp^{-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}$ ,  $F_{x_2} = x_1 x_2$ ,  $F_{x_3} = x_1 x_3$ . Αντικαθιστώντας τις συνιστώσες  $F_{x_1}$ ,  $F_{x_2}$ ,  $F_{x_3}$  στην εξίσωση (1.17) έθουμε:

$$h(\mathbf{q}) = x_1 x_3 - x_2 [1 - \exp^{-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}].$$

Η συνθήκη υποδεικνύει ότι το κανείς μπορεί να εφαρμόσει μια στρατηγική ώστε  $x_3 \rightarrow 0$  και κατόπιν  $x_2, x_1 \rightarrow 0$ , δηλαδή έτσι ώστε η μεταβλητή  $x_3$  να συγκλίνει γρηγορότερα από τα  $x_1, x_2$  στο μηδέν [BD96, Ast97].

Ωστόσο, η έκφραση της παραγώγου  $\dot{h}(\mathbf{q})$  δυσκολεύει την εύρεση ελέγχου ώστε  $\dot{h}(\mathbf{q}) = -k h(\mathbf{q})$ . Θεωρούμε το απλούστερης μορφής πεδίο  $\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \lambda(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})\mathbf{q}$ , όπου  $\lambda = 1$ ,  $F_{x_1} = x_1^2$ ,  $F_{x_2} = x_1 x_2$ ,  $F_{x_3} = x_1 x_3$ , ώστε η έξοδος που πρέπει να ρυθμιστεί στο μηδέν να προκύπτει ίση με:  $h(\mathbf{q}) = x_1 x_3$ . Συνεπώς, απαιτούμε:  $\dot{h} = -k h$ ,  $k > 0$ , το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 x_3 + x_1 \dot{x}_3 = -k x_1 x_3 &\Rightarrow x_3 u_1 + x_1 (-x_2 u_1 + x_1 u_2) = -k x_1 x_3 \Rightarrow \\ (x_3 - x_2 x_1) u_1 + x_1^2 u_2 &= -k x_1 x_3. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Η συνθήκη (1.18) συμπεριλαμβάνει και τις δύο εισόδους  $u_1, u_2$ . Συνεπώς, θέτουμε την είσοδο  $u_1 = -k_1 x_1$ ,  $k_1 > 0$ , ώστε  $x_1 \rightarrow 0$ , ενώ η είσοδος  $u_2$  προκύπτει από τη σχέση (1.18) ως

$$u_2 = -k \frac{x_3}{x_1} - \frac{x_3 - x_2 x_1}{x_1^2} u_1 = -k \frac{x_3}{x_1} + k_1 \frac{x_3 - x_2 x_1}{x_1} = -(k - k_1) \frac{x_3}{x_1} - k_1 x_2,$$

όπου  $k > k_1$ ,  $x_1 \neq 0$ . Τέλος, εφόσον για αρχικές συνθήκες όπου  $x_1 = 0$  έχουμε ένα ιδιόμορφο πεδίο  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη στρατηγική:

$$u_1 = \begin{cases} -k_1 x_1, & \text{όταν } x_1 \neq 0 \\ -k_3 x_3, & \text{όταν } x_1 = 0 \end{cases} \quad (1.19\alpha')$$

$$u_2 = \begin{cases} -k \frac{x_3}{x_1} - \frac{x_3 - x_2 x_1}{x_1^2} u_1, & \text{όταν } x_1 \neq 0 \\ -k_2 x_2, & \text{όταν } x_1 = 0 \end{cases} \quad (1.19\beta')$$

όπου  $k_2, k_3 > 0$ .

---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

# Πρακτική Σταθεροποίηση ενός Μονόκυκλου υπό Ρεύμα μέσω Διακοπτόμενου Ελέγχου

## Περίληψη

Το παρόν κεφάλαιο παρουσιάζει μία λύση για το πρόβλημα του ελέγχου ενός ρομπότ με κινηματική μονόκυκλου υπό την επίδραση ενός non-vanishing drift vector field. Το κίνητρο για τη θεωρήση αυτού του προβλήματος έγκειται στη δυναμική τοποθέτηση υπο-επενεργούμενων θαλάσσιων οχημάτων υπό την επίδραση αργά μεταβαλλόμενων θαλάσσιων ρευμάτων. Η λύση βασίζεται σε μεθόδους διακοπτόμενου και υβριδικού ελέγχου και περιλαμβάνει μια στρατηγική υστέρησης, η οποία αποδίδει πρακτική σταθεροποίηση στο σύστημα μέσω τριών διαφορετικών νόμων ελέγχου. Επιπλέον, το κεφάλαιο εξετάζει την ευρωστία του συστήματος κλειστού βρόχου έναντι αγνώστων, φραγμένων διαταραχών.

## 2.1 Διατύπωση Προβλήματος

Έστω ένα θαλάσσιο όχημα με δύο προωθητήρες για την κίνηση στο οριζόντιο επίπεδο και δίχως εγκάρσιο προωθητήρα για την κίνηση κατά τον εγκάρσιο άξονα. Αρχικά, θεωρούμε ότι το όχημα μοντελοποιείται ως μονόκυκλος. Έστω ακόμα ότι κινείται υπό την επίδραση ενός αστρόβιλου ρεύματος  $\mathbf{v}$  με συνιστώσες  $v_x, v_y$  ως προς ένα αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων  $\mathcal{G}$  [Fos02]. Η κίνηση στο οριζόντιο επίπεδο περιγράφεται ως:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} + \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{u} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

όπου  $\mathbf{q} = [x \ y \ \theta]^\top \in \mathbb{R}^n$  το διάνυσμα παράστασης,  $x, y$  οι συντεταγμένες θέσης και  $\theta$  ο προσανατολισμός του οχήματος ως προς το  $\mathcal{G}$ ,  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2]^\top$  το διάνυσμα των εισόδων ελέγχου,  $u_1, u_2$  η γραμμική και γωνιακή ταχύτητα ως προς το σωματόδετο σύστημα  $\mathcal{B}$  αντίστοιχα, και  $\mathbf{v} = [v_x \ v_y \ 0]^\top$  είναι το διανυσματικό πεδίο του ρεύματος (ή της διατάραξης).

Το σύστημα (2.1) αποτελεί μία διατάραξη (perturbation [Kha02]) του μονόκυκλου (1.8), όπου  $\mathbf{v}$  είναι non-vanishing at the origin  $\mathbf{q}_G = \mathbf{0}$ , εφόσον  $\mathbf{v}(t, \mathbf{q}_G) \neq 0 \ \forall t \in [0, \infty)$ .

Ο  $\kappa = 1$  Pfaffian περιορισμός του συστήματος γράφεται:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}^\top(\mathbf{q})} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = -v_x \sin \theta + v_y \cos \theta \Rightarrow \mathbf{a}^\top(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = b(\mathbf{q}), \quad (2.2)$$

και είναι μη-καταστατικός, εφόσον  $b(\mathbf{q}) \neq 0$ . Εύκολα διαπιστώνεται μέσω του θεωρήματος Frobenius [BL05] ότι ο περιορισμός είναι μη-ολοκληρώσιμος.

Η εξίσωση (2.2) συνεπάγεται ότι ένα σημείο  $\mathbf{q}_e = [x_e \ y_e \ \theta_e]^\top$  είναι σημείο ισορροπίας του (2.1),  $\dot{\mathbf{q}}_e = \mathbf{0}$ , αν και μόνο αν

$$b(\mathbf{q}_e) = 0 \Rightarrow -v_x \sin \theta_e + v_y \cos \theta_e = 0.$$

Συνεπώς, η αρχή  $\mathbf{q}_G = [0 \ 0 \ 0]^\top$  είναι σημείο ισορροπίας (2.1) αν και μόνο αν  $v_y = 0$ . Με άλλα λόγια, αν  $v_y \neq 0$  τότε η αρχή  $\mathbf{q}_G$  δεν είναι σημείο ισορροπίας του (2.1), και συνεπώς οι τροχιές του συστήματος μπορούν μόνο να είναι ομοιόμορφα ultimately bounded [Kha02] σε μια περιοχή της αρχής.

Ωστόσο, ο επιθυμητός προσανατολισμός δεν είναι πάντοτε αποδεκτό να καθορίζεται από τις εξωτερικές διαταραχές, όπως π.χ. σε εφαρμογές επιθεώρησης στόχων. Έτσι, εφόσον η διατάραξη στο σύστημα είναι non-vanishing στο σημείο  $\mathbf{q}_G$ , κανείς πρέπει να επιδιώξει την πρακτική, και όχι ασυμπτωτική, σταθεροποίηση του συστήματος. Συνεπώς, το πρόβλημα ελέγχου διατυπώνεται ως εξής:

**Διατύπωση Προβλήματος:** Δοθέντος του μη-ολονομικού συστήματος (2.1), να σχεδιαστεί ένα σήμα διακοπτόμενου ελέγχου  $\sigma(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{I} = \{1, 2, \dots, \chi\}$  και  $\chi$  νόμοι ελέγχου  $\mathbf{u} = \boldsymbol{\psi}_\sigma(t, \mathbf{q})$ , ώστε το σύστημα ελέγχου κλειστού βρόχου να είναι  $\varepsilon$ -πρακτικά ασυμπτωτικά ευσταθές γύρω από την αρχή, υπό την έννοια ότι δοθέντος  $\varepsilon > 0$  και για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη  $\mathbf{q}_0$ , η λύση  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(t, \mathbf{q}_0, \mathbf{u})$  να υπάρχει  $\forall t \geq 0$ , και επιπλέον  $\mathbf{q}(t) \in \mathcal{B}(\mathbf{0}, \varepsilon)$ ,  $\forall t \geq T$ , όπου  $T = T(\mathbf{q}_0) > 0$ .

## 2.2 Στρατηγική Διακοπτόμενου Ελέγχου

Η σχεδίαση ελέγχου βασίζεται στην έννοια των διπολικών διανυσματικών πεδίων (1.6). Το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}_n = F_{nx}\hat{\mathbf{x}} + F_{ny}\hat{\mathbf{y}}$  για το μονόκυκλο απεικονίζεται στο Σχήμα 2.1(α'), και η αναλυτική του έκφραση δίνεται ως:

$$F_{nx} = \lambda p_1 x^2 - p_1 + p_1 e^{-(x^2+y^2)}, \quad F_{ny} = \lambda p_1 xy. \quad (2.3)$$

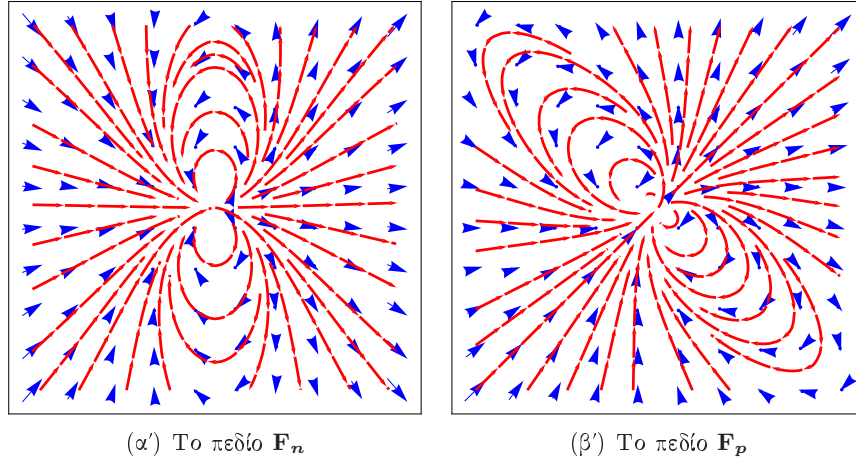
Αντίστοιχα, ορίζεται ένα διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}_p$  για το σύστημα (2.1), έτσι ώστε οι γραμμές ροής να συγκλίνουν στο σημείο ισορροπίας  $\mathbf{q}_e$ . Το πεδίο  $\mathbf{F}_p$  απεικονίζεται στο Σχήμα 2.1(β') και η αναλυτική έκφραση των συνιστωσών  $F_{px}$ ,  $F_{py}$  δίνεται από την οικογένεια (1.6) ως:

$$F_{px} = \lambda(v_x x + v_y y)x - v_x + v_x e^{-(x^2+y^2)}, \quad (2.4\alpha')$$

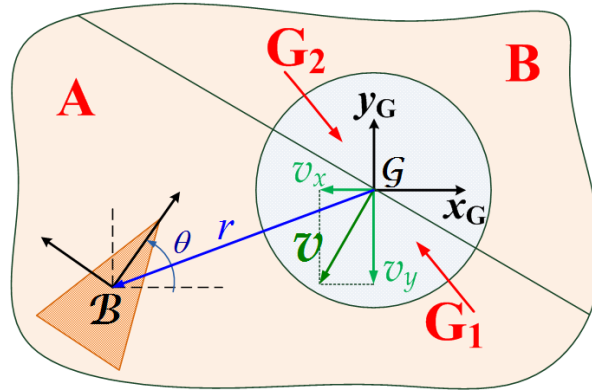
$$F_{py} = \lambda(v_x x + v_y y)y - v_y + v_y e^{-(x^2+y^2)}. \quad (2.4\beta')$$

Δοθέντος του πεδίου  $\mathbf{F}_p$  (2.4), σχεδιάζουμε ένα νόμο ελέγχου  $\mathbf{u} = \boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{q})$  ώστε το σύστημα (2.1) να ακολουθεί στις γραμμές ροής. Ονομάζουμε το σύστημα κλειστού βρόχου (2.1) υπό το νόμο ελέγχου  $\boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{q})$  ως το υποσύστημα  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}_1(\mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}_1)$ .

Έστω  $\mathbf{q} = [\mathbf{r}^\top \ \theta]^\top$ . Με βάση την εργασία [AHP07b], λέμε ότι το υποσύστημα  $\mathbf{f}_1(\mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}_1)$  είναι ευσταθές ως προς  $\mathbf{r}$  και ασταθές ως προς  $\theta$ , υπό την έννοια ότι το  $\theta$  δεν συγκλίνει στην επιθυμητή τιμή  $\theta_d = 0$ . Μάλιστα, προκύπτει ότι η ρύθμιση του  $\theta \rightarrow 0$  μέσω ενός νόμου ελέγχου



Σχήμα 2.1: Τα πεδία  $\mathbf{F}_n(x, y)$  και  $\mathbf{F}_p(x, y)$  για  $\lambda = 3$ ,  $\mathbf{p}_n = [p_1 \ 0]^\top$ ,  $\mathbf{p}_p = [p_1 \ v_y]^\top$ ,  $p_1 = v_x = 1$  m/sec,  $v_y = 1$  m/sec.



Σχήμα 2.2: Περιοχές λειτουργίας ως προς το σύστημα συντεταγμένων  $\mathcal{G}$ .

$\mathbf{u} = \psi_2(\mathbf{q})$  αποδίδει ένα υποσύστημα  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}_2(\mathbf{q}, \psi_2)$  ευσταθούς  $\theta$ , αλλά ασταθούς  $\mathbf{r}$ . Με άλλα λόγια, απαιτείται ένας συμβιβασμός μεταξύ της ρύθμισης της θέσης  $\mathbf{r}$  σε μια επιθυμητή τιμή  $\mathbf{r}_d$  και στη ρύθμιση του προσανατολισμού  $\theta$  σε μια επιθυμητή τιμή  $\theta_d$ . Υπό αυτήν την έννοια, αναζητούμε μια στρατηγική διακοπόμενου ελέγχου μεταξύ των υποσυστημάτων  $\mathbf{f}_1(\mathbf{q}, \psi_1)$ ,  $\mathbf{f}_2(\mathbf{q}, \psi_2)$ , ώστε εναλλάξ να ρυθμίζεται είτε η θέση  $\mathbf{r}$ , είτε ο προσανατολισμός  $\theta$  στις επιθυμητές τους τιμές, ώστε τελικά να αποδοθεί ένα  $\varepsilon$ -πρακτικά ευσταθές σύστημα.

Για τη σχεδίαση μιας στρατηγικής διακοπόμενου ελέγχου βάσει των μεταβλητών κατάστασης, και με την υπόθεση ότι η διαταραχή  $\mathbf{v} = [v_x \ v_y]^\top$  είναι γνωστή<sup>1</sup>, διαιρούμε το χώρο παράστασης  $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^2 \times [0, 2\pi)$  στις περιοχές λειτουργίας  $K$  ανδ  $G$ , ώστε  $K = \{[\mathbf{r}^\top \ \theta]^\top \in \mathcal{C} \mid \|\mathbf{r}\| > r_0\}$  και  $G = \mathcal{C} \setminus K$ , βλ. Σχήμα 2.2. Η περιοχή  $K$  διαιρείται σε  $A = \{\mathbf{q} \in K \mid \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle \geq 0\}$  και  $B = \{\mathbf{q} \in K \mid \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle < 0\}$ , όπου  $K = (A \cup B)$ .

Η περιοχή  $G$  διαιρείται σε  $G_1$  και  $G_2$ , όπου  $G_1 = \{\mathbf{q} \in G \mid \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle \geq 0\}$ ,  $G_2 = \{\mathbf{q} \in G \mid \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle < 0\}$

<sup>1</sup>Η υπόθεση αυτή εξαλείφεται στη συνέχεια.

και  $G = (G_1 \cup G_2)$ . Η διαίρεση της περιοχής  $G$  βασίζεται στην ακόλουθη σκέψη: Όταν  $\mathbf{q} \in G_1$ , η διαταραχή  $\mathbf{v}$  εξαναγκάζει τις τροχιές  $\mathbf{r}(t)$  του συστήματος (2.1) μακριά από την επιθυμητή τιμή  $(0, 0)$ , ενώ όταν  $\mathbf{q} \in G_2$ , η διαταραχή εξαναγκάζει τις τροχιές  $\mathbf{r}(t)$  προς την επιθυμητή τιμή  $(0, 0)$ .

Η βασική ιδέα για τη σχεδίαση ελέγχου είναι η εξής: Όταν  $\mathbf{q} \in K$ , τότε ένας ελεγκτής βασισμένος στο διπολικό πεδίο (2.4) οδηγεί τις τροχιές του συστήματος μέσα στο σύνολο  $G$ . Όταν  $\mathbf{q} \in G$ , ο έλεγχος αλλάζει σε έναν ελεγκτή που ρυθμίζει τον προσανατολισμό  $\theta \rightarrow 0$ . Ωστόσο, εφόσον η ρύθμιση του  $\theta$  μπορεί να αποφέρει αστάθεια ως προς τη θέση  $\mathbf{r}$ , σχεδιάζουμε τον έλεγχο έτσι ώστε το  $\theta$  να ελέγχεται όταν η διαταραχή  $\mathbf{v}$  εξαναγκάζει τη θέση  $\mathbf{r}$  του οχήματος προς την αρχή, δηλαδή όταν  $\mathbf{q} \in G_2$ . Έτσι, αν οι τροχιές  $\mathbf{q}(t)$  συγκλίνουν μέσα στο  $G_1$ , αφότου εγκαταλείψουν το σύνολο  $K$ , τότε απαιτείται ένας ακόμα νόμος ελέγχου, ώστε να οδηγήσει τις τροχιές  $\mathbf{q}(t)$  μέσα στο  $G_2$ . Τελικά, με αυτή τη θεώρηση έχουμε εναλλαγή  $\chi = 3$  ελεγκτών  $\psi_\sigma(\mathbf{q})$ ,  $\sigma \in \{1, 2, 3\}$ , η οποία περιγράφεται ως:

1. ο νόμος ελέγχου  $\psi_1(\mathbf{q})$  ωθεί το σύστημα στο σύνολο  $G$ , αποδίδοντας ευσταθή θέση  $\mathbf{r}$  και ασταθή προσανατολισμό, ο οποίος συγκλίνει στον προσανατολισμό του πεδίου  $\mathbf{F}_p$ , δηλαδή  $\theta \rightarrow \phi$ ,
2. ο νόμος ελέγχου  $\psi_2(\mathbf{q})$  ωθεί το σύστημα στο σύνολο  $G_2$ , στην περίπτωση που η θέση  $\mathbf{r}$  βρίσκεται στην περιοχή  $G_1$ , αποδίδοντας ασταθή θέση  $\mathbf{r}$  και ασταθή προσανατολισμό  $\theta \rightarrow \theta_p$ , όπου  $\theta_p = \arctan(\frac{v_y}{v_x})$ ,
3. ο νόμος ελέγχου  $\psi_3(\mathbf{q})$  ωθεί  $\theta \rightarrow 0$ , στην περίπτωση που η θέση  $\mathbf{r}$  βρίσκεται στην περιοχή  $G_2$ , αποδίδοντας ασταθή θέση  $\mathbf{r}$  και ευσταθή προσανατολισμό  $\theta$ .

Η παραπάνω ιδέα πραγματώνεται με την ακόλουθη στρατηγική διακοπτόμενου ελέγχου με υστέρηση.

- Αν  $\mathbf{q}(0) \in K$ , τότε  $\sigma(\mathbf{q}(0)) = 1$ , αλλιώς  $\sigma(\mathbf{q}(0)) = 3$ .  
Για κάθε  $t > 0$ ,
- Αν  $\mathbf{q}(t) \in K$  και  $\sigma(\mathbf{q}(t^-)) = 1$ , τότε  $\sigma(\mathbf{q}(t)) = 1$ .
- Αν  $\mathbf{q}(t) \in G_1$  και  $\sigma(\mathbf{q}(t^-)) = 1$ , τότε  $\sigma(\mathbf{q}(t)) = 2$ .
- Αν  $\mathbf{q}(t) \in G_2$  και  $\sigma(\mathbf{q}(t^-)) = 1$ , τότε  $\sigma(\mathbf{q}(t)) = 3$ .
- Αν  $\mathbf{q}(t) \in G$  και  $\sigma(\mathbf{q}(t^-)) = 2$ , τότε  $\sigma(\mathbf{q}(t)) = 2$ .
- Αν  $\mathbf{q}(t) \in B$  και  $\sigma(\mathbf{q}(t^-)) = 2$ , τότε  $\sigma(\mathbf{q}(t)) = 3$ .
- Αν  $\mathbf{q}(t) \in B$  και  $\sigma(\mathbf{q}(t^-)) = 3$ , τότε  $\sigma(\mathbf{q}(t)) = 3$ .
- Αν  $\mathbf{q}(t) \in G$  και  $\sigma(\mathbf{q}(t^-)) = 3$ , τότε  $\sigma(\mathbf{q}(t)) = 3$ .
- Αν  $\mathbf{q}(t) \in A$  και  $\sigma(\mathbf{q}(t^-)) = 3$ , τότε  $\sigma(\mathbf{q}(t)) = 1$ .

Η στρατηγική αυτή αποδίδει ένα υβριδικό σύστημα κλειστού βρόχου, όπου το  $\sigma$  είναι η διακριτή μεταβλητή κατάστασης, εφόσον η τιμή της μεταβλητής  $\sigma$  δεν καθορίζεται μόνο από την τρέχουσα τιμή της κατάστασης  $\mathbf{q}(t)$ , αλλά εξαρτάται και από την προηγούμενη τιμή της.

## 2.3 Σχεδίαση Ελέγχου

Δεδομένης της στρατηγικής διακοπτόμενου ελέγχου, στη συνέχεια σχεδιάζουμε τους επιμέρους ελεγκτές  $\psi_\sigma(\cdot)$ ,  $\sigma \in \{1, 2, 3\}$ .

### 2.3.1 Σχεδίαση του νόμου ελέγχου $\mathbf{u} = \psi_1(\mathbf{q})$

Ο νόμος ελέγχου  $\psi_1(\mathbf{q})$  εξαναγκάζει το σύστημα να ευθυγραμμιστεί με το διπολικό πεδίο (2.4) ενώ συγκλίνει προς την επιθυμητή θέση  $(0, 0)$ .

**Theorem 1** Η θέση  $\mathbf{r} = [x \ y]^\top$  του συστήματος (2.1) συγκλίνει σε μία σφαίρα  $\mathcal{B}(\mathbf{0}, r_0)$  γύρω από την αρχή για οποιαδήποτε  $\mathbf{r}(0) \notin \mathcal{B}(\mathbf{0}, r_0)$ , υπό την επίδραση του νόμου ελέγχου  $\psi_1 = [u_1 \ u_2]^\top$ ,

$$u_1 = -k_1 \operatorname{sgn} \left( \mathbf{r}^\top \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \right) \|\mathbf{r}\| - \operatorname{sgn}(\mathbf{r}^\top \mathbf{v}) \operatorname{sgn}(\mathbf{p}^\top \mathbf{r}) \|\mathbf{v}\|, \quad (2.5\alpha')$$

$$u_2 = -k_2(\theta - \varphi) + \dot{\varphi}, \quad (2.5\beta')$$

όπου  $k_1, k_2 > 0$ ,  $\varphi = \operatorname{atan2}(F_{py}, F_{px})$  ο προσανατολισμός του πεδίου (2.4) στο σημείο  $(x, y)$ , η συνάρτηση  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  ορίζεται ως

$$\operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} 1, & \text{αν } a \geq 0, \\ -1, & \text{αν } a < 0, \end{cases}$$

και η ακτίνα  $r_0$  ορίζεται ώστε να ικανοποιεί τη συνθήκη ( $;;$ ).

Η απόδειξη του θεωρήματος περιλαμβάνεται στην αγγλική έκδοση της παρούσας διατριβής.

### 2.3.2 Σχεδίαση των νόμων ελέγχου $\mathbf{u} = \psi_2(\mathbf{q})$ , $\mathbf{u} = \psi_3(\mathbf{q})$

Έστω  $\partial X_Y$  το όριο ενός συνόλου  $X$  ως προς ένα γειτονικό σύνολο  $Y$ . Εάν οι τροχιές  $\mathbf{q}(t)$  βρεθούν στο  $G = \{\mathbf{q} = [\mathbf{r}^\top \ \theta]^\top \in \mathcal{B}(\mathbf{0}, r_0) \times [0, 2\pi)\}$ , θεωρούμε τις εξής περιπτώσεις:

1. Έστω ότι  $\mathbf{q} \in G_1 = \{G \mid \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle \geq 0\}$ , δηλαδή ότι το  $\mathbf{q}(t)$  βρίσκεται στο  $G_1$ , όπου η διαταραχή  $\mathbf{v}$  οδηγεί το σύστημα μακριά από την αρχή.

**Theorem 2** Οι τροχιές  $\mathbf{q}(t)$  του συστήματος εισέρχονται στην περιοχή  $G_2$ , όπου  $\langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle < 0$ , υπό την επίδραση του νόμου ελέγχου  $\psi_2 = [u_1 \ u_2]^\top$ ,

$$u_1 = -k_3 \operatorname{sgn}(v_x) \|\mathbf{v}\|, \quad u_2 = -k_4(\theta - \theta_p), \quad (2.6)$$

όπου  $k_3 > 1$ ,  $k_4 > 0$ .

Η απόδειξη δίνεται στην αγγλική έκδοση της διατριβής.

2. Έστω ότι  $\mathbf{q} \in G_2 = \{G \mid \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle < 0\}$ , δηλαδή ότι το  $\mathbf{q}(t)$  βρίσκεται στο  $G_2$ , όπου η εξωτερική διαταραχή  $\mathbf{v}$  οδηγεί το σύστημα προς την αρχή. Τότε η τροχιά  $\mathbf{r}(t)$  εισέρχεται στην περιοχή  $G_1$  υπό την επίδραση του νόμου ελέγχου

$$\psi_3 = [0 \ u_{23}]^\top, \quad \text{ωηερε } u_{23} = -k_5\theta, \quad k_5 > 0. \quad (2.7)$$

Η απόδειξη δίνεται στην αγγλική έκδοση της διατριβής.

### 2.3.3 Ευστάθεια του διακοπτόμενου συστήματος $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}_\sigma(\mathbf{q}, \psi_\sigma)$

Η ευστάθεια του διακοπτόμενου συστήματος που προκύπτει με την παραπάνω στρατηγική ελέγχου βασίζεται στο Υεώρημα [ZH08, Thm 3.9]. Η αναλυτική αιτιολόγηση δίνεται στην αγγλική έκδοση της διατριβής.

Συνοπτικά, η στρατηγική ελέγχου εγγυάται ότι η τροχιά  $\mathbf{r}(t)$  του συστήματος (2.1) είναι  $\varepsilon$ -πρακτικά ασυμπτωτικά ευσταθής με  $\varepsilon = r_1$ , υπό την έννοια ότι η τροχιά  $\mathbf{r}(t)$  συγκλίνει στη σφαίρα  $\mathcal{B}(\mathbf{0}, r_1)$ , όπου  $r_1 = r_0 + \varepsilon$  και  $\varepsilon > 0$  αυθαίρετα μικρό, και παραμένει στην περιοχή για  $t > T$ , ενώ παράλληλα ο προσανατολισμός  $\theta$  ρυθμίζεται στο μηδέν,  $\theta \rightarrow 0$ , κατά τα χρονικά διαστήματα που ο ελεγκτής  $\mathbf{f}_3(\mathbf{q}, \psi_3)$  είναι ενεργός.

### 2.3.4 Ευρωστία του συστήματος κλειστού βρόχου

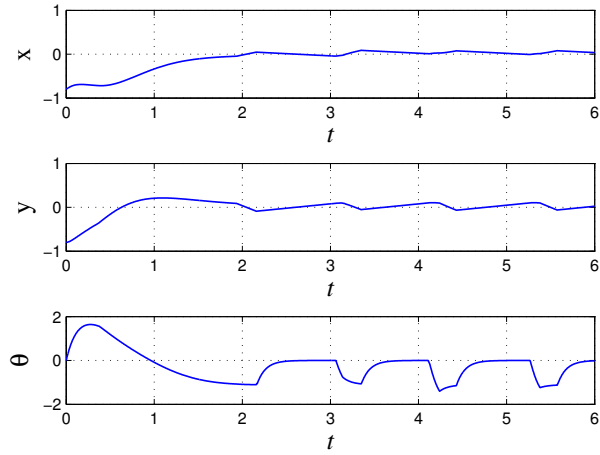
Η μελέτη της ευρωστίας του διακοπτόμενου συστήματος είναι ιδιαίτερος σημαντική για την κλάση των προβλημάτων όπου η εκτίμηση, ή η μέτρηση, των εξωτερικών διαταραχών είναι δύσκολη, είτε ανέφικτη. Υποθέτουμε ότι μόνο ένα φράγμα  $\|\mathbf{v}\|_{\max}$  της διαταραχής είναι γνωστό, δηλαδή ότι γνωρίζουμε το μέτρο της διαταραχής  $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \leq \|\mathbf{v}\|_{\max}$ , ενώ η διεύθυνση του ρεύματος  $\theta_c = \text{atan2}(v_y, v_x)$  είναι άγνωστη. Υεωρούμε επίσης ότι έχουμε μόνο το ονομαστικό διπολικό πεδίο  $\mathbf{F}_n = \mathbf{F}$ , που ορίζεται από τη διπολική ροπή  $\mathbf{p}_n = \mathbf{p} = [p \ 0]^\top$ , όπου  $p > 0$ , εφόσον η διεύθυνση της διαταραχής είναι άγνωστη. Για την ανάλυση της εξέλιξης των τροχιών του συστήματος σε αυτήν την περίπτωση, ο αναγνώστης παραπέμπεται στην αγγλική έκδοση της διατριβής.

## 2.4 Αποτελέσματα Προσομοιώσεων του Συστήματος

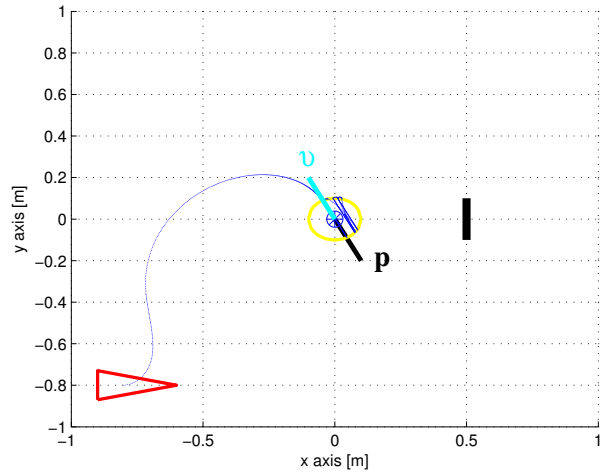
Για την αξιολόγηση της στρατηγικής ελέγχου, παρατίθενται τα ακόλουθα αποτελέσματα από την προσομοίωση του συστήματος.

Η αναλυτική περιγραφή των περιπτώσεων που περιγράφονται στα γραφήματα δίνεται στην αγγλική έκδοση της διατριβής. Το τρίγωνο στο Σχήμα 2.3(β'), 2.4(β') αναπαριστά ένα υποβρύχιο όχημα που κινείται στο οριζόντιο επίπεδο υπό την επίδραση ενός ρεύματος  $\mathbf{v}$ .

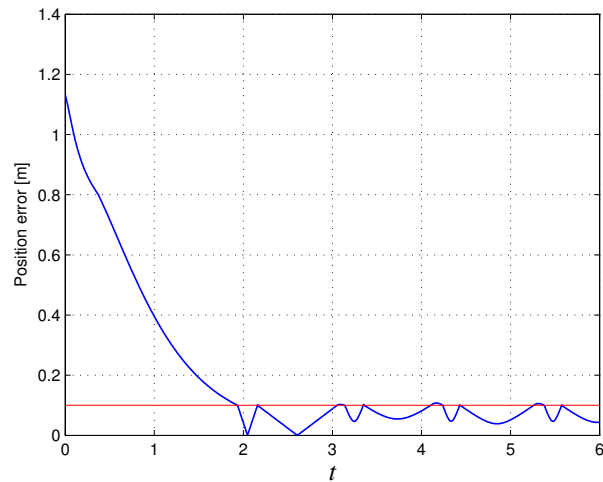




(α') Οι τροχιές του συστήματος  $x(t), y(t), \theta(t)$ .

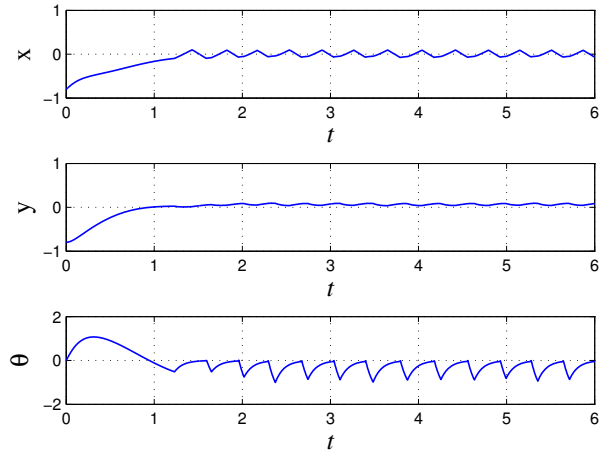


(β') Η πορεία  $x(t), y(t)$  που ακολουθεί το όχημα.

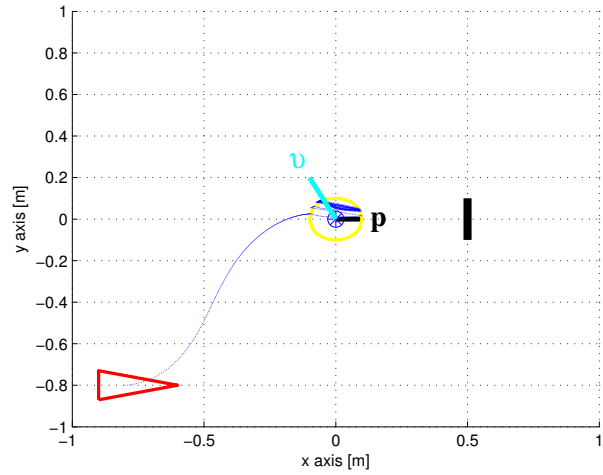


(γ') Το σφάλμα θέσης  $e(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$ .

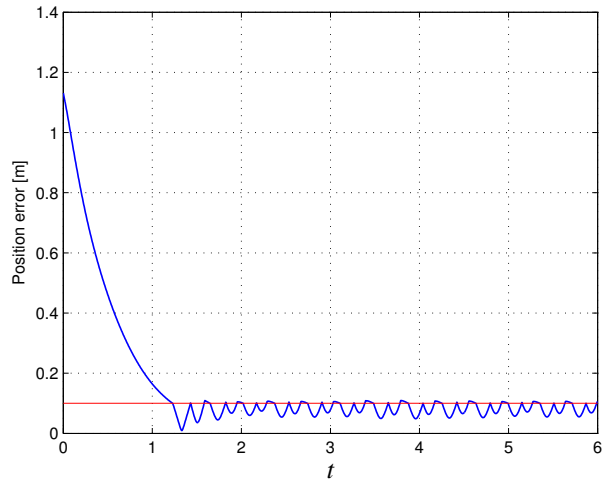
Σχήμα 2.3: Απόκριση του συστήματος για γνωστό  $v = [-0.1 \ 0.2]^T$ .



(α') Οι τροχιές του συστήματος  $x(t), y(t), \theta(t)$ .



(β') Η πορεία  $x(t), y(t)$  που ακολουθεί το όχημα.



(γ') Το σφάλμα θέσης  $e(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$ .

Σχήμα 2.4: Απόκριση του συστήματος για άγνωστο  $v = [-0.1 \ 0.2]^T$

---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

# Σχεδίαση Μη-Ολονομικού Ελέγχου με χρήση Διπολικών Διανυσματικών Πεδίων Αναφοράς και Ρύθμισης Εξόδου

## Περίληψη

Το παρόν κεφάλαιο παρουσιάζει μια ομοιόμορφη λογική και στρατηγική ελέγχου για μη-ολονομικά συστήματα, η οποία πραγματώνεται μέσω κατευθυντήριων γραμμών για τη σχεδίαση χρονικά ανεξάρτητων, ασυνεχών ελεγκτών. Η μέθοδος εφαρμόζεται σε συστήματα με κινηματικούς ή δυναμικούς περιορισμούς σε μορφή Pfaffian.

Η βασική ιδέα της μεθόδου έχει ως εξής: δοθέντος ενός  $n$ -διαστατου κινηματικού μη-ολονομικού συστήματος, ορίζεται ένα  $N$ -διαστατο ( $N \leq n$ ) διανυσματικό πεδίο αναφοράς  $\mathbf{F}(\cdot)$  σε έναν υπόχωρο  $\mathcal{L}$  του χώρου παράστασης  $\mathcal{C}$ . Το διανυσματικό πεδίο ανήκει στην οικογένεια των διανυσματικών πεδίων

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \lambda \left( \mathbf{p}^\top \mathbf{x} \right) \mathbf{x} - \mathbf{p} \left( \mathbf{x}^\top \mathbf{x} \right),$$

όπου  $N \leq n$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  είναι ένα διάνυσμα που περιλαμβάνει κάποιες από τις μεταβλητές κατάστασης  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  (βλέπε παρακάτω),  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^N$  είναι το διάνυσμα της διπολικής ροπής, και  $\lambda \geq 2$ , βλέπε Παράγραφο 3.2. Το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}(\cdot)$  είναι εξ' ορισμού μη ιδιόμορφο παντού στο χώρο  $\mathcal{L}$  εκτός από την αρχή  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  του τοπικού συστήματος συντεταγμένων στο χώρο  $\mathcal{L}$ : συνεπώς, η αρχή  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  το μοναδικό ιδιόμορφο (ή κρίσιμο) σημείο του διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{F}(\cdot)$ , και είναι εξ' ορισμού ένα κρίσιμο σημείο διπολικού τύπου. Η ιδιότητα αυτή συνεπάγεται ότι όλες οι γραμμές ροής του πεδίου  $\mathbf{F}(\cdot)$  ξεκινούν και καταλήγουν στο κρίσιμο σημείο, και υπό αυτήν την έννοια, αποτελούν πορείες προς το σημείο  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Ο υπόχωρος  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$  στον οποίο ορίζεται το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}(\cdot)$  καθορίζεται από τη μορφή του πίνακα  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ , ως εξής: οι μηδενικές στήλες του πίνακα  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  ορίζουν μία φύλλωση του χώρου κατάστασης  $\mathcal{C}$  στο χώρο των φύλλων (**leaf space**)  $\mathcal{L}$  και στο χώρο των ινών (**fiber space**)  $\mathcal{T}$ , και επιπλέον διαχωρίζουν τις μεταβλητές κατάστασης  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  στις **leafwise** συντεταγμένες  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-n_0}$ , και στις **transverse** συντεταγμένες  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{n_0}$ . Το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}(\cdot)$  ορίζεται στο χώρο των φύλλων  $\mathcal{L}$ , συναρτήσει των leafwise  $\mathbf{x}$ .

Δεδομένου του διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{F}(\cdot)$ , η ιδέα για τη σχεδίαση ελέγχου ανάγεται στο εξής: σε κάθε σημείο  $\mathbf{q} \in \mathcal{C}$ , το σύστημα ελέγχεται έτσι ώστε το διανυσματικό πεδίο του συστήματος  $\dot{\mathbf{q}} \in T_{\mathbf{q}}\mathcal{C}$  να ευθυγραμμιστεί με το πεδίο  $\mathbf{F}(\cdot)$ , δηλαδή ωθείται στον εφαπτόμενο χώρο της γραμμής ροής του πεδίου  $\mathbf{F}(\cdot)$  στο σημείο  $\mathbf{q} \in \mathcal{C}$ .

Για μη-ολονομικά συστήματα που υφίστανται έναν Pfaffian περιορισμό, η απόκλιση μεταξύ του διανυσματικού πεδίου  $\dot{\mathbf{q}}$  και του διανυσματικού πεδίου αναφοράς  $\mathbf{F}(\cdot)$  κωδικοποιείται μέσω της εξόδου  $h(\mathbf{q}) = \langle \mathbf{a}(\mathbf{q}), \mathbf{F}(\cdot) \rangle$ , όπου  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων. Συνεπώς, η ευθυγράμμιση του διανύσματος  $\dot{\mathbf{q}} \in T_{\mathbf{q}}\mathcal{C}$  με το διάνυσμα  $\mathbf{F}(\cdot)$  κωδικοποιείται μέσω της ρύθμισης

της εξόδου  $h \rightarrow 0$ . Η συνθήκη αυτή αποτελεί έναν οδηγό για τον ορισμό τουλάχιστον μίας εκ των εισόδων ελέγχου  $u_i$ , αρκεί το σύστημα να ένα σχετικό βαθμό ίσο με 1 ως προς την έξοδο  $h$ .

Ομοίως, για  $\kappa > 1$  περιορισμούς, η απόκλιση του συστημικού διανύσματος με το διάνυσμα αναφοράς  $\mathbf{F}(\cdot)$  κωδικοποιείται μέσω της (διανυσματικής) εξόδου  $\mathbf{h}(\mathbf{q}) = \mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{F}(\cdot)$ , ενώ η συνθήκη  $\mathbf{h}(\mathbf{q}) \rightarrow 0$  εφαρμόζεται απαιτώντας (δηλαδή ελέγχοντας το σύστημα) έτσι ώστε όλα τα  $\kappa$  στοιξεία του διανύσματος  $\mathbf{h}(\mathbf{q})$  να μηδενίζονται.

Με άλλα λόγια, το διανυσματικό πεδίο  $F(\cdot)$  παρέχει μια διεύθυνση αναφοράς  $\dot{\mathbf{q}}_{ref}$  για το συστημικό διανυσματικό πεδίο, σε κάθε  $\mathbf{q} \in \mathcal{C}$ . Η συνθήκη αυτή, συνδυασμένα με τη φύλλωση του χώρου παράστασης στους χώρους  $\mathcal{L}$  και  $\mathcal{T}$  υποδεικνύει την επιλογή μιας συνάρτησης τύπου Lyapunov, η οποία χρησιμοποιείται περαιτέρω στη σχεδίαση του ελέγχου, ώστε να αποδοθεί η σύγκλιση των τροχιών του συστήματος  $\mathbf{q}(t)$  στην αρχή  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ .

Υπό αυτήν την έννοια, η προτεινόμενη μέθοδος αναδιατυπώνει το αρχικό πρόβλημα της σχεδίασης μη-ολονομικού ελέγχου σε πρόβλημα ρύθμισης εξόδου, το οποίο μπορεί να αντιμετωπιστεί πιο εύκολα με εργαλεία ανάλυσης και σχεδιασμού μη γραμμικού ελέγχου. Επιπλέον, το πρίσμα της νέας μεθόδου εκθέτει τη δυνατότητα της θεώρησης μιας χρονικής αποσύνθεσης (decomposition) του συστήματος, η οποία εφαρμόζεται σε διάφορες περιπτώσεις με χρήση τεχνικών ανάλυσης που σχετίζονται με αργά μεταβαλλόμενα συστήματα και ιδιόμορφων διαταράξεων (singular perturbations). Η μέθοδος εφαρμόζεται επίσης στη σχεδίαση ελέγχου για υπο-επενεργούμενα μηχανικά συστήματα που υπόκεινται σε δυναμικούς περιορισμούς.

## Οργάνωση και Σημειογραφία

Το κεφάλαιο δομείται ως εξής: Η παράγραφος 3.1 παρουσιάζει μια σύντομη εισαγωγή στις ιδιότητες των διανυσματικών πεδίων διπολικού τύπου. Οι παράγραφοι 3.2 και 3.3 παρουσιάζουν συνοπτικά τη σχεδίαση ελέγχου για μη-ολονομικά συστήματα με  $\kappa$  Pfaffian περιορισμούς, τα οποία ανήκουν στην κλάση των  $n$ -διαστατων συστημάτων

$$\dot{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{q})u_i, \quad (3.1)$$

όπου  $\mathbf{q} \in \mathcal{C}$  το διάνυσμα παράστασης, ή διάνυσμα γενικευμένων συντεταγμένων,  $\mathcal{C}$  ο χώρος παράστασης,  $u_i$  οι είδοσοι ελέγχου και  $\mathbf{g}_i(\mathbf{q})$  τα διανυσματικά πεδία ελέγχου,  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Οι μη-ολονομικοί περιορισμοί είναι της μορφής

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (3.2)$$

όπου  $\mathbf{A}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{\kappa \times n}$ , και  $\dot{\mathbf{q}} \in T_{\mathbf{q}}\mathcal{C}$  το διάνυσμα των γενικευμένων ταχυτήτων.

Τέλος, στην παράγραφο 3.4 η μέθοδος επεκτείνεται στη σχεδίαση υπο-επενεργούμενων οχημάτων της μορφής:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{x})u_i, \quad (3.3)$$

όπου  $\mathbf{x} = [\mathbf{q}^\top \ \mathbf{v}^\top]^\top \in \mathbb{R}^{2n}$  το διάνυσμα κατάσταση που περιλαμβάνει το διάνυσμα γενικευμένων συντεταγμένων  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  και το διάνυσμα ταχυτήτων  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  το drift vector field και  $u_i$ ,

$\mathbf{g}_i(\cdot)$  η  $i$ -στη είσοδος ελέγχου και διανυσματικό πεδίο ελέγχου, αντίστοιχα. Τα συστήματα αυτά υπόκεινται σε μη-ολονομικούς περιορισμούς δεύτερης τάξεως, που αναφέρονται σε μη ολοκληρώσιμους περιορισμούς επιτάχυνσης της μορφής  $\mathbf{a}(\mathbf{v})\ddot{\mathbf{v}} = \mathbf{b}(\mathbf{v})$ . Τα συμπεράσματα δίνονται στην παράγραφο 3.5.

### Επισκόπηση της Μεθόδου

Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι ότι, δοθέντος ενός  $n$ -διαστατου, κινηματικού μη-ολονομικού συστήματος, ορίζεται ένα  $N$ -διαστατο διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F} : \mathcal{L} \rightarrow T\mathcal{L}$  σε έναν υπόχωρο  $\mathcal{L}$  του χώρου παράστασης  $\mathcal{C}$ . Το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}(\cdot)$  επιλέγεται από την οικογένεια των διανυσματικών πεδίων (3.6), τα οποία είναι μη-ιδιόμορφα παντού στο χώρο  $\mathcal{L}$  εκτός από το σημείο  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , το οποίο αποτελεί το μοναδικό κρίσιμο σημείο διπολικού τύπου.

Το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}(\cdot)$  δρα ως αναφορά για το σύστημα (3.1), δηλαδή σε κάθε σημείο  $\mathbf{q} \in \mathcal{C}$ , το σύστημα ελέγχεται ώστε το συστημικό διάνυσμα  $\dot{\mathbf{q}} \in T_{\mathbf{q}}\mathcal{C}$  να γίνεται παράλληλο με το διάνυσμα  $\mathbf{F}(\cdot)$ . Συνεπώς, οι εξισώσεις των περιορισμών (3.2) για το σύστημα κλειστού βρόχου γράφονται στη μορφή  $\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ · σε αυτήν την περίπτωση, λέμε ότι το διάνυσμα  $\mathbf{F}(\mathbf{q})$  ικανοποιεί, ή ότι είναι συμβατό με, τους περιορισμούς στο σημείο  $\mathbf{q} \in \mathcal{C}$ .

**Ορισμός 1** Ένα διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F} : \mathcal{C} \rightarrow T\mathcal{C}$  ονομάζεται *συμβατό* με τους μη-ολονομικούς περιορισμούς (3.2) σε ένα σημείο  $\mathbf{q} \in \mathcal{C}$ , (ή ισοδύναμα ικανοποιεί τη συνθήκη *συμβατότητας* στο σημείο  $\mathbf{q}$ ) εάν

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}. \quad (3.4)$$

Μάλιστα, η αναλυτική έκφραση της συνθήκης (3.4) καθορίζει τον υπόχωρο  $\mathcal{L}$  του χώρου παράστασης  $\mathcal{C}$  στον οποίο ορίζεται το πεδίο  $\mathbf{F}(\cdot)$  και την αναλυτική μορφή του πεδίου  $\mathbf{F}(\cdot)$ , ως εξής: Έστω ένα πεδίο  $\mathbf{F} = \sum_{j=1}^n F_j \frac{\partial}{\partial q_j}$ , όπου  $\left\{ \frac{\partial}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial q_n} \right\}$  είναι τα μοναδιαία διανύσματα βάσης του εφαπτόμενου χώρου  $T_{\mathbf{q}}\mathcal{C}$ , και το προκύπτον γραμμικό (ως προς τις συνιστώσες  $F_j$ ) σύστημα:

$$\begin{aligned} a_{11}F_1 + a_{12}F_2 + \dots + a_{1n}F_n &= 0, \\ a_{21}F_1 + a_{22}F_2 + \dots + a_{2n}F_n &= 0, \\ &\vdots \\ a_{\kappa 1}F_1 + a_{\kappa 2}F_2 + \dots + a_{\kappa n}F_n &= 0; \end{aligned}$$

τότε, αν, για παράδειγμα, ο πίνακας  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  περιέχει μία μηδενική στήλη, δηλαδή αν  $[a_{1j}(\mathbf{q}) \ \dots \ a_{\kappa j}(\mathbf{q})]^T = \mathbf{0}$  για κάποιο  $j \in \{1, \dots, n\}$ , τότε η αντίστοιχη συνιστώσα  $F_j$  του διανυσματικού πεδίου δεν επηρεάζει το αν η συνθήκη (3.4) ικανοποιείται, εφόσον η αντίστοιχη γραμμική απεικόνιση στέλνει πάντοτε το  $F_j$  στο μηδέν. Συνεπώς, μπορεί να οριστεί ένα διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}$  τέτοιο ώστε η συνιστώσα  $F_j = 0$ .

Κατά αυτήν την έννοια, εάν ο πίνακας  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  έχει  $0 \leq n_0 < n$  μηδενικές στήλες, η διάσταση του πεδίου  $\mathbf{F}$  ορίζεται ίση με  $N = n - n_0$ . Ονομάζουμε τις  $n - n_0$  συντεταγμένες  $q_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , των οποίων οι γενικευμένες ταχύτητες  $\dot{q}_i$  συνδέονται με τις μη-μηδενικές στήλες του  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  ως **λεαφωισε** μεταβλητές  $\mathbf{x}$ , και τις υπόλοιπες  $n_0$  συντεταγμένες, των οποίων οι γενικευμένες ταχύτητες συνδέονται με τις μηδενικές στήλες του  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  ως **τρανσερσε** μεταβλητές  $\mathbf{t}$ . Η διάκριση αυτή ορίζει μια φύλλωση του χώρου παράστασης  $\mathcal{C}$  ως  $\mathcal{C} = \mathcal{L} \times \mathcal{T}$ , όπου  $\mathcal{L}$  ο υπόχωρος των λεαφωισε μεταβλητών  $\mathbf{x}$ ,  $\mathcal{T}$  ο υπόχωρος των τρανσερσε μεταβλητών  $\mathbf{t}$ ,  $\dim \mathcal{L} = n - n_0$ ,  $\dim \mathcal{T} = n_0$ .

Το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}(\cdot)$  ορίζεται στο  $N$ -διμενσιοναλ χώρο  $\mathcal{L}$ , συναρτήσσει των λεαφωισε μεταβλητών  $\mathbf{x}$ , και είναι μη-ιδιόμορφο παντού στον  $\mathcal{L}$  εκτός του σημείου  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  ως προς το τοπικό σύστημα συντεταγμένων. Το ιδιόμορφο σημείο  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  είναι το μοναδικό κρίσιμο πεδίο του διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{F}(\cdot)$ , και είναι εξ' ορισμού δίπολο, που συνεπάγεται ότι όλες οι γραμμές ροής αρχίζουν από και καταλήγουν στο κρίσιμο σημείο. Άρα, οποιαδήποτε από τις γραμμές ροής του  $\mathbf{F}(\cdot)$  αποτελεί μία πορεία προς το σημείο  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Αν ο πίνακας  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  δεν έχει μηδενικές στήλες, τότε εξ' ορισμού έχουμε  $N = n$  και  $\mathbf{x} \triangleq \mathbf{q}$ , δηλαδή ο χώρος των φύλλων  $\mathcal{L}$  συμπίπτει με τον χώρο παράστασης  $\mathcal{C}$ . Σε αυτή την περίπτωση το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}(\cdot)$  ορίζεται σε ολόκληρο το χώρο παράστασης  $\mathcal{C}$  και μηδενίζεται μονάχα στην αρχή  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ , βλέπε την περίπτωση του νονηολονομικ δουβλε ιντεγρατορ (ΝΔΙ) στην παράγραφο 3.2.2.

Αλλιώς, αν ο πίνακας  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  έχει  $n_0$  μηδενικές στήλες, ορίζουμε  $N = n - n_0$ , το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}(\cdot)$  ορίζεται στο χώρο των φύλλων  $\mathcal{L} \subset \mathcal{C}$  συναρτήσσει των  $n - n_0$  λεαφωισε μεταβλητών  $\mathbf{x}$ , και είναι ιδιόμορφο σε ένα υποσύνολο  $\mathcal{A} = \{\mathbf{q} \in \mathcal{C} \mid \mathbf{x} = \mathbf{0}\}$  που περιέχει την αρχή  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ . Ωστόσο, η απλοποίηση αυτή μπορεί να απαιτήσει τη χρήση διακοπτόμενου ελέγχου στην περίπτωση που οι αρχικές συνθήκες του συστήματος βρεθούν σε αυτό το υποσύνολο, βλέπε την περίπτωση του μονόκυκλου στην παράγραφο 3.2.1.

Οι ασυνέχειες στην είσοδο ελέγχου αποδίδουν ένα διανυσματικό πεδίο για το σύστημα (3.1) το οποίο είναι συνεχές κατά διαστήματα, και συνεπώς οι λύσεις θεωρούνται κατά την έννοια του Filippov, δηλαδή  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathfrak{F}(\mathbf{q})$ , όπου:

$$\mathfrak{F}(\mathbf{q}) \triangleq \overline{\text{co}} \left\{ \lim_{i=1}^m \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_j) u_i : \mathbf{q}_j \rightarrow \mathbf{q}, \mathbf{q}_j \notin S_q \right\},$$

και  $S_q$  ένα σύνολο μηδενικού μέτρου.

Συνεπώς, η βασική ιδέα της μεθόδου είναι η οδήγηση του συστημικού διανυσματικού πεδίου στην εφαπτόμενη δέσμη των γραμμών ροής του  $\mathbf{F}(\cdot)$ , έως ότου οι τροχιές συγκλίνουν στο σημείο  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ . Η ιδέα αυτή υποδεικνύει την επιλογή συναρτήσεων τύπου Lyapunov που χρησιμοποιούνται με κλασσικές τεχνικές ανάλυσης και σχεδίασης ελέγχου για τη απόδειξη της σύγκλισης των τροχιών σε σημείο. Πιο συγκεκριμένα, η στρατηγική ελέγχου περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα:

1. Επιλογή ενός  $N$ -διαστατου διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{F}(\cdot) : \mathcal{L} \rightarrow T\mathcal{L}$ , οι γραμμές ροής του οποίου συγκλίνουν στο σημείο  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  του συστήματος συντεταγμένων στο χώρο  $\mathcal{L}$ .
2. Σχεδίαση ενός νόμου ελέγχου ώστε το συστημικό διανυσματικό πεδίο  $\dot{\mathbf{q}} \in T_q\mathcal{C}$  να ευθυγραμμίζεται με το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}(\cdot)$ , και να ακολουθεί τις γραμμές ροής του  $\mathbf{F}(\cdot)$ , εξασφαλίζοντας ότι το  $\dot{\mathbf{q}}$  δεν μηδενίζεται πουθενά, παρά μόνο στο σημείο  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ .

## Κατευθυντήριες Γραμμές για τη Σχεδίαση Μη-Ολονομικού Ελέγχου

Για κινηματικά μη ολονομικά συστήματα, η παραπάνω διαδικασία ελέγχου περιγράφεται πιο αναλυτικά ως εξής: Δοθέντος (3.1) και (3.2),

- Θεωρούμε τον πίνακα των περιορισμών  $\mathbf{A}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ , ο οποίος έχει  $0 \leq n_0 < n$  μηδενικές στήλες, όπου  $n$  το πλήθος των γενικευμένων ταχυτήτων  $\dot{\mathbf{q}}$ . Ονομάζουμε τις  $n - n_0$  μεταβλητές κατάστασης  $q_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , των οποίων οι γενικευμένες ταχύτητες  $\dot{q}_i$  συνδέονται

με τις μη-μηδενικές στήλες του  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  ως *leafwise* μεταβλητές  $\mathbf{x}$ , και τις υπόλοιπες  $n_0$  μεταβλητές κατάστασης, των οποίων οι γενικευμένες ταχύτητες συνδέονται με τις μηδενικές στήλες του πίνακα  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  ως *transverse* μεταβλητές  $\mathbf{t}$ .

- Θεωρούμε τη φύλλωση του χώρου παράστασης  $\mathcal{C}$  ως  $\mathcal{F} = \mathcal{L} \times \mathcal{T}$ , όπου  $\mathcal{L}$  ο υπόχωρος των leafwise μεταβλητών  $\mathbf{x}$ ,  $\mathcal{T}$  ο υπόχωρος των transverse μεταβλητών  $\mathbf{t}$ ,  $\dim \mathcal{L} = n - n_0$ ,  $\dim \mathcal{T} = n_0$ .
- Επιλέγουμε ένα διανυσματικό πεδίο αναφοράς  $\mathbf{F}(\cdot)$  από την οικογένεια των διανυσματικών πεδίων (3.6), συναρτήσσει των leafwise  $\mathbf{x}$ , εφαπτόμενο στο χώρο  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$ .
- Επιβεβαιώνουμε ότι οι γραμμές ροής του  $\mathbf{F}(\cdot)$  περιέχουν το σημείο  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  του χώρου των φύλλων  $\mathcal{L}$ .
- Ορίζουμε ως έξοδο του συστήματος το διάνυσμα  $\mathbf{h}(\cdot) \triangleq \mathbf{A}(\mathbf{q}) \mathbf{F}$ , και εξαναγκάζουμε το δεξιό μέλος της εξίσωσης (3.1) να ευθυγραμμιστεί με το διάνυσμα  $\mathbf{F}$  επιλέγοντας εισόδους ελέγχου έτσι ώστε όλα τα στοιχεία του διανύσματος  $\mathbf{h}(\cdot)$  να τείνουν στο μηδέν. Για το σκοπό αυτό, ορίζουμε μεταβλητές  $s_j$ , οι οποίες κωδικοποιούν το πόσο μακριά από το μηδέν βρίσκονται οι συνιστώσες του  $\mathbf{h}$ .
- Αποδεικνύουμε τη σύγκλιση των τροχιών του συστήματος (3.1) στην αρχή χρησιμοποιώντας μία συνάρτηση τύπου Lyapunov  $V$  της μορφής  $V = \frac{1}{2}(\sum_{j=1}^k s_j^2 + \dots + \|\mathbf{x}\|^2)$ , ή χρησιμοποιούμε ανάλυση ιδιόμορφων διαταράξεων, θεωρώντας τις μεταβλητές  $\mathbf{t}$  στο υποσύστημα του οριακού στρώματος.

### 3.1 Διπολικά Διανυσματικά Πεδία

Όπως αναφέρθηκε ήδη στο Κεφάλαιο 1, η έμπνευση για την οδήγηση του *υνιςψςλε* στην αρχή των αξόνων βασίστηκε στη μορφή των γραμμών ροής του διανυσματικού πεδίου ενός σημειακού ηλεκτρικού διπόλου. Στην αγγλική έκδοση της διατριβής αναφέρονται οι βασικές έννοιες και ιδιότητες των κρίσιμων σημείων για διανυσματικά πεδία. Ο αναγνώστης παραπέμπεται επιπλέον στη βιβλιογραφία [Boo86, Hen94, Lee02].

#### 3.1.1 Ιδιότητες του Κρίσιμου Σημείου ενός Διπολικού Διανυσματικού Πεδίου

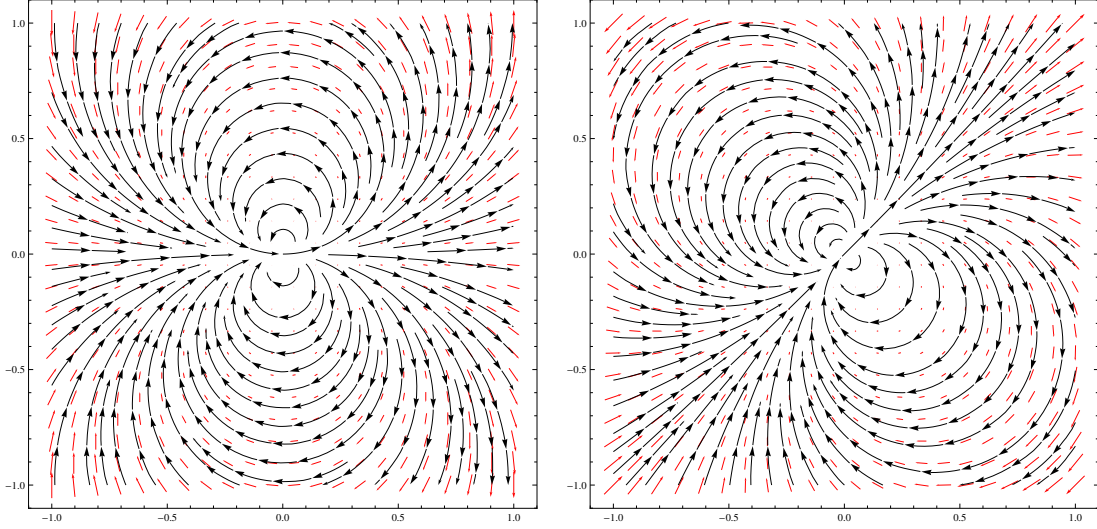
Με βάση την αναλυτική έκφραση του διανυσματικού πεδίου του σημειακού ηλεκτρικού διπόλου σε έναν 2-διαστατο Ευκλείδειο χώρο, ορίζουμε το **διπολικό** διανυσματικό πεδίο:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \lambda(\mathbf{p}^\top \mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{p}(\mathbf{r}^\top \mathbf{r}), \quad (3.5)$$

όπου  $\mathbf{r} = [x \ y]^\top$  το διάνυσμα των συντεταγμένων θέσης ωιτη ρεσπερτ το (ω.ρ.τ.) ως προς ένα σύστημα  $\mathcal{G}$  στον  $\mathbb{R}^2$ , και  $\mathbf{p}$  η διπολική ροπή, η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως η οντότητα η οποία παράγει το διανυσματικό πεδίο. Οι συνιστώσες  $F_x, F_y$  του πεδίου  $\mathbf{F} = F_x \frac{\partial}{\partial x} + F_y \frac{\partial}{\partial y}$  για  $\mathbf{p} = [1 \ 0]^\top$  ισούνται με:

$$\begin{aligned} F_x &= (\lambda - 1)x^2 - y^2, \\ F_y &= \lambda xy. \end{aligned}$$

Για  $\lambda \neq 1$  το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}(\cdot)$  είναι μη-ιδιόμορφο παντού εκτός από το σημείο  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ , το οποίο είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο του διανυσματικού πεδίου, ενώ για  $\lambda > 1$  το κρίσιμο σημείο  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$  είναι δίπολο, βλέπε Σχήμα 3.1(α').



Σχήμα 3.1: Το διπολικό διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}(\cdot)$  για (α)  $\mathbf{p} = [1 \ 0]$  (αριστερά) και (β)  $\mathbf{p} = \frac{1}{\sqrt{2}} [1 \ 1]$  (δεξιά).

Επιπλέον, οι γραμμές ροής είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα του διανύσματος  $\mathbf{p}$ , βλέπε στο Σχήμα 3.1(β') το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}(\cdot)$  (3.5) για  $\lambda = 2$ ,  $\mathbf{p} = \frac{1}{\sqrt{2}} [1 \ 1]^\top$ . Έτσι, κάθε γραμμή ροής του  $\mathbf{F}(\cdot)$  δρα ως πορεία αναφοράς προς το σημείο  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ , ενώ το διάνυσμα  $\mathbf{p}$  καθορίζει τον προσανατολισμό των γραμμών ροής ως προς το σύστημα συντεταγμένων  $\mathcal{G}$ .

Συνεπώς, η ιδέα για τη σχεδίαση ελέγχου για το μονόκυκλο ανάγεται στο ότι, σε κάθε σημείο  $\mathbf{q} \in \mathcal{C}$ , το συστημικό διανυσματικό πεδίο  $\dot{\mathbf{q}} \in T_{\mathbf{q}}\mathcal{C}$  μπορεί να ευθυγραμμιστεί με το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}(\cdot)$ , το οποίο εξ' ορισμού αποτελεί μία πορεία αναφοράς προς το σημείο  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ . Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η επιλογή ενός (μοναδιαίου) διανύσματος  $\mathbf{p}$  που ικανοποιεί τους μη-ολονομικούς περιορισμούς στο επιθυμητό σημείο  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ , δηλαδή τέτοιου ώστε  $\mathbf{A}(\mathbf{0})\mathbf{p} = \mathbf{0}$ , αποδίδει ένα διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}(\cdot)$  με γραμμές ροής, οι οποίες εμμέσως μπορούν να χρησιμοποιηθούν στον έλεγχο του προσανατολισμού του μονόκυκλου, εφόσον συγκλίνουν στο σημείο  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$  παράλληλα με τον άξονα  $x_G$ .

Με βάση αυτήν την παρατήρηση, ορίζουμε την κλάση των  $N$ -διαστατων διανυσματικών πεδίων

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \lambda \left( \mathbf{p}^\top \mathbf{x} \right) \mathbf{x} - \mathbf{p} \left( \mathbf{x}^\top \mathbf{x} \right), \quad (3.6)$$

όπου  $N \leq n$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  το διάνυσμα των leafwise μεταβλητών,  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^N$  τέτοιου ώστε  $\mathbf{A}(\mathbf{0})\mathbf{p} = \mathbf{0}$ , και  $\lambda \geq 2$ . Στη συνέχεια, η μορφή (3.6) χρησιμοποιείται στη σχεδίαση ελεγκτών για μία ευρεία τάξη μη-ολονομικών συστημάτων.



## 3.2 Συστήματα με έναν μη-ολονομικό περιορισμό

### 3.2.1 Μονόκυκλος

Θεωρούμε ως πρώτο παράδειγμα το μονόκυκλο, το οποίο μοντελοποιείται ως

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2, \quad (3.7)$$

όπου  $\mathbf{q} = [x \ y \ \theta]^\top \in \mathcal{C}$  το διάνυσμα παράστασης,  $\mathcal{C}$  μία 3-διαστατη πολλαπλότητα που αναπαριστά το χώρο παράστασης,  $x, y, \theta$  οι γενικευμένες μεταβλητές παράστασης,  $u_1, u_2$  οι είσοδοι ελέγχου. Ο  $\kappa = 1$  μη-ολονομικός περιορισμός (3.7) γράφεται σε μορφή Pfaffian ως

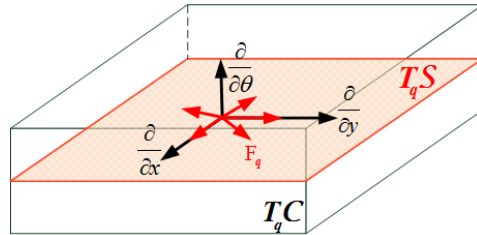
$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}^\top(\mathbf{q})} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \langle \mathbf{a}^\top(\mathbf{q}), \dot{\mathbf{q}} \rangle = 0,$$

όπου  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.

Ένα διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F} = F_x \frac{\partial}{\partial x} + F_y \frac{\partial}{\partial y} + F_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}$  ικανοποιεί τη συνθήκη συμβατότητας (3.4) σε ένα σημείο  $\mathbf{q}$  αν είναι ορθογώνιο ως προς το διάνυσμα  $\mathbf{a}(\mathbf{q})$ :

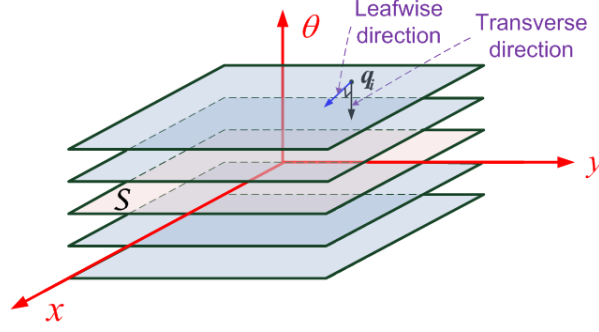
$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}^\top(\mathbf{q})} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_\theta \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow F_y \cos \theta - F_x \sin \theta = 0. \quad (3.8)$$

Στην περίπτωση αυτή, το διάνυσμα  $\mathbf{a}^\top(\mathbf{q})$  περιέχει  $n_0 = 1$  μηδενική στήλη (στοιχείο) και συνεπώς η συνιστώσα  $F_\theta$  δεν επηρεάζει την ικανοποίηση της συνθήκης (3.8). Συνεπώς, ορίζουμε  $F_\theta = 0$ , και αναζητούμε ένα  $N = n - n_0 = 2$  διαστατο πεδίο  $\mathbf{F}(\cdot)$ , συναρτήσεων των  $F_x, F_y$ . Επιπλέον, οι συντεταγμένες  $x, y$  είναι οι leafwise μεταβλητές, ενώ ο προσανατολισμός  $\theta$  είναι η transverse μεταβλητή.



Σχήμα 3.2: Το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}(\mathbf{q})$  είναι εξ' ορισμού εφαπτόμενο στον υπόχωρο  $T_q \mathcal{S} \subset T_q \mathcal{C}$ , για κάθε  $\mathbf{q} \in \mathcal{S}$ .

Από μία γεωμετρική σκοπιά, ο ορισμός  $F_\theta = 0$  συνεπάγεται ότι το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}(\cdot)$  ορίζεται εφαπτόμενο στον υπόχωρο  $\mathcal{W} = \left\{ \mathbf{w} \in T_q \mathcal{C} \mid \mathbf{w} = [w_x \ w_y \ 0]^\top \right\}$  του εφαπτόμενου χώρου  $T_q \mathcal{C}$  του χώρου παράστασης  $\mathcal{C}$ , δηλαδή ότι το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}(\cdot)$  είναι εφαπτόμενο στον υπόχωρο  $\mathcal{S} = \mathbb{R}^2$  στο σημείο  $\mathbf{q}$ , βλέπε Σχήμα 3.2 και Σχήμα 3.3. Συνεπώς, το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}(\cdot)$



Σχήμα 3.3: Η φύλλωση  $\mathcal{F}$  του 3-διαστατου χώρου παράστασης  $\mathcal{C}$  για το μονόκυκλο,  $\mathcal{F} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ .

ορίζεται εφαπτόμενο στις leafwise διευθύνσεις  $\mathcal{L} = \mathbb{R}^2$  της φύλλωσης  $\mathcal{F} = \mathbb{R}^2 \times S$  του χώρου παράστασης. Η αναλυτική έκφραση του πεδίου δίνεται από τη σχέση (3.5), όπου το διάνυσμα  $\mathbf{p}$  εξαρτάται από τη μορφή του διανύσματος  $\mathbf{a}(\mathbf{q})$  στην αρχή  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ , ως εξής: το διάνυσμα  $\mathbf{p}$  πρέπει να ανήκει στην (τοπική εκδήλωση της) επιφανείας περιορισμού στο σημείο  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ , ώστε να είναι συμβατό με τους περιορισμούς:

$$\langle \mathbf{a}^\top(\mathbf{0}), \mathbf{p} \rangle = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -\sin(0) & \cos(0) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_\theta \end{bmatrix} = 0, \quad (3.9)$$

όπου  $p_\theta = 0$ , για τον ίδιο λόγο που η συνιστώσα  $F_\theta$  τίθεται ίση με μηδέν. Η συνθήκη (3.9) ικανοποιείται για κάθε  $p_x \in \mathbb{R}$  και για  $p_y = 0$ , και εφόσον το διάνυσμα  $\mathbf{p}$  πρέπει να είναι μη μηδενικό, ορίζουμε  $\mathbf{p} \triangleq [p_x \ 0]^\top$  όπου  $p_x \neq 0$ . Για  $p_x = 1$  και  $\lambda = 3$ , οι συνιστώσες  $F_x, F_y$  του διανυσματικού πεδίου (3.5) γράφονται ως

$$F_x = 2x^2 - y^2 = 3x^2 - (x^2 + y^2), \quad F_y = 3xy. \quad (3.10)$$

Το διανυσματικό πεδίο απεικονίζεται στο Σχήμα 3.4(α'). Εφόσον  $F_\theta = 0$ , το διανυσματικό πεδίο (3.10) στο χώρο παράστασης  $\mathcal{C}$  δεν μεταβάλλεται κατά την transverse διεύθυνση της φύλλωσης  $\mathcal{F}$ , βλέπε Σχήμα 3.4(β').

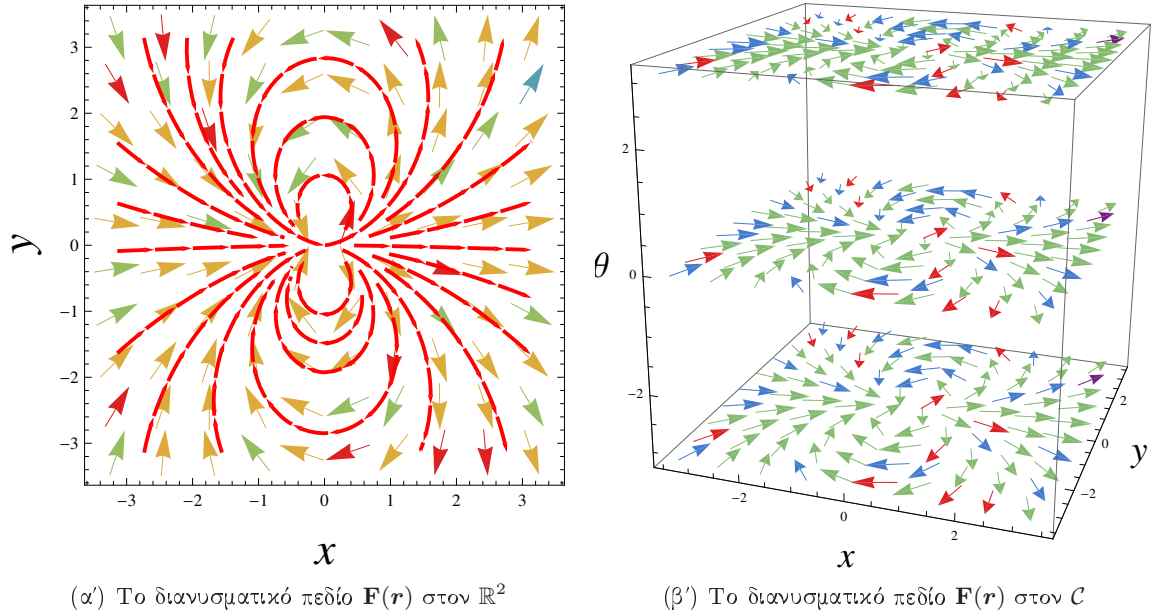
Επιπλέον, για κάθε  $\theta \in \mathbb{S}^1$ , η συνθήκη (3.8) είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των συνιστωσών  $F_x$  και  $F_y$ . Θέτουμε  $F_x = \|\mathbf{F}\| \cos \phi$  και  $F_y = \|\mathbf{F}\| \sin \phi$ , όπου  $\|\mathbf{F}\|$  η Ευκλείδεια νόρμα του πεδίου στο σημείο  $\mathbf{q} \in \mathcal{C}$ , και  $\phi$  η διεύθυνση του πεδίου  $\mathbf{F}(\mathbf{q})$  ως προς ένα σύστημα αναφοράς  $\mathcal{G}$ . Η συνθήκη συμβατότητας (3.8) γράφεται ως

$$\langle \mathbf{a}^\top(\mathbf{q}), \mathbf{F} \rangle = \|\mathbf{F}\| \sin(\phi - \theta) = 0. \quad (3.11)$$

Για ένα μη-ιδιόμορφο πεδίο  $\mathbf{F}$ , η συνθήκη (3.11) είναι αληθής εφόσον  $\sin(\phi - \theta) = 0 \Rightarrow \phi - \theta = \xi\pi$ , όπου  $\xi \in \mathbb{Z}$ , δηλαδή εφόσον το συστημικό διανυσματικό πεδίο  $\dot{\mathbf{q}}$  ως προς το σύστημα  $\mathcal{G}$  είναι συγγραμμικό (ή ευθυγραμμιστεί) με το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}(\cdot)$ .

Συνεπώς, για να επιβάλλουμε την ευθυγράμμιση του συστηματικού διανύσματος με το διάνυσμα (3.10), ορίζουμε την απεικόνιση  $h(\cdot) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(\mathbf{q}) = \langle \mathbf{a}^\top(\mathbf{q}), \mathbf{F} \rangle. \quad (3.12)$$



Σχήμα 3.4: Το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  για τον μονόκυκλο.

Για  $h(\mathbf{q}) = 0$ , το διάνυσμα  $\mathbf{F}(\mathbf{q})$  ανήκει στο μηδενοχώρο του διανύσματος  $\mathbf{a}^\top(\mathbf{q})$  στο σημείο  $\mathbf{q}$ , και έτσι τοπικά μπορεί να χαρακτηριστεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων ελέγχου  $\mathbf{g}_i(\mathbf{q})$ . Συνεπώς, η έκφραση  $h(\mathbf{q}) \neq 0$  μπορεί να αντιμετωπιστεί ως ένα σφάλμα (ή ως μια έξοδος) που πρέπει να οδηγηθεί στο μηδέν. Για ένα μη ιδιόμορφο διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}$ , έχουμε ότι:  $h(\mathbf{q}) = 0 \stackrel{(3.11)}{\Leftrightarrow} \{\theta - \phi = 0 \text{ or } \theta - \phi = \pm\pi\}$ . Στην περίπτωση αυτή, ο προσανατολισμός  $\theta$  του μονόκυκλου είναι εφαπτόμενος με τη γραμμή ροής του διανυσματικού πεδίου (3.10) στο σημείο  $\mathbf{q} \in \mathcal{C}$ .

Άρα, στην περίπτωση του μονόκυκλου έχουμε  $h(\mathbf{q}) \rightarrow 0$  εφόσον  $\theta \rightarrow \phi + \xi\pi$ ,  $\xi \in \mathbb{Z}$ . Ορίζουμε το σφάλμα συμβατότητας  $s = \theta - \phi$  και απαιτούμε  $\dot{s} = -ks$ ,  $k > 0$ , επιλέγοντας την είσοδο ελέγχου  $u_2$  ως

$$\dot{\theta} - \dot{\phi} = -k(\theta - \phi) \Rightarrow u_2 = -k(\theta - \phi) + \dot{\phi}. \quad (3.13)$$

Τότε, η παράγωγος της γωνίας προσανατολισμού  $\phi$  του πεδίου  $\mathbf{F}$  γράφεται ως

$$\dot{\phi} \stackrel{(3.7)}{=} \frac{(3yF_x - 4xF_y) \cos \theta + (3xF_x + 2yF_y) \sin \theta}{F_x^2 + F_y^2} u_1.$$

Η ποσότητα  $\dot{\phi}$  δεν ορίζεται για  $\|\mathbf{F}\| = 0$ , δηλαδή στο κρίσιμο σημείο του πεδίου  $\mathbf{F}$ , το οποίο ανήκει στον υποσύνολο

$$\mathcal{A} = \left\{ \mathbf{q} \in \mathcal{C} \mid \mathbf{q} = [0 \ 0 \ \theta]^\top \right\}, \theta \in \mathbb{S}^1.$$

Συνεπώς, αν  $\mathbf{q}(0) \in \mathcal{A}$ , κανείς πρέπει να επιλέξει ένα διαφορετικό νόμο ελέγχου για την είσοδο  $u_2$ · για παράδειγμα:  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = -k\theta$ . Με την επιλογή αυτή το σύστημα  $\mathcal{A}$  είναι θετικά ανεξάρτητο και το σύστημα τείνει εκθετικά στην αρχή  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$  ενώ παραμένει στο  $\mathcal{A}$ · δεν απαιτείται δηλαδή χρήση άλλου ελεγκτή ή διακοπτόμενου ελέγχου.

Οι συνθήκες (3.12), (3.13) καθορίζουν την κίνηση του συστήματος κατά την transverse διεύθυνση της φύλλωσης· ο νόμος ελέγχου (3.13), ευθυγραμμίζει το μονόκυκλο με το διπολικό διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}$ , καθώς το σύστημα κινείται μεταξύ των φύλλων. Κατά τη διεύθυνση των φύλλων, επιπλέον, το σύστημα πρέπει να οδηγηθεί στην αρχή του κάθε τοπικού  $(x, y)$  συστήματος συντεταγμένων. Για την ανάλυση των τροχιών του συστήματος κατά τη διεύθυνση των φύλλων, θεωρούμε μια θετικά ορισμένη συνάρτηση  $V$  συναρτήσεως των leafwise μεταβλητών  $x, y$  και του σφάλματος συμβατότητας  $s$

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + s^2) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + (\theta - \phi)^2),$$

και θεωρούμε τη χρονική παράγωγο κατά τις τροχιές του συστήματος,

$$\dot{V} = (x \cos \theta + y \sin \theta)u_1 + (\theta - \phi)(u_2 - \dot{\phi}) = (x \cos \theta + y \sin \theta)u_1 - k(\theta - \phi)^2.$$

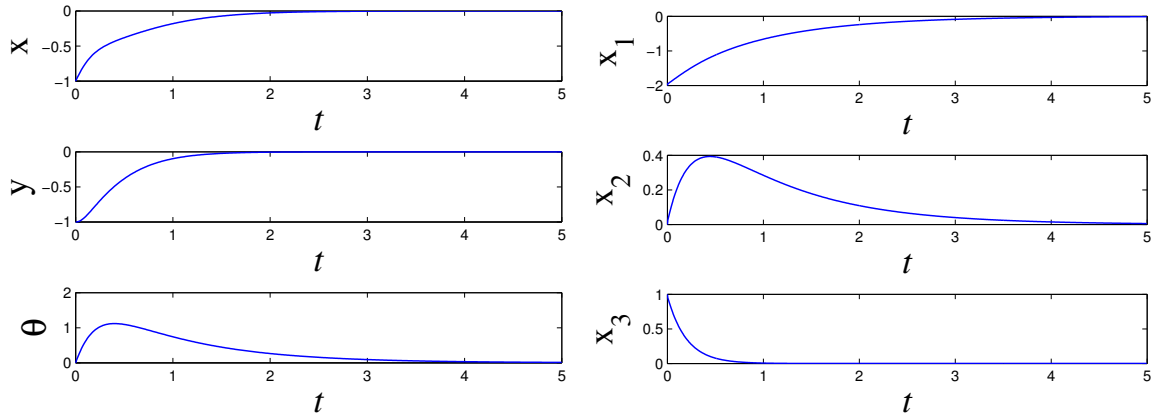
και επιλέγουμε την εισόδο ελέγχου  $u_1$  ως

$$u_1 = -k_1 \operatorname{sgn}(x \cos \theta + y \sin \theta) \|\mathbf{r}\|, \quad k_1 > 0, \quad (3.14)$$

όπου  $\operatorname{sgn}(a) = 1$  για  $a \geq 0$ , και  $\operatorname{sgn}(a) = -1$  για  $a < 0$ . Το δεξιό μέλος της εξίσωσης (3.7) γίνεται συνεχές κατά διαστήματα, και οι λύσεις ερμηνεύονται κατά την έννοια του Filippov:

$$\dot{\mathbf{q}} = \overline{\text{co}} \left\{ \lim_{i \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \\ 0 \end{bmatrix} u_1(\mathbf{q}_i) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2(\mathbf{q}_i) : \mathbf{q}_i \rightarrow \mathbf{q}, \mathbf{q}_i \notin S_q \right\}$$

Η ανάλυση της σύγκλισης των τροχιών του συστήματος στην αρχή  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$  δίνεται στην αγγλική έκδοση της διατριβής. Οι τροχιές του συστήματος κλειστού βρόχου απεικονίζονται στο Σχήμα 3.5(α').



(α') Οι τροχιές του μονόκυκλου

(β') Οι τροχιές του ΝΔΙ για  $k_1 = 5, k_2 = 1$

Σχήμα 3.5: Απόκριση κλειστού βρόχου.

### 3.2.2 Διπλός Μη-ολονομικός Ολοκληρωτής

Η μέθοδος εφαρμόζεται επιπλέον στην περίπτωση του ΝΔΙ. Το παράδειγμα του διπλού ολοκληρωτή καταδεικνύει ότι η μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε συντεταγμένες, δίχως

να απαιτείται η εύρεση νέων, βολικών συντεταγμένων, όπως συχνά συμβαίνει στη βιβλιογραφία. Επιπλέον, το παράδειγμα είναι ενδεικτικό της περίπτωσης όταν ο πίνακας  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  στις δεδομένες συντεταγμένες δεν έχει μηδενικές στήλες.

Η αναλυτική παρουσίαση του συστήματος και της σχεδίασης ελέγχου μέσω της μεθόδου δίνονται στο αντίστοιχο κεφάλαιο της αγγλικής έκδοσης.

### 3.3 Αλυσιδωτά Συστήματα

Η μέθοδος εφαρμόζεται και στην περίπτωση περισσοτέρων του ενός περιορισμών, όπως καταδεικνύεται για την κλάση των αλυσιδωτών συστημάτων. Η ανάλυση δίνεται στο αντίστοιχο κεφάλαιο της αγγλικής έκδοσης.

### 3.4 Μη-ολονομικά Συστήματα με Drift Vector Field

Η μέθοδος επεκτείνεται στη σχεδίαση ελέγχου για δυναμικά μη-ολονομικά συστήματα. Στο αντίστοιχο κεφάλαιο της αγγλικής έκδοσης παρουσιάζεται η εφαρμογή της μεθόδου για τον έλεγχο της κίνησης ενός υπο-επενεργούμενου υποβρύχιου οχήματος στο οριζόντιο επίπεδο.

### 3.5 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκε μία μέθοδος για τη σχεδίαση ελεγκτών για  $n$ -διαστατα μη-ολονομικά συστήματα, υπό το πρίσμα μιας ομοιόμορφης, ενιαίας στρατηγικής ελέγχου. Η ιδέα είναι ότι ορίζουμε ένα  $N$ -διαστατο διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}(\cdot)$  της μορφής (3.6), και ελέγχουμε το σύστημα ώστε να ευθυγραμμίζεται με το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}(\cdot)$ . Έτσι, το πρόβλημα της οδήγησης της κατάστασης του συστήματος σε επιθυμητό σημείο ανάγεται σε ένα πρόβλημα ρύθμισης εξόδου, στο οποίο οι έξοδοι είναι συναρτήσεις που ποσοτικοποιούν την απόκλιση ανάμεσα στο διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}$  και στο συστημικό διανυσματικό πεδίο. Οι έξοδοι υποδεικνύουν συναρτήσεις τύπου Lyapunov, οι οποίες χρησιμοποιούνται στη σχεδίαση και ανάλυση του ελέγχου.

Οι νόμοι ελέγχου αναπόφευκτα έχουν ιδιόμορφα σημεία, τα οποία επιβάλλουν τη χρήση διακοπτόμενου ελέγχου στην περίπτωση που οι αρχικές συνθήκες του συστήματος συμπίπτουν με τις πολλαπλότητες των ιδιομορφιών του ελέγχου, αλλά μακριά από αυτά τα σημεία δεν υπάρχει περαιτέρω ανάγκη για χρήση διακοπτόμενου ελέγχου. Η μέθοδος προσδίδει μια ομοιόμορφη λογική στη σχεδίαση ελέγχου για  $n$ -διαστατα μη-ολονομικά συστήματα, παρέχοντας κατευθυντήριες γραμμές για τη σχεδίαση νόμων ελέγχου. Ως παραδείγματα εφαρμογής μελετήθηκαν ο μονόκυκλος, ο διπλός μη-ολονομικός ολοκληρωτής, η κλάση των  $n$ -διαστατων αλυσιδωτών συστημάτων και ένα υπο-επενεργούμενο όχημα, και οι νόμοι ελέγχου σε κάθε περίπτωση προέκυψαν ακολουθώντας τις ίδιες κατευθυντήριες γραμμές σχεδίασης.

---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### Σχεδίαση Ελέγχου για Μη-Ολονομικά Συστήματα με Περιορισμούς βάσει της Θεωρίας Βιωσιμότητας

#### Περίληψη

Το παρόν κεφάλαιο πραγματεύεται τη σχεδίαση ελέγχου για μία κλάση μη-ολονομικών συστημάτων που υπόκεινται σε ανισοτικούς περιορισμούς συναρτήσεων των μεταβλητών κατάστασης, οι οποίοι ορίζουν ένα σύνολο  $K$  (σύνολο βιωσιμότητας). Με χρήση εργαλείων και εννοιών από τη θεωρία βιωσιμότητας συστημάτων, αφενός δίνονται οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την επιλογή βιώσιμων εισόδων ελέγχου για ένα μη ολονομικό σύστημα, έτσι ώστε οι τροχιές του συστήματος που εκκινούν στο σύνολο  $K$  να παραμένουν στο σύνολο  $K$ . Αφετέρου, οι νόμοι ελέγχου που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 3 ανασχεδιάζονται μέσω διακοπτόμενου ελέγχου, έτσι ώστε οι τροχιές του συστήματος που εκκινούν στο σύνολο  $K$  να συγκλίνουν σε ένα υποσύνολο  $G$  του  $K$ , χωρίς να διαφεύγουν από το  $K$ . Η προσέγγιση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε διάφορες περιπτώσεις, στις οποίες το πρόβλημα του ελέγχου μπορεί να αναδιατυπωθεί ως η σχεδίαση ενός σχήματος ελέγχου, έτσι ώστε οι τροχιές του συστήματος να παραμένουν σε ένα υποσύνολο  $K$  του χώρου κατάστασης, έως ότου συγκλίνουν σε ένα υποσύνολο  $G$  του  $K$ .

Ως παράδειγμα μελετάται ο προγραμματισμός και έλεγχος της κίνησης ενός υπο-επενεργούμενου θαλάσσιου οχήματος μέσα σε ένα σύνολο παραστάσεων  $K$ , το οποίο κωδικοποιεί τον περιορισμένο χώρο (συναρτήσεως της θέσης και του προσανατολισμού) του συστήματος, ένεκα περιορισμένης δυνατότητας αίσθησης. Η μέθοδος αποδίδει τη σχεδίαση βιώσιμων νόμων ελέγχου στο σύνολο  $K$ , που ταυτόχρονα εγγυώνται τη σύγκλιση των τροχιών του συστήματος σε ένα σύνολο  $G$  μέσα στο  $K$ . Εξετάζεται επίσης η ευρωστία των λύσεων ελέγχου ως προς μία κλάση φραγμένων διαταραχών, και η απόκριση του συστήματος αξιολογείται μέσω προσομοιώσεων του συστήματος.

#### Συνεισφορά

Το κεφάλαιο παρουσιάζει μία μέθοδο για τη σχεδίαση ελέγχου για μία κλάση μη-ολονομικών συστημάτων που υπόκεινται σε περιορισμούς κατάστασης. Οι περιορισμοί κατάστασης αναπαριστώνται ως ανισοτικοί περιορισμοί ως προς τις μεταβλητές κατάστασης, οι οποίοι ορίζουν ένα κλειστό υποσύνολο  $K$  του χώρου κατάστασης  $\mathcal{Q}$ . Το σύνολο  $K$  αποτελεί κατά αυτήν την έννοια το υποσύνολο του χώρου κατάστασης μέσα στο οποίο επιτρέπεται στις τροχιές του συστήματος να εξελίσσονται. Οι τροχιές του συστήματος που είτε εκκινούν εκτός του συνόλου  $K$ , ή διαφεύγουν από το  $K$  τη χρονική στιγμή  $t > 0$  παραβιάζουν τους ανισοτικούς περιορισμούς και γι' αυτό το λόγο δεν είναι αποδεκτές. Συνεπώς, το πρόβλημα ελέγχου ανάγεται στην εύρεση ενός (πιθανώς διακοπτόμενου) σχήματος ελέγχου, τέτοιου ώστε οι τροχιές που εκκινούν στο  $K$  να συγκλίνουν σε ένα υποσύνολο  $G$  του συνόλου  $K$ , χωρίς ποτέ να διαφεύγουν από το  $K$ .

Η μέθοδος συνδυάζει έννοιες από τη θεωρία βιωσιμότητας συστημάτων και λύσεις από τη μεθοδολογία για τη σχεδίαση ελέγχου σε  $n$ -διαστατα μη-ολονομικά συστήματα που περιγράφεται στο

Κεφάλαιο 3. Στη συνέχεια, υιοθετώντας τη σημειογραφία του [Aub91], οι ανισοτικοί περιορισμοί ονομάζονται περιορισμοί βιωσιμότητας, το σύνολο  $K$  ονομάζεται σύνολο βιωσιμότητας του συστήματος, και οι τροχιές του συστήματος που παραμένουν στο  $K \forall t \geq 0$  ονομάζονται βιώσιμες.

Πιο συγκεκριμένα, υιοθετούμε την έννοια της εφαπτομένης σε ένα σύνολο  $K$  που ορίζεται από ανισοτικούς περιορισμούς [Aub91], και δίνουμε τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες ώστε οι τροχιές ενός κινηματικού μη-ολονομικού συστήματος να είναι βιώσιμες στο  $K$ . Επιπλέον, ανασχεδιάζουμε μία κλάση λύσεων που παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 3 μέσω διακοπόμενου ελέγχου, έτσι ώστε οι τροχιές του συστήματος να είναι βιώσιμες στο  $K$  κι επιπλέον να συγκλίνουν σε ένα σύνολο  $G \subset K$ . Ως παράδειγμα, θεωρούμε τον έλεγχο της κίνησης ενός υπο-επενεργούμενου θαλάσσιου οχήματος που υφίσταται ανισοτικούς περιορισμούς συναρτήσεως της θέσης και του προσανατολισμού, ένεκα περιορισμένης εμβέλειας του συστήματος των αισθητήρων. Το σύστημα των αισθητήρων αποτελείται από μία κάμερα με περιορισμένη γωνία θέασης και δύο προβολείς λέιζερ με περιορισμένη εμβέλεια. Το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε είναι ο έλεγχος της κίνησης του οχήματος, έτσι ώστε να συγκλίνει σε μια θέση και προσανατολισμό ως προς ένα στόχο, ενώ ο στόχος παραμένει πάντοτε ορατός στο οπτικό πεδίο της κάμερας. Η απαίτηση για τη διατήρηση της ορατότητας και η περιορισμένη εμβέλεια του συστήματος των αισθητήρων επιβάλλουν ένα σύνολο περιορισμών συναρτήσεως των μεταβλητών παράστασης, που ορίζουν το σύνολο βιωσιμότητας  $K$  του συστήματος. Επιπλέον, εξετάζεται η ευρωστία των λύσεων ως προς μία κλάση φραγμένων διαταραχών.

Σημειώνεται ότι η διατύπωση του προβλήματος είναι παρεμφερής με το χαρακτηρισμό των βιώσιμων capture basins ενός συνόλου  $C$  μέσα σε ένα σύνολο περιορισμών  $K$  [Aub01], ο οποίος βασίζεται στη μέθοδο Frankowska που χαρακτηρίζει την ανεξαρτησία υποσυνόλων και την βιωσιμότητα μέσω της συνάρτησης αξίας (value function) ενός προβλήματος βέλτιστου ελέγχου. Ωστόσο, η δική μας προσέγγιση χρησιμοποιεί την έννοια της ανεξαρτησίας συνόλου κατά [Bla99, BM08], ενώ ο στόχος είναι να σχεδιαστεί ένα σχήμα ανάδρασης μεταβλητών κατάστασης, ώστε αφενός το σύνολο βιωσιμότητας  $K$  να καταστεί ένα θετικά ανεξάρτητο (ή ανεξάρτητο μέσω ελέγχου) σύνολο, και αφετέρου το σύνολο  $G$  να καταστεί το μεγαλύτερο ανεξάρτητο σύνολο του συστήματος.

Η έννοια της ανεξαρτησίας ενός συνόλου μέσω ελέγχου για γραμμικά συστήματα έχει χρησιμοποιηθεί στην εργασία [MBP11] στο σχεδιασμό του ελέγχου ενός μη-ολονομικού συστήματος με πρώτης τάξεως (κινηματικούς) περιορισμούς, με γραμμικοποίηση του αρχικού συστήματος ως προς το σημείο ισορροπίας. Σε σχέση με αυτήν την εργασία, η προτεινόμενη μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μία ευρύτερη κλάση υπο-επενεργούμενων συστημάτων με περιορισμούς κατάστασης, συμπεριλαμβανομένης της κλάσης των μη-ολονομικών συστημάτων με περιορισμούς δεύτερης τάξεως, δίχως να απαιτείται η γραμμικοποίηση του συστήματος γύρω από σημείο.

Τέλος, ο έλεγχος της κίνησης υπο-επενεργούμενων θαλάσσιων οχημάτων έχει αντιμετωπιστεί με διάφορες τεχνικές ελέγχου στις εργασίες [Leo95, PE99, PF00, AP02a, DJPN04], ωστόσο καμία από αυτές δεν λαμβάνει υπόψη της επιπρόσθετους περιορισμούς κατάστασης.

## 4.1 Έννοιες από τη Θεωρία Βιωσιμότητας

Η παράγραφος περιγράφει τις έννοιες από τη θεωρία βιωσιμότητας [Aub91, AF90] που χρησιμοποιούνται στο παρόν κεφάλαιο.

Έστω η εξέλιξη ενός συστήματος που περιγράφεται από μία απεικόνιση  $f$  από ένα ανοιχτό υποσύνολο  $\Omega$  του χώρου  $X$  στο χώρο  $X$ ,  $f : \Omega \mapsto X$ , όπου  $X$  ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης

διάστασης, και το πρόβλημα συνοριακών τιμών που συνδέεται με τη διαφορική εξίσωση:

$$\forall t \in [0, T], \quad \dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0. \quad (4.1)$$

**Ορισμός 1** (Βιώσιμες Συναρτήσεις) Έστω  $K$  ένα υποσύνολο του  $X$ . Μία συνάρτηση  $x(\cdot)$  από το διάστημα  $[0, T]$  στον  $X$  είναι βιώσιμη στο  $K$  στο διάστημα  $[0, T]$ , εάν  $x(t) \in K \forall t \in [0, T]$ .

**Ορισμός 2** (Βιωσιμότητα) Έστω  $K$  ένα υποσύνολο του  $\Omega$ . Το σύνολο  $K$  ονομάζεται τοπικά βιώσιμο για το σύστημα που περιγράφεται από την απεικόνιση  $f$  αν, για κάθε αρχική συνθήκη  $x_0 \in K$ , υπάρχει ένα  $T > 0$  και μία βιώσιμη λύση στο διάστημα  $[0, T]$  της διαφορικής εξίσωσης (4.1) που ξεκινά στο σημείο  $x_0$ . Το σύνολο  $K$  ονομάζεται ολικά βιώσιμο για το σύστημα  $f$  αν  $T = \infty$ .

Ο χαρακτηρισμός βιώσιμων συνόλων  $K$  για το σύστημα  $f$  βασίζεται στην έννοια της εφαπτομένης: Ένα υποσύνολο  $K$  είναι βιώσιμο για τη συνάρτηση  $f$  αν, για κάθε  $x$  του συνόλου  $K$ , η ταχύτητα  $f(x)$  είναι εφαπτόμενη στο  $K$  στο σημείο  $x$ , ώστε η λύση της διαφορικής εξίσωσης να ανήκει στο εσωτερικό του συνόλου  $K$ . Μια επαρκής έννοια για την εφαπτομένη δίνεται μέσω του contingent cone.

**Ορισμός 3** Έστω  $X$  ένας διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με νόρμα,  $K$  ένα μη κενό υποσύνολο του  $X$  και  $x$  ανήκει στο  $K$ . Ο contingent κώνος του  $K$  στο  $x$  είναι το σύνολο

$$T_K(x) = \left\{ v \in X \mid \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{d_K(x + hv)}{h} = 0 \right\},$$

όπου  $d_K(y)$  η απόσταση του  $y$  ως προς το  $K$ ,  $d_K(y) := \inf_{z \in K} \|y - z\|$ .

Έστω η συνεχής απεικόνιση  $g = (g_1, g_2, \dots, g_p) : X \rightarrow \mathbb{R}^p$  και το υποσύνολο  $K$  του  $X$  που ορίζεται ως

$$K = \{x \in X \mid g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p\}, \quad (4.2)$$

όπου  $g_i(\cdot)$  Fréchet διαφορίσιμες στο  $x$ . Για  $x \in K$ , ονομάζουμε

$$I(x) = \{i = 1, 2, \dots, p \mid g_i(x) = 0\} \quad (4.3)$$

το υποσύνολο των ενεργών περιορισμών. Ο ροντινγεντ κώνος  $T_K(x)$  του  $K$  είναι  $T_K(x) = X$  για  $I(x) = \emptyset$ , αλλιώς

$$T_K(x) = \{v \in X \mid \forall i \in I(x), \langle g'_i(x), v \rangle \geq 0\},$$

όπου  $g'_i(x) \in X^*$  το γραδιεντ της  $g_i$  στο  $x$ , και  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  το δυικό ζεύγος.

**Ορισμός 4** (Πεδίο Βιωσιμότητας) Έστω  $K$  υποσύνολο του  $\Omega$ , τότε το  $K$  είναι πεδίο βιωσιμότητας της συνάρτησης  $f : \Omega \mapsto X$  εάν  $\forall x \in K, f(x) \in T_K(x)$ .

**Ορισμός 5** Έστω ένα σύνολο ελέγχου  $(U, f)$ , που ορίζεται από τη σετ-αλυεδ συνάρτηση  $U : X \rightsquigarrow Z$ , όπου  $X$  ο χώρος κατάστασης και  $Z$  ο χώρος ελέγχου, και μία συνάρτηση  $f : \text{Graph}(U) \rightarrow X$ , που περιγράφει τη δυναμική του συστήματος:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad \text{όπου } u(t) \in U(x(t)).$$

Για οποιοδήποτε υποσύνολο  $K \subset \text{Dom}(U)$  ορίζεται η συνάρτηση ρύθμισης  $R_K := K \rightsquigarrow Z$  ως

$$\forall x \in K, \quad R_K(x) := \{u \in U(x) \mid f(x, u) \in T_K(x)\}.$$



Οι είσοδοι ελέγχου  $u$  που ανήκουν στο  $R_K(x)$  ονομάζονται βιώσιμες, και το  $K$  είναι πεδίο βιωσιμότητας αν και μόνο αν το πεδίο τιμών της συνάρτησης  $R_K(x)$  δεν είναι κενό.

Αν το υποσύνολο  $K$  δίνεται από τη σχέση (4.2), το σύνολο των ενεργών περιορισμών δίνεται από το (4.3), και για κάθε  $x \in K$ ,  $\exists u_0 \in X$  τέτοιο ώστε  $\forall i \in I(x)$ ,  $\langle g'_i(x), u_0 \rangle \geq 0$ , τότε η συνάρτηση  $R_K(x)$  δίνεται ως:

$$R_K(x) := \{u \in U(x) \mid \forall i \in I(x), \langle g'_i(x), f(x, u) \rangle \geq 0\}.$$

## 4.2 Βιώσιμες Μη-ολονομικές Είσοδοι

Έστω ένα μη-ολονομικό σύστημα της μορφής

$$\dot{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{q})u_i, \quad (4.4)$$

που υπόκειται σε  $\mu$  ανισοτικούς περιορισμούς  $K$  της μορφής

$$K := \{\mathbf{q} \in Q \mid c_j(\mathbf{q}) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, \mu\}, \quad (4.5)$$

όπου  $c_j(\cdot) : Q \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις,  $j \in \mathcal{J} = \{1, \dots, \mu\}$ .

Έστω ότι για  $\mathbf{q} \in K$  ισχύει ότι  $\mathcal{J}(\mathbf{q}) = \emptyset$ , δηλαδή ότι κανένας περιορισμός δεν είναι ενεργός· τότε  $\mathbf{q} \in \text{Int}(K)$ , και ο ζοντινγεντ κώνος του  $K$  στο  $\mathbf{q}$  συμπίπτει με το χώρο κατάστασης  $Q$ ,  $T_K(\mathbf{q}) = Q$ . Συνεπώς, το σύστημα μπορεί να εξελιχθεί προς οποιαδήποτε κατεύθυνση  $\dot{\mathbf{q}} \in T_{\mathbf{q}}Q$  χωρίς να παραβιάσει τους περιορισμούς. Σε κάθε  $\mathbf{q} \in \text{Int}(K)$ , οι βιώσιμες λύσεις  $\dot{\mathbf{q}}$  για ένα μη ολονομικό σύστημα είναι εφαπτόμενες σε έναν  $(n - \kappa)$  διαστατο υπόχωρο του κώνου  $T_K(\mathbf{q})$ .

Έστω ότι ο  $j$ -στος περιορισμός γίνεται ενεργός σε κάποιο σημείο  $\mathbf{z} \in \partial K$ :  $c_j(\mathbf{z}) = 0$ ,  $j \in \mathcal{J}$ . Οι βιώσιμες λύσεις του συστήματος ανήκουν στον ζοντινγεντ κώνο  $K$  στο  $\mathbf{z}$ ,  $\dot{\mathbf{z}} \in T_K(\mathbf{z})$ , ο οποίος είναι ένα υποσύνολο του εφαπτόμενου χώρου  $T_{\mathbf{z}}Q$ . Συνεπώς, η λύση ενός μη ολονομικού συστήματος (4.4) είναι βιώσιμη στο σημείο  $\mathbf{z}$  αν και μόνο αν

$$\dot{\mathbf{z}} \in \left( \text{Null}(\mathbf{A}(\mathbf{z})) \cap T_K(\mathbf{z}) \right) \neq \emptyset.$$

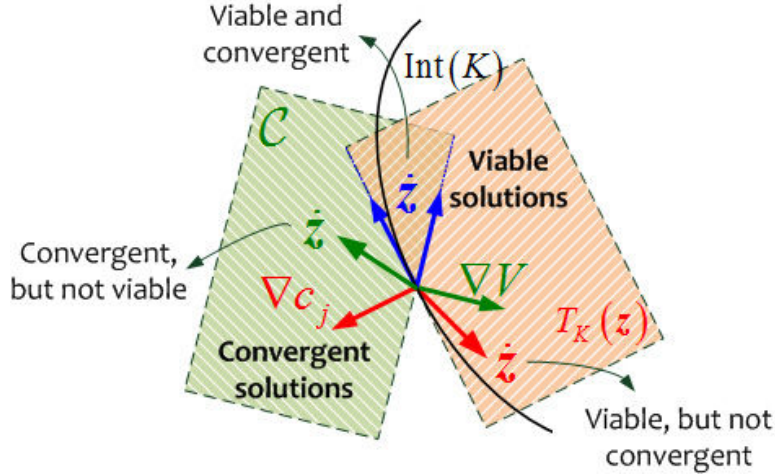
Για  $\mathbf{q} \in \text{Int}(K)$ , μία λύση  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  για το σύστημα (4.4) είναι βιώσιμη στο  $\mathbf{q}$  αν και μόνο αν

$$\mathbf{u} \in \mathbf{U}(\mathbf{q}), \quad \dot{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{q})u_i \in T_K(\mathbf{q}) \triangleq T_{\mathbf{q}}Q,$$

που συνεπάγεται ότι η είσοδος  $\mathbf{u}(\cdot)$  είναι βιώσιμη στο  $\mathbf{q}$  εφόσον οι είσοδοι  $u_i$  ανήκουν στο υποσύνολο  $\mathbf{U}(\mathbf{q})$  των επιτρεπτών εισόδων.

Για  $\mathbf{z} \in \partial K$ , έστω ένας περιορισμός γίνεται ενεργός:  $c_j(\mathbf{z}) = 0$  για κάποιο  $j \in \mathcal{J}$ . Συνεπώς, η είσοδος ελέγχου  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  για το σύστημα (4.4) είναι βιώσιμη στο  $\mathbf{z} \in \partial K$  αν και μόνο αν

$$\mathbf{u}(\mathbf{z}) \in \mathbf{U}(\mathbf{z}), \quad \left[ \frac{\partial c_j}{\partial q_1} \quad \dots \quad \frac{\partial c_j}{\partial q_n} \right] \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{z})u_i \leq 0. \quad (4.6)$$



Σχήμα 4.1: Ένας νόμος ελέγχου  $\gamma(\cdot) = (\gamma_1(\cdot), \dots, \gamma_m(\cdot)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  τέτοιος ώστε  $\gamma(z) \in U(z)$ ,  $\dot{z} = \sum_{i=1}^m g_i(z)\gamma_i(\cdot) \in (C \cap T_K(z))$  είναι βιώσιμος στο  $z \in \partial K$ .

Αν περισσότεροι του ενός περιορισμοί  $c_j(\cdot) : Q \rightarrow \mathbb{R}$  είναι ταυτόχρονα ενεργοί στο  $z \in \partial K$ , τότε ο νόμος ελέγχου  $u(\cdot)$  είναι βιώσιμος στο  $z$  αν και μόνο αν η συνθήκη (4.6) ικανοποιείται για κάθε έναν από τους περιορισμούς. Αν όλοι οι  $m$  περιορισμοί είναι ενεργοί στο  $z$ , οι συνθήκες γράφονται σε μητρική μορφή ως

$$u(z) \in U(z), \quad J_c(z) \sum_{i=1}^m g_i(z)u_i \leq 0, \quad (4.7)$$

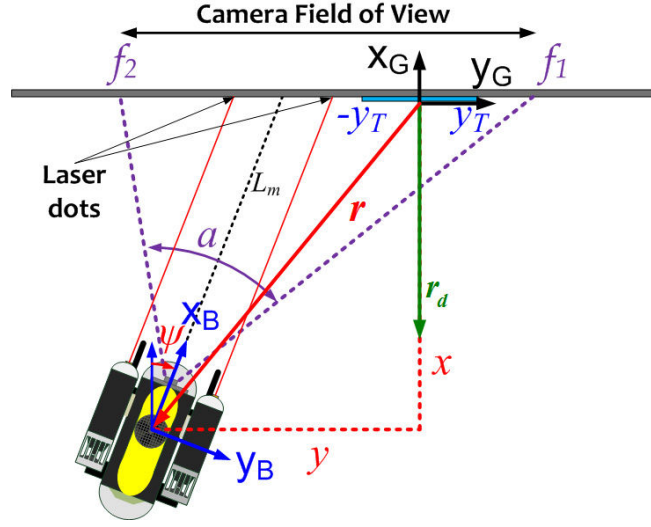
όπου  $J_c(z)$  η Ιακωβιανή της απεικόνισης  $c = (c_1(\cdot), \dots, c_m(\cdot)) : Q \rightarrow \mathbb{R}^m$ , στο σημείο  $z \in \partial K$ .

Η συνθήκη (4.6) για έναν ενεργό περιορισμό απεικονίζεται στο Σχήμα 4.1.

### 4.3 Έλεγχος Υποεπενεργούμενου Υποβρυχίου Οχήματος με Περιορισμένη Δυνατότητα Αίσθησης

Θεωρούμε το πρόβλημα του ελέγχου της κίνησης ενός υποεπενεργούμενου υποβρυχίου οχήματος, το οποίο υπόκειται σε ανισοτικούς περιορισμούς που προκύπτουν από την περιορισμένη εμβέλεια του συστήματος αισθητήρων. Το σύστημα αίσθησης αποτελείται από μία κάμερα και δύο προβολείς λέιζερ τοποθετημένους στο όχημα, και παρέχει τη θέση και τον προσανατολισμό του οχήματος  $\eta = [x \ y \ \psi]^T$  ως προς ένα αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων  $\mathcal{G}$ , το οποίο βρίσκεται στο κέντρο βάρους ενός στόχου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2. Ο στόχος και οι κουκκίδες των λέιζερ που προβάλλονται στην επιφάνεια του στόχου εντοπίζονται μέσω αλγορίθμων όρασης, και η πληροφορία χρησιμοποιείται στον υπολογισμό του διανύσματος  $\eta$  [KPK06]. Έτσι, το σύστημα αισθητήρων παραμένει λειτουργικό αν και μόνο αν ο στόχος και οι κουκκίδες λέιζερ παραμένουν πάντοτε ορατές στο οπτικό πεδίο της κάμερας.

Οι απαιτήσεις αυτές ορίζουν ένα σύνολο ανισοτικών περιορισμών ως προς το διάνυσμα παράστασης  $\eta$ , οι οποίοι αντιμετωπίζονται ως περιορισμοί βιωσιμότητας που ορίζουν το σύνολο βιωσιμότητας



Σχήμα 4.2: Μοντελοποίηση των περιορισμών ένεκα του συστήματος αίσθησης

$K$  του συστήματος. Το πρόβλημα ελέγχου διατυπώνεται ως ο έλεγχος του οχήματος έτσι ώστε οι τροχιές να συγκλίνουν σε ένα σύνολο  $G \subset K$  χωρίς ποτέ να διαφεύγουν από το σύνολο  $K$ .

#### 4.3.1 Μοντελοποίηση

Με βάση τη βιβλιογραφία [Fos02] οι κινηματικές και δυναμικές εξισώσεις κίνησης γράφονται ως:

$$\dot{x} = u \cos \psi - v \sin \psi \quad (4.8\alpha')$$

$$\dot{y} = u \sin \psi + v \cos \psi \quad (4.8\beta')$$

$$\dot{\psi} = r \quad (4.8\gamma')$$

$$\dot{u} = \frac{m_{22}}{m_{11}}vr + \frac{X_u}{m_{11}}u + \frac{X_{u|u}}{m_{11}}|u|u + \frac{\tau_u}{m_{11}} \quad (4.8\delta')$$

$$\dot{v} = -\frac{m_{11}}{m_{22}}ur + \frac{Y_v}{m_{22}}v + \frac{Y_{v|v}}{m_{22}}|v|v \quad (4.8\epsilon')$$

$$\dot{r} = \frac{m_{11} - m_{22}}{m_{33}}uv + \frac{N_r}{m_{33}}r + \frac{N_{r|r}}{m_{33}}|r|r + \frac{\tau_r}{m_{33}}, \quad (4.8\zeta')$$

όπου  $\boldsymbol{\eta} = [\mathbf{r}^\top \ \psi]^\top = [x \ y \ \psi]^\top$  το διάνυσμα θέσης και προσανατολισμού ως προς το αδρανειακό σύστημα  $\mathcal{G}$ ,  $\mathbf{r} = [x \ y]^\top$  το διάνυσμα θέσης και  $\psi$  ο προσανατολισμός του οχήματος ως προς το  $\mathcal{G}$ ,  $\boldsymbol{\nu} = [u \ v \ r]^\top$  το διάνυσμα γραμμικών και γωνιακών ταχυτήτων ως προς το σωματόδετο σύστημα συντεταγμένων  $\mathcal{B}$ ,  $m_{11}$ ,  $m_{22}$ ,  $m_{33}$  οι όροι του μητρώου αδράνειας,  $X_u$ ,  $Y_v$ ,  $N_r$  οι όροι γραμμικής απόσβεσης,  $X_{u|u}$ ,  $Y_{v|v}$ ,  $N_{r|r}$  οι όροι μη-γραμμικής απόσβεσης, και  $\tau_u$ ,  $\tau_r$  οι εισοδοί ελέγχου.

### 4.3.2 Σχεδίαση μη-ολονομικού ελέγχου

#### Αποσύνθεση του συστήματος στα υποσυστήματα $\Sigma_1, \Sigma_2$

Θεωρούμε το κινηματικό υποσύστημα του συστήματος, και παρατηρούμε ότι ο συνδυασμός των εξισώσεων (4.8α'), (4.8β') αποδίδει τη σχέση  $-\dot{x} \sin \psi + \dot{y} \cos \psi = v \Rightarrow$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\sin \psi & \cos \psi & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}^\top(\boldsymbol{\eta})} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = v \Rightarrow \mathbf{a}^\top(\boldsymbol{\eta})\dot{\boldsymbol{\eta}} = v, \quad (4.9)$$

η οποία για  $v \neq 0$  αποτελεί έναν μη-καταστατικό περιορισμό του μονόκυκλου. Η εξίσωση (4.9) συνεπάγεται ότι το σημείο  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$  είναι σημείο ισορροπίας αν και μόνο αν  $v|_{\boldsymbol{\eta}=\mathbf{0}} = 0$ , δηλαδή αν και μόνο αν ο περιορισμός (4.9) γίνεται καταστατικός στο σημείο  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ .

Συνεπώς, διαιρούμε το σύστημα (4.8) στα υποσυστήματα  $\Sigma_1, \Sigma_2$ , όπου το  $\Sigma_1$  περιλαμβάνει τις κινηματικές εξισώσεις (4.8α')-(4.8γ') και τη δυναμική εξίσωση (4.8ε'), ενώ οι δυναμικές εξισώσεις (4.8δ'), (4.8ζ') αποτελούν το υποσύστημα  $\Sigma_2$ . Οι ταχύτητες  $u, r$  αποτελούν τις εικονικές εισόδους ελέγχου για το υποσύστημα  $\Sigma_1$ , ενώ οι πραγματικές εισοδοί  $\tau_u, \tau_r$  ελέγχουν το υποσύστημα  $\Sigma_2$ .

Ο περιορισμός (4.9) χρησιμοποιείται στην εφαρμογή των βημάτων που περιγράφονται στο κεφάλαιο 3, για τη σχεδίαση των νόμων ελέγχου για το υποσύστημα  $\Sigma_1$ : με βάση τη δομή του διανύσματος  $\mathbf{a}^\top(\boldsymbol{\eta})$ , οι συντεταγμένες  $\mathbf{r} = [x \ y]^\top \triangleq \mathbf{x}$  είναι οι leafwise μεταβλητές κατάστασης, και η μεταβλητή  $\psi$  η transverse μεταβλητή κατάστασης. Συνεπώς, ορίζουμε ένα  $N = 2$  διαστατο διανυσματικό πεδίο αναφοράς  $\mathbf{F}(\cdot) = F_x \frac{\partial}{\partial x} + F_y \frac{\partial}{\partial y}$  από την οικογένεια (3.6), συναρτήσει των μεταβλητών  $x, y$ . Για  $\lambda = 3$  και  $\mathbf{p} = [1 \ 0]^\top$ , οι συνιστώσες του διανυσματικού πεδίου γράφονται ως:

$$F_x = 2x^2 - y^2, \quad F_y = 3xy. \quad (4.10)$$

Το διανυσματικό πεδίο (4.10) είναι μη-ιδιόμορφο παντού στον  $\mathbb{R}^2$  εκτός του σημείου  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$  και όλες οι γραμμές ροής συγκλίνουν στο  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$  με διεύθυνση  $\phi \rightarrow 0$ . Συνεπώς, ο κινηματικός έλεγχος έγκεται στη σχεδίαση νόμων ελέγχου τέτοιων ώστε το όχημα να ευθυγραμμίζεται με τη διεύθυνση του πεδίου έως ότου συγκλίνει στο σημείο  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ . Επίσης, στη συγκεκριμένη περίπτωση το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}(\cdot)$  ορίζεται συναρτήσει του σφάλματος θέσης  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \mathbf{r}_d$ , ώστε όλες οι γραμμές ροής να συγκλίνουν στο  $\mathbf{r}_d$ . Άρα, για  $\mathbf{p} = [1 \ 0]^\top$  και  $\lambda = 3$  έχουμε τις συνιστώσες:

$$F_x = 2x_1^2 - y_1^2, \quad F_y = 3x_1y_1, \quad (4.11)$$

όπου  $\mathbf{r}_1 = [x_1 \ y_1]^\top$ ,  $x_1 = x - x_d$ ,  $y_1 = y - y_d$ .

#### Σχεδίαση Ελέγχου για το Υποσύστημα $\Sigma_1$

**Τηορημ 1** Οι τροχιές  $\boldsymbol{\eta}(t) = [x(t) \ y(t) \ \psi(t)]^\top$  του  $\Sigma_1$  συγκλίνουν ασυμπτωτικά στο σημείο  $\boldsymbol{\eta}_d = [x_d \ y_d \ 0]^\top$  υπό την επίδραση της εισόδου  $u = \gamma_1(\cdot)$ ,  $r = \gamma_2(\cdot)$

$$\gamma_1(\cdot) = -k_1 \operatorname{sgn} \left( \mathbf{r}_1^\top \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{bmatrix} \right) \tanh(\mu \|\mathbf{r}_1\|), \quad (4.12\alpha')$$

$$\gamma_2(\cdot) = -k_2(\psi - \phi) + \dot{\phi}, \quad (4.12\beta')$$

όπου  $k_1, k_2 > 0$ ,  $\phi = \text{atan2}(F_y, F_x)$  ο προσανατολισμός του πεδίου (;;) στο  $(x, y)$  και η συνάρτηση  $\text{sgn}(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 1\}$  ορίζεται ως:  $\text{sgn}(a) = \begin{cases} 1, & \text{if } a \geq 0, \\ -1, & \text{if } a < 0. \end{cases}$

Η απόδειξη δίνεται στην αγγλική έκδοση της διατριβής.

## Σχεδίαση Ελέγχου για το Υποσύστημα $\Sigma_2$

**Τηοροεμ 2** Οι ταχύτητες  $u(t)$ ,  $r(t)$  συγκλίνουν στις εικονικές εισόδους ελέγχου  $\gamma_1(\cdot)$ ,  $\gamma_2(\cdot)$ , αντίστοιχα, υπό την επίδραση των νόμων ελέγχου  $\tau_u = \xi_1(\cdot)$ ,  $\tau_r = \xi_2(\cdot)$ :

$$\tau_u = m_{11}\alpha - m_{22}vr - X_u u - X_{u|u}|u|u, \quad (4.13\alpha')$$

$$\tau_r = m_{33}\beta - (m_{11} - m_{22})uv - N_r r - N_{r|r}|r|r, \quad (4.13\beta')$$

όπου

$$\alpha = -k_u(u - \gamma_1(\cdot)) + (\nabla\gamma_1)\dot{\eta}, \quad k_u > 0, \quad (4.14\alpha')$$

$$\beta = -k_r(r - \gamma_2(\cdot)) + (\nabla\gamma_2)\dot{\eta}, \quad k_r > 0, \quad (4.14\beta')$$

και  $\nabla\gamma_\kappa = \begin{bmatrix} \frac{\partial\gamma_\kappa}{\partial x} & \frac{\partial\gamma_\kappa}{\partial y} & \frac{\partial\gamma_\kappa}{\partial\psi} \end{bmatrix}$  το gradient της συνάρτησης  $\gamma_\kappa$ ,  $\kappa = 1, 2$ .

Η απόδειξη δίνεται στην αγγλική έκδοση της διατριβής.

Οι τροχιές του συστήματος  $\mathbf{x}(t)$  υπό τον έλεγχο (4.13), (4.14), (4.12) απεικονίζονται στο Σχήμα 4.3, ενώ οι εισοδοι ελέγχου  $\tau_u$ ,  $\tau_r$  και οι δυνάμεις των προωθητήρων  $F_p$ ,  $F_{st}$  απεικονίζονται στο Σχήμα 4.4(α') και Σχήμα 4.4(β'), αντίστοιχα.

### 4.3.3 Σχεδίαση Βιώσιμων Ελεγκτών

Το σύνολο βιωσιμότητας  $K$  του συστήματος (4.8) καθορίζεται από τους ακόλουθους περιορισμούς:

- Ο στόχος πρέπει να βρίσκεται πάντοτε στο οπτικό πεδίο της κάμερας,  $[-y_T, y_T] \subseteq [f_2, f_1]$ , ώστε να υπάρχει μέτρηση από το σύστημα αισθητήρων.
- Η απόσταση των λέιζερ  $L_m$  από την επιφάνεια πρέπει να ικανοποιεί συγκεκριμένα όρια,  $L_{\min} \leq L_m \leq L_{\max}$ , ώστε οι κουκκίδες να είναι ορατές και να εντοπίζονται από τους αλγορίθμους τεχνητής όρασης.

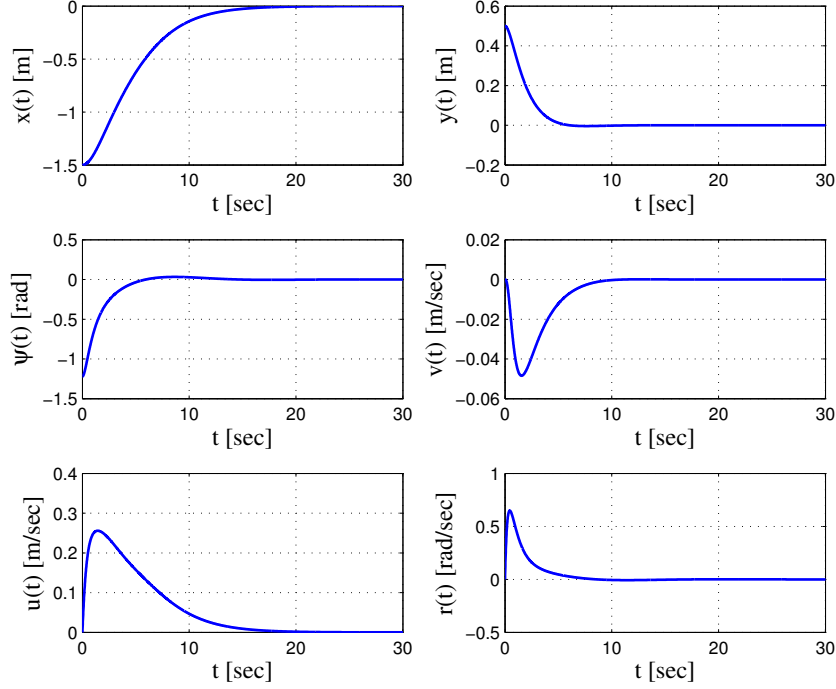
Οι προ:υποθέσεις αυτές επιβάλλουν  $\mu = 4$  μη γραμμικούς περιορισμούς της μορφής  $c_j(x, y, \psi) \leq 0$ ,  $j \in \mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4\}$ , που γράφονται αναλυτικά ως:

$$c_1 : y - x \tan(\psi - \alpha) + y_T \leq 0, \quad (4.15\alpha')$$

$$c_2 : y_T - y + x \tan(\psi + \alpha) \leq 0, \quad (4.15\beta')$$

$$c_3 : L_{\min} + \frac{x}{\cos\psi} \leq 0, \quad (4.15\gamma')$$

$$c_4 : -\frac{x}{\cos\psi} - L_{\max} \leq 0. \quad (4.15\delta')$$



Σχήμα 4.3: Οι τροχιές  $\mathbf{x}(t)$  του συστήματος κλειστού βρόχου.

Ο νόμος ελέγχου (4.12) αποδίδει λύσεις που από κάθε  $\boldsymbol{\eta}_0$  στο  $K$  συγκλίνουν στο σημείο  $\boldsymbol{\eta}_d$  στο  $K$ . Ωστόσο, οι τροχιές μπορεί να μην είναι βιώσιμες στο  $K$ , εφόσον μπορεί να βρεθούν εκτός του  $K$  για πεπερασμένο χρονικό διάστημα, βλέπε Σχήμα 4.5: Το όχημα ξεκινά από  $\boldsymbol{\eta}_0 \in K$ , ωστόσο οι τροχιές  $\boldsymbol{\eta}(t)$  οδηγούνται εκτός του  $K$ , και ο στόχος δεν είναι ορατός στο πεδίο της κάμερας. Πιο συγκεκριμένα, ο περιορισμός  $c_1(\cdot)$  γίνεται ενεργός όταν ο στόχος βρεθεί στο αριστερό μέρος του οπτικού πεδίου της κάμερας, όπου  $f_2 = -y_T$ , δηλαδή στο υποσύνολο  $\mathcal{Z}_1 = \{\mathbf{z} \in \partial K \mid c_1(\cdot) = y - x \tan(\psi - \alpha) + y_T = 0\}$ .

Οι βιώσιμες λύσεις για το σύστημα στο  $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_1$  ικανοποιούν τη συνθήκη  $\nabla c_1 \dot{\mathbf{z}} \leq 0 \Rightarrow [-\tan(\psi - \alpha) \ 1 \ -x \sec^2(\psi - \alpha)] \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$

0. Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις του συστήματος έχουμε:

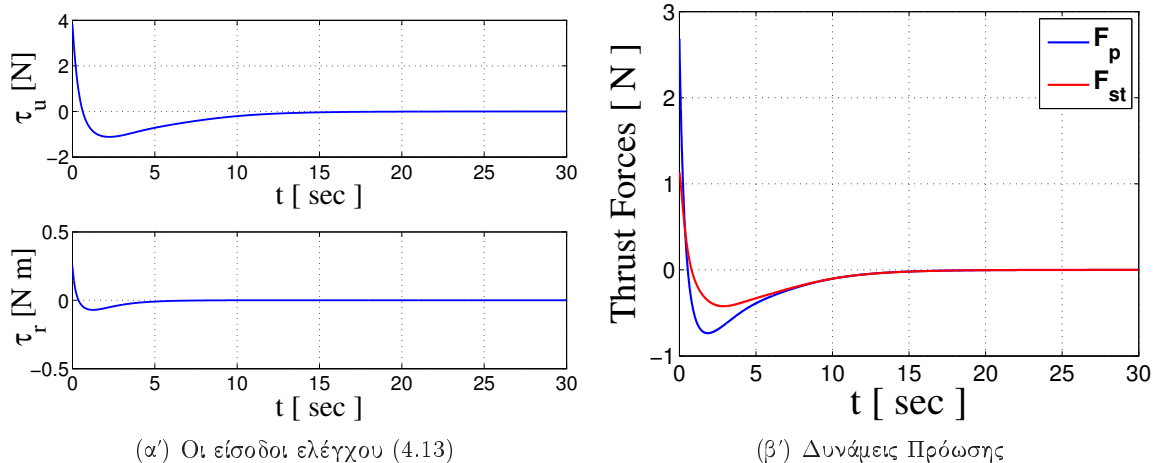
$$[-\tan(\psi - \alpha) \cos \psi + \sin \psi] u + [\tan(\psi - \alpha) \sin \psi + \cos \psi] v - x \sec^2(\psi - \alpha) r \leq 0. \quad (4.16)$$

Συνεπώς, η συνθήκη (4.16) υποδεικνύει την επιλογή βιώσιμων ελεγκτών στο  $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_1$ .

Μία βιώσιμη επιλογή  $r(\mathbf{z})$  είναι η ρύθμιση του προσανατολισμού  $\psi$  του οχήματος στη γωνία  $\phi_t = \text{atan2}(-y, -x)$ , ώστε ο στόχος να κεντραριστεί στο οπτικό πεδίο της κάμερας.

Συνεπώς, οι νόμοι ελέγχου (4.12) ανασχεδιάζονται ώστε να είναι βιώσιμοι στο  $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_j$ ,  $j \in \mathcal{J}$ , θεωρώντας το σήμα διακοπόμενου ελέγχου

$$\sigma_j(c_j) = \begin{cases} 0, & \text{if } c_{j \min} < c_j \leq 0 \\ \frac{c_j - c_{j \max}}{c_{j \min} - c_{j \max}}, & \text{if } c_{j \max} \leq c_j \leq c_{j \min} \\ 1, & \text{if } c_j < c_{j \max} \end{cases} \quad (4.17)$$



Σχήμα 4.4: Οι είσοδοι ελέγχου και δυνάμεις πρόωσης.

(Σχήμα 4.3.3), και το νόμο ελέγχου:

$$u = \sigma_j(c_j)u_{conv} + (1 - \sigma_j(c_j))u_{viab_j}, \quad (4.18\alpha')$$

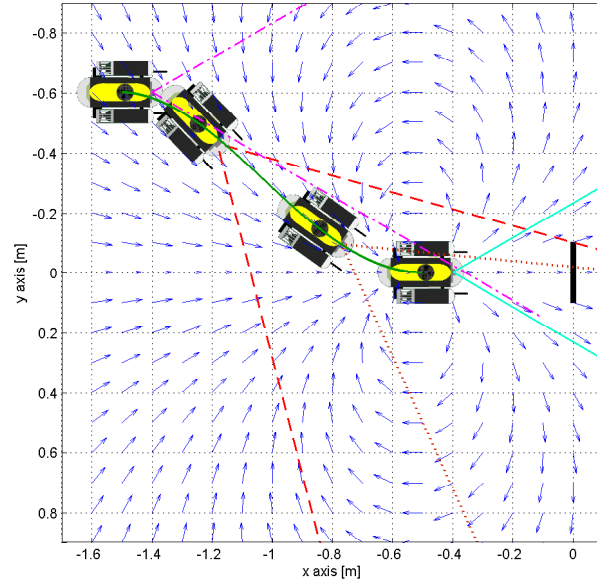
$$r = \sigma_j(c_j)r_{conv} + (1 - \sigma_j(c_j))r_{viab_j}, \quad (4.18\beta')$$

όπου  $c_{j \min}$ ,  $c_{j \max}$  τιμές της συνάρτησης περιορισμών  $c_j(\cdot)$ ,  $u_{conv}$ ,  $r_{conv}$  οι λύσεις ελέγχου (4.12) και  $u_{viab_j}$ ,  $r_{viab_j}$  βιώσιμες λύσεις  $z \in \mathcal{Z}_j$ . Έτσι, αν  $c_j(z) = 0$  έχουμε  $\sigma_j(c_j) = 0$ , και άρα η είσοδος που δίνεται από τη σχέση (4.18) στο  $z \in \mathcal{Z}_j$  είναι βιώσιμη.

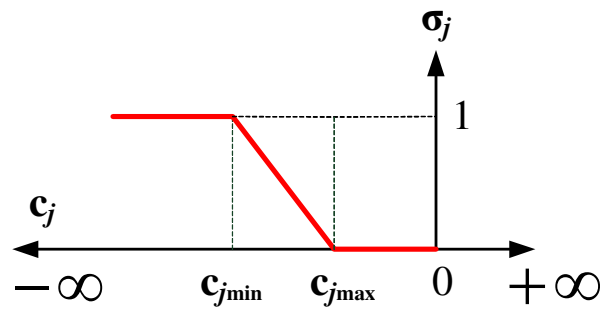
Για την αξιολόγηση της μεθόδου, θεωρούμε το σενάριο στο Σχήμα 4.7. Το όχημα ξεκινά από αρχικές συνθήκες  $\eta_0$  όπου οι περιορισμοί  $c_2(\cdot)$ ,  $c_4(\cdot)$  είναι ενεργοί. Επιλέγουμε τον νόμο ελέγχου (4.12) ως μία βιώσιμη λύση, με τα κέρδη  $k_1$ ,  $k_2$  τέτοια ώστε κανείς περιορισμός να μην παραβιάζεται. Το όχημα κινείται προς το επιθυμητό σημείο  $\eta_d$  υπό το νόμο ελέγχου (;;), ενώ οι περιορισμοί  $c_4(\cdot)$ ,  $c_1(\cdot)$  τείνουν προς το μηδέν σε κάποια χρονικά σημεία, ενεργοποιώντας έτσι τους αντίστοιχους βιώσιμους νόμους ελέγχου. Το όχημα προσεγγίζει το σύνολο  $G$  υνδερ (;;) για  $j = 1$ : δηλαδή η επίδραση του  $c_1(\cdot)$  παραμένει ενεργή, κι έτσι το όχημα δεν συγκλίνει στο σημείο  $\eta_d = [-0.5 \ 0 \ 0]^T$ , αλλά σε κάποιο σημείο στο  $G$ . Για τη σταθεροποίηση του συστήματος σε σημείο μέσα στο  $G$ , το σύστημα ελέγχεται με τον νόμο ελέγχου που αντιστοιχεί στο  $j = 1$  σε μια μικρή περιοχή γύρω από τη θέση  $r_d$  (μπλε πορεία).

Η χρονική εξέλιξη των συναρτήσεων  $c_j(\eta(t))$ ,  $j \in \mathcal{J}$  απεικονίζεται στο Σχήμα 4.8: η τιμή των  $c_j(\cdot)$  παραμένει πάντοτε μη θετική, που συνεπάγεται ότι η βιωσιμότητα διατηρείται.

Τέλος, το Σχήμα 4.9 απεικονίζει την πορεία του συστήματος υπό το νόμο ελέγχου (;;) για μια αρχική συνθήκη στο  $K$ , τέτοια ώστε οι βιώσιμοι νόμοι ελέγχου είναι ανενεργοί (πράσινη πορεία). Καθώς το όχημα συγκλίνει προς το σημείο  $\eta_d$  το σήμα ελέγχου  $\sigma^* = \sigma_2$  γίνεται  $< 1$ , ενεργοποιώντας έτσι τον αντίστοιχο βιώσιμο ελεγκτή για κάποιο χρονικό διάστημα (κόκκινη πορεία). Το όχημα απομακρύνεται από το όριο  $\mathcal{Z}_2$  του συνόλου  $K$ , αποδίδοντας  $\sigma^* = 1$ , και τελικά συγκλίνει στο σημείο  $\eta_d$ .



Σχήμα 4.5: Η λύση  $\eta(t)$  υπό τον έλεγχο (4.12) μπορεί να παραβιάσει τη βιωσιμότητα του συστήματος.



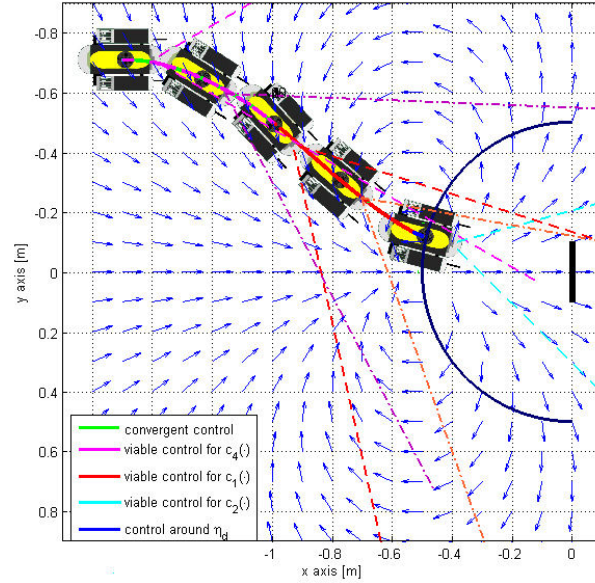
Σχήμα 4.6: Το σήμα διακοπόμενου ελέγχου  $\sigma_j(c_j)$ .

#### 4.4 Σχεδίαση Βιώσιμων Ελεγκτών στην Περίπτωση Φραγμένων Εξωτερικών Διαταραχών

Έστω ότι το όχημα κινείται υπό την επίδραση ενός ρεύματος με ταχύτητα  $V_c$  και διεύθυνση  $\beta_c$  ως προς το αδρανειακό  $\mathcal{G}$ . Μελετάμε την ευρωστία των ελεγκτών προς μία κλάση φραγμένων διαταραχών που προκύπτουν από τη συγκεκριμένη θεώρηση, τέτοια ώστε η ταχύτητα του ρεύματος να είναι το πολύ ίση με ένα γνωστό άνω φράγμα.

Η ανάλυση της ευρωστίας των ελεγκτών παρουσιάζεται λεπτομερώς στην αγγλική έκδοση της διατριβής.

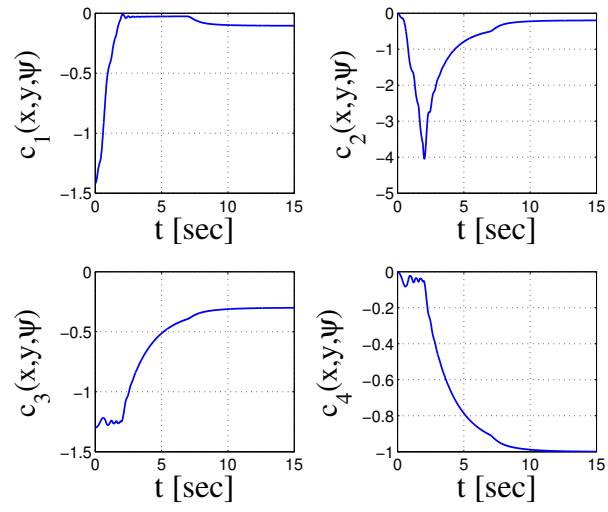




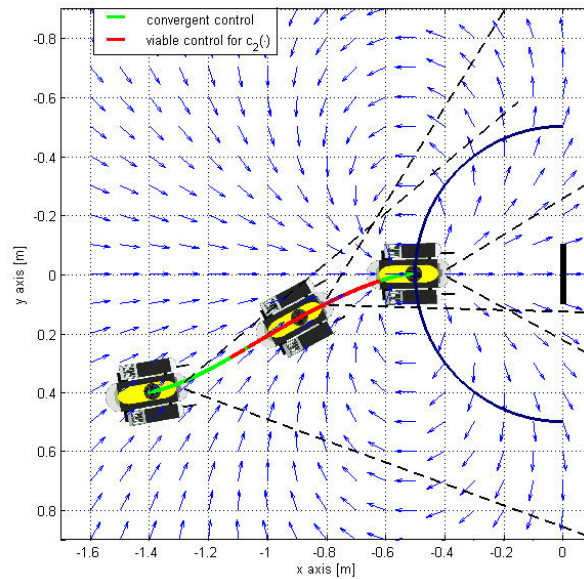
Σχήμα 4.7: Η πορεία  $x(t)$ ,  $y(t)$  του συστήματος υπό το νόμο ελέγχου ( $;;$ ). Το όχημα συγκλίνει σε ένα σημείο του συνόλου  $G$ .

## 4.5 Συμπεράσματα

Το παρόν κεφάλαιο παρουσίασε μία μέθοδο για τη σχεδίαση ελέγχου σε μη ολονομικά συστήματα που υπόκεινται σε περιορισμούς κατάστασης που ορίζουν ένα σύνολο βιωσιμότητας  $K$ . Με χρήση εννοιών από τη θεωρία βιωσιμότητας, δίνονται οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την επιλογή βιώσιμων λύσεων. Επίσης, μία οικογένεια μη-ολονομικών λύσεων ανασχεδιάζεται μέσω διακοπτόμενου ελέγχου, ώστε οι τροχιές του συστήματος να συγκλίνουν σε ένα σύνολο  $G$  χωρίς ποτέ να διαφεύγουν από το  $K$ . Εξετάστηκε η περίπτωση ενός υπο-επενεργούμενου υποβρύχιου οχήματος που υπόκειται σε περιορισμούς παράστασης και σε εξωτερικές φραγμένες διαταραχές.



Σχήμα 4.8: Η τιμή των συναρτήσεων περιορισμών παραμένει αρνητική.



Σχήμα 4.9: Το όχημα κινείται υπό το νόμο ελέγχου (4.18) όπου  $\sigma^* = 1$ . Όταν ο περιορισμός  $c_2(\cdot)$  τείνει στο μηδέν, το σήμα ελέγχου  $\sigma_2$  γίνεται  $< 1$ . Το όχημα συγκλίνει τελικά στο  $\eta_d = [-0.5 \ 0 \ 0]^T$ .

---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### Διατήρηση Ορατότητας σε Σχηματισμούς Ηγέτη-Οπαδού σε Περιβάλλοντα με Εμπόδια

#### Περίληψη

Το παρόν κεφάλαιο προτείνει μία λύση στο πρόβλημα του ελέγχου ενός σχηματισμού δύο τροχοφόρων ρομπότ, τα οποία μοντελοποιούνται ως μονόκυκλοι, τα οποία κινούνται σε ένα γνωστό περιβάλλον με εμπόδια με περιορισμούς ορατότητας. Οι περιορισμοί ορατότητας μοντελοποιούνται ως ανισοτικοί περιορισμοί, και ορίζουν το σύνολο ορατότητας  $K$ . Το πρόβλημα της διατήρησης της ορατότητας αναδιατυπώνεται ως ο έλεγχος των ρομπότ έτσι ώστε οι τροχιές του συστήματος που εκκινούν στο σύνολο  $K$  να παραμένουν στο  $K$ . Παρουσιάζονται οι συνθήκες διατήρησης της ορατότητας, καθώς και ένα σχήμα ελέγχου ώστε ο οπαδός να συγκλίνει και να παραμένει σε ένα σύνολο θέσεων και προσανατολισμών ως προς τον ηγέτη, ενώ ταυτόχρονα διατηρεί την οπτική επαφή με αυτόν. Με βάση αυτό το σχήμα ελέγχου, προτείνεται επίσης ένα σχήμα συνεργατικού ελέγχου για την κίνηση του σχηματισμού μέσα σε ένα περιβάλλον με εμπόδια, το οποίο εγγυάται την αποφυγή των συγκρούσεων και τη διατήρηση της οπτικής επαφής. Οι λύσεις είναι αποκεντρωμένου ελέγχου, με την έννοια ότι δεν υπάρχει ευθεία επικοινωνία μεταξύ των ρομπότ. Οι αλγόριθμοι αξιολογούνται μέσω προσομοιώσεων.

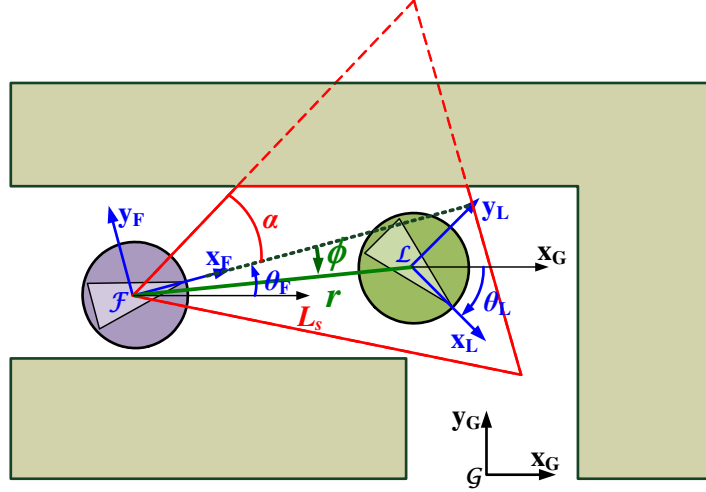
#### 5.1 Μαθηματική Μοντελοποίηση

##### 5.1.1 Κινηματική Μοντελοποίηση Ηγέτη-Οπαδού

Έστω δύο τροχοφόρα ρομπότ, που μοντελοποιούνται ως μονόκυκλοι, που κινούνται σε σχηματισμό  $L-F$ . Η κίνηση του οπαδού  $F$  ως προς τον ηγέτη  $L$  δίνεται ως

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \beta & 0 \\ \sin \beta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_F \\ w_F \end{bmatrix}}_{f(\mathbf{q}, \mathbf{v}_F)} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & y \\ 0 & -x \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_L \\ w_L \end{bmatrix}}_{g(\mathbf{q}, \mathbf{v}_L)}, \quad (5.1)$$

όπου  $\mathbf{q} = [x \ y \ \beta]^\top \in \mathcal{C}$  το διάνυσμα κατάστασης, που περιλαμβάνει τη θέση  $\mathbf{r} = [x \ y]^\top$  και ο προσανατολισμός  $\beta$  του  $F$  ως προς το σωματόδετο σύστημα του ηγέτη  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{C}$  ο χώρος κατάστασης,  $\mathbf{v}_F = [u_F \ w_F]^\top \in \mathcal{U}_F$  το διάνυσμα των εισόδων ελέγχου,  $\mathcal{U}_F \subset \mathbb{R}^2$  ο χώρος ελέγχου, και  $\mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{v}_L) \in \mathbb{R}^3$  ένα διανυσματικό πεδίο διαταράξεων, όπου  $\mathbf{v}_L = [u_L \ w_L]^\top \in \mathcal{U}_L \subset \mathbb{R}^2$  το διάνυσμα των εισόδων ελέγχου του ηγέτη  $L$ . Το διανυσματικό πεδίο διαταράξεων μηδενίζεται αν και μόνο αν  $\mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{v}_L) = \mathbf{0}$ , το οποίο ισχύει αν και μόνο αν  $\mathbf{v}_L = \mathbf{0}$ . Άρα, η κίνηση του ηγέτη  $L$  αποτελεί μία διατάραξη στην κίνηση του οπαδού  $F$ .



Σχήμα 5.1: Το σύστημα μέσα σε ένα περιβάλλον με εμπόδια.

### 5.1.2 Περιορισμοί Ορατότητας

Το ρομπότ  $F$  διαθέτει μία κάμερα με γωνία θέασης  $2\alpha < \pi$ , και μπορεί να διακρίνει αντικείμενα τα οποία βρίσκονται εντός μιας μέγιστης εμβέλειας  $L_s$  όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.1. Οι περιορισμοί αυτοί ορίζουν έναν κώνο ορατότητας για το ρομπότ  $F$ . Υποθέτουμε επίσης ότι ο  $F$  χωροθετείται ως προς τον  $L$ , δηλαδή ότι η απόσταση  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , και η γωνία  $\phi \in (-\pi, \pi]$  είναι γνωστές από το σύστημα αίσθησης. Συνεπώς, σε κάθε χρονική στιγμή  $t$ , ο  $F$  μπορεί να εντοπίσει τον  $L$  αν και μόνο αν ο  $L$  βρίσκεται στον κώνο ορατότητας, δηλαδή αν

$$|\phi| \leq \alpha \text{ ανδ } r \leq L_s(\phi) = \frac{L_s \cos \alpha}{\cos \phi}. \quad (5.2)$$

Οι περιορισμοί αυτοί ορίζουν το υποσύνολο  $K$  του 'χωρου κατάστασης  $\mathcal{C}$ , που ορίζεται ως

$$K = \{\mathbf{q} \in \mathcal{C} \mid h_k(\mathbf{q}) \leq 0, k = 1, 2\}, \quad (5.3)$$

όπου  $h_1 = |\phi| - \alpha$  και  $h_2 = r - L_s(\phi)$ , το οποίο ονομάζουμε *σύνολο ορατότητας*  $K$ . Το σύνολο  $K$  περιλαμβάνει το σύνολο των καταστάσεων  $\mathbf{q}$  για τις οποίες διατηρείται η ορατότητα. Συνεπώς, ελέγχοντας τα ρομπότ  $F, L$  έτσι ώστε οι τροχιές  $\mathbf{q}(t)$  να παραμένουν πάντοτε στο  $K$ , συνεπάγεται ότι η ορατότητα διατηρείται πάντοτε.

## 5.2 Σχεδίαση Ελέγχου

Έστω το σύστημα (5.1), όπου ο  $L$  κινείται με  $u_L \neq 0, w_L \neq 0$  σε ένα περιβάλλον χωρίς εμπόδια. Ο  $F$  χωροθετείται ως προς τον  $L$ , δηλαδή η θέση  $(x, y)$  και ο προσανατολισμός  $\beta$  ως προς το σύστημα συντεταγμένων του  $\mathcal{L}$  είναι γνωστά στον  $F$ . Ωστόσο, ο  $F$  δεν γνωρίζει το σχέδιο πλοήγησης του  $L$ , ούτε τις ταχύτητες  $u_L(t), w_L(t)$  σε κάθε χρονική στιγμή  $t$ . Θεωρούμε ότι ο  $F$  γνωρίζει τα άνω όρια των ταχυτήτων  $u_{LM}, w_{LM}$  του  $L$ .

Ζητείται ο  $F$  να συγκλίνει σε μια περιοχή  $\mathcal{B}(\mathbf{r}_d, \epsilon_r)$  ακτίνας  $\epsilon_r > 0$  γύρω από μία επιθυμητή θέση  $\mathbf{r}_d$ , όπου  $\mathbf{r}_d \in \mathcal{M}$ .

**Τηοορευμ 1** Οι τροχιές  $\mathbf{r}(t) = [x(t) \ y(t)]^\top$  του συστήματος (5.1) εισέρχονται σε μια περιοχή  $\mathcal{B}(\mathbf{r}_d, \epsilon_r)$  γύρω από την επιθυμητή θέση  $\mathbf{r}_d$  (Σχήμα ;;), υπό το νόμο ελέγχου  $\mathbf{v}_F = [u_F \ w_F]^\top$  όπου

$$u_F = -k_1 \operatorname{sgn} \left( \mathbf{r}_1^\top \begin{bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{bmatrix} \right) \|\mathbf{r}_1\| - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}^\top \mathbf{r}_1) u_{LM}, \quad (5.4\alpha')$$

$$w_F = -k_2(\beta - \varphi) + \dot{\varphi}, \quad (5.4\beta')$$

όπου  $k_1, k_2 > 0$ ,  $\varphi = \operatorname{atan2}(F_y, F_x)$ ,  $u_{LM}$  το άνω φράγμα της γραμμικής ταχύτητας του L, και  $\epsilon_r > \frac{|w_L|}{\sqrt{k_1 k_2}}$ .

Η απόδειξη δίνεται στην αγγλική έκδοση της διατριβής.

### 5.2.1 Διατήρηση ορατότητας

Η ορατότητα διατηρείται εφόσον ισχύει η συνθήκη

$$\dot{h}_k(\mathbf{q}) = \nabla h_k(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \nabla h_k(\mathbf{q}) \mathbf{G}(\mathbf{q}) \mathbf{v}_F(\mathbf{q}) < 0, \quad (5.5)$$

για κάθε  $\mathbf{q} \in \partial K$ ,  $\forall k$ . Η αναλυτική αιτιολόγηση δίνεται στην αγγλική έκδοση της διατριβής.

## 5.3 Προγραμματισμός κίνησης σε περιβάλλοντα με εμπόδια

### 5.3.1 Σχεδίαση Ελέγχου

Για την κίνηση του σχηματισμού L–F σε ένα δομημένο περιβάλλον διαδρόμων, πρώτα διαιρούμε το χώρο σε ορθογωνικά κελιά. Ο L διαθέτει ένα σχέδιο κίνησης που υποδεικνύει τη διαδοχική σειρά των κελιών από τα οποία θα διέλθει, έως ότου συγκλίνει σε ένα τελικό σημείο  $\mathbf{q}_{dL}$ . Σε κάθε κελί  $i$  ορίζεται ένα διπολικό πεδίο (;;), έτσι ώστε οι γραμμές ροής να συγκλίνουν στο εσωτερικό του διαδοχικού κελιού  $i + 1$ . Η ιδέα είναι παρόμοια με την προσέγγιση της εργασίας [LL09].

Ο L ελέγχεται ώστε να προσανατολίζεται και να κινείται κατά μήκος του διανυσματικού πεδίου μέσα σε κάθε κελί. Οι είσοδοι ελέγχου για τον L ορίζονται ως

$$u_L = \operatorname{const} \leq u_{LM}, \quad (5.6\alpha')$$

$$w_L = -k_L(\theta_L - \varphi_{Li}) + \dot{\varphi}_{Li}, \quad (5.6\beta')$$

όπου  $\varphi_{Li}$  ο προσανατολισμός του διανυσματικού πεδίου στο κελί  $i$ ,  $k_L > 0$ . Η αποφυγή των εμποδίων για τον L είναι εξασφαλισμένη εφόσον το διανυσματικό πεδίο δείχνει το εσωτερικό του ελεύθερου χώρου.

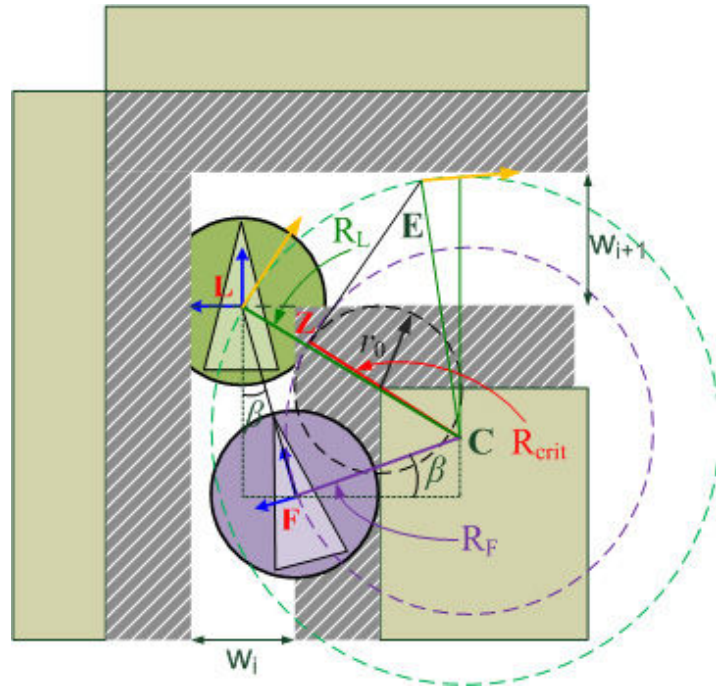
Οι τροχιές του L καθορίζουν την επιθυμητή θέση  $\mathbf{r}_d(t) \in \mathcal{V}$  για τον F. Προφανώς, η θέση  $\mathbf{r}_d(t)$  πρέπει να βρίσκεται πάντοτε στον ελεύθερο χώρο.

Για να εξασφαλίσουμε αυτή τη συνθήκη, επιβάλλουμε στον L να κινηθεί με μία ελάχιστη ακτίνα στροφής  $R_L$  από το κελί  $i$  στο κελί  $i + 1$ , ώστε οι τροχιές  $\mathbf{q}_F(t)$  του F να μην εισέρχονται στο

χώρο των εμποδίων. Ο σχηματισμός L–F τότε συμπεριφέρεται ως ένα όχημα (L) που σύρει ένα ρυμουλκούμενο (F) [BMSS94]. Συνεπώς, αν ο L κινείται σε κύκλο με κέντρο  $C$  και ακτίνα  $R_L$  όταν μπει στο κελί  $i + 1$ , τότε ο F θα κινηθεί σε κύκλο με το ίδιο κέντρο  $C$  και ακτίνα  $R_F = \sqrt{R_L^2 - r_d^2}$ .

Η ανάλυση για την επιλογή μιας ασφαλούς ακτίνας  $R_L$  (Σχήμα 5.2) δίνεται στην αγγλική έκδοση της διατριβής. Η συνθήκη για την ακτίνα  $R_L$  προκύπτει ως:

$$\sqrt{r_d^2 + R_{F\omega}^2} \leq R_L \leq w_{i+1} + R_{F\omega} \frac{w_i}{2r_d} + \sqrt{r_d^2 - \frac{w_i^2}{4}}, \quad (5.7)$$

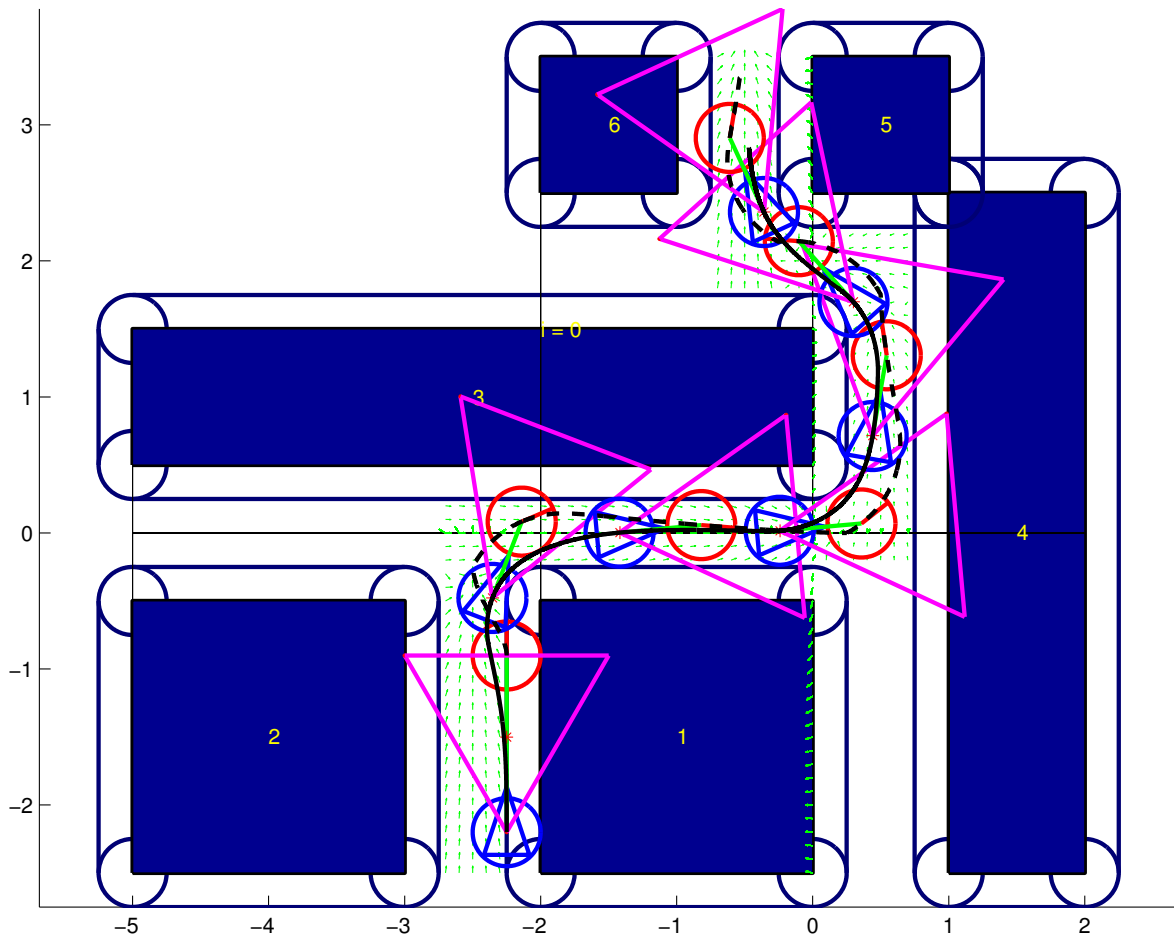


Σχήμα 5.2: Αφότου εξέλθει από το κελί  $i$ , ο ηγέτης κινείται μέσα στο κελί  $i + 1$  κατά μήκος ενός κύκλου με ακτίνα  $R_L$  που ικανοποιεί (5.7).

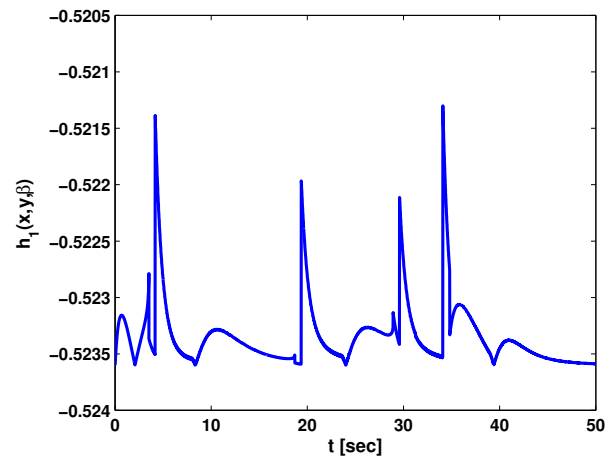
### 5.3.2 Αποτελέσματα Προσομοιώσεων

Οι προτεινόμενοι αλγόριθμοι αξιολογούνται μέσω προσομοιώσεων. Το σύστημα αποφεύγει τις συγκρούσεις με τα εμπόδια του χώρου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.3, ενώ οι τιμές των περιορισμών  $h_k(x, y, \beta)$ ,  $k = 1, 2$  παραμένουν αρνητικές (Σχήμα 5.4), το οποίο συνεπάγεται ότι η ορατότητα διατηρείται πάντοτε.

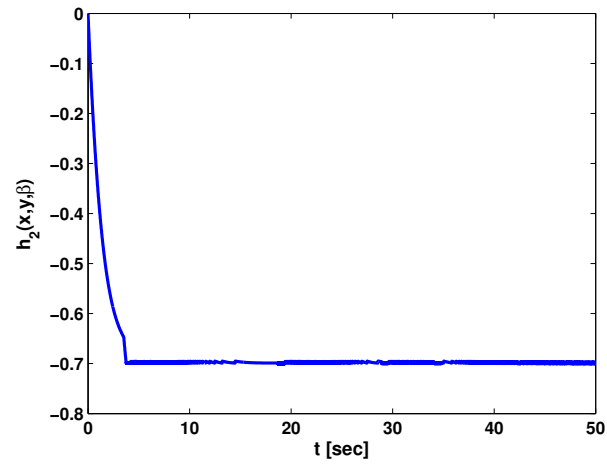
Η αναλυτική περιγραφή του σεναρίου της προσομοίωσης δίνεται στην αγγλική έκδοση της διατριβής.



Σχήμα 5.3: Το σύστημα εκκινεί από ένα σημείο  $q \in \mathcal{C}$  στο όριο του ελεύθερου χώρου, όπου ο δεύτερος περιορισμός ορατότητας είναι ενεργός για τον F.



$$(\alpha) h_1(x, y, \beta) \leq 0, \forall t.$$



$$(\beta) h_2(x, y, \beta) \leq 0, \forall t.$$

Σχήμα 5.4: Η τιμή των συναρτήσεων των περιορισμών παραμένει αρνητική.



---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

### Διατύπωση Βιωσιμότητας μέσω Βέλτιστου Ελέγχου

#### Περίληψη

Το παρόν κεφάλαιο παρουσιάζει μια διατύπωση του προβλήματος βιωσιμότητας για ένα υποεπενεργούμενο υποβρύχιο όχημα υπό την επίδραση σταθερού, γνωστού ρεύματος και περιορισμών κατάστασης, που βασίζεται σε ένα πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου. Η προσέγγιση υιοθετεί τα θεωρητικά αποτελέσματα της εργασίας [Lyg04] και υπολογίζει τον πυρήνα βιωσιμότητας του συστήματος, καθώς και ένα νόμο ελέγχου που εγγυάται ότι οι τροχιές του συστήματος που εκκινούν από τον πυρήνα θα παραμένουν για πάντα βιώσιμες.

Η ανάλυση του προβλήματος και της προτεινόμενης λύσης περιγράφεται λεπτομερώς στην αγγλική έκδοση της διατριβής.

---

## Bibliograf'ia

- [AF90] Jean-Pierre Aubin and Helene Frankowska. *Set-valued Analysis*. Birkhäuser, 1990.
- [AHP07a] A. P. Aguiar, J. P. Hespanha, and A. M. Pascoal. Switched seesaw control for the stabilization of underactuated vehicles. *IFAC Automatica*, 43(12):1997–2008, December 2007.
- [AHP07b] Antonio Pedro Aguiar, Joao P. Hespanha, and Antonio M. Pascoal. Switched seesaw control for the stabilization of underactuated vehicles. *Automatica*, 43:1997–2008, 2007.
- [AP01] A. P. Aguiar and A. M. Pascoal. Regulation of a nonholonomic autonomous underwater vehicle with parametric modeling uncertainty using Lyapunov functions. In *Proc. of the 40th IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 4178–4183, Orlando, FL, USA, December 2001.
- [AP02a] A. P. Aguiar and A. M. Pascoal. Dynamic positioning of underactuated auv in the presence of a constant unknown ocean current disturbance. In *Proc. of the 15th IFAC World Congress*, Barcelona, Spain, 2002.
- [AP02b] A. P. Aguiar and A. M. Pascoal. Global stabilization of an underactuated autonomous underwater vehicle via logic-based switching. In *Proc. of the 41st IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 3267–3272, Las Vegas, NE, USA, December 2002.
- [AP07] Antonio Pedro Aguiar and Antonio M. Pascoal. Dynamic positioning and waypoint tracking of underactuated AUVs in the presence of ocean currents. *International Journal of Control*, 80(7):1092–1108, July 2007.
- [Ast96] A. Astolfi. Discontinuous control of nonholonomic systems. *Systems and Control Letters*, 27(1):37–45, January 1996.
- [Ast97] Alessandro Astolfi. Discontinuous control of the Brockett integrator. In *Proc. of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4334–4339, San Diego, CA, USA, December 1997.
- [Aub91] Jean-Pierre Aubin. *Viability Theory*. Birkhäuser, 1991.
- [Aub01] Jean-Pierre Aubin. Viability kernels and capture basins of sets under differential inclusions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 40(3):853–881, 2001.
- [BCM09] Francesco Bullo, Jorge Cortés, and Sonia Martínez. *Distributed Control of Robotic Networks*. Applied Mathematics Series. Princeton University Press, 2009. Electronically available at <http://coordinationbook.info>.

- [BD96] Anthony Bloch and Sergey Dragunov. Stabilization and tracking in the nonholonomic integrator via sliding modes. *Systems and Control Letters*, 29(1):91–99, 1996.
- [BDK98] Anthony Bloch, Sergey Dragunov, and Michael Kinyon. Nonholonomic stabilization and isospectral flows. In *Proc. of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3581–3586, Tampa, FL, USA, December 1998.
- [BL05] Francesco Bullo and Andrew D. Lewis. *Geometric Control of Mechanical Systems*. Springer, 2005.
- [Bla99] Franco Blanchini. Set invariance in control. *Automatica*, 35(11):1747–1767, November 1999.
- [Blo03] Anthony M. Bloch. *Nonholonomic Mechanics and Control*. Springer, 2003.
- [BM08] Franco Blanchini and Stefano Miani. *Set-Theoretic Methods in Control*. Birkhauser, 2008.
- [BMCH07] Sourabh Bhattacharya, Rafael Murrieta-Cid, and Seth Hutchinson. Optimal paths for landmark-based navigation by differential-drive vehicles with field-of-view constraints. *IEEE Transactions on Robotics*, 23(1):47–59, February 2007.
- [BMSS94] L. Bushnell, B. Mirtich, A. Sahai, and M. Secor. Off-tracking bounds for a car pulling trailers with kingpin hitching. In *Proc. of the 33th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2944–2949, Lake Buena Vista, FL, USA, December 1994.
- [Boo86] William M. Boothby. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry - Second Edition*. Academic Press, INC., 1986.
- [BR95] M. K. Bennani and P. Rouchon. Robust stabilization of flat and chained systems. In *Proc. of the 3rd European Control Conference*, pages 1781–1786, Rome, Italy, September 1995.
- [BRM92] Anthony M. Bloch, Mahmut Reyhanoglu, and N. Harris McClamroch. Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(11):1746–1757, November 1992.
- [CAP05] Daniele Casagrande, Alessandro Astolfi, and Thomas Parisini. Control of nonholonomic systems: A simple stabilizing time-switching strategy. In *16th IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, July 2005.
- [CBG98] R. Colbaugh, E. Barany, and K. Glass. Adaptive stabilization of uncertain nonholonomic mechanical systems. *Robotica*, 16:181–192, 1998.
- [CLH<sup>+</sup>05] Howie Choset, Kevin Lynch, Seth Hutchinson, George Kantor, Wolfram Burgard, Lydia Kavraki, and Sebastian Thrun. *Principles of Robot Motion. Theory, Algorithms and Implementation*. MIT Press, 2005.

- [CLO99] M. L. Corradini, T. Leo, and G. Orlando. Robust stabilization of a mobile robot violating the nonholonomic constraint via quasi-sliding modes. In *Proc. of the American Control Conference*, pages 3935–3939, San Diego, California, June 1999.
- [CSVS03] Noah Cowan, Omid Shakernia, Rene Vidal, and Shankar Sastry. Vision-based follow-the-leader. In *Proc. of the 2003 IEEE/RSJ Intl. Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 1796–1801, Las Vegas, Nevada, October 2003.
- [CYZ02] J. Cheng, J. Yi, and D. Zhao. Stabilization of an underactuated surface vessel via discontinuous control. In *Proc. of the 2007 American Control Conf.*, pages 206–211, NY City, NY, USA, July 2002.
- [DDZB01] Warren E. Dixon, Darren M. Dawson, Erkan Zergeroglu, and Aman Behal. Robustness to kinematic disturbances. In *Nonlinear Control of Wheeled Mobile Robots*, volume 262 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 113–130. Springer Berlin / Heidelberg, 2001.
- [DFB10] Joseph W. Durham, Antonio Franchi, and Francesco Bullo. Distributed pursuit-evasion with limited-visibility sensors via frontier-based exploration. In *Proc. of the 2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 3562–3568, Anchorage, Alaska, May 2010.
- [DFK<sup>+</sup>02] Aveek K. Das, Rafael Fierro, Vijay Kumar, James P. Ostrowski, John Spletzer, and Camillo J. Taylor. A vision-based formation control framework. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 18(5):813–825, October 2002.
- [DG05] W. Dong and Yi Guo. Global time-varying stabilization of underactuated surface vessel. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 50(6):859–864, June 2005.
- [DJPN02] K. D. Do, Z. P. Jiang, J. Pan, and H. Nijmeijer. Global output feedback universal controller for the stabilization and tracking of underactuated ODIN—an underwater vehicle. In *Proc. of the 41st IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 504–509, Las Vegas, NE, USA, December 2002.
- [DJPN04] K. D. Do, Z. P. Jiang, J. Pan, and H. Nijmeijer. A global output-feedback controller for stabilization and tracking of underactuated ODIN: A spherical underwater vehicle. *IFAC Automatica*, 40:117–124, 2004.
- [dW01] David A. de Wolf. *Essentials of Electromagnetics for Engineering*. Cambridge University Press, 2001.
- [DXH00] Wenjie Dong, Yangsheng Xu, and Wei Huo. On stabilization of uncertain dynamic nonholonomic systems. *International Journal of Control*, 73(4):349–359, 2000.
- [FBP03] Thierry Floquet, Jean-Pierre Barbot, and Wilfrid Perruquetti. Higher-order sliding mode stabilization for a class of nonholonomic perturbed systems. *Automatica*, 39:1077–1083, 2003.
- [FLMP00] I. Fantoni, R. Lozano, F. Mazenc, and K. Y. Pettersen. Stabilization of a nonlinear underactuated hovercraft. *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control*, 10:645–654, 2000.

- [Fos02] Thor I. Fossen. *Marine Control Systems: Guidance, Navigation and Control of Ships, Rigs and Underwater Vehicles*. Marine Cybernetics, 2002.
- [GE97] John-Morten Godhavn and Olav Egeland. A Lyapunov approach to exponential stabilization of nonholonomic systems in power form. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(7):1028–1032, July 1997.
- [GH08] M. Greytak and F. Hover. Underactuated point stabilization using predictive models with application to marine vehicles. In *Proc. of the 2008 IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, pages 3756–3761, Nice, France, September 2008.
- [GMBD06] J. Ghommam, F. Mnif, A. Benali, and N. Derbel. Asymptotic backstepping stabilization of an underactuated surface vessel. *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 14(6):1150–1157, November 2006.
- [Gri99] David J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics. Third Edition*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1999.
- [Guo05] Yi Guo. Nonlinear  $H_\infty$  control of uncertain nonholonomic systems in chained forms. *International Journal of Intelligent Control and Systems*, 10(4):304–309, December 2005.
- [GWL03] S.S. Ge, Zhuping Wang, and T.H. Lee. Adaptive stabilization of uncertain nonholonomic systems by state and output feedback. *Automatica*, 39:1451–1460, 2003.
- [GWLZ01] S. S. Ge, J. Wang, T. H. Lee, and G. Y. Zhou. Adaptive robust stabilization of dynamic nonholonomic chained systems. *Journal of Robotic Systems*, 18(3):119–133, 2001.
- [Hen94] Michael Henle. *A Combinatorial Introduction to Topology*. Dover Publications, 1994.
- [HLM99] Joao P. Hespanha, Daniel Liberzon, and A. Stephen Morse. Towards the supervisory control of uncertain nonholonomic systems. In *Proc. of the American Control Conference*, pages 3520–3524, San Diego, California, June 1999.
- [HM99] Joao P. Hespanha and A. Stephen Morse. Stabilization of non-holonomic integrators via logic-based switching. *Automatica*, 35(3):385–393, 1999.
- [Jia99] Zhong-Ping Jiang. A unified Lyapunov framework for stabilization and tracking of nonholonomic systems. In *Proc. of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2088–2093, Phoenix, Arizona, USA, December 1999.
- [Jia00] Zhong-Ping Jiang. Robust exponential regulation of nonholonomic systems with uncertainties. *Automatica*, 36:189–209, 2000.
- [KBH02] T. Kim, T. Basar, and In-Joong Ha. Asymptotic stabilization of an underactuated surface vessel via logic-based control. In *Proc. of the 2002 American Control Conf.*, pages 4678–4683, Anchorage, AL, USA, May 2002.
- [Kha02] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems. Third Edition*. Prentice-Hall Inc., 2002.

- [KM96] Ilya Kolmanovsky and N. Harris McClamroch. Hybrid feedback laws for a class of cascade nonlinear control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(9):1271–1282, September 1996.
- [KPK06] G. C. Karras, D. Panagou, and K. J. Kyriakopoulos. Target-referenced localization of an underwater vehicle using a Laser-based Vision System. In *Proc. of the 2006 MTS/IEEE OCEANS*, Boston, MA, USA, September 2006.
- [KR05] George Kantor and Alfred A. Rizzi. Feedback control of underactuated systems via sequential composition: Visually guided control of a unicycle. In P. Dario and R. Chatila, editors, *Robotics Research*, pages 281–290. Springer Berlin Heidelberg, 2005.
- [KRM96] Ilya Kolmanovsky, Mahmut Reyhanoglu, and N. Harris McClamroch. Switched mode feedback control laws for nonholonomic systems in extended power form. *Systems and Control Letters*, 27(1):29–36, January 1996.
- [LA05] Dina Shona Laila and Alessandro Astolfi. Input-to-state stability for discrete-time time-varying systems with applications to robust stabilization of systems in power form. *Automatica*, 41:1891–1903, 2005.
- [LAN03] David A. Lizarraga, Nnaedozie P. I. Aneke, and Henk Nijmeijer. Robust point stabilization of underactuated mechanical systems via the extended chained form. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 42(6):2172–2199, 2003.
- [Lee02] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2002.
- [Leo95] Naomi E. Leonard. Periodic forcing, dynamics and control of underactuated spacecraft and underwater vehicles. In *Proc. of the 34th IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 3980–3985, New Orleans, LA, USA, December 1995.
- [LK07] Gabriel A. D. Lopes and Daniel E. Koditschek. Visual servoing for nonholonomically constrained three degree of freedom kinematic systems. *International Journal of Robotics Research*, 26(7):715–736, July 2007.
- [LL09] S. R. Lindemann and S. M. LaValle. Simple and efficient algorithms for computing smooth, collision-free feedback laws over given cell decompositions. *International Journal of Robotics Research*, 28(5):600–621, 2009.
- [LO96] Pasquale Lucibello and Giuseppe Oriolo. Stabilization via iterative state steering with application to chained-form systems. In *Proc. of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2614–2619, Kobe, Japan, December 1996.
- [LO01] Pasquale Lucibello and Giuseppe Oriolo. Robust stabilization via iterative state steering with an application to chained-form systems. *Automatica*, 37:71–79, 2001.
- [LS93] G. A. Lafferriere and E. D. Sontag. Remarks on control lyapunov functions for discontinuous stabilizing feedback. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pages 306–308, San Antonio, TX, 1993.

- [LSW02] Daniel Liberzon, Eduardo D. Sontag, and Yuan Wang. Universal construction of feedback laws achieving ISS and integral-ISS disturbance attenuation. *Systems and Control Letters*, 46:111–127, 2002.
- [LT98] Jihao Luo and Panagiotis Tsiotras. Exponentially convergent control laws for nonholonomic systems in power form. *Systems and Control Letters*, 35:87–95, 1998.
- [Lyg04] John Lygeros. On reachability and minimum cost optimal control. *IFAC Automatica*, 40(6):917–927, June 2004.
- [MA03] Nicolas Marchand and Mazen Alamir. Discontinuous exponential stabilization of chained form systems. *Automatica*, 39:343–348, 2003.
- [MBP11] Fabio Morbidi, Francesco Bullo, and Domenico Prattichizzo. Visibility maintenance via controlled invariance for leader-follower vehicle formations. *Automatica*, 47(5):1060–1067, May 2011.
- [MM97] R. T. M’Closkey and R. M. Murray. Exponential stabilization of driftless nonlinear control systems using homogeneous feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(5):614–628, 1997.
- [MS93] Richard M. Murray and S. Shankar Sastry. Nonholonomic motion planning: Steering using sinusoids. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(5):700–716, May 1993.
- [MS96] P. Morin and C. Samson. Time-varying exponential stabilization of chained form systems based on a backstepping technique. In *Proc. of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1449–1454, Kobe, Japan, December 1996.
- [MS00] Pascal Morin and Claude Samson. Control of nonlinear chained systems: From the Routh-Hurwitz stability criterion to time-varying exponential stabilizers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(1):141–146, January 2000.
- [MS03] Pascal Morin and Claude Samson. Practical stabilization of driftless systems on Lie groups: The transverse function approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(9):1496–1508, September 2003.
- [MS09] Pascal Morin and Claude Samson. Control of nonholonomic mobile robots based on the transverse function approach. *IEEE Transactions on Robotics*, 25(5):1058–1073, October 2009.
- [MTX02] B. L. Ma, S. K. Tso, and W. L. Xu. Adaptive/robust time-varying stabilization of second-order non-holonomic chained form with input uncertainties. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 12:1299–1316, 2002.
- [OV05] Giuseppe Oriolo and Marilena Vendittelli. A framework for the stabilization of general nonholonomic systems with an application to the plate-ball mechanism. *IEEE Transactions on Robotics*, 21(2):162–175, April 2005.

- [PA03] Christophe Prieur and Alessandro Astolfi. Robust stabilization of chained systems via hybrid control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(10):1768–1772, October 2003.
- [PDS08] A. Pereira, J. Das, and G. S. Sukhatme. An experimental study of station keeping on an underactuated ASV. In *Proc. of the 2008 IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, pages 3164–3171, Nice, France, September 2008.
- [PE99] K. Y. Pettersen and O. Egeland. Time-varying exponential stabilization of the position and attitude of an underactuated Autonomous Underwater Vehicle. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 44(1):112–115, January 1999.
- [PF00] K. Y. Pettersen and T. I. Fossen. Underactuated dynamic positioning of a ship - Experimental results. *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 8(5):856–863, September 2000.
- [PN00] K. Y. Pettersen and H. Nijmeijer. Semi-global practical stabilization and disturbance adaptation for an underactuated ship. In *Proc. of the 39th IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 2144–2149, Sydney, Australia, December 2000.
- [PN01] K. Y. Pettersen and H. Nijmeijer. Semi-global practical stabilization and disturbance adaptation for an underactuated ship. *Modeling, Identification and Control*, 22(2):89–101, April 2001.
- [Pom92] Jean-Baptiste Pomet. Explicit design of time-varying stabilizing control laws for a class of controllable systems without drift. *Systems and Control Letters*, 18:147–158, 1992.
- [Rey96] M. Reyhanoglu. Control and stabilization of an underactuated surface vessel. In *Proc. of the 35th IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 2371–2376, Kobe, Japan, December 1996.
- [Sam95] Claude Samson. Control of chained systems: Application to path following and time-varying point-stabilization of mobile robots. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(1):64–77, January 1995.
- [SE95] O. J. Sørдалen and O. Egeland. Exponential stabilization of nonholonomic chained systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(1):35–48, January 1995.
- [SGHL00] Z. Sun, S.S. Ge, W. Huo, and T. H. Lee. Stabilization of nonholonomic chained systems via nonregular feedback linearization. In *Proc. of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1906–1911, Sydney, Australia, December 2000.
- [SGHL01] Zhendong Sun, S.S. Ge, Wei Huo, and T.H. Lee. Stabilization of nonholonomic chained systems via nonregular feedback linearization. *Systems and Control Letters*, 44(4):279–289, November 2001.
- [Tan04] Herbert G. Tanner. ISS properties of nonholonomic vehicles. *Systems and Control Letters*, 53(3-4):229–235, November 2004.



- [tdWK95] Carlos Canudas de Wit and H. Khenouf. Quasi-continuous stabilizing controllers for nonholonomic systems: Design and robustness considerations. In *Proc. of the 3rd European Control Conference*, pages 2630–2635, Rome, Italy, September 1995.
- [tdWS92] C. Canudas de Wit and O. J. Sørđalen. Exponential stabilization of mobile robots with nonholonomic constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(11):1791–1797, November 1992.
- [TK00] Herbert G. Tanner and Kostas J. Kyriakopoulos. Nonholonomic motion planning for mobile manipulators. In *Proc. of the 2000 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1233–1238, San Francisco, CA, April 2000.
- [TL02] Yu-Ping Tian and Shihua Li. Exponential stabilization of nonholonomic dynamic systems by smooth time-varying control. *Automatica*, 38:1138–1143, 2002.
- [TMW95] Andrew R. Teel, Richard M. Murray, and Gregory C. Walsh. Non-holonomic control systems: from steering to stabilization with sinusoids. *International Journal of Control*, 62(4):849–870, 1995.
- [TTR97a] A. Tayebi, M. Tadjine, and A. Rachid. Discontinuous control design for the stabilization of nonholonomic systems in chained form using the backstepping approach. In *Proc. of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3089–3090, San Diego, CA, USA, December 1997.
- [TTR97b] A. Tayebi, M. Tadjine, and A. Rachid. Invariant manifold approach for the stabilization of nonholonomic systems in chained form: Application to a car-like mobile robot. In *Proc. of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4038–4043, San Diego, CA, USA, December 1997.
- [VA03] E. Valtolina and A. Astolfi. Local robust regulation of chained systems. *Systems and Control Letters*, 49:231–238, 2003.
- [WHX99] Sheng Yuan Wang, Wei Huo, and Wei Liang Xu. Order-reduced stabilization design of nonholonomic chained systems based on new canonical forms. In *Proc. of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3464–3469, Phoenix, Arizona, USA, December 1999.
- [WSE95] K. Y. Wichlund, O. J. Sordalen, and O. Egeland. Control of vehicles with second-order constraints: Underwater vehicles. In *Proc. of the 3rd European Conf. on Control*, pages 3086–3091, Rome, Italy, September 1995.
- [WZ08] Yuqiang Wu and Xiuyun Zheng. Robust stabilization of uncertain nonholonomic systems with strong nonlinear drifts. *Journal of Control Theory and Applications*, 6(4):427–430, November 2008.
- [XM01] W. L. Xu and B. L. Ma. Stabilization of second-order nonholonomic systems in canonical chained form. *Robotics and Autonomous Systems*, 34:223–233, 2001.
- [ZDCH07] Xiaocai Zhu, Guohua Dong, Zixing Cai, and Dewen Hu. Robust simultaneous tracking and stabilization of wheeled mobile robots not satisfying nonholonomic constraint. *Journal of Central South University of Technology*, 14(4):537–545, August 2007.

- [ZH08] Jun Zhao and David J. Hill. On stability,  $L_2$ -gain and  $H_\infty$  control for switched systems. *Automatica*, 44:1220–1232, 2008.