ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟΙ ΧΩΡΟΙ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΦΟΙΒΟΥ ΞΑΝΘΟΥ
ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΥΧΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ Ε.Μ.Π.

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:
ΙΩΑΝΝΗΣ Α. ΠΟΛΥΡΑΚΗΣ,
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ, ΜΑΪΟΣ 2012

Η παρούσα έρευνα έχει συγχρηματοδοτηθεί από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο - ΕΚΤ) και από εθνικούς πόρους μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» του Εθνικού Στρατηγικού Πλαισίου Αναφοράς (ΕΣΠΑ) – Ερευνητικό Χρηματοδοτούμενο Έργο: Ηράκλειτος ΙΙ . Επένδυση στην κοινωνία της γνώσης μέσω του Ευρωπαϊκού Κοινωνικού Ταμείου.

Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο

Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων και Φυσικων Επιστημων

Διατεταγμενοι Χωροι Και Εφαρμογες Στη Μαθηματικη Χρηματοοικονομια

Διδακτορικη Διατριβη

Φοιβου Ξανθου
Διπλωματουχου Μαθηματικου Ε.Μ.Π.

Τριμελης Συμβουλευτικη Επιτροπη:

Ι. Πολυράκης, Καθ. Ε.Μ.Π.(Επιβλέπων)

Β. Παπανικολάου, Καθ. Ε.Μ.Π.

Α. Γιαννακόπουλος, Αν. Καθ. Ο.Π.Α.

Επταμελης Εξεταστικη Επιτροπη:

Ι. Πολυράκης, Καθ. Ε.Μ.Π.(Επιβλέπων)

Β. Παπανικολάου, Καθ. Ε.Μ.Π.

Α. Γιαννακόπουλος, Αν. Καθ. Ο.Π.Α.

Α. Αρβανιτάκης, Επίκ. Καθ. Ε.Μ.Π.

Α. Αργυρός, Καθ. Ε.Μ.Π.

Β. Κανελλόπουλος, Επίκ. Καθ. Ε.Μ.Π.

Ι. Σαραντόπουλος, Καθ. Ε.Μ.Π.

Αθηνα, Μαΐος 2012

Στη γυναίκα μου, Ίρις

Ευχαριστιες

Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον Επιβλέποντα Καθηγητή μου Ιωάννη Πολυράκη, για την αμέριστη υποστήριξη και αγάπη που με περιέβαλε καθόλη την διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών. Επίσης τον ευχαριστώ για την καθοδήγηση και τις πολύτιμες μαθηματικές γνώσεις που μου μετέδωσε και για την καθοριστική συμβολή του στην εξεύρεση χρηματοδότησης που υποστήριξε την ερευνά μου. Η δυνατότητα που μου έδωσε να συμμετάσχω στη διεθνώς αναγνωρισμένη έρευνα του πιστεύω ότι θα αποτελέσει σημαντικό εφόδιο για την μετέπειτα πορεία μου. Ακόμη αισθάνομαι την ανάγκη να τονίσω ότι η συμβολή του κ. Πολυράκη στην παραγωγή των αποτελεσμάτων αυτής της διατριβής υπήρξε ουσιαστική και καθοριστική.

Επίσης ευχαριστώ το ερευνητικό έργο "Ηράκλειτος ΙΙ" για την χρηματόδοτηση της παρούσας έρευνας. Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Τομέα Μαθηματικών για το πνεύμα συνεργασίας με το οποίο με περιέβαλε και τις γνώσεις που απέκτησα σε προπτυχιακό και μεταπτυχιακό επίπεδο.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τη μητέρα μου που με βοήθησε με όλες της τις δυνάμεις για να ολοκληρώσω με επιτυχία τις σπουδές μου.

Η παρούσα έρευνα έχει συγχρηματοδοτηθεί από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο - ΕΚΤ) και από εθνικούς πόρους μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» του Εθνικού Στρατηγικού Πλαισίου Αναφοράς (ΕΣΠΑ) – Ερευνητικό Χρηματοδοτούμενο Έργο: Ηράκλειτος ΙΙ . Επένδυση στην κοινωνία της γνώσης μέσω του Ευρωπαϊκού Κοινωνικού Ταμείου.

Κατά την διάρκεια εκπόνησης αυτής της διατριβής προέκυψαν οι ακόλουθες δημοσιεύσεις:

(1) C. Kountzakis, I.A. Polyrakis, F. Xanthos, Non replication of options, Mathematical Finance, Article in Press, Accepted: May 2010.

(2) I.A. Polyrakis, F. Xanthos, Maximal submarkets that replicate any option, Annals of Finance, 7:407-423, 2011.

(3) I.A. Polyrakis, F. Xanthos, Cone characterization of Grothendieck spaces and Banach spaces containing c_0, Positivity , 15:677-693, 2011.

(4) I.A. Polyrakis, F. Xanthos , Grothendieck ordered Banach spaces with an interpolation property, Proc. Amer. Math. Soc., Article in Press, Accepted: September, 2011.

(5) E. Casini, E. Miglierina I.A. Polyrakis, F. Xanthos, Reflexive Cones, Submitted: January, 2012, arXiv:1201.4927 (Έχει υποβληθεί προς δημοσίευση).

Περιληψη

Η παρούσα διατριβή χωρίζεται σε δύο λογικές ενότητες. Στην πρώτη λογική ενότητα, που αντιστοιχεί στα κεφάλαια 2-3 μελετάμε την δομή των χώρων Banach μέσω της γεωμετρίας των κώνων. Ειδικότερα στο κεφάλαιο δύο, δίνουμε κωνικούς χαρακτηρισμούς της ανακλαστικότητας, των χώρων που περιέχουν τον c_0 και των χώρων Grothendieck. Επίσης, αποδεικνύουμε ότι κάθε διατεταγμένος χώρος Banach με κλειστό, normal κώνο και διατακτική μονάδα που έχει την CIP είναι χώρος Grothendieck. Στο κεφάλαιο 3 εισάγουμε την έννοια των ανακλαστικών κώνων και μελετάμε τη δομή τους.

Στη δεύτερη λογική ενότητα, χρησιμοποιούμε την θεωρία των θετικών βάσεων και των lattice-subspace (κεφάλαιο 4) που έχει αναπτυχθεί από τον Επιβλέπων Ι.Α. Πολυράκη, για να μελετήσουμε το πρόβλημα του replication διακαιωμάτων σε πεπερασμένες οικονομίες (κεφάλαιο 5).

Abstract

The PhD thesis is composed of two parts. In the first part we study the structure of Banach spaces through the geometry of cones. In particular, in chapter two we give cone characterizations of reflexive spaces, spaces that contains c_0 and Grothendieck spaces. Also, we prove that every ordered Banach space with closed, normal cone and an order unit that satisfies the CIP is a Grothendieck space. In chapter three, we define the notion of reflexive cones and study their structure.

In the second part, we use the theory of lattice-subspaces and positive bases (Chapter 4), which has been developed by I.A. Polyrakis, in order to study the problem of replication of options in finite markets (Chapter 5).

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Διατεταγμένοι χώροι

1.1 Βασικές έννοιες

Οι διατεταγμένοι χώροι έκαναν την εμφάνιση τους στις αρχές του 20ου αιώνα και αναπτύχθηκαν παράλληλα με την συναρτησιακή ανάλυση και την θεωρία τελεστών. Σε αυτό το κεφάλαιο θα δώσουμε τις βασικές έννοιες και αποτελέσματα της θεωρίας που απαιτούνται για να διατυπώσουμε τα αποτελέσματα της παρούσας διατριβής. Στα επόμενα υποθέτουμε ότι X είναι γραμμικός χώρος.

Ορισμός 1.1. *Ένα κυρτό, μη κενό υποσύνολο P του X λέμε ότι είναι κώνος αν $\lambda x \in P$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Αν επιπλέον $P \cap (-P) = \{0\}$, λέμε ότι ο κώνος P είναι οξύς.*

Ο κώνος P εφοδιάζει τον X, με την ακόλουθη διάταξη

$$x \geq y \text{ αν και μόνο αν } x - y \in P.$$

Η παραπάνω διάταξη είναι μια γραμμική μερική διάταξη, δηλαδή για κάθε $x, y, z \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ισχύουν τα ακόλουθα:

- $x \geq x$ (ανακλαστική),
- $x \geq y, y \geq z \Rightarrow x \geq z$ (μεταβατική),

- $x \geq y \Rightarrow x + z \geq y + z, \lambda x \geq \lambda y$ (συμβατότητα με τη γραμμική δομή).

Αν επιπλέον ο κώνος είναι οξύς, τότε η διάταξη είναι και αντισυμμετρική, δηλαδή ισχύει:

- $x \geq y, y \geq x \Rightarrow x = y$.

Ο X εφοδιασμένος με την παραπάνω διάταξη, λέμε ότι είναι ένας διατεταγμένος χώρος και αναπαρίσταται με το ζεύγος $(X, \geq)$ ή (X, P). Στα ακόλουθα ο X θα θεωρείται διατεταγμένος χώρος.

Έστω $x, y \in X$, με $x \leq y$, το *διατεταγμένο διάστημα* με άκρα x, y, είναι το ακόλουθο σύνολο του X.

$$[x, y] = \{z \in X \mid x \leq z \leq y\}$$

Έστω $e \in P$, τότε σύνολο $I_e = \bigcup_{n=1}^{\infty}[-ne, ne]$, είναι το principal ideal που παράγει το e. Όταν $I_e = X$, τότε λέμε ότι το e είναι διατακτική μονάδα του X. Ο κώνος P, λέμε ότι είναι generating στον X, αν $P - P = X$. Είναι άμεσο ότι αν ο P έχει διατακτική μονάδα, τότε είναι generating στον X, το αντίστροφο δεν ισχύει.

Ορισμός 1.2. *Έστω $A \subseteq X$ και $x \in X$. Αν το x είναι άνω(κάτω) φράγμα του A και για κάθε άνω(κάτω) φράγμα $y \in X$ του A, ισχύει $x \leq y (x \geq y)$, τότε λέμε ότι το x είναι ελάχιστο άνω(μέγιστο κάτω) φράγμα του A και γράφουμε $x = \sup(A)$($x = \inf(A)$).*

Ξεχωριστή θέση στην θεωρία των διατεταγμένων χώρων, κατέχει η κατηγορία των vector lattices ή Riesz spaces. Ο X λέμε ότι είναι vector lattice, αν για κάθε $x, y \in X$ υπάρχει το $\sup\{x, y\}$ και το $\inf\{x, y\}$. Χάριν ευκολίας στα vector lattices, χρησιμοποιούμε τους ακόλουθους συμβολισμούς.

$$x \vee y = \sup\{x, y\}, x \wedge y = \inf\{x, y\}, x^+ = x \vee 0, x^- = (-x) \vee 0,$$

$$|x| = x \vee (-x).$$

Ορισμός 1.3. *Ένας διατεταγμένος χώρος $(X, \geq)$, λέμε ότι έχει Riesz Decomposition Property(RDP) αν για κάθε $x, y, z \geq 0$ ισχύει:*

$$0 \leq x \leq y + z \Rightarrow x = x_1 + x_2, \text{ όπου } x_1, x_2 \in X, \text{ με } 0 \leq x_1 \leq y, 0 \leq x_2 \leq z.$$

Κάθε vector lattice, έχει την Riesz Decomposition Property. Το αντίστροφο δεν ισχύει, συγκεκριμένα υπάρχουν χώροι που έχουν την RDP και δεν είναι vector lattice. Η ακόλουθη ιδιότητα είναι ισοδύναμη την RDP.

Ορισμός 1.4. *Ένας διατεταγμένος χώρος $(X, \geq)$, λέμε ότι έχει Interpolation Property(IP) αν για κάθε A, B πεπερασμένα σύνολα του X ισχύει:*

$$A \leq B \Rightarrow A \leq x \leq B, \text{ όπου } x \in X.$$

Στην παράγραφο 2.3, θα χρησιμοποιήσουμε την αριθμήσιμη εκδοχή του παραπάνω ορισμού.

Ορισμός 1.5. *Ένας διατεταγμένος χώρος $(X, \geq)$, λέμε ότι έχει Countable Interpolation Property(CIP) αν για κάθε A, B αριθμήσιμα σύνολα του X ισχύει:*

$$A \leq B \Rightarrow A \leq x \leq B, \text{ όπου } x \in X.$$

Τέλος αναφέρουμε τις ακόλουθες έννοιες διατακτικής πληρότητας, που θα χρησιμοποιήσουμε στα ακόλουθα. Ένας διατεταγμένος χώρος $(X, \geq)$, λέμε ότι είναι Dedekind complete, αν για κάθε αύξον και άνω φραγμένο δίκτυο $\{x_a\}_{a \in A}$, υπάρχει το $\sup_{a \in A}\{x_a\}$. Αν στον παραπάνω ορισμό αντικαταστήσουμε το δίκτυο $\{x_a\}$, με την ακολουθία $\{x_n\}$, τότε λέμε ότι ο $(X, \geq)$ είναι $\sigma-$ Dedekind complete.

1.2 Βάσεις Κώνων και δυϊκότητα

Έστω (X, P) διατεταγμένος χώρος και f γραμμικό συναρτησιακό του X. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in P$ το f είναι *θετικό* και αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in P \setminus \{0\}$, το f είναι *αυστηρά θετικό*. Σημειώνουμε ότι αν ο P, έχει αυστηρά θετικά συναρτησιακά, τότε είναι οξύς κώνος.

Μια συνάρτηση $f : P \to \mathbb{R}$, λέμε ότι είναι θετικά ομογενής και προσθετική αν $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$, για κάθε $x, y \in P$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$. Αυτά τα συναρτησιακά, μπορούμε να τα βλέπουμε σαν γραμμικά συναρτησιακά του X, συγκεκριμένα ισχύει το ακόλουθο:

Θεώρημα 1.6. *Έστω P κώνος του X και $f : P \to \mathbb{R}$, θετικά ομογενής και προσθετική, τότε η f επεκτείνεται σε γραμμικό συναρτησιακό του X.*

Σημαντικό στοιχείο της θεωρίας των κώνων είναι η έννοια της βάσης του κώνου.

Ορισμός 1.7. *Έστω P κώνος του X. Το μη κενό σύνολο $B \subseteq P$ ονομάζεται βάση του κώνου P, αν το B είναι κυρτό και για κάθε $x \in P \setminus \{0\}$, υπάρχει μοναδικός αριθμός $\lambda_x > 0$ ώστε $\lambda_x x \in B$.*

Η ύπαρξη μιας βάσης του κώνου συνδέεται άμεσα με την ύπαρξη αυστηρών θετικών συναρτησιακών.

Θεώρημα 1.8. *([9], Theorem 1.47) Έστω P κώνος του X και $B \subseteq P$. Το B είναι βάση του P αν και μόνο αν υπάρχει αυστηρά θετικό γραμμικό συναρτησιακό f του X ώστε*

$$B = B_f = \{x \in P \mid f(x) = 1\}.$$

Για τα ακόλουθα θεωρούμε, ότι ο (X, P) είναι εφοδιασμένος με μία νόρμα $||\cdot||$, στο εξής με τον όρο φραγμένο σύνολο, εννοούμε $||\cdot||$-φραγμένο σύνολο. Η ύπαρξη φραγμένης ή μη φραγμένης βάσης για τον κώνο P, όπως θα δούμε παρακάτω, μας δίνει σημαντικές πληροφορίες για την γεωμετρία του P, αλλά και για ολόκληρο τον χώρο X. Για αυτή την μελέτη, θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο ορισμό, που έχει δοθεί στο [24].

Ορισμός 1.9. *Ένα αυστηρά θετικό συναρτησιακό f του P, λέμε ότι είναι uniformly monotonic στον P, αν υπάρχει $a > 0$ ώστε*

$$f(x) > a||x|| \ \forall x \in P \setminus \{0\}$$

Πρόταση 1.10. *([49], Proposition 2)Έστω B_f βάση του P, που ορίζει το συναρτησιακό f. Τότε η B_f είναι φραγμένη αν και μόνο αν το f είναι uniformly monotonic στον P.*

Αν ο X είναι πεπερασμένης διάστασης και P κλειστός κώνος του X με βάση B, τότε η B είναι αυτόματα φραγμένη([49], Proposition 3), κάτι τέτοιο δεν ισχύει γενικά αν ο X είναι απειροδιάστατος, ωστόσο υπάρχουν απειροδιάστατοι κώνοι με φραγμένη βάση.

Ορισμός 1.11. *Ο κώνος P του $(X, ||\cdot||)$,είναι well-based, αν υπάρχει $f \in X^*$, που ορίζει φραγμένη βάση B_f στον P.*

Ο παραπάνω ορισμός, όπως παρατηρείται στο [24] είναι ισοδύναμος με την ύπαρξη μια φραγμένης βάσης B του P, ώστε $0 \notin \overline{B}$.

Ορισμός 1.12. *Έστω P κώνος του $(X, ||\cdot||)$. Ο δυϊκός κώνος P^0 του P στον X^*, είναι το σύνολο των θετικών συνεχών γραμμικών συναρτησιακών του P, δηλαδή:*

$$P^0 = \{x^* \in X^* \mid x^*(x) \geq 0 \ \forall x \in P\}.$$

Αν $\langle E, F\rangle$, δυϊκό σύστημα και P κώνος του E, τότε ανάλογα με τον παραπάνω ορισμό ορίζεται ο δυϊκός κώνος P^0 του P στον F, δηλαδή:

$$P^0 = \{y \in F \mid y(x) \geq 0 \ \forall x \in P\}$$

Σε αυτό το γενικό πλαίσιο, ισχύουν τα ακόλουθα χρήσιμα θεώρηματα για τους δυϊκούς κώνους:

Θεώρημα 1.13. *([9], Theorem 2.13) Έστω $\langle E, F\rangle$, δυϊκό σύστημα και P κώνος του E, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

- *Ο P^0 είναι $\sigma(F, E)$-κλειστός.*
- *Ο P^0 είναι οξύς κώνος αν και μόνο αν ο $P - P$ είναι $\sigma(E, F)$ πυκνός στον E.*
- *Αν ο P είναι $\sigma(E, F)$-κλειστός και οξύς κώνος, τότε ο $P^0 - P^0$ είναι $\sigma(F, E)$ πυκνός στον F.*

Θεώρημα 1.14. *([51], Theorem 11) Έστω $\langle E, F\rangle$, δυϊκό σύστημα, όπου E, F χώροι με νόρμα. Αν P είναι κώνος του E και $f \in P^0$, τότε*

- *Αν E είναι norming στον F και B_f φραγμένη βάση του P, τότε $f \in int(P^0)$.*
- *Αν F είναι norming στον E και $f \in int(P^0)$, τότε B_f είναι φραγμένη βάση του P.*

Ένα γραμμικό συναρτησιακό f του X είναι διατακτικά φραγμένο , αν για κάθε διατεταγμένο διάστημα $[x, y]$ η εικόνα

$$f([x, y]) = \{f(z) \mid z \in [x, y]\},$$

του $[x, y]$ είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Το σύνολο των διατακτικά φραγμένων γραμμικών συναρτησιακών του X, συμβολίζεται με $X^{\sim}$ και ονομάζεται διατακτικός δυϊκός του X. Ο $X^{\sim}$ είναι εφοδιασμένος, με την διάταξη του κώνου των θετικών γραμμικών συναρτησιακών, δηλαδή για κάθε $f, g \in X^{\sim}$, έχουμε $f \geq g$ αν και μόνο αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in X_+$. Όταν ο $(X, \geq)$ έχει την RDP και generating οξύ κώνο, τότε ο $X^{\sim}$ είναι vector lattice, συγκεκριμένα ισχύει, το ακόλουθο θεώρημα που είναι γνωστό ως Riesz-Kantorovich φόρμουλα.

Θεώρημα 1.15. *([9], Theorem 1.61) Αν ο $(X, \geq)$ είναι διατεταγμένος χώρος με generating οξύ κώνο και έχει την Riesz Decomposition Property, τότε ο $X^{\sim}$ είναι Dedekind complete vector lattice. Επιπλέον για κάθε $f, g \in X^{\sim}$ και $x \in X_+$ οι lattice τελεστές ορίζονται ως ακολούθως:*

$$(f \vee g)(x) = \sup\{f(y) + g(z) \mid y, z \in X_+ \text{ και } y + z = x\},$$
$$(f \wedge g)(x) = \inf\{f(y) + g(z) \mid y, z \in X_+ \text{ και } y + z = x\},$$
$$|f|(x) = \sup\{f(y) \mid -x \leq y \leq x\}.$$

1.3 Διατεταγμένοι χώροι Banach

Η συμβατότητα της διατακτικής δομής με την τοπολογική δομή του χώρου, εκφράζεται μέσω της έννοιας του normal κώνου. Ο ορισμός αυτός δόθηκε, από τον Krein, για χώρους Banach και αργότερα γενικεύτηκε για τοπολογικούς γραμμικούς χώρους. Παρακάτω δίνουμε τον ορισμό στην περίπτωση που ο X είναι χώρος με νόρμα.

Ορισμός 1.16. *Ο κώνος P του $(X, ||\cdot||)$, είναι normal, αν υπάρχει $c > 0$, ώστε:*

$$0 \leq x \leq y \Rightarrow ||x|| \leq c||y||.$$

Από τον παραπάνω ορισμό είναι προφανές ότι κάθε normal κώνος είναι οξύς. Επίσης έχουμε ότι:

Πρόταση 1.17. *([24], Proposition 3.8.2)Κάθε well-based κώνος του $(X, ||\cdot||)$ είναι normal.*

Για τον ακόλουθο ορισμό, εισάγουμε το συμβολισμό B_X^+. Αν P κώνος του X, συμβολίζουμε με $B_X^+ = B_X \cap P$, το θετικό τμήμα της μοναδιαίας μπάλας του X.

Ορισμός 1.18. *Έστω P κώνος του $(X, ||\cdot||)$, λέμε ότι ο P δίνει open decomposition στον X αν το σύνολο $B_X^+ - B_X^+$ είναι περιοχή του μηδενός.*

Για τους κλειστούς και generating κώνους χώρων Banach, ισχύει ο ακόλουθος χαρακτηρισμός

Θεώρημα 1.19. *([9], Theorem 2.37)Έστω P κλειστός κώνος του χώρου Banach X, τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) Ο P είναι generating στον X,

(2) Ο P δίνει open decomposition στον X.

Στους διατεταγμένους χώρους Banach, οι ιδιότητες του generating και normal κώνου είναι δυϊκές. Συγκεκριμένα ισχύει το ακόλουθο Θεώρημα, που οφείλεται στον Krein.

Θεώρημα 1.20. *([9], Theorem 2.40) Έστω P κλειστός κώνος του χώρου Banach X, τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα*

(i) Ο P είναι normal,

(ii) *Ο P^0 είναι generating στον X^*.*

Θεώρημα 1.21. *([9], Theorem 2.8) Έστω P κλειστός κώνος του χώρου Banach X και $e \in P$, τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα*

(i) *Το e είναι διατακτική μονάδα του P,*

(ii) *Το e είναι εσωτερικό σημείο του P.*

Έστω $(X, ||\cdot||)$ διατεταγμένος χώρος Banach με κλειστό οξύ κώνο X_+ και $e \in X_+$, τότε το e ορίζει την ακόλουθη order-unit νόρμα([9], Theorem 2.55(2 a)) στον I_e:

$$||x||_e = \inf\{\lambda > 0 \mid x \in [-\lambda e, \lambda e]\}.$$

Σημειώνουμε, επίσης ότι ο κώνος $I_e^+ = I_e \cap P$ είναι $||\cdot||_e$-κλειστός ([9], Theorem 2.55(2 c)). Για την πληρότητα του χώρου, $(I_x, ||\cdot||)$, ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα, που οφείλεται στον Ando:

Θεώρημα 1.22. *([9], Theorem 2.60) Έστω P κλειστός οξύς κώνος του χώρου Banach X, τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο P είναι normal,*

(ii) *Για κάθε $x \in P$ ο χώρος $(I_x, ||\cdot||_x)$ είναι χώρος Banach.*

Ειδικότερα στην περίπτωση που $I_x = X$, ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 1.23. *([9], Theorem 2.63) Έστω P κλειστός οξύς κώνος του χώρου Banach $(X, ||\cdot||)$ και e διατακτική μονάδα του X, τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο P είναι $||\cdot||$-normal,*

(ii) *Οι νόρμες $||\cdot||_e$ και $||\cdot||$ είναι ισοδύναμες,*

(iii) *Ο χώρος $(X, ||\cdot||_e)$ είναι χώρος Banach.*

Κεντρικό ρόλο στην θεωρία των Διατεταγμένων χώρων Banach, έχει το ακόλουθο Θεώρημα συνέχειας των θετικών γραμμικών τελεστών, το οποίο οφείλεται στον Lozanovsky. Αν X, Y, διατεταγμένοι χώροι, λέμε ότι ο τελεστής $T : X \to Y$ είναι θετικός, αν $T(X_+) \subseteq Y_+$.

Θεώρημα 1.24. *([9], Theorem 2.32) Έστω X, Y διατεταγμένοι χώροι Banach με κλειστούς οξείς κώνους X_+, Y_+ αντίστοιχα. Αν ο X_+ είναι generating στον X, τότε κάθε θετικός γραμμικός τελεστής από τον X στον Y είναι συνεχής.*

Παρακάτω θα μελετήσουμε τους κώνους που παράγονται από Schauder βάση. Η $\{x_n\}$, λέμε ότι είναι Schauder βάση του X αν κάθε $x \in X$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στην μορφή $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. Η $\{x_n\}$ λέμε ότι είναι βασική ακολουθία του X, αν είναι Schauder βάση του $\overline{[\{x_n\}]}$. Η Schauder βάση $\{x_n\}$ του X, λέμε ότι είναι shrinking αν τα συναρτησιακά συντεταγμένων $\{x_n^*\}$ της $\{x_n\}$(δηλ. $x_n^*(x_m) = \delta_{nm}$) είναι Schauder βάση του X^*. Η $\{x_n\}$ λέμε ότι είναι boundedly complete, αν ισχύει η συνεπαγωγή: $\sup\{||\sum_{i=1}^{n} a_i x_i|| \ : \ n \in \mathbb{N}\} < +\infty \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in X$. Επίσης η $\{x_n\}$ λέμε ότι είναι unconditional αν για κάθε $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ η σύγκλιση της σειράς είναι unconditional.

Αν $\{x_n\}$ Schauder βάση του X, τότε ο κώνος $K_{\{x_n\}}$, που παράγει η $\{x_n\}$,είναι το ακόλουθο υποσύνολο του X:

$$K_{\{x_n\}} = \{x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \mid a_i \geq 0 \ \forall i\}.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι ο $K_{\{x_n\}}$ είναι κλειστός και οξύς κώνος. Ο διατεταγμένος χώρος Banach X, λέμε ότι έχει θετική Schauder βάση αν υπάρχει $\{x_n\}$ Schauder βάση του X ώστε $X_+ = K_{\{x_n\}}$. Αυτή η κατηγορία κώνων έχει αποτελέσει ένα από τα βασικά πεδία έρευνας του Επιβλέποντα([44], [29], [42]). Αναφέρουμε παρακάτω κάποια κεντρικά αποτελέσματα της θεωρίας.

Θεώρημα 1.25. *([59], Proposition 10.1, p.321) Αν $\{x_n\}$ Schauder βάση του X, τότε:*

- *Ο $K_{\{x_n\}}$ έχει μη-φραγμένη βάση που ορίζεται από συναρτησιακό του X^*,*

- $int(K_{\{x_n\}}) = \emptyset$.

Θεώρημα 1.26. *([59], Theorem 16.3, p.473) Αν $\{x_n\}$ Schauder βάση του X, τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

- *Ο $K_{\{x_n\}}$ είναι generating και normal,*
- *Η $\{x_n\}$ είναι unconditional βάση του X.*

Η οικογένεια των Banach lattices είναι η πλέον πλούσια σε ιδιότητες κατηγορία διατεταγμένων χώρων διότι σε αυτή υπάρχει πλήρη συμβατότητα μεταξύ διατακτικής και τοπολογικής δομής.

Ορισμός 1.27. *Έστω E διατεταγμένος χώρος Banach ώστε ο E είναι vector lattice και για κάθε $x, y \in E$, έχουμε:*

$$|x| \leq |y| \Rightarrow ||x|| \leq ||y||,$$

τότε ο E ονομάζεται Banach lattice.

Αν X διατεταγμένος χώρος Banach με θετική Schauder βάση $\{x_n\}$, τότε ο X είναι Banach lattice ως προς μια ισοδύναμη νόρμα αν και μόνο αν η $\{x_n\}$ είναι unconditional βάση του X([36], Theorem 4.2.22).

Αν E Banach lattice, λέμε ότι ο E είναι AM-χώρος, αν για κάθε $x, y \in E$ με $x \wedge y = 0$, ισχύει $||x \vee y|| = \max\{||x||, ||y||\}$. Ο E είναι AL-χώρος αν για κάθε $x, y \in E$ με $x \wedge y = 0$, ισχύει $||x + y|| = ||x|| + ||y||$. Αυτοί οι χώροι είναι δυϊκοί, συγκεκριμένα, ο E είναι AL-χώρος (αντ. AM-χώρος) αν και μόνο αν ο E^* είναι AM-χώρος (αντ. AL-χώρος)([7], Theorem 12.22). Σε αυτή την κατηγορία χώρων ισχύει το ακόλουθο Θεώρημα αναπαράστασης που οφείλεται στον Kakutani.

Θεώρημα 1.28. *([7], Theorem 12.26 και 12.28) Ο Banach lattice E είναι AM-χώρος με διατακτική μονάδα e, εφοδιασμένος με την $|| \cdot ||_e$ αν και μόνο αν είναι διατακτικά ισομετρικός με κάποιον χώρο $C(K)$, όπου K συμπαγής, Hausdorff τοπολογικός χώρος.*

Ο Banach lattice E είναι AL-χώρος αν και μόνο αν είναι διατακτικά ισομετρικός με κάποιον χώρο $L_1(\mu)$.

Αν E είναι Banach lattice, τότε ο διατακτικός δυϊκός $E^{\sim}$ του E συμπίπτει με τον τοπολογικό δυϊκό $E^{\sim} = E^*$([7], Corollary 12.5). Επίσης αν E είναι διατεταγμένος χώρος Banach με κλειστό, normal και generating κώνο που έχει την RDP, τότε ο E^* είναι Banach lattice, ως προς μια ισοδύναμη νόρμα([9], Theorem 2.47, Exercise 17,p.98). Ειδικότερα, αν ο E έχει επιπλέον διατακτική μονάδα, τότε ο E^* είναι AL-χώρος.

Για περαιτέρω μελέτη της θεωρίας των διατεταγμένων χώρων και των εφαρμογών τους αναφέρουμε τα βιβλία [37], [7], [9], [6], [24] και [3].

Κεφάλαιο 2

Κώνοι και γεωμετρία χώρων Banach

2.1 Κώνοι και ανακλαστικοί χώροι

Ένας χώρος Banach X, λέμε ότι είναι ανακλαστικός, αν $\widehat{X} = X^{**}$, όπου$\widehat{}$ η κανονικλη εμφύτεση του X στον X^{**}. Στην βιβλιογραφία υπάρχουν διάφοροι χαρακτηρισμοί ανακλαστικών χώρων. Στην παρούσα παράγραφο, θα μελετήσουμε κωνικούς χαρακτηρισμούς της ανακλαστικότητας. Συγκεκριμένα θα χαρακτηρίσουμε την ανακλαστικότητα ενός χώρου Banach μέσω των ιδιοτήτων των κώνων του χώρου.

Ορισμός 2.1. *Έστω X, Y χώροι Banach και P, Q κλειστοί κώνοι του X, Y αντίστοιχα. Λέμε ότι οι κώνοι P, Q είναι ισομορφικοί($P \simeq Q$), αν υπάρχει τελεστής $T : P \to Q$, τέτοιος ώστε:*

- *T είναι ένα προς ένα και επί,*
- *$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y) \;\; \forall x, y \in P, \; \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$,*
- *T, T^{-1} συνεχής ως προς τις επαγόμενες τοπολογίες των P, Q.*

Με την παραπάνω έννοια λέμε ότι ο P εμφυτεύεται στον χώρο X, αν υπάρχει κλειστός κώνος Q του X που είναι ισομορφικός με τον P. Όπως έχει παρατηρηθεί στο [49], είναι εύκολο να δούμε ότι αν T ισομορφισμός μεταξύ των P, Q, τότε από την συνέχεια του τελεστή στο μηδέν, υπάρχουν $A, B > 0$ έτσι ώστε:

$$A||x|| \leq ||T(x)|| \leq B||x||, \text{ για κάθε } x \in P$$

Από τα άρθρα [58], [39], [38], έχει προκύψει ο ακόλουθος ενδιαφέρων χαρακτηρισμός των ανακλαστικών χώρων, ο οποίος είναι ο πρώτος κωνικός χαρακτηρισμός που παρουσιάστηκε στην βιβλιογραφία.

Θεώρημα 2.2. *(Milman-Pelczynski-Singer)Έστω X χώρος Banach, τότε ο X είναι μη ανακλαστικός αν και μόνο αν ο θετικός κώνος ℓ_1^+ του ℓ_1 εμφυτεύετε στον X.*

Στο άρθρο [43], του I. Polyrakis έχουν δοθεί χαρακτηρισμοί των κώνων που είναι ισόμορφοι με τον $\ell_1^+(\Gamma)$. Ειδικότερα αναφέρουμε τον ακόλουθο χαρακτηρισμό που θα χρησιμοποιήσουμε στο κεφάλαιο 3 της παρούσας διατριβής. Για τον ορισμό και τις βασικές ιδιότητες της Continuous Projection Property, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στην παράγραφο 3.4.

Θεώρημα 2.3. *(I. Polyrakis, [43], Theorem 4.1) Έστω X χώρος Banach διατεταγμένος από τον απειροδιάστατο κλειστό κώνο P. Αν ο P έχει την Continuous Projection Property. Αν ο P έχει την Krein-Milman Property οι ισχυρισμοί (i)-(iv) είναι ισοδύναμοι. Αν ο P έχει την Radon Nikodym Property τα επόμενα είναι ισοδύναμα*

(i) Ο P είναι ισόμορφος με τον $\ell_1^+(\Gamma)$.

(ii) Ο P έχει κλείστη και φραγμένη βάση.

(iii) $sep(B_f) \neq \emptyset$ για τουλάχιστον μια βάση του B_f του P, όπου $f \in X^*$.

(iv) $0 \in sep(P)$.

(v) Ο P έχει dentable βάση που ορίζεται από $f \in X^*$.

(vi) Ο P είναι dentable.

(vii) $sep(K) \neq \emptyset$ για κάθε κλειστό κύρτο υποσύνολο K του P.

O Singer, μελέτησε πότε ένας κώνος που παράγεται από Schauder βάση είναι ισόμορφος με τον ℓ_1^+. Για αυτή την μελέτη, έδωσε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.4. *Έστω $\{x_n\}$ βασική ακολουθία του χώρου Banach X, λέμε ότι η $\{x_n\}$ είναι τύπου ℓ_+ αν είναι φραγμένη και υπάρχει $c > 0$, ώστε*

$$||\sum_{i=1}^{n} a_i x_i|| \geq c \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_i \geq 0$.

Για τις βασικές ακολουθίες τύπου ℓ_+, ισχύει ο ακόλουθος χαρακτηρισμός, που αντιστοιχεί στα Theorem 10.1, σελ.316 και Theorem 10.2, σελ.323 του [59].

Θεώρημα 2.5. *Έστω $\{x_n\}$ φραγμένη βασική ακολουθία του χώρου Banach X, τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Η $\{x_n\}$ είναι τύπου ℓ_+.

(ii) Υπάρχει $x^* \in X^*$ τέτοιο ώστε $x^*(x_n) \geq 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $K_{\{x_n\}} \simeq \ell_1^+$.

(iv) Ο $K_{\{x_n\}}$ είναι well-based κώνος.

Έχοντας ως κίνητρο την αξιοσημείωτη ιδιότητα του ℓ_1^+, που περιγράφτηκε στο Θεώρημα 2.2, τα επόμενα χρόνια μελετήθηκαν κωνικοί χαρακτηρισμοί της ανακλαστικότητας. Συγκεκριμένα το 1984, ο I. Polyrakis στο ([40], Theorem 1) απέδειξε ότι σε ανακλαστικούς χώρους οι κλειστοί και normal κώνοι δεν έχουν κλειστή και μη φραγμένη βάση που να είναι dentable. Το 1987 ο V.M. Kadec στο [27] , χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.2 , απέδειξε ότι το ([40], Theorem 1) αποτελεί χαρακτηρισμό των ανακλαστικών χώρων Banach. Μετέπειτα το 2001 ο I. Polyrakis στο [47], απέδειξε την ισχύ του ([40], Theorem 1), χωρίς την υπόθεση ότι ο κώνος είναι normal και έτσι απέδειξε τον ισχυρότερο χαρακτηρισμό της ανακλαστικότητας, που αντιστοιχεί στο ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 2.6. *(I. Polyrakis) Ο χώρος Banach X είναι ανακλαστικός αν και μόνο αν δεν περιέχει κλειστό κώνο P με μη φραγμένη κλειστή και dentable βάση.*

Το 2001, ο J. H. Qiu εργαζόμενος σε προβλήματα διανυσματικής βελτιστοποίησης απέδειξε στο ([53], Theorem 1) τον ακόλουθο κωνικό χαρακτηρισμό της ανακλαστικότητας

Θεώρημα 2.7. *(J.H. Qiu)Έστω X χώρος Banach τότε X μη ανακλαστικός αν και μόνο αν υπάρχει well-based κώνος P του X^*, έτσι ώστε $int(P_0) = \emptyset$.*

Το 2008, ο I. Polyrakis στο [49], μελέτησε το utility maximization problem και απέδειξε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 2.8. *(I. Polyrakis) Έστω X χώρος Banach και $< X, X^* >$ οικονομία ανταλλαγής τότε ο X είναι ανακλαστικός αν και μόνο αν για κάθε κάθε αυστηρά μονότονη γραμμική και συνεχή σχέση προτίμησης που ορίζεται στο σύνολο κατανάλωσης P το οποίο έχει φραγμένο σύνολο προϋπολογισμού(φραγμένη βάση) υπάρχει βέλτιστη επιλογή για τον καταναλωτή.*

Στο [49], επίσης αποδείχτηκε το ακόλουθο Θεώρημα Διχοτομίας των βάσεων των κώνων, το οποίο αποτελεί την βάση για την μελέτη που έχει γίνει στο άρθρο [16] και για τα αποτελέσματα του κεφαλαίου 3 της παρούσας διατριβής.

Θεώρημα 2.9. *(I. Polyrakis)Έστω $\langle X, Y \rangle$, δυϊκό σύστημα. Αν X είναι χώρος με νόρμα και P είναι $\sigma(X,Y)$-κλειστός κώνος του X, ώστε B_X^+ είναι $\sigma(X,Y)$-συμπαγής, τότε: Είτε κάθε βάση του P, που ορίζεται από συναρτησιακό του Y είναι φραγμένη ή κάθε τέτοια βάση του P δεν είναι φραγμένη.*

Εμπνευσμένοι από το παραπάνω Θεώρημα, στο [16] οι Casini, Miglierina όρισαν την έννοια του mixed based κώνου. Ένας κώνος, P του X είναι mixed based κώνος, αν έχει ταυτόχρονα φραγμένη και μη φραγμένη βάση που ορίζεται από συναρτησιακό του X^*. Χρησιμοποιώντας αυτή την έννοια απέδειξαν τον ακόλουθο κωνικό χαρακτηρισμό της ανακλαστικότητας.

Θεώρημα 2.10. *(E. Casini, E. Miglierina) Έστω X χώρος Banach, ο X είναι μη ανακλαστικός αν και μόνο υπάρχει κλειστός κώνος P του X που είναι mixed based.*

Σημειώνουμε εδώ, ότι το παραπάνω αποτέλεσμα, αποδείχτηκε ανεξάρτητα από το [16], στην μεταπτυχιακή εργασία [1].

Στα ακόλουθα θα δώσουμε μια μερική λύση στο ακόλουθο πρόβλημα που έθεσε ο J.H. Qiu στο [53]:

Πρόβλημα 2.11. *Υπάρχει σε κάθε μη ανακλαστικό χώρο Banach X κλειστός κώνος P, τέτοιος ώστε $int(P) = \emptyset$ και ο P^0 να είναι well-based κώνος;*

Θα δώσουμε θετική απάντηση στο παραπάνω πρόβλημα, στην περίπτωση που ο X είναι διαχωρίσιμος. Ειδικότερα, θα αποδείξουμε ότι σε αυτή την περίπτωση ισχύει κάτι ισχυρότερο, θα δείξουμε ότι μπορούμε να βρούμε κλειστό κώνο P, έτσι ώστε $int(P) = \emptyset$ και ο P^0 να είναι ισομορφικός με τον ℓ_1^+. Επομένως, στους μη ανακλαστικούς δυϊκούς χώρους με διαχωρίσιμο προδυϊκό, μπορούμε να βρούμε ένα κώνο ισόμορφο με τον ℓ_1^+ με κάποιες επιπλέον ιδιότητες, δηλαδή να είναι w^*-κλειστός και $int(P_0) = \emptyset$.

Για την απόδειξη αυτού του αποτελέσματος, θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια της w^*-βασικής ακολουθίας που ορίστηκε στο [26] από τους W.B. Johnson, H.P. Rosenthal. Υπενθυμίζουμε ότι η ακολουθία $\{(x_n, y_n)\} \subseteq X \times X^*$ είναι δισορθογώνιο σύστημα αν $y_n(x_m) = \delta_{nm}$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$.

Ορισμός 2.12. *Έστω X χώρος Banach, η ακολουθία $\{b_n^*\}$ του X^* είναι w^*-βασική ακολουθία, αν υπάρχει ακολουθία $\{c_n\}$ στον X ώστε $\{(c_n, b_n^*)\}$ είναι δισορθογώνιο σύστημα και για κάθε $x^* \in \overline{[b_n^*]}^{w^*}$, έχουμε ότι:*

$$\sum_{i=1}^{n} x^*(c_i) b_i^* \xrightarrow{w^*} x^*.$$

Αν η $\{b_n^*\}$ είναι w^*-βασική ακολουθία, τότε η $\{b_n^*\}$ είναι βασική ακολουθία στον X^*([26], Proposition II.1). Επίσης αναφέρουμε, δύο βασικά Θεωρήματα στην θεωρία των Schauder βάσεων, που θα χρησιμοποιήσουμε.

Θεώρημα 2.13. *([39], A. Pelczynski) Έστω X χώρος Banach. Αν ο υπόχωρος G του X^* είναι norming στον X και $\{x_n\}$ είναι ακολουθία της μοναδιαίας σφαίρας S_X του X τέτοια ώστε $x_n \xrightarrow{\sigma(X,G)} 0$, τότε υπάρχει υπακολουθία $\{y_n\}$ της $\{x_n\}$ που είναι βασική ακολουθία στου X.*

Θεώρημα 2.14. *([26], W.B. Johnson-H.P. Rosenthal) Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach. Αν $\{x_n^*\}$ ακολουθία του X^* τέτοια ώστε $x_n^* \xrightarrow{w^*} 0$ και $\inf_{n\in\mathbb{N}}\{||x_n^*||\} > 0$, τότε υπάρχει υπάρχει υπακολουθία $\{b_n^*\}$ της $\{x_n^*\}$ που είναι w^*-βασική ακολουθία.*

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, προκύπτει το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 2.15. *Έστω X χώρος Banach και $\{y_n^*\}$ κανονικοποιημένη ακολουθία του X^*, ώστε $y_n^* \xrightarrow{w^*} 0, y_n^* \overset{w}{\not\to} 0$, τότε υπάρχει υπακολουθία $\{b_n^*\}$ της $\{y_n^*\}$, που είναι βασική τύπου ℓ_+ και $\{c_n\}$ ακολουθία του X έτσι ώστε $\{(c_n, b_n^*)\}$ είναι δισορθογώνιο σύστημα. Αν επιπλέον ο X είναι διαχωρίσιμος, τότε η $\{b_n^*\}$, μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε να είναι w^*- βασική ακολουθία.*

Απόδειξη. Επειδή $y_n^* \overset{w}{\not\to} 0$, υπάρχει $f \in X^{**}$ και υπακολουθία $\{b_n^*\}$ της $\{y_n^*\}$, τέτοια ώστε $f(b_n^*) \geq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $b_n^* \xrightarrow{w^*} 0$, μπορούμε να επιλέξουμε υπακολουθία της $\{b_n^*\}$ που συμβολίζουμε, πάλι με b_n^*, έτσι ώστε να είναι βασική ακολουθία του X^*. Τότε από τα παραπάνω, έχουμε ότι η $\{b_n^*\}$ είναι βασική ακολουθία τύπου ℓ_+, που είναι w^*-μηδενική. Έστω Y ο κλειστός υπόχωρος του X^*, που παράγεται από την ακολουθία $\{b_n^*\}$ και Z κλειστός διαχωρίσιμος υπόχωρος του X, με την ιδιότητα ότι $||y^*|| = \sup\{y^*(x) \;|x \in B_Z\}$ για κάθε $y^* \in Y$. Τότε από το Θεώρημα 2.14, υπάρχει υπακολουθία της $\{b_n^*\}$ που συμβολίζουμε, πάλι με b_n^* έτσι ώστε να είναι $\sigma(Z^*, Z)$-βασική. Επομένως υπάρχει ακολουθία $\{c_n\}$ του Z έτσι ώστε $\{c_n, b_n^*\}$ είναι δισορθογώνιο σύστημα και για κάθε x^* που ανήκει στο $\sigma(Z^*, Z)$ κλείσιμο του $[b_n^*]$, έχουμε $x^* = \sum_{i=1}^{\infty} x^*(c_i)b_i^*$ στην $\sigma(Z^*, Z)$ τοπολογία του Z^*. Αν υποθέσουμε, ότι ο X είναι διαχωρίσιμος, τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $Z = X$, επομένως σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι η $\{b_n^*\}$ είναι w^*-βασική ακολουθία τύπου ℓ_+. □

Πρόταση 2.16. *Έστω $\{x_n^*\}$ βασική ακολουθία του X^* με $x_n^* \xrightarrow{w^*} 0$. Αν $P = K_{\{x_n^*\}}$ και $\inf_{n\in\mathbb{N}}\{||x_n||\} > 0$, τότε $int(P_0) = \emptyset$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in int(P_0)$. Από το Θεώρημα 1.14, έχουμε ότι B_x φραγμένη βάση του P, άρα το x είναι uniformly monotonic. Επομένως υπάρχει $a > 0$ έτσι ώστε $x_n^*(x) \geq a||x_n^*|| > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άτοπο διότι $x_n^* \xrightarrow{w^*} 0$. □

Θεώρημα 2.17. *Κάθε διαχωρίσιμος, μη ανακλαστικός χώρος Banach X, περιέχει έναν κλειστό κώνο P τέτοιο ώστε:*

$$int(P) = \emptyset \text{ και } P^0 \simeq \ell_1^+.$$

Απόδειξη. Έστω X διαχωρίσιμος, μη ανακλαστικός χώρος Banach, τότε υπάρχει κανονικοποιημένη και w^*-μηδενική ακολουθία $\{b_n^*\}$ του X^*. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.15, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η b_n^* είναι w^*-βασική ακολουθία τύπου ℓ_+. Θέτουμε $K = K_{\{b_n^*\}}$, τότε ο K είναι well-based και K_0 είναι κλειστός κώνος του X, επίσης από την Πρόταση 2.16 έχουμε ότι $int(K_0) = \emptyset$. Ακολούθως, θα δείξουμε ότι ο K είναι w^*-κλειστός. Αρχικά παρατηρούμε ότι $\overline{K}^{w^*} = (K_0)^0$. Έστω $x^* \in \overline{K}^{w^*}$, επειδή η b_n^* είναι w^*-βασική ακολουθία, υπάρχει $(c_n, b_n^*) \in X \times X^*$ δισορθογώνιο σύστημα τέτοιο ώστε: $\sum_{i=1}^n x^*(c_i)b_i^* \xrightarrow{w^*} x^*$. Η ακολουθία $\{\sum_{1=1}^n x^*(c_i)b_i^*\}$ είναι w^*-συγκλίνουσα, επομένως $||\cdot||$ φραγμένη. Έστω $M > 0$, τέτοιο ώστε $||\sum_{i=1}^n x^*(c_i)b_i^*|| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι $c_i \in K_0$ για κάθε i και επειδή $x^* \in \overline{K}^{w^*} = (K_0)^0$, έχουμε ότι $x^*(c_i) \geq 0$ για κάθε i. Επομένως $\sum_{i=1}^n x^*(c_i)b_i^* \in K$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή η $\{b_n^*\}$ είναι τύπου ℓ_+ υπάρχει ισομορφισμός T του ℓ_1^+ επί του K, με $T(e_n) = b_n^*$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και έστω ότι:

$$A||\xi|| \leq ||T(\xi)|| \leq N||\xi||,$$

για κάθε $\xi \in \ell_1^+$. Επομένως,

$$||\sum_{i=1}^n x^*(c_i)e_i|| \leq \frac{1}{A}||\sum_{i=1}^n x^*(c_i)b_i^*|| \leq \frac{M}{A}, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Η βάση $\{e_n\}$ του ℓ_1 είναι boundedly complete, άρα $\sum_{i=1}^\infty x^*(c_i)e_i \in \ell_1^+$, επομένως $x^* = \sum_{i=1}^\infty x^*(c_i)b_i^* \in K$. Συνεπώς ο κώνος $P = K_0$ ικανοποιεί το ζητούμενο. □

2.2 Η εμφύτευση του κώνου c_0^+

Σε αυτή την ενότητα, θα αποδείξουμε ότι ο c_0^+ σε αντίθεση με τον ℓ_1^+, που εμφυτεύεται σε όλους τους μη ανακλαστικούς χώρους, έχει την ίδια συμπεριφορά με όλο τον c_0. Συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε ότι ο c_0 εμφυτεύεται στον χώρο Banach X αν και μόνο αν ο c_0^+ εμφυτεύεται στον X και θα μελετήσουμε τους χώρους που εμφυτεύεται ο c_0, στο πνεύμα αυτού του χαρακτηρισμού.

Πριν προχωρήσουμε στο βασικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας, με την παρακάτω πρόταση θα διαπιστώσουμε ότι η ιδιότητα του normal κώνου μεταφέρεται μεταξύ ισομορφικών κώνων.

Πρόταση 2.18. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα διατεταγμένοι από τους κώνους P, Q αντίστοιχα. Αν οι κώνοι P, Q είναι ισομορφικοί, τότε έχουμε: ο P είναι normal αν και μόνο αν ο Q είναι normal.*

Απόδειξη. Έστω $T : P \to Q$ ένας ισομορφισμός του P επί του Q και P normal κώνος με σταθερά c και $A, B > 0$ ώστε $A||x|| \leq ||T(x)|| \leq B||x||$ για κάθε $x \in P$. Ο T μπορεί να επεκταθεί σε γραμμικό τελεστή από τον $P - P$ στον $Q - Q$ μέσω της σχέσης:

$$T(x - y) = T(x) - T(y),$$

για κάθε $x, y \in P$. Έστω $T(x), T(y) \in Q$ με

$$0 \leq T(x) \leq T(y).$$

Τότε $0 \leq x \leq y$, επομένως $||x|| \leq c||y||$. Άρα λόγω του ισομορφισμού T, έχουμε:

$$||T(x)|| \leq B||x|| \leq Bc||y|| \leq \frac{Bc}{A}||T(y)||,$$

επομένως έχουμε ότι ο Q είναι normal. □

Θεώρημα 2.19. *Σε κάθε χώρο Banach X, τα επόμενα είναι ισοδύναμα*

(i) Ο c_0^+ εμφυτεύεται στον X,

(ii) Ο c_0 εμφυτεύεται στον X.

Απόδειξη. Μόνο η κατεύθυνση $(i) \Rightarrow (ii)$, χρειάζεται απόδειξη. Έστω X διατεταγμένος από τον κώνο P και $T : c_0^+ \to P$ ισομορφισμός από τον c_0^+ επί του P, με $b_i = T(e_i)$ για κάθε i. Τότε υπάρχουν $A, B > 0$ τέτοιοι ώστε

$$A||\xi|| \leq ||T(\xi)|| \leq B||\xi||,$$

για κάθε $\xi \in c_0^+$. Επομένως

$$||\sum_{i=1}^{n} b_i|| = ||T(\sum_{i=1}^{n} e_i)|| \leq B||\sum_{i=1}^{n} e_i|| = B.$$

Επιπλέον $||\sum_{i=n}^{n+m} b_i|| = ||T(\sum_{i=n}^{n+m} e_i)|| \geq A||\sum_{i=n}^{n+m} e_i|| = A$. Άρα η ακολουθία $\sum_{i=1}^{n} b_i$ δεν συγκλίνει. Για κάθε $x^* \in X^*$, θετικό στον P, έχουμε:

$$0 \leq x^*(\sum_{i=1}^{n} b_i) \leq ||x^*|| ||\sum_{i=1}^{n} b_i|| \leq B||x^*||.$$

Επειδή, η ακολουθία $\sum_{i=1}^{n} x^*(b_i)$ είναι αύξουσα, έχουμε ότι $\sum_{i=1}^{\infty} x^*(b_i) \in \mathbb{R}_+$. Επίσης ο κώνος P είναι ισομορφικός με τον c_0^+, άρα από την προηγούμενη πρόταση είναι normal. Από το θεώρημα του Krein(Θεώρημα 1.20), έχουμε ότι ο P^0 είναι generating. Άρα για κάθε $x^* \in X^*$, έχουμε ότι $x^* = x_1^* - x_2^*$ όπου $x_1^*, x_2^* \in P^0$. Συνεπώς $\sum_{i=1}^{\infty} |x^*(b_i)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} x_1^*(b_i) + \sum_{i=1}^{\infty} x_2^*(b_i)$, άρα $\sum_{i=1}^{\infty} |x^*(b_i)| \in \mathbb{R}$. Άρα ο c_0 εμφυτεύεται στον X([7],Theorem 4.49). $\square$

Ακολούθως δίνουμε έναν ισοδύναμο μετασχηματισμό, για θετικούς συντελεστές a_i, του κλασσικού χαρακτηρισμού της ισοδύναμης Schauder βάσης με την κανονική βάση του c_0.

Θεώρημα 2.20. *(Bessaga-Pelczynski, [13])Η Schauder βάση $\{x_n\}$ ενός χώρου Banach X είναι ισοδύναμη με την κανονική βάση $\{e_n\}$ του c_0 αν και μόνο αν $\inf_{n \in \mathbb{N}}\{||x_n||\} > 0$ και υπάρχει $c > 0$ ώστε:*

$$||\sum_{i=1}^{n} a_i x_i|| \leq c \max\{a_1, ..., a_n\} \text{ για κάθε } a_i \geq 0 \text{ και } n \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Στο [13], στο παραπάνω αποτέλεσμα, η συνθήκη (2.1) έχει την ακόλουθη μορφή

$$||\sum_{i=1}^{n} a_i x_i|| \leq c \max\{|a_1|, ..., |a_n|\} \text{ για κάθε } a_i \in \mathbb{R} \text{ και } n \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Οι συνθήκες (2.1) και (2.2) είναι ισοδύναμες. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι η (2.1) ισχύει και $\{a_i\}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών τότε, αν για κάθε n θέσουμε $F_+ = \{i = 1, ..., n \mid a_i \geq 0\}, F_- = \{i = 1, ..., n \mid a_i < 0\}$ έχουμε:

$$||\sum_{i=1}^{n} a_i x_i|| \leq ||\sum_{i \in F_+} a_i x_i|| + ||\sum_{i \in F_-} a_i x_i|| = ||\sum_{i \in F_+} a_i x_i|| + ||\sum_{i \in F_-} -a_i x_i||$$

$$\leq c(\max\{a_i \mid i \in F_+\} + \max\{-a_i \mid i \in F_-\}) \leq 2c \max\{|a_i| \; |i = 1, ..n\},$$

άρα η (2.1) συνεπάγεται την (2.2).

Έστω $\{x_n\}$ βασική ακολουθία του χώρου Banach X και $P = K_{\{x_n\}}$ ο θετικός κώνος που παράγεται από την $\{x_n\}$. Αν για κάθε ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών $\{a_i \geq 0 \; \forall i \in \mathbb{N}\}$, ισχύει:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} ||\sum_{i=1}^{n} a_i x_i|| < +\infty \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in X,$$

λέμε ότι η βασική ακολουθία $\{x_n\}$ είναι boundedly complete στον P ή θετικά boundedly complete . Η summing βάση του c_0 είναι ένα παράδειγμα μια βάσης που είναι θετικά boundedly complete και όχι boundedly complete στον X.

Ο James απέδειξε στο [23], ότι *αν X είναι χώρος Banach με unconditional και όχι boundedly complete Schauder βάση, τότε ο c_0 εμφυτεύεται στον X.* Όπως έχουμε παρατηρήσει, σε ορολογία κώνων μια Schauder βάση $\{x_n\}$ είναι unconditional αν και μόνο αν ο $K_{\{x_n\}}$ είναι generating και normal. Το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι ανάλογο με του James. Συγκεκριμένα σε σχέση με το Θεώρημα του James, έχουμε ασθενέστερη συνθήκη από την unconditional βάση, απαιτώντας ο $K_{\{x_n\}}$ να είναι μόνο normal, αλλά απαιτούμε την πιο ισχυρή συνθήκη η $\{x_n\}$ να μην είναι θετικά boundedly complete. Η απόδειξη του παρακάτω είναι το κωνικό ανάλογο της αντίστοιχης απόδειξης στο [23].

Πρόταση 2.21. *Έστω X χώρος Banach με Schauder βάση $\{x_n\}$. Αν ο κώνος $K_{\{x_n\}}$ είναι normal και η βάση $\{x_n\}$ δεν είναι θετικά boundedly complete, τότε υπάρχει μια block βασική ακολουθία $\{y_n\}$ της $\{x_n\}$, που προέρχεται από θετικούς γραμμικούς συνδυασμούς της $\{x_n\}$, που είναι ισοδύναμη με την κανονική βάση του c_0.*

Απόδειξη. Επειδή η $\{x_n\}$ δεν είναι θετικά boundedly complete, υπάρχει ακολουθία $\{a_i\}$ θετικών πραγματικών αριθμών, τέτοια ώστε

$$||\sum_{i=1}^{n} a_i x_i|| \leq M, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

και η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ δεν συγκλίνει. Άρα υπάρχει αυστηρά αύξουσα ακολουθία $\{q_n\}$ του $\mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\inf_{n\in\mathbb{N}} ||\sum_{i=q_n}^{q_{n+1}-1} a_i x_i|| = d > 0$. Αν c είναι η σταθερά του normal κώνου P, έχουμε:

$$||\sum_{i=q_1}^{q_2-1} a_i x_i|| \leq c||\sum_{i=1}^{q_2-1} a_i x_i||,$$

επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι $q_1 = 1$. Τότε η ακολουθία $y_n = \sum_{i=q_n}^{q_{n+1}-1} a_i x_i$, είναι block βασική ακολουθία της $\{x_n\}$, με

$$||\sum_{i=1}^{n} y_i|| = ||\sum_{i=1}^{q_{n+1}-1} a_i x_i|| \leq M,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{R}_+$ έχουμε:

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i \leq \max\{\beta_1, ..., \beta_n\} \sum_{i=1}^{n} y_i,$$

άρα

$$||\sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i|| \leq c \max\{\beta_1, ..., \beta_n\} ||\sum_{i=1}^{n} y_i|| \leq cM \max\{\beta_1, ..., \beta_n\},$$

και από το Θεώρημα 2.20, έχουμε ότι η $\{y_n\}$ είναι ισοδύναμη με την κανονική βάση του $\{c_0\}$. □

Έστω $\{x_n\}$ ακολουθία σε έναν χώρο Banach X. Το σύνολο

$$cone\{x_n\} = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{R}_+\}$$

είναι ο κώνος που παράγεται από τη $\{x_n\}$ και ο $\overline{cone}\{x_n\}$ είναι ο κλειστός κώνος που παράγει η $\{x_n\}$. Η ακολουθία $y_1 = x_1$ και $y_{n+1} = x_{n+1} - x_n$ για κάθε $n \geq 1$ είναι η ακολουθία διαφοράς της $\{x_n\}$. Έστω $\{x_n\}$ βασική ακολουθία, λέμε ότι η $\{x_n\}$ είναι ***τύπου*** p, αν $\inf_{n\in\mathbb{N}} ||x_n|| > 0$ και $\sup_{n\in\mathbb{N}} ||\sum_{i=1}^{n} x_i|| < +\infty$ και ότι η $\{x_n\}$ είναι ***τύπου*** p^* αν τα συναρτησιακά συντεταγμένων $\{x_n^*\}$ της $\{x_n\}$ βασική ακολουθία τύπου p. Αν $\sup_{n\in\mathbb{N}}\{||x_n||\} < \infty$, τότε η $\{x_n\}$ είναι τύπου p^* αν και μόνο αν η ακολουθία διαφοράς της $\{x_n\}$ είναι τύπου p([59], Chap. II, Theorem 9.2). Η $\{x_n\}$ είναι *strongly summing*, αν είναι w-Cauchy και για κάθε ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{c_i\}$, έχουμε ότι:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} ||\sum_{i=1}^{n} c_i x_i|| < +\infty \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} c_i \text{ υπάρχει.}$$

Σημειώνουμε, ότι κάθε strongly summing βασική ακολουθία $\{x_n\}$ είναι τύπου p^*, επειδή η ακολουθία διαφορών της $\{x_n\}$ είναι τύπου p([55], Proposition 2.1, Definition 2.1-2.2).

Στην απόδειξη του ακόλουθου αποτελέσματος χρησιμοποιούμε, τα κλασσικά ℓ_1 και c_0 Θωρήματα του Rosenthal([54], [55]) και επίσης το ακόλουθο αποτέλεσμα των Casini, Miglierina από το [16]: Αν ο P είναι κλειστός κώνος ενός χώρου Banach και είναι ισομορφικός με τον ℓ_1^+, τότε ο P είναι mixed based κώνος.

Θεώρημα 2.22. *Έστω T ισομορφισμός του ℓ_1^+ επί του κλειστού κώνου P, ενός χώρου Banach X και $x_n = T(e_n)$ για κάθε n. Αν ο κλειστός κώνος που παράγει η ακολουθία διαφοράς $\{y_n\}$ της $\{x_n\}$ είναι normal, τότε ο c_0 εμφυτεύεται στον X.*

Απόδειξη. Επειδή ο T είναι ισομορφισμός του ℓ_1^+ επί του P, τότε υπάρχουν $A, B > 0$ τέτοιοι ώστε

$$A||\xi|| \leq ||T(\xi)|| \leq B||\xi||, \text{ για κάθε } \xi \in \ell_1^+,$$

επομένως $A \leq ||x_n|| \leq B$ για κάθε n. Θα δείξουμε αρχικά ότι η $\{x_n\}$ δεν είναι w-συγκλίνουσα. Υποθέτουμε ότι $x_n \xrightarrow{w} x_0$. Τότε $x_0 \in \overline{co}^w\{x_n\} = \overline{co}\{x_n\}$, άρα $T^{-1}(x_0) \in \overline{co}\{e_n\}$ και $\overline{co}\{e_n\}$ είναι το θετικό τμήμα της σφαίρας του ℓ_1, άρα $x_0 \neq 0$. Σύμφωνα με το ([16], Theorem 4.5), υπάρχει $x^* \in X^*$, που ορίζει μια μη φραγμένη βάση στον P. Τότε επειδή $x^*(x_n) \to x^*(x_0) > 0$, έχουμε ότι $x^*(x_n) \geq a > 0$ για κάθε n, επειδή $x_0 \in P \setminus \{0\}$ και x^* αυστηρά θετικό στον P. Για κάθε $x = T(\xi) \in P$, όπου $\xi = (\xi_i) \in \ell_1^+$, έχουμε $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i x_i$, επομένως

$$x^*(x) = x^*(\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i x_i) \geq a \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i = a||\xi|| \geq \frac{a}{B}||x||.$$

Άρα το x^* είναι uniformly monotonic στον P, επομένως από την Πρόταση 1.10, το x^* ορίζει μια φραγμένη βάση στον P, που είναι άτοπο. Συνεπώς η x_n δεν είναι w- συγκλίνουσα. Από το ℓ_1 και c_0 Θεώρημα του Rosenthal, έχουμε ότι, ένα από τα ακόλουθα ισχύει:(i) η $\{x_n\}$ έχει υπακολουθία ισοδύναμη με την κανονική βάση του ℓ_1, ή (ii)η $\{x_n\}$ έχει μια strongly summing υπακολουθία, ή (iii) η $\{x_n\}$ έχει μια κυρτή block βασική ακολουθία ισοδύναμη με την summing βάση του c_0. Στην περίπτωση που ισχύει, το (iii), τότε ο ισχυρισμός είναι αληθής. Αν το (i) ή το (ii) ισχύει, τότε υπάρχει υπακολουθία $\{x_{k_n}\}$ της $\{x_n\}$, που είναι τύπου p^*. Αν z_n είναι η ακολουθία διαφοράς της $\{x_{k_n}\}$, τότε η $\{z_n\}$ είναι βασική ακολουθία τύπου p. Επίσης, παρατηρούμε ότι $K = K_{\{z_n\}}$ περιέχεται στον $\overline{cone}\{y_n\}$, διότι:

$$z_n = x_{k_n} - x_{k_{n-1}} = \sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} y_i \in cone\{y_n\},$$

για κάθε n, επομένως ο K ως υποκώνος του normal κώνου, $\overline{cone}\{y_n\}$ είναι normal. Ακολούθως, θα δείξουμε ότι η $\{z_n\}$ είναι ισοδύναμη με την κανονική βάση του c_0. Πράγματι, $\inf_{n\in\mathbb{N}} ||z_n|| > 0$ και $||\sum_{i=1}^{n} z_i|| \leq M$, για κάθε n, διότι $\{z_n\}$ είναι βασική ακολουθία τύπου p. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και

$a_1, ..., a_n \geq 0$ έχουμε:

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i z_i \leq \max\{a_1, ..., a_n\} \sum_{i=1}^{n} z_i,$$

όπου $\leq$ είναι η διάταξη που δίνει ο κώνος K, άρα

$$|| \sum_{i=1}^{n} a_i z_i || \leq cM \max\{a_1, ..., a_n\},$$

διότι ο K είναι normal. Από το Θεώρημα 2.20, έχουμε το ζητούμενο.

□

2.3 Κώνοι και χώροι Grothendieck

Έστω X χώρος Banach, λέμε ότι ο X είναι Grothendieck, αν κάθε w^* μηδενική ακολουθία του X^* είναι w μηδενική. Ο ορισμός αυτός δόθηκε προς τιμή του Alexander Grothendieck, ο οποίος στην πρωτοποριακή εργασία [22], έβαλε τα θεμέλια για την μελέτη αυτών των χώρων. Για την σχέση μεταξύ των ασθενών συμπαγών τελεστών και των χώρων Grothendieck αναφέρουμε την διπλωματική εργασία [2]. Προφανώς κάθε ανακλαστικός χώρος είναι Grothendieck χώρος και κάθε μη ανακλαστικός διαχωρίσιμος χώρος, δεν είναι Grothendieck. Στην παρούσα παράγραφο θα δώσουμε έναν κωνικό χαρακτηρισμό των χώρων Grothendieck στο πνεύμα των κωνικών χαρακτηρισμών της ανακλαστικότητας και θα αποδείξουμε την Grothendieck ιδιότητα για μια συγκεκριμένη κατηγορία διατεταγμένων χώρων Banach. Το αποτέλεσμα αυτό γενικεύει το βασικό αποτέλεσμα του [57], σε διατεταγμένους χώρους που δεν έχουν lattice δομή.

Για την διατύπωση του κωνικού χαρακτηρισμού των χώρων Grothendieck, θα χρησιμοποιήσουμε μια ημινόρμα που ορίζεται από κώνο, την οποία θα μελετήσουμε ακολούθως.

Έστω X χώρος με νόρμα, P κώνος του $X^*, B^+_{X^*} = B_{X^*} \cap P$ το θετικό τμήμα της μοναδιαίας μπάλας του X^* και $V = co(B^+_{X^*} \cup (-B^+_{X^*}))$. Για κάθε

$x \in X$, θέτουμε
$$d_P(x) = \sup_{x^* \in V} x^*(x).$$
Επειδή V είναι υποσύνολο της B_{X^*}, έχουμε ότι $d_P(x) \in \mathbb{R}$ και
$$d_P(x) \leq ||x|| \text{ για κάθε } x \in X.$$
Είναι εύκολο να δείξουμε ότι
$$d_P(x) = \sup_{x^* \in B^+_{X^*}} |x^*(x)|.$$
Η συνάρτηση d_P είναι μια ημινόρμα στον X. Η d_P εξαρτάται από τον κώνο P, για αυτό θα λέμε ότι η d_P είναι ημινόρμα που ορίζεται από τον κώνο P. Αν η d_P είναι νόρμα στον X θα την συμβολίζουμε με $||\cdot||_P$.

Πρόταση 2.23. *Έστω d_P ημινόρμα του X που ορίζεται από τον κώνο $P \subseteq X^*$, τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) d_P είναι νόρμα του X.

(ii) ο υπόχωρος $Y = P - P$ του X^* διαχωρίζει τα σημεία του X.

Απόδειξη. Για κάθε $x \in X$ έχουμε:
$$d_P(x) = 0 \Leftrightarrow x^*(x) = 0 \text{ για κάθε } x^* \in B^+_{X^*} \Leftrightarrow$$
$$x^*(x) = 0 \text{ για κάθε } x^* \in P \Leftrightarrow x^*(x) = 0 \text{ για κάθε } x^* \in Y,$$
επομένως τα (i), (ii) είναι ισοδύναμα. □

Πρόταση 2.24. *Έστω P κώνος του X^*. Αν $Y = P - P$ είναι norming στον X και ο P δίνει open decomposition στον Y, τότε η d_P είναι νόρμα του X, ισοδύναμη με τη νόρμα του X.*

Απόδειξη. Ο Y διαχωρίζει τα σημεία του X, επειδή είναι norming στον X, άρα d_P είναι νόρμα του X. Αν $\rho B_Y \subseteq B^+_Y - B^+_Y$, τότε για κάθε $x \in X$ έχουμε:
$$\rho \sup_{x^* \in B_Y} x^*(x) \leq \sup_{x^* \in B^+_Y} x^*(x) + \sup_{x^* \in (-B^+_Y)} x^*(x) \leq 2 \sup_{x^* \in B^+_Y} |x^*(x)|,$$
άρα $\rho||x|| \leq 2||x||_P$, επομένως οι νόρμες είναι ισοδύναμες. □

Στο ακόλουθο παράδειγμα οι $||\cdot||$ και $||\cdot||_P$ δεν είναι ισοδύναμες.

Παράδειγμα 2.25. *Έστω $X = \ell_1$, τότε $X^* = \ell_\infty$, η ακολουθία $b_n = \sum_{i=1}^n e_i$ είναι βασική ακολουθία τύπου ℓ_+ στον ℓ_∞ και έστω P ο κώνος που παράγεται από την $\{b_n\}$, τότε το σύνολο*

$$B = \{x^* = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i b_i \mid \xi \in \ell_1^+, ||\xi|| = 1\},$$

είναι μια φραγμένη βάση του P και παρατηρούμε ότι $B = S_+$ είναι το θετικό κομμάτι της μοναδιαίας σφαίρας του X^*. Επίσης παρατηρούμε ότι $Y = P - P$ διαχωρίζει τα σημεία του X, άρα η d_P είναι νόρμα στον X, που την συμβολίζουμε με $||\cdot||_P$. Τότε $||x|| \geq ||x||_P$ για κάθε $x \in \ell_1$. Έστω ότι οι νόρμες είναι ισοδύναμες. Τότε υπάρχει $A > 0$ έτσι ώστε

$$||x||_P \geq A||x|| \text{ για κάθε } x \in \ell_1.$$

Για κάθε $x^* = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i b_i \in B$ έχουμε ότι $x^* = (\sum_{i=n}^{\infty} \xi_i)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0^+$. Επίσης για κάθε $x = (x_i) \in \ell_1$ έχουμε ότι:

$$x^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{i=n}^{\infty} \xi_i)x_n = (\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i)x_1 + (\sum_{i=2}^{\infty} \xi_i)x_2 + ...$$

Επειδή $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i = 1$, έχουμε:

$$\begin{aligned} x^*(x) &= x_1 + (1-\xi_1)x_2 + (1-(\xi_1+\xi_2))x_3 + ... \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i - (\sum_{i=2}^{\infty} x_i)\xi_1 - (\sum_{i=3}^{\infty} x_i)\xi_2 - ... \\ &= (\sum_{i=1}^{\infty} x_i, \sum_{i=2}^{\infty} x_i, \sum_{i=3}^{\infty} x_i, ...) \cdot (1, -\xi_1, -\xi_2, ...) = \zeta(\eta), \end{aligned}$$

όπου $\zeta \in c_0$ και $\eta \in \ell_1$. Συνεπώς $|x^*(x)| = |\zeta(\eta)| \leq ||\zeta||||\eta|| = 2||\zeta||$, άρα

$$|x^*(x)| \leq 2 \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|\sum_{i=n}^{\infty} x_i|\}.$$

Από τον ορισμό της $||\cdot||_P$, *για κάθε* $x \in \ell_1$ *υπάρχει* $x^* = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i b_i$, *όπου* $\xi \in \ell_1^+, ||\xi|| = 1$, *έτσι ώστε*

$$2 \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|\sum_{i=n}^{\infty} x_i|\} \geq |x^*(x)| \geq A||x||.$$

Έστω ότι $x = (\frac{(-1)^{i+1}}{\omega^i})_{i\in\mathbb{N}} = (x_i) \in \ell_1$, *όπου* $\omega \in (1,2)$. *Τότε* $||x|| = \frac{1}{\omega-1}$ *και για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *έχουμε ότι:*

$$|\sum_{i=n}^{\infty} x_i| = |\sum_{i=n}^{\infty} x_i^+ - \sum_{i=n}^{\infty} x_i^-| = \frac{1}{\omega^{n-1}(\omega+1)}.$$

Επομένως έχουμε $\sup_{n\in\mathbb{N}}\{|\sum_{i=n}^{\infty} x_i|\} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i = \frac{1}{\omega+1}$. *Άρα*

$$2\frac{1}{\omega+1} \geq A\frac{1}{\omega-1} \Rightarrow \frac{2}{A} \geq \frac{\omega+1}{\omega-1} \text{ για κάθε } \omega \in (1,2).$$

Συνεπώς $\frac{2}{A} = +\infty$, *άτοπο.*

Έστω X διατεταγμένος από τον κώνο K. Λέμε ότι το $x_0 \in K$ είναι quasi interior point του X ως προς την d_P αν το ιδεώδης $\cup_{n=1}^{\infty}[-nx_0, nx_0]$ που παράγει το x_0, είναι d_P-πυκνό στον X. Συμβολίζουμε με $Q_P(K)$ το σύνολο των quasi interior points του X ως προς την d_P.

Πρόταση 2.26. *Έστω* X *χώρος με νόρμα,* P *κώνος του* X^* *και* X *διατεταγμένος από τον κώνο* P_0. *Αν* $x_0 \in Q_P(P_0)$, *τότε το* x_0 *είναι αυστηρά θετικό στον* P.

Απόδειξη. Έστω $x^*(x_0) = 0$ για κάποιο $x^* \in B_{X^*}^+, x^* \neq 0$. Τότε για κάθε $x \in X$ και $\epsilon > 0$ υπάρχει $y \in [-nx_0, nx_0]$ έτσι ώστε $d_P(x-y) < \epsilon$, άρα $|x^*(x-y)| < \epsilon$ από τον ορισμό της d_P.

Άρα έχουμε ότι $|x^*(x)| \leq |x^*(x-y)| + |x^*(y)|$. Το x^* είναι θετικό στον P_0, επομένως επειδή $-nx_0 \leq y \leq nx_0$ έχουμε ότι $x^*(y) = 0$. Άρα $|x^*(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$, δηλαδή $x^*(x) = 0$ για κάθε $x \in X$, άτοπο διότι $x^* \neq 0$. □

Στο επόμενο αποτέλεσμα δίνουμε έναν κωνικό χαρακτηρισμό των Grothendieck χώρων. Για το ευθύ κομμάτι της απόδειξης χρησιμοποιήσαμε μια τεχνική του I. Polyrakis που χρησιμοποιήθηκε στο [41] και για το αντίστροφο το Θεώρημα 2.15.

Θεώρημα 2.27. *Ο χώρος Banach X δεν είναι Grothendieck αν και μόνο αν υπάρχει well-based κώνος P του X^* ώστε*

$$int(P_0) = \emptyset \text{ και } Q_P(P_0) \neq \emptyset.$$

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει well-based κώνος P του X^* τέτοιος ώστε $int(P_0) = \emptyset$ και $Q_P(P_0) \neq \emptyset$. Επειδή ο P είναι well-based, υπάρχει $f \in int(P^0)$, τότε η βάση B_f του P που ορίζεται από τον P είναι φραγμένη. Θα δείξουμε ότι $0 \in \overline{B_f}^{w^*}$. Αν υποθέσουμε ότι $0 \notin \overline{B_f}^{w^*}$, τότε υπάρχει $x \in X$ που διαχωρίζει το 0 και το B_f. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι το x είναι αυστηρά θετικό στον P και ότι η βάση που ορίζει στον P είναι φραγμένη, τότε $x \in int(P_0) = \emptyset$, το οποίο είναι άτοπο. Θα δείξουμε ότι υπάρχει ακολουθία $\{x_n^*\} \subseteq B_f$ τέτοια ώστε $x_n^* \xrightarrow{w^*} 0$. Έστω $x_0 \in Q_P(P_0)$, επειδή $0 \in \overline{B_f}^{w^*}$ έχουμε ότι $0 \in \overline{nB_f}^{w^*}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα υπάρχει $y_n^* \in nB_f$ με $y_n^*(x_0) < 1$. Τότε $x_n^* = \frac{y_n^*}{n} \in B_f$. Θα δείξουμε ότι $x_n^* \xrightarrow{w^*} 0$. Έστω $x \in X$ και $\epsilon > 0$. Επειδή $x_0 \in Q_P(P_0)$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ και $z \in [-n_0x_0, n_0x_0]$ τέτοιο ώστε $d_P(z - x) < \epsilon$. Τότε παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $|x_n^*(z)| \leq n_0x_n^*(x_0) \leq \frac{n_0}{n}$. Επομένως καταλήγουμε ότι

$$|x_n^*(x)| \leq |x_n^*(x - z)| + |x_n^*(z)| \leq d_P(x - z) + \frac{n_0}{n}$$

$$< \epsilon + \frac{n_0}{n} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Άρα $x_n^* \xrightarrow{w^*} 0$. Επειδή $f(x_n^*) = 1$ έχουμε ότι ο X δεν είναι Grothendieck.

Έστω ότι ο X δεν είναι Grothendieck. Τότε από το Θεώρημα 2.15 υπάρχει (c_n^*, b_n^*) δισορθογώνιο σύστημα με $c_n \in X, b_n^* \in X^*$, τέτοιο ώστε $\{b_n^*\}$ είναι κανονικοποιημένη βασική ακολουθία τύπου ℓ_+ με $b_n^* \xrightarrow{w^*} 0$. Έστω $P = K_{\{b_n^*\}}$, από την Πρόταση 2.16, έχουμε ότι $int(P_0) = \emptyset$. Επειδή η $\{b_n^*\}$ είναι τύπου ℓ_+, υπάρχει ισομορφισμός T του ℓ_1^+ επί του P με $T(e_i) = b_i^*$, έστω ότι $A||\xi|| \leq ||T(\xi)|| \leq M||\xi||$ για κάθε $\xi \in \ell_1^+$. Τότε η $B = T(S_{\ell_1}^+)$, είναι φραγμένη βάση του κώνου P με $A \leq ||x^*|| \leq M$ για κάθε $x^* \in B$. Έστω

$$x_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{2^i||c_i||}.$$

Θα δείξουμε ότι $x_0 \in Q_P(P_0)$. Έστω $x \in X$ και $\epsilon > 0$. Για κάθε $y^* = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i^*$, έχουμε ότι $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1$. Επειδή $b_n^* \xrightarrow{w^*} 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε $|b_n^*(x)| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Θέτουμε

$$y = \sum_{i=1}^{n_0} b_i^*(x) c_i.$$

Τότε είναι εύκολο να δούμε ότι $y \in \cup_{n=1}^{\infty}[-nx_0, nx_0]$ και ότι $|b_i^*(x-y)| < \epsilon$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Για κάθε $y^* = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i^* \in B$ έχουμε ότι

$$|y^*(x-y)| = |\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i^*(x-y)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i |b_i^*(x-y)| < \epsilon \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \epsilon.$$

Επομένως $\sup_{y^* \in B} |y^*(x-y)| \leq \epsilon$. Επειδή $A \leq ||y^*||$ για κάθε $y^* \in B$ υπάρχει $y^* \in B$ τέτοιο ώστε $x^* = \lambda y^*$ όπου $0 < \lambda \leq 1$, άρα $d_P(x-y) < \frac{\epsilon}{A}$ και $x_0 \in Q_P(P_0)$. □

Πόρισμα 2.28. *Έστω X AM-Banach lattice. Αν $int(X_+) = \emptyset$ και ο X_+ έχει quasi interior points ως πρός την norm τοπολογία, τότε ο X δεν είναι Grothendieck.*

Απόδειξη. Ο θετικός κώνος $P = X_+^*$ είναι well-based κώνος επειδή X^* είναι AL-χώρος. Τότε $P_0 = X_+$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.24, οι $||\cdot||, ||\cdot||_P$ είναι ισοδύναμες, άρα ο X_+ έχει quasi interior points ως πρός την $||\cdot||_P$ και άρα από το προηγούμενο Θεώρημα έχουμε ότι ο X δεν είναι Grothendieck. □

Ο Alexander Grothendieck απέδειξε στο [22], ότι αν $E = C(K)$, όπου K συμπαγής, Hausdorff και Stonian χώρος, τότε κάθε w^* μηδενική ακολουθία του E^* είναι και w μηδενική, επομένως όπως είπαμε στην αρχή της παραγράφου ο E στην σημερινή ορολογία είναι χώρος Grothendieck. Σύμφωνα με το Θεώρημα αναπαράστασης του Kakutani(Θεώρημα 1.28, [37], Proposition 2.1.4) το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Κάθε Dedekind complete AM-Banach lattice με διατακτική μονάδα είναι χώρος Grothendieck. Ο Seever απέδειξε στο [57] ότι κάθε AM-Banach lattice με διατακτική μονάδα που έχει την Countable Interpolation Property είναι χώρος Grothendieck. Συγκεκριμένα ο Seever, βελτίωσε το αποτέλεσμα του Grothendieck, αντικαθιστώντας την Dedekind complete ιδιότητα του χώρου με την ασθενέστερη CIP. Επίσης ο Lotz, στο άρθρο [35] του 1986, που είδε το φως της δημοσιότητας πρόσφατα, αντικατέστησε την ύπαρξη διατακτικής μονάδας στο αποτέλεσμα του Seever με κάποιες ασθενέστερες συνθήκες για την νόρμα τον E. Στα [15] και [18] οι Burkinshaw και Dodds, αντίστοιχα έχουν μελετήσει την $\sigma(E^{\sim}, E)$ ακολουθιακή σύγκλιση στον διατακτικό δυϊκό του vector lattice E. Στα ακόλουθα, [50], Θεώρημα 2.37, θα δείξουμε ότι το αποτέλεσμα του Seever ισχύει χωρίς να υποθέτουμε ότι ο E έχει lattice δομή. Συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι κάθε διατεταγμένος χώρος Banach με κλειστό και normal κώνο που έχει διατακτική μονάδα και την CIP είναι χώρος Grothendieck. Επίσης στο Παράδειγμα 2.40, θα δείξουμε την ύπαρξη ενός διατεταγμένου χώρου Banach, που ικανοποιεί τις υποθέσεις αυτού του αποτελέσματος και δεν έχει lattice δομή.

Σε αυτή την ενότητα θα συμβολίζουμε με E έναν διατεταγμένο χώρο. Η έννοια της l^1-ακολουθίας του E και του equi-l^1 continuous υποσυνόλου του $E^{\sim}$ ορίστηκε από τον O. Burkinshaw στην περίπτωση που ο E είναι vector lattice. Στα ακόλουθα θα χρησιμοποιήσουμε αυτές τις έννοιες στην περίπτωση που ο E είναι διατεταγμένος χώρος.

Ορισμός 2.29. *Μια ακολουθία $\{x_n\} \subseteq E$, λέμε ότι είναι l^1 ακολουθία αν υπάρχει $x \in E_+$ και $\{b_n\} \subseteq E_+$ τέτοια ώστε $-b_n \leq x_n \leq b_n$ και $\sum_{i=1}^{n} b_i \leq x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Για κάθε $\sigma(E^{\sim}, E)$-φραγμένο σύνολο A του $E^{\sim}$, συμβολίζουμε με $\rho_A(x)$ την ακόλουθη ημινόρμα στον E:

$$\rho_A(x) = \sup\{|y(x)| \mid y \in A\}, \text{ για κάθε } x \in E.$$

Ορισμός 2.30. *Το $A \subseteq E^{\sim}$ είναι equi-l^1 continuous αν το A είναι $\sigma(E^{\sim}, E)$-φραγμένο και $\lim_{n\to\infty} \rho_A(x_n) = 0$ για κάθε l^1-ακολουθία $\{x_n\}$ του E.*

Πρόταση 2.31. *Έστω A είναι $\sigma(E^{\sim}, E)$-φραγμένο υποσύνολο του $E^{\sim}$. Αν $\lim_{n\to\infty} \rho_A(x_n) = 0$ για κάθε θετική l^1 ακολουθία $\{x_n\}$ του E, τότε το A είναι equi-l^1 continuous.*

Απόδειξη. Έστω $\{x_n\}$ l^1-ακολουθία του E. Τότε υπάρχει $\{b_n\} \subseteq E_+$ και $x \in E_+$ τέτοια ώστε $-b_n \leq x_n \leq b_n$ και $\sum_{i=1}^n b_i \leq x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης $\{x_n + b_n\}$ είναι μια θετική l^1-ακολουθία, γιατί $\sum_{i=1}^n (x_i + b_i) \leq \sum_{i=1}^n b_i + x \leq 2x$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως $\rho_A(x_n) = \rho_A((x_n + b_n) - b_n) \leq \rho_A(x_n + b_n) + \rho_A(b_n)$ και από την υπόθεση μας έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \rho_A(x_n) = 0$. $\square$

Αν E είναι vector lattice το solid hull ενός συνόλου A του E, $Sol(A)$, είναι το ελάχιστο solid σύνολο του E, που περιέχει το A. Το σύνολο B του E είναι solid αν $x \in B, |y| \leq |x| \Rightarrow y \in B$.

Πρόταση 2.32. *Έστω $E = E_+ - E_+$ έχει την Riesz Interpolation Property. Αν A υποσύνολο του $E^{\sim}$ και $Sol(A)$ είναι $\sigma(E^{\sim}, E)$-φραγμένο, έχουμε ότι: Το σύνολο A είναι equi-l^1 continuous αν και μόνο αν το $Sol(A)$ είναι equi-l^1 continuous.*

Απόδειξη. Αν το $B = Sol(A)$ είναι equi-l^1 continuous, τότε το A είναι equi-l^1 continuous. Έστω ότι A είναι equi-l^1 continuous και το B δεν είναι equi-l^1 continuous, τότε από την προηγούμενη πρόταση υπάρχει $\{x_n\}$, θετική l^1-ακολουθία τέτοια ώστε $\rho_B(x_n) > \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα υπάρχει $\{z_n\} \subseteq B$ τέτοια ώστε $|z_n(x_n)| > \epsilon$ για κάθε n. Επειδή $B = Sol(A)$, υπάρχει ακολουθία $\{y_n\}$ του A τέτοια ώστε $|z_n| \leq |y_n|$, επομένως

$$|y_n|(x_n) \geq |z_n|(x_n) \geq |z_n(x_n)| > \epsilon,$$

από την Riesz Kantorovich φόρμουλα, έχουμε:

$$|y_n|(x_n) = \sup\{y_n(u) \mid -x_n \leq u \leq x_n\}.$$

Άρα υπάρχει $\{u_n\}$ ακολουθία του E τέτοια ώστε $-x_n \leq u_n \leq x_n$ και $y_n(u_n) \geq \epsilon$ για κάθε n. Αυτό είναι άτοπο, διότι $\{u_n\}$ είναι l^1 ακολουθία και A είναι equi-l^1 continuous. $\square$

Πρόταση 2.33. *Αν $A \subseteq E^{\sim}$ και A είναι $\sigma(E^{\sim}, E)$ φραγμένο, τα επόμενα είναι ισοδύναμα*

(i) A είναι equi-l^1 continuous,

(ii) Κάθε διατακτικά φραγμένη και αύξουσα ακολουθία του E είναι ρ_A-Cauchy.

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$:Έστω ότι η (ii) δεν ισχύει. Τότε υπάρχει διατακτικά φραγμένη και αύξουσα ακολουθία $\{x_m\}$ του E που δεν είναι ρ_A-Cauchy. Άρα υπάρχει $\epsilon > 0$ και αυστηρά αύξουσα ακολουθία $\{m_n\}$ του $\mathbb{N}$ τέτοια ώστε:

$$\rho_A(x_{m_{n+1}} - x_{m_n}) > \epsilon \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \tag{2.3}$$

Έστω ότι η $\{x_m\}$ κυριαρχείτε από το x. Η ακολουθία $y_n = x_{m_{n+1}} - x_{m_n}$ είναι l^1 ακολουθία διότι $0 \leq \sum_{i=1}^{n} y_i = x_{m_{n+1}} - x_{m_1} \leq x - x_{m_1}$, για κάθε n. Από την (2.3), έχουμε ότι $\rho_A(y_n) > \epsilon$ για κάθε n, το οποίο είναι άτοπο.

$(ii) \Rightarrow (i)$:Έστω $\{x_n\}$ θετική, l^1 ακολουθία. Τότε η ακολουθία $y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ είναι διατακτικά φραγμένη και αύξουσα, επομένως από την (ii) είναι ρ_A-Cauchy. Επομένως έχουμε $\lim \rho_A(x_n) = \lim \rho_A(y_n - y_{n-1}) = 0$, άρα το A είναι equi-l^1 continuous. □

Ο τοπολογικός δυϊκός του ℓ_∞ είναι το ευθύ άθροισμα

$$\ell_\infty^* = \ell_1 \oplus \ell_1^d,$$

όπου ℓ_1^d είναι το διατακτικά ορθογώνιο συμπλήρωμα του ℓ_1 στον ℓ_∞^*. Άρα κάθε $x \in \ell_\infty^*$ είναι το άθροισμα $x = x^1 + x^2$, όπου το $x^1 \in \ell_1$ και το $x^2 \in \ell_1^d$. Από το λήμμα του Phillips([7], Theorem 4.67) έχουμε ότι αν $\{x_n\}$ ακολουθία του ℓ_∞^* με $x_n \xrightarrow{w^*} 0$, τότε $x_n^1 \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$.

Θεώρημα 2.34. *Έστω E διατεταγμένος χώρος Banach με κλειστό, normal και generating κώνο E_+. Αν ο E έχει την Countable Interpolation Property και $\{x_n^*\}$ είναι ακολουθία του E^* τέτοια ώστε $x_n^* \xrightarrow{w^*} 0$, τότε το σύνολο $A = \{x_n^*\}$ είναι equi-l^1 continuous.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $E^{\sim} = E^*$ και ότι το A είναι φραγμένο. Έστω ότι το A δεν είναι equi-l^1 continuous, τότε υπάρχει θετική ακολουθία l^1, $\{x_n\}$ του E ώστε $\rho_A(x_n) > \epsilon$ για κάθε n. Επειδή $\{x_n\}$ είναι θετική l^1 ακολουθία, υπάρχει $x \in E_+$, τέτοιο ώστε

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \leq x \text{ για κάθε } n. \tag{2.4}$$

Επίσης από την σχέση $\rho_A(x_n) > \epsilon$ για κάθε n υπάρχει φυσικός αριθμός k_n ώστε $|x^*_{k_n}(x_n)| > \epsilon$. Βεβαιώνουμε ότι το σύνολο $K = \{k_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ είναι άπειρο, επειδή αν υποθέσουμε ότι είναι πεπερασμένο προκύπτει άτοπο, διότι: $0 \leq |x^*_{k_n}|(\sum_{i=1}^{n} x_i) \leq |x^*_{k_n}|(x)$, άρα $\lim\limits_{i\to\infty} |x^*_{k_n}|(x_i) = 0$ για κάθε k_n. Άρα υπάρχει $i_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $|x^*_{k_n}(x_i)| \leq |x^*_{k_n}|(x_i) < \epsilon$ για κάθε $i \geq i_0$ και $k_n \in K$. Άρα το K είναι άπειρο, επομένως υπάρχει υπακολουθία της $\{x^*_n\}$ που συμβολίζουμε πάλι $\{x^*_n\}$ τέτοια ώστε:

$$|x^*_n(x_n)| > \epsilon, \text{ για κάθε } n. \tag{2.5}$$

Έστω

$$\phi = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x^*_i|}{2^i},$$

$I_\phi = \cup_{n=1}^{\infty}[-n\phi, n\phi]$ το ιδεώδης που παράγεται από το ϕ και $M = \{x \in E \,|x^*(x) = 0$, για κάθε $x^* \in I_\phi\}$. Θα ορίσουμε ακολούθως έναν θετικό τελεστή $T : \ell_\infty \to E/M$. Για κάθε $a = (a_i) \in \ell_\infty^+$ θέτουμε $f_n^a = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την σχέση (2.5), $f_n^a \leq ||(a_i)||x$, επομένως το σύνολο των άνω φραγμάτων

$$U_a = \{w \in E \mid f_n^a \leq w \ \text{ για κάθε } n\}$$

του $\{f_n^a\}$ είναι μη κενό. Θα δείξουμε ότι το ϕ περιορισμένο στο U_a παίρνει ελάχιστη τιμή σε ένα υποσύνολα S_a του U_a και για κάθε $A \subseteq U_a$ πεπερασμένο, υπάρχει $v \in S_a$ με $A \geq \{v\}$. Πράγματι, αν $\{g_n\} \subseteq U_a$ τέτοιο ώστε

$$\inf\{\phi(g_n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \inf\{\phi(w) \mid w \in U_a\},$$

από την CIP υπάρχει $u \in E$ με $f_n^a \leq u \leq g_n$ για κάθε n, επομένως $u \in S_a$. Επίσης για κάθε $A \subseteq U_a$ έχουμε $A \cup \{u\} \geq \{f_n^a\}$, όπου $u \in S_a$ επομένως υπάρχει $v \in E$ τέτοιο ώστε $A \cup \{u\} \geq \{v\} \geq \{f_n^a\}$, άρα $v \in S_a$. Έστω $\pi : E \to E/M$ με $\pi(x) = x+M$ η απεικόνιση πηλίκο. Για κάθε $a = (a_i) \in \ell_\infty^+$, θέτουμε

$$T(a) = \pi(u), \text{ όπου } u \in S_a.$$

Θα δείξουμε ότι $\pi(u) = \pi(v)$ για κάθε $u, v \in S_a$, επομένως ο T είναι καλά ορισμένος. Αρχικά παρατηρούμε ότι $Ker(\phi) \cap E_+ = M \cap E_+$ και ότι $S_a \subseteq E_+$. Επειδή $u, v \in U_a$ υπάρχει $w \in S_a$ με $u, v \geq w$. Άρα $u - w, v - w \in Ker(\phi) \cap E_+ \subseteq M$, επομένως $u - v = (u - w) - (v - w) \in M$ και ο T είναι καλά ορισμένος. Θα δείξουμε ότι ο T είναι θετικά ομογενής και προσθετικός. Έστω

$$a = (a_i), b = (b_i) \in \ell_\infty^+, T(a) = \pi(u), T(b) = \pi(v) \text{ και } T(a + b) = \pi(z).$$

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι $U_{\lambda a} = \lambda U_a$ για κάθε $\lambda > 0$, επομένως ο T είναι θετικά ομογενής. Επειδή $U_a + U_b \subseteq U_{a+b}$, έχουμε ότι $u + v \in U_{a+b}$, άρα $\phi(u + v) \geq \phi(z)$. Επίσης $z \geq f_n^a + f_m^b$ για κάθε n, m γιατί αν $n \geq m, z \geq f_n^{a+b} = f_n^a + f_n^b \geq f_n^a + f_m^b$. Επομένως υπάρχει $h \in E$ τέτοιο ώστε $z - f_n^a \geq h \geq f_m^b$ για κάθε n, m. Άρα $h \in U_b$, επομένως υπάρχει $w \in S_b$, τέτοιο ώστε $z - f_n^a \geq h \geq w$ για κάθε n. Άρα έχουμε $z - w \geq f_n^a$ για κάθε n, επομένως $z - w \in U_a$ και άρα υπάρχει $p \in S_a$ τέτοιο ώστε $z - w \geq p$. Συνεπώς έχουμε $\phi(z) \geq \phi(w) + \phi(p) = \phi(u + v)$. Άρα $T(a + b) = T(a) + T(b)$. Για κάθε $a \in \ell_\infty$, θέτουμε $T(a) = T(a^+) - T(a^-)$. Το $\pi(E_+)$ είναι κλειστό, επειδή η απεικόνιση πηλίκο είναι ανοικτή. Επίσης το $\pi(E_+)$ είναι οξύς κώνος, διότι αν υποθέσουμε ότι $\pm w \in \pi(E_+)$, τότε έχουμε ότι $w = \pi(x), -w = \pi(y)$, όπου $x, y \in E_+$, τότε $\pi(x + y) = \pi(0)$. Άρα έχουμε ότι $x + y \in M \cap E_+$, επομένως $\phi(x + y) = 0$ το οποίο συνεπάγεται ότι $\phi(x) = \phi(y) = 0$ γιατί $x, y \in E_+$. Άρα $x, y \in Ker(\phi) \cap E_+ = M \cap E_+$ και $w = \pi(x) = 0$. Από το θεώρημα του Lozanovsky, έχουμε ότι ο T είναι συνεχής. Επίσης για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $T(e_n) = \pi(x_n)$. Οι χώροι $(E/M)^*$ και $M^\perp$ είναι ισομετρικοί με $x^*(\pi(x)) = x^*(x)$ για κάθε $x^* \in M^\perp$. Σημειώνουμε ότι $x_n^* \in M^\perp$, διότι $\frac{|x_n^*|}{2^n} \leq \phi$ για κάθε n και $I_\phi \subseteq M^\perp$. Επίσης $T^*(x_n^*) \xrightarrow{w^*} 0$, επειδή ο T^* είναι

$w^* - w^*$ συνεχής. Από το λήμμα του Phillips έχουμε ότι

$$(T^*(x_n^*))^1 \xrightarrow{\|\cdot\|} 0, \tag{2.6}$$

άρα έχουμε:

$$x_n^*(x_n) = T^*(x_n^*)(e_n) = (T^*(x_n^*))^1(e_n) + (T^*(x_n^*))^2(e_n) = (T^*(x_n^*))^1(e_n),$$

γιατί $(T^*(x_n^*))^2(e_n) = 0$ για κάθε n. Από την (2.5), έχουμε ότι $|(T^*(x_n^*))^1(e_n)| > \epsilon$ το οποίο αντιβαίνει με την (2.6). □

Λήμμα 2.35. *Έστω E διατεταγμένος χώρος με την CIP και $\{x_n\}$ ακολουθία του E_+.*

(i) Αν η ακολουθία $\{x_n\}$ κυριαρχείτε από το $x \in E$, υπάρχει αύξουσα ακολουθία $\{u_n\}$ του E_+, τέτοια ώστε:

$$\{x_1, ..., x_n\} \leq u_n \leq \sum_{i=1}^{n} x_i, x \text{ για κάθε } n. \tag{2.7}$$

(ii) Αν $\{y_n\}$ είναι ακολουθία του E τέτοια ώστε $\{x_1, ..., x_n\} \geq \{y_m \mid m \geq n\}$ για κάθε n, υπάρχει φθίνουσα ακολουθία $\{w_n\}$ του E_+, τέτοια ώστε

$$\{x_1, ..., x_n\} \geq w_n \geq \{y_m \mid m \geq n\} \text{ για κάθε } n. \tag{2.8}$$

Απόδειξη. (i)Θέτουμε $u_1 = x_1$. Τότε $x_1, x_2 \leq x_1 + x_2, x$ και από την CIP υπάρχει $u_2 \in E$ τέτοιο ώστε $x_1, x_2 \leq u_2 \leq x_1 + x_2, x$. Έχουμε ότι $x_1, x_2, x_3, u_2 \leq x_1 + x_2 + x_3, x$ άρα υπάρχει $u_3 \in E$ τέτοιο ώστε $x_1, x_2, x_3, u_2 \leq u_3 \leq x_1 + x_2 + x_3, x$ και συνεχίζοντας κατά αυτό τον τρόπο, έχουμε ότι η (2.7) ισχύει.

(ii)$\{0\} \cup \{y_m \mid m \geq 1\} \leq x_1$, άρα υπάρχει w_1 με $\{0\} \cup \{y_m \mid m \geq 1\} \leq \{w_1\} \leq \{x_1\}$. Επομένως $\{0\} \cup \{y_m \mid m \geq 2\} \leq \{w_1\} \cup \{x_1, x_2\}$ και από την CIP υπάρχει $w_2 \in E$ τέτοιο ώστε $\{0\} \cup \{y_m \mid m \geq 2\} \leq \{w_2\} \leq \{w_1\} \cup \{x_1, x_2\}$ και συνεχίζοντας κατά αυτό τον τρόπο, έχουμε ότι η (2.8) ισχύει. □

Θεώρημα 2.36. *Έστω E χώρος Banach με κλειστό, normal και generating κώνο E_+. Αν ο E έχει την CIP, τότε για κάθε equi-l^1 continuous $A \subseteq E^*$, για κάθε $x \in E_+$ και για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $y^* \in E_+^*$ τέτοιο ώστε:*

$$(|x^*| - y^*)^+(x) < \epsilon,$$

για κάθε $x^* \in A$.

Απόδειξη. Είναι αρκετό να δείξουμε το Θεώρημα, υποθέτοντας ότι το A είναι solid, επειδή από την Πρόταση 2.32 έχουμε ότι A είναι equi-l^1 continuous αν και μόνο αν $Sol(A)$ είναι equi-l^1 continuous. Έστω ότι A είναι equi-l^1 continuous και ότι το Θεώρημα δεν ισχύει. Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ και $x \in E_+$ ώστε για κάθε $y^* \in E_+^*$ υπάρχει $x^* \in A$, τέτοιο ώστε:

$$(|x^*| - y^*)^+(x) > 2\epsilon \tag{2.9}$$

Όπως θα δείξουμε παρακάτω, υπάρχει ακολουθία $\{x_n^*\}$ του $A_+ = A \cap E_+^*$ ώστε:

$$(x_{n+1}^* - 2^{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i^*)^+(x) > 2\epsilon \text{ για κάθε } n. \tag{2.10}$$

Πράγματι, αν υποθέσουμε στην (2.9) ότι $y^* \in A_+$ και θέσουμε $x_1^* = y^*$ και $x_2^* = |x^*|$, τότε $x_2^* \in A_+$ διότι $x^* \in A$ και το A είναι solid, άρα η (2.10) είναι αληθής για $n = 1$. Αν στην (2.9), θέσουμε $y^* = 2(x_1^* + x_2^*)$ και $x_3^* = |x^*|$, τότε έχουμε ότι $x_3^* \in A_+$, άρα η (2.10) είναι αληθής για $n = 2$ και συνεχίζοντας κατά αυτό τον τρόπο έχουμε ότι η (2.10) είναι αληθής για κάθε n. Από την Riesz Kantorovich φόρμουλα, έχουμε ότι $(z^*)^+(x) = \sup\{z^*(y) \mid y \in [0, x]\}$ για κάθε $z^* \in E^*$, επομένως από την (2.10), υπάρχει ακολουθία $\{y_n\}$ του $[0, x]$ τέτοια ώστε

$$(x_{n+1}^* - 2^{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i^*)(y_n) > 2\epsilon \text{ για κάθε } n. \tag{2.11}$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}, \{y_{n+k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ είναι ακολουθία του διαστήματος $[0, x]$ του E, επομένως από το Λήμμα 2.35 μια αύξουσα ακολουθία $\{u_{nk} \mid k \in \mathbb{N}\}$ υπάρχει ώστε:

$$y_n, y_{n+1}, ..., y_{n+k} \leq u_{nk} \leq \sum_{i=n}^{n+k} y_i, x, \text{ για κάθε } k. \tag{2.12}$$

Επειδή $\{u_{nk}\}$ είναι αύξουσα ακολουθία του $[0, x]$, από την Πρόταση 2.33, έχουμε ότι είναι ρ_A-Cauchy, άρα υπάρχει φυσικός αριθμός k_n τέτοιος ώστε

$$\rho_A(u_{nk} - u_{nk_n}) < 2^{-n}\epsilon \text{ για κάθε } k \geq k_n. \tag{2.13}$$

Έστω $m \geq n$. Τότε για κάθε $k \geq m, k_n$ έχουμε $y_m \leq u_{nk}$, άρα

$$y_m - u_{nk_n} \leq u_{nk} - u_{nk_n} \text{ και } u_{nk} - u_{nk_n} \geq 0.$$

Επομένως υπάρχει $z_{nm} \in E_+$ τέτοιο ώστε

$$\{0, y_m - u_{nk_n}\} \leq \{z_{nm}\} \leq \{u_{nk} - u_{nk_n} \mid k \geq m, k_n\}. \tag{2.14}$$

Άρα έχουμε ορίσει μια διπλή ακολουθία $\{z_{nm} \mid n \in \mathbb{N}, m \geq n\}$ του E_+ για την οποία έχουμε

$$x^*_{n+1}(z_{in}) \leq \rho_A(u_{ik} - u_{ik_i}) \leq 2^{-i}\epsilon, \tag{2.15}$$

για κάθε $i \leq n$ και κάθε $k \geq n, k_i$. Από την (2.14), για κάθε $j = 1, 2, ..., n$ και $m \geq n$, έχουμε

$$u_{jk_j} \geq y_m - z_{jm}, \text{ άρα } u_{jk_j} \geq y_m - \sum_{i=1}^{m} z_{im}.$$

Από το Λήμμα 2.35, υπάρχει φθίνουσα ακολουθία $\{w_n\}$ του E_+ τέτοια ώστε

$$\{y_m - \sum_{i=1}^{m} z_{im} \mid m \geq n\} \leq \{w_n\} \leq \{u_{1k_1}, u_{2k_2}, ..., u_{nk_n}\} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}. \tag{2.16}$$

Τότε $\{w_1 - w_n\}$ είναι αύξουσα ακολουθία που κυριαρχείτε από το w_1 και σύμφωνα με την Πρόταση 2.33, $\{w_1 - w_n\}$ είναι ρ_A-Cauchy. Αυτό είναι άτοπο, διότι όπως θα δείξουμε ακολούθως $\{w_1 - w_n\}$ δεν είναι ρ_A-Cauchy. Άρα το θεώρημα ισχύει.

Θα αποδείξουμε αυτό τον ισχύρισμο, ως ακολούθως: Για κάθε n έχουμε $w_n \geq y_n - \sum_{i=1}^{n} z_{in}$, άρα

$$x_{n+1}^*(w_n) \geq x_{n+1}^*(y_n) - x_{n+1}^*(\sum_{i=1}^{n} z_{in}).$$

Από την (2.11) έχουμε

$$x_{n+1}^*(y_n) > 2\epsilon \tag{2.17}$$

και από την (2.15), $\sum_{i=1}^{n} x_{n+1}^*(z_{in}) \leq \epsilon \sum_{i=1}^{n} 2^{-i}$, άρα έχουμε

$$x_{n+1}^*(w_n) \geq 2\epsilon - \epsilon \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} > \epsilon, \text{ για κάθε } n. \tag{2.18}$$

Επίσης για κάθε w_r, έχουμε:$x_{n+1}^*(w_r) \leq x_{n+1}^*(u_{rk_r})$ και από την (2.12), έχουμε ότι $u_{rk_r} \leq \sum_{i=r}^{r+k_r} y_i$, άρα

$$x_{n+1}^*(w_r) \leq x_{n+1}^*(\sum_{i=r}^{r+k_r} y_i) \leq \sum_{i=r}^{\infty} x_{n+1}^*(y_i).$$

Από την (2.11) έχουμε ότι $x_i^*(y_n) \leq 2^{-n+1} x_{n+1}^*(y_n)$ για κάθε $n \geq i$. Άρα αν M είναι το τοπολογικό φράγμα του A και c είναι η σταθερά του normal κώνου E_+, έχουμε:

$$x_i^*(y_n) \leq Mc||x||2^{-n+1}, \text{ για κάθε } n \geq i,$$

διότι $\{y_n\}$ ακολουθία του $[0, x]$. Επομένως

$$x_{n+1}^*(w_{n+1}) \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} x_{n+1}^*(y_i) \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-i+1} M||x||c = 2^{-n+1} Mc||x||, \ \forall n. \tag{2.19}$$

Άρα από τον ορισμό του ρ_A και από τις (2.18), (2.19) έχουμε ότι

$$\rho_A(w_n - w_{n+1}) \geq x^*_{n+1}(w_n - w_{n+1}) \geq \epsilon - 2^{-n+1}M||x||c,$$

για κάθε n, άρα $\{w_1 - w_n\}$ δεν είναι ρ_A-Cauchy και το Θεώρημα ισχύει.

$\square$

Θεώρημα 2.37. *Έστω E διατεταγμένος χώρος Banach με κλειστό και normal κώνο E_+. Αν ο E έχει διατακτική μονάδα e και ο E έχει την Countable Interpolation Property, τότε ο E είναι χώρος Grothendieck.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.23, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο E είναι εφοδιασμένος με την $||\cdot||_e$, που ακολούθως συμβολίζουμε με $||\cdot||$. Έστω $A = \{x^*_n\} \subseteq E^*$ και $x^*_n \xrightarrow{w^*} 0$. Από το Θεώρημα 2.34 το A είναι equi-l^1 continuous, άρα σύμφωνα με το Θεώρημα 2.36, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $y^* \in E^*_+$ τέτοιο ώστε

$$||(|x^*| - y^*)^+|| = (|x^*| - y^*)^+(e) < \epsilon, \text{ για κάθε } x^* \in A.$$

Επομένως έχουμε ότι

$$|x^*| = |x^*| \wedge y^* + (|x^*| - y^*)^+ \in [0, y^*] + \epsilon B_{E^*},$$

άρα από το Dunford-Pettis Θεώρημα([37], θεώρημα 2.5.4), το A είναι σχετικά ασθενώς συμπαγές σύνολο του AL-χώρου E^*. Αν υποθέσουμε ότι $x^*_n \not\xrightarrow{w} 0$, υπάρχει υπακολουθία $\{x^*_{k_n}\}$ της $\{x^*_n\}$ και $f \in E^{**}$, ώστε $\inf\{f(x^*_{k_n})\} > 0$. Η $\{x^*_{k_n}\}$ έχει w-συγκλίνουσα υπακολουθία, τότε το w-όριο της είναι 0, διότι $x^*_n \xrightarrow{w^*} 0$, αυτό όμως είναι άτοπο, διότι $\inf\{f(x^*_{k_n})\} > 0$. Άρα $x^*_n \xrightarrow{w} 0$ και ο E είναι χώρος Grothendieck. $\square$

Έστω K μη κενό, συμπαγές κυρτό υποσύνολο του τοπικά κυρτού Hausdorff τοπολογικού γραμμικού χώρου . Τότε ο χώρος $A(K)$ των συνεχών, αφινικών πραγματικών συναρτήσεων στο K, εφοδιασμένος με την σημειακή διάταξη και την supremum νόρμα είναι ένας διατεταγμένος χώρος Banach που έχει την σταθερή συνάρτηση 1 ως διατακτική μονάδα. Γενικά ο $A(K)$ δεν έχει lattice δομή. Κάθε διατεταγμένος χώρος Banach με κλειστό, normal κώνο και διατακτική μονάδα είναι διατακτικά ισομορφικός με έναν $A(K)$ χώρο, όπου K όπως παραπάνω.([34], Theorem 6, p.16, Θεώρημα 1.23). Επομένως, το Θεώρημα 2.37, μπορεί να διατυπωθεί ισοδύναμα, ως ακολούθως:

Θεώρημα 2.38. *Κάθε $A(K)$ χώρος με την Countable Interpolation Property είναι χώρος Grothendieck.*

Έστω E, F διατεταγμένοι χώροι Banach, συμβολίζουμε με $\mathcal{L}^r(E, F)$ το χώρο των regular τελεστών, δηλαδή τους φραγμένους τελεστές από τον E στον F, που γράφονται σαν διαφορά θετικών τελεστών. Αν E, F είναι Banach lattice, τότε ο χώρος $\mathcal{L}^r(E, F)$, εφοδιασμένος με την νόρμα των regular τελεστών, $||T||_r = \inf\{||S|| \mid S \in \mathcal{L}_+(E, F) \mid |T(x)| \leq S(|x|) \; \forall \; x \in E_+\}$ είναι χώρος Banach και ο θετικός κώνος $\mathcal{L}^r_+(E, F)$ είναι generating, $|| \cdot ||_r$-normal και $|| \cdot ||_r$-κλειστός.

Πόρισμα 2.39. *Έστω E, F Banach lattices. Αν ο $\mathcal{L}^r(E, F)$ έχει την CIP, τότε για κάθε $T \in \mathcal{L}^r_+(E, F)$, ο χώρος $(I_T, || \cdot ||_T)$ είναι Grothendieck.*

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι ο I_T έχει την CIP. Ο θετικός κώνος $I_T^+ = I_T \cap \mathcal{L}^r_+(E, F)$ είναι $|| \cdot ||_T$ κλειστός και ο χώρος $(I_T, || \cdot ||_T)$ είναι Banach, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.22, επίσης ο I_T^+ είναι $|| \cdot ||_T$- normal, άρα σύμφωνα με το Θεώρημα 2.37, ο $(I_T, || \cdot ||_T)$ είναι χώρος Grothendieck. □

Ολοκληρώνουμε την μελέτη με ένα παράδειγμα ενός χώρου I_T που δεν είναι vector lattice. Επομένως ο $(I_T, || \cdot ||_T)$ είναι ένα παράδειγμα ενός διατεταγμένου χώρου Banach, που ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.37 και δεν είναι vector lattice. Στο Example 3.2 του άρθρου [60] του Wickstead παρατηρείτε ότι αν $F = C(K)$ και ο F έχει την CIP, χωρίς να είναι σ-Dedekind complete, τότε από το ([4], Theorem 3.10), ο $\mathcal{L}^r(c, C(K))$ δεν είναι vector lattice άλλα έχει την CIP σύμφωνα με το ([60], Theorem 3.1). Αν $K = \beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$, όπου $\beta(\mathbb{N})$ είναι η συμπαγοποίηση του $\mathbb{N}$, τότε ο χώρος $C(K)$ έχει την CIP, χωρίς να είναι σ-Dedekind complete([57]).

Παράδειγμα 2.40. *Έστω $E = \mathcal{L}^r(c, C(K))$, όπου $K = \beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$ Τότε υπάρχει $T \in E$, τέτοιο ώστε το supremum το $\{T, 0\}$ δεν υπάρχει στον E. Αν $T = T_1 - T_2$, όπου $T_1, T_2 \in E_+$ και $L = T_1 + T_2$, $I = I_L$, τότε το supremum του*

$\{T, 0\}$ δεν υπάρχει στον I. Πράγματι αν υποθέσουμε ότι G είναι το supremum το $\{T, 0\}$ στον I, τότε αυτό είναι το supremum του $\{T, 0\}$ στον E, διότι αν $T' \in E$ με $T' \geq T, 0$ τότε $T', L \geq T, 0$ και από την CIP υπάρχει $G' \in E$ τέτοιο ώστε

$$T', L \geq G' \geq T, 0$$

Από τον ορισμό του I έχουμε ότι $G' \in I$ άρα $T' \geq G' \geq G$. Επομένως έχουμε ότι το G είναι επίσης το supremum του $\{T, 0\}$ στο E, άτοπο.

Κλείνουμε αυτή την ενότητα με το ακόλουθο αποτέλεσμα στο οποίο δίνουμε μια κλάση χώρων regular τελεστών που έχουν την CIP.

Θεώρημα 2.41. *Έστω E διατεταγμένος χώρος Banach, με θετική βάση $\{x_n\}$ και generating θετικό κώνο E_+. Αν F είναι διατεταγμένος χωρος Banach, με κλειστό, normal κώνο F_+ και ο F έχει την CIP, τότε ο $\mathcal{L}^r(E, F)$ έχει την CIP.*

Απόδειξη. Έστω $\{V_p\}, \{W_q\}$ ακολουθίες τελεστών στο χώρο $\mathcal{L}^r(E, F)$ τέτοιες ώστε $V_p \leq W_q$ για κάθε $p, q \in \mathbb{N}$. Τότε $V_p(x_n) \leq W_q(x_n)$ για κάθε $p, q \in \mathbb{N}$ και από την CIP του F, έχουμε ότι υπάρχει $\{y_n\}$ ακολουθία στον F, ώστε:

$$V_p(x_n) \leq y_n \leq W_q(x_n) \text{ για κάθε } p, q \text{ και } n. \tag{2.20}$$

Για κάθε $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in E_+$, η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι θετική και έχουμε:

$$u = V_1(\sum_{i=m}^{n} a_i x_i) \leq v = \sum_{i=m}^{n} a_i y_i \leq w = W_1(\sum_{i=m}^{n} a_i x_i).$$

Αν c είναι η σταθερά του normal κώνου F_+ τότε έχουμε $0 \leq u - v \leq w - u$, άρα $||u - v|| \leq c||w - u||$, από το οποίο παίρνουμε ότι $||u|| \leq 2(c + 1)\max\{||w||, ||u||\}$. Επομένως έχουμε,

$$||\sum_{i=m}^{n} a_i y_i|| \leq 2(c+1)\max\{||V_1||, ||W_1||\}||\sum_{i=m}^{n} a_i x_i||,$$

άρα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \in F$. Για κάθε $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in E_+$, θέτουμε

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n.$$

Τότε ο T είναι θετικά ομογενής και αθροιστικός στον E_+, επομένως μπορούμε να επεκτείνουμε μοναδικά τον T σε όλο τον E με τον τύπο $T(x) = T(x_1) - T(x_2)$, όπου $x = x_1 - x_2$. Από την σχέση (2.20), έχουμε ότι

$$V_p \leq T \leq W_q,$$

για κάθε p, q. Επειδή $W_q - T \geq 0$, εχουμε ότι

$$T = W_q - (W_q - T) \in \mathcal{L}^r(E, F).$$

$\square$

Κεφάλαιο 3

Ανακλαστικοί κώνοι

Σε αυτό το κεφάλαιο εισάγουμε την έννοια των ανακλαστικών κώνων και θα μελετούμε τη δομή αυτής της κατηγορίας κώνων.

Ορισμός 3.1. *Έστω X χώρος Banach. Ο κώνος $P \subseteq X$ είναι ανακλαστικός αν το σύνολο $B_X^+ = B_X \cap P$ είναι w- συμπαγές, όπου B_X η μοναδιαία μπάλα του X.*

Παρατήρηση 3.2. *Οι ακόλουθες ιδιότητες, έπονται άμεσα από τον παραπάνω ορισμό:*

(1) Ένας ανακλαστικός κώνος είναι αυτόματα κλειστός. Πράγματι, αν $x_n \in P$ και $x_n \to x$, τότε υπάρχει $\rho \in \mathbb{R}_+ : x_n \in \rho B_X^+$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, επομένως $x \in \rho B_X^+ \subseteq P$.

(2) Κάθε κλειστός κώνος, ενός ανακλαστικού χώρου είναι ανακλαστικός. Το αντίστροφο, όπως θα διαπιστώσουμε παρακάτω δεν ισχύει γενικά. Αν όμως, ο χώρος Banach X έχει έναν generating και ανακλαστικό κώνο τότε, από το Θεώρημα 1.19 προκύπτει ότι ο X είναι ανακλαστικός.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα μας δείχνει ότι ένας ανακλαστικός κώνος, έχει την ίδια συμπεριφορά με τους ανακλαστικούς χώρους όσο αναφορά τον δεύτερο δυϊκό.

Θεώρημα 3.3. *Ένας κλειστός κώνος P ενός χώρου Banach X είναι ανακλαστικός αν και μόνο αν*

$$\widehat{P} = P^{00}.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο κώνος $P \subseteq X$ είναι ανακλαστικός. Τότε, το σύνολο $\widehat{B_X^+}$ είναι w^*-συμπαγές ([36], Proposition 2.6.24), επομένως για κάθε $a > 0$, το σύνολο $\hat{P} \cap aB_{X^{**}} = \widehat{aB_X^+}$ είναι w^*-κλειστό σύνολο. Σύμφωνα, με το θεώρημα Krein-Smulian([36], Theorem 2.7.11) ο $\hat{P}$ είναι w^*-κλειστός κώνος του X^{**}. Επομένως $P^{00} = \hat{P}$, γιατί σύμφωνα με το Θεώρημα 1.13, έχουμε ότι ο P^{00} ισούται με το w^*-κλείσιμο του P.

Για την άλλη συνεπαγωγή, υποθέτουμε ότι $P^{00} = \hat{P}$. Από το Θεώρημα Alaoglu, έχουμε ότι το σύνολο

$$\widehat{P \cap B_X} = \widehat{P} \cap B_{X^{**}} = P^{00} \cap B_{X^{**}},$$

είναι w^*-συμπαγές.

□

Ακολούθως, αποδεικνύουμε ότι ο τρίτος δυϊκός ενός ανακλαστικού κώνου P του χώρου Banach X, μπορεί να διασπαστεί με παρόμοιο τρόπο, όπως και ο τρίτος δυϊκός του X. Συγκεκριμένα για τον X^{***} γνωρίζουμε ότι, [19], Lemma I.12:

$$X^{***} = \widehat{X^*} \oplus (\widehat{X})^{\perp} \tag{3.1}$$

Θεώρημα 3.4. *Αν P είναι ένας ανακλαστικός κώνος του χώρου Banach X, τότε*

$$P^{000} = \widehat{P^0} + (\widehat{X})^{\perp}.$$

Επιπλέον, κάθε $p^{***} \in P^{000}$, έχει μια μοναδική γραφή, $p^{***} = x^{***} + y^{***}$, όπου $x^{***} \in \widehat{X^*}$ και $y^{***} \in (\widehat{X})^{\perp}$.

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι $P^{000} \subseteq \widehat{P^0} + (\widehat{X})^{\perp}$. Από την (3.1), κάθε $p^{***} \in P^{000}$ έχει μοναδική αναπαράσταση

$$p^{***} = x^{***} + y^{***},$$

όπου $x^{***} \in \widehat{X^*}$ και $y^{***} \in (\widehat{X})^{\perp}$ και υποθέτουμε ότι $x^{***} = \widehat{x^*}$, όπου $x^* \in X^*$. Για κάθε $p^{**} \in P^{00}$, έχουμε

$$0 \leq p^{***}(p^{**}) = x^{***}(p^{**}) + y^{***}(p^{**}).$$

Επειδή ο P είναι ανακλαστικός, έχουμε ότι $P^{00} = \widehat{P}$, επομένως υπάρχει $p \in P$ τέτοιο ώστε $\widehat{p} = p^{**}$. Άρα έχουμε

$$0 \leq p^{***}(p^{**}) = x^{***}(\widehat{p}) + y^{***}(\widehat{p}) = x^{***}(\widehat{p}) = x^*(p), \tag{3.2}$$

για κάθε $p \in P$. Επομένως $x^* \in P^0$ και $x^{***} \in \widehat{P^0}$, άρα

$$P^{000} \subseteq \widehat{P^0} + (\widehat{X})^{\perp}.$$

Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι $p^* \in P^0$ και $y^{***} \in (\widehat{X})^{\perp}$. Επειδή ο P είναι ανακλαστικός, κάθε $p^{**} \in P^{00}$ είναι της μορφής $p^{**} = \widehat{p}$, όπου $p \in P$, άρα έχουμε

$$(\widehat{p^*} + y^{***})(p^{**}) = (\widehat{p^*} + y^{***})(\widehat{p}) = p^*(p) \geq 0.$$

Από την παραπάνω σχέση, προκύπτει ότι $\widehat{P^0} + (\widehat{X})^{\perp} \subseteq P^{000}$ □

Θεώρημα 3.5. *Ένας χώρος Banach είναι ανακλαστικός αν και μόνο αν υπάρχει κλειστός κώνος P του X, τέτοιος ώστε ο P και ο P^0 είναι ανακλαστικοί.*

Απόδειξη. Αν ο X είναι ανακλαστικός, τότε το ζητούμενο είναι άμεσο. Υποθέτουμε ότι υπάρχει κώνος $P \subseteq X$, τέτοιος ώστε P και P^0 είναι ανακλαστικοί. Από το Θεώρημα 3.4, έχουμε ότι

$$P^{000} = \widehat{P^0} + (\widehat{X})^{\perp}. \tag{3.3}$$

Επιπλέον από το Θεώρημα 3.3, έχουμε ότι

$$P^{000} = \widehat{P^0}. \tag{3.4}$$

Επειδή η αναπαράσταση κάθε στοιχείου του P^{000} είναι μοναδική, από τις (3.3), (3.4), έχουμε ότι $(\widehat{X})^{\perp} = \{0\}$, άρα $X^{**} = \widehat{X}$. □

Από το παραπάνω Θεώρημα, συμπεράνουμε ότι σε κάθε μη ανακλαστικό χώρο, ένας ανακλαστικός κώνος δεν μπορεί να έχει δυϊκό ανακλαστικό κώνο. Το ακόλουθο παράδειγμα, αποτελεί μια τέτοια περίπτωση.

Παράδειγμα 3.6. *Έστω $X = L_1([0,1])$, Y είναι ο κλειστός υπόχωρος του X που παράγεται από τις Radamacher συναρτήσεις $\{r_n\}$ και P ο θετικός κώνος που παράγεται από τις $\{r_n\}$. Υπενθυμίζουμε ότι $\{r_n\}$ είναι βασική ακολουθία στον $L_1([0,1])$, ισοδύναμη με την κανονική βάση του ℓ_2, επομένως ο Y είναι ισομορφικός με τον ℓ_2 και ο κώνος P είναι ανακλαστικός. Οι Radamacher συναρτήσεις, σαν στοιχεία του $L_\infty([0,1])$ αποτελούν τα συναρτησιακά συντεταγμένων της $\{r_n\}$ και επομένως έχουμε ότι*

$$P^0 = \{f \in L_\infty[0,1] \mid f = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i r_i \ \lambda_i \geq 0, \text{ για κάθε } i\},$$

όπου το άθροισμα υπολογίζεται στην $\sigma(L_\infty, Y)$ τοπολογία του $L_\infty([0,1])$. Από το Θεώρημα 3.5, έχουμε ότι ο P^0 δεν είναι ανακλαστικός κώνος.

Στο επόμενο δίνουμε, ένα παράδειγμα ανακλαστικού κώνου P, ο οποίος είναι πυκνός στον $L_1([0,1])$.

Παράδειγμα 3.7. *Έστω $X = L_1([0,1])$ και*

$$D = \{d \in L_1([0,1]) \ : \ 0 \leq d \leq \mathbf{1}, ||d|| \geq \frac{1}{2}\},$$

όπου $\geq$ είναι η συνήθης διάταξη του $L_1([0,1])$ και $\mathbf{1} \in L_1([0,1])$. Τότε το D είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο, άρα ο κώνος P του $L_1([0,1])$, που παράγεται από το D είναι κλειστός. Για κάθε $x \in P \cap B_X$ έχουμε ότι $x = \lambda d, d \in D$ όπου $\lambda = \frac{||x||}{||d||} \leq 2$, επομένως $P \cap B_X$ είναι κλειστό και κυρτό υποσύνολο του διατακτικού διαστήματος $[0, 2\mathbf{1}]$. Υπενθυμίζουμε ότι κάθε διατακτικό διάστημα του $L_1([0,1])$ είναι w-συμπαγές, γιατί ο X έχει order continuous norm, [6] , Theorem 12.9. Επομένως το σύνολο B_X^+ είναι w-συμπαγές και επομένως ο κώνος P είναι ανακλαστικός. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι $\overline{P - P} = L_1([0,1])$. Πράγματι, αν $\{I_i\}$ είναι η ακόλουθη ακολουθία διαστημάτων, $I_1 = [0, \frac{1}{2}), I_2 = [\frac{1}{2}, 1], I_3 = [0, \frac{1}{4}), I_4 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), I_5 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), I_6 = [\frac{3}{4}, 1], ...$ του $[0,1]$, I_i' είναι το *συμπληρωματικό του I_i στο $[0,1]$ και $\mathcal{X}_{I'_i}$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του I'_i, τότε $\mathcal{X}_{I'_i} \in D$ για κάθε i. Επιπλέον κάθε στοιχείο της Haar βάσης του $L_1([0,1])$ μπορεί να γραφτεί σαν διαφορά συναρτήσεων της μορφής $\mathcal{X}_{I'_i}$, επομένως $P - P$ είναι πυκνό στον X. Τέλος, είναι εύκολο να δούμε ότι ο P είναι normal και ότι η σταθερή συνάρτηση $\mathbf{1}$ ορίζει φραγμένη βάση στον P.*

3.1 Βάσεις ανακλαστικών κώνων

Σε αυτή την παράγραφο μελετούμε ανακλαστικούς κώνους που έχουν βάση που ορίζεται από συνεχές συναρτησιακό. Αυτή η κατηγορία κώνων είναι πολύ μεγάλη, όπως θα δούμε παρακάτω. Παρόλα αυτά υπάρχουν κώνοι που δεν έχουν βάση που ορίζεται από συνεχές συναρτησιακό. Συγκεκριμένα, αν Γ υπεραριθμήσιμο σύνολο, τότε για κάθε $1 < p < \infty$, έχουμε ότι $\ell_p^+(\Gamma)$ είναι ανακλαστικός κώνος, χωρίς καμία βάση.

Σε σχέση με τους ανακλαστικούς κώνους, από το Θεώρημα Διχοτομίας του I. Polyrakis (Θεώρημα 2.9), έχουμε ότι:

Θεώρημα 3.8. *Έστω P ανακλαστικός κώνος του χώρου Banach X, τότε ο P δεν είναι mixed based κώνος.*

Το αντίστροφο του παραπάνω δεν ισχύει καθώς ο c_0^+ είναι παράδειγμα ενός κώνου που δεν είναι ούτε mixed based, ούτε ανακλαστικός. Στο ακόλουθο αποτέλεσμα, δίνουμε μια ικανή συνθήκη για να είναι ένας κώνος ανακλαστικός, βασιζόμενη στην υπόθεση ότι οι βάσεις του κώνου είναι φραγμένες.

Πρόταση 3.9. *Έστω X χώρος Banach και P κλειστός κώνος του X. Αν ο P έχει βάση που ορίζεται από συναρτησιακό του X^* και κάθε τέτοια βάση είναι φραγμένη, τότε ο κώνος P είναι ανακλαστικός.*

Απόδειξη. Επειδή κάθε βάση του P που ορίζεται από συναρτησιακό του X^* είναι φραγμένη, έχουμε ότι $P^{0s} = int(P^0)$, σύμφωνα με την ορολογία του [16]. Επομένως από το ([16], Lemma 3.4), έχουμε ότι κάθε βάση B_{x^*} του P, όπου $x^* \in X^*$ είναι w-συμπαγής. Έστω $x^* > 0$, επειδή το B_{x^*} δεν περιέχει το 0, υπάρχει $\rho > 0$ τέτοιος ώστε $\rho B_X \cap B_{x^*} = \emptyset$. Είναι άμεσο, ότι το σύνολο $\bigcup_{0 \le a \le 1} aB_{x^*}$ είναι w-συμπαγές σύνολο που περιέχει το $\rho B_X \cap P$. Επομένως ο κώνος P είναι ανακλαστικός. $\square$

Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει. Για παράδειγμα ο ℓ_2^+ είναι ανακλαστικός κώνος και κάθε βάση του είναι μη φραγμένη.

Στο ακόλουθο αποτέλεσμα χαρακτηρίζουμε τους ανακλαστικούς κώνους από την μη εμφύτευση του ℓ_1^+ κατάναλογία με τους ανακλαστικούς χώρους Banach. Η απόδειξη μας βασίζεται στην κύρια απόδειξη του [39].

Θεώρημα 3.10. *Ένας κλειστός κώνος P ενός χώρου Banach X είναι ανακλαστικός αν και μόνο αν ο P δεν περιέχει έναν κλειστό κώνο ισομορφικό με τον ℓ_1^+.*

Απόδειξη. Έστω P ανακλαστικός, τότε κάθε κλειστός υποκώνος του P είναι ανακλαστικός. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $Q \subseteq P$ κλειστός κώνος ισομορφικός με τον ℓ_1^+, τότε σύμφωνα με το ([16], Theorem 4.5) ο Q είναι mixed based κώνος, το οποίο είναι άτοπο σύμφωνα με το Θεώρημα 3.8. Άρα ο P δεν περιέχει κλειστό κώνο, ισομορφικό με τον ℓ_1^+.

Έστω ότι ο P δεν περιέχει κλειστό κώνο, ισομορφικό με τον ℓ_1^+. Υποθέτουμε ότι ο P δεν είναι ανακλαστικός, τότε το B_X^+ δεν είναι w συμπαγής, επομένως υπάρχει ακολουθία $\{x_n\} \subseteq B_X^+$ τέτοια ώστε δεν έχει w συγκλίνουσα υπακολουθία. Επειδή ο P δεν περιέχει τον ℓ_1^+, από το ℓ_1-Θεώρημα του Rosenthal, έχουμε ότι υπάρχει w-Cauchy υπακολουθία της $\{x_n\}$, που συμβολίζουμε εκ νέου με $\{x_n\}$. Από το ([17], Theorem 1.1.10) μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $\{x_n\}$ είναι βασική ακολουθία. Η $\{x_n\}$ δεν συγκλίνει w στο 0, επομένως υπάρχει $x^* \in X^*$ και $\{x_{n_k}\}$ υπακολουθία της $\{x_n\}$, ώστε $x^*(x_{n_k}) \geq 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άρα από το Θεώρημα 2.5, η $\{x_{n_k}\}$ είναι βασική ακολουθία ℓ_+-τύπου. Επομένως $K_{\{x_{n_k}\}} \simeq \ell_1^+$, το οποίο είναι άτοπο. □

Άμεσο από το προηγούμενο Θεώρημα είναι το ακόλουθο Πόρισμα.

Πόρισμα 3.11. *Έστω $P \subseteq X, Q \subseteq Y$ κλειστοί κώνοι των χώρων Banach X και Y αντίστοιχα. Αν οι κώνοι P και Q είναι ισομορφικοί και ο Q είναι ανακλαστικός τότε και ο P είναι ανακλαστικός.*

Απόδειξη. Έστω T ισομορφισμός του P επί τον Q. Αν ο P είναι μη ανακλαστικός κώνος, τότε ο P περιέχει ένα κλειστό κώνο R ισομορφικό με τον ℓ_1^+, επομένως $T(R)$ είναι κλειστός κώνος του Q ισομορφικός με τον ℓ_1^+, άτοπο. □

Τα επόμενα δύο αποτελέσματα, αφορούν την εσωτερική δομή ενός ανακλαστικού κώνου, κάτω από την υπόθεση ότι ο κώνος έχει φραγμένη βάση ή μη φραγμένη βάση.

Θεώρημα 3.12. *Έστω P ανακλαστικός κώνος ενός χώρου Banach X. Αν ο P έχει φραγμένη βάση που ορίζεται από $x^* \in X^*$, τότε ο P δεν περιέχει βασική ακολουθία.*

Απόδειξη. Έστω $\{x_n\} \subseteq P$ βασική ακολουθία. Τότε η $y_n = \frac{x_n}{x^*(x_n)}$ είναι βασική ακολουθία με $x^*(y_n) = 1$ για κάθε n. Από το Θεώρημα 2.5, έχουμε ότι η y_n είναι βασική ακολουθία ℓ_+-τύπου. Επομένως $K_{\{y_n\}} \simeq \ell_1^+$, το οποίο σύμφωνα με το Θεώρημα 3.10, είναι άτοπο. □

Θεώρημα 3.13. *Έστω P ανακλαστικός κώνος ενός χώρου Banach X. Αν ο P έχει μη φραγμένη βάση που ορίζεται από το $x^* \in X^*$, τότε ο P περιέχει κανονικοποιημένη βασική ακολουθία, που συγκλίνει w στο 0.*

Απόδειξη. Από τις υποθέσεις, μπορούμε να βρούμε ακολουθία $\{y_n\}$ ώστε $y_n \in B_{x^*}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $||y_n|| \to \infty$. Επειδή ο P είναι ανακλαστικός, η κανονικοποιημένη ακολουθία $x_n = \frac{y_n}{||y_n||}$ έχει w-συγκλίνουσα υπακολουθία που συμβολίζουμε εκ νέου με x_n. Τότε $x_n \xrightarrow{w} 0$, πράγματι έστω $x_n \xrightarrow{w} x_0$, τότε $x_0 \in P$ και

$$x^*(x_0) = \lim x^*(x_n) = 0,$$

επομένως έχουμε ότι $x_0 = 0$, διότι x^* είναι αυστηρά θετικό στον P. Ολοκληρώνουμε την απόδειξη, εφαρμόζοντας το γνωστό αποτέλεσμα των Bessaga-Pelczynski, από το οποίο προκύπτει ότι η $\{x_n\}$ έχει βασική υπακολουθία. □

Ακολούθως εξετάζουμε την σχέση μεταξύ ανακλαστικών κώνων με μη φραγμένη βάση και ανακλαστικών υποχώρων ενός χώρου Banach X. Αρχικά παρατηρούμε ότι η ύπαρξη στον X ενός ανακλαστικού κώνου με μη φραγμένη βάση, είναι αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη απειροδιάστατου ανακλαστικού υποχώρου. Πράγματι αν V απειροδιάστατος ανακλαστικός υπόχωρος του X και $\{x_n\}$ βασική ακολουθία στον V, τότε ο κώνος $K_{\{x_n\}}$ είναι ανακλαστικός κώνος με μη φραγμένη βάση που ορίζεται από συναρτησιακό του X^*.

Από την άλλη πλευρά το Θεώρημα 3.13, μας δίνει τη δυνατότητα να δείξουμε ότι η ύπαρξη ενός ανακλαστικού κώνου με μη φραγμένη βάση στον X συνεπάγεται την ύπαρξη απειροδιάστατου ανακλαστικού υποχώρου στον X, στην ειδική περίπτωση που ο X έχει unconditional Schauder βάση. Συγκεκριμένα, ισχύει το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.14. *Έστω X χώρος Banach με unconditional Schauder βάση. Αν P ανακλαστικός κώνος με μη φραγμένη βάση, που ορίζεται από συναρτησιακό του X^*, τότε ο $\overline{P-P}$ περιέχει έναν απειροδιάστατο ανακλαστικό υπόχωρο.*

Απόδειξη. Έστω P ανακλαστικός κώνος με μη φραγμένη βάση, που ορίζεται από συναρτησιακό του X^*. Από το Θεώρημα 3.13, ο P περιέχει μια κανονικοποιημένη βασική και w-μηδενική ακολουθία $\{x_n\}$. Σύμφωνα με το ([36], Theorem 4.3.9) μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $\{x_n\}$ είναι unconditional βασική ακολουθία στον X, τότε ο $K_{\{x_n\}}$ είναι generating στον $[\{x_n\}]$, επομένως από την Παρατήρηση 3.2 έχουμε ότι ο $[\{x_n\}]$ είναι ανακλαστικός υπόχωρος του X. $\square$

Είναι γνωστό ότι οι c_0, ℓ_1 έχουν unconditional Schauder βάση, αλλά δεν περιέχουν απειροδιάστατο ανακλαστικό υπόχωρο. Επομένως, έχουμε ότι:

Πόρισμα 3.15. *Αν $X = c_0$ ή $X = \ell_1$, τότε ο X δεν περιέχει ανακλαστικό κώνο με μη φραγμένη βάση που ορίζεται από συναρτησιακό του X^*.*

3.2 Ισχυρά ανακλαστικοί κώνοι

Σε αυτή την ενότητα, θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας σε μια υποκατηγορία ανακλαστικών κώνων. Συγκεκριμένα, τους ανακλαστικούς κώνους, όπου το B_X^+ είναι norm συμπαγές.

Ορισμός 3.16. *Ένας κώνος P, ενός χώρου Banach X είναι ισχυρά ανακλαστικός, αν το σύνολο $B_X^+ = B_X \cap P$ είναι norm συμπαγές.*

Παρατήρηση 3.17. *Έστω P ισχυρά ανακλαστικός κώνος ενός απειροδιάστατου χώρου Banach. Τότε έχουμε, ότι:*

(1) *Ο P δεν είναι generating στον X. Πράγματι αν P είναι generating, τότε από το Θεώρημα 1.19 ο P δίνει open decomposition στον X, επομένως, η B_X είναι norm συμπαγής και άρα ο X είναι πεπερασμένης διάστασης.*

(2) *Ο P δεν έχει εσωτερικά σημεία. Αν υποθέσουμε ότι έχει εσωτερικά σημεία, τότε από το Θεώρημα 1.21, ο P είναι generating.*

Ξεκινάμε την μελέτη των ισχυρά ανακλαστικών κώνων ανακαλώντας, ένα γνωστό αποτέλεσμα([5], Theorem II.2.6).

Θεώρημα 3.18. *(Klee) Ο οξύς κώνος P ενός τοπικά κυρτού Hausdorff χώρου έχει συμπαγή περιοχή του μηδενός αν και μόνο αν ο P έχει συμπαγή βάση.*

Από το προηγούμενο Θεώρημα έχουμε ότι: *Ένας οξύς κώνος P σε έναν χώρο Banach είναι ισχυρά ανακλαστικός αν και μόνο αν έχει norm συμπαγή βάση.* Βασιζόμενοι στο παραπάνω, διατυπώνουμε δύο βασικές ιδιότητες των ισχυρά ανακλαστικών κώνων.

Θεώρημα 3.19. *Αν P είναι ισχυρά ανακλαστικός και οξύς κώνος ενός χώρου Banach X, τότε έχουμε:*

(1) *Ο P έχει βάση που ορίζεται από συναρτησιακό του X^* και κάθε τέτοια βάση για τον P είναι συμπαγής,*

(2) *ο P είναι normal.*

Απόδειξη. Έστω P ισχυρά ανακλαστικός και οξύς κώνος του X. Τότε από το παραπάνω Θεώρημα, έχουμε ότι ο P έχει συμπαγή βάση B. Επομένως υπάρχει $x^* \in X^*$, το οποίο διαχωρίζει το 0 και το B και $x^*(x) > 0$ για κάθε $x \in B$ και η βάση B_{x^*} του P είναι κλειστή και φραγμένη. Επομένως είναι άμεσο ότι η B_{x^*} είναι συμπαγή. Επειδή ο P δεν είναι mixed based κώνος, έχουμε ότι κάθε βάση που ορίζεται από συναρτησιακό του X^*. Επίσης ο P είναι normal, επειδή είναι well-based κώνος. □

Στο ακόλουθο Θεώρημα, δίνουμε μια μέθοδο, με την οποία μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν ανακλαστικό κώνο, μέσω της χρήσης μια w-συγκλίνουσας ακολουθίας. Από αυτή την κατασκευή συμπεράνουμε ότι κάθε απειροδιάστατος χώρος Banach περιέχει έναν απειροδιάστατο ανακλαστικό κώνο, με φραγμένη βάση που ορίζεται από συναρτησιακό του X^*.

Θεώρημα 3.20. *Έστω $\{x_n\}$ ακολουθία του χώρου Banach X, η οποία είναι w μηδενική, $x_0 \in \overline{co}\{x_n\}$ και $D = \overline{co}\{x_n\} - x_0$. Αν $P = \overline{cone}(D)$ είναι ο κώνος που παράγεται από το D, τότε ο κώνος P είναι ανακλαστικός, με φραγμένη βάση που ορίζεται από συναρτησιακό του X^*. Επιπλέον, ισχύουν τα ακόλουθα:*

(1) Αν $||x_n|| \geq \delta > 0$ για κάθε n, τότε ο P δεν είναι ισχυρά ανακλαστικός.

(2) Αν $\lim ||x_n|| = 0$, τότε ο P είναι ισχυρά ανακλαστικός.

Απόδειξη. Το σύνολο $\{x_n\}$ είναι σχετικώς ασθενώς συμπαγές και από το Krein-Smulian Θεώρημα([36], Theorem 2.8.14), $\overline{co}\{x_n\}$ είναι w συμπαγές. Άρα το D είναι κυρτό, φραγμένο και συμπαγές σύνολο, τέτοιο ώστε $0 \in D$. Έιναι άμεσο ότι ο $P = \overline{cone}(D)$ είναι κλειστός, επειδή D κλειστό και φραγμένο. Έστω $0 < \rho < m = \inf\{||y|| \mid y \in D\}$. Τότε:

$$P \cap \rho B_X \subseteq \cup_{0 \leq \lambda \leq 1} \lambda D,$$

επομένως $P \cap \rho B_X$ είναι w-συμπαγές και ο P είναι ανακλαστικός κώνος. Επειδή $0 \notin D$, υπάρχει $x^* \in X^*$ τέτοιο ώστε το x^* διαχωρίζει το D και το 0 και $x^*(x) > 0$ για κάθε $x \in D$. Είναι άμεσο, ότι το x^* ορίζει μια φραγμένη βάση στον P. Αν υποθέσουμε ότι $||x_n|| \geq \delta > 0$ για κάθε n, το σύνολο $P \cap \rho B_X$ δεν είναι norm συμπαγές, γιατί η $\{x_n - x_0\}$ δεν έχει norm-συγκλίνουσα υπακολουθία. Επομένως ο P δεν είναι ισχυρά ανακλαστικός. Αν υποθέσουμε ότι $\lim ||x_n|| = 0$, τότε επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Mazur([36], Theorem 2.8.15), προκύπτει ότι το D είναι συμπαγές και άρα ο P είναι ισχυρά ανακλαστικός. □

Δίνουμε τώρα έναν χαρακτηρισμό των χώρων Banach με την ιδιότητα Schur. *Ένας χώρος Banach, έχει την ιδιότητα Schur, αν κάθε w συγκλίνουσα ακολουθία στον X είναι $|| \cdot ||$ συγκλίνουσα.* Αν ο X, έχει την ιδιότητα

Schur, είναι προφανές ότι κάθε ανακλαστικός κώνος του X είναι ισχυρά α-νακλαστικός. Το ενδιαφέρον κομμάτι του επόμενου χαρακτηρισμού είναι το αντίστροφο.

Θεώρημα 3.21. *Ένας χώρος Banach X έχει την ιδιότητα Schur αν και μόνο αν κάθε ανακλαστικός κώνος με φραγμένη βάση είναι ισχυρά ανακλαστικός.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο X δεν έχει την ιδιότητα Schur, τότε μπορούμε να βρούμε κανονικοποιημένη ακολουθία $\{x_n\}$ στο X με $x_n \xrightarrow{w} 0$, τότε από το προηγούμενο Θεώρημα, μπορούμε να κατασκευάσουμε ανακλαστικό κώνο με φραγμένη βάση που δεν είναι ισχυρά ανακλαστικός. □

Ακολούθως δίνουμε δύο παραδείγματα ισχυρά ανακλαστικών κώνων. Το πρώτο είναι γενικό παράδειγμα. Συγκεκριμένα, δίνουμε ένα τρόπο με τον οποίον μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν ισχυρά ανακλαστικό κώνο που περιέχεται στον θετικό κώνο ενός Banach lattice με θετική Schauder βάση.

Θεώρημα 3.22. *Αν X Banach lattice, με θετική Schauder βάση, τότε ο X_+ περιέχει έναν ισχυρά ανακλαστικό κώνο P, με $\overline{P-P} = X$.*

Απόδειξη. Έστω $\{e_i\}$ θετική κανονικοποιημένη Schauder βάση του X, θεωρούμε τον κώνο

$$P = \{x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i \mid 0 \leq x_i \leq a x_{i-1}, \text{ για κάθε } i > 1\},$$

όπου $a \in (0,1)$ είναι ένας σταθερός αριθμός. Τότε είναι άμεσο ότι $P \subseteq X_+$ και ότι $y = \sum_{i=1}^{\infty} a^{i-1} e_i \in X$. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι για κάθε $x \in P$, έχουμε ότι $x_i \leq a^{i-1} x_1$ για κάθε $i > 1$. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι

$$0 \leq x \leq x_1 y,$$

όπου $\leq$ είναι η διάταξη του X. Από την θετικότητα της βάσης $\{e_i\}$, για κάθε $x \in P$, έχουμε ότι

$$0 \leq x_1 e_1 \leq x,$$

άρα

$$x_1||e_1|| \leq ||x|| \Rightarrow x_1 \leq ||x||,$$

επομένως από τα παραπάνω, παίρνουμε ότι

$$0 \leq x \leq x_1 y \leq ||x|| y \ \forall x \in P.$$

Από αυτό καταλήγουμε, ότι $P \cap B_X \subseteq [0, y]$. Από το ([59], Theorem 16.3), έχουμε ότι κάθε Banach lattice με θετική Schauder βάση έχει norm-συμπαγή διαστήματα, άρα το $[0, y]$ είμαι norm-συμπαγές και ο κώνος P είναι ισχυρά ανακλαστικός. Επίσης ο P είναι οξύς, επειδή περιέχεται στον X_+. Τέλος θα δείξουμε ότι $\overline{P - P} = X$. Παρατηρούμε ότι $e_1 \in P$ και ότι

$$e_i = \frac{1}{a^{i-1}}(e_1 + ae_2 + ... + a^{i-1}e_i) - \frac{1}{a^{i-1}}(e_1 + ae_2 + ... + a^{i-2}e_{i-1}) \in P - P,$$

για κάθε $i \geq 2$. Επομένως $\overline{P - P} = X$. □

Παράδειγμα 3.23. *Έστω* $I_1 = [0, 1], I_2 = [0, \frac{1}{2}), I_3 = [\frac{1}{2}, 1], I_4 = [0, \frac{1}{4}),$ $I_5 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), I_6 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), I_7 = [\frac{3}{4}, 1], ...$ *ακολουθία υποδιαστημάτων του* $[0, 1]$.

Έστω $X = L_1([0, 1])$ *και* $T : \ell_1 \to X$ *που ορίζεται ως ακολούθως*

$$T(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \mathcal{X}_{I_i},$$

όπου $\mathcal{X}_{I_i}$ *είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του* I_I *και* $\xi = (\xi_i) \in \ell_1$. *Τότε* T *είναι γραμμική και συνεχής με* $||T(\xi)|| \leq ||\xi||$. *Έστω* $\eta = (1, a, a^2, a^3, ...) \in \ell_1^+$, *όπου* $a \in (0, 1)$ *και*

$$K = \{\xi = (\xi_i) \in \ell_1^+ \mid \xi_i \leq \xi_1 a^{i-1}\}.$$

Τότε από το προηγούμενο Θεώρημα, ο K *είναι ισχυρά ανακλαστικός κώνος του* ℓ_1. *Έστω* $Q = T(K)$ *και* P *το κλείσιμο του* Q *στον* $L_1([0, 1])$. *Για κάθε* $\xi \in K$, *έχουμε:*

$$\xi_1 \mathcal{X}_{I_1} \leq T(\xi) \leq \xi_1 T(\eta),$$

όπου $\geq$ *είναι η κανονική διάταξη του* $L_1([0, 1])$. *Επομένως έχουμε*

$$\xi_1 \leq ||T(\xi)|| \leq \xi_1 ||T(\alpha)||.$$

Έστω $x \in P$, τότε υπάρχει ακολουθία $\{\xi^n\} \subseteq K$, τέτοια ώστε $x = \lim T(\xi^n)$. Επιπλέον αν $M = 2||x||$, μπορούμε να επιλέξουμε την ακολουθία $\{\xi_n\}$ ώστε $||T(\xi^n)|| \leq M$ για κάθε n. Άρα έχουμε

$$\xi_1^n \leq ||T(\xi^n)|| \leq 2||x||,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή το διατακτικό διάστημα $[0, 2\eta]$ του ℓ_1 είναι συμπαγές το D είναι συμπαγές και $x \in D$. Επομένως $P \cap B_X \subseteq D$ είναι συμπαγές και ο κώνος P είναι ισχυρά ανακλαστικός. Τέλος, παρατηρούμε ότι $\mathcal{X}_{I_1} = T(e_1), \mathcal{X}_{I_2} = \frac{1}{a}(T(e_1+ae_2)-T(e_1))$ και συνεχίζοντας, έχουμε ότι $\mathcal{X}_{I_i} \in P-P$ για κάθε i. Συνεπώς ο $P - P$ είναι πυκνός στον X, καθώς η Haar βάση του $L_1([0,1])$ αποτελείται από διαφορές των $\mathcal{X}_{I_i}$ ([36], Example 4.1.27).

Ολοκληρώνουμε αυτή την ενότητα, κάνοντας μια αναφορά στις ιδιότητες που αποκτούν οι θετικοί τελεστές όταν παίρνουν τιμές σε έναν χώρο που διατάσσεται από ανακλαστικό κώνο.

Θεώρημα 3.24. *Έστω E, X διατεταγμένοι χώροι Banach με θετικούς οξείς κώνους E_+ και X_+. Αν ο E_+ είναι κλειστός και δίνει open decomposition στον E και ο X_+ είναι ανακλαστικός (αντ. ισχυρά ανακλαστικός), τότε κάθε θετικός, γραμμικός τελεστής $T : E \to X$ είναι ασθενώς συμπαγής (αντ. συμπαγής).*

Απόδειξη. Έστω $T : E \to X$ θετικός, γραμμικός τελεστής. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.24, ο T είναι συνεχής. Το σύνολο $T(B_E^+) \subseteq X_+$ είναι φραγμένο , επομένως w συμπαγές, διότι X_+ είναι ανακλαστικός. Από τις υποθέσεις, $W = B_E^+ - B_E^+$ είναι περιοχή του 0. Το σύνολο $\overline{T(B_E^+)}$ είναι w συμπαγές, συνεπώς το σύνολο $\overline{T(W)} \subseteq \overline{T(B_E^+)} - \overline{T(B_E^+)}$ είναι w συμπαγές. Επομένως ο T είναι ασθενώς συμπαγής. Η περίπτωση του συμπαγούς τελεστή είναι ανάλογη. □

Από το παραπάνω, προκύπτει το ακόλουθο αποτέλεσμα στην περίπτωση που ο τελεστής δρά πάνω σε έναν Banach lattice.

Πόρισμα 3.25. *Κάθε θετικός, γραμμικός τελεστής από τον Banach lattice E σε έναν διατεταγμένο χώρο Banach X, με ανακλαστικό(αντ. ισχυρά ανακλαστικό) θετικό κώνο X_+ είναι ασθενώς συμπαγής (αντ. συμπαγής).*

3.3 Ανακλαστικοί κώνοι και Schauder βάσεις

Σε αυτή την ενότητα, μελετούμε την ανακλαστικότητα του θετικού κώνου που παράγεται από μια Schauder βάση του X, σε σχέση με τις ιδιότητες της βάσης. Το κίνητρο για αυτή την μελέτη είναι τα κλασσικά αποτελέσματα του James([23]). Σε αυτή την ενότητα υποθέτουμε ότι ο X είναι χώρος Banach με Schauder βάση $\{x_n\}$ και $\{x_n^*\}$ τα συναρτησιακά συντεταγμένων της $\{x_n\}$. Επίσης συμβολίζουμε με P τον κώνο που παράγεται από την $\{x_n\}$.

Ο James, στο [23], απέδειξε ότι ο X είναι ανακλαστικός αν και μόνο αν η $\{x_n\}$ είναι shrinking και boundedly complete. Στα ακόλουθα θα μελετήσουμε πως η ιδιότητα ότι η $\{x_n\}$ είναι θετικά boundedly complete συσχετίζεται με την ανακλαστικότητα του P.

Θεώρημα 3.26. *Αν ο P είναι ανακλαστικός τότε η $\{x_n\}$ είναι θετικά boundedly complete.*

Απόδειξη. Έστω $\{a_n\}$ ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών και $s_n = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ τέτοια ώστε $||s_n|| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή ο P είναι ανακλαστικός, υπάρχει υπακολουθία s_{k_n} της $\{s_n\}$ τέτοια ώστε $s_{k_n} \to x$, όπου $x = \sum_{i=1}^\infty x_i^*(x) x_i$. Τότε $x_i^*(x) = \lim_{n\to\infty} x_i^*(s_{k_n}) = a_i$, για κάθε i, άρα $x = \sum_{i=1}^\infty a_i x_i \in P$ και συνεπώς η $\{x_n\}$ είναι θετικά boundedly complete. $\square$

Θεώρημα 3.27. *Αν η $\{x_n\}$ είναι shrinking και θετικά boundedly complete τότε ο P είναι ανακλαστικός.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι $\widehat{P} = P^{00}$. Για κάθε $x^{**} \in P^{00}$ έχουμε ότι $x^{**} = \sum_{i=1}^\infty x^{**}(x_i^*)\widehat{x_i}$ στην w^* τοπολογία του X^{**}, επειδή η $\{x_n\}$ είναι shrinking. Συνεπώς έχουμε:

$$s_n = \sum_{i=1}^n x^{**}(x_i^*)\widehat{x_i} \xrightarrow{w^*} x^{**}.$$

Άρα υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $||s_n|| = ||\sum_{i=1}^n x^{**}(x_i^*) x_i|| \leq M$ για κάθε n. Επιπλέον $x^{**}(x_i^*) \geq 0$ για κάθε i, επειδή $x^{**} \in P^{00}$, άρα

$$x = \sum_{i=1}^\infty x^{**}(x_i^*) x_i \in P,$$

επειδή $\{x_n\}$ είναι θετικά boundedly complete και από την μοναδικότητα του w^*-ορίου έχουμε ότι $x^{**} = \widehat{x} \in \widehat{P}$, άρα ο P είναι ανακλαστικός. $\square$

Ολοκληρώνουμε αυτή την ενότητα με ένα παράδειγμα ενός μη ανακλαστικού χώρου X με shrinking Schauder βάση που είναι θετικά boundedly complete και όχι boundedly complete.

Παράδειγμα 3.28. *Έστω J ο χώρος James. Δηλαδή J είναι ο χώρος των ακολουθιών $\{a_n\}$ με $\lim a_n = 0$ και*

$$\sup\{\sum_{j=1}^{n-1}(a_{k_j} - a_{k_{j+1}})^2\}^{\frac{1}{2}} < +\infty,$$

όπου το supremum υπολογίζεται όταν το παραπάνω άθροισμα υπολογίζεται για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε αύξουσα ακολουθία $k_1 < k_2 < ... < k_n$ στο $\mathbb{N}$. Η νόρμα $||\{a_n\}||_J$ ορίζεται ως αυτό το supremum. Είναι γνωστό ότι η κανονική βάση $\{e_n\}$ είναι shrinking βάση(βλ. [19]). Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η $\{e_n\}$ δεν είναι θετικά boundedly complete. Επίσης από την σχέση $(a-b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι κάθε ακολουθία $\{a_i\}$ του ℓ_2 ανήκει στον J, με

$$||\{a_i\}||_J \leq (2\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Θεωρούμε την ακολουθία $x_n = (-1)^{n+1}e_n$. Η $\{x_n\}$ είναι shrinking βάση του J. Θα δείξουμε ότι η $\{x_n\}$ είναι θετικά boundedly complete. Έστω $\{\lambda_n\}$ ακολουθία μη αρνητικών αριθμών, τέτοιοι ώστε $||\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i||_J \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε ότι $a_i = \lambda_i$ αν i είναι περιττός και $a_i = -\lambda_i$ αν i είναι άρτιος. Τότε $\sup_n ||\sum_{j=1}^{n} a_j e_j||_J \leq M$. Ακόμη, έχουμε:

$$(a_k - a_{k+1})^2 = (|a_k| + |a_{k+1}|)^2 \geq a_k^2,$$

αν k είναι περιττός και

$$(a_k - a_{k+1})^2 = (-|a_k| - |a_{k+1}|)^2 \geq a_k^2,$$

αν k είναι άρτιος, επομένως

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leq \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1})^2 \leq M^2.$$

Συνεπώς $\{a_n\} \in \ell_2$, άρα

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i,$$

υπάρχει στον J και η $\{x_n\}$ είναι θετικά boundedly complete. Άρα από το Θεώρημα 3.27, έχουμε ότι ο κώνος που παράγεται από την $\{x_n\}$ είναι ανακλαστικός. Επειδή η $\{x_n\}$ είναι Schauder βάση του J και ο J δεν είναι ανακλαστικός, έχουμε ότι η $\{x_n\}$ δεν είναι boundedly complete.

3.4 Διάταξη και ανακλαστικοί κώνοι

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε ιδιότητες που αποκτά ένας διατεταγμένος χώρος όταν διατάσσεται από ανακλαστικό κώνο.

Έστω (X, P) διατεταγμένος χώρος με norm, το σημείο x_0 είναι extremal σημείο του P, αν $x_0 \in P \setminus \{0\}$ και $0 \leq x \leq x_0 \Rightarrow x = \lambda x_0$. Συμβολίζουμε, με $Ep(P)$ το σύνολο των extremal σημείων του P. Αν ο X είναι vector lattice και υπάρχει $a > 0$, ώστε αν $x, y \in X$ με $|x| \leq |y| \Rightarrow ||x|| \leq a||y||$, τότε λέμε ότι ο X είναι locally solid vector lattice.

Επειδή ένας χώρος με generating ανακλαστικό κώνο είναι ανακλαστικός, το επόμενο αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από το ([9], Corollary 2.48).

Θεώρημα 3.29. *Έστω χώρος Banach X, διατεταγμένος από έναν normal, generating και ανακλαστικό κώνο, τότε ο X έχει την Riesz decomposition property αν και μόνο αν είναι vector lattice.*

Θεώρημα 3.30. *Κάθε χώρος Banach, διατεταγμένος από έναν ανακλαστικό και normal κώνο είναι Dedekind complete.*

Απόδειξη. Έστω $(x_a)_{a\in A}$ αύξον δίκτυο του X, τέτοιο ώστε $x_a \leq x$ για κάθε $a \in A$. Είναι αρκετό να δείξουμε ότι $\sup\{x_a \mid a \geq a_0\}$, για κάποιο a_0, καθώς τότε $\sup\{x_a\} = \sup\{x_a \mid a \geq a_0\}$. Για κάθε $a \geq a_0$, έχουμε ότι $0 \leq x_a - x_{a_0} \leq x - x_{a_0}$, άρα $||x_a - x_{a_0}|| \leq M$ για κάθε $a \geq a_0$, διότι ο P είναι normal. Για κάθε $x^* \in P^0, x^*(x_a - x_{a_0})$ είναι αύξουσα και φραγμένη από το $M||x^*||$, επομένως $\lim_a x^*(x_a - x_{a_0})$ υπάρχει και συμβολίζουμε αυτό το όριο με $f(x^*)$. Από το Θεώρημα 1.20, έχουμε ότι ο κώνος P^0 είναι generating στον X^* επειδή ο P είναι normal. Συνεπώς κάθε $x^* \in X^*$ γράφεται στην μορφή $x^* = x_1^* - x_2^*$, όπου $x_1^*, x_2^* \in P^0$ και ορίζουμε $f(x^*) = f(x_1^*) - f(x_2^*)$. Είναι εύκολο, να δούμε ότι η f είναι καλά ορισμένη και $f(x^*) = \lim x^*(x_a - x_{a_0})$. Παρατηρούμε, τότε ότι $f \in P^{00}$. Από την ανακλαστικότητα του κώνου, έχουμε ότι $\widehat{P} = P^{00}$, άρα υπάρχει $y \in P$ τέτοιο ώστε $f(x^*) = x^*(y)$ για κάθε $x^* \in X^*$. Είναι εύκολο να δούμε, ότι $x_a - x_{a_0} \xrightarrow{w} y$. Επειδή $\{x_a - x_{a_0}\}$ αύξον, είναι εύκολο να δούμε ότι $y = \sup\{x_a \mid a \geq a_0\}$. □

Συνεχίζουμε την μελέτη μας, με την έννοια της continuous projection property, που ορίστηκε από τον I. Polyrakis στο [43]. Έστω (Y, P) διατεταγμένος χώρος με νόρμα. Το $x_0 \in Ep(P)$, λέμε ότι δέχεται θετική προβολή, αν υπάρχει γραμμική θετική συνεχής προβολή P_{x_0} από τον Y στο $[x_0]$ τέτοια ώστε $P_{x_0}(x) \leq x$ για κάθε $x \in P$. Λέμε ότι ο Y έχει την continuous projection property, αν κάθε $x_0 \in Ep(P)$, δέχεται θετική προβολή. Επίσης στο [43], αποδείχτηκε ότι αν $Z = P - P$ και ο P είναι κλειστός, τότε:

(i) Ο Y έχει την continuous projection property αν και μόνο αν ο Z, διατεταγμένος από τον P έχει την continuous projection property και

(ii) Αν ο Z είναι locally solid vector lattice, τότε ο X έχει την continuous projection property.

Άρα η continuous projection property, εξαρτάται από τον κώνο P, επομένως μπορούμε να πούμε ότι ο P έχει την continuous projection property.

Όπως σημειώνεται στο [43], αν ο Y είναι χώρος Banach, P είναι κλειστός και generating και ο Y έχει την Riesz Decomposition Property, τότε ο Y έχει την continuous projection property, επομένως σε έναν χώρο Banach διατεταγμένο από έναν κλειστό και generating κώνο η continuous projection property είναι ασθενέστερη από την Riesz Decomposition Property.

Παραθέτουμε ακολούθως ένα παράδειγμα ενός ανακλαστικού generating και normal κώνο P ενός ανακλαστικού κώνου με φραγμένη βάση, που δεν έχει την Riesz Decomposition Property.

Παράδειγμα 3.31. *([43], Example 4.1)Έστω B μια βάση του ℓ_p^+ που ορίζεται από το $f \in \ell_q^+$. Τότε B είναι κλειστή και μη φραγμένη. Έστω $x_0 \in B, \rho \in \mathbb{R}_+$ με $\rho > ||x_0||, B_\rho = \{x \in B \mid ||x|| \leq \rho\}$ και $P = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}_+$ και $x \in B_\rho\}$, τότε ο P είναι ανακλαστικός με φραγμένη βάση B_ρ. Όπως σημειώνεται στο [43], ο P είναι generating στον ℓ_p και ο P δεν έχει την continuous projection property.*

Θεώρημα 3.32. *Αν P ανακλαστικός κώνος ενός χώρου Banach X με κλειστή και φραγμένη βάση B, τότε ο P δεν περιέχει απειροδιάστατο κλειστό κώνο K με την continuous projection property.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι η βάση B του P έχει την Krein-Milman ιδιότητα, δηλαδή κάθε κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο C του B είναι η κλειστή κυρτή θήκη των ακραίων σημείων του. Πράγματι, για κάθε $C \subseteq B$, κλειστό κυρτό από το Θεώρημα Krein-Milman, έχουμε ότι $C = \overline{co}^w ext(C) = \overline{co} ext(C)$, όπου με $ext(C)$ συμβολίζουμε το σύνολο των ακραίων σημείων του C. Αν υποθέσουμε ότι $K \subseteq P$ είναι κλειστός κώνος με την continuous projection property, τότε από το Θεώρημα 2.3, ο K είναι ισομορφικός με τον $\ell_1^+(\Gamma)$, επομένως ο ℓ_1^+ εμφυτεύεται στον K. Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί ο K είναι ανακλαστικός. □

Από το παραπάνω Θεώρημα και τις παραπάνω παρατηρήσεις, προκύπτουν τα ακόλουθο Πορίσματα:

Πόρισμα 3.33. *Αν P είναι ανακλαστικός κώνος ενός χώρου Banach X, με κλειστή, φραγμένη βάση B, τότε ο P δεν περιέχει απειροδιάστατο κλειστό κώνο K, ώστε ο χώρος $Y = P - P$, διατεταγμένος από τον κώνο K να είναι locally solid vector lattice.*

Πόρισμα 3.34. *Κάθε ανακλαστικός και generating κώνος ενός απειροδιάστατου χώρου Banach X, με φραγμένη βάση δεν μπορεί να είναι vector lattice.*

Κεφάλαιο 4

Lattice-subspaces και Θετικές βάσεις

4.1 Εισαγωγή

Έστω E vector lattice και X υπόχωρος του E . Ο X θεωρείται ως μερικά διατεταγμένος γραμμικός χώρος του E με την επαγόμενη διάταξη που συμβολίζεται με $\geq_X$ ως εξής:

$$x \geq_X y \Leftrightarrow x \geq y, \text{ για κάθε } x, y \in X.$$

όπου $\geq$ είναι η σχέση μερικής διάταξης στον E. Επομένως ο θετικός κώνος X_+ του X είναι $X_+ = X \cap E$. Αν για κάθε $x, y \in X, x \vee y \in X$ και $x \wedge y \in X$, λέμε ότι ο X είναι *sublattice του* E. Συμβολίζουμε με $S(X)$ τον ελάχιστο sublattice του E που περιέχει τον X.

Το supremum του $\{x, y\}$ στον X, αν υπάρχει συμβολίζεται με $\sup_X\{x, y\}$ και ορίζεται ως εξής: $z = \sup_X\{x, y\}$ αν και μόνο αν $z \in X$ και για κάθε $w \in X$ ώστε $w \geq x, y \Rightarrow w \geq z$. Ανάλογα ορίζεται το infimum του $\{x, y\}$ στον X και συμβολίζεται με $\inf_X\{x, y\}$.

Αν για κάθε $x, y \in X$ υπάρχουν τα $\sup_X\{x, y\}, \inf_X\{x, y\}$, τότε λέμε ότι X *είναι lattice-subspace του* E . Αν ο X είναι lattice-subspace του E, τότε για κάθε $x, y \in X$ ισχύει:

$$\sup_X\{x,y\} \geq x \vee y \geq x \wedge y \geq \inf_X\{x,y\}.$$

Κάθε sublattice του E είναι lattice-subspace του E. Το αντίστροφο, δεν ισχύει πάντοτε, το σύνολο των sublattices του E είναι γνήσιο υποσύνολο των lattice-subspaces του E.

Στο παρόν κεφάλαιο, θα μελετήσουμε τα πεπερασμένης διάστασης sublattice και lattice-subspace του $E = C(\Omega)$, όπου Ω, συμπαγής Hausdorff τοπολογικός χώρος. Ο $C(\Omega)$ είναι εφοδιασμένος με την σημειακή διάταξη, δηλαδή:

$$C_+(\Omega) = \{x \in C(\Omega) \mid x(t) \geq 0 \ \forall \ t \in \Omega\}$$

Ο $C(\Omega)$, εφοδιασμένος με αυτή την διάταξη είναι vector lattice. Έστω X πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του $C(\Omega)$. Η βάση $\{b_1, ..., b_r\}$ του X λέμε ότι είναι *θετική βάση του X* αν

$$X_+ = \{x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i b_i \mid \lambda_i \geq 0 \ \forall i\}.$$

Αν ο X έχει θετική βάση τότε η βάση αυτή είναι μοναδική με την έννοια των θετικών πολλαπλάσιων της. Παρόλο που ο X έχει άπειρες βάσεις, η ύπαρξη θετικής βάσης δεν είναι βέβαιη. Συγκεκριμένα ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 4.1. *([45], Proposition 1.1) Έστω X πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του $C(\Omega)$ τότε ο X είναι lattice-subspace του $C(\Omega)$ αν και μόνο αν έχει θετική βάση.*

Αν $\{b_1, ..., b_r\}$ είναι θετική βάση του X και $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i b_i, y = \sum_{i=1}^{r} \mu_i b_i$, τότε

$$\sup_X\{x,y\} = \sum_{i=1}^{r}(\lambda_i \vee \mu_i) b_i, \inf_X\{x,y\} = \sum_{i=1}^{r}(\lambda_i \wedge \mu_i) b_i$$

Θεώρημα 4.2. *(Polyrakis, [45], Proposition 2.2)Έστω X πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του $C(\Omega)$ τότε ο X είναι sublattice του $C(\Omega)$ αν και μόνο αν έχει θετική βάση $\{b_1, ..., b_r\}$ με την ιδιότητα $b_i^{-1}(0, +\infty) \cap b_j^{-1}(0, +\infty) = \emptyset$ για κάθε $i \neq j$.*

Στην περίπτωση που $\Omega = \{1, ..., m\}$, τότε $C(\Omega) = \mathbb{R}^m$. Συμβολίζουμε με $\mathbf{1} = (1, ..., 1)$, το σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$. Αν $x = (x_i), y = (y_i) \in \mathbb{R}^m$, τότε έχουμε:

$$x^+ = (\max\{x_i, 0\}), x^- = (\max\{-x_i, 0\}), |x| = (|x_i|)$$

$$x \vee y = (\max\{x_i, y_i\}), x \wedge y = (\min\{x_i, y_i\})$$

Αν $x = (x_i) \in \mathbb{R}^m$, ο φορέας (support) του x είναι το σύνολο $supp(x) = \{i \in \{1, 2, ..., m\} \mid x_i \neq 0\}$. Το x λέμε ότι είναι δυαδικό διάνυσμα, αν δεν είναι σταθερό και $x_i = 1$ ή $x_i = 0$ για κάθε i. Τα διανύσματα $\{x_1, ..., x_r\}$ του $\mathbb{R}^m_+$ λέμε ότι είναι διαμέριση της μονάδας αν $supp(x_i) \cap supp(x_j) = \emptyset$ για κάθε $i \neq j$ και $\mathbf{1} = \sum_{i=1}^r x_i$. Είναι εύκολο να δούμε ότι στην παραπάνω περίπτωση κάθε x_i είναι δυαδικό διάνυσμα. Από το Θεώρημα 4.2, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα για τον $\mathbb{R}^m$

Θεώρημα 4.3. *(Polyrakis)Έστω X sublattice του $\mathbb{R}^m$. Αν $\mathbf{1} \in X$, τότε ο X έχει θετική βάση $\{b_1, ..., b_r\}$, που είναι διαμέριση της μονάδας.*

4.2 Ο αλγόριθμος του Πολυράκη

Έστω $z_1, ..., z_r$ γραμμικά ανεξάρτητα και θετικά διανύσματα του $C(\Omega)$ και $X = [z_1, ..., z_r]$. Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε την λύση που έδωσε ο I. Polyrakis([45],[46]) στο ακόλουθο πρόβλημα:

Κάτω από ποιες συνθήκες ο X είναι lattice-subspace ή sublattice του $C(\Omega)$;

Η λύση στο παραπάνω πρόβλημα της θεωρίας των διατεταγμένων χώρων έδωσε σημαντικές εφαρμογές στα χρηματοοικονομικα ([32], [48], [28], [30], [52], [33]) και στην παρούσα διατριβή είναι το βασικό εργαλείο του κεφάλαιου 5.

Στην περίπτωση που ο X δεν είναι lattice-subspace, θα μελετήσουμε αν ο X περιέχεται σε πεπερασμένης διάστασης ελαχιστικό lattice subspace ή αν ο $S(X)$ είναι πεπερασμένης διάστασης.

Η συνάρτηση

$$\beta(t) = (\frac{z_1(t)}{z(t)}, \frac{z_2(t)}{z(t)}, ..., \frac{z_r(t)}{z(t)}), \text{ για κάθε } t \in \Omega, \text{ με } z(t) > 0,$$

όπου $z = z_1 + z_2 + ... + z_r$ ονομάζεται *βασική συνάρτηση των* $z_1, ..., z_r$. Συμβολίζουμε με $R(\beta)$ το πεδίο τιμών της β και με $card(R(\beta))$ τον πληθάριθμο του $R(\beta)$.

Θεώρημα 4.4. *(Polyrakis, [46], Theorem 3.6)Αν Z είναι υπόχωρος του $C(\Omega)$ που παράγεται από τα $z_1, ..., z_r$ και β η βασική συνάρτηση των $z_1, ..., z_r$, έχουμε ότι Z είναι sublattice του $C(\Omega)$ αν και μόνο αν $card(R(\beta)) = r$.*

Αν $R(\beta) = \{P_1, ..., P_r\}$, η θετική βάση $\{b_1, ..., b_r\}$ του Z δίνεται από τύπο

$$(b_1, b_2, ..., b_r)^T = A^{-1}(z_1, z_2, ..., z_r)^T, \tag{4.1}$$

όπου A είναι $r \times r$ πίνακας όπου η i στήλη είναι το διάνυσμα P_i για κάθε $i = 1, ..., r$ και $(b_1, b_2, ..., b_r)^T, (z_1, z_2, ..., z_r)^T$ είναι πίνακες με γραμμές τα διανύσματα $b_1, b_2, ..., b_r$ και $z_1, z_2, ..., z_r$ αντίστοιχα.

Θεώρημα 4.5. *(Polyrakis, [46], Theorem 3.7)Έστω Z sublattice του $C(\Omega)$ που παράγεται από τα $z_1, ..., z_r$ και $\mu \in \mathbb{N}$. Αν β η βασική συνάρτηση των $z_1, ..., z_r$ οι ισχυρισμοί (i),(ii) είναι ισοδύναμοι:*

(i) $dim(Z) = \mu$

(ii) $R(\beta) = \{P_1, ..., P_\mu\}$

Αν το (ii) ισχύει, τότε ο Z κατασκευάζεται σύμφωνα με τα ακόλουθα:

(a) Απαριθμούμε το $R(\beta)$ έτσι ώστε τα r πρώτα διανύσματα να είναι γραμμικά ανεξάρτητα(όπως έχει αποδειχθεί στο [46], τέτοια απαρίθμηση υπάρχει πάντα). Συμβολίζουμε πάλι με $P_i, i = 1, 2, ..., \mu$ τη νέα απαρίθμηση και θέτουμε $I_{r+k} = \{t \in \Omega \mid \beta(t) = P_{r+k}\}$ για κάθε $k = 1, 2, ..., \mu - r$.

(β) Ορίζουμε τα διανύσματα $z_{r+k}, k = 1, 2, ..., \mu - r$ *ως ακολούθως:*

$$z_{r+k}(i) = z(i) \;\; \text{αν } i \in I_{r+k} \text{ και } z_{r+k}(i) = 0 \;\; \text{αν } i \notin I_{r+k},$$

όπου $z = z_1 + ... + z_r$.

(γ) $Z = [z_1, z_2, ..., z_r, z_{r+1}, ..., z_\mu]$

(δ) Η θετική βάση $\{b_1, b_2, ..., b_\mu\}$ *του* Z *κατασκευάζεται ως ακολούθως:*

Έστω γ *η βασική συνάρτηση των* $z_1, z_2, ..., z_r, z_{r+1}, ..., z_\mu$ *και υποθέτουμε ότι*

$$\{P'_1, P'_2, ..., P'_\mu\}$$

είναι το πεδίο τιμών της γ *(το πεδίο τιμών της* γ *έχει ακριβώς* μ *σημεία). Τότε*

$$(b_1, b_2 ..., b_\mu)^T = D^{-1}(z_1, z_2, ..., z_\mu)^T, \tag{4.2}$$

όπου D *είναι* $\mu \times \mu$ *πίνακας με στήλες τα διανύσματα* $P'_1, P'_2, ..., P'_\mu$.

Η έννοια της βάσης προβολής , ορίστηκε στο [48]. Έστω $\{y_1, ..., y_r\}$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $C(\Omega)$ και $L = [y_1, ..., y_r] \subseteq W$, όπου W lattice-subspace πεπερασμένης διάστασης του $C(\Omega)$. Η βάση $\{\tilde{b}_1, ..., \tilde{b}_r\}$ είναι βάση προβολής του L αν τα στοιχεία της είναι προβολή των στοιχείων της θετικής βάσης του W. Στην περίπτωση που $Z = S(L)$ είναι πεπερασμένης διάστασης, βάση προβολής του L μπορεί να οριστεί με ανάλογο τρόπο, παίρνοντας την προβολή της θετικής βάσης του Z στον L.

Θεώρημα 4.6. *(Polyrakis, [48], Theorem 9)Έστω* Z *sublattice του* $C(\Omega)$, *που παράγεται από τα* $\{z_1, ..., z_r\}$, *γραμμικά ανεξάρτητα και θετικά διανύσματα του* $C(\Omega)$ *και έστω* $dim(Z) = \mu$. *Ακολουθούμε τα βήματα και τους συμβολισμούς του (ii), του Θεωρήματος 4.5 για τον προσδιορισμό της θετικής βάσης* $\{b_1, b_2, ..., b_\mu\}$ *του* Z *που δίνεται από τον τύπο 4.2. Έστω* β *η βασική συνάρτηση των διανυσμάτων* $z_1, z_2, ..., z_r$ *και* $P_1, P_2, ..., P_r, P_{r+1}, ..., P_\mu$ *μια* *απαρίθμηση του $R(\beta)$ ώστε τα διανύσματα $P_1, ..., P_r$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα και έστω $z_{r+1}, z_{r+2}, ..., z_\mu$ τα νέα διανύσματα του (β), του Θεωρήματος 4.5. Αν $L = [z_1, z_2, ..., z_r]$, τότε:*

(i) $Z = L \oplus [z_{r+1}, z_{r+2}, ..., z_\mu]$,

(ii) $\{b_{r+1}, b_{r+2}, ..., b_\mu\} = \{2z_{r+1}, 2z_{r+2}, ..., 2z_\mu\}$,

(iii) Αν $b_i = \tilde{b}_i + b'_i$, με $\tilde{b}_i \in L$ και $b'_i \in [z_{r+1}, z_{r+2}, ..., z_\mu]$ για κάθε $i = 1, 2, ..., r$, τότε $\{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, ..., \tilde{b}_r\}$ είναι βάση του L, που την ονομάζουμε βάση προβολής του L και δίνεται από τον τύπο:

$$(\widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2, ..., \widetilde{b}_r)^T = A^{-1}(z_1, z_2, ..., z_r)^T, \tag{4.3}$$

όπου A είναι $n \times n$ πίνακας, όπου η i στήλη είναι τα διανύσματα P_i, για κάθε $i = 1, ..., r$. Αυτή η βάση έχει την ιδιότητα: Οι r πρώτοι συντελεστές κάθε στοιχείου x του L στην βάση $\{b_1, ..., b_\mu\}$ ταυτίζονται με τους αντίστοιχους συντελεστές του x ως προς την βάση προβολής, δηλαδή:

$$x = \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i b_i \in L \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \tilde{b}_i. \tag{4.4}$$

Κεφάλαιο 5

Αναπαραγωγή δικαιωμάτων σε αγορές αξιογράφων

5.1 Το Μαθηματικό μοντέλο

Στο χρηματοοικονομικό μοντέλο που μελετάμε, θεωρούμε μια αγορά αξιογράφων δύο-περιόδων με πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων $\Omega = \{1, 2, ..., m\}$ την ημέρα 1 και πεπερασμένο αριθμό πρωταρχικών αξιογράφων των οποίων οι αποδόσεις δίνονται από τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $x_1, ..., x_n$ του χώρου αποδόσεων $\mathbb{R}^m$. Χαρτοφυλάκιο είναι ένα διάνυσμα $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)$ του $\mathbb{R}^n$, όπου θ_i είναι ο αριθμός των μονάδων από το i αξιόγραφο. Τότε $T(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i \in \mathbb{R}^m$ είναι η απόδοση του θ. Επειδή ο τελεστής T είναι ¨1-1¨, ταυτίζει τα χαρτοφυλάκια με την απόδοση τους. Τα διανύσματα $x_1, ..., x_n$ θα αναφέρονται ως πρωταρχικά αξιόγραφα και ο υπόχωρος

$$X = [x_1, x_2, ..., x_n],$$

του $\mathbb{R}^m$, που παράγεται από τα διανύσματα x_i ως αγορά των $x_1, ..., x_n$. Το ακίνδυνο ομόλογο $\mathbf{1}$ είναι το διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$, με μοναδιαίες συντεταγμένες. Το διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^m$, λέμε ότι αναπαράγεται από την αγορά(είναι replicated) αν $x \in X$. Δικαίωμα αγοράς που εγγράφεται στο διάνυσμα x με τιμή εξάσκησης a είναι το διάνυσμα $c(x, a) = (x - a\mathbf{1})^+$ του $\mathbb{R}^m$. Δικαίωμα πώλησης που εγγράφεται στο διάνυσμα x με τιμή εξάσκησης a είναι το διάνυσμα $p(x,a) = (a\mathbf{1} - x)^+$ του $\mathbb{R}^m$. Ισχύει ότι $x - a\mathbf{1} = c(x,a) - p(x,a)$. Αν $c(x,a) > 0$ και $p(x,a) > 0$, λέμε ότι το δικαίωμα αγοράς $c(x,a)$ και το δικαίωμα πώλησης $p(x,a)$ είναι μη τετριμμένο και επίσης ότι η a είναι μη τετριμμένη τιμή εξάσκησης για το x. Συμβολίζουμε με K_x, το σύνολο όλων των μη τετριμμένων τιμών εξάσκησης του x. Αν $c(x,a) \in X$ λέμε ότι η a είναι call-replicated τιμή εξάσκησης του x και αν $p(x,a) \in X$ λέμε ότι η a είναι put-replicated τιμή εξάσκησης του x. Αν $c(x,a), p(x,a) \in X$ λέμε ότι η a είναι replicated τιμή εξάσκησης του x. Αν $\mathbf{1} \in X$, τότε $c(x,a) \in X$ αν και μόνο αν $p(x,a) \in X$. Σε αυτή την ενότητα δεν υποθέτουμε γενικά ότι $\mathbf{1} \in X$. Η πλήρωση της αγοράς $F_1(X)$ με διακαιώματα είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$, που παράγεται από όλα τα διακαιώματα που εγγράφονται σε στοιχεία του X. Ένα από τα βασικά προβλήματα της θεωρίας είναι ο προσδιορισμός του $F_1(X)$. Το 1976, ο Ross στην πρωτοποριακή του εργασία [56], απέδειξε ότι $F_1(X) = \mathbb{R}^m$ αν και μόνο αν ο X έχει αποτελεσματικό ομόλογο(το $e \in \mathbb{R}^m$ είναι αποτελεσματικό ομόλογο αν $e(i) \neq e(j)$ για κάθε $i \neq j$). Στα χρόνια που ακολούθησαν, αρκετοί ερευνητές ασχολήθηκαν με αυτό το πρόβλημα. Στο [10], οι Arditti και John απέδειξαν ότι αν ο X έχει αποτελεσματικό ομόλογο τότε σχεδόν κάθε χαρτοφυλάκιο(με την έννοια του μέτρου Lebesque στο X) είναι αποτελεσματικό ομόλογο. Στο [25], μελετάται η περίπτωση που η υπόθεση του Ross για ύπαρξη αποτελεσματικού ομολόγου δεν ικανοποιείται και ο $F_1(X)$ είναι γνήσιος υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$. Σε αυτό το άρθρο, ο John όρισε την έννοια του μεγιστικού αποτελεσματικού ομολόγου και απέδειξε ότι ο $F_1(x)$ παράγεται από τα διακαιώματα αγοράς και πώλησης που εγγράφονται σε ένα μεγιστικό αποτελεσματικό ομόλογο. Όπως επισημάνεται στην εργασία [21] των Green, Jarrow και στην εργασία [14] των Brown,Ross κάθε διακαιώματα αγοράς και πώλησης γίνεται replicated από την αγορά αν και μόνο αν ο X είναι sublattice του $\mathbb{R}^m$. Στην εργασία [11] του Baptista, τα αποτελέσματα του Ross, επεκτείνονται για μοντέλο αγοράς αξιογράφων, πολλών περιόδων. Στην εργασία [20] της Galvani, τα αποτελέσματα του Ross μελετούνται στην περίπτωση των L_p-χώρων.

Το 2006, στην εργασία [31], οι C. Kountzakis και I. Polyrakis, έλυσαν το πρόβλημα της πλήρωσης της αγοράς με διακαιώματα, δίνοντας μια πλήρη μέθοδο που υπολογίζει την θετική βάση του $F_1(X)$. Αυτή η μέθοδος βασίζεται στην θεωρία των lattice-subspaces και των θετικών βάσεων που αναπτύχθηκε από τον I. Polyrakis και παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Αυτή η θεωρία είναι το βασικό εργαλείο, για την μελέτη που θα κάνουμε στις επόμενες παραγράφους. Ακολούθως, περιγράφουμε την μέθοδο προσδιορισμού του $F_1(X)$.

Σύμφωνα με αυτή την μέθοδο, θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{A} = \{x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^-, ..., x_n^+, x_m^-, \mathbf{1}\},$$

Κάθε μεγιστικό υποσύνολο $\{y_1, y_2, ..., y_r\}$ γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων του $\mathcal{A}$ ονομάζεται βασικό σύνολο της αγοράς. Σημειώνουμε ότι το βασικό σύνολο, δεν είναι απαραίτητα μοναδικό, όλα όμως τα βασικά σύνολα έχουν πληθάριμο r. Όπου r είναι η διάσταση του υπόχωρου του $\mathbb{R}^m$ που παράγεται από το $\mathcal{A}$ και κάθε βασικό σύνολο της αγοράς είναι βάση του υποχώρου αυτού. Το επόμενο θεώρημα αποδείχτηκε σε απειροδιάστατες αγορές. Στην περίπτωση μας είναι:

Θεώρημα 5.1. *(Kountzakis, Polyrakis,[31], Theorem 11)$F_1(X)$ είναι ο sublattice του $\mathbb{R}^m$, που παράγεται από ένα βασικό σύνολο της αγοράς.*

Έπειτα από αυτό, το αποτέλεσμα, χρησιμοποιούμε την θεωρία των lattice-subspaces και των θετικών βάσεων. Επειδή $F_1(X)$ είναι sublattice του $\mathbb{R}^m$ που περιέχει το $\mathbf{1}$, έχουμε σύμφωνα με το Θεώρημα 4.6 ότι ο $F_1(X)$ έχει θετική βάση $\{b_1, ..., b_\mu\}$ που είναι διαμέριση της μονάδας, δηλαδή $supp(b_i) \cap supp(b_j) =$ για κάθε $i \neq j$ και $\mathbf{1} = \sum_{i=1}^{\mu} b_i$ Οπότε ισχύει το ακόλουθο:

Θεώρημα 5.2. *$F_1(X)$ έχει θετική βάση $\{b_1, ..., b_\mu\}$ που είναι διαμέριση της μονάδας.*

Για τον προσδιορισμό της θετικής βάσης $\{b_i\}$ του $F_1(X)$, που είναι διαμέριση της μονάδας, θα ακολουθήσουμε τα βήματα του Polyrakis-Αλγόριθμου, όπως περιγράφτηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Συγκεκριμένα, αν $\{y_1, ..., y_r\}$ είναι ένα βασικό σύνολο της αγοράς, τότε η βασική συνάρτηση των $y_1, ..., y_r$ είναι η ακόλουθη:

$$\beta(i) = (\frac{y_1(i)}{y(i)}, \frac{y_2(i)}{y(i)}, ..., \frac{y_r(i)}{y(i)}), \text{ για κάθε } i = 1, 2, ..., m, \text{ με } y(i) > 0,$$

όπου $y = y_1 + ... + y_r$. Ακολουθώντας τον αλγόριθμο, προσδιορίζουμε μια θετική βάση $\{d_1, ..., d_\mu\}$ του $F_1(X)$ από τον τύπο (4.2). Τα στοιχεία αυτής της βάσης έχουν ξένους φορείς και κάθε d_i είναι σταθερό στον φορέα του. Κανονικοποιόντας τη βάση $\{d_i\}$ προσδιορίζουμε την θετική βάση $\{b_i\}$ του $F_1(X)$, που είναι διαμέριση της μονάδας. Από το Θεώρημα 4.6, συμπεράνουμε τα ακόλουθα για την διάσταση του $F_1(X)$.

Θεώρημα 5.3. *Η διάσταση του $F_1(X)$ είναι ίση με την πληθικότητα του $R(\beta)$, επομένως έχουμε:*

(i) $F_1(X) = X$ *αν και μόνο αν* $card(R(\beta)) = n$,

(ii) $F_1(X) = \mathbb{R}^m$ *αν και μόνο αν* $card(R(\beta)) = m$,

(iii) $F_1(X) \subsetneq X$ *αν και μόνο αν* $card(R(\beta)) < m$,

5.2 Αγορές που αναπαράγουν λίγα διακαιώματα

Σε αυτή την ενότητα, θα συνεχίσουμε την μελέτη των άρθρων [12] και [8], που αναφέρονται σε αγορές που αναπαράγουν λίγα δικαιώματα. Αρχικά, θα μελετήσουμε τις αγορές που δεν έχουν δυαδικά διανύσματα, δηλαδή διανύσματα, που έχουν συντεταγμένες 0 ή 1. Στο Θεώρημα 5.5, θα αποδείξουμε ότι σε αυτές τις αγορές X, για κάθε $x \in X$, το σύνολο K_x περιέχει το πολύ $k-3$, τιμές εξάσκησης που αναπαράγονται από την αγορά, όπου $k \leq m$ και m ο αριθμός των καταστάσεων. Το αποτέλεσμα αυτό βελτιώνει αισθητά το αποτέλεσμα του Baptista, όπου στο [12], είχε αποδείξει ότι το σύνολο των μη τετριμμένων τιμών εξάσκησης που αναπαράγονται από την αγορά είναι μέτρου μηδέν. Στη συνέχεια, θα γενικεύσουμε τον ορισμό και τα αποτελέσματα που είχαν δώσει για τις strongly resolving αγορές οι Aliprantis και Tourky στο [8]. Συγκεκριμένα, θεωρούμε τον πίνακα αποδόσεων των πρωταρχικών αξιογράφων, ως προς την θετική βάση $\{b_i\}$ του $F_1(X)$ και ορίζουμε την έννοια των strongly resolving αγορών, ως προς αυτό τον πίνακα. Στο Θεώρημα 5.9, επεκτείνοντας το αντίστοιχο αποτέλεσμα του [8], αποδεικνύουμε ότι σε αυτές τις αγορές αν $n \leq \frac{\mu+1}{2}$, όπου n ο αριθμός των πρωταρχικών αξιογράφων και μ

η διάσταση του $F_1(X)$, τότε κανένα μη τετριμμένο δικαίωμα δεν αναπαράγεται από την αγορά.

Για τα ακόλουθα, θεωρούμε την αγορά $X = [x_1, ..., x_n]$ και $\{b_1, b_2, ..., b_\mu\}$ ή $\{b_i\}$ την θετική βάση του $F_1(X)$, που είναι διαμέρισης της μονάδας. Για κάθε $x = \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i b_i \in F_1(X)$, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu$ είναι οι συντελεστές του x ως προς την βάση $\{b_i\}$. Θέτουμε

$$a_1 = \min\{\lambda_i \mid i = 1, 2, ..., \mu\} \text{ και } \Phi_1 = \{i \mid \lambda_i = a_1\},$$

$$a_2 = \min\{\lambda_i \mid \lambda_i > a_1\} \text{ και } \Phi_2 = \{i \mid \lambda_i = a_2\},$$

και συνεχίζοντας κατά αυτό τον τρόπο, παίρνουμε τους πραγματικούς αριθμούς $a_1, a_2, ..., a_k$ και τα υποσύνολα $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_k$ του $\{1, ..., \mu\}$. Οι αριθμοί $a_1, a_2, ..., a_k$ θα καλούνται ουσιώδης συντελεστές και τα σύνολα $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_k$ ουσιώδης σύνολα καταστάσεων του x, ως προς την βάση $\{b_i\}$. Οι ουσιώδης συντελεστές είναι σε αύξουσα σειρά και για το πλήθος k των ουσιώδες συντελεστών ισχύει $k \leq \mu \leq m$.

Πρόταση 5.4. *Για κάθε $x = \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i b_i \in F_1(X)$, έχουμε:*

(i) $c(x, a) = \sum_{i=1}^{\mu} (\lambda_i - a)^+ b_i$ *και* $p(x, a) = \sum_{i=1}^{\mu} (a - \lambda_i)^+ b_i$,

(ii) Αν $a_1, a_2, ..., a_k$ είναι οι ουσιώδης συντελεστές του x, το διάστημα $K_x = (a_1, a_k)$ είναι το σύνολο των μη τετριμμένων τιμών εξάσκησης του x.

Απόδειξη. (i): Η βάση $\{b_i\}$ είναι διαμέριση της μονάδας. Άρα $b_i(j) = 1$ για κάθε $j \in supp(b_i)$. Επομένως έχουμε $c(x, a) = (x - a\mathbf{1})^+ = (\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i b_i - a \sum_{i=1}^{\mu} b_i)^+ = (\sum_{i=1}^{\mu} (\lambda_i - a) b_i)^+$. Επειδή η βάση $\{b_i\}$ είναι διαμέριση της μονάδας, για κάθε $j \in supp(b_i)$, έχουμε ότι η j-συντεταγμένη του $c(x, a)$ ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^m$ είναι $(\lambda_j - a)^+$, άρα είναι εύκολο να δείξουμε ότι $c(x, a) = \sum_{i=1}^{\mu} (\lambda_i - a)^+ b_i$. Η απόδειξη για το δικαίωμα πώλησης είναι ανάλογη.

(ii):Αν $a \leq a_1$, τότε $(a - \lambda_i)^+ = 0$ για κάθε i, άρα $p(x, a) = 0$ διότι a_1 είναι ο ελάχιστος συντελεστής λ_i του x. Άρα a είναι τετριμμένη τιμή εξάσκησης. Αν $a \geq a_k$, όμοια έχουμε ότι $(\lambda_i - a)^+ = 0$ για κάθε i, άρα $c(x, a) = 0$ και a είναι τετριμμένη τιμή εξάσκησης. Για κάθε $a \in (a_1, a_k)$ έχουμε ότι $(\lambda_i - a)^+ > 0$

για τουλάχιστον ένα i και επίσης $(a-\lambda_j)^+ > 0$ για τουλάχιστον ένα j. Επειδή η βάση $\{b_i\}$ είναι θετική, έχουμε $c(x,a) > 0$ και $p(x,a) > 0$, άρα a είναι μη τετριμμένη τιμή εξάσκησης. $\square$

Θεώρημα 5.5. *Έστω ότι η αγορά X δεν έχει δυαδικά διανύσματα και x είναι μη σταθερό διάνυσμα του X. Αν $a_1, a_2, ..., a_k$ είναι οι ουσιώδες συντελεστές του x ως προς την βάση $\{b_i\}$, τότε:*

(i) Αν $k = 2$, κάθε μη τετριμμένο δικαίωμα αγοράς του x είναι nonrepilcated. Αν $k > 2$, κάθε διάστημα $(a_1, a_2), [a_2, a_3), ..., [a_{k-2}, a_{k-1})$ περιέχει το πολύ μια call-replicated τιμή εξάσκησης, άρα υπάρχουν το πολύ $k-2$ call-replicated τιμές εξάσκησης του x.

(ii) Αν $k = 2$, κάθε μη τετριμμένο δικαίωμα πώλησης του x είναι nonrepilcated.Αν $k > 2$, κάθε διάστημα $(a_2, a_3], ..., [a_{k-2}, a_{k-1}), (a_{k-1}, a_k)$ περιέχει το πολύ μια put-replicated τιμή εξάσκησης, άρα υπάρχουν το πολύ $k-2$ put-replicated τιμές εξάσκησης του x.

(iii) Αν υποθέσουμε ότι $\mathbf{1} \in X$, έχουμε: Αν $k = 3$, κάθε μη τετριμμένο δικαίωμα του x είναι nonrepilcated. Αν $k > 3$, κάθε διάστημα $(a_2, a_3), [a_3, a_4), ..., [a_{k-2}, a_{k-1})$ περιέχει το πολύ μια replicated τιμή εξάσκησης, άρα υπάρχουν το πολύ $k-3$ call-replicated τιμές εξάσκησης του x.

Απόδειξη. Έστω $x \in X, x \neq \lambda\mathbf{1}, x = \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i b_i$ και $a_1, a_2, ..., a_k$ είναι οι ουσιώδες συντελεστές του x και $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_k$ είναι τα ουσιώδες σύνολα καταστάσεων του x. Επειδή υποθέσαμε ότι το x δεν είναι πολλαπλάσιο του ακίνδυνου ομολόγου, συμπεράνουμε ότι $k \geq 2$. Τότε

$$x = a_1 \sum_{i \in \Phi_1} b_i + a_2 \sum_{i \in \Phi_2} b_i + ... + a_k \sum_{i \in \Phi_k} b_i \tag{5.1}$$

Θέτουμε, $\overline{b}_j = \sum_{i \in \Phi_j} b_i, j = 1, 2, ..., k$ και παρατηρούμε ότι κάθε τέτοιο διάνυσμα είναι δυαδικό διάνυσμα. Επίσης έχουμε:

$$x = \sum_{j=1}^{k} a_j \bar{b}_j.$$

Το σύνολο των μη τετριμμένων τιμών εξάσκησης του x είναι το διάστημα $K_x = (a_1, a_k)$. Για κάθε $a = (a_1, a_k)$, έχουμε:

$$c(x,a) = \sum_{j=r+1}^{k} (a_j - a)\bar{b}_j,$$

όπου $r = 1$, αν $a \in (a_1, a_2)$ και $r = \nu$ αν $a \in [a_\nu, a_{\nu+1})$ για $\nu = 2, 3, ..., k-1$. Αν $a \in [a_{k-1}, a_k)$ τότε $c(x,a) = (a_k - a)\bar{b}_k$ είναι θετικό πολλαπλάσιο ενός δυαδικού διανύσματος, άρα $c(x,a) \notin X$. Επομένως για κάθε $a \in [a_{k-1}, a_k)$ το $c(x,a)$ είναι nonreplicated. Αυτό σημαίνει ότι αν $k = 2$, τότε κάθε δικαίωμα αγορά του x δεν αναπαράγεται από την αγορά.

Έστω a, a' διαφορετικές τιμές εξάσκησης που ανήκουν στο ίδιο υποδιάστημα $(a_1, a_2), [a_2, a_3), ..., [a_{k-2}, a_{k-1})$ του (a_1, a_k). Τότε έχουμε

$$c(x,a) - c(x,a') = \sum_{j=r+1}^{k} ((a_j - a) - (a_j - a'))\bar{b}_j = (a' - a) \sum_{j=r+1}^{k} \bar{b}_j.$$

Αν υποθέσουμε ότι $c(x,a), c(x,a') \in X$ τότε

$$(a' - a) \sum_{j=r+1}^{k} \bar{b}_j \in X,$$

το οποίο είναι άτοπο, γιατί $\sum_{j=r+1}^{k} \bar{b}_j$ είναι δυαδικό διάνυσμα. Άρα το πολύ ένα από τα $c(x,a), c(x,a')$ αναπαράγονται από την αγορά. Επομένως κάθε υποδιάστημα $(a_1, a_2), [a_2, a_3), ..., [a_{k-2}, a_{k-1})$ του (a_1, a_k) περιέχει το πολύ μία call-repliacted τιμή εξάσκησης, άρα συνολικά υπάρχουν το πολύ $k-2$ call-repliacted τιμές εξάσκησης και ο ισχυρισμός (i) είναι αληθής. Η απόδειξη του (ii) είναι ανάλογη.

Αν υποθέσουμε ότι $\mathbf{1} \in X$ και ισχύει $c(x,a) \in X$ ή $p(x,a) \in X$, τότε έχουμε ότι $c(x,a) \in X$ και $p(x,a) \in X$. Επομένως αν $\mathbf{1} \in X$, από το (i) και το (ii), έχουμε ότι υπάρχουν το πολύ $k-3$ τιμές εξάσκησης που αναπαράγονται από την αγορά και συγκεκριμένα κάθε υποδιάστημα $(a_2, a_3), [a_3, a_4), ..., [a_{k-2}, a_{k-1})$ του (a_1, a_k) περιέχει το πολύ μια replicated τιμή εξάσκησης. □

Αν η διάσταση του $F_1(X)$ είναι το πολύ τρία, τότε για κάθε $x \in X$, οι ουσιώδεις συντελεστές του x είναι το πολύ τρείς. Επομένως από το παραπάνω θεώρημα, έχουμε:

Πόρισμα 5.6. *Έστω ότι η αγορά X δεν έχει δυαδικά διανύσματα, τότε:*

- *Αν $dim(F_1(X)) = 2$, κάθε μη τετριμμένο δικαίωμα που εγγράφεται σε στοιχείο του X δεν αναπαράγεται από την αγορά.*
- *Αν $dim(F_1(X)) = 3$ και $\mathbf{1} \in X$, κάθε μη τετριμμένο δικαίωμα που εγγράφεται σε στοιχείο του X δεν αναπαράγεται από την αγορά.*

Το επόμενο παράδειγμα είναι μια εφαρμογή σε ένα τρισδιάστατο υπόχωρο X του $\mathbb{R}^8$, που δεν έχει δυαδικά διανύσματα. Θα προσδιορίσουμε μια θετική βάση $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ του $F_1(x)$ και θα βρούμε ένα $x \in X$, που έχει 4 ουσιώδεις συντελεστές ($k = 4$) και μια τιμή εξάσκησης που αναπαράγεται από την αγορά. Αυτό το Παράδειγμα δείχνει ότι το άνω φράγμα $k - 3$, του Θεωρήματος 5.5, δεν μπορεί να βελτιωθεί.

Παράδειγμα 5.7. *Έστω $x_1 = (1,1,2,2,0,0,0,0), x_2 = (0,0,0,0,3,3,4,4)$, $x_3 = (1,1,1,1,1,1,1,1)$ τα πρωταρχικά αξιόγραφα της αγοράς $X = [x_1, x_2, x_3]$, είναι εύκολο να δούμε ότι ο X δεν έχει δυαδικά διανύσματα.*

Ακολουθώντας την μεθοδολογία προσδιορισμού του $F_1(X)$, ξεκινάμε με τον προσδιορισμό ενός βασικού συνόλου της αγοράς και βρίσκουμε ότι $\{y_1, y_2, y_3\} = \{x_1, x_2, x_3\}$ είναι βασικό σύνολο. Για να προσδιορίσουμε μια βάση ακολουθούμε τα βήματα του Θεωρήματος 4.5. Επομένως προσδιορίζουμε την βασική συνάρτηση β των y_1, y_2, y_3 και βρίσκουμε ότι:

$$\beta(1) = \beta(2) = \frac{1}{2}(1,0,1) = P_1, \beta(3) = \beta(4) = \frac{1}{3}(2,0,1) = P_2$$

$$\beta(5) = \beta(6) = \frac{1}{4}(0,3,1) = P_3, \beta(7) = \beta(8) = \frac{1}{5}(0,4,1) = P_4.$$

Επομένως $card(R(\beta)) = 4$, *άρα* $dim(F_1(X)) = 4$.
Τα διανύσματα P_1, P_2, P_3 *του* $(R(\beta))$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα, επομένως κρατάμε την ίδια αρίθμηση για το* $(R(\beta))$. *Σύμφωνα με τον αλγόριθμο,* $I_4 = \beta^{-1}(P_4) = \{7,8\}$ *και ορίζουμε το νέο διάνυσμα* $y_4 = (0,0,0,0,0,0,5,5)$. *Στη συνέχεια προσδιορίζουμε την την βασική συνάρτηση* γ *των* y_1, y_2, y_3, y_4 *και βρίσκουμε ότι:*

$$\gamma(1) = \gamma(2) = \frac{1}{2}(1,0,1,0) = P'_1, \gamma(3) = \gamma(4) = \frac{1}{3}(2,0,1,0) = P'_2$$

$$\gamma(5) = \gamma(6) = \frac{1}{4}(0,3,1,0) = P'_3, \gamma(7) = \gamma(8) = \frac{1}{10}(0,4,1,5) = P'_4.$$

Μια θετική βάση του $F_1(X)$, *δίνεται από τον τύπο* $(d_1, d_2, d_3, d_4)^T = A^{-1}(y_1, y_2, y_3, y_4)^T$, *όπου* A *είναι ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα* $P'_i, i = 1, ..., 4$. *Βρίσκουμε ότι*

$$d_1 = (2,2,0,0,0,0,0,0), d_2 = (0,0,3,3,0,0,0,0),$$

$$d_3 = (0,0,0,0,4,4,0,0), d_4 = (0,0,0,0,0,0,10,10).$$

Κανονικοποιόντας τα παραπάνω διανύσματα, παίρνουμε την ακόλουθη θετική βάση του $F_1(X)$ *που είναι διαμέριση της μονάδας.*

$$b_1 = (1,1,0,0,0,0,0,0), b_2 = (0,0,1,1,0,0,0,0),$$

$$b_3 = (0,0,0,0,1,1,0,0), b_4 = (0,0,0,0,0,0,1,1).$$

Θεωρούμε το χαρτοφυλάκιο $x = -x_1 + x_2 = (-1,-1,-2,-2,3,3,4,4)$.
Το x, *ως προς την βάση* $\{b_i\}$, *γράφεται:* $x = -b_1 - 2b_2 + 3b_3 + 4b_4$ *και*

$a_1 = -2, a_2 = -1, a_3 = 3, a_4 = 4$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.5, το x έχει το πολύ μία replicated τιμή εξάσκησης $a \in (-1,3)$. Έστω $a \in (-1,3)$, replicated τιμή εξάσκησης, τότε έχουμε

$$c(x,a) = (3-a)b_3 + (4-a)b_4 \in X.$$

Τότε

$$c(x,a) = \rho_1(b_1 + 2b_2) + \rho_2(3b_3 + 4b_4) + \rho_3(b_1 + b_2 + b_3 + b_4).$$

Βρίσκουμε ότι $\rho_1 = \rho_3 = 0, 3\rho_2 = 3 - a, 4\rho_2 = 4 - a$, άρα $a = 0$. Πράγματι $c(x,0) = 3b_3 + 4b_4 = x_2 \in X$ και $p(x,0) = b_1 + 2b_2 = x_1 \in X$.

Στα επόμενα θα μελετήσουμε τις strongly resolving αγορές. Οι αγορές αυτές μελετήθηκαν στο [8] από τους Aliprantis και Tourky. Αν $x_i = (x_i(1), x_i(2), ..., x_i(m))$ τότε ο πίνακας αποδόσεων των πρωταρχικών αξιογράφων είναι

$$A(x_i, e_i) = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_2(1) & ... & x_n(1) \\ x_1(2) & x_2(2) & ... & x_n(2) \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ x_1(m) & x_2(m) & ... & x_n(m) \end{bmatrix},$$

Μια αγορά, σύμφωνα με το [8] είναι strongly resolving αν κάθε $n \times n$ υποπίνακας του $A(x_i, e_i)$ είναι αντιστρέψιμος. Στα ακόλουθα θα γενικεύσουμε, αυτό τον ορισμό. Έστω $x_i = \sum_{j=1}^{\mu} x_i^b(j) b_j$, είναι η γραφή του x_i, ως προς την βάση b_i. Τότε ο $\mu \times n$ πίνακας

$$A(x_i, b_i) = \begin{bmatrix} x_1^b(1) & x_2^b(1) & ... & x_n^b(1) \\ x_1^b(2) & x_2^b(2) & ... & x_n^b(2) \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ x_1^b(\mu) & x_2^b(\mu) & ... & x_n^b(\mu) \end{bmatrix},$$

ονομάζεται πίνακας αποδόσεων των πρωταρχικών αξιογράφων ως προς την βάση $\{b_i\}$.

Ορισμός 5.8. *Αν κάθε $n \times n$ υποπίνακας του $A(x_i, b_i)$ είναι αντιστρέψιμος, τότε η αγορά X είναι strongly resolving ως προς την βάση $\{b_i\}$.*

Στο επόμενο Θεώρημα θα αποδείξουμε ότι αν $F_1(X) \neq \mathbb{R}^m$, η αγορά δεν μπορεί να είναι strongly resolving. Άρα αν η αγορά είναι strongly resolving, τότε $F_1(X) = \mathbb{R}^m$, επομένως οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι. Όπως θα δείξουμε, με το Παράδειγμα 5.12, είναι δυνατόν μια αγορά να είναι strongly resolving ως προς την βάση $\{b_i\}$ και όχι strongly resolving. Επομένως ο Ορισμός 5.8 γενικεύει τον ορισμό των strongly resolving αγορών.

Θεώρημα 5.9. *Αν $n \geq 2$ και $F_1(X) \neq \mathbb{R}^m$, τότε η αγορά X δεν είναι strongly resolving αγορά.*

Απόδειξη. Επειδή $F_1(X) \neq \mathbb{R}^m$, έχουμε ότι $\mu < m$, άρα υπάρχει b_r, τέτοιο ώστε $card(supp(b_r)) \geq 2$. Έστω $i_1, i_2 \in supp(b_r)$. Για κάθε x_i, έχουμε $x_i = \sum_{j=1}^{\mu} x_i^b(j) b_j$, άρα $x_i(i_1) = x_i^b(r) b_r(i_1) = x_i^b(r)$, διότι $b_r(i_1) = 1$. Όμοια έχουμε ότι $x_i(i_2) = x_i^b(r)$, άρα για κάθε διάνυσμα x_i έχουμε $x_i(i_1) = x_i(i_2)$. Αυτό σημαίνει ότι η i_1 και i_2 γραμμές του $A(x_i, e_i)$ συμπίπτουν και το Θεώρημα είναι αληθές. $\square$

Για κάθε $x \in F_1(X)$, με $x = \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i b_i$, συμβολίζουμε με $supp_b(x) = \{i | \lambda_i \neq 0\}$ και $zeros_b(x) = \{i | \lambda_i = 0\}$, επίσης με $\#supp_b(x)$ και $\#zeros_b(x)$ τον πληθάριθμο των συνόλων $supp_b(x)$ και $zeros_b(x)$.

Θεώρημα 5.10. *Έστω ότι $\mathbf{1} \in X$. Αν η αγορά X είναι strongly resolving ως προς την βάση $\{b_i\}$ και $n \leq \frac{\mu+1}{2}$ τότε κάθε μη τετριμμένο δικαίωμα που εγγράφεται σε στοιχείο του X δεν αναπαράγεται από την αγορά.*

Απόδειξη. Έστω $x = \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i b_i \in X$ και $y = c(x, a) = \sum_{i=1}^{\mu} (\lambda_i - a)^+ b_i$ μη τετριμμένο δικαίωμα αγοράς. Τότε $y > 0$ και επίσης $z > 0$, όπου $z = p(x, a) = \sum_{i=1}^{\mu} (a - \lambda_i)^+ b_i$. Έστω

$$\#supp_b(y) = \beta, \#zeros_b(y) = \gamma, \#supp_b(z) = \beta', \#zeros_b(z) = \gamma'.$$

Θα δείξουμε ότι:

$$max\{\gamma, \gamma'\} \geq \frac{\mu}{2}.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι $i \in supp_b(y) \Rightarrow i \in zeros_b(z)$ και $i \in supp_b(z)$ $\Rightarrow i \in zeros_b(y)$, επομένως $\gamma' \geq \beta$ και $\gamma \geq \beta'$. Επίσης $\beta + \gamma = \beta' + \gamma' = \mu$. Αν $\beta \geq \gamma$ τότε $\beta \geq \frac{\mu}{2}$ άρα $\gamma' \geq \frac{\mu}{2}$. Αν $\gamma \geq \beta$ τότε $\gamma \geq \frac{\mu}{2}$ και ο ισχυρισμός είναι αληθής. Επειδή το ακίνδυνο ομόλογο ανήκει στον X, έχουμε ότι ταυτόχρονα τα y, z αναπαράγονται από την αγορά ή δεν αναπαράγονται. Έστω ότι $y, z \in X$. Τότε όπως θα αποδείξουμε, τουλάχιστον ένα, για παράδειγμα το y έχει αριθμό μηδενικών συντελεστών ως προς την βάση $\{b_i\}$ μεγαλύτερο ή ίσο του $\frac{\mu}{2}$, δηλαδή $\gamma \geq \frac{\mu}{2}$. Έστω $y = \sum_{i=1}^{n} \rho_i x_i$, τότε

$$\begin{bmatrix} (\lambda_1 - a)^+ \\ (\lambda_2 - a)^+ \\ . \\ . \\ . \\ (\lambda_\mu - a)^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^b(1) & x_2^b(1) & ... & x_n^b(1) \\ x_1^b(2) & x_2^b(2) & ... & x_n^b(2) \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ x_1^b(\mu) & x_2^b(\mu) & ... & x_n^b(\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ . \\ . \\ . \\ \rho_n \end{bmatrix}. \tag{5.2}$$

Από τις υποθέσεις μας $n \leq \frac{\mu+1}{2}$, έχουμε ότι $n \leq \frac{\mu}{2} + \frac{1}{2} \leq \gamma + \frac{1}{2}$, άρα $n \leq \gamma$. Επομένως τουλάχιστον n συντελεστές του y ως πρός την βάση $\{b_i\}$ είναι μηδενικοί και έστω $(\lambda_{i_1} - a)^+ = (\lambda_{i_2} - a)^+ = ... = (\lambda_{i_n} - a)^+ = 0$. Τότε:

$$\begin{bmatrix} x_1^b(i_1) & x_2^b(i_1) & ... & x_n^b(i_1) \\ x_1^b(i_2) & x_2^b(i_2) & ... & x_n^b(i_2) \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ x_1^b(i_n) & x_2^b(i_n) & ... & x_n^b(i_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ . \\ . \\ . \\ \rho_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{5.3}$$

όπου $(\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n) \neq (0, 0, ..., 0)$, διότι $y > 0$. Το οποίο είναι άτοπο διότι ο πίνακας του συστήματος (5.3), είναι αντιστρέψιμος. Άρα κανένα από τα y, z δεν ανήκουν στο X

□

Έστω $x \in X$ και $a_1, a_2, ..., a_k$ είναι οι ουσιώδες συντελεστές του x και $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_k$ είναι τα ουσιώδες σύνολα καταστάσεων του x. Για κάθε $r = 1, 2, ..., k$ συμβολίζουμε με $c_x(r) = card(\Phi_1 \cup ... \cup \Phi_r)$ και $p_x(r) = card(\Phi_{r+1} \cup ... \cup \Phi_k)$.

Πρόταση 5.11. *Έστω αγορά X, strongly resolving ως προς την βάση $\{b_i\}$, $x \in X$ και $a_1, a_2, ..., a_k$ είναι οι ουσιώδες συντελεστές του x, τότε*

(i) Αν $c_x(r) \geq n$, το διάστημα $[a_r, a_{r+1})$ δεν περιέχει call-replicated τιμή εξάσκησης για το x.

(i) Αν $p_x(r) \geq n$, το διάστημα $(a_r, a_{r+1}]$ δεν περιέχει put-replicated τιμή εξάσκησης για το x.

(iii) Αν $\mathbf{1} \in X$ και $\max\{c_x(r), p_x(r)\} \geq n$, το διάστημα $[a_r, a_{r+1}]$ δεν περιέχει replicated τιμή εξάσκησης για το x.

Απόδειξη. Έστω $c_x(r) \geq n$ και $a \in [a_r, a_{r+1})$ μια call-replicated τιμή εξάσκησης για το x. Τότε

$$y = c(x, a) = \sum_{j=r+1}^{k} (a_j - a)\bar{b}_j \in X,$$

όπου $\bar{b}_j = \sum_{i \in \Phi_j} b_i$ για κάθε $j = 1, 2, ..., k$.

Αναπτύσσουμε το y στην βάση $\{x_1, ..., x_n\}$ του X και έστω $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, επίσης υποθέτουμε ότι $x_i = \sum_{j=1}^{\mu} x_i^b(j) b_j$. Από τις υποθέσεις μας έχουμε ότι $\#zeros_b(y) = c_x(r) \geq n$, επομένως τουλάχιστον n συντελεστές ξ_i του y ως προς την βάση $\{b_i\}$ είναι μηδενικές και έστω ότι είναι οι $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, ..., \xi_{i_n}$. Αυτό μας οδηγεί στο σύστημα

$$\begin{bmatrix} x_1^b(i_1) & x_2^b(i_1) & ... & x_n^b(i_1) \\ x_1^b(i_2) & x_2^b(i_2) & ... & x_n^b(i_2) \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ x_1^b(i_n) & x_2^b(i_n) & ... & x_n^b(i_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ . \\ . \\ . \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Επειδή X είναι strongly resolving ως προς την βάση $\{b_i\}$, έχουμε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, άρα $y = c(x, a) = 0$ που είναι άτοπο. Η απόδειξη του (ii) είναι όμοια και το (iii) προκύπτει από τις (ii) και (i). $\square$

Παράδειγμα 5.12. *Έστω*

$$x_1 = (4, 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1),\ x_2 = (1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4),$$

και $X = [x_1, x_2]$, τότε $\mathbf{1} \in X$ διότι $x_1 + x_2 = 5\mathbf{1}$. Ο πίνακας αποδόσεων

$$A(x_i, e_i) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},$$

περιέχει 2×2, μη αντιστρέψιμους υποπίνακες, άρα η αγορά δεν είναι strongly resolving. Η θετική βάση $\{b_i\}$ του $F_1(X)$ είναι

$$b_1 = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), b_2 = (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0),$$

$$b_3 = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0), b_4 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1),$$

Επομένως ο πίνακας αποδόσεων ως προς την βάση $\{b_i\}$ είναι:

$$A(x_i, b_i) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε από τον παραπάνω πίνακα ότι η αγορά είναι strongly resolving ως προς την βάση $\{b_i\}$ και επίσης ότι $n = 2 \leq \frac{\mu+1}{2} = \frac{5}{2}$, επομένως από το Θεώρημα 5.9, έχουμε ότι κάθε μη τετριμμένο δικαίωμα που εγγράφεται σε στοιχείο του X δεν αναπαράγεται από την αγορά.

5.3 Μεγιστικές υποαγορές που αναπαράγουν κάθε δικαίωμα

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε την έννοια των replicated υποαγορών του X, δηλαδή των υποχώρων Y του X, όπου κάθε δικαίωμα που εγγράφεται στο Y αναπαράγεται από την αγορά X. Επομένως μέσα σε αυτούς τους υποχώρους το πρόβλημα της τιμολόγησης των δικαιωμάτων λύνεται με τον κλασσικό τρόπο, διότι κάθε δικαίωμα τιμολογείται από το χαρτοφυλάκιο που αναπαράγει το δικαίωμα. Χρησιμοποιόντας την θεωρία των lattice subspaces και των θετικών βάσεων θα προσδιορίσουμε το σύνολο των μεγιστικών replicated υποαγορών. Συγκεκριμένα για κάθε μεγιστική replicated υποαγορά, θα προσδιορίσουμε μια θετική βάση του χώρου. Επιπλέον θα δείξουμε, ότι η ένωση όλων των μεγιστικών replicated υποαγορών είναι το σύνολο όλων των αξιογράφων $x \in X$, τέτοια ώστε κάθε δικαίωμα που εγγράφεται στο x γίνεται replicated από την αγορά.

Στην ενότητα αυτή υποθέτουμε ότι $X = [x_1, ..., x_n]$, όπου $x_1, ..., x_n$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^m$ που αντιπροσωπεύουν τα n αρχικά αξιόγραφα και ότι $\mathbf{1} \in X$.

Λήμμα 5.13. *Αν $a = \max\{||x_i||_\infty \mid i = 1, 2..., n\}$, τότε τουλάχιστον ένα από τα παρακάτω σύνολα θετικών διανυσμάτων του X είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

$$\{y_i = a\mathbf{1} - x_i \mid i = 1, ..., m\} \;\; \textit{και} \; \{z_i = 2a\mathbf{1} - x_i \mid i = 1, ..., m\}.$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό του a, έχουμε $-a\mathbf{1} \leq x_i \leq a\mathbf{1}$. Επομένως τα y_i, z_i είναι θετικά διανύσματα του X για κάθε i. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι τα διανύσματα $w_i = \lambda\mathbf{1} - x_i, i = 1, ..., n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν $\lambda\mathbf{1}$ ανήκει στην αφινική θήκη των $\{x_1, ...x_n\}$. Επομένως, μια από τις οικογένειες αποτελείτε από γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. □

Από το παραπάνω λήμμα, έχουμε ότι σε αυτές τις αγορές μπορούμε πάντα να υποθέτουμε ότι τα αρχικά αξιόγραφα $x_1, ..., x_n$ είναι θετικά και ότι αποτελούν ένα βασικό σύνολο της αγοράς. Έστω Z ο sublattice που παράγεται από τον X , τότε $Z = F_1(X)$ με $dim(Z) = \mu, \beta$ η βασική συνάρτηση των διανυσμάτων x_i και $P_1, P_2, ..., P_n, P_{n+1}, ..., P_\mu$ απαρίθμηση του πεδίου τιμών της β, έτσι ώστε τα πρώτα n διανύσματα, $P_1, ..., P_n$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Ακολουθούμε το βήμα (ii) του Θεωρήματος 4.5 προσδιορίζουμε μια θετική βάση $\{d_1, d_2, ..., d_\mu\}$ του $F_1(X)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.6, αν

$$(\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, ..., \tilde{d}_n)^T = A^{-1}(x_1, x_2, ..., x_n)^T, \tag{5.4}$$

όπου A είναι $n \times n$ πίνακας όπου η i-στήλη είναι τα διανύσματα P_i, τότε $(\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, ..., \tilde{d}_n)$ είναι βάση του X, που ονομάζεται βάση προβολής του X, σύμφωνα με το [48]. Αυτή η βάση, έχει την ιδιότητα: Οι n πρώτοι συντελεστές κάθε $x \in X$ ως προς την βάση $\{d_1, d_2, ..., d_\mu\}$ ταυτίζονται με τους συντελεστές του x ως πρός την βάση προβολής, δηλαδή:

$$x = \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i d_i \in X \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{d}_i \tag{5.5}$$

Έστω ότι $\{u_i\}$ είναι θετική βάση του $F_1(X)$, με $u_i = \theta_i d_i$, όπου $\theta_i > 0$, για κάθε i. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι $\{\tilde{u}_i = \theta_i \tilde{d}_i\}$ είναι βάση του X με την ιδιότητα: Οι n πρώτοι συντελεστές κάθε $x \in X$ ως προς την βάση $\{u_1, u_2, ..., u_\mu\}$ ταυτίζονται με τους συντελεστές του x ως πρός την βάση $\{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, ..., \tilde{u}_n\}$. Πράγματι αν $x = \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i u_i \in X$, έχουμε:

$$x = \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i \theta_i d_i, \text{ άρα } x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \theta_i \tilde{d}_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{u}_i.$$

Επομένως, $\{\tilde{u}_i\}$ είναι μια βάση προβολής του X και θα την αποκαλούμε βάση προβολής του X ως πρός την βάση $\{u_i\}$. Από τα παραπάνω προκύπτει η ακόλουθη Πρόταση:

Πρόταση 5.14. *Έστω $\{d_i\}$ βάση του $F_1(X)$, που δίνεται από την σχέση (4.2) και $\{\tilde{d}_i\}$ βάση προβολής του X ως πρός την βάση $\{d_i\}$.*

Τότε $\{b_i = \frac{d_i}{||d_i||_\infty} \mid i = 1, 2, ..., \mu\}$ είναι θετική βάση του $F_1(X)$ που είναι διαμέριση της μονάδας και $\{\tilde{b}_i = \frac{\tilde{d}_i}{||d_i||_\infty} \mid i = 1, 2, ..., n\}$ είναι βάση προβολής του X ως πρός την βάση $\{b_i\}$ του $F_1(X)$.

Ορισμός 5.15. *Έστω Y υπόχωρος του X. Αν $F_1(Y) \subseteq X$, λέμε ότι η Y είναι αναπαραγόμενη(replicated) αγορά και αν επιπλέον για κάθε υπόχωρο*

Z του X, με $Y \subsetneq Z$, έχουμε $X \subsetneq F_1(Z)$, λέμε ότι ο Y είναι μεγιστικός replicated υπόχωρος ή μεγιστική replicated υποαγορά του X.

Πρόταση 5.16. *Ο υπόχωρος Y του X είναι μεγιστικός replicated υπόχωρος του X αν και μόνο αν ο Y είναι μεγιστικός sublattice του $\mathbb{R}^m$ που περιέχεται στο X με $\mathbf{1} \in Y$.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο Y είναι μεγιστικός replicated υπόχωρος του X. Τότε $Y \subseteq F_1(Y) \subseteq X$. Επίσης $Z = F_1(Y)$ είναι sublattice του $\mathbb{R}^m$ που περιέχεται στο X και $\mathbf{1} \in Y$. Αν πάρουμε την πλήρωση του Z, τότε $Z = F_1(Z)$, επομένως ο Z είναι replicated υπόχωρος του X. Επειδή Y είναι μεγιστικός replicated υπόχωρος του X, έχουμε ότι $Y = Z$, άρα ο Y είναι sublattice του $\mathbb{R}^m$ που περιέχεται στο X και $\mathbf{1} \in Y$. Επίσης ο Y είναι μεγιστικός sublattice, διότι για κάθε sublattice W του $\mathbb{R}^m$, με $\mathbf{1} \in W$ και $Y \subseteq W \subseteq X$, ο W είναι replicated , άρα $Y = W$.

Για το αντίστροφο υποθέτουμε ότι Y είναι μεγιστικός sublattice του $\mathbb{R}^m$ που περιέχεται στο X και $\mathbf{1} \in Y$. Αν υποθέσουμε ότι ο Y δεν είναι μεγιστικός replicated υπόχωρος του X, υπάρχει $Z \subseteq X$, με $Y \subsetneq Z$ και $F_1(Z) \subseteq X$. Τότε $F_1(Z)$ είναι sublattice, που περιέχει το $\mathbf{1}$, άτοπο. Επομένως Y είναι μεγιστικός replicated υπόχωρος του X. □

Ορισμός 5.17. *Έστω $\{b_i, i = 1, ..., \mu\}$ θετική βάση του $F_1(X)$, που είναι διαμέριση της μονάδας και έστω $\{\widetilde{b_i} | \; i = 1, ..., n\}$ η βάση προβολής του X ως προς την βάση $\{b_i, i = 1, ..., \mu\}$. Μια διαμέριση $\delta = \{\sigma_i | \; i = 1, ..., \kappa\}$ του $\{1, ..., n\}$, λέμε ότι είναι κατάλληλη αν για κάθε $r = 1, 2, ..., \kappa$, το διάνυσμα $w_r = \Sigma_{i \in \sigma_r} \widetilde{b_i}$ είναι δυαδικό, με $\Sigma_{r=1}^{\kappa} w_r = \mathbf{1}$. Αν επιπλέον δ είναι μεγιστικό ως προς την σχέση εγκλεισμού, δηλαδή δεν υπάρχει κατάλληλη διαμέριση ϕ του $\{1, ..., n\}$ αυστηρά λεπτότερη από την δ, λέμε ότι η δ είναι μεγιστική κατάλληλη διαμέριση του $\{1, ..., n\}$.*

Παρατήρηση 5.18. *Μια διαμέριση $\phi = \{\omega_i | \; i = 1, ..., \tau\}$ είναι λεπτότερη από την $\delta = \{\sigma_i | \; i = 1, ..., \kappa\}$, αν κάθε ω_i είναι υποσύνολο κάποιου σ_j. Για κάθε κατάλληλη διαμέριση τα διανύσματα w_r έχου ξένους φορείς, διότι είναι δυαδικά διανύσματα με $\Sigma_{r=1}^{\kappa} w_r = \mathbf{1}$.*

Πρόταση 5.19. *Για κάθε κατάλληλη διαμέριση δ του $\{1,...,n\}$ υπάρχει μεγιστική κατάλληλη διαμέριση λεπτότερη από την δ. Τουλάχιστον μια μεγιστική κατάλληλη διαμέριση του $\{1,2,...,n\}$ υπάρχει.*

Απόδειξη. Έστω $\{\sigma_i |\ i=1,...,\kappa\}$, κατάλληλη διαμέριση του $\{1,...,n\}$. Λέμε ότι το υποσύνολο σ του $\{1,...,n\}$ είναι άτομο, αν δεν υπάρχει μη κενό υποσύνολο $\omega \subsetneq \sigma$, τέτοιο ώστε $\sum_{i\in\omega}\widetilde{b_i}$ και $\sum_{i\in\sigma\setminus\omega}\widetilde{b_i}$ να είναι δυαδικά διανύσματα. Κάθε σ_i είναι πεπερασμένο σύνολο, επομένως μπορούμε να διασπάσουμε κάθε σ_i σε μέγιστα σύνολα ατόμων. Με αυτή την διαδικασία μπορούμε να βρούμε μεγιστική κατάλληλη διαμέριση του $\{1,...,n\}$ λεπτότερη από την δ. Τέλος, παρατηρούμε ότι ίδιο το σύνολο $\{1,...,n\}$ είναι κατάλληλη διαμέριση, διότι $\sum_{i=1}^{n}\widetilde{b_i}=1$, επομένως μια μεγιστική κατάλληλη διαμέριση του $\{1,2,...,n\}$ πάντα υπάρχει. $\square$

Θεώρημα 5.20. *Έστω $\delta=\{\sigma_i|i=1,...,k\}$ κατάλληλη διαμέριση του $\{1,...,n\}$ και $y_r=\sum_{i\in\sigma_r}\widetilde{b_i}$ για $r=1,...,k$. Τότε ο χώρος $Y=[w_1,...,w_k]$ είναι sublattice του $\mathbb{R}^m$ που περιέχεται στο X και $\{w_1,w_2,...,w_k\}$ είναι θετική βάση του Y που είναι διαμέριση της μονάδας. Ονομάζουμε τον Y sublattice του $\mathbb{R}^m$ που παράγεται από την δ και συμβολίζουμε τον Y με Y_δ. Για κάθε κατάλληλη διαμέριση φ του $\{1,...,n\}$ αυστηρά λεπτότερη από την δ, Y_δ είναι γνήσιως υπόχωρος του Y_φ.*

Απόδειξη. Έστω $\delta=\{\sigma_i|i=1,...,k\}$ κατάλληλη διαμέριση του $\{1,...,n\}$. Τότε $w_r=\sum_{i\in\sigma_r}\widetilde{b_i}$ είναι δυαδικό διάνυσμα για κάθε r. Τα w_r έχουν ξένους φορείς και αποτελούν διαμέριση της μονάδας. Άρα $Y_\delta=[w_1,...,w_k]$ είναι sublattice του $\mathbb{R}^m$ που περιέχεται στον X, με $\mathbf{1}\in Y_\delta$ και $\{w_1,w_2,...,w_k\}$ είναι θετική βάση του Y_δ που είναι διαμέριση της μονάδας. Αν υποθέσουμε ότι $\varphi=\{\omega_i|\ i=1,...,\tau\}$ είναι κατάλληλη διαμέριση του $\{1,...,n\}$ λεπτότερη από την δ έχουμε: Κάθε σ_r διασπάται σε πεπερασμένο αριθμό ατόμων $\omega_{r_1},\omega_{r_2},...,\omega_{r_\nu}$, επομένως $w_r=v_{r_1}+v_{r_2}+...+v_{r_\nu}$ όπου $v_{r_j}=\sum_{i\in\omega_{r_j}}\widetilde{b_i}$. Αν Y_φ είναι ο sublattice που παράγεται από τα $v_j=\sum_{i\in\omega_j}\widetilde{b_i}$, $j=1,2,...,\tau$ έχουμε $w_j\in Y_\varphi$ για κάθε $j=1,2,...,k$, άρα $Y_\delta\subseteq Y_\varphi$. Επειδή φ είναι λεπτότερη από την δ, τουλάχιστον ένα y_r διασπάται σε περισσότερα από ένα διάνυσμα v_j, επομένως Y_δ είναι γνήσιως υπόχωρος του Y_φ. $\square$

Θεώρημα 5.21. *Έστω $\{b_i, i = 1, ..., \mu\}$ θετική βάση του $F_{\mathbf{1}}(X)$, που είναι διαμέριση της μονάδας και έστω $\{\widetilde{b_i}|\ i = 1, ..., n\}$ η βάση προβολής του X ως προς την βάση $\{b_i\}$.*

Αν Y είναι sublattice του $\mathbb{R}^m$ που περιέχεται στον X με $\mathbf{1} \in Y$ και $\{w_1, w_2, ..., w_k\}$ είναι θετική βάση του Y, που είναι διαμέριση της μονάδας, τότε μια κατάλληλη διαμέριση $\delta_Y = \{\sigma_i|\ i = 1, ..., \kappa\}$ του $\{1, ..., n\}$ υπάρχει ώστε $w_r = \sum_{i\in\sigma_r} \widetilde{b_i}$ για κάθε r, άρα ο Y είναι ο sublattice που παράγεται από την διαμέριση δ_Y. Αυτή η διαμέριση δ_Y είναι μοναδική.

Για κάθε sublattice Z του $\mathbb{R}^m$ που περιέχεται στον X με $Y \subsetneqq Z$ η διαμέριση δ_Z είναι αυστηρά λεπτότερη από την δ_Y.

Απόδειξη. Η θετική βάση $\{w_1, w_2, ..., w_k\}$ του Y είναι διαμέριση της μονάδας, άρα $supp(w_i) \cap supp(w_j) = \emptyset$ για κάθε $i \neq j$ και $\sum_{r=1}^{k} w_r = \mathbf{1}$. Επίσης τα διανύσματα w_r είναι δυαδικά. Έστω $w_r = \sum_{i\in\Phi_r} b_i$ όπου $\Phi_r \subseteq \{1, 2, ..., \mu\}$, είναι η ανάπτυξη του w_r ως προς την βάση $\{b_i\}$. Επειδή $\{\widetilde{b_i}\}$ είναι βάση προβολής του X ως προς την βάση $\{b_i\}$, έχουμε $w_r = \sum_{i\in\sigma_r} \widetilde{b_i}$, όπου $\sigma_r = \Phi_r \cap \{1, 2, ..., n\}$. Κάθε w_r ως διάνυσμα της θετικής βάσης του Y είναι μη μηδενικό, επομένως $\sigma_r \neq \emptyset$ για κάθε $r = 1, 2, ..., k$. Επίσης κάθε w_r είναι δυαδικό διάνυσμα, άρα $\delta = \{\sigma_r | r = 1, 2, ..., k\}$ είναι κατάλληλη διαμέριση του $\{1, 2, ..., n\}$. Από το προηγούμενο Θεώρημα, Y είναι ο sublattice που παράγεται από την διαμέριση δ. Επίσης η διαμέριση δ είναι μοναδική, διότι η έκφραση $w_r = \sum_{i\in\Phi_r} \widetilde{b_i}$ είναι μοναδική και συμβολίζουμε αυτή την διαμέριση με δ_Y.

Έστω Z sublattice του $\mathbb{R}^m$ τέτοιος ώστε $Y \subsetneq Z \subseteq X$. Θα δείξουμε ότι δ_Z είναι αυστηρά λεπτότερη από την δ_Y. Έστω $\{z_1, ..., z_\lambda\}$ θετική βάση του Z που είναι διαμέριση της μονάδας. Υποθέτουμε ότι $\delta_Z = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\lambda\}$. Τότε $z_r = \sum_{i\in\omega_r} \widetilde{b_i}$ για κάθε $r = 1, 2, ..., \lambda$. Επειδή $Y \subsetneq Z$, έχουμε ότι $\lambda > k$ και ότι κάθε w_r μπορεί να αναπτυχθεί ως προς την βάση $\{z_i\}$ του Z. Έστω ότι $w_r = \sum_{i\in\Psi_r} z_i$ όπου $\Psi_r \subseteq \{1, ..., \lambda\}$, είναι η ανάπτυξη του w_r ως προς την βάση $\{z_i\}$. Τότε $\{\Psi_r | r = 1, ..., k\}$ είναι διαμέριση του $\{1, ..., \lambda\}$. Άρα έχουμε:

$$w_r = \sum_{i\in\Psi_r} z_i = \sum_{i\in\Psi_r} \big(\sum_{j\in\omega_i} \widetilde{b_j} \big),$$

επομένως $\sigma_r = \cup_{i\in\Psi_r} \omega_i$. Άρα, κάθε ω_i περιέχεται σε κάποιο σ_r. Επιπλέον αυτός ο εγκλεισμός είναι γνήσιος για τουλάχιστον ένα i, δίοτι ο Y είναι γνήσιος υπόχωρος του Z, άρα η δ_Z είναι αυστηρά λεπτότερη από την δ_Y.

□

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω Θεωρήματα, έχουμε ότι:

Θεώρημα 5.22. *Έστω $\{b_i, i = 1, ..., \mu\}$ θετική βάση του $F_{\mathbf{1}}(X)$ που είναι διαμέριση της μονάδας και $\{\widetilde{b_i}, i = 1, ..., n\}$ η βάση προβολής του X ως προς την βάση $\{b_i\}$. Αν Y είναι υπόχωρος του X. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Y είναι μεγιστικός replicated υπόχωρος του X,

(ii) υπάρχει μεγιστική κατάλληλη διαμέριση $\delta = \{\sigma_i | \ i = 1, ..., \kappa\}$ του$\{1, ..., n\}$ τέτοια ώστε $Y = Y_\delta$.

Το σύνολο των replicated υπόχωρων του X είναι μη κενό.

Ορισμός 5.23. *Η ένωση όλων των μεγιστικών replicated υποαγορών της αγοράς, ονομάζεται replicated kernel της αγοράς.*

Πρόταση 5.24. *Το replicated kernel της αγοράς είναι το σύνολο όλων των $x \in X$ με την ιδιότητα ότι κάθε δικαίωμα που εγγράφεται στο x γίνεται replicated από την αγορά.*

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με $\mathcal{R}$ το σύνολο όλων των $x \in X$ με την ιδιότητα ότι κάθε δικαίωμα που εγγράφεται στο x γίνεται replicated από την αγορά και με $\mathcal{F}$, την οικογένεια των μεγιστικών replicated υποαγορών της X. Έστω $y \in Y$ και $Y \in \mathcal{F}$. Τότε Y είναι sublattice που περιέχεται στο X με $\mathbf{1} \in Y$. Αν $[y]$ είναι ο υπόχωρος που παράγεται από το y, τότε η πλήρωση της αγοράς $[y]$ με δικαιώματα είναι ο sublattice που παράγεται από το $[y] \cup \mathbf{1}$, άρα περιέχεται στο Y και $F_{\mathbf{1}}([y]) \subseteq Y \subseteq X$. Επομένως κάθε δικαίωμα που εγγράφεται στο y αναπαράγεται από την αγορά , άρα $\cup_{Y \in \mathcal{F}} Y \subseteq \mathcal{R}$.

Για το αντίστροφο υποθέτουμε ότι $y \in \mathcal{R}$. Τότε $Y = F_{\mathbf{1}}([y])$ είναι sublattice του $\mathbb{R}^m$ που περιέχεται στο X, με $\mathbf{1} \in Y$. Από το Θεώρημα 5.21 ο Y παράγεται από μια κατάλληλη διαμέριση δ_Y του $\{1, ..., n\}$ και από την Πρόταση 5.19,η δ_Y περιέχεται σε μια μεγιστική κατάλληλη διαμέριση δ του $\{1, ..., n\}$. Άρα ο Y περιέχεται σε μια μεγιστική replicated υποαγορά Y_δ του X. Άρα $y \in \mathcal{F}$ και το Θεώρημα ισχύει. □

Είναι φανερό ότι ο μονοδιάστατος υπόχωρος $[\mathbf{1}]$ είναι replicated sublattice που περιέχεται σε κάθε replicated υποαγορά Y του X. Επίσης κάθε δικαίωμα που εγγράφεται στα στοιχεία του $[\mathbf{1}]$ είναι τετριμμένα, γιάυτό θα καλούμε την $[\mathbf{1}]$ ως την τετριμμένη replicated υποαγορά του X. Ακολούθως θα δώσουμε έναν χαρακτηρισμό των αγορών χωρίς δυαδικά διανύσματα σε σχέση με τους replicated subspaces που περιέχουν.

Θεώρημα 5.25. *Η αγορά X δεν έχει δυαδικά διανύσματα αν και μόνο αν η X δεν έχει μη τετριμμένη μεγιστική replicated υποαγορά.*

Απόδειξη. Έστω ότι X δεν έχει δυαδικά διανύσματα. Αν Y είναι μη τετριμμένη μεγιστική replicated υποαγορά της X, τότε Y είναι sublattice του $\mathbb{R}^m$ που περιέχει το $[\mathbf{1}]$ ως γνήσιο υπόχωρο. Αν $\{z_1, z_2, ..., z_r\}$ είναι θετική βάση του Y που είναι διαμέριση της μονάδας, τότε $r \geq 2$, άρα κάθε z_i είναι δυαδικό διάνυσμα. Αυτό είναι άτοπο, άρα η X δεν έχει μη τετριμμένη μεγιστική replicated υποαγορά.

Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι ο X δεν έχει μη τετριμμένη μεγιστική replicated υποαγορά. Αν υποθέσουμε ότι $y \in X$ είναι δυαδικό διάνυσμα, τότε $z = \mathbf{1} - y$, είναι επίσης δυαδικό διάνυσμα και είναι εύκολο να δούμε ότι $Y = [y, z] \subseteq X$ είναι sublattice που περίεχει το $\mathbf{1}$. Από το Θεώρημα 5.21, Y παράγεται από μια κατάλληλη διαμέριση δ_Y του $\{1, ..., n\}$. Από την Πρόταση 5.19, υπάρχει μεγιστική κατάλληλη διαμέριση δ λεπτότερη από την δ_Y. Από το Θεώρημα 5.22, υπάρχει μεγιστική replicated υποαγορά Z, που περιέχει την Y. Επειδή $Y \neq [\mathbf{1}]$ η Z είναι μη τετριμμένη, άτοπο. □

Στο επόμενο παράδειγμα υπολογίζουμε την οικογένεια των μεγιστικών replicated υποαγορών και το replicated kernel της αγοράς, ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

(1) Προσδιορίζουμε ένα βασικό σύνολο της αγοράς $\{y_1, ..., y_n\}$ και έπειτα υπολογίζουμε μια θετική βάση $\{d_1, ..., d_\mu\}$ του $F_1(X)$ σύμφωνα με το Θεώρημα 4.5.

(2) Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.6, προσδιορίζουμε την βάση προβολής $\{\widetilde{d}_1, ..., \widetilde{d}_n\}$ του X.

(3) Προσδιορίζουμε την θετική βάση $\{b_1, ..., b_\mu\}$ του $F_{\mathbf{1}}(X)$ που είναι διαμέριση της μονάδας και την αντίστοιχη βάση προβολής $\{\widetilde{b}_1, ..., \widetilde{b}_n\}$ του X. Ειδικότερα, έχουμε: $b_i = \frac{d_i}{\rho_i}$ όπου $\rho_i = ||d_i||_\infty$ και $\widetilde{b}_i = \frac{\widetilde{d}_i}{\rho_i}$ για κάθε i.

(4) Προσδιορίζουμε τις μεγιστικές κατάλληλες διαμερίσεις του $\{1, ..., n\}$ και για κάθε τέτοια διαμέριση υπολογίζουμε την maximal replicated υποαγορά σύμφωνα με το Θεώρημα 5.22. Η ένωση όλων των maximal replicated υποαγορών είναι το replicated kernel της αγοράς.

Ο παραπάνω αλγόριθμος έχει υλοποιηθεί στην γλώσσα Matlab στο [28].

Παράδειγμα 5.26. *Έστω η αγορά* $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]$*, όπου*

$$x_1 = (1, 1, 1, 1, 2, 1), x_2 = (2, 3, 1, 1, 1, 1),$$
$$x_3 = (2, 2, 2, 1, 3, 1), x_4 = (1, 1, 1, 2, 0, 2).$$

Παρατηρούμε ότι $\mathbf{1} = \frac{x_3+x_4}{3} \in X$. *Το σύνολο* $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ *είναι βασικό σύνολο της* X. *Η βασική συνάρτηση* β *των* $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ *είναι:*

$$\beta(1) = \frac{1}{6}(1, 2, 2, 1) = P_1, \beta(2) = \frac{1}{7}(1, 3, 2, 1) = P_2, \beta(3) = \frac{1}{5}(1, 1, 2, 1) = P_3$$

$$\beta(4) = \beta(6) = \frac{1}{5}(1, 1, 1, 2) = P_4, \beta(5) = \frac{1}{6}(2, 1, 3, 0) = P_5.$$

Παρατηρούμε ότι $card(R(\beta)) = 5$*, άρα* $dim(F_{\mathbf{1}}(X)) = 5$. *Τα διανύσματα* P_5, P_2, P_3, P_4 *είναι γραμμικά ανεξάρτητα, άρα με απαριθμούμε το* $(R(\beta))$ *και έχουμε:* $R(\beta) = \{P_5, P_2, P_3, P_4, P_1\}$. *Τότε* $I_5 = \beta^{-1}(P_1) = \{1\}$ *και ορίζουμε το νέο διάνυσμα*$x_5 = (6, 0, 0, 0, 0, 0)$. *Η βασική συνάρτηση* γ *των* $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ *είναι:*

$$\gamma(1) = \frac{1}{12}(1, 2, 2, 1, 6) = P_1', \gamma(2) = \frac{1}{7}(1, 3, 2, 1, 0) = P_2',$$

$$\gamma(3) = \frac{1}{5}(1, 1, 2, 1, 0) = P_3'$$

$$\gamma(4) = \gamma(6) = \frac{1}{5}(1,1,1,2,0) = P_4', \gamma(5) = \frac{1}{6}(2,1,3,0,0) = P_5'.$$

Μια θετική βάση του $F_{\mathbf{1}}(X)$ υπολογίζεται από την σχέση $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5)^T = D^{-1}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$ όπου D είναι πίνακας με στήλες $P_5', P_2', P_3', P_4', P_1'$ και βρίσκουμε:

$$d_1 = (0,0,0,0,6,0), d_2 = (0,7,0,0,0,0), d_3 = (0,0,5,0,0,0)$$

$$d_4 = (0,0,0,5,0,5), d_5 = (12,0,0,0,0,0).$$

Η βάση προβολής του X , δίνεται από τον τύπο: $(\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \tilde{d}_3, \tilde{d}_4)^T = A^{-1}(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, όπου ο A έχει στήλες τα διανύσματα P_5, P_2, P_3, P_4 και βρίσκουμε:

$$\tilde{d}_1 = (0,0,0,0,6,0), \tilde{d}_2 = (3.5,7,0,0,0,0), \tilde{d}_3 = (2.5,0,5,0,0,0)$$

$$\tilde{d}_4 = (0,0,0,5,0,5).$$

Τότε η θετική βάση του $F_1(X)$ και η αντίστοιχη βάση προβολής είναι:

$$b_1 = \frac{1}{6}d_1 = (0,0,0,0,1,0), b_2 = \frac{1}{7}d_2 = (0,1,0,0,0,0),$$

$$b_3 = \frac{1}{5}d_3 = (0,0,1,0,0,0)$$

$$b_4 = \frac{1}{5}d_4 = (0,0,0,1,0,1), b_5 = \frac{1}{12}d_5 = (1,0,0,0,0,0).$$

και

$$\tilde{b}_1 = \frac{1}{6}\tilde{d}_1 = (0,0,0,0,1,0), \tilde{b}_2 = \frac{1}{7}\tilde{d}_2 = (0.5,1,0,0,0,0),$$

$$\tilde{b}_3 = \frac{1}{5}\tilde{d}_3 = (0.5, 0, 1, 0, 0, 0), \tilde{b}_4 = \frac{1}{5}\tilde{d}_4 = (0, 0, 0, 1, 0, 1).$$

Παρατηρούμε ότι $r_1 = \tilde{b}_1 = (0, 0, 0, 0, 1, 0)$ *και* $r_2 = \tilde{b}_2 + \tilde{b}_3 = (1, 1, 1, 0, 0, 0), r_3 = \tilde{b}_4 = (0, 0, 0, 1, 0, 1).$, *άρα* $\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}$ *είναι μεγιστική κατάλληλη διαμέριση του* $\{1, 2, 3, 4\}$.
Άρα ο $Y_1 = [(0, 0, 0, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0, 1)]$ *είναι ο μοναδικός μεγιστικός replicated υπόχωρος του* X.

Ευρετήριο

Βιβλιογραφία

[1] Ξανθός Φ. Κωνικοί χαρακτηρισμοί ανακλαστικών χώρων Banach. *Μεταπτυχιακή Εργασία*, Επιβλέπων: Ι.Α. Πολυράκης, 2009.

[2] Πανάγου Γ. Ασθενώς συμπαγής τελεστές και χώροι Grothendieck. *Διπλωματική Εργασία*, Επιβλέπων: Ι.Α. Πολυράκης, 2010.

[3] Πολυράκης Ι.Α. Θέματα Ανάλυσης και Θεωρία Γενικής Ισορροπίας στην Οικονομία. *Αθήνα*, 2010.

[4] Abramovich, Y.A. and A.W Wickstead. The regularity of order bounded operators in C(K) II. *Quart. J. Math. Oxford*, 44:257–270, 1993.

[5] Alfsen, E.M. *Compact Convex Sets and Boundary IntegralsSequence and series in Banach spaces.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1971.

[6] Aliprantis, C.D. and K.C. Border. *Infinite dimensional analysis.* Springer, 3rd Edition, 2007.

[7] Aliprantis, C.D. and O. Burkinshaw. *Positive Operators.* Springer-Verlag, 1985.

[8] Aliprantis, C.D. and R. Tourky. Markets That Don't Replicate Any Option. *Econ.Lett.*, 76:443–447, 1964.

[9] Aliprantis, C.D. and R. Tourky. *Cones and duality.* Amer.Math.Soc., 2007.

[10] Arditti, F.D. and K.John. Spanning the state space with options. *J. Financ. Quant. Anal*, 15:1–9, 1980.

[11] Baptista, A. M. Options and efficiency in multidate security markets. *Math. Fin.*, 15:569–587, 2005.

[12] Baptista, A. M. On the Non-Existence of Redundant Options. *Econ. Theory.*, 31:205–212, 2007.

[13] Bessage, C. and A. Pelczynski. On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces. *Studia Mathematica*, 17:151–164, 1958.

[14] Brown, D. J. and S.A. Ross. Spanning, valuation and options. *Econ. Theory.*, 1:3–12, 1991.

[15] Burkinshaw, O. Weak Compactness in the Order Dual of a Vector Lattice. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 187:183 –201, 1974.

[16] Casini, E. and E. Miglierina. Cones with bounded and unbounded bases and reflexivity. *Nonlinear Anal.*, 72:2356–2366, 2010.

[17] Delabriere, S.G. *Classical sequences in Banach spaces.* Pure and Applied Mathematics, 1992.

[18] Dodds, P. G. Sequential Convergence in the Order Dual of certain classes of Riesz spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 203:391–403, 1975.

[19] Fetter, H. and B. Gamboa de Buen. *The James Forest.* Cambridge University Press, 1997.

[20] Galvani, V. Options and spanning with exogenous information structure. *J. Math. Econ.*, 45:73–79, 2009.

[21] Green, R.C. and R. A. Jarrow. Spanning and Completeness in Markets with Contingent Claims. *J. Econ. Theory*, 41:202–210, 1987.

[22] Grothendieck, A. Sur les applications lineaires faiblement compactes d'espaces du type C(K). *Canada. J. Math.*, 5:129–173, 1953.

[23] James, R.C. Bases and reflexivity of Banach spaces. *Ann. of Math.*, 52:518– 527, 1950.

[24] Jameson, G. *Ordered linear spaces.* Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[25] John, K. Efficient Funds in Financial Markets with Options: A New Irrelevance Proposition. *J. Finance*, 35:685–695, 1981.

[26] Johnson, W.B. and H.P. Rosenthal. On w^*-basic sequence and their applications to the study of Banach spaces. *Studia Mathematica*, 43:77–92, 1972.

[27] Kadec, V.M. Characterization of reflexive Banach spaces in terms of strongly exposed points of unbounded sets. *Russian Math. Surveys*, 42(3):219–220, 1987.

[28] Katsikis, V. Computational methods for option replication. *International Journal of Computer Mathematics*, 88:2752–2769, 2011.

[29] Katsikis, V., I.A. Polyrakis. Positive Bases in Ordered Banach Spaces with the Riesz Decomposition Property. *Studia. Math.*, 174:233–253, 2006.

[30] Katsikis, V., I.A. Polyrakis. Computation of vector sublattices and minimal lattice subspaces of $\mathbb{R}^k$, Applications in Finance. *Appl. Math. Comp.*, 218:6860–6873, 2012.

[31] Kountzakis, C., and I.A. Polyrakis. The Completion of Security Markets. *Decisions Econ. Finance*, 29:1–21, 1981.

[32] Kountzakis, C., I.A. Polyrakis. Geometry of cones and an application in the theory of Pareto efficinet points. *J.Math.Anal.Appl*, 320:340–351, 2006.

[33] Kountzakis C., I.A. Polyrakis, F. Xanthos. Non replication of options. *Mathematical Finance*, DOI:10.1111/j.1467–9965.2010.00467.x.

[34] Lacey, H. E. *The Isometric Theory of Classical Banach Spaces.* Springer-Verlag, 1974.

[35] Lotz, H. P. Weak* Convergence in the Dual of Weak L^p. *Israel Journal of Mathematics*, 176:209–220, 2010.

[36] Megginson, R. E. *An introduction to Banach space theory.* Springer-Verlag, New York, 1998.

[37] Meyer-Nieberg, P. *Banach Lattices.* Springer, 2nd Edition, 1999.

[38] Milman, D.P. and V.D. Milman. Some properties of non-reflexive Banach spaces. *Math. Sb.*, 65:486–497, 1964.

[39] Pelczynski, A. A note on the paper of I. Singer: "Basic sequences and reflexivity of Banach spaces" . *Studia Mathematica*, 21:371–374, 1962.

[40] Polyrakis, I.A. Extreme points of unbounded, closed and convex sets in Banach spaces. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc*, 95:319–323, 1984.

[41] Polyrakis, I.A. Strongly exposed points and a characterization of $\ell_1(\Gamma)$ by the Schur property. *Proc. Edinb. Math. Soc*, 95:397–400, 1984.

[42] Polyrakis, I.A. Schauder bases in locally solid lattice Banach spacesy. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 101:91–105, 1987.

[43] Polyrakis, I.A. Cones locally isomorphic to the positive cone of $\ell_1(\Gamma)$. *Linear Algebra and its applications*, 84:323–334, 1988.

[44] Polyrakis, I.A. Lattice-subspaces of $C[0,1]$ and positive bases. *J. Math. Anal. Appl.*, 184:1–18, 1994.

[45] Polyrakis, I.A. Finite-Dimensional Lattice-Subspaces of $C(\Omega)$ and Curves of $\mathbb{R}^n$. *Trans. Am. Math. Soc.*, 348:2793–2810, 1996.

[46] Polyrakis, I.A. Minimal Lattice-Subspaces. *Trans. Am. Math. Soc.*, 351:4183–4203, 1999.

[47] Polyrakis, I.A. Bases for cones and reflexivity. *Quaestiones Mathematicae*, 24:165–173, 2001.

[48] Polyrakis, I.A. Linear optimization in $C(\Omega)$ and portofolio insurance. *Optimization*, 52:221–239, 2003.

[49] Polyrakis, I.A. Demand functions and reflexivity. *J. Math. Anal. Appl.*, 338:695–704, 2008.

[50] Polyrakis I.A. and F. Xanthos. Grothendieck ordered Banach spaces with an interpolation property. *Proc.Am.Math.Soc, Article in Press.*

[51] Polyrakis I.A. and F. Xanthos. Cone characterization of Grothendieck spaces and Banach spaces containing c_0. *Positivity*, 15:677–693, 2011.

[52] Polyrakis I.A. and F. Xanthos. Maximal submarkets that replicate any option. *Annals of Finance*, 7:407–423, 2011.

[53] Qiu, J.H. A cone characterization of reflexive Banach spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 256:39–44, 2001.

[54] Rosenthal, H.P. A characterization of Banach spaces containing ℓ_1. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 71:2411–2413, 1974.

[55] Rosenthal, H.P. A characterization of Banach spaces containing c_0. *J. Am. Math. Soc.*, 7:707–748, 1994.

[56] Ross S.A. Options and Efficiency. *Quart. J. Econ.*, 90:75–89, 1976.

[57] Seever, G. L. Measures on F-spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 133, 1968.

[58] Singer, I. Basic sequence and reflexivity of Banach spaces. *Studia Mathematica*, 21:351–369, 1962.

[59] Singer, I. *Bases in Banach spaces I.* Springer-Verlag, Heidelberg, 1970.

[60] Wickstead, A.W. Spaces of operators with the Riesz seperation property. *Indag. Mathem*, 6:235–245, 1995.