Ε Θ Ν Ι Κ Ο   Μ Ε Τ Σ Ο Β Ι Ο   Π Ο Λ Υ Τ Ε Χ Ν Ε Ι Ο
*ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ*
ΤΟΜΕΑΣ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΔΙΚΑΙΟΥ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΑΡΜΑΟΣ

# ΔΙΚΑΙΟΛΟΓΗΣΗ ΣΥΝΟΛΟΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΑΞΙΩΜΑΤΩΝ

## ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

*ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ*

*ΚΑΤΑΤΕΘΕΙΜΕΝΗ ΣΤΗΝ ΕΔΡΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ*
*ΤΟΥ ΤΟΜΕΑ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΔΙΚΑΙΟΥ*

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΑΡΙΣΤΕΙΔΗΣ ΑΡΑΓΕΩΡΓΗΣ

ΑΘΗΝΑ 2012

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ, όπως δημιουργήθηκε από τον Cantor με μια σειρά εργασιών του από το 1872 μέχρι και το 1897,[1] ήταν η θεωρία που μελετούσε το (ενεργεία) πραγματικό άπειρο. Είναι γνωστές οι αντιδράσεις που αντιμετώπισε από μαθηματικούς που πρέσβευαν την παραδοσιακή κατασκευαστική αντίληψη για τα μαθηματικά, όπως ο πρώην δάσκαλός του Kronecker. Η στάση αυτή είναι δικαιολογημένη, αν αναλογιστεί κανείς τη μαθηματική πρακτική, όπως είχε διαμορφωθεί μέχρι τότε. Μέσα σε δύο αιώνες είχαν συμβεί τεράστιες αλλαγές. Μέχρι τα τέλη του 17ου αιώνα, τα μαθηματικά βρίσκονταν σε ένα εμβρυϊκό στάδιο κατά το οποίο η δικαιολόγηση των προτάσεων δεν στηριζόταν αναγκαστικά σε αυστηρές αποδείξεις· τα επιχειρήματα για την ισχύ προτάσεων αφορούσαν στην πλειονότητα των περιπτώσεων και όχι σε απόλυτες αλήθειες, ενώ υπήρχαν άλλοι («ηθικής»/συντηρητικής φύσεως) περιορισμοί στη διατύπωση αποδείξεων –λόγου χάριν, μέχρι τις αρχές του 17ου αιώνα, μια απόδειξη σπάνια θεωρούνταν έγκυρη εάν δεν είχε και γεωμετρική δικαιολόγηση– οι οποίοι δυσχέραιναν ή και αποπροσανατόλιζαν το έργο των μαθηματικών. Μετά τη δημιουργία του απειροστικού λογισμού από τους Newton και Leibniz, όμως, η μαθηματική επιστήμη μεγαλούργησε. Κλάδοι όπως η ανάλυση, η άλγεβρα, η θεωρία αριθμών και οι διάφορες γεωμετρίες άρχισαν να μελετώνται διεξοδικά και μέχρι τα τέλη του 18ου αιώνα είχαν αρχίσει να συστηματοποιούνται.[2]

Στις αρχές του 19ου αιώνα, ο Gauss, η μεγαλύτερη τότε μορφή των μαθηματικών ήταν ξεκάθαρα ενάντια στο πραγματικό άπειρο. Η στάση του αυτή έπαιξε σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση των απόψεων του μαθηματικού κόσμου. Την ίδια εποχή, όμως, που ο Gauss διατύπωνε αυτή την άποψη, εμφανίστηκαν οι μη ευκλείδειες γεωμετρίες, οι οποίες κλόνισαν την πίστη των μαθηματικών στην απόλυτη (a priori, όπως πίστευαν) αλήθεια της ευκλείδειας γεωμετρίας. Ξαφνικά, έπρεπε να αναζητηθεί κάποιο άλλο θεμέλιο για να στηρίξουν την πίστη τους, και γι' αυτό στράφηκαν στη θεμελίωση αριθμών, η οποία, ωστόσο, σε αντίθεση με την ευκλείδεια γεωμετρία, δεν ήταν εντελώς ανεπτυγμένη. Ως εκ τούτου, με τους Weierstraß, Dedekind, Peano, Frege και άλ-

[1] «Επί της Επέκτασης ενός Θεωρήματος της Θεωρίας των Τριγωνομετρικών Σειρών» («Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen», 1872), «Επί μιας Χαρακτηριστικής Ιδιότητος της Συλλογής Όλων των Πραγματικών Αλγεβρικών Αριθμών» («Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen», 1874), «Μια Συμβολή στη Θεωρία των Πολλαπλοτήτων» («Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre», 1878), «Περί Άπειρων Γραμμικών Πολλαπλοτήτων/Συνόλων Σημείων» («Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten», μέρη 1-6, 1879-1884), «Συμβολή στη Θεμελίωση της Υπερπεπερασμένης Θεωρίας των Συνόλων» («Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre», μέρη 1-2, 1895-1897).

[2] Ο Leonhard Euler, συγκεκριμένα, συνέγραψε τα θεμελιώδη για αυτούς τους κλάδους εγχειρίδια *Εισαγωγή στην Απειροστική Ανάλυση* (*Introductio in Analysin Infinitorum*, 1748), *Αρχές Διαφορικού Λογισμού* (*Institutiones Calculi Differentialis*, 1755) και *Αρχές Ολοκληρωτικού Λογισμού* (*Institutiones Calculi Integralis*, 3 ττ., 1768-1774). Ουσιαστικά, με αυτά τα βιβλία τέθηκε η βάση από την οποία ξεκινάνε τα σύγχρονα μαθηματικά.

λους αρχίζει η καινούργια εποχή θεμελίωσης των αριθμών. Μέσα από αυτές τις προσπάθειες, έγινε σαφές πως ήταν απαραίτητη η χρήση άπειρων οντοτήτων όπως οι απειροσειρές. Έτσι, γύρω στο 1870, επανέρχεται το ζήτημα του πραγματικού απείρου. Όταν ο Cantor εισάγει τους υπερπεπερασμένους αριθμούς, οι μαθηματικοί χωρίζονται σε δύο στρατόπεδα, ανάλογα με το αν τους αποδέχονταν ή τους απέρριπταν. Στο Κεφάλαιο 1 διατρέχουμε την ιστορική πορεία των μαθηματικών από την αρχαιότητα μέχρι το 1870, οπότε και αναδύεται η θεωρία συνόλων, με βασικό άξονα την έννοια του «απείρου» και τις απόψεις οι οποίες εμφανίστηκαν σχετικά με αυτό.

Οι μη ευκλείδειες γεωμετρίες, όπως είπαμε, δημιούργησαν μια κρίση πίστης στην ευκλείδεια γεωμετρία και στα αξιώματά της. Συγκεκριμένα, η αντίληψη που υπήρχε μέχρι τότε ήταν πως ένα αξίωμα αποτελεί αρχή η οποία προφανώς ισχύει. Η άρνηση του 5ου αιτήματος του Ευκλείδη δημιούργησε ένα νέο είδος γεωμετρίας, μη εποπτικής, η οποία, όμως, δεν περιείχε κάποια αντίφαση και ερμήνευε και κάποια πράγματα σχετικά με τον φυσικό κόσμο. Αυτόματα, αυτό σήμαινε πως ένα αξίωμα δεν είναι μια αναλυτική, απόλυτη αλήθεια – είναι μάλλον μια αυθαίρετη, υποθετική, αφετηρία για τους συλλογισμούς μας, η οποία κρίνεται με βάση την επιτυχία της. Η πρώτη αξιωματική θεωρία εμφανίζεται με το έργο του Peano πάνω στη θεμελίωση της αριθμητικής,[3] ενώ στη συνέχεια ακολούθησαν και άλλοι, όπως ο Hilbert, με την αξιωματικοποίηση της γεωμετρίας.[4] Η «αξιωματική κίνηση», πάντως, ακόμα και τότε, δεν ήταν ο κύριος δρόμος της μαθηματικής πρακτικής. Οι Dedekind και Frege είχαν προσπαθήσει να θεμελιώσουν την αριθμητική σε λογικά θεμέλια. Ο ίδιος ο Cantor, στο έργο του, δεν είχε αναφερθεί σε αξιώματα. Όμως, το 1897 ο Burali-Forti ανακοίνωσε πως είχε ανακαλύψει κάποια αντινομία σε σχέση με τους υπερπεπερασμένους αριθμούς, ενώ και ο Cantor το 1899 διατύπωσε ένα άλλο παράδοξο στη θεωρία συνόλων του. Το τελικό χτύπημα ήρθε με το παράδοξο του Russell το 1902, το οποίο υποχρέωσε όλους τους μαθηματικούς να αναγνωρίσουν πως είχε επέλθει κρίση. Σε αυτή τη φάση, εμφανίστηκαν τρία φιλοσοφικά ρεύματα με διαφορετική αντίληψη για τα μαθηματικά και τις αιτίες της κρίσης: ο Λογικισμός, ο Φορμαλισμός και ο Ιντουισιονισμός.

Ο Ιντουισιονισμός πρέσβευε μια ιδιαίτερα ριζοσπαστική στάση και έμεινε στο περιθώριο. Ο Λογικισμός, με επικεφαλής τους Frege και Russell, πρότεινε την αναγωγή των μαθηματικών στη λογική και απόκτησε αρκετούς οπαδούς, κυρίως μέχρι τα μέσα του 20ού αιώνα. Ο Φορμαλισμός, ο οποίος τελικά επικράτησε μεταξύ πολλών μαθηματικών, υποστήριζε πως η διέξοδος από την κρίση βρισκόταν στην αξιωματική μέθοδο. Σε αυτό το πνεύμα, ο Zermelo δημοσίευσε έναν κατάλογο με επτά αξιώματα,[5] ο οποίος συμπληρώθηκε με άλλα δύο τα επόμενα χρόνια, χάρη στο έργο των Frænkel, Skolem και von Neumann, και έμεινε γνωστός ως αξιωματική θεωρία συνόλων Zermelo-Frænkel με αξίωμα επιλογής (ZFC). Για το καθένα από αυτά τα αξιώματα άνοιξε μεγάλη συζήτηση σχετικά με το αν πρέπει να χρησιμο-

3 *Οι Αρχές της Αριθμητικής, Παρουσιασμένες με Νέα Μεθοδο* (*Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*, 1889).

4 *Θεμέλια της Γεωμετρίας* (*Grundlagen der Geometrie*, 1899).

5 «Μελέτη στα Θεμέλια της Θεωρίας Συνόλων, Α΄» («Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, I», 1908).

ποιείται, και αναπτύχθηκαν διάφορες φιλοσοφικές θεωρήσεις για τα κατάλληλα κριτήρια που θα μας επιτρέψουν να πάρουμε τη σωστή απόφαση.[6] Είτε λόγω προφάνειας είτε λόγω της επιτυχίας τους στη μαθηματική πρακτική, τα αξιώματα αυτά έγιναν αποδεκτά και πλέον θεωρούνται αναπόσπαστο τμήμα των μαθηματικών. Αν και στη συνέχεια εμφανίστηκαν κι άλλα αξιωματικά συστήματα, το ZFC έχει επικρατήσει στη θεωρία συνόλων, αλλά και στις υπόλοιπες θεωρίες, καθώς από τη χρήση του δεν έχει προκύψει κάποιο παράδοξο και επειδή για το μεγαλύτερο μέρος των μαθηματικών είναι ιδιαίτερα εύχρηστο και επαρκές. Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται τα παράδοξα και η πορεία των μαθηματικών προς την αξιωματική θεμελίωση, ενώ αναλύεται το αξιωματικό σύστημα ZFC μαζί με τα επιχειρήματα που έχουν αναπτυχθεί σχετικά με το κάθε αξίωμά του.

Η εκτεταμένη χρήση του ZFC σε όλους τους κλάδους των μαθηματικών το κατέστησε αντικείμενο συστηματικής μελέτης, η οποία αποκάλυψε τις ελλείψεις του. Συγκεκριμένα, παρατηρήθηκε πως υπάρχουν ερωτήματα, όπως η υπόθεση του συνεχούς του Cantor, τα οποία με τα συγκεκριμένα αξιώματα δεν μπορούν να απαντηθούν. Προκειμένου να καλυφθεί αυτό το κενό, προτάθηκαν κάποια νέα αξιώματα ως συμπλήρωμα του υπάρχοντος αξιωματικού συστήματος. Στο Κεφάλαιο 3 εκτίθενται τα πιο σημαντικά αναπάντητα (ή ανεξάρτητα) ερωτήματα της θεωρίας συνόλων, καθώς και τα βασικά αξιώματα που έχουν προταθεί. Στη συνέχεια, επιχειρείται μια κριτική αποτίμηση του καθενός από αυτά τα αξιώματα, σύμφωνα με τους κανόνες οι οποίοι καθιερώθηκαν τα προηγούμενα χρόνια για τα βασικά αξιώματα.

Η εργασία ολοκληρώνεται με μια ταξινόμηση των κριτηρίων αξιολόγησης αξιωμάτων της συνολοθεωρίας. Τα συναφή συμπεράσματα συγκεντρώνονται στο σύντομο τελευταίο Κεφάλαιο 4.[7]

[6] Όπως αναφέρει ο M. Resnik, «τα νέα αξιώματα δεν γίνονται αποδεκτά ως αποκαλύψεις ήδη ενυπαρχουσών αληθειών στις αποδείξεις μας. Αντιμετωπίζονται με σκεπτικισμό και γίνονται αποδεκτά σταδιακά». Βλ. DETLEFSEN 1992, σ. 13.

[7] Όπου τα παραθέματα κατά μήκος του παρόντος παραπέμπονται σε ξενόγλωσσες πηγές, εξυπακούεται ότι η ευθύνη για τη μετάφρασή τους επιβαρύνει αποκλειστικά τον γράφοντα.

# 1. Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΟΛΟΘΕΩΡΙΑΣ

## 1.1. Από την αρχαιότητα μέχρι τη θεμελίωση των αριθμών

### *1.1.1. Πλάτων και Αριστοτέλης*

ΣΤΗΝ ΑΡΧΑΙΑ ΕΛΛΑΔΑ, οι Πυθαγόρειοι ήταν οι πρώτοι οι οποίοι ασχολήθηκαν επισταμένως με τα μαθηματικά.[8] Σ' αυτούς οφείλεται η ανακάλυψη των άρρητων αριθμών. Οι άρρητοι, ως αριθμοί που η δεκαδική τους μορφή περιέχει άπειρο αριθμό δεκαδικών ψηφίων, συντάραξαν την πίστη που είχε αρχίσει να δημιουργείται σχετικά με το διακριτό του χώρου. Η μελέτη τους πια επαφίεται στη μελέτη της γεωμετρίας (10ο βιβλίο των *Στοιχείων*) και όχι της αριθμητικής. Έτσι, θεμελιώνεται μια αντίληψη του αριθμού ως ασυνεχούς ποσότητας, η οποία θα χρειαστεί σχεδόν δύο χιλιάδες χρόνια για να αναθεωρηθεί με τον Simon Stevin (1548-1620). Μετά τους Πυθαγόρειους, εμφανίζονται οι δύο μεγάλοι πυλώνες στη φιλοσοφική σκέψη, ο Πλάτων και ο Αριστοτέλης, οι οποίοι ασχολήθηκαν με τις μαθηματικές οντότητες και την αλήθεια των μαθηματικών προτάσεων.[9]

Ο Πλάτων, θεωρώντας πως ο αισθητός κόσμος διαρκώς υπόκειται σε αλλαγές, έθεσε ως απαραίτητο στόχο την αναζήτηση κάποιων αναλλοίωτων σταθερών, πάνω στις οποίες θα μπορούσε να στηρίξει το γνωσιολογικό του οικοδόμημα. Ως γνωστόν, έκανε τη διάκριση ανάμεσα στον κόσμο των φαινομένων (του «Γίγνεσθαι») και τον κόσμο των Ιδεών (του «Είναι»). Η γνώση του δεύτερου, ως αναλλοίωτου, είναι ο προαναφερθείς στόχος. Τα αντικείμενα που ανήκουν σε αυτόν είναι και τα πραγματικά αντικείμενα γνώσης και πρέπει να ικανοποιούν ορισμένες συνθήκες:

1. Η ύπαρξή τους δεν εξαρτάται από την ύπαρξη γνώστη τους.
2. Πρέπει να είναι ανεξάρτητα από τη δυνατότητα και τον τρόπο με τον οποίο μπορούν να γνωσθούν.
3. Θα πρέπει να παραμένουν αναλλοίωτα (να μην υπόκεινται σε αλλαγή).
4. Θα πρέπει να μπορούν να περιγραφούν με ακρίβεια.

Κατά τον Πλάτωνα, οι αληθείς μαθηματικές προτάσεις από την ίδια τους τη φύση είναι αναγκαίες και a priori, ενώ το αντικείμενο των μαθηματικών αποτελεί το μέρος του κόσμου του Είναι το οποίο περιέχει τις αριθμητικές και τις γεωμετρικές Ιδέες. Ως εκ τούτου, οι μαθηματικές αλήθειες είναι αυθύπαρκτες και ο μαθηματικός μπορεί απλώς να τις ανακαλύψει με τη βοήθεια της νοητικής μαθηματικής εποπτείας (του α-

[8] Για τη φιλοσοφία των πυθαγορείων βλ. ΑΝΑΠΟΛΙΤΑΝΟΣ [5]2005, σσ. 11-28, ενώ για το ζήτημα των άρρητων βλ. ΦΙΛΗ 2010, σσ. 157-179, καθώς και το κλασικό σύγγραμμα του SZABO 1973. Μια αναλυτική παρουσίαση της πυθαγόρειας αριθμητικής μπορεί κανείς να βρει στον HEATH 2001, σσ. 89-153.

[9] Περισσότερες πληροφορίες για τη φιλοσοφία του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη μπορούν να αναζητηθούν στον ΑΝΑΠΟΛΙΤΑΝΟ [5]2005, σσ. 28-52 και 53-75, αντίστοιχα.

ναλόγου της αισθητηριακής αντίληψης), ενώ κάθε αλληλεπίδραση με τα μαθηματικά αντικείμενα είναι αδύνατη. Ο ρεαλισμός του Πλάτωνα βρήκε τη σύγχρονη έκφρασή του στη φιλοσοφία του Gödel.

Αντίθετα με τον Πλάτωνα, ο Αριστοτέλης απορρίπτει εντελώς την πλατωνική διάκριση ανάμεσα στον κόσμο των Ιδεών και στον εμπειρικό κόσμο, ο οποίος αποτελεί πηγή των αισθητηριακών μας δεδομένων. Πιστεύει πως οι ιδέες δεν έχουν ανεξάρτητη ύπαρξη. Όταν μελετάμε ένα αντικείμενο, ως προς τις ιδιότητές του, ουσιαστικά δημιουργούμε αφαιρετικά ένα νοητό ομοίωμα της υλικής πραγματικότητας που απετέλεσε το αίτιο της αρχικής οπτικής σύλληψης. Τα μαθηματικά αντικείμενα είναι τα αποτελέσματα τέτοιων αφαιρέσεων. Κατά τον πολυπράγμονα φιλόσοφο, το άπειρο και το συνεχές βρίσκονται ουσιωδώς συναρτημένα, έτσι, ώστε οποιαδήποτε προσπάθεια ανάλυσης του δεύτερου να απαιτεί αναγκαστικά και τη σύγχρονη προσπάθεια ανάλυσης του πρώτου. Από τη στιγμή που ο νους μας μπορεί να συλλάβει και να σχηματοποιήσει μόνο πεπερασμένες οντότητες, και καθώς το συνεχές είναι μη προσεγγίσιμο (λόγω της ύπαρξης των άρρητων αριθμών), δεν έχουμε το δικαίωμα να μιλάμε για το ενεργεία πραγματικό άπειρο. Το βασικό αριστοτελικό ερώτημα σχετικά με το άπειρο είναι το ακόλουθο: «τι είναι το άπειρο και τι ακριβώς σημαίνει να διερωτηθούμε αν υπάρχει ή όχι;» Οι διαδικασίες στις οποίες οφείλουμε την εξοικείωσή μας με την έννοια του απείρου είναι δύο: η αθροιστική και η διαιρετική. Η πρώτη μπορεί να μας οδηγήσει στη θεώρηση πεπερασμένων αντικειμένων οσονδήποτε μεγάλων διαστάσεων και η δεύτερη στη θεώρηση οσονδήποτε πολλών πεπερασμένων τμήσεων ενός αντικειμένου. Είναι λοιπόν σαφές πως ο Αριστοτέλης πίστευε στο δυνητικό άπειρο, αλλά όχι στο εν ενεργεία.

Ο Σταγειρίτης ήταν ο πρώτος φιλόσοφος που μελέτησε τα δομικά στοιχεία των μαθηματικών θεωριών και κατέληξε πως κάθε μαθηματική θεωρία πρέπει να έχει τα εξής:

1. Ένα σύνολο αρχών (λογικοί κανόνες),[10] κοινών για όλες τις επιστήμες.
2. Ένα σύνολο ειδικών αρχών και αξιωμάτων που να σχετίζονται με τη συγκεκριμένη μαθηματική θεωρία.
3. Ένα σύνολο ορισμών.
4. Ένα σύνολο υπαρκτικών υποθέσεων, μέσω των οποίων υποθέτουμε πως ό,τι ορίστηκε υπάρχει.

Τα στοιχεία αυτά (πλην του 4) αποτελούν και σήμερα τον θεμελιώδη εξοπλισμό μιας μαθηματικής θεωρίας.

---

[10] Ο ίδιος ο Αριστοτέλης όρισε για πρώτη φορά κάποιους λογικούς κανόνες, τους οποίους πρέπει να χρησιμοποιεί κανείς προκειμένου να συλλογίζεται σωστά. Οι κανόνες αυτοί, που λέγονται και «αρχές του ορθού λόγου», είναι οι εξής (όπως αναφέρονται στον ΠΑΠΑΝΟΥΤΣΟ 1974): (1) η αρχή της ταυτότητας: το (Α) είναι (Α) («Κάθε πλάσμα του νου, της έλλογης σκέψης προϊόν, είναι παντού και πάντοτε ίδιο με τον εαυτό του»), (2) η αρχή της μη αντίφασης: το (Α) δεν είναι (όχι Α) («Μία έννοια δεν μπορεί να είναι (ταυτόχρονα και στις δύο σχέσεις) αντιφατική προς τον εαυτό της») και (3) η αρχή του επαρκούς (ή αποχρώντος) λόγου («Για κάθε απόφανση ζητείται και δίνεται ο λόγος ο επαρκής να δείξει και να στηρίξει την αλήθεια της»).

### *1.1.2. Από τον Μεσαίωνα ώς την Αναγέννηση*

Η περίοδος μεταξύ της αρχαιότητας και της Αναγέννησης ονομάστηκε Μεσαίωνας ή Μέσοι Χρόνοι.[11] Η επικράτηση της Καθολικής Εκκλησίας στην Κεντρική Ευρώπη είχε ως αποτέλεσμα μια καμπή σε κάθε πεδίο του πνεύματος.[12] Η κατάσταση αυτή μεταβάλλεται όταν οι Άραβες μεταφέρουν στην Ευρώπη τις γνώσεις τους για την αριθμητική, καθώς και με τις μεταφράσεις έργων της αρχαίας Ελλάδας. Αρχικά μεταφράζονται έργα από τα αραβικά στα ελληνικά και μετά από τα ελληνικά στα λατινικά. Λόγω ελλιπούς γνώσης της ελληνικής γλώσσας, οι μεταφράσεις αυτές καταρχάς ήταν κακόζηλες και, ως εκ τούτου, μέχρι τον $17^{ο}$ αιώνα συνέχισαν να εκδίδονται όλο και πιο ολοκληρωμένες καινούργιες μεταφράσεις.[13]

Σε όλη τη διάρκεια του Μεσαίωνα, η ενασχόληση με τα μαθηματικά αποτελούσε ένα συμπληρωματικό ενδιαφέρον για τους διανοούμενους που είχαν πρόσβαση στα αρχαία ελληνικά κείμενα. Σε μεγάλο βαθμό, αυτό οφείλεται στο ότι τα κείμενα των μαθηματικών γράφονταν στα λατινικά, γεγονός που από τη μια επέτρεπε μια πολυεθνική επικοινωνία μεταξύ των απανταχού μορφωμένων, από την άλλη καθιστούσε αδύνατη την πρόσβαση κατώτερων κοινωνικών ομάδων σε επιστημονικά κείμενα. Το κυρίαρχο φιλοσοφικό ρεύμα που αναπτύσσεται είναι το ρεύμα των Σχολαστικών, οι οποίοι αντιδρούν στα δύο μεγάλα δόγματα της εποχής: τη χριστιανική πίστη και την αριστοτελική φιλοσοφία. Ο πρώτος μαθηματικός του σύγχρονου κόσμου είναι ο Fibonacci (Leonardo Pisano Bigollo, π. 1170-1250;), ο οποίος, με τα έργα του *Βίβλος Αβακίου* (*Liber Abaci*, 1202) και *Βίβλος Τετραγώνων* (*Liber Quadratorum*, 1225) ασχολήθηκε με την αριθμητική και την άλγεβρα, υπό τη σκοπιά των Αράβων μαθηματικών, ενώ ο Nicole d'Oresme (π. 1323-1382) είναι αυτός που επινόησε την γραφική αναπαράσταση της κίνησης ενός σώματος συναρτήσει του χρόνου. Κύρια επιστημονική μέθοδος της περιόδου αυτής είναι η λογική ερμηνεία παρουσιασμένη με επίσημο ή γεωμετρικό τρόπο και στηριγμένη σε a priori αρχές. Σχετικά με το άπειρο υπάρχουν

---

[11] Ασχέτως από κάποιες σύγχρονες ιστορικές απόψεις, όπου υποστηρίζεται πως μεταξύ $3^{ου}$ και $12^{ου}$ αιώνα μ.Χ. η πνευματική παραγωγή σε αυτή την περίοδο ήταν ουσιώδης και αποφασιστικής σημασίας, αν όχι και πλούσια, η γενική αντίληψη είναι πως ο Μεσαίωνας είναι συνώνυμο μιας φάσης σκοταδισμού ανάμεσα σε δύο λαμπρές περιόδους.

[12] Αυτή την εποχή, τα μαθηματικά είναι περιορισμένα στην ευκλείδεια γεωμετρία και την αριθμητική (όπου ως «αριθμητική» νοούνται οι τέσσερις πράξεις μεταξύ ακεραίων). Αν και περιλαμβάνονται στο προτεινόμενο «πρόγραμμα σπουδών», το «quadrivium», παρόλα αυτά η μαθηματική σκέψη είναι σχεδόν ανύπαρκτη. Γενικά, δεν υπάρχει ενδιαφέρον για την ερμηνεία του φυσικού κόσμου και, ως επόμενο, ούτε για τα μαθηματικά. Στα σχολεία που έχουν διαμορφωθεί από την Εκκλησία, διδάσκονται γενικά δύο βιβλία μαθηματικών, μεταφρασμένα από τον Βοήθιο (Anicius Manlius Severinus Boethius, 480-524). Το ένα αποτελεί υποτυπώδη μετάφραση των *Στοιχείων* του Ευκλείδη (2 έως 5 βιβλία από τα 13 – χωρίς αποδείξεις· μόνο ορισμοί και διατυπώσεις προτάσεων), ενώ το άλλο αποτελεί μετάφραση της *Αριθμητικής Εισαγωγής* του Νικομάχου του Γερασηνού (π. 60-120 μ.Χ.), η οποία απετέλεσε το βασικό εγχειρίδιο της αριθμητικής στα περισσότερα σχολεία της Δύσης για πάνω από χίλια χρόνια – στοιχείο ενδεικτικό της στασιμότητας που επικρατούσε στα μαθηματικά. Βλ. KLINE 1972, τ. 1, σ. 201. Για περισσότερες πληροφορίες, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στη ΦΙΛΗ 2009 και ΙΔ. 2010.

[13] Για μια αναλυτική παρουσίαση μεταφράσεων αρχαίων ελληνικών μαθηματικών κειμένων, βλ. ΦΙΛΗ 2010.

διάφορες απόψεις. Ο Oresme δεν αποδέχεται τη δυνατότητα σύγκρισης άπειρων συνόλων. Ο Robert Holkot (π.1290-1349) υποστηρίζει πως όλα τα άπειρα αριθμητικά είναι ίσα, ενώ ο Γουλιέλμος του Όκαμ (William of Ockham, π. 1287-1347;) αποδέχεται ότι «ένα άπειρο μπορεί να είναι μεγαλύτερο από κάποιο άλλο».

Δύο πολύ σημαντικά γεγονότα συμβαίνουν γύρω στο 1450 που δίνουν για πρώτη φορά ώθηση στις επιστήμες. Πρώτον, ανακαλύπτεται η τυπογραφία (1448) από τον Johannes Gutenberg (π. 1398-1468), με αποτέλεσμα τα επιστημονικά κείμενα να είναι προσβάσιμα σε περισσότερους μελετητές και πιο γρήγορα από πριν. Δεύτερον, η Κωνσταντινούπολη κατακτάται από τους Οθωμανούς (1453) και οι διανοούμενοι οι οποίοι καταφέρνουν να δραπετεύσουν προς την Δύση (κατά κύριο λόγο την Ιταλία) φέρνουν εκεί μαζί τους πολλά επιστημονικά χειρόγραφα. Μεταξύ 1550 και 1700 ιδρύθηκαν βιβλιοθήκες και ακαδημίες επιστημών οι οποίες με τη σειρά τους προωθούσαν τη μαθηματική σκέψη. Συν τοις άλλοις, συγγραφείς όπως οι Adam Ries (1492-1559) και Hieronymus Schreiber (†1547) κατά τις αρχές του 16^ου^ αιώνα γράφουν τα κείμενα τους στα γερμανικά, κάνοντάς τα προσιτά σε πολύ περισσότερους ανθρώπους απ’ ό,τι ήταν μέχρι τότε. Μοναδικό σχεδόν εμπόδιο παρέμενε η δογματική και πανίσχυρη Εκκλησία, η οποία μάλιστα είχε υπό τον έλεγχό της τα πανεπιστήμια. Ενδεικτικό είναι το ότι κάθε ιδρυτική πράξη πανεπιστημίου φέρει δύο σφραγίδες, μια του κράτους και η άλλη της Εκκλησίας, ενώ χαρακτηριστικό είναι και το γεγονός πως οι μεγαλύτεροι μαθηματικοί της εποχής δεν διδάξαν σε αυτά. Οποιαδήποτε αναζήτηση η οποία δεν έφερε τα χαρακτηριστικά θρησκευτικής αποστολής ήταν καταδικασμένη. Η λύση δόθηκε με την εισαγωγή ενός νέου δόγματος, από λόγιους σαν τον Νικόλαο Κουζάνο (Nikolaus von Kues, εκλατ. Nicolaus Cusanus, 1401-1464): Η φύση είναι κατασκευασμένη από τον Θεό σύμφωνα με μαθηματικούς νόμους και ως εκ τούτου οι μαθηματικές έρευνες είναι κατά βάθος θεολογικές αναζητήσεις.[14]

Όλη αυτή την περίοδο η επιστημονική σκέψη προσπαθεί να απαγκιστρωθεί από τη νοοτροπία της απόλυτης αυθεντίας. Χαρακτηριστική είναι η άποψη του Kline ότι ο Αριστοτέλης και ο Ευκλείδης, μέσα από το τόσο πλούσιο έργο τους, ουσιαστικά έβλαψαν την μαθηματική σκέψη καθηλώνοντας τους μαθηματικούς σε μια δουλοπρεπή στάση και καθυστερώντας τελικά την εξέλιξη των μαθηματικών. Αυτό έγινε αντιληπτό μόλις στα μέσα του 16^ου^ αιώνα με τον Pierre de la Ramé (1515-1570), ο οποίος κατήγγειλε την προσωπολατρία απέναντι στους αρχαίους.[15] Άλλοι ανοιχτόμυαλοι και τολμηροί διανοητές, όπως οι Leonardo da Vinci (1452-1519), William Gilbert (1540-1603) και Francis Bacon (1561-1626), επιχείρησαν να απελευθερώσουν την εποχή τους από τα φαντάσματα του παρελθόντος. Διακηρύσσοντας ότι «οποιαδήποτε ανθρώπινη δραστηριότητα θέλει να λέγεται επιστήμη οφείλει να προχωράει μέσα από τα μαθηματικά» (Leonardo da Vinci) ή ότι «όλη η ανθρώπινη γνώση περνάει μέσα από την παρατήρηση» (Francis Bacon), χάραξαν τον δρόμο στον οποίο από δω και πέρα θα βάδιζε η επιστημονική σκέψη. Πολύ σημαντική είναι η συνεισφορά ειδικό-

[14] *Ό.π.*, σ. 364.

[15] LORIA 1972, τ. 2, σ. 70.

τερα του Bacon, με τα δύο έργα του,[16] στη θεμελίωση μιας ακριβούς επιστημονικής μεθόδου, χάρη στον διαχωρισμό που πρώτος αυτός επιτελεί ανάμεσα στους τρόπους αναζήτησης της αλήθειας:

> Υπάρχουν δύο τρόποι (και μόνο δύο μπορούν να υπάρχουν) για την αναζήτηση και την κατάκτηση της αλήθειας. Ο πρώτος ξεκινά από τις λεπτομέρειες, διαισθητικά ορίζει άμεσα τα πιο γενικά αξιώματα και με δεδομένα αυτά επινοεί και αποφασίζει για το ποιες είναι οι ενδιάμεσες προτάσεις. Ο δεύτερος συνάγει αξιώματα από τις αισθήσεις μας και από τις λεπτομέρειες και διαρκώς ανερχόμενος σταδιακά φτάνει στα γενικότερα αξιώματα. Ο σωστός είναι ο δεύτερος.[17]

Όταν αναφέρεται σε «αξιώματα», ο Bacon εννοεί προτάσεις στις οποίες φτάνουμε με ε π α γ ω γ ή (induction) και οι οποίες αποτελούν την κατάλληλη αρχή για π α ρ α γ ω γ ι κ ο ύ ς σ υ λ λ ο γ ι σ μ ο ύ ς (deductive reasoning). Είναι, ακόμα, σημαντικό να αναφέρουμε πως τα χειρόγραφα του Leonardo da Vinci άργησαν πολύ να ανακαλυφθούν και να ερμηνευθούν και έτσι οι σύγχρονοί του δεν επηρεάστηκαν από το έργο του.

Κατά την Αναγέννηση, σε πρώτη φάση, οι μαθηματικοί, κατά κύριο λόγο, συντάσουν μαθηματικές εγκυκλοπαίδειες με σκοπό περισσότερο να συγκεντρώσουν την προϋπάρχουσα γνώση παρά να δημιουργήσουν νέα. Κατόπιν, εμφανίζονται σποραδικές περιπτώσεις διανοητών οι οποίοι κρίνουν, και πολλές φορές απορρίπτουν, αδιαπραγμάτευτες αρχές του παρελθόντος. Ο M. Stiefel (1486-1567) σχεδόν προφητικά σημειώνει: «Ο τετραδιάστατος χώρος, αν και απαράδεκτος γεωμετρικώς, αριθμητικώς είναι παραδεκτός.»[18] Ο P. Nûnes (1502-1578) είναι ο πρώτος που δεν θεωρεί ως απαραίτητο στοιχείο των μαθηματικών προβλημάτων την πρακτική εφαρμογή τους,[19] ενώ ο F. Viète (1540-1603) είναι αυτός που απαγκιστρώνει την επίλυση εξισώσεων από τα συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα.[20] Σχετικά με το άπειρο, ο Γαλιλαίος (Galileo Galilei, 1564-1642) δήλωσε:

> Την μόνη δυνατή διέξοδο που βλέπω είναι να πούμε ότι το σύνολο των αριθμών είναι άπειρο, ότι ο αριθμός των τετραγώνων είναι άπειρος, καθώς άπειρος είναι και ο αριθμός των ριζών τους και ότι το σύνολο των αριθμών στο τετράγωνο δεν είναι μικρότερο από το σύνολο των αριθμών και ούτε ότι αυτό είναι μεγαλύτερο από το σύνολο των αριθμών στο τετράγωνο.[21]

---

[16] Την *Πρόοδο της Μάθησης* (*The Advancement of Learning*, 1605) και το *Νέο Όργανο* (*Novum Organum Scientiarum*, 1620).

[17] KLINE 1972, τ. 1, σ. 225.

[18] LORIA 1972, τ. 2, σ. 68.

[19] *Ό.π.*, σ. 75.

[20] *Ό.π.*, σ. 85.

[21] ΦΙΛΗ 2010, σ. 371.

Σημαντική είναι και η αλλαγή της συμπεριφοράς των μαθηματικών απέναντι στα αξιώματα. Το 1634, ο Pierre Herigone (1580-1643) δηλώνει:

> … ούτε υπάρχει αμφιβολία ότι η μέθοδός μου είναι καθαρότερη της συνήθους, λαμβανομένου υπόψη ότι στη δική μου τίποτε δεν γίνεται δεκτό, χωρίς αναφορά του σε προηγούμενα δεδομένα[…]. Ας προστεθεί ότι στη συνήθη μέθοδο γίνεται χρήση μεγάλου αριθμού λέξεων και αξιωμάτων, των οποίων δεν έχει προηγηθεί εξήγηση, ενώ στη νέαν μέθοδο ουδέν λέγεται χωρίς να έχει προηγουμένως αναπτυχθεί και υιοθετηθεί.[22]

Τα παραδείγματα αυτά, αν και ενδεικτικά των επιστημονικών ζυμώσεων που συνέβαιναν, όντας μεμονωμένα δεν σηματοδότησαν κάποια ιδιαίτερη αλλαγή για την πνευματική συνθήκη της περιόδου συνολικά.

Με τον René Descartes (1596-1650) συντελείται η πρώτη μεγάλη μεταστροφή στη φιλοσοφία: από τη βεβαιότητα της πίστης της μεσαιωνικής φιλοσοφικής σκέψης στη μεθοδική αμφιβολία.[23] Αρχές στις οποίες πρέπει να στηρίζεται η θεμελίωση των μαθηματικών διατύπωσε στο πολύκροτο δοκίμιό του *Λόγος περί της Μεθόδου* (*Discours de la méthode*, 1637),[24] στο οποίο έθεσε τέσσερις βασικούς κανόνες, εκ των οποίων ο πρώτος μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα: «Να μην παραδεχόμαστε τίποτε ως αληθές, αν τούτο δεν το αναγνωρίσουμε ως αληθές κατά τρόπο εναργή και ανεπίδεκτο αμφιβολίας.»[25] Το 1637, λοιπόν, ο Descartes θέτει σε αμφισβήτηση ακόμη και αξιώματα, απαιτώντας «συμπαγή» δικαιολόγησή τους.

Την ίδια περίοδο, ο Pierre de Fermat (1601-1665) θεωρούσε ιδιαίτερα σημαντικό το ποια αξιώματα αποδεχόμαστε προκειμένου να προχωρήσουμε στην παραγωγή θεωρημάτων. Γι’ αυτό προέτρεπε τους υπόλοιπους μαθηματικούς να ανακαλύψουν τις γενικές αρχές οι οποίες του επέτρεψαν να διατυπώσει τόσα ωραία θεωρήματα[26]. Εκτός αυτών, σημαντική συμβολή στην πορεία προς την αξιωματική θεμελίωση είχε και ο Blaise Pascal (1623-1662), ο οποίος στο έργο του *Περί της Τέχνης του Πείθειν* (*De l'Art de persuader*, 1660) εισάγει ορισμένους κανόνες (για τους ορισμούς, τα αξιώματα, τις αποδείξεις) απαραίτητους σε κάθε σωστό γεωμέτρη. Οι κανόνες τους οποίους θέτει για τα αξιώματα έχουν γενικότερο ενδιαφέρον: (1) «Μην παραλείπετε καμία από τις αναγκαίες αρχές όσο καθαρή και προφανής και αν φαίνεται, χωρίς να εξετάσετε προηγουμένως, αν η παράλειψη έχει συνέπειες» και (2) «Μην επικαλείσθε ως αξιώματα παρά μόνο πράγματα αφ’ εαυτών φανερά».[27]

---

[22] LORIA 1972, τ. 2 σ. 221.

[23] ΑΥΓΕΛΗΣ [3]2001, σ. 232.

[24] Λόγος περί μεθόδου δια να οδηγή κανείς καλώς το λογικόν του και ν’ αναζητή την αλήθειαν εις τας επιστήμας (*Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences*).

[25] LORIA 1972, τ. 2, σ. 227.

[26] *Ό.π.*, σ. 271.

[27] *Ό.π.*, σ. 290.

### *1.1.3. Η ανάπτυξη της ανάλυσης*

Ο απειροστικός λογισμός δημιουργείται την ίδια περίπου εποχή από τους Leibniz[28] και Newton[29], οι οποίοι εγκαινίασαν μια νέα εποχή για τα μαθηματικά. Ο Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) ήθελε να δημιουργήσει μια οικουμενική γλώσσα με την οποία να εισάγει μια παγκόσμια επιστήμη, απαλλαγμένη από πλάνες – εξ ου και το προσωνύμιο «φιλόσοφος της αισιοδοξίας». Σε ό,τι μας αφορά, ο Leibniz είναι ο πρώτος διανοητής που πίστευε εκτός από το δυνητικό άπειρο και στο ενεργεία πραγματικό. Χαρακτηριστικά, λέει:

> Είμαι τόσο υπέρ του πραγματικού απείρου που, αντί να δεχθώ ότι η φύση το απεχθάνεται, όπως χυδαία λέγεται, υποστηρίζω πως την επηρεάζει παντού, προκειμένου να υπογραμμίσει καλύτερα την τελειότητα του Δημιουργού της. Έτσι, πιστεύω πως δεν υπάρχει μέρος της ύλης που να μην είναι, όχι απλώς διαιρέσιμο, αλλά διαιρεμένο. Ως εκ τούτου, και το ελάχιστο κλάσμα της ύλης πρέπει να θεωρείται ως ένας κόσμος γεμάτος από μια απειρία διαφορετικών πλασμάτων.[30]

Μάλιστα, πίστευε πως μπορούμε να εκτελούμε πράξεις μεταξύ πεπερασμένων αριθμών, άπειρων αριθμών και απειροστών και πως το γινόμενο μεταξύ άπειρων και απειροστών μπορούσε να είναι οποιοδήποτε από τα τρία. Συγκεκριμένα, σε σχέση με το άπειρο, η άποψή του ήταν η εξής: Τα κατασκευάσματα του νου δεν μπορούν να αποτελούνται από άπειρα πραγματικά μέρη γιατί ο πεπερασμένος ανθρώπινος νους δεν έχει τη δυνατότητα πραγματικής, αλλά μόνο δυνητικής αποδόμησής τους. Αντίθετα, τα χωροχρονικά εκτατά φυσικά αντικείμενα, καθώς δεν εξαρτώνται από τον ανθρώπινο νου, μπορούν να αποτελούνται από άπειρες το πλήθος μη εκτατές μονάδες,

---

[28] Περισσότερες πληροφορίες για τη φιλοσοφία του Leibniz μπορεί να αναζητήσει κανείς στα: ΑΥΓΕΛΗΣ [3]2001 σσ. 260-278 και ΑΝΑΠΟΛΙΤΑΝΟΣ [5]2005, σσ. 95-123. Για βιογραφικά στοιχεία, βλ. BELL [2]1986, σσ. 117-130, ΦΙΛΗ 2009, σσ. 203-244, και DAVIS 2007, σσ. 25-50.

[29] Ο Newton, έχοντας ως βασικό του σκοπό την γενική αποδοχή του έργου του, δεν είχε το θάρρος να εκθέσει τις πρωτότυπες μεθόδους του. Ενδεικτικά, στο μεγάλο του έργο Μαθηματικές Αρχές της Φυσικής Φιλοσοφίας (*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, 1687), ενώ είναι σαφές πως οι έρευνες του έγιναν με αλγοριθμικές μεθόδους που ο ίδιος είχε επινοήσει, εξέθεσε τις ανακαλύψεις του υπό μορφή ανταποκρινόμενη στα καθαρά πρότυπα των γεωμετρών της αρχαίας Ελλάδος (LORIA 1972, τ. 2 σ. 383). Αυτό δεν είναι καθόλου παράδοξο, καθότι ο Newton είχε μαθητεύσει δίπλα στον Isaac Barrow (1630-1677), ο οποίος αφενός μεν είχε μεγάλη επίδραση στην Αγγλία εκείνη την εποχή, αφετέρου δε ήταν από τους πρεσβευτές της άποψης ότι η ευκλείδεια γεωμετρία είναι η απόλυτη και τέλεια επιστήμη. Είχε μάλιστα διακιολογήσει την πίστη του ότι η ευκλείδεια γεωμετρία αποτελεί το θεμέλιο των μαθηματικών με έναν κατάλογο από οκτώ λόγους, ανάμεσα στους οποίους ήταν η παγκόσμια αλήθεια των αξιωμάτων της και η αποφυγή άγνωστων οντοτήτων. Μάλιστα, η διένεξη μεταξύ Leibniz και Newton σχετικά με την προτεραιότητα της ανακάλυψης του απειροστικού λογισμού οδήγησε σε ένα σχίσμα μεταξύ των επιστημόνων της Αγγλίας και της ηπειρωτικής Ευρώπης. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα η Αγγλία να μείνει ιδιαίτερα πίσω σχετικά με τις μαθηματικές εξελίξεις για σχεδόν δύο αιώνες.

[30] Μτφρ. από τον FERREIRÓS [2]2007, σσ. 18-19.

γιατί έτσι αποφάσισε ο Δημιουργός να πλάσει τον κόσμο. Η άποψη αυτή απορρίφθηκε τον 19ο αιώνα, καθώς είχε ως άμεσο επακόλουθο την απόρριψη του αρχιμήδειου αξιώματος, θεμελίου της μεθόδου της εξάντλησης, αλλά χρησιμοποιήθηκε ξανά τον 20ό αιώνα από τον Abraham Robinson (1918-1974) στη non-standard ανάλυση.[31]

Οι Descartes και Leibniz αποτελούν τους κύριους εκπρόσωπους του ορθολογισμού ή ρασιοναλισμού, του ρεύματος που προήλθε από την πλατωνική θεώρηση των πραγμάτων. Το ρασιοναλιστικό πρότυπο απόκτησης γνώσης είναι τα μαθηματικά. Το αντίθετο ρεύμα ήταν ο εμπειρισμός, με κύριους εκφραστές του τους John Locke (1632-1704), George Berkeley (1685-1753) και David Hume (1711-1776). Σε γενικές γραμμές, οι εμπειριστές υποβάθμιζαν τη σημασία των μαθηματικών. Ο Locke υποστήριζε πως δεν υπάρχουν έμφυτες ιδέες. Κατ' αυτόν, ο ανθρώπινος νους είναι ένας ευαίσθητος, απόλυτα κενός υποδοχέας, ο οποίος με μόνη πηγή την αισθητηριακή αντίληψη οδηγείται σε εννοιολογικά μορφώματα. Όπως υποστηρίζει, «ο νους δεν γνωρίζει τα αντικείμενα με τρόπο άμεσο, παρά μόνο μέσω των ιδεών που έχει γι` αυτά. Η γνώση μας, επομένως, είναι πραγματική μόνο εφόσον υπάρχει συμφωνία των ιδεών μας με την πραγματικότητα των αντικειμένων.» Πιο ακραίος εμπειριστής ο Berkeley υποστήριζε πως τα φυσικά αντικείμενα είναι πολλαπλότητες αισθητηριακών δεδομένων που δεν υπάρχουν ανεξάρτητα από τον γνώστη τους (υποκειμενικός ιδεαλισμός). Φυσικό επόμενο ήταν, λοιπόν, πως δεν αποδεχόταν την έννοια του πραγματικού απείρου, γιατί η αποδοχή ύπαρξης ενός τέτοιου νοητού αντικειμένου θα σήμαινε αποδοχή μιας απειρίας ιδεών συναρθρωμένων στον πεπερασμένο ανθρώπινο νου σε μια ολότητα. Παρόμοια, αρνείται την άπειρη διαιρετότητα πεπερασμένα εκτατών αντικειμένων.

Μεγαλύτερη επίδραση από οποιονδήποτε άλλο φιλόσοφο της εποχής αυτής άσκησε ο Kant (1724-1804), ο οποίος διακρίνει την παραδοσιακή λογική σε «γενική» και «υπερβατολογική». Η πρώτη αντιστοιχεί στο τυπικό τμήμα της αριστοτελικής λογικής, στις λογικές μορφές τις οποίες λαμβάνουν οι κρίσεις μας για τα πράγματα και τους κανόνες που τις διέπουν. Η δεύτερη σχετίζεται με τον τρόπο που γνωρίζουμε προεμπειρικά –a priori– τα πράγματα, με τις έννοιες οι οποίες μας είναι απαραίτητες για τη γνώση και με το γνωσιολογικό χαρακτήρα των κρίσεων μας. Εκτός αυτού, ο Kant είναι ο πρώτος ο οποίος υποστηρίζει πως η λογική πρέπει να αντιμετωπίζεται ως ξεχωριστή επιστήμη. [32] Επιπλέον, για τον Kant, το άπειρο έχει προβληματική αναπαράσταση και δεν ανήκει στις κατασκευάσιμες έννοιες, μολονότι δεν είναι λογικά αδύνατο ως έννοια. Ως εκ τούτου, αποδέχεται το δυνητικό άπειρο, αλλά όχι το ενεργεία πραγματικό. Η ύπαρξη ενός κατασκευαστικού αλγορίθμου για την παραγωγή των όρων μιας ακολουθίας δεν συνεπάγεται την ύπαρξη της ακολουθίας. Η ακολουθία ως τελειωμένο αντικείμενο σπουδής αντιστοιχεί στην έννοια του πραγματικού απείρου, ενώ η ύπαρξη του αλγόριθμου στο δυνητικό. Άρα, για τον Kant η έννοια του πραγμα-

[31] ΦΙΛΗ 2010, σ. 423.

[32] ΣΛΟΥΓΚΑ 2009, σ. 23. Το όνειρο του Leibniz για μια παγκόσμια χαρακτηριστική γλώσσα, σε συνδυασμό με το αίτημα του Kant για τη δημιουργία μιας ανεξάρτητης λογικής επιστήμης, βρήκαν τον εκφραστή τους στον Gottlob Frege γύρω στα τέλη του 19ου αιώνα.

τικού απείρου είναι εσωτερικά συνεπής και άρα αναλύσιμη· μπορεί δηλαδή να αποτελέσει αντικείμενο μαθηματικής επεξεργασίας.[33]

Μετά από την ανακάλυψη του απειροστικού λογισμού από τους Leibniz και Newton, πολλοί μεγάλοι μαθηματικοί (οι Bernoulli, Michel Rolle, Brook Taylor, Jean le Rond d'Alembert, Leonhard Euler κ.ά.) άρχισαν να ασχολούνται με αυτό τον καινούργιο κλάδο. Μετά τη θεωρία αριθμών, την άλγεβρα και τα διάφορα είδη γεωμετρίας (ευκλείδεια, προβολική κ.λπ.), τώρα ερχόταν να προστεθεί και η ανάλυση στους θεμελιώδεις τομείς των μαθηματικών. Ο Euler, συγκεκριμένα, συνέγραψε τα «απόλυτα» εγχειρίδια σχετικά με αυτούς τους κλάδους[34] και έθεσε τη βάση για τα μοντέρνα μαθηματικά. Αυτή την περίοδο τίθεται και το σημαντικό ερώτημα «Τι αναπαριστούν οι μεταβλητές;», στο οποίο ο Euler έδωσε την απάντηση ότι οι μεταβλητές παριστάνουν αριθμούς που ενδέχεται να είναι και αρνητικοί ή μιγαδικοί. Αυτή η απάντηση (και μάλιστα διατυπωμένη από έναν από τους πιο σημαίνοντες μαθηματικούς της εποχής) δημιούργησε αίσθηση, γιατί μέχρι τότε οι μεταβλητές αντιμετωπίζονταν ως αναπαραστάσεις συνεχών οντοτήτων, όπως οι ευθείες στη γεωμετρία. Υπέρ των μιγαδικών αριθμών είχε μιλήσει και ο Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) το 1831. Ιδιαίτερη επίδραση για τους κατοπινούς και συγχρόνους του μαθηματικούς άσκησε η άποψη που εξέφρασε ο Gauss σε ένα γράμμα του προς τον Heinrich Christian Friedrich Schumacher (1780-1850) το 1831 σε σχέση με το άπειρο:

> …απορρίπτω πάνω απ' όλα τη χρήση ενός άπειρου μεγέθους ως ολοκληρωμένου, πράγμα που δεν επιτρέπεται ποτέ στα μαθηματικά. Το άπειρο είναι μόνο ένας τρόπος του λέγειν, όταν κυρίως μιλάμε για όρια που κάποιοι θεωρούν πως προσεγγίζουν όσο θέλουμε, ενώ άλλοι επιτρέπουν την αύξηση χωρίς όριο.[35]

Πάντως, αν και εκφράζεται με αυτό τον κατηγορηματικό τρόπο, ο Gauss σε πολλές περιπτώσεις, όπως στην διαφορική γεωμετρία του, χρησιμοποίησε απειροστές ποσότητες. Αυτή η συγκεχυμένη στάση συναντάται σε πολλούς μαθηματικούς της εποχής, όπως ο Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), στο έργο του οποίου ανιχνεύεται η τάση προς την χρήση του απείρου, μολονότι ο ίδιος δεν είχε μιλήσει ανοιχτά υπέρ του πραγματικού απείρου. Τις εννοιολογικές αυτές τάσεις υιοθέτησαν και προώθησαν οι Dedekind και Riemann.

Στο πρώτο μισό του 19ου αιώνα συνέβησαν δύο σημαντικές εξελίξεις στο χώρο των μαθηματικών. Αφενός μεν, επινοήθηκαν οι μη ευκλείδειες γεωμετρίες, οι οποίες τάραξαν την πίστη των μαθηματικών στην αυθεντία της ευκλείδειας γεωμετρίας και τους ώθησαν προς την αριθμητική, ενώ παράλληλα έφεραν μια νέα αντίληψη για το τι είναι αξίωμα και αξιωματική θεωρία. Αφετέρου δε, η ανάπτυξη της ανάλυσης οδήγησε τους μαθηματικούς στο συμπέρασμα πως έπρεπε να θεμελιωθεί πάνω στην αριθμητική, η οποία, όμως, έχρηζε και η ίδια θεμελίωσης.

---

[33] ΑΝΑΠΟΛΙΤΑΝΟΣ $^{5}$2005, σσ.57-58.

[34] Βλ. προηγουμένως υποσημ. 2.

[35] Μτφρ. από τον FERREIRÓS $^{2}$2007, σσ. 18-19.

Όπως αναφέρει ο Moris Kline, από τον 3ο αιώνα π.Χ. μέχρι τις αρχές του 19ου αιώνα, όλοι οι μαθηματικοί και όλοι οι φιλόσοφοι ήταν πεπεισμένοι πως η ευκλείδεια γεωμετρία ήταν η σωστή εξιδανίκευση των ιδιοτήτων του φυσικού χώρου και των μορφών μέσα σε αυτόν.[36] Παρ' όλα αυτά, το αίτημα των παραλλήλων δεν είχε την ίδια διαισθητική δύναμη και φαινόταν κάπως πιο περίπλοκο σε σχέση με τα υπόλοιπα αξιώματά της. Σε όλη την ιστορία υπήρξαν πολλές προσπάθειες να εξαφανιστούν οι αμφιβολίες σχετικά με αυτό. Δύο ήταν οι βασικές προσεγγίσεις: η μια ήταν να αντικατασταθεί από ένα πιο αυταπόδεικτο αξίωμα· η άλλη να παραχθεί από τα άλλα εννέα αξιώματα ώστε να μετατραπεί σε θεώρημα. Το πρώτο πραγματικό βήμα προς τις μη ευκλείδειες γεωμετρίες[37] έγινε από τον Georg S. Klugel (1739-1812), ο οποίος έκανε την παρατήρηση ότι η σιγουριά με την οποία οι μαθηματικοί αποδέχονταν την αλήθεια του αξιώματος των παραλλήλων βασιζόταν στην εμπειρία και όχι στο αυταπόδεικτο της πρότασης. Έτσι, ενώ ο Gerolamo Saccheri (1667-1733) είχε συμπεράνει πως, με άρνηση του 5ου αιτήματος, φτάνουμε σε αντίφαση, ο Klugel παρατήρησε πως απλώς καταλήγουμε σε ένα αποτέλεσμα που έρχεται σε αντίθεση με την εμπειρία. Το επόμενο βήμα έγινε από τον Johann Heinrich Lambert (1728-1777), ο οποίος, ξεκινώντας από την ίδια υπόθεση με τον Saccheri, κατέληξε στο συμπέρασμα πως μπορούμε να υιοθετήσουμε ένα εναλλακτικό αξίωμα και να χτίσουμε μια λογικά συνεπή γεωμετρία. Μάλιστα, σημείωσε πως οποιοδήποτε σύνολο υποθέσεων δεν οδηγεί σε αντίφαση προσφέρει μια πιθανή γεωμετρία. Το πιο σημαντικό βήμα όμως έγινε από τον Gauss (1777), ο οποίος παρατήρησε πως η ευκλείδεια γεωμετρία δεν έχει κάποια a priori βάση που να την καθιστά τη μόνη γεωμετρία που μπορεί να περιγράψει τις ιδιότητες του φυσικού χώρου. Το 1799 ήταν πεπεισμένος πως το αίτημα των παραλλήλων δεν μπορεί να παραχθεί από τα υπόλοιπα εννέα αξιώματα, ενώ το 1813 είχε πλέον δημιουργήσει τη νέα του γεωμετρία και τον Απρίλιο του 1817, σε ένα γράμμα του προς τον Heinrich Wilhelm Matthäus Olbers (1758-1840) ανέφερε:

> Πείθομαι όλο και περισσότερο ότι η φυσική αναγκαιότητα της ευκλείδειας γεωμετρίας δεν μπορεί να αποδειχθεί, τουλάχιστον όχι μέσα από την ανθρώπινη λογική ή για την ανθρώπινη λογική. Ίσως σε μια άλλη ζωή να είμαστε σε θέση να αποκτήσουμε εποπτεία στη φύση του διαστήματος, που τώρα είναι απρόσιτη. Μέχρι τότε θα πρέπει να τοποθετήσουμε τη γεωμετρία όχι στην ίδια κατηγορία με την αριθμητική, που είναι ξεκάθαρα a priori, αλλά με τη μηχανική.[38]

Έτσι, για πρώτη φορά από την εποχή του Πλάτωνα, η πίστη των μαθηματικών στην a priori φύση της ευκλείδειας γεωμετρίας αρχίζει να κλονίζεται. Για διάφορους λόγους, ο Gauss δεν δημοσίευσε ποτέ τίποτα σχετικά με τις μη ευκλείδειες γεωμετρίες. Αυτό

---

[36] Μάλιστα, είχαν υπάρξει και αρκετές απόπειρες να χτιστούν η αριθμητική, η άλγεβρα και η ανάλυση, των οποίων η λογική θεμελίωση ήταν σκοτεινή, πάνω στην ευκλείδεια γεωμετρία, και με αυτό τον τρόπο να διασφαλιστεί η αλήθεια και αυτών των κλάδων.

[37] Για τις μη ευκλείδειες γεωμετρίες συμβουλεύτηκα πρωτίστως εδώ την ΦΙΛΗ 2010, σσ. 87-129, και δευτερευόντως τον KLINE 1972, σσ. 861-882.

[38] ΦΙΛΗ 2010, σ. 125.

το έπραξαν σχεδόν ταυτόχρονα και σχεδόν παρόμοια δύο άλλοι μαθηματικοί: ο Nikolai Ivanovich Lobatchevsky (1793-1856) με την «φανταστική γεωμετρία» του και ο Janos Bolyai (1802-1860) με τη λεγόμενη «απόλυτη γεωμετρία». Το ερώτημα της συνέπειας μιας μη ευκλείδειας γεωμετρίας είχε απασχολήσει και τους τρεις. Μάλιστα και οι τρεις είχαν πειστεί γι' αυτήν, χωρίς όμως να μπορούν να την αποδείξουν.[39] Οι Beltrami και Poincaré απέδειξαν τη σχετική συνέπεια της υπερβολικής γεωμετρίας (όπως είχε πλέον καθιερωθεί να λέγεται η γεωμετρία που είχαν ανακαλύψει οι Gauss, Bolyai και Lobatchevsky) βρίσκοντας ένα μοντέλο που μετέτρεπε τα αξιώματα της υπερβολικής σε θεωρήματα της ευκλείδειας. Ο Jules-Henri Poincaré (1854-1912) ήταν αυτός που πήγε πιο πέρα την σκέψη σχετικά με τις διάφορες γεωμετρίες και, ως εκ τούτου, γενικότερα σχετικά με τα εναλλακτικά αξιωματικά συστήματα:

> Η ευκλείδεια γεωμετρία μπορεί να μην είναι αληθής αλλά είναι πολύ βολική. Μια γεωμετρία δεν μπορεί να είναι περισσότερο αληθής από ό,τι μια άλλη. Μπορεί μόνο να είναι πιο βολική. Ο άνθρωπος δημιουργεί την γεωμετρία και μετά προσαρμόζει τους φυσικούς νόμους σε αυτήν ώστε να κάνει τη γεωμετρία και τους νόμους να ταιριάζουν στον κόσμο.

Πρόκειται για τις θέσεις του Poincaré σχετικά με τη συμβατικότητα της γεωμετρίας του φυσικού χώρου.

Από την άλλη, η ανάλυση συνέχισε να αναπτύσσεται κατά 19$^{ο}$ αιώνα μέσα από γενικεύσεις των μεθόδων της και ενοποιήσεις των θεμελίων της και δημιουργήθηκαν δυο σημαντικά παρακλάδια: η μιγαδική και η πραγματική ανάλυση.[40] Περί τα 1800, οι μαθηματικοί είχαν πλέον αρχίσει να συνειδητοποιούν πως η ανάλυση είχε αναπτυχθεί μέχρι τότε με ασάφεια στις έννοιές της και στις αποδείξεις της. Η βασική έννοια της συνάρτησης, όμως, δεν ήταν ξεκάθαρη και η αναπαράσταση συναρτήσεων μέσω τριγωνομετρικών σειρών είχε δημιουργήσει μεγάλες αντιπαραθέσεις. Ο Niels Henrik Abel (1802-1829) επισημαίνει αυτή την έλλειψη αυστηρότητας το 1826. Αρκετοί μαθηματικοί επιστρατεύτηκαν για να φέρουν τάξη στο χάος. Η τάση αυτή ονομάστηκε «Κριτική Κίνηση» και ως πρωτεύοντα στόχο έθεσε το να ξαναχτιστεί η ανάλυση στηριγμένη μόνο πάνω στην αριθμητική.[41] Εξάλλου, βαρύνουσα σημασία είχε και η

[39] Εφόσον είναι συνεπείς τόσο η ευκλείδεια γεωμετρία όσο και μια γεωμετρία που διαφέρει από αυτή μόνο κατά το ότι αρνείται το αίτημα των παραλλήλων, έπεται πως το αίτημα των παραλλήλων είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα αξιώματα της ευκλείδειας γεωμετρίας.

[40] Η πραγματική ανάλυση ξεκίνησε την ανάπτυξή της ως ανεξάρτητος κλάδος με την εισαγωγή τής έννοιας της «συνέχειας» από τον αυστριακό μαθηματικό Bernard Bolzano (1781-1848). Ο Bolzano έπαιξε πολύ σημαντικό ρόλο στην αυστηρή θεμελίωση της ανάλυσης, θεωρείται προπομπός του Tarski στη λογική, ενώ σημαντικό είναι και το έργο του στη φιλοσοφία. Σε ό,τι μας αφορά, είναι ο πρώτος μαθηματικός που μίλησε για το άπειρο πριν από τον Cantor, ενώ είχε προσπαθήσει να δημιουργήσει και ένα είδος θεωρίας συνόλων. Για περισσότερες πληροφορίες, βλ. Φιλη 2010, σσ. 455-475, 525-536, και Ιδ. 2009, σσ. 447-486.

[41] Αυτό κατά πάσα πιθανότητα συνέβη διότι, όπως είδαμε, τα προηγούμενα χρόνια, με την εμφάνιση των μη ευκλείδειων γεωμετριών και την αποκάλυψη κάποιων ελαττωμάτων στην ανάπτυξη της ευκλείδειας γεωμετρίας, είχε κλονιστεί η πίστη των μαθηματικών σε αυτή.

άποψη του Gauss που προαναφέραμε. Η αυστηρή ανάλυση ξεκινάει με τη δουλειά των Bolzano, Cauchy, Abel, Dirichlet, Riemann και Weierstraß. Ο Bolzano είναι αυτός που πρώτος αναθεωρεί τους υπάρχοντες ορισμούς και δημιουργεί πολύ πιο αυστηρές αποδείξεις στηριγμένες σε αυτούς. Αυτή του η προσφορά έθεσε τέλος στα μεταφυσικά ερωτήματα που είχαν συσσωρευτεί από την εμφάνιση του απειροστικού λογισμού.[42] Οι Cauchy και Bolzano είναι αυτοί που όρισαν πρώτοι τη συνέχεια και την παράγωγο με τον τρόπο που τις χρησιμοποιούμε σήμερα, ενώ επίσης ήταν αυτοί που χρησιμοποίησαν για πρώτη φορά σωστά (με τα σημερινά κριτήρια) τη σύγκλιση μιας σειράς. Ο Weierstraß είναι ο επινοητής των ε-δ ορισμών και της ομοιόμορφης σύγκλισης σειράς. Το ολοκλήρωμα όπως το χρησιμοποιούμε σήμερα προέκυψε από τις εργασίες των Riemann και Darboux. Μια διαδεδομένη τάση της εποχής είναι η επινόηση συναρτήσεων με ιδιαίτερες ιδιότητες, με σκοπό τον εντοπισμό τον αδύνατων σημείων των υπαρχόντων θεωρημάτων. Αυτή η τάση, η οποία είχε ως αποτέλεσμα να γίνει πιο αυστηρή η ανάλυση, αντιμετωπίστηκε από πολλούς μαθηματικούς, όπως ο Poincaré, σαν «τερατούργημα».

Με την ανάλυση να έχει φτάσει σε ένα υψηλό επίπεδο ωριμότητας και αυστηρότητας, το πρόβλημα βρισκόταν στη θεμελιώδη έννοιά της, την έννοια της «συνάρτησης». Ο Weierstraß είχε επιστήσει την προσοχή στο γεγονός ότι, προκειμένου να καθιερωθούν προσεκτικά οι ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων, υπήρχε η ανάγκη της θεωρίας του αριθμητικού συνεχούς. Πώς μπορούσαν να μιλάνε για συναρτήσεις πραγματικών αριθμών, όταν οι ίδιοι οι πραγματικοί ήταν ένα μυστήριο; Ήταν πλέον σαφές πως έπρεπε να θεμελιωθούν οι αριθμοί. Εκτός αυτών, έχοντας υπάρξει προσπάθειες θεμελίωσης της άλγεβρας, είχε γίνει κατανοητό πως και αυτή στηριζόταν στο ξεκαθάρισμα του συστήματος των πραγματικών αριθμών. Από την άλλη, με κλονισμένη την πίστη στην ευκλείδεια γεωμετρία, λόγω της εμφάνισης των μη ευκλείδειων, οι μαθηματικοί είχαν την ανάγκη να πιστέψουν πως τουλάχιστον η αριθμητική μπορούσε να θεμελιωθεί πέραν πάσης αμφιβολίας.

### *1.1.4. Η θεμελίωση των αριθμών*

Η πρώτη αξιόλογη προσπάθεια θεμελίωσης[43] έγινε από τον Martin Ohm (1792-1872) με μια προσέγγιση που θα μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε ως κατασκευαστική. Ο Ohm ήταν ο πρώτος που είχε επιχειρήσει να δώσει μια συστηματική παρουσίαση της αριθμητικής, της άλγεβρας και της ανάλυσης στη βάση μόνο των φυσικών αριθμών.[44] Για την κατασκευή των πραγματικών αριθμών, ξεκινά με δεδομένους τους φυσικούς αριθμούς και τις ιδιότητές τους και κατασκευάζει τους ακεραίους ως εξής:[45] Έστω το

[42] Κατά τον J. Sebestik, ο Bolzano είναι ο τελευταίος μεγάλος ερασιτέχνης και ταυτόχρονα ο πρώτος σύγχρονος μαθηματικός. Βλ. ΦΙΛΗ 2010, σ. 475.

[43] Στην πραγματικότητα, ο Bolzano είναι αυτός που έκανε την πρώτη προσπάθεια θεμελίωσης της αριθμητικής, αλλά όπως και το υπόλοιπο έργο του, έτσι και αυτή παρέμεινε άγνωστη για αρκετό καιρό.

[44] FERREIRÓS ²2007, σσ. 119-124.

[45] Αυτή η οπτική ήταν κοινά αποδεκτή στους Γερμανούς μαθηματικούς και μπορεί να τη βρει κανείς και στα έργα των Johann Heinrich Traugott Muller (1797-1862, δημοσ. το 1855), Hermann Günther Grassmann (1809-1877, δημοσ. το 1861), Weierstrass (το 1872 εκδόθηκαν από τον Kossak σημει-

ζεύγος $(a,b) = a–b$. Αν $b<a$, τότε το ζεύγος αντιπροσωπεύει θετικό ακέραιο· ενώ, αν $a<b$, τότε το ζεύγος αντιπροσωπεύει αρνητικό ακέραιο. Με κατάλληλο ορισμό της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού οδηγούμαστε στις συνήθεις ιδιότητες των ακεραίων. Παρόμοια, με δεδομένους τους ακεραίους, εισήγαγε τους ρητούς ως ζεύγη ακεραίων $(A,B) = A/B$ και ορίζοντας κατάλληλα πρόσθεση και πολλαπλασιασμό προέκυψαν οι ιδιότητες των ρητών. Εκτός αυτών, και οι μιγαδικοί αριθμοί παράγονται ως ζεύγος πραγματικών αριθμών, όπως έδειξε ο Hamilton (ο οποίος είναι και ο επινοητής των quaternions – της επέκτασης, δηλαδή, των μιγαδικών αριθμών).[46] Η κατάσταση, λοιπόν, είχε σχηματικά ως εξής:

$$( \,;\, ) \rightarrow \mathbb{N} \text{ (φυσικοί)} \rightarrow \mathbb{Z} \text{ (ακέραιοι)} \rightarrow \mathbb{Q} \text{ (ρητοί)} \rightarrow ( \,;\, ) \rightarrow \mathbb{R} \text{ (πραγματικοί)}$$

Δύο ήταν, επομένως, τα βασικά ερωτήματα που παρέμεναν. Πρώτο: πώς θεμελιώνουμε τους φυσικούς αριθμούς; Και, δεύτερο: πώς παράγουμε το σύνολο των πραγματικών από τους ρητούς; Πως δηλαδή κατασκευάζουμε τους άρρητους;

Σχετικά με το πρώτο ερώτημα, υπήρξαν πολλές προσπάθειες είτε για τη φιλοσοφική δικαιολόγηση της ύπαρξης των φυσικών αριθμών είτε για την κατασκευή τους από θεμελιώδεις («λογικές») έννοιες. Στην πρώτη κατηγορία ανήκε ο Ohm. Γι' αυτόν η δικαιολόγηση της ύπαρξης και των ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών στηριζόταν στο διαισθητικό τους νόημα. Ο Weierstraß είχε μια μικτή στάση: αποδεχόταν ως δεδομένο το $\mathbb{N}$, αλλά η εξήγησή του για τη φύση του φυσικού αριθμού φαινόταν να προεικονίζει την έννοια του συνόλου. Οι Dedekind, Cantor και Frege ανήκαν στη δεύτερη κατηγορία.

Από τους Weierstraß, Dedekind και Cantor δόθηκαν και οι πιο ενδιαφέρουσες απαντήσεις στο δεύτερο ερώτημα. Προσπάθειες, όμως, είχαν γίνει και πριν από αυτούς. Οι Bolzano, Hamilton και Ohm είχαν δημοσιεύσει εργασίες πάνω στους άρρητους, οι οποίες, όμως, στερούνταν αυστηρότητας. Στη Γαλλία, ο Charles Méray (1835-1911) το 1869 είχε δημοσιεύσει μια αυστηρή θεωρία των άρρητων αριθμών.[47] Το δεύτερο ερώτημα οδήγησε τους μαθηματικούς που το αντιμετώπισαν στη χρήση «άπειρων ολοτήτων»: συγκλίνουσες απειροσειρές του Weierstraß [48], τομές Dedekind και βασικές ακολουθίες (ή ακολουθίες Cauchy) κατά τον Cantor. Σε κάθε περίπτωση βρισκόμασταν μπροστά σε σύνολα με περίπλοκη δομή που είχε να κάνει με το ενερ-

ώσεις του, τις οποίες όμως απαρνήθηκε), Dedekind (1872,1888), Heine (1872), Carl Johannes Thomae (1840-1921, δημοσ. το 1880) και Cantor (δημοσ. 1871, 1872, 1883).

[46] Ακριβέστερα, οι ρητοί και οι ακέραιοι ορίζονται ως κατάλληλες *κλάσεις ισοδυναμίας* διατεταγμένων ζευγών ακεραίων και φυσικών αριθμών αντίστοιχα.

[47] *Επισημάνσεις για τη Φύση Ποσοτήτων Καθοριζόμενων από Δεδομένες Μεταβλητές* (*Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données).* Το έργο του, αν και παρόμοιο με αυτό του Cantor, πέρασε σχεδόν απαρατήρητο, καθότι στη Γαλλία την περίοδο εκείνη δεν υπήρχε ιδιαίτερη εκτίμηση για αυτού του είδους τα προβλήματα. Για μια αναλυτική παρουσίαση του έργου του Méray, αλλά και των υπολοίπων προσπαθειών κατασκευής των αριθμών, βλ. ΦΙΛΗ 2010, σσ. 239-278, FERREIRÓS ²2007, σσ. 117-144, και KLINE 1972, σσ. 979-992.

[48] Ο Cantor θεωρούσε πως ο Weierstrass ήταν ο πρώτος που απέφυγε τον σκόπελο της χρήσης της έννοιας του αριθμού πρωτού την ορίσει.

γεία πραγματικό άπειρο. Αν και αρχικά θεωρήθηκε πως δεν χρειάζονταν, αργότερα έγινε σαφές πως οι άπειρες αυτές οντότητες απαιτούσαν τη θεμελίωση μιας θεωρίας πολλαπλοτήτων/συστημάτων/συνόλων και πως η προσπάθεια αυτή ενείχε παράξενες δυσκολίες.

Όπως έχουμε αναφέρει, οι άρρητοι, έχοντας ανακαλυφθεί από τους Πυθαγόρειους είχαν προκαλέσει κρίση στις καθιερωμένες απόψεις για τους αριθμούς γενικότερα. Οι περισσότεροι μαθηματικοί είχαν μια νεφελώδη άποψη σχετικά με το αν και ποιοι αριθμοί έχουν πραγματική υπόσταση. Ο Bolzano, το 1835, θέλοντας να κατασκευάσει αριθμητικά το σώμα των πραγματικών αριθμών, είχε τονίσει πως όχι μόνο οι ακέραιοι αλλά και οι ρητοί, οι άρρητοι, οι απειροστά μεγάλοι και απειροστά μικροί αριθμοί έχουν υπόσταση. Μάλιστα, χρησιμοποίησε την προαναφερθείσα φράση του Leibniz για το άπειρο. Και την άποψή του θα ασπαστούν και οι Riemann, Dedekind και Cantor μετά από κάποια χρόνια. Εκτός από την προσφορά του στην ανάλυση και την αντίληψή μας για τους αριθμούς, ο Bolzano είναι ο πρώτος που εισάγει την έννοια του συνόλου και εξάγει από αυτήν μια θεωρία άπειρων συνόλων:

> Ονομάζω σύνολο μια συλλογή στην οποία μπορούμε να προσδώσουμε μια έννοια έτσι ώστε η διάταξη των μερών να είναι αδιάφορη (στην οποία τίποτα το ουσιαστικό δεν έχει αλλάξει για μας όταν μονάχα η διάταξη έχει μεταβληθεί). Και ονομάζω πολλαπλότητα A ενός συνόλου τα μέρη του οποίου θεωρούνται ως ενότητες ενός ορισμένου είδους, δηλαδή όπως αντικείμενα που μπορούν να περιληφθούν στην έννοια A.[49]

Μια πολλαπλότητα είναι λοιπόν κάτι περισσότερο από ένα σύνολο –είναι ένα σύνολο ενοτήτων– και είναι αυτές οι πολλαπλότητες που μπορούμε να πούμε ότι είναι πεπερασμένες ή άπειρες. Τα σύνολά του στηρίζονται στην ιδιότητα που τα ορίζει και χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, ανάλογα με το αν λαμβάνεται ή όχι υπόψη η διάταξη. Ο Bolzano έφτασε πολύ κοντά στο να ορίσει τη δύναμη ή πληθικότητα. Όμως λόγω της μεγάλης του εξοικείωσης με την ευκλείδεια γεωμετρία δεν μπόρεσε να δεχθεί πως δύο σύνολα που έχουν 1-1 αντιστοιχία είναι ισοδύναμα. Υποστήριζε πως για να θεωρούνται δύο σύνολα ισοδύναμα πρέπει να συντρέχει και κάποιος άλλος λόγος, όπως το να έχουν ίδιο τρόπο κατασκευής. Καθότι το έργο του Bolzano έμεινε σχεδόν άγνωστο για πάνω από πενήντα χρόνια, ελάχιστη επιρροή άσκησε στους σύγχρονους και τους κατοπινούς μαθηματικούς. Παρά ταύτα, ο Weierstraß είχε δηλώσει πως είχε χρησιμοποιήσει και στηριχτεί στο έργο του.

Πρέπει να γίνει σαφές πως οι ανησυχίες για τη θεμελίωση των αριθμών και τα ερωτήματα σχετικά με τη φύση του απείρου απασχολούσαν, ως επί το πλείστον, τους Γερμανούς μαθηματικούς. Κατά τα μέσα του 19ου αιώνα δύο είναι τα σημαντικά κέντρα των μαθηματικών στη Γερμανία: η Γοττίγγη και το Βερολίνο[50]. Στην πρώτη είχε διδάξει αστρονομία και καθαρά μαθηματικά ο Gauss για πολλά χρόνια και, όταν μετά

[49] Φιλη 2010, σ. 526.

[50] Για τις σχολές Βερολίνου και Γοττίγγης, βλ. Ferreirós $^2$2007, σσ. 24-38.

το θάνατό του το 1855 η έδρα χωρίστηκε, στην έδρα των μαθηματικών ήρθε ο Dirichlet, ο οποίος πριν δίδασκε στο Βερολίνο. Ο Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) πίστευε ακράδαντα στην αριθμητικοποίηση των μαθηματικών και την πεποίθησή του αυτή την πέρασε και στις δύο σχολές στις οποίες δίδαξε ως καθηγητής. Μαζί με τους Dedekind και Riemann δημιούργησαν μια δυναμική τριάδα που κατέστησε τη Γοττίγγη κέντρο των εξελίξεων, συγκρίσιμο μόνο με το Παρίσι και το Βερολίνο. Οι Riemann και Dedekind είχαν παρόμοιο τρόπο σκέψης και παρόμοιους στόχους. Και οι δύο θεωρούσαν πως οι υιοθετημένες εκφράσεις που είχαν πλέον καθιερωθεί στα μαθηματικά θόλωναν το τοπίο της θεμελίωσης. Είχαν λοιπόν και οι δύο (ο Riemann στη θεωρία συναρτήσεών του και ο Dedekind στη θεωρία αριθμών) ως στόχο την απαλοιφή τέτοιων εκφράσεων από το οικοδόμημα που δημιουργούσαν και την αντικατάστασή τους με βασικές, όσο το δυνατόν απλούστερες, έννοιες. Η τάση αυτή έχει χαρακτηριστεί ως «αφηρημένη εννοιολογική οπτική».

Στο άλλο μεγάλο γερμανικό πανεπιστήμιο της εποχής εκείνης, το Βερολίνο, συνυπήρχαν μερικοί από τους σημαντικότερους μαθηματικούς της εποχής: Jacob Steiner (1796-1863), Ernst Kummer (1810-1893), Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815-1897) και Leopold Kronecker (1823-1891). Οι δύο τελευταίοι μοιράζονταν την πεποίθηση του Dirichlet πως τα μαθηματικά έπρεπε να αναπτυχθούν αυστηρά, ξεκινώντας από καθαρά αριθμητικές έννοιες. Όμως, ενώ στους Dedekind και Riemann η ίδια άποψη έλαβε μια αφηρημένη μορφή που συνοδευόταν από μια αποδοχή της συνολοθεωρητικής οπτικής, στον Weierstraß εκφράστηκε ως αποδοχή των άρρητων αριθμών συνδυασμένη με την οπτική γωνία των άπειρων σειρών. Στην περίπτωση του Kronecker η αριθμητικοποίηση ταυτίστηκε με την αναγωγή στους φυσικούς αριθμούς χωρίς τη χρήση άπειρων μεγεθών, είτε ήταν αυτά σειρές είτε σύνολα. Θεωρούσε πως η θεμελίωση των μαθηματικών μπορεί να γίνει σωστά, μόνο αν στηριχθούμε αποκλειστικά στην έννοια του αριθμού και από αυτήν εξαγάγουμε όλα τα υπόλοιπα, με καθαρά αλγοριθμικές μεθόδους. Όπως έλεγε, οι φυσικοί αριθμοί μάς δόθηκαν από τον Θεό, ενώ η υπόλοιπη αριθμητική και ανάλυση έχει δημιουργηθεί από τον άνθρωπο. Με αυτούς τους δάσκαλους, ξεκίνησε την μαθηματική του σταδιοδρομία ο Georg Cantor (1845-1918). Ο Steiner ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε τους όρους «ολότητα αντικειμένων» και «δύναμη» – ορολογία που υιοθέτησαν οι Dedekind και Cantor.

## 1.2. Οι πρωτεργάτες της θεωρίας συνόλων

### *1.2.1. Οι πολλαπλότητες του Riemann: Προάγγελοι των συνόλων*

Η ΠΡΩΤΗ ΑΝΑΦΟΡΑ σε έννοια που έχει να κάνει με την καντοριανή θεωρία συνόλων απαντά στο έργο του Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866). Στη διάλεξή της Habilitationsvortag του το 1854 πρότεινε τη γενική έννοια «πολλαπλότητα» (την οποία και ο Cantor και ο Dedekind φαίνεται να θεωρούν ως ταυτόσημη με αυτή του «συνόλου»[51]), πολύ διαφορετικά από τις προϋπάρχουσες αντιλήψεις:[52]

> Έννοιες μεγεθών είναι δυνατές μόνο όπου υπάρχει μια προηγηθείσα γενική αντίληψη που αποδέχεται διαφορετικούς τρόπους προσδιορισμού. Σύμφωνα με το αν μια συνεχής μετάβαση συμβαίνει ή όχι μεταξύ αυτών των προσδιορισμών, από τον ένα στον άλλο, σχηματίζουν μια συνεχή ή διακριτή πολλαπλότητα. Στην πρώτη περίπτωση οι μεμονωμένοι προσδιορισμοί καλούνται σημεία της πολλαπλότητας, ενώ στη δεύτερη στοιχεία της.[53]

Ο Riemann πρότεινε την ιδέα της πολλαπλότητας ως ένα νέο θεμέλιο για μια αφηρημένη θεωρία μεγεθών. Το γεγονός αυτό δεν σημαίνει τίποτα άλλο από το ότι πρότεινε μια νέα οπτική των θεμελίων των καθαρών μαθηματικών. Ο ορισμός του για την πολλαπλότητα καθιερώνει ρητά συνδέσμους μεταξύ συνεχών και διακριτών μεγεθών, υποδεικνύοντας πως η αριθμητική, η γεωμετρία και οι ανώτερες εξελίξεις τους μπορούν όλες να επανακαθιερωθούν μέσα στο νέο πλαίσιο.[54] Η έννοια του συνεχούς ως ιδιότητας των πολλαπλοτήτων και όχι ως συγκεκριμένης γεωμετρικής ή φυσικής ιδιότητας φαίνεται να επηρέασε τους Dedekind και Cantor οι οποίοι θεωρούσαν (εν αντιθέσει με τους σύγχρονούς τους συνολοθεωρητικούς) πως το αξίωμα της συνέχειας της γραμμής ήταν πολύ σημαντικό. Μάλιστα, και οι δύο πίστευαν πως το αξίωμα αυτό δεν αντιπροσωπεύει μια αναγκαία ιδιότητα του γεωμετρικού ή ακόμα και του φυσικού χώρου.

Σχετικά με το πραγματικό άπειρο, ο Riemann είχε θετική στάση. Θεωρούσε πως το άπειρο είναι νόμιμο αντικείμενο σπουδής, μολονότι δεν είναι δυνατή μια θετική αναπαράστασή του.[55] Επομένως, κατά την άποψή του, το πραγματικό άπειρο είναι απολύτως αποδεκτό, ακόμη και αν δεν μπορούμε να το ορίσουμε ακριβώς ή να διερευνήσουμε τις ιδιότητές του.

[51] Ενδεικτικά, αρχικά ο Cantor αναφερόταν στη θεωρία συνόλων με τον όρο θεωρία των πολλαπλοτήτων («Mannigfaltigkeitslehre»).

[52] Ως «προγόνους» του ο Riemann θεωρούσε τους Gauss και Johann Friedrich Herbart (1776-1841). Την πολλαπλότητα την εισήγαγε ως άμεσα συνδεδεμένη με την έννοια του «μεγέθους» – τα μαθηματικά μέχρι τότε θεωρούνταν ως η επιστήμη των μεγεθών. Ως έννοια συναντάται, πράγματι, και στα γραπτά των Gauss και Herbart.

[53] Μτφρ. από τον Ferreirós [2]2007, σ. 63.

[54] *Ό.π.*, σ. 65.

[55] Εδώ φαίνεται ξεκάθαρα η επίδραση του Leibniz, οι ιδέες του οποίου είχαν επηρεάσει ιδιαίτερα τους μαθηματικούς και φιλόσοφους της Γερμανίας του 19ου αιώνα – μεταξύ αυτών και τον Herbart. Βλ. *ό.π.*, σσ. 62-67.

### *1.2.2. Richard Dedekind*[56]

Ο Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) θεωρείται ο εισηγητής των αφηρημένων μαθηματικών και με βάση το έργο του, αλλά και λόγω της επιρροής που είχε σε κατοπινούς μαθηματικούς, όπως οι Emmy Noether και η ομάδα Bourbaki. Η σύγχρονη άλγεβρα ξεκίνησε με το έργο του Évariste Galois (1811-1832) και ωρίμασε με τη θεωρία των ιδεωδών του Dedekind. Ο ρόλος του Dedekind στη δημιουργία της θεωρίας συνόλων είναι πολύ σημαντικός. Αφενός μεν στο έργο του πραγματεύτηκε σχεδόν όλες τις θεμελιώδεις έννοιες της θεωρίας συνόλων, αφετέρου δε, με την επικοινωνία που διατηρούσε μέσω αλληλογραφίας με τον Cantor, τον βοήθησε να αναπτύξει τις ιδέες του πιο σωστά και να τις προωθήσει έτσι ώστε να γίνουν πιο εύκολα αποδεκτές. Ο Dedekind είχε επηρεαστεί ως επί το πλείστον από τους Dirichlet και Riemann. Την αφηρημένη εννοιολογική οπτική, που είναι δομικό στοιχείο των αφηρημένων κλάδων των μαθηματικών, την κληρονόμησε από αυτούς (κυρίως από τον δεύτερο) και τη μετέδωσε στους επόμενους. Την αρχή του Riemann πως οι τυχαίοι τρόποι αναπαράστασης (όπως ο γεωμετρικός για τις συναρτήσεις) πρέπει να αποφεύγονται, υπέρ των απλών βασικών εννοιών, την υιοθέτησε πιστά. Το ίδιο έκανε και με την άποψη του Riemann πως κάθε κλάδος των μαθηματικών πρέπει να στηρίζεται σε μια θεμελιώδη έννοια (οι αναλυτικές συναρτήσεις για τη θεωρία συναρτήσεων του Riemann, το σώμα για την άλγεβρα του Dedekind). Οι κύριοι κλάδοι που τον απασχόλησαν ήταν: (α΄) η ανάπτυξη του συστήματος των αριθμών και (β΄) η αλγεβρική και αριθμοθεωρητική έρευνα. Και τα δύο αυτά αντικείμενα έχουν να κάνουν με το βαθύ του ενδιαφέρον για τη θεμελίωση των μαθηματικών. Για τον Dedekind τα καθαρά μαθηματικά ήταν η επιστήμη των αριθμών με όλες της τις επεκτάσεις και όλα τα παρελκόμενά της. Η αντίληψή του για τα μαθηματικά ήταν πως πρόκειται για ένα οικοδόμημα χτισμένο πάνω σε λογικά αντικείμενα και όχι πάνω σε αξιώματα ή διαισθήσεις. Στην Habilitationsvortag του το 1854, σημείωνε:

> Το να αλλάζει τους ορισμούς ξανά και ξανά, χάριν της αγάπης για τους νόμους της αλήθειας στους οποίους παίζουν κάποιο ρόλο, συνιστά τη μεγαλύτερη τέχνη του συστηματικού μαθηματικού.[57]

Στην εργασία του αυτή ανακοίνωσε το πρόγραμμά που θα ακολουθούσε σχετικά με τη θεμελίωση των μαθηματικών. Η βασική ιδέα ήταν η σταδιακή ανάπτυξη της θεωρίας για τους αριθμούς, από τις ακολουθίες φυσικών αριθμών στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, μέσα από διαδοχικά βήματα κατά τα οποία ορίζονται νέοι αριθμοί και διαδικασίες. Σε μια δημοσίευσή του, το 1877, είχε διατυπώσει τέσσερις μεθοδολογικές απαιτήσεις,[58] με βάση τις οποίες έκρινε πως έπρεπε να συμβεί αυτό.

---

[56] Τα στοιχεία για τον Dedekind έχουν συναχθεί, κατά κύριο λόγο, από τον FERREIRÓS $^{2}$2007. Επίσης, αντλήθηκαν πληροφορίες από τα «Dedekind's Contributions to the Foundations of Mathematics» του E. RECK και «The Early Development of Set Theory» του J. FERREIROS: ZALTA 2012.

[57] Μτφρ. από τον FERREIRÓS $^{2}$2007, σσ. 84-85.

[58] (α΄) Η αριθμητική οφείλει να αναπτυχθεί από μόνη της, αποφεύγοντας ξένα στοιχεία και βοηθητικά μέσα. (β΄) Όταν εισάγονται νέα στοιχεία, αυτά πρέπει να ορίζονται στα πλαίσια διαδικασιών και

Το 1871, στην πρώτη παρουσίαση της θεωρίας των ιδεωδών του ως πρόταση για τη θεμελίωση της άλγεβρας, αναφέρει (με άλλες ονομασίες) κάποια από τα βασικότερα στοιχεία της μετέπειτα θεωρίας συνόλων («υποσύνολο», «τομή», «ένωση»). Τα στοιχεία αυτά τα χρησιμοποιεί ο ίδιος ένα χρόνο μετά, στην πρώτη του απόπειρα για την οικοδόμηση της συνολοθεωρίας του, όπως και ο Cantor στα έργα του (1879-1884) πάνω στα σύνολα σημείων. Η λογική/συνολοθεωρητική οπτική του χαρακτηρίζει όλο του το έργο γύρω από την άλγεβρα. Η θεωρία του λέγεται θεωρία των αλγεβρικών αριθμών και στο πλαίσιο της επινόησε δύο θεμελιώδεις έννοιες: τα «σώματα» (fields) και τα «ιδεώδη» (ideals)[59]. Και οι δύο αυτές έννοιες ορίζονται με βάση την έννοια του «συνόλου» (η οποία, κατ' αυτόν, είναι λογική έννοια) και την «αριθμητική» του $\mathbb{C}$. Ως εκ τούτου, ικανοποιούν τις μεθοδολογικές του απαιτήσεις. Πάντως, η θεωρία των αλγεβρικών αριθμών άργησε να γίνει αποδεκτή από τον μαθηματικό κόσμο[60].

Ο δεύτερος μεγάλος στόχος του Dedekind ήταν η θεμελίωση της αριθμητικής και των φυσικών αριθμών. Αν και ξεκίνησε να ασχολείται με αυτόν από πολύ νωρίς (αρχές του 1860), η πρώτη σχετική δημοσίευση είναι το 1872, οπότε δημοσιεύει το *Συνέχεια και Ασύμμετροι Αριθμοί* (*Stetigkeit und irrationale Zahlen*), αφιερωμένο στη δημιουργία των άρρητων αριθμών. Ξεκινά προϋποθέτοντας την ύπαρξη των ρητών αριθμών, διερωτάται σε τι συνίσταται το γεωμετρικό συνεχές και εισάγει την έννοια της τομής Dedekind ως μεθόδου προσέγγισης των άρρητων. Την ίδια χρονιά γράφει τις *Σκέψεις για τους Αριθμούς* (*Gedanken über Zahlen*),[61] όπου εισάγει τους φυσικούς αριθμούς ξεκινώντας από το 1 και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα του επομένου. Δεν έμεινε, όμως, ικανοποιημένος από αυτή την ανάπτυξη, καθότι ήθελε οι θεμελιώδεις ιδιότητες του $\mathbb{N}$ να προκύπτουν από τον αριθμητικό τους χαρακτήρα. Έτσι, θεώρησε πως μπορούν να αναχθούν στη λογική. Σε αυτό το πλαίσιο, ήταν απαραίτητο να οριστούν οι θεμελιώδεις λογικές έννοιες της ανθρώπινης σκέψης. Ξεχώρισε τρεις (συνοδευτικά η εν χρήσει αγγλική ορολογία): το αντικείμενο (object), το σύνολο ή σύστημα (set) και την απεικόνιση (mapping). Οι τρεις αυτές έννοιες, πράγματι, φαίνεται να μην μπορούν να αναχθούν σε κάτι πιο απλό και θεμελιώδες. Το ζήτημα ήταν, λοιπόν, να εξερευνηθεί πώς μπορεί η αριθμητική να συναχθεί

φαινομένων που να μπορούν να βρεθούν σε προηγουμένως δοσμένα αριθμητικά στοιχεία. (γ΄) Οι νέοι ορισμοί πρέπει να είναι εντελώς γενικοί, καθιστώντας δυνατή την εφαρμογή τους σε όλες τις σχετικές περιπτώσεις. Και (δ΄) οι νέοι ορισμοί πρέπει να προσφέρουν ένα στέρεο θεμέλιο για το αφαιρετικό οικοδόμημα της όλης θεωρίας· πρέπει να καθιστούν ικανό τον σταθερό ορισμό διαδικασιών στα νέα στοιχεία και την απόδειξη όλων των σχετικών θεωρημάτων. Βλ. *ό.π.*, σ. 102.

[59] Σώμα είναι κάθε υποσύνολο του συνόλου των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ που είναι κλειστό ως προς τις βασικές αλγεβρικές πράξεις. Ιδεώδες είναι κάθε σύνολο σε ένα σώμα Ω που ικανοποιεί τις εξής συνθήκες: (α΄) τα αθροίσματα και οι διαφορές οποιονδήποτε δύο αριθμών του συνόλου είναι και αυτά αριθμοί που ανήκουν στο σύνολο, και (β΄) τα γινόμενα κάθε αριθμού του συνόλου με οποιονδήποτε αριθμό του σώματος είναι αριθμοί που ανήκουν στο σύνολο. Βλ. FERREIRÓS [2]2007, σ. 92.

[60] Από τους σύγχρονούς του, μόνο οι Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832-1903) και Heinrich Martin Weber (1842-1913) έδειξαν ενδιαφέρον, και από νωρίς.

[61] Η τελική μορφή του έργου είναι το 1888: *Τι είναι και τι μπορούν να είναι οι Αριθμοί;* (*Was sind und was sollen die Zahlen?*) – με τη σημασία «ποιος είναι ο σκοπός τους».

από αυτές τις έννοιες. Αυτό το καταφέρνει με το να ορίσει τις πράξεις με έναν αφηρημένο τρόπο, θεωρώντας τες ως συναρτήσεις δύο ορισμάτων. Την πρόσθεση την όρισε ως την απεικόνιση

$$\varphi(a,1) = d(a),\ \varphi(a,d(b)) = d\varphi(a,b)$$

(με $d$ τη συνάρτηση του επομένου), ενώ για την ισότητα υιοθέτησε τον ορισμό που είχε δώσει ο Leibniz: Τα αντικείμενα $a$ και $b$ είναι ίσα (ταυτίζονται) όταν ό,τι μπορούμε να σκεφτούμε για το $a$ μπορούμε να το σκεφτούμε και για το $b$ και αντίστροφα.

Το σημαντικότερο βήμα ήταν η θεώρηση των άπειρων συνόλων. Ο Dedekind δεν υποθέτει απλώς την ύπαρξη των άπειρων συνόλων – προσπαθεί να την αποδείξει. Θεωρεί την «ολότητα όλων των αντικειμένων της σκέψης μου» και υποστηρίζει πως αυτό το σύνολο είναι άπειρο. Αυτή η αντίληψή του για το σύνολο όλων των συνόλων είναι που έκανε τρωτό το σύστημα του Dedekind απέναντι στα παράδοξα που εμφανίστηκαν μετά. Σχετικά με το σύνολο δίνει την παρακάτω εξήγηση (την οποία δεν χαρακτηρίζει ως ορισμό):

> Ένα πράγμα (thing) είναι κάθε αντικείμενο της σκέψης μου. Ένα σύστημα ή συλλογή (ή πολύπτυχο) *S* από πράγματα ορίζεται, όταν για κάθε πράγμα είναι δυνατόν να κρίνουμε αν ανήκει ή όχι στο σύστημα.[62]

Πιο κάτω δίνει και τον ορισμό του συνόλου:

> Προκειμένου να χειριστούμε όλα τα πράγματα που έχουν μια κοινή ιδιότητα, όσο οι διαφορές μεταξύ τους δεν είναι σημαντικές, χρησιμοποιούμε ένα νέο πράγμα σε σχέση με όλα τα υπόλοιπα πράγματα. Λέγεται σύστημα (system) ή συλλογή (collection) όλων αυτών των πραγμάτων.[63]

Παρατηρούμε εδώ πως ο Dedekind χρησιμοποιεί την ιδιότητα της επεκτασιμότητας, που πηγάζει από την αρχή της συμπερίληψης (κάθε ιδιότητα ορίζει μια συλλογή αντικειμένων που τη φέρουν), για τον ορισμό του συνόλου. Η αρχή αυτή χρησιμοποιούνταν ευρέως και χωρίς αμφισβήτηση την εποχή εκείνη. Παρ' όλα αυτά, με τον καιρό άρχισε να δίνει όλο και λιγότερη έμφαση στην αρχή αυτή, φτάνοντας στο τέλος στην αόριστη διακιολόγηση του Cantor.

Αμέσως μετά ακολουθεί ο ορισμός της αντιστοίχισης και του (ευδιάκριτα) αντιστοιχίσιμου συστήματος:

> Απεικόνιση (mapping) $\varphi$ ενός συστήματος $S$ καλείται ένας νόμος σύμφωνα με τον οποίο κάθε στοιχείο $s$ του $S$ αντιστοιχεί ένα συγκεκριμένο αντικείμενο $\varphi(s)$ που λέγεται εικόνα του $s$.

[62] Μτφρ. από τον Ferreirós $^2$2007, σ. 107.

[63] Μτφρ. από *ό.π.*, σ. 108.

> Ένα σύστημα *S* καλείται ευδιάκριτα απεικονίσιμο (distinctly mappable) σε ένα σύστημα *T*, όταν σε κάθε πράγμα που περιέχεται στο *S* (αρχέτυπο) μπορούμε να καθορίσουμε ένα (αντίστοιχο) πράγμα που περιέχεται στο *T* (εικόνα), έτσι ώστε σε διαφορετικά αρχέτυπα να αντιστοιχούν διαφορετικές εικόνες.[64]

Μετά από αυτό, είναι πλέον σε θέση να δώσει τον ορισμό του άπειρου συνόλου:

> Ένα σύνολο αντικειμένων *S* λέγεται άπειρο (infinite) όταν υπάρχει ένα μέρος του *U*, που είναι διαφορετικό από το *S* και στο οποίο το *S* μπορεί να απεικονιστεί ευδιάκριτα. Το *S* λέγεται πεπερασμένο (finite) όταν δεν υπάρχει μέρος του *U* διαφορετικό από το *S* στο οποίο το *S* να είναι ευδιάκριτα απεικονίσιμο[65].

Αυτός ο ορισμός δημιούργησε αίσθηση, καθότι αντετίθετο στο ευκλείδειο αξίωμα ότι το όλον είναι μεγαλύτερο από το μέρος – αξίωμα το οποίο είχαν δεχτεί όλοι οι μαθηματικοί, από τον Γαλιλαίο μέχρι τον Cauchy.[66] Ο στόχος του Dedekind να αναγάγει όλα τα καθαρά μαθηματικά στη λογική ισοδυναμούσε κατ’ αυτόν με το ότι «δεν υπάρχουν αξιώματα», και άρα τον υποχρέωνε να αποδείξει τα πάντα. Έτσι προσπάθησε να αποδείξει την ύπαρξη των άπειρων συνόλων.[67] Στη δεύτερη έκδοση των *Αριθμών* του, το 1887, ο Dedekind γράφει:

> Ένα σύστημα μπορεί να περιέχει ένα μόνο στοιχείο ή ακόμα και να είναι κενό (αν έχει δομηθεί με βάση μια ιδιότητα που περιέχει αντίφαση).[68]

Αυτός είναι ακριβώς ο τρόπος με τον οποίο αργότερα δικαιολόγησαν τη θεώρηση του κενού συνόλου οι Frege και Russell.

Ο Dedekind στο έργο του δεν έκανε την παραμικρή αναφορά στους υπερπεπερασμένους αριθμούς και στα καλώς διατεταγμένα σύνολα του Cantor. Όρισε, όμως, τα ισοδύναμα συστήματα και τις κλάσεις ισοδυναμίας, τις οποίες αυτά ορίζουν, χωρίς να κάνει διαχωρισμό σε πεπερασμένα και άπειρα συστήματα. Έφτασε, έτσι, πολύ κοντά στην έννοια της «δύναμης» ή «πληθικότητας». Τη σύνδεση των δύο έργων θα έκανε αρκετά χρόνια αργότερα ο Zermelo. Η πιο μεγάλη καινοτομία του Dedekind στη συ-

[64] *Αυτ.*

[65] Μτφρ. από *ό.π.*, σ. 109.

[66] Τον ίδιο ορισμό είχε δώσει ωστόσο, όπως θα δούμε, ο Cantor δέκα χρόνια νωρίτερα.

[67] Ένα παρόμοιο θεώρημά είχε διατυπώσει και ο Bolzano. Στην απόδειξη κανένας από τους δύο δεν μιλάει για πραγματικά σύνολα – απλά, προσπαθούν να καθιερώσουν την άποψη ότι η ιδέα του απείρου είναι έγκυρη στο βασίλειο της σκέψης.

[68] FERREIRÓS $^2$2007, σ. 227.

νολοθεωρία (σύμφωνα με τον Ferreirós) ήταν η εισαγωγή της έννοιας της «αλυσίδας»[69]. Δίνει δύο σχετικούς ορισμούς:

> Έστω ένα σύνολο $S$ και μια απεικόνιση $\varphi$: $S \rightarrow S$. Ένα υποσύνολο $K$ του $S$ καλείται αλυσίδα (chain) αν και μόνο αν $\varphi(K) \subset K$.
>
> Έστω ένα σύνολο $S$, $A$ ένα υποσύνολο του $S$ και $A_0$ η τομή όλων των υποσυνόλων $K$ του $S$ που είναι αλυσίδες και περιέχουν το $A$. Το $A_0$ καλείται αλυσίδα του συστήματος $A$.[70]

Η αλυσίδα του $A$ είναι η μικρότερη αλυσίδα που περιέχει το $A$ (κλειστότητα του $A$ μέσω της $\varphi$ στο $S$). Μάλιστα, έδωσε τρεις συνθήκες που καθορίζουν αν ένα σύνολο είναι αλυσίδα ενός συστήματος $A$. Το $A_0$ είναι ένα υποσύνολο του $S$ τέτοιο ώστε: (α) $A \subset A_0$, (β) $\varphi(A_0) \subset A_0$ και (γ) αν $K \subset S$ είναι μια αλυσίδα και $A \subset K$, τότε $A_0 \subset K$.

Με αυτή τη νέα προσέγγιση, μπορούμε να χαρακτηρίσουμε το $\mathbb{N}$ απόλυτα αποκλείοντας τους «εισβολείς» με την ακόλουθη συνθήκη: το $\mathbb{N}$ είναι η αλυσίδα του $\{1\}$. Πλέον, με τη βοήθεια της έννοιας της «αλυσίδας», ο Dedekind ήταν σε θέση να φτάσει σε άλλα δύο σημαντικά αποτελέσματα: τη γενίκευση της μαθηματικής επαγωγής[71] και το θεώρημα Cantor-Bernstein.[72]

Συνεχίζοντας, στους *Αριθμούς* του, ο Dedekind έδωσε τον ακόλουθο ορισμό:

> Ένα σύνολο $N$ είναι απλώς άπειρο όταν υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $\varphi$ του $N$ στον εαυτό του τέτοια ώστε το $N$ να είναι η αλυσίδα κάθε στοιχείου που δεν ανήκει στην $\varphi(N)$. Αυτό το ξεχωριστό στοιχείο καλείται στοιχείο-βάση και συμβολίζεται '1' και λέμε ότι το $N$ είναι διατεταγμένο από την $\varphi$. Οι βασικές συνθήκες για να είναι διατεταγμένο το $N$,[73] λοιπόν, είναι οι εξής: (1) $\varphi(N) \subset \mathrm{N}$, (2) $\mathrm{N}=1_0$, (3) $1 \notin \varphi(N)$, (4) η φ είναι αμφιμονοσήμαντη[74].

[69] Ως συνήθως, όμως, δεν προσπάθησε να εξηγήσει στους αναγνώστες του την οπτική που τον ώθησε στην εισαγωγή της, ούτε να προϊδεάσει για το πεδίο δράσης που θα μπορούσε να έχει. Αυτό το έκανε μόνο σε γράμμα του προς τον Keferstein. Βλ. DEDEKIND 1967, σσ. 98-103.

[70] Μτφρ. από τον FERREIRÓS $^2$2007, σ. 231.

[71] Θεώρημα της απόλυτης επαγωγής: Προκειμένου να δείξουμε ότι η αλυσίδα $A_0[\subset S]$ είναι μέρος του συστήματος Σ (είτε αυτό είναι μέρος του $S$ είτε όχι), αρκεί να δείξουμε ότι (α΄) $\mathrm{A} \subset \Sigma$ και (β΄) η εικόνα οποιουδήποτε κοινού στοιχείου των $A_0$ και Σ είναι επίσης και στοιχείο του Σ.

[72] Θεώρημα Cantor-Bernstein: Εάν ένα σύνολο Α είναι ισοδύναμο με ένα γνήσιο υποσύνολο του συνόλου Β και το Β είναι ισοδύναμο με ένα γνήσιο υποσύνολο του Α, τότε τα Α και Β είναι και αυτά ισοδύναμα.

[73] Οι τέσσερις συνθήκες του Dedekind είναι ισοδύναμες με τα αξιώματα που δόθηκαν από τον Peano το 1889. Συγκεκριμένα, η συνθήκη (2) είναι ισοδύναμη με το αξίωμα της επαγωγής. Το *Αρχές της Αριθμητικής Παρουσιασμένες με Νέα Μέθοδο* (*Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*, 1889 – συντμ. *PA*) είναι το βασικό έργο του Giuseppe Peano (1858-1932). Σε αυτό εισάγει τους φυσικούς αριθμούς αποκλειστικά από ένα σύνολο εννέα αξιωμάτων. Όπως εξηγεί ο ίδιος στην εισαγωγή, συμβόλισε με σύμβολα όλες τις ιδέες που εμφανίζονται στις αρχές της αριθμητικής, ώστε κάθε πρόταση να δηλώνεται μόνο μέσω αυτών των συμβόλων. Αυτά τα σύμβολα ανήκουν είτε στη λογική είτε στην ίδια την αριθμητική. Επίσης, κάνει μια εισαγωγή στους λογικούς κανόνες προκειμένου να κάνει κατανοητή τη μέθοδο. Τα αξιώματά του είναι τα εξής:

Κατόπιν, αφου αποδεικνύει πως κάθε άπειρο σύνολο περιέχει ένα απλώς άπειρο σύνολο, ορίζει τους φυσικούς αριθμούς:

> Κάθε απλώς άπειρο σύνολο αντιπροσωπεύει την αριθμητική ακολουθία, αν αγνοήσουμε την φύση των στοιχείων του και θεωρήσουμε μόνο πως είναι διαφορετικά και συνδέονται μέσω της διατακτικής απεικόνισης $\varphi$[75].

Με αυτό τον τρόπο δικαιολογεί ο Dedekind την πεποίθησή του πως εμείς οι ίδιοι κατασκευάζουμε τους αριθμούς με τον ίδιο τρόπο που κατασκευάζουμε μηχανές. Έχοντας κατασκευάσει τους φυσικούς, μπορούμε να παραγάγουμε και τους πραγματικούς αριθμούς, δημιουργώντας το αριθμητικό συνεχές, το οποίο μας επιτρέπει να καταστήσουμε σαφείς μέσα μας τις έννοιες του «χώρου» και του «χρόνου». Αυτή η άποψη έρχεται σε αντίθεση με την κυρίαρχη αντίληψη της εποχής πως η χωροχρονική διαίσθησή μας είναι αυτή που μας επιτρέπει να μιλάμε για το συνεχές.

Ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα είναι το θεώρημα του ορισμού μέσω επαγωγής:

> Έστω μια απεικόνιση θ ενός συστήματος Ω στον εαυτό του και ένα συγκεκριμένο στοιχείο ω του Ω. Υπάρχει μία και μόνο μία απεικόνιση ψ της αριθμητικής ακολουθίας $\mathbb{N}$, η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες:
> I. $\psi(\mathbb{N}) \subset \Omega$.
> II. $\psi(1) = \omega$.
> III. $\psi(n') = \theta\psi(n)$, όπου το $n$ συμβολίζει οποιονδήποτε αριθμό και $n'$ τον επόμενό του.

Με τη βοήθεια του θεωρήματος αυτού, έδειξε πως οι διατακτικοί αριθμοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εκφράσουν με τρόπο μη επιδεχόμενο αμφισβήτηση την πληθικότητα ενός πεπερασμένου συνόλου. Το γεγονός ότι ο ορισμός των πληθικών αριθμών γίνεται μέσω των διατακτικών, δίνει στην παρουσίαση του Dedekind το πλεονέ-

(1) Το 1 είναι φυσικός αριθμός.
(2) a = a.
(3) Αν a = b , τότε b = a.
(4) Αν a = b και b = c , τότε a = c.
(5) Αν οι αριθμοί a και b είναι ίσοι και ο b είναι φυσικός, τότε και ο a είναι φυσικός.
(6) Κάθε φυσικός αριθμός έχει επόμενο.
(7) Αν οι φυσικοί αριθμοί a και b είναι ίσοι, το ίδιο ισχύει και για τους επομένους τους.
(8) Το 1 δεν είναι επόμενος κανενός φυσικού αριθμού.
(9) Αν ένα σύνολο φυσικών αριθμών K περιέχει το 1 και αν όταν το K περιέχει κάποιον αριθμό a τότε περιέχει και τον επόμενό του, τότε το K περιέχει όλους τους φυσικούς αριθμούς.

Τα αξιώματα 1 και 6-9 είναι τα αξιώματα των φυσικών αριθμών ενώ τα 2-5 είναι τα αξιώματα ισότητας. Το 9 είναι το αξίωμα της μαθηματικής επαγωγής. Βλ. PEANO 1967.

[74] Μτφρ. από τον FERREIRÓS [2]2007, σσ. 234 - 235

[75] Μτφρ. από *ό.π.*, σ. 235.

κτημα να μπορεί να προσπεράσει τα παράδοξα που σχετίζονται με τους πρώτους. Από την άλλη, τα παράδοξα του Cantor και του Russell πλήττουν καίρια το οικοδόμημά του, αφού αυτό στηρίζεται στη λογικιστική προσέγγιση πως η γενική αρχή της συμπερίληψης (principle of comprehension) επαρκεί για να ορίσει καλώς ως αντικείμενο κάθε σύστημα ή σύνολο.

Ο Dedekind έφτιαξε ένα οικοδόμημα αυστηρό, στο οποίο κάθε αποτέλεσμα προκύπτει από προηγούμενα και υπ' αυτή την έννοια απετέλεσε υπόδειγμα για τους επόμενους συγγραφείς. Από την άλλη, τα θεμέλια του οικοδομήματός του είναι δύο έννοιες. Σε όλο το έργο του δεν υπάρχει ούτε ένα αξίωμα ή παραδοχή. Επειδή τα επόμενα έργα ακολουθούσαν σαφώς την αξιωματική μέθοδο, το έργο του ξεπεράστηκε γρήγορα. Πρόκειται για το ενδιάμεσο βήμα μεταξύ των παλαιότερων άναρχων μαθηματικών θεωριών και των μετέπειτα αυστηρών αξιωματικών θεμελιώσεων. Πάντως, αν και δεν είναι τυπικά αξιωματικό, μπορεί εύκολα να μετατραπεί σε τέτοιο.

### *1.2.3. Georg Cantor*[76]

Το αντικείμενο με το οποίο ασχολήθηκε αρχικά ο Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) ήταν η ανάλυση. Ο Edward Heine, συνάδελφος του στο πανεπιστήμιο της Χάλλης (όπου ο Cantor ήταν καθηγητής καθόλη τη διάρκεια της ζωής του), τον έπεισε να ασχοληθεί με το εξής ζήτημα: «Δοθείσης μιας αυθαίρετης/τυχαίας συνάρτησης η οποία μπορεί να αναπαρασταθεί από μια τριγωνομετρική σειρά, είναι απαραίτητα η αναπαράσταση μοναδική;» Ο Cantor ξεκίνησε με σκοπό να αποδείξει ότι υπάρχει μόνο ένας τρόπος να πραγματωθεί μια τέτοια ανάπτυξη για κάθε συνάρτηση, αποφασισμένος παράλληλα να καταργήσει όσο το δυνατόν περισσότερες περιοριστικές υποθέσεις. Αυτό έκανε το πρόβλημα πολύ πιο δύσκολο. Τον Απρίλιο του 1870 κατάφερε να διατυπώσει και να αποδείξει, με τη βοήθεια του θεωρήματος Cantor-Lebesgue, το θεώρημα της μοναδικότητας (συντμ.: ΘΜ):

> Εάν μια συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής $f(x)$ δίνεται από μια τριγωνομετρική σειρά που συγκλίνει για κάθε τιμή του $x$, τότε δεν υπάρχει άλλη σειρά που να συγκλίνει εξίσου για κάθε άλλη τιμή του $x$ και να αναπαριστά τη συνάρτηση $f(x)$.

Στη διαδικασία της γενίκευσης του ΘΜ, ο Cantor συνειδητοποίησε πως χρειαζόταν μια αυστηρή θεωρία πραγματικών αριθμών. Αυτό με τη σειρά του ενείχε τη δυσκολία της σύνδεσης του αριθμητικού συνεχούς των πραγματικών αριθμών με το γεωμετρικό συνεχές των σημείων σε μια ευθεία. Άρα, πριν προχωρήσει έπρεπε να αντιμετωπίσει κάποια θεμελιώδη προβλήματα. Έτσι λοιπόν, αφοσιώθηκε στην κατασκευή των άρρητων αριθμών από βασικές ακολουθίες ρητών.[77] Ξεκίνησε από το σύνολο των ρητών

[76] Βασικές πηγές: DAUBEN 1979· FERREIRÓS $^{2}$2007· ΦΙΛΗ 2010, σσ. 548-582.

[77] Η προσέγγισή του είναι σαφές πως έχει άμεση σχέση με αυτή του Weierstrass, αφού κάθε απειροσειρά μπορεί να συνδεθεί με την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της, έτσι ώστε μια ακολουθία Cauchy να αντιστοιχεί σε μια συγκλίνουσα σειρά.

*A* και, αφού έδωσε τον ορισμό της βασικής ακολουθίας, έφτασε στο σύνολο των πραγματικών *B*. Αφού όρισε και τη διάταξη, τότε επέτρεψε στον εαυτό του να αποκαλέσει «αριθμούς» τους άρρητους και κατ' επέκταση και τους πραγματικούς («σύνολα»: *Zahlengrössen*).[78] Μέχρι τότε τους αντιμετώπιζε απλώς ως σύμβολα, προκειμένου να μην προϋποθέσει την ύπαρξή τους.

Το επόμενο βήμα ήταν η αντιστοίχιση των πραγματικών αριθμών με τα σημεία της ευθείας. Για τους ρητούς αυτό ήταν εύκολο. Ήξερε πως για κάθε σημείο της ευθείας, εάν υπήρχε μια λογική σχέση που να συνδέει την αρχή 0 της ευθείας με την τετμημένη στο σημείο αυτό, τότε μπορούσε να εκφραστεί με ένα στοιχείο του πεδίου *A*. Αλλιώς, μπορούσε να προσεγγισθεί από μια ακολουθία ρητών στοιχείων του *A*. Ο Cantor θεώρησε πως τότε η ακολουθία αυτή μπορεί να είναι βασική και να πλησιάζει το σημείο αυθαίρετα κοντά, έχοντας, επομένως, ένα αντίστοιχο στοιχείο *b*, το οποίο ονόμασε «απόσταση» του σημείου από την αρχή 0. Εφόσον κάθε στοιχείο του *A* εμπεριέχεται μοναδικά στο *B*, συνεπάγεται ότι για κάθε σημείο της ευθείας υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο του *B*. Δεν μπόρεσε, όμως, να αποδείξει το αντίστροφο και αναγκάστηκε να επικαλεστεί το αξίωμα ότι «για κάθε στοιχείο του *B* υπάρχει ένα μοναδικό σημείο της ευθείας του οποίου η συντεταγμένη είναι ίση με αυτόν τον αριθμό». Αυτό το αξίωμα έδινε μια αίσθηση συμμετρίας και ολοκλήρωσης στη σχέση μεταξύ των σημείων της ευθείας και των πραγματικών αριθμών. Εφόσον είχε πλέον καθορισθεί η αντιστοίχιση σημείων της ευθείας και αριθμών, αντί να μελετά σύνολα αριθμών, μπορούσε να μελετά σύνολα σημείων.

Στη συνέχεια, ο Cantor όρισε τα παράγωγα σύνολα 1ης τάξης με τη βοήθεια των οριακών σημείων.[79] Έτσι, σε κάθε δοθέν σύνολο σημείων $P$ αντιστοιχεί κάποιο $P'$. Αν το $P'$ δεν αποτελείται από πεπερασμένο αριθμό στοιχείων, τότε παρόμοια από το $P'$ προκύπτει το $P''$ (δεύτερο παράγωγο σύνολο του $P$) κ.ο.κ. έως ότου, μετά από $n$ τέτοιες μεταβάσεις, φτάνουμε στην ιδέα του $n$-οστού παράγωγου συνόλου του $P$. Για κάποια σύνολα $P$, το $P^{(n)}$ αποτελείτο μόνο από πεπερασμένο πλήθος σημείων. Έτσι, το $P^{(n+1)}$ σε αυτές τις περιπτώσεις δεν υπάρχει. Το αρχικό σύνολο P των σημείων αυτών λέγεται π α ρ ά γ ω γ ο σ ύ ν ο λ ο *n*-ο σ τ ο ύ ε ί δ ο υ ς (derived set of the n^th^

[78] Ακόμα και τότε, όμως, σημείωνε πως τα στοιχεία του συνόλου *B* δεν έχουν από μόνα τους κάποιο νόημα. Εμφανίζονται ως στοιχεία θεωρημάτων και αποκτούν υπόσταση ανάλογα με τις ακολουθίες με τις οποίες συνδέονται. Συνεπώς, ένα στοιχείο $b \in B$ πρέπει να θεωρείται ως αριθμός μόνο χάριν ευκολίας, αφού τελικά το μόνο που κάνει είναι να αναπαριστά μια βασική ακολουθία.

[79] Έστω ένα σύνολο σημείων $P$. Ονομάζουμε ο ρ ι α κ ό σ η μ ε ί ο (ή σ η μ ε ί ο σ υ σ σ ώ ρ ε υ σ η ς) του συνόλου $P$ ένα σημείο της ευθείας για το οποίο σε κάθε του περιοχή (ή γειτονιά) βρίσκονται άπειρα σημεία του $P$, ενώ μπορεί και το ίδιο το σημείο να ανήκει στο $P$. Ως π ε ρ ι ο χ ή ε ν ό ς σ η μ ε ί ο υ εννοούμε ένα διάστημα που περιέχει το σημείο στο εσωτερικό του. Το σύνολο των οριακών σημείων του $P$, ονομάζεται π ρ ώ τ ο π α ρ ά γ ω γ ο σ ύ ν ο λ ο τ ο υ P (first derived point set of $P$) και συμβολίζεται με $P'$. Μάλιστα, από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass έχουμε δεδομένο πως κάθε άπειρο φραγμένο σύνολο σημείων θα έχει τουλάχιστον ένα οριακό σημείο και άρα θα έχει κάποιο (μη κενό) παράγωγο σύνολο.

kind)[80]. Όλα τα σύνολα σημείων *n*-οστού είδους, για πεπερασμένο *n*, συνιστούν τα π α ρ ά γ ω γ α  σ ύ ν ο λ α  π ρ ώ τ ο υ  γ έ ν ο υ ς (derived sets of the first species)[81].

Το Νοέμβριο του 1873, σε ένα γράμμα του προς τον Dedekind, ο Cantor διατυπώνει το εξής ερώτημα:

> Ας πάρουμε τη συλλογή όλων των θετικών αριθμών *n* και ας τη συμβολίσουμε με (*n*)· μετά ας πάρουμε τη συλλογή όλων των πραγματικών αριθμών *x* και ας τη συμβολίσουμε με (*x*). Η ερώτηση είναι απλά αν τα (*n*) και (*x*) μπορούν να αντιστοιχισθούν έτσι ώστε κάθε στοιχείο της μιας συλλογής να αντιστοιχεί σε ένα και μόνο στοιχείο της άλλης. Με μια πρώτη ματιά θα λέγαμε πως όχι, αυτό δεν είναι δυνατόν, γιατί το (*n*) αποτελείται από διακριτά μέρη ενώ το (*x*) σχηματίζει ένα συνεχές. Μ' αυτή την αντίρρηση όμως δεν κερδίζουμε τίποτα και, όσο κι αν τείνω στην άποψη πως τα (*n*) και (*x*) δεν επιτρέπουν τέτοια μοναδική αντιστοίχιση, δεν μπορώ να βρω τον λόγο, και, ενώ έχω προσδώσει μεγάλη σημασία σ' αυτό, μπορεί ο λόγος να είναι πολύ απλός.[82]

Ο Dedekind δεν μπόρεσε να βρει κάποια λύση του προβλήματος. Ένα μήνα αργότερα, ο Cantor με τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής και με τη βοήθεια της αρχής Bolzano-Weierstraß («μια άπειρη ακολουθία εγκιβωτισμένων κλειστών διαστημάτων πραγματικών αριθμών πρέπει να έχει μη κενή τομή») ήταν σε θέση να αποδείξει πως δεν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ $\mathbb{N}$ και [0,1], δηλαδή πως το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι υπεραριθμήσιμο[83]. Το αποτέλεσμα αυτό (που αποτελεί την πρώτη συνεισφορά στην υπερπεπερασμένη θεωρία συνόλων) δημοσιεύτηκε μαζί με την απόδειξη ότι το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών (των αριθμών, δηλαδή, που αποτελούν ρίζα κάποιας πολυωνυμικής εξίσωσης με ρητούς συντελεστές) είναι αριθμήσιμο. Η δημοσίευση (μετά από προτροπή των Dedekind και Weierstraß) είχε τίτλο «Επί μιας Χαρακτηριστικής Ιδιότητος της Συλλογής Όλων των Πραγματικών Αλγεβρικών Αριθμών» και δεν έδινε καθόλου έμφαση στο πρώτο ανατρεπτικό αποτέλεσμα, προκειμένου να μην δημιουργηθούν αντιδράσεις. Ο ίδιος ο Cantor, κάποια χρόνια πριν, είχε αποδείξει πως το σύνολο των ρητών είναι αριθμήσιμο. Από αυτά προκύπτει πως τα σύνολα των άρρητων και των υπερβατικών αριθμών είναι μη αριθμήσιμα. Το ερώτημα όμως ήταν: ποιο είναι το μέγεθος τους;

Ένα άλλο ερώτημα απασχολούσε τον Cantor, το οποίο θα διατυπώσει σε μια επιστολή του προς τον Dedekind τον Ιανουάριο του 1874:

---

[80] Για το θεώρημά του σχετικά με τις τριγωνομετρικές σειρές ο Cantor θεώρησε τα παράγωγα σύνολα 1ου είδους.

[81] Στη δημοσίευση του 1879, υιοθετεί μια πιο βολική ορολογία: Αν $P^n=\emptyset$ για κάποιο $n\in\mathbb{N}$, τότε το *P* είναι ένα σύνολο σημείων του πρώτου γένους και του *n*-οστού είδους. Αν η διαδικασία συνεχίζει για όλους τους πεπερασμένους *n*, τότε το *P* είναι ένα σύνολο σημείων του δευτέρου γένους.

[82] Μτφρ. από τον DAUBEN 1979, σ. 49.

[83] Σε αντίθεση με αυτή την τοπολογικής προσέγγισης απόδειξη, η αντίστοιχη του 1892 είναι καθαρά αριθμητική και κάνει χρήση της διαγώνιας μεθόδου του Cantor.

> Είναι δυνατόν να απεικονισθεί [αγγλ. *mapping*] μια επιφάνεια (π.χ., ένα τετράγωνο συμπεριλαμβανομένου του συνόρου του) σε μία καμπύλη (πχ μία ευθεία γραμμή συμπεριλαμβανομένων των άκρων της) έτσι ώστε σε κάθε σημείο της επιφάνειας να αντιστοιχεί ένα σημείο της ευθείας και σε κάθε σημείο της ευθείας [να αντιστοιχεί] ένα σημείο της επιφάνειας;[84]

Η απάντηση θα βρεθεί τρία χρόνια αργότερα από τον ίδιο. Σε μια επιστολή του το 1877 ανακοινώνει στον Dedekind πως, αντίθετα με την επικρατούσα μαθηματική άποψη, αυτή η παράλογη αντιστοιχία μεταξύ γραμμών και επιφανειών δεν ήταν αδύνατη. Οι συνεχείς χώροι *ρ*-διαστάσεων είχαν την ίδια δύναμη με τις καμπύλες και επομένως τα $\mathbb{R}$ και $\mathbb{R}^n$ είναι ισοδύναμα. Ο Cantor γνώριζε πολύ καλά πως αυτό το αποτέλεσμα, από το οποίο ακόμα κι ο ίδιος είχε ξαφνιαστεί,[85] ήγειρε θεμελιώδεις ερωτήσεις σχετικά με τη γεωμετρία. Ο Dedekind του απάντησε επισημαίνοντας μόνο ένα λάθος στην απόδειξή του. Ο Cantor, αφού έδωσε μια νέα απόδειξη στην οποία έδειχνε πως (I) υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των πολλαπλοτήτων $\mathbb{R}$ και $\mathbb{R}^n$ με άρρητες συντεταγμένες και (II) υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των άρρητων και του συνόλου των πραγματικών μέσα στο [0,1], παρατήρησε πως, εφόσον οι επιφάνειες και οι καμπύλες μπορούν να αντιστοιχηθούν μοναδικά, τότε η πλήρως αποδεκτή βάση για τον ορισμό της διάστασης ενός δοσμένου χώρου μοιάζει εντελώς ανεπαρκής. Αποδέχτηκε πως και αυτός, όπως και οι περισσότεροι συνάδελφοί μαθηματικοί, είχε υποθέσει εξαρχής πως τα στοιχεία ενός οποιουδήποτε *n*-διάστατου συνεχούς χώρου καθορίζονταν από *n* ανεξάρτητες συντεταγμένες, αλλά συμπλήρωσε πως αυτός πάντα αντιμετώπιζε αυτή την υπόθεση ως ένα θεώρημα που έχρηζε απόδειξης.[86]

> Μια συνεχής πολλαπλότητα *ρ* διαστάσεων, με *ρ*>1 μπορεί να τεθεί σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με μια συνεχή πολλαπλότητα μιας διάστασης με τέτοιο τρόπο ώστε σ' ένα σημείο της μιας να αντιστοιχεί ένα και μόνο ένα σημείο της άλλης […]. Βλέπουμε εδώ ποια θαυμάσια δύναμη υπάρχει στους πραγματικούς αριθμούς, ρητούς και άρρητους, που με αυτήν μπορούμε τόσο καλά να καθορίσουμε αμφιμονοσήμαντα, με τη βοήθεια μιας μόνης συντεταγμένης, τα στοιχεία μιας συνεχούς πολλαπλότητας, *ρ* φορές εκτατής. Και αμέσως θέλω να προσθέσω πως η δύναμή τους πάει ακόμα πιο μακριά, αφού […] η απόδειξή μου μπορεί να επεκταθεί […] σε πολλαπλότητες άπειρου αριθμού διαστάσεων, αρκεί να μην παίρνουν την μορφή μιας απλής ακολουθίας άπειρων όρων.[87]

---

[84] Μτφρ. από *ό.π.*, σ. 54.

[85] Σε μια δεύτερη επιστολή του αναφέρει πως μέχρι να λάβει την απάντηση του Dedekind που ενέκρινε την απόδειξή του, αν και έβλεπε το αποτέλεσμα, δεν μπορούσε να το πιστέψει («je le vois, mais je ne crois pas»). Βλ. FERREIRÓS [2]2007, σ. 188.

[86] DAUBEN 1979, σ. 57.

[87] ΦΙΛΗ 2010, σ. 566.

Την επόμενη χρονιά εκδίδεται η «Συμβολή» («Beitrag»). Ο πλήρης τίτλος του μελετήματος («Μια Συμβολή στη Θεωρία των Πολλαπλοτήτων») είναι ευθεία αναφορά στο έργο του Riemann.[88] Το κείμενο ξεκινάει με την εισαγωγή, για πρώτη φορά, της έννοιας της «δύναμης»:

> Αν δύο καλά ορισμένες πολλαπλότητες M και N μπορούν να συντονιστούν μονοσήμαντα και πλήρως, στοιχείο προς στοιχείο (το οποίο, αν μπορεί να συμβεί με έναν τρόπο, μπορεί πάντα να συμβεί με πολλούς άλλους), τότε θα χρησιμοποιούμε την έκφραση ότι αυτές οι πολλαπλότητες έχουν την ίδια δύναμη ή, επίσης, ότι είναι ισοδύναμες.[89]

Στη συνέχεια διατυπώνει χωρίς απόδειξη[90] το θεώρημα συγκρισιμότητας των πληθικών αριθμών:

> Όταν οι M και N δεν έχουν την ίδια δύναμη, είτε η M είναι ισοδύναμη με ένα μέρος της N (η δύναμη της M είναι μικρότερη από αυτή της N) είτε η N είναι ισοδύναμη με ένα μέρος της M (η δύναμη της N είναι μικρότερη από αυτή της M).[91]

Ύστερα, παραθέτει κάποια παραδείγματα δυνάμεων. Πρώτα έχουμε τις δυνάμεις των πεπερασμένων πολλαπλοτήτων, οι οποίες συμπίπτουν με το πλήθος των στοιχείων τους. Σε αυτό το σημείο προειδοποιεί τον αναγνώστη πως, ενώ στα πεπερασμένα σύνολα η δύναμη ενός μέρους είναι μικρότερη από τη δύναμη του όλου («Αρχή του Ευκλείδη»), στις άπειρες πολλαπλότητες αυτή η ιδιότητα εξαφανίζεται πλήρως. Η μικρότερη άπειρη δύναμη είναι αυτή του $\mathbb{N}$. Η κλάση αυτή περιέχει πολλές πολλαπλότητες: το σώμα των αλγεβρικών αριθμών, τα σύνολα σημείων 1ου γένους κ.λπ. Επίσης, δίνει δύο θεωρήματα που λένε πως τα υποσύνολα και η ένωση αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμα. Τέλος, αφού ορίζει ως γραμμικές πολλαπλότητες τα άπειρα υποσύνολα του $\mathbb{R}$, η εργασία κλείνει με μια πρώτη διατύπωση της Υπόθεσης του Συνεχούς (Continuum Hypothesis – σύντμ.: CH):

> Μέσω επαγωγικής αιτιολόγησης, στην οποία δεν θα αναφερθούμε εδώ, καταλήγουμε πως φαίνεται πιθανό ο αριθμός των κλάσεων των γραμμικών πολλαπλοτήτων να είναι πεπερασμένος, και συγκεκριμένα 2.
>
> Σύμφωνα με αυτό, οι γραμμικές πολλαπλότητες θα χωρίζονται σε δύο κλάσεις: η πρώτη θα περιέχει όλες τις πολλαπλότητες που μπορούν να έρθουν στη μορφή μιας συνάρτησης του n (όπου το n διατρέχει όλους τους θετικούς ακεραίους) ενώ η δεύτερη αποτελείται από αυτές που μπορούν να έρθουν στη

[88] FERREIRÓS $^2$2007, σ. 187.

[89] Μτφρ. από *ό.π.*, σ. 188.

[90] Όπως θα δούμε, η απόδειξη δόθηκε από τον Zermelo το 1904.

[91] Μτφρ. από *αυτ.*

μορφή μιας συνάρτησης του x (όπου το x μπορεί να πάρει όλες τις τιμές ≥0 και ≤1).[92]

Αμέσως μετά την δημοσίευση της «Συμβολής», που καθιέρωνε την αντιστοιχία μεταξύ συνεχών πεδίων μίας και δύο διαστάσεων, σημειώθηκαν αρκετές απόπειρες, με καλύτερη αυτή του Eugen Netto (1848-1919),[93] να αποδειχτεί το θεώρημα του αναλλοίωτου των διαστάσεων, το οποίο είχε διατυπώσει ο Dedekind[94]:

> Εάν κάποιος καταφέρει να καθιερώσει μια αμοιβαία μονοσήμαντη και πλήρη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων μιας συνεχούς πολλαπλότητας A α διαστάσεων και των σημείων μιας συνεχούς πολλαπλότητας B β διαστάσεων, με τα α και β να είναι άνισα, τότε αυτή η αντιστοιχία είναι απαραίτητα εντελώς μη συνεχής.

Ο Netto ήταν αυτός που επέστησε την προσοχή στα σοβαρά ζητήματα που είχαν εγερθεί από το αποτέλεσμα του Cantor σχετικά με τον ορισμό μίας διάστασης n, ενός εσωτερικού ή ενός συνοριακού σημείου κ.λπ. Μάλιστα, στην δημοσίευσή του, το 1879, έδωσε τον ορισμό της διάστασης και θεώρησε συγκεκριμένα χαρακτηριστικά των κανονικών χώρων του. Η τελική απόδειξη του θεωρήματος δόθηκε από τον Brouwer το 1911.

Μεταξύ των ετών 1879 και 1884, ο Cantor πραγματοποίησε έξι δημοσιεύσεις (υπό τον ενιαίο τίτλο «Περί Άπειρων Γραμμικών Πολλαπλοτήτων/Συνόλων Σημείων») προκειμένου να εισάγει τα βασικά στοιχεία της νέας του θεωρίας συνόλων. Τα τέσσερα πρώτα δημοσιεύματα καταπιάνονταν με μαθηματικά προβλήματα στα οποία έβρισκαν τα σύνολά του εφαρμογή. Στο πέμπτο (το οποίο είναι γνωστό ως «Θεμέλια» – «Grundlagen»), του 1883, άρχισε να ασχολείται και με τα φιλοσοφικά θέματα που άπτονταν της ερμηνείας του απείρου. Χαρακτηριστική είναι η φιλοσοφική μεταστροφή του Cantor σε αυτά τα χρόνια. Αρχικά, επηρεασμένος από τον δάσκαλό του Weierstraß και τον Dedekind, είχε ασπαστεί τη λογικιστική προσέγγισή τους πως τα καθαρά μαθηματικά πηγάζουν από την καθαρή νόηση μέσα από τους θεμελιώδεις κανόνες της λογικής. Παράλληλα, έχοντας διαβάσει Πλάτωνα, Leibniz και Spinoza, είχε υιοθετήσει έναν ακραίο ρεαλισμό όσον αφορά στις μαθηματικές οντότητες. Αυτές τις δύο τάσεις του μπόρεσε να τις φέρει σε συμφωνία στα «Θεμέλια», προβαίνοντας στην παραδοχή πως η έμφυτη και η παροδική πραγματικότητα πάντα συμπίπτουν.

Στο πρώτο κείμενο της σειράς αυτής, ο Cantor εισάγει τις βασικές έννοιες των «παράγωγων συνόλων», των «παντού-πυκνών συνόλων»[95] και της «πληθικότητας της

[92] Μτφρ. από τον FERREIRÓS ²2007, σ. 190.

[93] DAUBEN 1979, σ. 71.

[94] Μτφρ. από *ό.π.*, σ. 57.

[95] Ο ορισμός των παντού-πυκνών συνόλων δίνεται ως εξής. Εάν το P βρίσκεται μερικώς η εξ ολοκλήρου στο διάστημα (α…β), τότε μπορεί να συμβεί η αξιοσημείωτη περίπτωση οποιοδήποτε αυθαίρε-

δύναμης», καθεμιά από τις οποίες υποδεικνύει έναν καινούργιο τρόπο ταξινόμησης των υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Επίσης, ξεχωρίζει δύο κατηγορίες συνόλων: τα αριθμήσιμα, των οποίων η δύναμη είναι αυτή του $\mathbb{N}$, και τα συνεχή μη αριθμήσιμα, των οποίων η δύναμη είναι αυτή του $\mathbb{R}$. Εκτός αυτού, έδωσε και τα αντίστοιχα παραδείγματα. Αριθμήσιμα άπειρα σύνολα είναι οι φυσικοί, οι ρητοί και οι αλγεβρικοί αριθμοί. Μη αριθμήσιμα είναι όλα τα σύνολα πρώτου και δευτέρου γένους (όλα τα παντού-πυκνά σύνολα είναι απαραιτήτως σύνολα του δεύτερου γένους). Σε αυτή την εργασία, ο Cantor αποφεύγει να απαντήσει στο ερώτημα: «Πόσες διαφορετικές δυνάμεις των συνόλων σημείων υπάρχουν;» Περιορίστηκε στο να καταστήσει σαφές πως τα $\mathbb{N}$ και $\mathbb{R}$ είναι πράγματι διακριτά.

Το 1880, ο Cantor δημοσιεύει το δεύτερο κείμενο της σειράς, στο οποίο επαναδιατυπώνει παλιές ιδέες στα πλαίσια των γραμμικών συνόλων σημείων, δίνει κι άλλους ορισμούς και κάνει την παρατήρηση πως τα σύνολα πρώτου γένους μπορούν να χαρακτηριστούν πλήρως από τα παράγωγα σύνολά τους. Αυτό, όμως, δεν ισχύει για τα σύνολα δεύτερου γένους, και άρα έπρεπε να εισαχθούν νέες ιδιότητες. Για να το κάνει αυτό, θεώρησε ένα γενικό σύνολο $P$ σημείων δευτέρου γένους και παρατήρησε πως το πρώτο παράγωγο σύνολο του, το $P'$, μπορεί να δοθεί από μια ανάλυση σε δύο ξένα μεταξύ τους υποσύνολα, $P' \equiv \{Q, R\}$, όπου το Q είναι το σύνολο όλων των σημείων που ανήκουν στα σύνολα πρώτου γένους του $P'$ και το R είναι το σύνολο των σημείων που περιέχονται σε κάθε παράγωγο σύνολο του $P'$ (και, συνεπώς, είναι δευτέρου γένους). Ο συμβολισμός του για την τομή των συνόλων μιας συλλογής συνόλων $P_n$ ήταν «$\mathcal{D}(P_1, P_2, P_3, \ldots)$». Οπότε ονομάζει:

$$\mathrm{R} \equiv \mathcal{D}(P', P'', \ldots).$$

Εφόσον το R είναι το σύνολο των σημείων που ανήκουν σε κάθε παράγωγο σύνολο του P΄, ισχύει επίσης ότι:

$$\mathrm{R} \equiv \mathcal{D}(P'', P''', \ldots)$$
$$\mathrm{R} \equiv \mathcal{D}(P^{(\mathrm{n})}, P^{(\mathrm{n}+1)}, P^{(\mathrm{n}+2)}, \ldots).$$

Επομένως, το R μπορεί να συμβολιστεί ως $\mathrm{R} \equiv P^{(\infty)}$ και λέγεται παράγωγο σύνολο του $P$ τάξης $\infty$. Ξεκινώντας από το $\mathrm{R} \equiv \mathcal{D}(P', P'', \ldots) = P^{(\infty)}$ και θεωρώντας πως $P^{(\infty)} \neq 0$, ο Cantor συμβόλισε το πρώτο παράγωγο σύνολο του $P^{(\infty)}$ ως $P^{(\infty+1)}$ και το $n$-οστό ως $P^{(\infty+\mathrm{n})}$. Μάλιστα, με αυτό τον τρόπο μπορούμε να δημιουργήσουμε παράγωγα σύνολα της μορφής $P^{(n_0\infty^{\nu}+n_1\infty^{\nu-1}+\ldots+n_{\nu})}$. Θεωρώντας, λοιπόν, το $\nu$ ως μεταβλητή, μπορούμε να πάρουμε μια ατελείωτη ακολουθία τέτοιων μορφωμάτων:

$$P^{(n\infty^{\infty})}, P^{(\infty^{\infty+1})}, P^{(\infty^{\infty+n})}, P^{(\infty^{n\infty})}, P^{(\infty^{\infty^{n}})}, P^{(\infty^{\infty^{\infty}})}, \ldots \qquad (*)$$

---

τα μικρό διάστημα (γ…δ) μέσα στο (α…β) να περιέχει σημεία του P. Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε πως το P είναι παντού-πυκνό (everywhere-dense) στο διάστημα (α…β). Απόδ. από *ό.π.*, σ. 78.

Σε αυτή τη φάση η έμφαση δίνεται στα παράγωγα σύνολα και όχι στους υπερπεπερασμένους αριθμούς που μόλις έχουν εισαχθεί. Αυτοί αντιμετωπίζονται απλά ως σύμβολα, χωρίς ιδιαίτερο υπαρκτικό status, τα οποία απλά μας βοηθούν να ξεχωρίσουμε και να ταυτοποιήσουμε τα παράγωγα σύνολα. Χάρη στα σύνολα (*) κατέστη δυνατό να περιγραφούν σύνολα του δεύτερου γένους που να περιέχουν μόνο ένα σημείο και που προφανώς δεν είναι παντού-πυκνά. Αυτό σήμαινε πως τα παντού-πυκνά σύνολα δεν μπορούσαν να περιγράψουν επαρκώς το συνεχές.

Στο τρίτο δημοσίευμα, του 1882, ο στόχος ήταν να επεκταθεί η έννοια της δύναμης. Χαρακτηριστικό είναι το παρακάτω απόσπασμα:

> Η έννοια της δύναμης, η οποία περικλείει μέσα της ως ειδική περίπτωση την έννοια του ακέραιου αριθμού, αυτού του θεμέλιου της θεωρίας αριθμών, και η οποία πρέπει να θεωρείται ως το γενικότερο γνήσιο χαρακτηριστικό των απαρτισμών [αγγλ. *aggregates*], δεν περιορίζεται σε καμία περίπτωση στα γραμμικά σύνολα σημείων. Μπορεί να θεωρηθεί πολύ περισσότερο ως ένα γνώρισμα κάθε καλώς-ορισμένου συνόλου, όποια κι αν είναι τα εννοιολογικά χαρακτηριστικά των στοιχείων του.[96]

Ο Cantor παραδέχεται πως το να καθοριστεί ποια σύνολα είναι καλώς-ορισμένα δεν είναι εύκολη υπόθεση. Δίνει, λοιπόν, κάποιες συνθήκες σύμφωνα με τις οποίες να μπορούμε να τα ορίσουμε.

> Καλώ έναν απαρτισμό (μια συλλογή, ένα σύνολο) στοιχείων που ανήκουν σε οποιοδήποτε πεδίο εννοιών καλώς-ορισμένο, αν από τον ορισμό του και από την αρχή αποκλίσεως του τρίτου θεωρείται ως εσωτερικά καθορισμένο. Πρέπει, επίσης να είναι εσωτερικά καθορισμένο σχετικά με το εάν: (α΄) οποιοδήποτε αντικείμενο που ανήκει στο ίδιο πεδίο εννοιών ανήκει και στον απαρτισμό, (β΄) οποιαδήποτε δύο αντικείμενα που ανήκουν στο σύνολο, ανεξάρτητα από τυπικές διαφορές, είναι ίσα.[97]

Για τα καλώς-ορισμένα σύνολα η έννοια της «δύναμης» προκύπτει άμεσα. Η δύναμη ενός συνόλου μπορεί να είναι εσωτερικά καθορισμένη, αλλά και πάλι δεν είναι εύκολο να βρεθεί. Όπως και να έχει, η σημασία της είναι πολύ μεγάλη:

> Αν κρατήσουμε μόνο τα μαθηματικά στο μυαλό μας και αφήσουμε κατά μέρος τις υπόλοιπες περιοχές της νόησης, η θεωρία συνόλων με την ερμηνεία που δόθηκε εδώ, περιέχει την αριθμητική, τη θεωρία συναρτήσεων και τη γεωμετρία. Τις ενώνει, στο πλαίσιο της έννοιας της δύναμης, σε μια ανώτερη ενότητα. Έτσι, το συνεχές και το διακριτό αντιμετωπίζονται από την ίδια οπτική γωνία, μετρώνται με τα ίδια κριτήρια.[98]

[96] Μτφρ. από *ό.π.*, σ. 82.
[97] Μτφρ. από *ό.π.*, σ. 83.
[98] Μτφρ. από *ό.π.*, σ. 84.

Το πιο εντυπωσιακό αποτέλεσμα του άρθρου είναι πως, μέσω ενός θεωρήματος[99], ο Cantor ήταν σε θέση να υποστηρίξει ότι είναι δυνατή η συνεχής κίνηση σε μη συνεχείς χώρους. Ο Cantor συνέχισε διατυπώνοντας και ορισμένα πολύ σημαντικά συμπεράσματα:

> Η πίστη μας στο συνεχές του χώρου είναι σε γενικές γραμμές στηριγμένη στα στοιχεία που συνηγορούν για το συνεχές της κίνησης. Έχοντας δείξει πως η συνεχής κίνηση είναι δυνατή (εν δυνάμει νοητή) σε ασυνεχείς χώρους, πρέπει να αλλάξουν οι αρχικές υποθέσεις της έρευνας. […] Η αντίληψη του χώρου ως συνεχούς, δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια αυθαίρετη υπόθεση. […] Η διαίσθηση, είναι ένας πολύ φτωχός οδηγός στα αυστηρά μαθηματικά. Έτσι, δεν μπορούμε να ελπίζουμε πως θα μάθουμε πολλά για το συνεχές από τη γεωμετρία. Η εμπιστοσύνη μας πρέπει να στηριχθεί μόνο πάνω στην αριθμητική.

Η εργασία του 1883 εισάγει την έννοια του «απομονωμένου συνόλου»[100] και στη συνέχεια αποδεικνύει κάποια σημαντικά αποτελέσματα σχετικά με την αριθμησιμότητα των απομονωμένων και των παράγωγων συνόλων.

Τα «Θεμέλια μιας Γενικής Θεωρίας Πολλαπλοτήτων» («Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre») είναι το ένα από τα δύο σημαντικότερα έργα του Cantor. Εδώ εμφανίζεται για πρώτη φορά η θεωρία των υπερπεπερασμένων αριθμών. Το συνηθέστερο επιχείρημα για τη μη ύπαρξη άπειρων αριθμών ήταν πως οι πράξεις της αριθμητικής δεν διατηρούνται. Ο Cantor θεώρησε πως αυτή η λανθασμένη αντίληψη δημιουργούσε σύγχυση, και γι’ αυτό έκανε μια πλήρη παρουσίαση των αριθμών, των ιδιοτήτων τους και των συνόλων που ορίζουν.[101] Αυτό ήταν απαραίτητο προκειμένου να δικαιολογήσει την ύπαρξή τους που είχε άμεση σχέση με το πραγματικό άπειρο, έννοια που παραδοσιακά είχε αποφευχθεί. Επόμενο βήμα ήταν η υπεράσπιση του πραγματικού απείρου έναντι οιασδήποτε φιλοσοφικής ή θεολογικής ένστασης. Προκειμένου να το κάνει αυτό, μελετάει τους φιλοσόφους των προηγούμενων αιώνων (π.χ., Locke, Descartes, Spinoza, Leibniz, Hobbes, Berkeley) που είχαν παραγάγει τα πιο πειστικά επιχειρήματα ενάντια στο πραγματικό άπειρο και προσπαθεί να

[99] Σε έναν $n$-διάστατο, άπειρο, συνεχή χώρο A, έστω ένας άπειρος αριθμός n-διάστατων, συνεχών υπο-πεδίων (α), τα οποία είναι διακριτά και το πολύ συνεχόμενα στα σύνορά τους. Τότε το σύνολο (α) αυτών των υπο-πεδίων είναι πάντα αριθμήσιμο. Παρατηρήσεις: Για $n=1$, το αποτέλεσμα είναι απαραίτητο για οποιαδήποτε περαιτέρω ανάπτυξη της θεωρίας συνόλων. Για κάθε συλλογή ξεχωριστών διαστημάτων (α,β) ορισμένων σε μια άπειρη ευθεία γραμμή, που συμπίπτουν το πολύ στα οριακά τους σημεία, η συλλογή είναι απαραιτήτως αριθμήσιμη. Για $n=2$, συνεπάγεται πως οποιοδήποτε σύνολο ξεχωριστών επιφανειών στις δύο διαστάσεις είναι αριθμήσιμο. Για $n=3$, με αντίστοιχο χώρο αυτόν των φυσικών φαινομένων, το θεώρημα μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως είναι δυνατή η συνεχής κίνηση σε μη-συνεχείς χώρους. Βλ. *ό.π.*, σσ. 84-85. Εκτός αυτού, το παραπάνω θεώρημα βοήθησε τον Cantor να αποδείξει για πρώτη φορά μια αθενή μορφή του θεωρήματος Cantor-Bendixson.

[100] Ένα σύνολο σημείων Q λέγεται απομονωμένο (isolated) αν και μόνο αν κανένα από τα οριακά του σημεία δεν ανήκει σε αυτό. Δηλαδή, συμβολικά, $\mathcal{D}(Q,Q') \equiv 0$.

[101] *Ό.π.*, σ. 122.

εντοπίσει τα λάθη στη συλλογιστική τους. Αυτό που παρατήρησε ήταν πως όλοι τελικά έκαναν αναφορά στην αυθεντία του υπέρτατου, απέραντα άπειρου όντος. Οι απόψεις τους συνοψίζονταν στην πεποίθηση πως το άπειρο ανήκει μόνο στον Θεό. Η απάντησή του ήταν πως υπάρχει το αριθμήσιμο άπειρο, το απόλυτο άπειρο που ανήκει στον θεό και οι υπερπεπερασμένοι αριθμοί που βρίσκονται ενδιάμεσα,[102]

Σε αυτή την εργασία κατάφερε να δώσει έναν ικανοποιητικό ορισμό του συνεχούς (έναν στόχο που ο ίδιος είχε θέσει από το 1879) και με αυτό τον τρόπο να κάνει πιο πλήρη τη θεωρία συνόλων. Από την πρώτη παράγραφο καθιστά σαφείς τους λόγους για τη δημοσίευση αυτή:

> Όπως κατέληξα μέχρι τώρα, η παρουσίαση των ερευνών μου σχετικά με τη θεωρία συνόλων έφθασε σε ένα σημείο όπου μπορώ να την συνεχίσω μόνο αν προεκτείνω πέρα από τα πρότερα όρια την έννοια του πραγματικά υπάρχοντος αριθμού. Αυτή η επέκταση προσανατολίζεται σε μία κατεύθυνση που, από όσο γνωρίζω, κανείς μέχρι σήμερα δεν ερεύνησε.
>
> Εξαρτώμαι από αυτή τη γενίκευση της έννοιας του αριθμού [...]. Ελπίζω ότι, αυτή η κατάσταση δικαιολογεί, ή, αν είναι αναγκαίο, συγχωρεί, την εισαγωγή των φαινομενικά παράξενων ιδεών στα επιχειρήματά μου. Πράγματι, ο σκοπός είναι να γενικεύσω ή να επεκτείνω τους ακέραιους πραγματικούς πέρα από το άπειρο.[103] Όσο ριψοκίνδυνο κι αν φανεί αυτό, εκφράζω όχι μόνο την ελπίδα, αλλά και τη σταθερή πεποίθηση πως με τον καιρό αυτή θα αναγνωριστεί ως η απλούστερη, πιο κατάλληλη και φυσική δυνατή επέκταση [της έννοιας του αριθμού]. Αντιλαμβάνομαι, όμως, πως σε αυτή την προσπάθεια θέτω τον εαυτό μου σε αντίθεση με οπτικές ευρέως διαδεδομένες σχετικά με το μαθηματικό άπειρο και με απόψεις που συχνά έχουν υποστηριχθεί πάνω στη φύση των αριθμών.[104]

Ο Cantor εισάγει εδώ τους υπερπεπερασμένους αριθμούς οι οποίοι διακρίνονται από τους πραγματικούς ως προς το εξής: Μέχρι τότε, σε όλα τα μαθηματικά, το άπειρο χρησιμοποιούνταν ως εν δυνάμει ή δυνητικό. Τα όρια αναφέρονται στο άπειρο, αλλά δεν είναι ολοκληρωμένες απειροστές οντότητες. Οι υπερπεπερασμένοι αριθμοί, όμως, χρησιμοποιούν το ολοκληρωμένο, το ενεργεία πραγματικό, άπειρο. Πλέον, με την εισαγωγή τους, ο Cantor ήταν σε θέση να κάνει συγκεκριμένες ακριβείς παρατηρήσεις σχετικά με τις δυνάμεις των μη αριθμήσιμα άπειρων συνόλων. Ο ορισμός των υπερπεπερασμένων αριθμών ήταν το πρώτο βήμα προς μια πιο διεξοδική περιγραφή των δυνάμεων των άπειρων συνόλων γενικά.

> Η ακολουθία 1, 2, 3, … (I) στηρίζεται στη συνεχή πρόσθεση μονάδων. Ας ονομάσουμε αυτή τη διαδικασία ορισμού των πεπερασμένων διατακτικών αριθμών πρώτη παραγωγική αρχή [αγγλ. *first principle of generation*]

[102] *Ό.π.*, σσ. 123-128.

[103] Φιλη 2010, σ. 572.

[104] Μτφρ. από τον Dauben 1979, σ. 96.

και την ακολουθία (I) πρώτη κλάση αριθμών. Είναι προφανές πως η κλάση όλων των πεπερασμένων ακέραιων αριθμών (I) δεν έχει μεγαλύτερο στοιχείο. Ας θεωρήσουμε τώρα έναν νέο αριθμό ω, ο οποίος εκφράζει τη φυσική, κανονική διάταξη ολόκληρου του συνόλου (I). Αυτός ο νέος αριθμός ω, ο πρώτος υπερπεπερασμένος αριθμός, είναι ο πρώτος που έπεται ολόκληρης της ακολουθίας των φυσικών αριθμών ν. Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε την πρώτη παραγωγική αρχή στον ω και να παραγάγουμε κι άλλους υπερπεπερασμένους διατακτικούς αριθμούς:

$$\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+\nu, \ldots \qquad \text{(II)}$$

Καθότι, όμως, και πάλι δεν έχουμε μεγαλύτερο στοιχείο στην ακολουθία (II), μπορούμε να φανταστούμε έναν άλλο αριθμό που να παριστάνει ολόκληρη την ακολουθία (II). Ονομάζοντας αυτόν τον αριθμό 2ω, προχωρούμε παρακάτω:

$$2\omega, 2\omega+1, 2\omega+2, \ldots, 2\omega+\nu, \ldots \qquad \text{(III)}$$

Ο αριθμός ω μπορεί να θεωρηθεί ως ένα όριο το οποίο οι φυσικοί αριθμοί προσεγγίζουν αλλά ποτέ δεν φτάνουν. Αυτή η παραδοχή εισάγει τη δεύτερη παραγωγική αρχή: Αν υπάρχει οποιαδήποτε συγκεκριμένη διαδοχή ορισμένων πραγματικών αριθμών, για την οποία δεν υπάρχει μέγιστος, τότε δημιουργείται ένας νέος αριθμός ως όριο αυτών των αριθμών – ορίζεται, δηλαδή, ως ο επόμενος μεγαλύτερος από όλους αυτούς.

Με διαδοχική χρήση των δύο παραγωγικών αρχών, είναι πάντα δυνατόν να παράγουμε νέους αριθμούς και με πάντα καθορισμένη διαδοχή. Η πιο γενική μορφή τους μπορεί να γραφεί ως εξής: $\nu_0\omega^{\mu} + \nu_1\omega^{\mu-1} + \ldots + \nu_{\mu}$. Επειδή μόνο με αυτές τις αρχές η παραγωγή νέων αριθμών θα ήταν ατελείωτη, ο Cantor πρόσθεσε την τρίτη παραγωγική αρχή ή αρχή του περιορισμού:

> Ορίζουμε την δεύτερη κλάση αριθμών (II) ως την συλλογή όλων των αριθμών α (σε αύξουσα σειρά) που μπορούν να δημιουργηθούν με βάση τις δύο πρώτες παραγωγικές αρχές: ω, ω+1, … , $(\nu_0\omega^{\mu} + \nu_1\omega^{\mu-1} + \ldots + \nu_{\mu})$, … , $\omega^{\omega}$, … , α,… οι οποίοι υπόκεινται στον περιορισμό πως όλοι οι αριθμοί που προηγούνται του α (από το 1 και μετά) συνιστούν ένα σύνολο ισοδύναμο με την πρώτη κλάση αριθμών (I).[105]

Ο Cantor επέλεξε το ω ως σύμβολο των υπερπεπερασμένων αριθμών, αντί για το σύνηθες ∞, ακριβώς για να υπογραμμίσει την πραγματική τους υπόσταση. Για τον ίδιο λόγο, θεώρησε πως οι υπερπεπερασμένοι είναι άρρηκτα συνδεδεμένοι με τους άρρητους. Το να μην δεχθεί κανείς τους πρώτους σημαίνει αυτόματα πως δεν δέχεται και τους τελευταίους, με τα προφανή αποτελέσματα για τα μαθηματικά. Το άλλο επιχείρημα ήταν πως από τη στιγμή που οι υπερπεπερασμένοι με τις πράξεις συγκροτούν ένα συνεπές σύστημα, δεν συντρέχει λόγος να μη γίνουν αποδεκτοί. Προκειμένου να

[105] DAUBEN 1979, σσ. 97-98.

υπερασπιστεί φιλοσοφικά την άποψη του αυτή έκανε την διάκριση μεταξύ της υποκειμενικής (subjective) ή έμφυτης (immanent) πραγματικότητας, η οποία εξαρτάται από το εάν το αντικείμενο είναι καλά ορισμένο, και της διυποκειμενικής (transsubjective) ή παροδικής (transient) πραγματικότητας, που έχει να κάνει με την αντιστοίχιση της έννοιας σε διαδικασίες ή σχέσεις του φυσικού κόσμου. Κατά τον Cantor, οι μαθηματικές οντότητες πρέπει να ανταποκρίνονται μόνο στο κριτήριο της έμφυτης πραγματικότητας, δηλαδή της συνέπειας.[106] Αυτή του η στάση του απέναντι σε καθετί καινούργιο στα μαθηματικά τον καθιστά προάγγελο της φορμαλιστικής αντίληψης για τα μαθηματικά. Έχοντας προσθέσει στο οπλοστάσιό του τους υπερπεπερασμένους, ξεκίνησε να εξερευνά τη δύναμη των συνόλων (I) και (II) και απέδειξε πως η δύναμη του (II) είναι η αμέσως μεγαλύτερη από αυτήν του (I). Ένα επίσης σημαντικό αποτέλεσμα ήταν πως οι υπερπεπερασμένοι αριθμοί, με τον τρόπο που δημιουργούνται, είναι αυτόματα καλώς-διατεταγμένοι:

> Καλώς-διατεταγμένο [αγγλ. *well-ordered*] λέγεται κάθε καλώς-ορισμένο σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι τοποθετημένα σε μια συγκεκριμένη δεδομένη διαδοχή, έτσι ώστε υπάρχει πρώτο στοιχείο του συνόλου και για κάθε άλλο στοιχείο υπάρχει ένας ορισμένος επόμενος [*successor*], εκτός εάν είναι το τελευταίο στοιχείο της διαδοχής.[107]

Η καινούργια έννοια που εισάγεται μετά από αυτούς τους ορισμούς είναι η αρίθμηση (numbering, Anzahl) των στοιχείων ενός καλώς-διατεταγμένου άπειρου συνόλου, η οποία εκφράζει την σειρά με την οποία εμφανίζονται τα στοιχεία του. Μάλιστα, η πραγματικότητα της ύπαρξης των υπερπεπερασμένων αριθμών πηγάζει ακριβώς από την ύπαρξη των καλώς-διατεταγμένων συνόλων. Προκειμένου να ισχυροποιήσει το συμπέρασμά του, ο Cantor απέδειξε πως δεδομένου οποιουδήποτε άπειρου καλώς-διατεταγμένου συνόλου, υπάρχει πάντα ένας αριθμός από τη δεύτερη κλάση αριθμών (II) ο οποίος αντιπροσωπεύει μοναδικά τη διάταξή του (ή την αρίθμησή του). Για παράδειγμα:

Το σύνολο $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots)$ έχει αρίθμηση $\omega$

Το σύνολο $(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu, \ldots, \alpha_1)$ έχει αρίθμηση $\omega+1$

Το σύνολο $(\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_\nu, \ldots, \alpha_1, \alpha_2)$ έχει αρίθμηση $\omega+2$

Το σύνολο $(\alpha_1, \alpha_3, \ldots ; \alpha_2, \alpha_4, \ldots)$ έχει αρίθμηση $2\omega$.

Η διάκριση μεταξύ αριθμού και αρίθμησης έφερε νέες οπτικές σχετικά με τη διαφορά μεταξύ πεπερασμένων και άπειρων συνόλων. Για ένα πεπερασμένο σύνολο η στοι-

[106] *Ό.π.*, σσ. 129-132. Χαρακτηριστική είναι η στάση που κράτησε ο Cantor απέναντι στους απειροστά μικρούς αριθμούς (infinitesimals). Αυτοί ορίζονται ως γραμμικοί αριθμοί, διάφοροι του μηδενός, οι οποίοι είναι μικρότεροι από κάθε πραγματικό αριθμό. Αυτό, κατά τη γνώμη του, ήταν από μόνο του μια αντίφαση και άρα οι απειροστά μικροί αριθμοί είναι αυτοαναιρούμενοι.

[107] Μτφρ. από *ό.π.*, σ. 101.

χείων, ανεξαρτήτως της διάταξής τους, η αρίθμησή του είναι πάντα η ίδια και ταυτίζεται με τη δύναμή του, δηλαδή το σύνολο των n στοιχείων του. Τα άπειρα σύνολα, όμως, είναι πολύ πιο ενδιαφέροντα. Ισοδύναμα άπειρα σύνολα (ακόμα και με τον ίδιο ακριβώς αριθμό στοιχείων) μπορεί να έχουν διαφορετική αρίθμηση ανάλογα με την διάταξη των στοιχείων τους. Έτσι έφτασε στο εξής αποτέλεσμα:

> Κάθε σύνολο με δύναμη που ανήκει στην πρώτη κλάση αριθμών είναι απαριθμήσιμο από αριθμούς της δεύτερης κλάσης και μόνο. Μάλιστα, το σύνολο μπορεί πάντα να διαταχθεί με τέτοιο τρόπο ώστε να αριθμείται από οποιονδήποτε αριθμό της δεύτερης κλάσης αριθμών. Αυτός ο αριθμός δίνει την αρίθμηση των στοιχείων του συνόλου σε σχέση με τη συγκεκριμένη διαδοχή.[108]

Αντίστοιχα αποτελέσματα ισχύουν και για σύνολα μεγαλύτερης δύναμης. Για τα άπειρα σύνολα, η διάκριση μεταξύ δύναμης και αρίθμησης είναι σημαντική. Αν και κάθε αριθμός α της δεύτερης κλάσης αριθμών διακρίνει μια συγκεκριμένη αρίθμηση στοιχείων, η δύναμη οποιουδήποτε συνόλου με αρίθμηση α είναι πάντα ίδια: είναι αριθμήσιμο.

Η έννοια της αρίθμησης είναι μια γενίκευση της έννοιας του αριθμού και ως τέτοια, έχει και τις αντίστοιχες πράξεις, τις οποίες όρισε στη συνέχεια ο Cantor. Μάλιστα, πίστευε πως οι νόμοι της αριθμητικής που έθεσε για τους υπερπεπερασμένους αριθμούς δεν είναι αυθαίρετα ορισμένοι. Προκύπτουν άμεσα από την εσωτερική διαίσθηση του νου με απόλυτη βεβαιότητα. Είναι σημαντικό να σημειώσουμε πως, και για την πρόσθεση και για τον πολλαπλασιασμό, η αντιμεταθετική ιδιότητα ισχύει μόνο για τα πεπερασμένα σύνολα,[109] ενώ η προσεταιριστική ισχύει και για τα άπειρα. Αυτό το γεγονός, δημιουργεί δυσκολία στον ορισμό των αντίστροφων πράξεων και στην παραγοντοποίηση ενός αριθμού σε «γινόμενο πρώτων»[110]. Για παράδειγμα, για την αφαίρεση ισχύουν τα εξής. Αν ξ είναι υπερπεπερασμένος και α, β αριθμήσιμοι, τότε η εξίσωση $\alpha+\xi=\beta$ έχει πάντα μοναδική λύση $\xi=\beta-\alpha$, ενώ η $\xi+\alpha=\beta$ συχνά δεν έχει λύση. Ακόμα κι αν έχει λύση, αυτή δεν είναι πάντα μοναδική. Μπορεί να παίρνει ακόμα και άπειρες τιμές. Σε αυτή την περίπτωση, σίγουρα υπάρχει μια ελάχιστη τιμή της λύσης, την οποία συμβολίζουμε $\beta_{-\alpha}$ και συνήθως είναι διαφορετική από την $\beta-\alpha$. Πάντως, έχοντας ορίσει τις βασικές πράξεις, ο Cantor είχε, πλέον, καταφέρει να δώσει «αληθινή υπόσταση» στο κατασκεύασμά του. Ο δρόμος για την προσέγγιση του συνεχούς ήταν ανοιχτός.

Σχετικά με το συνεχές ο Cantor διακήρυξε πως η διαίσθησή μας ήταν και είναι ο χειρότερος οδηγός. Θεωρούσε απαράδεκτη την αντίληψη που είχε διαμορφωθεί με το πέρασμα των αιώνων, πως, δηλαδή, το συνεχές είναι μια έννοια a priori αντιληπτή και που δεν μπορεί να καταστεί αντικείμενο μελέτης ή διανοητικής ανάλυσης. Αυτή η στάση ήταν, κατά τη γνώμη του, ισοδύναμη με το να αναγάγει κανείς το πρόβλημα

---

[108] Μτφρ. από *ό.π.*, σ. 103.

[109] Π.χ., $1+\omega=\omega$ αλλά $\omega+1\neq\omega$ και $2\omega=\omega$ αλλά $\omega 2\neq\omega$.

[110] Θα λέγαμε ότι ο υπερπεπερασμένος αριθμός α είναι πρώτος αν η μοναδική ανάλυσή του $\alpha=\beta\gamma$ απαιτούσε $\beta=1$ ή $\beta=\alpha$.

του συνεχούς σε θρησκευτικό δόγμα. Ο χρόνος και ο χώρος, ως υποκειμενικές a priori μορφές εποπτείας, δεν μπορούν να προσφέρουν τίποτα στην εννοιολογική ανάλυση του συνεχούς. Η απάντηση, λοιπόν, έπρεπε να βρεθεί τοπολογικά και το ερώτημα τίθεται ως εξής: Δεδομένου ενός *n*-διάστατου χώρου $G_n$, πότε μπορεί να θεωρηθεί ως συνεχές ένα σύνολο *P* αριθμητικών σημείων στον $G_n$; Το πρώτο του συμπέρασμα, στο οποίο κατέληξε μέσω του θεωρήματος Cantor-Bendixson, ήταν πως το *P* πρέπει να είναι τέλειο σύνολο.[111] Αυτό το χαρακτηριστικό, όμως, δεν είναι επαρκές για να χαρακτηρίσει ένα σύνολο ως συνεχές. Ως παράδειγμα, έδωσε τα γνωστά σύνολα Cantor τα οποία, αν και είναι τέλεια, δεν είναι συνεχή. Το στοιχείο που έλειπε ήταν η συνεκτικότητα.[112] Ένα σύνολο, λοιπόν, είναι συνεχές όταν είναι τέλειο και συνεκτικό.

Όπως σημειώνει ο Cantor, οι προηγούμενοι ορισμοί που είχαν δοθεί για το συνεχές ήταν είτε εντελώς άστοχοι είτε ανεπαρκείς. Οι πιο πετυχημένοι ήταν αυτοί του Bolzano στα *Παράδοξα του Απείρου* (*Paradoxien des Unendlichen*, 1851) και του Dedekind στο *Συνέχεια και Ασύμμετροι Αριθμοί* (1872). Ο πρώτος, όμως, είχε συλλάβει μόνο την ιδιότητα της συνεκτικότητας, ενώ ο δεύτερος είχε εστιάσει αποκλειστικά στο χαρακτηριστικό της τελειότητας. Ο δικός του ορισμός συνδύαζε τις δύο προσεγγίσεις και περιέγραφε πλήρως το συνεχές. Το μόνο πλέον πραγματικό ζητούμενο, προκειμένου να ολοκληρωθεί η μελέτη της δύναμης των άπειρων συνόλων ήταν η απάντηση στην υπόθεση του συνεχούς. Τα τέλεια σύνολα έχουν ένα πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό: έχουν όλα την ίδια δύναμη. Από τη στιγμή που το συνεχές είναι τέλειο, όλα τα τέλεια σύνολα έχουν τη δύναμη του συνεχούς. Ο Cantor ήλπιζε να αποδείξει πως η δύναμη του συνεχούς είναι αυτή της δεύτερης κλάσης αριθμών και με αυτό τον τρόπο να πάει ένα βήμα πιο μπροστά και τη μελέτη των τέλειων συνόλων.

Στην τελευταία δημοσίευση της σειράς, το 1884, γίνεται μια αναλυτική παρουσίαση των πιο σημαντικών και χαρακτηριστικών ιδιοτήτων των τέλειων συνόλων. Σκοπός ήταν η χρησιμοποίησή τους στην ανάλυση των δυνάμεων. Αφού εισήγαγε τον ορισμό του κλειστού (το σύνολο που περιέχει όλα τα οριακά του σημεία), του πυκνού ως προς τον εαυτό του (το σύνολο που είναι υποσύνολο του πρώτου παράγωγου συνόλου του) και του διαχωρισμένου συνόλου (αυτό του οποίου κανένα υποσύνολο δεν είναι πυκνό ως προς τον εαυτό του), έφτασε σε κάποια σημαντικά αποτελέσματα σχετικά με αυτά τα είδη συνόλων.

Ο Cantor σκόπευε να δημοσιεύσει και ένα έβδομο μέρος σχετικό με τη θεωρία των συνόλων και των υπερπεπερασμένων αριθμών. Αν και το είχε έτοιμο το 1885, δεν το δημοσίευσε.[113] Σε αυτό εισάγεται μια εντελώς διαφορετική προσέγγιση στην έννοια της «δύναμης». Προηγουμένως, είχε ασχοληθεί με τα καλώς-ορισμένα σύνολα

[111] Τ έ λ ε ι ο (perfect) λέγεται ένα σύνολο αν και μόνο αν ταυτίζεται με το πρώτο του παράγωγο σύνολο: P=P΄. Βλ. DAUBEN 1979, σ. 111.

[112] Καλούμε σ υ ν ε κ τ ι κ ό (connected) ένα σύνολο σημείων T εάν για οποιαδήποτε δύο σημεία t και t΄ του T υπάρχει πάντα ένας πεπερασμένος αριθμός σημείων $t_1, t_2, \dots, t_v$ του T έτσι ώστε οι αποστάσεις $(t,t_1)$, $(t_1,t_2)$, …, $(t_v,t΄)$ να είναι όλες μικρότερες από οποιονδήποτε αυθαίρετο αριθμό ε. Βλ. *ό.π.*, σ. 109.

[113] «Αρχές μιας Θεωρίας των Τύπων Διάταξης: Μέρος Πρώτο» («Principien einer Theorie der Ordnungstypen: Ernste Mittheilung», 1885).

μόνο προκειμένου να δικαιολογήσει την ύπαρξη των υπερπεπερασμένων αριθμών του. Πλέον, όμως, είχε συνειδητοποιήσει πως η δύναμη ως ιδιότητα των συνόλων είναι ανεπαρκής για να ορίσει το συνεχές (ανάλογα με τη διάταξη των στοιχείων αλλάζει η δύναμη του άπειρου συνόλου) και πως τα απλώς-διατεταγμένα σύνολα[114] κατείχαν ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Η πιο βασική αλλαγή, πάντως, έχει να κάνει με τη θεμελιώδη έννοια της θεωρίας του. Πριν, όλη η θεωρία του είχε οικοδομηθεί γύρω από τα σύνολα σημείων, τα οποία έχουν όλα μέσα τους την ιδιότητα της απόστασης. Τώρα, έκανε την τελευταία γενίκευση. Αντί για σύνολα σημείων, θα ασχολούνταν με τύπους διάταξης: «Κάθε απλώς-διατεταγμένο σύνολο A έχει έναν συγκεκριμένο τύπο διάταξης [αγγλ. *order type*]. Με αυτό εννοώ τη γενική έννοια στην οποία ανήκουν όλα τα παρόμοια σύνολα με το A.»[115] Στη συνέχεια απέδειξε πως τα καλώς-διατεταγμένα σύνολα είναι μια ειδική περίπτωση των απλώς-διατεταγμένων. Με την εισαγωγή των τύπων διάταξης είχε οικοδομήσει πια το εννοιολογικό πλαίσιο των υπερπεπερασμένων αριθμών του: η δύναμη για τους πληθικούς (cardinal) και ο διατακτικός τύπος για τους διατακτικούς (ordinal).

Από το 1885 μέχρι το 1890 ο Cantor δεν δημοσιεύει τίποτα σχετικό με μαθηματικά. Μόνο το 1891, στο 1ο συνέδριο της νεοσυσταθείσας Ένωσης Γερμανών Μαθηματικών, αποφάσισε να λύσει τη σιωπή του.[116] Παρουσίασε μια νέα απόδειξη της μη αριθμησιμότητας των πραγματικών αριθμών που χρησιμοποιούσε τη διαγώνια μέθοδο. Η απόδειξη αυτή στηρίζεται σε μια αρχή που είναι γνωστή και ως θεώρημα Cantor[117] και μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: «Οι δυνάμεις των καλώς-ορισμένων συνόλων δεν έχουν μέγιστο· ή, αλλιώς, στη θέση οπουδήποτε συνόλου A μπορεί να μπει ένα σύνολο B που έχει μεγαλύτερη δύναμη από το A.» Από αυτή τη διαδικασία μπορούσε πλέον να υποστηρίξει την ύπαρξη της ατέρμονης διαδοχής των υπερπεπερασμένων πληθικών αριθμών, των δυνάμεων των υπερπεπερασμένων συνόλων.

Το 1895, ο Cantor δημοσιεύει το πρώτο μέρος της «Συμβολής» («Beiträge»). Εν αντιθέσει με τα «Θεμέλια» («Grundlagen»), εδώ δεν προσπάθησε να δικαιολογήσει φιλοσοφικά την ύπαρξη των οντοτήτων που εισήγαγε. Έχοντας αντιληφθεί την παρουσία του παράδοξου του μεγίστου υπερπεπερασμένου αριθμού, είχε πλέον αποστασιοποιηθεί από τη λογικιστική φιλοσοφική προσέγγιση των Dedekind και Frege. Το επιχείρημά του ήταν πως μπορούμε να διανοηθούμε ένα πλήθος πραγμάτων, «τα πολλά», χωρίς να μπορούμε να τα περικλείσουμε σε ένα όλον. Αυτό φαινόταν να ενισχύει την πλατωνική αντίληψη για τα σύνολα. Αντί, λοιπόν, να υπερασπιστεί την ύπαρξη των συνόλων, έκανε μια ξεκάθαρη μαθηματική παρουσίαση των βασικών στοιχείων της θεωρίας συνόλων του. Η πρώτη φράση του κειμένου είναι κλασική:

[114] Ένα σύνολο λέγεται απλώς-διατεταγμένο (simply-ordered) αν, για οποιαδήποτε δύο στοιχεία του e και e΄ είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε ακριβώς μια από τις σχέσεις e<e΄ , e=e΄ , e>e΄.

[115] DAUBEN 1979, σ. 152

[116] *Ό.π.*, σσ. 163 – 168.

[117] Η συνήθης διατύπωσή του είναι η εξής: Δεδομένου οιουδήποτε συνόλου, το σύνολο όλων των υποσυνόλων του έχει μεγαλύτερη δύναμη (πληθικότητα).

> Με τη λέξη σύνολο εννοούμε μια οποιαδήποτε συνάθροιση M σε μια ολότητα οριστικών και διακεκριμένων στοιχείων m (τα οποία καλούνται στοιχεία του M) της αισθητηριακής αντίληψης ή της νόησής μας.[118]

Ο ορισμός αυτός, πλέον εντελώς απελευθερωμένος από οποιαδήποτε συγκεκριμένη ιδιότητα των συνόλων σημείων, συνεπάγεται δύο βασικές ιδιότητες των συνόλων γενικά. Πρώτο, κάθε σύνολο A έχει στοιχεία ή μέλη. Γράφουμε «$x \in A$» για «το αντικείμενο *x* είναι μέλος του (ή ανήκει στο) A». Και, δεύτερο, ένα σύνολο καθορίζεται από τα στοιχεία του – δηλαδή, αν τα A, B είναι σύνολα, τότε A=B ακριβώς στην περίπτωση που $(\forall x)[x \in A \leftrightarrow x \in B]$ (ιδιότητα της έκτασης)[119]. Η ιδιότητα της έκτασης πηγάζει από την αρχή της συμπερίληψης και είναι ο βασικός λόγος που καθιστά και το σύστημα του Cantor τρωτό στο παράδοξο του Russell. Ακολουθεί ο ορισμός της δύναμης:

> Καλούμε δύναμη [αγγλ. *power*] ή πληθικό αριθμό [*cardinal number*] του M και συμβολίζουμε με $\overline{\overline{M}}$ τη γενική έννοια που προκύπτει από το σύνολο M με τη βοήθεια των ενεργών ικανοτήτων της σκέψης μας. Η έννοια προέρχεται με αφαίρεση από τον χαρακτήρα των διάφορων στοιχείων m και από τη διάταξη με την οποία εμφανίζονται στο M. Τα σύνολα με πεπερασμένο πληθικό αριθμό λέγονται πεπερασμένα, ενώ αυτά με υπερπεπερασμένο πληθικό αριθμό υπερπεπερασμένα σύνολα.[120]

Ένα μεγάλο ερώτημα αναδύθηκε αμέσως σχετικά με τους πληθικούς αριθμούς και αυτό είναι το εάν είναι πάντα αυστηρά συγκρίσιμοι. Ο Cantor απέφυγε να το θίξει. Συνέχισε ορίζοντας την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό για τους πληθικούς αριθμούς όπως την πρόσθεση δυνάμεων. Η πρόσθεση είναι αντιμεταθετική, καθότι εξαρτάται μόνο από την πληθικότητα και όχι από τα σύνολα. Αυτό δεν συμβαίνει με τον πολλαπλασιασμό, και έτσι η ύψωση σε δύναμη ενός πληθικού αριθμού απαιτούσε την εισαγωγή μιας νέας έννοιας, εκείνης της κ ά λ υ ψ η ς (covering)[121]. Με τη βοήθεια της κάλυψης ο Cantor κατάφερε να φτάσει με αλγεβρικές μεθόδους σε αποτελέσματα που προηγουμένως μπορούσε να προσεγγίσει μόνο με γεωμετρικό τρόπο. Εκτός αυτού, ήταν πλέον σε θέση να κατασκευάσει τους φυσικούς αριθμούς ως πεπερασμένους πληθικούς αριθμούς και άρα να δώσει την πιο σύντομη και φυσική θεμελίωση για τη θεωρία αριθμών. Συνέχισε δίνοντας τους ορισμούς των απλώς-διατεταγμένων

---

[118] Μτφρ. από *ό.π.*, σ. 170.

[119] ΜΟΣΧΟΒΑΚΗΣ 1993, σ. 2.

[120] Μτφρ. από τον DAUBEN 1979, σ. 171.

[121] Καλούμε κάλυψη ενός συνόλου N με στοιχεία του συνόλου M, ή πιο απλά κάλυψη του N από το M, ένα νόμο σύμφωνα με τον οποίο κάθε στοιχείο n του N συνδέεται με ένα συγκεκριμένο στοιχείο του M, όπου αυτή η σύνδεση μπορεί να εφαρμοστεί επαναλαμβανόμενα. Το στοιχείο του M που συνδέεται με το n είναι, ας πούμε, μια μονότιμη συνάρτηση του n και μπορούμε να το συμβολίσουμε ως f(n) και να το αποκαλούμε συνάρτηση κάλυψης του n. Την αντίστοιχη κάλυψη του N θα τη συμβολίζουμε με f(N). Απόδ. από *ό.π.*, σ. 174.

συνόλων[122] και των τύπων διάταξης[123] και έφτασε σε ένα σημαντικό συμπέρασμα: Εάν από τον τύπο διάταξης $\overline{M}$ του συνόλου M, «αφαιρέσουμε» και τη διάταξη των στοιχείων του, τότε λαμβάνουμε τη δύναμη $\overline{\overline{M}}$ του συνόλου. Εάν ένα σύνολο *P* έχει αντίστοιχο διατακτικό τύπο $\overline{P} = \alpha$ τότε η δύναμή του, δηλαδή ο αντίστοιχος πληθικός αριθμός, συμβολίζεται $\overline{\overline{P}} = \alpha$. Για τα πεπερασμένα σύνολα, πληθικοί και διατακτικοί αριθμοί ταυτίζονται. Για τα άπειρα σύνολα εισάγονται οι συμβολισμοί των υπερπεπερασμένων πληθικών αριθμών:

- $\aleph_0$ (άλεφ-μηδέν) είναι ο πληθικός αριθμός του συνόλου των φυσικών και είναι ο μικρότερος υπερπεπερασμένος πληθικός αριθμός.
- c (από το *continuum*) είναι ο πληθικός αριθμός των πραγματικών αριθμών.
- $\aleph_1$ είναι ο επόμενος πληθάριθμος μετά το $\aleph_0$.

Αμέσως μετά ο Cantor παρουσιάζει κάποια αλγεβρικά συμπεράσματα:

$$\aleph_0+1 = \aleph_0+2 = \aleph_0+\nu = \aleph_0+\aleph_0 = \aleph_0 \cdot 2 = \aleph_0 \cdot \nu = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0.$$

Επίσης, δημιουργεί τη σύνδεση μεταξύ πληθικών και διατακτικών αριθμών για τα βασικά σύνολα των φυσικών και των πραγματικών αριθμών θέτοντας $\aleph_0 = \overline{\overline{\{\nu\}}}$, όπου {ν} το σύνολο όλων των πεπερασμένων πληθικών αριθμών, και γράφοντας $\overline{\omega} = \overline{\omega+1} = \overline{\omega+2} = ... = \overline{\alpha} = \aleph_1$.

Το δεύτερο μέρος της «Συμβολής» έκανε δύο χρόνια να δημοσιευτεί λόγω της προσπάθειας του Cantor να εδραιώσει την ισότητα $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ και να αποδείξει την υπόθεση του συνεχούς. Αν και δεν το κατάφερε, σε αυτό το κείμενο προσφέρει μια πλήρη πραγμάτευση του άλεφ-ένα. Ξεκινάει ορίζοντας τα καλώς-διατεταγμένα σύνολα ως ειδική περίπτωση των απλώς-διατεταγμένων και τα τμήματα των καλώς-διατεταγμένων συνόλων,[124] και με τη βοήθεια αυτών των ορισμών φτάνει στο πολύ σημαντικό αποτέλεσμα της συγκρισιμότητας δύο καλώς-διατεταγμένων συνόλων, το οποίο είναι άμεσα εφαρμόσιμο στη γενική περίπτωση της σύγκρισης δύο διατακτικών αριθμών:

> Αν F και G είναι δύο καλώς-διατεταγμένα σύνολα, τότε ισχύει αποκλειστικά μια από τις τρεις περιπτώσεις:

---

[122] Με άλλα λόγια, ένα σύνολο καλείται απλώς-διατεταγμένο αν όλα τα στοιχεία του είναι διατεταγμένα σύμφωνα με έναν κανόνα τέτοιο ώστε για οποιαδήποτε δύο από αυτά να μπορούμε να πούμε πως το ένα προηγείται του άλλου.

[123] Σε κάθε διατεταγμένο σύνολο M αντιστοιχεί ένας συγκεκριμένος τ ύ π ο ς  δ ι ά τ α ξ η ς (order type) ή πιο απλά τ ύ π ο ς, τον οποίο θα συμβολίζουμε με $\overline{M}$. Με αυτό εννοούμε τη γενική έννοια που προκύπτει από το M εάν με αφαίρεση αγνοήσουμε τον χαρακτήρα των στοιχείων m του M, αλλά διατηρήσουμε τη διάταξη με την οποία εμφανίζονται στο M. O τύπος των φυσικών αριθμών συμβολίζεται με «ω», των ρητών με «η» και των πραγματικών με «θ».

[124] Αν f είναι ένα στοιχείο του καλώς-διατεταγμένου συνόλου F, διαφορετικό από το πρώτο στοιχείο $f_1$, τότε καλούμε το σύνολο A όλων των στοιχείων του F που είναι μικρότερα από το f, τ μ ή μ α (segment) του F και μάλιστα τ μ ή μ α  τ ο υ  F  π ο υ  π ρ ο σ δ ι ο ρ ί ζ ε τ α ι  α π ό  τ ο  σ τ ο ι χ ε ί ο f.

1. Τα F και G είναι όμοια.
2. Υπάρχει ένα συγκεκριμένο τμήμα $B_1$ του G που είναι όμοιο με το F.
3. Υπάρχει ένα συγκεκριμένο τμήμα $A_1$ του F που είναι όμοιο με το G.

Προκειμένου να αναλύσει το άλεφ-ένα, έπρεπε να ερευνήσει προσεκτικά τη δεύτερη κλάση αριθμών:

> Η δεύτερη κλάση αριθμών $Z(\aleph_0)$ είναι η ολότητα όλων των διατακτικών τύπων α των καλώς-διατεταγμένων συνόλων πληθικότητας $\aleph_0$.

Μάλιστα, αποδεικνύει πως το $Z(\aleph_0)$ είναι καλώς-διατεταγμένο. Χάρη σε αυτή την απόδειξη, φτάνει στο θεώρημα πως η δύναμη της ολότητας {α} όλων των αριθμών α της δεύτερης κλάσης αριθμών δεν είναι ίση με $\aleph_0$. Επιπλέον, καταλήγει πως η δύναμη της {α} είναι ο δεύτερος μικρότερος υπερπεπερασμένος πληθικός αριθμός, δηλαδή το $\aleph_1$. Προκειμένου να προχωρήσει στα επόμενα αποτελέσματά του, όπως οι δυνάμεις υπερπεπερασμένων αριθμών, εισήγαγε την υπερπεπερασμένη επαγωγή.[125]

Συνοψίζοντας, ο πρώτος χαρακτηρισμός του Cantor σχετικά με το συνεχές δόθηκε το 1874 και ήταν το αποτέλεσμα ότι οι πραγματικοί αριθμοί είναι μη αριθμήσιμοι. Παρ' όλα αυτά, δεν μπορούσε να διακρίνει τις ιδιαίτερες ιδιότητές του συνεχούς. Αυτό το κατάφερε δέκα χρόνια μετά, στα «Θεμέλια», όπου όρισε το συνεχές λεπτομερώς σε σχέση με τα σύνολα σημείων, αποδεικνύοντας πως υπάρχουν μόνο δύο δυνάμεις για τα άπειρα σημειοσύνολα: αυτή των φυσικών και αυτή των πραγματικών αριθμών. Τα σύνολα σημείων που έχουν τη δύναμη του συνεχούς είναι αυτά που είναι τέλεια και συνεκτικά. Το αποτέλεσμα αυτό, όμως, ήταν περιορισμένο στα σύνολα σημείων και στη μετρική ιδιότητα της απόστασης μεταξύ σημείων, προκειμένου να προσδιοριστεί η συνεκτικότητα των εκάστοτε συνόλων. Αυτό τον περιοριστικό παράγοντα τον ξεπέρασε με τις «Αρχές» («Principien»), όπου εισήγαγε την έννοια του διατακτικού τύπου ως γενίκευσης του συνόλου σημείων, χωρίς, όμως, να καταφέρει να φτάσει σε θετικά συμπεράσματα σχετικά με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του διατακτικού τύπου του συνεχούς σε σχέση με τα υπόλοιπα είδη διάταξης συνόλων. Μια δεκαετία αργότερα, στο πρώτο μέρος της «Συμβολής», κατάφερε να κάνει ακριβώς αυτό: να δώσει μια όσο πιο πλήρη περιγραφή του διατακτικού τύπου θ του συνεχούς μπορούσε να δοθεί με τα εργαλεία που υπήρχαν. Την εποχή αυτή υπήρχαν κάποια βασικά ζητήματα που απασχολούσαν τον Cantor σχετικά με τη θεωρία συνόλων:

- Η συγκρισιμότητα των υπερπεπερασμένων πληθικών αριθμών.
- Το ερώτημα αν κάθε υπερπεπερασμένη δύναμη είναι απαραίτητα ένα άλεφ.
- Το θεώρημα καλής διάταξης: Κάθε καλώς-ορισμένο σύνολο μπορεί να είναι καλώς-διατεταγμένο.

125 DAUBEN 1979, σ. 211

Τα ερωτήματα αυτά αλληλοσυνδέονταν: Εάν υπάρχει σύνολο που να μην είναι καλώς-διατεταγμένο, τότε η δύναμή του δεν θα είναι ένα από τα άλεφ, και επομένως αυτό το σύνολο είναι μη συγκρίσιμο. Στην προσπάθεια να βρει κάποια λύση για αυτά τα προβλήματα, συνάντησε το παράδοξο του μέγιστου πληθικού και του μέγιστου διατακτικού αριθμού. Μάλιστα, ανακοίνωσε την αντίφαση αυτή στους Dedekind, Bernstein και Hilbert. Η αδυναμία του να απαντήσει σε αυτά τα ερωτήματα και η ανακάλυψη του παραπάνω παραδόξου, τον έπεισε πως η θεωρία συνόλων έπασχε σε κάποια θεμελιώδη σημεία και τον ώθησε να ασχοληθεί περισσότερο στη «Συμβολή» με την προσπάθεια καθιέρωσης της θεωρίας υπερπεπερασμένων αριθμών πρώτης και δεύτερης κλάσης.

# 2. ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΟΞΑ

## 2.1. Η εμφάνιση των παραδόξων

Στο προηγουμενο Κεφαλαιο παρακολουθήσαμε την πορεία των μαθηματικών από την αρχαιότητα μέχρι και τη δημιουργία της θεωρίας συνόλων από τους Cantor και Dedekind προς τα τέλη του 19ου αιώνα. Το 1902 ο Russell ανακοινώνει στον Frege το περίφημο παράδοξό του. Πριν από την ανακοίνωση αυτή, και συγκεκριμένα από το 1895, ο Cantor είχε ανακαλύψει πως η συνολοθεωρία του οδηγούσε σε κάποιο συγκεκριμένο παράδοξο που ακριβώς μετά από δύο χρόνια δημοσιεύτηκε (όχι από τον ίδιο) και έγινε γνωστό ως «το παράδοξο του Burali-Forti». Το 1899 ο Cantor ανακάλυψε ένα ακόμη απλούστερο παράδοξο που είναι πια γνωστό σαν «το παράδοξο του Cantor». Το παράδοξο του Russell, λοιπόν, δεν έπεσε ως κεραυνός εν αιθρία. Ήταν απλώς «η σταγόνα που ξεχείλισε το ποτήρι». Τα παράδοξα έφεραν μια φιλοσοφική κρίση αμφιβολίας πρώτα στη συνολοθεωρία, και μέσα από αυτή σε όλα τα μαθηματικά, η οποία δεν ξεπεράστηκε τελείως για τριάντα περίπου χρόνια. Σε αυτή τη φάση εμφανίστηκαν τρία βασικά φιλοσοφικά ρεύματα, τα οποία είχαν διαφορετική πρόταση για την έξοδο από την κρίση.

Μερικοί, όπως ο Hermann Weyl (1885-1955),[126] ο Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966) και ο μαθητής του Arend Heyting (1898-1980), δεν δίστασαν να απορρίψουν τις βάσεις των μαθηματικών όπως είχαν θεμελιωθεί και να προτείνουν ριζοσπαστικές λύσεις, οι οποίες, σύμφωνα με αυτούς, έθεταν σε πιο στέρεα θεμέλια τα μαθηματικά. Η βασική τους θέση ήταν πως δεν επιτρέπεται να μιλάμε για οντότητες τις οποίες δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε, και επομένως το μεγαλύτερο κομμάτι της θεωρίας συνόλων πρέπει να αποβληθεί από τα μαθηματικά.[127] Ο ίδιος ο Brouwer λέει: «τα ιντουισιονιστικά μαθηματικά είναι μια θεμελιωδώς α-γλωσσική δραστηριότητα του νου που έχει τις ρίζες της στην αντίληψη μιας κίνησης του χρόνου».[128] Πρόκειται, λοιπόν, για μια αναβίωση παλιών αντιλήψεων σχετικά με την πηγή της μαθηματικής ενόρασης, όπως είχε εκφραστεί από τους μαθηματικούς των αρχών του 19ου αιώνα και πιο πριν από τον Kant. Αποφεύγοντας τη χρήση της αρχής του αποκλειόμενου μέσου (ή «νόμου της του τρίτου αποκλείσεως») σε οντότητες που δεν μπορούμε να ορίσουμε, καθώς και τις εν ενεργεία άπειρες οντότητες (όπως οι υπερπεπερασμένοι αριθμοί), εξαφανίζονται όλα τα παράδοξα[129]. Από την άλλη, όμως, το τίμημα είναι πολύ μεγάλο: τα μαθηματικά φτωχαίνουν, αφού η αποδεικτική μέθοδος της εις άτοπο απαγωγής, το αξίωμα της επιλογής και άλλα πολύτιμα μαθηματικά εργαλεία,

---

[126] Ο Gödel, στο κείμενό του «Τι είναι το πρόβλημα του συνεχούς του Cantor», χαρακτηρίζει τους Weyl και Poincaré ημι-ιντουισιονιστές.

[127] Βλ. Αναπολιτανος $^{5}$2005, σσ. 272-273, και Μοσχοβακης 1993, σ. 25.

[128] Αναπολιτανος $^{5}$2005, σ.276.

[129] Brouwer 1967, σ. 336. Σε αυτό το κείμενο ο Brouwer αναφέρει την περίφημη αναλογία μεταξύ μιας λανθασμένης θεωρίας (αξιωματικής-φορμαλιστικής) και μιας εγκληματικής πολιτικής.

ως επί το πλείστον φαλκιδεύονται. Το κίνημα αυτό, το οποίο ονομάστηκε Ιντουισιονιστικό ή Ενορατικό, προσέφερε εναλλακτικές προτάσεις για πολλούς κλάδους των μαθηματικών[130], όπως η ιντουισιονιστική λογική, η ιντουισιονιστική θεωρία συνόλων (αξιωματικές θεωρίες: Intuitionistic Zermelo-Frænkel / IZF, Constructive Set Theory / CST και Constructive Zermelo-Frænkel / CZF) και η ιντουισιονιστική αριθμητική (Heyting Arithmetic / HA). Οι ιντουισιονιστές βρίσκονταν σε σφοδρή σύγκρουση με τα δύο άλλα ρεύματα.[131]

Το δεύτερο μεγάλο ρεύμα που δημιουργήθηκε αυτή την περίοδο κρίσης και βρισκόταν σε κάθετη αντίθεση με τους ιντουισιονιστές είναι ο Λογικισμός. Οι πρωτεργάτες του πρέσβευαν την άποψη πως τα μαθηματικά είναι μια προέκταση της λογικής και πως, συνεπώς, όλες οι μαθηματικές θεωρίες μπορούν να αναχθούν σε αυτή. Με την ανακάλυψη των παραδόξων, οι Frege και Dedekind απογοητεύτηκαν και ουσιαστικά παρέδωσαν τα όπλα.[132] Τη σκυτάλη ανέλαβαν οι Bertrand Russell (1872-1970) και Alfred North Whitehead (1861-1947) με τα έργα του πρώτου *Αρχές των Μαθηματικών* (*Principles of Mathematics*, 1903) και *Θεωρία των Τύπων* (*Theory of Types*, 1908) και με το κοινό τους έργο *Μαθηματικές Αρχές* (*Principia Mathematica*, 1910-13 – σύντμ.: *PM*). Για τους λογικιστές, τα αξιώματα είναι αληθείς προτάσεις των οποίων η αλήθεια πηγάζει από τη λογική. Η μαθηματική λογική, λοιπόν, φάνταζε ως ένας υποσχόμενος τομέας τον μαθηματικών στο πλαίσιο του οποίου θα μπορούσε να βρεθεί μια λύση για τα παράδοξα. Ακόμα κι αν με την αντινομία του ο Russell είχε δημιουργήσει τριγμούς στα θεμέλιά της, ο ίδιος πίστευε πως οι μέθοδοι που ο Frege είχε εισαγάγει ήταν αυτές που έπρεπε να ακολουθηθούν. Αν υπήρχε κάποιο λάθος, θα έπρεπε να βρίσκεται ανάμεσα στους βασικούς νόμους στους οποίους είχε στηριχθεί.

Ο Φορμαλισμός, από την άλλη, με κύριο εκφραστή τον David Hilbert[133] (1862-1943) είχε ως βασική αντίληψη πως το μοναδικό απαραίτητο κριτήριο για την αποδοχή μιας μαθηματικής θεωρίας είναι η εσωτερική της συνέπεια. Οι φορμαλιστές ήταν υποστηρικτές της αξιωματικής θεμελίωσης,[134] αλλά με μια ουσιαστική διαφορά από τους λογικιστές: Τα αξιώματα δεν είναι αληθή – είναι απλώς προτάσεις σχηματισμένες από σύμβολα τα οποία αποδεχόμαστε ως αφετηρία για τη σκέψη μας. Η μαθηματική λογική ήταν το απαραίτητο εργαλείο παραγωγής λογικών κανόνων για την οικοδόμηση των θεωριών πάνω σε αξιώματα, απλώς και μόνο επειδή ήταν βολική και ακριβής. Δύο ήταν οι βασικές προϋποθέσεις που έπρεπε να πληρούν οι μαθηματικές θεωρίες για να γίνουν αποδεκτές: η πληρότητα και η συνέπεια των αξιωμάτων τους. Ο Hilbert, συγκεκριμένα, το 1920 ανακοίνωσε το πρόγραμμά του, το οποίο συνίστατο στην αξιωματικοποίηση όλων των μαθηματικών θεωριών και στην απόδειξη της συ-

[130] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τα ιντουισιονιστικά μαθηματικά, βλ. ενδεικτικά FERREIRÓS ²2007, σσ. 338-345, και FRÆNKEL/BAR-HILLEL 1958, σσ. 196-264.

[131] Ενδεικτικά για την αντιπαράθεση μεταξύ Brouwer/Poincaré/Weyl-Hilbert, Brouwer/Poincaré-Russell, βλ. DAVIS 2007, σσ. 153-160 και 163-166.

[132] *Ό.π.*, σ. 152.

[133] Ο ίδιος ο Hilbert είχε αρνηθεί τον χαρακτηρισμό του ως φορμαλιστή. Βλ. σχετικά EWALD 1996, σ. 110.

[134] Για τη σχέση Φορμαλισμού - αξιωματικής μεθόδου βλ. BOURBAKI 1996, σσ. 1265-1276.

νέπειας των αξιωμάτων τους με περατοκρατικές μεθόδους. Η απόδειξη της συνέπειας των πιο πολύπλοκων θεωριών μπορούσε να δοθεί, κατά τον ίδιο, στα πλαίσια απλούστερων. όπως της Περατοκρατικής Θεωρίας Αριθμών.

Αν και θεωρητικά οι λογικιστές και οι φορμαλιστές έχουν μεγάλες διαφορές στην αντίληψή τους σχετικά με τις μαθηματικές οντότητες, η βασική επιδίωξη και των δύο ήταν η κάθαρση των θεμελίων της δεδομένης μαθηματικής δραστηριότητας και όχι η αμφισβήτησή της.[135] Ως εκ τούτου, και των δύο οι προτάσεις απέναντι στα παράδοξα είχαν ως σκοπό την διατήρηση του πλούτου των μαθηματικών. Οι σημαντικότερες λύσεις που προτάθηκαν ήταν η θεωρία των τύπων του Russell και το σύστημα αξιωμάτων του Zermelo.[136] Η θεωρία των τύπων τελικά[137] απορρίφθηκε, αφενός μεν επειδή κρίθηκε ως πεζή, κουραστική και δύσκολη τεχνικά, αφετέρου δε επειδή θεωρήθηκαν απαγορευτικοί οι περιορισμοί που επέβαλε στη μέχρι τότε μαθηματική πρακτική. Ο Φορμαλισμός υπερίσχυσε λόγω της ανοιχτής προοπτικής του απέναντι σε κάθε νέα πρόταση και αφετέρου ως πιο κοντινός προς την υπάρχουσα μαθηματική αντίληψη και πρακτική.[138] Ο Ernst Zermelo (1871-1953), ήταν από τους μαθηματικούς που, αν και δεν άνηκε σαφώς σε κάποια από τις ομάδες αυτές, ήταν υπερμάχος της αναγωγιστικής-φορμαλιστικής κατεύθυνσης των μαθηματικών. Ήταν αυτός που το 1908 δημοσίευσε ένα σύνολο αξιωμάτων, το οποίο έμελε να είναι το πιο ευρέως αποδεκτό και επιτυχημένο. Αν και η συνέπεια του συστήματός του δεν έχει (ούτε και είναι δυνατόν να) αποδειχτεί, παρ' όλα αυτά δεν έχει βρεθεί μέχρι σήμερα κάποια ασυνέπεια μεταξύ των αξιωμάτων του. Επίσης, κανένα από τα αξιώματά του δεν έχει αφαιρεθεί ή σημαντικά αναθεωρηθεί και μέχρι τώρα μόνο δύο ακόμα έχουν προστεθεί (χρήσιμα για τη συνολοθεωρία, άλλα χωρίς να φαίνεται να άπτονται των κλασικών μαθηματικών). Τέλος, πολύ σημαντικό προσόν τους είναι πως το καθένα εκφράζει μια διαισθητικά προφανή ιδιότητα των συνόλων.[139] Είναι σημαντικό να σημειώσουμε πως καμία από τις λύσεις που έχουν προταθεί δεν είναι πλήρως ικανοποιητική, με την έννοια που οι μαθηματικοί ονειρεύονταν στις αρχές του 20ού αιώνα. Όπως λέει ο Paul J. Cohen (1934-2007), ο μαθηματικός που απέδειξε την ανεξαρτησία της υπόθεσης του συνεχούς και του αξιώματος της επιλογής μέσα στο σύστημα ZFC: «Είναι ασφαλές να πούμε πως καμία αντίληψη δεν έχει αποδειχθεί εντελώς επιτυχημένη στο να απαντήσει στα θεμελιώδη ερωτήματα, αλλά πως μάλλον οι δυσκολίες φαίνεται να είναι ενυπάρχουσες στην ίδια τη φύση των μαθηματικών.»[140]

Κρίνεται σκόπιμο να γίνει μια συνοπτική παρουσίαση των πιο σημαντικών παραδόξων, καθώς και των απόψεων των τριών βασικών ρευμάτων σχετικά με αυτά. «Ένα

---

135 Αναπολιτανός $^5$2005, σ. 201.

136 Ferreirós $^2$2007, σ. 299. Για πληροφορίες σχετικά με άλλες προσπάθειες αξιωματικής (ή μη) θεμελίωσης, μπορεί κανείς να ανατρέξει *ό.π.*, σσ. 333-336.

137 Αν και όχι αμέσως. Μέχρι το 1920 περίπου, αρκετοί μαθηματικοί τη θεωρούσαν πιο ασφαλή και την προτιμούσαν από το σύστημα του Zermelo. Βλ. *ό.π.*, σ. 337. Η τελική επικράτηση του ZFC ήρθε μετά την απόδειξη του Gödel σχετικά με την συνέπεια του αξιώματος της επιλογής και της υπόθεσης του συνεχούς το 1938. Βλ. *ό.π.*, σ. 382.

138 Μοσχοβάκης 1993, σ. 25.

139 *Ό.π.*, σ. 26.

140 Cohen $^3$2008, σ. 1.

παράδοξο ή αντινομία είναι το αποτέλεσμα θεμιτών συμπερασματικών διαδικασιών που οδηγούν σε αντιφάσεις, δηλαδή σε συμπεράσματα της μορφής: και το Α και η άρνηση του Α, ισχύουν.»[141] Τα παράδοξα μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο βασικές κατηγορίες, τα λογικά ή συνολοθεωρητικά, και τα ερμηνευτικά ή σημασιολογικά. Λογικά είναι τα παράδοξα του Russell (1902), του Burali-Forti (1897) και του Cantor (1899), ενώ ερμηνευτικά είναι αυτά των Richard (1905) και Berry (1906). Τα ερμηνευτικά παράδοξα δεν επηρέασαν ιδιαίτερα τη μαθηματική πρακτική. Ως επί το πλείστον, αντιμετωπίστηκαν με κάποιες αλλαγές στους ορισμούς και δίνοντας έμφαση στη διάκριση μεταξύ γλώσσας-αντικείμενο και μεταγλώσσας. Τα λογικά, όμως, έπαιξαν σπουδαίο ρόλο στην εξέλιξη της θεωρίας συνόλων.

### *2.1.1. Το παράδοξο του Russell*

Στην πρώιμη διαισθητική ή αφελή της φάση, όπως την παρακολουθήσαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο, η θεωρία συνόλων είχε αναπτυχθεί με βάση τον ορισμό της έννοιας του «συνόλου» που έδωσε ο Cantor και είχε καταλήξει σε μερικά πολύ σημαντικά αποτελέσματα[142] σχετικά με τα σύνολα (μεταξύ αυτών, το θεώρημα που αναφέρει πως το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι μη αριθμήσιμο και το Θεώρημα Schröder-Bernstein). Ολόκληρο το οικοδόμημα στηρίζονταν στην εξής αρχή:

> *Γενική Αρχή Συμπερίληψης* (*General Comprehension Principle*).[143] Για κάθε οριστική συνθήκη (definite condition) *P*, *n* μεταβλητών, υπάρχει ένα σύνολο $X = \{\vec{x} | P(\vec{x})\}$ με μέλη ακριβώς τις *n*-άδες αντικειμένων που ικανοποιούν την *P* έτσι ώστε για κάθε τέτοια *n*-άδα $\vec{x}$, $\vec{x} \in X \Leftrightarrow P(\vec{x})$. (I)

Η ιδιότητα της έκτασης συνεπάγεται ότι το πολύ ένα σύνολο *X* ικανοποιεί την (I) και αποκαλούμε αυτό το σύνολο *X* έκταση (extension) ή συμπερίληψη (comprehension) της συνθήκης *P*. Μια διαισθητική μορφή της αρχής αυτής χρησιμοποιούσαν για χρόνια ως αυταπόδεικτη στην παραδοσιακή λογική οι Γερμανοί φιλόσοφοι. Παρ' όλα αυτά, η λογική μέχρι τον Frege δεν την είχε ανάγκη και έτσι δεν είχε διατυπωθεί αυστηρά. Η οικοδόμηση μιας ισχυρής Θεωρίας Συνόλων όμως απαιτούσε τη ρητή διατύπωσή της. Σύμφωνα με το Βασικό Νόμο V του Frege:[144] «Δεν υπάρχει ιδιότητα που να μην περιγράφει κάποιο σύνολο αποτελούμενο από ακριβώς εκείνα τα αντικείμενα που ικανοποιούν την ιδιότητα.» Η Γενική Αρχή Συμπερίληψης έχει μια ακατανίκητη έλξη, επειδή έπεται τόσο φυσικά από τις διαισθήσεις μας για την έννοια του συνόλου, ώστε να θεωρείται «παράδοξο» το ότι δεν ισχύει.[145]

Το συναφές επιχείρημα έχει ως εξής: Από τη Γενική Αρχή Συμπερίληψης, το «σύνολο όλων των συνόλων», $V:=\{x \mid x \text{ είναι σύνολο}\}$, είναι σύνολο με την κάπως περίεργη ιδιότητα ότι ανήκει στον εαυτό του, $V \in V$. Τα συνηθισμένα σύνολα μαθηματικών

[141] ΑΝΑΠΟΛΙΤΑΝΟΣ ⁵2005, σ. 202.
[142] ΜΟΣΧΟΒΑΚΗΣ 1993, σσ. 10-17.
[143] *Ό.π.*, σ. 22.
[144] ΑΝΑΠΟΛΙΤΑΝΟΣ ⁵2005, σ. 204.
[145] ΜΟΣΧΟΒΑΚΗΣ 1993, σ. 24.

αντικειμένων (αριθμών, συναρτήσεων κ.λπ.) βεβαίως δεν περιέχουν τον εαυτό τους, και είναι φυσικό να τα θεωρήσουμε ως μέλη ενός «μικρότερου κόσμου συνόλων», τον οποίο δημιουργούμε πάλι με επίκληση της Γενικής Αρχής Συμπερίληψης, $R = \{x \mid x$ είναι σύνολο και $x \notin x\}$. Ο ορισμός του $R$, όμως, συνεπάγεται άμεσα ότι $R \in R$ αν και μόνο αν $R \notin R$, που είναι προφανώς άτοπο.

Το παράδοξο αυτό (σε ελαφρώς διαφορετική διατύπωση) ανακοίνωσε με μια επιστολή του ο Russell στον Frege το 1902[146] και έγινε αμέσως αντιληπτό πως είχε φανερώσει κάποιο σοβαρό σφάλμα στο οικοδόμημα του δεύτερου. Την εποχή αυτή είχαν ήδη εμφανιστεί αρκετά ακόμα παράδοξα, όπως εκείνα του Cantor, του Burali-Forti κ.ά. Η αντίληψη που επικράτησε ήταν πως αυτές οι αντινομίες είχαν να κάνουν με κάποιο σφάλμα στην παρουσίαση ή στη διατύπωση από τον Cantor και πως με κάποιες μικρές αλλαγές θα ήταν δυνατό να περισωθεί το οικοδόμημα της θεωρίας συνόλων χωρίς μεγάλες απώλειες.[147]

Το παράδοξο του Russell, όμως, δεν είχε να κάνει με κάποια παραδοχή σχετικά με τη φύση των υπερπεπερασμένων αριθμών ή κάποια πρόταση της αριθμητικής. Ο τρόπος που είχε κατασκευαστεί ήταν καθαρά συνολοθεωρητικός.[148] Αφού ένα σύνολο Α παράγει το σύνολο όλων των υποσυνόλων του, P(A), το οποίο έχει μεγαλύτερη δύναμη από το Α, τότε από το θεώρημα του Cantor υπάρχουν στοιχεία του P(A) τα οποία δεν θα περιλαμβάνονται σε μια 1-1 αντιστοίχηση μεταξύ των δύο συνόλων. Αν το Α είναι το σύνολο όλων των συνόλων και ως κανόνα απεικόνισης πάρουμε αυτόν που χρησιμοποιήθηκε για την απόδειξη του θεωρήματος Schröder-Bernstein, τότε τα σύνολα που ορίζονται από την ιδιότητα πως δεν ανήκουν στον εαυτό τους ανήκουν σε αυτά που παραλείπονται από την απεικόνιση. Επομένως, η ιδιότητα αυτή δεν μπορεί να ορίσει ένα σύνολο. Κατ' επέκταση, η αφελής έννοια της έκτασης δεν μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως μέθοδος ορισμού συνόλων. Το ανησυχητικό ήταν πως ο τρόπος κατασκευής αυτού του παραδόξου συνιστούσε μια «φόρμουλα» παραγωγής και άλλων παραδόξων, όπως αυτά του Cantor και του Burali-Forti.

### *2.1.2. Τα παράδοξα των Cantor και Burali-Forti*

Την παραδοχή της ολότητας ,για την οποία μιλούσε ο Russell, είχε κάνει και ο Cantor στο παράδοξο του μέγιστου πληθικού αριθμού. Το επιχείρημα είχε ως εξής: Για κάθε σύνολο ορίζεται το σύνολο των υποσυνόλων του, το οποίο έχει μεγαλύτερη δύναμη (πληθικό αριθμό) από το αρχικό. Αν θεωρήσουμε το σύνολο όλων των συνόλων $V$, έπεται πως υπάρχει το σύνολο όλων των υποσυνόλων του P($V$), το οποίο έχει μεγαλύτερη πληθικότητα από το $V$. Όμως και αυτό ανήκει στο $V$, αφού το $V$ είναι το σύνολο όλων των συνόλων. Επομένως, έχουμε ένα σύνολο (το $V$) που έχει μικρότερη δύναμη από ένα σύνολο που περιέχει – άτοπο. Επομένως, δεν υπάρχει μέγιστος πληθικός αριθμός.

[146] Περισσότερα στοιχεία σχετικά με την επιστολή του Russell στον Frege, την απάντηση του δεύτερου, καθώς και για τη μετέπειτα σχέση τους, μπορεί κανείς να αναζητήσει στον ΣΛΟΥΓΚΑ 2009.

[147] FERREIRÓS ²2007, σσ. 307-308.

[148] DAUBEN 1979, σ. 262.

Ο Cantor είχε αποδείξει πως η ακολουθία των άλεφ, όπως αυτή των φυσικών αριθμών, δεν έχει τέλος.[149] Υπάρχει όμως μια διαφορά. Ενώ όλοι οι φυσικοί μπορούν χωρίς αντίφαση να θεωρηθούν ως ένα τελειωμένο σύνολο και μετά να οριστεί ο ω ως πρώτος υπερπεπερασμένος αριθμός, για τους υπερπεπερασμένους δεν ισχύει το ίδιο. Έστω Ω το σύνολο όλων των διατακτικών τύπων. Αν θεωρήσουμε πως το Ω είναι ένα καλώς-διατεταγμένο σύνολο και άρα έχει έναν τύπο δ, ο τύπος αυτός θα πρέπει να είναι μεγαλύτερος από κάθε τύπο στο Ω. Εφόσον, όμως, το Ω περιέχει όλους τους τύπους, δ > δ [150]. Ο Cantor εξέφρασε την άποψή του με τη μορφή θεωρημάτων:

> Θ ε ώ ρ η μ α  Α : Το σύστημα Ω όλων των (διατακτικών) αριθμών είναι μια απολύτως άπειρη, ασυνεπής συλλογή.
>
> Θ ε ώ ρ η μ α  Β : Το σύστημα ת όλων των άλεφ είναι και αυτό μια απόλυτα άπειρη και ασυνεπής διαδοχή.

Ο Cantor είχε ανακοινώσει την αντινομία που είχε ανακαλύψει, καθώς και την εκτίμησή του για το τι «έφταιγε», στην αλληλογραφία του με τον Dedekind, διότι το παράδοξό του επηρέαζε και το πρόγραμμα του δεύτερου:[151]

> Μια πολλαπλότητα μπορεί να συγκροτείται με τέτοιο τρόπο ώστε η υπόθεση πως όλα τα στοιχεία της «είναι μαζί» να οδηγεί σε αντίφαση, ώστε να είναι αδύνατον να συλλάβουμε την πολλαπλότητα ως μια ολότητα, ως ένα τελειωμένο πράγμα. Τέτοιες πολλαπλότητες τις αποκαλώ απόλυτα άπειρες ή ασυνεπείς. Αν μια πολλαπλότητα μπορεί να συγκεντρωθεί σε «ένα πράγμα» χωρίς αντίφαση καλείται συνεπής πολλαπλότητα ή σύνολο.

Στην ίδια κατηγορία με το προηγούμενο ανήκει και το παράδοξο που δημοσιεύτηκε το 1897 από τον Cesare Burali-Forti (1861-1931):[152]

> Μπορεί να δειχτεί ότι κάθε καλώς-διατεταγμένη σειρά διαθέτει έναν διατακτικό αριθμό, ότι η σειρά των διατακτικών αριθμών που φτάνει μέχρι και ένα δεδομένο διατακτικό αριθμό ξεπερνά αυτόν το δεδομένο διατακτικό αριθμό κατά ένα και ότι (υπό ορισμένες πολύ φυσιολογικές προϋποθέσεις) η σειρά όλων των διατακτικών αριθμών (κατά σειρά μεγέθους) είναι καλώς-διατεταγμένη. Από εδώ έπεται ότι η σειρά όλων των διατακτικών αριθμών έχει έναν διατακτικό αριθμό, τον Ω. Αλλά, σ' αυτή την περίπτωση, η σειρά όλων των διατακτικών αριθμών που περιλαμβάνει τον Ω έχει ως διατακτικό αριθμό τον Ω+1,

---

[149] *Ό.π.*, σ. 242

[150] *Ό.π.*, σ. 243

[151] *Ό.π.*, σ. 245

[152] Όπως παρατίθεται στο RUSSELL 2000, σ. 29. Για την ακρίβεια, ο Burali-Forti είχε παρανοήσει την έννοια του καλώς-διατεταγμένου συνόλου, με αποτέλεσμα η αντινομία να αποκτήσει ουσία μόνο χάρη στην επαναδιατύπωσή της από τον Russell. Βλ. FERREIRÓS $^{2}$2007, σσ. 306-307.

ο οποίος πρέπει να είναι μεγαλύτερος από τον Ω. Συνεπώς, ο Ω δεν είναι ο διατακτικός αριθμός όλων των διατακτικών αριθμών.

Ο Burali-Forti είχε διαφορετική άποψη από τον Cantor:[153] το παράδοξο οφειλόταν στο γεγονός ότι οι διατακτικοί αριθμοί δεν είναι πάντα συγκρίσιμοι. Η προοπτική αυτή ήταν καταστροφική για τη θεωρία συνόλων. Ο Russell, ο οποίος θεωρούσε πιο ευνοϊκή τη δική του ερμηνεία, υποστήριζε πως η ολότητα των διατακτικών αριθμών δεν είναι καλώς-διατεταγμένη.[154] Παρ' όλα αυτά, και πάλι υπήρχαν απώλειες. Ο Felix Bernstein (1878-1956), μαθητής του Cantor, προσπαθώντας να περισώσει ατόφυα τη θεωρία συνόλων, υποστήριξε πως το ίδιο το σύνολο W όλων των διατακτικών αριθμών δεν ανήκε σε κάποιο τμήμα καλώς-διατεταγμένου συνόλου και άρα δεν είχε επόμενο στοιχείο – άποψη που κατηγορηματικά απορρίφθηκε από τον Zermelo ως ένα απλοϊκό λογοπαίγνιο, το οποίο, εάν υιοθετείτο, θα μπορούσε να καταστεί ακόμα και επικίνδυνο για τα μαθηματικά.[155]

Όπως είπαμε, η άποψη του Russell ήταν πως τα παραπάνω παράδοξα, όπως και πολλά άλλα, δεν έθιγαν τοπικά σφάλματα της θεωρίας συνόλων. Αν ήταν αυτή η περίπτωση, με ξεχωριστές λύσεις για το καθένα θα μπορούσαν να αποφευχθούν χωρίς να βλάψουν τη θεμελίωση της αριθμητικής στη λογική, όπως την είχε οικοδομήσει ο Frege. Αντιθέτως, επρόκειτο για ειδικές περιπτώσεις λογικών παραδόξων που πλήττουν κάθε είδους λογικό συλλογισμό και άρα άπτονται όλων των κλάδων των μαθηματικών. Πού οφείλεται αυτό όμως; Ο ίδιος κατέληξε στο εξής συμπέρασμα:[156]

> Έτσι, όλες οι αντινομίες μας έχουν κοινή την υπόθεση μιας ολότητας τέτοιας ώστε, αν ήταν νόμιμη, θα μπορούσε αμέσως να διευρυνθεί με νέα μέλη που ορίζονται με όρους του εαυτού της. Αυτό μας οδηγεί στον εξής κανόνα: «οτιδήποτε εμπλέκει όλα τα μέλη μιας συλλογής δεν πρέπει να ανήκει στη συλλογή». [...] Η παραπάνω αρχή, όμως, έχει καθαρά αρνητική ισχύ. Επαρκεί για να δείξει ότι πολλές θεωρίες είναι λανθασμένες, αλλά δεν δείχνει με ποιον τρόπο μπορούν να διορθωθούν τα λάθη. Δεν μπορούμε να πούμε: «όταν μιλώ για όλες τις προτάσεις, εννοώ όλες εκτός από εκείνες που αναφέρονται σε "όλες τις προτάσεις"», γιατί σ' αυτή την ερμηνεία έχουμε αναφέρει τις προτάσεις στις οποίες αναφέρονται όλες οι προτάσεις, πράγμα που δεν μπορούμε να κάνουμε και να έχει νόημα. [...] Έτσι είναι απαραίτητο, αν δεν θέλουμε να παραβιάζουμε την παραπάνω αρνητική αρχή, να κατασκευάζουμε τη λογική μας χωρίς να αναφέρουμε φράσεις όπως «όλες οι προτάσεις» ή «όλες οι ιδιότητες» και χωρίς ακόμα να πρέπει να πούμε ότι εξαιρούμε τέτοια πράγματα.

Εκτός αυτού, ο Russell παρατήρησε πως υπήρχε ακόμα ένα κοινό στοιχείο μεταξύ όλων των παραδόξων. Όλα χρησιμοποιούν για την κατασκευή τους την ανεξέλεγκτη

[153] DAUBEN 1979, σ. 259.
[154] *Ό.π.*, σ. 260.
[155] *Ό.π.*, σ.260-261.
[156] RUSSELL 2000, σσ. 32-33.

χρήση αυτοαναφορών της μορφής «$x\in x$» και «$\neg x\in x$». Έτσι, λοιπόν, πρότεινε την απαγόρευση των αυτοαναφορών στη δημιουργία ιεραρχιών αντικειμένων και προτάσεων. Ουσιαστικά, σκόπευε στο να διατηρήσει την αρχή της συμπερίληψης, περιορίζοντάς την μέσω κάποιων λογικών κανόνων. Ο κανόνας αυτός, ο οποίος ονομάστηκε Αρχή της Περιορισμένης Συμπερίληψης (Limited Comprehension Principle)[157], αντιμετωπίστηκε με μεγάλο σκεπτικισμό και τελικά απορρίφθηκε από την πλειοψηφία των μαθηματικών. Αντί αυτής της άποψης, προτιμήθηκε η δεύτερη που πρότεινε, να μείνει ανέπαφη η δυνατότητα αυτοαναφορών και να περιοριστεί η ελεύθερη χρήση ιδιοτήτων για την περιγραφή συνόλων.[158] Η δεύτερη αυτή άποψη ενσωματώθηκε στο φορμαλισμό του συστήματος ZFC μέσω ενός νόμου (αξιωματικό σχήμα του διαχωρισμού), ο οποίος καθορίζει πως για τη δημιουργία ενός νέου συνόλου δεν αρκεί μια ιδιότητα – απαιτείται και η αναφορά σε κάποια από τα στοιχεία ενός ήδη υπάρχοντος συνόλου. Χάρη στο νόμο αυτό, η χρήση της έννοιας του συνόλου όλων των συνόλων δεν έχει νόημα, αφού για την ύπαρξη ενός τέτοιου συνόλου απαιτείται ένα ήδη υπάρχον σύνολο αναφοράς της ιδιότητας. Με αυτό τον τρόπο, εξαφανίζονται όλα τα παράδοξα χωρίς να πληγεί ιδιαίτερα η καντοριανή συνολοθεωρία.

## 2.2. Ο Hilbert και η αξιωματική θεμελίωση

Ο HILBERT ΗΤΑΝ ένας από τους μεγαλύτερους υπέρμαχους της τυπικής αξιωματικής θεμελίωσης. Την προσέγγιση στη θεμελίωση των αριθμών με αναγωγή σε στοιχειώδεις λογικές έννοιες που είχαν υιοθετήσει μαθηματικοί του 19ου αιώνα, όπως οι Weierstraß και Kronecker, την ονόμαζε γενετική (genetic).[159] Θεωρούσε ως πιο βολική και ακριβή την αξιωματική μέθοδο θεμελίωσης στα μαθηματικά, την οποία είχαν ακολουθήσει οι Frege και Peano[160] και πίστευε πως πρέπει να την εφαρμόσουμε απευθείας στους πραγματικούς αριθμούς. Μέσω της μεγάλης επιρροής που είχε στο μαθηματικό κόσμο, βοήθησε ιδιαίτερα προς αυτή την κατεύθυνση. Μολονότι δεν ασχολήθηκε ποτέ επισταμένως με τη θεωρία συνόλων, κατέστησε με πολλούς τρόπους σαφή τη σημασία που είχε κατά τη γνώμη του η ενασχόληση με τα προβλήματά της. Κατά πρώτον, προέτρεπε ταλαντούχους μαθηματικούς όπως οι Bernstein, Zermelo και Schönflies να ασχοληθούν με θέματα που άπτονταν της θεωρίας συνόλων.[161] Επί-

[157] MADDY 1997, σ. 45.

[158] ΑΝΑΠΟΛΙΤΑΝΟΣ [5]2005, σ. 213.

[159] FERREIRÓS [2]2007, σ. 119. Είναι σημαντικό να σημειώσουμε πως η χιλπερτιανή αξιωματική μέθοδος δεν θα μπορούσε να έχει επιλεγεί την εποχή των Cantor και Dedekind. Η γενετική μέθοδος προετοίμασε ιδεολογικά τους επόμενους μαθηματικούς ώστε να δεχθούν ως διαισθητικά προφανή τα αξιώματα. Η διατύπωση ενός αυθαίρετου αξιωματικού συστήματος θα ήταν εκ των προτέρων καταδικασμένη. Βλ. *ό.π.*, σ. 123.

[160] Σύγχρονοι σχολιαστές θεωρούν πως ο Hilbert δέχτηκε κατά βάση την επιρροή του Dedekind. Αν και ο Dedekind τυπικά κάνει χρήση της γενετικής μεθόδου και δεν κάνει αναφορά σε αξιώματα, οι χαρακτηριστικές συνθήκες που θέτει για έναν ορισμό είναι ισοδύναμες με τα αξιώματα που μετά από δέκα χρόνια θα χρησιμοποιούσε ο Hilbert στο δικό του σύστημα. Βλ. *ό.π.*, σσ. 458-459.

[161] *Ό.π.*, σ. 302.

σης, στη λίστα των 23 προβλημάτων που παρουσίασε στο Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών στο Παρίσι το 1900, έθεσε ως πρώτο την υπόθεση του συνεχούς. Τέλος, η αξία που απέδιδε στη θεωρία συνόλων ήταν φανερή στην περίφημη δήλωσή του: «Κανείς δεν θα μας εκδιώξει από τον παράδεισο που ο Cantor δημιούργησε για μας.» Με αυτό τον τρόπο έπαιρνε σαφώς θέση ως προς το ποια σκοπιά έπρεπε να επιλεγεί σχετικά με την αντιμετώπιση των παραδόξων και απαντούσε ευθέως στην ιντουισιονιστική προσέγγιση.

Ο David Hilbert (1862-1943) είχε τους δικούς του λόγους για να ενδιαφέρεται για το ζήτημα. Οι προσπάθειές του για την αξιωματικοποίηση της γεωμετρίας το 1899 είχαν λάβει ως δεδομένη τη συνέπεια της καθιερωμένης θεωρίας για τους πραγματικούς αριθμούς, ενώ την ίδια περίοδο είχε προτείνει ένα σύνολο αξιωμάτων από τα οποία ήλπιζε πως θα μπορούσε να προκύψει η θεωρία αυτή. Η ανακάλυψη ασυνεπών συστημάτων από τον Cantor, σε συνδυασμό με την αδυναμία καταφατικής απάντησης στην υπόθεση του συνεχούς, έθετε σε κίνδυνο και το δικό του οικοδόμημα.[162] Εκτός αυτών με το Πρόγραμμά του, που ανήγγειλε το 1920, άνοιξε το δρόμο για νέες εξελίξεις και την ενοποίηση των μαθηματικών. Τέλος, το 1928 έθεσε ως πρόβλημα την απόδειξη της πληρότητας της αριθμητικής Peano (σύντμ.: PA) – δηλαδή πώς, για οποιαδήποτε πρόταση που μπορεί να εκφραστεί στη γλώσσα της PA, η PA μπορεί να αποδείξει είτε την ίδια είτε την άρνησή της.

Ωστόσο, ο Henri Poincaré, κατά τη διάρκεια του συνεδρίου του 1900, είχε παρατηρήσει πως ο Hilbert είχε εμπλακεί σε έναν φαύλο κύκλο: χρησιμοποιούσε τις μεθόδους που ήθελε να δικαιολογήσει στην υποτιθέμενη απόδειξη της πρότασης ότι οι εν λόγω μέθοδοι δεν μπορούν να οδηγήσουν σε αντίφαση.[163] Προκειμένου να απαντήσει στην κριτική τού Poincaré[164], ο Hilbert, είκοσι χρόνια μετά, ανακοίνωσε το Πρόγραμμά του για τη θεμελίωση των μαθηματικών, το οποίο συνίστατο στα εξής:

- *Τυποποίηση όλων των μαθηματικών.* Έκφραση κάθε μαθηματικής θεωρίας σε μια αυστηρή τυπική γλώσσα ώστε όλες οι προτάσεις της να υπόκεινται σε χειρισμούς σύμφωνα με καλώς-ορισμένους κανόνες.
- *Συνέπεια.* Απόδειξη ότι δεν μπορεί να προκύψει καμία αντίφαση από τις τυπικές αξιωματικές θεωρίες. Η απόδειξη αυτή θα ήταν προτιμότερο να χρησιμοποιεί μόνο πεπερασμένους («αλγοριθμικούς») συλλογισμούς για πεπερασμένα μαθηματικά αντικείμενα.
- *Συντηρητικότητα.* Απόδειξη ότι κάθε αποτέλεσμα που αφορά σε πραγματικά αντικείμενα χρησιμοποιώντας συλλογισμούς που αξιοποιούν ιδεατά αντικείμενα μπορεί να αποδειχτεί χωρίς τη χρήση ιδεατών αντικειμένων (δηλαδή, με περατοκρατικές μεθόδους).[165]

---

[162] DAUBEN 1979, σσ. 263-264, και FERREIRÓS $^{2}$2007, σ. 301.

[163] DAVIS 2007, σ. 152.

[164] *Ό.π.*, σ. 163.

[165] Πολύ γενικά, κατά τον Hilbert, τα «πραγματικά μαθηματικά» περιλαμβάνουν την περατοκρατική θεωρία αριθμών –κάποιο είδος στοιχειώδους αριθμητικής το οποίο ούτε ο ίδιος ούτε οι συνεργάτες του οροθέτησε αυστηρά–, ενώ τα ιδεατά μαθηματικά περιλαμβάνουν όλους τους κλάδους που σχετίζο-

Το Πρόγραμμα του Hilbert εγκαινίασε ένα εντελώς νέο είδος μαθηματικών, το οποίο ονομάστηκε μεταμαθηματικά και αναπόσπαστο κομμάτι του οποίου ήταν η θεωρία αποδείξεων. Στο επίπεδο της υλοποίησης σήμαινε δύο πράγματα: Πρώτο, για την εύρεση περατοκρατικών αποδείξεων μη αντιφατικότητας των τυπικών συστημάτων προϋποτίθεται η δυνατότητα διατύπωσης μιας αριθμητικής πρότασης που, κατάλληλα μεταφρασμένη, μας λέει πως το αντίστοιχο τυπικό σύστημα στο οποίο εκφράζεται είναι συνεπές (μη αντιφατικό)[166]. Και, δεύτερο, οι πραγματικές (περατοκρατικές) μέθοδοι είναι αυτές που από τη μια μεριά χρησιμοποιούν λογικές διεργασίες στο πλαίσιο της θεωρίας των πρωτογενώς αναδρομικών συναρτήσεων και από την άλλη επιτρέπουν τη χρήση της επαγωγής μόνον όταν αυτή εφαρμόζεται στην απόδειξη πραγματικών προτάσεων. Η ιδιότητα της συντηρητικότητας είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη περατοκρατικής απόδειξης της συνέπειας του τυπικού συστήματος στο οποίο αναφέρεται η δυνατότητα απαλοιφής. Στην απόδειξη της παραπάνω ισοδυναμίας ταυτίζεται η έννοια της «αλήθειας» με την έννοια της «αποδειξιμότητας» όταν αυτές αφορούν πραγματικές προτάσεις που αποδεικνύονται περατοκρατικά ή επαληθεύονται από τους a priori δεδομένους φυσικούς αριθμούς.[167]

## 2.3. Για το αξίωμα της επιλογής

Όπως είπαμε, δύο ήταν τα σημαντικά ανεπίλυτα ζητήματα που απασχολούσαν τη σκέψη του Cantor: (α΄) το θεώρημα καλής διάταξης (κάθε σύνολο επιδέχεται μια σχέση καλής διάταξης) και (β΄) η υπόθεση του συνεχούς (το συνεχές έχει πληθικότητα ίση με το $\aleph_1$). Και οι δύο αυτές πεποιθήσεις τέθηκαν σε αμφισβήτηση το 1903 στο 3$^{o}$ Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών από τον Julius König (1849-1913), ο οποίος υποστήριξε πως όχι μόνο η υπόθεση του συνεχούς δεν ισχύει, αλλά επίσης πως το συνεχές δεν έχει δύναμη ίση με κάποιο άλεφ και επομένως δεν μπορεί να είναι καλώς-διατεταγμένο.[168] Παρότι μια μέρα αργότερα, ο Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871-1953) απέδειξε πως ο König είχε κάνει λάθος, η πίστη στη θεωρία συνόλων είχε υποστεί σοβαρό πλήγμα. Ο μόνος τρόπος να διορθωθεί αυτή κρίση ήταν να αποδειχθεί τουλάχιστον πως η δύναμη του συνεχούς είναι ένα άλεφ. Ένα μήνα μετά το συνέδριο, ο Zermelo είχε καταφέρει να αποδείξει κάτι ισχυρότερο: το θεώρημα της καλής διάταξης.[169] Η απόδειξη αυτή είχε δύο άμεσα και πολύ σημαντικά αποτελέσματα: (α΄) η δύναμη κάθε συνόλου (και άρα και του συνεχούς) είναι ίση με κάποιο άλεφ και (β΄) οι πληθικοί αριθμοί είναι συγκρίσιμοι – δηλαδή μεταξύ δύο πληθικών αριθμών $a$ και $b$ ισχύει πάντα ακριβώς μια εκ των τριών σχέσεων: $a < b, a = b, a > b$.

νται με το άπειρο (ανάλυση, θεωρία συνόλων κ.λπ.). Κατά την επικρατέστερη ερμηνεία, η περατοκρατική θεωρία αριθμών ταυτίζεται με την πρωτογενή αναδρομική αριθμητική.

166 Αναπολιτανός $^{5}$2005, σ. 253.

167 *Ό.π.*, σ. 256.

168 Dauben 1979, σ. 248.

169 *Ό.π.*, σσ. 250-252· Zermelo 1967α΄.

Η απόδειξη του Zermelo ήταν πολύ σημαντική για ένα ακόμη λόγο.[170] Για πρώτη φορά διατύπωσε ρητά και έκανε χρήση του αξιώματος της επιλογής («Για κάθε οικογένεια $\mathcal{F}$ μη κενών και ξένων μεταξύ τους συνόλων, υπάρχει μια συνάρτηση f τέτοια ώστε $f(S) \in S$ για κάθε σύνολο S της οικογένειας $\mathcal{F}$»[171]) ως αυταπόδεικτης και πολλάκις χρησιμοποιηθείσας αρχής. Για αυτούς που αμφισβητούσαν την αλήθεια του θεωρήματος καλής διάταξης, το ζήτημα εστιαζόταν πλέον στο κατά πόσο ήταν σωστή η χρήση του για την απόδειξη.[172]

Το ζήτημα της ταυτόχρονης επιλογής στοιχείων από μια (άπειρη) συλλογή (άπειρων) συνόλων δημιούργησε ποικίλες αντιδράσεις ανάλογα με τη στάση που τηρούσε ο κάθε μαθηματικός απέναντι στη διάκριση μεταξύ ορισμού και περιγραφής μιας διαδικασίας. Κάποιοι, όπως οι Félix Edouard Justin Émile Borel (1871-1956), René-Louis Baire (1874-1932) και Henri Lebesgue (1875-1941), οι οποίοι θεωρούσαν πως δεν έχει νόημα να μιλάμε για οντότητες ως εάν να είναι υπάρχουσες με μόνο επιχείρημα τον συνεπή ορισμό τους, ασπάζονταν μια κατασκευαστική άποψη για τα μαθηματικά αντικείμενα. Κατ' αυτούς, η βασική ερώτηση σχετικά με την απόδειξη του θεωρήματος καλής διάταξης, αλλά και γενικότερα, ήταν: μπορούμε να υποστηρίξουμε την ύπαρξη μιας μαθηματικής οντότητας χωρίς να την έχουμε ορίσει;[173] Άλλοι, όπως ο Hadamard και ο ίδιος ο Zermelo, προτιμούσαν να θεωρήσουν ως δεδομένα θετική την απάντηση στην προηγούμενη ερώτηση προκειμένου να δικαιολογήσουν την απόδειξη που είχε δοθεί. Το αξίωμα της επιλογής έχει γίνει αντικείμενο μεγάλων διαφωνιών και έχουν δημιουργηθεί μοντέλα της θεωρίας συνόλων που είτε το περιέχουν είτε όχι. Μια άλλη διαφορά μεταξύ αυτών των δύο ρευμάτων είναι η στάση τους απέναντι στο σύνολο όλων των συνόλων. Οι Borel, Baire και Lebesgue[174] πίστευαν πως το σφάλμα έγκειται στην χρήση εννοιών που δεν ορίζονται επαρκώς, όπως οι υπερπεπερασμένοι αριθμοί. Ο Jacques Hadamard (1865-1963), όπως και ο Cantor, θεωρούσε πως το σύνολο όλων των συνόλων είναι μια απροσέγγιστη, απόλυτα άπειρη και μη ερμηνεύσιμη οντότητα.[175]

Το 1905, παρουσιάστηκαν δύο ακόμα παράδοξα, αυτά των Richard και König. Η εμφάνισή τους, σε συνδυασμό με την επιθυμία του να εξασφαλίσει την ισχύ του θεωρήματος καλής διάταξης, ήταν η αφορμή που ώθησε τον Zermelo να ασχοληθεί σοβαρά με την απομόνωση των θεμελιωδέστερων παραδοχών της θεωρίας συνόλων και να τις διατυπώσει υπό μορφή αξιωμάτων.[176] Προσπάθησε (ανεπιτυχώς) να αποδείξει τη συνέπεια και την ανεξαρτησία των αξιωμάτων του μέχρι και το 1907 και τελικά έκανε την δημοσίευση το 1908. Την ίδια χρονιά δημοσίευσε και μια νέα απόδειξη του θεωρήματος καλής διάταξης, στην οποία εξέθεσε τις απόψεις του σχετικά με την ύ-

[170] DAUBEN 1979, σ. 253, και FERREIRÓS $^2$2007, σ. 312.

[171] JECH $^2$2008, σ. 1.

[172] DAUBEN 1979, σ. 252, και FERREIRÓS $^2$2007, σ. 318.

[173] DAUBEN 1979, σσ. 256-258.

[174] Οι τρεις αυτοί μαθηματικοί, αν και προηγούνται του ιντουισιονιστικού ρεύματος, το οποίο ξεκινάει με τον Brouwer, είχαν τέτοιες προδιαθέσεις και γι' αυτό αναφέρονται πολλές φορές ως ημι-ιντουισιονιστές ή προ-ιντουισιονιστές.

[175] DAUBEN 1979, σ. 259, και FERREIRÓS $^2$2007, σσ. 315-316

[176] DAUBEN 1979, σ. 266

παρξη του αξιώματος της επιλογής και σε σχέση με την φύση των επιχειρημάτων που πρέπει να επιστρατεύονται για την υπεράσπιση ή την απόρριψη μιας αρχής.[177]

## 2.3. Το αξιωματικό σύστημα ZFC

### *2.3.1. Ορισμοί και αξιώματα του ZFC κατά Zermelo (1908)*

Ο ZERMELO ΕΙΣΑΓΕΙ το σύστημα ZFC στις «Έρευνες για τη Θεμελίωση της Θεωρίας Συνόλων, Α΄» («Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, I », 1908). Η εισαγωγή είναι ενδεικτική της κατάστασης που επικρατούσε, των απόψεων του ιδίου, καθώς και των σκοπών της δημοσίευσης:

> Η θεωρία συνόλων είναι ο κλάδος των μαθηματικών του οποίου η αποστολή είναι να ερευνά μαθηματικά τις θεμελιώδεις έννοιες «αριθμός», «διάταξη» και «συνάρτηση», λαμβάνοντάς τες στην αρχική, απλή τους μορφή, και να αναπτύσσει, ως εκ τούτου, τα λογικά θεμέλια όλης της αριθμητικής και της ανάλυσης. Συνιστά, επομένως, ένα αναπόσπαστο συστατικό της επιστήμης των μαθηματικών. Σήμερα, πάντως, η ίδια η ύπαρξη της θεωρίας συνόλων φαίνεται να απειλείται από κάποιες αντιφάσεις ή «αντινομίες», οι οποίες προέρχονται από τις αρχές της –αρχές που φαίνεται να κυριαρχούν αναγκαία στη σκέψη μας– και απέναντι στις οποίες καμία εντελώς ικανοποιητική λύση δεν έχει βρεθεί. Συγκεκριμένα, έχοντας υπόψη την «αντινομία του Russell»[178] σχετικά με το σύνολο όλων των συνόλων που δεν περιέχουν τον εαυτό τους ως στοιχεία, δεν φαίνεται πλέον επιτρεπτό σήμερα να αποδώσουμε σε μια αμφισβητήσιμη λογικά έννοια (ιδιότητα) ένα σύνολο ή μία κλάση, ως έκτασή της. Άρα, ο αρχικός ορισμός του Cantor για το σύνολο ως «συλλογή, συγκεντρωμένη σε μία ολότητα, καλώς διακεκριμένων αντικειμένων της αντίληψής μας ή της σκέψης μας» σίγουρα απαιτεί κάποιους περιορισμούς. Δεν έχει, όμως, αντικατασταθεί επιτυχώς από κάποιον που να είναι εξίσου απλός και να μην εγείρει τέτοια ζητήματα. Υπ' αυτές τις συνθήκες, δεν μας μένει τίποτα άλλο να κάνουμε από το να προχωρήσουμε στην αντίθετη κατεύθυνση και, ξεκινώντας από τη θεωρία συνόλων όπως μας δόθηκε ιστορικά, να αναζητήσουμε τις αρχές που απαιτούνται για να εδραιώσουμε τα θεμέλια αυτού του μαθηματικού κλάδου.[179]

Ο στόχος του Zermelo ήταν να αντικαταστήσει τις άμεσες διαισθήσεις του Cantor για τα σύνολα με μια μικρή ομάδα αρχών –αξιωμάτων– που να είναι «αρκετά περιορισμένες ώστε να αποβάλλουν όλες τις αντιφάσεις», αλλά και «αρκετά ισχυρές ώστε να

[177] ZERMELO 1967β΄.

[178] Σύμφωνα με τον FERREIRÓS $^{2}$2007, σ. 309, ο Zermelo είχε ανακαλύψει το παράδοξο του Russell πριν από τον ίδιο τον Russell.

[179] Μτφρ. από τον ZERMELO 1967γ΄, σ. 200.

διατηρήσουν οτιδήποτε είναι πολύτιμο σ' αυτή τη θεωρία».[180] Στο κείμενο, ο Zermelo πρότεινε μια λίστα εφτά αξιωμάτων που κατά τη γνώμη του αντικατόπτριζαν όλες τις θεμελιώδεις παραδοχές οι οποίες, αν και δεν είχαν διατυπωθεί ρητά, ήταν το στήριγμα του Cantor για τη συνολοθεωρία του. Ο πρώτος του στόχος, τον οποίο και πέτυχε, ήταν να αποβάλει τα μέχρι τότε γνωστά παράδοξα. Όμως, δεν κατάφερε να αποδείξει τη συνέπεια του συστήματος του και την ανεξαρτησία μεταξύ των αξιωμάτων.[181] Εξαιρετική σημασία είχε η αντιμετώπιση της έννοιας του συνόλου. Ο Zermelo αρνήθηκε να δεχτεί ως σύνολα συλλογές που είναι υπερβολικά μεγάλες (το σύνολο όλων των διατακτικών, το σύνολο όλων των συνόλων). Κατέστησε σαφές πως τα σύνολα δεν είναι απλώς συλλογές – είναι αντικείμενα που ικανοποιούν κάποιες αξιωματικές συνθήκες.[182]

Στη συνέχεια παραθέτουμε τα αξιώματα του Zermelo (και τους απαραίτητους ορισμούς, μαζί με όρους της αγγλικής):[183]

1. Η θεωρία συνόλων ασχολείται με ένα πεδίο (domain) $\mathfrak{B}$ από άτομα (individuals) τα οποία θα αποκαλούμε αντικείμενα και ανάμεσα στα οποία υπάρχουν σύνολα. Αν δύο σύμβολα α και b συμβολίζουν το ίδιο αντικείμενο, γράφουμε α=b, αλλιώς α≠b. Λέμε πως ένα αντικείμενο «υπάρχει» αν ανήκει στο πεδίο $\mathfrak{B}$. Αντίστοιχα, λέμε για μια κλάση $\mathfrak{A}$ αντικειμένων πως «υπάρχουν αντικείμενα της κλάσης $\mathfrak{A}$» αν το $\mathfrak{B}$ περιέχει τουλάχιστον ένα άτομο της κλάσης αυτής.

2. Κάποιες θεμελιώδεις σχέσεις της μορφής αεb εμφανίζονται ανάμεσα στα αντικείμενα του $\mathfrak{B}$. Αν για δύο αντικείμενα α και b ισχύει η σχέση αεb λέμε ότι «το α είναι στοιχείο του b» ή «το b περιέχει το α». Ένα αντικείμενο b μπορεί να λέγεται σύνολο αν και –με μια μοναδική εξαίρεση (αξίωμα II)– μόνο αν περιέχει ένα άλλο αντικείμενο α, ως στοιχείο.

3. Αν κάθε στοιχείο x ενός συνόλου M είναι επίσης και στοιχείο του συνόλου N, έτσι ώστε από τη σχέση xεM πάντα έπεται ότι xεN, τότε λέμε πως το M είναι υποσύνολο του N και γράφουμε M€N. Ισχύει πάντα πως M€M και από τις σχέσεις M€N και N€R έπεται πως M€R. Δύο σύνολα M και N καλούνται ξένα (disjoint) αν δεν περιέχουν κανένα κοινό στοιχείο ή αν κανένα στοιχείο του M δεν είναι στοιχείο του N.

4. Ένα ερώτημα ή κάποιος ισχυρισμός $\mathfrak{G}$ λέγεται οριστικός (definite)[184] εάν οι

[180] ΜΟΣΧΟΒΑΚΗΣ 1993, σ. 25.

[181] DAUBEN 1979, σ. 266.

[182] EWALD 1967, σ. 199.

[183] Μτφρ. από τον ZERMELO 1967γ΄, σσ. 201-204.

[184] Ο Zermelo χρησιμοποιεί την έννοια του οριστικού ισχυρισμού προκειμένου να αποφύγει τα ερμηνευτικά παράδοξα. Αν και προσφεύγει στην επίκληση των «παγκοσμίως αποδεκτών νόμων της λογικής» –έννοια, αν μη τι άλλο προβληματική–, ο ίδιος σε άλλη δημοσίευση του εξήγησε πως δεν υπήρ-

θεμελιώδεις σχέσεις του πεδίου, μέσα από τα αξιώματα και τους καθολικώς έγκυρους νόμους της λογικής, καθορίζουν χωρίς αμφιβολία εάν ισχύει ή όχι. Αντίστοιχα, μια «προτασιακή συνάρτηση» 𝔊(x) στην οποία η μεταβλητή x λαμβάνει ως τιμές όλα τα άτομα μιας κλάσης 𝔄, λέγεται οριστική αν είναι οριστική για κάθε άτομο x της κλάσης 𝔄. Έτσι, η ερώτηση σχετικά με το αν ισχύει η σχέση αεb ή η σχέση M€N είναι πάντα οριστική.

Z1. *Αξίωμα της έκτασης ή εκτασιακότητας* (*axiom of extensionality*). Αν κάθε στοιχείο ενός συνόλου M είναι επίσης και στοιχείο του συνόλου N και αντίστροφα, αν επομένως N€M και M€N, τότε πάντα M=N. Πιο σύντομα, κάθε σύνολο καθορίζεται από τα στοιχεία του. Το σύνολο που περιέχει μόνο τα στοιχεία α,b,…, r θα συμβολίζεται {α,b,..., r}.

Z2. *Αξίωμα των στοιχειωδών συνόλων* (*axiom of elementary sets*). Υπάρχει ένα (φανταστικό) σύνολο, το *κενό* σύνολο, 0, το οποίο δεν περιέχει κανένα στοιχείο. Αν το α είναι οποιοδήποτε αντικείμενο στο πεδίο, τότε υπάρχει ένα σύνολο {α} που περιέχει το α και μόνο το α ως στοιχείο. Αν τα α και b είναι δύο οποιαδήποτε αντικείμενα του πεδίου, υπάρχει πάντα ένα σύνολο {α,b} που περιέχει ως στοιχεία τα α και b, αλλά κανένα άλλο αντικείμενο c διακριτό από αυτά.

Z3. *Αξίωμα του διαχωρισμού* (*axiom of separation*). Όταν η προτασιακή συνάρτηση 𝔊(x) είναι οριστική για όλα τα στοιχεία ενός συνόλου M, τότε το M έχει ένα υποσύνολο $M_{\mathfrak{G}}$, το οποίο περιέχει ακριβώς τα στοιχεία x του M για τα οποία η 𝔊(x) είναι αληθής.

Z4. *Αξίωμα του δυναμοσυνόλου* (*axiom of the power set*). Σε κάθε σύνολο T αντιστοιχεί ένα άλλο σύνολο $\mathfrak{U}T$ , το δυναμοσύνολο του T, που περιέχει ως στοιχεία ακριβώς όλα τα υποσύνολα του T.

Z5. *Αξίωμα της ένωσης* (*axiom of the union*). Σε κάθε σύνολο T αντιστοιχεί ένα σύνολο ST, η ένωση του T, το οποίο περιέχει ως στοιχεία του ακριβώς όλα τα στοιχεία των στοιχείων του T.

Z6. *Αξίωμα επιλογής* (*axiom of choice*). Αν το T είναι ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι όλα σύνολα διάφορα του 0 και ξένα μεταξύ τους, η ένωσή του ST περιέχει τουλάχιστον ένα υποσύνολο $S_1$ που περιέχει ένα και μόνο ένα στοιχείο κοινό με κάθε στοιχείο του T. Μπορούμε επίσης να εκφράσουμε αυτό το αξίωμα λέγοντας ότι είναι πάντα δυνατόν να επιλέξουμε ένα μοναδικό στοιχείο από κάθε στοιχείο M, N, R,… του T και να συνδυάσουμε όλα τα επιλεγμένα στοιχεία m, n, r,… σε ένα σύνολο $S_1$.

χε κάποιο γενικώς αποδεκτό σύστημα λογικής στο οποίο να μπορεί να στηριχτεί. Βλ. και FERREIRÓS 2007, σ. 323.

Ζ7. *Αξίωμα του απείρου* (*axiom of infinity*). Υπάρχει στο πεδίο τουλάχιστον ένα σύνολο Z το οποίο περιέχει το κενό σύνολο ως στοιχείο και είναι έτσι δομημένο ώστε σε κάθε στοιχείο του α αντιστοιχεί επιπλέον ένα στοιχείο του της μορφής {α} – με άλλα λόγια, με κάθε στοιχείο του α περιέχει και το αντίστοιχο σύνολο {α} ως στοιχείο του.

### *2.4.2. Η εξέλιξη του ZFC από το 1908 μέχρι και το 1949*

Το σύστημα του Zermelo δεν παρέμεινε αυτούσιο στο πέρασμα των ετών. Όπως η θεωρία των τύπων στράφηκε προς περισσότερο αξιωματικές κατευθύνσεις, έτσι και το ZFC υπέστη μια διαδικασία αναθεώρησης ή κάθαρσης κατά την οποία ενσωμάτωσε και στοιχεία της απλής θεωρίας των τύπων.[185] Εκτός αυτού, ακόμα και μετά το τέλος του Β΄ Παγκοσμίου Πολέμου, υπήρχε διχογνωμία σχετικά με το ποιο αξιωματικό σύστημα έπρεπε να επιλεγεί, το ZF (Zermelo-Frænkel) ή το NBG (von Neumann - Bernays - Gödel). Ο Abraham Frænkel[186] (1891-1965) έπαιξε σπουδαίο ρόλο στην τελική κυριαρχία του πρώτου, αφενός με τη συμπλήρωση του συστήματος αξιωμάτων, αφετέρου με τη συστηματική χρήση του στα εγχειρίδια θεωρίας συνόλων που δημοσίευσε.[187] Μάλιστα, σε αναγνώριση της προσφοράς του, ο Zermelo το 1930 πρόσθεσε το όνομά του στο σύστημα, κάνοντάς το «Zermelo-Frænkel»[188]. Ο Frænkel, στο έργο του «Επί της Θεμελίωσης της Θεωρίας Συνόλων Cantor-Zermelo» («Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre», 1922), είχε παρατηρήσει πως κάποια από τα αξιώματα μπορούσαν να πάρουν πιο απλή μορφή, ενώ υπήρχε χώρος και για νέα αξιώματα. Συγκεκριμένα, έδωσε μια πιο περιοριστική εκδοχή του αξιώματος του διαχωρισμού (μέσω του ορισμού μιας νέας έννοιας, εκείνης της F-συνάρτησης), πρότεινε την εισαγωγή του αξιώματος της αντικατάστασης, ενώ παράλληλα πρότεινε και ένα δεύτερο αξίωμα, το λεγόμενο «αξίωμα του περιορισμού» («axiom of restriction·») προκειμένου να κάνει το σύστημα πιο κατηγορικό.[189] Το αξίωμα του περιορισμού δεν έγινε τελικώς αποδεκτό, αφού όπως είχε διατυπωθεί δεν αναφέρονταν σε σύνολα, αλλά σε μοντέλα της θεωρίας συνόλων. Τον ίδιο χρόνο δημοσίευσε και το «Επί της Έννοιας του “Οριστικού” και της Εξάρτησης από το Αξίωμα της Επιλογής» («Über den Begriff „definit” und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms»),

---

[185] *Ό.π.*, σ. 338.

[186] Άλλοι μαθηματικοί που με το έργο τους βοήθησαν σημαντικά στην εξέλιξη του ZF ήταν οι Dimitri Mirimanoff (1861-1945), Thoralf Albert Skolem (1887-1963) και John von Neumann. Βλ. *ό.π.*, σσ. 366-374.

[187] *Ό.π.*, σ. 366.

[188] Ο Zermelo υποστήριξε πως ο λόγος για την προσθήκη του ονόματος του Frænkel ήταν η πρότασή του να προστεθεί το αξίωμα της αντικατάστασης. Στην πραγματικότητα αυτός δεν είναι ο μοναδικός. Όπως αναφέρει ο FERREIRÓS [2]2007, σ. 366, την ίδια πρόταση είχαν κάνει και οι Mirimanoff το 1917 και Skolem το 1922. Φαίνεται πως μεγαλύτερη σημασία είχε η βαθιά πίστη του Frænkel στο ZFC.

[189] Κατηγορικό είναι ένα αξιωματικό σύστημα όταν κάθε μοντέλο του είναι ισομορφικό με τα υπόλοιπα. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τις F-συναρτήσεις και το αξίωμα του διαχωρισμού, βλ. *ό.π.*, σσ. 368-369.

στο οποίο απέδειξε πως το αξίωμα της επιλογής είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα – απόδειξη, η οποία τον οδήγησε και στην βελτίωση της έννοιας του «οριστικού ισχυρισμού».[190] Τη σημερινή μορφή του το ZFC την πήρε χάρη στο ύστερο έργο του Zermelo, στην προσφορά του John von Neumann (1903-1957)[191] και τελικά στη συμβολή του Gödel. Πολύ σημαντικός ήταν ο ορισμός που έδωσε ο von Neumann για τους διατακτικούς αριθμούς. Με αυτό τον ορισμό παίρνουμε τη σειρά

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\Big\}, \ldots, \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\Big\}, \ldots \Big\} \ldots$$

η οποία είναι ιδιαίτερα βολική διότι ορίζεται μόνο με βάση την έννοια του «ανήκειν», όντας με αυτό τον τρόπο καλώς-διατεταγμένη. Χάρη σ' αυτή, απέδειξε πως σε κάθε καλώς-διατεταγμένο σύνολο αντιστοιχεί ένας μοναδικός διατακτικός αριθμός. Βέβαια, απαραίτητη για αυτό το αποτέλεσμα ήταν η υιοθέτηση του αξιώματος αντικατάστασης που είχε προτείνει ο Frænkel.[192] Αυτή η σειρά δημιουργεί τη λεγόμενη *συσσωρευτική ιεραρχία* (cumulative hierarchy), σύμφωνα με την οποία το σύμπαν της θεωρίας συνόλων χτίζεται σε στάδια με ένα στάδιο να αντιστοιχεί σε κάθε διατακτικό αριθμό. «Η κλάση των συνόλων της συσσωρευτικής ιεραρχίας είναι ίση με την κλάση όλων των συνόλων.» Ισοδύναμο με την πρόταση αυτή, μέσα στο ZF, είναι το αξίωμα της θεμελίωσης.[193] Το αξίωμα αυτό το διαμόρφωσε ο Zermelo προκειμένου να δείξει τη σχετική συνέπεια του NBG ως προς το ZF.[194] Μετά από μια περίοδο σιγής (που οφειλόταν σε προβλήματα υγείας), ο Zermelo επανήλθε με το «Επί των Οριακών Αριθμών και των Πεδίων Συνόλων» («Über Grenzzahlen und Mengenbereiche», 1930), στο οποίο μελετούσε μοντέλα της θεωρίας συνόλων. Σε αυτό το κείμενο περιλαμβάνεται για πρώτη φορά το αξίωμα της θεμελίωσης ως ένα από τα αξιώματα του ZFC. Η έκδοση αυτή είναι ένα βήμα πριν τις σύγχρονες εκδοχές, υπό

[190] Οι Frænkel και Skolem είχαν προσπαθήσει ταυτόχρονα να βελτιώσουν την έννοια του οριστικού ισχυρισμού, με την πρόταση του τελευταίου τελικά να υπερισχύσει. Βλ. *ό.π.*, σσ. 366-367.

[191] Ο von Neumann δημιούργησε, εκτός των άλλων, και το NBG, το άλλο σημαντικό αξιωματικό σύστημα της θεωρίας συνόλων. Περισσότερα στοιχεία για το NBG μπορεί να βρει κανείς συνοπτικά *ό.π.*, σσ. 378-382, και COHEN $^{3}$2008 σσ. 73-78, και αναλυτικά στους FRÆNKEL/BAR-HILLEL 1958, σσ. 96-124.

[192] Το αξίωμα όπως είχε διατυπωθεί από τον Frænkel προέκυπτε από τα υπόλοιπα. Ο von Neumann έδωσε έναν πιο ισχυρό ορισμό των F-συναρτήσεων, ο οποίος καθιστούσε ανεξάρτητο το αξίωμα της αντικατάστασης και μάλιστα είχε ως συνέπειά το αξίωμα του διαχωρισμού. Βλ. FERREIRÓS $^{2}$2007, σ. 372.

[193] Το αξίωμα της θεμελίωσης δεν είναι απαραίτητο για τις εφαρμογές της θεωρίας συνόλων στα κλασικά μαθηματικά, είναι, όμως, χρήσιμο στα καθαρά συνολοθεωρητικά ζητήματα, όπως η καλή διάταξη και οι διατακτικοί αριθμοί.

[194] Ο ίδιος ο von Neumann δεν υποστήριζε την προσθήκη του αξιώματος θεμελίωσης στο ZFC. Βλ. *ό.π.*, σ. 373.

την έννοια πως δεν είναι διατυπωμένη στα πλαίσια της πρωτοβάθμιας λογικής.[195] Η διατύπωση του αξιώματος της θεμελίωσης ήταν η εξής:

> *Αξίωμα της θεμελίωσης* (*axiom of foundation*)[196]. Κάθε (αντίστροφη) αλυσίδα στοιχείων, κάθε μέλος της οποίας είναι ένα στοιχείο του προηγούμενου, σπάει με πεπερασμένο δείκτη σε ένα ππρωταρχικό στοιχείο [urelement]. Ή ισοδύναμα: κάθε υποπεδίο T [ενός μοντέλου του ZF] περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο $t_0$ το οποίο δεν έχει κανένα στοιχείο t στο T.

Ο τρόπος με τον οποίο ο Zermelo οικοδομεί το σύμπαν των συνόλων είναι δυναμικός, στηριγμένος στην ιδέα μιας ατελείωτης ακολουθίας όλο και μεγαλύτερων μοντέλων, το καθένα από τα οποία μπορεί να ταυτιστεί με ένα σύνολο στο επόμενο μοντέλο. Αυτή η άποψη συνιστά ένα διαισθητικό επιχείρημα υπέρ του ZFC στη βάση της λεγόμενης επαναληπτικής σύλληψης (iterative conception).[197] Την ίδια αντίληψη για τον τρόπο ορισμού-δημιουργίας συνόλων ασπαζόταν και ο Gödel, ο οποίος είναι αυτός που έδωσε στο ZFC τη σιγουριά που χρειαζόταν, αποδεικνύοντας πως το αξίωμα της επιλογής και η γενικευμένη υπόθεση του συνεχούς είναι σχετικώς συνεπή με τα υπόλοιπα αξιώματα. Δηλαδή, αν το ZF είναι συνεπές, το ίδιο ισχύει και για το ZFC+GCH. Είχε γίνει σαφές πλέον πως το σύστημα ZFC+GCH (με το αξίωμα της θεμελίωσης, αλλά όχι της αντικατάστασης) είναι σχετικώς ασφαλές. Σε συνδυασμό με το γεγονός ότι το ZF μπορεί να εκφραστεί με όρους πρωτοβάθμιας λογικής, η επικράτησή του απέναντι στη θεωρία των τύπων ήταν πλέον δεδομένη.[198]

Το τελευταίο στάδιο εξέλιξης της αξιωματικής θεωρίας συνόλων ήταν η έκφραση του συστήματος αξιωμάτων ZFC με όρους πρωτοβάθμιας λογικής. Το αίτημα αυτό το είχε διατυπώσει ο Thoralf Albert Skolem (1887-1963) από το 1922, και το είχε υποστηρίξει ο Weyl, ενώ ο von Neumann φαίνεται να ακολούθησε την πρόταση του Skolem, αφού είχε δημιουργήσει το σύστημά του, ώστε να είναι μεταγράψιμο στην πρωτοβάθμια λογική. Όμως, η αποφασιστική στροφή[199] έγινε μετά την ανακάλυψη του Gödel πως η πρωτοβάθμια λογική είναι πλήρης (ενώ η δευτεροβάθμια δεν είναι) – γεγονός που ωθούσε στην υιοθέτηση της πρώτης για τα αξιωματικά συστήματα της θεωρίας συνόλων.

Το τελευταίο βήμα ήταν η εμφάνιση της θεωρίας μοντέλων (model theory) γύρω στο 1950, οπότε και η πρωτοβάθμια λογική απέκτησε τη δυνατότητα να μεταφέρει

[195] Τα αξιώματα διαχωρισμού και αντικατάστασης παρουσιάζονται ως δευτεροβάθμιας λογικής. Αυτή ήταν μια επιλογή του Zermelo, με σκοπό να ισχυροποιήσει τον χαρακτηρισμό μοντέλων της θεωρίας συνόλων. Βλ. *ό.π.*, σ. 374.

[196] *Ό.π.*, σ. 375.

[197] Πλέον εγκαταλείπονται δύο βασικά επιχειρήματα που είχαν προταθεί ως κριτήρια κατασκευής συνόλων αλλά είχαν φανεί αδύναμα στο να αντιμετωπίσουν τα παράδοξα: η αρχή της συμπερίληψης που υποστήριζαν οι Frege, Dedekind και Russell, καθώς και η αρχή του περιορισμού του μεγέθους που χρησιμοποιούσε ο Russell.

[198] *Ό.π.*, σ. 385.

[199] Αυτή τη στροφή, ως προς τις απόψεις τους, έκαναν, μεταξύ άλλων και οι Alfred Tarski, Paul Isaac Bernays (1888-1977) και Willard Van Orman Quine (1908-2000). Βλ. *ό.π.*, σσ. 386-387.

αποτελέσματα από το ένα μοντέλο στο άλλο. Μεταξύ των ειδικών στη θεμελίωση είχε γλινει πια σαφές πως η πρωτοβάθμια αξιωματική θεωρία συνόλων είναι ένα πολύ ικανοποιητικό πλαίσιο και, συνεπώς, το ZFC αποτελούσε το φυσικό αξιωματικό σύστημα για τα περισσότερα μαθηματικά.[200] Η φιλοσοφική στάση του Gödel (πλατωνισμός) τον έκανε αισιόδοξο σχετικά με την τύχη των μαθηματικών. Κατ' αυτόν, οι κλάσεις και οι διάφορες μαθηματικές έννοιες μπορούν να εκληφθούν ως πραγματικές οντότητες, ανεξάρτητες από τους ορισμούς και τις κατασκευές μας. Επιπλέον, η έννοια της «κλάσης» βρίσκει την καλύτερη δυνατή έκφρασή της μέσω των αξιωμάτων διαχωρισμού και επιλογής. Το μόνο πρόβλημα είναι πως δεν αντιλαμβανόμαστε ξεκάθαρα τις έννοιες αυτές – γεγονός που αφήνει χώρο για παράδοξα. Αυτό σημαίνει πως τα αξιώματα χρήζουν συμπλήρωσης με νέες βασικές προτάσεις.[201]

Πάντως, για όλους τους μαθηματικούς με ενδιαφέρον γύρω από τη θεμελίωση των μαθηματικών[202] σχηματίστηκε μια κοινή συνισταμένη. Αντίθετα προς την παραδοσιακή αντίληψη πως τα μαθηματικά αποτελούνται από αληθείς και προφανείς ισχυρισμούς, πολλές μαθηματικές προτάσεις έχουν τώρα υποθετικό χαρακτήρα: εισάγονται ως υποθέσεις που χρησιμεύουν στην επεξήγηση και στην ενοποίηση πιο «χειροπιαστών οντοτήτων». Αυτή είναι η σύνδεση μεταξύ των αξιωμάτων της θεωρίας συνόλων και των θεωρημάτων αριθμητικής και ανάλυσης, τα οποία είναι πολύ πιο αληθοφανείς, ή και προφανείς, προτάσεις. Σε αυτή τη βάση, ο «Nicolas Bourbaki», το 1949, απεφάνθη: «Όλες οι μαθηματικές θεωρίες μπορούν να θεωρηθούν επεκτάσεις της γενικής θεωρίας συνόλων.»[203]

### *2.4.3. Τα αξιώματα του ZFC όπως έχουν καθιερωθεί*[204]

Το αξιωματικό σύστημα ZFC διατυπώνεται σε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ισότητα («=»), της οποίας το μοναδικό μη λογικό σύμβολο είναι το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο της σχέσης του ανήκειν «$\in$». Για τα λογικά σύμβολα χρησιμοποιούμε εδώ τα σημεία: «$\neg$» (άρνηση), «$\wedge$» (σύζευξη), «$\vee$» (εγκλειστική διάζευξη), «$\rightarrow$» (υλική συνεπαγωγή), «$\leftrightarrow$» (διπλή υλική συνεπαγωγή), «$\forall$» (καθολικός ποσοδείκτης), «$\exists$»

[200] *Ό.π.*, σ. 388. Είναι ενδεικτικό πως ακόμα και ο ιντουισιονιστής Weyl, σε μια πολύ αυστηρή κριτική των αξιωματικών θεωριών το 1946 (όπου τις συγκρίνει ως προς την αυθαιρεσία των παραδοχών τους με τα γραπτά θρησκευτικής πίστης), καταλήγει να αποδεχτεί πως το ZFC είναι ουσιωδώς απλούστερο από τη θεωρία των τύπων και πως φαίνεται να είναι η πιο κατάλληλη βάση για τα σύγχρονα μαθηματικά. Βλ. *ό.π.*, σ. 390.

[201] *Αυτ.*

[202] Σύμφωνα με τον FERREIRÓS [2]2007, σ. 391, αυτή την αντίληψη, την είχαν εκφράσει αρχικά οι Russell και Hilbert, και τους ακολούθησαν οι von Neumann, Bernays, Weyl και Gödel.

[203] *Ό.π.*, σ. 464. «Τα αντικείμενα οποιουδήποτε κλάδου των κλασικών μαθηματικών –αριθμοί, συναρτήσεις, χώροι, αλγεβρικές δομές– μπορούν να μοντελοποιηθούν ως σύνολα και τα αποτελέσματα που λαμβάνονται ως αξιώματα στον κάθε κλάδο μπορούν να αποδειχθούν στα πλαίσια της θεωρίας συνόλων» (MADDY 1997, σ. 1).

[204] Ως κύρια πηγή για τη συμβολική γραφή χρησιμοποιήθηκε ο COHEN [3]2008, σσ. 51-56. Για τις επεξηγήσεις των αξιωμάτων σε φυσική γλώσσα χρησιμοποιήθηκε ο HALMOS 2002. Επίσης, χρησιμοποιήθηκαν οι JECH [2]2008, σ. 33, ΜΟΣΧΟΒΑΚΗΣ 1993, σσ. 27-29, 129-140, 186, 198-199, και ΤΖΟΥΒΑΡΑΣ 1998, σσ. 219-221.

(υπαρκτικός ποσοδείκτης). Χάριν ευκολίας, χρησιμοποιούμε επίσης τις ακόλουθες συντομογραφίες:

| | |
|---|---|
| $x \neq y$ | $\neg ( x = y)$ |
| $x \notin y$ | $\neg ( x \in y)$ |
| $x \cup y$ | $\cup \{x, y\}$ |
| $x \subseteq y$ | $\forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$ |
| $x \cap y$ | $\{z \in x : z \in y\}$ |

Τα μη λογικά αξιώματα του ZFC είναι τα εξής.

ZF1. *Αξίωμα της έκτασης ή εκτασιακότητας* (*axiom of extension or extensionality*):

$$\forall x \forall y(\forall z(z\in x \leftrightarrow z\in y) \rightarrow x=y)$$

Δηλαδή δύο σύνολα ταυτίζονται αν και μόνον αν έχουν τα ίδια στοιχεία. Πιο γενικά, κάθε σύνολο προσδιορίζεται από τα στοιχεία του (την «έκτασή» του).

ZF2. *Αξίωμα του κενού συνόλου* (*axiom of the null / empty set*):

$$\exists x \forall y\ (y\notin x)$$

Δηλαδή εισάγεται το σύνολο που δεν έχει κανένα στοιχείο. Ονομάζεται «κενό σύνολο» και συμβολίζεται με «$\emptyset$».

ZF3. *Αξίωμα του ζεύγους* (*axiom of the unordered pair*):

$$\forall x \forall y \exists z \forall w(w\in z \leftrightarrow w=x \lor w=y)$$

Δηλαδή, για οποιαδήποτε δύο σύνολα x και y, υπάρχει ένα σύνολο z του οποίου τα στοιχεία είναι ακριβώς τα x και y. Γράφουμε «$z=\{x, y\}$» για το μη διατεταγμένο δισύνολο. Προφανώς, $\{x\}=\{x, x\}$. Το σύνολο $<x, y> = \{\{x\},\{x, y\}\}$ είναι το διατεταγμένο δισύνολο.

ZF4. *Αξίωμα της ένωσης* (*axiom of the sum set or union*):

$$\forall x \exists y \forall z(z\in y \leftrightarrow \exists t(z\in t \land t\in x))$$

Δηλαδή, για κάθε σύνολο (συλλογή συνόλων) x, υπάρχει ένα σύνολο y του οποίου τα στοιχεία είναι ακριβώς τα στοιχεία των στοιχείων του x. Γράφουμε «$y = \cup x$».

ZF5. *Αξίωμα (ύπαρξης) του απείρου* (*axiom of infinity*):

$$\exists x(\emptyset\in x \land \forall y(y\in x \rightarrow y\cup\{y\}\in x))$$

Δηλαδή υπάρχει σύνολο x που περιέχει το κενό σύνολο και το «επόμενο» $y\cup\{y\}$ του καθενός από τα στοιχεία του y.

ZF6. *Αξιωματικό σχήμα αντικατάστασης* (*axiom scheme of replacement*):

Για κάθε τύπο φ(x, y) της γλώσσας του ZFC,

$$\forall x\forall y\forall z\{[\varphi(x, y) \land \varphi(x, z)]\rightarrow y=z\} \rightarrow \forall u\exists v\forall w[w\in v\leftrightarrow\exists t(t\in u \land \varphi(t,w))]$$

Δηλαδή, αν ο τύπος φ(x, y) είναι συναρτησιακός, τότε για κάθε σύνολο u υπάρχει σύνολο v του οποίου τα στοιχεία w είναι ακριβώς οι εικόνες των στοιχείων του u μέσω της συνάρτησης που ορίζει ο φ(x, y).

ZF7. *Αξίωμα του δυναμοσυνόλου* (*axiom of the power set*):

$$\forall x\exists y\forall z\ (z\in y \leftrightarrow z\subseteq x)$$

Δηλαδή, για κάθε σύνολο x υπάρχει το σύνολο y που είναι το σύνολο ακριβώς όλων των υποσυνόλων του x. Το σύνολο αυτό είναι μοναδικό. Λέγεται «δυναμοσύνολο» του x και συμβολίζεται με «P(x)».

ZF6’. *Αξιωματικό σχήμα διαχωρισμού* (*axiom scheme of separation*):[205]

Για κάθε τύπο $\varphi(x, t_1,\ldots, t_k)$ της γλώσσας του ZFC,

$$\forall t_1\ldots\forall t_k\forall x\exists y\forall z\ (z\in y \leftrightarrow z\in x \land \varphi(z, t_1,\ldots,t_k))$$

Δηλαδή, δεδομένων οποιουδήποτε τύπου $\varphi(x, t_1, \ldots, t_k)$ και οποιωνδήποτε παραμέτρων $t_1, \ldots, t_k$, για κάθε σύνολο x υπάρχει ένα σύνολο y του οποίου τα μέλη είναι ακριβώς τα στοιχεία z του x που ικανοποιούν τον τύπο («ιδιότητα») $\varphi(z,t_1,\ldots,t_k)$. Το σύνολο αυτό είναι μοναδικό και το συμβολίζουμε με «$\{z: z\in x \land \varphi(z, t_1,\ldots, t_k)\}$» ή με «$\{z\in x: \varphi(z, t_1,\ldots, t_k)\}$».

Εκτός από τα προαναφερθέντα, έχει προταθεί και το εξής αξίωμα:

ZF8. *Αξίωμα της κανονικότητας ή της θεμελίωσης* (*axiom of regularity or foundation*):

$$\forall x\ (x \neq \varnothing \rightarrow \exists y\ (y\in x \land y\cap x = \varnothing)).$$

Δηλαδή κάθε μη κενό σύνολο x έχει τουλάχιστον ένα στοιχείο y που είναι ξένο προς το x. Άρα κάθε μη κενό σύνολο περιέχει ένα στοιχείο που είναι ελάχιστο όσον αφορά στη σχέση «∈»: δεν επιτρέπονται άπειρες αλυσίδες της μορφής «…∈x2∈x1∈x0». Επιπλέον, με τη βοήθεια του ZF8 αποδεικνύεται η «$\forall x(x\notin x)$», που έχει σημασία για την κατανόηση του παραδόξου του Russell.

Τα αξιώματα αυτά, σε συνδυασμό με το επόμενο αξίωμα, οικοδομούν το σύστημα ZFC (Zermelo-Frænkel-Choice).

*Αξίωμα της επιλογής* (*axiom of choice*):

$$\forall z\ \{\forall x\ [(x\in z \rightarrow x\neq\emptyset) \land (\forall y)(y\in z \rightarrow x\cap y=\emptyset \lor x=y)] \rightarrow \\ \rightarrow \exists u\forall x\exists v(x\in z \rightarrow u\cap x = \{v\})\}$$

[205] Το αξίωμα αυτό συναντάται επίσης με διάφορες άλλες ονομασίες: «axiom schema of specification», «subset axiom scheme» ή «axiom scheme of restricted comprehension».

Δηλαδή για κάθε σύνολο z μη κενών και ξένων μεταξύ τους συνόλων υπάρχει σύνολο u το οποίο περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο v από κάθε στοιχείο x του z. Με άλλα λόγια, για κάθε σύνολο $z$ μη-κενών και ξένων μεταξύ τους συνόλων υπάρχει συνάρτηση $f$ με πεδίο ορισμού το $z$ και τέτοια ώστε $(\forall x)(x \in z \to f(x) \in x)$. Η συνάρτηση $f$ επιλέγει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε στοιχείο του $z$ και γι' αυτό αποκαλείται συνάρτηση επιλογής (choice function)

## *2.4.4. "Κανόνες του δαχτύλου" και άλλα επιχειρήματα*

Στην προσπάθεια να αντιμετωπιστούν τα παράδοξα, έγιναν διάφορες αναλύσεις σχετικά με τη δομή των μαθηματικών προτάσεων και θεωριών και σχετικά με τα ενυπάρχοντα στοιχεία που ευθύνονται για την ύπαρξή των παραδόξων. Η σημαντικότερη ήταν αυτή του Russell, ο οποίος, το 1906, πρότεινε τρεις λύσεις: (α΄) τη «θεωρία zig-zag», σύμφωνα με την οποία μπορούμε να αποδεχθούμε ως κλάσεις μόνο τις επεκτάσεις κάποιων αρκετά απλών προτασιακών συναρτήσεων· (β΄) τον κανόνα περιορισμού του μεγέθους, που θα αναλύσουμε αμέσως μετά· και (γ΄) την «άνευ-κλάσεων θεωρία», στην οποία χειριζόμαστε κατευθείαν προτασιακές συναρτήσεις.

Την ίδια χρονιά, ως απάντηση στο κείμενο του Russell, ο Poincaré πρότεινε την αρχή του φαύλου κύκλου (vicious circle principle – σύντμ.: VCP). Την πρόταση αυτή αποδέχθηκε ο Russell και την υιοθέτησε στην ανάλυση των παραδόξων που, όπως είδαμε, έκανε στη δημοσίευση της *Θεωρίας των Τύπων*.[206] Η αρχική διατύπωσή της είναι η εξής: «Οτιδήποτε περιλαμβάνει όλα τα στοιχεία μιας συλλογής δεν πρέπει να είναι ένα από τη συλλογή.»[207]

Πολύ σημαντική ήταν και η ανάλυση του Gödel[208] σχετικά με τους λόγους που μπορούν να μας σπρώξουν στο να υιοθετήσουμε ή να απορρίψουμε ένα αξίωμα. Διαχώρισε τα επιχειρήματα σε αυτά που έχουν να κάνουν με μια εσώτερη αναγκαιότητα της εν λόγω πρότασης και σε αυτά που εξετάζουν την επιτυχία του.

Από αυτές τις παρατηρήσεις προέκυψαν τα κριτήρια βάσει των οποίων έγινε η κριτική των αξιωμάτων από τα διάφορα φιλοσοφικά ρεύματα. Αναφέρονται ως «κανόνες του δαχτύλου» («rules of thumb») επειδή ουσιαστικά είναι ευρετικής αξίας κανόνες που αποτελούν τη σχηματοποίηση κάποιων διαισθήσεών μας. Ο κάθε κανόνας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παραγάγει δύο ειδών επιχειρήματα: (α΄) τα εγγενή (intrinsic), που πηγάζουν από τα αποτελέσματα που έχει η εφαρμογή του κανόνα με βάση την ίδια τη φύση του εκάστοτε αξιώματος που εξετάζεται και (β΄) τα εξωγενή (extrinsic), τα οποία είναι διαβεβαιώσεις προερχόμενες από τη χρήση του αξιώματος σε συνδυασμό με τον κανόνα στη μαθηματική πρακτική. Οι πιο σημαντικοί κανόνες είναι οι εξής:

---

[206] FERREIRÓS $^{2}$2007, σσ. 326-327.

[207] Ο Gödel, επαναδιατύπωσε την VCP το 1944 (GÖDEL 1983) ως εξής: «Καμιά ολότητα δεν μπορεί να περιέχει μέλη που μπορούν να οριστούν μόνο με τη βοήθεια αυτής της ολότητας, ή μέλη που εμπεριέχουν ή προϋποθέτουν την ολότητα αυτή.»

[208] GÖDEL 1993, σσ. 187-188.

1. *Αρχή της συμπερίληψης ή εκτασιακότητα* (*principle of comprehension or extensionality*). Πρόκειται για το αρχικό επιχείρημα των Cantor, Dedekind και Frege (καθώς και πολλών προηγουμένων μαθηματικών) για τη νομιμοποίηση της ύπαρξης οντοτήτων, είτε αυτές ήταν σύνολα, πολλαπλότητες, είτε κλάσεις. Όπως είδαμε στα προηγούμενα, ο Russell έδειξε πως η ελεύθερη χρήση της αρχής της συμπερίληψης ήταν ο κύριος λόγος για τον οποίο είχαν εμφανιστεί τα παράδοξα στη συνολοθεωρία, και ως εκ τούτου έπρεπε είτε αυτή να εγκαταλειφθεί είτε να τεθούν κάποια κριτήρια σύμφωνα με τα οποία να οριοθετηθεί η χρήση της. Όλα τα επόμενα επιχειρήματα που εμφανίστηκαν είχαν ως κριτήριο για την αποδοχή τους το εάν μπορούσαν να παραγάουν όλα τα σύνολα που προκύπτουν με χρήση της ιδιότητας αυτής. Η ιδιότητα της έκτασης επιβίωσε στην αξιωματική θεωρία συνόλων, υπό την έννοια πως το αξίωμα του διαχωρισμού είναι ένας περιορισμός της σε σύνολα που αντλούν τα στοιχεία τους από άλλα ήδη υπάρχοντα.

2. *Περιορισμός του μεγέθους* (*limitation of size* – σύντμ.: LoS).[209] Η βασική θέση είναι ότι σύνολα είναι οι συλλογές που δεν είναι υπερβολικά μεγάλες, δηλαδή όχι τόσο μεγάλες όσο η συλλογή όλων των διατακτικών αριθμών. Δημιουργούνται δύο ειδών επιχειρήματα. Το ε γ γ ε ν έ ς είναι της μορφής: ένα αξίωμα που γεννά νέα σύνολα από προηγούμενα μπορούμε να το υπερασπιστούμε στη βάση τού ότι οι συλλογές που δημιουργούνται δεν είναι ουσιωδώς μεγαλύτερες από αυτές από τις οποίες προήλθαν. Τα ε ξ ω γ ε ν ή επιχειρήματα έχουν ως εξής: από το LoS προκύπτει ότι με το Αξίωμα Α δεν μπορούν να προκύψουν παράδοξα – ή, αλλιώς: η εδώ και δεκαετίες χρήση του αξιώματος Α δεν έχει οδηγήσει σε παράδοξα.

3. *Επαναληπτική σύλληψη* (*iterative conception*)[210]. Η επαναληπτική σύλληψη, η οποία θεωρείται από πολλούς το διαισθητικό θεμέλιο της θεωρίας συνόλων, διαμορφώθηκε μεταξύ των ετών 1933 και 1947. Οι ρίζες της μπορούν να βρεθούν στα έργα των Mirimanoff, Zermelo και von Neumann, ενώ σημαντικοί θεωρητικοί της είναι οι George Boolos (1940-1996) και Joseph Robert Shönfield (γ. 1927). Σε αυτή στηρίζεται η συσσωρευτική ιεραρχία. Η βασική ιδέα είναι πως μπορούμε να κάνουμε χρήση της πράξης «σύνολο του» («set of») σε μια σειρά από στάδια. Η αρχή γίνεται με ένα (πεπερασμένο ή κενό) πεδίο $V_0$. Στο 1$^{ο}$ στάδιο, παίρνουμε όλα τα δυνατά σύνολα στοιχείων του πεδίου $V_0$. Από αυτά παίρνουμε ένα νέο πεδίο $V_1$, κ.ο.κ. για πεπερασμένα στάδια. Τη διαδικασία αυτή μπορούμε να τη φανταστούμε να συνεχίζεται και πέρα από τα πεπερασμένα στάδια, «στο άπειρο», με υπερπεπερασμένα στάδια $V_\omega$ και $V_\alpha$ για οποιονδήποτε διατακτικό αριθμό α.[211]

[209] Ο πιο γνωστός θεωρητικός του περιορισμού του μεγέθους είναι ο Michael Hallett με το βιβλίο του *Καντοριανή Θεωρία Συνόλων και Περιορισμός του Μεγέθους* (*Cantorian Set Theory and Limitation of Size*, 1983). Βλ. MADDY 1997, σσ. 44, 46.

[210] Στον επίλογό του ο FERREIRÓS [2]2007, σσ. 441-465, πραγματεύεται σε βάθος την επαναληπτική σύλληψη ως βάση για τη θεμελίωση της αξιωματικής θεωρίας συνόλων.

[211] Οι θεωρητικοί της επαναληπτικής σύλληψης την αντιλαμβάνονται με διαφορετικούς τρόπους. Για παράδειγμα, ο Boolos θέτει όρια στα στάδια κατασκευής συνόλων, εν αντιθέσει με τον Shönfield,

Ο Kurt Friedrich Gödel (1906-1978), ο οποίος είναι αυτός που πρότεινε και την υπερπεπερασμένη επανάληψη της πράξης «σύνολο του», εξηγεί χαρακτηριστικά το επιχείρημα αυτό (σε αντίθεση με την παλαιότερα υπερισχύουσα αρχή της συμπερίληψης) έχοντας στο μυαλό του τη συσσωρευτική ιεραρχία όπως είχε δοθεί με το έργο του Zermelo το 1930:

> Όλα τα σύνολα με τα οποία ασχολούνται τα μαθηματικά (τουλάχιστον τα σημερινά μαθηματικά, στα οποία περιλαμβάνεται και η συνολοθεωρία του Cantor), είναι σύνολα ακεραίων αριθμών ή ρητών αριθμών (ως ζεύγη ακεραίων) ή πραγματικών αριθμών (ως σύνολα ρητών) ή συναρτήσεων πραγματικών (ως σύνολα ζευγών πραγματικών αριθμών) κ.λπ. [...] Ωστόσο αυτή η έννοια του συνόλου, σύμφωνα με την οποία ένα σύνολο είναι κάτι που μπορούμε να παραγάγουμε από τους ακεραίους (ή κάποια άλλα καλώς-ορισμένα αντικείμενα) με την επανειλημμένη εφαρμογή της πράξης «σύνολο των», και όχι κάτι που πήραμε χωρίζοντας την ολότητα των υπαρχόντων πραγμάτων σε δύο κατηγορίες,[212] δεν έχει οδηγήσει ποτέ σε αντινομίες. Με άλλα λόγια, η εντελώς «αφελής» και μη κριτική χρήση αυτής της έννοιας του συνόλου έχει αποδειχθεί μέχρι τώρα εντελώς ελεύθερη από αντιφάσεις.[213]

Μάλιστα, ο Gödel θεωρεί πως, υπό αυτή την οπτική, το σύνολο των αξιωμάτων χρήζει συμπλήρωσης. Συγκεκριμένα, δίνει δύο πιθανούς λόγους για τους οποίους θα μπορούσαμε να προσθέσουμε κι άλλα αξιώματα στο ZF:[214]

> Πρώτον, τα αξιώματα της θεωρίας των συνόλων δεν συνιστούν ένα κλειστό σύστημα, αλλά, αντίθετα, η ίδια η έννοια του συνόλου στην οποία βασίζονται, υποδεικνύει την επέκτασή τους με νέα αξιώματα που βεβαιώνουν την ύπαρξη και άλλων παραπέρα επαναλήψεων της πράξης «σύνολο των».
>
> Κατά δεύτερο λόγο, κι αν ακόμα αγνοήσουμε την εγγενή ανάγκη για κάποιο νέο αξίωμα, και στην περίπτωση ακόμα στην οποία αυτό δεν έχει καμία εσώτερη αναγκαιότητα, ενδέχεται να μπορεί να αποφασισθεί η αλήθεια του και με άλλον τρόπο, δηλαδή επαγωγικά, εξετάζοντας την «επιτυχία του».[215]

ο οποίος λέει χαρακτηριστικά: «Αποφύγαμε τα παράδοξα περιορίζοντας τη δημιουργία συνόλων σε στάδια. Δεν θέλουμε να περιορίσουμε επιπλέον την έννοια του συνόλου με το να μην έχουμε αρκετά στάδια.» Βλ. MADDY 1997, σσ. 55 και 58-59.

[212] Ο Gödel χρησιμοποιούσε εδώ την έκφραση «έννοια της διχοτομίας». Βλ. FERREIRÓS $^{2}$2007, σ. 443.

[213] GÖDEL 1993, σ. 185.

[214] *Ό.π.*, σ. 187.

[215] Ο Dagfinn Føllesdal, παρατηρεί πως, κατά τον Gödel, υπάρχουν τέσσερα επιχειρήματα σχετικά με την εξωγενή δικαιολόγηση που μπορεί να παρέχει η μαθηματική πρακτική στην υιοθέτηση κάποιου αξιώματος: (1) στοιχειώδεις συνέπειες, (2) επιτυχία, (3) διασάφηση και (4) συστηματοποίηση. Βλ. FØLLESDAL 1995, σσ. 442-444.

Πέραν τούτου, υποστηρίζει πως αυτό το επιχείρημα υπήρχε από την αρχή στη θεωρία συνόλων και πως δεν διατυπώθηκε ρητά λόγω της αδυναμίας των πρωτοπόρων να κατανοήσουν τις ίδιες τους τις διαισθήσεις.[216] Πράγματι, μπορούμε να ανιχνεύσουμε τέτοιου είδους δικαιολογήσεις στον τρόπο παραγωγής των διαφόρων συνόλων αριθμών, όπως αυτός καθιερώθηκε στα μέσα του 19ου αιώνα από τους Ohm, Weierstraß και Dedekind (μεταξύ άλλων). Παρ' όλα αυτά, είναι αμφίβολο το εάν υπήρχε το παραμικρό ψήγμα υπερπεπερασμένης επανάληψης στο έργο τους ή στη φιλοσοφία τους.[217]

4. *Ένα βήμα πριν την καταστροφή* (*one step before destruction*). Πρόκειται για την ακόλουθη μεθοδολογική συνταγή: Αν μια αρχή οδηγεί σε αντίφαση, την κάνουμε όλο και πιο αδύναμη, μέχρι να σταματήσει να οδηγεί σε αντίφαση. Συγκροτεί ένα καθαρά εξωγενές κριτήριο, αφού κρίνουμε εκ του αποτελέσματος αν μπορεί να προκύψει κάποια αντίφαση και μετά επιλέγουμε την πιο ισχυρή υπόθεση που να μην δημιουργεί αντίφαση.

5. *Καντοριανός περατοκρατισμός* (*Cantorian finitism*).[218] «Οι υπερπεπερασμένες οντότητες μπορούν να γίνουν αντικείμενο μαθηματικής διαχείρισης ίδιας με τις πεπερασμένες – το απόλυτο άπειρο είναι ο θεός» (Cantor). Όπως είδαμε, ο Cantor είχε διαχωρίσει τους αριθμούς σε τρεις κατηγορίες: πεπερασμένοι, υπερπεπερασμένοι και απόλυτα άπειροι. Όποιοι δεν εμπίπτουν στην τρίτη κατηγορία μπορούν να αντιμετωπιστούν ως ξεχωριστά αντικείμενα.

### *2.4.5. Σχολιασμός των αξιωμάτων*

Σε γενικές γραμμές, μπορούμε να πούμε πως τα αξιώματα του κενού συνόλου, του ζεύγους και του απείρου καθιερώνουν τις απλούστερες περιπτώσεις πεπερασμένων και άπειρων συνόλων, ενώ εκείνα του δυναμοσυνόλου και της ένωσης μας επιτρέπουν να προσεγγίσουμε όλες τις πεπερασμένες και άπειρες πληθικότητες. Τα αξιώματα δυναμοσυνόλου, επιλογής και απείρου έχουν έναν καθαρά υπαρκτικό χαρακτήρα και από αυτά μόνο το αξίωμα της επιλογής έγινε αντικείμενο σφοδρής κριτικής.[219] Ας δούμε, όμως, πιο αναλυτικά το κάθε αξίωμα.

1. *Αξίωμα της έκτασης*

Χωρίς το αξίωμα της έκτασης, το σύστημα που προκύπτει μπορεί να περιέχει άτομα ή πρωταρχικά στοιχεία (urelements). Το αξιωματικό σύστημα ZF με άτομα αναφέρεται

[216] FERREIRÓS $^2$2007, σσ. 378, 443.

[217] Σχετικά με τους Cantor και Dedekind έχει διατυπωθεί η άποψη πως εμφανίζεται στο έργο τους η υπερπεπερασμένη επανάληψη. Για τον πρώτο, μέσα στην κατασκευή των παράγωγων συνόλων του (derived sets) και στην οικοδόμηση των υπερπεπερασμένων αριθμών μέσω των δύο παραγωγικών αρχών του. Για τον δεύτερο, στον τρόπο παραγωγής των αριθμητικών συστημάτων. Η άποψη αυτή, πάντως, είναι αμφισβητήσιμη. Βλ. FERREIRÓS $^2$2007, σ. 444-451.

[218] MADDY 1997, σσ. 51-53.

[219] FERREIRÓS $^2$2007, σ. 323.

και ως ZFA.[220] Πάντως, η επικρατέστερη τάση είναι η αποδοχή της λεγόμενης αρχής της αγνότητας (principle of purity): ότι δεν υπάρχουν άτομα και ότι όλα τα αντικείμενα στο βασικό μας πεδίο αντικειμένων είναι σύνολα.[221]

Η ουσία του αξιώματος είναι στον διαχωρισμό μεταξύ εντασιακών οντοτήτων όπως οι ιδιότητες και εκτασιακών όπως είναι τα σύνολα. Δύο ιδιότητες μπορεί να αναφέρονται στα ίδια ακριβώς αντικείμενα και να είναι διαφορετικές – π.χ., οι ιδιότητες που υποδηλώνονται από τις εκφράσεις «είναι τετράγωνο πραγματικού αριθμού» και «είναι μη αρνητικός πραγματικός αριθμός». Το αξίωμα εξασφαλίζει ότι τα σύνολα, εν αντιθέσει με τις ιδιότητες, είναι εκτασιακά.[222]

Το αξίωμα της έκτασης είναι το μοναδικό μέσα στο ZFC που από κάποιους σύγχρονους συγγραφείς έχει θεωρηθεί ως αναλυτική αλήθεια για την έννοια του συνόλου. Ο Boolos, για παράδειγμα, φτάνει να πει: «Κάποιος θα μπορούσε να μπει στον πειρασμό να το καλέσει [το αξίωμα της έκτασης] αναλυτικά αληθές, λόγω του νοήματος των λέξεων που περιέχει δηλαδή, χωρίς να διανοηθεί κάτι αντίστοιχο για τα υπόλοιπα αξιώματα του ZFC.»[223]

Μια διαφορετική επιχειρηματολογία σχετικά με το αξίωμα της έκτασης τέθηκε από τους Frænkel, Bar-Hillel και Levy.[224] Μιλούν και για εντασιακά σύνολα και ανάγουν το ερώτημα «Γιατί να υιοθετήσουμε το αξίωμα της έκτασης;» στο «Γιατί να μελετάμε τα εκτασιακά και όχι τα εντασιακά σύνολα;» Σε αυτό το ερώτημα δίνουν μια απάντηση με τρία σκέλη. Πρώτον, η εκτασιακή αντίληψη του συνόλου είναι απλούστερη και πιο ξεκάθαρη από οποιαδήποτε εντασιακή αντίληψη του συνόλου.[225] Δεύτερον, ενώ υπάρχει μόνο μια εκτασιακή αντίληψη του συνόλου, υπάρχουν διάφορες εντασιακών, που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ανάλογα με τον σκοπό για τον οποίο τα σύνολα αυτά χρειάζονται. Έτσι, για μια θεμελίωση της θεωρίας συνόλων στηριγμένη σε μια εντασιακή αντίληψη του συνόλου, θα πρέπει να επιλέξουμε μεταξύ διαφόρων με έναν τρόπο που δεν μπορεί παρά να είναι αμφισβητήσιμος. Τρίτον, ξεκινώντας με την απλή έννοια του εκτασιακού συνόλου θα είμαστε ικανοί να κατασκευάσουμε εντασιακές αντιλήψεις του συνόλου μέσα στο σύστημά μας.

## 2. *Αξίωμα του κενού συνόλου και αξίωμα του ζεύγους*

Τα αξιώματα ZF2 και ZF3 πολλές φορές συναντώνται ως ένα. Είναι το αξίωμα Z2 του Zermelo («αξίωμα των στοιχειωδών συνόλων»). Μπορούν να προκύψουν από το αξίωμα του διαχωρισμού.[226]

Προκειμένου να δημιουργήσουμε το σύμπαν των συνόλων χωρίς να προκύψουν αντινομίες, θα πρέπει να αποφύγουμε την αρχή της συμπερίληψης. Η λύση που πρό-

---

[220] JECH ²2008, σσ. 44-45.

[221] ΜΟΣΧΟΒΑΚΗΣ 1993, σ. 33.

[222] MADDY 1997, σ. 37.

[223] *Ό.π.*, σ. 38.

[224] *Ό.π.*, σσ. 39-40.

[225] Με τη λογική ότι μας είναι πιο εύκολο να αντιληφθούμε τη σχέση του μέλους ενός συνόλου μ' αυτό ως προς το τι σημαίνει δύο οντότητες να έχουν την ίδια ιδιότητα. Βλ. *ό.π.*, σ. 39.

[226] ΑΝΑΠΟΛΙΤΑΝΟΣ ⁵2005, σ. 186.

τεινε ο Zermelo ήταν η αποδοχή κάποιων αξιωμάτων που να παράγουν σύνολα από άλλα σύνολα. Για να λειτουργήσει, όμως, αυτή η διαδικασία, χρειαζόμαστε μια αρχή. Το αξίωμα του κενού συνόλου προσφέρει την κατάλληλη αφετηρία για την κατασκευή συνόλων μέσω συσσωρευτικής ιεραρχίας.[227] Και οι δύο πρωτεργάτες της θεμελίωσης των μαθηματικών, Zermelo και Russell, φαίνεται να αμφέβαλλαν για το υπαρκτικό καθεστώς του κενού συνόλου. Χαρακτηριστικά είδαμε πως ο Zermelo το εισάγει ως φανταστικό, ενώ και ο Russell, αν και θεωρούσε πως ένα σύνολο πρέπει να περιέχει κάτι, δίσταζε να το αποβάλει από τη θεωρία συνόλων. Και οι δύο τελικά το χρησιμοποίησαν, καθότι απλοποιούσε ιδιαίτερα τα πράγματα. Το βασικό επιχείρημα, λοιπόν, για την αποδοχή του αξιώματος του κενού συνόλου είναι εξωγενές – προκύπτει από τη διευκόλυνση που συνοδεύει τη χρήση του.[228]

Για τη δικαιολόγηση της χρήσης του αξιώματος του ζεύγους μπορούν να επιστρατευτούν δύο βασικά (εγγενή) επιχειρήματα. Πρώτον, με βάση την αρχή περιορισμού του μεγέθους, το σύνολο {a,b} έχει μόνο δύο μέλη, οπότε δεν μπορεί, υπό οποιαδήποτε έννοια, να θεωρηθεί υπερβολικά μεγάλο. Το δεύτερο επιχείρημα βασίζεται στην επαναληπτική σύλληψη. Έστω δύο αντικείμενα a και b και έστω A και B τα στάδια στα οποία πρωτοεμφανίζονται. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι το B είναι μετά το A. Τότε το σύνολο του ζεύγους a, b εμφανίζεται στο αμέσως επόμενο στάδιο από το B.[229]

## 3. *Αξίωμα της ένωσης*

Για το αξίωμα της ένωσης, το επιχείρημα του περιορισμού του μεγέθους προσφέρει μια δικαιολόγηση, η οποία, όμως, είναι αμφιλεγόμενη: η ένωση μικρών συνόλων πρέπει να είναι μικρό σύνολο. Βέβαια, αν γνωρίζουμε την πληθικότητα των δύο αρχικών συνόλων, μπορούμε να θέσουμε ένα συγκεκριμένο όριο για την ένωση. Από την άλλη, η επαναληπτική σύλληψη προσφέρει μια πιο ικανοποιητική δικαιολόγηση, αρκετά παρόμοια με εκείνη για το αξίωμα του ζεύγους. Για μια οικογένεια συνόλων A που εμφανίζεται στο στάδιο α, όλα τα μέλη της A εμφανίζονται πριν από το στάδιο α. Έπεται ότι τα μέλη των μελών της A είναι όλα διαθέσιμα μέχρι το στάδιο α και, συνεπώς, το $\cup A$ σχηματίζεται στο στάδιο A.[230]

## 4. *Αξίωμα του απείρου*

Τα εγγενή επιχειρήματα προς υπεράσπιση του αξιώματος του απείρου είναι μάλλον αδύναμα. Με βάση την αρχή του περιορισμού του μεγέθους θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε πως το σύνολο όλων των πεπερασμένων συνόλων δεν είναι υπερβολικά μεγάλο. Από την άλλη, σύμφωνα με την επαναληπτική σύλληψη μπορεί να θεωρηθεί πως υπάρχει ένα στάδιο μετά από όλα τα πεπερασμένα στάδια.

227 Maddy 1997, σ. 40.
228 *Ό.π.*, σσ. 40-41.
229 *Ό.π.*, σ. 49.
230 *Αυτ.*

Αν, όμως, θεωρήσουμε το ZF χωρίς το αξίωμα του απείρου, παίρνουμε ως μοντέλο του το σύνολο όλων των πεπερασμένων συνόλων που μπορούν να οικοδομηθούν από το $\emptyset$.[231] Για την ανάλυση, η χρήση άπειρων συνόλων είναι αναπόδραστη, αφού ακόμα και η έννοια του «πραγματικού αριθμού» δεν μπορεί να οριστεί μόνο με τη χρήση πεπερασμένων συνόλων.[232] Αυτό, από μόνο του, είναι ένα πολύ ισχυρό εξωγενές επιχείρημα για την ανάγκη ύπαρξης ενός αξιώματος που να εξασφαλίζει την ύπαρξη άπειρων συνόλων. Εξάλλου, τα αξιώματα επιλογής και δυναμοσυνόλου αποκτούν την πραγματική τους ισχύ μόνο εάν συνοδεύονται στο σύστημα κι από ένα αξίωμα απείρου.[233]

## 5. *Αξίωμα της αντικατάστασης*

Το αξίωμα της αντικατάστασης, όπως είδαμε δεν ανήκει στην αρχική λίστα των αξιωμάτων του Zermelo. Το 1922 ο Skolem παρατήρησε πως με τα αρχικά εφτά αξιώματα δεν μπορούσαν να παραχθούν όλα τα σύνολα[234] της καντοριανής συνολοθεωρίας. Για να διορθωθεί αυτό, πρότεινε την εισαγωγή ενός τέτοιου αξιώματος. Μάλιστα, λίγο μετά ο von Neumann το χρησιμοποίησε για να αποδείξει την πιο ισχυρή μορφή του θεωρήματος καλής διάταξης,[235] πράγμα που πριν ήταν αδύνατον. Η μαθηματική πρακτική, λοιπόν, έχει εφοδιάσει το αξίωμα της αντικατάστασης με δυνατά εξωγενή επιχειρήματα.

Εγγενείς δικαιολογήσεις υπάρχουν, αλλά είναι πολύ πιο αδύναμες από τις εξωγενείς. Στο πλαίσιο του περιορισμού του μεγέθους οι Frænkel, Bar-Hillel και Levy δίνουν την εξής δικαιολόγηση: Έστω ένα σύνολο α, όχι υπερβολικά μεγάλο, και μια συλλογή από σύνολα που δεν έχει περισσότερα μέλη από το α. Τότε μπορούμε να δεχθούμε πως και αυτή η συλλογή είναι ένα όχι υπερβολικά μεγάλο σύνολο.[236] Από την άλλη, οι θεωρητικοί της επαναληπτικής σύλληψης διχάζονται σχετικά με αυτό το αξίωμα. Ο Boolos, αν και δεν αποδέχεται κάποια εγγενή δικαιολόγηση γι' αυτό, καταλήγει: «ο λόγος για να υιοθετήσουμε τα αξιώματα της αντικατάστασης είναι απλός: έχουν πολλές επιθυμητές συνέπειες και (απ' ό,τι φαίνεται) καμία ανεπιθύμητη».[237]

## 6. *Αξίωμα του δυναμοσυνόλου*

Για την υπεράσπιση της χρήσης του εν λόγω αξιώματος έχουν υποστηριχτεί τρία είδη ενδογενών επιχειρημάτων.[238] Το πρώτο στηρίζεται στον καντοριανό περατοκρατισμό:

[231] COHEN [3]2008, σ. 54. Επομένως, το αξίωμα του απείρου δεν μπορεί να προκύψει από τα υπόλοιπα, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα αξιώματα. Άρα, αν η ZF χωρίς το I (συμβολίζουμε: $ZF^{-I}$) είναι συνεπής, το ίδιο ισχύει και για τις θεωρίες $ZF^{-I}$+I, $ZF^{-I}$+(~I).

[232] MADDY 1997, σ. 52.

[233] ΑΝΑΠΟΛΙΤΑΝΟΣ [5]2005, σσ. 190-191.

[234] Συγκεκριμένα, το σύνολο {ω, P(ω), P(P(ω))…}. Βλ. MADDY 1997, σ. 57.

[235] Η ασθενής μορφή του είναι «Κάθε σύνολο μπορεί να είναι καλώς-διατεταγμένο», ενώ η ισχυρή, η οποία είναι και η γνήσια μορφή με την οποία το διατύπωσε ο Cantor, είναι «Κάθε σύνολο μπορεί να μπει σε 1-1 αντιστοιχία με κάποιο διατακτικό αριθμό».

[236] *Ό.π.*, σ. 58.

[237] *Ό.π.*, σ. 60.

[238] *Ό.π.*, σ. 53.

Εάν όλα τα πεπερασμένα σύνολα είναι μη προβληματικά, τότε μπορούμε να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη του δυναμοσυνόλου τους και το ίδιο θα ισχύει και για τα άπειρα σύνολα. Το δεύτερο στηρίζεται στον περιορισμό του μεγέθους: Εάν ένα σύνολο δεν είναι υπερβολικά μεγάλο, τότε και το δυναμοσύνολό του δεν θα είναι υπερβολικά μεγάλο. Τρίτο, η επαναληπτική σύλληψη: Εάν το σύνολο A είναι κατασκευασμένο στο στάδιο α, τότε τα μέλη του θα είναι διαθέσιμα πριν από, ή κατά, το στάδιο α, και άρα κάθε υποσύνολο του A θα έχει διαμορφωθεί το πολύ μέχρι το στάδιο α. Έτσι, το σύνολο P(A) δημιουργείται στο στάδιο α+1. Εκτός αυτών, μπορεί να επιστρατευθεί και ένα εξωγενές επιχείρημα, παρόμοιο με αυτό που χρησιμοποιήθηκε για το αξίωμα του απείρου: Η κατασκευή του συνεχούς απαιτεί τη χρήση των δυναμοσυνόλων.

## 7. *Αξίωμα της επιλογής*

Η στάση που τηρήθηκε από την πλειοψηφία των μαθηματικών (πλην των ιντουισιονιστών, αλλά συμπεριλαμβανομένου του ίδιου του Zermelo) ήταν να το χρησιμοποιούν – αποφεύγοντάς το, όμως, όπου αυτό ήταν δυνατόν.[239] Ο Zermelo, έχοντας συναισθανθεί τις αμφιβολίες του μαθηματικού κόσμου για το αξίωμα της επιλογής, από το 1908 επιχειρηματολόγησε σχετικά με τη νομιμότητα της χρήσης του. Στη δικαιολόγηση που προσέφερε επικαλείται την ευρεία χρήση που είχε γίνει από τους μαθηματικούς μέχρι τότε. Αυτό το γεγονός καθιστά τη χρήση του αξιώματος έγκυρη ιστορικά, ενώ παράλληλα υποδηλώνει πως έστω και υποσυνείδητα ενυπήρχε στη διαίσθησή τους. Μάλιστα, ο Zermelo αναφέρει χαρακτηριστικά: «Τέτοια ευρύτατη χρήση μιας αρχής μπορεί να εξηγηθεί μόνο από την εσωτερική της προφάνεια.»[240]

Η αντιπαράθεση για το αν υπάρχει κάποιος εγγενής λόγος που να δικαιολογεί τη χρήση του αξιώματος της επιλογής έφτασε να βασίζεται σε φιλοσοφικά ερωτήματα σχετικά με το αν οι μαθηματικές οντότητες υπάρχουν αντικειμενικά (ρεαλισμός) ή αν δημιουργούνται/ορίζονται από εμάς (ιδεαλισμός). Επίσης, συνδέθηκε άμεσα με το πώς βλέπει ο κάθε μαθηματικός τις διάφορες συλλογές αντικειμένων. Συγκεκριμένα, υπάρχουν πολλές περιπτώσεις που μπορεί να μην είναι δυνατόν να οριστεί αναλυτικά ή να κατασκευαστεί μια συνάρτησης επιλογής. Για τους ιντουισιονιστές, αυτό είναι αρκετό ώστε να μη δεχθούν την ύπαρξη της συνάρτησης αυτής.[241] Οι περισσότεροι μαθηματικοί, όμως, αντιτίθενται σε αυτή τη σύνδεση της ύπαρξης με την ορισιμότητα μιας οντότητας. Ένα σημαντικό εγγενές επιχείρημα που επικαλούνται έχει να κάνει με την επαναληπτική σύλληψη. Αν μια οικογένεια J ξένων μεταξύ τους, μη κενών συνόλων δημιουργείται στο στάδιο α, τότε κάθε μέλος A της J θα έχει διαμορφωθεί πριν το α και τα μέλη του A πριν από αυτό. Έτσι, τα μέλη των μελών της J θα είναι όλα διαθέσιμα στο στάδιο α και κάθε συνδυασμός διαθέσιμων στοιχείων θα διαμορφώνεται στο α, συμπεριλαμβανομένου του συνόλου επιλογής.[242]

---

[239] Ferreirós [2]2007, σ. 320.

[240] Βέβαια, στο ίδιο σχόλιο καταλήγει πως, σε τελική ανάλυση, αυτό το «αυταπόδεικτο», ή αυτή η «προφάνεια», είναι ως ένα βαθμό υποκειμενικό ζήτημα. Βλ. Maddy 1997, σσ. 54-56.

[241] *Ό.π.*, σ. 55.

[242] Οι θεωρητικοί της επαναληπτικής σύλληψης διχάζονται σχετικά με αυτό το επιχείρημα. Βλ. *ό.π.*, σ. 55.

Το εξωγενές επιχείρημα είναι και σε αυτή την περίπτωση πολύ πιο ισχυρό. Ο Zermelo ενδεικτικά παραθέτει έναν αριθμό συνεπειών ή ισοδύναμων προτάσεων του αξιώματος της επιλογής.[243] Όμως, το αξίωμα επιλογής (C) είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα αξιώματα. Δηλαδή, αν η ZF είναι συνεπής θεωρία, τότε συνεπείς είναι και οι θεωρίες ZF+C και ZF+(¬C).[244] Επομένως, οι προτάσεις που έπονται ή είναι ισοδύναμες με το αξίωμα της επιλογής (θεώρημα καλής διάταξης, λήμμα του Zorn κ.λπ.) χάνονται εάν αποβάλλουμε το τελευταίο από το ZF. Τομείς των μαθηματικών όπως η ανάλυση, η τοπολογία, η αφηρημένη άλγεβρα και η μαθηματική λογική έχουν πολλά να χάσουν εάν δεν συμπεριλάβουμε στο αξιωματικό τους σύστημα το αξίωμα της επιλογής.[245] Μάλιστα, ο Zermelo κλείνει την υπεράσπιση του αξιώματος της επιλογής με μια φράση που φανερώνει την προτίμησή του για τα εξωγενή επιχειρήματα: «Οι αρχές πρέπει να κρίνονται μέσα από την οπτική της επιστήμης και όχι η επιστήμη μέσα από το πρίσμα αρχών που είναι μια και καλή επιλεγμένες.»[246] Από την άλλη, το αξίωμα της επιλογής έχει και συνέπειες οι οποίες δεν είναι ευχάριστες, όπως η απόδειξη από τον Giuseppe Vitali (1875-1932) της ύπαρξης συνόλου πραγματικών αριθμών που δεν είναι μετρήσιμο σε σύστημα Lebesgue.[247]

## 8. *Αξίωμα του διαχωρισμού*[248]

Ο Zermelo, με τους ορισμούς που είχε δώσει για τα σύνολα, είχε περιορίσει πάρα πολύ τη δυνατότητα κατασκευής συνόλων. Έπρεπε, λοιπόν, να βρει έναν τρόπο να συμπληρώσει τις διαδικασίες κατασκευής νέων συνόλων, χωρίς, όμως, να επιτρέψει την εμφάνιση των συνολοθεωρητικών παραδόξων που διευκολύνονταν από τον προηγούμενο ορισμό του συνόλου κατά Cantor. Αυτό το κατάφερε με το αξίωμα του διαχωρισμού,[249] το οποίο απαγορεύει τον ανεξάρτητο ορισμό ενός συνόλου. Επιτρέπει μόνο τον ορισμό ενός συνόλου μέσω διαχωρισμού σε υποσύνολα ενός ήδη δοσμένου συνόλου.[250] Με αυτό τον τρόπο αποφεύγονται προβληματικές έννοιες, όπως «το σύνολο όλων των συνόλων» και «το σύνολο όλων των διατακτικών αριθμών». Έτσι, αντιμετωπίζει ευθέως το παράδοξο του Russell. Επίσης, όπως είδαμε, με τη χρήση οριστικών ισχυρισμών (ιδιοτήτων που εκφράζονται από καλώς σχηματισμένους τύπους της γλώσσας της ZFC) αποφεύγει και τα σημασιολογικά ή ερμηνευτικά παράδοξα.[251] Ο

[243] Υπάρχει ιδιαίτερη βιβλιογραφία που έχει ως αντικείμενο ακριβώς τις ισοδύναμες προτάσεις και τις συνέπειες του αξιώματος της επιλογής. Ενδεικτικά αναφέρουμε τους JECH ²2008 και HOWARD/RUBIN 1998.

[244] ΑΝΑΠΟΛΙΤΑΝΟΣ ⁵2005, σ. 188.

[245] MADDY 1997, σ. 56.

[246] ZERMELO 1967β΄.

[247] JECH ²2008, σ. 2.

[248] Αναλόγως με τον σκοπό για τον οποίο χρησιμοποιεί κανείς το ZF, μπορεί να επιλέξει ένα από τα αξιωματικά σχήματα αντικατάστασης ή διαχωρισμού (ή και τα δύο). Το αξίωμα του διαχωρισμού, μάλιστα, προκύπτει από το αξίωμα της αντικατάστασης. Βλ. COHEN ³2008, σ. 55.

[249] FERREIRÓS ²2007, σ. 322.

[250] MADDY 1997, σ. 49.

[251] *Ό.π.*, σ. 50.

αποκλεισμός των παραδόξων είναι από μόνος του ένα πολύ ισχυρό εξωγενές επιχείρημα για τη χρήση του αξιώματος του διαχωρισμού.

Εκτός αυτού, πάντως, προσφέρεται και ένα (εγγενές) επιχείρημα περιορισμού τού μεγέθους: Εάν το αρχικό σύνολο δεν είναι υπερβολικά μεγάλο, το παραγόμενο σύνολο επίσης δεν θα είναι υπερβολικά μεγάλο.[252]

Τέλος, αν εξετάσουμε το αξίωμα του διαχωρισμού από τη σκοπιά της επαναληπτικής σύλληψης, προκύπτει η εξής (εγγενής) δικαιολόγηση: Έστω ότι το σύνολο x δημιουργείται αρχικά στο στάδιο α. Τότε όλα τα μέλη του x θα πρέπει να έχουν δημιουργηθεί πριν από το στάδιο α· οπότε κάθε μέλος z του x που ικανοποιεί την ιδιότητα φ(z) πρέπει να έχει δημιουργηθεί πριν από το στάδιο α. Έτσι, το σύνολο $y = \{z \in x\colon \varphi(z)\}$ κατασκευάζεται στο στάδιο α το αργότερο.[253]

## 9. *Αξίωμα της θεμελίωσης*[254]

Ο Zermelo το χρησιμοποίησε για να λύσει το παράδοξο του Russell το 1905, αλλά τελικά το έσβησε από τη λίστα όταν θεώρησε πως το αξίωμα του διαχωρισμού ήταν αρκετό.[255] Το αξίωμα αυτό είναι ιδιαίτερα τεχνικό και στα κλασικά μαθηματικά δεν χρησιμοποιείται σχεδόν ποτέ. Ο Gödel είχε πει πως αν και δεν είναι απαραίτητο, διευκολύνει πολύ τα πράγματα.[256] Πάντως, ένα μειονέκτημα που έχει είναι πως στερείται της διαισθητικής προφάνειας που έχουν τα υπόλοιπα αξιώματα.[257]

Στο πλαίσιο της συσσωρευτικής ιεραρχίας προσφέρει το κενό σύνολο ως αφετηρία, καθότι απαγορεύει τη σχέση «$x \in x$». Με αυτό τον τρόπο, περιορίζει τη θεωρία συνόλων σε καλώς-θεμελιωμένα σύνολα (σύνολα στα οποία δεν υπάρχει καμία άπειρη αλυσίδα-∈).[258] Το ερώτημα της αλήθειας του αξιώματος, δηλαδή αν όλα τα σύνολα είναι καλώς-θεμελιωμένα, είναι ανοιχτό.[259] Η στάση που υιοθετούν οι περισσότεροι είναι πως τα καλώς-θεμελιωμένα σύνολα είναι εύχρηστα και με καλή συμπεριφορά.[260] Έχει, επομένως, και αυτό το αξίωμα μια εξωγενή αιτιολόγηση για τη χρήση του.

---

[252] *Αυτ.*

[253] *Ό.π.*, σ. 51.

[254] Υπάρχει μια κατηγορία θεωριών συνόλων που λέγεται «Μη-καλώς-Θεμελιωμένες Θεωρίες Συνόλων» ή «Νέες Θεμελιώσεις» («Non-well-founded Set Theories», «New Foundations») η οποία αξιοποιεί όλα τα υπόλοιπα αξιώματα της θεωρίας συνόλων, αλλά, αντί για το αξίωμα της θεμελίωσης, έχει κάποιο άλλο, που είναι άρνηση του αρχικού (υπάρχουν 4 παραλλαγές). Αυτές οι θεωρίες χρησιμοποιούνται ως επί το πλείστον σε εφαρμογές υπολογιστών. Βλ. «Non-well-founded Set Theory» και «New Foundations»: *Wikipedia* (πρόσβ. 2012)· T. FORSTER, «Quine's New Foundations» (2006): ZALTA 2012.

[255] MADDY 1997, σ. 60.

[256] FERREIRÓS [2]2007, σσ. 380-381.

[257] ΑΝΑΠΟΛΙΤΑΝΟΣ [5]2005, σ. 187.

[258] COHEN 2008, σσ. 53-54.

[259] Εάν δεχθούμε το αξίωμα της θεμελίωσης, τότε αποδεικνύεται και το θεώρημα που λέει πως κάθε σύνολο είναι καλώς-θεμελιωμένο. Βλ. *ό.π.*, σ. 69.

[260] MADDY 1997, σ. 61.

# 3. ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΥΠΟΨΗΦΙΑ ΝΕΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ

ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΚΡΑΤΗΣΗ του συστήματος ZFC στην αξιωματική θεωρία συνόλων, κατά τα μέσα του 20$^{ου}$ αιώνα, έγινε αντιληπτό πως, αν και είναι ιδιαίτερα βολικό, δεν μπορεί να λύσει όλα τα προβλήματα που μπορούν να προκύψουν στους διάφορους κλάδους των μαθηματικών. Αυτά τα ερωτήματα, για τα οποία δεν μπορούν να αποφανθούν τα αξιώματα του ZFC –για τα οποία το ZFC δεν μπορεί να αποδείξει ούτε τη μια απάντηση ούτε την άρνησή της– τα λέμε «ανεξάρτητα». Αρκετά απ' αυτά, έχουν κριθεί ως πολύ χρήσιμα για τα μαθηματικά και η χρησιμότητά τους αυτή έχει δημιουργήσει την τάση για αναζήτηση νέων αξιωμάτων ως προσθήκη στα υπάρχοντα. Η κριτική σχετικά με αυτά τα αξιώματα γίνεται στην ίδια βάση που έγινε κατά το παρελθόν και η κριτική για το ZFC: τα εγγενή επιχειρήματα συνδυάζονται με εξωγενή, ώστε η δικαιολόγηση να είναι επαρκής. Η δυνατότητα απάντησης σε σχέση με τα ανεξάρτητα ερωτήματα είναι ένα ισχυρό εξωγενές επιχείρημα. Στην πρώτη ενότητα του Κεφαλαίου θα εξετάσουμε σύντομα κάποια σημαντικά ερωτήματα αυτού του είδους, στην δεύτερη ενότητα θα αναλυθούν συνοπτικά τα βασικότερα υποψήφια νέα αξιώματα, ενώ στην τρίτη θα γίνει μια πιο λεπτομερής ανάλυση ενός από αυτά, ούτως ώστε να γίνει σαφής ο τρόπος με των οποίο γίνεται η φιλοσοφική δικαιολόγησή τους. Βασική πηγή για όλο το Κεφάλαιο αποτελεί το έργο της Penelope Maddy[261] γύρω από τα αξιώματα και τη φιλοσοφική τους αντιμετώπιση. Σε μεγάλο βαθμό, σε αυτό το Κεφάλαιο ακολουθώ τη δομή του βιβλίου της *Naturalism in Mathematics*, ενώ και πολλά από τα σχόλια προέρχονται από εκεί. Βεβαίως, υπάρχουν και άλλοι, μαθηματικοί και φιλόσοφοι, οι οποίοι ασχολούνται ενεργά με το ζήτημα. Για παράδειγμα, υπάρχει ένας κύκλος μελετητών, με πιο γνωστό τον Martin Davis, κείμενα των οποίων καλύπτουν μια πολύ μεγάλη θεματολογία γύρω από τη θεμελίωση των μαθηματικών. Φυσικά, η πλήρης κάλυψη ενός τέτοιου ζητήματος στα πλαίσια μιας εργασίας σαν την παρούσα είναι υπερβολικά φιλόδοξος στόχος.

## 3.1. Κάποια ανεξάρτητα ερωτήματα

### *3.1.1. Η υπόθεση του συνεχούς*

ΤΟ ΠΡΩΤΟ από τα ανεξάρτητα ερωτήματα της θεωρίας συνόλων και σίγουρα το πιο διάσημο[262] είναι η υπόθεση του συνεχούς (Continuum Hypothesis – σύντμ.: CH). Διατυπώθηκε το 1878 από τον Cantor στην εξής αθενή μορφή:

[261] Τα δυο άρθρα με τίτλο «Believing the Axioms» (μέρη 1-2: MADDY 1988α΄ και ΙΔ. 1988β΄) και το βιβλίο *Naturalism in Mathematics* (ΙΔ. 1997).

[262] Όπως είδαμε, ο Hilbert το κατέταξε πρώτο στη λίστα με τα 23 προβλήματα που έθεσε στο συνέδριο του 1900.

> Σε πόσες και ποιες διαφορετικές κλάσεις (αν θεωρήσουμε πως τα σύνολα με ίδια ή διαφορετική πληθικότητα ομαδοποιούνται σε ίδιες ή διαφορετικές κλάσεις αντίστοιχα) ανήκουν τα άπειρα σύνολα πραγματικών αριθμών; [...] Με μια επαγωγική διαδικασία, την οποία δεν θα αναλύσουμε εδώ, καταλήγουμε στο θεώρημα πως ο αριθμός των κλάσεων είναι δύο.[263]

Η πρώτη κλάση είναι αυτή των αριθμήσιμα άπειρων συνόλων πραγματικών αριθμών, ενώ η δεύτερη αποτελείται από τα σύνολα που μπορούν να έρθουν σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών. Το 1882, αφού απέδειξε πως ο πληθικός αριθμός του $\omega_1$ (του συνόλου όλων των αριθμήσιμων διατακτικών αριθμών) είναι ο αμέσως μεγαλύτερος πληθικός αριθμός από τον $\aleph_0$, ο Cantor ισχυρίστηκε πως το $\omega_1$ και το συνεχές C (από το *Continuum*) μπορούν να τεθούν σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία. Αυτή είναι μια πιο ισχυρή εκδοχή της υπόθεσης του συνεχούς, αφού προϋποθέτει πως το συνεχές είναι καλώς-διατεταγμένο, και είναι ισοδύναμη με τη σύγχρονη διατύπωση της CH: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Η αδυναμία απόδειξης είτε της CH είτε της άρνησής της άρχισε να γίνεται αντιληπτή μέσα από το έργο του Gödel στα τέλη της δεκαετίας του 1930. Ο Gödel έδειξε πως εάν το ZFC είναι συνεπές, το ίδιο ισχύει και για το ZFC+CH. Άρα, το ZFC δεν μπορεί να αποδείξει την άρνηση της υπόθεσης του συνεχούς. Μια διαισθητική σκιαγράφηση της απόδειξης έχει ως εξής: Κατασκευάζουμε μια εναλλακτική συσσωρευτική ιεραρχία L, έναντι της παραδοσιακής V του Zermelo. Στην L αληθεύουν τα αξιώματα του ZFC και η CH. Εάν μπορούσε να αποδειχθεί πως η CH δεν είναι αληθής στο ZFC, τότε η άρνηση της CH θα ήταν θεώρημα του ZFC και άρα θα ήταν αληθής και στην L – πράγμα άτοπο. Η διαφορά μεταξύ των μοντέλων L και V βρίσκεται σε μια αλλαγή στον κατά-στάδια ορισμό του συνόλου. Στην ιεραρχία V, προκειμένου να ορίσουμε τα σύνολα του σταδίου α+1, παίρνουμε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των συνόλων που έχουν οριστεί μέχρι και το στάδιο α ($V_\alpha$). Αντίθετα, στην ιεραρχία L, στο στάδιο α+1, προσθέτουμε μόνο αυτά τα υποσύνολα της $L_\alpha$ που ορίζονται μέσω ενός πρωτοβάθμιου τύπου, του οποίου οι ποσοδείκτες και οι παράμετροι διατρέχουν την $L_\alpha$.

Από την άλλη, η εργασία του Cohen στις αρχές της δεκαετίας του 1960 έδειξε ότι εάν το ZFC είναι συνεπές, το ίδιο ισχύει και για το ZFC+¬CH . Επομένως, ούτε η ίδια η CH είναι αποδείξιμη στο ZFC.

### *3.1.2. Ανοιχτά ερωτήματα της περιγραφικής θεωρίας συνόλων*[264]

Κατά τις αρχές του 20ού αιώνα, οι Baire, Borel και Lebesgue επιχείρησαν να ταξινομήσουν τις συναρτήσεις από πραγματικούς σε πραγματικούς με βάση την πολυπλοκότητά τους και σύντομα έγινε αντιληπτό πως αυτό το πρόβλημα μπορούσε να αναχθεί στο αντίστοιχο της ταξινόμησης συνόλων πραγματικών με βάση την πολυπλοκό-

[263] Μτφρ. από MADDY 1997, σ. 63.

[264] Περισσότερες πληροφορίες για την περιγραφική θεωρία συνόλων μπορούν να βρεθούν στα MOSCHOVAKIS 1980 και KANAMORI ²2009.

τητά τους.[265] Τα πιο απλά σύνολα πραγματικών είναι τα κλειστά και τα συμπληρώματά τους, τα ανοιχτά.[266] Ο Borel όρισε την ιεραρχία των συνόλων πραγματικών αριθμών ξεκινώντας με αυτά: $\Sigma_1^0$ τα ανοιχτά σύνολα· $\Pi_1^0$ τα κλειστά σύνολα· $\Sigma_{\alpha+1}^0 = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A$ είναι η ένωση αριθμήσιμου πλήθους συνόλων από το $\Pi_\alpha^0\}$, $\Pi_{\alpha+1}^0 = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} - A$ ανήκει στο $\Sigma_{\alpha+1}^0\}$ και $\Delta_\alpha^0 = \Sigma_\alpha^0 \cap \Pi_\alpha^0$. Ένα σύνολο είναι Borel ανν ανήκει σε κάποιο $\Sigma_\alpha^0$.

Τα σύνολα Borel, παρά την πολυπλοκότητά τους, έχουν καλή συμπεριφορά και είναι ιδιαίτερα χρήσιμα. Για παράδειγμα, το 1884 ο Cantor είχε αποδείξει πως η υπόθεση του συνεχούς ισχύει για όλα τα κλειστά σύνολα. Το 1916 ο Hausdorff απέδειξε πως η CH ισχύει για όλα τα σύνολα Borel. Μια ακόμα πρόοδος στον χώρο αυτό ήρθε από τους Luzin και Suslin, οι οποίοι όρισαν τα προβολικά σύνολα: $\Sigma_0^1$ τα ανοιχτά σύνολα· $\Pi_0^1$ τα κλειστά σύνολα· $\Sigma_{\alpha+1}^1$ προβολές των $\Pi_\alpha^1$ συνόλων· $\Pi_{\alpha+1}^1$ συμπληρώματα των $\Sigma_{\alpha+1}^1$ και $\Delta_\alpha^1 = \Sigma_\alpha^1 \cap \Pi_\alpha^1$. Ο Suslin απέδειξε πως τα σύνολα Borel είναι ακριβώς τα $\Delta_1^1$ ενώ και οι δύο μαζί έδειξαν πως τα σύνολα $\Pi_1^1$ και $\Sigma_1^1$ είναι Lebesgue-μετρήσιμα και πως τα μη αριθμήσιμα $\Sigma_1^1$ σύνολα έχουν τέλεια υποσύνολα. Εδώ, όμως, σταμάτησε η πρόοδος: η μετρησιμότητα των $\Sigma_2^1$ παρέμεινε αναπάντητη από το ZFC, ενώ το ίδιο συνέβη με το ερώτημα της ύπαρξης «λεπτών» $\Pi_1^1$ συνόλων.[267]

### *3.1.3. Το πρόβλημα Whitehead*

Μέσα από την εφαρμογή της θεωρίας συνόλων σε άλλους κλάδους, όπως η άλγεβρα και η τοπολογία, προέκυψαν ανοιχτά ερωτήματα και σε αυτούς. Στην άλγεβρα, μπορεί να δειχθεί πως κάθε ελεύθερη ομάδα είναι ομάδα Whitehead – δηλαδή, έχει μια μοναδική επέκταση από τους ακεραίους. Το αντίστροφο, όμως, είναι πιο ιδιαίτερη περίπτωση. Το 1951, ο Stein έδειξε πως κάθε αριθμήσιμη ομάδα Whitehead είναι ελεύθερη, ενώ το 1974 έφτασε στο τελευταίο σχετικό αποτέλεσμα, ότι, δηλαδή, στο μοντέλο L κάθε ομάδα Whitehead είναι ελεύθερη. Όμως, μαζί με αυτό το αποτέλεσμα ανακοίνωσε και ένα άλλο, λιγότερο ευπρόσδεκτο: Μέσω της μεθόδου εξαναγκασμού μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα μοντέλο με μια μη ελεύθερη ομάδα Whitehead μεγέθους $\aleph_1$. Αυτό συνεπάγεται πως και το πρόβλημα Whitehead της άλγεβρας ανήκει στα ανοιχτά ερωτήματα της θεωρίας συνόλων.

## 3.2. Υποψήφια νέα αξιώματα

### *3.2.1. Το αξίωμα της κατασκευασιμότητας*

Είδαμε προηγουμένως πως, εκτός από το κλασικό μοντέλο V συσσωρευτικής ιεραρχίας του ZFC, έχει συγκροτηθεί και το μοντέλο L. Ο Gödel έθεσε ως υποψήφιο

[265] Maddy 1997, σ. 67

[266] Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και $r \in \mathbb{R}$, τότε το r είναι οριακό σημείο του A ανν υπάρχουν στοιχεία του A (διαφορετικά από το r) αυθαίρετα κοντά στο r. Το A λέγεται κλειστό σύνολο ανν περιέχει όλα τα οριακά του σημεία. Το $B \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοιχτό ανν το συμπλήρωμα του B, $\mathbb{R} - B = \{r \in \mathbb{R} \mid r \notin B\}$, είναι κλειστό.

[267] Μη αριθμήσιμα σύνολα που δεν περιέχουν τέλεια υποσύνολα.

αξίωμα τον ισχυρισμό $V=L$, το οποίο, επειδή συνεπάγεται πως κάθε σύνολο είναι κατασκευάσιμο (με την έννοια που το εννοεί ο Gödel), λέγεται αξίωμα της κατασκευασιμότητας (axiom of constructibility). Το σύστημα $ZFC+V=L$ είναι σχετικά συνεπές, δηλαδή, αν το ZFC είναι συνεπές, το ίδιο ισχύει και για το $ZFC+V=L$. Αυτό το στοιχείο καθιστά την προσθήκη του στο υπάρχον σύστημα ασφαλή, με την έννοια πως από αυτή δεν μπορούν να προκύψουν αντινομίες. Εκτός, όμως, από ασφαλές, το αξίωμα της κατασκευασιμότητας είναι και πολύ ισχυρό: είναι σε θέση να δώσει απάντηση σε όλα τα προαναφερθέντα ανεξάρτητα ερωτήματα. Αποδεικνύει την υπόθεση του συνεχούς (καθότι στο L η CH είναι αληθής) και την ύπαρξη μη μετρήσιμων $\Sigma_2^1$ συνόλων και λεπτών $\Pi_1^1$ συνόλων, ενώ επίσης λύνει το πρόβλημα Whitehead θετικά (στο L, κάθε ομάδα Whitehead είναι ελεύθερη). Η ασφάλεια και η ισχύς του είναι δύο σημαντικά εξωγενή επιχειρήματα για την προσθήκη τού $V=L$ στο ZFC. Το επόμενο ερώτημα έχει να κάνει με το κατά πόσον είναι και ανεξάρτητο. Βεβαίως, όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 2, τα αξιώματα του ZFC δεν είναι όλα ανεξάρτητα μεταξύ τους.

### *3.2.2. Αξιώματα μεγάλων πληθικών αριθμών*

Τα αξιώματα μεγάλων πληθικών αριθμών (large cardinal axioms) έχουν ως βασικό χαρακτηριστικό τους ότι εξασφαλίζουν την ύπαρξη περαιτέρω σταδίων της συσσωρευτικής ιεραρχίας, υπό την έννοια πως υποθέτουν την ύπαρξη ενός μεγάλου υπερπεπερασμένου πληθικού αριθμού, ο οποίος χρησιμεύει ως δείκτης σε ύστερο στάδιο της ιεραρχίας. Στην ομάδα αυτή μπορεί να θεωρηθεί πως ανήκει και το αξίωμα (ύπαρξης) του απείρου, το οποίο επιτρέπει την θεώρηση των σταδίων $\omega+\omega$, $\omega_1$, $\omega_\omega$ κ.ο.κ.

Το πρώτο νέο αξίωμα αυτής της κατηγορίας ήταν αυτό των απρόσιτων πληθικών αριθμών[268] (axiom of inaccessible cardinals) και συνεπάγεται την ύπαρξη ενός σταδίου της συσσωρευτικής ιεραρχίας μετά από όλα αυτά που προκύπτουν από το ZFC. Ένα βασικό πρόβλημα που ανακύπτει με αυτό, όπως και με όλα τα υπόλοιπα αξιώματα μεγάλων πληθικών αριθμών, είναι πως δεν μπορεί να αποδειχθεί η σχετική συνέπειά του. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, το αξίωμα των απρόσιτων πληθικών αριθμών (το οποίο θα συμβολίζουμε με «I») εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός απρόσιτου πληθικού αριθμού μεγαλύτερου από το $\aleph_0$. Αν ο $\kappa$ είναι ένας τέτοιος απρόσιτος πληθικός αριθμός, μπορεί να αποδειχθεί πως το $V_\kappa$ είναι ένα μοντέλο του ZFC και επομένως ότι το ZFC είναι συνεπές. Αν μπορούσαμε να αποδείξουμε τη σχετική συνέπεια («αν το ZFC είναι συνεπές, τότε το ίδιο ισχύει και για το ZFC+I»), τότε θα μπορούσαμε να την αποδείξουμε στο ZFC και άρα και στο ZFC+I. Τότε, το ZFC+I θα μπορούσε να αποδείξει τη σχετική συνέπειά του και τη συνέπεια του ZFC και επομένως, μέσω modus ponens, και τη δική του συνέπεια. Αν, όμως, μπορεί να το κάνει αυτό, τότε, λόγω του δεύτερου θεωρήματος μη πληρότητας, θα πρέπει το ZFC+I να μην είναι συ-

[268] Ένας απρόσιτος πληθικός αριθμός $\kappa$ είναι αυτός που: (1) η ένωση οποιασδήποτε συλλογής λιγότερων από $\kappa$ συνόλων με μέγεθος μικρότερο από $\kappa$ έχει και αυτή μικρότερο μέγεθος από $\kappa$ και (2) αν ο $\lambda$ είναι ένας πληθικός μικρότερος από τον $\kappa$, τότε και ο $2^\lambda$ είναι επίσης μικρότερος από τον $\kappa$. Δηλαδή ο $\kappa$ δεν μπορεί να προσεγγιστεί μέσω ενώσεων ή δυναμοσυνόλων μικρότερων συνόλων.

νεπές. Βλέπουμε, λοιπόν, πως η προσθήκη του I στο ZFC δεν είναι εξίσου ασφαλής με εκείνη του V=L . Οι απρόσιτοι είναι οι μικρότεροι από τους μεγάλους πληθικούς αριθμούς. Μεγαλύτεροι μεγάλοι πληθικοί αριθμοί είναι οι υπεραπρόσιτοι, οι αριθμοί Mahlo κ.ά.[269] Όλοι αυτοί, όμως, θεωρούνται μικροί μεγάλοι πληθικοί αριθμοί σε σχέση με τους μετρήσιμους πληθικούς αριθμούς. Το βασικό ερώτημα εδώ είναι το κατά πόσον υπάρχει κάποιος μετρήσιμος πληθικός αριθμός, και έχουν υπάρξει αρκετές εξελίξεις σε αυτή την κατεύθυνση, όπως και προτάσεις για ορισμένα σχετικά αξιώματα. Τα αξιώματα αυτά δηλώνουν την ύπαρξη κάποιου μετρήσιμου πληθικού αριθμού. Όμως, έχει αποδειχθεί πως αν υπάρχει ένας μετρήσιμος πληθικός, αυτό συνεπάγεται πως το μέτρο του είναι μη κατασκευάσιμο, γεγονός που συνεπάγεται πως το αξίωμα της κατασκευασιμότητας δεν ισχύει.[270]

### *3.2.3. Αξιώματα καθορισιμότητας*

Στις προηγούμενες δύο περιπτώσεις, τα υποψήφια αξιώματα ήταν γενικοί ισχυρισμοί σχετικά με το σύμπαν των συνόλων, οι οποίοι, έμμεσα έδιναν πληροφορίες για κάποια σύνολα πραγματικών αριθμών. Η τρίτη αυτή κατηγορία νέων αξιωμάτων είναι διαφορετική, αφού πρόκειται για ευθείς ισχυρισμούς περί συγκεκριμένων συνόλων πραγματικών αριθμών. Αναδύθηκε μέσα από τη μαθηματική μελέτη των άπειρων παιγνίων ως εξής. Έστω ένα παιχνίδι (με άπειρο πλήθος κινήσεων) όπου δύο παίκτες παίζουν διαδοχικά επιλέγοντας «0» ή «1». Αν σκεφτούμε έναν πραγματικό αριθμό (στο [0,1]) ως μια άπειρη ακολουθία από «0» και «1», τότε κάθε τέτοιο παιχνίδι μπορεί να θεωρηθεί πως δημιουργεί έναν πραγματικό. Αν το A είναι ένα σύνολο πραγματικών (υποσύνολο του [0,1]), τότε ορίζουμε το παιχνίδι G(A) στο οποίο κερδίζει ο πρώτος παίκτης αν ο πραγματικός που θα προκύψει ανήκει στο A, ενώ στην αντίθετη περίπτωση κερδίζει ο δεύτερος. Το παιχνίδι G(A) και το σύνολο A, αντίστοιχα, λέγονται καθορισμένα (determined) αν ο ένας από τους δύο παίκτες έχει μια νικηφόρα στρατηγική. Η καθορισιμότητα είναι μια ιδιαίτερα ευπρόσδεκτη ιδιότητα, καθότι από αυτήν έπονται και άλλες.[271] Ένα καθορισμένο σύνολο είναι Lebesgue-μετρήσιμο, έχει την ιδιότητα του τέλειου υποσυνόλου, κ.λπ. Το αξίωμα της καθορισιμότητας (axiom of determinacy), πρωτοεισήχθη από τους Mycielski και Steinhaus το 1962 και είναι η υπόθεση πως όλα τα σύνολα πραγματικών αριθμών είναι καθορισμένα. Η συγκεκριμένη εκδοχή, όμως, είχε αποδειχθεί από τους Gale και Stewart πως έρ-

[269] Ο Mahlo εισήγαγε τους υπεραπρόσιτους πληθικούς αριθμούς (hyperinaccessible cardinals), οι οποίοι ορίζουν μια νέα αλληλουχία. Οι υπεραπρόσιτοι ορίζονται ως εξής: Έστω ένας πληθικός κ, τόσο μεγάλος, ώστε υπάρχουν κ απρόσιτοι πληθικοί αριθμοί, μικρότεροι από τον κ. Γενικεύοντας αυτή τη διαδικασία, ο Mahlo όρισε και μια μεγαλύτερη κλάση μεγάλων πληθικών που πλέον φέρουν το όνομά του. Καθένας από αυτούς τους μεγάλους πληθικούς αριθμούς ορίζει ένα μοντέλο του ZFC. Το συμπέρασμα είναι πως το συνολοθεωρητικό σύμπαν συνίσταται σε μια σειρά όλο και μεγαλύτερων μοντέλων του ZFC, ένα για κάθε απρόσιτο αριθμό, ενώ το V μπορεί να θεωρηθεί ως η τομή όλων αυτών των $V_\kappa$, $V_{\kappa'}$, $V_{\kappa''}$... Ουσιαστικά, δεν υπάρχει τέλος σε αυτή τη σειρά – μόνο οριακά σημεία, για τα οποία ορίζεται ένας καινούργιος απρόσιτος αριθμός. Βλ. MADDY 1997, σσ. 74-75.

[270] *Ό.π.*, σ. 76.

[271] Βλ. *ό.π.*, σ. 79.

χεται σε αντίθεση με το ευρύτατα αποδεκτό αξίωμα της επιλογής και άρα δεν μπορούσε παρά να απορριφθεί.[272] Αντί γι' αυτήν, έχουν προταθεί κάποιες πιο ασθενείς και περιορισμένες υποθέσεις, όπως το αξίωμα της προβολικής καθορισιμότητας (axiom of projective determinacy – σύντμ.: PD) που ισχυρίζεται πως όλα τα προβολικά σύνολα είναι καθορισμένα.

Το σύστημα ZFC+PD έχει αναπτυχθεί αρκετά και προσφέρει μια ισχυρή εναλλακτική απέναντι στο ZFC+ V=L . Έχει, όμως, μια αδυναμία: είναι πολύ «ειδικό» για να ανήκει στα βασικά αξιώματα της συνολοθεωρίας.[273] Μια ποθητή εξέλιξη ήταν η εξαγωγή του PD από πιο θεμελιώδεις και γενικές αρχές, όπως τα αξιώματα μεγάλων πληθικών, πράγμα που επετεύχθη το 1984 από τον Woodin. Ο Woodin έδειξε πως, αν υπάρχει ένας υπερσυμπαγής (supercompact) πληθικός, τότε κάθε προβολικό σύνολο είναι Lesbegue-μετρήσιμο και έχει την ιδιότητα του τέλειου υποσυνόλου. Το αποτέλεσμα αυτό τελειοποιήθηκε από τους Martin και Steel με το εξής θεώρημα: Αν υπάρχει κάποιος υπερσυμπαγής πληθικός, τότε όλα τα προβολικά σύνολα είναι καθορισμένα. Με τη βοήθεια του θεωρήματος αυτού, μπορούμε από το αξίωμα SC («υπάρχει κάποιος υπερσυμπαγής πληθικός») να παραγάγουμε το PD. Πάντως, το SC (και επομένως και το PD) δεν μπορεί να δώσει κάποια απάντηση για την υπόθεση του συνεχούς.[274]

Όπως είδαμε, τα τρία παραπάνω είδη αξιωμάτων συνδέονται θεμελιωδώς μεταξύ τους. Αξιώματα για «αρκετά» μεγάλους μεγάλους πληθικούς αριθμούς (μετρήσιμους) διαψεύδουν το V=L . Από την άλλη, κάποια ιδιαίτερα ισχυρά αξιώματα μεγάλων πληθικών αριθμών, όπως αυτό του υπερσυμπαγούς, συνεπάγονται την καθορισιμότητα, άρα και την κανονικότητα, όλων των προβολικών συνόλων. Το συμπέρασμα είναι πως ο μαθηματικός που ασχολείται με τη θεμελίωση της θεωρίας συνόλων καλείται να κάνει κάποιες σημαντικές επιλογές. Θα προτιμήσει άραγε να κατασκευάσει εναλλακτικές θεωρίες συνόλων (στην καθεμιά από τις οποίες θα προσθέτει στο ZFC και ένα από τα παραπάνω αξιώματα) ή να έχει μια ενιαία θεωρία συνόλων; Και αν αποφασίσει το δεύτερο (δηλαδή να έχει μια συγκεκριμένη καθολική θεωρία), τότε ποιο θα είναι το αξίωμα που θα επιλέξει για να συμπληρώσει το υπάρχον σύστημα; Το πρώτο ερώτημα είναι ο τόπος εκδήλωσης της σύγκρουσης δύο τάσεων των μαθηματικών σχετικά με την κατεύθυνση που πρέπει να έχει η έρευνα της θεωρίας συνόλων. Το δεύτερο έχει να κάνει με τη σύγκριση των αξιωμάτων. Και στα δύο αυτά ζητήματα υπεισέρχεται η φιλοσοφία των μαθηματικών, καθότι η απάντηση που θα δώσει ο κάθε μαθηματικός σχετίζεται με τον τρόπο που αντιλαμβάνεται ο ίδιος τα μαθηματικά. Στην επόμενη ενότητα θα εξετάσουμε ακριβώς αυτά τα διλήμματα και θα δούμε πώς εκφράζονται σε σχέση με ένα συγκεκριμένο αξίωμα.

[272] Βλ. *ό.π.*, σσ. 79-80.

[273] Βλ. *ό.π.*, σ. 80.

[274] Βλ. *ό.π.*, σ. 81.

## 3.3. Το αξίωμα της κατασκευασιμότητας V=L

Η ΚΡΙΤΙΚΗ ΑΠΕΝΑΝΤΙ σε ένα υποψήφιο αξίωμα ξεκινάει από τη φιλοσοφική θεώρηση που έχει ο κάθε μαθηματικός. Οι διάφορες αντιλήψεις μπορούν να ομαδοποιηθούν, σε γενικές γραμμές, σε ρεύματα, όπως ο ρεαλισμός και ο νατουραλισμός. Παρ΄ όλα αυτά, δύο ρεαλιστές (αντίστοιχα δύο νατουραλιστές) μπορεί να έχουν πολύ διαφορετική άποψη σχετικά με το οποιοδήποτε μαθηματικό ζήτημα. Επίσης, ένας μαθηματικός μπορεί να συνδυάζει ρεαλιστικά και νατουραλιστικά στοιχεία στη θεώρησή του για τα μαθηματικά αντικείμενα. Σκοπός μας είναι να αναλύσουμε τις διάφορες προτάσεις από πλευράς των δύο ρευμάτων και να εντοπίσουμε τα στοιχεία που φαίνεται να ωθούν σε πιο σταθερά συμπεράσματα από τις άλλες. Φυσικά, η κριτική δεν μπορεί να γίνει ταυτόχρονα για όλα τα υποψήφια νέα αξιώματα μέσα από όλες τις φιλοσοφικές οπτικές. Η Maddy, στο *Naturalism in Mathematics*, αποφασίζει να εξετάσει φιλοσοφικά ένα υποψήφιο νέο αξίωμα και επιλέγει το V=L . Την επιλογή της αυτή την εξηγεί ως εξής:

> Κάποια από τα αναπάντητα ερωτήματα είναι πολύ καινούργια, δεν έχουν κατανοηθεί σωστά και είναι υπερβολικά αμφισβητήσιμα για να αποτελέσουν αντικείμενο ξεχωριστής ανάλυσης. Ανάμεσα σε όλα αυτά, ένα ξεχωρίζει: το πρώτο σημείο επιλογής, με σημαντικές συνέπειες, μετά τα αξιώματα του ZFC. Αναφέρομαι, φυσικά, στο αξίωμα της κατασκευασιμότητας.[275]

Την επιλογή της αυτή θα ακολουθήσουμε και εμείς εδώ.

Το αξίωμα πρωτοδιατυπώθηκε από τον Gödel το 1938. Την τότε πίστη του στο V=L τη δικαιολόγησε λέγοντας πως η προσθήκη του στο ZFC είναι μια φυσική ολοκλήρωση του συστήματος, υπό τη λογική πως καθορίζει την αόριστη έννοια ενός αυθαίρετου άπειρου συνόλου με ορισμένο τρόπο. Το 1947, πλέον, η άποψή του είχε αλλάξει. Ο ίδιος πίστευε πως η υπόθεση του συνεχούς είναι ψευδής. Το γεγονός ότι από το V=L έπεται πως η CH είναι αληθής, αυτό για τον Gödel αποτελεί επιχείρημα ενάντια στην υιοθέτησή του ως αξιώματος. Το βασικό, όμως, επιχείρημα ενάντια στο αξίωμα της κατασκευασιμότητας (όπως διατυπώθηκε από τον ίδιο το 1964 και πλέον αποτελεί κοινό τόπο) είναι πως είναι περιοριστικό. Δηλαδή υποδηλώνει μια «ιδιότητα ελαχίστου» (minimum property) για το σύστημα όλων των συνόλων, τη στιγμή που άλλα αξιώματα, αντίθετα προς το V=L , προσφέρουν μια «ιδιότητα μεγίστου» (maximum property). Η μεγιστική ιδιότητα είναι πιο ευπρόσδεκτη διότι συνάδει με την επαναληπτική σύλληψη του συνόλου, που είναι το θεμέλιο της συσσωρευτικής ιεραρχίας. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τον τρόπο με τον οποίο ρεαλισμός και νατουραλισμός προσεγγίζουν το ζήτημα.

[275] Μτφρ. από *ό.π.*, σ. 82.

### *3.3.1. Ρεαλισμός*[276]

Από μια ρεαλιστική σκοπιά, τα ανεξάρτητα ερωτήματα αποτελούν σημαντικά και έγκυρα μαθηματικά ζητήματα. Ας δεχθούμε πως υπάρχει ένας αντικειμενικός κόσμος των συνόλων τον οποίο το ZFC καταφέρνει να περιγράψει μόνο τμηματικά. Τα σύνολα αυτά έχουν κάποιες αντικειμενικές ιδιότητες και κάποιες μεταξύ τους σχέσεις, οι οποίες είναι ανεξάρτητες από την ικανότητά μας να τις ορίσουμε ή ακόμα και να τις νοήσουμε. Σε αυτό τον κόσμο, η υπόθεση του συνεχούς και τα ερωτήματα της περιγραφικής θεωρίας συνόλων έχουν συγκεκριμένες αληθοτιμές, τις οποίες μπορούμε να προσπαθήσουμε να μάθουμε μέσα από την αναζήτηση για νέα αξιώματα. Υπ' αυτή την οπτική, για την αποδοχή ή την απόρριψη ενός αξιώματος αποτελεί μια καλή ένδειξη το αν είναι αληθές ή ψευδές στον πραγματικό κόσμο των συνόλων.[277]

Κυρίαρχη ρεαλίστικη οπτική είναι αυτή του Gödel, η οποία χαρακτηρίζεται ως η πλατωνιστική αντίληψη για τα μαθηματικά. Σε πολλές περιπτώσεις διακήρυξε πως η μαθηματική εποπτεία είναι εξίσου έγκυρη και υπαρκτή με τις αισθήσεις που μας προσφέρουν πληροφορίες για τον φυσικό κόσμο. Κατ' αυτόν, ο συνολοθεωρητικός μελετά τα σύνολα όπως ο αστρονόμος τα αστέρια και ο φυσικός τα μικρά κομμάτια της ύλης. Βέβαια, το γεγονός πως δεν έχει δοθεί οποιαδήποτε πειστική επεξήγηση σχετικά με το πώς λειτουργεί η μαθηματική εποπτεία είναι στοιχείο που υπονομεύει την πίστη μας σε μια τέτοιου είδους ρεαλιστική οπτική. Για παράδειγμα, τη γενική συμφωνία που παρατηρείται ανάμεσα στους μαθηματικούς, την οποία ο γκεντελιανός ρεαλιστής θα εξηγήσει ως αποτέλεσμα της προσπάθειας όλων να εξηγήσουν τον ίδιο μαθηματικό κόσμο, κάποιος μη ρεαλιστής θα μπορούσε να την αντιμετωπίσει τονίζοντας την παρόμοια εκπαίδευση που έχουν οι μαθηματικοί ή τη δομή του ανθρώπινου νου (εγκεφάλου) που μας ωθεί προς κάποιες συγκεκριμένες νοητικές κατευθύνσεις. Αντίστοιχα, ενώ ο γκεντελιανός θεωρεί πως μερικά αξιώματα μας επιβάλλονται ως αληθή, μπορούμε εναλλακτικά να θεωρήσουμε πως αυτά, μετά τη δημιουργία ή την επινόησή τους, αποκτούν ύπαρξη από μόνα τους.

Ένα άλλο είδος ρεαλισμού είναι αυτό που εισήγαγε ο Quine, που ως βασικό στοιχείο έχει την αντίληψη πως η χρήση των μαθηματικών είναι αναπόδραστη στην επιστήμη. Το επιχείρημα από το αναπόδραστο της χρήσης μαθηματικών στη φυσική («indispensability argument») δεν ταυτίζει τον κόσμο των μαθηματικών αντικειμένων με το φυσικό κόσμο. Επιτρέπει τη θεώρηση ενός αντικειμενικού κόσμου αφηρημένων μαθηματικών οντοτήτων και μπορεί να ανασυγκροτηθεί σχηματικά ως εξής:

- Η πραγματική ανάλυση αναφέρεται σε, και περιλαμβάνει μεταβλητές οι οποίες λαμβάνουν ως τιμές, αφηρημένες οντότητες που λέγονται «πραγματικοί αριθμοί». Και η αποδοχή της αλήθειας των προτάσεων της πραγματικής ανάλυσης δεσμεύει στην αποδοχή της ύπαρξης αυτών των οντοτήτων.

[276] Όπως σημειώνει η Maddy, επιλέγει την οπτική του ρεαλισμού που αποδέχεται ένα αντικειμενικό κόσμο, η οποία, όμως, δεν είναι η μοναδική. Υπάρχουν και άλλα είδη ρεαλισμού, όπως αυτός που μιλάει για πολλά σύμπαντα συνόλων.

[277] Μτφρ. από *ό.π.*, σ. 87.

- Η πραγματική ανάλυση είναι απαραίτητη για τη φυσική: η σύγχρονη φυσική δεν μπορεί να διατυπωθεί ή να αναπτυχθεί χωρίς προτάσεις της πραγματικής ανάλυσης.
- Αν η πραγματική ανάλυση είναι απαραίτητη για τη φυσική, τότε όποιος αποδέχεται ότι η φυσική συγκροτεί αληθή περιγραφή της υλικής πραγματικότητας πρέπει να αποδεχθεί την αλήθεια των προτάσεων της πραγματικής ανάλυσης.
- Η φυσική είναι (κατά προσέγγιση) αληθής.
- Επομένως, οι πραγματικοί αριθμοί υπάρχουν.

Πάντως, κατά τον Quine, η φαινόμενη αναγκαιότητα των μαθηματικών πηγάζει από το γεγονός πως οι μαθηματικοί ισχυρισμοί τους οποίους έχουμε αποδεχθεί βρίσκονται βαθιά μέσα στο συλλογικό «ιστό της πεποίθησής» μας («our “web of belief”») –εδώ διαφαίνεται η επιρροή του Mill στον Quine– και προτιμάμε να απορρίψουμε άλλες πεποιθήσεις προτού υποχρεωθούμε να τους αναθεωρήσουμε. Ο ρεαλισμός του Quine αποφεύγει τις αντίστοιχες δυσκολίες του Gödel, με την έννοια πως περιέχει επιχειρήματα για την αλήθεια κάποιων μαθηματικών ισχυρισμών χωρίς να υποστηρίζει την ύπαρξη κάποιας αμφιλεγόμενης μαθηματικής εποπτείας. Έχει όμως ένα σημαντικό ελάττωμα: η εφαρμογή του επιχειρήματος περί αναπόδραστου οδηγεί σε συμπεράσματα που έρχονται σε αντίθεση με την καθημερινή μαθηματική πρακτική.

Ο ρεαλισμός που υιοθετεί η Maddy, τον οποίο αποκαλεί «συνολοθεωρητικό» («set theoretic realism»), έχει ως σκοπό να συνδυάσει τα θετικά στοιχεία των δύο προηγούμενων και καμία από τις αδυναμίες τους. Ο γκεντελιανός ρεαλισμός έχει το ελάττωμα πως δεν μας δίνει κανένα λόγο να πιστέψουμε πως οι μαθηματικοί ισχυρισμοί αληθεύουν ενώ αυτός του Quine έρχεται σε σύγκρουση με τη μαθηματική πρακτική. Πρακτικά, ο επιθυμητός συνδυασμός επιτυγχάνεται ως εξής:[278] Χρησιμοποιούμε τα επιχειρήματα περί αναπόδραστου για να δικαιολογήσουμε την πεποίθησή μας πως κάποιες μαθηματικές οντότητες (όπως το συνεχές) υπάρχουν. Στη συνέχεια, επιλέγουμε τις μαθηματικές αντί για τις φυσικές μεθόδους για να κρίνουμε την αλήθεια σχετικά με αυτά. Αυτές οι μέθοδοι, αντιμετωπίζονται αρχικά σε ένα βασικό επίπεδο και χρησιμεύουν για να επεξηγηθεί η μαθηματική διαίσθηση σε αντίθεση με την αφηρημένη «μαθηματική εποπτεία» του Gödel. Το αποτέλεσμα είναι πως, χάρη στον γκεντελιανό ρεαλισμό, αποκτούμε τη δυνατότητα να χρησιμοποιούμε εγγενείς δικαιολογήσεις, στηριγμένοι στη μαθηματική διαίσθησή μας, ενώ από το αναπόδραστο των μαθηματικών αποκτούμε εξωγενή επιχειρήματα σχετικά με τα αξιώματα.

Από τη ρεαλιστική σκοπιά, το βασικό ζήτημα δεν είναι αν ένας ισχυρισμός είναι πιο βολικός ή πιο θεμιτός, αλλά αν είναι αληθής ή ψευδής στον κόσμο των συνόλων. Ως εκ τούτου, ένας ρεαλιστής θα πρέπει να προσφέρει τεκμήρια πως το αξίωμα που προτείνει είναι πράγματι αληθές. Αυτή η επιταγή του ρεαλισμού φαίνεται να έρχεται σε αντίθεση με τη συνήθη μαθηματική πρακτική, όπου επιλέγουμε τις μεθόδους και τους ισχυρισμούς που μας εξυπηρετούν περισσότερο. Αν πράγματι ο συνολοθεωρητικός ρεαλισμός είναι αταίριαστος με την ίδια τη θεωρία συνόλων, τότε πρέπει να εξε-

[278] *Ό.π.*, σ. 108

ταστούν τα επιχειρήματα που έχουν χρησιμοποιηθεί υπέρ του. Το σημαντικότερο είναι το πριν από το αναπόδραστο της χρήσης των μαθηματικών στην επιστήμη αναφερθέν επιχείρημα – ο ισχυρισμός, δηλαδή, πως η φυσική και οι υπόλοιπες επιστήμες που προσπαθούν να εξηγήσουν τον φυσικό κόσμο χρησιμοποιούν και έχουν ανάγκη διάφορες μαθηματικές οντότητες. Τα μαθηματικά αντικείμενα αυτά στα οποία αναφέρονται οι επιστήμονες προκειμένου να εξαγάγουν συμπεράσματα για τον κόσμο δεν μπορούν παρά να τα αποδέχονται ως υπαρκτά (και τους μαθηματικούς ισχυρισμούς για αυτά ως αληθείς). Η Maddy σημειώνει πως, μολονότι τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται στη φυσική, αυτό συμβαίνει, κατά κύριο λόγο, μέσα από παραδοχές που γίνονται είτε πριν είτε μετά την εφαρμογή τους. Μάλιστα, κάποιες εφαρμογές, όπως η μαθηματική πραγμάτευση του χωροχρονικού συνεχούς, παραμένουν αινιγματικές ως προς την αλήθεια τους και καθόλου δεν αποκλείεται να αποδειχτεί πως είναι και αυτές παραδοχές (που υπόκεινται σε αίρεση). Το συνεχές, λοιπόν, αν και συναντάται συνέχεια στην επιστήμη, είναι ιδιαίτερα αμφίβολο αν συναντάται πραγματικά στη φύση, ώστε να χρησιμεύσει ως επιχείρημα για την υπεράσπιση της υπόθεσης του συνεχούς και του αξιώματος της κατασκευασιμότητας.[279] Επίσης, η αμφιβολία εκτείνεται και στους πεπερασμένους αριθμούς, καθότι οι τρέχουσες επιστημονικές θεωρίες αφήνουν ανοιχτό το ενδεχόμενο να υφίσταται ένα ανώτατο όριο στο πλήθος των σωματιδίων που υπάρχουν στο σύμπαν. Το συμπέρασμα είναι πως το επιχείρημα περί αναπόδραστου των μαθηματικών στην επιστήμη (έτσι όπως αυτή έχει διαμορφωθεί μέχρι σήμερα) δεν είναι σε θέση να υποστηρίξει κατηγορηματικά την ύπαρξη του συνεχούς. Ως εκ τούτου, μέχρι να αποδειχτεί πως υπάρχει κάποια πραγματική έκφανση του συνεχούς στη φύση, δεν μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να αποφασίσουμε εάν τα ανεξάρτητα ερωτήματα της θεωρίας συνόλων έχουν απάντηση.

Ένα σημαντικό στοιχείο που αναφέρει η Maddy είναι πως, εάν πράγματι το επιχείρημα του αναπόδραστου ήταν τόσο σημαντικό για τους συνολοθεωρητικούς, τότε θα υπήρχε ζωηρό ενδιαφέρον από μέρους τους για τις εξελίξεις στη φυσική, ειδικά σε ό,τι έχει να κάνει με τις εφαρμογές της μαθηματικής έννοιας του συνεχούς. Κάτι τέτοιο, όμως, δεν παρατηρείται, και ο πιο πιθανός λόγος γι' αυτό είναι πως η μεθοδολογία των μαθηματικών δεν επηρεάζεται από τη φυσική και τις υπόλοιπες επιστήμες με τον τρόπο που θέλουν να πιστεύουν οι υποστηρικτές του «αναπόδραστου». Επομένως, η μαθηματική πρακτική αναιρεί το επιχείρημα αυτό που χρησιμοποιεί ο ρεαλιστής φιλόσοφος για να δικαιολογήσει την ύπαρξη κάποιων μαθηματικών οντοτήτων μέσω των φυσικών επιστημών.

### *3.3.2. Νατουραλισμός*

Διαφορετική στάση απέναντι στη σχέση μεταξύ μαθηματικών και φιλοσοφίας των μαθηματικών προτείνει ένα άλλο φιλοσοφικό ρεύμα, ο νατουραλισμός. Η βασική του θέση είναι πως οι μαθηματικές θεωρίες πρέπει να κρίνονται καθαρά με βάση τον πλούτο των συνεπειών τους. Επομένως, η φιλοσοφία των μαθηματικών πρέπει να έχει ως στόχο να προσφέρει μια πλήρη και συνεπή θεωρητική θεμελίωση για τη μαθημα-

[279] *Ο.π.*, σ. 150

τική πρακτική και όχι να προτείνει τη ριζική αλλαγή κομματιών των μαθηματικών προκειμένου να έρχονται σε συμφωνία με μια εκ των προτέρων διατυπωμένη φιλοσοφική θεώρηση.[280] Όπως και στον ρεαλισμό, υπάρχουν διαφορετικές νατουραλιστικές προσεγγίσεις. Θα δούμε συνοπτικά κάποιες βασικές μορφές νατουραλισμού, όπως διατυπώθηκαν από τους Gödel και Quine, και ύστερα θα αναλύσουμε τη στάση της Maddy πάνω στο ζήτημα. Τελικά θα φθάσουμε στα νατουραλιστικά επιχειρήματα σχετικά με την αποδοχή ή την απόρριψη του V=L ως προσθήκης στα αξιώματα της συνολοθεωρίας ZFC.

Τη θέση πως τα ίδια τα μαθηματικά (και η μαθηματική εποπτεία ιδιαίτερα) είναι αρμόδια και ικανά να απαντήσουν στο κατά πόσο τα ανεξάρτητα ερωτήματα, όπως η υπόθεση του συνεχούς, είναι αληθή ή ψευδή, υιοθετεί ο Gödel. Τον ρεαλισμό τον επικαλείται προκειμένου να συμπεράνει πως είναι καλύτερος ως φιλοσοφικό δόγμα απ' ό,τι ο κονστρουκτιβισμός ή ο αντιρεαλισμός. Μπορούμε, λοιπόν, να καταλήξουμε πως και εδώ έχουμε μια νατουραλιστική προσέγγιση, υπό την έννοια πως η προτεραιότητα, σχετικά με την απάντηση σε μαθηματικά ερωτήματα, δίνεται στα ίδια τα μαθηματικά και όχι στη φιλοσοφία.

Μια άλλη διατύπωση νατουραλιστικών απόψεων είναι αυτή του Quine, ο οποίος αποδέχεται ως θεμελιώδεις τις φυσικές επιστήμες έναντι της φιλοσοφίας. Χαρακτηριστικά, χρησιμοποιεί το παράδειγμα που έδωσε ο Otto Neurath (1882-1945): Οι επιστήμονες βρίσκονται όλοι πάνω σε ένα πλοίο και, αν θέλουμε να το επισκευάσουμε, αυτό θα πρέπει να γίνει ενόσω αυτό πλέει. Η άποψη πως μπορούμε να θεμελιώσουμε την επιστήμη πάνω σε κάποια φιλοσοφία ισοδυναμεί με την πίστη πως μπορούμε να βγάλουμε το πλοίο στη στεριά για να το επισκευάσουμε απ' έξω. Αυτό, όμως, είναι κάτι που δεν πρόκειται ποτέ να συμβεί. Πρέπει να αρκεστούμε σε αυτά που η επιστήμη της εποχής μας επιτρέπει να κατανοήσουμε. Όσο η επιστήμη βελτιώνεται, τόσο θα μεγαλώνει η κατανόησή μας για τον κόσμο και η φιλοσοφία οφείλει να ακολουθεί την πρόοδο της επιστήμης, να χρησιμοποιεί τα εργαλεία της και να την κρίνει με τα ίδια της τα κριτήρια.[281] Κατά τη Maddy, το βασικό πρόβλημα που έχει ο νατουραλισμός του Quine είναι πως έρχεται σε σύγκρουση με το επιχείρημα του ιδίου για το αναπόδραστο των μαθηματικών στις φυσικές επιστήμες.[282]

Η εκδοχή της Maddy, την οποία ονομάζει «μαθηματικό νατουραλισμό , στηρίζεται στη νατουραλιστική επιταγή: Η επιστήμη πρέπει να κρίνεται μέσα στα πλαίσιά της και όχι μέσα από έναν εξωτερικό ανώτερο φορέα. Η στάση αυτή δεν συνάδει με την αντίληψη πως οι μαθηματικές οντότητες αντλούν επιχειρήματα για την ύπαρξή τους μέσα από τη χρήση τους στις φυσικές επιστήμες. Τα μαθηματικά έχουν ανάγκη για τη δικαιολόγησή τους μονάχα την απόδειξη και την αξιωματική μέθοδο.[283] Το δικαίωμα αυτό, το να κρίνονται, δηλαδή, μόνο με βάση τις δικές τους μεθόδους, τα καθαρά μαθηματικά το αντλούν από δύο γεγονότα. Πρώτον, δεν προσπαθούν να εξηγή-

[280] Ακριβώς γι' αυτό τον λόγο, ο νατουραλισμός μπορεί να χαρακτηριστεί και ως έκφραση μιας φιλοσοφικής μετριοφροσύνης. Βλ. *ό.π.*, σ. 161.

[281] *Ό.π.*, σ. 181.

[282] *Ό.π.*, σ. 182.

[283] *Ό.π.*, σ. 184.

σουν χωροχρονικά φαινόμενα, οπότε δεν εμπλέκονται άμεσα στο αντικείμενο των φυσικών επιστημών. Δεύτερον, η επιστήμη τα έχει ανάγκη ως εργαλείο και είναι προς το συμφέρον της αυτό το εργαλείο να τελειοποιηθεί όσο το δυνατόν περισσότερο.[284] Εξάλλου, παρακολουθώντας την ιστορία των μαθηματικών βλέπουμε πως δεν είναι τα φιλοσοφικά ρεύματα που επιλέγουν το δρόμο που θα ακολουθήσουν τα μαθηματικά. Αντιθέτως, η ίδια η μαθηματική πρακτική, με το πέρασμα του καιρού, επιλέγει τι θα κρατήσει και τι θα αφήσει. Το αξίωμα της επιλογής είναι πλέον αναφαίρετο κομμάτι των μαθηματικών, όχι επειδή αποδείχθηκε πως είναι αληθές μέσα από μια ρεαλιστική προσέγγιση (και σε πείσμα των ιντουισιονιστών-κονστρουκτιβιστών), αλλά επειδή ο πλούτος των συνεπειών του (που αποκαλύφθηκε μέσα από την μαθηματική πρακτική) ήταν πολύ μεγάλος. Οι μη κατηγορηματικοί ορισμοί επιβίωσαν επειδή ήταν απαραίτητοι, μεταξύ άλλων, για την κλασική θεωρία των πραγματικών αριθμών. Μπορούμε να πειστούμε ότι η φιλοσοφία παίζει έναν δευτερεύοντα ρόλο στην απάντηση των οντολογικών ερωτημάτων των μαθηματικών και από το γεγονός πως, ενώ ζητήματα όπως τα παραπάνω έχουν βρει μια κοινή απάντηση, δεν συμβαίνει το ίδιο με τα φιλοσοφικά ρεύματα που έχουν μιλήσει γι' αυτά – μορφές ρεαλισμού και κονστρουκτιβισμού επιβιώνουν μέχρι σήμερα. Η πραγματική χρησιμότητα αυτών των ρευμάτων είναι, κατά κύριο λόγο, να παρέχουν έμπνευση στους μαθηματικούς.[285]

Ο σκοπός του μαθηματικού νατουραλισμού είναι να εξορίσει τον φιλοσοφικό παράγοντα από τα μαθηματικά, ουτωσώστε να παραμείνουν μονάχα τα γνήσια οντολογικά ζητήματα σε σχέση με τα αναπάντητα ερωτήματα. Μεγάλη βοήθεια σε αυτόν τον σκοπό μπορεί να μας παράσχει η ιστορία. Πρώτον, αν εξετάσουμε προσεκτικά τα στοιχεία των φιλοσοφικών ζητημάτων τα οποία τελικά κρίθηκαν ως άσχετα με τα μαθηματικά ερωτήματα που προσπάθησαν να απαντήσουν, θα μπορέσουμε, μέσω αναλογίας, να ανιχνεύσουμε τα αντίστοιχα σημερινά. Δεύτερον, μπορούμε να διαχωρίσουμε τις φιλοσοφικές θεωρήσεις που επιβίωσαν από τα ερωτήματα στα οποία βοήθησαν να βρεθεί απάντηση και να ανιχνεύσουμε, με αυτό τον τρόπο, αν η εκάστοτε μέθοδος ήταν αποτελεσματική για τον αντίστοιχο στόχο.

Το βασικό ερώτημα που καλείται ένας νατουραλιστής να απαντήσει είναι το εάν και κατά πόσον τα αναπάντητα ερωτήματα της θεωρίας συνόλων είναι νόμιμα, παρά το γεγονός πως είναι ανεξάρτητα από το ZFC. Κατά τον Gödel, η εύρεση και η επαρκής δικαιολόγηση κάποιου πρόσθετου αξιώματος που συνεπάγεται την CH (ή οποιοδήποτε άλλο ανοιχτό ερώτημα της συνολοθεωρίας) είναι αρκετή για να συμπεράνουμε πως το συγκεκριμένο ερώτημα έχει μαθηματική απάντηση και άρα είναι νόμιμο. Επομένως, το ζήτημα της νομιμότητας ενός ανεξάρτητου ερωτήματος ισοδυναμεί με την εύρεση ενός πρόσθετου αξιώματος που να αποφασίζει γι' αυτό. Για τα ερωτήματα της περιγραφικής θεωρίας συνόλων, όπως είδαμε, υπάρχουν δύο υποψήφια αξιώματα: το $V=L$ και το SC. Για την υπόθεση του συνεχούς τα πράγματα δεν είναι τόσο ελπιδοφόρα. Μεταξύ των μαθηματικών, δεν υπάρχει κάποια γενική συμφωνία σχετικά με το εάν ισχύει ή όχι. Σαν να μην έφτανε αυτό, το μόνο αξίωμα που την επαληθεύει, αυτό της κατασκευασιμότητας, είναι, σε γενικές γραμμές, προς απόρριψη από

[284] *Ό.π.*, σ. 204.
[285] *Ό.π.*, σσ. 191-192.

τον μαθηματικό κόσμο. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, κάποιοι να θεωρούν πως η CH ίσως να μην έχει καθορισμένη αληθοτιμή – ίσως να υπάρχουν δύο είδη συνόλων: αυτά που την ικανοποιούν και αυτά που δεν την ικανοποιούν.[286]

### *3.3.3. Κρίνοντας το αξίωμα της κατασκευασιμότητας*

Όπως αναφέραμε πιο πριν, υπάρχουν δύο βασικά ερωτήματα σε σχέση με τα υποψήφια νέα αξιώματα: (α΄) «μια ενιαία συνολοθεωρία ή πολλές εναλλακτικές;» και (β΄) «ποιο ή ποια είναι τα αξιώματα που έχουν τις πιο επιθυμητές συνέπειες;» Θα ξεκινήσουμε από το δεύτερο ερώτημα προκειμένου να συγκεντρώσουμε τα συγκεκριμένα επιχειρήματα που μπορεί κανείς να βρει υπέρ ή κατά του αξιώματος της κατασκευασιμότητας. Κατόπιν, θα εξετάσουμε δύο βασικούς στόχους της μαθηματικής έρευνας, τους οποίους θα ονομάσουμε Ενοποίηση και Μεγιστοποίηση και θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια απάντηση στο ποιος είναι σημαντικότερος για την πρόοδο των μαθηματικών.

Πολύ συνοπτικά, τα βασικά επιχειρήματα σχετικά με το $V=L$ είναι τα εξής:

- *«Επιχειρήματα υπέρ».* Πρώτον, η υπόθεση $V=L$ είναι σχετικά συνεπής με το σύστημα ZFC – δηλαδή, αν το ZFC είναι συνεπές, τότε το ίδιο ισχύει και για το ZFC+ $V=L$ . Δεύτερον, δίνει απάντηση για τα αναπάντητα ερωτήματα που αναφέραμε πιο πάνω: επαληθεύει την υπόθεση του συνεχούς, αποδεικνύει την ύπαρξη μη μετρήσιμων $\Sigma_2^1$ συνόλων και λεπτών $\Pi_1^1$ συνόλων και απαντά καταφατικά στο πρόβλημα Whitehead. Επίσης, ένα άλλο θετικό είναι πως η θεωρία που παράγεται μιλάει για σύνολα (κατασκευάσιμα) για τα οποία μπορούμε να πούμε πολλά πράγματα.
- *«Επιχειρήματα κατά».* Το γεγονός πως το αίτημα $V=L$ επαληθεύει την υπόθεση του συνεχούς έχει και αρνητική σημασία (κυρίως για τους ρεαλιστές), από τη στιγμή που αρκετοί μαθηματικοί (και ανάμεσά τους ο Gödel) θεωρούν πως η CH δεν αληθεύει. Εκτός αυτού, πολύ σημαντικό μειονέκτημα του αξιώματος της κατασκευασιμότητας είναι πως έρχεται σε σύγκρουση με άλλα υποψήφια αξιώματα, τα οποία όχι μόνο δεν φαίνονται ασυνεπή, αλλά και φαίνεται να έχουν ιδιαίτερα επιθυμητές συνέπειες.[287] Δύο τέτοια παραδείγματα είναι τα αξιώματα: «υπάρχει το σύνολο $0^\#$»[288] και MC (Axiom of Measurable Cardinals: «υπάρχει μετρήσιμος πληθικός α-

[286] Αυτή η πλατωνιστική αντίληψη, πάει και πιο πέρα: Υπάρχουν άπειρα σύμπαντα συνόλων, ένα για κάθε συνεπή επέκταση του ZFC. Ο νατουραλισμός της Maddy, μέσα από τα ιστορικά παραδείγματα, μας συστήνει να μην ακολουθήσουμε αυτές τις φιλοσοφικές θεωρήσεις.

[287] *Ό.π.*, σσ. 214, 230.

[288] Όπως είδαμε πιο πάνω, αν υπάρχει ένας μετρήσιμος πληθικός αριθμός, τότε $V \neq L$. Από τον Banach και άλλους προέκυψε η εξής πρόοδος: Έστω ένα σύνολο S και μια ανάθεση τιμών 0 ή 1 σε κάθε υποσύνολο του S, έτσι ώστε (1) στο ίδιο το S αντιστοιχεί το 1, (2) για $s \in S$, στο $\{s\}$ αντιστοιχεί το 0, (3) ο αριθμός που αντιστοιχεί στην ένωση μιας συλλογής λιγότερων από την πληθικότητα του S ξένων υποσυνόλων του S είναι το άθροισμα των αριθμών που αντιστοιχούν στα επιμέρους μέλη της συλλογής. Στο ερώτημα αν υπάρχει τέτοιο σύνολο η απάντηση είναι πως για $S=\omega$ υπάρχει. Το σύνολο $0^\#$ εί-

ριθμός»). Μάλιστα, ενώ η συμπερίληψη του V=L αποκλείει τις θετικές συνέπειες των άλλων αξιωμάτων, η συμπερίληψη των άλλων δεν αποκλείει τις θετικές συνέπειες του V=L.[289] Υπάρχει, μάλιστα, αξίωμα που μπορεί να αντικαταστήσει το V=L. Το αξίωμα V=HOD, αν και έχει λιγότερο πλούσιες συνέπειες και είναι πιο σύνθετο, δεν έρχεται σε σύγκρουση με τα υπόλοιπα αξιώματα[290].

Το βασικό εγγενές φιλοσοφικό/μαθηματικό επιχείρημα ενάντια στο αξίωμα της κατασκευασιμότητας είναι ότι απαιτεί όλα τα σύνολα να μπορούν να οριστούν με έναν συγκεκριμένο τρόπο – χαρακτηριστικό που είναι περιοριστικό και, με αυτή την έννοια, ανεπιθύμητο. Πώς, όμως, αποφασίζουμε αν ένα αξίωμα είναι περιοριστικό; Η Maddy υποστηρίζει πως κάθε αξίωμα το οποίο είναι φορέας μιας συγκεκριμένης τάσης που είχε στο παρελθόν περιοριστικά αποτελέσματα είναι εν δυνάμει περιοριστικό και το ίδιο και άρα επικίνδυνο. Για να αναλύσει την άποψη αυτή χρησιμοποιεί την αναλογία μεταξύ του Μηχανισμού (Mechanism) στη φυσική και του Οριστικισμού (Definabilism) στα μαθηματικά. Ο Μηχανισμός υποστήριζε πως για κάθε φυσικό φαινόμενο πρέπει να υπάρχει μια συγκεκριμένη περιγραφή μηχανικής φύσεως. Όμως, η προσπάθεια περιγραφής της κίνησης του φωτός και των πλανητών στο σύμπαν δημιούργησε προβλήματα σε αυτή την τάση που τελικά, μετά την ανάδυση των θεωριών πεδίων, εγκαταλείφθηκε.[291] Ο Οριστικισμός είναι η απαίτηση όλα τα μαθηματικά αντικείμενα να ορίζονται με ένα συγκεκριμένο καθολικό τρόπο. Η Maddy επιχειρηματολογεί πως, όπως ο Μηχανισμός αντικαταστάθηκε από τη θεωρία πεδίων, το ίδιο συμβαίνει και στα μαθηματικά με την εγκατάλειψη του Οριστικισμού για χάρη μιας άλλης τάσης που μπορεί να ονομαστεί Συνδυαστικισμός (Combinatorialism).

Επειδή το εν λόγω επιχείρημα είναι ιστορικής φύσεως, είναι χρήσιμο να κάνουμε μια αναδρομή στην πορεία του Οριστικισμού στα μαθηματικά. Ο Οριστικισμός προέκυψε ιστορικά μετά τον επιτυχημένο γενικό ορισμό της συνάρτησης, αρχικά από τον Bernoulli και ύστερα από τον Euler. Η αναλυτική περιγραφή μιας συνάρτησης απέκτησε έναν επιτακτικό χαρακτήρα, με τον ίδιο τρόπο που η γεωμετρική παρουσίαση είχε αποτελέσει απαραίτητο στοιχείο κάθε απόδειξης πιο πριν. Όταν ο d'Alembert ξεκίνησε να μελετά τις μερικές διαφορικές εξισώσεις με την κυματική εξίσωση, διαπίστωσε πως δεν μπορούσε να δώσει μια αναλυτική περιγραφή του αρχικού σχήματος μιας χορδής. Αυτό έπεισε τον Euler να αναθεωρήσει την έννοια της συνάρτησης, όπως την είχε θεωρήσει προηγουμένως – αναγκάστηκε, δηλαδή, να εγκαταλείψει τον Οριστικισμό του. Το δεύτερο απαραίτητο στοιχείο που χρειαζόταν για να απορριφθεί η αντίληψη της έννοιας της «συνάρτησης» που την έδενε με την αναλυτική περιγραφή της ήταν μια εναλλακτική περιγραφή, και αυτή ήρθε με την έκφραση μέσω τριγω-

ναι ένα μη κατασκευάσιμο υποσύνολο του ω, το οποίο περιέχει πληροφορίες σχετικά με το πώς διαφέρει το V από το L. Βλ *ό.π.*, σ. 76.

[289] *Ό.π.*, σ. 232.

[290] Για παράδειγμα, αν το ZFC+MC είναι συνεπές, τότε το ίδιο ισχύει και για το ZFC+MC+V=HOD. Βλ. *ό.π.*, σ. 131.

[291] *Ό.π.*, σ. 115.

νομετρικών σειρών. Τον Οριστικισμό που πήγαζε από την αναλυτική περιγραφή της συνάρτησης τον διαδέχθηκε αυτός που προερχόταν από τις τριγωνομετρικές εκφράσεις. Όμως, όπως παρατήρησε ο Riemann, ενώ ο πρώτος είχε εγκαταλειφθεί λόγω της ανακάλυψης κάποιων φυσικών φαινομένων, ο δεύτερος θα έβρισκε εμπόδιο στις «παθολογικές» συναρτήσεις που προκύπτουν στην ανάλυση και τη θεωρία αριθμών.[292] Η αντίληψη που θα υπερίσχυε από δω και πέρα είναι αυτή της απόλυτα αυθαίρετης αντιστοίχισης $x \mapsto f(x)$ μεταξύ πραγματικών αριθμών. Αυτή η οπτική έρχεται σε αντίθεση με τον συγκεκριμένο Οριστικισμό των προηγούμενων, αλλά αφήνει ανοιχτό ένα παραθυράκι για μια πιο γενική και αφηρημένη εκδοχή του. Την πιθανότητα αυτή διέλυσε ο Darboux, ο οποίος εισήγαγε τις συναρτήσεις που δεν περιέχουν καμία υπόθεση κατά τον ορισμό τους («assumptionless functions»). Τέλος, οι Baire και Lebesgue, με μεθόδους συνολοθεωρητικής φύσεως (αναφορά στην πληθικότητα και χρήση του αξιώματος της επιλογής), απέδειξαν πως υπάρχει μια συνάρτηση που δεν μπορεί να παρασταθεί αναλυτικά. Οι ίδιοι, όταν το αξίωμα της επιλογής διατυπώθηκε από τον Zermelo, έθεσαν το ερώτημα αν μπορούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός μαθηματικού αντικειμένου χωρίς να το ορίσουμε, και όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 2 απάντησαν αρνητικά. Αυτή η κίνηση επανέφερε τον Οριστικισμό στη σκηνή και το γεγονός αυτό το επισήμανε ο Hadamard, ο οποίος σχολίασε πως από την αρχαιότητα μέχρι τον Riemann η πρόοδος στα μαθηματικά προέκυπτε από σταδιακές γενικεύσεις των ορισμών – γενικεύσεις που δεν ήταν ευπρόσδεκτες στην εποχή τους.

Μια άλλη έκφραση του Οριστικισμού που εμφανίστηκε την ίδια εποχή προερχόταν από τον Poincaré, ο οποίος θεωρούσε πως πρέπει να χρησιμοποιούμε μόνο κατηγορηματικούς ορισμούς για τις μαθηματικές οντότητες στις οποίες αναφερόμαστε. Αυτή η πιο ισχυρή έκφραση του Οριστικισμού απορρίφθηκε, αρχικά από τον Zermelo και ύστερα από τον Gödel. Παρατηρούμε πως με κάθε νέα εμφάνιση μιας προσέγγισης που στηρίζεται στον Οριστικισμό προέκυπταν αποτελέσματα των μαθηματικών που την καθιστούσαν προβληματική και ανεπαρκή. Το δεύτερο στοιχείο, όμως, που απαιτείται για να εγκαταλειφθεί μια μεθοδολογική αρχή είναι η εύρεση μιας προτιμότερης εναλλακτικής. Αυτή, στη συγκεκριμένη περίπτωση, ήταν ο Συνδυαστικισμός που εισήχθη το 1934 από τον Bernays ως εξής: Οι έννοιες της «συνάρτησης», της «ακολουθίας» και του «συνόλου» χρησιμοποιούνται με μια συνδυαστική αντίληψη, εννοώντας πως ορίζονται μέσω μιας αναλογίας από το πεπερασμένο στο άπειρο. Για παράδειγμα, έστω δύο πεπερασμένες ακολουθίες με $n$ στοιχεία. Το σύνολο των συναρτήσεων που αντιστοιχούν όλα τα στοιχεία των δύο ακολουθιών μεταξύ τους είναι $nn$ και για να αποφασίσουμε για καθεμιά το ποια στοιχεία συνδέει απαιτούνται $n$ αποφάσεις. Περνώντας στο επίπεδο του απείρου, μπορούμε να φανταστούμε κάθε συνάρτηση καθορισμένη από μια απειρία αποφάσεων. Ο Συνδυαστικισμός περισώζει και δικαιολογεί το αξίωμα της επιλογής, καθώς και τους μη κατηγορηματικούς ορισμούς και με αυτό τον τρόπο (όπως σημειώνει ο Bernays) φαίνεται να κυριαρχεί στη μαθηματική σκέψη.

[292] Σχετικά με τη διατύπωση από τον Riemann των ικανών και αναγκαίων συνθηκών για να μπορεί να παρασταθεί μια συνάρτηση από μια τριγωνομετρική σειρά, βλ. ΦΙΛΗ 2010, σσ. 541-547.

Φτάνουμε, τέλος, στο επιχείρημα σχετικά με το αξίωμα της κατασκευασιμότητας. Η κατασκευή του L γίνεται με την προσθήκη, κατά το στάδιο α+1 όλων των υποσυνόλων του $L_α$ που είναι κατηγορηματικά προσδιορισμένα. Παρατηρούμε πως αυτή η αντίληψη αποτελεί μια ισχυρή έκφραση του Οριστικισμού, της μεθοδολογικής αρχής που, όπως είδαμε, τείνει πλέον ξεπεραστεί. Αν και ανεξάρτητο, σχετικά συνεπές και επιτυχές στην απάντηση των υπαρχόντων ανοιχτών ερωτημάτων, το V=L φαίνεται πως, ως φορέας μιας ξεπερασμένης και περιοριστικής μεθοδολογικής αρχής, δεν πρόκειται να οδηγήσει σε ιδιαίτερα πλούσια αποτελέσματα. Επίσης, όπως η ιστορία έδειξε, η εφαρμογή του Οριστικισμού σε κάθε περίπτωση οδήγησε τελικά σε κάποιες ανωμαλίες. Φαίνεται πιθανό, λοιπόν, να συμβεί το ίδιο εάν υιοθετήσουμε το αξίωμα της κατασκευασιμότητας.

Αυτό το επιχείρημα, αν και δείχνει πως η υιοθέτηση του V=L μάλλον δεν είναι καλή ιδέα, δεν είναι επαρκές για να την απορρίψει μια και καλή. Για να αντιληφθούμε με ποιον τρόπο το αξίωμα της κατασκευασιμότητας είναι περιοριστικό για τη θεωρία συνόλων, πρέπει να εστιάσουμε στο γεγονός πως είναι ασυνεπές με την ύπαρξη διαφόρων μη κατασκευάσιμων συνόλων, όπως το $0^{\#}$. Αυτό μπορεί να γίνει μελετώντας μια εναλλακτική υπόθεση, την V=HOD.[293] Η V=HOD είναι σχετικά συνεπής, πράγμα που την καθιστά εξίσου ασφαλή με την V=L, και είναι πιο ασθενής φορέας του Οριστικισμού. Η βασική διαφορά μεταξύ των μοντέλων HOD και L είναι πως οι ορισμοί του πρώτου δεν χρειάζεται να είναι κατηγορηματικοί. Ακριβώς γι' αυτό, αν και στερείται του πλούτου των αποτελεσμάτων του αξιώματος της κατασκευασιμότητας, το V=HOD θεωρείται από τους περισσότερους μαθηματικούς ως μια πιο πιθανή προσθήκη στο ZFC. Ένας άλλος λόγος είναι πως φαίνεται να είναι συνεπές με όλα τα υπόλοιπα υποψήφια νέα αξιώματα.[294]

Έχοντας αναφέρει κάποια από τα πιο βασικά επιχειρήματα υπέρ ή κατά του V=L, μπορούμε τώρα να αναλύσουμε το δίλημμα που έχουμε αναφέρει πιο πάνω. Η Maddy αναφέρει πως στη μαθηματική έρευνα (και κυρίως σε αυτή που έχει να κάνει με τη θεμελίωση των μαθηματικών και άρα και με τη θεωρία συνόλων) υπάρχουν δύο ζητούμενοι μεθοδολογικοί στόχοι: η ενοποίηση (unify) και η μεγιστοποίηση (maximize). Το ιδανικό θα ήταν να μπορούσαμε να βρούμε μια μαθηματική πρακτική η οποία να ικανοποιεί ταυτόχρονα και τους δύο. Μέχρι τώρα, το ZFC έχει καταφέρει να αποτελέσει το στήριγμα για το μεγαλύτερο κομμάτι των μαθηματικών, προσφέροντας ταυτόχρονα μεγάλο πλούτο αποτελεσμάτων. Το γεγονός, όμως, πως υπάρχουν αρκετά αναπάντητα ερωτήματα στη θεωρία συνόλων και σε άλλους κλάδους των μαθηματικών, μαρτυρά πως το ZFC έχει φτάσει στα όριά του, τουλάχιστον όσον αφορά στη μεγιστοποιητική του ικανότητα. Εξετάζουμε, λοιπόν, τα υποψήφια καινούργια

---

[293] «HOD» είναι ακρωνύμιο για την έκφραση «Hereditarily Ordinal Definable» («Κληρονομικά Διατακτικό Ορίσιμο»): τα σύνολα που τα μέλη τους, τα μέλη των μελών τους κ.ο.κ. είναι όλα διατακτικά ορίσιμα σύνολα (ordinal definable) – δηλαδή μπορούν να οριστούν από μια πεπερασμένη συλλογή διατακτικών αριθμών (για κάποιο τύπο φ και κάποιους διατακτικούς $α_0$, $α_1$, …,$α_n$, το σύνολο x είναι το μοναδικό σύνολο τέτοιο ώστε να ισχύει ο $φ(x, α_0, α_1, …,α_n)$). Το HOD είναι η συλλογή όλων των hereditarily ordinal definable συνόλων.

[294] MADDY 1997, σ. 131.

αξιώματα με σκοπό να επεκτείνουμε το υπάρχον σύστημα κα τις συνέπειες του, χωρίς να αποκλείσουμε κλάδους των μαθηματικών που μέχρι τώρα διέπονταν από το ZFC. Βέβαια, όπως σημειώνει η Maddy, τίθεται ένα ζήτημα: «Τι γίνεται αν δεν μπορούμε να εξυπηρετήσουμε και τους δύο στόχους ταυτόχρονα;» Η μεγιστοποίηση ικανοποιείται εάν δημιουργήσουμε διαφορετικές θεωρίες συνόλων στις οποίες να αποδεχόμαστε κάποιο διαφορετικό αξίωμα. Για παράδειγμα, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια θεωρία συνόλων με ZFC+(V=L) και μια με ZFC+MC. Με αυτό τον τρόπο, αποφεύγουμε να επιλέξουμε μεταξύ των υποψήφιων νέων αξιωμάτων. Απλώς χρησιμοποιούμε κάθε φορά τη θεωρία που μας συμφέρει.[295] Αυτές οι θεωρίες, όμως, δεν μπορούν να αληθεύουν ταυτόχρονα. Επομένως, εάν το δει κανείς από τη σκοπιά του ρεαλιστή, μια τέτοια στάση είναι ανούσια. Από την πλευρά του νατουραλιστή, όμως, δεν υπάρχει εν γένει κάτι το προβληματικό σε μια τέτοια αντιμετώπιση. Το πρόβλημα εμφανίζεται σε σχέση με την τάση της ενοποίησης. Εάν επιλέξουμε να δημιουργήσουμε διαφορετικές-αντικρουόμενες θεωρίες συνόλων, ουσιαστικά εγκαταλείπουμε τον στόχο της ενοποίησης. Μια ενιαία μαθηματική θεωρία δεν μπορεί να περιέχει αντικρουόμενες υποθεωρίες. Ως εκ τούτου, εδώ εμφανίζεται ένα δίλημμα: ποια τάση πιστεύουμε πως είναι σημαντικότερη;[296]

Για έναν ρεαλιστή, η απόφαση είναι εύκολη. Η μεγιστοποιητική τάση, όπως εκφράστηκε πιο πάνω, έρχεται σε πλήρη αντίθεση με το βασικότερο στοιχείο της σκέψης του: την ύπαρξη ενός αντικειμενικού μαθηματικού κόσμου, στον οποίο οι μαθηματικές προτάσεις έχουν συγκεκριμένες και σταθερές αληθοτιμές. Συνεπώς, για τον ρεαλιστή πρώτο ρόλο έχει η ενοποίηση. Πριν ακόμα εξετάσουμε από κοντά το κάθε αξίωμα, έχουμε ήδη κάνει την επιλογή μας. Με δεδομένη αυτήν, πρέπει προσεκτικά να επιλέξουμε τα καινούργια αξιώματα, προκειμένου να έχουμε όσο το δυνατόν περισσότερα και πιο γόνιμα αποτελέσματα. Ένα δυσάρεστο χρέος που έχει ο ρεαλιστής είναι πως πρέπει να δικαιολογήσει την επιλογή ενός αξιώματος, όσον αφορά στους λόγους που τον κάνουν να πιστεύει πως αυτό το αξίωμα είναι αντικειμενικά αληθές.

Ο νατουραλιστής είναι ελεύθερος να επιλέξει ανάμεσα στις δύο τάσεις αυτή που ο ίδιος θεωρεί πιο σημαντική. Αν επιλέξει την ενοποιήση, φτάνει σε μια παρόμοια αντιμετώπιση με τον ρεαλιστή, με τη διαφορά πως δεν χρειάζεται να λογοδοτήσει σχετικά με την αλήθεια ή όχι του αξιώματος που επιλέγει. Πιο ταιριαστή στη νατουραλιστική θεώρηση, όμως, είναι η μεγιστοποιητική τάση, η οποία προσφέρει μεγαλύτερη ελευθερία επιλογών. Ο νατουραλιστής που επιλέγει να επιδιώξει τη μεγιστοποίηση της μαθηματικής θεωρίας είναι σε θέση να αναπτύξει διαφορετικά μοντέλα της θεωρίας συνόλων προκειμένου να εξυπηρετήσει σε κάθε περίπτωση τον εκάστοτε στόχο. Καθώς δεν ενδιαφέρεται ιδιαίτερα για την «αντικειμενική αλήθεια» των προτάσεων, καλείται να κάνει την εξής επιλογή: έχοντας αποφασίσει ποιο είναι το πιο μεγιστοποιητικό αξίωμα (π.χ., το «υπάρχει $0^{\#}$» ) καλείται να επιλέξει αν θα δημιουργήσει μια

[295] *Ό.π.*, σ. 211.

[296] Το ζήτημα αυτό φαίνεται πως υπάρχει στις σκέψεις των μαθηματικών από διάφορες παρατηρήσεις. Για παράδειγμα, αν η ενοποίηση δεν ήταν τόσο σημαντικός στόχος, οι μαθηματικοί θα τη θυσίαζαν χωρίς δεύτερη σκέψη, φτιάχνοντας δυο θεωρίες συνόλων: μια στην οποία η υπόθεση του συνεχούς θα ίσχυε και μια στην οποία δεν θα ίσχυε. Βλ. *ό.π.*, σ. 209.

δεύτερη θεωρία συνόλων η οποία θα περιέχει ένα άλλο (π.χ., το V=L). Εάν το αποφασίσει, θυσιάζει τη δυνατότητα ενοποίησης, χάριν των συνεπειών του αξιώματος. Αλλιώς, θα πρέπει να απορρίψει το V=L ως όχι αρκετά πλούσιο. Επομένως, για τον νατουραλιστή, γίνεται πρώτα η επιλογή του πιο «ισχυρού» αξιώματος και μετά η επιλογή μεταξύ της μεγιστοποιητικής και της ενοποιητικής τάσης.

Τι στάση, λοιπόν, μπορούμε να κρατήσουμε απέναντι στην θεμελίωση των μαθηματικών γενικά και στα υποψήφια νέα αξιώματα της θεωρίας συνόλων πιο συγκεκριμένα; Ο ρεαλισμός έχει το προσόν πως φαίνεται να καθοδηγεί τη σκέψη πολλών μαθηματικών: έχουν την αίσθηση πως δεν μπορούν να προχωρήσουν «όπως θέλουν» – υπάρχουν κάποιοι εξωτερικοί προς αυτούς περιορισμοί, βαθιά ριζωμένοι στην ίδια τη φύση των μαθηματικών αντικειμένων. Στην προσπάθειά τους, όμως, να τους ανακαλύψουν (όταν, δηλαδή, κάνουν μαθηματικά), διατυπώνουν διάφορες θεωρίες, οι οποίες παραμένουν σε χρήση ή εγκαταλείπονται, κατά κύριο λόγο, με βάση την επιτυχία τους, που κρίνεται με αναφορά στον πλούτο των συνεπειών τους για τα ίδια τα μαθηματικά ή ακόμη και στη δυνατότητά τους να περιγράψουν και να «εξηγήσουν» φυσικά φαινόμενα. Επομένως, μολονότι ο «μέσος μαθηματικός» διέπεται απο μια ρεαλιστική αντίληψη για τα ίδια τα μαθηματικά, στην επιλογή των εργαλείων του συμπεριφέρεται με νατουραλιστική νοοτροπία.

Η Maddy, εξετάζοντας τα ιστορικά παραδείγματα των Euler και Riemann σχετικά με τον ορισμό των συναρτήσεων και του Zermelo σχετικά με την απόδειξη του θεωρήματος καλής διάταξης, παρατηρεί πως, χωρίς να το γνωρίζουν, υιοθέτησαν μια νατουραλιστική προσέγγιση: διαχώρισαν τους βασικούς μαθηματικούς στόχους από τις μεθόδους που είχαν χρησιμοποιηθεί και πρότειναν μια έξοδο από την κρίση με άξονα την επίτευξη αυτών των στόχων. Και στις τρεις αυτές περιπτώσεις, ο σκοπός ήταν η οικοδόμηση μιας θεωρίας, πλούσιας σε αποτελέσματα και όχι περιοριστικής ως προς τις δυνατότητες των μαθηματικών οντοτήτων που χρησιμοποιούνται. Εάν, λοιπόν, ο στόχος μας είναι η ενοποίηση όλων των μαθηματικών και η θεμελίωσή τους γύρω από έναν κεντρικό πυρήνα, καθώς και ο όσο το δυνατόν μεγαλύτερος εμπλουτισμός τους, ο πυρήνας αυτός θα είναι η θεωρία συνόλων και η φιλοσοφία μας θα πρέπει να κινηθεί προς αυτές τις κατευθύνσεις.[297] Μπορούμε να αντιληφθούμε πως αυτός είναι πραγματικά ο στόχος των συνολοθεωρητικών από το απλό γεγονός πως είναι η μόνη πιθανή εξήγηση για το μεγάλο ενδιαφέρον τους να απαντήσουν στα ερωτήματα της υπόθεσης του συνεχούς ή της περιγραφικής θεωρίας συνόλων και για τις διαρκείς προσπάθειες να επιλέξουν μεταξύ των εναλλακτικών υποψήφιων νέων αξιωμάτων.

Αυτή η μίξη ρεαλιστικής και νατουραλιστικής θεώρησης των πραγμάτων φαίνεται να είναι προβληματική εκ πρώτης όψεως. Από την άλλη, όμως, πώς θα μπορούσε να κινηθεί ρεαλιστικά ο μαθηματικός στην πρακτική του; Ποια θα ήταν η αυθεντία που θα τον διαβεβαίωνε πως οι θεωρίες του πράγματι αντικατοπτρίζουν τη μαθηματική τάξη πραγμάτων; Η μόνη εύλογη διέξοδος είναι η υιοθέτηση μιας νατουραλιστικής στάσης απέναντι στην μαθηματική πραγματικότητα. Αυτή εκφράζεται ως εξής: Τα μαθηματικά είναι μόνα αυτά υπεύθυνα και ικανά να απαντήσουν στα διάφορα μαθηματικά ερωτήματα.

[297] *Ο.π.*, σ. 208.

# 4. ΣΥΝΟΨΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

ΕΣΤΙΑΖΟΝΤΑΣ ΣΤΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ του τρίτου κεφαλαίου, που κυρίως συγκεντρώνει το ερευνητικό ενδιαφέρον της παρούσας εργασίας, με βάση όσα έχουμε πει μέχρι τώρα, θα μπορούσαμε να χωρίσουμε τη μελέτη ενός υποψήφιου αξιώματος σε τρία μέρη: (1) τεχνικά στοιχεία, (2) φιλοσοφική κριτική και (3) σύγκριση.

Σε πρώτη φάση, εξετάζονται τα αντικειμενικά του μαθηματικά χαρακτηριστικά. Το πιο σημαντικό είναι η ασφάλεια. δηλαδή, να μην είναι ασυνεπές με τα αξιώματα του ZFC. Κατά προτίμηση, ένα υποψήφιο αξίωμα A πρέπει να είναι σχετικά συνεπές με το υπάρχον σύστημα: αν το ZFC είναι συνεπές, τότε και το ZFC+A να είναι επίσης συνεπές. Αφού περάσουν από αυτό το «ξεσκαρτάρισμα», τα αξιώματα κρίνονται σχετικά με την επιτυχία τους να απαντήσουν στα υπάρχοντα ανοιχτά ερωτήματα. Απαραίτητο στοιχείο γι' αυτό είναι η ανεξαρτησία του υποψήφιου αξιώματος από το ZFC (αν το νέο αξίωμα μπορεύσε να προκύψει από το ZFC και αυτό με τη σειρά του απεδείκνυε ένα από τα αναπάντητα ερωτήματα, αυτό θα σήμαινε πως τελικά το ZFC μπορούσε να αποδείξει το ερώτημα εξαρχής). Τέλος, η γενικότητα της διατύπωσής του υποψήφιου είναι ένας παράγοντας ο οποίος λαμβάνεται αρκετά υπόψιν. Τα τεχνικά στοιχεία των αξιωμάτων έχουν καθαρά μαθηματική υπόσταση και δεν επηρεάζονται από τη φιλοσοφική θεώρηση του κάθε μαθηματικού.

Το δεύτερο στάδιο συνίσταται στο να υποβάλλουμε κάθε υποψήφιο αξίωμα σε φιλοσοφική αποτίμηση. Πρωτίστως: υπάρχουν ενδογενή στοιχεία του αξιώματος που να μας ωθούν να πιστέψουμε στην αλήθεια του; Για κάποιον ρεαλιστή αυτό είναι ένα πολύ σημαντικό ζήτημα. Δεν έχει νόημα να μιλάμε για ένα υποψήφιο αξίωμα εάν δεν έχουμε σοβαρούς λόγους να πιστεύουμε πως είναι αληθές στο αντικειμενικό μαθηματικό σύμπαν. Για τον νατουραλιστή, το ερώτημα της «ενδογενούς αλήθειας» δεν έχει ιδιαίτερο νόημα να διατυπωθεί. Σημασία έχουν καταρχήν μόνο τα εξωγενή επιχειρήματα: ποιές είναι οι πιθανές συνέπειές του εκάστοτε αξιώματος για τη μαθηματική πρακτική; Σε αυτό το κομμάτι ανήκει και το ερώτημα του κατά πόσον ένα αξίωμα μπορεί να αποδειχθεί περιοριστικό για τα μαθηματικά στο μέλλον.

Αφού καταστούν σαφή αυτά τα επιχειρήματα για το κάθε αξίωμα ξεχωριστά, θα πρέπει να προχωρήσουμε σε μια συγκριτική μελέτη των υποψήφιων αξιωμάτων. Σε αυτό το στάδιο τίθενται δύο ζητήματα: η συμβατότητα των υποψήφιων αξιωμάτων μεταξύ τους και το ποιος δυνατός συνδυασμός έχει τα πιο πλούσια αποτελέσματα. Και εδώ υπάρχει διάσταση στις απόψεις μεταξύ ρεαλιστή και νατουραλιστή. Ακόμα κι αν καταλήγουν στο ίδιο συμπέρασμα σχετικά με την αποδοχή ή την απόρριψη ενός αξιώματος, φτάνουν σε αυτό μέσα από διαφορετικές διαδρομές. Ο ρεαλιστής θεωρεί πως μια συνέπεια είναι θετική αν αντανακλά με ακρίβεια κάποιο κομμάτι του μαθηματικού κόσμου. Στην περίπτωση του αξιώματος της κατασκευασιμότητας, ο ρεαλιστής θεωρεί ως αρνητικό στοιχείο το γεγονός πως το $V = L$ επαληθεύει την υπόθεση του συνεχούς (εφόσον θεωρεί ψευδή την υπόθεση αυτή για το μαθηματικό σύμπαν).

Για τον νατουραλιστή το πρόβλημα έχει να κάνει με τις αρνητικές του συνέπειες. Όπως είδαμε, η αποδοχή του αξιώματος της κατασκευασιμότητας συνεπάγεται την απόρριψη των αξιωμάτων των μεγάλων πληθικών αριθμών και των αξιωμάτων καθορισιμότητας, τα οποία έχουν πολύ επιθυμητές συνέπειες και τα οποία είναι συμβατά μεταξύ τους. Θα μπορούσαμε να πούμε πως, καθαρά ποσοτικά, ο νατουραλιστής επιλέγει να απορρίψει το V=L, καθότι παράγει «λιγότερα» μαθηματικά. Στη θέση του, κάλλιστα μπορεί να επιλέξει το V=HOD, επειδή δεν συγκρούεται με τα υπόλοιπα.

# Β Ι Β Λ Ι Ο Γ Ρ Α Φ Ι Α

## 1. Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία


ΑΝΑΠΟΛΙΤΑΝΟΣ, Δ.Α., [5]2005, *Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών* (Αθήνα: Νεφέλη).

ΑΥΓΕΛΗΣ, Ν., [3]2001, *Εισαγωγή στη Φιλοσοφία* (Θεσσαλονίκη).

DAVIS, M., 2007, *Μηχανές της Λογικής: Η Συνεισφορά των Μαθηματικών στην Ανάπτυξη των Υπολογιστών*, μτφρ. Σ. Ζάχος (Αθήνα: Εκκρεμές).

GÖDEL, K., 1983, «Russell's Mathematical Logic» (1944): P. BENACERRAF / H. PUTNAM [επιμ.], *Philosophy of Mathematics* (Cambridge: Cambridge University Press, [2]1983), σσ. 447-469.

—— 1993, «Τι είναι το Πρόβλημα του Συνεχούς του Cantor;» (1947): ΧΡΙΣΤΟΔΟΥΛΙΔΗΣ [2]1993, σσ. 181-202.

HALMOS, P.R., 2002, *Αφελής Συνολοθεωρία: Εισαγωγή στη Θεωρία Συνόλων*, μτφρ. Γ. Κολέτσος (Αθήνα: Εκκρεμές ⟨Σφαίρα⟩).

HEATH, sir T., 2001, *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών,* 2 ττ., μτφρ. Αθ. Αγγελή / Ελ. Βλάμου / Θ. Γραμμένος / Ανδρ. Σπανού, επιμ. Αδ. Αγγελής / Π. Βλάμος / Γ. Καρκούλιας / Αθ. Σκούρας / Ανδρ. Τρανταφύλλου (Αθήνα: Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.).

LORIA, G., 1971-1972-1974, *Ιστορία των Μαθηματικών,* 3 ττ., μτφρ. Μ.Κ. Κωβαίος (Αθήνα: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία / εκδ. Παπαζήση).

ΜΟΣΧΟΒΑΚΗΣ, Γ.Ν., 1993, *Σημειώσεις στην Συνολοθεωρία* (Αθήνα: Νεφέλη).

ΠΑΠΑΝΟΥΤΣΟΣ, Ε.Π., 1974, *Λογική* (Αθήνα: Δωδώνη).

RUSSELL,B., 2000, *Η Θεωρία των Τύπων*, μτφρ. Θ. Χριστακόπουλος (Αθήνα: Στάχυ ⟨Επιστημολογία: Οι Κλασσικοί⟩).

ΣΛΟΥΓΚΑ, Χ., 2009, *Φρέγκε: Η Γέννηση της Σύγχρονης Λογικής και οι Ρίζες της Αναλυτικής Φιλοσοφίας,* μτφρ. Μ.Ν. Θεοδοσίου, επιμ. Θ. Σαμαρτζής (Ηράκλειο Κρήτης / Αθήνα: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης ⟨Φιλοσοφική Βιβλιοθήκη⟩).

SHAPIRO, S., 2006, *Σκέψεις για τα Μαθηματικά: Η Φιλοσοφία των Μαθηματικών*, μτφρ. Κ. Αθ. Δρόσος / Δ. Σπανός, επιμ. Κ. Αθ. Δρόσος (Πάτρα: Πανεπιστήμιο Πατρών).

SZABÓ, Á., 1973, *Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών*, χ.ὅ .μτφρ. (Αθήνα: Τεχνικόν Επιμελητήριον της Ελλάδος).

ΤΖΟΥΒΑΡΑΣ, Αθ., 1998, *Στοιχεία Μαθηματικής Λογικής* (Θεσσαλονίκη: εκδ. Ζήτη).

ΦΙΛΗ, Χ., 2009, *Εξουσία και Μαθηματικά* (Αθήνα: Παπασωτηρίου).

—— 2010, *Οι Αρχαιοελληνικές Καταβολές των Σύγχρονων Μαθηματικών* (Αθήνα: Παπασωτηρίου).

ΧΡΙΣΤΟΔΟΥΛΙΔΗΣ, Π. [επιμ.], [2]1993, *Η Φιλοσοφία των Μαθηματικών* (Αθήνα: Γ.Α. Πνευματικός).


## 2. Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία


BELL, E.T., [2]1986, *Men of Mathematics* (N.Y./London: Simon & Schuster).

BOURBAKI, N., 1996, «The Architecture of Mathematics» (1948): EWALD 1996, σσ. 1265-1276.

BROUWER L., 1967, «On the Significance of the Principle of Excluded Middle in Mathematics, Especially in Function Theory» (1923): HEIJENOORT 1967, σσ. 334-345.

* CANTOR, G., 1895, «Beiträge zur Begrundung der transfiniten Mengenlehre, I»: *Mathematische Annalen* 46, σσ. 481-512.

COHEN, P.J., [3]2008, *Set Theory and the Continuum Hypothesis* (Mineola, N.Y.: Dover)

DAUBEN, J.W., 1979, *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite* (Princeton, New Jersey: Princeton University Press).

DEDEKIND, R., 1967, «Letter to Keferstein» (1890): HEIJENOORT 1967, σσ. 98-103.

DETLEFSEN, M. [επιμ.], 1992, *Proof and Knowledge in Mathematics* (London/N.Y.: Routledge).

EWALD, W. [επιμ.], 1996, *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*,2 ττ. (Oxford: Clarendon Press).

FERREIRÓS, J., [2]2007, *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics* (Basel/Boston/Berlin: Birkhäuser).

FRÆNKEL, A.A. / Y. BAR-HILLEL, 1958, *Foundations of Set Theory* (Amsterdam: North Holland Publishing Company 〈Studies in Logic and the Foundations of Mathematics〉).

FØLLESDAL, D., 1995, «Gödel and Husserl»: HINTIKKA 1995, σσ. 427-444.

GILLIES, D. [επιμ.], 1992, *Revolutions in Mathematics* (Oxford: Clarendon Press).

HEIJENOORT, J.v. [επιμ.], 1967, *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931* (Cambridge, Ma / London: Harvard University Press 〈Source Books in the History of the Sciences〉).

HINTIKKA, J., 1995, *From Dedekind to Gödel: Essays on the Development of the Foundations of Mathematics* (Dordrecht/London: Kluwer Academic).

HOWARD, P. / J.E. RUBIN, 1998, *Consequences of the Axiom of Choice* (American Mathematical Society 〈Mathematical Surveys and Monographs, 59〉).

JACQUETTE, D. [επιμ.], 2002, *Philosophy of Mathematics: An Anthology* (Malden / Oxford: Blackwell 〈Philosophy Anthologies〉).

JECH, T.J., [2]2008, *The Axiom of Choice* (Mineola, N.Y.: Dover).

KANAMORI, A., 2009, *The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from their Beginnings* (Berlin Springer-Verlag).

KLINE, M., 1972, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, 3 ττ., (N.Y./Oxford: Oxford University Press).

LAKE, J., 2002, «The Approaches to Set Theory»: JACQUETTE 2002, σσ. 362-376.

MADDY, P., 1988α΄, «Believing the Axioms, I»: *Journal of Symbolic Logic* 53/2 (June), σσ. 481-511.

—— 1988β΄, «Believing the Axioms, II»: *Journal of Symbolic Logic* 53/3 (September), σσ. 736-764.

—— 1997, *Naturalism in Mathematics* (Oxford: Clarendon Press).

MOORE, A.W., [2]2001, *The Infinite* (London/N.Y.: Routledge).

MOSCHOVAKIS, Y.N., 1980, *Descriptive Set Theory* (Amsterdam: North-Holland Publishing Company 〈Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 100〉).

O'CONNOR, J.J. / E.F. ROBERTSON [τεχν. επιμ.] 2012 [χρονολ. πρόσβασης], *The MacTutor History of Mathematics Archive*: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/.

PEANO, G., 1967, «The Principles of Arithmetic, Presented by a New Method» (1889): HEIJENOORT 1967, σσ. 83-97.

SIMONS, P., 1992, *Philosophy and Logic in Central Europe from Bolzano to Tarski: Selected Essays* (Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic 〈Nijhoff International Philosophy Series, 45〉).

STOLL, R.R., [2]1974, *Sets, Logic, and Axiomatic Theories* (San Francisco: W.H.Freeman and Company).

TILES, M., [1]1991, *Mathematics and the Image of Reason* (London: Routledge)

ZALTA, E.N. [γεν. επιμ.] 2012 [χρονολ. πρόσβασης], *Stanford Encyclopedia of Philosophy*: http://plato.stanford.edu/.

ZERMELO, E., 1967α΄, «Proof that Every Set can be Well-ordered» (1904): HEIJENOORT 1967, σσ. 139-141.

—— 1967β΄, «A New Proof of the Possibility of a Well-ordering» (1908): HEIJENOORT 1967, σσ. 183-198.

—— 1967γ΄, «Investigations in the Foundations of Set Theory I» (1908): HEIJENOORT 1967, σσ. 199-215.