<u>ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ</u>
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

Επιβλέπων Καθηγητής : Νικόλαος Γιαννακάκης Επίκουρος Καθηγητής ΕΜΠ

"Εφαρμογές του Θεωρήματος Mountain Pass σε προβληματα συνοριακών τιμών, για τα οποία δεν ικανοποιείται η συνθήκη Ambrosetti-Rabinowitz"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

ΑΝΤΩΝΙΟΥ Π. ΤΣΑΚΑΛΟΥ

Αθήνα 2012
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

"Εφαρμογές του Θεωρήματος Mountain Pass σε προβληματα συνοριακών τιμών, για τα οποία δεν ικανοποιείται η συνθήκη Ambrosetti-Rabinowitz'

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

ΑΝΤΩΝΙΟΥ Π. ΤΣΑΚΑΛΟΥ

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

Νικόλαος Γιαννακάκης Επίκουρος Καθηγητής ΕΜΠ
Δρόσος Γκιντίδης Επίκουρος Καθηγητής ΕΜΠ
Παναγιώτης Ψαρράκος Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα 2012
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Πρόλογος

Η εργασία αυτή αποτελεί διπλωματική εργασία για την απόκτηση του μεταπτυχιακού διπλώματος στις 'Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες'. Βασικό αντικείμενο μελέτης της είναι η λύση μη γραμμικών ελλειπτικών προβλημάτων συνοριακών τιμών μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ) 2ης τάξης.

Η εξίσωση στην οποία επικεντρωνόμαστε είναι

$$\Delta_p u = \lambda f(x,u) \tag{1}$$

όπου Δ_p είναι ο μη γραμμικός τελεστής *p-Laplace*, που θα ορίσουμε παρακάτω, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, u η άγνωστη συνάρτηση για την οποία ισχύει μία συνοριακή συνθήκη όπως $u = 0,\ \text{για}\ x \in \partial\Omega$.

Υπάρχουν δύο κυρίως μέθοδοι με τη βοήθεια των οποίων μπορούμε να μελετήσουμε το δεδομένο πρόβλημα καθώς και άλλα προβλήματα τέτοιου είδους : η *Θεωρία Morse* και οι *Μεταβολικές Μέθοδοι*. Οι Μεταβολικές Μέθοδοι κάνουν χρήση των τοπολογικών ιδιοτήτων των αντίστοιχων χώρων συναρτήσεων και είναι αυτές με τις οποίες στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε. Πιο συγκεκριμένα, θα μελετήσουμε μία *Minmax* μέθοδο η οποία βασίζεται στο *Θεώρημα Ορεινής Διάβασης (Mountain Pass Theorem)* που εισήγαγαν οι *Ambrosetti-Rabinowitz* το 1973. Το θεώρημα εξασφαλίζει λύση για ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών, κάτω όμως από προϋποθέσεις για την συνάρτηση f, οι οποίες έχουν να κάνουν με την ικανοποίηση απαιτήσεων ώστε να εξασφαλίζεται η λεγόμενη "Γεωμετρία Mountain Pass" καθώς και συγκεκριμένες τοπολογικές ιδιότητες όπως συμπάγεια για σύνολα που προκύπτουν από το πρόβλημα.

Για να αναχθεί το πρόβλημα (1) στο Θεώρημα Mountain Pass, η f πρέπει να ικανοποιεί κάποιες συνθήκες, συνήθως αυξητικές, πχ $\left|f(x,s)\right| \le a_1 + a_2\left|s\right|^q$ ώστε να ικανοποιείται η αντίστοιχη γεωμετρία του θεωρήματος. Η εξασφάλιση της συμπάγειας, απαίτησε από τους τους Ambrosetti-Rabinovitz την εισαγωγή της επόμενης συνθήκης

$$0 \le \mu F(x,s) \le sf(x,s) \tag{AR}$$

για σταθερές $\mu > 2$, $r \ge 0$ και $|s| \ge r$, $x \in \Omega$. Η συνθήκη (AR) είναι μάλλον αυστηρή, υπό την έννοια ότι εξαιρεί αρκετά προβλήματα από το να αναχθούν στο Θεώρημα Mountain Pass και να αποδειχθεί η ύπαρξη λύσης τους.

Πολλοί μελετητές έχουν προσπαθήσει να αμβλύνουν ή και να καταργήσουν τελείως την (AR) εισάγοντας λιγότερο αυστηρές συνθήκες για την f, ξεκινώντας από τους Costa-Magalhães το 1994 $[CM]_1$, Chen-Shen το 2003 [CS], Li-Zhou το 2002 $[LZ]_2$, Liu 2001 $[L]_1$, Willem-Zou 2003 [WZ], Schechter-Zou 2004 [SZ], Miyagaki-Souto 2008 [MS], Itturiaga-Lorca-Ubilla 2009 [ILU], Liu 2010 [L], Alves-Souto-Soares 2011 [ASS] κ.ά. Το πλήθος των επίπονων προσπαθειών που έχει συντελεστεί όλο αυτό το διάστημα υποδεικνύει την αναγκαιότητα για την επίλυση προβλημάτων ΜΔΕ, προερχόμενη από την ευρύτητα των εφαρμογών των ΜΔΕ στις εφαρμοσμένες επιστήμες, την εργαλειακή ισχύ των μεταβολικών μεθόδων, αλλά και τέλος την δυσκολία που υπάρχει στο όλο εγχείρημα.

Το 1ο Κεφάλαιο είναι εισαγωγικό και δίνονται απαραίτητα στοιχεία θεωρίας, κυρίως όσον αφορά στους χώρους Sobolev οι οποίοι είναι οι χώροι στους οποίους βρίσκονται οι λύσεις μας.

Το 2^o Κεφάλαιο είναι μία εισαγωγή στις μεταβολικές μεθόδους με εφαρμογές σε γραμμικά και ημιγραμμικά προβλήματα.

Στο 3^o Κεφάλαιο γίνεται η ανάπτυξη του Θεωρήματος Mountain Pass και η εφαρμογή του σε μη γραμμικά προβλήματα ΜΔΕ, χρησιμοποιώντας την συνθήκη (AR).

Στο 4^o Κεφάλαιο γίνεται αναφορά στις προσπάθειες που έχουν γίνει από μελετητές προκειμένου να αρθεί η συνθήκη AR. Λεπτομερής αναφορά γίνεται σε δύο αρκετά πρόσφατες μελέτες (Miyagaki-Souto 2008 και Li-Yang 2010) που φαίνεται ότι προχωρούν αρκετά σε αυτόν τον τομέα.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή και ιδιαιτέρως τον Επιβλεποντα Καθηγητή κο Γιαννακάκη για την βοήθεια, τις συμβουλές και την αμέριστη συμπαράσταση που μου παρείχε σε όλη την πορεία της εκπόνησης αυτής της εργασίας.

Αντώνιος Π. Τσάκαλος
Μάρτιος 2012

Κεφάλαιο 1

Σε αυτό το κεφάλαιο δίνονται βασικοί ορισμοί και θεωρητικά στοιχεία που είναι απαραίτητα για τη λύση των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Για περισσότερες λεπτομέρειες ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στα [E], [W], [SM], [R].

1.1 Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

1.1.1 ***Ορισμός*** *Μερική διαφορική εξίσωση (ΜΔΕ) είναι μία εξίσωση που συσχετίζει μία άγνωστη συνάρτηση δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών και κάποιες από τις μερικές παραγώγους της.*

Για να δώσουμε μία μορφή της εξίσωσης, χρειαζόμαστε τους επόμενους συμβολισμούς.

Ένα διάνυσμα $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ με $a_i \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, λέγεται πολυδείκτης τάξης $|a| = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Αν α πολυδείκτης, τότε

$$D^a u = \frac{\partial^{|a|} u}{\partial^{a_1} x_1 \ldots \partial^{a_n} x_n}$$

Αν $k \in \mathbb{N}$, τότε $D^k u = \{D^a u, |a| = k\}$

Για $k = 1$, $Du = \nabla u = \left(u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_n}\right)$, είναι το gradient διάνυσμα.

Για $k = 2$, $D^2 u = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ . & & . \\ . & & . \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$ είναι ο Εσσιανός πίνακας.

Η Laplacian της u ορίζεται ως $\Delta u = tr\left(D^2 u\right) = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$.

Μερική Διαφορική Εξίσωση k-τάξης είναι μία εξίσωση της μορφής

$$G\left[D^k u(x), D^{k-1} u(x), \ldots, Du(x), u(x), x\right] = 0$$

ή 1.1.2

$$Lu = 0$$

όπου L ο αντίστοιχος τελεστής και $u : \Omega \to \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ η άγνωστη συνάρτηση. Οι πλέον συνήθεις περιπτώσεις στις οποίες πρέπει να εντοπιστεί μία λύση u για τη ΜΔΕ, είναι η u να ικανοποιεί κάποια συνοριακή συνθήκη είτε για την ίδια (πρόβλημα Dirichlet)

$$\begin{cases} Lu = 0, & u \in \Omega \\ u = g, & u \in \partial\Omega \end{cases}$$

είτε για κάποια παράγωγό της (πρόβλημα Neumann).

$$\begin{cases} Lu = 0, & u \in \Omega \\ u_{x_1} = g, & u \in \partial\Omega \end{cases}$$

Στη παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με προβλήματα Dirichlet.

1.2 Ταξινόμηση ΜΔΕ

Η εξίσωση 1.1.2 ταξινομείται σε κατηγορίες ανάλογα με τη γραμμικότητα του αντίστοιχου τελεστή ως προς τις παραγώγους μεγαλύτερων τάξεων. Θα λέγεται :

I) **γραμμική** αν έχει τη μορφή

$$\sum_{|a| \le k} A_a(x) D^a(u(x)) = f(x)$$

για δεδομένες συναρτήσεις A_a, f του $x \in \Omega$.

Παραδείγματα γραμμικών εξισώσεων είναι :

i) Εξίσωση Laplace $\Delta u = 0$

ii) Εξίσωση θερμότητας $u_t - \Delta u = 0$

iii) Κυματική εξίσωση $u_{tt} - \Delta u = 0$

iv) Εξίσωση ιδιοτιμών ή Helmholtz $-\Delta u = \lambda u$

v) Εξίσωση μεταφοράς $u_t + \sum_{i=1}^{n} c^i u_{x_i} = 0$

vi) Εξίσωση Schrodinger $iu_t + \Delta u = 0$

II) **μη γραμμική** αν η εξάρτηση από τις παραγώγους της μέγιστης τάξης είναι μη γραμμική. Στις μη γραμμικές ΜΔΕ υπάρχουν κάποιες κατηγορίες που έχουν μία μορφή γραμμικότητας, και είναι :

οι **ημιγραμμικές**, με τη μορφή

$$\sum_{|a|=k} A_a(x) D^a(u) + A_0\left(D^{k-1}(u), \ldots, D(u), u, x\right) = 0$$

οι **σχεδόν γραμμικές** με τη μορφή

$$\sum_{|a|=k} A_a\left(D^{k-1}(u), \ldots, D(u), u, x\right) D^a(u) + A_0\left(D^{k-1}(u), \ldots, D(u), u, x\right) = 0$$

Μη γραμμικές εξισώσεις είναι :

i) Εξίσωση p-Laplace $div\left(|Du|^{p-2} Du\right) = 0$

ii) Μη γραμμική εξίσωση Poisson $-\Delta u = f(u)$

iii) Μη γραμμική κυματική εξίσωση $u_{tt} - \Delta u = f(u)$

iv) Εξίσωση Korteweg-de Vries $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$ κλπ

1.3 Προβλήματα καλά τοποθετημένα, κλασσική και ασθενής λύση.

Ο στόχος είναι να λυθούν ΜΔΕ διαφόρων τύπων. Όπως είναι φανερό, αυτό δεν είναι μία καθόλου εύκολη διαδικασία και ούτε υπάρχει γενική μέθοδος λύσης. Η ερώτηση μάλιστα που τίθεται άμεσα είναι τι εννοούμε όταν αναφερόμαστε στη λύση μίας ΜΔΕ και για να απαντήσουμε θα πρέπει προηγουμένως να ορίσουμε τι είναι ένα σωστά τοποθετημένο πρόβλημα ΜΔΕ. Ένα πρόβλημα ΜΔΕ είναι σωστά τοποθετημένο αν:

α) υπάρχει μία λύση,

β) η λύση είναι μοναδική και

γ) η λύση εξαρτάται κατά συνεχή τρόπο από τα δεδομένα του προβλήματος.

Πολλές φορές και λόγω του ότι η 'πηγή' των ΜΔΕ είναι φυσικές εφαρμογές, η μοναδικότητα της λύσης μπορεί να μην είναι απαραίτητη, η συνεχής όμως εξάρτηση της λύσης από τα δεδομένα είναι σχεδόν πάντοτε. Μία ιδανική κατάσταση επίσης για την λύση της ΜΔΕ θα ήταν να είναι αναλυτική ή τουλάχιστον απείρως παραγωγίσιμη. Μία τέτοια απαίτηση όμως θα εξαιρούσε ένα μεγάλο πλήθος πιθανών λύσεων, και θα στένευε κατά πολύ τα περιθώρια έρευνας. Ονομάζουμε λοιπόν

Κλασσική (ισχυρή) λύση *μίας Μερικής Διαφορικής Εξίσωσης k-τάξης, μία συνάρτηση u που την επαληθεύει και είναι* ***k φορές συνεχώς παραγωγίσιμη*** *(λεία ή ομαλή).*

Στην πραγματικότητα όμως κλασσικές λύσεις, για τις περισσότερες ΜΔΕ εκτός από συγκεκριμένες γραμμικές περιπτώσεις όπως η Laplace, είναι δύσκολο αν όχι αδύνατο να υπολογιστούν. Επίσης, σε αρκετές περιπτώσεις, εξισώσεις δέχονται λύσεις που δεν είναι k φορές παραγωγίσιμες, πολλές φορές ούτε καν συνεχείς, αλλά αν αποφασίσουμε να αγνοήσουμε αυτή την παράμετρο, το αντίστοιχο πρόβλημα είναι σωστά τοποθετημένο.

Ένα λογικό λοιπόν συμπέρασμα είναι η αποδέσμευση της αναζήτησης της λύσης από την ομαλότητα αυτής. Για κάθε ΜΔΕ ορίζουμε ένα αρκετά ευρύ σύνολο συναρτήσεων, το οποίο δεν περιλαμβάνει αποκλειστικά ομαλές ή συνεχείς συναρτήσεις και αναζητούμε μία **ασθενή** λύση σε αυτό το σύνολο έτσι ώστε το πρόβλημα να είναι σωστά τοποθετημένο. Αν καταστεί δυνατή η απόδειξη της ύπαρξης μίας ασθενούς λύσης μίας ΜΔΕ, μπορούμε να ασχοληθούμε με την συνέχεια ή/και ομαλότητα της λύσης.

Για το πρόβλημα που θα ασχοληθούμε σε αυτή την εργασία, δηλ το πρόβλημα ιδιοτιμών p-Laplace με συνοριακή συνθήκη Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u(x) = \lambda f\left(x, u(x)\right), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Θα αναζητήσουμε την ύπαρξη μίας ασθενούς λύσης σε κάποιο κατάλληλο χώρο Sobolev.

Θα χρειαστούμε τα επόμενα θεωρητικά εργαλεία:

1.4 Χώροι συναρτήσεων

1.4.1 **Ορισμός** Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Τότε ορίζεται το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων στο Ω :

$$C(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}, u \text{ συνεχής}\}$$

και το σύνολο των m-φορές παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο Ω :

$$C^m(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}, D^a(u) \text{ συνεχής για κάθε πολυδείκτη } a \text{ με } |a| \le m\}$$

1.4.2 **Ορισμός** Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Φορέας της u είναι το

$$supp\ u = \{x \in \Omega \,/\, u(x) = 0\}.$$

1.4.3 **Ορισμός** Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό.

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}, supp\ u \subset \Omega\ συμπαγές, u \in C^\infty(\Omega)\}$$

Οι χώροι των συνεχών και k-παραγωγίσιμων συναρτήσεων είναι οι χώροι που περιέχουν τις κλασσικές λύσεις των ΜΔΕ. Οι ασθενείς λύσεις όμως περιέχονται σε ευρύτερους χώρους συναρτήσεων.

Ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στη μελέτη των ΜΔΕ παίζουν οι χώροι συναρτήσεων $L^p(\Omega)$ και $L^\infty(\Omega)$ που ορίζονται παρακάτω. Ταυτόχρονα παρατίθενται και στοιχεία της Συναρτησιακής Ανάλυσης που απαιτούνται.

1.4.4 ***Ορισμός*** *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Για $1 \le p < \infty$, ο χώρος $L^p(\Omega)$ ορίζεται*

$$L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R}, μετρήσιμη\ και \int_\Omega |u(x)|^p\, dx < \infty\right\}$$

1.4.5 ***Θεώρημα*** *Ο χώρος $L^p(\Omega)$ είναι χώρος Banach (γραμμικός χώρος με νόρμα που είναι πλήρης ως προς τη μετρική που επάγεται από τη νόρμα.) με νόρμα*

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}},\ για\ u \in L^p(\Omega)$$

1.4.6 ***Πρόταση*** *Ο χώρος $L^2(\Omega)$ είναι χώρος Hilbert (χώρος με εσωτερικό γινόμενο, πλήρης ως προς τη νόρμα που επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο) με εσωτερικό γινόμενο*

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx,\ για\ u,v \in L^2(\Omega)$$

Η ισότητα μεταξύ στοιχείων των χώρων $L^p(\Omega)$ περιγράφεται ως εξής :

1.4.7 ***Ορισμός*** *Αν $u,v \in L^2(\Omega)$, τότε*

$$u = v \Leftrightarrow u(x) = v(x)\ σ.π.\ στο\ \Omega$$

Εμφυτεύσεις χώρων Banach

1.4.8 ***Ορισμός*** *Αν X,Y χώροι Banach με $X \subset Y$ και νόρμες $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$ και υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε*

$$\|x\|_Y \le c\|x\|_X$$

*τότε ο ταυτοτικός τελεστής $i : X \to Y$ είναι συνεχής (αφού $\|i(x)\|_Y = \|x\|_Y \le c\|x\|_X$) και λέμε ότι ο X **εμφυτεύεται συνεχώς** στον Y.*
*Αν ο τελεστής i είναι και συμπαγής[1], λέμε ότι ο X **εμφυτεύεται συμπαγώς** στον Y $\left(X \underset{συμπ}{\subset} Y\right)$.*

[1] Ο τελεστής i είναι συμπαγής αν κάθε $\|\cdot\|_X$-φραγμένη ακολουθία $(x_n) \subset X$, έχει $\|\cdot\|_Y$-συγκλίνουσα υπακολουθία ή αλλιώς αν απεικονίζει φραγμένα υποσύνολα του X σε συμπαγή υποσύνολα του Y.

1.4.9 ***Πρόταση*** *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ φραγμένο και $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$. Τότε*

$$L^{p_2}(\Omega) \subset L^{p_1}(\Omega)$$

Τοπικά Ολοκληρώσιμες Συναρτήσεις

1.4.10 ***Ορισμός*** *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ φραγμένο και $f: \Omega \to \mathbb{R}$. Η f λέγεται* ***τοπικά ολοκληρώσιμη*** *στο Ω (συμβ. $f \in L^1_{loc}(\Omega)$), εάν για κάθε $K \subset \Omega$ συμπαγές ισχύει*

$$f \in L^1(\Omega), \text{ δηλ } \int_K |f(x)|\, dx < \infty$$

Παρατήρηση *Ισχύει $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, για $1 \le p < \infty$*

1.4.11 ***Θεώρημα (Θεμελιώδες Λήμμα του Λογισμού Μεταβολών)*** *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο και $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Αν ισχύει $\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0$, για κάθε $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, τότε $f(x) = 0$ σχεδόν παντού στο Ω.*

Οι χώροι Sobolev, με τους οποίους κυρίως θα ασχοληθούμε, περιέχουν και συναρτήσεις οι οποίες δεν είναι αρκετά ομαλές. Ο ορισμός της ομαλότητάς τους γίνεται μέσω της έννοιας της *ασθενούς παραγώγου συνάρτησης*, η οποία προϋποθέτει με τη σειρά της, την έννοια των *κατανομών* και των *συναρτήσεων δοκιμής*.

Συναρτήσεις δοκιμής

1.4.12 ***Ορισμός*** *Ο χώρος D(Ω) των συναρτήσεων δοκιμής είναι ο χώρος $C_0^\infty(\Omega)$ εφοδιασμένος με την εξης έννοια σύγκλισης :*

Αν $(u_n) \subset D(\Omega)$ $u \in D(\Omega)$, τότε ισχύει $u_n \to u$ εάν

i. υπάρχει $K \subset \Omega$ συμπαγές με $\operatorname{supp} u_n \subset K$ και $\operatorname{supp} u \subset K$

ii. $D^a(u_n) \to D^a(u)$ ομοιόμορφα στο K, για κάθε πολυδείκτη a.

Ο χώρος των κατανομών D′(Ω)

1.4.13 ***Ορισμός*** *Θα λέμε ότι $T \in D'(\Omega)$ εάν*

i. $T: D(\Omega) \to \mathbb{R}$ γραμμική απεικόνιση

ii. για κάθε $(u_n) \subset D(\Omega)$, $u \in D(\Omega)$ και $u_n \to u$ ισχύει

$$Tu_n \to Tu$$

1.4.14 ***Πρόταση*** *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο και $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Ορίζουμε*

$$T_f : D(\Omega) \to \mathbb{R} \text{ με } T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx, \ \varphi \in D(\Omega)$$

Τότε :

i. $T_f \in D'(\Omega)$

ii.Η απεικόνιση $f \to T_f$ είναι "1-1"

Θέτουμε

$$< f,\varphi > \ = T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$$

1.4.15 ***Ορισμός*** *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο και $T \in D'(\Omega)$. Ορίζουμε την* ***ασθενή α-παράγωγο*** *$D^a T$ της T ως εξής :*

$$< D^a T,\varphi > = (-1)^{|a|} < T, D^a\varphi >, \ \forall \varphi \in D(\Omega),$$

1.4.16 ***Πρόταση*** *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο και $T \in D'(\Omega)$. Τότε*

$$D^a T \in D'(\Omega), \ \forall a$$

1.5 Χώροι Sobolev

Οι χώροι Sobolev που περιγράφονται παρακάτω, είναι οι κατάλληλοι χώροι στους οποίους μπορεί να γίνει εφαρμογή ιδεών της Συναρτησιακής Ανάλυσης όπως πχ ανακλαστικότητα, προκειμένου να αντληθούν συμπεράσματα για την επίλυση ΜΔΕ.

1.5.1 ***Ορισμός*** *Έστω $1 \le p \le \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Ο χώρος Sobolev ορίζεται ως εξής*

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \,/\, D^a u \in L^p(\Omega) \, \forall a \ \mu\varepsilon \, |a| \le k \right\}$$

1.5.2 ***Πρόταση*** *Ο χώρος $W^{k,p}(\Omega)$ είναι χώρος Banach με νόρμα*

$$\|u\|_{k,p} = \left[\|u\|_p^p + \sum_{1\le|a|\le k} \|D^a u\|_p^p \right]^{\frac{1}{p}}, \ \text{για } 1 \le p < \infty$$

$$\|u\|_{k,\infty} = \max_{1\le|a|\le k} \|D^a u\|_\infty, \ \text{για } p = \infty, \ u \in W^{k,p}(\Omega)$$

1.5.3 ***Πρόταση*** *Ισχύει $\|u\|_p \le c\|u\|_{k,p}$, δηλ $W^{k,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$*

1.5.4 ***Πρόταση*** *Ο χώρος $W^{k,p}(\Omega)$ είναι αυτοπαθής για $1 < p < \infty$ και διαχωρίσιμος για $1 \le p < \infty$.*

1.5.5 ***Πρόταση*** *Για $p = 2$ ο χώρος $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ είναι χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο*

$$(u,v) = \sum_{|a|\le k} \int_\Omega D^a u D^a v dx$$

Ειδικότερα για $k = 1$, $\left(H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)\right)$

$$(u,v) = \int_\Omega uv dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_\Omega uv dx + \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

1.5.6 ***Ορισμός*** *Ορίζεται ο χώρος $\boldsymbol{W_0^{k,p}(\Omega)}$ των απείρως διαφορίσιμων* *συναρτήσεων με συμπαγή φορέα, ως εξής*

$$\boldsymbol{W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_o^{\infty}}^{\|\cdot\|_{k,p}}}$$

1.5.7 ***Θεώρημα*** *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο με ομαλό σύνορο ($\partial\Omega$ είναι C^1)[2] και $u \in W^{k,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $1 \le p < \infty$. Τότε*

$$\boldsymbol{u \in W_0^{k,p}(\Omega) \Leftrightarrow u(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega}$$

Παρατήρηση Οι χώροι $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ και $W_0^{1,p}(\Omega)$ είναι οι χώροι στους οποίους αναζητούμε ως επί το πλέιστον ασθενείς λύσεις των ΜΔΕ, ως εκ τούτου είναι οι χώροι με τους οποίους θα ασχοληθούμε κυρίως.

Εμφυτεύσεις στους χώρους Sobolev

1.5.8 ***Θεώρημα (Ανισότητα Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)*** *Έστω $1 \le p < \infty$, και $\frac{1}{p*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$. Τότε υπάρχει $c > 0$ που εξαρτάται από τα p και n ώστε να ισχύει*

$$\|u\|_{L^{p*}(\mathbb{R}^n)} \le c\|\nabla u\|_{L^{p*}(\mathbb{R}^n)}$$

1.5.9 ***Θεώρημα*** *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό με ομαλό σύνορο, $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < n$ και $\frac{1}{p*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$. Τότε υπάρχει $c > 0$ που εξαρτάται από τα p, n, Ω ώστε $u \in L^{p*}(\Omega)$ με*

$$\|u\|_{p*} \le c\|u\|_{1,p}$$

1.5.10 ***Πόρισμα*** *Από το προηγούμενο Θεώρημα προκύπτει ότι*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p*}(\Omega)$$

για $1 \le p < n$ και $\frac{1}{p*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.

1.5.11 ***Θεώρημα*** *Ανισότητα* ***Poincare :*** *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < n$. Υπάρχει $c > 0$ ώστε*

$$\left(\int_\Omega u^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \le c\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\text{ή } \|u\|_q \le C\|\nabla u\|_p$$

για κάθε $q \in \left[1, \frac{np}{n-p}\right]$.

Για $p = 2 \Rightarrow q \in \left[1, \frac{2n}{n-2}\right], n > 2$. Για $q = 2 \Rightarrow$

$$\int_\Omega u^2 dx \le \sqrt{c}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx, \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

$$\text{ή } \|u\|_2 \le \sqrt{c}\,\|\nabla u\|_2$$

---

[2] Αν $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, τότε $\partial\Omega$ είναι C^k, αν για κάθε $x_0 \in x_0 \in \partial\Omega$, υπάρχει r>0 και συνάρτηση $g \in C^k(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R})$ τέτοια ώστε $\Omega \cap B(x_0, r) = \{x \in B(x_0, r) \,/\, x_n > g(x_1, \dots, x_{n-1})\}$

1.5.12 **Πόρισμα** Αν $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο, τότε στον χώρο $W_0^{1,p}(\Omega)$ η νόρμα $\|u\|_{1,p}$ είναι ισοδύναμη[3] με τη νόρμα $\|\nabla u\|_p$. Άρα

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|\nabla u\|_p = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Ορίζουμε στον χώρο $W_0^{1,p}(\Omega)$ να είναι : $\|u\| := \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$

Η προηγούμενη ανισότητα Poincare γράφεται

$$\|u\|_p \le \frac{1}{\sqrt[p]{\lambda_1}}\|\nabla u\|_p$$

όπου λ_1 η πρώτη ιδιοτιμή της Λαπλασιανής Δu, $\lambda_1 = \inf\limits_{\substack{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\\ u\neq 0}} \dfrac{\|u\|^p}{\|u\|_p^p}$

Για $p=2$ στον $H_0^1(\Omega)$ η νόρμα $\|\cdot\|_{1,2}$ και είναι ισοδύναμη με τη νόρμα $\|\nabla u\|_2$. Άρα

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_2 = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ο χώρος $H_0^1(\Omega)$ με τη νόρμα $\|u\| = \|\nabla u\|_2$ είναι χώρος εσωτερικού γινομένου με

$$(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

1.5.13 **Πόρισμα** Αν $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο, τότε η νόρμα $\|u\|_{k,p}$ στον $W_0^{k,p}(\Omega)$ είναι ισοδύναμη με την νόρμα $\|u\| = \sum\limits_{|a|=k}\|D^a u\|_p$. Άρα

$$\|u\|_{W_0^{k,p}(\Omega)} = \|u\| = \sum_{|a|=k}\|D^a u\|_p$$

1.5.14 **Θεώρημα (Rellich-Kondrachov)** Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο με ομαλό σύνορο, $1 \le p < n$. Τότε για $1 \le q < \dfrac{np}{n-p}$ ισχύει

$$W^{1,p}(\Omega) \underset{\sigma\upsilon\mu\pi}{\subset} L^q(\Omega)$$

1.5.15 **Θεώρημα** Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο με ομαλό σύνορο. Τότε

i. Αν $1 \le p < n \Rightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \underset{\sigma\upsilon\mu\pi}{\subset} L^q(\Omega)$, για $1 \le q < \dfrac{np}{n-p}$

ii. Αν $p = n \Rightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \underset{\sigma\upsilon\mu\pi}{\subset} L^q(\Omega)$, για $1 \le q < \infty$

iii. Αν $p > n \Rightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \underset{\sigma\upsilon\mu\pi}{\subset} C(\bar{\Omega})$

[3] Δύο νόρμες $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ είναι ισοδύναμες στον χώρο X, αν υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2 > 0$ ώστε να ισχύει $c_1\|u\|_1 \le \|u\|_2 \le c_2\|u\|_1$, $u\in X$.

1.6 Παράγωγος συναρτησιακού

1.6.1 ***Ορισμός*** *Έστω* $I:\Omega\to\mathbb{R}$ *συναρτησιακό,* Ω *ανοικτό υποσύνολο ενός χώρου Banach* X. *Το* I *είναι παραγωγίσιμο κατά Frechet σε ένα σημείο* $u\in\Omega$ *αν υπάρχει μία φραγμένη γραμμική απεικόνιση* $I'(u)\in X^*$ *(η οποία λέγεται* ***Frechet παράγωγος*** *του* I *στο* u*) ώστε να ισχύει :*

$$\lim_{v\to 0}\frac{I(u+v)-I(v)-<I'(u),v>}{\|v\|_X}=0,\ \forall v\in\Omega$$

1.6.2 ***Πρόταση*** *Το συναρτησιακό* $I\in C^1(\Omega)$ *αν η Frechet παράγωγος υπάρχει και είναι συνεχής στο* Ω.

1.6.3 ***Ορισμός*** *Έστω* $I:\Omega\to\mathbb{R}$ *συναρτησιακό,* Ω *ανοικτό υποσύνολο ενός χώρου Banach* X. *Το* I *έχει* ***Gateaux παράγωγο*** $I'(u)\in X^*$ *στο* $u\in\Omega$ *αν για κάθε* $v\in X$ *ισχύει*

$$\lim_{t\to 0}\frac{I(u+tv)-I(v)-<I'(u),tv>}{t}=0$$

1.6.4 ***Πρόταση*** *Η Gateaux παράγωγος στο* u *(αν υπάρχει) δίνεται ως :*

$$<I'(u),v>=\lim_{t\to 0}\frac{I(u+tv)-I(v)}{t}$$

Η Gateaux παράγωγος στο u *όπως ορίστηκε μπορεί να θεωρηθεί ως κατευθυνόμενη παράγωγος του* I *στη κατεύθυνση* v.

1.6.5 ***Πρόταση*** *Αν το* I *έχει συνεχή Gateaux παράγωγο στο* Ω, *τότε* $I\in C^1(\Omega)$.

Κεφάλαιο 2 Μεταβολικές Μέθοδοι

2.1 Γενική Περιγραφή

Έστω η εξίσωση

$$A(u) = 0 \qquad 2.1.1$$

όπου η άγνωστη συνάρτηση $u \in X$, X είναι χώρος Banach, $A(\cdot)$ είναι μη γραμμικός Μερικός Διαφορικός τελεστής. Αν θεωρήσουμε ότι ο τελεστής $A(\cdot)$ είναι η παράγωγος ενός συναρτησιακού $I(\cdot)$, άτυπα μπορούμε να γράψουμε $A(u) = I'(u)$, οπότε η 2.1.1 γράφεται :

$$I'(u) = 0 \qquad 2.1.2$$

Μιά μέθοδος αυτής της μορφής, που θα ονομάσουμε μεταβολική, μας επιτρέπει, αντί να αναζητούμε ισχυρές λύσεις του 2.1.1 (το οποίο στις περισσότερες περιπτώσεις είναι ιδιαίτερα επίπονο αν όχι αδύνατο), να αναζητούμε **κρίσιμα** σημεία του συναρτησιακού I, δηλ συναρτήσεις u οι οποίες **μηδενίζουν το** I'. Στην περίπτωση π.χ. όπου το u_0 είναι σημείο ελαχίστου για το I, τότε το u_0 επαληθεύει την 2.1.2 οπότε η u_0 (αναμένουμε να) είναι λύση και της αρχικής εξίσωσης 2.1.1. Για περισσότερες πληροφορίες και για εμβάθυνση στο περιεχόμενο του κεφαλαίου, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο [E] Κεφ.8 – Calculus of variations, αλλά και στα [W], [R], [SM].

2.2 Εξίσωση Euler-Lagrange

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ δοθείσα ομαλή συνάρτηση και το συναρτησιακό

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx - \int_\Omega f(x)u(x)dx \qquad 2.2.1$$

όπου $u \in C^2(\Omega)$ η άγνωστη συνάρτηση για την οποία ισχύει $u(x) = 0,\ x \in \partial\Omega$. Έστω u_0 είναι θέση ελαχίστου για το I και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με

$$g(t) = I(u_0 + tv), \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R} \text{ και για κάθε } v \in C_0^\infty(\Omega)$$

τότε $t = o$ είναι θέση *min* για την g, οπότε αφού g παραγωγίσιμη, είναι

$$g'(0) = 0$$

Είναι

$$g(t)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla(u_0+tv)|^2\,dx-\int_{\Omega}f(x)(u_0+tv)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla u_0|^2\,dx-\frac{t^2}{2}\int_{\Omega}|\nabla v|^2\,dx+t\int_{\Omega}\nabla u_0\nabla v dx-\int_{\Omega}fu_0dx-t\int_{\Omega}fvdx$$

Άρα

$$g'(t)\ =t\int_{\Omega}|\nabla v|^2\,dx+\int_{\Omega}\nabla u_0\nabla v dx-\int_{\Omega}fvdx$$

Οπότε

$$g'(0)=\int_{\Omega}\nabla u_0\nabla v dx-\int_{\Omega}fvdx \qquad \left(1^{\eta}\ \text{Μεταβολή του } I \text{ στο } u_0\right)$$

Αφού $g'(0)=0\Rightarrow$ $\displaystyle\int_{\Omega}\nabla u_0\nabla v dx-\int_{\Omega}fvdx=0\ \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial u_0}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx=\int_{\Omega}fvdx\Rightarrow$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^{\,2}}vdx=\int_{\Omega}fvdx$$

Αφού $v(x)=0$ για $x\in\partial\Omega$, η προηγούμενη σχέση μπορεί να γραφεί

$$-\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\Omega}v\frac{\partial u_0}{\partial x_i}n_i dS+\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial u_0}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx=\int_{\Omega}fvdx\Rightarrow$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_i}v\right)-\frac{\partial u_0}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx=\int_{\Omega}fvdx$$

η οποία μπορεί να γραφεί

$$\int_{\Omega}\left(\Delta u_0+f\right)vdx=0$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $v\in C_0^{\infty}$, οπότε από το Θεμελιώδες Λήμμα Λογισμού Μεταβολών (βλέπε 1.4.11), προκύπτει :

$$-\Delta u_0=f$$

Άρα το u_0 είναι λύση για το ακόλουθο πρόβλημα Dirichlet :

$$\begin{cases}-\Delta u(x)=f(x), x\in\Omega\\ \quad u=0,\quad x\in\partial\Omega\end{cases} \qquad 2.2.2$$

Μπορούμε να πούμε λοιπόν, ότι η εύρεση (ομαλών) λύσεων του προβλήματος 2.2.2 ανάγεται στην εύρεση θέσεων ελαχίστου για το συναρτησιακό I.

Τα προηγούμενα γενικεύονται, για οποιοδήποτε συναρτησιακό I:

Αν $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$ και η ομαλή συνάρτηση $L:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\bar{\Omega}\to\mathbb{R}$ (Lagrangian).

Αν $L\ =\ L\ (p,z,x)$, όπου $p\in\mathbb{R}^n, z\in\mathbb{R}, x\in\Omega$,

τότε ορίζουμε :

$$\begin{cases} \nabla_p L = (L_{p_1}, \dots, L_{p_n}) \\ \nabla_z L = L_z \\ \nabla_x L = (L_{x_1}, \dots, L_{x_n}) \end{cases} \qquad 2.2.3$$

Αν I είναι το συναρτησιακό

$$I(u) = \int_\Omega L\big(\nabla u(x), u(x), x\big) dx \qquad 2.2.4$$

όπου $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ ομαλή συνάρτηση, τότε το I είναι C^1 (βλέπε 1.6).
Έστω τώρα u_0 ομαλή συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$u = h, \ \forall x \in \partial\Omega \qquad 2.2.5$$

Έστω η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$g(t) = I(u_0 + tv), \text{ όπου } t \in \mathbb{R}, v \in C_0^\infty \qquad 2.2.6$$

Είναι $g(0) = I(u_0) \le I(u_0 + tv) = g(t)$, για κάθε $t \in \mathbb{R}, v \in C_0^\infty$ άρα το $t = 0$ είναι θέση ελαχίστου για την g, οπότε $g'(0) = 0$

Είναι $g(t) = I(u_0 + tv) = \int_\Omega L\big(\nabla(u_0 + tv), u_0 + tv, x\big) dx$, οπότε

$$g'(t) = \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n \Big(L_{p_i}(\nabla u_0 + t\nabla v, u_0 + tv, x) v_{x_i} \Big) + L_z(\nabla u_0 + t\nabla v, u_0 + tv, x) v \right] dx$$

Για $t = 0$ έχουμε :

$$g'(0) = \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n \Big(L_{p_i}(\nabla u_0, u_0, x) v_{x_i} \Big) + L_z(\nabla u_0, u_0, x) v \right] dx, \qquad \big(1^\eta \text{ Μεταβολή του } I \text{ στο } u_0\big)$$

και αφού $g'(0) = 0$ θα έχουμε

$$\int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n \Big(L_{p_i}(\nabla u_0, u_0, x) v_{x_i} \Big) + L_z(\nabla u_0, u_0, x) v \right] dx = 0 \qquad 2.2.7$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη, και αφού η v έχει συμπαγή φορέα, θα είναι :

$$\int_\Omega \left[-\sum_{i=1}^n \Big(L_{p_i}(\nabla u_0, u_0, x) \Big)_{x_i} + L_z(\nabla u_0, u_0, x) \right] v dx = 0$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $v \in C_0^\infty$, οπότε από το Θεμελιώδες Λήμμα Λογισμού Μεταβολών, προκύπτει :

$$-\sum_{i=1}^n \Big(L_{p_i}(\nabla u_0, u_0, x) \Big)_{x_i} + L_z(\nabla u_0, u_0, x) = 0, \ \sigma.\pi. \ \sigma\tau o \ \Omega$$

Άρα η u_0 είναι λύση της εξίσωσης :

$$-\sum_{i=1}^n \Big(L_{p_i}(\nabla u, u, x) \Big)_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x) = 0, \qquad \begin{pmatrix} \text{Εξίσωση} \\ \text{Euler} - \text{Lagrange} \end{pmatrix}$$

δηλ λύση του προβλήματος Dirichlet

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{n}\left(L_{p_i}\left(\nabla u,u,x\right)\right)_{x_i} + L_z\left(\nabla u,u,x\right) = 0, x \in \Omega \\ u = h, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad 2.2.8$$

Λέμε ότι μία συνάρτηση που επαληθεύει την 2.2.8 είναι **ισχυρή λύση**, ενώ μία συνάρτηση που επαληθεύει την 2.2.7 είναι **ασθενής λύση** της 2.2.8.

Όπως είδαμε, αν μία ομαλή συνάρτηση u είναι θέση ελαχίστου για ένα συναρτησιακό I, είναι ασθενής λύση της 2.2.8. Αντιστρέφοντας τον συλλογισμό, προκύπτει ότι δοθείσης μίας ΜΔΕ, η αναζήτηση ασθενών της λύσεων ενδέχεται να ταυτίζεται με την αναζήτηση θέσεων ελαχίστου για το αντίστοιχο συναρτησιακό.
Προκύπτουν τότε τα εξής ερωτήματα :

α) Κάθε θέση ελαχίστου του *I* είναι απαραίτητα ισχυρή λύση της ΜΔΕ ;

Αν η θέση ελαχίστου u_0 είναι ομαλή, τότε όπως είδαμε, είναι και ασθενής και ισχυρή λύση της ΜΔΕ. Αν όχι, τότε όπως δείχνει το επόμενο θεώρημα 2.3.5, κάθε θέση ελαχίστου του *I* είναι ασθενής λύση της ΜΔΕ.

β) Κάθε ασθενής λύση είναι ισχυρή;

Όχι απαραίτητα. Το πρόβλημα είναι γνωστό ως regularity of solutions και η έκταση της παρούσας εργασίας δεν επιτρέπει τη ανάπτυξή του.

γ) Σε ποιες περιπτώσεις υπάρχουν θέσεις ελαχίστου για το I;

Είναι το κύριο θέμα της εργασίας για ένα συγκεκριμένο είδος εξισώσεων και θα αναπτυχθεί από την παράγραφο 2.4 και έπειτα.

2.3 Ασθενείς λύσεις της Euler-Lagrange

Έστω το πρόβλημα

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{n}\left(L_{p_i}\left(\nabla u,u,x\right)\right)_{x_i} + L_z\left(\nabla u,u,x\right) = 0, \sigma\tau o\, \Omega \\ u = h, \sigma\tau o\ \partial\Omega \end{cases} \quad 2.3.1$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση με μία συνάρτηση δοκιμής $v \in C_0^\infty$, και ολοκληρώσουμε κατά παράγοντες προκύπτει :

$$\int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{n}\left(L_{p_i}\left(\nabla u,u,x\right)v_{x_i}\right) + L_z\left(\nabla u,u,x\right)v\right]dx = 0 \quad 2.3.2$$

Έστω ότι $u \in W^{1,q}\left(\Omega\right)$ και έστω ότι για την L ισχύουν οι παρακάτω αυξητικές υποθέσεις :

$$\begin{aligned} |L(p,z,x)| &\le c\left(|p|^q + |z|^q + 1\right) \\ |\nabla_p L(p,z,x)| &\le c\left(|p|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1\right) \\ |\nabla_z L(p,z,x)| &\le c\left(|p|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1\right) \end{aligned} \qquad 2.3.3$$

για κάθε $p \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}, x \in \Omega$ και όπου c σταθερά. Τότε από τις *2.3.2 , 2.3.3* είναι

$$\begin{aligned} |\nabla_p L(\nabla u, u, x)| &\le c\left(|\nabla u|^{q-1} + |u|^{q-1} + 1\right) \in L^{q'}(\Omega) \\ |\nabla_z L(\nabla u, u, x)| &\le c\left(|\nabla u|^{q-1} + |u|^{q-1} + 1\right) \in L^{q'}(\Omega) \end{aligned}$$

όπου $q' = \dfrac{q}{q-1}$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η 2.3.2 ισχύει για κάθε $v \in W_0^{1,q}(\Omega)$.

2.3.4 ***Ορισμός*** *Μία συνάρτηση* $u \in A$, *όπου* $A = \{u \in W^{1,q}(\Omega),\ u = h \text{ στο } \partial\Omega\}$ *είναι* ***ασθενής λύση*** *του προβλήματος 2.3.1 αν επαληθεύει την*

$$\int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n \left(L_{p_i}(\nabla u, u, x) v_{x_i} \right) + L_z(\nabla u, u, x) v \right] dx = 0$$

για κάθε $v \in W_0^{1,q}(\Omega)$.

2.3.5 ***Θεώρημα*** *Αν ισχύουν οι αυξητικές υποθέσεις 2.3.3 για την L και για* $u_0 \in A$ *είναι* $I(u_0) = \min_{u \in A} I(u)$, *τότε η* u_0 *είναι ασθενής λύση του προβλήματος 2.3.1*

*Απόδειξη (*βλ. [E],σελ.451, Theorem 4*)*

2.4 Ύπαρξη θέσεων ελαχίστου του *I*

Το ερώτημα που τίθεται λοιπόν, είναι σε ποιες περιπτώσεις υπάρχουν σημεία ελαχίστου για το *I*. Θα δούμε ότι είναι απαραίτητες δύο συνθήκες (πιεστικότητα και ασθενής κάτω ημισυνέχεια) για το *I*.

Έστω η συνάρτηση *L* όπως ορίστηκε στην 2.2.3, το συναρτησιακό $I(u) = \int_\Omega L[\nabla u(x), u(x), x] dx$ όπως ορίστηκε στην 2.2.4 για συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει *η 2.2.5.*

2.4.1 ***Ορισμός*** *Έστω q με* $1 < q < \infty$. *Αν υπάρχουν σταθερές* $a > 0,\ \beta \ge 0$, *ώστε να ισχύει :*

$$L(p,z,x) \ge a\, |p|^q - \beta, \text{ για κάθε } p \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}, x \in \Omega \qquad 2.4.2$$

οπότε για το I θα ισχύει :

$$I(u) \geq a\|\nabla u\|_q^q - \beta|\Omega| \qquad 2.4.3$$

λέμε ότι τα L, I ικανοποιούν την υπόθεση ***πιεστικότητας*** *.*
(Είναι φανερό ότι $I(u) \to \infty$ καθώς $\|\nabla u\|_q^q \to \infty$.)

Αν αναφερόμαστε σε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η υπόθεση της πιεστικότητας είναι αρκετή ώστε η *f* να έχει *infimum*. Στην περίπτωση του *I* όμως δεν ισχύει πάντα. Γι' αυτό και εισάγεται η έννοια της κάτω ημισυνέχειας.

2.4.4 ***Ορισμός*** *Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι* ***(ακολουθιακά) κάτω ημισυνεχής*** *αν $f(x_o) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_k)$ για κάθε $x_k \to x_o$ στο $\mathbb{R}$.*
Αντίστοιχα ένα συναρτησιακό I είναι ***(ακολουθιακά) ασθενώς κάτω ημισυνεχές*** *στον χώρο $W^{k,p}(\Omega)$ αν ισχύει*

$$I(u) \leq \liminf_{n\to\infty} I(u_k) \text{ για κάθε } u_n \xrightarrow{w} u \text{ στον } W^{k,p}(\Omega) \qquad 2.4.5$$

Το επόμενο θεώρημα είναι θεμελιώδες, εκφράζει τις βασικές απαιτήσεις για το I, ώστε να έχει ελάχιστη τιμή

2.4.6 ***Θεώρημα*** *: Αν X ανακλαστικός χώρος Banach και $I : X \to \mathbb{R}$ πιεστικό και ακολουθιακά κάτω ημισυνεχές συναρτησιακό, τότε το I έχει ελάχιστη τιμή.*

Απόδειξη : α) *Το σύνολο $I(X) = \{I(u),\ u \in X\}$ είναι κάτω φραγμένο.* Έστω ότι δεν είναι. Τότε θα υπάρχει ακολουθία $(u_n) \subset X$ με $I(u_n) \to -\infty$. Η (u_n) είναι φραγμένη. (Αν δεν είναι, τότε $\|u_n\| \to \infty$ οπότε από πιεστικότητα του *I* θα έχουμε $I(u_n) \to \infty$). Αφού ο X ανακλαστικός θα υπάρχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία (u_{n_k}) της (u_n) με $u_{n_k} \xrightarrow{w} u_0$ στον *X*. Αφού το *I* είναι ακολουθιακά κάτω ημισυνεχές, θα έχουμε $I(u_0) \leq \liminf_{k\to\infty} I(u_{n_k}) = -\infty$, άτοπο

β) *Το I έχει ελάχιστη τιμή στο X.*
Αφού $I(X) \subset \mathbb{R}$ είναι κάτω φραγμένο, θα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\lambda = \inf I(X)$. Τότε θα υπάρχει ακολουθία $(I(u_n)) \subset I(X)$ με $I(u_n) \to \lambda$. Η ακολουθία (u_n) είναι φραγμένη (αφού αν δεν είναι- όμοια με (α)- λόγω πιεστικότητας του *I*, θα έχουμε $I(u_n) \to \infty$, άτοπο), οπότε αφού *X* ανακλαστικός θα υπάρχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία της (u_{n_k}) με $u_{n_k} \xrightarrow{w} u_0$ στον *X*. Αφού το *I* είναι ακολουθιακά κάτω ημισυνεχές, θα έχουμε $I(u_0) \leq \liminf_{k\to\infty} I(u_{n_k}) \leq \lim_{n\to\infty} I(u_n) = \lambda$
Άρα και αφού $\lambda = \inf I(X)$, θα είναι $I(u_0) = \lambda$.

□

Παρατήρηση Είναι φανερό ότι η υπόθεση της ανακλαστικότητας για τον χώρο X είναι απαραίτητη, τόσο για την απόδειξη της ύπαρξης φράγματος του $I(X)$ όσο και για την ύπαρξη της ελάχιστης τιμής του *I*. Είναι αναγκαίο λοιπόν να εργαστούμε σε χώρους όπως $W^{1,p}(\Omega)$.

2.5 Εφαρμογή στην εξίσωση $-\Delta_p u = f(u)$ - f γραμμική

Θεώρημα $\left([MS], Theorem\ 1.3, σ.\ 4\right)$ Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, φραγμένο και ανοικτό, και p∈[2,+∞), q με $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Έστω $f \in W^{-1,q}(\Omega)$ [4]. Τότε υπάρχει μία ασθενής λύση $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(u), & στο\ \Omega \\ u = 0, & στο\ \partial\Omega \end{cases} \qquad 2.5.1$$

υπάρχει δηλ λύση u της εξίσωσης

$$\int_\Omega \left(\nabla u \left|\nabla u\right|^{p-2} \nabla v - fv\right)dx = 0,\ \ \forall v \in C_0^\infty(\Omega) \qquad 2.5.2$$

όπου $\Delta_p u = div\left(\left|\nabla u\right|^{p-2}\nabla u\right)$ είναι η **p-Laplacian** της u.

Απόδειξη Παρατηρούμε ότι το αριστερό μέρος της 2.5.2 είναι η κατευθυνόμενη παράγωγος του C^1 συναρτησιακού

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega \left|\nabla u\right|^p dx - \int_\Omega fudx \qquad 2.5.3$$

στη κατεύθυνση v, στο χώρο $W_0^{1,p}(\Omega)$. Από τον ορισμό της

$$\left\|f\right\|_* = \left\|f\right\|_{W^{-1,q}(\Omega)} = sup\left\{< f,u > /u \in W_0^{1,p}(\Omega), \left\|u\right\|_p \le 1\right\}$$

έχουμε

$$\left\|f\right\|_* = \sup_{\substack{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\\ \left\|u\right\|_p\le 1}} \int_\Omega fudx \ge \int_\Omega fudx \Rightarrow \left\|u\right\|_p \cdot \left\|f\right\|_* \ge \int_\Omega fudx$$

οπότε

$$I(u) \ge \frac{1}{p}\left\|u\right\|_p^p - \left\|f\right\|_* \left\|u\right\|_p \ \ge\ \frac{1}{p}\left\|u\right\|_p^p - c\left\|u\right\|_p \ \ge\ c^{-1}\left\|u\right\|_p^p - C$$

άρα και το I είναι πιεστικό.

Το I είναι ακολουθιακά ασθενώς κάτω ημισυνεχές. Πράγματι, έστω $\{u_n\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ με $u_n \xrightarrow{w} u$.

Τότε $< g,u_n > \to < g,u >$ για κάθε $g \in W^{-1,q}(\Omega)$, άρα το συναρτησιακό $\int_\Omega fudx$ είναι ακολουθιακά συνεχές. Επίσης η νόρμα κάθε χώρου Banach είναι ακολουθιακά ασθενώς κάτω ημισυνεχής, οπότε

---

4 $W^{-k,q}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, γραμμική\ και\ φραγμένη\}$ *είναι ο δυϊκός χώρος του* $W_0^{k,p}(\Omega)$ *όπου* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ *με νόρμα*

$\left\|f\right\|_* = \left\|f\right\|_{W^{-k,q}(\Omega)} = sup\left\{< f,u > /u \in W_0^{k,p}(\Omega), \left\|u\right\|_{W_0^{k,p}(\Omega)} \le 1\right\}$

$$
\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx - \int_\Omega f\cdot u dx = \\
&= \frac{1}{p}\|u\|_p^p - \int_\Omega f\cdot u dx \\
&\le \frac{1}{p}\liminf_{n\to\infty}\|u_n\|_p^p - \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f\cdot u_n dx \\
&= \frac{1}{p}\liminf_{n\to\infty}\|u_n\|_p^p - \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega f\cdot u_n dx \\
&\le \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p}\|u_n\|_p^p - \int_\Omega f\cdot u_n dx\right) \\
&= \liminf_{n\to\infty} I(u_n)
\end{aligned}
$$

Άρα το I είναι ακολουθιακά ασθενώς κάτω ημισυνεχές, οπότε από το Θεώρημα 2.4.6, υπάρχει ελάχιστο σημείο του που είναι ασθενής λύση του προβλήματος 2.5.1.

□

2.6 Εφαρμογή στην εξίσωση $-\Delta u = f(x,u)$ - f μη γραμμική

Δίνεται το μη γραμμικό πρόβλημα συνοριακών τιμών Dirichlet

$$
\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & \text{στο}\ \Omega \\ u = 0, & \text{στο}\ \partial\Omega \end{cases} \qquad 2.6.1
$$

όπου $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*, φραγμένο και ανοικτό,* $f : (\Omega\times\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$*. Οι ασθενείς λύσεις του προβλήματος είναι λύσεις της εξίσωσης*

$$
\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v dx = \int_\Omega f(x,u)\cdot v dx,\ v \in H_0^1(\Omega) \qquad 2.6.2
$$

και το αντίστοιχο συναρτησιακό είναι

$$
I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega F(x,u)dx = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F(x,u)dx \qquad 2.6.3
$$

όπου

$$
F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt, x\in\Omega, s\in\mathbb{R} \qquad 2.6.4
$$

2.6.5 ***Θεώρημα*** *([Σ]) Αν για την* $f : \Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *του 2.6.1 ισχύουν οι υποθέσεις :*

(Yi) *f Καραθεοδωρή, δηλ η απεικόνιση* $x \to f(x,s)$ *μετρήσιμη,* $\forall s\in\mathbb{R}$ *και η απεικόνιση* $s\to f(x,s)$ *συνεχής,* $\forall x\in\Omega$,

(Yii) $|f(x,s)| \le c|s|^{p-1} + b(x)$, $\forall x\in\Omega$, $\forall s\in\mathbb{R}$, $b\in L^q(\Omega)$, *(αυξητική συνθήκη),*

(Yiii) $F(x,s) \le \frac{1}{2}\mu s^2 + a(x)$, $a \in L^1(\Omega)$, $0 < \mu < \lambda_1$, , *όπου* λ_1 *η* 1^η *ιδιοτιμή*[5] *της Laplace στον* $H_0^1(\Omega)$, *με* $1 \le p < \frac{2n}{n-2}$ *αν* $n > 2$ *και* $1 \le p < \infty$ *αν* $n = 2$,

τότε το πρόβλημα έχει ασθενή λύση στον χώρο $H_0^1(\Omega)$.

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε την επόμενες προτάσεις :

2.6.6 ***Πρόταση*** *Αν* $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *συνάρτηση Καραθεοδωρή και* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *μετρήσιμη, τότε η συνάρτηση* $x \to f(x,u(x)) : \Omega \to \mathbb{R}$ *είναι μετρήσιμη.*

2.6.7 ***Πρόταση*** *Αν* $u,v \in L^p(\Omega)$, *και ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος 2.6.5, τότε το ολοκλήρωμα* $\int_\Omega f(x,u)\cdot v dx$ *είναι καλά ορισμένο.*

Απόδειξη

$$\left|\int_\Omega f(x,u)\cdot v dx\right| \le \int_\Omega |f(x,u)|\cdot|v|\,dx$$

$$\overset{Holder}{\le} \left(\int_\Omega |f(x,u)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |v|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

όπου $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Λόγω της (Yii), θα έχουμε :

$$\left|\int_\Omega f(x,u)\cdot v dx\right| \le \left(\int_\Omega \left(c\,|\,u\,|^{p-1} + b(x)\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \|v\|_p \Rightarrow$$

$$\left|\int_\Omega f(x,u)\cdot v dx\right| \le \left\|c\,|\,u\,|^{p-1} + b(x)\right\|_q \|v\|_p \overset{Minkowski}{\le} \left(c\left\|\,u\,|^{p-1}\right\|_q + \|b(x)\|_q\right)\|v\|_p =$$

$$= \left(c\|u\|_q^{p/q} + \|b(x)\|_q\right)\|v\|_p < \infty$$

□

2.6.8 ***Ορισμός*** *Έστω* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *φραγμένο και ανοικτό και* $M(\Omega)$ *είναι το σύνολο των μετρήσιμων συναρτήσεων* $u : \Omega \to \mathbb{R}$. *Αν* $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *τότε ο* ***τελεστής Nemitski*** *που αντιστοιχεί στην f, είναι η απεικόνιση*

$$u(x) \to f(x,u(x))$$

$$\text{ή } N_f(u(x)) = f(x,u(x))$$

Περιορίζοντας τον χώρο $M(\Omega)$ *στους χώρους μέτρου Lebesque, ο τελεστής Nemitski είναι*

$$N_f : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$$

2.6.9 ***Πρόταση ([R])*** *Ο τελεστής Nemitski με τις υποθέσεις (Yi), (Yii) είναι καλά ορισμένος και συνεχής.*

Απόδειξη Έστω $u \in L^p(\Omega)$.

---

[5] $\lambda_1 = \inf\left\{\frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_2^2}, u \in H_0^1(\Omega), u \ne 0\right\}$

$$\int_{\Omega} \left|f\left(x,u\right)\right|^q dx \le c_1 |\Omega| + c_2 \int_{\Omega} |u|^p \, dx < c_3 \left(|\Omega| + \int_{\Omega} |u|^p \, dx \right) < \infty$$

οπότε $N_f(u) \in L^q(\Omega)$. Άρα N_f καλά ορισμένος. Για τη συνέχεια του N_f, αρκεί να δείξουμε τη συνέχεια στο $u = 0$, δηλ ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για $\|u\|_p \le \delta$ να είναι $\left\|f\left(x,u(x)\right)\right\|_q \le \varepsilon$.

Είναι $f\left(x,0\right) = 0$, οπότε για $\bar{\varepsilon} > 0$, υπάρχει $\bar{\delta} > 0$ ώστε $\left|f\left(x,s\right)\right| \le \bar{\varepsilon}$ για $|s| \le \bar{\delta}$. Αν για το $u \in L^p(\Omega)$ είναι $\|u\|_p \le \delta$ και θέσουμε

$$\Omega_1 = \left\{ x \in \Omega \,/\, \left|u(x)\right| \le \gamma \right\}$$

τότε

$$\int_{\Omega_1} \left|f\left(x,u\right)\right|^q dx \le \bar{\varepsilon}^p \, |\Omega_1|$$

όπου $|\Omega_1|$ είναι το μέτρο του Ω_1. Έστω $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$. Τότε

$$\int_{\Omega_2} \left|f\left(x,u\right)\right|^q dx \le c_3 \left(|\Omega| + \|u\|_p^p \right) \le c_3 \left(|\Omega| + \delta^p \right)$$

Επιπλέον

$$\delta^p \ge \|u\|_p^p = \int_{\Omega_2} \left|u\left(x\right)\right|^p dx \ge \gamma^p \, |\Omega|$$

Από όπου έχουμε $|\Omega| \le \dfrac{\delta^p}{\gamma^p}$. Άρα

$$\int_{\Omega_2} \left|f\left(x,u\right)\right|^q dx \le c_3 \delta^p \left(1 + \gamma^{-p}\right)$$

Επιλέγοντας $\bar{\varepsilon}$ ώστε $\bar{\varepsilon}^p |\Omega_1| \le \varepsilon^p$ και δ ώστε $c_3 \delta^p \left(1 + \gamma^{-p}\right) \le \varepsilon^p$, έχουμε

$$\int_{\Omega} \left|f\left(x,u\right)\right|^q dx \le \varepsilon^p$$

οπότε

$$\left\|f\left(x,u(x)\right)\right\|_q \le \varepsilon$$

2.6.10 ***Πόρισμα*** *Ο τελεστής* $u \to F\left(x,u(x)\right) = \int_0^{u(x)} f\left(x,t\right) dt$ *είναι συνεχής.*

2.6.11 ***Πόρισμα*** *Το συναρτησιακό* $\Phi : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ *με*

$$\Phi(u) = \int_{\Omega} F\left(x,u\right) dx$$

είναι συνεχές.

2.6.12 ***Πρόταση*** *Αν* $1 \le p < \dfrac{2n}{n-2}$ *και ισχύουν οι (Yi), (Yii), το συναρτησιακό*

$$\Phi : L^p(\Omega) \to \mathbb{R} \text{ με } \Phi(u) = \int_{\Omega} F\left(x,u\right) dx$$

είναι ακολουθιακά ασθενώς συνεχές στον $H_0^1(\Omega)$

Απόδειξη Έστω $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$, $u \in H_0^1(\Omega)$ ώστε $u_n \xrightarrow{w} u$. Η (u_n) είναι φραγμένη και αφού $H_0^1(\Omega) \underset{\sigma\upsilon\mu\pi}{\subset} L^p(\Omega)$, θα υπάρχει υπακολουθία $\left(u_{n_k}\right)$ της (u_n) με $u_{n_k} \xrightarrow{\|\cdot\|_p} u$ στον $L^p(\Omega)$. Τότε $\Phi\left(u_{n_k}\right) \to \Phi\left(u\right)$. Το τελευταίο συμπέρασμα ισχύει για κάθε υπακολουθία $\left(u_{n_k}\right)$ της $\left(u_n\right)$, οπότε $\Phi\left(u_{n_k}\right) \to \Phi(u)$.

□

2.6.13 ***Πρόταση*** *Το συναρτησιακό I με τις υποθέσεις (Yi),(Yii) είναι ακολουθιακά ασθενώς κάτω ημισυνεχές.*

Απόδειξη Έστω $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$, $u \in H_0^1(\Omega)$ ώστε $u_n \xrightarrow{w} u$. Τότε

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \Phi(u) \\ &\le \frac{1}{2}\liminf\|u\|^2 - \lim\Phi(u_n) \\ &= \frac{1}{2}\liminf\|u\|^2 - \liminf\Phi(u_n) \\ &\overset{(Yi)}{\le} \liminf\left(\frac{1}{2}\|u\|^2 - \Phi(u_n)\right) \\ &= \liminf I(u_n) \end{aligned}$$

□

2.6.14 ***Πρόταση*** *Το συναρτησιακό I με τις υποθέσεις (Yi),(Yii), (Yiii) είναι πιεστικό*

Απόδειξη

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega F(x,u)dx \ge \\ &\overset{(Yiii)}{\ge} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \frac{1}{2}\mu\int_\Omega u^2 dx - \int_\Omega a(x)dx \end{aligned}$$

Αφού $\lambda_1 \le \inf\left\{\frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_2^2}, u \in H_0^1(\Omega), u \ne 0\right\} \Rightarrow \int_\Omega u^2 dx \le \frac{1}{\lambda_1}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx$

Άρα

$$\begin{aligned} I(u) &\ge \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \frac{1}{2}\frac{\mu}{\lambda_1}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega a(x)dx \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu}{\lambda_1}\right)\|u\|^2 - \int_\Omega a(x)dx \end{aligned}$$

Αλλά $\mu < \lambda_1 \Rightarrow 1 - \frac{\mu}{\lambda_1} > 0$ και $\int_\Omega a(x)dx$ πεπερασμένο, οπότε αν $\left(u_n\right) \subset H_0^1(\Omega)$ θα έχουμε :

$$I(u_n) \xrightarrow{\|u_n\| \to \infty} +\infty$$

δηλ I πιεστικό.

□

2.6.15 ***Απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.5***

Με τις υποθέσεις (Yi), (Yii), (Yiii) to I είναι ακολουθιακά ασθενώς κάτω ημισυνεχές και πιεστικό, άρα σύμφωνα με το Θεώρημα 2.4.6 το πρόβλημα 2.6.1 έχει ασθενή λύση στον χώρο $H_0^1(\Omega)$ (ανακλαστικός).

Κεφάλαιο 3 Critical Point Theory

Σκοπός της Θεωρίας Κρίσιμων Σημείων είναι η εύρεση κρίσιμων σημείων για ένα C^1 συναρτησιακό I σε ένα απειροδιάστατο χώρο X, δηλ σημείων u_0 όπου $I'(u_0)=0$ δηλ $I'(u_0)v = 0$, *για κάθε* $v \in X$, χωρίς τα σημεία u_0 να είναι απαραίτητα θέσεις ελαχίστου ή μεγίστου, αλλά πιθανώς σαγματικού τύπου.

Πριν προχωρήσουμε, είναι απαραίτητος ο ορισμός των συνόλων στάθμης ενός συναρτησιακού.

3.1.1 ***Ορισμός*** *Για* $I \in C^1(X), c \in \mathbb{R}$, *ορίζονται τα παρακάτω σύνολα*

$I_c = \{u \in X / I(u) \le c\}$ ***Σύνολο στάθμης*** *c του I (Sublevel set)*

$K_c = \{u \in X / I(u) = c, I'(u) = 0\}$ ***Σύνολο κρίσιμων*** *σημείων του I στη στάθμη c (Critical Point set)*

Η βασική ιδέα των μέθοδων Μεγίστου-Ελαχίστου (minimax methods) της Θεωρίας Κρίσιμων Σημείων, είναι ο προσδιορισμός στην διαφοροποίηση της τοπολογίας των συνόλων σταθμης του *I.*

Στη πεπερασμένη διάσταση η ύπαρξη κρίσιμων σημείων σαγματικού τύπου, μπορεί να δειχθεί ως εξης :

3.1.2 **Θεώρημα** $([MS], σ.66)$ Αν $I \in C^1(\Omega)$ είναι πιεστικό και έχει δύο ελάχιστες τιμές, στα u_1 και u_2, τότε το I έχει και ένα 3ο κρίσιμο σημείο u_3 διάφορο των u_1 και u_2 όπου

$$I(u_3) = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{u\in\gamma} I(u)$$

και

$$\Gamma = \{\gamma \subset \Omega,\ u_1, u_2 \in \gamma,\ \gamma \text{ συμπαγές και συνεκτικό}\}$$

είναι το σύνολο των "μονοπατιών" μεταξύ των u_1 και u_2.

Μπορούμε να σκεφτούμε το $I(u)$ ως το ύψος σε ένα σημείο u σε μία τοποθεσία. Τότε τα $I(u_1)$ και $I(u_2)$ είναι τα κατώτερα σημεία δύο "κοιλάδων" στις οποίες μεσολαβεί μία οροσειρά. Αν ακολουθήσουμε ένα "μονοπάτι" γ από το u_1 στο u_2 και προσέχοντας το μέγιστο ύψος του να είναι ελάχιστο σε σχέση με όλα τα άλλα "μονοπάτια", τότε θα διασχίσουμε την οροσειρά από μία "διάβαση" (mountain pass). Γι' αυτό και το προηγούμενο θεώρημα κάποιες φορές λέγεται Θεώρημα Mountain Pass για την πεπερασμένη διάσταση.

Αναμένουμε ένα συναρτησιακό να έχει κρίσιμη τιμή το σημείο c, αν το σύνολα στάθμης I_c, $I_{c+\varepsilon}, I_{c-\varepsilon}$ δεν είναι ομοιομορφικά. Όπως μπορεί να φανεί στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος, η ύπαρξη κρίσιμων σημείων γενικά εξαρτάται από το αν ισχύει κάποια συνθήκη συμπάγειας, η οποία στη πεπερασμένη διάσταση εξασφαλίζεται με την πιεστικότητα. Στη μη πεπερασμένη διάσταση, η συμπάγεια των συνόλων K_c εξασφαλίζεται με την συνθήκη *(PS)* για το *I*.

Ορισμός *(Palais,1970 [P]) Το* C^1 *συναρτησιακό* $I : X \to \mathbb{R}$ *ικανοποιεί την* ***συνθήκη Palais-Smale*** *(PS), αν κάθε ακολουθία* (u_n) *στον X με :*

1. $I(u_n)$ *είναι φραγμένη και*
2. $\|I'(u_n)\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ *στο* X^* *(ακολουθία (PS))*

έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Παρατήρηση Προφανώς η υπακολουθία της (u_n) συγκλίνει στο κρίσιμο σημείο του I.

Όπως δείχνει το επόμενο Λήμμα, η συνθήκη *(PS)* είναι συνθήκη συμπάγειας, αφου το σύνολο των κρίσιμων σημείων για ένα συναρτησιακό είναι συμπαγές :

3.1.3 ***Λήμμα*** *Έστω ότι το $I \in C^1(X)$ ικανοποιεί την συνθήκη (PS). Τότε το σύνολο K_c των κρίσιμων σημείων του I είναι συμπαγές.*

Απόδειξη Κάθε ακολουθία στο K_c έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Λόγω της συνέχειας των I και I', κάθε σημείο συσσώρευσης τέτοιας ακολουθίας ανήκει στο K_c, οπότε το K_c είναι συμπαγές.

□

Μία παραλλαγή της συνθήκης *(PS)* προτάθηκε από τους Brezis, Coron, Nirenberg

3.1.4 ***Ορισμός*** *(Brezis, Coron, Nirenberg, 1980 [BCN]) Το C^1 συναρτησιακό $I : X \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί την συνθήκη Palais-Smale $(PS)_c$, αν κάθε ακολουθία (u_n) στον X τέτοια ώστε :*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} I(u_n) = c$ *και*
2. $\|I'(u_n)\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ *στο X^* (ακολουθία $(PS)_c$)*

έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Παρατήρηση Είναι φανερό ότι από την συνθήκη *(PS)* προκύπτει η συνθήκη $(PS)_c$. Από την $(PS)_c$ προκύπτει επίσης η συμπάγεια των συνόλων κρίσιμων σημείων του I σε μία στάθμη c.

Το επόμενο θεώρημα αποδεικνύει ότι αν το I είναι φραγμένο και *(PS)*, τότε έχει κρίσιμο σημείο:

3.1.5 ***Θεώρημα*****[BCN]** *Έστω $I : X \to \mathbb{R}$, C^1 κάτω φραγμένο συναρτησιακό και $c = \inf\limits_{u\in X} I(u)$. Αν το Ι ικανοποιεί την συνθήκη $(PS)_c$*, τότε υπάρχει $u_0 \in X$ ώστε $I(u_0) = c$ και $I'(u_0) = 0$.

Ακολούθησε η εισαγωγή από τον Cerami, της συνθήκης (C), ασθενέστερης της συνθήκης *(PS)*:

3.1.6 ***Ορισμός*** *(Cerami 1978 [Ce]):Το συναρτησιακό Ι ικανοποιεί την συνθήκη (C), αν κάθε ακολουθία (u_n) με*

1. $|I(u_n)| \le c$*, ομοιόμορφα για $c > 0$ και*
2. $\|I'(u_n)\|(1+\|u_n\|) \to 0$

έχει συγκλίνουσα υπακολουθία

και η γενίκευση του προηγούμενου θεωρήματος

3.1.7 ***Θεώρημα*** *Έστω $I : X \to \mathbb{R}$, C^1 κάτω φραγμένο συναρτησιακό και $c = \inf\limits_{u\in X} I(u)$. Αν το Ι ικανοποιεί την συνθήκη (C)*, τότε υπάρχει $u_0 \in X$ ώστε

$$I(u_0) = c \text{ και } I'(u_0) = 0.$$

Συμπεραίνουμε ότι αν ένα Ι είναι κάτω φραγμένο και ικανοποιεί την *(PS)* ή την *(C)*, έχει κρίσιμο σημείο. Τι συμβαίνει όμως για τα συναρτησιακά που δεν είναι κάτω φραγμένα;

Μία λύση δίνει το Θεώρημα Mountain Pass που βασίζεται στο Λήμμα Παραμόρφωσης. Το Λήμμα Παραμόρφωσης, θεμελιώδες στην Θεωρία Κρίσιμων Σημείων, εισήχθη από τον Willem $[W]_1$ το 1983, και παρ' όλο που δεν θα χρησιμοποιηθεί άμεσα στην εργασία, έχει εφαρμογή σχεδόν σε κάθε μεθοδο μεγίστου-ελαχίστου και εφαρμογή της. Η απλοποιημένη εκδοχή που παρατίθεται οφείλεται επίσης στον Willem [W].

3.1.8 ***Θεώρημα*** *Λήμμα Παραμόρφωσης* ***(Deformation Lemma)*** $[W]_1$

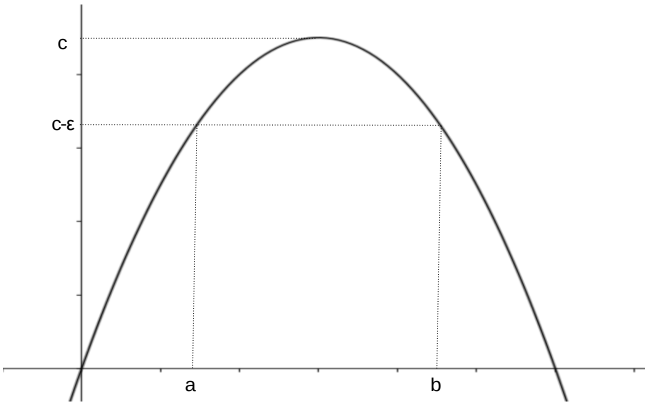
Έστω X χώρος Banach και έστω ότι το $I \in C^1(X)$ *ικανοποιεί την συνθήκη (PS). Αν το* $c \in \mathbb{R}$ ***δεν*** *είναι κρίσιμο σημείο του I, τότε για κάθε* $\varepsilon > o$ *υπάρχει ένα* $\delta \in (0,\varepsilon)$ *και ομοιομορφισμός* $\eta : X \to X$ *(deformation), τέτοιος ώστε*

i. $\eta(u) = u$, αν $I(u) \in [c-\varepsilon, c+\varepsilon]$,

ii. $\eta(I_{c+\delta}) \subset I_{c-\delta}$

Το Deformation Lemma είναι ένα ισχυρό εργαλείο για την απόδειξη της ύπαρξης σαγματικών σημείων για ένα συναρτησιακά *I*, αν ισχύουν καταλληλες υποθέσεις για τα σύνολα σταθμης του *I*. Η κεντρική ιδέα του θεωρήματος είναι ότι αν c δεν είναι κρίσιμη τιμή του I, τότε το σύνολο στάθμης $I_{c+\delta}$ μπορεί να απεικονιστεί ("παραμορφωθεί" - deform) στο $I_{c-\delta}$, με έναν ομοιομορφισμό (deformation) χωρίς να αλλοιωθούν οι τοπολογικές του ιδιότητες ή αλλιώς αν το c δεν είναι κρίσιμη τιμή, τα σύνολα $I_{c+\delta}$ και $I_{c-\delta}$ είναι ομοιομορφικά.

Στην απλούστερη περίπτωση n=1, όπου c είναι μέγιστο, για τα σύνολα στάθμης $I_{c+\delta} = \mathbb{R}$ και $I_{c-\varepsilon} = (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$ που είναι μη συνεκτικό, δεν μπορεί να υπάρξει deformation, (δεν είναι ομοιομορφικά)



Η απλούστερη περίπτωση είναι όταν το *I* είναι φραγμένο και ικανοποιεί την *(PS)*. Τότε, όπως αναφέρει το επόμενο θεώρημα, υπάρχει πάντα κρίσιμο σημείο για το *I*.

3.1.9 ***Θεώρημα*** *[SM] Έστω X χώρος Banach, συναρτησιακό* $I \in C^1(X)$ *ικανοποιεί την συνθήκη (PS) και είναι κάτω φραγμένο. Τότε το*

$$c = \inf_{u \in X} I(u)$$

είναι κρίσιμο σημείο για το I.

Το θεώρημα δηλώνει ακριβώς αυτό που έχουμε ως διαίσθηση από τη πεπερασμένη διάσταση. Η συνάρτηση $f(x) = e^{-1/x^2}$ είναι κάτω φραγμένη αλλά δεν ικανοποιεί την συνθήκη *(PS)*, οπότε το 0 δεν είναι κρίσιμη τιμή. Αυτού του είδους "συμπεριφορές" περιορίζει η συνθήκη *(PS)*.

Θεμελιώδες γενικό συμπέρασμα στη Θεωρία Κρίσιμων Σημείων είναι η Αρχή Μεγίστου-Ελαχίστου (Minimax Principle) (Palais [P])

3.1.10 ***Ορισμός*** *Έστω $\Phi : M \times [0,+\infty) \to M$ μία ημιρροή σε μία πολλαπλότητα Μ. Μία οικογένεια $\mathfrak{I}$ υποσυνόλων του Μ λέγεται Φ-σταθερή αν-ν $\Phi(F,t)K \in \mathfrak{I}$ για κάθε $F \in \mathfrak{I}$, $t \geq 0$.*

3.1.11 ***Θεώρημα*** *(**Minimax Principle**) [P] Έστω Μ μία πλήρης πολλαπλότητα Finsler, τάξης $C^{1,1}$ και συναρτησιακό $I \in C^1(M)$ που ικανοποιεί την (PS).Αν $\wp \in \mathcal{P}(M)$ είναι μία συλλογή συνόλων σταθερών ως προς κάθε συνεχή ημιρροή $\Phi : M \times [0,+\infty) \to M$ με $\Phi(\cdot,0) = id|_M$, Φ είναι ένας ομοιομορφισμός στο Μ για κάθε $t \geq 0$ και $I(\Phi(u,t))$ είναι αύξουσα ως προς t για κάθε $u \in M$. Τότε αν το*

$$c = \inf_{F \in \wp} \sup_{u \in F} I(u)$$

είναι πεπερασμένο, το c είναι κρίσιμη τιμή για το I.

Η Αρχή Μεγίστου-Ελαχίστου καλύπτει όλες τις πιθανές αιτίες ύπαρξης κρίσιμων σημείων, που προκύπτουν από τις τοπολογικές ιδιότητες των συνόλων στάθμης του συναρτησιακού. Η εξάρτηση όμως του θεωρήματος από τον "πλούτο" της τοπολογίας του χώρου Χ, δημιουργεί δυσχέρειες στην εφραμογή του.

Τέτοιου τύπου δυσχέρειες προσπερνά η επόμενη μέθοδος minimax, το Θεώρημα Ορεινής Διάβασης (Mountain Pass Theorem), όντας ιδιαίτερα εύκολο στην εφαρμογή του σε προβλήματα. Πρωτοδημοσιεύθηκε από τους Ambrosetti-Rabinowitz το 1973 στο [AR]. Η βιβλιογραφία είναι αρκετά πλούσια και ο αναγνώστης μπορεί να αναζητήσει αρκετές εκδοχές και εφαρμογές του θεωρήματος, (βλ.,[W],[R], [E], [SM] κ.α.).

3.1.12 ***Θεώρημα Mountain Pass (MP)*** *[AR]*

Έστω Χ χώρος Banach και έστω ότι το $I \in C^1(X)$ ικανοποιεί την συνθήκη (PS). Έστω ότι

(Ii) $I(0) = 0$,

(Iii) υπάρχουν σταθεροί $\rho, a > 0$ ώστε $I(u) \geq a$ για κάθε $u \in B_\rho$,

(Iiii)υπάρχει ρ>0, $u_0 \in X \setminus B_\rho$ με $I(u_0) \leq 0$.

Τότε το

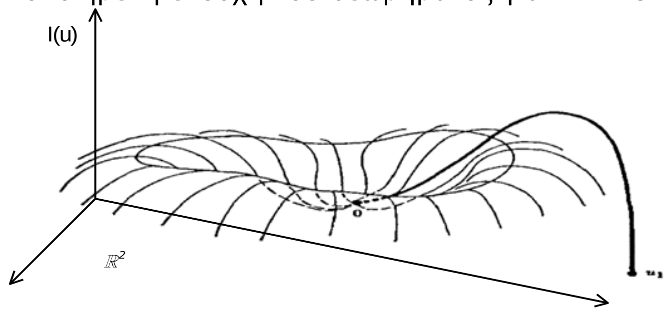
$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$$

όπου

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1],X) \,/\, \gamma(0) = 0, \gamma(1) = u_0\}$$

είναι ***κρίσιμο*** *σημείο για το I.*

Στο σχήμα φαίνεται μία απλοποιημένη εκδοχή του θεωρήματος για n=2. Όπως και στη πεπερασμένη περίπτωση, μπορούμε να σκεφτούμε το $I(u)$ ως το ύψος σε ένα σημείο u. Τότε τα 0 και $I(u_1)$ είναι τα κατώτερα σημεία δύο "κοιλάδων" στις οποίες μεσολαβεί μία οροσειρά. Αν ακολουθήσουμε ένα "μονοπάτι" γ από το 0 στο u_1 έτσι ώστε το μέγιστο ύψος του να είναι ελάχιστο σε σχέση με όλα τα άλλα "μονοπάτια", τότε θα διασχίσουμε την οροσειρά από μία "διάβαση" (mountain pass).



Παρακάτω δίνεται μία εφαρμογή του Θεωρήματος MP σε ένα μη γραμμικό πρόβλημα ΜΔΕ. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, κάθε περίπτωση ΜΔΕ αντιμετωπίζεται κατά σχεδόν μοναδικό τρόπο, οπότε για να μπορεί να γίνει αναγωγή του προβλήματος στο Θεώρημα MP, είναι απαραίτητη η εισαγωγή υποθέσεων-συνθηκών για την συνάρτηση *f*. Βασική είναι η συνθήκη Ambrosetti-Rabinowitz, η άρση της οποίας είναι το βασικό θέμα της εργασίας.

3.2 Εφαρμογή στο $-\Delta u=f(x,u)$ - f μη γραμμική

Δίνεται το ελλειπτικό μη γραμμικό πρόβλημα ΜΔΕ 2ης τάξης Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), x \in \Omega \\ u = 0, \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \qquad 3.2.1$$

όπου $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ανοικτό και φραγμένο με ομαλό σύνορο. Το συναρτησιακό που αντιστοιχεί στο πρόβλημα 3.2.1 είναι το*

$$I(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F(x,u) \right) dx, \ u \in H_0^1(\Omega) \qquad 3.2.2$$

όπου

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\,dt \qquad 3.2.3$$

Ασθενής λύση $u \in H_0^1(\Omega)$ *του 3.2.1 είναι λύση της εξίσωσης*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f \cdot v dx, \text{ για κάθε } v \in C_0^\infty(\Omega) \qquad 3.2.4$$

Εισάγουμε τις ακόλουθες υποθέσεις για την f:

(f₁) $f(x,s) \in C(\bar{\Omega} x \mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f(x,0) = 0$

(f₂) *υπάρχουν σταθερές* $a_1, a_2 \geq 0$ *ώστε*

$$|f(x,s)| \leq a_1 + a_2 |s|^p, \text{ για κάθε } x \in \bar{\Omega}, s \in \mathbb{R}$$

για $n > 2$ και $0 \le q < \dfrac{n+2}{n-2}$,

για $n = 2$ αρκεί $\left|f(x,s)\right| \le a_1 e^{\varphi(s)}$, όπου $\dfrac{\varphi(s)}{s^2} \xrightarrow{s\to\infty} 0$

(f_3) $f(x,s) = o(|s|)$ καθώς $s \to 0$,

(AR) υπάρχουν σταθερές $\mu > 2$ και $s_0 \ge 0$ ώστε για $|s| \ge s_0$ να είναι :

$$0 \le \mu F(x,s) \le s f(x,s)$$

Συνθήκη Ambrosetti-Rabinowitz (AR)

3.2.5 **Λήμμα** Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο με ομαλό σύνορο και έστω f ικανοποιεί τις υποθέσεις

(g_1) $f \in C(\bar{\Omega} x \mathbb{R}, \mathbb{R})$

(g_2) υπάρχουν σταθερές r,s ≥ 1, $a_1, a_2 \ge 0$ ώστε

$$\left|f(x,s)\right| \le a_1 + a_2 |s|^{r/q}, \text{για κάθε } x \in \bar{\Omega},\ s \in \mathbb{R}.$$

Τότε η απεικόνιση $u(x) \to f(x,u(x))$ ανήκει στο $C\left(L^r(\Omega), L^q(\Omega)\right)$

Απόδειξη ([R])

3.2.6 **Λήμμα** Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο με ομαλό σύνορο και έστω f ικανοποιεί τις υποθέσεις

(g_1) $f \in C(\bar{\Omega} x \mathbb{R}, \mathbb{R})$

(g_2) υπάρχουν σταθερές $a_1, a_2 \ge 0$ ώστε $\left|f(x,s)\right| \le a_1 + a_2 |s|^p$,

για κάθε $x \in \bar{\Omega}$, $s \in \mathbb{R}$, $0 \le p < \dfrac{n+2}{n-2}$, $n \ge 3$.

Αν $F(x,s) = \int_0^s g(x,t)\,dt$ και $I(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(x,u)\right)dx$, τότε

$I \in C^1\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$ και $< I'(u), v > = \int_\Omega \left(\nabla u \nabla v - g(x,u)v\right)dx$ για κάθε $v \in H_0^1(\Omega)$.

Επιπλέον αν $\Phi(u) = \int_\Omega F(x,u(x))\,dx$, τότε Φ είναι ασθενώς συνεχής και $\Phi'(u)$ είναι συμπαγής.

Απόδειξη ([R])

3.2.7 **Λήμμα** Έστω $I(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(x,u)\right)dx$, $u \in H_0^1(\Omega)$, όπου $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\,dt$, και ισχύουν οι υποθέσεις f_1-f_4. Τότε το I ικανοποιεί την υπόθεση (Iiii) του MP (υπάρχει ρ>0, $u_0 \in X \setminus B_\rho$ με $I(u_0) \le 0$)

Απόδειξη Έστω $s_0 > 0$, οπότε για $s \ge s_0$ από την (AR) θα είναι

$$f(x,s) > 0 \Rightarrow F(x,s) \ge 0$$

και επίσης από την (AR)

$$0 \le \frac{\mu}{s} \le \frac{f(x,s)}{F(x,s)}$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\mu \cdot \ln\frac{s}{s_0} \le \ln\frac{F(x,s)}{F(x,s_0)} \Rightarrow$$
$$F(x,s) \ge \left(F(s_0)s_0^{-\mu}\right)s^{\mu}$$

Για $s < -s_0$, όμοια προκύπτει ότι $F(x,s) \ge \left(F(s_0)s_0^{-\mu}\right)(-s)^{\mu}$

Άρα για $|s| \ge s_0$ είναι

$$F(x,s) \ge c_1 |s|^{\mu}.$$

Επίσης υπάρχει $c_2 > 0$ ώστε για $|s| \le s_0$ να είναι $F(x,s) \ge c_1 | s |^{\mu} - c_2$.

Άρα για $s \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$$F(x,s) \ge c_1 | s |^{\mu} - c_2 \qquad 3.2.8$$

Αν $\Phi(u) = \int_{\Omega} F(x,u(x))dx$, τότε

$$\Phi(u) \ge c_1 \int_{\Omega} |u|^{\mu}\, dx - c_2 |\Omega| \text{ για κάθε } u \in H_0^1(\Omega).$$

Αν $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, θα έχουμε

$$I(tu) = \frac{t^2}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx - \int_{\Omega} F(x,tu)dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow I(tu) \le \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - t^{\mu}c_1 \int_{\Omega} |u|^{\mu}\, dx + c_2 |\Omega| \xrightarrow{t\to\infty} -\infty$$

Άρα ισχύει η υπόθεση (Iii) του MP, δηλ υπάρχει $\rho > 0$ και $u_0 \in H_0^1(\Omega) \setminus B_\rho$ ώστε $I(u_0) < 0$.

□

3.2.9 ***Λήμμα*** *Έστω* $I(u) = \int_{\Omega}\left(\frac{1}{2} | \nabla u |^2 - F(x,u)\right)dx$, $u \in H_0^1(\Omega)$, *όπου* $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt$, *και ισχύουν οι υποθέσεις* f_1-f_4. *Τότε το I ικανοποιεί την υπόθεση (Iii) του MP (υπάρχουν σταθεροί* $\rho, a > 0$ *ώστε* $I(u) \ge a$ *για κάθε* $u \in B_\rho$*).*

Απόδειξη Από την f_3, για δεδομένο $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε από την σχέση $|s| \le \delta$ προκύπτει

$$|F(x,s)| \le \varepsilon |s|^2, \text{ για } x \in \bar{\Omega}$$

Από την (f_2), θα υπάρχει σταθερά $A = A(\delta)$, ώστε από την σχέση $|s| \ge \delta$ έχουμε

$$\left|F(x,s)\right| \le A\left|s\right|^{p+1},\ \text{για}\ x \in \bar{\Omega}$$

Συνδυάζοντας τις δύο προηγούμενες ανισότητες :

$$\left|F(x,s)\right| \le \frac{1}{2}\varepsilon\left|s\right|^{2} + A\left|s\right|^{p+1},\ \text{για}\ x \in \bar{\Omega}$$

Άρα

$$\left|\Phi(u)\right| = \left|\int_{\Omega} F(x,u(x))dx\right| \le \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega}\left|u\right|^{2}dx + A\int_{\Omega}\left|u\right|^{p+1}dx \Rightarrow$$

$$\left|\Phi(u)\right| \le \frac{\varepsilon}{2}\left\|u\right\|^{2} + A\left\|u\right\|_{p+1}^{p+1}$$

Τότε υπάρχει $c_3 > 0$ (από ανισότητες Poincare και Sobolev), ώστε :

$$\left|\Phi(u)\right| \le \frac{\varepsilon}{2}\left\|u\right\|^{2} + c_3 A\left\|u\right\|^{p+1}$$

Άρα

$$I(u) = \frac{1}{2}\left\|u\right\|^{2} - \Phi(u) \ge \frac{1-\varepsilon}{2}\left\|u\right\|^{2} - c_3 A\left\|u\right\|^{p+1} \Rightarrow$$

$$I(u) \ge k_1\left\|u\right\|^{2} - k_2\left\|u\right\|^{p+1}$$

Για $\left\|u\right\| = r \Rightarrow I(u) \ge k_1 r^2 - k_2 r^{p+1}$

Για $r = r_0$ αρκετά μικρό ώστε να ισχύει $k_1 r_0^2 - k_2 r_0^{p+1} > 0$ ή $\frac{k_1}{k_2} > r_0^{p-1}$,

θέτουμε $k_1 r_0^2 - k_2 r_0^{p+1} = a$.

οπότε η υπόθεση (Iii) του MP ισχύει, δηλ υπάρχουν σταθερές $r_0, a > 0$ ώστε $I(u) \ge a$ για $u \in B_{r_0}$.

□

3.2.10 ***Λήμμα (Kadec-Klee)*** Αν $(u_n) \subset H$, όπου H χώρος Hilbert και $u_n \xrightarrow{w} u_0 \in H,\ \left\|u_n\right\| \to \left\|u_0\right\|$, τότε $u_n \xrightarrow{\|\ \|} u_0$

3.2.11 ***Λήμμα*** *Έστω*

$$I(u) = \int_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\left|\nabla u\right|^{2} - F(x,u)\right)dx,\ u \in H_0^1(\Omega)$$

όπου

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt,$$

και ισχύουν οι υποθέσεις (f_1)-(f_4). Τότε το I ικανοποιεί την υπόθεση (PS)

Απόδειξη

Έστω ακολουθία $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ με $I(u_n)$ φραγμένη και $I'(u_n) \to 0$. Αρκεί να δείξουμε ότι η (u_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία

Βήμα 1 Θα δείξουμε ότι η (u_n) είναι φραγμένη. Αφού $I(u_n)$ φραγμένη, υπάρχει $c > 0$ ώστε $I(u_n) \le c$. Τότε :

$$I(u_n) \le c \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left\|u_n\right\|^{2} - \int_{\Omega} F(x,u_n(x))dx \le M \Rightarrow$$

$$\|u_n\|^2 \le M' + 2\int_\Omega F\left(x, u_n(x)\right)dx \overset{(AR)}{\Rightarrow}$$

$$\|u_n\|^2 \le M' + \frac{2}{\mu}\int_\Omega f\left(u_n(x)\right)u_n(x)dx \qquad 3.2.12$$

Αφού $I'(u_n) \to 0$, τότε $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_o \in \mathbb{N}$ ώστε $\|I'(u_n)\| < \varepsilon$, $\forall n \ge n_o$. Τότε

$$\left|\left\langle I'(u), v\right\rangle\right| \le \|I'(u_n)\|\|v\|, \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

άρα

$$\left|\left\langle I'(u), v\right\rangle\right| < \varepsilon\|v\| \qquad 3.2.13$$

Τότε

$$< I'(u_n), v) > \ = \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla v dx - \int_\Omega f\left(x, u_n\right) \cdot v dx$$

Θέτοντας στην 3.2.13 όπου $\varepsilon = 1$, $u = u_n$

$$\left|\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \int_\Omega f\left(x, u_n\right) \cdot u_n dx\right| < \|u_n\| \Rightarrow$$

$$\int_\Omega f\left(x, u_n\right) \cdot u_n dx < \|u_n\|^2 + \|u_n\| \qquad 3.2.14$$

Από 3.2.12, 3.2.14 προκύπτει

$$\|u_n\|^2 < M' + \frac{2}{\mu}\left(\|u_n\|^2 + \|u_n\|\right) \Rightarrow$$

$$\left(1 - \frac{2}{\mu}\right)\|u_n\|^2 < M' + \frac{2}{\mu}\|u_n\| \Rightarrow$$

Αφού $\mu > 2$, τότε για $\kappa_1 = \dfrac{M'}{1 - \frac{2}{\mu}}$, $\kappa_2 = \dfrac{\frac{2}{\mu}}{1 - \frac{2}{\mu}}$ είναι :

$$\|u_n\|^2 < \kappa_1 + \kappa_2\|u_n\| \Rightarrow \|u_n\| < \frac{\kappa_1}{\|u_n\|} + \kappa_2$$

Από την τελευταία σχέση είναι φανερό ότι η (u_n) είναι φραγμένη, αφού στην αντίθετη περίπτωση θα ήταν $\|u_n\| \to \infty$, οπότε $\dfrac{\kappa_1}{\|u_n\|} \to 0 \Rightarrow \|u_n\| \to 0$ άτοπο.

Βήμα 2

Αφού (u_n) φραγμένη και $H_0^1(\Omega)$ ανακλαστικός, υπάρχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία $\left(u_{n_k}\right)$ της (u_n), δηλ $u_{n_k} \xrightarrow{w} u_0 \in H_0^1(\Omega)$. Αρκεί τότε, σύμφωνα με το Λήμμα Kadec-Klee να δείξουμε ότι $\|u_{n_k}\| \to \|u_0\|$.

Συμβολίζουμε την $\left(u_{n_k}\right)$ με (u_n). Αφού $I'(u_n) \to 0$ τότε

$$< I'(u_n), v) >= \int_\Omega \nabla u_n \nabla v dx - \int_\Omega f\left(x, u_n\right) v dx \to 0, \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Αλλά $H_0^1(\Omega) \underset{\sigma\upsilon\mu\pi}{\subset} L^p(\Omega)$, οπότε η (u_n) ε᾽χει μία υπακολουθία (που τη συμβολίζουμε και αυτή (u_n)) ώστε $u_n \to u_0$ *στον* $L^p(\Omega)$. Λόγω του ότι ο τελεστής Nemitski $N_f : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ *με* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ και $N_f(u)=f(x,u)$ είναι συνεχής, θα είναι $f(x,u_n) \to f(x,u_0)$ *στον* $L^q(\Omega)$. Άρα

$\int_\Omega f(x,u_n)vdx \to \int_\Omega f(x,u_0)vdx,\ \forall v \in H_0^1(\Omega)$ αφού

$$\left|\int_\Omega f(x,u_n)vdx - \int_\Omega f(x,u_0)vdx\right| \le \int |f(x,u_n)-f(x,u_0)||v|dx$$

$$\overset{Holder}{\le} \|f(x,u_n)-f(x,u_0)\|_q \|v\|_p \to 0$$

Άρα αφού $\int_\Omega \nabla u_n \nabla v dx \to \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$ και $\int_\Omega f(x,u_n)vdx \to \int_\Omega f(x,u_0)vdx$ θα ισχύει $\int_\Omega \nabla u_0 \nabla v dx = \int_\Omega f(x,u_0)vdx,\ \forall v \in H_0^1(\Omega)$

Θέτοντας $v=u_0$ έχουμε

$$\|u_0\|^2 = \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx = \int_\Omega f(x,u_0)u_0 dx \qquad 3.2.15$$

Από την $\int_\Omega \nabla u_n \nabla v dx \to \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$ για $v=u_n$ έχουμε

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla u_n dx \to \int_\Omega f(x,u_n)u_n dx$$

και αφού η $f(x,u_n)$ συγκλίνει ισχυρά ενώ η (u_n) ασθενώς, προκύπτει για $n \to \infty$,

$$lim\|u_n\|^2 = \int_\Omega f(x,u_0)u_0 dx \qquad 3.2.16$$

Από 3.2.15 και 3.2.16 έχουμε

$lim\|u_n\|^2 = \|u_0\|^2 \Rightarrow \|u_n\| \to \|u_0\|$.

□

Εναλλακτικός τρόπος για το 2ο Βήμα [R]:

$$D : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$$

η δυική απεικόνιση μεταξύ του $H_0^1(\Omega)$ και του δυικού του χώρου $H^{-1}(\Omega)$. Τότε για $u,v \in H_0^1(\Omega)$ είναι :

$$\langle Du,v\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

Ισχύει

$$\langle I'(u),v\rangle = \left.\frac{dI(u+tv)}{dt}\right|_{t=0} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_\Omega f \cdot v dx \Rightarrow$$

$$< I'(u),v > = < Du,v > - \int_\Omega f v dx$$

$$Και < \Phi'(u),v > = \left.\frac{dJ(u+tv)}{dt}\right|_{t=0} = \int_\Omega f v dx$$

$$< I'(u), v) >=< Du, v > - < \Phi'(u), v) > \Rightarrow$$

$$I'(u) = Du - \Phi'(u) \Rightarrow$$

$$D^{-1}I'(u) = u - D^{-1}\Phi'(u)$$

Από την συνέχεια της D^{-1} προκύπτει

$$u_n = D^{-1}I'(u_n) + D^{-1}\Phi'(u_n) \to \lim_{n\to\infty} \left(D^{-1}\Phi'(u_n)\right)$$

Αλλά η (u_n) είναι φραγμένη και η Φ' είναι συμπαγής, οπότε η $\Phi'(u_n)$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, άρα και η (u_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

□

3.2.17 ***Θεώρημα*** *Αν η f του προβλήματος ικανοποιεί τις υποθέσεις (f_1)-(f_3),(AR) τότε το πρόβλημα 3.2.1 έχει μη τετριμμένη ασθενή λύση.*

Απόδειξη Προφανές από τα προηγούμενα

Είναι φανερό ότι η συνθήκη *(AR)* είναι απαραίτητη για την απόδειξη της υπόθεσης (Iiii) του θεωρήματος MP, (γεωμετρία του MP), κυρίως όμως για την απόδειξη της συνθήκης *(PS)* για το *I* και ειδικότερα για την απόδειξη της ύπαρξης φράγματος μιάς ακολουθίας *(PS).*

3.2.18 **Πρόταση** *Αν η υπόθεση (f_1) στο πρόβλημα 3.2.1, αντικατασταθεί με την*

(f_1') : $f(x,s)$ τοπικά Lipschitz στο $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$

τότε κάθε ασθενής λύση του προβλήματος στον $H_0^1(\Omega)$ είναι ισχυρή. (Regularity of solutions)

Απόδειξη (βλ[Ag])

3.2.19 ***Πρόταση*** *Το πρόβλημα 3.2.1 με τις υποθέσεις (f_1)-(f_4) και επιπλέον με την υπόθεση (f_1'), έχει μία θετική και μία αρνητική ισχυρή λύση.*

Απόδειξη (βλ[AR])

Κεφάλαιο 4 Σύγχρονες Προσεγγίσεις στην συνθήκη AR

Στο παρών κεφάλαιο, θα εξετάσουμε τις προσπάθειες που έχουν γίνει για την άρση της συνθήκης (AR) για το μη γραμμικό πρόβλημα $-\Delta_p u = \lambda f(x,u)$, επικεντρώνοντας την προσοχή μας στις εργασίες των Miyagaki-Souto και Li-Yang

4.1 Το βασικό πρόβλημα

Εξετάζουμε την ύπαρξη μίας μη τετριμμένης λύσης για το ακόλουθο μη γραμμικό πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda f(x,u), x \in \Omega \\ u = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1.1}$$

όπου $p > 1,\ \lambda \in \mathbb{R}$ και $\Delta_p = div\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right)$ είναι ο τελεστής p-Laplace. Λέμε ότι η $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ είναι ασθενής λύση του 4.1.1 αν-ν είναι λύση της εξίσωσης :

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx = \lambda \int_\Omega f(x,u) v dx,\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{4.1.2}$$

Οι λύσεις της 4.1.2 είναι κρίσιμα σημεία του συναρτησιακού

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \lambda \int_\Omega F(x,u) dx \text{ ή}$$
$$I_\lambda(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p - \lambda \int_\Omega F(x,u) dx \tag{4.1.3}$$

όπου $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ και

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,t) dt \tag{4.1.4}$$

Παρατηρούμε ότι το I_λ είναι παραγωγίσιμο κατά Frechet με

$$< I_\lambda(u), v >= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega f(x,u) v dx \tag{4.1.5}$$

Οι συνθήκες

(f_1) $f \in C^0(\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R})$ *και* $f(x,0) = 0$

υπάρχουν α,β>0 ώστε να ισχύει

(f_2)
$$|f(x,s)| \le a + \beta |s|^{q-1}$$
για $x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R}$ και $\begin{cases} q \in [1, \frac{np}{n-p}),\ \text{αν } 1 < p < n \\ q > 1,\ \text{αν } p \ge n \end{cases}$

(f_3) $\lim\limits_{s \to 0} \dfrac{f(x,u)}{|s|^{p-2} s} = 0$, ομοιόμορφα σ.π. στον Ω

(f_4) $F(x,s) \ge c_1 |s|^{p+\theta} - c_2,\ \forall (x,s) \in (\Omega \times \mathbb{R})$

μαζί με την

(AR) $0 \le (p+\mu) F(x,s) \le s f(x,s),\ \mu > 0,\ |s| \ge M > 0,\ x \in \Omega$, ,

εξασφαλίζουν την γεωμετρία ΜΡ κοντά στο $u = 0$ αλλά και ότι το I_λ ικανοποιεί την συνθήκη *(PS)*. Πιο συγκεκριμένα η (AR) εξασφαλίζει ότι κάθε (PS) ακολουθία του I_λ είναι φραγμένη και η συνθήκη (f_4) (η οποία επίσης μπορεί να προκύξει από την (AR)) εξασφαλίζει ότι κάθε φραγμένη ακολουθία του I_λ συγκλίνει στον $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του ΜΡ, άρα υπάρχει κρίσιμο σημείο του I_λ δηλ ασθενής λύση του 4.1.1 στον $W_0^{1,p}(\Omega)$.

4.2 Σύντομο ιστορικό

Από τις πρώτες δημοσιεύσεις των Palais [P] το 1968 και Ambrosetti-Rabinowitz [AR] το 1973, έχει υπάρξει ενδελεχής μελέτη προβλημάτων σχετικών με το 4.1.1 και αρκετά αποτελέσματα.

Ενδεικτικά :

Στο [Ce] (1978) ο Cerami θεμελίωσε θεωρία κρίσιμων σημείων όχι με την συνθήκη (PS), αλλά με την Cerami (C) (βλέπε 3.1.6).
Στο [CL] (1979) οι Casro, Lazer μελέτησαν τις πολλαπλές λύσεις ενός προβλήματος Dirichlet.
Στο [BBF] (1983) οι Bartolo, Benci, Fortunato μελέτησαν μη γραμμικά προβλήματα με ισχυρό συντονισμό στο άπειρο.
Στο [Z] (1998) ο Zhou μελέτησε ημιγραμμικά ελλειπτικά προβλήματα τα οποία έχουν σχεδόν γραμμική συμπεριφορά στο άπειρο.
Στο [J] (1999) ο Jeanjean μελέτησε προβλήματα τύπου Landesman_Lazer στο $\mathbb{R}^n$.

Στο [CM]$_1$ (1994) οι **Costa-Magalhães** μελέτησαν το 4.1.1 για $\lambda = 1$ *και* $p = 2$, αντικαθιστώντας την συνθήκη (AR) με τις

- $\lim\limits_{|t|\to\infty} \dfrac{F(x,t)}{|t|^q} \le b < +\infty$, ομοιόμορφα στο $x \in \Omega$ $\quad ((F_1)_q)$
- $\lim\limits_{|t|\to\infty} \dfrac{f(x,t)t - 2F(x,t)}{|t|^\mu} \ge a > 0$, ομοιόμορφα στο $x \in \Omega$ ή την $\quad \left((F_2^+)_\mu\right)$
- $\lim\limits_{|t|\to\infty} \dfrac{f(x,t)t - 2F(x,t)}{|t|^\mu} \le -a < 0$, ομοιόμορφα στο $x \in \Omega$ $\quad \left((F_2^-)_\mu\right)$

Οι ίδιοι στο [CM]$_2$ (1995) για $\lambda > 0$ *και* $p > 1$, αντικατέστησαν την συνθήκη (AR) με την $((F_1)_q)$ και με την

- $\lim\limits_{|t|\to\infty} \dfrac{f(x,t)t - pF(x,t)}{|t|^\mu} \ge a > 0$, ομοιόμορφα στο $x \in \Omega$ ή την $\quad \left((F_2^+)_\mu\right)$
- $\lim\limits_{|t|\to\infty} \dfrac{f(x,t)t - pF(x,t)}{|t|^\mu} \le -a < 0$, ομοιόμορφα στο $x \in \Omega$ $\quad \left((F_2^-)_\mu\right)$

Στο [WZ] (2003) οι **Willem-Zou** για $p = 2$, αντικατέστησαν την (AR) με τις συνθήκες :

- η $H(x,s) = sf(x,s) - 2F(x,s)$ είναι αύξουσα ως προς $s \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \Omega$
- $sf(x,s) \ge 0,\ \forall s \in \mathbb{R},\ \forall x \in \Omega$
- υπάρχουν $s_0 > 0, \mu > 2, c_0 > 0$ *ώστε* : $sf(x,s) \ge c_0 |s|^\mu$, $s \in \mathbb{R}$, $|s| \ge s_0$, $\forall x \in \Omega$

Στο [SZ] (2005) οι **Schechter-Zou**, έδειξαν ότι υπάρχει λύση του προβλήματος για p=2, λ=1, αν η f ικανοποιεί αντί της (AR), τη συνθήκη :

- $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{F(x,t)}{t^2} = +\infty$, ομοιόμορφα στο $x \in \Omega$, είτε
- $\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{F(x,t)}{t^2} = +\infty$, ομοιόμορφα στο $x \in \Omega$. $\quad$ 4.2.1

Επίσης έδειξαν ότι για $\lambda > 0$ υπάρχει μη τετριμμένη λύση του προβλήματος, αν η f ικανοποιεί τις (f_1),(f_2), την 4.2.1 και η συνάρτηση

$$H(x,s) = sf(x,s) - 2F(x,s)$$

είναι κυρτή ως προς s, ή υπάρχουν σταθερές $c, \mu > 0,\ r \ge 0$ ώστε

$$\mu F(x,s) - sf(x,s) \le c\left(1+s^2\right),\ \ |s| \ge r$$

Στο [LZ]$_3$ (2003) οι **Li-Zhou** μελέτησαν το πρόβλημα για $\lambda = 1,\ p > 1$, έδειξαν ότι υπάρχει μη τετριμμένη λύση αν η *f* ικανοποιεί τις συνθήκες

- $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{f(x,t)}{t^{p-1}} = +\infty$, ομοιόμορφα στο $x \in \Omega$
- $\dfrac{f(x,t)}{|t|^{p-2}\, t}$ είναι αύξουσα για $t \ge 0, x \in \Omega$
- $f(x,t) = 0$ για $t \le 0$, $f(x,t) \ge 0$ για $t \ge 0, x \in \Omega$
- $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x,u)}{|t|^{p-2}\, t} = P(x)$ ομοιόμορφα στο $x \in \Omega$, όπου $P(x) \in L^\infty(\Omega)$,

$$||P||_\infty < \lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx}{\int_\Omega |u|^p\, dx}$$

4.3 Η προσέγγιση των Miyagaki-Souto

Στο [MS] (2008) οι **Miyagaki-Souto** ασχολήθηκαν με τη περίπτωση $p = 2,\ \lambda > 0$.

Το πρόβλημα 4.1.1, τρέπεται στο

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(x,u), x \in \Omega \\ u = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \qquad 4.3.1$$

Λέμε ότι η $u \in H_0^1(\Omega)$ είναι ασθενής λύση του 4.3.1 αν είναι λύση της

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \lambda \int_\Omega f(x,u) v dx,\ \forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad 4.3.2$$

Οι λύσεις της 4.3.2 είναι κρίσιμα σημεία του συναρτησιακού

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx \qquad 4.3.3$$

όπου $u \in H_0^1(\Omega)$ και

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt \qquad 4.3.4$$

Οι Miyagaki-Souto διατήρησαν για την f τις υποθέσεις (f_1), (f_2) της παραγράφου 4.1, οι οποίες για $p = 2$ γράφονται :

(f_1) $f(x,0)=0$ και $\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{f(x,s)}{s}=0$, ομοιόμορφα σ.π. στον Ω

(f_2) υπάρχουν $a,\beta>0$ ώστε $|f(x,s)|\le a+\beta|s|^q$, $x\in\Omega$, $s\in\mathbb{R}$, $q\in\left[0,\dfrac{n+2}{n-2}\right)$

Από την (AR) για p=2 μπορεί να προκύψει η συνθήκη :

(f_3)

$$F(x,s)\ge c_1|s|^\theta - c_2,\ x\in\Omega \text{ για σταθερές } c_1,c_2>0,\ \theta>2,\ s\in\mathbb{R}$$

αποό την οποία προκύπτει η (f_3') :

(f_3') $\lim\limits_{|s|\to\infty}\dfrac{F(x,s)}{s^2}=+\infty$, ομοιόμορφα στο $x\in\Omega$ (F υπεργραμμική στο ∞)

και προσέθεσαν την (f_4) (αντί της (AR)) :

(f_4) υπάρχει $s_0>0$ ώστε η $\dfrac{f(x,s)}{s}$ να είναι αύξουσα για $s\ge s_0$ και φθίνουσα για $s\le -s_0$, $x\in\Omega$.

και έδειξαν ότι υπάρχει λύση για κάθε $\lambda>0$.

Παρατήρηση 1: Η υπόθεση (f_4) είναι ισοδύναμη με την συνθήκη

(f_5) Η συνάρτηση $H(x,s):=sf(x,s)-2F(x,s)$ είναι **αύξουσα** για $s\ge s_0$ και **φθίνουσα** για $s\le -s_0$, $\forall x\in\Omega$.

Παρατήρηση 2: Από τη συνθήκη (f_5) προκύπτει η ασθενέστερη συνθήκη

(f_6) *υπάρχει* $C_*>0$ *ώστε* $H(x,t)\le H(x,s)+C_*$ για $0<t<s$ *ή* $s<t<0, x\in\Omega$.

Στην (f_6) καταλήγουμε και αν υποθέσουμε ότι η Η είναι μονότονη για $s<0$ και $s>0$ ή ότι είναι κυρτή ως προς $s\in\mathbb{R}$.
Το επόμενο θεώρημα είναι το βασικό θεώρημα της μελέτης :

4.3.5 ***Θεώρημα*** *Το πρόβλημα 4.3.1 με τις συνθήκες* ***(f_1),(f_2), (f_3'),(f_4)*** *έχει μη τετριμμένη λύση για κάθε* $\lambda>0$.

Παρατήρηση 4**:** Η εργασία των Miyagaki-Souto γενικεύει τα συμπεράσματα στα οποία κατέληξαν οι [CM]$_2$, [Ce],[WZ], κυρίως αποτελεί επέκταση του [SZ] (η (f_3') προτάθηκε από τους [SZ] και ήταν η πρώτη εργασία, που επεξεργάστηκε μεταβολικά ελλειπτικά προβλήματα και στην οποία δεν έγινε καθόλου χρήση της AR.)

Η προσέγγιση του ζητήματος μοιάζει με την προσέγγιση του [J]. Η κύρια ιδέα είναι να δειχθεί ότι για κάθε $\lambda > 0$ υπάρχει μία ακολουθία $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ και μία ακολουθία $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H_0^1(\Omega)$ με

$$\lambda_n \to \lambda, \qquad c_{\lambda_n} \to c_\lambda, \qquad I_{\lambda_n}(u_n) = c_{\lambda_n}, \qquad I'_{\lambda_n}(u_n) = 0$$

και η (u_n) είναι φραγμένη στον $H_0^1(\Omega)$. Αρκεί τότε να δειχθεί ότι αν $u_n \xrightarrow{w} u$, τότε το u είναι κρίσιμο σημείο του I_λ με $I_\lambda(u) = c_\lambda$. Για να γίνει αυτό εφικτό, πρέπει να δειχθεί ότι αν η συνάρτηση του $c(\lambda)=c_\lambda$ είναι παραγωγίσιμη στο μ, τότε υπάρχει ακολουθία $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H_0^1(\Omega)$ με

$$I_\mu(u_n) \to c_\mu, \qquad I'_\mu(u_n) \to 0, \qquad \|u_n\|^2 \le C_0,$$

όπου $C_0 = C_0(\mu)$.

Για την απόδειξη του θεωρήματος θα απαιτηθούν τα παρακάτω λήμματα.

4.3.6 ***Λήμμα***

α) Το συναρτησιακό I_λ δεν είναι κάτω φραγμένο.
β) $u = 0$ είναι τοπικό ελάχιστο για το I_λ.
γ) Ισχύει η (Iii) του (MP) δηλ υπάρχουν σταθεροί $\rho, a > 0$ ώστε $I(u) \ge a$ για κάθε $u \in B_\rho$

Απόδειξη

α) Από την (f_3') $\left(\lim_{|s|\to\infty} \frac{F(x,s)}{s^2} = +\infty, \text{ ομοιόμορφα στο } x \in \Omega\right)$, τότε για κάθε $M > 0$, υπάρχει ένα $C_M > 0$ ώστε

$$F(x,s) \ge Ms^2 - C_M, x \in \Omega, s > 0. \tag{4.3.7}$$

Έστω $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi > 0$, $t \in \mathbb{R}$
Από την 4.3.3 έχουμε

$$I_\lambda(t\varphi) = \frac{1}{2}\|t\varphi\|^2 - \lambda \int_\Omega F(x,t\varphi)dx,$$

Λόγω της 4.3.7, θα είναι

$$\begin{aligned} I_\lambda(t\varphi) &\le \frac{t^2}{2}\|\varphi\|^2 - \lambda M \int_\Omega (t\varphi)^2 dx + \lambda C_M \int_\Omega dx \\ &= \frac{t^2}{2}\|\varphi\|^2 - \lambda M t^2 \int_\Omega \varphi^2 dx + \lambda C_M \cdot \mu(\Omega) \\ &= t^2\left[\frac{1}{2}\|\varphi\|^2 - \lambda M \|\varphi\|_2^2\right] + C \cdot \mu(\Omega) \end{aligned}$$

Από την ανισότητα Poincare $\left(\|u\|_2^2 \le c_1 \|u\|^2\right)$, προκύπτει :

$$I_\lambda(t\varphi) \le t^2 \|\varphi\|^2 \left[\frac{1}{2} - \lambda M c_1\right] + C \cdot \mu(\Omega)$$

Για $t \to +\infty$ είναι

$$\lim_{t\to+\infty} I_\lambda(t\varphi) = -\infty$$

αφού $\frac{1}{2} - \lambda M c_1 < 0$ για Μ μεγάλο. Άρα υπάρχει $u_o \in H_0^1(\Omega)$ ώστε

$$I_\lambda(u_o) < 0$$

β) Από την (f_1) :

$$\ell im_{s \to 0} \frac{f(x,s)}{s} = 0 \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ τ.ω. } \left|\frac{f(x,s)}{s}\right| < \varepsilon,\ s \in \mathbb{R},\ |s| \le \delta \ \Rightarrow$$

$$|f(x,s)| < \varepsilon s$$

Από την (f_2) :

$$|f(x,s)| \le a + \beta\, |s|^q,\ s \in \mathbb{R}$$

Από τις (f_1)(f_2)$\Rightarrow$ $|f(x,s)| \le \varepsilon s + \beta\, |s|^q$

Ολοκληρώνοντας

$$F(x,s) \le \frac{\varepsilon s^2}{2} + \frac{\beta}{q+1}|s|^{q+1} = \frac{\varepsilon s^2}{2} + c_\varepsilon |s|^{q+1},\ x \in \Omega, s \in \mathbb{R}$$

Άρα

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx$$

$$\ge \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda \int_\Omega \left[\frac{\varepsilon u^2}{2} + c_\varepsilon |u|^{q+1}\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda \left[\frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega u^2 dx + c_\varepsilon \int_\Omega |u|^{q+1} dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda \left[\frac{\varepsilon}{2}\|u\|_2^2 + c_\varepsilon \int_\Omega |u|^{q+1} dx\right]$$

Ισχύει ότι :

$$\int_\Omega |u|^{q+1} dx \le \left(\int_\Omega |u|^q\right)^{\frac{q+1}{q}} \left(\int_\Omega dx\right)^{-\frac{1}{q}} = \|u\|_q^{q+1} \cdot |\Omega| \Rightarrow$$

$$\int_\Omega |u|^{q+1} dx \le \|u\|_q^{q+1} \cdot |\Omega| \qquad 4.3.8$$

Από την προηγούμενη σχέση και την ανισότητα Poincare, είναι :

$$I_\lambda(u) \ge \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda\left[\frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2 + c_\varepsilon \|u\|_q^{q+1} \cdot |\Omega|^{-\frac{1}{q}}\right]$$

$$= \|u\|^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{\lambda \varepsilon c_1}{2}\right] - k_2 \|u\|_q^{q+1}$$

$$I_\lambda(u) \ge \|u\|^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{\lambda \varepsilon}{2\lambda_1}\right] - k_2 \|u\|_q^{q+1}$$

$$= k_1 \|u\|^2 - k_2 \|u\|_q^{q+1}$$

όπου λ_1 η 1^η ιδιοτιμή της Δ.

Αφού $H_0^1(\Omega) \underset{\sigma\upsilon\mu\pi}{\subset} L^q(\Omega) \Rightarrow \|u\|_q \le c\|u\|$

Άρα

$$I_\lambda(u) \geq k_1 \|u\|^2 - k_3 \|u\|^{q+1}$$

Για $\|u\| = r$, για r αρκετά μικρό, ισχύει

$$k_1 \|u\|^2 - k_3 \|u\|^{q+1} \geq a > 0 .$$

Άρα υπάρχει περιοχή του λ, έστω (λ_o, μ_o) ώστε $I_\lambda(u) \geq 0$,
δηλ $I_\lambda(0) = 0 \leq I_\lambda(u) \Rightarrow u = 0$ θέση τοπικού ελαχίστου.

γ) Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι για $\varepsilon > 0$ με $\frac{1}{2} - \frac{\mu_0 \varepsilon}{2\lambda_1} \geq \frac{1}{4}$,

$$I_\lambda(u) \geq \frac{1}{4}\|u\|^2 - k_2 \|u\|^{q+1} , \ \forall u \in H_0^1(\Omega), \ 0<\lambda \leq \mu_0, \ k_2 > 0$$

Άρα υπάρχουν $r > 0$ και $a > 0$ ώστε

$$I_\lambda(u) \geq a, \ \mu\varepsilon \ \|u\| = r, \ \forall \lambda \leq \mu_0$$

□

4.3.9 ***Πρόταση*** *Οι συναρτήσεις* $I_\lambda, \frac{I_\lambda}{\lambda}$ *είναι φθίνουσες ως προς λ.*

Απόδειξη : Έστω $u \in H_0^1(\Omega)$ και $\lambda \in [\lambda_o, \mu_o]$. Από την 4.3.7 είναι

$$F(x,u_o) > 0 \Rightarrow \int_\Omega F(x,u_o) > 0 \Rightarrow$$

$$-\lambda \int_\Omega F(x,u) < -\lambda_o \int_\Omega F(x,u) \Rightarrow$$

$$I_\lambda(u_o) < I_\lambda(u_o) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_\lambda \text{ γνησίως φθίνουσα στο } [\lambda_o, \mu_o].$$

Ομοίως $\frac{I_\lambda(u_o)}{\lambda} < \frac{I_\lambda(u_o)}{\lambda_o} \leq \frac{I_{\lambda_o}(u_o)}{\lambda_o} \Rightarrow \frac{I_\lambda}{\lambda}$ γνησίως φθίνουσα στο $[\lambda_o, \mu_o]$.

□

4.3.10 ***Πόρισμα*** Αν $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ *με* $I_{\lambda_0}(u_0) < 0$, τότε

$$\frac{I_\lambda(u_0)}{\lambda} \overset{\lambda \geq \lambda_0}{<} \frac{I_\lambda(u_0)}{\lambda_0} \overset{\frac{I_\lambda}{\lambda}\downarrow}{\leq} \frac{I_{\lambda_0}(u_0)}{\lambda_0} < 0 \Rightarrow$$

$$I_\lambda(u_0) < 0, \forall \lambda \in [\lambda_0, \mu_0]$$

4.3.11 ***Ορισμός*** *Ορίζουμε το σύνολο*

$$\Gamma = \{\gamma \in [0,1] \to H_0^1(\Omega) / \ \gamma \ \text{συνεχής}, \ \gamma(0) = 0, \ \gamma(1) = u_o\}$$

και τον αριθμό

$$c_\lambda = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_\lambda(\gamma(t))$$

4.3.12 ***Πρόταση*** *Ισχύουν τα εξης:*

α) Η απεικόνιση $c : [\lambda_o, \mu_o] \to \mathbb{R}_+$ *με* $c(\lambda) = c_\lambda$ *είναι φθίνουσα.*

β) Η συνάρτηση $\frac{c_\lambda}{\lambda}$ είναι φθίνουσα.

γ) Η συνάρτηση $\frac{c_\lambda}{\lambda}$ είναι κάτω ημισυνεχής.

Απόδειξη :

α) όμοια με την πρόταση 4.3.9

β) όμοια με την πρόταση 4.3.9

γ) Έστω $\mu \in [\lambda_o, \mu_o]$, $\varepsilon > 0$ και $\gamma_1 \in \Gamma$ έτσι ώστε

$$c(\mu) \le \max_{t\in[0,1]} I_\mu(\gamma_1(t)) \le c(\mu) + \frac{\varepsilon\mu}{4}$$

Έστω $R_o = \max_{t\in[0,1]} \int_\Omega F(x,\gamma_1(t))dx$.

Για $\lambda > \frac{\mu}{2}$ και $\frac{1}{\lambda} < \frac{1}{\mu} + \frac{\varepsilon}{2\mu}$ είναι

$$\begin{aligned} I_\lambda(\gamma_1(t)) &= [I_\lambda(\gamma_1(t)) - I_\mu(\gamma_1(t))] + I_\mu(\gamma_1(t)) = \\ &= I_\mu(\gamma_1(t)) + (\mu-\lambda)\int_\Omega F(x,\gamma_1(t))dx \\ &\le R_o\,|\,\lambda-\mu\,| + c_\mu + \frac{\varepsilon\mu}{4},\ \forall t \in [0,1] \end{aligned}$$

Για $|\mu-\lambda| < \frac{\varepsilon\mu}{4R_o}$ είναι $I_\lambda(\gamma_1(t)) \le c_\mu + \frac{\varepsilon\mu}{2} \Rightarrow \max_{t\in[0,1]} I_\lambda(\gamma_1(t)) \le c_\mu + \frac{\varepsilon\mu}{2} \Rightarrow$

$$c_\lambda \le c_\mu + \frac{\varepsilon\mu}{2}$$

Αν $\lambda < \mu$ θα έχουμε $\frac{c_\mu}{\mu} - \varepsilon < \frac{c_\mu}{\mu} \overset{(a)}{\le} \frac{c_\lambda}{\lambda} \le \frac{c_\mu}{\lambda} + \frac{\varepsilon}{2} \le \frac{c_\mu}{\mu} + \varepsilon$

Για ακολουθία $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ με $\lambda_n \to \mu$ έχουμε :

$$\frac{c_\mu}{\mu} - \varepsilon \le \frac{c_{\lambda_n}}{\lambda_n} \le \frac{c_\mu}{\mu} + \varepsilon \Rightarrow$$

$$\frac{c_\mu}{\mu} - \varepsilon \le \inf \frac{c_{\lambda_n}}{\lambda_n} \le \frac{c_\mu}{\mu} + \varepsilon \Rightarrow$$

$$\left| \inf \frac{c_{\lambda_n}}{\lambda_n} - \frac{c_\mu}{\mu} \right| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\liminf_{\lambda_n\to\mu} \frac{c_{\lambda_n}}{\lambda_n} = \frac{c_\mu}{\mu}.$$

Άρα η $\frac{c_\lambda}{\lambda}$ είναι κάτω ημισυνεχής.

□

4.3.13 **Λήμμα** *Υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε $\|I'_\mu(u) - I'_\lambda(u)\|_* \le c(1+\|u\|)|\mu-\lambda|$*

Απόδειξη : Υψώνοντας και τα δύο μέλη της συνθήκης (f_2) στη δύναμη $\frac{2n}{n+2}$

$$|f(x,s)|^{\frac{2n}{n+2}} \le \left(a+\beta|s|^q\right)^{\frac{2n}{n+2}} \le 2^{\frac{2n}{n+2}}\left(a^{\frac{2n}{n+2}} + \beta^{\frac{2n}{n+2}}|s|^{\frac{2nq}{n+2}}\right) = c_1 + c_2|s|^{\frac{2nq}{n+2}} \overset{\int_\Omega}{\Rightarrow}$$

$$\int_\Omega |f(x,s)|^{\frac{2n}{n+2}} dx \le c_1|\Omega| + c_2\int_\Omega |u|^{\frac{2nq}{n+2}} dx \overset{q<\frac{n+2}{n-2}}{\le} D_1 + D_2\int_\Omega |u|^{\frac{2n}{n-2}} dx .$$

Αν θέσουμε $r_1 = \dfrac{2n}{n+2}$, $r_2 = \dfrac{2n}{n-2}$, η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$|f(x,s)|^{\frac{2n}{n+2}} \le D_1 + D_2\|u\|_{r_2}^{r_2}$$

και ισχύει ότι $H_0^1(\Omega) \underset{\sigma\upsilon\mu\pi}{\subset} L^{r_2}(\Omega)$. Άρα υπάρχει $c_3 > 0$ ώστε

$$\|u\|_{r_2} \le c_3\|u\| \qquad 4.3.14$$

Επίσης αφού $r_1 < r_2 \Rightarrow L^{r_2}(\Omega) \underset{\sigma\upsilon\mu\pi}{\subset} L^{r_1}(\Omega) \Rightarrow \exists c_4 > 0$ έτσι ώστε :

$$\|u\|_{r_1} \le c_4\|u\|_{r_2} \qquad 4.3.15$$

Άρα

$$|f(x,s)|^{\frac{2n}{n+2}} \le D_1 + d_2\|u\|^{r_2} = D_1 + d_2\|u\|^{\frac{2n}{n-2}} \qquad 4.3.16$$

Έστω $v \in H_0^1(\Omega)$ με $\|v\| \le 1$. Τότε

$$I'_\mu(u)v - I'_\lambda(u)v =$$

$$\int_\Omega \nabla u\nabla v dx - \mu\int_\Omega f(x,u)v dx - \int_\Omega \nabla u\nabla v dx + \lambda\int_\Omega f(x,u)v dx =$$

$$= (\lambda-\mu)\int_\Omega f(x,u)v dx \Rightarrow$$

$$|I'_\mu(u)v - I'_\lambda(u)v| = |\lambda-\mu|\left|\int_\Omega f(x,u)v dx\right|$$

$$\overset{Holder}{\le} |\lambda-\mu|\left[\int_\Omega |f|^{\frac{2n}{n+2}} dx\right]^{\frac{n+2}{2n}}\left[\int_\Omega |v|^{\frac{2n}{n-2}} dx\right]^{\frac{n-2}{2n}}$$

Λόγω των 4.3.15 και 4.3.16 η τελευταία πρόταση γράφεται :

$$|I'_\mu(u)v - I'_\lambda(u)v| \le |\lambda-\mu|\left[D_1 + d_2\|u\|^{\frac{2n}{n-2}}\right]^{\frac{n+2}{2n}}\|v\|_{r_2}$$

$$\le |\lambda-\mu|\left[\tilde{D}_1 + \tilde{D}_2\|u\|^{\frac{n+2}{n-2}}\right]\|v\|$$

$$\le |\lambda-\mu|\left[\tilde{D}_1 + \tilde{D}_2\|u\|^{\frac{n+2}{n-2}}\right]$$

Για μεγάλα n ισχύει : $|I'_\mu(u)v - I'_\lambda(u)v| \le |\lambda-\mu|\left[\tilde{D}_1 + \tilde{D}_2\|u\|\right]$ και αφού

$$\|I'_\mu(u) - I'_\lambda(u)\|_* = sup < I_\mu(u) - I_\lambda(u), v > \Rightarrow$$

Υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε

$$\|I'_\mu(u) - I'_\lambda(u)\|_* \le c\left(1+\|u\|\right)|\mu-\lambda|$$

4.3.17 ***Λήμμα*** *Αν το c_λ είναι παραγωγίσιμο στο $\mu \in [\lambda_o, \mu_o]$, τότε υπάρχει ακολουθία $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H_0^1(\Omega)$ τέτοια ώστε :*

$$I_\mu(u_n) \xrightarrow{n\to\infty} c_\mu ,$$
$$I'_\mu(u_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0 ,$$
$$\|u_n\|^2 < c_0 ,$$

όπου $C_0 = 2c_\mu + 2m\left(2 - c'(\mu)\right) + 1$.

Απόδειξη : Έστω ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα του Λήμματος. Τότε αν $N_\delta = \left\{u \in H_0^1(\Omega),\ \|u\|^2 \le c_1,\ I_\mu(u) - c_\mu \le \delta\right\}$, έστω ότι ισχύει $\|I'_\mu(u)\| \ge 2\delta, \forall u \in N_\delta$.

- $$I_\mu(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \mu\int_\Omega F(x,u)dx \Rightarrow$$

$$\left|\int_\Omega F(x,u)dx\right| = \frac{1}{2\mu}\left|2I_\mu(u) - \|u\|^2\right| \le c_2, \forall u \in N_\delta . \qquad 4.3.18$$

- Έστω pseudo-gradient vector field (βλέπε [SM] Appendix B, [W] ,[R] κ.α.) $W\ :\ N_\delta \to H_0^1(\Omega)$ για το I_μ στο N_δ τέτοιο ώστε να ισχύει :
  i) $\|W\| \le 1$
  ii) W τοπικά Lipschitz
  iii) $I'_\mu(u)\cdot\left(W(u)\right) \le -\delta, \forall u \in N_\delta$
- Έστω ακολουθία $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset [\lambda_o, \mu_o]$ *με* $\lambda_n \to \mu,\ \mu < \lambda_{n+1} < \lambda_n$ *με* $|\lambda_n - \mu| \le \frac{\delta}{4}$ και $\left|c_\mu - c_{\lambda_n}\right| \le \frac{\delta}{4}$.

Από τον ορισμό του $c_\mu = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I_\mu(\gamma(t))$ θα υπάρχει $\gamma_n \in \Gamma$ έτσι ώστε $\forall \varepsilon > 0$ να ισχύει

$$\max_{t\in[0,1]} I_\mu(\gamma_n(t)) \le c_\mu + \lambda_n - \mu \qquad 4.3.19$$

- Έστω το σύνολο $A_n = \left\{t \in [0,1] : I_{\lambda_n}(\gamma_n(t)) > c_{\lambda_n} - (\lambda_n - \mu)\right\}$. Από τον ορισμό του c_{λ_n} το $A_n \ne \varnothing$.
- Έστω $t_o \in A_n$ *και* $v = \gamma_n(t_o)$ *δηλ* $v \in \gamma_n(A_n)$

Τότε

$$I_{\lambda_n}(\gamma_n(t_o)) > c_{\lambda_n} - (\lambda_n - \mu) \Rightarrow$$
$$I_{\lambda_n}(v) > c_{\lambda_n} - (\lambda_n - \mu) \qquad 4.3.20$$

Ισχύει $\int_\Omega F(x,v)dx = \frac{\left|I_\mu(v) - I_{\lambda_n}(v)\right|}{\lambda_n - \mu}$. Λόγω της 4.3.20 είναι :

$\int_\Omega F(x,v)dx \le \frac{c_\mu + \lambda_n - \mu - c_{\lambda_n} + \lambda_n - \mu}{\lambda_n - \mu} = \frac{c_\mu - c_{\lambda_n}}{\lambda_n - \mu} + 2$. Η c_μ είναι παραγωγίσιμη στο μ, οπότε με ανάπτυγμα Taylor $\Rightarrow$

$$\int_{\Omega} F(x,v)\,dx \le -c'_{\mu} + 2 + O_n(1) \qquad 4.3.21$$

Επίσης

$$\|v\|^2 = 2I_{\mu}(v) + 2\mu \int_{\Omega} F(x,v)\,dx$$

Λόγω των 4.3.19 και 4.3.21 είναι :

$$\|v\|^2 \le 2\left[c_{\mu} + \lambda_n - \mu\right] + 2\mu\left(-c'_{\mu} + 2 + O_n(1)\right) \le c_1, \text{ για μεγάλο } n.$$

Από την 4.3.19 προκύπτει $I_{\mu}(v) \le c_{\mu} + \lambda_n - \mu$, οπότε και από την 4.3.20 έχουμε:

$$\left|I_{\lambda_n}(v) - I_{\mu}(v)\right| = |\lambda_n - \mu| \int_{\Omega} F(x,v)\,dx \le c_2 |\lambda_n - \mu| \qquad 4.3.22$$

Για μεγάλο n είναι

$$I_{\lambda_n}(v) \to I_{\mu}(v)$$

οπότε από την 4.3.20

$$I_{\mu}(v) > c_{\mu} - \delta$$

και εξ' ορισμού

$$I_{\mu}(v) < c_{\mu} + \delta.$$

Άρα

$$\left|I_{\mu}(v) - c_{\mu}\right| < \delta$$

οπότε $v \in N_{\delta}$ *οπότε* $\gamma_n(A_n) \subset N_{\delta}$.
Άρα για κάθε $t \in A_n \Rightarrow \gamma_n(t) \in N_{\delta}$:

$$\|\gamma_n(t)\| \le c_1, \ \left|I_{\mu}(\gamma_n(t)) - c_{\mu}\right| < \delta.$$

- Από το Λήμμα 4.3.13 και από το ότι $\lambda_n \to \mu$ ομοιόμορφα, έχουμε ότι
$$\left\langle I'_{\lambda_n}(u), \left(W(u)\right)\right\rangle < -\frac{\delta}{2}, \text{ για κάθε } u \in N_{\delta}$$
- Έστω Lipschitz συνεχής συνάρτηση αποκοπής $\eta : H_0^1(\Omega) \to [0,1]$ με
$$\eta(u) = \begin{cases} 0, u \notin N_{\delta} \\ 1, u \in N_{\delta/2} \end{cases}$$
- Έστω $\varphi := \varphi(u,r)$ η λύση της παρακάτω ΣΔΕ-ΠΑΤ (ροή παραγόμενη από το ηW):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial r} = \eta(\varphi) W(\varphi) \\ \varphi(u,0) = 0 \end{cases} \qquad 4.3.23$$

Από το Θ. Picard η παραπάνω ΣΔΕ έχει μοναδική λύση, οπότε έχουμε τα εξής :

i) Αν $u \notin N_{\delta} \Rightarrow \varphi(u,r) = u, \ \forall r \ge 0$

ii) Αν $u \in N_{\delta} \Rightarrow \varphi(u,r) \in N_{\delta}, \ \forall r \ge 0$

iii) Αν $u \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow I'_{\lambda_n}(\varphi(u,r)) \dfrac{\partial \varphi}{\partial r}(u,r) \le 0, \ \forall r \ge 0$

iv) Αν $\varphi(u,r) \in N_{\delta/2}, \ r \in [0, r_o] \Rightarrow I_{\lambda_n}(\varphi(u,r_0)) \le I_{\lambda_n}(u) - \dfrac{\delta r_o}{2}$

Αν $u \in N_{\delta/2} \Rightarrow \varphi(u,r) \in N_{\delta/2}$, οπότε για $r = 1$ από την iv) έχουμε :

$$I_{\lambda_n}\left(\varphi(u,1)\right) \le I_{\lambda_n}\left(u\right) - \frac{\delta}{2} \qquad 4.3.24$$

Αν $e \notin N_{\delta/2} \Rightarrow \varphi(e,r) = e$

Επίσης $\varphi(0,r) = 0,\ \forall r \ge 0$

Άρα

$$\varphi(\gamma,r) \in \Gamma,\ \forall r \ge 0,\ \gamma \in \Gamma \text{, αφού}$$

$$\varphi(\gamma(1),r) = \varphi(u_o,r) = u_o \text{ και } \varphi\left(\gamma\left(0\right),r\right) = \varphi\left(0,r\right) = 0$$

Η $h_n(t) := \varphi\left(\gamma_n(t),1\right)$ είναι συνεχής συνάρτηση (μονοπάτι) του Γ, με :

$$I_{\lambda_n}\left(h_n(t)\right) = I_{\lambda_n}\left(\varphi\left(\gamma_n(t),1\right)\right),$$

Λόγω της 4.3.24 έχουμε :

$$I_{\lambda_n}\left(h_n(t)\right) \le I_{\lambda_n}\left(\gamma_n(t)\right) - \frac{\delta}{2} \qquad 4.3.25$$

Αν $s_n \in \left[0,1\right]$ είναι ο χρόνος στον οποίο το h_n γίνεται μέγιστο, τότε πρέπει

$$s_n \in A_n$$

οπότε

$$c_\mu - O_n\left(1\right) = c_{\lambda_n} \overset{\text{εξ' ορισμού}}{\le} \max_{t\in[0,1]} I_{\lambda_n}\left(h_n(t)\right) = I_{\lambda_n}\left(h_n(s_n)\right)$$

και λόγω της 4.3.24 $\Rightarrow$

$$c_\mu - O_n\left(1\right) \le I_{\lambda_n}\left(\gamma_n(s_n)\right) - \frac{\delta}{2} \qquad 4.3.26$$

Από την 4.3.22 $\Rightarrow$

$$I_{\lambda_n}\left(\gamma_n(s_n)\right) \le I_\mu\left(\gamma_n(s_n)\right) + c_2\left|\lambda_n - \mu\right| \le c_\mu + \left|\lambda_n - \mu\right| + c_2\left|\lambda_n - \mu\right| \Rightarrow$$

$$I_{\lambda_n}\left(\gamma_n(s_n)\right) \le c_\mu + \left(1 + c_2\right)\left|\lambda_n - \mu\right| \qquad 4.3.27$$

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις

$$c_\mu + \frac{\delta}{2} \le I_{\lambda_n}\left(\gamma_n(s_n)\right) \le c_\mu + \left(1 + c_2\right)\left|\lambda_n - \mu\right|$$

Άτοπο.

□

*4.3.28 **Λήμμα** Όπως προκύπτει από το προηγούμενο Λήμμα, το c_λ είναι κρίσιμη τιμή για το I_λ για σχεδόν κάθε λ>0.*

Απόδειξη : Από το προηγούμενο Λήμμα δείχτηκε ότι υπάρχει ακολουθία $\left\{u_n\right\}_{n=1}^\infty \subset H_0^1\left(\Omega\right)$ για την οποία το Ι ικανοποιεί την συνθήκη *(PS)*. Άρα εφαρμόζοντας το Θεώρημα MP, προκύπτει το ζητούμενο για σχεδόν κάθε λ>0.

□

Παρατήρηση Αφού c_λ αριστερά κάτω ημισυνεχές ($c_\lambda \le \liminf_{n\to\infty} c_{\lambda_n}$, $\forall\left\{\lambda_n\right\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ με $\lambda_n \to \lambda$), τότε $\forall \mu > 0$ ορίζονται $\left\{u_n\right\}_{n=1}^\infty \subset H_0^1\left(\Omega\right), \left\{\lambda_n\right\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$, τέτοιες ώστε

$$\lambda_n \to \mu$$

$$c_{\lambda_n} \to c_\mu$$

Επίσης $I_{\lambda_n}(u_n)=c_{\lambda_n}$ και $I'_{\lambda_n}(u_n)=0$. Αν δειχθεί ότι η $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη τότε το I_λ ικανοποιεί την συνθήκη *(PS)* και το c_λ είναι κρίσιμο σημείο για το I_λ για κάθε $\lambda>0$.

4.3.29 **Απόδειξη Θεωρήματος 4.3.5**

Έστω ότι η (u_n) δεν είναι φραγμένη. Έστω $w_n=\dfrac{u_n}{\|u_n\|}$. Προφανώς $\|w_n\|=1$, οπότε η (w_n) φραγμένη στον χώρο $H_0^1(\Omega)$. Άρα

α) αφού ο $H_0^1(\Omega)$ είναι ανακλαστικός, θα υπάρχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία (w_{n_k}) της (w_n) στον $H_0^1(\Omega)$ δηλ $\exists w_o\in H_0^1(\Omega): w_{n_k}\xrightarrow{w} w_0$:

β) αφού $H_0^1(\Omega)\underset{\sigma\upsilon\mu\pi}{\subset} L^2(\Omega)$ τότε $w_{n_k}\to w_0$ στον $L^2(\Omega)$.

Συμβολίζουμε $(w_{n_k})=(w_n)$, οπότε $w_n\to w_0$ στον $L^2(\Omega)$.

Επίσης $w_n(x)\to w_0(x)$ σχεδόν παντού στον Ω.

- Έστω $h\in L^2(\Omega)$ με $|w_n(x)|\le h(x)$ σχεδόν παντού στον Ω.
- Έστω $\Omega'=\{x\in\Omega\,/\,w(x)\neq 0\}$

$$c_{\lambda_n}=I_{\lambda_n}(u_n)=\frac{1}{2}\|u_n\|^2-\lambda_n\int_\Omega F(x,u_n)dx\Rightarrow$$

$$\int_\Omega\frac{F(x,u_n)}{\|u_n\|^2}dx=\frac{1}{2\lambda_n}-\frac{c_{\lambda_n}}{\lambda_n}\frac{1}{\|u_n\|^2}\Rightarrow$$

$$\ell im_{n\to\infty}\int_\Omega\frac{F(x,u_n)}{\|u_n\|^2}dx=\ell im_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2\lambda_n}-\frac{c_{\lambda_n}}{\lambda_n}\frac{1}{\|u_n\|^2}\right)\underset{\lambda_n\to\mu}{\overset{u_n\ \mu\eta\varphi\rho\gamma}{\Rightarrow}}$$

$$\ell im_{n\to\infty}\int_\Omega\frac{F(x,u_n)}{\|u_n\|^2}dx=\frac{1}{2\mu}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2\mu}=\ell im_{n\to\infty}\left[\int_{\Omega'}\frac{F(x,u_n)}{\|u_n\|^2}dx+\int_{\Omega\setminus\Omega'}\cancel{\frac{F(x,u_n)}{\|u_n\|^2}}dx\right]\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2\mu}=\ell im_{n\to\infty}\int_{\Omega'}\frac{F(x,u_n)}{(u_n)^2}(w_n)^2dx=\ell im\inf_{n\to\infty}\int_{\Omega'}\frac{F(x,u_n)}{(u_n)^2}(w_n)^2dx\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2\mu}=\ell im\inf_{n\to\infty}\int_{\Omega'}\frac{F(x,u_n)}{(u_n)^2}(w_n)^2dx\overset{Fatou}{\ge}\int_{\Omega'}\ell im\inf_{n\to\infty}\frac{F(x,u_n)}{(u_n)^2}(w_n)^2dx$$

Αλλά από την (f_3') : $\ell im_{|s|\to\infty}\dfrac{F(x,s)}{s^2}=+\infty$, ομοιόμορφα στο $x\in\Omega$, οπότε

$$\ell im_{n\to\infty}\left(\frac{F(x,u_n(x))}{(u_n(x))^2}(w_n(x))^2\right)=+\infty$$

Αν $|\Omega'|>0$ πρέπει $\dfrac{1}{2\mu}>\infty$ άτοπο.

Άρα $|\Omega'|=0\Rightarrow w=0$ *σ.π. στο* Ω.

Έστω $t_n\in[0,1]$ τέτοιο ώστε

$$I_{\lambda_n}\left(t_n u_n\right) = \max_{t\in[0,1]} I_{\lambda_n}\left(tu_n\right) \qquad 4.3.30$$

Τότε

$$I'_{\lambda_n}\left(t_n u_n\right)\left(t_n u_n\right) = \int_\Omega \left(\nabla t_n u_n\right)^2 dx - \lambda_n \int_\Omega f\left(x, t_n u_n\right) t_n u_n dx$$
$$= t_n^{\,2} \int_\Omega \left(\nabla u_n\right)^2 dx - \lambda_n t_n \int_\Omega f\left(x, t_n u_n\right) u_n dx$$

Ισχύει :

$$I_{\lambda_n}\left(tu_n\right) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\nabla t u_n\right)^2 dx - \lambda_n \int_\Omega F\left(x, tu_n\right) dx \Rightarrow$$
$$\frac{d}{dt} I_{\lambda_n}\left(tu_n\right) = t\int_\Omega \left(\nabla u_n\right)^2 dx - \lambda_n \int_\Omega f\left(x, tu_n\right) u_n dx \Rightarrow$$
$$\left.\frac{d}{dt} I_{\lambda_n}\left(tu_n\right)\right|_{t=t_n} = t_n\int_\Omega \left(\nabla u_n\right)^2 dx - \lambda_n \int_\Omega f\left(x, t_n u_n\right) u_n dx$$

Αλλά από την 4.3.30 είναι : $\left.\frac{d}{dt} I_{\lambda_n}\left(tu_n\right)\right|_{t=t_n} = 0$, οπότε

$$I'_{\lambda_n}\left(t_n u_n\right)\left(t_n u_n\right) = 0 \qquad 4.3.31$$

Τότε

$$2I_{\lambda_n}\left(tu_n\right) \le 2I_{\lambda_n}\left(t_n u_n\right), \forall t \in [0,1]$$

Λόγω της 4.3.31 θα είναι

$$2I_{\lambda_n}\left(tu_n\right) \le 2I_{\lambda_n}\left(t_n u_n\right) - 0 = 2I_{\lambda_n}\left(t_n u_n\right) - I'_{\lambda_n}\left(t_n u_n\right)\left(t_n u_n\right) \Rightarrow$$
$$2I_{\lambda_n}\left(tu_n\right) \le \cancel{\left\|t_n u_n\right\|^2} - 2\lambda_n \int_\Omega F\left(x, t_n u_n\right) dx - \cancel{\int_\Omega \left(\nabla t_n u_n\right)^2 dx} + \lambda_n \int_\Omega f\left(x, t_n u_n\right) t_n u_n dx \Rightarrow$$
$$2I_{\lambda_n}\left(tu_n\right) \le \lambda_n \int_\Omega f\left(x, t_n u_n\right) t_n u_n dx - 2\lambda_n \int_\Omega F\left(x, t_n u_n\right) dx \Rightarrow$$

$$2I_{\lambda_n}\left(tu_n\right) \le \lambda_n \int_\Omega \left[t_n u_n f\left(x, t_n u_n\right) - 2F\left(x, t_n u_n\right)\right] dx \qquad 4.3.32$$

Αν $H(x,s) = sf(x,s) - 2F(x,s), x \in \Omega, s \in \mathbb{R}$ τότε αφού ισχύει η

$$\left(\left(f_4\right):\ \exists s_0 > 0 \text{ ώστε } \frac{f(x,s)}{s} \text{ αύξουσα για } s \ge s_0, \text{φθίνουσα για } s \le -s_0, x \in \Omega\right)$$

Θα έχουμε για $s \ge s_0$

$$\frac{d}{ds}\frac{f(x,s)}{s} \ge 0 \Rightarrow$$
$$\frac{sf'(x,s) - f(x,s)}{s^2} \ge 0 \Rightarrow \qquad 4.3.33$$
$$sf'(x,s) - f(x,s) \ge 0 \Rightarrow$$
$$\frac{d}{ds}H(x,s) \ge 0 \Rightarrow$$

$H(x,s)$ αύξουσα στο $[s_o, +\infty)$

Όμοια $H(x,s)$ φθίνουσα στο $(-\infty, s_o]$.

Άρα $\forall t \in (0,s)$ ή $t \in (s,0)$ και $\forall x \in \Omega$ θα υπάρχει σταθερά $C_* > 0$ ώστε

$$H(x,t) \le H(x,s) + C_* \Rightarrow$$
$$tf(x,t) - 2F(x,t) \le sf(x,s) - 2F(x,s) + C_*$$

Για $t = t_n u_n$ *και* $s = u_n$ η προηγούμενη σχέση γίνεται :

$$t_n u_n f(x, t_n u_n) - 2F(x, t_n u_n) \le u_n f(x,u_n) - 2F(x,u_n) + C_*$$

Από την 4.3.32 $\Rightarrow$

$$2I_{\lambda_n}(tu_n) \le \lambda_n \int_\Omega \left[u_n f(x,u_n) - 2F(x,u_n) + C_*\right] dx =$$
$$= \lambda_n \int_\Omega u_n f(x,u_n) dx - 2\lambda_n \int_\Omega F(x,u_n) dx + \lambda_n \int_\Omega C_* dx =$$
$$= -\|u_n\|^2 + \lambda_n \int_\Omega u_n f(x,u_n) dx + \|u_n\|^2 - 2\lambda_n \int_\Omega F(x,u_n) dx + \lambda_n C_* |\Omega| =$$
$$= -I'_{\lambda_n}(u_n) u_n + 2I_{\lambda_n}(u_n) + \lambda_n C_* |\Omega|$$

Αλλά $I'_{\lambda_n}(u_n) u_n = 0$ *και* $I_{\lambda_n}(u_n) = c_{\lambda_n}$ Άρα

$$2I_{\lambda_n}(tu_n) \le 2c_{\lambda_n} + \lambda_n C_* |\Omega| \qquad 4.3.34$$

Αν $R_0 > 0$, *τότε* $2I_{\lambda_n}(R_0 w_n) = \|R_0 w_n\|^2 - 2\lambda_n \int_\Omega F(x, R_0 w_n) dx$

$$= R_0^2 - 2\lambda_n \int_\Omega F(x, R_0 w_n) dx$$

Αφου $w_n \to 0$ και έχουμε αρχικά υποθέσει ότι η (u_n) δεν είναι φραγμένη, τότε πρέπει $R_o \to \infty$ *και* $R_o w_n \to 0$. Τότε θα είναι $F(x, R_o w_n) \to \int_0^0 f(x,t) dt = 0$, οπότε

$$2I_{\lambda_n}(R_0 w_n) = R_0^2 + O_n(1)$$

Αν $R_o \to \infty$ *τότε* $I_{\lambda_n}(R_0 w_n) \to \infty$, άτοπο αφού από την 4.3.34 είναι φανερό ότι το $I_{\lambda_n}(R_0 w_n)$ είναι φραγμένο.

□

4.4 Η προσέγγιση των Li-Yang

Στο [LY] (2010) οι **Li-Yang** ασχολούνται με το πρόβλημα 4.1.1 για $\lambda > 0$ *και* $p > 1$.

Είναι ουσιαστικά επέκταση της προηγούμενης εργασίας των Miyagaki-Souto για $p > 1$. Η διαφορά έγκειται στο ότι αντί να εφαρμοστεί το Θεώρημα MP, αποδεικνύοντας ότι το συναρτησιακό I ικανοποιεί τη συνθήκη *(PS)*, αποδεικνύεται ότι το I ικανοποιεί τη συνθήκη *(C)* (Cerami, βλέπε 3.1.5.2). Στο [CMi] (το οποίο με τη σειρά του βασίστηκε στα [S], [BN],[MW]) είχε αποδειχθεί ότι αρκεί ένα συναρτησιακό I να ικανοποιεί την *(C)* και να έχει γεωμετρία του MP έτσι ώστε να έχει κρίσιμο σημείο.

4.4.1 ***Θεώρημα*** *Αν $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ είναι φραγμένο, ανοικτό και $1 < p < +\infty$. Αν η f ικανοποιεί τις παρακάτω υποθέσεις **(f_1)-(f_4)**, τότε το πρόβλημα 4.1.1 έχει μία τουλάχιστον μη τετριμμένη ασθενή λύση για κάθε $\lambda>0$.*

(f_1) $f \in C^0(\Omega x\mathbb{R}), f(x,0)=0,\ \forall x \in \Omega$ *και*

$$\lim_{s\to 0}\frac{f(x,u)}{|s|^{p-2}s} = 0 \text{ ομοιόμορφα σ.π. στον } \Omega$$

(f_2) Υπάρχουν $a,\beta > 0$ ώστε να ισχύει για την *f* η αυξητική συνθήκη

$$|f(x,s)| \le a + \beta|s|^{q-1}$$

για $x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R}$ και
$$\begin{cases} q \in \left[1, \dfrac{np}{n-p}\right), & \text{αν } 1<p<n \\ q>1, & \text{αν } p \ge n \end{cases}$$

(f_3) $$\lim_{|s|\to\infty}\frac{F(x,s)}{|s|^p} = +\infty, \text{ ομοιόμορφα στο } x \in \Omega$$

(f_4) υπάρχει $C_* > 0$ ώστε για την

$$H(x,s) = sf(x,s) - pF(x,s)$$

να ισχύει

$$H(x,t) \le H(x,s) + C_* \text{ για } 0<t<s \text{ ή } s<t<0, x \in \Omega$$

Για την απόδειξη του θεωρήματος είναι απαραίτητα τα παρακάτω Λήμματα.

*4.4.2 **Λήμμα** Έστω η f ικανοποιεί τις (f_1)-(f_3). Αν I_λ είναι το συναρτησιακό όπως ορίζεται από την 4.1.3, τότε :*
α) το I_λ δεν είναι κάτω φραγμένο και
β) το $u=0$ είναι τοπικό ελάχιστο για το I_λ.

Απόδειξη Για $p=2$ η απόδειξη είναι ίδια με του Λήμματος 4.3.6.

α) Από την (f_3) $\forall M>0,\ \exists C_M>0$:

$$F(x,s) \ge Ms^p - C_M,\ \forall x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R} \qquad 4.4.3$$

Αν $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ $με\ u > 0 και t \geq 0$, τότε για κάθε $\lambda > 0$ είναι :

$$I_\lambda(tu) = \frac{1}{p} t^p \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx - \lambda \int_\Omega F(x, tu) dx$$
$$\leq \frac{1}{p} t^p \|u\|^p - \lambda t^p M \int_\Omega u^p dx + \lambda C_M |\Omega|$$

Για M αρκετά μεγάλο η ποσότητα $\frac{1}{p}\|u\|^p - \lambda M \int_\Omega u^p dx$ είναι αρνητική, οπότε

$$\lim_{t\to\infty} I_\lambda(tu) = -\infty$$

Το I_λ δεν είναι κάτω φραγμένο.

β) Από τις (f_1),(f_2), $\forall \varepsilon > 0,\ \exists C_\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε:

$$|f(x,s)| \leq \varepsilon\ |s|^{p-1} + C_\varepsilon |s|^{q-1},$$
$$|F(x,s)| \leq \varepsilon\ |s|^p + C_\varepsilon |s|^q\ ,\ για\ κάθε\ x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R}. \tag{4.4.4}$$

Από τις 4.4.4 και την ανισότητα Poincare : $\|u\|_p^p \leq \frac{1}{\lambda_1}\|u\|^p$ προκύπτει

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p - \lambda \int_\Omega F(x,u) dx$$
$$\geq \frac{1}{p}\|u\|^p - \lambda\varepsilon \int_\Omega |u|^p \, dx - \lambda C_\varepsilon \int_\Omega |u|^q \, dx$$
$$\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{\lambda\varepsilon}{\lambda_1}\right)\|u\|^p - \lambda C_\varepsilon \|u\|_q^q$$
$$\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{\lambda\varepsilon}{\lambda_1}\right)\|u\|^p - \lambda \tilde{C}_\varepsilon \|u\|^q$$

Για $\|u\| = r$, για r αρκετά μικρό, ισχύει $k_1\|u\|^p - k_2\|u\|^q \geq a > 0$. Άρα υπάρχει περιοχή του λ, έστω (λ_o, μ_o) ώστε $I_\lambda(u) \geq 0$, δηλ $I_\lambda(0) = 0 \leq I_\lambda(u) \Rightarrow u = 0$ θέση τοπικού ελαχίστου.

□

4.4.5 **Λήμμα** *(Το I_λ έχει γεωμετρία MP γύρω από το 0) Έστω ότι ισχύουν οι (f_1)-(f_3) για το I_λ. Τότε για κάθε $\lambda \in [\lambda_0 . \mu_0]$, υπάρχουν $u_o \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ώστε $I_\lambda(u_o) < 0$ και σταθερές $r, a > 0$ ώστε $I_\lambda(u) > a,\ \ \forall u \in \partial B_r = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) / \ \|u\| = r\}$.*

Απόδειξη Έστω $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό με $\left(\frac{1}{p} - \frac{\mu_0\varepsilon}{\lambda_1}\right) \geq \frac{1}{4}$. Από την 4.4.4 και με την ίδια διαδικασία όπως προηγουμένως, έχουμε :

$$I_\lambda(u) \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{\mu_0\varepsilon}{\lambda_1}\right)\|u\|^p - \mu_0 C_\varepsilon \|u\|_q^q \geq \frac{1}{4}\|u\|^p - \mu_0 \tilde{C}_\varepsilon \|u\|^q\ ,\ \lambda \in [\lambda_0 . \mu_0],\ u_o \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Άρα υπάρχουν $r = r(\mu_0, \varepsilon) > 0,\ a = a(\mu_0, \varepsilon) > 0\ ώστε$

$$I_\lambda(u) \geq a,\ \ \forall \lambda \in [\lambda_0 . \mu_0]\ \ και\ \forall u\ με\ \|u\| = r.$$

Έστω $u \in W_0^{1,p}(\Omega),\ u > 0$ και ένα M αρκετά μεγάλο ώστε

$$\frac{1}{p}\|u\|^p - \lambda_0 M\int_\Omega u^p dx < 0$$

Από την 4.4.3 με την ίδια διαδικασία όπως προηγουμένως, έχουμε :

$$I_{\lambda_0}(tu) \le \frac{1}{p}t^p\|u\|^p - \lambda_0 t^p M\int_\Omega u^p dx + \lambda_0 C_M|\Omega| \Rightarrow$$

$$I_{\lambda_0}(tu) \le t^p\left[\frac{1}{p}\|u\|^p - \lambda_0 M\int_\Omega u^p dx\right] + \lambda_0 C_M|\Omega|$$

Έστω $t_0 > 0$ τέτοιο ώστε $I_{\lambda_0}(t_0 u) < 0$. Το I_λ είναι γραμμική και φθίνουσα συνάρτηση ως προς λ, οπότε για κάθε $\lambda > \lambda_0$ είναι

$$I_\lambda < I_{\lambda_0} \Rightarrow I_\lambda(t_0 u) < I_{\lambda_0}(t_0 u) < 0$$

Αν θέσουμε $u_0 = t_0 u$, έχουμε το ζητούμενο.

□

Το επόμενο θεώρημα είναι η βάση αυτής της μελέτης, εκφράζοντας το ότι το θεώρημα MP εφαρμόζεται και σε περιπτώσεις συναρτησιακών, τα οποία ικανοποιούν την συνθήκη (C) :

4.4.6 ***Λήμμα (Θεώρημα 1.1 στο [CMi])*** *Έστω X χώρος Banach, συναρτησιακό* $I \in C^1(X)$ *το οποίο ικανοποιεί τη συνθήκη (C)*(δες ορισμό 3.1.6) , $I(0) = 0$ *και*

- *i)* *Υπάρχουν σταθερές* $\rho, a > 0$ *τέτοιες ώστε* $I(u) \ge a,\ \forall u \in B_\rho$.
- *ii)* *Υπάρχει* $u_0 \in X \setminus B_\rho$ *ώστε* $I(u_0) \le 0$.

Τότε το

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \ge a$$

είναι κρίσιμο σημείο για το I, όπου

$$\Gamma = \{\gamma : [0,1] \to X \ /\ \text{συνεχής}, \gamma(0) = 0, \gamma(1) = u_0\}.$$

Για $\lambda > 0$, *έστω ένα* $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *με* $> \rho$ *και* $I_\lambda(u_0) < 0$ *(το ρ όπως ορίστηκε στο Λήμμα 4.4.5)*

$$c_\lambda = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I_\lambda(\gamma(t)) \ \text{και}$$

$$\Gamma = \{\gamma : [0,1] \to W_0^{1,p}(\Omega), \text{συνεχής}, \gamma(0) = 0, \gamma(1) = u_0\}$$

□

4.4.7 ***Λήμμα*** *Έστω Ω φραγμένο, ανοικτό υποσύνολο του* $\mathbb{R}^n$, $f \in C^0(\bar{\Omega}x\mathbb{R})$.
Έστω και οι παρακάτω υποθέσεις

(f_4') υπάρχει $s_0 > 0$ ώστε η $\dfrac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s}$

να είναι αύξουσα για $s \ge s_0$ και φθίνουσα για $s \le -s_0, \forall x \in \Omega$.

(f_5) $\lim\limits_{|s|\to\infty}\dfrac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} = +\infty$, ομοιόμορφα στο $x \in \Omega$.

(f_5') $\lim\limits_{s\to+\infty}\dfrac{f(x,s)}{s^{p-1}} = +\infty$, ομοιόμορφα στο $x \in \Omega$.

(f_6) $\dfrac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s}$ είναι αύξουσα για $s \ge 0$, $\forall x \in \Omega$.

(f_7) υπάρχει $s_0 > 0$ ώστε η

$$H(x,s) = sf(x,s) - pF(x,s)$$

να είναι αύξουσα για $s \geq s_0$ και φθίνουσα για $s \leq -s_0, \forall x \in \Omega$.

Τότε θα ισχύει :

i) $(f_7) \Rightarrow (f_4)$
ii) $(f_3)(f_4) \Rightarrow (f_5)$
iii) $(f_3)(f_4') \Rightarrow (f_5)$
iv) $(f_4')(f_5) \Rightarrow (f_7)$
v) $(f_5) \Rightarrow (f_3)$

Απόδειξη

Η $H(x,s) = sf(x.s) - pF(x,s)$ είναι συνεχής στο $\left(\bar{\Omega}x\mathbb{R}\right)$. Έστω $s_0 > 0$ και

$$C_* = 2 \max_{\bar{\Omega}x[-2s_0,2s_0]} \left|H\left(x,s\right)\right|.$$

Έστω επίσης $x \in \Omega,\ t,s \in \mathbb{R}$

- Αν $2s_0 \leq t < s$, από την (f_7) είναι : $H(x,t) \leq H(x,s) \Rightarrow$
$$H(x,t) \leq H(x,s) \leq H\left(x,s\right) + C_*$$
- Αν $0 \leq t < s < 2s_0$, από την (f_7) είναι :
$$H(x,t) - H(x,s) \leq |H(x,t) - H(x,s)| \leq$$
$$|H(x,t)| + |H(x,s)| \leq 2 \max_{\bar{\Omega}x[-2s_0,2s_0]} \left|H\left(x,s\right)\right| = C_* \leq \Rightarrow$$
$$H(x,t) \leq H\left(x,s\right) + C_*.$$
- Αν $0 \leq t < 2s_0 < s$, από την (f_7) είναι :
$$H(x,t) - H(x,s) \leq H(x,t) - H(x,s_0) + H(x,s_0) - H(x,s)$$
$$\leq |H(x,t) - H(x,s_0)| + 0$$
$$\leq 2 \max_{\bar{\Omega}x[-2s_0,2s_0]} \left|H\left(x,s\right)\right| = C_* \Rightarrow$$
$$H(x,t) \leq H\left(x,s\right) + C_*.$$

Άρα για $0 \leq t < s$ ισχύει $H(x,t) \leq H\left(x,s\right) + C_*$.

Όμοια αποδεικνύεται ότι $H(x,t) \leq H\left(x,s\right) + C_*\ \text{αν}\ s < t \leq 0$.

i) Αν $s_0 > 0$ και $x \in \Omega$, τότε από την (f_4) για $s \geq s_0$ είναι :

$$H(x,s_0) \leq H\left(x,s\right) + C_* \Rightarrow$$
$$H(x,s_0) \leq sf\left(x,s\right) - pF\left(x,s\right) + C_* \Rightarrow$$
$$sf\left(x,s\right) \geq H(x,s_0) + pF\left(x,s\right) - C_* \Rightarrow$$
$$\frac{f\left(x,s\right)}{s^{p-1}} \geq \frac{H(x,s_0)}{s^p} + \frac{pF\left(x,s\right)}{s^p} - \frac{C_*}{s^p} \qquad 4.4.8$$

Ισχύουν $\dfrac{H(x,s_0)}{s^p} \xrightarrow{s\to+\infty} 0$, $\dfrac{pF\left(x,s\right)}{s^p} \xrightarrow{s\to+\infty} +\infty$ λόγω (f_3) και $\dfrac{C_*}{s^p} \xrightarrow{s\to+\infty} 0$.

Άρα από την 4.4.8 έχουμε

$$\frac{f\left(x,s\right)}{s^{p-1}} \xrightarrow{s\to+\infty} +\infty \ \text{ή}\ \frac{f\left(x,s\right)}{|s|^{p-2}s} \xrightarrow{|s|\to\infty} +\infty$$

Για $s \leq -s_0$ από την (f_4) είναι : $H(x,-s_0) \leq H(x,s) + C_*$ με την ίδια διαδικασία καταλήγουμε

$$\frac{f(x,s)}{s^{p-1}} \xrightarrow{s\to-\infty} +\infty \text{ ή } \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} \xrightarrow{|s|\to\infty} +\infty .$$

ii) Από την (f_3) : $\ell im_{|s|\to\infty} \dfrac{F(x,s)}{|s|^p} = +\infty$ προκύπτει

$$\frac{F(x,s)}{|s|^p} \geq M > 0 \text{ για κάθε } s \text{ με } |s| \geq s_0 .$$

Για κάθε M υπάρχει ένα $N_M > 0$ ώστε

$$\frac{F(x,s_0)}{|s|^p} < \frac{M}{2} \tag{4.4.9}$$

για κάθε s με $|s| \geq N_M$. Αν $s > max\{s_0, N_M\}$, τότε από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει ένας $\theta \in (0,1)$ με $\theta = \theta(x,s,s_0)$ ώστε

$$f\left(x, s_0 + \theta(s-s_0)\right) = \frac{F(x,s) - F(x,s_0)}{s - s_0} \Rightarrow$$

$$\frac{F(x,s)}{|s|^p} = \frac{F(x,s_0) + f\left(x, s_0 + \theta(s-s_0)\right)(s-s_0)}{|s|^p} \Rightarrow$$

$$M \leq \frac{F(x,s)}{|s|^p} = \frac{F(x,s_0)}{|s|^p} + \frac{f\left(x, s_0 + \theta(s-s_0)\right)(s-s_0)}{|s|^p}$$

Λογω της 4.4.9 $\Rightarrow \dfrac{M}{2} \leq \dfrac{f\left(x, s_0 + \theta(s-s_0)\right)(s-s_0)}{|s|^p}$

$$\text{ή } \frac{M}{2} \leq \frac{f\left(x, s_0 + \theta(s-s_0)\right)(s-s_0)\left(s_0 + \theta(s-s_0)\right)^{p-1}}{|s|^p \left(s_0 + \theta(s-s_0)\right)^{p-1}}$$

Λογω της (f_4') : $\dfrac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s}$ αύξουσα για $s \geq s_0$,φθίνουσα για $s \leq -s_0$, $\forall x \in \Omega$

$$s_0 \leq s_0 + \theta(s-s_0) \leq s \Rightarrow$$

$$\frac{f(x,s_0)}{|s_0|^{p-1}} \leq \frac{f\left(x, s_0 + \theta(s-s_0)\right)}{|s_0 + \theta(s-s_0)|^{p-1}} \leq \frac{f(x,s)}{|s|^{p-1}}$$

οπότε :

$$\frac{M}{2} \leq \frac{f(x,s)}{|s|^{p-1}} \frac{(s-s_0)\left(s_0 + \theta(s-s_0)\right)^{p-1}}{|s|^p}$$

Αλλά

$$s_0 \leq s_0 + \theta(s-s_0) \leq s \Rightarrow$$

$$s_0^{p-1} \leq \left(s_0 + \theta(s-s_0)\right)^{p-1} \leq s^{p-1} \Rightarrow$$

$$(s-s_0)\left(s_0 + \theta(s-s_0)\right)^{p-1} \leq (s-s_0)s^{p-1} = s^p - s_0 s^{p-1} \leq s^p \Rightarrow$$

$$\frac{M}{2} \leq \frac{f(x,s)}{|s|^{p-1}}$$

Άρα

$$\ell im_{s\to+\infty}\frac{f(x,s)}{s^{p-1}}=+\infty$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι $\ell im_{s\to-\infty}\frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s}=+\infty$, οπότε ισχύει $\ell im_{|s|\to-\infty}\frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s}=+\infty$.

iii) Αν η f είναι παραγωγίσιμη ως προς s, τότε από την (f_4') για $s\geq s_0$ είναι

$$\frac{f(x,s)}{s^{p-1}} \text{ αύξουσα} \Rightarrow$$

$$\frac{f_s'(x,s)s^{p-1}-f(x,s)(p-1)s^{p-2}}{s^{2(p-1)}}\geq 0\Rightarrow$$

$$f_s'(x,s)s^{p-1}-f(x,s)(p-1)s^{p-2}\geq 0\Rightarrow$$

$$f_s'(x,s)s-f(x,s)(p-1)\geq 0\Rightarrow$$

$$f_s'(x,s)s-pf(x,s)+f(x,s)\geq 0\Rightarrow$$

$$(sf(x,s))'-pF'(x,s)\geq 0\Rightarrow H_s'(x,s)\geq 0\Rightarrow H(x,s) \text{ αύξουσα}$$

Όμοια αν $s\leq -s_o \Rightarrow H(x,s)$ φθίνουσα.
Άρα αν η f είναι παραγωγίσιμη ως προς s, (f_4')$\Rightarrow$(f_7)

Έστω ότι $f\in C^0(\Omega x\mathbb{R})$ και συνάρτηση $\eta\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ με $\eta(x)\in[0,1]$, $supp\,\eta\subset[0,1]$ και $\int_{-\infty}^{+\infty}\eta(x)dx=1$.

Έστω συνάρτηση $\eta_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Τότε $\eta_\varepsilon(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $supp\,\eta_\varepsilon\subset[0,\varepsilon]$ και $\int_{-\infty}^{+\infty}\eta_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx=1$.

Έστω $\rho>0$ και η $f_\rho(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\eta_\rho(t-\tau)f(x,\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}\eta_\rho(\tau)f(x,t-\tau)d\tau$.

Τότε για την f_ρ ισχύει $f_\rho\in C_0^\infty(\Omega x\mathbb{R})$ και $\ell im_{\rho\to 0}f_\rho(x,s)=f(x,s)$ για κάθε $(x,s)\in\Omega x\mathbb{R}$.

Για την f_ρ ορίζονται οι συναρτήσεις

$$F_\rho(x,s)=\int_0^s f_\rho(x,t)dt \text{ και } H_\rho(x,s)=sf_\rho(x,s)-pF_\rho(x,s).$$

Από τη (f_5) : $\lim_{|s|\to\infty}\frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s}=+\infty$, ομοιόμορφα στο $x\in\Omega$, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s}\geq 0 \text{ για } |s|>M, x\in\Omega \qquad 4.4.10$$

Έστω $s_0< s < t$. Υπάρχει σταθερά $\tau_0>0$ ώστε για $0 < \tau < \tau_0$, να είναι

$t-\tau > s_0$ και $s-\tau > s_0$

οπότε και θα είναι $0 < \tau < t$ και $0 < \tau < s$.
Προφανώς $\tau_0=\tau_0(s,s_0)$. Έστω επίσης $\rho_0=\rho_0(s,s_0)>0$ αρκετά μικρό ώστε $\eta_\rho\subset[0,\frac{\tau_0}{2}]$. Από την 4.4.10 έχουμε :

$$\frac{f_\rho(x,t)}{t^{p-1}}-\frac{f_\rho(x,s)}{s^{p-1}}=$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\eta_\rho(\tau)f(x,t-\tau)d\tau}{t^{p-1}}-\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\eta_\rho(\tau)f(x,s-\tau)d\tau}{s^{p-1}}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\eta_\rho(\tau)\left[\frac{f(x,t-\tau)}{t^{p-1}}-\frac{f(x,s-\tau)}{s^{p-1}}\right]d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\eta_\rho(\tau)\left[\frac{f(x,t-\tau)(t-\tau)^{p-1}}{t^{p-1}(t-\tau)^{p-1}}-\frac{f(x,s-\tau)(s-\tau)^{p-1}}{s^{p-1}(s-\tau)^{p-1}}\right]d\tau$$

$$\underset{s<t}{\overset{\frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s}\uparrow}{\geq}}\int_{-\infty}^{+\infty}\eta_\rho(\tau)\frac{f(x,s-\tau)}{(s-\tau)^{p-1}}\left[\frac{(t-\tau)^{p-1}}{t^{p-1}}-\frac{(s-\tau)^{p-1}}{s^{p-1}}\right]d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\eta_\rho(\tau)\frac{f(x,s-\tau)}{(s-\tau)^{p-1}}\left[\left(1-\frac{\tau}{t}\right)^{p-1}-\left(1-\frac{\tau}{s}\right)^{p-1}\right]d\tau\ \geq 0$$

Άρα για ένα ρ_0 και για κάθε $0<\rho<\rho_0$, η $\frac{f_\rho(x,s)}{s^{p-1}}$ είναι αύξουσα. Η f_ρ είναι παραγωγίσιμη ως προς s, οπότε με τη αρχική διαδικασία, είναι φανερό ότι η H_ρ είναι επίσης αύξουσα δηλ για $s_0< s < t$ είναι $H_\rho(x,s) \leq H_\rho(x,t)$

Αφού $\lim_{\rho\to 0} f_\rho(x,t)=f(x,t)$ και $\lim_{\rho\to 0} F_\rho(x,t)=F(x,t)$, τότε από τη σχέση $H_\rho(x,s)\leq H_\rho(x,t)$ *προκύπτει ότι* $H(x,s)\leq H(x,t)$ δηλ η H είναι αύξουσα για $s\geq s_0$.

Όμοια αποδεικνύεται ότι $H(x,s)\leq H(x,t)$ για $t<s\leq -s_0$ δηλ η H φθίνουσα για $s\leq -s_0$.

iv) Από την (f_5) είναι φανερό ότι για κάποιο $s_0>0$ είναι $f(x,s)\geq 0$. Επίσης από την (f_5) προκύπτει ότι για κάθε $M>0$ υπάρχει ένα $N_M>0$ ώστε

$$\frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s}\geq 2M \text{ για κάθε } x\in\Omega \text{ και } |s|>N_M \tag{4.4.11}$$

Για $s>N_M$ έχουμε :

$$F(x,s)=\int_0^s f(x,t)dt=\int_0^{s_0}f(x,t)dt+\int_{s_0}^{N_M}f(x,t)dt+\int_{N_M}^{s}f(x,t)dt\Rightarrow$$

$$F(x,s)\geq C+\int_{N_M}^{s}f(x,t)dt\,.$$

Λόγω της 4.4.11 είναι :

$$F(x,s)\geq C+2M\int_{N_M}^{s}|t|^{p-1}dt=C+2\frac{M}{p}\left(s^p-N_M^p\right)\Rightarrow$$

$$\frac{F(x,s)}{s^p}\geq\frac{C}{s^p}+2\frac{M}{p}\left(1-\left(\frac{N_M}{s}\right)^p\right)$$

Για $s\to+\infty$ *είναι* $\frac{C}{s^p}+2\frac{M}{p}\left(1-\left(\frac{N_M}{s}\right)^p\right)\to 2\frac{M}{p}$

άρα

$$\frac{F(x,s)}{s^p} \geq 2\frac{M}{p}$$

οπότε

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{F(x,s)}{s^p} = +\infty .$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι $\lim_{s\to-\infty}\frac{F(x,s)}{|s|^p} = +\infty$, άρα $\lim_{|s|\to+\infty}\frac{F(x,s)}{s^p} = +\infty$

□

4.4.12 **Πόρισμα** Αν $f\in C^0(\Omega\times\mathbb{R})$, τότε :

i) $(f_1)(f_2)(f_4')(f_5) \Rightarrow (f_1)(f_2)(f_3)(f_4') \Rightarrow (f_1)(f_2)(f_3)(f_7) \Rightarrow (f_1)(f_2)(f_3)(f_4) \Rightarrow (f_1)(f_2)(f_3)(f_5)$

ii) Αν $f(x,s) = 0$ για $s \leq 0$, $x\in\Omega$, τότε ισχύει η (f_4).

Απόδειξη i) Προφανές από το Λήμμα 4.4.7
ii) Αν $f(x,s) = 0$ για $s \leq 0$, $x\in\Omega$, τότε $F(x,s) = 0$ για $s \leq 0$, $x\in\Omega$, οπότε $H(x,s)=0$ για $s \leq 0$, $x\in\Omega$. Τότε η H είναι μη φθίνουσα, άρα ισχύει η (f_7) και από το 4.4.7 προκύπτει το ζητούμενο.

4.4.13 **Λήμμα** (Λήμμα 2.7 στο [LM])

Έστω $(u_n), u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Τότε :

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)(\nabla u_n - \nabla u)dx = 0 \Leftrightarrow \nabla u_n \to \nabla u \text{ στον } L^p(\Omega) .$$

4.4.14 **Απόδειξη του Θεωρήματος 4.4.1**

Είναι φανερό ότι για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.4.1, αρκεί η εφαρμογή του Λήμματος 4.4.6. Έχουμε ήδη δείξει (Λήμμα 4.4.5) ότι το I_λ έχει την απαιτούμενη γεωμετρία MP. Αρκεί η το I_λ να ικανοποιεί τη συνθήκη (C).

Έστω $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ είναι μία ακολουθία (C) για το I_λ, δηλ.

$$I_\lambda(u_n) \to c_\lambda, \qquad \|I'_\lambda(u_n)\|(1+\|u_n\|) \to 0 \tag{4.4.15}$$

Βήμα 1

Θα δείξουμε ότι η (u_n) είναι φραγμένη. Έστω ότι δεν είναι.

- Από την 4.4.15 είναι φανερό ότι

$$c_\lambda = I_\lambda(u_n) + o(1), \qquad \langle I'_\lambda(u_n), u_n\rangle = o(1) \tag{4.4.16}$$

- Έστω $w_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$. Τότε $w_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ και $\|w_n\|=1$. Ο $W_0^{1,p}(\Omega)$ είναι

ανακλαστικός, οπότε υπάρχει υπακολουθία (w_n) και $w_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ώστε

$$w_n \xrightarrow{w} w_0$$

Το Ω είναι φραγμένο, οπότε από τις εμφυτεύσεις του $W_0^{1,p}(\Omega)$ στους χώρους $L^p(\Omega)$ και $L^q(\Omega)$, έχουμε :

$$w_n(x) \to w(x)\,\sigma.\pi.\ \sigma\tau o\nu\ \Omega,$$
$$w_n \to w\ \sigma\tau o\nu\ L^p(\Omega) \qquad 4.4.17$$
$$w_n \to w\ \sigma\tau o\nu\ L^q(\Omega)$$

- Έστω $\Omega_{\neq} = \{x \in \Omega, w(x) \neq 0\}$

Από την (f_3) είναι : $\displaystyle \ell im_{n\to\infty} \frac{F(x,u_n(x))}{|u_n(x)|^p} = +\infty\,\sigma.\pi.\ \sigma\tau o\nu\,\Omega_{\neq} \Rightarrow$

$$\ell im_{n\to\infty} \frac{F(x,u_n(x))}{|u_n(x)|^p}|w_n(x)|^p = +\infty\,\sigma.\pi.\ \sigma\tau o\nu\,\Omega_{\neq} \qquad 4.4.18$$

Από την (f_3), υπάρχει $n_0 > 0$ ώστε $\displaystyle \frac{F(x,s)}{|s|^p} > 1, \forall s\ \mu\varepsilon\ |s| \geq n_0, x \in \bar{\Omega}$.

Επίσης αφού η F είναι συνεχής στο $\bar{\Omega}\times[-n_0,n_0]$, θα υπάρχει $M>0$ ώστε $|F(x,s)| \geq M$, για κάθε $(x,s) \in \bar{\Omega}\times[-n_0,n_0]$. Άρα υπάρχει $C>0$ ώστε $|F(x,s)| \geq C$ |F(x,s)|≥C, για κάθε $(x,s) \in \bar{\Omega}\times\mathbb{R}$. Άρα

$$\frac{F(x,u_n(x))-C}{\|u_n\|^p} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{F(x,u_n(x))}{|u_n(x)|^p}|w_n(x)|^p - \frac{C}{\|u_n\|^p} \geq 0 \qquad 4.4.19$$

Από την 4.4.16 έχουμε :

$$c_\lambda = I_\lambda(u_n) + o(1) = \frac{1}{p}\|u_n\|^p - \lambda\int_\Omega F(x,u_n)dx + o(1) \Rightarrow$$

$$\|u_n\|^p = pc_\lambda + p\lambda\int_\Omega F(x,u_n)dx + o(1) \qquad 4.4.20$$

Αφού η (u_n) δεν είναι φραγμένη, $\|u_n\| \to +\infty$, οπότε:

$$\int_\Omega F(x,u_n)dx \to +\infty \qquad 4.4.21$$

Θα δείξουμε ότι $|\Omega_{\neq}| = 0$. Έστω ότι $|\Omega_{\neq}| \neq 0$. Τότε από τις 4.4.18 και 4.4.19 $\Rightarrow$

$$\int_{\Omega_{\neq}} \ell im\inf_{n\to\infty}\left(\frac{F(x,u_n(x))}{|u_n(x)|^p}|w_n(x)|^p\right)dx - \int_{\Omega_{\neq}} \ell im\sup_{n\to\infty}\left(\frac{C}{\|u_n\|^p}\right)dx = (+\infty)|\Omega_{\neq}| \Rightarrow$$

$$\int_{\Omega_{\neq}} \ell im\inf_{n\to\infty}\left(\frac{F(x,u_n(x))}{|u_n(x)|^p}|w_n(x)|^p - \frac{C}{\|u_n\|^p}\right)dx = +\infty$$

Από το Λήμμα Fatou

$$\ell \underset{n\to\infty}{im\,inf} \int_{\Omega_{\neq}} \left(\frac{F(x,u_n(x))}{|u_n(x)|^p} |w_n(x)|^p - \frac{C}{\|u_n\|^p} \right) dx \geq +\infty$$

$$+\infty \leq \ell \underset{n\to\infty}{im\,inf} \int_{\Omega_{\neq}} \left(\frac{F(x,u_n(x))}{|u_n(x)|^p} |w_n(x)|^p - \frac{C}{\|u_n\|^p} \right) dx$$

$$\leq \ell \underset{n\to\infty}{im\,inf} \int_{\Omega} \left(\frac{F(x,u_n(x))}{|u_n(x)|^p} |w_n(x)|^p - \frac{C}{\|u_n\|^p} \right) dx$$

$$= \ell \underset{n\to\infty}{im\,inf} \int_{\Omega} \frac{F(x,u_n(x))}{\|u_n\|^p} dx - \ell \underset{n\to\infty}{im\,sup} \int_{\Omega} \frac{C}{\|u_n\|^p} dx$$

$$= \ell \underset{n\to\infty}{im\,inf} \int_{\Omega} \frac{F(x,u_n(x))}{\|u_n\|^p} dx - \ell \underset{n\to\infty}{im\,sup} \frac{C|\Omega|}{\|u_n\|^p}$$

$$= \ell \underset{n\to\infty}{im\,inf} \int_{\Omega} \frac{F(x,u_n(x))}{\|u_n\|^p} dx$$

Λόγω της 4.4.20

$$+\infty \leq \ell \underset{n\to\infty}{im\,inf} \int_{\Omega} \frac{F(x,u_n(x))}{pc_\lambda + p\lambda \int_{\Omega} F(x,u_n(x))dx + o(1)} dx$$

$$\leq \ell \underset{n\to\infty}{im\,inf} \frac{\int_{\Omega} F(x,u_n(x))dx}{pc_\lambda + p\lambda \int_{\Omega} F(x,u_n(x))dx + o(1)} = \frac{1}{p\lambda}$$

άτοπο. Άρα $|\Omega_{\neq}| = 0$. Συνεπώς $w(x) = 0$ σ.π. στον Ω.

- Αφού το $I_\lambda(tu_n)$ είναι συνεχές ως προς t στο $[0,1]$, υπάρχει $t_n \in (0,1), n = 1,2,..$ ώστε

$$I_\lambda(t_n u_n) = \max_{t\in[0,1]} I_\lambda(tu_n)\,.$$

Προφανώς

$$I_\lambda(t_n u_n) \geq c_\lambda > 0 = I_\lambda(0)$$

Επίσης

$$\frac{d}{dt} I_\lambda(tu_n)\Big|_{t=t_n} = 0\,, \text{ ή}$$

$$\langle I_\lambda'(t_n u_n), (t_n u_n) \rangle = 0\,.$$

Για $t_n = 1$ από την 4.4.16 είναι

$$\langle I_\lambda'(u_n), u_n \rangle = o(1)$$

οπότε για κάθε $t_n \in (0,1]$ ισχύει

$$\langle I_\lambda'(t_n u_n), (t_n u_n) \rangle = o(1) \qquad 4.4.22$$

Από την (f_4) έχουμε ότι για $t \in [0,1]$

$$I_\lambda(tu_n) \leq I_\lambda(t_n u_n) \Rightarrow$$

$$pI_\lambda(tu_n) \leq pI_\lambda(t_n u_n) \Rightarrow$$

$$pI_\lambda(tu_n) \le pI_\lambda(t_nu_n) - \langle I_\lambda'(t_nu_n),(t_nu_n)\rangle \Rightarrow$$

$$pI_\lambda(tu_n) \le p\left(\frac{1}{p}\|t_nu_n\|^p - \lambda\int_\Omega F(x,t_nu_n)dx\right) - \left(\int_\Omega |\nabla t_nu_n|^{p-2}\nabla t_nu_n \nabla t_nu_n dx - \lambda\int_\Omega f(x,t_nu_n)t_nu_n dx\right) + o(1) \Rightarrow$$

$$pI_\lambda(tu_n) \le \|t_nu_n\|^p - \lambda p\int_\Omega F(x,t_nu_n)dx - \|t_nu_n\|^p + \lambda\int_\Omega f(x,t_nu_n)t_nu_n dx + o(1) \Rightarrow$$

$$pI_\lambda(tu_n) \le \lambda\int_\Omega f(x,t_nu_n)t_nu_n dx - \lambda p\int_\Omega F(x,t_nu_n)dx + o(1) \Rightarrow$$

$$pI_\lambda(tu_n) \le \lambda\int_\Omega H(x,t_nu_n)dx + o(1)$$

Λόγω της (f_4) και αφού $t_n \le 1 \Rightarrow t_nu_n \le u_n$ η τελευταία ανισότητα γίνεται :

$$pI_\lambda(tu_n) \le \lambda\int_\Omega \left(H(x,u_n) + C_*\right)dx + o(1) \Rightarrow$$

$$pI_\lambda(tu_n) \le \lambda\int_\Omega \left(u_nf(x,u_n) - pF(x,u_n)\right)dx + \lambda C_*|\Omega| + o(1) \qquad 4.4.23$$

Αφού

$$\langle I_\lambda'(u_n),u_n\rangle = o(1) \Rightarrow$$

$$\|u_n\|^p - \lambda\int_\Omega f(x,u_n)u_n dx = o(1) \Rightarrow$$

$$\lambda\int_\Omega f(x,u_n)u_n dx = \|u_n\|^p + o(1)$$

Από την 4.4.23 προκύπτει

$$pI_\lambda(tu_n) \le \|u_n\|^p - \lambda\int_\Omega pF(x,u_n)dx + \lambda C_*\mu(\Omega) + o(1)$$

και κάνοντας χρήση της 4.4.20 έχουμε

$$pI_\lambda(tu_n) \le \|u_n\|^p + \left(pc_\lambda - \|u_n\|^p\right) + \lambda C_*\mu(\Omega) + o(1) \Rightarrow$$

$$pI_\lambda(tu_n) \le pc_\lambda + \lambda C_*\mu(\Omega) + o(1) \Rightarrow$$

$$pI_\lambda(tw_n\|u_n\|) \le pc_\lambda + \lambda C_*\mu(\Omega) + o(1)$$

Αν $R = t\|u_n\|$, τότε $R > 0$ και

$$pI_\lambda(Rw_n) \le pc_\lambda + \lambda C_*\mu(\Omega) + o(1) \qquad 4.4.24$$

Επίσης εξ' ορισμού

$$pI_\lambda(Rw_n) = \|Rw_n\|^p - \lambda p\int_\Omega F(x,Rw_n)dx \Rightarrow$$

$$pI_\lambda(Rw_n) = R^p - \lambda p\int_\Omega F(x,Rw_n)dx$$

αφού $\|w_n\| = 1$.

Από την (f_2) $\Rightarrow$ $|f(x,s)| \le a + \beta |s|^{q-1} \Rightarrow$

$$F(x,Rw_n) \le aRw_n + \frac{\beta}{q}|Rw_n|^q \le c|w_n|^q \Rightarrow$$

$$\int_\Omega F(x,Rw_n)\,dx \le c\|w_n\|_q^q.$$

Αλλά $w_n \to 0$ στον $L^q(\Omega)$, οπότε

$$pI_\lambda(Rw_n) = R^p + o(1) \tag{4.4.25}$$

Από τις 4.4.24 και 4.4.25 για $R \to \infty$, προκύπτει άτοπο.

Άρα η (u_n) είναι φραγμένη, ή $\|u_n\| \le C < \infty$, για κάποιο C.

Βήμα 2

Αφού ο χώρος $W_0^{1,p}(\Omega)$ είναι ανακλαστικός, υπάρχει υπακολουθία (u_n) και $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ώστε

$$u_n \xrightarrow{w} u_0 \tag{4.4.26}$$

και επίσης (λόγω εμφυτεύσεων του χώρου $W_0^{1,p}(\Omega)$ στους $L^p(\Omega)$ και $L^q(\Omega)$)

$$u_n(x) \to u_0(0) \text{ σ.π. στον } \Omega$$

$$u_n \to u_0 \text{ στον } L^p(\Omega)$$

$$u_n \to u_0 \text{ στον } L^q(\Omega)$$

Από την 4.4.26 προκύπτει

$$\langle I'_\lambda(u_n), u_n\rangle \to \langle I'_\lambda(u_n), u_0\rangle \Rightarrow \langle I'_\lambda(u_n), u_n - u_0\rangle \to 0$$

$$\langle I'_\lambda(u_0), u_n\rangle \to \langle I'_\lambda(u_0), u_0\rangle \Rightarrow \langle I'_\lambda(u_0), u_n - u_0\rangle \to 0$$

οπότε

$$\langle I'_\lambda(u_n) - I'_\lambda(u_0), u_n - u_0\rangle \to 0 \tag{4.4.27}$$

Επίσης από την 4.4.26 προκύπτει

$$\int_\Omega f(x,u_n)u_n dx - \int_\Omega f(x,u_n)u_0 dx - \int_\Omega f(x,u_0)u_n dx + \int_\Omega f(x,u_0)u_0 dx \to 0 \Rightarrow$$

$$\int_\Omega \left(f(x,u_n) - f(x,u_0)\right)(u_n - u_0)\,dx \to 0 \tag{4.4.28}$$

Έχουμε

$$\langle I'_\lambda(u_n) - I'_\lambda(u_0), u_n - u_0\rangle =$$

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right)(\nabla u_n - \nabla u_0)\,dx - \lambda\int_\Omega \left(f(x,u_n) - f(x,u_0)(u_n - u_0)\right)$$

οπότε συνδυάζοντας τις 4.4.27 και 4.4.28, έχουμε :

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right)(\nabla u_n - \nabla u_0)\,dx \to 0$$

Λόγω του Λήμματος 4.4.13 προκύπτει :

$$\nabla u_n \to \nabla u_0 \text{ στον } L^p(\Omega)$$

άρα

$$u_n \to u_0 \text{ στον } W_0^{1,p}(\Omega)$$

συνεπώς το I_λ ικανοποιεί τη συνθήκη (C).

□

Βιβλιογραφία

[ASS] Alves, Souto, Soares . Schrφdinger–Poisson equations without Ambrosetti–Rabinowitz condition, J. Math. Anal. Appl. 377 (2011) 584–592

[Ag] S. Agmon. The Lp approach to the Dirichlet problem. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 13 (1959) 405-408

[AR] A. Ambrosetti, P. Rabinowitz, Dual variational methods in critical points theory and applications, J. Funct. Anal. 14 (1973) 349_381.

[BCN] Brezis H, Coron JM, Nirenberg L. Free vibrations for a nonlinear wave equation and a theorem of P. Rabinowitz. Comm. Pure and Appl. Math., 1980;33:667-689.

[BBF] P. Bartolo, V. Benci, D. Fortunato, Abstract critical theorems and applications to some nonlinear problems with “strong” resonance at infinity, Nonlinear Anal. 7 (1983) 981_1012.

[BN] H. Brezis & L. Nirenberg, Positive solutions of nonlinear elliptic equation involving critical Sobolev exponents, Comm. Pure Appl. Math., 36(1983), 437-477.

[Ce] Cerami G. Un criterio di esistenza per I punti critici su varieta illuminate, Rend. Acad, Sci. Let. Ist. Lombardo 112 (1978) 332-336

[CS] Z.H. Chen, Y.T. Shen, Y.X. Yao, Some existence results of solutions for p-Laplacian, Acta Math. Sci. 23B (4) (2003) 487_496.

[CL] A. Casro, A.C. Lazer, Critical points theory and the number of solutions of nonlinear Dirichlet problem, Ann. Mat. Pura Appl. 120 (1979) 114_137.

[CM]$_1$ D.G. Costa, C.A. Magalhães, Variational elliptic problems which are nonquadratic at infinity, Nonlinear Anal. 23 (1994) 1401–1412.

[CM]$_2$ D.G. Costa, C.A. Magalhaes, Existence results for perturbations of the p-Laplacian, Nonlinear Anal. 24 (1995) 409_418.

[CMi] D.G. Costa, O.H. Miyagaki, Nontrivial solutions for perturbations of the p-Laplacian on unbounded domains, J. Math. Anal. Appl. 193 (1995) 737_755.

[CS] Z.H. Chen, Y.T. Shen, Y.X. Yao, Some existence results of solutions for p-Laplacian, Acta Math. Sci. 23B (4) (2003) 487_496.

[E] L.C. Evans, Partial Differential Equations, American Mathematical Society (1997)

[ILU] L. Iturriaga, S. Lorca, P. Ubilla - A quasilinear problem without the Ambrosetti–Rabinowitz-type condition, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 140A, 391–398, 2010

[J] L. Jeanjean, On the existence of bounded Palais_Smale sequences and application to a Landesman_Lazer type problem set on R^N , Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 129 (1999) 787_809.

[L] S. Liu, On superlinear problems without the Ambrosetti and Rabinowitz condition, Nonlinear Analysis 73 (2010) 788_795

[L]$_1$ S.B. Liu, Existence of solutions to a superlinear p-Laplacian equation, Electron. J. Differential Equations 66 (2001) 1_6.

[LM] G.B. Li, O. Martio, Stability in obstacle problems, Math. Scand. 75 (1994) 87_100.

[LY] G.Li, C. Yang, The existence of a nontrivial solution to a nonlinear elliptic boundary value problem of p-Laplacian type without the AR condition, Nonlinear analysis 72 (2010) 4602-4613.

[LZ]$_1$ G.B. Li, H.S. Zhou, Asymptotically ``linear’’ Dirichlet problem for p-Laplacian, Nonlinear Anal. 43 (2001) 1043_1055.

[LZ]$_2$ G.B. Li, H.S. Zhou, Multiple solutions to p-Laplacian problems with asymptotic nonlinearity as up☐1 at infinity, J. London Math. Soc. 65 (2) (2002)123_138.

[LZ]$_3$ G.B. Li, H.S. Zhou, Dirichlet problem of p-Laplacian with nonlinear term f .x; t/ _ up☐1 at infinity, in: H. Brezis, S.J. Li, J.Q. Liu, P.H. Rabinowitz (Eds.), Morse theory, Minimax Theory and their Applications to Nonlinear Partial Differential Equations, 2003, pp. 77_89.

[MS] O.H. Miyagaki, M.A.S. Souto, Super-linear problems without Ambrosetti and Rabinowitz growth condition, J. Differential Equations 245 (2008)3628_3638.

[MW] J. Mawhin, M. Willem.: Critical Point Theory and Hamiltonian Systems, Springer, Berlin (1989)

[P] R.S. Palais, Critical point theory and the minimax principle, in: Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math. 15 (1968) 185_212.

[PS] R. S. Palais and S. Smale, “A generalized Morse theory,” Bull. Am. Math. Soc., 70, 165–171, (1964).

[R] P. H. Rabinowitz, Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations, CBMS Regional Conference, 65, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island (1986).

[S] M. Schechter, A variation of the mountain pass lemma and applications, J. London Math. Soc., 44(1991)2, 491-502.

[SM] M. Struwe, Variational Methods, Applications to Nonlinear Differential Equations and Hamiltonian Systems, Springer-Verlag, 2000.

[SZ] M. Schechter, W. Zou, Superlinear problems, Pacific J. Math. 214 (2004) 145_160.

[W] M. Willem, Minimax Theorems, Boston, Basel, Berlin.

[W]$_1$ M. Willem, Lectures on critical point theory, Trabalho de Math. 199, Fundacao Univ. Brasilia, Brasilia, 1983.

[WZ] M. Willem, W. Zou, On a Schrödinger equation with periodic potential and spectrum point zero, Indiana Univ. Math. J. 52 (2003) 109–132.

[Z] H.S. Zhou, Positive solution for a semilinear elliptic equations which is almost linear at infinity, Z. Angew. Math. Phys. 49 (1998) 896_906.

[Σ] Σημειώσεις του μαθήματος "Μη γραμμικές ΜΔΕ" του ΔΠΜΣ «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ σε ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ και την ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ» και «ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ» Ν. Σταυρακάκης, Ν. Γιαννακάκης