

Διπλωματική Εργασία:  
Πέρα από το καθιερωμένο πρότυπο της  
σωματιδιακής φυσικής και βαρυονική  
ασυμμετρία

Παπαγιαννόπουλος Γιάννης

22 Ιουνίου 2011



# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Path Inegral φορμαλισμός και Θεωρίες Βαθμίδας</b>	<b>9</b>
2.1	Path Inegral φορμαλισμός . . . . .	9
2.2	Κβάντωση μιας βαθμωτής θεωρίας . . . . .	11
2.3	Θεωρίες Βαθμίδας . . . . .	13
2.3.1	Αβελιανές Θεωρίες Βαθμίδας . . . . .	13
2.3.2	Μη αβελιανές θεωρίες Βαθμίδας . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Στοιχεία Θεωρίας Επανακανονικοποίησης</b>	<b>17</b>
3.1	Αποκλίνοντα διαγράμματα και απειρισμοί . . . . .	17
3.2	Διαστατική ομαλοποίηση . . . . .	20
3.3	Επανακανονικοποίηση . . . . .	21
3.4	Μεταβλητές σταθερές ζεύξης και συναρτήσεις $\beta$ . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Το καθιερωμένο πρότυπο</b>	<b>25</b>
4.1	Το καθιερωμένο πρότυπο των ηλεκτρασθενών αλληλεπιδράσεων	25
4.2	Κβαντική Χρωμοδυναμική . . . . .	29
4.3	Το θεώρημα Golstone . . . . .	30
4.4	Ο μηχανισμός Higgs στο καθιερωμένο πρότυπο . . . . .	34
4.4.1	Μάζες φερμιονίων . . . . .	36
4.4.2	Τα σωματίδια $Z, W$ . . . . .	37
4.4.3	Το σωματίδιο Higgs . . . . .	37
4.4.4	Θεωρητικοί περιορισμοί στη μάζα του Higgs . . . . .	38
4.5	Μίξεις φερμιονίων . . . . .	40
4.6	Η ανάγκη για μια μεγαλοενοποιημένη θεωρία . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Πέρα από το καθιερωμένο πρότυπο</b>	<b>43</b>
5.1	Το μοντέλο $SU(5)$ . . . . .	43
5.1.1	Φερμιόνια . . . . .	44
5.1.2	Κβάντωση του ηλεκτρικού φορτίου . . . . .	45

5.1.3	Μποζόνια Βαθμίδας . . . . .	46
5.1.4	Αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας . . . . .	47
5.1.5	Ενοποίηση των σταθερών ζεύξης . . . . .	50
5.2	Μια βασική εισαγωγή στην Υπερσυμμετρία . . . . .	55
<b>6</b>	<b>Βαρυονική Ασυμμετρία</b>	<b>59</b>
6.1	Η Βαρυονική Ασυμμετρία στο σύμπαν . . . . .	59
6.2	Οι προϋποθέσεις για Βαρυονική Ασυμμετρία . . . . .	60
6.3	Πιθανές εξηγήσεις που προσφέρουν τα θεωρητικά μοντέλα . . . . .	61
6.3.1	Η παραβίαση του Βαρυονικού Αριθμού στο μοντέλο SU(5)	61
6.3.2	Η παραβίαση του Βαρυονικού Αριθμού στην Ηλεκτρα- σθενή Θεωρία - Sphaleron effect . . . . .	63
6.3.3	Leptogenesis . . . . .	64
6.3.4	Pangenesiς και ο μηχανισμός Affleck- Dine . . . . .	66
<b>7</b>	<b>Παραρτήματα</b>	<b>69</b>
7.1	Η πλήρης Λανγκρανζιανή του KΠ και του Higgs . . . . .	69
7.2	Διαγράμματα Feynman . . . . .	69
7.3	Γεννήτορες της SU(5) . . . . .	70

## Περίληψη

Ο στόχος αυτής της εργασίας είναι να δώσει μια σαφή εικόνα για το καθιερωμένο πρότυπο των στοιχειωδών σωματιδίων. Περιλαμβάνει μια εισαγωγή στον Path Integral φορμαλισμό και στις Θεωρίες Βαθμίδας, ώστε μετά να γίνει κατανοητή μια πλήρης παρουσίαση του Καθιερωμένου Προτύπου.

Στο Καθιερωμένο πρότυπο παρουσιάζονται αναλυτικά: το καθιερωμένο πρότυπο των ηλεκτρασθενών αλληλεπιδράσεων, το οποίο είναι και το καλύτερα ορισμένο κομμάτι της θεωρίας μας, η χβαντική χρωμοδυναμική καθώς και το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας, το θεώρημα Goldstone και ο μηχανισμός Higgs -που αποτελεί και τη βασικότερη εξήγηση στο πώς τα σωματίδια αποκτούν μάζα στο ΚΠ-. Έπειτα περιορίζεται θεωρητικά η αναζήτηση για τη μάζα του Higgs και περιγράφεται ο τρόπος που αποκτούν μάζα τα φερμιόνια. Το κεφάλαιο αυτό κλείνει με τα προβλήματα που παρουσιάζει το ΚΠ και την ανάγκη που υπάρχει για μια μεγαλοενοποιημένη θεωρία.

Στην αναζήτηση προτύπων πέρα από το καθιερωμένο, γίνεται μια εισαγωγική παρουσίαση της θεωρίας επανακανονικοποίησης και του μοντέλου SU(5) και τα αποτελέσματα της εφαρμογής του, όπως η χβάντωση του ηλεκτρικού φορτίου και η ενοποίηση των σταθερών ζεύξης. Επίσης αναφέρεται συνοπτικά και ο πυρήνας των υπερσυμμετρικών μοντέλων.

Έχοντας δώσει αρκετά εφόδια στον αναγνώστη με τα παραπάνω μελετάται θεωρητικά η βαρυονική ασυμμετρία του σύμπαντος, δηλαδή η επικράτηση στο σύμπαν της ύλης έναντι της αντιύλης και τρόποι με τους οποίους θα μπορούσε να εξηγηθεί.



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Με την εκθετική εξέλιξη της τεχνολογίας και της επιστημονικής γνώσης, έχουμε φτάσει πλέον στο σημείο θέματα της φυσικής που μπορούσαν να άγγιχθούν μόνο θεωρητικά, να είμαστε σε θέση πειραματικά να τα επιβεβαιώνουμε ή να τα απορρίπτουμε. Για τον κλάδο της φυσικής στοιχειωδών σωματιδίων η περίοδος που διανύουμε είναι εξαιρετικά σημαντική μια και οι πειραματικές παρατηρήσεις στον LHC θα επιβεβαιώσουν ή όχι, πολύ σημαντικό μέρος του Καθιερωμένου Προτύπου, και των Θεωριών Μεγάλης Ενοποίησης και πρακτικά θα θέσουν την κατεύθυνση στην οποία θα πρέπει να κινηθούμε, στη δημιουργία μιας ενοποιημένης Θεωρίας.

Στην εργασία αυτή ο στόχος ήταν να γίνει μια άρτια παρουσίαση του Καθιερωμένου Προτύπου και της βασικής μίνιμουμ Μεγαλοενοποιημένης Θεωρίας Βαθμίδας που δεν είναι άλλη από την ΣΥ(5), αφού πρώτα γίνει μια βασική παρουσίαση του φορμαλισμού και των θεωριών που εμπλέκονται στη θεμελίωση των παραπάνω. Αναγνωρίζοντας της ελλείψεις και τις ασυμφωνίες των παραπάνω μοντέλων γίνεται μια πολύ εισαγωγική παρουσίαση του πυρήνα της υπερσυμμετρίας, ώστε να μπορέσουμε να προσωρήσουμε στο δεύτερο σκέλος της εργασίας που δεν είναι άλλο από την παρουσίαση της Βαρυονικής Ασυμμετρίας στο σύμπαν και πιθανές εξηγήσεις που δίνονται από υπάρχοντα θεωρητικά μοντέλα -δίνοντας έμφαση περισσότερο στην παρουσίαση των διαφορετικών προσεγγίσεων, παρά στην εκτεταμένη ανάλυση μόνο ενός-.

Είναι νομίζω σαφές, πως ο τρόπος με τον οποίο θα καταλήξουμε μελλοντικά σε κάποια GUT είναι μέσω της ζύμωσης και σύνθεσης θεωρητικών μοντέλων από τους εμπλεκόμενους κλάδους, δηλαδή τον συνδυασμό της φυσικής στοιχειωδών σωματιδίων και κοσμολογίας.

Κλείνοντας την εισαγωγή αυτή θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα της εργασίας, Κύριο Ζουπάνο, για την εμπιστοσύνη και την υπομονή που μου έδειξε κατά την εκπόνησή της.





## Κεφάλαιο 2

# Path Inegral φορμαλισμός και Θεωρίες Βαθμίδας

Ο τρόπος με τον οποίο περάσαμε από την κλασική μηχανική στην κβαντική μηχανική είναι με την αντιστοίχιση των φυσικών μεγεθών με τελεστές πχ  $\vec{p} \rightarrow -i\hbar\nabla$  οι οποίοι δρουν σε κλασικά πεδία. Συνεχίζοντας αυτόν τον τρόπο σκέψης και αντιστοιχίζοντας τα πεδία με τελεστές με δράση πάνω σε διανύσματα περνάμε στην κβαντική θεωρία πεδίου. Για να προχωρήσουμε παρακάτω είναι απαραίτητος ο αντίστοιχος φορμαλισμός που εισήχθη για την περιγραφή των κβαντικών συστημάτων, αυτός των Path Integrals. Εδώ δε θα αναλύσουμε σε βάθος, αλλά θα παρουσιάσουμε συνοπτικά τον φορμαλισμό και κάποια αποτελέσματα που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω.

### 2.1 Path Inegral φορμαλισμός

Στην κβαντική μηχανική προκειμένου να υπολογίσουμε το πλάτος μετάβασης από μια αρχική κατάσταση  $q_i$  σε μια τελική  $q_f$  μέσα σε χρόνο  $T$  γράφουμε:

$$\langle q_f | e^{-iHT} | q_i \rangle \quad (2.1)$$

Χωρίζουμε τον χρόνο  $T$  σε  $N$  διαστήματα διάρκειας  $\delta T$  έτσι ώστε:

$$\langle q_f | e^{-iHT} | q_i \rangle = \langle q_f | e^{-iH\delta T} e^{-iH\delta T} \dots e^{-iH\delta T} | q_i \rangle \quad (2.2)$$

και με δεδομένο ότι:  $\int \partial q | q \rangle \langle q | = 1$  μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} \langle q_f | e^{-iHT} | q_i \rangle &= \left( \prod_{j=1}^{N-1} \int \partial q_j \langle q_f | e^{-iH\delta T} | q_{N-1} \rangle \langle q_{N-1} | e^{-iH\delta T} | q_{N-2} \rangle \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \langle q_2 | e^{-iH\delta T} | q_1 \rangle \langle q_1 | e^{-iH\delta T} | q_i \rangle \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

10 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. PATH INTEGRAL ΦΟΡΜΑΛΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΕΣ ΒΑΘΜΙΔΑΣ

Αν τώρα ασχοληθούμε μόνο με έναν τυχαίο παράγοντα:  $\langle q_{j+1}|e^{-iH\delta t}|q_j \rangle$  και θεωρήσουμε την περίπτωση του ελεύθερου σωματιδίου με Χαμιλτονιανή:  $H = \frac{\hat{p}^2}{2m}$  και με δεδομένου ότι  $\langle q|p \rangle = e^{ipq}$  παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1}|e^{-i\delta t(\frac{\hat{p}^2}{2m})}|q_j \rangle &= \int \frac{\partial p}{2} \langle q_{j+1}|e^{-i\delta t(\frac{p^2}{2m})}|p \rangle \langle p|q_j \rangle = \\ &= \int \frac{\partial p}{2\pi} e^{-i\delta t(\frac{p^2}{2m})} e^{ip(q_{j+1}-q_j)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

όπου αντικαταστήσαμε στον τελεστή  $\hat{p}$  την ιδιοτιμή του. Συνεχίζουμε, κάνοντας χρήση του Γκαουσιανού ολοκληρώματος:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \partial x e^{-\frac{1}{2}\alpha x^2 + iJ(x)} = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} e^{J^2/2\alpha} \quad (2.5)$$

και αντικαθιστώντας στη (2.4) αφού ολοκληρώσουμε ως προς  $p$  έχουμε:

$$\langle q_f|e^{-iHT}|q_i \rangle = \left(\frac{-i2\pi m}{\delta t}\right)^{\frac{N}{2}} \prod_{j=0}^{N-1} \int \partial q_j e^{i\delta t(m/2) \sum_{j=0}^{N-1} [(q_{j+1}-q_j)/\delta t]^2} \quad (2.6)$$

αν τώρα θεωρήσουμε το όριο  $\delta t \rightarrow 0$  προφανώς  $[(q_{j+1}-q_j)/\delta t] = \dot{q}$  και  $\sum_{j=0}^{N-1} \rightarrow \int_0^T \partial t$ . Στο αντίστοιχο όριο  $N \rightarrow \infty$  ορίζουμε:

$$\int Dq(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{-i2\pi m}{\delta t}\right)^{\frac{N}{2}} \prod_{j=0}^{N-1} \int \partial q_j \quad (2.7)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω και εισάγωντας την Λανγκρανζιανή του ελεύθερου σωματιδίου η (2.7) γίνεται:

$$\langle q_f|e^{-iHT}|q_i \rangle = \int Dq(t) e^{i \int_0^T \mathcal{L} \partial t} \quad (2.8)$$

Αντίστοιχο αποτέλεσμα παίρνουμε αν θεωρήσουμε το σωματίδιο σε δυναμικό  $V(q)$ . Το  $\int_0^T \mathcal{L} \partial t$  είναι η δράση  $S$ . Και γνωρίζουμε φυσικά οτι η κλασική διαδρομή που θα ακολουθήσει το σύστημα μεταξύ δύο καταστάσεων, δίνεται από την αρχή της ελάχιστης δράσης, δηλαδή:

$$\frac{\delta}{\delta q(t)} (S(q(t))) = 0 \quad (2.9)$$

Για να κλείσουμε το μέτρο της ολοκλήρωσης σε αντίστοιχες της (2.4) λοιπόν είναι απλά το συνεχές όριο του γινομένου των ολοκληρωμάτων:

$$\prod_i \int \frac{\partial p^i \partial q^i}{2\pi \hbar} \quad (2.10)$$

## 2.2 Κβάντωση μιας βαθμωτής θεωρίας

Ας θεωρήσουμε ένα βαθμωτό πεδίο  $\phi$  και δυναμικό  $V$ . Τότε όπως είδαμε ισχύει:

$$\langle \phi_f(x) | e^{-iHT} | \phi_i(x) \rangle = \int \partial\phi e^{i \int_0^T \mathcal{L} dt} \quad (2.11)$$

όπου όμως τώρα  $L$  είναι η αντίστοιχη Λανγκρανζιανή του συστήματος που συνοφίζει όλα τα χαρακτηριστικά του συστήματος:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi_\mu)^2 - V(\phi) \quad (2.12)$$

Η σχέση που μας δίνει την θεμελίωση κατάσταση της Χαμιλτονιανής  $\langle 0|0 \rangle$  αν εισάγουμε τον συμβολισμό  $T$ : χρονοδιατεταγμένο γινόμενο των συναρτήσεων:

$$\langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\dots\phi(x_n)|0 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int D\phi \phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n) e^{i \int_{-T}^T \partial^4 x \mathcal{L}}}{\int D\phi e^{i \int_{-T}^T \partial^4 x \mathcal{L}}} \quad (2.13)$$

Όπως είναι αναμενόμενο δεν μπορούμε πολύ συχνά να υπολογίσουμε τέτοια ολοκληρώματα οπότε για να κάνουμε χρήση διαταρακτικών μεθόδων θα γράψουμε την πλήρη Λανγκρανζιανή ως:  $L = L_0 - V(\phi)$  με  $V(\phi)$  τον όρο του δυναμικού. Αν ορίσουμε τον συναρτησιοειδή γεννήτορα ως μια συνάρτηση ρεύματος την οποία αν παραγωγίσουμε παίρνουμε συναρτήσεις συσχέτισης:

$$Z(J) = \int D\phi e^{i \int \partial^4 x (L + J(x)\phi(x))} \quad (2.14)$$

Και ως αρχικές μας σχέσεις:

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} J(y) = \delta^4(x - y) \quad (2.15)$$

και

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \int \delta^4 J(y)\phi(y) = \phi(x) \quad (2.16)$$

Καταλήγουμε εύκολα στην έκφραση:

$$\langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n)|0 \rangle = \frac{1}{Z_0} \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right) \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_2)}\right) \dots \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_n)}\right) Z_0 \quad (2.17)$$

Εξαιρετικά σημαντικό για τη θεμελίωση της θεωρίας μας είναι το θεώρημα Wick το οποίο για να μας δώσει το χρονοδιατεταγμένο πλάτος μετάβασης επιβάλλει άθροιση ανα δύο σε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των πεδίων.:

$$\begin{aligned} \langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n)|0\rangle &= \langle 0|\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle \dots \langle 0|\phi(x_{n-1})\phi(x_n)|0\rangle \\ &+ \langle 0|\phi(x_1)\phi(x_3)|0\rangle \dots \langle 0|\phi(x_{n-2})\phi(x_n)|0\rangle + \dots \end{aligned} \quad (2.18)$$

Αφού για τη θεωρία διαταραχών ορίζουμε  $L = L_0 + L_{int}$  το ελεύθερο συναρτησιοειδές μας είναι το:

$$Z(J) = \int D\phi e^{i \int \partial x^4 (L_0 + J(x)\phi(x))} \quad (2.19)$$

ενώ για την συγκεκριμένη βαθμωτή θεωρία γράφεται:

$$Z_{free}(J) = Z_0 e^{-\frac{1}{2} \int \partial^4 x \partial^4 y J(x) D_F(x-y) J(y)} \quad (2.20)$$

όπου:

$$D_F(x-y) = \frac{i}{\partial^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (2.21)$$

από το θεώρημα Wick και μια και έχουμε δύο μόνο σημεία εύκολα καταλήγουμε:

$$\langle 0|T\phi(x_1)\phi(x)\phi(y)|0\rangle = D_F(x-y) \quad (2.22)$$

Η παραπάνω έκφραση είναι ο διαδότης Feynman για ένα βαθμωτό πεδίο (πχ. φωτονικός διαδότης) και είναι τελεστής, ενώ ο όρος  $i\epsilon$  έχει εισαχθεί για να εξαλειφθεί ο πόλος του διαδότη. Ο φερμιονικός διαδότης με την αντίστοιχη διαδικασία δίνεται από την έκφραση:

$$\langle 0|T\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)|0\rangle = S_F(x_1 - x_2) = \frac{i}{\gamma^\mu \partial_\mu - m + i\epsilon} \quad (2.23)$$

Για τη διευκόλυνσή μας και μια και μπορούμε με ανάλογο τρόπο να υπολογίσουμε και όρους αλληλεπίδρασης - δηλαδή τους κόμβους που εμφανίζονται- για να υπολογίσουμε τα πλάτη μετάβασης κάνουμε χρήση των διαγραμμάτων και των κανόνων Feynman, όπου ουσιαστικά φτιάχνουμε όλα τα δυνατά διαγράμματα που μπορούν να συνεισφέρουν στο πλάτος και έπειτα αντίστοιχους κανόνες τα υπολογίζουμε. Στο παράρτημα υπάρχουν κάποια παραδείγματα βασικών διαγραμμάτων και των αντίστοιχων κανόνων Feynman.

## 2.3 Θεωρίες Βαθμίδας

### 2.3.1 Αβελιανές Θεωρίες Βαθμίδας

Οι μετασχηματισμοί της γενικής μορφής:  $\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha}\psi(x)$  και συνεπώς  $\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{-i\alpha}\bar{\psi}(x)$  είναι γνωστοί ως 'μη τοπικοί' ή 'εκτεταμένοι' μετασχηματισμοί βαθμίδας. Κάτω από αυτούς τους μετασχηματισμούς οι Λανγκρανζιανές από τις οποίες προκύπτουν οι ελεύθερες θεωρίες Klein-Gordon και Dirac είναι αναλλοίωτες. Όμως αυτοί οι μετασχηματισμοί είναι αντίθετοι με το πνεύμα της σχετικότητας -σύμφωνα με την οποία μια πληροφορία δεν ματαδίδεται ακαριαία- και συνεπώς πρέπει να αναζητήσουμε μετασχηματισμούς στους οποίους η παράμετρος  $\alpha$  θα εξαρτάται από το χωροχρόνο. Οι μετασχηματισμοί αυτού του τύπου, είναι οι τοπικοί μετασχηματισμοί βαθμίδας και σχηματίζουν την ομάδα U(1).

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x)\partial_\mu\psi'(x) = \bar{\psi}(x)e^{i\alpha(x)}\psi(x)\partial_\mu(e^{-i\alpha(x)}\psi(x)) \\ &= \bar{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) - i\bar{\psi}(x)\partial_\mu\alpha(x)\psi(x)\end{aligned}\quad (2.24)$$

που προφανώς δεν είναι αναλλοίωτη.

Το πιο απλό που μπορούμε να κάνουμε αρχικά είναι να δουλέψουμε πάνω στη Λανγκρανζιανή του ελεύθερου ηλεκτρονίου:

$$\mathcal{L}_e = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x)\quad (2.25)$$

Ορίζουμε τη συναλλοίωτη παράγωγο:

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu\quad (2.26)$$

ενώ αντίστοιχα μετασχηματίζουμε και το πεδίο  $A_\mu$ :

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)\quad (2.27)$$

Αντικαθιστώντας τη συναλλοίωτη παράγωγο πραγματικά βλέπουμε πως η Λανγκρανζιανή είναι αναλλοίωτη και ότι για να γίνει αυτό απαιτείται η παρουσία ενός ανυσματικού πεδίου  $A_\mu$ . Αλλά με δεδομένο πως δεν εμφανίζεται κάποιος δυναμικός όρος της μορφής  $\partial_\mu A^\mu$ , θα πρέπει να προσθέσουμε κάποιον όρο που να είναι αναλλοίωτος κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz και να μην καταστρέφει τη συμμετρία, προκειμένου να προσδώσουμε στο πεδίο δυναμικό ρόλο. Αύτος είναι ο:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \text{ με } F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\quad (2.28)$$

## 14ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. PATH INTEGRAL ΦΟΡΜΑΛΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΕΣ ΒΑΘΜΙΔΑΣ

ο οποίος είναι ο απλούστερος δυνατός και δεν καταστρέφει την επανακανονικοποιησιμότητα της θεωρίας. Συνεπώς η τελική Λανγκρανζιανή της QED είναι η:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)i\gamma^\mu D_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (2.29)$$

ή αλλιώς:

$$L = \bar{\psi}(x)i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) - e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (2.30)$$

Παρατηρούμε τα εξής:

- 1) Το φορτίο  $e$  έχει το ρόλο μιας σταθεράς ζεύξης μεταξύ του ηλεκτρονίου και του πεδίου βαθμίδας. Δεν υπάρχει κάτι που να μας επιβάλει ότι το φορτίο θα είναι ίδιο για όλα τα στοιχειώδη σωματίδια.
- 2) Το πεδίο  $A_\mu$  δεν έχει μάζα αφού δεν εμφανίζεται στην Λανγκρανζιανή όρος της μορφής  $\frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$  και συνεπώς το μποζόνιο βαθμίδας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (φωτόνιο) είναι άμαζο. Αν και τίποτα δε μας εμποδίζει να προσθέσουμε έναν τέτοιο όρο μάζας, μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε πως δεν είναι αναλλοίωτος.(βλ. Κεφάλαιο 4)
- 3) Το φωτόνιο δεν αλληλεπιδρά με τον εαυτό του μια και δεν εμφανίζεται τέτοιος όρος στη Λανγκρανζιανή. Προφανώς αυτό οφείλεται στην αβελιανότητα της ομάδας.
- 4) Η μορφή της Λανγκρανζιανής και κατ' επέκταση οι αλληλεπιδράσεις, καθορίστηκαν πλήρως από την απαίτηση της αναλλοιώτητας και επανακανονικοποιησιμότητας.

### 2.3.2 Μη αβελιανές θεωρίες Βαθμίδας

Αν γενικεύσουμε τα παραπάνω για την απλούστερη περίπτωση της μη αβελιανής συμμετρίας SU(2) και μετέπειτα για κάθε αβελιανή ομάδα έχουμε:

Το φερμιονικό πεδίο είναι μια isospin διπλέττα

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

το οποίο κάτω από έναν SU(2) μετασχηματισμό γίνεται:

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-i\epsilon_i(x)\frac{\tau_i}{2}} \psi \quad (2.32)$$

με την αντίστοιχη συναλλοίωτη παράγωγο:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i \quad (2.33)$$

όπου  $g_2$  η σταθερά ζεύξης,  $\frac{\tau_i}{2}$  οι τρεις γεννήτορες της ομάδας SU(2) και  $\tau_i$  οι τρεις πίνακες του Pauli:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ και } \epsilon_{ijk} \text{ οι σταθερές δομής.} \quad (2.34)$$

Δουλεύοντας αντίστοιχα με την αβελιανή περίπτωση απαιτούμε η συναλλοίωτη παράγωγος να μετασχηματίζεται όπως και η  $\psi$  δηλαδή

$$D_\mu \psi \rightarrow (D_\mu \psi)' = U(\theta) D_\mu \psi \quad (2.35)$$

και συνεπώς ότι:

$$(\partial_\mu - ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_\mu^{i'}) (U(\theta) \psi) = U(\theta) (\partial_\mu - ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i) \psi. \quad (2.36)$$

και τελικά για πολύ μικρές αλλαγές  $\theta(x) \ll 1$

$$U(\theta) \cong 1 - i \frac{\tau \theta(x)}{2} \quad (2.37)$$

παίρνουμε:

$$W_\mu^i \rightarrow W_\mu^{i'} = W_\mu^i + \frac{1}{g_2} \partial_\mu \theta_i - \epsilon_{ijk} \theta_j W_\mu^k \quad (2.38)$$

Δουλεύοντας ακριβώς με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να γενικεύσουμε για κάθε μη αβελιανή ομάδα. Κατ' αντίστοιχία για τη συμμετρία SU(3) παίρνουμε:

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha_i(x) \frac{\lambda_i}{2}} \psi \quad (2.39)$$

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ig_3 \frac{\lambda_i}{2} G_\mu^i \quad (2.40)$$

$$G_\mu^i \rightarrow G_\mu^{i'} = G_\mu^i + \frac{1}{g_3} \partial_\mu \alpha_i - f_{ijk} \alpha_j G_\mu^k \quad (2.41)$$

## 16 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. PATH INTEGRAL ΦΟΡΜΑΛΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΕΣ ΒΑΘΜΙΔΑΣ

και τώρα μπορούμε να γράψουμε την αντίστοιχη πλήρη Λανγκρανζιανή της μη Αβελιανής Θεωρίας Βαθμίδας για την  $SU(3)$  και να γενικεύσουμε για κάθε μη αβελιανή θεωρία:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \\
 & - \frac{1}{4}(\partial_\mu G_\nu^i - \partial_\nu G_\mu^i)(\partial^\mu G^{\nu j} - \partial^\nu G^{j\mu}) \\
 & + g_3 G_\mu^i \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \\
 & - g_3 f_{ijk} \partial_\mu G_\nu^i G^{j\mu} G^{k\nu} \\
 & - \frac{1}{4} g_3^2 f_{ijk} f_{ilm} G_\mu^j G_\nu^k G^{l\mu} G^{m\nu}
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Στην παραπάνω Λανγκρανζιανή και σε όλες τις Yang Mills θεωρίες μπορούμε να παρατηρήσουμε τα εξής:

- 1) Η μορφή της Λανγκρανζιανής καθορίστηκαν και πάλι πλήρως από την απλή αρχική απαίτηση τοπικής συμμετρίας βαθμίδας.
- 2) Τα μποζόνια βαθμίδας είναι άμαζα αφού δεν εμφανίζεται όρος  $G_\mu G^\mu$
- 3) Η σταθερά ζεύξης είναι η ίδια για αλληλεπιδράσεις των μποζονίων βαθμίδας μεταξύ τους (3 ή 4 boson couplings) ή με την ύλη.
- 4) Στην περίπτωση της  $SU(3)$  τα μποζόνια βαθμίδας είναι τα γκλουόνια και τα αντίστοιχα φερμιόνια είναι τα κουάρκ.



# Κεφάλαιο 3

## Στοιχεία Θεωρίας Επανακανονικοποίησης

Αν θεωρήσουμε περιπτώσεις μη μηδενικής τάξης της θεωρίας διαταραχών, εμφανίζονται βρόχοι στα διαγράμματα Feynman και κατ' επέκταση απειρισμοί στα αντίστοιχα ολοκληρώματα. Ο στόχος του παρόντος κεφαλαίου είναι να δώσει κάποια συνοπτικά στοιχεία για το πως ακριβώς μπορούμε να αποφύγουμε αυτούς τους απειρισμούς και τέλος να εισάγει την έννοια των μεταβλητών σταθερών ζεύξης και της ομάδας επανακανονικοποίησης που θα συναντήσουμε παρακάτω. Θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με απειρισμούς που αφορούν στις πολύ υψηλές ορμές ( $UV$ ).

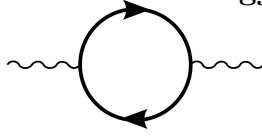
### 3.1 Αποκλίνοντα διαγράμματα και απειρισμοί

Για να κάνουμε μια εισαγωγή με παραδείγματα θα αναφερθούμε στην Κβαντική ηλεκτροδυναμική της οποίας τα μόνα σωματίδια/ διαδότες είναι τα ηλεκτρόνια και τα φωτόνια. Χαρακτηριστικά αποκλίνοντα διαγράμματα είναι:

**Το self energy** διάγραμμα του ηλεκτρονίου:



Το self energy διάγραμμα του φωτονίου:



Το διάγραμμα διόρθωσης ενός βρόχου στον κόμβο της QED



Παρακάτω θα δούμε συγκεκριμένα πώς να επανακανονικοποιούμε μέχρι τάξης ενός βρόχου. Πρίν προχωρήσουμε όμως θα δούμε μια ανάλυση για το πώς υπολογίζουμε τον επιφανειακό βαθμό απόκλισης ενός διαγράμματος Feynman. Η γενική σχέση είναι:

$$D = dL - 2P_i - E_i \quad (3.1)$$

όπου έχουμε ορίσει:

$$\begin{aligned} d &= \text{Οι διαστάσεις του χωροχρόνου} \\ L &= \text{Αριθμός βρόχων} \\ P_i &= \text{Αριθμός εσωτερικών φωτονικών γραμμών} \\ E_i &= \text{Αριθμός εσωτερικών φερμιονικών γραμμών} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Όπως είναι προφανές αυτό ισούται με τη διαφορά των δυνάμεων της ορμής στον αριθμητή και τον παρονομαστή. Ας θυμηθούμε πως κάθε διάγραμμα Feynman γράφεται γενικά:

$$A = \int \frac{\partial^4 k_1 \dots \partial^4 k_n}{\gamma^\mu k_i \dots k_j^2 k_l^2} \quad (3.3)$$

Αν εισάγουμε έναν UV cut off όρο στο πάνω όριο της ολοκλήρωσης ώστε να κατανοήσουμε καλύτερα μπορούμε εύκολα να δούμε ότι για:

$$\begin{aligned} D > 0 &\Rightarrow A \propto \Lambda^D \text{ και συνεπώς το } A \text{ αποκλίνει} \\ D = 0 &\Rightarrow A \propto \log(\Lambda) \text{ και συνεπώς το } A \text{ αποκλίνει λογαριθμικά} \\ D < 0 &\Rightarrow \text{το } A \text{ συκλίνει} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Αλλά η παραπάνω ανάλυση αποτυγχάνει αρχικά να περιγράψει με ακρίβεια τη συμπεριφορά ενός διαγράμματος, με χαρακτηριστικότερο παράδειγμα, αυτό ενός χωρίς βρόχους και διαδότες στις 4 διαστάσεις, για το οποίο δίνει μηδέν ενώ το διάγραμμα δεν αποκλίνει. Αν λοιπόν εισάγουμε:

$$\begin{aligned} n &= \text{Αριθμός κόμβων} \\ P_e &= \text{Αριθμός εξωτερικών φωτονικών γραμμών} \\ E_e &= \text{Αριθμός εξωτερικών φερμιονικών γραμμών} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Θεωρούμε τον αριθμό των ανεξάρτητων ορμών που λόγω διατήρησης σε κάθε κόμβο είναι:

$$L = E_i + P_i - n + 1 \quad (3.6)$$

Και αφού κάθε κόμβος δίνει για τα ηλεκτρόνια δύο γραμμές που αν είναι εξωτερικά μετρούνται μια, ενώ αν είναι εσωτερικά δύο:

$$2n = 2E_i + E_e \quad (3.7)$$

Και αντίστοιχα για τα φωτόνια:

$$2n = 2P_i + P_e \quad (3.8)$$

Παίρνουμε τελικά αντικαθιστώντας στην 3.1:

$$D = d + n\left(\frac{d}{2} - 2\right) - \left(\frac{d-1}{2}\right)E_e - \left(\frac{d-2}{2}\right)P_e \quad (3.9)$$

Αν τώρα θεωρήσουμε ότι δουλεύουμε στις 4 διαστάσεις παίρνουμε:

$$D = 4 - \frac{3E_e}{2} - P_e \quad (3.10)$$

Αν εφαρμόσουμε στο self energy diagram του ηλεκτρονίου  $E_e = 2, P_e = 0 \Rightarrow D = 1$  και επαληθεύουμε από τους κανόνες του Feynman ότι το άθροισμα όλων των 1 loop PI διαγραμμάτων του είναι:

$$-i \sum(p) = (-ie)^2 \int \frac{\partial^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{i}{\gamma^\mu p_\mu - \gamma^\mu k_\mu - m} \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2} \gamma^\nu, \quad (3.11)$$

με 4 δυνάμεις του  $k$  στον αριθμητή και 3 στον παρονομαστή άρα  $D = 1$ . Αντίστοιχα για το self energy diagram του φωτονίου παίρνουμε  $D = 2$  που επαληθεύεται από τους κανόνες του Feynman:

$$-i \prod^{\mu\nu}(k) = -(-ie)^2 \int \frac{\partial^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr}(\gamma^\mu \frac{i}{\gamma^\mu p_\mu - m} \gamma^\nu \frac{i}{\gamma^\mu p_\mu - \gamma^\mu k_\mu - m}). \quad (3.12)$$

### 3.2 Διαστατική ομαλοποίηση

Οι διαδικασίες ομαλοποίησης είναι μέθοδοι απομόνωσης των αποκλίσεων στα ολοκληρώματα Feynman, ώστε να διευκολύνθει μετέπειτα η διαδικασία της επανακανονικοποίησης. Υπάρχουν αρκετές τέτοιες μέθοδοι, όπως για παράδειγμα η εισαγωγή ενός cut off όρου στον φωτονικό διαδότη:

$$\frac{1}{k^2} \longrightarrow \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2} = \frac{\Lambda^2}{k^2(k^2 - \Lambda^2)} \quad (3.13)$$

στις οποίες μετέπειτα παίρνουμε το όριο  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Παρόμοια είναι και η ομαλοποίηση Pauli-Villars στην οποία εισάγεται ένα φανταστικό μαζικό πεδίο  $M$ . Παρόλα αυτά και οι δύο αυτές μέθοδοι είναι εξαιρετικά προβληματικές στις μη αβελιανές θεωρίες.

Στη διαστατική ομαλοποίηση υπολογίζουμε όλα τα αντίστοιχα ολοκληρώματα Feynman σε  $d$  διαστάσεις, οπότε και θα έχουμε όλο και πιο συγκλίνοντα διαγράμματα. Τέλος, παίρνουμε το όριο  $d \rightarrow 4$  και παίρνουμε ένα αποτέλεσμα που είναι πεπερασμένο και ξεχωριστά τον απειρισμό. Αν γράψουμε τη Λανγκρανζιανή της Κβαντικής Ηλεκτροδυναμική με τον παράγοντα  $\mu^{\frac{4-d}{2}}$  ώστε όλοι οι όροι να έχουν τις σωστές διαστάσεις μάζας, παίρνουμε:

$$L = \bar{\psi}(x)i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) - e\mu^{\frac{4-d}{2}}A_\mu\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (3.14)$$

Ας το εφαρμόσουμε τώρα σε ένα από τα βασικά αποκλίνοντα διαγράμματα αυτό του SELF ENERGY διαγράμματος του  $e$ :

$$\begin{aligned} \sum(p) &= ie^2\mu^{4-d} \int \frac{\partial^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma_\mu(p-k+m)}{[(p-k)^2 - m^2]k^2} = \\ &= ie^2\mu^{4-d} \int_0^1 \partial z \int \frac{\partial^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma_\mu(p-k+m)}{[(p-k)^2 z - m^2 z + k^2(1-z)]^2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

όπου κάναμε χρήση του

$$\frac{1}{[(p-k)^2 - m^2]k^2} = \int_0^1 \frac{\partial z}{[(p-k)^2 z - m^2 z + k^2(1-z)]^2} \quad (3.16)$$

Κάνοντας τις πράξεις και θέτοντας  $\epsilon=4-d$  στη συνάρτηση  $\Gamma$  -με πόλο στο 0 παίρνουμε τελικά:

$$\begin{aligned} \sum(p) &= -\frac{e^2}{16\pi^2}\Gamma(\epsilon/2) \int_0^1 \partial z (2p(1-z) - 4m - \epsilon[p(1-z) + m]) \\ &\times \left( \frac{-m^2 z + p^2 z(1-z)}{4p\mu^2} \right)^{-\epsilon/2} = \\ &= \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}(-p + 4m) + \text{πεπερασμενους } \acute{\omicron}\text{ρους} \end{aligned} \quad (3.17)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε από τη συνάρτηση Γάμμα:

$$\begin{aligned}\Gamma(-n + \epsilon) &= -\frac{(-1)^n}{n!} \left[ \frac{1}{\epsilon} + \psi_1(n+1) + O(\epsilon) \right] \implies \\ \Gamma(1 - d/2) &= \Gamma(-1 + \epsilon/2) = -\frac{2}{\epsilon} - 1 + \gamma + O(\epsilon)\end{aligned}\quad (3.18)$$

με

$$\gamma = -\psi_1(1) = 0.577 \quad (3.19)$$

και

$$\psi_1(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma \quad (3.20)$$

Οι πεπερασμένοι όροι άν και πολύπλοκοι δεν επηρεάζονται από τη διάσταση του χώρου και την παράμετρο  $\epsilon$ , αλλά εξαρτώνται από την αυθαίρετη μάζα  $\mu$  που εισάγαμε αρχικά στην Λανγκρανζιανή (και πλέον θα αγνοούνται).

Με την ίδια ακριβώς -επίπονη- μέθοδο το μπορούμε να καταλήξουμε σε αντίστοιχα αποτελέσματα και για άλλες περιπτώσεις διαγραμμάτων.

### 3.3 Επανακανονικοποίηση

Σε συνέχεια της παραπάνω μεθόδου πρέπει να βρούμε τρόπο να ξαναγράψουμε την Λανγκρανζιανή με κάποιο τρόπο ώστε να εξαφανίσουμε τους όρους που απειρίζονται εισάγοντας νέους όρους (counter terms). Η μέθοδος αυτή ονομάζεται Minimal Subtraction Scheme.

$$\begin{aligned}\Gamma^2(p) &= S_F(p)^{-1} - \sum(p) = \gamma^\mu p_\mu - m - \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}(-\gamma^\mu p_\mu + 4m) \\ &= \gamma^\mu p_\mu \left(1 + \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}\right) - m \left(1 + \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}\right)\end{aligned}\quad (3.21)$$

όπου αντικαταστήσαμε προφανώς την 3.17 και παρατηρούμε ότι οι ρουντερ τερμς που θα εισάγουμε θα πρέπει επίσης να είναι μη πεπερασμένοι. Η γυμνή Λανγκρανζιανή θα πρέπει να γραφεί βάση των κανονικοποιημένων πεδίων με την προσθήκη ενός έξτρα όρου ως:

$$L_1^{bare} = i(1 + B)\bar{\psi}\partial_\mu\psi - (m + A)\bar{\psi}\psi \quad (3.22)$$

οπότε αρκεί να επιλεγούν τα A, B (για την πιο απλή περίπτωση σε τάξη  $e^2$  ώστε να δίνουν πεπερασμένο propagator:

$$\frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}(\gamma^\mu p_\mu + 4m) + A - B\gamma^\mu p_\mu \quad (3.23)$$

### 22ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΕΠΑΝΑΚΑΝΟΝΙΚΟΠΟΙΗΣΗΣ

και προφανώς:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{me^2}{2\pi^2\epsilon} \\ B &= -\frac{e^2}{8\pi^2\epsilon} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Ορίζουμε τώρα τη γυμνή κυματοσυνάρτηση:

$$\psi_{bare} = \sqrt{1+B}\psi_r = \sqrt{Z_2}\psi_r \quad (3.25)$$

και γράφουμε την Λανγκρανζιανή:  $i\bar{\psi}_b\gamma^\mu\partial_\mu\psi_b - m_b\bar{\psi}_b\psi_b$

όπου:

$$m_b = \frac{m+A}{Z_2} = m\left(1 - \frac{3e^2}{8\pi^2\epsilon}\right) = m + \delta m \quad (3.26)$$

Παρατηρούμε ότι η γυμνή μάζα είναι διαφορετική από τη φυσική κάτι που δεν περιμένουμε να συμβαίνει στην περίπτωση πχ του vacuum polarization. Στην περίπτωση αυτή ο φωτονικός διαδότης τροποποιείται ως εξής:

$$D_{\mu\nu}(k) = -\frac{g_{\mu\nu}}{k^2}\left(1 - \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon} - \frac{e^2k^2}{60\pi^2m^2}\right) - \frac{e^2k_\mu k_\nu}{6\pi^2\epsilon k^4} + \dots \quad (3.27)$$

Η γυμνή Λανγκρανζιανή στην περίπτωση αυτή θα γράφεται:

$$L_b = -\left(\frac{1}{4} + \frac{C}{4}\right)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \dots = -\frac{Z_3}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (3.28)$$

ενώ στην περίπτωση της συνάρτησης κόμβου:

$$L_b = -(1+D)e\mu^{\epsilon/2}A^\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi = -Z_1e\mu^{\epsilon/2}A^\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \quad (3.29)$$

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι  $Z_3 = Z_1$  και συνεπώς συνδυάζοντας όλες τις παραπάνω παίρνουμε την ολική Λανγκρανζιανή:

$$\begin{aligned} L &= i\bar{\psi}_b\gamma^\mu\partial_\mu\psi_b \\ &\quad - m_b\bar{\psi}_b\psi_b \\ &\quad - e\mu^{\epsilon/2}Z_3^{-1/2}A_b^\mu\bar{\psi}_b\gamma_\mu\psi_b \\ &\quad - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_{\nu b} - \partial_\nu A_{\mu b})^2 \end{aligned} \quad (3.30)$$

### 3.4 Μεταβλητές σταθερές ζεύξης και συναρτήσεις β

Για να κάνουμε μια εισαγωγή στις μεταβλητές σταθερές ζεύξης αρκεί να συγκρίνουμε την αρχική μορφή μιας απλής QED αλληλεπίδρασης που είναι η:

$$L = -\bar{\psi}\gamma^\mu e A_\mu \psi \text{ και της αντίστοιχης γυμνής ποσότητας} \quad (3.31)$$

$$L = -e\mu^{\epsilon/2} Z_3^{-1/2} A_b^\mu \bar{\psi}_b \gamma_\mu \psi_b$$

Προφανώς οι ποσότητες που έχουν κάποιο φυσικό νόημα από πλευράς αλληλεπιδράσεων και διεργασιών είναι οι κανονικοποιημένες και όχι οι αρχικές ποσότητες της Λανγκρανζιανής. Οπότε και το φυσικό φορτίο όπως θα το λέμε, ουσιαστικά περιγράφει την ένταση με την οποία αλληλεπιδρούν δυο φορτισμένα σωματίδια. Αυτό που γίνεται σαφές από την παραπάνω εξίσωση είναι ότι το φορτίο αυτό πλέον δεν είναι σταθερό, αλλά μεταβάλλεται ανάλογα με τον παράγοντα  $\mu$  που εισάγαμε αυθαίρετα και αναπαριστά την ενεργειακή κλίμακα στην οποία βρισκόμαστε.

Εν ολίγοις, οι μεταβλητές σταθερές ζεύξης είναι οι σταθερές ζεύξης αλληλεπιδράσεων μεταξύ δύο σωματιδίων των οποίων η τιμή εξαρτάται από την ενεργειακή κλίμακα στην οποία εξετάζονται. Για την περίπτωση του ηλεκτρικού φορτίου πιο συγκεκριμένα αν παραγωγίσουμε την προηγούμενη εξίσωση και αντικαθιστώντας  $\epsilon=0$  παίρνουμε:

$$\mu \frac{\partial e}{\partial \mu} = \frac{e^3}{12\pi^2} \quad (3.32)$$

με λύση:

$$e^2(\mu) = \frac{e^2(\mu_0)}{1 - \frac{e^2(\mu_0) \ln \frac{\mu}{\mu_0}}{6\pi^2}} \quad (3.33)$$

στην οποία προφανώς το  $e$  αυξάνει καθώς αυξάνει το  $\mu$ , δηλαδή η ενεργειακή κλίμακα.

**Οι συναρτήσεις β** Η συνάρτηση  $\beta$  στην περίπτωση της Κβαντικής ηλεκτροδυναμικής ορίζεται ως η διαφορική εξίσωση του φορτίου που παρουσιάσαμε παραπάνω, δηλαδή:

$$\beta(e) = \mu \frac{\partial e}{\partial \mu} \quad (3.34)$$

Αντίστοιχα ισχύουν και για την περίπτωση των μη Αβελιανών θεωριών και των υπόλοιπων σταθερών ζεύξης με τη διαφορά ότι στη μη αβελιανή περίπτωση, οι σταθερές ζεύξης μειώνονται με την αύξηση της ενεργειακής κλίμακας τείνοντας

### 24ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΕΠΑΝΑΚΑΝΟΝΙΚΟΠΟΙΗΣΗΣ

ασυμπτωτικά προς το μηδέν. Οι συναρτήσεις  $\beta$  που περιγράφουν αυτές τις σταθερές έχουν τη μορφή:

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \left[ \frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} n_f C(r) \right] \quad (3.35)$$

όπου  $C$  οι τελεστές Casimir και  $n_f$  ο αριθμός των φερμιονικών γεύσεων.



# Κεφάλαιο 4

## Το καθιερωμένο πρότυπο

Για να περιγράψουμε τα στοιχειώδη σωματίδια και τις αλληλεπιδράσεις που γνωρίζουμε μέχρι σήμερα χρειαζόμαστε τρεις εσωτερικές συμμετρίες και κατά συνέπεια τρεις αντίστοιχες θεωρίες βαθμίδας. Το ευθύ γινόμενο των δύο απλούστερων ομάδων  $U(1)$ ,  $SU(2)$  αποτελεί το καθιερωμένο πρότυπο των Ηλεκτρασθενών αλληλεπιδράσεων, το οποίο είναι και το καλύτερα ορισμένο κομμάτι της θεωρίας μας και περιγράφει τις ηλεκτρασθενείς και ασθενείς πυρηνικές δυνάμεις. Συνδυαζόμενο με την ομάδα  $SU(3)$  που περιγράφει την κβαντική χρωμοδυναμική -ισχυρές πυρηνικές δυνάμεις- μας δίνει τελικά αυτό που αποκαλούμε Καθιερωμένο Πρότυπο (ΚΠ) στη σωματιδιακή φυσική.

### 4.1 Το καθιερωμένο πρότυπο των ηλεκτρασθενών αλληλεπιδράσεων

Σύμφωνα με τα προηγούμενα οι ομάδες  $SU(2)$  και  $U(1)$  από μόνες τους, δεν είναι σε θέση να περιγράψουν ενοποιημένα τις ηλεκτρασθενείς αλληλεπιδράσεις. Με δεδομένο ότι χρειαζόμαστε τέσσερις γεννήτορες έχει ενδιαφέρον να μελετήσουμε το ευθύ γινόμενό τους. Η ομάδα που δημιουργείται είναι η  $SU(2) \times U(1)$  και όπως θα δούμε, καταφέρνει να περιγράψει με εξαιρετική ακρίβεια τις ηλεκτρασθενείς αλληλεπιδράσεις.

Θα αρχίσουμε κάνοντας μια παρουσίαση όλων των υλικών πεδίων και των πεδίων βαθμίδας της θεωρίας:

Τα υλικά πεδία είναι οι τρεις γενιές λεπτονίων και κουάρκ. Οι δεξιόστροφες συνιστώσες τους σχηματίζουν αναπαραστάσεις με ασθενές ισοτοπικό σπιν  $I = 0$  σε singlets. Οι αριστερόστροφες πάλι σχηματίζουν αναπαραστάσεις με ασθενές ισοτοπικό σπιν  $I = \frac{1}{2}$  σε doublets. Η επιλογή των αντίστοιχων συνιστωσών

γίνεται με:

$$\begin{aligned}\psi_L &= \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi \\ \psi_R &= \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi,\end{aligned}\tag{4.1}$$

ενώ ακολουθείται πάντα η σχέση που συνδέει το υπερφορτίο με τη προβολή του ασθενούς ισότοπικού σπιν και του ηλεκτρικού φορτίου:

$$Y = 2Q - 2I^3\tag{4.2}$$

Συγκεντρωτικά λοιπόν έχουμε:

$$l_L^i = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L\tag{4.3}$$

$$Q_L^i = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L\tag{4.4}$$

$$l_R^i = e_R, \mu_R, \tau_R\tag{4.5}$$

$$v_R^i = \nu_R, c_R, t_R\tag{4.6}$$

$$d_R^i = d_R, s_R, b_R\tag{4.7}$$

Στα πεδία βαθμίδας τώρα, έχουμε ένα πεδίο  $B_\mu$  που αντιστοιχεί στον γεννήτορα της  $U(1)$  και αφορά στις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις. Αντίστοιχα η ομάδα  $SU(2)$  έχει τρία πεδία που αντιστοιχούν σε τρεις γεννήτορες. Όλα τα πεδία βαθμίδας είναι μποζόνια με σπιν ένα και όπως είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο δίνονται από:

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu\tag{4.8}$$

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g_2 \varepsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c\tag{4.9}$$

Πιο συγκεκριμένα τα πεδία που συνδέονται με τους  $SU(2)$  τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας σχηματίζουν την αναπαράσταση:

$$W_\mu = \begin{pmatrix} W_\mu^1 \\ W_\mu^2 \\ W_\mu^3 \end{pmatrix}\tag{4.10}$$

Ορίζοντας τώρα τις πιο 'βολικές' για εμάς καταστάσεις που αφορούν στις φορτισμένες και αφόρτιστες αντίστοιχα:

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2), \quad W_\mu^0 = W_\mu^3\tag{4.11}$$

μπορούμε να μελετήσουμε τους όρους της Λανγκρανζιανής που αφορούν στις U(1) και SU(2) αλληλεπιδράσεις:

$$\mathcal{L} = - \sum_f \bar{f} i \gamma^\mu (i g_1 \frac{Y}{2} B_\mu + i g_2 \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i) f \quad (4.12)$$

Αναπτύσσοντας τη, για να μελετήσουμε αρχικά την ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση παίρνουμε χωριστά τα κομμάτια της Λανγκρανζιανής που αφορούν στις U(1) και SU(2) αλληλεπιδράσεις:

$$L_f(U(1)) = \frac{g_1}{2} [Y_L (\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L + \bar{e}_L \gamma^\mu e_L) + Y_R \bar{e}_R \gamma^\mu e_R + Y_L' (\bar{u}_L \gamma^\mu u_L + \bar{d}_L \gamma^\mu d_L) + Y_R' \bar{u}_R \gamma^\mu u_R + Y_R'' \bar{d}_R \gamma^\mu d_R] B_\mu \quad (4.13)$$

$$L_f(SU(2)) = \frac{g_2}{2} [\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L W_\mu^o + \sqrt{2} \bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L W_\mu^+ + \sqrt{2} \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L W_\mu^- - \bar{e}_L \gamma^\mu e_L W_\mu^o + \bar{u}_L \gamma^\mu u_L W_\mu^o + \sqrt{2} \bar{u}_L \gamma^\mu d_L W_\mu^+ + \sqrt{2} \bar{d}_L \gamma^\mu u_L W_\mu^- - \bar{d}_L \gamma^\mu d_L W_\mu^o] \quad (4.14)$$

συγκρίνουμε τους όρους αλληλεπίδρασης του ηλεκτρονίου και του αντίστοιχου νετρίνου με τη Λανγκρανζιανή της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης του ηλεκτρονίου:

$$\mathcal{L}_{EM} = -e (\bar{e}_L \gamma^\mu e_L + \bar{e}_R \gamma^\mu e_R) A_\mu \quad (4.15)$$

,όπου  $A_\mu$  το πεδίο του φωτονίου.

Επίσης συνδυάζοντας τις δύο εξισώσεις παίρνουμε τους όρους αλληλεπίδρασης για το ηλεκτρόνιο και το νετρίνο:

$$\bar{e}_L \gamma^\mu e_L (\frac{g_1}{2} Y_L B_\mu - \frac{g_2}{2} W_\mu^o) + \bar{e}_R \gamma^\mu e_R (\frac{g_1}{2} Y_R B_\mu) \quad (4.16)$$

$$\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L (\frac{g_1}{2} Y_L B_\mu - \frac{g_2}{2} W_\mu^o) \quad (4.17)$$

Έχοντας απαιτήσει ορθογωνιότητα παίρνουμε τα νέα κανονικοποιημένα πεδία:

$$Z_\mu = \frac{g_2 W_\mu^o - g_1 Y_L B_\mu}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2 Y_L^2}} = \cos(\theta_W) W_\mu^o - \sin(\theta_W) B_\mu \quad (4.18)$$

$$A_\mu = \frac{-g_1 Y_L W_\mu^o + g_2 B_\mu}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2 Y_L^2}} = \sin(\theta_W) W_\mu^o + \cos(\theta_W) B_\mu \quad (4.19)$$

στα οποία αντικαταστήσαμε τις τιμές του υπερφορτίου για τα φερμιόνια και εισαγάγαμε τη γωνία μείξης  $\theta_W$  των ηλεκτρασθενών αλληλεπιδράσεων:

$$\sin \theta_W = \frac{g_1}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}}, \quad \cos \theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}} \quad (4.20)$$

Τα νέα πεδία γράφονται τώρα ως:

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^o \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

Αναπτύσσοντας περαιτέρω ως προς τα πεδία  $Z_\mu$  και  $W_\mu$  τελικά παίρνουμε τις εκφράσεις:

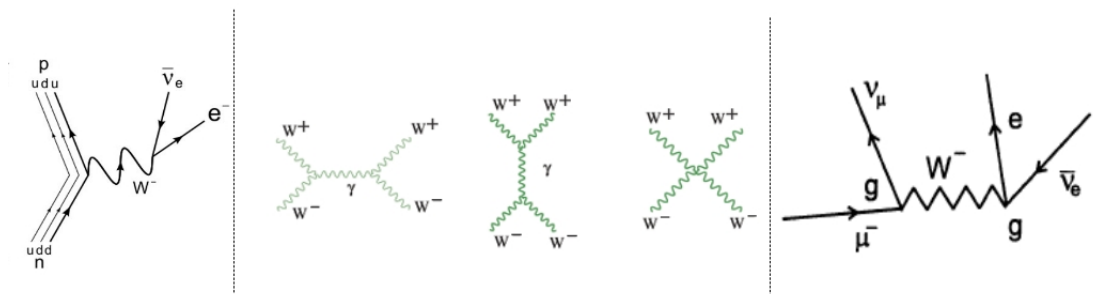
Για τα **ουδέτερα ρεύματα** παίρνουμε από την Λανγκρανζιανή, μέσω της αλληλεπίδρασης του πεδίου  $Z$  με τα φερμιόνια τη γενική έκφραση:

$$\frac{g_2}{\cos \theta_W} [\bar{f}_L \gamma^\mu f_L (T_{3f} - Q_f \sin^2 \theta_W) + \bar{f}_R \gamma^\mu f_R (-Q_f \sin^2 \theta_W)] \quad (4.22)$$

Για τα **φορτισμένα ρεύματα** η αντίστοιχη έκφραση που παίρνουμε είναι:

$$\frac{g_2}{\sqrt{2}} [(\bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L + \bar{\nu}_L \gamma^\mu d_L) W_\mu^+ + (\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L) W_\mu^-] \quad (4.23)$$

Τέλος έχει ενδιαφέρον να αναφέρουμε πως λόγω της μη αβελιανότητας της ομάδας  $SU(2)$  τα μποζόνια βαθμίδας είναι δυνατό να αλληλεπιδράσουν μεταξύ τους μια και εμφανίζονται όροι ζευγαρώματος τρίτης και τέταρτης τάξης στη Λανγκρανζιανή.



Σχήμα 4.1: W boson

## 4.2 Κβαντική Χρωμοδυναμική

Η τρίτη εσωτερική συμμετρία των στοιχειωδών σωματιδίων μπορεί να περιγραφεί από την ομάδα  $SU(3)$  που αφορά στο νέο βαθμό ελευθερίας που είναι το 'χρώμα'. Κάθε κουάρκ μπορεί να υπάρξει σε μια από τρεις καταστάσεις χρώματος: Κόκκινο R, Πράσινο G ή Μπλέ B. Οι καταστάσεις χρώματος είναι δέσιμες, δηλαδή δεν μπορούν να υπάρξουν ελεύθερες στη φύση. Οι συνδυασμοί που εμφανίζονται είναι  $qqq$  ή  $q\bar{q}$ , ώστε να είναι πάντα χωρίς χρώμα.

Οι φορείς της ισχυρής αυτής αλληλεπίδρασης είναι τα 8 άμαζα γκλουόνια τα οποία συνδέονται με τους γεννήτορες της ομάδας, τους  $3 \times 3$  πίνακες Gell-Mann:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

Αντίστοιχα με τους πίνακες του Pauli οι πίνακες Gell-Mann είναι ερμιτιανοί και έχουν ίχνος μηδέν. Ικανοποιούν την άλγεβρα της ομάδας  $SU(3)$

$$[\frac{\lambda_i}{2}, \frac{\lambda_j}{2}] = if_{ijk} \frac{\lambda_k}{2} \text{ και,}$$

$$f_{123} = 1, f_{147} = \frac{1}{2}, f_{516} = \frac{1}{2}, f_{246} = \frac{1}{2}, f_{257} = \frac{1}{2}, f_{345} = \frac{1}{2}, f_{637} = \frac{1}{2}$$

$$f_{458} = \frac{\sqrt{3}}{2}, f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Το κομμάτι της Λανγκρανζιανής που αφορά -σύμφωνα με τα προηγούμενα- στην Κβαντική Χρωμοδυναμική είναι:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{col}^{n_f} \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m)q - \frac{1}{2}tr[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}] \quad (4.26)$$

με  $n_f$  τις 6 γεύσεις των κουαρκ και τον δείκτη "col" να τρέχει πάνω σε όλα.

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_3 f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c \quad (4.27)$$

$$D_\mu = (\partial_\mu - i \frac{g_3 \lambda^a G_\mu^a}{2}) \quad (4.28)$$

Η QCD είναι μια μη αβελιανή θεωρία και συνεπώς στη Λανγκρανζιανή εμφανίζονται όροι αλληλεπίδρασης μεταξύ των γκλουονίων -κόμβοι 3 και 4-

Εν αντιθέσει όμως με τις ηλεκτρασθενείς αλληλεπιδράσεις πιστεύουμε πως τα γκλουόνια είναι άμαζα όπως προβλέπεται αρχικά από τη θεωρία και συνεπώς δεν υπάρχει η ανάγκη να προσθέσουμε αυθαίρετα όρους μάζας ή να θεωρήσουμε πως έχουμε αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας.

Τέλος για να κλείσουμε έχει ενδιαφέρον να αναφέρουμε ότι τα κουάρκ σε πολύ μικρές αποστάσεις (υψηλές ενέργειες) αλληλεπιδρούν ασθενώς, ενώ όσο οι αποστάσεις αυξάνονται οι αλληλεπιδράσεις γίνονται εξαιρετικά ισχυρές. Αυτή η συμπεριφορά αναφέρεται ως 'ασυμπτωτική ελευθερία' και λόγω αυτής τα κουάρκ εμφανίζονται σε δέσμιες καταστάσεις. Δηλαδή με μορφή  $(R)(G)(B)$  ή  $(color)(color)$ .

**Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση** Στην ως τώρα περιγραφή του μοντέλου όλα τα πεδία είναι άμαζα. Γνωρίζουμε όμως -πειραματικά-, πως αυτό δεν ισχύει για τα μποζόνια βαθμίδας των Ηλεκτρασθενών αλληλεπιδράσεων και φυσικά δεν ισχύει για τα φερμιόνια. Αν αποπειραθούμε να προσθέσουμε αυθαίρετα όρους μάζας, θα παραβιαστεί η συμμετρία  $SU(2) \times U(1)$ . Όσο αφορά στα φερμιόνια και τις αντίστοιχες μάζες τους έχουμε συγκεκριμένα:

$$m_f \bar{f} f = m_f \left( \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) + \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \right) = m_f (\bar{f}_R f_L + \bar{f}_L f_R) \quad (4.29)$$

αναλύοντας απλά στις προβολές τους. Αυτός ο όρος είναι μη αναλλοίωτος μια και οι αριστερόστροφες συνιστώσες είναι doublets, ενώ οι δεξιόστροφες singlets. Για τον λόγο αυτό χρειαζόμαστε ένα μηχανισμό που θα δίνει 'φυσικά' μάζες στα  $W^\pm$  και  $Z$ , ενώ θα αφήνει τα γκλουόνια και το φωτόνιο άμαζα.

### 4.3 Το θεώρημα Goldstone

Ως εισαγωγή για τον μηχανισμό Higgs στο Καθιερωμένο Πρότυπο θα ξεκινήσουμε θεωρώντας ένα πραγματικό βαθμωτό πεδίο  $\phi$  με Λανγκρανζιανή:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \frac{1}{4} \lambda \phi^4 \quad (4.30)$$

όπου  $\mu$  ο όρος μάζας και  $\lambda$  η σταθερά ζεύξης. Όροι με δυνάμεις μεγαλύτερες του τέσσερα είναι μη επανακανονικοποιήσιμες.

Αν  $\lambda$  και  $\mu^2$  είναι θετικά τότε το ελάχιστο του δυναμικού είναι  $\langle 0 | \phi^2 | 0 \rangle = 0$  και η Λανγκρανζιανή περιγράφει απλά ένα σωματίδιο μάζας  $\mu$  και spin μηδέν.

Αλλά αν  $\mu^2 < 0$ , τότε το δυναμικό έχει ελάχιστο:

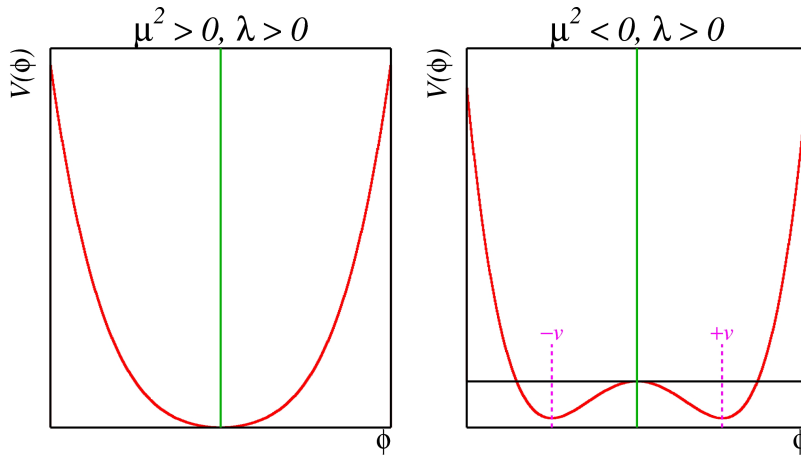
$$\langle 0|\phi^2|0\rangle = -\frac{\mu^2}{\lambda} = v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} \quad (4.31)$$

Η τιμή  $v$  του  $\phi$  ονομάζεται αναμενόμενη τιμή του  $\phi$  ως προς το κενό.

Για να μελετήσουμε τι συμβαίνει στην περιοχή του ελαχίστου ορίζουμε  $\phi(x) = v + \eta$ , όπου το  $\eta$  παριστάνει κβαντικές διεγέρσεις γύρω από το κενό. Επειδή η αρχική Λανγκρανζιανή είναι αναλλοίωτη στον μετασχηματισμό  $\phi \rightarrow -\phi$ , μπορούμε επίσης να γράψουμε  $\phi(x) = -v + \eta$ . Εισάγωντας το νέο πεδίο στην Λανγκρανζιανή παίρνουμε:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta - \mu^2\eta^2 - \sqrt{-\mu^2\lambda}\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda\eta^4 + const. \quad (4.32)$$

Αρχικά παρατηρούμε πως έχει χαθεί η αρχική συμμετρία  $\phi \rightarrow -\phi$  μια και πλέον εμφανίζονται κυβικοί όροι, αφού η αρχική εκλογή του κενού  $\phi=v$ , αντί για  $\phi=-v$  την έχει έχει σπάσει. Η παραπάνω Λανγκρανζιανή περιγράφει ένα φυσικό βαθμωτό πεδίο μάζας  $m^2 = -2\mu^2$  και δύο όρους αυτοζευγαρώματος: έναν κυβικό με ένταση  $u\sqrt{2\lambda}$  και τον  $\eta^4$  με ένταση  $\frac{1}{4}\lambda$ .



Σχήμα 4.2: Σπάσιμο συμμετρίας - Goldstone

Αντίστοιχα θα εξετάσουμε και την λίγο πιο σύνθετη περίπτωση το ενός μιγαδικού βαθμωτού πεδίου:

$\phi = \frac{(\phi_1 + i\phi_2)}{\sqrt{2}}$  με Λανγκρανζιανή:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)^2 - \left[ \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{1}{4}\lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 \right] \quad (4.33)$$

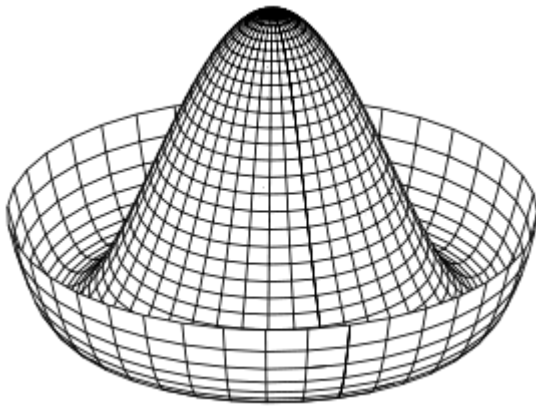
με εκτεταμένη U(1) συμμετρία. Με παρόμοιο τρόπο η βασική κατάσταση βρίσκεται στο ελάχιστο δυναμικό και πάλι έχουμε τις περιπτώσεις:

α) για  $\mu^2 > 0$  τότε έχουμε ελάχιστο στο  $\phi = \phi^* = 0$  με το  $\mu$  να παριστάνει τη μάζα των πεδίων

β) για  $\mu^2 < 0$  τότε έχουμε ελάχιστο στο  $|\phi|^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda} = \frac{v^2}{2}$  το οποίο γραφικά βρίσκεται κατά μήκος της περιφέρειας του κύκλου  $|\phi| = \frac{v}{\sqrt{2}}$ . Γύρω από αυτό το σημείο λοιπόν εφαρμόζουμε διαταραχές με τη μορφή:

$$\phi(x) = \eta(x)e^{i\theta(x)}, \text{ και συνεπώς } \phi(x) = \left[ \frac{v + h(x)}{\sqrt{2}} \right] e^{i\theta(x)}, \quad (4.34)$$

με  $h$  και  $\theta$  τα δυο φυσικά πεδία για τα οποία:  $\langle 0|h|0 \rangle = 0$ ,  $\langle 0|\theta|0 \rangle = 0$ .



Σχήμα 4.3: Σπάσιμο συμμετρίας μιγαδικού βαθμωτού πεδίου -Ελάχιστα



Η Λανγκρανζιανή τώρα παίρνει τη μορφή:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - \left( \frac{v+h}{\sqrt{2}} \right)^2 \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - (\lambda v^2 h^2 + \lambda v h^3 + \frac{1}{4} \lambda h^4) + const. \quad (4.35)$$

και παρατηρούμε ότι το πεδίο  $h$  έχει μάζα ίση με  $m_h^2 = 2\lambda v^2$ , ενώ το πεδίο  $\theta$  είναι άμαζο. Άρα από το σπάσιμο της συμμετρίας έχουν προκύψει ένα άμαζο και ένα μαζικό βαθμωτό πεδίο.

Συνεπώς καταλήγουμε πως *‘Για κάθε αυθόρμητα σπασμένη συμμετρία, η θεωρία περιέχει άμαζα βαθμωτά σωματίδια που ονομάζονται μποζόνια Goldstone. Ο αριθμός τους είναι ίσος προς τον αριθμό των σπασμένων γεννητόρων’*. (Θεώρημα Goldstone)

Την ίδια ακριβώς διαδικασία μπορούμε να ακολουθήσουμε στη περίπτωση μιας doublet βαθμωτών μιγαδικών πεδίων, η οποία είναι και η περίπτωση του μηχανισμού Higgs.

## 4.4 Ο μηχανισμός Higgs στο καθιερωμένο πρότυπο

Όπως αναφέραμε και παραπάνω υπήρχε η ανάγκη στη θεωρία του καθιερωμένου προτύπου να αποδοθούν μάζες στα  $W^\pm$  και  $Z$  μποζόνια, αφήνοντας όμως ταυτόχρονα το φωτόνιο άμαζο. Συνεπώς θέλουμε να σπάσουμε τρεις από τους τέσσερις γεννήτορες της  $U(1) \times SU(2)$ , η οποία όμως σε αντίθεση με τα παραπάνω παραδείγματα, είναι μη αβελιανή και περιμένουμε ότι το φωτόνιο τελικά θα προκύπτει μέσα από κάποιο συνδυασμό από τα αρχικά άμαζα μποζόνια βαθμίδας. Τέλος δε μας ενδιαφέρει να σπάσουμε την  $SU(3)$  συμμετρία μια και αποτελεί όπως αναφέραμε μια ακριβή συμμετρία βαθμίδας.

Για να ξεκινήσουμε εισάγουμε την  $SU(2)$  δυάδα βαθμωτών πεδίων, μια και χρειαζόμαστε τουλάχιστον τρεις βαθμούς ελευθρίας:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^o \end{pmatrix} \text{ και } Y_\phi = +1 \quad (4.36)$$

με τα  $\phi^+$  και  $\phi^o$  να είναι αντίστοιχα:

$$\phi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \text{ και } \phi^o = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_3 + i\phi_4) \quad (4.37)$$

και το αντίστοιχο δυναμικό:

$$V(\phi) = \mu^2 \phi^+ \phi + \lambda \phi^+ \phi, \quad (4.38)$$

Αντίστοιχα με τα προηγούμενα για  $\mu^2 < 0$  το ελάχιστο συμβαίνει για:

$$\phi^+ \phi = -\frac{\mu^2}{2\lambda} = \frac{v^2}{2}. \quad (4.39)$$

Αναπτύσσοντας την ουδέτερη συνιστώσα του  $\phi$ , επιλέγουμε:

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = 0 \text{ και συνεπώς:}$$

$$\langle 0|\phi|0\rangle = \phi_o = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

Αναπτύσσουμε γύρω από το κενό και γράφουμε το  $\phi(x)$ :

$$\phi(x) = e^{i\frac{\tau_3\theta_3(x)}{v}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \theta_2 + i\theta_1 \\ v + H - i\theta_3 \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

Αντικαθιστώντας τώρα στη Λανγκρανζιανή:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) - \frac{1}{2}\mu^2\phi^\dagger\phi - \frac{1}{4}\lambda\phi^\dagger\phi^2 \quad (4.42)$$

με

$$D_\mu = \partial_\mu - \frac{1}{2}ig_1B_\mu - ig_2\frac{\tau_i}{2}W_\mu^i \quad (4.43)$$

και κάνοντας χρήση των πεδίων  $W_\mu^\pm, Z_\mu$  και  $A_\mu$ , που ορίσαμε προηγουμένως:

$$W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) \quad (4.44)$$

$$Z_\mu = \frac{g_2W_\mu^3 + g_1Y_LB_\mu}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}} \quad (4.45)$$

$$A_\mu = \frac{-g_1Y_LW_\mu^3 + g_2B_\mu}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}} \quad (4.46)$$

παίρνουμε τελικά:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H = & \frac{1}{2}(\partial_\mu H)^2 + \frac{1}{4}g_2^2v^2W_\mu^+W^{\mu-} + \frac{1}{4}v^2(g_1^2 + g_2^2)Z_\mu^2 - \lambda v^2H^2 + \frac{g_2^2vH}{2}W_\mu^+W^{\mu-} \\ & + \frac{g_2^2H^2}{4}W_\mu^+W^{\mu-} + \frac{v(g_2^2 + g_1^2)}{4}Z_\mu Z^\mu - \lambda vH^3 - \frac{\lambda H^4}{4} \end{aligned} \quad (4.47)$$

Όπως μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε, οι μάζες των μποζονίων είναι:

$$M_{W^\pm} = \frac{g_2v}{2}, \quad M_Z = \frac{v\sqrt{g_2^2 + g_1^2}}{2} \quad (4.48)$$

ενώ το φωτόνιο έχει παραμείνει άμαζο μια και δεν εμφανίζεται όρος της μορφής  $A_\mu A^\mu$ . Συνεπώς καταφέραμε με το αυθόρμητο σπάσιμο της  $SU(2) \times U(1)$  συμμετρίας να δώσουμε μάζα στα μποζόνια βαθμίδας  $Z$  και  $W$ , που απορρόφησαν τα τρία Goldstone μποζόνια, ενώ το φωτόνιο παραμένει άμαζο.

#### 4.4.1 Μάζες φερμιονίων

Αυτό που ακολουθεί λογικά είναι το να εξετάσουμε αν με τον παραπάνω μηχανισμό μπορούμε να δώσουμε μάζα και στα φερμιόνια του καθιερωμένου προτύπου. Για να το κάνουμε αυτό εισάγουμε ένα κομμάτι στη Λανγκρανζιανή που αφορά στις αλληλεπιδράσεις των φερμιονίων και των πεδίων  $\phi$ , αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας  $SU(2) \times U(1)$ . (Εδώ θα αναφερθούμε μόνο στα φερμιόνια της πρώτης οικογένειας. Ανάλογα δουλεύουμε και για τα υπόλοιπα.)

Εισάγουμε το πεδίο

$$\phi^c = i\tau_2 \phi^* = \begin{pmatrix} \phi^{o*} \\ -\phi^- \end{pmatrix} \text{ με } \Upsilon = -1 \quad (4.49)$$

ώστε να μπορέσουμε να δώσουμε μάζα στο  $u$  κουαρκ. Οι όροι  $g_e, g_d, g_u$  είναι οι λεγόμενοι όροι Yukawa. Συνεπώς:

$$\mathcal{L} = -g_e(\bar{l}\phi e_R + \bar{e}_R\phi^+ l) - g_d(\bar{q}\phi d_R + \bar{d}_R\phi^+ q) - g_u(\bar{q}\phi^c u_R + \bar{u}_R\phi^{c+} q) \quad (4.50)$$

Αντικαθιστώντας όπως και στον μηχανισμό Higgs στη Λανγκρανζιανή με τα πεδία:

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ και } \phi^c = \begin{pmatrix} \frac{v+H(x)}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ αντίστοιχα παίρνουμε τελικά: } \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{g_e v}{\sqrt{2}}(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) - \frac{g_d v}{\sqrt{2}}(\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L) - \frac{g_u v}{\sqrt{2}}(\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L) \\ & - \frac{g_e H}{\sqrt{2}}(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) - \frac{g_d H}{\sqrt{2}}(\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L) - \frac{g_u H}{\sqrt{2}}(\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L) \end{aligned} \quad (4.52)$$

με προφανείς όρους μάζας:

$$m_e = \frac{g_e v}{\sqrt{2}}, m_d = \frac{g_d v}{\sqrt{2}}, m_u = \frac{g_u v}{\sqrt{2}} \quad (4.53)$$

Το σημαντικό πρόβλημα σε αυτό το κομμάτι της θεωρίας είναι πως οι σταθερές Yukawa, όπως και ο όρος ζεύξης  $\lambda$  είναι αυθαίρετες σταθερές και κατ'επέκταση δε μπορούν να υπολογιστούν θεωρητικά οι μάζες των φερμιονίων και αυτή του Higgs.

### 4.4.2 Τα σωματίδια Z, W

Έχουμε συνεπώς καταλήξει στις εκφράσεις που μας δίνουν τις μάζες των ενδιάμεσων διανυσματικών μποζονίων Z, W και σε εκφράσεις για τις μάζες των φερμιονίων και του Higgs. Όπως όμως αναφέραμε και προηγουμένως οι σταθερές  $g_f$  Yukawa όπως και η σταθερά ζεύξης  $\lambda$  του όρου  $\phi^4$  του Higgs είναι αυθαίρετες και συνεπώς οι μάζες των σωματιδίων δεν μπορούν να προβλεφθούν θεωρητικά, παρά μόνο να περιοριστούν σε κάποια όρια από απαιτήσεις και/ή πειραματικά δεδομένα.

Στην περίπτωση των διανυσματικών μποζονίων όμως, με βάση πειραματικά δεδομένα που έχουμε από τη διάσπαση του μιονίου για τη σταθερά του Fermi

$$G = \frac{g_2^2}{4\sqrt{2}M_W^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}v^2 \quad (4.54)$$

μπορούμε να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή  $v$  ως προς το κενό:

$$v \simeq 246 \text{ GeV} \quad (4.55)$$

και κατ' επέκταση μπορούμε να προβλέψουμε θεωρητικά τις μάζες των:

$$M_W = 78,6 \text{ GeV}, \quad M_Z = 89,3 \text{ GeV} \quad (4.56)$$

που φυσικά έχουν επιβεβαιωθεί πειραματικά με μεγάλη ακρίβεια. Αξίζει εδώ να αναφέρουμε ότι οι ασθενείς αλληλεπιδράσεις αναφέρονται ως 'ασθενείς', ακριβώς επειδή το  $G_{Fermi}$  είναι πολύ μικρό. Αντίστοιχα μπορούμε να πούμε πως οι μάζες των W, Z είναι μεγάλες και αυτές είναι που μειώνουν σημαντικά την ένταση των ασθενών αλληλεπιδράσεων.

### 4.4.3 Το σωματίδιο Higgs

Μέχρι τώρα μελετήσαμε τους μηχανισμούς μάζας όλων των σωματιδίων στο ΚΠ εκτός από του Higgs. Εδώ θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με το μποζόνιο Higgs, όπως μπορούμε να το ερμηνεύσουμε βάση των προηγούμενων και ταυτόχρονα να θέσουμε από απλές απαιτήσεις τους περιορισμούς για την περιοχή όπου μπορεί να βρísκεται η μάζα του.

Αν παρατηρήσουμε την 7.2 θα βρούμε άμεσα τον όρο που εκφράζει τη μάζα του Higgs από τον τετραγωνικό όρο:

$$M_H^2 = 2\lambda v^2 \quad (4.57)$$

ενώ για τους όρους αλληλεπίδρασης του Higgs με τον εαυτό του έχουμε σύμφωνα με τους κανόνες του Feynman:

$$g_{H^3} = (3!)i\lambda v = \frac{3iM_H^2}{v}, \quad g_{H^4} = (3!)i\lambda = \frac{3iM_H^2}{v^2} \quad (4.58)$$

Στη Λανγκρανζιανή αυτή επίσης εμφανίζονται οι σταθερές ζεύξης με τα μποζόνια βαθμίδας και από την αντίστοιχη των φερμιονίων με τα φερμιόνια! Εύκολα μπορούμε να πάρουμε τώρα:

$$\begin{aligned} g_{HVV} &= i \frac{g_2^2 v}{2} = -2i \frac{M_W}{v} \\ g_{HHVV} &= i \frac{g_2^2}{4} = -2i \frac{M_W}{v^2} \\ g_{Hff} &= i \frac{m_f}{v} \end{aligned} \quad (4.59)$$

#### 4.4.4 Θεωρητικοί περιορισμοί στη μάζα του Higgs

Πέρα από τους περιορισμούς που έχουν τεθεί από πειράματα που διεξήχθησαν η μάζα του Higgs μπορεί να περιοριστεί από δύο απαιτήσεις:

- Η Θεωρία να μην είναι τετριμμένη
- Σταθερότητα του κενού.

Αν εξετάσουμε τις διορθώσεις ακτινοβολίας ενός βρόγχου λαμβάνοντας μόνο υπ' όψιν τις συνεισφορές του μποζονίου Higgs η μεταβολή του  $\lambda$  με την ενεργειακή κλίμακα  $Q$  που προκύπτει περιγράφεται από την εξίσωση της ομάδας επανακανονικοποίησης:

$$\frac{\partial \lambda(Q^2)}{\partial \log Q^2} = \frac{3\lambda^2(Q^2)}{4\pi^2} + \text{όροι ανώτερης τάξης} \quad (4.60)$$

Αν θέσουμε ως κλίμακα τη φυσική κλίμακα αναφοράς  $v$ , παίρνουμε:

$$\lambda(Q^2) = \lambda(v^2) \left[ 1 - \frac{3\lambda(v^2)}{4\pi^2} \log \frac{Q^2}{v^2} \right]^{-1} \quad (4.61)$$

Στην περίπτωση που θεωρήσουμε ότι η ενέργεια είναι πολύ χαμηλότερη της  $v$ ,  $Q^2 \ll v^2$ , τότε  $\lambda(Q^2) \sim \lambda(v^2)/\log(\infty) \rightarrow 0_+$  και η θεωρία μας είναι **τετριμμένη χωρίς αλληλεπιδράσεις**. Στην αντίθετη περίπτωση όπου  $Q^2 \gg v^2$ , τότε η  $\lambda(Q^2) \sim \lambda(v^2)/\log(1-1) \rightarrow \infty$ . Το σημείο απειρισμού ονομάζεται *πολος Landau* και είναι:

$$\Lambda_c = ue \frac{4\pi^2 v^2}{M_H^2} \quad (4.62)$$

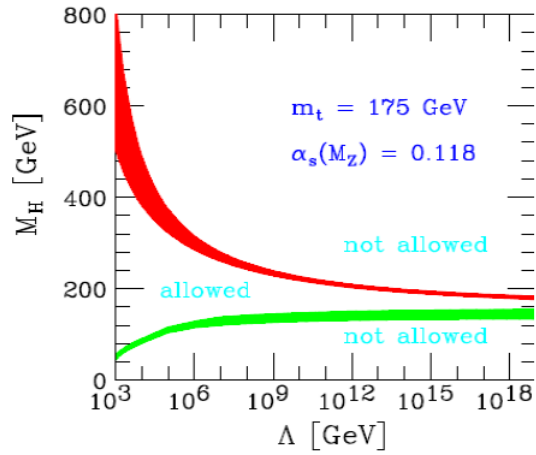
Χρησιμοποιώντας την παραπάνω έκφραση μπορούμε να υπολογίσουμε για ποιές τιμές της μάζας του Higgs, το  $\lambda$  παραμένει πεπερασμένο. Δηλαδή για  $Q^2 < \Lambda_c$  και τότε έχουμε τον περιορισμό:

$$M_H^2 \lesssim \frac{8\pi^2 v^2}{3 \log \frac{\Lambda_c}{v^2}} \quad (4.63)$$

Για παράδειγμα στην κλίμακα ενεργειών ενοποίησης,  $\Lambda_c \sim 10^{16} \text{ GeV} \implies M_H \leq 200 \text{ GeV}$ , ενώ για ενέργειες της τάξης του  $1 \text{ TeV} \implies M_H \leq 750 \text{ GeV}$ .

Στη περιοχή όπου το  $\lambda$  είναι αρκετά μεγάλο είναι λογικό να θεωρήσουμε μόνο τις συνεισφορές του Higgs, αλλά στη γενική περίπτωση θα πρέπει να συμπεριλάβουμε και τις συνεισφορές φερμιονίων και μποζονίων. Μια και οι σταθερές ζεύξης του Higgs είναι ανάλογες της μάζας, μόνο οι μάζες του κουαρκ top και των μαζικών μποζονίων θα ληφθούν υπόψη. Με δεδομένο ότι:  $\lambda_t = \sqrt{2} m_t / v$  η εξίσωση της ομάδας επανακανονικοποίησης για διορθώσεις ενός βρόγχου και  $\lambda \ll l_t, g_1, g_2$  δίνεται προσεγγιστικά:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \log Q^2} \simeq \frac{1}{16\pi^2} [12\lambda^2 - 12 \frac{m_t^4}{u^4} + \frac{3}{16} (2g_2^4 + (g_1^2 + g_2^2)^2)] \quad (4.64)$$



Σχήμα 4.4: higgs mass constraints

Θεωρώντας ξανά ως αναφορά την ηλεκτρασθενή κλίμακα  $u$ , έχει λύση:

$$\lambda(Q^2) = \lambda(u^2) + \frac{1}{16\pi^2} \left[ -12 \frac{m_t^4}{u^4} + \frac{3}{16} (2g_2^4 + (g_1^2 + g_2^2)^2) \right] \log \frac{Q^2}{u^2} \quad (4.65)$$

αν το  $\lambda$  είναι τώρα πολύ μικρό η συνεισφορά της μάζας του τοπ κουάρκ επικρατεί και έχει ως αποτέλεσμα  $\lambda(Q^2) < 0$  που οδηγεί σε δυναμικό  $V(Q^2) < V(u)$  και συνεπώς σε κενό που δεν έχει ελάχιστο και αρα δεν είναι σταθερό. Αυτό θέτει έναν ισχυρό περιορισμό της μάζας του Higgs που δίνεται από:

$$M_H^2 > \frac{v^2}{8\pi^2} \left[ -12 \frac{m_t^4}{u^4} + \frac{3}{16} (2g_2^4 + (g_1^2 + g_2^2)^2) \right] \log \frac{Q^2}{v^2} \quad (4.66)$$

Για ενέργειες της κλίμακας  $\sim 10^3 \text{ GeV} \Rightarrow M_H > 70 \text{ GeV}$ , ενώ για ενέργειες της κλίμακας ενοποίησης  $\sim 10^{16} \text{ GeV} \Rightarrow M_H > 130 \text{ GeV}$ . Τους δύο παραπάνω περιορισμούς μπορούμε να δούμε στο διάγραμμα.

## 4.5 Μίξεις φερμιονίων

Για να ολοκληρωθεί το Καθιερωμένο Πρότυπο μένει μόνο να παρουσιάσουμε τον μηχανισμό GIM και την ανάμιξη των φερμιονίων μέσω του πίνακα CKM που είναι και υπεύθυνος για την CP violation στις ηλεκτρασθενείς αλληλεπιδράσεις. Θεωρούμε και πάλι αρχικά μόνο δυο οικογένειες κουάρκ και μετά θα γενικεύσουμε. Τότε και συμφωνα με τις προηγούμενα για τα φορτισμένα ρεύματα που αφορούν στη μετάβαση από τη μια οικογένεια στην άλλη θα έχουμε:

$$J_{\text{for}} J_{\phi\phi\rho}^\mu = \bar{v}\gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} d + \bar{c}\gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} s \quad (4.67)$$

Με δεδομένο ότι τα πειραματικά δεδομένα δείχνουν ότι οι ιδιοκαταστάσεις μάζας δεν ταυτίζονται με τις ασθενείς ιδιοκαταστάσεις, μπορούμε να γράψουμε τις ασθενείς ιδιοκαταστάσεις ως συνάρτηση των ιδιοκαταστάσεων μάζας:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \quad (4.68)$$

με πίνακα μίξης

$$V = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (4.69)$$

Συνεπώς η ;; γίνεται:

$$\begin{aligned} J_{\phi\phi\rho}^\mu &= \bar{v}\gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} d \cos(\theta) + \bar{c}\gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} s \sin(\theta) \\ &\quad - \bar{c}\gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} d \sin(\theta) + \bar{v}\gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} s \cos(\theta) \end{aligned} \quad (4.70)$$



και παρατηρούμε ότι πλέον οι δυνατές μεταβάσεις δεν είναι δύο αλλά τέσσερις, όλες ανάλογες μιας γωνίας μίξης  $\theta$ , της γωνίας Cabibbo η οποία έχει μετρηθεί πειραματικά περίπου στις 13 μοίρες.

Αν κάνουμε την ίδια διαδικασία για τα ουδέτερα ρεύματα θα ανακαλύψουμε πως είναι διαγώνια και προς τις ιδιοκαταστάσεις της μάζας και προς τις ασθeneίς ιδιοκαταστάσεις. Άρα, τελικά, τα σωματίδια που συμμετέχουν στις ασθeneίς αλληλεπιδράσεις είναι σωματίδια με μάζες οι οποίες είναι γραμμικοί συνδυασμοί των ιδιοκαταστάσεων του πίνακα μάζας.

Γενικεύοντας τώρα για όλες τις οικογένειες των κουάρκ μπορούμε να γράψουμε για τα φορτισμένα ρεύματα:

$$J_{\phi}^{\mu} = (\bar{u}\bar{c}\bar{t})\gamma^{mu}P_L V \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

καταλήγουμε στον πίνακα  $V$ , Kobayashi - Maskawa ο οποίος είναι  $3 \times 3$  ορθογώνιος και συνεπώς έχει 3 πραγματικές παραμέτρους (γωνίες μίξης) οι οποίες όμως είναι ελευθερες και υπολογίζονται πειραματικά και μια φάση η οποία κάτω από την αναστροφή στο χρόνο  $e^{i\delta} \rightarrow e^{-i\delta}$  εισάγει παραβίαση της συμμετρίας  $T$ , ή ισοδύναμα της συμμετρίας  $CP$ . Εδώ αξίζει να σημειωθεί πως αυτό συμβαίνει ακριβώς επειδή υπάρχουν 3 οικογένειες κουάρκ. Στη περίπτωση που υπήρχαν μόνο δύο, η σχετική φάση δε θα ήταν απαραίτητη και δε θα υπήρχε καμία απολύτως παραβίαση συμμετρίας.

$$\begin{bmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{bmatrix}.$$

Σχήμα 4.5: KobayashiMaskawa

## 4.6 Η ανάγκη για μια μεγαλοενοποιημένη θεωρία

Έχοντας ολοκληρώσει την παρουσίαση του καθιερωμένου προτύπου έχει νόημα να κάνουμε μια αξιολόγησή του καθώς και των αποτελεσμάτων που μας δίνει. Το καθιερωμένο πρότυπο κατάφερε να δώσει ένα κοινό πλαίσιο μέσα στο οποίο μπορούμε να περιγράψουμε με μεγάλη ακρίβεια τις ασθeneίς, ηλεκτρομαγνητικές

και ισχυρές αλληλεπιδράσεις περιλαμβάνοντας όλα τα μέχρι τώρα γνωστά υλικά πεδία. Τα πειραματικά δεδομένα έχουν μέχρι σήμερα επιβεβαιώσει το μοντέλο με εξαιρετικά υψηλή ακρίβεια και το μόνο το οποίο περιμένουμε εναγωνίως είναι η τελική επιβεβαίωση (ή όχι) της ύπαρξης του ‘σωματιδίου Higgs’ και της μαζας του από το LHC. Σε αυτό το σημείο θα αναρωτιέται κανείς ότι αφού το μοντέλο είναι τόσο αποδοτικό γιατί ψάχνουμε για κάποιο να το αντικαταστήσει.

Οι λόγοι είναι αρκετοί και ξεκινάνε από την ίδια τη φύση του ΚΠ. Με λίγη προσοχή μπορεί να παρατηρηθεί πως το ΚΠ περιλαμβάνει 18(!) ανεξάρτητες παραμέτρους που είτε πρέπει να προσδιοριστούν πειραματικά, είτε να εισαχθούν ‘αυθαίρετα’ από άλλες θεωρίες. Αυτές οι παράμετροι είναι: οι 9 όροι Yukawa, οι τρεις σταθερές ζεύξης, οι 4 παράμετροι στον πίνακα KM και τα  $\lambda$ ,  $\mu$  του Higgs.

Ακόμη, με δεδομένο ότι ψάχνουμε για μια ενοποιημένη θεωρία έχει ενδιαφέρον να βρούμε την απλούστερη δυνατή ομάδα που θα περιγράφει ταυτόχρονα τις αλληλεπιδράσεις. Η παρούσα  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  είναι μάλλον κάπως πολύπλοκη, ενώ το  $SU(3)$  κομμάτι της θεωρίας είναι πρακτικά αυτόνομο, εν αντιθέσει με τα άλλα δύο. Τέλος η ομάδα αυτή θα οφείλει να παρέχει μια κοινή σταθερά ζεύξης για όλες τις αλληλεπιδράσεις, η οποία θα εξαρτάται από την ενεργειακή κλίμακα στην οποία θα εξετάζεται.

Πέρα όμως από αυτά τα προβλήματα του μοντέλου, αν το συγκρίνουμε με κοσμολογικά πειραματικά αποτελέσματα παίρνουμε μια διαφορά στην υπολογιζόμενη πυκνότητα ενέργειας στο σύμπαν της τάξης του  $10^{53}$  με τη τιμή που υπολογίσαμε για το  $v$ . Το πρόβλημα αυτό της ενέργειας του κενού αναφέρεται ως το πρόβλημα της κοσμολογικής σταθεράς.

Επίσης το ΚΠ δεν καταφέρνει να εξηγήσει το πρόβλημα της βαρυονικής ασυμμετρίας -που θα μελετήσουμε παρακάτω-, δεν προβλέπει υποψήφια σωματίδια για τη σκοτεινή ύλη και μαζικά νετρίνα και φυσικά δεν περιλαμβάνει καθόλου τη βαρύτητα.

Για τους παραπάνω λοιπόν λόγους και έχοντας ως βάση το ΚΠ μας ενδιαφέρει να αναζητήσουμε ευρύτερες θεωρίες που θα ενοποιούν όλες τις αλληλεπιδράσεις και θα λύνουν με ‘φυσικο’ τρόπο τα παραπάνω προβλήματα...

# Κεφάλαιο 5

## Πέρα από το καθιερωμένο πρότυπο

### 5.1 Το μοντέλο SU(5)

Για το ενοποιημένο μοντέλο είδαμε πως χρειαζόμαστε κάποιο, που να μπορεί να περιγράψει όλα τα υπάρχοντα φερμιόνια και μποζόνια του Καθιερωμένου Προτύπου, ενώ ταυτόχρονα να ενοποιεί τις αλληλεπιδράσεις -δηλαδή τις σταθερές ζεύξεις- σε μια κοινή. Έχουν προταθεί πολλά μοντέλα που θα μπορούσαν να περιγράψουν τα παραπάνω το πιο απλό όμως είναι το SU(5). Αυτό γιατί είναι επαρκώς μεγάλο για να περιέχει τις συμμετρίες του  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  μια και είναι τάξης τέσσερα, όσο και το ΚΠ και ταυτόχρονα δεν εισάγει νέα φερμιόνια.

Θα ξεκινήσουμε παρουσιάζοντας τη βασική δομή του μοντέλου. Κάθε αναπαράσταση κάτω από μετασχηματισμούς SU(5) μπορεί να γραφεί ως:

$$\psi_{kl\dots}^{ij\dots} \rightarrow U_m^i U_n^j U_k^s U_l^t \dots \psi_{st\dots}^{mn\dots}, \quad (5.1)$$

με όλους τους δείκτες να τρέχουν από το ένα μέχρι το πέντε και τους  $5 \times 5$  πίνακες να δίνονται από:

$$[U]_m^i = [e^{ia^a \lambda^a / 2}]_m^i \quad (5.2)$$

Οι  $\lambda^a$  για  $a = 0, 1, 2, \dots, 23$ , είναι οι γενικευμένοι  $5 \times 5$  πίνακες Gell-Mann (βλ. παράρτημα) που είναι ερμιτιανοί και έχουν ίχνος μηδέν, ώστε οι  $U$  να είναι μοναδιαίοι. Για να αποκτήσει η αναπαράσταση το  $SU(3) \times SU(2)$  περιεχόμενο του Καθιερωμένου προτύπου ορίζουμε τους τρεις πρώτους δείκτες ως δείκτες χρώματος και του υπόλοιπους δυο ως  $SU(2)$  δείκτες. Συνεπώς μπορούμε να γράφουμε τον κάθε δείκτη ως

$$i = (a, r), a = 1, 2, 3, r = 4, 5 \quad (5.3)$$

### 5.1.1 Φερμιόνια

Στο καθιερωμένο  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  μοντέλο υπάρχουν 15 αριστερόστροφα φερμιονικά πεδία δύο συνιστωσών για κάθε γενιά. Όπως κάναμε αντίστοιχα και στην παρουσίαση του ΚΠ, θα μελετήσουμε μόνο την πρώτη γενιά. Η θεωρία λοιπόν έχει ως εξής:

$$\begin{aligned}
(\nu_e, e^-)_L &: (1, 2) \\
(u_a, d_a)_L &: (3, 2) \\
e_L^+ &: (1, 1) \\
u_L^{ca} &: (3^*, 1) \\
d_L^{ca} &: (3^*, 1)
\end{aligned} \tag{5.4}$$

για τις ιδιότητες μετασχηματισμού των φερμιονίων κάτω από την  $SU(3) \times SU(2)$ . Τα παραπάνω γράφονται έτσι με δεδομένα τα όσα γνωρίζουμε από τις αλληλεπιδράσεις των σωματιδίων από το ΚΠ. Τα λεπτόνια που δε συμμετέχουν στις ισχυρές αλληλεπιδράσεις τοποθετούνται σε singlet αναπαράσταση της  $SU(3)$ , ενώ αντίθετα τα κουαρκ σε triplet. Για τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις δεν έχουμε διαφορά στον μετασχηματισμό αριστερόστροφων και δεξιόστροφων, αλλά κάτω από τη δράση της  $SU(2)$  τα δεξιόστροφα δεν επηρεάζονται. Με τον δείκτη  $c$  αναφερόμαστε στη συζυγία φορτίου:

$$\psi^c = C\gamma^0\bar{\psi} = i\gamma^2\psi^* , (\psi_R)^c = (\psi_L)^c = \psi_L^c. \tag{5.5}$$

Το αντίστοιχο περιεχόμενο των απλούστερων  $SU(5)$  αναπαραστάσεων λοιπόν είναι:

$$\begin{aligned}
\text{θεμελιώδης αναπαράσταση} &: 5 = (3, 1) + (1, 2) \\
\text{μιγαδική συζυγής αναπαράσταση} &: 5^* = (3^*, 1) + (1, 2^*) \\
\text{αντισυμμετρική } 5 \times 5 \text{ αναπαράσταση } \psi_{ij} = -\psi_{ji} &: 5 = (3^*, 1) + (3, 2) + (1, 1)
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Συνεπώς μια φερμιονική γενιά μπορεί να αναπαρασταθεί από μια αναγώγιμη αναπαράσταση  $SU(5)$ :  $5^* + 10$  ή  $5 + 10$ :

$$5^* : (\psi^i)_L = (d^{c1}d^{c2}d^{c3}e^- - \nu_e)_L, \tag{5.7}$$

$$5 : (\psi_i)_R = (d_1d_2d_3e^+ - \nu_e^c)_R, \tag{5.8}$$

$$10 : (X_{ij})_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & u^{c3} & -u^{c2} & u_1 & d_1 \\ -u^{c3} & 0 & u^{c1} & u_2 & d_2 \\ u^{c2} & -u^{c1} & 0 & u_3 & d_3 \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^+ \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & e^+ & 0 \end{pmatrix}_L \quad (5.9)$$

Στη περίπτωση της μιας γενιάς οι ιδιοκαταστάσεις βαθμίδας είναι ίδιες με αυτές τις μάζας. Όταν όμως εισαχθούν και οι υπόλοιπες γενιές, αντίστοιχα με την περίπτωση του ΚΠ οι ιδιοκαταστάσεις βαθμίδας θα δίνονται από κατάλληλους γραμμικούς συνδυασμούς των ιδιοκαταστάσεων μάζας.

### 5.1.2 Κβάντωση του ηλεκτρικού φορτίου

Μια ακόμη άμεση συνέπεια της επιβολής του μοντέλου είναι η κβάντωση του ηλεκτρικού φορτίου που παρατηρούμε πειραματικά. Αυτό συμβαίνει απλά γιατί οι ιδιοτιμές των μη αβελιανών ομάδων είναι διακριτές ενώ της  $U(1)$  συνεχείς. Μια και το ηλεκτρικό φορτίο είναι αθροιστικός κβαντικός αριθμός θα πρέπει να είναι κάποιος γραμμικός συνδυασμός των διαγώνιων γεννητόρων της ομάδας, από την:

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} = T_3 + cT_0 \quad (5.10)$$

Συνολικά υπάρχουν τέσσερις διαγώνιοι γεννήτορες της  $SU(5)$  από τους οποίους μας ενδιαφέρουν αυτοί που αναπαριστούν το  $T_3$  και το  $T_0$ . Αυτοί είναι αντίστοιχα οι:

$$\lambda^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}, \lambda^0 = \frac{1}{2\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & -3 & \\ & & & & -3 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Υπολογίζουμε τη σταθερά  $c$  μέσω της εξίσωσης του υπερφορτίου:

$$Y(5) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 1\right) = c\lambda^0 \quad (5.12)$$

η οποία μας δίνει

$$c = -\sqrt{\frac{5}{3}}. \quad (5.13)$$

Παρατηρούμε ότι στην εξίσωση 5.10 το φορτίο δεν έχει άλλες συνεισφορές πέρα από αυτές που συναντήσαμε στο ΚΠ, ενώ λόγω του  $c$  προφανώς δεν είναι

κανονικοποιημένο κατάλληλα ώστε να αποτελεί γεννήτορα της  $SU(5)$ . Για να επαληθεύσουμε τα παραπάνω υπολογίζουμε:

$$Q(\psi_i) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & & & & \\ & -\frac{1}{3} & & & \\ & & -\frac{1}{3} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = Q_i \delta_{ij}. \quad (5.14)$$

Προφανώς για τη μιγαδική συζυγή αναπαράσταση ισχύει:

$$Q(\psi^i) = -Q_i \delta_{ij} \quad (5.15)$$

και από τις ιδιότητες των τανυστών (βλ. 5.1) έχουμε:

$$Q(\psi_{ij}) = Q_i + Q_j \quad (5.16)$$

$$Q(\psi_i^j) = Q_i - Q_j \quad (5.17)$$

Αυτές όμως οι ποσότητες είναι τα διαγώνια στοιχεία του  $Q$  για τις **10** και **24** *multiplets*. Και όπως φαίνεται από την 5.14 μας δίνεται η σχέση μεταξύ χρώματος και φορτίου, μια και έχουμε απαιτήσει ίχνος μηδέν:

$$3Q_d + Q_{e^+} = 0 \quad (5.18)$$

Συνεπώς βλέπουμε πως τα κουάρκ έχουν φορτίο το  $1/3$  του λεπτονίου ακριβώς επειδή εμφανίζονται σε τρία χρώματα. Η ενοποίηση  $SU(5)$ , λοιπόν μας δίνει μια απλή και όμορφη εξήγηση για το φαινόμενο.

### 5.1.3 Μποζόνια Βαθμίδας

Η  $SU(5)$  *adjoint* αναπαράσταση είναι διάστασης  $5^2 - 1 = 24$  με μια  $SU(3) \times SU(2)$  ανάλυση:

$$24 = (8, 1) + (1, 3) + (1, 1) + (3, 2) + (3^*, 2). \quad (5.19)$$

Κάνοντας χρήση της 5.3 σύμβασης μπορούμε εύκολα να αντιστοιχίσουμε τα μποζόνια του Καθιερωμένου Προτύπου από τις εξισώσεις 4.45, 4.46, 4.44:

$A_b^a, (8, 1)$  : τα γκλουόνια  $B_b^a$ , της  $SU(3)$

$A_s^r, (1, 3)$  : τα διανυσματικά μποζόνια  $W : W_{\pm} = \frac{W^1 \mp W^2}{\sqrt{2}}$

$-\sqrt{\frac{1}{15}} A_a^a + -\sqrt{\frac{3}{20}} A_r^r, (1, 1)$  : το πεδίο  $B$  της  $U(1)$  που αντιστοιχεί στο διαγώνιο  $A_i^i$  το οποίο δεν ανήκει ούτε στην  $SU(3)$ , ούτε στην  $SU(2)$

Βλέπουμε οτι μας απομένουν 12 πεδία βαθμίδας που δεν εμφανίζονται καθόλου στο Καθιερωμένο Πρότυπο και έχουν ταυτόχρονα  $SU(3) \times SU(2)$  περιεχόμενο. Αυτά τα αναφέρουμε ως  $X, Y$  μποζόνια:

$$A_r^r : (3, 2) = (X_a, Y_a) , A_r^a : (3^*, 2) = \begin{pmatrix} X_a \\ Y_a \end{pmatrix}$$

των οποίων τα φορτία είναι αντίστοιχα:

$$Q_X = -\frac{4}{3} \text{ και } Q_Y = -\frac{1}{3}. \quad (5.20)$$

Αυτά ανταλλάσσονται σε μεταβάσεις κουάρκ - λεπτονίων και γι αυτό τον λόγο ονομάζονται λεπτοκουάρκς. Είναι τα μποζόνια με τα οποία θεωρητικά μπορεί να εξηγηθεί η διάσπαση του πρωτονίου και πιθανώς η βαρυονική ασυμμετρία στο σύμπαν.

Αν τοποθετήσουμε όλα τα  $SU(5)$  μποζόνια που εμφανίζονται σε έναν  $5 \times 5$  πίνακα:

$$A = \sum_{a=0}^{23} A^a \frac{\lambda^a}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} [G - 2B/\sqrt{30}]_b^a & X_1 & Y_1 & & \\ & X_2 & Y_2 & & \\ & X_3 & Y_3 & & \\ X_1 & X_2 & X_3 & \frac{W^3}{\sqrt{2}} + \frac{3B}{\sqrt{30}} & W^+ \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & W^- & -\frac{W^3}{\sqrt{2}} + \frac{3B}{\sqrt{30}} \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

Τώρα, προφανώς, το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας στο μοντέλο αυτό θα πρέπει να γίνεται σε δύο στάδια με τελείως διαφορετική κλίμακα μάζας λόγω των υπέρβαρων μαζών  $M_{X,Y} \gg M_{W,Z}$  και συνεπώς θα χρειαστούμε δύο multiplets πεδίων Higgs με  $u_1 \gg u_2$ . Παραστατικά θα έχουμε:

$$SU(5) \xrightarrow{u_1} SU(3) \times SU(2) \times U(1) \xrightarrow{u_2} SU(3) \times U(1)$$

#### 5.1.4 Αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας

Σύμφωνα με τα όσα μελετήσαμε στο φαινόμενο Higgs , είδαμε οτι δίνει μάζες στα μποζόνια βαθμίδας καθώς στοιχειώδη βαθμωτά πεδία αναπτύσσουν μη μηδενική αναμενόμενη τιμή στο κενό. Για να έχουμε στη θεωρία μας δύο διαφορετικές κλίμακες μάζας θα πρέπει να θεωρήσουμε δύο βαθμωτά πεδία που να δίνουν διαφορετικές αναμενόμενες τιμές ως προς το κενό. Θεωρούμε λοιπόν τα δύο πεδία  $H_i^j$  στην adjoint και διανυσματική  $\phi_i$  αναπαράσταση:

$$SU(5) \xrightarrow{\langle H \rangle} SU(3) \times SU(2) \times U(1) \xrightarrow{\langle \phi \rangle} SU(3) \times U(1) \quad (5.22)$$

Το  $SU(5)$  αναλλοίωτο δυναμικό τέταρτης τάξης είναι:

$$V(H, \phi) = V(H) + V(\phi) + \lambda_4(\text{tr}H^2)(\phi^\dagger\phi) + \lambda_5(\phi^\dagger H^2\phi). \quad (5.23)$$

$$V(H) = -m_1^2(\text{tr}H^2) + \lambda_1(\text{tr}H^2)^2 + \lambda_2(\text{tr}H^4), \quad (5.24)$$

$$V(\phi) = -m_2^2(\phi^\dagger\phi) + \lambda_3(\phi^\dagger\phi)^2. \quad (5.25)$$

όπου θέσαμε της διακριτές συμμετρίες  $H \rightarrow -H$  και  $\phi \rightarrow -\phi$  για να απαλλαγούμε από τους όρους τρίτης τάξης. Ο  $H$  είναι ερμιτιανός πίνακας με ίχνος μηδέν.

Για να σπάσουμε δύο φορές τη συμμετρία ψάχνουμε αρχικά τιμές του  $H$  διαφορετικές του μηδέν για δυναμικά με  $\phi = 0$ . Έπειτα ψάχνουμε για βαθύτερα κενά του δυναμικού για πολύ μικρές τιμές του  $\phi$ . Αποδεικνύεται ότι για  $\lambda_2 > 0$  και  $\lambda_1 > -\frac{7}{30}\lambda_2$ , το  $V(H)$  έχει ακρότατο για  $H = \langle H \rangle$  με:

$$\langle H \rangle = v_1 \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & -3 & \\ & & & & -3 \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

με

$$v_1^2 = \frac{m_1^2}{(60\lambda_1 + 14\lambda_2)}. \quad (5.27)$$

Αντίστοιχα με την πίνακα που δημιουργήσαμε στην 5.21 ορίζουμε:

$$H' = H - \langle H \rangle = \begin{pmatrix} [H_8]_b^a - 2H_0/\sqrt{30} & & & H_{X_1} & H_{Y_1} \\ & & & H_{X_2} & H_{Y_2} \\ & & & H_{X_3} & H_{Y_3} \\ H_{X_1}^\dagger & H_{X_2}^\dagger & H_{X_3}^\dagger & & \\ H_{Y_1}^\dagger & H_{Y_2}^\dagger & H_{Y_3}^\dagger & [H_3]_s^r + \frac{3H_0}{\sqrt{30}} & \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

Το φάσμα μαζών τώρα δίνεται από τη δεύτερη παράγωγο του δυναμικού στο  $H = \langle H \rangle$ . Μια και η  $H$  είναι adjoint αναπαράσταση η συναλλοίωτη παραγωγος γράφεται:

$$D_\mu H = \partial_\mu H + ig[A_\mu, H] = \partial_\mu H' + ig[A_\mu, \langle H \rangle] \quad (5.29)$$

Ο κινητικός όρος  $|D_\mu H|^2$  κατά τα γνωστά του ΚΠ θα περιέχει έναν όρο της μορφής  $g^2|[A_\mu, \langle H \rangle]|^2$ , που θα είναι ο όρος μάζας για τα μποζόνια βαθμίδας. Από την 5.26 βλέπουμε ότι ο  $H$  μετατίθεται με τους γεννήτορες της υποομάδας



$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  και συνεπώς δεν εμφανίζονται όροι μάζας για τα πεδία  $G, W, B$ . Τα  $X, Y$  μποζόνια όμως αποκτού μάζα αφού 'απορροφήσουν' τα δυνητικά *goldstone*  $H_X, H_Y$  και τελικά παίρνουμε:

$$M_X = M_Y = \sqrt{\frac{25}{2}} g v_1. \quad (5.30)$$

Το γεγονός ότι η  $H$  αναπτύσσει μη μηδενική αναμενόμενη τιμή στο κενό επηρεάζει και τα βαθμωτά πεδία  $\Phi$  μέσω των  $\lambda_4, \lambda_5$  (βλ.5.23). Τα  $(\phi_a, \phi_r)$  (τριπλέττα χρώματος, διπλέττα γεύσης) θα αποκτούν συνεπώς όρους μάζας:

$$m_t^2 = -m_2^2 + (30\lambda_4 + 4\lambda_5)v_1^2 \quad (5.31)$$

$$m_d^2 = -m_2^2 + (30\lambda_4 + 9\lambda_5)v_1^2 \quad (5.32)$$

δηλαδή μετά το πρώτο στάδιο του αυθόρμητου σπασίματος συμμετρίας όλες οι μη μηδενικές μάζες θα είναι της τάξης του  $v_1 \sim M_X$ . Για το δεύτερο στάδιο, στη κλίμακα των  $250\text{GeV}$  χρειαζόμαστε μια  $SU(2)$  διπλέττα βαθμωτών πεδίων ( $\phi_d$ ). Υποθέτουμε ότι ισχύει  $m_d^2 \ll M_X^2$  και συνεπώς τα πεδία  $\phi_d$  θα επιβιώνουν, ενώ τα πολύ βαρύτερα σωματίδια θα παύουν να ζευγαρώνουν με τα υπόλοιπα σωματίδια. Στο κεφάλαιο της βαρυονικής ασυμμετρίας εξηγήουμε αναλυτικά το πώς η διαστολή του σύμπαντος, οδηγεί σε πτώση της θερμοκρασίας και μειώνει το ρυθμό παραγωγής των  $X, Y$ , έτσι ώστε μετά από κάποιο χρονικό διάστημα να παύουν να υπάρχουν και πρακτικά να επιβιώνουν μόνο τα ελαφρά σωματίδια της θεωρίας μας. Για αυτά θα έχουμε ένα δυναμικό της μορφής:

$$V_{eff}(\phi_d) = -m_d^2 \phi^\dagger \phi + \lambda_3 (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (5.33)$$

που δεν είναι άλλο από το κλασσικό δυναμικό Higgs του Καθιερωμένου Προτύπου. Συνεπώς:

$$\langle \phi_d \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{m_d^2}{\lambda_3}} \simeq 250\text{GeV} \quad (5.35)$$

Όπως θα δούμε το πρόβλημα στα παραπάνω είναι ότι το μοντέλο αυτό με τα δύο διαδοχικά σπασίματα συμμετρίας απαιτεί:

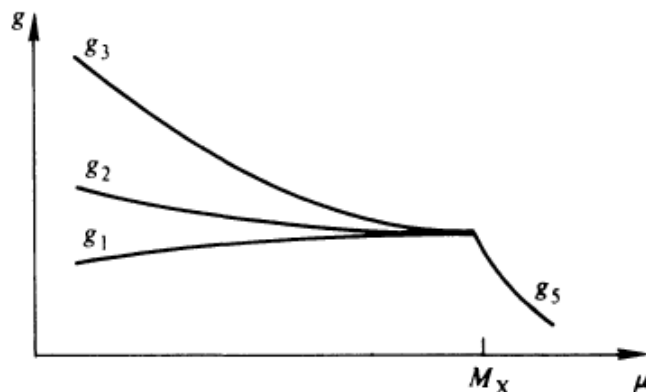
$$v_1 \gtrsim 10^{12} v_2 \quad (5.36)$$

!

### 5.1.5 Ενοποίηση των σταθερών ζεύξης

Μια από τις απαιτήσεις μας για μια ενοποιημένη θεωρία είναι η ύπαρξη μιας κοινής σταθεράς ζεύξης, ή πιο απλά η ενοποίηση των γνωστών αλληλεπιδράσεων σε μια. Από ότι είδαμε προηγουμένως για να γίνει κάτι τέτοιο πρέπει να μελετήσουμε καταστάσεις σε ενέργειες πολύ υψηλότερες από αυτές του καθιερωμένου προτύπου το οποίο, όπως είδαμε, περιγράφει τις ισχυρές, ασθενείς και ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις στην περιοχή ενεργειών των  $\sim 10^2 \text{GeV}$  με διαφορετικές σταθερές ζεύξης για κάθε ομάδα  $SU(3)$ ,  $SU(2)$ ,  $U(1)$ , με  $g_3$ ,  $g_2$ ,  $g_1$  αντίστοιχα. Εδώ έχει ενδιαφέρον να σχολιάσουμε πως στα μέχρι τώρα πειράματα που έχουν γίνει σε υψηλές ενέργειες και βασιζόμενοι στις εξισώσεις της ομάδας επανακαονικοποίησης δεν προβλέπεται κοινό σημείο τομής των σταθερών ζεύξης, παρά μόνο αν εισάγουμε υπερσυμμετρικές προεκτάσεις στη θεωρία μας.

Παρόλα αυτά η παρούσα ανάλυση θεωρεί πως υπάρχει μια κοινή σταθερά  $g$  για το  $SU(5)$  και τις υποομάδες του και η δυνατότητα να υπάρχουν διαφορετικές σταθερές ζεύξης για κάθε ομάδα σε χαμηλές ενέργειες οφείλεται στο αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας.



Σχήμα 5.1: coupling constant unification  $SU(5)$

Πριν προχωρήσουμε παραπέρα στην ανάλυση θα κάνουμε κάποιες ποιοτικές παρατηρήσεις για την ενοποίηση:

- Η ενεργειακή αναλογία των σταθερών ζεύξης είναι λογαριθμική και συνεχώς στην ενεργειακή περιοχή του καθιερωμένου προτύπου οι σταθερές είναι διαφορετικές. Για να υπάρξει ενοποίηση περιμένουμε η  $M_Q$  να είναι πολλές τάξεις μεγαλύτερη από αυτή.
- Από τις εξισώσεις της ομάδας επανακανονικοποίησης είδαμε ότι όσο αυξάνεται η ενέργεια ο ρυθμός μείωσης των σταθερών ζεύξης αυξάνεται σε μεγαλύτερες μη αβελιανές ομάδες, ενώ στις αβελιανές ομάδες η σταθερά ζεύξης αυξάνεται με την ενέργεια. Συνεπώς, σε ενέργειες μικρότερες της  $M_Q$  αναμένουμε  $g_3 > g_2 > g_1$  κάτι το οποίο έχει όπως γνωρίζουμε επαληθευτεί και πειραματικά.
- Η παραδοχή ότι οι τρεις σταθερές ζεύξης έχουν κοινό σημείο, συνεπάγεται ότι οι σχετικές τους εντάσεις σε ενέργειες μικρότερες της  $M_Q$  υπόκεινται σε πολύ αυστηρά περιορισμένες σχέσεις. Το αποτέλεσμα αυτών είναι η πρόβλεψη της γωνίας μίξης των ηλεκτρασθενών αλληλεπιδράσεων.

Οι συναλλοίωτες παράγωγοι του καθιερωμένου προτύπου και της  $SU(5)$  αντίστοιχα είναι:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu + ig_2 \sum_{r=1}^3 \frac{\tau_r}{2} W_\mu^r + ig_3 \sum_1^8 \frac{\lambda_a}{2} G_\mu^a \quad (5.37)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + ig \sum_{a=0}^{23} \frac{A_\mu^a \lambda^a}{2} \quad (5.38)$$

Για να μελετήσουμε τις σταθερές ζεύξης πρέπει πρώτα να δούμε την κανονικοποίηση των γεννητόρων της κάθε ομάδας. Για τις μη αβελιανές  $SU(5)$ ,  $SU(3)$ ,  $SU(2)$  έχουμε αντίστοιχα:

$$tr(\lambda^a \lambda^b) = 2\delta^{ab} = tr(\lambda^a \lambda^b) = 2\delta^{ab} \text{ και } tr(\tau^r \tau^m) = 2\delta^{rm}$$

Έχουμε απαιτήσει  $g = g_1 = g_2 = g_3$  και για την αβελιανή  $U(1)$  το πεδίο της  $B_\mu$  πριν τη μίξη με την  $SU(2)$  ταυτοποιείται με το πεδίο  $A_\mu^0$ :

$$ig_1 \lambda^0 A_\mu^0 = ig' Y B_\mu \quad (5.39)$$

Σε αντίθεση με της μη αβελιανές ομάδες η  $U(1)$  δεν έχει κάποιο περιορισμό στην κανονικοποίηση του γεννητόρα της και έτσι οι  $\Psi$  και  $\lambda$  είναι αρχικά ανεξάρτητες. Αν όμως σε αυτό το σημείο απαιτήσουμε για την αναπαράσταση:

$$5 : (\psi_i)_R = (d_1 d_2 d_3 e^+ - \nu_e^c)_R, \quad (5.40)$$

να έχει τελεστή υπερφορτίου:

$$Y = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & & & & \\ & -\frac{2}{3} & & & \\ & & -\frac{2}{3} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

Αλλά γνωρίζουμε το:

$$\lambda^0 = \frac{1}{2\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & -3 & \\ & & & & -3 \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

και συνεπώς προκύπτει η σχέση:

$$g_1 \lambda^0 = g' Y \quad (5.43)$$

από την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε άμεσα:

$$Y = -\sqrt{\frac{5}{3}} \lambda^0 \text{ και } g' = -\sqrt{\frac{3}{5}} g_1 \quad (5.44)$$

Αντικαθιστώντας στη γωνία μίξης των ηλεκτρασθενών αλληλεπιδράσεων προκύπτει:

$$\sin^2(\theta_W) = \frac{g'^2}{g'^2 + g^2} = \frac{3}{8} \quad (5.45)$$

Προφανώς τα παραπάνω ισχύουν στην ενεργειακή περιοχή  $\mu > M_X$ . Σε αυτή τη περιοχή, όπως είπαμε, δε μπορούμε να διασταυρώσουμε με πειραματικά δεδομένα, οπότε έχει ενδιαφέρον να κάνουμε προβλέψεις για  $\mu < M_X$ . Όπως είδαμε στις μεταβλητές σταθερές ζεύξης οι σταθερές ζεύξης των  $SU(N)$  ομάδων δίνονται από τις εξισώσεις της ομάδας επανακανονικοποίησης:

$$\frac{\partial g_i}{\partial(\ln \mu)} = -b_n g_n^3 \quad (5.46)$$

όπου:

$$b_n = \frac{(11n - 2N_F)}{48\pi^2}, \quad b_1 = -\frac{2N_F}{48\pi^2} \text{ και συνεπώς: } b_n - b_1 = \frac{11n}{48\pi^2} \quad (5.47)$$

Αν αγνοήσουμε τις συνεισφορές Higgs και θέτοντας όπου  $N_F = 6$  για τρεις γενιές quark για  $g_1, g_2, g_3$  παίρνουμε:

$$\frac{1}{g_1^2(\mu)} = \frac{1}{g_1^2\mu(0)} + 2b_1 \ln\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right) \quad (5.48)$$

$$\frac{1}{g_2^2(\mu)} = \frac{1}{g_2^2\mu(0)} + 2b_2 \ln\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right) \quad (5.49)$$

$$\frac{1}{g_3^2(\mu)} = \frac{1}{g_3^2\mu(0)} + 2b_3 \ln\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right) \quad (5.50)$$

και μια και βρισκόμαστε σε περιοχή χαμηλών ενεργειών μπορούμε να αντικαταστήσουμε κατά τα γνωστά  $\tan(\theta_W) = \frac{g'}{g}$ ,  $e = \sin(\theta_W)$  και  $g' = -\sqrt{\frac{3}{5}}g_1$ . Οι παραπάνω εξισώσεις με τη βοήθεια των:

$$\begin{aligned} \frac{g_1^2(\mu)}{4\pi} &= \frac{5\alpha(\mu)}{3\cos^2(\theta_W)} \\ \frac{g_2^2(\mu)}{4\pi} &= \frac{\alpha(\mu)}{\sin^2(\theta_W)} \\ \frac{g_3^2(\mu)}{4\pi} &= \alpha_s(\mu) \end{aligned} \quad (5.51)$$

και του όριου  $\mu_0 \rightarrow M_X$  στο οποίο ισχύουν  $g_1 = g_2 = g_3 = g$  και  $g^2/4\pi = a_5$  μετατρέπονται στις πιο οικείες:

$$\frac{3}{5\alpha(\mu)} \cos^2(\theta_W) = \frac{1}{a_5} + a\pi b_1 \ln\left(\frac{\mu}{M_X}\right) \quad (5.52)$$

$$\frac{1}{\alpha(\mu)} \sin^2(\theta_W) = \frac{1}{a_5} + a\pi b_2 \ln\left(\frac{\mu}{M_X}\right) \quad (5.53)$$

$$\frac{1}{\alpha_s(\mu)} = \frac{1}{a_5} + a\pi b_3 \ln\left(\frac{\mu}{M_X}\right) \quad (5.54)$$

Αν τώρα για να βρούμε μια έκφραση μόνο με τα  $\theta_W$ ,  $\alpha(\mu)$  πάρουμε τον γραμμικό συνδυασμό:  $5.52 - 2 \times 5.53 + 3 \times 5.54$  έχουμε:

$$2\frac{1}{\alpha_s(\mu)} - \frac{3}{\alpha(\mu)} \sin^2(\theta_W) + \frac{3}{5\alpha(\mu)} \cos^2(\theta_W) = 0 \quad (5.55)$$

αφού από 5.47:  $[2(b_3 - b_1) - 3(b_2 - b_1)] = 0$  Από το πρώτο μέλος λοιπόν της εξίσωσης παίρνουμε για τη γωνία  $\theta_W$  την έκφραση:

$$\sin^2(\theta_W) = \frac{1}{6} + \frac{5\alpha(\mu)}{9\alpha_s(\mu)} \quad (5.56)$$

Με αντίστοιχο γραμμικό συνδυασμό παίρνουμε επίσης μια εκτίμηση για την κλίμακα ενοποίησης  $M_Q$ :

$$\ln\left(\frac{M_X}{\mu}\right) = \frac{\pi}{11} \left[ \frac{1}{\alpha(\mu)} - \frac{8}{3\alpha_s(\mu)} \right] \quad (5.57)$$

. Αν τώρα συμπεριλάβουμε τις συνεισφορές και μετά από πιο ακριβείς υπολογισμούς οι οποίοι περιλαμβάνουν και τις συνεισφορές υψηλότερης τάξης higgs καταλήγουμε στις εκτιμήσεις:

$$M_X \simeq 4 \times 10^{14} GeV \quad (5.58)$$

$$\sin^2(\theta_W) \simeq 0.21 \quad (5.59)$$

που βρίσκεται σε καλή συμφωνία με τα πειραματικά αποτελέσματα.

## 5.2 Μια βασική εισαγωγή στην Υπερσυμμετρία

Το μοντέλο  $SU(5)$  αν και σίγουρα είναι πολύ ελπιδοφόρο, με την έννοια ότι μας δίνει τα εργαλεία τα οποία θα μπορούσαν να εξηγήσουν σημαντικά σημεία στα οποία δεν απαντά το ΚΠ, ταυτόχρονα δυστυχώς δημιουργεί ένα πολύ μεγάλο πρόβλημα που αφορά στην τεράστια διαφορά στις κλίμακες μαζών για τα σπασίματα συμμετρίας. Επίσης, τουλάχιστον στο μινιμουμ μοντέλο του, δεν καταφέρνει να πετύχει ενοποίηση των σταθερών ζεύξης και να προβλέψει σωστά τον χρόνο ζωής του πρωτονίου. Οπότε ανοίγει τον δρόμο σε νέες θεωρίες. Οι πιο 'κομψές' από αυτές -και πολλά υποσχόμενες- είναι οι Θεωρίες Υπερσυμμετρίας στις οποίες θα κάνουμε εδώ μια πολύ βασική εισαγωγή.

Ο πυρήνας σχέψης της υπερσυμμετρίας είναι ότι επεκτείνει τις προαναφερθείσες συμμετρίες, έτσι ώστε σε μια πολλαπλότητα να μπορούν να συνυπάρξουν και σωματίδια με διαφορετικό σπιν. Κάθε ενεργειακό επίπεδο είναι διπλά εκφυλισμένο και κάθε μποζονική κατάσταση έχει την ίδια ενέργεια με την αντίστοιχη φερμιονική που τη συνοδεύει.

Για να το δούμε λίγο πιο συγκεκριμένα ας θεωρήσουμε τους μποζονικούς και φερμιονικούς τελεστές καταστροφής και δημιουργίας και αντίστοιχα τις Χαμιλτονιανές τους.

$$[a, a^+] = 1, [a, a] = [a^+, a^+] = 0, H_b = \frac{1}{2}\omega_b(aa^+ + \frac{1}{2}) \quad (5.60)$$

$$[b, b^+] = 1, [b, b] = [b^+, b^+] = 0, H_f = \frac{1}{2}\omega_f(bb^+ - \frac{1}{2}) \quad (5.61)$$

Για την ολική Χαμιλτονιανή με τη συμμετρία  $\omega_f = \omega_b = \omega$  παίρνουμε τελικά:

$$E = \omega(n_b + n_f) \quad (5.62)$$

Ορίζοντας τώρα τους τελεστές:

$$Q = \sqrt{\omega}a^+b \text{ και } Q^+ = \sqrt{\omega}b^+a \quad (5.63)$$

Παίρνουμε εύκολα το Μηχανισμό μετατροπής φερμιονίων σε μποζόνια και αντίστροφα:

$$\begin{aligned} [Q, H] &= [Q^+, H] = 0 \\ \{Q, Q^+\} &= H \\ Q|n_b, 1\rangle &= \sqrt{n_b + 1}|n_b + 1, 0\rangle \\ Q^+|n_b + 1, 0\rangle &= \sqrt{n_b + 1}|n_b, 1\rangle \end{aligned} \quad (5.64)$$

Για να κλεισουμε την άλγεβρα της Υπερσυμμετρίας και σε αντιστοιχία με τις 5.64 θεωρούμε τέσσερεις τελεστές  $Q_a$  που σχηματίζουν έναν Majorana σπίνορα που περιγράφεται από:

$$\begin{aligned} [Q_a, M_{\mu\nu}] &= \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})_{\alpha\beta} Q_\beta \\ [Q_a, P_\mu] &= 0 \\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= 2(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu \end{aligned} \quad (5.65)$$

Μπορούμε λοιπόν ήδη με βάση αυτή την άλγεβρα να πουμε τα εξής: Για κάθε φερμιόνιο έχουμε έναν αντίστοιχο υπερσυμμετρικό συνοδό με σπιν μηδέν στην ίδια πολλαπλότητα και για κάθε μποζονικό διαδότη βαθμίδας έχουμε τον αντίστοιχο υπερσυμμετρικό με σπιν 1/2. Με αυτό τον τρόπο διπλασιάζονται τα σωματίδια του ΚΠ ενώ το MSSM πρέπει να έχει τουλάχιστον δύο δυάδες από σωματίδια Higgs με αντίθετα υπερφορτία.

Το υπερσυμμετρικό καθιερωμένο πρότυπο σε αναλογία με τα προηγούμενα μοντέλα έχει έναν διατηρούμενο πολλαπλασιαστικό αριθμό, την R ομοτιμία που ορίζεται:

$$R = (-1)^{L+3B+2S} \quad (5.66)$$

και παίρνει τιμές +1 για τα γνωστά μας σωματίδια και -1 για τα υπερσυμμετρικά. Όπου  $L$  ο λεπτονικός αριθμός,  $B$  ο βαρυονικός και  $S$  το σπιν. Προφανώς η R ομοτιμία διατηρείται όσο διατηρούνται η  $B$  και  $L$ .

Με δεδομένο όμως το γεγονός ότι δεν έχουν παρατηρηθεί τα υπερσωματίδια συνοδοί των γνωστών μας σωματιδίων θα πρέπει να θεωρήσουμε πως και η υπερσυμμετρία είναι μια σπασμένη συμμετρία. Μια ένδειξη για την κλίμακα στην οποία σπάει η υπερσυμμετρία μας δίνεται από τις κβαντικές διορθώσεις στη μάζα του σωματιδίου Higgs. Στις υπερσυμμετρικές θεωρίες οι συνεισφορές από την μποζονική και την φερμιονική διόρθωση αλληλοαναιρούνται και έτσι παίρνουμε μια τάξη μεγέθους:

$$\delta M_H^2 \approx g_2^2(m_B^2 - m_F^2) \approx M_W^2 \Rightarrow M_{Y\Sigma} \leq 1\text{TeV} \quad (5.67)$$

Ο φυσικότερος τρόπος, θα ήταν κατ' αναλογία με το ΚΠ, το αυθόρμητο σπάσιμο της υπερσυμμετρίας, αλλά σε ένα κρυμμένο τομέα σε πολύ υψηλές ενέργειες και με τη ζεύξη με τα σωματίδια του τομέα αυτού μεταφέρεται στα σωματίδια του ΚΠ της υπερσυμμετρίας δημιουργώντας με αυτό τον τρόπο τους όρους μάζας που παραβιάζουν την Υπερσυμμετρία και οδηγούν στο αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας του ΚΠ μέσω του μηχανισμού Higgs.



**Ενοποίηση των σταθερών ζεύξης στο MSSM** Στο υπερσυμμετρικό καθιερωμένο πρότυπο οι εξισώσεις εξέλιξης των σταθερών ζεύξης μέχρι την κλίμακα ενοποίησης είναι ίδιες με την περίπτωση του μοντέλου  $SU(5)$  με τιμές συντελεστών:

$$\begin{aligned} b_1 &= -n_f - \frac{3}{10}n_H \\ b_2 &= 6 - 2n_f - \frac{1}{2}n_H \\ b_3 &= 9 - 2n_f \end{aligned} \quad (5.68)$$

αλλά τώρα  $n_f = 3$  και  $n_H = 2$  οι οποίες προσφέρουν πράγματι τη δυνατότητα ενοποίησης για  $M_{ΥΣ} \approx 1\text{TeV}$  και κλίμακα ενοποίησης  $M_G \approx 2 \times 10^{16}\text{GeV}$  με τιμή της κοινής σταθεράς ζεύξης  $\alpha_g \approx \frac{1}{25}$

#### Συνοπτικά οι SUSY θεωρίες:

- Είναι η μοναδική πιθανή επέκταση των γνωστών συμμετριών του χωροχρόνου και των αλληλεπιδράσεων των σωματιδίων
- Προσφέρουν πολλά υποψήφια σωματίδια για την σκοτεινή ύλη
- Έχουν τη δυνατότητα ενοποίησης των σταθερών ζεύξης
- Λύνει το πρόβλημα της ιεραρχίας
- Περιλαμβάνει αναγκαστικά την βαρύτητα

#### Τα μέχρι σήμερα αρνητικά των SUSY θεωριών είναι:

- Δεν έχουν επιβεβαιωθεί πειραματικά με την ανακάλυψη κάποιου υπερσυμμετρικού σωματιδίου
- Έχουν πολλές αυθαίρετες παραμέτρους και πρέπει να περιοριστούν φαινομενολογικά.



## Κεφάλαιο 6

# Βαρυονική Ασυμμετρία

### 6.1 Η Βαρυονική Ασυμμετρία στο σύμπαν

Τα τελευταία χρόνια έχει αρχίσει και αναπτύσσεται έντονα ο επιστημονικός κλάδος της κοσμολογίας μια και μέχρι πολύ πρόσφατα στις θεωρίες που υπήρχαν, δεν υπήρχε αντιστοίχιση με πειραματικά δεδομένα. Είναι δε πλέον προφανές ότι για να αποκτήσει κάποιος μια πραγματική εικόνα για την κατάσταση του σύμπαντος σήμερα και την εξέλιξή του, απαιτείται πρώτα να έχει μια συμπαγή βάση από τις θεωρίες της σωματιδιακής φυσικής.

Το Καθιερωμένο πρότυπο που αφορά στη σωματιδιακή φυσική όμως έχει, όπως είδαμε σοβαρά κενά και στην περίπτωση που συνδεθεί με την κοσμολογία ασυμφωνίες. Χαρακτηριστικά αναφέρθηκαν: το πρόβλημα της κοσμολογικής σταθεράς, η φύση της σκοτεινής ύλης και ενέργειας και φυσικά η βαρυονική ασυμμετρία του σύμπαντος με την οποία και θα ασχοληθούμε εκτενέστερα.

Για να κάνουμε μια στοιχειώδη εισαγωγή στο τι είναι βαρυονική ασυμμετρία, ας φανταστούμε κατά την πρώιμη φάση εξέλιξης του σύμπαντος ότι υπήρχε συνεχής παραγωγή σωματιδίων και αντισωματιδίων. Το πρόβλημα έγκειται ακριβώς στο γεγονός ότι σήμερα, σύμφωνα με τις διαπιστώσεις των κοσμολόγων, ο αριθμός των βαρυονίων είναι πολύ μεγαλύτερος από αυτόν των αντιβαρυονίων. Στο επίπεδο του ηλιακού συστήματος θεωρούμε πως δεν υπάρχει συγκεντρωμένη αντιύλη, μια και αν υπήρχε θα αντιδρούσε προς παραγωγή  $\gamma$ , με τους ηλιακούς ανέμους και συνεπώς θα ήταν εντοπίσιμη. Στο επίπεδο του γαλαξία μας έχουν εντοπιστεί αντιπρωτόνια σε κοσμικές ακτινοβολίες με:

$$\frac{n_{\bar{p}}}{n_p} \simeq 10^{-4}, \quad (6.1)$$

που παράγονται από τις αντιδράσεις:

$$p + p \rightarrow 3p + \bar{p}. \quad (6.2)$$

Σε clusters γαλαξιών επίσης δεν έχει εντοπιστεί ακτινοβολία που να οφείλεται στις:

$$p + \bar{p} \rightarrow \pi^0 \dots \rightarrow \gamma\gamma. \quad (6.3)$$

Συνεπώς η παρατήρηση καταδεικνύει ότι το σύμπαν έχει ασυμμετρία μεταξύ ύλης και αντιύλης και μάλιστα την απέκτησε αρκετά νωρίς. Η εξήγηση ότι απλά η ασυμμετρία αυτή αντανακλά ασυμμετρικές αρχικές συνθήκες είναι ελάχιστα ικανοποιητική.

Το μέτρο που αναφερόμαστε στο θέμα της βαρυονικής ασυμμετρίας είναι ο βαρυονικός αριθμός του σύμπαντος. Η αριθμητική βαρυονική πυκνότητα ορίζεται ως  $n_B = n_b - n_{\bar{b}}$ , όπου  $n_b, n_{\bar{b}}$  οι αριθμητικές τιμές βαρυονικού και αντιβαρυονικού αριθμού αντίστοιχα. Οι σημερινές μετρήσεις μας δίνουν:

$$n_B = 1.13 \times 10^{-5} (\Omega h^2) cm^{-3} \quad (6.4)$$

με ενδείξεις ότι τα αντιβαρυόνια στο σύμπαν είναι ελάχιστα και τα μόνα βαρυόνια είναι νουκλεόνια. Η αριθμητική βαρυονική πυκνότητα προς την εντροπία μας δίνει τον καθαρό βαρυονικό αριθμό του σύμπαντος:

$$B = \frac{n_B - n_{\bar{B}}}{s} = 3.81 \times 10^{-9} \Omega_B h^2 = \frac{n_B - n_{\bar{B}}}{7.04 n_\gamma} \sim 6 \times 10^{-10} \quad (6.5)$$

ο αριθμός αυτός απουσία αλληλεπιδράσεων που παραβιάζουν τον βαρυονικό αριθμό και με σταθερή εντροπία διατηρείται κατά τη διάρκεια της διαστολής του σύμπαντος. Αν θέλουμε να τον εκφράσουμε συναρτήσει του αριθμού φωτονίων θα πρέπει να εισάγουμε τη σημερινή σχέση μεταξύ εντροπίας και  $n_\gamma$

Το συμπέρασμα το οποίο βγαίνει άμεσα από αυτή την τόσο μεγάλη ασυμμετρία, είναι πως το σύμπαν την απέκτησε από πολύ νωρίς. Αυτή ήταν και ο λόγος που στην ουσία εμπόδισε τη δημιουργία ενός 'κενού' σύμπαντος, στο οποίο όλη η ύλη θα είχε εξαϋλωθεί με την αντίστοιχη αντιύλη. Το οποίο σημαίνει ότι στις πολύ υψηλές αρχικές θερμοκρασίες -μεγαλύτερες της τάξης του  $GeV$  υπήρχαν ζευγάρια κουαρκ-αντικουάρκ της τάξης της πυκνότητας ακτινοβολίας και σε εκείνες τις συνθήκες υπήρχε περίπου ένα παραπάνω κουάρκ για κάθε  $10^{10}$  ζευγάρια κουαρκ - αντικουάρκ.

## 6.2 Οι προϋποθέσεις για Βαρυονική Ασυμμετρία

Οι τρεις απαραίτητες προϋποθέσεις για να επιτευχθεί βαρυονική ασυμμετρία κατά την αρχέγονη βαρυογέννηση είναι:

### 6.3. ΠΙΘΑΝΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΠΡΟΣΦΕΡΟΥΝ ΤΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ 61

1) Η παραβίαση του βαρυονικού αριθμού. Χρειαζόμαστε διαδικασίες που θα μετατρέπουν την αντιύλη σε ύλη. Συνεπώς, θα πρέπει να διερευνήσουμε περιπτώσεις πέρα από το  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  μοντέλο της σωματιδιακής φυσικής. Οι διαδικασίες αυτές θα πρέπει να καταλήγουν σε  $n_B \neq 0$

2) Η παραβίαση των συμμετριών  $C$  και  $CP$  μια και χωρίς αυτές ο ρυθμός παραγωγής βαρυονίων και αντιβαρυονίων θα ήταν ο ίδιος και άρα ο συνολικός βαρυονικός αριθμός και κατ' επέκταση η ασυμμετρία θα ήταν μηδέν. Πρέπει να υπάρχει μια διαδικασία που θα 'προτιμά' την ύλη, έναντι της αντιύλης

3) Το σύμπαν να είχε περάσει κάποια περίοδο μη θερμικής ισορροπίας, μια και στη θερμική ισορροπία οι πυκνότητες βαρυονίων και αντιβαρυονίων εξαρτώνται μόνο από τη θερμοκρασία και τη μάζα τους και συνεπώς είναι ίσες. Σε θερμική ισορροπία κάθε διαδικασία που θα καταστρέφει τον βαρυονικό αριθμό θα αντισταθμίζεται από μια αντίστοιχη που θα τον δημιουργεί.

Οι παραπάνω προϋποθέσεις αναφέρονται ως **Sakharov Conditions**.

## 6.3 Πιθανές εξηγήσεις που προσφέρουν τα θεωρητικά μοντέλα

Οι παραπάνω προϋποθέσεις είναι απαραίτητες για να επιτευχθεί η ζητούμενη βαρυονική ασυμμετρία. Στο Καθιερωμένο Πρότυπο δεν είναι δυνατό να ικανοποιηθούν όλες και ταυτόχρονα να εξηγηθεί ή τόσο μεγάλη ασυμμετρία που δημιουργείται. Οπότε η αναζήτηση μας οδηγεί σε GUTs και υπερσυμμετρικά μοντέλα τα οποία μπορούν να επιτρέψουν ασυμμετρίες και ταυτόχρονα εισάγουν και νέα σωματίδια που μπορεί να είναι υποψήφια για τη σκοτεινή ύλη. Θα δωθεί περισσότερη έμφαση στο μοντέλο  $SU(5)$  και έπειτα θα παρουσιαστούν και ο μηχανισμός της Λεπτογένεσης και πώς αυτή μπορεί να καταλήξει σε ασυμμετρία του Βαρυονικού αριθμού, ενώ τέλος θα δούμε πως με την παραδοχή ότι η σκοτεινή ύλη φέρει βαρυονικό φορτίο ισοσταθμίζεται η υπάρχουσα ασυμμετρία.

### 6.3.1 Η παραβίαση του Βαρυονικού Αριθμού στο μοντέλο $SU(5)$

Σύμφωνα με τα όσα παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο βλέπουμε πως στο μοντέλο του διαστελλόμενου σύμπαντος και των ενοποιημένων θεωριών στη σωματιδιακή φυσική οι Sakharov Conditions μπορούν να πραγματοποιηθούν. Συγκεκριμένα, το  $SU(5)$  μοντέλο έχει ακριβώς τις ιδιότητες που χρειάζονται

για να δημιουργηθεί η ζητούμενη βαρυονική ασυμμετρία . Μέσω του μποζονίου  $X$  υπάρχει παραβίαση των συμμετριών  $B$ ,  $C$ ,  $CP$ . Συνοπτικά ο μηχανισμός βαρυογέννησης βάση του  $SU(5)$  είναι:

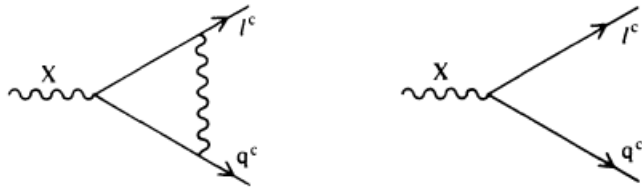
$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &\equiv BR(X \rightarrow qq) \equiv r(B = \frac{2}{3}) \\
 \gamma_2 &\equiv BR(X \rightarrow \bar{q}\bar{l}) \equiv 1 - r(B = -\frac{1}{3}) \\
 \gamma_1^c &\equiv BR(\bar{X} \rightarrow \bar{q}\bar{q}) \equiv \bar{r}(B = -\frac{2}{3}) \\
 \gamma_1^c &\equiv BR(\bar{X} \rightarrow ql) \equiv 1 - \bar{r}(B = \frac{1}{3})
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

οι μέσοι καθαροί βαρυονικοί αριθμοί που προκύπτουν από τη διάσπαση ενός  $X$  και  $\bar{X}$  αντίστοιχα είναι:

$$B_Q = (\frac{2}{3})r + (-\frac{1}{3})(1 - r) , B_{\bar{Q}} = (-\frac{2}{3})\bar{r} + (\frac{1}{3})(1 - \bar{r})$$

και συνεπώς ο μέσος καθαρός βαρυονικός αριθμός που προκύπτει από τη διάσπαση ενός ζευγαριού  $X\bar{X}$  και εκφράζει το μέτρο της παραβίασης της  $CP$  συμμετρίας είναι:

$$\epsilon = B_Q - B_{\bar{Q}} = r - \bar{r} \tag{6.7}$$



Σχήμα 6.1: X boson decay

Το κριτήριο για θερμική ισορροπία είναι ο ρυθμός των αντιδράσεων να είναι μεγαλύτερος από τον ρυθμό διαστολής του σύμπαντος. Και ενώ αυτό δε συμβαίνει για αλληλεπιδράσεις 2 σωματιδίων με το  $X$  να είναι ενδιάμεσο διανυσματικό μποζόνιο, συμβαίνει για διασπάσεις του  $X$  μια και έχουν ενεργειακό κατώφλι προκειμένου να πραγματοποιηθούν. Για  $kT > M_Q$  τα  $X$  μποζόνια θα υπήρχαν σε αντίστοιχες ποσότητες με τα κανονικά σωματίδια. Τα ζευγάρια  $X, \bar{X}$  διασπώνται όπως παραπάνω με προτίμηση στη παραγωγή κουαρκ αντί αντικουαρκ δηλαδή:

$$\gamma_1 - \gamma_1^c = \gamma_2^c - \gamma_2 \neq 0 \quad (6.8)$$

Από τη στιγμή που το σύμπαν ψύχεται κάτω από τη  $M_Q$  πρακτικά ο παραπάνω μηχανισμός σταματά να είναι δυνατός και η ελάχιστη ασυμμετρία που έχει προηγουμένως δημιουργηθεί δεν αντισταθμίζεται από αντίστροφες διαδικασίες. Βέβαια ακόμη και αυτή η διαδικασία θεωρητικά στο minimal SU(5) οδηγεί σε αρκετές τάξεις χαμηλότερη από την  $10^{-9}$  που απαιτούμε. Η έρευνα σε κάθε περίπτωση σε αυτό το κομμάτι είναι ακόμη σε βρεφικό στάδιο μια και ο υπολογισμός του θεωρητικού  $\epsilon$  είναι ακόμη αβέβαιος.

### 6.3.2 Η παραβίαση του Βαρυονικού Αριθμού στην Ηλεκτρασθενή Θεωρία - Sphaleron effect

Στο ΚΠ η Λανγκρανζιανή του διατηρεί τους Βαρυονικούς και Λεπτονικούς αριθμούς. Αλλά όπως έδειξε ο 't Hooft το 1967 και το  $B$  και το  $L$  παραβιάζονται από κβαντικά φαινόμενα μια και σε αυτό το επίπεδο οι συμμετρίες παρουσιάζουν ανωμαλίες και τα αντίστοιχα ρεύματα Noether δεν διατηρούνται αλλά ικανοποιούν τη σχέση:

$$\partial_\mu J_B^\mu = \partial_\mu J_L^\mu = n_f \left( \frac{g_2^2}{32\pi^2} W_{\mu\nu}^\alpha W^{\alpha\mu\nu} - \frac{g_1^2}{32\pi^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \quad (6.9)$$

Η  $SU(2) \times U(1)$  θεωρία έχει διακριτά συνδεδεμένα μεταξύ τους κενά με διαφορετικούς  $B$  και  $L$  αριθμούς και η λύση στο σημείο της μέγιστης ενέργειας μεταξύ αυτών των σημείων είναι στατική αλλά ασταθής και ονομάστηκε sphaleron και αναπαριστά το ενεργειακό κατώφλι που χωρίζει δύο 'κενά' σημεία με διαφορετικούς  $B$  και  $L$  αριθμούς. Σε θερμοκρασίες κοντά στο μηδέν οι διαδικασίες αυτές είναι εξαιρετικά μικρές -της τάξης του  $10^{-170}$  αλλά σε θερμοκρασίες κοντά στα  $100\text{GeV}$  η καταστολή λόγω του όρου  $e^{-\frac{16\pi^2}{g^2}}$  παύει να είναι εκθετική. Οπότε οι συνολικές διαφορές σε βαρυόνια και λεπτόνια είναι  $\Delta B - \Delta L = n_f$  και συνεπώς ο ορθογώνιος συνδυασμός  $B - L$  διατηρείται, ενώ ο  $B + L$  όχι. Υπολογισμοί έδειξαν ότι ο ρυθμός sphaleron ξεπερνά αυτόν του Hubble για θερμοκρασίες

μικρότερες των  $10^{12} GeV$  και συνεπώς βρίσκειται σε θερμική ισορροπία όταν:

$$100 GeV \leq T \leq 10^{12} GeV \quad (6.10)$$

Μέσω του παραπάνω μηχανισμού στην περίπτωση της Λεπτογένεσης όπου έχουμε παραβίαση του B -L παίρνουμε μια βαρυονική ασυμμετρία

$$n_B = C(n_B - n_L) \quad (6.11)$$

με το  $C$  να δίνεται από τη σχέση:

$$C = \frac{8N_f + 4N_\phi}{22N_f + 13N_\phi} \quad (6.12)$$

που στην περίπτωση του ΚΠ δίνει  $C = 28/79$

### 6.3.3 Leptogenesis

Γενικότερα, ο λεπτονικός αριθμός παραβιάζεται στις GUTs που επεκτείνουν το Καθιερωμένο πρότυπο. Ενώ τα κουάρκ και τα λεπτόνια όπως είδαμε δημιουργούν  $SU(5)$  αναπαραστάσεις στο συγκεκριμένο μοντέλο τα δεξιόστροφα νετρίνα δεν είναι απαραίτητα (όπως άλλωστε και στο ΚΠ), αλλά αν τα εισάγουμε αποκτούν Majorana μάζες που είναι ανεξάρτητες του μηχανισμού Higgs.

Ο μηχανισμός τραμπάλας, όπως αποκαλείται, συνοπτικά αφορά στο πως μπορούν τα νετρίνα να αποκτήσουν μάζα γράφωντάς τα ως πεδία Majorana χρησιμοποιώντας μόνο τα αριστερόστροφα πεδία ως εξής:

$$(\Psi^c)_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\Psi^c = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)i\gamma_2\Psi^* = i\gamma_2\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\Psi^* = (\Psi)_L^c \quad (6.13)$$

Οπότε το φερμιονικό πεδίο Majorana -ορίζεται από την ιδιότητά του να ταυτίζεται με το συζυγές του- μπορεί να περιγράψει ένα ουδέτερο, χωρίς χρώμα σωματίδιο όπως το νεutrino.

$$X = (\Psi)_L^c + \Psi_L \quad (6.14)$$

με όρο μάζας:

$$m_L \bar{X}X = m_L((\bar{\Psi})_L^c \Psi_L + \bar{\Psi}_L(\Psi)_L^c) \quad (6.15)$$

ή συναρτήσει του  $\Psi_R$ :

$$m_L \bar{\omega}\omega = m_L((\bar{\Psi})_R^c \Psi_R + \bar{\Psi}_R(\Psi)_R^c) \quad (6.16)$$

Αν προσθέσουμε και δεξιόστροφα νετρίνα μπορούμε να πάρουμε και όρο μάζας Dirac

$$m_D = (\bar{\nu}_R \nu_L + \bar{\nu}_L \nu_R) \quad (6.17)$$



### 6.3. ΠΙΘΑΝΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΠΡΟΣΦΕΡΟΥΝ ΤΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ 65

και συνολικά όλοι οι όροι μάζας μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$(\overline{\nu}_L, \overline{\nu}_L^c) \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_R \\ \nu_R^c \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

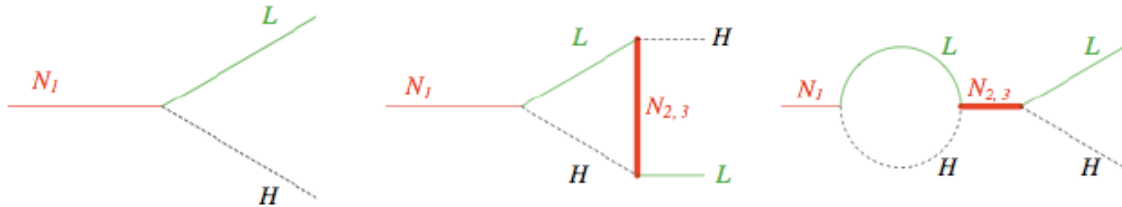
με τον μηχανισμό τραμπάλας να συμβαίνει για  $m_D \ll m_R$  και  $m_L = 0$  όπου σε αυτή τη περίπτωση εξηγείται το γεγονός ότι έχουμε πολύ μικρές μάζες νετρίνων μια και έχουμε πολύ μεγάλη *majorana* μάζα και προβλέπονται 3 βαριά και 3 ελαφριά *majorana* νετρίνα

$$\begin{aligned} N &\approx \nu_R + \nu_R^c, m_N \approx m_R \\ \nu &\approx \nu_L + \nu_L^c, m_\nu = -\overline{m}_D \frac{1}{m_R} m_D \end{aligned} \quad (6.19)$$

Στην περίπτωση μοντέλων όπως το  $SU(10)$  καθώς και άλλων υπερσυμμετρικών τα δεξιόστροφα νετρίνα περιλαμβάνονται στη βασική αναπαράσταση.

Στο μηχανισμό της Λεπτογένεσης τώρα πιο συγκεκριμένα αρκεί ένα βαρύ σωματίδιο να διασπαστεί με παραβίαση της CP εκτός θερμικής ισορροπία, ώστε να ικανοποιούνται οι Sakharov Conditions.. Ο πιο πιθανός υποψήφιος είναι τα δεξιόστροφα νετρίνα που διασπώνται σε ζευγάρια Higgs- λεπτονίων όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα και παραβιάζουν την L και CP συμμετρία η οποία ασυμμετρία μετατρέπεται εν μέρει σε βαρυονική μέσω του sphaleron effect και είναι ανάλογη των μαζών των βαριών νετρίνων, που μπορεί να φτάσει:

$$\epsilon = \frac{\Gamma(N_1 \rightarrow l\phi) - \Gamma(N_1 \rightarrow \bar{l}\bar{\phi})}{\Gamma(N_1 \rightarrow l\phi) + \Gamma(N_1 \rightarrow \bar{l}\bar{\phi})} \approx 0.1 \frac{M_1}{M_3} \approx 10^{-6} \quad (6.20)$$



Σχήμα 6.2: RH Neutrino Decay

### 6.3.4 Pangenesis και ο μηχανισμός Affleck- Dine

Το σύμπαν έχει διαπιστωθεί ότι αποτελείται κατά 0,05 από ορατή ύλη και κατά 0,23 από σκοτεινή ύλη. Η Βαρυονική ασυμμετρία με την οποία ασχολούμαστε αφορά στην ορατή ύλη και δημιουργείται από διαδικασίες που όπως είδαμε μας είναι ακόμη άγνωστες. Είναι όμως πιθανό η σκοτεινή ύλη που υπάρχει να παρουσιάζει και αυτή μια ανάλογη ασυμμετρία σωματιδίων-αντισωματιδίων. Το επιχείρημα είναι ότι αν οι μηχανισμοί δημιουργίας της ορατής και σκοτεινή ύλης ήταν εντελώς ανεξάρτητοι δε θα υπήρχε τόσο μεγάλη ομοιότητα στην πυκνότητά τους. Οπότε αν δεχτούμε ένα μηχανισμό που να μπορεί να συνδέει αυτά τα δύο μπορεί αντίστοιχα να εξηγηθεί και η BA ή για να είμαστε πιο συνεπείς να εξαλειφθεί. Ο μηχανισμός αυτός ονομάστηκε PANGENESIS και ουσιαστικά η ασυμμετρία στην ορατή ύλη αντισταθμίζεται από την ανάλογη της σκοτεινής.

Ουσιαστικά χωρίζουμε το βαρυονικό αριθμό σε δύο 'τομείς' για την ορατή και σκοτεινή ύλη. Η διατηρούμενη συμμετρία για την ορατή ύλη είναι η  $(B-L)_1$  και έστω ότι για τον τομέα της σκοτεινής ορίζουμε το  $B_2$ . Ορίζουμε λοιπόν τα:

$$\begin{aligned} B-L &\equiv (B-L)_1 - B_2 \\ X &\equiv (B-L)_1 + B_2 \end{aligned} \quad (6.21)$$

Κατά την εξέλιξη του σύμπαντος η συμμετρία  $(B-L)_1$  διατηρείται ενώ η X σε κάποια υψηλή ενεργειακή κλίμακα σπάει. Αν οι διαδικασίες που παραβιάζουν την X συμμετρία συμβαίνουν εκτός θερμικής ισορροπίας ικανοποιούνται οι Sakharov Conditions και δημιουργείται μη μηδενικό X φορτίο και συνεπώς

$$(B-L)_1 = B_2 \quad (6.22)$$

Οπότε σε κάθε τομέα αφήνεται ένα μη μηδενικό φορτίο

$$n_{(B-L)_1} = n_{B_2} = \frac{n_X}{2} \quad (6.23)$$

όπου μετέπειτα μέσω του Sphalleron effect η  $(B-L)_1$  ασυμμετρία μετατρέπεται εν μέρει σε B. Από τους βασικούς υποψήφιους μηχανισμούς για την παραπάνω X ασυμμετρία που δημιουργείται είναι ο μηχανισμός Affleck- Dine. Στα υπερσυμμετρικά μοντέλα υπάρχουν στο βαθμωτό δυναμικό (superpotential) σημεία του χώρου- (πάνω στις λεγόμενες flat directions) - πάνω στα οποία το βαθμωτό δυναμικό εξαφανίζεται. Σε αυτά τα σημεία το κενό αποκτά πολύ μεγάλη αναμενόμενη τιμή κατά την πρώιμη περίοδο εξέλιξης του σύμπαντος η οποία ενισχύει κατά πολύ τις B και L ασυμμετρίες οι οποίες σε μετέπειτα στάδιο καταλήγουν σε φερμιόνια μέσω διασπάσεων.

Ακόμη υπάρχουν GUT μοντέλα στα οποία η BA εξηγείται από πιθανές διασπάσεις X σε βαρυόνια και σκοτεινή ύλη (που εικάζεται ότι μπορεί να είναι και

### 6.3. ΠΙΘΑΝΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΠΡΟΣΦΕΡΟΥΝ ΤΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ67

δεξιόστροφο νετρίνο που κουβαλά βαρυονικό αριθμό) ή και μοντέλα στα οποία η εισαγωγή νέων διαστάσεων μπορεί να εξηγήσει την Βαρυονική ασυμμετρία χωρίς να υπάρξει παραβίαση Βαρυονικού ή Λεπτονικού αριθμού. Βλέπουμε με τα παραπάνω κάποιες προσπάθειες που γίνονται από τις ενοποιημένες θεωρίες να εξηγήσουν παρατηρούμενα φαινόμενα μέσα από τους μηχανισμούς που έχουν, με έμφαση όλο και περισσότερο, στο να εξηγείται ταυτόχρονα όλο και μεγαλύτερο φάσμα φαινομένων. Είναι πολύ πιθανό λοιπόν να είναι μέσα από αυτές που μετά από την πειραματική επιβεβαίωσή τους θα έχουμε απαντήσεις στα βασικότερα ερωτήματα που έχουμε για το σύμπαν.



# Κεφάλαιο 7

## Παραρτήματα

### 7.1 Η πλήρης Λανγκρανζιανή του ΚΠ και του Higgs

Η πλήρης Λανγκρανζιανή του ΚΠ

$$\begin{aligned} L = & -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^i W^{i\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \\ & + \sum \bar{f}i\gamma^\mu \partial_\mu f + \sum eQ_f(\bar{f}\gamma^\mu f)A_\mu \\ & + \frac{g_2}{\cos\theta_w} \sum [\bar{f}_L\gamma^\mu f_L(T_{3f} - Q_f \sin^2\theta_w) + \bar{f}_R\gamma^\mu f_R(-Q_f \sin^2\theta_w)]Z_\mu \quad (7.1) \\ & + \frac{g_2}{\sqrt{2}} [(\bar{u}_L\gamma^\mu d_L + \bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu e_L)W_\mu^+ + (\bar{d}_L\gamma^\mu u_L + \bar{e}_L\gamma^\mu \nu_{eL})W_\mu^-] \\ & + \frac{g_3}{2} \sum \bar{q}_\alpha\gamma^\mu \lambda_{\alpha\beta}^a q_\beta G_\mu^a \end{aligned}$$

Η Λανγκρανζιανή με τις αλληλεπιδράσεις του Higgs στο ΚΠ

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H = & \frac{1}{2}(\partial_\mu H)^2 + \frac{1}{4}g_2^2 v^2 W_\mu^+ W^{\mu-} + \frac{1}{4}v^2(g_1^2 + g_2^2)Z_\mu - \lambda v^2 H^2 + \frac{g_2^2 v H}{2} W_\mu^+ W^{\mu-} \\ & + \frac{g_2^2 H^2}{4} W_\mu^+ W^{\mu-} + \frac{v(g_2^2 + g_1^2)}{4} Z_\mu Z^\mu - \lambda v H^3 - \frac{\lambda H^4}{4} \quad (7.2) \end{aligned}$$

### 7.2 Διαγράμματα Feynman



# Βιβλιογραφία

- [1] Βαγιονάκης Κ.Ε., *Σωματιδιακή και Κοσμολογική φυσική*, (2003), Εκδόσεις Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.
- [2] Bell N.F. , Petraki K., Shoemaker I., Volkas R.R. , *Pangenesi in a Baryon Symmetric Universe: Dark and Visible Matter via the Affleck-Dine mechanism*, (2011), arXiv:1105.3730v2 [hep-ph].
- [3] Cheng T.P.& Li L.F., *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, (1982), Clarendon Press, Oxford.
- [4] Djouadi A., *The anatomy of electroweak symmetry breaking: Tome I: The Higgs boson in the Standard Model*, (2007), hep-ph/0503172
- [5] Farrar G.R. & Zaharijas G., *Dark Matter and the Baryon Asymmetry of the Universe*, (2004), arXiv:hep-ph/0406281v3.
- [6] Hollik W. , *Electroweak Standard Model - Corfu Summer School*, (2010)
- [7] Peskin E.M.& Schroeder D.V. , *An Introduction to Quantum Field Theory*, (1995).
- [8] Ryder L.H., *Quantum Field theory*, Second edition (1996), Cambridge University Press.
- [9] Servant G. , *Cosmological Consequenses of new physics at the TeV Scale - Corfu Summer School*, (2010)
- [10] Shirman Y., *TASI Lectures: Introduction to supersymmetry and supersymmetry breaking*, (2009), arXiv:0907.0039v1 [hep-ph].
- [11] Troden M.& Carroll S.M. , *TASI Lectures: Introduction to Cosmology*, (2008), arXiv:astro-ph/0401547v1.
- [12] Zee A., *Quantum Field theory in a nutshell*, (2003), Princeton University Press.