ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ MÖBIUS ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:
ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΚΡΑΒΒΑΡΙΤΗΣ

Αθήνα
Ιούνιος, 2012

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ MÖBIUS ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η μελέτη των μετασχηματισμών Möbius μέσα από τη θεωρητική ανάλυση των σύμμορφων απεικονίσεων παρουσιάζοντας ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών σε προβλήματα απεικόνισης πεδίων και σε προβλήματα συνοριακών τιμών.

Οι μετασχηματισμοί Möbius πήραν το όνομα τους προς τιμή του σπουδαίου γερμανού μαθηματικού και αστρονόμου August Ferdinand Möbius (1790-1868) γνωστού για την συνεισφορά του στην τοπολογια και κυρίως για την σύλληψη της λωρίδας Möbius (Möbius Strip). Οι μετασχηματισμοί Möbius αποτελούν μέρος των σύμμορφων απεικονίσεων που συνθέτουν έναν πολύ ενδιαφέρον κλάδο των μαθηματικών με τον οποίο έχουν ασχοληθεί πολλοί σπουδαίοι μαθηματικοί. Εξέχουσα θέση στον κλάδο αυτό κατέχει ο έλληνας μαθηματικός Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή (1873-1950), με πλήθος δημοσιευμένων εργασιών στις αρχές του προηγούμενου αιώνα.

Αναμφίβολα οι μετασχηματισμοί Möbius και γενικότερα οι σύμμορφες απεικονίσεις, διαδραματίζουν σπουδαίο ρόλο στον κλάδο της φυσικής και της μηχανικής στους τομείς της υδροδυναμικής, της αεροδυναμικής και της θεωρίας ελαστικότητας. Μέσω αυτών μπορούν να μελετηθούν προβλήματα σε σχήματα που θα ήταν αδύνατο να μελετηθούν αν δεν απεικονίζονταν σε πεδία που η λύση τους να είναι υπολογίσιμη. Η σπουδαιότητα των σύμμορφων απεικονίσεων πέραν του ότι διατηρούν τη γωνία τομής δυο καμπυλών κατά μέτρο και προσανατολισμό, είναι το ότι η εξίσωση Laplace παραμένει αναλλοίωτη.

Με βασικό άξονα τους μετασχηματισμούς Möbius και τα αλλά είδη σύμμορφων απεικονίσεων, μελετάμε στην εργασία αυτή τη λύση προβλημάτων συνοριακών τιμών σε πλήθος πεδίων, δίνοντας έμφαση στον δίσκο και στο άνω ημιεπίπεδο.

Για την εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας, θέλω να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Κραββαρίτη για την υπόδειξη του θέματος καθώς και για την αποτελεσματική καθοδήγηση και βοήθειά του σε όλα τα στάδια αυτής της εργασίας .

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<u>ΜΕΡΟΣ Α</u>

ΣΥΜΜΟΡΦΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ – ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ MÖBIUS

<u>ΜΕΡΟΣ Β</u>

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

ΜΕΡΟΣ Α

ΣΥΜΜΟΡΦΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ – ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ MÖBIUS

1.1 Σύμμορφη απεικόνιση

Ορισμός : Μια συνάρτηση $f: \mathrm{A} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι ένας **σύμμορφος μετασχηματισμός** ή αλλιώς **σύμμορφη απεικόνιση** στο πεδίο $D \subset \mathrm{A}$, αν η f είναι *ολόμορφη*[1] στο D και $f'(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D$.

Παραδείγματα: i) η συνάρτηση $f(z) = e^z$ είναι σύμμορφη στο $\mathbb{C}$ αφού $f'(z) = e^z \neq 0, \forall\ z \in \mathbb{C}$

ii) η συνάρτηση $f(z) = z^2$ είναι σύμμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

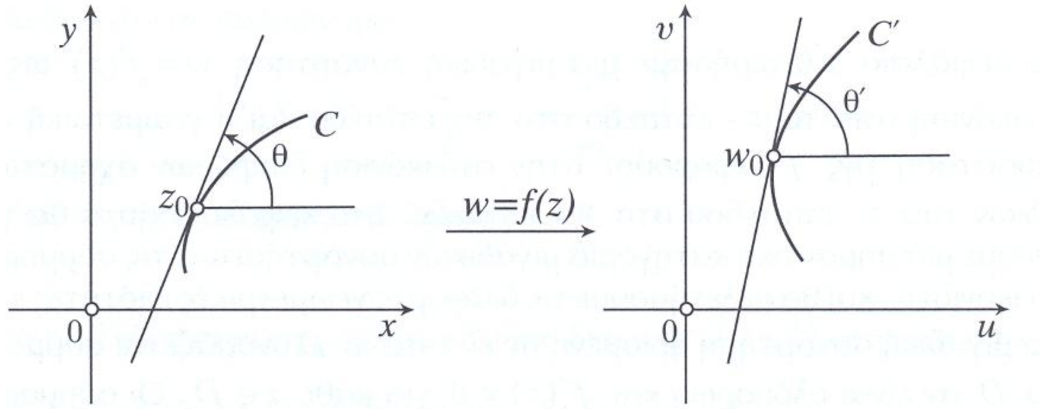
Έστω μια ολόμορφη συνάρτηση f(z) ορισμένη σε ένα πεδίο D, $f'(z) \neq 0$ στο D και μια *λεία*[2] *καμπύλη* στο D, η $C: z(t) = x(t) + iy(t)$ η οποία διέρχεται από το σημείο $z_0 = z(t_0)$, $t_0 \in (\alpha,\beta)$. Η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της καμπύλης C στο σημείο z_0 με τον θετικό x άξονα είναι θ και ισχύει ότι $\theta = \arg z'(t_0)$, όπου $\arg z'(t_0)$ το *όρισμα*[3] του $z'(t_0)$.

Αν υποθέσουμε ότι η εικόνα της C μέσω της απεικόνισης $w = f(z)$ είναι η C΄: w(t) = f(z(t)), $\alpha \leq t \leq \beta$ και w_0 η εικόνα του z_0, δηλαδή $w_0 = f(z(t_0)) = f(z_0)$, τότε παραγωγίζοντας την σύνθετη συνάρτηση έχουμε: .

$$w'(t_0) = f'(z_0) \cdot z_0'(t_0) \qquad (1)$$

Η καμπύλη C΄ έχει μια εφαπτομένη στο σημείο w_0, διότι $w'(t_0) \neq 0$ επειδή $f'(z_0) \neq 0$ και $z'(t_0) \neq 0$. Εάν $\theta' = \arg w'(t_0)$, από την σχέση (1) προκύπτει ότι

$$\theta' = \theta + \arg f'(z_0) \qquad (2)$$



[1] Μια συνάρτηση $f(z)$ ορισμένη σε ένα ανοιχτό σύνολο A ονομάζεται **ολόμορφη** στο A αν και μόνο αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του A.

[2] Μια καμπύλη *C* ονομάζεται **λεία** , αν η $z(t)$ έχει παράγωγο συνεχή με $z'(t) \neq 0$ στο $[\alpha, \beta]$.Αν η καμπύλη είναι κλειστή θα πρέπει $z'(\alpha) = z'(\beta)$.

Η διαφορά των δύο γωνιών φ= θ΄-θ ονομάζεται **γωνία στροφής** της καμπύλης C στο σημείο z_0 μέσω της απεικόνισης w = f(z).

Αυτό που μπορούμε να καταλάβουμε από την σχέση (2) είναι ότι όλες οι καμπύλες που διέρχονται από το z_0 στρέφονται μέσω της απεικόνισης που έχουμε, με την ίδια γωνία (υπό την προϋπόθεση ότι $f'(z) \neq 0$), αφού η γωνία στροφής στο z_0 δεν εξαρτάται από την καμπύλη και είναι πάντα ίση με $\arg f'(z_0)$

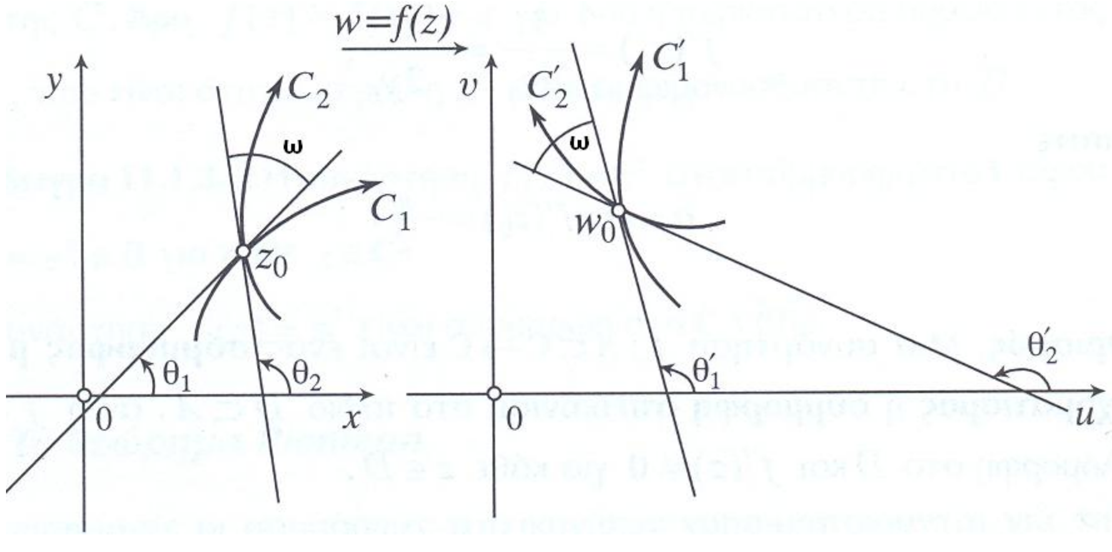
Έστω τώρα δύο λείες καμπύλες που βρίσκονται στο D και διέρχονται από το σημείο z_0, οι C_1 και C_2 και οι εικόνες τους C_1' και C_2' που διέρχονται από το w_0 μέσω της απεικόνισης w = f(z). Αν οι εφαπτόμενες των δύο καμπυλών στο σημείο z_0, σχηματίζουν με τον άξονα χ σχηματίζουν γωνίες θ_1 και θ_2 τότε σύμφωνα με την σχέση (2) ισχύει ότι οι γωνίες που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες στις καμπύλες C_1' και C_2' στο σημείο $w_0 = f(z_0)$ είναι:

$$\theta_1' = \theta_1 + \arg f'(z_0) \text{ και } \theta_2' = \theta_2 + \arg f'(z_0)$$

και αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει ότι

$$\theta_2' - \theta_1' = \theta_2 - \theta_1$$

συνεπώς αποδείξαμε ότι **μια σύμμορφη απεικόνιση διατηρεί την γωνία τομής μεταξύ δύο καμπυλών κατά μέτρο και προσανατολισμό** , αφού η γωνία θ_2'-θ_1' από την καμπύλη C_1' στην καμπύλη C_2' είναι η ίδια σε μέτρο και προσανατολισμό με την γωνία θ_2-θ_1 από την καμπύλη C_1 στην C_2, όπως φαίνεται και στο σχήμα.. Οι γωνίες σημειώνονται με ω.



[3]Έστω $z = x + iy \neq 0$ ένας μιγαδικός αριθμός, $|z| = r$ και $P(x, y)$ η εικόνα του στο επίπεδο. Κάθε γωνία θ, μετρούμενη σε ακτίνια, που ικανοποιεί τις σχέσεις $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ονομάζεται **όρισμα** του z. Το σύνολο όλων των ορισμάτων του z συμβολίζεται με $\arg z$.

Εφαρμογή 1

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση f(z) = $\sin z$ είναι σύμμορφη στα σημεία $z_1 = \frac{\pi}{2} + i$ και $z_2 = 0$. Στη συνέχεια να βρεθεί γωνία στροφής $\omega = \arg f'(z)$ σε αυτά τα σημεία.

Λύση: $f'(z) = \cos z$ άρα η απεικόνιση w = $\sin z$ είναι σύμμορφη παντού εκτός των σημείων $\eta\pi + \frac{\pi}{2}$, $\eta \in \mathbb{Z}$. Άρα η f(z) είναι σύμμορφη στα ζητούμενα σημεία.

Τώρα, επειδή $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, και με τη χρήση του υπερβολικού ημιτόνου,

$\sinh z = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$ θα έχουμε:

$$\omega = \arg\cos(\frac{\pi}{2} + i) = \arg\frac{e^{i(\frac{\pi}{2}+i)} + e^{-i(\frac{\pi}{2}+i)}}{2} = \arg\frac{i(e^{-1} - e\ )}{2} = \frac{\pi}{2}$$

και $\theta = \arg\cos 0 = \arg 1 = 0$.

Εφαρμογή 2

Να βρεθεί η γωνία στροφής $\omega = \arg f'(z)$ της απεικόνισης $f(z) = \dfrac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}$ στο σημείο z_0 με $\operatorname{Im} z_0 = y_0 > 0$

Λύση: Η $f(z)$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ εκτός από το σημείο $\overline{z_0}$ και ισχύει ότι

$$f'(z) = \frac{z - \overline{z_0}}{(z - \overline{z_0})^2}, z \neq \overline{z_0}$$

Άρα,

$$f'(z_0) = \frac{1}{2iy_0} = -\frac{i}{2y_0}$$

οπότε προκύπτει πως

$$\omega = \arg f'(z_0) = -\frac{\pi}{2}.$$

Πρόταση: Αν η f είναι ολόμορφη και αμφιμονοσήμαντη σε ένα πεδίο D, τότε $f'(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D$, δηλαδή η f είναι σύμμορφη στο D.

Απόδειξη: Έστω ότι σε κάποιο σημείο $z_0 \in D$ έχουμε $f'(z_0) = 0$. Η συνάρτηση $h(z) = f(z) - f(z_0)$ έχει το z_0 ρίζα τάξης $\eta \geq 2$.
Μέσα στο D υπάρχει κύκλος $C: |z - z_0| = r$ στον οποίο η h δεν μηδενίζεται, ενώ στο εσωτερικό του ισχύει $h'(z) = 0$ όταν $z = z_0$. Αν $0 < |a| < \min_C |h(z)|$ τότε η συνάρτηση $h(z) - a$ έχει η ρίζες μέσα στον κύκλο. Επειδή $h'(z) = 0$ μόνο εάν $z = z_0$ μέσα στον κύκλο C, οι ρίζες αυτές θα είναι απλές. Συνεπώς, $f(z) = f(z_0) + a$ για τουλάχιστον δύο σημεία εντός του κύκλου C αλλά επειδή η f είναι αμφιμονοσύμαντη, αυτό είναι **άτοπο**.

1.2 Το θεώρημα Riemann

Οι σύμμορφες απεικονίσεις χρησιμοποιούνται για την μετατροπή ενός προβλήματος συνοριακών τιμών που περιέχει την εξίσωση Laplace σε ένα άλλο απλούστερο.Η εξίσωση Laplace παραμένει αναλοίωτη μέσω μιας σύμμορφης απεικόνισης. Για να μελετήσουμε τις συνοριακές συνθήκες, θα πρέπει να γνωρίζουμε ότι το σύνορο απεικονίζεται στο σύνορο.

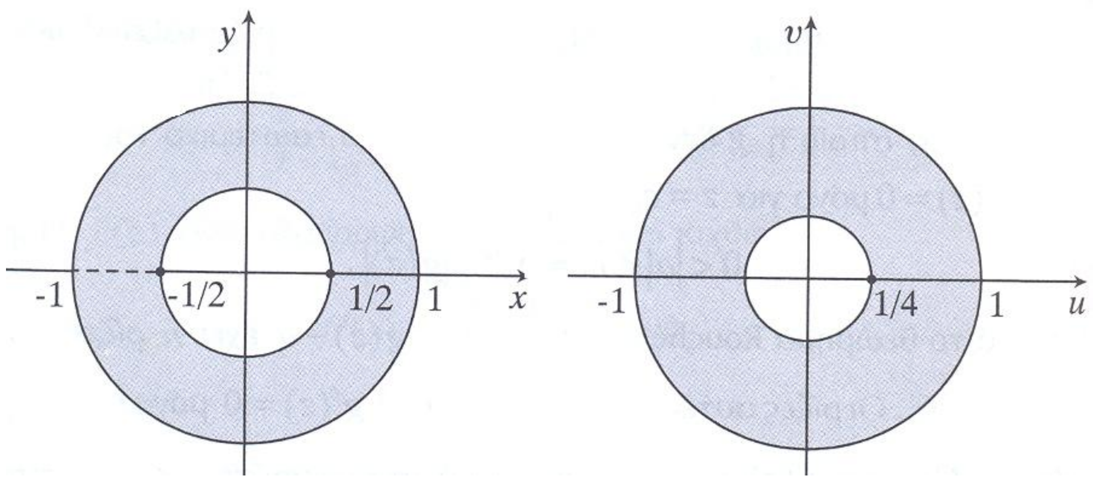
Εφαρμογή

Έστω $f(z) = z^2$ και το πεδίο $D = \{z = re^{i\theta} : \frac{1}{2} < r < 1, -\pi < \theta < \pi\}$.

$f'(z) = 2z \neq 0 \;\; \forall z \in D$ δηλαδή η f είναι ολόμορφη στο D.

$f(D) = \{w = re^{i\theta} : \frac{1}{4} < r < 1, \; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

Το συνοριακό τμήμα $-1 \leq x \leq -\frac{1}{2}$ απεικονίζεται στο εσωτερικό του $f(D)$ στο $\frac{1}{4} \leq u \leq 1$. Συνεπώς η f δεν απεικονίζει το σύνορο του D στο σύνορο του $f(D)$.



Έστω ένα πεδίο D και C μια κλειστή καμπύλη μέσα στο D, μέσω της απεικόνισης $f: D \to \mathbb{C}$. Η εικόνα της C μέσω της απεικόνισης f, δηλαδή η C' είναι μια κλειστή καμπύλη στο w-επίπεδο.

Αν κατά τη συνεχή κίνηση ενός σημείου κατά τη θετική φορά πάνω στη C,η εικόνα του στη C' κινείται επίσης κατά τη θετική φορά, τότε θα λέμε ότι η f **διατηρεί τη φορά**. Η φορά που πρέπει να κινηθεί ένας παρατηρητής ώστε να βλέπει το εσωτερικό της C αριστερά του αντιστοιχεί στη θετική φορά ενός συνόρου.

Αρχή της αντιστοιχίας των συνόρων

Έστω D και G δύο ***απλά συνεκτικά***[4] , φραγμένα πεδία που έχουν σύνορα τις απλές, κλειστές και ***τμηματικά λείες***[5] καμπύλες C_1 και C_2 αντίστοιχα.

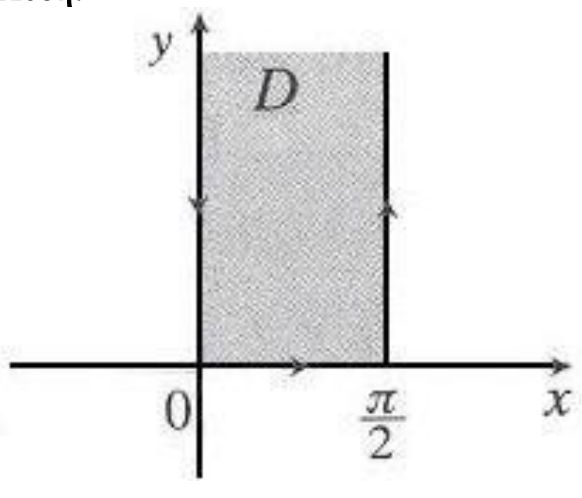
Θεώρημα 1: Αν η σύμμορφη απεικόνιση $w = f(z)$ είναι αμφιμονοσήμαντη και απεικονίζει το πεδίο D επί του πεδίου G, τότε ισχύει ότι
α) η $f(z)$ μπορεί να επεκταθεί στο $\overline{D}$ ώστε να είναι συνεχής.
β) η επέκταση είναι αμφιμονοσήμαντη από τη C_1 επί της C_2 και διατηρεί τη φορά.

Θεώρημα 2: Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $w = f(z)$ είναι ολόμορφη στο D και συνεχής στο $\overline{D}$. Η απεικόνιση $f: C_1 \to C_2$ είναι αμφιμονοσήμαντη και διατηρεί τη φορά. Τότε η συνάρτηση f είναι αμφιμονοσήμαντη στο D και απεικονίζει το D σύμμορφα επί του G.

Εφαρμογή

Έστω $\boldsymbol{f(z) = \sin z}$ και $D = \{z = x + iy : 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, y > 0\}$. Να βρεθεί το $f(D)$.

Λύση:

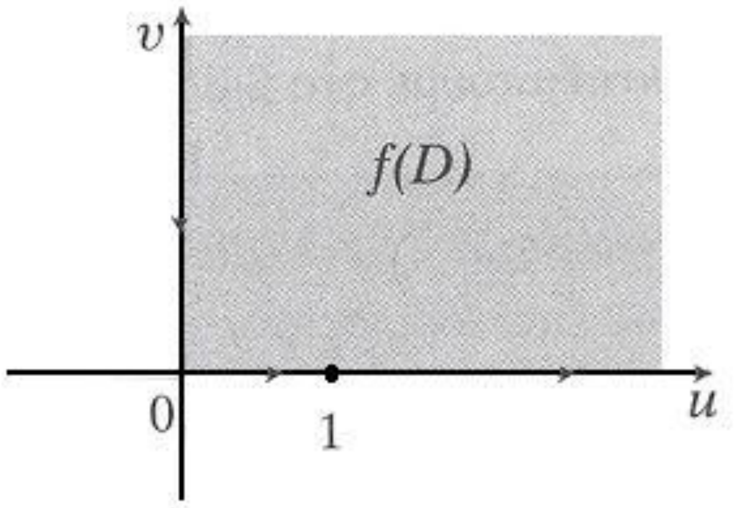


[4] Ένα πεδίο D ονομάζεται **απλά συνεκτικό** αν το D περιέχει το εσωτερικό κάθε απλής κλειστής καμπύλης του. Δηλαδή, σε ένα απλά συνεκτικό συνεκτικό πεδίο δεν υπάρχουν οπές.

Στο σχήμα φαίνεται ότι το πεδίο D είναι μια ημιάπειρη λωρίδα. Η f είναι αμφιμονοσήμαντη στο D και συνεχής στο σύνορο του D.

Για $z = x \in \mathbb{R}, \Rightarrow f(z) = \sin x$, άρα η f απεικονίζει το διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ του D επί του διαστήματος $0,1$ του $f(D)$.

Για $z = iy$, $y > 0$ έχουμε $f(z) = \sin iy = i \sinh y$, το οποίο είναι φανταστικός αριθμός συνεπώς η f απεικονίζει τον θετικό άξονα y στον θετικό άξονα υ, ενώ για $z = \frac{\pi}{2} + iy$, $y > 0$ έχουμε $f(z) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + iy\right) = \cosh y$ άρα η f απεικονίζει την ημιευθεία $z = \frac{\pi}{2} + iy$ στο διάστημα $1, \infty$. Οπότε , λόγω του θεωρήματος της αντιστοιχίας των συνόρων, το $f(D)$ είναι όπως φαίνεται και στο σχήμα το πρώτο τεταρτημόριο.



Θεώρημα Riemann

Αν D είναι ένα απλά συνεκτικό πεδίο του επιπέδου διαφορετικό του $\mathbb{C}$, τότε υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη σύμμορφη απεικόνιση $w = f(z)$ που απεικονίζει το D επί του μοναδιαίου δίσκου $|w| < 1$. Η απεικόνιση είναι μοναδική αν για κάποιο $z_0 \in D$ έχουμε $f(z_0) = 0$ και $f'(z_0) > 0$.

Παρατηρήσεις για το θεώρημα Riemann: α) το θεώρημα δεν ισχύει αν $D = \mathbb{C}$ και β) το θεώρημα Riemann εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας σύμμορφης απεικόνισης αλλά όχι την κατασκευή της.

---

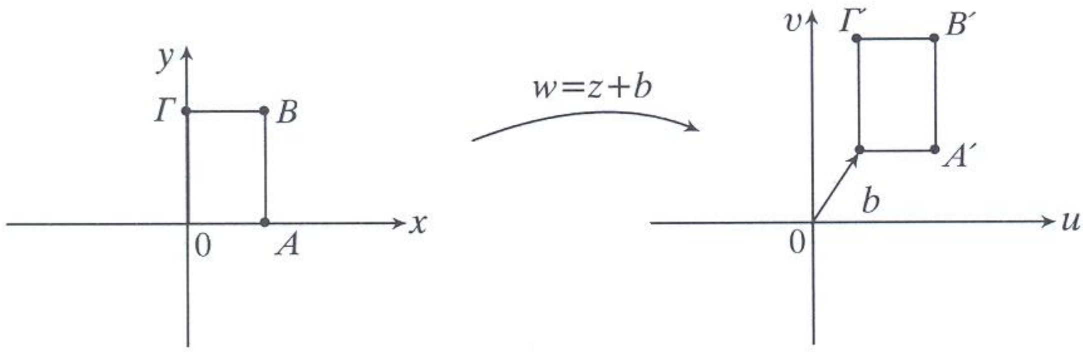
[5] Μια καμπύλη C ονομάζεται **τμηματικά λεία**, αν μπορεί να χωριστεί σε ένα πεπερασμένο αριθμό λείων καμπυλών.

1.3 Μετασχηματισμοί Möbius

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε ένα σύνολο στοιχειωδών μετασχηματισμών οι οποίοι έχουν πολλές εφαρμογές και είναι πολύ χρήσιμοι σύμμορφοι μετασχηματισμοί. Όπως θα δούμε στη συνέχεια ένας μετασχηματισμός Möbius είναι η σύνθεση των ακόλουθων στοιχειωδών μετασχηματισμών.

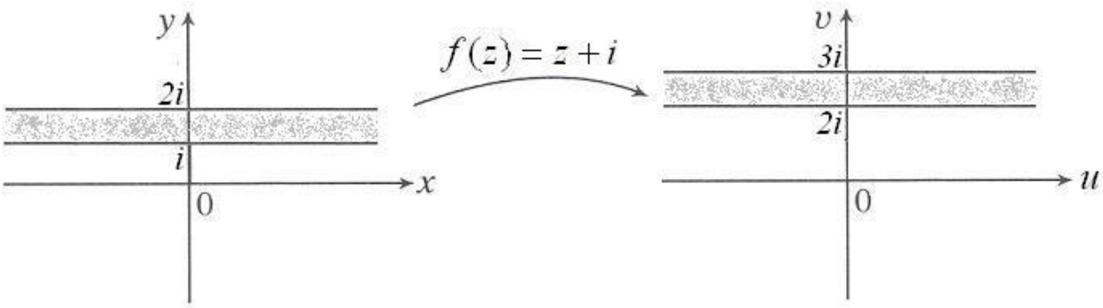
- **Μετατόπιση**

Έστω μια σταθερά $b \in \mathbb{C}$. Ο μετασχηματισμός $w = f(z) = z + b$ απεικονίζει ένα τυχαίο σημείο z του επιπέδου z, στο σημείο $w = z + b$ του επιπέδου w. Η απεικόνιση αυτή είναι αμφιμονοσήμαντη. Έτσι **η εικόνα** $w = z + b$ **είναι μετατοπισμένη ως προς το αρχέτυπο** z **κατά το διάνυσμα** b**.** Το ίδιο ισχύει και για όλα τα σημεία ενός σχήματος, οπότε μέσου αυτού του μετασχηματισμού μπορεί να μεταφερθεί ολόκληρο το σχήμα κατά το διάνυσμα b. Επειδή όλα τα σημεία μετατοπίζονται κατά το ίδιο διάνυσμα, οι διαστάσεις του σχήματος δεν αλλάζουν.



Ειδικά , αν ο b είναι πραγματικός η μετατόπιση γίνεται παράλληλα στον άξονα χ, ενώ αν ο b είναι φανταστικός η μετατόπιση γίνεται παράλληλα στον άξονα y.
Η αντίστροφη απεικόνιση είναι η $z = w - b$.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $f(z) = z + i$ μετατοπίζει το τυχαίο σημείο z κατά το διάνυσμα i δηλαδή παράλληλα στον φανταστικό άξονα



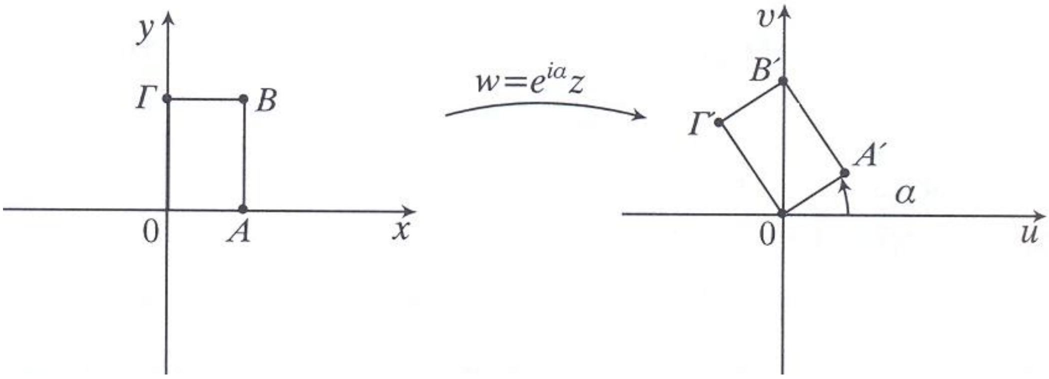
Έτσι η λωρίδα ανάμεσα στις ευθείες $y = 1$, $y = 2$ απεικονίζεται στη λωρίδα ανάμεσα στις ευθείες $\upsilon = 2$, $\upsilon = 3$.

- **Στροφή**

Έστω σταθερά $a \in \mathbb{R}$. Τότε, ο μετασχηματισμός

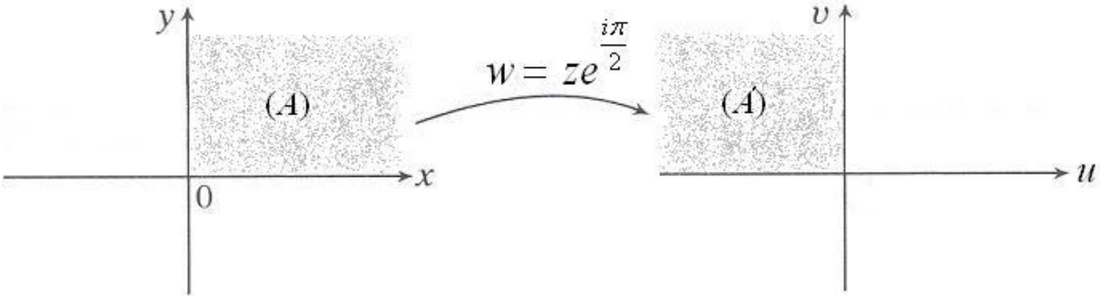
$$w = f(z) = ze^{ia} = re^{i\theta} \cdot e^{ia} = re^{i(\theta+a)}$$

προκαλεί αλλαγή της γωνίας του τυχαίου μιγαδικού z κατά a. Δηλαδή το διάνυσμα z απεικονίζεται στο διάνυσμα w το οποίο **έχει στραφεί ως προς το z κατά γωνία a.** Επειδή $|e^{ia}| = 1$, ισχύει $|w| = |z|$.



Η αντίστροφη απεικόνιση είναι $z = we^{-ia}$.

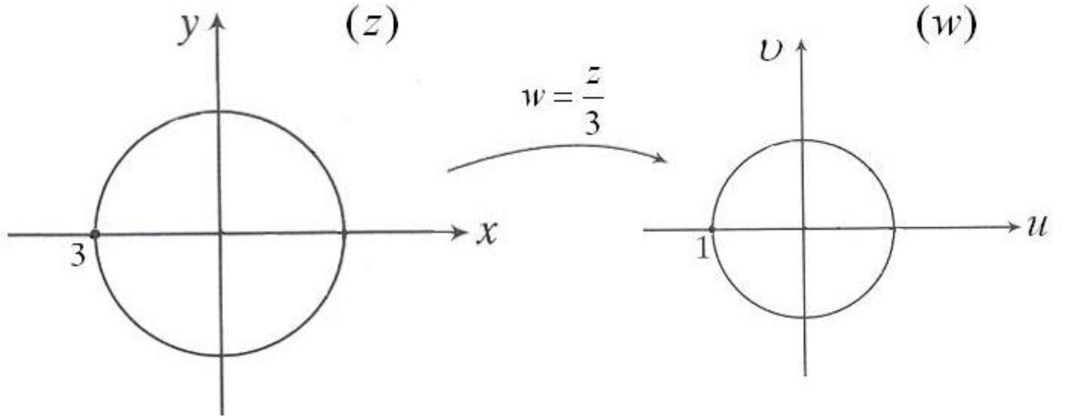
Παράδειγμα: Η συνάρτηση $f(z) = ze^{i\frac{\pi}{2}}$ προκαλεί στροφή του τυχαίου διανύσματος z κατά $a = \dfrac{\pi}{2}$



- **Μεγέθυνση**

Έστω $k > 0, k \in \mathbb{R}$. Ο μετασχηματισμός $w = f(z) = kz$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του επιπέδου z επί του επιπέδου w και ονομάζεται μεγέθυνση. **Η απεικόνιση αυτή μεγεθύνει επί k το μέτρο z χωρίς να του αλλάζει κατεύθυνση.** Αν $0 < k < 1$ τότε έχουμε σμίκρυνση.

Παράδειγμα: Η απεικόνιση $w = \frac{1}{3}z$ μετασχηματίζει τον κυκλικό τόπο $|z| \leq 3$ του επιπέδου z στον κυκλικό τόπο $|w| \leq 1$ του w επιπέδου.



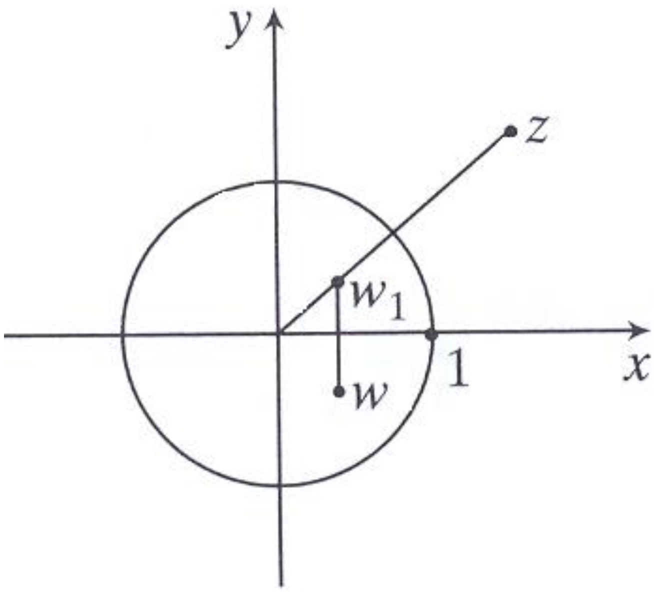
Ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι ο $z=\frac{1}{k}w$.

- **Αντιστροφή**

Ο μετασχηματισμός $w=\frac{1}{z}$, $z\neq 0$ είναι σύνθεση των μετασχηματισμών

$$w_1=\frac{1}{|z|^2}z \text{ και } w=\overline{w_1}.$$

Ο πρώτος μετασχηματισμός εκφράζει **την αντιστροφή ως προς τον μοναδιαίο κύκλο** $C:|z|=1$, αφού $|w_1||z|=1$ και $\arg w_1=\arg z$ ενώ ο δεύτερος εκφράζει **συμμετρία ως προς τον πραγματικό άξονα.**



- **Γραμμικός μετασχηματισμός**

Η απεικόνιση $w=f(z)=az+b$, $a,b\in\mathbb{C}$ ονομάζεται γραμμικός μετασχηματισμός. Αν υποθέσουμε ότι ισχύει $a\neq 0$ και $a=|a|e^{i\theta}$ τότε

$w = |a|e^{i\theta}z + b$, δηλαδή ο μετασχηματισμός που έχουμε είναι σύνθεση μιας μεγέθυνσης, μιας μετατόπισης και μιας στροφής. Η **μεγέθυνση** γίνεται κατά $|a|$, η **μετατόπιση** κατά διάνυσμα b ενώ η **στροφή** κατά γωνία $\arg a$. Η **αντίστροφη απεικόνιση** είναι η $z = \frac{1}{a}w - \frac{b}{a}$.

Μετασχηματισμός Möbius ή Διγραμμικός μετασχηματισμός.

Ένας **διγραμμικός μετασχηματισμός** ή αλλιώς **μετασχηματισμός Möbius** ή ρητογραμμικός έχει τη μορφή $w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, z \neq -\frac{d}{c},\ a,b,c,d \in \mathbb{C}$ (1)

και ικανοποιούν τη σχέση $ab \neq bc$, αλλιώς η $f(z)$ θα ήταν σταθερή.

Για να μην προκύψουν συναρτήσεις που ήδη συναντήσαμε, θεωρούμε $a \neq 0$ και $c \neq 0$. Η (1) μπορεί να γραφτεί και στη μορφή $w = f(z) = \lambda\frac{z+a}{z+\beta}, \lambda = \frac{a}{c}, a = \frac{b}{a}, \beta = \frac{d}{c}, a \neq \beta$ (2)

$f'(z) = \lambda\frac{\beta - a}{z+\beta}^2 \neq 0$ άρα ο μετασχηματισμός Mobius είναι σύμμορφος στο $\mathbb{C}$ εκτός του σημείου $-\beta$. Το σημείο $-\beta$ είναι **απλός πόλος**[1] της f. Επίσης θέτουμε $f(-\beta) = \infty$ και $f(\infty) = \lambda$.

Ο μετασχηματισμός (2) είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του $\mathbb{C}\setminus\{-\beta\}$ επι του $\mathbb{C}\setminus\{-\lambda\}$, ενώ η αντίστροφη απεικόνιση είναι η $z = \frac{-\beta w + \lambda a}{w - \lambda}$.

Επειδή ο μετασχηματισμός Möbius έχει τρεις παραμέτρους λ, a, β συμπεραίνουμε πως υπάρχουν άπειροι διγραμμικοί μετασχηματισμοί που απεικονίζουν το επίπεδο z στο επίπεδο w.

Τώρα, παίρνοντας τον μετασχηματισμό (2),

$$w = f(z) = \lambda\frac{z+a}{z+\beta}, \lambda = \frac{a}{c}, a = \frac{b}{a}, \beta = \frac{d}{c}, a \neq \beta \ \Rightarrow f(z) = \lambda\left(\frac{a-\beta}{z+\beta} + 1\right)$$

και θέτοντας $w_1 = z + \beta, w_2 = \frac{1}{w_1}, w_3 = \lambda(a-\beta)w_2 + \lambda$, εύκολα καταλαβαίνουμε ότι ένας μετασχηματισμός Möbius είναι μια σύνθεση

- μετατόπισης $w_1 = z + \beta$
- αντιστροφής $w_2 = \frac{1}{w_1}$
- γραμμικού μετασχηματισμού $w_3 = \lambda(a-\beta)w_2 + \lambda$

[1] Έστω f μία ολόμορφη συνάρτηση στο πεδίο D με $z_0 \in \mathbb{C}$ ένα μεμονωμένο ανώμαλο σημείο, τοτε το z_0 θα καλείται **απλός πόλος** της f, αν το κύριο μέρος του αναπτύγματος Laurent έχει πεπερασμένο αριθμό μη μηδενικών όρων και είναι τάξεως 1.

Βασικές ιδιότητες των μετασχηματισμών Möbius

1. Κάθε μετασχηματισμός Möbius γράφεται σαν σύνθεση των μετασχηματισμών *μετατόπισης*, *στροφής* , *μεγέθυνσης* και *αντιστροφής*, όπως είδαμε και παραπάνω.
2. Από τη σύνθεση δυο μετασχηματισμών Möbius**,** προκύπτει μετασχηματισμών Möbius
3. Η αντίστροφη συνάρτηση ενός μετασχηματισμών Möbius**,** είναι επίσης μετασχηματισμών Möbius**.**

Θεώρημα: Υπάρχει μοναδικός μετασχηματισμός Möbius που απεικονίζει τρία διαφορετικά σημεία $z_{1,}z_2, z_3$ σε τρία διαφορετικά σημεία w_1, w_2, w_3. Ο μετασχηματισμός δίνεται από την σχέση

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1} \qquad (3)$$

Απόδειξη: Πρέπει να δείξουμε ότι $f(z_1)=w_1$, $f(z_2)=w_2$, $f(z_3)=w_3$ ορίζουν τις τιμές των παραμέτρων λ, a, β μονοσήμαντα.

$$w_2-w_3=\lambda\frac{(z_2-z_3)(\beta-a)}{(z_2+\beta)(z_3+\beta)} \text{ και } w_2-w_1=\lambda\frac{(z_2-z_1)(\beta-a)}{(z_2+\beta)(z_1+\beta)}$$

Άρα,
$$\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{(z_2-z_3)(z_1+\beta)}{(z_2-z_1)(z_3+\beta)} \qquad (4)$$

Οπότε για ένα τυχαίο z και $w=f(z)$ ισχύει ότι :

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}=\frac{(z-z_1)(z_3+\beta)}{(z-z_3)(z_1+\beta)} \qquad (5)$$

Απαλείφοντας από την (4) και την (5) το β προκύπτει η (3).

Παρατηρήσεις:

- ✓ Αν $w_1=\infty$, τότε το πρώτο μέλος της (3) γίνεται $\dfrac{w_2-w_3}{w-w_3}$
- ✓ Αν $z_1=\infty$, τότε το δεύτερο μέλος της (3) γίνεται $\dfrac{z_2-z_3}{z-z_3}$

Εφαρμογή

Να βρεθεί ο σύμμορφος μετασχηματισμός που απεικονίζει τα σημεία $z_1=-1, z_2=1, z_3=0$ στα σημεία $w_1=-1, w_2=1, w_3=-i$

Λύση: Θεωρώ τυχαίο σημείο $z_4=z$ που απεικονίζεται στο σημείο $w_4=w$. Πρέπει

$$\frac{z_4-z_1}{z_2-z_1}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_4-z_3}=\frac{w_4-w_1}{w_2-w_1}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_4-w_3} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{z-(-1)}{1-(-1)}\cdot\frac{1-0}{z-0}=\frac{w-(-1)}{1-(-1)}\cdot\frac{1-(-i)}{w-(-i)} \quad\Rightarrow\quad \frac{z+1}{2}\cdot\frac{1}{z}=\frac{w+1}{2}\cdot\frac{1+i}{w+i} \quad\Rightarrow$$

$$w=f(z)=\frac{z-i}{1-zi} \quad\Rightarrow\quad f(z)=\frac{z-i}{-iz+1}.$$

Εφαρμογή

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Möbius που απεικονίζει τα σημεία $i,\infty,-i$ στα σημεία $0,1,\infty$.

Λύση: Πρέπει $\frac{z_4-z_1}{z_2-z_1}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_4-z_3}=\frac{w_4-w_1}{w_2-w_1}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_4-w_3} \quad\Rightarrow$

$$\frac{w(z)-0}{w(z)-\infty}\cdot\frac{1-\infty}{1-0}=\frac{z-i}{z+i}\cdot\frac{\infty+i}{\infty-i} \quad\Rightarrow w(z)\cdot\frac{-(\infty-1)}{-(\infty-w(z))}=\frac{z-i}{z+i}\cdot\frac{\infty+i}{\infty-i}$$

με $\left(z+\infty=\infty,\frac{\infty}{\infty}=1\right) \;\Rightarrow\; w(z)=\frac{z-i}{z+i}$

Πρόταση: Έστω $f(z)$ ένας μετασχηματισμός Möbius. Αν $E\subset\mathbb{C}$ είναι μια ευθεία και $K\subset\mathbb{C}$ ένας κύκλος στο επίπεδο z, τότε το $f(E)$ είναι ευθεία ή κύκλος και το $f(K)$ είναι ευθεία ή κύκλος στο επίπεδο w.

Απόδειξη: Επειδή ένας μετασχηματισμός Möbius είναι σύνθεση δύο γραμμικών μετασχηματισμών και μιας αντιστροφής, τότε αρκεί να δείξουμε ότι $w=f(z)=\frac{1}{z}$.

Η εξίσωση της E στο επίπεδο z θα είναι της μορφής $az+\overline{a}\overline{z}+b=0$ όπου $a\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ και $b\in\mathbb{R}$. Εάν θέσουμε $z=\frac{1}{w}$ τότε προκύπτει ότι $bw\overline{w}+a\overline{w}+\overline{a}w=0$ σχέση η οποία παριστάνει ευθεία αν $b=0$ ή κύκλο αν $b\neq 0$

Η εξίσωση του K στο επίπεδο z θα είναι μορφής $az\overline{z}+\overline{b}z+b\overline{z}+k=0$, $a,k\in\mathbb{R}, a\neq 0$ και $\left|b^2\right|>ak$.

Έτσι θέτοντας $z=\frac{1}{w}$ προκύπτει $kw\overline{w}+\overline{b}\overline{w}+bw+a=0$ σχέση η οποία παριστάνει κύκλο αν $k\neq 0$ ή ευθεία αν $k=0$.

Εφαρμογή

Να βρεθεί η εικόνα της ευθείας $y=0$ μέσω του μετασχηματισμού $w=f(z)=\frac{z-i}{z+i}$

Λύση: Θέτουμε $w=u+i\upsilon$ και $z=x+iy$. Οπότε έχουμε

$$u+iv=\frac{x+iy-i}{x+iy+i} \quad \Rightarrow \quad u+iv=\frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}$$

Πολλαπλασιάζοντας την σχέση με το συζυγή του παρονομαστή $x-i(y+1)$ προκύπτει η σχέση :

δηλαδή $u=\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}$ (2) και $\upsilon=\dfrac{-2x}{x^2+(y+1)^2}$ (3)

Στις (2) και (3) αντικαθιστούμε $y=0$ και προκύπτει

$u=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ (4) και $\upsilon=\dfrac{-2x}{x^2+1}$ (5)

Λύνοντας την (4) ως προς x προκύπτει $x^2=\dfrac{1+u}{1-u}$ και αντικαθιστώντας στη (5)

βρίσκουμε $x=-\dfrac{\upsilon}{2}\left(\dfrac{1+u}{1-u}+1\right) \Rightarrow x=\dfrac{2\upsilon}{u-1}$ (6)

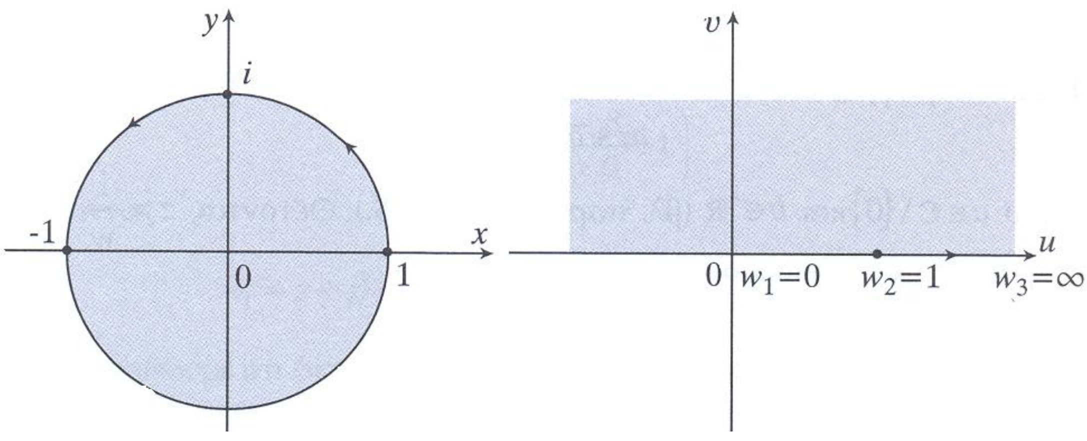
Με αντικατάσταση της (6) στην (4) βρίσκουμε ότι $u^2+\upsilon^2=1$, αυτή η περιφέρεια κύκλου είναι η ζητούμενη εικόνα.

Εφαρμογή

Να βρεθεί η σύμμορφη απεικόνιση που απεικονίζει το μοναδιαίο κύκλο $|z|\leq 1$ στο $\operatorname{Im} w>0$.

Λύση: Πρέπει να βρούμε ένα μετασχηματισμός Möbius που να απεικονίζει τα σημεία $1, i, -1$ του επιπέδου z στα σημεία $0, 1, \infty$ του επιπέδου w.

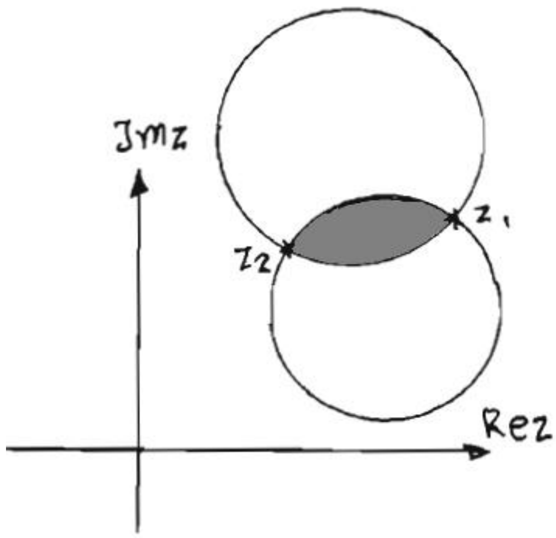
Ο μετασχηματισμός αυτός είναι της μορφής $w=\lambda\dfrac{z-1}{z+1}$ αφού απεικονίζει τα σημεία 1,-1 του z στα σημεία $0,\infty$ του w. Τώρα, το i απεικονίζεται στο 1, οπότε ισχύει $1=\lambda\dfrac{i-1}{i+1} \Rightarrow \lambda=-i$. Οπότε ο μετασχηματισμός $w=i\dfrac{1-z}{1+z}$ απεικονίζει τον κύκλο $|z|=1$ στην ευθεία $\upsilon=0$, ενώ το εσωτερικό του, επειδή διατηρείται η φορά και σύμφωνα με προηγούμενο θεώρημα, απεικονίζεται στο άνω ημιεπίπεδο $\operatorname{Im} w>0$.



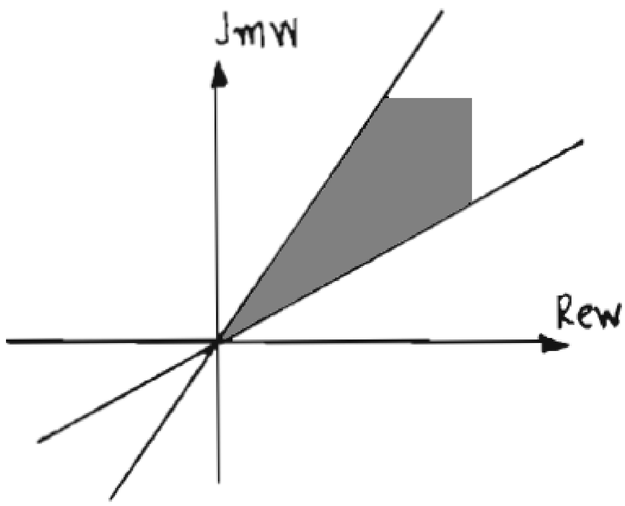
Εφαρμογή

Ένας ‘‘φακοειδής’’ τόπος έχει σύνορα δύο περιφέρειες που τέμνονται. Να βρεθεί η σύμμορφη απεικόνιση που απεικονίζει τον ‘‘φακοειδή’’ τόπο σε μια γωνία με κορφή την αρχή των αξόνων.

Λύση: Έστω ότι έχουμε τον φακοειδή τόπο του σχήματος με σύνορα τις περιφέρειες C_1, C_2.



Επειδή ο μετασχηματισμός απεικονίζει περιφέρεις του επιπέδου z σε περιφέρεις του επιπέδου w, συμπεραίνουμε ότι τα δύο σημεία τομής z_1, z_2 απεικονίζονται στα σημεία $w=0$ και $w=\infty$, ώστε οι εικόνες C_1', C_2' να έχουν σημεία τομής τα σημεία $0,\infty$ άρα είναι ευθείες που δίερχονται από την αρχή των αξόνων, αφού δύο περιφέρειες με πεπερασμένη ακτίνα δεν γίνεται να τέμνονται στο ∞.



Συνεπώς, ο ζητούμενος μετασχηματισμός Möbius είναι της μορφής

$f(z)=\lambda\dfrac{z-z_1}{z-z_2}, \lambda\in\mathbb{C}$. Επίσης ισχύει $f(z_1)=0$, $f(z_2)=\infty$.

Αξίζει να υπενθυμισθεί πως η γωνία με την οποία τέμνονται οι δύο περιφέρειες είναι ίση με την γωνία που σχηματίζουν οι εικόνες τους.

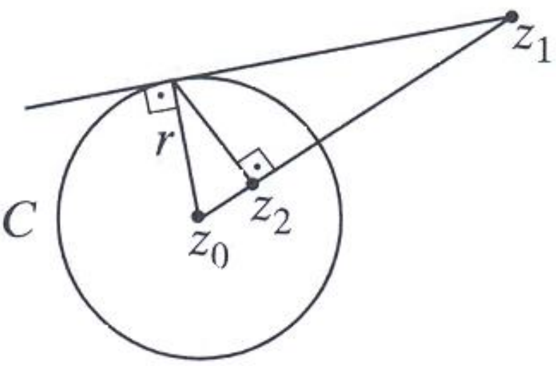
Συμμετρικά σημεία

Έστω η ευθεία $az+\overline{az}+k=0$. Δύο σημεία z_1, z_2 είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία αν και μόνο αν ισχύει $az_1+\overline{az_2}+k=0$.

Έστω ο κύκλος $C:|z-z_0|=r$. Δύο σημεία z_1, z_2 είναι συμμετρικά ως προς τον κύκλο C αν και μόνο αν ισχύουν οι σχέσεις $\arg(z_1-z_0)=\arg(z_2-z_0)$ (1) και $|z_1-z_0||z_2-z_0|=r^2$ (2).

Το κέντρο z_0 του κύκλου και το ∞ θεωρούνται συμμετρικά ως προς τον C.

Οι σχέσεις (1) και (2) γράφονται στην μορφή $(z_1-z_0)\overline{(z_2-z_0)}=r^2$ (3). Από τη σχέση (1) είναι φανερό ότι τα σημεία z_0, z_1, z_2 βρίσκονται στην ίδια ημιευθεία, ενώ από τη (2) ότι το γινόμενο των αποστάσεων των δύο συμμετρικών σημείων από το κέντρο του κύκλου ισούται με το τετράγωνο της ακτίνας. Αν το σημείο z_1 βρίσκεται πάνω στον κύκλο C, τότε το συμμετρικό του ταυτίζεται με το z_1.



Έστω τώρα ο κύκλος C και τα συμμετρικά ως προς αυτόν σημεία z_1, z_2.

Έστω ότι $z_1=z_0r_1e^{i\theta}$. Τότε επειδή τα z_0, z_1, z_2 βρίσκονται στην ίδια ευθεία από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει $z_2=z_0r_2e^{i\theta}$ και $r_2=\dfrac{r^2}{r_1}$. Έστω ένα τυχαίο σημείο του C, $z=z_0+re^{i\varphi}$. Τότε ισχύει:

$$\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\left|\frac{re^{i\varphi}-r_1e^{i\theta}}{re^{i\varphi}-r_2e^{i\theta}}\right|=\frac{r_1}{r}\left|\frac{re^{i\varphi}-r_1e^{i\theta}}{r_1e^{i\varphi}-re^{i\theta}}\right|\Rightarrow\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\frac{r_1}{r}=\frac{r}{r_2}$$ που είναι μια αναπαράσταση του C.

Αντίστροφα, μια σχέση της μορφής $\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right|=k, z_1\neq z_2, k\geq 0$ παριστάνει κύκλο για τον οποίο τα z_1, z_2 είναι συμμετρικά. Μπορούμε να βρούμε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου συναρτήσει των δύο συμμετρικών σημείων και του k.

$|z-z_1|=k|z-z_2| \Rightarrow |(z-z_1)-k^2(z-z_2)|=k|(z-z_1)-(z-z_2)|$

Άρα , $$\left|z-\frac{z_1-k^2 z_2}{1-k^2}\right|=\frac{k\left|z_1-z_2\right|}{\left|1-k\right|^2}.$$

Αυτή η εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο

$z_0=\dfrac{z_1-k^2 z_2}{1-k^2}$ και ακτίνα $r=\dfrac{k\left|z_1-z_2\right|}{\left|1-k\right|^2}$.

Ακόμα, $z_1-z_0=\dfrac{k^2}{1-k^2}(z_2-z_1)$ και $z_2-z_0=\dfrac{1}{1-k^2}(z_2-z_1)$,

συνεπώς $(z_1-a)\overline{(z_2-a)}=r^2$.

Άρα όντως τα σημεία z_1, z_2 είναι συμμετρικά ως προς τον κύκλο κέντρου z_0 και ακτίνας r.

- Αν $k=0$ τότε η ακτίνα είναι μηδέν οπότε ο κύκλος εκφυλίζεται σε σημείο.
- Αν $k=1$ τότε η ακτίνα γίνεται άπειρη και ο κύκλος γίνεται μια ευθεία. Σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση $\left|z-z_1\right|=\left|z-z_2\right|$ είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα σημεία z_1 και z_2.

Καταλήξαμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι η εξίσωση $\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right|=k$, $k>0$ παριστάνει κύκλο ως προς τον οποίο τα σημεία z_1 και z_2 είναι συμμετρικά. Η οικογένεια των κύκλων που έχουν τα ίδια συμμετρικά σημεία ονομάζεται **οικογένεια κύκλων του Απολλωνίου.**

Πρόταση (Ιδιότητα διατήρησης της συμμετρίας): Ένας μετασχηματισμός Möbius απεικονίζει συμμετρικά σημεία ως προς έναν κύκλο σε συμμετρικά σημεία ως προς την εικόνα του κύκλου.

Απόδειξη: Έστω ο κύκλος C με τα συμμετρικά ως προς αυτόν σημεία z_1, z_2

$$C:\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=k,\ k>0$$

και ο μετασχηματισμός $z=\dfrac{-dw+b}{cw-a}$. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό στην εξίσωση του κύκλου έχουμε $\left|\dfrac{(cz_1+d)w-(az_1+b)}{(cz_2+d)w-(az_2+b)}\right|=k$

Αν υποθέσουμε ότι $z_1, z_2 \neq -\dfrac{d}{c}$ τότε, $\left|\dfrac{w-w_1}{w-w_2}\right|=k\left|\dfrac{cz_2+d}{cz_1+d}\right|=k'$, $k'>0$. Από αυτή τη σχέση συμπεραίνουμε ότι τα σημεία w_1 και w_2 είναι συμμετρικά του κύκλου C'.

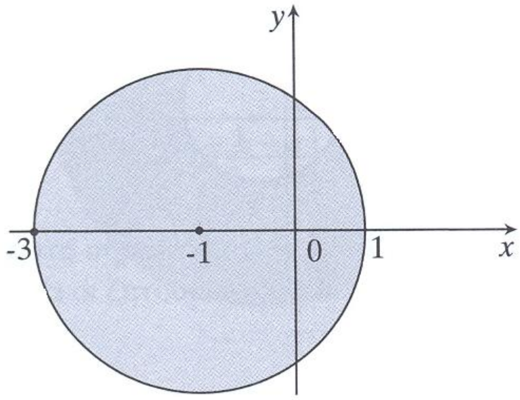
Αν $z_1=-\dfrac{d}{c}$ τότε $w_1=f(z_1)=\infty$. Τότε έχουμε $\left|w-w_2\right|=\dfrac{1}{k}\left|\dfrac{az_1+b}{cz_2+d}\right|$ δηλαδή το w_2 είναι το κέντρο του κύκλου C' οπότε τα w_1, w_2 είναι συμμετρικά ως προς τον C'.

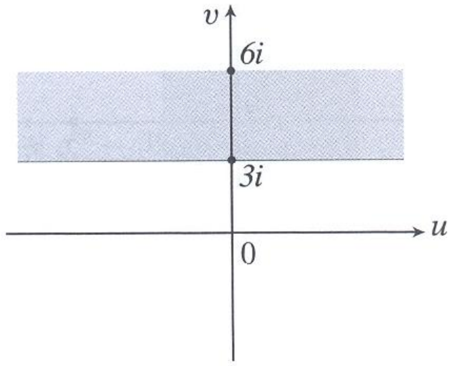
Με όμοια διαδικασία συμπεραίνουμε ανάλογο αποτέλεσμα αν $z_2=-\dfrac{d}{c}$.

Εφαρμογή

Να βρεθεί ένας μετασχηματισμός Möbius που να απεικονίζει το δίσκο $|z+1|\le 2$ στο ημιεπίπεδο $\operatorname{Im} z \ge 3$.

Λύση: Επειδή τα σημεία -1 και ∞ είναι συμμετρικά ως προς τον κύκλο $|z+1|=2$, ενώ τα σημεία 0 και $6i$ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $\operatorname{Im} z = 3$ ψάχνουμε μετασχηματισμό που θα απεικονίζει τα σημεία $-1,\infty,1$ του επιπέδου z στα σημεία $6i,0,3i$ αντίστοιχα του w επιπέδου.





Επειδή το ∞ απεικονίζεται στο 0, ψάχνουμε ένα μετασχηματισμό της μορφής $w=\dfrac{a}{z+b}$. Έτσι, χρησιμοποιώντας ότι $6i=\dfrac{a}{-1+b}$ και $3i=\dfrac{a}{1+b}$ καταλήγουμε ότι

$$w=\frac{12i}{z+3}.$$

Εφαρμογή

Να βρεθούν οι μετασχηματισμός Möbius που απεικονίζουν το δίσκο $|z|<1$ στον δίσκο $|w|<1$ έτσι ώστε ένα δοσμένο εσωτερικό σημείο να απεικονίζεται στο κέντρο του δίσκου.

Λύση: Έστω το εσωτερικό σημείο a και το συμμετρικό του ως προς τον κύκλο $|z|=1$, το σημείο $\dfrac{1}{\bar{a}}$. Από τη στιγμή που γνωρίζουμε ότι το a απεικονίζεται στο 0 αυτομάτως ξέρουμε πως το σημείο $\dfrac{1}{\bar{a}}$ απεικονίζεται στο ∞ γιατί είναι συμμετρικό του 0 ως προς τον κύκλο $|w|=1$. Επομένως ο μετασχηματισμός που ψάχνουμε είναι της μορφής $w=\lambda\dfrac{z-a}{z-\frac{1}{\bar{a}}}=-\lambda\bar{a}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$.

Επειδή όμως

$$|w|=1 \Rightarrow \left|-\lambda\bar{a}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| = |\lambda\bar{a}|\left|\frac{e^{i\varphi}-a}{1-\bar{a}e^{i\varphi}}\right| = |\lambda\bar{a}|\left|\frac{e^{i\varphi}-a}{e^{-i\varphi}-\bar{a}}\right| = |\lambda\bar{a}| = 1,$$

το οποίο σημαίνει ότι $-\lambda a = e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$.

Επομένως οι ζητούμενοι μετασχηματισμοί είναι της μορφής

$$w = f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \theta \in \mathbb{R}$$

Σημείωση: Η λύση είναι μοναδική εκτός της σταθεράς θ. Όμως,

$f'(a) = e^{i\theta}\dfrac{1}{1-|a|^2}$ οπότε $\arg f'(a) = \theta$, δηλαδή μπορεί να υπάρξει πλήρης καθορισμός του μετασχηματισμού αν γνωρίζουμε την παράγωγο της f στο σημείο a.

Εφαρμογή

Να βρεθεί μετασχηματισμός που απεικονίζει το δίσκο $|z|<1$ στο δίσκο $|w|<1$ έτσι ώστε $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ και $\arg f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$.

Λύση: Ο ζητούμενος μετασχηματισμός Möbius είναι της μορφής

$$w = f(z) = e^{i\theta}\frac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}} = e^{i\theta}\frac{2z-1}{2-z}$$

και επειδή $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}e^{i\theta}$ τότε πρέπει $\arg f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} = \theta$, ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι ο $w = i\frac{2z-1}{2-z}$.

Εφαρμογή

Αν θ, a σταθερές, $\theta \in \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{C}$ με την ιδιότητα $|a|<1$ να δειχθεί ότι ο μετασχηματισμός $w = e^{i\theta}\dfrac{z-a}{\bar{a}z-1}$ απεικονίζει το δίσκο $|z|<1$ επί του δίσκου $|w|<1$.

Να βρεθούν οι σταθερές θ, a ώστε $w\left(\frac{1-i}{2}\right)=0$ και $\arg w'\left(\frac{1-i}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$.

Λύση: $w=e^{i\theta}\dfrac{z-a}{\bar{a}z-1} \Leftrightarrow w(\bar{a}z-1)=e^{i\theta}(z-a) \Leftrightarrow z=\dfrac{w-ae^{i\theta}}{w\bar{a}-e^{i\theta}}$

Αντικαθιστώντας το z στη σχέση $|z|<1$ προκύπτει

$$\frac{w-ae^{i\theta}}{w\bar{a}-e^{i\theta}}<1 \Leftrightarrow \left|w-ae^{i\theta}\right|<\left|w\bar{a}-e^{i\theta}\right| \Leftrightarrow \left|w-ae^{i\theta}\right|^2<\left|w\bar{a}-e^{i\theta}\right|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (w-ae^{i\theta})(\bar{w}-\bar{a}e^{-i\theta})<(w\bar{a}-e^{i\theta})(\bar{w}a-e^{-i\theta}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w\bar{w}-w\bar{a}e^{-i\theta}-a\bar{w}e^{i\theta}+ae^{i\theta}\bar{a}e^{-i\theta}<w\bar{w}a\bar{a}-w\bar{a}e^{-i\theta}-e^{i\theta}\bar{w}a+e^{i\theta}e^{-i\theta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w\bar{w}+a\bar{a}<w\bar{w}a\bar{a}+1 \Rightarrow w\bar{w}(1-a\bar{a})<1-a\bar{a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |w|^2\ 1-|a|^2\ <\ 1-|a|^2 \quad \Rightarrow |w|^2<1 \Rightarrow |w|<1$$

διότι $1-|a|^2>0$, αφού $|a|<1$.

Συνεπώς, ο δίσκος $|z|<1$ απεικονίζεται στο δίσκο $|w|<1$.

Στη συνέχεια, επειδή πρέπει $w\left(\frac{1-i}{2}\right)=0$ έχουμε $e^{i\theta}\dfrac{\frac{1-i}{2}-a}{\bar{a}\frac{1-i}{2}-1}=0 \Rightarrow a=\dfrac{1-i}{2}$

οπότε ο μετασχηματισμός γράφεται $w=e^{i\theta}\dfrac{z-\frac{1-i}{2}}{\frac{1+i}{2}z-1} \Rightarrow w=e^{i\theta}\dfrac{2z-1+i}{(1+i)z-2}$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση έχουμε:

$$w'=e^{i\theta}\frac{2\ (1+i)z-2\ -(2z-1+i)(1+i)}{(1+i)z-2\ ^2}$$

και επειδή $\arg w'\left(\frac{1-i}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$ τελικά έχουμε

$$\arg\left(e^{i\theta}\frac{2\left(1+i\ \frac{1-i}{2}-2\right)-\left(2\frac{1-i}{2}-1+i\right)1+i}{\left((1+i)\frac{1-i}{2}-2\right)^2}\right)=\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arg\ e^{i\theta}(-2)\ =\frac{\pi}{2} \Rightarrow \arg\ 2e^{i(\theta+\pi)}\ =\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta+\pi=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta=-\frac{\pi}{2}$$

Οπότε, ο τελικός μετασχηματισμός είναι ο $e^{-i\frac{\pi}{2}}\dfrac{2z-1+i}{(1+i)z-2}$.

Εφαρμογή

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Möbius $w=f(z)$ που απεικονίζει τα άνω ημιεπίπεδο $\operatorname{Im} z>0$ επί του μοναδιαίου δίσκου $|w|<1$ έτσι ώστε: $f(i)=0$ και $\arg f'(i)=\dfrac{\pi}{2}$.

Λύση: Ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι της μορφής

$$f(z)=e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\bar{a}},\theta\in\mathbb{R} \qquad (1)$$

Επειδή $f(i)=0$ η παραπάνω σχέση γίνεται $e^{i\theta}\dfrac{i-a}{i-\bar{a}}=0\Rightarrow\ a=i$ και $\bar{a}=\ -i$

οπότε η σχέση (1) γίνεται $f(z)=e^{i\theta}\dfrac{z-i}{z+i}$. Παραγωγίζοντας αυτήν τη σχέση έχουμε

$$f'(z)=e^{i\theta}\frac{z+i-(z-i)}{(z+i)^2}\Rightarrow f'(z)=\frac{2ie^{i\theta}}{(z+i)^2}\Rightarrow f'(i)=\frac{2ie^{i\theta}}{(2i)^2}\Rightarrow$$

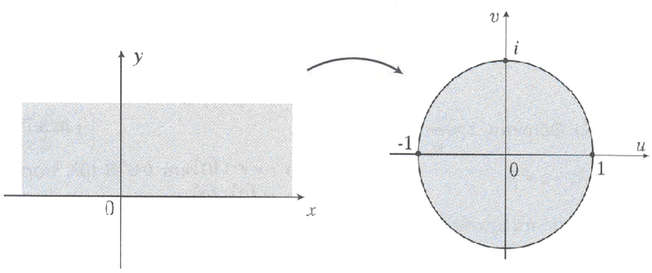
$$\Rightarrow f'(i)=\frac{e^{i\theta}}{2i}=\frac{1}{2}\frac{e^{i\theta}}{e^{i\frac{\pi}{2}}}=\frac{1}{2}e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}\Rightarrow f'(i)=\frac{1}{2}e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}$$

Επειδή όμως $\theta\in\mathbb{R}$, το όρισμα της $f'(i)$ είναι $\theta-\dfrac{\pi}{2}$ και πρέπει $\theta-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\theta=\pi$,

οπότε η $f(z)=e^{i\theta}\dfrac{z-i}{z+i}$ γίνεται $f(z)=e^{i\pi}\dfrac{z-i}{z+i}=-\dfrac{z-i}{z+i}$.

Εφαρμογή

Να δειχθεί ότι ο μετασχηματισμός $w=e^{i\theta}\dfrac{z-a}{z-\bar{a}},\theta\in\mathbb{R},\operatorname{Im}a>0$ απεικονίζει το ημιεπίπεδο $\operatorname{Im} z>0$ στον μοναδιαίο δίσκο $|w|<1$.



Λύση:

Ο τόπος $\operatorname{Im} z > 0 \;\Rightarrow\; y > 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{z-\bar{z}}{2i} > 0 \;\Rightarrow\; -i\;\, z-\bar{z}$ (1)

Λύνω τον μετασχηματισμό ως προς z, $w = e^{i\theta}\dfrac{z-a}{z-\bar{a}} \;\Leftrightarrow\; z = \dfrac{\bar{a}w - e^{i\theta}a}{w-e^{i\theta}}$

Και αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην (1) προκύπτει ότι

$-i\left[\dfrac{\bar{a}w - ae^{i\theta}}{w-e^{i\theta}} - \overline{\left(\dfrac{\bar{a}w - e^{i\theta}a}{w-e^{i\theta}}\right)}\right] > 0$ και αν λάβουμε υπόψη ότι $\dfrac{a-\bar{a}}{2i} = 2\operatorname{Im} a > 0$

έχουμε ότι $u^2 + \upsilon^2 < 1 \;\Leftrightarrow\; |w| < 1$.

Εφαρμογή

Να βρεθούν οι μετασχηματισμοί που απεικονίζουν το μοναδιαίο δίσκο $|z| < 1$ επί του ημιεπιπέδου $\operatorname{Im} w > 0$.

Λύση: Η απεικόνιση
$$w_2 = e^{i\theta}\frac{w_1 - a}{w_1 - \bar{a}}, \theta \in \mathbb{R},\ \operatorname{Im} a > 0 \qquad (1)$$
απεικονίζει αμφιμονοσήμαντα το ημιεπίπεδο $\operatorname{Im} w_1 > 0$ στον μοναδιαίο δίσκο $|w_2| < 1$. Άρα η (1) απεικονίζει τον μοναδιαίο δίσκο $|w_2| < 1$ στο άνω ημιεπίπεδο $\operatorname{Im} w_1 > 0$. Θέτοντας $w_2 = z$, $w_1 = z$ προκύπτει
$$z = e^{i\theta}\frac{w-a}{w-\bar{a}} \qquad (2)$$
Έτσι, λύνοντας την (2) ως προς w βρίσκουμε του ζητούμενους μετασχηματισμούς
$$w = \frac{z\cdot\bar{a} - ae^{i\theta}}{z - e^{i\theta}}, \theta \in \mathbb{R}$$
.

Εφαρμογή

i) Να βρεθούν τα σταθερά σημεία του μετασχηματισμού $f(z) = \dfrac{z-6}{z-4}$

ii) Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Möbius κατά τον οποίο τα σημεία 2 και 3 παραμένουν σταθερά ενώ το σημείο 4 απεικονίζεται στο ∞.

Λύση: i) Αν a είναι ένα σταθερό σημείο του μετασχηματισμού $w = f(z)$ τότε ισχύει $f(a) = a$. Οπότε,

$$a=\frac{a-6}{a-4}\Leftrightarrow a(a-4)=a-6 \Leftrightarrow a^2-4a=a-6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2-5a+6=0 \Rightarrow a_1=2\,, a_2=3$$

Τα a_1, a_2 είναι τα σταθερά σημεία.

ii) Το σημείο $z_1=2$ απεικονίζεται στο $w_1=2$, το $z_2=3$ απεικονίζεται στο $w_2=3$ ενώ το $z_3=4$ απεικονίζεται στο $w_3=\infty$. Θεωρώ τυχαίο σημείο z που έχει εικόνα w. Τότε ισχύει : $\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}\cdot\dfrac{z_2-z_3}{z-z_3}=\dfrac{w-w_1}{w_2-w_1}\cdot\dfrac{w_2-w_3}{w-w_3}$ (1)

κι επειδή $w_3=\infty\,, w_2=3, w_1=2$, έχουμε $\dfrac{w_2-w_3}{w-w_3}=1$.

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην (1) προκύπτει:

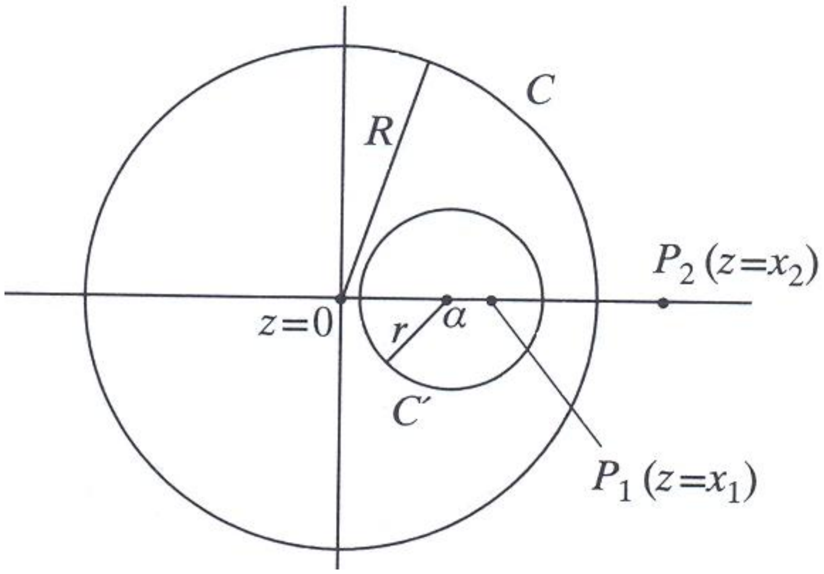
$$\frac{z-2}{1}\cdot\frac{-1}{z-4}=\frac{w-2}{1}\cdot 1 \Rightarrow \frac{z-2}{1}\cdot\frac{-1}{z-4}=\frac{w-2}{1} \Rightarrow w=\frac{z-6}{z-4}$$

ο οποίος είναι ο ζητούμενος μετασχηματισμός.

Εφαρμογή

Να βρεθεί μετασχηματισμός που απεικονίζει ένα δακτύλιο μη ομόκεντρων κύκλων σε δακτύλιο ομόκεντρων κύκλων.

Λύση: Έστω ο κύκλος C με κέντρο το σημείο $z=0$ και ακτίνα R και κύκλος C' με ακτίνα $r<R$ και κέντρο το σημείο $a\in\mathbb{R}$. Δύο σημεία P_1 και P_2 που είναι συμμετρικά ως προς τους δύο κύκλους βρίσκονται στον άξονα των πραγματικών αριθμών όπως φαίνεται και στο σχήμα.



Λόγω της συμμετρίας ισχύουν οι σχέσεις :

$$(x_1-a)(x_2-a)=r^2 \quad (1) \quad , \quad x_1x_2=R^2 \quad (2)$$

Η εξίσωση $ax^2 - \ R^2 - r^2 + a^2 \ x + aR^2 = 0$ με θετική ορίζουσα

$R^2 - r^2 + a^2 \ ^2 - 4aR^2$ διότι $R - r > a$, έχει ρίζες τα x_1 και x_2.

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό $w = \lambda \dfrac{z - x_1}{z - x_2}$, ο οποίος απεικονίζει τους κύκλους C, C' του επιπέδου z ,σε δύο κύκλους K και K' του επιπέδου w.

Το σημείο P_2 απεικονίζεται στο ∞, ενώ το P_1 που είναι συμμετρικό του ως προς του κύκλους C, C', απεικονίζεται σε σημείο που είναι συμμετρικό του $w = \infty$ ως προς τους κύκλους K και K' στο επίπεδο w. Συμμετρικό σημείο όμως είναι το κέντρο του κύκλου, οπότε ο μετασχηματισμός που υποθέσαμε είναι η ζητούμενη απεικόνιση αφού απεικονίζει το P_1 στο κοινό κέντρο των κύκλων K και K'.

Εφαρμογή

Να βρεθεί ένας μετασχηματισμός που απεικονίζει το πεδίο $D = \{z : \operatorname{Im} z < 0, |z + ia| > R, a > R >)\}$ σε ένα δακτύλιο με κέντρο το 0.

Λύση: Πρέπει αρχικά να βρεθούν δύο σημεία που είναι ταυτόχρονα συμμετρικά ως προς την ευθεία $\operatorname{Im} z = 0$ και ως προς τον κύκλο $|z + ia| = R$. Προφανώς αυτά τα σημεία είναι πάνω στον άξονα των φανταστικών οπότε είναι της μορφής ik και $-ik$, $k > 0$ λόγω της συμμετρίας ως προς την ευθεία. Επίσης, λόγω της συμμετρίας ως προς τον κύκλο ισχύει $(a + k)(a - k) = R^2$, οπότε $k = \sqrt{a^2 - R^2}$.

Ο μετασχηματισμός που ψάχνουμε είναι ο $w = \dfrac{z + ik}{z - ik}$ και αυτό αποδεικνίεται γιατί το σημείο $z = -ik$ απεικονίζεται στο 0, ενώ το σημείο $z = ik$ απεικονίζεται στο ∞, άρα η εικόνα της ευθείας $\operatorname{Im} z = 0$ στο επίπεδο w είναι ο κύκλος $C : |w| = 1$. Ομοίως, αποδεικνύεται ότι ο κύκλος $|z + ia| = R$ απεικονίζεται σε έναν κύκλο $|w| = R_1$, $R_1 = \dfrac{R + a - k}{R + a + k}$. Από την αρχή της αντιστοιχίας των συνόρων ο σύμμορφος μετασχηματισμός $w = \dfrac{z + ik}{z - ik}$ απεικονίζει το πεδίο D του επιπέδου z στον δακτύλιο $R_1 < |w| < 1$ του επιπέδου w.

1.4 Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί

α) ο μετασχηματισμός $f(z) = z^2$

Η παράγωγος $f'(z) = 2z$ άρα αυτός ο μετασχηματισμός είναι σύμμορφος σε όλο το $\mathbb{C}$ εκτός του 0. Αν $w = Re^{i\phi}$ και $z = re^{i\theta}$

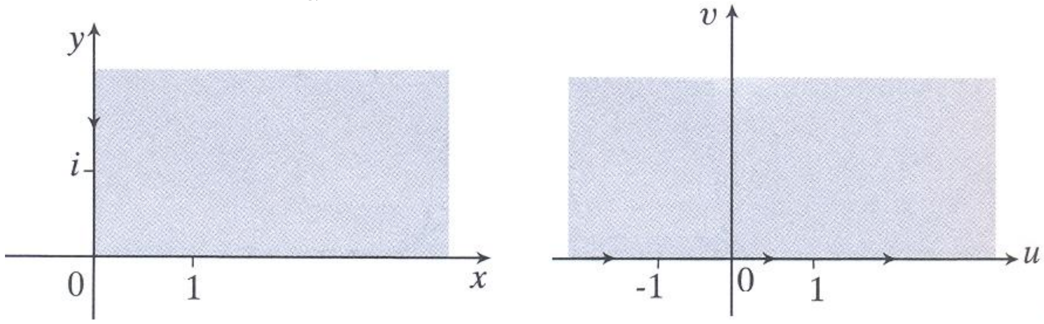
$$\Rightarrow w = z^2 = r^2 e^{2i\theta} \Rightarrow R = r^2 \text{ και } \phi = 2\theta$$

Άρα η f απεικονίζει τον κύκλο $|z| = a$ στον κύκλο $|w| = a^2$, καθώς και μία ημιευθεία, έστω την $\theta = k$ του επιπέδου z, με αρχή το 0 στην ημιευθεία $\phi = 2k$ του επιπέδου w.

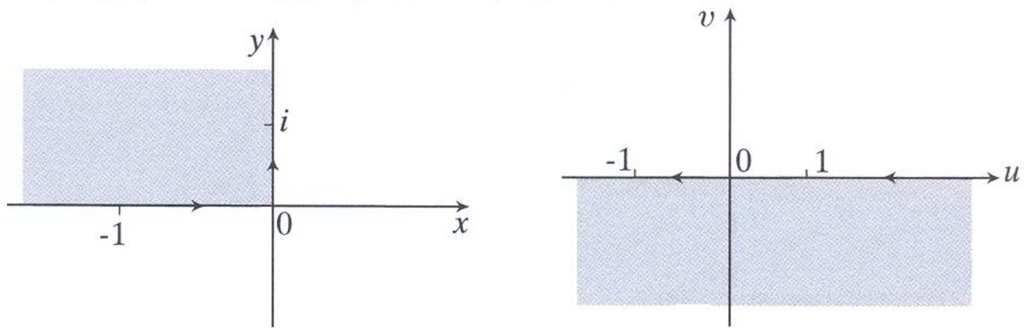
Αν $w = u + i\upsilon = f(z) = z^2$, τότε ισχύει $u(x, y) = x^2 - y^2$ και $\upsilon(x, y) = 2xy$.

Άρα, η f απεικονίζει τις οικογένειες υπερβολών του επιπέδου z, $x^2 - y^2 = C$ και $2xy = C$, στις οικογένειες ευθειών του επιπέδου w, $u = c$ και $\upsilon = c$.

Επειδή $f(i) = -1$, $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$, η f απεικονίζει το πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου z στο άνω ημιεπίπεδο του επιπέδου w.



Αναλόγως συμπεραίνουμε και ότι η f απεικονίζει το δεύτερο τεταρτημόριο του επιπέδου z στο κάτω ημιεπίπεδο του επιπέδου w.



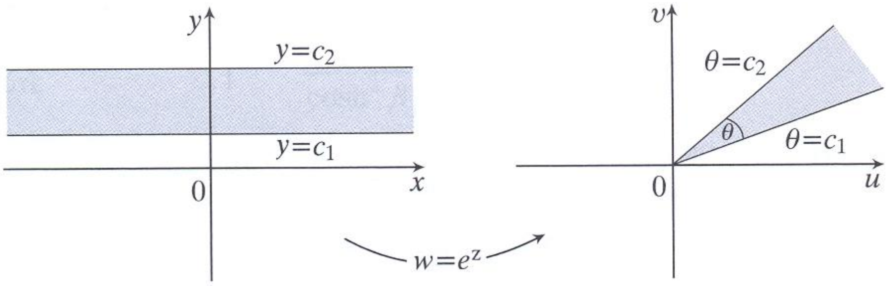
β) Εκθετικοί και λογαριθμικοί μετασχηματισμοί

Η συνάρτηση $f(z) = e^z, z \in \mathbb{C}$ είναι σύμμορφη σε όλο το $\mathbb{C}$ αφού $f'(z) = e^z$, δεν είναι όμως αμφιμονοσύμαντη σε όλο το $\mathbb{C}$. Η f είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση στο πεδίο $D = \{z = x + iy : -\pi < y \le \pi\}$.

Έστω τώρα ότι $z = x + iy$ και $w = re^{i\phi}$

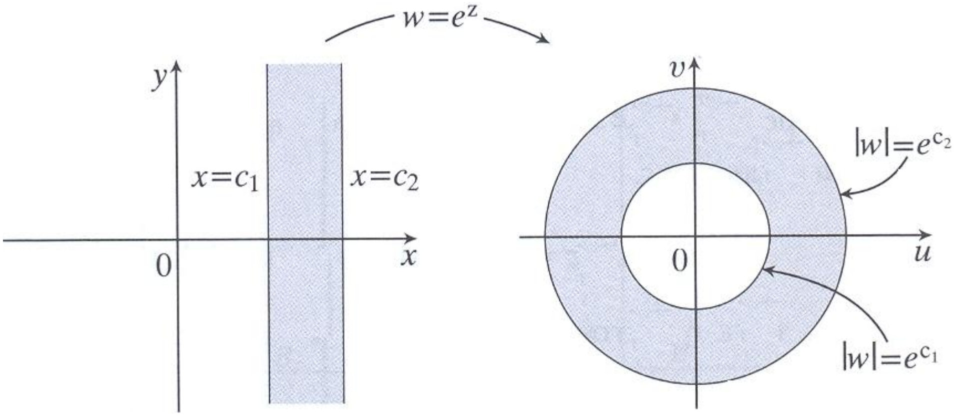
$w = e^z \Rightarrow r(x, y) = e^x$, $\phi(x, y) = y$.

Από τις παραπάνω ισότητες είναι φανερό ότι η f απεικονίζει μια οριζόντια ευθεία $y = c, c \in \mathbb{R}$ του επιπέδου z σε μια ημιευθεία $\phi = c$ με αρχή το 0 του επιπέδου w καθώς και μια ευθεία κατακόρυφη, την $x = c$ του επιπέδου z, στον κύκλο $|w| = e^c$ του επιπέδου w. Οπότε, αν $c_2 > c_1$, $c_2 - c_1 < 2\pi$ τότε η f απεικονίζει την οριζόντια λωρίδα που έχει σύνορα τις ευθείες $y = c_1$, $y = c_2$ του επιπέδου z στο γωνιακό πεδίο με γωνία $\theta = c_2 - c_1$.



Ακόμα, η άπειρη λωρίδα που περιορίζεται από τις $x = c_1$, $x = c_2$ $\quad , c_2 > c_1$ του επιπέδου z απεικονίζεται στον δακτύλιο που ορίζουν οι κύκλοι

$|w| = e^{c_1}$, $|w| = e^{c_2}$ του επιπέδου w.

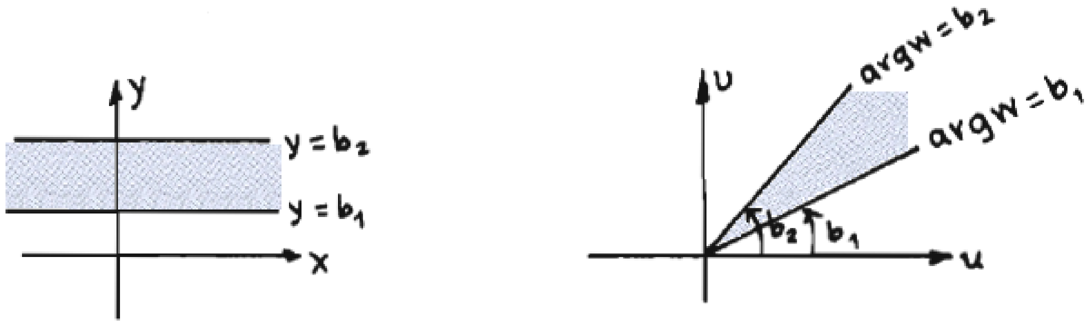


Εφαρμογή

Να βρεθεί η εικόνα του τόπου $b_1 \leq \operatorname{Im} z \leq b_2$ μέσω του μετασχηματισμού

$w = f(z) = e^z$

Λύση: Ο μετασχηματισμός που έχουμε απεικονίζει την ευθεία $\operatorname{Im} z = b$ του επιπέδου z στην ημιευθεία $\arg w = b$ του επιπέδου w. Έτσι, τα σύνορα του τόπου, $\operatorname{Im} z = b_1$, $\operatorname{Im} z = b_2$ απεικονίζονται στις ημιευθείες $\arg w = b_1$, $\arg w = b_2$ αντίστοιχα.



γ)Τριγωνομετρικοί μετασχηματισμοί

Έστω ο μετασχηματισμός $w = f(z) = \sin z$ ο οποίος είναι σύμμορφος στο διάστημα $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}$ αφού $f'(z) = \cos z$.

Έστω, $u + i\upsilon = \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$.

Αν $|a| < \frac{\pi}{2}$ τότε η ευθεία $x = a$ είναι η καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $u = \sin a \cosh y$, $\upsilon = \cos a \sinh y$

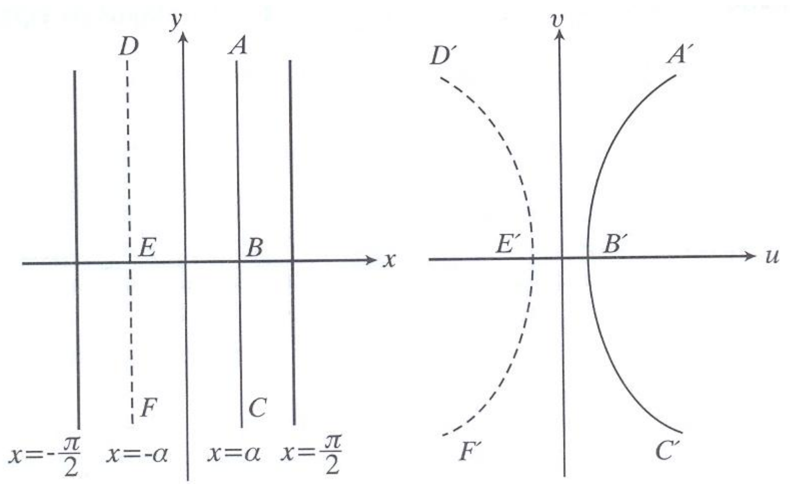
και χρησιμοποιώντας ότι $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ προκύπτει ότι

$$\frac{u^2}{\sin^2 a} - \frac{\upsilon^2}{\cos^2 a} = 1$$

δηλαδή μια υπερβολή στο επίπεδο (u, υ) με εστίες τα σημεία $\pm 1, 0$.

Αν $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τότε $u = \sin a \cosh y > 0, \forall y$ οπότε η ευθεία $x = a$ απεικονίζεται στο δεξιό κλάδο της υπερβολής.

Αν $a \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ τότε η ευθεία $x = -a$ απεικονίζεται στο ευθύγραμμο τμήμα $\upsilon = 0$, $u > 1$. Ακόμα , ο άξονας y απεικονίζεται στον άξονα υ.



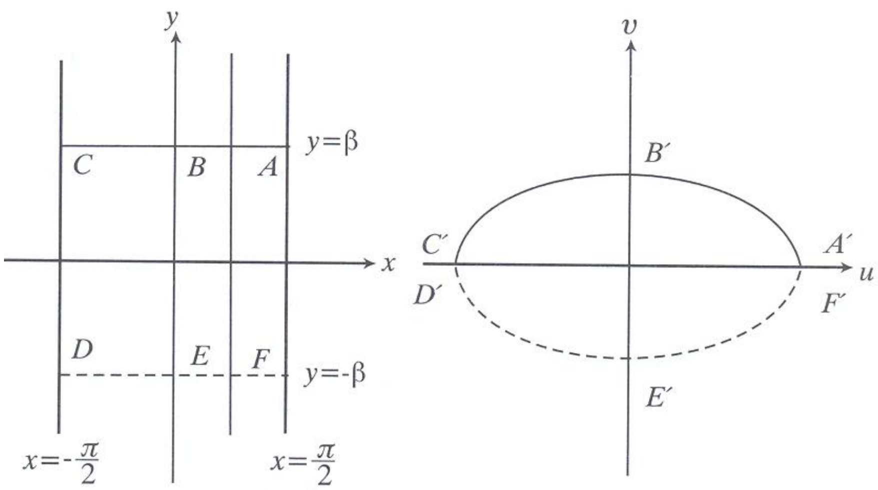
Έστω τώρα μια οριζόντια γραμμή $y = \beta$, $\beta > 0$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Ισχύει ότι $u = \sin x \cosh \beta$, $\upsilon = \cos x \sinh \beta$,οπότε

$$\frac{u^2}{\cosh^2 \beta} + \frac{\upsilon}{\sinh^2 \beta} = 1$$

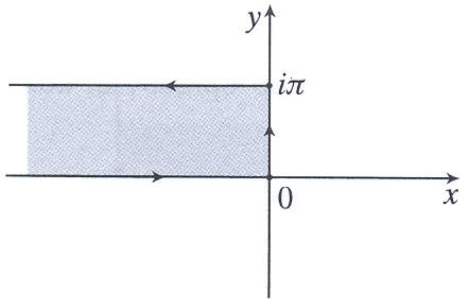
δηλαδή μια έλλειψη στο επίπεδο (u, υ). Η γραμμή $y = \beta$ απεικονίζεται στο άνω μέρος της έλλειψης. Η γραμμή $y = -\beta$ απεικονίζεται στο κάτω μέρος της έλλειψης.

Αν $\beta = 0$ τότε το ευθύγραμμο τμήμα $y = 0$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ απεικονίζεται στο ευθύγραμμο τμήμα $\upsilon = 0$, $-1 \le u \le 1$.

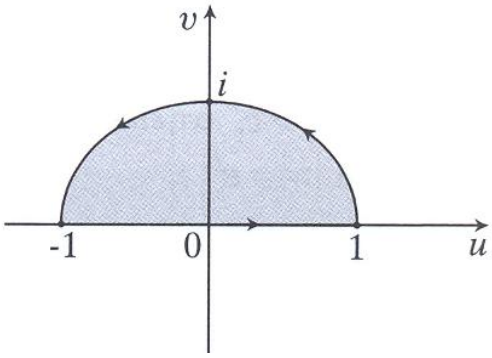


Εφαρμογή (εκθετικός μετασχηματισμός)

Να βρεθεί η εικόνα του πεδίου D του σχήματος μέσω της απεικόνισης $f(z) = e^z$



Λύση: Καταρχήν ξέρουμε $f(0)=1$ και $f(i\pi) = -1$. Επίσης, αν $x \le 0$ και $y=0$ ισχύει ότι $w = e^x \in \mathbb{R}, 0 < w \le 1$. Εξάλλου, αν $x=0$ και $0 \le y \le \pi$ τότε $|w|=1$ και $0 \le \arg w \le \pi$. Για $x \le 0$ και $y = \pi$ προκύπτει ότι $w = -e^{-x}$ και $-1 \le w < 0$.

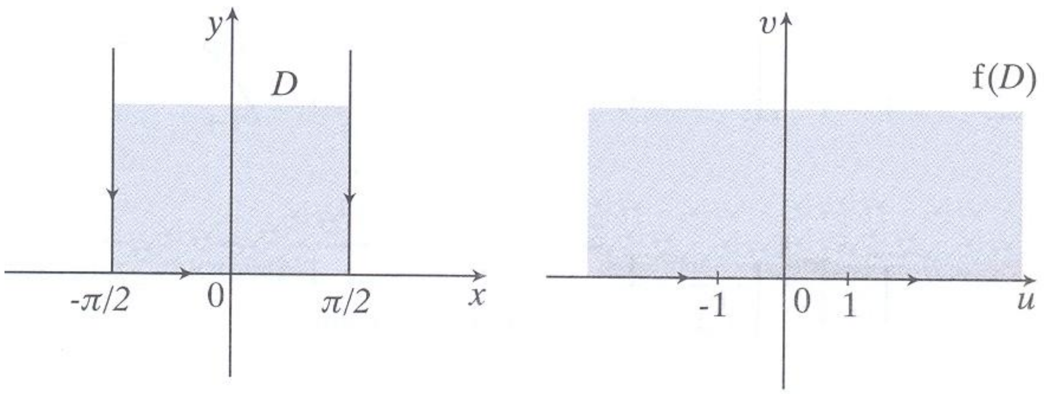


Εφαρμογή (Τριγωνομετρικός μετασχηματισμός)

Να δειχθεί ότι ο μετασχηματισμός $w = f(z) = \sin z$ απεικονίζει το πεδίο $D = \{z = x + iy : -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\ ,\ y > 0\}$ στο άνω ημιεπίπεδο.

Λύση: Αν $z = -\frac{\pi}{2} + iy$, $y \geq 0$, έχουμε $f(z) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + iy\right) = -\cosh y$, οπότε η f απεικονίζει την ημιευθεία $z = -\frac{\pi}{2} + iy$, $y > 0$ στο διάστημα $-\infty, -1$. Το διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ απεικονίζεται στο διάστημα $-1,1$.

Αν $z = \frac{\pi}{2} + iy$, $y \geq 0$, έχουμε $f(z) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + iy\right) = \cosh y$, οπότε η f απεικονίζει την ημιευθεία $z = \frac{\pi}{2} + iy$, $y > 0$ στο διάστημα $1, \infty$. Άρα η f απεικονίζει το σύνορο του D στον άξονα των πραγματικών αριθμών και έτσι, από την αρχή της αντιστοιχίας των συνόρων , το D απεικονίζεται στο άνω ημιεπίπεδο.



Εφαρμογή

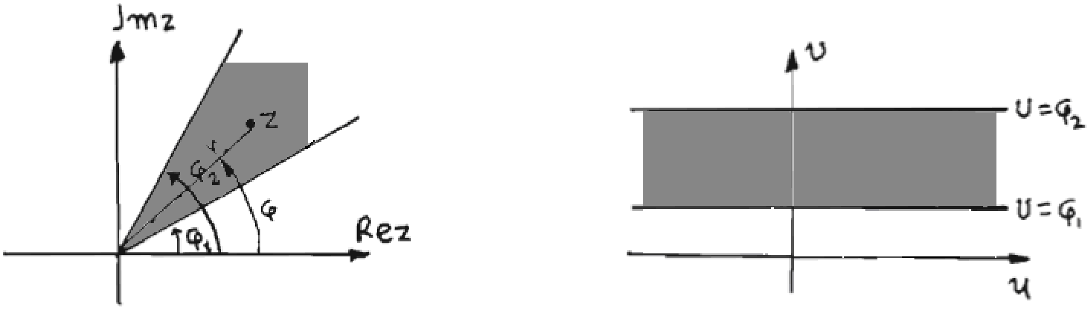
i) Να βρεθεί μέσω του μετασχηματισμού $w = \ln z$ η εικόνα του τόπου $a_1 < \arg z < a_2$.

ii) Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το πεδίο $\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{2}$ στο $0 < \operatorname{Im} w < \frac{\pi}{6}$

Λύση: i)Θεωρώ ένα τυχαίο σημείο του τόπου, το $z = re^{i\phi}, 0 < r < \infty$, $a_1 < \phi < a_2$

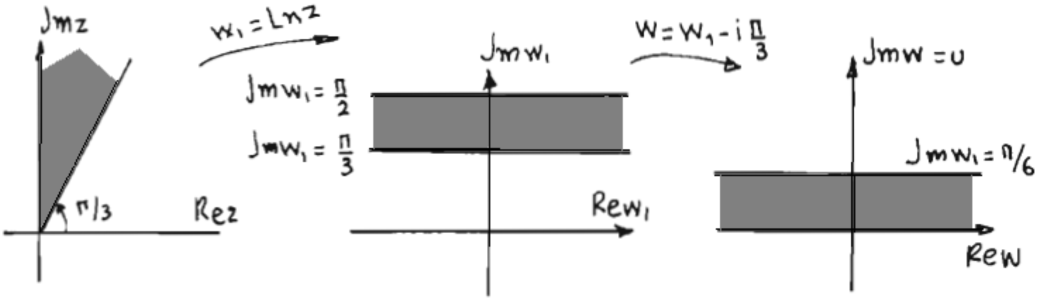
Έτσι ο μετασχηματισμός μας δίνει $w = \ln\ re^{i\phi} = \ln r + i\phi = u + i\upsilon$ και

$0 < r < \infty \Leftrightarrow -\infty < \ln r < +\infty \Leftrightarrow -\infty < u < +\infty$ καθώς και $a_1 < \phi < a_2 \Leftrightarrow a_1 < \upsilon < a_2$. Οπότε ο τόπος $a_1 < \arg z < a_2$ απεικονίζεται στον τόπο που περικλείεται από τις ευθείες $\upsilon = a_1$ και $\upsilon = a_2$ όπως φαίνεται και στο σχήμα.



ii) Το πεδίο $\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{2}$, μέσω του μετασχηματισμού $w_1 = \ln z$ απεικονίζεται στο πεδίο $\frac{\pi}{3} < \operatorname{Im} w_1 < \frac{\pi}{2}$. Οπότε για να απεικονιστεί στο ζητούμενο πεδίο, χρειαζόμαστε μεταφορά κατά $\frac{\pi}{3}$. Ο μετασχηματισμός $w = w_1 - i\frac{\pi}{3}$ απεικονίζει το πεδίο $\frac{\pi}{3} < \operatorname{Im} w_1 < \frac{\pi}{2}$ στο ζητούμενο πεδίο $0 < \operatorname{Im} w < \frac{\pi}{6}$. Συνεπώς ο μετασχηματισμός που απεικονίζει απευθείας το πεδίο $\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{2}$ στο $0 < \operatorname{Im} w < \frac{\pi}{6}$ είναι ο

$w = \ln z - i\frac{\pi}{3}$.

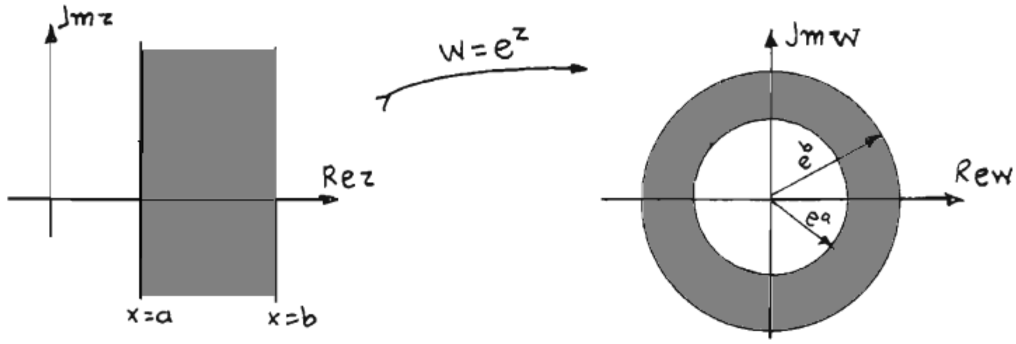


Εφαρμογή

α) Να βρεθεί μέσω του μετασχηματισμού $w = e^z$ η εικόνα του πεδίου $D = \{a < \operatorname{Re} z < b \ , a,b \in \mathbb{R}\}$

β) Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το πεδίο $0 < \operatorname{Re} z < 1$ στο πεδίο $e^2 < |w| < e^4$.

Λύση: Θεωρώ ένα τυχαίο σημείο του D, το $z = x + iy \ , a < x < b \ , \ -\infty < y < +\infty$. Έτσι ο μετασχηματισμός μας δίνει $w = e^{x+iy} \Rightarrow w = e^x e^{iy}$ και επειδή $|w| = e^x$ έχουμε $a < x < b \Rightarrow e^a < |w| < e^b$ καθώς και επειδή $\arg w = y$ παίρνουμε ότι $-\infty < y < +\infty \Rightarrow -\infty < \arg w < +\infty$. Συνεπώς το ζητούμενο πεδίο είναι το $e^a < |w| < e^b \ , \ -\infty < \arg z < +\infty$ όπως φαίνεται και στο σχήμα



β) Ο μετασχηματισμός $w_1 = 2z$ απεικονίζει το πεδίο $0 < \operatorname{Re} z < 1$ στο πεδίο $0 < \operatorname{Re} w_1 < 2$, ενώ ο μετασχηματισμός $w_2 = w_1 + 2$ απεικονίζει το πεδίο αυτό στο πεδίο $2 < \operatorname{Re} z < 4$.

Στη συνέχεια, ο $w = e^{w_2}$ απεικονίζει το πεδίο $2 < \operatorname{Re} z < 4$ στο πεδίο $e^2 < |w| < e^4$.Συνεπώς ο μετασχηματισμός που απεικονίζει απευθείας το $0 < \operatorname{Re} z < 1$ στο $e^2 < |w| < e^4$ είναι ο $w = e^{2z} + 2$.

Εφαρμογή

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το πεδίο $\frac{\pi}{4} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}$ στο άνω ημιεπίπεδο.

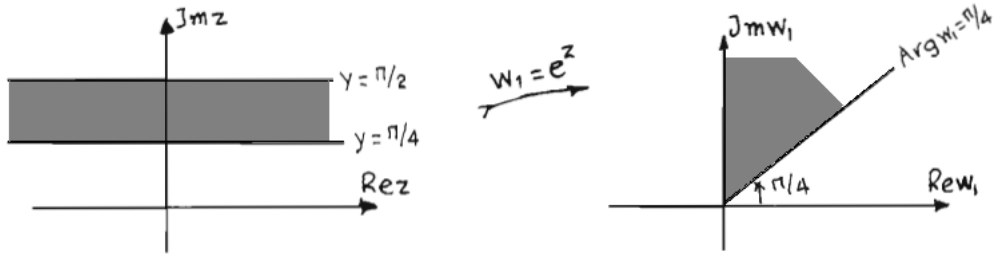
Λύση: Η διαδικασία που πρέπει να ακολουθήσουμε είναι η εξής: Πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον εκθετικό μετασχηματισμό ώστε να απεικονίσουμε την λωρίδα που είναι κάθετη στον άξονα y σε γωνία στο επίπεδο w. Στη συνέχεια θα πρέπει να στρέψουμε το πεδίο που θα προκύψει ώστε η μια ημιευθεία που σχηματίζει την γωνία να συμπίπτει με τον άξονα των πραγματικών στο επίπεδο w και στη συνέχει αυτό το πεδίο να το κάνουμε ίσο με το άνω ημιεπίπεδο.

Έστω τώρα, ένα τυχαίο σημείο του πεδίου, το

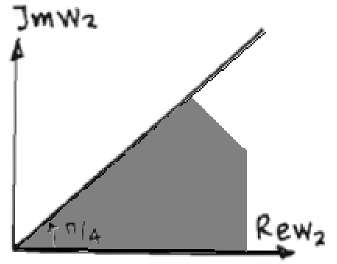
$$z = x + iy \ , \ -\infty < x < +\infty , \ \frac{\pi}{4} < y < \frac{\pi}{2}.$$

Χρησιμοποιώντας τον εκθετικό μετασχηματισμό $w_1 = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ προκύπτει ότι $|w_1| = e^x$, $-\infty < x < +\infty \Rightarrow 0 < |w_1| < +\infty$ και

$\arg w_1 = y$, $\frac{\pi}{4} < y < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \arg w_1 < \frac{\pi}{2}$ δηλαδή όπως φαίνεται και στο σχήμα



Στη συνέχεια, πρέπει να στρέψουμε το πεδίο που προέκυψε κατά γωνία $-\frac{\pi}{4}$ έτσι ώστε η μία πλευρά της γωνίας να συμπίπτει με τον άξονα των πραγματικών και αυτό γίνεται με τον μετασχηματισμό $w_2 = w_1 e^{-i\frac{\pi}{4}}$ οπότε και προκύπτει το πεδίο του σχήματος

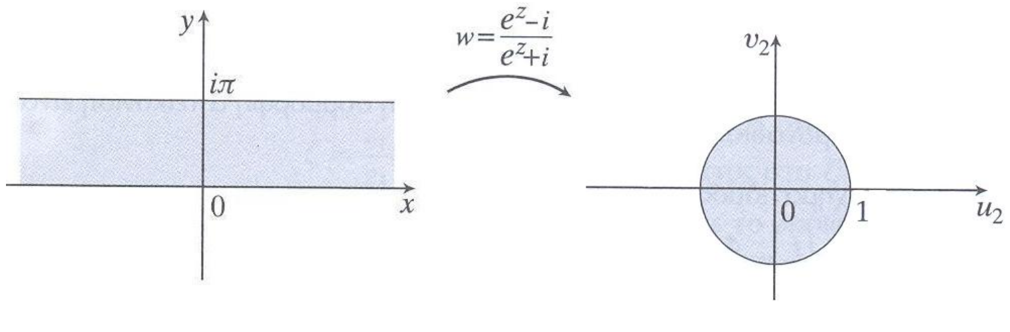


Τέλος, επειδή το πεδίο που έχουμε τώρα είναι το $0 < \arg w_2 < \frac{\pi}{4}$ πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό $w = w_2{}^4$ ώστε να τετραπλασιάσουμε την γωνία και να απεικονίζεται σε ολόκληρο το άνω ημιεπίπεδο.
Οπότε, καταλήγουμε ότι ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το πεδίο $\frac{\pi}{4} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}$ στο άνω ημιεπίπεδο είναι ο $w = \left(e^z e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^4 \Rightarrow w = e^{4z} e^{-i\pi} \Rightarrow w = -e^{4z}$.

Εφαρμογή

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το πεδίο $0 < y < \pi$ στον μοναδιαίο κύκλο.

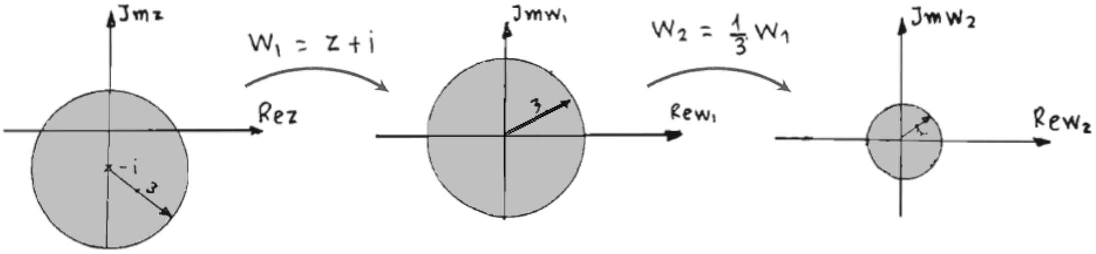
Λύση: Από την προηγούμενη εφαρμογή μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο μετασχηματισμός $w_1 = e^z$ απεικονίζει το πεδίο $0 < y < \pi$ στο άνω ημιεπίπεδο.
Ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το άνω ημιεπίπεδο στον μοναδιαίο δίσκο είναι ο $w_2 = \frac{w_1 - i}{w_1 + i}$ οπότε ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι ο $w = \frac{e^z - i}{e^z + i}$.



Εφαρμογή

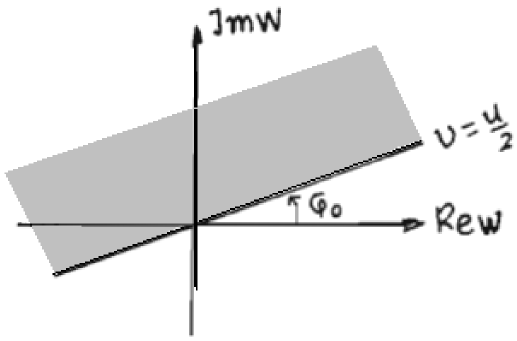
Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το δίσκο $|z+i|<3$ στο ημιεπίπεδο $2\operatorname{Im} w > \operatorname{Re} w$. Δίνεται ότι $-i \rightarrow i$.

Λύση: Αρχικά θεωρούμε τον μετασχηματισμό $w_1 = z+i$ ώστε να μετατοπίσουμε τον δίσκο για να έχει κέντρο τη αρχή των αξόνων. Στη συνέχεια παίρνουμε τον μετασχηματισμό $w_2 = \frac{1}{3} w_1$ έτσι ώστε να σμικρύνει τον κύκλο για να έχει ακτίνα ίση με το 1.



Σύμφωνα με προηγούμενη εφαρμογή, ο μετασχηματισμός που απεικονίζει τον μοναδιαίο δίσκο στο άνω ημιεπίπεδο είναι ο $w_3 = \dfrac{w_2 \cdot \bar{a} - ae^{i\theta}}{w_2 - e^{i\theta}}, \theta \in \mathbb{R}$

Η σχέση $2\operatorname{Im} w > \operatorname{Re} w$ περιγράφει το ημιεπίπεδο που βρίσκεται πάνω από την ευθεία $\upsilon > \frac{u}{2}$ όπως φαίνεται στο σχήμα



Έτσι, ο μετασχηματισμός $w = w_3 e^{i\varphi_0}$ απεικονίζει το $\operatorname{Im} w_3 > 0$ στο ημιεπίπεδο $2\operatorname{Im} w > \operatorname{Re} w$. Οπότε ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι ο

$$w_3 = \frac{\frac{1}{3}(z+i)\bar{a} - ae^{i\theta}}{\frac{1}{3}(z+i) - e^{i\theta}} e^{i\varphi_0} \ , \ \theta \in \mathbb{R}$$

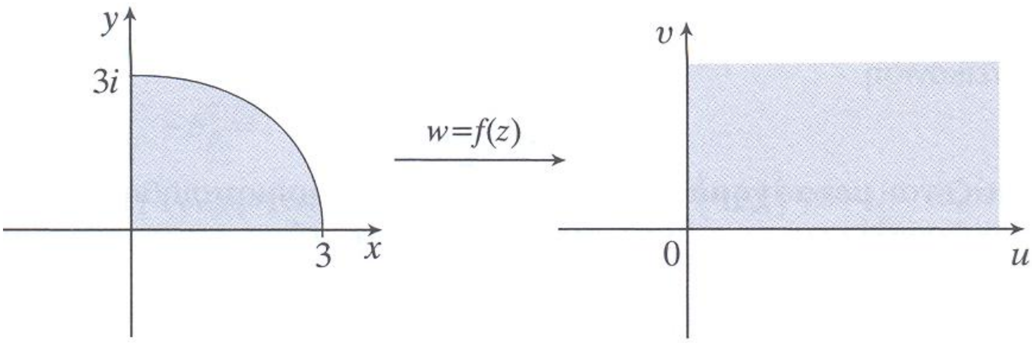
και επειδή $-i \rightarrow i$ έχουμε ότι $i = ae^{i\varphi_0} \Rightarrow a = ie^{i\varphi_0} = e^{i\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)}$.

Εφαρμογή

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το πρώτο τέταρτο του δίσκου $|z|<3$ στο πρώτο τεταρτημόριο.

Λύση: Το πρώτο τέταρτο του δίσκου $|z|<3$ απεικονίζεται στο άνω ήμισυ του μοναδιαίου δίσκου μέσω του μετασχηματισμού $w_1=\dfrac{z^2}{9}$. Στη συνέχεια, ο μετασχηματισμός $w_2=i\dfrac{1-w_1}{1+w_1}$ απεικονίζει το άνω ήμισυ του μοναδιαίου δίσκου στο πρώτο τεταρτημόριο. Άρα ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι

$$w=f(z)=i\frac{1-w_1}{1+w_1}=i\frac{1-\dfrac{z^2}{9}}{1+\dfrac{z^2}{9}}=i\frac{9-z^2}{9+z^2}$$



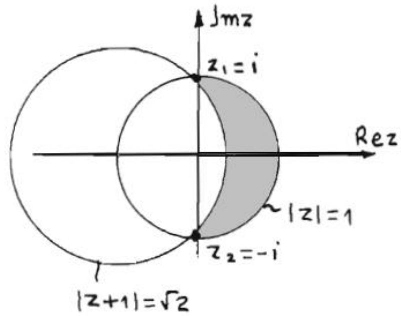
Εφαρμογή

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το πεδίο D: $|z|<1$, $|z+1|>\sqrt{2}$ στον μοναδιαίο δίσκο.

Λύση: Αρχικά θα βρούμε τα σημεία τομής των κύκλων $|z|=1$ και $|z+1|=\sqrt{2}$.

$z=1\Rightarrow z\bar{z}=1$ (1)

$|z+1|=\sqrt{2}\ \Leftrightarrow\ z+1\ \ \overline{z+1}\ =2\ \Leftrightarrow\ \ z+1\ \ \bar{z}+1\ =2\ \Leftrightarrow z\bar{z}+z+\bar{z}+1=2$ και χρησιμοποιώντας την (1) προκύπτει $z+\bar{z}=0\ \Leftrightarrow\ \bar{z}=-z$ και επειδή $|z|^2=1$ έχουμε ότι $z^2=-1\ \Rightarrow\ z_1=i$, $z_2=-i$, όπου z_1 και z_2 τα σημεία τομής. Σχηματικά,

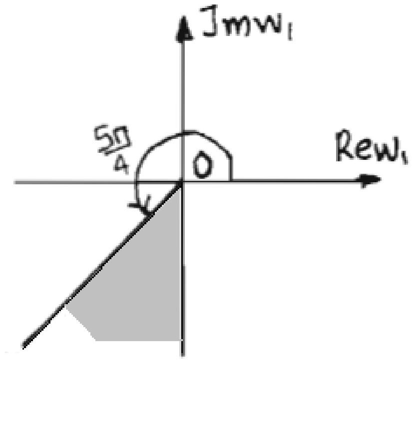


Τώρα, θα μετασχηματίσουμε τις περιφέρειες σε ευθείες μέσω του μετασχηματισμού $w_1 = \dfrac{z-i}{z+i}$. Το πεδίο D αποτελείται από τα σημεία που βρίσκονται στο εσωτερικό της περιφέρειας $|z|=1$ και στο εξωτερικό της περιφέρειας $|z+1|=\sqrt{2}$, οπότε επειδή το σύνορο $|z|=1$ απεικονίζεται σε ευθεία και $i \to 0$ αρκεί να βρούμε την εικόνα ενός ακόμα σημείου.

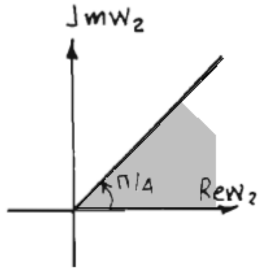
Για $z=1$ ο μετασχηματισμός μας δίνει $w_1 = \dfrac{1-i}{1+i} = \dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = -i$ άρα το σύνορο του $z=1$ απεικονίζεται στο αρνητικό μέρος του άξονα των φανταστικών αριθμών. Ομοίως θα βρεθεί και η εικόνα του συνόρου $|z+1|=\sqrt{2}$.

$$z=\sqrt{2}-1 \Rightarrow w_1 = \frac{\sqrt{2}-1-i}{\sqrt{2}-1+i} = \frac{1-\sqrt{2}+i\ 1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\ 1+i$$

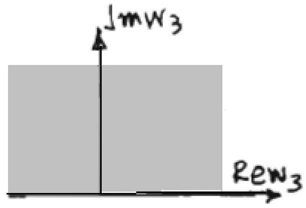
το οποίο σημαίνει ότι για το σημείο $z=\sqrt{2}-1$ ισχύει $\operatorname{Re} w_1 = \operatorname{Im} w_1 < 0$ οπότε ο μετασχηματισμός w_1 απεικονίζει το D στο πεδίο του σχήματος



Στη συνέχεια, με τον μετασχηματισμό $w_2 = w_1 e^{-i\frac{5\pi}{4}}$ στρέφουμε το πεδίο κατά γωνία $-\dfrac{5\pi}{4}$ ώστε η μια πλευρά της γωνίας που έχουμε να συμπέσει με τον θετικό άξονα των πραγματικών αριθμών.



Ακόμα, θεωρούμε τον μετασχηματισμό $w_3 = {w_2}^4$ έτσι ώστε να μετασχηματίσουμε το παραπάνω πεδίο σε ολόκληρο το ημιεπίπεδο $\mathrm{Im}\, w_3 > 0$.



Τέλος, με τον μετασχηματισμό $w = e^{i\theta} \dfrac{w_3 - a}{w_3 - \overline{a}}$, $\theta \in \mathbb{R}$ απεικονίζουμε το άνω ημιεπίπεδο στον μοναδιαίο δίσκο $|w| < 1$.

Οπότε, ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το πεδίο D: $|z| < 1$, $|z+1| > \sqrt{2}$ στον μοναδιαίο δίσκο είναι ο

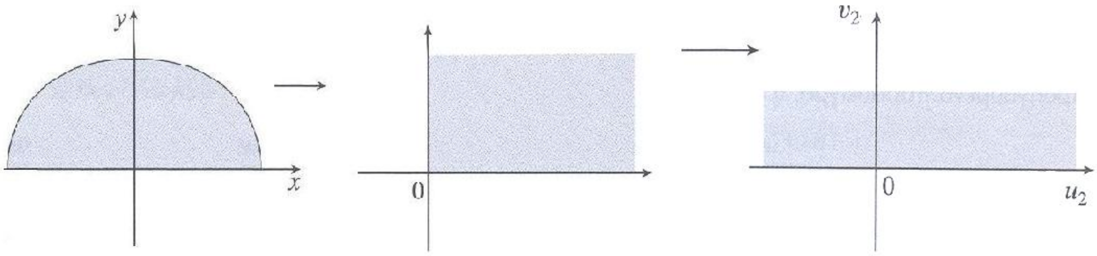
$$w = e^{i\theta} \frac{\left(\dfrac{z-i}{z+i} e^{-i\frac{5\pi}{4}} \right)^4 - a}{\left(\dfrac{z-i}{z+i} e^{-i\frac{5\pi}{4}} \right)^4 - \overline{a}} \ , \ \theta \in \mathbb{R}$$

Εφαρμογή

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το ήμισυ του δίσκου $D = \{ z : |z| < 1,\ \mathrm{Im}\, z > 0 \}$ στον μοναδιαίο δίσκο.

Λύση: Από προηγούμενη εφαρμογή γνωρίζουμε ότι ο μοναδιαίος δίσκος απεικονίζεται στο άνω ημιεπίπεδο μέσω του μετασχηματισμού $w_1 = i \dfrac{1-z}{1+z}$.

Ισχύει $\phi\left(\dfrac{i}{2}\right) = \dfrac{4}{5} + i\dfrac{3}{5}$ οπότε ο μετασχηματισμός w_1 απεικονίζει το πεδίο D στο πρώτο τεταρτημόριο. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό $w_2 = {w_1}^2$ ώστε να απεικονίσουμε το πρώτο τεταρτημόριο στο άνω ημιεπίπεδο.



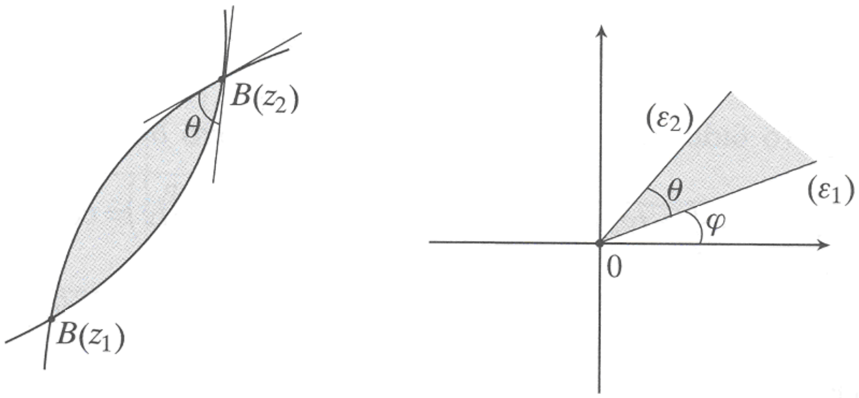
Τέλος, ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το άνω ημιεπίπεδο στον μοναδιαίο δίσκο είναι ο $w=\dfrac{i-w_2}{i+w_2}$. Οπότε ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το πεδίο D στον μοναδιαίο δίσκο $|w|<1$ είναι ο

$$w=\frac{i-w_2}{i+w_2}=\frac{i-w_1^{\,2}}{i+w_1^{\,2}}=\frac{i-\left(i\dfrac{1-z}{1+z}\right)^2}{i+\left(i\dfrac{1-z}{1+z}\right)^2}=-i\frac{1+2iz+z^2}{1-2iz+z^2}$$

Εφαρμογή

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει ένα φακοειδή πεδίο που προκύπτει από την τομή δύο κυκλικών δίσκων στο άνω ημιεπίπεδο.

Λύση: Χρησιμοποιούμε αρχικά τον μετασχηματισμός $w_1=\dfrac{z_1-z}{z_2-z}$ ο οποίος απεικονίζει το σημείο $z=z_1$ στο $w=0$ και το σημείο $z=z_2$ στο σημείο $w=\infty$. Ο μετασχηματισμός αυτός, απεικονίζει επίσης τα κυκλικά τόξα του φακοειδούς πεδίου σε δύο ημιευθείες με αρχή την αρχή των αξόνων και σχηματίζουν γωνία θ μεταξύ τους, όπου θ είναι η γωνία τομής των εφαπτομένων σε ένα από τα σημεία τομής των δύο περιφερειών των κυκλικών δίσκων. Δηλαδή ο μετασχηματισμός απεικονίζει το φακοειδές πεδίο του επιπέδου z στο γωνιακό πεδίο του επιπέδου w.



Στη συνέχεια, χρησιμοποθούμε τον μετασχηματισμό $w_2=w_1^{\frac{\pi}{\theta}}$ για να απεικονίσουμε το γωνιακό πεδίο που έχουμε στο γωνιακό πεδίο

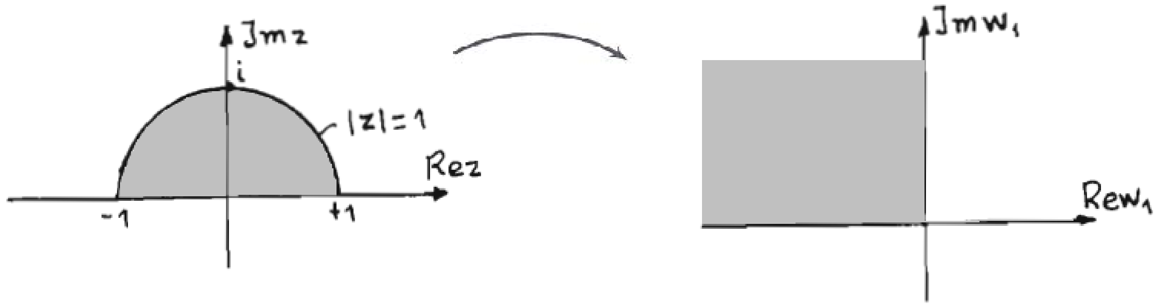
$\frac{\phi}{\theta}\pi < \arg w_1 < \frac{\phi}{\theta}\pi + \pi$ το οποίο με τον σχηματισμό $w_3 = e^{-\frac{\phi}{\theta}\pi} w_2$ απεικονίζεται στο άνω ημιεπίπεδο. Συνεπώς ο ζητούμενος μετασχηματισμός της άσκησης είναι ο

$$w = e^{-\frac{\phi}{\theta}\pi} \left(\frac{z_1 - z}{z_2 - z} \right)^{\frac{\pi}{\theta}}$$

Εφαρμογή

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το πεδίο $D = \ z:|z|<1, \operatorname{Im} z>0$ στο άνω ημιεπίπεδο.

Λύση: Το D είναι το άνω μισό του μοναδιαίου δίσκου $|z|<1$, οπότε έχουμε φακοειδές πεδίο με σύνορα την περιφέρεια του κύκλου $|z|=1$ και την ευθεία $y=0$, με σημεία τομής τα z_1=1 και $z_2 = -1$. Τ σημεία $1,-1$ στο επίπεδο z απεικονίζονται στα σημεία $0,\infty$ αντίστοιχα στο επίπεδο w. Ο μετασχηματισμός $w_1 = \frac{z-1}{z+1}$ απεικονίζει το D σε γωνιακό πεδίο του οποίου οι ευθείες είναι οι απεικονίσεις των συνόρων του D. Επειδή, $1 \to 0$ και το σύνορο $\operatorname{Re} z$ απεικονίζεται σε ευθεία , χρειαζόμαστε μόνο την εικόνα ενός σημείου ακόμα. Το $z=0$ μέσω του μετασχηματισμού μας δίνει $w_1 = -1$ άρα το ευθύγραμμο τμήμα απεικονίζεται στο αρνητικό μέρος του άξονα των πραγματικών αριθμών. Ομοίως, για $z=i$ παίρνουμε $w_1 = 1$ δηλαδή το άλλο σύνορο απεικονίζεται στο θετικό μέρος του άξονα των φανταστικών αριθμών. Συνεπώς ο D απεικονίζεται στο δεύτερο τεταρτημόριο.



Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό $w_2 = w_1 e^{-i\frac{\pi}{2}}$ έτσι ώστε να στρέψουμε το πεδίο που έχουμε κατά γωνία $-\frac{\pi}{2}$ και να συμπέσει με το πρώτο τεταρτημόριο.

Τέλος, με τον μετασχηματισμό $w = w_2^{\,2}$ μετασχηματίζουμε το πρώτο τεταρτημόριο στο άνω ημιεπίπεδο.

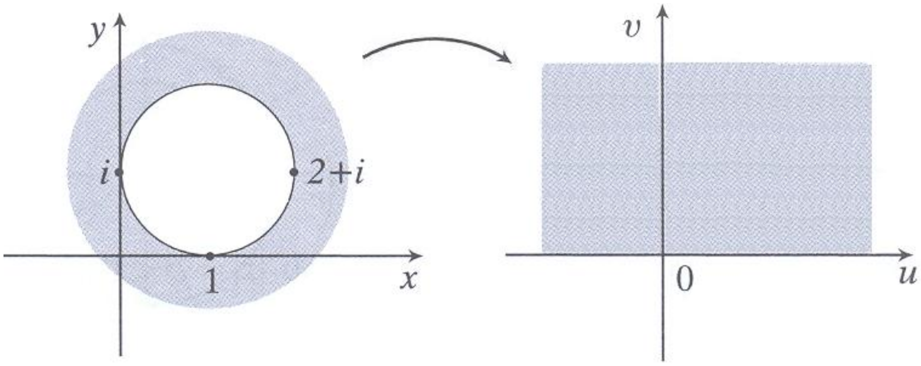
Συνεπώς, ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το D στο $\operatorname{Im} w > 0$ είναι ο

$$w = \left(\frac{z-1}{z+1} e^{-i\frac{\pi}{2}} \right)^2 \Rightarrow w = \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2 e^{-i\pi} \Rightarrow w = -\left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2$$

Εφαρμογή

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το πεδίο $|z-1-i|>1$ στο $\operatorname{Im} w>0$.

Λύση:



Αρχικά, παίρνουμε τον μετασχηματισμό $w_1 = z-1-i$ ο οποίος απεικονίζει το πεδίο που έχουμε στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου.

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό $w_2 = \frac{1}{w_1}$ ο οποίος απεικονίζει το εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου στο εσωτερικό του. Τέλος, επειδή ο μετασχηματισμός $w_3 = i\frac{1-w_2}{1+w_2}$ απεικονίζει τον μοναδιαίο κύκλο στο άνω ημιεπίπεδο, συμπεραίνουμε ότι ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι ο $w = i\frac{z-2-i}{z-i}$

1.5 Μετασχηματισμός Joukowski

Η απεικόνιση $w = f(z) = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ ονομάζεται μετασχηματισμός Joukowski. Η συνάρτηση αυτή είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, με το σημείο $z=0$ να είναι πόλος και επειδή $f'(z) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z^2}\right) \neq 0$ στο $\mathbb{C}$ εκτός των σημείων ± 1,προκύπτει ότι η f είναι σύμμορφη παντού εκτός αυτών των δύο σημείων.

Ο μετασχηματισμός Joukowski είναι πολύ χρήσιμος στην μελέτη υδροδυναμικών και αεροδυναμικών προβλημάτων, διότι μετασχηματίζει κύκλους σε σχήματα που μοιάζουν με φτερά αεροπλάνων και βοηθάνε στην μελέτη της ροής του αέρα γύρω από ένα φτερό.

Τώρα, εύκολα συμπεραίνουμε ότι $f(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ το οποίο σημαίνει πως δύο σημεία του επιπέδου z, τα z_1, z_2 που έχουν την ιδιότητα $z_1 z_2 = 1$, έχουν την ίδια εικόνα στο επίπεδο w. Οπότε ο μετασχηματισμός Joukowski είναι αμφιμονοσήμαντος σε ένα πεδίο αν και μόνο δεν υπάρχουν δύο σημεία z_1, z_2 του πεδίου για τα οποία να ισχύει η σχέση $z_1 z_2 = 1$. Συνεπώς ο μετασχηματισμός Joukowski είναι αμφιμονοσήμαντος στα πεδία $|z|<1$, $|z|>1$, $\operatorname{Im} z>0$, $\operatorname{Im} z<0$.

Έστω $z = re^{i\theta}$ και $w = u + i\upsilon$. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Joukowski έχουμε

$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta$ και $\upsilon = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta$.

Είναι φανερό ότι η απεικόνιση του κύκλου $|z| = \rho < 1$ είναι η έλλειψη

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2} + \frac{\upsilon^2}{\frac{1}{4}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)^2} = 1$$

η οποία έχει ημιάξονες $a_\rho = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$, $b_\rho = \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)$ και επειδή $a_\rho{}^2 - b_\rho{}^2 = 1$ έχει εστίες τα σημεία ± 1.

- Αν $\rho \to 1$ η έλλειψη εκφυλίζεται στο διάστημα $-1,1$ του άξονα u
- Αν $\rho \to 0$ οι άξονες της έλλειψης τείνουν στο άπειρο.

Επομένως, ο μετασχηματισμός Joukowski απεικονίζει σύμμορφα το πεδίο $|z| > 1$, δηλαδή το εξωτερικού του μοναδιαίου κύκλου, στο $\mathbb{C} \setminus -1,1$, αφού $f(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$

Έστω τώρα $z = \rho e^{i\theta}$ και $w = u + iv = |u + iv| e^{i\phi}$. Από τις σχέσεις $u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta$ και $\upsilon = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta$ προκύπτει ότι

$$\tan\phi = \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1}\tan\theta.$$

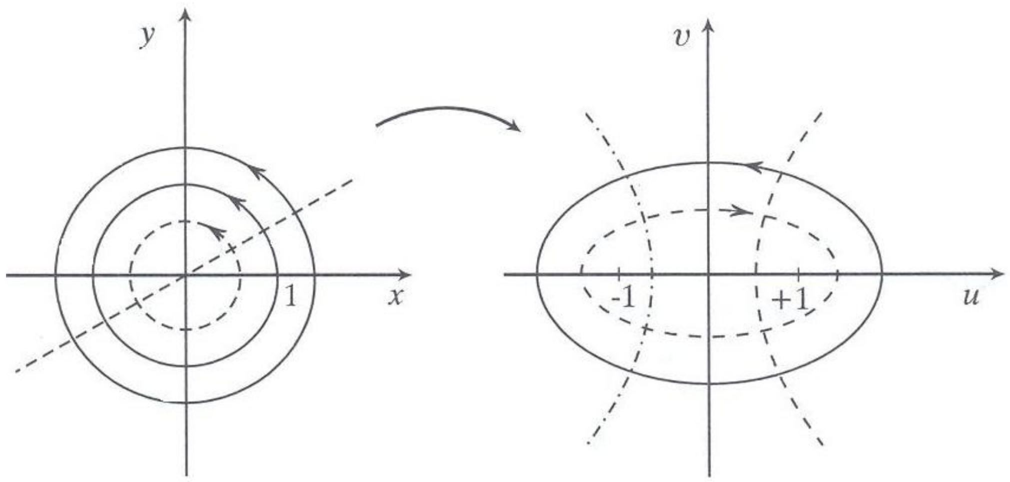
Από αυτή τη σχέση καταλαβαίνουμε ότι:

- Αν το z διατρέχει τον κύκλο $|z| = \rho < 1$ κατά την θετική φορά, τότε το w διατρέχει την έλλειψη κατά την αρνητική φορά.
- Αν το z διατρέχει τον κύκλο $|z| = \rho > 1$ κατά την θετική φορά, τότε το w διατρέχει την έλλειψη κατά την θετική φορά

Τέλος, θεωρούμε την ημιευθεία $z = \rho e^{ia}$, $0 < \rho < \infty$, a σταθερός.

Ο μετασχηματισμός Joukowski απεικονίζει την ημιευθεία αυτή στην υπερβολή

$\frac{u^2}{\cos^2 a} - \frac{\upsilon^2}{\sin^2 a} = 1,\ a \neq \frac{k\pi}{2}$ με εστίες τα σημεία ± 1 του άξονα των πραγματικών και ασύμπτωτες $\upsilon = \pm u \tan a$.



Εφαρμογή

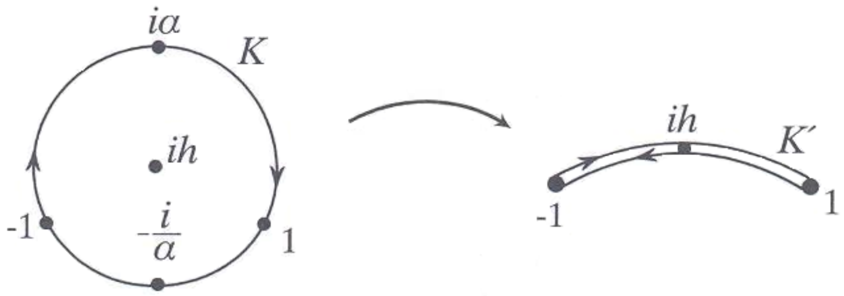
Να βρεθεί μέσω του μετασχηματισμού Joukowski η εικόνα του πεδίου

$D=\ |z-ih|>\sqrt{1+h^2}\quad ,h\in\mathbb{R}$

Λύση: Το σύνορο του D είναι ο κύκλος K που έχει κέντρο το σημείο ih και διέρχεται από τα σημεία $z=-\dfrac{i}{a}, z=\pm 1$, όπου $a=h+\sqrt{1+h^2}$.

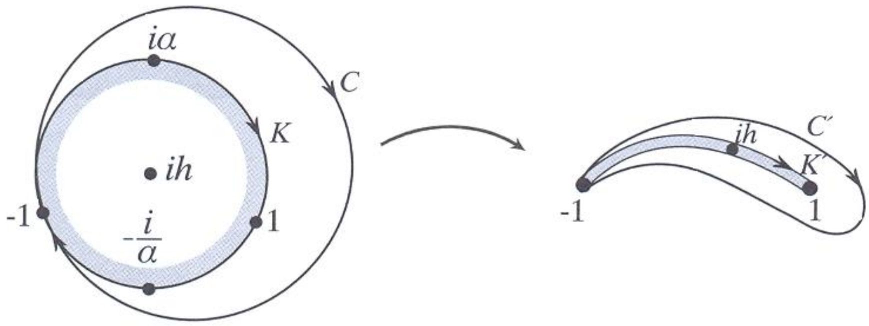
Ο μετασχηματισμός Joukowski μπορεί να γραφεί και ως $\dfrac{w-1}{w+1}=\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2$, οπότε αυτή η απεικόνιση μπορεί να θεωρηθεί ως σύνθεση των $w_2=\dfrac{1+w_1}{1-w_1},\ w_1=\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2$.

Μέσω της $w_1=\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2$ ο κύκλος K απεικονίζεται σε μια ημιευθεία που συνδέει τα σημεία $z=0$ και $z=\infty$. Στη συνέχεια , η ευθεία απεικονίζεται μέσω της $w_2=\dfrac{1+w_1}{1-w_1}$ σε ένα τόξο κύκλου K' με άκρα τα σημεία +1 και -1.
Ο μετασχηματισμός Joukowski όμως απεικονίζει το σημείο $z=ia$ στο $w=\dfrac{1}{2}\left(ia-\dfrac{i}{a}\right)=ih$ οπότε το τόξο K' διέρχεται από το σημείο $w=ih$.



Επομένως ο μετασχηματισμός Joukowski απεικονίζει σύμμορφα το εξωτερικό του κύκλου K στο εξωτερικό του τόξου K'.

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο Joukowski για να υπολογίσει την ανυψωτική δύναμη που δρα στο φτερό ενός αεροπλάνου χρησιμοποίησε καμπύλες που προέκυψαν από την απεικόνιση ενός κύκλου C που έχει στο εσωτερικό του τον κύκλο K και εφάπτονται στο σημείο $z=-1$. Η καμπύλη C' που προκύπτει μοιάζει με φτερό αεροπλάνου.



Εφαρμογή

Να δειχθεί ότι ο μετασχηματισμός Joukowski απεικονίζει στο άνω ημιεπίπεδο, το πεδίο $D=\{|z|>1,\ 0<\arg z<\pi\}$.

Λύση: Θεωρούμε $z=e^{i\theta}$, $0<\theta<\pi$ και παίρνουμε τον μετασχηματισμό

Joukowski, οπότε $w=\dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta}+\dfrac{1}{e^{i\theta}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)=\cos\theta$.

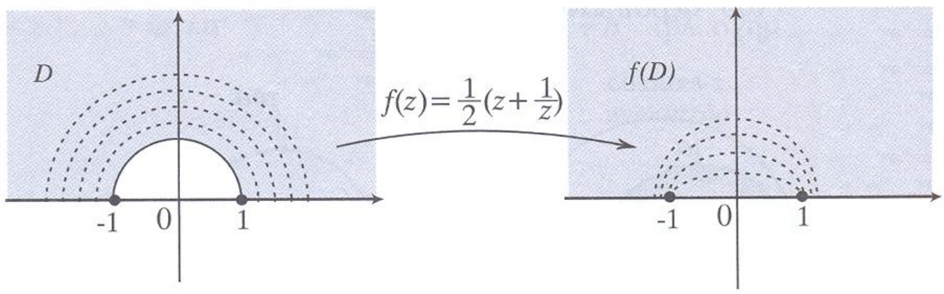
Επειδή $0<\theta<\pi \Leftrightarrow -1\leq\cos\theta\leq1$, η εικόνα του άνω ημικυκλίου είναι το διάστημα $(-1,1)$.

Για $z=x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(z)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ και όταν το x διατρέχει το διάστημα $(1,\infty)$ ή το $(-\infty,-1)$, τότε το $f(x)$ διατρέχει το ίδιο διάστημα.

Τώρα, ισχυριζόμαστε ότι ο μετασχηματισμός Joukowski είναι αμφιμονοσήμαντος στο D και όντως αν πάρουμε δύο σημεία $z_1,z_2\in D$ και ισχύει $f(z_1)=f(z_2)$, τότε

$$z_1+\frac{1}{z_1}=z_2+\frac{1}{z_2}\Rightarrow(z_1-z_2)(z_1z_2-1)=0$$

άρα $z_1=z_2$ ή $z_1z_2=1$, όμως $|z_1|,|z_2|>1$ δεν μπορεί να ισχύει $z_1z_2=1$ συνεπώς αποδείχθηκε ότι ο μετασχηματισμός είναι αμφιμονοσήμαντος και σύμφωνα με την αρχή της αντιστοιχίας των συνόρων το πεδίο D απεικονίζεται στο άνω ημιεπίπεδο.



Εφαρμογή

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το πεδίο D της προηγούμενης εφαρμογής στον μοναδιαίο δίσκο

Λύση: Γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Joukowski απεικονίζει το πεδίο D στο άνω ημιεπίπεδο. Ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το άνω ημιεπίπεδο στο μοναδιαίο δίσκο είναι ο $w_2 = \dfrac{i - w_1}{i + w_1}$ (όπου w_1 ο μετασχηματισμός Joukowski),

οπότε ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι ο $w = \dfrac{i - \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)}{i + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} = -\dfrac{z^2 - 2iz + 1}{z^2 + 2iz + 1}$.

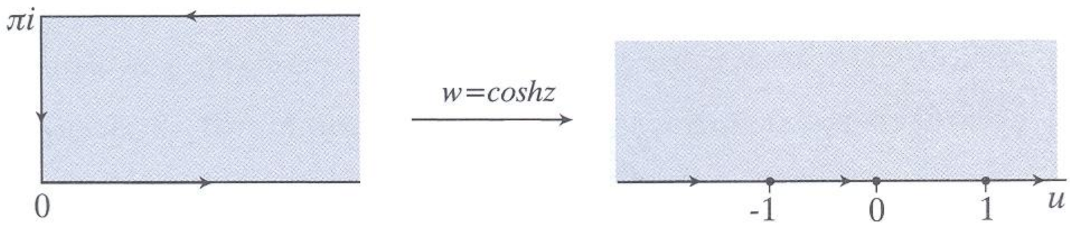
Εφαρμογή

Να δείξετε ότι ο μετασχηματισμός $w = \cosh z$ απεικονίζει την ημιλωρίδα $0 < \operatorname{Im} z < \pi$, $\operatorname{Re} z > 0$ στο άνω ημιεπίπεδο.

Λύση: Η ημιλωρίδα $0 < \operatorname{Im} z < \pi$, $\operatorname{Re} z > 0$ απεικονίζεται στο πεδίο

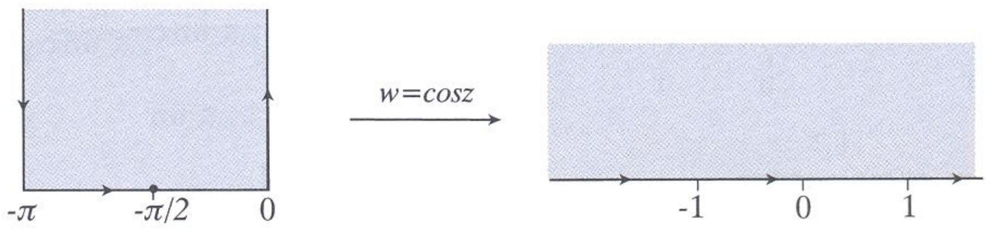
$D = \ |w_1| > 1,\ 0 < \arg w_1 < \pi$ μέσω του μετασχηματισμού $w_1 = e^z$. Στη συνέχεια, ο μετασχηματισμός Joukowski απεικονίζει το πεδίο αυτό στο άνω ημιεπίπεδο. Συνεπώς ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι ο

$$w = \frac{1}{2}\left(w_1 + \frac{1}{w_1}\right) = \frac{1}{2}\left(e^z + \frac{1}{e^z}\right) = \cosh z.$$



Εφαρμογή

Να δείξετε ότι η ημιλωρίδα $-\pi < \operatorname{Re} z < 0$, $\operatorname{Im} z > 0$ απεικονίζεται στο άνω ημιεπίπεδο μέσω του μετασχηματισμού $w = \cos z$



Λύση: Επειδή $\cos z = \cosh(-iz)$, ο μετασχηματισμός $w = \cos z$ είναι σύνθεση των μετασχηματισμών $w_1 = -iz$ που είναι στροφή του πεδίου που έχουμε κατά γωνία $-\dfrac{\pi}{2}$ και του $w_2 = \cosh w_1$ ο οποίος όπως είδαμε στην προηγούμενη εφαρμογή απεικονίζει την ημιλωρίδα στο άνω ημιεπίπεδο.

ΜΕΡΟΣ Β

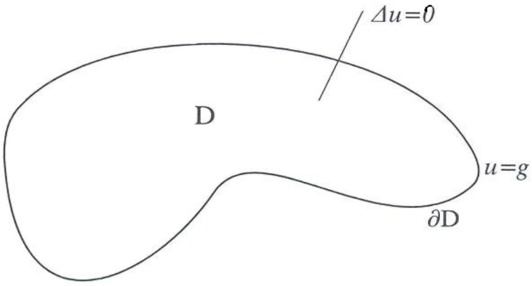
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

2.1 Είδη προβλημάτων συνοριακών τιμών

Πρόβλημα Dirichlet: Έστω D ένα πεδίο του $\mathbb{R}^2$ με σύνορο ϑD και g μια δοσμένη συνεχής συνάρτηση στο σύνορο. Το πρόβλημα Dirichlet συνίσταται στην εύρεση μιας συνάρτησης u που είναι **αρμονική**[1] στο D, συνεχής στο $\overline{D} = D \cup \vartheta D$ και ταυτίζεται με την g πάνω στο σύνορο, δηλαδή

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \; \sigma\tau o \;\; D \\ u = g \;\; \sigma\tau o \; \vartheta D \end{cases} \quad (1)$$

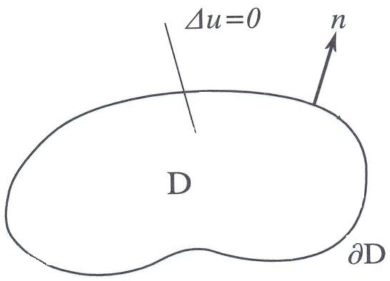
Αν το πρόβλημα αυτό έχει λύση, από την αρχή του μεγίστου για αρμονικές συναρτήσεις προκύπτει ότι η λύση αυτή είναι μοναδική.



Πρόβλημα Neumann: Έστω ένα πεδίο D με σύνορο ϑD και g μια δοσμένη συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο σύνορο. Το πρόβλημα Neumann συνίσταται στην εύρεση μιας συνάρτησης u που είναι αρμονική στο D, συνεχής στο $\bar{D} = D \cup \vartheta D$ και της οποίας η παράγωγος ως προς την κατεύθυνση της καθέτου σε κάθε σημείο του συνόρου να ταυτίζεται με την g, δηλαδή

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \;\; \sigma\tau o \;\; D \\ \dfrac{\vartheta u}{\vartheta n} = g \;\; \sigma\tau o \; \vartheta D \end{cases} \quad (2)$$

όπου n το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο ϑD με κατεύθυνση προς τα έξω.



[1] Μια πραγματική συνάρτηση $\phi(x, y)$ ονομάζεται **αρμονική** στο πεδιο D, αν η ϕ έχει μερικές παραγώγους δευτέρας τάξεως συνεχείς στο D και ικανοποιεί την εξίσωση Laplace, $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

- Στα προβλήματα Neumann υποθέτουμε ότι το σύνορο ϑD είναι αρκετά λείο για να υπάρχει το κάθετο ως προς το σύνορο διάνυσμα n.
- Το πρόβλημα Neumann για να έχει λύση, πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη συμβιβαστότητας

$$\int_{\vartheta D} g ds = 0$$

η οποία προκύπτει από την σχέση $\iint_D \Delta u dxdy = \int_{\vartheta D} \frac{\vartheta u}{\vartheta n} ds$ καθώς και την σχέση (2) και η φυσική της ερμηνεία είναι η εξής: Υποθέτουμε ότι $u(x,y)$ είναι η λύση της στάσιμης κατανομής θερμοκρασίας εντός του πεδίου. Η συνάρτηση $\frac{\vartheta u}{\vartheta n}$ πάνω στο σύνορο παριστάνει την ροή θερμότητας κατά μήκος του. Έτσι, για να υπάρχει στάσιμη θερμοκρασία, πρέπει η συνολική ροή θερμότητας κατά μήκος του συνόρου να είναι 0.

- Η λύση του προβλήματος Neumann είναι μοναδική εκτός μιας προσθετικής σταθεράς.

Οι προτάσεις που ακολουθούν, είναι πολύ χρήσιμες για την μελέτη προβλημάτων συνοριακών τιμών με τη βοήθεια των σύμμορφων απεικονίσεων.

Πρόταση: Έστω συνάρτηση φ αρμονική σε ένα πεδίο $D \in \mathbb{C}$. Τότε η φ παραμένει αρμονική κάτω από κάθε σύμμορφο μετασχηματισμό.

Απόδειξη: Έστω ότι το D είναι απλά συνεκτικό και F ένας σύμμορφος μετασχηματισμός όπου $w = u + i\upsilon = F(z) = F(x+iy)$.

Ισχύει ότι υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση f ορισμένη στο D τέτοια ώστε

$$f(z) = \varphi(x,y) + iv(x,y)$$

Έστω $g(w) = f(z) = f\left(F^{-1}(w)\right)$. Επειδή η F είναι σύμμορφη, η g είναι ολόμορφη στο $F(D)$. Έστω $g(w) = \phi(u,\upsilon) + iv(u,\upsilon)$. Τότε από την σχέση $g(w) = f(z)$ έχουμε

$$\phi(u,v) = \varphi\left(x(u,\upsilon), y(u,\upsilon)\right)$$

και επειδή $\phi = \operatorname{Re} g$ η ϕ θα είναι αρμονική στο $F(D)$.

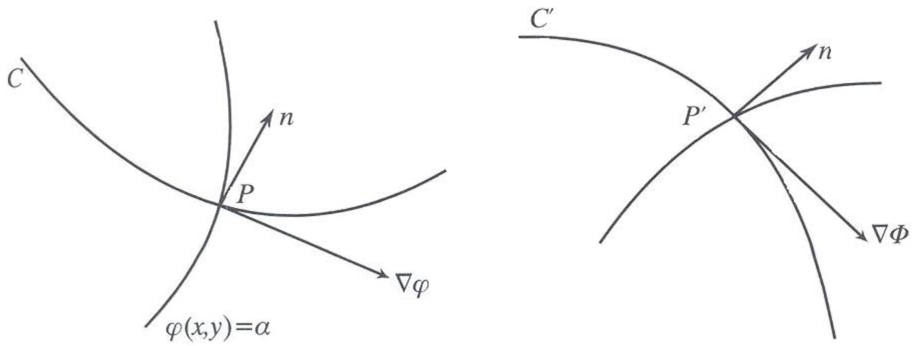
Πρόταση: Έστω $w = F(z) = u(x,y) + i\upsilon(x,y)$ μια σύμμορφη απεικόνιση ορισμένη στο πεδίο D, C μια λεία καμπύλη στο D και $C' = F(C)$. Αν η συνάρτηση $\varphi(x,y)$ ικανοποιεί τις συνθήκες $\varphi(x,y) = \kappa$, όπου κ σταθερά ή $\frac{\vartheta \varphi}{\vartheta n} = 0$ κατά μήκος της C τότε η συνάρτηση $\Phi(u,\upsilon) = \varphi\left(x(u,\upsilon), y(u,\upsilon)\right)$ ικανοποιεί τις συνθήκες $\Phi(u,\upsilon) = \kappa$ και $\frac{\vartheta \Phi}{\vartheta n} = 0$ κατά μήκος της C'.

Απόδειξη: Αν $\varphi=\kappa$ πάνω στη C, τότε $\phi=\kappa$ πάνω στη C'. Αν υποθέσουμε ότι $\dfrac{\vartheta\varphi}{\vartheta n}=\nabla\varphi\cdot n$ πάνω στη C, όπου $\nabla\varphi=\ \varphi_x,\varphi_y\ $ και n είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στη C στο σημείο $P\ x,y\ $, τότε είτε $\nabla\varphi=0$,είτε $\nabla\varphi$ είναι ορθογώνιο στο n. Αν $\nabla\varphi=0$ τότε $\nabla\Phi=\ \Phi_u,\Phi_\upsilon\ =0$ άρα $\dfrac{\vartheta\Phi}{\vartheta n}=0$.

Έστω $\nabla\varphi\neq0$, άρα το $\nabla\varphi$ είναι ορθογώνιο στο n. Αν $\nabla\varphi=0$, τότε $\nabla\Phi=\ \Phi_u,\Phi_\upsilon\ =0$, οπότε $\dfrac{\vartheta\Phi}{\vartheta n}=0$.

Έστω $\nabla\varphi\neq0$, άρα το $\nabla\varphi$ είναι ορθογώνιο στο n και επομένως εφαπτόμενο της C στο σημείο P.

Το $\nabla\varphi$ είναι ορθογώνιο στην καμπύλη $\varphi\ x,y\ =a$ που περνάει από το P. Η εικόνα της καμπύλης $\varphi\ x,y\ =a$ μέσω της F είναι η καμπύλη $\Phi\ u,\upsilon\ =a$ στο επίπεδο w. Επειδή η F είναι σύμμορφη, οι γωνίες μεταξύ καμπυλών διατηρούνται , οπότε η C' είναι ορθογώνια της καμπύλης $\Phi\ u,\upsilon\ =a$ στο P'. Συνεπώς το $\nabla\Phi=\ \Phi_u,\Phi_\upsilon\ $ είναι εφαπτόμενο της C' στο P' επομένως και ορθογώνιο στο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της C' στο P', οπότε $\nabla\Phi\cdot n=0$ και $\dfrac{\vartheta\Phi}{\vartheta n}=0$ πάνω στη C'.



Για την λύση προβλημάτων συνοριακών τιμών για ένα πεδίο D του $\mathbb{R}^2$, χρησιμοποιώντας τις δύο προτάσεις ακολουθούμε την εξής διαδικασία

- Απεικονίζουμε το πεδίο D σε ένα απλούστερο D' μέσω μιας σύμμορφης απεικόνισης της μορφής $w=f(z)=u(x,y)+i\upsilon(x,y)$
- Μετασχηματίζουμε τις συνοριακές συνθήκες από το αρχικό πεδίο στο καινούργιο
- Λύνουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών στο καινούργιο πεδίο D' και η λύση του είναι της μορφής $\Phi(u,\upsilon)$
- Για να βρούμε την λύση του αρχικού προβλήματος θέτουμε $\varphi(x,y)=\Phi\ u(x,y),\upsilon(x,y)\ $ και προκύπτει η λύση.

2.2 Εφαρμογές προβλημάτων συνοριακών τιμών

Εφαρμογή (άπειρη λωρίδα)

Να λυθεί το πρόβλημα Dirichlet

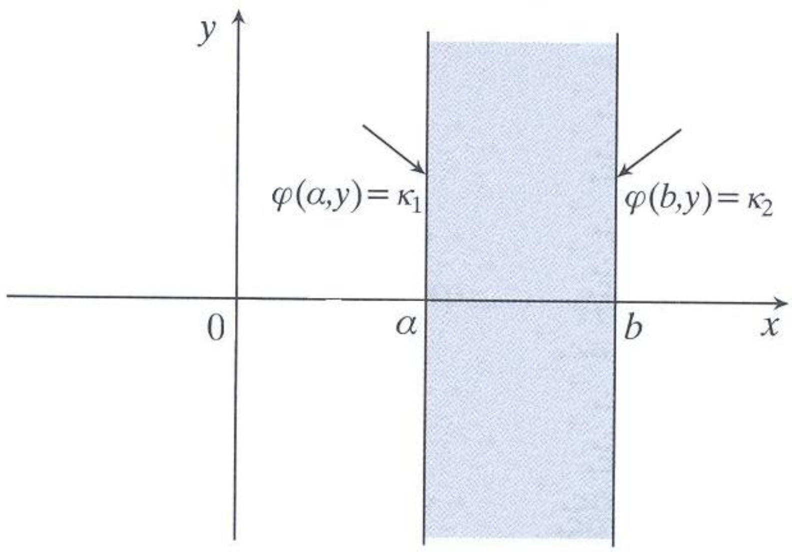
$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \quad , \quad a < x < b\,, & \\ \varphi(a,y) = k_1 \;, & y \in \mathbb{R} \\ \varphi(b,y) = k_2 \;, & \end{cases}$$

Λύση: Είναι φανερό πως οι συνοριακές τιμές εξαρτώνται αποκλειστικά από το x οπότε προφανώς αναζητούμε μια λύση της μορφής $\varphi(x,y) = f(x) \quad a \le x \le b$.

Η σχέση $\Delta\varphi = 0$ που έχουμε, γράφεται ως $f''(x) = 0$ συνεπώς η $f(x)$ είναι της μορφής $f(x) = \lambda x + \mu$, όπου λ,μ σταθερές. Χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες που έχουμε, μετά την διπλή ολοκλήρωση προκύπτει το σύστημα

$\begin{cases} \lambda a + \mu = k_1 \\ \lambda b + \mu = k_2 \end{cases}$ από το οποίο προκύπτουν τα λ και μ οπότε η τελική λύση είναι

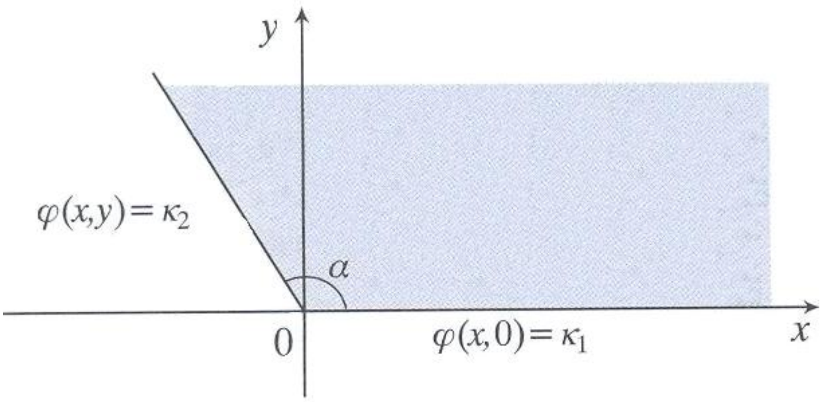
$$\varphi(x,y) = k_1 + \frac{k_2 - k_1}{b-a} \;\; x - a$$



Εφαρμογή (γωνιακό πεδίο)

Να λυθεί το πρόβλημα Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \quad , \quad 0 < \arg z < a \; (a \le \pi) \\ \varphi(x,0) = k_1 \;\; , x > 0 \\ \varphi(x,y) = k_2 \;\; , r > 0 \,, \theta = a \end{cases}$$



Η $\arg z$ είναι αρμονική συνάρτηση καθώς είναι το το φανταστικό μέρος της συνάρτησης $\log z$ και είναι σταθερή σε ημιευθείες με αρχή το 0. Η λύση που ψάχνουμε είναι της μορφής $\varphi(x,y)=b\arg z+c$ με $b,c\in\mathbb{R}$ αφού έχουμε ότι $\Delta\varphi=0$. Χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες, λύνουμε το σύστημα που προκύπτει για να υπολογίσουμε τα b,c και τελικά η λύση είναι

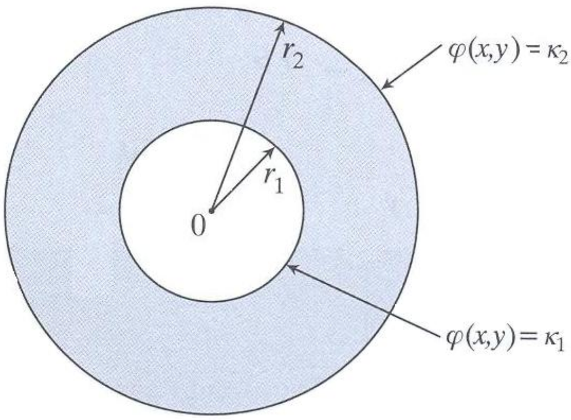
$$\varphi(x,y)=k_1+\frac{k_2-k_1}{a}\arg z \ .$$

Εφαρμογή (δακτύλιος)

Να λυθεί το πρόβλημα

$$\begin{cases}\Delta\varphi=0 \ , & r_1<|z|<r_2\\ \varphi(x,y)=k_1 \ , & |z|=r_1\\ \varphi(x,y)=k_2 \ , & |z|=r_2\end{cases}$$

Λύση:



Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι ανεξάρτητες της γωνίας οπότε η λύση μας θα είναι μια αρμονική συνάρτηση ανεξάρτητη γωνίας, της μορφής

$$\varphi(x,y)=a+b\ln|z| , \ a,b\in\mathbb{R} .$$

Χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες που μας δίνει το πρόβλημα υπολογίζουμε τις σταθερές a,b και προκύπτει η τελική λύση

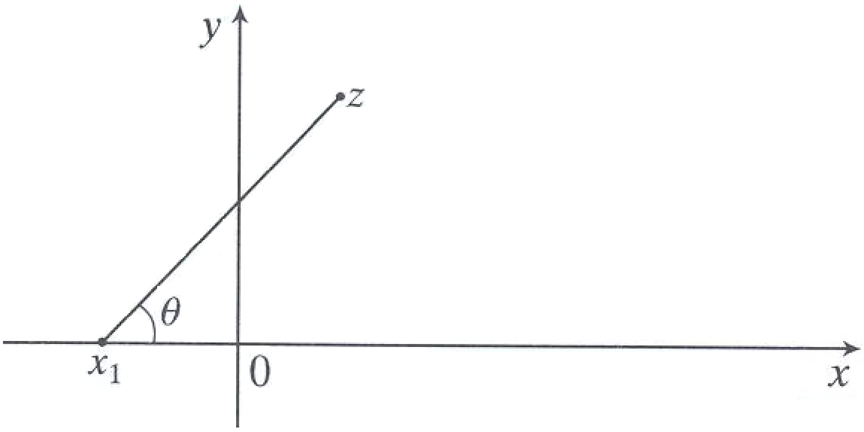
$$\varphi(x,y) = k_1 + (k_2 - k_1)\frac{\ln\left(\frac{|z|}{r_1}\right)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

Εφαρμογή (άνω ημιεπίπεδο)

Να λυθεί το πρόβλημα

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0\,,\ -\infty < x < \infty,\ y > 0 \\ \varphi(x,0) = \begin{cases} a_0\,, -\infty < x < x_1 \\ a_1\,,\quad x_1 < x < \infty \end{cases},\ a_0, a_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Λύση: Γνωρίζουμε ότι η γωνία θ ισούται με $\arg(z - x_1)$



Η λύση που θέλουμε είναι η συνάρτηση της μορφής

$$\varphi(x,y) = \lambda + \mu \arg(z - x_1)$$

η οποία είναι αρμονική στο άνω ημιεπίπεδο. Τώρα, λόγω των συνοριακών συνθηκών που μας δίνει αρχικά το πρόβλημα, πρέπει

$$\lambda = a_1 \quad \kappa\alpha\iota \quad \lambda + \mu \cdot \pi = a_0$$

Άρα η λύση του προβλήματος είναι η

$$\varphi(x,y) = a_1 + \frac{1}{\pi}(a_0 - a_1)\arg(z - x_1)\,.$$

Εφαρμογή

Να λυθεί το πρόβλημα Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0\,, -\infty < x < \infty\ ,\ y > 0 \\ \varphi(x,0) = \begin{cases} a_0\,, -\infty < x < x_1 \\ a_1\,, -x_1 < x < x_2 \\ \quad\vdots \\ a_n\,, -x_n < x < \infty \end{cases} \end{cases}$$

Λύση: Όπως στην προηγούμενη εφαρμογή φτιάχνουμε μια συνάρτηση ίδιας μορφής, με την χρήση σειράς

$$\varphi(x,y)=a_n+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n}\left(a_{m-1}-a_m\right)\arg\left(z-x_m\right).$$

Για να είναι αυτή η συνάρτηση η λύση του προβλήματος πρέπει α) να είναι αρμονική για $y>0$ (δηλαδή στο άνω ημιεπίπεδο) καθώς και β) να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες.

α)Η συνάρτηση είναι αρμονική στο άνω ημιεπίπεδο ως το φανταστικό μέρος της ολόμορφης $f(z)=ia_n+\sum_{m=1}^{n}\log\left(\frac{a_{m-1}-a_m}{\pi}\left(z-x_m\right)\right)$.

β)Έστω k μια σταθερή τιμή του m. Αν $z=x$ είναι ένα σημείο με $x_k<x<x_{k+1}$, τότε $\begin{cases}\arg(z-x_k)=0\ ,1\le m\le k\\ \arg(z-x_m)=\pi\ ,k+1\le m\le n\end{cases}$. Άρα

$$\varphi(x,0)=a_n+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n}\left(a_{m-1}-a_m\right)\arg\left(z-x_m\right)+\frac{1}{\pi}\sum_{m=k+1}^{n}\left(a_{m-1}-a_m\right)\arg\left(z-x_m\right)=$$

$$=a_n+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n}\left(a_{m-1}-a_m\right)\cdot 0+\frac{1}{\pi}\sum_{m=k+1}^{n}\left(a_{m-1}-a_m\right)\cdot\pi=$$

$$=a_n+\left(a_k-a_{k+1}\right)+\left(a_{k+1}-a_{k+2}\right)+...+\left(a_{n-1}-a_n\right)=a_k$$

το οποίο σημαίνει ότι η συνάρτηση $\varphi(x,y)$ όντως ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος.

Εφαρμογή

Να λυθεί το πρόβλημα

$$\begin{cases}\Delta\varphi=0\,,-\infty<x<\infty\ ,y>0\\ \varphi(x,0)=\begin{cases}3\ ,\ -\infty<x<-3\\ 7\ ,\ -3<x<-1\\ 1\ ,\ -1<x<2\\ 4\ ,\ 2<x<\infty\end{cases}\end{cases}$$

Λύση: Το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι υποπερίπτωση του προηγούμενου έχοντας απλά $a_0=3, a_1=7, a_2=1, a_3=4, x_1=-3, x_2=-1, x_3=2$.

Οπότε η λύση του προβλήματος είναι

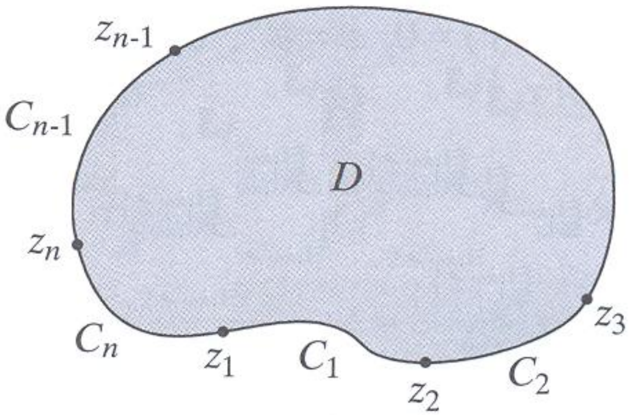
$$\varphi(x,y)=4-\frac{4}{\pi}\arg(z+3)+\frac{6}{\pi}\arg(z+1)-\frac{3}{\pi}\arg(z-2)=$$

$$=4-\frac{4}{\pi}arc\tan\left(\frac{y}{x+3}\right)+\frac{6}{\pi}arc\tan\left(\frac{y}{x+1}\right)-\frac{3}{\pi}arc\tan\left(\frac{y}{x-2}\right).$$

Μια γενίκευση των παραπάνω είναι η εξής:

Έστω ένα απλά συνεκτικό πεδίο D που περιορίζεται από μια απλή, κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη C και $z_1, z_2, ..., z_n$, n σημεία που βρίσκονται πάνω στη C διατεταγμένα. Έστω C_k το τόξο της καμπύλης που βρίσκεται μεταξύ z_k και z_{k+1} , $k = 1, 2, ..., n-1$ και έστω C_n το τόξο της καμπύλης που βρίσκεται μεταξύ των z_n και z_1 . Έστω $a_1, a_2, ..., a_n$ σταθεροί αριθμοί στον $\mathbb{R}$. Το πρόβλημα που θέλουμε να λύσουμε είναι το ακόλουθο.

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \; \sigma\tau o \; D \\ \varphi(x,y) = a_1 \; \gamma\iota\alpha \; z = x+iy \in C_1 \\ \varphi(x,y) = a_2 \; \gamma\iota\alpha \; z = x+iy \in C_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \varphi(x,y) = a_n \; \gamma\iota\alpha \; z = x+iy \in C_n \end{cases} .$$



Για να λύσουμε το πρόβλημα πρέπει να βρούμε μια σύμμορφη απεικόνιση της μορφής $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ του πεδίου D στο άνω ημιεπίπεδο $\operatorname{Im} w > 0$ ώστε τα σημεία $z_1, z_2, ..., z_n$ να απεικονίζονται στα σημεία $u_k = f(z_k)$, $k = 1, 2, ..., n-1$ και το z_n να απεικονίζεται στο $u_n = \infty$ του άξονα των πραγματικών στο επίπεδο w.
Έτσι λοιπόν, η απεικόνιση $f(z)$ δίνει ένα νέο πρόβλημα Dirichlet στο **άνω ημιεπίπεδο** του οποίου η λύση βρέθηκε σε προηγούμενη εφαρμογή. Αν τώρα θέσουμε $a_0 = a_n$, η λύση του προβλήματος είναι

$$\varphi(x,y) = a_{n-1} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1} a_{k-1} - a_k \;\; \arg \;\; f(z) - u_k \;\; =$$

$$= a_{n-1} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1} a_{k-1} - a_k \;\; arc\tan\frac{u(x,y)}{u(x,y) - u_k} \; .$$

Παρατήρηση: Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται μόνο αν μπορούμε να κατασκευάσουμε ια σύμμορφη απεικόνιση από το D στο άνω ημιεπίπεδο. Η ύπαρξη μιας τέτοιας απεικόνισης εξασφαλίζεται από το θεώρημα Riemann.

Εφαρμογή

Να λυθεί το πρόβλημα

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0\,, |z| < 1 \\ \varphi(x,y) = 0\,, z = e^{i\theta}\,, 0 < \theta < \pi \\ \varphi(x,y) = 1\,, z = e^{i\theta}\,, \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

Λύση: Μια σύμμορφη απεικόνιση που απεικονίζει το μοναδιαίο δίσκο του προβλήματος στο άνω ημιεπίπεδο είναι όπως είδαμε και στην ενότητα των σύμμορφων απεικονίσεων η

$$w = u + iv = \frac{i(1-z)}{1+z} = \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2} + i\frac{1-x^2-y^2}{(x+1)^2+y^2}$$

Τώρα, είναι εύκολα κατανοητό ότι τα σημεία $z = x + iy$ τα οποία βρίσκονται στο άνω ημικύκλιο: $x^2 + y^2 - 1 = 0\,, y > 0$ απεικονίζονται στο θετικό ημιάξονα, ενώ αυτά που βρίσκονται στο κάτω ημικύκλιο απεικονίζονται στον αρνητικό ημιάξονα.

Έχουμε λοιπόν ένα νέο πρόβλημα στο επίπεδο w

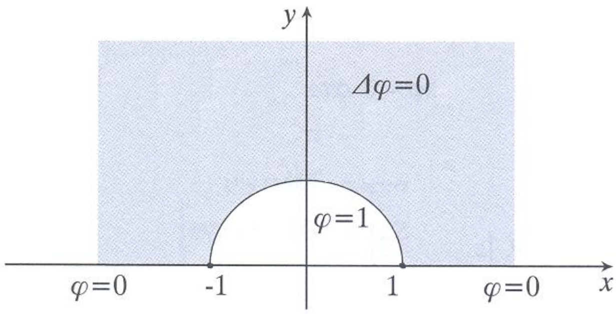
$$\begin{cases} \Delta\Phi = 0\,, -\infty < u < \infty\,, v > 0 \\ \Phi(u,0) = 0\,, u > 0 \\ \Phi(u,0) = 0\,, u < 0 \end{cases}$$

η λύση του οποίου βρίσκεται χρησιμοποιώντας την εφαρμογή για το άνω ημιεπίπεδο που είδαμε και πριν και είναι

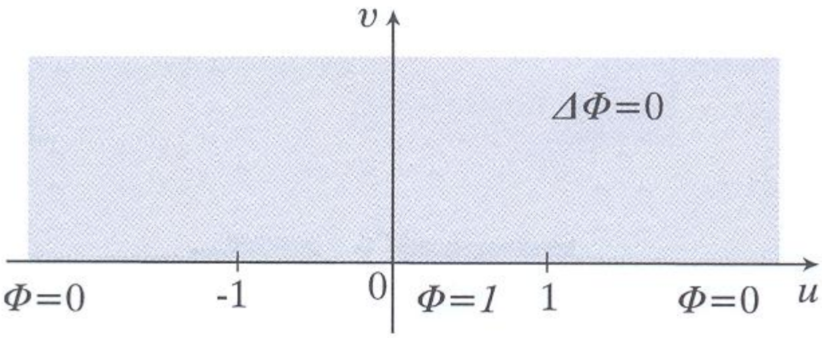
$$\varphi(x,y) = \frac{1}{\pi} arc\tan\frac{v(x,y)}{u(x,y)} = \frac{1}{\pi} arc\tan\frac{x^2-y^2-1}{2y}\,.$$

Εφαρμογή

Να λυθεί το πρόβλημα του ακόλουθου σχήματος



Λύση: Πρέπει να βρούμε ένα μετασχηματισμό ο οποίος θα μετασχηματίζει το παραπάνω πρόβλημα στο άνω ημιεπίπεδο. Ο μετασχηματισμός που ψάχνουμε είναι ο Joukowski δηλαδή ο $w = f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ τον οποίο συναντήσαμε πιο πριν και ο οποίος μετασχηματίζει το δοσμένο πρόβλημα στο



όπου η λύση του όπως είδαμε και προηγουμένως, είναι

$$\Phi(u,\upsilon)=\frac{1}{\pi}arc\tan\left(\frac{2\upsilon}{u^2+\upsilon^2-1}\right)$$

Στη συνέχεια, από τη σχέση $w=u(x,y)+i\upsilon(x,y)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ έχουμε ότι

$$u(x,y)=\frac{x\ \ x^2+y^2+1}{2\ \ x^2+y^2} \quad \text{και} \quad \upsilon(x,y)=\frac{y\ \ x^2+y^2-1}{2\ \ x^2+y^2}$$

οπότε η λύση του προβλήματος είναι

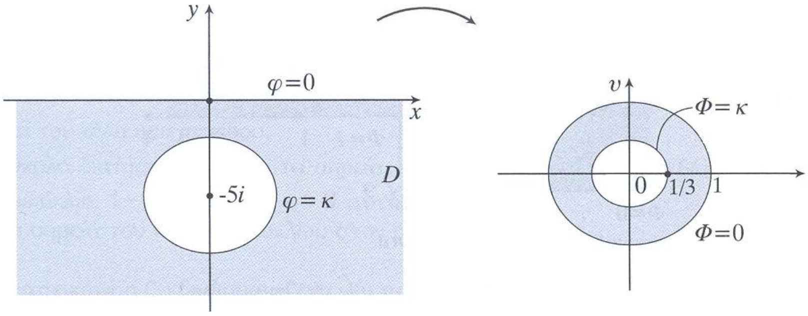
$$\varphi(x,y)=\frac{1}{\pi}arc\tan\left(\frac{4y\ \ x^2+y^2-1}{x^2+y^2\ \ \ x^2+y^2-4\ +\ 2x^2-2y^2+1}\right).$$

Εφαρμογή

Να λυθεί το πρόβλημα για το πεδίο $D=\ \ z:\operatorname{Im} z<0\,,|z+5i|>3$

$$\begin{cases}\Delta\varphi=0\,,\sigma\tau o\ D\\ \varphi(x,0)=0\\ \varphi(x,y)=k\,,|z+5i|=3\end{cases}$$

Λύση: Όπως είχαμε δει στην ενότητα των σύμμορφων απεικονίσεων , ο μετασχηματισμός $w=\frac{z+4i}{z-4i}$ απεικονίζει το πεδίο D στο δακτύλιο $\frac{1}{3}<|w|<1$.



Η λύση του προβλήματος στον δακτύλιο είναι $\Phi(u,\upsilon)=-k\frac{\ln|w|}{\ln 3}$, επομένως η λύση που ζητάμε, δηλαδή η λύση στο πεδίο D είναι

$$\varphi(x,y) = -\frac{k}{\ln 3}\ln\left|\frac{z+4i}{z-4i}\right| = -\frac{k}{2\ln 3}\ln\left(\frac{x^2+(y+4)^2}{x^2+(y-4)^2}\right).$$

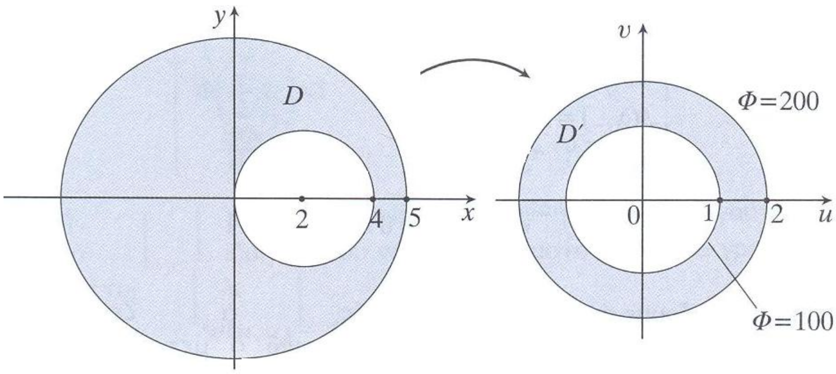
Εφαρμογή

Να λυθεί το πρόβλημα για το πεδίο $D = \{z : |z| < 5 \, , |z-2| > 2\}$

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \, , \text{στο } D \\ \varphi(x,y) = 100 \, , |z| = 5 \\ \varphi(x,y) = 200 \, , |z-2| = 2 \end{cases}$$

Λύση: Πρέπει να βρούμε ένα διγραμμικό μετασχηματισμό ώστε να απεικονίσουμε το πεδίο του προβλήματος σε ένα δακτύλιο.
Δύο σημεία που είναι συμμετρικά ως προς τους κύκλους του πεδίου D δηλαδή τους κύκλους $|z| = 5$ και $|z-2| = 2$ ικανοποιούν την εξίσωση

$$2x^2 - 25x + 50 = 2 \implies x_1 = \frac{5}{2} \, , \; x_2 = 10$$



Ο διγραμμικός μετασχηματισμός είναι της μορφής $w = \lambda\dfrac{z-10}{2z-5}$ και αν το $z = 5$ απεικονίζεται στο $w = -1$ τότε το $\lambda = -1$ άρα ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το D στο D' είναι ο $w = \dfrac{z-10}{2z-5}$.

Η λύση του προβλήματος στο D' είναι $\Phi(u,\upsilon) = 100 + 100\dfrac{\ln|w|}{\ln 2}$ ενώ η λύση στο D είναι $\varphi(x,y) = 100 + 100\dfrac{\ln|w(x,y)|}{\ln 2}$ με $w = u + i\upsilon \Rightarrow$

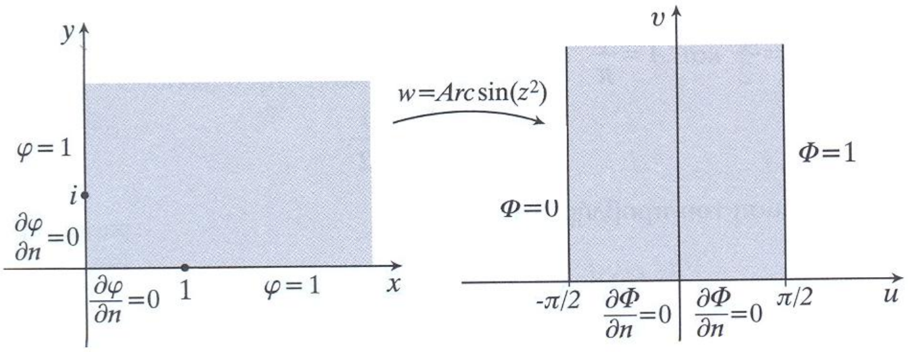
$$u(x,y) = \frac{2x^2+2y^2-25x+50}{(2x-5)^2+4y^2} \; , \; \upsilon(x,y) = \frac{15y}{(2x-5)^2+4y^2}$$

Εφαρμογή

Να λυθεί το πρόβλημα

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0\,,\, x, y > 0 \\ \varphi(x,0) = 1\,,\, x > 1 \\ \varphi(0,y) = 0\,,\, y > 1 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = 0\,,\, 0 < y < 1,\ x = 0\ \ \kappa\alpha\iota\ 0 < x < 1,\, y > 0 \end{cases}$$

Λύση: Έχουμε ένα πεδίο(το πρώτο τεταρτημόριο) το οποίο δεν μας βολεύει για να λύσουμε το πρόβλημα. Με χρήση του μετασχηματισμού $w = z^2$ μπορούμε να το απεικονίσουμε στο άνω ημιεπίπεδο, ενώ με τον μετασχηματισμό $w = arc\sin z$ μπορούμε να απεικονίσουμε το άνω ημιεπίεδο στην ημιάπειρη λωρίδα $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2},\ \upsilon > 0$. Συνεπώς με τον μετασχηματισμό $w = arc\sin\ z^2$ μπορούμε να απεικονίσουμε το πρώτο τεταρτημόριο στο πεδίο $D = \left\{ u,\upsilon\ : -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2},\ \upsilon > 0 \right\}$.



Έτσι λοιπόν το αρχικό πρόβλημα συνοριακών τιμών γίνεται

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 0\,,\ \sigma\tau o\ D \\ \Phi\left(-\dfrac{\pi}{2},\upsilon\right) = 0\,,\ \upsilon > 0 \\ \Phi\left(\dfrac{\pi}{2},\upsilon\right) = 1\,,\ \upsilon > 0 \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial n} = 0\,,\, -\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2},\ \upsilon = 0 \end{cases}$$

Μια λύση Φ του νέου προβλήματος που προκύπτει στο πεδίο D είναι η $\Phi(u,\upsilon) = Au + B$, Α,Β σταθερές.

Για την συνοριακή καμπύλη $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2},\ \upsilon = 0$ έχουμε ότι $n = (0,-1)$ άρα

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \nabla\Phi\cdot n = A\cdot 0 + 0(-1) = 0$$

οπότε η συνοριακή συνθήκη ικανοποιείται για κάθε $A, B \in \mathbb{R}$.

Από τις άλλες δύο συνοριακές συνθήκες του προβλήματος προκύπτει ότι

$$\left.\begin{cases} \Phi\left(-\dfrac{\pi}{2},\upsilon\right) = -A\dfrac{\pi}{2} + B = 0 \\ \Phi\left(\dfrac{\pi}{2},\upsilon\right) = A\dfrac{\pi}{2} + B = 2 \end{cases}\right\} \Rightarrow \ \mathrm{A} = \frac{1}{\pi}\ , \ \ \mathrm{B} = \frac{1}{2}$$

άρα, $\Phi(u,\upsilon) = \dfrac{1}{\pi}u + \dfrac{1}{2}$, οπότε η λύση του αρχικού προβλήματος είναι

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left[arc\sin\ z^2\ \right] + \frac{1}{2}$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] **Ablowitz M.J. , Fokas A.S.** ***:*** *Complex Variables: Introduction and Applications* , Cambridge University Press, 1997.

[2] **Ahlfors L.V.** : *Complex Analysis*, Third Edition, London, McGraw-Hill , 1979.

[3] **Churchill R.V. , Brown J.W. , Verhey R.F.** : *Complex Variables* , McGraw-Hill Inc. 1974.

[4] **Gamelin T.W.** : *Complex Analysis* , Springer – Verlag, New York, Inc. 2001

[5] **Marsden J. E. , Hoffman M.J.** : *Βασική Μιγαδική Ανάλυση* , Μετάφραση Λ.Χ. Παπαλουκά , Εκδόσεις Συμμετρία , Αθήνα ,1994.

[6] **Mathews J.H.** : *Basic Complex Variables for Mathematics and Engineers,* Cambridge Uni. Press, 2002.

[7] **Osborne A.D** : *Complex Variables and their Applications* , Addison-Wesley , 1999.

[8] **Saff E.B. , Snider A.D.** : *Fundamentals of Complex Analysis with Applicatios to Engineering and Science* , Pearson Education, Inc. 2003.

[9] **Κραββαρίτης Δ.Χ.** : *Εφαρμοσμένη Μιγαδική Ανάλυση* , Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα ,2006.

- http://en.wikipedia.org/wiki/Conformal_map
- http://mathworld.wolfram.com/ConformalMapping.html
- http://www.ifm.liu.se/courses/TFYY67/Lect5.pdf