ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Μεγιστικές Υποαγορές που Υποκαθιστούν όλα τα Δικαιώματα Προαίρεσης

Διπλωματική Εργασία
της
Αλεξίας Χρήστου

Επιβλέπων: Ιωάννης Πολυράκης
Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα,Ιούνιος 2012

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Μεγιστικές Υποαγορές που Υποκαθιστούν όλα τα Δικαιώματα Προαίρεσης

Διπλωματικη Εργασία
της
Αλεξίας Χρήστου

Επιβλέπων: Ιωάννης Πολυράκης

Εγκρίθηκε απο την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 22η Ιουνίου 2012

(Υπογραφή)	(Υπογραφή)	(Υπογραφή)
....	....	....
Ιωάννης Πολυράκης Καθηγητής ΕΜΠ	Αλέξανδρος Αρβανιτάκης Καθηγητής ΕΜΠ	Μιχαήλ Λουλάκης Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα,Ιούνιος 2012

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμά τον καθηγητή μου κ. Ιωάννη Πολυράκη, ο οποίος ειχε την επίβλεψη της παρούσας διπλωματικής, για το ενδιαφέρον του και για τον πολύτιμο χρόνο που μου διέθεσε.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους καθηγητές κ. Μιχαήλ Λουλάκη και κ. Αλέξανδρο Αρβανιτάκη που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Τέλος ευχαριστώ τους γονείς μου και τους φίλους μου, για την υπομονή και την υποστήριξη που μου έδειξαν κατά τη διάρκεια της φοίτησης μου.

Abstract
In this thesis we study the replication of options in security markets X with a finite numbers of states. Specifically, we study the existence of maximal submarkets (subspaces) Y of X so that any option written on the elements of Y is replicated by a marketed asset x of X . So inside these subspaces the pricing problem is simple because any option is priced by the replicating portfolio. Using the theory of lattice-subspaces and positive bases developed by Polyrakis, we identify the set of all maximal replicated subspaces. In particular, for any maximal replicated subspace we determine a positive basis of the subspace. Moreover we show that the union of all maximal replicated subspaces is the set of all marketed securities $x \in X$ so that any option written on x is replicated. So we determine also the set of securities with replicated options.In the end a computational method is described for option replication.

Keywords Security markets , Replication of options , Completion by options, Positive bases , Sublattices

Περίληψη
Σε αυτή τη διπλωματική εργασία μελετάμε την υποκατάσταση δικαιωμάτων προαίρεσης σε αγορές χρεογράφων X με πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων. Συγκεκριμένα, μελετάμε την ύπαρξη μεγιστικών υποαγορών (υποχώρων) Υ του X έτσι ώστε κάθε δικαίωμα που εγγράφεται σε στοιχεία του Υ να υποκαθίσταται απο ένα στοιχείο του x του X. Έτσι σε αυτούς τους υποχώρους το πρόβλημα της τιμολόγησης είναι απλό γιατί οποιοδήποτε δικαίωμα τιμολογείται με βάση το replicating χαρτοφυλάκιο. Με χρήση της θεωρίας συνδέσμων-υποχώρων και θετικών βάσεων που αναπτύχθηκε απο τον Πολυράκη, προσδιορίζουμε το σύνολο όλων των μεγιστικών replicated υποχώρων. Ειδικότερα, για κάθε μεγιστικό replicated υπόχωρο προσδιορίζουμε μια θετική βάση του υποχώρου. Επιπλέον, δείχνουμε οτι η ένωση όλων των μεγιστικών replicated υποχώρων είναι το σύνολο όλων των χρεωγράφων x ∈ X έτσι ώστε κάθε δικαίωμα που εγγράφεται στο x να είναι replicated. Άρα προσδιορίζουμε επίσης το σύνολο των χρεωγράφων με υποκαθιστουμενα δικαιώματα. Στο τέλος περιγράφουμε και μια αριθμητική μέθοδο για τον προσδιορισμό των μεγιστικών υποαγορών που αναπτύχθηκε απο τον Κατσίκη.

Λέξεις-κλειδιά Αγορές χρεογράφων , Πλήρωση με δικαιώματα , Θετικές Βάσεις , Υποσύνδεσμοι , Υποκατάσταση δικαιωμάτων

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Μαθηματικό Υπόβαθρο

1.1 Μερικώς διατεταγμένοι γραμμικοί χώροι

Θεώρημα 1.1.1 *Έστω E ένα μη κενό σύνολο και μια διμελής σχέση $\geq$ στο E. Η σχέση αυτή είναι σχέση μερικής διάταξης στο E αν για κάθε x,y,z $\in$ E ισχύουν τα εξής :*

(i) $x \geq x$ *(ανακλαστική ιδιότητα)*
(ii) $x \geq y$ *και* $y \geq x \Rightarrow x = y$ *(αντισυμμετρική ιδιότητα)*
(iii) $x \geq y$ *και* $y \geq z \Rightarrow x \geq z$ *(μεταβατική ιδιότητα)*

Αν έχουμε λοιπόν μια σχέση μερικής διάταξης, $\geq$ *, στο E , θα λέμε οτι το ζεύγος (E,* $\geq$*) είναι ένας μερικά διατεταγμένος χώρος.*

1.2 Γραμμικοί σύνδεσμοι(Χώροι Riesz)

Ορισμός 1.2.1 *Έστω X γραμμικός μερικά διατεταγμένος χώρος και* $x, y \in X$. *Τότε το supremum και το infimum του* $\{x, y\}$ *ορίζονται ως* $x \vee y$ *και* $x \wedge y$ *αντίστοιχα.Δηλαδή:*

$$x \vee y = sup(x, y) \text{ και } x \wedge y = inf(x, y)$$

Ορισμός 1.2.2 *Ένας μερικά διατεταγμένος διανυσματικός χώρος X ονομάζεται **γραμμικός (διανυσματικός) σύνδεσμος (linear lattice)** ή **χώρος Riesz (Riesz space)** όταν* $\forall\, x\,, y \in X$ *υπάρχει το supremum και το infimum του συνόλου* $\{x, y\}$.

Πρόταση 1.2.3 *Έστω X μερικά διατεταγμένος γραμμικός χώρος. Ο X είναι γραμμικός σύνδεσμος αν και μόνο αν για κάθε* $x \in X$ *υπάρχει το supremum του* $\{x, 0\}$.
Απόδειξη
Υποθέτουμε οτι για κάθε $x \in X$ *υπάρχει το* $x \vee 0$. *Τότε για κάθε* $x, y \in X$ *έχουμε*

$$\{x, y\} = \{x - y, 0\} + \{y\}.$$

Απο την υπόθεση έχουμε οτι το sup$\{x, x-y, 0\}$ *υπάρχει , και απο την ιδιότητα sup(A + B) = sup(A)+ sup(B) έπεται οτι υπάρχει το sup* $\{x, y\}$ *και ισχύει :*

$$x \vee y = (x - y) \vee 0 + y .$$

Απο τη σχέση :

$$x \wedge y = -(-x) \vee (-y) ,$$

έχουμε οτι για κάθε $x, y \in$ *, υπάρχει επίσης το* $x \wedge y$*. Άρα ο X είναι γραμμικός σύνδεσμος.*

Για κάθε $x \in X$*, όπου X γραμμικός σύνδεσμος ορίζουμε :*
i) $x^+ = x \vee 0$ *και το ονομάζουμε θετικό μέρος του x.*
ii) $x^- = (-x) \vee 0$ *και το ονομάζουμε αρνητικό μέρος του x.*
iii) $\mid x \mid = (-x) \vee x$ *και το ονομάζουμε απόλυτη τιμή του x.*

Πρόταση 1.2.4 *Αν ο X είναι γραμμικός σύνδεσμος, για κάθε x, y, z* $\in X$ *έχουμε :*

(i) sup$\{x, -x, 0\}$ = sup $\{x, -x\}$
(ii) $-(x \wedge y) = (-x) \vee (-y)$
(iii) $(x \vee y) + z = (x + z) \vee (y + z)$
(iv) $x + y = x \vee y + x \wedge y$
(v) $x \wedge (y + z) \leq x \wedge y + x \wedge z$ *, εφόσον x, y, z* $\in X_+$.

Απόδειξη
(i) Αν $w = sup\{x, -x, 0\}$ *και* $u = sup\{x, -x\}$ *, έχουμε* $w \geq u$.
Επίσης $u \geq x$, $u \geq -x \Rightarrow 2u \geq 0 \Rightarrow u \geq 0 \Rightarrow u \geq w$*. Άρα u = w.*
(ii) Έπεται αμέσως απο την ιδιότητα sup(A) = -inf(-A).
(iii) sup $\{x, y\}$ + z = sup $\{x, y\}$ + sup $\{z\}$ = sup $\{x + z, y + z\}$.
(iv) x + y - ($x \wedge y$) = sup$\{x + y\}$ + sup$\{-x, -y\}$ = sup$\{y, x\}$.
(v) inf $\{x, y\}$ + inf $\{x, z\}$ = inf$\{2x, x + z, y + x, y + z\} \geq$ inf $\{x, y + z\}$ *, γιατί* $2x$, $x + z$, $y + x \geq x$.

Πρόταση 1.2.5 *Αν X είναι γραμμικός σύνδεσμος και* $x \in X$ *, έχουμε :*

(i) $x = x^+ - x^-$. *Αν* $x = x_1 - x_2 \in X$ *τότε* $x_1 \geq x^+$ *και* $x_2 \geq x^-$
(ii) $\mid x \mid = x^+ + x^-$
(ii) $x^+ \wedge x^- = 0$

Απόδειξη
(i) Απο τα (ii) και (iv) της Πρότασης 1.2.3 έχουμε :
$x = x + 0 = x \vee 0 + x \wedge 0 = x \vee 0 - ((-x) \vee 0) = x^+ - x^-$.
Έστω οτι $x = x_1 - x_2$ *με* $x_1, x_2 \in X_+$*. Τότε* $x_1 = x + x_2$ *, άρα* $x_1 \geq x, 0$ *,* $x_1 \geq x^+$*. Ανάλογα έχουμε* $x_2 = -x + x_1$*, άρα* $x_2 \geq -x$ *και* $x_2 \geq (-x) \vee 0 = x^-$.

Η (ii) αποδεικνύεται ως εξής :
$x^+ - x^- = sup\{x, 0\} + sup\{0, x, -x\} = sup\{x, -x\} = \mid x \mid$.

(iii) Επειδή $x^+, x^- \in E^+$ *έχουμε οτι* $h = x^+ \wedge x^- \geq 0$. *Αν υποθέσουμε οτι* $h > 0$ *έχουμε* $x^+, x^- \geq h > 0$, *επομένως*

$$x = x^+ - x^- = (x^+ - h) - (x^- - h).$$

Απο την (i) έχουμε $x^+ - h \geq x^+$ *και* $x^- - h \geq -x$ *, άτοπο γιατί υποθέτουμε οτι* $h > 0$ *. Επομένως* $h = 0$ *και* $x^+ \wedge x^- = 0$.

Ορισμός 1.2.6 *Ένας υπόχωρος K ενός μερικά διατεταγμένου χώρου E ονομάζεται* ***σύνδεσμος-υπόχωρος*** *εαν ο K με την επαγόμενη διάταξη απο το E είναι ο ίδιος ένας διανυσματικός σύνδεσμος.*

Ορισμός 1.2.7 *Έστω X ένας διανυσματικός σύνδεσμος. Αν K είναι ένας διατεταγμένος υπόχωρος του X και για κάθε* $x, y \in K$, *το* $x \wedge y \in K$ *και* $x \vee y \in K$, *τότε λέμε οτι ο K είναι* ***υποσύνδεσμος (sublattice)*** *του X.*

Παρατήρηση *: Κάθε υποσύνδεσμος είναι σύνδεσμος-υπόχωρος αλλα ένας σύνδεσμος-υπόχωρος δεν είναι απαραίτητα υποσύνδεσμος.*

Ορισμός 1.2.8 *Έστω B ένας υπόχωρος ενός διανυσματικού συνδέσμου X. Η τομή όλων των υποσυνδέσμων του X που περιέχουν το B συμβολίζεται με S(B) και ονομάζεται υποσύνδεσμος του X που παράγεται απο το B.*

Κεφάλαιο 2

Θετικές βάσεις στον $\mathbb{R}^m$ και βάση προβολής

Παρουσιάζουμε σε αυτό το Κεφάλαιο τα βασικά αποτελέσματα των άρθρων του Πολυράκη (1996, 1999), τα οποία είναι απαραίτητα σε αυτή τη μελέτη. Επίσης επειδή στη μελέτη μας έχουμε οτι Ω = $\{1, 2, ..., m\}$ *, ο C(Ω) θα είναι ο* $\mathbb{R}^m$.

2.1 Θετικές Βάσεις

Υποθέτουμε οτι ο L είναι ένας διατεταγμένος υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$*. Δηλαδή ο L είναι ένας υπόχωρος του* $\mathbb{R}^m$ *επίσης διατεταγμένος με την σημειακή διάταξη. Τότε ο* $L_+ = \mathbb{R}^m_+ \cap L$ *είναι ο θετικός κώνος του L. Μια βάση* $\{b_1, b_2, ..., b_r\}$ *είναι μια* ***θετική βάση*** *του L αν* $L_+ = \{x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i b_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}_+ \ \ \forall i\}$*. Με άλλα λόγια μια βάση του L είναι θετική αν για οποιοδήποτε* $x \in L$*, έχουμε οτι x θετικό αν και μόνο αν οι συντελεστές της βάσης είναι θετικοί. Παρόλο που ο L έχει άπειρο πλήθος βάσεων, η ύπαρξη μιας θετικής βάσης δεν είναι πάντα εξασφαλισμένη. Επιπλέον, ο L έχει μια θετική βάση αν και μονο αν ο L ειναι σύνδεσμος-υπόχωρος του* $\mathbb{R}^m$.

Πρόταση 2.1.1 *Ένας διατεταγμένος υπόχωρος L του* $\mathbb{R}^m$ *με θετική βάση* $\{b_1, b_2, ...b_r\}$ *είναι υποσύνδεσμος του* $\mathbb{R}^m$ *αν και μόνο αν* $supp(b_i) \cap supp(b_j) = \emptyset \ \forall i \neq j$.

Ως συνέπεια του αποτελέσματος αυτού έχουμε το παρακάτω, το οποίο είναι ιδιαίτερα σημαντικό στην θεωρία των δικαιωμάτων προαίρεσης.

Πρόταση 2.1.2 *Υποθέτουμε οτι L είναι ένας υποσύνδεσμος του* $\mathbb{R}^m$*. Αν το σταθερό διάνυσμα* $\mathbf{1} = (1, 1, ..., 1)$ *είναι στοιχείο του L, τότε ο L έχει μια θετική βάση η οποία είναι* ***διαμέριση της μονάδας****, δηλαδή* $\mathbf{1} = \sum_{i=1}^{r} b_i$ *και για κάθε διάνυσμα* b_i *έχουμε :* $b_i(j) = 1$*, για κάθε* $j \in supp(b_i)$.

Υποθέτουμε τώρα οτι $z_1, z_2, ...z_r$ είναι σταθερά, γραμμικώς ανεξάρτητα και θετικά διανύσματα του $\mathbb{R}^m$ και οτι Z είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ ο οποίος παράγεται απο τα διανύσματα z_i

Η συνάρτηση

$$\beta(i) = \left(\frac{z_1(i)}{z(i)}, \frac{z_2(i)}{z(i)}, ..., \frac{z_r(i)}{z(i)}\right) \text{ για κάθε } i \in \{1, ..., m\} \text{ με } z(i) > 0,$$

όπου $z = z_1 + z_2 + ... + z_r$ είναι η ***βασική συνάρτηση*** *των $z_1, z_2, ..., z_r$ Συμβολίζουμε με $\mathbf{R}(\beta)$ το σύνολο τιμών της β και με card$\mathbf{R}(\beta)$ ο πληθικός αριθμός του $\mathbf{R}(\beta)$. Αυτοί ο συμβολισμοί χρησιμοποιούνται στα δύο παρακάτω αποτελέσματα.*

Θεώρημα 2.1.3 *(Πολυράκης 1999, θεώρημα 3.6)*
Αν Z είναι ο υπόχωρος του $C(\Omega)$, ο οποίος παράγεται απο τα διανύσματα $z_1, z_2, ..., z_r$ και β η βασική συνάρτηση των $z_1, z_2, ..., z_r$, έχουμε : Ο Z είναι υποσύνδεσμος του $C(\Omega)$ αν και μόνο αν card $\mathbf{R}(\beta) = r$.

Αν $\mathbf{R}(\beta) = \{P_1, P_2, ..., P_r\}$, μια θετική βάση $\{b_1, b_2, ..., b_r\}$ του Z δίνεται απο τον τύπο :

$$(b_1, b_2, ..., b_r)^T = A^{-1}(z_1, z_2, ..., z_r)^T ,$$

όπου A είναι ο r x r πίνακας, του οποίου η i-οστη στήλη είναι το διάνυσμα P_i για κάθε i = 1,2,...,r $(b_1, b_2, ..., b_r)^T$, $(z_1, z_2, ..., z_r)^T$ είναι οι πίνακες με γραμμές τα διανύσματα $b_1, b_2, ..., b_r$ και $z_1, z_2, ..., z_r$ αντίστοιχα.

Το παρακάτω αποτέλεσμα, δίνει εναν αλγόριθμο για τον προσδιορισμό του υποσυνδέσμου που παράγεται απο ενα πεπερασμένο σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων και θετικών διανυσμάτων.

Θεώρημα 2.1.4 *(Πολυράκης 1999, Θεώρημα 3.7)*
Έστω Z ο υποσύνδεσμος του C(Ω), ο οποίος παράγεται απο το σύνολο $\{z_1, z_2, ..., z_r\}$ και έστω $\mu \in \mathbb{N}$. Αν β είναι η βασική συνάρτηση των $z_1, z_2, ..., z_r$ τα (i) και (ii) είναι ισοδύναμα :

(i) dim(Z) = μ.
(ii) $\mathbf{R}(\beta) = \{P_1, P_2, ..., P_\mu\}$.

Αν ισχύει το (ii), ο Z κατασκευάζεται ως εξής :
(α) Αρίθμηση του $\mathbf{R}(\beta)$ έτσι ώστε τα r πρώτα διανύσματα να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (όπως έχει δειχθεί και στο άρθρο του Πολυράκη(1999) μια τέτοια αρίθμηση υπάρχει πάντα.) Συμβολίζουμε πάλι με P_i , i=1,2,... μ τη νέα αρίθμηση και θέτουμε $I_{r+k} = \{t \in \omega \mid \beta(t) = P_r + k\}$, για κάθε k = 1,2,..., μ-r.

(β) Ορίζουμε τα διανύσματα z_{r+k}, k= 1,2,..., μ-r ως εξής :

$z_{r+k}\,(i)$ = z(i) αν $i \in I_{r+k}$ και $z_{r+k}\,(i)$ = 0 αν $i \notin I_{r+k}$,
όπου z= $z = z_1 + z_2 + ... + z_r$.

(γ) Z= [$z_1, z_2, ..., z_r, ...z_\mu$].

(δ) Μια θετική βάση $\{b_1, b_2, ..., b_\mu\}$ του Z κατασκευάζεται ως εξής : Θεωρούμε την βασική συνάρτηση γ των διανυσμάτων $z_1, z_2, ..., z_r, ...z_\mu$ και υποθέτουμε οτι:

$$\{P'_1, P'_2, ..., P'\mu\}$$

είναι το σύνολο τιμών της γ. (Το σύνολο τιμών της γ έχει ακριβώς μ στοιχεία). Τότε :

$$(b_1, b_2, ..., b_\mu)^T = D^{-1}\,(z_1, z_2, ..., z_\mu), \qquad (4)$$

όπου D είναι ο μ x μ πίνακας με στήλες τα διανύσματα $P'_1, P'_2, ...P'_\mu$.

2.2 Βάση Προβολής (Projection Basis)

Η έννοια της βάσης προβολής (projection basis) έχει οριστεί στο άρθρο του Πολυράκη(2003) για έναν υπόχωρο L του C(Ω) πεπερασμένων διαστάσεων,ο οποίος παράγεται απο τα γραμμικώς ανεξάρτητα, θετικά διανύσματα $y_1, y_2, ..., y_r$ του C (Ω),και ο οποίος περιέχεται σε έναν πεπερασμένων διαστάσεων σύνδεσμο-υπόχωρο W του C (Ω) Αυτή η βάση $\{\tilde{b_1}, \tilde{b_2}, ..., \tilde{b_r}\}$, ονομάζεται βάση προβολής γιατί τα στοιχεία της είναι προβολές των στοιχείων της θετικής βάσης του συνδέσμου-υποχώρου W. Στην περίπτωση που ο υποσύνδεσμος Z του C (Ω) που παράγεται απο τον L είναι πεπερασμένων διαστάσεων, βάση προβολής μπορεί να οριστεί με ανάλογο τρόπο παίρνοντας τις προβολές της θετικής βάσης του Z στον L.

***Θεώρημα* 2.2.1** *(Πολυράκης 2003, Θεώρημα 9)*
Εστω Z ο υποσύνδεσμος του C(Ω) ,ο οποίος παράγεται απο το σύνολο $\{z_1, z_2, ..., z_r\}$ γραμμικά ανεξάρτητων και θετικών διανυσμάτων του C(Ω) , και υποθέτουμε οτι dim(Z)= μ. Έστω οτι ακολουθούμε τα βήματα και χρησιμοποιούμε τους ίδιους συμβολισμούς του (ii) του Θεωρήματος 9 για τον προσδιορισμό μιας θετικής βάσης $\{b_1, b_2, ..., b_\mu\}$ του Z όπως δίνεται απο το (4). Οπότε υποθέτουμε οτι β είναι η βασική συνάρτηση των διανυσμάτων $z_1, z_2, ..., z_r$ και $P_1, P_2, ..., P_r, ..., P_{r+1}, ..., P_\mu$ είναι μια αρίθμηση του ***R***(β) τέτοια ώστε τα διανύσματα $P_1, P_2, ..., P_r$ να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και υποθέτουμε επίσης οτι τα $z_{r+1}, z_{r+2}, ..., z_\mu$ είναι τα νέα διανύσματα, τα οποία κατασκευάζονται στο (β) του θεωρήματος 9.

Αν L = $[z_1, z_2, ..., z_r]$ ειναι ο υπόχωρος του C(Ω), ο οποίος παράγεται απο τα διανύσματα $z_1, z_2, ..., z_r$, έχουμε οτι :

(i) $Z = L \oplus [z_{r+1}, z_{r+2}, ..., z_\mu]$
(ii) $\{b_{r+1}, b_{r+2}, ..., b_\mu\} = \{2z_{r+1}, 2z_{r+2}, ..., 2z_\mu\}$
(iii) *Αν* $b_i = \tilde{b_i} + b'_i$ *, με* $\tilde{b_i} \in L$ *και* $b'_i \in [z_{r+1}, z_{r+2}, ...z_\mu]$*, για κάθε i = 1,2,...,*

r , τότε $\{\tilde{b_1}, \tilde{b_2}, ..., \tilde{b_r}\}$ *είναι μια βάση του L, την οποία ονομάζουμε **projection βάση** του L και δίνεται απο τον τύπο :*

$$\left(\tilde{b_1}, \tilde{b_2}, ..., \tilde{b_r}\right)^T = A^{-1} \left(z_1, z_2, ..., z_r\right)^T ,$$

όπου A είναι ο n x n πίνακας του οποίου η i-οστή στήλη είναι το διάνυσμα P_i*, για i = 1,2, ..., r. Αυτή η βάση έχει την ιδιότητα : Οι r πρώτες συντεταγμένες οποιουδήποτε στοιχείου x του L στην βάση* $\{b_1, b_2, ..., b_\mu\}$ *συμπίπτουν με τις αντίστοιχες συντεταγμένες του x στην βάση* $\{\tilde{b_1}, \tilde{b_2}, ..., \tilde{b_r}\}$ *, δηλαδή*

$$x = \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i b_i \in L \Longrightarrow x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \tilde{b_i}.$$

Κεφάλαιο 3

Μεγιστικές Υποαγορές

3.1 Το μοντέλο

Το μοντέλο που μελετάμε είναι δυο περιόδων με πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων $\Omega = \{1, 2, 3, ..., s\}$ *τη χρονική στιγμή 1 και πεπερασμένο αριθμό χρηματοϊκονομικών συμβολαίων (assets), με αποδόσεις οι οποίες δίνονται απο τα διανύσματα* $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}^m$.

Ένα ***χαρτοφυλάκιο*** *(portfolio) είναι ένα διάνυσμα* $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n) \in \mathbb{R}^n$ *, όπου* θ_i *ο αριθμός των μονάδων του i-συμβολαίου. Τότε* $T(\theta) = \sum\{\theta_i x_i\} \in \mathbb{R}^m$ *είναι η απόδοση του* θ*. Και αφού ο τελεστής T είναι 1-1, αντιστοιχίζει τα χαρτοφυλάκια με τις αποδόσεις τους. Θα αναφέρουμε τα* $x_1, x_2, ..., x_n$ *ως πρωταρχικά συμβόλαια και τον υπόχωρο*

$$X = [x_1, x_2, ..., x_n]$$

του $\mathbb{R}^m$ *που παράγεται απο τα* x_i *, ως* ***space of marketed securities*** *ή* ***asset span*** *και τα διανύσματα του* $\mathcal{X}$ *θα αναφέρονται επίσης ως χαρτοφύλακια. Σε αυτή τη μελέτη υποθέτουμε οτι το riskless bond* $\mathbf{1}$ *περιέχεται στον* X.

Ένα διάνυσμα x $\in \mathbb{R}^m$ *είναι marketed ή replicated αν το x ειναι η απόδοση κάποιου χαρτοφυλακίου* θ *,ή ισοδύναμα αν* $x \in X$.

Υπενθυμίζουμε οτι $\mathbb{R}^m = \{x = (x(1), x(2), ..., x(m)) | x(i) \in \mathbb{R} \forall i\}$*. Για οποιοδήποτε* $x = (x(1), x(2), .., x(m)) \in \mathbb{R}^m$ *συμβολίζουμε με* $||x||$ *την Ευκλείδια νόρμα, με* $||x||_\infty = max\{|x(i)|\ i = 1, 2, ..., m\}$ *την Supremum νόρμα του x και το σύνολο supp*$(x) = \{i = 1, 2, ..., m | x(i) \neq 0\}$ *είναι ο φορέας του x. Το x είναι ένα δυαδικό διάνυσμα αν* $x \neq 0$, $x \neq 1$ *και* $x(i) = 0$ *ή* $x(i) = 1$, $\forall i$.

Το δικαίωμα αγοράς (call option), το οποίο εγγράφεται στο διάνυσμα x, με τιμή εξάσκησης α *είναι το διάνυσμα* $c(x, \alpha) = (x - \alpha\mathbf{1})^+$*. Το δικαίωμα πώλησης (put option), το οποίο εγγράφεται στο διάνυσμα x, με τιμή εξάσκησης* α *είναι το διάνυσμα* $p(x, \alpha) = (\alpha\mathbf{1} - x)^+$*. Έχουμε οτι* $x - \alpha\mathbf{1} = c(x, \alpha) - p(x, \alpha)$ *(put-call parity)*

Εαν αμφότερα $c(x, \alpha) > 0$ *και* $p(x, \alpha) > 0$*, τότε λέμε οτι το δικαίωμα αγοράς* $c(x, \alpha)$ *και το δικαίωμα πώλησης* $p(x, \alpha)$ *είναι μη-τετριμμένα, και επίσης* *οτι α είναι μια μη-τετριμμένη τιμή εξάσκησης του x. Θα συμβολίζουμε με K_x το σύνολο των μη-τετριμμένων τιμών εξάσκησης του x. Αν τα $c(x,\alpha)$ και $p(x,\alpha)$ ανήκουν στο X, τότε λέμε οτι τα $c(x,\alpha)$ και $p(x,\alpha)$ είναι **replicated**.*

*Η **πλήρωση με δικαιώματα** του X είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$,ο οποίος προκύπτει επαγωγικά προσθέτοντας στην αγορά τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης των χρεογράφων που διατίθενται στην αγορά και αφαιρώντας ξανά δικαιώματα αγοράς και πώλησης τα οποία ξαναπροστίθενται στην αγορά. Στο άρθρο "Η πλήρωση των αγορών" των Κούντζάκη και Πολυράκη (2006) δίνεται ο μαθηματικός ορισμός της πλήρωσης με δικαιώματα σε αγορές με άπειρο αριθμό καταστάσεων. Μια πιο γενική μελέτη της πλήρωσης της αγοράς με δικαιώματα παρουσιάζεται όταν τα δικαίωματα δεν λαμβάνονται ως προς το riskless bond* $\mathbf{1}$ *αλλά ως προς ένα άλλο διάνυσμα απο έναν υπόχωρο U του* $\mathbb{R}^m$ *και η πλήρωση του X με δικαιώματα συμβολίζεται με $F_U(X)$.*

3.2 Η πλήρωση του X με δικαιώματα

Σε αυτή την ενότητα περιγράφουμε την μέθοδο προσδιορισμού του $F_{\mathbf{1}}(X)$. Θυμηθείτε οτι ο X παράγεται απο τα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $x_1, x_2, ..., x_n$, όχι απαραίτητα θετικά και οτι $\mathbf{1} \in X$. Όπως έχουμε ξαναπεί, η πλήρωση του X με δικαιώματα είναι ο υποσύνδεσμος του $\mathbb{R}^m$ που παράγεται απο το X.
*Για να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 9 για τον προσδιορισμό μιας θετικής βάσης του $F_{\mathbf{1}}(X)$ πρέπει να προσδιορίσουμε ενα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων, θετικών διανυσμάτων $\{y_1, y_2, ..., y_r\}$ του $\mathbb{R}^m$ τέτοια ώστε ο υποσύνδεσμος που παράγεται απο τα $\{y_1, y_2, ..., y_r\}$ να είναι ο $F_{\mathbf{1}}(X)$. Αυτό το σύνολο ονομάζεται στο άρθρο των Κουντζάκη και Πολυράκη (2006) **basic set** of the market. Στο ίδιο άρθρο αποδεικνύεται οτι κάθε μεγιστικό υποσύνολο $\{y_1, y_2, ..., y_r\}$, γραμμικά ανεξάρτητων θετικών διανυσμάτων, του συνόλου*

$$\mathcal{A} = \{{x_1}^+, {x_1}^-, {x_2}^+, {x_2}^-, ..., {x_n}^+, {x_n}^-\},$$

είναι ενα basic set .Παρατηρείστε οτι τα διανύσματα του basic set δεν είναι απαραίτητα στοιχεία του X.

Στην παρούσα μελέτη έχουμε υποθέσει οτι το riskless bond $\mathbf{1}$ *περιέχεται στον X, το οποίο συνεπάγεται οτι μπορούμε να βρούμε ενα basic set που να αποτελείται απο n γραμμικώς ανεξάρτητα και θετικά διανύσματα του X κάνοντας χρήση του παρακάτω λήμματος.Αυτό είναι σημαντικό για τη μελέτη μας.*

***Λήμμα 3.2.1** Αν α = max $\{\| x_i \|_{\text{inf}} | \ i = 1, 2, ..., n\}$, τότε τουλάχιστον ένα απο τα παρακάτω σύνολα θετικών διανυσμάτων :*

$$\{y_i = \alpha\mathbf{1} - x_i, |\ i = 1, 2, ..., n\} \text{ και } z_i = \{2\alpha\mathbf{1} - x_i, |\ i = 1, 2, ..., n\}\,,$$

αποτελείται απο γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα.

Απόδειξη

Απο τον τρόπο που ορίζεται το α έχουμε οτι : $-\alpha\mathbf{1} \leq x_i \leq \alpha\mathbf{1}$. Άρα τα διανύσματα y_i, z_i είναι θετικά διανύσματα του X για κάθε i. Εύκολα μπορούμε να δείξουμε οτι τα διανύσματα $w_i = \lambda\mathbf{1} - x_i$, i= 1,2,..., n είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνο αν $\lambda\mathbf{1}$ είναι ένα διάνυσμα,το οποίο ανήκει στην affine θήκη των $x_1, x_2, ..., x_n$. Άρα τουλάχιστον ένα απο τα σύνολα του λήμματος αποτελείται απο γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα.

Ορισμός 3.2.2 *Οποιοδήποτε σύνολο $y_1, y_2, ..., y_n$, n γραμμικά ανεξάρτητων και θετικών διανυσμάτων του X αποτελεί ενα **basic set of marketed securities**.*

Γενικά μπορούμε να βρούμε διάφορα basic sets of marketed securities. Ένα τέτοιο σύνολο είναι μια βάση του X, αποτελούμενη απο θετικά διανύσματα αλλά γενικά αυτή η βάση δεν είναι μια θετική βάση του X. Άρα για κάθε basic set ο υπόχωρος που παράγεται απο το σύνολο αυτο ειναι ο X. Αρα ο υποσύνδεσμος που παράγεται απο αυτό το basic set είναι η πλήρωση του X με δικαιώματα. Οπότε έχουμε :

Θεώρημα 3.2.3 *Ο υποσύνδεσμος του $\mathbb{R}^m$, ο οποίος παράγεται απο ένα basic set $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ of marketed securities είναι ο $F_{\mathbf{1}}(X)$.*

Για τον προσδιορισμό της θετικής βάσης $\{b_i\}$ του $F_{\mathbf{1}}(X)$, η οποία είναι διαμέριση της μονάδας, ακολούθουμε τα βήματα του αλγορίθμου όπως βλέπουμε στο Θεώρημα 2.1.4 , όπου βρίσκουμε μια θετική βάση του υποσυνδέσμου του $\mathbb{R}^m$ ο οποίος παράγεται απο ένα πεπερασμένο σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων και θετικών διανυσμάτων. Ξεκινάμε προσδιορίζοντας ένα basic set of marketed securities $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$. Στη συνέχεια προδιορίζουμε την βασική συνάρτηση β των $y_1, y_2, ..., y_n$. Η συνάρτηση αυτή έχει οριστεί στο προηγούμενο κεφάλαιο, και είναι η παρακάτω :

$\left(\frac{y_1(i)}{y(i)}, \frac{y_2(i)}{y(i)}, ..., \frac{y_n(i)}{y(i)}\right)$ *, για κάθε $i \in \{1, ..., m\}$ με $y(i) > 0$,*

όπου $y = y_1 + y_2 + ... + y_r$. Αυτή η συνάρτηση παίρνει τιμές στο simplex $\Delta_n = \{\xi \in \mathbb{R}^n_+ \mid \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i = 1\}\ \mathbb{R}^n_+$.
Συμβολίζουμε με $\boldsymbol{R}(\beta)$ το σύνολο τιμών της β και με card$\boldsymbol{R}(\beta)$ τον πληθικό αριθμό του $\boldsymbol{R}(\beta)$. Συνεχίζοντας την διαδικασία που περιγράφεται απο τον αλγόριθμο λαμβάνουμε μια θετική βάση $\{d_1, d_2, ..., d_\mu\}$ του $F_{\mathbf{1}}(X)$.
Με κανονικοποίηση της βάσης $\{d_i\}$ λαμβάνουμε την θετική βάση $\{b_i\}$ του $F_{\mathbf{1}}(X)$, η οποία είναι διαμέριση της μονάδας. Μάλιστα τα διανύσματα d_i έχουν ξένους φορείς, απο την Πρόταση 2.1.1 . Αν $\mathbf{1} = \sum\limits_{i=1}^{\mu} \rho_i d_i$ είναι η ανάπτυξη του $\mathbf{1}$ στη βάση $\{d_i\}$, για κάθε $j \in supp\,(d_i)$ έχουμε οτι $\mathbf{1}\,(1) = 1 = \rho_i d_i\,(j)$, επομένως $d_i\,(j) = \frac{1}{\rho_i}$. Άρα κάθε d_i είναι σταθερό στον φορέα του και $\rho_i = \frac{1}{\|d_i\|_\infty}$, για κάθε i . Τα διανύσματα b_i , ως πολλαπλάσια των διανυσμάτων d_i ορίζουν μια θετική βάση του $F_{\mathbf{1}}(X)$. Αυτή η βάση είναι διαμέριση της μονάδας γιατί $\mathbf{1} = \sum\limits_{i=1}^{\mu} b_i$.

Οπότε έχουμε :

Θεώρημα 3.2.4 *Ο $F_{\mathbf{1}}(X)$ έχει μια θετική βάση $\{b_1, b_2, ..., b\mu\}$, η οποία είναι διαμέριση της μονάδας.*

Κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 2.1.4 , έχουμε οτι η διάσταση του $F_1(X)$ ισούται με τον πληθικό αριθμό του $R(\beta)$. Οπότε αν το $R(\beta)$ έχει n στοιχεία, τότε $F_1(X) = X$ και οποιοδήποτε δικαίωμα είναι replicated. Αν $R(\beta)$ έχει μ στοιχεία τότε $F_1(X) = \mathbb{R}^m$ και τα δικαιώματα γεμίζουν όλο το χώρο $\mathbb{R}^m$. Αυτό εκφράζεται στο παρακάτω αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.2.5 *Η διάσταση του $F_1(X)$ ισούται με τον πληθικό αριθμό του συνόλου τιμών $R(\beta)$, επομένως έχουμε :*

(i) $F_{\mathbf{1}}(X) = X$ αν και μόνο αν $cardR(\beta) = n$
(ii) $F_{\mathbf{1}}(X) = \mathbb{R}^m$ αν και μόνο αν $cardR(\beta) = m$
(iii) $F_{\mathbf{1}}(X) \subsetneqq \mathbb{R}^m$ αν και μόνο αν $cardR(\beta) < m$

3.3 Μεγιστικές υποαγορές

Για την μελέτη των μεγιστικών υποαγορών η έννοια της βάσης προβολής παίζει σημαντικό ρόλο. Στο προηγούμενο κεφάλαιο έχουμε εισάγει την έννοια της βάσης προβολής για έναν πεπερασμένων διαστάσεων υπόχωρο του $C(\Omega)$, ο οποίος παράγεται απο έναν πεπέρασμένο αριθμό γραμμικά ανεξάρτητων και θετικών διανυσμάτων του $C(\Omega)$. Στην περίπτωση που ο Ω είναι πεπερασμένος, ο $C(\Omega)$ είναι ο $\mathbb{R}^\kappa$, όπου κ ο πληθικός αριθμός του Ω. Σε αυτή την ενότητα, υποθέτουμε οτι ο X παράγεται απο ένα basic set of marketed securities, το οποίο συμβολίζουμε πάλι με $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Απο το λήμμα 3.2.1 αυτό είναι πάντα εφικτό. Αρα υποθέτουμε οτι $X = [x_1, x_2, ..., x_n]$ είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ ο οποίος παράγεται απο τα γραμμικώς ανεξάρτητα και θετικά διανύσματα x_i του $\mathbb{R}^m$. Υποθέτουμε οτι Z είναι ο υποσύνδεσμος του $\mathbb{R}^m$ που παράγεται απο το X, με $dim(Z) = \mu$, β είναι η βασική συνάρτηση των διανυσμάτων x_i και οτι $P_1, P_2, ..., P_n, P_{n+1}, ..., P_\mu$ είναι μια αρίθμηση του συνόλου τιμών της β τέτοια ώστε τα n πρώτα διανύσματα $P_1, P_2, ..., P_n$ να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Όπως έχουμε δείξει παραπάνω, Z είναι η πλήρωση $F_{\mathbf{1}}(X)$ του X.

Υποθέτουμε οτι ακολουθούμε τα βήματα του (ii) του Θεωρήματος 2.1.4 και προσδιορίζουμε μια θετική βάση $\{d_1, d_2, ..., d_n\}$ του $F_{\mathbf{1}}(X)$,η οποία δίνεται απο το (4). Παρατηρείστε οτι στο προηγούμενο κεφάλαιο αυτή η βάση συμβολίζεται με $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ αλλά εδώ χρησιμοποιούμε αυτόν τον συμβολισμό για την θετική βάση του $F_{\mathbf{1}}(X)$, η οποία είναι διαμέριση της μονάδας. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.1 του προηγούμενου κεφαλαίου , αν

$$\left(\tilde{d_1}, \tilde{d_2}, ..., \tilde{d_n}\right)^T = A^{-1}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)^T ,$$

*όπου A είναι ο n x n πίνακας, του οποίου η i-οστή στήλη είναι το διάνυσμα P_i , τότε $\{\tilde{d_1}, \tilde{d_2}, ..., \tilde{d_n}\}$ είναι η **βάση προβολής** του X. Αυτή η βάση έχει την ιδιότητα : Οι n πρώτες συντεταγμένες οποιουδήποτε στοιχείου x του X στη* *βάση $\{d_1, d_2, ..., d_n\}$ συμπίπτουν με τις αντίστοιχες συντεταγμένες του x στη βάση προβολής, δηλαδή:*

$$x = \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i d_i \in X \Longrightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{d}_i.$$

Υποθέτουμε οτι u_i είναι μια θετική βάση του $F_1(X)$ με $u_i = \theta_i d_i$ όπου $\theta_i > 0$ για κάθε i . Εύκολα μπορούμε να δείξουμε οτι $\{\tilde{u_i} = \theta_i \tilde{d_i}\}$ είναι βάση του X με την ιδιότητα : Οι n πρώτες συντεταγμένες οποιουδήποτε στοιχείου x που ανήκει στο X στη βάση $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ συμπίπτουν με τις αντίστοιχες συντεταγμένες του x στη βάση $\{\tilde{u_1}, \tilde{u_2}, ..., \tilde{u_n}\}$ του X . Πράγματι, αν $x = \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i u_i \in X$, έχουμε

$$x = \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i \theta_i d_i \text{ , επομένως } x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \theta_i \tilde{d}_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{u_i} \text{ .}$$

*Ως εκ τούτου $\{\tilde{u_i}\}$ είναι μια βάση προβολής του X και θα αναφερόμαστε σε αυτήν **ως την βάση προβολής του X που αντιστοιχεί στη βάση** $\{u_i\}$. Σύμφωνα με αυτή την ορολογία η βάση προβολής $\{\tilde{d_i}\}$ του X, είναι η βάση προβολής του X που αντιστοιχεί στη βάση $\{d_i\}$.*

Πρόταση 3.3.1 *Υποθέτουμε οτι $\{d_i\}$ είναι η βάση του $F_1(X)$ όπως δίνεται απο το (4) του Θεωρήματος 2.1.4 και $\{\tilde{d_i}\}$ είναι η βάση προβολής του X που αντιστοιχεί στη βάση $\{d_i\}$.*

Τότε $\{b_i = \frac{d_i}{\|d_i\|_\infty} \mid i = 1, 2, ..., \mu\}$ είναι η θετική βάση του $F_1(X)$, η οποία είναι διαμέριση της μονάδας και $\{\tilde{b_i} = \frac{\tilde{d_i}}{\|d_i\|_\infty} \mid i = 1, 2, ..., n\}$ είναι η βάση προβολής του X που αντιστοιχεί στη βάση $\{b_i\}$ του $F_1(X)$.

Απόδειξη
Απο το Θεώρημα 3.2.4 και τις παρατηρήσεις μετά, $\{b_i = \frac{d_i}{\|d_i\|_\infty}\}$ είναι η θετική βάση του $F_1(X)$, η οποία είναι διαμέριση της μονάδας. Όπως είδαμε νωρίτερα, $\{\tilde{b_i} = \frac{\tilde{d_i}}{\|d_i\|_\infty}\}$ είναι η βάση προβολής του X που αντιστοιχεί στη βάση $\{b_i\}$.

Ορισμός 3.3.2 *Υποθέτουμε οτι Υ είναι υπόχωρος του X. Αν η πλήρωση με δικαιώματα του Υ περιέχεται στον X, δηλαδή $F_1(Y) \subseteq X$, τότε λέμε οτι ο Υ είναι **replicated** και αν επιπλέον για κάθε υπόχωρο Z του X, με $Y \subsetneqq Z$ έχουμε οτι $X \subsetneqq F_1(Z)$, τότε λέμε οτι ο Υ είναι **μεγιστικός replicated υπόχωρος** ή **μεγιστική replicated υποαγορά** του X .*

Πρόταση 3.3.3 *Ένας υπόχωρος Υ του X είναι **μεγιστική replicated υποαγορά** του X, αν και μόνο αν ο Υ είναι μεγιστικός υποσύνδεσμος του $\mathbb{R}^m$ που περιέχεται στον X, με $\mathbf{1} \in Y$.*

Απόδειξη
Υποθέτουμε οτι Υ είναι μεγιστικός replicated υπόχωρος του X. Τότε $Y \subseteq F_1(X) \subseteq X$. Επίσης, ο υπόχωρος $Z = F_1(Y)$ του X είναι υποσύνδεσμος του $\mathbb{R}^m$, ο οποίος περιέχει το $\mathbf{1}$, επειδή η πλήρωση $F_1(Y)$ του Υ είναι ο υποσύνδεσμος του $\mathbb{R}^m$ που παράγεται απο το $\{\mathbf{1}\} \cup Y$. Αν πάρουμε και πάλι την την πλήρωση του

Z έχουμε οτι $Z = F_{\mathbf{1}}$ (Z) , επομένως ο Z είναι μεγιστικός replicated υπόχωρος του X. Αφου ο Y είναι μεγιστική replicated υποαγορά έχουμε οτι $Y = Z$ και άρα ο Y είναι υποσύνδεσμος του $\mathbb{R}^m$ με $\mathbf{1} \in Y$. Επίσης ο Y είναι μεγιστικός υποσύνδεσμος, γιατί για κάθε υποσύνδεσμο W του $\mathbb{R}^m$ με $Y \subseteq W \subseteq X$, ο W είναι replicated, επομένως $Y = W$.

Για το αντίστροφο υποθέτουμε οτι ο Y είναι μεγιστικός υποσύνδεσμος του $\mathbb{R}^m$, ο οποίος περιέχεται στον X, με $\mathbf{1} \in Y$. Αν υποθέσουμε οτι ο Y δεν είναι μεγιστικός replicated υπόχωρος , υπάρχει ένας υπόχωρος Z του X με $Y \subsetneqq Z$ και $F_{\mathbf{1}}(Z) \subseteq X$. Τότε $F_{\mathbf{1}}(Z)$ είναι υποσύνδεσμος που περιέχει το $\mathbf{1}$,το οποίο είναι άτοπο. Επομένως Y είναι μεγιστική replicated υποαγορά.

Ορισμός 3.3.4 *Έστω $\{b_i, i = 1, ..., \mu\}$ θετική βάση του $F_{\mathbf{1}}(X)$, η οποία είναι μια διαμέριση της μονάδας και $\{\tilde{b_i} \mid i = 1, ..., n\}$ η βάση προβολής του X που αντιστοιχεί στη βάση $\{b_i\}$. Μια διαμέριση $\delta = \{\sigma_i \mid i = 1, ..., \kappa\}$ του $\{1, ..., n\}$ είναι **γνήσια** (σε σχέση με τη βάση προβολής $\{\tilde{b_i}\}$ του X) αν για κάθε r = 1, 2, ..., κ, το διάνυσμα $w_r = \sum_{i\in\sigma_r} \tilde{b_i}$ είναι δυαδικό διάνυσμα με $\sum\limits_{r=1}^{k} w_r = \mathbf{1}$. Αν επιπλέον η δ είναι μεγιστική, με την έννοια οτι δεν υπάρχει γνήσια διαμέριση φ του $\{1, ..., n\}$ αυστηρά λεπτότερη απο την δ , τότε λέμε οτι δ είναι μεγιστική γνήσια διαμέριση του $\{1, ..., n\}$.*

Παρατήρηση : Για κάθε γνήσια διαμέριση δ του $\{1, ..., n\}$, τα διανύσματα w_r στον παραπάνω ορισμό έχουν ξένους φορείς . Αυτο ισχύει, γιατί τα διανύσματα w_r είναι δυαδικά διανύσματα με άθροισμα $\mathbf{1}$.

Πρόταση 3.3.5 *Για κάθε γνήσια διαμέριση δ του $\{1, ..., n\}$, υπάρχει μια μεγιστική γνήσια διαμέριση του $\{1, ..., n\}$ λεπτότερη της δ . Υπάρχει τουλάχιστον μια μεγιστική γνήσια διαμέριση του $\{1, ..., n\}$.*

Απόδειξη

Υποθέτουμε οτι $\{\sigma_1, ...\sigma_\kappa\}$ είναι μια γνήσια διαμέριση του $\{1, ..., n\}$. Λέμε οτι ένα υποσύνολο σ του $\{1, ..., n\}$ είναι άτομο αν δεν υπάρχει ένα σύνολο $\omega \subsetneqq \sigma$ διάφορο του κενού , έτσι ώστε $\sum_{i\in\omega} \tilde{b_i}$ και $\sum_{i\in\sigma\setminus\omega} \tilde{b_i}$ να είναι δυαδικά διανύσματα. Κάθε σ_i είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, άρα μπορούμε να διασπάσουμε κάθε σ_i σε ένα ανώτατο όριο ατόμων. Με αυτή τη διαδικασία παίρνουμε μια μεγιστική γνήσια διαμέριση του $\{1, ..., n\}$ λεπτότερη απο τη δ.

Τέλος σημειώνεται οτι το σύνολο $\{1, ..., n\}$ είναι μια γνήσια διαμέριση, αφού $\sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{b_i} = \mathbf{1}$. Επομένως μια μεγιστική γνήσια διαμέριση υπάρχει.

Θεώρημα 3.3.6 *Υποθέτουμε οτι $\delta = \{\sigma_i \mid i = 1, ..., k\}$ είναι μια γνήσια διαμέριση του $\{1, ..., n\}$ και $w_r = \sum_{i\in\sigma_r} \tilde{b_i}$ για r = 1, ..., k. Τότε $Y = [w_1, ..., w_k]$ είναι ένας υποσύνδεσμος του $\mathbb{R}^m$, ο οποίος περιέχεται στον X, και $\{w_1, ..., w_k\}$ είναι μια θετική βάση του Y, η οποία είναι διαμέριση της μονάδας. Θα αναφερόμαστε στον Y ως τον **υποσύνδεσμο του** $\mathbb{R}^m$ **που παράγεται απο την** δ και θα σύμβολίζουμε τον Y με Y_δ. Για κάθε γνήσια διαμέριση φ του $\{1, ..., n\}$ αυστηρά λεπτότερη απο τη δ, Y_δ είναι γνήσιος υπόχωρος του Y_φ .*

Απόδειξη

Υποθέτουμε οτι $\delta = \{\sigma_i \mid i = 1, ..., k\}$ *είναι μια γνήσια διαμέριση του* $\{1, ..., n\}$ *. Τότε* $w_r = \sum_{i \in \sigma_r} \tilde{b_i}$ *είναι δυαδικό διάνυσμα για κάθε r. Τα διανύσματα* w_r *έχουν ξένους φορείς και επίσης ορίζουν μια διαμέριση της μονάδας. Άρα* Y_δ = $[w_1, ..., w_k\ ]$ *είναι υποσύνδεσμος του* $\mathbb{R}^m$ *, ο οποίος περιέχεται στον X με* $\mathbf{1}$ $\in Y_\delta$ *και* $\{w_1, ..., w_k\}$ *είναι μια θετική βάση του* Y_δ*, η οποία είναι διαμέριση της μονάδας. Αν υποθέσουμε οτι* $\phi = \{\omega_i \mid i = 1, ..., \tau\}$ *ειναι μια γνήσια διαμέριση του* $\{1, ..., n\}$ *λεπτότερη απο τη* δ *τότε έχουμε : Κάθε* σ_i *διασπάται σε πεπέρασμένο αριθμό ατόμων* $\omega_{r_1}, \omega_{r_2}, ..., \omega_{r_v}$ *άρα* $w_r = v_{r_1} + v_{r_2} + ... + v_{r_v}$ *, όπου* $v_{r_j} = \sum_{i \in \omega_{r_j}} \tilde{b_i}$*. Αν* Y_ϕ *είναι ο υποσύνδεσμος που παράγεται απο τα διανύσματα* $v_j = \sum_{i \in \omega_j} \tilde{b_i}$ *, j = 1,2, ...,* τ *, έχουμε* $w_j \in Y_\phi$ *για κάθε j = 1,2, ..., ,k, επομένως* $Y_\delta \subseteq Y_\phi$ *. Επειδή η* ϕ *είναι αυστηρά λεπτότερη απο τη* δ *, τουλάχιστον ένα* w_r *διασπάται σε περισσότερα απο ένα διάννσμα* v_j *, άρα* Y_δ *είναι γνήσιος υπόχωρος του* Y_ϕ*.*

Θεώρημα 3.3.7 *'Εστω* $\{b_i, i = 1, ..., \mu\}$ *η θετική βάση του* $F_\mathbf{1}(X)$ *που είναι διαμέριση της μονάδας και έστω* $\{\tilde{b_i}, i = 1, ..., n\}$ *η βάση προβολής του X που αντιστοιχεί στη βάση* $\{b_i\}$*.*

Υποθέτουμε οτι Υ *είναι υποσύνδεσμος του* $\mathbb{R}^m$ *, ο οποίος περιέχεται στον X με* $\mathbf{1} \in \Upsilon$ *. Αν* $\{w_1, ..., w_k\}$ *είναι η θετική βάση του* Υ*, η οποία είναι διαμέριση της μονάδας , τότε υπάρχει μια γνήσια διαμέριση* $\delta_Y = \{\sigma_i \mid i = 1, ..., \kappa\}$ *του* $\{1, ..., n\}$ *τέτοια ώστε* $w_r = \sum_{i \in \sigma_r} \tilde{b_i}$ *για κάθε r , επομένως* Υ *είναι ο υποσύνδεσμος που παράγεται απο τη διαμέριση* δ_Y *. Η διαμέριση* δ_Y *είναι μοναδική.*

Για κάθε υποσύνδεσμο Z του $\mathbb{R}^m$ *, ο οποίος περιέχεται στον X , με* $\Upsilon \subsetneqq Z$ *, η διαμέριση* δ_Z *είναι αυστηρά λεπτότερη απο τη* δ_Y *.*

Απόδειξη

Η θετική βάση $\{w_1, ..., w_k\}$ *του* Υ *είναι μια διαμέριση της μονάδας, συνεπώς supp(*w_i*)* $\cap$ *supp(*w_j*)* $= \emptyset$ *για κάθε* $i \neq j$ *και* $\sum_{i=1}^{k} w_r = \mathbf{1}$*. Επίσης τα διανύσματα* w_r *είναι δυαδικά διανύσματα . Υποθέτουμε οτι* $w_r = \sum_{i \in \Phi_r} b_i$ *, όπου* $\Phi_r \subseteq \{1, 2, ..., \mu\}$ *είναι η ...... του* w_r *στη βάση* b_i *. Εύκολα μπορούμε να δείξουμε οτι* $\{\Phi_r \mid r = 1, 2, ..., k\}$ *είναι διαμέριση του* $\{1, ..., \mu\}$ *. Επειδή* $\tilde{b_i}$ *είναι η βάση προβολής του X που αντιστοιχεί στη βάση* b_i *, έχουμε οτι* $w_r = \sum_{i \in \sigma_r} \tilde{b_i}$ *,όπου* $\sigma_r = \phi_r \cap \{r = 1, 2, ..., n\}$*. Κάθε* w_r *, ως διάνυσμα της θετικής βάσης του* Υ *, είναι μη-μηδενικο επομένως* $\sigma_r \neq \emptyset$ *για κάθε* $r = 1, 2, ..., k$ *. Επίσης κάθε* w_i *είναι ένα δυαδικό διάννσμα συνεπώς* $\delta = \sigma_r \mid r = 1, 2, ..., k$ *είναι μια γνήσια διαμέριση του* $\{1, ..., n\}$ *. Απο το Θεώρημα 3.3.6 ,* Υ *είναι ο υποσύνδεσμος του* $\mathbb{R}^m$ *, ο οποίος παράγεται απο τη διαμέριση* δ *. Επι πλέον η διαμέριση* δ *είναι μοναδική, γιατί η .....* $w_r = \sum_{i \in \phi_r} \tilde{b_i}$ *είναι μοναδική και σύμβολίζουμε αυτή τη διαμέριση με* δ_Y *.*

Υποθέτουμε οτι Z είναι ο υποσύνδεσμος του $\mathbb{R}^m$ *, τέτοιος ώστε* $\Upsilon \subseteq Z \subseteq X$*. Θα δείξουμε επίσης οτι η διαμέριση* δ_Z *είναι αυστηρά λεπτότερη απο τη* δ_Y*. Υποθέτουμε οτι* $\{z_1, ..., z_\lambda\}$ *είναι η θετική βάση του Z, η οποία είναι διαμέριση της μονάδας. Υποθέτουμε επίσης οτι* $\delta_Z = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\lambda\}$*. Τότε* $z_r = \sum_{i \in \omega_r} \tilde{b_i}$ *για κάθε* $r = 1, 2, ..., \lambda$ *. Επειδή* Υ *είναι γνήσιος υπόχωρος του Z, έχουμε οτι* $\lambda > k$ *και επίσης οτι κάθε* w_r *μπορεί να ...... στη βάση* $\{z_i\}$ *του Z. Υποθέτουμε* *οτι* $w_r = \sum_{i\in\Psi_r} z_i$, *όπου* $\Psi_r \subseteq \{1, 2, ..., \lambda\}$, *είναι η ..... του* w_r *στη βάση* $\{z_i\}$. *Τότε* $\{\Psi_r \mid r = 1, ..., k\}$ *είναι διαμέριση του* $\{1, ..., \lambda\}$. *Έτσι έχουμε*

$$w_r = \sum_{i\in\Psi_r} z_i = \sum_{i\in\Psi_r} \left(\sum_{j\in\omega_i} \tilde{b_j}\right),$$

άρα $\sigma_r = \bigcup_{i\in\Psi_r} \omega_i$. *Επομένως κάθε* ω_i *περιέχεται σε κάποιο* σ_r. *Επιπλέον, αυτός ο εγκλεισμός είναι γνήσιος για τουλάχιστον ένα i, αφού Υ είναι γνήσιος υπόχωρος του Z, άρα* δ_Z *είναι αυστηρά λεπτότερη απο τη* δ_Y.

Θεώρημα 3.3.8 *Έστω* $\{b_i, i = 1, ..., \mu\}$ *η θετική βάση του* $F_1(X)$*, η οποία είναι διαμέριση της μονάδας και έστω* $\{\tilde{b_i}, i = 1, ..., n\}$ *η βάση προβολής του X που αντιστοιχεί στη βάση* $\{b_i\}$. *Αν Υ είναι υπόχωρος του X, τα επόμενα είναι ισοδύναμα :*

(i) *ο Y είναι μεγιστική replicated υποαγορά του X.*
(ii) *Υπάρχει γνήσια διαμέριση* $\delta = \{\sigma_i \mid i = 1, ..., \}$ *του* $\{1, ..., n\}$ *έτσι ώστε Υ να είναι ο υποσύνδεσμος του* $\mathbb{R}^m$ *που παράγεται απο τη δ.*

Το σύνολο των μεγιστικών replicated υποαγορών του X είναι μη κενό.

Απόδειξη

(i) $\Longrightarrow$ *(ii)*
Υποθέτουμε οτι Υ είναι μεγιστικός replicated υπόχωρος του X. Τότε, απο το Θεώρημα 3.3.7 , υπάρχει μια γνήσια διαμέριση δ_Y *του* $\{1, ..., n\}$ *έτσι ώστε Υ να είναι ο υποσύνδεσμος του* $\mathbb{R}^m$ *που παράγεται απο τη* δ_Y. *Επίσης η* δ_Y *είναι μεγιστική γιατί αν υποθέσουμε οτι* ϕ *είναι μια γνήσια διαμέριση του* $\{1, ..., n\}$ *αυστηρά λεπτότερη απο τη δ και Z είναι ο υποσύνδεσμος του* $\mathbb{R}^m$ *που παράγεται απο την* ϕ *, τότε απο το Θεώρημα 3.3.6 έχουμε οτι* $Y \subsetneqq Z \subseteq X$. *Αλλά ο Z, ως υπόχωρος που περιέχει το **1** είναι replicated. Αυτό είναι άτοπο, επομένως η* δ_Y *είναι μεγιστική.*
(ii)$\Longrightarrow$ *(i)*
Υποθέτουμε οτι Υ είναι ο υποσύνδεσμος του $\mathbb{R}^m$*, ο οποίος παράγεται απο την μεγιστική γνήσια διαμέριση δ του* $\{1, ..., n\}$ *. Τότε **1** in Υ. Αν υποθέσουμε οτι W είναι replicated υπόχωρος του X, ο οποίος περιέχει τον Υ ως γνήσιο υπόχωρο έχουμε* $Y \subsetneqq W \subseteq F_1(W) \subseteq X$. *Επίσης* $F_1(W)$ *είναι υποσύνδεσμος. Απο το Θεώρημα 3.3.7 η διαμέριση* δ_Z*, η οποία παράγει τον Z, είναι αυστηρά λεπτότερη απο τη δ, το οποίο είναι άτοπο. Άρα ο Υ είναι μεγιστικός replicated υπόχωρος του X.*

Απο την Πρόταση 3.3.5, μια μεγιστική γνήσια διαμέριση δ του $\{1, ..., n\}$ *υπάρχει. Αυτή η διαμέριση παράγει μια μεγιστική replicated υποαγορά.*
*Definition Η ένωση όλων των μεγιστικών replicated υποχώρων της αγοράς είναι ο **replicated kernel της αγοράς**.*

Πρόταση 3.3.9 *Ο replicated kernel της αγοράς είναι το σύνολο όλων των* $x \in X$ *έτσι ώστε κάθε δικαίωμα που εγράφεται στο x να είναι replicated.*

Απόδειξη

Συμβολίζουμε με $\mathcal{R}$ το σύνολο όλων των διανυσμάτων x του X, έτσι ώστε κάθε δικαίωμα που εγγράφεται στο x να είναι replicated και με $\mathcal{F}$, την οικογένεια των μεγιστικών replicated υποαγορών του X. 'Εστω $y \in Y$ και $Y \in F$. Τότε Υ είναι υποσύνδεσμος που περιέχεται στον X με $\mathbf{1} \in Y$ Αν [y] είναι ο υπόχωρος που παράγεται απο το y, τότε η πλήρωση του [y] με δικαιώματα είναι ο υποσύνδεσμος που παράγεται απο το $[y] \cup \mathbf{1}$, επομένως περιέχεται στον Υ και $F_{\mathbf{1}}([y]) \subseteq Y \subseteq X$. Ως εκ τούτου κάθε δικαίωμα που εγγράφεται y στο είναι replicated, άρα $y \in \mathcal{R}$. Οπότε έχουμε οτι $\cup_{Y \in \mathcal{F}} Y \subseteq \mathcal{R}$.

Για το αντίστροφο υποθέτουμε οτι $y \in \mathcal{R}$. Τότε $Y = F_{\mathbf{1}}([y])$ είναι υποσύνδεσμος του $\mathbb{R}^m$, ο οποίος περιέχεται στο X με $\mathbf{1} \in Y$. Απο το Θεώρημα 3.3.7 , ο Υ παράγεται απο μια γνήσια διαμέριση δ_Y του $\{1, ..., n\}$ και απο την Πρόταση 3.3.5 , η δ_Y περιέχεται στη μεγιστική γνήσια διαμέριση δ του $\{1, ..., n\}$. Επομένως ο Υ περιέχεται στη μεγιστική replicated υποαγορά Y_δ του X. Άρα y $\in \cup_{Y \in \mathcal{F}} Y$ και το θεώρημα είναι αληθές.

*Είναι φανερό οτι ο μονοδιάστατος υπόχωρος [**1**] είναι replicated υποσύνδεσμος, ο οποίος περιέχεται σε κάθε replicated υποαγορά Υ του X. Επίσης τα δικαιώματα που εγγράφονται σε στοιχεία του [**1**] είναι τετριμμένα. Έτσι θα αναφερόμαστε στο [**1**] ως την **τετριμμένη replicated υποαγορά** (υπόχωρο) του X. Κάθε replicated υπόχωρος $Y \neq [\mathbf{1}]$ του X είναι **μη τετριμμένος** replicated submarket. Δίνουμε τώρα έναν χαρακτηρισμό των αγορών χωρίς δυαδικά διανύσματα όσον αφορά replicated υποχώρους.*

Θεώρημα 3.3.10 *Η αγορά X δεν περιέχει δυαδικά διανύσματα αν και μόνο αν ο X δεν έχει μη-τετριμμένες μεγιστικές replicated υποαγορές.*

Απόδειξη

*Υποθέτουμε οτι ο X δεν περιέχει δυαδικά διανύσματα. Αν Υ είναι μια μη-τετριμμένη μεγιστική replicated υποαγορά του X, τότε Υ είναι υποσύνδεσμος του $\mathbb{R}^m$ που περιέχει τον [**1**] ως γνήσιο υπόχωρο. Αν $\{z_1, z_2, ..., z_r\}$ είναι η θετική βάση του Υ, η οποία είναι διαμέριση της μονάδας, τότε $r \geq 2$, επομένως κάθε z_i είναι δυαδικό διάνυσμα. Άτοπο, αφου ο X δεν περιέχει μη-τετριμμένες μεγιστικές replicated υποαγορές.*

Για το αντίστροφο υποθέτουμε οτι ο X δεν έχει μη-τετριμμένές maximal replicated υποαγορές. Αν υποθέσουμε οτι y είναι δυαδικό διάνυσμα του X, τότε $z = \mathbf{1} - y$ είναι επίσης δυαδικό διάνυσμα και y , z έχουν ξένους φορείς. Έυκολα μπορούμε να δείξουμε οτι $\{y, z\}$ είναι μια θετική βάση του υποχώρου Υ του X , ο οποίος παράγεται απο τα διανύσματα y , z. Απο την Πρόταση 2.1.1, ο Υ είναι υποσύνδεσμος του $\mathbb{R}^m$. Απο το Θεώρημα 3.3.7 ο Υ παράγεται απο απο μια γνήσια διαμέριση δ_Y $\{1, 2, ..., n\}$. Απο την Πρόταση 3.3.5 υπάρχει μια γνησια διαμέριση δ λεπτότερη απο τη δ_Y. Απο το Θεώρημα 3.3.8 μια μεγιστική replicated υποαγορά Z του X, η οποία περιέχει τον Υ, υπάρχει.

Κεφάλαιο 4

Παραδείγματα προσδιορισμού των μεγιστικών replicated υποχώρων και του replicated kernel της αγοράς

Στα παρακάτω παραδείγματα προσδιορίζουμε τους μεγιστικούς replicated υποχώρους και τον replicated kernel της αγοράς . Γι'αυτό ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα :

(1) Προσδιορίζουμε ένα basic set $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ of marketed securities. Προσδιορίζουμε τη βασική συνάρτηση β των διανυσμάτων y_i και το σύνολο τιμών R(β) της β. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.4 προσδιορίζουμε μια θετική βάση $\{d_1, ..., d_\mu\}$ του $F_{\mathbf{1}}$(X).

(2) Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.1 , προσδιορίζουμε τη βάση προβολής $\{\tilde{d_1}, ..., \tilde{d_\mu}\}$ του X.

(3) Προσδιορίζουμε τη βάση $\{b_1, ..., b_\mu\}$ του $F_{\mathbf{1}}$(X), η οποία είναι διαμέριση της μονάδας και την αντίστοιχη βάση προβολής $\{\tilde{b_1}, ..., \tilde{b_\mu}\}$ του X. Τα στοιχεία αυτών των βάσεων δίνονται απο τους τύπους $b_i = \frac{d_i}{\|d_i\|_\infty}$, i = 1,2, ..., μ και $\tilde{b_i} = \frac{\tilde{d_i}}{\|d_i\|_\infty}$, i = 1,2, ..., n .

(4) Προσδιορίζουμε τις μεγιστικές γνήσιες διαμερίσεις του $\{1, ..., n\}$. Για κάθε μεγιστική γνήσια διαμέριση δ προσδιορίζουμε τη μεγιστική replicated υποαγορά που παράγεται απο τη δ. Η ένωση όλων των maximal replicated υποαγορών είναι ο replicated kernel της αγοράς.

Παράδειγμα 1

Έστω οτι :
$x_1 = (1, 0, -1, 0, 0)$, $x_2 = (1, -1, 0, 2, 2)$, $x_3 = (0, -1, -2, -1, -1)$,

είναι τα πρωταρχικά συμβόλαια και X = $[x_1, x_2, x_3]$ ο marketed space. Παρατηρούμε οτι το $\mathbf{1} = x_1 - x_3 \in X$*, δηλαδή το riskless bond* $\mathbf{1}$ *ανήκει στο X. Επειδή* $max\{\| x_i \|_\infty | \ i = 1, 2, 3\} = 2$*, κάνοντας χρήση του λήμματος βρίσκουμε οτι τα διανύσματα :*

$$y_1 = 2\mathbf{1} - x_1 = (1, 2, 3, 2, 2),$$
$$y_2 = 2\mathbf{1} - x_2 = (1, 3, 2, 0, 0),$$
$$y_3 = 2\mathbf{1} - x_3 = (2, 3, 4, 3, 3)$$

αποτελούν ένα basic set of marketed securities.

Η βασική συνάρτηση των διανυσμάτων είναι :

$$\beta(i) = \frac{1}{y_i} \left(y_1(i), y_2(i), y_3(i)\right), \text{ για } i = 1, ..., 5 ,$$

όπου $y = \sum_{i=1}^{3} y_i$.

Βρίσκουμε οτι :

$$\beta(1) = \frac{1}{4} (1, 1, 2) = P_1 , \beta(2) = \frac{1}{8} (2, 3, 3) = P_2 , \beta(3) = \frac{1}{9} (3, 2, 4) = P_3 ,$$
$$\beta(4) = \beta(5) = \frac{1}{5} (2, 0, 3) = P_4 .$$

Επομένως card (R(β)) = 4, άρα $F_{\mathbf{1}}(X)$ *είναι τετραδιάστατος υπόχωρος του* $\mathbb{R}^5$ *. Τα τρία πρώτα διανύσματα* P_1, P_2, P_3 *του R(β) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα οπότε διατηρούμε την αρίθμηση του R(β). Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.4 ,* $I_4 = \beta^-1\left(P_4\right) = \{4, 5\}$ *και ορίζουμε το νέο διανύσμα* $y_4 = (0, 0, 0, 5, 5)$*. Η βασική συνάρτηση των διανυσμάτων* y_1, y_2, y_3, y_4 *είναι :*

$$\gamma(i) = \frac{1}{y'(i)} \left(y_1(i), y_2(i), y_3(i), y_4(i)\right), \text{ για } i = 1, ..., 5 ,$$

όπου $y' = \sum_{i=1}^{4} y_i$.

Βρίσκουμε οτι :

$$\gamma(1) = \frac{1}{4} (1, 1, 2, 0) = P_1' , \gamma(2) = \frac{1}{8} (2, 3, 3, 0) = P_2' , \gamma(3) = \frac{1}{9} (3, 2, 4, 0) = P_3' ,$$
$$\gamma(4) = \gamma(5) = \frac{1}{5} (2, 0, 3, 5) = P_4' .$$

Μια θετική βάση του $F_{\mathbf{1}}(X)$ *δίνεται απο τον τύπο* $\left(d_1, d_2, d_3, d_4\right)^T = D^{-1}\left(y_1, y_2, y_3, y_4\right)^T$*, όπου D είναι ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα* P_i'*, i = 1, ..., 4 και έχουμε οτι:*

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 2/8 & 3/9 & 2/10 \\ 1/4 & 3/8 & 2/9 & 0 \\ 2/4 & 3/8 & 4/9 & 3/10 \\ 0 & 0 & 0 & 5/10 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -8 & -4/3 & 20/3 & -4/5 \\ 0 & 16/3 & -8/3 & 8/5 \\ 9 & -3 & -3 & -9/5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

Άρα $\{d_1 = (4,0,0,0,0), d_2 = (0,8,0,0,0), d_3 = (0,0,9,0,0), d_4 = (0,0,0,10,10)\}$ *είναι μια θετική βάση του* $F_1(X)$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.1, η βάση προβολής του X δίνεται απο τον τύπο $\left(\tilde{d_1}, \tilde{d_2}, \tilde{d_3}\right) = A^{-1}\ (y_1, y_2, y_3)^T$ *, όπου A ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα* $P_i, i = 1, 2, 3$. *Έτσι έχουμε οτι :*

$$\begin{pmatrix} \tilde{d_1} \\ \tilde{d_2} \\ \tilde{d_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 2/8 & 3/9 \\ 1/4 & 3/8 & 2/9 \\ 2/4 & 3/8 & 4/9 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -8 & -4/3 & 20/3 \\ 0 & 16/3 & -8/3 \\ 9 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 8 & 0 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

Άρα $\{\tilde{d_1} = (4,0,0,-4,-4),\ \tilde{d_2} = (0,8,0,-8,-8),\ \tilde{d_3} = (0,0,9,9,9)\}$ *είναι η βάση προβολής του X .*

Βρίσκουμε επίσης οτι :

$$\left\{ b_1 = \frac{1}{4}d_1 = (1, 0, 0, 0, 0)\ , b_2 = \frac{1}{8}d_2 = (0, 1, 0, 0, 0)\ , b_23 = \frac{1}{9}d_3 = (0, 0, 1, 0, 0)\ , \right.$$
$$\left. b_4 = \frac{1}{10}d_4 = (0, 0, 0, 1, 1\ ) \right\},$$

είναι η θετική βάση του $F_1(X)$*, η οποία είναι διαμέριση της μονάδας και οτι :*

$$\left\{ \tilde{b_1} = \frac{1}{4}\tilde{d_1} = (1, 0, 0, 1, 1)\ , \tilde{b_2} = \frac{1}{8}\tilde{d_2} = (0, 1, 0, \text{-}1, \text{-}1)\ , \tilde{b_3} = \frac{1}{9}\tilde{d_3} = (0, 0, 1, 1, 1) \right\}$$
$$,$$

είναι η αντίστοιχη βάση προβολής του X. Αναζητούμε τώρα τις μεγιστικές γνήσιες διαμερίσεις του $\{1, 2, 3\}$. *Παρατηρούμε οτι :*

$$q_1 = \tilde{b_1} = (1, 0, 0, 1, 1) \quad και \quad q_2 = \tilde{b_2} + \tilde{b_3} = (0, 1, 1, 0, 0)$$

είναι δυαδικά διανύσματα, επομένως $\{\{1\},\{2,3\}\}$ *είναι μια μεγιστική γνήσια διαμέριση του* $\{1,2,3\}$.

Επίσης :

$$r_1 = \tilde{b_1} + \tilde{b_2} = (1, 1, 0, 0, 0) \quad και \quad r_2 = \tilde{b_3} = (0, 0, 1, 1, 1)$$

είναι δυαδικά διανύσματα, επομένως $\{\{1,2\},\{3\}\}$ *είναι και αυτή μια μεγιστική γνήσια διαμέριση του* $\{1,2,3\}$.

Έτσι οι υπόχωροι Y_1 *= [(1, 0, 0, 1, 1) , (0, 1, 1, 0, 0)] και* Y_2 *= [(1, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1, 1)] είναι οι maximal replicated υπόχωροι. Το σύνολο* $Y_1 \cup Y_2$ *είναι ο replicated kernel της αγοράς.*

Παράδειγμα 2

Έστω οτι :

$$x_1 = (1, 1, 1, 1, 2, 1)\,,\ x_2 = (2, 3, 1, 1, 1, 1)\,,\ x_3 = (2, 2, 2, 1, 3, 1)\,,$$

$$x_4 = (1, 1, 1, 2, 0, 2)$$

είναι τα πρωταρχικά συμβόλαια και X = $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ *ο marketed space. Παρατηρούμε οτι :*

$$\mathbf{1} = \frac{x_3 + x_4}{3} \in X,$$

Επειδή τα διανύσματα x_i *είναι θετικά, το* $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ *είναι ένα basic set of marketed securities.*

Η βασική συνάρτηση των διανυσμάτων x_1, x_2, x_3, x_4 *είναι*

$$\beta\,(i) = \frac{1}{x\,(i)}\,(x_1(i), x_2(i), x_3(i), x_4(i)) \text{ για } i = 1, \ldots, 6\,,$$

όπου $x = \sum_{i=1}^{4} x_i$.

Βρίσκουμε οτι :

$$\beta(1) = \frac{1}{6}\,(1, 2, 2, 1) = P_1\,,\ \beta(2) = \frac{1}{7}\,(1, 3, 2, 1) = P_2\,,\ \beta(3) = \frac{1}{5}\,(1, 1, 2, 1) = P_3\,,$$

$$\beta(4) = \beta(6) = \frac{1}{5}\,(1, 1, 1, 2) = P_4\,,\ \beta(5) = \frac{1}{6}\,(2, 1, 3, 0) = P_5\,.$$

Παρατηρούμε οτι card (R(β)) = 5, άρα $F_{\mathbf{1}}(X)$ *είναι πενταδιάστατος υπόχωρος του* $\mathbb{R}^6$ *. Τα τέσσερα πρώτα διανύσματα* P_1, P_2, P_3, P_4 *του R(β) είναι γραμμικώς εξαρτημένα οπότε θεωρούμε τη νέα αρίθμηση R(β) =* $\{P_5, P_2, P_3, P_4, P_1\}$. *Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.4 ,* $I_5 = \beta^{-1}(P_1) = \{1\}$ *και ορίζουμε το νέο διάνυσμα* x_5 *= (6, 0, 0, 0, 0, 0). Η βασική συνάρτηση των διανυσμάτων* x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 *είναι :*

$$\gamma(i) = \frac{1}{x'(i)}\,(x_1(i), x_2(i), x_3(i), x_4(i), x_5(i)), \text{ για } i = 1, \ldots, 6\,,$$

όπου $x' = \sum_{i=1}^{5} x_i$.

Βρίσκουμε οτι :

$$\gamma(1) = \frac{1}{12}\,(1, 2, 2, 1, 6) = P_1'\,, \quad \gamma(2) = \frac{1}{7}\,(1, 3, 2, 1, 0) = P_2'\,,$$
$$\gamma(3) = \frac{1}{5}\,(1, 1, 2, 1, 0) = P_3'\,, \quad \gamma(4) = \gamma(6) = \frac{1}{5}\,(1, 1, 1, 2, 0) = P_4'\,,$$
$$\gamma(5) = \frac{1}{6}\,(2, 1, 3, 0, 0) = P_5'\,.$$

Μια θετική βάση του $F_1(X)$ *δίνεται απο τον τύπο* $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5)^T = D^{-1}\,(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$, *όπου* D *είναι ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα* P_5', P_2', P_3', P_4', P_1' *και έχουμε οτι:*

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/6 & 1/7 & 1/5 & 1/5 & 1/12 \\ 1/6 & 3/7 & 1/5 & 1/5 & 2/12 \\ 3/6 & 2/7 & 2/5 & 1/5 & 2/12 \\ 0 & 1/7 & 1/5 & 2/5 & 1/12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6/12 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 7/2 & -7/6 & -7/6 & -7/12 \\ -10 & -5/2 & 15/2 & 5/2 & -5/12 \\ 5 & 0 & -10/3 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα $\{d_1 = (0,0,0,0,6,0)$, $d_2 = (0,7,0,0,0,0)$, $d_3 = (0,0,5,0,0,0)$, $d_4 = (0,0,0,5,0,5)$, $d_5 = (12,0,0,0,0,0)\}$ *είναι μια θετική βάση του* $F_1(X)$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.1, η βάση προβολής του X *δίνεται απο τον τύπο* $\left(\tilde{d_1}, \tilde{d_2}, \tilde{d_3}, \tilde{d_4}\right) = A^{-1}\,(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ *, όπου* A *ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα* P_5, P_2, P_3, P_4. *Έτσι έχουμε οτι :*

$$\begin{pmatrix} \tilde{d_1} \\ \tilde{d_2} \\ \tilde{d_3} \\ \tilde{d_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/6 & 1/7 & 1/5 & 1/5 \\ 1/6 & 3/7 & 1/5 & 1/5 \\ 3/6 & 2/7 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 1/7 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 7/2 & -7/6 & -7/6 \\ -10 & -5/2 & 15/2 & 5/2 \\ 5 & 0 & -10/3 & 5/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 7/2 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5/2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Άρα $\{\tilde{d_1} = (0,0,0,0,6,0)$, $\tilde{d_2} = (3.5,7,0,0,0,0)$, $\tilde{d_3} = (2.5,0.5,0,0,0)$, $\tilde{d_4} = (0,0,0,5,0,5)\}$ *είναι η βάση προβολής του X .*

Βρίσκουμε επίσης οτι :

$$\Big\{ b_1 = \frac{1}{6}d_1 = \text{(0, 0, 0, 0, 1, 0)} \text{ , } b_2 = \frac{1}{7}d_2 = \text{(0, 1, 0, 0, 0, 0)} \text{ , } b_3 = \frac{1}{5}d_3 = \text{(0, 0, 1, 0, 0, 0)} \text{ , } b_4 = \frac{1}{5}d_4 = \text{(0, 0, 0, 1, 0, 1)} \text{ , } b_5 = \frac{1}{12}d_5 = (1,0,0,0,0,0) \Big\} \text{ ,}$$

είναι η θετική βάση του $F_1(X)$, *η οποία είναι διαμέριση της μονάδας*

και οτι :

$$\Big\{ \tilde{b_1} = \frac{1}{6}\tilde{d_1} = \text{(0, 0, 0, 0, 1, 0)} \text{ , } \tilde{b_2} = \frac{1}{7}\tilde{d_2} = \text{(0.5 , 1, 0, 0, 0, 0)} \text{ ,}$$
$$\tilde{b_3} = \frac{1}{5}\tilde{d_3} = \text{(0.5 , 0, 1, 0, 0 ,0)} \text{ , } \tilde{b_4} = \frac{1}{5}\tilde{d_4} = \text{(0, 0, 0, 1, 0, 1)} \Big\} \text{ ,}$$

είναι η αντίστοιχη βάση προβολής του X. Αναζητούμε τώρα τις μεγιστικές γνήσιες διαμερίσεις του $\{1,2,3,4\}$. *Παρατηρούμε οτι :*

$$r_1 = \tilde{b_1} = \text{(0, 0, 0, 0, 1, 0)}, \quad r_2 = \tilde{b_2} + \tilde{b_3} = \text{(1, 1, 1, 0, 0, 0) και}$$
$$r_3 = \tilde{b_4} = \text{(0, 0, 0, 1, 0, 1)}$$

είναι δυαδικά διανύσματα, επομένως $\big\{\{1\},\{2,3\},\{4\}\big\}$ *είναι μια μεγιστική γνήσια διαμέριση του* $\{1,2,3,4\}$ *και βλέπουμε οτι αυτή η διαμέριση είναι μοναδική. Άρα η αγορά έχει μόνο μια μεγιστική replicated υποαγορά, η οποία είναι ο υπόχωρος* $\Upsilon = [(0,0,0,0,1,0),(1,1,1,0,0,0),(0,0,0,1,0,1)]$ *του X .*

Ο Υ είναι και ο replicated kernel της αγοράς.

Παράδειγμα 3

Έστω οτι :

$$x_1 = \text{(4, 2, 0, 1, 1, 0)} \text{ , } x_2 = \text{(2, 1, 1, 0, 0, 0)} \text{ , } x_3 = \text{(1, 0, 0, -1, -1, -1)} \text{ ,}$$

είναι τα πρωταρχικά συμβόλαια και X = [x_1, x_2, x_3] ο marketed space. Παρατηρούμε οτι το $\mathbf{1} = x_2 - x_3 \in X$.

Έχουμε οτι max $\{\| \ x_i \ \|_\infty : \ i = 1,2,3\}$ *= 4 , οπότε απο λήμμα 1 βρίσκουμε οτι :*

$$y_1 = 4\mathbf{1} - x_1 = (\ 0,\ 2,\ 4,\ 3,\ 3,\ 4\ )$$
$$y_2 = 4\mathbf{1} - x_2 = (\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4\ )$$
$$y_3 = 4\mathbf{1} - x_3 = (\ 1,\ 0,\ 0,\ -1,\ -1,\ -1)$$

αποτελούν ενα basic set of marketed securities.
Η βασική συνάρτηση των διανυσμάτων y_1, y_2, y_3 *είναι :*

$$\beta(i) = \frac{1}{y(i)}(y_1(i), y_2(i), y_3(i)) \text{ για } i = 1,2,3,4,5\ ,$$

όπου όπου $y = \sum_{i=1}^{3} y_i$ *= (5, 9, 11, 12, 12, 13).*

Βρίσκουμε οτι :

$$\beta(1) = \frac{1}{5}\ (0,\ 2,\ 3) = P_1\ ,\ \beta(2) = \frac{1}{9}\ (2,\ 3,\ 4) = P_2\ ,\ \beta(3) = \frac{1}{11}\ (4,\ 3,\ 4) = P_3\ ,$$
$$\beta(4) = \beta(5) = \frac{1}{12}\ (3,\ 4,\ 5) = P_4\ ,\ \beta(6) = \frac{1}{13}\ (4,\ 4,\ 5) = P_5\ .$$

Παρατηρούμε οτι card (R(β)) = 5, άρα $F_{\mathbf{1}}$(X) είναι πενταδιάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^6$ *. Τα πρώτα διανύσματα P_1, P_2, P_3 του R(β) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα οπότε διατηρούμε την αρίθμηση του R(β). Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.4* $I_4 = \beta^{-1}(P_4) = \{4,5\}$ $I_5 = \beta^{-1}(P_5) = \{6\}$ *και ορίζουμε τα νέα διανύσματα* y_4 *= (0, 0, 0, 12, 12, 0) και* y_5 *= (0, 0, 0, 0, 0, 13). Η βασική συνάρτηση των διανυσμάτων y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 είναι*

$$\gamma(i) = \frac{1}{y'(i)}\ (y_1(i), y_2(i), y_3(i), y_4(i)), \text{ για } i = 1,\ \ldots,\ 5\ ,$$

όπου $y' = \sum_{i=1}^{5} y_i$.

Βρίσκουμε οτι :

$$\gamma(1) = \frac{1}{5}\ (0,\ 2,\ 3,\ 0,\ 0) = P_1'\ ,\ \gamma(2) = \frac{1}{9}\ (2,\ 3,\ 4,\ 0,\ 0) = P_2'\ ,\ \gamma(3) = \frac{1}{11}\ (4,\ 3,\ 4,\ 0,\ 0) = P_3'\ ,$$
$$\gamma(4) = \gamma(5) = \frac{1}{24}\ (3,\ 4,\ 5,\ 12,\ 0) = P_4',\ \gamma(5) = \frac{1}{26}\ (4,\ 4,\ 5,\ 0,\ 13) = P_5'\ .$$

Μια θετική βάση του $F_{\mathbf{1}}$(X) δίνεται απο τον τύπο $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5)^T = D^{-1}\ (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)^T$, *όπου D είναι ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα* P_i'*, i = 1, ..., 5 και έχουμε οτι:*

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2/9 & 4/11 & 3/24 & 4/26 \\ 2/5 & 3/9 & 3/11 & 4/24 & 4/26 \\ 3/5 & 4/9 & 4/11 & 5/24 & 5/26 \\ 0 & 0 & 0 & 12/24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13/26 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -20 & 15 & 15/12 & 5/13 \\ -9/2 & 54 & -36 & -15/8 & -18/13 \\ 11/2 & -33 & 22 & 11/24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26 \end{pmatrix}$$

Άρα $\{d_1 = (5,0,0,0,0,0)$, $d_2 = (0,9,0,0,0,0)$, $d_3 = (0,0,11,0,0,0)$, $d_4 = (0,0,0,24,24,0)$, $d_5 = (0,0,0,0,0,26)\}$ *είναι μια θετική βάση του* $F_{\mathbf{1}}(X)$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.1, η βάση προβολής του X δίνεται απο τον τύπο $\left(\tilde{d_1}, \tilde{d_2}, \tilde{d_3}\right) = A^{-1}\ (y_1, y_2, y_3)^T$ *, όπου A ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα* P_5, P_2, P_3. *Έτσι έχουμε οτι :*

$$\begin{pmatrix} \tilde{d_1} \\ \tilde{d_2} \\ \tilde{d_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2/9 & 4/11 \\ 2/5 & 3/9 & 3/11 \\ 3/5 & 4/9 & 4/11 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -20 & 15 \\ -9/2 & 54 & 36 \\ 11/2 & -33 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 9 & 0 & 45/2 & 45/2 & 18 \\ 0 & 0 & 11 & -11/2 & -11/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα $\{\tilde{d_1} = (5,0,0,-5,-5,-5), \tilde{d_2} = (0,9,0,45/2,45/2,18), \tilde{d_3} = (0,0,11,-11/2,-11/2,0)\}$ *είναι η βάση προβολής του X .*

Βρίσκουμε επίσης οτι :

$$\Big\{ b_1 = \frac{1}{5}d_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)\,,\ b_2 = \frac{1}{9}d_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)\,,\ b_3 = \frac{1}{11}d_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)\,,\ b_4 = \frac{1}{24}d_4 = (0, 0, 0, 1, 1, 0)\,,\ b_5 = \frac{1}{26}d_5 = (0,0,0,0,0,1) \Big\},$$

είναι η θετική βάση του $F_{\mathbf{1}}(X)$*, η οποία είναι διαμέριση της μονάδας.*

και οτι :

$$\Big\{ \tilde{b_1} = \frac{1}{5}\tilde{d_1} = (1, 0, 0, -1, -1, -1)\,,\ \tilde{b_2} = \frac{1}{9}\tilde{d_2} = (0, 1, 0, 45/18, 45/18, 2)\,,\ \tilde{b_3} = \frac{1}{11}\tilde{d_3} = (0, 0, 1, -1/2, -1/2, 0) \Big\},$$

είναι η αντίστοιχη βάση προβολής του Χ. Αναζητούμε τώρα τις μεγιστικές γνήσιες διαμερίσεις του $\{1, 2, 3\}$. Παρατηρούμε οτι :

$$\tilde{b_1} + \tilde{b_2} + \tilde{b_3} = (\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1\ )$$

και οτι η μεγιστική γνήσια διαμέριση είναι $\delta = \Big\{\{1, 2, 3\}\Big\}$. Άρα δεν υπάρχουν μη-τετριμμένοι μεγιστικοί replicated υπόχωροι.

Παρατήρηση : Στο παραπάνω παράδειγμα η μη ύπαρξη μη-τετριμμένων μεγιστικών replicated υποχώρων οφείλεται, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3.10, στο οτι η αγορά δεν περιέχει δυαδικά διανύσματα.

Παράδειγμα 4

Έστω οτι :

$$x_1 = (\ 3,\ 0,\ -1,\ 2)\ ,\ x_2 = (\ 2,\ -1,\ -2,\ 1\ )\ ,\ x_3 = (\ 0,\ 2,\ 1,\ 1\ )\ ,$$

είναι τα πρωταρχικά συμβόλαια και X = [x_1, x_2, x_3] ο marketed space. Παρατηρούμε οτι το $\mathbf{1} = x_1 - x_2 \in X$.

Έχουμε οτι max $\{\| \ x_i \ \|_\infty \colon \ i = 1, 2, 3\}$ = 3 , οπότε απο λήμμα 1 βρίσκουμε οτι :

$$y_1 = 3\mathbf{1} - x_1 = (\ 0,\ 3,\ 4,\ 1\ )$$
$$y_2 = 3\mathbf{1} - x_2 = (\ 1,\ 4,\ 5,\ 2\ )$$
$$y_3 = 3\mathbf{1} - x_3 = (\ 3,\ 1,\ 2,\ 2)$$

αποτελούν ενα basic set of marketed securities.
Η βασική συνάρτηση των διαννσμάτων y_1, y_2, y_3 είναι :

$$\beta(i) = \frac{1}{y(i)}(y_1(i), y_2(i), y_3(i)) \text{ για } i = 1,2,3,4\ ,$$

όπου όπου y = $\sum\limits_{i=1}^{3} y_i$ = (4, 8, 11, 5).

Βρίσκουμε οτι :

$$\beta(1) = \frac{1}{4}\ (0,\ 1,\ 3) = P_1\ ,\ \beta(2) = \frac{1}{8}\ (3,\ 4,\ 1) = P_2\ ,\ \beta(3) = \frac{1}{11}\ (4,\ 5,\ 2) = P_3\ ,$$
$$\beta(4) = = \frac{1}{5}\ (1,\ 2,\ 2) = P_4\ .$$

Παρατηρούμε οτι card (R(β)) = 4, άρα $F_{\mathbf{1}}$(X) = $\mathbb{R}^4$. Τα πρώτα διανύσματα P_1, P_2, P_3 του R(β) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα οπότε διατηρούμε την αρίθμηση του R(β). Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.4 $I_4 = \beta^{-1}(P_4) = \{4\}$ και ορίζουμε το νέο διανύσμα y_4 = (0, 0, 0, 5). Η βασική συνάρτηση των διαννσμάτων y_1, y_2, y_3, y_4, είναι

$$\gamma(i) = \frac{1}{y'(i)}\ (y_1(i), y_2(i), y_3(i), y_4(i)),\ \text{για } i = 1,\ \ldots,\ 4\ ,$$

όπου $y' = \sum_{i=1}^{4} y_i$ *= (4, 8, 11, 10).*

Βρίσκουμε οτι :

$$\gamma(1) = \frac{1}{4}\,(0, 1, 3, 0) = P_1',\ \gamma(2) = \frac{1}{8}\,(3, 4, 1, 0) = P_2',\ \gamma(3) = \frac{1}{11}\,(4, 5, 2, 0) = P_3',$$
$$\gamma(4) = \frac{1}{10}\,(1, 2, 2, 5) = P_4'.$$

Μια θετική βάση του $F_{\mathbf{1}}(X)$ *δίνεται απο τον τύπο* $(d_1, d_2, d_3, d_4)^T = D^{-1}\,(y_1, y_2, y_3, y_4)^T$, *όπου* D *είναι ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα* P_i', $i = 1, \dots, 4$ *και έχουμε οτι:*

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3/8 & 4/11 & 1/10 \\ 1/4 & 4/8 & 5/11 & 1/5 \\ 3/4 & 1/8 & 2/11 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -12/5 & 8/5 & 4/5 & -12/25 \\ -104/5 & 96/5 & -32/5 & -24/25 \\ 121/5 & -99/5 & 33/5 & 11/25 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Άρα $\{d_1 = (4, 0, 0, 0),\ d_2 = (0, 8, 0, 0),\ d_3 = (0, 0, 11, 0),\ d_4 = (0, 0, 0, 10)\}$ *είναι μια θετική βάση του* $F_{\mathbf{1}}(X)$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.1, η βάση προβολής του X δίνεται απο τον τύπο $\left(\tilde{d_1}, \tilde{d_2}, \tilde{d_3}\right) = A^{-1}\,(y_1, y_2, y_3)^T$ *, όπου A ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα* P_1, P_2, P_3. *Έτσι έχουμε οτι :*

$$\begin{pmatrix} \tilde{d_1} \\ \tilde{d_2} \\ \tilde{d_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3/8 & 4/11 \\ 1/4 & 4/8 & 5/11 \\ 3/4 & 1/8 & 2/11 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -12/5 & 8/5 & 4/5 \\ -104/5 & 96/5 & -32/5 \\ 121/5 & -99/5 & 33/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 12/5 \\ 0 & 8 & 0 & 24/5 \\ 0 & 0 & 11 & -11/5 \end{pmatrix}$$

Άρα $\{\tilde{d_1} = (4, 0, 0, 12/5),\ \tilde{d_2} = (0, 8, 0, 24/5),\ \tilde{d_3} = (0, 0, 11, -11/5)\}$ *είναι η βάση προβολής του X .*

Βρίσκουμε επίσης οτι :

$$\Big\{ b_1 = \frac{1}{4}d_1 = (1,\ 0,\ 0,\ 0)\ ,\ b_2 = \frac{1}{8}d_2 = (0,\ 1,\ 0,\ 0)\ ,\ b_3 = \frac{1}{11}d_3 = (0,\ 0,\ 1,\ 0)\ ,$$
$$b_4 = \frac{1}{10}d_4 = (0,\ 0,\ 0,\ 1\ ) \Big\}\ ,$$

είναι η θετική βάση του $F_{\mathbf{1}}(X)$ ($\mathbb{R}^{\mathbf{4}}$), η οποία είναι διαμέριση της μονάδας.

και οτι :

$$\Big\{ \tilde{b_1} = \frac{1}{4}\tilde{d_1} = (\ 1,\ 0,\ 0,\ 12/20\ )\ ,\ \tilde{b_2} = \frac{1}{8}\tilde{d_2} = (\ 0\ ,\ 1,\ 0,\ 12/20\ )\ ,$$
$$\tilde{b_3} = \frac{1}{11}\tilde{d_3} = (\ 0\ ,\ 0,\ 1,\ -1/5) \Big\}\ ,$$

είναι η αντίστοιχη βάση προβολής του X. Αναζητούμε τώρα τις μεγιστικές γνήσιες διαμερίσεις του $\{1, 2, 3\}$. Παρατηρούμε οτι :

$$\tilde{b_1} + \tilde{b_2} + \tilde{b_3} = (\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1\ )$$

και οτι η μεγιστικη γνήσια διαμέριση είναι $\delta = \Big\{ \{1, 2, 3\} \Big\}$. Άρα δεν υπάρχουν μη-τετριμμένοι maximal replicated υπόχωροι.

Παρατήρηση : Όπως και στο Παράδειγμα 3, έτσι και στο παραπάνω παράδειγμα, η μη ύπαρξη μη-τετριμμένων μεγιστικών replicated υποχώρων οφείλεται, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3.10, στο οτι η αγορά δεν περιέχει δυαδικά διανύσματα.

Κεφάλαιο 5

Υπολογιστική μέθοδος για τον προσδιορισμό των μεγιστικών replicated υποαγορών

5.1 Η υπολογιστική προσέγγιση

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε την υλοποίηση του αλγορίθμου, τα βήματα του οποίου παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Μέχρι τώρα έχουμε διεξάγει δια χειρός επίλυση για τον προσδιόρισμο των μεγιστικών replicated υποαγορών και είναι προφανές οτι ο απαιτούμενος αριθμός των ελέγχων αυτής της διαδικασίας μπορεί να είναι σημαντικού μεγέθους. Έτσι, ακόμα και για χώρους μικρής διάστασης το πρόβλημα καθίσταται πολύ δύσκολο να λυθεί.

Η αριθμητική μέθοδος που θα παρουσιάσουμε βασίζεται στην εισαγωγή μιας συνάρτησης του Matlab που ονομάζεται `mrsubspace` *και η οποία μπορεί να εκτελεί γρήγορα δοκιμές για πλήθος διαστάσεων και υποχώρων.*

5.2 Κώδικας στο Matlab

```
function[Npb, Cprb] = mrsubspace(X)

% Προσδιορισμός ενός basic set of marketed securities.
% Επίσης είναι δυνατόν να προσδιοριστεί η κανονικοποιημένη θετική βάση
% (Npb) καθώς και η αντίστοιχη βάση προβολής (Cprb).

if any(any(X < 0)) ~= 0
a = max(max(abs(x)));
B = a * ones(size(X) - X);
end
else
```

```
B = X;
end
Matrix = zeros(size(B));
```

% *Προσδιορισμός της βασικής συνάρτησης.*

```
N = length(B(:,1));
for i = 1 : N,
if norm(B(i,:),1) ~= 0
Matrix(i,:) = 1/norm(B(i,:),1) * B(i,:);
end
end
```

% *Εύρεση των μοναδικών στοιχείων του συνόλου τιμών της βασικής συνάρτησης.*

```
[Unique,m] = unique(Matrix,'rows','first');
Sort_m = sort(m);
Matrixnew = Matrix(Sort_m,:);
r = length(m);
```

% *Επιλογή των γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων.*

```
S = rref(Matrixnew');
[I,J] = find(S);
Linearindep = accumarray(I,J,[rank(Matrixnew,1)],@min)';
M = length(B(1,:));
```

% *Υπολογισμός του υποσυνδέσμου* $F_1(X)$.

% *A) Αν* $X = F_1(X)$.

```
if r == M
disp('X is a vector sublattice hence any option is replicated')
return
end
```

% *B) Αν* $X \sim= F_1(X)$

```
Index1 = 1 : r;
Index2 = setdiff(Index1,Linearindep);
Index = 1 : N;
YY = sum(B,2)';
TTT = setdiff(Index,Linearindep);
Id = eye(N);
KK = Id(TTT,:);
TT = YY(1,TTT)';
T = diag(TT) * KK;
K = zeros(N);
K(TTT,:) = T;
Vec = zeros(r - M,N);
DDD = cell(r - M,1);
```

```
for i = 1 : length(Index2)
DD = strmatch(Matrixnew(Index2(i), :), Matrix,' exact');
R = length(DD);
if R >= 2,
Vector = sum(K(DD, :));
else
Vector = K(DD, :);
end
DDD{i, :} = DD;
Vec(i, :) = Vector;
end
Sublattice = [B Vec'];
```

% Προσδιορισμός μιας θετικής βάσης (Pb) του . Πρώτα υπολογίζουμε
% τη νέα βασική συνάρτηση για τον F_1(X).

```
Matrixnew2 = zeros(size(Sublattice));
for i = 1 : N,
if norm(Sublattice(i, :), 1) ~= 0,
Matrixnew2(i, :) = 1/norm(Sublattice(i, :), 1) * Sublattice(i, :);
end
end
u = [Matrixnew2([Sort_m(Linearindep)' cell2mat(DDD)], :);
Test_Pb = u' \ Sublattice';
[f, ff] = find(Test_Pb);
Pb = Test_Pb(unique(f), :);
```

% Κανονικοποίηση της θετικής βάσης (Npb).

```
Npb = diag(1./max(Pb, [ ], 2)) * Pb;
```

% Υπολογισμός της βάσης προβολής (Prb).

```
Prb = Matrixnew(Linearindep, :) ' \ B';
Cprb = diag(1./max(Pb(1 : size(Prb, 1), :), [ ], 2)) * Prb
```

% Μεγιστικές γνήσιες διαμερίσεις - Maximal replicated υπόχωροι.

% A) Έλεγχος της τετριμμένης διαμέρισης (δηλ. $\{1\}, \{2\}, ..., \{n\}$).

```
[N, M] = size(Cprb);
if ~ any(any(Cprb ~= 1 & Cprb ~= 0)) && abs(sum(Cprb) - ones(1, M)) < 10 * eps,
MaximalReplicatedSubspace = Cprb
return
end
```

% B) Αν η τετριμμένη διαμέριση δεν δίνει maximal replicated υπόχωρο
% τότε έλεγξε όλες τις άλλες διαμερίσεις.
% Η πρώτη ομάδα διαμερίσεων, της ίδιας τάξης, η οποία
% δίνει replicated υπόχωρο (ή υποχώρους) είναι maximal proper διαμερίσεις και

οι replicated υπόχωροι ειναι maximal replicated υπόχωροι.

```
Cprbzeros = [Cprb; zeros(1, M)];
for k = 1 : N − 1
c = SetPartition(N, N − k);
for i = 1 : length(c)
Vector = zeros(N − k, M);
for j = 1 : N − k
Indices = c{i, 1}{1, j};
Vector(j, :) = sum([Cprbzeros(Indices, :); Cprbzeros(N + 1, :)]);
end
Vector(Vector < 10 ∗ eps) = 0;
Vector(Vector < 1 + 10 ∗ eps&Vector > 1 − 10 ∗ eps) = 1;
if ∼ any(any(Vector ∼=1&Vector ∼= 0)) && all(abs(sum(Vector) − ones(1, M)) < 10 ∗ eps)
DispPartObj(c(i, 1))
ReplicatedSubspace = Vector
end
end
end
```

% Τετριμμένος replicated υπόχωρος δηλαδή Υ = [1]

```
ReplicatedSubspace = Vector
```

5.3 Ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του κώδικα

Η δομή του κώδικα διασφαλίζει ευελιξία,που σημαίνει οτι είναι κατάλληλος για εφαρμογές καθώς και για ερευνητικούς σκοπούς. Η δεδομένη αγορά X, η οποία παράγεται απο τα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $x_1, x_2, ..., x_n$ *πρέπει να δίνεται ως πίνακας με στήλες τα διανύσματα* $x_1, x_2, ..., x_n$. *Η συνάρτηση* `mrsubspace` *πρέπει να αποθηκεύεται σε ένα Matlab-προσβάσιμο directory και τότε τα δεδομένα που εισάγονται, π.χ ο πίνακας X, μπορούν να πληκτρολογούνται απευθείας στο περιβάλλον του Matlab.Υπο την ακόλουθη εντολή :*

```
mrsubspace(X);
```

το πρόγραμμα επιλύει το πρόβλημα και μας δίνει τις μεγιστικές γνήσιες διαμερίσεις καθώς και τους αντίστοιχους maximal replicated υποχώρους. Αν ο X είναι υποσύνδεσμος, τότε X = $F_{\mathbf{1}}$ *(X) και κάθε δικαίωμα είναι replicated. Στην περίπτωση που ο αρχικός χώρος X δεν είναι υποσύνδεσμος, μπορούμε να παράγουμε την κανονικοποιημένη θετική βάση και την αντίστοιχη βάση προβολής με τον παρακάτω κώδικα :*

```
[Npb, Cprb] = mrsubspace(X)
```

Η σωστή εκτέλεση της `mrsubspace` *απαιτεί τη χρήση ενός πακέτου set partition που δημιουργήθηκε απο τον Bruno Luong. Συγκεκριμένα απο το πακέτο, χρη-*

σιμοποιήσαμε τη συνάρτηση `setpartition` *, η οποία απαριθμεί όλες τις διαμερίσεις ενός πεπερασμένου συνόλου και τη συνάρτηση* `DispPartObj,` *, η οποία εμφανίζει τη λίστα των διαμερίσεων. Ένας χρήστης που γνωρίζει καλά το Matlab μπορεί εύκολα να χρησιμοποιήσει τον κώδικα και να τον τροποποιήσει αν χρειάζεται.*

Αριθμητικό παράδειγμα

Θεωρούμε τα ακόλουθα τρία διανύσματα x_1, x_2, x_3 *του* $\mathbb{R}^5$ *,*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

και $X = [x_1, x_2, x_3]$ *είναι ο marketed space .*
Παρατηρούμε οτι το $\mathbf{1} = x_2 - x_3$. *Προκειμένου να προσδιορίσουμε τους maximal replicated υποχώρους χρησιμοποιούμε τον εξής απλό κώδικα :*

```
>> X = [1,1,0 ; 0,-1,-1 ; -1,0,-2 ; 0,2,-1 ; 0,2,-1];
>> [Npb,Cprb] = mrsubspace(X)
```

και ως αποτέλεσμα παίρνουμε :

```
The 1 partition(s) are :
{12} {3}

ReplicatedSubspace =

     1  1  0  0  0
     0  0  1  1  1

The 1 partition(s) are :
{1} {23}

ReplicatedSubspace =

     1  0  0  1  1
     0  1  1  0  0

  Npb =

     1  0  0  1  1
     0  1  1  0  0
     0  0  1  0  0
     0  0  0  1  1

Cprb =

     1  0  0   1   1
     0  1  0  -1  -1
     0  0  1   1   1
```

Συνεπώς για το δεδομένο σύνολο $\{x_1, x_2, x_3\}$ *πρωταρχικών συμβολαίων , συμπεραίνουμε οτι ο marketed space X έχει δύο maximal replicated υποχώρους . Συγκεκριμένα έχουμε οτι* $\{1\ 2\}$ $\{3\}$ *είναι maximal γνήσια διαμέριση με αντίστοιχο maximal replicated υπόχωρο* $Y_1 =$ *[(1, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1, 1)] και* $\{1\}$ $\{2\ 3\}$ *είναι maximal γνήσια διαμέριση με αντίστοιχο maximal replicated υπόχωρο* Y_2 *= [(1, 0, 0, 1, 1) (0, 1, 1, 0, 0)]. Οι στήλες των πινάκων Npb και Cprb είναι τα στοιχεία της κανονικοποιημένης θετικής βάσης και της ανίστοιχης βάσης προβολής, αντίστοιχα. Επίσης ο replicated kernel της αγοράς είναι η ένωση* $Y_1 \cup Y_2$.

Βιβλιογραφία

[1] *I.A Πολυράκης,* Θέματα Ανάλυσης και Θεωρία Γενικής Ισορροπίας στην Οικονομία, *Αθήνα 2010*

[2] *I.A Πολυράκης,* Εισαγωγή στη Μαθηματική Χρηματοοικονομική Θεωρία *Αθήνα 2010*

[3] *I.A Polyrakis, F. Xanthos* , Maximal submarkets that replicate any option . *Ann Finance (2011) 7:407-423*

[4] *C. Kountzakis, I.A Polyrakis,* The completion of Security Markets. *DEF 29, 1-21(2006)*

[5] *I.A Polyrakis, F.* Finite-dimensional lattice-subspaces of C(Ω) and curves of $\mathbb{R}^n$. *Trans Am Math Soc, Vol. 346,Num. 7,July 1996*

[6] *LeRoy S.F Werner,J.*Principles of Financial Economics. *Cambridge University (2001) Press,Cambridge 2001*

[7] *Ross, S.A* Options and efficiency. *Q J Econ **90** , 75-89 (1976)*

[8] *Katsikis, Vasilios N.(2011)* Computational methods for option replication, *Internatiional Journal of Computer Mathematics.*