



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
Δ.Π.Μ.Σ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

Έλεγχοι Υποθέσεων βάσει ϕ -Μέτρων Απόκλισης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΣΤΑΥΡΟΠΟΥΛΟΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια

Βόντα Φιλία

ΑΘΗΝΑ 2012

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες»
της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου

Εγκρίθηκε από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Όνοματεπώνυμο

Βαθμίδα

Βόντα Φιλία (Επιβλέπουσα)

Επίκουρη Καθηγήτρια Ε.Μ.Π

Καρόνη Χρυσή

Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Ε.Μ.Π

Κουκουβίνος Χρήστος

Καθηγητής Ε.Μ.Π

Ιούλιος 2012

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα της διπλωματικής εργασίας, Επίκουρη Καθηγήτρια κα Βόντα Φιλία, για την πολύτιμη καθοδήγηση και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε και κυρίως για τον χρόνο που αφιέρωσε σε όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας εργασίας.

Επιπλέον θα ήθελα να ευχαριστήσω την Αναπληρώτρια Καθηγήτρια κα Καρόνη Χρυσή και τον Καθηγητή κ Κουκουβίνο Χρήστο για την τιμή που μου έκαναν να είναι μέλη της τριμελούς επιτροπής.

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή	9
1.1 Η Έννοια των μέτρων απόκλισης και η χρησιμότητά τους.	9
1.2 Κατηγοριοποίηση των μέτρων απόκλισης.	9
1.3 Στοιχειώδεις έννοιες από τη Θεωρία Πιθανότητων.	10
1.4 Σκοπός και δομή της εργασίας.	12
2. ϕ-Μέτρα απόκλισης :ορισμοί και ιδιότητες	14
2.1 Μέτρα απόκλισης μεταξύ δυο κατανομών πιθανότητας.	14
2.2 Βασικές Ιδιότητες των ϕ – μέτρων απόκλισης.	20
2.3 ϕ – Ανισότητες.	26
3. Καλή προσαρμογή απλής μηδενικής υπόθεσης βάσει ϕ-συναρτήσεων	28
3.1 Εισαγωγή.	28
3.2 ϕ – Αποκλίσεις και έλεγχοι καλής προσαρμογής με μη μεταβαλλόμενο αριθμό κλάσεων.	32
3.3 Έλεγχος υποθέσεων παραμετρικών κατανομών.	40
4. Έλεγχοι καλής προσαρμογής για κατανομές παρελθοντικών και υπολειπόμενων χρόνων ζωής	45
4.1 Πειράματα προσομοίωσης για κατανομές παρελθοντικών χρόνων επιβίωσης.	45
4.2 Πειράματα προσομοίωσης για κατανομές υπολειπόμενων χρόνων Επιβίωσης.	54
4.3 Ερμηνεία Αποτελεσμάτων-Συμπεράσματα.	62
Παράρτημα: Εντολές στην R για εξαγωγή των αποτελεσμάτων	65
Βιβλιογραφία	75

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1 Η Έννοια των μέτρων απόκλισης και η χρησιμότητά τους

Με τον όρο μέτρα απόκλισης στον τομέα της θεωρίας πιθανοτήτων και της στατιστικής εννοούμε τα στατιστικά εργαλεία που χρησιμοποιούμε για να αξιολογήσουμε την ομοιότητα ή την ανομοιότητα μεταξύ δύο πληθυσμών. Πολλές φορές επιθυμούμε να βρούμε ένα κατάλληλο μέτρο απόκλισης για να εκτιμήσουμε την απόσταση ή τη διαφορά μεταξύ δύο πληθυσμών ή δύο κατανομών πιθανότητας.

Επομένως, λόγω αυτής της χρησιμότητάς τους μπορούμε να επισημάνουμε ότι τα μέτρα απόκλισης έχουν καθοριστική σημασία σε ένα πολύ μεγάλο εύρος της θεωρητικής και εφαρμοσμένης στατιστικής συμπερασματολογίας και στα προβλήματα επεξεργασίας δεδομένων, όπως η εκτίμηση, ανίχνευση, διάγνωση, αναγνώριση, επιλογή του καλύτερου μοντέλου κ.α.

1.2 Κατηγοριοποίηση των μέτρων απόκλισης

Για να διαχωρίσουμε αυτά τα μέτρα κατάλληλα μπορούμε να τα κατηγοριοποιήσουμε ως παραμετρικά, μη παραμετρικά και μέτρα εντροπίας της πληροφορίας. Τα παραμετρικά μέτρα υπολογίζουν τον όγκο των πληροφοριών σχετικά με μια άγνωστη παράμετρο θ που παρέχονται από τα δεδομένα και είναι συναρτήσεις του θ . Το πιο γνωστό μέτρο αυτής της κατηγορίας είναι το μέτρο πληροφορίας του Fisher. Τα μη παραμετρικά μέτρα χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση της απόστασης ή τη συγγένεια μεταξύ δυο κατανομών πιθανότητας F_1 και F_2 . Το μέτρο των Kullback-Leibler (1951) είναι το πιο γνωστό σε αυτή την κατηγορία. Σαν συμμετρική απόκλιση χρησιμοποιείται συχνά η J-απόκλιση των Jeffreys-Kullback-Leibler. Τα μέτρα της εντροπίας εκφράζουν το ποσό των πληροφοριών που περιλαμβάνεται σε μια κατανομή, δηλαδή το ποσό αβεβαιότητας που συνδέεται με την έκβαση ενός πειράματος. Τα κλασσικά μέτρα αυτού του τύπου είναι τα μέτρα Shannon και Rényi. Ο Rényi (1961) γενίκευσε τόσο την εντροπία Shannon όσο και την απόκλιση Kullback-Leibler με την εισαγωγή μιας παραμέτρου κλίμακας. Οι Burbea και Rao (1982), και ο Taneja (1989) έχουν προτείνει διάφορους εναλλακτικούς τρόπους για την γενίκευση της J-απόκλισης, ενώ τα προτεινόμενα μέτρα Burbea και Rao περιλαμβάνουν μια παράμετρο.

Μια άλλη γνωστή κατηγορία μέτρων απόκλισης είναι η απόκλιση Ali-Silvey που καλείται και Csiszár οικογένεια φ-αποκλίσεων (Csiszar 1963, Ali και Silvey 1966). Επίσης οι Cressie και Read (1984) όρισαν την οικογένεια απόκλισης δύναμης μεταξύ δύο κατανομών

πιθανότητας, που εξαρτάται από μια παράμετρο λ και χρησιμοποιείται για τον έλεγχο καλής προσαρμογής για πολυωνυμικές κατανομές. Η κατηγορία αυτή περιλαμβάνει μεταξύ άλλων το γνωστό μέτρο απόκλισης X^2 του Pearson και για πολυωνυμικούς πληθυσμούς το στατιστικό κριτήριο του λόγου της λογαριθμο-πιθανοφάνειας. Πρόσφατα ορίστηκε από τον Basu (1998) το μέτρο απόκλισης δύναμης Basu-Harris-Hjort-Jones το οποίο συμβολίζεται ως BHHJ. Αυτή η οικογένεια των μέτρων προτάθηκε για την ανάπτυξη μιας μεθόδου εκτίμησης της ελάχιστης απόκλισης για την αξιόπιστη εκτίμηση των παραμέτρων. Η οικογένεια αποκλίσεων BHHJ εξαρτάται από έναν δείκτη α που ελέγχει την αποδοτικότητα του μέτρου όταν χρησιμοποιείται ως κριτήριο υπολογισμού για την εκτίμηση των παραμέτρων.

1.3 Στοιχειώδεις έννοιες από τη Θεωρία Πιθανοτήτων

Έστω X μια τυχαία μεταβλητή που παίρνει τιμές σε έναν δειγματικό χώρο \mathcal{X} (συνήθως ο \mathcal{X} θα είναι ένα υποσύνολο του \mathbb{R}^n). Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση κατανομής F της X εξαρτάται από έναν συγκεκριμένο αριθμό παραμέτρων και υποθέτουμε αργότερα ότι ο τύπος της συνάρτησης κατανομής της F είναι γνωστός εκτός ίσως από έναν πεπερασμένο αριθμό από αυτές τις παραμέτρους. Θα συμβολίζουμε με θ το διάνυσμα των άγνωστων παραμέτρων που συνδέονται με την F . Έστω $(\mathcal{X}, \beta_{\mathcal{X}}, P_{\theta})_{\theta \in \Theta}$ να είναι ο χώρος πιθανοτήτων που σχετίζεται με την τυχαία μεταβλητή X , όπου $\beta_{\mathcal{X}}$ είναι η σ -άλγεβρα Borel των υποσυνόλων $A \subset \mathcal{X}$ και $\{P_{\theta}\}_{\theta \in \Theta}$ μια οικογένεια κατανομών πιθανότητας που ορίζεται για το μετρήσιμο χώρο $(\mathcal{X}, \beta_{\mathcal{X}})$ με Θ ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^{M_0} , $M_0 \geq 1$.

Υποθέτουμε ότι οι κατανομές πιθανότητας P_{θ} είναι απολύτως συνεχείς σε σχέση με ένα σ -πεπερασμένο μέτρο μ στον χώρο $(\mathcal{X}, \beta_{\mathcal{X}})$. Για χάριν ευκολίας το μ θα είναι είτε το μέτρο Lebesgue, ή ένα απαριθμητικό μέτρο (δηλαδή θα υπάρχει ένα πεπερασμένο ή αριθμήσιμο σύνολο $S_{\mathcal{X}}$ με την ιδιότητα $P_{\theta}(\mathcal{X} - S_{\mathcal{X}}) = 0$). Η παρακάτω σχέση (1.1)

$$f_{\theta}(x) = \frac{dP_{\theta}}{d\mu}(x) = \begin{cases} f_{\theta}(x), & \text{αν } \mu \text{ είναι το μέτρο Lebesgue} \\ \Pr(X = x) = p_{\theta}(x), & \text{αν } \mu \text{ είναι ένα απαριθμητικό μέτρο } (x \in S_{\mathcal{X}}) \end{cases}$$

θα δηλώνει την οικογένεια των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας αν το μ είναι το μέτρο Lebesgue ή την οικογένεια των συναρτήσεων μάζας πιθανότητας αν μ είναι ένα απαριθμητικό μέτρο. Στην πρώτη περίπτωση η X είναι μια τυχαία μεταβλητή με απολύτως συνεχή κατανομή και στη δεύτερη περίπτωση είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με στήριγμα $S_{\mathcal{X}}$ (όπου $S_{\mathcal{X}}$ είναι το σύνολο των στοιχείων x για τα οποία έχουμε $f_{\theta}(x) > 0$).

Έστω h μια μετρήσιμη συνάρτηση. Η μέση τιμή της $h(X)$ θα δίνεται από την σχέση:

$$E_{\theta} [h(X)] = \begin{cases} \int_{\mathcal{X}} h(x) f(x) dx, & \text{εάν το } \mu \text{ είναι το μέτρο Lebesgue} \\ \sum_{x \in \mathcal{S}_x} h(x) p_{\theta}(x), & \text{εάν το } \mu \text{ είναι ένα απαριθμητικό μέτρο.} \end{cases}$$

Στη συνέχεια θα δοθούν οι ορισμοί δύο σημαντικών αποστάσεων της θεωρίας πιθανοτήτων, της απόστασης Kolmogorov και της απόστασης Λένυ. Έστω P_{θ_1} και P_{θ_2} δύο μέτρα πιθανοτήτων με αντίστοιχες συναρτήσεις κατανομής $F_{\theta_1}, F_{\theta_2}$. Τότε η απόσταση Kolmogorov που εισήγαγε ο Kolmogorov το 1933, μεταξύ των F_{θ_1} και F_{θ_2} δίνεται από την σχέση :

$$K_1(F_{\theta_1}, F_{\theta_2}) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_{\theta_1}(x) - F_{\theta_2}(x)|,$$

η οποία καλείται επίσης και ομοιόμορφη απόσταση και παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,1]$.

Στην παραπάνω απόσταση βασίζεται το θεώρημα των Glivenko-Cantelli το οποίο ορίζει ότι η εμπειρική συνάρτηση κατανομής είναι ομοιόμορφα ισχυρά συνεπής εκτιμήτρια της αληθούς συνάρτησης κατανομής, δηλαδή έχοντας ένα τυχαίο δείγμα X_1, \dots, X_n από ένα πληθυσμό με συνάρτηση κατανομής F_{θ_0} , τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \{ K_1(F_n, F_{\theta_0}) > \varepsilon \} = 0,$$

όπου F_n είναι η εμπειρική συνάρτηση κατανομής και ορίζεται ως

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{(-\infty, x]}(x_i),$$

όπου I_A είναι η δείκτρια συνάρτηση του συνόλου A και ορίζεται ως

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A \\ 0, & \text{αν } x \notin A \end{cases}.$$

Η απόσταση Λένυ που εισήγαγε ο Λένυ το 1925 ορίζεται ως εξής

$K_1(F_{\theta_1}, F_{\theta_2}) = \inf \{ \varepsilon > 0 : F_{\theta_1}(x - \varepsilon) + \varepsilon \leq F_{\theta_2}(x) \leq F_{\theta_1}(x + \varepsilon) + \varepsilon, \text{ για όλα τα } x \in \mathbb{R} \}$
και παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,1]$

1.4 Σκοπός και δομή της εργασίας

Τα μέτρα απόκλισης χρησιμοποιούνται ως δείκτες της ομοιότητας ή ανομοιότητας μεταξύ δυο πληθυσμών και έχουν αρκετές εφαρμογές στους ελέγχους υποθέσεων και στην κατασκευή κατάλληλων ελεγχосунарτήσεων. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να παρουσιάσει ορισμένα σημαντικά μέτρα απόκλισης και να μελετήσει τις στατιστικές ελεγχосунарτήσεις που προκύπτουν από αυτά καθώς και να παρέχει συστάσεις σχετικά με ποιος από αυτούς τους ελέγχους είναι πιο ισχυρός από τους υπόλοιπους, με βάση το μέγεθος και την ισχύ του ελέγχων. Οι κατανομές πιθανότητας που εξετάζουμε κάτω από την μηδενική υπόθεση ή κάτω από διάφορες εναλλακτικές υποθέσεις είναι υπό συνθήκη κατανομές σχεδιασμένες να περιγράφουν την κατανομή παρελθοντικών (past) χρόνων αξιοπιστίας ή επιβίωσης ή την κατανομή υπολειπόμενων (residual) χρόνων αξιοπιστίας ή επιβίωσης .

Στο πρώτο κεφάλαιο κάνουμε μια εισαγωγή στην έννοια των μέτρων απόκλισης και τα κατηγοριοποιούμε. Επιπλέον, συνοψίζουμε κάποιες βασικές έννοιες που θα χρειαστούν στα επόμενα κεφάλαια.

Στο δεύτερο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε μερικά από τα πιο σημαντικά μέτρα απόκλισης μεταξύ δυο κατανομών πιθανότητας, θα επικεντρωθούμε στα μέτρα απόκλισης που ανήκουν στην οικογένεια των φ-μέτρων απόκλισης και θα παρουσιάσουμε τις πιο γνωστές περιπτώσεις αποκλίσεων που ανήκουν στην κατηγορία αυτή δίνοντας του ορισμούς και τις βασικές ιδιότητές τους.

Στο τρίτο κεφάλαιο θα μελετήσουμε ελέγχους υποθέσεων που βασίζονται στα φ-μέτρα απόκλισης. Αρχικά, στην παράγραφο 3.1 θα παρουσιάσουμε τις κυριότερες στατιστικές ελεγχосунарτήσεις που βασίζονται στα φ-μέτρα απόκλισης και χρησιμοποιούνται για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης $H_0 : F = F_0$ δηλαδή την υπόθεση ότι ένα τυχαίο δείγμα προέρχεται από μια γνωστή κατανομή. Στη συνέχεια, στην παράγραφο 3.2 θα μελετήσουμε την ασυμπτωτική κατανομή των προηγούμενων ελεγχосунарτήσεων και την ισχύ των ελέγχων. Τέλος θα ασχοληθούμε με τον έλεγχο της υπόθεσης $H_0 : F = F_{0,\theta}$ δηλαδή την υπόθεση ότι το τυχαίο δείγμα προέρχεται από μια γνωστή κατανομή F_0 η οποία όμως εξαρτάται από άγνωστες παραμέτρους θ . Στην περίπτωση αυτή οι άγνωστες παράμετροι εκτιμώνται από τα δεδομένα και παρουσιάζουμε την ασυμπτωτική κατανομή της αντίστοιχης στατιστικής ελεγχосунарτήσης. Στο τέλος του κεφαλαίου δίνονται κάποια παραδείγματα και εφαρμογές χρησιμοποιώντας κατάλληλες ελεγχосунарτήσεις, οι οποίες μας υποδεικνύουν αν θα πρέπει να απορρίπτουμε ή να αποδεχόμαστε την μηδενική υπόθεση σε κάθε περίπτωση. Επίσης, σε κάποιες εφαρμογές υπολογίζουμε την ελάχιστη ϕ -εκτιμήτρια της άγνωστης παραμέτρου θ και την ασυμπτωτική κατανομή της εκτιμήτριας αυτής.

Στο τέταρτο κεφάλαιο προτείνουμε κάποιες ελεγχосунарτήσεις βάσει των ϕ -μέτρων απόκλισης για τον έλεγχο της σύνθετης μηδενικής υπόθεσης που αναφέρεται σε κατανομή παρελθοντικών ή υπολοιπόμενων χρόνων ζωής και παρουσιάζουμε μια μελέτη προσομοίωσης για την ανάλυση της συμπεριφοράς της οικογένειας των στατιστικών ελεγχосунарτήσεων ϕ -απόκλισης. Συγκρίνουμε τους ελέγχους με βάση το μέγεθος και την ισχύ τους και δίνουμε κάποια γενικά συμπεράσματα και προτάσεις για το ποιο μέτρο απόκλισης είναι καλύτερο σε κάθε περίπτωση και για διάφορες τιμές του δείγματος. Θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα των πειραμάτων προσομοίωσης που έγιναν και θα τα ερμηνεύσουμε δίνοντας και κάποια γενικές παρατηρήσεις.

Η εξαγωγή των αποτελεσμάτων του κεφαλαίου 4 εκπονήθηκε με τη βοήθεια ενός προγράμματος που υλοποιήθηκε στην στατιστική γλώσσα προγραμματισμού *R*. Ο κώδικας του προγράμματος δίνεται στο Παράρτημα.

Κεφάλαιο 2

φ-Μέτρα απόκλισης : ορισμοί και ιδιότητες

2.1 Μέτρα απόκλισης μεταξύ δύο κατανομών πιθανότητας

Ένα από τα πιο γνωστά μέτρα απόκλισης μεταξύ δυο κατανομών πιθανότητας P_{θ_1} και P_{θ_2} είναι το μέτρο απόκλισης Kullback-Leibler (KL), που εισήγαγαν και μελέτησαν οι Solomon Kullback και Richard Leibler (1951) και ορίζεται ως

$$K(P_{\theta_1}, P_{\theta_2}) = \int_{\mathcal{X}} f_{\theta_1}(x) \log \left(\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)} \right) d\mu(x) = E_{\theta_1} \left[\log \left(\frac{f_{\theta_1}(X)}{f_{\theta_2}(X)} \right) \right], \quad (2.1)$$

Ο Jeffreys (1946) χρησιμοποίησε μια συμμετρική έκδοση της (2.1) και όρισε την J-απόκλιση που δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned} J(P_{\theta_1}, P_{\theta_2}) &= D(P_{\theta_1}, P_{\theta_2}) + D(P_{\theta_2}, P_{\theta_1}) \\ &= K(P_{\theta_1}, P_{\theta_2}) + K(P_{\theta_2}, P_{\theta_1}) \\ &= \int_{\mathcal{X}} f_{\theta_1}(x) \log \left(\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)} \right) d\mu(x) + \int_{\mathcal{X}} f_{\theta_2}(x) \log \left(\frac{f_{\theta_2}(x)}{f_{\theta_1}(x)} \right) d\mu(x) \\ &= \int_{\mathcal{X}} (f_{\theta_1}(x) - f_{\theta_2}(x)) \log \left(\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)} \right) d\mu(x) \end{aligned}$$

Ο Rényi (1961) παρουσίασε την πρώτη παραμετρική γενίκευση της (2.1) ως εξής

$$\begin{aligned} D_r^1(\theta_1, \theta_2) &= \frac{1}{(r-1)} \log \int_{\mathcal{X}} f_{\theta_1}(x)^r f_{\theta_2}(x)^{1-r} d\mu(x) \\ &= \frac{1}{(r-1)} \log E_{\theta_1} \left[\left(\frac{f_{\theta_1}(X)}{f_{\theta_2}(X)} \right)^{r-1} \right], \quad r > 0, r \neq 1. \end{aligned}$$

Αργότερα οι Liese και Vajda (1987) επέκτειναν την παραπάνω έκφραση για όλα τα $r \neq 0, 1$, ως

$$D_r^1(P_{\theta_1}, P_{\theta_2}) = \frac{1}{r(r-1)} \log \int_x f_{\theta_1}(x)^r f_{\theta_2}(x)^{1-r} d\mu(x)$$

$$= \frac{1}{r(r-1)} \log E_{\theta_1} \left[\left(\frac{f_{\theta_1}(X)}{f_{\theta_2}(X)} \right)^{r-1} \right], \quad r \neq 0, r \neq 1. \quad (2.2)$$

Η σχέση (2.2), θα αναφέρεται και ως απόκλιση Rényi. Για τις περιπτώσεις $r = 1$ και $r = 0$ ορίζεται ως

$$D_0^1(P_{\theta_1}, P_{\theta_2}) = \lim_{r \rightarrow 0} D_r^1(P_{\theta_1}, P_{\theta_2}) = K(P_{\theta_2}, P_{\theta_1}) \text{ και}$$

$$D_1^1(P_{\theta_1}, P_{\theta_2}) = \lim_{r \rightarrow 1} D_r^1(P_{\theta_1}, P_{\theta_2}) = K(P_{\theta_1}, P_{\theta_2}),$$

αντίστοιχα. Το μέτρο απόκλισης $K(P_{\theta_2}, P_{\theta_1})$ ονομάζεται και μέτρο διάκρισης ελάχιστης πληροφορίας μεταξύ των κατανομών πιθανότητας P_{θ_1} και P_{θ_2} . Άλλες δυο πολύ γνωστές παραμετρικές γενικεύσεις της (2.1) δόθηκαν από τους Sharma και Mittal (1977) και ονομάζονται μέτρα απόκλισης r -τάξης και s -βαθμού και 1 -τάξης και s -βαθμού. Ορίζονται αντίστοιχα ως εξής

$$D_r^s(P_{\theta_1}, P_{\theta_2}) = \frac{1}{(s-1)} \left(\left(\int_x f_{\theta_1}(x)^r f_{\theta_2}(x)^{1-r} d\mu(x) \right)^{\frac{s-1}{r-1}} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{(s-1)} \left(\left(E_{\theta_1} \left[\left(\frac{f_{\theta_1}(X)}{f_{\theta_2}(X)} \right)^{r-1} \right]^{\frac{s-1}{r-1}} \right) - 1 \right), \quad r, s \neq 1 \quad (2.3)$$

και $D_1^s(P_{\theta_1}, P_{\theta_2}) = \frac{1}{(s-1)} \left(\exp((s-1) \int_x f_{\theta_1}(x) \log \frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)} d\mu(x)) - 1 \right)$

$$= \frac{1}{(s-1)} \left(\exp \left((s-1) E_{\theta_1} \left[\log \left(\frac{f_{\theta_1}(X)}{f_{\theta_2}(X)} \right) \right] \right) - 1 \right), \text{ για } s \neq 1. \quad (2.4)$$

Από τις (2.2), (2.3), (2.4) μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι

$$i) \quad \lim_{s \rightarrow 1} D_r^s(P_{\theta_1}, P_{\theta_2}) = r D_r^1(P_{\theta_1}, P_{\theta_2})$$

$$ii) \quad \lim_{r \rightarrow 1} D_r^s(P_{\theta_1}, P_{\theta_2}) = D_1^s(P_{\theta_1}, P_{\theta_2})$$

$$\text{iii) } \lim_{s \rightarrow 1} D_1^s(P_{\theta_1}, P_{\theta_2}) = K(P_{\theta_1}, P_{\theta_2})$$

$$\text{iv) } \lim_{r \rightarrow 1} D_r^1(P_{\theta_1}, P_{\theta_2}) = K(P_{\theta_1}, P_{\theta_2}) .$$

Ο Pearson (1900) όρισε το μέτρο απόκλισης χ^2 που δίνεται από τη σχέση

$$\chi^2(P_{\theta_1}, P_{\theta_2}) = \int_{\mathcal{X}} \frac{(f_{\theta_1}(x) - f_{\theta_2}(x))^2}{f_{\theta_2}(x)} d\mu(x) = \int_{\mathcal{X}} \left(\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)} - 1 \right)^2 f_{\theta_2}(x) d\mu(x) \quad (2.5)$$

Το μέτρο απόκλισης Kullback-Leibler και το μέτρο απόκλισης χ^2 είναι οι πιο γνωστές ειδικές περιπτώσεις της οικογένειας φ-αποκλίσεων των μέτρων απόκλισης που όρισαν ταυτόχρονα ο Csiszár (1963) και οι Ali και Silvey (1966) ως εξής :

Ορισμός 2.1

Το φ-μέτρο απόκλισης μεταξύ των κατανομών πιθανότητας P_{θ_1} και P_{θ_2} ορίζεται από την σχέση

$$\begin{aligned} D_{\phi}(P_{\theta_1}, P_{\theta_2}) &= D_{\phi}(\theta_1, \theta_2) = \int_{\mathcal{X}} f_{\theta_2}(x) \phi\left(\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)}\right) d\mu(x) \\ &= E_{\theta_2} \left[\phi\left(\frac{f_{\theta_1}(X)}{f_{\theta_2}(X)}\right) \right], \quad \phi \in \Phi^* \quad (2.6) \end{aligned}$$

όπου Φ^* είναι η τάξη όλων των κυρτών συναρτήσεων $\phi(x)$, για $x \geq 0$, έτσι ώστε στο $x=1$, $\phi(1)=0$, και στο $x=0$ έχουμε $0\phi\left(\frac{0}{0}\right)=0$ και $0\phi\left(\frac{p}{0}\right)=\lim_{u \rightarrow \infty} \phi(u)/u$.

Παρατήρηση 2.1

Έστω μια συνάρτηση $\phi \in \Phi^*$ παραγωγίσιμη στο $x=1$, τότε η συνάρτηση

$$\psi(x) = \phi(x) - \phi'(1)(x-1) \quad (2.7)$$

ανήκει επίσης στο Φ^* και έχει την επιπλέον ιδιότητα ότι $\psi'(1)=0$. Αυτή η ιδιότητα, μαζί με την ιδιότητα της κυρτότητας, συνεπάγεται ότι $\psi(x) \geq 0$, για κάθε $x \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Περαιτέρω, } D_{\psi}(\theta_1, \theta_2) &= \int_{\mathcal{X}} f_{\theta_2}(x) \left(\phi\left(\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)}\right) - \phi'(1)\left(\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)} - 1\right) \right) d\mu(x) \\ &= \int_{\mathcal{X}} f_{\theta_2}(x) \left(\phi\left(\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)}\right) \right) d\mu(x) = D_{\phi}(\theta_1, \theta_2). \end{aligned}$$

Από την παραπάνω σχέση αφού τα δύο μέτρα απόκλισης συμπίπτουν, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σύνολο Φ^* είναι ισοδύναμο με το σύνολο

$$\Phi \equiv \Phi^* \cap \{\phi: \phi'(1) = 0\}.$$

Από τον ορισμό (2.1) και την παρατήρηση (2.1) συμπεραίνουμε ότι το μέτρο απόκλισης Kullback-Leibler λαμβάνεται από την συνάρτηση $\psi(x) = x \log x - x + 1$ ή από την $\phi(x) = x \log x$ και επίσης γνωρίζουμε ότι $\psi(x) = \phi(x) - \phi'(1)(x-1)$. Παρακάτω, θα συμβολίζουμε με ϕ κάθε συνάρτηση που θα ανήκει στο Φ ή στο Φ^* . Ακολούθως, θα παρουσιάσουμε ορισμένα σημαντικά μέτρα απόκλισης που ανήκουν στην οικογένεια των ϕ -αποκλίσεων και τις αντίστοιχες ϕ συναρτήσεις.

➤ **Απόκλιση Kullback-Leibler**

$$\phi(x) = x \log x - x + 1$$

➤ **Απόκλιση διάκρισης ελάχιστης πληροφορίας**

$$\phi(x) = -\log x + x - 1$$

➤ **J-Απόκλιση**

$$\phi(x) = (x-1) \log x$$

➤ **χ^α Αποκλίσεις**

απόκλιση ολικής μεταβολής Saks (1937)

$$\phi(x) = |x-1|$$

χ^2 -απόκλιση Pearson (1900)

$$\phi(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2$$

χ απόκλιση τάξης α Vajda (1973)

$$\phi(x) = |x-1|^\alpha, \quad \alpha \geq 1$$

- **Απόκλιση Balakrishnan και Sanghvi (1968)**

$$\phi(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$$

- **Απόκλιση Rathie και Kannappan (1972)**

$$\phi(x) = \frac{-x^s + s(x-1) + 1}{1-s}, \quad s \neq 1,$$

- **Απόκλιση αρμονικού μέσου (Mathai και Rathie (1975))**

$$\phi(x) = \frac{1-x}{2} - \left(\frac{1+x^{-r}}{2} \right)^{\frac{-1}{r}}, \quad r > 0$$

- **Απόκλιση Rukhin (1994)**

$$\phi(x) = \frac{(1-x)^2}{2(\alpha + (1-\alpha)x)}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

- **Απόκλιση Lin (1991)**

$$\phi(x) = \frac{\alpha x \log x - (\alpha x + 1 - \alpha) \log(\alpha x + 1 - \alpha)}{\alpha(1-\alpha)}, \quad \alpha \neq 0, 1$$

- **Απόκλιση Cressie και Read (1984)**

$$\phi(x) = \frac{x^{\lambda+1} - x - \lambda(x-1)}{\lambda(\lambda+1)}, \quad \lambda \neq 0, -1$$

- **Απόκλιση Matusita (1964)**

$$\phi^\alpha(x) = |1 - x^\alpha|^{1/\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

Από στατιστικής άποψης η πιο σημαντική οικογένεια φ-αποκλίσεων είναι ίσως η οικογένεια μέτρων δύναμης-απόκλισης που μελέτησαν οι Cressie και Read (1984) και όρισαν ως εξής

$$I_\lambda(\theta_1, \theta_2) \equiv D_{\phi(\lambda)}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\lambda(\lambda+1)} \left(\int_X \frac{f_{\theta_1}(x)^{\lambda+1}}{f_{\theta_2}(x)^\lambda} d\mu(x) - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{\lambda(\lambda+1)} \left(E_{\theta_1} \left[\left(\frac{f_{\theta_1}(X)}{f_{\theta_2}(X)} \right)^\lambda \right] - 1 \right),$$

για $-\infty < \lambda < +\infty$. Η οικογένεια δύναμης-απόκλισης δεν ορίζεται για $\lambda = -1$ ή $\lambda = 0$. Μπορούμε όμως να ορίσουμε στις περιπτώσεις αυτές από τα όρια

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} I_\lambda(\theta_1, \theta_2) = K(\theta_1, \theta_2) \quad \text{και} \quad \lim_{\lambda \rightarrow -1} I_\lambda(\theta_1, \theta_2) = K(\theta_2, \theta_1).$$

Η οικογένεια των μέτρων δύναμης-απόκλισης μπορεί να δοθεί από την (2.6)

ως

$$\phi(x) = \begin{cases} \phi_{(\lambda)}(x) = \frac{1}{\lambda(\lambda+1)} (x^{\lambda+1} - x - \lambda(x-1)); \lambda \neq 0, \lambda \neq -1, \\ \phi_{(0)}(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \phi_{(\lambda)}(x) = x \log x - x + 1 \\ \phi_{(-1)}(x) = \lim_{\lambda \rightarrow -1} \phi_{(\lambda)}(x) = -\log x + x - 1. \end{cases}$$

Η οικογένεια των μέτρων δύναμης-απόκλισης προτάθηκαν ανεξάρτητα από τους Liese και Vajda (1987) σαν μια φ-απόκλιση και την ονόμασαν I_α -απόκλιση.

Τα μέτρα απόκλισης των Rényi και των Sharma και Mittal που δόθηκαν από τις σχέσεις (2.3) και (2.4), όπως και το μέτρο που όρισε ο Bhattacharyya (1943) ως εξής

$$B(\theta_1, \theta_2) = -\log \int_X \sqrt{f_{\theta_1}(x) f_{\theta_2}(x)} d\mu(x),$$

δεν είναι φ-μέτρα απόκλισης. Ωστόσο, τέτοια μέτρα μπορούν να γραφτούν στην ακόλουθη μορφή :

$$D_\phi^h(\theta_1, \theta_2) = h(D_\phi(\theta_1, \theta_2)), \quad (2.8)$$

όπου η h είναι μια αύξουσα παραγωγίσιμη συνάρτηση που ορίζεται από το $\left[0, \phi(0) + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\phi(t)}{t} \right]$ στο $[0, \infty)$ με $h(0) = 0$, $h'(0) > 0$, και $\phi \in \Phi^*$. Ακολουθως ,

παραθέτουμε τις συναρτήσεις h και ϕ που βασίζονται στα τρία παραπάνω μέτρα απόκλισης :

➤ **Απόκλιση Rényi**

$$h(x) = \frac{1}{r(r-1)} \log(r(r-1)x+1); r \neq 0,1$$

$$\phi(x) = \frac{x^r - r(x-1) - 1}{r(r-1)}; r \neq 0,1$$

➤ **Απόκλιση Sharma-Mittal**

$$h(x) = \frac{1}{s-1} \left((1+r(r-1)x)^{\frac{s-1}{r-1}} - 1 \right); s, r \neq 1$$

$$\phi(x) = \frac{x^r - r(x-1) - 1}{r(r-1)}; r \neq 0,1$$

➤ **Απόκλιση Bhattacharyya**

$$h(x) = -\log(-x+1)$$

$$\phi(x) = -x^{1/2} + \frac{1}{2}(x+1).$$

Η οικογένεια των αποκλίσεων της (2.8), ονομάζεται (h,ϕ) -μέτρα απόκλισης και έχει ορισθεί και μελετηθεί από τον Menéndez (1995).

2.2 Βασικές Ιδιότητες των ϕ -μέτρων απόκλισης

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε μερικές από τις πιο σημαντικές ιδιότητες των ϕ -μέτρων απόκλισης, από στατιστικής άποψης. Είναι λογικό να συμβαίνει μια αύξηση της απόκλισης, όταν δύο κατανομές πιθανότητας διαφέρουν όλο και περισσότερο. Σαν άμεση συνέπεια αυτής της ιδέας οδηγούμαστε στην πρώτη πρόταση.

Πρόταση 2.1

Έστω P_{θ_1} και P_{θ_2} δύο κατανομές πιθανότητας και $\phi \in \Phi^*$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $t=1$. Τότε

$$0 \leq D_{\phi}(\theta_1, \theta_2) \leq \phi(0) + \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\phi(r)}{r},$$

όπου

$$D_\phi(\theta_1, \theta_2) = 0 \quad \text{αν } P_{\theta_1} = P_{\theta_2}, \quad (2.9)$$

και

$$D_\phi(\theta_1, \theta_2) = \phi(0) + \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\phi(r)}{r} \quad \text{αν } S_1 \cap S_2 = \emptyset. \quad (2.10)$$

Αν επίσης η συνάρτηση ϕ είναι αυστηρά κυρτή στο $t = 1$, τότε η (2.9) ισχύει αν και μόνο αν $P_{\theta_1} = P_{\theta_2}$. Επιπλέον, αν έχουμε

$$\phi(0) + \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\phi(r)}{r} < \infty,$$

τότε η (2.10) ισχύει αν και μόνο αν $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, όπου S_i , $i = 1, 2$, είναι το στήριγμα της κατανομής πιθανότητας P_{θ_i} , $i = 1, 2$.

Απόδειξη.

Χρησιμοποιώντας τη μη αρνητικότητα της συνάρτησης ψ που δίνεται στην (2.7), έχουμε $D_\psi(\theta_1, \theta_2) \geq 0$, αλλά γνωρίζουμε ότι $D_\phi(\theta_1, \theta_2) = D_\psi(\theta_1, \theta_2)$, επομένως θα έχουμε $D_\phi(\theta_1, \theta_2) \geq 0$.

Είναι γνωστό ότι για κάθε κυρτή συνάρτηση ϕ ισχύει η ακόλουθη ανισότητα

$$\phi(t) \leq \phi(0) + t \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\phi(r)}{r}, \quad (t \geq 0). \quad (2.11)$$

Αν η ϕ είναι αυστηρά κυρτή σε κάποιο $t_0 \in (0, \infty)$ τότε η ανισότητα της (2.11) ισχύει αυστηρά για κάθε $t > 0$. Χρησιμοποιώντας την (2.11) έχουμε

$$\begin{aligned} D_\phi(\theta_1, \theta_2) &\leq \int_{\mathcal{X}} f_{\theta_2}(x) \left(\phi(0) + \frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\phi(r)}{r} \right) d\mu(x) \\ &= \phi(0) + \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\phi(r)}{r}. \end{aligned}$$

Είναι προφανές ότι εάν $P_{\theta_1} = P_{\theta_2}$ συνεπάγεται ότι $D_\phi(\theta_1, \theta_2) = 0$. Αν $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, έχουμε ότι

$$D_\phi(\theta_1, \theta_2) = \int_{\mathcal{X}} f_{\theta_2}(x) \phi \left(\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)} \right) d\mu(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{S_1^c \cap S_2} f_{\theta_2}(x) \phi\left(\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)}\right) d\mu(x) + \int_{S_1 \cap S_2^c} f_{\theta_2}(x) \phi\left(\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)}\right) d\mu(x) \\
&= \phi(0) + \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\phi(r)}{r}.
\end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι αν η ϕ είναι αυστηρά κυρτή στο $t=1$, τότε επειδή $D_\phi(\theta_1, \theta_2) = 0$ συνεπάγεται ότι $P_{\theta_1} = P_{\theta_2}$. Εξάλλου, αν η ϕ είναι αυστηρά κυρτή στο $t=1$ τότε

$$\psi\left(\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)}\right) > 0$$

για $\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)} > 1$ και για $\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)} < 1$, όπου η ψ ορίζεται στην (2.7). Αν $D_\psi(\theta_1, \theta_2) = 0$

τότε $\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)} \leq 1$ ή $\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)} \geq 1$. Υποθέτουμε ότι $f_{\theta_1}(x)/f_{\theta_2}(x) \leq 1$. Γνωρίζουμε ότι

$$D_\phi(\theta_1, \theta_2) = D_\psi(\theta_1, \theta_2) = 0,$$

και

$$\begin{aligned}
0 = D_\psi(\theta_1, \theta_2) &= \int_{\mathcal{X}} f_{\theta_2}(x) \psi\left(\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)}\right) d\mu(x) \\
&= \int_{\mathcal{X}} f_{\theta_2}(x) \left(\phi\left(\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)}\right) - \phi'(1) \left(\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)} - 1\right) \right) d\mu(x) \\
&= D_\phi(\theta_1, \theta_2) - \phi'(1) \int_{\mathcal{X}} f_{\theta_2}(x) \left(\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)} - 1\right) d\mu(x) \\
&= 0 - \phi'(1) \int_{\mathcal{X}} f_{\theta_2}(x) \left(\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)} - 1\right) d\mu(x) \\
&= -\phi'(1) \int_{\mathcal{X}} \left(\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)} - 1\right) dP_{\theta_2}.
\end{aligned}$$

Αφού η ϕ είναι αυστηρά κυρτή στο $t=1$ τότε θα ισχύει $P_{\theta_1} = P_{\theta_2}$. Παρομοίως αποδεικνύεται αν υποθέσουμε $f_{\theta_1}(x)/f_{\theta_2}(x) \geq 1$.

Η αυστηρή κυρτότητα της ϕ στο $t=1$ συνεπάγεται την αυστηρή ανισότητα της (2.11), δηλαδή

$$\phi(t) < \phi(0) + t \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\phi(r)}{r}, \quad \forall t > 0.$$

Τότε η συνάρτηση

$$l(t) = \phi(0) - \phi(t) + t \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\phi(r)}{r}$$

είναι θετική για κάθε $t > 0$.

Αν πάρουμε ένα $x \in S_1$, τέτοιο ώστε $f_{\theta_1}(x) > 0$, τότε $t = f_{\theta_1}(x) / f_{\theta_2}(x) > 0$ και $l\left(\frac{f_{\theta_1}}{f_{\theta_2}}\right) > 0$. Ως εκ τούτου,

$$\begin{aligned} D_l(\theta_1, \theta_2) &= \int_{\mathcal{X}} f_{\theta_2}(x) l\left(\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)}\right) d\mu(x) \\ &= \int_{\mathcal{X}} f_{\theta_2}(x) \left(\phi(0) - \phi\left(\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)}\right) + \frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\phi(r)}{r} \right) d\mu(x) \\ &= -D_{\phi}(\theta_1, \theta_2) + \phi(0) + \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\phi(r)}{r}, \end{aligned}$$

Αλλά από την (2.10) έχουμε ότι

$$D_{\phi}(\theta_1, \theta_2) = \phi(0) + \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\phi(r)}{r},$$

οπότε,

$$D_l(\theta_1, \theta_2) = \int_{\mathcal{X}} f_{\theta_2}(x) l\left(\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)}\right) d\mu(x) = 0$$

με

$$l\left(\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)}\right) > 0.$$

Τότε, $f_{\theta_2}(x) = 0$, επειδή $D_l(\theta_1, \theta_2) = 0$ και $l\left(\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)}\right) > 0$, δηλαδή, $x \notin S_2$. •

Έστω X_1, \dots, X_n ένα τυχαίο δείγμα από P_θ , $\theta \in \Theta$. Για μ να είναι το μέτρο Lebesgue ή ένα απαριθμητικό μέτρο, έστω $f_\theta(x) = \frac{dP_\theta}{d\mu}(x)$ όπου $x = (x_1, \dots, x_n)$. Υποθέτουμε ότι T είναι ένας μετρήσιμος μετασχηματισμός από τον χώρο $(\mathcal{X}^n, \beta_{\mathcal{X}^n})$ στον μετρήσιμο χώρο $(\mathcal{Y}, \beta_{\mathcal{Y}})$.

Ορίζουμε

$$Q_{\theta_i}(A) = P_{\theta_i}(T^{-1}(A)), \quad i = 1, 2, \quad (2.12)$$

με $A \in \beta_{\mathcal{Y}}$ και

$$g_{\theta_i}(t) = \frac{dQ_{\theta_i}}{d\mu}(t), \quad f_{\theta_i}(x/t) = \frac{dP_{\theta_i}}{dQ_{\theta_i}}, \quad i = 1, 2; \quad (2.13)$$

Όπου με t θα συμβολίζονται οι τιμές του T . Με βάση τα παραπάνω έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.2

Έστω $\phi \in \Phi^*$ και $Q_{\theta_i}, P_{\theta_i}, i = 1, 2$, είναι δύο μέτρα πιθανότητας που ορίζονται από τις (2.12) και (2.13). Τότε έχουμε

$$D_\phi(Q_{\theta_1}, Q_{\theta_2}) \leq D_\phi(P_{\theta_1}, P_{\theta_2}).$$

Η ισότητα ισχύει αν ο μετασχηματισμός T είναι επαρκής για τις κατανομές πιθανότητας P_{θ_1} και P_{θ_2} .

Απόδειξη.

Έχουμε

$$\begin{aligned} D_\phi(P_{\theta_1}, P_{\theta_2}) &= \int_{\mathcal{X}} f_{\theta_2}(x) \phi\left(\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)}\right) d\mu(x) \\ &= \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} f_{\theta_2}(x/t) g_{\theta_2}(t) \phi\left(\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)}\right) d\mu(t) d\mu(x) \\ &= \int_{\mathcal{Y}} g_{\theta_2}(t) \left(\int_{\mathcal{X}} f_{\theta_2}(x/t) \phi\left(\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)}\right) d\mu(x) \right) d\mu(t). \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα του Jensen παίρνουμε

$$D_\phi(P_{\theta_1}, P_{\theta_2}) \geq \int_y g_{\theta_2}(t) \left(\phi \left(\int_x f_{\theta_2}(x/t) \phi \left(\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)} \right) d\mu(x) \right) \right) d\mu(t).$$

Όμως,

$$\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)} = \frac{\frac{dP_{\theta_1}}{d\mu}}{\frac{dP_{\theta_2}}{d\mu}} = \frac{\frac{dQ_{\theta_1}}{d\mu} \frac{dP_{\theta_1}}{dQ_{\theta_1}}}{\frac{dQ_{\theta_2}}{d\mu} \frac{dP_{\theta_2}}{dQ_{\theta_2}}} = \frac{g_{\theta_1}(t) f_{\theta_1}(x/t)}{g_{\theta_2}(t) f_{\theta_2}(x/t)},$$

(2.14)

τότε,

$$D_\phi(P_{\theta_1}, P_{\theta_2}) \geq \int_y g_{\theta_2}(t) \phi \left(\frac{g_{\theta_1}(t)}{g_{\theta_2}(t)} \right) d\mu(t) = D_\phi(Q_{\theta_1}, Q_{\theta_2}).$$

Αν η ϕ είναι αυστηρά κυρτή, η ισότητα ισχύει αν

$$\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)} = \int_x f_{\theta_2}(x/t) \frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)} d\mu(x), \quad \text{για όλα τα } x.$$

Ο δεύτερος όρος στην προηγούμενη ανισότητα είναι ίσος με $g_{\theta_1}(t)/g_{\theta_2}(t)$ από την (2.14). Τότε, χρησιμοποιώντας το θεώρημα της παραγοντοποίησης, η ισότητα ισχύει αν ο μετασχηματισμός T είναι επαρκής για τις κατανομές πιθανότητας P_{θ_1} και P_{θ_2} .

•

Στην ακόλουθη πρόταση η $\{P_\theta\}_{\theta \in \Theta}$, $\Theta \subset \mathbb{R}$, είναι μια οικογένεια μέτρων πιθανότητας που ορίζονται πάνω στη σ -άλγεβρα υποσυνόλων του Borel της ευθείας των πραγματικών αριθμών με μονότονο λόγο πιθανοφάνειας στο x . Δηλαδή αν $\theta_1 < \theta_2$, οι $f_{\theta_1}(x)$ και $f_{\theta_2}(x)$ είναι διαφορετικές κατανομές και ο λόγος $f_{\theta_1}(x)/f_{\theta_2}(x)$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση του x .

Πρόταση 2.3

Υποθέτουμε ότι οι κατανομές πιθανότητας $\{P_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ ορίζονται στην ευθεία των πραγματικών αριθμών, με $\theta \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ και έστω η P_θ να είναι μια απόλυτα συνεχής κατανομή σε σχέση με ένα σ -πεπερασμένο μέτρο μ . Υποθέτουμε επίσης ότι οι αντίστοιχες συναρτήσεις πυκνότητας ή συναρτήσεις μάζας πιθανότητας έχουν

μονότονο λόγο πιθανοφάνειας στο x . Αν $a < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < b$ και η συνάρτηση ϕ είναι συνεχής, τότε ισχύει

$$D_\phi(\theta_1, \theta_2) \leq D_\phi(\theta_1, \theta_3), \phi \in \Phi^*. \quad (2.15)$$

Παρατήρηση 2.2

Είναι φανερό ότι αν η h είναι μια παραγωγίσιμη αύξουσα πραγματική συνάρτηση, τότε τα (h, ϕ) –μέτρα απόκλισης ικανοποιούν επίσης τις προτάσεις 2.1, 2.2 και 2.3.

Παρατήρηση 2.3

Εάν θεωρήσουμε μια συνάρτηση $\phi \in \Phi^*$ η οποία είναι αυστηρά κυρτή στο $x=1$, είναι δυνατό να ορίσουμε ένα νέο μέτρο απόκλισης, βάσει μιας δεδομένης ϕ – απόκλισης, με τέτοιο τρόπο ώστε το νέο μέτρο απόκλισης να είναι συμμετρικό. Αυτό μπορεί να συμβεί αν θεωρήσουμε το μέτρο της απόκλισης που σχετίζεται με τη συνάρτηση $\varphi(t) = \phi(t) + t\phi\left(\frac{1}{t}\right)$.

2.3 ϕ –Ανισότητες

Την έννοια της ϕ – ανομοιότητα παρουσίασε πρώτος ο Lindsay (1994) και ο Menéndez (1998) εισήγαγε τη ϕ – ανισότητα επίσημα ως μια επέκταση της

ϕ – απόκλισης.

Ορισμός 2.2

Η ϕ – ανομοιότητα μεταξύ των κατανομών πιθανότητας P_{θ_1} και P_{θ_2} ορίζεται ως

$$D_\phi(P_{\theta_1}, P_{\theta_2}) = D_\phi(\theta_1, \theta_2) = \int_{\mathcal{X}} f_{\theta_2} \phi\left(\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)}\right) d\mu(x),$$

(2.16)

όπου η συνάρτηση $\phi : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ θεωρείται ότι είναι συνεχής, φθίνουσα στο $(0, 1)$ και αύξουσα στο $(1, \infty)$, με $\phi(1) = 0$. Η τιμή $\phi(0) \in (0, \infty]$ ορίζεται από τη συνεχή επέκταση.

Παρατήρηση 2.4

Πρέπει να σημειωθεί ότι η κατηγορία των ϕ – ανομοιοτήτων περιέχει όλες τις

ϕ -αποκλίσεις του Csizsár με $\phi: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ κυρτή και ίση με μηδέν μόνο στο 1. Τότε, η κυρτότητα που έχουμε υποθέσει και η σχέση $\phi(1) = 0$ συνεπάγονται ότι

$$\frac{\phi(t) - \phi(1)}{t - 1} = \frac{\phi(t)}{t - 1}$$

είναι αύξουσα για $t > 0$. Ως εκ τούτου, η $\phi(t)$ είναι αύξουσα για $t > 1$ εκτός αν $\phi(t) = 0$ σε ένα διάστημα $(1, t_1)$, και φθίνουσα για $0 < t < 1$ εκτός αν $\phi(t) = 0$ σε ένα διάστημα $(t_0, 1)$. Όμως η περίπτωση, $\phi(t) = 0$ για $t \neq 1$, εξαιρείται λόγω των υποθέσεων.

Είναι πολύ εύκολο να επαληθεύσουμε ότι οι συναρτήσεις :

$$i) \quad \phi(x) = \min\left((x-1)^2, (1-1/x)^2\right)$$

$$ii) \quad \phi(x) = \frac{x \log x}{(1+x \log x)}$$

$$iii) \quad \phi(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2}$$

$$iv) \quad \phi(x) = 1 - \exp\left(-a(x-1)^2\right), \quad a > 0,$$

δεν είναι κυρτές, αλλά ικανοποιούν τις ιδιότητες των ϕ -ανομοιοτήτων.

Κεφάλαιο 3

Καλή προσαρμογή απλής μηδενικής υπόθεσης βάσει

φ -συναρτήσεων

3.1 Εισαγωγή

Το πρόβλημα της καλής προσαρμογής μιας κατανομής από την οποία προέρχεται ένα τυχαίο δείγμα εξετάζεται κάτω από την μηδενική υπόθεση $H_0 : F = F_0$ και αντιμετωπίζεται συχνά διαμερίζοντας το εύρος των δεδομένων σε ξένα διαστήματα και ελέγχοντας την υπόθεση $H_0 : p = p_0$. Έστω $\mathcal{P} = \{E_i\}_{i=1, \dots, M}$ να είναι μια διαμέριση της ευθείας των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} σε M διαστήματα. Έστω $p = (p_1, \dots, p_M)^T$ και $p_0 = (p_1^0, \dots, p_M^0)^T$ να είναι οι αληθείς και οι υποθετικές πιθανότητες των διαστημάτων $E_i, i=1, \dots, M$, αντίστοιχα, με τέτοιο τρόπο ώστε $p_i = \Pr_F(E_i), i=1, \dots, M$, και $p_i^0 = \Pr_{F_0}(E_i) = \int_{E_i} dF_0, i=1, \dots, M$.

Έστω Y_1, \dots, Y_n ένα τυχαίο δείγμα από την κατανομή F , έστω $N_i = \sum_{j=1}^n I_{E_i}(Y_j)$, όπου $I_{E_i}(Y_j) = 1$ αν $Y_j \in E_i$ και 0 διαφορετικά και $\hat{p} = (\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_M)^T$ με $\hat{p}_i = N_i/n, i=1, \dots, M$, να είναι οι απόλυτες και οι σχετικές συχνότητες στα διαστήματα, αντίστοιχα.

Αν θέλουμε να εξετάσουμε την απλή μηδενική υπόθεση,

$$H_0 : p = p_0, \quad (3.1)$$

τα στατιστικά κριτήρια (ελεγχοσυνάρτηση) που χρησιμοποιούνται πολύ συχνά είναι το στατιστικό κριτήριο του Pearson (ή κριτήριο χι-τετράγωνο), X^2 :

$$X^2 \equiv \sum_{i=1}^M \frac{(N_i - np_i^0)^2}{np_i^0} \quad (3.2)$$

και το στατιστικό κριτήριο (ελεγχοσυνάρτηση) του λόγου πιθανοφάνειας, G^2 :

$$G^2 \equiv 2 \sum_{i=1}^M N_i \log \frac{N_i}{np_i^0} \quad (3.3)$$

Τα δύο αυτά στατιστικά κριτήρια είναι ειδικές περιπτώσεις της οικογένειας των στατιστικών κριτηρίων απόκλισης-δύναμης που εισήγαγαν οι Cressie και Read (1984) και όρισαν ως

$$T_n^\lambda(\hat{p}, p^0) = \frac{2n}{\lambda(\lambda+1)} \sum_{i=1}^M \hat{p}_i \left(\left(\frac{\hat{p}_i}{p_i^0} \right)^\lambda - 1 \right) = \frac{2}{\lambda(\lambda+1)} \sum_{i=1}^M N_i \left(\left(\frac{N_i}{np_i^0} \right)^\lambda - 1 \right), \quad (3.4)$$

με $-\infty < \lambda < \infty$. Τα στατιστικά κριτήρια $T_n^0(\hat{p}, p^0)$ και $T_n^{-1}(\hat{p}, p^0)$ ορίζονται να είναι τα όρια του $T_n^\lambda(\hat{p}, p^0)$, όταν $\lambda \rightarrow 0$ και $\lambda \rightarrow -1$, αντίστοιχα. Συγκεκριμένες τιμές του λ στη σχέση (3.4) αντιστοιχούν στα γνωστά στατιστικά κριτήρια : χι-τετράγωνο στατιστικό κριτήριο X^2 ($\lambda=1$), στατιστικό κριτήριο λόγου πιθανοφάνειας G^2 ($\lambda=0$), στατιστικό κριτήριο Freeman-Tukey ($\lambda=-1/2$), τροποποιημένο στατιστικό κριτήριο του λόγου πιθανοφάνειας ή κριτήριο ελάχιστης διάκρισης πληροφορίας (Gokhale και Kullback, 1978) ($\lambda=-1$), τροποποιημένο στατιστικό κριτήριο-Neyman ή τροποποιημένο χι-τετράγωνο στατιστικό κριτήριο ($\lambda=-2$) και στατιστικό κριτήριο Cressie-Read ($\lambda=2/3$). Οι εκφράσεις των στατιστικών κριτηρίων X^2 και G^2 δόθηκαν από τις σχέσεις (3.2) και (3.3) αντίστοιχα. Οι εκφράσεις για τα άλλα στατιστικά κριτήρια δίνονται παρακάτω :

i) $\lambda = -2$ (τροποποιημένο στατιστικό κριτήριο χι-τετράγωνο)

$$T_n^{-2}(\hat{p}, p^0) = n \sum_{i=1}^M \frac{(p_i^0 - \hat{p}_i)^2}{\hat{p}_i} = \sum_{i=1}^M \frac{(np_i^0 - N_i)^2}{N_i}.$$

ii) $\lambda = -1$ ($\lambda \rightarrow -1$)

(τροποποιημένο στατιστικό κριτήριο του λόγου πιθανοφάνειας)

$$T_n^{-1}(\hat{p}, p^0) = 2n \sum_{i=1}^M p_i^0 \log \left(\frac{p_i^0}{\hat{p}_i} \right) = 2 \sum_{i=1}^M N_i \log \left(\frac{np_i^0}{N_i} \right).$$

iii) $\lambda = -1/2$ (στατιστικό κριτήριο Freeman-Tukey)

$$T_n^{-1/2}(\hat{p}, p^0) = 8n \left(1 - \sum_{i=1}^M \sqrt{p_i^0 \hat{p}_i} \right) = 8n \left(1 - \sum_{i=1}^M \sqrt{\frac{p_i^0 N_i}{n}} \right).$$

iv) $\lambda = 2/3$ (στατιστικό κριτήριο Cressie-Read)

$$T_n^{2/3}(\hat{p}, p^0) = \frac{9}{5} n \left(\sum_{i=1}^M \hat{p}_i \left(\frac{\hat{p}_i}{p_i^0} \right)^{2/3} - 1 \right).$$

Αν και τα στατιστικά κριτήρια απόκλισης-δύναμης αποτελούν μια σημαντική ευέλικτη οικογένεια, είναι δυνατόν να θεωρήσουμε μια γενικότερη οικογένεια στατιστικών κριτηρίων για να ελέγξουμε την υπόθεση (3.1) που θα περιλαμβάνει την (3.4) σαν μια ειδική περίπτωση. Τα κριτήρια αυτά είναι τα στατιστικά κριτήρια ϕ - απόκλισης, τα οποία ορίζονται ως

$$T_n^\phi(\hat{p}, p^0) = \frac{2n}{\phi''(1)} \sum_{i=1}^M p_i^0 \phi\left(\frac{\hat{p}_i}{p_i^0}\right), \quad \phi \in \Phi^*. \quad (3.5)$$

Στη σχέση (3.5) υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $\phi(x)$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη για $x > 0$ με τη δεύτερη παράγωγο $\phi''(1) \neq 0$.

Εφαρμογή 3.1

Μπορούμε πολύ εύκολα να αποδείξουμε ότι πολλά γνωστά στατιστικά κριτήρια προέρχονται από την οικογένεια των στατιστικών κριτηρίων ϕ - απόκλισης χρησιμοποιώντας μια κατάλληλη ϕ - συνάρτηση σε κάθε περίπτωση.

Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση $\phi(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2$ προκύπτει το στατιστικό κριτήριο του Pearson διότι για $\phi''(x) = 1 \Rightarrow \phi''(1) = 1$ και

$$\begin{aligned} T_n^\phi(\hat{p}, p^0) &= \frac{2n}{\phi''(1)} \sum_{i=1}^M p_i^0 \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{p}_i}{p_i^0} - 1 \right)^2 = n \sum_{i=1}^M p_i^0 \left(\frac{\hat{p}_i - p_i^0}{p_i^0} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^M \frac{(n\hat{p}_i - np_i^0)^2}{np_i^0} = \sum_{i=1}^M \frac{(N_i - np_i^0)^2}{np_i^0} \equiv X^2. \end{aligned}$$

Από τη συνάρτηση $\phi(x) = x \log x - x + 1$ ή την $\phi(x) = x \log x$, προκύπτει το στατιστικό κριτήριο του λόγου πιθανοφάνειας. Έχουμε $\phi''(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \phi''(1) = 1$ και

$$\begin{aligned} T_n^\phi(\hat{p}, p^0) &= \frac{2n}{\phi''(1)} \sum_{i=1}^M p_i^0 \left[\frac{\hat{p}_i}{p_i^0} \log \left(\frac{\hat{p}_i}{p_i^0} \right) - \frac{\hat{p}_i}{p_i^0} + 1 \right] = 2n \sum_{i=1}^M \left[\hat{p}_i \log \left(\frac{\hat{p}_i}{p_i^0} \right) - \hat{p}_i + p_i^0 \right] \\ &= 2n \sum_{i=1}^M \hat{p}_i \log \left(\frac{\hat{p}_i}{p_i^0} \right) - 2n \sum_{i=1}^M \hat{p}_i + 2n \sum_{i=1}^M p_i^0 \\ &= 2n \sum_{i=1}^M \hat{p}_i \log \left(\frac{\hat{p}_i}{p_i^0} \right) - 2n + 2n = 2 \sum_{i=1}^M N_i \log \left(\frac{N_i}{np_i^0} \right) \equiv G^2. \end{aligned}$$

Από την συνάρτηση $\phi(x) = (x-1)\log x$, προκύπτει το στατιστικό κριτήριο

J -απόκλισης διότι $\phi''(x) = \frac{x+1}{x^2} \Rightarrow \phi''(1) = 2$ και

$$\begin{aligned} T_n^\phi(\hat{p}, p^0) &= \frac{2n}{\phi''(1)} \sum_{i=1}^M p_i^0 \left(\frac{\hat{p}_i}{p_i^0} - 1 \right) \log \left(\frac{\hat{p}_i}{p_i^0} \right) = n \sum_{i=1}^M (\hat{p}_i - p_i^0) \log \left(\frac{\hat{p}_i}{p_i^0} \right) \\ &= n \sum_{i=1}^M \hat{p}_i \log \left(\frac{\hat{p}_i}{p_i^0} \right) - n \sum_{i=1}^M p_i^0 \log \left(\frac{\hat{p}_i}{p_i^0} \right) \\ &= \sum_{i=1}^M N_i \log \left(\frac{N_i}{np_i^0} \right) + \sum_{i=1}^M np_i^0 \log \left(\frac{np_i^0}{N_i} \right). \end{aligned}$$

Από την συνάρτηση $\phi(x) = (1-\sqrt{x})^2$ προκύπτει το στατιστικό κριτήριο *Matusita*

διότι $\phi''(x) = \frac{1}{2x^{3/2}} \Rightarrow \phi''(1) = \frac{1}{2}$ και

$$T_n^\phi(\hat{p}, p^0) = \frac{2n}{\phi''(1)} \sum_{i=1}^M p_i^0 \left(1 - \sqrt{\frac{\hat{p}_i}{p_i^0}} \right)^2 = 4n \sum_{i=1}^M \left(\sqrt{p_i^0} - \sqrt{\hat{p}_i} \right)^2.$$

Από την συνάρτηση $\phi(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$, προκύπτει το στατιστικό κριτήριο

Balakrishnan-Sanghvi διότι $\phi'(x) = \frac{4(x-1)}{(x+1)^3}$, $\phi''(1) = \frac{1}{2}$ και

$$T_n^\phi(\hat{p}, p^0) = \frac{2n}{\phi''(1)} \sum_{i=1}^M p_i^0 \frac{\left(\frac{\hat{p}_i}{p_i^0} - 1 \right)^2}{\left(\frac{\hat{p}_i}{p_i^0} + 1 \right)^2} = 4n \sum_{i=1}^M p_i^0 \left(\frac{\hat{p}_i - p_i^0}{\hat{p}_i + p_i^0} \right)^2.$$

Από την συνάρτηση $\phi_{(-1/2)}(x) = 4 \left(\frac{x}{2} - \sqrt{x} + \frac{1}{2} \right)$, για $\lambda = -1/2$ προκύπτει το

στατιστικό κριτήριο *Freeman-Tukey* διότι $\phi''(x) = \frac{1}{x^{3/2}} \Rightarrow \phi''(1) = 1$ και

$$T_n^\phi(\hat{p}, p^0) = \frac{2n}{\phi''(1)} \sum_{i=1}^M p_i^0 4 \left(\frac{1}{2} \frac{\hat{p}_i}{p_i^0} - \sqrt{\frac{\hat{p}_i}{p_i^0}} + \frac{1}{2} \right) = 8n \sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{2} \hat{p}_i - p_i^0 \sqrt{\frac{\hat{p}_i}{p_i^0}} + \frac{1}{2} p_i^0 \right)$$

$$\begin{aligned}
&= 8n \left(\sum_{i=1}^M \frac{1}{2} \hat{p}_i - \sum_{i=1}^M \sqrt{\hat{p}_i p_i^0} + \sum_{i=1}^M \frac{1}{2} p_i^0 \right) = 8n \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^M \sqrt{\frac{p_i^0 N_i}{n}} + \frac{1}{2} \right) \\
&= 8n \left(1 - \sum_{i=1}^M \sqrt{\frac{p_i^0 N_i}{n}} \right).
\end{aligned}$$

Είναι πολύ εύκολο να δείξουμε ότι το στατιστικό κριτήριο Matusita συμπίπτει με το κριτήριο Freeman-Tukey διότι έχουμε

$$\begin{aligned}
4n \sum_{i=1}^M \left(\sqrt{\hat{p}_i} - \sqrt{p_i^0} \right)^2 &= 4n \sum_{i=1}^M \left(\hat{p}_i - 2\sqrt{\hat{p}_i p_i^0} + p_i^0 \right) = 4n \left(\sum_{i=1}^M \hat{p}_i - 2 \sum_{i=1}^M \sqrt{\hat{p}_i p_i^0} + \sum_{i=1}^M p_i^0 \right) \\
4n \left(1 - 2 \sum_{i=1}^M \sqrt{\hat{p}_i p_i^0} + 1 \right) &= 8n \left(1 - \sum_{i=1}^M \sqrt{\frac{p_i^0 N_i}{n}} \right).
\end{aligned}$$

3.2 ϕ -Αποκλίσεις και έλεγχοι καλής προσαρμογής με μη μεταβαλλόμενο αριθμό κλάσεων

Είναι πολύ γνωστό ότι ο Pearson (1900) απέδειξε ότι $X^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L} X_{M-1}^2$, με X^2 να δίνεται από την (3.2). Αργότερα το αποτέλεσμα αυτό επεκτάθηκε για το στατιστικό κριτήριο του λόγου πιθανοφάνειας και για το τροποποιημένο χι-τετράγωνο στατιστικό κριτήριο από τους Neyman και Pearson (1928) και Neyman (1949), αντίστοιχα. Αργότερα οι Cressie και Read (1984) απέδειξαν ότι $T_n^\lambda(\hat{p}, p^0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L} X_{M-1}^2$ κάτω από την μηδενική υπόθεση $H_0: p = p_0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Ο Zografos (1990) απέδειξε ότι $T_n^\phi(\hat{p}, p^0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L} X_{M-1}^2$ κάτω από τη μηδενική υπόθεση $H_0: p = p_0$ για κάθε $\phi \in \Phi^*$. Σε αυτή την παράγραφο, θα μελετήσουμε την ασυμπτωτική κατανομή του στατιστικού κριτηρίου ϕ -απόκλισης $T_n^\phi(\hat{p}, p^0)$ κάτω από τη μηδενική υπόθεση $H_0: p = p_0$, κάτω από την εναλλακτική υπόθεση $H_1: p \neq p_0$ και κάτω από τις συναφείς εναλλακτικές υποθέσεις που θα διατυπωθούν στη συνέχεια της παραγράφου.

Θεώρημα 3.1.

Κάτω από τη μηδενική υπόθεση $H_0: p = p_0 = (p_1^0, \dots, p_M^0)^T$, η ασυμπτωτική κατανομή του στατιστικού κριτηρίου ϕ -απόκλισης, $T_n^\phi(\hat{p}, p^0)$, είναι η χ^2 -τετράγωνο με $M-1$ βαθμούς ελευθερίας.

Πόρισμα 3.1.

Κάτω από τη μηδενική υπόθεση $H_0: p = p_0$, η ασυμπτωτική κατανομή του στατιστικού κριτηρίου ϕ -απόκλισης, $T_n^\phi(p^0, \hat{p})$, είναι η χ^2 -τετράγωνο με $M-1$ βαθμούς ελευθερίας.

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = x\phi(x^{-1})$. Αν $\phi \in \Phi^*$ τότε $\varphi \in \Phi^*$ και από το θεώρημα 3.1 έχουμε

$$T_n^\varphi(\hat{p}, p^0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L} X_{M-1}^2.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\varphi''(1) = \phi''(1)$, έχουμε

$$\begin{aligned} T_n^\varphi(\hat{p}, p^0) &= \frac{2n}{\varphi''(1)} D_\varphi(\hat{p}, p^0) = \frac{2n}{\varphi''(1)} \sum_{i=1}^M p_i^0 \varphi\left(\frac{\hat{p}_i}{p_i^0}\right) \\ &= \frac{2n}{\phi''(1)} \sum_{i=1}^M p_i^0 \frac{\hat{p}_i}{p_i^0} \phi\left(\frac{p_i^0}{\hat{p}_i}\right) = T_n^\phi(p^0, \hat{p}). \end{aligned}$$

•

Παρατήρηση 3.1.

α) Στην περίπτωση της απόκλισης Kullback-Leibler έχουμε

$$T_n^0(\hat{p}, p^0) = 2nK(\hat{p}, p^0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L} X_{M-1}^2$$

και

$$T_n^0(p^0, \hat{p}) = 2nK(p^0, \hat{p}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L} X_{M-1}^2.$$

Το πρώτο στατιστικό κριτήριο είναι το κριτήριο του λόγου πιθανοφάνειας και το δεύτερο είναι το τροποποιημένο κριτήριο λόγου πιθανοφάνειας.

β) Στην περίπτωση των (h, ϕ) -αποκλίσεων η ασυμπτωτική κατανομή των στατιστικών κριτηρίων

$$T_n^{\phi, h}(\hat{p}, p^0) = \frac{2n}{h'(0)\phi''(1)} D_\phi^h(\hat{p}, p^0)$$

και

$$T_n^{\phi, h}(p^0, \hat{p}) = \frac{2n}{h'(0)\phi''(1)} D_\phi^h(p^0, \hat{p})$$

είναι η χι-τετράγωνο με $M - 1$ βαθμούς ελευθερίας.

Βάσει του θεωρήματος 3.1, αν το τυχαίο δείγμα είναι αρκετά μεγάλο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το $100(1 - \alpha)$ εκατοστημόριο $X_{M-1, \alpha}^2$, της χι-τετράγωνο κατανομής με $M - 1$ βαθμούς ελευθερίας που ορίζεται από την εξίσωση $\Pr(X_{M-1}^2 \geq X_{M-1, \alpha}^2) = \alpha$, για να προτείνουμε τον παρακάτω κανόνα απόφασης :

“Απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση H_0 σε ένα επίπεδο σημαντικότητας α ,

$$\text{εάν } T_n^\phi(\hat{p}, p^0) > X_{M-1, \alpha}^2 \text{ ” (ή } T_n^\phi(p^0, \hat{p}) > X_{M-1, \alpha}^2 \text{).} \quad (3.6)$$

Η σχέση (3.6) θα είναι ο έλεγχος καλής προσαρμογής βάσει του στατιστικού κριτηρίου ϕ -απόκλισης.

Θεώρημα 3.2.

Κάτω από την υπόθεση $H_1: p = p_0$ ισχύουν τα ακόλουθα :

$$\sqrt{n} \left(D_\phi(\hat{p}, p^0) - D_\phi(p^*, p^0) \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L} N(0, \sigma_1^2(p^*)),$$

με το $\sigma_1^2(p^*)$ να δίνεται από τη σχέση

$$\sigma_1^2(p^*) = \sum_{i=1}^M p_i^* \left(\phi' \left(\frac{p_i^*}{p_i^0} \right) \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^M p_i^* \phi' \left(\frac{p_i^*}{p_i^0} \right) \right)^2.$$

και

$$\sqrt{n} \left(D_\phi(p^0, \hat{p}) - D_\phi(p^0, p^*) \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L} N(0, \sigma_2^2(p^*)),$$

με το $\sigma_2^2(p^*)$ να δίνεται από τη σχέση

$$\sigma_2^2(p^*) = \sum_{i=1}^M p_i^* s_i^2 - \left(\sum_{i=1}^M p_i^* s_i \right)^2,$$

όπου

$$s_i = \phi\left(\frac{p_i^0}{p_i^*}\right) - \frac{p_i^0}{p_i^*} \phi'\left(\frac{p_i^0}{p_i^*}\right), \quad i = 1, \dots, M.$$

Πόρισμα 3.2.

α) Στην περίπτωση του μέτρου απόκλισης Kullback-Leibler έχουμε

$$\sigma_1^2(p^*) = \sum_{i=1}^M p_i^* \left(\log \frac{p_i^*}{p_i^0} \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^M p_i^* \log \frac{p_i^*}{p_i^0} \right)^2,$$

$$\sigma_2^2(p^*) = \sum_{i=1}^M \frac{(p_i^0)^2}{p_i^*} - 1.$$

β) Στην περίπτωση των (h, ϕ) -αποκλίσεων έχουμε

$$\sigma_1^2(p^*) = \sum_{i=1}^M p_i^* \left(h'(D_\phi(p^*, p^0)) \phi'\left(\frac{p_i^*}{p_i^0}\right) \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^M p_i^* h'(D_\phi(p^*, p^0)) \phi'\left(\frac{p_i^*}{p_i^0}\right) \right)^2$$

και

$$\begin{aligned} \sigma_2^2(p^*) = & \sum_{i=1}^M p_i^* \left(h'(D_\phi(p^0, p^*)) \right) \left(\phi\left(\frac{p_i^0}{p_i^*}\right) - \frac{p_i^0}{p_i^*} \phi'\left(\frac{p_i^0}{p_i^*}\right) \right)^2 \\ & - \left(\sum_{i=1}^M p_i^* \left(h'(D_\phi(p^0, p^*)) \right) \left(\phi\left(\frac{p_i^0}{p_i^*}\right) - \phi'\left(\frac{p_i^0}{p_i^*}\right) \right) \right)^2. \end{aligned}$$

Στο παρακάτω θεώρημα παρουσιάζουμε μία προσέγγιση της συνάρτησης ισχύος για τον έλεγχο καλής προσαρμογής που δόθηκε στην (3.6).

Θεώρημα 3.3.

Έστω $p^* = (p_1^*, \dots, p_M^*)^T$ μια κατανομή πιθανότητας με $p^* \neq p_0$. Η ισχύς του ελέγχου βάσει του κανόνα που δόθηκε στην (3.6), στο $p^* = (p_1^*, \dots, p_M^*)^T$, είναι

$$\beta_{n,\phi}(p_1^*, \dots, p_M^*) = 1 - \Phi_n \left(\frac{1}{\sigma_1(p^*)} \left(\frac{\phi''(1)}{2\sqrt{n}} X_{M-1,\alpha}^2 - \sqrt{n} D_\phi(p^*, p^0) \right) \right),$$

όπου η Φ_n τείνει ομοιόμορφα στην κανονική κατανομή και

$$\sigma_1^2(p^*) = \sum_{i=1}^M p_i^* \left(\phi' \left(\frac{p_i^*}{p_i^0} \right) \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^M p_i^* \phi' \left(\frac{p_i^*}{p_i^0} \right) \right)^2.$$

Απόδειξη.

Κάτω από την υπόθεση $H_1 : p^* \neq p_0$ η ισχύς του ελέγχου είναι

$$\begin{aligned} \beta_{n,\phi}(p^*) &= \Pr \left(T_n^\phi(\hat{p}, p^0) > X_{M-1,\alpha}^2 / H_1 : p = p^* \right) \\ &= \Pr \left(\frac{2n}{\phi''(1)} \sum_{i=1}^M p_i^0 \phi \left(\frac{\hat{p}_i}{p_i^0} \right) > X_{M-1,\alpha}^2 / H_1 : p = p^* \right) \\ &= \Pr \left(\sqrt{n} (D_\phi(\hat{p}, p^0)) > \frac{\phi''(1)}{2\sqrt{n}} X_{M-1,\alpha}^2 / H_1 : p = p^* \right) \\ &= \Pr \left(\sqrt{n} (D_\phi(\hat{p}, p^0) - D_\phi(p^*, p^0)) > \frac{\phi''(1)}{2\sqrt{n}} X_{M-1,\alpha}^2 - \sqrt{n} D_\phi(p^*, p^0) \right) \\ &= \Pr \left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma_1(p^*)} (D_\phi(\hat{p}, p^0) - D_\phi(p^*, p^0)) > \frac{1}{\sigma_1(p^*)} \left(\frac{\phi''(1)}{2\sqrt{n}} X_{M-1,\alpha}^2 - \sqrt{n} D_\phi(p^*, p^0) \right) \right) \\ &= 1 - \Phi_n \left(\frac{1}{\sigma_1(p^*)} \left(\frac{\phi''(1)}{2\sqrt{n}} X_{M-1,\alpha}^2 - \sqrt{n} D_\phi(p^*, p^0) \right) \right) \\ &= \left(\text{από το θεώρημα 3.2 έχουμε } \sqrt{n} (D_\phi(\hat{p}, p^0) - D_\phi(p^*, p^0)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L} N(0, \sigma_1^2(p^*)) \right). \end{aligned}$$

Βάσει του αποτελέσματος του θεωρήματος 3.3 μια προσέγγιση της συνάρτησης ισχύος του ελέγχου που δίνεται στην (3.6) μαζί με τον κανόνα απόφασης, στο

$p^* = (p_1^*, \dots, p_M^*)^T$, είναι η

$$\beta_{n,\phi}(p_1^*, \dots, p_M^*) \approx 1 - \Phi_n \left(\frac{1}{\sigma_1(p^*)} \left(\frac{\phi''(1)}{2\sqrt{n}} X_{M-1,\alpha}^2 - \sqrt{n} D_\phi(p^*, p^0) \right) \right),$$

όπου η Φ είναι η τυπική κανονική κατανομή. Είναι προφανές ότι θα ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{n,\phi}(p_1^*, \dots, p_M^*) = 1.$$

Προκειμένου να παραχθεί ένας μη τετριμμένος ασυμπτωτικός έλεγχος, ο Cochran (1952) πρότεινε τη χρήση ενός συνόλου τοπικών εναλλακτικών υποθέσεων που τείνουν στην μηδενική υπόθεση όσο το μέγεθος του δείγματος n αυξάνεται. Υποθέτουμε το πολυωνυμικό διάνυσμα πιθανοτήτων

$$p_n \equiv p_0 + d / \sqrt{n},$$

όπου $d = (d_1, \dots, d_M)^T$ είναι ένα σταθερό $M \times 1$ διάνυσμα τέτοιο ώστε $\sum_{j=1}^M d_j = 0$, και n να είναι ο συνολικός αριθμός πειραμάτων της πολυωνυμικής κατανομής. Καθώς $n \rightarrow \infty$ η ακολουθία των διανυσμάτων πιθανότητας $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο διάνυσμα πιθανότητας p_0 κάτω από την μηδενική υπόθεση με τάξη $O(n^{-1/2})$.

Μπορούμε να πούμε ότι η σχέση

$$H_{1,n} : p = p_n \equiv p^0 + d / \sqrt{n} \quad (3.7)$$

είναι μια ακολουθία συναφών εναλλακτικών υποθέσεων που τείνει στην μηδενική υπόθεση p^0 . Παρατηρούμε ότι εάν θεωρήσουμε ένα σημείο $p^* \neq p^0$ μπορούμε να γράψουμε $p^* = p^0 + n^{-1/2} (\sqrt{n}(p^* - p^0))$, και αν ορίσουμε $p_n \equiv p^0 + d / \sqrt{n}$ με

$d = \sqrt{n}(p^* - p^0)$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την έκφραση

$$\beta_{n,\phi}(p_n) = \Pr(T_n^\phi(\hat{p}, p^0) > X_{M-1,\alpha}^2 / H_{1,n} : p = p_n)$$

για να έχουμε μια προσέγγιση για την συνάρτηση ισχύος του ελέγχου στο p^* .

Θεώρημα 3.4

Η ασυμπτωτική κατανομή ενός στατιστικού κριτηρίου ϕ -απόκλισης $T_n^\phi(\hat{p}, p^0)$, κάτω από την εναλλακτική υπόθεση (3.7), είναι η μη κεντρική χ -τετράγωνο κατανομή με $M-1$ βαθμούς ελευθερίας και μη κεντρική παράμετρο δ που δίνεται από την σχέση

$$\delta = d^T \text{diag}\left((p^0)^{-1}\right) d$$

$$= (d_1, \dots, d_M) \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1^0} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2^0} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{p_M^0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_M \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα 3.1

Τα παρακάτω δεδομένα αντιπροσωπεύουν τον αριθμό των τραυματισμένων παικτών σε ένα τυχαίο δείγμα 200 ποδοσφαιρικών αγώνων :

Τραυματισμένοι παίκτες	0	1	2	3	≥ 4
πλήθος αγώνων	82	90	20	7	1

Θέλουμε να εξετάσουμε την υπόθεση ότι τα δεδομένα ακολουθούν την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 0.775$ σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.05$ χρησιμοποιώντας το στατιστικό κριτήριο Freeman-Tukey . Διαμερίζοντας τον δειγματικό χώρο ως εξής

$$E_1 = \{0\}, E_2 = \{1\}, E_3 = \{2\}, E_4 = \{3\} \text{ και } E_5 = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 4\},$$

και έστω $X \sim \text{Poisson}(0.775)$, έχουμε

$$p_1^0 = \Pr(X = 0) = \frac{(0.775)^0}{0!} e^{-0.775} = 0.4607$$

$$p_2^0 = \Pr(X = 1) = \frac{(0.775)^1}{1!} e^{-0.775} = 0.3570$$

$$p_3^0 = \Pr(X = 2) = \frac{(0.775)^2}{2!} e^{-0.775} = 0.1383$$

$$p_4^0 = \Pr(X = 3) = \frac{(0.775)^3}{3!} e^{-0.775} = 0.0357$$

$$p_5^0 = \Pr(X \geq 4) = 1 - \Pr(X < 4) = 0.0083$$

επομένως $p^0 = (0.4607, 0.3570, 0.1383, 0.0357, 0.0083)^T$. Θα απορρίψουμε την υπόθεση $H_0 : p = p^0$ αν ισχύει :

$$T_n^{-1/2}(\hat{p}, p^0) = 8n \left(1 - \sum_{i=1}^5 \sqrt{p_i^0 \hat{p}_i} \right) > X_{M-1, \alpha}^2$$

Από τα δεδομένα έχουμε $\hat{p} = (82/200, 90/200, 20/200, 7/200, 1/200)^T$, και $T_n^{-1/2}(\hat{p}, p^0) = 8.2971$. Όμως $X_{4,0.05}^2 = 9.4877 > 8.2971$ άρα αποδεχόμαστε την μηδενική υπόθεση.

Παράδειγμα 3.2

Έχουμε συλλέξει δεδομένα από 595 κυνοδρομίες στις οποίες οι αριθμοί εκκίνησης των 8 σκύλων που περιλαμβάνονται σε κάθε αγώνα ταξινομούνται σύμφωνα με τις τελικές θέσεις τους στον αγώνα. Υποθέτουμε ότι οι αρχικές θέσεις δίνονται τυχαία σε κάθε έναν από τους 8 σκύλους. Θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση ότι όλοι οι σκύλοι με διαφορετικό αριθμό εκκίνησης έχουν ίσες πιθανότητες να κερδίσουν τον αγώνα ανεξάρτητα από τις θέσεις των άλλων 7 σκύλων. Δηλαδή θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση :

$$H_0 : p_i = 1/8, i = 1, \dots, 8.$$

Οπότε, $p^0 = (0.125, 0.125, 0.125, 0.125, 0.125, 0.125, 0.125, 0.125)^T$.

Χρησιμοποιώντας το στατιστικό κριτήριο $S_{\phi_\alpha}(\hat{p}, p^0) = -\frac{8nM}{\phi''(1/M)} R_\phi(\hat{p}, p^0)$ που

ορίζεται από την συνάρτηση

$$\phi_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(x^\alpha - x), & \alpha \neq 1 \\ -x \log x, & \alpha = 1 \end{cases}$$

για $\alpha = 1, 13/7$ και 2 με επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.05$. Από τα δεδομένα έχουμε $\hat{p} = (0.175, 0.16, 0.111, 0.106, 0.104, 0.097, 0.101, 0.146)^T$. Υπολογίζοντας το στατιστικό κριτήριο για τις διάφορες τιμές της παράμετρου α παίρνουμε τα εξής αποτελέσματα :

α	1	13/7	2
$S_{\phi_\alpha}(\hat{p}, p^0)$	29.1768	30.5175	30.788

Όμως $X_{7,0.05}^2 = 14.07$, επομένως θα απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση.

3.3 Ελεγχος υποθέσεων παραμετρικών κατανομών

Όταν θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση

$$H_0 : F = F_\theta \quad (3.8)$$

η κατανομή F ανήκει σε μια παραμετρική οικογένεια κατανομών $\{F_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ όπου Θ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^{M_0} , $M_0 \geq 1$ και η παράμετρος θ είναι άγνωστη. Έστω $\mathcal{P} = \{E_i\}_{i=1, \dots, M}$ να είναι μια διαμέριση του χώρου \mathcal{X} του δείγματος. Ο τύπος

$$\Pr_\theta(E_i) = p_i(\theta) = \int_{E_i} dF_\theta, \quad i = 1, \dots, M$$

ορίζει ένα διακριτό στατιστικό μοντέλο στο οποίο οι πιθανότητες για τα στοιχεία των διαστημάτων E_i , $i = 1, \dots, M$ εξαρτώνται από την άγνωστη παράμετρο θ .

Η υπόθεση

$$H_0 : p = p(\theta_0)$$

όπου $\theta_0 \in \Theta$ είναι μια άγνωστη παράμετρος μπορεί να ελέγξει την υπόθεση (3.8).

Ορισμός 3.1.

Έστω Y_1, \dots, Y_n ένα τυχαίο δείγμα από έναν πληθυσμό που περιγράφεται από την τυχαία μεταβλητή X σχετιζόμενη με τον στατιστικό χώρο $(\mathcal{X}, \beta_x, P_\theta)_{\theta \in \Theta}$. Η ελάχιστη εκτιμήτρια ϕ -απόκλισης του θ_0 θα συμβολίζεται με $\hat{\theta}_\phi \in \Theta$ και θα επαληθεύει την

$$D_\phi(\hat{p}, p(\hat{\theta}_\phi)) = \inf_{\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^{M_0}} D_\phi(\hat{p}, p(\theta)).$$

Διαφορετικά, η ελάχιστη εκτιμήτρια ϕ – απόκλισης ικανοποιεί την συνθήκη

$$\hat{\theta}_\phi = \arg \inf_{\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^{M_o}} D_\phi(\hat{p}, p(\theta)) . \quad (3.9)$$

Παρατήρηση 3.2.

Αν θεωρήσουμε την οικογένεια των μέτρων απόκλισης-δύναμης θα λάβουμε την ελάχιστη εκτιμήτρια απόκλισης-δύναμης που όρισαν οι Cressie και Read (1984) και ορίζεται από την σχέση

$$\hat{\theta}_{(\lambda)} = \arg \inf_{\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^{M_o}} D_{\phi(\lambda)}(\hat{p}, p(\theta)) , \quad (3.10)$$

όπου

$$D_{\phi(\lambda)}(\hat{p}, p(\theta)) = \frac{1}{\lambda(\lambda+1)} \sum_{i=1}^M \hat{p}_i \left(\left(\frac{\hat{p}_i}{p_i(\theta)} \right)^\lambda - 1 \right) .$$

Για $\lambda \rightarrow 0$ παίρνουμε την εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας, για $\lambda = 1$ την ελάχιστη χ -τετράγωνο εκτιμήτρια, για $\lambda = -2$ την τροποποιημένη ελάχιστη

χ -τετράγωνο εκτιμήτρια (ή τροποποιημένη ελάχιστη εκτιμήτρια Neyman), για $\lambda \rightarrow -1$ την τροποποιημένη ελάχιστη εκτιμήτρια πιθανοφάνειας (ή εκτιμήτρια διάκρισης ελάχιστης πληροφορίας), για $\lambda = -0.5$ την εκτιμήτρια Freeman-Tukey και για $\lambda = 2/3$ την εκτιμήτρια Cressie-Read.

Θεώρημα 3.5.

Για την ελάχιστη ϕ – εκτιμήτρια του θ ισχύει :

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_\phi - \theta_0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L} N(0, I_F(\theta_0)^{-1})$$

όπου

$$I_F(\theta_0)^{-1} = [A(\theta_0)^T A(\theta_0)]^{-1}$$

και

$$A(\theta_0) = \text{diag}(p(\theta_0)^{-1/2}) J(\theta_0)$$

$$= \begin{pmatrix} p_1(\theta_0)^{-1/2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & p_2(\theta_0)^{-1/2} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & p_M(\theta_0)^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1(\theta_0)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial p_2(\theta_0)}{\partial \theta} \\ \vdots \\ \frac{\partial p_M(\theta_0)}{\partial \theta} \end{pmatrix}.$$

Εφαρμογή 3.2

Έστω Y_1, \dots, Y_n να είναι ένα τυχαίο δείγμα από έναν πληθυσμό X με συνάρτηση κατανομής

$$p_1(\theta) = \Pr(X = 1) = \frac{1}{4}(2 + \theta)$$

$$p_2(\theta) = \Pr(X = 2) = \frac{1}{4}(1 - \theta)$$

$$p_3(\theta) = \Pr(X = 3) = \frac{1}{4}(1 - \theta)$$

$$p_4(\theta) = \Pr(X = 4) = \frac{1}{4}\theta, \quad \text{όπου } \theta \in (0, 1).$$

Θα υπολογίσουμε την ελάχιστη ϕ -εκτιμήτρια του θ χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $\phi(x) = x \log x - x + 1$ και την ασυμπτωτική κατανομή της εκτιμήτριας.

Θέτουμε τη συνάρτηση

$$g(\theta) = D_\phi(\hat{p}, p(\theta))$$

$$= \sum_{i=1}^4 p_i(\theta) \phi\left(\frac{\hat{p}_i}{p_i(\theta)}\right) = \sum_{i=1}^4 p_i(\theta) \left(\frac{\hat{p}_i}{p_i(\theta)} \log\left(\frac{\hat{p}_i}{p_i(\theta)}\right) - \frac{\hat{p}_i}{p_i(\theta)} + 1 \right)$$

$$= \sum_{i=1}^4 \left(\hat{p}_i \log\left(\frac{\hat{p}_i}{p_i(\theta)}\right) - \hat{p}_i + p_i(\theta) \right) = \sum_{i=1}^4 \hat{p}_i \log\left(\frac{\hat{p}_i}{p_i(\theta)}\right) - \sum_{i=1}^4 \hat{p}_i + \sum_{i=1}^4 p_i(\theta)$$

$$\begin{aligned}
&= \hat{p}_1 \log\left(\frac{\hat{p}_1}{p_1(\theta)}\right) + \hat{p}_2 \log\left(\frac{\hat{p}_2}{p_2(\theta)}\right) + \hat{p}_3 \log\left(\frac{\hat{p}_3}{p_3(\theta)}\right) + \hat{p}_4 \log\left(\frac{\hat{p}_4}{p_4(\theta)}\right) - 1 + 1 \\
&= c - \hat{p}_1 \log p_1(\theta) - \hat{p}_2 \log p_2(\theta) - \hat{p}_3 \log p_3(\theta) - \hat{p}_4 \log p_4(\theta) \\
&= c - \hat{p}_1 \log(2+\theta) - \hat{p}_2 \log(1-\theta) - \hat{p}_3 \log(1-\theta) - \hat{p}_4 \log \theta .
\end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας ως προς θ την $g(\theta)$ και εξισώνοντας την με το μηδέν έχουμε

$$g'(\theta) = -\frac{\hat{p}_1}{2+\theta} + \frac{\hat{p}_2}{1-\theta} + \frac{\hat{p}_3}{1-\theta} - \frac{\hat{p}_4}{\theta} = 0 ,$$

Λύνοντας ως προς θ έχουμε

$$\begin{aligned}
\theta^2 (\hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \hat{p}_3 + \hat{p}_4) + \theta(2\hat{p}_2 + 2\hat{p}_3 - \hat{p}_1 + \hat{p}_4) - 2\hat{p}_4 &= 0 \\
\theta^2 + \theta(1 - 2\hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \hat{p}_3) - 2\hat{p}_4 &= 0
\end{aligned}$$

Επομένως η ελάχιστη ϕ -εκτιμήτρια του θ θα είναι :

$$\hat{\theta}_\phi(Y_1, \dots, Y_n) = \frac{(-1 + 2\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - \hat{p}_3) + \left((-1 + 2\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - \hat{p}_3)^2 + 8\hat{p}_4\right)^{1/2}}{2} .$$

Για την ασυμπτωτική κατανομή της ϕ -εκτιμήτριας του θ από το θεώρημα 3.5 έχουμε

$$\begin{aligned}
A(\theta) &= \text{diag}\left(p(\theta)^{-1/2}\right) J(\theta) \\
&= \begin{pmatrix} 2(2+\theta)^{-1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(1-\theta)^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\theta)^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\theta^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/4 \\ -1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{2}(2+\theta)^{-1/2}, -\frac{1}{2}(1-\theta)^{-1/2}, -\frac{1}{2}(1-\theta)^{-1/2}, \frac{1}{2}\theta^{-1/2}\right)^T .
\end{aligned}$$

Τότε

$$A(\theta)^T A(\theta) = \frac{1}{2} \frac{2\theta + 1}{(2 + \theta)(1 - \theta)\theta}$$

Τέλος για την ασυμπτωτική κατανομή της ϕ – εκτιμήτριας του θ θα ισχύει ότι

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_\phi(Y_1, \dots, Y_n) - \theta_0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L} N\left(0, \frac{2(2 + \theta_0)(1 - \theta_0)\theta_0}{2\theta_0 + 1}\right) .$$

Κεφάλαιο 4

Έλεγχοι καλής προσαρμογής για κατανομές παρελθοντικών και υπολειπόμενων χρόνων ζωής

4.1 Πειράματα προσομοίωσης για κατανομές παρελθοντικών χρόνων επιβίωσης

Έστω μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X που περιγράφει το χρόνο επιβίωσης ενός ατόμου ή κάποιου συστήματος για την οποία η συνάρτηση κατανομής $F_{X,\theta}$ ανήκει σε μια παραμετρική οικογένεια κατανομών $\{F_\theta\}_{\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^{M_0}}$ με παράμετρο θ να είναι άγνωστη.

Για την τυχαία μεταβλητή $X_t = [X | X \leq t]$, η συνάρτηση κατανομής του παρελθοντικού χρόνου επιβίωσης (past life) ενός ατόμου/συστήματος δεδομένου ότι αυτό το άτομο η σύστημα έχει επιβιώσει μέχρι και τη χρονική στιγμή t είναι η

$$F_{t,\theta}(x) = F(X | X \leq t) = \frac{F_\theta(x)}{F_\theta(t)}, \quad 0 \leq x \leq t.$$

Έστω ένα τυχαίο δείγμα $X_{t,1}, \dots, X_{t,n}$ που ακολουθεί κατανομή παρελθοντικού χρόνου $F_{t,\theta}$. Θέλουμε να ελέγξουμε την μηδενική υπόθεση :

$$H_0 : F_{t,\theta} = F_{t,\theta_0}.$$

Όπως είχαμε αναφέρει στο κεφάλαιο 3 θα διαμερίσουμε το διάστημα $[0, t]$ σε M ισομήκη διαστήματα E_i , $i = 1, \dots, M$, και $\hat{p}_t = (\hat{p}_{1,t}, \dots, \hat{p}_{M,t})^T$ να είναι οι σχετικές συχνότητες στα διαστήματα E_i , $i = 1, \dots, M$, και $p_t(\theta) = (p_{1,t}(\theta), \dots, p_{M,t}(\theta))^T$ να είναι οι πιθανότητες των διαστημάτων E_i , $i = 1, \dots, M$, κάτω από τη μηδενική υπόθεση, δηλαδή τα $p_{i,t}(\theta)$ ορίζονται ως

$$p_{i,t}(\theta) = \int_{\frac{(i-1)t}{M}}^{\frac{it}{M}} \frac{f_\theta(x)}{F_\theta(t)} dx, \quad i = 1, \dots, M,$$

όπου $\frac{f_\theta(x)}{F_\theta(t)}$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών $X_{t,1}, \dots, X_{t,n}$. Η μηδενική υπόθεση ελέγχεται με βάση τη στατιστική ελεγχοσυνάρτηση ϕ – απόκλισης και ορίζεται ως :

$$T_{n,t}^\phi(\hat{\theta}_\phi) = T_{n,t}^\phi(\hat{p}_t, p_t(\hat{\theta}_\phi)) = \frac{2n}{\phi''(1)} D_\phi(\hat{p}_t, p_t(\hat{\theta}_\phi)) = \frac{2n}{\phi''(1)} \sum_{i=1}^M p_{i,t}(\hat{\theta}_\phi) \phi\left(\frac{\hat{p}_{i,t}}{p_{i,t}(\hat{\theta}_\phi)}\right), \quad (4.1)$$

όπου η εκτιμήτρια της παραμέτρου θ ορίζεται από τη σχέση :

$$\hat{\theta}_\phi = \arg \inf_{\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^{M_0}} D_\phi(\hat{p}_t, p_t(\theta)) = \arg \inf_{\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^{M_0}} \left(\sum_{i=1}^M p_{i,t}(\theta) \phi\left(\frac{\hat{p}_{i,t}}{p_{i,t}(\theta)}\right) \right). \quad (4.2)$$

Στη συνέχεια της παραγράφου θα χρησιμοποιήσουμε προσομοιωμένα δεδομένα για να μελετήσουμε τη συμπεριφορά και την απόδοση των παρακάτω στατιστικών ελεγχοσυναρτήσεων

- στατιστική ελεγχοσυνάρτηση Cressie-Read (*CR*)
- στατιστική ελεγχοσυνάρτηση Pearson (X^2)
- στατιστική ελεγχοσυνάρτηση Φ_1 (Φ_1 – *Test*)

που προκύπτουν από την (4.1) για τις εξής ϕ συνάρτησεις

$$\left. \begin{aligned} \phi_{CR}(x) &= \frac{1}{\lambda(\lambda+1)} (x^{\lambda+1} - x - \lambda(x-1)), & \lambda \neq 0, -1 \\ \phi_{X^2}(x) &= \frac{1}{2} (1-x)^2 \\ \Phi_1(x) &= x^{1+\alpha} - \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) x^\alpha + \frac{1}{\alpha}, & \alpha > 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Η συνάρτηση Φ_1 σχετίζεται με το πρόσφατα προτεινόμενο μέτρο απόκλισης δύναμης ΒΗΗJ το οποίο εξαρτάται από μια θετική παράμετρο α και ορίζεται ως

$$I^\alpha(P_{\theta_1}, P_{\theta_2}) = \int_X \left(f_{\theta_2}(x)^{\alpha+1} - \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) f_{\theta_1}(x) f_{\theta_2}(x)^\alpha + \frac{1}{\alpha} f_{\theta_1}(x)^{\alpha+1} \right) d\mu(x), \quad \alpha > 0$$

και αποτελεί ειδική περίπτωση της οικογένειας αποκλίσεων ΒΗΗJ που προτάθηκε από τους Mattheou, Lee και Karagrigoriou (2009)

$$D_\phi(\theta_1, \theta_2) = \int_X f_{\theta_2}(x)^{\alpha+1} \Phi\left(\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)}\right) d\mu(x), \quad \alpha > 0, \phi \in \Phi^*.$$

Για τη συνάρτηση Φ_1 θα εξετάσουμε δυο διαφορετικές τιμές της παραμέτρου α , δηλαδή $\alpha = 10/9$ και $\alpha = 0.8$. Η τιμή $10/9$ έχει αποδειχθεί ότι είναι η βέλτιστη επιλογή για τη συνάρτηση Φ_1 (Βόντα και Τσανούσα 2010). Γνωρίζουμε από την παράγραφο 2.1 ότι η απόκλιση Cressie-Read για $\lambda \rightarrow 0$ προσεγγίζει την απόκλιση Kullback-Leibler, δηλαδή $\lim_{\lambda \rightarrow 0} I_\lambda(\theta_1, \theta_2) = K(\theta_1, \theta_2)$. Επομένως η στατιστική ελεγχουσυνάρτηση Cressie-Read για μια πολύ μικρή θετική τιμή της παραμέτρου λ ($\lambda = 0.0001$) τείνει να είναι ίση με τη στατιστική ελεγχουσυνάρτηση του λόγου πιθανοφάνειας (KL) που προκύπτει από την (4.1) για την ϕ συνάρτηση

$$\phi_{KL}(x) = x \log x.$$

Θα εξετάσουμε το μέγεθος των ελέγχων που βασίζονται στις πιο πάνω ϕ -συναρτήσεις και ορίζονται στην (4.1), κάτω από μια συγκεκριμένη μηδενική υπόθεση καθώς και την ισχύ τους για διάφορες εναλλακτικές υποθέσεις. Για να υπολογίσουμε το μέγεθος των ελέγχων θεωρούμε μια συνάρτηση κατανομής $F_{t,\theta}$ όπου η παράμετρος θ είναι μονοδιάστατη και θεωρούμε τη μηδενική υπόθεση

$$H_0 : F_{t,\theta} = F_{t,\theta_0}.$$

Για τον έλεγχο της παραπάνω μηδενικής υπόθεσης παράγουμε 20000 τυχαία δείγματα για διάφορα μεγέθη δείγματος $n = 20, 50, 100$ και 200 που προέρχονται από την κατανομή F_{t,θ_0} και για δύο χρονικές στιγμές t_1 και t_2 τέτοιες ώστε $F_{\theta_0}(t_1) = P(X \leq t_1) = 0.75$ και $F_{\theta_0}(t_2) = P(X \leq t_2) = 0.50$. Από τη σχέση (4.1) υπολογίζουμε κάθε φορά τη στατιστική ελεγχουσυνάρτηση ϕ -απόκλισης για κάθε δείγμα από τα 20000 για τις συναρτήσεις που δίνονται στην (4.2) και για δυο διαφορετικές τιμές του M , δηλαδή για $M = 3$ και για $M = 4$. Με επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.05$ επιχειρούμε τον στατιστικό έλεγχο και υπολογίζουμε το μέγεθος του ελέγχου, δηλαδή πόσες φορές από τις 20000 απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση (ή ισοδύναμα πόσες φορές από τις 20000 η ελεγχουσυνάρτηση είναι $> X_{M-1, 0.05}^2$). Μια ελεγχουσυνάρτηση θα είναι αξιόπιστη εάν το μεγεθός της είναι κοντά στο επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.05$.

Για να μελετήσουμε την ισχύ των ελέγχων για τη συγκεκριμένη συνάρτηση κατανομής $F_{t,\theta_0}(x)$ παράγουμε 20000 τυχαία δείγματα από μια άλλη διαφορετική συνάρτηση κατανομής και υπολογίζουμε πόσες φορές απορρίπτουμε την μηδενική

υπόθεση. Είναι λογικό η ισχύς των ελέγχων να αυξάνει όσο οι δυο συναρτήσεις κατανομής διαφέρουν όλο και περισσότερο.

Ακολούθως, θα παρουσιάσουμε στους πίνακες 4.1-4.20 τα αποτελέσματα των πειραμάτων προσομοίωσης που πραγματοποιήθηκαν. Στην πρώτη στήλη των πινάκων δίνεται το μέγεθος του δείγματος n . Όλοι οι έλεγχοι έχουν γίνει σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05. Στις στήλες 2-6 αντιστοιχούν οι παρακάτω έλεγχοι που προκύπτουν από τις αντίστοιχες στατιστικές ελεγκοσυναρτήσεις που ορίσαμε στην αρχή της παραγράφου

- έλεγχος Kullback-Leibler ($CR, \lambda = 0.0001$)
- έλεγχος Pearson (X^2)
- έλεγχος Cressie-Read ($CR, \lambda = 2/3$)
- έλεγχος Φ_1 ($\Phi_1 - Test, \alpha = 10/9$)
- έλεγχος Φ_1 ($\Phi_1 - Test, \alpha = 0.8$)

Έστω $F_\theta(x) = 1 - e^{-\theta x}$ να είναι η συνάρτηση κατανομής της Εκθετικής κατανομής με παράμετρο θ , $Exp(\theta)$. Θεωρούμε την υπό συνθήκη Εκθετική κατανομή $Exp_t(\theta)$ με παράμετρο θ και συνάρτηση κατανομής $F_{t,\theta}(x) = \frac{1 - e^{-\theta x}}{F(t)}$ με $t = t_1, t_2$ τέτοια ώστε $F_\theta(t_1) = P(X \leq t_1) = 0.75$ και $F_\theta(t_2) = P(X \leq t_2) = 0.5$. Θα εξετάσουμε την περίπτωση της $Exp_t(1)$, με $\theta = 1$ ως μηδενική υπόθεση και τα 20000 τυχαία δείγματα θα παράγονται από την $Exp_t(1)$. Στους πίνακες 4.1 - 4.4 παρουσιάζουμε το μέγεθος των ελέγχων από τις προσομοιώσεις που έγιναν για την $Exp_t(1)$. Για να υπολογίσουμε την ισχύ των ελέγχων για την $Exp_t(1)$ τα δεδομένα μας παράγονται από την υπό συνθήκη Γάμμα κατανομή $G_t(\alpha, 1)$ με παράμετρο κλίμακας 1 και παράμετρο σχήματος $\alpha = 0.25, 0.5, 2$ και 4, και συνάρτηση κατανομής $G_t(x) = \frac{G(x)}{G(t)}$, με $t = t_1, t_2$ όπου $G(x)$ η συνάρτηση κατανομής της Γάμμα κατανομής $G(\alpha, 1)$. Στους πίνακες 4.5-4.20 παρουσιάζουμε την ισχύ των ελέγχων από τις προσομοιώσεις που έγιναν για την $Exp_t(1)$ έναντι της $G_t(\alpha, 1)$.

Οι ελεγκοσυναρτήσεις αυτές εξετάστηκαν λεπτομερώς και στην μεταπτυχιακή εργασία Βόντα και Χουχούμης (2010).

Πίνακας 4.1: Μέγεθος για ελέγχους σε ε.σ. 5% της υπό συνθήκη Εκθετικής κατανομής

$Exp_{t_1}(1)$ με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 3$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.05875	0.04845	0.05085	0.0442	0.05085
50	0.0527	0.05075	0.0517	0.0498	0.05255
100	0.05385	0.0533	0.0529	0.05165	0.0529
200	0.05135	0.0499	0.0508	0.04965	0.0508

Πίνακας 4.2: Μέγεθος για ελέγχους σε ε.σ. 5% της υπό συνθήκη Εκθετικής κατανομής

$Exp_{t_1}(1)$ με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 4$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.06655	0.04	0.04515	0.038	0.0524
50	0.05205	0.04485	0.04665	0.04395	0.04795
100	0.0534	0.04745	0.049	0.047	0.0499
200	0.0514	0.04955	0.0504	0.0491	0.05055

Πίνακας 4.3: Μέγεθος για ελέγχους σε ε.σ. 5% της υπό συνθήκη Εκθετικής κατανομής

$Exp_{t_2}(1)$ με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 3$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.0663	0.0598	0.0602	0.05735	0.0602
50	0.0559	0.05575	0.0549	0.0535	0.0575
100	0.05255	0.0523	0.0503	0.0512	0.0503
200	0.0504	0.0494	0.0497	0.0487	0.0497

Πίνακας 4.4: Μέγεθος για ελέγχους σε ε.σ. 5% της υπό συνθήκη Εκθετικής κατανομής

$Exp_{t_2}(1)$ με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 4$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.0697	0.05135	0.0523	0.04955	0.05795
50	0.05655	0.05175	0.05285	0.05035	0.05455
100	0.05155	0.04935	0.0494	0.04895	0.0499
200	0.0503	0.04925	0.0494	0.0489	0.04945

Πίνακας 4.5: Ισχύς για ελέγχους σε ε.σ. 5% της Εκθετικής κατανομής $Exp_{t_1}(1)$ έναντι της Γάμμα κατανομής $G_{t_1}(0.25, 1)$ με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 3$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.13845	0.04065	0.0941	0.04015	0.0941
50	0.17645	0.17535	0.1756	0.17535	0.17575
100	0.3627	0.36165	0.3618	0.3616	0.362
200	0.62095	0.63065	0.62115	0.6296	0.6221

Πίνακας 4.6: Ισχύς για ελέγχους σε ε.σ. 5% της Εκθετικής κατανομής $Exp_{t_1}(1)$ έναντι της Γάμμα κατανομής $G_{t_1}(0.5, 1)$ με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 3$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.10285	0.0486	0.05605	0.0432	0.05605
50	0.1161	0.10095	0.1133	0.0995	0.11425
100	0.20685	0.19725	0.19735	0.1949	0.19735
200	0.36605	0.36035	0.36605	0.35685	0.36625

Πίνακας 4.7: Ισχύς για ελέγχους σε ε.σ. 5% της Εκθετικής κατανομής $Exp_{t_1}(1)$ έναντι της Γάμμα κατανομής $G_{t_1}(2, 1)$ με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 3$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.4318	0.3686	0.3686	0.3686	0.3686
50	0.68725	0.70035	0.68735	0.70035	0.68735
100	0.9256	0.9256	0.9256	0.9256	0.9256
200	0.9972	0.99695	0.99695	0.99695	0.99695

Πίνακας 4.8: Ισχύς για ελέγχους σε ε.σ. 5% της Εκθετικής κατανομής $Exp_{t_1}(1)$ έναντι της Γάμμα κατανομής $G_{t_1}(4, 1)$ με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 3$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.99925	0.99845	0.99845	0.99845	0.99845
50	1	1	1	1	1
100	1	1	1	1	1
200	1	1	1	1	1

Πίνακας 4.9: Ισχύς για ελέγχους σε ε.σ. 5% της Εκθετικής κατανομής $Exp_{t_1}(1)$ έναντι της Γάμμα κατανομής $G_{t_1}(0.25, 1)$ με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 4$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.1348	0.09705	0.11195	0.0729	0.1449
50	0.33555	0.32335	0.3284	0.31355	0.3307
100	0.58415	0.6056	0.6062	0.6046	0.6063
200	0.88175	0.8949	0.89	0.89565	0.8901

Πίνακας 4.10: Ισχύς για ελέγχους σε ε.σ. 5% της Εκθετικής κατανομής $Exp_{t_1}(1)$ έναντι της Γάμμα κατανομής $G_{t_1}(0.5, 1)$ με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 4$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.1042	0.0593	0.0651	0.05155	0.07325
50	0.17075	0.14535	0.15125	0.1378	0.15475
100	0.3015	0.2836	0.2892	0.2799	0.29325
200	0.55165	0.55045	0.55105	0.54845	0.55175

Πίνακας 4.11: Ισχύς για ελέγχους σε ε.σ. 5% της Εκθετικής κατανομής $Exp_{t_1}(1)$ έναντι της Γάμμα κατανομής $G_{t_1}(2, 1)$ με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 4$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.38215	0.3275	0.30395	0.299	0.32725
50	0.66945	0.6416	0.635	0.6139	0.646
100	0.92345	0.9109	0.9118	0.9049	0.9127
200	0.9977	0.9971	0.9972	0.99685	0.99735

Πίνακας 4.12: Ισχύς για ελέγχους σε ε.σ. 5% της Εκθετικής κατανομής $Exp_{t_1}(1)$ έναντι της Γάμμα κατανομής $G_{t_1}(4, 1)$ με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 4$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.9984	0.99685	0.99645	0.9949	0.99685
50	1	1	1	1	1
100	1	1	1	1	1
200	1	1	1	1	1

Πίνακας 4.13: Ισχύς για ελέγχους σε ε.σ. 5% της Εκθετικής κατανομής Exp_{t_2} (1) έναντι της Γάμμα κατανομής G_{t_2} (0.25, 1) με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 3$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.15545	0.06545	0.0952	0.0639	0.0952
50	0.2257	0.2216	0.22475	0.2215	0.22495
100	0.44295	0.442	0.442	0.4419	0.44205
200	0.72935	0.7429	0.72935	0.73405	0.7366

Πίνακας 4.14: Ισχύς για ελέγχους σε ε.σ. 5% της Εκθετικής κατανομής Exp_{t_2} (1) έναντι της Γάμμα κατανομής G_{t_2} (0.5, 1) με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 3$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.1003	0.0583	0.06295	0.04545	0.06295
50	0.133	0.1077	0.1291	0.10685	0.1292
100	0.22025	0.2141	0.21565	0.2061	0.21565
200	0.4062	0.39315	0.4048	0.39315	0.4048

Πίνακας 4.15: Ισχύς για ελέγχους σε ε.σ. 5% της Εκθετικής κατανομής Exp_{t_2} (1) έναντι της Γάμμα κατανομής G_{t_2} (2, 1) με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 3$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.64535	0.5789	0.5789	0.5789	0.5789
50	0.9235	0.928	0.9235	0.928	0.9235
100	0.99745	0.99745	0.99745	0.99745	0.99745
200	1	1	1	1	1

Πίνακας 4.16: Ισχύς για ελέγχους σε ε.σ. 5% της Εκθετικής κατανομής Exp_{t_2} (1) έναντι της Γάμμα κατανομής G_{t_2} (4, 1) με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 3$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.99995	0.99975	0.99975	0.99975	0.99975
50	1	1	1	1	1
100	1	1	1	1	1
200	1	1	1	1	1

Πίνακας 4.17: Ισχύς για ελέγχους σε ε.σ. 5% της Εκθετικής κατανομής $Exp_{t_2}(1)$ έναντι της Γάμμα κατανομής $G_{t_2}(0.25, 1)$ με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 4$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.1755	0.122	0.13395	0.09935	0.15495
50	0.40135	0.38325	0.38995	0.37015	0.39165
100	0.69575	0.69415	0.69765	0.6896	0.6988
200	0.9452	0.94835	0.9484	0.9486	0.94895

Πίνακας 4.18: Ισχύς για ελέγχους σε ε.σ. 5% της Εκθετικής κατανομής $Exp_{t_2}(1)$ έναντι της Γάμμα κατανομής $G_{t_2}(0.5, 1)$ με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 4$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.1119	0.0625	0.0698	0.058	0.08085
50	0.18185	0.15705	0.1648	0.14775	0.16865
100	0.32555	0.30615	0.3119	0.30215	0.31575
200	0.6075	0.5965	0.59975	0.5932	0.6017

Πίνακας 4.19: Ισχύς για ελέγχους σε ε.σ. 5% της Εκθετικής κατανομής $Exp_{t_2}(1)$ έναντι της Γάμμα κατανομής $G_{t_2}(2, 1)$ με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 4$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.5774	0.5185	0.49445	0.48205	0.5184
50	0.90755	0.89375	0.89115	0.8811	0.8961
100	0.99735	0.9965	0.9967	0.99595	0.99675
200	1	1	1	1	1

Πίνακας 4.20: Ισχύς για ελέγχους σε ε.σ. 5% της Εκθετικής κατανομής $Exp_{t_2}(1)$ έναντι της Γάμμα κατανομής $G_{t_2}(4, 1)$ με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 4$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.9995	0.99925	0.9991	0.9984	0.99925
50	1	1	1	1	1
100	1	1	1	1	1
200	1	1	1	1	1

4.2 Πειράματα προσομοίωσης για κατανομές υπολειπόμενων χρόνων επιβίωσης

Έστω μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X που περιγράφει το χρόνο επιβίωσης ενός ατόμου ή κάποιου συστήματος για την οποία η συνάρτηση κατανομής $F_{X,\theta}$ ανήκει σε μια παραμετρική οικογένεια κατανομών $\{F_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ όπου Θ είναι ένα ανοιχτό υπόσυνολο του \mathbb{R}^{M_0} με την παράμετρο θ να είναι άγνωστη.

Για την τυχαία μεταβλητή $X^t = [X | X > t]$, η συνάρτηση κατανομής του υπολειπόμενου χρόνου επιβίωσης (residual life) ενός ατόμου/συστήματος δεδομένου ότι αυτό το σύστημα ή άτομο θα συνεχίσει να επιβιώνει πέραν αυτής της χρονικής στιγμής $x > t$, είναι η

$$F_\theta^t(x) = F(X | X > t) = \frac{F_\theta(x)}{1 - F_\theta(t)}, \quad x \geq t$$

ή αλλιώς

$$F_\theta^t(x) = \frac{F_\theta(x)}{S_\theta(t)}, \quad x \geq t$$

όπου $S_\theta(t)$ θα είναι η συνάρτηση αξιοπιστίας ή επιβίωσης ενός ατόμου/συστήματος και εκφράζει την πιθανότητα η διάρκεια ζωής αυτού του ατόμου/συστήματος να είναι μεγαλύτερη του t .

Έστω ένα τυχαίο δείγμα X_1^t, \dots, X_n^t με κατανομή υπολειπόμενου χρόνου F_θ^t . Θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση ότι τα δεδομένα προέρχονται από τη συγκεκριμένη κατανομή υπολειπόμενου χρόνου, δηλαδή θέλουμε να ελέγξουμε την μηδενική υπόθεση

$$H_0 : F_\theta^t = F_{\theta_0}^t.$$

Χωρίζουμε το διάστημα $[t, \infty)$ σε M διαστήματα $E_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 1, \dots, M$, όπου $\tau_{M+1} = \infty$ και $\hat{p}^t = (\hat{p}_1^t, \dots, \hat{p}_M^t)^T$ να είναι οι σχετικές συχνότητες στα διαστήματα E_i , $i = 1, \dots, M$ και $p^t(\theta) = (p_1^t(\theta), \dots, p_M^t(\theta))^T$ να είναι οι πιθανότητες των διαστημάτων E_i , $i = 1, \dots, M$ κάτω από τη μηδενική υπόθεση, δηλαδή τα $p_i^t(\theta)$ ορίζονται ως

$$p_i^t(\theta) = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \frac{f_\theta(x)}{1 - F_\theta(t)} dx, \quad i = 1, \dots, M, \quad \text{με } \tau_{M+1} = \infty$$

ή

$$p_i^t(\theta) = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \frac{f_\theta(x)}{S_\theta(t)} dx, \quad i = 1, \dots, M, \quad \text{με } \tau_{M+1} = \infty$$

όπου $\frac{f_\theta(x)}{S_\theta(t)}$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X_1^t, \dots, X_n^t .

Όπως και στην παράγραφο 4.1 η μηδενική υπόθεση ελέγχεται με βάση τη στατιστική ελεγχοσυνάρτηση ϕ -απόκλισης της (4.1) όπου εκτίμηση της παραμέτρου θ δίνεται από τη σχέση (4.2)

Για να μελετήσουμε τη συμπεριφορά και την απόδοση των παρακάτω στατιστικών ελεγχοσυναρτήσεων

- στατιστική ελεγχοσυνάρτηση Cressie-Read (CR)
- στατιστική ελεγχοσυνάρτηση Pearson (X^2)
- στατιστική ελεγχοσυνάρτηση Φ_1 ($\Phi_1 - Test$)

που προκύπτουν από την (4.1) για τις ϕ συναρτήσεις της (4.3) θα ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία όπως και στην παράγραφο 4.1 .

Στους πίνακες 4.21-4.40 παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα των πειραμάτων προσομοίωσης που πραγματοποιήθηκαν. Στην πρώτη στήλη των πινάκων δίνεται το μέγεθος του δείγματος n . Όλοι οι έλεγχοι έχουν γίνει σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05. Στις στήλες 2-6 αντιστοιχούν οι παρακάτω έλεγχοι που προκύπτουν από τις αντίστοιχες στατιστικές ελεγχοσυναρτήσεις που ορίσαμε στην αρχή της παραγράφου 4.1

- έλεγχος Kullback-Leibler ($CR, \lambda = 0.0001$)
- έλεγχος Pearson (X^2)
- έλεγχος Cressie-Read ($CR, \lambda = 2/3$)
- έλεγχος Φ_1 ($\Phi_1 - Test, \alpha = 10/9$)
- έλεγχος Φ_1 ($\Phi_1 - Test, \alpha = 0.8$)

Έστω $F_\theta(x) = 1 - e^{-\theta x}$ να είναι η συνάρτηση κατανομής της Εκθετικής κατανομής με παράμετρο θ , $Exp(\theta)$. Θεωρούμε την υπό συνθήκη Εκθετική κατανομή $Exp^t(\theta)$ με παράμετρο θ και συνάρτηση κατανομής $F_\theta^t(x) = \frac{1 - e^{-\theta x}}{1 - F(t)} = \frac{1 - e^{-\theta x}}{S(t)}$ με $t = t_1, t_2$ τέτοια ώστε $1 - F_\theta(t_1) = P(X > t_1) = 0.75$ εδω είναι 0.75 προς τα δεξιά (0.25 αριστερά) και $1 - F_\theta(t_2) = P(X > t_2) = 0.85$. Θα εξετάσουμε την περίπτωση της $Exp^t(1)$, με $\theta = 1$ ως μηδενική υπόθεση και τα 20000 τυχαία δείγματα θα παράγονται από την $Exp^t(1)$. Στους πίνακες 4.21 - 4.24 παρουσιάζουμε το μέγεθος των ελέγχων από τις προσομοιώσεις που έγιναν για την $Exp^t(1)$. Για να υπολογίσουμε την ισχύ των ελέγχων για την $Exp^t(1)$ τα δεδομένα μας παράγονται από την υπό συνθήκη Γάμμα κατανομή $G^t(\alpha, 1)$ με παράμετρο κλίμακας 1 και παράμετρο σχήματος $\alpha = 0.25, 0.5, 2$ και 4, και συνάρτηση κατανομής $G^t(x) = \frac{G(x)}{1 - G(t)}$, με $t = t_1, t_2$ όπου $G(x)$ η συνάρτηση κατανομής της Γάμμα κατανομής $G(\alpha, 1)$. Στους πίνακες 4.25-4.40 παρουσιάζουμε την ισχύ των ελέγχων από τις προσομοιώσεις που έγιναν για την $Exp^t(1)$ έναντι της $G^t(\alpha, 1)$.

Στις προσομοιώσεις που ακολουθούν ο τρόπος διαμέρισης του συνόλου $[t, \infty)$ σε M διαστήματα έγινε ως εξής. Για κάθε σύνολο δεδομένων χρησιμοποιήθηκε η μέγιστη τιμή των παρατηρήσεων x^* και κατόπιν το διάστημα $[t, x^*]$ χωρίστηκε σε M ισομήκη διαστήματα. Αυτά τα διαστήματα αποτελούν τη διαμέριση του διαστήματος $[t, \infty)$ με την εξαίρεση ότι το τελευταίο διάστημα της διαμέρισης αφέθηκε να πηγαίνει έως το άπειρο.

Πίνακας 4.21 : Μέγεθος για ελέγχους σε ε.σ. 5% της υπό συνθήκη Εκθετικής κατανομής $Exp^{(1)}$ (1) με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 3$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.05425	0.0375	0.04975	0.03325	0.05875
50	0.05495	0.04275	0.04915	0.03715	0.0534
100	0.0544	0.04705	0.0498	0.04475	0.0516
200	0.0556	0.0523	0.05325	0.0498	0.0546

Πίνακας 4.22 : Μέγεθος για ελέγχους σε ε.σ. 5% της υπό συνθήκη Εκθετικής κατανομής $Exp^{(1)}$ (1) με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 4$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.0577	0.03665	0.0409	0.03455	0.04225
50	0.06255	0.0427	0.0473	0.03905	0.05025
100	0.0525	0.0464	0.0469	0.04405	0.0538
200	0.0518	0.05055	0.05195	0.0485	0.0536

Πίνακας 4.23 : Μέγεθος για ελέγχους σε ε.σ. 5% της υπό συνθήκη Εκθετικής κατανομής $Exp^{(2)}$ (1) με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 3$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.05775	0.03775	0.05095	0.0343	0.062
50	0.049	0.03975	0.04415	0.03405	0.04815
100	0.0491	0.0477	0.04975	0.0462	0.0512
200	0.052	0.0516	0.052	0.05045	0.0524

Πίνακας 4.24 : Μέγεθος για ελέγχους σε ε.σ. 5% της υπό συνθήκη Εκθετικής κατανομής $Exp^{(2)}$ (1) με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 4$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.0586	0.0398	0.0447	0.03685	0.04565
50	0.0621	0.0414	0.0458	0.03915	0.0486
100	0.0542	0.04715	0.04835	0.0442	0.0541
200	0.05635	0.05555	0.05805	0.05405	0.05905

Πίνακας 4.25 :Ισχύς για ελέγχους σε ε.σ. 5% της Εκθετικής κατανομής $Exp^{\lambda}(1)$ έναντι της Γάμμα κατανομής $G^{\lambda}(0.25, 1)$ με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 3$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.08405	0.0343	0.06685	0.02895	0.0827
50	0.0916	0.07575	0.08075	0.05205	0.08995
100	0.1031	0.1109	0.1118	0.11035	0.11215
200	0.1372	0.1527	0.1469	0.1523	0.14705

Πίνακας 4.26 :Ισχύς για ελέγχους σε ε.σ. 5% της Εκθετικής κατανομής $Exp^{\lambda}(1)$ έναντι της Γάμμα κατανομής $G^{\lambda}(0.5, 1)$ με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 3$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.07435	0.0373	0.0604	0.03095	0.07465
50	0.0802	0.0651	0.0701	0.045	0.0786
100	0.07345	0.0782	0.07915	0.07715	0.0793
200	0.0981	0.1066	0.10385	0.1063	0.10415

Πίνακας 4.27 :Ισχύς για ελέγχους σε ε.σ. 5% της Εκθετικής κατανομής $Exp^{\lambda}(1)$ έναντι της Γάμμα κατανομής $G^{\lambda}(2, 1)$ με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 3$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.1006	0.1194	0.12345	0.118	0.12545
50	0.16475	0.16125	0.1687	0.16855	0.1698
100	0.24975	0.24375	0.246	0.23805	0.24645
200	0.3563	0.34235	0.3485	0.3383	0.35045

Πίνακας 4.28 :Ισχύς για ελέγχους σε ε.σ. 5% της Εκθετικής κατανομής $Exp^{\lambda}(1)$ έναντι της Γάμμα κατανομής $G^{\lambda}(4, 1)$ με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 3$

n	CR $\lambda = 0.0001$	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.51265	0.57195	0.5647	0.5719	0.5647
50	0.82865	0.8294	0.8336	0.83625	0.83395
100	0.94805	0.9451	0.9463	0.9431	0.9472
200	0.98375	0.9813	0.98265	0.9803	0.98295

Πίνακας 4.29 :Ισχύς για ελέγχους σε ε.σ. 5% της Εκθετικής κατανομής $Exp^{(1)}$ (1) έναντι της Γάμμα κατανομής $G^{(1)}$ (0.25, 1) με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 4$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.07925	0.0422	0.0497	0.034	0.05145
50	0.11885	0.09	0.10115	0.08215	0.105
100	0.13965	0.15065	0.14825	0.14815	0.15775
200	0.1852	0.23315	0.2261	0.23415	0.2279

Πίνακας 4.30 :Ισχύς για ελέγχους σε ε.σ. 5% της Εκθετικής κατανομής $Exp^{(1)}$ (1) έναντι της Γάμμα κατανομής $G^{(1)}$ (0.5, 1) με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 4$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.07085	0.0365	0.04355	0.0307	0.04515
50	0.09365	0.0696	0.07825	0.064	0.08125
100	0.09695	0.1013	0.09895	0.0982	0.1076
200	0.1156	0.142	0.1384	0.1412	0.1393

Πίνακας 4.31 :Ισχύς για ελέγχους σε ε.σ. 5% της Εκθετικής κατανομής $Exp^{(1)}$ (1) έναντι της Γάμμα κατανομής $G^{(1)}$ (2, 1) με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 4$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.12545	0.13105	0.13575	0.13345	0.13565
50	0.20575	0.20665	0.20355	0.20195	0.20575
100	0.3286	0.31795	0.31745	0.31265	0.3204
200	0.5226	0.4958	0.50645	0.4884	0.50835

Πίνακας 4.32 :Ισχύς για ελέγχους σε ε.σ. 5% της Εκθετικής κατανομής $Exp^{(1)}$ (1) έναντι της Γάμμα κατανομής $G^{(1)}$ (4, 1) με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 4$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.6299	0.66575	0.6666	0.6724	0.66565
50	0.94455	0.94685	0.9457	0.94545	0.94595
100	0.99345	0.99245	0.993	0.99225	0.9931
200	0.99965	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994

Πίνακας 4.33: Ισχύς για ελέγχους σε ε.σ. 5% της Εκθετικής κατανομής $Exp^{f_2}(1)$ έναντι της Γάμμα κατανομής $G^{f_2}(0.25, 1)$ με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 3$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.09485	0.04015	0.07435	0.03115	0.09445
50	0.1101	0.09145	0.0974	0.0639	0.108
100	0.12425	0.1343	0.13505	0.1335	0.13555
200	0.1745	0.19575	0.1884	0.19535	0.1885

Πίνακας 4.34 : Ισχύς για ελέγχους σε ε.σ. 5% της Εκθετικής κατανομής $Exp^{f_2}(1)$ έναντι της Γάμμα κατανομής $G^{f_2}(0.5, 1)$ με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 3$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.081	0.03505	0.0625	0.02825	0.0803
50	0.08495	0.0674	0.073	0.04725	0.08225
100	0.0883	0.093	0.09395	0.09185	0.0945
200	0.11425	0.12675	0.12285	0.1265	0.12295

Πίνακας 4.35 : Ισχύς για ελέγχους σε ε.σ. 5% της Εκθετικής κατανομής $Exp^{f_2}(1)$ έναντι της Γάμμα κατανομής $G^{f_2}(2, 1)$ με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 3$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.1278	0.14865	0.1521	0.14795	0.1536
50	0.2094	0.20665	0.2152	0.21575	0.2158
100	0.29965	0.2933	0.2953	0.28695	0.2964
200	0.4364	0.42275	0.4281	0.419	0.4301

Πίνακας 4.36 : Ισχύς για ελέγχους σε ε.σ. 5% της Εκθετικής κατανομής $Exp^{f_2}(1)$ έναντι της Γάμμα κατανομής $G^{f_2}(4, 1)$ με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 3$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.56	0.6171	0.616	0.641	0.6148
50	0.73785	0.7623	0.75215	0.7671	0.75235
100	0.89045	0.89575	0.89445	0.89375	0.8945
200	0.96865	0.96525	0.9667	0.96485	0.9677

Πίνακας 4.37 :Ισχύς για ελέγχους σε ε.σ. 5% της Εκθετικής κατανομής $Exp^{f_2}(1)$ έναντι της Γάμμα κατανομής $G^{f_2}(0.25, 1)$ με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 4$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.09295	0.04675	0.05685	0.03685	0.05835
50	0.14685	0.1192	0.13195	0.1094	0.13425
100	0.18325	0.1998	0.19645	0.1973	0.207
200	0.2608	0.31875	0.3115	0.31955	0.3122

Πίνακας 4.38 :Ισχύς για ελέγχους σε ε.σ. 5% της Εκθετικής κατανομής $Exp^{f_2}(1)$ έναντι της Γάμμα κατανομής $G^{f_2}(0.5, 1)$ με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 4$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.07635	0.03755	0.0454	0.0311	0.0467
50	0.10635	0.0801	0.08955	0.07175	0.09255
100	0.1151	0.12175	0.11865	0.1196	0.1274
200	0.15395	0.19	0.18425	0.19045	0.1854

Πίνακας 4.39 :Ισχύς για ελέγχους σε ε.σ. 5% της Εκθετικής κατανομής $Exp^{f_2}(1)$ έναντι της Γάμμα κατανομής $G^{f_2}(2, 1)$ με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 4$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.1484	0.1588	0.1631	0.16245	0.1622
50	0.26345	0.2683	0.2633	0.2626	0.26545
100	0.4261	0.41665	0.419	0.41175	0.42065
200	0.64005	0.6182	0.6269	0.6116	0.6286

Πίνακας 4.40 :Ισχύς για ελέγχους σε ε.σ. 5% της Εκθετικής κατανομής $Exp^{f_2}(1)$ έναντι της Γάμμα κατανομής $G^{f_2}(4, 1)$ με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M = 4$

n	KL	χ^2	CR $\lambda = 2/3$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 10/9$	$\Phi_1 - \text{Test}$ $\alpha = 0.8$
20	0.69925	0.72945	0.7305	0.73495	0.7294
50	0.96225	0.96395	0.963	0.9629	0.9632
100	0.99665	0.99615	0.99645	0.99585	0.99645
200	0.99975	0.99955	0.9996	0.99955	0.9996

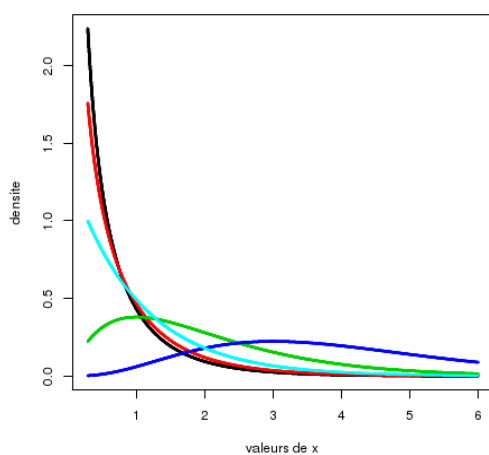
4.3 Ερμηνεία αποτελεσμάτων-Συμπεράσματα

Για τους πίνακες 4.1–4.4 παρατηρούμε ότι παίρνουμε καλά αποτελέσματα για όλες τις ελεγχουσυναρτήσεις για $n = 50, 100, 200$. Για μέγεθος δείγματος $n = 20$ οι τιμές του μεγέθους του ελέγχου αρχίζουν να αποκλίνουν από το επίπεδο σημαντικότητας 0.05 και ειδικά για την περίπτωση όπου $M = 4$ και $t = t_1$. Σε αυτήν την περίπτωση παρατηρούμε ότι οι ελεγχουσυναρτήσεις X^2 , CR και Φ_1 με $\alpha = 10/9$ μας δίνουν μικρότερες τιμές από 0.05 για μικρό μέγεθος δείγματος και ειδικά η ελεγχουσυνάρτηση Φ_1 με $\alpha = 10/9$ μας δίνει την μικρότερη για μέγεθος δείγματος $n = 20$ (0.038). Η ελεγχουσυνάρτηση Φ_1 με $\alpha = 0.8$ μας δίνει καλά αποτελέσματα και για μικρό μέγεθος δείγματος σε όλες τις περιπτώσεις και ανταγωνίζεται τις ελεγχουσυναρτήσεις CR με παράμετρο $2/3$ και X^2 . Σε μερικές περιπτώσεις ο έλεγχος Φ_1 με $\alpha = 0.8$ μας δίνει καλύτερα αποτελέσματα από τους ελέγχους CR και X^2 .

Για τους πίνακες 4.5–4.20 παρατηρούμε ότι η ισχύς των ελέγχων αυξάνει για όλες τις ελεγχουσυναρτήσεις όταν το μέγεθος του δείγματος μεγαλώνει και όταν η Γάμμα κατανομή διαφέρει αρκετά από την Εκθετική. Ειδικότερα όταν ο αριθμός των διαστημάτων είναι $M = 4$ η ισχύς αυξάνει πιο γρήγορα όσο το n αυξάνει και έχουμε από τα αποτελέσματα μεγαλύτερη ισχύ σε σχέση με τα αποτελέσματα που παίρνουμε όταν ο αριθμός των διαστημάτων είναι $M = 3$. Από τα αποτελέσματα που μας δίνουν αυτοί οι πίνακες φαίνεται ότι η ελεγχουσυνάρτηση Φ_1 με παράμετρο $\alpha = 0.8$ μας δίνει καλύτερη ισχύ με ελάχιστες διαφορές από τους υπόλοιπους ελέγχους και κυρίως δίνει πολύ καλή ισχύ για μικρά μεγέθη δείγματος.

Για τους πίνακες 4.21–4.24 παρατηρούμε ότι παίρνουμε καλά αποτελέσματα για όλες τις ελεγχουσυναρτήσεις για $n = 100, 200$. Για μέγεθος δείγματος $n = 50$ και 20 οι τιμές του μεγέθους του ελέγχου αποκλίνουν από την τιμή 0.05 και ιδιαίτερα η ελεγχουσυνάρτηση Φ_1 με $\alpha = 10/9$, η οποία δίνει τις μικρότερες τιμές για το μέγεθος του ελέγχου και φαίνεται να αποκλίνει περισσότερο από την τιμή 0.05 σε σύγκριση με τις υπόλοιπες ελεγχουσυναρτήσεις. Αντιθέτως, η ελεγχουσυνάρτηση Φ_1 με παράμετρο $\alpha = 0.8$ μας δίνει τιμές κοντά στο 0.05 και για μικρό μέγεθος δείγματος και φαίνεται να ανταγωνίζεται την ελεγχουσυνάρτηση CR , η οποία μας δίνει εξίσου καλά αποτελέσματα για όλες τις περιπτώσεις. Όμως, σε μερικές περιπτώσεις ο έλεγχος Φ_1 με $\alpha = 0.8$ είναι καλύτερος από τον έλεγχο CR .

Για τους πίνακες 4.24 – 4.40 παρατηρούμε ότι έχουμε πολύ μικρή ισχύ έναντι της Γάμμα κατανομής με παράμετρο σχήματος $\alpha = 0.25$ και 0.5 για t_1 και t_2 και όταν ο αριθμός των διαστημάτων είναι $M = 3$ και 4 . Αυτό συμβαίνει διότι η Εκθετική κατανομή είναι πολύ κοντά στη Γάμμα κατανομή με παράμετρο σχήματος $\alpha = 0.25$ και 0.5 μετά από το 25^ο ποσοστημόριο, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t_1 = 0.28$ ή μετά το 15^ο ποσοστημόριο, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t_2 = 0.16$ όπως φαίνεται και στο σχήμα παρακάτω.



Σχήμα 4.1: Συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας υπολειπόμενου χρόνου

Επιβίωσης

- $gamma^{t_1}(0.5,1)$
- $gamma^{t_1}(0.25,1)$
- $gamma^{t_1}(2,1)$
- $gamma^{t_1}(4,1)$
- $exp^{t_1}(1)$

Το γεγονός λοιπόν ότι αυτές οι κατανομές σχεδόν ταυτίζονται από ένα σημείο και μετά έχει σαν αποτέλεσμα ο έλεγχος να μπορεί πολύ δύσκολα να τις ξεχωρίσει και να παίρνουμε μικρή ισχύ. Αντιθέτως, η ισχύς των ελέγχων έναντι της Γάμμα κατανομής με παράμετρο σχήματος $\alpha=2$ και 4 αυξάνει για όλες τις ελεγχοσυναρτήσεις καθώς το μέγεθος του δείγματος μεγαλώνει και αφού αυτές οι Γάμμα κατανομές διαφέρουν αρκετά από την Εκθετική. Ειδικότερα, όταν ο αριθμός των διαστημάτων είναι $M=4$ η ισχύς αυξάνει πιο γρήγορα όσο πιο μεγάλο είναι το μέγεθος του δείγματος σε σχέση με τον αριθμό των διαστημάτων να είναι $M=3$. Επίσης, πρέπει να επισημάνουμε ότι οι έλεγχοι CR και Φ_1 με $\alpha=0.8$ μας δίνουν καλύτερη ισχύ με πολύ μικρή διαφορά από τον έλεγχο X^2 , ο οποίος μας δίνει εξίσου πολύ καλή ισχύ.

Από όλα τα αποτελέσματα των πειραμάτων προσομοίωσης που πραγματοποιήθηκαν προκύπτουν κάποια γενικά συμπεράσματα που είναι τα εξής :

- Σε όλες τις ελεγχοσυναρτήσεις που εξετάσαμε παρατηρείται βελτίωση στο μέγεθος και την ισχύ όταν το μέγεθος του δείγματος n αυξάνεται.
- Οι ελεγχοσυναρτήσεις Cressie-Read (CR) με παράμετρο $2/3$ και X^2 παρουσιάζουν σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις παρόμοια συμπεριφορά.
- Η ελεγχοσυνάρτηση Φ_1 με παράμετρο $\alpha=0.8$ φαίνεται να έχει καλύτερη ισχύ από τις υπόλοιπες ελεγχοσυναρτήσεις και μας δίνει πολύ καλές τιμές για το μέγεθος του ελέγχου ακόμα και όταν το μέγεθος δείγματος είναι μικρό. Ειδικότερα, όσον αφορά τους παρελθοντικούς χρόνους ζωής έχει καλύτερη ισχύ από τις υπόλοιπες ελεγχοσυναρτήσεις ακόμα και όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό.

Παράρτημα:

Εντολές στην R για εξαγωγή των αποτελεσμάτων

Παρακάτω παρουσιάζεται ο κώδικας του προγράμματος που υλοποιήθηκε στην γλώσσα R για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων του κεφαλαίου 4. Ο κώδικας αφορά την περίπτωση που θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση ότι τα δεδομένα προέρχονται από μια συνάρτηση κατανομής υπολειπόμενου χρόνου επιβίωσης και έχουμε ως μηδενική υπόθεση την υπό συνθήκη Εκθετική κατανομή $Exp^t(1)$ και αριθμό διαστημάτων $M = 3$. Ανάλογα υλοποιούνται τα προγράμματα και για τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

```
### orismos twn metablhtwn kai twn parametrwn ###
```

```
test_statistic1<-rep(0,20000)
```

```
test_statistic11<-rep(0,20000)
```

```
test_statistic2<-rep(0,20000)
```

```
test_statistic22<-rep(0,20000)
```

```
test_statistic3<-rep(0,20000)
```

```
test_statistic33<-rep(0,20000)
```

```
test_statistic4<-rep(0,20000)
```

```
test_statistic44<-rep(0,20000)
```

```
test_statistic5<-rep(0,20000)
```

```
test_statistic55<-rep(0,20000)
```

```
N<- 20000
```

```
n1 <- 2500
```

```
t <- qexp(0.25, 1)
```

```
M <- 3
```

```
#jj<- (10)
```

```
#set.seed(10)
```

```
### orismos tw n f-sunarthsewn kai ypologismos ths deuterhs paragwgou gia x=1 ###
```

```
### sunarthsh Cressie-Read ( $\lambda=0.0001$ ) ###
```

```
phi1 <- function(x)
```

```
{
```

```
( $x^{(1.0001)} - x - (0.0001) * (x - 1) / ((0.0001) * ((0.0001) + 1))$ )
```

```
}
```

```
g1 <- deriv3(~ (z11.0001 - z1 - (0.0001) * (z1 - 1)) / ((0.0001) * ((0.0001) + 1)), "z1")
```

```
z1 <- 1
```

```
eval(g1)
```

```
.hessian[, "z1", "z1"]
```

```
second_deriv1 <- .hessian[, "z1", "z1"]
```

```
### sunarthsh Pearson ###
```

```
phi2 <- function(x)
```

```
{
```

```
0.5 * (x - 1)2
```

```
}
```

```
g2 <- deriv3(~ 0.5 * (z2 - 1)2, "z2")
```

```
z2 <- 1
```

```
eval(g2)
```

```
.hessian[, "z2", "z2"]
```

```
second_deriv2 <- .hessian[, "z2", "z2"]
```

```
### sunarthsh Cressie-Read ( $\lambda=2/3$ ) ###
```

```
phi3 <- function(x)
```

```
{
```

```
( $x^{(5/3)} - x - (2/3) * (x - 1) / ((2/3) * ((2/3) + 1))$ )
```



```

}

g3 <- deriv3(~ (z3^(5/3)-z3-(2/3)*(z3-1))/((2/3)*((2/3)+1)), "z3")

z3<- 1

eval(g3)

.hessian[, "z3", "z3"]

second_deriv3 <- .hessian[, "z3", "z3"]

### sunarthsh f1 (a=10/9) ###

phi4 <- function(x)
{
  x^(19/9)-((19/9)/(10/9))*(x^(10/9))+1/(10/9)
}

g4 <- deriv3(~ (z4^(19/9)-((19/9)/(10/9))*(z4^(10/9))+1/(10/9))), "z4")

z4 <- 1

eval(g4)

.hessian[, "z4", "z4"]

second_deriv4 <- .hessian[, "z4", "z4"]

### sunarthsh f1 (a=0.8) ###

phi5 <- function(x)
{
  x^(1.8)-(1.8/0.8)*(x^0.8)+(1/0.8)
}

g5 <- deriv3(~ z5^(1.8)-(1.8/0.8)*(z5^0.8)+(1/0.8), "z5")

z5<- 1

eval(g5)

.hessian[, "z5", "z5"]

```

```
second_deriv5 <- .hessian[, "z5", "z5"]
```

```
#####
```

```
l_1 <- function(x,d,xast)
```

```
{  
  for (i in 1:length(x))  
  {  
    if ( x[i]> t+(d-1)*(xast-t)/M && x[i] <= t+d*(xast-t)/M )  
      x[i] <- 1  
    else  
      x[i] <- 0  
  }  
  sum(x)/length(x)  
  
}
```

```
#####
```

```
l_2 <- function(x)
```

```
{  
  for (i in 1:length(x))  
  {  
    if ( x[i] > t )  
      x[i] <- 1  
    else  
      x[i] <- 0  
  }  
  sum(x)/length(x)  
  
}
```

```

### upologismos tou statistikou krithriou ###

for (e in 1:N)
{
y1 <- rexp(n1, 1)
y2 <- y1[y1 > t]

y <-y2[1:200]

xast<- max(y)

n <- length(y)

a1 <- 0
a2 <- 0

### print(e) ###

l1<-l_1(y,1,xast)
l2<-l_1(y,2,xast)
l3<-l_1(y,3,xast)

l21<-l_2(y)
l22<-l_2(y)
l23<-l_2(y)

distance1 <- function(x,u)
{
a1 <- (pexp(t+1*(xast-t)/M,u)-pexp(t+(1-1)*(xast-t)/M,u))/(1-pexp(t,u))
a11<- a1*phi1((l1/l21)/a1)
a2<- (pexp(t+2*(xast-t)/M,u)-pexp(t+(2-1)*(xast-t)/M,u))/(1-pexp(t,u))

```

```

a22<- a11+a2*phi1((I2/I22)/a2)
a3 <- (pexp(lnf,u)-pexp(t+(3-1)*(xast-t)/M,u))/(1-pexp(t,u))
a33<- a22+a3*phi1((I3/I23)/a3)
return(a33)
}
distance2 <- function(x,u)
{
  a1 <- (pexp(t+1*(xast-t)/M,u)-pexp(t+(1-1)*(xast-t)/M,u))/(1-pexp(t,u))
a11<- a1*phi2((I1/I21)/a1)
a2<- (pexp(t+2*(xast-t)/M,u)-pexp(t+(2-1)*(xast-t)/M,u))/(1-pexp(t,u))
a22<- a11+a2*phi2((I2/I22)/a2)
a3 <- (pexp(lnf,u)-pexp(t+(3-1)*(xast-t)/M,u))/(1-pexp(t,u))
a33<- a22+a3*phi2((I3/I23)/a3)
return(a33)
}

distance3 <- function(x,u)
{
  a1 <- (pexp(t+1*(xast-t)/M,u)-pexp(t+(1-1)*(xast-t)/M,u))/(1-pexp(t,u))
a11<- a1*phi3((I1/I21)/a1)
a2<- (pexp(t+2*(xast-t)/M,u)-pexp(t+(2-1)*(xast-t)/M,u))/(1-pexp(t,u))
a22<- a11+a2*phi3((I2/I22)/a2)
a3 <- (pexp(lnf,u)-pexp(t+(3-1)*(xast-t)/M,u))/(1-pexp(t,u))
a33<- a22+a3*phi3((I3/I23)/a3)
return(a33)
}

distance4 <- function(x,u)

```

```

{
a1 <- (pexp(t+1*(xast-t)/M,u)-pexp(t+(1-1)*(xast-t)/M,u))/(1-pexp(t,u))
a11<- a1*phi4((I1/I21)/a1)
a2<- (pexp(t+2*(xast-t)/M,u)-pexp(t+(2-1)*(xast-t)/M,u))/(1-pexp(t,u))
a22<- a11+a2*phi4((I2/I22)/a2)
a3 <- (pexp(lnf,u)-pexp(t+(3-1)*(xast-t)/M,u))/(1-pexp(t,u))
a33<- a22+a3*phi4((I3/I23)/a3)
return(a33)
}

distance5 <- function(x,u)
{
  a1 <- (pexp(t+1*(xast-t)/M,u)-pexp(t+(1-1)*(xast-t)/M,u))/(1-pexp(t,u))
a11<- a1*phi5((I1/I21)/a1)
a2<- (pexp(t+2*(xast-t)/M,u)-pexp(t+(2-1)*(xast-t)/M,u))/(1-pexp(t,u))
a22<- a11+a2*phi5((I2/I22)/a2)
a3 <- (pexp(lnf,u)-pexp(t+(3-1)*(xast-t)/M,u))/(1-pexp(t,u))
a33<- a22+a3*phi5((I3/I23)/a3)
return(a33)
}

distance_theta1 <- function(u)
{
  distance1(y,u)
}

b1 <- optimize(distance_theta1, c(0.00001, 5))

theta_hat1 <- b1$minimum

test_statistic1[e] <- 2*n*(1/second_deriv1)*distance1(y,theta_hat1)

```

```

### print(test_statistic1[e]) ###

distance_theta2 <- function(u)
{
  distance2(y,u)
}

b2 <- optimize(distance_theta2, c(0.00001, 5))

theta_hat2 <- b2$minimum

test_statistic2[e] <- 2*n*(1/second_deriv2)*distance2(y,theta_hat2)

### print(test_statistic2[e]) ###

distance_theta3 <- function(u)
{
  distance3(y,u)
}

b3 <- optimize(distance_theta3, c(0.00001, 5))

theta_hat3 <- b3$minimum

test_statistic3[e] <- 2*n*(1/second_deriv3)*distance3(y,theta_hat3)

### print(test_statistic3[e]) ###

distance_theta4 <- function(u)
{
  distance4(y,u)
}

b4 <- optimize(distance_theta4, c(0.00001, 5))

theta_hat4 <- b4$minimum

test_statistic4[e] <- 2*n*(1/second_deriv4)*distance4(y,theta_hat4)

### print(test_statistic4[e]) ###

```

```

distance_theta5 <- function(u)
{
  distance5(y,u)
}
b5 <- optimize(distance_theta5, c(0.00001, 5))
theta_hat5 <- b5$minimum
test_statistic5[e] <- 2*n*(1/second_deriv5)*distance5(y,theta_hat5)
### print(test_statistic5[e]) ###

### elegxos ths mhdenikhs upothesis ###
### upologismos tou megethous gia kathe elegxo ###

if (test_statistic1[e] > qchisq(0.95,M-2))
  test_statistic11[e] <- 1
else
  test_statistic11[e] <- 0

if (test_statistic2[e] > qchisq(0.95,M-2))
  test_statistic22[e] <- 1
else
  test_statistic22[e] <- 0

if (test_statistic3[e] > qchisq(0.95,M-2))
  test_statistic33[e] <- 1
else
  test_statistic33[e] <- 0

```

```
if (test_statistic4[e] > qchisq(0.95,M-2))
```

```
    test_statistic44[e] <- 1
```

```
else
```

```
    test_statistic44[e] <- 0
```

```
if (test_statistic5[e] > qchisq(0.95,M-2))
```

```
    test_statistic55[e] <- 1
```

```
else
```

```
    test_statistic55[e] <- 0
```

```
}
```

```
sum(test_statistic11)/N
```

```
sum(test_statistic22)/N
```

```
sum(test_statistic33)/N
```

```
sum(test_statistic44)/N
```

```
sum(test_statistic55)/N
```


Βιβλιογραφία

Ελληνική Βιβλιογραφία

- [1] Βόντα, Φ. και Χουχούμης, Ι. (2010). ϕ – Μέτρα Απόκλισης και οι Εφαρμογές τους στην Ανάλυση Επιβίωσης και Αξιοπιστίας, Διπλωματική Μεταπτυχιακή Εργασία, Τομέας Μαθηματικών, ΕΜΠ
- [2] Βόντα, Φ. και Τσανούσα, Α. (2010). Στατιστική συμπερασματολογία μέσω των ϕ – μέτρων απόκλισης, Διπλωματική Μεταπτυχιακή Εργασία, Τομέας Μαθηματικών, ΕΜΠ
- [3] Καρόνης, Χ. (2009). Μοντέλα Αξιοπιστίας και Επιβίωσης, Συμεών, Αθήνα
- [4] Παπαιωάννου, Τ. (2000). Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Αθ. Σταμούλης, Αθήνα
- [5] Παπαιωάννου, Τ. (1997). Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστικής, Αθ. Σταμούλης, Αθήνα
- [6] Φωκιανός, Κ. και Χαραλάμπους, Χ. (2008). Εισαγωγή στην R , Πρόχειρες Σημειώσεις

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

- [7] Ali, S. M. and Silvey, S. D. (1966). *A general class of coefficient of divergence of one distribution from another.* Journal of the Royal Statistical Society, 28, 1, 131-142.
- [8] Balakrishnan, V. and Sanghvi, L. D. (1968). *Distance between populations on the basis of attribute.* Biometrics, 24, 859-865.
- [9] Bhattacharyya, A. (1943). *On a measure of divergence between two statistical populations defined by their probability distributions.* Bulletin Calcutta Mathematical Society, 35, 99-109.
- [10] Burbea, J. and Rao, C. R. (1982a). *On the convexity of some divergence measures based on entropy functions.* IEEE Transactions on Information Theory, 28, 489-495.

- [11] Cressie, N. and Read, T. R. C. (1984). *Multinomial goodness-of-fit tests*. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 46, 440-464.
- [12] Csiszár, I. (1963). *Eine Informations theoretische Ungleichung und ihre Anwendung auf den Beweis der Ergodizität von Markhoffschen Ketten*. Publications of the Mathematica Institute of the Hungarian Academy of Sciences, 8, 84-108.
- [13] Jeffreys, H. (1946). *An invariant form for the prior probability in estimation problems*. Proceedings of the Royal Society, Series A, 186, 453-561.
- [14] Kullback, S. and Leibler, R. (1951). *On information and sufficiency*. Annals of Mathematical Statistics, 22, 79-86.
- [15] Liese, F. and Vajda, I. (1987). *Convex Statistical Distances*. Teubner, Leipzig.
- [16] Lindsay, B. G. (1994). *Efficiency versus robustness: The case for minimum Hellinger distance and other methods*. Annals of Statistics, 22, 1081-1114.
- [17] Lin, J. (1991). *Divergence measures based on the Shannon entropy*. IEEE Transactions on Information Theory, 37, 145-151.
- [18] Matusita, K. (1964). *Distance and decision rules*. Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 16, 305-320.
- [19] Mattheou, K. and Karagrigoriou, A. (2010). *A new family of divergence measures for test of fit*, Austr. N.Z., J. of Statist. 52(2), 187-200.
- [20] Mathai, A. and Rathie, P. N. (1975). *Basic Concepts in Information Theory*. John Wiley & Sons, New York.
- [21] Menéndez, M. L., Morales, D., Pardo, L. and Vajda, I. (1998a). *Two approaches to grouping of data and related disparity statistics*. Communications in Statistics (Theory and Methods), 27, 603-633.
- [22] Menéndez, M. L., Morales, D., Pardo, L. and Vajda, I. (1998b). *Asymptotic distributions of φ -divergences of hypothetical and observed frequencies on refined partitions*. Statistica Neerlandica, 52, 1, 71-89.
- [23] Panayiotou, P. and Karagrigoriou, A. (2009). *On the assessment of the Φ -family tests statistics for goodness of fit tests*, Πρακτικά 22^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου Στατιστικής, 315-322.
- [24] Pardo, L. (2006). *Statistical Inference Based on Divergence Measures*, Chapman & Hall/CRC.

- [25] Pearson, K. (1900). *On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling.* Philosophy Magazine, 50, 157-172.
- [26] Rathie, P.N. and Kannappan, P.L. (1972). *A directed-divergence function of type β .* Information and Control, 20, 38-45.
- [27] Rényi, A. (1961). *On measures of entropy and information.* Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1, 547-561.
- [28] Rukhin, A. L. (1994). *Optimal estimator for the mixture parameter by the method of moments and information affinity.* Transactions 12th Prague Conference on Information Theory, 214-219.
- [29] Sharma, B. D. and Mittal, D. P. (1977). *New non-additive measures of relative information.* Journal of Combinatory Information & Systems Science, 2, 122-133.
- [30] Taneja, I.J. (2005). *Refinement Inequalities Among Symmetric Divergence Measures,* The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 2, Issue 1, Article 8, pp. 1-23.
- [31] Vonta, F. and Karagrigoriou, A. (2010). *Generalized Measures of Divergence in Survival Analysis and Reliability,* Journal of Applied Probability, 47,216-234.
- [32] Zografos, K., Ferentinos, K. and Papaioannou, T. (1990). *Φ -divergence statistics: Sampling properties, multinomial goodness of fit and divergence tests,* Communications in Statistics – Theory and Methods, 19(5), 1785-1802.

Πηγές από Ιστοχώρους

- [33] Basseville M. (2010). *Divergence Measures for statistical data processing, Publications Internes de l'IRISA ISSN: 2102-6327PI 1961*
<http://hal.inria.fr/docs/00/54/23/37/PDF/PI-1961.pdf>
- [34] Österreicher, F. (2002). *Csiszár f -Divergences-Basic Properties,*
<http://www.sbg.ac.at/mat/staff/oesterreicher/vortrag1.pdf>
- [35] <http://cran.r-project.org/doc/contrib/usingR.pdf>
- [36] <http://cran.r-project.org/doc/manuals/R-intro.pdf>
- [37] <http://en.wikipedia.org/wiki/F-divergence>
- [38] <http://en.wikipedia.org/wiki/Kullback-Leibler-divergence>

