Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο
Σχολη Ηλεκτρολογων Μηχανικων και Μηχανικων Υπολογιστων
Τομεας Ηλεκτρικης Ισχυος

Σύγκριση Εναλλακτικών Γραμμικών Προσεγγίσεων Βέλτιστης Ροής Φορτίου

Μελέτη και υλοποίηση

Διπλωματικη Εργασια

του

ΜΑΝΟΥΣΟΣ Χ. ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΚΗΣ

Επιβλέπων: Αντώνιος Παπαβασιλείου
Επίκουρος Καθηγητής

Αθήνα, Ιούνιος 2025

Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο
Σχολη Ηλεκτρολογων Μηχανικων και Μηχανικων Υπολογιστων
Τομεας Ηλεκτρικης Ισχυος

Σύγκριση Εναλλακτικών Γραμμικών Προσεγγίσεων Βέλτιστης Ροής Φορτίου

Μελέτη και υλοποίηση

Διπλωματικη Εργασια

του

ΜΑΝΟΥΣΟΣ Χ. ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΚΗΣ

Επιβλέπων: Αντώνιος Παπαβασιλείου
Επίκουρος Καθηγητής

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 24 Ιουνίου 2025.

(Υπογραφή)	*(Υπογραφή)*	*(Υπογραφή)*
.....	.....	.....
Αντώνιος Παπαβασιλείου	Βασίλειος Νικολαΐδης	Άρης-Ευάγγελος Δημέας
Επίκουρος Καθηγητής	Επίκουρος Καθηγητής	Επίκουρος Καθηγητής

Αθήνα, Ιούνιος 2025

Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο
Σχολη Ηλεκτρολογων Μηχανικων και Μηχανικων Υπολογιστων
Τομεας Ηλεκτρικης Ισχυος

Copyright © – All rights reserved. Με την επιφύλαξη παντός δικαιώματος.
Μανούσος Αλεξανδράκης, 2025.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα.

Το περιεχόμενο αυτής της εργασίας δεν απηχεί απαραίτητα τις απόψεις του Τμήματος, του Επιβλέποντα, ή της επιτροπής που την ενέκρινε.

ΔΗΛΩΣΗ ΜΗ ΛΟΓΟΚΛΟΠΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΗΨΗΣ ΠΡΟΣΩΠΙΚΗΣ ΕΥΘΥΝΗΣ

Με πλήρη επίγνωση των συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων, δηλώνω ενυπογράφως ότι είμαι αποκλειστικός συγγραφέας της παρούσας Πτυχιακής Εργασίας, για την ολοκλήρωση της οποίας κάθε βοήθεια είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται λεπτομερώς στην εργασία αυτή. Έχω αναφέρει πλήρως και με σαφείς αναφορές, όλες τις πηγές χρήσης δεδομένων, απόψεων, θέσεων και προτάσεων, ιδεών και λεκτικών αναφορών, είτε κατά κυριολεξία είτε βάσει επιστημονικής παράφρασης. Αναλαμβάνω την προσωπική και ατομική ευθύνη ότι σε περίπτωση αποτυχίας στην υλοποίηση των ανωτέρω δηλωθέντων στοιχείων, είμαι υπόλογος έναντι λογοκλοπής, γεγονός που σημαίνει αποτυχία στην Πτυχιακή μου Εργασία και κατά συνέπεια αποτυχία απόκτησης του Τίτλου Σπουδών, πέραν των λοιπών συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων. Δηλώνω, συνεπώς, ότι αυτή η Πτυχιακή Εργασία προετοιμάστηκε και ολοκληρώθηκε από εμένα προσωπικά και αποκλειστικά και ότι, αναλαμβάνω πλήρως όλες τις συνέπειες του νόμου στην περίπτωση κατά την οποία αποδειχθεί, διαχρονικά, ότι η εργασία αυτή ή τμήμα της δεν μου ανήκει διότι είναι προϊόν λογοκλοπής άλλης πνευματικής ιδιοκτησίας.

(Υπογραφή)

.....
Μανούσος Αλεξανδράκης

16 Φεβρουαρίου 2025

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία προτείνει μια γραμμική προσέγγιση του προβλήματος της βέλτιστης ροής φορτίου.

Αρχικά, αναλύονται οι εξισώσεις που αφορούν τον υπολογισμό του μέτρου τάσης, της γωνίας της τάσης και της παραγωγής αέργου ισχύος. Οι συγκεκριμένες εξισώσεις αντλήθηκαν από υπάρχουσα επιστημονική έρευνα που είχε σκοπό την γραμμική προσέγγιση του προβλήματος της ροής φορτίου.

Έπειτα, ολοκληρώνεται το γραμμικό μοντέλο με την προσθήκη της αντικειμενικής συνάρτησης ελαχιστοποίησης κόστους παραγωγής και περιορισμών που αφορούν στα μέγιστα/ελάχιστα όρια μέτρου τάσης, στον προσδιορισμό των ροών στις γραμμές, στα μέγιστα/ελάχιστα όρια παραγωγής των γεννητριών και στα ισοζύγια ενέργειας για κάθε κόμβο.

Μετέπειτα, εκφράζονται οι συνθήκες Karush-Kuhn-Taker του γραμμικού μοντέλου και εφαρμόζονται σε ένα σύστημα δύο ζυγών, όπου και μελετάται η τιμολόγηση στην περίπτωση ύπαρξης συμφόρησης και χωρίς συμφόρηση. Ακόμη, γίνεται τόσο ερμηνεία των πιο σημαντικών δϋικών μεταβλητών όσο και η ανάλυση ευαισθησίας με σκοπό την πληρέστερη κατανόηση της κομβικής τιμολόγησης.

Αμέσως μετά παρουσιάζονται οι αδυναμίες που εντοπίζονται στην συμπεριφορά της γραμμικοποίσης και γίνεται χρήση απλών συστημάτων για την κατανόηση τους.

Τέλος, το γραμμικό μοντέλο που προτείνει η παρούσα εργασία, τα γραμμικά μοντέλα Bθ και Decoupled και το AC-OPF εφαρμόζονται σε πιο μεγάλης κλίμακας συστήματα. Γίνεται σύγκριση και σχολιασμός των αποτελεσμάτων για όλα τα γραμμικά μοντέλα.

Η υλοποίηση όλων των μοντέλων έγινε με την προγραμματιστική γλώσσα Julia και ο κώδικας καθώς και τα αρχεία δεδομένων εισόδου είναι διαθέσιμος στο παράρτημα Β′ της παρούσας εργασίας.

Λέξεις Κλειδιά

Ροή φορτίου, Βέλτιστη ροή φορτίου, AC-OPF, Γραμμική προσέγγιση, Γραμμικό μοντέλο Bθ, Γραμμικό μοντέλο Decoupled, Αντικειμενική Συνάρτηση, Συνθήκες Karush-Kuhn-Taker, Ανάλυση ευαισθησίας

Abstract

The present diploma thesis proposes a linear approach to the problem of optimal power flow.

Initially, the equations concerning the calculation of the voltage magnitude, the angle of the voltage and the generation of reactive power are analyzed. These specific equations were derived from existing scientific research to provide a linear approach to the problem of power flow.

Then, the linear model is completed with the addition of the objective function, for minimizing generation costs, and constraints related to the maximum/minimum limits of voltage magnitudes, the determination of flows in the lines, the maximum/minimum production limits of the generators and the energy balances at each node.

Subsequently, the Karush-Kuhn-Tucker (KKT) conditions of the linear model are formulated and applied to a two-bus system, where nodal pricing is examined both in the presence and absence of congestion in transmission line. Furthermore, an interpretation of the most significant dual variables is provided, along with a sensitivity analysis, aimed at more comprehensive understanding of the nodal pricing.

Immediately after, the weaknesses identified in the behavior of linearization are presented and simple systems are used to understand them.

Finally, the linear model proposed in this work, the BTheta linear model, the Decoupled model and the AC-OPF are applied to larger-scale energy systems. A comparison and commentary on the results for all the linear models is provided.

The implementation of all models was done using the programming language Julia and the code, as well as the input data files, is available in Appendix B′ of the present work.

Keywords

Power flow, Optimal power flow, AC-OPF, Linear approximation, Linear model BTheta, Linear model Decoupled, Objective function, Karush-Kuhn-Taker conditions, Sensitivity analysis

Ο σωστός δρόμος είναι ο ανήφορος.
Νίκος Καζαντζάκης

Ευχαριστίες

Ένα σύντομο ταξίδι ενός έτους έφτασε στο τέλος του. Η εργασία πραγματεύεται ένα γραμμικό μοντέλο, αλλά η πορεία για την ανάλυση και την υλοποίησή του ήταν κάθε άλλο παρά γραμμική. Οι δυσκολίες ήταν πολλές, αλλά μου έμαθαν αρκετά για το ποιος είμαι και το πώς πρέπει να διαχειρίζομαι τα εμπόδια που συναντώ. Στο τέλος αυτής της διαδρομής, εκείνο που μένει είναι η περηφάνεια για την ολοκλήρωση της πρώτης μου μεγάλης εργασίας ακαδημαϊκού ενδιαφέροντος, με την ελπίδα ότι αποτελεί την αφετηρία για πολλά περισσότερα. Φυσικά, οφείλω να ευχαριστήσω αρκετά άτομα για τη συμπαράστασή τους στις στιγμές όπου είχα αμφιβολίες και αντιμετώπιζα προκλήσεις.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Αντώνιο Παπαβασιλείου, που μου έδωσε τη δυνατότητα να εκπονήσω την παρούσα εργασία. Ο κ. Παπαβασιλείου, ήδη από τις διαλέξεις των μαθημάτων του, με ενέπνευσε και μου κίνησε το ενδιαφέρον για τον χώρο της μαθηματικής βελτιστοποίησης στον τομέα της ενέργειας. Τον ευχαριστώ από καρδιάς για την ευθύτητα, την ειλικρίνεια και το ανιδιοτελές ενδιαφέρον του για την πορεία μου, τόσο εντός όσο και εκτός σχολής.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον ZeJun Ruan για την άριστη επίβλεψη της παρούσας εργασίας. Ήταν πάντα άμεσα διαθέσιμος για να βοηθήσει σε κάθε πρόβλημα που αντιμετώπιζα, προσφέροντας ουσιαστική καθοδήγηση και τροφή για σκέψη. Η ολοκλήρωση της εργασίας δεν θα ήταν εφικτή χωρίς τη σημαντική συμβολή του.

Θερμές ευχαριστίες οφείλω στους γονείς μου, Πελαγία και Χαράλαμπο, και στον αδελφό μου, Γιώργο, για τη συνεχή υλική και ψυχολογική στήριξη καθ' όλη τη διάρκεια της προσπάθειας.

Τέλος, ευχαριστώ την κοπέλα μου, Ξανθή, και τους φίλους μου για την αμέριστη υποστήριξη και την κατανόηση που έδειξαν, ιδιαίτερα στις στιγμές που δεν ήμουν διαθέσιμος για εκείνους.

Αθήνα, Μάρτιος 2025

Μανούσος Αλεξανδράκης

Περιεχόμενα

Περίληψη 1

Abstract 3

Ευχαριστίες 7

Σημειογραφία 17

1 Εισαγωγή 19

1.1.1 Η εξάπλωση της ηλεκτρικής ενέργειας και η σύγχρονη πρόκληση . . . 19

1.1.2 Ιστορική αναδρομή για τη βέλτιστη ροή φορτίου 22

1.1.3 Σημασία και εφαρμογή της βέλτιστης ροής φορτίου 22

1.1.4 Χαλαρώσεις και προσεγγίσεις των εξισώσεων ροής φορτίου 23

2 Ανάλυση και Μοντελοποίηση 25

2.1 Ανάλυση των εξισώσεων που προέρχονται από τη γραμμικοποιήμενη Ροή Φορτίου 25

2.1.1 Αναπαράσταση γραμμών διανομής 25

2.1.2 Υπολογισμός τάσης 26

2.1.3 Υπολογισμός αέργου ισχύος 28

2.2 Αναγωγή των εξισώσεων από τη ροή φορτίου στη βέλτιστη ροή φορτίου και προσθήκη επιπλεόν περιορισμών 29

2.2.1 Από τη ροή φορτίου στη βέλτιστη ροή φορτίου 29

2.2.2 Η αντικειμενική συνάρτηση 30

2.2.3 Επιπλέον περιορισμοί για την ολοκλήρωση του μοντέλου 30

2.3 Το γραμμικό μοντέλο για τη βέλτιστη ροή φορτίου 33

3 Ανάλυση με συνθήκες Karush-Kuhn-Taker 37

3.1 Εναλλακτική εκδοχή του γραμμικού μοντέλου για την απλούστερη εξαγωγή των συνθηκών ΚΚΤ 37

3.2 Εξαγωγή των συνθηκών ΚΚΤ για το γραμμικό μοντέλο 39

3.2.1 Γενικός τρόπος εξαγωγής των συνθηκών ΚΚΤ 39

3.2.2 Οι συνθήκες ΚΚΤ για το μοντέλο της παρούσας εργασίας 40

3.3 Εφαρμογή σε σύστημα δύο κόμβων 43

3.3.1 Το γραμμικό μοντέλο για το συγκεκριμένο σύστημα 43

3.3.2 Οι συνθήκες ΚΚΤ για το συγκεκριμένο σύστημα 44

3.3.3 Περίπτωση μη ύπαρξης συμφόρησης στη γραμμή μεταφοράς μεταξύ των κόμβων . . . 46
3.3.4 Περίπτωση ύπαρξης συμφόρησης στη γραμμή μεταφοράς μεταξύ των κόμβων . . . 48
3.4 Ερμηνεία δϋικών μεταβλητών και ανάλυση ευαισθησίας . . . 48
3.4.1 Ανάλυση ευαισθησίας στο μη γραμμικό μοντέλο . . . 49
3.4.2 Ανάλυση ευαισθησίας στο γραμμικό μοντέλο . . . 50

4 Οι αδυναμίες του γραμμικού μοντέλου 51
4.1 Οι αδυναμίες του μοντέλου σε απλά συστήματα . . . 51
4.1.1 Οι μεταβλητές με τη μεγαλύτερη σημασία για το γραμμικό μοντέλο . . . 51
4.1.2 Απόκλιση στα αποτελέσματα παραγωγής ενεργού ισχύος ανάμεσα στο γραμμικό μοντέλο και στο ACOPF . . . 52
4.1.3 Απόκλιση στην παραγωγή αέργου ισχύος ανάμεσα στο γραμμικό μοντέλο και στο ACOPF . . . 54
4.1.4 Αδυναμία στην εκτίμηση μέτρου και γωνίας τάσης λόγω αδυναμιών στην προσέγγιση ενεργού και αέργου ισχύος . . . 56
4.1.5 Αδυναμία της γραμμικοποίησης Taylor . . . 57
4.1.6 Σύνοψη των παρατηρήσεων . . . 58
4.2 Δοκιμή υπό καθορισμένες συνθήκες σε μεγαλύτερο σύστημα . . . 59

5 Εφαρμογή σε συστήματα και σύγκριση αποτελεσμάτων με άλλα γραμμικά μοντέλα 63
5.1 Επεξήγηση εναλλακτικών γραμμικών μοντέλων . . . 63
5.1.1 Μοντέλο Bθ . . . 63
5.1.2 Μοντέλο Decoupled . . . 64
5.2 Πρακτική εφαρμογή και σύγκριση των αποτελεσμάτων . . . 65
5.2.1 Σύστημα case_ieee123 . . . 65
5.2.2 Σύστημα ehv1 . . . 72
5.2.3 Σύστημα ehv5 . . . 76
5.2.4 Σύστημα ehv4 . . . 80
5.2.5 Γενικά συμπεράσματα επί των τελικών αποτελεσμάτων . . . 84

6 Προτεινόμενες επεκτάσεις της παρούσας εργασίας 87

Παραρτήματα 89

Α΄ Απόδειξη των γραμμικοποιήσεων Taylor και πίνακας Z 91
Α΄.1 Γραμμικοποιήσεις Taylor . . . 91
Α΄.2 Παράδειγμα υλοποίησης του πίνακα Z . . . 92

Β΄ Ο κώδικας και τα αρχεία δεδομένων 95

Βιβλιογραφία 98

Συντομογραφίες **99**

Απόδοση ξενόγλωσσων όρων **101**

Κατάλογος Σχημάτων

1.1 Παγκόσμια παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας [TWh] ανά πηγή τη χρονική περίοδο 2003-2024 [1]. . . . 20
1.2 Παράγοντες που οδηγούν στην αύξηση της κατανάλωσης της ηλεκτρικής ενέργειας [TWh] στην Κίνα για την περίοδο 2021-2027 [2]. . . . 20
1.3 Η αύξηση της θερμοκρασίας [°C] για τα διάφορα σενάρια στην περίοδο 2000-2100 [3]. . . . 21
1.4 Η αύξηση της θερμοκρασίας [°C] στην Ελλάδα τα έτη 2000-2020 [4]. . . . 21
1.5 Στο σχήμα (a) παρουσιάζονται η κυρτή εφικτή περιοχή για την χαλάρωση και η μη κυρτή εφικτή περιοχή του μη γραμμικού προβλήματος. Στο σχήμα (b) παρουσιάζεται η κυρτή εφικτή περιοχή για την προσέγγιση και η μη κυρτή περιοχή του μη γραμμικού προβλήματος [5]. . . . 24

2.1 Στο σχήμα (a) παρουσιάζεται η ισοδύναμη αναπαράσταση της γραμμής διανομής ως μία επαγωγική και μία ωμική αντίσταση εν σειρά. Στο σχήμα (b) παρουσιάζεται η ίδια αναπαράσταση μέσω της αγωγιμότητας της γραμμής. . 26
2.2 Δυνατές τιμές των ροών σε κάθε γραμμή για το γραμμικό (κόκκινη περιοχή) και για το μη γραμμικό μοντέλο (μπλε περιοχή). . . . 33

3.1 Σύστημα δύο ζυγών για το παράδειγμα των συνθηκών ΚΚΤ. . . . 43
3.2 Ανάλυση ευαισθησίας σε σύστημα δύο κόμβων για το μη γραμμικό μοντέλο, όπου με κόκκινο χρώμα συμβολίζονται οι ροές ισχύος για την εξυπηρέτηση του επιπλέον 1MW ζήτησης. . . . 49
3.3 Ανάλυση ευαισθησίας σε σύστημα δύο κόμβων για το γραμμικό μοντέλο, για την περίπτωση όπου υπάρχει συμφόρηση στη γραμμή (δεξιά) και για την περίπτωση όπου δεν υπάρχει συμφόρηση (αριστερά). Με κόκκινο χρώμα συμβολίζονται οι ροές ισχύος για την εξυπηρέτηση του επιπλέον 1MW ζήτησης . . . 50

4.1 Αρχικό σύστημα τριών ζυγών. . . . 52
4.2 Σύστημα τριών ζυγών με αυξημένη αντίσταση. . . . 53
4.3 Η παραγωγή ενεργού ισχύος για όλα τα μοντέλα (περίπτωση δοκιμής υπό καθορισμένες συνθήκες). . . . 60
4.4 Η παραγωγή αέργου ισχύος για όλα τα μοντέλα (περίπτωση δοκιμής υπό καθορισμένες συνθήκες). . . . 60
4.5 Το μέτρο της τάσης για όλα τα μοντέλα (περίπτωση δοκιμής υπό καθορισμένες συνθήκες). . . . 61

4.6 Η γωνία της τάσης για όλα τα μοντέλα (περίπτωση δοκιμής υπό καθορισμένες συνθήκες). 61

5.1 Η παραγωγή ενεργού ισχύος για όλα τα μοντέλα (case_ieee123). 65
5.2 Η παραγωγή αέργου ισχύος για όλα τα μοντέλα (case_ieee123). 66
5.3 Το μέτρο της τάσης [p.u] για όλα τα μοντέλα (case_ieee123). 67
5.4 Η γωνία της τάσης για όλα τα μοντέλα (case_ieee123). 68
5.5 Οι κομβικές τιμές για όλα τα μοντέλα (case_ieee123). 69
5.6 Αναπαράσταση της τοπολογίας του συστήματος case_ieee123, με κόκκινο χρώμα οι γεννήτριες του συστήματος. 71
5.7 Η παραγωγή ενεργού ισχύος για όλα τα μοντέλα (ehv1). 72
5.8 Η παραγωγή αέργου ισχύος για όλα τα μοντέλα (ehv1). 73
5.9 Το μέτρο της τάσης [p.u] για όλα τα μοντέλα (ehv1). 74
5.10 Η γωνία της τάσης για όλα τα μοντέλα (ehv1). 74
5.11 Οι κομβικές τιμές για όλα τα μοντέλα (ehv1). 75
5.12 Η παραγωγή ενεργού ισχύος για όλα τα μοντέλα (ehv5). 76
5.13 Η παραγωγή αέργου ισχύος για όλα τα μοντέλα (ehv5). 77
5.14 Το μέτρο της τάσης [p.u] για όλα τα μοντέλα (ehv5). 77
5.15 Η γωνία της τάσης για όλα τα μοντέλα (ehv5). 78
5.16 Οι κομβικές τιμές για όλα τα μοντέλα (ehv5). 79
5.17 Η παραγωγή ενεργού ισχύος για όλα τα μοντέλα (ehv4). 80
5.18 Η παραγωγή αέργου ισχύος για όλα τα μοντέλα (ehv4). 81
5.19 Το μέτρο της τάσης [p.u.] για όλα τα μοντέλα (ehv4). 82
5.20 Η γωνία της τάσης για όλα τα μοντέλα (ehv4). 82
5.21 Οι κομβικές τιμές για όλα τα μοντέλα (ehv4). 83

Κατάλογος Πινάκων

4.1 Αποτελέσματα παραγωγής ενεργού ισχύος για το αρχικό σύστημα 3 ζυγών. . 52
4.2 Αποτελέσματα παραγωγής ενεργού ισχύος για το σύστημα 3 ζυγών με αυξημένη αντίσταση γραμμής 53
4.3 Αποτελέσματα παραγωγής ενεργού ισχύος για το αρχικό σύστημα 3 ζυγών. . 54
4.4 Αποτελέσματα παραγωγής αέργου ισχύος για το αρχικό σύστημα 3 ζυγών. . . 54
4.5 Αποτελέσματα παραγωγής ενεργού ισχύος για το σύστημα 3 ζυγών με αυξημένη αντίσταση. 55
4.6 Αποτελέσματα παραγωγής αέργου ισχύος για το σύστημα 3 ζυγών με αυξημένη αντίσταση. 55
4.7 Αποτελέσματα παραγωγής ενεργού ισχύος μετά τη δοκιμή με προκαθορισμένες τιμές ενεργού ισχύος για το γραμμικό μοντέλο. 55
4.8 Αποτελέσματα παραγωγής αέργου ισχύος μετά τη δοκιμή με προκαθορισμένες τιμές ενεργού ισχύος για το γραμμικό μοντέλο. 56
4.9 Αποτελέσματα παραγωγής ενεργού ισχύος για το σύστημα 3 ζυγών με αυξημένη αντίσταση. 56
4.10 Αποτελέσματα μέτρων τάσης για το σύστημα 3 ζυγών με αυξημένη αντίσταση. 56
4.11 Αποτελέσματα γωνιών τάσης για το σύστημα 3 ζυγών με αυξημένη αντίσταση. 57
4.12 Αποτελέσματα μέτρων τάσης μετά τη δοκιμή με προκαθορισμένες τιμές ενεργού ισχύος για το γραμμικό μοντέλο. 57
4.13 Αποτελέσματα γωνιών τάσης με προκαθορισμένες τιμές ενεργού ισχύος για το γραμμικό μοντέλο. 57
4.14 Αποτελέσματα παραγωγής ενεργού και αέργου για $V_{slack} \neq 1$. 57

5.1 Απόλυτα σφάλματα για μέτρα και γωνίες τάσεων για το σύστημα case_ieee123. 70
5.2 Απόλυτα σφάλματα για μέτρα και γωνίες τάσεων για το σύστημα ehv1. 75
5.3 Απόλυτα σφάλματα για μέτρα και γωνίες τάσεων για το σύστημα ehv5. 79
5.4 Απόλυτα σφάλματα για μέτρα και γωνίες τάσεων για το σύστημα ehv4. 83

Σημειογραφία

Σύνολα

N	Το σύνολο όλων των ζυγών του συστήματος
B	Το σύνολο όλων των ζυγών που έχουν γεννήτρια/ες
G	Το σύνολο με τα ονόματα όλων των γεννητριών
G_b	Το σύνολο με τα ονόματα όλων των γεννητριών στον κόμβο b
L	Το σύνολο όλων των ζυγών εξαιρουμένων αυτών με γεννήτρια-/ες
J	Το σύνολο όλων των ζυγών του συστήματος εκτός του ζυγού αναφοράς
K	Το σύνολο όλων των ζυγών που έχουν γεννήτρια/ες εκτός του ζυγού αναφοράς
M	Το σύνολο όλων των γραμμών μεταφοράς του συστήματος
$\mathcal{L}$	Το σύνολο των PQ ζυγών του συστήματος
$\mathcal{L}'$	Το σύνολο των PV και PQ ζυγών του συστήματος

Παράμετροι

MC_g	Το οριακό κόστος της γεννήτριας $g \in G$
$R_{m=(i,j)}$	Η ωμική αντίσταση της γραμμής $m \in M$
$X_{m=(i,j)}$	Η επαγωγική αντίσταση της γραμμής $m \in M$
V_0	Το μέτρο τάσης του ζυγού αναφοράς
Θ_0	Η γωνία τάσης του ζυγού αναφοράς
P_{max_g}	Το τεχνικό μέγιστο παραγωγής ενεργού ισχύος της γεννήτριας $g \in G$
P_{min_g}	Το τεχνικό ελάχιστο παραγωγής ενεργού ισχύος της γεννήτριας $g \in G$
Q_{max_g}	Το τεχνικό μέγιστο παραγωγής αέργου ισχύος της γεννήτριας $g \in G$
Q_{min_g}	Το τεχνικό ελάχιστο παραγωγής αέργου ισχύος της γεννήτριας $g \in G$
V_{max_j}	Το μέγιστο όριο του μέτρου τάσης για κάθε κόμβο $j \in J$
V_{min_j}	Το ελάχιστο όριο του μέτρου τάσης για κάθε κόμβο $j \in J$
S_m	Το όριο ροής φαινόμενης ισχύος στη γραμμή $m \in M$

D_n^p	Το ενεργό φορτίο του κόμβου $n \in N$
D_n^q	Το άεργο φορτίο του κόμβου $n \in N$
b_{ij}	Η χωρητική αγωγιμότητα της γραμμής $i - j$
g_{ij}	Η ωμική αγωγιμότητα της γραμμής $i - j$
y_{ij}	Η σύνθετη αγωγιμότητα της γραμμής $i - j$
z_{ij}	Η σύνθετη αντίσταση της γραμμής $i - j$
Y	Ο πίνακας αγωγιμοτήτων

Μεταβλητές

u_n	Το μέτρο της τάσης του ζυγού $n \in N$
θ_n	Η γωνία της τάσης του ζυγού $n \in N$
rp_n	Η έγχυση ενεργού ισχύος του ζυγού $n \in N$
rq_n	Η έγχυση αέργου ισχύος του ζυγού $n \in N$
p_n	Η παραγωγή ενεργού ισχύος του ζυγού $n \in N$
q_n	Η παραγωγή αέργου ισχύος του ζυγού $n \in N$
f_m	Η ροή ενεργού ισχύος στη γραμμή $m \in M$
fq_m	Η ροή αέργου ισχύος στη γραμμή $m \in M$
p_{ij}	Η ροή ενεργού ισχύος στη γραμμή $i - j$
q_{ij}	Η ροή αέργου ισχύος στη γραμμή $i - j$

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

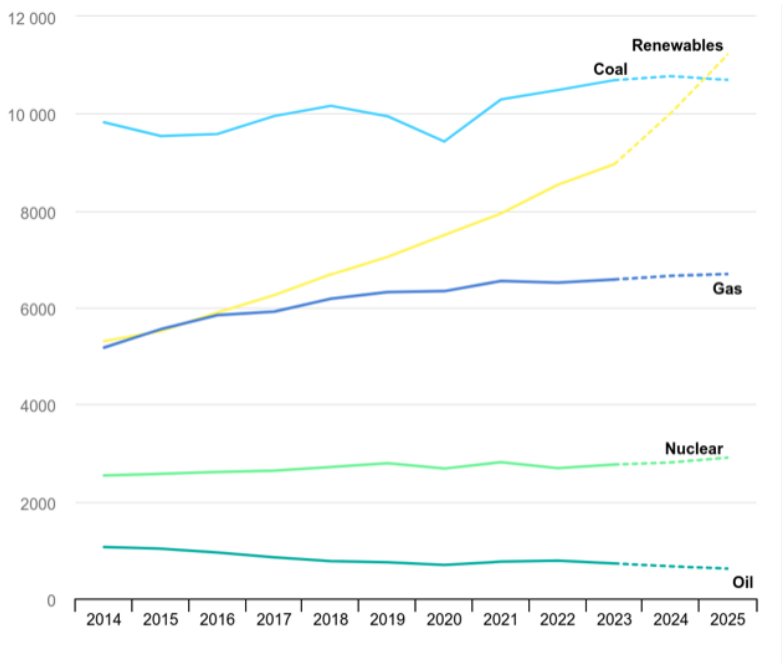
Στην ενότητα αυτή γίνεται εισαγωγή στο θέμα της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Αρχικά, παρέχονται γενικές πληροφορίες για τη σημασία της ηλεκτρικής ενέργειας στη σύγχρονη κοινωνία και τις προκλήσεις που αντιμετώπιζει η βιομηχανία. Έπειτα, γίνεται ιστορική αναδρομή για το πρόβλημα που πραγματεύεται η εργασία και αναλύεται συνοπτικά η αξία και οι εφαρμογές που βρίσκει στη βιομηχανία της ενέργειας. Τέλος, αναλύονται συνοπτικά οι διαφορές ανάμεσα στις προσεγγίσεις και τις χαλαρώσεις των μη γραμμικών μοντέλων.

1.1.1 Η εξάπλωση της ηλεκτρικής ενέργειας και η σύγχρονη πρόκληση

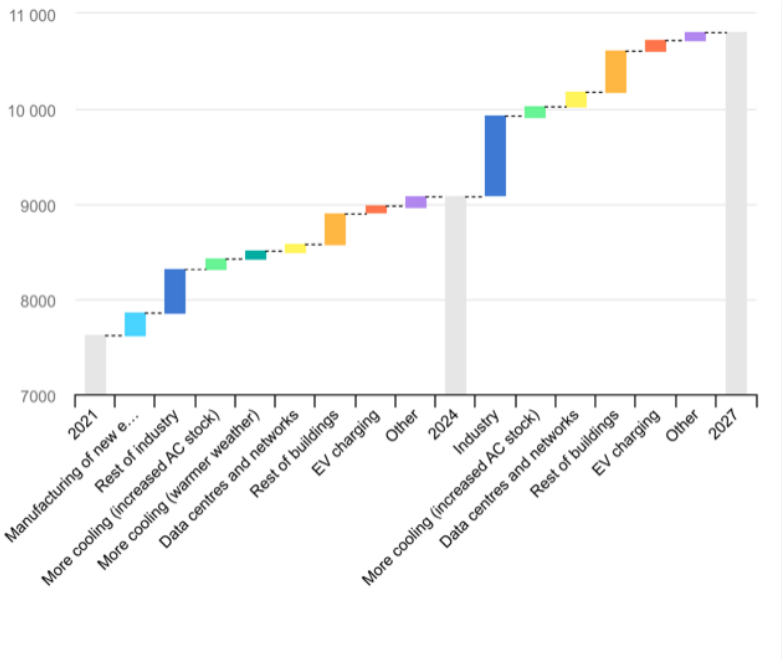
Οι τελευταίες δεκαετίες παγκόσμιας τεχνολογικής ανάπτυξης έχουν επιφέρει μεγάλες αλλαγές στην καθημερινότητα των σύγχρονων κοινωνιών. Στις αρχές του προηγούμενου αιώνα η πρόσβαση στην ηλεκτρική ενέργεια όχι μόνο δεν ήταν δεδομένη αλλά ήταν μια υπηρεσία μόνο για λίγους. Το πρώτο μεγάλο βήμα ήταν η επικράτηση του AC ρεύματος του Τέσλα έναντι του DC ρεύματος του Έντισον. Αυτή η υιοθέτηση θα επέτρεπε μετέπειτα την εξάπλωση του ηλεκτρισμού εξαιτίας της ευκολίας στη μεταφορά μέσω κατάλληλων μετασχηματισμών τάσης [6]. Από τα μέσα του 20ου αιώνα και στη χώρα μας άρχισε ο έντονος εξηλεκτρισμός και πλέον θεωρείται ένα δεδομένο αγαθό για την πλειονότητα των ανθρώπων [7].

Η ραγδαία τεχνολογική ανάπτυξη από τα τέλη του 20ου αιώνα και μετέπειτα μετασχημάτισαν την καθημερινότητα του καθένα που πλέον χρησιμοποιεί ολοένα και περισσότερη ηλεκτρική ενέργεια. Χαρακτηριστικό παράδειγμα για το παραπάνω είναι η σχετικά πρόσφατη απότομη εξέλιξη των ηλεκτρικών οχημάτων και που η χρήση τους απαιτεί σημαντική ποσότητα ηλεκτρικής ενέργειας. Περισσότεροι παράγοντες που οδηγούν στην άυξηση της κατανάλωσης ηλεκτρικής ενέργειας παρουσιάζονται στο σχήμα 1.2, συγκεκριμένα για την Κίνα. Επιπλέον, άλλος ένας λόγος που η ηλεκτρική ενέργεια αποκτά ακόμα μεγαλύτερο ρόλο είναι γιατί οι αρνητικές συνέπειες του φαινομένου του θερμοκηπίου έχουν αναγκάσει την ανθρωπότητα να απανθρακοποιήσει τις δραστηριότητες της. Μια από τις κύριες αρνητικές συνέπειες της ρυπογόνου δραστηριότητας της ανθρωπότητας είναι η αύξηση της μέσης θερμοκρασίας του πλανήτη. Στα σχήματα 1.3, 1.4 παρουσιάζεται η μελλοντική αύξηση της μέσης θερμοκρασίας του πλανήτη σε διάφορα σενάρια και η αύξηση της θερμοκρασίας που έχει ήδη παρατηρηθεί στη χώρα μας. Σε αυτό το σημείο επιβάλλεται να τονιστεί η σημασία των ανανεώσιμων πηγών ενέργειας που εξηλεκτρίζουν και απανθρακοποιούν, ταυτόχρονα, τις καθημερινές δραστηριότητες του ανθρώπου. Η αυξανόμενη διείσδυση των ΑΠΕ φαίνεται

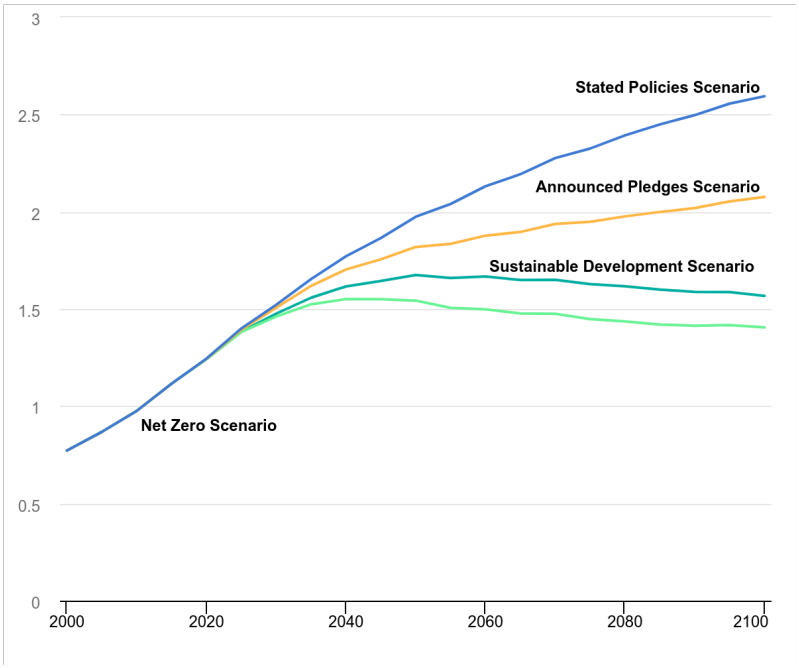
στο σχήμα 1.1.



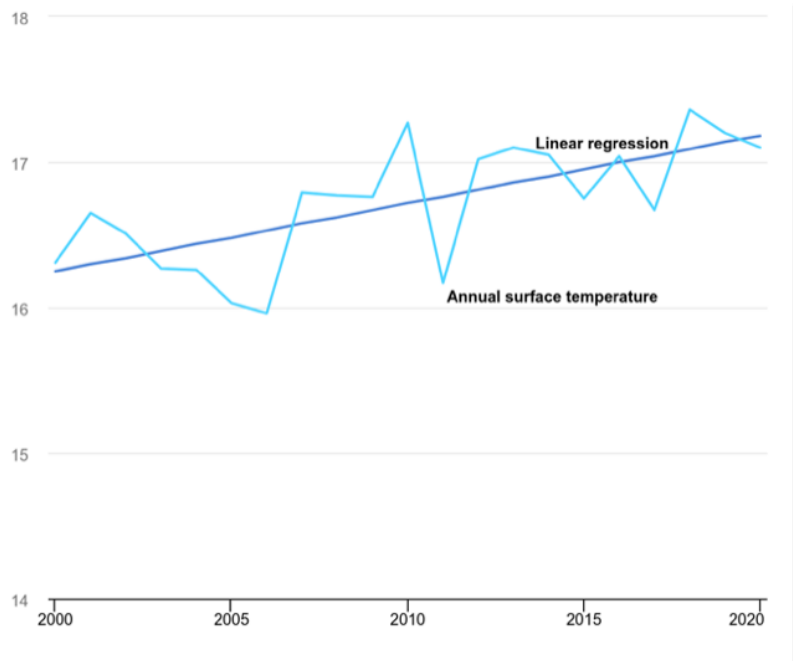
Σχήμα 1.1: *Παγκόσμια παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας [TWh] ανά πηγή τη χρονική περίοδο 2003-2024 [1].*



Σχήμα 1.2: *Παράγοντες που οδηγούν στην αύξηση της κατανάλωσης της ηλεκτρικής ενέργειας [TWh] στην Κίνα για την περίοδο 2021-2027 [2].*



Σχήμα 1.3: *Η αύξηση της θερμοκρασίας [°C] για τα διάφορα σενάρια στην περίοδο 2000-2100 [3].*



Σχήμα 1.4: *Η αύξηση της θερμοκρασίας [°C] στην Ελλάδα τα έτη 2000-2020 [4].*

Η ταχεία ανάπτυξη των ηλεκτρικών φορτίων και σε συνδυασμό με την αργή ανάπτυξη των δικτύων, τις απελευθερωμένες αγορές και την ολοένα και μεγαλύτερη διείσδυση των ανανεώσιμων πηγών ενέργειας, οδηγούν σε συστήματα με μεγάλη πολυπλοκότητα και αβεβαιότητα. Έτσι, είναι αδήριτη ανάγκη η ύπαρξη μοντέλων που θα βελτιστοποιούν οικονομικά και αξιόπιστα τη λειτουργία του συστήματος. Αυτόν τον σκοπό, λοιπόν, εξυπηρετεί η βέλτιστη ροή φορτίου [8].

1.1.2 Ιστορική αναδρομή για τη βέλτιστη ροή φορτίου

Η επίλυση του προβλήματος της βέλτιστης ροής φορτίου παρουσιάζει σημαντική πρόοδο με την πορεία του χρόνου. Κατά την περίοδο 1930-1960 τα προβλήματα που σχετίζοταν με τα συστήματα ενέργειας λυνόταν σε κάποιο βαθμό με διαισθητικούς τρόπους και αναλογικά εργαλεία. Στις αρχές της δεκαετίας του 30 δείχθηκε ότι για συστήματα με αμελητέες απώλειες και χωρίς περιορισμούς που αφορούν το δίκτυο, το ελάχιστο κόστος επιτυγχάνεται όταν όλες οι γεννήτριες έχουν ίσο οριακό κόστος. Τη δεκαετία του 40 και του 50 επιτεύχθη η εισαγωγή απωλειών στο πρόβλημα. Κατά το 1950 και 1960 έχει γίνει δυνατή η επίλυση του προβλήματος με ψηφιακό τρόπο, μιας και επήλθε πρόοδος στην υπολογιστική ικανότητα των εργαλείων. Τη χρονιά του 1960 αναπτύχθηκε ένα μοντέλο AC που συμπεριλάμβανε απώλειες αλλά είχε ένα μεγάλο μειονέκτημα, δεν παρείχε όρια για τις μεταβλητές. Η θεμελίωση του προβλήματος της βέλτιστης ροής φορτίου έγινε από τον Carpentier το 1962 [9]. Αυτό ήταν ένα πολύ σημαντικό βήμα στην ιστορική εξέλιξη του προβλήματος. Στα χρόνια που ακολούθησαν αναπτύχθηκαν διαφορετικοί τρόποι μοντελοποίησης του προβλήματος της βέλτιστης ροής φορτίου. Η επίλυση του OPF αποδείχθηκε πρόκληση μιας και η AC μοντελοποίηση συνεπάγεται τη μη γραμμικότητα και τη μη κυρτότητα. Τα παραπάνω οδηγούν σε σημαντική πολυπλοκότητα και καθιστούν το πρόβλημα δυσεπίλυτο. Έτσι, στην αρχή, οι κλασσικές μέθοδοι γραμμικής βελτιστοποίησης δεν ήταν ικανές να αντιμετωπίσουν την παραπάνω πολυπλοκότητα [10] [5].

Απαραίτητη, λοιπόν, ήταν η χρήση νέων μεθόδων για την επίλυση του προβλήματος. Κατά τη δεκαετία του 1960 χρησιμοποιήθηκε η επαναληπτική μέθοδος Newton-Raphson και έγινε αρκετά δημοφιλής για προβλήματα ροών φορτίων μετά την ανάπτυξη τεχνικών που αφορούσαν τις αραιές μήτρες. Έτσι, εφόσον ο πίνακας αγωγιμοτήτων ήταν κατά κανόνα αραιός οι τεχνικές αυτές μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν και η μέθοδος Newton-Raphson βελτίωσε σε μεγάλο βαθμό την αποδοτικότητα της επίλυσης. Το 1991 μια σημαντική έρευνα των Huneault, Galliana [11] συγκέντρωσε μεγάλο πλήθος επιστημονικών ερευνών που αφορούσαν το πρόβλημα και τόνισε την ολοένα και μεγαλύτερη χρήση καλύτερων εργαλείων επίλυσης. Βέβαια, εξακολουθούσαν να υπάρχουν προβλήματα που αφορούσαν στη σύγκλιση και στην ταχύτητα επίλυσης. Αργότερα, στο πρόβλημα έγινε εισαγωγή περιορισμών ασφαλείας που αφορούσαν αστοχίες στη μεραφορά και λοιπούς κινδύνους στη λειτουργία και δημιουργήθηκε μια ειδική κατηγορία Security Constrained Optimal Power Flow (SCOPF). Με αυτόν τον τρόπο το πρόβλημα έγινε ακόμα πιο πολύπλοκο.

Μετά από μισό αιώνα το πρόβλημα της βέλτιστης ροής φορτίου συνεχίζει να απασχολεί την επιστημονική κοινότητα η οποία προτείνει συνεχώς νέους τρόπους επίλυσης. Βέβαια, δεν υπάρχει ακόμα μια γρήγορη και αξιόπιστη λύση που υιοθετείται καθολικά από όλους. Τα σύγχρονα λογισμικά βασίζονται σε προσεγγιστικά μοντέλα που όπως είναι λογικό απέχουν από την οικονομικά βέλτιστη λύση [10].

1.1.3 Σημασία και εφαρμογή της βέλτιστης ροής φορτίου

Το πρόβλημα της βέλτιστης ροής φορτίου έχει σπουδαία σημασία όσον αφορά τα πραγματικά ενεργειακά συστήματα. Οι διαχειριστές του δικτύου χρησιμοποιούν το συγκεκριμένο εργαλείο με σκοπό να βελτιστοποιήσουν την κατανομή των ηλεκτρικών πόρων. Με αυτόν

τον τρόπο καλύπτεται το φορτίο ελαχιστοποιώντας όσο το δυνατόν περισσότερο το κόστος και εξασφαλίζοντας ότι το σύστημα δουλεύει με αξιόπιστο τρόπο. Το πρόβλημα λύνεται σε πραγματικό χρόνο ανά τακτά χρονικά διαστήματα και για την αγορά επόμενης ημέρας. Το μοντέλο εξασφαλίζει ότι η ροή στις γραμμές δεν ξεπερνάει τα θερμικά τους όρια, οι τάσεις δεν ξεπερνούν ελάχιστα και μέγιστα όρια, οι γεννήτριες λειτουργούν μέσα στα τεχνικά τους όρια και τηρούνται άλλοι αντίστοιχοι τεχνικοί περιορισμοί του συστήματος. Τέλος, το πρόβλημα βέλτιστης ροής φορτίου μπορεί να εφαρμοστεί για τον μακροχρονιο σχεδιασμό του συστήματος ενέργειας. Όλα τα παραπάνω γίνονται ακόμα πιο σημαντικά αν αναλογιστεί κανείς ότι η συνεχώς αυξανόμενη διείσδυση των ανανεώσιμων πηγών ενέργειας προσθέτει μεγάλη στοχαστικότητα και καθιστά προβλήματα σαν και αυτά πολύ δύσκολα και πολύπλοκα [10].

Η λύση του του προβλήματος βέλτιστης ροής φορτίου κατανέμει βέλτιστα την ενεργό και την άεργο ισχύ για ένα σύστημα στη μόνιμη κατάσταση [12]. Στη γενική περίπτωση ο σκοπός της βέλτιστης ροής ισχύος είναι να εξυπηρετηθεί το φορτίο, έχοντας συνήθως ως σκοπό το ελάχιστο δυνατό κόστος και ταυτόχρονα να τηρούνται όλοι οι τεχνικοί περιορισμοί που μπορεί να έχει το σύστημα. [13].

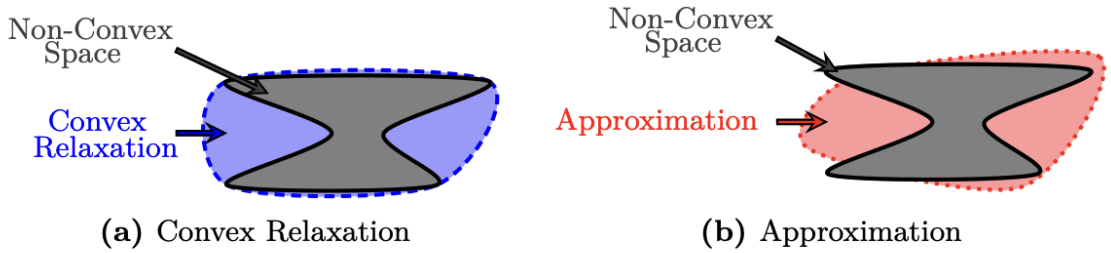
Η βέλτιστη ροή ισχύος με περιορισμούς ασφαλείας (SCOPF) εμπεριέχει και μια ανάλυση διαταραχών η οποία εξασφαλίζει ότι το σύστημα θα δουλέψει βέλτιστα στο ενδεχόμενο κάποιας αστοχίας. Η παραπάνω διαδικασία είναι πολύ σημαντική για τον διαχειριστή του εκάστοτε συστήματος γιατί εξασφαλίζει την αξιοπιστία και την οικονομική λειτουργία του συστήματος ακόμα και σε περίπτωση κάποιου σφάλματος [14].

1.1.4 Χαλαρώσεις και προσεγγίσεις των εξισώσεων ροής φορτίου

Αφετηρία για το πρόβλημα της ροής φορτίου αποτελούν οι εξισώσεις των ροών φορτίου. Οι τελευταίες αποδίδουν τη συσχέτιση που υπάρχει μεταξύ της τάσης και των εγχύσεων ισχύος σε κάθε ζυγό του συστήματος. Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να εισαχθούν σε προβλήματα βελτιστοποίησης. Αφήνοντας τις τάσεις και τις εγχύσεις ισχύος να είναι μεταβλητές απόφασης και εισάγοντας περιορισμούς που αφορούν τα τεχνικά όρια του συστήματος (π.χ. όρια ροής των γραμμών και τεχνικά ελάχιστα και μέγιστα των γεννητριών) μπορεί να δομηθεί η βέλτιστη ροή φορτίου με σκοπό την ελαχιστοποίηση του κόστους λειτουργίας [5]. Η μη γραμμική συμπεριφορά των παραπάνω εξισώσεων ροής φορτίου είναι ο κύριος λόγος για τον οποίο τα προβλήματα βελτιστοποίησης, που δομούνται με βάση αυτές, είναι κατά κανόνα μη κυρτά. Τέλος, για το μη κυρτό πρόβλημα βέλτιστης ροής φορτίου, η σύγκλιση του σε καθολική λύση δεν είναι εξασφαλισμένη [15] [5] [16].

Με σκοπό να περιοριστεί η πολυπλοκότητα που συνεπάγεται η μη κυρτότητα χρησιμοποιούνται δύο μεγάλες οικογένειες για την παράσταση της ροής φορτίου, οι προσεγγίσεις (approximations) και οι χαλαρώσεις (relaxations). Στην παρούσα διπλωματική εργασία, το μοντέλο που δομείται ανήκει στην κατηγορία των γραμμικών προσεγγίσεων. Παρότι δε θα γίνει εκτενής ανάλυση για την κατηγορία των χαλαρώσεων, σημαντικό κρίνεται το να γίνει αναφορά στις ειδοποιούς διαφορές με τις προσεγγίσεις. Από τη μία, η περιοχή εφικτότητας (feasible space) των χαλαρώσεων περικλείει την αντίστοιχη του μη κυρτού προβλήματος, με την ιδιότητα ότι η πρώτη περιοχή επιλέγεται να είναι κυρτή. Από την άλλη, η περιοχή εφικτότητας των προσεγγίσεων προσπαθεί να πλησιάσει την αντίστοιχη του μη κυρτού προ-

βλήματος, χωρίς να σημαίνει ότι η τελευταία είναι υποσύνολο της πρώτης. Τα παραπάνω παρουσιάζονται στο σχήμα 1.5 [5].



(a) Convex Relaxation **(b)** Approximation

Σχήμα 1.5: *Στο σχήμα (a) παρουσιάζονται η κυρτή εφικτή περιοχή για την χαλάρωση και η μη κυρτή εφικτή περιοχή του μη γραμμικού προβλήματος. Στο σχήμα (b) παρουσιάζεται η κυρτή εφικτή περιοχή για την προσέγγιση και η μη κυρτή περιοχή του μη γραμμικού προβλήματος [5].*

Από τα παραπάνω μπορεί να παρατηρηθεί ότι η μη εφικτότητα μιας χαλάρωσης συνεπάγεται και μη εφικτότητα του αρχικού μη κυρτού προβλήματος, αλλά εφικτότητα της χαλάρωσης δε συνεπάγεται και εφικτότητα του μη κυρτού προβλήματος. Αντίστοιχα συμπεράσματα δεν προκύπτουν για τις προσεγγίσεις, όπου η εφικτότητα ή η μη εφικτότητά τους δε συνεπάγεται κάτι για το μη κυρτό πρόβλημα. Τέλος, οι προσεγγίσεις δεν έχουν τη δυνατότητα να εξάγουν κάποιο άνω ή κάτω όριο για την βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του μη κυρτού προβλήματος, σε αντίθεση με τις κυρτές χαλαρώσεις [5].

Πιο αναλυτικά, προκειμένου να υλοποιηθεί μια προσέγγιση της ροής φορτίου είναι απαραίτητο να γίνουν κάποιες υποθέσεις που απλοποιούν το αρχικό πρόβλημα. Όσο λιγότερο γενικές είναι οι υποθέσεις που γίνονται τόσο πιο απλό γίνεται το πρόβλημα και άρα και υπολογιστικά ευκολότερο στην επίλυση. Είναι πολύ σημαντικό το να μειωθεί η πολυπλοκότητα του μοντέλου γιατί με αυτόν τον τρόπο ο υπολογισμός των λύσεων μπορεί να προκύψει σε πολύ μικρότερο χρόνο για τα πολύ μεγάλα συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας [5]. Επίσης, οι γραμμικές προσεγγίσεις μπορούν να προσφέρουν εγγυήσεις για την ικανότητα σύγκλισης τους. Το παραπάνω είναι πολύ σημαντικό γιατί ορισμένες εφαρμογές της βέλτιστης ροής φορτίου απαιτούν αυστηρές προϋποθέσεις σύγκλισης. Κάποιες από αυτές τις εφαρμογές είναι η εκκαθάριση της αγοράς επόμενης ημέρας και της αγοράς πραγματικού χρόνου [15]. Οι προσεγγίσεις, κατά την πλεινότητά τους, αποτελούνται από γραμμικές εξισώσεις που υλοποιούνται είτε ως LP (Linear Programming) προβλήματα είτε ως QP (Quadratic Programming) προβλήματα. Οι δύο παραπάνω κατηγορίες προβλημάτων έχουν το σημαντικό πλεονέκτημα ότι λύνονται με πολύ αποτελεσματικούς και ανεπτυγμένους επιλυτές, όπως είναι ο Gurobi, που χρησιμοποιείται και στην παρούσα εργασία. Το σε ποιά κατηγορία ανήκει το πρόβλημα εξαρτάται από την επιλογή της αντικειμενικής συνάρτησης [5].

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως σκοπό την πρόταση μιας γραμμικής προσέγγισης του προβλήματος βέλτιστης ροής ισχύος εναλλασσόμενου ρεύματος και τη σύγκριση με κλασσικές γραμμικοποιήσεις της βιβλιογραφίας όπως η DC Bθ και Decoupled βέλτιστη ροή φορτίου [17].

Κεφάλαιο 2

Ανάλυση και Μοντελοποίηση

2.1 Ανάλυση των εξισώσεων που προέρχονται από τη γραμμικοποιήμενη Ροή Φορτίου

Στην ενότητα αυτή γίνεται η μαθηματική μοντελοποίηση της γραμικοποιημένης βέλτιστης ροής φορτίου που προτείνεται στην παρούσα εργασία. Οι βασικοί περιορισμοί του μοντέλου προέρχονται από μία υπάρχουσα γραμμικοποίηση του προβλήματος ροής φορτίου και σε αυτές τις εξισώσεις θα προσθέτονται ακόμα κάποιες επιπλέον ώστε να δημιουργηθεί το τελικό μοντέλο. Η γραμμικοποιηση της ροής φορτίου βασίζεται στην έρευνα των Saverio Bolognani και Sandro Zampieri [18].

Οι εξισώσεις που αφορούν στη ροή φορτίου υπολογίζουν με προσεγγιστικό τρόπο:

- Το μέτρο της τάσης όλων των ζυγών.
- Τη γωνία της τάσης όλων των ζυγών.
- Την παραγωγή αέργου ισχύος των γεννητριών.

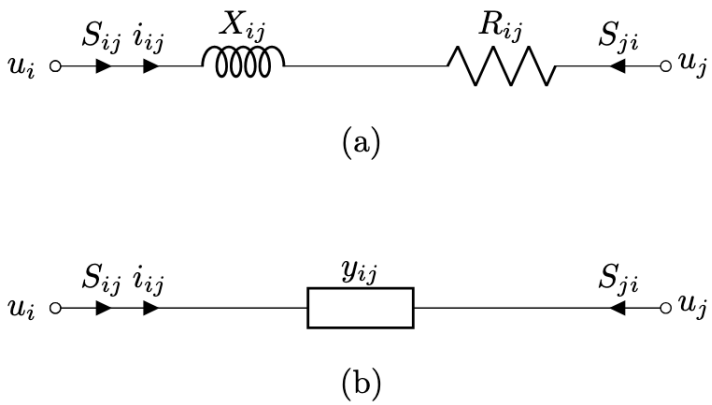
2.1.1 Αναπαράσταση γραμμών διανομής

Προτού γίνει η ανάλυση των εξισώσεων ροής φορτίου, σημαντικό είναι να οριστεί ο τρόπος με τον οποίο αναπαρίστανται οι γραμμές στα υπό μελέτη συστήματα. Για την παρούσα εργασία θεωρήθηκαν αμελητέα τα εγκάρσια στοιχεία. Έτσι, η κάθε γραμμή του συστήματος είναι ισοδύναμη με μία επαγωγική και μία ωμική αντίσταση, εν σειρά. Στο σχήμα 2.1 φαίνεται η ισοδύναμη αναπαράσταση, όπου s_{ij} είναι η ροή φαινόμενης ισχύς από τον κόμβο i προς τον j και i_{ij} είναι το ρεύμα με κατεύθυνση από τον κόμβο i προς τον j.

Για τον υπολογισμό της αγωγιμότητας της γραμμής χρησιμοποιείται ο τύπος:

$$y_{ij} = \frac{1}{z_{ij}} = \frac{1}{R_{ij} + j \cdot X_{ij}} \tag{2.1}$$

Μέσω των αγωγιμοτήτων αυτών δομείται ο πίνακας αγωγιμοτήτων Y και με τη σειρά του ο πίνακας Z, που είναι ο αντίστροφος του πρώτου. Ακριβής μεθοδολογία για τη δημιουργία του πίνακα Z θα παρουσιαστεί σε επόμενη ενότητα της εργασίας.



Σχήμα 2.1: *Στο σχήμα (a) παρουσιάζεται η ισοδύναμη αναπαράσταση της γραμμής διανομής ως μία επαγωγική και μία ωμική αντίσταση εν σειρά. Στο σχήμα (b) παρουσιάζεται η ίδια αναπαράσταση μέσω της αγωγιμότητας της γραμμής.*

2.1.2 Υπολογισμός τάσης

Στη συγκεκριμένη υποενότητα γίνεται ανάλυση της εξίσωσης που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του μέτρου τάσης με τη σημειογραφία ενός προβλήματος ροής φορτίου. Σε επόμενη ενότητα γίνεται η αναγωγή αυτών των εξισώσεων στη σημειογραφία που αρμόζει σε ένα πρόβλημα βέλτιστης ροής φορτίου. Η εξίσωση που προτείνεται για τον προσεγγιστικό υπολογισμό της τάσης είναι:

$$\hat{u}_{\mathcal{L}} = V_0 e^{j\Theta_0} \left(\mathbb{1} + \frac{1}{V_0^2} Z \overline{s}_{\mathcal{L}} \right) \tag{2.2}$$

Στη γραμμικοποίηση της ροής φορτίου η εξίσωση 2.2 αρχικά αφορά μόνο τους PQ ζυγούς του συστήματος (δηλαδή το σύνολο $\mathcal{L}$ είναι οι PQ ζυγοί), ο πίνακας Z είναι ο αντίστροφος του πίνακα αγωγιμοτήτων Y, το $\overline{s}_{\mathcal{L}}$ είναι το διάνυσμα με τις μιγαδικές εγχύσεις στους ζυγούς και τα V_0, Θ_0 είναι η τάση και η γωνία της τάσης του ζυγού αναφοράς. Αργότερα, η εξίσωση θα επεκταθεί για όλους τους ζυγούς, εκτός του ζυγού αναφοράς όπου το μέτρο και η γωνία της τάσης είναι δεδομένα. Προκειμένου να εξαχθεί μία γραμμική εξίσωση για το μέτρο και μία γραμμική εξίσωση για τη γωνία της τάσης γίνονται οι παραδοχές που θα εξηγηθούν παρακάτω.

Μέτρο τάσης

Το μέτρο της τάσης της 2.2 είναι :

$$|\hat{u}_{\mathcal{L}}| = V_0 \cdot |\mathbb{1} + \frac{1}{V_0^2} Z \overline{s}_{\mathcal{L}}| \tag{2.3}$$

Με σκοπό να απλοποιήσουμε περαιτέρω την εξίσωση του μέτρου τάσης θα γίνει μια ακόμα παραδοχή. Γνωρίζοντας ότι ισχύει $|1 + x| \approx 1 + Re(x)$ για $|x| << 1$ τότε παίρνουμε με την παραδοχή $||Z\overline{s}_{\mathcal{L}}||/V_0^2 << 1$ (δηλαδή όταν οι πτώσεις τάσεις είναι πολύ μικρότερες από την ονομαστική τάση):

$$|\hat{u}'_{\mathcal{L}'}| = \mathbb{1}V_0 + \frac{1}{V_0} Re(Z\overline{s}_{\mathcal{L}'}) \tag{2.4}$$

Ο παραπάνω τύπος επεκτείνεται και για τους PV ζυγούς του προβλήματος ροής φορτίου (δηλαδή το $\mathcal{L}'$ μπορεί να θεωρηθεί, πλέον, ότι είναι το σύνολο των ζυγών εκτός του ζυγού αναφοράς). Σε αυτήν την περίπτωση ο πίνακας Z και το διάνυσμα $\overline{s}$ σχηματίζονται ως εξής:

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{\mathcal{VV}} & Z_{\mathcal{VQ}} \\ Z_{\mathcal{QV}} & Z_{\mathcal{QQ}} \end{bmatrix}, s_{\mathcal{L}'} = \begin{bmatrix} s_{\mathcal{V}} \\ s_{\mathcal{Q}} \end{bmatrix}$$

Για τη δημιουργία του πίνακα Z δεν ακολουθείται μόνο η κλασσική μεθοδολογία όπου υπολογίζεται ως ο αντίστροφος του πίνακα αγωγιμοτήτων Y. Γίνεται άλλο ένα βήμα το οποίο αφορά στην κατάλληλη τοποθέτηση των στοιχείων του πίνακα στις σωστές θέσεις. Για να επιτευχθεί η σωστή διάταξη του πίνακα γίνεται αλλαγή στην αρίθμηση των ζυγών και πλέον αυτή ξεκινάει αριθμώντας τους PV και καταλήγει στους PQ (η στήλη και η γραμμή του ζυγού αναφοράς δεν συμπεριλαμβάνεται στον πίνακα). Η δομή του πίνακα Z καθώς και ένα παράδειγμα σε ενα μικρό σύστημα παρουσιάζονται στο Α΄.2. Με τον ίδιο τρόπο αρίθμησης δημιουργείται και το διάνυσμα $s_{\mathcal{L}}$. Αν αναλυθει περαιτέρω η εξίσωση 2.4 θα καταλήξουμε σε έναν τύπο που υπολογίζει το μέτρο της τάσης σε όλους τους ζυγούς του συστήματος, εκτός του ζυγού αναφοράς:

$$|u_k| = \mathbb{1}V_0 + \frac{Re(Z_{\mathcal{VV}})rp_{\mathcal{V}} + Im(Z_{\mathcal{VV}})rq_{\mathcal{V}}}{V_0} + \frac{Re(Z_{\mathcal{VQ}})rp_{\mathcal{Q}} + Im(Z_{\mathcal{VQ}})rq_{\mathcal{Q}}}{V_0},\ k \in PV, PQ \tag{2.5}$$

Η 2.5 είναι η τελική εξίσωση που θα χρησιμοποιηθεί για το μοντέλο μας, όπου $rp_{\mathcal{V}}$ είναι τα πραγματικά μέρη των εγχύσεων (ενεργές εγχύσεις) και $rq_{\mathcal{V}}$ τα φανταστικά μέρη των εγχύσεων (άεργες εγχύσεις) των PV ζυγών. Αντίστοιχα και για τους PQ ζυγούς.

Γωνία τάσης

Για τη γωνία της τάσης η τελική εξίσωση θα εξαχθεί με αντίστοιχο τρόπο σκέψης. Η γωνία της τάσης της εξίσωσης 2.2 είναι:

$$\hat{\theta}_{\mathcal{L}'} = \Theta_0\mathbb{1} + \angle\left(\mathbb{1} + \frac{1}{V_0^2} Z\overline{s}_{\mathcal{L}'}\right) \tag{2.6}$$

Με σκοπό να απλοποιήσουμε περαιτέρω την εξίσωση της γωνίας της τάσης θα γίνει μια παραδοχή. Γνωρίζοντας ότι ισχύει $\angle(1+x) \approx Im(x)$ για $|x| << 1$ τότε με την παραδοχή $||Z\overline{s}_{\mathcal{L}'}||/V_0^2 << 1$ παίρνουμε:

$$\hat{\theta}'_{\mathcal{L}'} = \Theta_0\mathbb{1} + \frac{1}{V_0^2} Im(Z\overline{s}_{\mathcal{L}'}) \tag{2.7}$$

Με περαιτέρω ανάλυση της 2.7 η εξίσωση γίνεται:

$$\theta_k = \Theta_0 + \frac{-Re(Z_{VV})rq_V + Im(Z_{VV})rp_V}{V_0^2} + \frac{-Re(Z_{VQ})rq_Q + Im(Z_{VQ})rp_Q}{V_0^2},\ k \in PV, PQ \quad (2.8)$$

Η 2.8 είναι η τελική εξίσωση υπολογισμού της γωνίας της τάσης για όλους τους ζυγούς εκτός από τον ζυγό αναφοράς.

Παρατήρηση για τους τελικούς τύπους μέτρου και γωνίας

Αν για την εξίσωση 2.2 θεωρηθεί ότι $\Theta_0 = 0$, που είναι κάτι το οποίο θεωρείται δεδομένο, τότε καταλήγουμε στη σχέση:

$$\hat{u}_{\mathcal{L}'} = V_0 \left(\mathbb{1} + \frac{1}{V_0^2} Z \bar{s}_{\mathcal{L}'} \right) = V_0 \mathbb{1} + \frac{1}{V_0} Z \bar{s}_{\mathcal{L}'} \quad (2.9)$$

Το αληθινό μέρος αυτής της εξίσωσης είναι:

$$Re(\hat{u}_{\mathcal{L}'}) = \mathbb{1} V_0 + \frac{Re(Z \bar{s}_{\mathcal{L}'})}{V_0} \quad (2.10)$$

Το φανταστικό μέρος της εξίσωσης είναι:

$$Im(\hat{u}_{\mathcal{L}'}) = \frac{Im(Z \bar{s}_{\mathcal{L}'})}{V_0} \quad (2.11)$$

Αυτό που παρατηρείται είναι ότι η 2.10 είναι ίδια με την 2.4 που χρησιμοποιείται σαν τελική εξίσωση για τον υπολογισμό του μέτρου τάσης. Επίσης, η εξίσωση 2.11 είναι ίδια με την 2.8 υπό την προϋπόθεση ότι ισχύει $V_0 = 1$ και $\Theta_0 = 0$, κάτι που είναι λογικές παραδοχές για τον ζυγό αναφοράς. Υπό αυτό το πρίσμα φαίνεται ότι προσεγγιστικά για το μέτρο της πολικής τάσης παίρνουμε το πραγματικό μέρος του τετραγωνικού μιγαδικού τάσης και για την γωνία παίρνουμε το φανταστικό μέρος του τετραγωνικού μιγαδικού τάσης.

2.1.3 Υπολογισμός αέργου ισχύος

Από την τελική εξίσωση για τον υπολογισμό του μέτρου της τάσης 2.5 μπορεί εύκολα να απομονωθεί η μεταβλητή της αέργου ισχύος για τους PV ζυγούς, όπου η το διάνυσμα των τάσεων των PV ζυγών:

$$rq_{PV} = -Im(Z_{VV})^{-1}(V_0(V_0\mathbb{1} - \eta) + Re(Z_{\mathcal{VV}})rp_{\mathcal{V}} + Re(Z_{\mathcal{VQ}})rp_{\mathcal{Q}} + Im(Z_{\mathcal{VQ}})rq_{\mathcal{Q}}) \quad (2.12)$$

Με τον παραπάνω τρόπο υπολογίζεται η έγχυση αέργου στους ζυγούς PV του συστήματος.

2.2 Αναγωγή των εξισώσεων από τη ροή φορτίου στη βέλτιστη ροή φορτίου και προσθήκη επιπλεόν περιορισμών

2.2.1 Από τη ροή φορτίου στη βέλτιστη ροή φορτίου

Σε αυτήν την υποενότητα οι εξισώσεις, στις οποίες καταλήξε η παραπάνω αναλύση, θα μετασχηματιστούν έτσι ώστε η σημειογραφία και η δομή τους να ταιριάζει σε ένα πρόβλημα βέλτιστης ροής φορτίου. Τα σύνολα, οι μεταβλητές και οι παράμετροι εξηγούνται στην ενότητα "Σημειογραφία".
Έτσι, η 2.5 γράφεται:

$$u_J = V_0 \mathbb{1} + \frac{Re(Z\bar{s}_J)}{V_0} \tag{2.13}$$

Η 2.8 γράφεται:

$$\theta_J = \mathbb{1}\Theta_0 + \frac{Im(Z\bar{s}_J)}{V_0^2} \tag{2.14}$$

Οι δύο παραπάνω εξισώσεις μπορούν να γραφούν πιο αναλυτικά στη μορφή:

$$u_j = V_0 + \frac{1}{V_0} \cdot \sum_{i \in K} (Re[Z_{j,i}] \cdot rp_i + Im[Z_{j,i}] \cdot rq_i) + \frac{1}{V_0} \cdot \sum_{i \in L} (Re[Z_{j,i}] \cdot rp_i + Im[Z_{j,i}] \cdot rq_i), j \in J \tag{2.15}$$

$$\theta_j = \Theta_0 + \frac{1}{V_0^2} \cdot \sum_{i \in K} (-Re[Z_{j,i}] \cdot rq_i + Im[Z_{j,i}] \cdot rp_i) + \frac{1}{V_0^2} \cdot \sum_{i \in L} (-Re[Z_{j,i}] \cdot rq_i + Im[Z_{j,i}] \cdot rp_i), j \in J \tag{2.16}$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονιστεί ότι με τις παραπάνω εξισώσεις γίνεται η υπόθεση ότι υπολογίζεται το μέτρο και η γωνία του πολικού μιγαδικού της τάσης. Σύμφωνα όμως, με το 2.1.2, για $V_0 = 1, \Theta_0 = 0$ τότε οι παραπάνω τύποι είναι ίσοι με το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του ορθογώνιου μιγαδικού της τάσης αντίστοιχα, που προσεγγιστικά θεωρείται ίσο με το μέτρο και τη γωνία του πολικού μιγαδικού. Η εξίσωση της αέργου 2.12 δεν μπορεί να μεταφερθεί στο μοντέλο, γιατί στην ουσία είναι ίδια εξίσωση με αυτήν του μέτρου της τάσης 2.5. Από την άλλη, χωρίς την εξίσωση της άεργου (2.12), το μοντέλο θα μείνει με δύο εξισώσεις (2.15, 2.16) για να υπολογίσει τις τιμές των μεταβλητών u, θ και rq. Το πρόβλημα που προκύπτει από το παραπάνω είναι ότι, για ένα δεδομένο διάνυσμα ενεργών εγχύσεων rp που δίνει βέλτιστη τιμή αντικειμενικής, θα προκύπτουν πολλαπλά εφικτά διανύσματα των μεταβλητών u, θ και rq. Αυτό δεν αποτελεί λογική συμπεριφορά για το μοντέλο μιας και δεν υπάρχει κάποιο κριτήριο για να επιλεχθεί κατάλληλα το καλύτερο από τα πολλά εφικτά διανύσματα των u, θ και rq. Πιο αναλυτικά, από αυτά τα εφικτά διανύσματα, κάποια θα προσεγγίζουν καλύτερα και κάποια χειρότερα τα αποτελέσματα του μοντέλου ACOPF. Δεν υπάρχει κάποιος τρόπος, όμως, για να επιλεχθεί το διάνυσμα εκείνο που πλησιάζει όσο το δυνατόν περισσότερο το αντίστοιχο του ACOPF. Στην περίπτωση που δεν

εισάγουμε κάποιον επιπλέον περιορισμό το μοντέλο θα διαλέξει τυχαία ένα από τα πολλά εφικτά διανύσματα. Δεν είναι λογικό τα αποτελέσματα της προσέγγισης να βασίζονται σε αυτήν την τυχαιότητα. Έτσι, για ένα συγκεκριμένο βέλτιστο διάνυσμα rp θα πρέπει να προκύπτει μοναδικό διάνυσμα για τις μεταβλητές u, θ και rq. Με σκοπό να επιτευχθεί το παραπάνω είναι αναγκαίο να προκαθοριστεί η τιμή της μεταβλητής u για τους ζυγούς με γεννήτριες. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να οριστεί το η της εξίσωσης 2.12 ίσο με μια δεδομένη τιμή. Αυτή η τιμή θα επηρεάσει την συμπεριφορά του μοντέλου και θα οριστεί παρακάτω. Εύκολα γίνεται κατανοητό ότι πλέον, η εξίσωση 2.12 θα είναι συνάρτηση μόνο της ενεργού ισχύος και ως αποτέλεσμα θα επιτευχθεί η κατάλληλη συμπεριφορά που αναλύθηκε παραπάνω. Άρα, η άεργος παραγωγή υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$rq_K = -\text{Im}(Z_{KK})^{-1}\left(\text{Re}(Z_{KK})rp_K + \text{Re}(Z_{KL})rp_L + \text{Im}(Z_{KL})rq_L\right) \tag{2.17}$$

Στην πράξη η εξίσωση 2.17 δεν εισάγεται σε αυτήν τη μορφή στο μοντέλο. Η 2.5 σε συνδυασμό με τον προκαθορισμό των τάσεων σε ζυγούς-γεννήτριες να είναι ίσες με 1 πετυχαίνουν το ίδιο αποτέλεσμα με την 2.17.

Πλέον, ο πίνακας Z και το διάνυσμα εγχύσεων $s_{\mathcal{L}'}$ γίνονται

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{KK} & Z_{KL} \\ Z_{LK} & Z_{LL} \end{bmatrix}, s_J = \begin{bmatrix} s_K \\ s_L \end{bmatrix}$$

Ένα απλό παράδειγμα υλοποίησης του πίνακα Z παρουσιάζεται στο Α΄.2

2.2.2 Η αντικειμενική συνάρτηση

Ο σκοπός της επίλυσης του γραμμικού μοντέλου βέλτιστης ροής φορτίου είναι να εξαχθούν εκείνα τα αποτελέσματα τα οποία θα καταφέρνουν να ελαχιστοποιούν το κόστος λειτουργίας του συστήματος, δηλαδή να καλυφθεί το φορτίο με το ελάχιστο δυνατό κόστος και να λειτουργήσει με ασφάλεια το σύστημα. Οι παράμετροι που χρησιμοποιούνται στην αντικειμενική είναι το οριακό κόστος (Marginal Cost) με μονάδες μέτρησης €/MWh. Η επίλυση του μοντέλου θα δώσει όλα τα αποτελέσματα της ενεργού παραγωγής σε α.μ. τιμές και έτσι αν πρέπει να εξαχθεί το κόστος λειτουργίας θα πρέπει να γίνει η αναγωγή σε φυσικές μονάδες.

$$min_{p,Q,u,\theta,rp,rq,f,fq} \sum_{g \in G} MC_g \cdot p_g \tag{2.18}$$

2.2.3 Επιπλέον περιορισμοί για την ολοκλήρωση του μοντέλου

Στην παρούσα υποενότητα θα εισάγονται όλοι αυτοί οι περιορισμοί που αφορούν στα όρια παραγωγής των γεννητριών, στα αποδεκτά όρια τάσεων, στα αποδεκτά όρια για τις ροές στις γραμμές του δικτύου και στις εξισώσεις που προσδιορίζουν το ισοζύγιο ισχύος σε κάθε ζυγό.

Τεχνικά όρια παραγωγής των γεννητριών

Οι παρακάτω περιορισμοί εξασφαλίζουν ότι η παραγωγή ενεργού και αέργου ισχύος από τις γεννήτριες του συστήματος θα είναι μέσα στα τεχνικά όρια της εκάστοτε γεννήτριας.

$$P_{min_g} \leq p_g \leq P_{max_g},\ b \in B,\ g \in G_b \tag{2.19}$$

$$Q_{min_g} \leq q_g \leq Q_{max_g},\ b \in B,\ g \in G_b \tag{2.20}$$

Όρια τάσης και καθορισμός της γωνίας και του μέτρου τάσης του ζυγού αναφοράς και των ζυγών με γεννήτριες

Κρίνεται σκόπιμο να περιορίσουμε την τάση λειτουργίας του συστήματος σε τιμές μεταξύ μιας ελάχιστης και μιας μέγιστης τιμής. Επίσης, σύμφωνα με την ανάλυση της υποενότητας 2.2.1, πρέπει να προκαθοριστεί το μέτρο της τάσης των ζυγών γεννητριών. Τέλος, πρέπει να προκαθοριστεί και η τάση (μέτρο και γωνία) του ζυγού αναφοράς.

$$V_{min} \leq u_n \leq V_{max}, n \in N \tag{2.21}$$

$$\theta_{slackbus} = \Theta_0 \tag{2.22}$$

$$u_{slackbus} = V_0 \tag{2.23}$$

$$u_k = 1, k \in K \tag{2.24}$$

Περιορισμοί έγχυσης ενεργού και αέργου

Οι παρακάτω περιορισμοί έχουν διπλή σημασία για το γραμμικό μοντέλο. Αρχικά, ορίζοντας τις εγχύσεις ως την παραγωγή μείον το φορτίο σε κάθε ζυγό καθίσταται πιο κατανοητή η υλοποίηση του κώδικα, μιας και σε όλους τους περιορισμούς χρησιμοποιείται η μεταβλητή της έγχυσης. Επιπλέον, οι περιορισμοί 2.25, 2.26 είναι χρήσιμοι, γιατί οι δϋικές τους μεταβλητές ερμηνεύονται ως κομβικές τιμές για το σύστημα. Το ρ_g και το ρ_l ισούται με την ευαισθησία της αντικειμενικής όταν προκαλείται μια αλλαγή ίση με τη μονάδα στη δεξιά μεριά του περιορισμού. Πρακτικά, επειδή έχουμε ανελαστική ζήτηση, αυτό σημαίνει ότι θα είναι ίσο με την οριακή αύξηση στο κόστος μετά από μία μοναδιαία αύξηση στην παραγωγή της οριακής γεννήτριας.

$$(\rho_b) : rp_b = D_b^p + \sum_{g \in G_b} p_g,\ b \in B \tag{2.25}$$

$$(\rho_l) : rp_l = D_l^p,\ l \in L \tag{2.26}$$

$$rq_b = D_b^q + \sum_{g \in G_b} q_g,\ b \in B \tag{2.27}$$

$$rq_l = D_l^q,\ l \in L \tag{2.28}$$

Υπολογισμός ενεργών και άεργων ροών στις γραμμές

Οι γραμμές του δικτύου είναι το σύνολο M και αναπαριστώνται έχοντας μόνο μία κατεύθυνση. Για την ενεργό και άεργο ροή χρησιμοποιείται το σύμβολο f_m και fq_m αντίστοιχα, με $m \in M$. Το m μπορεί να συμβολιστεί και ως (i,j) με το i να είναι ο κόμβος προέλευσης και j ο αντίστοιχος προορισμός. Ισοδύναμος συμβολισμός για τις ροές ενεργού και αέργου ισχύος είναι p_{ij} και q_{ij} αντίστοιχα. Ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζονται οι ροές είναι μέσω της γραμμικοποίησης Taylor. Άρα ο περιορισμός γίνεται:

- Για την ενεργό ροή:

$$f_{m=(i,j)} = \frac{R_{ij}(u_i - u_j) + X_{ij}(\theta_i - \theta_j)}{R_{ij}^2 + X_{ij}^2},\ m \in M \tag{2.29}$$

- Για την άεργο ροή:

$$fq_{m=(i,j)} = \frac{X_{ij}(u_i - u_j) - R_{ij}(\theta_i - \theta_j)}{R_{ij}^2 + X_{ij}^2},\ m \in M \tag{2.30}$$

Η απόδειξη των παραπάνω σχέσεων γίνεται στο παράρτημα Α΄.1.

Ισοζύγιο έγχυσης και ροών στις γραμμές για κάθε κόμβο

Για κάθε κόμβο του δικτύου θα πρέπει να ισχύει ότι η έγχυση και οι ροές στις γραμμές που συνεπάγεται σχετίζονται με ένα ισοζύγιο. Αυτό δεν είναι κάτι άλλο από έναν περιορισμό που εξασφαλίζει την αρχή διατήρησης ενέργειας για κάθε κόμβο. Επίσης, μέχρι αυτό το σημείο δεν υπήρχε κάποιος περιορισμός που να εμπλέκει την ενεργό και άεργο έγχυση του ζυγού αναφοράς. Αναλογιζόμενοι αυτό το γεγονός, οι παρακάτω περιορισμοί έχουν ακόμα μεγαλύτερη αξία γιατί αποτελούν τον τρόπο για τον υπολογισμό αυτών των μεγεθών του ζυγού αναφοράς.

$$rp_n = \sum_{m=(n,:)} f_m - \sum_{m=(:,n)} f_m,\ n \in N \tag{2.31}$$

$$rq_n = \sum_{m=(n,:)} fq_m - \sum_{m=(:,n)} fq_m,\ n \in N \tag{2.32}$$

Μέγιστα επιτρεπόμενα όρια ροής ισχύος στις γραμμές

Όπως είναι γνωστό, τα όρια ροής στις γραμμές του δικτύου εκφράζονται ως μια μη γραμμική σχέση στα μοντέλα ACOPF. Μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$p_{ij}^2 + q_{ij}^2 \leq S_{ij}^2$$

Οι γραμμικοποιημένες σχέσεις που χρησιμοποιούνται για να αναπαρασταθούν τα όρια γραμμών είναι:

- Για την ενεργό ισχύ:

$$f_m \leq S_m,\ m \in M \tag{2.33}$$

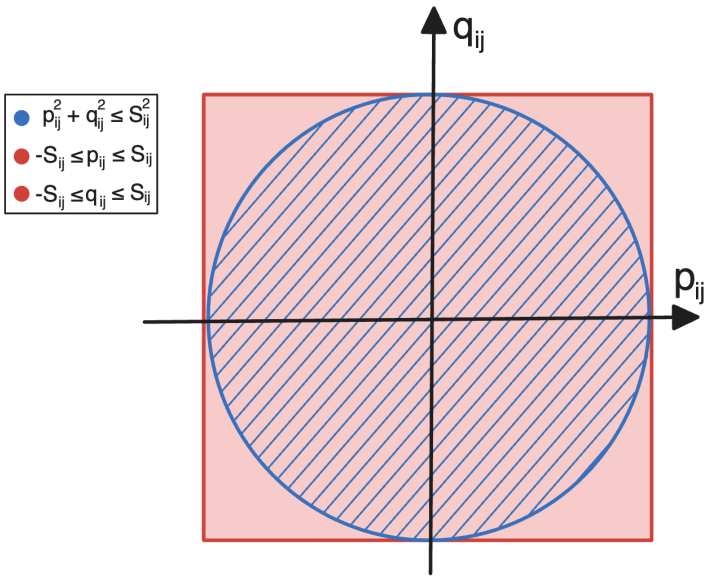
$$-f_m \leq S_m,\ m \in M \tag{2.34}$$

- Για την άεργο ισχύ:

$$fq_m \leq S_m,\ m \in M \tag{2.35}$$

$$-fq_m \leq S_m,\ m \in M \tag{2.36}$$

Στο παρακάτω σχήμα 2.2 βλέπουμε τις δυνατές τιμές που επιτρέπουν, ο γραμμικός και ο μη γραμμικός περιορισμός, να πάρουν η ενεργός και η άεργος ροή ισχύος στις γραμμές. Για το γραμμικό μοντέλο επιτρέπονται όλες οι τιμές εντός του κόκκινου τετραγώνου και για το μη γραμμικό όλες οι τιμές εντός του μπλε κύκλου. Οι επιτρεπόμενες τιμές του γραμμικού μοντέλου είναι υπερσύνολο του μη γραμμικού. Για τους παραπάνω περιορισμούς πρέπει να τονιστεί ότι η τιμή S_m θεωρείται θετική.



Σχήμα 2.2: *Δυνατές τιμές των ροών σε κάθε γραμμή για το γραμμικό (κόκκινη περιοχή) και για το μη γραμμικό μοντέλο (μπλε περιοχή).*

2.3 Το γραμμικό μοντέλο για τη βέλτιστη ροή φορτίου

Συλλέγοντας τις παραπάνω εξισώσεις δομείται το τελικό μοντέλο για τη γραμμική προσέγγιση της βέλτιστης ροής φορτιου. Τα δεδομένα που παίρνουμε μετά την επίλυση θα είναι η ενεργός (α.μ.) και η άεργος (α.μ.) ισχύς που παράγεται από όλες τις γεννήτριες του συστήματος, τα μέτρα (α.μ.) και οι γωνίες (○) των τάσεων για όλους τους ζυγούς του συστήματος, οι κομβικές τιμές (€/MWh) σε κάθε ζυγό και οι ροές ενεργού (α.μ.) και αέργου (α.μ.) ισχύος σε κάθε γραμμή του συστήματος.

$$min_{p,Q,u,\theta,rp,rq,f,fq} \sum_{g \in G} MC_g \cdot p_g \tag{2.37}$$

$$(\nu_j) : u_j = V_0 + \frac{1}{V_0} \cdot \sum_{i \in K} (Re[Z_{j,i}] \cdot rp_i + Im[Z_{j,i}] \cdot rq_i) + \frac{1}{V_0} \cdot \sum_{i \in L} (Re[Z_{j,i}] \cdot rp_i + Im[Z_{j,i}] \cdot rq_i),\ j \in J \tag{2.38}$$

$$(\eta_j) : \theta_j = \Theta_0 + \frac{1}{V_0^2} \cdot \sum_{i \in K} (-Re[Z_{j,i}] \cdot rq_i + Im[Z_{j,i}] \cdot rp_i) + \frac{1}{V_0^2} \cdot \sum_{i \in L} (-Re[Z_{j,i}] \cdot rq_i + Im[Z_{j,i}] \cdot rp_i),\ j \in J \tag{2.39}$$

$$(\zeta_k) : u_k = 1,\ k \in K \tag{2.40}$$

$$(\mu_g^-) : -p_g \leq -P_{min_g},\ g \in G \tag{2.41}$$

$$(\mu_g^+) : p_g \leq P_{max_g},\ g \in G \tag{2.42}$$

$$(\delta_g^+) : q_g \leq Q_{max_g},\ g \in G \tag{2.43}$$

$$(\delta_g^-) : -q_g \leq -Q_{min_g},\ g \in G \tag{2.44}$$

$$(\xi_j^+) : u_j \leq V_{max},\ j \in J \tag{2.45}$$

$$(\xi_j^-) : -u_j \leq -V_{min},\ j \in J \tag{2.46}$$

$$(\alpha_{slackbus}) : \theta_{slackbus} = \Theta_0 \tag{2.47}$$

$$(\beta_{slackbus}) : u_{slackbus} = V_0 \tag{2.48}$$

$$(\psi_m) : f_{m=(i,j)} = \frac{R_{ij}(u_i - u_j) + X_{ij}(\theta_i - \theta_j)}{R_{ij}^2 + X_{ij}^2}, m \in M \tag{2.49}$$

$$(\varphi_m) : fq_{m=(i,j)} = \frac{X_{ij}(u_i - u_j) - R_{ij}(\theta_i - \theta_j)}{R_{ij}^2 + X_{ij}^2}, m \in M \tag{2.50}$$

$$(\lambda_m^+) : f_m \leq S_m,\ m \in M \tag{2.51}$$

$$(\lambda_m^-) : -f_m \leq S_m,\ m \in M \tag{2.52}$$

$$(\omega_m^+) : fq_m \leq S_m,\ m \in M \tag{2.53}$$

$$(\omega_m^-) : -fq_m \leq S_m,\ m \in M \tag{2.54}$$

$$(\sigma_n) : rp_n = \sum_{m=(n,:)} f_m - \sum_{m=(:,n)} f_m,\ n \in N \tag{2.55}$$

$$(\kappa_n) : rq_n = \sum_{m=(n,:)} fq_m - \sum_{m=(:,n)} fq_m,\ n \in N \tag{2.56}$$

$$(\rho_b) : rp_b = D_b^p + \sum_{g \in G_b} p_g,\ b \in B \tag{2.57}$$

$$(\rho_l) : rp_l = D_l^p,\ l \in L \tag{2.58}$$

$$(\pi_b) : rq_b = D_b^q + \sum_{g \in G_b} q_g,\ b \in B \tag{2.59}$$

$$(\pi_l) : rq_l = D_l^q,\ l \in L \tag{2.60}$$

$$p \geq 0$$

Κεφάλαιο 3

Ανάλυση με συνθήκες Karush-Kuhn-Taker

3.1 Εναλλακτική εκδοχή του γραμμικού μοντέλου για την απλούστερη εξαγωγή των συνθηκών ΚΚΤ

Προκειμένου να διευκολυνθεί η εξαγωγή των συνθηκών ΚΚΤ θα τροποποιηθεί καταλλήλως το μαθηματικό μοντέλο του προηγούμενου κεφαλαίου. Η αλλαγή που θα συντελεστεί είναι η αντικατάσταση των, εως τώρα, μεταβλητών μέτρου τάσης για τον ζυγό αναφοράς και τους ζυγούς γεννητριών και της γωνίας του ζυγού αναφοράς, με παραμέτρους. Στην ουσία δε θα αλλάξει κάτι στο μοντέλο. Στη μία περίπτωση οι μεταβλητές αυτές ορίζονται ίσες με συγκεκριμένες τιμές που διαλέγει ο χρήστης και στην άλλη περίπτωση εκφράζεται ακριβώς αυτό μετατρέποντας τις από μεταβλητές σε παραμέτρους που έχουν, δηλαδή, σταθερή και γνωστή τιμή πριν την επίλυση του προβλήματος. Αυτό θα βοηθήσει στο να απλοποιηθεί η διαδικασία εξαγωγής και ανάλυσης των συνθηκών ΚΚΤ. Το μοντέλο παρουσιάζεται παρακάτω:

Αντικειμενική συνάρτηση

$$\min_{p,Q,u,\theta,rp,rq,f,fq} \sum_{g\in G} MC_g \cdot p_g \tag{3.1}$$

Περιορισμοί μέτρου και γωνίας της τάσης

$$(\nu_l) : u_l = V_0 + \frac{1}{V_0} \cdot \sum_{i\in K} \left(\mathrm{Re}[Z_{j,i}] \cdot rp_i + \mathrm{Im}[Z_{j,i}] \cdot rq_i\right) + \frac{1}{V_0} \cdot \sum_{i\in L} \left(\mathrm{Re}[Z_{j,i}] \cdot rp_i + \mathrm{Im}[Z_{j,i}] \cdot rq_i\right), \; l \in L \tag{3.2}$$

$$(\eta_j) : \theta_j = \Theta_0 + \frac{1}{V_0^2} \cdot \sum_{i\in K} \left(-\mathrm{Re}[Z_{j,i}] \cdot rq_i + \mathrm{Im}[Z_{j,i}] \cdot rp_i\right) + \frac{1}{V_0^2} \cdot \sum_{i\in L} \left(-\mathrm{Re}[Z_{j,i}] \cdot rq_i + \mathrm{Im}[Z_{j,i}] \cdot rp_i\right), \; j \in J \tag{3.3}$$

Τεχνικοί περιορισμοί γεννητριών

$$(\mu_g^-) : -p_g \leq -P_{\min_g},\ g \in G \tag{3.4}$$

$$(\mu_g^+) : p_g \leq P_{\max_g},\ g \in G \tag{3.5}$$

$$(\delta_g^+) : q_g \leq Q_{\max_g},\ g \in G \tag{3.6}$$

$$(\delta_g^-) : -q_g \leq -Q_{\min_g},\ g \in G \tag{3.7}$$

Όρια μέτρου τάσης

$$(\xi_j^+) : u_l \leq V_{\max},\ l \in L \tag{3.8}$$

$$(\xi_j^-) : -u_l \leq -V_{\min},\ l \in L \tag{3.9}$$

Προσδιορισμός των ροών ενέργειας στις γραμμές

$$(\psi_m) : f_{m=(i,j)} = \frac{R_{ij}(U_i - U_j) + X_{ij}(\Theta_i - \Theta_j)}{R_{ij}^2 + X_{ij}^2},\ m \in M \tag{3.10}$$

$$(\phi_m) : fq_{m=(i,j)} = \frac{X_{ij}(U_i - U_j) - R_{ij}(\Theta_i - \Theta_j)}{R_{ij}^2 + X_{ij}^2},\ m \in M \tag{3.11}$$

$$U_i = \begin{cases} 1, & \text{αν } i \in G \\ u_i, & \text{αν } i \in L \end{cases} \quad U_j = \begin{cases} 1, & \text{αν } j \in G \\ u_j, & \text{αν } j \in L \end{cases}$$

$$\Theta_i = \begin{cases} 0, & \text{αν } i = slackbus \\ \theta_i, & \text{αν } i \in J \end{cases} \quad \Theta_j = \begin{cases} 0, & \text{αν } j = slackbus \\ \theta_j, & \text{αν } j \in J \end{cases}$$

Τεχνικά όρια γραμμών μεταφοράς

$$(\lambda_m^+) : f_m \leq S_m,\ m \in M \tag{3.12}$$

$$(\lambda_m^-) : -f_m \leq S_m,\ m \in M \tag{3.13}$$

$$(\omega_m^+) : fq_m \leq S_m,\ m \in M \tag{3.14}$$

$$(\omega_m^-) : -fq_m \leq S_m,\ m \in M \tag{3.15}$$

Ισοζύγιο ισχύς σε κάθε κόμβο

$$(\sigma_n) : rp_n = \sum_{m=(n,:)} f_m - \sum_{m=(:,n)} f_m,\ n \in N \tag{3.16}$$

$$(\kappa_n) : rq_n = \sum_{m=(n,:)} fq_m - \sum_{m=(:,n)} fq_m,\ n \in N \tag{3.17}$$

Περιορισμοί προσδιορισμού έγχυσης ισχύος

$$(\rho_b) : rp_b = D_b^p + \sum_{g \in G_b} p_g,\ b \in B \tag{3.18}$$

$$(\rho_l) : rp_l = D_l^p,\ l \in L \tag{3.19}$$

$$(\pi_b) : rq_b = D_b^q + \sum_{g \in G_b} q_g,\ b \in B \tag{3.20}$$

$$(\pi_l) : rq_l = D_l^q,\ l \in L \tag{3.21}$$

$$p \geq 0$$

3.2 Εξαγωγή των συνθηκών ΚΚΤ για το γραμμικό μοντέλο

Στην παρούσα υποενότητα θα εκφραστούν αναλυτικά οι συνθήκες Karush-Kuhn-Taker για το γραμμικό μοντέλο που προτείνει η παρούσα εργασία. Επιπλέον, οι συνθήκες θα χρησιμοποιηθούν σε ένα σύστημα δύο ζυγών έτσι ώστε να γίνει καλύτερα κατανοητός και να τεκμηριωθεί καλύτερα ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η κομβική τιμολόγηση στο μοντέλο. Τέλος, θα γίνει η ερμηνεία των πιο σημαντικών δϋικών μεταβλητών και θα τεκμηριωθεί με ανάλυση ευαισθησίας η διαίσθηση της τιμολόγησης στα μη γραμμικά και γραμμικά μοντέλα.

3.2.1 Γενικός τρόπος εξαγωγής των συνθηκών ΚΚΤ

Παρακάτω θα παρουσιαστεί ο τρόπος με τον οποίο εκφράζονται οι συνθήκες Karush-Kuhn-Taker στη γενική περίπτωση των μη γραμμικών μοντέλων. Το μαθηματικό πρόγραμμα είναι το παρακάτω:

$$(NC) : max_{x \geq 0, y} f(x, y) \tag{3.22}$$

$$(\lambda_i) : g_i(x, y) \leq 0, i = 1, ..., m \tag{3.23}$$

$$(\mu_i) : h_i(x, y) = 0, i = 1, ..., p \tag{3.24}$$

Η μόνη υπόθεση που γίνεται είναι ότι οι παραπάνω συναρτήσεις f, g_i, h_i είναι παραγωγίσιμες. Έτσι, για το πρόβλημα μεγιστοποίησης οι συνθήκες εκφράζονται ως εξής:

1.
$$h(x) = 0$$

2.
$$0 \leq \lambda \perp g(x,y) \leq 0$$

3.
$$0 \leq x \perp \nabla_x g(x,y)^T \lambda + \nabla_x h(x,y)^T \mu - \nabla_x f(x,y) \geq 0$$

4.
$$\nabla_y g(x,y)^T \lambda + \nabla_y h(x,y)^T \mu - \nabla_y f(x,y) = 0$$

Οι τέσσερις διαφορετικοί τύποι συνθηκών που φαίνονται παραπάνω θα ονομάζονται στο εξής τύπου 1, τύπου 2, τύπου 3 και τύπου 4 αντίστοιχα. Για προβλήματα ελαχιστοποίησης η παραπάνω υλοποίηση αλλάζει. Σε εκείνη την περίπτωση το πρόσημο των $\nabla_x f(x,y)$ και $\nabla_y f(x,y)$ στις συνθήκες τύπου 3 και 4 αλλάζει σε συν (+).

3.2.2 Οι συνθήκες KKT για το μοντέλο της παρούσας εργασίας

Τύπου 1

$$(\nu_l) : u_l = V_0 + \frac{1}{V_0} \cdot \sum_{i \in K} (Re[Z_{l,i}] \cdot rp_i + Im[Z_{l,i}] \cdot rq_i) + \frac{1}{V_0} \cdot \sum_{i \in L} (Re[Z_{l,i}] \cdot rp_i + Im[Z_{l,i}] \cdot rq_i),\ l \in L \quad (3.25)$$

$$(\eta_j) : \theta_j = \Theta_0 + \frac{1}{V_0^2} \cdot \sum_{i \in K} (-Re[Z_{j,i}] \cdot rq_i + Im[Z_{j,i}] \cdot rp_i) + \frac{1}{V_0^2} \cdot \sum_{i \in L} (-Re[Z_{j,i}] \cdot rq_i + Im[Z_{j,i}] \cdot rp_i),\ j \in J \quad (3.26)$$

$$(\psi_m) : f_{m=(i,j)} = \frac{R_{ij}(U_i - U_j) + X_{ij}(\Theta_i - \Theta_j)}{R_{ij}^2 + X_{ij}^2},\ m \in M \quad (3.27)$$

$$(\varphi_m) : fq_{m=(i,j)} = \frac{X_{ij}(U_i - U_j) - R_{ij}(\Theta_i - \Theta_j)}{R_{ij}^2 + X_{ij}^2},\ m \in M \quad (3.28)$$

$$U_i = \begin{cases} 1, & \text{αν } i \in G \\ u_i, & \text{αν } i \in L \end{cases} \qquad U_j = \begin{cases} 1, & \text{αν } j \in G \\ u_j, & \text{αν } j \in L \end{cases}$$

$$\Theta_i = \begin{cases} 0, & \text{αν } i = slackbus \\ \theta_i, & \text{αν } i \in J \end{cases} \qquad \Theta_j = \begin{cases} 0, & \text{αν } j = slackbus \\ \theta_j, & \text{αν } j \in J \end{cases}$$

$$(\sigma_n) : rp_n = \sum_{m=(n,:)} f_m - \sum_{m=(:,n)} f_m,\ n \in N \tag{3.29}$$

$$(\kappa_n) : rq_n = \sum_{m=(n,:)} fq_m - \sum_{m=(:,n)} fq_m,\ n \in N \tag{3.30}$$

$$(\rho_b) : rp_b = D_b^p + \sum_{g \in G_b} p_g,\ b \in B \tag{3.31}$$

$$(\rho_l) : rp_l = D_l^p,\ l \in L \tag{3.32}$$

$$(\pi_b) : rq_b = D_b^q + \sum_{g \in G_b} q_g,\ b \in B \tag{3.33}$$

$$(\pi_l) : rq_l = D_l^q,\ l \in L \tag{3.34}$$

Τύπου 2

$$0 \leq \omega_m^+ \perp S_m - fq_m \geq 0, m \in M \tag{3.35}$$

$$0 \leq \omega_m^- \perp S_m + fq_m \geq 0, m \in M \tag{3.36}$$

$$0 \leq \delta_g^+ \perp Q_{max} - q_g \geq 0, g \in G \tag{3.37}$$

$$0 \leq \delta_g^- \perp -Q_{min} + q_g \geq 0, g \in G \tag{3.38}$$

$$0 \leq \mu_g^+ \perp P_{max} - p_g \geq 0, g \in G \tag{3.39}$$

$$0 \leq \mu_g^- \perp -P_{min} + p_g \geq 0, g \in G \tag{3.40}$$

$$0 \leq \lambda_m^+ \perp S_m - f_m \geq 0, m \in M \tag{3.41}$$

$$0 \leq \lambda_m^- \perp S_m + f_m \geq 0, m \in M \tag{3.42}$$

$$0 \leq \xi_l^+ \perp V_{max} - u_l \geq 0, l \in L \tag{3.43}$$

$$0 \leq \xi_l^- \perp -V_{min} + u_l \geq 0, l \in L \tag{3.44}$$

Τύπου 3

$$0 \leq p_g \perp MC_g - \mu_g^- + \mu_g^+ - \rho_b \geq 0,\ b \in B,\ g \in G_b \tag{3.45}$$

Τύπου 4

$$(f_m) : \lambda_m^+ - \lambda_m^- + \psi_m - \sigma_{n(F(m))} + \sigma_{n(T(m))} = 0,\ m \in M \tag{3.46}$$

$$(fq_m) : \omega_m^+ - \omega_m^- + \varphi_m - \kappa_{n(F(m))} + \kappa_{n(T(m))} = 0,\ m \in M \tag{3.47}$$

$$(q_g) : \delta_g^+ - \delta_g^- - \pi_g = 0,\ g \in G \tag{3.48}$$

$$(rp_j) : -\sum_{l \in L} \nu_l \frac{Re[Z_{l,k}]}{V_0} - \sum_{j \in J} \eta_j \frac{Im[Z_{j,k}]}{V_0^2} + \rho_k + \sigma_k = 0,\ k \in J \tag{3.49}$$

$$(rp_{slackbus}) : \tag{3.50}$$

$$(rq_k) : -\sum_{j \in J} \nu_j \frac{Im[Z_{j,k}]}{V_0} - \sum_{j \in J} \eta_j \frac{Re[Z_{j,k}]}{V_0^2} + \rho_k + \sigma_k = 0,\ k \in J \tag{3.51}$$

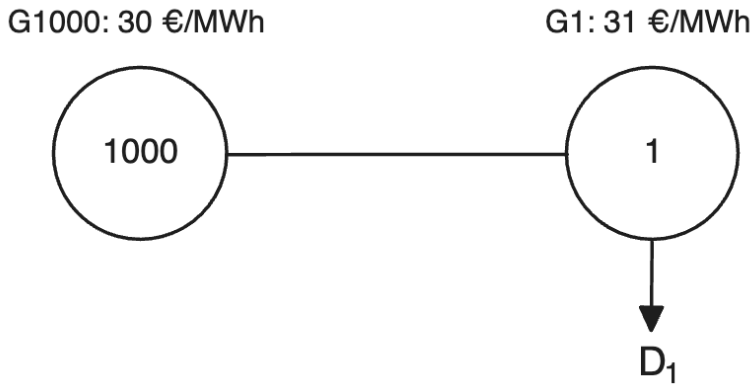
$$(rq_{slackbus}) : \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}(u_l) : \nu_l + \xi_l^+ + \xi_l^- - \sum_{m \in M : F(m) = l} \psi_m \cdot \frac{R_m}{R_m^2 + X_m^2} + \sum_{m \in M : T(m) = l} \psi_m \cdot \frac{R_m}{R_m^2 + X_m^2} \\ - \sum_{m \in M : F(m) = l} \varphi_m \cdot \frac{X_m}{R_m^2 + X_m^2} + \sum_{m \in M : T(m) = l} \varphi_m \cdot \frac{X_m}{R_m^2 + X_m^2} = 0,\ l \in L\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}(\theta_j) : \eta_j + \sum_{m \in M : F(m) = j} \psi_m \cdot \frac{X_m}{R_m^2 + X_m^2} + \sum_{m \in M : T(m) = j} \psi_m \cdot \frac{X_m}{R_m^2 + X_m^2} \\ + \sum_{m \in M : F(m) = j} \varphi_m \cdot \frac{R_m}{R_m^2 + X_m^2} - \sum_{m \in M : T(m) = j} \varphi_m \cdot \frac{R_m}{R_m^2 + X_m^2} = 0,\ j \in J\end{aligned} \tag{3.54}$$

3.3 Εφαρμογή σε σύστημα δύο κόμβων

Με σκοπό την εφαρμογή των συνθηκών ΚΚΤ σε μια απλή περίπτωση θα χρησιμοποιηθεί το σύστημα δύο ζυγών που φαίνεται παρακάτω σχήμα 3.1. Ο ζυγός 1000 είναι ο ζυγός αναφοράς. Και οι δύο έχουν γεννήτρια όπου το οριακό τους κόστος είναι 30€/MWh και 31€/MWh για τον ζυγό 1000 και 1 αντίστοιχα. Τέλος, φορτίο υπάρχει μόνο στον κόμβο 1.



Σχήμα 3.1: *Σύστημα δύο ζυγών για το παράδειγμα των συνθηκών ΚΚΤ.*

3.3.1 Το γραμμικό μοντέλο για το συγκεκριμένο σύστημα

$$\min_{p,Q,u,\theta,rp,rq,f,fq} MC_{1000} \cdot p_{1000} + MC_1 \cdot p_1 \tag{3.55}$$

$$(\eta_1) : \theta_1 = \theta_0 + \frac{1}{V_0^2} \cdot (-\operatorname{Re}[Z_{11}] \cdot rq_1 + \operatorname{Im}[Z_{11}] \cdot rp_1) \tag{3.56}$$

$$(\mu_1^-) : -p_1 \leq -P_{\min_1}, \tag{3.57}$$

$$(\mu_{1000}^-) : -p_{1000} \leq -P_{\min_{1000}}, \tag{3.58}$$

$$(\mu_1^+) : p_1 \leq P_{\max_1} \tag{3.59}$$

$$(\mu_{1000}^+) : p_{1000} \leq P_{\max_{1000}} \tag{3.60}$$

$$(\delta_1^+) : q_1 \leq Q_{\max_1} \tag{3.61}$$

$$(\delta_{1000}^+) : q_{1000} \leq Q_{\max_{1000}} \tag{3.62}$$

$$(\delta_1^-) : -q_1 \leq -Q_{\min_1} \tag{3.63}$$

$$(\delta_{1000}^-) : -q_{1000} \leq -Q_{\min_{1000}} \tag{3.64}$$

$$(\psi_1) : f_{1=(1000,1)} = \frac{R_{1000-1}(1-1) + X_{1000-1}(0-\theta_1)}{R^2_{1000-1} + X^2_{1000-1}} \tag{3.65}$$

$$(\phi_1) : fq_{1=(1000,1)} = \frac{X_{1000-1}(1-1) - R_{1000-1}(0-\theta_1)}{R^2_{1000-1} + X^2_{1000-1}} \tag{3.66}$$

$$(\lambda_1^+) : f_1 \leq S_1 \tag{3.67}$$

$$(\lambda_1^-) : -f_1 \leq S_1 \tag{3.68}$$

$$(\omega_1^+) : fq_1 \leq S_1 \tag{3.69}$$

$$(\omega_1^-) : -fq_1 \leq S_1 \tag{3.70}$$

$$(\sigma_1) : rp_1 = -f_1 \tag{3.71}$$

$$(\sigma_{1000}) : rp_{1000} = f_1 \tag{3.72}$$

$$(\kappa_1) : rq_1 = -fq_1 \tag{3.73}$$

$$(\kappa_{1000}) : rq_{1000} = fq_1 \tag{3.74}$$

$$(\rho_1) : rp_1 = D_1^p + p_1 \tag{3.75}$$

$$(\rho_{1000}) : rp_{1000} = D_{1000}^p + p_{1000} \tag{3.76}$$

$$(\pi_1) : rq_1 = D_1^q + q_1 \tag{3.77}$$

$$(\pi_{1000}) : rq_{1000} = D_{1000}^q + Q_{1000} \tag{3.78}$$

$$p_1, p_2 \geq 0$$

3.3.2 Οι συνθήκες KKT για το συγκεκριμένο σύστημα

Τύπου 1

$$(\eta_1) : \theta_1 = \Theta_0 + \frac{1}{V_0^2} \cdot (-\operatorname{Re}[Z_{11}] \cdot rq_1 + \operatorname{Im}[Z_{11}] \cdot rp_1) \tag{3.79}$$

$$(\psi_1) : f_{1=(1000,1)} = \frac{R_{1000-1}(1-1) + X_{1000-1}(0-\theta_1)}{R^2_{1000-1} + X^2_{1000-1}} \tag{3.80}$$

$$(\phi_1) : fq_{1=(1000,1)} = \frac{X_{1000-1}(1-1) - R_{1000-1}(0-\theta_1)}{R^2_{1000-1} + X^2_{1000-1}} \tag{3.81}$$

$$(\sigma_1) : rp_1 = -f_1 \tag{3.82}$$

$$(\sigma_{1000}) : rp_{1000} = f_1 \tag{3.83}$$

$$(\kappa_1) : rq_1 = -fq_1 \tag{3.84}$$

$$(\kappa_{1000}) : rq_{1000} = fq_1 \tag{3.85}$$

$$(\rho_1) : rp_1 = D^p_1 + p_1 \tag{3.86}$$

$$(\rho_{1000}) : rp_{1000} = D^p_{1000} + p_{1000} \tag{3.87}$$

Τύπου 2

$$0 \leq \mu^-_{1000} \perp - P_{\min_{1000}} + p_{1000} \geq 0 \tag{3.88}$$

$$0 \leq \mu^+_{1000} \perp P_{\max_{1000}} - p_{1000} \geq 0 \tag{3.89}$$

$$0 \leq \mu^-_1 \perp - P_{\min_1} + p_1 \geq 0 \tag{3.90}$$

$$0 \leq \mu^+_1 \perp P_{\max_1} - p_1 \geq 0 \tag{3.91}$$

$$0 \leq \delta^-_{1000} \perp - Q_{\min_{1000}} + q_{1000} \geq 0 \tag{3.92}$$

$$0 \leq \delta^+_{1000} \perp Q_{\max_{1000}} - q_{1000} \geq 0 \tag{3.93}$$

$$0 \leq \delta^-_1 \perp - Q_{\min_1} + q_1 \geq 0 \tag{3.94}$$

$$0 \leq \delta^+_1 \perp Q_{\max_1} - q_1 \geq 0 \tag{3.95}$$

$$0 \leq \lambda^-_1 \perp S_1 + f_1 \geq 0 \tag{3.96}$$

$$0 \leq \lambda^+_1 \perp S_1 - f_1 \geq 0 \tag{3.97}$$

$$0 \leq \omega^-_1 \perp - S_1 + fq_1 \geq 0 \tag{3.98}$$

$$0 \leq \omega_1^+ \perp S_1 - fq_1 \geq 0 \tag{3.99}$$

Τύπου 3

$$0 \leq p_{1000} \perp MC_{1000} - \mu_{1000}^- + \mu_{1000}^+ - \rho_{1000} \geq 0 \tag{3.100}$$

$$0 \leq p_1 \perp MC_1 - \mu_1^- + \mu_1^+ - \rho_1 \geq 0 \tag{3.101}$$

Τύπου 4

$$(\theta_1) : \eta_1 + \frac{X_{1000-1}}{R_{1000-1}^2 + X_{1000-1}^2}\psi_1 - \frac{R_{1000-1}}{R_{1000-1}^2 + X_{1000-1}^2}\phi_1 = 0 \tag{3.102}$$

$$(f_1) : \psi_1 - \lambda_1^- + \lambda_1^+ + \sigma_1 - \sigma_{1000} = 0 \tag{3.103}$$

$$(fq_1) : \phi_1 - \omega_1^- + \omega_1^+ + \kappa_1 - \kappa_{1000} = 0 \tag{3.104}$$

$$(Q_{1000}) : -\delta_{1000}^- + \delta_{1000}^+ - \pi_{1000} = 0 \tag{3.105}$$

$$(Q_1) : -\delta_1^- + \delta_1^+ - \pi_1 = 0 \tag{3.106}$$

$$(rp_{1000}) : \sigma_{1000} + \rho_{1000} = 0 \tag{3.107}$$

$$(rp_1) : -\frac{Im[Z_{11}]}{V_0^2} \cdot \eta_1 + \sigma_1 + \rho_1 = 0 \tag{3.108}$$

$$(rq_{1000}) : \kappa_{1000} + \pi_{1000} = 0 \tag{3.109}$$

$$(rq_1) : \frac{Re[Z_{11}]}{V_0^2} \cdot \eta_1 + \kappa_1 + \pi_1 = 0 \tag{3.110}$$

Για το συγκεκριμένο σύστημα που παρουσιάστηκε παραπάνω θα γίνει η ανάλυση ΚΚΤ για διάφορες περιπτώσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί το σύστημα. Θα αποδειχθεί ότι οι συνθήκες ΚΚΤ θα επαληθεύονται για αυτές τις περιπτώσεις.

3.3.3 Περίπτωση μη ύπαρξης συμφόρησης στη γραμμή μεταφοράς μεταξύ των κόμβων

Γίνεται η υπόθεση ότι οι μεταβλητές της ενεργού και αέργου παραγωγής και των ενεργών και άεργων ροών βρίσκονται αυστηρά μέσα στα όρια τους, δηλαδή στους περιορισμούς ανισοτήτων η περίπτωση της ισότητας δεν ενεργοποιείται. Από τις συνθήκες τύπου 2, για την παραπάνω προϋπόθεση προκύπτει ότι $\mu^+, \mu^-, \lambda^+, \lambda^-, \delta^+, \delta^-, \omega^+, \omega^- = 0$. Άρα, από τις

συνθήκες τύπου 4 εξάγεται το σύστημα:

$$\psi_1 + \sigma_1 - \sigma_{1000} = 0, \tag{3.111}$$

$$\phi_1 - \kappa_{1000} + \kappa_1 = 0, \tag{3.112}$$

$$\pi_{1000} = 0, \tag{3.113}$$

$$\pi_1 = 0, \tag{3.114}$$

$$\kappa_{1000} = 0, \tag{3.115}$$

$$\sigma_{1000} = -\rho_{1000}, \tag{3.116}$$

$$-\operatorname{Im}[Z_{11}]\eta_1 + \sigma_1 + \rho_1 = 0, \tag{3.117}$$

$$\operatorname{Re}[Z_{11}]\eta_1 + \kappa_1 = 0, \tag{3.118}$$

$$\eta_1 + \left(\frac{X}{X^2+R^2}\right)\psi_1 - \left(\frac{R}{X^2+R^2}\right)\phi_1 = 0 \tag{3.119}$$

Από τη συνθήκη τύπου 3 (3.100) για τον ζυγό αναφοράς προκύπτει ότι $\rho_{1000} = MC_{1000} = 30$ €/ MWh.

Από ανάλυση ευαισθησίας για τη δϋική μεταβλητή σ, προκύπτει ότι θα πρέπει να είναι ίση με την αντίθετη τιμή της κομβικής τιμής. Πιο αναλυτικά, μια μοναδιαία αύξηση στη δεξιά μεριά του περιορισμού θα συνεπάγεται μοναδιαία αύξηση στην έγχυση, δηλαδή μοναδιαία αύξηση στην παραγωγή της οριακής γεννήτριας. Άρα, με μοναδιαία αύξηση στη δεξιά μεριά του περιορισμού η αντικειμενική συνάρτηση θα επηρεαστεί με αύξηση κατά το οριακό κόστος της οριακής γεννήτριας. Έτσι, εξηγήθηκε ότι η δϋική μεταβλητή σ έχει ερμηνεία κομβικής τιμής και ειδικότερα είναι ίση με την αντίθετη τιμή της δϋικής μεταβλητής ρ (που είναι ίση με την κομβική τιμή). Σύμφωνα με τα παραπάνω θα πρέπει να ισχύει:

- $$\rho_{1000} = -\sigma_{1000} = 30 \tag{3.120}$$

- $$\rho_1 = -\sigma_1 \tag{3.121}$$

Από την 3.117 προκύπτει:

$$\eta_1 = 0 \tag{3.122}$$

Η εξίσωση 3.118 μέσω της 3.122 θα δώσει:

$$\kappa_1 = 0 \tag{3.123}$$

Η εξίσωση 3.112 μέσω των 3.115 και 3.123 οδηγεί σε :

$$\phi_1 = 0 \tag{3.124}$$

Εφόσον $\phi_1 = 0, \eta_1 = 0$ τότε με την εξίσωση 3.119 προκύπτει ότι:

$$\psi_1 = 0 \tag{3.125}$$

Μετά από αυτήν την ανάλυση η εξίσωση 3.111 θα δώσει το τελικό αποτέλεσμα που περιμέναμε, δηλαδή ότι όταν δεν υπάρχει συμφόρηση στη γραμμή οι κομβικές τιμές εξισώνονται:

$$\sigma_1 - \sigma_{1000} = 0 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_{1000} \Rightarrow \rho_1 = \rho_{1000} = 30\,€/\text{MWh} \tag{3.126}$$

3.3.4 Περίπτωση ύπαρξης συμφόρησης στη γραμμή μεταφοράς μεταξύ των κόμβων

Σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση αυτό που αλλάζει είναι ότι πλέον η ροή της ενεργού ισχύος στη γραμμή 1000-1 (με κατεύθυνση από τον κόμβο 1000 προς τον 1) παίρνει τη μέγιστη τιμή της. Έτσι, οι δϋικές μεταβλητές $\mu^+, \mu^-, \lambda^-, \delta^+, \delta^-, \omega^+, \omega^- = 0$ από τις συνθήκες τύπου 2, ενώ δεν είναι γνωστή ,αρχικά, την τιμή της λ^+.

Από τις συνθήκες τύπου 3 μπορεί να βρεθούν οι κομβικές τιμές και των δύο κόμβων. Εφόσον υπάρχει συμφόρηση στη γραμμή και η γεννήτρια του ζυγού 1000 είναι πιο φτηνή αυτό σημαίνει ότι θα παράξει μέχρι το όριο της συμφόρησης και θα καλύψει το υπόλοιπο φορτίο η γεννήτρια του ζυγού 1. Άρα, αφού και οι δύο γεννήτριες παράγουν αυστηρά μέσα στα όριά τους, από τις 3.100,3.101, οι κομβικές τιμές θα είναι ίσες με το οριακό κόστος της αντίστοιχης γεννήτριας του κόμβου ($\rho_{1000} = 30€/\text{MWh}$ και $\rho_1 = 31€/\text{MWh}$). Και σε αυτήν την περίπτωση η ανάλυση ακολουθεί τα ίδια βήματα. Τα αποτελέσματα που αφορούν τις εξισώσεις 3.120-3.125 προκύπτουν με ακριβώς τον ίδιο τρόπο. Αυτό που αλλάζει στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι η σχέση ανάμεσα στις δύο κομβικές τιμές και η οποία γίνεται:

$$\psi_1 - \lambda_1^- + \lambda_1^+ + \sigma_1 - \sigma_{1000} = 0 \xrightarrow{\psi=0,\lambda^-=0} \lambda_1^+ + \sigma_1 - \sigma_{1000} = 0 \tag{3.127}$$

Από τις 3.120 και 3.121 είναι γνωστό ότι $\sigma_1, \sigma_{1000} = 30€/\text{MWh}$ και άρα $\lambda_1^+ = 1€/\text{MWh}$, τιμή που επιβεβαιώνει τη δϋική ερμηνεία της λ. Δηλαδή είναι η μείωση που θα προκύψει στην αντικειμενική συνάρτηση αν αυξηθεί κατά μία μονάδα το μέγιστο όριο χωρητικότητας της γραμμής μεταφοράς. Πιο συγκεκριμένα, αν αυξηθεί το όριο της γραμμής κατά 1MW τότε η γεννήτρια του ζυγού 1000 θα παράξει 1MW παραπάνω και η γεννήτρια του 1 θα θα παράξει 1MW λιγότερο. Αυτό οδηγεί σε μείωση κόστους κατά 31-30=1€.

3.4 Ερμηνεία δϋικών μεταβλητών και ανάλυση ευαισθησίας

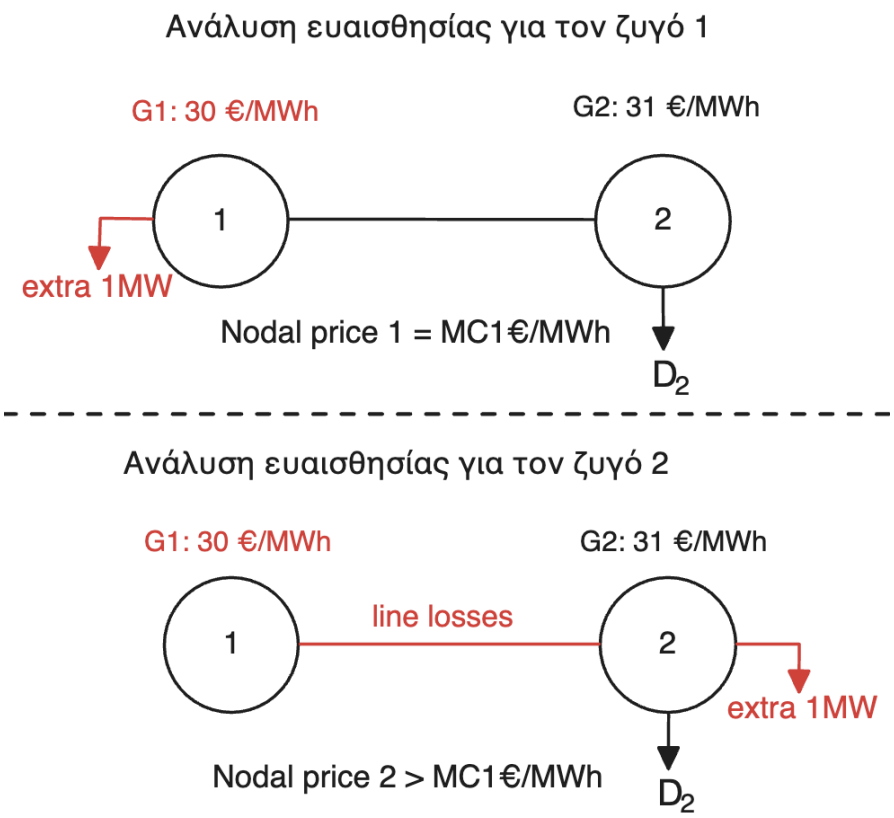
Η παρούσα υποενότητα βασίστηκε στη δουλειά των Boyd & Vandenberghe [19]. Οι δϋικές μεταβλητές λ_k^+ και λ_k^- μπορούν να ερμηνευθούν ως το οριακό όφελος που προκαλείται εξαιτίας μιας μοναδιαίας αύξησης στα μέγιστα όρια μεταφοράς των γραμμών του δικτύου. Οι δϋικές μεταβλητές μ_g^+ και μ_g^- αφορούν στο περιθώριο κέρδους που έχει η κάθε γεννήτρια του συστήματος. Η δϋική μεταβλητή ρ_n είναι ίση με την αύξηση στο συνολικό κόστος παραγωγής που προκύπτει από τη μοναδιαία αύξηση στο φορτίο του αντίστοιχου κόμβου n του δικτύου, δηλαδή είναι ίση με την κομβική τιμή.

Σημαντικό είναι να γίνει κατανοητή η διαίσθηση του πως γίνεται η τιμολόγηση τόσο στα γραμμικά μοντέλα όσο και στο ACOPF. Ο παράγοντας που προκαλεί διαφορετική συμπεριφορά ανάμεσα στα γραμμικά και μη μοντέλα είναι η άγνοια απωλειών που έχουν τα πρώτα.

3.4.1 Ανάλυση ευαισθησίας στο μη γραμμικό μοντέλο

Αρχικά, θα αναλυθεί η συμπεριφορά του μοντέλου ACOPF. Η ερώτηση που πρέπει να απαντηθεί είναι η εξής: ¨Αν αυξηθει η ζήτηση κατά 1MW σε έναν κόμβο, πόσο θα κοστίσει το να εξυπηρετηθεί αυτή η επιπλέον ζήτηση;¨. Αν ο κόμβος έχει γεννήτρια η οποία είναι οριακή τότε η κομβική τιμή θα είναι το οριακό κόστος της γεννήτριας, γιατί την επιπλέον ζήτηση την εξυπηρετεί η γεννήτρια του ίδιου του κόμβου. Από την άλλη, αν ο κόμβος δεν έχει γεννήτρια τότε αφενός πρέπει να αυξηθεί η παραγωγή ενός άλλου κόμβου κατά 1MW και αφετέρου να τροφοδοτηθούν και οι απώλειες για τη μεταφορά στον κόμβο της ζήτησης. Άρα, η κομβική τιμή θα είναι το οριακό κόστος της γεννήτριας που παράγει το 1MW προστιθέμενο με την επιπλέον παραγωγή της γεννήτριας αυτής με σκοπό να τροφοδοτήσει τις απώλειες στη μεταφορά. Αποτέλεσμα των παραπάνω είναι το ότι μπορεί να υπάρχει διαφορά τιμών μεταξύ γειτονικών κόμβων χωρίς να υπάρχει συμφόρηση ανάμεσα στη γραμμή που τους συνδέει.

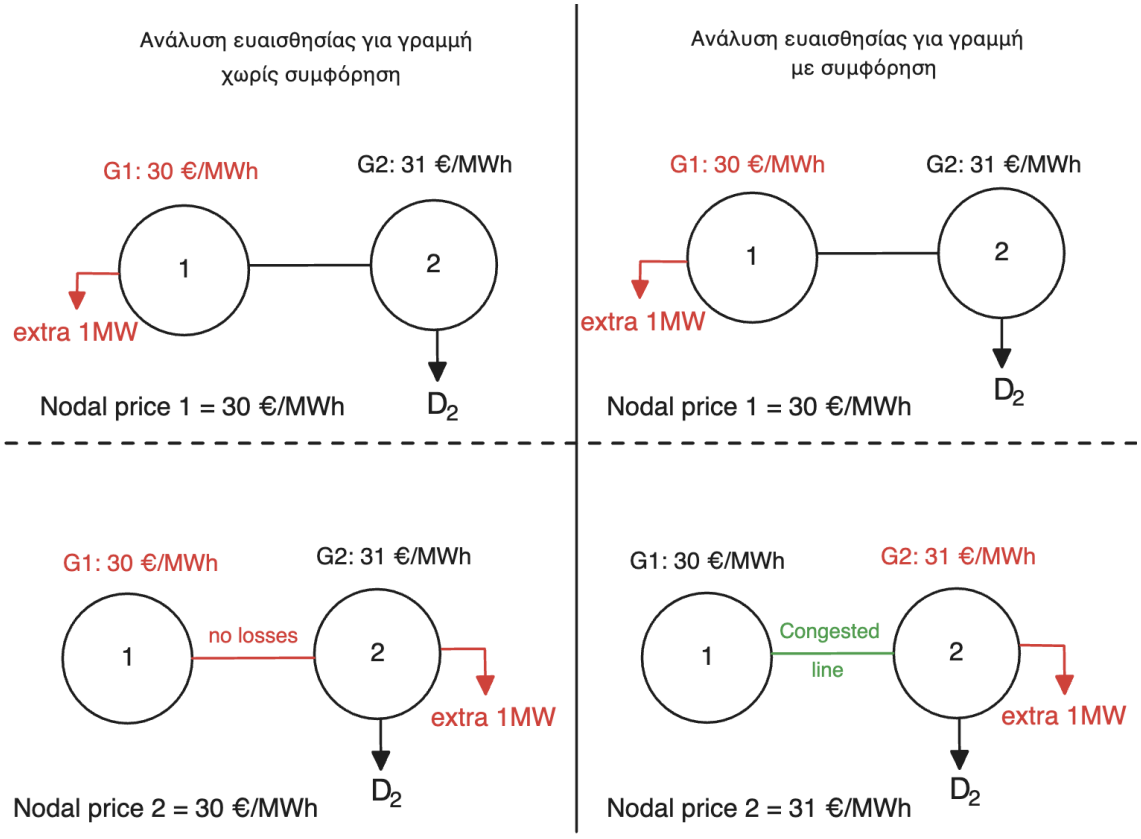
Μια απλή περιπτωση στην οποία γίνεται κατανοητό αυτό, είναι ένα σύστημα με δύο κόμβους όπου ο ένας έχει γεννήτρια και ο άλλος δεν έχει. Ο πρώτος μπορεί να τροφοδοτήσει την επιπλέον μοναδιαία ζήτηση (πάνω στον ίδιο) μέσω της γεννήτριάς του και άρα απαιτείται παραγωγή 1MW από τη γεννήτρια του πρώτου ζυγού . Από την άλλη, μοναδιαία αύξηση στο φορτίο του δεύτερου θα προκαλέσει παραγωγή από τη γεννήτρια του πρώτου ζυγού ίση με κάτι παραπάνω από 1MW. Η επιπλέον του 1MW ποσότητα παραγωγής αφορά στην κάλυψη των απωλειών στη γραμμή. Άρα, υπάρχει διαφορά μεταξύ των κομβικών τιμών μεταξύ γειτονικών κόμβων που συνδέονται με γραμμή μεταφοράς χωρίς συμφόρηση.



Σχήμα 3.2: *Ανάλυση ευαισθησίας σε σύστημα δύο κόμβων για το μη γραμμικό μουτέλο, όπου με κόκκινο χρώμα συμβολίζονται οι ροές ισχύος για την εξυπηρέτηση του επιπλέου 1MW ζήτησης.*

3.4.2 Ανάλυση ευαισθησίας στο γραμμικό μοντέλο

Στην περίπτωση του γραμμικού μοντέλου, η διαίσθηση είναι ότι μεταξύ γειτονικών κόμβων, που συνδέονται με γραμμή μεταφοράς χωρίς συμφόρηση, οι τιμές θα είναι κοινές. Έστω πάλι ένα σύστημα δύο κόμβων όπου ο πρώτος διαθέτει φτηνή γεννήτρια και ο δεύτερος ακριβή γεννήτρια. Τότε, στην περίπτωση χωρίς συμφόρηση, είτε υπάρξει μοναδιαία αύξηση στη ζήτηση του πρώτου ή του δεύτερου, η αύξηση του κόστους είναι ίδια και ίση με το οριακό κόστος της πιο φτηνής γεννήτριας. Άρα οι κομβικές τιμές είναι κοινές. Στην περίπτωση που υπάρχει συμφόρηση δε θα συνέβαινε το ίδιο. Μοναδιαία αύξηση στη ζήτηση ενός από τους δύο κόμβους θα προκαλούσε αύξηση κόστους ίση με το οριακό κόστος της γεννήτριας που έχει ο κόμβος στον οποίο αυξάνεται η ζήτηση, δηλαδή κομβική τιμή ίση με το οριακό κόστος της γεννήτριας που έχει ο ίδιος ο κόμβος. Η ανάλυση ευαισθησίας παρουσιάζεται παραστατικά για τις περιπτώσεις με συμφόρηση και χωρίς συμφόρηση στο παρακάτω σχήμα 3.3. Με κόκκινο χρώμα συμβολίζονται οι ροές ισχύος για την εξυπηρέτηση του επιπλέον 1MW ζήτησης.



Σχήμα 3.3: *Ανάλυση ευαισθησίας σε σύστημα δύο κόμβων για το γραμμικό μοντέλο, για την περίπτωση όπου υπάρχει συμφόρηση στη γραμμή (δεξιά) και για την περίπτωση όπου δεν υπάρχει συμφόρηση (αριστερά). Με κόκκινο χρώμα συμβολίζονται οι ροές ισχύος για την εξυπηρέτηση του επιπλέον 1MW ζήτησης*

Κεφάλαιο 4

Οι αδυναμίες του γραμμικού μοντέλου

4.1 Οι αδυναμίες του μοντέλου σε απλά συστήματα

Στην ενότητα αυτή γίνεται η προσπάθεια να παρουσιαστούν κάποια από τα τρωτά σημεία της γραμμικοποίησης που προτείνεται στην παρούσα εργασία. Τα επιχειρήματα που θα δομηθούν θα στηριχτούν σε αποτελέσματα για απλά συστήματα, τα οποία τροποποιούνται αναλόγως και σκοπό έχουν το να κάνουν κατανοητό με εύκολο τρόπο το τι μπορεί να επηρεάσει αρνητικά τα αποτελέσματα του μοντέλου. Έτσι, συγκρίνεται το γραμμικό μοντέλο με το ACOPF για απλές περιπτώσεις. Η ανάλυση θα αρχίσει επισημαίνοντας τη σημασία των μεταβλητών της ενεργού και της αέργου ισχύος και θα συνεχίσει με τις αδυναμίες στην προσέγγιση τους.

4.1.1 Οι μεταβλητές με τη μεγαλύτερη σημασία για το γραμμικό μοντέλο

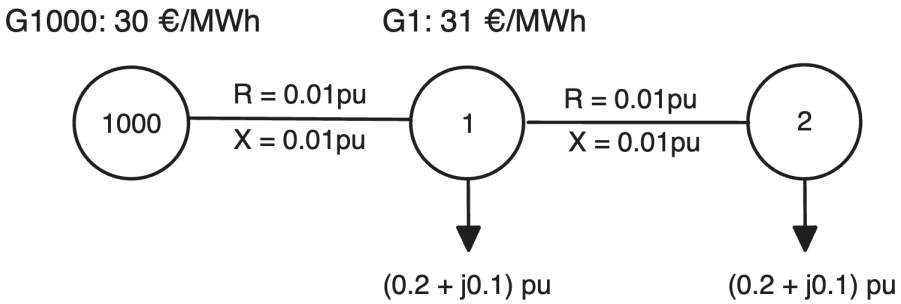
Το επιχείρημα που θα δομηθεί στην υποενότητα αυτή αφορά στο πόσο σημαντικό είναι να προσεγγίσει, το γραμμικό μοντέλο, την ενεργό πρωτευόντως και την άεργο ισχύ δευτερευόντως του ACOPF όσο το δυνατόν καλύτερα. Όπως φαίνεται στην εξίσωση υπολογισμού της αέργου (2.17) η μόνη μεταβλητή που υπεισέρχεται είναι αυτή της ενεργού ισχύος, όλα τα υπόλοιπα είναι γνωστοί παράμετροι του συστήματος. Άρα υπάρχει μια ισχυρή ζεύξη ανάμεσα στην ενεργό και στην άεργο και λογικό είναι μια αστοχία στην προσέγγιση της ενεργού να προκαλέσει αστοχία στην προσέγγιση της αέργου. Για αυτόν τον λόγο είναι πολύ σημαντική η όσο το δυνατόν καλύτερη προσέγγιση της ενεργού ισχύος.

Από τις εξισώσεις του μέτρου και της γωνίας της τάσης (2.15, 2.16) φαίνεται ότι σαν μεταβλητές υπάρχουν η ενεργός και η άεργος ισχύς. Εκτός από τις μεταβλητές υπάρχουν και οι γνωστοί παράμετροι του συστήματος (παράμετροι γραμμών, φορτία). Άρα, σκεπτόμενοι με αντίστοιχο τρόπο όπως πριν, γίνεται εύκολα κατανοητό ότι μια όχι καλή προσέγγιση ενεργού και κατ' επεκτάση και αέργου θα έχει ως αποτέλεσμα το να δημιουργηθεί κακή, δηλαδή όχι όσο το δυνατόν καλύτερη, προσέγγιση των μέτρων και γωνιών των τάσεων του δικτύου. Με βάση λοιπόν, τη σημασία της καλής προσέγγισης της ενεργού και της αέργου ισχύος θα εντοπιστούν οι λόγοι που προκαλούν αδύναμες προσεγγίσεις για το γραμμικό μοντέλο.

4.1.2 Απόκλιση στα αποτελέσματα παραγωγής ενεργού ισχύος ανάμεσα στο γραμμικό μοντέλο και στο ACOPF

Η αφετηρία για τις συγκρίσεις της ενεργού ισχύος είναι ένα σύστημα τριών ζυγών στο οποίο παρατηρείται πολύ καλή προσέγγιση του γραμμικού μοντέλου σε σχέση με το ACOPF. Με αλλαγές πάνω στις παραμέτρους του συστήματος φαίνεται παρακάτω ότι αυτό δεν ισχύει πάντα.
Σύντομη περιγραφή του συστήματος: Τα όρια παραγωγής ενεργού, αέργου της κάθε γεννήτριας και ροών στις γραμμές είναι αρκετά μεγάλα ώστε να μην επηρεάζουν το μοντέλο.

- Ζυγός 1000 : Slack
- Ζυγός 1 : Γεννήτρια
- Ζυγός 2 : Μη γεννήτρια



Σχήμα 4.1: *Αρχικό σύστημα τριών ζυγών.*

Ζυγός	MC	p (ACOPF) [p.u.]	p (Linear) [p.u.]
1000	30€/MWh	0.402122	0.4
1	31€/MWh	0	0

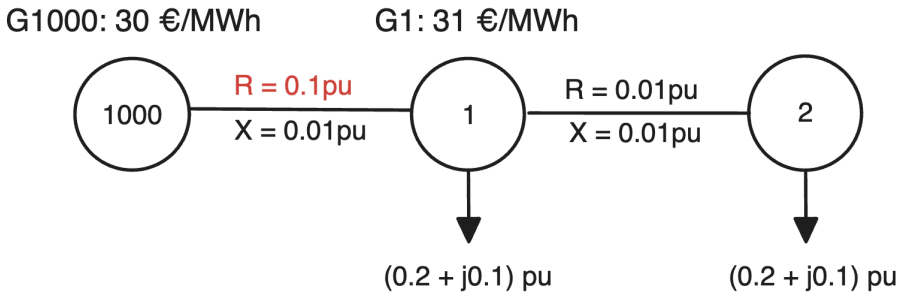
Πίνακας 4.1: *Αποτελέσματα παραγωγής ενεργού ισχύος για το αρχικό σύστημα 3 ζυγών.*

Αυτό που παρατηρείται είναι ότι οι τιμές των ενεργών ισχύων στα δύο μοντέλα είναι πολύ κοντά και η όποια απόκλιση οφείλεται στο γεγονός ότι στο ACOPF υπάρχει λίγο μεγαλύτερη συνολική παραγωγή εξαιτίας των απωλειών στις γραμμές.

Απόκλιση στην παραγωγή ενεργού ισχύος λόγω των απωλειών στις γραμμές

Το σύστημα τριών ζυγών που θα χρησιμοποιηθεί για να στηριχτεί το επιχείρημα φαίνεται παρακάτω. Σε σχέση με το προηγούμενο σύστημα έχει αυξηθεί η αντίσταση της γραμμής 1000-1. Αρχικά, σημαντική είναι η κατανόηση του πως συμπεριφέρονται τα δύο μοντέλα για τα δύο διαφορετικά αυτά συστήματα (4.1 & 4.2). Για το ACOPF είναι φανερό ότι η αύξηση της αντίστασης της γραμμής 1000-1 επηρεάζει την παραγωγή ενεργού. Αυτό που συμβαίνει είναι ότι πλέον δεν παράγει όλη την ενεργό ισχύ ο πιο φτηνός ζυγός (ο 1000 στο σύστημά μας) γιατί η γραμμή με την οποία συνδέεται στα φορτία έχει αυξημένες απώλειες και έτσι

ενεργοποιείται και η πιο ακριβή γεννήτρια (ζυγός 2). Αυξήμένες απώλειες συνεπάγονται αυξημένη παραγωγή ενεργού ισχύος και άρα μεγαλύτερη τιμή αντικειμενικής. Επομένως, θα προτιμηθεί μια πιο ακριβή γεννήτρια με σκοπό να αποφευχθούν οι μεγάλες απώλειες.



Σχήμα 4.2: *Σύστημα τριών ζυγών με αυξημένη αντίσταση.*

Ζυγός	MC	p (ACOPF) [p.u.]	p (Linear) [p.u.]
1000	30€/MWh	0.160761	0.4
1	31€/MWh	0.242341	0

Πίνακας 4.2: *Αποτελέσματα παραγωγής ενεργού ισχύος για το σύστημα 3 ζυγών με αυξημένη αντίσταση γραμμής*

Από την άλλη, για το γραμμικό μοντέλο δεν παρατηρούνται αλλαγές στην παραγωγή ενεργού ισχύος μεταξύ των δύο διαφορετικών συστημάτων. Αυτό το γεγονός είναι λογικό γιατί το γραμμικό μοντέλο δεν συνυπολογίζει τις απώλειες που έχουν οι γραμμές. Η αλλαγή της αντίστασης στη γραμμή 1000-1 θα αλλάξει στο μοντέλο την παραγωγή αέργου (λόγω του πίνακα $Re(Z)$), το μέτρο της τάσης (λόγω του πίνακα $Re(Z)$ και της αέργου) και τη γωνία της τάσης (λόγω του πίνακα $Real[Z]$ και της αέργου). Οι εξισώσεις που υπολογίζουν αυτά τα μεγέθη είναι:

- $u_J = V_0\mathbf{1} + \frac{Re(Z\overline{s_J})}{V_0}$
- $\theta_J = \mathbf{1}\Theta_0 + \frac{Im(Z\overline{s_J})}{V_0^2}$
- $rq_k = -\mathrm{Im}(Z_{KK})^{-1}\left(\mathrm{Re}(Z_{KK})rp_K + \mathrm{Re}(Z_{KL})rp_L + \mathrm{Im}(Z_{KL})rq_L\right), \quad k \in K$

Άρα αν αυτές οι τιμές είναι μέσα στα όρια, δηλαδή ισχύουν τα παρακάτω:

- $V_{min} \leq u_n \leq V_{max}, n \in N$
- $P_{min_g} \leq p_g \leq P_{max_g}, g \in G$
- $Q_{min_g} \leq q_g \leq Q_{max_g}, g \in G$
- $|f_m| \leq S_{ij}, m \in M$
- $|fq_m| \leq S_{ij}, m \in M$

Τότε δε θα αλλάξει η παραγωγή ενεργού. Όπως τόνισα στην αρχή της ενότητας τα όρια παραγωγής και των γραμμών είναι αρκετά μεγάλα και άρα επηρεάζει μόνο ο πρώτος περιορισμός που αφορά στα όρια των τάσεων. Αυτό είναι μια απλουστευτική παραδοχή ώστε να τονιστεί το γεγονός ότι στο γραμμικό μοντέλο μπορεί να προκληθούν κακές προσεγγίσεις σε περίπτωση που δεν ενεργοποιούνται κάποιοι περιορισμοί, εξαιτίας των παραμέτρων του συστήματος (μεγάλα τεχνικά μέγιστα και όρια στις γραμμές για το παράδειγμα παραπάνω). Στην πράξη όλοι οι παραπάνω περιορισμοί ανισοτήτων συμβάλλουν στην καλύτερη προσέγγιση της ενεργού γιατί την περιορίζουν σε συγκεκριμένες τιμές τόσο εμμέσως μέσω του περιορισμού των υπόλοιπων μεταβλητών που είναι συνάρτηση της ενεργού ισχύος όσο και άμεσα με τα τεχνικά μέγιστα και ελάχιστα των γεννητριών. Άρα, η αύξηση στην αντίσταση της γραμμής προκαλεί μεγαλύτερη απόκλιση ανάμεσα στα μοντέλα γιατί α) το ACOPF συνεπάγεται μεγαλύτερη συνολική ενεργό και β) το ACOPF δύναται να διαλέξει το μονοπάτι με τις λιγότερες απώλειες σε αντίθεση με το γραμμικο μοντέλο.

4.1.3 Απόκλιση στην παραγωγή αέργου ισχύος ανάμεσα στο γραμμικό μοντέλο και στο ACOPF

Απόκλιση αέργου λόγω της τάσης των ζυγών-γεννητριών

Το επιχείρημα που στηρίζεται σε αυτήν την υποενότητα είναι ότι η άεργος ισχύς του γραμμικού μοντέλου προσεγγίζει αρκετά καλά την άεργο του ACOPF μοντέλου όταν υπάρχει η απαραίτητη προυπόθεση, στο ACOPF, ότι η τάση των ζυγών-γεννητριών είναι 1. Αρχικά, εξηγείται ο ισχυρισμός θεωρητικά. Η εξίσωση για την προσέγγιση της έγχυσης αέργου είναι η παρακάτω:

$$rq_k = -\text{Im}(Z_{KK})^{-1}\left(\text{Re}(Z_{KK})rp_K + \text{Re}(Z_{KL})rp_L + \text{Im}(Z_{KL})rq_L\right), \quad k \in K \tag{2.17}$$

Σύμφωνα με το κεφάλαιο 2 μπορεί εύκολα να δικαιολογηθει γιατί η παραπάνω προϋπόθεση είναι λογική. Περνώντας από την ροή φορτίου στη βέλτιστη ροή φορτίου έγινε η υπόθεση ότι η τάση στους ζυγούς-γεννητριες είναι 1. Το επιχείρημα για αυτήν την υπόθεση έχει εξηγηθεί αναλυτικά στην υποενότητα 2.2.1. Έτσι, στην πραγματικότητα, το γραμμικό μοντέλο προσπαθεί να προσεγγίσει την άεργο του μοντέλου ACOPF με τάση γεννητριών ίσες με 1.

Node	MC	p (ACOPF) [p.u.]	p (ACOPF modified) [p.u.]	p (Linear) [p.u.]
1000	30€/MWh	0.402122	0.403735	0.4
1	31€/MWh	0	0	0

Πίνακας 4.3: *Αποτελέσματα παραγωγής ενεργού ισχύος για το αρχικό σύστημα 3 ζυγών.*

Node	MC	q (ACOPF) [p.u.]	q (ACOPF modified) [p.u.]	q (Linear) [p.u.]
1000	30€/MWh	-0.000512	-0.400501	-0.4
1	31€/MWh	0.201634	0.603056	0.6

Πίνακας 4.4: *Αποτελέσματα παραγωγής αέργου ισχύος για το αρχικό σύστημα 3 ζυγών.*

Από τους παραπάνω πίνακες, όπου ACOPF modified είναι το ACOPF με προκαθορισμένες τιμές τάσεων των ζυγών-γεννητριών ίσες με 1, είναι ξεκάθαρο ότι το γραμμικό μοντέλο που προτείνεται προσπαθεί να προσεγγίσει την άεργο ισχύ που θα συνεπαγόταν το ACOPF modified. Σημαντική προϋπόθεση για να παρατηρήσουμε την πολύ καλή αυτή προσέγγιση αέργου είναι η ενεργός ισχύς του γραμμικού να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά σε αύτην του ACOPF modified. Αυτό είναι κάτι που βασίζεται στον ισχυρισμό της υποενότητας 4.1.1 και θα παρουσιαστεί σε απλό παράδειγμα αμέσως μετά.

Απόκλιση αέργου λόγω της απόκλισης στην ενεργό ισχύ

Στην παρούσα υποενότητα θα παρατηρηθεί στην πράξη ο κύριος ισχυρισμός του 4.1.1, δηλαδή το ότι αδύναμη προσέγγιση στην ενεργό ισχύ θα προκαλέσει και αδύναμη προσέγγιση στην άεργο. Η εφαρμογή θα γίνει στο σύστημα της εικόνας 4.2 όπου όπως παρατηρήθηκε προηγουμένως το γραμμικό μοντέλο δεν προσεγγίζει αρκετά καλά την ενεργό ισχύ.

Node	MC	p (ACOPF) [p.u.]	p (ACOPF modified) [p.u.]	p (Linear) [p.u.]
1000	30€/MWh	0.160761	0.00163642	0.4
1	31€/MWh	0.242341	0.398891	0

Πίνακας 4.5: *Αποτελέσματα παραγωγής ενεργού ισχύος για το σύστημα 3 ζυγών με αυξημένη αντίσταση.*

Node	MC	q (ACOPF) [p.u.]	q (ACOPF modified) [p.u.]	q (Linear) [p.u.]
1000	30€/MWh	0	-0.0162298	-4
1	31€/MWh	0.19983	0.215734	4.2

Πίνακας 4.6: *Αποτελέσματα παραγωγής αέργου ισχύος για το σύστημα 3 ζυγών με αυξημένη αντίσταση.*

Από τους παραπάνω πίνακες γίνεται ξεκάθαρο ότι η αστοχία στην προσέγγιση της ενεργού ισχύος, σε σχέση με το ACOPF modified, προκαλεί πολύ μεγάλο σφάλμα στην προσέγγιση της αέργου ισχύος. Θα γίνει μία δοκιμή που θα επαληθεύσει την αντίστροφη σκέψη, ότι δηλαδή αν καθορίσουμε μέσω επιπλέον περιορισμού ισότητας την παραγωγή του γραμμικού μοντέλου να είναι σχεδόν ίδια με του ACOPF modified τότε η προσέγγιση αέργου θα βελτιωθεί.

Η παραπάνω δοκιμή δίνει τα αποτελέσματα, σε σχέση με την παραγωγή ενεργού και αέργου ισχύος:

Node	p (ACOPF modified) [p.u.]	p (Linear) [p.u.]
1000	0.001636	0.001109
1	0.398891	0.398891

Πίνακας 4.7: *Αποτελέσματα παραγωγής ενεργού ισχύος μετά τη δοκιμή με προκαθορισμένες τιμές ενεργού ισχύος για το γραμμικό μουτέλο.*

Node	q (ACOPF) [p.u.]	q (ACOPF modified) [p.u.]	q (Linear) [p.u.]
1000	0	-0.0162298	-0.01109
1	0.19983	0.215734	0.21109

Πίνακας 4.8: *Αποτελέσματα παραγωγής αέργου ισχύος μετά τη δοκιμή με προκαθορισμένες τιμές ενεργού ισχύος για το γραμμικό μοντέλο.*

Γίνεται ξεκάθαρο ότι με την καλύτερη δυνατή προσέγγιση της ενεργού ισχύος, τα αποτελέσματα της αέργου γίνονται πολύ καλύτερα και άρα επιβεβαιώνεται πάλι ο ισχυρισμός του 4.1.1. Παρατηρείται ότι το γραμμικό προσεγγίζει την άεργο του ACOPF modified που αυτό με τη σειρά του έχει κοντινές τιμές με το ACOPF. Πολύ σημαντικό κρίνεται το να τονιστεί ότι μια παρόμοια δοκιμή όπου η ενεργός ισχύς του γραμμικού μοντέλου προκαθορίζεται χειροκίνητα σε κοντινές τιμές με αυτή του ACOPF δε δίνει παρόμοια συμπεράσματα και παρατηρήσεις. Η τελευταία πρόταση θα ίσχυε στην περίπτωση που οριζόταν η τάση στους ζυγούς-γεννήτριες ίση με την τάση που συνεπάγεται το ACOPF (και όχι ίση με 1 όπως γίνεται τώρα).

4.1.4 Αδυναμία στην εκτίμηση μέτρου και γωνίας τάσης λόγω αδυναμιών στην προσέγγιση ενεργού και αέργου ισχύος

Ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία με την προηγούμενη υποενότητα θα γίνει προσπάθεια να εδραιωθεί άλλος ένα ισχυρισμός του 4.1.1. Αυτή τη φορά σκοπός είναι να παρατηρηθεί ότι οι αστοχίες στην προσέγγιση της ενεργού και της αέργου ισχύος θα προκαλέσουν αστοχίες στην προσέγγιση μέτρου και γωνίας των τάσεων. Η ανάλυση ξεκινάει με το σύστημα της εικόνας 4.2 όπου έχει δειχθεί ότι έχει αδύναμη προσέγγιση ενεργού και αέργου ισχύος:

Node	MC	p (ACOPF) [p.u.]	p (ACOPF modified) [p.u.]	p (Linear) [p.u.]
1000	30€/MWh	0.160761	0.001636	0.4
1	31€/MWh	0.242341	0.398891	0

Πίνακας 4.9: *Αποτελέσματα παραγωγής ενεργού ισχύος για το σύστημα 3 ζυγών με αυξημένη αντίσταση.*

Node	u (ACOPF) [p.u]	u (ACOPF modified) [p.u]	u (Linear) [p.u]
1	0.983926	1	1
2	0.980877	0.997	0.997

Πίνακας 4.10: *Αποτελέσματα μέτρων τάσης για το σύστημα 3 ζυγών με αυξημένη αντίσταση.*

Θα γίνει πάλι η ίδια δοκιμή όπου θα τεθεί η ενεργός ισχύς του γραμμικού μοντέλου όσο το δυνατόν πιο κοντά σε αυτήν του ACOPF modified. Τα αποτελέσματα φαίνονται παρακάτω:

Αυτό που παρατηρείται είναι ότι το μέτρο της τάσης προσεγγίζει ακριβώς αυτό του ACOPF modified και στην κακή και στην καλή προσέγγιση της ενεργού. Από την άλλη φαίνεται ότι η γωνία της τάσης αποκτά πολύ καλύτερη συμπεριφορά και προσεγγίζει αρκετά καλά τις

Node	ϑ (ACOPF) [°]	ϑ (ACOPF mod) [°]	ϑ (Linear) [°]
1	-0.0939274	-0.0939276	-23.1475
2	-0.153888	-0.15197	-23.2048

Πίνακας 4.11: *Αποτελέσματα γωνιών τάσης για το σύστημα 3 ζυγών με αυξημένη αντίσταση.*

Node	u (ACOPF) [p.u.]	u (ACOPF modified) [p.u.]	u (Linear) [p.u.]
1	0.983926	1	1
2	0.980877	0.997	0.997

Πίνακας 4.12: *Αποτελέσματα μέτρων τάσης μετά τη δοκιμή με προκαθορισμένες τιμές ενεργού ισχύος για το γραμμικό μοντέλο.*

Node	ϑ (ACOPF) [°]	ϑ (ACOPF modified) [°]	ϑ (Linear) [°]
1	-0.0939274	-0.0939276	-0.0641764
2	-0.153888	-0.15197	-0.121472

Πίνακας 4.13: *Αποτελέσματα γωνιών τάσης με προκαθορισμένες τιμές ενεργού ισχύος για το γραμμικό μοντέλο.*

γωνίες του ACOPF modified που με τη σειρά του προσεγγίζει τις γωνίες του ACOPF. Άρα, επιβεβαιώνεται εν μέρει(μόνο για τις γωνίες) ο αρχικός ισχυρισμός. Το ότι υπάρχει μόνο εν μέρει επιβεβαίωση του ισχυρισμού μπορεί να οφείλεται στην απλότητα του συστήματος που μπορεί να συνεπάγεται καλή προσέγγιση μέτρου τάσης εξ αρχής. Αξιοσημείωτο είναι ότι μια παρόμοια δοκιμή όπου η ενεργός ισχύς του γραμμικού μοντέλου προκαθορίζεται χειροκίνητα σε κοντινές τιμές με αυτή του ACOPF δε δίνει παρόμοια συμπεράσματα. Το επιχείρημα για την τελευταία πρόταση είναι το ίδιο με της προηγούμενης υποενότητας, δηλαδή θα ίσχυε μόνο αν προκαθοριζόταν οι τάσεις των γεννητριών του γραμμικού μοντέλου στις τιμές που συνεπάγεται το ACOPF και όχι σε 1.

4.1.5 Αδυναμία της γραμμικοποίησης Taylor

Σε αυτό το σύστημα θα δουλέψουμε με $V_{slack} = 1.02$ αντί για $V_{slack} = 1$ και θα δούμε τι προβλήματα δημιουργούνται.

Node	p (ACOPF) [p.u.]	p (LINEAR) [p.u.]	q (LINEAR) [p.u.]
1000	0.402039	0.384468	-0.384468
1	0	0	0.6
2	-		

Πίνακας 4.14: *Αποτελέσματα παραγωγής ενεργού και αέργου για* $V_{slack} \neq 1$.

Αυτό που παρατηρείται στα αποτελέσματα του γραμμικού μοντέλου είναι ότι μετά την αλλαγή της τιμής της τάσης του ζυγού αναφοράς η παραγωγή ενεργού και αέργου είναι διαφορετική απο το συνολικό φορτίο ενεργού και αέργου του συστήματος. Όσον αφορά στην άεργο δεν είναι πρόβλημα ότι η άεργος παραγωγή δεν είναι ίδια με το φορτίο, είναι κάτι που παρατηρείται και στο ACOPF, αλλά το ότι η παραγωγή ενεργού είναι μεγαλύτερη από το φορτίο είναι μη ανεκτό σφάλμα (εφόσον δεν έχουμε και απώλειες στις γραμμές). Αυτό συμβαίνει γιατί η γραμμικοποίηση Taylor έχει δομηθεί με δεδομένο ότι ο ζυγός αναφοράς έχει τάση ίση με 1. Άρα λογικό είναι να χαλάει η προσέγγιση και έτσι θα πρέπει να χρησιμοποιείται το μοντέλο σε συστήματα με τάση αναφοράς ίση με 1.

4.1.6 Σύνοψη των παρατηρήσεων

Αδυναμίες ενεργού ισχύος

- Μικρότερη συνολική ενεργός ισχύ για το γραμμικό μοντέλο λόγω άγνοιας απωλειών στις γραμμές (ίση με το ενεργό φορτίο του συστήματος).
- Αστοχία στην προσέγγιση επειδή το γραμμικό μοντέλο αδυνατεί να διαλέξει το μονοπάτι με τις λιγότερες απώλειες αφού όλα τα μονοπάτια έχουν μηδενικές απώλειες. Γίνεται σημαντικό πρόβλημα όταν οι περιορισμοί που αφορούν στα όρια παραγωγής από τις γεννήτριες και ροών στις γραμμές είναι αρκετά χαλαροί.

Αδυναμίες αέργου ισχύος

- Απόκλιση στην ενεργό ισχύ που οδηγεί στην απόκλιση στην άεργο ισχύ.
- Η παραδοχή ότι η τάση των ζυγών-γεννητριών είναι ίση με 1 συνεπάγεται ότι το γραμμικό μοντέλο προσεγγίζει την άεργο ισχύ του ACOPF modified και όχι του ACOPF. Εν γένει δεχόμαστε προσεγγιστικά ότι οι ισχείς των δύο τελευταίων θα είναι κοντά αλλά δεν είναι κάτι που ισχύει σαν κανόνας.

Αδυναμίες μέτρου και γωνίας της τάσης

- Η αστοχία της ενεργού και της αέργου ισχύος,ως προς το μοντέλο ACOPF modified, προκαλούν αδύναμη προσέγγιση στα μέτρα και τις γωνίες των τάσεων, ως προς το ίδιο μοντέλο. Προσεγγιστικά υποθέτουμε ότι τα ACOPF, ACOPF modified έχουν παρόμοιες τιμές τάσεων αλλά δεν ισχύει πάντοτε.

Αδυναμίες λόγω της τάσης του ζυγού αναφοράς

- Η τάση του ζυγού αναφοράς πρέπει να είναι ίση με 1 προκειμένου να δουλέψει σωστά η γραμμικοποίηση Taylor και άρα να υπολογιστεί συνολική ενεργός ισχύς ίση με το ενεργό φορτίο του συστήματος.

Σύνοψη της συμπεριφοράς του μοντέλου

Σαν γενική πρόταση που συνοψίζει τη συμπεριφορά του γραμμικού μοντέλου που προτείνεται στην παρούσα εργασία θα μπορούσει να εκφραστεί η εξής: Το γραμμικό μοντέλο

προσπαθεί να προσεγγίσει τις μεταβλητές αέργου, μέτρου και γωνίας τάσης ενός μοντέλου ACOPF με τάσεις ζυγών-γεννητριών ίσες με 1. Αυτήν την προσπάθεια την καθιστούν πιο δύσκολη η ενδεχόμενη αδύναμη προσέγγιση της ενεργού ισχύος, που οφείλεται και στην άγνοια απωλειών στο γραμμικό μοντέλο.

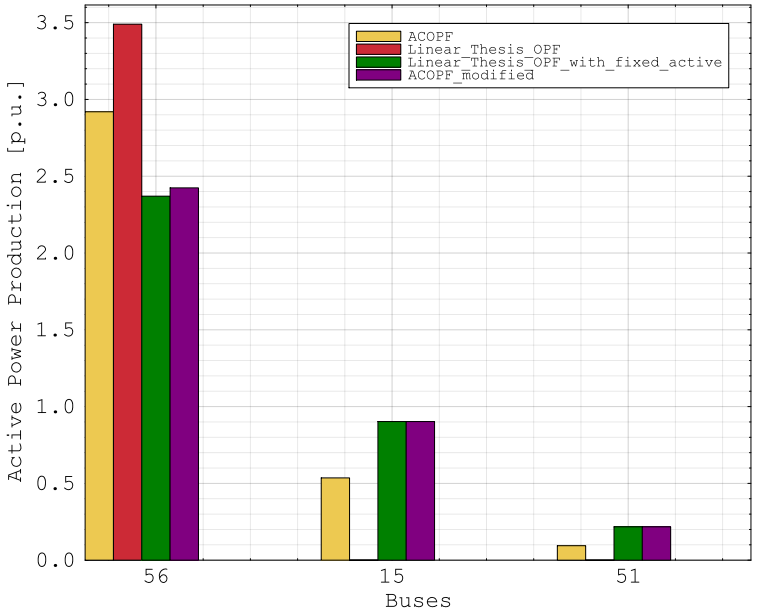
4.2 Δοκιμή υπό καθορισμένες συνθήκες σε μεγαλύτερο σύστημα

Στις προηγούμενες υποενότητες αναπτύχθηκε και τεκμηριώθηκε με αναλυτικό τρόπο το γεγονός ότι το γραμμικό μοντέλο της παρούσας εργασίας τείνει να προσεγγίσει την AC βέλτιστη ροή φορτίου με τάσεις ζυγών-γεννητριών ίσες με 1. Η τεκμηρίωση αυτή βασίστηκε στην ερμηνεία των εξισώσεων με τις οποίες υπολογίζονται στο γραμμικό μοντέλο οι μεταβλητές του μέτρου τάσης, της γωνίας της τάσης και της αέργου ισχύος, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι είναι αναγκαίο το να οριστούν τα μέτρα τάσεων ίσα με μια δεδομένη τιμή (θεωρείται 1). Επίσης, για πολύ μικρά συστήματα φάνηκε ότι η προσέγγιση αυτή (μεταξύ του γραμμικού μοντέλου και της AC βέλτιστης ροή ισχύος με τάσεις γεννητριών ίσες με 1) γίνεται τόσο το δυνατόν καλύτερη όσο οι ενεργές ισχείς αυτών των δύο μοντέλων είναι πιο κοντά. Επομένως, αυτό που θέλει να δείξει αυτή η υποενότητα είναι ότι και για μεγαλύτερα συστήματα ισχύει ακριβώς το ίδιο, γενικεύοντας έτσι τη συμπεριφορά του μοντέλου.

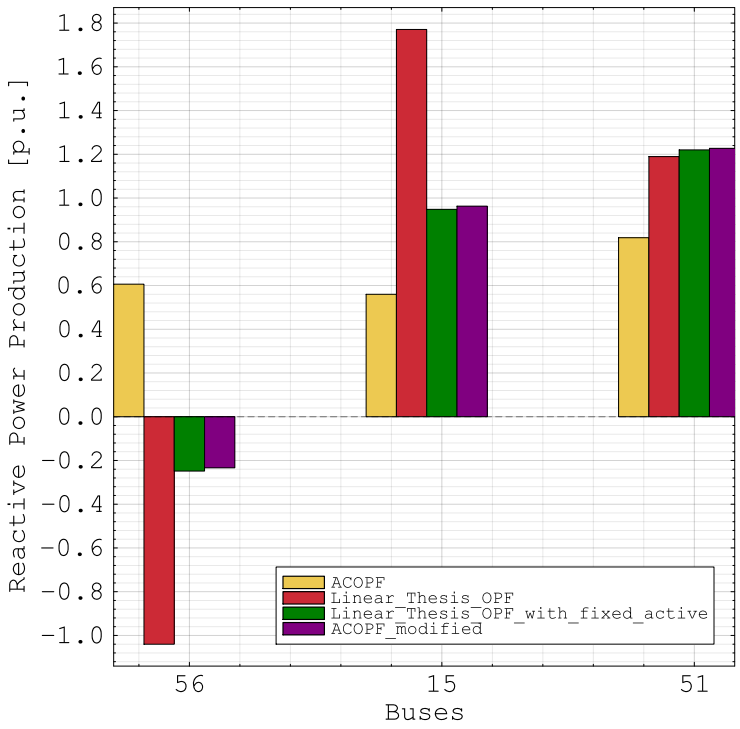
Το παραπάνω θα παρατηρηθεί μέσω μιας δοκιμής που θα εξηγηθεί αμέσως. Για αυτήν θα χρησιμοποιηθούν τα παρακάτω μοντέλα: 1) ACOPF, 2) ACOPF modified, 3) Linear_Thesis _OPF, 4) Linear _Thesis_with_fixed_active_OPF. Το μοντέλο 2) είναι το ACOPF με προκαθορισμένες τάσεις ζυγών-γεννητριών και το μοντέλο 4) είναι το γραμμικό μοντέλο της εργασίας με προκαθορισμένη ενεργό ισχύ όσο το δυνατόν πιο κοντά σε αυτή του ACOPF modified. Έτσι, στην ουσία έχουμε δύο μοντέλα (ACOPF, Linear_Thesis _OPF) και δύο παραλλαγές τους που προκύπτουν με τον προκαθορισμό των τιμών ορισμένων μεταβλητών. Άρα, τρόπος με τον οποίο θα πραγματοποιηθεί αυτή η δοκιμή είναι να προκαθοριστεί χειροκίνητα (με την εισαγωγή περιορισμών) η παραγωγή των γεννητριών του γραμμικού μοντέλου, έτσι ώστε να είναι όσο το δυνατόν ίδια με αυτήν του ACOPF modified. Προφανώς δεν μπορεί να είναι απόλυτα ίσες οι τιμές αυτές γιατί το AC μοντέλο έχει και απώλειες και άρα μεγαλύτερη συνολική ενεργό ισχύ.

Η παραπάνω δοκιμή γίνεται μόνο για επαληθεύσει κάποιες από τις σκέψεις , που αφορούν στη συμπεριφορά του μοντέλου και που έχουν εκφραστεί σε προηγούμενες ενότητες. Τα αποτελέσματα αυτά καθεαυτά δεν έχουν αξία όσον αφορά στην επίδοση που έχει η γραμμική προσέγγιση, μιας και μια πολύ σημαντική μεταβλητή (ενεργός παραγωγή) έχει προκαθοριστεί σε μια συγκεκριμένη τιμή από τον χρήστη. Υπο μια άλλη οπτική η δοκιμή που γίνεται μπορεί να ερμηνευθεί και ως η σύγκριση μεταξύ της AC ροής φορτίου και της γραμμικής της προσέγγισης. Το σύστημα που τροφοδοτείται είναι το case_ieee123 και τα μοντέλα τρέχουν χωρίς περιορισμούς στα όρια των γραμμών.

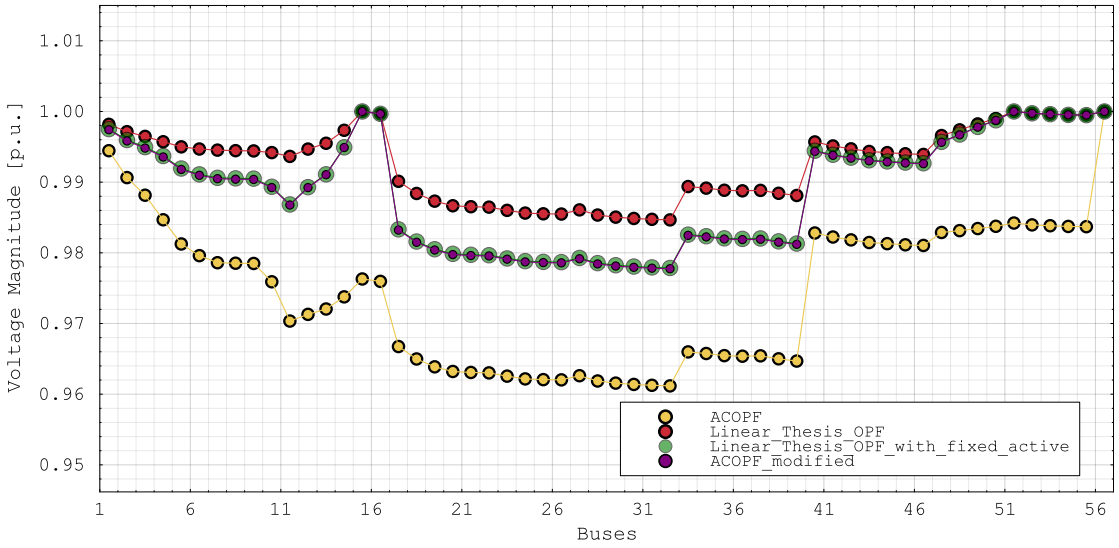
Αποτελέσματα



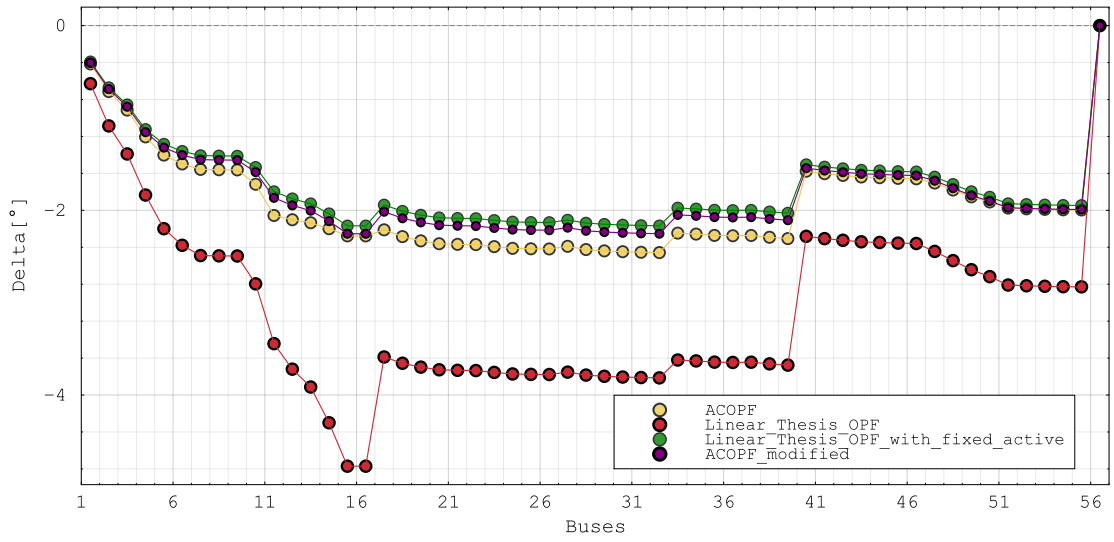
Σχήμα 4.3: *Η παραγωγή ενεργού ισχύος για όλα τα μοντέλα (περίπτωση δοκιμής υπό καθορισμένες συνθήκες).*



Σχήμα 4.4: *Η παραγωγή αέργου ισχύος για όλα τα μοντέλα (περίπτωση δοκιμής υπό καθορισμένες συνθήκες).*



Σχήμα 4.5: *Το μέτρο της τάσης για όλα τα μοντέλα (περίπτωση δοκιμής υπό καθορισμένες συνθήκες).*



Σχήμα 4.6: *Η γωνία της τάσης για όλα τα μοντέλα (περίπτωση δοκιμής υπό καθορισμένες συνθήκες).*

Παρατηρήσεις και συμπεράσματα

Πράγματι, αν παρατηρήθούν όλες οι γραφικές παραστάσεις φαίνεται δια γυμνού οφθαλμού ότι το γραμμικό μοντέλο προσεγγίζει πολύ καλύτερα το ACOPF modified μετά την προκαθορισμό της ενεργού ισχύος. Έτσι, επιβεβαιώνεται και σε μεγαλύτερο σύστημα ότι όσο καλύτερα προσεγγιστεί η ενεργός ισχύς του ACOPF modified τόσο καλύτερα θα είναι και τα υπόλοιπα αποτελέσματα των άλλων μεταβλητών. Σημαντικό είναι να παρατηρήσουμε ότι προσεγγίζοντας όλο και περισσότερο το ACOPF modified αυτό που γίνεται είναι ότι προσεγγίζεται καλύτερα και το ACOPF. Αυτό δεν αποτελεί κάποιο κανόνα αλλά επιβεβαιώνει ότι η παραδοχή του να θέσουμε τις τάσεις των ζυγών-γεννητριών ίσες με 1 στο γραμμικό μο-

ντέλο (και ως αποτέλεσμα να προσεγγίζουμε το αντίστοιχο ACOPF) ίσως να είναι καλή για αρκετά συστήματα. Κάτι το οποίο έχει ειπωθεί και σε προηγούνες ενότητες αλλά αξίζει να επαναληφθεί είναι ότι αν αντί να προκαθορίσουμε την ενεργό ισχύ του γραμμικού μοντέλο όχι ίση με το ACOPF modified, αλλά ίση με την ενεργό που συνεπάγεται το ACOPF, τότε δεν παρατηρείται το ίδιο φαινόμενο, δηλαδή δεν προσεγγίζεται καλύτερα το ACOPF. Για να ισχύσει το τελευταίο θα έπρεπε να γίνουν δύο πράγματα: 1) οι τάσεις των ζυγών-γεννητριών του γραμμικού να τεθούν ίσες με αυτές που συνεπάγεται το ACOPF και 2) η ενεργός ισχύς του γραμμικού να πλησιάσει όσο το δυνατόν περισσότερο αυτήν που συνεπάγεται το ACOPF. Το βήμα 1) δεν έχει αξία να γίνει γιατί προϋποθέτει ότι γνωρίζουμε τα αποτέλεσματα του ACOPF, οπότε το γραμμικό μοντέλο μένει με την παραδοχή ότι αυτές οι τάσεις είναι ίσες με 1.

Κεφάλαιο 5

Εφαρμογή σε συστήματα και σύγκριση αποτελεσμάτων με άλλα γραμμικά μοντέλα

5.1 Επεξήγηση εναλλακτικών γραμμικών μοντέλων

Στην ενότητα αυτή γίνεται σύντομη επεξήγηση των γραμμικών μοντέλων που χρησιμοποιούνται με σκοπό να γίνει η σύγκριση των αποτελεσμάτων με το γραμμικό μοντέλο που προτείνει η παρούσα εργασία. Τα παρακάτω γραμμικά μοντέλα παρουσιάζονται από τον Taylor [17].

5.1.1 Μοντέλο Bθ

Το πιο απλό γραμμικό μοντέλο που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία είναι το DC BTheta. Για να πάρουμε τη συγκεκριμένη γραμμικοποίηση θα γίνουν οι εξής παραδοχές:

1. Τα μέτρα των τάσεων σε όλους τους κόμβους είναι ίσες με 1.
2. $R_{ij} << X_{ij} \Rightarrow R_{ij} \approx 0 \Rightarrow g_{ij} = \frac{R_{ij}}{R_{ij}^2+X_{ij}^2} \longrightarrow 0$
3. Οι διαφορές των γωνιών θεωρούνται ότι είναι αρκετά μικρές έτσι ώστε να βρίσκονται στη γραμμική περιοχή του ημιτόνου και άρα : $\theta_{ij} = \theta_i - \theta_j \approx 0 \Rightarrow sin\theta_{ij} \approx \theta_{ij}, cos\theta_{ij} \approx 1$. Ο όρος $\theta_i - \theta_j$ αποτελεί τον πρώτο όρο της σειράς Taylor για το $sin\theta_{ij}$ με θ_{ij} κοντά στο 0.
4. Θεωρείται ότι η άεργος ισχύς είναι αμελητέα σε σχέση με την ενεργό.

Οι εξισώσεις ροής φορτίου στην πολική τους μορφή είναι οι παρακάτω:

$$p_{ij} = g_{ij}u_i^2 - u_iu_j\left(g_{ij}\cos(\theta_i - \theta_j) - b_{ij}\sin(\theta_i - \theta_j)\right) \tag{5.1}$$

$$q_{ij} = b_{ij}u_i^2 - u_iu_j\left(g_{ij}\sin(\theta_i - \theta_j) + b_{ij}\cos(\theta_i - \theta_j)\right) \tag{5.2}$$

Οι εξισώσεις 5.1 και 5.2, σύμφωνα με τις παραδοχές που έχουν ήδη αναφερθεί, οδηγούνται στην γραμμική εξίσωση ροής φορτίου:

$$p_{ij} = b_{ij}(\theta_i - \theta_j) \tag{5.3}$$

Με βάση τα παραπάνω θα δομηθεί το μοντέλο που περιγράφει τη συγκεκριμένη γραμμικοποίηση της βέλτιστης ροής φορτίου.

Μαθηματικό μοντέλο

$$min_{p,u,\theta} \sum_{g \in G} MC_g \cdot p_g \tag{5.4}$$

$$P_{min_g} \leq p_g \leq P_{max_g}, g \in G \tag{5.5}$$

$$u_n = 1, n \in N \tag{5.6}$$

$$\theta_{slackbus} = \theta_0 \tag{5.7}$$

$$p_{ij} = b_{ij}(\theta_i - \theta_j),\ i \in N \text{ και } j \in M(i) \tag{5.8}$$

$$\sum_{j \in M(i)} p_{ij} = p_i - D_i^p, i \in N \tag{5.9}$$

$$-S_{ij} \leq p_{ij} \leq S_{ij} \tag{5.10}$$

$$p \geq 0$$

5.1.2 Μοντέλο Decoupled

Για το μοντέλο Decoupled θα χρησιμοποιηθεί το BTheta ως βάση και θα γίνουν ορισμένες αλλαγές. Πλέον, μόνο η τάση ζυγού αναφοράς είναι ίση με 1 και το μοντέλο έχει και τη μεταβλητή της αέργου ισχύος.

Μαθηματικό μοντέλο

$$min_{p,Q,u,\theta} \sum_{g \in G} MC_g \cdot p_g \tag{5.11}$$

$$P_{min_g} \leq p_g \leq P_{max_g}, g \in G \tag{5.12}$$

$$Q_{min_g} \leq q_g \leq Q_{max_g}, g \in G \tag{5.13}$$

$$V_{min} \leq u_n \leq V_{max}, n \in N \tag{5.14}$$

$$u_n = 1, n \in N \tag{5.15}$$

$$u_{slackbus} = V_0,\ \theta_{slackbus} = \theta_0 \tag{5.16}$$

$$p_{ij} = b_{ij}(\theta_i - \theta_j),\ i \in N \text{ και } j \in M(i) \tag{5.17}$$

$$q_{ij} = b_{ij}(v_i - v_j),\ i \in N \text{ και } j \in M(i) \tag{5.18}$$

$$\sum_{j \in M(i)} p_{ij} = p_i - D_i^p,\ i \in N \tag{5.19}$$

$$\sum_{j \in M(i)} q_{ij} = q_i - D_i^q, i \in N \tag{5.20}$$

$$-S_{ij} \leq p_{ij} \leq S_{ij} \tag{5.21}$$

$$-S_{ij} \leq q_{ij} \leq S_{ij} \tag{5.22}$$

$$p \geq 0$$

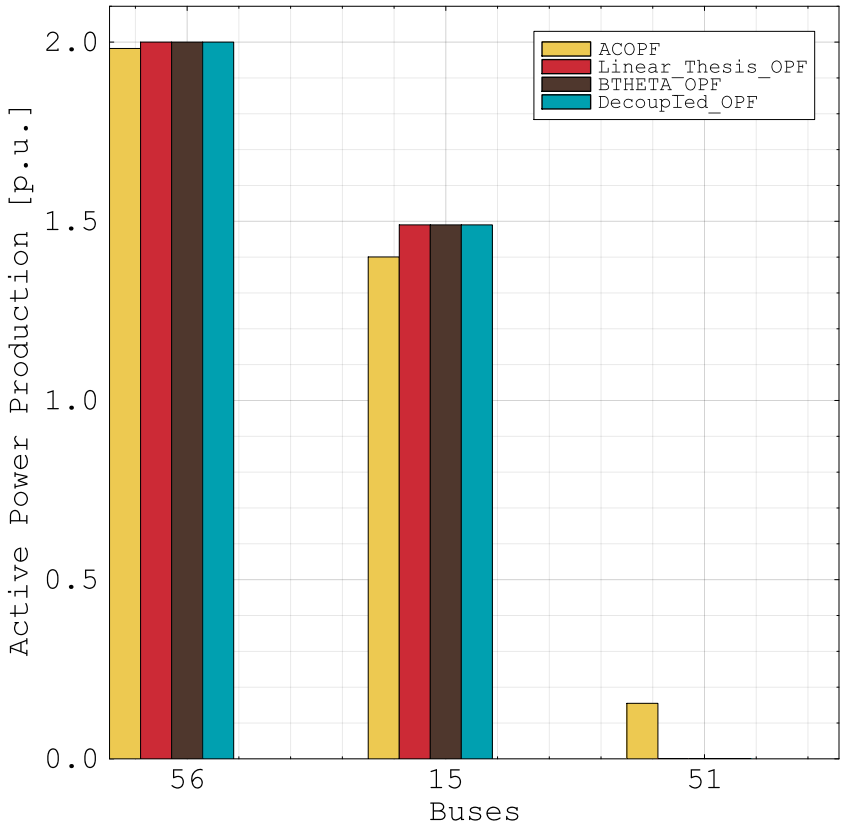
5.2 Πρακτική εφαρμογή και σύγκριση των αποτελεσμάτων

Στη συγκεκριμένη υποενότητα επιλύεται η βέλτιστη ροή φορτίου για τέσσερα διαφορετικά συστήματα, που μπορούν να βρεθούν στο Β΄ σε μορφή XLSX αρχείου. Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιούνται τέσσερα διαφορετικά μοντέλα: ACOPF, DC Bθ , Decoupled και το γραμμικό μοντέλο που προτείνεται.

5.2.1 Σύστημα case_ieee123

Το σύστημα αποτελείται από 56 ζυγούς. Ο ζυγός 1 είναι ο ζυγός αναφοράς (29€/MWh) και οι ζυγοί 15 (30€/MWh) και 51 (31€/MWh) είναι οι υπόλοιπες γεννήτριες του συστήματος.

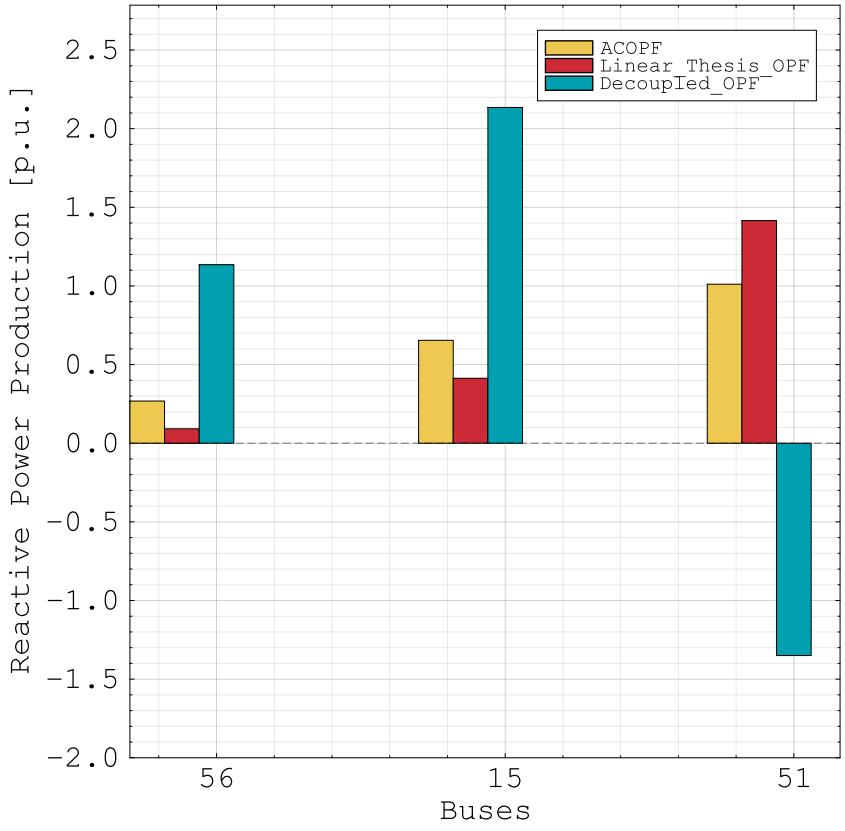
Παρατηρήσεις για τα αποτελέσματα ενεργού ισχύος



Σχήμα 5.1: *Η παραγωγή ενεργού ισχύος για όλα τα μοντέλα (case_ieee123).*

Στο γράφημα για την ενεργό ισχύ του πρώτου συστήματος (5.1) γίνεται φανερό ότι η ενεργός ισχύς που συνεπάγονται τα τρία γραμμικά μοντέλα είναι η ίδια. Το γεγονός ότι μπορεί να συνεπάγονται ίδια ενεργό ισχύ είναι λογικό αν σκεφτεί κανείς ότι υπάρχει η περίπτωση να μην ενεργοποιηθούν όλοι οι περιορισμοί ενός μοντέλου. Για παράδειγμα, το Bθ μοντέλο δεν έχει όρια γραμμών για ροή αέργου. Έτσι, αν και στα άλλα δύο μοντέλα δεν ενεργοποιηθεί αυτός ο περιορισμός τότε η συμπεριφορά τους θα συγκλίνει. Το ίδιο μπορεί να ειπωθεί και για τον περιορισμό ορίων τάσης που δε συμπεριλαμβάνεται στο Bθ μοντέλο. Άρα, υπό προϋποθέσεις μπορούν να οδηγηθούν τα μοντέλα σε ίδια ενεργό ισχύ. Επιπλέον, παρατηρείται ότι τα γραμμικά μοντέλα συνεπάγονται μικρότερη συνολική ενεργό παραγωγή, σε σχέση με το ACOPF, μιας και αυτά αγνούν τις απώλειες στις γραμμές. Τέλος, για το ACOPF, από το γράφημα 5.1, φαίνεται ότι παράγουν ενεργό ισχύ όλες οι γεννήτριες, κάτι που δεν ισχύει στα γραμμικά μοντέλα. Το τελευταίο μπορεί να οφείλεται στον διαφορετικό (πιο χαλαρό) περιορισμό που αφορά στα όρια ισχύος στις γραμμές που έχουν τα γραμμικά μοντέλα. Δηλαδή το ACOPF μπορεί να αναγκαστεί να παράξει από όλες τις γεννήτριες γιατί μεγαλύτερη παραγωγή από κάποια φτηνότερη θα συνεπαγόταν καταπάτηση των ορίων των γραμμών, κάτι που μπορεί να μη συμβαίνει στα γραμμικά μοντέλα επειδή έχουν πιο χαλαρό αντίστοιχο περιορισμό.

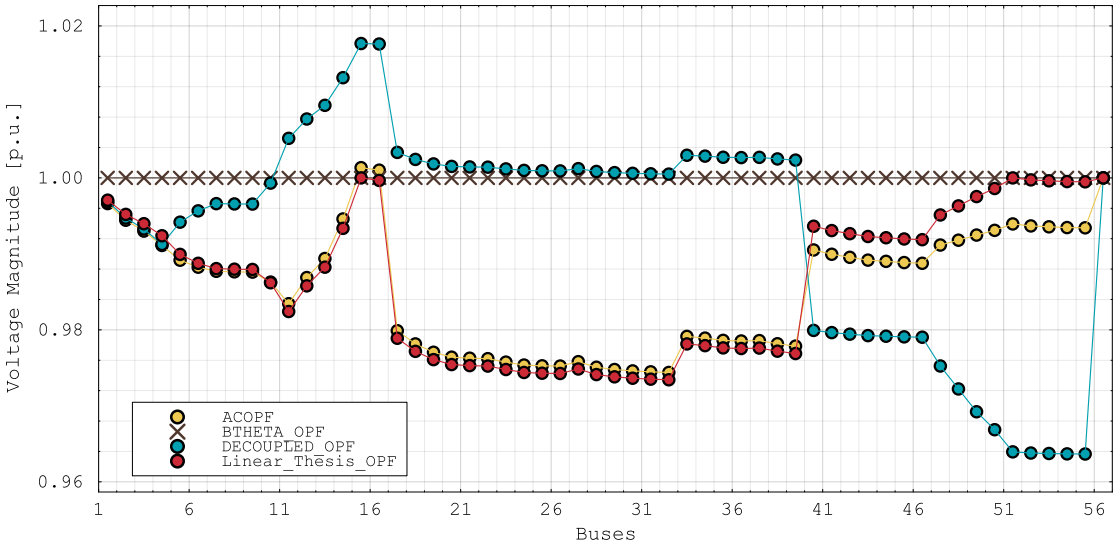
Παρατηρήσεις για τα αποτελέσματα αέργου ισχύος



Σχήμα 5.2: *Η παραγωγή αέργου ισχύος για όλα τα μοντέλα (case_ieee123).*

Αρχικά, τονίζεται ότι το μοντέλο Bθ θεωρεί αμελητέα την άεργο ισχύ και λογικό είναι να μη συνεπάγεται κάποια παραγωγή. Άρα, οι παρατηρήσεις θα αφορούν τα υπόλοιπα δύο γραμμικά μοντέλα και το ACOPF. Παρατηρώντας το γράφημα 5.2, φαίνεται ότι το γραμμικό μοντέλο της παρούσας εργασίας είναι αρκετά πιο αξιόπιστο στην προσέγγιση της αέργου έναντι του Decoupled. Αυτό που μπορεί να παρατηρηθεί σχετικά με τη συμπεριφορά των δύο γραμμικών είναι ότι το μοντέλο Decoupled συνεπάγεται μεγάλη θετική τιμή αέργου σε έναν κόμβο και αντίστοιχα μεγάλη αρνητική τιμή αέργου σε κάποιον/κάποιους άλλους, έτσι ώστε να εξισορροπηθεί και να έχει ίδια συνολική άεργο παραγωγή με το άεργο φορτίο. Από την άλλη, το γραμμικό μοντέλο της παρούσας εργασίας, στη συγκεκριμένη περίπτωση, δεν παίρνει αρνητικές τιμές. Ίσως, λοιπόν να μπορεί να ειπωθεί ότι το γραμμικό μοντέλο της παρούσας εργασίας έχει μια πιο ομαλή συμπεριφορά. Σε αυτό το γράφημα το γραμμικό μοντέλο τείνει να προσεγγίσει το μοτίβο της αέργου υπό την έννοια ότι στο ACOPF ο ζυγός 56 παράγει τη λιγότερη ισχύ, ακουλουθεί ο 15 με μεγαλύτερη παραγωγή και έπειτα ο 51 που παράγει την περισσότερη, κάτι που συμβαίνει και στο μοντέλο της εργασίας. Κάτι παρόμοιο δε φαίνεται να συμβαίνει και με το Decoupled όπου ο 51 έχει αρνητική παραγωγή.

Παρατηρήσεις για τα αποτελέσματα μέτρου τάσης



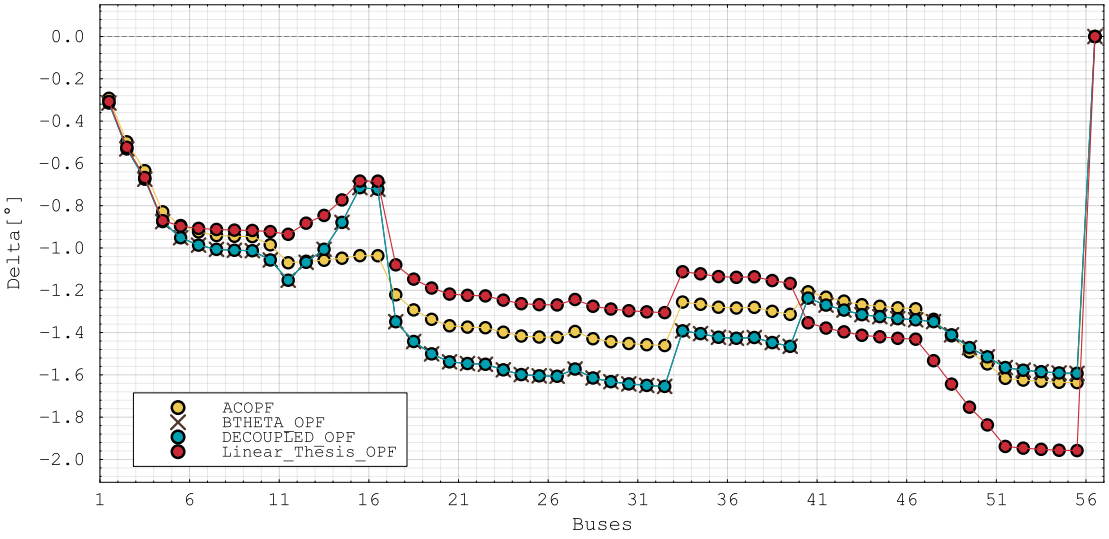
Σχήμα 5.3: *Το μέτρο της τάσης [p.u] για όλα τα μοντέλα (case_ieee123).*

Αυτό που παρατηρείται έντονα στο γράφημα 5.3 είναι ότι το Decoupled και το μοντέλο της παρούσας εργασίας συνεπάγονται μέτρα τάσεων που ακολουθούν το ίδιο μοτίβο με τα μέτρα τάσεων του ACOPF. Αυτό είναι ξεκάθαρο στο γράφημα, όπου η μορφή των γραφικών των τάσεων των δύο αυτών γραμμικών μοντέλων είναι σε μεγάλο βαθμό όπως του ACOPF αλλά μετατοπισμένες κατά μία σταθερά προς τα πάνω ή προς τα κάτω αντίστοιχα. Σε μεγαλύτερο βαθμό συμβαίνει για το μοντέλο που προτείνει η παρούσα εργασία. Το Decoupled έχει παρόμοια συμπεριφορά αλλά σε κάποια σημεία δεν την ακολουθεί, για παράδειγμα στην περιοχή του γραφήματος για ζυγούς 46-51 το Decoupled συνεπάγεται φθίνουσα τάση ενώ το μοντέλο της εργασίας και το ACOPF συνεπάγονται αύξουσα. Επιπλέον, από τον πίνακα

σφαλμάτων 5.1 φαίνεται ότι το μέγιστο και το απόλυτο σφάλμα για το γραμμικό μοντέλο της παρούσας εργασίας είναι της τάξης του 10^{-3}, γεγονός που επιβεβαιώνει ότι ακολουθεί το μοτίβο του ACOPF με αξιοπιστία.

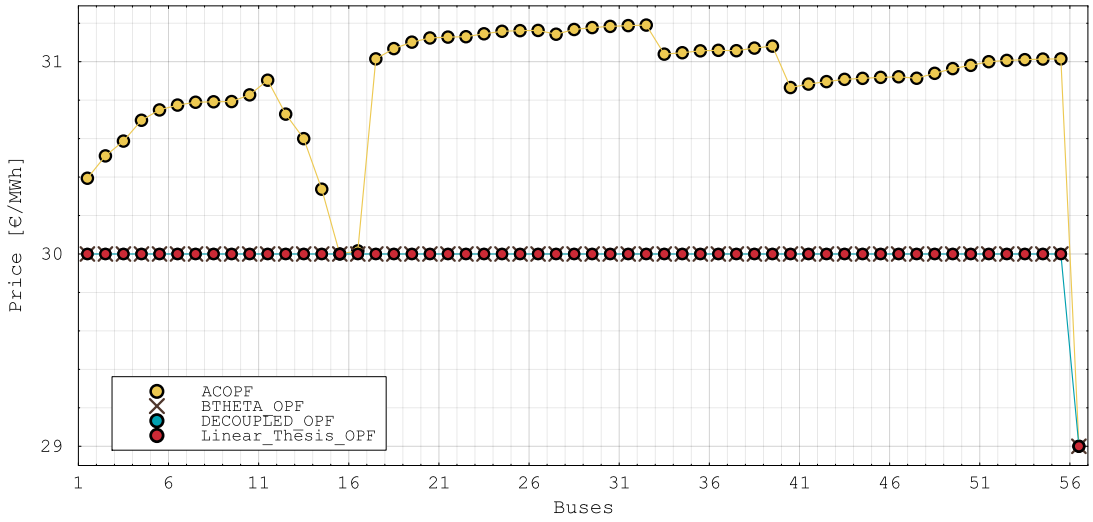
Το Bθ μοντέλο φαίνεται να υπερέχει του Decoupled όσον αφορά στα μέγιστα και απόλυτα σφάλματα. Βέβαια, το Bθ δεν ακολουθεί κάποιο συγκεκριμένο μοτίβο γιατί θεωρεί όλες τις τάσεις ίσες με 1, άρα δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι προσεγγίζει καλύτερα τα μέτρα τάσεων μόνον επειδή τυχαίνει να έχει λίγο καλύτερη συμπεριφορά σφαλμάτων στη συγκεκριμένη περίπτωση. Είναι, όμως, σημαντική η παρατήρηση του ότι αν και το Bθ κάνει μια απλή παραδοχή και δεν τείνει να ακολουθήσει καθόλου το μοτίβο της γραφικής των τάσεων του ACOPF, μπορεί να υπερέχει έναντι κάποιων άλλων μοντέλων όσον αφορά στα σφάλματα που υπολογίστηκαν.

Παρατηρήσεις για τα αποτελέσματα γωνίας τάσης



Σχήμα 5.4: *Η γωνία της τάσης για όλα τα μοντέλα (case_ieee123).*

Για τις γωνίες των τάσεων αυτό που παρατηρείται στη γραφική και στον πίνακα σφαλμάτων του πρώτου συστήματος 5.4, 5.1, είναι ότι το Bθ και το Decoupled συνεπάγονται ίδια ακριβώς αποτελέσματα. Το γεγονός αυτό είναι λογικό γιατί υπολογίζουν με τον ίδιο τρόπο τις γωνίες εφόσον έχουν αποφασίσει ίδια παραγωγή ενεργού ισχύος από τις γεννήτριες (5.8, 5.17). Επιπλέον, αυτό που παρατηρείται είναι ότι όλα τα μοντέλα προσπαθούν με πειστικό τρόπο να ακολουθήσουν το μοτίβο της γραφικής των γωνιών του ACOPF. Από τον πίνακα σφαλμάτων 5.1, τα μοντέλα Bθ και Decoupled φαίνεται να έχουν ένα πολύ μικρό προβάδισμα όσον αφορά στα μέσα και μέγιστα σφάλματα. Αυτή η διαφορά είναι της τάξης του 10^{-2}. Άρα, όλα τα μοντέλα φαίνεται να έχουν καλή συμπεριφορά όσον αφορά στα σφάλματα αλλά κυρίως όσον αφορά στον τρόπο που προσεγγίζουν το μοτίβο της γραφικής των γωνιών ACOPF.



Σχήμα 5.5: *Οι κομβικές τιμές για όλα τα μοντέλα (case_ieee123).*

Παρατηρήσεις για τα αποτελέσματα κομβικών τιμών

Για τη γραφική παράσταση των κομβικών τιμών για το πρώτο σύστημα 5.5, μπορούν να εξαχθούν αξιοσημείωτα συμπεράσματα. Η πρώτη σημαντική παρατήρηση είναι ότι οι κομβικές τιμές του ACOPF είναι μεγαλύτερες (ή ίσες) από τις αντίστοιχες τιμές των γραμμικών μοντέλων. Το παραπάνω είναι λογικό αποτέλεσμα μιας και το ACOPF είναι μοντέλο με απώλειες, ενώ τα γραμμικά μοντέλα τις αγνοούν. Στην υποενότητα 3.4 γίνεται η ανάλυση ευαισθησίας και εξηγείται πιο αναλυτικά ο λόγος για τον οποίο οι απώλειες στις γραμμές επηρεάζουν τις κομβικές τιμές.

Σημαντική παρατήρηση είναι ότι τα γραμμικά μοντέλα συνεπάγονται ίδιες τιμές για όλα τα συστήματα. Αυτό συμβαίνει γιατί η ενεργός παραγωγή που συνεπάγονται είναι ίδια και άρα οι οριακές γεννήτριες είναι ίδιες και.

Ενδιαφέρον έχει να παρατηρηθούν στην πράξη αυτά που εξηγήθηκαν θεωρητικά στην υποενότητα 3.4, μέσω της γραφικής 5.5. Παρατηρείται ότι για τα γραμμικά μοντέλα οι κομβικές τιμές είναι 30€/MWh για όλους τους κόμβους εκτός από τον ζυγό αναφοράς. Βλέποντας τη γραφική των ενεργών ισχύων 5.1 φαίνεται ότι παράγουν μόνο ο ζυγός αναφοράς και ο ζυγός 15. Για τον ζυγό αναφοράς είναι γνωστό ότι έχει οριακό κόστος 29€/MWh και για τον 15 ότι έχει κόστος 30€/MWh. Ο ζυγός αναφοράς είναι ο πιο φτηνός και ιδανικά θα παρήγαγε στο τεχνικό του μέγιστο αν δεν τον περιόριζε το όριο στις γραμμές μεταφοράς. Άρα, φαίνεται ότι η συμφόρηση μεταξύ των ζυγών προκαλεί διαφορά στις κομβικές τους τιμές (μεταξύ κόμβου αναφοράς και του γειτονικού του 1). Δηλαδή, ένα επιπλέον MW ζήτησης στον ζυγό αναφοράς θα προκαλέσει επιπλέον κόστος ίσο με το οριακό κόστος της γεννήτριάς του (29€). Από την άλλη, ένα επιπλέον MW ζήτησης σε έναν οποιοδήποτε άλλο ζυγό θα προκαλέσει κόστος ίσο με το κόστος της γεννήτριας του ζυγού 15, ίσο με 30€, εφόσον ο ζυγός αναφοράς περιορίζεται από το όριο των γραμμών και δεν μπορεί να τροφοδοτήσει επιπλέον φορτίο.

Μπορεί να παρατηρηθεί στην πράξη ότι για το ACOPF έχουμε διαφορά τιμών μεταξύ

γειτονικών κόμβων χωρίς να υπάρχει συμφόρηση. Μεταξύ των κόμβων 14 και 15 δεν υπάρχει συμφόρηση, αλλά ο ζυγός 15 έχει μικρότερη τιμή γιατί έχει ο ίδιος γεννήτρια η οποία μπορεί να παράξει, χωρίς να χρειάζεται να τροφοδοτήσει απώλειες, για να τροφοδοτήσει μια μοναδιαία άυξηση στη ζήτηση του. Αντίθετα, για επιπλέον 1MW ζήτησης στον 14 πρέπει να παραχθεί πάνω από 1MW στον ζυγό 15 , που προκαλεί προφανώς μεγαλύτερο κόστος απ΄ ότι το 1MW παραγωγής στον 15.

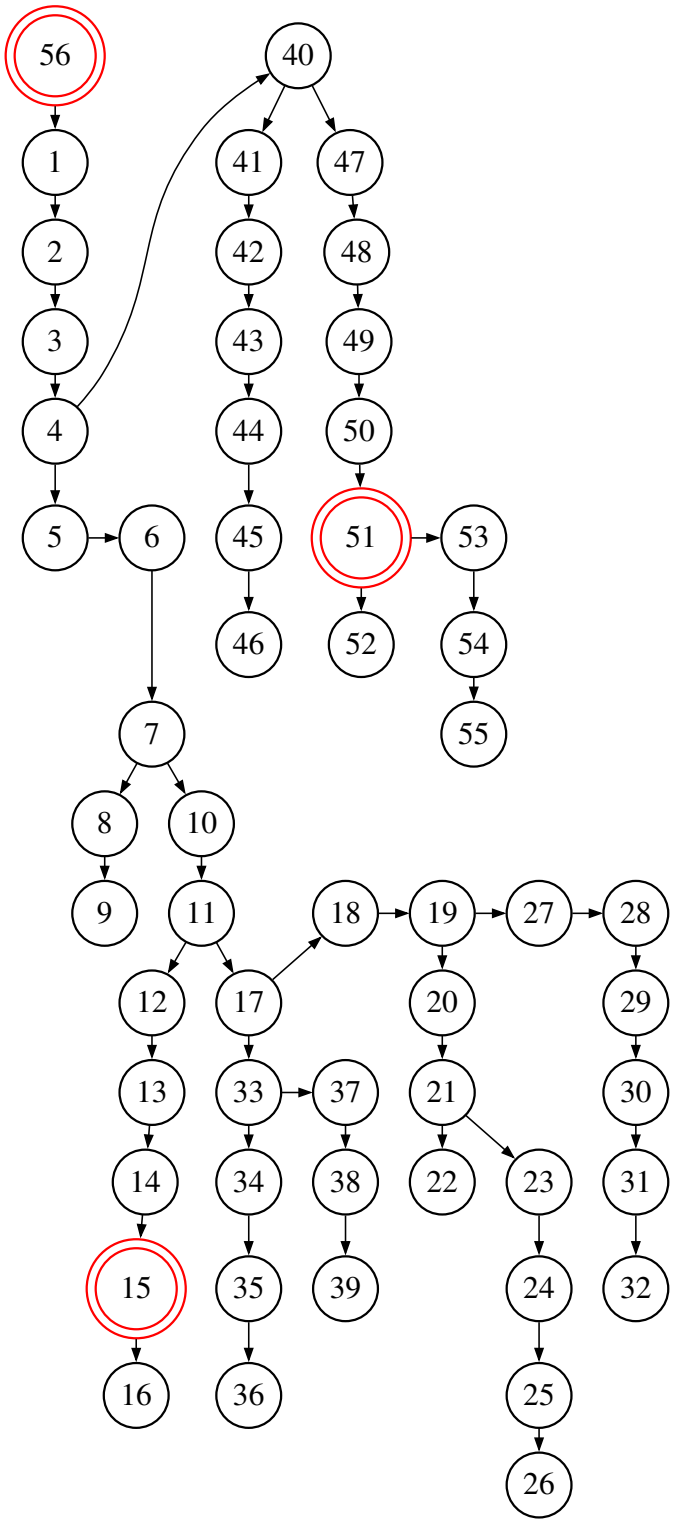
Επιβεβαίωση της προηγούμενης παραγράφου μπορεί να γίνει και μέσω της παρατήρησης της τοπολογίας του συστήματος στο σχήμα 5.6 και της γραφικής των κομβικών τιμών. Ο ζυγός 15 συνδέεται με τον 14 και ο τελευταίος με τον 13. Αν παρατηρηθεί προσεχτικά το γράφημα των κομβικών τιμών, για το ACOPF και αυτούς τους κόμβους, φαίνεται ότι όσο απομακρυνόμαστε από τη γεννήτρια τόσο αυξάνεται και η κομβική τιμή του κόμβου, δηλαδή η αύξηση των απωλειών θα συνεπάγεται και αύξηση στην τιμή. Τα παραπάνω δεν παρατηρούνται στα γραμμικά μοντέλα εφόσον αυτά δεν έχουν απώλειες.

Σφάλματα αποτελεσμάτων

	Απόλυτο σφάλμα	
	Μέση τιμή	**Μέγιστο**
Linear Bolognani OPF		
Μέτρο τάσης [α.μ.]	0.00190415	0.00606035
Γωνία τάσης [○]	0.157584	0.352738
DC BTheta OPF		
Μέτρο τάσης [α.μ.]	0.0146297	0.0256064
Γωνία τάσης [○]	0.10534	0.321598
DC Decoupled OPF		
Μέτρο τάσης [α.μ.]	0.0186923	0.0299969
Γωνία τάσης [○]	0.10534	0.321598

Πίνακας 5.1: *Απόλυτα σφάλματα για μέτρα και γωνίες τάσεων για το σύστημα case_ieee123.*

Τοπολογία του συστήματος case_ieee123

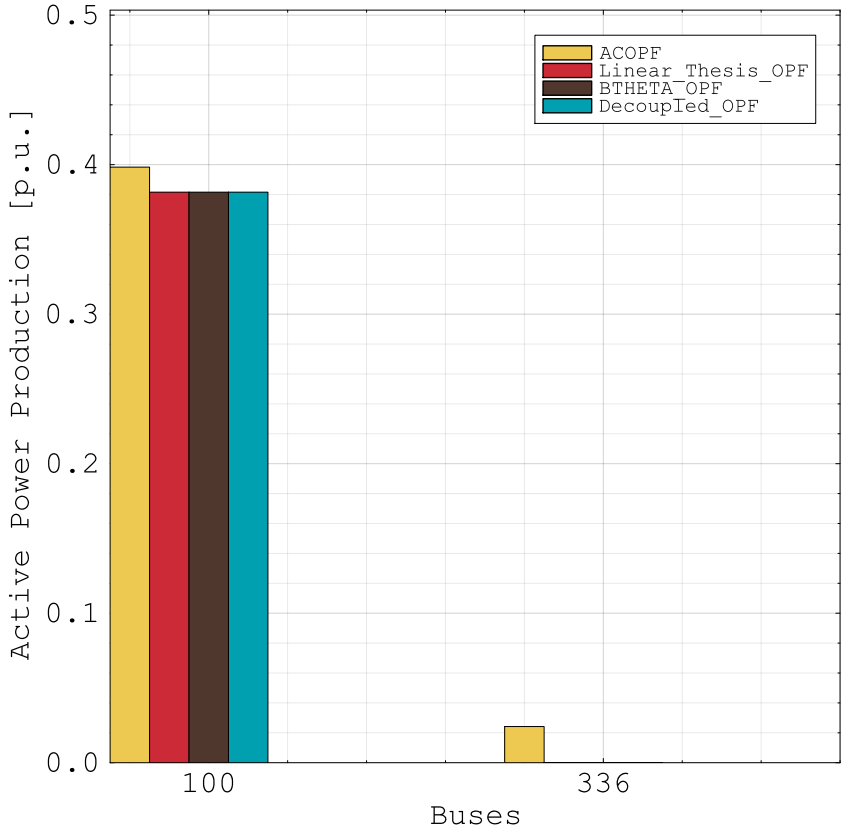


Σχήμα 5.6: *Αναπαράσταση της τοπολογίας του συστήματος case_ieee123, με κόκκινο χρώμα οι γεννήτριες του συστήματος.*

5.2.2 Σύστημα ehv1

Το σύστημα αποτελείται από 61 ζυγούς όπου ο 100 (1150€/MWh) είναι ο ζυγός αναφοράς και ο 336 (1150€/MWh) η έταιρη γεννήτρια συστήματος .

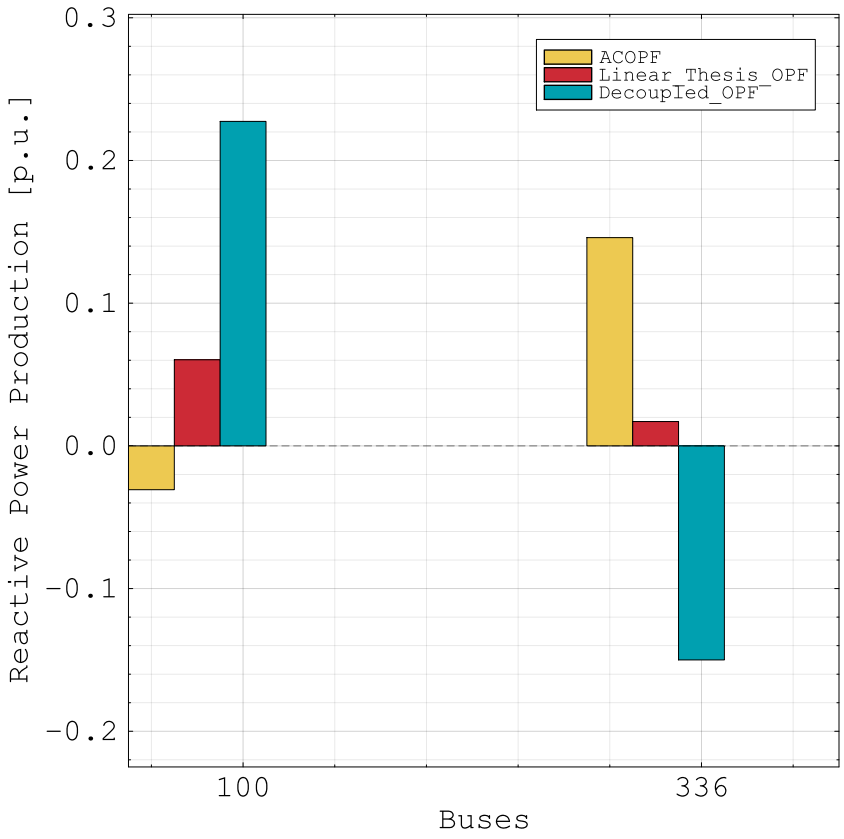
Παρατηρήσεις για τα αποτελέσματα ενεργού ισχύος



Σχήμα 5.7: *Η παραγωγή ενεργού ισχύος για όλα τα μοντέλα (ehv1).*

Στο γράφημα για την ενεργό ισχύ του συγκεκριμένου συστήματος (5.7) παρατηρείται, όπως και στο προηγούμενο σύστημα, ότι η ενεργός ισχύς που συνεπάγονται τα τρία γραμμικά μοντέλα είναι η ίδια.

Παρατηρήσεις για τα αποτελέσματα αέργου ισχύος

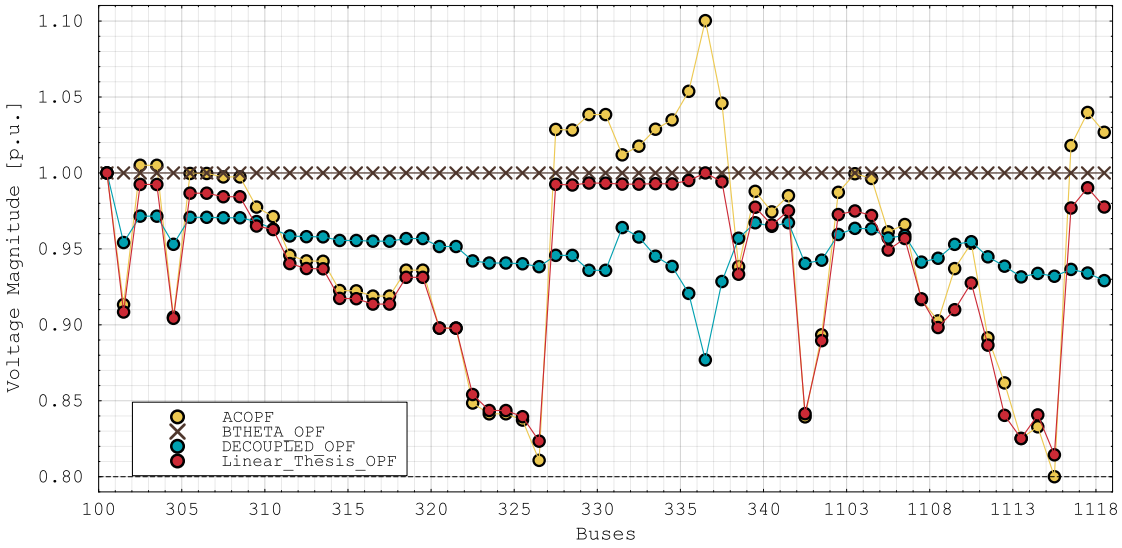


Σχήμα 5.8: *Η παραγωγή αέργου ισχύος για όλα τα μοντέλα (ehv1).*

Παρατηρώντας το γράφημα 5.8 δε φαίνεται ότι τα γραμμικά μοντέλα προσεγγίζουν αξιόπιστα την άεργο ισχύ του ACOPF. Ειδικότερα, το μοντέλο Decoupled αποτυγχάνει ακόμα και στο να βρει το σωστό πρόσημο της παραγωγής αέργου για την κάθε γεννήτρια. Δηλαδή, για τις γεννήτριες που παράγουν στο ACOPF, το μοντέλο Decoupled αποφασίζει πως θα καταναλώνουν και το αντίστροφο. Μια διαφορά που παρατηρείται ανάμεσα στα δύο γραμμικά μοντέλα είναι ότι αυτό της παρούσας εργασίας παράγει μικρή ποσότητα αέργου ισχύος και από τις δύο γεννήτριες ενώ το Decoupled αποφασίζει να παράξει μεγάλη ποσότητα αέργου από τη μία γεννήτρια και να καταναλώσει μεγάλη ποσότητα αέργου από την άλλη ώστε να καταλήξει να καλύψει το άεργο φορτίο. Από το παρόν γράφημα δε φαίνεται ότι μπορεί να κριθεί επιτυχημένη η προσέγγιση των γραμμικών μοντέλων μιας και κανένα από τα δύο δεν παρουσιάζουν καλή συμπεριφορά.

Παρατηρήσεις για τα αποτελέσματα μέτρου τάσης

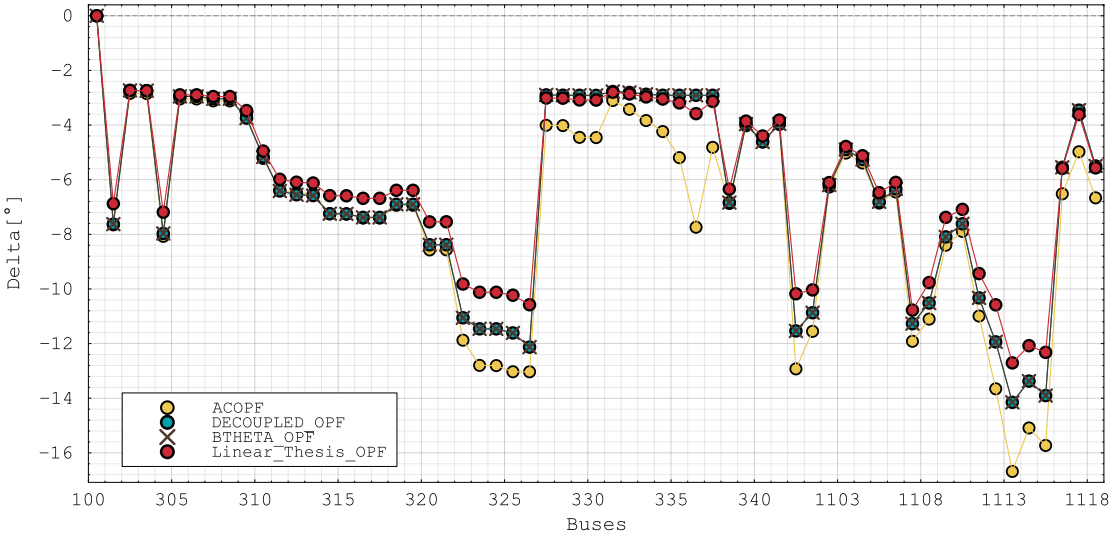
Αυτό που παρατηρείται λιγότερο έντονα, σε σχέση με το προηγούμενο σύστημα, είναι ότι στο γράφημα 5.9 το Decoupled και το μοντέλο της παρούσας εργασίας συνεπάγονται μέτρα τάσεων που ακολουθούν το παρόμοιο μοτίβο με τη γραφική των μέτρων των τάσεων του ACOPF. Για το μοντέλο της εργασίας φαίνεται ότι γενικά ακολουθεί το μοτίβο αλλά



Σχήμα 5.9: *Το μέτρο της τάσης [p.u] για όλα τα μοντέλα (ehv1).*

στην περιοχή του γραφήματος για ζυγούς 327 εως 337 δεν ισχύει το ίδιο, μιας και δεν ακολουθεί τις μεταβολές της τάσης του ACOPF. Στο Decoupled φαίνεται ότι τα πράγματα είναι ακόμη χειρότερα μιας και σαν γενική συμπεριφορά δε φαίνεται να ακολουθεί με αξιόπιστο τρόπο το μοτίβο των τάσεων του ACOPF και αυτό παρατηρείται στο σύνολο της γραφικής. Από τον πίνακα σφαλμάτων 5.2 επιβεβαιώνεται ότι το μοντέλο της εργασίας έχει καλύτερη συμπεριφορά και χειρότερη έχει το Bθ· το τελευταίο είναι σε μεγάλο βαθμό λογικό γιατί το Bθ συνεπάγεται εξ αρχής ότι όλα τα μέτρα τάσεων είναι ίσα με 1.

Παρατηρήσεις για τα αποτελέσματα γωνιών της τάσης

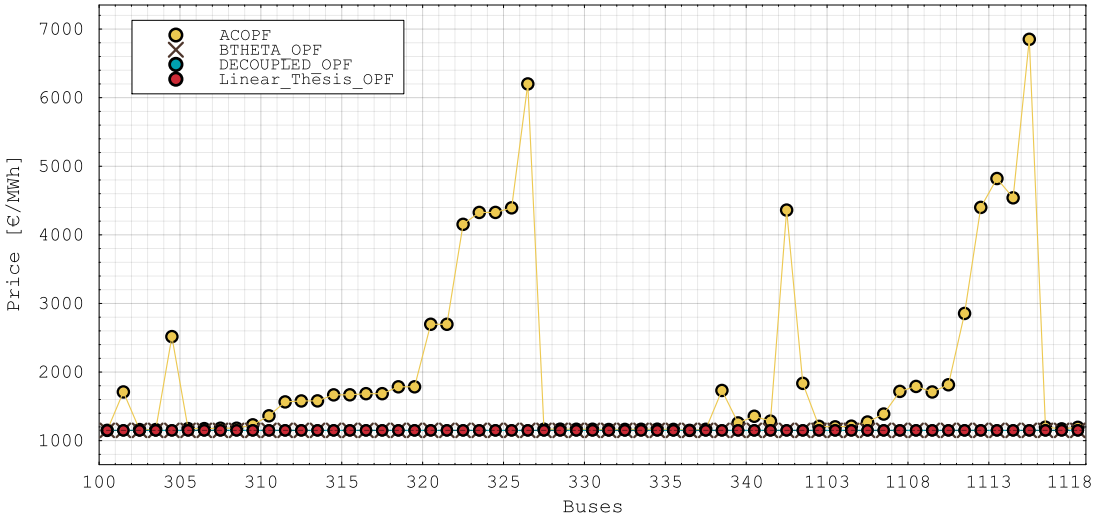


Σχήμα 5.10: *Η γωνία της τάσης για όλα τα μοντέλα (ehv1).*

Για τις γωνίες των τάσεων αυτό που παρατηρείται, όπως και στο προηγούμενο σύστημα, είναι ότι στη γραφική και στον πίνακα σφαλμάτων του πρώτου συστήματος 5.10, 5.2, το Bθ

και το Decoupled συνεπάγονται ίδια ακριβώς αποτελέσματα. Ακριβώς όπως και στο πρώτο σύστημα παρατηρείται είναι ότι όλα τα μοντέλα προσπαθούν με πειστικό τρόπο να ακολουθήσουν το μοτίβο της γραφικής των γωνιών του ACOPF και τα μοντέλα Bθ και Decoupled φαίνεται να έχουν ένα πολύ μικρό προβάδισμα όσον αφορά στα μέσα και μέγιστα σφάλματα.

Παρατηρήσεις για τα αποτελέσματα κομβικών τιμών



Σχήμα 5.11: *Οι κομβικές τιμές για όλα τα μοντέλα (ehv1).*

Οι παρατηρήσεις για τις κομβικές τιμές είναι κοινές με αυτές της πρώτης μελέτης περίπτωσης 5.2.1.

Σφάλματα αποτελεσμάτων

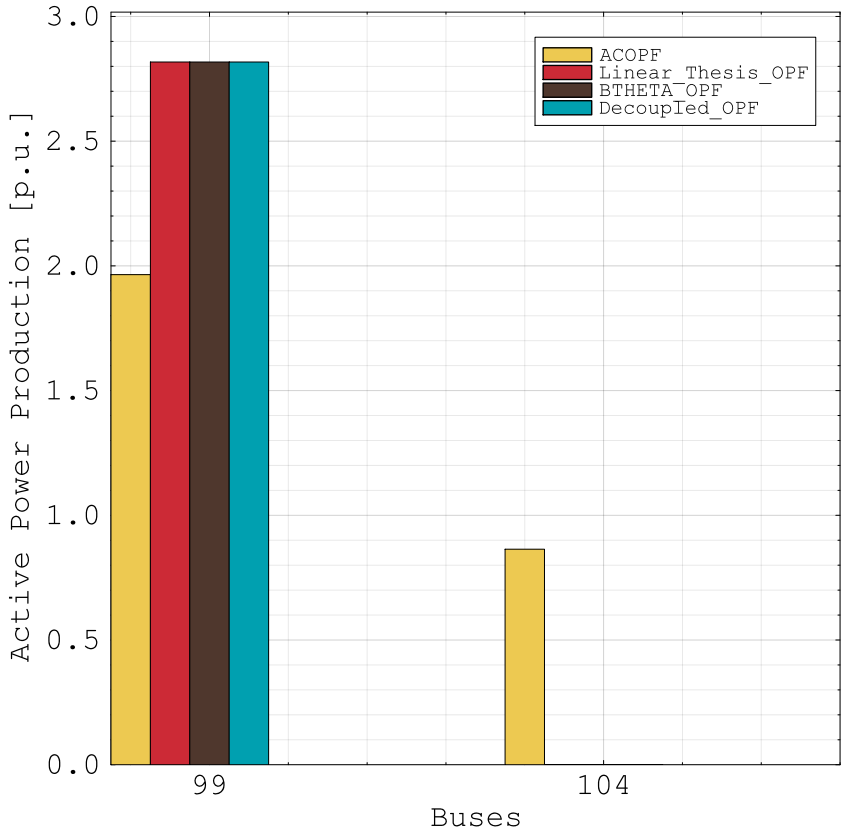
	Απόλυτο σφάλμα	
	Μέση τιμή	**Μέγιστο**
Linear Bolognani OPF		
Μέτρο τάσης [α.μ.]	0.0170742	0.100284
Γωνία τάσης [◦]	1.10981	4.15753
DC BTheta OPF		
Μέτρο τάσης [α.μ.]	0.0647649	0.2
Γωνία τάσης [◦]	0.680865	4.82921
DC Decoupled OPF		
Μέτρο τάσης [α.μ.]	0.0563	0.223383
Γωνία τάσης [◦]	0.680865	4.82921

Πίνακας 5.2: *Απόλυτα σφάλματα για μέτρα και γωνίες τάσεων για το σύστημα ehv1.*

5.2.3 Σύστημα ehv5

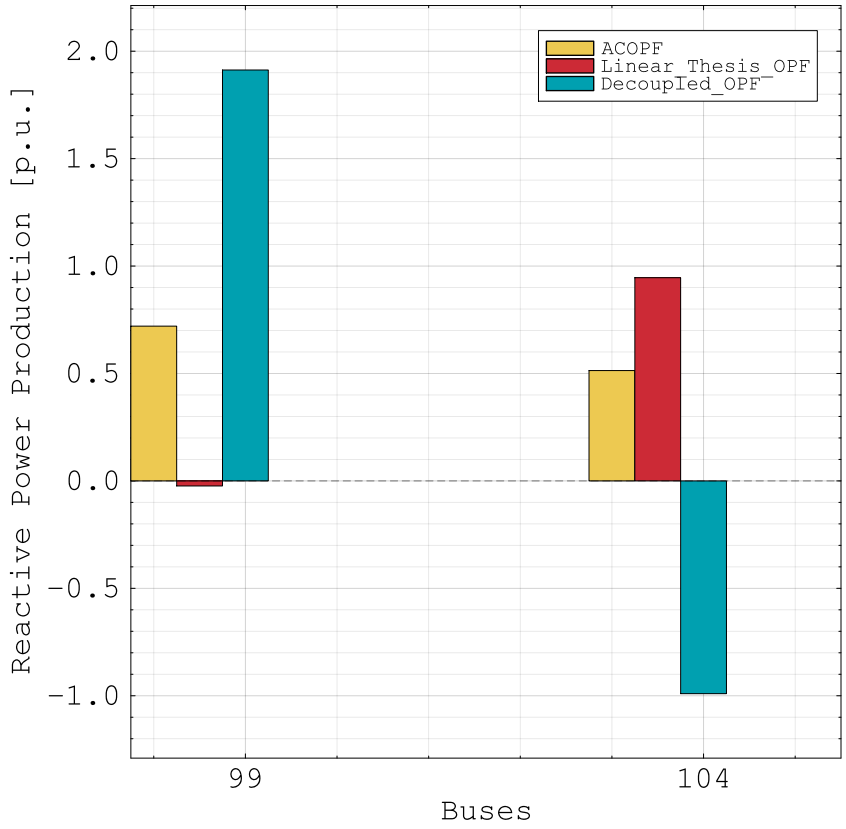
Το σύστημα αποτελείται από 52 ζυγούς όπου ο ζυγός 99 (1150€/MWh) είναι ο ζυγός αναφοράς και ο 104 (1150€/MWh) η δεύτερη γεννήτρια του συστήματος.

Παρατηρήσεις για τα αποτελέσματα ενεργού και αέργου ισχύος



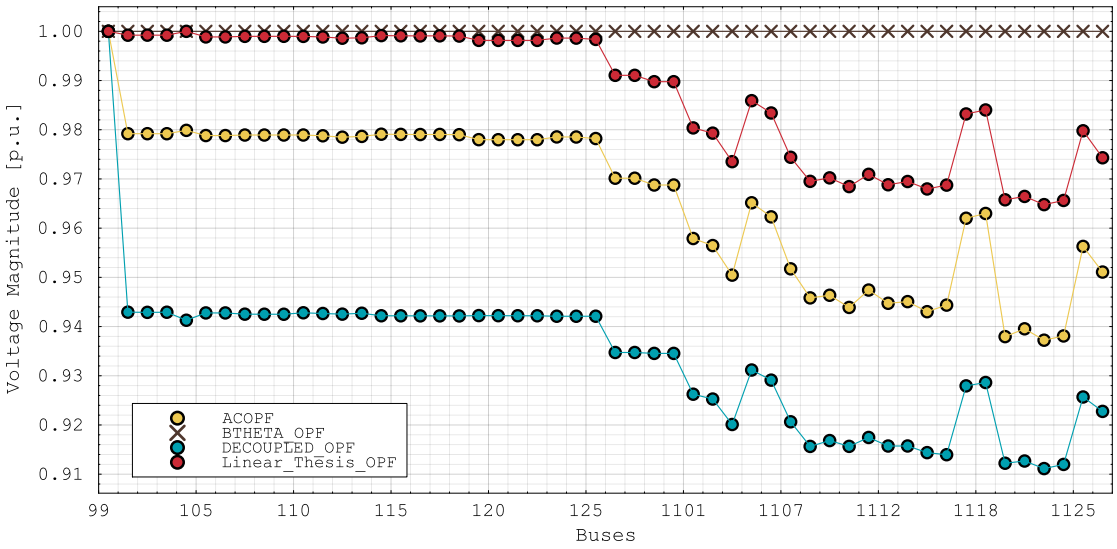
Σχήμα 5.12: *Η παραγωγή ενεργού ισχύος για όλα τα μοντέλα (ehv5).*

Τα συμπεράσματα που εξάγονται από τις γραφικές της ενεργού και αέργου ισχύος (5.12, 5.13) είναι κοινά με αυτά του προηγούμενου συστήματος 5.2.2.



Σχήμα 5.13: *Η παραγωγή αέργου ισχύος για όλα τα μοντέλα (ehv5).*

Παρατηρήσεις για τα αποτελέσματα μέτρου τάσης

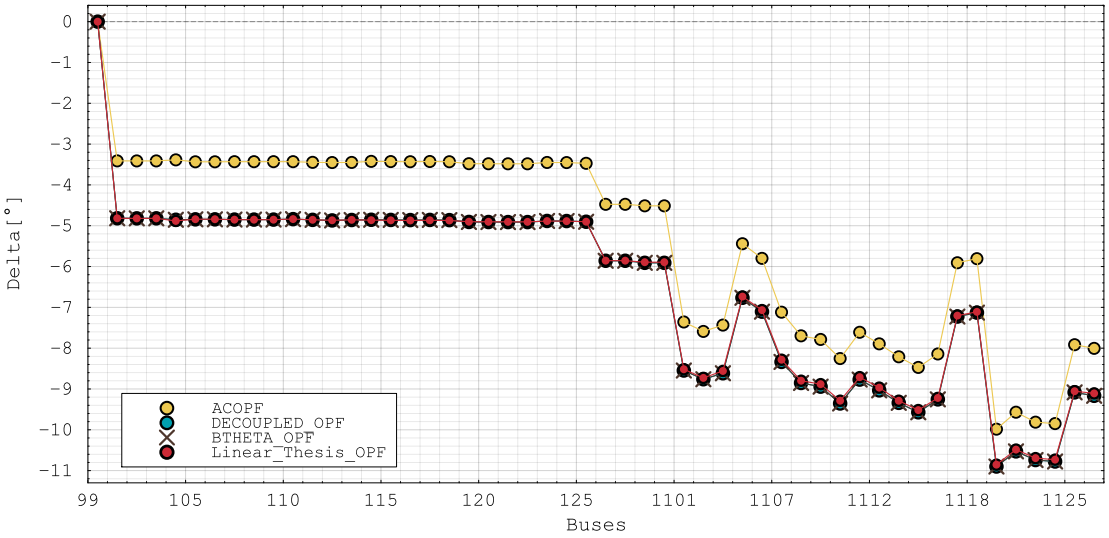


Σχήμα 5.14: *Το μέτρο της τάσης [p.u] για όλα τα μοντέλα (ehv5).*

Αυτό που είχε επισημανθεί στα προηγούμενα συστήματα, σε σχέση με τα μέτρα των τάσεων, ήταν ότι το γραμμικό μοντέλο της παρούσας εργασίας και το μοντέλο Decoupled

ακολουθούν πιστά το μοτίβο της γραφικής των τάσεων του ACOPF. Στο συγκεκριμένο σχήμα, 5.14, αυτό παρατηρείται ακόμα πιο έντονα. Το συγκεκριμένο γεγονός μπορεί να επιβεβαιωθεί με δύο τρόπους. Πρώτον, δια γυμνού οφθαλμού παρατηρείται ότι τα δύο αυτά γραμμικά μοντέλα έχουν γραφικές τάσεων που είναι παρόμοιες με αυτήν του ACOPF μετακινημένες κατά μια σταθερά προς τα πάνω ή προς τα κάτω αντίστοιχα. Δεύτερον, από τον πίνακα σφαλμάτων 5.3 φαίνεται ότι τα μέγιστα και απόλυτα σφάλματα για το καθένα από τα δύο γραμμικά μοντέλα παρουσιάζουν διαφορά στο τρίτο δεκαδικό ψηφίο, είναι δηλαδή σχεδόν αμελητέα η διαφορά τους. Τόσο από τη γραφική όσο και από τον πίνακα σφαλμάτων παρατηρείται ότι την καλύτερη προσέγγιση έχει το γραμμικό μοντέλο της παρούσας εργασίας, ακολουθεί το Decoupled και τέλος το Bθ με τη χειρότερη επίδοση.

Παρατηρήσεις για τα αποτελέσματα γωνιών της τάσης

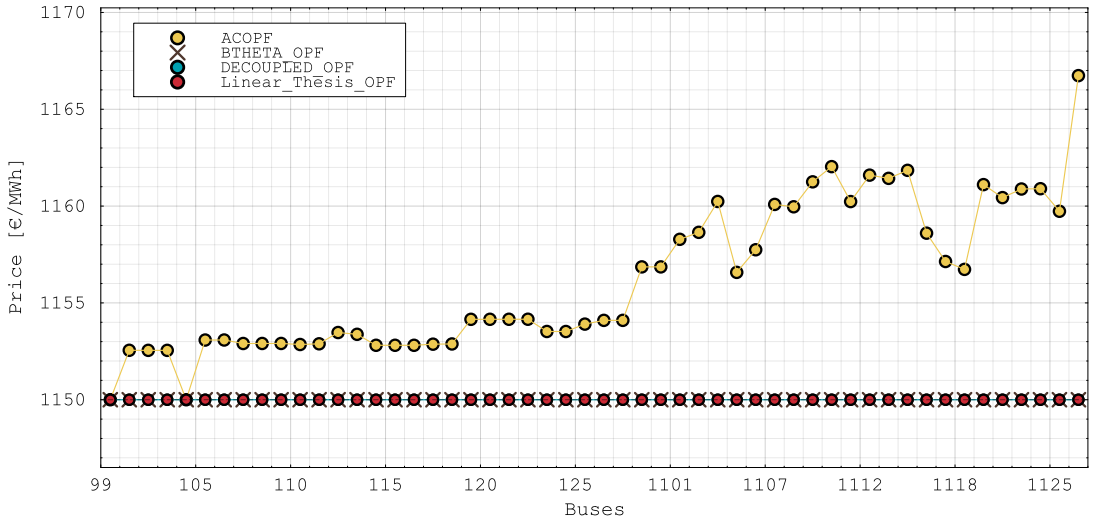


Σχήμα 5.15: *Η γωνία της τάσης για όλα τα μοντέλα (ehv5).*

Οι παρατηρήσεις για το γράφημα 5.15 είναι, σε μεγάλο βαθμό, κοινές σε σχέση με το προηγούμενο σύστημα. Η μόνη διαφοροποίηση είναι ότι, σύμφωνα με τον πίνακα 5.3, το γραμμικό μοντέλο της παρούσας εργασίας έχει μικρό πλεονέκτημα όσον αφορά στα μέσα σφάλματα, ενώ τα άλλα δύο όσον αφορά στο μέγιστο σφάλμα.

Παρατηρήσεις για τα αποτελέσματα κομβικών τιμών

Οι παρατηρήσεις για τις κομβικές τιμές (σχήμα 5.16) είναι κοινές με αυτές της πρώτης μελέτης περίπτωσης 5.2.1.



Σχήμα 5.16: *Οι κομβικές τιμές για όλα τα μοντέλα (ehv5).*

Σφάλματα αποτελεσμάτων

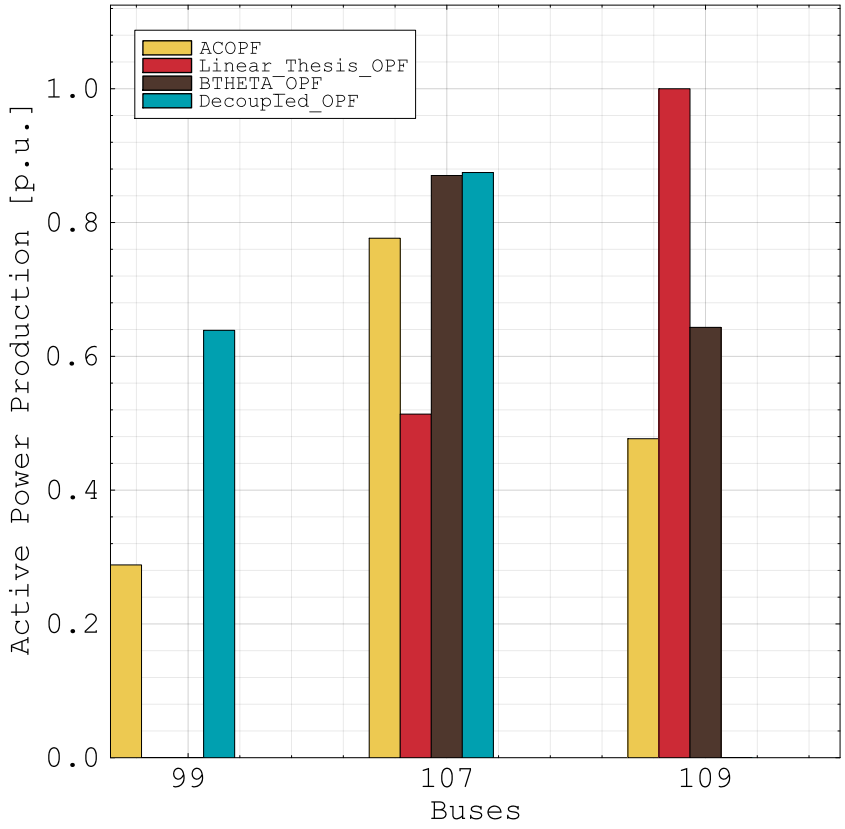
	Απόλυτο σφάλμα	
	Μέση τιμή	**Μέγιστο**
Linear Bolognani OPF		
Μέτρο τάσης [α.μ.]	0.0213641	0.0278058
Γωνία τάσης [○]	1.25533	1.49621
DC BTheta OPF		
Μέτρο τάσης [α.μ.]	0.0339072	0.0627698
Γωνία τάσης [○]	1.27451	1.468
DC Decoupled OPF		
Μέτρο τάσης [α.μ.]	0.0328367	0.0385891
Γωνία τάσης [○]	1.27451	1.468

Πίνακας 5.3: *Απόλυτα σφάλματα για μέτρα και γωνίες τάσεων για το σύστημα ehv5.*

5.2.4 Σύστημα ehv4

Το σύστημα αποτελείται από 81 ζυγούς όπου ο ζυγός 99 (1150€/MWh) είναι ο ζυγός αναφοράς και οι 107 και 109 (1150€/MWh) οι υπόλοιπες γεννήτριες του συστήματος.

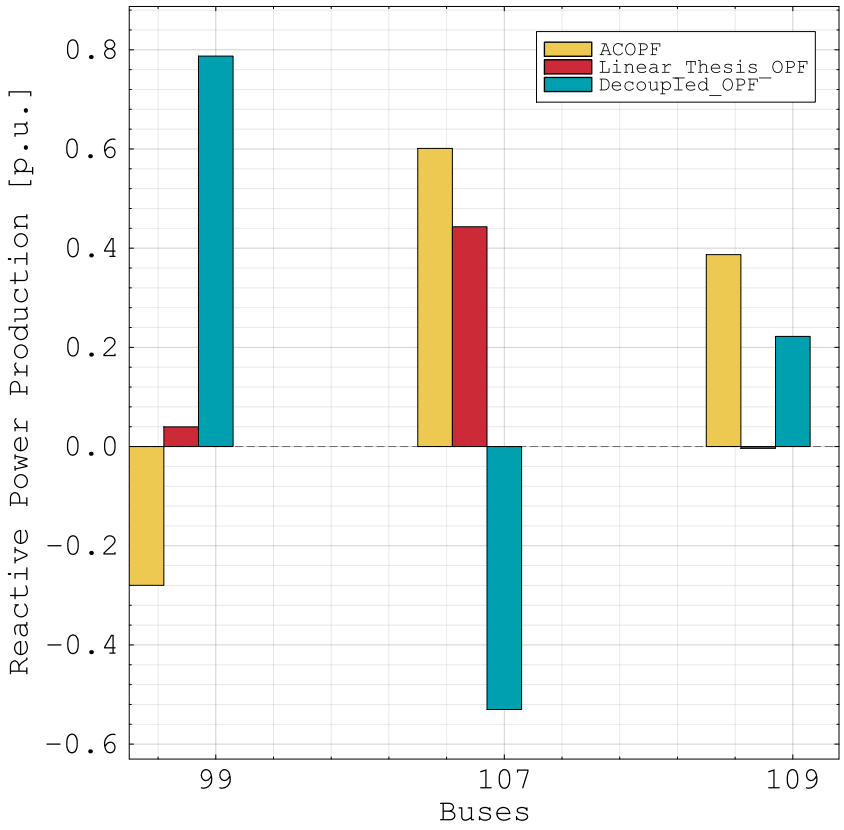
Παρατηρήσεις για τα αποτελέσματα ενεργού ισχύος



Σχήμα 5.17: *Η παραγωγή ενεργού ισχύος για όλα τα μοντέλα (ehv4).*

Σε σχέση με τα προηγούμενα συστήματα η μεγάλη διαφοροποίηση στα αποτελέσματα είναι ότι όλα τα γραμμικά μοντέλα συνεπάγονται διαφορετική ενεργό παραγωγή. Θα περιμέναμε το μοντέλο Decoupled και Bθ να συνεπάγονται ίδια ενεργό ισχύ γιατί ο περιορισμός των ροών στις γραμμές έχει κοινή μαθηματική μοντελοποίηση και στα δύο μοντέλα. Πρέπει να τονιστεί ότι και οι δύο διαφορετικοί συνδυασμοί ενεργού παραγωγής (του Bθ και του Decoupled) είναι εξίσου βέλτιστοι γιατί όλες οι γεννήτριες έχουν ίδιο οριακό κόστος. Οπότε είναι, εν μέρει, τυχαίο το γεγονός ότι έχουν διαφορετική ενεργό παραγωγή, αφού και οι δύο αντικειμενικές έχουν την ίδια, βέλτιστη, τιμή. Τέλος, δε φαίνεται κάποια από τις γραμμικοποιήσεις να έχει καλύτερη προσέγγιση έναντι των άλλων.

Παρατηρήσεις για τα αποτελέσματα αέργου ισχύος

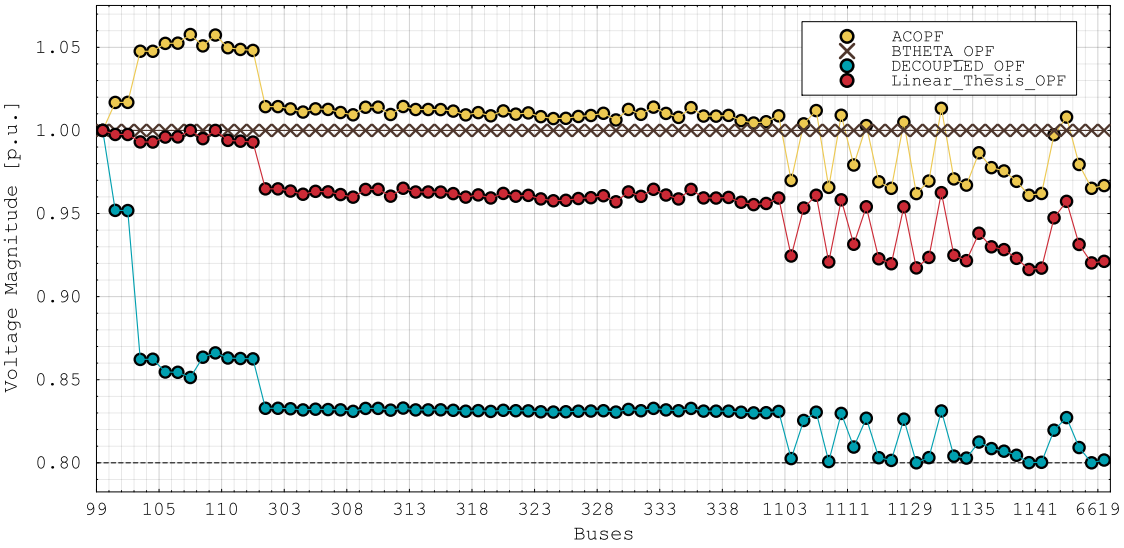


Σχήμα 5.18: *Η παραγωγή αέργου ισχύος για όλα τα μοντέλα (ehv4).*

Τα συμπεράσματα είναι, κατά βάση, κοινά με αυτά του συστήματος ehv1 (5.2.2). Από τη γραφική 5.18 φαίνεται ότι και σε αυτήν την περίπτωση το Decoupled μοντέλο επιλέγει σε κάποιον ζυγό να παράξει μεγάλη ποσότητα αέργου και σε μία δεύτερη γεννήτρια να καταναλώσει πάλι μεγάλη ποσότητα αέργου. Από την άλλη, το παρόν γραμμικό μοντέλο αποφασίζει να καταναλώνει ελάχιστη ποσότητα αέργου από μία γεννήτρια και να παράγει επαρκείς ποσότητες από τις άλλες δύο.

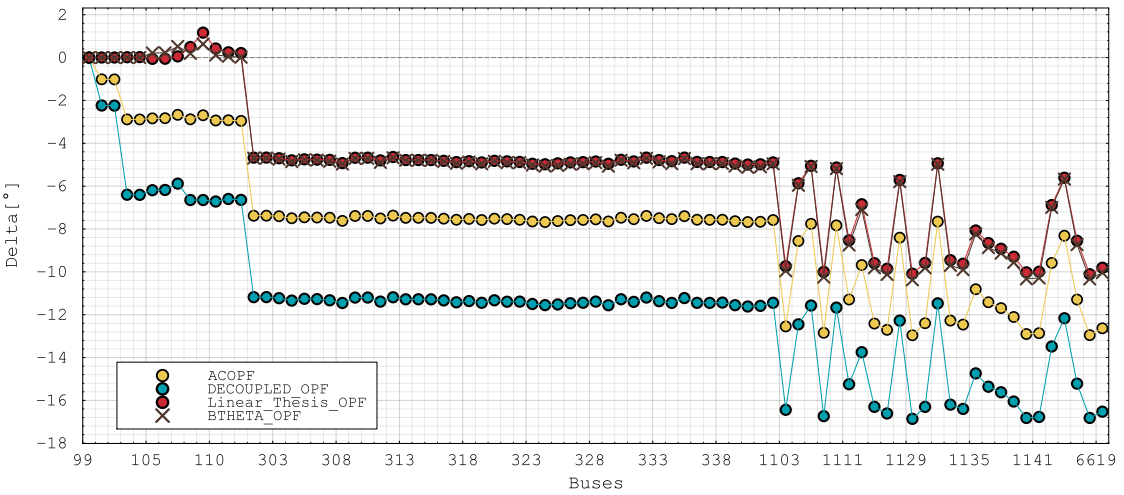
Παρατηρήσεις για τα αποτελέσματα μέτρου τάσης

Η παρατήρηση ότι οι γραφικές παραστάσεις των τάσεων του γραμμικού μοντέλου της παρούσας εργασίας και του Decoupled ακολουθούν το μοτίβο της γραφικής του ACOPF, επιβεβαιώνεται και σε αυτήν την περίπτωση (σχήμα 5.19). Η παράδοξη παρατήρηση είναι ότι με βάση τον πίνακα σφαλμάτων 5.4 και το σχήμα 5.19 την καλύτερη προσέγγιση την επιτυγχάνει το μοντέλο Bθ. Αυτό συμβαίνει γιατί τυχαίνει το μοντέλο ACOPF να συνεπάγεται τάσεις πολύ κοντά στη μοναδιαία τιμή. Τόσο από τον πίνακα σφαλμάτων όσο και από τη γραφική φαίνεται ότι το γραμμικό μοντέλο της παρούσας εργασίας έχει σαφές πλεονέκτημα έναντι του Decoupled.



Σχήμα 5.19: *Το μέτρο της τάσης [p.u.] για όλα τα μοντέλα (ehv4).*

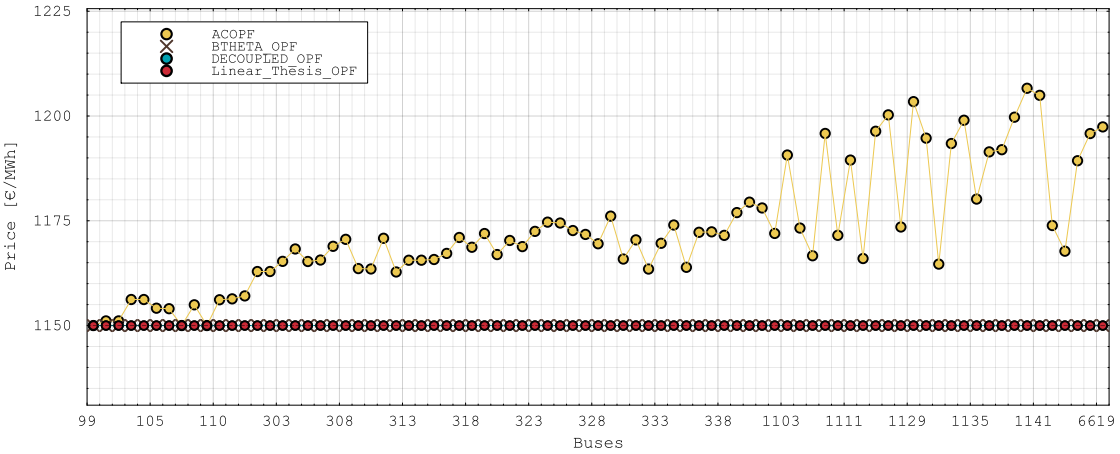
Παρατηρήσεις για τα αποτελέσματα γωνιών της τάσης



Σχήμα 5.20: *Η γωνία της τάσης για όλα τα μοντέλα (ehv4).*

Για τα αποτελέσματα των γωνιών της τάσης παρατηρείται, όπως και στα προηγούμενα συστήματα, ότι οι γραφικές των γραμμικών μοντέλων ακολουθούν με πιστότητα το μοτίβο της γραφικής του ACOPF. Δηλαδή, οι γραφικές τους έχουν παρόμοια μορφή με αυτήν του ACOPF αλλά μετατοπισμένες, προσεγγιστικά, κατά μία σταθερά προς τα πάνω ή προς τα κάτω αντίστοιχα. Σε σχέση με τα προηγούμενα συστήματα υπάρχει μια διαφοροποίηση. Πλέον, το μοντέλο Decoupled και Bθ δε συνεπάγονται ίδιες γωνίες. Αυτό είναι λογικό επακόλουθο μιας και όπως είδαμε στη γραφική των ενεργών ισχύων 5.17, τα δύο μοντέλα συνεπάγονται διαφορετική ενεργό παραγωγή. Σύμφωνα με τον πίνακα σφαλμάτων, καλύτερη προσέγγιση επιτυγχάνει το Bθ, με το γραμμικό μοντέλο της εργασίας να μην έχει πολύ μεγάλη απόκλιση στην απόδοση από το πρώτο. Τη χειρότερη επίδοση την παρουσιάζει το Decoupled.

Παρατηρήσεις για τα αποτελέσματα κομβικών τιμών



Σχήμα 5.21: *Οι κομβικές τιμές για όλα τα μοντέλα (ehv4).*

Οι παρατηρήσεις για τις κομβικές τιμές είναι κοινές με αυτές της πρώτης μελέτης περίπτωσης 5.2.1.

Σφάλματα αποτελεσμάτων

	Απόλυτο σφάλμα	
	Μέση τιμή	**Μέγιστο**
Linear Bolognani OPF		
Μέτρο τάσης [α.μ.]	0.0482266	0.0576977
Γωνία τάσης [○]	2.70308	3.8565
DC BTheta OPF		
Μέτρο τάσης [α.μ.]	0.019473	0.0576977
Γωνία τάσης [○]	2.60469	3.32068
DC Decoupled OPF		
Μέτρο τάσης [α.μ.]	0.172553	0.206358
Γωνία τάσης [○]	3.72021	4.06646

Πίνακας 5.4: *Απόλυτα σφάλματα για μέτρα και γωνίες τάσεων για το σύστημα ehv4.*

5.2.5 Γενικά συμπεράσματα επί των τελικών αποτελεσμάτων

Ενεργός ισχύς

Για την ικανότητα προσέγγισης της ενεργού ισχύος, από τα γραμμικά μοντέλα, δεν μπορεί να εξαχθεί κάποιο ασφαλές γενικό συμπέρασμα. Στις περισσότερες περιπτώσεις έχουν κοινή συμπεριφορά. Μόνο στο τελευταίο σύστημα 5.17 παρατηρούνται διαφοροποιήσεις στην ενεργό παραγωγή μεταξύ των μοντέλων, αλλά και σε αυτήν την περίπτωση δεν μπορεί να ειπωθεί ότι κάποιο από τα τρία μοντέλα έχει καλύτερη συμπεριφορά έναντι των άλλων.

Άεργος ισχύς

Αρχικά, το Bθ αγνοεί την ύπαρξη της αέργου ισχύος, οπότε τα συμπεράσματα αφορούν τα άλλα δύο γραμμικά μοντέλα. Από τα αποτελέσματα για τα συστήματα που αναλύθηκαν δε φαίνεται να υπερέχει κάποιο μοντέλο στην προσέγγιση της αέργου. Κάτι το οποίο παρατηρήθηκε είναι ότι το Decoupled μοντέλο επέλεγε να παράγουν κάποιες γεννήτριες μεγάλη τιμή αέργου ισχύος και κατ'επέκταση να καταναλώνουν κάποιες άλλες μεγάλη άεργο ισχύ (ώστε το άεργο φορτίο να είναι ίσο με την άεργο παραγωγή). Δηλαδή, η άθροιση των άεργων ισχύων και καταναλώσεων κατά απόλυτη τιμή δίνει μια τιμή αρκετά μεγαλύτερη από το άεργο φορτίο. Από την άλλη, το γραμμικό μοντέλο της παρούσας εργασίας αποφασίζει πιο ισορροπημένα, δηλαδή δεν αναγκαζόνταν κάποια γεννήτρια να καταναλώνει μεγάλη ποσότητα αέργου με σκοπό να εξισορροπήσει την ασύμμετρα μεγάλη παραγωγή κάποιας άλλης.

Μέτρα τάσης

Το μοντέλο Decoupled και αυτό της παρούσας εργασίας ακολουθούν το μοτίβο των τάσεων του ACOPF, δηλαδή έχουν παρόμοια μορφή αλλά μετατοπισμένα, προσεγγιστικά, κατά μία σταθερά προς τα πάνω ή προς τα κάτω. Το Bθ δεν έχει, προφανώς, παρόμοια συμπεριφορά γιατί υποθέτει ότι όλα τα μέτρα τάσεων είναι ίσα με 1. Σε όλες τις περιπτώσεις, είτε σε μεγαλύτερο είτε σε μικρότερο βαθμό, το μοντέλο της παρούσας εργασίας υπερείχε του Decoupled τόσο στην προσέγγιση της μορφής της γραφικής (ακολουθεί πιο πιστά το μοτίβο της γραφικής τάσεων του ACOPF) όσο και σε σχέση με τα σφάλματα που υπολογίστηκαν. Συγκρίνοντας μόνο τα απόλυτα και μέσα σφάλματα και όχι τη μορφή της γραφικής, το Bθ υπερείχε έναντι των υπόλοιπων δύο μόνο σε μία περίπτωση (έναντι του Decoupled υπερείχε σε δύο περιπτώσεις). Άρα, σε συνολικό πλαίσιο φαίνεται να υπερέχει το παρόν μοντέλο, όσον αφορά τα μέτρα τάσεων.

Γωνίες τάσεων

Για τις γωνίες των τάσεων αυτό που παρατηρείται στη γραφική για το Bθ και το Decoupled είναι συνεπάγονται ίδια ακριβώς αποτελέσματα τις περισσότερες περιπτώσεις. Αυτό συμβαίνει όταν τα μοντέλα αυτά συνεπάγονται κοινές ενεργές ισχείς και άρα αφού έχουν ίδιο περιορισμό για τον υπολογισμό των γωνιών είναι λογικό να οδηγούνται σε κοινά αποτελέσματα. Επιπλέον, όλα τα μοντέλα προσπαθούν με πειστικό τρόπο να ακολουθήσουν τη μορφή της γραφικής των γωνιών του ACOPF. Τα μοντέλα Decoupled και Bθ φαίνεται να προσεγ-

γίζουν με καλύτερο τρόπο τις γωνίες τάσης του ACOPF, αλλά με ισχνό, έως και αμελητέο, προβάδισμα έναντι του γραμμικού μοντέλου της παρούσας εργασίας.

Κεφάλαιο 6

Προτεινόμενες επεκτάσεις της παρούσας εργασίας

- **Ενσωμάτωση σε μοντέλα συντονισμού δικτύου διανομής και μεταφοράς**
  Για τη λήψη κατάλληλων αποφάσεων παραγωγής στο δίκτυο διανομής, το παρόν γραμμικό μοντέλο θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως εναλλακτική του ACOPF. Οι αποφάσεις αυτές θα συντονίζονται με τις αντίστοιχες του δικτύου μεταφοράς μέσω κατάλληλης πλατφόρμας.

- **Προσθήκη εφεδρειών στο μοντέλο**
  Η συνεχώς αυξανόμενη διείσδυση των ΑΠΕ καθιστά την παροχή εφεδρειών κρίσιμη για τη διασφάλιση της αξιοπιστίας του συστήματος. Η ενσωμάτωσή τους στο μοντέλο θα ενίσχυε σημαντικά τη λειτουργικότητά του και θα αύξανε τη χρησιμότητά του σε ρεαλιστικά σενάρια λειτουργίας.

- **Σύγκριση με εναλλακτικά γραμμικά μοντέλα**
  Στην παρούσα εργασία έγινε η σύγκριση του προτεινόμενου μοντέλου με τα γραμμικά Bθ και Decoupled. Σαν μελλοντική επέκταση θα ήταν χρήσιμο να γίνει αντίστοιχη σύγκριση και με άλλα υπάρχοντα γραμμικά μοντέλα και να εξαχθούν συμπεράσματα ως προς την επίδοση τους.

- **Επέκταση γραμμικοποίησης Taylor για μέτρα τάσεων αναφοράς διαφορετικά του 1**
  Η υλοποίηση των εξισώσεων της γραμμικοποίησης Taylor είχε σαν προϋπόθεση ότι το μέτρο της τάσης στον ζυγό αναφοράς είναι κοντά στο 1. Στην περίπτωση όπου αυτό δεν ίσχυε παρατηρήθηκε ότι η γραμμικοποίηση δεν λειτουργούσε με τον κατάλληλο τρόπο και είχε ως αποτέλεσμα το μοντέλο της εργασίας να συνεπάγεται διαφορετική ενεργό παραγωγή από το ενεργό φορτίο του συστήματος. Σαν μελλοντική επέκταση θα μπορούσαν να δομηθούν οι γραμμικοποιήσεις θεωρώντας διαφορετική τάση ζυγού αναφοράς.

Παραρτήματα

Παράρτημα Α΄

Απόδειξη των γραμμικοποιήσεων Taylor και πίνακας Z

Α΄.1 Γραμμικοποιήσεις Taylor

Σε αυτήν την ενότητα αποδεικνύεται η γραμμικοποίηση Taylor για τις ροές p_{ij} και q_{ij} πάνω στις γραμμές του δικτύου.

$$\hat{s_{ij}} = \hat{u_i}\hat{i_j^*} = \hat{u_i}\frac{\hat{u_i^*} - \hat{u_j^*}}{Z_{ij}^*} = \frac{|u_i|^2 - u_i u_j e^{j(\theta_i - \theta_j)}}{Z_{ij}^*} = \frac{|u_i|^2 - u_i u_j (cos(\theta_i - \theta_j) + jsin(\theta_i - \theta_j))}{R_{ij} - jX_{ij}}$$
$$\approx \frac{(R_{ij} + jX_{ij})(|u_i|^2 - u_i u_j (1 + j(\theta_i - \theta_j)))}{R_{ij}^2 + X_{ij}^2} = \frac{(R_{ij} + jX_{ij})(|u_i|^2 - u_i u_j - j u_i u_j (\theta_i - \theta_j))}{R_{ij}^2 + X_{ij}^2} \tag{Α΄.1}$$

Η συνάρτηση $f(x, y, z)$ μπορεί να προσεγγιστεί με τον παρακάτω τρόπο:

$$f(x,y,z) \approx f(x_0,y_0,z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial Z}(x_0,y_0,z_0)(z - z_0) \tag{Α΄.2}$$

Για την προσέγγιση του όρου $|u_i|^2$: Για $x \approx 1$ από την Α΄.2 παίρνουμε:

$$x^2 \approx 2x - 1 \tag{Α΄.3}$$

Για την προσέγγιση του όρου $u_i u_j$: Για $x \approx 1$ και $y \approx 1$ από την Α΄.2 παίρνουμε:

$$xy \approx 1 + (x - 1) + (y - 1) = x + y - 1 \tag{Α΄.4}$$

Για την προσέγγιση του όρου $u_i u_j (\theta_i - \theta_j)$: Για $x \approx 1$, $y \approx 1$ και $z \approx 0$ από την Α΄.2 παίρνουμε:

$$xyz \approx z \tag{Α΄.5}$$

Από τις σχέσεις Α΄.3,Α΄.4 και Α΄.5 έχουμε

$$\begin{aligned} \hat{s_{ij}} &\approx \frac{(R_{ij}+jX_{ij})(2u_i-1-(u_i+u_j-1)-j(\theta_i-\theta_j))}{R_{ij}^2+X_{ij}^2} \\ &= \frac{(R_{ij}+jX_{ij})(u_i-u_j-1-j(\theta_i-\theta_j))}{R_{ij}^2+X_{ij}^2} \\ &= \frac{R_{ij}(u_i-u_j)}{R_{ij}^2+X_{ij}^2}+\frac{X_{ij}(\theta_i-\theta_j)}{R_{ij}^2+X_{ij}^2}+j\frac{X_{ij}(u_i-u_j)}{R_{ij}^2+X_{ij}^2}-j\frac{R_{ij}(\theta_i-\theta_j)}{R_{ij}^2+X_{ij}^2}+ \end{aligned} \tag{Α΄.6}$$

Άρα οι τελικές εξισώσεις που εξάγονται είναι:

$$p_{ij} = \frac{R_{ij}(u_i-u_j)+X_{ij}(\theta_i-\theta_j)}{R_{ij}^2+X_{ij}^2} \tag{Α΄.7}$$

$$p_{ij} = \frac{X_{ij}(u_i-u_j)-R_{ij}(\theta_i-\theta_j)}{R_{ij}^2+X_{ij}^2} \tag{Α΄.8}$$

Για την έγχυση ενεργού και αέργου ισχύος για τον κάθε ζυγό του συστήματος χρησιμοποιούνται οι τύποι:

$$p_i = \sum_{j\in \mathrm{M}(i,\cdot)} p_{ij} - \sum_{j\in \mathrm{M}(\cdot,i)} p_{ij}, i \in N \tag{Α΄.9}$$

$$q_i = \sum_{j\in \mathrm{M}(i,\cdot)} q_{ij} - \sum_{j\in \mathrm{M}(\cdot,i)} q_{ij}, i \in N \tag{Α΄.10}$$

Στους παραπάνω τύπους χρησιμοποιούνται οι ροές που ορίζονται από τις εξισώσεις Α΄.7,Α΄.8, όπου N είναι το σύνολο όλων των ζυγών και M το σύνολο των γραμμών.

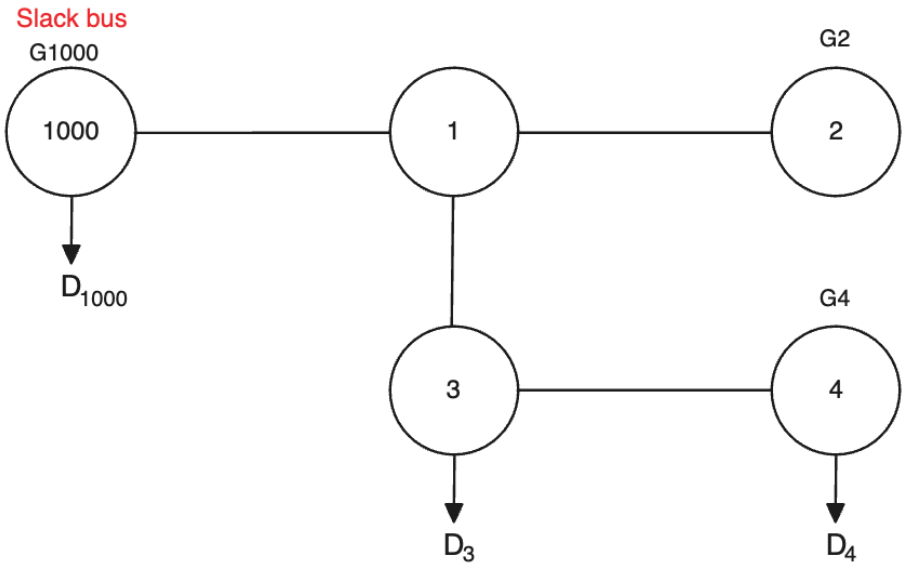
Α΄.2 Παράδειγμα υλοποίησης του πίνακα Z

Η παρούσα ενότητα παρουσιάζει ένα απλό παράδειγμα για την κατανόηση του τρόπου με τον οποίο δομείται ο πίνακας Z στο γραμμικό μοντέλο. Από το θεωρητικό μέρος της εργασίας είναι γνωστό ότι :

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{KK} & Z_{KL} \\ Z_{LK} & Z_{LL} \end{bmatrix}$$

Βλέπουμε ότι ο πίνακας Z αποτελείται από 4 υποπίνακες για τους οποίους ισχύουν τα παρακάτω:

- Ο πίνακας Z_{KK} είναι διαστάσεων $n \times n$, όπου n ο αριθμός των ζυγών-γεννητριών (εκτός του ζυγού αναφοράς).
- Ο πίνακας Z_{KL} είναι διαστάσεων $n \times m$, όπου m ο αριθμός των ζυγών που δεν είναι γεννήτριες (εκτός του ζυγού αναφοράς).
- Ο πίνακας Z_{LK} είναι διαστάσεων $m \times n$.
- Ο πίνακας Z_{LL} είναι διαστάσεων $m \times m$.



Εικόνα Α΄.1: *Το σύστημα για το παράδειγμα δημιουργίας του πίνακα Z*

Ο πίνακας Z_{KK} είναι διαστάσεων $n \times n$:

$$Z_{KK} = \begin{bmatrix} Z_{22} & Z_{24} \\ Z_{42} & Z_{44} \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας Z_{KL} είναι διαστάσεων $n \times m$:

$$Z_{KL} = \begin{bmatrix} Z_{21} & Z_{23} \\ Z_{41} & Z_{43} \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας Z_{LL} είναι διαστάσεων $m \times m$:

$$Z_{LL} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{13} \\ Z_{31} & Z_{33} \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας Z_{LK} είναι διαστάσεων $m \times n$:

$$Z_{LK} = \begin{bmatrix} Z_{12} & Z_{14} \\ Z_{31} & Z_{34} \end{bmatrix}$$

Άρα τελικά ο πίνακας Z:

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{22} & Z_{24} & Z_{21} & Z_{23} \\ Z_{42} & Z_{44} & Z_{41} & Z_{43} \\ Z_{12} & Z_{14} & Z_{11} & Z_{13} \\ Z_{31} & Z_{34} & Z_{31} & Z_{33} \end{bmatrix}$$

Για την υλοποίηση του πίνακα μέσω κώδικα αναμεταθέτουμε τη σειρά των ζυγών ως εξής: Οι ζυγοί γεννητριών εκτός του ζυγού αναφοράς γίνονται οι πρώτοι ζυγοί. Δηλαδή για το παραπάνω παράδειγμα οι 2,4 γίνονται 1 και 2 αντίστοιχα. Ακολούθως αριθμούνται οι ζυγοί

που δεν είναι γεννήτριες, δηλαδή οι 1,3 γίνονται 3 και 4 αντίστοιχα. Πάντα σαν τελευταίο ζυγό θα έχουμε τον ζυγό αναφοράς και άρα ο 1000 γίνεται ζυγός 5. Μετά τον υπολογισμό του πίνακα Y, τον αντιστρέφουμε και διαγράφουμε από τον πίνακα την τελευταία γραμμή και στήλη που αντιστοιχεί στον ζυγό αναφοράς. Έτσι, καταλήγουμε στον επιθυμητό πίνακα Z.

Παράρτημα Β΄

Ο κώδικας και τα αρχεία δεδομένων

Ο πλήρης κώδικας που υλοποιεί το προτεινόμενο γραμμικό μοντέλο, καθώς και τα δύο εναλλακτικά γραμμικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται για λόγους σύγκρισης, είναι διαθέσιμος στον ακόλουθο σύνδεσμο. Στον σύνδεσμο περιλαμβάνονται επίσης τα αρχεία εισόδου τύπου xlsx που χρησιμοποιήθηκαν στις εφαρμογές του μοντέλου. Παρέχονται αναλυτικές οδηγίες για την εκτέλεση του κώδικα καθώς και για την παραγωγή γραφικών παραστάσεων με βάση τα δεδομένα εξόδου.

https://github.com/ManousosAlexandrakis/Linear_Approximation_OPF.git

Βιβλιογραφία

[1] International Energy Agency. *Global Electricity Generation by Source, 2014-2025*, 2024.

[2] International Energy Agency. *Estimated Drivers of Change in Electricity Demand in China, 2021-2027*, 2025.

[3] International Energy Agency. *Global Median Surface Temperature Rise in the WEO-2021 Scenarios, 2000-2010*, 2021.

[4] International Energy Agency. *Temperature in Greece, 2000-2020*, 2022.

[5] Daniel K. Molzahn και Ian A. Hiskens. *A Survey of Relaxations and Approximations of the Power Flow Equations*. *Foundations and Trends in Electric Energy Systems*, 4(1-2):1–221, 2019.

[6] *The War of the Currents: AC vs. DC Power*. https://www.energy.gov/articles/war-currents-ac-vs-dc-power. Ημερομηνία πρόσβασης: 31-03-2025.

[7] Νίκος Παντελάκης. *Ο εξηλεκτρισμός της Ελλάδας: Από την ιδιωτική πρωτοβουλία στο κρατικό μονοπώλιο (1889-1956)*. Μ.Ι.Ε.Τ., Αθήνα, 1991.

[8] Stephen Frank, Ingrida Steponavice και Steffen Rebennack. *Optimal Power Flow: A Bibliographic Survey I*. *Energy Systems*, 3(3):221–258, 2012.

[9] J. Carpentier. *Contribution to the Economic Dispatch Problem*. *Bulletin de la Société Française des Electriciens*, 3(8):431–447, 1962.

[10] Mary B. Cain, Richard P. O'Neill και Anya Castillo. *History of Optimal Power Flow and Formulations*. *FERC Technical Report*, 2013. Original version: December 2012, revised August 2013.

[11] M. Huneault και F. D. Galiana. *A Survey of the Optimal Power Flow Literature*. *IEEE Transactions on Power Systems*, 6(2):762–770, 1991.

[12] O. Alsac και B. Stott. *Optimal Load Flow with Steady-State Security*. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-93(3):745–751, 1974.

[13] Vian Hasan Ahgajan και Firas Mohammed Tuaimah. *Optimal Power Flow for a Power System under Particle Swarm Optimization (PSO) based*. *International Journal of Computer Applications*, 177(33):56–62, 2020.

[14] Florin Capitanescu, Mevludin Glavić, Damien Ernst και Louis Wehenkel. *Contingency Filtering Techniques for Preventive Security-Constrained Optimal Power Flow*. *IEEE Transactions on Power Systems*, 22(4):1690–1697, 2007.

[15] Zhifang Yang, Kaigui Xie, Juan Yu, Haiwang Zhong, Ning Zhang και Qing Xia. *A General Formulation of Linear Power Flow Models: Basic Theory and Error Analysis*. *IEEE Transactions on Power Systems*, 34(2):1315–1324, 2019.

[16] Anthony Papavasiliou. *Optimization Models in Electricity Markets*. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 2024.

[17] Joshua Adam Taylor. *Convex Optimization of Power Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 2015.

[18] S. Bolognani και S. Zampieri. *On the Existence and Linear Approximation of the Power Flow Solution in Power Distribution Networks*. *IEEE Transactions on Power Systems*, 31(1):163–172, 2016.

[19] Stephen Boyd και Lieven Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 2008.

Συντομογραφίες

βλπ	βλέπε
κ.λπ.	και λοιπά
PF	Power Flow
OPF	Optimal Power Flow
ACOPF	Alternating Current Optimal Power Flow
DCOPF	Direct Current Optimal Power Flow
MC	Marginal Cost
KKT	Karush-Kuhn-Tucker

Απόδοση ξενόγλωσσων όρων

Απόδοση	Ξενόγλωσσος όρος
Μέτρο τάσης	Voltage Magnitude
Γωνία τάσης	Voltage Angle
Ζυγός αναφοράς	Slack bus
Ζυγός παραγωγής	PV bus
Ζυγός φορτίου	PQ bus
Εναλλασσόμενο ρεύμα	Alternating Current
Συνεχές ρεύμα	Direct Current
Ενεργός έγχυση	Active power injection
Άεργος έγχυση	Reactive power injection
Ενεργός παραγωγή	Active power production
Άεργος παραγωγή	Reactive power production
Ενεργός ροή	Active power flow
Άεργος ροή	Reactive power flow
Βέλτιστη Ροή Φορτίου	Optimal Power Flow
Ροή Φορτίου	Power Flow
Οριακό Κόστος	Marginal Cost