ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΔΟΜΗ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ $L_1[0,1]$

Ζαφειρόπουλος Αγαμέμνων
ΣΕΜΦΕ
ΑΜ: 09107001
Επιβλέπων Καθηγητής: Αργυρός Σπυρίδων

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Ο χώρος $L_1[0,1]$

1.1 Εισαγωγή

Ορισμός 1.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Στο σύνολο

$$\mathcal{L}_1(X, \mathcal{A}, \mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \quad | \quad \int |f| \mathrm{d}\mu < \infty \right\}$$

ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $\sim$ ως εξής:

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ σχεδόν παντού στο } X$$

Το σύνολο πηλίκο, εφοδιασμένο με τις πράξεις της κατά σημείο πρόσθεσης και του κατά σημείο βαθμωτού πολλαπλασιασμού, αποτελεί διανυσματικό χώρο και συμβολίζεται με $L_1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι η απεικόνιση

$$|| \cdot ||_1 : L_1(X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}, \qquad ||f||_1 = \int |f| \mathrm{d}\mu$$

αποτελεί νόρμα στον $L_1(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Ειδικότερα, ο χώρος $L_1([0,1], \mathcal{M}, \lambda)$ των Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[0,1]$ συμβολίζεται με $L_1[0,1]$.

Παρατήρηση:(i)Ο χώρος $L_1(X, \mathcal{A}, \mu)$ συμβολίζεται εν συντομία με $L_1(\mu)$, αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης.

(ii)Ο χώρος $L_1(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$, όπου ν το αριθμητικό μέτρο στο $\mathbb{N}$, είναι ο χώρος $\ell_1(\mathbb{N})$ των απολύτως αθροίσιμων ακολουθιών.

(iii)Ο χώρος $L_1([n], \mathcal{P}([n]), \nu) = (\mathbb{R}^n, || \cdot ||_1)$, όπου $[n] = \{1, 2, \dots n\}$, εν συντομία γράφεται ℓ_1^n.

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι ο $(L_1[0,1], ||\cdot||_1)$ είναι χώρος Banach. Σημειώνουμε ότι το ίδιο ισχύει και για όλους τους χώρους $L_1(\mu)$, και η απόδειξη είναι ακριβώς η ίδια. Πολλά από τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στην εργασία αυτή για τον $L_1[0,1]$ αφορούν γενικότερα είτε την κλάση των χώρων $L_1(\mu)$ είτε την κλάση των χώρων $L_p[0,1]$.

Σε ότι ακολουθεί το μέτρο Lebesgue ενός συνόλου $A \subseteq [0,1]$ θα συμβολίζεται με $|A|$.

Λήμμα 1.2. *Έστω $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία στον $L_1[0,1]$, τέτοια ώστε $||f_n - f_{n+1}|| \leq \frac{1}{2^n}$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση f τέτοια ώστε $f_n \to f$ σχεδόν παντού κατά σημείο.*

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$A_n = \left[|f_{n+1} - f_n| \geq \frac{1}{2^n} \right]$$

Από ανισότητα Chebyshev προκύπτει

$$\begin{aligned} |A_n| &= \left| \left[|f_{n+1} - f_n| \geq \frac{1}{2^n} \right] \right| \\ &\leq 2^n \int |f_n - f_{n+1}| \\ &= 2^n ||f_n - f_{n+1}||_1 \\ &< \frac{2^n}{2^{2n}} = \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

οπότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$$

και από το 1ο Λήμμα Borel-Cantelli προκύπτει $|\limsup A_n| = 0$.

Για κάθε $x \in [0,1] \setminus \limsup A_n$ ισχύει $|f_n(x) - f_{n+1}(x)| < \frac{1}{2^n}$ τελικά για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα η $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ είναι βασική ακολουθία. Ορίζουμε

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \lim f_n(x) & \text{αν } x \notin \limsup A_n \\ 0 & \text{αν } x \in \limsup A_n \end{cases}$$

Η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση, και προφανώς $f_n \to f$ σχεδόν παντού κατά σημείο στο $[0,1]$.

$\square$

Θεώρημα 1.3. *(Riesz) Ο $L_1[0,1]$ είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη. Έστω $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ βασική ακολουθία στον $L_1[0,1]$. Αρκεί να δειχθεί ότι υπάρχει $f \in L_1[0,1]$ τέτοια ώστε $||f_n - f||_1 \to 0$.

Κατασκευάζουμε επαγωγικά υπακολουθία $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε

$$||f_{n_k} - f_{n_m}|| < \frac{1}{2^{2k}} \quad \text{για κάθε } k, m \in \mathbb{N},\ k < m$$

Από Λήμμα 2.1 υπάρχει $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη τέτοια ώστε $f_{n_k} \to f$ σχεδόν παντού στο $[0,1]$. Θα δείξουμε ότι επιπλέον είναι $||f_{n_k} - f||_1 \to 0$. Ισχύει

$$|f_{n_k} - f_{n_m}| \to |f_{n_k} - f| \text{ σχεδόν παντού}$$

άρα από Λήμμα Fatoú λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} ||f_{n_k} - f||_1 &= \int |f_{n_k} - f| = \int \lim_{m\to\infty} |f_{n_k} - f_{n_m}| \\ &\leq \liminf_{m\to\infty} \int |f_{n_k} - f_{n_m}| \\ &\leq \frac{1}{2^{2k}} \end{aligned}$$

και είναι $||f_n - f||_1 \to 0$.

□

Σχόλιο: Είναι προφανές ότι ο $L_1[0,1]$ είναι ισομετρικός με όλους τους χώρους $L_1[a,b]$, όπου $a < b$, και μελετώντας τον ασχολούμαστε ουσιαστικά με τον χώρο των απολύτως ολοκληρώσιμων συναρτήσεων σε οποιοδήποτε κλειστό φραγμένο διάστημα. Αυτό που δεν είναι τόσο άμεσο είναι η ταύτιση των χώρων $L_1[0,1]$ και $L_1(\mathbb{R})$. Εδώ η κατάλληλη ισομετρία είναι η

$$T : L_1[0,1] \to L_1(\mathbb{R}), \quad (Tf)(x) = f\left(\tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \pi \left(1 + \tan^2\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Επιπλέον αν θεωρήσουμε μια διαμέριση του $[0,1]$ σε ξένα ανά δύο διαδοχικά διαστήματα $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, από τα παραπάνω είναι $L_1[0,1] \sim L_1(A_n)$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ και προφανώς

$$L_1[0,1] \sim (L_1(A_1) \oplus L_1(A_2) \oplus \ldots)_1 \sim (L_1[0,1] \oplus L_1[0,1] \oplus \ldots)_1$$

1.2 Ο συζυγής του $L_1[0,1]$

Γενικά αν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου, στο σύνολο

$$\mathcal{L}_\infty(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{R} | \exists M > 0 \text{ ώστε } |f(t)| \leq M \text{ σχεδόν παντού στο } X\}$$

ταυτίζουμε μέσω σχέσης ισοδυναμίας τις συναρτήσεις που είναι σχεδόν παντού ίσες. Το σύνολο πηλίκο αποτελεί διανυσματικό χώρο, ο οποίος εφοδιάζεται κατά φυσιολογικό τρόπο με τη νόρμα

$$||\cdot||_\infty : L_\infty(X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}, \quad ||f||_\infty = \inf\{M > 0 : |f(t)| \leq M \text{ σχεδόν παντού στο } X\}$$

Η $||\cdot||_\infty$ ονομάζεται και ουσιώδες supremum. Αποδεικνύουμε εδώ ότι ο συζυγής χώρος του $L_1[0,1]$ είναι ισομετρικός με τον $(L_\infty[0,1], ||\cdot||_\infty)$. Θα χρησιμοποιηθούν τα θεωρήματα Radon-Nikodym και Κυριαρχημένης Σύγκλισης Lebesgue, τα οποία παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 1.4. *(Radon-Nikodym):Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος, και ν, μ μέτρα στον $(X, \mathcal{A})$ τέτοια ώστε $\nu \ll \mu$ και μ σ-πεπερασμένο. Υπάρχει μοναδική μ-σχεδόν παντού συνάρτηση $f : X \to [0, \infty]$ η οποία είναι $\mathcal{A}-$μετρήσιμη, τέτοια ώστε*

$$\nu(A) = \int_A f \mathrm{d}\mu \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A}$$

Θεώρημα 1.5. *(Κυριαρχημένης Σύγκλισης, Lebesgue): Έστω $(f_n)_{n=1}^\infty$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο $[0,1]$ που συγκλίνει κατά σημείο στην $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Αν υπάρχει $g \in L_1[0,1]$ ώστε $|f_n| \leq g$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, τότε $f, f_n \in L_1[0,1]$ και ισχύουν*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_1 &= \lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| = 0, \\ \lim_{n\to\infty} \int f_n &= \int f \end{aligned}$$

Ορισμός 1.6. Η μετρήσιμη συνάρτηση $s : [0,1] \to \mathbb{R}$, ονομάζεται απλή αν έχει πεπερασμένο σύνολο τιμών. Ειδικότερα, αν $A_1, \ldots, A_n \subseteq [0,1]$ ξένα ανά δύο μετρήσιμα, η γραφή ως $s = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ ονομάζεται κανονική μορφή της s.

Λήμμα 1.7. *Το σύνολο των απλών συναρτήσεων στο $[0,1]$ είναι πυκνό υποσύνολο του $L_1[0,1]$.*

Απόδειξη. Έστω $f \in L_1[0,1]$ θετική συνάρτηση. Θέτουμε

$$A_j^n = \left[\frac{j-1}{2^n} \leq f \leq \frac{j}{2^n}\right], B_n = [f \geq n] \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}, j = 1,2,\ldots,n2^n$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η $\{A_j^n : 1 \leq j \leq n2^n\} \cup \{B_n\}$ είναι διαμέριση του $[0,1]$ και η

$$s_n = \sum_{j=1}^{n2^n} \frac{j-1}{2^n}\chi_{A_j^n} + n\chi_{B_n}$$

είναι απλή συνάρτηση. Παρατηρούμε ότι

$$A_j^n = A_{2j-1}^{n+1} \cup A_{2j}^{n+1}, \quad \text{και}$$
$$B_n = B_{n+1} \cup \left(\bigcup_{k=n2^{n+1}+1}^{(n+1)2^{n+1}} A_k^{n+1}\right)$$

για κάθε $n \geq 0, j = 1,2,\ldots,n2^n$.

Θα δείξουμε ότι η $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα ακολουθία. Έστω $x \in X$ και $n \in \mathbb{N}$ τυχόντα. Αν για κάποιο $j = 1,2,\ldots,n2^n$ είναι $x \in A_j^n$, τότε $s_n(x) = \frac{j-1}{2^n}$ και

$$s_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{2j-2}{2^{n+1}}, \text{ αν } x \in A_{2j-1}^{n+1} \\ \frac{2j-1}{2^{n+1}}, \text{ αν } x \in A_{2j}^{n+1} \end{cases}$$

ενώ αν $x \in B_n$ είναι $s_n(x) = n$ και

$$s_{n+1}(x) = \begin{cases} n+1, \text{ αν } x \in B_{n+1} \\ \frac{k-1}{2^{n+1}}, \text{ αν } x \in A_k^{n+1} \end{cases}$$

οπότε σε κάθε περίπτωση είναι $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$.

Θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει $\lim s_n(x) = f(x)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f < \infty$ σχεδόν παντού. Αν $x \in X$ επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $f(x) < n_0$, και έπεται ότι $x \in X \setminus B_n$ για $n > n_0$, ισοδύναμα

$$0 \leq f(x) - s_n(x) \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{για κάθε } n > n_0$$

Άρα $s_n \to f$ κατά σημείο, και από θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης Lebesgue ισχύει $\lim ||f - s_n|| = 0$

Για την τυχαία $f \in L_1[0,1]$ είναι $f = f^+ - f^-$ όπου $f^+, f^- \geq 0$. Από τα παραπάνω υπάρχουν αύξουσες ακολουθίες απλών συναρτήσεων $(s_n^+)_{n=1}^{\infty}, (s_n^-)_{n=1}^{\infty}$ τέτοιες ώστε $||f^+ - s_n^+|| \to 0$ και $||f^- - s_n^-|| \to 0$. Θέτουμε $t_n = s_n^+ - s_n^-$ για $n = 1,2,\ldots$, οπότε έχουμε $||f - t_n|| \to 0$.

□

Θεώρημα 1.8. *(Riesz) Ο* $L_1[0,1]^*$ *είναι ισομετρικός με τον* $L_\infty[0,1]$.

Απόδειξη. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$T : L_\infty[0,1] \to L_1[0,1]^*, \quad (Tg)(f) = \int fg \text{ για κάθε } f \in L_1[0,1]$$

Προφανώς ο T είναι καλά ορισμένη και γραμμική απεικόνιση, ενώ για κάθε $g \in L_\infty[0,1]$ ισχύει

$$\begin{aligned} ||Tg|| &= \sup_{||f||=1} |(Tg)f| = \sup_{||f||_1=1} \left| \int fg \right| \\ &\leq \sup_{||f||_1=1} \int |f||g| \\ &\leq ||g||_\infty \end{aligned}$$

επομένως ο T είναι φραγμένος. Επιπλέον αν $g \in L_\infty[0,1]$ επιλέγουμε $0 < \varepsilon < ||g||_\infty$ τυχόν, και $A \subseteq [0,1]$ μετρήσιμο τέτοιο ώστε $0 < |A| < 1$ και $g > ||g||_\infty - \varepsilon$ σχεδόν παντού στο A. (Η ύπαρξη του A εξασφαλίζεται από το γεγονός ότι το μέτρο Lebesgue είναι πεπερασμένο.) Θέτουμε

$$f = \frac{1}{|A|} \chi_A \mathrm{sgn} g$$

και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} ||Tg|| \geq \int fg &= \frac{1}{|A|} \int_A g \mathrm{sgn} g = \frac{1}{|A|} \int_A |g| \\ &\geq \frac{1}{|A|} \int_A ||g||_\infty - \frac{1}{|A|} \int_A \varepsilon \\ &= ||g||_\infty - \varepsilon \end{aligned}$$

και το ε έχει επιλεγεί τυχαία, άρα $||Tg|| = ||g||_\infty$ και ο T είναι ισομετρική εμφύτευση.

Θα δείξουμε ότι ο T είναι επί. Έστω $f^* : L_1[0,1] \to \mathbb{R}$ γραμμικό συνεχές. Ορίζουμε

$$\mu : \mathcal{M}([0,1]) \to \mathbb{R}, \quad \mu(A) = f^*(\chi_A)$$

Ισχύουν $\mu(\emptyset) = f^*(0) = 0$, και για κάθε ακολουθία $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ ξένων ανά δύο μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= f^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}\right) = f^*\left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \chi_{A_n}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} f^*\left(\sum_{n=1}^{N} \chi_{A_n}\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f^*(\chi_{A_n}) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)
\end{aligned}$$

οπότε το μ είναι σ-αθροιστικό προσημασμένο μέτρο. Προφανώς το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue, άρα από το θεώρημα Radon-Nikodym υπάρχει $g \in L_1[0,1]$ ώστε

$$\mu(A) = f^*(\chi_A) = \int g\chi_A \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{M}([0,1])$$

Θα δείξουμε ότι $g \in L_\infty[0,1]$ και $f^*(f) = \int fg \quad \forall f \in L_1[0,1]$. Ισχύει $f^*(s) = \int sg$ για κάθε $s \in L_1[0,1]$ απλή, οι απλές συναρτήσεις παράγουν πυκνό υπόχωρο του $L_1[0,1]$, και το f^* είναι συνεχές, άρα το δεύτερο ζητούμενο ισχύει. Επιπλέον αν $E_n = [|g| \leq n]$ για κάθε $n = 1, 2 \dots$ έχουμε

$$\begin{aligned}
||g||_\infty &= \lim_{n\to\infty} ||g\chi_{E_n}||_\infty \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{||f||_1=1} \left|\int fg\chi_{E_n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{||f||_1=1} |f^*(f\chi_{E_n})| \\
&= ||f^*|| < \infty
\end{aligned}$$

άρα $Tg = f^*$ και ο T είναι ισομετρία επί.

$\square$

Σημειώνουμε ότι ο δεύτερος δυικός του $L_1[0,1]$, δηλαδή ο $L_\infty[0,1]^*$, είναι ισομετρικός με το χώρο των πεπερασμένα προσθετικών μέτρων στο $[0,1]$. Αποδεικνύεται επίσης ότι ο $L_1[0,1]$ είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του $L_1[0,1]^{**}$, κάτι που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω χωρίς απόδειξη.

1.3 Schauder βάση του $L_1[0,1]$

Ορισμός 1.9. Έστω $(X, ||\cdot||)$ χώρος με νόρμα και $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία στον X. Η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ θα ονομάζεται Schauder βάση του X αν κάθε $x \in X$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ (όπου η σύγκλιση της σειράς εννοείται στην νόρμα του X).

Αν $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ Schauder βάση του χώρου X, ορίζεται η αντίστοιχη ακολουθία προβολών $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ με $P_n\big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\big) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ για κάθε $n \in \mathbb{N}, x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in X$

Παρατηρούμε ότι αν ο χώρος X δέχεται Schauder βάση, τότε μπορεί να ταυτισθεί με έναν χώρο ακολουθιών - υπόχωρο του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Επιπλέον οι αντίστοιχες προβολές $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ δείχνουν ότι αν ένας χώρος X δέχεται Schauder βάση, τότε έχει διάσπαση σε τοπολογικό άθροισμα της μορφής $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots$, όπου οι $X_n, n \in \mathbb{N}$ είναι πεπερασμένης διάστασης υπόχωροι.

Ορισμός 1.10. Έστω X χώρος με νόρμα, και $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία στον X. Η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ονομάζεται Schauder-βασική, ή εν συντομία s-βασική, αν αποτελεί Schauder βάση του χώρου $\overline{\text{span}}(x_n)_{n=1}^{\infty}$

Λήμμα 1.11. *Έστω X χώρος με νόρμα, και $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ Schauder βάση του X. Για τις αντίστοιχες προβολές $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ ισχύουν:*

(i) $\dim P_n(X) = n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$

(ii) $P_n P_m = P_m P_n = P_{\min\{m,n\}}$ *για κάθε* $m, n \in \mathbb{N}$

(iii) $||P_n x - x|| \to 0$ *για κάθε* $x \in X$

και αντίστροφα, αν $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία προβολών στον X για τίς οποίες ισχύουν τα παραπάνω, τότε υπάρχει Schauder βάση του X της οποίας οι P_n είναι οι αντίστοιχες προβολές.

Απόδειξη. Το ευθύ έπεται άμεσα από τον ορισμό της βάσης Schauder. Αντίστροφα, αν $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία προβολών τέτοια ώστε να ισχύουν τα (i),(ii),(iii) θέτουμε $P_0 = 0$ και επιλέγουμε $x_n \in P_n(X) \cap P_{n-1}^{-1}(0)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Παρατηρούμε ότι

$$\dim P_n(X) \diagup P_{n-1}(X) = 1 \quad \text{για} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Έστω $x \in X$ δοθέν. Υπάρχει μοναδική ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $P_n x - P_{n-1}x = a_n x_n$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ και είναι

$$\begin{aligned} x &= \lim_{n\to\infty} P_n x = \lim_{n\to\infty}(P_n x - P_0 x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(P_i x - P_{i-1}x) \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \end{aligned}$$

Επομένως η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι Schauder βάση του X.

□

Ορισμός 1.12. Έστω X χώρος Banach, και $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ Schauder βάση του X. Η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ονομάζεται μονότονη βάση, αν ισχύει $\sup ||P_n|| = 1$.

Ορισμός 1.13. Ονομάζουμε σύστημα Haar την ακολουθία συναρτήσεων $(h_n)_{n=0}^{\infty}$ στον $L_1[0,1]$, όπου $h_0(t) = 1$ για κάθε $t \in [0,1]$ και $h_{2^k+l} = \chi_{\left[\frac{l}{2^k}, \frac{2l+1}{2^{k+1}}\right]} - \chi_{\left[\frac{2l+1}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^k}\right]}$ για κάθε $k = 0, 1, 2\ldots,\ l = 0, 1, \ldots 2^k - 1$.

Στα ακόλουθα θα δείξουμε ότι το σύστημα Haar είναι Schauder βάση του χώρου $L_1[0,1]$, και μάλιστα μονότονη.

Λήμμα 1.14. *Το σύνολο $D = \{\frac{k}{2^n} : n \in \mathbb{N}, k = 0, 1, \ldots, 2^n\}$ των δυαδικών αριθμών είναι πυκνό στο $[0,1]$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in [0,1]$ και $\varepsilon > 0$ τυχόν. Επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Υπάρχει $k_0 \in \{0, 1, \ldots, 2^n\}$ ώστε $x \in \left[\frac{k_0}{2^n}, \frac{k_0+1}{2^n}\right]$, και προφανώς ισχύει είτε $\left|x - \frac{k_0}{2^n}\right| < \varepsilon$ είτε $\left|x - \frac{k_0+1}{2^n}\right| < \varepsilon$.

□

Πρόταση 1.15. *Το σύνολο των χαρακτηριστικών συναρτήσεων των διαστημάτων με άκρα δυαδικούς αριθμούς στο $[0,1]$ παράγει πυκνό υπόχωρο στον $L_1[0,1]$.*

Απόδειξη. Από Λήμμα 1.5 αρκεί να δειχθεί ότι το σύνολο των χαρακτηριστικών συναρτήσεων διαστημάτων με άκρα δυαδικούς αριθμούς παράγει πυκνό υπόχωρο του $\mathrm{span}\{\chi_A : A \subseteq [0,1]$ μετρήσιμο$\}$. Έστω λοιπόν $A \subseteq [0,1]$ μετρήσιμο και $\varepsilon > 0$ δοθέν.

Από κανονικότητα του μέτρου Lebesgue υπάρχουν $K \subseteq [0,1]$ συμπαγές και $U \subseteq [0,1]$ ανοικτό, ώστε

$$K \subseteq A \subseteq U \quad \text{και} \quad |A \setminus K| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |U \setminus A| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Το σύνολο των δυαδικών αριθμών είναι πυκνό στο $[0,1]$, άρα υπάρχει ακολουθία $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ διαστημάτων με άκρα δυαδικούς αριθμούς και ξένα ανά δύο εσωτερικά, τέτοια ώστε $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Το K είναι συμπαγές, οπότε υπάρχουν $m \in \mathbb{N}, n_1, n_2, \ldots n_m \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} I_{n_k}$$

Για την $f = \chi_{I_{n_1}} + \ldots + \chi_{I_{n_m}}$ παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
||f - \chi_A|| &= \left| A \triangle \bigcup_{k=1}^{m} I_{n_k} \right| \\
&\leq |A \triangle U| + \left| U \triangle \bigcup_{k=1}^{m} I_{n_k} \right| \\
&\leq |A \triangle U| + |U \triangle K| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

□

Θεώρημα 1.16. *(Schauder) Το σύστημα Haar είναι Schauder βάση του* $L_1[0,1]$.

Απόδειξη. Έστω $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ απαρίθμηση των δυαδικών αριθμών στο $[0,1]$, με $t_1 = 0, t_2 = 1, t_3 = \frac{1}{2}, t_4 = \frac{1}{4}$, κ.ο.κ. Θεωρούμε την ακολουθία προβολών $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ στον $L_1[0,1]$, όπου για κάθε $f \in L_1[0,1]$ η $P_n f$ είναι κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση με κόμβους στα σημεία $t_1, \ldots t_n$ και $P_n f(t_i) = f(t_i), i = 1, 2, \ldots n$.

Η $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες (i),(ii) του Λήμματος 1.9, άρα αρκεί $||P_n f - f|| \to 0$ για κάθε $f \in L_1[0,1]$. Αν f χαρακτηριστική συνάρτηση δυαδικού διαστήματος, ισχύει $P_n f = f$ τελικά για κάθε n. Από Πρόταση 1.12 οι συναρτήσεις αυτές παράγουν πυκνό υπόχωρο, οπότε μένει να δειχθεί ότι $\sup ||P_n|| < \infty$.

Έστω $n \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, και $f = \sum_{i=1}^{n} a_i h_i, g = \sum_{i=1}^{n+1} a_i h_i$. Είναι $f = P_n g$ και οι f, g λαμβάνουν διαφορετικές τιμές το πολύ σε ένα διάστημα J με άκρα δυαδικούς αριθμούς. Στο J η f λαμβάνει σταθερή τιμή, έστω c, ενώ η g λαμβάνει τις τιμές $c + a_{n+1}$ και $c - a_{n+1}$ στο πρώτο και δεύτερο ήμισυ αντίστοιχα. Έχουμε

$$\begin{aligned}
||f||_1 &= \int_{J^c} |f| + \int_J |f| \\
&= \int_{J^c} |g| + \int_J |c| \\
&= \int_{J^c} |g| \ + \ |J||c| \\
&\leq \int_{J^c} |g| + \frac{|J|}{2}(|c + a_{n+1}| + |c - a_{n+1}|) \\
&= \int |g| \\
&= ||g||_1
\end{aligned}$$

Με πεπερασμένη επαγωγή αποδεικνύεται ότι $||P_n f|| \leq ||f||$ για κάθε $n \in \mathbb{N}, f \in \operatorname{span}(h_i)_{i=1}^{\infty}$. Ο $\operatorname{span}(h_i)_{i=1}^{\infty}$ είναι πυκνός στον $L_1[0,1]$, άρα $||P_n|| = 1$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, και το σύστημα Haar αποτελεί μονότονη Schauder βάση του $L_1[0,1]$. $\square$

Κεφάλαιο 2

Ασθενής Συμπάγεια στον $L_1[0,1]$

2.1 Γενικά για τις Ασθενείς Τοπολογίες

Ορισμός 2.1. Έστω X χώρος Banach. Ορίζεται ασθενής τοπολογία στον X, και συμβολίζεται με w, η ελάχιστη τοπολογία ως προς την οποία είναι συνεχείς οι συναρτήσεις $x^* \in X^*$.

Αντίστοιχα ορίζεται ασθενής* τοπολογία στον X^*, και συμβολίζεται με w^*, η ελάχιστη τοπολογία στον X^* ως προς την οποία είναι συνεχείς οι συναρτήσεις $\widehat{x} \in X \hookrightarrow X^{**}$.

Προφανώς η ασθενής τοπολογία στον X είναι η τοπολογία που παράγεται από την οικογένεια $\{f^{-1}((a,b)) : f \in X^*, a < b\}$. Στοιχειώδεις είναι οι ακόλουθες παρατηρήσεις:

Πρόταση 2.2. *Έστω $x_0 \in X$, $A \subseteq X^*$ και $\varepsilon > 0$. Το σύνολο*

$$V(x_0, A, \varepsilon) = \{x \in X : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ για κάθε } f \in A\}$$

είναι w-ανοικτή περιοχή του x_0.

Απόδειξη. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$\begin{aligned} V(x_0, A, \varepsilon) &= \{x \in X : f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \quad \forall f \in A\} \\ &= \left\{x \in X : x \in f^{-1}\left((f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)\right) \quad \forall f \in A\right\} \\ &= \bigcap_{f \in A} f^{-1}\left((f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)\right) \end{aligned}$$

το οποίο είναι w-ανοικτή περιοχή.

□

Πρόταση 2.3. *Έστω $x_0 \in X$. Η οικογένεια*

$$\mathcal{B}_{x_0} = \{V(x_0, A, \varepsilon) : A \subseteq X^* \text{ πεπερασμένο}, \ \varepsilon > 0\}$$

είναι βάση ανοικτών περιοχών του x_0 για την w-τοπολογία.

Απόδειξη. Προφανώς η $\mathcal{B}_{x_0}$ είναι οικογένεια ανοικτών περιοχών του x_0. Έστω $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_{x_0}$, με $V_1 = V(x_0, A_1, \varepsilon_1), V_2 = V(x_0, A_2, \varepsilon_2)$. Αν $A = A_1 \cap A_2$ και $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, προφανώς ισχύει

$$x_0 \in V(x_0, A, \varepsilon) \subseteq V_1 \cap V_2$$

Αν $\mathcal{U}$ ανοικτή περιοχή του x_0, υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$, $f_i \in X^*$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i, i = 1, \ldots, n$ ώστε $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}((a_i, b_i)) \subseteq \mathcal{U}$. Θέτουμε $\Delta = \{f_1, \ldots, f_n\}$ και επιλέγουμε $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$(f_i(x_0) - \varepsilon, f_i(x_0) + \varepsilon) \subseteq (a_i, b_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Τότε $V(x_0, \Delta, \varepsilon) \subseteq \mathcal{U}$, οπότε η $\mathcal{B}_{x_0}$ είναι βάση ανοικτών περιοχών του x_0. □

Όμοια αποδεικνύεται ότι για δοθέντα χώρο Banach X και $x_0^* \in X^*$, η οικογένεια

$$\mathcal{B}_{x_0^*} = \{V(x_0^*, A, \varepsilon) : A \subseteq X \text{ πεπερασμένο}, \ \varepsilon > 0\}$$

είναι βάση περιοχών του $x_0^* \in X^*$.

Στην εργασία αυτή δεν παρουσιάζουμε λεπτομερώς περισσότερα θεωρήματα με τις αποδείξεις τους σχετικά με τις ασθενείς τοπολογίες, παρά μόνο όσα θα χρησιμοποιηθούν για τα υπόλοιπα αποτελέσματα. Ενδεικτικά είναι τα ακόλουθα:

Θεώρημα 2.4. *(Krein-Milman) Έστω X τοπικά κυρτός και $\mathcal{T}_2$ τοπολογικός διανυσματικός χώρος. Αν $K \subseteq X$ μη κενό κυρτό συμπαγές, ισχύει*

$$K = \overline{co}(ExtK)$$

Θεώρημα 2.5. *(Alaoglou) Αν X είναι χώρος Banach, ο (B_{X^*}, w^*) είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος.*

2.2 Ομοιόμορφη Ολοκληρωσιμότητα

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε τον χαρακτηρισμό των σχετικώς ασθενώς συμπαγών υποσυνόλων του $L_1[0,1]$. Συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι η ασθενής συμπάγεια στον $L_1[0,1]$ είναι άμεσα συνδεδεμένη με την έννοια της ομοιόμορφης ολοκληρωσιμότητας. Τα αποτελέσματα που ακολουθούν γενικέυονται και για οποιονδήποτε χώρο $L_1(\mu)$, όπου μ μη ατομικό μέτρο πιθανότητας.

Ορισμός 2.6. Έστω $K \subseteq L_1[0,1]$. Το K ονομάζεται ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $A \subseteq [0,1]$ με $|A| < \delta$ να ισχύει

$$\int_A |f| < \varepsilon \text{ για κάθε } f \in K$$

Πρόταση 2.7. *Έστω $K \subseteq L_1[0,1]$ ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο. Το K είναι φραγμένο.*

Απόδειξη. Υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $A \subseteq [0,1]$ με $|A| < \delta$ να ισχύει $\int_A |f| < 1$. Επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{n} < \delta$, και $\{A_1, \ldots, A_n\}$ διαμέριση του $[0,1]$ ώστε $|A_1| = \ldots = |A_n| = \frac{1}{n}$. Για κάθε $f \in K$ είναι

$$||f||_1 = \int |f| = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} |f| < n$$

οπότε το K είναι $|| \cdot ||_1$-φραγμένο.

□

Πρόταση 2.8. *Έστω $K \subseteq L_1[0,1]$ πεπερασμένο. Το K είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο.*

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι κάθε μονοσύνολο είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο. Πράγματι, αν $f \in L_1[0,1]$, έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και ακολουθία $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ υποσυνόλων του $[0,1]$ με $|A_n| < \frac{1}{2^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και $\int_{A_n} |f| \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $A = \limsup A_n$, είναι $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < \infty$, άρα από 1ο Λήμμα Borel-Cantelli έχουμε $|A| = 0$ και επιπλέον

$$\int_A |f| \geq \limsup_{n\to\infty} \int_{A_n} |f| \geq \varepsilon$$

Άτοπο, αφού $|A| = 0$.

Τώρα αν $K = \{f_1, \ldots, f_n\} \subseteq L_1[0,1]$ πεπερασμένο και $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n > 0$ ώστε

$$|A| < \delta_i \quad \Rightarrow \quad \int_A |f_i| < \varepsilon, \text{ για } i = 1, \ldots, n$$

και θέτουμε $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\} > 0$. Για κάθε $A \in \mathcal{M}([0,1])$ με $|A| < \delta$ ισχύει $\int_A |f| < \varepsilon$ για κάθε $f \in K$, και το K είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο.

□

Θα δείξουμε τώρα, συνοπτικά, πώς το μέτρο Lebesgue επάγει μια μετρική στα υποσύνολα του $[0,1]$. Στη σ-άλγεβρα των Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας:

$$A \sim B \Leftrightarrow |A \triangle B| = 0, \qquad \text{για κάθε } A, B \in \mathcal{M}([0,1])$$

Κάθε κλάση ισοδυναμίας αποτελείται από σύνολα που διαφέρουν μεταξύ τους κατά σύνολο μηδενικού μέτρου. Στο σύνολο πηλίκο $\Sigma = \mathcal{M}/\sim$ ορίζουμε απεικόνιση

$$d : \Sigma \times \Sigma \to \mathbb{R}, \quad d([A],[B]) = |A \triangle B|$$

για την οποία εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι καλά ορισμένη μετρική.

Επίσης ο (Σ, d) είναι πλήρης μετρικός χώρος, και κάθε μέτρο μ στην $\mathcal{M}$ το οποίο είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue, είναι μια συνεχής συνάρτηση $\mu : (\Sigma, d) \to [0, \infty]$.

Τα παραπάνω θα χρησιμοποιηθούν για να αποδειχθεί το εξής:

Θεώρημα 2.9. *(Vitali-Hahn-Saks) Έστω $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία μέτρων στο $[0,1]$ τα οποία είναι απολύτως συνεχή ως προς το μέτρο Lebesgue. Αν για κάθε $A \subseteq [0,1]$ μετρήσιμο υπάρχει το $\lim \mu_n(A)$, τότε*

$$\lim_{|A| \to 0} \sup_{n \in \mathbb{N}} |\mu_n(A)| = 0$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$ δοθέν. Για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ το σύνολο

$$S_{m,n} = \left\{ E \in \Sigma : |\mu_n(E) - \mu_m(E)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \right\}$$

είναι κλειστό στον (Σ, d), άρα και το σύνολο $S_p = \bigcap_{n,m \geq p} S_{n,m}$ είναι επίσης κλειστό. Από υπόθεση, για κάθε $A \subseteq [0,1]$ υπάρχει το $\lim \mu_n(A)$, άρα

$$\Sigma = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} S_p$$

Ο (Σ, d) είναι πλήρης μετρικός χώρος, άρα από το θεώρημα Baire υπάρχει $p_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\text{int}S_{p_0} \neq \emptyset$. Δηλαδή υπάρχουν $A \in S_{p_0}$ και $r > 0$ τέτοια ώστε

$$|A \triangle E| < r \Rightarrow |\mu_n(E) - \mu_m(E)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{για κάθε } m, n \geq p_0$$

Επιλέγουμε $0 < \delta < r$ ώστε $\max_{n \leq p_0} |\mu_n(B)| < \frac{\varepsilon}{3}$ για κάθε $B \in \Sigma$ με $|B| < \delta$. Για κάθε $B \in \Sigma$ με $|B| < \delta$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι

$$\begin{aligned} |\mu_n(B)| &\leq |\mu_{p_0}(B)| + |\mu_n(B) - \mu_{p_0}(B)| \\ &= |\mu_{p_0}(B)| + |\mu_n(A \cup B) - \mu_n(A \backslash B) - \mu_{p_0}(A \cup B) + \mu_{p_0}(A \backslash B)| \\ &\leq |\mu_{p_0}(B)| + |\mu_n(A \cup B) - \mu_{p_0}(A \cup B)| + |\mu_n(A \backslash B) - \mu_{p_0}(A \backslash B)| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

□

Λήμμα 2.10. *Έστω X χώρος Banach και $K \subseteq X$. Τα ακόλουθα ισοδύναμα:*

(i) Το K είναι σχετικά w-συμπαγές.

(ii) Το K είναι φραγμένο και $\overline{K}^{w^*} \subseteq X$.

Απόδειξη.

(i)⇒(ii) Είναι $K \subseteq \overline{K}^{w}$, άρα K φραγμένο. Επιπλέον οι χώροι (K, w) και $(\widehat{K}, w^*)$ είναι ομοιομορφικοί, άρα $\overline{K}^{w^*} \subseteq X$.

(ii)⇒(i) Από το θεώρημα Alaoglou το K είναι σχετικά w^*-συμπαγές, και από υπόθεση οι w και w^* τοπολογίες ταυτίζονται στο K, οπότε το ζητούμενο προκύπτει άμεσα.

□

Το επόμενο, εξαιρετικά σημαντικό, θεώρημα μας πληροφορεί ότι η συμπάγεια για την ασθενή τοπολογία σε χώρο Banach ταυτίζεται με την ακολουθιακή συμπάγεια.

Θεώρημα 2.11. *(Eberlein-Smulian) Έστω X χώρος Banach και $A \subseteq X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Το A είναι σχετικώς ασθενώς συμπαγές.

(ii) Κάθε ακολουθία στο A έχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία.

(iii) Κάθε ακολουθία στο A έχει ασθενώς συγκλίνον υποδίκτυο.

Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στο κεντρικό θεώρημα της ενότητας, το οποίο αφορά το χαρακτηρισμό της ασθενούς συμπάγειας στον $L_1[0,1]$.

Θεώρημα 2.12. *(Dunford-Pettis) Έστω $K \subseteq L_1[0,1]$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Το K είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο.

(ii) Το K είναι σχετικά ασθενώς συμπαγές.

Απόδειξη.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Έστω $K \subseteq L_1[0,1]$ ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο. Από Λήμμα 2.10 αρκεί να δειχθεί ότι $\overline{K}^{w^*} \subseteq L_1[0,1]$. Έστω λοιπόν $\mu \in \overline{K}^{w^*} \subseteq L_\infty[0,1]^*$. Το μ αποτελεί πεπερασμένα προσθετικό μέτρο στο $[0,1]$, και για κάθε $E \subseteq [0,1]$ συμβολικά γράφουμε $\mu(E) = \mu(\chi_E)$. Παρατηρούμε ότι

$$|\mu(E)| \leq \sup_{f\in K}\left|\int_E f\right| \leq \sup_{f\in K}\int_E |f|$$

και επειδή το K είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο, το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue, άρα και σ-αθροιστικό. Υπάρχει $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ μετρήσιμη τέτοια ώστε $\mu(E) = \int_E f$ για κάθε μετρήσιμο $E \subseteq [0,1]$. Οι απλές συναρτήσεις είναι πυκνές στον $L_\infty[0,1]$, άρα $\mu(g) = \int gf$ για κάθε $g \in L_\infty[0,1]$. Άρα είναι $\mu \in L_1[0,1]$ και έπεται ότι το K είναι σχετικά ασθενώς συμπαγές.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Αν το K είναι σχετικά ασθενώς συμπαγές και όχι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο, υπάρχουν $\varepsilon > 0$, ακολουθίες $(f_n)_{n=1}^\infty \subseteq K$ και $(E_n)_{n=1}^\infty$ μετρήσιμων υποσυνόλων με $\lim|E_n| = 0$, ώστε

$$\left|\int_{E_n} f_n\right| \geq \varepsilon \quad \text{για κάθε } n = 1,2\ldots$$

Από θεώρημα Eberlein-Smulian υπάρχει υπακολουθία $(f_{k_n})_{n=1}^\infty$ και συνάρτηση $f \in L_1[0,1]$ τέτοια ώστε $f_{k_n} \xrightarrow{w} f$.

Θέτουμε $\mu_n(E) = \int_E f_{k_n}$ για κάθε $n = 1,2,\ldots$ και $E \subseteq [0,1]$. Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(E) = \int_E f \quad \text{για κάθε } E \subseteq [0,1] \text{ μετρήσιμο}$$

άρα από θεώρημα Vitali-Hahn-Saks προκύπτει

$$\lim_{n\to\infty} |\mu_n(E_{k_n})| = \lim_{n\to\infty} \left| \int_{E_{k_n}} f_{k_n} \right| = 0$$

το οποίο είναι άτοπο.

□

Αξίζει να παραθέσουμε ένα αποτέλεσμα που αφορά τον $L_1[0,1]$ και προκύπτει με χρήση όλων των προηγουμένων.

Πρόταση 2.13. *Ο $L_1[0,1]$ δεν είναι ισομετρικός με το συζυγή κανενός χώρου Banach.*

Απόδειξη. Αρχικά αποδεικνύουμε ότι $\mathrm{Ext}B_{L_1[0,1]} = \emptyset$. Πράγματι, έστω $f \in \mathrm{Ext}B_{L_1[0,1]}$. Δείξαμε ότι κάθε μονοσύνολο είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο, άρα η απεικόνιση

$$\phi : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad \phi(t) = \int_{[0,t]} |f|$$

είναι συνεχής, και υπάρχει $t_0 \in [0,1]$ τέτοιο ώστε

$$\int_0^{t_0} |f| = \int_{t_0}^1 |f| = \frac{1}{2}$$

Θέτουμε $f_1 = 2f\chi_{[0,t_0]}$, $f_2 = 2f\chi_{[t_0,1]}$ και παρατηρούμε ότι $f = \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2$: άτοπο, άρα πράγματι $\mathrm{Ext}B_{L_1[0,1]} = \emptyset$.

Έστω τώρα ότι υπάρχει χώρος Banach X ώστε $L_1[0,1] = X^*$. Η $B_{L_1[0,1]}$ είναι κυρτή και από θεώρημα Alaoglou είναι w^*-συμπαγές σύνολο, άρα από θεώρημα Krein-Milman ισχύει $\mathrm{Ext}B_{L_1[0,1]} \neq \emptyset$, που σύμφωνα με τα παραπάνω είναι άτοπο.

□

Ένας ακόμα χαρακτηρισμός της ασθενούς συμπάγειας στον $L_1[0,1]$ θα παρατεθεί στο επόμενο κεφάλαιο, όπου μελετάται η παρουσία του $\ell_1(\mathbb{N})$ στον $L_1[0,1]$.

2.3 Το Θεώρημα Liapunov

Ως μια εφαρμογή της θεωρίας των ασθενών τοπολογιών σε χώρους Banach, παρουσιάζουμε το θεώρημα κυρτότητας Liapunov, το οποίο θα χρησιμοποιηθεί και στα περεταίρω αποτελέσματα.

Θεώρημα 2.14. *(Liapunov) Έστω $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ μη ατομικά μέτρα πιθανότητας στον μετρήσιμο χώρο $([0,1], \mathcal{M}([0,1]))$. Το σύνολο*

$$L = \{(\mu_1(A), \dots, \mu_n(A)) : A \in \mathcal{M}([0,1])\}$$

είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Το μέτρο $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$ είναι μη ατομικό και πεπερασμένο, άρα $L_1(\mu)^* = L_\infty(\mu)$ και από θεώρημα Alaoglou η $B_{L_\infty(\mu)}$ είναι w^*-συμπαγής. Για $i = 1, 2, \dots, n$ είναι $\mu_i \ll \mu$ άρα από το θεώρημα Radon-Nikodym υπάρχει $\widehat{\mu_i} \in L_1(\mu) \hookrightarrow L_1(\mu)^{**}$ τέτοιο ώστε

$$\mu_i(A) = \int_A \widehat{\mu_i} \mathrm{d}\mu \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{M}([0,1])$$

Το $\widehat{\mu_i}$ κατά τα γνωστά μπορεί να θεωρηθεί ως w^*-συνεχές συναρτησοειδές στον $L_\infty(\mu)$, με $\widehat{\mu_i}(g) = \int g \mathrm{d}\mu_i$. Η απεικόνιση

$$T(B_{L_\infty(\mu)}, w^*) \to (\mathbb{R}^n, ||\cdot||), \quad Tf = \left(\int f \mathrm{d}\mu_1, \dots, \int f \mathrm{d}\mu_n \right)$$

είναι γραμμική και συνεχής, και για κάθε $A \subseteq [0,1]$ Lebesgue μετρήσιμο είναι $TA = (\mu_1(A), \mu_2(A), \dots, \mu_n(A))$.

Αρκεί να δειχθεί ότι $L = T\left(B_{L_\infty(\mu)}\right)$. Έστω λοιπόν $(a_1, \dots, a_n) \in T\left(B_{L_\infty(\mu)}\right)$. Το σύνολο $D = T^{-1}\big((a_1, \dots, a_n)\big) \subseteq B_{L_\infty(\mu)}$ είναι w^*-κλειστό, οπότε και w^*-συμπαγές, και προφανώς κυρτό. Από θεώρημα Krein-Milman υπάρχει $f \in \mathrm{Ext}D$.

Θα δείξουμε ότι $f = \chi_A$ για κάποιο $A \in \mathcal{M}([0,1])$. Υποθέτουμε, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι υπάρχει $0 < \delta < 1$ ώστε

$$\mu\left([\delta \leq f \leq 1 - \delta]\right) > 0$$

Το μ είναι μη ατομικό μέτρο, άρα ο χώρος

$$X = \{f \in L_\infty(\mu) : \mathrm{supp} f \subseteq [\delta \leq f \leq 1 - \delta]\} \hookrightarrow L_\infty(\mu)$$

είναι απειροδιάστατος, και επιπλέον ο $\bigcap_{i=1}^n \ker \widehat{\mu_i} \hookrightarrow L_\infty(\mu)$ είναι πεπερασμένης συνδιάστασης, άρα υπάρχει

$$g \in X \cap \left(\bigcap_{i=1}^n \ker \widehat{\mu_i} \right)$$

με $||g||_\infty = 1$, δηλαδή ισχύει $\int g \mathrm{d}\mu_i = 0$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f_1 = f + \frac{\delta}{2} g, \quad f_2 = f - \frac{\delta}{2} g$$

και παρατηρούμε τα ακόλουθα:

1. Αν $x \notin [\delta \leq f \leq 1 - \delta]$, τότε $|f_i(x)| = |f(x)| \leq 1$ για $i = 1, 2$, ενώ αν $x \in [\delta \leq f \leq 1 - \delta]$ έχουμε
$$\begin{aligned} \frac{\delta}{2} &= \delta - \frac{\delta}{2} \leq |f(x)| - \frac{\delta}{2}|g(x)| \\ &\leq |f_i(x)| \leq |f(x)| + \frac{\delta}{2}|g(x)| \\ &\leq 1 - \delta + \frac{\delta}{2} = 1 - \frac{\delta}{2} \quad \text{για } i = 1, 2 \end{aligned}$$
άρα $||f_i||_\infty \leq 1$ για $i = 1, 2$.

2. $Tf_i = \left(\int f_i \mathrm{d}\mu, \ldots, \int f_i \mathrm{d}\mu \right) = (a_1, \ldots, a_n)$ για $i = 1, 2$

οπότε $f_1, f_2 \in D, f_1 \neq f_2$ και $f = \frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_2$: άτοπο, αφού η f είναι ακραίο σημείο του D.

$\square$

Πόρισμα 2.15. *Έστω μ ένα μη ατομικό μέτρο στο μετρήσιμο χώρο* $([0, 1], \mathcal{M}([0, 1]))$. *Για κάθε $0 \leq \rho \leq 1$ υπάρχει $A \subseteq [0, 1]$ τέτοιο ώστε $\mu(A) = \rho$.*

Κεφάλαιο 3

Υπόχωροι του $L_1[0,1]$

3.1 Ο Τελεστής Δεσμευμένης Μέσης Τιμής

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε μία κατηγορία συμπληρωματικών υποχώρων του $L_1[0,1]$ οι οποίοι προκύπτουν κατά εντελώς φυσιολογικό τρόπο, θεωρώντας σ-άλγεβρες οι οποίες περιέχονται στη σ-άλγεβρα των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων.

Πρόταση 3.1. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου, και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ σ-άλγεβρα στο X. Για κάθε $f \in L_1(X, \mathcal{A}, \mu)$ υπάρχει μοναδική (μ-σχεδόν παντού) συνάρτηση $g \in L_1(X, \mathcal{B}, \mu)$ τέτοια ώστε*

$$\int_B g \mathrm{d}\mu = \int_B f \mathrm{d}\mu \quad \text{για κάθε } B \in \mathcal{B}$$

Απόδειξη. Αν $f \geq 0$ ορίζεται στον $(X, \mathcal{B})$ το μέτρο

$$\nu : \mathcal{B} \to [0, \infty), \quad v(B) = \int_B f \mathrm{d}\mu$$

Προφανώς $\nu \ll \mu$, άρα από το θεώρημα Radon-Nikodym υπάρχει $g \in L_1(X, \mathcal{B}, \mu)$ τέτοια ώστε

$$\int_B g \mathrm{d}\mu = \nu(B) = \int_B f \mathrm{d}\mu \quad \text{για κάθε } B \in \mathcal{B}$$

Για την τυχαία $f \in L_1(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι $f = f^+ - f^-$, και από το προηγούμενο βήμα επιλέγουμε αντιστοίχως συναρτήσεις $g^+, g^- \in L_1(X, \mathcal{B}, \mu)$. Η ζητούμενη συνάρτηση είναι η $g = g^+ - g^-$.

$\square$

Ορισμός 3.2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ σ-άλγεβρα στο X, και $f \in L_1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Η μοναδική συνάρτηση $g \in L_1(X, \mathcal{B}, \mu)$ ώστε $\int_B g \mathrm{d}\mu = \int_B f \mathrm{d}\mu$ για κάθε $B \in \mathcal{B}$ ονομάζεται δεσμευμένη μέση τιμή της f ως προς τη $\mathcal{B}$ και συμβολίζεται με $g = E(f||\mathcal{B})$.

Πρόταση 3.3. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ και $f, f_1, f_2 \in L_1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) $E(\alpha f_1 + \beta f_2||\mathcal{B}) = \alpha E(f_1||\mathcal{B}) + \beta E(f_2||\mathcal{B})$ *για κάθε* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ii) $E\big(E(f||\mathcal{B})||\mathcal{B}\big) = E(f||\mathcal{B})$

(iii) $|E(f||\mathcal{B})| \leq E(\ |f|\ ||\mathcal{B})$

Απόδειξη.

(i),(ii) Προφανή.

(iii) Έχουμε

$$\begin{aligned} \big|E(f||\mathcal{B})\big| &= \big|E(f^+||\mathcal{B}) - E(f^-||\mathcal{B})\big| \\ &\leq \big|E(f^+||\mathcal{B})\big| + \big|E(f^-||\mathcal{B})\big| \\ &= E(f^+||\mathcal{B}) + E(f^-||\mathcal{B}) \\ &= E(\ |f|\ ||\mathcal{B}) \end{aligned}$$

$\square$

Πόρισμα 3.4. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου, και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ σ-άλγεβρα που περιέχεται στην $\mathcal{A}$. Ο τελεστής*

$$P : L_1(X, \mathcal{A}, \mu) \to L_1(X, \mathcal{B}, \mu), \quad Pf = E(f||\mathcal{B})$$

αποτελεί φραγμένη προβολή.

Επομένως για δοθέντα χώρο $L_1(X, \mathcal{A}, \mu)$ όπως στα προηγούμενα, ο υπόχωρος $L_1(X, \mathcal{B}, \mu)$ ο οποίος ορίζεται κατά φυσιολογικό τρόπο, είναι επιπλέον και συμπληρωματικός. Για παράδειγμα, στην ειδικότερη περίπτωση του $L_1[0,1]$, ένας συμπληρωματικός υπόχωρος είναι ο $L_1([0,1], \mathcal{A}, \lambda)$, όπου $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα που περιέχεται στην $\mathcal{M}([0,1])$.

3.2 Εμφύτευση του $\ell_1(\mathbb{N})$ στον $L_1[0,1]$

Στην ενότητα αυτή θα δείξουμε πώς ο χώρος $\ell_1(\mathbb{N})$ μπορεί να θεωρηθεί ως υπόχωρος του $L_1[0,1]$, και μάλιστα συμπληρωματικός.

Θεώρημα 3.5. *Ο $\ell_1(\mathbb{N})$ εμφυτεύεται ισομετρικά και ως συμπληρωματικός υπόχωρος στον $L_1[0,1]$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f_n = n(n+1)\chi_{\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]},\ n = 1,2,\dots$$

Προφανώς $f_n \in L_1[0,1]$ και $||f_n||_1 = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $a_1,\dots a_m \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\left|\sum_{n=1}^{m} a_n f_n\right|\right|_{L_1} &= \int\left|\sum_{n=1}^{m} a_n f_n\right| = \int\left|\sum_{n=1}^{m} a_n n(n+1)\chi_{\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]}\right| \\ &= \sum_{n=1}^{m}\int |a_n| n(n+1)\chi_{\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]} = \sum_{n=1}^{m}|a_n| \\ &= \left|\left|\sum_{n=1}^{m} a_n e_n\right|\right|_{\ell_1}\end{aligned}$$

οπότε ο τελεστής

$$T : \mathrm{span}(e_n)_{n=1}^{\infty} \to \mathrm{span}(f_n)_{n=1}^{\infty}, \quad Te_n = f_n, n = 1,2\dots$$

επεκτείνεται σε ισομετρική εμφύτευση

$$T : \ell_1(\mathbb{N}) \to L_1[0,1]$$

Μένει να αποδειχθεί η συμπληρωματικότητα. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$P : L_1[0,1] \to T\left(\ell_1(\mathbb{N})\right), \quad Pf = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int f\mathrm{sgn} f_n\right) f_n$$

Προφανώς η P είναι γραμμική, και

$$\begin{aligned}||Pf|| &= \int\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int f\mathrm{sgn} f_n\right) f_n\right| \\ &\leq \int\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int f\mathrm{sgn} f_n\right| \\ &\leq ||f||\end{aligned}$$

άρα είναι $||P|| = 1$, και για κάθε $f \in L_1[0,1]$ ισχύει

$$\begin{aligned}\int Pf\mathrm{sgn}f_n &= \int\left(\int f\mathrm{sgn}f_n\right)f_n\mathrm{sgn}f_n\\ &= \int\left(\int f\mathrm{sgn}f_n\right)|f_n|\\ &= \int f\mathrm{sgn}f_n\end{aligned}$$

άρα

$$P^2f = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int Pf\mathrm{sgn}f_n\right)f_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int f\mathrm{sgn}f_n\right)f_n = Pf$$

και η P αποτελεί φραγμένη προβολή.

□

Ακολουθεί ένας ακόμη χαρακτηρισμός των ασθενώς συμπαγών υποσυνόλων του $L_1[0,1]$, διαφορετικός από το θεώρημα Dunford-Pettis.

Λήμμα 3.6. *Έστω $A \subseteq \ell_1(\mathbb{N})$ φραγμένο. Αν το A δεν είναι σχετικά συμπαγές, περιέχει ακολουθία s-βασική, ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του $\ell_1(\mathbb{N})$.*

Απόδειξη. Υπάρχουν $\theta > 0$ και ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ ώστε

$$||x_n - x_m|| \geq \theta \text{ για κάθε } m,n \in \mathbb{N},\ m \neq n$$

Από διαγώνιο επιχείρημα Cantor, επιλέγουμε υπακολουθία $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ και $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ώστε

$$\lim_{n\to\infty} x_{k_n}(m) = x(m) \text{ για κάθε } m \in \mathbb{N}$$

Προφανώς $x \in \ell_1(\mathbb{N})$ και $||x_{k_n} - x||_1 \geq \theta$ για κάθε $n = 1,2,\dots$ και

$$\lim_{n\to\infty} e_m^*(x_{k_n} - x) = 0 \quad \text{ για } m = 1,2,\dots$$

άρα υπάρχει περεταίρω υπακολουθία, που θα συμβολίζουμε πάλι με $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ ώστε η $(x_{k_n} - x)_{n=1}^{\infty}$ να είναι s-βασική, ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του $\ell_1(\mathbb{N})$.

Ο $X = \overline{\mathrm{span}}(x_{k_n} - x)_{n=1}^{\infty}$ είναι συμπληρωματικός στον $\ell_1(\mathbb{N})$, και έστω P η αντίστοιχη προβολή. Μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να θεωρήσουμε ότι $x \notin X$, και για κάθε $N \in \mathbb{N}, a_1, a_2, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{n=1}^{N} a_n x_{k_n}\right\| &= \left\|\sum_{n=1}^{N} a_n (x_{k_n} - x) + \left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right) x\right\| \\
&\geq \frac{1}{||P||} \left\|\sum_{n=1}^{N} a_n (x_{k_n} - x)\right\| \\
&= \frac{1}{||P||} \sum_{n=1}^{N} |a_n|
\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 3.7. *(Kadec-Pelczyński): Έστω $K \subseteq L_1[0,1]$ φραγμένο. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Το K είναι σχετικά ασθενώς συμπαγές.

(ii) Το K δεν περιέχει ακολουθία η οποία είναι s-βασική, ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του $\ell_1(\mathbb{N})$.

Απόδειξη.

(i)⇒(ii) : Προφανές.

(ii)⇒(i) : Έστω ότι το K δεν είναι σχετικά w-συμπαγές. Από θεώρημα Dunford-Pettis το K δεν είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο, άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $A_\delta \subseteq [0,1]$ μετρήσιμο με $|A_\delta| < \delta$ και $f_\delta \in K$ τέτοια ώστε $\int_{A_\delta} |f_\delta| > \varepsilon$.

Επαγωγικά κατασκευάζουμε ακολουθίες $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq K$, $(\delta_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ με $0 < \delta_{n+1} < \frac{\delta_n}{2}$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ και ακολουθία $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ με $|E_{n+1}| < \frac{\delta_n}{2}$ για $n = 1, 2, \ldots$ τέτοιες ώστε να ισχύουν

$$\int_{E_n} |f_n| > \varepsilon \quad \text{για κάθε } n = 1, 2, \ldots$$

και

$$|E| < \delta_n \Rightarrow \int_E |f_n| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{για κάθε } n = 1, 2, \ldots$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \left|\bigcup_{k=n+1}^{\infty} E_k\right| &\leq |E_{n+1}| + |E_{n+2}| + |E_{n+3}| + \dots \\ &< \frac{\delta_n}{2} + \frac{\delta_{n+1}}{2} + \frac{\delta_{n+2}}{2} + \dots \\ &< \frac{\delta_n}{2} + \frac{\delta_n}{4} + \frac{\delta_n}{8} + \dots \\ &= \delta_n \end{aligned}$$

οπότε

$$\int_{\bigcup_{k>n} E_k} |f_n| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{για } n = 1, 2, \dots$$

Θέτουμε $A_n = E_n \setminus \bigcup_{k>n} E_k$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε

$$\begin{aligned} \int_{A_n} |f_n| &\geq \int_{E_n} |f_n| - \int_{\bigcup_{k>n} E_k} |f_n| \\ &\geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{4} \\ &= \frac{3\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

Έχουμε δείξει επομένως ότι υπάρχουν $\varepsilon_0 > 0$, ακολουθία $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ ξένων ανά δύο μετρήσιμων και $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq K$ ώστε $\int_{A_n} |f_n| \geq \varepsilon_0$ για κάθε n. Αν θέσουμε $g_n = \frac{1}{||f_n \chi_{A_n}||} f_n \chi_{A_n}, n = 1, 2, \dots$, όπως στο θεώρημα 3.5, ο $Y = \overline{\text{span}}(g_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ισομετρικός με τον $\ell_1(\mathbb{N})$ και η

$$P : L_1[0,1] \to Y, \quad Pf = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{A_n} f \text{sgn} f_n \right) f_n$$

είναι φραγμένη προβολή. Παρατηρούμε ότι η $(Pf_n)_{n=1}^{\infty}$ δεν είναι σχετικά $|| \ ||$-συμπαγής, άρα από Λήμμα 3.6 υπάρχει υπακολουθία $(Pf_n)_{n=1}^{\infty} = (f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq K$ που είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του $\ell_1(\mathbb{N})$.

□

Ορισμός 3.8. Έστω X χώρος Banach. Μια ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ ονομάζεται ασθενώς Cauchy αν για κάθε $x^* \in X^*$ η $(x^*(x_n))_{n=1}^{\infty}$ είναι Cauchy (δηλ. συγκλίνουσα).

Ο X ονομάζεται ασθενώς ακολουθιακά πλήρης, αν κάθε ακολουθία στον X που είναι ασθενώς Cauchy είναι και ασθενώς συγκλίνουσα.

Θεώρημα 3.9. *(Steinhaus): Ο* $L_1[0,1]$ *είναι ασθενώς ακολουθιακά πλήρης.*

Απόδειξη. Έστω $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq L_1[0,1]$ ασθενώς Cauchy ακολουθία. Αν η $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ δεν είναι ασθενώς συγκλίνουσα, τότε δεν είναι και ασθενώς συμπαγής, άρα υπάρχει υπακολουθία $(f_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ ισοδύναμη με τη βάση του $\ell_1(\mathbb{N})$. Προφανώς η $(f_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ δεν είναι ασθενώς Cauchy, και έχουμε καταλήξει σε άτοπο.

□

Πόρισμα 3.10. *Ο* $L_1[0,1]$ *δεν περιέχει υπόχωρο ισόμορφο με τον* $c_0(\mathbb{N})$.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι ο $c_0(\mathbb{N})$ δεν είναι ασθενώς ακολουθιακά πλήρης. Πράγματι, η ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq c_0(\mathbb{N})$ με $x_n = (1,1,\ldots,1,0,\ldots), n \in \mathbb{N}$, είναι ασθενώς Cauchy αλλά δε συγκλίνει ασθενώς.

□

3.3 Ισομετρική Εμφύτευση Διαχωρίσιμων L_1-χώρων στον $L_1[0,1]$

Εδώ θα αποδειχθεί ότι ο $L_1[0,1]$ περιέχει κατά φυσιολογικό τρόπο όλους τους διαχωρίσιμους $L_1(\mu)$. Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος που αφορά τη θεωρία χώρων Banach περνά μέσα από τη μελέτη της δομής των σ-αλγεβρών σε δοθέν σύνολο.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $(X,\mathcal{A},\mu)$ είναι χώρος μέτρου, τότε το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των συνόλων που διαφέρουν κατά σύνολο μηδενικού μέτρου συμβολίζεται με Σ, και στο Σ ορίζεται η μετρική $d([A],[B]) = |A \triangle B|$ (βλ. ενότητα 2.2). Στα ακόλουθα, χάριν απλούστευσης, θα αναφερόμαστε στη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ εννοώντας το σύνολο πηλίκο Σ όπου αυτό είναι απαραίτητο, και κάθε κλάση ισοδυναμίας $[A]$ θα ταυτίζεται με έναν αντιπρόσωπό της, έστω A.

Ορισμός 3.11. Έστω $X, Y \neq \emptyset$ σύνολα, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ άλγεβρες στα X, Y αντίστοιχα, και η απεικόνιση $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Η Φ ονομάζεται ομομορφισμός αν

(i) $\Phi(X) = Y$

(ii) $\Phi(A \cap B) = \Phi(A) \cap \Phi(B)$ για κάθε $A, B \in \mathcal{A}$

(iii) $\Phi(X \setminus A) = Y \setminus \Phi(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$

Αν οι $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρες, η $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ονομάζεται σ-ομομορφισμός αν είναι ομομορφισμός και επιπλέον ισχύει

$$\Phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi(A_n)$$

για κάθε ακολουθία $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ ξένων ανά δύο στοιχείων στην $\mathcal{A}$.

Ορισμός 3.12. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Το διατεταγμένο ζεύγος $(\mathcal{A}, \mu)$ ονομάζεται άλγεβρα μέτρου (measure algebra).

Η άλγεβρα μέτρου $(\mathcal{A}, \mu)$ ονομάζεται διαχωρίσιμη αν ο αντίστοιχος μετρικός χώρος $(\mathcal{A}, d)$ είναι διαχωρίσιμος.

Λήμμα 3.13. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Ο μετρικός χώρος $(\mathcal{A}, d)$ είναι πλήρης.*

Απόδειξη. θεωρούμε την απεικόνιση

$$T : (\mathcal{A}, d) \to L_1(\mu), \quad TA = \chi_A$$

Προφανώς η T είναι ισομετρία. Έστω $(\chi_{A_n})_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία στον $T(\mathcal{A}) \subseteq L_1(\mu)$ τέτοια ώστε $\chi_{A_n} \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f \in L_1(\mu)$. Από Λήμμα 1.2 υπάρχει υπακολουθία $(\chi_{A_{k_n}})_{n=1}^{\infty}$ ώστε

$$\chi_{A_{k_n}} \to f \quad \text{σχεδόν παντού κατά σημείο}$$

Προφανώς $f(t) = 0$ ή $f(t) = 1$ σχεδόν παντού στο $[0, 1]$, άρα υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $f = \chi_A \in T(\mathcal{A})$.

Έχουμε δείξει ότι ο $T(\mathcal{A}) \subseteq L_1(\mu)$ είναι κλειστός, άρα και πλήρης, οπότε και ο $(\mathcal{A}, d)$ είναι πλήρης.

□

Ορισμός 3.14. Αν $(\mathcal{A}, \mu)$ άλγεβρα μέτρου, το $A \in \mathcal{A}, A \neq \emptyset$ ονομάζεται άτομο αν για κάθε $B \in \mathcal{A}$ ισχύει η συνεπαγωγή

$$B \subseteq A \Rightarrow B = A \text{ ή } B = \emptyset$$

δηλαδή δεν υπάρχει μη-κενό μετρήσιμο σύνολο που περιέχεται γνήσια στο A.

Και στην περίπτωση των αλγεβρών μέτρου, η έννοια του ισομορφισμού μας επιτρέπει να ταυτίσουμε διαφορετικές άλγεβρες ως δομές.

Ορισμός 3.15. Έστω $(\mathcal{A}, \mu), (\mathcal{B}, \nu)$ άλγεβρες μέτρου. Η απεικόνιση $\Phi : (\mathcal{A}, \mu) \to (\mathcal{B}, \nu)$ λέγεται ισομορφική εμφύτευση, αν

(i) $\Phi(X \setminus A) = Y \setminus \Phi(A)$

(ii) $\Phi(A \cap B) = \Phi(A) \cap \Phi(B)$

(iii) $\mu(A) = \nu(\Phi(A))$

για κάθε $A, B \in \mathcal{A}$.

Αν επιπλέον η Φ είναι επί, θα ονομάζεται ισομορφισμός.

Λήμμα 3.16. *Έστω $\mathcal{B}([0,1])$, $\mathcal{M}([0,1])$ οι σ-άλγεβρες των Borel και Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ αντίστοιχα. Οι άλγεβρες μέτρου $(\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$, $(\mathcal{M}([0,1]),\lambda)$ είναι ισόμορφες.*

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq [0,1]$ Lebesgue μετρήσιμο. Αρκεί να δειχθεί ότι υπάρχει $B \subseteq [0,1]$ Borel μετρήσιμο τέτοιο ώστε $|A \triangle B| = 0$. Από κανονικότητα του μέτρου Lebesgue, κατασκευάζουμε ακολουθία $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ ανοικτών υποσυνόλων του $[0,1]$ ώστε

$$A \subseteq U_n \text{ και } |U_n \setminus A| < \frac{1}{n} \text{ για κάθε } n = 1, 2, \ldots$$

Το $U = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ είναι G_δ σύνολο, άρα Borel μετρήσιμο, ισχύει $A \subseteq U$ και

$$|U \setminus A| < |U_n \setminus A| < \frac{1}{n} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

άρα $|U \setminus A| = 0$.

□

Θεώρημα 3.17. *(Καραθεοδωρή): Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας, τέτοιος ώστε η άλγεβρα μέτρου $(\mathcal{A}, \mu)$ είναι διαχωρίσιμη. Υπάρχει ισομορφική εμφύτευση $\Phi : (\mathcal{A}, \mu) \to (\mathcal{M}([0,1]), \lambda)$ στην άλγεβρα των Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$. Η Φ είναι επί αν και μόνο αν η $\mathcal{A}$ δεν έχει άτομα.*

Απόδειξη. Η $(\mathcal{A}, \mu)$ είναι διαχωρίσιμη άλγεβρα μέτρου, άρα υπάρχει ακολουθία $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ που είναι πυκνή στον $(\mathcal{A}, d)$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $\mathcal{A}_n$ να είναι η άλγεβρα που παράγεται από τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ και θέτουμε $\mathcal{A}_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$. Προφανώς η $\mathcal{A}_\infty$ είναι επίσης άλγεβρα στο X.

Η Φ θα οριστεί επαγωγικά. Είναι $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, A_1, A_1^c, X\}$ και θέτουμε

$$\begin{aligned} \Phi(\emptyset) &= 0, \\ \Phi(A_1) &= [0, \mu(A_1)], \\ \Phi(A_1^c) &= [\mu(A_1), 1], \\ \Phi(X) &= [0,1] \end{aligned}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η $\Phi|_{\mathcal{A}_1}$ είναι ισομορφική εμφύτευση. Έστω τώρα ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ έχει ορισθεί η Φ στην $\mathcal{A}_{n-1}$ ώστε να αποτελεί ισομορφική εμφύτευση. Θα επεκτείνουμε την Φ στην $\mathcal{A}_n$ ώστε να διατηρεί τομές, συμπληρώματα και το μέτρο. Υποθέτουμε ότι η άλγεβρα $\Phi(\mathcal{A}_{n-1}) \subseteq \mathcal{M}([0,1])$ παράγεται από τα διαστήματα $[0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_k,1]$, οπότε θα υπάρχουν σύνολα $B_0,B_1,\ldots,B_k \in \mathcal{A}_{n-1}$ τέτοια ώστε

$$\Phi(B_0)=[0,x_1],\Phi(B_1)=[x_1,x_2],\ldots,\Phi(B_k)=[x_k,1]$$

Η $\mathcal{A}_n$ παράγεται από τα σύνολα

$$A_n\cap B_0, A_n^c\cap B_0, A_n\cap B_1,\ldots,A_n^c\cap B_k$$

Για $j=0,1,\ldots,k$ ορίζουμε

$$\begin{aligned}\Phi(A_n\cap B_j) &= [x_j,\ x_j+\mu(A_n\cap B_j)],\\ \Phi(A_n^c\cap B_j) &= [x_j+\mu(A_n\cap B_j),\ x_{j+1}]\end{aligned}$$

Επαγωγικά, λοιπόν, έχουμε ορίσει τη Φ στην $\mathcal{A}_\infty$ ώστε να διατηρεί το μέτρο. Η $\mathcal{A}_\infty$ είναι πυκνή στην $\mathcal{A}$, και ο $(\mathcal{A},d)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος, άρα η Φ επεκτείνεται σε ισομετρική εμφύτευση $\Phi:(\mathcal{A},\mu)\to(\mathcal{M}([0,1]),\lambda)$.

Θα δείξουμε τώρα ότι η Φ διατηρεί τα συμπληρώματα. Έστω $A\in\mathcal{A}$ και $\varepsilon>0$. Επιλέγουμε $B\in\mathcal{A}_\infty$ ώστε $\mu(A\triangle B)<\frac{\varepsilon}{2}$. Είναι $B^c\in\mathcal{A}_\infty$ και $\mu(A^c\triangle B^c)=\mu(A\triangle B)<\frac{\varepsilon}{2}$, οπότε

$$\begin{aligned}|\Phi(A^c)\triangle\Phi(A)^c| &\le |\Phi(A^c)\triangle\Phi(B)^c|+|\Phi(B)^c\triangle\Phi(A)^c|\\ &= |\Phi(A^c)\triangle\Phi(B^c)|+|\Phi(B)\triangle\Phi(A)|\\ &= \mu(A^c\triangle B^c)+\mu(A\triangle B)\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

και το ε επιλέχθηκε τυχαία, άρα τα $\Phi(A^c)$ και $\Phi(A)^c$ ταυτίζονται ως κλάσεις ισοδυναμίας συνόλων που είναι σχεδόν παντού ίσα, άρα η Φ διατηρεί τα συμπληρώματα. Όμοια αποδεικνύουμε ότι η Φ διατηρεί τις τομές και τις αριθμήσιμες τομές.

Θα μελετήσουμε τώρα το σύνολο τιμών της Φ. Αρχικά σημειώνουμε ότι η Φ είναι 1-1 ως ισομετρία, και προφανώς αν είναι επί, τότε η $\mathcal{A}$ δεν έχει άτομα. Έστω $E=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}\subseteq[0,1]$ το σύνολο των άκρων των διαστημάτων από τα οποία ορίζονται οι άλγεβρες $\Phi(\mathcal{A}_n)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Αν υποθέσουμε ότι το E δεν είναι πυκνό στο $[0,1]$, υπάρχει διάστημα $I\subseteq[0,1]\setminus\overline{E}$, το οποίο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχει άκρα στο $\overline{E}$. Υπάρχει ακολουθία διαστημάτων $(I_n)_{n=1}^\infty\subseteq\Phi(\mathcal{A}_\infty)$ τέτοια ώστε $|I\triangle I_n|\to 0$, οπότε $I\in\Phi(\mathcal{A})$.

Έστω $A\in\mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $\Phi(A)=I$ και $B\in\mathcal{A}$ με $B\subseteq A$. Θα είναι $\Phi(B)\subseteq I$ και υπάρχει $(J_n)_{n=1}^\infty\subseteq\Phi(\mathcal{A}_\infty)$ με $|J_n\triangle\Phi(B)|\to 0$. Όμως από υπόθεση για το I, τα J_n είτε περιέχουν το $\Phi(B)$ είτε είναι ξένα με το $\Phi(B)$, οπότε είτε $\Phi(B) = I$ είτε $\Phi(B) = \emptyset$, που σημαίνει ότι

$$B = A \quad \text{ή} \quad B = \emptyset$$

άρα το $A \in \mathcal{A}$ είναι άτομο. Έχουμε αποδείξει λοιπόν ότι αν η $\mathcal{A}$ δεν έχει άτομα, τότε $\overline{E} = [0,1]$, άρα η $\Phi(\mathcal{A})$ περιέχει όλα τα σύνολα Borel, οπότε από Λήμμα 3.16 και τα Lebesgue μετρήσιμα, και η Φ είναι επί.

□

Λήμμα 3.18. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, όπου ο X είναι μετρικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο $L_1(\mu)$ είναι διαχωρίσιμος.

(ii) Η $(\mathcal{A}, \mu)$ είναι διαχωρίσιμη άλγεβρα μέτρου.

Απόδειξη.

(i)⇒(ii): Έστω η $(\mathcal{A}, \mu)$ δεν είναι διαχωρίσιμη. Υπάρχει σύνολο I υπεραριθμήσιμο, $\varepsilon > 0$ και οικογένεια $(A_i)_{i \in I}$ με $\mu(A_i \triangle A_j) \geq \varepsilon$ για $i, j \in I, i \neq j$. Τότε και η $(\chi_{A_i})_{i \in I}$ είναι ε-διαχωρισμένη υπεραριθμήσιμη οικογένεια στον $L_1(\mu)$, που είναι άτοπο.

(ii)⇒(i): Έστω ακολουθία $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ πυκνή στην $\mathcal{A}$. Όμοια όπως στο Λήμμα 1.5 αποδεικνύεται ότι οι απλές συναρτήσεις στο X είναι πυκνές στον $L_1(\mu)$, ισοδύναμα ο $\operatorname{span}\{\chi_A : A \subseteq X\}$ είναι πυκνός υπόχωρος του $L_1(\mu)$. Έπεται ότι ο

$$Y = \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_{n_i}} : m \in \mathbb{N}, (a_i)_{i=1}^{m} \subseteq \mathbb{R} \right\}$$

είναι πυκνός και διαχωρίσιμος υπόχωρος του $L_1(\mu)$, οπότε ο $L_1(\mu)$ είναι διαχωρίσιμος.

□

Θεώρημα 3.19. *Κάθε διαχωρίσιμος L_1-χώρος εμφυτεύεται ισομετρικά στον $L_1[0,1]$.*

Απόδειξη. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου τέτοιος ώστε ο $L_1(\mu)$ είναι διαχωρίσιμος. Η απόδειξη θα γίνει διακρίνοντας επι μέρους περιπτώσεις.

1η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Αν το μ είναι σ-πεπερασμένο μέτρο, θα δείξουμε ότι υπάρχει μέτρο πιθανότητας ν τέτοιο ώστε ο $L_1(\mu)$ να είναι ισομετρικός με τον $L_1(\nu)$. Πράγματι, επιλέγουμε $g \in L_1(\mu)_+$ με $\int g \mathrm{d}\mu = 1$ και θεωρούμε το μέτρο

$$\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty), \quad \nu(A) = \int_A g \mathrm{d}\mu$$

Η απεικόνιση

$$T : L_1(\mu) \to L_1(\nu), \quad Tf = fg^{-1}$$

είναι η ζητούμενη ισομετρία.

2η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Αν το μ είναι μη ατομικό μέτρο πιθανότητας, από θεώρημα Καραθεοδωρή υπάρχει ισομορφισμός $\Phi : (\mathcal{A}, \mu) \to (\mathcal{M}, \lambda)$ επί, και η απεικόνιση

$$T : \mathrm{span}\{\chi_A : A \in \mathcal{A}\} \to L_1[0,1], \quad T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{A_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{\Phi(A_i)}$$

επεκτείνεται στη ζητούμενη ισομετρία $T : L_1(\mu) \to L_1[0,1]$.

3η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Αν το μ είναι πλήρως ατομικό μέτρο πιθανότητας, τότε τα άτομα στη σ-άλγεβρα θα είναι το πολύ αριθμήσιμα το πλήθος, έστω $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Η απεικόνιση

$$e_n \mapsto \frac{1}{\mu(A_n)} \chi_{A_n}$$

επεκτείνεται σε ισομετρία

$$T : \ell_1(\mathbb{N}) \to L_1(\mu)$$

η οποία είναι επί, άρα ο $L_1(\mu)$ ως ισομετρικός με τον $\ell_1(\mathbb{N})$ εμφυτεύεται στον $L_1[0,1]$.

4η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Γενικά αν μ μέτρο πιθανότητας ώστε $L_1(\mu)$ διαχωρίσιμος, είναι $\mu = \mu_1 + \mu_2$, όπου μ_1 μη ατομικό και μ_2 πλήρως ατομικό, οπότε

$$L_1(\mu) \sim L_1[0,1] \oplus \ell_1(\mathbb{N}) \hookrightarrow L_1[0,1] \oplus L_1[0,1] \sim L_1[0,1]$$

□

Σχόλιο: Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι για κάθε $f, g \in L_1[0,1]$ ισχύει $||f \pm g||_1 = ||f||_1 + ||g||_1$ αν και μόνο αν οι f, g έχουν ξένους φορείς, επομένως μια ισομετρία $T : L_1[0,1] \to L_1[0,1]$ διατηρεί τα άτομα. Από αυτή την παρατήρηση και από την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει και η ταξινόμηση των διαχωρίσιμων L_1-χώρων σε κλάσεις ισοδυναμίας ως προς την ισομετρία. Συγκεκριμένα, οι διαχωρίσιμοι L_1 είναι οι:

$\ell_1^n, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \ell_1(\mathbb{N}), \quad L_1[0,1], \quad \ell_1(\mathbb{N}) \oplus L_1[0,1], \quad \ell_1^n \oplus L_1[0,1], \quad n = 1, 2, \ldots$

και αυτοί είναι μεταξύ τους μη ισομετρικοί. Οι διαχωρίσιμοι L_1 ταξινομημένοι ως προς ισομορφισμό, είναι οι: $\ell_1^n, n = 1, 2, \ldots,\ \ell_1(\mathbb{N}),\ L_1[0,1]$.

3.4 Συμπληρωματικοί Ισόμορφοι Υπόχωροι

Ορισμός 3.20. Έστω X, Y χώροι Banach. Ορίζουμε απόσταση Banach-Mazur μεταξύ των X, Y τον αριθμό

$$d(X,Y) = \inf\left\{ ||T|| \cdot ||T^{-1}|| \;\middle|\; T : X \to Y \text{ ισομορφισμός} \right\}$$

Παρατήρηση 3.21. Η απόσταση Banach-Mazur μεταξύ χώρων Banach ικανοποιεί τις σχέσεις

(i) $d(X,Y) \geq 1$, και $d(X,X) = 1$

(ii) $d(X,Y) = d(Y,X)$

(iii) $d(X,Z) = d(X,Y)d(Y,Z)$

και προφανώς δεν ορίζει απόσταση στην κλάση των χώρων Banach. Η απεικόνιση $\rho(X,Y) = \ln d(X,Y)$ είναι μία πιθανή μετρική, αλλά δεν ισχύει απαραίτητα η συνεπαγωγή $\rho(X,Y) = 0 \Rightarrow X, Y$ ισομετρικοί, και επομένως αποτελεί ψευδομετρική στην κλάση των χώρων Banach.

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε μία ικανή συνθήκη ώστε ένας υπόχωρος του $L_1[0,1]$ να είναι συμπληρωματικός, η οποία σχετίζεται με την απόσταση Banach-Mazur. Συγκεκριμένα θα αποδειχθεί ότι κάθε υπόχωρος Y ενός L_1-χώρου που είναι ισομορφικός με τον L_1, με $d(Y, L_1) < \sqrt{2}$, είναι ταυτόχρονα και συμπληρωματικός.

Η έννοια που βρίσκεται πίσω από τα επόμενα θεωρήματα είναι η έννοια της οικογένειας συναρτήσεων με σχετικά ξένους φορείς.

Ορισμός 3.22. Έστω $(f_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ οικογένεια συναρτήσεων στον $L_1[0,1]$. Θα λέμε ότι η $(f_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ έχει σχετικά ξένους φορείς (relatively disjoint family) αν είναι $||\cdot||_1$-ομοιόμορφα φραγμένη, και επιπλέον υπάρχει οικογένεια $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ ξένων ανά δύο μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ και $0<\varepsilon<\delta$ τέτοια ώστε

$$\int_{E_\gamma} |f_\gamma| \geq \delta \qquad \text{για κάθε } \gamma\in\Gamma$$

και

$$\sum_{\alpha\neq\gamma}\int_{E_\alpha} |f_\gamma| \leq \varepsilon \qquad \text{για κάθε } \gamma\in\Gamma$$

Ορισμός 3.23. Οι συναρτήσεις Rademacher είναι η ακολουθία $(r_n)_{n=1}^{\infty}$, όπου

$$r_n : [0,1]\to\mathbb{R}, \quad r_n = \sum_{k=0}^{2^n-1}(-1)^{k+1}\chi_{\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right)} + \chi_{\{1\}}$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Τα αποτελέσματα που ακολουθούν αποδείχθηκαν περί το 1975 από τον L. Dor.

Πρόταση 3.24. *Έστω $f_1, f_2, \dots f_n \in L_1[0,1]$ με $||f_i|| \leq 1$ για κάθε $i\leq n$, και $0<C\leq 1$. Αν*

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right|\right| \geq C\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|\right) \qquad \text{για κάθε } a_1,a_2,\dots a_n\in\mathbb{R}$$

τότε

$$\left|\left|\max_{1\leq i\leq n}|a_i f_i|\right|\right| \geq C^2\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|\right) \qquad \text{για κάθε } a_1,a_2,\dots a_n\in\mathbb{R}$$

Απόδειξη. Έστω $(r_i)_{i=1}^{\infty}$ η ακολουθία των συναρτήσεων Rademacher. Για κάθε $s\in[0,1]$, από υπόθεση έχουμε

$$C\sum_{i=1}^{n}|a_i| \;=\; C\sum_{i=1}^{n}|a_i r_i(s)| \leq \left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i r_i(s) f_i\right|\right|$$

και ολοκληρώνοντας στο $[0,1]$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
C\sum_{i=1}^{n}|a_i| &\leq \int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i r_i(s) f_i\right\| \mathrm{d}s \\
&= \int_0^1\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{n} a_i r_i(s) f_i\right| \mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 \Big|\sum_{i=1}^{n} a_i r_i(s) f_i(t)\Big|^2 \mathrm{d}s\right)^{1/2} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(t) r_i\right\|_2 \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i f_i(t)|^2\right)^{1/2} \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1 \max_{1\leq i\leq n} |a_i f_i(t)|^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i f_i(t)|\right)^{1/2} \mathrm{d}t \\
&\leq \left(\int_0^1 \max_{1\leq i\leq n} |a_i f_i(t)|\mathrm{d}t\right)^{1/2} \left(\int_0^1 \sum_{i=1}^{n} |a_i f_i(t)|\mathrm{d}t\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_0^1 \max_{1\leq i\leq n} |a_i f_i(t)|\mathrm{d}t\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

από όπου προκύπτει το ζητούμενο.

□

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη της επόμενης πρότασης, παρεμβάλλουμε το ακόλουθο Λήμμα:

Λήμμα 3.25. *Έστω $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία θετικών συναρτήσεων στον $L_1[0,1]$, $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών, και το σύνολο*

$$\Delta = \left\{(\phi_i)_{i=1}^{\infty} : \phi_i \geq 0,\ \int \phi_i g_i = c_i,\ \sum_{i=1}^{\infty}\phi_i \leq 1\right\} \subseteq L_\infty[0,1]^{\mathbb{N}}$$

Κάθε ακραίο σημείο του Δ, αν υπάρχει, είναι της μορφής $(\chi_{A_n})_{n=1}^{\infty}$, όπου τα A_n είναι ξένα ανά δύο μετρήσιμα υποσύνολα του $[0,1]$.

Απόδειξη. Έστω $(v_i)_{i=1}^{\infty} \in \Delta$ ακραίο σημείο του Δ. Αρκεί να ισχύουν:

(i) $\min\{v_i, v_j\} = 0$ σχεδόν παντού για κάθε $i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} v_i = 1$ σχεδόν παντού

Έστω, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι υπάρχουν $E \subseteq [0,1]$ με $|E| > 0$, $i, j \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon > 0$ τέτοια ώστε $\min\{v_i, v_j\} \geq \varepsilon$ στο E. Υπάρχει $h \in \ker g_n \cap \ker g_m \subseteq L_\infty[0,1]$ με $||h||_\infty \leq \varepsilon$, δηλαδή $\int g_i h = \int g_j h = 0$ και $|h(t)| \leq \varepsilon$ σχεδόν παντού στο E. Θέτουμε

$$\begin{aligned} v_i' &= v_i + h,\ v_j' = v_j - h,\ v_n' = v_n \text{ για } n \neq i, j \\ v_i'' &= v_i - h,\ v_j'' = v_j + h,\ v_n'' = v_n \text{ για } n \neq i, j \end{aligned}$$

Προφανώς $(v_i')_{i=1}^{\infty}, (v_i'')_{i=1}^{\infty} \in \Delta$, $(v_i')_{i=1}^{\infty} \neq (v_i'')_{i=1}^{\infty}$ και $(v_i)_{i=1}^{\infty} = \frac{1}{2}(v_i')_{i=1}^{\infty} + \frac{1}{2}(v_i'')_{i=1}^{\infty}$: άτοπο, αφού το $(v_i)_{i=1}^{\infty}$ είναι ακραίο σημείο του Δ.

Για το δεύτερο ζητούμενο, έστω ότι υπάρχει $E \subseteq [0,1]$ με $|E| > 0$, $0 < \varepsilon < 1$ και $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\varepsilon \leq v_n \leq 1 - \varepsilon$ στο E. Επιλέγουμε, όπως προηγουμένως, $h \in L_\infty[0,1]$, $||h||_\infty < \varepsilon$ με $\int g_n h = 0$, και θέτουμε

$$\begin{aligned} v_n' &= v_n + h,\ v_i' = v_i \text{ για } i \neq n \\ v_n'' &= v_n - h,\ v_i'' = v_i \text{ για } i \neq n \end{aligned}$$

Όμοια με προηγουμένως, ισχύουν $(v_i')_{i=1}^{\infty}, (v_i'')_{i=1}^{\infty} \in \Delta$, $(v_i')_{i=1}^{\infty} \neq (v_i'')_{i=1}^{\infty}$ και $(v_i)_{i=1}^{\infty} = \frac{1}{2}(v_i')_{i=1}^{\infty} + \frac{1}{2}(v_i'')_{i=1}^{\infty}$, οπότε έχουμε καταλήξει σε άτοπο.

□

Πρόταση 3.26. *Έστω $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία μη αρνητικών συναρτήσεων στον $L_1[0,1]$, με $\sup ||g_n||_1 < \infty$ και $0 < C \leq 1$. Αν*

$$\int_0^1 \max_{1 \leq i \leq n} a_i g_i \geq C \sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{για κάθε } n = 1, 2, \ldots \text{ και } a_1, a_2, \ldots a_n \geq 0$$

υπάρχει $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων ανά δυό μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ τέτοια ώστε

$$\int_{A_n} g_n \geq C \quad \text{για κάθε } n = 1, 2, \ldots$$

Απόδειξη. Στο χώρο γινόμενο $\prod_{\mathbb{N}} \big(L_\infty[0,1], w^*\big)$ θεωρούμε το σύνολο

$$D = \left\{ (\phi_n)_{n=1}^{\infty} : \phi_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \leq 1 \ \sigma.\pi. \text{ στο } [0,1] \right\}$$

και την απεικόνιση

$$T : D \to \ell_\infty(\mathbb{N}), \quad T\big((\phi_n)_{n=1}^{\infty}\big) = \left(\int g_n \phi_n \right)_{n=1}^{\infty}$$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ 1: Το D είναι κυρτό και συμπαγές, και η $T : D \to (\ell_\infty(\mathbb{N}), w^*)$ είναι συνεχής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΥ: Η κυρτότητα είναι προφανής. Από θεώρημα Alaoglou η B_{L_∞} είναι w^*-συμπαγής, και από το θεώρημα Tychonoff ο χώρος $\prod_{n\in\mathbb{N}}(B_{L_\infty}, w^*)$ είναι συμπαγής. Αρκεί να δειχθεί ότι το D είναι κλειστό. Η επαγόμενη τοπολογία στο D είναι μετρικοποιήσιμη, άρα αρκεί να δειχθεί ότι το D είναι ακολουθιακά κλειστό.

Έστω $(F_i)_{i=1}^\infty$ ακολουθία στο D, με $F_i = (\phi_n^i)_{n=1}^\infty$ ώστε $F_i \to F = (\phi_n)_{n=1}^\infty$. Θα είναι $\phi_n \geq 0$ στο $[0,1]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και για κάθε $m = 1, 2, \ldots$ ισχύει

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \phi_n &= \sum_{n=1}^m \lim_{i\to\infty} \phi_n^i \\ &= \lim_{i\to\infty} \sum_{n=1}^m \phi_n^i \\ &\leq \lim_{i\to\infty} \sum_{n=1}^\infty \phi_n^i \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

άρα

$$\sum_{n=1}^\infty \phi_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^m \phi_n \leq 1$$

και το D είναι ακολουθιακά κλειστό.

Επιπλέον $TF_i = \big(\int g_n\phi_n^i\big)_{n=1}^\infty$ για κάθε $i = 1, 2\ldots$, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης είναι

$$\lim_{i\to\infty} \int g_n\phi_n^i = \int g_n\phi_n \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

και $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int g_n\phi_n < \infty$, οπότε $TF_i \xrightarrow{w^*} TF$, και η T είναι συνεχής.

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ 2: Υπάρχει $(\phi_n)_{n=1}^\infty \in D$ τέτοια ώστε $\int g_n\phi_n \geq C$ για κάθε $n = 1, 2\ldots$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΥ: Υποθέτουμε προς απαγωγή σε άτοπο ότι $\int g_n\phi_n < C$ για κάθε $(\phi_n)_{n=1}^\infty \in D$. Το σύνολο

$$A = \{(c_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty(\mathbb{N}) : c_n \geq C \text{ για κάθε } n\}$$

είναι κυρτό και w^*-κλειστό, και επιπλέον είναι ξένο με το $T(D)$, άρα από θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει $f \in \ell_\infty(\mathbb{N})^*$ w^*-συνεχές, το οποίο τα διαχωρίζει αυστηρά. Δηλαδή υπάρχει $(a_n)_{n=1}^\infty \in \ell_1(\mathbb{N})$ τέτοια ώστε

$$\sum_{n=1}^\infty a_n c_n \geq C \text{ για κάθε } (c_n)_{n=1}^\infty \in A$$

και
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\int g_n \phi_n \right) \leq C' < C \text{ για κάθε } (\phi_n)_{n=1}^{\infty} \in D$$
Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq 1$. Επιλέγουμε $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{n=1}^{N} a_n > \frac{C'}{C}$ και θέτουμε
$$E_n = \left\{ t \in [0,1] : \max_{1\leq i\leq N} a_i g_i = a_n g_n \right\} \qquad \text{για } n = 1, 2, \ldots, N$$
και
$$\phi_n = \begin{cases} \chi_{E_n} & \text{αν } 1 \leq n \leq N \\ 0 & \text{αν } n > N \end{cases} \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}$$
Προφανώς $(\phi_n)_{n=1}^{\infty} \in D$, άρα
$$\begin{aligned} C' &\geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \big(g_n \phi_n \big) = \sum_{n=1}^{N} a_n \int_{E_n} g_n = \sum_{n=1}^{N} \int_{E_n} a_n g_n \\ &= \sum_{n=1}^{N} \int_{E_n} \max_{1\leq i\leq N} a_i g_i = \int \max_{1\leq i\leq N} a_i g_i \\ &\geq C \sum_{n=1}^{N} a_n \end{aligned}$$
Άτοπο, άρα υπάρχει $(\phi_n)_{n=1}^{\infty} \in D$ τέτοια ώστε $\int \phi_n g_n \geq C$ για $n = 1, 2, \ldots$ Αν
$$D_1 = \left\{ (f_i)_{i=1}^{\infty} \in D : \int f_n g_n = \int \phi_n g_n \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \right\}$$
ο χώρος $\prod_{\mathbb{N}} \left(L_\infty[0,1], w^* \right)$ είναι $\mathcal{T}_2$ και τοπικά κυρτός, και το D_1 είναι κυρτό και συμπαγές, οπότε από Θεώρημα Krein-Milman είναι $\mathrm{Ext} D_1 \neq \emptyset$. Η ακολουθία $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ μπορεί να αντικατασταθεί από ένα ακραίο σημείο του D_1, και από Λήμμα 3.25 αυτό θα είναι της μορφής $(\chi_{A_n})_{n=1}^{\infty}$ όπου τα A_n είναι ξένα ανά δύο μετρήσιμα. Άρα είναι
$$\int_{A_n} g_n \geq C$$
για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Παρατήρηση: Η προηγούμενη πρόταση ουσιαστικά μας πληροφορεί ότι αν για την ακολουθία $(g_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq L_1[0,1]$ με τις αντίστοιχες υποθέσεις, ισχύει $\int \max a_i g_i \geq C \sum_{i=1}^{n} a_i$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ και $a_1, \ldots a_n \geq 0$ τότε οι g_n φέρονται από (σχεδόν) ξένα ανά δύο σύνολα.

Θεώρημα 3.27. *Έστω $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία στον $L_1[0,1]$, με $||f_n|| \le 1$ για κάθε $n = 1,2,\ldots$, και $0 < C \le 1$. Αν*

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right|\right| \ge C\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|\right)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}, a_1,\ldots a_n \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει ακολουθία $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ ξένων ανά δύο μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ τέτοια ώστε $||f_n\chi_{A_n}|| \ge C^2$ για κάθε $n = 1,2,\ldots$

Απόδειξη. Από την πρόταση 3.24 έπεται ότι

$$\left|\left|\max_{1\le i\le n}|a_i f_i|\right|\right| \ge C^2\sum_{i=1}^{n}|a_i| \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}, a_1,\ldots a_n \in \mathbb{R}$$

και η $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στον $L_1[0,1]$, άρα από Πρόταση 3.26 υπάρχει ακολουθία $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ ξένων ανά δύο μετρήσιμων συνόλων τέτοια ώστε

$$||f_n\chi_{A_n}|| = \int_{A_n} g_n \ge C^2 \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

□

Σχόλιο: Στην προηγούμενη ενότητα αποδείξαμε ότι μια ακολουθία $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ στον $L_1[0,1]$ με ξένους φορείς παράγει συμπληρωματικό υπόχωρο, ισομετρικό με τον $\ell_1(\mathbb{N})$. Τα παραπάνω αποτελέσματα δείχνουν τι ισχύει στην αντίστροφη κατεύθυνση, συγκεκριμένα ότι κάθε ακολουθία $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ που παράγει υπόχωρο ισόμορφο με τον $\ell_1(\mathbb{N})$ έχει σχεδόν ξένους φορείς.

Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στην απόδειξη του κεντρικού θεωρήματος της ενότητας αυτής, το οποίο δίνει ικανή συνθήκη ώστε ένας υπόχωρος του $L_1[0,1]$ να είναι και συμπληρωματικός.

Θεώρημα 3.28. *(L.Dor) Έστω $T : L_1(\nu) \to L_1(\mu)$ ισομορφική εμφύτευση, τέτοια ώστε $||T|| \cdot ||T^{-1}|| = \lambda < \sqrt{2}$. Υπάρχει προβολή $P : L_1(\mu) \to T[L_1(\nu)]$ με $||P|| \le (2\lambda^{-2} - 1)^{-1}$.*

Απόδειξη. Έστω $T : L_1(\nu) \to L_1(\mu)$ ισομορφική εμφύτευση, με $||T|| = 1$ και $||T^{-1}|| = \lambda$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει τελεστής $S : L_1(\mu) \to L_1(\nu)$ ώστε $ST = I_{L_1(\nu)}$ και $||S|| \le (2\lambda^{-2} - 1)^{-1}$. Πράγματι, τότε ο τελεστής

$$P : L_1(\mu) \to T[L_1(\nu)],\ P = TS$$

ικανοποιεί τις σχέσεις $||P|| \leq (2\lambda^{-2}-1)^{-1}$ και $P^2 = TSTS = TS = P$, και είναι η ζητούμενη προβολή. Η απόδειξη θα γίνει σταδιακά σε 4 βήματα.

ΒΗΜΑ 1ο: Έστω $L_1(\nu) = \ell_1^n$ και $L_1(\mu) = L_1[0,1]$. Αν $(e_i)_{i=1}^n$ η συνήθης βάση του ℓ_1^n, θέτουμε $f_i = Te_i$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Είναι $||f_i|| \leq 1$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ και

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{i=1}^n a_i f_i\right\| &= \left\|\sum_{i=1}^n a_i Te_i\right\| = \left\|T\left(\sum_{i=1}^n a_i e_i\right)\right\| \\ &\geq \frac{1}{||T^{-1}||}\sum_{i=1}^n |a_i| = \lambda^{-1}\sum_{i=1}^n |a_i| \end{aligned}$$

για κάθε $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, άρα από θεώρημα 3.27 υπάρχουν $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq [0,1]$ ξένα ανά δύο μετρήσιμα, τέτοια ώστε

$$\int_{A_i} |f_i| \geq \lambda^{-2} \quad \text{για } i = 1, 2 \ldots n$$

Θεωρούμε τον τελεστή

$$U : L_1[0,1] \to \ell_1^n, \quad Uf = \sum_{i=1}^n \left(\int_{A_i} f \mathrm{sgn} f_i\right) e_i$$

και θέτουμε $x_i = Uf_i$ για $i = 1, 2 \ldots, n$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $||U|| \leq 1$ και $x_i(i) = \int_{A_i} |f_i| \geq \lambda^{-2}$, οπότε για κάθε $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\right\| &= \sum_{j=1}^n \left|\sum_{i=1}^n a_i x_i(j)\right| \\ &\geq \sum_{j=1}^n |a_j x_j(j)| - \sum_{j=1}^n \sum_{i\neq j} |a_i x_i(j)| \\ &= 2\sum_{j=1}^n |a_j x_j(j)| - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_i x_i(j)| \\ &\geq (2\lambda^{-2}-1)\sum_{i=1}^n |a_i| \end{aligned}$$

Επομένως ο τελεστής $V : \ell_1^n \to \ell_1^n$ με $Vx_i = e_i$ είναι ισομορφισμός, με $||V|| \leq (2\lambda^{-2}-1)^{-1}$ και ο $S = VU$ είναι ο ζητούμενος.

ΒΗΜΑ 2ο: Αν $L_1(\nu) = \ell_1^n$ και $L_1(\mu)$ διαχωρίσιμος, έχουμε δείξει ότι ο $L_1(\mu)$ εμφυτεύεται ισομετρικά στον $L_1[0,1]$, και το ζητούμενο έπεται από το προηγούμενο βήμα.

ΒΗΜΑ 3ο: Αν $L_1(\nu) = \ell_1^n$ και ο $L_1(\mu) = L_1(X, \mathcal{A}, \mu)$ δεν είναι διαχωρίσιμος, υπάρχει σ-άλγεβρα $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ τέτοια ώστε ο $L_1(X, \mathcal{B}, \mu)$ να είναι διαχωρίσιμος, και $T\ell_1^n \hookrightarrow L_1(X, \mathcal{B}, \mu)$. Από προηγούμενο βήμα υπάρχει τελεστής $S_1 : L_1(X, \mathcal{B}, \mu) \to \ell_1^n$ ώστε $S_1 T = I_{\ell_1^n}$ και $||S_1|| \leq (2\lambda^{-2} - 1)^{-1}$. Αν $E : L_1(X, \mathcal{A}, \mu) \to L_1(X, \mathcal{B}, \mu)$ είναι ο τελεστής δεσμευμένης μέσης τιμής (βλ. ενότητα 3.1) τότε ο $S = ES_1$ είναι ο ζητούμενος τελεστής.

ΒΗΜΑ 4ο: Για τη γενική περίπτωση των οποιωνδήποτε $L_1(\mu)$ και $L_1(\nu)$, θεωρούμε ένα δίκτυο $(Y_i)_{i \in I}$ υποχώρων του $L_1(\nu)$ διατεταγμένο ως προς τη σχέση εγκλεισμού, τέτοιο ώστε για κάθε $i \in I$ ο Y_i είναι ισομετρικός με τον $\ell_1^{n_i}$ για κάποιο $n_i \in \mathbb{N}$, και

$$\overline{\bigcup_{i \in I} Y_i}^{||\cdot||_1} = L_1(\nu)$$

Από τα προηγούμενα βήματα, για κάθε $i \in I$ υπάρχει $S_i : L_1(\mu) \to Y_i$ με $||S_i|| \leq (2\lambda^{-2} - 1)^{-1}$ και $S_i T = I_{Y_i}$. θεωρούμε κάθε S_i ως απεικόνιση από την $B_{L_1(\mu)}$ στην $B_{L_1(\nu)^{**}}$, η οποία είναι w^*-συμπαγής, τότε

$$(S_i)_{i \in I} \subseteq \left(B_{L_1(\nu)^{**}}, w^*\right)^{B_{L_1(\mu)}}$$

και υπάρχει υποδίκτυο $(S_j)_{j \in J}$ το οποίο συγκλίνει w^* σε τελεστή $S_0 : L_1(\mu) \to L_1(\nu)^{**}$. Προφανώς $||S_0|| \leq (2\lambda^{-2} - 1)^{-1}$ και $S_0 T = I_{L_1(\nu)}$. Αν $P : L_1(\nu)^{**} \to L_1(\nu)$ προβολή με $||P|| = 1$, ο $S = PS_0$ είναι ο ζητούμενος τελεστής.

□

Σχόλιο: Παραμένει ακόμα ανοικτό το πρόβλημα της εύρεσης ικανής και αναγκαίας συνθήκης ώστε ένας υπόχωρος του $L_1[0,1]$ να είναι και συμπληρωματικός. Εικάζεται ότι αυτό ισχύει για τους υποχώρους αυτούς οι οποίοι είναι ισόμορφοι είτε με τον $L_1[0,1]$ είτε με τον $\ell_1(\mathbb{N})$.

3.5 Ουσιωδώς φραγμένες συναρτήσεις στον $L_1[0,1]$

Μια απολύτως ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[0,1]$ δεν είναι απαραίτητα και σχεδόν παντού φραγμένη, χαρακτηριστικό παράδειγμα η $f(t) = 1/\sqrt{t}$. Εδώ θα αναφερθούμε σε ένα θεώρημα σχετικό με υποχώρους του $L_1[0,1]$ των οποίων τα στοιχεία ανήκουν -συνολοθεωρητικά- και στον $L_\infty[0,1]$.

Λήμμα 3.29. *Έστω $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Τότε $L_q[0,1] \subseteq L_p[0,1]$ και για κάθε $f \in L_q[0,1]$ είναι $||f||_p \leq ||f||_q$.*

Απόδειξη. Έστω $r = \frac{q}{p}$ και r' ο συζυγής δείκτης του r. Αν $f \in L_q[0,1]$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int |f|^p &\leq \left(\int |f|^{pr}\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int 1^{r'}\right)^{\frac{1}{r'}} \\ &= \left(\int |f|^q\right)^{\frac{1}{r}} < \infty \end{aligned}$$

οπότε $f \in L_p[0,1]$, και

$$||f||_p = \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^q\right)^{\frac{1}{pr}} = ||f||_q$$

□

Θεώρημα 3.30. *(Grothendieck) Έστω X κλειστός υπόχωρος του $L_1[0,1]$ τέτοιος ώστε $X \subseteq L_1[0,1] \cap L_\infty[0,1]$. Τότε $\dim X < \infty$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την ταυτοτική απεικόνιση

$$I : (X, ||\cdot||_1) \to (X, ||\cdot||_\infty)$$

η οποία προφανώς έχει κλειστό γράφημα. Σύμφωνα με το Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $||f||_\infty \leq M||f||_1$ για κάθε $f \in X$. Από Λήμμα 3.28 είναι $X \subseteq L_2[0,1]$ και

$$||f||_2 \leq M||f||_2 \quad \text{για κάθε } f \in X$$

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $\{f_1, \ldots, f_n\} \subseteq X$ ορθοκανονικό υποσύνολο του X. Για κάθε $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε συνάρτηση $f_x = x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n \in X$.

Έστω $x \in \mathbb{R}^n$ τυχόν. Υπάρχει $A_x \subseteq [0,1]$ με $|A_x| = 0$ ώστε για κάθε $t \in [0,1] \backslash A_x$ να ισχύει

$$|f_x(t)| \leq ||f_x||_\infty \leq M||f||_2$$

Αν $D \subseteq \mathbb{R}^n$ πυκνό και αριθμήσιμο, για το $A = \bigcup_{x \in D} A_x \subseteq [0,1]$ είναι $|A| \leq \sum_{x \in D} |A_x| = 0$, οπότε για κάθε $x \in D \cap B_{\mathbb{R}^n}$ ισχύει

$$|f_x(t)| \leq M \quad \text{για κάθε } t \in [0,1] \backslash A$$

Η απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to X, \quad Tx = f_x$ είναι συνεχής, άρα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $|f_x(t)| \leq M$ σχεδόν παντού στο $[0,1]$ για κάθε $x \in X \cap B_{\mathbb{R}^n}$.

Θέτοντας $x = (f_1(t), \ldots, f_n(t)) \in B_{\mathbb{R}^n}$, όπου το t διατρέχει το $[0,1]$ (εκτός ίσως από ένα σύνολο μηδενικού μέτρου) λαμβάνουμε

$$\sum_{i=1}^{n} |f_i(t)|^2 \leq M$$

σχεδόν παντού στο $[0,1]$, και ολοκληρώνοντας έχουμε

$$n = \left\| \sum_{i=1}^{n} f_i \right\|_2 \leq M^2$$

άρα ισχύει $\dim X < \infty$.

$\square$

ΣΧΟΛΙΟ:Είναι σημαντική η υπόθεση ότι ο X είναι πλήρης χώρος (κλειστός). Προφανώς υπάρχουν υπόχωροι του $L_1[0,1]$ που είναι απειροδιάστατοι και κάθε στοιχείο τους είναι σχεδόν παντού φραγμένη συνάρτηση. Το παραπάνω θεώρημα φανερώνει ότι κάθε τέτοιος υπόχωρος δεν μπορεί να είναι πλήρης.

Κεφάλαιο 4

Δομή του $L_1[0,1]$

4.1 Χώροι Ισόμορφοι με τον $L_1[0,1]$

Ορισμός 4.1. Η ακολουθία $(E_i^n)_{n\geq 0}^{i\leq M_n}$ υποσυνόλων του $[0,1]$ ονομάζεται θάμνος στο $[0,1]$, αν ισχύουν:

(i) $M_0 = 1$ και $|E_1^0| > 0$

(ii) $\bigcup_{i=1}^{M_n} E_i^n = E_1^0$ για κάθε $n \geq 0$

(iii) $E_i^n \cap E_j^n = \emptyset$ για κάθε $1 \leq i, j \leq M_n, i \neq j$

(iv) Για κάθε $n \geq 0$ και $1 \leq j \leq M_{n+1}$, υπάρχει $1 \leq i \leq M_n$ τέτοιο ώστε $E_j^{n+1} \subseteq E_i^n$

(v) $\lim_{n\to\infty} \max_{i\leq M_n} |E_i^n| = 0$

Ειδικότερα, ο θάμνος $(E_i^n)_{n\geq 0}^{i\leq M_n}$ θα ονομάζεται δένδρο, αν

(i) $M_n = 2^n$ για κάθε $n \geq 0$

(ii) $E_i^n = E_{2i-1}^{n+1} \cup E_{2i}^{n+1}$ για κάθε $n \geq 0, 1 \leq i \leq 2^n$

Πρόταση 4.2. *Έστω $(E_i^n)_{n\geq 0}^{i\leq M_n}$ θάμνος στο $[0,1]$. Τότε ο υπόχωρος*

$$D = \left\{ \sum_{k=1}^{d} \lambda_k E_{i_k}^{n_k} : d \in \mathbb{N},\ (\lambda_k)_{k=1}^d \subseteq R,\ (E_{i_k}^{n_k})_{k=1}^d \text{ ξένα ανά δύο} \right\}$$

είναι πυκνός στον $L_1[0,1]$.

Απόδειξη. Από Λήμμα 1.7, αρκεί να δειχθεί ότι το D είναι πυκνό στον υπόχωρο span$\{\chi_A : A \subseteq [0,1]$ Lebesque μετρήσιμο$\}$. Έστω λοιπόν $A \subseteq [0,1]$ Lebesgue μετρήσιμο, και $\varepsilon > 0$ δοθέν.

Αν θέσουμε $t_i^n = \inf E_i^n$ για κάθε $n = 0, 1, \dots$ και $n = 1, \dots M_n$, το σύνολο $\{t_i^n : n \geq 0, i \leq M_n\}$ είναι πυκνό, επειδή $\lim \max_{i \leq M_n} |E_i^n| = 0$. Από κανονικότητα του μέτρου Lebesgue, υπάρχουν $K \subseteq A \subseteq U$, K συμπαγές, U ανοικτό, τέτοια ώστε $|A \setminus K| < \varepsilon$, $|U \setminus A| < \varepsilon$. Το σύνολο $(t_i^n)_{n \geq 0}^{i \leq M_n}$ είναι πυκνό στο $[0,1]$, άρα υπάρχει ακολουθία $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ διαστημάτων με άκρα t_i^n και ξένα ανά δύο εσωτερικά, ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Από τη συμπάγεια του K, επιλέγουμε $n_1, \dots n_k \in \mathbb{N}$ ώστε $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} I_{n_i}$. Αν θέσουμε $f = \chi_{I_{n_1}} + \ldots + \chi_{I_{n_k}} \in D$, είναι $||f - \chi_A||_1 < \varepsilon$ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

□

Αξίζει στο σημείο αυτό να αναφέρουμε κάποιες στοιχειώδεις έννοιες αναφορικά με τις "δενδροειδείς" δομές που ορίσθηκαν παραπάνω. Γενικά, ο διατεταγμένος χώρος $(X, \leq)$ ονομάζεται δένδρο, αν για κάθε $x \in X$ το σύνολο $X_{\leq x} = \{y \in X : y \leq x\}$ είναι καλά διατεταγμένο. Προφανώς ο ορισμός αυτός ικανοποιείται από τους θάμνους και τα δένδρα, όπως τα ορίσαμε προηγουμένως, αν θεωρηθούν εφοδιασμένα με τη διάταξη του περιέχεσθαι.

Δύο σύνολα στο θάμνο $(E_i^n)_{n \geq 0}^{i \leq M_n}$ θα ονομάζονται μή συγκρίσιμα, αν δε συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση διάταξης. Για παράδειγμα, στο δυαδικό δένδρο $(E_i^n)_{n \geq 0}^{i \leq 2^n}$ τα E_1^1 και E_3^2 είναι μή συγκρίσιμα, ενώ δεν ισχύει το ίδιο και για τα E_2^1 και E_5^3.

Αν $(E_i^n)_{n \geq 0}^{i \leq M_n}$ είναι θάμνος, θα συμβολίζουμε με $S(n,i)$ το σύνολο των δεικτών $j = 1, \dots, M_{n+1}$ για τους οποίους είναι $E_j^{n+1} \subseteq E_i^n$, δηλαδή το σύνολο των "αμέσως επομένων" του E_i^n.

Στα ακόλουθα, αν $(\lambda_i^n)_{n \geq 0}^{i \leq M_n}$ είναι κάποια ακολουθία πραγματικών αριθμών, τότε εννοούμε ότι η ακολουθία αυτή είναι εφοδιασμένη με μία δενδροειδή διάταξη.

Θεώρημα 4.3. *Έστω X χώρος Banach. Ο X είναι ισόμορφος με τον $L_1[0,1]$ αν και μόνο αν υπάρχουν ακολουθίες $(f_k^n)_{n \geq 0}^{k \leq M_n} \subseteq X$, $(\lambda_k^n)_{n \geq 0}^{k \leq M_n} \subseteq \mathbb{R}_+$ τέτοιες ώστε:*

(i) $X = \overline{span}(f_i^n)_{n \geq 0}^{i \leq M_n}$

(ii) $f_i^n = \sum_{j \in S(n,i)} \lambda_j^{n+1} f_j^{n+1}$ *και* $\sum_{j \in S(n,i)} \lambda_j^{n+1} = 1$ *για κάθε* $n \geq 0, k \leq M_n$.

(iii) Υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε

$$C \sum_{i=1}^{M_n} |a_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^{M_n} a_i f_i^n \right\| \leq \sum_{i=1}^{M_n} |a_i|$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}, a_1, \dots a_{M_n} \in \mathbb{R}$

Απόδειξη. Έστω X χώρος Banach όπως παραπάνω. Η απόδειξη θα γίνει σταδιακά σε τρία βήματα:

ΒΗΜΑ 1ο: Αν τα $f_{i_1}^{n_1}, \dots, f_{i_m}^{n_m} \in X$ είναι ανά δύο μη συγκρίσιμα, για κάθε $a_1, \dots a_m \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$C \sum_{k=1}^{m} |a_k| \leq \left\| \sum_{k=1}^{m} a_k f_{i_k}^{n_k} \right\| \leq \sum_{k=1}^{m} |a_k|$$

Η δεύτερη ανισότητα είναι προφανής. Μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_m$. Για $k = 1, 2, \dots, m-1$ είναι

$$f_{i_k}^{n_k} = \sum_{(n_k, i_k) \sqsubseteq (n_m, i)} \left(\prod_{n_k < n < n_m} \lambda_{i_{(k,n)}}^{n} \right) f_{i_m}^{n_m}$$

όπου $(\lambda_{i_{(k,n)}}^{n})_{n=n_k+1}^{n_m-1}$ η μοναδική ακολουθία διαδοχικών κόμβων στον αντίστοιχο θάμνο που οδηγεί από το $\lambda_{i_k}^{n_k}$ στο $\lambda_{i_m}^{n_m}$. Είναι

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^{m} a_k f_{i_k}^{n_k} \right\| &= \left\| \sum_{k=1}^{m} \sum_{(n_k, i_k) \sqsubseteq (n_m, i)} a_k \left(\prod_{n_k < n < n_m} \lambda_{i_{(k,n)}}^{n} \right) f_{i_m}^{n_m} \right\| \\
&\geq C \sum_{k=1}^{m} \sum_{(n_k, i_k) \sqsubseteq (n_m, i)} \left| a_k \prod_{n_k < n < n_m} \lambda_{i_{(k,n)}}^{n} \right| \\
&= C \sum_{k=1}^{m} |a_k| \sum_{(n_k, i_k) \sqsubseteq (n_m, i)} \prod_{n_k < n < n_m} \lambda_{i_{(k,n)}}^{n} \\
&= C \sum_{k=1}^{m} |a_k|
\end{aligned}$$

ΒΗΜΑ 2ο: Θα δείξουμε ότι το σύνολο

$$Y = \left\{ \sum_{k=1}^{m} a_k f_{i_k}^{n_k} : m \in \mathbb{N}, f_{i_1}^{n_1}, \dots, f_{i_m}^{n_m} \in X \text{ ανά δύο μη συγκρίσιμα} \right\}$$

είναι πυκνό στον X. Πράγματι, αν $f \in X$ και $\varepsilon > 0$, από υπόθεση υπάρχουν $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$, $f_{i_1}^{n_1}, \dots, f_{i_m}^{n_m}$ τέτοια ώστε

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{m} a_k f_{i_k}^{n_k} \right\| < \varepsilon$$

Όπως και προηγουμένως, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_m$ και ο $\sum_{k=1}^m a_k f_{i_k}^{n_k}$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός κάποιων $f_{j_1}^{n_m}, \ldots f_{j_p}^{n_m}$ τα οποία είναι μεταξύ τους μη συγκρίσιμα.

ΒΗΜΑ 3ο: Θεωρούμε θάμνο $(E_i^n)_{n\geq 0}^{i\leq M_n}$ στο $[0,1]$ με

$$|E_j^{n+1}| = \lambda_i^n |E_i^n| \quad \text{για κάθε } n \geq 0, i = 1, 2, \ldots, M_n$$

όπου $E_j^{n+1} \subseteq E_i^n$. Αν D ο υπόχωρος όπως στην πρόταση 4.2, ορίζεται κατά φυσιολογικό τρόπο ο τελεστής

$$T : D \to Y, \quad T\left(\sum_{k=1}^m a_k E_{i_k}^{n_k}\right) = \sum_{k=1}^m a_k f_{i_k}^{n_k}$$

και από το 1ο βήμα ισχύει

$$C\left\|\sum_{k=1}^m a_k E_{i_k}^{n_k}\right\| \leq \left\|T\left(\sum_{k=1}^m a_k E_{i_k}^{n_k}\right)\right\| \leq \left\|\sum_{k=1}^m a_k E_{i_k}^{n_k}\right\|$$

για κάθε $\sum_{k=1}^m a_k E_{i_k}^{n_k} \in D$. Άρα ο T επεκτείνεται σε ισομορφισμό $T : L_1[0,1] \to X$.

Το αντίστροφο είναι προφανές, με την ακολουθία (f_i^n) της υπόθεσης να είναι το σύστημα Haar. $\square$

4.2 Ε-Τελεστές στον $L_1[0,1]$

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθούν ιδιότητες τελεστών $T : L_1[0,1] \to L_1[0,1]$ οι οποίες συνδέονται με δένδρα στο $[0,1]$. Ειδικότερα, εξετάζονται οι Ε-τελεστές στον $L_1[0,1]$, μια κατηγορία τελεστών την οποία εισήγαγε ο Enflo. Σημειώνουμε ότι η ονομασία Ε-τελεστής οφείλεται στον H.P.Rosenthal.

Στα ακόλουθα, αν $A \subseteq [0,1]$ και T τελεστής στον $L_1[0,1]$, η εικόνα $T\chi_A$ θα συμβολίζεται χάριν απλότητας με TA, αφού δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης. Επιπλέον, αν $\{A_i\}_{i\in I}$ είναι οικογένεια υποσυνόλων του $[0,1]$ θα συμβολίζουμε με $\mathcal{A}(\{A_i\}_{i\in I})$ την άλγεβρα και με $\sigma\mathcal{A}(\{A_i\}_{i\in I})$ την σ-άλγεβρα που παράγονται από αυτήν, αντίστοιχα.

Ορισμός 4.4. Έστω $T : L_1[0,1] \to L_1[0,1]$ τελεστής. Ο T ονομάζεται Ε-τελεστής αν υπάρχουν $\delta > 0$ και θάμνος $(E_i^n)_{n\geq 0}^{i\leq M_n}$ στο $[0,1]$, τέτοιοι ώστε

$$\frac{1}{|E_1^0|}\int \max_{1\leq i\leq M_n} |TE_i^n| > \delta \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

Ειδικότερα, αν ο $T : L_1[0,1] \to L_1[0,1]$ είναι Ε-τελεστής, θα λέμε ότι ο T είναι Ε-τελεστής σταθεράς $\delta > 0$ αν

$$\sup_{(E_i^n)\text{θάμνος}} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{|E_1^0|} \int \max_{1\le i\le M_n} |TE_i^n| \ge \delta$$

Ορισμός 4.5. Έστω $T : L_1[0,1] \to L_1[0,1]$ τελεστής, και $(E_i^n)_{n\ge 0}^{i\le M_n}$ θάμνος στο $[0,1]$. Για κάθε $n = 0, 1, \dots$ ορίζουμε συνάρτηση

$$g_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad g_n = \max_{1\le i\le M_n} |TE_i^n|$$

και μέτρο με τιμές στο θετικό κώνο του $L_1[0,1]$ ως εξής:

$$\begin{aligned} v_n &: \mathcal{A}(E_1^n, \dots, E_{M_n}^n) \to L_1[0,1]_+, \\ v_n(E) &= \sum_{E_i^n \subseteq E} |TE_i^n| \quad \text{για κάθε } E \in \mathcal{A}(E_1^n, \dots, E_{M_n}^n) \end{aligned}$$

Στα ακόλουθα, ο T είναι τελεστής στον $L_1[0,1]$ και (E_i^n) είναι θάμνος στο $[0,1]$.

Λήμμα 4.6. *Έστω $E \in \mathcal{A}((E_i^n)_{n\ge 0}^{i\le M_n})$. Τότε*

(i) Το $v_n(E)$ ορίζεται για αρκετά μεγάλα n. Για τα n αυτά:

(ii) $v_n(E) \le v_{n+1}(E)$

(iii) $||v_n(E)|| \le ||T|| \cdot |E|$

(iv) Για $n \to \infty$ η $v_n(E)$ συγκλίνει σχεδόν παντού και στην $||\cdot||_1$ σε συνάρτηση $v(E) \in L_1[0,1]$.

(v) Η v είναι σ-αθροιστικό μέτρο στην $\mathcal{A}((E_i^n)_{n\ge 0}^{i\le M_n})$ το οποίο επεκτείνεται σε σ-αθροιστικό μέτρο στην $\sigma\mathcal{A}((E_i^n)_{n\ge 0}^{i\le M_n})$.

(vi) Για κάθε $\Gamma \in \sigma\mathcal{A}((E_i^n)_{n\ge 0}^{i\le M_n})$ ισχύει $|T\Gamma| \le v(\Gamma)$ σχεδόν παντού.

Απόδειξη. (i) Το E γράφεται ως ένωση πεπερασμένου πλήθους συνόλων στην $\mathcal{A}((E_i^n)_{n\ge 0}^{i\le M_n})$, έστω των $E_{i_1}^{n_1}, \dots, E_{i_m}^{n_m}$. Για $n \ge \max\{n_1, \dots, n_m\}$ προφανώς το $v_n(E)$ είναι καλά ορισμένο.

(ii) Από την τριγωνική ανισότητα λαμβάνουμε

$$v_n(E) = \sum_{E_i^n \subseteq E} |TE_i^n| \le \sum_{E_i^{n+1} \subseteq E} |TE_i^{n+1}| = v_{n+1}(E)$$

(iii) Πάλι από την τριγωνική ανισότητα

$$\begin{aligned} ||v_n(E)|| &= \left|\left|\sum_{E_i^n \subseteq E} |TE_i^n|\right|\right| \\ &\le \sum_{E_i^n \subseteq E} ||TE_i^n|| \\ &\le \sum_{E_i^n \subseteq E} ||T|| \cdot |E_i^n| = ||T|| \cdot |E| \end{aligned}$$

(iv) Η ακολουθία $(v_n(E))$ είναι κατά σημείο αύξουσα, και το ζητούμενο έπεται άμεσα από το (iii) και το θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης.

(v) Αρχικά παρατηρούμε ότι το v είναι πεπερασμένα προσθετικό. Πράγματι, αν $E_{i_1}^{n_1}, \ldots, E_{i_k}^{n_k} \in \mathcal{A}((E_i^n)_{n\ge 0}^{i\le M_n})$ ξένα ανά δύο, με $n_1 \le \ldots \le n_k$, για $n > n_k$ είναι $v_n\big(\bigcup_{j=1}^k E_{i_j}^{n_j}\big) = \sum_{j=1}^k v_n(E_{i_j}^{n_j})$ άρα και $v\big(\bigcup_{j=1}^k E_{i_j}^{n_j}\big) = \sum_{j=1}^k v(E_{i_j}^{n_j})$

Θα δείξουμε ότι το v είναι σ-αθροιστικό στην $\mathcal{A}((E_i^n)_{n\ge 0}^{i\le M_n})$. Αν $(E_{i_k}^{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων στην $\mathcal{A}((E_i^n)_{n\ge 0}^{i\le M_n})$, για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$ ισχύει

$$\left|\left|\sum_{k=m}^{n} v(E_{i_k}^{n_k})\right|\right| = \left|\left| v\left(\bigcup_{k=m}^{n} E_{i_k}^{n_k}\right)\right|\right| \le ||T|| \left|\bigcup_{k=m}^{n} E_{i_k}^{n_k}\right|$$

άρα η $\sum_{k=1}^{\infty} v(E_{i_k}^{n_k})$ συγκλίνει στον $L_1[0,1]$. Από Λήμμα επέκτασης Καραθεοδωρή, το v επεκτείνεται σε σ-αθροιστικό μέτρο στην $\sigma\mathcal{A}((E_i^n)_{n\ge 0}^{i\le M_n})$, το οποίο θα συμβολίζουμε πάλι με v.

(vi) Έστω $B \in \mathcal{A}((E_i^n)_{n\ge 0}^{i\le M_n})$. Από την τριγωνική ανισότητα λαμβάνουμε $|TB| \le v(B)$. Αν $\Gamma \in \sigma\mathcal{A}((E_i^n)_{n\ge 0}^{i\le M_n})$, επιλέγουμε ακολουθία $(B_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}((E_i^n)_{n\ge 0}^{i\le M_n})$ τέτοια ώστε $|B_n \triangle \Gamma| = ||\chi_{B_n} - \chi_\Gamma||_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Τότε και $TB_n \xrightarrow{||\cdot||_1} T\Gamma$ άρα από Λήμμα 1.2 υπάρχει υπακολουθία, την οποία συμβολίζουμε πάλι με (B_n), τέτοια ώστε $TB_n \to T\Gamma$ κατά σημείο, και $v(B_n) \to v(\Gamma)$ κατά σημείο. Θα είναι $|TB_n| \le v(B_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $|T\Gamma| \leq \upsilon(\Gamma)$.

$\square$

Στην παρούσα και στις επόμενες ενότητες, όταν θα αναφερόμαστε σε συναρτήσεις g_n και σε μέτρα υ_n θα εννοούμε αυτά που ορίσθηκαν παραπάνω, χωρίς να το διευκρινίζουμε.

Λήμμα 4.7. *Η ακλουθία* $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ *συγκλίνει σχεδόν παντού και στη* $||\cdot||_1$ *σε συνάρτηση* $g \in L_1[0,1]$.

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ ισχύει

$$g_{n+1} - \upsilon_{n+1}(E_1^0) \leq g_n - \upsilon_n(E_1^0)$$

Έστω $t \in [0,1]$ και $n \in \mathbb{N}$ δοθέντα. Επιλέγουμε j ώστε $g_{n+1}(t) = |TE_j^{n+1}(t)|$ και i τέτοιο ώστε $E_j^{n+1} \subseteq E_i^n$. Έχουμε

$$\begin{aligned} g_{n+1}(t) - g_n(t) &\leq |TE_j^{n+1}(t)| - |TE_i^n(t)| \\ &= \upsilon_{n+1}(E_j^{n+1})(t) - \upsilon_n(E_i^n)(t) \\ &\leq \upsilon_{n+1}(E_i^n)(t) - \upsilon_n(E_i^n)(t) \\ &\leq \upsilon_{n+1}(E_1^0)(t) - \upsilon_n(E_1^0)(t) \end{aligned}$$

αφού $\upsilon_{n+1} - \upsilon_n \geq 0 \Rightarrow \upsilon_{n+1}(E_1^0 \setminus E_i^n) - \upsilon_n(E_1^0 \setminus E_i^n) \geq 0$.
Επομένως η ακολουθία $(g_n - \upsilon_n(E_1^0))_{n=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα, και υπάρχει το $\lim(g_n - \upsilon_n(E_1^0))$. Από Λήμμα υπάρχει το $\lim \upsilon_n(E_1^0)$, άρα θα υπάρχει και το $g = \lim g_n$ σχεδόν παντού. Επιπλέον

$$0 \leq g_n \leq \upsilon_n(E_1^0) \leq \upsilon(E_1^0) \in L_1[0,1],$$

άρα από το θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης Lebesgue είναι $g_n \xrightarrow{||\cdot||_1} g$ και $g \in L_1[0,1]$.

$\square$

Παρατήρηση:Από το παραπάνω Λήμμα συνάγεται ότι στον ορισμό του E-τελεστή σταθεράς δ, το $\limsup$ μπορεί να αντικατασταθεί και από $\lim$ ή $\liminf$.

Πρόταση 4.8. *Έστω* T_1, T_2 *τελεστές στον* $L_1[0,1]$, *τέτοιοι ώστε ο* $T_1 + T_2$ *είναι E-τελεστής. Τότε ένας τουλάχιστον από τους* T_1, T_2 *είναι E-τελεστής.*

Απόδειξη. Για κάθε $n = 0, 1, \ldots$ και για κάθε θάμνο $(E_i^n)_{n\geq 0}^{i\leq M_n}$ στο $[0,1]$ ισχύει

$$\int \max_{1\leq i\leq M_n} |(T_1+T_2)E_i^n| \leq \int \max_{1\leq i\leq M_n} |T_1 E_i^n| + \int \max_{1\leq i\leq M_n} |T_2 E_i^n|$$

Αν κανένας από τους T_1, T_2 δεν είναι E-τελεστής, τότε έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int \max_{1\leq i\leq M_n} |T_1 E_i^n| = \lim_{n\to\infty} \int \max_{1\leq i\leq M_n} |T_2 E_i^n| = 0$$

οπότε και

$$\lim_{n\to\infty} \int \max_{1\leq i\leq M_n} |(T_1+T_2)E_i^n| = 0$$

το οποίο σημαίνει ότι ο $T_1 + T_2$ δεν είναι E-τελεστής: άτοπο.

□

4.3 Ο $L_1[0,1]$ είναι primary

Ορισμός 4.9. Ο χώρος Banach X ονομάζεται primary αν για κάθε προβολή $P : X \to X$ είτε ο $P(X)$ είτε ο $(I-P)(X)$ είναι ισόμορφος με τον X.

Σε ισοδύναμη διατύπωση, ο X ονομάζεται primary αν για κάθε διάσπαση σε ευθύ τοπολογικό άθροισμα της μορφής $X = Y \oplus Z$ ένας τουλάχιστον από τους Y, Z είναι ισόμορφος με τον X.

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται η απόδειξη των Enflo και Starbird για το ότι ο $L_1[0,1]$ είναι primary. Η απόδειξη αποτελείται από ένα καθαρά 'τεχνικό' κομμάτι και από ένα περισσότερο θεωρητικό, και κεντρικό ρόλο έχει η έννοια του E-τελεστή που εισήχθηκε στα παραπάνω.

Θεώρημα 4.10. *Έστω T E-τελεστής σταθεράς $\delta > 0$, και $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Υπάρχει δένδρο $(A_i^n)_{n\geq 0}^{i\leq 2^n}$ στο $[0,1]$ με*

$$|A_i^n| = \frac{|A_1^0|}{2^n} \qquad \text{για κάθε } n \geq 0, 1 \leq i \leq 2^n$$

και δένδρο $(F_i^n)_{n\geq 0}^{i\leq 2^n}$ στο $[0,1]$ τέτοιο ώστε για κάθε $n = 0, 1, \ldots, i = 1, \ldots 2^n$ να ισχύουν

$$(1-\varepsilon)\delta |A_i^n| \leq \int_{F_1^0} |TA_i^n| \leq (1+\varepsilon) \int_{F_i^n} |TA_i^n|$$

και

$$\sum_{j\neq i} |TA_j^n(t)| \leq \varepsilon |TA_i^n(t)| \qquad \text{σχεδόν παντού στο } F_i^n$$

Απόδειξη. O T είναι E-τελεστής σταθεράς δ, άρα υπάρχει θάμνος $(E_i^n)_{n\geq 0}^{i\leq M_n}$ με

$$\frac{1}{|E_1^0|}\int g_n > \delta\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right) \qquad \text{για άπειρα } n\in\mathbb{N} \tag{4.1}$$

Από Λήμμα 4.7 έχουμε $g_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} g$, άρα η παραπάνω σχέση ισχύει τελικά για κάθε n, και

$$\frac{1}{|E_1^0|}\int_F g \geq \delta\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)$$

Από θεώρημα Egoroff υπάρχει $F\subseteq[0,1]$ τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{|E_1^0|}\int_F g > \delta\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon\right), \tag{4.2}$$

$$g_n \rightrightarrows g \text{ στο } F \tag{4.3}$$

και

$$v_n(E_1^0) \rightrightarrows v(E_1^0) \text{ στο } F \tag{4.4}$$

Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι

$$\inf\{g(t): t\in F\} > 0$$

και επιλέγουμε $\beta>0$ αρκετά μικρό ώστε

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon\right)(1-6\beta)\geq 1-\varepsilon\\ &1-6\beta \geq \frac{1}{1+\varepsilon}\\ &\frac{6\beta}{1-6\beta}\leq\varepsilon\end{aligned}$$

Από τα παραπάνω επιλέγουμε φυσικό N ώστε για $n\geq N$ να ισχύει

$$|g_n-g|<\beta g \qquad \text{στο } F \tag{4.5}$$

και

$$0\leq v(E)-v_n(E)<\beta g \qquad \text{στο } F \tag{4.6}$$

για κάθε $E\subseteq[0,1]$ ώστε να ορίζεται το v_n.

Στη συνέχεια θα επιλέξουμε έναν 'υποθάμνο', επιλέγοντας ένα από τα σύνολα $E_1^N,\dots E_{M_N}^N$ και τα περεταίρω υποσύνολά τους στον αρχικό θάμνο, με την ιδιότητα ότι στον υποθάμνο αυτό, οι εικόνες μέσω T ξένων συνόλων στο θάμνο είναι σχεδόν ξένες, εφόσον περιορισθούν σε ένα δοθέν σύνολο (το οποίο θα ονομαστεί F_0).

Για κάθε $i = 1, 2 \ldots M_N$ θέτουμε

$$G_i = \{t \in F | \text{ για άπειρα } n \text{ υπάρχει } E_j^n \subseteq E_i^N \text{ με } g_n(t) = |TE_j^n(t)|\}$$

Είναι $M_N < \infty$, οπότε

$$\bigcup_{i=1}^{M_N} G_i = F$$

και υπάρχει $i_0 \leq M_N$ τέτοιο ώστε

$$\int_{G_{i_0}} g > \delta\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\right)|E_{i_0}^N| \tag{4.7}$$

-διαφορετικά θα είναι $\int_{G_{i_0}} g \leq \delta\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\right)|E_i^N|$ για κάθε $i = 1, \ldots M_n$, και αθροίζοντας ως προς i παραβιάζεται η (4.2).

Έστω $F_0 = G_{i_0}, B_1^0 = E_{i_0}^N$ και $B_i^n = B_1^0 \cap E_i^n$ για $n \geq 0$. Στο εξής θα περιορίσουμε την προσοχή μας στο θάμνο (B_i^n). Αποδεικνύουμε ότι για κάθε $t \in F_0$ είναι

$$g(t) \leq v(B_1^0)(t) \leq (1 + 2\beta)g(t) \tag{4.8}$$

Για την πρώτη ανισότητα, για άπειρα n υπάρχει $E_j^n \subseteq B_1^0$ τέτοιο ώστε $g_n(t) = |TE_i^n(t)|$, οπότε

$$g_n(t) = |TE_j^n(t)| = v_n(E_j^n)(t) \leq v(B_1^0)(t)$$

και με διάβαση στο όριο έχουμε το ζητούμενο. Για τη δεύτερη ανισότητα, αν $t \in F_0 \subseteq F$ είναι

$$\begin{aligned} v(B_1^0) &\leq v_N(B_1^0)(t) + \beta g(t) \\ &= |TB_1^0(t)| + \beta g(t) \\ &\leq g_N(t) + \beta g(t) \\ &\leq (1 + 2\beta)g(t) \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι, διαισθητικά, η (4.8) σημαίνει ότι στο F_0 οι εικόνες ξένων στοιχείων του θάμνου $(B_i^n)_{n\geq 0}^{i\leq M_n}$ έχουν σχεδόν ξένους φορείς.

Στο σημείο αυτό παρεμβάλλουμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 4.11. *Για κάθε $C \in \sigma\mathcal{A}\left((B_i^n)_{n\geq 0}^{i\leq M_n}\right)$ ορίζουμε*

$$\Phi(C) = \left\{t \in F_0 : |TC(t)| > (1 - 6\beta)v(B_1^0)(t)\right\}$$

Η $\Phi : \sigma\mathcal{A}\left((B_i^n)_{n\geq 0}^{i\leq M_n}\right) \to \mathcal{P}(F_0)$ είναι σ-ομομορφισμός, τέτοιος ώστε αν $C_1, \dots C_m \in \sigma\mathcal{A}\left((B_i^n)_{n\geq 0}^{i\leq M_n}\right)$ ξένα ανά δύο, για κάθε i ισχύει

$$\sum_{j\neq i} |TC_j(t)| \leq \frac{6\beta}{1-6\beta}|TC_i(t)| \tag{4.9}$$

σχεδόν παντού στο $\Phi(C_i)$. Επιπλέον, για κάθε ακολουθία $(C_m)_{m=1}^{\infty} \subseteq \sigma\mathcal{A}\left((B_i^n)_{n\geq 0}^{i\leq M_n}\right)$ τέτοια ώστε $\lim |C_m| = 0$ ισχύει $\lim |\Phi(C_m)| = 0$.

Απόδειξη. (Λήμματος) Έστω $C_1, C_2, \dots, C_m \in \sigma\mathcal{A}\left((B_i^n)\right)$ ξένα ανά δύο. Αν $t \in \Phi(C_i)$ έχουμε

$$v(C_i) \geq |TC_i(t)| \geq (1-6\beta)v(B_1^0)(t)$$

άρα

$$\sum_{j\neq i} |TC_j(t)| \leq v(B_1^0 \backslash C_i)(t) \leq 6\beta v(B_1^0)(t) \leq \frac{6\beta}{1-6\beta}|TC_i(t)| \tag{4.10}$$

Από το παραπάνω προκύπτει και ότι για $j \neq i$ ισχύει $|TC_j(t)| \leq 6\beta v(B_1^0)(t)$, άρα $t \neq \Phi(C_j)$ και τα $\Phi(C_1), \Phi(C_2), \dots, \Phi(C_m)$ είναι ανά δύο ξένα.

Για να δείξουμε ότι η Φ απεικονίζει διαμερίσεις του B_1^0 σε διαμερίσεις του F_0, αρκεί να δειχθεί ότι αν $\bigcup_{i=1}^m C_i = B_1^0$ τότε $\bigcup_{i=1}^m \Phi(C_i) = F_0$. Για κάθε $C \in \sigma\mathcal{A}\left((B_i^n)\right)$ ορίζουμε

$$\psi(C) = \left\{ t \in F_0 : |TC(t)| \geq \frac{1-4\beta}{1+2\beta} v(B_1^0)(t) \right\}$$

Παρατηρούμε ότι $\frac{1-4\beta}{1+2\beta} > 1-6\beta$, οπότε $\psi(C) \subseteq \Phi(C)$. Η απόδειξη θα γίνει σταδιακά σε 3 επιμέρους βήματα, και όλες οι ισότητες συνόλων που αποδεικνύουμε εννοούνται σχεδόν παντού ως προς το μέτρο, και όχι συνολοθεωρητικά.

ΒΗΜΑ 1ο: Αποδεικνύουμε ότι

$$\text{αν } B_1, B_2, \dots, B_m \in \mathcal{A}\left((B_i^n)\right) \text{ με } \bigcup_{i=1}^m B_i = B_1^0, \text{ τότε } \bigcup_{i=1}^m \psi(B_i) = F_0$$

Έστω $t \in F_0$ τυχόν. Επιλέγουμε $n \leq N$ ώστε $B_i \in \mathcal{A}(B_1^n, \dots, B_{M_n}^n)$ για $i = 1, \dots, m$ και να υπάρχει B_j^n που περιέχεται σε κάποιο B_i τέτοιο ώστε

$g_n(t) = |TE_i^n(t)|$. Είναι

$$\begin{aligned}
|TB_i(t)| &\geq |TB_i^n(t)| - \sum_{k \neq j} |TB_k^n(t)| \\
&= 2|TB_j^n(t)| - \sum_{k} |TB_k^n(t)| \\
&= 2|TB_j^n(t)| - v_n(B_1^0)(t) \\
&= 2g_n(t) - v_n(B_1^0)(t) \\
&\geq (2-2\beta)g(t) - v(B_1^0)(t) \\
&\geq \frac{2-2\beta}{1+2\beta} v(B_1^0)(t) - v(B_1^0)(t) \\
&= \frac{1-4\beta}{1+2\beta} v(B_1^0)(t)
\end{aligned}$$

άρα $t \in \psi(B_i)$, και $\bigcup_{i=1}^m \psi(B_i) = F_0$.

ΒΗΜΑ 2ο: Έστω $C \in \sigma\mathcal{A}\left((B_i^n)\right)$. Υπάρχει ακολουθία $(B_n)_{n=1}^\infty \subseteq \sigma\mathcal{A}\left((B_i^n)\right)$ τέτοια ώστε $|B_n \triangle C| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Υπάρχει υπακολουθία $(B_{k_n})_{n=1}^\infty$ τέτοια ώστε $|TB_{k_n}| \to |TC|$ σχεδόν παντού. Είναι $1 - 6\beta < \frac{1-4\beta}{1+2\beta}$ άρα $\chi_{\psi(B_{k_n})\setminus\Phi(C)} \to 0$ σχεδόν παντού, και από το θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης προκύπτει

$$||\chi_{\psi(B_{k_n})\setminus\Phi(C)}||_1 = |\psi(B_{k_n})\setminus\Phi(C)| \to 0$$

ΒΗΜΑ 3ο: Θα δείξουμε, τέλος, ότι αν $C_1, C_2, \ldots C_m \in \sigma\mathcal{A}\left((B_i^n)\right)$ ξένα ανά δύο με $\bigcup_{i=1}^m = B_1^0$ τότε $\bigcup_{i=1}^m \Phi(C_i) = F_0$. Πράγματι, έστω $\eta > 0$ τυχόν. Επιλέγουμε $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{A}\left((B_i^n)\right)$ με $\bigcup_{i=1}^m B_i = B_1^0$ και

$$|\psi(B_i)\setminus\Phi(C_i)| < \frac{\eta}{m} \qquad \text{για } i = 1, 2, \ldots, m$$

Τότε

$$\begin{aligned}
|F_0\setminus\Phi(C_i)| &= \left|\bigcup_{i=1}^m \psi(B_i)\setminus\bigcup_{i=1}^m \Phi(C_i)\right| \\
&= \left|\bigcup_{i=1}^m \left[\psi(B_i)\setminus\bigcup_{j=1}^m \Phi(C_j)\right]\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^m \left|\psi(B_i)\setminus\bigcup_{j=1}^m \Phi(C_j)\right| \\
&< \eta
\end{aligned}$$

και το η επιλέχθηκε τυχαία, οπότε $F_0 = \bigcup_{i=1}^m \Phi(C_i)$. Από την (4.8) έχουμε

$$\Phi(C) \subseteq \{t \in F_0 : |TC(t)| > (1-6\beta) \inf_{s\in F_0} g(s)\}$$

άρα αν για την ακοουθία $(C_m)_{m=1}^{\infty} \subseteq \sigma\mathcal{A}\left((B_i^n)_{n\geq 0}^{i\leq M_n}\right)$ είναι $\lim |C_m| = 0$, τότε $||TC_m||_1 \to 0$ και επομένως $|\Phi(C_m)| \to 0$.

Αν $(C_i)_{i=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων στην $\sigma\mathcal{A}\left((B_i^n)_{n\geq 0}^{i\leq M_n}\right)$, τότε

$$\lim_{m\to\infty} \left| \Phi\left(\bigcup_{i=m}^{\infty} C_i\right) \right| = 0$$

άρα υπάρχει υπακολουθία $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $\chi_{\Phi\left(\bigcup_{i=m_k}^{\infty} C_i\right)} \to 0$ σχεδόν παντού. Τότε

$$\chi_{\Phi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right)} = \sum_{i=1}^{m_k-1} \chi_{\Phi(C_i)} + \chi_{\Phi\left(\bigcup_{i=m_k}^{\infty} C_i\right)} \to \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{\Phi(C_i)}$$

σχεδόν παντού, άρα $\Phi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Phi(C_i)$, και η Φ έχει τις ζητούμενες ιδιότητες. Η απόδειξη του Λήμματος έχει ολοκληρωθεί. $\square$

Μπορούμε τώρα να κατασκευάσουμε τα δένδρα $(F_i^n)_{n\geq 0}^{i\leq 2^n}$ και $(A_i^n)_{n\geq 0}^{i\leq 2^n}$. Ορίζουμε το μέτρο

$$\mu : \sigma\mathcal{A}\left((B_i^n)_{n\geq 0}^{i\leq 2^n}\right) \to \mathbb{R}^3, \quad \mu(C) = \left(|C|,\ \int_{\Phi(C)} v(B_1^0),\ \int_{F_0} v(C)\right)$$

Το μέτρο μ είναι μη ατομικό, αφού για $|C| \to 0$ έχουμε $|\Phi(C)| \to 0$ και $||v(C)|| \to 0$. Από θεώρημα Liapunoff προκύπτει ότι το μ έχει κυρτό σύνολο τιμών. Παρατηρούμε ότι

$$\mu(B_1^0) = \left(|B_1^0|,\ \int_{F_0} v(B_1^0),\ \int_{F_0} v(B_1^0)\right)$$

και μπορούμε να κατασκευάσουμε δένδρο $(A_i^n)_{n\geq 0}^{i\leq 2^n}$ τέτοιο ώστε $A_1^0 = B_1^0$ και $\mu(A_i^n) = \frac{1}{2^n}\mu(A_1^0)$, δηλαδή

$$|A_i^n| = \frac{1}{2^n}|A_1^0| \tag{4.11}$$

και

$$\int_{\Phi(A_i^n)} v(A_1^0) = \frac{1}{2^n}\int_{F_0} v(A_1^0) = \int_{F_0} v(A_i^n) \tag{4.12}$$

για κάθε $n \geq 0$, $i \leq 2^n$.

Ορίζουμε $F_i^n = \Phi(A_i^n)$ για $n \geq 0$, $i \leq 2^n$. Συγκεκριμένα είναι $F_1^0 = F_0 = G_{i_0}$, και έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{F_i^n} |TA_i^n| &\geq (1-6\beta) \int_{\Phi(A_i^n)} v(A_1^0) \\ &= (1-6\beta)\frac{1}{2^n} \int_{F_1^0} v(A_1^0) \\ &\geq (1-6\beta)\frac{1}{2^n}\delta\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)|A_1^0| \\ &\geq (1-\varepsilon)\delta\frac{|A_1^0|}{2^n} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \int_{F_i^n} |TA_i^n| &\geq (1-6\beta) \int_{\Phi(A_i^n)} v(A_1^0) \\ &= (1-6\beta) \int_{F_1^0} v(A_i^n) \\ &\geq (1-6\beta) \int_{F_1^0} |TA_i^n| \\ &\geq \frac{1}{1+\varepsilon} \int_{F_1^0} |TA_i^n| \end{aligned}$$

Από την (4.10) προκύπτει και η ζητούμενη σχέση

$$\sum_{j\neq i} |TA_j^n(t)| \leq \varepsilon |TA_i^n(t)| \quad \text{σχεδόν για κάθε } t \in F_i^n$$

□

Θεώρημα 4.12. *Έστω $T : L_1[0,1] \to L_1[0,1]$ E-τελεστής σταθεράς δ, και $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Υπάρχει σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ στο $[0,1]$ που αποτελείται από Lebesgue μετρήσιμα σύνολα, τέτοια ώστε*

(i) Ο $L_1([0,1], \mathcal{A}, \lambda|_{\mathcal{A}}) = L_1(\lambda|_{\mathcal{A}})$ είναι ισομετρικός με τον $L_1[0,1]$.

(ii) Ο $T|L_1(\lambda|_{\mathcal{A}})$ είναι ισομορφισμός, και για κάθε $f \in L_1(\lambda|_{\mathcal{A}})$ ισχύει

$$||Tf|| \geq \frac{(1-\varepsilon)^2}{1+\varepsilon}\delta||f||$$

(iii) Ο $T[L_1(\lambda|_{\mathcal{A}})]$ είναι συμπληρωματικός.

Απόδειξη. Θεωρούμε τα δένδρα $(F_i^n)_{n\geq 0}^{i\leq 2^n}$ και $(A_i^n)_{n\geq 0}^{i\leq 2^n}$ όπως στο θεώρημα 4.9 και θέτουμε $\mathcal{A} = \sigma\mathcal{A}\left((A_i^n)_{n\geq 0}^{i\leq 2^n}\right)$. Από τη σχέση $|A_i^n| = \frac{1}{2^n}|A_1^0|$ προκύπτει ότι η $\mathcal{A}$ είναι μη ατομική, άρα ο $L_1([0,1],\mathcal{A},\lambda|_\mathcal{A}) = L_1(\lambda|_\mathcal{A})$ είναι ισομετρικός με τον $L_1[0,1]$. Από το θεώρημα 4.9 επίσης προκύπτει ότι για κάθε n, i ισχύουν

$$\int_{F_i^n} |TA_i^n| \geq \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\delta|A_i^n|$$

και

$$\sum_{j\neq i}\int_{F_j^n} |TA_i^n| \leq \varepsilon\int_{F_i^n} |TA_i^n|$$

άρα για κάθε $a_1, a_2, \ldots, a_{2^n} \in \mathbb{R}$ είναι

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{2^n} a_i TA_i^n\right\| &= \int\left|\sum_{i=1}^{2^n} a_i TA_i^n\right| = \sum_{i=1}^{2^n}\int_{F_i^n}\left|\sum_{j=1}^{2^n} a_j TA_j^n\right| \\
&\geq \sum_{i=1}^{2^n}\int_{F_i^n}\left(|a_i TA_i^n| - \sum_{j\neq i}|a_j TA_j^n|\right) \\
&= \sum_{i=1}^{2^n}\int_{F_i^n}|a_i TA_i^n| - \sum_{i=1}^{2^n}\sum_{j\neq i}\int_{F_i^n}|a_j TA_j^n| \\
&= \sum_{i=1}^{2^n}\int_{F_i^n}|a_i TA_i^n| - \sum_{i=1}^{2^n}\sum_{j\neq i}\int_{F_j^n}|a_i TA_i^n| \\
&= \sum_{i=1}^{2^n}|a_i|\int_{F_i^n}|TA_i^n| - \sum_{i=1}^{2^n}|a_i|\sum_{j\neq i}\int_{F_j^n}|TA_i^n| \\
&\geq \sum_{i=1}^{2^n}|a_i|\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\delta|A_i^n| - \sum_{i=1}^{2^n}|a_i|\varepsilon\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\delta|A_i^n| \\
&= \sum_{i=1}^{2^n}\frac{(1-\varepsilon)^2}{1+\varepsilon}\delta|a_i||A_i^n| \\
&= \frac{(1-\varepsilon)^2}{1+\varepsilon}\delta\left\|\sum_{i=1}^{2^n} a_i\chi_{A_i^n}\right\|
\end{aligned}$$

άρα η $\{TA_1^n, \ldots, TA_{2^n}^n\}$ είναι s-βασική, ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του $\ell_1^{2^n}$. Όμοια όπως στην απόδειξη του θεωρήματος 4.3, δείχνουμε ότι ο

$$Z = \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i^{m_i}} : n\in\mathbb{N}, (a_i)_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}, (A_i^{m_i})_{i=1}^n \text{ μη συγκρίσιμα}\right\}$$

είναι πυκνός υπόχωρος του $L_1(\lambda|_{\mathcal{A}})$, και $||Tf|| \geq \frac{(1-\varepsilon)^2}{1+\varepsilon}\delta||f||$ για κάθε $f \in Z$, οπότε προκύπτει το δεύτερο ζητούμενο.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο $\text{span}\{TA_1^n, \ldots, TA_{2^n}^n\}$ είναι πεπερασμένης διάστασης, επομένως και συμπληρωματικός, και έστω $P_n : L_1[0,1] \to \text{span}\{TA_1^n, \ldots, TA_{2^n}n\}$ η αντίστοιχη προβολή. Παρατηρούμε ότι $P_{n+1}P_n = P_n$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ άρα και $P_m P_n = P_n$ για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ με $m > n$. Από την ανισότητα

$$\frac{(1-\varepsilon)^2}{1+\varepsilon}\delta\left|\left|\sum_{i=1}^{2^n} a_i \chi_{A_i^n}\right|\right| \leq \left|\left|\sum_{i=1}^{2^n} a_i T A_i^n\right|\right| \leq ||T||\left|\left|\sum_{i=1}^{2^n} a_i \chi_{A_i^n}\right|\right|$$

που ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_{2^n} \in \mathbb{R}$, και από το γεγονός ότι ο υπόχωρος που παράγουν οι γραμμικοί συνδυασμοί $(\chi_{A_{i_k}^{n_k}})_{k=1}^N$ ανά δύο μη συγκρίσιμων είναι πυκνός στον $L_1(\lambda|_{\mathcal{A}})$, προκύπτει ότι

$$||P_n|| \leq \frac{1-\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}\frac{||T||}{\delta} \quad \text{για } n = 1, 2, \ldots$$

Όμοια όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.27 (4ο βήμα) αποδεικνύεται ότι υπάρχει υπακολουθία $(P_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ που συγκλίνει w^* σε τελεστή $P : L_1[0,1] \to T[L_1(\lambda|_{\mathcal{A}})]$ ο οποίος είναι γραμμικός φραγμένος, με

$$||P|| \leq \frac{1-\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}\frac{||T||}{\delta}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} P^2 &= P \cdot P = \lim_{k\to\infty} P \cdot P_{n_k} \\ &= \lim_{k\to\infty}\left(\lim_{n_i > n_k} P_{n_i} P_{n_k}\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} P_{n_k} \\ &= P \end{aligned}$$

και η P αποτελεί φραγμένη προβολή.

□

Πρόταση 4.13. *Έστω $T : L_1[0,1] \to L_1[0,1]$ ισομορφική εμφύτευση. Για κάθε $E \subseteq [0,1]$ μετρήσιμο με $|E| > 0$ και για κάθε $(E_i)_{i=1}^M$ διαμέριση του E, ισχύει*

$$\frac{1}{|E|}\int \max_{1\leq i\leq M} |TE_i| \geq \frac{1}{||T^{-1}||^2}$$

Απόδειξη. Για κάθε $a_1, a_2, \dots, a_M \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{M} a_i T E_i \right\| &= \left\| T\left(\sum_{i=1}^{M} a_i E_i \right) \right\| \\ &\geq \frac{1}{||T^{-1}||} \left\| \sum_{i=1}^{M} a_i E_i \right\| \\ &= \frac{1}{||T^{-1}||} \sum_{i=1}^{M} |a_i||E_i| \end{aligned}$$

και θέτοντας όπου a_i το $\frac{a_i}{E_i}$ για $i = 1, 2 \dots M$ λαμβάνουμε

$$\left\| \sum_{i=1}^{M} \frac{a_i}{|E_i|} T E_i \right\| \geq \frac{1}{||T^{-1}||} \sum_{i=1}^{M} |a_i| \quad \text{για κάθε } a_1, \dots, a_M \in \mathbb{R}$$

οπότε από την πρόταση 3.24 έχουμε

$$\left\| \max_{1 \leq i \leq M} \left| \frac{a_i}{|E_i|} T E_i \right| \right\| \geq \frac{1}{||T^{-1}||^2} \sum_{i=1}^{M} |a_i| \quad \text{για κάθε } a_1, a_2, \dots, a_M \in \mathbb{R}$$

και θέτοντας $a_i = |E_i|, i = 1, 2 \dots M$ προκύπτει

$$\left\| \max_{1 \leq i \leq M} |T E_i| \right\| \geq \frac{1}{||T^{-1}||^2} \sum_{i=1}^{M} |E_i| = \frac{|E|}{||T^{-1}||^2}$$

άρα

$$\frac{1}{|E|} \int \max_{1 \leq i \leq M} |T E_i| \geq \frac{1}{||T^{-1}||^2}$$

□

Πόρισμα 4.14. *Έστω ο χώρος $Z = L_1[0,1]$. Αν X είναι υπόχωρος του Z τέτοιος ώστε $X \sim L_1[0,1]$, υπάρχει Y υπόχωρος του X ώστε $Y \sim L_1[0,1]$ και Y συμπληρωματικός στον Z.*

Απόδειξη. Έστω $T : L_1[0,1] \to Z$ ισομορφική εμφύτευση, με $T(L_1[0,1]) = X$. Από την πρόταση 4.13 ο T είναι Ε-τελεστής, και το ζητούμενο έπεται από το θεώρημα 4.12.

□

Λήμμα 4.15. *(Μέθοδος Διάσπασης Pelczyński): Έστω X συμπληρωματικός υπόχωρος του $L_1[0,1]$, ο οποίος περιέχει συμπληρωματικό υπόχωρο ισόμορφο με τον $L_1[0,1]$. Τότε ο X είναι ισόμορφος με τον $L_1[0,1]$.*

Απόδειξη. Έστω $X = L_1[0,1] \oplus Y$ και $L_1[0,1] = X \oplus Z$. Είναι

$$
\begin{aligned}
X &\sim L_1[0,1] \oplus Y \\
&\sim (L_1[0,1] \oplus L_1[0,1] \oplus \dots)_1 \oplus Y \\
&\sim (L_1[0,1] \oplus L_1[0,1] \oplus \dots)_1 \oplus L_1[0,1] \oplus Y \\
&\sim ((X \oplus Z) \oplus (X \oplus Z) \oplus \dots)_1 \oplus X \\
&\sim (X \oplus X \oplus \dots)_1 \oplus (Z \oplus Z \oplus \dots)_1 \oplus X \\
&\sim (X \oplus X \oplus \dots)_1 \oplus (Z \oplus Z \oplus \dots)_1 \\
&\sim (X \oplus Z)_1 \oplus (X \oplus Z)_1 \oplus \dots \\
&\sim (L_1[0,1] \oplus L_1[0,1] \oplus \dots)_1 \\
&\sim L_1[0,1]
\end{aligned}
$$

□

Θεώρημα 4.16. *(Enflo-Starbird): Ο $L_1[0,1]$ είναι primary.*

Απόδειξη. Έστω $L_1[0,1] = X \oplus Y$, και $P : L_1[0,1] \to L_1[0,1]$ προβολή τέτοια ώστε $\mathrm{Im}P = X, \mathrm{Im}(I-P) = Y$. Ισχύει $P + (I-P) = I$, και ο ταυτοτικός τελεστής είναι E-τελεστής, άρα από πρόταση 4.8 μία από τις προβολές P, $I-P$ είναι E-τελεστής.

Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η $P : L_1[0,1] \to X$ είναι E-τελεστής, και από θεώρημα 4.12 ο X περιέχει συμπληρωματικό υπόχωρο ισόμορφο με τον $L_1[0,1]$. Από Λήμμα 4.15 προκύπτει ότι $X \sim L_1[0,1]$, οπότε ο $L_1[0,1]$ είναι primary. □

Βιβλιογραφία

[1] Σ.Αργυρός, *Σημειώσεις Παραδόσεων Πραγματικής Ανάλυσης*, Δεύτερη Έκδοση, Ιανουάριος 2003

[2] Σ.Αργυρός, *Σημειώσεις Παραδόσεων Συναρτησιακής Ανάλυσης*, Δεύτερη Έκδοση, Μάιος 2004

[3] Heim Brezis, *Συναρτησιακή Ανάλυση, Θεωρία και Εφαρμογές*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα 1997

[4] P.G. Casazza, C.A. Cottman, Bor-Luh Lin, *On Primary Banach Spaces*, Bulletin of the American Mathematical Society, 82 (1976) pp. 71-73

[5] John B. Conway, *A course in functional analysis*, Springer-Verlag New York Inc. 1985

[6] Constantin Costara, Dimitru Popa, *Exercises in Functional Analysis*, Kluver Academic Publishers, 2003

[7] Joseph Diestel, *Geometry of Banach Spaces* Springer-Verlag Berlin·Heidelberg·New York, 1975

[8] Joseph Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces* Springer-Verlag New York, Inc., 1994

[9] Leonard E. Dor, *On Progections in L1*, Annals of Mathematics 102 (1975) pp.463-474

[10] Leonard E. Dor, *On Embeddings of Lp Spaces in Lp spaces*, Ohio State University (1975)

[11] P. Enflo, T.W. Starbird, *Subspaces of L1 containing L1*, Studia Math. 65, (1979) 203-275

[12] Marián Fabian, Petr Habala, Petr Hájek, Vicente Montesinos, Václav Zizler, *Banach Space Theory, The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*, Springer, 2010

[13] Sylvie Guerre-Delabriére, *Classical Sequences in Banach Spaces*, Marcel Dekker Inc, 1992

[14] Petr Habala, Petr Hájek, Václav Zizler, *Introduction to Banach Spaces, Vol I*, Matfyzpress, Vydavaltestvi, Mathematicko-Fyzikalni Fakulty Univerzity Karlovy, 1996

[15] Petr Habala, Petr Hájek, Václav Zizler, *Introduction to Banach Spaces, Vol II*, Matfyzpress, Vydavaltestvi, Mathematicko-Fyzikalni Fakulty Univerzity Karlovy, 1996

[16] Paul Halmos, *Measure Theory*, Springer-Verlag New York·Heidelberg·Berlin (1974)

[17] W.B.Johnson, J.Lindenstrauss, *Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Volume 1*, North-Holland, 2001

[18] Σωτήριος Καρανάσιος, *Θεωρία Τελεστών και Εφαρμογές*, Έκδοση 1η, Αθήνα 2009

[19] Γ.Κουμουλής, Σ.Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μέτρου*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 2005

[20] J. Lindentsrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I and II*, Springer-Verlag Berlin·Heidelberg·New York (1977)

[21] D.Maharam, *On Homogeneous Measure Algebras*, Proc.Nat.Acad.Sci. Usa 28 (1942), pp. 108-111

[22] A.Martinez-Abejon, E.Odell, M.M.Popov, *Some open problems on the classical function space L1*, Matematychni Studii, 24(2005), pp. 173-191

[23] A.Pelczyński, *Projections in Certain Banach Spaces*, Studia Math. 19 (1960), pp. 209-228

[24] Haskell P. Rosenthal, *On relatively disjoint families of measures, with some applications to Banach space theory*, Studia Math. 37 (1970), pp. 209-228

[25] H.L.Royden, *Real Analysis*, The Macmillan Company, Collier-Macmillan Limited, London, 1968

[26] Walter Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, Inc. 1973

[27] H.H. Schaefer, *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer-Verlag New York·Heidelberg·Berlin (1974)

[28] P.Wojtaszczyk, *Banach Spaces for Analysts*, Cambridge University Press, 1991