

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΡΟΩΝ ΣΕ ΧΩΡΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΠΡΙΝΤΕΖΗΣ ΜΑΡΚΟΣ



Εργαστήριο Αεροδυναμικής
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Αθήνα, Ιούνιος 2012

Προσομοίωση Ροών σε Χωρία Μεταβλητής Γεωμετρίας

Πρίντεζης Μάρκος

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



Μεταπτυχιακή εργασία για την ολοκλήρωση του προγράμματος
Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες

υπό την επίβλεψη του καθηγητή
Βουτσινά Σπύρου

Αθήνα, Ιούνιος 2012

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία έγινε αποδεκτή από την ακόλουθη τριμελή επιτροπή:

Επιβλέπων:

Βουτσινάς Σπυρίδων

Αναπληρωτής Καθηγητής

Τομέας Ρευστών,
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών,
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο,
Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 15780,
Ζωγράφου, Αθήνα
spyros@fluid.mech.ntua.gr

Μέλη Επιτροπής:

Χρυσοβέργης Ίων

Καθηγητής

Τομέας Μαθηματικών,
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
και Φυσικών Επιστημών,
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο,
Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 15780,
Ζωγράφου, Αθήνα
ichriso@math.ntua.gr

Ριζιώτης Βασίλειος

Λέκτορας

Τομέας Ρευστών,
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών,
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο,
Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 15780,
Ζωγράφου, Αθήνα
vasilis@fluid.mech.ntua.gr

Σχεδίαση εξωφύλλου:

Η εικόνα του εξωφύλλου απεικονίζει στροβίλους ροής αέρα με ταχύτητα 0.1mach γύρω από μία πτέρυγα NACA0012 που βρίσκεται υπό κλίση 16 μοιρών. Σχεδιάστηκε από αποτελέσματα της παρούσας εργασίας από τον συγγραφέα με τη βοήθεια του προγράμματος ParaView.

Το παρόν στοιχειοθετήθηκε από τον συγγραφέα σε περιβάλλον L^AT_EX₂ε. Τα γραφήματα σχεδιάστηκαν επίσης από τον συγγραφέα με τη χρήση του προγράμματος gnuplot.

Copyright © Printezis Markos, 2012.

Abstract

While simulating flows in spaces with moving boundaries, arises the need to compute the governing equations of fluid dynamics on deformable grids. In this current thesis, we introduce the use of Geometric Conservation Law (GCL), in what manner it affects time-accuracy and stability of numerical schemes and how it can be satisfied in practice. We, finally, present three major categories of examples; flow simulation over: a) arbitrary deforming grid, b) pitching airfoil and c) flapping airfoil, where we can observe the effects of GCL implementation and analyze the corresponding theory through the numerical results.

Keywords: geometric conservation law; gcl; numerical scheme; computational fluid dynamics; finite volumes; deformable grids; aerodynamics; aeroelasticity; pitching airfoil; flapping airfoil

Περίληψη

Για την προσομοίωση ροών σε χωρία με μεταβαλλόμενη γεωμετρία, απαιτείται η επίλυση των εξισώσεων των ρευστών σε δυναμικά παραμορφώσιμα πλέγματα. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζουμε την λογική του Γεωμετρικού Νόμου Διατήρησης (*GCL*), με ποιον τρόπο επηρεάζει την ακρίβεια και την ευστάθεια των αριθμητικών μεθόδων και δείχνουμε πώς εφαρμόζεται στην πράξη. Παραθέτουμε, τέλος, τρεις κατηγορίες παραδειγμάτων: προσομοίωση ροών: α) σε χωρία με αυθαίρετες πλεγματικές παραμορφώσεις, β) γύρω από πτέρυγα σε γωνιακή ταλάντωση και γ) γύρω από πτέρυγα με κινούμενη υπεραντωτική διάταξη ακμής φυγής, όπου και γίνεται εμφανής η επίδραση της εφαρμογής του *GCL* και αναλύουμε μέσα από αριθμητικά αποτελέσματα την ανεπτυγμένη θεωρία.

Λέξεις κλειδιά: γεωμετρικός νόμος διατήρησης, αριθμητική μέθοδος, υπολογιστική ρευστομηχανική, πεπερασμένοι όγκοι, παραμορφώσιμα πλέγματα, αεροδυναμική, αεροελαστική, πτέρυγα σε γωνιακή ταλάντωση, υπεραντωτική διάταξη ακμής φυγής

Αυτή η σελίδα έμεινε σκόπιμα κενή

*Στη μνήμη του παππού μου. . .
Πρίντζης Μάρκος (1926-2011)*

Αυτή η σελίδα έμεινε σκόπιμα κενή

Ευχαριστίες

Αρκετά άτομα αξίζουν να βρίσκονται σε αυτή τη σελίδα, ο καθένας για ξεχωριστούς λόγους. Πρώτα από όλα ο καθηγητής μου, Σπύρος Βουτσινάς, που μου έδωσε τη δυνατότητα να διευρύνω με αυτή την εργασία τους μαθηματικούς μου ορίζοντες σε νέα μονοπάτια. Το πέρασμά μου στον τομέα της αεροδυναμικής δεν ήταν εύκολο στην αρχή, αλλά με βοήθησε με την καθοδήγησή του να αντιληφθώ γρήγορα τις νέες έννοιες και να αποκτήσω σε ένα βασικό βαθμό τη διαίσθηση που κατέχει κάποιος απόφοιτος μηχανολογικής σχολής. Τον ευχαριστώ πολύ για την συνεργασία μας και εύχομαι να ξανασυναντηθούν στο μέλλον οι δρόμοι μας.

Δεν θα μπορούσα να μην ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάκτορα και συνεργάτη Γιώργο Παπαδάκη για τις ατελείωτες ώρες συζητήσεων και συμβουλών που μου αφιέρωσε όλο αυτό το χρόνο. Χωρίς την δική του συμβολή και εμπειρία, η εκπόνηση αυτής της εργασίας θα ήταν πολύ δυσκολότερη και σίγουρα πιο επίπονη. Τον ευχαριστώ για την παραχώρηση κομματιών της έρευνάς του καθώς και της τεχνογνωσίας του πάνω σε αυτά (και της υπομονής του) και του εύχομαι την καλύτερη συνέχεια στην ακαδημαϊκή του καριέρα που διαφαίνεται λαμπρή.

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές μου από τα προπτυχιακά μου χρόνια για τις γνώσεις και τα ένστικτα που μου δημιούργησαν. Τον Δημήτρη Μητσούδη για την πρώτη επαφή μου με την Αριθμητική Ανάλυση, βοηθώντας με να αγαπήσω αυτό τον τομέα περισσότερο και να έχω όρεξη να συνεχίσω να μαθαίνω. Τον Χαράλαμπο Μακριδάκη για τα μαθήματα αριθμητικής επίλυσης και το βαθύ θεωρητικό υπόβαθρο που μου μετέδωσε. Τελευταίο, αλλά καθόλου έσχατο, τον καθηγητή μου Θεόδωρο Κατσαούνη για τις διαλέξεις Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής και φυσικά για τις συμβουλές του και την εμπειρία που μου προσέφερε, κατά την συνεργασία μας στην εκπόνηση της προπτυχιακής μου εργασίας και τη γενικότερη καθοδήγησή του. Χωρίς αυτούς δεν θα είχα το επιστημονικό υπόβαθρο να πορευθώ στις μεταπτυχιακές μου σπουδές και γι' αυτό τους ευχαριστώ και αναπολώ ευχάριστα τις διαλέξεις τους.

Πριν το τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την απεριόριστη στήριξή τους, συναισθηματική και οικονομική, αλλά κυρίως για την πίστη τους στο να επενδύσω σε ένα προϊόν το οποίο στην Ελλάδα του 21ου αιώνα δεν αξιοποιείται, τη γνώση.

Στους φίλους μου, που με βοήθησαν να γίνει πιο ευχάριστος ο τελευταίος χρόνος δουλειάς, αλλά και σε όσους ανέφερα, οφείλω πολλή ευγνωμοσύνη. Σας ευχαριστώ όλους και έναν ένα ξεχωριστά!

Πρίντζης Μάρκος

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών,
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
mprintez@gmail.com

Αυτή η σελίδα έμεινε σκόπιμα κενή

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Σύντομη ιστορική ανασκόπηση	1
1.2	Οι ερευνητικοί προσανατολισμοί σήμερα	2
1.3	Διάρθρωση της εργασίας	2
2	Η Βασική Αριθμητική Μέθοδος	5
2.1	Οι νόμοι διατήρησης	6
2.1.1	Εξίσωση της μάζας	6
2.1.2	Εξίσωση της ορμής	7
2.1.3	Εξίσωση της ενέργειας	8
2.2	Εξισώσεις Navier-Stokes	9
2.3	Χωρική διακριτοποίηση	10
2.4	Χρονική διακριτοποίηση	11
2.4.1	Μόνιμες ροές	11
2.4.2	Μη-μόνιμες ροές	12
2.5	Τυπικά πλέγματα	12
3	Ο Γεωμετρικός Νόμος Διατήρησης (GCL)	15
3.1	Εισαγωγικά στοιχεία	15
3.2	Χαρακτηριστικά του GCL	16
3.3	GCL και ακρίβεια	17
3.4	GCL και ευστάθεια	18
3.5	Διακριτός γεωμετρικός νόμος διατήρησης (DGCL)	19
3.5.1	Εξαγωγή του GCL	20

3.5.2	Ορισμός του DGCL	20
3.6	Ικανοποίηση του GCL	21
3.7	Αλγόριθμος μετακίνησης του πλέγματος	22
3.8	Υπολογισμός των ταχυτήτων του πλέγματος	23
4	Αριθμητικά αποτελέσματα	27
4.1	Αυθαίρετες πλεγματικές παραμορφώσεις	28
4.2	Πτέρυγα σε γωνιακή ταλάντωση	30
4.3	Πτέρυγα με κινούμενη υπεραντωτική διάταξη (flap)	33
4.3.1	Σταθερή αεροτομή στις 0°	35
4.3.2	Σταθερή αεροτομή στις 8°	41
4.3.3	Σταθερή αεροτομή στις 12°	47
4.3.4	Σταθερή αεροτομή στις 16°	53
	Βιβλιογραφία	59

Κατάλογος Σχημάτων

2.1	Πεπερασμένος όγκος ελέγχου.	6
2.2	Υβριδικό unstructured mesh.	13
4.1	Πεδίο ταχυτήτων των κόμβων και η κινούμενη c-πλεγματική γραμμή	28
4.2	Αντιπαράθεση λύσης που ικανοποιεί το GCL και λύσης που το παραβιάζει, γύρω από τη λύση αναφοράς του προβλήματος. Κεκλυμένη NACA0012 στις 2° με ταχύτητα ροής 0.5mach.	29
4.3	Η λύση αναφοράς (a), η λύση από την πλεγματική παραμόρφωση (e) και οι λύσεις από το σταθεροποιημένο grid στις θέσεις που προκύπτουν έπειτα από το: 1/4 (b), 1/2 (c) και τα 3/4 (d) της ταλάντωσης.	30
4.4	Στιγμιότυπα ταλάντωσης πτέρυγας NACA0012 γύρω από άξονα (+) από τις 0° στις ±5° και ±10°.	31
4.5	Το C_L ως προς το χρόνο για πτέρυγα NACA0012 γύρω από τις 0° με εύρος ταλάντωσης ±2°.	32
4.6	Το απόλυτο σφάλμα μεταξύ των δύο λύσεων.	32
4.7	Το C_L ως προς την κλίση της πτέρυγας NACA0012 γύρω από τις 0° με εύρος ταλάντωσης ±2°.	32
4.8	Στιγμιότυπο της κατανομής του C_p των σημείων πτέρυγας NACA0012 γύρω από τις 0° με εύρος ταλάντωσης ±2°.	33
4.9	Πτέρυγα NACA0012 με 10% της χορδής trailing edge flap σε παραμόρφωση ±5°.	34
4.10	Συγκριτικό γράφημα του C_L αναλόγως το πλάτος παραμόρφωσης, ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης, για σταθερή πτέρυγα στις $a = 0^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.02$	35
4.11	Συγκριτικό γράφημα του C_L αναλόγως το πλάτος παραμόρφωσης, ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης, για σταθερή πτέρυγα στις $a = 0^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.1$	35
4.12	Συγκριτικό γράφημα του C_L αναλόγως το πλάτος παραμόρφωσης, ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης, για σταθερή πτέρυγα στις $a = 0^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.5$	36
4.13	Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_p της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $a = 0^\circ$ με $b_{amp} = 1^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.02$	36
4.14	Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_p της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $a = 0^\circ$ με $b_{amp} = 1^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.1$	37
4.15	Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και η κατάληξη της σύγκλισής του ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_p της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $a = 0^\circ$ με $b_{amp} = 1^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.5$	37

4.51 Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και η κατάληξη της σύγκλισής του ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_P της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $a = 16^\circ$ με $b_{amp} = 1^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.5$	55
4.52 Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_P της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $a = 16^\circ$ με $b_{amp} = 2^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.02$	56
4.53 Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_P της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $a = 16^\circ$ με $b_{amp} = 2^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.1$	56
4.54 Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και η κατάληξη της σύγκλισής του ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_P της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $a = 16^\circ$ με $b_{amp} = 2^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.5$	57
4.55 Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_P της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $a = 16^\circ$ με $b_{amp} = 5^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.02$	57
4.56 Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_P της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $a = 16^\circ$ με $b_{amp} = 5^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.1$	58
4.57 Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και η κατάληξη της σύγκλισής του ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_P της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $a = 16^\circ$ με $b_{amp} = 5^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.5$	58

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Σύντομη ιστορική ανασκόπηση

Για τις σύγχρονες ανάγκες της τεχνολογίας και της ανάπτυξης, ο επιστημονικός κόσμος κλήθηκε να μελετήσει λεπτομερώς τη συμπεριφορά των ρευστών και το πώς αυτά αλληλεπιδρούν με διάφορες υπάρχουσες ή και πειραματικές κατασκευές. Κάτω από αυτό το πρίσμα, περί τις αρχές της δεκαετίας το '70, ενώθηκαν οι επιστήμες της μηχανικής των ρευστών, των υπολογιστικών μαθηματικών και κατ' επέκταση αργότερα, των υπολογιστών, υπό την κοινή ονομασία της επιστήμης της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (*Computational Fluid Dynamics - CFD*).

Από τις πρώτες εφαρμογές της Υ.Ρ. υπήρξε η προσομοίωση διηχητικών ροών (*transonic flows*) και η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Euler σε δύο και αργότερα σε τρεις διαστάσεις. Με την ταχεία εξέλιξη των υπολογιστικών συστημάτων, τη δεκαετία του '80, κατέστη δυνατή η προσομοίωση ιδεατών ροών (*inviscid flows*) γύρω από μοντελοποίηση ολόκληρου αεροσκάφους.

Η αμέση εξέλιξη ήταν, στα μέσα της ίδιας δεκαετίας, η έρευνα να στραφεί στην προσομοίωση συνεκτικών ροών (*viscous flows*), επιλύοντας το σύστημα εξισώσεων Navier-Stokes και στην αντίστοιχη εξέλιξη μοντέλων τύρβης (*turbulence models*).

1.2 Οι ερευνητικοί προσανατολισμοί σήμερα

Όσο η μεθοδολογία επίλυσης τέτοιων εξισώσεων ωρίμαζε, το εύρος των εφαρμογών διευρυνόταν, ώστε τα τελευταία χρόνια να μελετάται η προσομοίωση ροών γύρω από ταλαντώμενα σώματα και γενικά σε χωρία με μεταβλητή, ως προς το χρόνο, γεωμετρία.

Τέτοιου είδους προσομοιώσεις βρίσκουν εφαρμογή σε ένα μεγάλο εύρος προβλημάτων, κυρίως στους τομείς της αεροδυναμικής (aeroelasticity), της ναυπηγικής (offshore marine), και γενικότερα των μηχανικών κατασκευών. Μελέτη ροής, παραδείγματος χάριν, γύρω από πτερύγια ανεμογεννήτριας, εντός στροβυλομηχανής αεροσκάφους, γύρω από έλικα και -όπως θα παρουσιαστεί σε αυτή την εργασία- γύρω από ταλαντώμενη πτέρυγα αεροσκάφους (*oscillating airfoil*) με υπεραντωτική διάταξη ακμής φυγής (*flapping trailing edge*).

Η υπάρχουσα θεωρία, ωστόσο, αποδείχθηκε ότι δεν είναι αρκετή για να καλύψει το εύρος των νέων προβλημάτων. Παρατηρήθηκε, δηλαδή, ότι με την εισαγωγή, της τεχνητής ή μη, μεταβολής του χωρίου μελέτης, δημιουργήθηκαν προβλήματα στη διατήρηση της ακρίβειας (*accuracy*) και της σταθερότητας (*stability*) των μεθόδων επίλυσης.

Στην παρούσα εργασία, γι' αυτό το λόγο, ασχοληθήκαμε με την μελέτη αντίστοιχων μεθοδολογιών, είδαμε τις αναμενόμενες ανωμαλίες που προκύπτουν, και εφαρμόσαμε τους εξωμαλυντικούς παράγοντες που θα περιγράψουμε στο κύριο μέρος.

1.3 Διάρθρωση της εργασίας

Στο Κεφάλαιο 2, αναπτύσσεται η υπάρχουσα βασική θεωρία (*governing equations*) για την προσομοίωση ροών (2.2), περιγράφεται η απαραίτητη (χρονική/χωρική) διακριτοποίηση (*time/space discretisation*) αυτής (2.3, 2.4), για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων και τέλος παρουσιάζονται τα τυπικά πλέγματα που χρησιμοποιήθηκαν (2.5).

Στο Κεφάλαιο 3, αντίστοιχα, περιγράφεται η επέκταση της θεωρίας σε χωρία με μεταβλητή γεωμετρία. Εισάγεται η έννοια του Γεωμετρικού Νόμου Διατήρησης (*Geometric*

Conservation Law - GCL (3.2), για ποιους λόγους είναι απαραίτητος (3.3, 3.4) και ο τρόπος με τον οποίο εμπεριέχεται στο υπάρχον σύστημα εξισώσεων (3.6). Σε αυτό το κεφάλαιο, αναφέρονται επίσης, ο αλγόριθμος με τον οποίο η αλλαγή της γεωμετρίας του χωρίου (κίνηση του συνόρου) μεταφέρεται στο πλέγμα (3.7) καθώς και ο τρόπος υπολογισμού του διανύσματος της ταχύτητας των κινούμενων αυτών κόμβων (3.8).

Τέλος, στο Κεφάλαιο 4, παρουσιάζονται εκτενέστατα τα αριθμητικά αποτελέσματα από τις διάφορες περιπτώσεις που εξετάστηκαν κατά την εκπόνηση αυτής της εργασίας, για την απόδειξη της αναγκαιότητας της περιγραφόμενης θεωρίας (4.1), την επαλήθευση της υλοποίησής της (4.2) αλλά και για την επέκταση των αποτελεσμάτων (4.3).

Αυτή η σελίδα έμεινε σκόπιμα κενή

Κεφάλαιο 2

Η Βασική Αριθμητική Μέθοδος

Για να μελετήσουμε τη συμπεριφορά των ρευστών, αρκεί να θεωρήσουμε ότι μέσα σε έναν όγκο ελέγχου (Σχήμα 2.1) υπάρχει αρκετή ποσότητα μάζας ώστε το υλικό που μελετάμε να θεωρείται συνεχές, προκειμένου να μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση ταχύτητά του και τη μέση κινητική του ενέργεια.

Μπορούμε έτσι, μέσω αυτών, να καθορίσουμε τις σημαντικές ποσότητες του ρευστού, όπως την πυκνότητα, την πίεση, την ενέργεια και άλλες.

Η εξαγωγή των αξιωματικών εξισώσεων της δυναμικής των ρευστών βασίζεται στο γεγονός ότι η συμπεριφορά τους καθορίζεται από τους ακόλουθους νόμους διατήρησης:

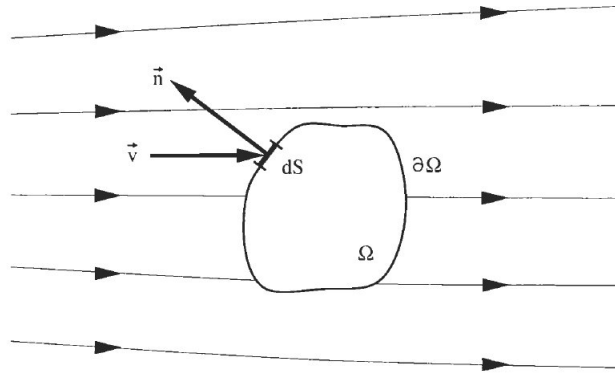
1. διατήρηση της μάζας
2. διατήρηση της ορμής, και
3. διατήρηση της ενέργειας.

Η διατήρηση μιας από αυτές τις ποσότητες του ρευστού σημαίνει ότι η ολική της διακύμανση (*total variation*) εντός ενός όγκου ελέγχου μπορεί να εκφραστεί ως συνδυασμός της ποσότητας που διαπερνά το σύνορό του, τις εσωτερικές δυνάμεις/πηγές και πιθανές εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται πάνω του. Το μέγεθος της ποσότητας αυτής που

διαπερνά το σύνορο λέγεται ροή (*flux*). Η ροή χωρίζεται σε δύο κατηγορίες, την γενικευμένη ροή (*convective flux*), λόγω μεταφοράς με συναγωγή και την συνεκτική ροή (*viscous flux*), προερχόμενη από τη φύση του ρευστού.

2.1 Οι νόμοι διατήρησης

Για να διατυπώσουμε με μαθηματικό φορμαλισμό τους τρεις νόμους διατήρησης, θεωρούμε πρώτα τον πεπερασμένο όγκο ελέγχου Ω (σταθερό ως προς τον χρόνο) με σύνορο $\partial\Omega$ (Σχήμα 2.1) και τον αντίστοιχο συμβολισμό: \mathbf{n} το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο επιφανειακό στοιχείο dS .



Σχήμα 2.1: Πεπερασμένος όγκος ελέγχου.

2.1.1 Εξίσωση της μάζας

Η εξίσωση της μάζας, ή αλλιώς εξίσωση συνέχειας, μας ορίζει πως η μάζα δεν μπορεί να δημιουργηθεί ούτε να καταστραφεί σε ένα τέτοιο υλικό σύστημα. Επομένως, η μεταβολή της ροής εντός του όγκου ελέγχου:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \, dV \quad (2.1)$$

και η εισερχόμενη/εξερχόμενη μάζα από το σύνορο του όγκου:

$$\oint_{\partial\Omega} \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dS \quad (2.2)$$

πρέπει να εξισώνονται. Επομένως, ο νόμος διατήρησης της μάζας σε ολοκληρωτική μορφή γράφεται [1] ως:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \, dV + \oint_{\partial\Omega} \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dS = 0 \quad (2.3)$$

2.1.2 Εξίσωση της ορμής

Η εξίσωση της ορμής προκύπτει από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, ο οποίος ορίζει πως η μεταβολή στην ορμή ενός σώματος:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \, dV \quad (2.4)$$

απαιτεί την άσκηση δύναμης σε αυτό. Οι δυνάμεις που μπορούν να ασκηθούν στο ρευστό χωρίζονται σε:

1. εξωτερικές (\mathbf{f}_e), οι οποίες δρουν πάνω στη μάζα (πχ βαρυτικές) και εκφράζονται μαθηματικά ως:

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{f}_e \, dV \quad (2.5)$$

2. επιφανειακές, οι οποίες δρουν πάνω στο σύνορο του όγκου:

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{\tau} \cdot \mathbf{n} \, dS - \oint_{\partial\Omega} p \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (2.6)$$

όπου p ο συντελεστής ιστροπικής πίεσης και $\vec{\tau}$ ο τανυστής τάσης (*viscous stress*).

Για να ολοκληρωθεί ο νόμος διατήρησης της ορμής υπολογίζεται να εισάγουμε τον όρο μεταφοράς ορμής μέσω του συνόρου:

$$\oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dS \quad (2.7)$$

Έχουμε, έτσι, την εξίσωση του νόμου διατήρησης της ορμής [1]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} dV + \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f}_e dV + \oint_{\partial\Omega} \vec{\tau} \cdot \mathbf{n} dS - \oint_{\partial\Omega} p \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.8)$$

2.1.3 Εξίσωση της ενέργειας

Ο τρίτος νόμος διατήρησης προέρχεται από τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο, ο οποίος ισχυρίζεται πως η μεταβολή της ενέργειας εντός του όγκου ελέγχου:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho E dV + \oint_{\partial\Omega} \rho E (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (2.9)$$

εξαρτάται από την ροή θερμότητας:

$$\oint_{\partial\Omega} k (\nabla T \cdot \mathbf{n}) dS \quad (2.10)$$

και το ρυθμό του παραγόμενου έργου των δυνάμεων που ασκούνται:

1. από τις εξωτερικές (π.χ. απορρόφηση από πηγές θερμότητας \dot{q}_h):

$$\int_{\Omega} (\rho \mathbf{f}_e \cdot \mathbf{u} + \dot{q}_h) dV \quad (2.11)$$

2. και από τις επιφανειακές:

$$\oint_{\partial\Omega} (\vec{\tau} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS - \oint_{\partial\Omega} p (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (2.12)$$

Συναθροίζοντας όλα τα παραπάνω καταλήγουμε στον νόμο διατήρησης της ενέργειας [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho E \, dV + \oint_{\partial\Omega} \rho E (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dS = \oint_{\partial\Omega} k (\nabla T \cdot \mathbf{n}) \, dS + \\ \int_{\Omega} (\rho \mathbf{f}_e \cdot \mathbf{u} + \dot{q}_h) \, dV + \oint_{\partial\Omega} (\vec{\tau} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, dS - \oint_{\partial\Omega} p (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dS \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.2 Εξισώσεις Navier-Stokes

Έχοντας ήδη γράψει ξεχωριστά τους τρεις νόμους διατήρησης, μπορούμε να τους συνδυάσουμε σε ένα σύστημα εξισώσεων από τις σχέσεις (2.3), (2.8) και (2.13):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{U} \, dV + \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{F} - \mathbf{G}) \, dS = \int_{\Omega} \mathbf{Q} \, dV \quad (2.14)$$

όπου:

$$\mathbf{U} = \left[\rho \quad \rho u \quad \rho v \quad \rho w \quad \rho E \right]^T \quad (2.15)$$

το διάνυσμα των διατηρήσιμων ποσοτήτων,

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \\ \rho u(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) + n_x p \\ \rho v(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) + n_y p \\ \rho w(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) + n_z p \\ \rho \left(E + \frac{p}{\rho} \right) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

το διάνυσμα της γενικευμένης ροής,

$$\mathbf{G} = \left[0 \quad \mathbf{n} \cdot \vec{\tau}_x \quad \mathbf{n} \cdot \vec{\tau}_y \quad \mathbf{n} \cdot \vec{\tau}_z \quad \mathbf{n} \cdot \Theta \right]^T \quad (2.17)$$

το διάνυσμα της συνεκτικής ροής, με

$$\Theta = \left[\mathbf{u} \cdot \vec{e}_x + k \frac{\partial T}{\partial x} \quad \mathbf{u} \cdot \vec{e}_y + k \frac{\partial T}{\partial y} \quad \mathbf{u} \cdot \vec{e}_z + k \frac{\partial T}{\partial z} \right]^T \quad (2.18)$$

και το διάνυσμα των πηγών:

$$\mathbf{Q} = \left[0 \quad \rho f_{e,x} \quad \rho f_{e,y} \quad \rho f_{e,z} \quad \rho \mathbf{f}_e \cdot \mathbf{u} + \dot{q}_h \right]^T \quad (2.19)$$

Τέλος, το σύστημα των εξισώσεων «κλείνει» με την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων:

$$p = (\gamma - 1)\rho \left(E - \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) \quad (2.20)$$

2.3 Χωρική διακριτοποίηση

Η χωρική διακριτοποίηση των γενικευμένων και συνεκτικών ροών καθώς και των πηγαίων όρων γίνεται με τη Μέθοδο Πεπερασμένων Όγκων. Τα κελιά ορίζονται από τους κόμβους του πλέγματος, ενώ οι μεταβλητές του προβλήματος υπολογίζονται στα κέντρα των κελιών (*Finite Volume-Cell Centered Scheme*). Θεωρώντας, έτσι, ότι ο όγκος των κελιών παραμένει σταθερός ως προς το χρόνο, ισχύει:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{U} dV = V \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \quad (2.21)$$

όπου $\mathbf{U} = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \mathbf{U}_{exact} dV$. Η εξίσωση (2.14) γίνεται:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\frac{1}{V} \left(\oint_{\partial\Omega} (\mathbf{F} - \mathbf{G}) dS - \int_{\Omega} \mathbf{Q} dV \right) \quad (2.22)$$

Το επιφανειακό ολοκλήρωμα στην παραπάνω εξίσωση προσεγγίζεται από το άθροισμα των ροών στις επιφάνειες (*faces*) που συνιστούν το εκάστοτε κελί. Συνήθως

θεωρείται ότι η παροχή παραμένει σταθερή πάνω σε μία επιφάνεια και υπολογίζεται στο κέντρο της. Έτσι η (2.22) για το κελί i γράφεται:

$$\frac{d\mathbf{U}_i}{dt} = -\frac{1}{V_i} \mathbf{R}_i \quad (2.23)$$

Το \mathbf{R}_i ονομάζεται υπόλοιπο (*residual*) και έχει τη μορφή:

$$\mathbf{R}_i = \sum_{e=1}^{N_f} [(\mathbf{F}_e - \mathbf{G}_e) \Delta S_e - (\mathbf{Q}V)_e] \quad (2.24)$$

όπου e είναι κάποιο από τα N_f τω πλήθος faces.

2.4 Χρονική διακριτοποίηση

2.4.1 Μόνιμες ροές

Για τη χρονική διακριτοποίηση μόνιμων ροών (*stationary flows*), εφαρμόστηκε έμμεση ολοκλήρωση στο χρόνο (*implicit time-stepping*) στην ημιδιακριτή μορφή των εξισώσεων (Σχέση 2.23). Προκύπτει, έτσι, το πλήρως διακριτό σχήμα:

$$V_i \frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n}{\Delta t_i} = -\mathbf{R}_i^{n+1} \quad (2.25)$$

Για να υπολογιστεί το υπόλοιπο στη χρονική στιγμή t^{n+1} , γραμμικοποιούμε το \mathbf{R}_i^{n+1} γύρω από την τρέχουσα χρονική στιγμή:

$$\mathbf{R}_i^{n+1} \simeq \mathbf{R}_i^n + \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right) (\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n) \quad (2.26)$$

και τελικά, αντικαθιστώντας στην (2.25) έχουμε το αριθμητικό σχήμα:

$$\left[\frac{V_i}{\Delta t_i} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right] (\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n) = -\mathbf{R}_i^n \quad (2.27)$$

2.4.2 Μη-μόνιμες ροές

Για τον υπολογισμό μη-μόνιμων ροών (*unsteady flows*) χρησιμοποιήθηκε η τεχνική του dual time-stepping. Η αντίστοιχη χρονική διακριτοποίηση που εφαρμόστηκε στην (2.23) ήταν σε αυτή την περίπτωση δεύτερης τάξης και οδήγησε στο ακόλουθο σχήμα:

$$\frac{3V_i^{n+1}\mathbf{U}_i^{n+1} - 4V_i^n\mathbf{U}_i^n + V_i^{n-1}\mathbf{U}_i^{n-1}}{2\Delta t} = -\mathbf{R}_i^{n+1} \quad (2.28)$$

Για να λύσουμε το παραπάνω σύστημα εισάγεται η έννοια του ψευδοχρόνου (t^*). Διακριτοποιούμε την (2.23) με ένα μη γραμμικό έμμεσο σχήμα:

$$\frac{\partial}{\partial t^*} (V_i^{n+1}\mathbf{U}^*) = -(\mathbf{R}_i^*)^{k+1} \quad (2.29)$$

όπου $k + 1$ είναι το νέο ψευδοχρονικό βήμα. Μετά από γραμμικοποίηση του μη-μόνιμου υπολοίπου στο ψευδοχρόνο:

$$(R^*)^{k+1} \simeq (R^*)^k + \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}^*}\right) [(\mathbf{U}^*)^{k+1} - (\mathbf{U}^*)^k] \quad (2.30)$$

και έχοντας:

$$\frac{\partial \mathbf{R}^*}{\partial \mathbf{U}^*} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} + \frac{3}{2\Delta t} V_i^{n+1} \quad (2.31)$$

καταλήγουμε [2] στο αριθμητικό μας σχήμα:

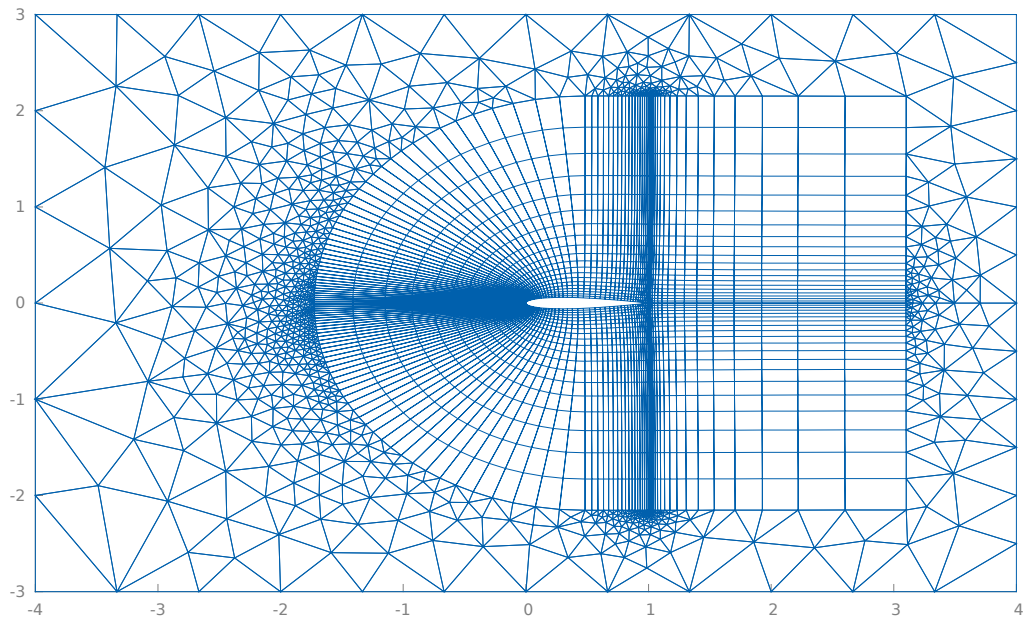
$$\left[\left(\frac{1}{\Delta t_i^*} + \frac{3}{2\Delta t} \right) V_i^{n+1} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right] [(\mathbf{U}^*)^{k+1} - (\mathbf{U}^*)^k] = -(\mathbf{R}_i^*)^k \quad (2.32)$$

με Δt_i^* να αναφέρεται στον ψευδοχρόνο και Δt στο πραγματικό χρονικό βήμα.

2.5 Τυπικά πλέγματα

Για τις ανάγκες της εργασίας, όπου μοντελοποιήσαμε ροή γύρω από πτέρυγα, χρησιμοποιήθηκαν υβριδικά μη-δομημένα πλέγματα (*hybrid unstructured grids*) με c-type, body fitted διακριτοποίηση γύρω από την αεροτομή και τριγωνισμοί στο υπόλοιπο χωρίο.

Ένα ενδεικτικό (πολύ αραιό ~ 4000 κελιά) πλέγμα βλέπουμε στο Σχήμα 2.2, με εύρος τετραεδρικού mesh 2.5 χορδών και τριγωνισμούς στο υπόλοιπο χωρίο.



Σχήμα 2.2: Υβριδικό unstructured mesh.

Αυτή η σελίδα έμεινε σκόπιμα κενή

Κεφάλαιο 3

Ο Γεωμετρικός Νόμος Διατήρησης (GCL)

3.1 Εισαγωγικά στοιχεία

Σε προβλήματα ρευστοδυναμικής, αρκετές φορές, η χρήση κινούμενων συντεταγμένων είναι ιδανική για την επίλυσή τους, για παράδειγμα στις προσομοιώσεις ροών σε χωρία με μεταβαλλόμενα σύνορα. Η επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων επιτυγχάνεται καλύτερα με την μετατροπή των εξισώσεων σε άλλη διατύπωση από την κλασσική *Eulerian*, σε *Arbitrary Eulerian-Lagrangian (ALE)*.

Έπειτα από μια τέτοια αλλαγή, όμως, πρέπει να ικανοποιείται μία επιπλέον εξίσωση, ταυτόχρονα με τους υπόλοιπους νόμους διατήρησης. Η εξίσωση αυτή συνδέει την μεταβολή του όγκου ελέγχου με τις ταχύτητες του παραμορφώσιμου πλέγματος. Πρώτοι οι Trullio και Trigger [3] ονόμασαν την εξίσωση αυτή ως **Γεωμετρικό Νόμο Διατήρησης** (*Geometrical Conservation Law - GCL*) και την συμπεριέλαβαν, μαζί με αυτές της μάζας, της ταχύτητας και της διάδοσης ενέργειας, στις «θεμελιώδεις εξισώσεις της κίνησης» (*fundamental equations of motion*) για την αριθμητική επίλυση ροών σε κινούμενα πλέγματα.

Η αναγκαιότητα, ωστόσο, για την παράλληλη επίλυσή της με το υπόλοιπο σύστημα εξισώσεων, δεν είχε εμποδωθεί. Μέχρι τη στιγμή της (επ-)ανακάλυψής της, ουσιαστικά, από τους Thomas, Lombard [4] (γενίκευση για μεθόδους πεπερασμένων όγκων) και τον Warsi [5], που υπέδειξαν την χρήση της.

3.2 Χαρακτηριστικά του GCL

Το GCL έχει υπάρξει θέμα εκτεταμένων ερευνών τα τελευταία χρόνια και έχει δημιουργήσει αρκετές αμφιταλαντευόμενες απόψεις. Έχει αποδειχθεί, ωστόσο, ότι αν ένα σχήμα σε ALE διατύπωση διατηρεί (δεν αλλοιώνει) μια ομοιόμορφη ροή (*uniform flow*), τότε αυτό αποτελεί είτε έναν ορισμό του GCL, είτε έναν έλεγχο για το εάν κάποια αριθμητική μέθοδος συμμορφώνεται με τις ιδιότητες αυτού.

Στην Ενότητα 3.5, λοιπόν, θα δείξουμε [21], ότι η ακόλουθη εξίσωση δεν μπορεί να υπολογιστεί με τυχαίο τρόπο:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega(t)} dV = \oint_{\partial\Omega(t)} \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.1)$$

όπου $\dot{\mathbf{x}}$ είναι η ταχύτητα του όγκου Ω , $\partial\Omega$ αποτελεί το σύνορο του Ω και \mathbf{n} είναι το ορθομοναδιαίο διάνυσμα στο $\partial\Omega$.

Η συμμόρφωση, κατ' επέκταση, με το GCL, ή με άλλα λόγια, το πώς υπολογίζονται οι ταχύτητες ενός κινούμενου πλέγματος, παρουσιάζεται σαν μια απαραίτητη προϋπόθεση για την συνέπεια ενός ALE αριθμητικού σχήματος.

Για να γίνει αυτό αντιληπτό, οι Lacroix, Garon έδειξαν [6] ότι πολλές απλές τεχνικές λειτουργούν σωστά για ομοιόμορφες, ως προς την κατεύθυνση (*unidirectional*), μετακινήσεις του πλέγματος. Πολλά σχήματα, εν αντιθέσει, εμφανίζουν περιορισμούς και ασυνέπειες όταν εφαρμοστούν σε δισδιάστατο πλέγμα με τυχαίες μεταβολές. Για το λόγο αυτό, λοιπόν, οι Lasoinne, Farhat ισχυρίζονται [7] ότι η συμβατότητα των σχημάτων μπορεί να εξεταστεί βάσει του κατά πόσο ικανοποιείται -ή όχι- η διακριτή μορφή του GCL. Να ελέγχεται, δηλαδή, εάν μια ομοιόμορφη ροή δεν παραλλάσσεται από σφάλματα

προσέγγισης (*approximation errors*), που θα προέρχονται από την κίνηση του χωρίου.

Στο [8], επιπλέον, αποδεικνύεται ότι η μη-ικανοποίηση του GCL σε μια διαδικασία αριθμητικής επίλυσης, εμπεριέχει σφάλματα υπό τη μορφή πηγών τεχνητής μάζας. Αυτά τα σφάλματα φαίνεται ότι μπορούν να απαλειφθούν (να γίνουν αμελητέα) χρησιμοποιώντας αρκετά μικρό χρονικό βήμα, το οποίο, βέβαια, μπορεί να είναι μικρότερο από το αποδεκτό για την απαιτούμενη ακρίβεια της διακριτοποίησης.

3.3 GCL και ακρίβεια

Υπάρχουν αρκετές πληροφορίες στο [9] για τη διακριτή μορφή του GCL, οι οποίες μας παρέχουν σημαντικές ενδείξεις σχετικά με την ακρίβεια (*accuracy*) των χρονικά διακριτοποιημένων σχημάτων (*time-stepping schemes*). Για μία τέτοια μέθοδο, με τάξη ακρίβειας p , $p \geq 1$, σε σταθερό πλέγμα (*grid*), [10] η ικανοποίηση της συνθήκης του γεωμετρικού νόμου διατήρησης με ακρίβεια p -τάξης, αποτελεί ικανή συνθήκη ώστε να είναι και τουλάχιστον πρώτης τάξης (χρονική ακρίβεια) σε ένα μεταβαλλόμενο (*deformable*) *grid*.

Στην πράξη, αυτό σημαίνει ότι έχοντας ένα σχήμα κάποιας τάξης ακρίβειας, αν το εφαρμόσουμε σε ένα πρόβλημα μέσα σε μεταβαλλόμενο χωρίο και απαιτήσουμε να ικανοποιεί το GCL, τότε η τάξη του μπορεί να πέσει σε πρώτης τάξης. Επίσης, όσο υψηλότερη είναι η τάξη ακρίβειας της μεθόδου τόσο πιο επιτακτική είναι η ανάγκη της ικανοποίησης του GCL για την αποδεκτή προσομοίωση των ροών και στο κινούμενο χωρίο.

Επιπρόσθετα, μία αριθμητική μέθοδος που συμβαδίζει με την ικανοποίηση του GCL μπορεί γενικά να επιτρέψει τη χρήση μεγαλύτερου χρονικού βήματος σε σχέση με την αντίστοιχη εκδοχή της που δεν ικανοποιεί την συνθήκη. Εκτός, φυσικά, εάν κάτι τέτοιο δεν το επιτρέπουν οι συνθήκες ευστάθειάς της.

Στα [11] και [12], ωστόσο, αποδείχθηκε ότι είναι δυνατό να κατασκευαστεί ένα αριθμητικό σχήμα, δεδομένης ακρίβειας σε σταθερό *grid*, το οποίο να μην χάνει την τάξη ακρίβειας του ακόμα και αν εφαρμοστεί σε μεταβλητό χωρίο, έστω και χωρίς την ικανοποίηση του GCL. Επιπλέον, στο πρώτο, οι Geuzaine, Grandmont, Farhat έδειξαν ότι το

GCL δεν είναι ούτε μια αναγκαία, ούτε μια ικανή συνθήκη για την διατήρηση της χρονικής ακρίβειας, ενώ στο [12], υπάρχει ο ισχυρισμός ότι το GCL δεν συνδέεται καν με την τάξη ακρίβειας.

3.4 GCL και ευστάθεια

Όσον αφορά στο θέμα της επιρροής που ασκεί το GCL στην ευστάθεια των μεθόδων οι απόψεις είναι αντικρουόμενες. Υπάρχουν αντιφατικά συμπεράσματα στην βιβλιογραφία.

Παραδείγματος χάριν, στο [9] το GCL παρουσιάζεται σαν ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ευστάθεια των μεθόδων έως δεύτερης τάξης, ενώ στα [13, 14] αποδείχθηκε ότι δεν είναι ούτε αναγκαία, ούτε ικανή συνθήκη, εκτός από την περίπτωση της οπισθοδρομικής μεθόδου του Euler (*Backward Euler Implicit scheme*). Καταλήγουν, ωστόσο, στο ότι η συμμόρφωση των μεθόδων με το GCL είναι πιθανό να βελτιώσει την ακρίβεια της μεθόδου και να ενισχύσει την ευστάθεια σε κάποιες περιπτώσεις.

Η συγκεκριμένη άποψη ενδυναμώνεται και από το γεγονός ότι στο [12], μετά από σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ μεθόδων με κριτήριο την ικανοποίηση ή όχι του GCL, τα πρώτα εμφανίζονται απαλλαγμένα από τις ταλαντώσεις που εμφανίζονται στα δεύτερα. Οι ταλαντώσεις αυτές αποδόθηκαν στην έλλειψη διατήρησης (*conservation*) από την μη-ικανοποίηση του GCL.

Επιπλέον, στο [9] παρουσιάστηκαν σχήματα τα οποία μη-συμβιβάζόμενα με το GCL παρήγαγαν επίσης αποτελέσματα που είχαν ταλαντώσεις, ενώ όπου συμπεριλήφθηκε έπαψαν να εμφανίζονται αλλοιωμένες λύσεις. Παρόμοιες εφαρμογές και αναλύσεις μπορούν να βρεθούν στα [15–20].

Στην παρούσα εργασία παρατίθενται αντίστοιχα παραδείγματα και αποτελέσματα, με αντιπαράθεση των λύσεων και για τις δύο περιπτώσεις που παρατηρήθηκαν.

3.5 Διακριτός γεωμετρικός νόμος διατήρησης (DGCL)

Στην Ενότητα 2.2 περιγράψαμε τις εξισώσεις Navier-Stokes, οι οποίες στη διατηρητική τους μορφή γράφονται:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{F}(\mathbf{U}) + \mathbf{G}(\mathbf{U})) = 0. \quad (3.2)$$

Ολοκληρώνοντάς την πάνω σε ένα μεταβαλλόμενο όγκο ελέγχου $\Omega(t)$ παίρνουμε:

$$\int_{\Omega(t)} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dV + \oint_{\partial\Omega(t)} (\mathbf{F}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}) dS + \oint_{\partial\Omega(t)} (\mathbf{G}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}) dS = 0 \quad (3.3)$$

και χρησιμοποιώντας τη διαφορική ιδιότητα:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega(t)} \mathbf{U} dV = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dV + \oint_{\partial\Omega(t)} \mathbf{U} (\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (3.4)$$

όπου $\dot{\mathbf{x}}$ είναι η ταχύτητα του $\partial\Omega(t)$, η (3.3) γίνεται:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega(t)} \mathbf{U} dV + \oint_{\partial\Omega(t)} ((\mathbf{F}(\mathbf{U}) - \dot{\mathbf{x}}\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}) dS + \oint_{\partial\Omega(t)} (\mathbf{G}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}) dS = 0. \quad (3.5)$$

Τέλος, θεωρώντας τις ποσότητες των στοιχείων του \mathbf{U} ως μέσους όρους πάνω σε κελιά, η χωρική διακριτοποίηση της (3.3) γίνεται ως εξής:

$$\frac{\partial}{\partial t} (V\mathbf{U}) + \mathbf{R}(\mathbf{U}, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{n}(t)) + \mathbf{S}(\mathbf{U}, \mathbf{x}(t), \mathbf{n}(t)) = 0 \quad (3.6)$$

όπου:

- $\mathbf{R}(\mathbf{U}, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{n}) = \oint_{\partial\Omega(t)} (\mathbf{F}(\mathbf{U}) - \dot{\mathbf{x}}\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} dS$ οι διακριτοποιημένες γενικευμένες ροές σε ALE,
- $\mathbf{S}(\mathbf{U}, \mathbf{x}, \mathbf{n}) = \oint_{\partial\Omega(t)} \mathbf{G}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} dS$ οι διακριτοποιημένες συνεκτικές ροές σε ALE,
- $\mathbf{x}(t)$ οι συντεταγμένες των σημείων της διαμέρισης,
- V το εμβαδόν (ο όγκος) του εκάστοτε κελιού σε δύο (τρεις) διαστάσεις.

3.5.1 Εξαγωγή του GCL

Ο γεωμετρικός νόμος διατήρησης (GCL), όπως αναλύεται στο [21], απαιτεί η κατάσταση $\mathbf{U} = \mathbf{U}_c = \text{σταθερά}$ να είναι μία ακριβής λύση της εξίσωσης (3.6). Σε αυτή την περίπτωση έχουμε $\mathbf{S}(\mathbf{U}, \mathbf{x}) = 0$, από τη στιγμή που οι συνεκτικές ροές υπολογίζονται βάσει των παραγώγων της \mathbf{U} . Επιπλέον έχουμε:

$$\oint_{\partial\Omega(t)} (\mathbf{F}(\mathbf{U}_c) - \dot{\mathbf{x}}\mathbf{U}_c) \cdot \mathbf{n} \, dS = -\mathbf{U}_c \oint_{\partial\Omega(t)} \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (3.7)$$

επειδή το ολοκλήρωμα των γενικευμένων ροών γύρω από κλειστό όγκο ελέγχου είναι μηδέν για \mathbf{U} σταθερό. Καταλήγουμε επομένως στο:

$$\mathbf{U}_c \frac{\partial V}{\partial t} - \mathbf{U}_c \oint_{\partial\Omega(t)} \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad (3.8)$$

Εφαρμόζοντας, τέλος, την χωρική διακριτοποίηση και διαιρώντας με \mathbf{U}_c προκύπτει η ημιδιακριτή μορφή του GCL:

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \sum_e |e| \dot{\mathbf{x}}_e \mathbf{n}_e = 0 \quad (3.9)$$

με e να είναι πλευρά (επιφάνεια) (*face*) του πεπερασμένου όγκου και $|e|$ το αντίστοιχο μήκος (εμβαδόν) του *face* σε δυο (τρεις) διαστάσεις.

3.5.2 Ορισμός του DGCL

Ακολουθώντας τον φορμαλισμό του [10], θεωρούμε την προσέγγιση p -τάξης της χρονικής παραγώγου

$$\frac{\delta}{\delta t}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + \mathbf{O}(dt^p) \quad (3.10)$$

όπου dt είναι το υπολογιστικό χρονικό βήμα.

Διακριτοποιώντας την (3.9) στον χρόνο με την παραπάνω προσέγγιση καταλήγουμε

στο¹:

$$\frac{\delta V}{\delta t} = \sum_e |e| \dot{\mathbf{x}}_e \cdot \mathbf{n}_e \quad (3.11)$$

Προκύπτουν [10], έτσι, οι ακόλουθοι ορισμοί:

Ορισμός: Ονομάζουμε την (3.11) διακριτό γεωμετρικό νόμο διατήρησης (DGCL) p -τάξης.

Ορισμός: Λέμε ότι ένα αριθμητικό σχήμα συμμορφώνεται με το DGCL p -τάξης, εάν οι γεωμετρικές παράμετροι $|e|$, $\dot{\mathbf{x}}_e$ και \mathbf{n}_e υπολογίζονται με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιείται η σχέση (3.11).

Εφόσον, λοιπόν, ο όγκος V εξαρτάται μόνο από τις συντεταγμένες του διακριτοποιημένου χωρίου (*mesh*), ενώ το δεξί μέλος της (3.11) από τις συντεταγμένες και τις ταχύτητές του, η συγκεκριμένη εξίσωση ουσιαστικά αποτελεί έναν περιορισμό που πρέπει να ικανοποιεί μια αριθμητική μέθοδος προκειμένου να μπορεί να υπολογίσει ακριβώς μία ομοιόμορφη ροή.

3.6 Ικανοποίηση του GCL

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να ικανοποιείται το GCL από κάποιο αριθμητικό σχήμα. Μία επιλογή αποτελεί [22] να προσθέσουμε το αριστερό μέλος της (3.11) σαν όρο πηγής στην εξίσωση (3.6), επιβάλλοντας την ομοιόμορφη ροή ως λύση της (3.6).

Στην παρούσα εργασία ακολουθήθηκε η διαδικασία που περιγράφεται στο [10] κατά την οποία διακριτοποιούμε το GCL και το επιλύουμε ως μια ξεχωριστή συνάρτηση για να πάρουμε τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά από την κίνηση του πλέγματος και έπειτα να χρησιμοποιηθούν στην επίλυση του υπόλοιπου συστήματος.

Διακριτοποίηση πρώτης τάξης: Διαλέγοντας την πιο απλή χρονική-διακριτοποίηση για το GCL, χρησιμοποιούμε πρώτης τάξης πεπερασμένες διαφορές (*finite differences*),

¹ Παρατηρείστε ότι η (3.11) αποτελεί την διακριτοποίηση της (3.1).

ώστε η (3.11) παίρνει την μορφή:

$$V^{n+1} - V^n = \Delta t \sum_e |e| \dot{\mathbf{x}}_e \mathbf{n}_e \quad (3.12)$$

Διακριτοποίηση δεύτερης τάξης: Για την διακριτοποίηση, αυτή τη φορά, κάνουμε χρήση των οπισθοδρομικών πεπερασμένων διαφορών δεύτερης τάξης (*BDF2*) και προκύπτει η αντίστοιχη εξίσωση:

$$\frac{3}{2}V^{n+1} - 2V^n + \frac{1}{2}V^{n-1} = \Delta t \sum_e |e| \dot{\mathbf{x}}_e \mathbf{n}_e \quad (3.13)$$

Σε κάθε χρονική στιγμή, γνωρίζουμε την κίνηση που κάνει το *grid* μας και βάσει αυτής μπορούμε σε κάθε κελί να βρούμε τις γεωμετρικές ποσότητες του δεξιού μέλους της (3.12) ή (3.13) ακριβώς. Για να ικανοποιείται η συνθήκη του *GCL* αρκεί να υπολογίσουμε, με άμεσο μάλιστα τρόπο, τον όγκο της τρέχουσας χρονικής στιγμής², V^{n+1} , προκειμένου να τον χρησιμοποιήσουμε στο σύστημα επίλυσης των εξισώσεων ροής.

3.7 Αλγόριθμος μετακίνησης του πλέγματος

Το πλέγμα της χωρικής διακριτοποίησης παραμορφώνεται ανάλογα με την μετακίνηση ή/και παραμόρφωση των αντικειμένων με τα οποία αλληλεπιδρά η ροή. Η λύση των εξισώσεων, λοιπόν, απαιτεί να παράγουμε ένα νέο πλέγμα, με νέες συντεταγμένες των κόμβων και τις αντίστοιχες ταχύτητές τους, για κάθε χρονικό βήμα.

Για ήπιες παραμορφώσεις, όπως αυτές που συναντήθηκαν στην συγκεκριμένη εργασία, μπορούμε με αλγεβρικές μεθόδους να μετακινήσουμε το πλέγμα ανάλογα με την κίνηση του συνόρου, κρατώντας παράλληλα την υπάρχουσα συνδεσμολογία (*connectivity*) των κελιών. Γλιτώνουμε, έτσι, το κόστος της επαναδημιουργίας του πλέγματος, κρατάμε

²Για λόγους συμβατότητας, στις δύο πρώτες επαναλήψεις, όσο δεν έχουμε εκτίμηση για τον όγκο, θεωρούμε το V σταθερό, και έπειτα κάνουμε χρήση κανονικά του κανόνα (3.13).

τα εως τώρα αποτελέσματα στους υπάρχοντες κόμβους και απλώς παράγουμε τις νέες θέσεις τους.

Ο αλγόριθμος, λοιπόν, που υλοποιήθηκε για την παραγωγή των νέων κομβικών συντεταγμένων περιγράφεται στο [23] και χρησιμοποιεί, για κάθε εσωτερικό (μη-συνοριακό) κόμβο, τη μετατόπιση του πλησιέστερου κινούμενου συνοριακού κόμβου για να παράγει γραμμικά τις νέες θέσεις. Για κάθε κόμβο i , υπολογίζεται η ελάχιστη απόσταση d_i από το σύνορο και ο συνοριακός κόμβος που αντιστοιχεί σε αυτή την απόσταση συμβολίζεται ως i_{wall} .

Για την εξομάλυνση της επίδρασης που ασκεί η συγκεκριμένη κίνηση του i_{wall} στους εσωτερικούς κόμβους, αναλόγως με το d_i , υλοποιείται η συνάρτηση απόστασης (*distance function*):

$$f(i) = \frac{l_y^2(i)}{l_x^2(i) + l_y^2(i)} \quad (3.14)$$

όπου

$$l_x(i) = \frac{1 - e^{-(d_i/d_{max})}}{(e-1)/e} \quad \text{και} \quad l_y(i) = \frac{1 - e^{1-(d_i/d_{max})}}{1 - e} \quad (3.15)$$

με $d_{max} = \max_i \{d_i\}$.

Η μετατόπιση, τελικά, του κάθε κόμβου υπολογίζεται από το γινόμενο της συνάρτησης απόστασης επί τη μετατόπιση του αντίστοιχου συνοριακού κόμβου.

$$\vec{dr}(i) = f(i) \cdot \vec{dr}(i_{wall}) \quad (3.16)$$

3.8 Υπολογισμός των ταχυτήτων του πλέγματος

Όπως είδαμε στην Ενότητα 3.6, για τους υπολογισμούς μας χρειαζόμαστε, εκτός από τις συντεταγμένες του χωρίου, και τις ταχύτητες των *faces* του κάθε όγκου ελέγχου. Καλούμαστε να τις υπολογίσουμε γνωρίζοντας τις συντεταγμένες των κόμβων κατά τη χρονική στιγμή t^n και t^{n+1} .

Μπορεί να γίνει χρήση ενός κανόνα πεπερασμένων διαφορών, ώστε οι ταχύτητες κάθε κόμβου να υπολογίζονται από τους εξής τύπους:

Πρώτης τάξης:

$$u_x = \frac{dx}{dt} \approx \frac{x^{n+1} - x^n}{\Delta t} \quad (3.17)$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} \approx \frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} \quad (3.18)$$

Δεύτερης τάξης:

$$u_x = \frac{dx}{dt} \approx \frac{3x^{n+1} - 4x^n + x^{n-1}}{2\Delta t} \quad (3.19)$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} \approx \frac{3y^{n+1} - 4y^n + y^{n-1}}{2\Delta t} \quad (3.20)$$

όπου (x^i, y^i) οι συντεταγμένες του κόμβου κατά τη χρονική στιγμή t^i και (u_x, u_y) το διάνυσμα της ταχύτητας του συγκεκριμένου κόμβου.

Υλοποιώντας και τις δύο περιπτώσεις δεν παρατηρήσαμε δραματική βελτίωση των αποτελεσμάτων με τις δεύτερης τάξης προσεγγίσεις, γι' αυτό διατηρήσαμε την πρώτη υλοποίηση, για λόγους απλότητας και υπολογιστικής οικονομίας.

Γνωρίζοντας, λοιπόν, το πεδίο ταχυτήτων των κόμβων του *grid*, είναι εύκολο να υπολογίσουμε το διάνυσμα ταχύτητας $\begin{pmatrix} u_{x,mid} \\ u_{y,mid} \end{pmatrix}$ του *face* που ενώνει δύο κόμβους, κάνοντας μια απλή γραμμική παρεμβολή (σε 2D):

$$u_{x,mid} = \frac{(x_{mid} - x_{left})(u_{x,right} - u_{x,left})}{(x_{right} - x_{left})} + u_{x,left} \quad (3.21)$$

$$u_{y,mid} = \frac{(y_{mid} - y_{left})(u_{y,right} - u_{y,left})}{(y_{right} - y_{left})} + u_{y,left} \quad (3.22)$$

Στη βιβλιογραφία αναφέρεται [8] πως ο συγκεκριμένος τρόπος υπολογισμού των ταχυτήτων, στη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων, εισάγει σφάλματα, εξαρτώμενα του Δt , στην περίπτωση που τα *faces* δεν έχουν την ίδια ταχύτητα. Γι' αυτό εφαρμόζεται η ακόλουθη κανονικοποίηση:

$$u_{x,e} = \frac{\mathbf{n}_x^n + \mathbf{n}_x^{n+1}}{2\mathbf{n}_x^{n+1}} u_{x,mid} \quad (3.23)$$

$$u_{y,e} = \frac{\mathbf{n}_y^n + \mathbf{n}_y^{n+1}}{2\mathbf{n}_y^{n+1}} u_{y,mid} \quad (3.24)$$

με $\mathbf{n}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_x^n \\ \mathbf{n}_y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{left}^n - y_{right}^n \\ x_{right}^n - x_{left}^n \end{pmatrix}$ το ορθομοναδιαίο διάνυσμα του *face* e .

Αυτή η σελίδα έμεινε σκόπιμα κενή

Κεφάλαιο 4

Αριθμητικά αποτελέσματα

Σε αυτό το κομμάτι της εργασίας, παρουσιάζουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα που προέκυψαν από τα διάφορα προβλήματα που επιλέξαμε να λύσουμε προκειμένου να επαληθεύσουμε την χρησιμότητα του *GCL*, όπως αυτό περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 3.

Στην πρώτη ενότητα (4.1) υποβάλαμε το πλέγμα σε αυθαίρετες παραμορφώσεις, ενώ διατηρούσαμε τη γεωμετρία του χωρίου αμετάβλητη. Σε ένα στατικό πρόβλημα, δηλαδή, δημιουργούσαμε και καταστρέφαμε τεχνητό όγκο, ώστε να δούμε στην πράξη την επίδραση (ή μη) του *GCL* και κατ' επέκταση την αναγκαιότητά του (ή όχι) στην υλοποίηση μιας μεθόδου πάνω σε παραμορφώσιμο πλέγμα.

Στην αμέσως επόμενη ενότητα, είχαμε ως σκοπό να επαληθεύσουμε την υλοποίηση του *GCL*, συγκρίνοντας τα αποτελέσματά μας με λύσεις που είχαν ελεγχθεί¹ κατά το παρελθόν, θεωρώντας τις ως λύσεις αναφοράς. Το πρόβλημα που χρησιμοποιήσαμε στην Ενότητα 4.2 είναι μιας αεροτομής σε γωνιακή ταλάντωση (*pitching airfoil*) υπό διάφορες γωνίες.

Τέλος, στο κομμάτι που καλύπτει και το μεγαλύτερο μέρος της εργασίας, επεκταθήκαμε στην επίλυση ροών γύρω από πτέρυγα με κινούμενη υπεραντωτική διάταξη (*flap*). Στην Ενότητα 4.3 περιγράφουμε την αντίστοιχη κίνηση και παραθέτουμε αναλυτικά

¹Αποτελέσματα προερχόμενα από την έρευνα του υποψήφιου διδάκτορα Παπαδάκη Γιώργου.

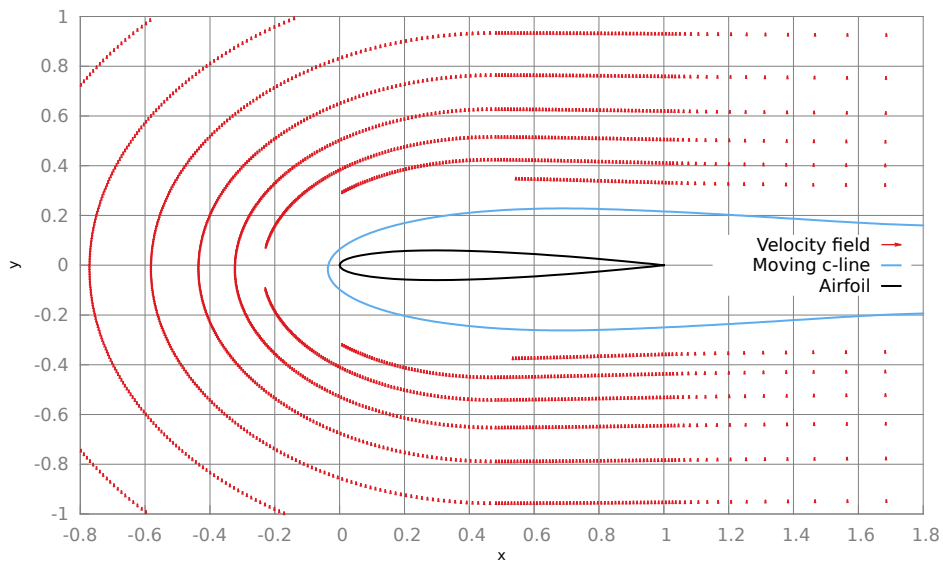
τα αποτελέσματά μας.

4.1 Αυθαίρετες πλεγματικές παραμορφώσεις

Για να επαληθεύσουμε ότι το GCL μάς είναι απαραίτητο σε προβλήματα μεταβαλητής γεωμετρίας, θέσαμε τη μέθοδό μας σε ένα τεστ κατά το οποίο, σε ένα στατικό πρόβλημα, παραμορφώναμε με αυθαίρετο τρόπο το πλέγμα.

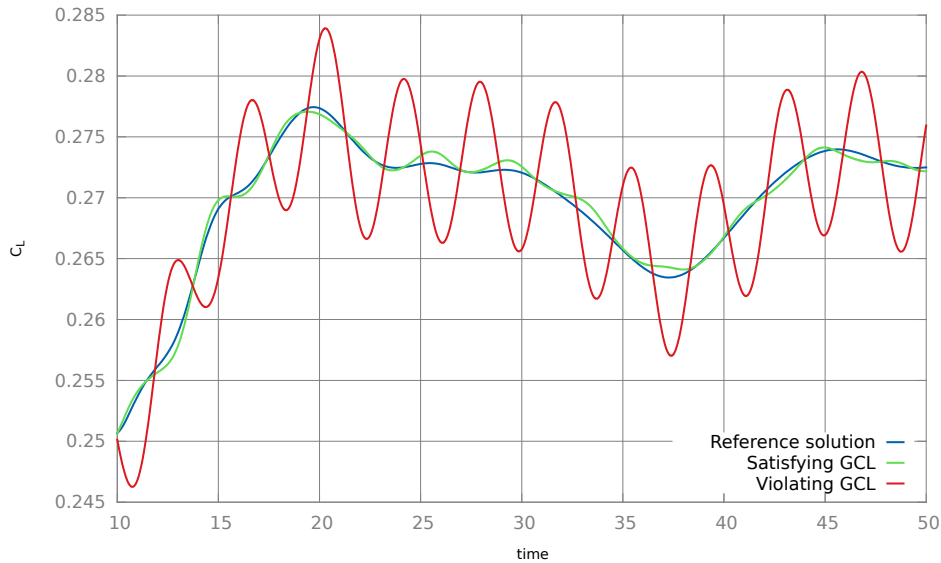
Σε αυτή την περίπτωση, λοιπόν, κρατούσαμε σταθερό το πλέγμα κοντά στην αεροτομή, για να μην επηρεάζεται η δημιουργία του boundary layer και υποβάλαμε μια (τυχαίας επιλογής) c -πλεγματική γραμμή σε μια απλή αρμονική ταλάντωση στον y -άξονα (κατακόρυφη ταλάντωση, κρατάμε σταθερή την x -συντεταγμένη), προκειμένου να παραμορφωθεί το πλέγμα λόγω αυτής της «κίνησης» (η συγκεκριμένη γραμμή κινείται θεωρητικά, πρακτικά παραμένει ακίνητη).

Στο Σχήμα 4.1 βλέπουμε ποια πλεγματική γραμμή «κινούμε» και πως η κίνηση αυτή καθορίζει το πεδίο ταχυτήτων των κόμβων γύρω από αυτή (στιγμιότυπο). Τα αποτελέσματα της μεθόδου με την κίνηση αυτή, τα παρατηρούμε στο Σχήμα 4.2.



Σχήμα 4.1: Πεδίο ταχυτήτων των κόμβων και η κινούμενη c -πλεγματική γραμμή

Βλέπουμε (4.2) την εξέλιξη της σύγκλισης του συντελεστή άνωσης (*lift coefficient* - C_L) για τις δύο διαφορετικές λύσεις. Οι ταλαντώσεις, που περιγράψαμε στην θεωρία (Ενότητα 3.4), είναι εμφανείς στην περίπτωση που η μέθοδός μας δεν ικανοποιεί τη συνθήκη του *GCL*, ενώ σχεδόν εκμηδενίζονται με την χρήση του.



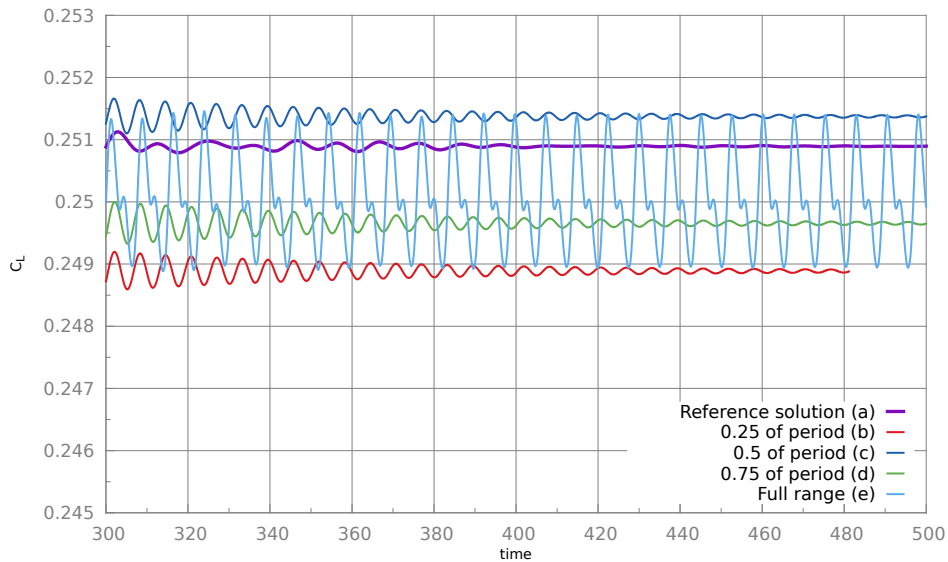
Σχήμα 4.2: Αντιπαράθεση λύσης που ικανοποιεί το *GCL* και λύσης που το παραβιάζει, γύρω από τη λύση αναφοράς του προβλήματος. Κεκλυμένη NACA0012 στις 2° με ταχύτητα ροής 0.5mach.

Λέμε «σχεδόν» καθώς και πάλι παρατηρήσαμε κάποιες μικρές ταλαντώσεις γύρω από τη λύση αναφοράς, οι οποίες αρχικά μας προξένησαν απορία. Παρατηρήσαμε σε όλα τα αποτελέσματά μας, στο συγκεκριμένο πρόβλημα, ότι ενώ η μέθοδος με το *GCL* συνέκλινε, εμφάνιζε ένα επαναλαμβανόμενο μοτίβο γύρω από τη λύση αναφοράς με εύρος περίπου 0.3% (Σχήμα 4.3). Για να εξηγήσουμε την προέλευση αυτής της μάλλον προβληματικής συμπεριφοράς, αναπτύξαμε την παρακάτω στρατηγική.

Η λογική μας ήταν να παύσουμε να προκαλούμε συνεχόμενη ταλάντωση στην πλεγματική γραμμή, που κινούσαμε ως τότε και αντ' αυτού, σε διαφορετικές εκτελέσεις, να την μετατοπίζουμε στη θέση όπου θα βρισκόταν στο $\frac{1}{4}$ κάθε περιόδου ταλάντωσης, στο $\frac{1}{2}$ και στα $\frac{3}{4}$ αυτής.

Εκτελέσαμε, δηλαδή, τρία εντελώς στατικά προβλήματα (παραμορφωμένο, αλλά στατικό πλέγμα) και παρατηρήσαμε ότι οι επαναλαμβανόμενες ταλαντώσεις που

παρατηρούνταν ήταν προϊόν της θέσης των σημείων του πλέγματος αυτής καθαυτής και όχι της αδυναμίας του *GCL* να παράγει ευσταθείς λύσεις. Δηλαδή, όπως βλέπουμε και στο Σχήμα 4.3, οι λύσεις (b), (c) καλύπτουν το εύρος της ταλάντωσης. Επομένως, αυτό προκαλείται επειδή η βασική μέθοδος, ανεξαρτήτως ικανοποίησης ή μη του *GCL*, παράγει (ελαχίστως) διαφορετικά αποτελέσματα ανάλογα με τη φυσική θέση του πλέγματος.



Σχήμα 4.3: Η λύση αναφοράς (a), η λύση από την πλεγματική παραμόρφωση (e) και οι λύσεις από το σταθεροποιημένο grid στις θέσεις που προκύπτουν έπειτα από το: $1/4$ (b), $1/2$ (c) και τα $3/4$ (d) της ταλάντωσης.

4.2 Πτέρυγα σε γωνιακή ταλάντωση

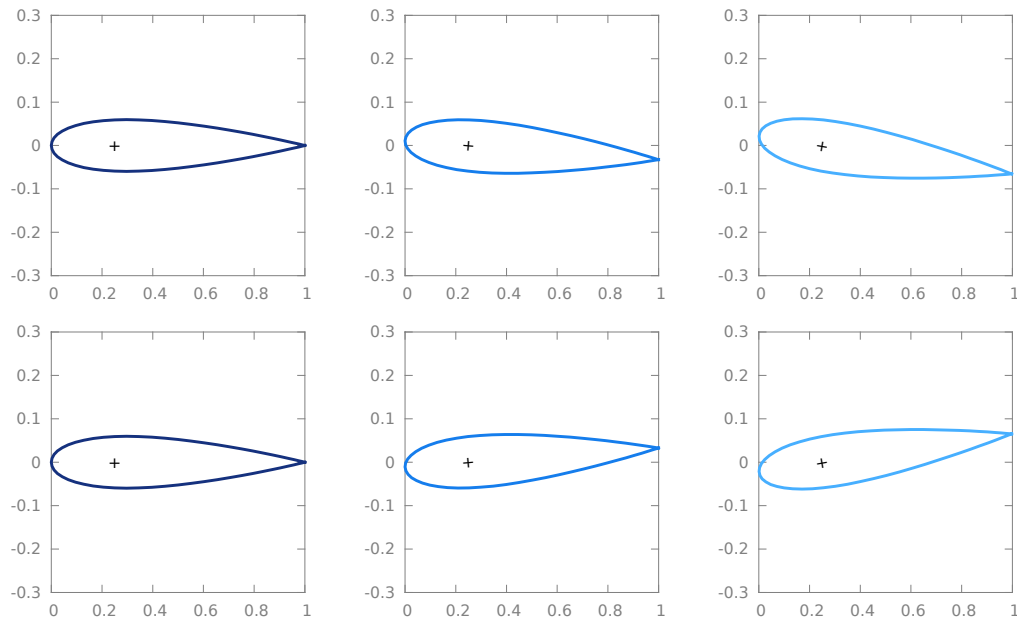
Θέλοντας να πιστοποιήσουμε τη σωστή υλοποίηση του *GCL*, επεξεργαστήκαμε ένα πρόβλημα στο οποίο γνωρίζαμε εκ των προτέρων λύσεις αναφοράς και συγκρίναμε τα αποτελέσματα του δικού μας κώδικα με εκείνες. Το πρόβλημα αυτό ήταν πρόβλημα προσομοίωσης ροής γύρω από αεροτομή υπό γωνιακή ταλάντωση.

Σε όλα τα παραδείγματα, μοντελοποιήθηκε πτέρυγα NACA0012 με άξονα περιστροφής στο $1/4$ της χορδής. Οι εξισώσεις, λοιπόν, της περιστροφής ήταν:

$$x_{new} = (x - 0.25) \cos \theta - y \sin \theta + 0.25 \quad (4.1)$$

$$y_{new} = (x - 0.25) \sin \theta + y \cos \theta \quad (4.2)$$

Στο Σχήμα 4.4 βλέπουμε στιγμιότυπα μιας τέτοιας κίνησης με εύρος $\pm 10^\circ$.

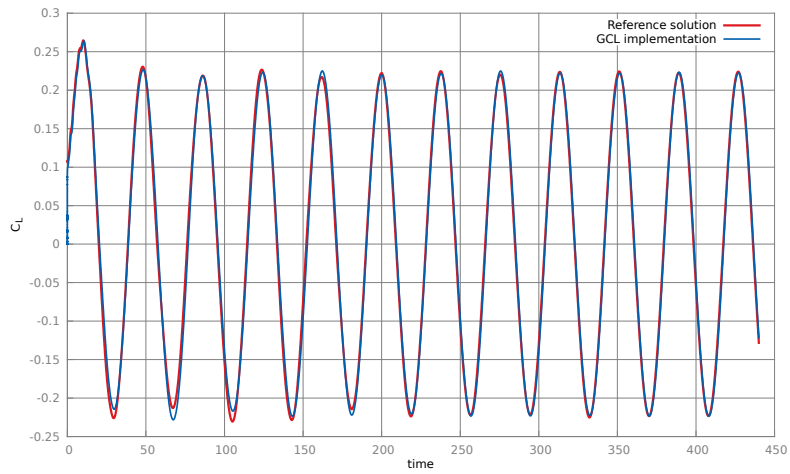


Σχήμα 4.4: Στιγμιότυπα ταλάντωσης πτέρυγας NACA0012 γύρω από άξονα (+) από τις 0° στις $\pm 5^\circ$ και $\pm 10^\circ$.

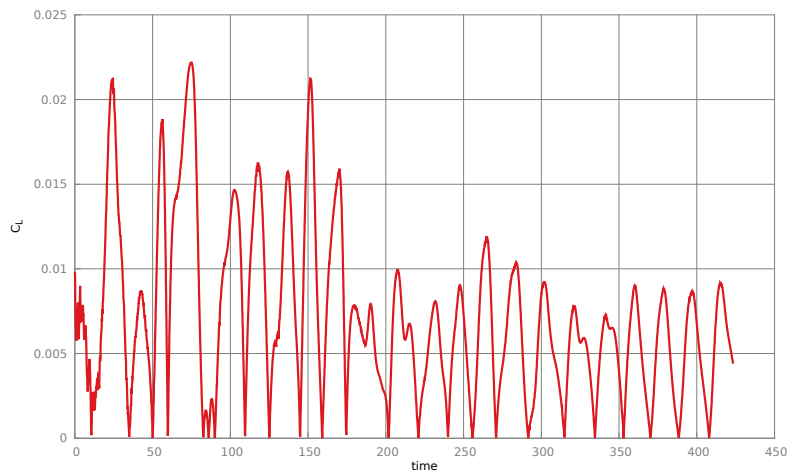
Η επίλυση έγινε πάνω σε υβριδικό πλέγμα 13000 κελιών, με ταχύτητα ροής 0.5mach , χρονικό βήμα $dt = 0.1\text{s}$.

Από το Σχήμα 4.5 βλέπουμε τα αποτελέσματα (C_L) της υλοποίησης του GCL σε σύγκριση με τη λύση αναφοράς. Οι δύο λύσεις σχεδόν ταυτίζονται, όπως φαίνεται και από το 4.6, όπου έχουμε σχεδιάσει το απόλυτο σφάλμα μεταξύ των δύο, η μέγιστη τιμή του οποίου κυμαίνεται χαμηλότερα από 10^{-2} από τη στιγμή της σύγκλισης. Στο Σχήμα 4.7, έχουμε βάλει τη σύγκλιση του C_L ως προς την κλίση της πτέρυγας και βλέπουμε αυτή ακριβώς τη διαφορά πιο καθαρά.

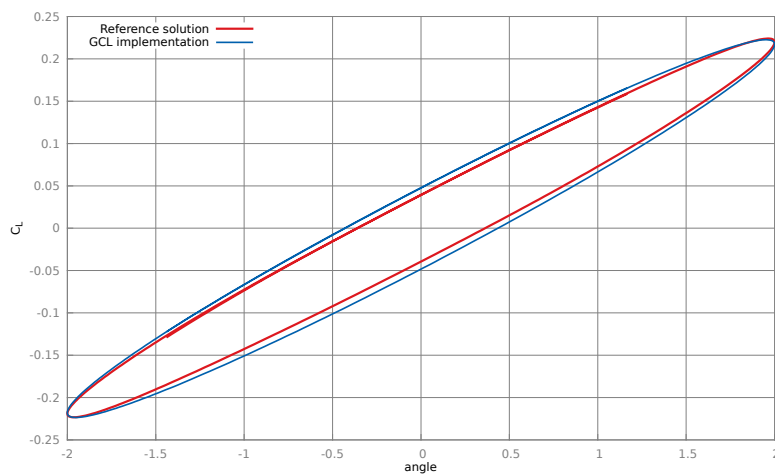
Για ακόμα μεγαλύτερη λεπτομέρεια, στο Σχήμα 4.8 συγκρίνουμε την κατανομή του συντελεστή πίεσης (*pressure coefficient* - C_p) κάθε σημείου της αεροτομής για τις δύο λύσεις στην ίδια χρονική στιγμή.



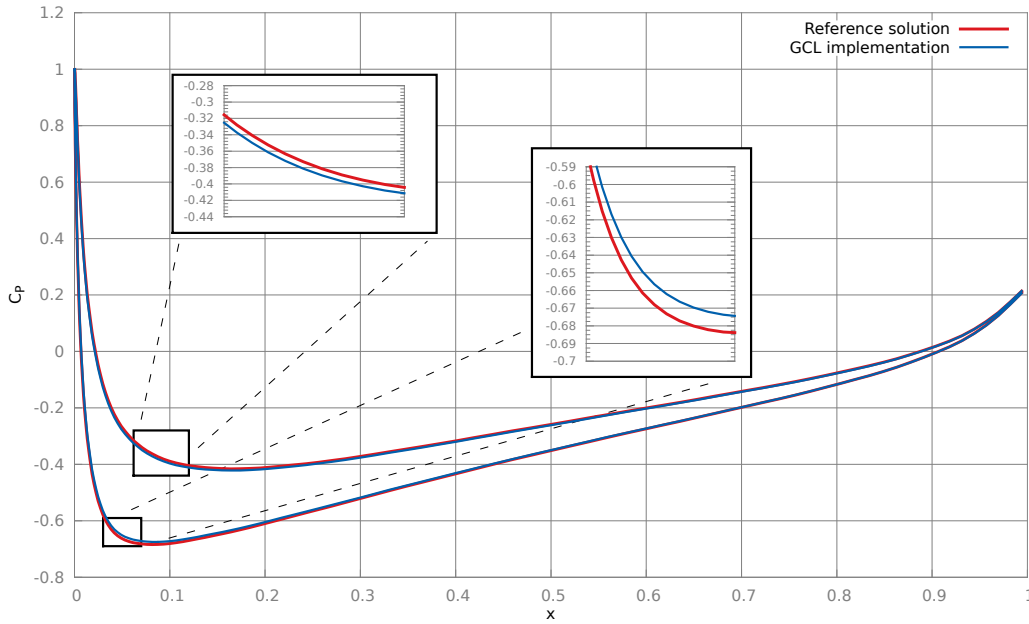
Σχήμα 4.5: Το C_L ως προς το χρόνο για πτέρυγα NACA0012 γύρω από τις 0° με εύρος ταλάντωσης $\pm 2^\circ$.



Σχήμα 4.6: Το απόλυτο σφάλμα μεταξύ των δύο λύσεων.



Σχήμα 4.7: Το C_L ως προς την κλίση της πτέρυγας NACA0012 γύρω από τις 0° με εύρος ταλάντωσης $\pm 2^\circ$.



Σχήμα 4.8: Στιγμιότυπο της κατανομής του C_p των σημείων πτέρυγας NACA0012 γύρω από τις 0° με εύρος ταλάντωσης $\pm 2^\circ$.

4.3 Πτέρυγα με κινούμενη υπεραντωτική διάταξη (flap)

Το τελικό στάδιο της εργασίας αφιερώθηκε στην προσομοίωση ροών γύρω από σταθερή πτέρυγα, σε διάφορες γωνίες, με κινούμενη υπεραντωτική διάταξη ακμής φυγής (*trailing edge flap*), η οποία βρίσκεται στο 10% της χορδής της αεροτομής.

Η κίνηση του flap είναι αρμονική και προκύπτει από την παρακάτω εξίσωση:

$$y_{flap}(x) = y_{init}(x) + b y_b(x) \quad (4.3)$$

όπου:

$$y_b(x) = \begin{cases} \sqrt{RCC^2 - (x - 0.9)^2} - RCC, & x \geq 0.9 \\ 0, & x < 0.9 \end{cases} \quad (4.4)$$

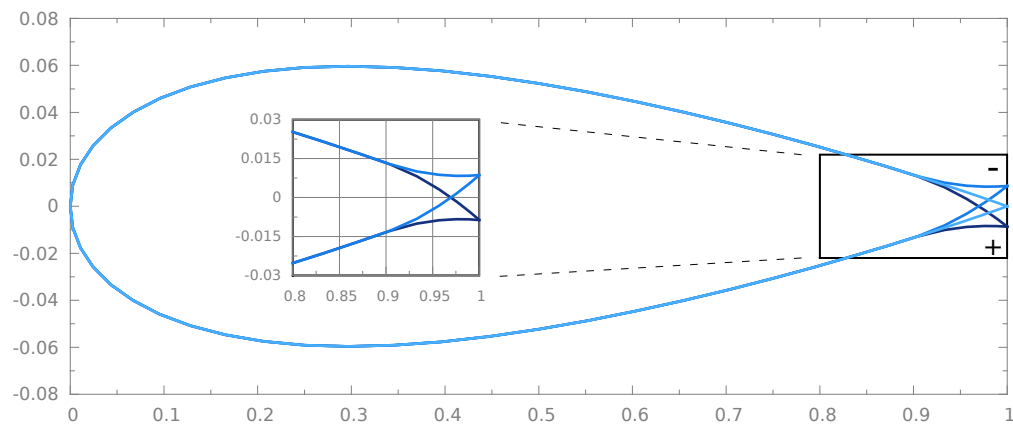
$$RCC = \frac{(0.1 \cdot \sin \frac{\pi}{180})^2 + 0.1^2}{0.2 \cdot \sin \frac{\pi}{180}} \quad (4.5)$$

$$b = b_{amp} \cdot \sin(2f_k \cdot t) \quad (4.6)$$

- b_{amp} : το πλάτος της γωνίας παραμόρφωσης,
 με f_k : η συχνότητα της κίνησης, και
 y_{init} : η y -συντεταγμένη των σημείων της αεροτομής στην αρχική της θέση.

Στο Σχήμα 4.9 βλέπουμε το εύρος της κίνησης του flap μιας αεροτομής NACA0012 για $b_{amp} = 5^\circ$.

Για τις περιπτώσεις που θα περιγραφούν, έγινε η προσομοίωση των ροών με χρήση του επιλυτή για τις εξισώσεις Navier-Stokes πάνω σε πλέγμα 66000 κελιών (CFL=30), ο αριθμός Reynolds ήταν σταθερός, $Re = 10^6$, το χρονικό βήμα $dt = 0.1s$, στο καθένα από αυτά υπήρχαν 5 dualsteps (με CFL=10) και η ταχύτητα της ροής ήταν 0.1mach.

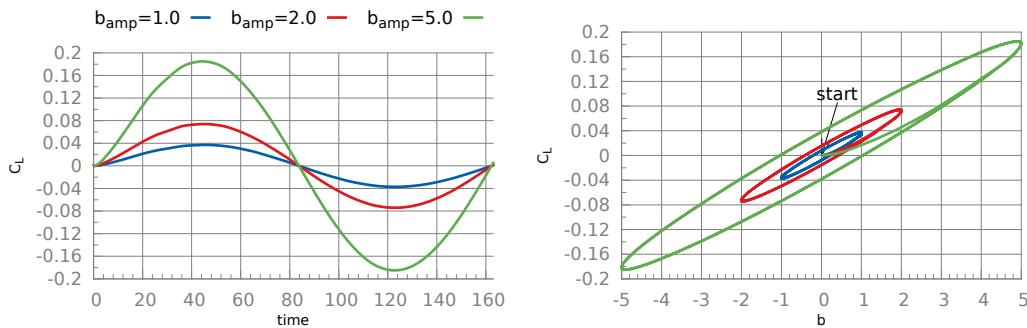


Σχήμα 4.9: Πτέρυγα NACA0012 με 10% της χορδής trailing edge flap σε παραμόρφωση $\pm 5^\circ$.

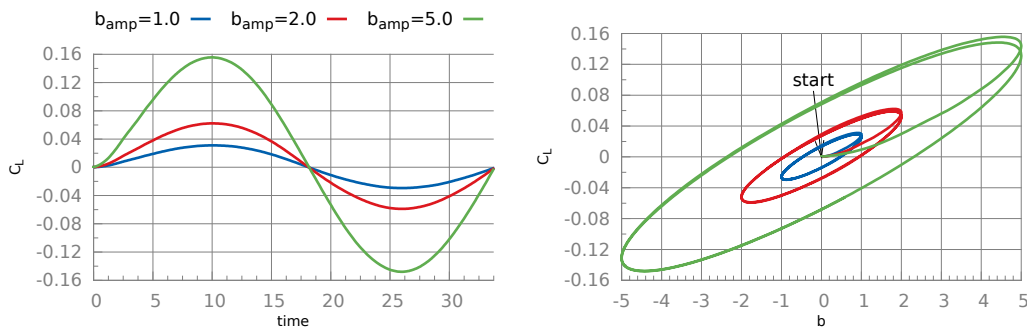
4.3.1 Σταθερή αεροτομή στις 0°

Στην πρώτη περίπτωση η αεροτομή παραμένει σταθερή στις 0° και το flap κινείται με διαφορετικές γωνίες παραμόρφωσης και σε διαφορετικές συχνότητες. Σε όλα τα παραδείγματα, πριν την έναρξη της κίνησης του flap, επιτεύχθηκε η σύγκλιση του stationary προβλήματος, ώστε να σχηματιστεί σωστά το boundary layer, έπειτα από 600 επαναλήψεις.

Στα Σχήματα 4.10, 4.11, 4.12 βλέπουμε σε αντιπαράθεση τον συντελεστή άνωσης για τις τρεις γωνίες παραμόρφωσης που χρησιμοποιήθηκαν με συχνότητα κίνησης $f_k = 0.02$, $f_k = 0.1$ και $f_k = 0.5$ αντίστοιχα, για μια ολοκληρωμένη ταλάντωση του flap.

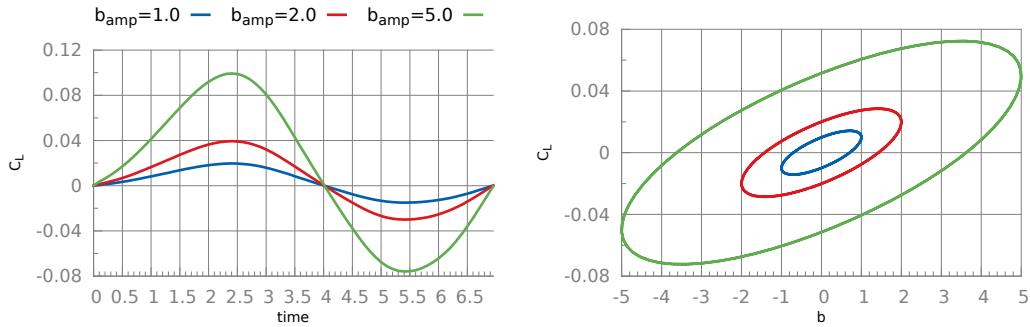


Σχήμα 4.10: Συγκριτικό γράφημα του C_L αναλόγως το πλάτος παραμόρφωσης, ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης, για σταθερή πτέρυγα στις $a = 0^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.02$.



Σχήμα 4.11: Συγκριτικό γράφημα του C_L αναλόγως το πλάτος παραμόρφωσης, ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης, για σταθερή πτέρυγα στις $a = 0^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.1$.

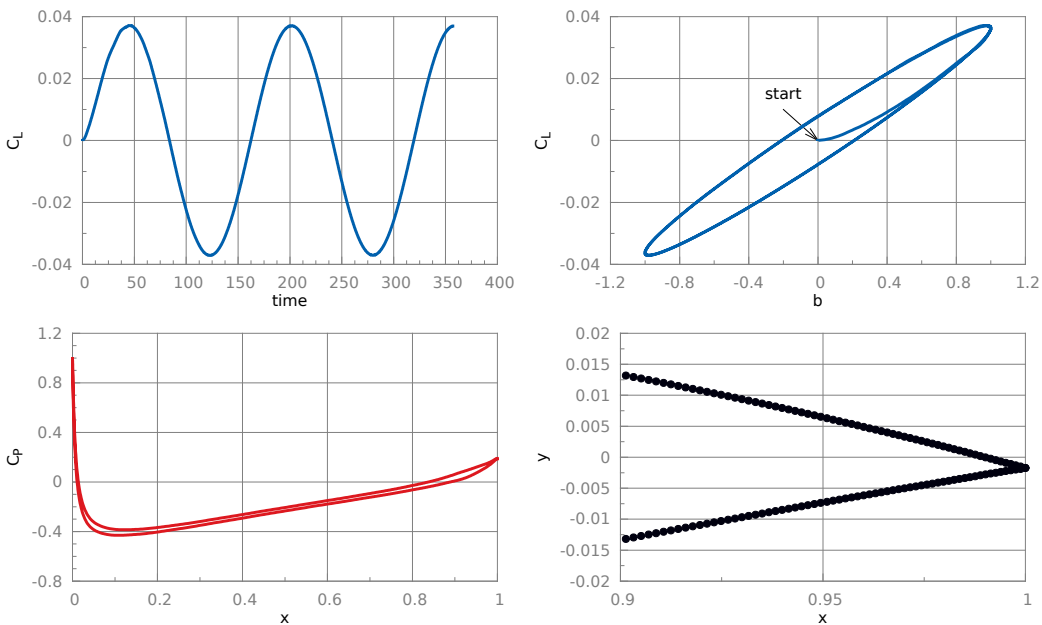
Στο Σχήμα 4.13 βλέπουμε, για πλάτος γωνίας παραμόρφωσης 1° , το ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο εξέλιξης και για την καλύτερη αναγνώριση της σύγκλισης και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης². Η συχνότητα της κίνησης είναι $f_k = 0.02$ και όπως παρατηρούμε



Σχήμα 4.12: Συγκριτικό γράφημα του C_L αναλόγως το πλάτος παραμόρφωσης, ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης, για σταθερή πτέρυγα στις $\alpha = 0^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.5$.

επιτυγχάνεται η σύγκλιση από τις πρώτες επαναλήψεις.

Τα αντίστοιχα αποτελέσματα για συχνότητες $f_k = 0.1$ και $f_k = 0.5$ βρίσκονται στα Σχήματα 4.14 και 4.15. Στο τελευταίο είναι εμφανές ότι για μεγάλη συχνότητα χρειάζονται περισσότερες επαναλήψεις για να επέλθει η τελική σύγκλιση του C_L . Πανομοιότυπα είναι τα συμπεράσματα και υπόλοιπες γωνίες (βλ. παρακάτω ενότητες).

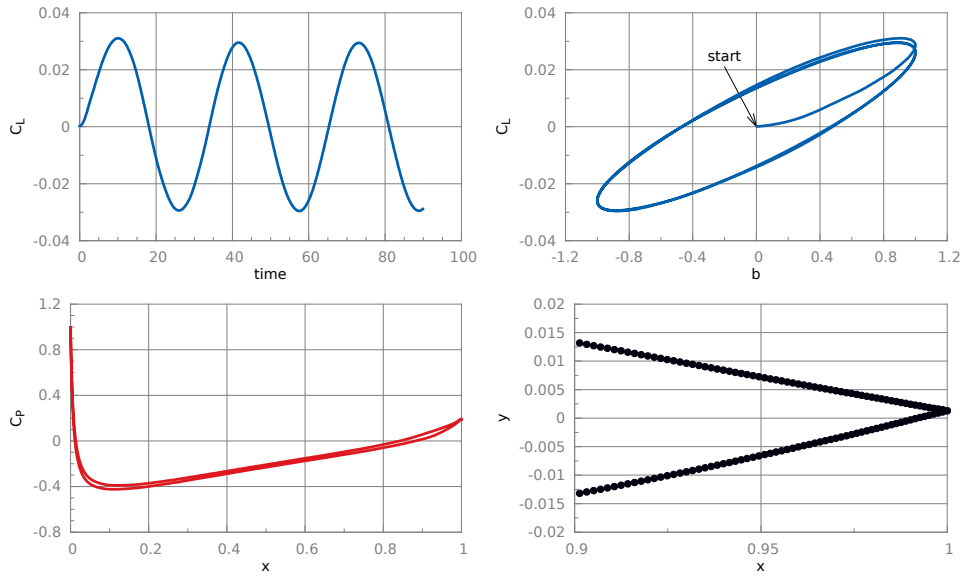


Σχήμα 4.13: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_p της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $\alpha = 0^\circ$ με $b_{amp} = 1^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.02$.

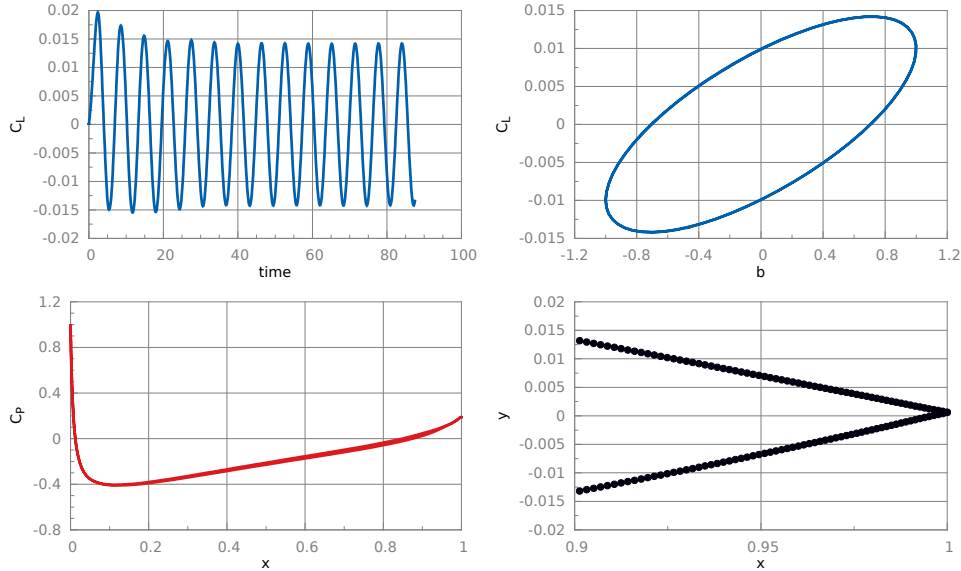
Όμοια, ακολουθούν τα σχήματα για πλάτος γωνίας παραμόρφωσης $b_{amp} = 2^\circ$

²Κάθε κύκλος αναπαριστά μία ολοκληρωμένη ταλάντωση.

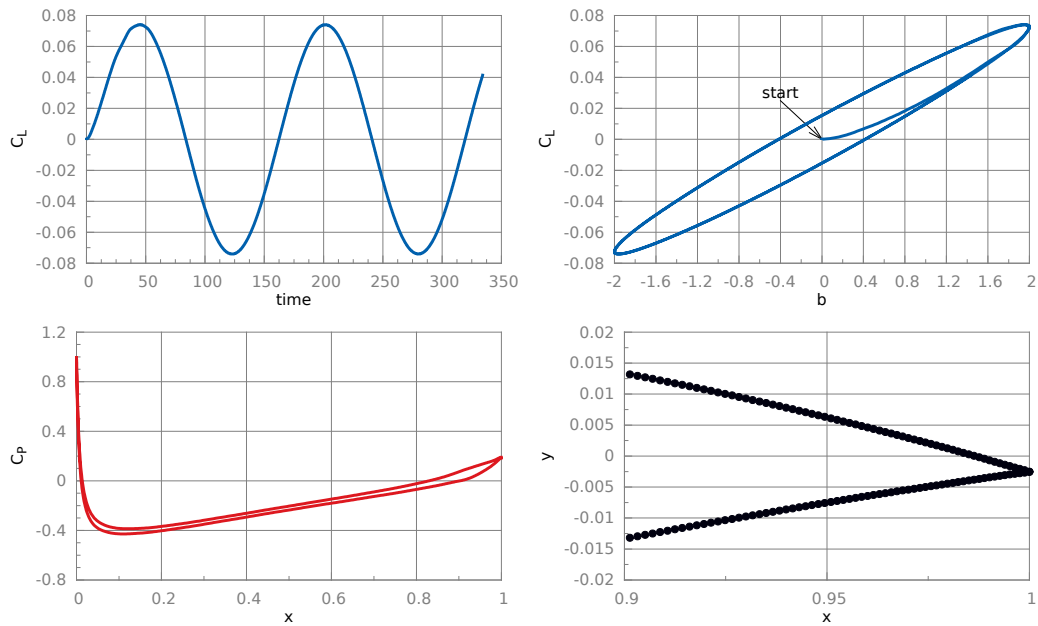
στις τρεις διαφορετικές συχνότητες κίνησης 4.16, 4.17 και 4.18. Τέλος, για $b_{amp} = 5^\circ$ παραθέτουμε τα Σχήματα 4.19, 4.20 και 4.21.



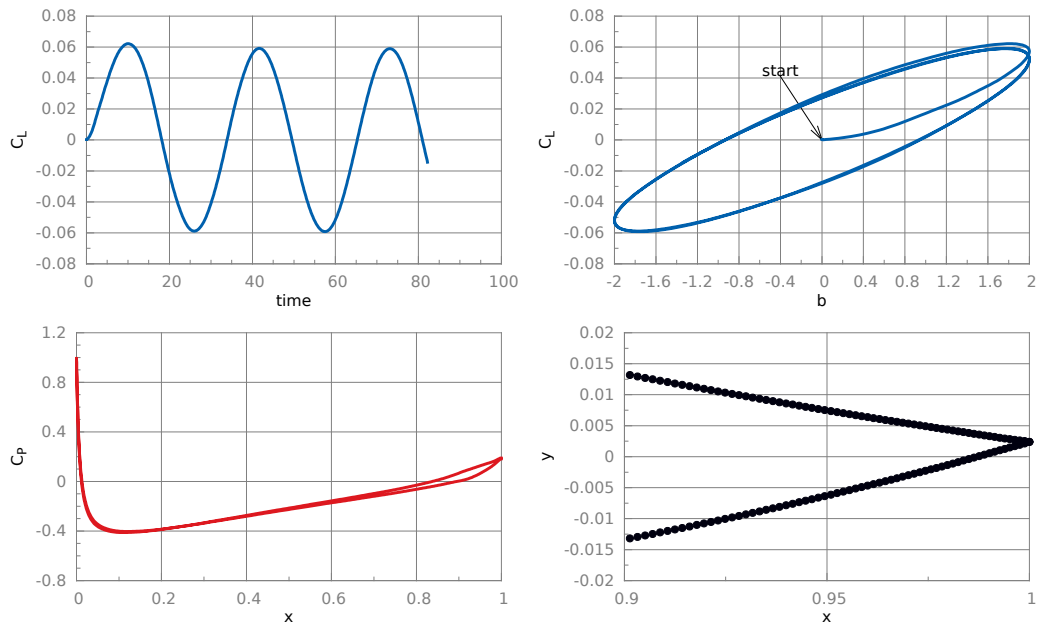
Σχήμα 4.14: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_p της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $a = 0^\circ$ με $b_{amp} = 1^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.1$.



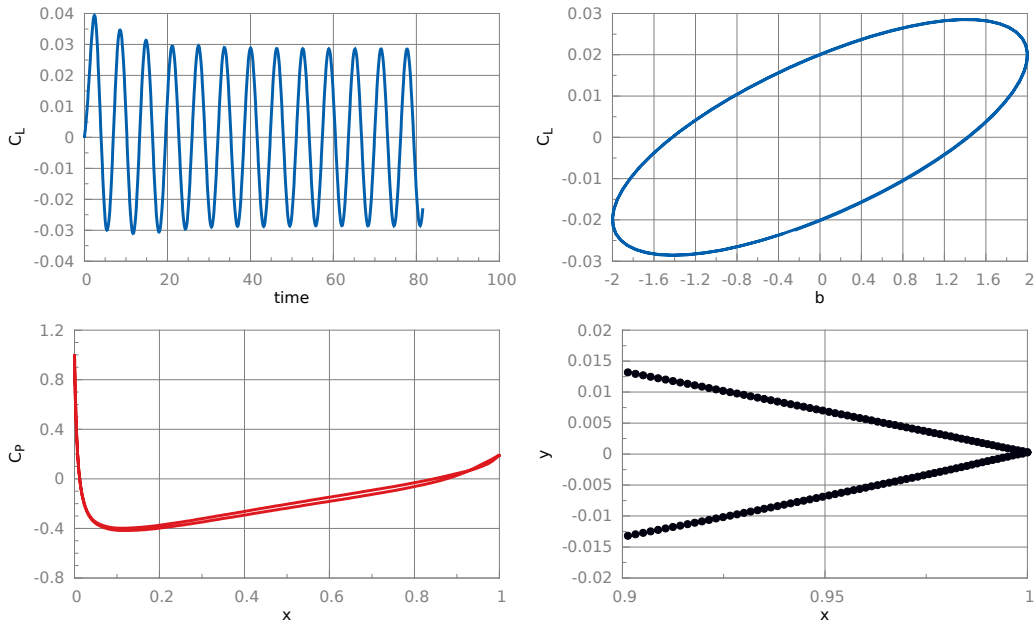
Σχήμα 4.15: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και η κατάληξη της σύγκλισης του ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_p της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $a = 0^\circ$ με $b_{amp} = 1^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.5$.



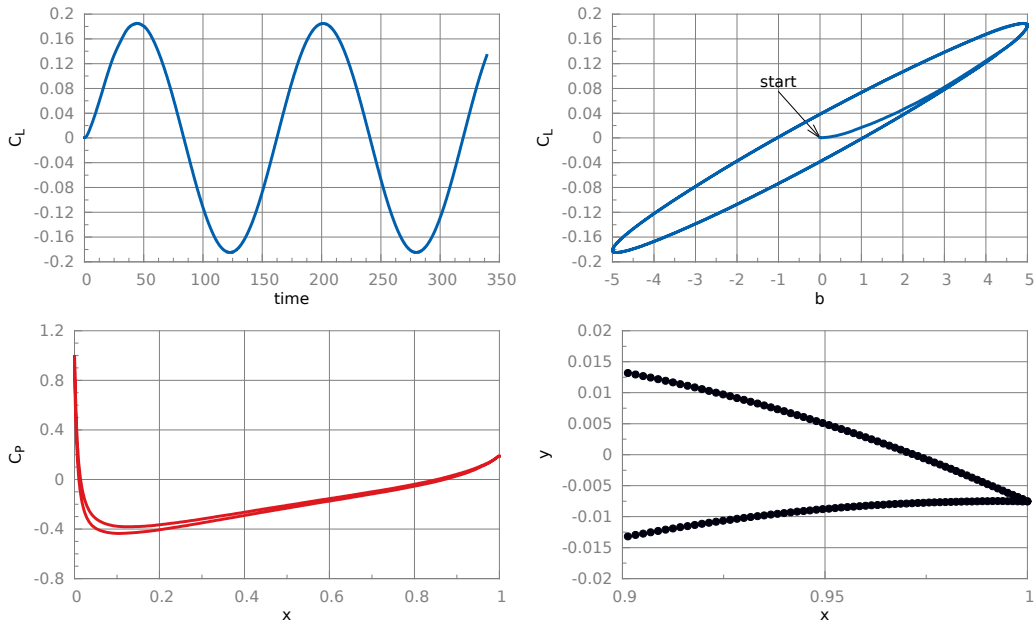
Σχήμα 4.16: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_D της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $\alpha = 0^\circ$ με $b_{amp} = 2^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.02$.



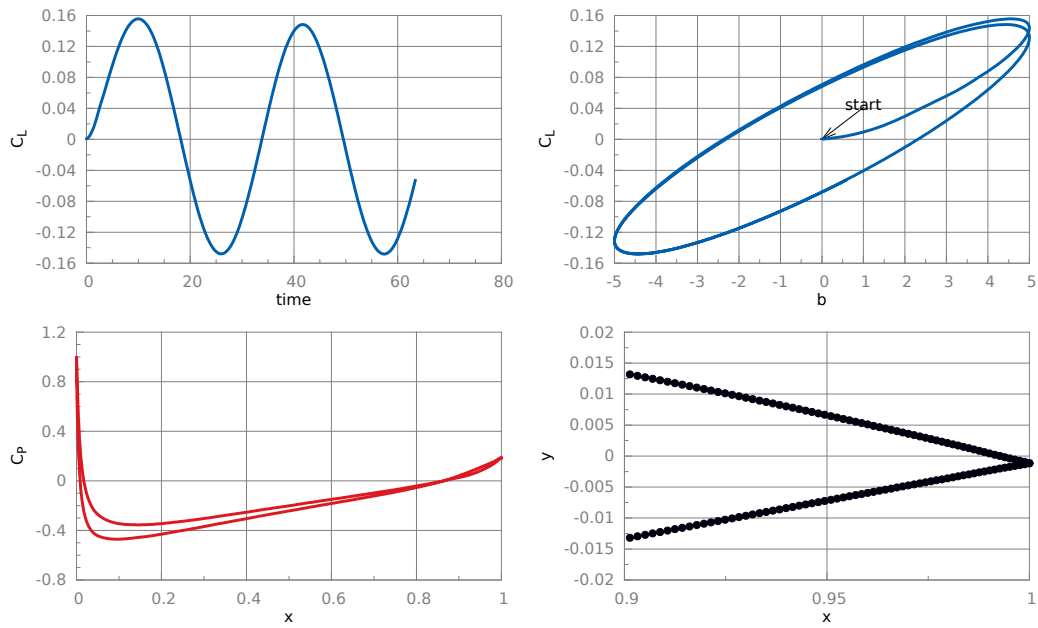
Σχήμα 4.17: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_D της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $\alpha = 0^\circ$ με $b_{amp} = 2^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.1$.



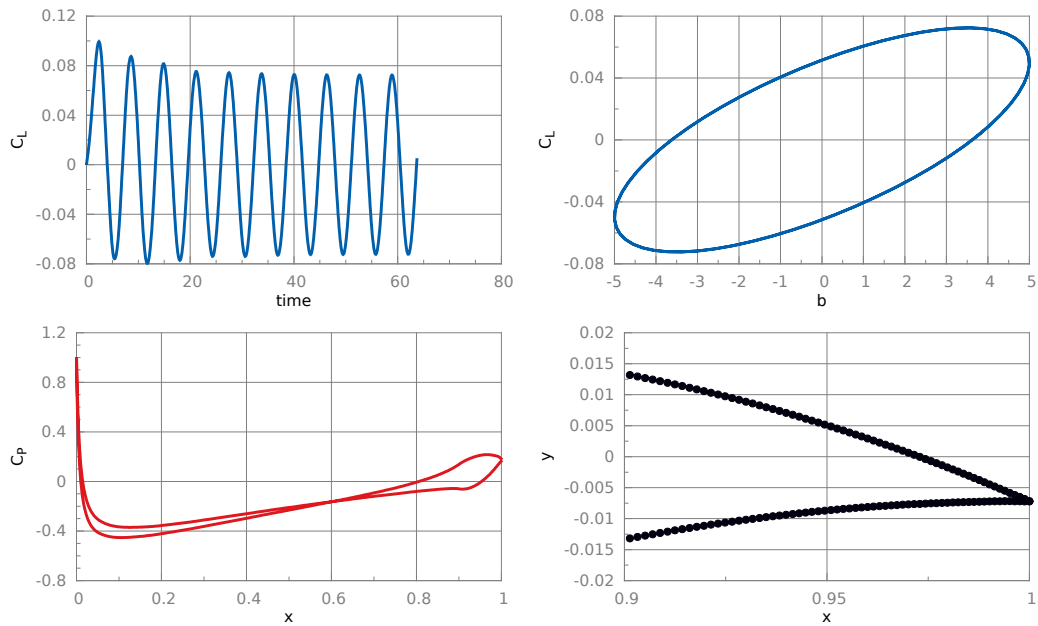
Σχήμα 4.18: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και η κατάληξη της σύγκλισης του ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_P της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $a = 0^\circ$ με $b_{amp} = 2^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.5$.



Σχήμα 4.19: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_P της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $a = 0^\circ$ με $b_{amp} = 5^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.02$.



Σχήμα 4.20: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_D της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $\alpha = 0^\circ$ με $b_{amp} = 5^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.1$.

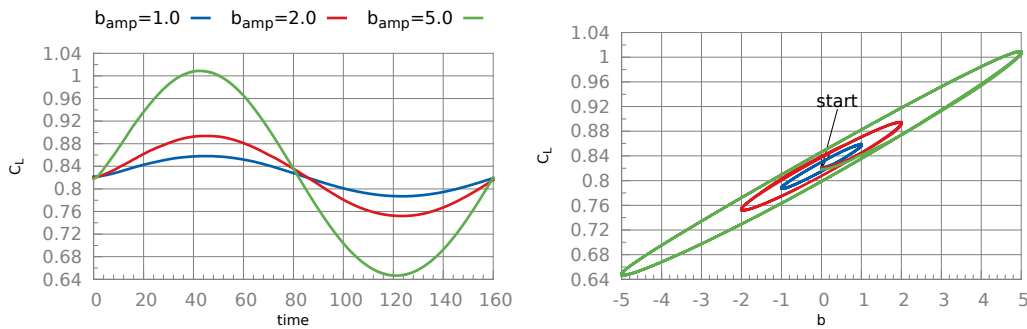


Σχήμα 4.21: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και η κατάληξη της σύγκλισης του ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_D της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $\alpha = 0^\circ$ με $b_{amp} = 5^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.5$.

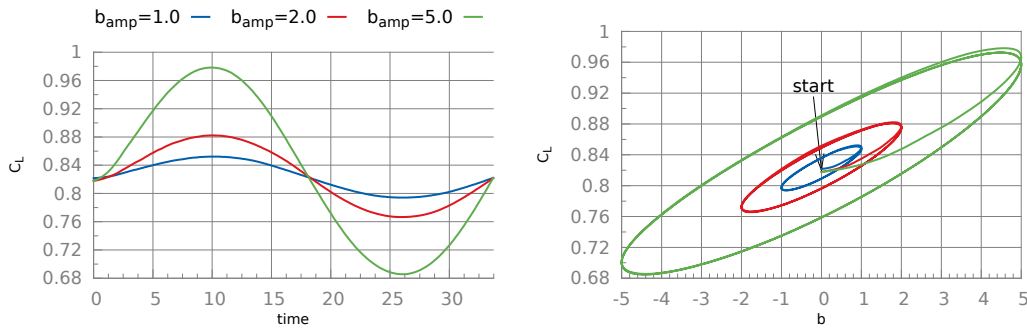
4.3.2 Σταθερή αεροτομή στις 8°

Στην αυτή την περίπτωση η αεροτομή παραμένει σταθερή στις 8° . Σε όλα τα παραδείγματα, πριν την έναρξη της κίνησης του flap, επιτεύχθηκε η σύγκλιση του stationary προβλήματος, έπειτα από 1200 επαναλήψεις.

Στα Σχήματα 4.22, 4.23, 4.24 βλέπουμε σε αντιπαράθεση τον συντελεστή άνωσης για τις τρεις γωνίες παραμόρφωσης που χρησιμοποιήθηκαν με συχνότητα κίνησης $f_k = 0.02$, $f_k = 0.1$ και $f_k = 0.5$ αντίστοιχα, για μια ολοκληρωμένη ταλάντωση του flap.

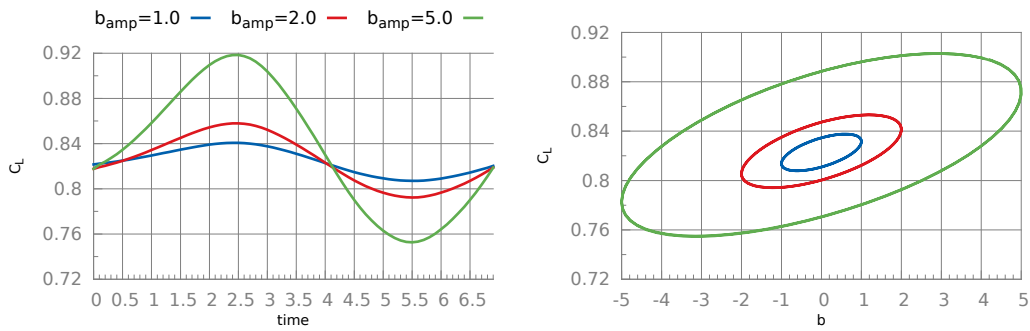


Σχήμα 4.22: Συγκριτικό γράφημα του C_L αναλόγως το πλάτος παραμόρφωσης, ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης, για σταθερή πτέρυγα στις $\alpha = 8^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.02$.

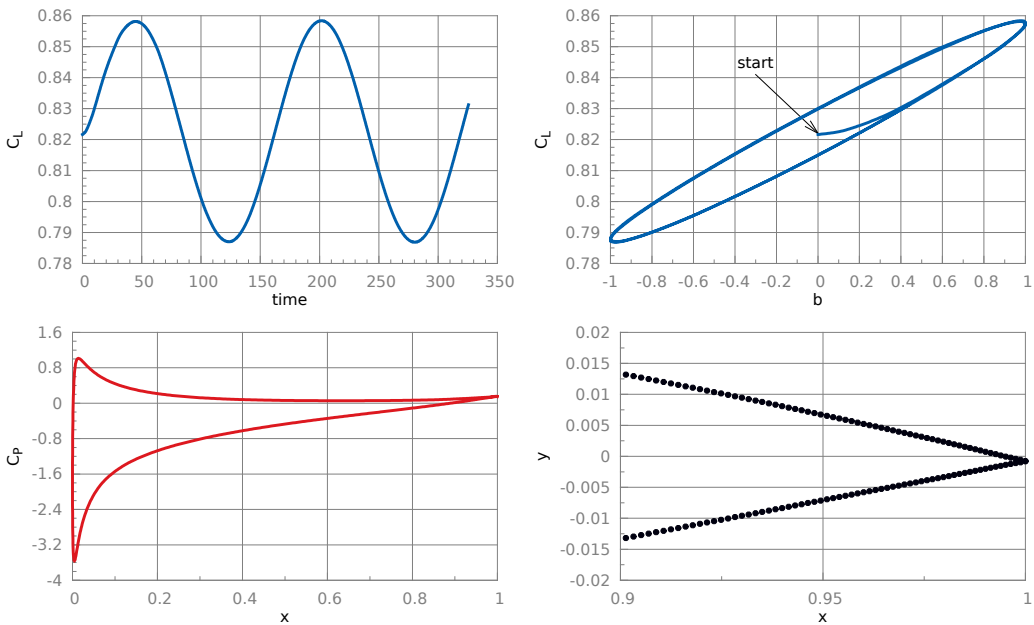


Σχήμα 4.23: Συγκριτικό γράφημα του C_L αναλόγως το πλάτος παραμόρφωσης, ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης, για σταθερή πτέρυγα στις $\alpha = 8^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.1$.

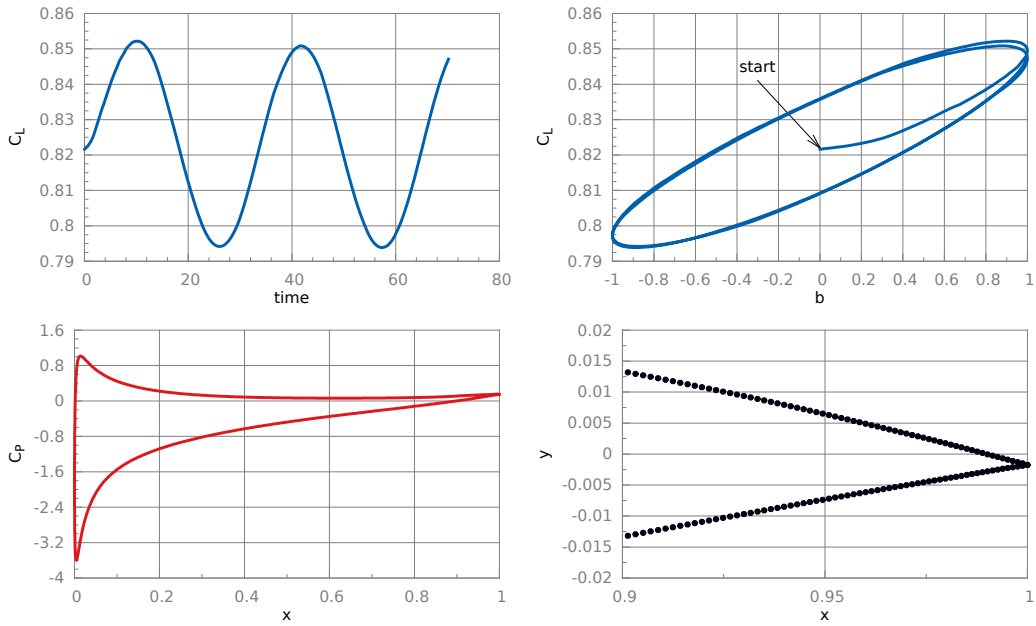
Στα Σχήματα 4.25, 4.28 και 4.31 υπάρχουν οι λύσεις για πλάτος γωνίας παραμόρφωσης 1° , 2° και 5° αντίστοιχα, για συχνότητα $f_k = 0.02$. Για τις υπόλοιπες δύο συχνότητες παραπέμπουμε στα Σχήματα 4.26, 4.29, 4.32 και τέλος 4.27, 4.30, 4.33.



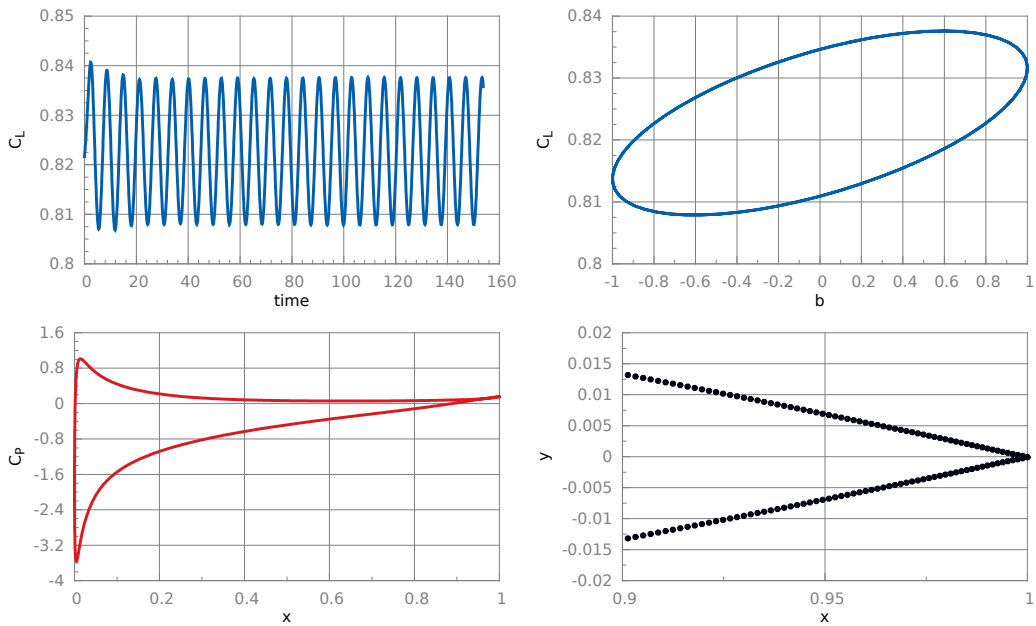
Σχήμα 4.24: Συγκριτικό γράφημα του C_L αναλόγως το πλάτος παραμόρφωσης, ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης, για σταθερή πτέρυγα στις $\alpha = 8^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.5$.



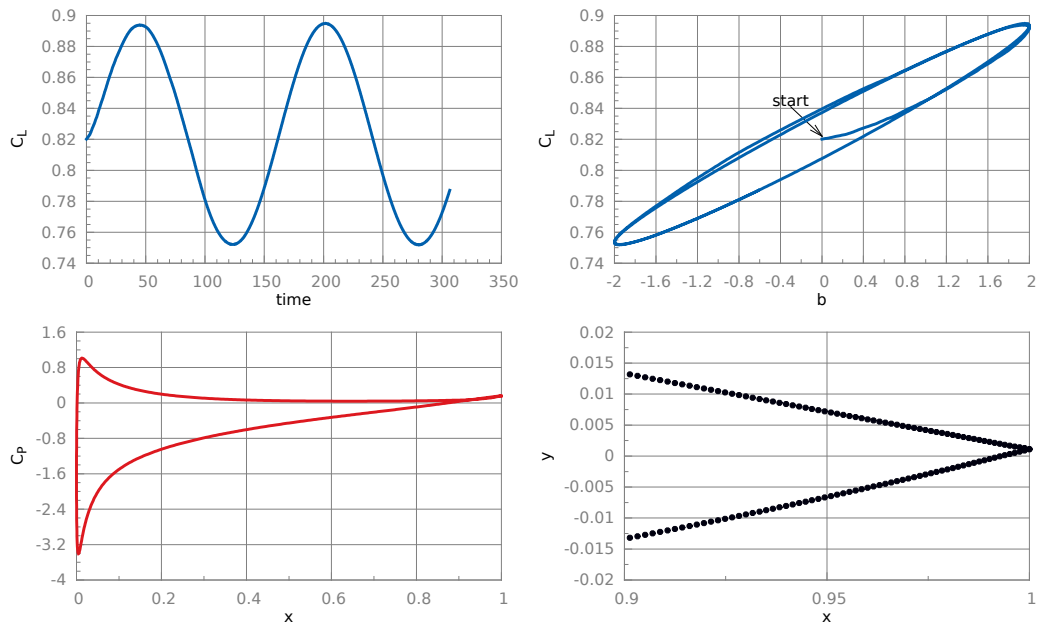
Σχήμα 4.25: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_p της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $\alpha = 8^\circ$ με $b_{amp} = 1^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.02$.



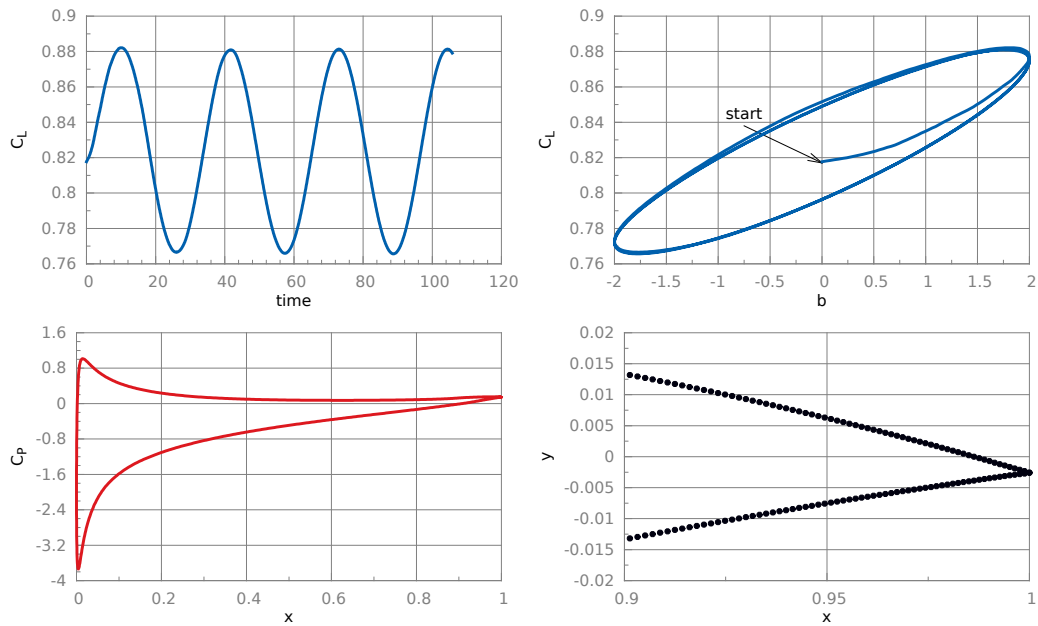
Σχήμα 4.26: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_P της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $\alpha = 8^\circ$ με $b_{amp} = 1^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.1$.



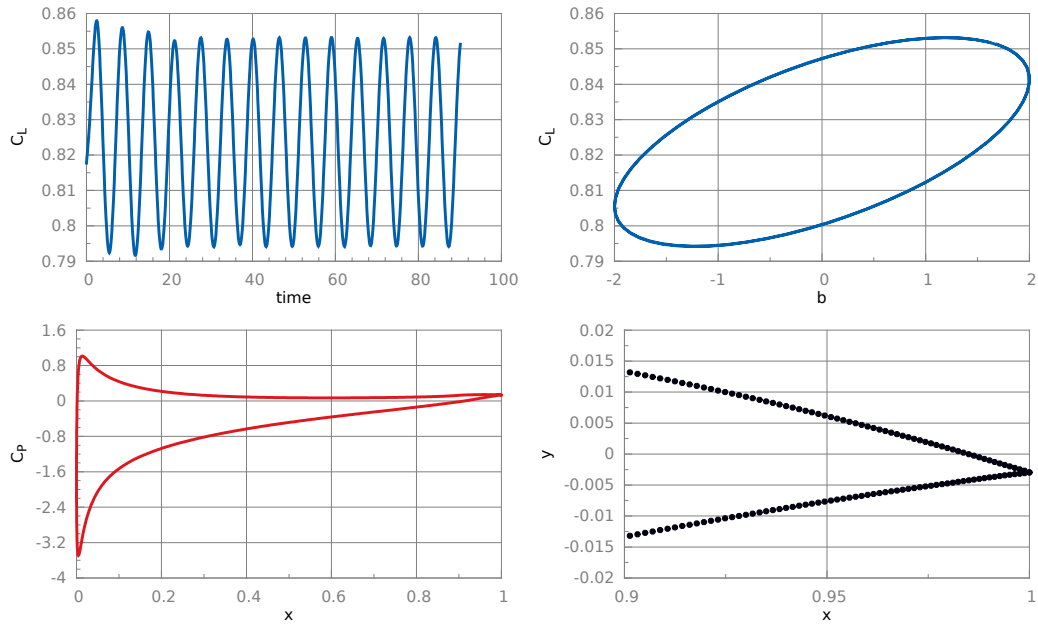
Σχήμα 4.27: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και η κατάληξη της σύγκλισης του ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_P της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $\alpha = 8^\circ$ με $b_{amp} = 1^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.5$.



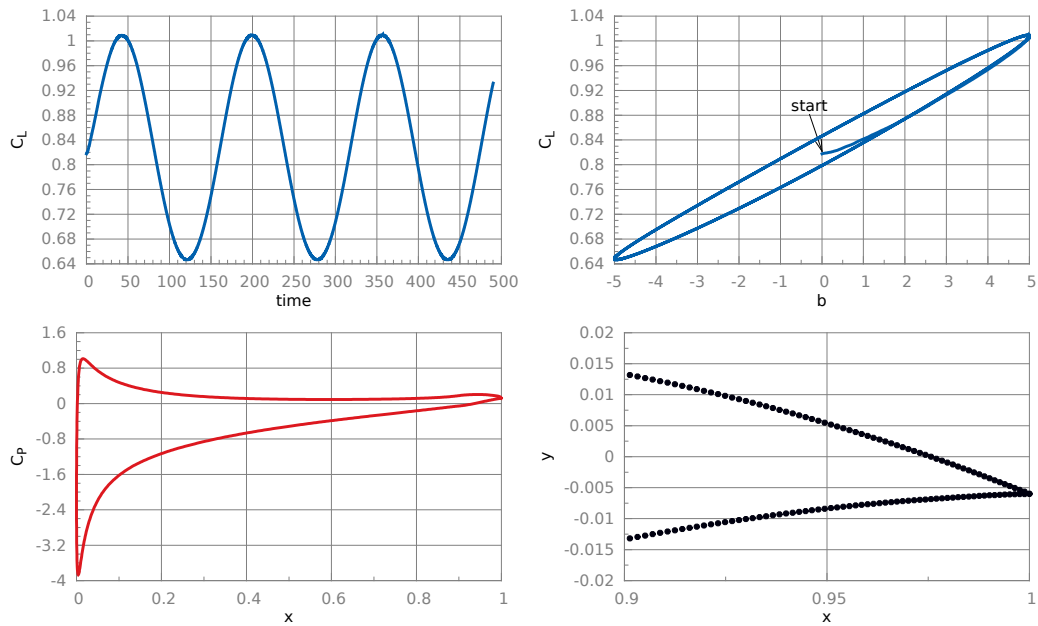
Σχήμα 4.28: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_P της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $a = 8^\circ$ με $b_{amp} = 2^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.02$.



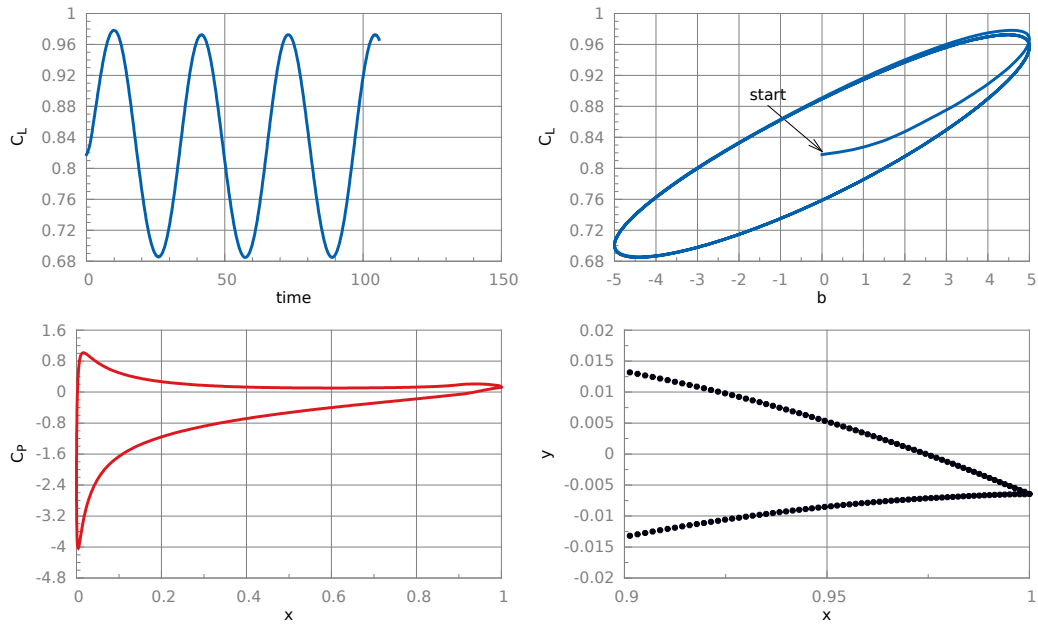
Σχήμα 4.29: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_P της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $a = 8^\circ$ με $b_{amp} = 2^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.1$.



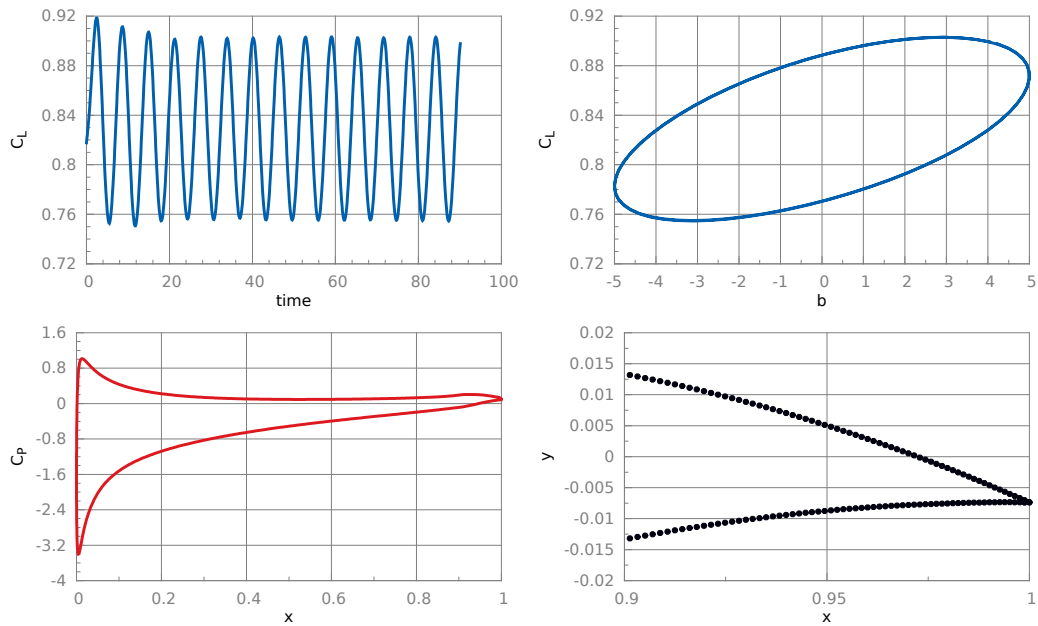
Σχήμα 4.30: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και η κατάληξη της σύγκλισης του ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_p της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $a = 8^\circ$ με $b_{amp} = 2^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.5$.



Σχήμα 4.31: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_p της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $a = 8^\circ$ με $b_{amp} = 5^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.02$.



Σχήμα 4.32: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_p της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $\alpha = 8^\circ$ με $b_{amp} = 5^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.1$.

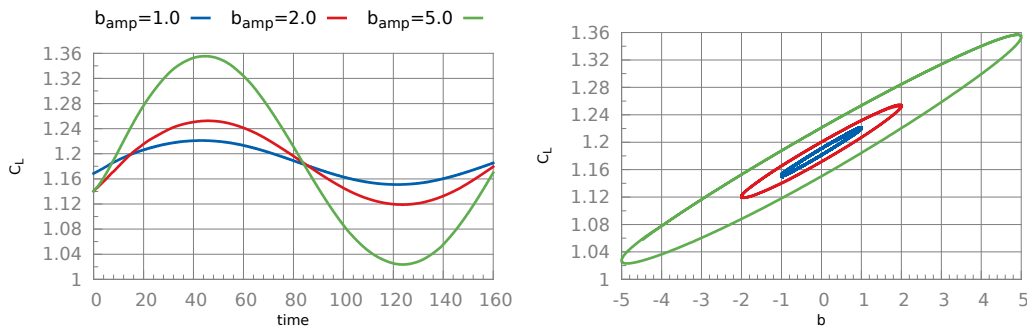


Σχήμα 4.33: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και η κατάληξη της σύγκλισης του ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_p της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $\alpha = 8^\circ$ με $b_{amp} = 5^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.5$.

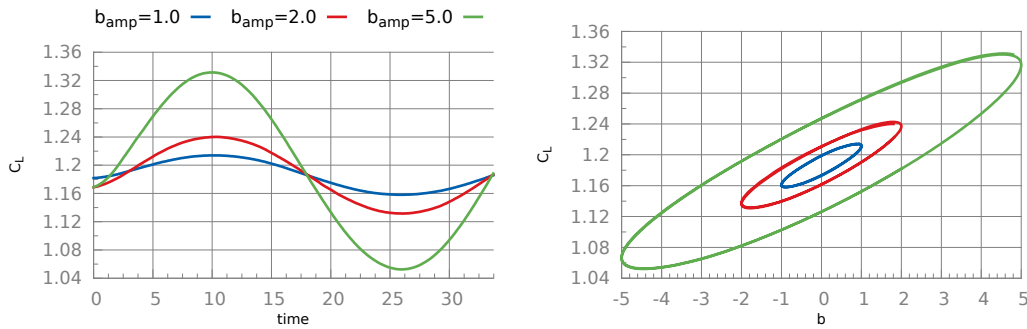
4.3.3 Σταθερή αεροτομή στις 12°

Στην αυτή την περίπτωση η αεροτομή παραμένει σταθερή στις 12° . Σε όλα τα παραδείγματα, πριν την έναρξη της κίνησης του flap, επιτεύχθηκε η σύγκλιση του stationary προβλήματος, έπειτα από 1500 επαναλήψεις.

Στα Σχήματα 4.34, 4.35, 4.36 βλέπουμε σε αντιπαράθεση τον συντελεστή άνωσης για τις τρεις γωνίες παραμόρφωσης που χρησιμοποιήθηκαν με συχνότητα κίνησης $f_k = 0.02$, $f_k = 0.1$ και $f_k = 0.5$ αντίστοιχα, για μια ολοκληρωμένη ταλάντωση του flap.



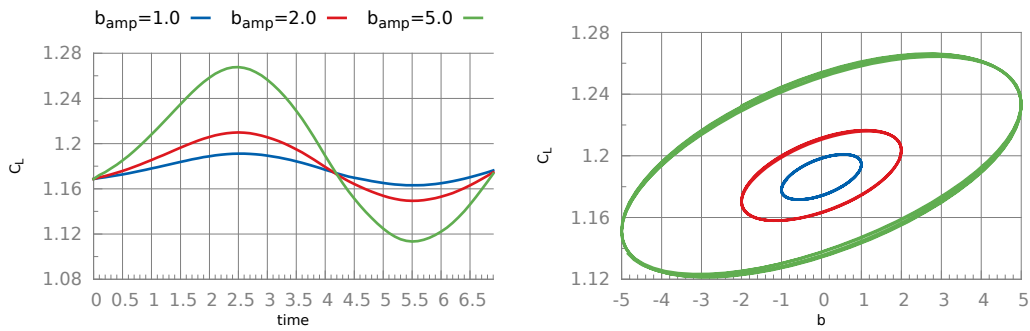
Σχήμα 4.34: Συγκριτικό γράφημα του C_L αναλόγως το πλάτος παραμόρφωσης, ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης, για σταθερή πτέρυγα στις $\alpha = 12^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.02$.



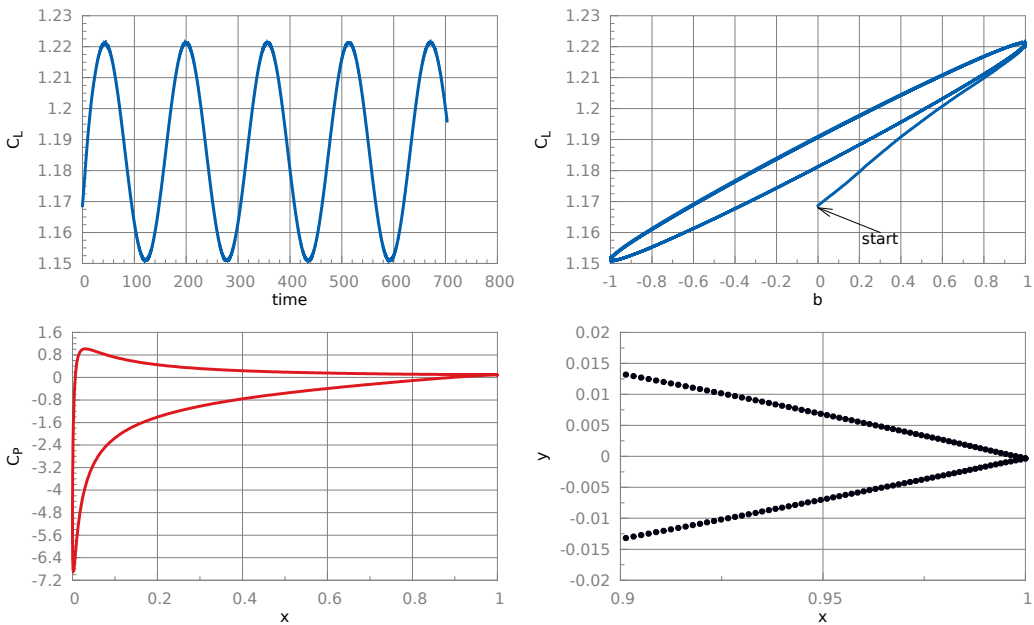
Σχήμα 4.35: Συγκριτικό γράφημα του C_L αναλόγως το πλάτος παραμόρφωσης, ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης, για σταθερή πτέρυγα στις $\alpha = 12^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.1$.

Τα υπόλοιπα αποτελέσματα βρίσκονται στα παρακάτω σχήματα:

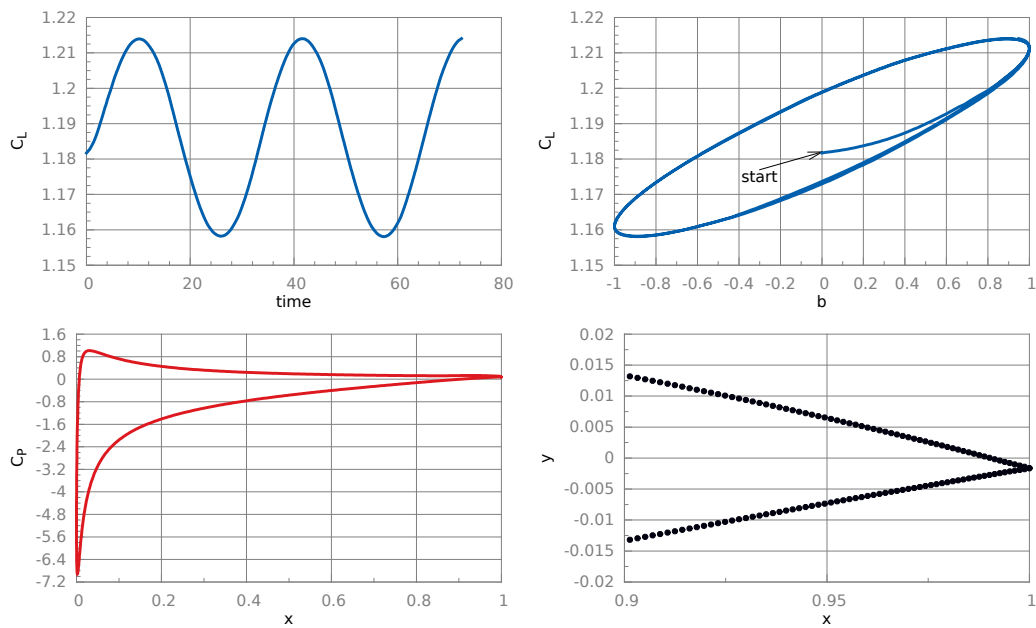
b_{amp}	f_k	Σχήμα	b_{amp}	f_k	Σχήμα	b_{amp}	f_k	Σχήμα
1°		4.37	1°		4.38	1°		4.39
2°	0.02	4.40	2°	0.1	4.41	2°	0.5	4.42
5°		4.43	5°		4.44	5°		4.45



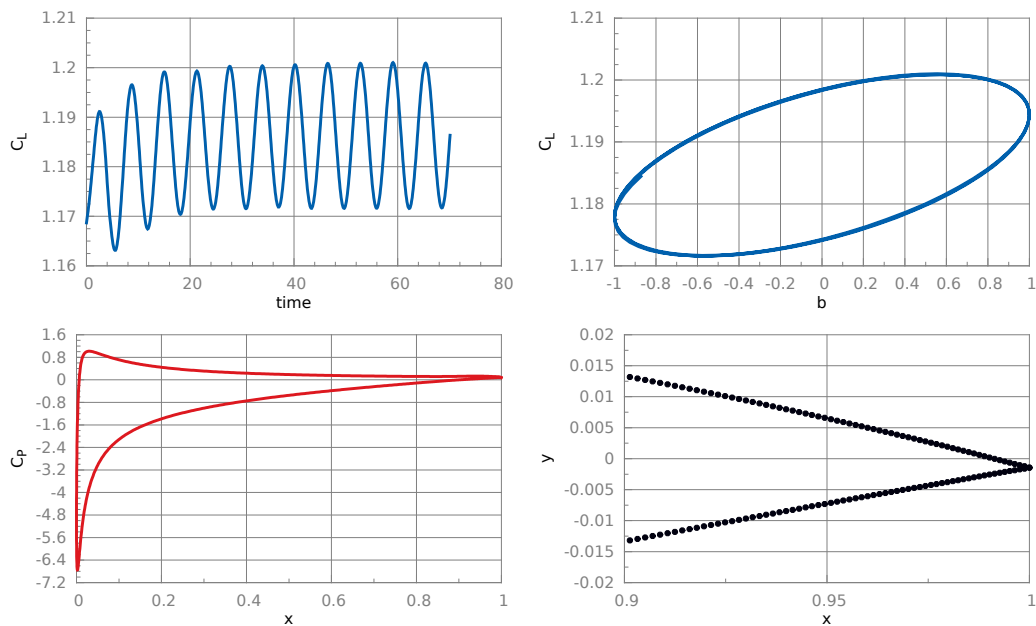
Σχήμα 4.36: Συγκριτικό γράφημα του C_L αναλόγως το πλάτος παραμόρφωσης, ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης, για σταθερή πτέρυγα στις $\alpha = 12^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.5$.



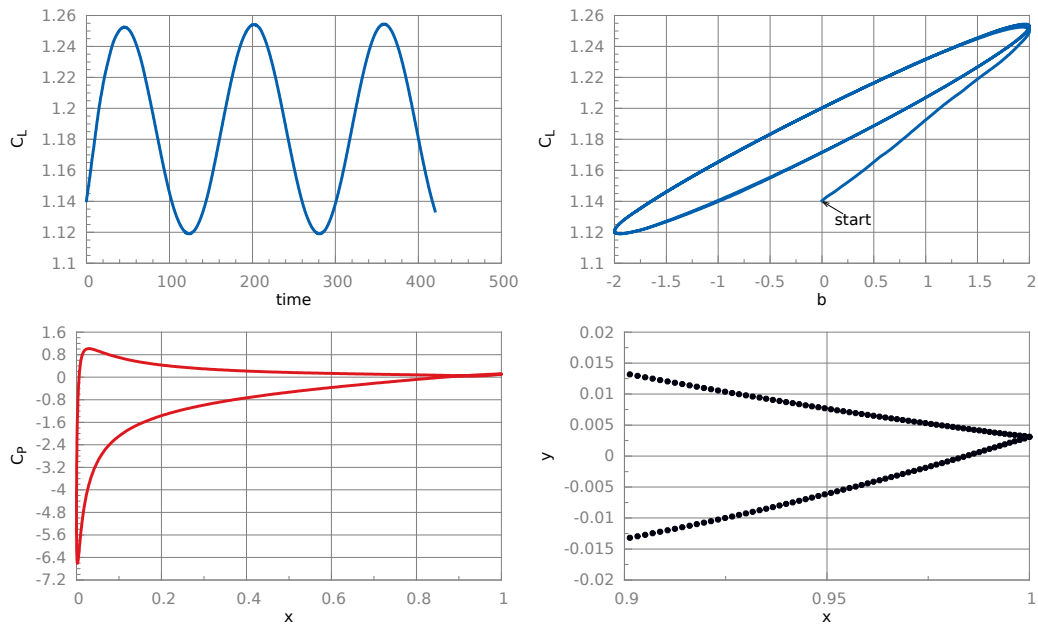
Σχήμα 4.37: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_p της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $\alpha = 12^\circ$ με $b_{amp} = 1^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.02$.



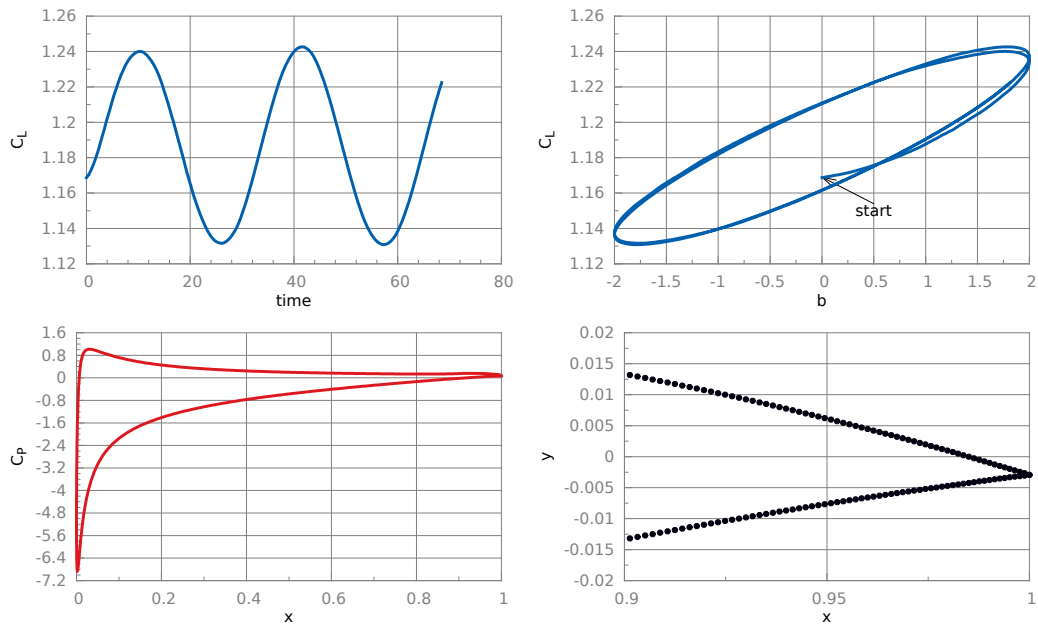
Σχήμα 4.38: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_P της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $\alpha = 12^\circ$ με $b_{amp} = 1^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.1$.



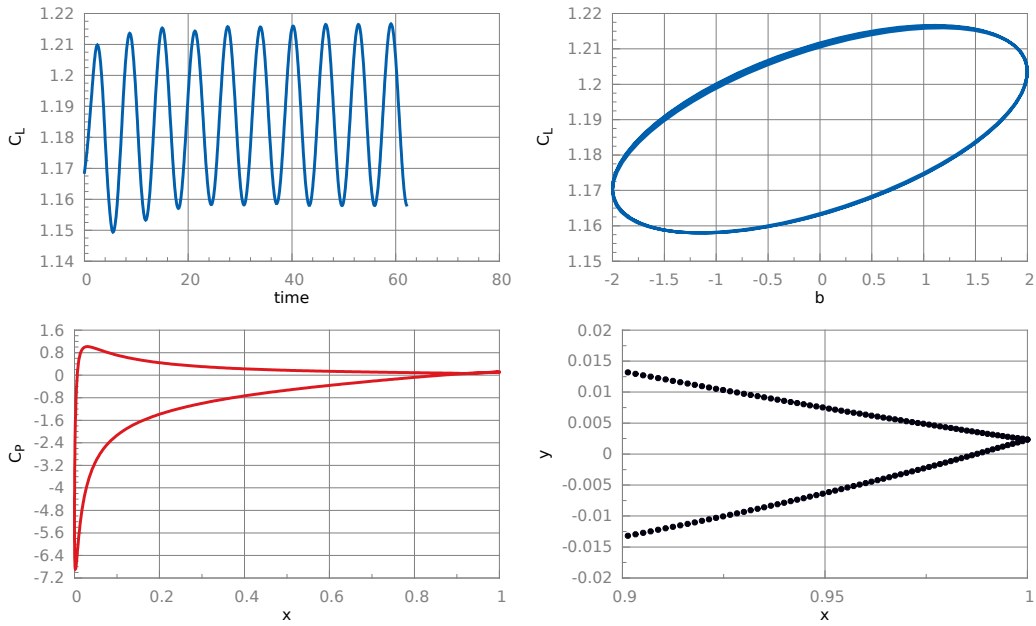
Σχήμα 4.39: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και η κατάληξη της σύγκλισης του ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_P της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $\alpha = 12^\circ$ με $b_{amp} = 1^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.5$.



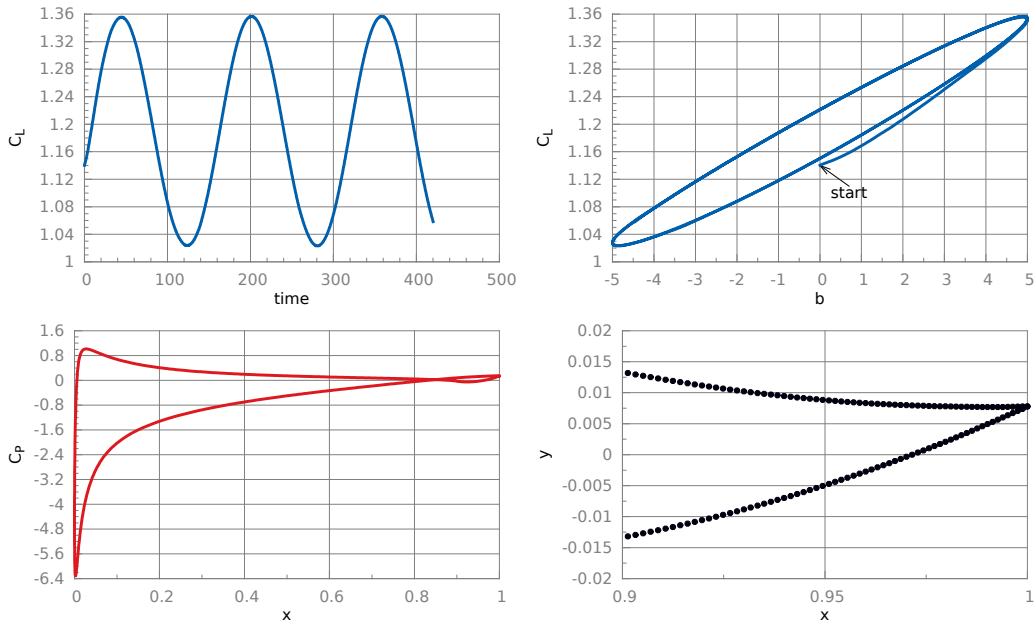
Σχήμα 4.40: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_P της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $\alpha = 12^\circ$ με $b_{amp} = 2^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.02$.



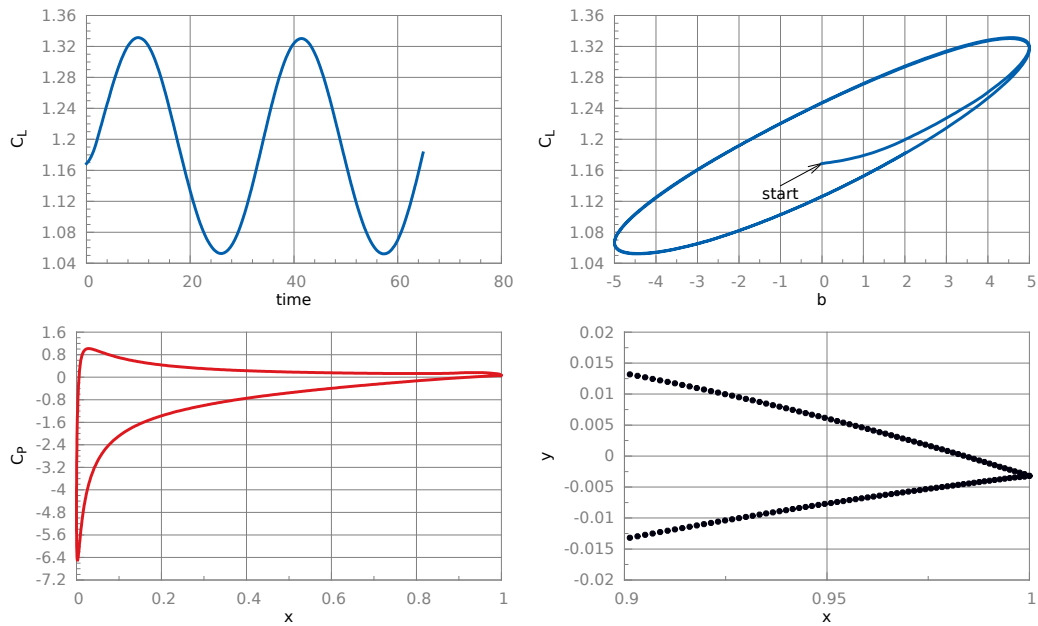
Σχήμα 4.41: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_P της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $\alpha = 12^\circ$ με $b_{amp} = 2^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.1$.



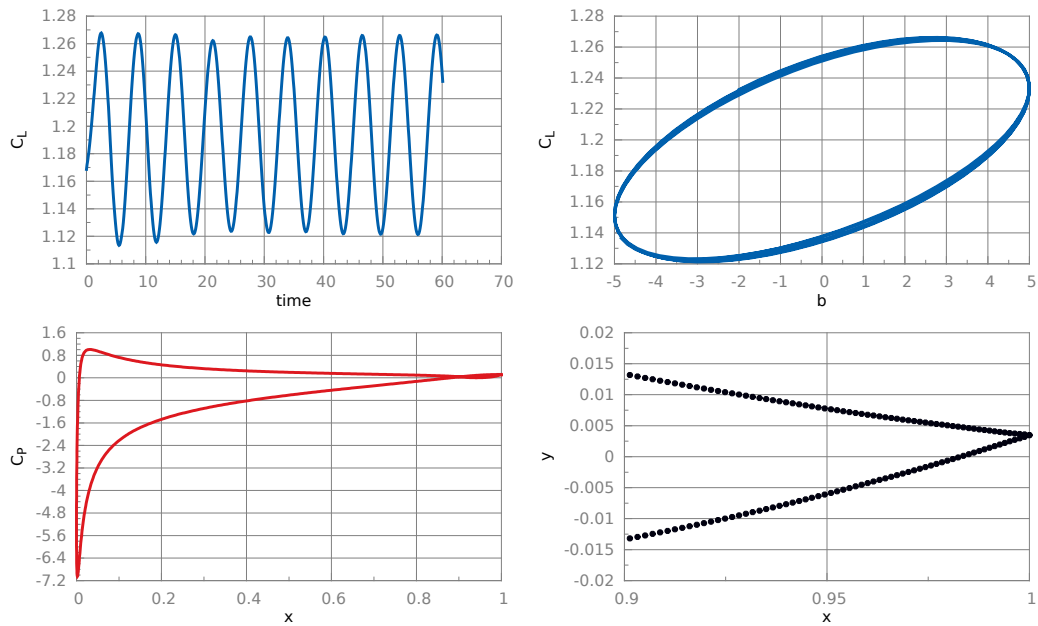
Σχήμα 4.42: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και η κατάληξη της σύγκλισης του ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_p της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $\alpha = 12^\circ$ με $b_{amp} = 2^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.5$.



Σχήμα 4.43: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_p της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $\alpha = 12^\circ$ με $b_{amp} = 5^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.02$.



Σχήμα 4.44: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_P της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $\alpha = 12^\circ$ με $b_{amp} = 5^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.1$.

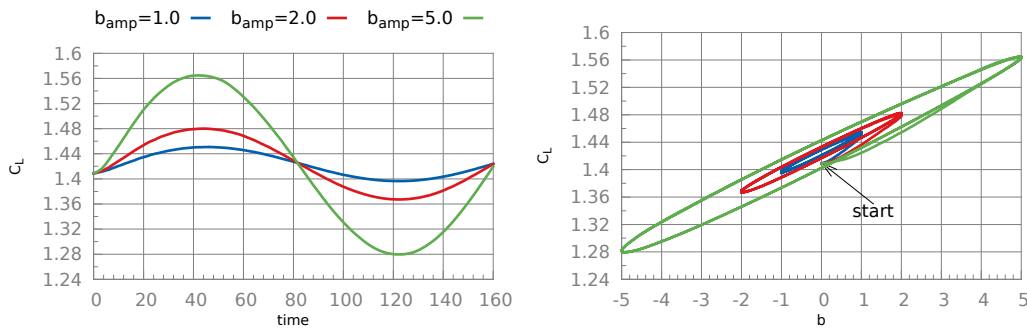


Σχήμα 4.45: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και η κατάληξη της σύγκλισης του ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_P της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $\alpha = 12^\circ$ με $b_{amp} = 5^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.5$.

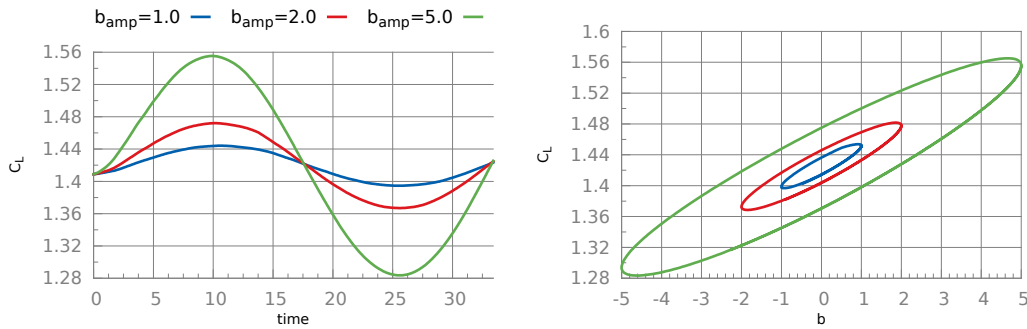
4.3.4 Σταθερή αεροτομή στις 16°

Στην τελευταία αυτή περίπτωση η αεροτομή παραμένει σταθερή στις 16°. Σε όλα τα παραδείγματα, πριν την έναρξη της κίνησης του flap, επιτεύχθηκε η σύγκλιση του stationary προβλήματος, έπειτα από 5000 επαναλήψεις.

Στα Σχήματα 4.22, 4.23, 4.24 βλέπουμε σε αντιπαράθεση τον συντελεστή άνωσης για τις τρεις γωνίες παραμόρφωσης που χρησιμοποιήθηκαν με συχνότητα κίνησης $f_k = 0.02$, $f_k = 0.1$ και $f_k = 0.5$ αντίστοιχα, για μια ολοκληρωμένη ταλάντωση του flap.



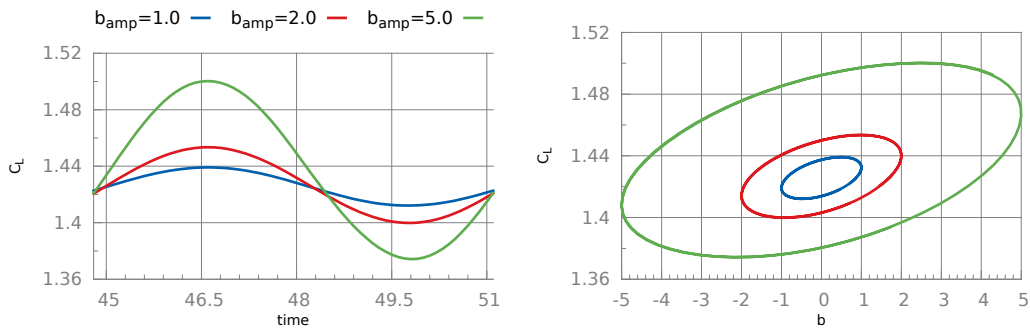
Σχήμα 4.46: Συγκριτικό γράφημα του C_L αναλόγως το πλάτος παραμόρφωσης, ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης, για σταθερή πτέρυγα στις $\alpha = 16^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.02$.



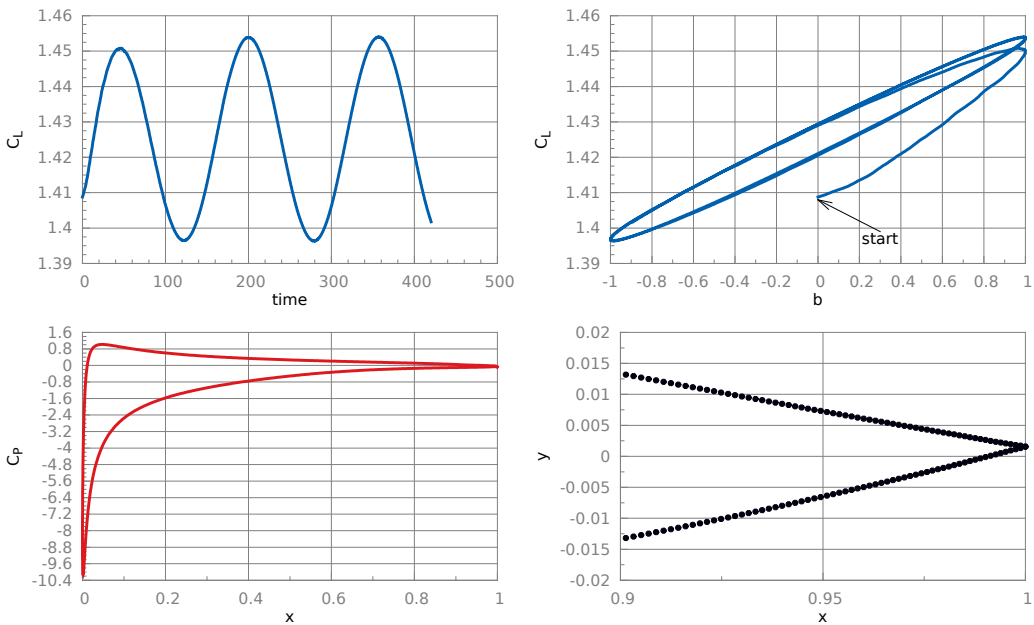
Σχήμα 4.47: Συγκριτικό γράφημα του C_L αναλόγως το πλάτος παραμόρφωσης, ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης, για σταθερή πτέρυγα στις $\alpha = 16^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.1$.

Επισυνάπτουμε τις τελευταίες λύσεις στα ακόλουθα σχήματα:

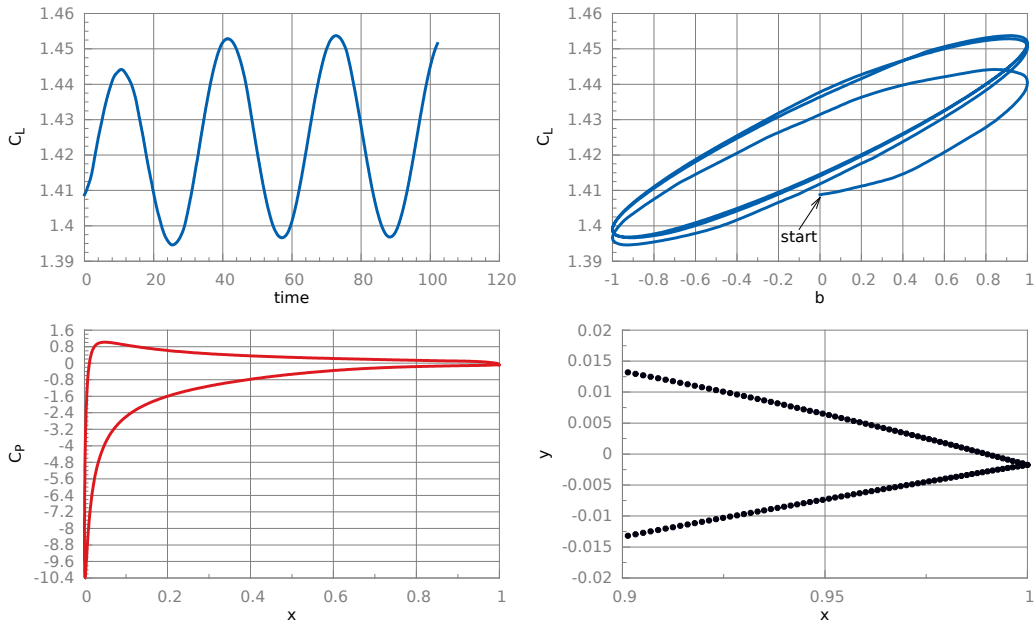
b_{amp}	f_k	Σχήμα	b_{amp}	f_k	Σχήμα	b_{amp}	f_k	Σχήμα
1°		4.49	1°		4.50	1°		4.51
2°	0.02	4.52	2°	0.1	4.53	2°	0.5	4.54
5°		4.55	5°		4.56	5°		4.57



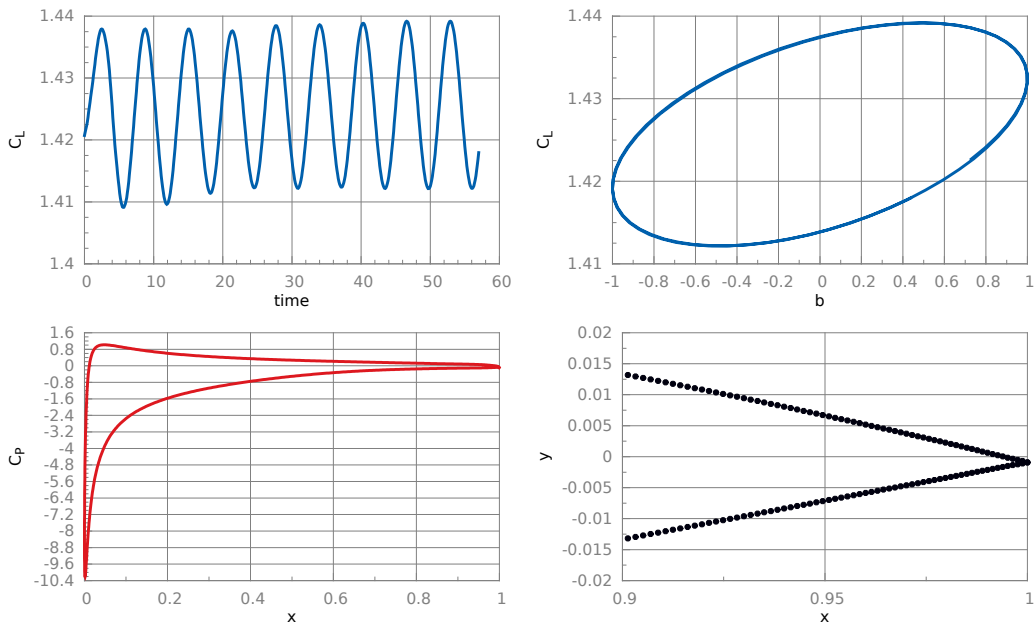
Σχήμα 4.48: Συγκριτικό γράφημα του C_L αναλόγως το πλάτος παραμόρφωσης, ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης, για σταθερή πτέρυγα στις $\alpha = 16^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.5$.



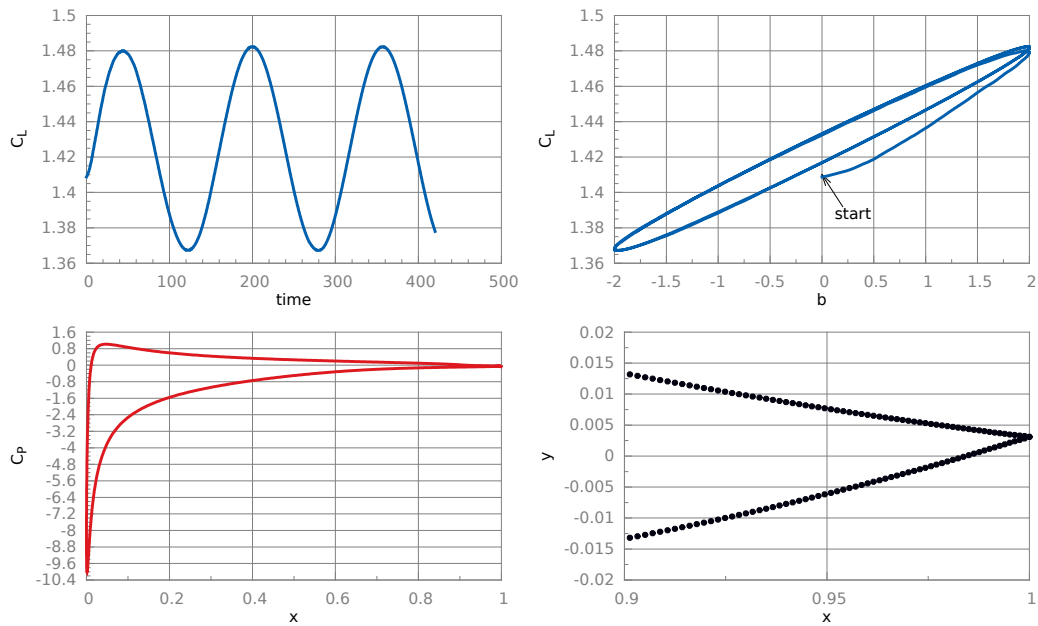
Σχήμα 4.49: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_P της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $\alpha = 16^\circ$ με $b_{amp} = 1^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.02$.



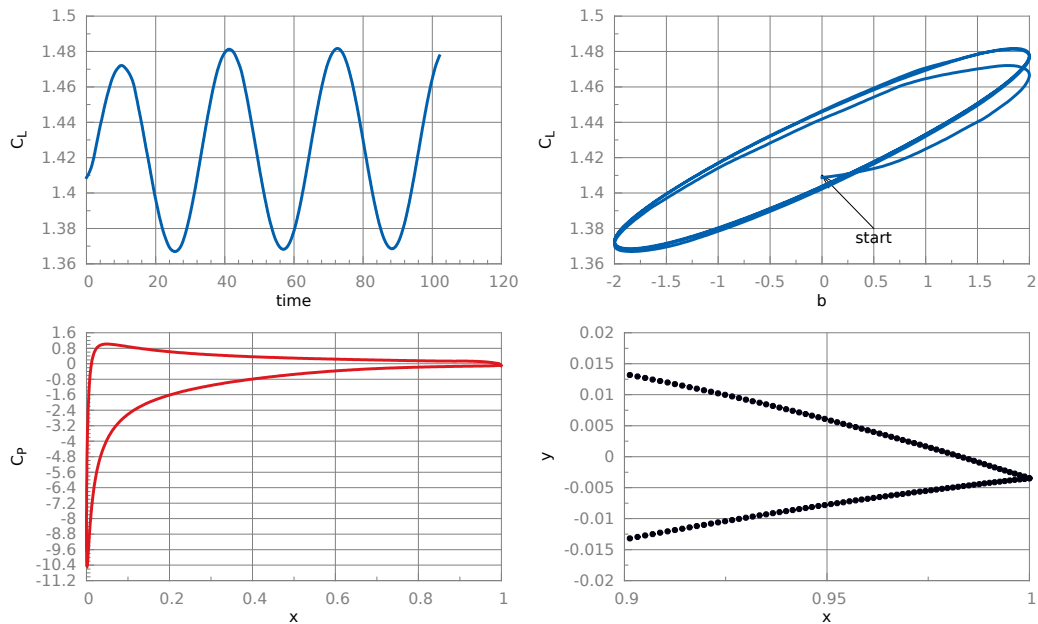
Σχήμα 4.50: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_P της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $\alpha = 16^\circ$ με $b_{amp} = 1^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.1$.



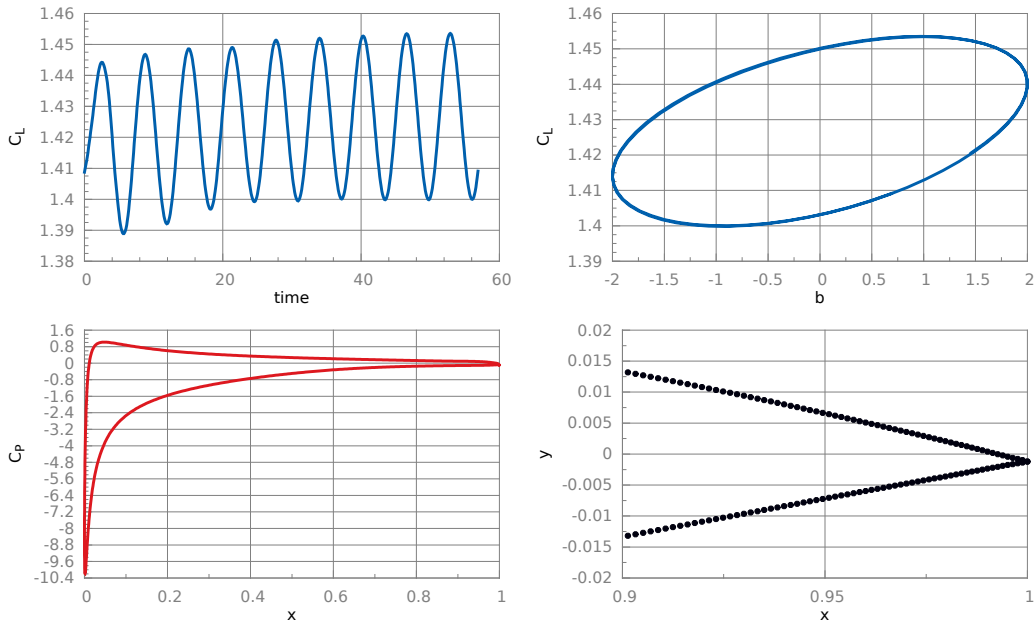
Σχήμα 4.51: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και η κατάληξη της σύγκλισης του ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_P της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $\alpha = 16^\circ$ με $b_{amp} = 1^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.5$.



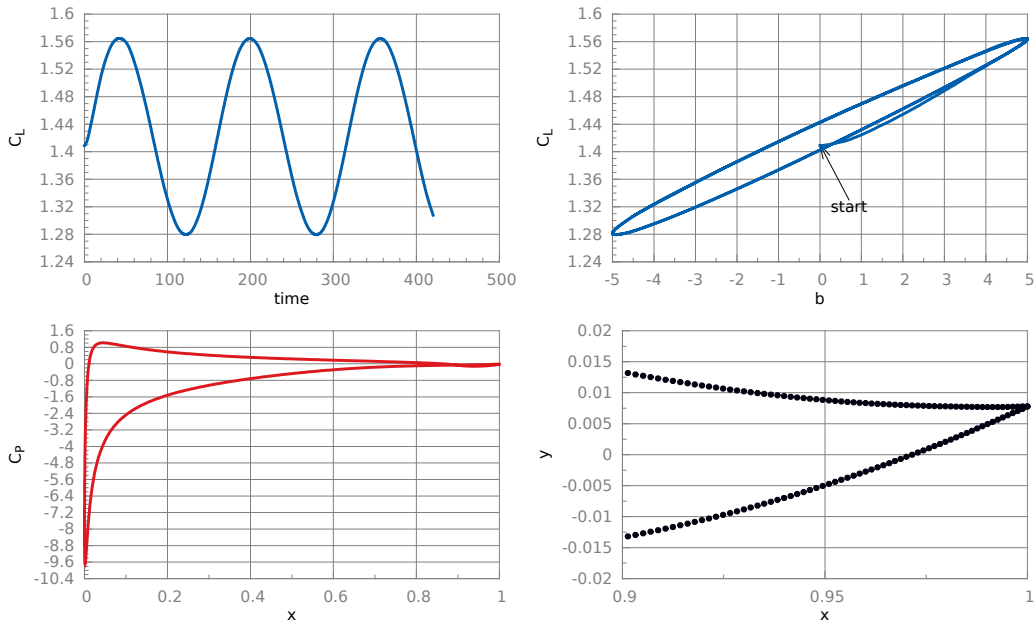
Σχήμα 4.52: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_P της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $\alpha = 16^\circ$ με $b_{amp} = 2^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.02$.



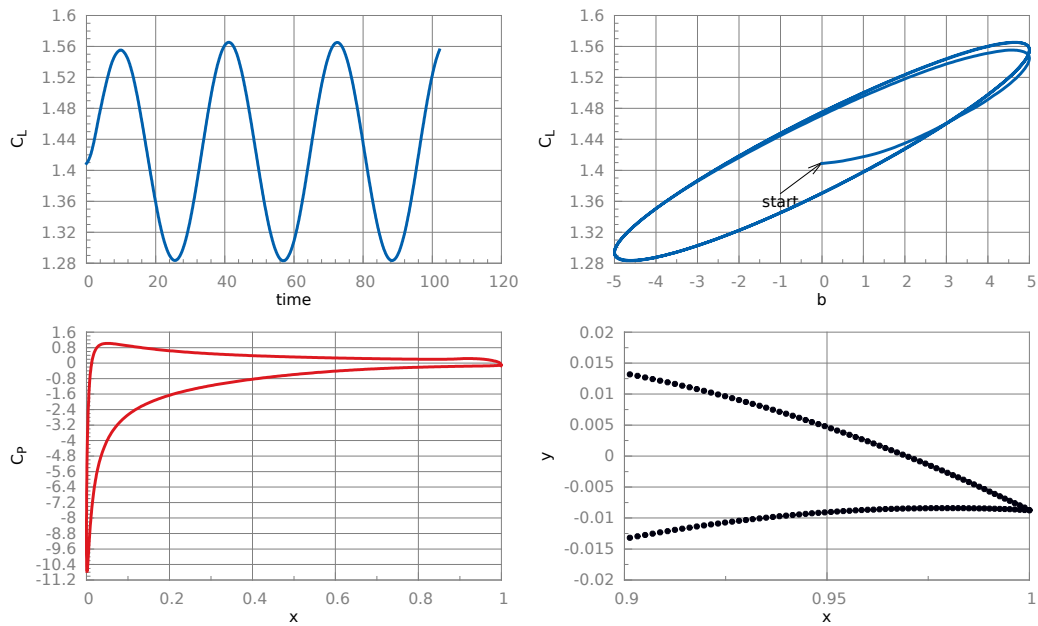
Σχήμα 4.53: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_P της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $\alpha = 16^\circ$ με $b_{amp} = 2^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.1$.



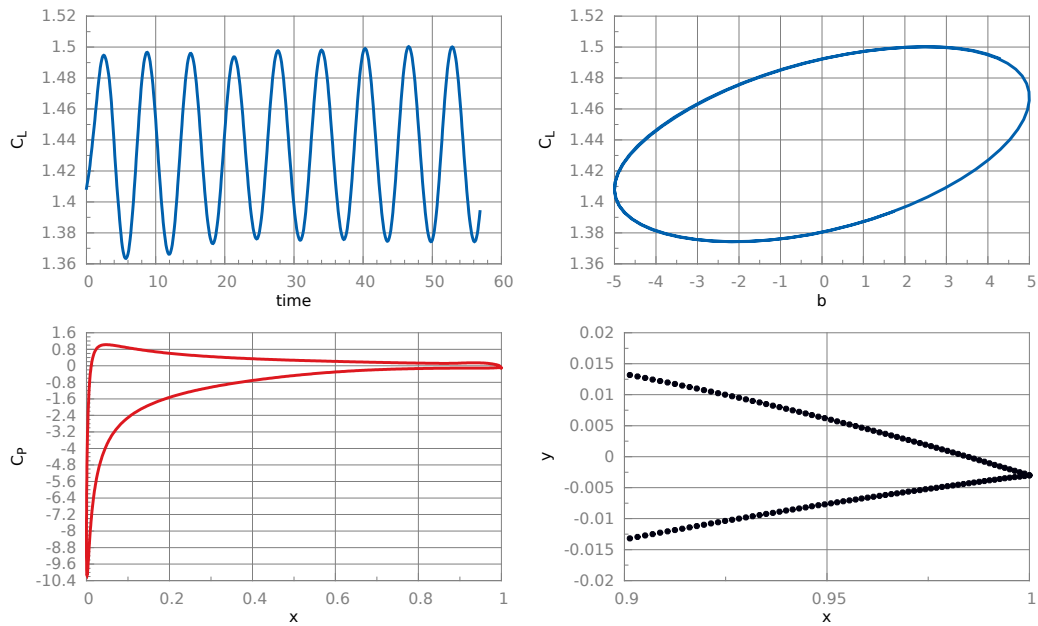
Σχήμα 4.54: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και η κατάληξη της σύγκλισης του ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_P της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $\alpha = 16^\circ$ με $b_{amp} = 2^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.5$.



Σχήμα 4.55: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_P της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $\alpha = 16^\circ$ με $b_{amp} = 5^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.02$.



Σχήμα 4.56: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_P της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $\alpha = 16^\circ$ με $b_{amp} = 5^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.1$.



Σχήμα 4.57: Ιστορικό του C_L ως προς το χρόνο και η κατάληξη της σύγκλισης του ως προς τη γωνία παραμόρφωσης (πάνω), κατανομή του C_P της πτέρυγας για την παραμόρφωση του flap (κατω), για σταθερή αεροτομή στις $\alpha = 16^\circ$ με $b_{amp} = 5^\circ$ και συχνότητα $f_k = 0.5$.

Βιβλιογραφία

- [1] J. Blazek, *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications*, Elsevier Science, Netherlands (2001). [2.1.1](#), [2.1.2](#), [2.1.3](#)

- [2] L. Dubuc, F. Cantariti, M. Woodgate, B. Gribben, K. J. Badcock, B. E. Richards, *Solution of the Unsteady Euler Equations Using an Implicit Dual-Time Method*, AIAA Journal 36 (1998) 1417-1424. [2.4.2](#)

- [3] J. Trulio, K. Trigger, *Numerical solution of the one-dimensional hydrodynamic equations in an arbitrary time-dependent coordinate system*, University of California Lawrence Radiation Laboratory Report UCLR-6522 (1961). [3.1](#)

- [4] P. Thomas and C. Lombard, *Geometric conservation law and its application to flow computations on moving grids*, AIAA Journal 17 (1979) 1030-1037. [3.1](#)

- [5] Z. Warsi, *Conservation form of the Navier-Stokes equations in general nonsteady coordinates*, AIAA Journal 19 (1981) 240-242. [3.1](#)

- [6] M. Lacroix, A. Garon, *Numerical solution of phase change problems: an Eulerian-Lagrangian approach*, Numerical Heat Transfer, Part B 19 (1992) 57-78. [3.2](#)

- [7] M. Lesoinne, C. Farhat, *Geometric conservation laws for flow problems with moving boundaries and deformable meshes, and their impact on aeroelastic computations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 134 (1996) 71-90. [3.2](#)

- [8] I. Demirdžić, M. Perić, *Space conservation law in finite volume calculations of fluid flow*, International Journal for Numerical Methods in Fluids 8 (1988) 1037-1050. [3.2](#), [3.8](#)

- [9] C. Farhat, P. Geuzaine, C. Grandmont, *The discrete geometric conservation law and the nonlinear stability of ale schemes for the solution of flow problems on moving grids*, Journal of Computational Physics 174 (2001) 669-694. [3.3](#), [3.4](#)
- [10] H. Guillard, C. Farhat, *On the significance of the geometric conservation law for flow computations on moving meshes*, Computer Methods in Applied Mechanical Engineering 190 (2000) 1467-1482. [3.3](#), [3.5.2](#), [3.5.2](#), [3.6](#)
- [11] P. Geuzaine, C. Grandmont, C. Farhat, *Design and analysis of ALE schemes with provable second-order time-accuracy for inviscid and viscous flow simulations*, Journal of Computational Physics 191 (2003) 206-227. [3.3](#)
- [12] D. Mavriplis, Z. Yang, *Achieving High-Order Time-Accuracy for Dynamic Unstructured Mesh Fluid Flow Simulations: Role of the GCL*, AIAA Paper 2005-5114, 17th Computational Fluid Dynamics Conference, Toronto, Canada (2005). [3.3](#), [3.4](#)
- [13] D. Boffi, L. Gastaldi, *Stability and geometric conservation laws for ALE formulations*, Computer Methods in Applied Mechanical Engineering 193 (2004) 4717-4739. [3.4](#)
- [14] L. Formaggia, F. Nobile, *Stability analysis of second-order time accurate schemes for ALE-FEM*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 193 (2004) 4097-4116. [3.4](#)
- [15] R. Hindman, *Generalized coordinate forms of governing fluid equations and associated geometrically induced errors*, AIAA Journal 20 (1982) 1359-1367. [3.4](#)
- [16] M. Vinokur, *An analysis of Finite-Difference and Finite-Volume formulations of conservation laws*, Journal of Computational Physics 81 (1989) 1-52. [3.4](#)
- [17] I. Demirdžić, M. Perić, *Finite Volume method for prediction of fluid flow in arbitrarily shaped domains with moving boundaries*, International Journal for Numerical Methods in Fluids 10 (1990) 771-790. [3.4](#)
- [18] W. Shyy, T. C. Vu, *On the adoption of velocity variable and grid system for fluid flow computation in curvilinear coordinates*, Journal of Computational Physics 92 (1991) 82-105. [3.4](#)
- [19] B. Nkonga, H. Guillard, *Godunov type method on non-structured meshes for three-dimensional moving boundary problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 113 (1994) 183-204. [3.4](#)

- [20] B. Koobus, C. Farhat, *Second-order time accurate and geometrically conservative implicit schemes for flow computations on unstructured dynamic meshes*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 170 (1999) 103-129. [3.4](#)
- [21] D. Mavriplis, Z. Yang, *Construction of the discrete geometric conservation law for high-order time-accurate simulations on dynamic meshes*, Journal of Computational Physics 213 (2006) 557-573. [3.2](#), [3.5.1](#)
- [22] R. Gordnier, R. Melville, *Transonic flutter simulations using an implicit aeroelastic solver*, AIAA Journal of Aircraft 37 (5) (2000) 872-879. [3.6](#)
- [23] Y. Zhao, J. Tai, F. Ahmed, *Simulation of micro flows with moving boundaries using high-order upwind FV method on unstructured grids*, Computational Mechanics 28 (2002) 66-75. [3.7](#)