ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Τομέας Μαθηματικών

Πολυτεχνειούπολη – Ζωγράφου ΑΘΗΝΑ - 157 80

ΤΗΛ. : 772 1774

FAX : 772 1775

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΑΣΗΜΙΝΑΣ Α. ΚΡΙΜΠΕΝΗ

Πτυχιούχου Μαθηματικού Ε.Κ.Π.Α.

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:
Ι. Χρυσοβέργης
Καθηγητής Σ.Ε.Μ.Φ.Ε., Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ, Ιούλιος 2012

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Τομέας Μαθηματικών

***Πολυτεχνειούπολη – Ζωγράφου** ΑΘΗΝΑ - 157 80*

ΤΗΛ. : 772 1774

FAX : 772 1775

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΑΣΗΜΙΝΑΣ Α. ΚΡΙΜΠΕΝΗ

Πτυχιούχου Μαθηματικού Ε.Κ.Π.Α.

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

1. Ι. ΧΡΥΣΟΒΕΡΓΗΣ, Καθ. Ε.Μ.Π. (Επιβλέπων)
2. Ι. Τσινιάς, Καθ. Ε.Μ.Π.
3. Β. Κοκκίνης, Επίκ. Καθ. Ε.Μ.Π.

ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

1. Ι. ΧΡΥΣΟΒΕΡΓΗΣ, Καθ. Ε.Μ.Π. (Επιβλέπων)
2. Ι. Τσινιάς, Καθ. Ε.Μ.Π.
3. Γ. Καλογερόπουλος, Καθ. Ε.Κ.Π.Α.
4. Ν. Καλουπτσίδης, Καθ. Ε.Κ.Π.Α.
5. Β. Κοκκίνης, Επίκ. Καθ. Ε.Μ.Π.
6. Ι. Κολέτσος, Επίκ. Καθ. Ε.Μ.Π.
7. Κ. Χρυσαφίνος, Επίκ. Καθ. Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ, Ιούλιος 2012

Αφιερώνεται στους
αγαπημένους μου γονείς και
στην λατρευτή μου κόρη.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον Επιβλέποντά Καθηγητή μου **κ. Ί. Χρυσοβέργη** για την **ενθάρρυνση**, την **εμπνευσμένη καθοδήγησή** του και τις **ανεκτίμητες και πολλές συμβουλές** του.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα άλλα δύο μέλη της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής μου, τον Καθηγητή **κ. Ι. Τσινιά** και τον Επίκουρο Καθηγητή **κ. Β. Κοκκίνη** για τον πολύτιμο χρόνο που μου παρείχαν και την κριτική τους θεώρηση.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο I

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η περιοχή της Μαθηματικής Θεωρίας Ελέγχου, και ειδικά του Βέλτιστου Ελέγχου, είναι ευρύτατη. Υπάρχει ντετερμινιστικός βέλτιστος έλεγχος (συνήθων διαφορικών εξισώσεων, μερικών διαφορικών εξισώσεων, ολοκληρωτικών εξισώσεων), στοχαστικός βέλτιστος έλεγχος, με καθυστέρηση έλεγχος, και γενικότερα βέλτιστος έλεγχος συναρτησιακών εξισώσεων. Το φάσμα των μαθηματικών που χρησιμοποιούνται στα προβλήματα βέλτιστου ελέγχου είναι πολύ ευρύ. Ιστορικά, ο Βέλτιστος Έλεγχος είναι μετεξέλιξη του Λογισμού Μεταβολών, με αίτημα οι αποδεκτές λύσεις από διαφόρισιμες να ανήκουν πλέον στο χώρο L^2 ή L^∞. Αυτό άνοιξε το δρόμο για πολλές νέες και χρήσιμες εφαρμογές. Σημειωτέον ότι ο Κων. Καραθεοδωρή υπήρξε πρωτοπόρος του βέλτιστου ελέγχου καθώς επεξέτεινε το χώρο των λύσεων προβλημάτων του Λογισμού Μεταβολών σε ασυνεχείς συναρτήσεις, όπως αυτό φάνηκε στο βιβλίο του, τού 1935, που εκδόθηκε στη Λιψία της Γερμανίας ("*Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung*", Karathéodory C., Teubner, Leipzig, Germany, 1935).

Η θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου πήρε όμως τη σύγχρονη της μορφή με το περίφημο βιβλίο των Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze και Mishchenko "*The Mathematical Theory of Optimal Processes*", του 1961 (που εκδόθηκε στη Ρωσία και πήρε το βραβείο Lenin). Πρωτοπόροι στη διατύπωση και τη χρήση γενικευμένων ελέγχων υπήρξαν οι L. C. Young και E. J. McShane αλλά βασικός στην ανάπτυξη της σχετικής θεωρίας υπήρξε ο J. Warga. Τα τελευταία χρόνια υπάρχει μία αρκετά σημαντική δραστηριότητα στον κλάδο του Βέλτιστου Ελέγχου με γενικευμένους ελέγχους (κυρίως T. Roubíček, βλ. βιβλίο και βιβλιογραφία του, αλλά και πολλοί άλλοι).

Τίθεται λοιπόν το ερώτημα:

Γιατί γενικευμένοι έλεγχοι και όχι μόνο κλασικοί;

Παράδειγμα

Έστω το πρόβλημα που ορίζεται από την εξίσωση κατάστασης

(1) $y'(t) = f(w) = w(t)$, $t \in [0,T]$,

με $y(0) = y_0 = 0$

Το w είναι ο έλεγχος του συστήματος, ορισμένος στο $[0,T]$ και που παίρνει τιμές στο δισύνολο $U = \{-1,1\}$, δηλαδή $w(t) \in \{-1,1\}$ στο $[0,T]$.

Ορίζουμε το $W = \{w \in L^{\infty}([0,T]) \mid w(t) \in U \ \ \sigma\tau o\ [0,T]\}$.

Ορίζουμε το συναρτησιακό κόστους

$$G(w) = \int_0^T (y(t))^2 dt \quad \text{όπου } y = y_w \text{ η μοναδική λύση της εξίσωσης κατάστασης (1).}$$

Το συνεχές κλασικό πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου διατυπώνεται ως εξής:

Να βρεθεί (αν υπάρχει) έλεγχος $w^* \in W$ τέτοιος ώστε $G(w^*) = \min_{w \in W} G(w)$.

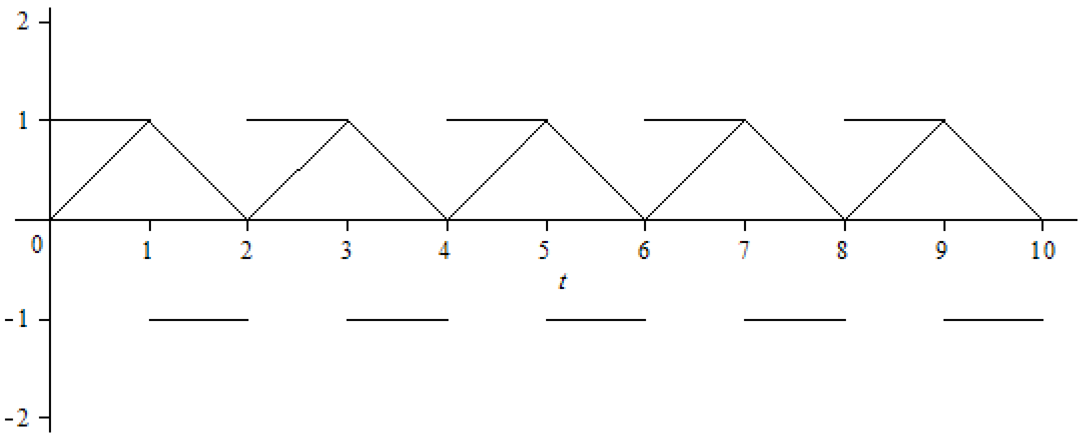
Όμως, από τον ορισμό του G, έχουμε ότι $G(w) \geq 0$, $\forall w \in W$.
Έτσι βλέπουμε ότι αν $G(w) = 0$ τότε $y = 0$, δηλαδή $w(t) = 0$.
Αλλά αυτό δεν είναι δυνατόν, αφού $0 \notin U$.

Έστω τώρα, για κάθε n, μία διαμέριση του $[0,T]$ σε $N(n) = N$ (N άρτιος) υποδιαστήματα (διακριτοποίηση). Οι έλεγχοι παίρνουν εναλλάξ τις τιμές -1,1, οπότε κατασκευάζεται η ακολουθία

$$w_j^n(t) = \begin{cases} 1, & t_{2j} \leq t < t_{2j+1} \\ -1, & t_{2j+1} < t \leq t_{2j+2} \end{cases} \quad \text{όπου } t \in [0,T],\ j = 0,1,\ldots,\frac{N}{2}.$$

Επίσης $y'^n(t) = w_j^n(t)$ στο κάθε υποδιάστημα.

Η κατά τμήματα σταθερή $w_j^n(t)$ και η συνεχής και κατά τμήματα γραμμική $y^n(t)$:



Έτσι, η (y^n) είναι συνεχής και κατά τμήματα γραμμική (βλ. σχήμα).

Το κόστος 0 προσεγγίζεται όσο κοντά θέλουμε με τις τιμές $G^n(w^n)$ (δηλ. $G^n(w^n) \to 0$), αλλά δεν είναι εφικτό, δηλ. δεν υπάρχει βέλτιστος κλασικός έλεγχος.
Η τιμή όμως 0 είναι εφικτή με τον γενικευμένο σταθερό (ως προς t) έλεγχο (διπαλμικό μέτρο Dirac πάνω στο U)

$$r := \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1,$$

διότι, αν τον εισάγουμε στην εξίσωση κατάστασης (1), βρίσκουμε

$$y'(t) = f(r) = f\left(\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1\right) := \int_U f(u)\left[\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1\right](du) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

που δίνει, μαζί με την αρχική συνθήκη, $y = 0$. ΄Αρα και $G = 0$. Συνεπώς είναι εφικτό.

Όπως θα το δείξουμε αργότερα, με την εισαγωγή των γενικευμένων ελέγχων **εξασφαλίζεται η ύπαρξη** βέλτιστου ελέγχου κάτω από ασθενείς υποθέσεις (με U, και άρα με $f(U)$, όχι απαραιτήτως κυρτό). Για αυτόν κυρίως τον λόγο εισήχθησαν οι γενικευμένοι έλεγχοι. Για την απόδειξη της ύπαρξης ενός βέλτιστου **κλασικού** ελέγχου υποθέτουν συνήθως ότι το $f(U)$ είναι **κυρτό** (υπόθεση Cezari), πράγμα που είναι **μη ρεαλιστικό** για f μη γραμμική, ακόμα και με U κυρτό.
Επιπλέον, οι έλεγχοι αυτοί μας δίνουν τη δυνατότητα:

i) να κάνουμε τον αντίστοιχο “κομψό” λογισμό, δηλαδή να βρούμε αναγκαίες ή και ικανές συνθήκες βελτιστότητας,

ii) να κατασκευάσουμε μεθόδους βελτιστοποίησης για αυτούς τους ελέγχους, και

iii) να κατασκευάσουμε προσεγγιστικούς κλασικούς ελέγχους.

Στην παρούσα διατριβή μελετάμε προβλήματα Βέλτιστου Ελέγχου συστημάτων που ορίζονται από μη γραμμικές Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις που περιλαμβάνουν περιορισμούς, εν γένει μη κυρτούς, τόσο πάνω στον έλεγχο όσο και στην κατάσταση του συστήματος. Μελετάμε το συνεχές πρόβλημα με τη χρήση κλασικών αλλά και γενικευμένων ελέγχων, καθώς και τη συμπεριφορά στο όριο των διακριτών προβλημάτων (σύγκλιση πρός τα αντίστοιχα συνεχή προβλήματα). Συγκεκριμένα:

Στο Κεφάλαιο II αποδεικνύουμε, κάτω από ασθενείς υποθέσεις, την ύπαρξη ενός βέλτιστου γενικευμένου ελέγχου για το συνεχές γενικευμένο πρόβλημα, καθώς και αναγκαίες/ικανές συνθήκες βελτιστότητας σε μορφή μιας γενικευμένης ισχυρής αρχής ελαχίστου, τύπου Pontryagin.

Στο Κεφάλαιο III μελετούνται τα διακριτά προβλήματα. Εφαρμόζουμε, στο κλασικό καθώς και στο γενικευμένο πρόβλημα, μια πεπλεγμένη μέθοδο του Μέσου με συνεχείς και κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις για την κατάσταση, προσεγγίζοντας παράλληλα τους ελέγχους με κατά τμήματα σταθερούς (κλασικούς ή γενικευμένους). Αναπτύσσεται η αντίστοιχη με τη συνεχή περίπτωση θεωρία για τα διακριτοποιημένα προβλήματα. Αποδεικνύουμε την προσέγγιση τόσο των συνεχών γενικευμένων ελέγχων με διακριτούς κλασικούς ελέγχους όσο και την προσέγγιση των διακριτών γενικευμένων ελέγχων τύπου Gamkrelidze με κλασικούς κατά τμήματα σταθερούς ελέγχους. Εξετάζουμε την συμπεριφορά στο όριο ακολουθιών βέλτιστων ελέγχων και Kuhn-Tucker-Lagrange (extremal, κατά J. Warga) αποδεκτών ελέγχων (δηλαδή ελέγχων που ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες βελτιστότητας και τους περιορισμούς) και αποδεικνύουμε ότι τα σημεία συσσώρευσης ακολουθιών βέλτιστων (ή Kuhn-Tucker-Lagrange αποδεκτών) διακριτών, κλασικών ή γενικευμένων ελέγχων, είναι βέλτιστα (αντίστοιχα Kuhn-Tucker-Lagrange αποδεκτά) για το αντίστοιχο συνεχές πρόβλημα.

Στο Κεφάλαιο IV, αναπτύσσουμε αριθμητικές μεθόδους διακριτοποίησης-βελτιστοποίησης, μια για το διακριτό κλασικό πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου, και μια για το γενικευμένο. Δίνονται οι αλγόριθμοι μιας διακριτής μικτής μεθόδου Προβεβλημένης Κλίσης-Ποινών με κλασικούς ελέγχους και μιας διακριτής μικτής μεθόδου Frank-Wolfe-Ποινών με γενικευμένους ελέγχους. Οι αλγόριθμοι περιέχουν δύο επιλογές: την περίπτωση της σταθερής διακριτοποίησης και την περίπτωση της προοδευτικά λεπτυνόμενης διακριτοποίησης, η οποία εξοικονομεί υπολογιστικό χρόνο και μνήμη. Ακολουθούν και για τους δύο Αλγορίθμους θεωρήματα σύγκλισης της ακολουθίας που παράγει ο αλγόριθμος σε οριακό κλασικό έλεγχο (συνεχή ή διακριτό) αποδεκτό και Kuhn-Tucker-Lagrange για το κλασικό πρόβλημα, και σε οριακό γενικευμένο έλεγχο (συνεχή ή διακριτό) αποδεκτό και Kuhn-Tucker-Lagrange για το γενικευμένο πρόβλημα.

Στο Κεφάλαιο V δίνονται αριθμητικά παραδείγματα που έχουν λυθεί στον Υπολογιστή με τους αλγορίθμους που αναπτύξαμε παραπάνω.

Το τελευταίο μέρος της διατριβής αποτελείται από ένα Παράρτημα με μερικά βασικά θεωρήματα της Θεωρίας Μέτρου, τον ορισμό και την απόδειξη της “αφθονίας” συνόλων κλασικών ελέγχων, καθώς και των θεωρημάτων Kuhn-Tucker-Lagrange, και τέλος μία Βιβλιογραφία.

Η συνεισφορά της παρούσας διατριβής είναι όχι μόνο η ανάπτυξη όλης της σχετικής θεωρίας σε προβλήματα κλασικού καθώς και γενικευμένου βέλτιστου ελέγχου (κυρίως της διακριτοποίησης τους) συστημάτων που ορίζονται από μη γραμμικές (ως προς τον έλεγχο και την κατάσταση) συνήθεις διαφορικές εξισώσεις με έλεγχο και με περιορισμούς στον έλεγχο και την κατάσταση του συστήματος, αλλά και η δημιουργία αντιστοίχων Αριθμητικών Μεθόδων Διακριτοποίησης-Βελτιστοποίησης για την επίλυση των παραπάνω προβλημάτων με τον Υπολογιστή, μεθόδων κατάλληλων που μας εξασφαλίζουν οικονομικά και αποτελεσματικά την εύρεση λύσεων στα παραπάνω προβλήματα, και κυρίως στα δυσεπίλυτα μη κυρτά προβλήματα με τη χρήση γενικευμένων ελέγχων.

Κεφάλαιο ΙΙ

ΣΥΝΕΧΕΣ ΚΛΑΣΙΚΟ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα διατυπώσουμε το συνεχές πρόβλημα κλασικού βέλτιστου ελέγχου, καθώς και το συνεχές πρόβλημα γενικευμένου ελέγχου. Θα δοθούν θεωρήματα ύπαρξης βέλτιστου ελέγχου τόσο κλασικού όσο και γενικευμένου καθώς και οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες βελτιστότητας.

1Α. Το Συνεχές Κλασικό Πρόβλημα Βέλτιστου Ελέγχου

Έστω $I=[0,T]$, με $T<+\infty$, ένα διάστημα και έστω d, d' ακέραιοι.

Έχουμε τη διαφορική εξίσωση κατάστασης

(1) $y'(t)=f(t,y(t),w(t))$, σχεδόν παντού (σ.π.) στο I,

με $y(0)=y_0$,

όπου $w:I\to\mathbb{R}^{d'}$ είναι η συνάρτηση ελέγχου, και $y:I\to\mathbb{R}^{d}$ η συνάρτηση κατάστασης του συστήματος.

Η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

(2) $y(t)=y_0+\int_0^t f(t,y(s),w(s))ds$.

Για κάθε έλεγχο w η κατάσταση του συστήματος είναι η λύση y (αν υπάρχει είναι μοναδική) της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης.

Ορίζουμε το σύνολο των ελέγχων

$W=\{w\in L^2(I,\mathbb{R}^{d'})\,/\,w(t)\in U\ \sigma.\pi.\ \sigma\tau o\ I\}$ όπου $U\subset\mathbb{R}^{d'}$ με U συμπαγές σύνολο.

Οι περιορισμοί στον έλεγχο είναι $w\in W$,
οι περιορισμοί (δεσμεύσεις) στην κατάσταση και στον έλεγχο είναι

$$\begin{cases} G_1(w) = \phi_1(t) + \int_0^T g_1(t, y(t), w(t))dt = 0, \\ G_2(w) = \phi_2(t) + \int_0^T g_2(t, y(t), w(t))dt \le 0 \end{cases}$$

και το συναρτησιακό κόστους είναι

$$G_0(w) = \phi_0(y(T)) + \int_0^T g_0(t, y(t), w(t))dt$$

Ορίζουμε το σύνολο των αποδεκτών ελέγχων

$$W_\alpha = \{w \in W \,/\, G_1(w) = 0, \quad G_2(w) \le 0\}$$

Το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου είναι τότε

Να βρεθεί ένας έλεγχος w τέτοιος ώστε $w \in W_\alpha \quad \kappa\alpha\iota \quad G_0(w) \le G_0(w'), \quad \forall w' \in W_\alpha$.

Στη συνέχεια της διατριβής θα χρησιμοποιούμε, κάθε φορά, τις κατάλληλες από τις ακόλουθες υποθέσεις

(**A1**) το U είναι συμπαγές

(**A2**) το U είναι κυρτό

(**B**) η f είναι συνεχής ως προς $(t, y, u) \in I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'}$
και η f είναι τύπου Lipschitz ως προς y , δηλ. υπάρχει $L \ge 0$ τέτοιο ώστε

$$\left| f(t, y_1, u) - f(t, y_2, u) \right| \le L \cdot \left| y_1 - y_2 \right|, \ \forall t, y_1, y_2, u .$$

(**C**) οι g_l, ϕ_l όπου $l = 0,1,2$ είναι συνεχείς ως προς $(t, y, u) \in I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'}$, και $y \in \mathbb{R}^d$ αντιστοίχως.

(**D1**) υπάρχουν οι f_y, g_{ly} που ορίζονται στο $I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'}$ και οι ϕ_{ly} που ορίζονται στον $\mathbb{R}^d$ και είναι συνεχείς.

(**D2**) υπάρχουν οι f_u, g_{lu} που ορίζονται στο $I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'}$ και οι ϕ_{lu} που ορίζονται στον $\mathbb{R}^d$ και είναι συνεχείς.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Δεδομένου ότι η f είναι συνεχής και Lipschitz συνεπάγεται ότι η f είναι υπογραμμική, δηλαδή ισχύει η σχέση $\left| f \right| \le c_1 + c_2 \cdot \left| y \right|$

Απόδειξη:

Ισχύει $f(t,0,u) \le M$ (από τη συνέχεια της f και τη συμπάγεια του U)

Επίσης λόγω της υπόθεσης (B)

$$\left| f(t,y,u) \right| \le \left| f(t,y,u) - f(t,0,u) \right| + \left| f(t,0,u) \right| \le L \cdot |y| + \max_{t,u} \left| f(t,0,u) \right|$$
$$= L \cdot |y| + \max \left| f(t,0,u) \right| \quad \text{(λόγω συνέχειας της } f \text{)}$$
$$= L \cdot |y| + d = d + L \cdot |y|$$

και αν θέσουμε όπου d το c_1 και όπου L το c_2 έχουμε τη ζητούμενη σχέση.

1Β. ΥΠΑΡΞΗ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΚΛΑΣΙΚΟΥ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 1Β.1:</u> (Συνεχής Ανισότητα Bellman-Grownwall)
Έστω $y, z \in C(I)$, $\phi \in L^1$, με $y \ge 0$, $\phi \ge 0$ και z αύξουσα,
δηλ. $z(t) \le z(t')$, για $t < t'$.
Αν ισχύει $y(t) \le z(t) + \int_0^t \phi(s) y(s) ds$, για κάθε $t \in I$,
τότε

$$y(t) \le z(t) \cdot e^{\psi(t)}, \text{ για κάθε } t \in I, \text{ όπου } \psi(t) = \int_0^t \phi(\tau) d\tau .$$

<u>Απόδειξη:</u>
Θέτουμε

$$y(s) = v(s) \cdot e^{\psi(s)} \text{ και}$$

$$v(\bar{t}) = \max_{s \in [0,t]} v(s), \text{ με } \bar{t} = \bar{t}(t) \in [0,t].$$

Αφού $\psi'(s) = \phi(s)$, σχεδόν παντού στο I, έχουμε:

$$y(\bar{t}) = v(\bar{t}) \cdot e^{\psi(\bar{t})} \le z(\bar{t}) + \int_0^{\bar{t}} \phi(s) v(s) e^{\psi(s)} ds$$
$$\le z(t) + v(\bar{t}) \int_0^{\bar{t}} \psi'(s) e^{\psi(s)} ds \le z(t) + v(\bar{t})[e^{\psi(\bar{t})} - 1]$$

δηλ. $y(\bar{t}) \le z(t) + v(\bar{t}) e^{\psi(\bar{t})} - v(\bar{t})$.

Άρα $0 \le z(t) - v(\bar{t})$.

Συνεπώς $v(\bar{t}) \le z(t)$.
Επομένως

$$y(t) = v(t) e^{\psi(t)} \le v(\bar{t}) e^{\psi(t)} \le z(t) e^{\psi(t)}$$

<u>ΛΗΜΜΑ 1Β.1:</u>
Με τις υποθέσεις (Α1) και (Β) οι λύσεις y της εξίσωσης κατάστασης είναι ομοιόμορφα φραγμένες και το φράγμα αυτό είναι ανεξάρτητο από τον έλεγχο, δηλ. $\|y_w\|_\infty < b$, $\forall w \in W$.
<u>Απόδειξη:</u>

Από την εξίσωση κατάστασης (1) παίρνουμε ισοδύναμα

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s), w(s))ds \,.$$

Οπότε έχουμε

$$|y(t)| \le |y_0| + \int_0^t |f(s, y(s), w(s))|ds$$

και με τη βοήθεια της (Β) παίρνουμε

$$|y(t)| \le y_0 + \int_0^t (c + c \cdot |y(s)|)ds \le |y_0| + \int_0^T cds + \int_0^t c \cdot |y(s)|ds$$

Έτσι από την Ανισότητα Bellman-Gronwall έχουμε:

$$y(t) \le z(t) \cdot e^{\psi(t)} \text{ όπου } \psi(t) := \int_0^T cds \text{ και } z(t) = z := |y_0| + \int_0^T cds$$

Άρα

$$|y(t)| \le z \cdot e^{c \cdot T} = b' \text{ αφού το } z \text{ είναι σταθερό.}$$

Συνεπώς οι y είναι ομοιόμορφα φραγμένες, ανεξάρτητα από τον έλεγχο.

<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ:</u>

Γνωρίζουμε ότι τα $(t, y, u) \in I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'}$. Τα $\mathbb{R}^d$ και $\mathbb{R}^{d'}$ μπορούν εύκολα να αντικατασταθούν με δύο αρκετά μεγάλες ανοικτές μπάλες $B_{b'}$ και B_b αντίστοιχα.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 1Β.2:</u> (Ύπαρξη και Μοναδικότητα της Λύσης y_w)

Για κάθε $w \in L^2(I, \mathbb{R}^{d'})$ η εξίσωση κατάστασης (1) έχει μία και μοναδική λύση $y = y_w \in C(I, \mathbb{R}^d)$

<u>Απόδειξη</u>

Η απόδειξη αυτή εμπεριέχεται ως ειδική περίπτωση στο Λήμμα Συμβατότητας των Καταστάσεων που ακολουθεί στο Κεφάλαιο V. Κατά την αποδεικτική διαδικασία χρησιμοποιούνται τα θεωρήματα Ascoli, Egorov, και Κυριαρχημένης Σύγκλισης Lebesgue.

Η μοναδικότητα της λύσης προκύπτει εύκολα από την υπόθεση (Β) και την Συνεχή Ανισότητα Bellman-Grownwall.

Πράγματι, έστω ότι υπάρχουν δύο λύσεις y_{1_w} και y_{2_w}, τότε

$$|y_{1_w} - y_{2_w}| \le \int_0^t |f(s, y_{1_w}(s), w(s)) - f(s, y_{2_w}(s), w(s))|ds$$

Όμως από Lipschitz έχουμε

$$|y_{1_w} - y_{2_w}| \le 0 + L \cdot \int_0^t |y_{1_w}(s) - y_{2_w}(s)|ds$$

Από την ανισότητα Bellman-Gronwall με $z(t) := 0 = z$ παίρνουμε

$$|y_{1_w} - y_{2_w}| \le 0$$

Δηλαδή

$$|y_{1_w} - y_{2_w}| = 0$$

Συνεπώς $\quad y_{1_w} = y_{2_w}$.

Δίνεται εδώ, ενδεικτικά, ένα από τα πολλά θεωρήματα ύπαρξης ενός κλασικού βέλτιστου ελέγχου

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 1Β.3:</u> (Ύπαρξη Κλασικού Βέλτιστου Ελέγχου)
Θεωρώντας τις υποθέσεις (Α1), (Β), (C) και αν το σύνολο

$$Q(t,y,U)=\{(x,\lambda)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R} \ \mid \ x=f(t,y,v), \ \ \lambda=g_0(t,y,v), \ \ \text{για} \ \ \text{κάποιο} \ \ v\in U\}$$

είναι κυρτό για κάθε $(t,y)\in I\times\mathbb{R}^d$ ([1]), $W_\alpha\neq\varnothing$ και οι g_l, $l=1,2$ δεν εξαρτώνται από το u, τότε υπάρχει βέλτιστος έλεγχος.

Η <u>υπόθεση</u> ότι το Q <u>είναι κυρτό</u> είναι <u>μη ρεαλιστική</u> για μη γραμμικά συστήματα σαν αυτά που μελετάμε. Συνεπώς στερείται γενικότητας. Για το λόγο αυτό απλώς αναφέρουμε το παραπάνω θεώρημα και δεν μπαίνουμε στην αποδεικτική διαδικασία.

1Γ. ΑΝΑΓΚΑΙΕΣ/ΙΚΑΝΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΚΛΑΣΙΚΟ ΕΛΕΓΧΟ

Προκειμένου να αποδείξουμε μία αρχή ελαχίστου για το πρόβλημά μας, θα χρειαστεί πρώτα να υπολογίσουμε την παράγωγο Fréchet του συναρτησιακού κόστους και των συναρτησιακών των περιορισμών.

<u>ΛΗΜΜΑ 1Γ.1:</u>
Με δεδομένες τις υποθέσεις (Α1), (Α2) και (Β)του προβλήματός μας αν οι καταστάσεις y και $y+\Delta y$ αντιστοιχούν στους ελέγχους w και $w+\Delta w$ και η f είναι Lipschitz ως προς (y,u) τότε έχουμε

$$\|\Delta y\|_\infty\leq c\cdot\|\Delta w\|_{L^1}\leq c'\cdot\|\Delta w\|_{L^2}(\leq c''\cdot\|\Delta w\|_\infty)$$

<u>Απόδειξη:</u>
Η εξίσωση κατάστασης για y και $y+\Delta y$ γίνεται αντιστοίχως

$$y(t)=y_0+\int_0^T f(s,y(s),w(s))ds \ \text{ και}$$

$$y(t)+\Delta y(t)=y_0+\int_0^T f(s,(y+\Delta y)(s),(w+\Delta w)(s))ds$$

Αφαιρώντας κατά μέλη, παίρνοντας απόλυτη τιμή εκατέρωθεν και από την συνθήκη Lipschitz, έχουμε

$$|\Delta y(t)|\leq\int_0^T L'\cdot(|\Delta y|+|\Delta w|)ds$$

Στην παραπάνω εφαρμόζοντας την συνεχή ανισότητα Bellman-Grownwall, έχουμε

$$|\Delta y(t)|\leq c\cdot\int_0^t|\Delta w|ds\leq c\cdot\|\Delta w\|_{L^1}\leq c'\cdot\|\Delta w\|_{L^2}, \quad \forall t\in I$$

[1] Ιδιότητα Cesari

Άρα η παραπάνω ισχύει και για $\max|\Delta y(t)|$ και έτσι

$$\|\Delta y\|_{\infty} \le c \cdot \|\Delta w\|_{L^1} \le c' \cdot \|\Delta w\|_{L^2} .$$

Υπενθυμίζουμε το γνωστό αποτέλεσμα

ΛΗΜΜΑ 1Γ.2:

Έστω G μία απεικόνιση με $G(y,w) = \int_0^T g(t, y(t), w(t))dt$ όπου g, g_y και g_u είναι συνεχείς ως προς $(t, y, u) \in I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'}$. Τότε υπάρχει η Fréchet παράγωγος της G η οποία δίνεται από τη σχέση $G'(y,w)\begin{pmatrix}\Delta y\\ \Delta w\end{pmatrix} = \int_0^T g_y \Delta y dt + \int_0^T g_u \Delta w dt$ και είναι συνεχής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1Γ.1:

Έστω οι υποθέσεις (A1), (A2), (B), (C), (D1), (D2). Επίσης παραλείπουμε εδώ το δείκτη l στα G_l, g_l και ϕ_l.

Ορίζουμε τη Χαμιλτονιανή

$$H(t, y, z, u) = zf(t, y, u) + g(t, y, u)$$

και τη συζυγή κατάσταση $z = z_u$ (διάνυσμα γραμμή) η οποία είναι λύση της συζυγούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης:

$$z'(t) = -z(t) f_y(t, y(t), w(t)) - g_y(t, y(t), w(t))$$

$$z(T) = \phi_y(y(T)) = [\nabla \phi(y(T))]^T ,$$

Η παράγωγος Fréchet στο $w \in L^2(I, \mathbb{R}^{d'})$ του συναρτησιακού G ορισμένου στο ανοικτό σύνολο $I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'}$, δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} G'(w)\Delta w &= \int_0^T [z(t) f_u(t, y(t), w(t)) + g_u(t, y(t), w(t))]\Delta w(t)dt \\ &= \int_0^T H_u(t, y(t), z(t), w(t))\Delta w(t)dt \end{aligned}$$

Επιπλέον ο τελεστής $w \mapsto z_w$ (όπως και ο $w \mapsto y_w$) και η παράγωγος $G'(w)$ είναι συνεχείς.

Απόδειξη:

Έστω ότι οι καταστάσεις y, $y + \Delta y \in C(I, \mathbb{R}^d)$ αντιστοιχούν στους ελέγχους

$$w, w + \Delta w \in L^2(I, \mathbb{R}^{d'})$$

οπότε από το Θεώρημα 1Β.2 (ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης) έχουμε

$$\|y\|_{\infty} \le b , \ \|y + \Delta y\|_{\infty} \le b .$$

Από την εξίσωση κατάστασης και τις υποθέσεις έχουμε

$$\begin{aligned} \Delta G &= G(w + \Delta w) - G(w) = \\ &= \phi(y(T) + \Delta y(T)) - \phi(y(T)) + \int_0^T [g(t, y + \Delta y, w + \Delta w) - g(t, y, w)]dt \end{aligned}$$

$$=\phi(y(T)+\Delta y(T))-\phi(y(T))+\int_0^T[g(t,y+\Delta y,w+\Delta w)-g(t,y,w+\Delta w)]dt$$
$$+\int_0^T[g(t,y,w+\Delta w)-g(t,y,w)]dt$$
$$=\phi_y(y(T))\Delta y(T)+\int_0^T g_y(t,y,w)\Delta y dt+\int_0^T g_u(t,y,w)\Delta w dt+\varepsilon(\Delta y(T))\|\Delta y(T)\|$$
$$+\varepsilon(\Delta y,\Delta w)(\|y(T)\|_\infty+\|\Delta w\|_2)$$

με $\|\varepsilon(\Delta y,\Delta w)\|\to 0$, όταν $\|y(T)\|_\infty\to 0$ και $\|\Delta w\|_2\to 0$,

και άρα με τη βοήθεια του Λήμματος 1Γ.1 η παραπάνω σχέση γίνεται:

(A) $\Delta G=\phi_y(y(T))\Delta y(T)+\int_0^T g_y(t,y,w)\Delta y dt+\int_0^T g_u(t,y,w)\Delta w dt+o(\|\Delta w\|_2)$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά και τα δύο μέλη της εξίσωσης κατάστασης με το διάνυσμα γραμμή $z(t)$, και ολοκληρώνοντας βρίσκουμε

$$\int_0^T z\Delta y' dt=\int_0^T[zf(t,y+\Delta y,w+\Delta w)-zf(t,y,w)]dt$$
$$=\int_0^T z[f(t,y+\Delta y,w+\Delta w)-f(t,y,w+\Delta w)]dt+\int_0^T z[f(t,y,w+\Delta w)-f(t,y,w)]dt$$

Δηλαδή (παρόμοια, όπως παραπάνω, με την g αλλά για την zf)

(B) $\int_0^T z\Delta y' dt=\int_0^T zf_y(t,y,w)\Delta y dt+\int_0^T zf_u(t,y,w)\Delta w dt+o(\|\Delta w\|_2)$

Πολλαπλασιάζοντας τη συζυγή εξίσωση από τα δεξιά με Δy και ολοκληρώνοντας, παίρνουμε

(Γ) $\int_0^T z'\Delta y dt=-\int_0^T zf_y(t,y,w)\Delta y dt-\int_0^T g_y(t,y,w)\Delta y dt$.

Από την ολοκλήρωση κατά μέρη έχουμε

(Δ) $\int_0^T z\Delta y' dt+\int_0^T z'\Delta y dt=z(T)\Delta y(T)-z(0)\Delta y(0)$.

Αθροίζοντας τις (Β) και (Γ) και με τη βοήθεια της (Δ), βρίσκουμε

(E) $z(T)\Delta y(T)-z(0)\Delta y(0)=\phi_y(y(T))\Delta y(T)-0$
$$=\int_0^T zf_u(t,y,w)\Delta w dt-\int_0^T g_y(t,y,w)\Delta y dt+o(\|\Delta w\|_2).$$

Έτσι τελικά από την (Α) με τη βοήθεια της (Ε) παίρνουμε

$$\Delta G=G(w+\Delta w)-G(w)=\int_0^T[zf_u(t,y,w)+g_u(t,y,w)]dt+o(\|\Delta w\|_2)$$
$$=\int_0^T H_u(t,y(t),z(t),w(t))\Delta w(t)dt+o(\|\Delta w\|_2)$$

Η συνέχεια του τελεστή $w\mapsto y_w$ η απόδειξη προκύπτει άμεσα από το Λήμμα 1Γ.1.

Πράγματι, για $y_1,y_2\in C(I,\mathbb{R}^d)$ και τα αντίστοιχα $w_1,w_2\in W_\alpha$ έχουμε (από Λήμμα1Γ.1)

$$\|y_1-y_2\|_{L^\infty}\le c'\cdot\|w_1-w_2\|_{L^2}.$$

Όταν $\|w_1-w_2\|_{L^2}\to 0$ τότε και $\|y_1-y_2\|_{L^\infty}\to 0$.

Συνεπώς ο τελεστής $w\mapsto y_w$ είναι συνεχής.

Η συνέχεια του τελεστή $w \mapsto z_w$ αποδεικνύεται όμοια με την συνέχεια του τελεστή $w \mapsto y_w$, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1Γ.1 και την ιδιότητα Lipschitz ως προς (y,u) της f, στη σχέση

$$z'(t) = -z(t) f_y(t, y(t), w(t)) - g_y(t, y(t), w(t))$$
$$\text{με } z(T) = \phi_y(y(T)) = [\nabla \phi(y(T))]^T$$

Η συνέχεια του τελεστή $\Delta w \mapsto G'(w)$ δηλαδή ότι

$\|H_u(\cdot, y_{u+v}, z_{u+v}, w+w') - H_u(\cdot, y_u, z_u, w)\|_2 \to 0$ όταν $\|w'\|_2 \to 0$ προκύπτει από την συνέχεια των παραπάνω τελεστών και τις υποθέσεις για τα f_u, g_u.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 1Γ.2:</u> (Ασθενείς Αναγκαίες Συνθήκες για Βέλτιστο Έλεγχο)
Με τις υποθέσεις (A1), (A2), (B), (C), (D1) και (D2), αν ο έλεγχος $w \in W_\alpha$ είναι βέλτιστος, τότε ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες Kuhn-Tucker-Lagrange (K-T-L):
Υπάρχουν πολλαπλασιαστές $\lambda_l \in \mathbb{R}$, $l = 0,1,2$ με $\lambda_l \geq 0$, για $l = 0,2$ και λ_i όχι όλοι μηδέν (και μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sum_{i=0}^{2} \lambda_i = 1$) τέτοιοι ώστε

(I) $\int_0^T H_u(t, y(t), z(t), w(t))[w'(t) - w(t)]dt \geq 0$, για κάθε $w' \in W$

όπου θέτουμε $\phi = \sum_{l=0}^{2} \lambda_l \phi_l$ και $g = \sum_{l=0}^{2} \lambda_l g_l$ στους ορισμούς των H και z

(II) $\lambda_2 G_2(w) = 0$ (συνθήκη εγκαρσιότητας)

Η ανισότητα (I) είναι ισοδύναμη με την Κλασική Ασθενή Σημειακή Αρχή του Ελαχίστου

(III) $H_u(t, y(t), z(t), w(t))w(t) = \min_{u \in U} H_u(t, y(t), z(t), w(t))u$, σ.π. στο I.

<u>Απόδειξη:</u>
Οι συνθήκες (I) και (II) προκύπτουν άμεσα από το Θεώρημα 1Γ.1 και από το Θεώρημα Kuhn-Tucker-Lagrange (βλ. Παράρτημα).

Θα αποδείξουμε ότι αν ισχύει η (I) τότε ισχύει και η (III).

Υποθέτουμε ότι ισχύει η (I).
Έστω ότι μ το μέτρο Lebesgue στο I και (u_k) μία ακολουθία του U (συμπαγές), πυκνή στο U, και S τυχόν μετρήσιμο υποσύνολο του I.

Θέτοντας στην (I)

$w(t) = u_k$, για $t \in S$,

$w'(t) = w(t)$, για $t \notin S$,

έχουμε

$\int_S H_u(t, y(t), z(t), w(t))[u_k - w(t)]dt \geq 0$, για κάθε τέτοιο σύνολο S.

Από τη Θεωρία Μέτρου (βλ. Παράρτημα), προκύπτει ότι

$H_u(t, y(t), z(t), w(t))[u_k - w(t)] \geq 0$, σ.π. στο I, δηλ. $H_u(t,y(t),z(t),w(t))[u_k - w(t)] \geq 0$ σε σύνολο $J_k = I - I_k$ με $\mu(I_k) = 0$.

Άρα $H_u(t,y(t),z(t),w(t))[u_k - w(t)] \geq 0$ και στο σύνολο $J = \bigcap_k J_k$.

Και αυτό ισχύει για κάθε k, αφού το J δεν εξαρτάται πλέον από το k, και μάλιστα έχουμε

$$\mu(I - J) = \mu(\bigcup_k I_k) = 0.$$

Επίσης, επειδή η (u_k) είναι πυκνή στο U, συμπεραίνουμε ότι

$$H_u(t,y(t),z(t),w(t))[u - w(t)] \geq 0, \text{ για κάθε } u \in U \text{ στο } J,$$

δηλ. σχεδόν παντού στο I και άρα ισχύει η ζητούμενη Αρχή του Ελαχίστου.

Το αντίστροφο είναι προφανές.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1Γ.1: (έλεγχος K-T-L)
Ένας έλεγχος $w \in W_\alpha$ που ικανοποιεί τις συνθήκες Kuhn-Tucker-Lagrange, δηλαδή υπάρχουν πολλαπλασιαστές $\lambda_l \in \mathbb{R}$, $l = 0,1,2$ με $\lambda_l \geq 0$, για $l = 0,2$ και $\sum_{l=0}^{2} |\lambda_l| = 1$ τέτοιοι ώστε

(I) $\int_0^T H_u(t,y(t),z(t),w(t))[w'(t) - w(t)]dt \geq 0$, για κάθε $w' \in W$

με $\phi = \sum_{l=0}^{2} \lambda_l \phi_l$ και $g = \sum_{l=0}^{2} \lambda_l g_l$ στους ορισμούς των H και z, και

(II) $\lambda_2 G_2(w) = 0$ (συνθήκη εγκαρσιότητας)

λέγεται έλεγχος Kuhn-Tucker-Lagrange (K-T-L)

ΘΕΩΡΗΜΑ 1Γ.3: (Ασθενείς Ικανές Συνθήκες για Βέλτιστο Έλεγχο)
Με τις υποθέσεις (A1), (A2), (B), (C), (D1) και (D2) αν η f είναι ομοιοπαραλληλική ως προς (y,u), αν οι ϕ_1, g_1 και αυτές ομοιοπαραλληλικές για κάθε $t \in I$ και αν οι g_0, g_2, ϕ_0 και ϕ_2 είναι κυρτές ως προς (y,u) για κάθε $t \in I$, αν ο έλεγχος $w \in W_\alpha$ ικανοποιεί τις συνθήκες Kuhn-Tucker-Lagrange (K-T-L) με $\lambda_0 > 0$, τότε είναι βέλτιστος.

<u>Απόδειξη:</u>

Προκύπτει άμεσα από το Γενικό Θεώρημα Ικανών Συνθηκών K-T-L (βλ. Παράρτημα).

2Α. Το Συνεχές Πρόβλημα Γενικευμένου Βέλτιστου Ελέγχου (Relaxed Control)

Υπενθυμίζουμε εδώ το κλασικό πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου:

Έστω $I=[0,T]$, με $T<+\infty$, ένα διάστημα και έστω d, d' ακέραιοι.

Έχουμε τη διαφορική εξίσωση κατάστασης

(1) $y'(t)=f(t,y(t),w(t))$, σχεδόν παντού (σ. π.) στο I,

με $y(0)=y_0$,

Γνωρίζουμε, από προηγουμένως ότι το σύνολο των ελέγχων στο κλασικό πρόβλημα είναι

$W=\{w\in L^2(I,\mathbb{R}^{d'})\,/\,w(t)\in U \quad \forall t\in I\}$ όπου $U\subset\mathbb{R}^{d'}$ με U συμπαγές σύνολο.

Σημειωτέον ότι δεν υποθέτουμε εδώ ότι το U είναι κυρτό όπως στο κλασικό πρόβλημα.

Θεωρούμε το χώρο $C(U)$ των συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται πάνω στο U.

Ο $C(U)^*$, ο δυϊκός του $C(U)$, είναι ισόμορφος με τον χώρο πεπερασμένων κανονικών μέτρων Borel (finite regular Borel measures) ο οποίος συμβολίζεται $M(U)$.

Ο $M(U)$ είναι ένας χώρος εφοδιασμένος με την *-ασθενή (ή την ισχυρή του δυϊκού) τοπολογία και το κλειστό υποσύνολό του που περιέχει όλα τα μέτρα πιθανότητας στο U το συμβολίζουμε με $M_1(U)$.

Ορίζουμε έτσι το σύνολο των γενικευμένων ελέγχων R ως

$R=\{r:I\to M_1(U)\,|\,r \quad ασθενώς \quad μετρήσιμο\}\subset L_w^\infty(I,M(U))\equiv L^1(I,C(U))^*$

Εδώ ο $M(U)$ (αντιστ. $M_1(U)$) είναι το σύνολο των μέτρων Radon (αντ. των μέτρων πιθανότητας) στο U, όπως ορίστηκαν προηγουμένως.

Ο χώρος $L_w^\infty(I,M(U))$ είναι ο χώρος των μετρήσιμων, με την ασθενή τοπολογία στο M, απεικονίσεων που είναι (ουσιαστικά) φραγμένες με την ισχυρή τοπολογία στο M.

Το R είναι εφοδιασμένο με την *-ασθενή τοπολογία, είναι κυρτό, μετρικοποιήσιμο και συμπαγές ως προς την τοπολογία αυτή.

Αν ταυτίσουμε για κάθε $t\in I$ τον κλασικό έλεγχο $w(t)$ με το μέτρο πιθανότητας Dirac στο σημείο $w(t)\in U$, δηλαδή με το $r(t)=\delta_{w(t)}$, τότε, με την ταύτιση αυτή, έχουμε $W\subset R$.

Για κάθε γενικευμένο έλεγχο $r\in R$, η γενικευμένη εξίσωση κατάστασης γίνεται τότε

$y'(t)=\int_U f(t,y(t),u)r(t)(du)$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον **απλοποιημένο συμβολισμό**

$$\phi(t,r(t)) := \int_U \phi(t,u)r(t)(du) .$$

Η συνάρτηση $\phi(\cdot,r(\cdot))$ είναι γραμμική, ως προς το μέτρο r, ως προς τους κυρτούς συνδιασμούς, δηλ.

$$\phi(t,(\lambda_1 r_1+\lambda_2 r_2)(t)) = \lambda_1\cdot\phi(t,r_1(t))+\lambda_2\cdot\phi(t,r_2(t)) \text{ με } \lambda_1,\lambda_2 \ge 0 \text{ και } \lambda_1+\lambda_2 = 1$$

Μία ακολουθία γενικευμένων ελέγχων $(r_k \in R)$ **συγκλίνει** στο $r \in R$ αν και μόνο αν για κάθε συνεχή συνάρτηση ως προς (t,y,u) ισχύει

$$\int_0^T \phi(t,r_k(t))dt \to \int_0^T \phi(t,r(t))dt$$

Με τον απλοποιημένο αυτό συμβολισμό η εξίσωση κατάστασης γράφεται

$$(1') \quad y'(t) = f(t,y(t),r(t))$$

Οι περιορισμοί στον γενικευμένο έλεγχο είναι τότε $r \in R$,
οι περιορισμοί (δεσμεύσεις) στην κατάσταση και στον έλεγχο είναι

$$\begin{cases} G_1(r) = \phi_1(t) + \int_0^T g_1(t,y(t),r(t))dt = 0, \\ G_2(r) = \phi_2(t) + \int_0^T g_2(t,y(t),r(t))dt \le 0 \end{cases}$$

και το συναρτησιακό κόστους είναι

$$G_0(r) = \phi_0(y(T)) + \int_0^T g_0(t,y(t),r(t))dt .$$

Ορίζουμε το σύνολο των αποδεκτών ελέγχων $R_\alpha = \{r \in R / G_1(r) = 0,\ \ G_2(r) \le 0\}$.

Το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου είναι τότε

Να βρεθεί ένας έλεγχος r τέτοιος ώστε $r \in R_\alpha \quad \textit{και} \quad G_0(r) \le G_0(r'),\ \ \forall r' \in R_\alpha$.

Σε αυτό το σημείο επισημαίνουμε ότι έχουμε τρεις ισοδύναμες διατυπώσεις του Γενικευμένου Προβλήματος Βέλτιστου Ελέγχου, οι οποίες είναι οι εξής:

(I) $y' \in cof(t,y,U)$

(II) $y' = f(t,y,r(t)) = \int_U f(t,y,u)r(t)(du)$

(III) $y' = \sum_{j=0}^{d} \alpha_{ji} f(t,y(t),w_j(t))$ (μορφή Gamkrelidze—βλ. Warga σελ.370)

Στην παρούσα διατριβή χρησιμοποιούμε κυρίως, όπως είδαμε αμέσως παραπάνω, την μορφή (II), ενώ όταν χρησιμοποιούμε ελέγχους Gamkrelidze τότε χρησιμοποιούμε την μορφή (III).

Επίσης, όσον αφορά την τελευταία διατύπωση και δεδομένου ότι το $y \in \mathbb{R}^d$, κάθε σημείο στο κυρτό περίβλημα του $f(U)$ γράφεται ως κυρτός συνδυασμός $d+1$σημείων.

<u>Παρατήρηση:</u>

Εφόσον ισχύει $W \subset R$ γενικά έχουμε

$$c_R := \min_{\text{περιορισμοί στο } r} G_0(r) \leq \inf_{\text{περιορισμοί στο } w} G_0(w) := c_W,$$

όπου η ισότητα προφανώς ισχύει, ειδικά όταν δεν υπάρχουν περιορισμοί, αφού το W είναι πυκνό στο R.
Καθώς συνήθως οι μέθοδοι προσέγγισης παραβιάζουν ελαφρώς τους περιορισμούς κατάστασης, η προσέγγιση ενός βέλτιστου γενικευμένου ελέγχου, και συνεπώς και του (ενδεχομένως μικρότερου) βέλτιστου γενικευμένου κόστους c_R, από έναν γενικευμένο ή κλασικό έλεγχο, **δεν είναι στην πράξη μειονέκτημα και μάλιστα μπορεί να αποδειχτεί πλεονέκτημα.** (βλ. Warga, σελ. 248)

2B. ΥΠΑΡΞΗ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΥ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

<u>ΛΗΜΜΑ 2Β.1:</u>
Για κάθε έλεγχο $r \in R$ η εξίσωση κατάστασης (1΄) έχει μία μοναδική συνεχή λύση y_r και υπάρχει σταθερά $b > 0$, τέτοια ώστε $\|y_r\|_\infty < b$, δηλ. η y_r είναι ομοιόμορφα φραγμένη και το φράγμα αυτό είναι ανεξάρτητο από τον έλεγχο.
<u>Απόδειξη:</u>
Παρόμοια με την απόδειξη για τους κλασικούς συνεχείς ελέγχους (Λήμμα 1Β.1.)

<u>ΛΗΜΜΑ 2Β.2:</u>
Με υπόθεση τις (Α1) και (Β) και αν $y_k \xrightarrow{\text{ομοιομ}} y$ και $r_k \to r$ στο R, τότε ισχύει:

$$\int_0^T f(t, y_k(t), r_k(t))dt \to \int_0^T f(t, y(t), r(t))dt$$

Ομοίως για τα g_l, ϕ_l όπου $l = 0,1,2$ όπως έχουν οριστεί στο πρόβλημα.
<u>Απόδειξη:</u>

Έστω $A = \int_0^T f(t, y_k(t), r_k(t))dt - \int_0^T f(t, y(t), r_k(t))dt$ και

$$B = \int_0^T f(t, y(t), r_k(t))dt - \int_0^T f(t, y(t), r(t))dt.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $A + B \to 0$.

Όμως $B \to 0$ αφού $r_k \to r$, στο R, εξ' ορισμού της σύγκλισης.

Για το A έχουμε

$$A \leq \int_0^T \left| f(t, y_k(t), r_k(t)) - f(t, y(t), r_k(t)) \right| dt \text{ δηλ.}$$

$$(1) \quad A \leq \int_0^T \int_U \left| f(t, y_k(t), u) - f(t, y, u) \right| r_k(du) dt .$$

Όμως

$$y_k \xrightarrow{\text{ομοιόμ.}} y \Rightarrow y_k(t) \xrightarrow{\text{σημ.}} y(t), \quad \forall t$$

Το U είναι συμπαγές και το $\bar{B}(y(t), \delta)$ είναι επίσης συμπαγές.

Θέτουμε (2) $E_k(t) = \int_U \left| f(t, y_k(t), u) - f(t, y(t), u) \right| r_k(du)$.

Η f από υπόθεση (Β) είναι συνεχής σε συμπαγές και $\|y_k\|_\infty \leq b$ τότε $\mathrm{E}_k \leq c$.

Από τη σημειακή σύγκλιση της y_k, έχουμε:

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$\left| f(t, y_k(t), u) - f(t, y(t), u) \right| < \varepsilon$, $\forall u \in U$ και $\forall k \geq k_0$

Συνεπώς (από τη συνέχεια της f σε συμπαγές σύνολο), η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

$$(3) \quad \max_u \left| f(t, y_k(t), u) - f(t, y(t), u) \right| = \varepsilon_\kappa \quad \forall t \in I$$

Επιπλέον, έχουμε

$$\max_u \left\| f(t, y_k(t), u \right\| \leq c$$

Άρα, από τη σχέση (2) με τη βοήθεια της (3), έχουμε

$$E_k(t) < \int_U \varepsilon_\kappa r_k(du) = \varepsilon_\kappa \int_U 1 \cdot r_k(du) = \varepsilon_\kappa$$

δηλ. $\mathrm{E}_k(t) \to 0$ σχεδόν παντού.

Από την υπόθεση $E_k(t) < c$, $\forall t \in I$ και επειδή $E_k(t)$ συγκλίνει, σχεδόν παντού, στο 0, συνεπάγεται από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης Lebesgue ότι

$$\int_0^T E_k(t) dt \to 0 .$$

Άρα από την (1) προκύπτει $A \to 0$ και συνεπώς το ζητούμενο.

<u>ΛΗΜΜΑ 2Β.3:</u>

Αν $r_k \to r$ τότε $y_k \equiv y_{r_k} \to y \equiv y_r$ (συνέχεια του τελεστή $r \mapsto y_r$)

<u>Απόδειξη:</u>

Από το Λήμμα 2Β.2 όλα τα y είναι ομοιόμορφα φραγμένα από το b (το οποίο b βρίσκουμε με την βοήθεια της Συν. Ανισ. Bellman-Gronwall) για κάθε έλεγχο $r \in R$. Θα δείξουμε ότι τα y_k είναι ισοσυνεχείς συναρτήσεις.

Πράγματι,

$$|y_k(t) - y_k(t')| = \int_t^{t'} |f(s, y_k(s), r_k(s))| ds$$

και με τη βοήθεια της υπόθεσης (Β) έχουμε

$$|y_k(t) - y_k(t')| \le \int_t^{t'} cds + \int_t^{t'} (c \cdot b) ds \le \int_t^{t'} Mds = |t' - t| \cdot M \xrightarrow[t'-t \to 0]{} 0 .$$

Συνεπώς $|y_k(t) - y_k(t')| \to 0$, ανεξαρτήτως του k.

Άρα τα (y_k) είναι μάλιστα ομοιόμορφα ισοσυνεχή (Lipschitz ισοσυνεχή).

Αφού τα (y_k) είναι φραγμένα και ισοσυνεχή, από το Θεώρημα Ascoli υπάρχει μια υπακολουθία $(y_k)_{k \in L \subset \mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $y_k \xrightarrow[ομοιόμ., k \in L]{} y$.

Όμως $y_k(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y_k(s), r_k(s)) ds$ και επειδή $y_k \xrightarrow{ομοιόμ., k \in L} y$ και $r_k \to r$ με τη βοήθεια του Λήμματος 2Β.2, και παίρνοντας σημειακά όρια καθώς το $k \to +\infty$ έχουμε

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s), r(s)) ds .$$

Δηλαδή $y \equiv y_r$ μοναδικό όριο.

Από τη μοναδικότητα του ορίου y_r και αφού συγκλίνει η υπακολουθία συγκλίνει ολόκληρη η ακολουθία, δηλ. $y_k \to y_r$.

<u>**ΠΟΡΙΣΜΑ 2Β.1:**</u>

Αν $r_k \to r$ τότε $G_l(r_k) \to G_l(r)$ για $l = 0,1,2$

<u>Απόδειξη:</u>

Γνωρίζουμε ότι

$$G_l(r_k) = \phi_l(y_k(T)) + \int_I g_l(t, y_k(t), r_k(t)) dt, \text{ όπου } l = 0,1,2 .$$

Επίσης

$$G_l(r) = \phi_l(y(T)) + \int_I g_l(t, y(t), r(t)) dt, \text{ όπου } l = 0,1,2 .$$

Από υπόθεση (C), από το Λήμμα 2Β.2 και από το Λήμμα 2Β.3 το όριο περνά στα G_1, G_2, G_0 τα οποία είναι ακολουθιακά συνεχή και άρα αφού ο R είναι μετρικός, συνεχή.

<u>**ΘΕΩΡΗΜΑ 2Β.2:**</u> (Ύπαρξη Βέλτιστου Ελέγχου)

Αν $R_\alpha \ne \emptyset$ με υποθέσεις τις (Α1), (Β), (C) υπάρχει r^* βέλτιστος γενικευμένος έλεγχος στο R_α για το πρόβλημά μας όπως έχει οριστεί.

<u>Απόδειξη:</u>

Αν τα r_k είναι αποδεκτά δηλ. $G_1(r_k) = 0$ και $G_2(r_k) \le 0$ και $r_k \to r$, τότε από το Πόρισμα 2Β.1

$$G_1(r_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} G_1(r) \text{ και } G_2(r_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} G_2(r) .$$

Συνεπώς $G_1(r) = 0$ και $G_2(r) \le 0$.

Δηλαδή το σύνολο R_α των αποδεκτών ελέγχων είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς R, άρα και αυτό συμπαγές.

Αφού η G_0 είναι συνεχής το θεώρημα έπεται.

2Γ. ΑΝΑΓΚΑΙΕΣ/ΙΚΑΝΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΕΛΕΓΧΟ

ΛΗΜΜΑ 2Γ.1:
Με δεδομένες τις υποθέσεις (A1), (B), (C), (D1) αν r, $r' \in R$, $\varepsilon \in (0,1]$ και αν οι καταστάσεις y και $y+\Delta y$ αντιστοιχούν στους γενικευμένους ελέγχους r και $r+\varepsilon\cdot(r'-r)$ τότε έχουμε:

$$\|\Delta y\|_\infty \le c\cdot\varepsilon$$

Απόδειξη:
Η εξίσωση κατάστασης για y και $y+\Delta y$ γίνεται αντιστοίχως

$$y(t) = y_0 + \int_0^T f(s, y(s), r(s))ds$$

και

$$y(t)+\Delta y(t) = y_0 + \int_0^T f(s,(y+\Delta y)(s),(r+\varepsilon\cdot(r'-r))(s))ds$$

Αφαιρώντας τις παραπάνω κατά μέλη, έχω

$$\begin{aligned}|\Delta y(t)| &\le \int_0^T \left| f(s,(y+\Delta y)(s),(r+\varepsilon\cdot(r'-r))(s)) - f(s,y(s),r(s))\right| ds \le \\ &\le \int_0^T \left| f(s,(y+\Delta y)(s),(r+\varepsilon\cdot(r'-r))(s)) - f(s,y(s),(r+\varepsilon\cdot(r'-r))(s))\right| ds \\ &\quad + \int_0^T \left| f(s,y(s),(r+\varepsilon\cdot(r'-r))(s)) - f(s,y(s),r(s))\right| ds\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη Lipschitz ως προς y παίρνουμε

$$|\Delta y(t)| \le \int_0^t L\cdot|\Delta y| ds + \varepsilon\cdot\int_0^T \left| f(s,y(s),(r'-r)(s))\right| ds$$

Θέτοντας $c = \int_0^T \left| f(s,y(s),(r'-r)(s))\right| ds$ και από την συνεχή ανισότητα Bellman-Gronwall παίρνουμε

$$\|\Delta y\|_\infty \le c\cdot\varepsilon\,.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2Γ.1: (Παράγωγος Θετικά κατά Κατεύθυνση)
Έστω ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις (A1), (B), (C), (D1).
Παραλείπουμε, εδώ, το δείκτη l στα G_l, g_l, ϕ_l, z_l και z_l'.
Έστω $y = y_r$ και $z = z_r$ η γενικευμένη συζυγής κατάσταση, η οποία είναι λύση της συζυγούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$z'(t) = -z(t)f_y(t,y(t),r(t)) - g_y(t,y(t),r(t)),\ t\in I \text{ και}$$

$$z(T)=\phi_y(y(T))=[\nabla\phi(y(T))]^T \text{, με } y=y_r .$$

Ορίζουμε την Χαμιλτονιανή

$$H(t,y,z,r)=z\cdot f(t,y,r)+g(t,y,r)$$

Για $r,r'\in R$ η θετική κατά κατεύθυνση παράγωγος στο $r'-r\in R$ του συναρτησιακού G ορισμένου στο $\mathbb{R}$ δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}\delta_+G(r,r'-r) &:= \lim_{\alpha\to 0^+}\frac{G(r+\alpha(r'-r))-G(r)}{a}\\ &=\int_I[z(t)f(t,y(t),r'(t)-r(t))+g(t,y(t),r'(t)-r(t))]dt\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\delta_+G(r,r'-r)=\int_0^T H(t,y(t),z(t),r'(t)-r(t))dt$$

Επιπλέον ο τελεστής $r\mapsto z_r$ (όπως και ο $r\mapsto y_r$) και η παράγωγος $(r,r')\mapsto \delta_+G(r,r'-r)$ είναι συνεχείς.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω $\varepsilon>0$, έχουμε

$$\begin{aligned}\Delta G &= G(r+\varepsilon\cdot(r'-r))-G(r)\\ &=\phi((y+\Delta y)(t))+\int_0^T g(t,(y+\Delta y)(t),(r+\varepsilon\cdot(r'-r))(t))dt-\phi(y(t))-\int_0^T g(t,y(t),r(t))dt\\ &=\phi((y+\Delta y)(t)-\phi(y(t)+\int_0^T (g(t,(y+\Delta y)(t),(r+\varepsilon\cdot(r'-r))(t))-g(t,y(t),r(t)))dt\end{aligned}$$

και

$$\phi((y+\Delta y)(t)-\phi(y(t))=\phi_y(y(T))\Delta y(T)+o(\|\Delta y\|_\infty) .$$

Έτσι η πιο πάνω σχέση γίνεται

$$\begin{aligned}\Delta G &= \phi_y(y(T))\Delta y(T)+o(\|\Delta y\|_\infty)\\ &+\int_0^T[g(t,(y+\Delta y)(t),(r+\varepsilon\cdot(r'-r))(t))-g(t,y(t),(r+\varepsilon\cdot(r'-r))(t))]dt\\ &+\int_0^T[g(t,y(t),(r+\varepsilon\cdot(r'-r))(t))-g(t,y(t),r(t))]dt ,\end{aligned}$$

και από Λήμμα 2Γ.1

$$\begin{aligned}\Delta G &= \phi_y(y(T))\Delta y(T)+o(\|\Delta y\|_\infty)+\int_0^T g_y(t,y(t),(r+\varepsilon\cdot(r'-r))(t))\Delta y(t)dt+o(\|\Delta y\|_\infty)\\ &+\varepsilon\cdot\int_0^T g(t,y(t),(r'-r)(t))dt ,\end{aligned}$$

και αφού $\quad \varepsilon\cdot\Delta y(\|t\|_\infty)=\varepsilon\cdot \mathrm{O}(\|\Delta y_\varepsilon\|_\infty)=\varepsilon\cdot\mathrm{O}(\varepsilon)=o(\varepsilon)$

Παίρνουμε, από τη γραμμικότητα της g_y ως προς r

$$\text{(A)}\quad \Delta G=\phi_y(y(T))\Delta y(T)+\int_0^T g_y(t,y(t),r(t))\Delta y(t)dt$$

$$+\varepsilon\cdot\int_0^T g(t,y(t),(r'-r)(t))dt+o(\varepsilon)$$

Εισάγουμε τη γραμμική συζυγή εξίσωση

$$z'(t)=-z(t)\cdot f_y(t,y(t),r(t))-g_y(t,y(t),r(t)) \text{ με } z(T)=\phi_y(y(T))=[\nabla\phi(y(T))]^T$$

όπου το $z(t)$ είναι διάνυσμα γραμμή, το $\phi_y(y(T))$ είναι επίσης διάνυσμα γραμμή, ενώ το $\nabla\phi(y(T))$ είναι διάνυσμα στήλη.

Από την εξίσωση κατάστασης πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με z και ολοκληρώνοντας παίρνουμε (ομοίως με τη g παραπάνω)

$$\text{(I)}\quad \int_0^T z\Delta y'dt=\int_0^T (z\cdot f(t,y_\varepsilon+\Delta y,r_\varepsilon)-z\cdot f(t,y,r))dt=$$
$$=\int_0^T z\cdot f_y(t,y,r)\Delta ydt+\varepsilon\cdot\int_0^T z\cdot f(t,y,r'-r)dt+o(\varepsilon)\,.$$

Από τη συζυγή εξίσωση πολλαπλασιάζοντας από δεξιά με Δy και ολοκληρώνοντας, παίρνουμε

$$\text{(II)}\quad \int_0^T z'\cdot\Delta ydt=-\int_0^T z\cdot f_y(t,y,r)\Delta ydt-\int_0^T g_y(t,y,r)\Delta ydt$$

Έτσι προσθέτοντας (I) και (II) παίρνουμε

$$\int_0^T z\cdot\Delta y'dt+\int_0^T z'\Delta ydt=[z\Delta y]_0^T=z(T)\cdot\Delta y(T)-z(0)\cdot\Delta y(0)=\phi_y(y(T))\cdot\Delta y(T)=$$
$$=\varepsilon\cdot\int_0^T z\cdot f(t,y,r'-r)dt+o(\varepsilon)-\int_0^T g_y(t,y,r)\Delta ydt\,.$$

Συνεπώς

$$\text{(B)}\quad \phi_y(y(T))\cdot\Delta y(T)=\varepsilon\cdot\int_0^T z\cdot f(t,y,r'-r)dt-\int_0^T g_y(t,y,r)\Delta ydt+o(\varepsilon)\,.$$

Από την (A) με τη βοήθεια της (B), έχουμε

$$\Delta G=\varepsilon\cdot\int_0^T z\cdot f(t,y,r'-r)dt+\varepsilon\cdot\int_0^T g(t,y,r'-r)dt+o(\varepsilon)\,.$$

Και από τον ορισμό της Χαμιλτονιανής προκύπτει

$$\Delta G=\varepsilon\cdot\int_0^T H(t,y,z,r'-r)dt+o(\varepsilon)\,.$$

Συνεπώς

$$\delta_+G(r,r'-r)=\int_0^T H(t,y,z,r'-r)dt$$

Η συνέχεια του τελεστή $(r,r')\mapsto\delta_+G(r,r'-r)$ προκύπτει από την συνέχεια των παραπάνω τελεστών και τις υποθέσεις για τις f_u, g_u.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2Γ.2: (Αναγκαίες Συνθήκες Βελτιστότητας)
Με υποθέσεις τις (A1), (B), (C), (D1)) αν ο έλεγχος $r \in R_\alpha$ είναι είτε βέλτιστος γενικευμένος, είτε βέλτιστος κλασικός, τότε υπάρχουν πολλαπλασιαστές $\lambda_l \in \mathbb{R}$, $l = 0,1,2$ με $\lambda_l \geq 0$, για $l = 0,2$ και $\sum_{l=0}^{2} |\lambda_l| = 1$ τέτοιοι ώστε

(I) $\int_0^T H(t, y(t), z(t), r'(t) - r(t)) dt \geq 0$, $\forall r' \in R$ και

(II) $\lambda_2 G_2(r) = 0$ (συνθήκες εγκαρσιότητας-transversality)

όπου θέτουμε $\phi = \sum_{l=0}^{2} \lambda_l \phi_l$ και $g = \sum_{l=0}^{2} \lambda_l g_l$ στον ορισμό των z και H.
Η συνθήκη (I) ισοδυναμεί με την Ισχυρή Γενικευμένη Σημειακή Αρχή του Ελαχίστου

(III) $H(t, y(t), z(t), r(t)) = \min_u H(t, y(t), z(t), u)$, σ.π. στο I.

Απόδειξη:
Οι συνθήκες (I) και (II) προκύπτουν άμεσα από το Θεώρημα Kuhn-Tucker-Lagrange.

Απόδειξη της (I)$\Leftrightarrow$(III)
Έχουμε

(IV) $\int_0^T H(t, y, z, r' - r) dt \geq 0$, $\forall r' \in R$.

- Αν ισχύει η (III) τότε
  $H(r) \leq H(u)$, $\forall u \in U$
  Παίρνοντας ένα τυχαίο $r' \in R$ και ολοκληρώνοντας την ανισότητα ως προς r', έχουμε

  $\int_U H(r) r'(t)(du) \leq \int_U H(u) r'(t)(du)$,

δηλαδή από τον ορισμό του συμβολισμού

$H(r) \leq H(r')$

Έτσι επαληθεύεται η (IV) συνεπώς η (I).

- Αν ισχύει η (I) τότε $\int_U H(r) r'(t)(du) \leq \int_U H(u) r'(t)(du)$ $\forall r' \in R$

Έστω S ένα τυχαίο μετρήσιμο υποσύνολο του $I = [0, T]$ και (u_k) μία πυκνή ακολουθία στο U.

Θέτω $r'(t) = \begin{cases} u_k, & \alpha\nu \quad t \in S \\ r(t), & \alpha\nu \quad t \notin S \end{cases}$ με u_k σταθερό (fixed).

Έτσι $\int_S H(u_k - r) dt \geq 0$, $\forall k \in \mathrm{N}$ και $\forall S$.

Για σταθερό k από τη Θεωρία Μέτρου προκύπτει ότι
$H(u_k - r) \geq 0$ σχεδόν παντού,
δηλ. στο $J_k = I - I_k$ όπου $\mu(I_k) = 0$ και $\mu(J_k) = T$.

Συνεπώς $H(u_k - r) \geq 0$ και στο $J = \bigcap_k J_k$ όπου $\mu(J) = T$.
Και επειδή το J δεν εξαρτάται από το k τότε η $H(u_k - r) \geq 0$ ισχύει για κάθε k.

Η H είναι συνεχής (εξ'ορισμού).

Επειδή η (u_k) είναι πυκνή ακολουθία του συμπαγούς U ισχύει $\widetilde{H}(u - r) \geq 0$, $\forall u \in U$ δηλαδή ισοδύναμα $H(r) \leq H(u)$, $\forall u$ και άρα $H(r) \leq \min_u H(u)$.
Εξάλλου $H(r) = \int_U H(u) r(du) \geq \min_u H(u)$.
Συνεπώς $H(r) = \min_{u \in U} H(u)$.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 2Γ.3:</u> (Ικανές Συνθήκες Βελτιστότητας)
Με υποθέσεις τις (A1), (B), (C), (D1) και αν η f γράφεται $f(t,y,u) = f_1(t,y) + f_2(t,u)$ με f_1 ομοιοπαραλληλική, η $g_1(t,y,u) = g_{1_1}(t,y) + g_{1_2}(t,u)$ με g_{1_1} ομοιοπαραλληλική, επίσης η ϕ_1 ομοιοπαραλληλική, οι ϕ_0, ϕ_2 κυρτές και ακόμα $g_0(t,y,u) = g_{0_1}(t,y) + g_{0_2}(t,u)$ με g_{0_1} κυρτή, όπως και $g_2(t,y,u) = g_{2_1}(t,y) + g_{2_2}(t,u)$ με g_{2_1} κυρτή, τότε αν ο έλεγχος $r \in R_\alpha$ ικανοποιεί τις συνθήκες Kuhn-Tucker-Lagrange, με $\lambda_0 > 0$, είναι βέλτιστος.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 2Γ.1:</u> (έλεγχος K-T-L)
Ένας έλεγχος $r \in R_\alpha$ που ικανοποιεί τις συνθήκες Kuhn-Tucker-Lagrange του Θεωρήματος 2Γ.2 λέγεται έλεγχος Kuhn-Tucker-Lagrange (K-T-L) (extremal control, βλ. Warga)

Κεφάλαιο ΙΙΙ

ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΚΛΑΣΙΚΟ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα διατυπώσουμε το διακριτό πρόβλημα κλασικού βέλτιστου ελέγχου, καθώς και το διακριτό πρόβλημα γενικευμένου ελέγχου. Θα δοθούν θεωρήματα ύπαρξης βέλτιστου ελέγχου τόσο κλασικού όσο και γενικευμένου καθώς και οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες βελτιστότητας.

1Α. Το Διακριτό Πρόβλημα Κλασικού Βέλτιστου Ελέγχου

Έστω $I=[0,T]$, με $T<+\infty$, ένα διάστημα d, d' ακέραιοι και U ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^{d'}$.

Έχουμε τη διακριτή εξίσωση κατάστασης διαφορών (πεπλεγμένη μέθοδος του μέσου)

$$(1)\ \ y_{j+1}=y_j+h\cdot f(\frac{t_j+t_{j+1}}{2},\frac{y_j+y_{j+1}}{2},w_j)\,,\ \ j=0,1,...,N-1$$

όπου $N=N^n$, και n ο αντίστοιχος δείκτης διακριτοποίησης.
$y_0=\delta o\theta \acute{\varepsilon} \nu$

Τα εκάστοτε $t_j\in I$, $j=0,1,...,N$ προκύπτουν από τη διαμέριση του I στα N υποδιαστήματα $I_j=[t_j,t_{j+1})$ όταν $j=0,1,...,N-2$ και $I_{N-1}=[t_{N-1},t_N]$.

Το εκάστοτε $w_j^n\in U$ είναι η τιμή της συνάρτησης ελέγχου στο διάστημα I_j, $j=0,1,...,N-1$.
Ορίζουμε την πεπερασμένη ακολουθία $w^n=\{w_j^n, j=0,1,...,N-1\}$ για την εκάστοτε διακριτοποίηση n και το σύνολο $W^n=\{w^n / w_j^n\in U\}$.

Επίσης $y^n : I \to \mathbb{R}^d$ είναι η διακριτή συνάρτηση κατάστασης του συστήματος με διακριτές τιμές y_j^n για την αντίστοιχη διαμέριση του I, όπου $j = 0,1,...N$ και έτσι έχουμε τα $y^n = \{y_j^n, j = 0,1,..., N\}$.

Θέτουμε $\overline{t}_j^n = \dfrac{t_j^n + t_{j+1}^n}{2}$ και $\overline{y}_j^n = \dfrac{y_j^n + y_{j+1}^n}{2}$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $\overline{y}^n$ η οποία είναι η κατά διαστήματα σταθερή συνάρτηση $\overline{y}^n(t) = \overline{y}_j^n$ στα διαστήματα I_j για $j = 0,1,...N-1$.

Ορίζουμε την $\overline{w}^n$ ως συνάρτηση ελέγχου που παίρνει τις τιμές $\overline{w}_j^n$ στα διαστήματα I_j με $j = 0,1,..., N-1$, όπως αυτά έχουν ορισθεί παραπάνω.
Ορίζουμε τη συνάρτηση $\hat{y}^n$ η οποία είναι η συνεχής συνάρτηση, κατά τμήματα γραμμική, που παίρνει τις τιμές y_j^n στα t_j^n.

Ορίζουμε το σύνολο των κλασικών κατά τμήματα σταθερών ελέγχων (διακριτοί έλεγχοι) με

$$\overline{W}^n = \{\overline{w}^n \in W^n \mid \overline{w}^n(t) = \overline{w}_j^n \in U \quad \sigma\tau o \quad I_j^n, \quad j = 0,..., N-1\}$$

Για κάθε έλεγχο $\overline{w}^n$ η κατάσταση του συστήματος είναι η λύση $\overline{y}^n$ της παραπάνω διακριτής εξίσωσης κατάστασης διαφορών (1).

Οι περιορισμοί στον έλεγχο είναι $\overline{w}^n \in \overline{W}^n$
Οι περιορισμοί (δεσμεύσεις) στην κατάσταση και στον έλεγχο, είναι:

$$\begin{cases} G_1^n(\overline{w}^n) = \phi_1(y^n) + h \cdot \sum\limits_{j=0}^{N-1} g_1(\overline{t}_j^n, \overline{y}_j^n, \overline{w}_j^n) = 0, \\ G_2^n(\overline{w}^n) = \phi_2(y^n) + h \cdot \sum\limits_{j=0}^{N-1} g_2(\overline{t}_j^n, \overline{y}_j^n, \overline{w}_j^n) \le 0 \end{cases}$$

και το συναρτησιακό κόστους

$$G_0^n(\overline{w}^n) = \phi_0(y^n) + h \cdot \sum_{j=0}^{N-1} g_0(\overline{t}_j^n, \overline{y}_j^n, \overline{w}_j^n)$$

Ορίζουμε ως σύνολο των αποδεκτών ελέγχων για την εκάστοτε διακριτοποίηση n, το

$$\overline{W}_\alpha^n = \{\overline{w}^n \in \overline{W}^n / G_1(\overline{w}^n) = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad G_2(\overline{w}^n) \le 0\}$$

Το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου εδώ είναι

Να βρεθεί ένας έλεγχος $\overline{w}$ τέτοιος ώστε $\overline{w} \in \overline{W}_\alpha^n \quad \kappa\alpha\iota \quad G_0(\overline{w}) \le G_0(\overline{w}'), \quad \forall \overline{w}' \in \overline{W}_\alpha^n$.

1Β. ΥΠΑΡΞΗ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΚΛΑΣΙΚΟΥ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

Για χάρην απλότητας στα παρακάτω που αφορούν ένα συγκεκριμένο διακριτό πρόβλημα παραλείπουμε το n της εκάστοτε διακριτοποίησης.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 1Β.1:</u>

Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι υποθέσεις (Α1), (Α2) για το U και (Β) για την f και έστω $h<\dfrac{2}{L}$ τότε η διακριτή εξίσωση κατάστασης έχει μία μοναδική λύση y_j, $\forall j$, $\forall n$, $\forall \overline{w}$.

<u>Απόδειξη:</u>
Υποθέτομε επαγωγικά ότι υπάρχει το y_j. Θα δείξουμε ότι υπάρχει τότε το y_{j+1}.
Έχουμε

$$y_{j+1}=y_j+h\cdot f(\bar{t}_j,\frac{y_j+y_{j+1}}{2},w_j):=F(y_{j+1})$$

Θα δείξουμε ότι η F είναι συστολική ως προς y.
Πράγματι, έχουμε

$$\left|F(y_1)-F(y_2)\right|=\left|y_j+h\cdot f(\bar{t}_j,\frac{y_j+y_1}{2},w_j)-y_j-h\cdot f(\bar{t}_j,\frac{y_j+y_2}{2},w_j)\right|=$$

$$=h\cdot\left|f(\bar{t}_j,\frac{y_j+y_1}{2},w_j)-f(\bar{t}_j,\frac{y_j+y_2}{2},w_j)\right|$$

$$\le h\cdot L\cdot\left|\frac{y_j+y_1}{2}-\frac{y_j+y_2}{2}\right|=\frac{1}{2}\cdot h\cdot L\cdot\left|y_1-y_2\right|$$

Επειδή $h<\dfrac{2}{L}$ η F είναι συστολική σε όλο το $\mathbb{R}^d$ και αφού το y_0 είναι δεδομένο, συνεπώς η $y=F(y)$ έχει μοναδική λύση την y_j, $\forall j$ και $\forall n,\forall \overline{w}$.

Στη συνέχεια θα υποθέτουμε πάντα ότι $h<\dfrac{2}{L}$.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 1Β.2:</u> (Διακριτή Ανισότητα Bellman-Gronwall)

Έστω $y_j,z_j,\ j=0,1,...N,\ \phi_j,\ j=0,1,...N-1,$ με $y_j\ge 0$, $\phi_j\ge 0$, $z_j\ge 0$ και $z_j\le z_{j+1},\ j=0,1,...N-1$.

Αν ισχύει $y_j\le z_j+\sum\limits_{k=0}^{j-1}\phi_k\cdot y_k$, με $y_0\le z_0$ και $j=0,1,...,N$

τότε $y_j\le z_j\cdot e^{\psi_j}$, $j=0,1,...,N$, όπου $\psi_j=\sum\limits_{k=0}^{j-1}\phi_k$, $j=0,1,...,N$.και $\psi_0=0$

<u>Απόδειξη:</u>

Θέτουμε

1) $y_k = v_k \cdot e^{\psi_k}$ και

2) $v_{\bar{j}} = \max\limits_{0 \le k \le j} v_k, \ \bar{j} = 0,1,\dots, j$

Έχουμε:

$$y_{\bar{j}} \le z_{\bar{j}} + \sum_{k=0}^{j-1} \phi_k \cdot y_k \Rightarrow v_{\bar{j}} \cdot e^{\psi_{\bar{j}}} \le z_{\bar{j}} + \sum_{k=0}^{\bar{j}-1} \phi_k \cdot v_k \cdot e^{\psi_k}$$

Συνεπώς

$$y_{\bar{j}} = v_{\bar{j}} \cdot e^{\psi_{\bar{j}}} \le z_{\bar{j}} + v_{\bar{j}} \cdot \sum_{k=0}^{\bar{j}-1} \phi_k \cdot e^{\psi_k}, \ j = 0,1,\dots, N$$

Όμως $\sum\limits_{k=0}^{\bar{j}-1} \phi_k \cdot e^{\psi_k} = e^{\psi_{\bar{j}}} - 1$ (από ολοκλήρωμα Riemann)

Και έτσι έχουμε

$$v_{\bar{j}} \cdot e^{\psi_{\bar{j}}} \le z_{\bar{j}} + v_{\bar{j}} \cdot (e^{\psi_{\bar{j}}} - 1), \quad j = 1,\dots, N, \ \bar{j} = 0,1,\dots, j$$

Κάνοντας τις πράξεις $v_{\bar{j}} \cdot e^{\psi_{\bar{j}}} \le z_{\bar{j}} + v_{\bar{j}} \cdot e^{\psi_{\bar{j}}} - v_{\bar{j}}$ τελικά παίρνουμε

$$v_{\bar{j}} \le z_{\bar{j}}$$

Συνεπώς

$$y_j = v_j \cdot e^{\psi_j} \le z_j \cdot e^{\psi_j}, \ j = 1,2,\dots, N$$

Δηλαδή τα y_j είναι φραγμένα.

<u>**ΛΗΜΜΑ 1Β.1:**</u> (Συνέχεια)

Θεωρώντας το n σταθερό και αν ισχύουν οι υποθέσεις (Α1), (Α2), (Β) και (C), ισχύουν τα εξής

i) ο τελεστής $\bar{w} \mapsto \bar{y}_w$ είναι συνεχής.

ii) τα $\bar{w} \mapsto G_l^n(\bar{w})$, $l = 0,1,2$ είναι συνεχή.

iii) υπάρχει βέλτιστος διακριτός κλασικός έλεγχος

<u>Απόδειξη:</u>

i) Υποθέτουμε ότι (Ι) $w_{kj} \to w_j \ \forall j$.

Υποθέτουμε επαγωγικά ότι (ΙΙ) $y_{kj} \to y_j$ για σταθερό j.

Θα δείξουμε ότι $y_{k,j+1} \to y_{j+1}$.

Η διακριτή εξίσωση κατάστασης για $y + \Delta y$ και y γίνεται αντιστοίχως

$$y_{j+1} + \Delta y_{j+1} = y_j + \Delta y_j + h \cdot f(\bar{t}_j, \bar{y}_j + \Delta \bar{y}_j, \bar{w}_j + \Delta \bar{w}_j)$$
$$y_{j+1} = y_j + h \cdot f(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{w}_j)$$

και αφαιρώντας κατά μέλη, έχουμε

$$\Delta y_{j+1} = \Delta y_j + h \cdot [f(\bar{t}_j, \bar{y}_j + \Delta \bar{y}_j, \bar{w}_j + \Delta \bar{w}_j) - f(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{w}_j)]$$

δηλαδή

$$\left\|\Delta y_{j+1}\right\| = \left\|\Delta y_j + h\cdot[f(\bar{t}_j, \overline{y}_j + \Delta\overline{y}_j, \overline{w}_j + \Delta\overline{w}_j) - f(\bar{t}_j, \overline{y}_j, \overline{w}_j)]\right\|$$

Η f όμως είναι Lipschitz ως προς (y,u), οπότε

$$\left\|\Delta y_{j+1}\right\| \le \left\|\Delta y_j\right\| + h\cdot L\cdot(\left\|\Delta\overline{y}_j\right\| + \left\|\Delta\overline{w}_j\right\|)$$

Από αυτή τη σχέση και από τις αρχικές υποθέσεις (I) και (II) έχουμε το ζητούμενο.

ii) Αφού $G_l(\overline{w}) = \phi_l(y_N) + h\cdot\sum_{j=0}^{N-1} g_l(\bar{t}_j, \overline{y}_j, \overline{w})$ και τα g_l είναι συνεχή συνεπάγεται ότι και τα G_l είναι συνεχή για $l = 0,1,2$.

iii) από τη συνέχεια των τελεστών και τη συμπάγεια του W^n προκύπτει άμεσα ότι υπάρχει βέλτιστος διακριτός κλασικός έλεγχος.

<u>**ΛΗΜΜΑ 1Β.2:**</u>

Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις (A1), (A2) και (B) και έστω $(y_j^n)_{j=1}^N$ φραγμένα $\forall j, \forall n, \forall \overline{w}^n \in \overline{W}^n$. Τότε τα $(\hat{y}^n)$ και τα $(\overline{y}^n)$ είναι φραγμένα. Δηλ. $\left\|\hat{y}^n\right\|_\infty \le b$ και $\left\|\overline{y}^n\right\|_\infty \le b$.

<u>Απόδειξη:</u>
(Για χάρην απλότητας στα παρακάτω που αφορούν ένα συγκεκριμένο διακριτό πρόβλημα παραλείπουμε το n της εκάστοτε διακριτοποίησης.)

Από την εξίσωση κατάστασης έχουμε

$$y_{j+1} = y_j + h\cdot f(\bar{t}_j, \frac{y_{j+1}+y_j}{2}, \overline{w}_j),\ j = 0,1,\ldots,l-1$$

Αθροίζουμε για $j = 0,1,\ldots,l-1$, οπότε

$$y_l = y_0 + h\cdot\sum_{j=0}^{l-1} f(\bar{t}_j, \frac{y_{j+1}+y_j}{2}, \overline{w}_j)$$

Παίρνουμε νόρμα εκατέρωθεν της ισότητας και έχουμε

$$\left\|y_l\right\| = \left\|y_0 + h\cdot\sum_{j=0}^{l-1} f(\bar{t}_j, \frac{y_{j+1}+y_j}{2}, \overline{w}_j)\right\|$$

Λόγω της υπογραμμικότητας της f η παραπάνω γίνεται:

$$\left\|y_l\right\| \le \left\|y_0\right\| + h\cdot L\cdot\frac{1}{2}\cdot\sum_{j=0}^{l-1}(\left\|y_j\right\| + \left\|y_{j+1}\right\|) + h\cdot d\cdot l \Rightarrow$$

$$\left\|y_l\right\| \le \left\|y_0\right\| + L\cdot\frac{h}{2}\cdot(\sum_{j=0}^{l-1}\left\|y_j\right\| + \sum_{j=0}^{l-1}\left\|y_{j+1}\right\|) + T\cdot d \Rightarrow$$

$$\|y_l\| \le \|y_0\| + L\cdot\frac{h}{2}\cdot\sum_{j=0}^{l-1}\|y_j\| + L\cdot\frac{h}{2}\cdot\sum_{j=1}^{l-1}\|y_j\| + L\cdot\frac{h}{2}\cdot\|y_l\| + T\cdot d \Rightarrow$$

$$(1-\frac{h}{2}\cdot L)\|y_l\| \le \|y_0\| + \frac{h}{2}\cdot L\cdot\|y_0\| + 2\cdot\frac{h}{2}\cdot L\cdot\sum_{j=1}^{l-1}\|y_j\| + T\cdot d \Rightarrow$$

$$(1-\frac{h}{2}\cdot L)\|y_l\| \le (1+\frac{h}{2}\cdot L)\cdot\|y_0\| + T\cdot d + h\cdot L\cdot\sum_{j=1}^{l-1}\|y_j\|.$$

Για h τέτοιο ώστε $h < \frac{2}{L}$, έχουμε:

$$\|y_l\| \le \frac{(1+\frac{h}{2}\cdot L)\cdot\|y_0\| + T\cdot d}{(1-\frac{h}{2}\cdot L)} + \frac{h\cdot L}{(1-\frac{h}{2}\cdot L)}\sum_{j=1}^{l-1}\|y_j\|,\ \forall l\text{, όπου } l = 1,2,...,N$$

Έτσι από τη Διακριτή Ανισότητα Bellman-Gronwall έχουμε:

$$\|y_l\| \le b \Rightarrow \max_l \|y_l\| \le b, \forall n, \forall \overline{w} \in \overline{W}^n .$$

Όμως η $\hat{y}^n$ (δηλ. η πολυγωνική συνάρτηση) σε κάθε υποδιάστημα (δηλ. για το κάθε $\hat{y}_j^n$) είναι κυρτός συνδιασμός των y_l^n και y_{l+1}^n, άρα τα $\hat{y}_j^n$ είναι φραγμένα και αυτά, συνεπώς $\left\|\hat{y}^n\right\|_\infty \le b$. Ομοίως, τα παραπάνω ισχύουν και για την $\overline{y}$ (αφού τα $\overline{y}_j$ είναι κατά τμήματα σταθερές συναρτήσεις στα διαστήματα I_j, $j = 0,1,...,N-1$ και μάλιστα είναι οι μέσοι όροι των y_j^n και y_{j+1}^n). Έτσι παίρνουμε $\left\|\overline{y}^n\right\|_\infty \le b$.

Συνεπώς οι $(\hat{y}^n)$ και οι $(\overline{y}^n)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες, ανεξάρτητα από τους ελέγχους.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1Β.1:

Από το Λήμμα 1Β.1 και επειδή η f είναι Lipschitz ισχύει το εξής

$$\left|y_{j+1}^n - y_j^n\right| = h\cdot\left|f(\overline{t}_j^n, \overline{y}_j^n, \overline{w}_j^n)\right| \le h\cdot C$$

Επίσης, από τον ορισμό των $\hat{y}^n$, $\overline{y}^n$ έχουμε $\left|\hat{y}^n(t) - \overline{y}^n(t)\right| \le \frac{1}{2}\cdot h\cdot C, \forall t, n, \overline{w}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1Β.2:

Από την διακριτή εξίσωση κατάστασης έχουμε

$\hat{y}'^n(t) = f(\overline{t}^n, \overline{y}^n, \overline{w}^n)$ και ολοκληρώνοντας στο $[t, t']$ παίρνουμε

$$\left|\hat{y}^n(t') - \hat{y}^n(t)\right| \le \int_t^{t'} \left| f(\overline{t}^n, \overline{y}^n, \overline{w}^n) \right| ds \le C \cdot (t'-t) \text{ όπου το } C \text{ είναι ανεξάρτητο του } n$$

Συνεπώς οι $\hat{y}^n$ είναι Lipschitz ισοσυνεχείς.

<u>ΛΗΜΜΑ 1Β.3:</u> (Συμβατότητα των $\hat{y}, \overline{y}$)

Με δεδομένες τις υποθέσεις (Α1), (Α2) και (Β), αν $\overline{w}^n \xrightarrow{L^\infty, L^2} w$ τότε $\hat{y}^n, \overline{y}^n \xrightarrow{L^\infty} y_w \equiv y$, όπου y είναι μοναδική.

<u>Απόδειξη:</u>

Από την διακριτή εξίσωση κατάστασης όπως έχει διαμορφωθεί στην Παρατήρηση 1Β.2 παίρνουμε $\hat{y}'^n(t) = f(\overline{t}^n, \overline{y}^n, \overline{w}^n)$.

Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\hat{y}^n(t) = y_0 + \int_0^t f(\overline{t}^n(s), \overline{y}^n(s), \overline{w}^n(s)) ds .$$

Όμως $\overline{t}^n(s) \xrightarrow{L^\infty} t$, προφανώς.

Επίσης, από το Λήμμα 1Β.2 και την Παρατήρηση 1Β.2, τα $\hat{y}^n$ είναι φραγμένα και Lipschitz ισοσυνεχή. Έτσι από το Θεώρημα Ascoli υπάρχει υπακολουθία $(\hat{y}^n)$ που συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποιο y δηλ. $\hat{y}^n \xrightarrow{L^\infty} y$.

Ομοίως, από Παρατήρηση 1Β.1 και Θεώρημα Ascoli έχουμε $\overline{y}^n \xrightarrow{L^\infty} y$.

Από το Λήμμα 2Β.2 (Κεφ.ΙΙ) παίρνουμε όριο στο ολοκλήρωμα ($n \to +\infty$) και έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} y^n(t) = y_0 + \lim_{n\to+\infty} \int_0^t f(\overline{t}^n(s), \overline{y}^n(s), \overline{w}^n(s)) ds$$

Άρα

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y, w) ds$$

Συνεπώς

$$y \equiv y_w .$$

Από τη μοναδικότητα του ορίου y_w συκλίνει ολόκληρη η ακολουθία.

Λόγω, λοιπόν, της μοναδικότητας του ορίου έχουμε συνεπώς $\hat{y}^n \to y_w$ και $\overline{y}^n \to y_w$.

<u>ΠΟΡΙΣΜΑ 1Β.1 (ΛΗΜΜΑΤΟΣ 1Β.3):</u> (Συμβατότητα των G_l)

Με δεδομένες τις υποθέσεις (Α1), (Α2), (Β) και (C), αν $\overline{w}^n \xrightarrow{L^\infty, L^2} w$ τότε $G_l^n(\overline{w}^n) \to G_l(w)$ για $l = 0,1,2$ όπου τα G_l^n είναι τα διακριτά και G_l τα συνεχή. Δηλαδή οι διακριτοί περιορισμοί καθώς και το κόστος συγκλίνουν στα συνεχή.

Απόδειξη:

Γνωρίζουμε ότι

$$G_1(\overline{w}^n) = \phi_1(y^n) + h \cdot \sum_{j=0}^{N-1} g_1(\overline{t}_j^n, \overline{y}_j^n, \overline{w}_j^n) = \phi_1(y^n) + \int_I g_1(\overline{t}^n, \overline{y}^n, \overline{w}^n)$$

$$G_2(\overline{w}^n) = \phi_2(y^n) + h \cdot \sum_{j=0}^{N-1} g_2(\overline{t}_j^n, \overline{y}_j^n, \overline{w}_j^n) = \phi_2(y^n) + \int_I g_2(\overline{t}^n, \overline{y}^n, \overline{w}^n) \text{ και}$$

$$G_0(\overline{w}^n) = \phi_0(y^n) + h \cdot \sum_{j=0}^{N-1} g_0(\overline{t}_j^n, \overline{y}_j^n, \overline{w}_j^n) = \phi_0(y^n) + \int_I g_0(\overline{t}^n, \overline{y}^n, \overline{w}^n)$$

Οι $\phi_0, \phi_1, \phi_2, g_0, g_1, g_2$ είναι συνεχείς ως προς (t, y, u).

Παίρνοντας όρια στα $G_l(\overline{w}^n), l = 0,1,2$ από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης Lebesgue έχουμε

$$\lim_{n \to +\infty} G_1(\overline{w}^n) = \varphi_1(y(T)) + \int_I g_1(t, y(t), w(t))dt = G_1(w)$$

$$\lim_{n \to +\infty} G_2(\overline{w}^n) = \varphi_2(y(T)) + \int_I g_2(t, y(t), w(t))dt = G_2(w)$$

και

$$\lim_{n \to +\infty} G_0(\overline{w}^n) = \varphi_0(y(T)) + \int_I g_0(t, y(t), w(t))dt = G_0(w)$$

1Γ. ΑΝΑΓΚΑΙΕΣ/ΙΚΑΝΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΚΛΑΣΙΚΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΕΛΕΓΧΟ

Προκειμένου να αποδείξουμε μία αρχή ελαχίστου για το πρόβλημά μας, θα χρειαστεί πρώτα να υπολογίσουμε την παράγωγο Fréchet του συναρτησιακού κόστους.

ΛΗΜΜΑ 1Γ.1:

(Για χάρην απλότητας συμβολισμού στα παρακάτω που αφορούν ένα συγκεκριμένο διακριτό πρόβλημα παραλείπουμε το n της εκάστοτε διακριτοποίησης.)

Με δεδομένες τις υποθέσεις (A1), (A2), (B) του προβλήματός μας αν οι καταστάσεις y και $y + \Delta y$ αντιστοιχούν στους ελέγχους $\overline{w}$ και $\overline{w} + \Delta\overline{w}$ και η f είναι Lipschitz ως προς (y, u), τότε

$$\max_l \|\Delta y_l\| \le c \cdot \left\|\Delta\overline{w}\right\|_\infty$$

και

$$\|\hat{y}\|_\infty \le c \cdot \left\|\Delta\overline{w}\right\|_\infty, \left\|\overline{y}\right\|_\infty \le c \cdot \left\|\Delta\overline{w}\right\|_\infty$$

Απόδειξη:

Η διακριτή εξίσωση κατάστασης για $y+\Delta y$ και y γίνεται αντιστοίχως

$$y_{j+1}+\Delta y_{j+1}=y_j+\Delta y_j+h\cdot f(\bar{t}_j,\bar{y}_j+\Delta\bar{y}_j,\bar{w}_j+\Delta\bar{w}_j)$$
$$y_{j+1}=y_j+h\cdot f(\bar{t}_j,\bar{y}_j,\bar{w}_j)$$

και αφαιρώντας κατά μέλη, έχουμε

$$\Delta y_{j+1}=\Delta y_j+h\cdot[f(\bar{t}_j,\bar{y}_j+\Delta\bar{y}_j,\bar{w}_j+\Delta\bar{w}_j)-f(\bar{t}_j,\bar{y}_j,\bar{w}_j)]$$

Η f όμως είναι Lipschitz ως προς (y,u) οπότε

$$\|\Delta y_{j+1}\|\le\|\Delta y_j\|+h\cdot L\cdot(\|\Delta\bar{y}_j\|+\|\Delta\bar{w}_j\|)$$

Αθροίζω για $j=0,1,\ldots l-1$ και έχω

$$\|\Delta y_l\|\le\|\Delta y_0\|+h\cdot L\cdot\sum_{j=0}^{l-1}\|\Delta\bar{y}_j\|+h\cdot L\cdot\sum_{j=0}^{l-1}\|\Delta\bar{w}_j\|.$$

Όμως $\|\Delta y_0\|=0$, οπότε

$$\|\Delta y_l\|\le\|\Delta y_0\|+h\cdot L\cdot\sum_{j=0}^{l-1}\left\|\frac{\Delta y_{j+1}+\Delta y_j}{2}\right\|+h\cdot L\cdot\sum_{j=0}^{l-1}\|\Delta\bar{w}_j\|\Rightarrow$$

$$\|\Delta y_l\|\le\frac{h\cdot L}{2}\cdot(\sum_{j=0}^{l-1}\|\Delta y_{j+1}\|+\sum_{j=0}^{l-1}\|\Delta y_j\|)+h\cdot L\cdot\sum_{j=0}^{l-1}\|\Delta\bar{w}_j\|\Rightarrow$$

$$\|\Delta y_l\|\le\frac{h\cdot L}{2}\cdot(\sum_{j=1}^{l}\|\Delta y_j\|+\sum_{j=0}^{l-1}\|\Delta y_j\|)+h\cdot L\cdot\sum_{j=0}^{l-1}\|\Delta\bar{w}_j\|\Rightarrow$$

$$\|\Delta y_l\|\le\frac{h\cdot L}{2}\cdot(\sum_{j=1}^{l-1}\|\Delta y_j\|+\|\Delta y_l\|+\|\Delta y_0\|+\sum_{j=1}^{l-1}\|\Delta y_j\|)+h\cdot L\cdot\sum_{j=0}^{l-1}\|\Delta\bar{w}_j\|\Rightarrow$$

$$(1-\frac{h\cdot L}{2})\cdot\|\Delta y_l\|\le h\cdot L\cdot\sum_{j=0}^{l-1}\|\Delta\bar{w}_j\|+h\cdot L\cdot\sum_{j=1}^{l-1}\|\Delta y_j\|\Rightarrow$$

$$\|\Delta y_l\|\le\frac{2\cdot h\cdot L}{2-h\cdot L}\cdot\sum_{j=0}^{l-1}\|\Delta\bar{w}_j\|+\frac{2\cdot h\cdot L}{2-h\cdot L}\cdot\sum_{j=1}^{l-1}\|\Delta y_j\|$$

Στην παραπάνω εφαρμόζοντας την συνεχή ανισότητα Bellman-Grownwall, όπου $z_l:=\frac{2\cdot h\cdot L}{2-h\cdot L}\cdot\sum_{j=0}^{l-1}\|\Delta\bar{w}_j\|$ και $\phi_l:=\frac{h\cdot L}{2-h\cdot L}$ έχουμε

$$\|\Delta y_l\|\le c\cdot\|\Delta\bar{w}\|_\infty\Rightarrow\max_l\|\Delta y_l\|\le c\cdot\|\Delta\bar{w}\|_\infty$$

Από τον ορισμό των $\hat{y}$ και $\bar{y}$ έχουμε

$$\|\hat{y}\|_\infty\le c\cdot\|\Delta\bar{w}\|_\infty.\text{και }\|\bar{y}\|_\infty\le c\cdot\|\Delta\bar{w}\|_\infty$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1Γ.1:

Παραλείποντας το δείκτη $l = 0,1,2$ στα G_l, ϕ_l και g_l και θεωρώντας τις υποθέσεις (A1), (A2) (B), (C), (D1), (D2), καθώς και τα συμπεράσματα του παραπάνω Λήμματος ορίζουμε την Χαμιλτονιανή

$$H(t, y, z, u) = z \cdot f(t, y, u) + g(t, y, u)$$

και τη λύση $z = z_u$ (διάνυσμα γραμμή) της συζυγούς διακριτής εξίσωσης

$$z_j - z_{j+1} = h \cdot [\bar{z}_j \cdot f_y(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{w}_j) + g_y(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{w}_j)], \qquad \text{όπου} \qquad j = N-1,\ldots,1,0,$$

$$z_N = \phi_y(y_N) = [\nabla\phi(y_N)]^T.$$

Τότε η παράγωγος Fréchet στο $\bar{w}^n \in \bar{W}^n$ της G (δηλ. της κάθε μιας από τις G_l, $l = 0,1,2$) είναι

$$G'(\bar{w})\Delta\bar{w} = h \cdot \sum_{j=0}^{N-1} H_u(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{z}_j, \bar{w}_j)\Delta\bar{w}_j + o(\|\Delta\bar{w}\|).$$

Επίσης, ο τελεστής $w \mapsto z_w$ και η παράγωγος $(\bar{w}, \Delta\bar{w}) \mapsto G'(\bar{w})\Delta\bar{w}$ είναι συνεχείς.

<u>Απόδειξη:</u>

$$\text{(A)}\ \ \Delta G = G(\bar{w} + \Delta\bar{w}) - G(\bar{w}) =$$

$$= \phi(y_N + \Delta y_N) - \phi(y_N) + h \cdot \sum_{j=0}^{N-1} [g(\bar{t}_j, \bar{y}_j + \Delta\bar{y}_j, \bar{w}_j + \Delta\bar{w}_j) - g(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{w}_j)]$$

Από παράγωγο Frechet και με δεδομένο ότι $\|\Delta y_N\| = O(\|\Delta\bar{w}\|_\infty)$ από το <u>Λήμμα 3Α.1</u>, που μας δίνει ότι $o(\|\Delta y_N\|_\infty) = o(\|\Delta\bar{w}\|_\infty)$, παίρνουμε

$$\text{(B)}\ \ \phi(y_N + \Delta y_N) - \phi(y_N) = \phi_y(y_N)\Delta y_N + o(\|\Delta\bar{w}\|_\infty)$$

Έτσι από την (A) με τη βοήθεια της (B) παίρνουμε

$$\Delta G = \phi_y(y_N)\Delta y_N + o(\|\Delta\bar{w}\|_\infty) +$$

$$+ h \cdot \sum_{j=0}^{N-1} [g(\bar{t}_j, \bar{y}_j + \Delta\bar{y}_j, \bar{w}_j + \Delta\bar{w}_j) - g(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{w}_j + \Delta\bar{w}_j)]$$

$$+ h \cdot \sum_{j=0}^{N-1} [g(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{w}_j + \Delta\bar{w}_j) - g(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{w}_j)]$$

δηλ.

$$\text{(Γ)}\ \ \Delta G = \phi_y(y_N)\Delta y_N + h \cdot \sum_{j=0}^{N-1} g_y(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{w}_j)\Delta\bar{y}_j +$$

$$+ h \cdot \sum_{j=0}^{N-1} g_u(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{w}_j)\Delta\bar{w}_j + o(\|\Delta\bar{w}\|) \cdot h$$

Παίρνοντας την διακριτή εξίσωση κατάστασης για $y + \Delta y$ και y έχουμε:

$$y_{j+1} + \Delta y_{j+1} = y_j + \Delta y_j + h \cdot f(\bar{t}_j, \bar{y}_j + \Delta\bar{y}_j, \bar{w}_j + \Delta\bar{w}_j) \ \ \text{και}$$

$$y_{j+1} = y_j + h \cdot f(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{w}_j)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε (ομοίως με την g)

$$\Delta y_{j+1} = \Delta y_j + h\cdot[f(\bar{t}_j,\bar{y}_j+\Delta\bar{y}_j,\bar{w}_j+\Delta\bar{w}_j) - f(\bar{t}_j,\bar{y}_j,\bar{w}_j)] \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\Delta y_{j+1} - \Delta y_j &= h\cdot[f(\bar{t}_j,\bar{y}_j+\Delta\bar{y}_j,\bar{w}_j+\Delta\bar{w}_j) - f(\bar{t}_j,\bar{y}_j,\bar{w}_j+\Delta\bar{w}_j)] \\ &\quad + h\cdot[f(\bar{t}_j,\bar{y}_j+\Delta\bar{y}_j,\bar{w}_j+\Delta\bar{w}_j) - f(\bar{t}_j,\bar{y}_j,\bar{w}_j)] \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\Delta y_{j+1} - \Delta y_j = h\cdot f_y(\bar{t}_j,\bar{y}_j,\bar{w}_j)\Delta\bar{y}_j - h\cdot f_u(\bar{t}_j,\bar{y}_j,\bar{w}_j)\Delta\bar{w}_j + o(\|\Delta\bar{w}\|)\cdot h$$

Πολλαπλασιάζουμε την παραπάνω από αριστερά με $\bar{z}_j$ και παίρνουμε

$$\begin{aligned}&(\Delta)\ \bar{z}_j\cdot(\Delta y_{j+1} - \Delta y_j) \\ &\quad = h\cdot\bar{z}_j\cdot f_y(\bar{t}_j,\bar{y}_j,\bar{w}_j)\Delta\bar{y}_j + h\cdot\bar{z}_j\cdot f_u(\bar{t}_j,\bar{y}_j,\bar{w}_j)\Delta u_j + \bar{z}_j\cdot o(\|\Delta\bar{w}\|)\cdot h\end{aligned}$$

Παίρνουμε τη συζυγή διακριτή εξίσωση και πολλαπλασιάζουμε από δεξιά με $\Delta\bar{y}_j$

$$\begin{aligned}&(\mathrm{E})\ (z_{j+1} - z_j)\cdot\Delta\bar{y}_j \\ &\quad = -h\cdot\bar{z}_j\cdot f_y(\bar{t}_j,\bar{y}_j,u_j)\cdot\Delta\bar{y}_j - h\cdot g_y(\bar{t}_j,\bar{y}_j,u_j)\cdot\Delta\bar{y}_j\end{aligned}$$

Προσθέτουμε τις (Δ) και (Ε) και αθροίζοντας για $j = 0,1,\ldots,N-1$ έχουμε:

$$\begin{aligned}&(\mathrm{Z})\ \sum_{j=0}^{N-1}\bar{z}_j\cdot(\Delta y_{j+1} - \Delta y_j) + \sum_{j=0}^{N-1}(z_{j+1} - z_j)\cdot\Delta\bar{y}_j \\ &\quad = h\cdot\sum_{j=0}^{N-1}\bar{z}_j\cdot f_u(\bar{t}_j,\bar{y}_j,\bar{w}_j)\Delta\bar{w}_j - h\cdot\sum_{j=0}^{N-1}g_y(\bar{t}_j,\bar{y}_j,\bar{w}_j)\cdot\Delta\bar{y}_j + o(\|\Delta\bar{w}\|_\infty)\end{aligned}$$

Γνωρίζω ότι $\Delta y_0 = 0$ και έτσι

$$(\mathrm{H})\ z_N\Delta y_N - z_0\Delta y_0 = z_N\Delta y_N = \phi_y(y_N)\Delta y_N$$

Όμως $\sum_{j=0}^{N-1}\bar{z}_j\cdot(\Delta y_{j+1} - \Delta y_j) + \sum_{j=0}^{N-1}(z_{j+1} - z_j)\cdot\Delta\bar{y}_j = z_N\Delta y_N - z_0\Delta y_0$

Οπότε από την (Ζ) με την βοήθεια της (Η) παίρνουμε

$$\begin{aligned}(\Theta)\ \phi_y(y_N)\Delta y_N &= h\cdot\sum_{j=0}^{N-1}\bar{z}_j\cdot f_u(\bar{t}_j,\bar{y}_j,\bar{w}_j)\Delta\bar{w}_j \\ &\quad - h\cdot\sum_{j=0}^{N-1}g_y(\bar{t}_j,\bar{y}_j,\bar{w}_j)\cdot\Delta\bar{y}_j + o(\|\Delta\bar{w}\|_\infty)\end{aligned}$$

Συνεπώς από την (Γ) με την βοήθεια της (Θ) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\Delta G &= h\cdot\sum_{j=0}^{N-1}\bar{z}_j\cdot f_u(\bar{t}_j,\bar{y}_j,\bar{w}_j)\Delta\bar{w}_j - h\cdot\sum_{j=0}^{N-1}g_y(\bar{t}_j,\bar{y}_j,\bar{w}_j)\cdot\Delta\bar{y}_j \\ &\quad + h\cdot\sum_{j=0}^{N-1}g_y(\bar{t}_j,\bar{y}_j,\bar{w}_j)\Delta\bar{y}_j + h\cdot\sum_{j=0}^{N-1}g_u(\bar{t}_j,\bar{y}_j,\bar{w}_j)\Delta\bar{w}_j + o(\|\Delta\bar{w}\|_\infty) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\Delta G = h \cdot \sum_{j=0}^{N-1} [\overline{z}_j \cdot f_u(\overline{t}_j, \overline{y}_j, \overline{w}_j) + g_u(\overline{t}_j, \overline{y}_j, \overline{w}_j)] \cdot \Delta \overline{w}_j + o(\left\|\Delta \overline{w}\right\|_\infty) \Rightarrow$$

Όμως $\Delta G = G'(\overline{w})\Delta \overline{w}$ οπότε

$$G'(\overline{w})\Delta \overline{w} = h \cdot \sum_{j=0}^{N-1} [\overline{z}_j \cdot f_u(\overline{t}_j, \overline{y}_j, \overline{w}_j) + g_u(\overline{t}_j, \overline{y}_j, \overline{w}_j)] \cdot \Delta \overline{w}_j + o(\left\|\Delta \overline{w}\right\|_\infty)$$

Δηλαδή τελικά

$$G'(\overline{w})\Delta \overline{w} = h \cdot \sum_{j=0}^{N-1} H_u(\overline{t}_j, \overline{y}_j, \overline{z}_j, \overline{w}_j)\Delta \overline{w}_j + o(\left\|\Delta \overline{w}\right\|_\infty)$$

Σχετικά με την συνέχεια του τελεστή $w \mapsto z_w$ η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή του τελεστή $\overline{w} \mapsto \overline{y}_w$ στο Λήμμα 1Β.1, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1Β.1.

Σχετικά με την συνέχεια του τελεστή $(\overline{w}, \Delta \overline{w}) \mapsto G'(\overline{w})\Delta \overline{w}$ έχουμε ότι

$$G_l'(\overline{w}^n) = \sum_{j=0}^{N-1} H_u(\overline{t}_j, \overline{y}_j, \overline{z}_j, \overline{w}_j)\Delta \overline{w}_j$$

Όμως $H_u(\overline{t}_j, \overline{y}_j, \overline{z}_j, \overline{w}_j) = \overline{z}_j \cdot f_u(\overline{t}_j, \overline{y}_j, \overline{w}_j) + g_u(\overline{t}_j, \overline{y}_j, \overline{w}_j)$ όπου τα f_u και g_u είναι συνεχή.

Άρα ο τελεστής είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1Γ.2: (Αναγκαίες Συνθήκες Βελτιστότητας)

Με τις υποθέσεις (A1), (A2), (B), (C), (D1) και (D2) αν το $\overline{w}^n \in \overline{W}_\alpha^n$ είναι βέλτιστο τότε το $\overline{w}^n$ ικανοποιεί τις συνθήκες Kuhn-Tucker-Lagrange.

Δηλαδή, υπάρχουν πολλαπλασιαστές $\lambda_l \in \mathbb{R}$, $l = 0,1,2$ με $\lambda_l \geq 0$, για $l = 0,2$ και $\sum_{l=0}^{2} |\lambda_l| = 1$ τέτοιοι ώστε

$$\text{(I)} \quad \lambda_0^n \cdot G_0'^n(\overline{w}^n)(\overline{v}^n - \overline{w}^n) + \lambda_1^n \cdot G_1'^n(\overline{w}^n)(\overline{v}^n - \overline{w}^n) + \lambda_2^n \cdot G_2'^n(\overline{w}^n)(\overline{v}^n - \overline{w}^n) \geq 0, \quad \forall \overline{v}^n \in \overline{W}^n$$

και

$$\text{(II)} \quad \lambda_2^n \cdot G_2^n(\overline{w}^n) = 0 \ \text{(συνθήκη εγκαρσιότητας)}$$

Η σχέση (1) γράφεται

$$\text{(III)} \quad \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{2} (\overline{z}_j^n \cdot \overline{f}_u + \overline{g}_u)(\overline{v}_j^n - \overline{w}_j^n) \geq 0, \quad \forall \overline{v}_j^n \in \overline{W}^n, \ j = 0,1,\dots,N-1$$

Η (III) είναι ισοδύναμη με την Διακριτή Ασθενή Σημειακή Αρχή του Ελαχίστου, δηλ. από τη σχέση

$$\text{(IV)} \quad \sum_{l=0}^{2} (\overline{z}_j^n \cdot \overline{f}_u + \overline{g}_u)(\overline{v}_j^n - \overline{w}_j^n) \geq 0, \quad \forall j$$

Απόδειξη:

Η (I) και η (II) προκύπτουν άμεσα από το Γενικευμένο Θεώρημα Kuhn-Tucker-Lagrange.

Έστω ότι ισχύει η (IV), τότε αθροίζοντας προφανώς ισχύει και η (III).

Έστω ότι ισχύει η (III), τότε θέτοντας:

$$\bar{v}_j = \begin{cases} \bar{w}_j, \ \gamma\iota\alpha \ j \neq i \\ \bar{v}_i, \ \gamma\iota\alpha \ j = i \ \mu\varepsilon \ \bar{v}_i \in U \ \tau\upsilon\chi\acute{o}\nu \end{cases}$$

έπεται η (IV).

ΘΕΩΡΗΜΑ 1Γ.3: (Ικανές Συνθήκες Βελτιστότητας)
Με τις υποθέσεις (A1),(A2), (B), (C), (D1) και (D2) αν η f είναι ομοιοπαραλληλική ως προς (y,u), αν οι ϕ_1, g_1 και αυτές ομοιοπαραλληλικές για κάθε $t \in I$ και αν οι g_0, g_2, ϕ_0 και φ_2 είναι κυρτές για κάθε $t \in I$, αν ο έλεγχος $\bar{w}^n \in \overline{W}_\alpha^n$ ικανοποιεί τις συνθήκες Kuhn-Tucker-Lagrange (K-T-L) με $\lambda_0 > 0$ τότε είναι βέλτιστος.
Απόδειξη:

Προκύπτει άμεσα από το Γενικό Θεώρημα Ικανών Συνθηκών K-T-L (βλ. Παράρτημα).

ΟΡΙΣΜΟΣ 1Γ.1:
Ένας έλεγχος $\bar{w}^n \in \overline{W}_\alpha^n$ που ικανοποιεί τις συνθήκες Kuhn-Tucker-Lagrange, δηλαδή υπάρχουν πολλαπλασιαστές $\lambda_l \in \mathbb{R}$, $l = 0,1,2$ με $\lambda_l \geq 0$, για $l = 0,2$ και $\sum_{l=0}^{2} |\lambda_l| = 1$ τέτοιοι ώστε

$$(1) \quad \lambda_0^n \cdot G_0'^n(\bar{w}^n)(\bar{v}^n - \bar{w}^n) + \lambda_1^n \cdot G_1'^n(\bar{w}^n)(\bar{v}^n - \bar{w}^n) + \lambda_2^n \cdot G_2'^n(\bar{w}^n)(\bar{v}^n - \bar{w}^n) \geq 0, \quad \forall \bar{v}^n \in \overline{W}^n$$

και

$$(2) \quad \lambda_2^n \cdot G_2^n(\bar{w}^n) = 0 \ \text{(συνθήκη εγκαρσιότητας)}$$

λέγεται **έλεγχος Kuhn-Tucker-Lagrange** (K-T-L)

ΛΗΜΜΑ 1Γ.2: (Συμβατότητα των Συζυγών Καταστάσεων και των Παραγώγων)
Με τις υποθέσεις (A1), (A2), (B), (C), (D1) και (D2) αν $\bar{w}^n \xrightarrow{L^\infty, L^2} w$ τότε $\bar{z}^n_{\bar{w}^n} \to z_w$.

Επίσης, αν $\begin{cases} \bar{v}^n \xrightarrow{L^2} v \\ \bar{w}^n \longrightarrow w \end{cases}$ τότε $G'^n(\bar{w}^n)(\bar{v}^n - \bar{w}^n) \to G'(w)(v - w)$.

Απόδειξη:
Σχόλιο: Αποδεικνύεται εδώ ότι τα $(\bar{z}^n)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένα και ισοσυνεχή.
Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του Λήμματος 1Β.3, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1Β.3.

ΛΗΜΜΑ 1Γ.3: (Προσέγγιση των Συνεχών Ελέγχων με Διακριτούς)
(Υποθέτουμε ότι δεν έχουμε περιορισμούς στην κατάσταση, δηλ. $G_1 = 0$ και $G_2 \leq 0$)

Με δεδομένες τις υποθέσεις (A1), (A2), (B), (C), (D1) και (D2) έστω τυχόν $v \in W$ τότε υπάρχει ακολουθία ($\overline{v}^n \in \overline{W}^n$) τέτοια ώστε $\overline{v}^n \xrightarrow{L^2} v$.

Απόδειξη:

Έστω $v \in W \subset L^\infty$.

Υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $(\tilde{v}^m)$ που συγκλίνει στο v / L^2, δηλ. $\tilde{v}^m \xrightarrow{L^2} v$

Και άρα (A) $P_W \tilde{v}^m \xrightarrow{L^2} v$

Εξάλλου, για κάθε $(\tilde{v}^m)$ υπάρχει μία ακολουθία διακριτών ελέγχων $(\overline{v}^{mn}) \in W^n$ που συγκλίνει στο $P_W \tilde{v}^m / L^\infty$, δηλ. $\overline{v}^{mn} \xrightarrow{L^\infty} P_W \tilde{v}^m$, όπου $P_W \tilde{v}^m$ συνεχής συνάρτηση.

Όμως

(B) $\left\| \overline{v}^{mn} - p\tilde{v}^m \right\| \leq \dfrac{1}{m}$, για $n \geq N(m)$

και κατά μείζονα λόγο μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $(N(m))$ είναι αύξουσα.

Θέτουμε $\overline{v}^n := \overline{v}^{mn}$, για $N(m) \leq n \leq N(m+1)$

Τότε (Γ) $0 \leq \left\| \overline{v}^n - v \right\|_{L^2} \leq \left\| \overline{v}^n - p\tilde{v}^m \right\|_{L^2} + \left\| p\tilde{v}^m - v \right\|_{L^2}$, $n \to \infty$

Από την (A) έχουμε (Δ) $\left\| p\tilde{v}^m - v \right\|_{L^2} \leq \varepsilon_m \to 0$

Από την (B) έχουμε επίσης (E) $\left\| \overline{v}^n - p\tilde{v}^m \right\|_{L^2} \leq \dfrac{1}{m} \to 0$

Από (Γ), (Δ) και (E) έχουμε $\left\| \overline{v}^n - v \right\|_{L^2} \to 0$.

Δηλαδή, για τυχόν $v \in W$ και $\overline{v}^n \in W^n$ έχουμε $\overline{v}^n \xrightarrow{L^2} v$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1Γ.3:
(Υποθέτουμε ότι δεν έχουμε περιορισμούς στην κατάσταση, δηλ. $G_1 = 0$ και $G_2 \leq 0$)
Με τις υποθέσεις (A1), (A2), (B), (C), (D1) και (D2) αν η ακολουθία $(\overline{w}^n)$ βέλτιστων διακριτών ελέγχων συγκλίνει (L^∞ ή L^2) στο w, δηλ. αν $\overline{w}^n \xrightarrow{L^2 \text{ ή } L^\infty} w$, τότε το w είναι βέλτιστο για το συνεχές πρόβλημα.

Απόδειξη:

Έστω τυχόν $v \in W$ και μία ακολουθία $\overline{v}^n \in \overline{W}^n$ που συγκλίνει σε αυτά (από το Λήμμα 1Γ.3)

Με δεδομένο ότι η $(\overline{w}^n)$ είναι η βέλτιστη διακριτή έχουμε $G_0^n(\overline{w}^n) \le G_0^n(\overline{v}^n)$ και παίρνοντας εκατέρωθεν όρια έχουμε $G_0(w) \le G_0(v)$.
Έτσι αφού το $v \in W$ είναι τυχόν, άρα το w είναι βέλτιστο για το συνεχές.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1Γ.4:

Υποθέτουμε ότι κάθε διακριτό πρόβλημα έχει αποδεκτό έλεγχο. Αν η ακολουθία $(\overline{w}^n)$ αποδεκτών και K-T-L ελέγχων συγκλίνει στο $w / L^\infty, L^2$ τότε το w είναι αποδεκτός και K-T-L έλεγχος για το συνεχές πρόβλημα.
Απόδειξη:
Έστω τα $(\overline{w}^n)$ είναι έλεγχοι K-T-L τότε υπάρχουν πολλαπλασιαστές $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$, με $\lambda_0 \ge 0$, $\lambda_2 \ge 0$, και $\sum_{l=0}^{2} \left|\lambda_l^n\right| = 1$, τέτοιοι ώστε να ισχύουν οι συνθήκες Kuhn-Tucker-Lagrange:

(I) $\lambda_0^n \cdot G_0'^n(\overline{w}^n)(\overline{v}^n - \overline{w}^n) + \lambda_1^n \cdot G_1'^n(\overline{w}^n)(\overline{v}^n - \overline{w}^n) + \lambda_2^n \cdot G_2'^n(\overline{w}^n)(\overline{v}^n - \overline{w}^n) \ge 0, \quad \forall \overline{v}^n \in W^n$

και

(II) $\lambda_2^n \cdot G_2^n(\overline{w}^n) = 0$

Έστω τυχόν $v \in W$ και $(\overline{v}^n) \in \overline{W}^n$ με $\overline{v}^n \xrightarrow{L^2} v$ (από Λήμμα 1Γ.3).
Η ακολουθία $(\lambda_0^n, \lambda_1^n, \lambda_2^n)$ ανήκει στο συμπαγές σύνολο S^3 και υπάρχει υπακολουθία $(\lambda_0^n, \lambda_1^n, \lambda_2^n)_{n \in K \subset \mathrm{N}}$ με $\lambda_l^n \to \lambda_l$, $l = 0,1,2$.

Έτσι για το $\sum_{l=0}^{2} \lambda_l^n \cdot G_l'^n(\overline{w}^n)(\overline{v}^n - \overline{w}^n) \ge 0$ παίρνουμε όριο και έχουμε

(1) $\sum_{l=0}^{2} \lambda_l \cdot G_l'(w)(v - w) \ge 0$

Ομοίως παίρνουμε όριο στην $\lambda_2^n \cdot G_2^n(\overline{w}^n) = 0$ και έχουμε (2) $\lambda_2 \cdot G_2(w) = 0$

Από (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι το w είναι έλεγχος K-T-L για το συνεχές πρόβλημα.

Με τον ίδιο τρόπο όπως παραπάνω από την $G_1^n(\overline{w}^n) = 0$ παίρνοντας όριο έχουμε (3) $G_1(w) = 0$

Και για την $G_2^n(\overline{w}^n) \le 0$ παίρνοντας όριο έχουμε (4) $G_2(w) \le 0$

Άρα το w είναι αποδεκτό και για το συνεχές πρόβλημα.

2Α. Το Διακριτό Πρόβλημα Γενικευμένου Βέλτιστου Ελέγχου

Έστω $I=[0,T]$, με $T<+\infty$, ένα διάστημα, d, d' ακέραιοι και R ένα υποσύνολο του $L_w^\infty(I,M(U))$.

Έχουμε τη διακριτή εξίσωση κατάστασης διαφορών (πεπλεγμένη μέθοδος του μέσου)

$$(1)\ \ y_{j+1}=y_j+h\cdot f(\frac{t_j+t_{j+1}}{2},\frac{y_j+y_{j+1}}{2},r_j),\ \ j=0,1,...,N-1$$

όπου $N=N^n$, n ο αντίστοιχος δείκτης διακριτοποίησης και $y_0=\delta o\theta \acute{\varepsilon} \nu$.

Τα εκάστοτε $t_j\in I$, $j=0,1,...,N$ προκύπτουν από τη διαμέριση του I στα N υποδιαστήματα $I_j=[t_j,t_{j+1})$ όταν $j=0,1,...,N-2$ και $I_{N-1}=[t_{N-1},t_N]$.

Το εκάστοτε $r_j^n\in M_1(U)$ είναι η τιμή της συνάρτησης γενικευμένου ελέγχου στο διάστημα I_j, $j=0,1,...,N-1$.
Ορίζουμε την πεπερασμένη ακολουθία $r^n=\{r_j^n, j=0,1,...,N-1\}$ για την εκάστοτε διακριτοποίηση n και το σύνολο $R^n=\{r^n / r_j^n\in M_1(U)\}$.

Επίσης $y^n: I\to\mathbb{R}^d$ είναι η διακριτή συνάρτηση κατάστασης του συστήματος με διακριτές τιμές y_j^n για την αντίστοιχη διαμέριση του I, όπου $j=0,1,...N$ και έτσι έχουμε τα $y^n=\{y_j^n, j=0,1,...,N\}$.

Όπως και προηγουμένως (στο κλασικό πρόβλημα) θέτουμε

$$\overline{t}_j^n=\frac{t_j^n+t_{j+1}^n}{2} \text{ και } \overline{y}_j^n=\frac{y_j^n+y_{j+1}^n}{2},$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $\overline{y}^n$ η οποία είναι η κατά διαστήματα I_j σταθερή συνάρτηση $\overline{y}^n(t)=\overline{y}_j^n$ με $j=0,1,...N-1$.

Ορίζουμε τη συνάρτηση $\hat{y}^n$ η οποία είναι η συνεχής, κατά τμήματα γραμμική, συνάρτηση που παίρνει τις τιμές y_j^n στα t_j^n.
Ορίζουμε την $\overline{r}^n$ ως συνάρτηση ελέγχου που παίρνει τις τιμές $\overline{r}_j^n$ στα διαστήματα I_j με $j=0,1,...,N-1$.

Ορίζουμε το σύνολο των γενικευμένων κατά τμήματα σταθερών ελέγχων (διακριτοί έλεγχοι) με

$$\overline{R}^n=\{\overline{r}^n\in R^n \,|\, \overline{r}^n(t)=\overline{r}_j^n\in M_1(U)\ \ \sigma\tau o\ \ I_j^n,\ \ j=0,...,N-1\}$$

Για κάθε έλεγχο $\bar{r}^n$ η κατάσταση του συστήματος είναι η λύση $\bar{y}^n$ της παραπάνω διακριτής εξίσωσης κατάστασης διαφορών (1).

Οι περιορισμοί στον έλεγχο είναι $\bar{r}^n \in \bar{R}^n$
Οι περιορισμοί (δεσμεύσεις) στην κατάσταση και στον έλεγχο, είναι:

$$\begin{cases} G_1^n(\bar{r}^n) = \phi_1(y^n) + h \cdot \sum_{j=0}^{N-1} g_1(\bar{t}_j^n, \bar{y}_j^n, \bar{r}_j^n) = 0, \\ G_2^n(\bar{r}^n) = \phi_2(y^n) + h \cdot \sum_{j=0}^{N-1} g_2(\bar{t}_j^n, \bar{y}_j^n, \bar{r}_j^n) \le 0 \end{cases}$$

και το συναρτησιακό κόστους

$$G_0^n(\bar{r}^n) = \phi_0(y^n) + h \cdot \sum_{j=0}^{N-1} g_0(\bar{t}_j^n, \bar{y}_j^n, \bar{r}_j^n)$$

Ορίζουμε ως σύνολο των αποδεκτών γενικευμένων ελέγχων για την εκάστοτε διακριτοποίηση n, το

$$\bar{R}_\alpha^n = \{\bar{r}^n \in R / G_1(\bar{r}^n) = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad G_2(\bar{r}^n) \le 0\}$$

Το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου εδώ είναι:

Να βρεθεί ένας έλεγχος $\bar{r}$ τέτοιος ώστε $\bar{r} \in \bar{R}_\alpha^n \quad \kappa\alpha\iota \quad G_0(\bar{r}) \le G_0(\bar{r}'), \ \forall \bar{r}' \in \bar{R}_\alpha^n$

Τέλος και εδώ, όπως και στο συνεχές γενικευμένο πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου υπάρχουν τρεις ισοδύναμες διατυπώσεις του Γενικευμένου Προβλήματος Βέλτιστου Ελέγχου, που χρησιμοποιούν όμως τον τύπο του μέσου και οι οποίες είναι οι εξής:

(I) $y_{j+1} \in y_j + h \cdot cof(\bar{t}_j, \bar{y}_j, U)$

(II) $y_{j+1} = y_j + h \cdot f(\bar{t}_j, \bar{y}_j, r_j)$

(III) $y_{j+1} = y_j + h \cdot \sum_{j=0}^{d} \alpha_{ji} f(\bar{t}_j, \bar{y}_j, w_j)$ (μορφή Gamkrelidze)

Στην παρούσα διατριβή χρησιμοποιούμε, όπως είδαμε αμέσως παραπάνω, την μορφή (II), ενώ όταν χρησιμοποιούμε ελέγχους Gamkrelidze τότε χρησιμοποιούμε την μορφή (III).
Επίσης, όσον αφορά την τελευταία διατύπωση και δεδομένου ότι το $y \in \mathbb{R}^d$, κάθε σημείο στο κυρτό περίβλημα του $f(U)$ γράφεται ως κυρτός συνδιασμός $d+1$-σημείων.

2B. ΥΠΑΡΞΗ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΥ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

Για χάρην απλότητας στα παρακάτω που αφορούν ένα συγκεκριμένο διακριτό πρόβλημα παραλείπουμε το n της εκάστοτε διακριτοποίησης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2B.1:

Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι υποθέσεις (A1) για το U και (B) για την f και έστω $h < \frac{2}{L}$ τότε η διακριτή εξίσωση κατάστασης έχει μία μοναδική λύση $y_j, \quad \forall j, \quad \forall n, \quad \forall \bar{r}$.

Απόδειξη:

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού γίνεται παρόμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 1B.1, δηλ.

$$y_{j+1} = y_j + h \cdot f(\bar{t}_j, \bar{y}_j, r_j) \Rightarrow$$

$$y_{j+1} = y_j + h \cdot f(\bar{t}_j, \frac{y_j + y_{j+1}}{2}, r_j)$$

Θέτω $y := y_j + h \cdot f(\bar{t}_j, \frac{y_j + y_{j+1}}{2}, r_j) := F(y) \Rightarrow y = F(y)$

Θα δείξω ότι η F είναι συστολική ως προς y.

Πράγματι,

$$|F(y_1) - F(y_2)| = \left| y_j + h \cdot f(\bar{t}_j, \frac{y_j + y_1}{2}, r_j) - y_j - h \cdot f(\bar{t}_j, \frac{y_j + y_2}{2}, r_j) \right| =$$

$$= h \cdot \left| f(\bar{t}_j, \frac{y_j + y_1}{2}, u_j) - f(\bar{t}_j, \frac{y_j + y_2}{2}, r_j) \right|$$

$$\leq h \cdot L \cdot \left| \frac{y_j + y_1}{2} - \frac{y_j + y_2}{2} \right| = \frac{1}{2} \cdot h \cdot L \cdot |y_1 - y_2|$$

Επειδή $\frac{1}{2} \cdot h \cdot L < 1$ η F είναι συστολική και συνεπώς η $y = F(y)$ έχει μοναδική λύση την $y_j, \quad \forall j, \forall n, \forall r$.

ΛΗΜΜΑ 2B.1:

Θεωρώντας το n σταθερό και αν ισχύουν οι υποθέσεις (A1), (B) και (C), ισχύουν τα εξής:

i) ο τελεστής $\bar{r} \mapsto \bar{y}_r$ είναι συνεχής.

ii) τα $\bar{r} \mapsto G_l^n(\bar{r})$, $l = 0,1,2$ είναι συνεχή.

iii) υπάρχει βέλτιστος διακριτός γενικευμένος έλεγχος

Απόδειξη:

i) Υποθέτουμε ότι (I) $r_{kj} \to r_j \quad \forall j$.

Υποθέτουμε επαγωγικά ότι (II) $y_{kj} \to y_j$ για σταθερό j.

Θα δείξουμε ότι $y_{k,j+1} \to y_{j+1}$.

Η διακριτή εξίσωση κατάστασης για $y + \Delta y$ και y γίνεται αντιστοίχως

$$y_{j+1}+\Delta y_{j+1}=y_j+\Delta y_j+h\cdot f(\bar{t}_j,\bar{y}_j+\Delta\bar{y}_j,\bar{r}_j+\varepsilon\cdot(\bar{r}_j{}'-\bar{r}_j))$$
$$y_{j+1}=y_j+h\cdot f(\bar{t}_j,\bar{y}_j,\bar{r}_j)$$

και αφαιρώντας κατά μέλη, έχουμε

$$\Delta y_{j+1}=\Delta y_j+h\cdot[f(\bar{t}_j,\bar{y}_j+\Delta\bar{y}_j,\bar{r}_j+\varepsilon\cdot(\bar{r}_j{}'-\bar{r}_j))-f(\bar{t}_j,\bar{y}_j,\bar{r}_j)]$$

δηλαδή

$$\|\Delta y_{j+1}\|\le\|\Delta y_j\|+h\cdot[\|f(\bar{t}_j,\bar{y}_j+\Delta\bar{y}_j,\bar{r}_j+\varepsilon\cdot(\bar{r}_j{}'-\bar{r}_j))-f(\bar{t}_j,\bar{y}_j,\bar{r}_j+\varepsilon\cdot(\bar{r}_j{}'-\bar{r}_j))\|$$
$$+\|f(\bar{t}_j,\bar{y}_j,\bar{r}_j+\varepsilon\cdot(\bar{r}_j{}'-\bar{r}_j))-f(\bar{t}_j,\bar{y}_j,\bar{r}_j)\|].$$

Η f όμως είναι Lipschitz ως προς y και γραμμική ως προς το μέτρο r, οπότε:

$$\|\Delta y_{j+1}\|\le\|\Delta y_j\|+h\cdot L\cdot\|\Delta\bar{y}_j\|+h\cdot\varepsilon\cdot\|f(\bar{t}_j,\bar{y}_j,\bar{r}_j{}'-\bar{r}_j)\|.$$

Δηλ.

$$\|\Delta y_{j+1}\|\le\|\Delta y_j\|+h\cdot L\cdot\frac{1}{2}\cdot(\|\Delta y_{j+1}\|+\|\Delta y_j\|)+h\cdot\varepsilon\cdot\|f(\bar{t}_j,\bar{y}_j,\bar{r}_j{}'-\bar{r}_j)\|.$$

Αθροίζουμε για $j=0,1,\ldots,l-1$ και έχουμε

$$\sum_{j=0}^{l-1}\|\Delta y_{j+1}\|\le\sum_{j=0}^{l-1}\|\Delta y_j\|+\frac{h\cdot L}{2}\cdot(\sum_{j=0}^{l-1}\|\Delta y_{j+1}\|+\sum_{j=0}^{l-1}\|\Delta y_j\|)+l\cdot h\cdot\varepsilon\cdot\|f(\bar{t}_j,\bar{y}_j,\bar{r}_j{}'-\bar{r}_j)\|.$$

Δηλ.

$$\|\Delta y_l\|\le\|\Delta y_0\|+\frac{h\cdot L}{2}\cdot(\sum_{j=1}^{l-1}\|\Delta y_j\|+\|\Delta y_l\|+\sum_{j=1}^{l-1}\|\Delta y_j\|+\|\Delta y_0\|)+N\cdot h\cdot\varepsilon\cdot\|f(\bar{t}_j,\bar{y}_j,\bar{r}_j{}'-\bar{r}_j)\|$$

Ισχύει $\|\Delta y_0\| = 0$ και $h\cdot N=T$ οπότε:

$$\|\Delta y_l\|\le\frac{h\cdot L}{2}\cdot\|\Delta y_l\|+\frac{h\cdot L}{2}\cdot 2\cdot\sum_{j=1}^{l-1}\|\Delta y_j\|+T\cdot\varepsilon\cdot\|f(\bar{t}_j,\bar{y}_j,\bar{r}_j{}'-\bar{r}_j)\|,$$

δηλ.

$$(1-\frac{h\cdot L}{2})\cdot\|\Delta y_l\|\le\varepsilon\cdot c+h\cdot L\cdot\sum_{j=1}^{l-1}\|\Delta y_j\|.$$

Συνεπώς

$$\|\Delta y_l\|\le\frac{2\cdot\varepsilon\cdot c}{2-h\cdot L}+\frac{2\cdot h\cdot L}{2-h\cdot L}\cdot\sum_{j=1}^{l-1}\|\Delta y_j\|.$$

Και από την Διακριτή Ανισότητα Bellman-Gronwall έχουμε το ζητούμενο.

ii) Αφού $G_l(\bar{r})=\phi_l(y_N)+h\cdot\sum_{j=0}^{N-1}g_l(\bar{t}_j,\bar{y}_j,\bar{r})$ και τα g_l είναι συνεχή συνεπάγεται ότι και τα G_l είναι συνεχή για $l=0,1,2$.

iii) από τη συνέχεια των τελεστών και τη συμπάγεια του R^n προκύπτει άμεσα ότι υπάρχει βέλτιστος διακριτός γενικευμένος έλεγχος.

ΛΗΜΜΑ 2Β.2:

Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις (Α1) και (Β) και έστω $(y_j^n)_{j=1}^N$ φραγμένα $\forall j, \forall n, \forall \overline{r}^n \in \overline{R}^n$. Τότε τα $(\hat{y}^n)$ και τα $(\overline{y}^n)$ είναι φραγμένα. Δηλ. $\left\|\hat{y}^n\right\|_\infty \le b$ και $\left\|\overline{y}^n\right\|_\infty \le b$.

Απόδειξη:

Παρόμοια με αυτή του Λήμματος 1Β.2 στους κλασικούς ελέγχους.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2Β.1:

Από την διακριτή εξίσωση κατάστασης για τους γενικευμένους ελέγχους έχουμε

$\hat{y}'^n(t) = f(\overline{t}^n, \overline{y}^n, \overline{r}^n)$ και ολοκληρώνοντας στο $[t, t']$ παίρνουμε

$$\left|\hat{y}^n(t') - \hat{y}^n(t)\right| \le \int_t^{t'} \left| f(\overline{t}^n, \overline{y}^n, \overline{r}^n) \right| ds \le C \cdot (t' - t)$$ όπου το C είναι ανεξάρτητο του n

Συνεπώς οι $\hat{y}^n$ είναι Lipschitz ισοσυνεχείς.

Απόδειξη:

Παρόμοια με αυτή της Παρατήρησης 1Β.2 στους κλασικούς ελέγχους.

ΛΗΜΜΑ 2Β.3: (Συμβατότητα των $\hat{y}$, $\overline{y}$)

Με δεδομένες τις υποθέσεις (Α1) και (Β), αν $\overline{r}^n \to r$ (όπου η $(\overline{r}^n)$ έχει κατά τμήματα σταθερό μέτρο) τότε:

$\overline{y}^n, \hat{y}^n \to y_r \equiv y$ όπου y είναι μοναδική

Απόδειξη:

Ομοίως με την απόδειξη του Λήμματος 1Β.3, δηλ.

από την διακριτή εξίσωση κατάστασης διαφορών και την Παρατήρηση 2Β.1 παίρνουμε

$\hat{y}'^n(t) = f(\overline{t}^n, \overline{y}^n, \overline{r}^n)$

Δηλαδή $\hat{y}^n(t) = y_0 + \int_0^t f(\overline{t}^n(s), \overline{y}^n(s), \overline{r}^n(s))ds$.

Όμως, $\overline{t}^n(s) \xrightarrow{L^\infty} t$. Από το παραπάνω Λήμμα 2Β.2, την παραπάνω Παρατήρηση 2Β.1 και το Θεώρημα Ascoli υπάρχει υπακολουθία $(\hat{y}^n)$ που συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποιο y, δηλ. $\hat{y}^n \to y$.

Από το Λήμμα 2Β.2 (Κεφ. ΙΙ) παίρνουμε όριο στο ολοκλήρωμα ($n \to +\infty$) και έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} y^n(t) = y_0 + \lim_{n\to+\infty} \int_0^t f(\overline{t}^n(s), \overline{y}^n(s), \overline{r}^n(s))ds$$

Άρα

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y, r)ds$$

Συνεπώς

$y \equiv y_r$, μοναδική λύση για τις υπακολουθίες.

Από τη μοναδικότητα του ορίου y_r συκλίνει ολόκληρη η ακολουθία.

Λόγω, λοιπόν, της μοναδικότητας του ορίου έχουμε $\hat{y}^n \to y_r$ και $\overline{y}^n \to y_r$.

<u>ΠΟΡΙΣΜΑ 2Β.1:</u> (Συμβατότητα των G_l)

Με δεδομένες τις υποθέσεις (A1), (B) και (C), αν $\overline{r}^n \longrightarrow r$ τότε $G_l^n(\overline{r}^n) \to G_l(r)$ για $l = 0,1,2$ όπου τα G_l^n είναι τα διακριτά και G_l τα συνεχή. Δηλαδή οι διακριτοί περιορισμοί καθώς και το κόστος συγκλίνουν στα συνεχή.

<u>Απόδειξη:</u>

Γνωρίζουμε ότι

$$G_l(\overline{r}^n) = \varphi_l(y^n) + h \cdot \sum_{j=0}^{N-1} g_l(\overline{t}_j^n, \overline{y}_j^n, \overline{r}_j^n) = \varphi_l(y^n) + \int_I g_l(\overline{t}^n, \overline{y}^n, \overline{r}^n), \quad l = 0,1,2$$

Οι φ_l, g_l , $l = 0,1,2$ είναι συνεχείς ως προς (t, y, u) .

Παίρνοντας όρια στα $G_l(\overline{r}^n), l = 0,1,2$ από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης Lebesgue έχουμε:

$$\lim_{n \to +\infty} G_l(\overline{r}^n) = \varphi_l(y(T)) + \int_I g_l(t, y(t), r(t))dt = G_l(r), \qquad l = 0,1,2 .$$

2Γ. ΑΝΑΓΚΑΙΕΣ/ΙΚΑΝΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΕΛΕΓΧΟ

<u>ΛΗΜΜΑ 2Γ.1:</u>

(Για να απλουστεύσουμε το συμβολισμό στα παρακάτω που αφορούν ένα συγκεκριμένο διακριτό πρόβλημα, παραλείπουμε το n της κάθε διακριτοποίησης.)

Με δεδομένες τις υποθέσεις (A1), (B) του προβλήματός μας και αν $\overline{r}$, $\overline{r}' \in \overline{R}^n$ και $\varepsilon \in (0,1]$ και αν οι καταστάσεις y και $y + \Delta y$ αντιστοιχούν στους γενικευμένους ελέγχους $\overline{r}$ και $\overline{r} + \varepsilon \cdot (\overline{r}' - \overline{r})$, τότε έχουμε:

$$\max_l \|\Delta y_l\| \le c' \cdot \varepsilon$$

και $\qquad \|\hat{y}\|_\infty \le c' \cdot \varepsilon$, $\|\overline{y}\|_\infty \le c' \cdot \varepsilon$

<u>Απόδειξη:</u>

Η εξίσωση κατάστασης για $y + \Delta y$ και y γίνεται αντιστοίχως

$$y_{j+1} + \Delta y_{j+1} = y_j + \Delta y_j + h \cdot f(\bar{t}_j, \bar{y}_j + \Delta \bar{y}_j, \bar{r}_j + \varepsilon \cdot (\bar{r}_j{}' - \bar{r}_j))$$

και

$$y_{j+1} = y_j + h \cdot f(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j)$$

Αφαιρώντας τις παραπάνω κατά μέλη, έχουμε

$$\Delta y_{j+1} = \Delta y_j + h \cdot [f(\bar{t}_j, \bar{y}_j + \Delta \bar{y}_j, \bar{r}_j + \varepsilon \cdot (\bar{r}_j{}' - \bar{r}_j)) - f(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j)] \Rightarrow$$

$$\Delta y_{j+1} = \Delta y_j + h \cdot [f(\bar{t}_j, \bar{y}_j + \Delta \bar{y}_j, \bar{r}_j + \varepsilon \cdot (\bar{r}_j{}' - \bar{r}_j)) - f(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j + \varepsilon \cdot (\bar{r}_j{}' - \bar{r}_j))] + h \cdot [f(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j + \varepsilon \cdot (\bar{r}_j{}' - \bar{r}_j)) - f(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j)]$$

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη Lipschitz ως προς y έχουμε

$$\|\Delta y_{j+1}\| \le \|\Delta y_j\| + h \cdot L \cdot \|\bar{y}_j\| + h \cdot \varepsilon \cdot \|f(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j{}' - \bar{r}_j)\|$$

Από την υπογραμμικότητα της f έχουμε

$$\|\Delta y_{j+1}\| \le \|\Delta y_j\| + hL\|\bar{y}_j\| + h\varepsilon(c_1 + c_2\|\bar{y}_j\|) \Rightarrow$$

$$\|\Delta y_{j+1}\| \le \|\Delta y_j\| + hL\frac{1}{2}(\|\Delta y_{j+1}\| + \|\Delta y_j\|) + h\varepsilon c_1 + h\varepsilon c_2\|\bar{y}_j\|$$

Αθροίζουμε για $j = 0,1,\ldots,l-1$ και έχουμε

$$\sum_{j=0}^{l-1}\|\Delta y_{j+1}\| \le \sum_{j=0}^{l-1}\|\Delta y_j\| + \frac{hL}{2}(\sum_{j=0}^{l-1}\|\Delta y_{j+1}\| + \sum_{j=0}^{l-1}\|\Delta y_j\|) + l\,h\varepsilon c_1 + h\varepsilon c_2\sum_{j=0}^{l-1}\|\bar{y}_j\| \Rightarrow$$

$$\|\Delta y_l\| \le \|\Delta y_0\| + \frac{hL}{2}(\sum_{j=1}^{l-1}\|\Delta y_j\| + \|\Delta y_l\| + \sum_{j=1}^{l-1}\|\Delta y_j\| + \|\Delta y_0\|) + l\,h\varepsilon c_1 + h\varepsilon c_2\sum_{j=0}^{l-1}\|\bar{y}_j\|$$

Ισχύει $\|\Delta y_0\| = 0$, οπότε

$$\|\Delta y_l\| \le \frac{hL}{2}\|\Delta y_l\| + \frac{hL}{2}2\sum_{j=1}^{l-1}\|\Delta y_j\| + l\,h\varepsilon c_1 + h\varepsilon c_2\sum_{j=0}^{l-1}\|\bar{y}_j\| \Rightarrow$$

$$(1 - \frac{hL}{2})\|\Delta y_l\| \le h\varepsilon N c_1 + h\varepsilon c_2\sum_{j=0}^{l-1}\|\bar{y}_j\| + hL\sum_{j=1}^{l-1}\|\Delta y_j\|$$

Από το Λήμμα 2Β.2 έχουμε

$$\|\Delta y_l\| \le h\varepsilon[N c_1 + c_2 b]\frac{2}{2 - hL} + \frac{2hL}{2 - hL}\sum_{j=1}^{l-1}\|\Delta y_j\|$$

δηλ.

$$\|\Delta y_l\| \leq hc\varepsilon \frac{2}{2-hL} + \frac{2hL}{2-hL} \sum_{j=1}^{l-1} \|\Delta y_j\|$$

Και από την Διακριτή Ανισότητα Bellman-Gronwall έχουμε

$\max \|\Delta y_l\| \leq c' \cdot \varepsilon$ και

άρα άμεσα $\|\hat{y}\|_\infty \leq c' \cdot \varepsilon$ καθώς και $\|\overline{y}\|_\infty \leq c' \cdot \varepsilon$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2Γ.1:

Παραλείποντας το δείκτη $l = 0,1,2$ στα G_l, ϕ_l και g_l και θεωρώντας τις υποθέσεις (A1), (B), (C), (D1), (D2), καθώς και τα συμπεράσματα του παραπάνω Λήμματος ορίζουμε την Χαμιλτονιανή

$$H(t, y, z, r) = z \cdot f(t, y, r) + g(t, y, r)$$

και τη λύση $z = z_u$ (διάνυσμα γραμμή) της συζυγούς διακριτής εξίσωσης

$z_j - z_{j+1} = h \cdot [\overline{z}_j \cdot f_y(\overline{t}_j, \overline{y}_j, \overline{r}_j) + g_y(\overline{t}_j, \overline{y}_j, \overline{r}_j)]$, όπου $j = N-1, \ldots, 1, 0$, με $z_N = \phi_y(y_N) = [\nabla \phi(y_N)]^T$ και με τα (z_j) φραγμένα.

Τότε η θετική κατά κατεύθυνση παράγωγος, (δηλ. της κάθε μιας από τις G_l, $l = 0,1,2$), δίνεται από τη σχέση:

$$DG(\overline{r}, \overline{r}' - \overline{r}) = h \cdot \sum_{j=0}^{N-1} H(\overline{t}_j, \overline{y}_j, \overline{z}_j, \overline{r}_j' - \overline{r}_j)$$

Επίσης, ο τελεστής $\overline{r} \mapsto \overline{z}_r$ και η παράγωγος $(\overline{r}, \overline{r}') \to DG(\overline{r}, \overline{r}' - \overline{r}) \equiv \delta_+ G(\overline{r}, \overline{r}' - \overline{r})$ είναι συνεχείς.

Απόδειξη:

$$\Delta G = G(\overline{r} + \varepsilon \cdot (\overline{r}' - \overline{r})) - G(\overline{r}) =$$

$$= \phi(y_N + \Delta y_N) - \phi(y_N) + h \cdot \sum_{j=0}^{N-1} [g(\overline{t}_j, \overline{y}_j + \Delta\overline{y}_j, \overline{r}_j + \varepsilon \cdot (\overline{r}_j' - \overline{r}_j)) - g(\overline{t}_j, \overline{y}_j, \overline{r}_j)].$$

Ισχύει $\phi(y_N + \Delta y_N) - \phi(y_N) = \phi_y(y_N)\Delta y_N + o(\varepsilon)$

και έτσι η παραπάνω γίνεται

$$\Delta G = \phi_y(y_N)\Delta y_N + o(\varepsilon)$$
$$+ h \cdot \sum_{j=0}^{N-1} [g(\overline{t}_j, \overline{y}_j + \Delta\overline{y}_j, \overline{r}_j + \varepsilon \cdot (\overline{r}_j' - \overline{r}_j)) - g(\overline{t}_j, \overline{y}_j, \overline{r}_j + \varepsilon \cdot (\overline{r}_j' - \overline{r}_j))]$$
$$+ h \cdot \sum_{j=0}^{N-1} [g(\overline{t}_j, \overline{y}_j, \overline{r}_j + \varepsilon \cdot (\overline{r}_j' - \overline{r}_j)) - g(\overline{t}_j, \overline{y}_j, \overline{r}_j)].$$

Οπότε

$$\text{(A)} \quad \Delta G = \phi_y(y_N)\Delta y_N + o(\varepsilon) + h \cdot \sum_{j=0}^{N-1} g_y(\overline{t}_j, \overline{y}_j, \overline{r}_j)\Delta\overline{y}_j$$
$$+ h \cdot \varepsilon \cdot \sum_{j=0}^{N-1} g(\overline{t}_j, \overline{y}_j, \overline{r}_j' - \overline{r}_j)$$

Παίρνουμε τη συζυγή διακριτή εξίσωση

$$z_j - z_{j+1} = h\cdot \bar{z}_j \cdot f_y(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j) + h\cdot g_y(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j)$$

και πολλαπλασιάζουμε από δεξιά με $\Delta\bar{y}_j$ παίρνουμε

(Β) $(z_{j+1} - z_j)\cdot \Delta\bar{y}_j = -h\cdot \bar{z}_j \cdot f_y(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j)\cdot\Delta\bar{y}_j - h\cdot g_y(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j)\cdot\Delta\bar{y}_j$

Η εξίσωση κατάστασης για $y+\Delta y$ και y γίνεται αντιστοίχως

$y_{j+1} + \Delta y_{j+1} = y_j + \Delta y_j + h\cdot f(\bar{t}_j, \bar{y}_j + \Delta\bar{y}_j, \bar{r}_j + \varepsilon\cdot(\bar{r}_j' - \bar{r}_j))$ και

$$y_{j+1} = y_j + h\cdot f(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j)$$

και αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\Delta y_{j+1} = \Delta y_j + h\cdot[f(\bar{t}_j, \bar{y}_j + \Delta\bar{y}_j, \bar{r}_j + \varepsilon\cdot(\bar{r}_j' - \bar{r}_j)) - f(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j)] \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\Delta y_{j+1} - \Delta y_j &= h\cdot[f(\bar{t}_j, \bar{y}_j + \Delta\bar{y}_j, \bar{r}_j + \varepsilon\cdot(\bar{r}_j' - \bar{r}_j)) - f(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j + \varepsilon\cdot(\bar{r}_j' - \bar{r}_j)) \\ &\quad + h\cdot[f(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j + \varepsilon\cdot(\bar{r}_j' - \bar{r}_j)) - f(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j)] \Rightarrow\end{aligned}$$

(Γ) $\Delta y_{j+1} - \Delta y_j = h\cdot f_y(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j)\cdot\Delta y_j + \varepsilon\cdot o(\varepsilon) + h\cdot\varepsilon\cdot f(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j' - \bar{r}_j)$.

Πολλαπλασιάζουμε την (Γ) από αριστερά με $\bar{z}_j$ και έχουμε

(Δ) $\bar{z}_j\cdot(\Delta y_{j+1} - \Delta y_j) = h\cdot\bar{z}_j\cdot f_y(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j)\cdot\Delta y_j$

$$+\bar{z}_j\cdot\varepsilon\cdot o(\varepsilon) + h\cdot\varepsilon\cdot\bar{z}_j\cdot f(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j' - \bar{r}_j)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (Β) και (Δ) και έχουμε

(Ε) $(z_{j+1} - z_j)\cdot\Delta\bar{y}_j + \bar{z}_j\cdot(\Delta y_{j+1} - \Delta y_j) =$

$$= -h\cdot g_y(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j)\cdot\Delta\bar{y}_j + h\cdot\varepsilon\cdot\bar{z}_j\cdot f(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j' - \bar{r}_j) + \varepsilon\cdot o(\varepsilon).$$

Αθροίζοντας την (Ε) για $j = 0,1,\dots,N-1$ παίρνουμε

$$\sum_{j=0}^{N-1}(z_{j+1} - z_j)\cdot\Delta\bar{y}_j + \sum_{j=0}^{N-1}\bar{z}_j\cdot(\Delta y_{j+1} - \Delta y_j) =$$

$$= -h\cdot\sum_{j=0}^{N-1}g_y(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j)\cdot\Delta\bar{y}_j + h\cdot\varepsilon\cdot\sum_{j=0}^{N-1}\bar{z}_j\cdot f(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j' - \bar{r}_j) + \varepsilon\cdot o(\varepsilon).$$

Επειδή $z_0\Delta z_0 = 0$ η παραπάνω σχέση γράφεται

(Ζ) $z_N\Delta y_N - z_0\Delta z_0 = z_N\Delta y_N = \phi_y(y_N)\Delta y_N =$

$$-h\cdot\sum_{j=0}^{N-1}g_y(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j)\cdot\Delta\bar{y}_j + h\cdot\varepsilon\cdot\sum_{j=0}^{N-1}\bar{z}_j\cdot f(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j' - \bar{r}_j) + \varepsilon\cdot o(\varepsilon).$$

Από την (A) με την βοήθεια της (Z) παίρνουμε

$$\Delta G = -h \cdot \sum_{j=0}^{N-1} g_y(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j) \cdot \Delta \bar{y}_j + h \cdot \varepsilon \cdot \sum_{j=0}^{N-1} \bar{z}_j \cdot f(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j{}' - \bar{r}_j) +$$

$$+ h \cdot \sum_{j=0}^{N-1} g_y(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j) \Delta \bar{y}_j + h \cdot \varepsilon \cdot \sum_{j=0}^{N-1} g(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j{}' - \bar{r}_j) + \varepsilon \cdot o(\varepsilon) \Rightarrow$$

$$\Delta G = h \cdot \varepsilon \cdot \sum_{j=0}^{N-1} \bar{z}_j \cdot f(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j{}' - \bar{r}_j) + h \cdot \varepsilon \cdot \sum_{j=0}^{N-1} g(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j{}' - \bar{r}_j) + \varepsilon \cdot o(\varepsilon) \Rightarrow$$

$$\Delta G = h \cdot \varepsilon \cdot \sum_{j=0}^{N-1} [\bar{z}_j \cdot f(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j{}' - \bar{r}_j) + g(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j{}' - \bar{r}_j)] + \varepsilon \cdot o(\varepsilon) \Rightarrow$$

$$DG(r, r' - r) = h \cdot \sum_{j=0}^{N-1} H(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{z}_j, \bar{r}_j{}' - \bar{r}_j).$$

Άρα

$$\delta_+ G(r, r' - r) = h \cdot \sum_{j=0}^{N-1} H(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{z}_j, \bar{r}_j{}' - \bar{r}_j).$$

Σχετικά με την συνέχεια του τελεστή $\bar{r} \mapsto \bar{z}_r$ η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή του τελεστή $\bar{r} \mapsto \bar{y}_r$ στο Λήμμα 2Β.1, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2Β.1.

Σχετικά με την συνέχεια του τελεστή $(\bar{r}, \bar{r}') \to DG(\bar{r}, \bar{r}' - \bar{r}) \equiv \delta_+ G(\bar{r}, \bar{r}' - \bar{r})$ έχουμε ότι

$$\delta_+ G(r, r' - r) = \sum_{j=0}^{N-1} H(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{z}_j, \bar{r}_j{}' - \bar{r}_j)$$

Όμως $H(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{z}_j, \bar{r}_j) = \bar{z}_j \cdot f(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j) + g(\bar{t}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j)$ όπου τα f και g είναι συνεχή.

Άρα ο τελεστής είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2Γ.2: (Αναγκαίες Συνθήκες Βελτιστότητας)

Με τις υποθέσεις (A1), (B), (C), (D1) και (D2) αν το $\bar{r}^n$ είναι βέλτιστο τότε το $\bar{r}^n$ ικανοποιεί τις συνθήκες Kuhn-Tucker-Lagrange.

Δηλαδή, υπάρχουν πολλαπλασιαστές $\lambda_l \in \mathbb{R}$, $l = 0,1,2$ με $\lambda_l \geq 0$, για $l = 0,2$ και $\sum_{l=0}^{2} |\lambda_l| = 1$

τέτοιοι ώστε

$$\text{(I)} \quad \lambda_0^n \cdot \delta_+ G_0^n(\bar{r}^n, \bar{r}'^n - \bar{r}^n) + \lambda_1^n \cdot \delta_+ G_1^n(\bar{r}^n, \bar{r}'^n - \bar{r}^n)$$
$$+ \lambda_2^n \cdot \delta_+ G_2^n(\bar{r}^n, \bar{r}'^n - \bar{r}^n) \geq 0, \quad \forall \bar{r}'^n \in \bar{R}^n$$

και

$$\text{(II)} \quad \lambda_2^n \cdot G_2^n(\bar{r}^n) = 0 \text{ (συνθήκη εγκαρσιότητας)}$$

Η σχέση (I) γράφεται

$$\text{(III)} \quad \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{2} (\bar{z}_j^n \cdot \bar{f}(\bar{r}' - \bar{r}) + \bar{g}(\bar{r}_j' - \bar{r}_j)) \geq 0, \quad \forall \bar{r}_j^n \in \bar{R}^n, \ j = 0,1,\ldots,N-1$$

Η (III) είναι ισοδύναμη με την **Διακριτή Γενικευμένη Σημειακή Αρχή του Ελαχίστου**

(IV) $\sum_{l=0}^{2}(\overline{z}_j^n \cdot \overline{f}(\overline{r}'-\overline{r})+\overline{g}(\overline{r}_j'-\overline{r}_j)) \geq 0, \quad \forall j$.

Απόδειξη:
Η (I) και η (II) προκύπτουν άμεσα από το Γενικευμένο Θεώρημα Kuhn-Tucker-Lagrange.

Έστω ότι ισχύει η (IV), τότε αθροίζοντας προφανώς ισχύει και η (III).

Έστω ότι ισχύει η (III), τότε θέτοντας:

$$\overline{r'}_j = \begin{cases} \overline{r}_j, \ \gamma\iota\alpha \ j \neq i \\ \overline{r'}_i, \ \gamma\iota\alpha \ j = i \ \mu\varepsilon \ \overline{r'}_i \in R \ \tau\upsilon\chi\acute{o}\nu \end{cases}$$

έπεται η (IV).

ΘΕΩΡΗΜΑ 2Γ.3: (Ικανές Συνθήκες Βελτιστότητας)
Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος Ικανών Συνθηκών του προβλήματος του συνεχούς γενικευμένου ελέγχου οι συνθήκες K-T-L είναι ικανές και για το πρόβλημα του διακριτού γενικευμένου ελέγχου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2Γ.1:
Ένας έλεγχος $\overline{r}^n \in \overline{R}_\alpha$ που ικανοποιεί τις συνθήκες Kuhn-Tucker-Lagrange, δηλαδή υπάρχουν πολλαπλασιαστές $\lambda_l \in \mathbb{R}$, $l = 0,1,2$ με $\lambda_l \geq 0$, για $l = 0,2$ και $\sum_{l=0}^{2}|\lambda_l| = 1$ τέτοιοι ώστε

$$(1) \quad \lambda_0^n \cdot \delta_+ G_0^n(\overline{r}^n, \overline{r'}^n - \overline{r}^n) + \lambda_1^n \cdot \delta_+ G_1^n(\overline{r}^n, \overline{r'}^n - \overline{r}^n)$$
$$+\lambda_2^n \cdot \delta_+ G_2^n(\overline{r}^n, \overline{r'}^n - \overline{r}^n) \geq 0, \quad \forall \overline{r'}^n \in \overline{R}^n$$

και

(2) $\lambda_2^n \cdot G_2^n(\overline{r}^n) = 0$ (συνθήκη εγκαρσιότητας)

λέγεται **έλεγχος Kuhn-Tucker-Lagrange** (K-T-L)

ΛΗΜΜΑ 2Γ.2: (Συμβατότητα Καταστάσεων)
Με τις υποθέσεις (A1), (B), (C), (D1) και (D2) αν $\overline{r}^n \to r$ τότε $\overline{z}^n \to z_r \equiv z$ και $\delta_+ G_l^n(\overline{r'}^n - \overline{r}^n) \to \delta_+ G_l(r'-r)$

Απόδειξη:
Παρόμοια με του Λήμματος 2Β.2, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2Β.2.

Υπενθυμίζουμε εδώ ότι

i) το $\overline{W}$ είναι το σύνολο των σταθερών κατά (τυχαία) διαστήματα κλασικών ελέγχων
ii) το $\widetilde{W}$ είναι το σύνολο των σταθερών κατά (τυχαία) διαστήματα, και συνεχώς επεκτάσιμων στα άκρα τους, κλασικών ελέγχων, και
iii) $W^n \subset \overline{W} \subset \widetilde{W} \subset W \subset R$ καθώς και $W^n \subset R^n \subset R$ (με την ***ταύτιση*** $w(t) :\equiv \delta_{w(t)}$ σ.π. στο I, δ μέτρο Dirac).

<u>**ΘΕΩΡΗΜΑ 2Γ.4:**</u> (Προσέγγιση Γενικευμένων Ελέγχων με Διακριτούς Κλασικούς)
Με τις υποθέσεις (A1), (B) και (C) για κάθε $r \in R$, υπάρχει ακολουθία διακριτών κλασικών ελέγχων $(w^n \in W^n)$, η οποία (δηλ. η αντίστοιχη ακολουθία $(\delta_{w^n} \in R^n \subset R)$ Dirac γενικευμένων έλεγχων) συγκλίνει στο r στο R.
<u>Απόδειξη:</u>
Το σύνολο $\bar{W}$, και άρα τα $\tilde{W}$, W, είναι πυκνά στο R (βλ. Warga, σελ. 275, και απόδειξη της πυκνότητας του W).
Υπάρχει άρα μια ακολουθία ($v_k \in \bar{W}$) τέτοια ώστε $v_k \to r$ στο R, οπότε για κάθε δεδομένη συνεχή συνάρτηση $f \in C(I \times U)$, έχουμε

(1) $$\varepsilon_k := \left| \int_I [f(t, v_k(t)) - f(t, r(t))]\,dt \right| \to 0, \text{ όταν } k \to \infty .$$

Για κάθε k σταθερό, ορίζουμε την ακολουθία ***διακριτών*** κλασικών ελέγχων $(w_k^n \in W^n)$ με

$$w_k^n(t) := v_k(t_j^n), \text{ για } t \in I_j^n,\ j = 0,..., N-1,$$

οπότε το συνολικό μέτρο των διαστημάτων I_j^n, όπου οι δύο κατά διαστήματα σταθεροί έλεγχοι w_k^n και v_k ***δεν*** είναι ίσοι σε ολόκληρο το I_j^n, είναι $\le 1/k$ για $n \ge M(k)$, για κάποιο $M(k)$.

Κατά μείζονα λόγο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $M(k+1) > M(k)$.
Έχουμε, για $n \ge M(k)$

(2) $$\left| \int_I [f(t, w_k^n(t)) - f(t, v_k(t))]dt \right| \le \int_I \left| f(t, w_k^n(t)) - f(t, v_k(t)) \right| dt \le 2\|f\|_\infty \frac{1}{k}.$$

Θέτουμε τότε

$$w^n := w_k^n, \quad \text{για } M(k) \le n < M(k+1), \text{ για κάθε } k.$$

Επομένως, από τις (1) και (2), παίρνουμε

$$A^n := \left| \int_I [f(t, w^n(t)) - f(t, r(t))]dt \right| \le \varepsilon_k + 2\|f\|_\infty \frac{1}{k}, \quad \text{για } M(k) \le n < M(k+1),$$

για κάθε k.
Άρα $A^n \to 0$ όταν $n \to \infty$.

Συνεπώς, $w^n \to r$ στο R.

Το Θεώρημα 2Γ.4 εύκολα γενικεύεται για περιπτώσεις όπου, αντί του διαστήματος I, έχουμε ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^{d'}$ απλής γεωμετρικής μορφής, π.χ. ένα πολύεδρο, έναν πολυεδρικό κύλινδρο, για προβλήματα με μερικές διαφορικές εξισώσεις.

Δίνουμε, εδώ, κάποιες απαραίτητες διευκρινίσεις.

Για κάθε n, έστω $r^n \in R$ ένας διακριτός γενικευμένος έλεγχος Gamkrelidze

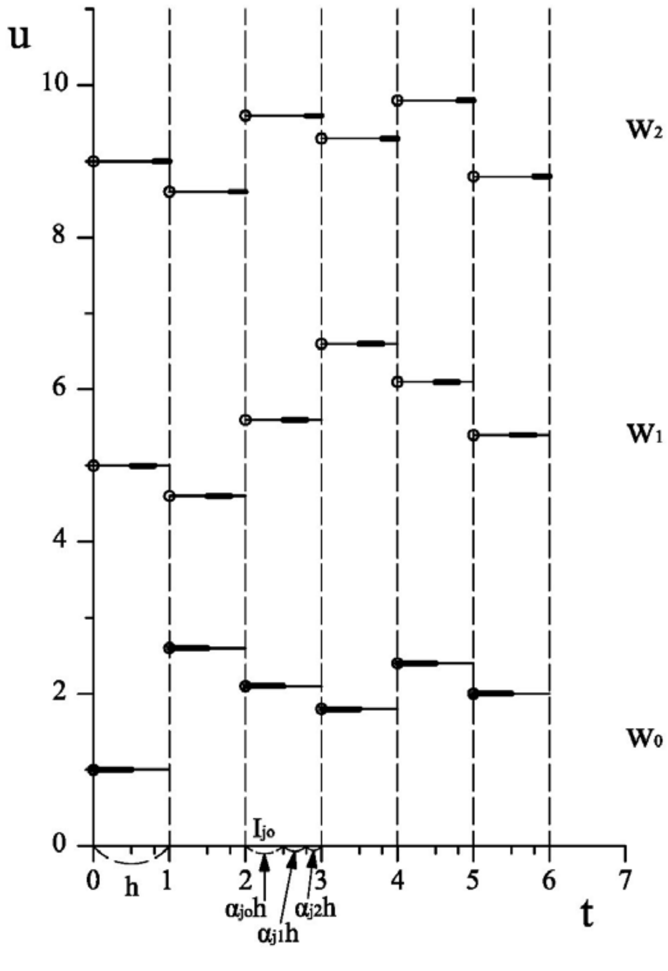
$$r^n(t) := \sum_{i=0}^{m} \alpha_{ji}^n \delta_{w_i^n(t)}, \text{ για } t \in I_j^n, \ j = 0,...,N-1, \text{ όπου}$$

$$w_i^n \in W^n, \ i = 0,...,m, \ m \geq 1, \ \alpha_{ji}^n \in T^m, \ j = 0,...,N-1, \text{ και}$$

$$T^m := \{\alpha = (\alpha_0,...,\alpha_m) \in \mathbb{R}_+^{m+1} \mid \sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 1\}.$$

Υποδιαιρούμε το κάθε διάστημα I_j^n, $j = 0,...,N-1$, σε $m+1$ διαστήματα I_{ji}^n, μήκους $\alpha_{ji}^n h^n$, $i = 0,...,m$, και ορίζουμε τον αντίστοιχο κατά διαστήματα I_{ji}^n σταθερό κλασικό **προσεγγιστικό έλεγχο** $\overline{w}^n \in \overline{W}$ με

$$\overline{w}^n(t) := w_i^n(t), \quad \text{για } t \in I_{ji}^n, \ j = 0,...,N-1, \ i = 0,...,m.$$



<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 2Γ.5:</u> (Προσέγγιση Διακριτών Γενικευμένων Ελέγχων Gamkrelidze με Σταθερούς κατά τμήματα Κλασικούς)

α) Για δεδομένη $f \in C(I \times U)$, ο έλεγχος $\overline{w}^n$ ικανοποιεί

$$\left| \int_I f(t, \overline{w}^n(t))dt - \int_I f(t, r^n(t))dt \right| \leq \varepsilon^n \to 0, \text{ όταν } n \to \infty$$

όπου τα ε^n είναι **ανεξάρτητα** των $\alpha_{ji}^n \in T^m$, $j = 0,...,N-1$.

β) Αν επιπλέον $\overline{r}^n \to r$, τότε $\overline{w}^n \to r$.

Απόδειξη:

α) Έστω $f \in C(I \times U)$ μια συνεχής συνάρτηση, η οποία είναι και **ομοιόμορφα** συνεχής στο συμπαγές σύνολο $I \times U$, με κάποιο **μέτρο συνέχειας** (modulus of continuity) $\theta(f;\zeta,\eta)$, δηλ. τέτοιο ώστε

$$|f(t,u) - f(t',u')| \le \theta(f;\zeta,\eta),$$

για κάθε $t,t' \in I,\ u,u' \in U$, με $|t-t'| \le \zeta,\ \|u-u'\| \le \eta$,

όπου $\theta(f;\zeta,\eta) \to 0$, όταν $\zeta,\eta \to 0$.

Έχουμε

$$\left|\int_I f(t,\overline{w}^n(t))dt - \int_I f(t,r^n(t))dt\right|$$

$$= \left|\sum_j \sum_i \int_{I_{ji}^n} f(t,w_i^n(t))dt - \sum_j \sum_i \alpha_{ji}^n \int_{I_{ji}^n} f(t,w_i^n(t))dt\right|$$

$$\le \left|\sum_j \sum_i \int_{I_{ji}^n} f(t,w_i^n(t))dt - \sum_j \sum_i \alpha_{ji}^n \int_{I_{ji}^n} f(t,w_i^n(t))dt\right| + 2T\theta(f;h^n,0)$$

$$= \left|\sum_j \sum_i \alpha_{ji}^n h^n f(t,w_{ji}^n) - \sum_j \sum_i \alpha_{ji}^n h^n f(t,w_{ji}^n)\right| + 2T\theta(f;h^n,0)$$

$$= +2T\theta(f;h^n,0) := \varepsilon^n \to 0$$

όπου $w_{ji}^n := w_i^n(t)$ στο I_{ji}^n, και τα ε^n είναι ανεξάρτητα των $\alpha_{ji}^n \in T^m,\ j = 0,...,N-1$.

β) Προκύπτει άμεσα από το (α) και την τριγωνική ανισότητα.

Το Θεώρημα 2Γ.5 είναι πολύ χρήσιμο διότι οι έλεγχοι που κατασκευάζουν οι **διακριτοί** γενικευμένοι **αλγόριθμοι** βελτιστοποίησης είναι διακριτοί Gamkrelidze και μπορούν μετά να προσεγγιστούν με κατά διαστήματα σταθερούς **κλασικούς** ελέγχους που συγκλίνουν στο **ίδιο όριο**, και οι οποίοι έχουν το πλεονέκτημα ότι μπορούν να εφαρμοστούν στην πράξη.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2Γ.6: (το βέλτιστο διακριτό συγκλίνει στο βέλτιστο συνεχές)

Με τις υποθέσεις (Α1), (Β) και (C) αν η ακολουθία $(\overline{r}^n)$ βέλτιστων διακριτών γενικευμένων ελέγχων συγκλίνει στο r, δηλ. αν $\overline{r}^n \longrightarrow r$ τότε το r είναι βέλτιστο για το συνεχές πρόβλημα.

Απόδειξη:

Έστω τυχόν $r' \in R$ και μία ακολουθία $\overline{r'}^n \in \overline{R}^n$ που συγκλίνει σε αυτά (από το Λήμμα 2Γ.3)

Με δεδομένο ότι η $(\overline{r}^n)$ είναι η βέλτιστη γενικευμένη διακριτή έχουμε $G_0^n(\overline{r}^n) \le G_0^n(\overline{r'}^n)$

και παίρνοντας εκατέρωθεν όρια έχουμε $G_0(r) \le G_0(r')$, και επειδή το $r' \in R$ είναι τυχόν,

άρα και το r είναι βέλτιστο για το γενικευμένο συνεχές.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2Γ.7:
Υποθέτουμε, ότι ισχύουν οι (A1), (B) και (C) και ότι κάθε διακριτό πρόβλημα έχει αποδεκτό έλεγχο. Αν η ακολουθία $(\overline{r}^n)$ αποδεκτών και K-T-L ελέγχων συγκλίνει στο $r / L^\infty, L^2$, τότε το r είναι αποδεκτός και K-T-L έλεγχος για το συνεχές πρόβλημα.

Απόδειξη:

Έστω τα $(\overline{r}^n)$ είναι έλεγχοι K-T-L τότε υπάρχουν πολλαπλασιαστές $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$, με $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, και $\sum_{l=0}^{2} \left|\lambda_l{}^n\right| = 1$, τέτοιοι ώστε να ισχύουν οι συνθήκες Kuhn-Tucker-Lagrange:

$$\text{(I)} \quad \lambda_0^n \cdot \delta_+ G_0^n(\overline{r}^n, \overline{r'}^n - \overline{r}^n) + \lambda_1^n \cdot \delta_+ G_1^n(\overline{r}^n, \overline{r'}^n - \overline{r}^n) + \lambda_2^n \cdot \delta_+ G_2^n(\overline{r}^n, \overline{r'}^n - \overline{r}^n) \geq 0, \quad \forall \overline{r'}^n \in R^n$$

και

$$\text{(II)} \quad \lambda_2^n \cdot G_2^n(\overline{r}^n) = 0$$

Έστω τυχόν $r' \in R$ και $(\overline{r'}^n) \in \overline{R}^n$ με $\overline{r'}^n \xrightarrow{L^2} r'$ (από Λήμμα 2Γ.3).

Η ακολουθία $(\lambda_0^n, \lambda_1^n, \lambda_2^n)$ ανήκει στο συμπαγές σύνολο S^3 και υπάρχει υπακολουθία $(\lambda_0^n, \lambda_1^n, \lambda_2^n)_{n \in K \subset \mathrm{N}}$ με $\lambda_l^n \to \lambda_l$, $l = 0,1,2$.

Έτσι για το $\sum_{l=0}^{2} \lambda_l^n \cdot \delta_+ G_l^n(\overline{r}^n, \overline{r'}^n - \overline{r}^n) \geq 0$ παίρνουμε όριο και έχουμε

$$\text{(1)} \quad \sum_{l=0}^{2} \lambda_l \cdot \delta_+ G_l(r, r' - r) \geq 0$$

Ομοίως παίρνουμε όριο στην $\lambda_2^n \cdot G_2^n(\overline{r}^n) = 0$ και έχουμε

$$\text{(2)} \quad \lambda_2 \cdot G_2(r) = 0$$

Από (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι το $\overline{r}$ είναι έλεγχος K-T-L για το συνεχές πρόβλημα.

Με τον ίδιο τρόπο όπως παραπάνω από την $G_1^n(\overline{r}^n) = 0$ παίρνοντας όριο έχουμε

$$\text{(3)} \quad G_1(r) = 0$$

Και για την $G_2^n(\overline{r}^n) \leq 0$ παίρνοντας όριο έχουμε (4) $G_2(r) \leq 0$

Άρα το r είναι αποδεκτό και για το συνεχές πρόβλημα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗΣ - ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο περιγράφουμε δύο μεθόδους, **μια** για το διακριτό **κλασικό** πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου και **μια** για το διακριτό **γενικευμένο**, με τους αντίστοιχους αλγορίθμους και τα θεωρήματα συμπεριφοράς στο όριο.

Οι παρακάτω αλγόριθμοι περιέχουν δύο επιλογές: την περίπτωση **σταθερής** διακριτοποίησης και την περίπτωση **προοδευτικά λεπτυνόμενης** διακριτοποίησης.

Στη δεύτερη περίπτωση, υποθέτουμε ότι, είτε $N^{n+1} = N^n$, είτε $N^{n+1} = \mu N^n$, για κάποιο ακέραιο $\mu \geq 2$, οπότε έχουμε

$$W^n \subset W^{n+1} \text{ (αντ. } R^n \subset R^{n+1}\text{)},$$

και έτσι ένας έλεγχος $w^n \in W^n$ (αντ. $r^n \in R^n$) μπορεί να θεωρηθεί ότι ανήκει και στο W^{n+1} (αντ. R^{n+1}), και επομένως ο υπολογισμός των καταστάσεων, συζυγών καταστάσεων, συναρτησιακών και των παραγώγων τους, για αυτόν τον έλεγχο, αλλά με μια ενδεχομένως λεπτύτερη διακριτοποίηση $n+1$, έχει νόημα.

Οι προοδευτικά λεπτυνόμενες εκδοχές των παρακάτω Αλγορίθμων 1 και 2 έχουν το πλεονέκτημα να απαιτούν αρκετά **μειωμένο υπολογιστικό χρόνο** και μειωμένη **μνήμη**, και αυτό με αποτελέσματα παραπλήσιας **ακρίβειας** με την περίπτωση σταθερής πολύ λεπτής διακριτοποίησης.

Το αξιοσημείωτο γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι, λεπτότερες διακριτοποιήσεις γίνονται **προοδευτικά πιο ουσιώδεις και αποτελεσματικές** όσο η επανάληψη του ελέγχου των αλγορίθμων πλησιάζει κάποιον οριακό έλεγχο K-T-L (ή βέλτιστο), ενώ λιγότερο λεπτές διακριτοποιήσεις στις πρώτες επαναλήψεις έχουν **μικρή επίδραση** στο τελικό αποτέλεσμα.

Επιπλέον, είναι θεωρητικά ενδιαφέρον ότι οι αντίστοιχες ακολουθίες που παράγονται έτσι **συγκλίνουν κατευθείαν** σε ελέγχους αποδεκτούς και K-T-L του κάθε **συνεχούς** προβλήματος, χωρίς τη χρήση των θεωρημάτων σύγκλισης αποδεκτών και K-T-L διακριτών ελέγχων σε αντίστοιχους συνεχείς.

Παράμετροι των Μεθόδων

Έστω (M_l^m), $l = 1,2$, (συντελεστές ποινής) αύξουσες ακολουθίες θετικών αριθμών, τέτοιες ώστε $M_l^m \to \infty$ όταν $m \to \infty$, $\gamma \geq 0$ (παράμετρος προβεβλημένης κλίσης**,** $\gamma > 0$, και Frank-

Wolfe, $\gamma = 0$), $b, c \in (0,1)$ (παράμετροι Armijo), και (β^m) (αριθμοί ελέγχου), (s_k) (αρχικά βήματα Armijo) θετικές ακολουθίες, με $s_k \le 1$ και (β^m) φθίνουσα που τείνει στο 0.
Οι παράμετροι αυτές επιλέγονται συνήθως πειραματικά, π.χ. $M_l^m \to \infty$ σχετικά αργά, $\beta^m \to 0$ σχετικά γρήγορα, $b = c = s_k = 0.5$ (βλ. και Παρατήρηση 3, στο τέλος). Το $\gamma > 0$ επηρεάζει την ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου προβεβλημένης κλίσης. Όλες αυτές οι παράμετροι εξαρτώνται από το κάθε πρόβλημα που αντιμετωπίζεται.

1. Διακριτή Κλασική Μικτή Μέθοδος Προβεβλημένης Κλίσης - Ποινών

Περιγράφουμε πρώτα τις διακριτές μικτές μεθόδους Προβεβλημένης Κλίσης Ποινών ($\gamma > 0$) και Frank-Wolfe Ποινών ($\gamma = 0$), και οι δύο με κλασικούς ελέγχους.

Ορίζουμε τα **ποινικοποιημένα** διακριτά κλασικά συναρτησιακά

$$G^{nm}(w^n) = G_0^n(w^n) + \frac{1}{2}\{M_1^m[G_1^n(w^n)]^2 + M_2^m[\max(0, G_2^n(w^n))]^2\}.$$

Η παράγωγος Fréchet της G^{nm}, ορισμένης στο W^n, δίνεται από

$$\begin{aligned} &G^{nm}{}'(w^n)(v^n - w^n) \\ &= G_0^{nm}{}'(w^n)(v^n - w^n) + \lambda_1 G_1^{nm}{}'(w^n)(v^n - w^n) + \lambda_2 G_2^{nm}{}'(w^n)(v^n - w^n) \\ &= h^n \sum_{j=0}^{N-1} [H_u(\bar{t}_j^n, \bar{y}_j^n, \bar{z}_j^n, w_j^n)(v_j^n - w_j^n)] \end{aligned}$$

όπου οι πολλαπλασιαστές λ_1, λ_2 δίνονται από

$$\lambda_1 = M_1^m G_1^n(w^n), \quad \lambda_2 = M_2^m \max(0, G_2^n(w^n)),$$

και οι πλήρεις Χαμιλτονιανή H και συζυγής κατάσταση z^n ορίζονται με την $g = g_0 + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 1

Βήμα 1: Θέτουμε $k = 0$, $m = 1$, και επιλέγουμε μια τιμή του n και έναν αρχικό έλεγχο $w_0^{n1} \in W^n$.

Βήμα 2: (Εύρεση Κατεύθυνσης Προβεβλημένης Κλίσης, αν $\gamma > 0$, ή Frank-Wolfe, αν $\gamma = 0$)

Βρίσκουμε ένα **σημείο κατεύθυνσης** $v_k^{nm} \in W^n$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} e_k &= G^{nm}{}'(w_k^{nm})(v_k^{nm} - w_k^{nm}) + \frac{\gamma}{2}\left\| v_k^{nm} - w_k^{nm} \right\|_{L^2(I)}^2 \\ &= \min_{v^n \in W^n} [G^{nm}{}'(w_k^{nm})(v^n - w_k^{nm}) + \frac{\gamma}{2}\left\| v^n - w_k^{nm} \right\|_{L^2(I)}^2], \end{aligned}$$

και θέτουμε

$$d_k = G^{nm}{}'(w_k^{nm})(v_k^{nm} - w_k^{nm}),$$

$$\lambda_{1k}^{nm} = M_1^m G_1^n(w_k^{nm}), \quad \lambda_{2k}^{nm} = M_2^m \max(0, G_2^n(w_k^{nm})).$$

Βήμα 3: Αν $|d_k| \le \beta^m$, θέτουμε

$$w^{nm} = w_k^{nm},\ v^{nm} = v_k^{nm},\ e^m = e_k,\ d^m = d_k,\ \lambda_1^{nm} = \lambda_{1k}^{nm},\ \lambda_2^{nm} = \lambda_{2k}^{nm},\ m = m+1,$$

[**επιλογή**: θέτουμε $n = n+1$, $w_k^{nm} = w_k^{n-1,m-1}$],

και πηγαίνουμε στο Βήμα 2.

Βήμα 4: (Εύρεση Βήματος Armijo)

Βρίσκουμε πρώτα το μικρότερο ακέραιο $\rho \in \mathbb{Z}$, έστω $\bar{\rho}$, τέτοιο ώστε $\alpha = c^{\rho} s_k \in (0,1]$ και το α να ικανοποιεί την ανισότητα

$$G^{nm}(w_k^{nm} + \alpha(v_k^{nm} - w_k^{nm})) - G^{nm}(w_k^{nm}) \le \alpha b d_k,$$

και μετά επιλέγουμε το **βήμα** $\alpha_k = c^{\bar{\rho}} s_k$.

Βήμα 5: Θέτουμε

$$w_{k+1}^{nm} = w_k^{nm} + \alpha_k(v_k^{nm} - w_k^{nm}), \quad k = k+1,$$

και πηγαίνουμε στο Βήμα 2.

O Αλγόριθμος 1 περιλαμβάνει δύο επιλογές:

Περίπτωση Α.
Η επιλογή $n = n+1$ στο Βήμα 3 παραλείπεται, οπότε το n είναι ένας σταθερός ακέραιος επιλεγμένος στο Βήμα 1, δηλ. η διακριτοποίηση παραμένει σταθερή.

Περίπτωση Β.
Η επιλογή $n = n+1$ στο Βήμα 3 δεν παραλείπεται, οπότε η διακριτοποίηση είναι προοδευτικά λεπτυνόμενη, δηλ. $n \to \infty$ (βλ. απόδειξη του παρακάτω Θεωρήματος 2), και μπορούμε να θέσουμε $n = 1$ στο Βήμα 1, άρα $n = m$ στον αλγόριθμο.

Διευκρινήσεις για τα Βήματα του Αλγορίθμου 1

Βήμα 2.
Αν $\gamma > 0$ (Προβεβλημένη Κλίση), η ελαχιστοποίηση στο Βήμα 2 ισοδυναμεί με την ελαχιστοποίηση ως προς $v^n \in W^n$, δηλ. ως προς τα $v_j^n \in U$, $j = 1,...,N$, όπου τα v_j^n είναι **ανεξάρτητα** μεταξύ τους, του αθροίσματος

$$h^n \sum_{j=0}^{N-1} [H_u(\bar{t}_j^n, \bar{y}_{kj}^{nm}, \bar{z}_{kj}^{nm}, w_{kj}^{nm})(v_j^n - w_{kj}^{nm}) + \frac{\gamma}{2}\left\| v_j^n - w_{kj}^{nm} \right\|^2],$$

όπου οι πλήρεις Χαμιλτονιανή H και συζυγής κατάσταση z^n ορίζονται με την $g = g_0 + \lambda_{1k}^{nm} g_1 + \lambda_{2k}^{nm} g_2$ (βλ. Βήμα 2),

ή ισοδύναμα,

με την ελαχιστοποίηση ως προς $v_j^n \in U$ του κάθε όρου του αθρίσματος ξεχωριστά, για κάθε $j = 1,...,N$.

“Συμπληρώνοντας το τετράγωνο” στον κάθε όρο, βλέπουμε ότι αυτό ισοδυναμεί με την ελαχιστοποίηση, ως προς $v_j^n \in U$, για κάθε $j = 1,...,N$, του τετραγώνου Ευκλείδειας νόρμας

$$\left\| v_j^n - [w_{kj}^{nm} - \frac{1}{\gamma} H_u(\overline{t}_j^n, \overline{y}_{kj}^{nm}, \overline{z}_{kj}^{nm}, w_{kj}^{nm})] \right\|_2^2$$

δηλ. τελικά με τη εύρεση της προβολής πάνω στο U του διανύσματος

$$w_{kj}^{nm} - \frac{1}{\gamma} H_u(\overline{t}_j^n, \overline{y}_{kj}^{nm}, \overline{z}_{kj}^{nm}, w_{kj}^{nm}),$$

για κάθε $j = 1,...,N$.

Αν $\gamma = 0$ (Frank-Wolfe), η ελαχιστοποίηση στο Βήμα 2 ισοδυναμεί με την ελαχιστοποίηση ως προς $v_j^n \in U$, για $j = 1,...,N$, του κάθε όρου (εδώ γραμμική συνάρτηση)

$$H_u(\overline{t}_j^n, \overline{y}_{kj}^{nm}, \overline{z}_{kj}^{nm}, w_{kj}^{nm}) v_j^n$$

ξεχωριστά.

Βήμα 3.
Εδώ γίνεται ο έλεγχος για ενδεχόμενη αλλαγή (αύξηση) των συντελεστών ποινής M_1^m, M_2^m.

Βήμα 4.
Από τον ορισμό της παραγώγου Fréchet, και αφού $b \in (0,1)$, εξασφαλίζεται ότι το βήμα Armijo α_k στο Βήμα 4 μπορεί να βρεθεί, για κάθε k, σε έναν πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων.

Ορισμός:
Ένας συνεχής ή διακριτός, κλασικός ή γενικευμένος, έλεγχος K-T-L καλείται **ανώμαλος** αν υπάρχουν πολλαπλασιαστές όπως στις αντίστοιχες αναγκαίες συνθήκες, αλλά με $\lambda_0 = 0$ (ή $\lambda_0^n = 0$). Ένας έλεγχος είναι αποδεκτός και ανώμαλος K-T-L σε εξαιρετικές περιπτώσεις (βλ. Warga).

Θεώρημα 1:
(i) Στην Περίπτωση Β, έστω (w^{nm}) μια υπακολουθία (αν υπάρχει) της ακολουθίας που παράγει ο Αλγόριθμος στο Βήμα 3, η οποία συγκλίνει σε κάποιο $w \in W$ στον L^2 ισχυρώς όταν $m \to \infty$ (άρα και $n \to \infty$). Αν οι ακολουθίες πολλαπλασιαστών (λ_l^{nm}), $l = 1,2$, που παράγονται στο Βήμα 3 είναι φραγμένες, τότε το w είναι αποδεκτό και κλασικό K-T-L για το συνεχές κλασικό πρόβλημα.

(ii) Στην Περίπτωση Α, έστω $(w^{nm} \in W^n)$, n σταθερό, μια υπακολουθία που παράγει ο Αλγόριθμος στο Βήμα 3 που συγκλίνει σε κάποιο $w^n \in W^n$ όταν $m \to \infty$. Αν οι αντίστοιχες υπακολουθίες (λ_l^{nm}) του Βήματος 3 είναι φραγμένες, τότε το w^n είναι αποδεκτό και K-T-L για το σταθερό διακριτό κλασικό πρόβλημα.

(iii) Στην παραπάνω περίπτωση σύγκλισης (i) ή (ii), υποθέτουμε ότι το (διακριτό ή συνεχές) οριακό πρόβλημα **δεν** έχει αποδεκτούς ανώμαλους ελέγχους K-T-L. Αν ο οριακός έλεγχος είναι αποδεκτός, τότε οι ακολουθίες πολλαπλασιαστών (λ_l^{nm}) είναι φραγμένες, και αυτός ο έλεγχος είναι K-T-L όπως πιο πάνω.
Απόδειξη:

Θα δείξουμε πρώτα ότι $m \to \infty$ στον Αλγόριθμο 1.

Αλλιώς, ας υποθέσουμε, και στις δύο Περιπτώσεις A και B, ότι το m, άρα και το n, παραμένει σταθερό μετά από έναν πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων σε k, και έτσι παραλείπουμε εδώ τους δείκτες m, n.

Θα δείξουμε ότι τότε $d_k \to 0$ και $e_k \to 0$.
Επειδή το W^n είναι συμπαγές, έστω $(w_k)_{k\in K}, (v_k)_{k\in K}$ υπακολουθίες των ακολουθιών που παράγονται στα Βήματα 2 και 5, τέτοιες ώστε

$$w_k \to \tilde{w},\ v_k \to \tilde{v}, \text{ στο } W^n, \text{ όταν } k \to \infty,\ k \in K.$$

Από το Βήμα 2, $d_k \le e_k \le 0$ για κάθε k (θέτοντας $v^n = w_k^{nm}$ στους ορισμούς των d_k, e_k, παίρνουμε την τιμή 0, άρα τα min είναι ≤ 0), άρα

$$e = \lim_{\substack{k\to\infty \\ k\in K}} e_k = G'(\tilde{w})(\tilde{v}-\tilde{w}) + \frac{\gamma}{2}\left\|\tilde{v}-\tilde{w}\right\|_{L^2}^2 \le 0,$$

$$d = \lim_{\substack{k\to\infty \\ k\in K}} d_k = G'(\tilde{w})(\tilde{v}-\tilde{w}) \le \lim_{\substack{k\to\infty \\ k\in K}} e_k = e \le 0,$$

με $d \le e \le 0$.
Ας υποθέσουμε ότι $d < 0$.
Η συνάρτηση

$$\Phi(\alpha) = G(w + \alpha(w' - w)) \text{ είναι συνεχής στο } [0,1].$$

Επειδή η παράγωγος Fréchet $G'(w)(w'-w)$ είναι γραμμική ως προς $w'-w$, η Φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, με παράγωγο

$$\Phi'(\alpha) = G'(w+\alpha(w'-w))(w'-w).$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής, έχουμε έτσι, για κάθε $\alpha \in (0,1]$

$$G(w_k + \alpha(v_k - w_k)) - G(w_k) = \alpha G'(w_k + \alpha'(v_k - w_k))(v_k - w_k),$$

για κάποιο $\alpha' \in (0,\alpha)$.
Επομένως, για $\alpha \in [0,1]$, από το Θεώρημα διακριτής συνέχειας, έχουμε

$$G(w_k + \alpha(v_k - w_k)) - G(w_k) = \alpha(d + \varepsilon_{k\alpha}),$$

όπου $\varepsilon_{k\alpha} \to 0$ όταν $k \to \infty$, $k \in K$, και $\alpha \to 0^+$.
Έχουμε

$$d_k = d + \eta_k,$$

όπου $\eta_k \to 0$ όταν $k \to \infty$, $k \in K$, και αφού $b \in (0,1)$

$$d + \varepsilon_{k\alpha} \le b(d + \eta_k) = bd_k,$$

για $\alpha \in [0, \alpha']$, για κάποιο $\alpha' > 0$, και $k \ge k'$, $k \in K$.
Επομένως

$$G(w_k + \alpha(v_k - w_k)) - G(w_k) \le \alpha bd_k, \qquad \text{για } \alpha \in [0,\alpha'],\ k \ge k',\ k \in K.$$

Από την επιλογή του βήματος Armijo α_k στο Βήμα 4 ισχύει αναγκαστικά $\alpha_k \ge c\alpha'$ για $k \ge k'$, $k \in K$.
Άρα

$$\begin{aligned} G(w_{k+1}) - G(w_k) &= G(w_k + \alpha_k(v_k - w_k)) - G(w_k) \\ &\le \alpha_k bd_k \le c\alpha' bd_k \le c\alpha' bd/2, \text{ για } k \ge k',\ k \in K. \end{aligned}$$

Προκύπτει ότι $G(w_k) \to -\infty$ όταν $k \to \infty$, $k \in \mathbb{N}$, αφού ολόκληρη η ακολουθία είναι φθίνουσα από την κατασκευή της, γεγονός που είναι σε αντίφαση με το ότι $G(w_k) \to G(\tilde{w})$, όταν $k \to \infty$, $k \in K$, από το Θεώρημα διακριτής συνέχειας.

Επομένως, πρέπει να ισχύει $d = 0$, άρα $e = 0$, $d_k \to d = 0$, $e_k \to e = 0$, μάλιστα για ολόκληρη την ακολουθία, από τη μοναδικότητα του ορίου.

Αλλά το Βήμα 3 συνεπάγεται ότι $m \to \infty$, που είναι άτοπο.

Συνεπώς, $m \to \infty$. Αυτό δείχνει επίσης ότι $n \to \infty$ στην Περίπτωση Β.

(i) Έστω (w^{nm}) μια υπακολουθία (ίδιος συμβολισμός) της ακολουθίας που παράγεται στο Βήμα 3, η οποία συγκλίνει στον L^2 σε ένα σημείο συσσώρευσης $w \in W$, όταν $n, m \to \infty$. Ας υποθέσουμε ότι οι ακολουθίες (λ_l^{nm}) είναι φραγμένες, και για κάποιες υπακολουθίες, ότι $\lambda_l^{nm} \to \lambda_l$, $l = 1,2$.

Από το Θεώρημα συμβατότητας, έχουμε

$$0 = \lim_{m\to\infty} \frac{\lambda_1^{nm}}{M_1^m} = \lim_{m\to\infty} G_1^n(w^{nm}) = G_1(w),$$

$$0 = \lim_{m\to\infty} \frac{\lambda_2^{nm}}{M_2^m} = \lim_{m\to\infty} [\max(0, G_2^n(w^{nm}))] = \max(0, G_2(w)),$$

που δείχνουν ότι το w είναι αποδεκτό.
Τώρα, έστω οποιοδήποτε $w' \in W$ και $(w'^n \in W^n)$ μια υπακολουθία που συγκλίνει στο w' στον L^2 ισχυρώς.
Από τα Βήματα 2 και 3, έχουμε

$$\begin{aligned} &G^{nm}{}'(w^{nm})(w'^n - w^{nm}) + (\gamma/2)\left\|\overline{w}'^n - \overline{w}^{nm}\right\|_{L^2}^2 \\ &= G_0^n{}'(w^{nm})(w'^n - w^{nm}) + \lambda_1^{nm} G_1^n{}'(w^{nm})(w'^n - w^{nm}) + \lambda_2^{nm} G_2^n{}'(w^{nm})(w'^n - w^{nm}) \\ &+ (\gamma/2)\left\|\overline{w}'^n - \overline{w}^{nm}\right\|_{L^2}^2 \ge e^m. \end{aligned}$$

Από το <u>Βήμα 3</u>, $\left|d^m\right| \le \beta^m \to 0$, άρα $e^m \to 0$.

Χρησιμοποιώντας και τη συμβατότητα, μπορούμε να περάσουμε στο όριο σε αυτή την ανισότητα για να βρούμε

$$G_0'(w)(w'-w) + \lambda_1 G_1'(w)(w'-w) + \lambda_2 G_2'(w)(w'-w) + (\gamma/2)\left\|w'-w\right\|_{L^2}^2 \ge 0,$$

που ισχύει για κάθε $w' \in W$, δηλ., αν $\gamma = 0$, κατευθείαν την κλασική αναγκαία ανισότητα.

Αν $\gamma > 0$, τότε αντικαθιστώντας το w' με $w + \theta(w'-w)$, $\theta \in (0,1]$, διαιρώντας με θ, και παίρνοντας μετά το όριο όταν $\theta \to 0$, βρίσκουμε πάλι την κλασική αναγκαία ανισότητα.

Από τον ορισμό των λ_2^{nm} και το Θεώρημα Συμβατότητας, αν $G_2(w) < 0$, τότε $\lambda_2^{nm} = 0$ για m αρκετά μεγάλο, άρα $\lambda_2 = 0$, που δείχνει ότι $\lambda_2 G_2(w) = 0$.

Προφανώς έχουμε επίσης $\lambda_0 = 1$, $\lambda_2 \ge 0$. Το w είναι συνεπώς συνεχές κλασικό K-T-L.

(ii) Παρόμοια με την απόδειξη του **(i)**, περνώντας στο όριο εδώ όταν $m \to \infty$, για n σταθερό, βρίσκουμε ότι

το w^n είναι αποδεκτό,

τη συνθήκη

$$G_0^n{}'(w^n)(w'^n - w^n) + \lambda_1^n G_1^n{}'(w^n)(w'^n - w^n) + \lambda_2^n G_2^n{}'(w^n)(w'^n - w^n) \ge 0, \text{ για κάθε } w'^n \in W^n,$$

τη διακριτή συνθήκη εγκαρσιότητας (από τη διακριτή συνέχεια του G_2^n, $\lambda_2^{nm} = 0$ αν $G_2^n(w^n) < 0$, για m αρκετά μεγάλο),

$$\lambda_2^n G_2^n(w^n) = 0,$$

και

$$\lambda_0^{nm} = \lambda_0^n = 1,\ \lambda_2^n \ge 0,$$

που δείχνουν ότι το w^n είναι διακριτό κλασικό K-T-L.

(iii) Στην παραπάνω περίπτωση σύγκλισης **(i)** ή **(ii)**, υποθέτουμε ότι ο οριακός έλεγχος είναι αποδεκτός και ότι το οριακό πρόβλημα δεν έχει αποδεκτούς, ανώμαλους ελέγχους K-T-L.

Ας υποθέσουμε ότι οι πολλαπλασιαστές δεν είναι όλοι φραγμένοι.

Τότε, διαιρώντας την αντίστοιχη ανισότητα που προκύπτει από το <u>Βήμα 2</u> με τη μεγαλύτερη νόρμα πολλαπλασιαστή και περνώντας στο όριο για κάποια υπακολουθία, εύκολα βλέπουμε ότι βρίσκουμε μια αναγκαία ανισότητα όπου ο πρώτος πολλαπλασιαστής είναι 0, και ότι ο οριακός έλεγχος είναι ανώμαλος K-T-L, άτοπο.

Συνεπώς, οι ακολουθίες πολλαπλασιαστών είναι φραγμένες, και από (i) ή (ii), αυτός ο οριακός έλεγχος είναι K-T-L όπως πιο πάνω.

2. Διακριτή Γενικευμένη Μικτή Μέθοδος Frank-Wolfe - Ποινών

Ο παρακάτω αλγόριθμος περιγράφει τη διακριτή μικτή μέθοδο Frank-Wolfe - Ποινών, με γενικευμένους ελέγχους.

Ορίζουμε τα **ποινικοποιημένα** διακριτά γενικευμένα συναρτησιακά

$$G^{nm}(r^n) = G_0^n(r^n) + \frac{1}{2}\{M_1^m[G_1^n(r^n)]^2 + M_2^m[\max(0, G_2^n(r^n))]^2\}.$$

Η παράγωγος θετικά κατά κατεύθυνση της G^{nm}, ορισμένης στο R^n, δίνεται από

$$\begin{aligned}
&\delta_+ G^{nm}(r^n, r'^n - r^n) \\
&= \delta_+ G_0^{nm}(r^n, r'^n - r^n) + \lambda_1 \delta_+ G_1^{nm}(r^n, r'^n - r^n) + \lambda_2 \delta_+ G_2^{nm}(r^n, r'^n - r^n) \\
&= h^n \sum_{j=0}^{N-1} [H(\overline{t}_j^n, \overline{y}_j^n, \overline{z}_j^n, r'^n_j - r_j^n)]
\end{aligned}$$

όπου οι πολλαπλασιαστές λ_1, λ_2 δίνονται από

$$\lambda_1 = M_1^m G_1^n(r^n), \quad \lambda_2 = M_2^m \max(0, G_2^n(r^n)),$$

και οι πλήρεις Χαμιλτονιανή H και συζυγής κατάσταση z^n ορίζονται με την $g = g_0 + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$.

<u>ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 2</u>

<u>Βήμα 1:</u> Έστω $k = 0$, $m = 1$, και επιλέγουμε μια τιμή του n και έναν αρχικό έλεγχο $r_0^{n1} \in R^n$.

<u>Βήμα 2:</u> (Εύρεση Κατεύθυνσης Frank-Wolfe)

Βρίσκουμε ένα **σημείο κατεύθυνσης** $\overline{r}_k^{nm} \in R^n$ τέτοιο ώστε

$$d_k = \delta_+ G^{nm}(r_k^{nm}, \overline{r}_k^{nm} - r_k^{nm}) = \min_{r^n \in R^n} \delta_+ G^{nm}(r_k^{nm}, r^n - r_k^{nm}),$$

και θέτουμε

$$\lambda_{1k}^{nm} = M_1^m G_1^n(r_k^{nm}), \quad \lambda_{2k}^{nm} = M_2^m \max(0, G_2^n(r_k^{nm})).$$

<u>Βήμα 3:</u> Αν $|d_k| \le \beta^m$, θέτουμε

$$r^{nm} = r_k^{nm},\ \overline{r}^{nm} = \overline{r}_k^{nm},\ d^m = d_k,\ \lambda_1^{nm} = \lambda_{1k}^{nm},\ \lambda_2^{nm} = \lambda_{2k}^{nm},\ m = m+1,$$

[**επιλογή**: θέτουμε $n = n+1$, $r_k^{nm} = r_k^{n-1,m-1}$],

και πηγαίνουμε στο Βήμα 2.

<u>Βήμα 4:</u> (Εύρεση Βήματος Armijo)

Βρίσκουμε πρώτα το μικρότερο ακέραιο $\rho \in \mathrm{Z}$, έστω $\overline{\rho}$, τέτοιο ώστε $\alpha = c^\rho s_k \in (0,1]$ και το α να ικανοποιεί την ανισότητα

$$G^{nm}(r_k^{nm} + \alpha(\overline{r}_k^{nm} - r_k^{nm})) - G^{nm}(r_k^{nm}) \le \alpha b d_k,$$

και μετά επιλέγουμε το **βήμα** $\alpha_k = c^{\overline{\rho}} s_k$.

<u>Βήμα 5:</u> Επιλέγουμε κάποιο $r_{k+1}^{nm} \in R^n$ τέτοιο ώστε

$$G^{nm}(r_{k+1}^{nm}) \le G^{nm}(r_k^{nm} + \alpha_k(\overline{r}_k^{nm} - r_k^{nm})),$$

θέτουμε $k = k+1$, και πηγαίνουμε στο Βήμα 2.

Ο Αλγόριθμος 2 περιλαμβάνει δύο επιλογές:

Περίπτωση Α.
Η επιλογή $n = n+1$ στο Βήμα 3 παραλείπεται, οπότε το n είναι ένας σταθερός ακέραιος επιλεγμένος στο Βήμα 1, δηλ. η διακριτοποίηση παραμένει σταθερή.

Περίπτωση Β.
Η επιλογή $n = n+1$ στο Βήμα 3 δεν παραλείπεται, οπότε η διακριτοποίηση είναι προοδευτικά λεπτυνόμενη, δηλ. $n \to \infty$ (βλ. απόδειξη του παρακάτω Θεωρήματος 2), και μπορούμε να θέσουμε $n = 1$ στο Βήμα 1, άρα $n = m$ στον αλγόριθμο.

Διευκρινήσεις για τα Βήματα του Αλγορίθμου 2

Βήμα 2.
Στην ελαχιστοποίηση του Βήματος 2, μπορούμε να βρούμε έναν **κλασικό** έλεγχο $\overline{r}_k^{nm}$ ελαχιστοποιώντας, για κάθε $j = 1,...,N$, ως προς $u \in U$ τον κάθε όρο (εδώ μη γραμμική συνάρτηση)

$$H(\overline{t}_j^{\,n}, \overline{y}_{kj}^{nm}, \overline{z}_{kj}^{nm}, u)$$

ξεχωριστά, όπου οι πλήρεις Χαμιλτονιανή H και συζυγής κατάσταση z^n ορίζονται με την $g = g_0 + \lambda_{1k}^{nm} g_1 + \lambda_{2k}^{nm} g_2$ (βλ. Βήμα 2).

Βήμα 3.
Εδώ γίνεται ο έλεγχος για ενδεχόμενη αλλαγή (αύξηση) των συντελεστών ποινής M_1^m, M_2^m.

Βήμα 4.
Από τον ορισμό της παραγώγου θετικά κατά κατεύθυνση, και αφού $b \in (0,1)$, εξασφαλίζεται ότι το βήμα Armijo α_k στο Βήμα 4 μπορεί να βρεθεί, για κάθε k, σε έναν πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων.

Βήματα 1 και 5.
Επιλέγουμε πρώτα έναν αρχικό διακριτό γενικευμένο έλεγχο Gamkrelidze (π.χ. έναν κλασικό) στο Βήμα 1, δηλ. ίσο σε κάθε διάστημα I_j^n με έναν κυρτό συνδυασμό $d+4$ μέτρων Dirac σε $d+4$ σημεία του U, όπου d η διάσταση του συστήματος.
Ας υποθέσουμε επαγωγικά, ότι ο έλεγχος r_k^{nm} που υπολογίζει ο αλγόριθμος είναι Gamkrelidze.
Επειδή ο έλεγχος $\overline{r}_k^{nm}$ στο Βήμα 2 επιλέχθηκε κλασικός (βλ. διευκρίνιση του Βήματος 2), δηλ. κατά διαστήματα Dirac, ο έλεγχος

$$\tilde{r}_k^{nm} := r_k^{nm} + \alpha(\overline{r}_k^{nm} - r_k^{nm})$$

στο Βήμα 5 είναι σε κάθε διάστημα I_j^n ίσος με ένα κυρτό συνδυασμό $d+5$ μέτρων Dirac.

Χρησιμοποιώντας, τώρα, μια γνωστή ιδιότητα των κυρτών περιβλημάτων πεπερασμένων διανυσματικών συνόλων, μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν έλεγχο Gamkrelidze r_{k+1}^{nm} **ισοδύναμο** με το $\tilde{r}_k^{nm}$, δηλ. τέτοιο ώστε να ισχύουν οι ακόλουθες $d+3$ ισότητες (δηλ. μια διανυσματική ισότητα στον $\mathbb{R}^{d+3}$)

$$f_i(\overline{t}_j^n, \overline{\overline{y}}_{kj}^{nm}, r_{k+1,j}^{nm}) = f_i(\overline{t}_j^n, \overline{\overline{y}}_{kj}^{nm}, \tilde{r}_{kj}^{nm}), \quad i = 1,...,d,$$
$$g_l(\overline{t}_j^n, \overline{\overline{y}}_{kj}^{nm}, r_{k+1,j}^{nm}) = g_l(\overline{t}_j^n, \overline{\overline{y}}_{kj}^{nm}, \tilde{r}_{kj}^{nm}), \quad l = 0,1,2, \qquad \text{για κάθε } j = 1,...,N,$$

όπου το $\tilde{y}_k^{nm}$ αντιστοιχεί στο $\tilde{r}_k^{nm}$, **επιλέγοντας μόνο** $d+4$ κατάλληλα σημεία στο U ανάμεσα στα $d+5$ που ορίζουν το $\tilde{r}_k^{nm}$, για κάθε j (στην πράξη αυτό γίνεται γεωμετρικά).

Σημειωτέον, ότι, στις παραπάνω $d+3$ ισότητες, τα αριστερά μέλη είναι κυρτοί συνδυασμοί $d+4$ όρων και τα δεξιά $d+5$ όρων, λόγω των ελέγχων Dirac.
Ο έλεγχος r_{k+1}^{nm} δίνει τότε την ίδια κατάσταση και τα ίδια συναρτησιακά με το $\tilde{r}_k^{nm}$.
Συνεπώς, ο έλεγχος r_k^{nm} είναι Gamkrelidze για κάθε k.

Προσέγγιση των διακριτών γενικευμένων ελέγχων Gamkrelidze με κλασικούς.

Οι έλεγχοι Gamkrelidze r_{k+1}^{nm} που υπολογίζονται όπως παραπάνω, μπορούν μετά να προσεγγιστούν με κατά διαστήματα σταθερούς κλασικούς ελέγχους με μια απλή διαδικασία (βλ. προσέγγιση διακριτών ελέγχων Gamkrelidze με κλασικούς).

Θεώρημα 2:
(i) Στην Περίπτωση Β, έστω (r^{nm}) μια υπακολουθία που παράγει ο αλγόριθμος στο Βήμα 3, η οποία συγκλίνει σε κάποιο $r \in R$ όταν $m \to \infty$ (άρα και $n \to \infty$). Αν οι ακολουθίες πολλαπλασιαστών (λ_l^{nm}), $l = 1,2$, που παράγονται στο Βήμα 3 είναι φραγμένες, τότε το r είναι αποδεκτό και K-T-L για το συνεχές γενικευμένο πρόβλημα.
(ii) Στην Περίπτωση Α, έστω $(r^{nm} \in R^n)$, n σταθερό, μια υπακολουθία που παράγει ο αλγόριθμος στο Βήμα 3 που συγκλίνει σε κάποιο $r^n \in R^n$ όταν $m \to \infty$. Αν οι αντίστοιχες υπακολουθίες (λ_l^{nm}) του Βήματος 3 είναι φραγμένες, τότε το r^n είναι αποδεκτό και K-T-L για το σταθερό διακριτό γενικευμένο πρόβλημα.
(iii) Στην παραπάνω περίπτωση σύγκλισης **(i)** ή **(ii)**, υποθέτουμε ότι το (διακριτό ή συνεχές) οριακό πρόβλημα δεν έχει αποδεκτούς ανώμαλους ελέγχους K-T-L. Αν ο οριακός έλεγχος είναι αποδεκτός, τότε οι ακολουθίες πολλαπλασιαστών (λ_l^{nm}) είναι φραγμένες, και αυτός ο έλεγχος είναι K-T-L όπως πιο πάνω.
Απόδειξη:

Θα δείξουμε πρώτα ότι $m \to \infty$ στον Αλγόριθμο 2.

Αλλιώς, ας υποθέσουμε, και στις δύο Περιπτώσεις Α και Β, ότι το m, άρα και το n, παραμένει σταθερό μετά από ένα πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων σε k, και έτσι παραλείπουμε εδώ τους δείκτες m και n.

Θα δείξουμε ότι τότε $d_k \to 0$.

Επειδή το R^n είναι συμπαγές, έστω $(r_k)_{k\in K}, (\overline{r}_k)_{k\in K}$ υπακολουθίες των ακολουθιών που παράγονται στα Βήματα 2 και 5 τέτοιες ώστε $r_k \to \tilde{r},\ \overline{r}_k \to \tilde{\overline{r}},$ στο R^n, όταν $k \to \infty,\ k \in K.$

Από το Βήμα 2, $d_k \le 0$ για κάθε k, άρα

$$d = \lim_{\substack{k\to\infty \\ k\in K}} d_k = \delta_+ G(\tilde{r}, \tilde{\overline{r}} - \tilde{r}) \le 0 .$$

Ας υποθέσουμε ότι $d < 0$.

Η συνάρτηση

$$\Phi(\alpha) = G(r + \alpha(r' - r)) \text{ είναι συνεχής στο} [0,1] .$$

Επειδή η παράγωγος θετικά κατά κατεύθυνση $\delta_+ G(r, r' - r)$ είναι εδώ γραμμική ως προς $r' - r$, η Φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, με παράγωγο

$$\Phi'(\alpha) = \delta_+ G(r + \alpha(r' - r), r' - r).$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής, έχουμε έτσι, για κάθε $\alpha \in (0,1]$

$$G(r_k + \alpha(\overline{r}_k - r_k)) - G(r_k) = \alpha \delta_+ G(r_k + \alpha'(\overline{r}_k - r_k), \overline{r}_k - r_k),$$

για κάποιο $\alpha' \in (0, \alpha)$.

Επομένως, για $\alpha \in [0,1]$, από το Θεώρημα συνέχειας, έχουμε

$$G(r_k + \alpha(\overline{r}_k - r_k)) - G(r_k) = \alpha(d + \varepsilon_{k\alpha}),$$

όπου $\varepsilon_{k\alpha} \to 0$ όταν $k \to \infty$, $k \in K$, και $\alpha \to 0^+$.

Έχουμε

$$d_k = d + \eta_k,$$

όπου $\eta_k \to 0$ όταν $k \to \infty$, $k \in K$, και αφού $b \in (0,1)$

$$d + \varepsilon_{k\alpha} \le b(d + \eta_k) = bd_k,$$

για $\alpha \in [0, \alpha']$, για κάποιο $\alpha' > 0$, και $k \ge k'$, $k \in K$.

Άρα

$$G(r_k + \alpha(\overline{r}_k - r_k)) - G(r_k) \le \alpha b d_k, \qquad \text{για } \alpha \in [0, \alpha'],\ k \ge k',\ k \in K .$$

Από την επιλογή του βήματος Armijo α_k στο Βήμα 4 ισχύει αναγκαστικά $\alpha_k \ge c\alpha'$ για $k \ge k'$, $k \in K$.

Άρα

$$\begin{aligned} G(r_{k+1}) - G(r_k) &= G(r_k + \alpha_k(\overline{r}_k - r_k)) - G(r_k) \\ &\le \alpha_k b d_k \le c\alpha' b d_k \le c\alpha' b d / 2, \end{aligned}$$

για $k \ge k'$, $k \in K$.

Προκύπτει ότι $G(r_k) \to -\infty$ όταν $k \to \infty$, $k \in \mathbb{N}$, αφού ολόκληρη η ακολουθία είναι φθίνουσα από την κατασκευή της, γεγονός που είναι σε αντίφαση με το ότι $G(r_k) \to G(\tilde{r})$, όταν $k \to \infty$, $k \in K$, από το Θεώρημα διακριτής συνέχειας.

Επομένως, έχουμε αναγκαστικά $d=0$, και $d_k \to 0$ για ολόκληρη την ακολουθία, από την μοναδικότητα του ορίου.

Αλλά το Βήμα 3 συνεπάγεται τότε ότι $m \to \infty$, που είναι άτοπο.

Συνεπώς, $m \to \infty$. Αυτό δείχνει επίσης ότι $n \to \infty$ στη Περίπτωση Β.

(i) Έστω (r^{nm}) μια υπακολουθία (ίδιος συμβολισμός) της ακολουθίας που παράγεται στο Βήμα 3, η οποία συγκλίνει σε ένα σημείο συσσώρευσης $r \in R$, όταν $n,m \to \infty$. Ας υποθέσουμε ότι οι ακολουθίες (λ_l^{nm}) είναι φραγμένες, και για κάποιες υπακολουθίες, ότι $\lambda_l^{nm} \to \lambda_l$, $l=1,2$. Από το Θεώρημα συμβατότητας, έχουμε

$$0=\lim_{m\to\infty}\frac{\lambda_1^{nm}}{M_1^m}=\lim_{m\to\infty}G_1^n(r^{nm})=G_1(r),$$
$$0=\lim_{m\to\infty}\frac{\lambda_2^{nm}}{M_2^m}=\lim_{m\to\infty}[\max(0,G_2^n(r^{nm}))]=\max(0,G_2(r)),$$

που δείχνουν ότι το r είναι αποδεκτό.

Τώρα, έστω οποιοδήποτε $r' \in R$ και $(r'^n = w'^n \in \overline{W}^n \subset R^n)$ μια ακολουθία που συγκλίνει στο r'.

Από τα Βήματα 2 και 3, έχουμε

$$\begin{aligned}&\delta_+ G^{nm}(r^{nm}, r'^n - r^{nm})\\ &=\delta_+ G_0^n(r^{nm}, r'^n - r^{nm}) + \lambda_1^{nm}\delta_+ G_1^n(r^n, r'^n - r^{nm}) + \lambda_2^{nm}\delta_+ G_2^n(r^n, r'^n - r^{nm}) \ge d^m .\end{aligned}$$

Από το Βήμα 3, $\left|d^m\right| \le \beta^m \to 0$.

Χρησιμοποιώντας και τη συμβατότητα, μπορούμε να περάσουμε στο όριο σε αυτή την ανισότητα για να καταλήξουμε στη συνεχή γενικευμένη αναγκαία ανισότητα.

Από τον ορισμό των λ_2^{nm} και το Θεώρημα συμβατότητας, αν $G_2(r)<0$, τότε $\lambda_2^{nm}=0$ για m αρκετά μεγάλο, άρα $\lambda_2=0$, που δείχνει ότι $\lambda_2 G_2(r)=0$.

Προφανώς έχουμε $\lambda_0=1$, $\lambda_2 \ge 0$. Συνεπώς, το r είναι συνεχές χαλαρό K-T-L.

(ii) Παρόμοια με την απόδειξη του **(i)**, παίρνοντας εδώ το όριο όταν $m \to \infty$, για n σταθερό, βρίσκουμε ότι

το r^n είναι αποδεκτό,

τη συνθήκη

$$\delta_+ G_0^n(r^n, r'^n - r^n) + \lambda_1^n \delta_+ G_1^n(r^n, r'^n - r^n) + \lambda_2^n \delta_+ G_2^n(r^n, r'^n - r^n) \ge 0, \quad \text{για κάθε } r'^n \in R^n,$$

τη διακριτή συνθήκη εγκαρσιότητας (από τη διακριτή συνέχεια του G_2^n, έχουμε $\lambda_2^{nm}=0$ αν $G_2^n(r^n)<0$, για m αρκετά μεγάλο),

$$\lambda_2^n G_2^n(r^n)=0,$$

και

$$\lambda_0^{nm}=\lambda_0^n=1,\ \lambda_2^n \ge 0,$$

που δείχνουν ότι το r^n είναι διακριτό χαλαρό K-T-L.

(iii) Παρόμοια με το **(iii)** του **Θεωρήματος 1**.

Παρατηρήσεις:

1. Οι Αλγόριθμοι 1 και 2 μπορούν να εφαρμοστούν και σε προβλήματα χωρίς περιορισμούς κατάστασης (άρα χωρίς ποινές), προφανώς θέτοντας $g_1 \equiv g_2 \equiv 0$.

2. Στους Αλγορίθμους 1 και 2, αν επιλέξουμε μετρίως αύξουσες ακολουθίες (M_l^m) και μια ακολουθία (β^m) που συγκλίνει σχετικά γρήγορα στο 0, οι ακολουθίες πολλαπλασιαστών (λ_l^{nm}) που προκύπτουν είναι συχνά φραγμένες, αν όχι συγκλίνουσες.

3. Στο Βήμα 4 μπορούμε να επιλέξουμε ένα σταθερό αρχικό βήμα Armijo $s_k := s \in (0,1]$ για κάθε k, π.χ. με $s = 1$. Μια πιο οικονομική (ειδικά όταν έχουμε ποινές), προσαρμοστική, επιλογή είναι να θέσουμε αρχικά $s_0 := 1$, και μετά $s_k := \alpha_{k-1}$, για $k \geq 1$. Απαιτούνται συνήθως έτσι πολύ λίγες επαναλήψεις για την εύρεση του βήματος Armijo στην κάθε επανάληψη k, αφού η επιλογή του s_k βασίζεται στην εύρεση του α_{k-1}, στην προηγούμενη επανάληψη.

4. Η μέθοδος Προβεβλημένης Κλίσης (Αλγόριθμος 1) είναι κατά πολύ ταχύτερη από τη μέθοδο Frank-Wolfe (Αλγόριθμοι 1 και 2), η οποία και δεν ενδείκνυται για τα κλασικά προβλήματα, αλλά είναι αναπόφευκτη για τα γενικευμένα, αφού εδώ δεν έχουμε εύχρηστη νόρμα στο R.

5. Τέλος, οι παραπάνω μέθοδοι μπορούν να εφαρμοστούν κατευθείαν στα συνεχή προβλήματα βέλτιστου ελέγχου. Οι αποδείξεις των αντίστοιχων θεωρημάτων είναι παρόμοιες με των Θεωρημάτων 1 και 2, χρησιμοποιώντας εδώ, αντί την διακριτή συνέχεια και τη συμβατότητα, τη **συνέχεια** των τελεστών $w \mapsto G(w)$, $r \mapsto G(r)$ και των παραγώγων. Οι συνεχείς μέθοδοι αυτές έχουν όμως καθαρά θεωρητικό ενδιαφέρον και παραλείπονται.

Κεφάλαιο V

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1. Ορίζουμε την κατάσταση και τον έλεγχο αναφοράς

$$\tilde{y}_1(t) = e^{-t},\ \tilde{y}_2(t) = e^{-2t},\ \tilde{y}_3(t) = e^{-3t}, \qquad \tilde{u}(t) = \min(1, -1 + 2.5t),$$

και θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου, με εξισώσεις κατάστασης

$$y_1' = -y_1 + y_3 - e^{-3t} + \sin y_1 - \sin \tilde{y}_1 + u_1 - \tilde{u},$$

$$y_2' = y_1 - 2y_2 - e^{-t} + u_2 - \tilde{u},$$

$$y_3' = y_2 - 3y_3 - e^{-2t} + u_3 - \tilde{u},$$

για $t \in [0,1]$,

με $y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 1,$

σύνολο περιορισμού ελέγχου $U = [-1,1]$, και συναρτησιακό κόστους

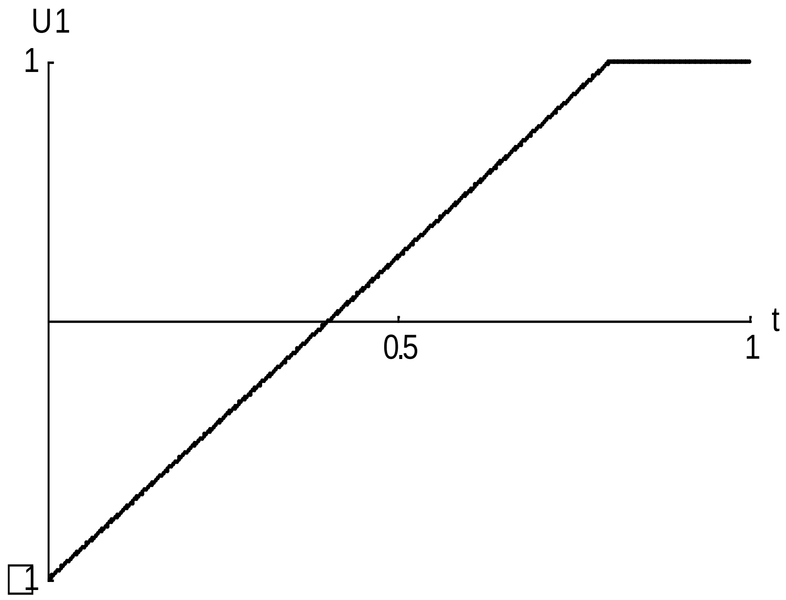
$$G_0(u) := 0.5\int_0^1 \{\sum_{i=1}^{3} [(y_i - \tilde{y}_i)^2 + (u_i - \tilde{u})^2]\} dt.$$

Ο μοναδικός βέλτιστος κλασικός έλεγχος είναι εδώ προφανώς $w_1^* = w_2^* = w_3^* = \tilde{u}$, με βέλτιστη κατάσταση $y^* = \tilde{y}$ και βέλτιστο κόστος μηδέν. Εφαρμόστηκε εδώ η μέθοδος Προβεβλημένης Κλίσης για κλασικό βέλτιστο έλεγχο (Αλγόριθμος 1 χωρίς ποινές), με $h = 1/500$ και $\gamma = 0.5$. Μετά από 12 επαναλήψεις, βρέθηκαν τα ακόλουθα αποτελέσματα

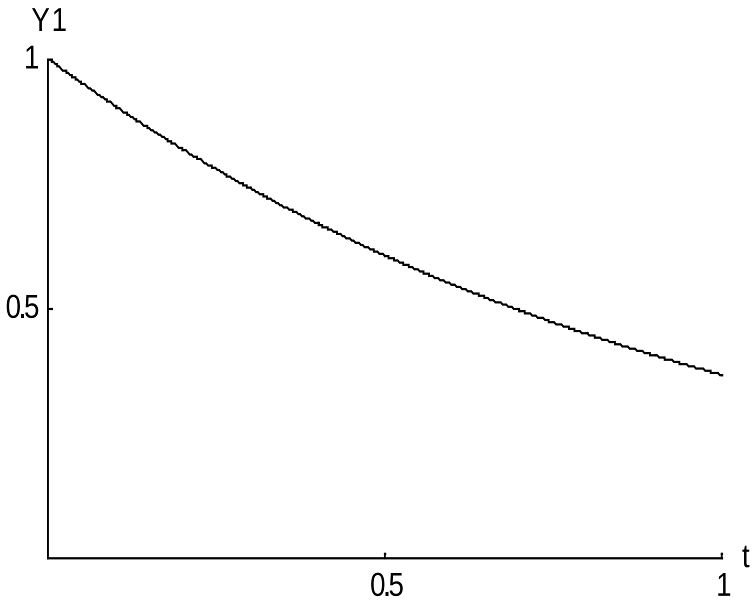
$G_0 = 1.4956 \cdot 10^{-12}$, $d_k =$ -8.1931 $\cdot 10^{-13}$,

Ακριβή σφάλματα διακριτής max-νόρμας 1$^{\omega\nu}$ συνιστωσών ελέγχου και κατάστασης, αντ.:

$\varepsilon_u = 3.6122 \cdot 10^{-7}$, $\varepsilon_y = 2.9799 \cdot 10^{-7}$.



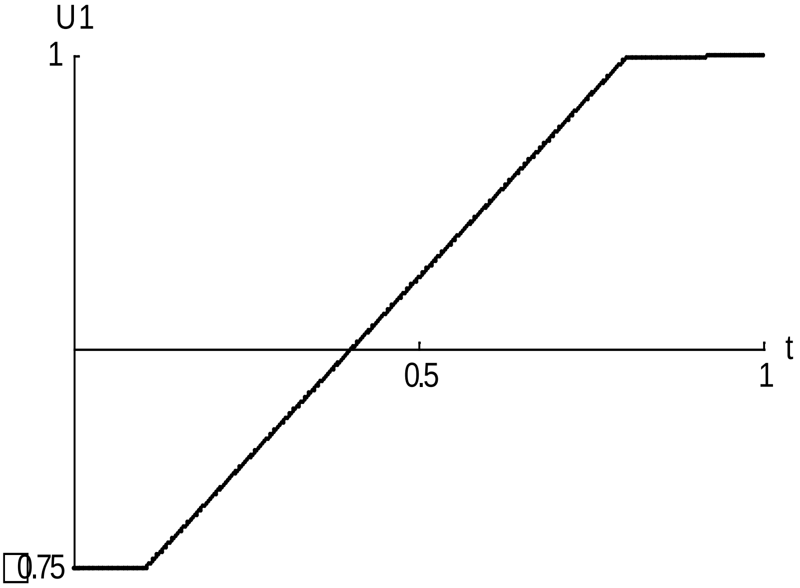
ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ U1: ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1



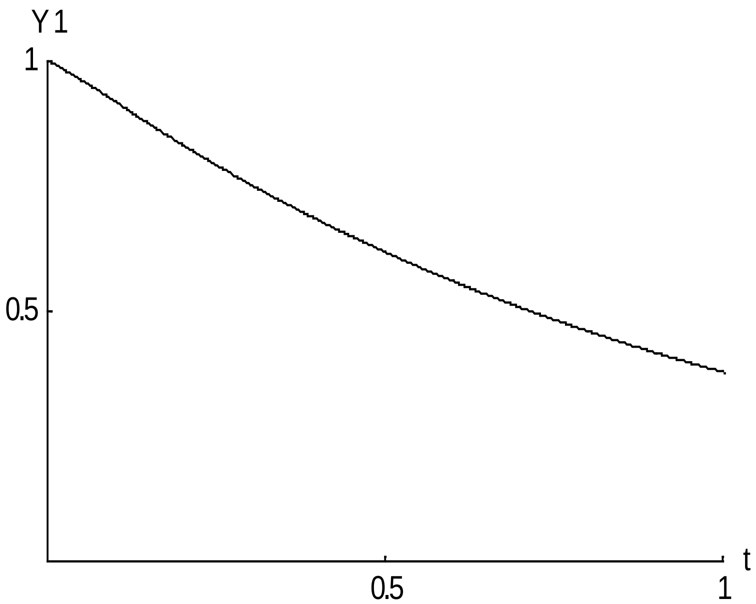
ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ Υ1: ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Πρόβλημα 2. Ίδιο με το Πρόβλημα 1, αλλα με σύνολο περιορισμού ελέγχου $U = [-0.75, 1]$. Εφαρμόστηκε η μέθοδος Προβεβλημένης Κλίσης για κλασικό βέλτιστο έλεγχο (Αλγόριθμος 1 χωρίς ποινές), με $h = 1/500$ και $\gamma = 0.5$. Μετά από 16 επαναλήψεις βρέθηκαν τα αποτελέσματα

$$G_0 = 3.2597 \cdot 10^{-3}, \quad d_k = -4.1058 \cdot 10^{-14}.$$



ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ U1: ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2



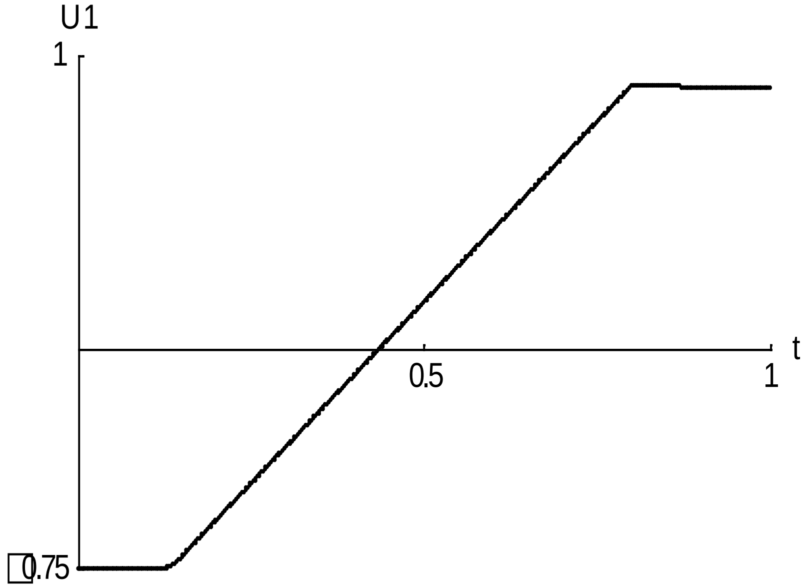
ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ Y1: ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Πρόβλημα 3. Ίδιο με το Πρόβλημα 2, αλλά με πρόσθετο περιορισμό στην τελική κατάσταση

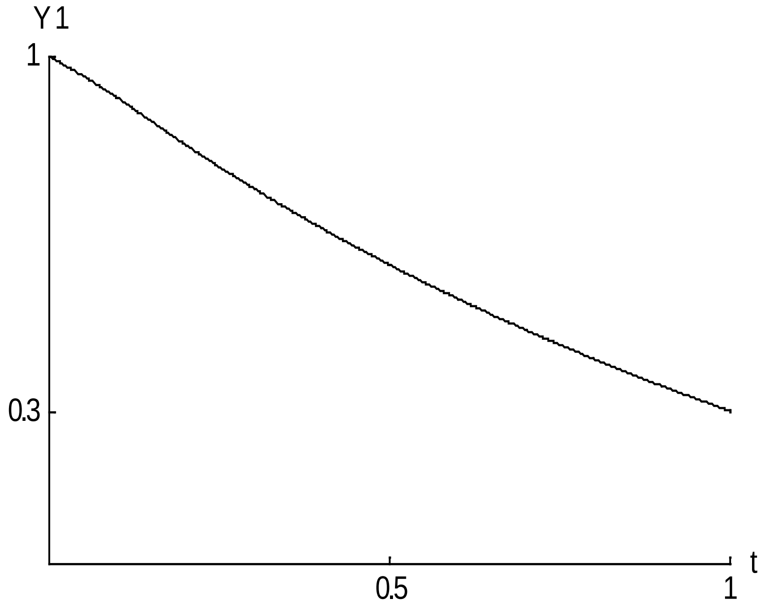
$$G_1(u) = y_1(1) - 3 = 0 .$$

Εφαρμόστηκε εδώ η μικτή μέθοδος Προβεβλημένης Κλίσης Ποινών για κλασικό βέλτιστο έλεγχο (Αλγόριθμος 1), με $h = 1/500$, $\gamma = 0.5$, και με μια πρόσθετη ποινή. Μετά από 100 συνολικές επαναλήψεις σε k, βρέθηκαν τα ακόλουθα αποτελέσματα

$$G_0 = 7.7305 \cdot 10^{-3}, \quad 0.5G_1^2 = 4.3054 \cdot 10^{-9}, \quad d_k = \text{-}3.3083 \cdot 10^{-6} .$$



ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ U1: ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3



ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ Y1: ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Πρόβλημα 4. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου, με εξισώσεις κατάστασης

$$y_1' = -y_2 + w_1, \quad y_2' = -y_1 + w_2, \quad t \in [0, 0.5),$$

$$y_1' = -y_2 + w_1 - t + 0.5, \quad y_2' = -y_1 + w_2 - t + 0.5, \quad t \in [0.5, 1],$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 1,$$

μη κυρτό σύνολο περιορισμού ελέγχων

$$U = \{(u_1, 0) \in IR^2 \,|\, 0 \le u_1 \le 1\} \cup \{(0, u_2) \in IR^2 \,|\, 0 \le u_2 \le 1\},$$

και συναρτησιακό κόστους

$$G_0(w) = 0.5\int_0^1 [(y_1 - \tilde{y})^2 + (y_2 - \tilde{y})^2]dt, \quad \text{όπου } \tilde{y} = e^{-t}.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι ο μοναδικός βέλτιστος γενικευμένος έλεγχος του αντίστοιχου γενικευμένου προβλήματος είναι

$$r^*(t) = \delta_{(0,0)}, \quad t \in [0, 0.5) \quad \text{(κλασικός)},$$

$$r^*(t) = 2(1-t)\delta_{(0,0)} + (t - 0.5)\delta_{(1,0)} + (t - 0.5)\delta_{(0,1)}, \quad t \in [0.5, 1] \quad \text{(μη κλασικός)},$$

(τα δ συμβολίζουν εδώ μέτρα Dirac) που δίνει τη βέλτιστη κατάσταση $(y_1^*, y_2^*) = (\tilde{y}, \tilde{y})$ και βέλτιστο κόστος $G_0(r^*) = 0$. Εξάλλου, μπορούμε να προσεγγίσουμε το r^* (και άρα την κατάσταση $(\tilde{y}, \tilde{y})$ και το κόστος $G_0(r^*) = 0$) μέσω ενός κλασικού ελέγχου, αλλά η κατάσταση $(\tilde{y}, \tilde{y})$ με κόστος 0 δεν είναι εφικτή με κλασικό έλεγχο αφού απαιτεί, στο $[0.5, 1]$, τον έλεγχο $(t - 0.5, t - 0.5)$ και ισχύει

$$(t - 0.5, t - 0.5) \notin U \quad \text{για } t \in (0.5, 1].$$

Άρα ***δεν υπάρχει*** βέλτιστος κλασικός έλεγχος.

Εφαρμόστηκε εδώ η μέθοδος Frank-Wolfe για γενικευμένο έλεγχο (Αλγόριθμος 2 χωρίς ποινές), με $h = 1/500$. Μετά από 120 επαναλήψεις σε k, βρέθηκαν τα ακόλουθα αποτελέσματα

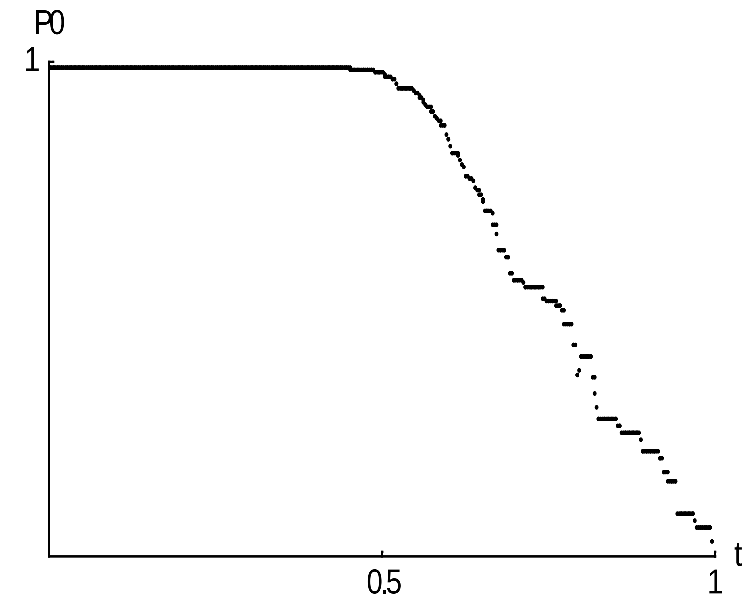
$$G_0(r_k) = 2.552 \cdot 10^{-6}, \quad d_k = -3.393 \cdot 10^{-5},$$

Πιθανότητες τελικού γενικευμένου ελέγχου:

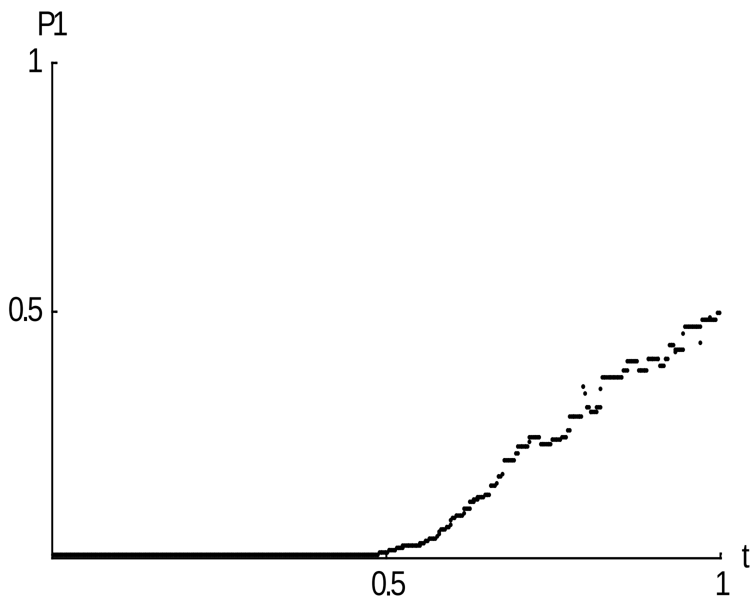
$$p_0(t) = r(t)(\{(0,0)\}) \approx \begin{cases} 1, & t \in [0, 0.5) \\ 2(1-t), & t \in [0.5, 1) \end{cases}$$

$$p_1(t) = r(t)(\{(1,0)\}) \approx \begin{cases} 0, & t \in [0, 0.5) \\ t - 0.5, & t \in [0.5, 1) \end{cases}$$

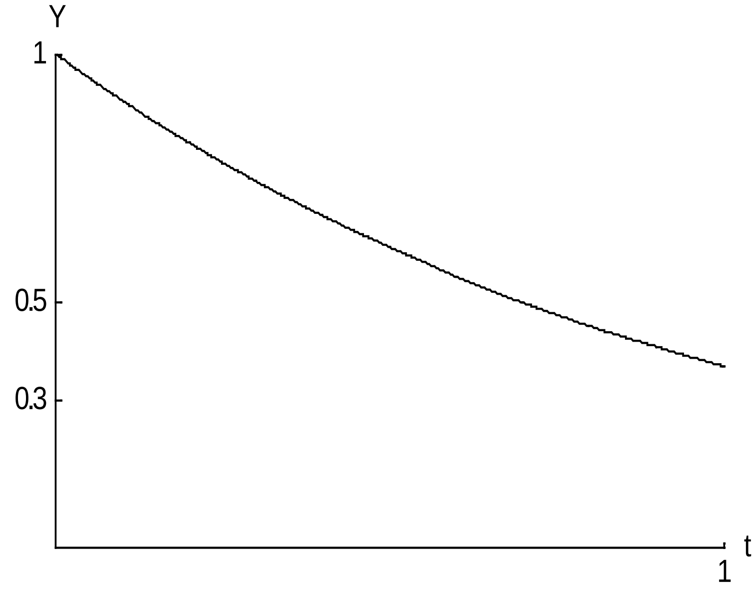
$$p_2(t) = r(t)(\{(0,1)\}) = 1 - p_0(t) - p_1(t).$$



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4: ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ P0



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4: ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ P1



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4: ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

Πρόβλημα 5. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου, με εξισώσεις κατάστασης

$$y_1' = -y_1 + w, \quad t \in I, \quad y_1(0) = 1,$$

$$y_2' = 0.5[\max(0, 0.3 - y_2(t))]^2, \quad t \in I, \quad y_2(0) = 0,$$

σύνολο περιορισμό ελέγχου $U = [-1,1]$ (διάστημα), περιορισμούς στην κατάσταση

$$G_1(w) = y_1(1) - 0.5 = 0,$$

$$G_2(w) = y_2(1) = 0 \quad (\text{δηλαδή } y_1(1) \le 0.3 \text{ στο } I),$$

και ***μη κυρτό*** συναρτησιακό κόστους

$$G_0(w) = \int_0^1 (0.5{y_1}^2 - w^2)dt.$$

Γράφοντας εδώ τη λύση της πρώτης διαφορικής εξίσωσης κατάστασης ***σε κλειστή μορφή*** μέσω της θεμελιώδους λύσης ΣΔΕ Cauchy (fundamental solution), πρώτα προς τα εμπρός, με αρχική συνθήκη $y(0) = 1$, και μετά προς τα πίσω, με τελική συνθήκη $y(1) = 0.5$, εύκολα βλέπουμε ότι ο μοναδικός βέλτιστος *γενικευμένος* έλεγχος και η μοναδική βέλτιστη κατάσταση είναι

$$r^*(t) = \begin{cases} \delta_{-1}, \ t \in [0, \rho) \ \ (\text{κλασικός}) \\ 0.35\delta_{-1} + 0.65\delta_1, \ t \in [\rho, \sigma) \ \ (\text{μη κλασικός}) \ \ (\textit{προσομοίωση του } w = 0.3) \\ \delta_1, \ t \in [\sigma, 1] \ \ (\text{κλασικός}) \end{cases}$$

$$y_1^*(t) = \begin{cases} -1 + 2e^{-t}, \ t \in [0, \rho) \\ 0.3, \ t \in [\rho, \sigma) \\ 1 - 0.5e^{1-t}, \ t \in [\sigma, 1] \end{cases}$$

όπου το $\rho = -\ln 0.65 \approx 0.43$ είναι τέτοιο ώστε $-1 + 2e^{-\rho} = 0.3$, και το $\sigma = 1 - \ln 1.4 \approx 0.66$ τέτοιο ώστε $1 - 0.5e^{1-\sigma} = 0.3$. Το ακριβές βέλτιστο κόστος είναι

$$G_0(r^*) \approx -0.868398913624.$$

Ο ***κλασικός έλεγχος***, ο οποίος παίρνει τις ίδιες τιμές με το γενικευμένο Dirac (δηλ. κλασικό) r^* εκτός $[\rho,\sigma]$, και τη σταθερή τιμή 0.3 στο $[\rho,\sigma]$, δίνει την ίδια κατάσταση με το γενικευμένο r^*, αλλά μεγαλύτερο κόστος (συνεισφορά -0.09 αντί -1 του όρου $-w^2$ στο G_0).

Επιπλέον, αφού το r^* προσεγγίζεται όσο κοντά θέλουμε με ένα κλασικό έλεγχο (π.χ. με w που παίρνει εναλλάξ τιμές -1, $+1$ σε διαδοχικά αρκετά μικρά ίσα υποδιαστήματα του $[\rho,\sigma]$, και $w = r^* = \delta_{\pm 1}$ εκτός $[\rho,\sigma]$), αλλά που δεν μπορεί ποτέ να δώσει τη βέλτιστη γενικευμένη κατάσταση (αφού αυτό απαιτεί ***σταθερή*** τιμή ελέγχου 0.3), συμπεραίνουμε τελικά ότι ***δεν υπάρχει*** βέλτιστος κλασικός έλεγχος.

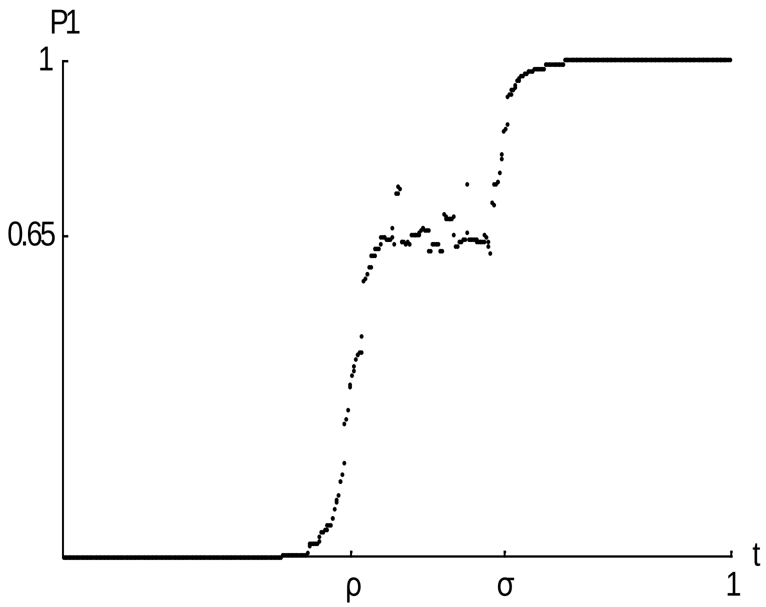
Με την εφαρμογή της μικτής μεθόδου Frank-Wolfe Ποινών στο γενικευμένο πρόβλημα (Αλγόριθμος 2), με $h = 1/500$, βρέθηκαν, μετά από 200 συνολικές επαναλήψεις σε k, τα ακόλουθα αποτελέσματα

$G_0(r_k^m) = -0.868200567558, \quad G_1(r_k^m) = -9.732 \cdot 10^{-6}$,
$G_2(r_k^m) = 2.7830 \cdot 10^{-10}$,

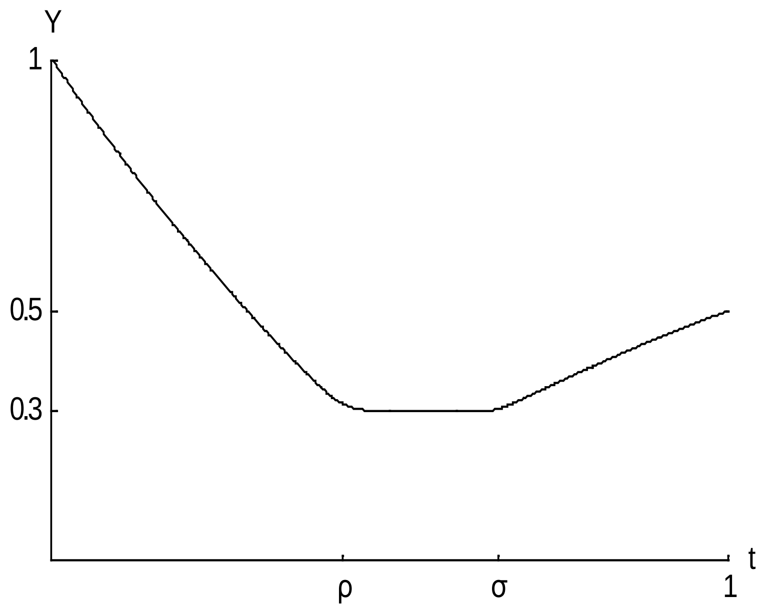
Διακριτή L^∞-νόρμα της *παραβίασης* του σημειακού περιορισμού κατάστασης:
$\theta_k := \max_i [\max(0, 0.3 - y_{1i,k}^m)] = 2.962 \cdot 10^{-4}$,
$d_k = -1.236 \cdot 10^{-3}$,

Πιθανότητες τελικού γενικευμένου ελέγχου:

$$p_1(t) = r(t)(\{(1)\}) \approx \begin{cases} 0, & t \in [0,\rho) \\ 0.65, & t \in [\rho,\sigma) \\ 1, & t \in [\sigma,1] \end{cases} \qquad p_0(t) = r(t)(\{-1\}) = 1 - p_1(t).$$



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5: ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ P1



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5: ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

Τέλος, εφαρμόστηκαν στα παραπάνω προβλήματα οι αντίστοιχες μέθοδοι με ***προοδευτικά λεπτυνόμενη διακριτοποίηση*** (π.χ. με 4 διαδοχικούς αριθμούς διαστημάτων $N = 64, 128, 256, 512$, σε 4 περιόδους σχεδόν ισάριθμων επαναλήψε-ων), οι οποίοι και έδωσαν αποτελέσματα παραπλήσιας ακρίβειας, αλλά απαίτησαν περίπου το μισό χρόνο υπολογισμού. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι, λεπτότερες διακριτοποιήσεις γίνονται προοδευτικά πιο αποτελεσματικές όσο η επανάληψη του ελέγχου της μεθόδου βελτιστοποίησης πλησιάζει κάποιον οριακό έλεγχο K-T-L (ή βέλτιστο), ενώ λιγότερο λεπτές διακριτοποιήσεις στις πρώτες επαναλήψεις έχουν μικρή επίδραση στο τελικό αποτέλεσμα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΜΕΡΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΜΕΤΡΟΥ
ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ KUHN-TUCKER-LAGRANGE

1. ΜΕΡΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΜΕΤΡΟΥ

Θεώρημα 1.0

Έστω $\phi \in L^1(D,\mathbb{R})$, με D μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Αν ισχύει

$$\int_S \phi(v)dv \geq 0 \ (\text{αντ.} \leq 0\,, \ =0), \quad \text{για κάθε μετρήσιμο σύνολο } S \subset D,$$

τότε $\phi(v) \geq 0$ (αντ. ≤ 0, $=0$) σ.π. στο D.

Θεώρημα 1.1 (Egorov)

Έστω (ϕ_k) μία ακολουθία που συγκλίνει στην ϕ στον $L^p(D,\mathbb{R}^n)$ με $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ ή $p = \infty$ (στην παρούσα διατριβή $p = 2$). Τότε υπάρχει υπακολουθία που συγκλίνει στη ϕ σχεδόν παντού στο D.

Θεώρημα 1.2 (Κυριαρχημένης Σύγκλισης Lebesgue)

Έστω (ϕ_k) μία ακολουθία του $L^1(D,\mathbb{R}^n)$, με D μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, τέτοια ώστε

$$\lim_{k\to\infty} \phi_k(v) = \phi(v) \ \text{σ.π. στο } D, \text{ και}$$

$$\|\phi_k(v)\| \leq \psi(v) \ \text{σ.π. στο } D, \text{ για κάθε } k, \text{ όπου } \psi \in L^1(D,\mathbb{R})$$

Τότε

$$\lim_{k\to\infty} \int_D \phi_k(v)dv = \int_D \phi(v)dv.$$

Έστω $D \subset \mathbb{R}^d$ συμπαγές και $\Phi \subset C(D,\mathbb{R}^n)$ ένα υποσύνολο συνεχών απεικονίσεων. Οι απεικονίσεις $f \in \Phi$ λέγονται **ισοσυνεχείς στο σημείο** $v \in D$ αν

για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|f(v') - f(v)\| \le \varepsilon \text{, για κάθε } v' \in D \text{, με } \|v' - v\| \le \delta \text{, και κάθε } f \in \Phi .$$

Οι απεικονίσεις $f \in \Phi$ λέγονται **ισοσυνεχείς στο** D αν είναι ισοσυνεχείς σε κάθε $v \in D$, οπότε το D λέγεται **ισοσυνεχές**.

Θεώρημα 1.3 (Ascoli)
Έστω $\Phi \subset C(D, \mathbb{R}^n)$, με $D \subset \mathbb{R}^d$ συμπαγές. Το Φ είναι **σχετικά συμπαγές** (δηλ. η κλειστή θήκη $\overline{\Phi}$ του Φ είναι συμπαγής) αν και μόνο αν είναι φραγμένο και ισοσυνεχές.

Από το Θεώρημα Ascoli συμπαιρένουμε άμεσα ότι, για κάθε φραγμένη ακολουθία (f_k) ισοσυνεχών απεικονίσεων του $C(D, \mathbb{R}^n)$ με $D \subset \mathbb{R}^d$ συμπαγές, υπάρχει υπακολουθία της (f_k) που συγκλίνει, ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ (δηλ. ομοιόμορφα), σε μία απεικόνιση $f \in C(D, \mathbb{R}^n)$.

2. ΑΦΘΟΝΑ ΣΥΝΟΛΑ ΚΛΑΣΙΚΩΝ ΕΛΕΓΧΩΝ

Έστω $I = [0,T]$ ένα διάστημα και, για κάθε n, ένας μερισμός του I σε $N = N^n$ διαστήματα $I_j^n = [t_j^n, t_{j+1}^n)$, $j = 0,...,N-2$, $I_{N-1}^n = [t_{N-1}^n, t_N^n]$, μήκους $h^n = T / N^n$.

Έστω W το σύνολο των L^∞ κλασικών ελέγχων από το I στο συμπαγές (όχι απαραιτήτως κυρτό) σύνολο $U \subset \mathbb{R}^{d'}$, R το σύνολο των γενικευμένων ελέγχων από το I στο σύνολο $M_1(U)$ των μέτρων πιθανότητας στο U, W^n (αντ. R^n) το σύνολο των κατά διαστήματα I_j^n σταθερών (δηλ. διακριτών) κλασικών (αντ. γενικευμένων) ελέγχων, $\overline{W}$ το σύνολο των σταθερών κατά (τυχαία) διαστήματα κλασικών ελέγχων, και $\tilde{W}$ το σύνολο των συνεχών κατά (τυχαία) διαστήματα, και συνεχώς επεκτάσιμων στα άκρα τους, κλασικών ελέγχων.

Έχουμε $W^n \subset \overline{W} \subset \tilde{W} \subset W \subset R$ και $W^n \subset R^n \subset R$ (με την ***ταύτιση*** $w(t) :\equiv \delta_{w(t)}$ σ.π., στο I, δ μέτρο Dirac).

Σημειωτέον ότι εδώ το U **δεν** εξαρτάται από το t, όπως πιο γενικά στον Warga (πολύ δυσκολότερη περίπτωση), αλλά τα παρακάτω αποτελέσματα εύκολα γενικεύονται για τη χρήσιμη πρακτικά περίπτωση μιας κατά (τυχαία) διαστήματα σταθερή απεικόνισης $t \mapsto U(t)$, με $U(t) \subset \mathbb{R}^{d'}$ συμπαγές για κάθε $t \in I$.

Επίσης, για κάθε n, έστω $r^n \in R$ ένας διακριτός γενικευμένος έλεγχος Gamkrelidze

$$r^n(t) := \sum_{i=0}^{m} \alpha_{ji}^n \delta_{w_i^n(t)} \text{, για } t \in I_j^n,\ j = 0,...,N-1 \text{, όπου}$$

$$w_i^n \in W^n,\ i = 0,...,m,\ m \ge 1,\ \alpha_j^n \in T^m,\ j = 0,...,N-1 \text{, και}$$

$$T^m := \{\alpha = (\alpha_0,...,\alpha_m) \in \mathbb{R}_+^{m+1} \mid \sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 1\}.$$

Θα δείξουμε εδώ ότι τα σύνολα $\overline{W}$, $\widetilde{W}$, W είναι **άφθονα** (abundant, βλ. Warga, σελ. 281, conditions (1), (2)), όχι μόνο πυκνά στο R.

Το $W' \subset W$ λέγεται **σημειακά πυκνό** αν περιέχει ένα αριθμήσιμο υποσύνολο $\{w_k\}_{k\in \mathrm{N}}$ τέτοιο ώστε το σύνολο $\{w_k(t)\}_{k\in \mathrm{N}}$ να είναι πυκνό στο U, σ.π. στο I.

Το $W' \subset W$ λέγεται **ομοιόμορφα** m **-πυκνό** αν:

(i) Για κάθε $r_i \in R$, $i=0,...,m$, και $\alpha \in T^m$, υπάρχει ακολουθία $(\overline{w}_\alpha^n \in W')$ που συγκλίνει στο $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \cdot r_i$ στο R, ομοιόμορφα ως προς α, και

(ii) Για κάθε n σταθερό, η απεικόνιση $\alpha \mapsto \overline{w}_\alpha^n$, από το T^m στο R, είναι συνεχής.

Το W' λέγεται **άφθονο** αν είναι σημειακά πυκνό και ομοιόμορφα m-πυκνό για κάθε $m \geq 1$.

Θεώρημα 2.1

Τα σύνολα $\overline{W}$, $\widetilde{W}$, και W είναι άφθονα.

Απόδειξη:

α) Τα σύνολα $\overline{W}$, $\widetilde{W}$, W είναι προφανώς σημειακά πυκνά αφού το $U \subset \mathbb{R}^{d'}$ είναι συμπαγές και άρα περιέχει ένα αριθμήσιμο υποσύνολο σημείων (με αντίστοιχους σταθερούς έλεγχους στο I, που ανήκουν και στα τρία αυτά σύνολα) πυκνό στο U.

β) (i) Έστω $r_i \in R$, $i=0,...,m$, και $\alpha \in T^m$. Από το Θεώρημα 2Γ.4 (Κεφ. ΙΙΙ), υπάρχουν $m+1$ ακολουθίες $(w_i^n \in W^n)$, τέτοιες ώστε $w_i^n \to r_i$ στο R, $i=0,...,m$, όταν $n \to \infty$, οπότε, για δεδομένη $f \in C(I,U)$, έχουμε

$$(3) \qquad \left| \sum_i \alpha_i \int_I f(t, w_i^n) dt - \sum_i \alpha_i \int_I f(t, r_i) dt \right|$$

$$= \left| \int_I f(t, \sum_i \alpha_i \delta_{w_i^n}) dt - \int_I f(t, \sum_i \alpha_i r_i) dt \right| := \rho^n \to 0,$$

προφανώς ομοιόμορφα ως προς α.

Τώρα, από το Θεώρημα 2Γ.5 (Κεφ. ΙΙΙ), για κάθε n και $\alpha \in T^m$ (εδώ με α ανεξάρτητο των n, j), για τον έλεγχο Gamkrelidze

$$r_\alpha^n := \sum_i a_i \delta_{w_i^n}$$

κατασκευάζουμε τον αντίστοιχο προσεγγιστικό έλεγχο $\overline{w}_\alpha^n \in \overline{W} \subset \widetilde{W} \subset W$ που ικανοποιεί την

$$(4) \qquad \left| \int_I f(t, \overline{w}_\alpha^n) dt - \int_I f(t, \sum_i \alpha_i \delta_{w_i^n}) dt \right| \leq \varepsilon^n \to 0,$$

ομοιόμορφα ως προς α. Επομένως, από τις (3), (4)

$$\left| \int_I f(t, \overline{w}_\alpha^n) dt - \int_I f(t, \sum_i \alpha_i r_i) dt \right| \leq \varepsilon^n + \rho^n \to 0,$$

άρα $\overline{w}_\alpha^n \to \sum_i \alpha_i r_i$ στο R, όταν $n \to \infty$, ομοιόμορφα ως προς $\alpha \in T^m$.

Επομένως, τα σύνολα $\overline{W}$, $\tilde{W}$, W είναι ομοιόμορφα m-πυκνά, μάλιστα για κάθε $m \geq 1$.

(ii) Για n ***σταθερό*** και για δεδομένη $f \in C(I,U)$ και $\alpha, \alpha' \in T^m$, έχουμε

$$\left|\int_I f(t,\overline{w}_\alpha^n)dt - \int_I f(t,\overline{w}_{\alpha'}^n)dt\right|$$
$$\leq \int_I \left| f(t,\overline{w}_\alpha^n) - f(t,\overline{w}_{\alpha'}^n)\right| dt \leq N(m+1)\cdot \|\alpha-\alpha'\|_\infty \cdot \|f\|_\infty \to 0,$$
όταν $\|\alpha-\alpha'\|_\infty := \max_i |\alpha-\alpha'| \to 0$,

αφού οι δύο συναρτήσεις υπό ολοκλήρωση διαφέρουν μόνο σε ένα σύνολο μέτρου $\leq N(m+1)\|\alpha-\alpha'\|_\infty$, από την κατασκευή των $\overline{w}_\alpha^n$.

Άρα η απεικόνιση $\alpha \mapsto \overline{w}_\alpha^n$, από το T^m στο R, είναι συνεχής, μάλιστα τύπου Lipschitz.

Συνεπώς, τα σύνολα $\overline{W}$, $\tilde{W}$, W είναι άφθονα.

3. ΑΝΑΓΚΑΙΕΣ / ΙΚΑΝΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΤΗΤΑΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ KUHN-TUCKER-LAGRANGE

(Βλ. Βελτιστοποίηση, Σημειώσεις Ι. Χρυσοβέργη, Κεφ. 4 , και Warga).

Έστω X ένας διανυσματικός χώρος (δ.χ.), Y ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα (δ.χ.ν.), U ένα κυρτό υποσύνολο του X, $f: U \subset X \to Y$ μια συνάρτηση, ένα σημείο $x \in U$, και $m \geq 1$ ένας ακέραιος.
Θέτουμε

$$T_m = \{\alpha := (\alpha_1,...,\alpha_m) \in \mathbb{R}_+^m \mid \sum_{i=1}^m \alpha_i \leq 1\},$$

και έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον $\mathbb{R}^m$.

Η συνάρτηση f λέγεται m**-τοπικά συνεχής** στο σημείο x αν, για κάθε επιλογή m σημείων $x_1,...,x_m \in U$, υπάρχει ανοικτή περιοχή V_0 του $0 \in \mathbb{R}^m$ τέτοια ώστε η συνάρτηση

$$\alpha \in T_m \cap V_0 \mapsto f(x + \sum_{i=1}^m \alpha_i (x - x_i)) \in Y,$$

να είναι συνεχής για τη σχετική τοπολογία του $\mathbb{R}_+^m$.

Αν το X είναι δ.χ.ν. και η f είναι συνεχής σε μια ανοικτή περιοχή του $x \in U$, τότε είναι m-τοπικά συνεχής στο x, για κάθε m.

Η συνάρτηση f λέγεται m**-παραγωγίσιμη** στο σημείο x αν, για κάθε επιλογή m σημείων $x_1,...,x_m \in U$ υπάρχουν σημεία $y_1,...,y_m \in Y$ τέτοια ώστε, για $\alpha \in T^m$, να ισχύει

$$f(x+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x-x_i))-f(x)=(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i y_i)+\varepsilon(\alpha)\|\alpha\|, \text{ όπου } \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha\in T_m}}\varepsilon(\alpha)=0 .$$

Προκύπτει τότε ότι

$$y_i = Df(x, x_i - x), \quad i = 1,\dots,m,$$

και άρα τα y_i, αν υπάρχουν, είναι μοναδικά.

Η παράγωγος θετικά κατά κατεύθυνση Df της f θα καλείται **κ-γραμμική** στο σημείο $x \in U$ αν η $Df(x, x'-x)$ υπάρχει για κάθε $x' \in U$ και ισχύει

$$Df(x,(1-\alpha)x'+\alpha x''-x)=(1-\alpha)\cdot Df(x,x'-x)+\alpha\cdot Df(x,x''-x),$$

για κάθε $x', x'' \in U$, και $\alpha \in [0,1]$.

Π.χ. αυτό ισχύει αν f είναι ορισμένη στο X και η $Df(x,h)$ υπάρχει για κάθε $h \in X$ και είναι γραμμική ως προς h.

Η f είναι 1-παραγωγίσιμη στο x αν και μόνο αν η παράγωγος κατά κατεύθυνση $Df(x, x'-x)$ υπάρχει για κάθε $x' \in U$.

Αν η f είναι m-παραγωγίσιμη στο x, τότε είναι m'-παραγωγίσιμη στο x για $m' < m$.
Αν η f είναι m-παραγωγίσιμη στο x, **με** $m \geq 2$, τότε η Df είναι κ-γραμμική στο x.

Αν η $f:\Omega \to Y$ είναι ορισμένη σε ένα ανοικτό Ω υποσύνολο ενός δ.χ.ν. X, με $\Omega \supset U$, και παραγωγίσιμη Fréchet στο σημείο x, τότε είναι m-παραγωγίσιμη στο x, για κάθε m.

Διατυπώνουμε τώρα ένα **γενικό πρόβλημα βελτιστοποίησης**.

Έστω X ένας δ.χ., Z ένας δ.χ.ν., U ένα υποσύνολο του X, K ένας θετικός κώνος στο Z (που ορίζει μια αντίστοιχη διάταξη στο Z με: $x - x' \geq 0 \Leftrightarrow x - x' \in K$, π.χ. θετικά διανύσματα, θετικές συνεχείς συναρτήσεις), και $f_0 : U \to \mathbb{R}$, $f_1 : U \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 0$, $f_2 : U \to Z$ απεικονίσεις.

Ορίζουμε το σύνολο των περιορισμών με

$$W = \{x \in U \mid f_1 = 0,\ f_2(x) \in -K\} = \{x \in U \mid f_1 = 0,\ f_2(x) \leq 0\}.$$

Ζητείται (αν υπάρχει) ένα σημείο ελαχίστου x της f_0 στο σύνολο W, δηλ. τέτοιο ώστε

$$x \in W \quad \text{και} \quad f_0(x) \leq f_0(x'), \text{ για κάθε } x' \in W .$$

Η απόδειξη του παρακάτω <u>Θεωρήματος Kuhn-Tucker-Lagrange</u> είναι αρκετά πιο περίπλοκη από του <u>Θεωρήματος Kuhn-Tucker</u> (βλ. Βελτιστοποίηση) και βασίζεται σε διαδοχικές εφαρμογές του <u>Θεωρήματος Hahn-Banach</u> και στο <u>Θεώρημα Σταθερού Σημείου Brouwer</u> (μια συνεχής απεικόνιση f από ένα κυρτό συμπαγές $U \subset \mathbb{R}^n$, με μη κενό εσωτερικό, στο U έχει ένα σταθερό σημείο x, δηλ. $x = f(x)$, βλ. Warga). Η δυσκολία του οφείλεται στις πρόσθετες δεσμεύσεις σε μορφή ισοτήτων $f_1 = 0$.

<u>**Θεώρημα 3.1:** (Πολλαπλασιαστών Kuhn-Tucker-Lagrange)</u>

α) (**Αναγκαίες Συνθήκες**) Υποθέτουμε ότι τα σύνολα U, K είναι μη κενά, κυρτά, ο K με μη κενό εσωτερικό, και οι απεικονίσεις f_l, $l = 0,1,2$, $(m+1)$-τοπικά συνεχείς στο $x \in U$ και $(m+1)$-παραγωγίσιμες στο x. Αν $m = 0$, υποθέτουμε επιπλέον ότι οι Df_l, $l = 0,1,2$, είναι κ-γραμμικές στο σημείο x. Αν το x είναι σημείο ελαχίστου της f_0 στο W, τότε ικανοποιεί τις ακόλουθες **συνθήκες Kuhn-Tucker-Lagrange** (**K-T-L**): Υπάρχουν πολλαπλασιαστές

$\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}^m$, $\lambda_2 \in Z^*$, όχι όλοι μηδέν, με $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$,

τέτοιοι ώστε

$$\lambda_0 Df_0(x, x'-x) + \lambda_1^T Df_1(x, x'-x) + < \lambda_2, Df_2(x, x'-x) > \geq 0, \text{ για κάθε } x' \in U,$$

και

$$< \lambda_2, f_2(x) > = 0 \text{ (συνθήκη εγκαρσιότητας).}$$

Ειδικά, αν το U είναι τέτοιο ώστε

$u + w \in U \;\Rightarrow\; u - \lambda w \in U$, για $\lambda \in (0,1]$ αρκετά μικρό,

(π.χ. αν το U είναι μετατεθειμένος υπόχωρος του X), τότε οι ανισότητες K-T-L γίνονται ισότητες.

β) (**Ικανές Συνθήκες**) Με τις πρόσθετες υποθέσεις ότι η f_0 είναι κυρτή, η f_1 ομοιοπαραλληληκή (δηλ. γραμμική συν σταθερά), και η f_2 κυρτή (ως προς τη διάταξη που ορίζει ο κώνος K πάνω στο Z), αν το $x \in W$ ικανοποιεί τις συνθήκες K-T-L με $\lambda_0 > 0$, τότε είναι σημείο ελαχίστου της f_0 στο W.

Στο Θεώρημα 3.2, που ακολουθεί, αν οι χώροι X, Y είναι δ.χ.ν., $U \subset \Omega$, Ω ανοικτό, και οι απεικονίσεις f_l, $l = 0,1,2$, είναι ορισμένες στο Ω και παραγωγίσιμες Fréchet στο σημείο x, τότε έχουμε

$$Df_l(x, x'-x) = f_l'(x)(x'-x), \quad l = 0,1,2,$$

και οι ανισότητες K-T-L γράφονται

$$\lambda_0 f_0'(x)(x'-x) + \lambda_1^T f_1'(x)(x'-x) + < \lambda_2, f_2'(x)(x'-x) > \geq 0, \text{ για κάθε } x' \in U.$$

Στα **κλασικά** προβλήματα βέλτιστου ελέγχου που μελετάμε (συνεχές ή διακριτό), για να ισχύουν οι υποθέσεις της παραπάνω πρότασης (β)—ικανές συνθήκες--- που αφορούν στις συναρτήσεις, αρκεί οι f, g_1 να είναι ομοιοπαραλληληκές ως προς (y,u) για κάθε t, οι g_0, g_2 κυρτές ως προς (y,u) για κάθε t, η ϕ_1 ομοιοπαραλληληκή, και οι ϕ_0, ϕ_2 κυρτές.

Λίγο διαφορετικές υποθέσεις αρκούν και για τα αντίστοιχα **γενικευμένα** προβλήματα βέλτιστου ελέγχου: $f(t,y,u) = f_1(t,y) + f_2(t,u)$, με f_1 ομοιοπαραλληληκή ως προς y για κάθε t, αλλά f_2 μη γραμμική, αφού η $f_2(t, r(t))$ είναι πάντα γραμμική ως προς r, για κάθε t (παρόμοια για τη g_1, και τις g_0, g_2 για την κυρτότητα), και ίδιες υποθέσεις για τις ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2.

<u>Θεώρημα 3.2:</u>
Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.1, και με X δ.χ.ν., αν το $x \in U$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f_0 στο W, τότε ικανοποιεί τις συνθήκες K-T-L.

<u>Θεώρημα 3.3:</u>
(Περίπτωση χωρίς περιορισμό $f_1 = 0$)
Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.1, αλλά χωρίς περιορισμό ισότητα $f_1 = 0$ και τις αντίστοιχες υποθέσεις (δηλ. στην περίπτωση Kuhn-Tucker), με επιπλέον X δ.χ.ν. και f_0, f_2 συνεχείς σε μια περιοχή V_0 του σημείου $x \in W$, αν το x είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f_0 στο $W \cap U'$, όπου U' ένα **πυκνό** υποσύνολο του U, τότε ικανοποιεί τις συνθήκες K-T-L.

<u>Απόδειξη:</u>
(Βλ. Σημειώσεις Βελτιστοποίηση, Ι. Χρυσοβέργη, Κεφ. 4)
Αν $A \cap \overset{o}{B} = \emptyset$ στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.2 (Kuhn-Tucker) στις σημειώσεις τότε, από το βήμα (iii) της απόδειξης, το x ικανοποιεί τις συνθήκες K-T.
Αν $A \cap \overset{o}{B} \neq \emptyset$, έστω V οποιαδήποτε ανοικτή περιοχή του x στο $U \subset X$. Από το βήμα (ii) της απόδειξης του Θεωρήματος 1.2, και αφού $x \in U$, υπάρχουν $x' \in U$ και $\alpha \in (0,1]$ αρκετά μικρό, τέτοια ώστε

$$x'' := x + \alpha(x' - x) \in V \cap V_0, \quad f_0(x'') < f(x), \quad f_2(x'') < 0.$$

Επειδή το U' είναι πυκνό στο U και οι συναρτήσεις f_0, f_2 είναι συνεχείς στο V_0, υπάρχει $\overline{x} \in U'$ που ανήκει στην ανοικτή περιοχή $V \cap V_0$ του x'' στο U, τέτοιο ώστε

$$f_0(\overline{x}) < f_0(x) \quad \text{και} \quad f_2(\overline{x}) < 0.$$

Άρα $\overline{x} \in U' \cap W \cap V$. Συνεπώς το x δεν είναι σημείο τοπικού ελαχίστου, άτοπο.

Το Θεώρημα 3.3 γενικεύεται για την περίπτωση όπου έχουμε τον πρόσθετο περιορισμό $f_1 = 0$ ($f_1 : U \to \mathbb{R}^m$, για οποιοδήποτε m), αλλά με τις *ισχυρότερες υποθέσεις* ότι το U' είναι **ομοιόμορφα** $(m+1)$**-πυκνό** στο U για κάθε m (βλ. Warga, σελ. 281, Condition (2)) και ότι οι συναρτήσεις f_0, f_1, f_2 είναι συνεχείς σε μια ανοικτή περιοχή του x.

Το Θεώρημα 3.3 έχει πολύ ενδιαφέρον διότι εφαρμόζεται στα ***γενικευμένα*** (relaxed) ***συνεχή*** (όχι στα διακριτά!) προβλήματα βέλτιστου ελέγχου, όπου το U είναι το σύνολο των γενικευμένων ελέγχων και U' το σύνολο των επιλεγμένων κλασικών ελέγχων (πχ. κατά διαστήματα σταθερών).

Το Θεώρημα 3.3 τότε, αν υποθέσουμε επιπλέον ότι το σύνολο U' είναι **άφθονο** (abundant, βλ. Warga, σελ. 281, Conditions (1) και (2)), δηλ. σημειακά πυκνό *και* ομοιόμορφα $(m+1)$-πυκνό για κάθε m, περιέχει και την περίφημη **Ισχυρή Κλασική** (δηλ. με την Χαμιλτονιανή H, αντί ασθενή με H_u) **Σημειακή Αρχή του Ελαχίστου Pontryagin**.

Το Θεώρημα 3.3 δείχνει έτσι ότι, αν ένας έλεγχος είναι ***είτε βέλτιστος γενικευμένος***, ***είτε βέλτιστος κλασικός***, τότε ικανοποιεί τις συνθήκες K-T-L, και άρα, αντίστοιχα, και την ισχυρή σημειακή, γενικευμένη ή κλασική, αρχή του ελαχίστου.
Ένα σημείο x που ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς, δηλ. $x \in W$, λέγεται **αποδεκτό**.

Ένα σημείο $x \in U$ που ικανοποιεί τις συνθήκες K-T-L λέγεται **σημείο K-T-L (**extremal**)**.

Ένα σημείο K-T-L $x \in U$ για το οποίο υπάρχει κάποια τριάδα πολλαπλασιαστών K-T-L $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$, με $\lambda_0 = 0$, λέγεται **ανώμαλο σημείο K-T-L**.

Ένα σημείο K-T-L $x \in U$ λέγεται **ομαλό** αν δεν είναι ανώμαλο, δηλ. αν για κάθε τριάδα πολλαπλασιαστών K-T-L που υπάρχει, έχουμε $\lambda_0 \neq 0$.

Ένα σημείο $x \in U$ είναι αποδεκτό, $x \in W$, *και* ανώμαλο σημείο K-T-L σε εξαιρετικές περιπτώσεις.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] M. Athans and P. L. Falb, Optimal Control, An introduction to the Theory and its Applications, McGraw-Hill, New York, 1966.

[2] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications, Masson, Paris, 1983.

[3] H. Brezis, Συναρτησιακή Ανάλυση - Θεωρία και Εφαρμογές, Μετάφραση του παραπάνω βιβλίου, Δ. Κραββαρίτη και Ι. Χρυσοβέργη, Παν. Εκδόσεις Ε.Μ.Π., 1997.

[4] M. D. Canon, C. D. Cullum, and E. Polak, Theory of Optimal Control and Mathematical Programming, McGraw-Hill, 1970.

[5] J. Céa, Optimisation, Théorie et Algorithmes, Dunod, Paris, 1971.

[6] I. Chryssoverghi, J. Coletsos and B. Kokkinis, Discrete relaxed method for semilinear parabolic optimal control problems, Control & Cybernetics, 28, 2, 1999, pp. 157-176.

[7] I. Chryssoverghi, J. Coletsos and B. Kokkinis, Discrete Gradient Projection Method with Runge-Kutta Schemes for Optimal Control Problems, Comp. Optim. Appl., 29, 1, 2004, pp. 91-115.

[8] I. Chryssoverghi, Discrete Gradient projection method with general Runge-Kutta schemes and control parameterizations for optimal control problems, Control & Cybernetics, 2005.

[9] I. Chryssoverghi, Discretization Methods for Semilinear Parabolic Optimal Control Problems, Int. J. Num. Anal. Modeling, Vol. 3, No. 4, pp. 437-458, 2006.

[10] P. G. Ciarlet, Introduction à l'Analyse Numérique Matricielle et à l'Optimisation, Masson, Paris, 1982.

[11] H. O. Fattorini, Infinite Dimensional Optimization Theory and Optimal Control, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[12] R. V. Gamkrelidze, Principles of Optimal Control Theory, Plenum Press, New York, 1978.

[13] E. B. Lee and L. Markus, Foundations of Optimal Control Theory, John Wiley, New York, 1967.

[14] J. L. Lions, Contrôle Optimal de Systèmes Gouvernés par des Equations aux Dérivées Partielles, Dunod, Paris, 1968.

[15] D. G. Luenberger, Optimization by Vector Space Methods, John Wiley, New York, 1969.

[16] E. J. McShane, Generalized curves, Duke Math. J., 6, 1940, pp. 513-536.

[17] E. J. McShane, Relaxed Controls and Variational Problems, SIAM J. Control, 5, 1967, pp. 438-485.

[18] E. Polak, Computational Methods in Optimization, A Unified Approach, Academic Press, New York, 1971.

[19] E. Polak, Optimization: Algorithms and Consistent Approximations, Springer, Berlin, 1997.

[20] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko, Interscience - John Wiley, New York, 1962.

[21] R. T. Rockafellar, Convex Analysis, Princeton University Press, 1970.

[22] T. Roubíček, A Convergent computational method for constrained optimal relaxed control problems. J. Optim. Theory Appl., 1991, 69, pp. 589-603.

[23] T. Roubíček, Relaxation in Optimization Theory and Variational Calculus, Walter de Gruyter, Berlin, 1997.

[24] J. Warga, Optimal Control of Differential and Functional Equations, Academic Press, New York, 1972.

[25] J. Warga, Steepest descent with relaxed controls, SIAM J. Control Optim., 15, 1977, pp. 674-682.

[26] L. C. Young, Generalized curves and the existence of an attained absolute minimum in the calculus of variations, C. R. Sci. Lettres Varsovie, CIII, 30, 1937, pp. 212-234.

[27] Α. Μπακόπουλος και Ι. Χρυσοβέργης, Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση – Με Βιβλιοθήκη Προγραμμάτων, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1999.

[28] Ι. Χρυσοβέργης, Βελτιστοποίηση – Μεταπτυχιακές Σημειώσεις, Σ.Ε.Μ.Φ.Ε., Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2005.