ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

«Επί της Κατασκευής των Γενικών Λύσεων των μη Γραμμικών ΣΔΕ Abel, Riccati, Emden-Fowler και τύπου Emden-Fowler. Εφαρμογές στη μη Γραμμική Μηχανική και στη Μαθηματική Φυσική»

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΘΕΟΔΩΡΟΥ ΖΑΡΜΠΟΥΤΗ
Διπλωματούχου Μηχανολόγου Μηχανικού ΕΜΠ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ

Δ. ΠΑΝΑΓΙΩΤΟΥΝΑΚΟΣ
Καθηγητής ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ ΙΟΥΛΙΟΣ 2012

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

«Επί της Κατασκευής των Γενικών Λύσεων των μη Γραμμικών ΣΔΕ Abel, Riccati, Emden-Fowler και τύπου Emden-Fowler. Εφαρμογές στη μη Γραμμική Μηχανική και στη Μαθηματική Φυσική»

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΘΕΟΔΩΡΟΥ ΖΑΡΜΠΟΥΤΗ
Διπλωματούχου Μηχανολόγου Μηχανικού ΕΜΠ

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ
1. Δ. ΠΑΝΑΓΙΩΤΟΥΝΑΚΟΣ Καθ. ΕΜΠ (Επιβλέπων)
2. Ε.Ε. ΘΕΟΤΟΚΟΓΛΟΥ Καθ. ΕΜΠ
3. Κ. ΣΙΕΤΤΟΣ Επ. Καθ. ΕΜΠ

ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ
1. Δ. ΠΑΝΑΓΙΩΤΟΥΝΑΚΟΣ Καθ. ΕΜΠ
2. Ι. ΔΑΦΑΛΙΑΣ Καθ. ΕΜΠ
3. Ε.Ε. ΘΕΟΤΟΚΟΓΛΟΥ Καθ. ΕΜΠ
4. Δ. ΤΖΑΝΕΤΗΣ Καθ. ΕΜΠ
5. Δ. ΓΚΟΥΣΗΣ Αν. Καθ. ΕΜΠ
6. Κ. ΛΑΖΟΠΟΥΛΟΣ Αν. Καθ. ΕΜΠ
7. Κ. ΣΙΕΤΤΟΣ Επ. Καθ. ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ ΙΟΥΛΙΟΣ 2012

Στους γονείς μου

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Θα ήθελα εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον καθηγητή Δ. Παναγιωτουνάκο για την ανάθεση και επίβλεψη της ανά χείρας Διδακτορικής Διατριβής. Πέρα από την επιστημονική καθοδήγηση που ήταν πολύτιμη, τον ευχαριστώ ιδιαίτερα για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε και κυρίως για την ανθρώπινη παρουσία του σε όλα τα στάδια εκπόνησης της εργασίας αυτής.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον καθηγητή Ε.Ε. Θεοτόκογλου, του οποίου η συμβολή και η βοήθεια υπήρξε σημαντική, τον επ. καθηγητή Κ. Σιέττο, που αποτελούν τα μέλη της συμβουλευτικής επιτροπής καθώς και τα λοιπά μέλη της επταμελούς εξεταστικής επιτροπής τους κκ Ι. Δαφαλιά καθηγητή, Δ. Τζανετή καθηγητή, Δ. Γκούση αν. καθηγητή και Κ. Λαζόπουλο αν. καθηγητή. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τους υποψήφιους διδάκτορες κκ. Δ. Φακή και Δ. Μυλωνά καθώς και όλους τους συναδέλφους του Τομέα Μηχανικής της ΣΕΜΦΕ.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το πρόβλημα της αναλυτικής ή προσεγγιστικής επίλυσης μη γραμμικών συνήθων ή μερικών διαφορικών εξισώσεων ΣΔΕ ή ΜΔΕ αποτελεί βασική αιχμή και μέτωπο στην έρευνα των θετικών επιστημών κατά την εξέταση και τη μελέτη διαφόρων φυσικών φαινομένων. Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι ο όρος "επίλυση" όσον αφορά στο κάθε είδος εξίσωσης έχει διάφορες αποχρώσεις. Σύμφωνα με τα λόγια του Poincaré πολλά προβλήματα δεν επιλύονται πραγματικά, αλλά *"επιλύονται μόνον περισσότερο ή λιγότερο"* (με την έννοια της προσεγγιστικής ή αριθμητικής επίλυσης). Στην περίπτωση των διαφορικών εξισώσεων η μετατροπή αυτών και η κατασκευή λύσεων μέσω συναρτήσεων οι οποίες περιλαμβάνονται στο κλασικό σώμα των γνωστών συναρτήσεων θεωρείται σημαντικό επίτευγμα. Σε πολλές περιπτώσεις η διατύπωση λύσεων υπό μορφή απειροσειρών, ή υπό μορφή άλλων συγκλινόντων αλγορίθμων, είναι πολύ ικανοποιητική. Εν τούτοις στις πρακτικές εφαρμογές το ζητούμενο είναι η λύση μιας εξίσωσης να μπορεί να μετατραπεί σε μια μορφή συνάρτησης που να περιλαμβάνεται στο σώμα των γνωστών (πινακοποιημένων) συναρτήσεων.

Βασικό πρόβλημα κατά την μαθηματική διερεύνηση μιας ευρύτατης κλάσης ιδιαίτερων μη γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων δεύτερης ή τρίτης τάξης της μαθηματικής φυσικής και μη γραμμικής μηχανικής είναι η παντελής έλλειψη ακριβών αναλυτικών λύσεων υπό μορφή γνωστών (πινακοποιημένων) συναρτήσεων ή συνθέσεων αυτών. Η έλλειψη αυτή στην διεθνή βιβλιογραφία δεν είναι τυχαία. Όπως θα δείξουμε στα επόμενα Κεφάλαια ευρύς αριθμός των εξισώσεων αυτών ανάγονται επακριβώς, μέσω κατάλληλων παραδεκτών συναρτησιακών μετασχηματισμών, σε εξισώσεις Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής, ή εξισώσεις Emden-Fowler, ή εξίσωση Riccati, για τις οποίες η δυνατότητα κατασκευής αναλυτικών παραμετρικών λύσεων μέσω γνωστών συναρτήσεων έχει εξαντληθεί αφορώσα ειδικές μόνον περιπτώσεις (E. Kamke[4] 1977, A.D. Polyanin και V.F. Zaitsev[12] 2003). Εν τούτοις πρόσφατα αναπτύχθηκε μαθηματική τεχνική μέσω της οποίας καθίσταται δυνατή η κατασκευή αναλυτικής λύσης της εξίσωσης Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής (D.E. Panayotounakos[6] 2005). Δεδομένου δε ότι υπάρχουν παραδεκτοί (ένας προς ένα) μετασχηματισμοί που μετατρέπουν την κλάση όλων των εξισώσεων Abel δευτέρου είδους και την κλάση των εξισώσεων Emden-Fowler κανονικής και γενικευμένης μορφής σε εξισώσεις Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής, καθίσταται πλέον δυνατή η κατασκευή αναλυτικών λύσεων όλων των προαναφερθεισών κλάσεων εξισώσεων.

Είναι ενδιαφέρον να αναφερθεί ο αριθμός συγκεκριμένων ΣΔΕ που έχουν επιλυθεί στα κλασικά συγγράμματα των E.Kamke[4], M.Murphy[5] και A.D. Polyanin and V.F. Zaitsev[12]. Αυτό φαίνεται στον παρακάτω ενδεικτικό πίνακα.

Η τάξη των εξισώσεων	**E. Kamke (1976)**	**M. Murphy (1960)**	**A.D. Polyanin και V.F. Zaitsev (1999)**
Δεύτερη τάξη	249	315	1227
Τρίτη τάξη	13	22	587
Τέταρτη τάξη	3	3	75
Μεγαλύτερη τάξη	3	9	160
Συνολικός Αριθμός Εξισώσεων	268	349	2049

Κατά τη συγκέντρωση του υλικού κυρίως στο τρίτο των παραπάνω συγγραμμάτων, οι συγγραφείς έδωσαν προβάδισμα σε δυο τύπους εξισώσεων:

- Σε εξισώσεις που παραδοσιακά έχουν τραβήξει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών και έχουν πολύ απλή μορφή, αλλά συγχρόνως παρουσιάζουν μεγάλες δυσκολίες στην ολοκλήρωση τους (εξισώσεις Riccati, Abel, Emden-Fowler, Painlevé κλπ), και
- Σε εξισώσεις που συγκέντρωναν ερευνητικό ενδιαφέρον στις θετικές επιστήμες.

Η διδακτορική αυτή διατριβή περιέχει έξι κεφάλαια, την εισαγωγή, τα συμπεράσματα και τη βιβλιογραφία που περιέχεται σε κάθε κεφάλαιο χωριστά. Στο πρώτο κεφάλαιο αναπτύσσονται όλοι οι γνωστοί παραδεκτοί συναρτησιακοί μετασχηματισμοί οι οποίοι μετατρέπουν τις κλάσεις των εξισώσεων Emden-Fowler και Abel δευτέρου είδους σε εξισώσεις Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής. Επίσης γίνεται μια αρκετά εκτενής αναφορά στην Βιβλ. [6], στην οποία προσφάτως έχει αναπτυχθεί μεθοδολογία και τεχνική κατασκευής αναλυτικών λύσεων μιας εξίσωσης Abel δευτέρου είδους. Και τούτο, γιατί όπως θα αναπτυχθεί στα επόμενα κεφάλαια που ακολουθούν, η προαναφερθείσα τεχνική αποτελεί αποφασιστικής σημασίας επίτευξη για την κατασκευή του γενικού ολοκληρώματος της ΣΔΕ Riccati.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, με βάση τα αναφερόμενα της Βιβλ. [12], αλλά και μιας τεχνικής (τεχνική AZS) που πρόσφατα αναπτύχθηκε από τους Alexeeva, Zaitsev και Shvets[12], σχετικά με την κατασκευή του γενικού ολοκληρώματος μιας εξίσωσης Abel δευτέρου είδους με συγκεκριμένη μορφή του ελεύθερου μέλους, εμπεριέχονται:

- Νέα τεχνική και μεθοδολογία που οδηγούν στην κατασκευή του γενικού ολοκληρώματος μιας εξίσωσης Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής, και
- Δεδομένης της ύπαρξης παραδεκτών συναρτησιακών μετασχηματισμών (γνωστών αμφιμονοσήμαντων, συναρτησιακών μετασχηματισμών), κατάσκευάζονται τα γενικά ολοκληρώματα της εξίσωσης Abel δευτέρου είδους με τυχόν ελεύθερο μέλος, καθώς επίσης και της μη γραμμικής ΣΔΕ Emden-Fowler και γενικευμένης ΣΔΕ Emden-Folwer.

Στο τρίτο κεφάλαιο με βάση την Βιβλ. [7,12] περιγράφεται και αναπτύσσεται μια ευρεία κλάση ειδικών χαρακτηριστικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης και ανώτερης τάξης της μαθηματικής φυσικής και μη γραμμικής μηχανικής, που μέχρι σήμερα έχουν επιλυθεί μόνον μέσω αριθμητικών τεχνικών. Αποδεικνύεται ότι η μη αναλυτική επιλυσιμότητα των εν λόγω εξισώσεων οφείλεται στο γεγονός ότι αυτές μέσω παραδεκτών μετασχηματισμών μετατρέπονται σε εξισώσεις τύπου Abel δευτέρου είδους ή σε εξισώσεις τύπου Emden-Fowler κανονικής ή γενικευμένης μορφής. Συγκεκριμένα οι εξεταζόμενες εξισώσεις είναι:

1. Οι εξισώσεις κίνησης στερεού περί σταθερό σημείο – Εξισώσεις Euler (1761) ,
2. Η εξίσωση μη γραμμικών επιφανειακών κυμάτων Rayleigh (1894) ,
3. Η εξίσωση θερμοδυναμικής Emden (1907) ,
4. Η εξίσωση οριακού στρώματος Blasius (1908) ,
5. Ο μη γραμμικός ελεύθερος ταλαντωτής Duffing με απόσβεση (1918) ,
6. Η εξίσωση Langmuir στον ηλεκτρισμό (1923) ,
7. Ο μη γραμμικός ελεύθερος ταλαντωτής van der Pol (1926) ,
8. Η εξίσωση Thomas-Fermi (ενεργό πυρηνικό φορτίο σε βαρέα άτομα) (1927) ,
9. Η εξίσωση μεμβρανικών κελυφών εκ περιστροφής - Εξίσωση Megareus (1939),
10. Η εξίσωση Kidder στα πορώδη μέσα (1957) ,
11. Οι εξισώσεις του πλαστικού "spin" σε απλή διάτμηση (εξισώσεις Dafalia's) (1985) - Το ανάλογο πρόβλημα Volterra στο πρόβλημα της συγχώνευσης πληθυσμών (1931) ,
12. Το μη γραμμικό οικονομικό μοντέλο Goudwin για αυξανόμενους κύκλους (1976) ,
13. Η μη γραμμική εξίσωση διάχυσης αερίων υπό πίεση (1995) ,
14. Μαθηματικό μοντέλο για την διανομή στέγασης πλήθους ανθρώπων που

έχασαν τις κατοικίες τους λόγω μεγάλης φυσικής καταστροφής (1999, 2003)

15. Η εξίσωση των στερεών - απολύτως πλαστικών σωμάτων υπό συνθήκες επίπεδες έντασης (2006) και
16. Η τροποποιημένη εξίσωση Emden (2008).

Στο τέταρτο κεφάλαιο με βάση ορισμένα αποτελέσματα της Βιβλ. [6], που αναφέρονται στην ισοδυναμία της εξίσωσης Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής και της εξίσωσης Riccati, αναπτύσσεται μεθοδολογία και τεχνική κατασκευής της ακριβούς λύσης μιας εξίσωσης Riccati με τυχαίο το ελεύθερο μέλος. Παρουσιάζεται εφαρμογή των κινηματικών εξισώσεων Euler κατά την περιστροφή στερεού σώματος περί σταθερό σημείο. Αποδεικνύεται ότι οι τρεις προαναφερθείσες εντόνως μη γραμμικές ΣΔΕ καταλήγουν σε μια εξίσωση Riccati, ως προς τη γωνία περιστροφής, συναρτήσει του χρόνου. Εύκολα η εξίσωση αυτή μετατρέπεται σε κανονικής μορφής εξίσωση Riccati, η οποία σύμφωνα με τα προαναφερθέντα επιδέχεται γενικής ακριβούς αναλυτικής λύσης.

Στο πέμπτο κεφάλαιο κατασκευάζονται οι γενικές λύσεις μη γραμμικών ΣΔΕ τύπου Emden-Fowler της μορφής $y''_{xx} = f^n(x)\, y^m (y'_x)^l$ (f λεία συνάρτηση της μεταβλητής x). (Βιβλ.[10]).Οι γενικές αυτές ακριβείς λύσεις δίνονται υπό παραμετρική μορφή. Εφαρμογή γίνεται στις εξής τρεις περιπτώσεις:

- Στην εξίσωση *«White Dwarf»* [εξίσωση Λευκών Νάνων - εξίσωση Chandrasekhar (1939)] και αφορά στην έκκληση θερμότητας κατά την οριακή κατάσταση (περίπτωση ισορροπίας) που αναπτύσσει ένας αστέρας (Λευκός Νάνος), ο οποίος πρόκειται να μετατραπεί ή σε μέλανα νάνο, ή να παραμένει στην αρχική του κατάσταση, ή τέλος να μετατραπεί σε super nova. Δίνονται ακριβείς παραμετρικές λύσεις της εξίσωσης αυτής, (Βιβλ.[12]).
- Στην εξίσωση του προβλήματος *«elastica»*, που περιγράφει το πρόβλημα γεωμετρικά μεγάλων παραμορφώσεων μιας ράβδου προβόλου υπό την επήρεια ομοιόμορφου κατανεμημένου φορτίου (ίδιο βάρος). Στην περίπτωση αυτή παρουσιάζονται οι λύσεις υπό παραμετρική μορφή και
- Στην μονοδιάστατη εξίσωση μη γραμμική εξίσωση Schrödinger (NLS) με κυβικούς όρους (Βιβλ.[9]).

Στο έκτο κεφάλαιο με βάση τα αναφερόμενα στα κεφάλαια 2 και 4 μέσω τελείως ανεξάρτητης προς τα προηγούμενα κεφάλαια μαθηματικής τεχνικής, κατασκευάζεται η γενική λύση της εξίσωσης Abel πρώτου είδους (γενικευμένης εξίσωσης Riccati που περιλαμβάνει και κυβικούς όρους). Εφαρμογές της εν λόγω μεθοδολογίας σε διάφορες εξισώσεις Abel πρώτου είδους παρουσιάζονται στο εν λόγω κεφάλαιο .

Στα συμπεράσματα ενδιαφέρον έχουν οι προεκτάσεις των παραπάνω τεχνικών και μεθοδολογιών στην κατασκευή γενικών λύσεων άλλων κλάσεων ευρέως εφαρμοζόμενων στις θετικές επιστήμες μη γραμμικών ΣΔΕ δεύτερης τάξης.

Τέλος, οφείλω να εκφράσω τις ευγνώμονες ευχαριστίες μου στην Αριστέα Κουτσούμπα που με μεγάλη προθυμία αφιέρωσε πολλές ώρες από τον πολύτιμο χρόνο της για να ενισχύσει με κάθε τρόπο τη συγγραφή της εν λόγω διατριβής.

Αθήνα Ιούλιος 2012

---

1. Ince, E.L. (1927): *Ordinary Differential Equations*, Dover Reprint.
2. Davis, H. T. (1962): *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations*, Dover Publ. Inc., New York.
3. Chandrasekar, V.K., Senthilvelan, M. and Lakshmanan, M. (2008): On the general solution for the modified Emden type equation $\ddot{x} + ax\dot{x} + bx^3 = 0$, *J. of Astroph. and Astronomy*, 17, 147-166.
4. Kamke, E. (1977): *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen,* Vol. I, B. G. Teubneur, Stuttgart.
5. Murphy, G. (1960): *Ordinary Differential Equations and their Solutions,* Litton Educational Publishing Inc.
6. Panayotounakos, D.E. (2005): Exact analytic solutions of unsolvable classes of first and second order nonlinear ODFs (Part I: Abel's equations), *Appl Math Lett.* 18*,* 155-162.
7. Panayotounakos, D.E. and Kravvaritis, D.C. (2006): Exact analytic solutions of the Abel, Emden-Fowler and generalized Emden-Fowler nonlinear ODEs, *Nonlinear Analysis - Real World Applications,* 7, 634-650.
8. Panayotounakos, D.E. and Zarmpoutis, Th.I. (2011) A new mathematical technique in constructing the exact parametric solutions of the nonlinear ODEs of the type $y'' = f^n(x)\, y^m (y'_x)^l$. Application to the white-dwarf relativistic equation, *Presentation 7th Gracm*, Democritos, Athens.
9. Panayotounakos, D. E., Zarmpoutis, Th. I. and Siettos, C. I. On the construction of the general closed-form solutions of standing waves of the cubic nonlinear Schrödinger equation. *J. Arch. of Appl. Mech.* (accepted for publication, in press).
10. Panayotounakos, D. E., Zarmpoutis, Th. I., Sotiropoulos, P. and Kostogiannis, A.G. (2012) Exact parametric or closed form solutions of the nonlinear Riccati ODE as well as of some relative classes of linear second order ODEs of variable coefficients*, Presentation ICEES 2012*, Crete.
11. Panayotounakos, D.E. and Zarmpoutis, Th. (2011): Construction of exact parametric or closed form solutions of some unsolvable classes of nonlinear ODEs, (Abel's nonlinear ODEs of the first kind and relative degenerate equations). *Int J. of Math. and Math Sciences,* ID 387429 1-11.
12. Polyanin, A.D. and Zaitsev, V.F. (2003): *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, CRC Press, New York, Second edition.

13. Sotiropoulos, N. (2007): *Επακριβείς Αναλυτικές Λύσεις Ιδιαίτερων Κλάσεων Συνήθων μη Γραμμικών Εξισώσεων Δεύτερης και Ανώτερης Τάξης της Μαθηματικής Φυσικής και μη Γραμμικής Μηχανικής,* PHD Thesis, School of Applied Mathematical and Physical Science, National Technical University of Athens.

Κεφάλαιο 1

Προκαταρτικά - Συμβολισμοί

Βασικές βιβλιογραφικές αναφορές που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάπτυξη του Κεφαλαίου είναι οι εξής: E. Kamke[3], A.D. Polyanin and V.F. Zaitsev[8], T.A. Alexeeva, V.F. Zaitsev and T.V. Shevts[1], D.E. Panayotounakos, N.B. Sotiropoulos, A.B. Sotiropoulou and N.D. Panayotounakou[7], G.A. Korn and T.M. Korn[4], I. Grandshteyn and I.M. Ryzhik[2], D.E. Panayotounakos[6], και A.D. Polyanin and A.V. Manzhirov[9].

Πρώτα παρουσιάζουμε την περιγραφή των ακριβών αναλυτικών λύσεων μερικών κλάσεων συνήθων διαφορικών εξισώσεων (ΣΔΕ), καθώς επίσης και την εξαγωγή παραδεκτών συναρτησιακών μετασχηματισμών, μέσω των οποίων είναι δυνατή η μετατροπή μιας κλάσης εξισώσεων σε μια άλλη κλάση. Επειδή γίνεται πολλαπλή χρήση του κανόνα της αλυσίδας, εισάγουμε το συμβολισμό Polyanin and Zaitsev[8], δηλαδή

$$y'_x = \frac{dy}{dx},\ y''_{xx} = \frac{d^2y}{dx^2},\ldots$$

όπου ο κάτω δεξιά δείκτης και ο τόνος ως σύμβολο παριστούν την ολική παράγωγο ως προς την αντίστοιχη ανεξάρτητη μεταβλητή (δείκτης).

1.1 Μη γραμμική Συνήθης Διαφορική Εξίσωση Abel δευτέρου είδους

Η γενική μορφή της εξίσωσης Abel δευτέρου είδους είναι

$$\left[g_1(x)\,y+g_0(x)\right]y'_x=f_2(x)\,y^2+f_1(x)\,y+f_0(x), \tag{1.1}$$

όπου $y'_x=\dfrac{dy}{dx}$ και $g_1(x)\neq 0$.

Είναι γνωστό ότι με το μετασχηματισμό (Βιβλ. [8], σελ. 10-11)

$$w=\left(y+\frac{g_0}{g_1}\right)E(x), \tag{1.2}$$

όπου

$$E(x)=\exp\left(-\int\frac{f_2}{g_1}dx\right),$$

η εξίσωση (1.1) παίρνει την μορφή

$$w\,w'_x \;=\; F_1(x)w \;+\; F_0(x), \tag{1.3}$$

με

$$F_1=\left(\left(\frac{g_0}{g_1}\right)'_x+\frac{f_1}{g_1}-2\frac{g_0 f_2}{g_1^{\,2}}\right)E,\ \text{ και }\ F_0=\left(\frac{f_0}{g_1}-\frac{g_0 f_1}{g_1^{\,2}}+\frac{g_0^{\,2} f_2}{g_1^{\,3}}\right)E^2.$$

Στη συνέχεια εισάγοντας την νέα ανεξάρτητη μεταβλητή

$$z=\int F_1(x)dx, \tag{1.4}$$

προκύπτει η κανονική μορφή της εξίσωσης Abel δευτέρου είδους

$$w\,w'_z-w=\;F(z). \tag{1.5}$$

Το δεύτερο μέλος $F(z)$ ορίζεται παραμετρικά (z νέα παράμετρος) από τις εξισώσεις

$$F(z)=\frac{F_0(x)}{F_1(x)},\quad z=\int F_1(x)dx,\quad F_1(x)\neq 0. \tag{1.5α}$$

Από τα παραπάνω γίνεται σαφές ότι η γενική λύση της εξίσωσης Abel δευτέρου είδους (1.1) εξαρτάται από τη γενική λύση της εξίσωσης Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής (1.5). Παραθέτουμε τώρα δυο κατασκευές πολύ χρήσιμες για την ανάλυση και τα αποτελέσματα που θα ακολουθήσουν.

α. Κατασκευή Julia[3]

Αναφερόμαστε στη γενική μη γραμμική ΣΔΕ Abel δευτέρου είδους όταν οι συντελεστές, συναρτήσεις του x, ικανοποιούν συγκεκριμένη συναρτησιακή σχέση. Πράγματι αν οι συντελεστές της ΣΔΕ

$$\left[g_1(x)\,y + g_0(x)\right]y'_x = f_2(x)\,y^2 + f_1(x)\,y + f_0(x)\,, \tag{1.6}$$

ικανοποιούν τη σχέση

$$g_0\left(2f_2 + g'_{1_x}\right) = g_1\left(f_1 + g'_{0_x}\right), \quad g_1 \neq 0\,, \tag{1.7}$$

τότε το γενικό ολοκλήρωμα της (1.6) δίνεται από τον τύπο

$$\frac{g_1 y^2 + 2g_0 y}{g_1 J} = 2\int \frac{f_0}{g_1 J}\,dx + C\,, \tag{1.8}$$

όπου $J(x)$ ο πολλαπλασιαστής Euler (ολοκληρών παράγων)

$$J(x) = \exp\int \frac{2f_2}{g_1}\,dx, \quad J(x) \neq 0. \tag{1.8α}$$

και C είναι μια σταθερά ολοκλήρωσης.

β. Κατασκευή Alexeeva, Zaitsev και Shvets (AZS)[1,8]

Αν $y_k(x)$ $(k = 1, 2, ..., n)$ είναι γνωστές μερικές λύσεις της εξίσωσης Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής (1.5), τότε η γενική λύση δίνεται (Βιβλ. [8], σελ. 12)

$$\prod_{k=1}^{n} \left|y - y_k\right|^{m_k} = C, \tag{1.9}$$

όπου $m_k =$ σταθερές, $k = 1, ..., n$, $C =$ σταθερά ολοκλήρωσης.

Σημειώνεται ότι για τις μερικές λύσεις $y = y_k$ ισχύει $C = 0$ όταν $m_k > 0$ και $C = \infty$ όταν $m_k < 0$.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις.

Περίπτωση η=2.

Στην περίπτωση $\eta = 2$, θεωρούμε χωρίς να χάνεται η γενικότητα $y > y_1$, $y > y_2$ και συνεπώς η (1.9) παίρνει τη μορφή

$$\left(y-y_1\right)^{m_1}\left(y-y_2\right)^{m_2}=C. \tag{1.10}$$

Λογαριθμίζοντας και στη συνέχεια παραγωγίζοντας την (1.10) προκύπτει η σχέση

$$\begin{aligned}&\left(m_1+m_2\right)y'_x\,y-\left(m_1\,y'_{1_x}+m_2\,y'_{2_x}\right)y-\left(m_1\,y_2+m_2\,y_1\right)y'_x=\\&=-m_1\,y'_{1_x}\;y_2-m_2\,y'_{2_x}\;y_1.\end{aligned} \tag{1.11}$$

Η (1.11) οφείλει να ικανοποιεί την εξίσωση (1.5). Συνεπώς πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις

$$\left.\begin{aligned}m_1+m_2&=M, &&(\alpha)\\ m_1\,y_2+m_2\,y_1&=0, &&(\beta)\\ m_1\,y'_{2_x}+m_2\,y'_{1_x}&=M, &&(\gamma)\\ m_1\,y'_{1_x}\,y_2+m_2\,y'_{2_x}\,y_1&=-M\,F, &&(\delta)\end{aligned}\right. \tag{1.12}$$

$$(M\neq 0,\ \text{σταθερά}).$$

Επιλύοντας την (1.12β) ως προς y_2 και αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στην (1.12γ) προκύπτει

$$y'_{1_x}=\frac{-m_2}{m_1^2-m_2^2}M,\quad m_1\neq m_2,$$

από την οποία, με απλή ολοκλήρωση, ευρίσκουμε

$$y_1=\frac{m_1}{m_1^2-m_2^2}\left(M\,x+N\right), \tag{1.13}$$

όπου N αυθαίρετη σταθερά. Επιπλέον από την (1.12β) παίρνουμε

$$y_2=\frac{-m_2}{m_1^2-m_2^2}\left(M\,x+N\right). \tag{1.14}$$

Εισάγοντας τις (1.13) και (1.14) στην (1.12δ) προκύπτει

$$F(x)=\frac{m_1m_2\left(m_1+m_2\right)}{\left(m_1^2-m_2^2\right)^2}\left(M\,x+N\right). \tag{1.15}$$

Εισάγοντας επίσης δύο νέες σταθερές A και B τέτοιες ώστε

$$A=\frac{m_1m_2\left(m_1+m_2\right)}{\left(m_1^2-m_2^2\right)^2}M, \tag{1.16}$$

$$B = \frac{m_1 m_2 \left(m_1 + m_2\right)}{\left(m_1^2 - m_2^2\right)^2} N, \tag{1.17}$$

και χρησιμοποιώντας την (1.15), καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$F\left(x\right) = A\, x + B, \tag{1.18}$$

δηλαδή στο ότι: **αν η ΣΔΕ Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής έχει τη γενική λύση (1.9) τότε για $k = 2$ το δεξί τμήμα της, (ελεύθερο μέλος της), είναι γραμμική συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x** .

Οι μερικές λύσεις y_1, y_2 της εξίσωσης Abel καθώς και οι εκθέτες m_1, m_2 μπορούν να γραφούν συναρτήσει των παραμέτρων A και B και του δευτέρου μέλους της Abel F ως εξής

$$\begin{gathered} y_1 = \frac{1+\sqrt{4A+1}}{2A}\left(A\,x+B\right), \\ y_2 = -\frac{1+\sqrt{4A+1}}{2A+1+\sqrt{4A+1}}\left(A\,x+B\right), \\ m_1 = 2A+1+\sqrt{4A+1},\ m_2 = 2A,\ m_1 \neq -m_2. \end{gathered} \tag{1.19}$$

Περίπτωση η=3.

Ομοίως με την προηγούμενη περίπτωση για $n = 3$ το δεξί τμήμα της (1.5) υπολογίζεται ότι είναι της μορφής

$$F(x) = -\frac{2}{9}x + A + B\,x^{-1/2}. \tag{1.20}$$

Οι μερικές λύσεις καθώς και οι εκθέτες της γενικής λύσης m_s με $s = 1, 2, 3$ εκφράζονται ως

$$\begin{gathered} y_s = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\lambda_s x^{1/2} + \frac{3B}{\lambda_s},\ x > 0 \qquad (\alpha) \\ m_s = \frac{2A}{3(2\lambda_s^2 - 3A)},\ \lambda_s \neq \sqrt{\frac{3A}{a}},\ A > 0, \qquad (\beta) \end{gathered} \tag{1.21}$$

όπου λ_s είναι οι λύσεις της κυβικής εξίσωσης

$$\lambda_s^3 - \frac{9}{2}A\lambda_s - \frac{9}{2}B = 0. \tag{1.22}$$

Τονίζεται ότι η κατασκευή (AZS) (Βιβλ. [1,8]) εφαρμόζεται όταν το δεξί μέλος της (1.5) έχει την μορφή (1.18) ή την (1.20) και συνεπώς οι μερικές λύσεις y_1, y_2 ή

y_1, y_2, y_3 και οι εκθέτες m_1, m_2 ή m_1, m_2, m_3 της γενικής λύσης (1.9) προσδιορίζονται από τις σχέσεις (1.19) και (1.21α), (1.21β) αντίστοιχα.

Περίπτωση η=4.

Όμοια για $n=4$ το δεξί μέλος (ελεύθερο μέλος) της (1.5) προκύπτει της μορφής

$$F(x) = -\frac{3}{16}x + A\,x^{-1/3} + B\,x^{-5/3}.$$

Οι μερικές λύσεις καθώς και οι εκθέτες της γενικής λύσης m_s με $s=1,...,3$ εκφράζονται ως ακολούθως

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= \frac{3}{4} \pm \sqrt{3A + \frac{3}{2}\sqrt{-3B}}\; x^{1/3} + \sqrt{-3B}\,x^{-1/3}, \; m_{1,2} = \mp\left(2A - \sqrt{-3B}\right), \\ y_{3,4} &= \frac{3}{4} \pm \sqrt{3A - \frac{3}{2}\sqrt{-3B}}\; x^{1/3} - \sqrt{-3B}\,x^{-1/3}, \; m_{3,4} = \pm\left(2A + \sqrt{-3B}\right). \end{aligned} \tag{1.23}$$

Περίπτωση η=5.

Για $n=5$ το δεξί μέλος της (1.5) ευρίσκεται

$$F(x) = -\frac{n-1}{n}x + Q(x), \tag{1.24}$$

όπου η συνάρτηση $Q(x)$ είναι φραγμένη όταν $x \to \infty$ (δηλαδή η Q μπορεί να εκφραστεί υπό παραμετρική μορφή).

1.2 Προσδιορισμός μερικών λύσεων της εξίσωσης Abel δευτέρου είδους[6]

Ας θεωρήσουμε την εξίσωση Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής

$$y\,y'_x - y = F(x), \tag{1.25}$$

όπου $F(x)$ τυχούσα λεία συνάρτηση.

Εισάγουμε τον παραδεκτό συναρτησιακό μετασχηματισμό

$$y(x) = f_1(x)\eta(\xi), \;\; \xi = \xi(x) \;\Rightarrow\; y'_x = f'_{1_x}\,\eta + f_1\eta'_\xi\xi'_x,$$

όπου η, f_1, ξ προσδιοριστέες συναρτήσεις. Εισάγοντας την παραπάνω σχέση στην (1.25) παίρνουμε

$$f_1^2\,\xi_x'\,\eta\,\eta_\xi' + f_1\,f_{1_x}{}'\eta^2 - f_1\eta = F\left(x\right). \tag{1.26}$$

Εισάγουμε επίσης μια νέα λεία συνάρτηση $g\left(x\right)$ και αναδιατάσσοντας τους όρους ξαναγράφουμε την (1.26) υπό τη μορφή

$$\left(f_1^2\,\xi_x'\,\eta + \mathrm{g}\right)\eta_\xi' - 2\,F = \left(-f_1^2\,\xi_x'\,\eta + \mathrm{g}\right)\eta_\xi' - 2\,f_1\,f_{1_x}'\eta^2 + 2\,f_1\,\eta. \tag{1.27}$$

Η (1.27) τώρα διασπάται σε δύο εξισώσεις, δηλαδή

$$\left(f_1^2\,\xi_x'\,\eta + \mathrm{g}\right)\eta_\xi' = 2\,F + G\left(x\right), \tag{1.28}$$

$$\left(-f_1^2\,\xi_x'\,\eta + \mathrm{g}\right)\eta_\xi' - 2\,f_1\,f_{1_x}'\eta^2 + 2\,f_1\,\eta = G\left(x\right), \tag{1.29}$$

όπου $G\left(x\right)$ είναι μια νέα πέμπτη λεία συνάρτηση. Σημειώνουμε ότι η $g\left(x\right)$ και $G\left(x\right)$ είναι προσδιοριστεές συναρτήσεις.

Εφαρμόζουμε την κατασκευή Julia που δίνεται από τους τύπους (1.7) και (1.8) συγχρόνως στις (1.28) και (1.29) και μετά από κατάλληλες ολοκληρώσεις, λαμβάνοντας επίσης $\xi\left(x\right) = x,$ καταλήγουμε στα παρακάτω αποτελέσματα

$$g\left(x\right) = f_1^2\,\xi_x'\left(x\right) = f_1^2,\ \ \xi_x' = 1,\ \ f_1\left(x\right) = \frac{x}{2}, \tag{1.30}$$

$$\eta^2 + 2\eta - 8\int \frac{G + 2F}{x^2}dx = 0, \tag{1.31}$$

$$\eta^2 - 2\eta + \frac{8}{x^4}\int x^2\,G\,dx = 0. \tag{1.32}$$

Τονίζεται ότι στις παραπάνω ολοκληρώσεις η σταθερά ολοκλήρωσης έχει τεθεί μηδέν. Απομένει συνεπώς μόνο ο προσδιορισμός των συναρτήσεων $G\left(x\right)$ και $\eta\left(x\right)$. Υποθέτουμε, χωρίς να χάνεται η γενικότητα, πραγματικές ρίζες των δευτεροβαθμίων εξισώσεων (1.31) και (1.32), λύνουμε προς η και εξισώνουμε τα αποτελέσματα. Η διαδικασία αυτή οδηγεί στη μοναδική σχέση

$$\sqrt{\omega^2 - M} = \omega\sqrt{1+N} - 2\omega,\quad \omega > \sqrt{M},\quad N > -1, \tag{1.33}$$

όπου

$$\omega = x^2 = \left(2\,f_1\right)^2,\ \ M = 8\int \omega G\,dx,\ \ N = 8\int \frac{G}{\omega}dx + 16\int \frac{F}{\omega}dx. \tag{1.34}$$

Τετραγωνίζοντας την (1.33) και στη συνέχεια παραγωγίζοντας εξάγουμε τη συναρτησιακή σχέση

$$6\omega\omega_x' + M_x' + 2\left(1+N\right)\omega\omega_x' + \omega^2 N_x' - 8\sqrt{1+N}\,\omega\omega_x' - 2\omega^2 - 2\omega^2 \frac{N_x'}{\sqrt{1+N}} = 0. \quad (1.35)$$

Εισάγοντας τώρα, μέσω των σχέσεων (1.34), τις ποσότητες M_x', N_x' στην (1.35) και μετά από πράξεις, καταλήγουμε στην εξής κυβική εξίσωση ως προς $\left(1+N\right)^{1/2}$, για $x \neq 0$:

$$\left(1+N\right)^{3/2} - 4\left(1+N\right) + \left[3 + \frac{4\left(G+F\right)}{x}\right]\left(1+N\right)^{1/2} - 4\frac{G+2F}{x} = 0, \qquad (1.36)$$

η οποία περιέχει το δεύτερο μέλος $F\left(x\right)$ (ελεύθερο μέλος) της αρχικής εξίσωσης Abel καθώς επίσης και τη βοηθητική προσδιοριστέα συνάρτηση $G\left(x\right)$ (Βιβλ.[6]).

Η κλασική διαδικασία αντικατάστασης

$$\left(1+N\right)^{1/2} = \overline{N} + \frac{4}{3}, \qquad (1.36\alpha)$$

καταλήγει στη λύση Cardan[9]

$$\overline{N}^3 + p\overline{N} + q = 0, \qquad (1.37)$$

όπου οι συντελεστές της υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$p = -\frac{a^2}{3} + b, \qquad (\alpha)$$

$$q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c, \qquad (\beta)$$

$$a = -4, \qquad (\gamma)\ (1.38)$$

$$b = 3 + \frac{4\left(G+F\right)}{x}, \qquad (\delta)$$

$$c = -\frac{4\left(G+2F\right)}{x}, \qquad (\varepsilon)$$

με G την προς προσδιορισμό βοηθητική συνάρτηση.

Οι λύσεις της κυβικής (1.37) προσδιορίζονται αναλυτικά[9] και ο αριθμός τους εξαρτάται από την τιμή της διακρίνουσας

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2. \qquad (1.39)$$

Υπό τριγωνομετρική η έκφραση των παραπάνω ριζών δίνεται ως εξής (Βιβλ. [9], σελ.158):

Περίπτωση α $D < 0 \quad (p < 0)$

$$\bar{N}_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{a}{3},$$

$$\bar{N}_2 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{a-\pi}{3}, \tag{1.40}$$

$$\bar{N}_3 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{a+\pi}{3}.$$

με

$$\cos a = -\frac{q}{2\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}; \quad 0 < a < \pi, \ p \neq 0.$$

Περίπτωση β $D > 0 \, (p > 0)$

$$\overline{N_1} = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cot(2a),$$

$$\overline{N}_{2,3} = \sqrt{\frac{p}{3}}\left[\cot(2a) \pm i\frac{\sqrt{3}}{\sin(2a)}\right], \tag{1.41}$$

με

$$\tan a = \left(\tan\frac{\beta}{2}\right)^{1/3}, \tan\beta = \frac{2}{q}\left(\frac{p}{3}\right)^{3/2}, \ |a| \leq \frac{\pi}{4}, \ |\beta| < \frac{\pi}{2}, \ a \neq 0.$$

Περίπτωση γ $D > 0 \, (p < 0)$

$$\overline{N_1} = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\frac{1}{\sin(2a)},$$

$$\overline{N}_{2,3} = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left[\frac{1}{\sin(2a)} \pm i\sqrt{3}\cot(2a)\right] \tag{1.42}$$

με

$$\tan a = \left(\tan\frac{\beta}{2}\right)^{1/3}, \sin\beta = \frac{2}{q}\left(\frac{p}{3}\right)^{3/2}, \quad |a| \le \frac{\pi}{4}, \quad |\beta| < \frac{\pi}{2}, \quad a \neq 0.$$

Περίπτωση δ $D = 0$

$$\begin{aligned} \overline{N}_1 &= 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}, \\ \overline{N}_2 = \overline{N}_3 &= -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}. \end{aligned} \tag{1.43}$$

Σημειώνεται ότι το πρόσημο της διακρίνουσας D καθορίζει το είδος και τον αριθμό των ριζών της κυβικής εξίσωσης (1.37). Συγκεκριμένα αν

- $D = 0$, η κυβική εξίσωση (1.37) έχει δυο πραγματικές ρίζες, η μια με διπλή πολλαπλότητα,
- $D > 0$, η κυβική εξίσωση (1.37) έχει δύο μιγαδικές ρίζες και μια πραγματική,
- $D < 0$, η κυβική εξίσωση (1.37) έχει τρεις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

Ειδικότερα για τη δεύτερη περίπτωση όπου $D > 0$, η τριγωνομετρική μορφή των ριζών (1.41) και (1.42) μπορεί να αντικατασταθεί από τις παρακάτω εκφράσεις[9]:

$$\overline{N}_1 = A + B, \quad \overline{N}_{2,3} = -\frac{1}{2}(A+B) \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}(A-B), \tag{1.44}$$

$$A = \left(\frac{-q}{2} + \sqrt{D}\right)^{1/3}, \quad B = \left(\frac{-q}{2} - \sqrt{D}\right)^{1/3}.$$

Από εδώ και πέρα, μέσω της τρίτης των (1.34) μαζί με την αντικατάσταση (1.36α), υπολογίζουμε

$$N = 8\int \frac{G}{\omega}dx + 16 = \left[\overline{N}(x) + \frac{4}{2}\right]^2 - 1, \tag{1.45}$$

η οποία συνδιαζόμενη με την (1.33) και την (1.32) παρέχει τη σχέση

$$\sqrt{1 + 8\int \frac{G+2F}{\omega}dx} = 2 + (n-1). \tag{1.46}$$

Η τελευταία σχέση μέσω της (1.45) καταλήγει στην παρακάτω λύση για την $\eta(x)$ εμπεριέχουσα όρους της προσδιοριστέας συνάρτησης $G(x)$

$$\eta(x) = \overline{N}(x) + \frac{1}{3} = \sqrt{N(x)+1} - 1. \tag{1.47}$$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω αναγράφουμε τα εξής αποτελέσματα:

$$\eta(x)=\overline{N}(x)+\frac{1}{3}=\sqrt{N(x)+1}-1,\quad N=8\int\frac{G+2F}{x^2}dx=\left[\overline{N}(x)+\frac{4}{2}\right]^2-1,$$
$$M(x)=\frac{8}{x^4}\int x^2G(x)dx=\left[\overline{N}+\frac{1}{3}\right]\left[\frac{5}{3}-\overline{N}(x)\right], \tag{1.48}$$

όπου το $\overline{N}(x)$ δίνεται από τις εξισώσεις (1.40) ÷ (1.43) οι οποίες εμπεριέχουν την προσδιοριστέα συνάρτηση $G(x)$.

Αποδεικνύεται ότι η κατασκευασθείσα λύση $\eta(x)$ που δίνεται από τη σχέση (1.47) ικανοποιεί όλες τις μετασχηματισμένες εξισώσεις Abel (1.26) έως (1.29), τότε και μόνο τότε αν η παράγωγος $\overline{N'_x}$ της συνάρτησης $\overline{N}(x)$ δίνεται από την παραγώγιση της δεύτερης των εξισώσεων (1.48). Με άλλα λόγια οι εξισώσεις

$$\boxed{\eta(x)=\overline{N}(x)+\frac{1}{3},\quad \overline{N}'_x=\frac{4(G+2F)}{x^2\left[\overline{N}(x)+\frac{4}{3}\right]},} \tag{1.49}$$

ικανοποιεί όλες της προαναφερθείσες Abel εξισώσεις. Πράγματι εισάγοντας τις (1.49) μαζί με την έκφραση (1.30) στις αναφερθείσες εξισώσεις Abel, εξάγουμε την κυβική εξίσωση (1.36) (ή ισοδύναμα την (1.37)), που εκ ταυτότητος είναι μηδέν. Για παράδειγμα εισάγοντας τις (1.49) στην (1.29) ευρίσκουμε

$$\left(\sqrt{1+N}-2\right)\frac{2(G+2F)}{x}=$$
$$=-\left(\sqrt{1+N}-1\right)^2\sqrt{1+N}+2\left(\sqrt{1+N}-1\right)\sqrt{1+N}-\frac{2G}{x}\sqrt{1+N},$$

που ταυτίζεται με την κυβική εξίσωση (1.36).

Δεδομένου ότι σε αντίστοιχο αποτέλεσμα καταλήγουμε αναφορικά με την αρχική εξίσωση Abel (1.25), συμπεραίνουμε ότι η λύση της (1.25) εμπεριέχουσα την προσδιοριστέα συνάρτηση $G(x)$ γράφεται:

$$y(x)=\frac{1}{2}x\left[\overline{N}(x)+\frac{1}{3}\right],\quad \overline{N}'_x=\frac{4\left[G(x)+F(x)\right]}{x^2\left[\overline{N}(x)+\frac{4}{3}\right]}, \tag{1.50}$$

$$\overline{N}(x)=\text{σύμφωνα με τις σχέσεις (1.40) ÷ (1.43).}$$

Το πρόβλημα πλέον εστιάζεται στον προσδιορισμό της συνάρτησης $G(x)$. Προς τούτο αναφερόμαστε στην λύση (1.49) μαζί με την εξίσωση Abel (1.28) και (1.29) ή ισοδύναμα αναφερόμαστε στο εξής σύστημα των δυο εξισώσεων που προκύπτουν από τη διαίρεση και πρόσθεση των (1.28) και (1.29) κατά μέλη, δηλαδή στο σύστημα:

$$\left(f_1 f'_{1_x}\eta^2-f_1\eta-F\right)(\eta+1)+\eta(G+2F)=0, \tag{1.51}$$

$$\eta'_x = \frac{f'_{1_x}}{f_1}\eta^2 - \frac{1}{f_1}\eta + \frac{F+G}{f_1^2}, \qquad (1.52)$$

Η πρώτη των εξισώσεων αυτών, μέσω των (1.49) καταλήγει στην κυβική εξίσωση (1.37)(ή (1.36)). Το ίδιο ισχύει και για την εξίσωση Riccati (1.52).

Μέσω τώρα του συναρτησιακού μετασχηματισμού

$$\overline{H}(X) = \eta(x) - 1, \quad X = \ln|x|; \qquad (1.53)$$

$$X'_x = \frac{1}{x}; \; \overline{H}'_X = \eta'_X = n'_x x'_X = x\eta'_x,$$

η εξίσωση Riccati (1.52) μετατρέπεται στην αντίστοιχη κανονική μορφή

$$\overline{H}'_X = \overline{H}^2 - \left[1 - 4(G+F)e^{-X}\right], \qquad (1.54)$$

η οποία, σύμφωνα με τα προαναφερθέντα αποτελέσματα, επιδέχεται την μερική λύση

$$\overline{H}(X) = \overline{N}(X) - \frac{2}{3}, \quad \overline{N}'_X = \frac{4(G+2F)}{\overline{N}(X) + \frac{4}{3}}e^{-X}. \qquad (1.55)$$

Είναι γνωστό [8,σελ. 7] ότι, αν οι (1.55) αποτελούν μια μερική λύση της εξίσωσης Riccati τότε η γενική λύση της (1.54) δίνεται από τη σχέση

$$\overline{H}(X) = \overline{N}(X) - \frac{2}{3} + A(X), \; A(X) = \frac{\varphi(X)}{C - \int_0^X \varphi(X)dX},$$

$$\varphi(X) = \exp\left\{2\int_0^X \left[\overline{N}dX - \frac{2}{3}\right]dX\right\}, \qquad (1.56)$$

$$\overline{N}'_X = \frac{4(G+2F)}{\overline{N}(X) + \frac{4}{3}}e^{-X}.$$

όπου C είναι η σταθερά ολοκλήρωσης. Προς επαλήθευση, εισάγοντας τις δύο πρώτες των (1.56) στην εξίσωση (1.54) εξάγουμε

$$\overline{N}'_X - \left(\overline{N} - \frac{2}{3}\right)^2 + 1 - 4(G+F)e^{-X} = A'_X + A^2 + 2\left(\overline{N} - \frac{2}{3}\right)A, \qquad (1.57)$$

Χρησιμοποιώντας την έκφραση $\overline{N}'_X$ που δίνεται στις εξισώσεις (1.56) παρατηρούμε ότι το αριστερό μέλος της (1.57) καταλήγει στην κυβική εξίσωση (1.37)(ή (1.36)), ενώ το δεξιό μέλος της καταλήγει σε εξίσωση Bernoulli ως προς $A(X)$, το γενικό ολοκλήρωμα της οποίας δίνεται από τη δευτερη των εξισώσεων (1.56). Επιπλέον, το ίδιο σύνολο των εξισώσεων (1.56) είναι και η γενική λύση της εξίσωσης Abel (1.26), η οποία στις $(X, \overline{H})$ συντεταγμένες γράφεται

$$\left(\overline{H}+1\right)\overline{H}'_X=-\overline{H}^2+1+4Fe^{-X}. \tag{1.58}$$

Εισάγοντας τις (1.56) στην (1.58) και χρησιμοποιώντας συγχρόνως τις αντικαταστάσεις (1.56) και (1.59), εξάγουμε την παρακάτω κυβική εξίσωση διαφορετική από την (1.36)

$$2\left(1+N\right)^{3/2}+\left(3A-4\right)\left(1+N\right)+\left(A^2-4A\right)\left(1+N\right)^{1/2}+\frac{4\left(G+2F\right)}{x}=0. \tag{1.60}$$

Αμφότερες οι κυβικές εξισώσεις (1.36) και (1.60) αρκούν για την απαλοιφή της $N\left(x\right)$ και τον υπολογισμό της βοηθητικής προσδιοριστέας συνάρτησης $G\left(x\right)$ συναρτήσει του δεύτερου μέλους $F\left(x\right)$ της αρχικής εξίσωση Abel (1.25). Αυτό οδηγεί στην κατασκευή της γενικής λύσης της εξίσωσης Abel (1.25). Αλλά δεδομένου ότι η (1.60), περιέχουσα τη συνάρτηση $A\left(X\right)$, είναι ισχυρά μη γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση αυτή η απαλοιφή είναι ιδιαίτερα δυσχερής.

Εν τούτοις, η $G\left(x\right)$ μπορεί να προσδιοριστεί και συνεπακόλουθα η αναλυτική λύση της εξίσωσης Abel (1.25), με την παρακάτω διαδικασία. Αναζητούμε μια λύση της εξίσωση Riccati (1.54) έτσι ώστε

$$\lim_{X\to+\infty}\overline{H}\left(X\right)=\lim_{X\to+\infty}\left[\overline{N}\left(X\right)-\frac{2}{3}\right],\ \ \lim_{X\to-\infty}\overline{H}\left(X\right)=\lim_{X\to-\infty}\left[\overline{N}\left(X\right)-\frac{2}{3}\right]. \tag{1.61}$$

Με την (1.56) η παραπάνω υπόθεση εξασφαλίζεται με την εξίσωση

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi'_X dX=0. \tag{1.62}$$

Είναι γνωστό ([2], σελ. 406, τύπος 3.722,8) ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\left(aX\right)}{\beta-X}dX=+\pi\sin\left(a\beta\right),\ a>0. \tag{1.63}$$

Θέτοντας $a=1,\ \beta=0$, το προηγούμενο ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos X}{-X}dX=0. \tag{1.64}$$

Ο συνδυασμός των (1.62) και (1.64) καταλήγει στην

$$\begin{aligned}\varphi'_X=\frac{\cos X}{-X}\Rightarrow\varphi\left(X\right)&=-\int_X^{+\infty}\frac{\cos X}{X}dX=ci\left(X\right)=\\&=\mathbb{C}+\ln X+\int_0^X\frac{\cos t-1}{t}dt,\end{aligned} \tag{1.65}$$

$ci\left(X\right)=$ το ολοκλήρωμα συνημίτονο $=\mathbb{C}+\ln X+\sum_{u=1}^{\infty}\left(-1\right)^u\frac{X^{2u}}{\left(2u\right)\left(2u\right)!}$,

$$\mathbb{C} = \text{αριθμός Euler} = 0{,}5572156649015325\ldots,$$

Από την παραπάνω ανάλυση εξάγουμε την εξίσωση

$$2\int_0^X \left(\overline{N} - \frac{2}{3}\right) dX = \ln\left|ci(X)\right|,$$

και συνεπώς την έκφραση

$$\overline{N}(X) - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\frac{\cos(X)}{X\ ci(X)} = \mathcal{F}(X). \tag{1.66}$$

Έτσι, η πρώτη των (1.56) γίνεται

$$\overline{H}(X) = -\frac{1}{2}\frac{\cos(X)}{X\,ci(X)} + \frac{ci(X)}{C - \int_0^X ci(X)\,dX},$$

που ικανοποιεί την υπόθεση (1.64) δεδομένου ότι $\lim\limits_{X\to-\infty} \overline{H}(X) = 0.$ Για να είναι όμως η συνάρτηση $\overline{N}(X) - \dfrac{2}{3} = \mathcal{F}(X)$, που ορίστηκε με στην (1.66), λύση της εξίσωσης Riccati (1.54) πρέπει να ισχύει επιπλέον και η τέταρτη των εξισώσεων (1.56), δηλαδή να ισχύει η εξίσωση

$$\overline{N}'_X = \frac{4(G+2F)}{\overline{N}(X) + \frac{4}{3}} e^{-X} = \mathcal{F}'_X = \frac{1}{2}\frac{ci(X)(X\sin X + \cos X) - \cos^2 X}{\left[X\,ci(X)\right]^2}, \tag{1.67}$$

που παρέχει την $G(X)$ συναρτήσει του δεύτερου μέλους $\mathcal{F}(X)$ (ή $F(x)$) της αρχικής εξίσωσης Abel (1.25).

Τα παραπάνω αποτελέσματα συμπληρώνουν πλήρως την κατασκευή μιας ακριβούς αναλυτικής λύσης της εξίσωσης Abel (1.25). Συνοψίζοντας η λύση γράφεται ως εξής

$$\begin{gathered} \mathrm{y}_i(x) = \frac{1}{2}x\left[\overline{N}_i + \frac{1}{3}\right], \\ y'_{i_x} = \frac{1}{2}\left(\overline{N}_i + \frac{1}{3}\right) + \frac{2(G+2F)}{x\left(\overline{N}_i + \frac{4}{3}\right)}, \quad i = 1,2,3, \quad x \neq 0. \end{gathered} \tag{1.68}$$

όπου $\overline{N}_i$ καθορίζονται από τις εξισώσεις (1.40) ÷ (1.44) και εμπεριέχουν την προσδιοριστέα συνάρτηση $G(x)$ που εμφανίζεται στην κυβική εξίσωση

$$\overline{N}^3(X) + \overset{*}{p}\,\overline{N}(X) + \overset{*}{q} = 0, \tag{1.69}$$

όπου οι συντελεστές της υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$X = \ln(|x|)$$

$$\overset{*}{p} = -\frac{a^2}{3} + b,\ \overset{*}{q} = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c,\ a = -4\ ,$$

$$b = 3 + 4(G+F)e^X\ ,\ c = -4(G+2F)e^X\ , \tag{1.70}$$

$$G(X) = \frac{1}{16}\frac{\left[(X\sin X + \cos X)ci(X) + \cos^2 X\right](4Xci(X) + \cos X)}{\left[X\,ci(X)\right]^3}e^{-X} - 2F(X)$$

$$ci(X) = \text{το ολοκλήρωμα συνημίτονο} = \mathbb{C} + \ln X + \sum_{u=1}^{\infty}(-1)^u\frac{X^{2u}}{(2u)(2u)!}\ ,$$

$$\mathbb{C} = \text{αριθμός Euler} = 0{,}5572156649015325...,$$

$$F(X) = F(\ln|x|)\ \text{το ελεύθερο μέλος της εξίσωσης Abel (1.25).}$$

1.3 Μη γραμμική ΣΔΕ Emden-Fowler[8]

Η εξίσωση Emden-Fowler κανονικής μορφή είναι η μη γραμμική δεύτερης τάξης ΣΔΕ με τύπο

$$y''_{xx} = Ax^n y^m\ , \tag{1.71}$$

όπου A και n, m τυχαίες παράμετροι. Σημειώνουμε τα εξής που αφορούν τη λύση της (1.71).

(i) Για $m \neq 1$, η (1.71) έχει την εξής μερική λύση

$$y = \lambda\, x^{(n+2)/(1-m)}\ \text{όπου}\ \lambda = \left[\frac{(n+2)(n+m+1)}{A(m-1)^2}\right]^{1/(m-1)}, \tag{1.72}$$

(ii) Ο μετασχηματισμός

$$y = \frac{w(t)}{t}\ ,\quad x = \frac{1}{t},\quad t \neq 0, \tag{1.73}$$

μετατρέπει την (1.71) σε άλλη εξίσωση Emden–Fowler με διαφορετική μορφή, δηλαδή

$$w''_{tt} = At^{-n-m-3}w^m\ . \tag{1.74}$$

(iii) Για $m \neq 1$ και $m \neq -2n-3$, οι νέες συντεταγμένες

$$\xi = \frac{2n+m+3}{m-1} x^{(n+2)/(m-1)} y, \quad u = x^{(n+2)/(m-1)} \left(x y'_x + \frac{n+2}{m-1} y \right) \tag{1.75}$$

μετασχηματίζουν την (1.71) στην εξίσωση Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής

$$u u'_\xi - u = -\frac{(n+2)(n+m+1)}{(2n+m+3)} \xi + A \left(\frac{m-1}{2n+m+3} \right)^2 \xi^m. \tag{1.76}$$

1.4 Μη γραμμική γενικευμένη ΣΔΕ Emden-Fowler[8]

Η γενικευμένη Emden-Fowler είναι επίσης μη γραμμική ΣΔΕ δεύτερης τάξης με τύπο

$$y''_{xx} = A x^n y^m \left(y'_x \right)^\ell, \tag{1.77}$$

όπου A και n, m, l τυχαίες παράμετροι. Για $\ell = 0$ εκφυλίζεται στην εξίσωση Emden-Fowler κανονικής μορφής (1.71). Οι Polyanin και Zaitsev[8] αναπτύσσουν πολλές επιλύσιμες περιπτώσεις της (1.77) υπό παραμετρική μορφή, δηλαδή παρουσιάζουν πολλούς, αλλά συγκεκριμένους, συνδυασμούς των παραμέτρων A, n, m, l για τους οποίους η εξίσωση (1.77) επιδέχεται αναλυτικών λύσεων υπό παραμετρική ή όχι μορφή.

Για να ερευνήσουμε την (1.77) χρησιμοποιούμε τον τριαδικό συμβολισμό $\{n, m, l\}$ ο οποίος δηλώνει τους ειδικούς εκθέτες της. Σημειώνουμε τα εξής :

(i) Αν $m + l \neq 1$, η (1.77) επιδέχεται τη μερική λύση

$$y = B\, x^{(n+2-l)/(1-m-l)}, \tag{1.78}$$

όπου $$B = \left(\frac{n+2-l}{1-m-l} \right)^{(1-l)/(m+l-1)} \left[\frac{n+m+1}{A(1-m-l)} \right]^{1/(m+l-1)}. \tag{1.79}$$

(ii) Θεωρώντας την y ως ανεξάρτητη μεταβλητή και την x ως εξηρτημένη, θέτουμε $x = x(y)$ και εισάγοντας τον μετασχηματισμό

$$\mathcal{F} : y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(dx/dy)} = \frac{1}{x'_y}, \quad x'_y \neq 0, \tag{1.80}$$

παίρνουμε την εναλλακτική μορφή της γενικευμένης Emden-Fowler εξίσωσης

$$x''_{yy} = -A y^m x^n \left(x'_y \right)^{3-\ell}. \tag{1.81}$$

Ο μετασχηματισμός $\mathcal{F}$ παρίσταται συντομογραφικά μέσω του παρακάτω τριαδικού συμβολισμού

$$\{n,m,\ell\}\xleftrightarrow{\mathcal{F}}\{m,n,3-\ell\}\,. \tag{1.82}$$

(iii) Αν $n\neq 1,\ m\neq 0,$ και $\ell\neq 1,$ ο μετασχηματισμός

$$w(t)=x^{n+1},\quad t=\left(y'_x\right)^{1-\ell}\,, \tag{1.83}$$

μετατρέπει την (1.77) στην εξής νέα γενικευμένη εξίσωση Emden-Fowler

$$w''_{tt}=B\,t^{1/(1-\ell)}w^{-n/(n+1)}\left(w'_t\right)^{(2m+1)/m}\,,\ \text{όπου}\ B=-\frac{m}{n+1}\left[\frac{A(1-\ell)}{n+1}\right]^{1/m}\,. \tag{1.84}$$

Συμβολίζουμε τον μετασχηματισμό αυτόν με $\mathcal{G}$ και γράφουμε

$$\{n,m,\ell\}\xleftrightarrow{\mathcal{G}}\left\{\frac{1}{1-\ell},-\frac{n}{n+1},\frac{2m+1}{m}\right\}. \tag{1.85}$$

Είναι φανερό ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός για την εξαγωγή της (1.77) παρέχει τις σχέσεις

$$x=w^{1/(1+n)},\quad y=k\left(w'_t\right)^{-1/m}\ \text{όπου}\ k=\left[\frac{n+1}{A(1-\ell)}\right]^{1/m} \tag{1.86}$$

(iv) Οι αντικαταστάσεις για $y\neq 0$

$$z=\frac{x}{y}y'_x,\ \ \upsilon=A\,x^{n-l+2}\,y^{m+l-1}, \tag{1.87}$$

μετασχηματίζουν την (1.77) στην παρακάτω εξίσωση Abel δευτέρου είδους

$$\left(z^l\upsilon-z^2+z\right)\upsilon'_z=\left[(m+l-1)z+n-l+2\right]\upsilon. \tag{1.88}$$

Επιπλέον χρησιμοποιώντας τη νέα αντικατάσταση

$$\xi=\upsilon-z^{2-l}+z^{1-l}, \tag{1.89}$$

η (1.88) μετατρέπεται με τη σειρά της στην εξίσωση

$$\begin{aligned}\xi\,\xi'_z&=\left[(m+2l-3)z+n-2l+3\right]z^{-1}\xi+\\&+\left[(m+l-1)z^2+(n-m-2l+3)z-n+l-2\right]z^{1-2l},\end{aligned} \tag{1.90}$$

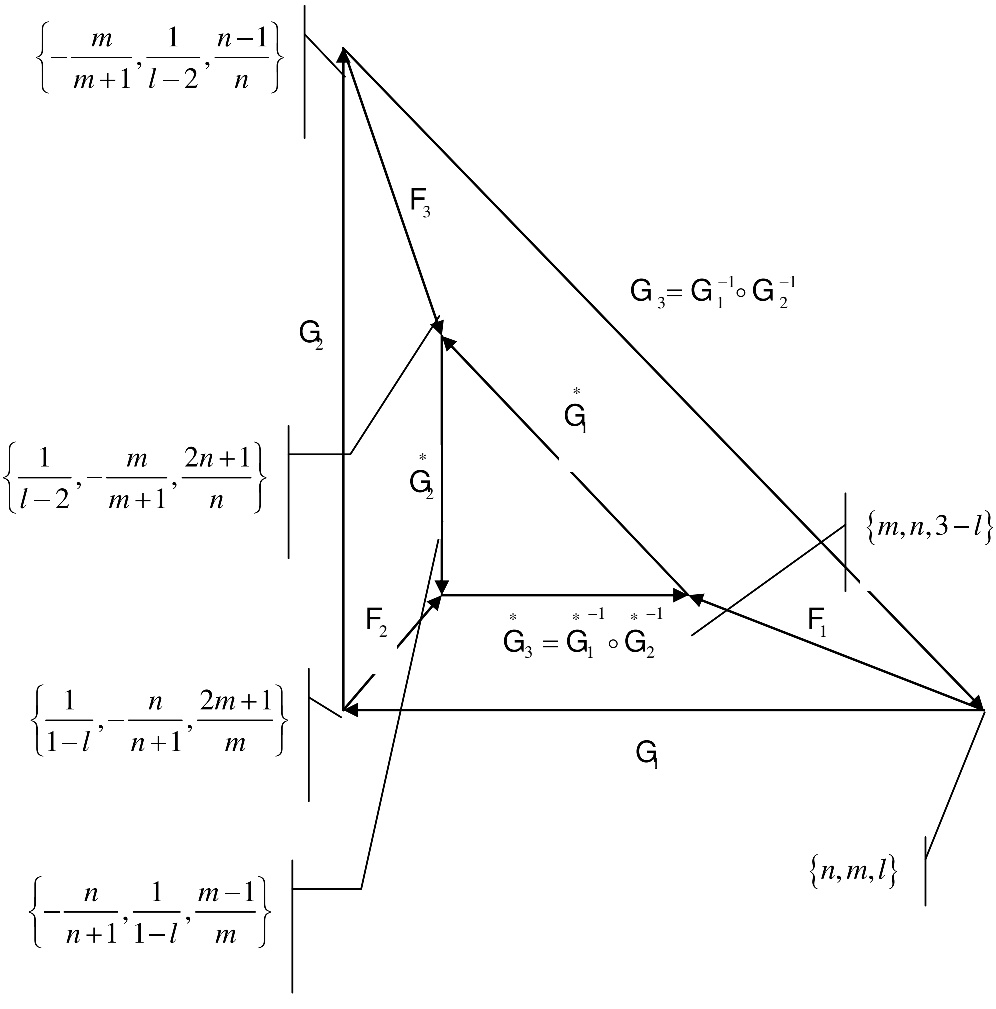
που είναι επίσης εξίσωση Abel δευτέρου είδους.

Χρησιμοποιώντας διάφορες συνθέσεις των προαναφερθέντων μετασχηματισμών $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ μπορούμε να κατασκευάσουμε έξ διακεκριμένες γενικευμένες εξισώσεις Emden –Fowler που αντιστοιχούν σε διάφορες τριάδες εκθετών $\{n,m,l\}$. Σχηματικά η διαδικασία παριστάνεται στο παρακάτω *Σχήμα 1.1*.

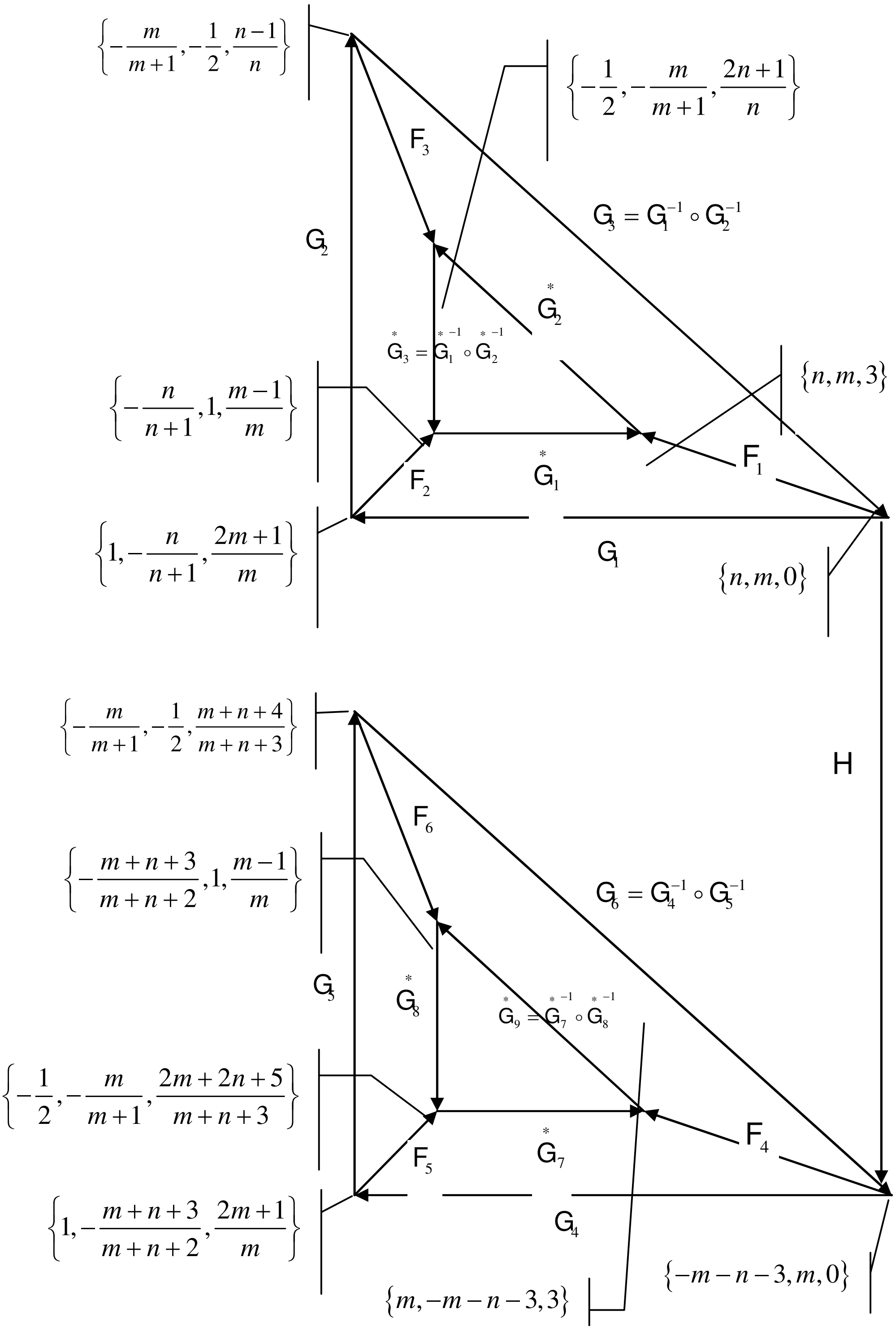
Στην ειδική περίπτωση όπου $l=0$ ο μετασχηματισμός (1.73) καταλήγει στην εξίσωση Emden-Fowler κανονικής μορφής (1.74). Συμβολίζουμε τον μετασχηματισμό αυτόν $\mathcal{H}$, δηλαδή

$$\{n,m,\ell\} \xleftrightarrow{\mathcal{H}} \{-n-m-3,\ \ m,\ \ 0\}\,.$$

Έτσι, διάφορες συνθέσεις $\mathcal{F}$,$\mathcal{G}$ και $\mathcal{H}$ παράγουν δώδεκα διακεκριμένες Emden-Fowler εξισώσεις, οι οποίες σχηματικά παρουσιάζονται στο επόμενο *Σχήμα 1.2*.



Σχήμα 1.1 Διάγραμμα στο οποίο εμφανίζονται οι έξ διακεκριμένες Emden-Fowler εξισώσεις που προκύπτουν από τις διαφορετικές συνθέσεις των μετασχηματισμών $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$



Σχήμα 1.2 Διάγραμμα στο οποίο εμφανίζονται οι δώδεκα διακεκριμένες Emden-Fowler εξισώσεις που προκύπτουν από τις διαφορετικές συνθέσεις των μετασχηματισμών $\mathcal{F}$,$\mathcal{G}$ και $\mathcal{H}$

1.5. Μη Γραμμική ΣΔΕ τύπου Emden- Fowler

Προς χάριν συντόμευσης χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\{f, g, h\}$ ή $\{F^n, G^m, H^l\}$ και γράφουμε την εξίσωση

$$y''_{xx} = f_1(x)\, g_1(y)\, h_1(y'_x), \tag{1.91}$$

ή

$$y''_{xx} = F^n(x) G^m(y) H^l(y'_x), \tag{1.92}$$

δηλαδή μια εξίσωση τύπου γενικευμένης μορφής ΣΔΕ Emden-Fowler.

Θεωρώντας την y ως ανεξάρτητη μεταβλητή και την x ως εξαρτημένη, λαμβάνουμε μια αντίστοιχη εξίσωση ως προς $x = x(y)$ και $x'_y \neq 0$,

$$\begin{gathered} x''_{yy} = g\ (y) f_1(x) h_1^*(x'_y), \quad \text{ή} \quad x''_{yy} = G^m(y) F^n(x) H^{*l}(x'_y); \\ h_1^*(x'_1) = -x'^3_y h_1\left(\frac{1}{x'_y}\right), \quad H^*\left(\frac{1}{x'_y}\right) = -x'_y\, H^{*l}\left(\frac{1}{x'_y}\right), \end{gathered} \tag{1.93}$$

και συμβολίζουμε με $\mathcal{F}$ τον μετασχηματισμό αυτόν.

Ο μετασχηματισμός Bäcklund[8]

$$\bar{x} = \int \frac{dw}{h_1(w)}, \quad \bar{y} = \int f_1(x) dx; \quad w = y'_x. \tag{1.94}$$

καταλήγει σε μια όμοιας μορφής εξίσωσης της (1.91) ως προς $\bar{y} = \bar{y}(\bar{x})$, δηλαδή

$$\bar{y}''_{\bar{x}\bar{x}} = f_2(\bar{x}) g_2(\bar{y}) h_2(\bar{y}'_{\bar{x}}), \tag{1.95}$$

όπου οι f_2, g_2, h_2 ορίζονται από τις αρχικές συναρτήσεις f_1, g_1 και h_1 ως εξής:

$$\begin{gathered} f_2(\bar{x}) = w, \quad \bar{x} = \int \frac{dw}{h_1(w)}; \\ g_2(\bar{y}) = \frac{1}{f_1(x)}, \quad \bar{y} = \int f_1(x) dx\ ; \\ h(\bar{w}) = -\frac{1}{[g_1(y)]^3} \frac{dg_1}{dy}, \quad \bar{w} = \frac{1}{g_1(y)}, \quad g_1(y) \neq 0, \quad h_1 \neq 0, \quad f_1 \neq 0. \end{gathered} \tag{1.96}$$

Συμβολίζουμε τον μετασχηματισμό (1.94) με $\mathcal{G}$. Εφόσον υπολογισθεί η λύση $\bar{y} = \bar{y}(\bar{x})$ της μετασχηματισμένης εξίσωσης, οι τύποι καθιστούν δυνατή τη λύση της αρχική εξίσωσης (1.91) υπό παραμετρική μορφή $x = x(\bar{x}),\ y = y(\bar{x})$.

Η διπλή εφαρμογή του μετασχηματισμού $\mathcal{G}$ στην αρχική εξίσωση παρέχει μια εξίσωσης όμοιας μορφής

$$\overline{\overline{y}}''_{\overline{\overline{x}}\,\overline{\overline{x}}} = f_3\left(\overline{\overline{x}}\right) g_3\left(\overline{\overline{y}}\right) h_3\left(\overline{\overline{y}}'_{\overline{\overline{x}}\,\overline{\overline{x}}}\right), \tag{1.97}$$

όπου οι συναρτήσεις f_3, g_3 και h_3 ορίζονται παραμετρικά από τις αρχικές f, g και h μέσω των τύπων

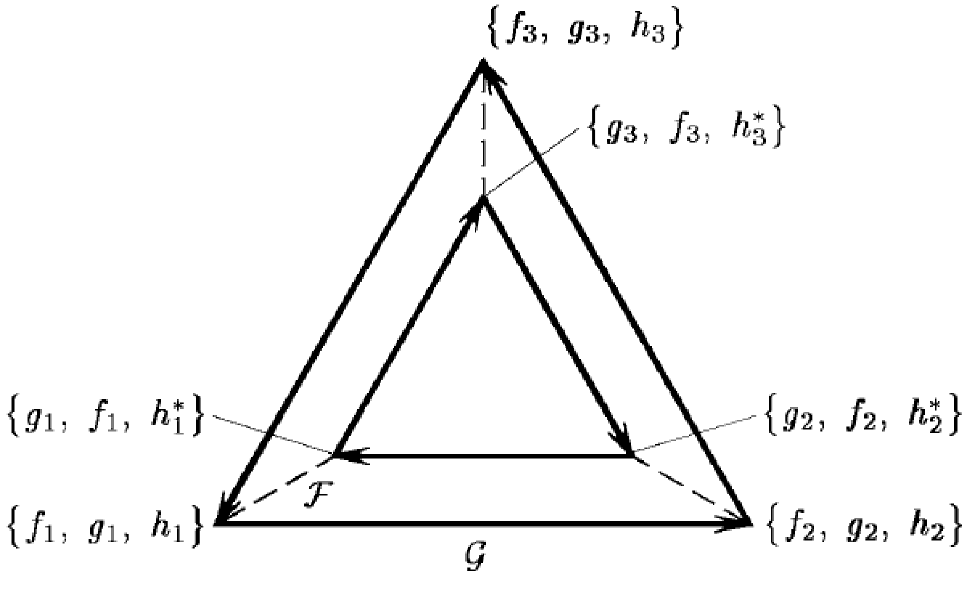
$$f_3\left(\overline{\overline{x}}\right) = \frac{1}{g_1(y)}, \quad \overline{\overline{y}} = \int g_1(y)\,dy\ ;$$

$$g_3\left(\overline{\overline{y}}\right) = \frac{1}{w}, \quad \overline{\overline{y}} = \int \frac{w\,dw}{h_1(w)}\ ; \tag{1.98}$$

$$h_3\left(\overline{\overline{w}}\right) = \frac{df_1}{dx}, \quad \overline{\overline{w}} = f_1(x).$$

Ο τριπλός μετασχηματισμός $\mathcal{G}$ καταλήγει στην αρχική εξίσωση.

Διαφορετικοί μετασχηματισμοί $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ δίνουν έξι διαφορετικές εξισώσεις παρόμοιας μορφής όπως φαίνεται στο *Σχήμα 1.3*.



Σχήμα 1.3: Μετασχηματισμός Bäcklund

Στην ειδική περίπτωση όπου $\{n, m, l\} = \{n, m, 0\}$ και $G(y) = y$ από την (1.92) παίρνουμε τη γραμμική ομογενής ΣΔΕ δεύτερης τάξης με μεταβλητούς συντελεστές

$$y''_{xx} = F(x)\,y, \tag{1.99}$$

ενώ αν $\{n,\, m,\, l\} = \{1,\, 1,\, 0\}$ τότε προκύπτει η εξίσωση τύπου Emden-Fowler

$$y''_{xx} = F^n(x)G^m(y). \tag{1.100}$$

1.6 Μη γραμμική ΣΔΕ Abel πρώτου είδους[3,8]

Η γενική εξίσωση Abel πρώτου είδους είναι η γενικευμένη εξίσωση Riccati με τύπο

$$y'_x = f_3(x)\,y^3 + f_2(x)\,y^2 + f_1(x)\,y + f_0(x). \tag{1.101}$$

Εάν $f_3 \equiv 0$ και $f_0 \equiv 0,$ ή $f_2 \equiv 0$ και $f_0 \equiv 0,$ τότε προκύπτει η εξίσωση Bernoulli, ενώ εάν $f_3 \equiv 0$ προκύπτει η εξίσωση Riccati.

Εάν $y = y_0(x)$ είναι μια μερική λύση της (1.101) τότε ο μετασχηματισμός

$$y = y_0 + \frac{1}{w(x)},\quad w(x) \neq 0, \tag{1.102}$$

μετατρέπει την (1.101) στην εξίσωση Abel δευτέρου είδους

$$w\,w'_x = -\left(3f_3{y_0}^2 + 2f_2y_0 + f_1\right)w^2 - \left(3f_3y_0 + f_2\right)w - f_3. \tag{1.103}$$

Επίσης αν $f_0 \equiv 0$, ο μετασχηματισμός

$$y = \frac{1}{w},\quad w \neq 0,$$

μετατρέπει την (1.101) στην απλούστερη μορφή

$$w\,w'_x = -f_1\,w^2 - f_2\,w - f_3. \tag{1.104}$$

Οι συναρτησιακοί μετασχηματισμοί

$$\xi = \int f_3\,E^2(x)\,dx,$$

$$u = \left(y + \frac{f_2}{3f_3}\right)E^{-1}(x), \tag{1.105}$$

$$E(x) = \exp\left[\int\left(f_1 - \frac{{f_2}^2}{3f_3}\right)dx\right],$$

μετατρέπουν την (1.101) στην αντίστοιχη εξίσωση Abel κανονικής μορφής

$$u'_{\xi} = u^3 + \Phi(\xi), \tag{1.106}$$

όπου

$$\Phi = \frac{1}{f_3 E^3}\left[f_0 + \frac{1}{3}\left(\frac{f_2}{f_3}\right)'_x - \frac{f_1 f_2}{3 f_3} + \frac{2 f_2^{\,3}}{27 f_3^{\,2}} \right]. \tag{1.107}$$

Το 1931 ο A. Chiellini (Βιβλ. [3], σελ 26) προτείνει την εξής κατασκευή λύσης που αφορά ειδική μορφή της (1.101). Στη περίπτωση αυτή εφόσον

$$f_0 \equiv 0,\ f_1 \equiv 0 \text{ και } \left(\frac{f_3}{f_2}\right)'_x = \lambda\, f_2\,;\ \ \lambda = \text{σταθερά} \tag{1.108}$$

τότε ο μετασχηματισμός

$$y = \frac{f_2}{f_3} u(x), \tag{1.109}$$

μετατρέπει την (1.101) στην παρακάτω εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών, που επιδέχεται αναλυτικής λύσης

$$u'_x = \frac{f_2^{\,2}}{f_3}\left(u^3 + u^2 + a\,u\right). \tag{1.110}$$

Βασική εφαρμογή των εξισώσεων Abel πρώτου είδους και Riccati συναντάμε στη μαθηματική φυσική και ειδικότερα στη θεωρία των μη γραμμικών ταλαντωτών άρτιας τάξης μέχρι έκτου βαθμού. Πράγματι, ας θεωρήσουμε ένα μη γραμμικό ταλαντωτή με απόσβεση άρτιου βαθμού (μέχρι $6^{ου}$ βαθμού)

$$y''_{xx} + \lambda_1 \left(y'_x\right)^6 + \lambda_2 \left(y'_x\right)^4 + \lambda_3 \left(y'_x\right)^2 + \lambda_4 f\left(y\right) = 0, \tag{1.111}$$

όπου $f(y)$ είναι μια οποιαδήποτε λεία συνάρτηση της μεταβλητής y. Οι $\lambda_i \ (i = 1,...,4)$ είναι κατάλληλες παράμετροι. Τότε ο μετασχηματισμός

$$y'^2_x = z(y) \Rightarrow 2\, y'_x\, y''_{xx} = z'_y\, y'_x \Rightarrow y''_{xx} = \frac{1}{2} z\, z'_y, \tag{1.112}$$

μετατρέπει την (1.111) στην εξής εξίσωση Abel πρώτου είδους

$$z'_y + 2\lambda_1 z^3 + 2\lambda_2 z^2 + 2\lambda_3 z + 2\lambda_4 f\left(y\right) = 0. \tag{1.113}$$

Για παράδειγμα, εάν έχουμε τον μη γραμμικό ταλαντωτή

$$y''_{xx} + \lambda_2 \left(y'_x\right)^4 + \lambda_4 \left(b\, y^{m-2} + c y^{-2}\right) = 0,$$

$$m \neq 2; \quad b, c = \text{σταθερές} \tag{1.114}$$

ο μετασχηματισμός (1.112) τον μετατρέπει στην εξίσωση Riccati

$$z'_y + 2\lambda_2 z^2 + 2\lambda_4 \left(b\, y^{m-2} + c\, y^{-2} \right) = 0. \tag{1.115}$$

Στη συνέχεια, μέσω του γνωστού μετασχηματισμού[3]

$$u(y) = \exp\left(2\lambda_2 \int z(y) dy \right) \Rightarrow u'_y = 2\lambda_2 \exp\left(2\lambda_2 \int z\, dy \right), \tag{1.116}$$

η (1.115) μεταπίπτει στην παρακάτω διαφορική γραμμική εξίσωση τύπου Bessel

$$y^2 u''_{yy} + \overset{*}{b} \left(y^m + \overset{*}{c} \right) u = 0\,, \tag{1.117}$$

$$\overset{*}{b} = \lambda_2 \lambda_4 b\,; \quad \overset{*}{c} = \lambda_2 \lambda_4 c,$$

με γενική λύση [Βιβλ. 3, σελ. 440]

$$u(y) = y^{1/2} Z_v \left(\frac{2}{m} \sqrt{\lambda_2 \lambda_4 b}\; y^{m/2} \right); \; v = \frac{1}{m} \sqrt{1 - 4\lambda_2 \lambda_4 c}; \tag{1.118}$$

$$1 - 4\overset{*}{c} > 0 \;;\; Z_v(y) = C_1(y) J_v(y) + C_2 Y_v(y)\,. \tag{1.119}$$

Οι J_v και Y_v είναι συναρτήσεις Bessel πρώτου και δευτέρου είδους τάξης v αντίστοιχα, ενώ C_1 και C_2 είναι σταθερές ολοκλήρωσης.

Ακολουθώντας τώρα την αντίστροφη πορεία και χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό (1.116) εξάγουμε για την $z(y)$ τη γενική λύση

$$z(y) = \frac{1}{2\lambda_2} \frac{u'_y}{u} = \frac{1}{2\lambda_2} \frac{C\left(J_{v-1} - \frac{v}{y} J_v \right) + \left(Y_{v-1} - \frac{v}{y} Y_v \right)}{C\, J_v + Y_v}, \; C = \text{σταθερά} \tag{1.120}$$

ενώ ο μετασχηματισμός (1.112) οδηγεί στο ενδιάμεσο ολοκλήρωμα του μη γραμμικού ταλαντωτή (1.111), δηλαδή στην παρακάτω εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών στο επίπεδο των φάσεων

$$\frac{dx}{dy} = \pm \sqrt{\frac{C\left(J_{v-1} - \frac{v}{y} J_v \right) + \left(Y_{v-1} - \frac{v}{y} Y_v \right)}{2\lambda_2 \left(C\, J_v + Y_v \right)}}, \quad \lambda_2 \neq 0, \;\; C\, J_v + Y_v \neq 0, \tag{1.121}$$

όπου $C = C_1 / C_2$, είναι η πρώτη σταθερά ολοκλήρωσης.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις.

Περίπτωση a: $\lambda_1 = 0$

Η (1.111) παρέχει την εξίσωση Riccati

$$z'_y + 2\lambda_2\, z^2 + 2\lambda_3\, z + 2\lambda_4\, f(y) = 0. \tag{1.122}$$

Περίπτωση b: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Η (1.111) παρέχει τη γραμμική εξίσωση

$$z'_y + 2\lambda_3\, z + 2\lambda_4\, f(y) = 0. \tag{1.123}$$

Περίπτωση c: $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$

Η (1.111) παρέχει την εξίσωση Riccati

$$z'_y + 2\lambda_2\, z^2 + 2\lambda_4\, f(y) = 0. \tag{1.124}$$

Περίπτωση d: $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Η (1.111) παρέχει την κανονικής μορφής εξίσωση Abel πρώτου είδους

$$z'_y + 2\lambda_1\, z^3 + \lambda_4\, f(y) = 0. \tag{1.125}$$

Περίπτωση e: $\lambda_4 = 0$

Η (1.111) παρέχει την περιορισμένης μορφής εξίσωση Abel πρώτου είδους

$$z'_y + 2\lambda_1\, z^3 + 2\lambda_2\, z^2 + 2\lambda_3\, z = 0. \tag{1.126}$$

Περίπτωση f: $\lambda_2 = 0$

Η (1.111) παρέχει την εξίσωση Abel πρώτου είδους

$$z'_y + 2\lambda_1\, z^3 + 2\lambda_3\, z + 2\lambda_4\, f(y) = 0. \tag{1.127}$$

Περίπτωση e: $\lambda_3 = 0$

Η (1.111) παρέχει την εξίσωση Abel πρώτου είδους

$$z'_y + 2\lambda_1\, z^3 + 2\lambda_2\, z^2 + 2\lambda_4\, f(y) = 0. \tag{1.128}$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Alexeeva T.A., Zaitsev V.F and Shvets T.B. (1992): On Discrete Symmetries of the Abel Equation of the 2nd Kind (in Russian), *Applied Mechanics and Mathematics, MIDT*, Moscow, 4-11.

[2] Grandsteyn, I.S. and Ryzhik I.M. (1965): *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press

[3] Kamke, E. (1977): *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen,* Vol.1, B.G. Teubeur, Stuttgart.

[4] Korn, G.A. and Korn, T.M. (1968): *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*, McGraw Hill, Book Company, New York.

[5] Murphy G. (1960): *Ordinary Differential Equations and their Solutions,* Litton Educational Publishing Inc. New York, Cincinnati, Toronto, London, Melbourne.

[6] Panayotounakos, D.E. (2005): Exact analytic solutions of unsolvable classes of first and second order nonlinear ODEs (Part I: Abel's equations), *Applied Mathematics Letters* 18*,* 155-162.

[7] Panayotounakos, D.E., Sotiropoulos, N.B., Sotiropoulou, A.B., and Panayotounakou, N.D. (2005): Exact analytic solutions of nonlinear boundary value problems in fluid mechanics (Blasius equation), *Journal of the Mathematical Physics, JMP* 46, 1-26.

[8] Polyanin, A.D. and Zaitsev, V.F. (2003): *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, Chapman &Hall/CRC Press, New York, Second edition.

[9] Polyanin, A.D. and Manzhirov, A.V. (2007): A.V. *Handbook of Mathematics for Engineers and Scientist*, Chapman &Hall/CRC Press, New York.

[10] Sotiropoulos N. (2007): *Επακριβείς Αναλυτικές Λύσεις Ιδιαίτερων Κλάσεων Συνήθων μη Γραμμικών Εξισώσεων Δεύτερης και Ανώτερης Τάξης της Μαθηματικής Φυσικής και μη Γραμμικής Μηχανικής,* PHD Thesis, School of Applied Mathematical and Physical Science, National Technical University of Athens.

Κεφάλαιο 2

Επί της Κατασκευής της Γενικής Λύσης της μη Γραμμικής ΣΔΕ Abel Δευτέρου είδους

$$\left[g_1(x)\,y(x)+g_0(x)\right]y'_x(x)=f_2(x)\,y^2(x)+f_1(x)\,y(x)+f_0(x)$$

και των μη Γραμμικών ΣΔΕ Κανονικής και Γενικευμένης Μορφής Emden-Fowler

$$y''_{xx}=A\,x^m y^n \quad \textbf{και} \quad y''_{xx}=A\,x^m y^n\left(y'_x\right)^l$$

Βασικές βιβλιογραφικές αναφορές για την ανάπτυξη του περιεχομένου του εν λόγω Κεφαλαίου είναι οι εξής: D.E. Panayotounakos[5], A.D. Polyanin and V.F. Zaitsev[7], T.A. Alexeeva, V.F.Zaitsev and T.B.Shevts [1], D.E.Panayotounakos, N.B. Sotiropoulos, A.B. Sotiropoulou and N. Panayotounakou [6], E. Kamke[3] και I. Tsukamoto[9].

Στο Κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η κατασκευή της γενικής λύσης της μη γραμμικής ΣΔΕ πρώτης τάξης και δευτέρου είδους Abel, καθώς και της κανονικής και γενικευμένης μη γραμμικής ΣΔΕ δευτέρας τάξης Emden-Fowler. Ήδη στο Κεφάλαιο 1 έχει παρουσιαστεί η απόδειξη[5,6] ότι μια εξίσωση Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής δεν έχει ενιαία λύση σε ένα κύριο διάστημα τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής, αλλά αντιθέτως έχει (ποιοτικά και ποσοτικά) τρία είδη λύσεων που εξαρτώνται από τις ρίζες μιας κυβικής (αλγεβρικής) εξίσωσης εμπεριέχουσας μια βοηθητική και προσδιοριστέα συνάρτηση $G(x)$.

Παράλληλα έχει επίσης αποδεχτεί[1,7] ότι αν σε μια εξίσωση Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής είναι γνωστές $y_k(x)$ $(k=1,...n)$ διακεκριμένες μερικές λύσεις της, τότε το γενικό ολοκλήρωμα δίνεται από τον τύπο $\prod_{k=1}^{n}|y-y_k|^{m_k}=C,$ όπου C είναι σταθερά ολοκλήρωσης και m_k $(k=1,\ \dots,\ n,)$ σταθεροί εκθέτες. Για $n=2$, m_k=σταθερές έχει ήδη ομοίως αποδειχθεί[1,7] ότι, κατά τον προσδιορισμό των μερικών λύσεων y_k $(k=1,...,n)$, το δεύτερο μέλος της εν λόγω εξίσωσης Abel οφείλει να είναι γραμμική συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x, δηλαδή της μορφής $R(x)=Ax+B$. Για $n=3$, m_k =σταθεροί παράμετροι, αποδεικνύεται ότι το δεύτερο μέλος πρέπει να έχει τη μορφή $R(x)=-2/9\,x+A+Bx^{-1/2}$, για $n=4$ αποδεικνύεται ότι έχει τη μορφή $R(x)=-3/16\,x+\ +A\,x^{-1/3}+B\,x^{-5/3}$ κοκ. Στους παραπάνω τύπους οι A και B είναι παράμετροι. Με βάση τα αποτελέσματα αυτά (Βιβλ. [7]) παρουσιάζονται πίνακες με εκτενείς αναφορές στα δεύτερα μέλη της κανονικής μορφής εξίσωσης Abel και παρατίθενται οι γενικές λύσεις υπό παραμετρική ή αναλυτική μορφή.

Από την άλλη μεριά, χρησιμοποιώντας παραδεκτούς μετασχηματισμούς (ένα προς ένα μετασχηματισμούς)[1,7], που μετατρέπουν τις εξισώσεις Emden-Fowler κανονικής και γενικευμένης μορφής σε εξισώσεις Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής, παρουσιάζεται η κατασκευή του ενδιάμεσου (πρώτου ολοκληρώματος) των εξισώσεων αυτών, όπως επίσης και οι γενικές τους λύσεις.

2.1 Κατασκευή της Γενικής Λύση της Εξίσωσης Abel Δευτέρου Είδους

Όπως έχει ήδη προαναφερθεί μια εξίσωση Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής έχει μερικές λύσεις που προκύπτουν από το είδος των ριζών μιας κυβικής εξίσωσης που περιέχει μια βοηθητική προσδιοριστέα συνάρτηση $G(x)$[5,6]. Έτσι μια εξίσωση Abel έχει τρεις διακεκριμένες πραγματικές μερικές λύσεις εφόσον η διακρίνουσα της παραπάνω κυβικής εξίσωσης είναι αρνητική, τρεις μερικές λύσεις εκ των οποίων η μια πραγματική και οι δύο μιγαδικές συζυγείς εφόσον η διακρίνουσα είναι θετική και δύο πραγματικές μερικές λύσεις εφόσον η διακρίνουσα είναι μηδέν. Επεκτείνοντας τη λύση (AZS)[7] διατυπώνουμε την εξής πρόταση:

Πρόταση 1: *Μια εξίσωση Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής* $y\,y'_x-y=F(x)$ *έχει γενική λύση*

$$\prod_{k=1}^{n} \left| y - y_k \right|^{m_k(x)} = C, \tag{2.1}$$

όπου C *είναι σταθερά ολοκλήρωσης και* $m_k(x)$ $(n = 1, 2, 3$ *ή* $n = 1, 2)$ *προσδιοριστέοι εκθέτες, συναρτήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής* x. *Επίσης,* $y_k(x)$ *είναι γνωστής μορφής μερικές λύσεις της εξίσωσης Abel, που εμπεριέχουν μια βοηθητική προσδιοριστέα συνάρτηση* $G(x)$, *των οποίων η μορφή δίνεται από τις ρίζες της προαναφερθείσας κυβικής εξίσωσης* [5,6].

Απόδειξη

Θεωρούμε χωρίς να χάνεται η γενικότητα, ότι $y > y_k$ (k =1,2 ή k =1,2,3). Από την (2.1) προκύπτει $C > 0$ και διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Περίπτωση Α: Η εξίσωση Abel $y\, y'_x - y = F(x)$ έχει δύο μερικές λύσεις

Για $n = 2$, δηλαδή όταν η διακρίνουσα της κυβικής εξίσωσης[5,6] που αντιστοιχεί στην εξίσωση Abel $y'_x\, y - y = F(x)$ γίνεται μηδέν ($D = 0$, βλέπε παρ. 1.2) όπου υπάρχουν δυο πραγματικές ρίζες εκ των οποίων η μια είναι πολλαπλότητας 2, η (2.1) γράφεται

$$\left(y - y_1\right)^{m_1(x)} \left(y - y_2\right)^{m_2(x)} = C, \tag{2.2}$$

όπου οι $y_1(x)$ και $y_2(x)$ έχουν την γνωστή μορφή των ριζών της κυβικής εξίσωσης (1.37)[5,6], που παρουσιάζονται στην §1.2 του παρόντος και εμπεριέχουν όμως την προς προσδιορισμό βοηθητική συνάρτηση $G(x)$.

Λογαριθμίζοντας και στη συνέχεια παραγωγίζοντας την (2.2) προκύπτει η εξίσωση

$$\begin{gathered}
\left(m_1 + m_2\right) y'_x\, y + \left[m'_{1_x}\, ln\left(y - y_1\right) + m'_{2_x}\, ln\left(y - y_2\right) \right] y^2 - \\
\left[\left(y_2 + y_1\right) m'_{1_x}\, ln\left(y - y_1\right) + m_1 y'_{1_x} + \left(y_2 + y_1\right) m'_{2_x}\, ln\left(y - y_2\right) + m_2 y'_{2_x} \right] y + \\
\left(-m_1 y_2 - m_2 y_1\right) y'_x + \\
\left[y_1 y_2 m'_{1_x}\, ln\left(y - y_1\right) + m_1 y'_{1_x}\, y_2 + y_1 y_2 m'_{2_x}\, ln\left(y - y_2\right) + m_2 y'_{2_x}\, y_1 \right] = 0.
\end{gathered} \tag{2.3}$$

Η (2.3) πρέπει να έχει την ίδια μορφή με την αρχική εξίσωση Abel $y\, y' - y = F(x)$, δηλαδή με την εξίσωση Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής. Συνεπώς κατά αναλογία με το σύστημα των εξισώσεων (1.12) καταλήγουμε στην ισχύ του παρακάτω αλγεβρικού-διαφορικού συστήματος

$$m_1 + m_2 = M\left(x\right), \qquad (\alpha)$$

$$m'_{1_x}\, ln\left(y - y_1\right) + m'_{2_x}\, ln\left(y - y_2\right) = 0, \qquad (\beta)$$

$$\begin{aligned} &\left(y_2 + y_1\right) m'_{1_x}\, ln\left(y - y_1\right) + m_1 y'_{1_x} + \\ &+\left(y_2 + y_1\right) m'_{2_x}\, ln\left(y - y_2\right) + m_2 y'_{2_x} = M\left(x\right), \end{aligned} \qquad (\gamma) \quad (2.4)$$

$$m_1 y_2 + m_2 y_1 = 0, \qquad (\delta)$$

$$\begin{aligned} &y_1 y_2 m'_{1_x}\, ln\left(y - y_1\right) + m_1 y'_{1_x} y_2 + \\ &+ y_1 y_2 m'_{2_x}\, ln\left(y - y_2\right) + m_2 y'_{2_x} y_1 = -M\left(x\right) F. \end{aligned} \qquad (\varepsilon)$$

Εδώ σημειώνεται ότι $M = M\left(x\right) \neq 0$ είναι λεία βοηθητική συνάρτηση η οποία θα προσδιοριστεί στη συνέχεια μαζί με την βοηθητική συνάρτηση $G\left(x\right)$ της εξίσωσης (1.34), ενώ $F\left(x\right)$ είναι το ελεύθερο μέλος της διαφορικής εξίσωσης Abel.

Το σύστημα (2.4) απλοποιείται σημαντικά, διότι η (2.4β) εμπεριέχεται στις (2.4γ) και (2.4ε) οι οποίες γράφονται πιο συνοπτικά

$$\begin{aligned} m_1 y'_{1_x} + m_2 y'_{2_x} &= M, & (\sigma\tau) \\ m_1 y'_{1_x} y_2 + m_2 y'_{2_x} y_1 &= -M\, F. & (\zeta) \end{aligned} \quad (2.4)$$

και οι οποίες παρέχουν τα αποτελέσματα

$$\begin{aligned} y'_{1_x} &= \frac{(F + y_1)M}{m_1(y_1 - y_2)}, & (\alpha) \\ y'_{2_x} &= -\frac{(F + y_2)M}{m_2(y_1 - y_2)}, & (\beta) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$y_1 \neq y_2,\ M \neq 0,\ m_1 \neq 0,\ m_2 \neq 0.$$

Επιλύοντας τις (2.4δ) και (2.4α) ως προς m_1, m_2 ευρίσκουμε

$$m_1\left(x\right) = -\frac{y_1}{y_2 - y_1} M = f_1 M, \qquad (\alpha)$$

$$m_2\left(x\right) = \frac{y_2}{y_2 - y_1} M = f_2 M, \qquad (\beta)\ (2.6)$$

$$f_1 = -\frac{y_1}{y_2 - y_1}, \ f_2 = \frac{y_2}{y_2 - y_1}, \ f_1 + f_2 = 1, \ f'_{1_x} = -f'_{2_x}. \qquad (\gamma)$$

Αντικαθιστώντας τώρα την (2.6α) στην (2.5α) καθώς και την (2.6β) στην (2.5β) προκύπτουν αντίστοιχα οι εξισώσεις Abel.

$$\begin{aligned} y'_{1_x}\, y_1 - y_1 &= F, \\ y'_{2_x}\, y_2 - y_2 &= F. \end{aligned} \qquad (2.7)$$

Οι εξισώσεις (2.7) ισχύουν εφόσον οι y_1 και y_2 είναι μερικές λύσεις της αρχικής εξίσωσης Abel. Συνεπώς οι εξισώσεις (2.4γ) και (2.4ε) απαλείφονται από το αρχικό σύστημα (2.4).

Από την άλλη μεριά, η (2.4β) ισοδυναμεί με τη εξίσωση

$$\left(y - y_1\right)^{m'_{1x}} \left(y - y_2\right)^{m'_{2x}} = 1, \qquad (2.8)$$

η οποία μπορεί να επιλυθεί ως προς $\left(y - y_1\right)$, παρέχουσα τη σχέση

$$y - y_1 = \left(y - y_2\right)^{-\frac{m'_{2x}}{m'_{1x}}}, \ m'_{1_x} \neq 0, \qquad (2.9)$$

Εισάγοντας την παραπάνω έκφραση (2.9) στην (2.2) εξάγουμε το αποτέλεσμα

$$y - y_2 = C^{\frac{m'_{1x}}{m_2 m'_{1x} - m_1 m'_{2x}}} = C^{\frac{m'_{1x}}{f}}. \qquad (2.10)$$

Κατά τον ίδιο τρόπο προκύπτει επίσης

$$y - y_1 = C^{\frac{-m'_{2x}}{m_2 m'_{1x} - m_1 m'_{2x}}} = C^{\frac{-m'_{2x}}{f}}, \qquad (2.11)$$

όπου

$$f = m_2 m'_{1_x} - m_1 m'_{2_x}. \qquad (2.12\alpha)$$

Η εξίσωση (2.12α) λόγω των σχέσεων (2.6γ) γράφεται

$$f = -f'_{2_x} M^2 = f'_{1_x} M^2. \qquad (2.12\beta)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη της εξισώσεις (2.10) και (2.11) παίρνουμε το αποτέλεσμα

$$y_1 - y_2 = C^A - C^B = f_3, \qquad (2.13)$$

όπου τα A, B και f_3 δίνονται από τις εκφράσεις

$$A(x)=\frac{m'_{1_x}}{m_2m'_{1_x}-m_1m'_{2_x}}=\frac{m'_{1_x}}{f}, \tag{2.14}$$

$$B(x)=-\frac{m'_{2_x}}{m_2m'_{1_x}-m_1m'_{2_x}}=-\frac{m'_{2_x}}{f}, \tag{2.15}$$

$$f=-f'_{2_x}M^2=f'_{1_x}M^2,\ f_3=C^A-C^B=y_1-y_2. \tag{2.16α,β}$$

Σημειώνεται ότι το αρχικό σύστημα (2.4) ισοδυναμεί με το σύστημα των εξισώσεων (2.6) και (2.13). Τονίζεται επίσης ότι η προσπάθειά μας είναι να ορίσουμε, αν είναι δυνατόν, την $M(x)$ και την βοηθητική συνάρτηση $G(x)$ που εισέρχεται στις εκφράσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ (κυβική εξίσωση (1.37)).

Συνεχίζοντας, από την (2.16β) έχουμε

$$C^A-C^B=f_3 \Leftrightarrow C^A(1-C^{B-A})=f_3 \Leftrightarrow$$
$$1-C^{-A}f_3=C^{B-A},$$

Επειδή $C>0,$ συνεπώς $1-C^{-A}f_3>0,$ εισάγοντας μια νέα προσδιοριστέα συνάρτηση $\Omega(x)>0$ και $\neq 1$, έτσι ώστε $1-C^{-A}f_3=\Omega(x)$, διασπάμε την προηγούμενη εξίσωση στις

$$1-C^{-A}f_3=\Omega(x),\quad C^{B-A}=\Omega(x). \tag{2.17α,β}$$

Λογαριθμίζοντας την (2.17β) παίρνουμε την

$$(B-A)\ln C=\ln\Omega \tag{2.18}$$

η οποία, λαμβανόμενης υπόψη της συνοπτικής γραφής των (2.14), (2.15) και (2.4α), καταλήγει στη παρακάτω διαφορική εξίσωση ως προς $M(x)$

$$\left(-\frac{m'_{2_x}}{f}-\frac{m'_{1_x}}{f}\right)\ln C=\ln\Omega \Leftrightarrow -\frac{M'_x}{f'_{1_x}M^2}\ln C=\ln\Omega$$

δηλαδή

$$M'_x=-\left(\frac{\ln\Omega}{\ln C}f'_{1_x}\right)M^2. \tag{2.19}$$

Σημειώνεται ότι για $M \neq 0$ και $f'_{1_x} \neq 0$, η (2.19) είναι διαφορική εξίσωση **χωριζομένων μεταβλητών** εμπεριέχουσα τις προσδιοριστέες συνάρτησεις $M(x)$, $\Omega(x)$, με μερική λύση (η σταθερά ολοκλήρωσης λαμβάνεται ίση με μηδέν)

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{\ln C}\int (\ln \Omega)\, f'_{1_x}\, dx. \tag{2.20}$$

Η σχέση αυτή συνδέει αμφότερες τις προσδιοριστέες συναρτήσεις $M(x)$ και $\Omega(x)$. Ομοίως, η άλλη εξίσωση του συστήματος (2.17), η (2.17α), μετά από λογαρίθμιση και χρήση της (2.14) παρέχει την

$$-\frac{m'_{1_x}}{f} = \frac{1}{\ln C}\ln\left(\frac{1-\Omega}{f_3}\right);\ f_3 \neq 0,\ \text{και εφόσον } y_1 \neq y_2,\ \frac{1-\Omega}{f_3} > 0 \tag{2.20α}$$

η οποία με τη σειρά της, χρησιμποιώντας τις (2.16β) και (2.6α), μετασχηματίζεται στην **εξίσωση Bernoulli** ως προς $M(x)$

$$M'_x + \frac{f'_{1_x}}{f_1}M = M^2\left[-\frac{1}{\ln C}\frac{f'_{1_x}}{f_1}\ln\left(\frac{1-\Omega}{f_3}\right)\right]. \tag{2.21}$$

Επειδή αναζητούμε μια οποιαδήποτε συνάρτηση $M(x) \neq 0$ μπορούμε να πάρουμε τη μερική λύση της εξίσωσης Bernoulli (2.21), θέτοντας στη γενική λύση[7] τη σταθερά C^* ίση με μηδέν και να υπολογίσουμε τη μερική αυτή λύση ως

$$\frac{1}{M} = -e^{-F_1}\int e^{F_1}\left[-\frac{1}{\ln C}\frac{f'_{1_x}}{f_1}\ln\left(\frac{1-\Omega}{f_3}\right)\right]dx,\quad f_1 \neq 0, \tag{2.22}$$

με

$$F_1 = -\int \frac{f'_{1_x}}{f_1}dx = -\int (\ln f_1)'_x\, dx = -\ln(f_1).$$

Επειδή τώρα ισχύουν

$$e^{-F_1} = e^{\ln(f_1)} = f_1 \ \text{και}\ e^{F_1} = e^{-\ln(f_1)} = \frac{1}{f_1},$$

η (2.22) γράφεται

$$\frac{1}{M} = \frac{f_1}{\ln C}\int\left[\frac{f'_{1_x}}{(f_1)^2}\ln\left(\frac{1-\Omega}{f_3}\right)\right]dx. \tag{2.23}$$

Από την παραπάνω ανάλυση, με βάση τις ευρεθείσες ήδη σχέσεις (2.20) και (2.23) προκύπτουν οι ισοδύναμες εκφράσεις

$$\frac{ln\,C}{M}=\int\left(ln\,\Omega\right)f'_{1_x}\,dx, \tag{2.24}$$

$$\int\left[\frac{f'_{1_x}}{\left(f_1\right)^2}ln\left(\frac{1-\Omega}{f_3}\right)\right]dx-\frac{1}{f_1}\int\left(ln\,\Omega\right)f'_{1_x}\,dx=0, \tag{2.25}$$

δηλαδή προκύπτουν: μια εξίσωση που παρέχει την $M\left(x\right)$, συνάρτηση της βοηθητικής άγνωστης συνάρτησης $\Omega\left(x\right)$ και μια εξίσωση με την οποία, όπως θα δούμε, μπορούμε να υπολογίσουμε την $\Omega\left(x\right)$. Η ισοδυναμία του προς εξέταση προβλήματος με τις συγκεκριμένες εξισώσεις (2.24) και (2.25) είναι καθοριστικής σημασίας γιατί όπως θα δούμε στην περαιτέρω ανάλυση, αφορά και σε κάθε άλλη περίπτωση που ακολουθεί. Στη συνέχεια, η παραγώγιση της (2.25) και ο πολλαπλασιασμός της νέας προκύπτουσας σχέσης με $f_1^2\big/f'_{1_x}$ παρέχουν την ολοκληρωτική εξίσωση

$$ln\left(\frac{1-\Omega}{f_3}\right)+\int\left(ln\,\Omega\right)f'_{1_x}\,dx-f_1\;ln\,\Omega=0. \tag{2.26}$$

Τέλος η νέα παραγώγιση της (2.26) και η κατάλληλη ομαδοποίηση των όρων της προκύπτουσας νέας σχέσης, καταλήγει στη συναρτησιακή έκφραση

$$-f_1\frac{\Omega'_x}{\Omega}-\frac{\Omega'_x}{1-\Omega}=\frac{f'_{3_x}}{f_3}. \tag{2.27}$$

Θέτοντας

$$\overline{h_1}=f_1,\;\overline{h_2}=-\frac{f'_{3_x}}{f_3}. \tag{2.28}$$

η (2.27) γράφεται υπό τη μορφή

$$\left[\overline{h_1}+\left(1-\overline{h_1}\right)\Omega\right]\Omega'_x=-\overline{h_2}\Omega^2+\overline{h_2}\Omega. \tag{2.29}$$

Επειδή αναζητούμε μια οποιοδήποτε συνάρτηση που να ικανοποιεί την εξίσωση Abel δευτέρου είδους (2.29), σύμφωνα με την κατασκευή Julia[3] είναι δυνατό να την προσδιορίσουμε από τη σχέση (1.8) δηλαδή

$$\frac{\left(1-\overline{h_1}\right)\Omega^2+2\overline{h_1}\Omega}{\left(1-\overline{h_1}\right)J}=0\Leftrightarrow\Omega=-\frac{2\overline{h_1}}{\left(1-\overline{h_1}\right)}=2\frac{y_1}{y_2}, \tag{2.30}$$

που προκύπτει εφόσον από την (2.29) χρησιμοποιηθεί για τους συντελεστές της η συναρτησιακή σχέση

$$\overline{h_1}\left[2\left(-\overline{h_2}\right)+\left(1-\overline{h_1}\right)'_x\right]=\left(1-\overline{h_1}\right)\left[\overline{h_2}+\overline{h'_{1_x}}\right]\Leftrightarrow \overline{h'_{1_x}}+\overline{\overline{h_2}\,\overline{h_1}}=-\overline{h_2}. \tag{2.31}$$

Συνεπώς οι (2.24) και (2.25) αντικαθίστανται από τις

$$\frac{ln\,C}{M}=\int\left(ln\,\Omega\right)f'_{1_x}\,dx, \tag{2.32}$$

$$\Omega=2\frac{y_1}{y_2},\quad \overline{h'_{1_x}}+\overline{\overline{h_2}\,\overline{h_1}}+\overline{h_2}=0\,, \tag{2.33α,β}$$

$$\overline{h_1}=f_1=-\frac{y_1}{y_2-y_1},\quad \overline{h_2}=-\frac{y'_{1_x}-y'_{2_x}}{y_1-y_2}. \tag{2.34}$$

Ενσωματώνοντας τώρα τις (2.34) στην (2.33β) και υπενθυμίζοντας ότι y_1 και y_2 είναι μερικές λύσεις της αρχικής Abel, δηλαδή εδώ ισχύουν επιπλέον οι σχέσεις

$$y'_{1_x}\,y_1=F+y_1,\qquad y'_{2_x}\,y_2=F+y_2,$$

η (2.33β) καταλήγει στην

$$3F\,y_1-3F\,y_2+y_1\,y_2-y_2^{\,2}=0\,;\ y_2\left(y_1-y_2\right)^2\neq 0. \tag{2.35}$$

Όπως ήδη αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 1, για $n=2,$ οι μερικές λύσεις της Abel έχουν τη μορφή της (1.45), δηλαδή

$$y_1\ =\ \frac{1}{2}\,x\left[\overline{N}_1+\frac{1}{3}\right],\qquad y_2\ =\ \frac{1}{2}\,x\left[\overline{N}_2+\frac{1}{3}\right]. \tag{2.36}$$

Επειδή $\overline{N_1}$ και $\overline{N_2}$ είναι οι ρίζες της κυβικής εξίσωσης (1.37) πολλαπλότητας 2, δίνονται από τις σχέσεις (1.43) και συνεπώς ισχύει η

$$\overline{N_1}=-2\overline{N_2}. \tag{2.37}$$

Έτσι, η εξίσωση (2.35), μέσω της (2.37) και των (2.36) καταλήγει στην

$$-\frac{1}{4}x^2\,\overline{N}_2-\frac{9}{2}x\,F\,\overline{N}_2-\frac{3}{4}x^2\overline{N}_2^2=0. \tag{2.38}$$

Για $x\neq 0$ η μη μηδενική λύση ($\overline{N}_2\neq 0$) της (2.38) είναι

$$\overline{N}_2 = -\frac{x+18F}{3x}, \tag{2.39}$$

ενώ από τις (1.38) και την (1.38β) με βάση την εξίσωση της αντίστοιχης διακρίνουσας $D, (D=0)$, ευρίσκεται η βοηθητική συνάρτηση $G(x)$ από τον τύπο

$$G(x) = \frac{1}{36}\left[72F(x) + 20x + 54x\left(\overline{N}_2\right)^3\right]. \tag{2.40}$$

Αυτή, μέσω της (2.39), παρέχει τον τελικό τύπο

$$G(x) = -F(x) - \frac{324F(x)^3}{x^2} - \frac{54F(x)^2}{x} + \frac{x}{2}, \quad x \neq 0. \tag{2.41}$$

Επίσης από την (2.6γ) ευρίσκουμε

$$f'_{1_x} = \frac{-y_2\, y'_1 + y_1\; y'_2}{\left(y_1 - y_2\right)^2},$$

η οποία, με βάση το ότι οι y_1, y_2 είναι μερικές λύσεις της Abel και μέσω των (2.37) και (2.39), παρέχει την έκφραση

$$f'_{1_x} = \frac{4(x+15F)}{3(x+12F)(x+18F)}, \quad F \neq -\frac{x}{12}, \quad F \neq -\frac{x}{18}. \tag{2.42}$$

Οι περιπτώσεις $F = x/2$ και $F = -x/18$ επιλύονται σύμφωνα με τα αναφερόμενα της §1.1β . Επίσης υπενθυμίζεται ότι σε όλες τις παραπάνω εκφράσεις $F = F(x)$ είναι το ελεύθερο μέλος της εξίσωσης Abel $y\,y'_x - y = F(x)$.

Η βοηθητική συνάρτηση $\Omega(x)$ προσδιορίζεται τώρα από την (2.33α) και (2.39), δηλαδή

$$\Omega(x) = -4 - \frac{x}{3F}, \tag{2.43}$$

Σημειώνεται ότι επειδή $\Omega(x) > 0$ από την (2.43) πρέπει

$$\frac{x}{F} < -12$$

και από την εξίσωση (2.20α)

$$\frac{30F + 2x}{54F^2 + 3F\,x} > 0.$$

Από την μη χρησιμοποιηθείσα ακόμη εξίσωση (2.32) υπολογίζουμε την επίσης βοηθητική συνάρτηση $M(x)$ ως

$$\frac{1}{M(x)}=\frac{1}{\ln C}\int\frac{4(x+15F)}{3(x+12F)(x+18F)}\ \ln\left(\left|-4-\frac{x}{3F}\right|\right)dx. \tag{2.44}$$

Συνοψίζοντας, τονίζουμε ότι όταν η κυβική εξίσωση της εξίσωση Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής έχει δύο μερικές λύσεις (διακρίνουσα D της κυβικής εξίσωσης (1.37) είναι ίση με το μηδέν)[5,6], η γενική λύση της δίνεται από τους τύπους

$$\begin{gathered}
\left[y(x)-y_1(x)\right]^{m_1(x)}\left[y(x)-y_2(x)\right]^{m_2(x)}=C,\\
y_1(x)=\frac{x}{2}+6F(x),\ y_2(x)=-3F(x),\\
m_1(x)=\frac{x+12F(x)}{x+18F(x)}M(x),\ m_2(x)=\frac{6F(x)}{x+18F(x)}M(x),\\
\frac{1}{M(x)}=\frac{1}{\ln C}\int\frac{4\left[x+15F(x)\right]}{3\left[x+12F(x)\right]\left[x+18F(x)\right]}\ \ln\left|4+\frac{x}{3F(x)}\right|dx.\\
C=\text{σταθερά ολοκλήρωσης},\\
F(x)\,\text{ελεύθερο μέλος της εξίσωσης Abel};\ F\neq-\frac{x}{12},\quad F\neq-\frac{x}{18}.
\end{gathered} \tag{2.45}$$

Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι η εξίσωση που καθορίζει τη βοηθητική προσδιοριστέα συνάρτηση $G(x)$, η οποία εισέρχεται στην αντίστοιχη της εξίσωσης Abel κυβική εξίσωση (1.37) (άρα και στις μερικές λύσεις της Abel)[5,6], δίνεται αναλυτικά από την (2.41), δηλαδή από τον μηδενισμό της διακρίνουσας D $(D=0)$ της κυβικής εξίσωσης (1.37).

β. Περίπτωση Β: Η εξίσωση Abel $y\,y'_x - y = F(x)$ έχει τρεις μερικές λύσεις

Όταν η εξίσωση Abel δεύτερου είδους κανονικής μορφής έχει τρεις μερικές λύσεις τότε η (2.1) παίρνει τη μορφή

$$\left(y-y_1\right)^{m_1(x)}\left(y-y_2\right)^{m_2(x)}\left(y-y_3\right)^{m_3(x)}=C. \tag{2.46}$$

Ακολουθώντας την ίδια όπως προηγουμένως αναπτυχθείσα μεθοδολογία απόδειξης, δηλαδή λογαριθμίζοντας και στη συνέχεια παραγωγίζοντας την (2.46) καταλήγουμε στην αντίστοιχη της (2.3) εξίσωση

$$
\begin{aligned}
&A\left[y^3-\left(y_1+y_2+y_3\right)y^2+\left(y_1y_2+y_2y_3+y_1y_3\right)y-y_1y_2y_3\right]+\\
&+\left(m_1+m_2+m_3\right)y^2\,y'_x+\\
&+\left(-m_1y'_{1_x}-m_2y'_{2_x}-m_3y'_{3_x}\right)y^2+\\
&+\left(-m_1y_3-m_1y_2-m_2y_3-m_2y_1-m_3y_3-m_3y_1\right)y\,y'_x+\\
&+\left(m_1y_2y_3+m_2y_1y_3+m_3y_1y_2\right)y'_x+\\
&+\left(m_1y_2y'_{1_x}+m_2y_1y'_{2_x}+m_3y_1y'_{3_x}+m_3y_2y'_{3_x}+m_2y_3y'_{2_x}+m_1y_3y'_{1_x}\right)y+\\
&+m_1y_2y_3y'_{1_x}+m_2y_1y_3y'_{2_x}+m_3y_1y_2y'_{3_x}=0,
\end{aligned}
\tag{2.47}
$$

όπου

$$A=m'_{1_x}\ln\left(y-y_1\right)+m'_{2_x}\ln\left(y-y_2\right)+m'_{3_x}\ln\left(y-y_3\right).$$

Η (2.47) οφείλει να έχει την ίδια μορφή με την αρχικής εξίσωσης Abel $y\,y'-y=F\left(x\right)$ και επομένως κατά αναλογία με το σύστημα των εξισώσεων (2.4α÷δ), καταστρώνουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων

$$m'_{1_x}\ln\left(y-y_1\right)+m'_{2_x}\ln\left(y-y_2\right)+m'_{3_x}\ln\left(y-y_3\right)=0, \qquad (\alpha)$$

$$m_1+m_2+m_3=0, \qquad (\beta)$$

$$m_1y'_{1_x}+m_2y'_{2_x}+m_3y'_{3_x}=0, \qquad (\gamma)$$

$$m_1y_3+m_1y_2+m_2y_3+m_2y_1+m_3y_3+m_3y_1=-M\left(x\right), \qquad (\delta)(2.48)$$

$$m_1y_2y_3+m_2y_1y_3+m_3y_1y_2=0, \qquad (\varepsilon)$$

$$m_1y_2y'_{1_x}+m_2y_1y'_{2_x}+m_3y_1y'_{3_x}+m_3y_2y'_{3_x}+m_2y_3y'_{2_x}+m_1y_3y'_{1_x}=-M\left(x\right), \qquad (\zeta)$$

$$m_1y_2y_3y'_{1_x}+m_2y_1y_3y'_{2_x}+m_3y_1y_2y'_{3_x}=M\left(x\right)F, \qquad (\eta)$$

όπου και πάλι $M=M\left(x\right)\neq 0$ είναι βοηθητική συνάρτηση προς προσδιορισμό. Η (2.48δ) ομαδοποιείται ως προς τους όρους y_1, y_2, y_3 και με την χρήση της (2.48α) απλοποιείται ως εξής

$$m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3=M. \tag{2.49}$$

Επιλύοντας τις (2.48γ,ζ,η) ως προς τους όρους y'_{1_x}, y'_{2_x}, y'_{3_x} προκύπτουν οι εξισώσεις οι αντίστοιχες των (2.5α,γ), δηλαδή οι εξισώσεις

$$y'_{1_x} = \frac{F + y_1}{m_1\left(y_1 - y_2\right)\left(y_2 - y_3\right)} M, \qquad (\alpha)$$

$$y'_{2_x} = -\frac{F + y_2}{m_2\left(y_1 - y_2\right)\left(y_1 - y_3\right)} M, \qquad (\beta)(2.50)$$

$$y'_{3_x} = -\frac{F + y_2}{m_3\left(y_1 - y_3\right)\left(y_2 - y_3\right)} M. \qquad (\gamma)$$

$$y_1 \neq y_2 \neq y_3,\ m_1 \neq 0,\ m_2 \neq 0,\ m_3 \neq 0.$$

Στη συνέχεια επιλύοντας τις (2.49) και (2.48ε) ως προς m_1, m_2 και λαμβάνοντας υπόψη για τον προσδιορισμό της m_3 την (2.48β), υπολογίζουμε

$$m_1 = \frac{y_1}{\left(y_1 - y_2\right)\left(y_1 - y_3\right)} M = f_1 M, \qquad (\alpha)$$

$$m_2 = \frac{y_2}{\left(-y_1 + y_2\right)\left(y_2 - y_3\right)} M = f_2 M, \qquad (\beta)(2.51)$$

$$m_3 = -\left(m_1 + m_2\right),\ m_3 = \frac{y_3}{\left(y_1 - y_3\right)\left(-y_2 + y_3\right)} M = f_3 M, \qquad (\gamma)$$

$$f_1 = \frac{y_1}{\left(y_1 - y_2\right)\left(y_1 - y_3\right)};\ f_2 = \frac{y_2}{\left(-y_1 + y_2\right)\left(y_2 - y_3\right)};\ f_3 = \frac{y_3}{\left(y_1 - y_3\right)\left(-y_2 + y_3\right)}, \qquad (\delta)$$

$$M\left(x\right) \neq 0,\quad f_2 \neq 0,\quad f_3 \neq 0.$$

που είναι οι αντίστοιχες των εξισώσεων (2.6).

Από τις (2.50α) και (2.51α) τώρα, καθώς επίσης και από τις (2.50β) και (2.51β), (2.50γ) και (2.51γ), καταλήγουμε στις εξισώσεις Abel κανονικής μορφής

$$y'_{1_x}\, y_1 = F + y_1,\ \ y'_{2_x}\, y_2 = F + y_2,\ \ y'_{3_x}\, y_3 = F + y_3. \qquad (2.52)$$

Οι (2.52) ισχύουν πάντα δεδομένου ότι y_1, y_2, y_3 είναι λύσεις της εξίσωσης Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής. Συνεπώς οι (2.48γ,ζ,η) απαλείφονται από το αρχικό σύστημα των εξισώσεων (2.48) και παραμένουν μόνο οι (2.48α,β,δ,ε,η).

Από την άλλη μεριά, η (2.48α) γράφεται

$$\left(y - y_1\right)^{m'_{1x}} \left(y - y_2\right)^{m'_{2x}} \left(y - y_3\right)^{m'_{3x}} = 1, \qquad (2.53)$$

η οποία επιλυόμενη ως προς $(y-y_1)$, $(y-y_2)$, $(y-y_3)$ διαδοχικά παρέχει τα αποτελέσματα

$$y-y_1=(y-y_2)^{-\frac{m'_{2_x}}{m'_{1_x}}}(y-y_3)^{-\frac{m'_{3_x}}{m'_{1_x}}}, \qquad (\alpha)$$

$$y-y_2=(y-y_1)^{-\frac{m'_{1_x}}{m'_{2_x}}}(y-y_3)^{-\frac{m'_{3_x}}{m'_{2_x}}}, \qquad (\beta)(2.54)$$

$$y-y_3=(y-y_1)^{-\frac{m'_{1_x}}{m'_{3_x}}}(y-y_2)^{-\frac{m'_{2_x}}{m'_{3_x}}}, \qquad (\gamma)$$

$$m'_{1_x}, m'_{2_x}, m'_{3_x} \neq 0.$$

που είναι οι αντίστοιχες των (2.10) και (2.11) εξισώσεις.

Τώρα, με τη χρήση της (2.46) καταστρώνουμε τις σχέσεις

$$(y-y_2)^{m_2-\frac{m'_{2_x}}{m'_{1_x}}m_1}(y-y_3)^{m_3-\frac{m'_{3_x}}{m'_{1_x}}m_1}=C \Leftrightarrow (y-y_2)^{\frac{h_1}{m'_{1_x}}}(y-y_3)^{\frac{h_2}{m'_{1_x}}}=C, \qquad (\alpha)$$

$$(y-y_1)^{m_1-\frac{m'_{1_x}}{m'_{2_x}}m_2}(y-y_3)^{m_3-\frac{m'_{3_x}}{m'_{2_x}}m_2}=C \Leftrightarrow (y-y_1)^{-\frac{h_1}{m'_{2_x}}}(y-y_3)^{\frac{h_3}{m'_{2_x}}}=C, \qquad (\beta)(2.55)$$

$$(y-y_1)^{m_1-\frac{m'_{1_x}}{m'_{3_x}}m_3}(y-y_2)^{m_2-\frac{m'_{2_x}}{m'_{3_x}}m_3}=C \Leftrightarrow (y-y_1)^{-\frac{h_2}{m'_{3_x}}}(y-y_2)^{-\frac{h_3}{m'_{3_x}}}=C, \qquad (\gamma)$$

όπου

$$h_1=m_2m'_{1_x}-m_1m'_{2_x},\ \ h_2=m_3m'_{1_x}-m_1m'_{3_x},\ \ h_3=m_3m'_{2_x}-m_2m'_{3_x}. \qquad (2.56)$$

Από την (2.48β) με παραγώγιση παίρνουμε

$$m'_{1_x}+m'_{2_x}+m'_{3_x}=0, \qquad (2.57)$$

και στην συνέχεια σε συνδυασμό με τις (2.56) συμπεραίνουμε ότι

$$h_1=-h_2 \ \text{και}\ h_3=h_1.$$

Θέτουμε εκ νέου

$$f=h_1=m'_{1_x}m_2-m_1m'_{2_x}\neq 0;\ f\neq 0. \qquad (2.58)$$

και από τις (2.51 α,β,γ) ευρίσκουμε ότι

$$f=f_2M\left(f'_{1_x}M+f_1M'_x\right)-f_1M\left(f'_{2_x}M+f_2M'_x\right),$$

δηλαδή ότι

$$f = M^2\left(f_2\, f'_{1_x} - f_1\, f'_{2_x}\right) \tag{2.59}$$

που είναι αντίστοιχη της (2.12β) εξίσωση.
Οι εξισώσεις τώρα (2.55 α,β,γ) απλοποιούνται και παρέχουν τα εξής αποτελέσματα

$$
\begin{aligned}
y - y_2 &= C^{\frac{m'_{1x}}{f}}\left(y - y_3\right), && (\alpha)\\
y - y_3 &= C^{\frac{m'_{2x}}{f}}\left(y - y_1\right), && (\beta)\ (2.60)\\
y - y_1 &= C^{-\frac{m'_{2x}}{f}}\left(y - y_3\right), && (\gamma)
\end{aligned}
$$

ή ισοδύναμα προς την (2.60α)

$$y - y_2 = C^{-\frac{m'_{3x}}{f}}\left(y - y_1\right). \tag{2.60δ}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (2.60α), (2.60β) και τις (2.60γ), (2.60δ) προκύπτουν οι νέες συναρτησιακές σχέσεις

$$y - y_3 = \frac{y_2 - y_1}{C^{-\frac{m'_{2x}}{f}} - C^{\frac{m'_{1x}}{f}}},$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_3}{C^{\frac{m'_{2x}}{f}} - C^{-\frac{m'_{3x}}{f}}},$$

ενώ με αφαίρεση επίσης των δύο αυτών τελευταίων εξισώσεων προκύπτει η ισοδύναμη προς την (2.48α) συναρτησιακή σχέση

$$y_1 - y_3 = \frac{y_2 - y_1}{\omega_1} - \frac{y_2 - y_3}{\omega_2}, \tag{2.61}$$

με

$$\omega_1 = C^{-\frac{m'_{2x}}{f}} - C^{\frac{m'_{1x}}{f}},\quad \omega_2 = c^{\frac{m'_2}{f}} - c^{-\frac{m'_3}{f}}. \tag{2.62}$$

Η (2.61) παίρνει τη τελική μορφή

$$\omega_1 = \frac{-\omega_2 y_1 + \omega_2 y_2}{\omega_2 y_1 + y_2 - y_3 - \omega_2 y_3},$$

από την οποία προκύπτει η εξίσωση

$$\omega_1\left(y_1 - y_3\right)\omega_2 + \omega_1\left(y_2 - y_3\right) - \left(y_2 - y_1\right)\omega_2 = 0, \tag{2.63}$$

που παραγοντοποιείται. Με άλλα λόγια, η (2.63) μέσω των (2.62), καταλήγει στην τελική εξίσωση

$$C^{-\frac{m'_{2x}}{f}}\left(-1-C^{\frac{m'_{2x}}{f}}+C^{\frac{m'_{1x}+m'_{2x}}{f}}\right)\left(-y_2+C^{\frac{m'_{2x}}{f}}\left(-y_1+y_2\right)+C^{\frac{m'_{1x}+m'_{2x}}{f}}\left(y_1-y_3\right)+y_3\right)=0.$$

(2.63α)

Επειδή $C^{-\frac{m'_{2x}}{f}}\neq 0$ από την (2.63α) συνάγουμε ότι ισχύουν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$-1-C^{\frac{m'_{2x}}{f}}+C^{\frac{m'_{1x}+m'_{2x}}{f}}=0 \tag{2.64}$$

ή

$$-y_2+C^{\frac{m'_{2x}}{f}}\left(-y_1+y_2\right)+C^{\frac{m'_{1x}+m'_{2x}}{f}}\left(y_1-y_3\right)+y_3=0. \tag{2.65}$$

Διακρίνουμε τώρα τις παρακάτω υποπεριπτώσεις:

Υποπερίπτωση Β1:

Μελετούμε πρώτα την (2.64) δηλαδή την αντίστοιχη προς την (2.13) εξίσωση

$$-C^{\frac{m'_{2x}}{f}}+C^{\frac{m'_{1x}+m'_{2x}}{f}}=-1\Leftrightarrow C^{\frac{m'_{2x}}{f}}\left(C^{\frac{m'_{1x}}{f}}-1\right)=1\Leftrightarrow C^{\frac{m'_{1x}}{f}}-1=C^{-\frac{m'_{2x}}{f}}\;;$$

$$f=m'_{1_x}m_2-m_1m'_{2_x},\qquad \left[m_3=-\left(m_1+m_2\right)\right].$$

Εισάγουμε όπως και στην **Περίπτωση Α** μια βοηθητική συνάρτηση $\Omega(x)>0$ γιατί $C>0$ και η παραπάνω εξίσωση διασπάται στις

$$C^{\frac{m'_{2x}}{f}}=\Omega \;\text{ και }\; C^{\frac{m'_{1x}}{f}}-1=\Omega,\; \Omega>0. \tag{2.66α,β}$$

Η πρώτη των (2.66α) σε συνδυασμό τις (2.51α,β) και (2.58) παρέχει την

$$\frac{m'_{2_x}}{f}\ln C=\ln\left(\Omega\right),$$

ή την

$$\left(f'_{2_x}M+f_2M'_x\right)\ln C=M^2\left(f_2f'_{1_x}-f_1\,f'_{2_x}\right)\ln\Omega,$$

ή, τέλος, την εξίσωση

$$M'_x = \frac{\ln \Omega}{\ln C}\left(\frac{f_2 f'_{1_x} - f_1 f'_{2_x}}{f_2}\right)M^2 - \frac{f'_{2_x}}{f_2}M.$$

Η διαφορική αυτή εξίσωση είναι **τύπου Bernoulli** και είναι αντίστοιχη της εξίσωσης (2.21). Η μερική λύση (για σταθερά ολοκλήρωσης ίση με το μηδέν) είναι[7]:

$$\frac{1}{M} = -e^{-F_1}\int e^{F_1}\left(\frac{f_2 f'_{1_x} - f_1 f'_{2_x}}{f_2}\right)\frac{\ln \Omega}{\ln C}dx, \tag{2.67}$$

όπου

$$F_1(x) = -\int \frac{f'_{2_x}}{f_2}dx = -\ln(f_2) \text{ και } e^{-F_1} = f_2,\ e^{F_1} = \frac{1}{f_2}. \tag{2.67α}$$

Η (2.67) με τη σειρά της παίρνει τη τελική μορφή

$$\frac{1}{M} = -f_2\int\left(\frac{f_1}{f_2}\right)'_x \frac{\ln \Omega}{\ln C}dx. \tag{2.68}$$

Ομοίως από την δεύτερη εξίσωση των θεωρούμενων εξισώσεων, εξίσωση (2.66β), προκύπτει

$$C^{\frac{m'_{1_x}}{f}} = \Omega + 1 \Leftrightarrow \frac{m'_{1_x}}{f}\ln C = \ln(\Omega + 1)$$

ή

$$M'_x = \frac{\ln(\Omega+1)}{\ln C}\left(\frac{f_2 f'_{1_x} - f_1 f'_{2_x}}{f_1}\right)M^2 - \frac{f'_{1_x}}{f_1}M.$$

Η διαφορική αυτή εξίσωση είναι επίσης **τύπου Bernoulli** και είναι αντίστοιχη της εξίσωσης (2.21). Η μερική λύση (για σταθερά ολοκλήρωσης ίση με το μηδέν) είναι[7]:

$$\frac{1}{M} = -e^{-F_2}\int e^{F_2}\left(\frac{f_2 f'_{1_x} - f_1 f'_{2_x}}{f_1}\right)\left[\frac{\ln(\Omega+1)}{\ln C}\right]dx, \tag{2.69}$$

όπου

$$F_2(x) = -\int \frac{f'_{1_x}}{f_1}dx = -\ln(f_1) \text{ και } e^{-F_2} = f_1,\ e^{F_2} = \frac{1}{f_1}. \tag{2.69α}$$

Η (2.69) μετά από επεξεργασία παίρνει την τελική μορφή

$$\frac{1}{M}=-f_1\int\left[-\left(\frac{f_2}{f_1}\right)'_x\right]\left[\frac{\ln(\Omega+1)}{\ln C}\right]dx, \tag{2.70}$$

ενώ συνδυάζοντας τις (2.68) και (2.70) εξάγουμε το ισοδύναμο προς τις (2.67) και (2.70) σύστημα

$$\frac{\ln C}{M}=-f_2\int\left(\frac{f_1}{f_2}\right)'_x \ln\Omega\ dx, \tag{2.71α}$$

$$f_2\int\left(\frac{f_1}{f_2}\right)'_x \ln\Omega\ dx+f_1\int\left(\frac{f_2}{f_1}\right)'_x\left[\ln(\Omega+1)\right]dx=0, \tag{2.71β}$$

που αντιστοιχεί στο σύστημα (2.24) και (2.25) της **Περίπτωσης Α**. Παρατηρούμε λοιπόν ότι η όλη διαδικασία και για την περίπτωση αυτή καταλήγει σε σύστημα που είναι ανάλογο με αυτό της Περίπτωσης Α.

Όπως και στην **Περίπτωση Α** η (2.71β) μετά από παραγώγιση καταλήγει στην

$$\begin{gathered}H'_x\ln(\Omega)-\frac{H'_x}{H}\ln(\Omega+1)+H'_x\int\left(\frac{1}{H}\right)'_x\ln(\Omega+1)=0,\\ H=\frac{f_1}{f_2},\ \ f_1\neq 0,\ \ f_2\neq 0.\end{gathered} \tag{2.72}$$

Με $H'_x\neq 0$ και εκτελώντας πράξεις, η (2.72) καταλήγει στην ολοκληρωτική σχέση

$$\ln(\Omega)-\int\frac{1}{H}\frac{\Omega'_x}{\Omega+1}dx=0, \tag{2.73}$$

που αν παραγωγιστεί παρέχει την εξίσωση

$$\frac{\Omega'_x}{\Omega}-\frac{1}{H}\frac{\Omega'_x}{\Omega+1}=0. \tag{2.74}$$

Από την τελευταία αυτή εξίσωση παίρνουμε τις λύσεις

$$\Omega'_x=0 \quad ή \quad (H-1)\Omega+\mathrm{H}=0. \tag{2.75}$$

Η πρώτη λύση $\Omega'_x=0$, δηλαδή ότι $\Omega=\lambda=$σταθερά, πρέπει να απορριφθεί, διότι από το ολοκλήρωμα (2.73) προκύπτει $\Omega=1$, γεγονός που καθιστά τις εξισώσεις (2.68) και (2.70) μη συμβατές.

Έτσι, εκ των (2.75) μόνο η λύση

$$(H-1)\Omega+\mathrm{H}=0, \tag{2.76}$$

είναι αποδεκτή, η οποία μέσω του ότι $H=f_1/f_2$, οδηγεί στην τελική εξίσωση

$$\Omega = \frac{-H}{H-1} = -\frac{f_1}{f_1 - f_2} > 0, \tag{2.77}$$

όπου f_1 και f_2 όπως στις (2.51δ).
Επομένως, η (2.71α) γράφεται

$$\frac{\ln C}{f_2 M} = \int H_x' \ln\left(\frac{-H}{H-1}\right) dx = H \ln\left(\frac{-H}{-1+H}\right) + \ln\left(-1+H\right);\ H > 1$$

στην οποία, εφόσον αντικαταστήσουμε την H από την σχέση $H = f_1 / f_2$ καθώς επίσης και τις f_1 και f_2 από τις (2.51δ), καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\frac{\ln C}{M} = \frac{y_2}{\left(y_2 - y_1\right)\left(y_2 - y_3\right)} \left[\frac{y_1\left(y_3 - y_2\right) \ln\left(\dfrac{y_1\left(y_3 - y_2\right)}{2y_1 y_2 - \left(y_1 + y_2\right) y_3}\right)}{y_2\left(y_1 - y_3\right)} + \ln\left(\frac{\left(y_1 + y_2\right) y_3 - 2y_1 y_2}{y_2\left(y_1 - y_3\right)}\right) \right]. \tag{2.78}$$

Η εξίσωση αυτή είναι μια συναρτησιακή σχέση που συνδέει την $M\left(x\right)$ με την βοηθητική συνάρτηση $G\left(x\right)$ που εισέρχεται στις μερικές λύσεις $y_i\left(x\right)$ $\left(i = 1,2,3\right)$ της αρχικής εξίσωσης Abel.

Τέλος, για την υπολογισμό της βοηθητικής συνάρτησης $G\left(x\right)$ και ελλείψει μιας αντίστοιχής της (2.37) σχέσης χρησιμοποιούμε την ίδια εξίσωση (2.78) μαζί με το γεγονός ότι η $M\left(x\right)$ είναι μια οποιοδήποτε βοηθητική συνάρτηση που πρέπει να προσδιοριστεί. Συνεπώς, για $n = 3$ (τρεις μερικές λύσεις της αρχικής εξίσωσης Abel, μπορούμε να θέσουμε

$$M\left(x\right) = G\left(x\right) \tag{2.79}$$

ώστε η (2.78) σε συνδυασμό με την (2.79) να παρέχουν τις βοηθητικές προς προσδιορισμό συναρτήσεις $G\left(x\right)$ και $M\left(x\right)$.

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις που συνδέουν τις ρίζες μια κυβικής εξίσωσης και συγκεκριμένα τις σχέσεις των ριζών της κυβικής εξίσωσης (1.37)

$$\begin{gathered} \overline{N}_1 + \overline{N}_2 + \overline{N}_3 = 0,\ \overline{N}_1\overline{N}_2 + \overline{N}_1\overline{N}_3 + \overline{N}_2\overline{N}_3 = -\frac{4\left(G + 3F\right)}{x}, \\ \overline{N}_1\overline{N}_2\overline{N}_3 = 3 + \frac{4\left(G + F\right)}{x},\quad \overline{N}_i\left(x\right) = \left(\frac{2y_i}{x} - \frac{1}{3}\right),\ i = 1,2,3, \end{gathered} \tag{2.80}$$

η εξίσωση (2.79) παίρνει την τελική μορφή

$$\frac{\ln C}{G}=\frac{2\left(\frac{1}{3}+\overline{N}_2\right)}{\left(\overline{N}_2-\overline{N}_3\right)\left(2\overline{N}_2+\overline{N}_3\right)}\left\{\ln\left[-\frac{3\left(2\overline{N}_2^2+\overline{N}_3+2\overline{N}_2\overline{N}_3-\overline{N}_3^2\right)}{\left(1+3\overline{N}_2\right)\left(\overline{N}_2+2\overline{N}_3\right)}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\left(\overline{N}_2-3\overline{N}_2^2+\overline{N}_3\left(3\overline{N}_3-1\right)\ln\left[\frac{\overline{N}_2-3\overline{N}_2^2-\overline{N}_3+3\overline{N}_3^2}{3\left(2\overline{N}_2^2+\overline{N}_3+2\overline{N}_2\overline{N}_3-\overline{N}_3^2\right)}\right]\right)}{\left(1+3\overline{N}_2\right)\left(\overline{N}_2+2\overline{N}_3\right)}\right\}, \tag{2.81}$$

$$G(x)=M(x)\neq 0,\ -2\overline{N}_2\neq\overline{N}_3,\ \overline{N}_2\neq\overline{N}_3,\ \overline{N}_3\neq-\frac{1}{3},\ \overline{N}_2\neq-2\overline{N}_3.$$

Με χρήση των εξισώσεων (1.40) για $D<0\ (p<0)$ η εξίσωση (2.81) γίνεται

$$\frac{\ln C}{G}=-\frac{1}{px\left(\sqrt{3}cos\left(\frac{a}{3}\right)+sin\left(\frac{a}{3}\right)\right)}\left(\frac{1}{3}-\frac{2\sqrt{-p}cos\left(\frac{a-\pi}{3}\right)}{\sqrt{3}}\right)csc\left(\frac{a}{3}\right)\times$$
$$\times\ln\left\{\left[-\frac{3\left[-cos\frac{a}{3}+\sqrt{3}\sqrt{-p}cos\left(\frac{2a}{3}\right)+\sqrt{3}sin\left(\frac{a}{3}\right)+3\sqrt{-p}sin\left(\frac{2a}{3}\right)\right]}{2\left[-1+2\sqrt{3}\sqrt{-p}cos\left(\frac{a-\pi}{3}\right)\right]\left[cos\left(\frac{a-\pi}{3}\right)+2cos\left(\frac{a+\pi}{3}\right)\right]}\right]-\right.$$
$$\left[\sqrt{3}+6\sqrt{-p}\ cos\left(\frac{a}{3}\right)\right]sin\left(\frac{a}{3}\right)\times$$
$$\left.\times\frac{\ln\left[-\frac{2\left[\sqrt{3}+6\sqrt{-p}\ cos\left(\frac{a}{3}\right)\right]sin\left(\frac{a}{3}\right)}{3\left[-cos\left(\frac{a}{3}\right)+\sqrt{3}\sqrt{-p}cos\left(\frac{2a}{3}\right)+\sqrt{3}sin\left(\frac{a}{3}\right)+3\sqrt{-p}sin\left(\frac{2a}{3}\right)\right]}\right]}{\left[-1+2\sqrt{3}\sqrt{-p}cos\left(\frac{a-\pi}{3}\right)\right]\left[cos\left(\frac{a-\pi}{3}\right)+2cos\left(\frac{a+\pi}{3}\right)\right]}\right\} \tag{2.82}$$

όπου

$$\cos\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{2\left(18F-9G+5x\right)}{3\sqrt{3}\sqrt{-\left(-\frac{7}{3}+\frac{4\left(F+G\right)}{x}\right)^3x}}.$$

Ομοίως με χρήση των εξισώσεων (1.41) για $D>0\left(p>0\right)$ η εξίσωση (2.81) γίνεται

$$\frac{\ln C}{G}=-\left(9\left(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{p}\cot\left(2a\right)}{\sqrt{3}}-i\sqrt{p}\csc\left(2a\right)\right)\times\right.$$

$$\times\left(\ln\left[\frac{3\left(\begin{array}{l}-4p\cos\left(\frac{a+\pi}{3}\right)^{2}+p\left[5+4i\sqrt{3}\cos\left(2a\right)-\cos\left(4a\right)\right]\csc\left(2a\right)^{2}+\\+2\cos\left(\frac{a+\pi}{3}\right)\left(2\sqrt{-p^{2}}\cot\left(2a\right)+\sqrt{3}\left[\sqrt{-p}-2i\sqrt{-p^{2}}\csc\left(2a\right)\right]\right)\end{array}\right)}{\begin{array}{l}\left[1+\sqrt{3}\sqrt{p}\cot\left(2a\right)-3i\sqrt{p}\csc\left(2a\right)\right]\times\\\times\left(-4\sqrt{3}\sqrt{-p}\cos\left(\frac{a+\pi}{3}\right)+\sqrt{p}\left[-3i+\sqrt{3}\cos\left(2a\right)\right]\csc\left(2a\right)\right)\end{array}}\right]+\right.$$

$$\left(\ln\left[\frac{\begin{array}{l}\frac{2\sqrt{-p}\cos\left(\frac{a+\pi}{3}\right)}{\sqrt{3}}-4p\cos\left(\frac{a+\pi}{3}\right)^{2}+\\\frac{\sqrt{p}\left[-i\sqrt{3}+\cos\left(2a\right)\right]\csc\left(2a\right)}{\sqrt{3}}+p\left[\sqrt{3}+i\cos\left(2a\right)\right]^{2}\csc\left(2a\right)^{2}\end{array}}{\begin{array}{l}-2\sqrt{3}\sqrt{-p}\cos\left(\frac{a+\pi}{3}\right)+4p\cos\left(\frac{a+\pi}{3}\right)^{2}+\\-4\sqrt{-p^{2}}\cos\left(\frac{a+\pi}{3}\right)\left[\cot\left(2a\right)-i\sqrt{3}\csc\left(2a\right)\right]+\\+2p\left[\mathrm{Cot}\left(2a\right)-i\sqrt{3}\mathrm{Csc}\left(2a\right)\right]^{2}\end{array}}\right]\times\right.$$

$$\times\left(2\sqrt{3}\sqrt{-p}\cos\left(\frac{a+\pi}{3}\right)-12p\cos\left(\frac{a+\pi}{3}\right)^{2}-3p\cot\left(2a\right)^{2}-3i\sqrt{p}\csc\left(2a\right)+\right.$$

$$\left.\left.\left.+9p\csc\left(2a\right)^{2}+\sqrt{3}\sqrt{p}\cot\left(2a\right)\left[1+3i\sqrt{p}\csc\left(a\right)\sec\left(a\right)\right]\right)\right)\right/$$

$$\left.\left.\left.\left(\left(1+\sqrt{3}\sqrt{p}\cot\left(2a\right)-3i\sqrt{p}\csc\left(2a\right)\right)\left(-4\sqrt{3}\sqrt{-p}\cos\left(\frac{a+\pi}{3}\right)+\sqrt{p}\left(-3i+\sqrt{3}\cos\left(2a\right)\right)\csc\left(2a\right)\right)\right)\right)\right)\right/$$

$$\left(x\left(\sqrt{3}\sqrt{-p}\cos\left(\frac{a+\pi}{3}\right)-\sqrt{p}\left(-3i+\sqrt{3}\cos\left(2a\right)\right)\csc\left(2a\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(2\sqrt{3}\sqrt{-p}\cos\left(\frac{a+\pi}{3}\right)+\sqrt{p}\left(-3i+\sqrt{3}\cos\left(2a\right)\right)\csc\left(2a\right)\right)\right)\tag{2.83}$$

όπου

$$\tan a = \left(\tan\frac{\beta}{2}\right)^{1/3}, \tan\beta = \frac{\left(-7+\frac{12(F+G)^{3/2}}{x}\right)x}{2(18F-9G+5x)}, \quad |a|\le\frac{\pi}{4}, \quad |\beta|<\frac{\pi}{2}.$$

και τέλος με χρήση των εξισώσεων (1.42) για $D>0\ (p<0)$ η εξίσωση (2.81) γίνεται

$$\frac{\ln C}{G} = \frac{1}{px\left(-i\sqrt{3}+cos(2a)\right)}\left(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{-p}\left(i\sqrt{3}cot(2a)+csc(2a)\right)}{\sqrt{3}}\right)sin(2a)\times$$

$$\left(\ln\left[\frac{9p+12i\sqrt{3}pcos(2a)+3pcos(4a)-2\sqrt{3}\sqrt{-p}sin(2a)+3i\sqrt{-p}sin(4a)}{2\sqrt{-p}\left(\sqrt{3}-icos(2a)\right)\left(\sqrt{3}\sqrt{-p}+3i\sqrt{-p}cos(2a)+sin(2a)\right)}\right]+\right.$$

$$2icos(2a)tan(2a)\ln\left[-\frac{4cos(2a)\left(2\sqrt{3}p+\sqrt{-p}sin(2a)\right)}{-9ip+12\sqrt{3}pcos(2a)-3ipcos(4a)+2i\sqrt{3}\sqrt{-p}sin(2a)+3\sqrt{-p}sin(4a)}\right]\times$$

$$\left.\times\frac{\left(2\sqrt{3}\sqrt{-p}-sin(2a)\right)}{\left(\sqrt{3}-icos(2a)\right)\left(\sqrt{3}\sqrt{-p}+3i\sqrt{-p}cos(2a)+sin(2a)\right)}\right) \tag{2.84}$$

όπου

$$\tan a = \left(\tan\frac{\beta}{2}\right)^{1/3}, \tan\beta = \frac{\left(-7+\frac{12(F+G)^{3/2}}{x}\right)x}{2(18F-9G+5x)}, \quad |a|\le\frac{\pi}{4}, \quad |\beta|<\frac{\pi}{2}.$$

Υποπερίπτωση Β2.

Εδώ εξετάζουμε την εξίσωση (2.65)

$$-y_2 + C^{\frac{m'_{2x}}{f}}\left(-y_1+y_2\right)+C^{\frac{m'_{1x}+m'_{2x}}{f}}\left(y_1-y_3\right)+y_3=0$$

η οποία αλλιώς γράφεται

$$C^{\frac{m'_{2x}}{f}}+\frac{y_1-y_3}{-y_1+y_2}C^{\frac{m'_{1x}+m'_{2x}}{f}}=\frac{y_2-y_3}{-y_1+y_2}. \tag{2.85}$$

Αν θέσουμε $h_1 = \dfrac{y_1 - y_3}{-y_1 + y_2}$ και $h_2 = \dfrac{y_2 - y_3}{-y_1 + y_2}$, η (2.85) μετατρέπεται στην

$$C^{\frac{m'_{2x}}{f}} + h_1 C^{\frac{m'_{1x}+m'_{2x}}{f}} = h_2 \Leftrightarrow c^{\frac{m_2^{'}}{f}}\left(1 + h_1 c^{\frac{m_1^{'}}{f}}\right) = h_2 \Leftrightarrow 1 + h_1 c^{\frac{m_1^{'}}{f}} = h_2 c^{-\frac{m_2^{'}}{f}} = \Omega$$

ή ισοδύναμα στην

$$1 + h_1 C^{\frac{m'_{1x}}{f}} = \Omega \text{ ή } h_2 C^{-\frac{m'_{2x}}{f}} = \Omega, \tag{2.86}$$

όπου $\Omega = \Omega(x)$ είναι και πάλι βοηθητική συνάρτηση η οποία θα προσδιοριστεί στη συνέχεια.

Από τη δεύτερη των (2.86) σε συνδυασμό τις (2.51α,β) και (2.58) προκύπτει η συναρτησιακή σχέση

$$-\frac{m'_{2x}}{f}\ln C = \ln\left(\frac{\Omega}{h_2}\right) \Leftrightarrow -\frac{f'_{2_x} M + f_2 M'_x}{M^2\left(f_2 f'_{1_x} - f_1 f'_{2_x}\right)} = \ln\left(\frac{\Omega}{h_2}\right),\ \frac{\Omega}{h_2} > 0,$$

που παρέχει την εξίσωση

$$M'_x + \frac{f'_{2_x}}{f_2} M = \left[\frac{f_2 f'_{1_x} - f_1 f'_{2_x}}{\ln C\, f_2}\ln\left(\frac{\Omega}{h_2}\right)\right] M^2. \tag{2.87}$$

Η (2.87) είναι διαφορική εξίσωση **τύπου Bernoulli** της οποία η μερική λύση, για σταθερά ολοκλήρωσης ίση προς μηδέν, είναι[7]

$$\frac{1}{M} = -e^{-F_3}\int e^{F_3}\left[\frac{f_2 f'_{1_x} - f_1 f'_{2_x}}{\ln C\, f_2}\ln\left(\frac{\Omega}{h_2}\right)\right] dx, \tag{2.88}$$

με

$$F_3(x) = -\int \frac{f'_{2_x}}{f_2}dx = -\int \left[\ln(f_2)\right]'_x dx = -\ln(f_2). \tag{2.88α}$$

Συνεπώς έχουμε $e^{-F_3} = f_2$ και η (2.88) απλοποιείται λαμβάνοντας τη μορφή

$$\frac{\ln C}{M} = -f_2 \int \left(\frac{f_1}{f_2}\right)'_x \ln\left(\frac{\Omega}{h_2}\right) dx. \tag{2.89}$$

Ομοίως για τη πρώτη εξίσωση των (2.86) γράφουμε

$$1+h_1C^{\frac{m'_{1_x}}{f}}=\Omega \Leftrightarrow C^{\frac{m'_{1_x}}{f}}=\frac{\Omega-1}{h_1} \Leftrightarrow \frac{m'_{1_x}}{f}\ln(C)=\ln\left(\frac{\Omega-1}{h_1}\right),$$

ενώ από τις (2.51) και (2.58) σε συνδυασμό με το τελευταίο ανάπτυγμα προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$\frac{f'_{1_x}M+f_1M'_x}{\left(f_2f'_{1_x}-f_1f'_{2_x}\right)M^2}=\frac{1}{\ln C}\ln\left(\frac{\Omega-1}{h_1}\right),\quad \frac{\Omega-1}{h_1}>0,$$

η οποία και αυτή είναι **τύπου Bernoulli**

$$M'_x+\frac{f'_{1_x}}{f_1}M=\left[\frac{1}{\ln C}\frac{f_2f'_{1_x}-f_1f'_{2_x}}{f_1}\ln\left(\frac{\Omega-1}{h_1}\right)\right]M^2,$$

με μερική λύση[7] την

$$\frac{1}{M}=-e^{F_4}\int e^{F_4}\left[\frac{1}{\ln C}\frac{f_2f'_{1_x}-f_1f'_{2_x}}{f_1}\ln\left(\frac{\Omega-1}{h_1}\right)\right]dx, \tag{2.90}$$

όπου

$$F_4(x)=-\int\frac{f'_{1_x}}{f_1}dx=-\ln(f_1).$$

Συνεπώς, έχουμε $e^{-F_4}=f_1$, και (2.90) απλοποιείται ως κάτωθι

$$\frac{\ln C}{M}=f_1\int\left(\frac{f_2}{f_1}\right)'_x\ln\left(\frac{\Omega-1}{h_1}\right)dx. \tag{2.91}$$

Από την άλλη μεριά, μέσω των (2.89) και (2.91) καταλήγουμε στο ισοδύναμο σύστημα των εξισώσεων

$$\frac{\ln C}{M}=f_1\int\left(\frac{f_2}{f_1}\right)'_x\ln\left(\frac{\Omega-1}{h_1}\right)dx, \qquad (\alpha)$$

$$f_2\int\left(\frac{f_1}{f_2}\right)'_x\ln\left(\frac{\Omega}{h_2}\right)dx+f_1\int\left(\frac{f_2}{f_1}\right)'_x\ln\left(\frac{\Omega-1}{h_1}\right)dx=0, \qquad (\beta)$$

(2.92)

ανάλογο του συστήματος (2.71α,β). Θέτοντας $H=f_1/f_2$, από τη δεύτερη των (2.92) παίρνουμε την ισοδύναμη εξίσωση

$$\int H'_x\ln\left(\frac{\Omega}{h_2}\right)dx=-H\int\left(\frac{1}{H}\right)'_x\ln\left(\frac{\Omega-1}{h_1}\right)dx,$$

η οποία παραγωγιζόμενη παρέχει την συναρτησιακή σχέση

$$H'_x \ln\left(\frac{\Omega}{h_2}\right)+H'_x\int\left(\frac{1}{H}\right)'_x \ln\left(\frac{\Omega-1}{h_1}\right)dx-H\frac{H'_x}{H^2}\ln\left(\frac{\Omega-1}{h_1}\right)=0, \tag{2.93}$$

αντίστοιχη της (2.73). Για $H'_x \neq 0$ η (2.93) μετασχηματίζεται στην

$$\ln\left(\frac{\Omega}{h_2}\right)+\int\left(\frac{1}{H}\right)'_x \ln\left(\frac{\Omega-1}{h_1}\right)dx-\frac{1}{H}\ln\left(\frac{\Omega-1}{h_1}\right)=0, \tag{2.94}$$

η οποία μετά από επεξεργασία καταλήγει στην

$$\ln(\Omega)-\ln(h_2)-\int\frac{1}{H}\left[\ln(\Omega-1)-\ln(h_1)\right]'_x dx=0,$$

αντίστοιχη της (2.73).

Παραγωγίζοντας τώρα προς x ευρίσκουμε την

$$\frac{\Omega'_x}{\Omega}-\frac{h'_{2_x}}{h_2}-\frac{1}{H}\left[\frac{\Omega'_x}{\Omega-1}-\frac{h'_{1_x}}{h_1}\right]=0, \tag{2.95}$$

που είναι μια διαφορική **εξίσωση Abel** ως προς Ω, αντίστοιχη της (2.74), με τελική έκφραση

$$\left[\left(1-\frac{1}{H}\right)\Omega-1\right]\Omega'_x=\left(\frac{h'_{2_x}}{h_2}-\frac{h'_{1_x}}{h_1}\right)\Omega^2+\left(-\frac{h'_{2_x}}{h_2}+\frac{h'_{1_x}}{h_1}\right)\Omega. \tag{2.96}$$

Θέτοντας $h_3=\frac{h'_{2_x}}{h_2}-\frac{h'_{1_x}}{h_1}$, η τελευταία εξίσωση γίνεται

$$\left[\left(1-\frac{1}{H}\right)\Omega-1\right]\Omega'_x=h_3\Omega^2-h_3\Omega \tag{2.97}$$

Για να προσδιορίσουμε μια $\Omega(x)$ που να ικανοποιεί την (2.97) εφαρμόζουμε την κατασκευή Julia[3]. Συνεπώς γράφουμε την απαιτούμενη συναρτησιακή σχέση που αντιστοιχεί στους συντελεστές της εξίσωσης αυτής, προσαρμόζοντας κατάλληλα τους όρους, δηλαδή

$$-1\left[2h_3+\left(1-\frac{1}{H}\right)'_x\right]=\left(1-\frac{1}{H}\right)\left[-h_3+(-1)'_x\right],$$

ή

$$\frac{2h_3H^2+H'_x}{H^2}=\frac{H-1}{H}h_3 \Leftrightarrow H'_x+h_3H=-h_3H^2. \tag{2.98}$$

Η (2.98) προκύπτει διαφορική εξίσωση **τύπου Bernoulli** με μερική λύση[7]

$$H(x)=-e^{-F_5}\int e^{F_5}(-h_3)\,dx \tag{2.99}$$

όπου

$$F_5(x)=-\int h_3dx=-\int\left(\frac{h'_{2_x}}{h_2}-\frac{h'_{1_x}}{h_1}\right)dx=-\int\left[\ln(h_2)-\ln(h_1)\right]'_x dx=-\ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right).$$

Συνεπώς υπολογίζουμε $e^{-F_5}=\frac{h_2}{h_1}$ και η (2.99) καταλήγει στην εξίσωση

$$\frac{1}{H}=-\frac{h_2}{h_1}\int\frac{h_1}{h_2}\left(\frac{-h'_{2_x}h_1+h_{1_x}h_2}{h_1h_2}\right)dx=-1 \tag{2.100}$$

Επειδή $H=\frac{f_1}{f_2}$, από την (2.100) προκύπτει $f_1+f_2=0$ και λόγω των (2.51α,β) καταλήγουμε ότι $m_1+m_2=0$. Λαμβάνοντας υπόψη την (2.48 β) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $m_3=0,$ οπότε η εν λόγω περίπτωση μεταπίπτει στην περίπτωση $n=2$, δηλαδή στην περίπτωση των δύο μερικών λύσεων της εξίσωση Abel .

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα στη περίπτωση που υπάρχουν τρεις μερικές λύσεις $(n=3)$ η γενική λύση της εξίσωσης Abel δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις

$$\boxed{\begin{gathered}
\left[y(x)-y_1(x)\right]^{m_1(x)}\left[y(x)-y_2(x)\right]^{m_2(x)}\left[y(x)-y_3(x)\right]^{m_3(x)}=C,\\
\mathrm{y}_i(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}x\left(\overline{N}_i+\frac{1}{3}\right),\ i=1,2,3,\\
m_1(x)=\frac{y_1(x)}{\left[y_1(x)-y_2(x)\right]\left[y_1(x)-y_3(x)\right]}G(x),\\
m_2(x)=\frac{y_2(x)}{\left[-y_1(x)+y_2(x)\right]\left[y_2(x)-y_3(x)\right]}G(x),\\
m_3(x)=-\left[m_1(x)+m_2(x)\right].
\end{gathered}} \tag{2.101}$$

Στην προκειμένη περίπτωση η βοηθητική συνάρτηση $G(x)$ που εισέρχεται στον προσδιορισμό των παραπάνω μερικών λύσεων $y_i(x)$της κυβικής εξίσωσης της Abel δίνεται από την (2.81), δηλαδή από την εξίσωση:

Περίπτωση α: Αν $D<0\ (p<0)$

$$\frac{\ln C}{G}=-\frac{1}{px\left(\sqrt{3}cos\left(\frac{a}{3}\right)+sin\left(\frac{a}{3}\right)\right)}\left(\frac{1}{3}-\frac{2\sqrt{-p}cos\left(\frac{a-\pi}{3}\right)}{\sqrt{3}}\right)csc\left(\frac{a}{3}\right)\times$$

$$\times\ln\left\{\left[-\frac{3\left[-cos\frac{a}{3}+\sqrt{3}\sqrt{-p}cos\left(\frac{2a}{3}\right)+\sqrt{3}sin\left(\frac{a}{3}\right)+3\sqrt{-p}sin\left(\frac{2a}{3}\right)\right]}{2\left[-1+2\sqrt{3}\sqrt{-p}cos\left(\frac{a-\pi}{3}\right)\right]\left[cos\left(\frac{a-\pi}{3}\right)+2cos\left(\frac{a+\pi}{3}\right)\right]}\right]-\right.$$

$$\left[\sqrt{3}+6\sqrt{-p}cos\left(\frac{a}{3}\right)\right]sin\left(\frac{a}{3}\right)\times$$

$$\left.\times\frac{\ln\left[-\frac{2\left[\sqrt{3}+6\sqrt{-p}cos\left(\frac{a}{3}\right)\right]sin\left(\frac{a}{3}\right)}{3\left[-Cos\left(\frac{a}{3}\right)+\sqrt{3}\sqrt{-p}cos\left(\frac{2a}{3}\right)+\sqrt{3}sin\left(\frac{a}{3}\right)+3\sqrt{-p}sin\left(\frac{2a}{3}\right)\right]}\right]}{\left[-1+2\sqrt{3}\sqrt{-p}cos\left(\frac{a-\pi}{3}\right)\right]\left[cos\left(\frac{a-\pi}{3}\right)+2cos\left(\frac{a+\pi}{3}\right)\right]}\right\}\qquad(2.102\alpha)$$

όπου

$$\cos\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{2\left(18F-9G+5x\right)}{3\sqrt{3}\sqrt{-\left(-\frac{7}{3}+\frac{4\left(F+G\right)}{x}\right)^{3}x}}.$$

Περίπτωση β: Αν $D>0\ (p>0)$

$$\frac{\ln C}{G}=-\left(9\left(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{p}\cot\left(2a\right)}{\sqrt{3}}-i\sqrt{p}csc\left(2a\right)\right)\times\right.$$

$$\left(\ln\left[\frac{3\left(\begin{array}{l}-4pcos\left(\dfrac{a+\pi}{3}\right)^{2}+p\left[5+4i\sqrt{3}cos(2a)-cos(4a)\right]csc(2a)^{2}+\\ +2cos\left(\dfrac{a+\pi}{3}\right)\left(2\sqrt{-p^{2}}cot(2a)+\sqrt{3}\left[\sqrt{-p}-2i\sqrt{-p^{2}}csc(2a)\right]\right)\end{array}\right)}{\begin{array}{c}\left[1+\sqrt{3}\sqrt{p}cot(2a)-3i\sqrt{p}csc(2a)\right]\times\\ \times\left(-4\sqrt{3}\sqrt{-p}cos\left(\dfrac{a+\pi}{3}\right)+\sqrt{p}\left[-3i+\sqrt{3}cos(2a)\right]csc(2a)\right)\end{array}}\right]+\right.$$

$$\left(\ln\left[\frac{\begin{array}{l}\dfrac{2\sqrt{-p}cos\left(\dfrac{a+\pi}{3}\right)}{\sqrt{3}}-4pcos\left(\dfrac{a+\pi}{3}\right)^{2}+\\ \dfrac{\sqrt{p}\left[-i\sqrt{3}+cos(2a)\right]csc(2a)}{\sqrt{3}}+p\left[\sqrt{3}+icos(2a)\right]^{2}csc(2a)^{2}\end{array}}{\begin{array}{l}-2\sqrt{3}\sqrt{-p}cos\left(\dfrac{a+\pi}{3}\right)+4pcos\left(\dfrac{a+\pi}{3}\right)^{2}+\\ -4\sqrt{-p^{2}}cos\left(\dfrac{a+\pi}{3}\right)\left[cot(2a)-i\sqrt{3}csc(2a)\right]+\\ +2p\left[cot(2a)-i\sqrt{3}csc(2a)\right]^{2}\end{array}}\right]\times\right.$$

$$\times\left(2\sqrt{3}\sqrt{-p}cos\left(\frac{a+\pi}{3}\right)-12pcos\left(\frac{a+\pi}{3}\right)^{2}-3pcot(2a)^{2}-3i\sqrt{p}csc(2a)+\right.$$

$$\left.\left.\left.+9pcsc(2a)^{2}+\sqrt{3}\sqrt{p}cot(2a)\left[1+3i\sqrt{p}csc(a)sec(a)\right]\right)\right)\right)\Big/$$

$$\left(\left(1+\sqrt{3}\sqrt{p}cot(2a)-3i\sqrt{p}csc(2a)\right)\left(-4\sqrt{3}\sqrt{-p}cos\left(\frac{a+\pi}{3}\right)+\sqrt{p}\left(-3i+\sqrt{3}cos(2a)\right)csc(2a)\right)\right)\Big/$$

$$\left(x\left(\sqrt{3}\sqrt{-p}cos\left(\frac{a+\pi}{3}\right)-\sqrt{p}\left(-3i+\sqrt{3}cos(2a)\right)csc(2a)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(2\sqrt{3}\sqrt{-p}cos\left(\frac{a+\pi}{3}\right)+\sqrt{p}\left(-3i+\sqrt{3}cos(2a)\right)csc(2a)\right)\right) \qquad (2.102\beta)$$

όπου

$$\tan a=\left(\tan\frac{\beta}{2}\right)^{1/3}, \tan\beta=\frac{\left(-7+\dfrac{12(F+G)^{3/2}}{x}\right)x}{2(18F-9G+5x)}, \quad |a|\le\frac{\pi}{4}, \quad |\beta|<\frac{\pi}{2}.$$

Περίπτωση γ: Αν $D > 0\left(p < 0\right)$

$$\frac{\ln C}{G} = \frac{1}{px\left(-i\sqrt{3}+cos\left(2a\right)\right)}\left(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{-p}\left(i\sqrt{3}cot\left(2a\right)+csc\left(2a\right)\right)}{\sqrt{3}}\right)sin\left(2a\right)\times$$

$$\left(\ln\left[\frac{9p+12i\sqrt{3}pcos\left(2a\right)+3pcos\left(4a\right)-2\sqrt{3}\sqrt{-p}sin\left(2a\right)+3i\sqrt{-p}sin\left(4a\right)}{2\sqrt{-p}\left(\sqrt{3}-icos\left(2a\right)\right)\left(\sqrt{3}\sqrt{-p}+3i\sqrt{-p}cos\left(2a\right)+sin\left(2a\right)\right)}\right]+\right.$$

$$2icos\left(2a\right)tan\left(2a\right)\ln\left[-\frac{4cos\left(2a\right)\left(2\sqrt{3}p+\sqrt{-p}sin\left(2a\right)\right)}{-9ip+12\sqrt{3}pcos\left(2a\right)-3ipcos\left(4a\right)+2i\sqrt{3}\sqrt{-p}sin\left(2a\right)+3\sqrt{-p}sin\left(4a\right)}\right]\times$$

$$\left.\times\frac{\left(2\sqrt{3}\sqrt{-p}-sin\left(2a\right)\right)}{\left(\sqrt{3}-icos\left(2a\right)\right)\left(\sqrt{3}\sqrt{-p}+3i\sqrt{-p}cos\left(2a\right)+sin\left(2a\right)\right)}\right) \qquad (2.102\gamma)$$

όπου τα $p,\ q$ δίνονται από τους τύπους (1.38) και είναι

$$p=-\frac{7}{3}+\frac{4\left(F+G\right)}{x},\quad q=-\frac{-4\left(18F-9G+5x\right)}{27x} \qquad (2.102\delta)$$

ενώ η D μέσω του τύπου (1.39) γίνεται

$$D=\frac{1}{27}\left(-\frac{7}{3}+\frac{4(F+G)}{x}\right)^3+\frac{4(18F-9G+5x)^2}{729x^2} \qquad (2.102\varepsilon)$$

Η παραπάνω ανάλυση ολοκληρώνει πλήρως την απόδειξη της προαναφερθείσας πρότασης.

Σημειώνουμε ότι οι (2.102α,β,γ) είναι υπερβατικές-αλγεβρικές εξίσωσεις πεπλεγμένης μορφής, οι οποίες με περεταίρω επεξεργασία καταλήγουν στον αναλυτικό υπολογισμό της βοηθητικής συνάρτηση $G\left(x\right)$ εμπεριέχουσα το ελεύθερο μέλος $F\left(x\right)$ της εξίσωσης Abel. Αυτή είναι η βασική διαφορά με την εξίσωση (2.41) που αφορά στον υπολογισμό της $G\left(x\right)$συναρτήσει της $F\left(x\right)$ στην περίπτωση των δύο μερικών λύσεων.

Ένα δεύτερο σημείο που αξίζει να σημειωθεί είναι ότι η διατυπωθείσα Πρόταση 1 και η τεχνική απόδειξης, αλλά και η όλη κατασκευή της γενικής λύσης Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής, είναι ισοδύναμη με τη μέθοδο προσδιοριστέων συντελεστών Lagrange που αφορά στην κατασκευή της γενικής λύσης μιας γραμμικής ΣΔΕ πρώτης τάξης με μεταβλητούς συντελεστές. Δηλαδή, όπως ακριβώς εκεί υποθέτουμε ότι η γενική λύση της ομογενούς $y_0 = AF\left(x\right)$, όπου A είναι σταθερά ολοκλήρωσης, μπορεί να γραφεί ως γενική λύση της πλήρους εξίσωσης με την υπόθεση $y = A(x)F(x)$, (με σκοπό αν είναι δυνατόν να υπολογιστεί η $A(x)$), έτσι και εδώ, γενικεύοντας την υπόθεση (AZS) ότι η γενική λύση της εξίσωσης Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής είναι της μορφής

$$(y-y_1)^{m_1(x)}(y-y_2)^{m_2(x)}(y-y_3)^{m_3(x)} = C,$$

όπου $m_1(x)$, $m_2(x)$, $m_3(x)$προσδιοριστέες συναρτήσεις, υπολογίζουμε όλες τις εισαγόμενες βοηθητικές συναρτήσεις και τον τύπο της γενικής λύσης.

2.2 Το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών

Όμως έχει ήδη αναπτυχθεί[5,6] και έχει ήδη πολλές φορές τονιστεί στο παρόν, η γενική λύση της εξίσωσης Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής $yy'_x - y = F(x)$ μπορεί να μην είναι ενιαία σε ένα διάστημα κύριων τιμών $\mathbb{R}^{(0)} = \left[x^{(0)}, \overline{x}\right]$ της μεταβλητής x, αλλά να διαχωρίζεται σε διάφορα είδη γενικών λύσεων που να ισχύουν σε διάφορα υποδιαστήματα του $\mathbb{R}^{(0)}$ και οι οποίες να διαφέρουν ποιοτικά και ποσοτικά μεταξύ τους. Αυτή η ποιοτική και ποσοτική διαφορά οφείλεται στο γεγονός της προκύπτουσας κατά την ανάλυση κυβικής εξίσωσης (1.37), που χαρακτηρίζει την εξίσωση Abel και η οποία παρέχει τρία είδη ριζών ανάλογα προς το πρόσημο της διακρίνουσας D (σχέση (1.39)) και της ποσότητας p (σχέση (1.38α). Στις D και p εμπεριέχεται και η βοηθητική συνάρτηση $G(x)$, η οποία ταυτίζεται με την βοηθητική συνάρτηση $M(x)$, στην περίπτωση των τριών διακεκριμένων ριζών και προκύπτει από την εξίσωση (2.78) (ή από την ισοδύναμη εξαγόμενη εξίσωση (2.102α), ή (2.102 β) ή (2.102γ)), ανάλογα με το είδος των ριζών $\overline{N}_1, \overline{N}_2, \overline{N}_3$ της προανα-φερθείσας κυβικής εξίσωσης.

Το πρόβλημα που τίθεται τώρα είναι το εξής:

Δεδομένου του κυρίου διαστήματος τιμών $\mathbb{R}^{(0)} = \left[x^{(0)}, \overline{x}\right]$ *και των αρχικών τιμών*

$$\text{για } x = x^0, \quad y^0\left(x^0\right) = y^{(0)} = y^0, \tag{2.103}$$

να προσδιοριστεί η λύση μιας εξίσωσης Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής $yy' - y = F(x)$ *εντός του διαστήματος αυτού.*

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνεται μέσω της λύσης της εξίσωσης Abel με βάση τα παρακάτω βήματα. Υποθέτουμε ότι το κύριο διάστημα τιμών είναι ένωση διαδοχικών n υποδιαστημάτων $\mathbb{R}^{(0)} = \bigcup_i \mathbb{R}^{(i)} = \bigcup_i \left[x^{(i-1)}, x^{(i)} \right],\ i = 1, 2, \ldots n,$ όπου σε κάθε σημείο i αλλάζει πρόσημο η προαναφερθείσα διακρίνουσα D με αποτέλεσμα να έχουμε ποιοτική και ποσοτική αλλαγή της λύσης της εξίσωσης Abel.

Βήμα 1^{0}

Στο πρώτο υποδιάστημα $\mathbb{R}^{(0)} = \left[x^{(0)}, x^{(1)} \right)$ έχουμε την αρχική συνθήκη

$$\text{για} \quad x = x^{0} = x^{(0)}, \quad y^{0}\left(x^{0}\right) = y^{(0)} = y^{0}, \tag{2.104}$$

όπου $x^{(0)}, y^{(0)}$ παριστούν τις αρχικές συνθήκες . Στην προκειμένη περίπτωση η γενική λύση της εξίσωσης Abel γράφεται

$$\left(y^{(0)} - y_1^{(0)}\right)^{m_1^{(0)}} \left(y^{(0)} - y_2^{(0)}\right)^{m_2^{(0)}} \left(y^{(0)} - y_3^{(0)}\right)^{m_3^{(0)}} = C^{(0)}, \tag{2.105}$$

όπου $y^{(0)}$ είναι γνωστό, ενώ οι $y_1^{(0)},\ y_2^{(0)},\ y_3^{(0)}$ είναι οι τιμές των τριών μερικών λύσεων της εξίσωσης Abel, εμπεριέχουσας την άγνωστη προς στιγμή τιμή $G^{(0)}$ της βοηθητικής συνάρτηση $G\left(x\right)$ στο σημείο $\left(0\right)$. Επίσης, $m_1^{(0)},\ m_2^{(0)},\ m_3^{(0)}$ δίνονται από τις εξισώσεις (2.101) και εμπεριέχουν την τιμή $G^{(0)}$.

Η δεύτερη εξίσωση προκύπτει από την (2.78) εάν εισάγουμε, τις αρχικές συνθήκες (2.104), δηλαδή

$$\frac{\ln C^{(0)}}{G^{(0)}} = \frac{y_2^{(0)}}{\left(y_2^{(0)} - y_1^{(0)}\right)\left(y_2^{(0)} - y_3^{(0)}\right)} \left[\frac{y_1^{(0)}\left(y_3^{(0)} - y_2^{(0)}\right) \ln\left(\dfrac{y_1^{(0)}\left(y_3^{(0)} - y_2^{(0)}\right)}{2 y_1^{(0)} y_2^{(0)} - \left(y_1^{(0)} + y_2^{(0)}\right) y_3^{(0)}} \right)}{y_2^{(0)}\left(y_1^{(0)} - y_3^{(0)}\right)} + \right.$$

$$\left. + \ln\left(\frac{\left(y_1^{(0)} + y_2^{(0)}\right) y_3^{(0)} - 2 y_1^{(0)} y_2^{(0)}}{y_2^{(0)}\left(y_1^{(0)} - y_3^{(0)}\right)} \right) \right]. \tag{2.106}$$

Οι δυο εξισώσεις (2.105) και (2.106) περιέχουν ως αγνώστους τις τιμές $y_1^{(0)},\ y_2^{(0)},\ y_3^{(0)}, G^{(0)}$ και $C^{(0)}$.

Το παραπάνω σύστημα των δυο εξισώσεων εμπλουτίζεται τώρα με άλλες τρεις εξισώσεις μέσω της κυβικής εξίσωσης (1.37), για την οποία ισχύουν οι γνωστές σχέσεις[8]

$$\begin{gathered}
\overline{N}_1^{(0)}+\overline{N}_2^{(0)}+\overline{N}_3^{(0)}=0, \\
\overline{N}_1^{(0)}\overline{N}_2^{(0)}+\overline{N}_2^{(0)}\overline{N}_3^{(0)}+\overline{N}_1^{(0)}\overline{N}_3^{(0)}=-\frac{4\left(G^{(0)}+F^{(0)}\right)}{x^{(0)}}, \\
\overline{N}_1^{(0)}\overline{N}_2^{(0)}\overline{N}_3^{(0)}=4\frac{G^{(0)}+2F^{(0)}}{x^{(0)}},
\end{gathered} \tag{2.107}$$

με

$$\overline{N}_i^{(0)}\left(x\right)=\left(\frac{2y_i^{(0)}}{x^{(0)}}-\frac{1}{3}\right),\ \left(\ i=1,2,3,\ \right).$$

Αντικαθιστώντας την τέταρτη εξίσωση των (2.107) στις υπόλοιπες τρεις εξισώσεις προκύπτει το σύστημα των εξισώσεων

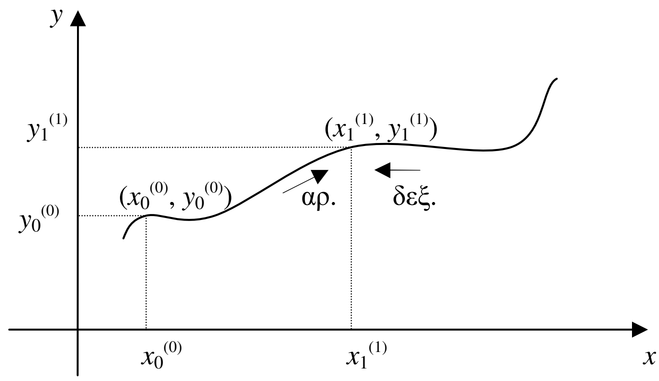
$$\begin{gathered}
-x^{(0)}+\left(y_1^{(0)}+y_2^{(0)}+y_3^{(0)}\right)=0, \\
3Fx^{(0)}+3Gx^{(0)}+\frac{x^{(0)^2}}{4}-x^{(0)}y_1^{(0)}-x^{(0)}y_2^{(0)}+ \\
+3y_1^{(0)}y_2^{(0)}-x^{(0)}y_3^{(0)}+3y_1^{(0)}y_3^{(0)}+3y_2^{(0)}y_3^{(0)}=0, \\
-216Fx^{(0)^2}-108Gx^{(0)^2}-\left(x^{(0)}-6y_1^{(0)}\right)\left(x^{(0)}-6y_2^{(0)}\right)\left(x^{(0)}-6y_3^{(0)}\right)=0.
\end{gathered} \tag{2.108}$$

Τονίζεται ότι η τιμή της y'_x στο σημείο $x^{(0)}$ προκύπτει από την εξίσωση Abel $yy'-y=F\left(x\right)$, δηλαδή

$$y'^{(0)}_x=\frac{F^{(0)}}{y^{(0)}}+1. \tag{2.109}$$

Βήμα 2^0

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η παραπάνω λύση της εξίσωσης Abel ισχύει για το πρώτο υποδιάστημα $\mathbb{R}^{(0)}=\left[x^{(0)},x^{(1)}\right)$ του κυρίου διαστήματος $\mathbb{R}$ και ότι στο σημείο $x^{(1)}$ η λύση της αλλάζει ποιοτικά και ποσοτικά (Σχήμα 2.1). Σημειώνεται ότι με $Q^{(1),\alpha\rho.}$ και $Q^{(1),\delta\epsilon\xi.}$ συμβολίζονται οι ποσότητες που αναφέρονται αριστερά και δεξιά του σημείου στο οποίο η παραπάνω λύση αλλάζει ποιοτικά και ποσοτικά.



Σχήμα 2.1: Ενδεικτικό Γράφημα της λύσης της εξίσωσης Abel $y\,y_x' - y = F\left(x\right)$.

Στο νέο διαδοχικό διάστημα $\mathbb{R}^{(1)} = \left[x^{(1)}, x^{(2)}\right)$ είναι άγνωστες οι ποσότητες $y_1^{(1),\delta\varepsilon\xi}, y_2^{(1),\delta\varepsilon\xi}$, $y_3^{(1),\delta\varepsilon\xi}, G^{(1),\delta\varepsilon\xi}$ και $C^{(1),\delta\varepsilon\xi}$ και επίσης άγνωστες είναι οι ποσότητες $D^{(1),\delta\varepsilon\xi.}$ και $p^{(1),\delta\varepsilon\xi.}$. Είναι όμως συγχρόνως γνωστές από τη λύση στο προηγούμενο υποδιάστημα $\mathbb{R}^{(0)} = \left[x^{(0)}, x^{(1)}\right)$ οι ποσότητες $x^{(1),\alpha\rho}$ $y_1^{(1),\alpha\rho}, y_2^{(1),\alpha\rho}$, $y_3^{(1),\alpha\rho}, G^{(1),\alpha\rho}$ και $C^{(1),\alpha\rho}$. Για τη λειότητα της συνάρτησης της λύσης της εξίσωσης Abel έχουμε την ισχύ των εξισώσεων

$$\begin{gathered}\left(y^{(1),\alpha\rho} - y_1^{(1),\alpha\rho}\right)^{m_1^{(1),\alpha\rho}} \left(y^{(1),\alpha\rho} - y_2^{(1),\alpha\rho}\right)^{m_2^{(1),\alpha\rho}} \left(y^{(1),\alpha\rho} - y_3^{(1),\alpha\rho}\right)^{m_3^{(1),\alpha\rho}} = C^{(1),\alpha\rho}, \\ \left(y^{(1),\delta\varepsilon\xi} - y_1^{(1),\delta\varepsilon\xi}\right)^{m_1^{(1),\delta\varepsilon\xi}} \left(y^{(1),\delta\varepsilon\xi} - y_2^{(1),\delta\varepsilon\xi}\right)^{m_2^{(1),\delta\varepsilon\xi}} \left(y^{(1),\delta\varepsilon\xi} - y_3^{(1),\delta\varepsilon\xi}\right)^{m_3^{(1),\delta\varepsilon\xi}} = C^{(1),\delta\varepsilon\xi}.\end{gathered} \tag{2.110}$$

όπου

$$y^{(1),\alpha\rho} = y^{(1),\delta\varepsilon\xi}, \tag{2.111}$$

και

$$y_x'^{(1),\alpha\rho} = y_x'^{(1),\delta\varepsilon\xi} \Leftrightarrow \frac{F^{(1),\alpha\rho}}{y^{(1),\alpha\rho}} + 1 = \frac{F^{(1),\delta\varepsilon\xi}}{y^{(1),\delta\varepsilon\xi}} + 1, \tag{2.112}$$

η οποία, εφόσον $F^{(1),\alpha\rho} = F^{(1),\delta\varepsilon\xi}$ και $y^{(1),\alpha\rho} = y^{(1),\delta\varepsilon\xi}$, είναι ταυτότητα.
Έχουμε όμως την ισχύ και των τεσσάρων αντίστοιχών των (2.106) και (2.108) εξισώσεων, δηλαδή τις

$$\frac{\ln C^{(0)}}{G^{(0)}} = \frac{y_2^{(1),\delta\varepsilon\xi}}{\left(y_2^{(1),\delta\varepsilon\xi} - y_1^{(1),\delta\varepsilon\xi}\right)\left(y_2^{(1),\delta\varepsilon\xi} - y_3^{(1),\delta\varepsilon\xi}\right)} \times$$

$$\times\left[\frac{y_1^{(1),\delta\varepsilon\xi}\left(y_3^{(1),\delta\varepsilon\xi}-y_2^{(1),\delta\varepsilon\xi}\right)\ln\left(\dfrac{y_1^{(1),\delta\varepsilon\xi}\left(y_3^{(1),\delta\varepsilon\xi}-y_2^{(1),\delta\varepsilon\xi}\right)}{2y_1^{(1),\delta\varepsilon\xi}y_2^{(1),\delta\varepsilon\xi}-\left(y_1^{(1),\delta\varepsilon\xi}+y_2^{(1),\delta\varepsilon\xi}\right)y_3^{(1),\delta\varepsilon\xi}}\right)}{y_2^{(1),\delta\varepsilon\xi}\left(y_1^{(1),\delta\varepsilon\xi}-y_3\right)}+\right. \tag{2.113}$$

$$\left.+\ln\left(\frac{\left(y_1^{(1),\delta\varepsilon\xi}+y_2^{(1),\delta\varepsilon\xi}\right)y_3^{(1),\delta\varepsilon\xi}-2y_1^{(1),\delta\varepsilon\xi}y_2^{(1),\delta\varepsilon\xi}}{y_2^{(1),\delta\varepsilon\xi}\left(y_1^{(1),\delta\varepsilon\xi}-y_3^{(1),\delta\varepsilon\xi}\right)}\right)\right],$$

$$-x^{(1),\delta\varepsilon\xi}+\left(y_1^{(1),\delta\varepsilon\xi}+y_2^{(1),\delta\varepsilon\xi}+y_3^{(1),\delta\varepsilon\xi}\right)=0,$$

$$\begin{aligned}&3Fx^{(1),\delta\varepsilon\xi}+3Gx^{(1),\delta\varepsilon\xi}+\frac{x^{(1),\delta\varepsilon\xi^2}}{4}-x^{(1),\delta\varepsilon\xi}y_1^{(1),\delta\varepsilon\xi}-x^{(1),\delta\varepsilon\xi}y_2^{(1),\delta\varepsilon\xi}+\\&+3y_1^{(1),\delta\varepsilon\xi}y_2^{(1),\delta\varepsilon\xi}-x^{(1),\delta\varepsilon\xi}y_3^{(1),\delta\varepsilon\xi}+3y_1^{(1),\delta\varepsilon\xi}y_3^{(1),\delta\varepsilon\xi}+3y_2^{(1),\delta\varepsilon\xi}y_3^{(1),\delta\varepsilon\xi}=0,\end{aligned} \tag{2.114}$$

$$-216Fx^{(1),\delta\varepsilon\xi^2}-108Gx^{(1),\delta\varepsilon\xi^2}-\left(x^{(1),\delta\varepsilon\xi}-6y_1^{(1),\delta\varepsilon\xi}\right)\left(x^{(1),\delta\varepsilon\xi}-6y_2^{(1),\delta\varepsilon\xi}\right)\left(x^{(1),\delta\varepsilon\xi}-6y_3^{(1),\delta\varepsilon\xi}\right)=0.$$

Το σύστημα των ως άνω πέντε εξισώσεων (2.110), (2.113) και (2.114) περιέχει τις άγνωστες τιμές $y_1^{(1),\delta\varepsilon\xi}, y_2^{(1),\delta\varepsilon\xi}$, $y_3^{(1),\delta\varepsilon\xi}, G^{(1),\delta\varepsilon\xi}$ και $C^{(1),\delta\varepsilon\xi}$ οι οποίες και προσδιορίζονται. Επομένως είναι γνωστές οι τιμές των ποσοτήτων $D^{(1)\delta\varepsilon\xi}$ και $p^{(1)\delta\varepsilon\xi}$ γεγονός που προσδιορίζει πλήρως τη μορφή της λύσης της υπο θεώρηση εξίσωσης Abel.

Η παραπάνω διαδικασία απαιτεί διαδοχικές λύσεις μη γραμμικών (υπερβατικών) συστημάτων, που είναι απαραίτητες για να ορίζονται τα σημεία όπου οι λύσεις της κυβικής εξίσωσης (1.37) αλλάζουν και επομένως οι λύσεις της εξίσωσης Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής αλλάζουν ποιοτικά και ποσοτικά. Η ανάλυση αυτή παρέχει επίσης την ακριβή μορφή των εξισώσεων Abel σε κάθε υπο θεώρηση υποδιάστημα του κυρίως διαστήματος τιμών. Τονίζουμε ότι, εδώ παρουσιάστηκε η γενική περίπτωση όπου υπάρχουν τρεις διαφορετικές μερικές λύσεις της εξίσωσης Abel.

2.3 Κατασκευή της Γενικής Λύσης των Εξισώσεων Κανονικής και Γενικευμένης Μορφής Emden-Fowler.

Οι εξισώσεις Emden-Fowler είναι μη γραμμικές ΣΔΕ δευτέρης τάξης της μορφής (βλέπε Κεφ. 1 του παρόντος):

i) Μη γραμμική Σ.Δ.Ε. δεύτερης τάξης Emden-Fowler κανονικής μορφής

$$y''_{xx} = Ax^n y^m \ , \ n,m = \text{τυχαίοι εκθέτες}, \ A\text{=σταθερά}, \tag{2.115}$$

ii) Μη γραμμική Σ.Δ.Ε. δεύτερης τάξης Emden-Fowler γενικευμένης μορφής

$$y''_{xx} = Ax^n y^m \left(y'_x\right)^{\ell}, \ n,m,l = \text{τυχαίοι εκθέτες}, \ A\text{=σταθερά}. \tag{2.116}$$

Εκτενής αναφορά των ως άνω εξισώσεων με μεγάλη ποικιλία αναλυτικών λύσεων που εξαρτώνται από τους εκθέτες n,m,l παρουσιάζεται στα κλασικά συγγράμματα (Βιβλ. 3, 7) καθώς επίσης και στο Κεφάλαιο 1 του παρόντος.

Εισάγουμε τον παραδεκτό συναρτησιακό μετασχηματισμό

$$\mathcal{F} : y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'_y}, \ x'_y \neq 0, \tag{2.117}$$

που παρέχει

$$y''_{xx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x'_y}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{x'_y}\right)\frac{dy}{dx} = -\frac{x''_{yy}}{x'^3_y} \tag{2.118}$$

και μετατρέπει την εξίσωση Emden-Fowler κανονικής μορφής σε εξίσωσης Emden-Fowler γενικευμένης μορφής με εκθετική τριάδα αριθμών $\{n, m, 3\}$

$$y''_{xx} = A\,x^n y^m \xleftrightarrow{\mathcal{F}} -\frac{x''_{yy}}{x'^3_y} = -A\,y^m\,x^n\,,$$

δηλαδή τελικά

$$y''_{xx} = A\,x^n y^m \xleftrightarrow{\mathcal{F}} x''_{yy} = -A\,y^m\,x^n\left(x'_y\right)^3. \tag{2.119}$$

Εισάγουμε επίσης έναν βασικό μετασχηματισμό, που μετατρέπει μια γενικευμένη εξίσωση Emden-Fowler με τριάδα αριθμών $\{n, m, l\}$ σε εξίσωση Abel δευτέρου είδους και είναι ο κάτωθι:

$$z = \frac{x}{y}\,y'_x, \ u = A\,x^{n-l+2}y^{m+l-1}, \tag{2.120}$$

Πράγματι παίρνουμε

$$dz = d\left(\frac{x}{y}\right)y'_x + \frac{x}{y}y''_{xx}dx,$$
$$du = A\left(n-l+2\right)x^{n-l+1}y^{m+l-1}dx + A\left(m+l-1\right)x^{n-l+2}y^{m+l-2}dy, \tag{2.121}$$

και η (2.116) μεταπίπτει στην εξίσωση Abel δευτέρου είδους

$$\left(z^l u - z^2 + z\right)u'_z = \left(m+l-2\right)z + \left[\left(n-l+2\right)\right]u. \tag{2.122}$$

Η τελευταία εξίσωση με την αντικατάσταση

$$\xi = u - z^{2-l} + z^{1-l}$$

παρέχει επίσης την εξίσωση Abel δευτέρου είδους

$$\xi\xi'_z = \left[\left(m+2l-3\right)z + \left(n-2l+3\right)\right]z^{-1}\xi +$$
$$+\left[\left(m+l-1\right)z^2\left(n-m-2l+3\right)z - m + l - 2\right]z^{1-2l} \tag{2.123}$$

η οποία, τέλος, μέσω της γνωστής αντικατάστασης (1.5α)

$$E = \int f\left(z\right)dz = \int \left[\left(m+2l-3\right)z + \left(n-2l+3\right)\right]z^{-1}dz \tag{2.124}$$

μετασχηματίζεται στην εξίσωση Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής

$$y\,y'_t - y = F\left(t\right),$$

$$F\left(t\right) = \frac{f_0\left(x\right)}{f_1\left(x\right)} = \frac{\left[\left(m+l-1\right)z^2 + \left(n-m-2l+3\right) - n + l - 2\right]z^{1-2l}}{\left[\left(m+2l-3\right)z + m - 2l + 3\right]z^{-1}},$$
$$t = \int F\left(z\right)dz. \tag{2.125}$$

Συνεπώς, με βάση την προηγούμενη ανάλυση, τα ενδιάμεσα ολοκληρώματα (πρώτα ολοκληρώματα) των δυο ειδών εξισώσεων Emden-Fowler είναι γνωστά δεδομένης της γνωστής μορφής της γενικής λύσης μιας εξίσωσης Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής (λύσεις στο πεδίο των φάσεων). Εφόσον τα ενδιάμεσα αυτά ολοκληρώματα είναι γνωστά, τότε οι γενικές λύσεις των ως άνω εξισώσεων Emden-Fowler προκύπτουν από την ολοκλήρωση μιας διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης χωριζομένων μεταβλητών (τελικές λύσεις στο φυσικό επίπεδο).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Alexeeva T.A., Zaitsev V.F. and Shvets T.B. (1992): On Discrete Symmetries of the Abel Equation of the 2nd Kind (in Russian), *Applied Mechanics and Mathematics, MIDT*, Moscow, 4-11.

[2] Chandrasekar,V.K, Senthilvelar. H. and Lakshmanan, M. (Nov 2006): On the general solution for the modified Emden equation $\ddot{x} + a\,x\,\dot{x} + b\,x^3 = 0$, *J. of Astroph. and Astronomy,* 17,147-166.

[3] Kamke, E. (1977): *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen,* Vol.1, B.G. Teubeur, Stuttgart.

- Abel, N.H. (1839): *Oeuvres complètes*, Christiania.
- Liouville,R. (1903): *Acta Mathematica*, 27, 55-78.

[4] Kolyalovich, B.M. (1984): Studies on the differential equation $ydy - ydx = $ $= Rdx$ (in Russian), Academika Nauk, St.Petersburg.

[5] Panayotounakos, D.E. (2005): Exact analytic solutions of unsolvable classes of first and second order nonlinear ODEs (Part I: Abel's equations), *Applied Mathematics Letters* 18, 155-162.

[6] Panayotounakos D.E., Sotiropoulos N.B., Sotiropoulou A.B., and Panayotounakou N.D. (2005): Exact analytic solutions of nonlinear boundary value problems in fluid mechanics (Blasius equation), *Journal of the Mathematical Physics, JMP* 46, 1-26.

[7] Polyanin A.D. and Zaitsev V.F. (2003): *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, Chapman &Hall/CRC Press, New York, Second edition.

[8] Polyanin, A.D. and Manzhirov, A.V. (2007): *Handbook of Mathematics for Engineers and Scientist*, Chapman &Hall/CRC Press, New York.

[9] Tsukamoto I., (2006): On studies of $x'' = t^{a\lambda-2}x^{1+a}$ where $a > 0$ and $\lambda = 0-1$, *Hokkaido Mathematical Journal* Vol XXXV No.1, 43-59, Sapporo Japan.

Κεφάλαιο 3

Μετατροπή Ορισμένων Χαρακτηριστικών Συνήθων μη Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων Δεύτερης και Ανώτερης Τάξης της Μαθηματικής Φυσικής και μη Γραμμικής Μηχανικής σε Κλάσεις Εξισώσεων Abel Δευτέρου Είδους.

Βασικές βιβλιογραφικές αναφορές για την ανάπτυξη των περιεχομένων αυτού του Κεφαλαίου είναι οι εξής: S. Targ[42], Y.F. Dafalias[7], M. Desai and all[10], H. Davis[8], V.V. Novozhilov[25], E. Kamke[18], D.E. Panayotounakos and N.B. Sotiropoulos[29], D.E. Panayotounakos and D.C. Kravvaritis[30], D.E. Panayotounakos, N.P. Andrianopoulos and V.C. Boulougouris[28], D.E. Panayotounakos, E.E. Theotokoglou, N.B. Sotiropoulos and A.B. Sotiropoulou[27], D.E. Panayotounakos, P.N. Andriotaki and E.E. Theotokoglou[32], D.E. Panayotounakos, A.B. Sotiropoulou, N.B. Sotiropoulos and M. Manios[33], D.E. Panayotounakos, E.E. Theotokoglou, N.B. Sotiropoulos and A.B. Sotiropoulou[31] και N.B. Sotiropoulos[41].

3.0 Εισαγωγή

Στο Κεφάλαιο 1 αναπτύχθηκαν παραδεκτοί συναρτησιακοί μετασχηματισμοί που μετατρέπουν μια εξίσωση Abel δευτέρου είδους σε εξίσωση Emden-Fowler κανονικής μορφής ή σε γενικευμένη εξίσωση Emden-Fowler (και αντιστρόφως). Επιπλέον στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάστηκε μεθοδολογία κατασκευής ακριβών αναλυτικών λύσεων της κλάσης των εξισώσεων Abel δευτέρου είδους.

Υπάρχει μια ευρεία κλάση ειδικών χαρακτηριστικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης και ανώτερης τάξης της μαθηματικής φυσικής και μη γραμμικής μηχανικής που μέχρι σήμερα επιλύονται μόνον μέσω αριθμητικών τεχνικών. Στο παρόν Κεφάλαιο θα αποδείξουμε ότι η μη αναλυτική επιλυσιμότητα των εν λόγω εξισώσεων οφείλεται στο γεγονός ότι αυτές μέσω παραδεκτών μετασχηματισμών μετατρέπονται σε εξισώσεις τύπου Abel δευτέρου είδους ή εξισώσεις τύπου Emden-Fowler κανονικής ή γενικευμένης μορφής. Δεδομένης της εισαχθείσας νέας τεχνικής του Κεφαλαίου 2 που αφορά την ακριβή αναλυτική λύση της εξίσωσης Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής είναι σαφές ότι οι αναγόμενες εδώ διαφορικές εξισώσεις σε εξίσωση Abel δευτέρου είδους επιδέχονται πλέον αναλυτικών λύσεων.

3.1 Οι εξισώσεις κίνησης στερεού περί σταθερό σημείο - Εξισώσεις Euler (1761) [42]

Θεωρούμε την κίνηση ενός τυχόντος στερεού σώματος περί σταθερό σημείο *O*. Ας καλέσουμε $Ox_1y_1z_1$ *το* χωρικό σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων (χωρόδετο σύστημα) και με $Oxyz$ το σωματόδετο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (Σχ. 3.1). Η κατάσταση κίνησης του σώματος δίνεται από μια διανυσματική εξίσωση με στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα $\left(\boldsymbol{\omega}(t)=(\omega_x(t),\omega_y(t),\omega_z(t)\right)$ αναφορικά με το $Oxyz$ - σύστημα˙ εδώ *t* παριστάνει τον χρόνο. Ας καλέσουμε επίσης J_x, J_y, J_z τις κύριες ροπές αδράνειας του σώματος, που αντιστοιχούν στους *x, y, z*- άξονες με μια τυχαία ακολουθία $J_x > J_y > J_z$. Το σύστημα είναι ασύμμετρο και αν δεχθούμε ότι δεν αναπτύσσεται τριβή στην στήριξη *O*, οι εξωτερικές δυνάμεις αντιστοιχούν σε μια απλή συνισταμένη δύναμη $\boldsymbol{R}$ και μια ροπή $\boldsymbol{M}$ διερχόμενες από το *O*. Έτσι το διάνυσμα της ροπής $\boldsymbol{M}$ είναι γνωστό και η κίνηση του στερεού προκύπτει από το θεώρημα της στροφορμής.

Με βάσει τις παραπάνω υποθέσεις μπορεί κανείς εύκολα να εξάγει τις γνωστές εξισώσεις κίνησης του στερεού ελεύθερου να κινείται περί σταθερό σημείο (δυναμικές εξισώσεις Euler) με όρους προκύπτοντες από τις προβολές της ροπής και της γωνιακής ταχύτητας ως προς τους κύριους άξονες αδρανείας, μέσω του *O*, δηλαδή:

$$J_X\omega'_{x_1}-a_1\omega_y\omega_z=M_x(t),\quad J_y\omega'_{y_1}-a_2\omega_x\omega_z=M_y(t),\quad J_z\omega'_{z_1}-a_3\omega_x\omega_y=M_z(t), \tag{3.1}$$

όπου

$$a_1=J_y-J_z>0,\ a_2=J_x-J_z>0,\ a_3=J_x-J_y>0. \tag{3.2}$$

Εφόσον το διάνυσμα της ροπής $\boldsymbol{M}$ είναι γνωστό, η λύση του διαφορικού συστήματος (3.1) παρέχει τις συνιστώσες $\omega_x,\omega_y,\omega_z$, του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας *ω*.

Ξαναγράφοντας τις εξισώσεις (3.1) με τη μορφή

$$\omega'_{x_t}-\overset{*}{\lambda}_1\omega_y\omega_z=f_1(t),\quad \omega'_{y_t}-\overset{*}{\lambda}_2\omega_x\omega_z=f_2(t),\quad \omega'_{z_t}-\overset{*}{\lambda}_3\omega_x\omega_y=f_3(t) \tag{3.3}$$

όπου έχουν τεθεί

$$\overset{*}{\lambda}_1 = \frac{\alpha_1}{J_x}, \quad \overset{*}{\lambda}_2 = \frac{\alpha_2}{J_y}, \quad \overset{*}{\lambda}_3 = \frac{\alpha_3}{J_z}\,,$$
$$f_1(t) = \frac{M_x(t)}{J_x}, \qquad f_2(t) = \frac{M_y(t)}{J_y}, \qquad f_3(t) = \frac{M_z(t)}{J_z}, \tag{3.4}$$

και πολλαπλασιάζοντας με τις μη μηδενικές λείες συναρτήσεις ω_χ, ω_y και ω_z, αντίστοιχα, καταλήγουμε στις εξισώσεις

$$\omega_x\left(\omega'_{x_1} - f_1\right) = \overset{*}{\lambda}_1\, \omega_x\omega_y\omega_z\,,\ \omega_y\left(\omega'_{y_1} - f_1\right) = \overset{*}{\lambda}_2\, \omega_x\omega_y\omega_z,\ \omega_z\left(\omega'_{z_1} - f_1\right) = \overset{*}{\lambda}_3\, \omega_x\omega_y\omega_z. \tag{3.5}$$

Θέτοντας

$$\omega_x\omega_y\omega_z = F(t), \tag{3.6}$$

όπου η συνάρτηση *F(t)* είναι μια τυχούσα βοηθητική προσδιοριστέα συνάρτηση, το μη γραμμικό διαφορικό σύστημα (3.5) γράφεται

$$\omega_x\left(\omega'_{x_t} - f_1\right) = \overset{*}{\lambda}_1 F, \quad \omega_y\left(\omega'_{y_t} - f_2\right) = \overset{*}{\lambda}_2 F, \quad \omega_z\left(\omega'_{z_t} - f_1\right) = \overset{*}{\lambda}_3 F \tag{3.7}$$

το οποίο για $M_x \neq M_y \neq M_z \neq 0$ παρέχει τις εξής τρεις εξισώσεις Abel δευτέρου είδους:

$$\omega_x\omega'_{x_{T_1}} - \omega_x = \overset{*}{\lambda}_1 \mathcal{F}_1(T_1), \quad \omega_y\omega'_{y_{T_2}} - \omega_y = \overset{*}{\lambda}_2 \mathcal{F}_2(T_2), \quad \omega_z\omega'_{z_{T_3}} - \omega_z = \overset{*}{\lambda}_3 \mathcal{F}_3(T_3) \tag{3.8}$$

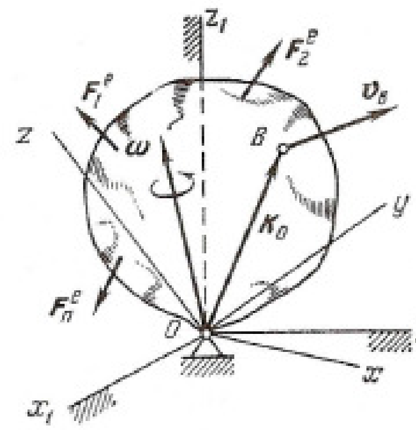
στις οποίες έχει τεθεί

$$\mathcal{F}_1(T_1) = \frac{F(t)}{f_1(t)}, \ \mathcal{F}_2(T_2) = \frac{F(t)}{f_2(t)}, \ \mathcal{F}_3(T_3) = \frac{F(t)}{f_3(t)} \tag{3.9}$$

$$T_1 = \int f_1 dt = \frac{1}{J_x}\int M_x dt,$$
$$T_2 = \int f_2 dt = \frac{1}{J_y}\int M_y dt, \ T_3 = \int f_3 dt = \frac{1}{J_z}\int M_z dt \tag{3.10}$$

Σημειώνουμε ότι για την μετατροπή αυτή χρησιμοποιήθηκε κατ' αναλογία η αντικατάσταση (1.4).

Αποδείξαμε ήδη ότι οι τρεις δυναμικές εξισώσεις Euler (3.1) μετατρέπονται στις εξισώσεις Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής (3.8), οι οποίες λόγω των συναρτησιακών εξαρτήσεων των μεταβλητών T_1, T_2, T_3 [εξ. (3.10), (3.9)] και της βοηθητικής συνάρτησης *F(t)* [εξ. (3.6)], είναι συναρτησιακά εξαρτημένες. Στην Βιβλ. [32] αναπτύσσεται η τεχνική αναλυτικής λύσης του συστήματος (3.8), και επομένως και του συστήματος (3.1), εφόσον είναι ήδη γνωστή η αναλυτική λύση μιας εξίσωσης Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής.



Σχήμα 3.1: Περιστροφή στερεού σώματος περί σταθερό σημείο Ο

Πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι εφόσον οι λύσεις των εξισώσεων Abel (3.8) ω_x, ω_y, ω_z, είναι γνωστές εκφραζόμενες με όρους της *F*, η βοηθητική συνάρτηση *F,* που εισάγεται μέσω της (3.6), προκύπτει πεπλεγμένα από την εξίσωση (3.6).

Την ίδια με την ήδη αναπτυχθείσα μεθοδολογία μπορούμε να ακολουθήσουμε στις εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση ενός γυροστάτου [23]. Στην περίπτωση αυτή, με βάσει το πρότυπο Kelvin, οι τρεις δυναμικές εξισώσεις Euler εμπλουτίζονται με γραμμικούς όρους έτσι ώστε να έχουμε σε ισχύ το σύστημα:

$$\begin{aligned} J_x\omega'_{x_1} - a_1\omega_y\omega_z + h\omega_y &= M_x, \\ J_y\omega'_{y_1} - a_2\omega_x\omega_z - h\omega_x &= M_y, \\ J_z\omega'_{z_t} - a_3\omega_x\omega_y &= M_z. \end{aligned} \tag{3.11}$$

όπου *h* είναι μια θετική σταθερά. Με βάση τα προηγούμενα ξαναγράφουμε τις (3.11) ως εξής:

$$\begin{aligned} \omega_x\left(\omega'_{x_1} - f_1\right) + k_1\omega_x\omega_y &= \overset{*}{\lambda}_1\,\omega_x\omega_y\omega_z, \\ \omega_y\left(\omega'_{y_t} - f_2\right) - k_2\omega_y\omega_x &= \overset{*}{\lambda}_2\,\omega_x\omega_y\omega_z, \\ \omega_z\left(\omega'_{z_t} - f_3\right) &= \overset{*}{\lambda}_3\,\omega_x\omega_y\omega_z, \end{aligned} \tag{3.12}$$

στις οποίες έχουμε θέσει $k_1 = h/J_x, k_2 = h/J_y$ και $\lambda_i, f_i (i = 1,2,3)$ όπως στις (3.4). Εισάγουμε και πάλι τη βοηθητική συνάρτηση *F(t)* μέσω της (3.6), πολλαπλασιάζουμε την πρώτη και δεύτερη των (3.12) με k_2 και k_1 αντίστοιχα, προσθέτουμε τα αποτελέσματα και ευρίσκουμε το νέο διαφορικό σύστημα

$$\begin{aligned} k_2\omega_x\left(\omega'_{x_1} - f_1\right) + k_1\omega_y\left(\omega'_{y_t} - f_2\right) &= \left(k_2\overset{*}{\lambda}_1 + k_1\overset{*}{\lambda}_2\right)F, \\ \omega_x\left(\omega'_{x_1} - f_1\right) + k_1\omega_x\omega_y &= \overset{*}{\lambda}_1\,F, \\ \omega_z\left(\omega'_{z_t} - f_3\right) &= \overset{*}{\lambda}_3\,F. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Εισάγουμε μια δεύτερη βοηθητική συνάρτηση Ω η οποία πρέπει να προσδιορισθεί έτσι ώστε:

$$\omega_x\left(\omega'_{x_1}-f_1\right)=\Omega(t) \tag{3.14}$$

και το σύστημα (3.13) γίνεται

$$\begin{aligned} &\omega_x\left(\omega'_{x_1}-f_1\right)=\Omega \ , \\ &\omega_y\left(\omega'_{y_t}-f_2\right)=\frac{k_2\overset{*}{\lambda}_1+k_1\overset{*}{\lambda}_2}{k_1}F-\frac{k_2}{k_1}\Omega \ , \\ &\omega_z\left(\omega'_{z_t}-f_3\right)=\overset{*}{\lambda}_3 F \end{aligned} \tag{3.15}$$

στο οποίο έχουμε θέσει

$$\omega_x\omega_y=\frac{\overset{*}{\lambda}_1}{k_1}F-\frac{1}{k_1}\Omega \ . \tag{3.16}$$

Μετατρέπουμε τώρα τις τρεις εξισώσεις Abel δευτέρου είδους (3.15) σε εξισώσεις Abel κανονικής μορφής μέσω του μετασχηματισμού (1.13), δηλαδή

$$\omega_x\omega'_{x_{T_1}}-\omega_x=\mathcal{F}_1\left(T_1\right),\ \omega_y\omega'_{y_{T_2}}-\omega_y=\mathcal{F}_2\left(T_2\right),\ \omega_z\omega'_{z_{T_3}}-\omega_z=\mathcal{F}_3\left(T_3\right) \tag{3.17}$$

όπου

$$\mathcal{F}_1\left(T_1\right)=\frac{\Omega(t)}{f_1(t)},\ \ \mathcal{F}_2\left(T_2\right)=\frac{\dfrac{k_2\overset{*}{\lambda}_1+k_1\overset{*}{\lambda}_2}{k_1}F(t)-\dfrac{k_2}{k_1}\Omega(t)}{f_2(t)}\ ,\ \ \mathcal{F}_3\left(T_3\right)=\frac{\overset{*}{\lambda}_3 F(t)}{f_3(t)}, \tag{3.18}$$

$$T_1=\int f_1 dt,\qquad T_2=\int f_2 dt,\qquad T_3=\int f_3 dt,$$

και αναγόμαστε στην περίπτωση των δυναμικών εξισώσεων Euler (3.8). Τονίζουμε και πάλι ότι στην παραπομπή [32] αναπτύσσεται πλήρως η τεχνική αναλυτικής λύσης του διαφορικού συστήματος ενός γυροστάτου (3.11).

Αξίζει να σημειώσουμε εδώ ότι αν οι λύσεις $\omega_x,\omega_y,\omega_z$ των εξισώσεων Abel (3.17) είναι γνωστές εκφραζόμενες με όρους των F και Ω, οι βοηθητικές συναρτήσεις F και Ω, που εισάγονται μέσω των (3.6) και (3.16), προκύπτουν πεπλεγμένα από τις εξισώσεις

$$\Omega_x\Omega_y\Omega_z=F \ \text{ και } \ \Omega_x\Omega_y=\frac{\overset{*}{\lambda}_1}{k_1}F-\frac{1}{k_1}\Omega .$$

3.2 Η εξίσωση μη γραμμικών επιφανειακών κυμάτων Rayleigh (1894) [37]

Η εξίσωση αυτή αφορά στη διάδοση μη γραμμικών επιφανειακών κυμάτων και η γενική μορφή της (ελεύθερη διάδοση) είναι

$$y''_{xx} + \overset{*}{\lambda} y'_x + \mu y'^3_x + n^2 y + k^3 y^3 = 0 \ , \tag{3.19}$$

$$0 \le x < +\infty, \qquad -\infty < y < +\infty$$

όπου λ, μ, n και k παριστάνουν τυχαίες δεδομένες παραμέτρους. Η εξίσωση αυτή περιέχει κυβικούς όρους απόσβεσης και ακαμψίας. Για $k = 0$ προκύπτει η κλασική εξίσωση Rayleigh

$$y''_{xx} + \overset{*}{\lambda} y'_x + \mu y'^3_x + n^2 y = 0 \ . \tag{3.20}$$

Η εξίσωση αυτή έχει νόημα αν οι $\overset{*}{\lambda}$ και μ έχουν διαφορετικά πρόσημα [8]. Έτσι, θεωρώντας τους $\overset{*}{\lambda}$ και μ ετερόσημους, προκύπτουν οι δύο εξισώσεις

$$y''_{xx} - \overset{*}{\lambda} y'_x + \mu y'^3_x + n^2 y = 0 \ , \tag{3.21}$$

$$y''_{xx} + \overset{*}{\lambda} y'_x - \mu y'^3_x + n^2 y = 0 \ , \tag{3.22}$$

$$\overset{*}{\lambda} > 0, \ \ \mu > 0, \quad 0 \le x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty \ .$$

Μέσω του συναρτησιακού μετασχηματισμού

$$y(x) = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\overset{*}{\lambda}}{\mu}}\, z(\xi), \quad \xi = nx \ , \tag{3.23}$$

εξάγουμε τη μοναδική εξίσωση

$$z''_{\xi\xi} \mp \frac{\overset{*}{\lambda}}{n}\left(z'_\xi - z'^3_\xi\right) + z = 0 \ , \tag{3.24}$$
$$-\infty < \xi < +\infty, \qquad -\infty < z < +\infty \ .$$

Παραγωγίζοντας την (3.23) και χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση

$$z'_\xi = p(\xi), \tag{3.25}$$

παίρνουμε την μη γραμμική συνήθη διαφορική εξίσωση

$$p''_{\xi\xi} \mp \frac{\overset{*}{\lambda}}{n}\left(1-3p^2\right)p'_{\xi} + p = 0 \,, \tag{3.26}$$

$$-\infty < \xi < +\infty \quad , \quad -\infty < p < +\infty \quad ,$$

η οποία, μέσω του νέου μετασχηματισμού

$$p'_{\xi} = \omega(p) \Rightarrow p''_{\xi\xi} = \omega\omega'_{p} \quad , \tag{3.27}$$

μεταπίπτει στην εξής εξίσωση Abel δευτέρου είδους:

$$\omega'_{P} \mp \frac{\overset{*}{\lambda}}{n}\left(1-3p^2\right)\omega + p = 0 \,, \tag{3.28}$$

$$-\infty < p < +\infty \quad , \quad -\infty < \omega < +\infty \,.$$

Ο γενικός μετασχηματισμός

$$\omega(p) = -g(s) \quad , \qquad s = \pm\frac{\overset{*}{\lambda}}{n}\left(p - p^3\right), \tag{3.29}$$

μετατρέπει την (3.28) στην εξίσωση Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής

$$gg'_{s} - g = \mp\frac{n}{\overset{*}{\lambda}}\frac{p}{1-3p^2} \quad , \quad s = \pm\frac{\overset{*}{\lambda}}{n}\left(p - p^3\right), \tag{3.30}$$

$$-\infty < p < +\infty \quad , \quad -\infty < g < +\infty \quad .$$

Η δεύτερη των εξισώσεων (3.30) είναι μια κυβική εξίσωση τύπου Cardan, δηλαδή

$$p^3 + \overset{*}{p}\,p + \overset{*}{q} = 0 \quad , \quad \overset{*}{p} = -1 \quad , \quad \overset{*}{q} = \pm\frac{ns}{\overset{*}{\lambda}} \quad , \quad \frac{n}{\overset{*}{\lambda}} \gtreqless 0 \tag{3.31}$$

Είναι γνωστό ότι η λύση της (3.31) δίνεται αναλυτικά εξαρτώμενη από το πρόσημο της διακρίνουσας

$$\overset{*}{Q} = \left(\frac{\overset{*}{p}}{3}\right)^3 + \left(\frac{\overset{*}{q}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{27} + \frac{n^2 s^2}{4\overset{*}{\lambda}{}^2} \tag{3.32}$$

Αν $\overset{*}{Q} < 0$, τότε η (3.31) έχει τρεις διακεκριμένες πραγματικές ρίζες, ενώ αν $\overset{*}{Q} > 0$ τότε έχει μια πραγματική και δύο μιγαδικές συζυγείς. Η περίπτωση $\overset{*}{Q} = 0$ παρέχει τρεις πραγματικές ρίζες εκ των οποίων δύο είναι ίσες. Έτσι, σημειώνοντας ότι $\dfrac{n}{\overset{*}{\lambda}} \gtrless 0$, διακρίνουμε τις εξής τρεις περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $\overset{*}{Q} < 0 \ \ (\overset{*}{p} < 0)$

Στην περίπτωση αυτή ισχύει

$$\left(\frac{ns}{2\overset{*}{\lambda}}\right)^2 < \frac{1}{27} \Longleftrightarrow n^2 s^2 < \frac{\left(2\overset{*}{\lambda}\right)^2}{27} \quad ,$$

δηλαδή

$$-\frac{2}{\sqrt{27}}\left|\frac{\overset{*}{\lambda}}{n}\right| < s < \frac{2}{\sqrt{27}}\left|\frac{\overset{*}{\lambda}}{n}\right|$$

και η κυβική εξίσωση (3.31) έχει τις ρίζες

$$p_1 = 2\sqrt{-\frac{\overset{*}{p}}{3}}\cos\frac{\overset{*}{a}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{\overset{*}{a}}{3} \quad ,$$

$$p_2 = -2\sqrt{-\frac{\overset{*}{p}}{3}}\cos\frac{\overset{*}{\alpha}-\pi}{3} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{\overset{*}{a}-\pi}{3}, \tag{3.33}$$

$$p_3 = -2\sqrt{-\frac{\overset{*}{p}}{3}}\cos\frac{\overset{*}{a}+\pi}{3} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{\overset{*}{a}+\pi}{3} \quad ,$$

όπου

$$\cos\overset{*}{\alpha} = -\frac{\overset{*}{q}}{2\sqrt{-\left(\frac{\overset{*}{p}}{3}\right)^3}} = \mp\frac{3\sqrt{3}ns}{2\overset{*}{\lambda}} \quad , \quad 0 < \overset{*}{\alpha} < \pi \tag{3.33α}$$

Συνεπώς, η εξίσωση Abel (3.30) παίρνει τις εξής τρεις διακεκριμένες μορφές:

$$gg_s' - g = \mp \frac{n}{\sqrt{3}\,\overset{*}{\lambda}} \frac{2\cos\dfrac{\overset{*}{a}}{3}}{1-4cos^2\dfrac{\overset{*}{a}}{3}} \quad ,$$

$$gg_s' - g = \pm \frac{n}{\sqrt{3}\,\overset{*}{\lambda}} \frac{2\cos\dfrac{\overset{*}{a}-\pi}{3}}{1-4cos^2\dfrac{\overset{*}{a}-\pi}{3}} \,, \tag{3.34}$$

$$gg_s' - g = \pm \frac{n}{\sqrt{3}\,\overset{*}{\lambda}} \frac{2\cos\dfrac{\overset{*}{a}+\pi}{3}}{1-4cos^2\dfrac{\overset{*}{a}+\pi}{3}} \quad ,$$

$\overset{*}{a} =$ όπως στις (3.33a),

$$-\frac{2}{\sqrt{27}}\left|\frac{\overset{*}{\lambda}}{n}\right| < s < \frac{2}{\sqrt{27}}\left|\frac{\overset{*}{\lambda}}{n}\right|$$

Περίπτωση 2: $\overset{*}{Q} > 0$

Η περίπτωση αυτή απαιτεί ότι για

$$s > \frac{2}{\sqrt{27}}\left|\frac{\overset{*}{\lambda}}{n}\right| \quad ή \quad s < -\frac{2}{\sqrt{27}}\left|\frac{\overset{*}{\lambda}}{n}\right|$$

η κυβική εξίσωση (3.31) παρέχει την πραγματική ρίζα

$$p = \sqrt[3]{-\frac{\overset{*}{q}}{2} + \sqrt{\overset{*}{Q}}} + \sqrt[3]{-\frac{\overset{*}{q}}{2} - \sqrt{\overset{*}{Q}}} = \sqrt[3]{\mp\frac{ns}{2\overset{*}{\lambda}} + \sqrt{-\frac{1}{27} + \frac{n^2 s^2}{4\overset{*}{\lambda}{}^2}}} + \sqrt[3]{\mp\frac{ns}{2\overset{*}{\lambda}} - \sqrt{-\frac{1}{27} + \frac{n^2 s^2}{4\overset{*}{\lambda}{}^2}}} \tag{3.35}$$

Έτσι, για την πραγματική ρίζα (χωρίς να χάνεται η γενικότητα παραλείπονται οι δύο μιγαδικές συζυγείς), η εξίσωση Abel (3.30) γίνεται

$$gg_s' - g = \mp \frac{n}{\overset{*}{\lambda}} \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{1-3\left(\mathrm{A}+\mathrm{B}\right)^2} \tag{3.36}$$

όπου

$$\mathrm{A} = \sqrt[3]{\mp\frac{ns}{2\overset{*}{\lambda}} + \sqrt{-\frac{1}{27} + \frac{n^2 s^2}{4\overset{*}{\lambda}{}^2}}} \;, \quad \mathrm{B} = \sqrt[3]{\mp\frac{ns}{2\overset{*}{\lambda}} - \sqrt{-\frac{1}{27} + \frac{n^2 s^2}{4\overset{*}{\lambda}{}^2}}} \;, \qquad (3.36\alpha)$$

$$s > \frac{2}{\sqrt{27}}\left|\frac{\overset{*}{\lambda}}{n}\right| \quad \acute{\eta} \quad s < -\frac{2}{\sqrt{27}}\left|\frac{\overset{*}{\lambda}}{n}\right|$$

Περίπτωση 3: $\overset{*}{Q} = 0$

Αυτή η περίπτωση απορρίπτεται γιατί η $\overset{*}{Q} = 0$ εξάγει την συγκεκριμένη τιμή $s^2 =$ $= 4\overset{*}{\lambda}{}^2 / 27n^2$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η κλασική μη γραμμική εξίσωση Rayleigh (3.20) καταλήγει στους τέσσερις τύπους εξισώσεων Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής (3.34) και (3.36).

3.3 Η εξίσωση θερμοδυναμικής Emden (1907) [12]

Η εξίσωση Emden έχει την μορφή

$$y''_{xx} + \frac{2}{x} y'_x + y^k = 0 \;, \qquad (3.37)$$

όπου k είναι μια οποιαδήποτε σταθερή (παράμετρος). Η εξίσωση αυτή εισήχθη από τον Γερμανό αστροφυσικό Emden [12] και αφορά στην θερμική συμπεριφορά ενός σύννεφου αερίου κάτω από την αμοιβαία έλξη των μορίων του όταν υπόκειται στους κλασικούς νόμους της θερμοδυναμικής.

Μέσω του μετασχηματισμού

$$y(x) = n(\xi) \;, \; \xi = \xi(x) \Rightarrow y'_x = n'_\xi \xi'_x \quad , \quad y''_{xx} = n''_{\xi\xi} \xi'^2_\chi + n'_\xi \xi''_{xx} \quad , \qquad (3.38)$$

η εξίσωση μετατρέπεται στην ισοδύναμη

$$n''_{\xi\xi} + \frac{\xi''_{xx} + \frac{2}{x}\xi'_x}{\xi'^2_x} n'_\xi + \frac{1}{\xi'^2_x} n^k = 0. \qquad (3.39)$$

Παίρνοντας

$$\xi''_{xx} + \frac{2}{x}\xi'_x = 0 \Rightarrow \xi(x) = -\frac{1}{x} \;, \qquad (3.40)$$

η (3.39) μετατρέπεται στην παρακάτω εξίσωση Emden-Fowler κανονικής μορφής

$$n''_{\xi\xi} = -\xi^{-4} n^k. \tag{3.41}$$

Περαιτέρω ο μετασχηματισμός (1.56) μετατρέπει την (3.41) στην γενικευμένη εξίσωση Emden-Fowler

$$\xi''_{nn} = n^k \xi^{-4} \left(\xi'_n\right)^3. \tag{3.42}$$

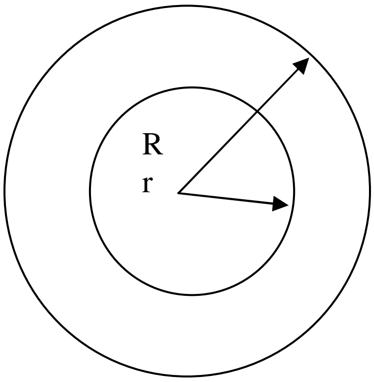
Τέλος ο μετασχηματισμός (1.51) μετατρέπει την (3.41) στην παρακάτω εξίσωση Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής

$$uu'_t - u = \frac{2(k-3)}{(k-5)^2} t - \left(\frac{k-1}{k-5}\right)^2 t^k, \tag{3.43}$$

όπου

$$t = \frac{k-5}{k-1} \xi^{-2/(k-1)} n \quad , \quad u = \xi^{-2/(k-1)} \left(\xi n'_\xi - \frac{2}{k-1} n \right). \tag{3.44}$$

Για να οριοθετήσει κανείς τα πεδία τιμών και ορισμού της αρχικής εξίσωσης (3.37) πρέπει να ανατρέξει στην κατασκευή της. Θεωρούμε λοιπόν ένα σφαιρικό σύννεφο από αέρια (Σχ. 3.2) και ας συμβολίσουμε με *P* την υδροστατική πίεση σε απόσταση *r* από το κέντρο. Ας είναι *M(r)* η μάζα της σφαίρας ακτίνας *r*, *φ* το βαρυτικό δυναμικό του αερίου και g η επιτάχυνση βαρύτητας.



Σχήμα 3.2: Σφαιρικό σύννεφο από αέριο

Έχουμε την γνωστή εξίσωση

$$g = \frac{GM(r)}{r^2} = -\frac{d\varphi}{dr}, \tag{3.45}$$

όπου *G* είναι η σταθερά βαρύτητας. Έχουμε επίσης τρεις συνθήκες για τον καθορισμό των *φ* και *P*, δηλαδή:

i) $\mathrm{d}P = -g\rho \mathrm{dr} = \rho \mathrm{d}\varphi$; $\rho =$πυκνότητα του αερίου, (3.46)

ii) $\nabla^2 \varphi = \dfrac{d^2\varphi}{dr^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{d\varphi}{dr} = -4\pi G\rho$ και (3.47)

iii) $P = K\rho^{\gamma}$, γ και $K =$ εμπειρικές σταθερές. (3.48)

Από την (3.46) και (3.48), μαζί με την συνθήκη για ρ=0, φ=0 (στην επιφάνεια της σφαίρας όπου r=R), προκύπτουν οι σχέσεις

$$\rho = L\varphi^n \quad , \quad n = \frac{1}{\gamma - 1} \quad , \quad L = \left(\frac{n+1}{K}\right)^{-n} . \tag{3.49}$$

Αν τώρα εισάγουμε την έκφραση της ρ στην (3.47) ευρίσκουμε την εξίσωση

$$\nabla^2 \varphi = -\alpha^2 \varphi^n \quad , \quad a^2 = 4LG. \tag{3.50}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $\varphi = \varphi_0 y$, όπου φ_0 είναι η τιμή της φ στο κέντρο της σφαίρας, καθώς επίσης ότι $r = x / \alpha\varphi_0^{(n-1)/2}$, και η εξίσωση (3.50) μεταπίπτει στην εξίσωση Emden (3.37).

Μια παραλλαγή της εξίσωσης Emden προκύπτει ως εξής. Όταν $n = \infty$, τότε γ =1 και $P = K\rho$. Επομένως, εφόσον dP=$\rho d\varphi$, με ολοκλήρωση εξάγουμε το αποτέλεσμα $\varphi = K\ln\left(\rho / \rho_0\right)$, δηλαδή ισχύει $\rho = \rho_0 \exp(\varphi / K)$. Εδώ ρ_0 παριστάνει την πυκνότητα του κέντρου της σφαίρας και επομένως $\varphi_0 = 0$. Αυτή είναι μια αλλαγή της συνθήκης στην προηγούμενη περίπτωση όπου η φ γίνεται μηδέν στο σύνορο της σφαίρας. Η εξίσωση Poisson (3.50) αντικαθίσταται από την

$$\nabla^2 \varphi = -\alpha^2 e^{\varphi/K} \quad , \quad a^2 = 4\pi\rho_0 G \ , \tag{3.51}$$

που είναι γνωστή ως εξίσωση Liouville. Θεωρώντας τώρα σφαιρική συμμετρία όπως στην προηγούμενη περίπτωση, η εξίσωση (3.51) σε πολικές συντεταγμένες παρέχει την

$$\varphi''_{rr} + \frac{2}{r}\varphi'_r + a^2 e^{\varphi/K} = 0 \quad . \tag{3.52}$$

Αν θέσουμε

$$\varphi = Ky \quad , \quad r = \frac{\sqrt{K}}{a} x \quad , \tag{3.53}$$

η (3.51) μετατρέπεται στην εξίσωση

$$y''_{xx} + \frac{2}{x} y'_x + e^y = 0 \quad , \tag{3.54}$$

που είναι γενικευμένη εξίσωση Emden (Βιβλ. [18]).

Από την παραπάνω ανάλυση συνάγουμε ότι $\varphi \in [\varphi_0, \varphi)$ και $r \in [0, R)$ με συνέπεια $y \in [1, y)$ και $x \in [0, x)$. Επίσης, ορίζουμε γενικά ως εξίσωση Emden μια εξίσωση του τύπου

$$y''_{xx} + \frac{2}{x} y'_x + f(y) = 0 \quad , \quad f = \text{αυθαίρετη}. \tag{3.55}$$

3.4 Η εξίσωση οριακού στρώματος Blasius (1908) [4], και η γενικευμένη εξίσωση Blasius [8]

Η απλοποιημένη μορφή της εξίσωσης Blasius έχει τον τύπο

$$y'''_{xxx} + ayy''_{xx} = 0 \tag{3.56}$$

και εισήχθη από τον H. Blasius στην μελέτη του οριακού στρώματος ρευστού. Η πλέον γενική περίπτωση της (3.56) είναι η εξίσωση με τύπο

$$y'''_{xxx} + ayy''_{xx} - \beta y'^2_x + \beta = 0 \tag{3.57}$$

και εισήχθη από τους Goldstein, Howarth, Falkner and Skan, και Hartree, (Βιβλ. [8]). Προφανώς από την (3.57) για $\beta=0$ προκύπτει η απλοποιημένη εξίσωση Blasius. Τέλος, η εξίσωση

$$y'''_{xxx} + ayy''_{xx} - \beta y'^2_x = 0 \quad , \tag{3.58}$$

αποτελεί την περιορισμένη μορφή της (3.57) και αφορά αξονοσυμμετρική περίπτωση ροής. Σε όλες τις παραπάνω εξισώσεις α και β είναι τυχαίες παράμετροι.

Θα εξετάσουμε τώρα την μετατροπή των παραπάνω εξισώσεων σε άλλες εξισώσεις γνωστής μορφής. Πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι η παράμετρος α είναι πάντοτε θετική, ενώ η β μπορεί να είναι θετική ή αρνητική. Μπορούμε μέσω του μετασχηματισμού

$$y = \lambda z \quad , \qquad x = \lambda t \quad , \qquad \lambda^2 \alpha = 1 \tag{3.59}$$

να θέσουμε $\alpha=1$, και να γράψουμε τις παρακάτω συνοριακές συνθήκες υπό τις εξής δύο μορφές.

Για $\alpha \neq 1$

$$\begin{gathered} y(0) = a_1 \quad , \quad y'_x(0) = \beta_1 \quad , \quad \text{και} \quad y'_x(x) \to 0 \text{ όταν } x \to \infty \\ \text{ή} \\ y(0) = a_2 \quad , \quad y''_{xx}(0) = \beta_2 \quad , \quad \text{και} \quad y'_x(x) \to 0 \text{ όταν } x \to \infty \end{gathered} \tag{3.60}$$

και για $\alpha = 1$

$$y(0)=y'_x(0)=0 \quad , \qquad y'_x(x)\to k \text{ όταν } x\to\infty$$

ή (3.61)

$$y(0)=y''_{xx}(0)=0 \quad , \qquad y'_x(x)\to k \text{ όταν } x\to\infty$$

όπου k είναι μια σταθερά. Όταν $\beta\geq 0$, οι τελευταίες συνθήκες εξασφαλίζουν μοναδική λύση της εξίσωσης, η οποία όμως μοναδικότητα χάνεται όταν $\beta<0$ (Βιβλ. [8]).

Ας θεωρήσουμε τώρα τη γενικευμένη εξίσωση Blasius (3.57), με $x\in[0,+\infty)$, $y\in[a_1,+\infty)$ και $y'_x(0)=\beta_1$, $y'_x(\infty)=0$. Εδώ a_1 ,β_1 είναι σταθερές με $\beta_1>0$.

Η αντικατάσταση

$$y'_x=z(y)\Rightarrow y''_{xx}=z'_y\,y'_x=zz'_y \quad , \quad y'''_{xxx}=z^2z''_{yy}+zz'^2_y \ , \tag{3.62}$$

μετασχηματίζει την (3.57) στην εξίσωση

$$z^2z''_{yy}+zz'^2_y+ayzz'_y-\beta z^2+\beta=0, \tag{3.63}$$

$$a_1\leq y<+\infty \quad , \quad z(a_1)=\beta_1 \quad , \quad z(\infty)=0 \qquad \left(z\in[0,\beta_1]\right).$$

Εισάγουμε τώρα τον συναρτησιακό μετασχηματισμό

$$z(y)=n(\xi) \ , \quad \xi=\xi(y)\Rightarrow z'_y=n'_\xi\,\xi'_y \quad , \quad z''_{yy}=n''_{\xi\xi}\,\xi'^2_y+n'_\xi\,\xi''_{yy} \tag{3.64}$$

και ευρίσκουμε την εξίσωση

$$\xi'^2_y n^2 n''_{\xi\xi}+\xi''_{yy}\,n^2n'_\xi+\xi'^2_y nn'^2_\xi+ay\xi'_y\,nn'_\xi-\beta n^2+\beta=0. \tag{3.65}$$

Ορίζουμε την *n(ξ)* έτσι ώστε να ισχύει

$$nn''_{\xi\xi}=-n'^2_\xi\Rightarrow\left(nn'_\xi\right)'_\xi=0\Rightarrow nn'_\xi=1\Rightarrow n(\xi)=\sqrt{2\xi}=z(y)\ , \quad n\neq 0 \tag{3.66}$$

και η (3.65) μετατρέπεται στην

$$\sqrt{2\xi}\,\xi''_{yy}+ay\xi'_y-2\beta\xi+\beta=0 \quad , \tag{3.67}$$

$$a_1\leq y<+\infty \quad , \quad \xi(a_1)=\frac{\beta_1^2}{2} \quad , \quad \xi(\infty)=0 \qquad \left(\xi\in\left[0,\frac{\beta_1^2}{2}\right]\right).$$

Η νέα αντικατάσταση

$$\sqrt{2\xi}=\omega\Rightarrow\xi'_y=\omega\omega'_y \quad , \quad \xi''_{yy}=\omega\omega''_{yy}+\omega'^2_y \tag{3.68}$$

μετατρέπει την (3.67) στην παρακάτω μη γραμμική συνήθη διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$\omega^2\omega''_{yy} + \omega\omega'^2_y + \alpha y\omega\omega'_y - \beta\omega^2 + \beta = 0 \ , \tag{3.69}$$

ενώ ο μετασχηματισμός (1.56) μετατρέπει την τελευταία αυτή εξίσωση στην

$$\omega^2 y''_{\omega\omega} - \omega y'_\omega = \alpha\omega y y'^2_\omega - \beta\omega^2 y'^3_\omega + \beta y'^3_\omega \ , \tag{3.70}$$

$$a_1 \le y < +\infty \ , \ \text{για} \ y = a_1 \Rightarrow \omega = \beta_1 \ , \ \text{για} \ y \to \infty \Rightarrow \omega \to 0 \ \left(\omega \in [0, \beta_1]\right).$$

Εισάγοντας τώρα έναν παρόμοιο με τον (3.64) συναρτησιακό μετασχηματισμό, δηλαδή θέτοντας

$$y(\omega) = \upsilon(s) \ , \quad s = s(\omega)$$

με συγκεκριμένη μορφή

$$s'_\omega = \omega \Rightarrow s = \frac{\omega^2}{2} \ , \quad \omega \ne 0 \ , \tag{3.71}$$

η (3.70) μεταπίπτει στην εξίσωση

$$\upsilon''_{ss} = \frac{a}{\sqrt{2}} s^{-1/2}\upsilon\upsilon'^2_s - \beta\sqrt{2}s^{1/2}\upsilon'^3_s + \frac{\beta}{\sqrt{2}} s^{-1/2}\upsilon'^3_s \ , \tag{3.72}$$

$$a_1 \le \upsilon < +\infty \ , \ \text{για} \ \upsilon = a_1 \Rightarrow s = \frac{\beta_1^2}{2} \ , \ \text{για} \ \upsilon \to \infty \Rightarrow s \to 0 \ \left(s \in \left[0, \frac{\beta_1^2}{2}\right]\right),$$

που μέσω του μετασχηματισμού (1.56) μετατρέπεται στην παρακάτω τριμελή γενικευμένη εξίσωση Emden-Fowler :

$$s''_{\upsilon\upsilon} = A\upsilon s^{-1/2}s'_\upsilon + Bs^{1/2} - \frac{B}{2}s^{-1/2} \ , \quad A = -\frac{a}{\sqrt{2}} \ , \quad B = -\beta\sqrt{2} \ , \tag{3.73}$$

$$a_1 \le \upsilon < +\infty \ , \ \text{για}\, s = \frac{\beta_1^2}{2} \Rightarrow \upsilon = a_1 \ , \ \text{για}\, s \to 0 \Rightarrow \upsilon \to \infty \ \left(s \in \left[0, \frac{\beta_1^2}{2}\right]\right),$$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις.

Περίπτωση α: *β=0*

Αν *β=0*, που αντιστοιχεί στην απλοποιημένη μορφή της εξίσωσης Blasius (εξ. (3.56)), η μετασχηματισμένη εξίσωση που αντιστοιχεί στην (3.67) μετατρέπεται σε μια γενικευμένη εξίσωση Emden-Fowler, δηλαδή

$$y''_{\xi\xi} = -A\xi^{-1/2} y \left(y'_{\xi} \right)^2 \quad , \quad A = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}. \tag{3.74}$$

Ο μετασχηματισμός (1.59) επί της (3.74) με συγκεκριμένη μορφή

$$w(t) = \xi^{1/2} \quad , \quad t = \left(y'_{\xi} \right)^{-1} \quad , \tag{3.75}$$

την μετασχηματίζει στην γενικευμένη εξίσωση Emden-Fowler

$$w''_{tt} = Bt^{-1} w \left(w'_t \right)^3 \quad , \quad B = -4A. \tag{3.76}$$

Εφόσον η (3.76) λυθεί, τότε η λύση της (3.74) επιτυγχάνεται παραμετρικά (βλέπε εξ. (1.62)) ως εξής:

$$\xi = w^2 \quad , \quad y = \frac{1}{2A} \left(w'_t \right)^{-1} \quad , \quad t = \text{παράμετρος}. \tag{3.77}$$

Η (3.76) μετατρέπεται άμεσα στην εξίσωση Emden-Fowler κανονικής μορφής

$$t''_{ww} = 4Awt^{-1} \quad . \tag{3.78}$$

Με τους γνωστούς τώρα παραδεκτούς μετασχηματισμούς του Κεφαλαίου 1 οποιαδήποτε από τις εξισώσεις Emden-Fowler (3.74), (3.76) και (3.78) μετατρέπεται σε εξίσωση Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής. Επί παραδείγματι, ο μετασχηματισμός (1.51) με συγκεκριμένη μορφή

$$s = -2w^{-3/2} t \quad , \quad \upsilon = w^{-3/2} \left(wt'_w - \frac{3}{2} t \right) \; , \tag{3.79}$$

παρέχει την εξίσωση Abel

$$\upsilon \upsilon'_s - \upsilon = -\frac{3}{16} s - \frac{a}{\sqrt{2}} s^{-1} \quad . \tag{3.80}$$

Περίπτωση b: $\beta \neq 0$

Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί στην γενικευμένη εξίσωση Blasius (3.57). Εδώ θα ασχοληθούμε με την εξίσωση αυτή για την περίπτωση της αξονοσυμμετρικής ροής. Η μετασχηματισμένη εξίσωση (3.67) γίνεται

$$\sqrt{2\xi}\, \xi''_{yy} = -ay\xi'_y + 2\beta\xi \quad . \tag{3.81}$$

Η αντικατάσταση $\sqrt{2\xi} = \omega(\xi)$ εισάγει την νέα εξίσωση

$$\omega\omega''_{yy} + \omega'^2_y = -\alpha y \omega'_y + \beta\omega, \qquad \left(\omega \neq 0 \right), \tag{3.82}$$

που αντιστοιχεί στην (3.69), ενώ η αντίστοιχη της (3.70) γίνεται:

$$\omega y''_{\omega\omega} - y'_{\omega} = \alpha y y'^{2}_{\omega} - \beta\omega y'^{3}_{\omega} \quad . \tag{3.83}$$

Τελικά ακολουθώντας την ίδια όπως προηγουμένως διαδικασία εξάγουμε την αντίστοιχη της (3.73) που στη προκειμένη περίπτωση είναι:

$$s''_{\upsilon\upsilon} = A\upsilon s^{-1/2} s'_{\upsilon} + B s^{1/2} \quad , \quad A = -\frac{a}{\sqrt{2}} \quad , \quad B = -\beta\sqrt{2}. \tag{3.84}$$

Ο τελικός μετασχηματισμός (1.62) με συγκεκριμένη μορφή

$$\overset{*}{z} = \upsilon\frac{s'_{\upsilon}}{s} \quad , \quad \overset{*}{t} = A\upsilon^{2} s^{-1/2} \ , \tag{3.85}$$

παρέχει το αποτέλεσμα

$$d\overset{*}{z} = \left(\frac{s'_{\upsilon}}{s} + \upsilon\frac{s''_{\upsilon\upsilon}}{s} - \upsilon\frac{s'^{2}_{\upsilon}}{s^{2}}\right)d\upsilon \quad , \quad d\overset{*}{t} = A\frac{4\upsilon s - \upsilon^{2} s'_{\upsilon}}{2s^{3/2}}d\upsilon \quad ,$$

δηλαδή την σχέση

$$\overset{*}{z}{}'_{\overset{*}{t}} = 2\frac{\overset{*}{z} + \upsilon^{2}\dfrac{s''_{\upsilon\upsilon}}{s} - \overset{*}{z}{}^{2}}{\left(4 - \overset{*}{z}\right)\overset{*}{t}} \quad . \tag{3.86}$$

Λύνοντας την (3.86) προς $s''_{\upsilon\upsilon}$ και εισάγοντας στην προκύπτουσα εξίσωση την (3.84) καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$s''_{\upsilon\upsilon} = \left[\left(4 - \overset{*}{z}\right)\overset{*}{t}\,\overset{*}{z}{}'_{\overset{*}{t}} - 2\overset{*}{z} + 2\overset{*}{z}{}^{2}\right]\frac{s}{2\upsilon^{2}} = \mathrm{A}\upsilon s^{-1/2} s'_{\upsilon} + \mathrm{B} s^{1/2} \quad . \tag{3.87}$$

που παρέχει την παρακάτω εξίσωση Abel δευτέρου είδους

$$\left[\left(4 - \overset{*}{z}\right)\overset{*}{t}\,\overset{*}{z}{}'_{\overset{*}{t}} - 2\overset{*}{z} + 2\overset{*}{z}{}^{2}\right]\frac{\mathrm{A}}{2\overset{*}{t}} = A\overset{*}{z} + B, \tag{3.88}$$

και ισοδύναμα την εξίσωση Abel δευτέρου είδους

$$\left(\overset{*}{z} - 4\right)\overset{*}{z}{}'_{\overset{*}{t}} = \frac{2}{t}\overset{*}{z}{}^{2} - 2\left(1 + \frac{1}{\overset{*}{t}}\right)\overset{*}{z} - \frac{2B}{A}. \tag{3.89}$$

Αυτή, με τους γνωστούς μετασχηματισμούς του Κεφ. 1 μεταπίπτει σε εξίσωση Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής.

3.5 Ο μη γραμμικός ελεύθερος ταλαντωτής Duffing με απόσβεση (1918) [11]

Η εξίσωση που περιγράφει τον μη γραμμικό ελεύθερο ταλαντωτή Duffing με απόσβεση είναι

$$y''_{xx} + \lambda_3 y'_x + \lambda_2 y^3 = 0 \quad , \tag{3.90}$$

$$-\infty < x < +\infty \quad , \quad -\infty < y < +\infty \qquad , \qquad \lambda_3, \lambda_2 > 0 \ ,$$

όπου λ_3 και λ_2 παριστάνουν δεδομένες παραμέτρους. Η εξίσωση συνοδεύεται από τις αρχικές συνθήκες

$$\text{για} \quad x = 0 \ , \quad y(0) = y_0 \quad \text{και} \quad y'_x(0) = y'_0 \ . \tag{3.91}$$

Η (3.90) γενικεύεται αν σ' αυτήν εμφανισθεί γραμμικός όρος του y, οπότε τότε γίνεται

$$y''_{xx} + \lambda_3 y'_x - \lambda_1 y + \lambda_2 y^3 = 0 \quad , \quad \lambda_1 > 0 \ , \tag{3.92}$$

με λ_1 δεδομένη παράμετρο. Η (3.92) αποτελεί ειδική περίπτωση της εξίσωσης Rayleigh (παρ.3.2). Ο γνωστός μετασχηματισμός

$$y'_x = p(y) \ , \quad y''_{xx} = p'_y \, y'_x = pp'_y \tag{3.93}$$

μετατρέπει τις (3.90) και (3.92) στις παρακάτω εξισώσεις Abel δευτέρου είδους αντίστοιχα:

$$pp'_y + \lambda_3 p + \lambda_2 y^3 = 0 \quad , \tag{3.94}$$

$$-\infty < y < +\infty \quad , \quad -\infty < p < +\infty \quad ,$$

και

$$pp'_y + \lambda_3 p - \lambda_1 y + \lambda_2 y^3 = 0 \quad , \tag{3.95}$$

$$-\infty < y < +\infty \quad , \quad -\infty < p < +\infty .$$

Στην συνέχεια, μέσω του μετασχηματισμού συντεταγμένων

$$p(y) = -an(r) \quad , \quad r = \beta y \quad , \tag{3.96}$$

όπου α και β είναι συντελεστές προς προσδιορισμό, οι εξισώσεις (3.94) και (3.95) γίνονται αντίστοιχα

$$a^2\beta nn'_r - \alpha\lambda_3 n + \frac{\lambda_2}{\beta^3}r^3 = 0. \tag{3.97}$$

και

$$a^2\beta nn'_r - \alpha\lambda_3 n - \frac{\lambda_1}{\beta}r + \frac{\lambda_2}{\beta^3}r^3 = 0. \tag{3.98}$$

Θέτοντας

$$a^2\beta = a\lambda_3 = \frac{\lambda_2}{\beta^3} \Rightarrow a = \frac{\lambda_3^2}{\sqrt{\lambda_2}} \quad , \quad \beta = \frac{\sqrt{\lambda_2}}{\lambda_3}, \tag{3.99}$$

υπολογίζουμε τους ως άνω συντελεστές και εξάγουμε τις παρακάτω εξισώσεις Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής αντίστοιχες των (3.94) και (3.95):

$$nn'_r - n = -r^3 \quad , \quad -\infty < r < +\infty \quad , \quad -\infty < n < +\infty \tag{3.100}$$

και

$$nn'_r - n = \frac{\lambda_1}{\lambda_3^2} - r^3 \quad , \quad -\infty < r < +\infty \quad , \quad -\infty < n < +\infty \tag{3.101}$$

Για τις αντίστοιχες αρχικές συνθήκες, δηλαδή για $x = 0 \Rightarrow y = y_0 \ , y'_x = y'_{x_o}$, μέσω του μετασχηματισμού (3.93), εξάγουμε ότι $p\left(y_0\right) = p_0 = y'_{x_o}$ και συνεπώς, οι αντίστοιχες αρχικές συνθήκες που αφορούν τις εξισώσεις Abel (3.100) και (3.101) γίνονται:

$$\text{για} \quad x = 0 \Rightarrow y = y_0 \ , \ y'_x = y'_{0x} \Rightarrow r = r_0 = \frac{\sqrt{\lambda_2}}{\lambda_3} y_0 \quad \text{και} \quad n = n_0 = -\frac{\sqrt{\lambda_2}}{\lambda_3^2} y'_{x_0} \ . \tag{3.102}$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η εξίσωση που διέπει τον μη γραμμικό ελεύθερο ταλαντωτή Duffing μετασχηματίζεται σε εξίσωση Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής. Με βάση τα αναπτυχθέντα στο Κεφάλαιο 1, η προς θεώρηση εξίσωση μπορεί να μεταπέσει σε ισοδύναμες μορφές εξισώσεων Emden-Fowler ή γενικευμένες εξισώσεις Emden-Fowler.

3.6 Η εξίσωση Langmuir (1923) [21]

Η εξίσωση Langmuir εμφανίζεται στην ροή φορτίου εν κενώ, από θερμή κάθοδο σε θετικά φορτισμένη άνοδο. Η άνοδος και κάθοδος είναι ένας μακρύς στρεβλωμένος κύλινδρος και η εξηρτημένη μεταβλητή y καθορίζεται μέσω της σχέσης $y = f\ (r/r_0)$, όπου r είναι η ακτίνα της ανόδου, ενώ r_0 η ακτίνα της καθόδου. Η ανεξάρτητη μεταβλητή δίνεται από την σχέση $x = 1\mathrm{n}(r/r_0)$. Η εξίσωση τελικά έχει την μορφή [21]

$$3yy''_{xx} + y'^2_x + 4yy'_x + y^2 - 1 = 0 \quad , \tag{3.103}$$

η οποία μέσω του μετασχηματισμού

$$y'_x = p(y) \Rightarrow y''_{xx} = p'_y\, y'_x = pp'_y \tag{3.104}$$

μετατρέπεται στην εξής εξίσωση Abel δευτέρου είδους

$$3ypp'_y = -p^2 - 4yp - y^2 + 1 \ . \tag{3.105}$$

Περαιτέρω, ο γνωστός μετασχηματισμός (1.2)

$$w(y) = pe^{\int \frac{1}{3y}dy} = p\exp\left[\ln\left(|y|^{1/3}\right)\right] = py^{1/3} \Rightarrow p = y^{-1/3}w \quad \left(y \neq 0\right) \tag{3.106}$$

παρέχει τις εκφράσεις

$$p'_y = y^{-1/3}w'_y - \frac{1}{3}y^{-2/3}w \quad , \quad pp'_y = y^{-2/3}ww'_y - \frac{1}{3}y^{-5/3}w^2, \tag{3.107}$$

και μετασχηματίζει την (3.105) στην παρακάτω εξίσωση Abel δευτέρου είδους

$$ww'_y = -\frac{4}{3}y^{1/3}w + \frac{1}{3}y^{-1/3} - \frac{1}{3}y^{5/3}. \tag{3.108}$$

Τέλος, η αντικατάσταση

$$w(y) = n(\xi) \quad , \quad \xi = \frac{4}{3}\int y^{1/3}dy \Rightarrow y = \xi^{3/4}, \tag{3.109}$$

μετασχηματίζει την (3.108) στην εξίσωση

$$nn'_\xi + n = \frac{1}{4}\xi^{-1/2} - \frac{1}{4}\xi \quad ,$$

η οποία μέσω της νέας αντικατάστασης

$$n(\xi) = -z(\xi) \tag{3.110}$$

μετατρέπεται στην εξίσωση Abel κανονικής μορφής

$$zz'_\xi - z = \frac{1}{4}\xi^{-1/2} - \frac{1}{4}\xi. \tag{3.111}$$

3.7 Ο μη γραμμικός ελεύθερος ταλαντωτής van der Pol (1926) [44]

Ο μη γραμμικός ταλαντωτής van der Pol διέπεται από την εξίσωση

$$y''_{xx} - \varepsilon\left(1-y^2\right)y'_x + y = 0 \quad , \tag{3.112}$$

$$0 \le x < +\infty \quad , \quad -\infty < y < +\infty \quad , \quad \varepsilon > 0 \quad , \quad \left(\varepsilon = \text{παράμετρος}\right).$$

Έχει ενδιαφέρον να δει κανείς την ισοδυναμία της εξίσωσης αυτής με την εξίσωση διάδοσης μη γραμμικών επιφανειακών κυμάτων του Rayleigh (3.21). Με άλλα λόγια να δει πως η εξίσωση van der Pol είναι ειδική περίπτωση της Rayleigh. Προς τούτο αρκεί να γράψει κανείς την (3.21) υπό την μορφή

$$y''_{xx} + \left(-\overset{*}{\lambda} + \mu y'^2_x\right)y'_x + n^2 y = 0 \tag{3.113}$$

και να εισάγει τον μετασχηματισμό

$$px = z \quad , \quad qy'_x = \omega(z) \quad , \tag{3.114}$$

όπου p και q είναι κατάλληλες σταθερές. Τότε η (3.113) γράφεται

$$\frac{p}{q}\omega'_z + \left(-b + \frac{c}{q^2}\omega^2\right)\frac{\omega}{c} + n^2 y = 0, \tag{3.115}$$

που μετά από παραγώγιση παίρνει τη μορφή

$$\omega''_{zz} - \frac{b}{q}\left(1 - \frac{3c}{b}\omega^2\right)\omega'_z + \frac{n^2}{p^2}\omega = 0. \tag{3.116}$$

Θέτουμε τώρα

$$p = n > 0 \quad , \quad q = \sqrt{\frac{3c}{b}} > 0 \quad , \quad \varepsilon = \frac{b}{p} > 0 \quad , \tag{3.117}$$

και η (3.116) παίρνει την μορφή της εξίσωσης van der Pol (3.112), δηλαδή τη μορφή

$$\omega''_{zz} - \varepsilon\left(1-\omega^2\right)\omega'_z + \omega = 0 \quad . \tag{3.118}$$

Από την παραπάνω ανάλυση είναι φανερό ότι η λύση της εξίσωσης van der Pol ανάγεται σε αυτή της εξίσωσης Rayleigh (παρ. 3.2). Με άλλα λόγια ακολουθώντας την διαδικασία της παραγράφου 3.2 με ελεύθερη παράμετρο ε καταλήγουμε στην μετατροπή των εξισώσεων van der Pol σε κατάλληλες εξισώσεις Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής.

Μια σύντομη περιγραφή της διαδικασίας αυτής έχει ως εξής:

Εισάγουμε τον μετασχηματισμό

$$y'_x = w(y) \Rightarrow y''_{xx} = w'_y \, y'_x = ww'_y \tag{3.119}$$

και η (3.112) μεταπίπτει στην

$$ww'_y = \varepsilon\left(1-y^2\right)w - y \quad , \quad -\infty < y < +\infty \quad , \quad -\infty < w < +\infty \ . \tag{3.120}$$

Η αντικατάσταση

$$s = \int \varepsilon\left(1-y^2\right)dy = \varepsilon y\left(1-\frac{y^3}{3}\right), \tag{3.121}$$

οδηγεί την (3.120) στην εξίσωση Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής

$$ww'_s - w = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{y}{1-y} \quad , \quad y^3 - 3y + \frac{3}{\varepsilon}s = 0 \ , \tag{3.122}$$

$$-\infty < s < +\infty \quad , \quad -\infty < w < +\infty \ .$$

Η δεύτερη των (3.122) είναι κυβική εξίσωση τύπου Cardano με διακρίνουσα

$$\overset{*}{Q} = \left(\frac{\overset{*}{p}}{3}\right)^3 + \left(\frac{\overset{*}{q}}{2}\right)^2 = -1 + \frac{qs^2}{4\varepsilon^2}, \tag{3.123}$$

$$\overset{*}{p} = -3 \quad , \quad \overset{*}{q} = \frac{3s}{\varepsilon} \quad , \quad \varepsilon > 0 \ .$$

Με βάση τα αναπτυχθέντα στην παράγραφο 3.2 διακρίνουμε τις εξής εξισώσεις Abel που είναι ισοδύναμες με την αρχική εξίσωση van der Pol (3.112).

Περίπτωση 1: $\overset{*}{Q} < 0 \quad \left(\overset{*}{p} < 0\right)$

$$ww'_s - w = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{2\cos\frac{\overset{*}{a}}{3}}{1-4cos^2\frac{\overset{*}{a}}{3}} \quad ,$$

$$ww'_s - w = +\frac{1}{\varepsilon}\frac{2\cos\frac{\overset{*}{a}-\pi}{3}}{1-4cos^2\frac{\overset{*}{a}-\pi}{3}}, \tag{3.124}$$

$$ww_s' - w = +\frac{1}{\varepsilon}\frac{2\cos\frac{\overset{*}{a}+\pi}{3}}{1-4cos^2\frac{\overset{*}{a}+\pi}{3}} \quad ,$$

όπου:

$$\cos\overset{*}{a} = -\frac{\overset{*}{q}}{+2\sqrt{-\left(\frac{\overset{*}{p}}{3}\right)^3}} = -\frac{3s}{4\varepsilon} \quad , \qquad 0<\overset{*}{a}<\pi, \tag{3.125}$$

$$-\frac{2\varepsilon}{3} < s < \frac{2\varepsilon}{3}$$

Περίπτωση 2: $\overset{*}{Q} > 0$

$$ww_s' - w = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\overset{*}{\mathrm{A}}+\overset{*}{\mathrm{B}}}{1-4\left(\overset{*}{\mathrm{A}}+\overset{*}{\mathrm{B}}\right)^2}, \tag{3.126}$$

όπου:

$$\overset{*}{\mathrm{A}} = \sqrt[3]{-\frac{3s}{4\varepsilon}+\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{9s^2-4\varepsilon^2}} \quad , \qquad \overset{*}{\mathrm{B}} = \sqrt[3]{-\frac{3s}{4\varepsilon}-\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{9s^2-4\varepsilon^2}}, \tag{3.127}$$

$$s > \frac{2\varepsilon}{3} \qquad \acute{\eta} \qquad s < -\frac{2\varepsilon}{3}\,. \tag{3.128}$$

Συνεπώς αποδείξαμε ότι η εξίσωση van der Pol ισοδυναμεί με τέσσερις εξισώσεις Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής, όπως ακριβώς και η εξίσωση Rayliegh (παρ. 3.2).

3.8 Η εξίσωση Thomas-Fermi (ενεργό πυρηνικό φορτίο σε βαρέα άτομα) (1927) [13]

Η εξίσωση Thomas - Fermi δίνεται από τον τύπο της διαφορικής εξίσωσης Emden - Fowler

$$y''_{xx} = x^{-1/2} y^{3/2}, \tag{3.129}$$

και εμφανίζονται στο πρόβλημα του προσδιορισμού του ενεργού πυρηνικού φορτίου σε βαρέα άτομα. Αρχικές συνθήκες του προβλήματος ορίζονται οι

$$y(0) = 1; \;\; y(x) \to 0 \text{ για } x \to \infty. \tag{3.130}$$

Η διαφορική εξίσωση είναι τύπου Emden-Fowler δεδομένου ότι ο μετασχηματισμός

$$y(x) = x\, z(x) \tag{3.131}$$

την μετατρέπει στην

$$z''_{xx} + \frac{2}{x} z'_x - z^{3/2} = 0. \tag{3.132}$$

Με γραφική παράσταση ο ίδιος ο Fermi [13] επέτυχε να κατασκευάσει για τιμές στην περιοχή της αρχής τον προσεγγιστικό τύπο

$$y(x) = 1 - Bx + \frac{4}{3} x^{3/2} \;\text{ με }\; B = 1.58, \tag{3.133}$$

ένα ανάπτυγμα που ο E.D. Baker[8] επεξέτεινε στην ακόλουθη σειρά

$$y(x) = 1 - Bx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{15}Bx^4 + \ldots + x^{3/2}\left[\frac{4}{3} - \frac{2}{5}Bx + \frac{3}{70}B^2x^2 + \frac{4}{64}\left(\frac{2}{3} + \frac{B^3}{116}\right)x^3 + \ldots\right], \tag{3.134}$$

με ακριβέστερη τιμή της σταθερά B, δηλαδή $B = 1.588588$.

Σύμφωνα τώρα με τον τύπο (1.44) η εξίσωση Thomas-Fermi επιδέχεται τη μερική λύση[8]

$$y(x) = \frac{144}{x^3}, \tag{3.135}$$

που ικανοποιεί μεν τη δεύτερη των συνθηκών (3.130) όχι όμως και την πρώτη. Με βάση όμως τη μερική λύση (3.135) ο A. Sommerfeld [40] επέτυχε να κατασκευάσει την εξής προσεγγιστική λύση

$$y(x) = y_M(x)\left\{1+\left[y_M(x)\right]^{\lambda_1/3}\right\}^{\lambda_2/2}, \tag{3.136}$$

όπου λ_1 και λ_2 είναι η θετική και αρνητική ρίζα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$\lambda^2 + 7\lambda - 6 = 0, \tag{3.137}$$

αντίστοιχα.

Από την άλλη μεριά, η αριθμητική ολοκλήρωση μέσω υπολογιστών της εξίσωσης (3.129) έγινε κατά αρχήν από τον Fermi και αργότερα από τους Bush και Galdwell (Βιβλ. [8]). Για μικρές τιμές του x η σειρά Bush είναι ακριβής, πράγμα που δεν ισχύει για x μακράν του 1. Η προσέγγιση Sommerfeld δίνει πολύ καλά αποτελέσματα για μεγάλες τιμές του x όχι όμως για y κοντά στην αρχή.

Ο μετασχηματισμός (1.49) μετατρέπει την (3.129) σε εξίσωση Emden-Fowler άλλης δυάδας δεικτών, δηλαδή

$$\mathcal{P}: y = \frac{w(t)}{t},\ x = \frac{1}{t},\ t \neq 0 \Leftrightarrow \mathcal{P} \xleftrightarrow{\varepsilon\xi.(3.129)} w''_{tt} = t^{-4} w^{3/2}, \tag{3.138}$$

ενώ ο μετασχηματισμός (1.56) σε γενικευμένη εξίσωση Emden-Fowler

$$\mathcal{F}: y'_x = \frac{1}{x'_y} \Rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon\xi.(3.129)} x''_{yy} = -y^{3/2} x^{-1/2} \left(x'_y\right)^3. \tag{3.139}$$

Τέλος ο μετασχηματισμός (1.55) μετατρέπει την (3.139) στην εξίσωση Emden- Fowler

$$\mathcal{T}: w = y^{5/2},\ s = \left(x'_y\right)^{-2} \Rightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{\varepsilon\xi.(3.139)} w''_{\xi\xi} = \frac{5}{26} s^{-1/2} w^{-3/5}. \tag{3.140}$$

Σύμφωνα με τα οριζόμενα από τους Polyanin και Zaitsev (Βιβλ. [36]) καμιά από τις παραπάνω μορφές δεν επιδέχεται αναλυτικών λύσεων είτε υπό παραμετρική είτε όχι έκφραση.

Ο συναρτησιακός μετασχηματισμός (1.51) μετατρέπει την αρχική εξίσωση Thomas–Fermi (3.129) στην παρακάτω μη γραμμική ΣΔΕ Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής

$$uu'_\xi - u = -\frac{12}{49}\xi + \frac{1}{49}\xi^{\frac{3}{2}}, \tag{3.141}$$

όπου

$$\xi = 7x^3 y,\ u = x^3\left(x\,y'_x + 34\right). \tag{3.142}$$

Η πρώτη των αρχικών συνθηκών

$$\text{για } x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1 \tag{3.143}$$

οδηγεί μέσω των εξισώσεων (3.143) στην μια αρχική συνθήκη με μεταβλητές ξ ,u

$$\text{για } \xi_0 = 0 \Rightarrow u(0)\left[u'_\xi(u_0) - 1\right] = 0, \tag{3.144}$$

που παρέχουν

$\xi_0 = 0 \Rightarrow u_0 = 0$ και $u'_{\xi_0} = \mu$ (όπου κατ' αρχήν μ είναι οποιοδήποτε αριθμός)

ή (3.145)

$\xi_0 = 0 \Rightarrow u'(0)_\xi = 1$ και $u_{\xi_0} = \nu$ (όπου κατ' αρχήν ν είναι οποιοδήποτε αριθμός)

Αυτή η αρχική συνθήκη θα χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της πρώτης σταθεράς ολοκλήρωσης C που θα προκύψει από την αναλυτική λύση της εξίσωσης Abel (3.141) στο επίπεδο των φάσεων. Εφόσον λυθεί η εξίσωση Abel (3.141), τότε η αρχική εξίσωση Thomas-Fermi (3.129) (μαζί με την δεύτερη αρχική συνθήκη των εξισώσεων (3.130)) μπορεί να επιλυθεί μέσω της πρώτης των εξισώσεων του μετασχηματισμού (3.142)

$$3x^2 y dx + x^3 dy = \frac{d\xi}{7}, \tag{3.146}$$

δηλαδή την εξίσωση

$$3x^2 y + x^3\, y'_x = \frac{1}{7}\xi'_x. \tag{3.147}$$

Έτσι, εξάγουμε την παραμετρική λύση

$$x = C^* \exp\left(7\int \frac{d\xi}{u(\xi)}\right), \quad y = \frac{\xi}{7x^3};$$

$$x \geq 0, \;\; y \geq 0, \; \xi = \text{παράμετρος}; \qquad C^* = \text{σταθερά ολοκληρώσεως ;} \tag{3.148}$$

$$u(\xi) = \text{λύση της εξίσωσης Abel (3.141).}$$

Στην περίπτωση αυτή η δεύτερη συνθήκη, δηλαδή η συνθήκη $x \to \infty, \, y \to 0$ χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της δεύτερης σταθεράς C^*.

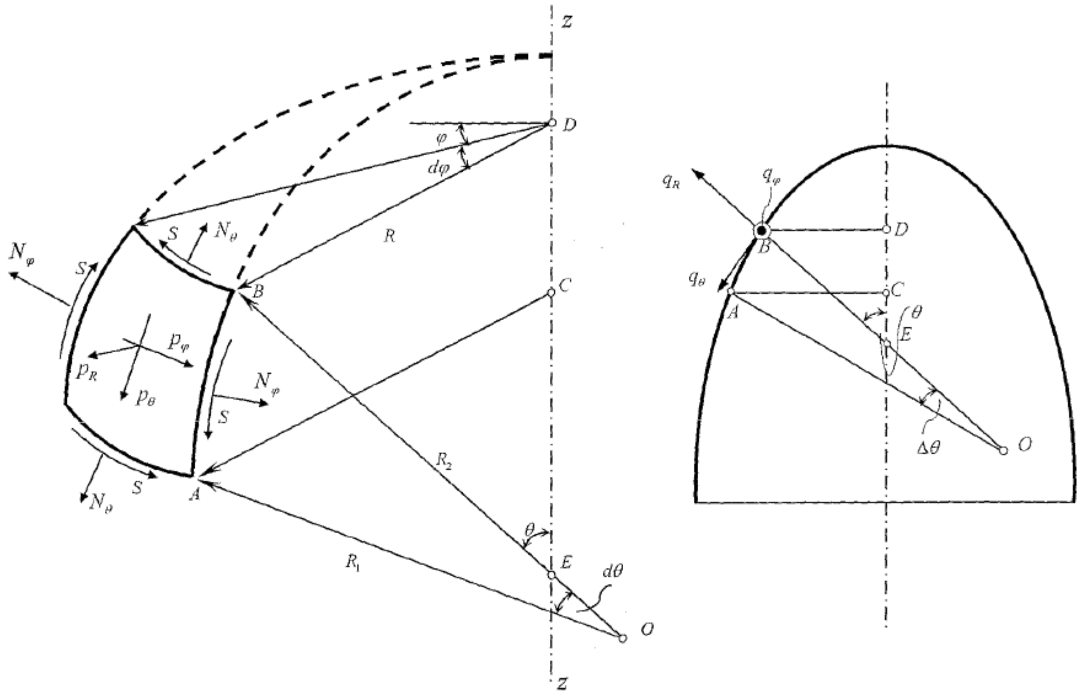
3.9 Η εξίσωση μεμβρανικών κελυφών εκ περιστροφής - Εξίσωση Megareus (1939) [25]

Ας θεωρήσουμε στοιχείο κελύφους εκ περιστροφής υπό μεμβρανική ένταση. Συμβολίζουμε με R_1 την ακτίνα καμπυλότητας του μεσημβρινού, R την ακτίνα καμπυλότητας του παράλληλου κύκλου και με R_2 την ακτίνα καμπυλότητας που ορίζεται μεταξύ της καθέτου στην μέση επιφάνεια και του άξονα περιστροφής του κελύφους (EB = R_2) (Σχ. 3.3). Από τις σχέσεις

$$EB = R_2 \ ; \ DB = (EB)\sin\theta = R_2 \sin\theta \ ; \ AC - DB = \Delta(R_2 \sin\theta) \ ; \ \frac{AC - DB}{\cos\theta} = AB \ ;$$
$$AB = R_1 \Delta\theta$$

εξάγουμε την εξίσωση

$$\frac{\Delta}{\Delta\theta}(R_2 \sin\theta) = R_1 \cos\theta \ . \tag{3.149}$$



Σχήμα 3.3: Μεμβρανικό στοιχείο κελύφους εκ περιστροφής

Οι τρεις εξισώσεις ισορροπίας στην μεμβρανική θεωρία κελυφών είναι [25]:

$$\frac{1}{R_1} N'_{\theta,\theta} + \frac{cot\theta}{R_2}\left(N_\theta - \mathrm{N}_\varphi\right) + \frac{1}{R_2 \sin\theta} S'_{,\theta} + q_\theta = 0 \quad ,$$

$$\frac{1}{R_1} S'_{,\theta} + \frac{2cot\theta}{R_2} S + \frac{1}{R_2 \sin\theta} N'_{\varphi,\varphi} + q_\varphi = 0 \ , \tag{3.150}$$

$$\frac{\mathrm{N}_\theta}{R_1} + \frac{\mathrm{N}_\varphi}{R_2} = q_R \quad ,$$

όπου

$$\mathrm{N}'_{\theta,\theta} = \frac{\partial \mathrm{N}_\theta}{\partial \theta} \quad , \quad \mathrm{N}'_{\theta,\varphi} = \frac{\partial \mathrm{N}_\theta}{\partial \varphi} \quad ,\ldots$$

Στην περίπτωση των τρούλων είναι γνωστό ότι ως βασική φόρτιση θεωρείται το ίδιον βάρος q. Εξετάζουμε τώρα το πρόβλημα της επιλογής του σχήματος ενός τρούλου έτσι ώστε η κατανομή των τάσεων μέσα στην κατασκευή να παραμένει σταθερή. Οι συνιστώσες φόρτισης στην περίπτωση αυτή είναι

$$q_\theta = q\sin\theta \quad , \quad q_R = -qcos\theta \quad , \quad q_\varphi = 0 \ , \tag{3.151}$$

ενώ θέτοντας στις εξισώσεις (3.150)

$$\mathrm{N}_\varphi = \mathrm{N}_\theta = \mathrm{N} \tag{3.152}$$

και θεωρώντας συγχρόνως ότι η παραμόρφωση του κελύφους δεν εξαρτάται από την γωνία φ καθώς επίσης και ότι

$$S = q_\varphi = 0 \ , \tag{3.153}$$

παίρνουμε τις σχέσεις

$$\mathrm{N}'_{,\theta} = -qR_1 \sin\theta \quad , \tag{3.154}$$

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) N = -q\cos\theta \ . \tag{3.155}$$

Λύνοντας την (3.155) προς R_1 και χρησιμοποιώντας την (3.149) καταλήγουμε στην διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{d\theta}\left(R_2 \sin\theta\right) = -\frac{R_2 \cos\theta}{1 + \dfrac{q}{N} R_2 \cos\theta}. \tag{3.156}$$

Εισάγοντας τη νέα μεταβλητή

$$x = R_2 \sin\theta \tag{3.157}$$

και θεωρώντας τις σχέσεις $q = \rho\delta$, $N = \sigma\delta$ (ρ = ειδικό βάρος του υλικού, σ = τάση λόγω της δύναμης N), η (3.156) απλοποιείται στην

$$\frac{dx}{d\theta} = -\frac{x}{\tan\theta + \dfrac{\rho}{\sigma} x}. \tag{3.158}$$

Εφόσον το ζητούμενο είναι οι τάσεις σε όλες τις διατομές του κελύφους να είναι ίσες, ο λόγος *ρ/σ* είναι σταθερός. Συνεπώς, για να συμβεί αυτό πρέπει το πάχος *δ* του κελύφους να μεταβάλλεται έτσι ώστε η σχέση *N=σδ* να είναι σε συμφωνία με την εξίσωση (3.154). Έτσι, εισάγοντας τις τιμές *q=ρδ* και *N=σδ* στην (3.154) καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$\frac{d\delta}{d\theta} = -\frac{\rho}{\sigma}\delta R_1 \sin\theta \quad ,$$

που παρέχει την εξίσωση

$$\ln\left(\frac{\delta}{\delta_0}\right) = -\frac{\rho}{\sigma}\int_0^\theta R_1 \sin\theta d\theta \ , \tag{3.159}$$

όπου δ_0 το πάχος του κελύφους για θ=0 (κορυφή τρούλου). Δεδομένου τώρα ότι $(R_1 \sin\theta d\theta)$ παριστάνει την προβολή στοιχειώδους τόξου του μεσημβρινού στον άξονα z, εισάγουμε την μεταβλητή

$$\int_0^\theta R_1 \sin\theta d\theta = z, \tag{3.160}$$

όπου z είναι η κατακόρυφη συντεταγμένη του υπό θεώρηση σημείου. Έτσι, το πάχος του κελύφους μεταβάλλεται με τον εκθετικό νόμο

$$\delta = \delta_0 \exp\left(-\frac{\rho z}{\sigma}\right), \tag{3.161}$$

και η συναρτησιακή εξάρτηση των *z* και θ ευρίσκεται από την ολοκλήρωση της (3.158). Εισάγοντας λοιπόν τις αδιάστατες μεταβλητές

$$x_1 = -\frac{\rho}{\sigma}x \quad , \qquad z_1 == -\frac{\rho}{\sigma}z, \tag{3.162}$$

η (3.158) παρέχει τη εξίσωση Abel δευτέρου είδους

$$x'_{1_\theta} = -\frac{x_1}{\tan\theta - x_1},$$

ή την ισοδύναμη

$$\left(x_1 - \tan\theta\right)x'_{1_\theta} = x_1 \quad . \tag{3.163}$$

Μέσω του μετασχηματισμού

$$w = x_1 - \tan\theta \Rightarrow w'_\theta = x'_{1_\theta} - \frac{1}{cos^2\theta} \ , \tag{3.164}$$

η (3.163) μεταπίπτει στην

$$ww'_{\theta} - \left(1 - \frac{1}{cos^2\theta}\right)w = \tan\theta. \tag{3.165}$$

Με την γνωστή αντικατάσταση

$$\xi = \int\left(1 - \frac{1}{cos^2\theta}\right)d\theta = \theta - \tan\theta,$$

η (3.165) μετασχηματίζεται στην εξίσωση Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής

$$ww'_{\xi} - w = \frac{-1}{\tan\theta} \quad , \quad \xi = \theta - \tan\theta. \tag{3.166}$$

Η εξίσωση δόθηκε από τον Megareous [25], οποίος έδωσε και μια υπολογιστική λύση.

3.10 Η εξίσωση Kidder στα πορώδη μέσα (1957) [19,8]

Η εξίσωση Kidder που διέπει την ασταθή ροή ενός αερίου μέσω ημιάπειρου πορώδους μέσου δίνεται από τον τύπο

$$\sqrt{1-ay}\,y''_{xx} + 2xy'_x = 0 \quad , \quad 0 < a < 1 \tag{3.167}$$

με αρχικές συνθήκες

$$\begin{aligned} &\text{για } x \to 0 \Rightarrow y = y_{\infty} = 1 \ , \\ &\text{για } x = x_0 = 0 \Rightarrow 0 < y_0 < 1 \ . \end{aligned} \tag{3.168}$$

Μέσω της αντικατάστασης

$$1 - ay = z(x) \quad , \tag{3.169}$$

η εξίσωση (3.167) μετατρέπεται στην παρακάτω γενικευμένη εξίσωση Emden-Fowler

$$z''_{xx} = -2xz^{-1/2}z'_x \qquad \{n,m,l\} = \left\{1, -\frac{1}{2}, 1\right\}, \tag{3.170}$$

με αντίστοιχες συνθήκες

$$\begin{aligned} &\text{για } x = x_0 = 0 \Rightarrow z = z_0 = 1 - a \quad , \\ &\text{για } x \to \infty \Rightarrow z = z_{\infty} = 1 \ . \end{aligned} \tag{3.171}$$

Ο μετασχηματισμός (1.56) μετατρέπει την (3.170) στην παρακάτω εναλλακτικής μορφής Emden-Fowler γενικευμένη εξίσωση

$$x''_{zz} = 2z^{-1/2}x\left(x'_z\right)^2 \quad \{n,m,l\} = \left\{-\frac{1}{2},1,2\right\}, \tag{3.172}$$

με αντίστοιχες επίσης συνθήκες

$$\begin{aligned} &\text{για } z = 1-a \Rightarrow x = x_0 = 0 \quad , \\ &\text{για } z = z_\infty = 1 \Rightarrow x \to \infty \quad . \end{aligned} \tag{3.173}$$

Εφ' όσον στην περίπτωση αυτή έχουμε $n = -\frac{1}{2} \neq -1,\ m = 1 \neq 0 \,\kappa\alpha\iota\ l = 2 \neq 1$, ο μετασχηματισμός (1.59), δηλαδή ο μετασχηματισμός

$$w = z^{n+1} = z^{1/2} \quad , \quad t = \left(x'_z\right)^{1-l} = \left(x'_z\right)^{-1} \quad , \tag{3.174}$$

μετατρέπει την (3.172) στην γενικευμένη Emden-Fowler εξίσωση

$$w''_{tt} = 8t^{-1}w\left(w'_t\right)^3 \quad \{n,m,l\} = \{-1,1,3\} \ , \tag{3.175}$$

με νέες συνθήκες

$$\begin{aligned} &\text{για } z = z_0 = 1-a \Rightarrow w = w_0 = \sqrt{1-a} \quad , \\ &\text{για } z = z_\infty = 1 \Rightarrow w = 1 \quad . \end{aligned} \tag{3.176}$$

Επειδή όμως $t'_w = \frac{1}{w'_t}$, $t''_{ww} = -\frac{w''_{tt}}{\left(w'_t\right)^3}$, η εξίσωση (3.175) μετατρέπεται στην εξίσωση Emden-Fowler κανονικής μορφής

$$t''_{ww} = -8wt^{-1} \quad \{n,m\} = \{1,-1\} \ . \tag{3.177}$$

Εάν επιτευχθεί η λύση της εξίσωσης (3.177) υπό παραμετρική μορφή, δηλαδή

$$t = t(w) \Rightarrow w = w(t) \ ,$$

τότε η λύση της (3.172) επιτυγχάνεται παραμετρικά ως εξής:

Από την πρώτη των (3.174) έχουμε

$$z = w^2 \Rightarrow 1 = 2ww'_z \Rightarrow w'_z = \frac{1}{2w} \quad ,$$

εφόσον παράλληλα γράψουμε την (3.172) ως

$$\left(\frac{1}{x'_z}\right)'_z = -\frac{2}{\sqrt{z}}x \quad .$$

Τότε η δεύτερη των (3.174) μας επιτρέπει να ξαναγράψουμε την τελευταία εξίσωση με τύπο

$$t'_z = -\frac{2}{\sqrt{z}}x = t'_w w'_z = t'_w \frac{1}{2w} \Rightarrow x = -\frac{1}{4}t'_w \quad .$$

Έτσι, η λύση της (3.172) υπό παραμετρική μορφή είναι:

$$z = w^2 \quad , \quad x = -\frac{1}{4}\left(w'_t\right)^{-1}. \tag{3.178}$$

Επειδή τώρα στην εξίσωση Emden-Fowler κανονικής μορφής (3.177) είναι $m = -1 \neq 1$ και $m \neq -2n-3 = -5$, ο μετασχηματισμός (1.49) υπό την μορφή

$$s = -2w^{-3/2}t \quad , \quad u = w^{-3/2}\left(wt'_w - \frac{3}{2}t\right), \tag{3.179}$$

μετατρέπει την (3.177) στην παρακάτω εξίσωση Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής

$$uu'_s - u = -\frac{3}{16}s - 2s^{-1}. \tag{3.180}$$

3.11 Οι εξισώσεις του πλαστικού "spin" σε απλή διάτμηση (εξισώσεις Dafalia's) (1985) [7] - Το ανάλογο πρόβλημα Volterra στο πρόβλημα της συγχώνευσης πληθυσμών (1931) [46]

Ας θεωρήσουμε το προταθέν καταστατικό μοντέλο Dafalias (Βιβλ. [7]) που αφορά στην ελαστοπλαστική ανάλυση μεγάλων παραμορφώσεων ενός υλικού υποκειμένου σε απλή διάτμηση γ. Υποθέτοντας, για απλούστευση στερεά-πλαστική συμπεριφορά, οι διέπουσες εξισώσεις είναι:

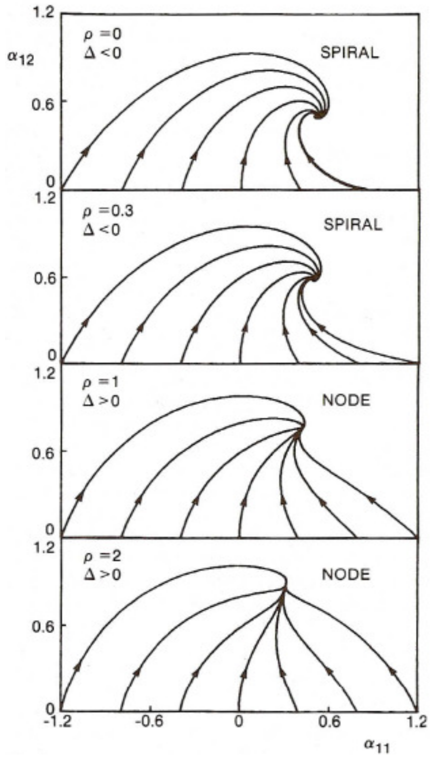
$$\begin{aligned} \frac{da_{11}}{d\gamma} &= -sgn\overset{*}{\gamma}\left(\frac{c_r}{\sqrt{3}}\right)a_{11} + a_{12} - \rho a_{11}a_{12} \quad , \\ \frac{da_{12}}{d\gamma} &= -sgn\overset{*}{\gamma}\left(\frac{c_r}{\sqrt{3}}\right)a_{12} - a_{11} + \rho a_{11}^2 + \frac{1}{3}h_a \quad . \end{aligned} \tag{3.181}$$

Στις εξισώσεις αυτές οι συναρτήσεις a_{11} και a_{12} εκφράζονται σε όρους των τάσεων από τους τύπους

$$\sigma_{11} = \alpha_{11} = -\sigma_{22} = -\alpha_{22} \quad , \quad \sigma_{12} = \alpha_{12} + sgn\overset{*}{\gamma}\left(\frac{k}{\sqrt{3}}\right), \tag{3.182}$$

όπου σ_{11}, σ_{22} είναι οι ορθές συνιστώσες των τάσεων (σ_{33}=0), ενώ σ_{12} είναι η διατμητική συνιστώσα. Επιπλέον, h_a και c_r είναι θετικές σταθερές του υλικού σε μονοαξονική φόρτιση, ενώ ρ παριστάνει παράμετρο του υλικού και $sgn\overset{*}{\gamma}$ το πρόσημο της $\overset{*}{\gamma}$ όταν η γ αυξάνει. Τέλος k παριστάνει την σταθερά της ισοτροπικής κράτυνσης.

Για $\rho>0$ και για μονότονη μεταβολή της ($sgn\overset{*}{\gamma} = sgn\gamma$) Dafalias[7] μελέτησε την ευστάθεια του συστήματος (3.181) μέσω της δεύτερης μεθόδου Liapounov[7] και του ικανού και αναγκαίου κριτηρίου Sylvester[7] , απέδειξε ότι στο φυσικό επίπεδο οι τροχιές (α_{11}, α_{12}) παρουσιάζουν σημεία ισορροπίας, που είναι ευσταθείς κόμβοι, όπως επίσης και σημεία ισορροπίας που είναι ευσταθείς σπείρες. Τα γραφήματα από την αριθμητική επεξεργασία των παραπάνω παριστάνονται στο *Σχήμα 3.4*.



Σχήμα 3.4: Τροχιές (α_{11}, α_{12}) σε απλή διάτμηση για κινηματικά κρατυνόμενα υλικά με εξαφανιζόμενη μνήμη και διαφορετικές τιμές ρ.

Ένα πρώτο συμπέρασμα από τα γραφήματα του *Σχήματος 3.4* είναι ότι η λύση του μη γραμμικού συστήματος (3.181) του πλαστικού "spin" σε απλή διάτμηση δεν είναι μοναδική (ενιαία) στο κύριο διάστημα τιμών [-1.2, 1.2], αλλά διαχωρίζεται σε κλάδους διαφορετικών λύσεων που ισχύουν σε κατάλληλα υποδιαστήματα.

Το διαφορικό σύστημα (3.181) αποτελεί μια επέκταση κατά την ένωσή τους, του αρχικού συστήματος Volterra[46] που αφορά στο πρόβλημα συγχώνευσης δύο λαών, δηλαδή του συστήματος

$$\frac{dy_1}{dx} = ay_1 - by_1y_2 \quad ,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = -cy_2 + dy_1y_2 \quad , \tag{3.183}$$

όπου *a, b* , *c* και *d* είναι κατάλληλες σταθερές παράμετροι.

Επίσης, το σύστημα Dafalias (3.181) είναι ειδική περίπτωση του γενικευμένου προβλήματος Volterra που παρουσιάστηκε από τους Bautin[1], Petrovskii και Landis[34] και Davis[8], δηλαδή του συστήματος

$$\frac{dy_1}{dx} = F + Cy_1 + Dy_2 + Gy_1^2 + Hy_1y_2 + Ky_2^2 \quad ,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = E + Ay_1 + By_2 + Ly_1^2 + My_1y_2 + Ny_2^2 \quad , \tag{3.184}$$

όπου *A, B, C, D, …, N* είναι και εδώ κατάλληλες παράμετροι. Πράγματι, για $F = G = K = M = N = 0$ και $C = B = -sgn\,\gamma\left(c_r / \sqrt{3}\right)$, $D = -A = 1$, $H = -L = \rho$ και τέλος από $E = \dfrac{h_a}{3}$, $y_1 = a_{11}$, $y_2 = a_{12}$ και $x = \gamma$ το (3.164) μεταπίπτουμε στο (3.181). Έτσι, μπορεί κανείς να χαρακτηρίσει το διαφορικό σύστημα (3.181) ως “ανάλογον Volterra” και το γενικευμένο διαφορικό σύτσημα (3.184) ως ανάλογο του πλαστικού “spin” σε απλή διάτμηση. Αμφότερα τα διαφορικά αυτά συστήματα περιέχουν γενικές εξισώσεις δευτέρου βαθμού, δηλαδή μη γραμμικότητες δευτέρου βαθμού, και δεν επιδέχονται αναλυτικών λύσεων υπό την μορφή γνωστών (πινακοποιημένων) συναρτήσεων. Μια γενική ανάλυση πάνω στην ευστάθεια τέτοιου είδους συστημάτων βασιζόμενη στους Bendixon[2], Liapunov[22], και Poincaré[35], παρουσιάζεται στο κλασικό βιβλίο του Davis[8].

Ξαναγράφουμε τώρα τις εξισώσεις (3.181) υπό την μορφή

$$y'_{1_x} = -\lambda_1 y_1 + y_2 - \rho y_1 y_2 \quad ,$$
$$y'_{2_x} = -\lambda_1 y_2 - y_1 + \rho y_1^2 + \lambda_2 \quad , \tag{3.185}$$

όπου

$$y_1 = a_{11} \ , \ y_2 = a_{12} \quad , \quad x = \gamma \quad , \quad \lambda_1 = -sgn\overset{*}{\gamma}\left(\frac{c_r}{\sqrt{3}}\right) \ , \quad \lambda_2 = \frac{h_a}{3} . \tag{3.186}$$

Λύνοντας την πρώτη των (3.185) προς y_2, παραγωγίζοντας το αποτέλεσμα μια φορά προς x και εισάγοντας τούτο μαζί με την νέα προκύπτουσα εξίσωση στην δεύτερη των (3.185), εξάγουμε την εξής δεύτερης τάξης συνήθη διαφορική εξίσωση προς y_1:

$$y''_{1_{xx}} + \frac{\rho}{1-\rho y_1} y'^2_{1_x} + \lambda_1 \frac{2-\rho y_1}{1-\rho y_1} y'_{1_x} + \lambda_1^2 y_1 - \left(1-\rho y_1\right)\left(\rho y_1^2 - y_1 + \lambda_2\right) = 0 \quad , \tag{3.187}$$

$$1-\rho y_1 \neq 0 \ .$$

Η αντικατάσταση

$$y'_{1_x} = p\left(y_1\right) \Rightarrow y''_{1_{xx}} = pp'_{y_1} \tag{3.188}$$

μετασχηματίζει την (3.187) στην παρακάτω εξίσωση Abel δευτέρου είδους

$$pp'_{y_1} + \frac{\rho}{1-\rho y_1}p^2 + \lambda_1\frac{2-\rho y_1}{1-\rho y_1}p + \lambda_1^2 y_1 - \left(1-\rho y_1\right)\left(\rho y_1^2 - y_1 + \lambda_2\right) = 0 \ . \tag{3.189}$$

Ο γενικός μετασχηματισμός

$$w\left(y_1\right) = \frac{p}{1-\rho y_1} \quad , \qquad y_1 \neq \frac{1}{\rho} \quad , \tag{3.190}$$

μετατρέπει την (3.189) στην εξίσωση Abel δευτέρου είδους απλούστερης μορφής

$$ww'_{y_1} - F_1\left(y_1\right)w = F_0\left(y_1\right) \ , \tag{3.191}$$

όπου

$$F_1\left(y_1\right) = -\lambda_1\frac{2-\rho y_1}{\left(1-\rho y_1\right)^2} \quad , \quad F_0\left(y_1\right) = \frac{\rho y_1^2 - y_1 + \lambda_2}{1-\rho y_1} - \frac{\lambda_1^2 y_1}{\left(1-\rho y_1\right)^2}. \tag{3.192}$$

Επιπλέον, η αντικατάσταση

$$\xi = \int F_1\left(y_1\right)dy_1 = -\lambda_1\int\frac{2-\rho y_1}{\left(1-\rho y_1\right)^2}dy_1, \tag{3.193}$$

μετασχηματίζει την (3.191) στην παρακάτω εξίσωση Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής

$$ww'_{\xi} - w = \frac{F_0\left(y_1(\xi)\right)}{F_1\left(y_1(\xi)\right)} \quad , \qquad \xi = \frac{\lambda_1}{\rho}\left(\ln\left|1-\rho y_1\right| - \frac{1}{1-\rho y_1}\right). \tag{3.194}$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι οι εξισώσεις του πλαστικού "spin" (3.181) ανάγονται στην λύση μιας εξίσωσης Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής, που ισχύει στο επίπεδο φάσεων. Έτσι, το όλο πρόβλημα ανάγεται στην δυνατότητα επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης (3.194), δηλαδή στην κατασκευή του ενδιάμεσου ολοκληρώματος στο επίπεδο φάσεων. Αν αυτό επιτευχθεί, τότε η συνάρτηση $y_1 = a_{11}$ υπολογίζεται με την κατά μέρη ολοκλήρωση της εξίσωσης (3.188), ενώ η συνάρτηση $y_2 = \alpha_{12}$ υπολογίζεται από την πρώτη των (3.185) ως

$$y_2 = \frac{y'_{1_x} + \lambda_1 y_1}{1-\rho y_1}. \tag{3.195}$$

Είναι τώρα ενδιαφέρον να μελετήσει κανείς σε ποιας μορφής εξίσωσης Abel μπορεί να μεταπέσει το γενικευμένο σύστημα των εξισώσεων του πλαστικού "spin" (3.181), δηλαδή το σύστημα του γενικευμένου προβλήματος Volterra (3.184). Ακολουθώντας την προηγούμενη διαδικασία, λύνουμε την πρώτη των εξισώσεων (3.184) ως προς y_2 και εισάγουμε συγχρόνως το αποτέλεσμα μαζί με την παράγωγο του στην δεύτερη των εξισώσεων αυτών. Έτσι, ευρίσκουμε:

$$y_2 = -\frac{\mathcal{F}}{2K} \pm \frac{\sqrt{\mathcal{H} + 4Ky'_{1_x}}}{2K} \quad ,$$

$$y'_{2_x} = \mathcal{Z}_1 y'_{1_x} + \frac{\mathcal{Z}_2}{2\sqrt{\mathcal{H} + 4Ky'_{1_x}}}\, y''_{1_x} \pm \frac{1}{K\sqrt{\mathcal{H} + 4Ky'_{1_x}}}\, y''_{1_{xx}} \,, \tag{3.196}$$

όπου

$$\mathcal{F}(y_1) = D + Hy_1 \quad , \mathcal{H}(y_1) = \mathcal{F}^2 - 4K\mathcal{L} \ , \ \mathcal{L}(y_1) = F + Cy_1 + Gy_1^2 \ ,$$

$$\mathcal{Z}_1(y_1) = -\frac{\mathcal{F}'_{y_1}}{2K} \ , \ \mathcal{Z}_2(y_1) = \pm\frac{\mathcal{H}'_{y_1}}{4K}. \tag{3.197}$$

Η δεύτερη των εξισώσεων (3.184) με βάση τις (3.187) και (3.197) γράφεται

$$\mathcal{Z}_1 y'_{1_x} + \frac{\mathcal{Z}_2}{\sqrt{\mathcal{H} + 4Ky'_{1_x}}}\, y'_{1_x} \pm \frac{1}{\sqrt{\mathcal{H} + 4Ky'_{1_x}}}\, y''_{1_{xx}} = \mathcal{R} + \mathcal{T} y_2 + Ny_2^2 \ , \tag{3.198}$$

στην οποία είναι

$$\mathcal{R}(y_1) = E + Ay_1 + Ly_1^2 \quad , \qquad \mathcal{T}(y_1) = B + My_1 \quad . \tag{3.199}$$

Η μη γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης (3.198) μπορεί περαιτέρω να γραφεί στην εξής τελική μορφή

$$y''_{1_{xx}} \pm \mathcal{Z}_1\sqrt{\mathcal{H} + 4Ky'_{1_x}}\, y'_{1_x} \pm \mathcal{Z}_2 y'_{1_x} = \pm\left(\mathcal{R} - \frac{\mathcal{T}\mathcal{F}}{2K} + \frac{N\mathcal{F}^2}{4K^2}\right)\sqrt{\mathcal{H} + 4Ky'_{1_x}} +$$
$$+\frac{1}{2K}\left(\mathcal{T} - \frac{N\mathcal{F}}{K}\right)\left(\mathcal{H} + 4Ky'_{1_x}\right) \pm \frac{N}{4K^2}\left(\mathcal{H} + 4Ky'_{1_x}\right)^{3/2}. \tag{3.200}$$

Με τις αντικαταστάσεις

$$y''_{1_x} = p(y_1) \Rightarrow y''_{1_{xx}} = pp'_{y_1} \quad ,$$
$$\sqrt{\mathcal{H} + 4Ky'_{1_x}} = u(y_1) \quad , \tag{3.201}$$

η εξίσωση (3.200) μετασχηματίζεται στην παρακάτω γενικευμένη εξίσωση Abel δευτέρου είδους περιέχουσα κυβικές μη γραμμικότητες:

$$
\begin{aligned}
&u\left(u^2-\mathcal{H}\right)u'_{y_1} = \pm 2\left(N-K\mathcal{Z}_1\right)u^3 + \left[4K\left(\mathcal{T}-\frac{N\mathcal{F}}{K}\right)\mp 2K\mathcal{Z}_2+\frac{1}{2}\mathcal{H}'_{y_1}\right]u^2 \pm \\
&2K\left[4K\left(\mathcal{R}-\frac{\mathcal{T}\mathcal{F}}{2K}+\frac{N\mathcal{F}^2}{4K^2}\right)+\mathcal{Z}_1\mathcal{H}\right]u-\mathcal{H}\left(\frac{1}{2}\mathcal{H}'_{y_1}\pm 2K\mathcal{Z}_2\right).
\end{aligned}
\tag{3.202}
$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να μεταπέσει σε εξίσωση Abel δευτέρου είδους αν H=0. Με βάση τις (3.197) αυτός ο περιορισμός οδηγεί στο γεγονός ότι πρέπει να ισχύουν οι εξισώσεις

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}^2-4K\mathcal{L}=0 \ , \\
&\mathcal{R}-\frac{\mathcal{F}\mathcal{T}}{2K}+\frac{N\mathcal{F}^2}{4K^2}=0 \ ,
\end{aligned}
\tag{3.203}
$$

δηλαδή να ισχύουν οι εξής συναρτησιακές σχέσεις μεταξύ των παραμέτρων του συστήματος (3.184):

$$
\begin{gathered}
D^2-4KF=0 \ , \quad 2DH-4KC=0 \ , \quad H^2-4KG=0 \ , \\
4K^2E+ND^2-2KBD=0 \ , \ NDH-MDK-BHK+2AK^2=0 \ , \\
2K^2L-2MHK+NH^2=0 \ .
\end{gathered}
\tag{3. 204}
$$

Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση (3. 202) παίρνει τη μορφή

$$
uu'_{y_1}=\pm 2\left(N-K\mathcal{Z}_1\right)u+4K\left(T-\frac{NF}{K}\right), \tag{3.205}
$$

όπου οι συναρτήσεις F, Z_2, Z_1 και T αλλάζουν σύμφωνα με τις (3.197) και (3.204). Προφανώς, μέσω της αντικατάστασης

$$
\xi=\int f_1(x)dx,
$$

η (3. 205) μεταπίπτει στην εξίσωση Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής

$$
uu'_{y_1}=\pm 2\left(N-K\mathcal{Z}_1\right)u+4K\left(\mathcal{T}-\frac{N\mathcal{F}}{K}\right), \tag{3.206}
$$

όπου οι συναρτήσεις $\mathcal{F}, \mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_1$ και $\mathcal{T}$ αλλάζουν σύμφωνα με τις (3.177) και (3.184). Προφανώς, μέσω της αντικατάστασης (1.4), η (3.185) μεταπίπτει στην εξίσωση Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής

$$
uu'_{\xi}-u=\pm\frac{2K\mathcal{T}\left(y_1(\xi)\right)-2N\mathcal{F}\left(y_1(\xi)\right)}{N-K\mathcal{Z}_1\left(y_1(\xi)\right)}, \tag{3.207}
$$

όπου

$$\xi = \int \pm 2\left(\mathrm{N} - \mathrm{K}\mathscr{Z}_1\right) dy_1 = \pm D \pm \left(2N + H\right) y_1.$$

3.12 Το μη γραμμικό οικονομικό μοντέλο Goudwin για αυξανόμενους κύκλους (1976) [15]

Εξετάζουμε μια επέκταση του καταστατικού οικονομικού μοντέλου Goudwin[15], που βασίζεται στο μοντέλο Lotka-Volterra[46] εισάγοντας, με βάση τις παρατηρήσεις των Desai[9], Desai, Henry, Mosley and Pemberton[10], μια ισχυρά μη γραμμική καμπύλη τύπου Phillips. Αυτό το καταστατικό μοντέλο περιγράφεται από ένα σύστημα δυο ΣΔΕ εξισώσεων πρώτης τάξης ισχυρά μη γραμμικών τύπου Kolmogorov (1936), δηλαδή τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \frac{v_t'}{v} &= -A + \lambda \ln\left(k - u\right), && (\alpha) \\ \frac{u_t'}{u} &= -B + \rho\left(1 - v\right)^{-\delta}, && (\beta) \end{aligned} \qquad (3.208)$$

όπου

$$A, B, \lambda, \rho, k, \delta > 1, \text{παράμετροι.} \qquad (3.209)$$

Παραγωγίζοντας την (3.208β) και συνδυάζοντας την με την (3.208α) εξάγουμε τη μια εξίσωση

$$\left(\frac{u_t'}{u}\right)_t' = \rho\delta \frac{u_t'}{1 - v}\left(1 - v\right)^{-\delta}, \qquad (3.210)$$

που με τη σειρά της με βάση την (3. 208β) γράφεται

$$\left(\frac{u_t'}{u}\right)_t' = \delta \frac{u_t'}{1 - v}\left(\frac{u_t'}{u} + B\right). \qquad (3.211)$$

Από την άλλη μεριά, ξαναγράφοντας την (3. 208α) υπό τη μορφή

$$\frac{v_t'}{v - 1} = A - \lambda \ln\left(k - u\right) \qquad (3.212)$$

και συνδυάζοντας το αποτέλεσμα με τις (3.208α) και (3.208β) ευρίσκουμε

$$\frac{v_t'}{1 - v} = \left[A - \lambda \ln\left(k - u\right)\right]\left\{1 - \frac{1}{\rho^{1/\delta}}\left(B + \frac{u_t'}{u}\right)^{1/\delta}\right\}. \qquad (3.213)$$

Έτσι, η εξίσωση (3.210) παίρνει την μη γραμμική δευτέρας τάξης μορφή

$$\left(\frac{u_t'}{u}\right)_t' = \delta B\left[A\lambda\ln(k-u)\right]\left[1-\delta\mathrm{B}\left(\frac{B}{\rho}\right)^{1/\delta}\left(1+\frac{1}{B}\frac{u_t'}{u}\right)^{1/\delta}\right]\left(1+\frac{1}{B}\frac{u_t'}{u}\right). \tag{3.214}$$

Η μη γραμμική ΣΔΕ δευτέρας τάξης (3.214) είναι ακριβής, εφόσον ουδεμία προσέγγιση κατά τη διάρκεια της αποσύζευξης του συστήματος (3.208 α και β) έχει γίνει. Επειδή μια περαιτέρω έρευνα επί της διαδικασίας αναλυτικών λύσεων της εξίσωσης αυτής φαίνεται ότι είναι μάλλον αδύνατη, θα προσπαθήσουμε να την μετατρέψουμε σε επιλύσιμη μορφή χρησιμοποιώντας, εφόσον αυτό είναι εφικτό, μια ασυμπτωτική ανάλυση που αφορά τις παραμέτρους που περιέχει. Έτσι, δεδομένου $\delta > 1,$ μπορεί να αναπτυχθεί το διώνυμο $\left(1+\frac{1}{B}\frac{u_t'}{u}\right)^{\frac{1+\delta}{\delta}}$ σε δυναμοσειρά

$$\left(1+\frac{1}{B}\frac{u_t'}{u}\right)^{\frac{1+\delta}{\delta}} \cong 1+\frac{1+\delta}{\delta\mathrm{B}}\frac{u_t'}{u}+\frac{1}{2!}\frac{1+\delta}{(\delta\mathrm{B})^2}\left(\frac{u_t'}{u}\right)^2+\frac{1}{3!}\frac{(1+\delta)(1-\delta)}{(\delta\mathrm{B})^3}\left(\frac{u_t'}{u}\right)^3+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{v!}\frac{\frac{1+\delta}{\delta}\frac{1}{\delta}\left(\frac{1+\delta}{\delta}-2\right)\left(\frac{1+\delta}{\delta}-v+1\right)}{B^k}\left(\frac{u_t'}{u}\right)^v+\ldots$$

Σημειώνεται ότι $B > 0,\quad \delta > 0$ και επιπλέον ότι προσεγγίζουμε την τελευταία αυτή σχέση, με τάξη προσέγγισης $O\left[\frac{(1+\delta)(1-\delta)}{6(B\delta)^3}\right]$, δηλαδή

$$\left(1+\frac{1}{B}\frac{u_t'}{u}\right)^{\frac{1+\delta}{\delta}} \cong 1+\frac{1+\delta}{\delta\mathrm{B}}\frac{u_t'}{u}+\frac{1}{2!}\frac{1+\delta}{(\delta\mathrm{B})^2}\left(\frac{u_t'}{u}\right)^2+O\left[\frac{(1+\delta)(1-\delta)}{6(\delta B)^3}\right]. \tag{3.215}$$

Η προσέγγιση αυτή μετατρέπει την εξίσωση (3.214) στην

$$\frac{u\,u_{tt}''-u_t'^2}{u^2} = \delta B\left[A\lambda\ln(k-u)\right]\left(1+\frac{1}{B}\frac{u_t'}{u}\right)+$$

$$-\delta B\left(\frac{B}{\rho}\right)^{1/\delta}\left[A\lambda\ln(k-u)\right]\left[1+\frac{1+\delta}{\delta\mathrm{B}}\frac{u_t'}{u}+\frac{1}{2!}\frac{1+\delta}{(\delta\mathrm{B})^2}\left(\frac{u_t'}{u}\right)^2\right]+\ldots \tag{3.216}$$

Ο μετασχηματισμός τώρα

$$u_t' = p(u),\quad u_{tt}'' = p\,p_u', \tag{3.217}$$

μετατρέπει την (3.216) στην πλήρη εξίσωση Abel δευτέρας τάξης

$$p\, p'_u = f_2(u)\, p^2 + f_1(u)\, p + f_0(u), \tag{3.218}$$

όπου

$$f_2(u) = 1 - \left[A - \lambda \ln(ku)\right] \frac{1+\delta}{\delta} \frac{B^{\frac{1-\delta}{\delta}}}{2\rho^{\frac{1}{\delta}}} \frac{1}{u}$$

$$f_1(u) = \left[A - \lambda \ln(ku)\right] \delta \left(1 - \frac{B^{1/\delta}}{\rho^{1/\delta}} \frac{(1+\delta)}{\delta}\right), \tag{3.219}$$

$$f_0(u) = \left[A - \lambda \ln(ku)\right] (\delta \mathrm{B}) \left(1 - \frac{B^{1/\delta}}{\rho^{1/\delta}}\right) u .$$

Ειδικότερα τώρα για $\delta = 1$ η ακριβής ΣΔΕ (3.214) με τον μετασχηματισμό (3.217) μετατρέπεται στην επίσης ΣΔΕ Abel δευτέρου είδους

$$p p'_u = f_2(u)\, p^2 + f_1(u)\, p + f_0(u), \tag{3.220}$$

όπου

$$\begin{gathered} f_2(u) = \left[1 - \frac{A - \lambda \ln(ku)}{\rho}\right] \frac{1}{u}, \quad f_1(u) = \left(1 - \frac{2B}{\rho}\right)\left[A - \lambda \ln(ku)\right], \\ f_0(u) = B\left(1 - \frac{B}{\rho}\right)\left[A - \lambda \ln(ku)\right] u \end{gathered} \tag{3.221}$$

Αμφότερες οι μορφές των εξισώσεων Abel (3.218) και (3.220) επιλύονται με βάση τα αναπτυχθέντα στα Κεφάλαια 1 και 2 του παρόντος.

3.13 Η μη γραμμική εξίσωση διάχυσης αερίων υπό πίεση (1995) [45]

Στην βιβλιογραφική αναφορά [45] αναπτύχθηκε η μη γραμμική διαφορική εξίσωση διάχυσης αερίων υπό πίεση που εμφανίζεται στην κατάστρωση προβλημάτων ροής αερίων όταν λαμβάνεται υπόψη η συμπιεστότητα. Η εξίσωση αυτή έχει την μορφή

$$2 y y''_{xx} + 5 y'^2_x + x y'_x = 0 \tag{3.222}$$

με αντίστοιχες συνθήκες:

$$\begin{aligned} &\text{για } x \to \infty \quad , \quad y = y_\infty = 1 \quad , \\ &\text{και για } x = x_0 = 0 \quad , \quad 0 < y_0 < 1 \quad . \end{aligned} \tag{3.223}$$

Ο μετασχηματισμός (1.56) μετατρέπει την (3.222) στην εξίσωση

$$2yx''_{yy} - 5x'_y - xx'^2_y = 0 \tag{3.224}$$

με αντίστοιχες συνθήκες

$$\begin{aligned} &\text{για } y = y_\infty = 1 \quad , \quad x \to \infty \quad , \\ &\text{και για } 0 < y_0 < 1 \quad , \quad x = x_0 = 0 \quad . \end{aligned} \tag{3.225}$$

Εισάγοντας τον επιπρόσθετο συναρτησιακό μετασχηματισμό

$$x(y) = n(\xi) \quad , \quad \xi = \xi(x) \Rightarrow x'_y = n'_\xi \, \xi'_y \quad , \quad x''_{yy} = n''_{\xi\xi} \, \xi'^2_y + n'_\xi \, \xi''_{yy} \tag{3.226}$$

η (3.224) καταλήγει στην

$$2y\xi'^2_y n''_{\xi\xi} + \left(2y\xi''_{yy} - 5\xi'_y\right) n'_\xi - \xi'^2_y n n'^2_\xi = 0 \tag{3.227}$$

Καθορίζοντας την $\xi(y)$ έτσι ώστε

$$2y\xi''_{yy} - 5\xi'_y = 0 \Rightarrow \xi(y) = \frac{2}{7} y^{7/2}, \tag{3.228}$$

η (3.227) μετατρέπεται στην παρακάτω γενικευμένη εξίσωση Emden-Fowler ως προς $n(\xi)$:

$$n''_{\xi\xi} = \mathrm{A}\xi^{-2/7} n n'^2_\xi \quad , \quad \mathrm{A} = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{2}\right)^{-2/7} \quad , \quad \xi = \frac{2}{7} y^{7/2} \tag{3.229}$$

με αντίστοιχες συνθήκες

$$\begin{aligned} &\text{για } n \to \infty \quad , \quad \xi = \xi_\infty = \frac{2}{7} \quad , \\ &\text{και για } n = n_0 = 0 \quad , \quad 0 < \left(\frac{7}{2}\xi_0\right)^{2/7} < 1 \quad . \end{aligned} \tag{3.230}$$

Μια ισοδύναμη μορφή της (3.229) προκύπτει μέσω του μετασχηματισμού (1.56), δηλαδή

$$\xi''_{nn} = -An\xi^{-2/7}\xi'_n \quad , \quad A = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{2}\right)^{-2/7} \tag{3.231}$$

και συνθήκες

$$\begin{aligned} &\text{για } \xi = \xi_\infty = \frac{2}{7} \quad , \quad n \to \infty \ , \\ &\text{και για } n = n_0 = 0 \quad , \quad 0 < \left(\frac{7}{2}\xi_0\right)^{2/7} < 1 \quad . \end{aligned} \tag{3.232}$$

Επιπλέον εφαρμόζοντας στην (3.229) τον μετασχηματισμό (1.59) με κατάλληλους εκθέτες *n, m* και *l*, δηλαδή θέτοντας

$$w(t) = \xi^{5/7} \quad , \quad t = n'^{-1}_\xi \ , \tag{3.233}$$

εξάγουμε την ισοδύναμη γενικευμένη εξίσωση Emden-Fowler

$$w''_{tt} = Bt^{-1}w^{2/5}w'^3_t \quad , \quad B = \frac{49}{25}A \ , \tag{3.234}$$

η οποία με τη σειρά της μέσω του μετασχηματισμού (1.56) καταλήγει στην εξίσωση Emden-Fowler κανονικής μορφής

$$t''_{ww} = -Bw^{2/5}t^{-1} \quad , \quad B = \frac{49}{25}A, \tag{3.235}$$

με κατάλληλες συνθήκες.

Εφόσον η λύση της (3.235) είναι γνωστή, η λύση της αρχικής εξίσωσης (3.229) μπορεί να γραφεί υπό παραμετρική μορφή

$$\xi = w^{7/5} \quad , \quad n = k\left(w'_t\right)^{-1} \quad , \quad k = -\frac{5}{7A} \quad . \tag{3.236}$$

Είναι σαφές ότι με βάση τους μετασχηματισμούς του Κεφαλαίου 1 του παρόντος οποιαδήποτε από τις παραπάνω εξισώσεις Emden-Fowler μετατρέπεται σε εξίσωση Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής.

3.14 Μαθηματικό μοντέλο για την διανομή στέγασης πλήθους ανθρώπων που έχασαν τις κατοικίες τους λόγω μεγάλης φυσικής καταστροφής (1999,2003) [24]

Ενδιαφέρον μεγάλο παρουσιάζουν μαθηματικά μοντέλα που αφορούν στην διανομή στέγασης σε πληθυσμούς που έχασαν τις κατοικίες τους λόγω μεγάλων φυσικών καταστροφών, όπως πχ σεισμών κλπ. Οι προσπάθειες αυτές θα μπορούσε κάποιος να ισχυριστεί ότι ξεκίνησαν το 1999 από τους Gonzales[14] και Lasey and Nikolopoulos [20] ,με βάση τους μεγάλους σεισμούς στην Αθήνα. Το μαθηματικό πρόβλημα που περιγράφεται εφαρμόστηκε από τους Nikolopoulos and Tzametis το 2003[24] και περιλαμβάνει διαφορικά συστήματα πρώτης τάξης που παρουσιάστηκαν ως τα πλέον γενικά από τους Bautin[1], Petrovski και Landis[34] έχοντας υπόψη τα αιτήματα που προκύπτουν κατά τη μετακίνηση και συγχώνευση λαών των Volterra και Lotka [46].

Ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων του ως άνω προβλήματος είναι[14]

$$x_t' = \frac{dx}{dt} = -a_1 x\left(C_2 - y\right) - a_2 x\left(C_3 - z\right); \qquad (\alpha)$$

$$y_t' = \frac{dy}{dt} = a_1 x\left(C_2 - y\right) - a_2 y\left(C_3 - z\right); \qquad (\beta)\ (3.237)$$

$$x(t) + y(t) + z(t) = 1. \qquad (\gamma)$$

Εδώ a_1, a_2, a_3, C_2 και C_3 είναι κατάλληλοι παράμετροι , ενώ t παριστάνει την ανεξάρτητη μεταβλητή. Το παραπάνω σύστημα απλοποιείται και καταλήγει στη μορφή

$$x_t' = \left(a_1 - a_2\right)xy - a_1\left(C_3 - z\right); \qquad (\alpha)$$

$$y_t' = -a_3 C_2 y + \left(a_2 - a_3\right)xy - a_3 y^2; \qquad (\beta)\ (3.238)$$

$$1 = x + y + z, \qquad (\gamma)$$

όπου a_1, a_2, a_3, C_2 και C_3 είναι επίσης κατάλληλοι παράμετροι και t είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή. Προς απλούστευση θα ασχοληθούμε με το σύστημα των εξισώσεων (3.238).

Λύνοντας την (3.238γ) προς z και επεξεργάζοντας την (3.238β) ευρίσκουμε

$$x_t' = \left(a_1 - a_2\right)xy - a_1\left(C_3 - 1\right)x - a_1 x^2 - a_1 xy = -a_2 xy - a_1\left(C_3 - 1\right)x - a_1 x^2, \qquad (3.239)$$

η οποία παρέχει την τελική έκφραση

$$y = -\frac{1}{a_2}\frac{x_t'}{x} - \frac{a_1}{a_2}x - \frac{a_1\left(C_3 - 1\right)}{a_2}. \qquad (3.240)$$

Παραγωγίζοντας την (3.240) και εισάγοντας το αποτέλεσμα μαζί με την (3.239) στην (3.238β) καταλήγουμε στην παρακάτω μη γραμμική ΣΔΕ δευτέρας τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$\begin{aligned} &\frac{x\,x_{tt}'' - x_t'^2}{x^2} + \left(a_1 + \frac{a_3 C_2}{a_2} - \frac{2a_1 a_3}{a_2}\right)x_t' - \frac{a_3}{a_2}\left(\frac{x_t'}{x}\right)^2 - \frac{2a_1\left(C_3 - 1\right)}{a_2} = \\ &= \frac{-a_1\left(a_3 C_3 - a_1\right)}{a_2}x^2 - \frac{a_1 C_3\left(a_3 + 2a_1\right)}{a_2}x + \frac{a_1 a_3\left(C_3 - 1\right)^2}{a_2}. \end{aligned} \qquad (3.241)$$

Με την αντικατάσταση

$$\frac{dx}{dt} = x'_t = p(x) \Rightarrow x''_{tt} = p'_x p, \tag{3.242}$$

η (3.241) μετασχηματίζεται στην παρακάτω εξίσωση Abel δευτέρου είδους

$$\begin{aligned} pp'_x = \frac{1}{x}\left(1+\frac{a_3}{a_2}\right)p^2 + \frac{1}{x}\left[\frac{2a_1(C_3-1)}{a_2}x - \left(a_1 + \frac{a_3C_2}{a_2} - \frac{2a_1a_3}{a_2}\right)\right]p + \\ -\left[\frac{a_1(a_3C_3-a_1)}{a_2}x^2 + \frac{a_1C_3(a_3+2a_1)}{a_2}x - \frac{a_1a_3(C_3-1)^2}{a_2}\right]x \end{aligned} \tag{3.243}$$

Μέσω των μετασχηματισμών του Κεφαλαίου 1 για το είδος των εξισώσεων (3.243) αυτή μετατρέπεται σε εξίσωση Abel κανονικής μορφής. Εφόσον η τελευταία εξίσωση επιλυθεί (Κεφάλαιο 2), η συνάρτηση $x(t)$ προκύπτει από την εξίσωση (3.242) περιέχοντας μόνο μια σταθερά , ενώ τέλος η συνάρτηση $z(t)$προκύπτει ευθέως από την εξίσωση (3.238γ).

3.15 Η εξίσωση των στερεών - απολύτως πλαστικών σωμάτων υπό συνθήκες επίπεδες έντασης (2006) [28]

Πρόσφατα αποδείχθηκε ότι στην θεωρία των στατικά ορισμένων επίπεδων στερεών - απολύτως πλαστικών σωμάτων υπό συνθήκες επίπεδης έντασης οι δυο εξισώσεις ισορροπίας και το ισχυρά μη γραμμικό κριτήριο Mises καταλήγουν στην επίλυση μιας μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης της μορφής [Βιβλ. 28]:

$$\left(36\sigma_0^2 - 4y^2 - 9x^2\right)y_x'^2 + 6\left(12\sigma_0^2 - y^2 - 3x^2 - xy\right)y'_x - 9x^2 = 0 \quad , \tag{3.244}$$

όπου σ_0 είναι κατάλληλη σταθερά. Η (3.244) μέσω του γνωστού μετασχηματισμού Legendre[18]

$$Y = xy'_x - y \quad , \quad X = y'_x \, , \tag{3.245}$$

μεταπίπτει στην

$$\begin{aligned} \left[36\sigma_0^2 - 4\left(XY'_X - Y\right)^2 - 9Y_X'^2\right]X^2 + \\ +2\left[36\sigma_0^2 - 3\left(XY'_X - Y\right)^2 - 9Y_X'^2 - 3\left(XY'_X - Y\right)Y'_X\right]X - 9Y_X'^2 = 0, \end{aligned} \tag{3.246}$$

που μπορεί να γραφεί υπό την τελική μορφή

$$Y_X'^2 + 2f(X)YY_X' + g(X)Y^2 + h(X) = 0 \tag{3.247}$$

όπου

$$\begin{aligned} f(X) &= -\frac{(4X^2+6X+3)X}{(4X^4+6X^3+15X^2+18X+9)} \quad , \\ g(X) &= \frac{2(2X+3)X}{(4X^4+6X^3+15X^2+18X+9)}, \\ h(X) &= -\frac{36\sigma_0^2(2+X)X}{(4X^4+6X^3+15X^2+18X+9)} \quad . \end{aligned} \tag{3.248}$$

Εισάγουμε τώρα τον συναρτησιακό μετασχηματισμό

$$Y(X) = P(X)n(\xi) \quad , \quad \xi = \xi(X) \Rightarrow Y_X' = P_X' n + P\xi_X' n_\xi' \tag{3.249}$$

όπου P και ξ είναι προσδιοριστέες συναρτήσεις και μετατρέπουμε την (3.247) στην μορφή

$$\left(P_X'^2 + 2fPP_X' + gP^2\right)n^2 + P^2\xi_X'^2 n_\xi'^2 + \left(2PP_X' + 2fP^2\right)\xi_X' nn_\xi' + h = 0 \quad . \tag{3.250}$$

Για να εξαλείψουμε τον πρώτο όρο στην (3.250) θέτουμε

$$P_X'^2 + 2fPP_X' + gP^2 = 0 \quad , \tag{3.251}$$

που είναι του τύπου της εξίσωσης (3.247) χωρίς ελεύθερη συνάρτηση $h(X)$.

Ο μετασχηματισμός

$$P(X) = q(s)exp\left(-\int f dX\right) \quad , \quad s = \int\sqrt{\pm\left(g - f^2\right)}dX$$

μετατρέπει την (3.251) στη μορφή $q_s'^2 \pm q^2 = 0$ (Βιβλ. [18]) , μέσω της οποίας ορίζουμε την P ως εξής

$$P(X) = exp\left[\int\left(\sqrt{\pm\left(g - f^2\right)} - f\right)dX\right]$$

ή

$$P(X) = exp\left[\int\left(i\sqrt{\pm\left(g - f^2\right)} - f\right)dX\right] \quad . \tag{3.252}$$

Μετά από αυτόν τον ορισμό, η (3.250) γίνεται

$$n_{\xi}'^{2} + \frac{2\left(P_X' + fP\right)}{P\xi_X'} n n_{\xi}' + \frac{h}{P^2 \xi_X'^2} = 0. \tag{3.253}$$

Ορίζουμε την $\xi(X)$ έτσι ώστε:

$$\xi(X) = \int \frac{h}{2\left(P_X' + fP\right)P} dX, \tag{3.254}$$

όπου η $P(X)$ όπως στην (3.252) και οι h, f όπως στην (3.248) και ξαναγράφουμε την (3.253) υπό την μορφή

$$n_{\xi}'^{2} + Z(\xi) n n_{\xi}' + Z(\xi) = 0 \tag{3.255}$$

Εδώ η $Z(\xi)$ προσδιορίζεται μέσω της (3.254)

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η λύση της (3.255) ανάγεται στην λύση μιας εξίσωσης Abel δευτέρου είδους. Πράγματι εισάγουμε την παράμετρο $n_{\xi}' = t$ και η (3.255) γράφεται

$$F(t,n,Z) \equiv t^2 + Z(\xi) n t + Z(\xi) = 0 \quad , \tag{3.256}$$

η οποία με παραγώγιση καταλήγει στην

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{F_{,t}}{F_{,\xi} + tF_{,n}} = -\frac{2t + Zn}{Z_{\xi}'(1 + tn) + Zt^2}. \tag{3.257}$$

Λύνοντας την (3.256) ως προς n και εισάγοντας το αποτέλεσμα στην (3.257) καταλήγουμε στην

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{\dfrac{t^2 - Z}{t}}{\left(Z - \dfrac{Z_{\xi}'}{Z}\right)t^2} \Leftrightarrow \left(t^2 - Z\right) t_{\xi}' = -\frac{Z^2 - Z_{\xi}'}{Z} t^3, \tag{3.258}$$

που στη συνέχεια με την αντικατάσταση

$$t^2 = Q(\xi) \Rightarrow 2tt_{\xi}' = Q_{\xi}' \quad , \quad t_{\xi}' = \pm \frac{Q_{\xi}'}{\sqrt{4Q}}, \tag{3.259}$$

παρέχει την εξής εξίσωση Abel δευτέρου είδους

$$(Q - Z) Q_{\xi}' = \mp 2 \frac{Z^2 - Z_{\xi}'}{Z} Q^2. \tag{3.260}$$

Ο γνωστός μετασχηματισμός

$$W(\xi) = (Q - Z) E(\xi) \quad , \tag{3.261}$$

$$\mathrm{E}(\xi) = exp\left(-\int \mp 2\frac{Z^2 - Z'_\xi}{Z} d\xi\right) = exp\left(\pm\int Z(\xi)d\xi\right)exp\left(\mp \ln Z^2\right) \quad ,$$

όπου $Z(\xi)$ προσδιορίζεται μέσω της (3.254) μετατρέπει την (3.260) στην απλούστερη

$$WW'_\xi = F_1(\xi)W + F_0(\xi) \ ,$$

$$F_1(\xi) = \left[-Z'_\xi \mp 4\left(Z^2 - Z'_\xi\right)\right]E(\xi) \quad , \quad F_0(\xi) = \left[\mp 2Z\left(Z^2 - Z'_\xi\right)\right]\mathrm{E}^2(\xi) \ , \tag{3.262}$$

όπου $E(\xi)$ όπως στην (3.261).

Τέλος, με την αντικατάσταση

$$\tau = \int F_1(\xi)d\xi = \int\left(\left[-Z'_\xi \mp 4\left(Z^2 - Z'_\xi\right)\right]\mathrm{E}(\xi)\right)d\xi, \tag{3.263}$$

όπου $E(\xi)$όπως στην (3.261),
η πρώτη των εξισώσεων (3.262) μετασχηματίζεται στην εξίσωση Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής

$$WW'_r - W = \mathrm{P}(\tau) \quad , \quad \mathrm{P}(\tau) = \frac{F_0(\xi)}{F_1(\xi)}. \tag{3.264}$$

3.16 Η τροποποιημένη εξίσωσηEmden $y''_{xx} + ayy'_x + \beta y^3 = 0$ (2008) [6]

Η τροποποιημένη εξίσωση Emden είναι η δεύτερης τάξης μη γραμμική ΣΔΕ

$$y''_{xx} + ayy'_x + \beta y^3 = 0, \tag{3.265}$$

όπου a και β παριστάνουν κατάλληλους παραμέτρους.
Η εξίσωση αυτή μέσω του μετασχηματισμού

$$y'_x = p(y),\ y''_{xx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = pp'_y, \tag{3.265α}$$

μετατρέπεται στην εξίσωση Abel δευτέρου είδους

$$pp'_y + ayp + \beta\upsilon^3 = 0 \Leftrightarrow pp'_y = -ayp - \beta y^3. \tag{3.266}$$

Περαιτέρω η αντικατάσταση

$$z = -a\int y dy = -\frac{ay^2}{2} \Leftrightarrow y^2 = -\frac{2z}{a}, \tag{3.267}$$

την μετασχηματίζει στην εξίσωση Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής

$$-pp'_z = -ayp - \beta y^3 \Leftrightarrow pp' - p = -\frac{2\beta}{a}z, \tag{3.268}$$

με παραμετρική γενική λύση την[36] (έχει γίνει η σχετική διόρθωση της παρουσιαζόμενης λύσης στην [36]).

$$z = C\exp\left(-\int\frac{\tau d\tau}{\tau^2 - \tau + \frac{2\beta}{a}}\right),\ p = -\frac{Ca}{2\beta}(\tau-1)\exp\left(-\int\frac{\tau d\tau}{\tau^2 - \tau + \frac{2\beta}{a}}\right), \tag{3.269}$$

$C =$ σταθερά ολοκλήρωσης.

Η παραπάνω γενική παραμετρική λύση (3.269) μπορεί να διατυπωθεί και υπό αναλυτική μορφή αν γράψουμε

$$\frac{p}{z} = -\frac{\alpha}{2\beta}(\tau - 1), \tag{3.270}$$

και υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα[16]

$$\ln\left(\frac{z}{C}\right) = -\int\frac{\tau d\tau}{\tau^2 - \tau + \frac{2\beta}{a}}, \tag{3.271}$$

δηλαδή

$$\ln\left(\frac{z}{C}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\ln\frac{-1+2\tau-\sqrt{-\Delta}}{-1+2\tau+\sqrt{-\Delta}} + \ln|R| & \text{αν } \Delta = \frac{4\beta}{a}+1<0, \\ \frac{-2}{-1+2\tau} + \ln|R| & \text{αν } \Delta = \frac{4\beta}{a}+1=0, \\ \frac{2}{\sqrt{\Delta}}\arctan\frac{-1+2\tau}{\sqrt{\Delta}} + \ln|R| & \text{αν } \Delta = \frac{4\beta}{a}+1>0. \end{cases} \tag{3.272}$$

Λύνοντας ως προς τ κάθε μια των (3.272) και εισάγοντας τα αποτελέσματα στην (3.270) διαδοχικά έχουμε τα τρία είδη γενικών λύσεων (3.268) στο επίπεδο των φάσεων που περιέχουν μια σταθερά ολοκλήρωσης. Μέσω τώρα του μετασχηματισμού (3.265α) καθορίζουμε και πάλι με ολοκλήρωση κατά μέλη, τη γενική λύση $y = y(x)$ με δυο σταθερές ολοκλήρωσης.

Συνεπώς, η τροποποιημένη εξίσωση Emden[6] επιδέχεται αναλυτικής γενικής λύσης μέσω διαδοχικών ολοκληρώσεων λόγω του ότι με χρήση παραδεκτών συναρτησιακών μετασχηματισμών προκύπτει εξίσωση Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής που επιδέχεται αναλυτικής ολοκλήρωσης. Σημειώνουμε επίσης ότι η (3.265) μέσω του μετασχηματισμού

$$y = we^{\frac{\gamma}{3}\tau}, \qquad z = -\frac{3}{\gamma}e^{-\frac{\gamma}{3}\tau}. \tag{3.273}$$

μετατρέπεται στην εξίσωση ταλαντωτή

$$w''_{zz} + \left(aw + \gamma\right)w'_z + \beta w^3 + \frac{a\gamma}{3}w^2 + \frac{2\gamma}{9}w = 0, \tag{3.274}$$

που περιέχει και τον εξαναγκασμένο- ελεύθερο ταλαντωτή Duffing $\left(a = 0\right)$. Η μη γραμμική ΣΔΕ (3.274) μπορεί να επιλυθεί αναλυτικά.

Ανάλογη γενική αναλυτική λύση μπορεί κανείς να εξάγει για την αδιαστατοποιημένη Lotka-Voltera εξίσωση που προκύπτει από το σύστημα

$$\begin{gathered} x'_t = x\left(a_1 + a_2 x + a_3 y\right), \quad y'_t = y\left(b + b_2 x + b_3 y\right), \\ a_i,\ b_i = \text{παράμετροι}. \end{gathered} \tag{3.275}$$

Εδώ όμως για την ολοκλήρωση πρέπει να θεωρηθούν οι παρακάτω σχέσεις μεταξύ a_i και b_i

$$b_3 = -a_3, \quad b_1 = a_1. \tag{3.276}$$

Πράγματι, στην περίπτωση αυτή, οι ανάπτυξη των (3.275) οδηγεί στην εξίσωση

$$x''_{tt} - \left[\left(3a_2 + b_2\right)x + 3a_1\right]x'_t + a_2\left(a_2 + b_2\right)x^3 + a_1\left(3a_2 + b_2\right)x^2 + 2a_1 x = 0, \tag{3.277}$$

που είναι παρόμοια της (3.274).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Bautin, N.N. (1952): On the number of limit cycles appearing during changes of coefficients from a state of equilibrium of the type of focus of center, *Mat. Sbornik,* 30, 181-196.

2. Bendixon, I. (1901): Sur les courbes definies pour equations differentielles, *Acta Mathematica,* 24, 1-88.

3. Bhargava, S. (1989): Generalized Lotka-Volterra equations and the mechanism of technological justification, *Techonological Forecasting and Social Change,* 35, 319-326.

4. Blasius, H. (1908): Grenzschichten in Flussigkeiten mit kleiner Reibung, Z *Math. Phys.,* 56 , 1-37.

5. Bush, V. and Galdwell, S. H. (1931): Thomas-Fermi equation solution by the differential analyzer, *Physical Review*, 38, 1898-1901.

6. Chandrasekar, V.K., Senthilvelan, M. and Lakshmanan, M. (2008): On the general solution for the modified Emden type equation $\ddot{x}+ax\dot{x}+bx^3=0$, *J. of Astroph. and Astronomy*, 17, 147-166.

7. Dafalias, Y.F.(1985): The plastic spin, *Journal of Applied Mechanics, ASME,* 107, 865-871.

8. Davis, H. T. (1962): *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations*, Dover Publ. Inc., New York.

9. Desai, M. (1973): Growth cycle and inflation in a model of the class struggle, *Journal of Economic Theory*, 6, 527-545.

10. Desai, M., Henry, B., Mosley, A. and Pemberton, M. (2006): A clarification of the Goodwin model of the growth cycle, *Journal of Economic Dynamics and Control* 30, 2661–2670.

11. Duffing, G. (1918): *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz,* Braunschweig,134.

12. Emden, R. (1907): *Gaskugeln,* Berlin, Leipzig.

13. Fermi, E. (1927): Statistical method of investigating electrons in atoms, *Zeitschrift für Physik*, 48, 73-79.

14. Gonzàles, J.M. (1999): A system on ligistic type equations with modellizes visitors demand in two areas of Tenerife island, *Nonlinear Analysis.* RWA 35, 111-123.

15. Goudwin, R.M. (1967): “A Growth cycle” in C.H. Feinsken, ed., *Sosialism, Capitalism and Economic Growth,* Cambridge, Cambridge University Press.

16. Gradshteyn, I.S., and Ryzik, I.M. (1965): *Table of Integrals-series and Products,* Academic Press, New York, San Francisco, London.

17. Hale, J. and Koçak, H. (1999): *Dynamics and Bifurcations*, Springer, New York.

18. Kamke, E. (1977): *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen,* Vol. I, B. G. Teubneur, Stuttgart.

19. Kidder, N.E. (1957): Unsteady flow of a gas through a semi-infinite porous medium, *J. Appl. Mech, ASME,* 27, 329-332.

20. Lacey, A.A., Nikolopoulos, N. and al (1996): *Repeat of European Study with Industry,* Homeless Population, Oxford University Press, Oxford (April).

21. Langmuir, I., and Blodgett, K.B. (1923) : Currents limited by space charge between coaxial cylinders, *Phys. Rev.,* 22, 347-356.

22. Liapounov, A. (1907): Probleme general de la stabilité du mouvement, *Annales de Toulouse,* Vol. 9(2), 203-274.

23. Mavraganis, A.G. (1999): An analytic approximate solution for the attitude motion of an almost axisymmetric rigid body acted upon by periodic torques, *Z. für Angew. Math. Mech, ZAMM,* 79, 1-7.

24. Nikolopoulos, C.V. and Tzanetis, D.E. (2003): A mode for allocation of a homeless population due to a natural disaster, *Nonlinear Analysis-Real World Applications,* 4, 561-579

25. Novozhilov, V.V. (1959): *The Theory of Thin Shells,* (Translated by P. G. Love), P. Noordhoff L.T.D., Groningen, The Netherlands.

26. Panayotounakos, D.E. (2005): Exact analytic solutions of unsolvable classes of first and second order nonlinear ODEs (Part I: Abel's equations), *Appl. Math. Letters,* 18, 155-162.

27. Panayotounakos, D.E., Sotiropoulos, N.B., Sotiropoulou, A.B. and Panayotounakou, N.D. (2005): Exact analytic solutions of nonlinear boundary value problems in fluid mechanics (Blasius equations), *J. of the Math. Physics, J.M.P.,* 46, 033101-1 ~ 033101-26.

28. Panayotounakos, D.E., Andrianopoulos, N.P., and Boulougouris, V.C. (2005): Closed -form solutions of the nonlinear PDEs governing plane rigid perfect plasticity problems by ad hoc assumptions, *Quar. J. of Mech. and Appl. Math., QJMAM,* 58(4), 665-682.

29. Panayotounakos, D.E. and Sotiropoulos, N.B. (2005): Exact analytic solutions of unsolvable classes of first - and second order nonlinear ODEs (Part II: Emden -Fowler and relative equations), *Appl. Math. Letters,* 18, 367-374.

30. Panayotounakos, D.E. and Kravvaritis, D.C. (2006): Exact analytic solutions of the Abel, Emden-Fowler and generalized Emden-Fowler nonlinear ODEs, *Nonlinear Analysis - Real World Applications,* 7, 634-650.

31. Panayotounakos, D.E., Theotokoglou, E.E., Sotiropoulos, N.B., and Sotiropoulou, A.B. (2010): Exact analytic solutions of the plastic spin equations in simple shear, *Math. and Mech. of Solids,* 15(2), 147,164.

32. Panayotounakos, D.E. and Theotokoglou, E.E.: Exact analytic solutions of the general nonlinear ODEs of motion in rigid body dynamics (Euler's equations) *(sumitted for publication).*

33. Panayotounakos, D.E., Sotiropoulou, A.B., Sotiropoulos, N.B., and Manios, M. (2007): Exact analytic solutions of the porous media and the gas pressure diffusion ODEs in non-linear mechanics, *Int. J. of Non-Linear Mech.,* 42, 157-163.

34. Petrovskii, I.G. and Landis, E.M. (1958): On the number of limit cycles of the equation $dy/dx = P(x,y)/Q(x,y)$ when P and Q are polynomials of the second degree, *Mat. Sbornik,* 37(79), 209-250. Translation in *American Math. Soc. Translations* 10 (2nd ser. 1958),177-221.

35. Poincaré, H. (1928): Memoire sur les Courbes Definies par une Equation Differentielle, *Euvres,* Vol. 1, Paris, 3-84, 90-161.

36. Polyanin, A.D., Zaitsev, V.F. (2003): *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, Chapman &Hall/CRC Press, New York, (Second edition).

37. Rayleigh, L. (1877 f.e., 1878 s.e., 1894 t.e., 1896 f.e.): *The Theory of Sound,* London, Dover Reprint.

38. Richmod, P., Repetowitcz, P., Hutzler, S. and Coelho, R. (2006): Communalism recent studies of the dynamics and listuburism of money, *Physics A: Statistical and Theoretical Physics*, 370, 43-48.

39. Spotztelli,M. (1995) : A Kolmogorof generalized predator-prey model of Goudwin's growth cycle, *Journal of Economics,* 61, 35-64.

40. Sommerfeld, S. A. (1932): Integrazione Asintotica dell' Equazione Differenziali di Thomas-Fermi, *Accad. dei Nincei, Atti-Rendiconte*, 4, 85-110.

41. Sotiropoulos N. (2007): *Επακριβείς Αναλυτικές Λύσεις Ιδιαίτερων Κλάσεων Συνήθων μη Γραμμικών Εξισώσεων Δεύτερης και Ανώτερης Τάξης της Μαθηματικής Φυσικής και μη Γραμμικής Μηχανικής,* PHD Thesis, School of Applied Mathematical and Physical Science, National Technical University of Athens.

42. Targ, S.(1976): *Theoretical Mechanics, A Short Course,* Mir Publishers, Moscow.

43. Thomas, L. H. (1927): The Circulation of Atomic Fields, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 23, 542-548.

44. van der Pol, B. (1926): On relaxation-oscillations, *Philos. Mag.,* 2, 7, 978-992.

45. Vardoulakis, I., and Sulem, J. (1995): *Bifurcation Analysis in Geomechanics,* Blackie Academic and Professional.

46. Volterra, V. (1931): *Leçons sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie,* Paris, vi+294.

Κεφάλαιο 4

Επί της Κατασκευής της Γενικής Λύσης της Εξίσωσης Riccati Κανονικής Μορφής $y'_x(x) = y^2(x) + F(x)$

Βασικές βιβλιογραφικές αναφορές που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάπτυξη του κεφαλαίου είναι οι : E. Kamke[3], D.E. Panayotounakos[6], A.D. Polyanin and V.F. Zaitsev[7], P.N. Andriotaki and D.E. Panayotounakos [1], D.E. Panayotounakos and Theocaris P.S.[5] και S. Targ[9].

4.1 Προκαταρτικά Σχόλια.

Η γενική μορφή της εξίσωσης Riccati είναι

$$g(x)\,y'_x = f_2(x)\,y^2 + f_1(x)\,y + f_0(x). \tag{4.1}$$

Αν $f_2 \equiv 0$ τότε η προηγούμενη εξίσωση εκφυλίζεται σε γραμμική ΣΔΕ πρώτης τάξης, ενώ αν $f_0 \equiv 0$ εκφυλίζεται σε εξίσωση Bernoulli, αμφότερες των οποίων επιδέχονται γενικών αναλυτικών λύσεων. Δεδομένης μιας μερικής λύσης $y_0 = y_0(x)$ της εξίσωσης Riccati, τότε η γενική λύση της δίνεται από τον τύπο

$$y = y_0(x) + \frac{\Phi(x)}{C_2 - \int \Phi(x) \frac{f_2(x)}{g(x)} dx}; \quad C = \text{σταθερά ολοκλήρωσης}, \tag{4.2}$$

όπου

$$\Phi(x) = \exp\left[\int \frac{\left[2 f_2(x) y_0 + f_1(x)\right] dx}{g(x)}\right]. \tag{4.3}$$

Σημειώνεται ότι στην μερική λύση $y_0 = y_0(x)$ αντιστοιχεί η τιμή $C \to \infty$.

Η αντικατάσταση

$$u(x) = \exp\left(-\int \frac{f_2(x)}{g(x)} y(x) dx\right) \tag{4.4}$$

μετατρέπει την εξίσωση Riccati σε γραμμική ομογενή ΣΔΕ δεύτερης τάξης με μεταβλητούς συντελεστές, δηλαδή στην

$$g^2(x) f_2(x) u''_{xx} + g(x)\left[f_2(x) g'_x(x) - g(x) f'_{2_x}(x) - f_1(x) f_2(x)\right] u'_x +$$

$$+ f_0(x) f_2^2(x) u = 0. \tag{4.5}$$

Αν $g(x) = f_2(x)$, $f \equiv 1$ και $f_1(x)$, $f_0(x)$ είναι πολυώνυμα, τότε:

α) Εφόσον ο βαθμός του πολυωνύμου

$$\Delta(x) = f_1^2 - 2(f_1)'_x - 4 f_0 \tag{4.6}$$

είναι περιττής τάξης, η εξίσωση Riccati επιδέχεται πολυωνυμικής λύσης.

β) Εφόσον ο βαθμός του πολυωνύμου (4.6) είναι άρτιας τάξης, τότε η εν λόγω εξίσωση δύναται να έχει μόνο την εξής πολυωνυμική λύση

$$y(x) = -\frac{1}{2}\left(f_1(x) \pm \sqrt{\Delta(x)}\right), \tag{4.7}$$

όπου $\sqrt{\Delta(x)}$ είναι ένα ακέραιο μέρος της ανάπτυξης της $\sqrt{\Delta}$ σε ελαττούμενες δυνάμεις του x $\left(\text{για παράδειγμα} \left[\sqrt{x^2 - 2x + 3} = x - 1\right]\right)$.

Η γενική εξίσωση Riccati

$$g(x) y'_x = f_2(x) y^2 + f_1(x) y + f_0(x),$$

μέσω του μετασχηματισμού

$$x = \varphi(\xi) \ , \ y = \frac{1}{F_2} w - \frac{1}{2}\frac{F_1}{F_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{F_2}\right)'_\xi, \quad F_i(\xi) = \frac{f_i(\varphi)}{g(\varphi)} \varphi'_\xi, \ (i = 1, 2), \tag{4.8}$$

μετασχηματίζεται στην εξίσωση Riccati κανονικής μορφής[3]

$$w'_\xi = w^2 + \Psi(\xi),$$

με

$$\Psi(\xi) = F_0 F_2 - \frac{1}{4}F_1^2 + \frac{1}{2}F'_{1_\xi} - \frac{1}{2}F_1 \frac{F_{2_\xi}}{F_2} - \frac{3}{4}\left(\frac{F'_{2_\xi}}{F_2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{F''_{\xi\xi}}{F_2}. \qquad (4.9)$$

Ο μετασχηματισμός (4.8) ορίζεται από την $\varphi = \varphi(\xi)$ η οποία είναι τυχούσα. Για μια ειδική αρχική εξίσωση Riccati (4.1), διαφορετικές συναρτήσεις $\varphi(\xi)$ καθορίζουν διαφορετικές $\Psi(\xi)$ στην (4.9). Ένας ειδικός μετασχηματισμός (4.8) είναι: $\varphi(\xi) = \xi$.

Αν η εξίσωση Riccati έχει την κανονική μορφή

$$y'_x = y^2 + f(x) \qquad (4.10)$$

τότε ο μετασχηματισμός (4.8) γράφεται

$$x = \varphi(\xi) \quad , \quad y = \frac{1}{\varphi'_\xi} w - \frac{1}{2}\frac{\varphi''_{\xi\xi}}{\left(\varphi'_\xi\right)^2}, \qquad (4.11)$$

με

$$\Psi(\xi) = f(\varphi)\left(\varphi'_\xi\right)^2 - \frac{3}{4}\left(\frac{\varphi''_{\xi\xi}}{\varphi'_\xi}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\varphi''_{\xi\xi}}{\varphi'_\xi}. \qquad (4.12)$$

Αν τώρα δυο μερικές λύσεις της (4.1) είναι οι $y_1(x)$ και $y_2(x)$, το γενικό ολοκλήρωμα δίνεται από τη σχέση

$$y = \frac{C\, y_1(x) + U(x)\, y_2(x)}{C + U(x)}, \qquad (4.13)$$

όπου

$$U(x) = \exp\left[\int f_2(x)\left[y_2(x) - y_1(x)\right]dx\right].$$

Αν η Riccati έχει τρείς μερικές λύσεις, τότε το γενικό ολοκλήρωμα δίνεται από τον τύπο

$$\frac{y(x) - y_2(x)}{y(x) - y_1(x)}\ \frac{y_3(x) - y_1(x)}{y_3(x) - y_2(x)} = C. \qquad (4.14)$$

Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις C είναι η σταθερά ολοκλήρωσης.

4.2 Ισοδυναμία μερικών λύσεων μιας εξίσωσης Riccati κανονικής μορφής και μιας εξίσωσης Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής.

Ας θεωρήσουμε την εξίσωση Riccati κανονικής μορφής

$$\bar{H}'_X = \bar{H}^2 + \Omega(X),\ \ \Omega(X) = \text{ελεύθερο μέλος.} \tag{4.15}$$

Ο μετασχηματισμός

$$\bar{H}(X) = \eta(x) - 1, \quad X = \ln|x|; \tag{4.16}$$

$$X'_x = \frac{1}{x};\ \ \bar{H}'_X = \eta'_X = n'_x\, x'_X = x\eta'_x, \tag{4.17}$$

μετατρέπει την (4.15) στην εξίσωση Riccati

$$x\eta'_x = (\eta - 1)^2 + \Omega(X) = \eta^2 - 2\eta + 1 + \Omega(\ln|x|). \tag{4.18}$$

Αν

$$\Omega(X) = \Omega(\ln|x|) = \frac{4\left[G(x) + F(x)\right]}{x} - 1,$$

μπορούμε επίσης να γράψουμε τη γνωστή συνάρτηση $\Omega^*(x)$ και ως

$$\Omega^*(x) = \frac{4\left[G(x) + F(x)\right]}{x}, \tag{4.19}$$

όπου $G(x)$είναι βοηθητική προσδιοριστέα συνάρτηση και $F(x)$ είναι αυθαίρετη συνάρτηση που ταυτίζεται με το ελεύθερο μέλος της εξίσωσης Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής

$$y\,y'_x - y = F(x),$$

δηλαδή, η $F(x)$ εκφράζεται μέσω της $\Omega^*(x)$ και της $G(x)$.
Τότε η (4.18) μετασχηματίζεται στην

$$\eta'_x = \frac{f'_x}{f_1}\eta^2 - \frac{1}{f_1}\eta + \frac{\Omega^*(x)}{2f_1} \tag{4.20}$$

ή ισοδύναμα στην

$$\eta'_x = \frac{f'_x}{f_1}\eta^2 - \frac{1}{f_1}\eta + \frac{G(x) + F(x)}{f_1^2}; \quad f_1 = \frac{x}{2}. \tag{4.21}$$

Στο Κεφάλαιο 1 (Βιβλ. [6]) έχει αποδειχθεί ότι μια εξίσωση Abel δευτέρου είδους

$$y\, y_x' - y = F(x)$$

διασπάται στις δυο παρακάτω εξισώσεις Abel που πρέπει να ισχύουν συγχρόνως:

$$\left(f_1^2\, \xi_x' \eta + \mathrm{g}\right)\eta_\xi' = 2F + G(x), \quad f_1^2(\eta+1)\eta_x' = G(x) + 2F,$$

ή ισοδύναμα στις δυο εξισώσεις

$$\left(-f_1^2\, \xi_x' \eta + \mathrm{g}\right)\eta_\xi' - 2 f_1 f_{1_x}' \eta^2 + 2 f_1 \eta = \mathrm{G}(x), \tag{4.22α}$$

$$f_1^2(-\eta+1)\eta_x' = 2 f_1 f_{1_x}' \eta^2 - 2 f_1 \eta + G(x), \tag{4.22β}$$

όπου

$$g = f_1^2; \;\; \xi_x' = 1; \;\; f_1 = \frac{x}{2},$$

και $G(x)$ είναι μια βοηθητική προς προσδιορισμό συνάρτηση.

Η εφαρμογή της κατασκευής Julia σε αμφότερες τις (4.22) καταλήγει στην κυβική εξίσωση[6]

$$(1+N)^{3/2} - 4(1+N) + \left[3 + \frac{4(G+F)}{x}\right](1+N)^{1/2} - 4\frac{G+2F}{x} = 0, \tag{4.23}$$

ή ισοδύναμα, μέσω του μετασχηματισμού

$$(1+N)^{1/2} = \overline{N} + \frac{1}{3} \tag{4.24}$$

στην κυβική εξίσωση τύπου Cardan

$$\overline{N}^3 + p\overline{N} + q = 0. \tag{4.25}$$

με

$$\begin{gathered} p = -\frac{a^2}{3} + b, \quad q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c, \;\; a = -4, \\ b = 3 + \frac{4(G+F)}{x}, \quad c = -\frac{4(G+2F)}{x}. \end{gathered} \tag{4.26}$$

Τονίζεται ότι, οι συντελεστές $p(x)$ και $q(x)$ περιέχουν την βοηθητική προς προσδιορισμό συνάρτηση $G(x)$.

Στο Κεφάλαιο 1 παρέχονται οι λύσεις των εξισώσεων (4.23) και (4.25) οι οποίες εξαρτώνται από το πρόσημο της διακρίνουσας $D = (p/3)^3 + (q/2)^2$. Έτσι , για

$D=0$ παρέχονται δυο διακεκριμένες ρίζες, ενώ για $D<0$ ή $D>0$ τρεις διακεκριμένες ρίζες (σχέσεις (1.37) ÷ (1.40)) οι οποίες περιέχουν την βοηθητική προς προσδιορισμό συνάρτηση $G(x)$. Εξάλλου στην Βιβλ. [6] με αναφορά στις εξίσωσεις (2.22α,β) παρέχονται και οι εκφράσεις των συναρτήσεων $\eta(x)$ και $y(x)$ που είναι μερικές λύσεις της εξίσωσης Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής $y\,y'_x - y = F(x)$, δηλαδή

$$\eta(x)=\left[1+N(x)\right]^{1/2}-1=\bar{N}(x)+\frac{1}{3},\quad \bar{N}'_x=\frac{4(G+2F)}{x^2\left[\bar{N}(x)+\dfrac{4}{3}\right]};$$
$$y(x)=\frac{1}{2}x\eta(x)=\frac{1}{2}x\left[\bar{N}(x)+\frac{1}{3}\right]. \tag{4.27}$$

Εδώ $\bar{N}(x)$ είναι οι ρίζες της κυβικής εξίσωσης (4.25) και $N(x)$ οι ρίζες της κυβικής εξίσωσης (4.23) αμφότερες των οποίων περιέχουν την βοηθητική συνάρτηση $G(x)$.

Είναι τώρα φανερό ότι προσθέτοντας κατά μέλη τις (4.22α,β) προκύπτει η εξίσωση Riccati

$$\eta'_x=\frac{f'_{1_x}}{f_1}\eta^2-\frac{1}{f_1}\eta+\frac{F+G}{f_1^2}, \tag{4.28}$$

ενώ διαιρώντας αυτές κατά μέλη προκύπτει η εξίσωση

$$\left(f_1 f'_{1_x}\eta^2-f_1\eta-F\right)(\eta+1)+\eta(G+2F)=0;\quad \left(f_1=\frac{x}{2}\right). \tag{4.29}$$

Η εξίσωση (4.29) με βάση την πρώτη των (4.27) καταλήγει στην κυβική εξίσωση (4.23) ή (4.25), ενώ η (4.28) με βάση τις (4.27) καταλήγει πάλι στην κυβική εξίσωση (4.23) (ή (4.25)). Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση Riccati (4.28) έχει ως μερικές λύσεις τις ρίζες της κυβικής εξίσωσης (4.23) (ή (4.25)). Τούτο ακριβώς συμβαίνει και για την εξίσωση Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής $y\,y'_x - y = F(x)$.

Με βάση τώρα την προαναφερθείσα διακρίνουσα D και τις ρίζες της κυβικής εξίσωσης (4.23) (ή της κυβικής εξίσωσης (4.25)) οι μερικές λύσεις της εξίσωσης Riccati (4.28) συναρτήσει της βοηθητικής προς προσδιορισμό συνάρτησης $G(x)$, δίνονται από τη σχέση

$$\eta_i(x)=\bar{N}_i(x)+\frac{1}{3}, \tag{4.30}$$

όπου $\bar{N}_i(x)$ δίνονται από τις σχέσεις (1.37)÷(1.40) του Κεφαλαίου 1. Απομένει ακόμη ο προσδιορισμός της βοηθητικής συνάρτησης $G(x)$ που περιέχεται σε όλους τους παραπάνω τύπους. Από τις σχέσεις (4.27) και την ισοδυναμία που έχει ήδη αποδειχθεί μεταξύ των μερικών λύσεων μιας εξίσωσης Riccati κανονικής μορφής και μιας εξίσωσης Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής, συμπεραίνουμε ότι σύμφωνα με το πρόσημο D της προαναφερόμενης διακρίνουσας προκύπτουν οι εξης μερικές λύσεις για την εξίσωση Riccati (4.28)

1. $D=0$

$$\eta_1(x)=2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}+\frac{1}{3}, \qquad \eta_2(x)=\eta_3(x)=-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}+\frac{1}{3}. \tag{4.31}$$

2. $D<0 \quad (p<0)$

$$\begin{gathered}\eta_1(x)=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{a}{3}+\frac{1}{3},\\ \eta_2(x)=-\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{a}{3}+\sqrt{3}\sin\frac{a}{3}\right)+\frac{1}{3}\,,\\ \eta_2(x)=-\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{a}{3}-\sqrt{3}\sin\frac{a}{3}\right)+\frac{1}{3}\,,\end{gathered} \tag{4.32}$$

με

$$\cos a=-\frac{q}{2\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\ ; \quad 0<a<\pi\ .$$

3. $D>0\,(p>0)$

$$\begin{gathered}\eta_1(x)=2\sqrt{\frac{p}{3}}\frac{\cos a-\sin a}{\sin a\,\cos a}+\frac{1}{3},\\ \eta_2(x)=\sqrt{\frac{p}{3}}\left[\frac{\cos a-\sin a}{\cos a\sin a}+i\frac{\sqrt{3}}{\sin(2a)}\right]+\frac{1}{3},\\ \eta_1(x)=\sqrt{\frac{p}{3}}\left[\frac{\cos a-\sin a}{\cos a\sin a}-i\frac{\sqrt{3}}{\sin(2a)}\right]+\frac{1}{3}\end{gathered} \tag{4.33}$$

με

$$\tan a=\left(\tan\frac{\beta}{2}\right)^{1/3},\tan\beta=\frac{2}{q}\left(\frac{p}{3}\right)^{3/2},\ \ |a|\le\frac{\pi}{4},\ \ |\beta|<\frac{\pi}{2}.$$

4. $D>0\,(p<0)$

$$\eta_1(x) = -\sqrt{-\frac{p}{3}}\frac{1}{\sin a \cos a} + \frac{1}{3},$$

$$\eta_2(x) = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{p}{3}}\left[\frac{1}{\sin a \cos a} + i\frac{\sqrt{3}(\cos a - \sin a)}{\sin a \cos a}\right] + \frac{1}{3} \tag{4.34}$$

$$\eta_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{p}{3}}\left[\frac{1}{\sin a \cos a} - i\frac{\sqrt{3}(\cos a - \sin a)}{\sin a \cos a}\right] + \frac{1}{3}$$

$$\tan a = \left(\tan\frac{\beta}{2}\right)^{1/3}, \sin\beta = \frac{2}{q}\left(\frac{p}{3}\right)^{3/2}, \quad |a| \le \frac{\pi}{4}, \quad |\beta| < \frac{\pi}{2}.$$

με

$$p = -\frac{a^2}{3} + b, \quad q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c, \quad a = -4, \quad b = 3 + \frac{4(G+F)}{x},$$

$$c = -\frac{4(G+2F)}{x}. \tag{4.35}$$

4.3 Προσδιορισμός της βοηθητικής συνάρτησης $G(x)$-Γενική Λύση της εξίσωσης Riccati (4.28).

Στο Κεφάλαιο 2 αποδείχθηκε ότι στην περίπτωση που η διακρίνουσα D της κυβικής εξίσωσης (4.23) ή της επίσης κυβικής εξίσωσης (4.25) είναι μηδέν $(D=0)$, τότε η εξίσωση Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής διαθέτει δύο μερικές λύσεις, δηλαδή τις (σχέσεις (2.44))

$$y_1(x) = \frac{x}{6} + 6F(x), \quad y_2(x) = -3F(x),$$

ή ισοδύναμα

$$\eta_1(x) = \frac{x}{6} + 6F(x), \quad \eta_2(x) = -3F(x), \tag{4.36}$$

$$F(x) = \frac{x}{4}\Omega^*(x) - G(x). \tag{4.37}$$

Συνεπώς με βάση τα αναφερόμενα της παραγράφου 4.2 δύο μερικές λύσεις της εξίσωσης Riccati (4.28) είναι

$$\eta_1(x) = 1 + 3\Omega^*(x) - \frac{12}{x}G(x), \quad \eta_2(x) = -\frac{3}{2}\Omega^*(x) + \frac{6}{x}G(x), \tag{4.38}$$

όπου η $\Omega^*(x)$ είναι συνάρτηση της $F(x)$ και της βοηθητικής προς προσδιορισμό συνάρτηση $G(x)$. Η $\Omega^*(x) = \Omega(X) + 1$ είναι γνωστή συνάρτηση της X (ή x).

Από την (2.40), αντικαθιστώντας την $F(x)$ συναρτήσει των $\Omega^*(x)$ και $G(x)$ μέσω της (4.37), έχουμε

$$3G = \frac{1}{36}\left[\frac{x}{4}\Omega^*(x) + 20x + 54x\left(\overline{N}_2\right)^3\right], \tag{4.39}$$

ενώ από την (2.39) έχουμε επίσης

$$\overline{N}_2 = -\frac{1}{3} - \frac{9}{x}\left[\frac{4}{x}\Omega^*(x) - G(x)\right], \tag{4.40}$$

όπου $\Omega^*(x)$ είναι το δεύτερο ελεύθερο μέλος της εξίσωσης Riccati (4.10). Έτσι, η βοηθητική συνάρτηση $G(x)$ προσδιορίζεται αν εισάγουμε την (4.40) στην (4.39) συναρτήσει του γνωστού ελεύθερου μέλους $\Omega^*(x)$. Επομένως μπορούμε να γράψουμε

$$G(x) = Q\left(x, \Omega^*(x)\right) = \text{γνωστή συνάρτηση.} \tag{4.41}$$

και με βάση τον τύπο (4.13) μπορούμε επίσης να γράψουμε τη γενική λύση της εξίσωσης Riccati (4.28) υπό τη μορφή

$$\eta(x) = \frac{C\eta_1(x) + \eta_2(x)e^{-\int \frac{1}{x}\left\{1+\frac{9}{2}\Omega^*(x)-\frac{4}{3}Q\left[x,\Omega^*(x)\right]\right\}dx}}{Ce^{-\int \frac{1}{x}\left\{1+\frac{9}{2}\Omega^*(x)-\frac{4}{3}Q\left[x,\Omega^*(x)\right]\right\}dx}}, \tag{4.42}$$

C = σταθερά ολοκλήρωσης,

$$\eta_1(x) = \frac{x}{6} + 6F(x), \quad \eta_2(x) = -3F(x); \quad F(x) = \frac{x}{4}\Omega^*(x) - G(x)$$

όπου:

$F(x)$ είναι το ελεύθερο μέλος της εξίσωσης Abel δευτέρου είδους $y\,y'_x - y = F(x)$,

$G(x)$ είναι η προσδιοριστέα βοηθητική συνάρτηση που στην προκειμένη περίπτωση δίνεται από την σχέση (4.42), και

$\Omega^*(x) = \Omega(x) + 1$; $\Omega(X)$ είναι το ελεύθερο μέλος της εξίσωσης Riccati (4.15).

Επομένως, η γενική λύση της εξίσωσης Riccati κανονικής μορφής (4.15)

$$\bar{H}'_x = \bar{H}^2 + \Omega(x),$$

βάσει των (4.16) και (4.17) όπως επίσης των (4.19) και (4.42), προκύπτει

$$\bar{H}(x) = \eta(x) - 1, \quad x = e^X, \quad \eta(x) = \text{η λύση της εξίσωσης (4.42)} \tag{4.43}$$

Στις περιπτώσεις που $D < 0$ ή $D > 0$ έχει αποδειχθεί ότι η εξίσωση Abel $y\,y'_x - y = F(x)$ έχει για κάθε μια από αυτές τρείς διαφορετικές μεταξύ τους λύσεις. Επομένως, εκείνο το οποίο έχει πρωτεύουσα σημασία είναι να καθοριστεί η βοηθητική προς προσδιορισμό συνάρτηση από τη σχέση (2.78), θέτοντας $M(x) = G(x)$ (σχέση (2.79)), δηλαδή

$$\frac{\ln C}{G} = \frac{y_2}{(y_2 - y_1)(y_2 - y_3)} \left[\frac{y_1(y_3 - y_2)\ln\left(\dfrac{y_1(y_3 - y_2)}{2y_1y_2 - (y_1 + y_2)y_3} \right)}{y_2(y_1 - y_3)} + \ln\left(\frac{(y_1 + y_2)y_3 - 2y_1y_2}{y_2(y_1 - y_3)} \right) \right]. \tag{4.44}$$

όπου y_1, y_2, y_3 οι τρείς μερικές λύσεις της Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις (1.45). Σημειώνεται ότι για τις διάφορες τιμές της διακρίνουσα D ($D < 0$ ή $D > 0$) και της ποσότητας p (η οποία δίνεται από τη σχέση (1.38α)), η (4.44) λαμβάνει τη μορφή των εξισώσεων (2.102).
Σύμφωνα με τα προαναφερθέντα καταλήγουμε ότι

$$y_1 = \frac{x}{2}\eta_1(x), \quad y_2 = \frac{x}{2}\eta_2(x), \quad y_3 = \frac{x}{2}\eta_3(x); \tag{α}$$

όπου ενδεικτικά για $D < 0$ και $p < 0$

$$\eta_1(x) = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{a}{3},$$

$$\eta_2(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{a}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{a}{3} \right), \tag{β) (4.45}$$

$$\eta_3(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{a}{3} - \sqrt{3}\sin\frac{a}{3} \right),$$

με

$$\cos a = -\frac{q}{2\sqrt{-\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}}; \quad 0 < a < \pi,$$

$$p=-\frac{a^2}{3}+b,\quad q=\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c,\quad a=-4\ ,\ b=3+\frac{4(G+F)}{x}\ ,$$

$$c=-\frac{4(G+2F)}{x}\ .$$

Η βασική εξίσωση μέσω της οποίας υπολογίζεται η βοηθητική συνάρτηση $G(x)$ συναρτήσει του δευτέρου μέλους της εξίσωσης Riccati $\Omega^*(x)$ είναι η (4.45β). Εφόσον η $G(x)$ υπολογιστεί συναρτήση της $\Omega^*(x)$, τότε γράφουμε την $G(x)=Q\left(x,\Omega^*(x)\right)$ και η γενική λύση της εξίσωσης Riccati είναι (4.28) προκύπτει από τον τύπο (4.14) και είναι

$$\frac{\eta(x)-\eta_2(x)}{\eta(x)-\eta_1(x)}\ \frac{\eta_3(x)-\eta_1(x)}{\eta_3(x)-\eta_2(x)}=C\ ,C=\text{σταθερά ολοκλήρωσης} \qquad (4.46)$$

δηλαδή

$$\boxed{\eta(x)=\frac{\eta_2(\eta_3-\eta_1)-C\eta_1(\eta_3-\eta_2)}{(\eta_3-\eta_1)-C(\eta_3-\eta_2)}.} \qquad (4.47)$$

Συνοψίζοντας, η γενική λύση μιας εξίσωσης Riccati κανονικής μορφής

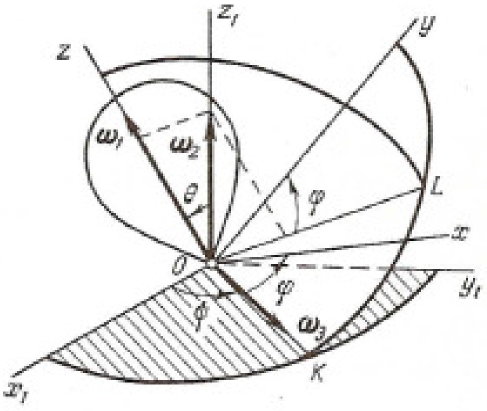
$$\bar{H}'_x=\bar{H}^2+\Omega(x),$$

προκύπτει από την εξίσωση (4.47) .

4.4 Εφαρμογή – Κινηματικές εξισώσεις του Euler[9].

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζεται μια γενική τεχνική αποσύζευξης των τριών κινηματικών εξισώσεων του Euler [Βιβλ 9,5]. Αποδεικνύεται ότι η μέθοδος αυτή οδηγεί σε μια εξίσωση Riccati ή σε μια δεύτερης τάξης γραμμική ομογενή ΣΔΕ με μεταβλητούς συντελεστές. Οι εν λόγω συντελεστές εκφράζονται συναρτήσει της γωνιακής ταχύτητας και θεωρούνται ότι είναι γνωστές ποσότητες από τις λύσεις τριών ανεξάρτητων δυναμικών εξισώσεων Euler που προσδιορίζουν τις γωνιακές ταχύτητες .

Θεωρούμε την ελεύθερη κίνηση ενός στερεού σώματος γύρω από σταθερό σημείο O. Οι συντεταγμένες Euler $\psi(t)$, $\theta(t)$, $\varphi(t)$ χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό του προσανατολισμού του σώματος. Επίσης $O_{x_1y_1z_1}$ είναι το σταθερό ή χωροδετό σύστημα συντεταγμένων, ενώ το O_{xyz} είναι το κινούμενο ή σωματόδετο σύστημα συντεταγμένων. Η κίνηση του σώματος αναλύεται σε τρείς κινήσεις α) $\varphi(t)$ μετάπτωσης β) $\theta(t)$ κλόνισης γ) $\psi(t)$ περιστροφής. Η μετατόπιση του σώματος είναι μια περιστροφή γωνιακής ταχύτητας $\boldsymbol{\omega}$ η οποία προκύπτει από το διανυσματικό άθροισμα των $\psi'_{t,}$, θ'_t, φ'_t.



Σχήμα 6.1. Οι τρείς γωνίες- παράμετροι του Euler.

Η προβολή του διανύσματος ω στο O_{xyz} δίνει τις γνωστές κινηματικές εξισώσεις Euler που καθορίζουν τον προσανατολισμό του σώματος οι οποίες είναι

$$\begin{aligned} &\varphi'_t \sin\theta \sin\psi + \theta'_t \cos\psi = \omega_x, \\ &\varphi'_t \sin\theta \sin\psi + \theta'_t \cos\psi = \omega_x, \\ &\varphi'_t \cos\theta + \psi'_t = \omega_z. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Εδώ ω_x, ω_y και ω_z θεωρούνται γνωστές ποσότητες οι οποίες προσδιορίζονται από την επίλυση των γνωστών δυναμικών εξισώσεων Euler [Κεφ.3].

Η ολοκλήρωση των εξισώσεων (4.48) στην γενική περίπτωση είναι ιδιαίτερα περίπλοκη και δυσχερής. Στην [Βιβλ. 4] παρουσιάστηκε μια επιτυχής μέθοδος αποσύζευξης του ανωτέρου συστήματος διαφορικών εξισώσεων. Αποδείχτηκε ότι οι εξισώσεις (4.48) είναι ισοδύναμες με την παρακάτω δεύτερης τάξης διαφορική εξίσωση ως προς τη γωνία κλόνισης $\theta(t)$

$$\theta''_{tt} + \sqrt{\omega^2 - \theta_t'^2}\left[\omega_z - \left(\omega^2 - \theta_t'^2\right)^{1/2} \cot\theta\right] = \frac{\omega'_t \theta'_t \pm \sqrt{\left(f^2 - \omega'^2\right)\left(\omega^2 - \theta_t'^2\right)}}{\omega}, \tag{4.49}$$

όπου

$$\theta_t'^2 \le \omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2,\ f^2 \ge \omega_{x_t}'^2 + \omega_{y_t}'^2.$$

Με αρκετούς επί τούτω ad hoc μετασχηματισμούς προσδιορίστηκαν προσεγγιστικές αναλυτικές λύσεις της εξίσωσης αυτής.

Σε ότι ακολουθεί, παρουσιάζεται μια γενική μέθοδος αποσυζευξης του εν λόγω συστήματος. Εφαρμόζοντας παραδεκτούς μετασχηματισμούς και ενδιάμεσες ολοκληρώσεις θα αποδειχθεί ότι το σύστημα (4.48) καταλήγει σε μια εξίσωση τύπου Riccati ως προς μεταβλητή ψ (γωνία περιστροφής).

Μαθηματική Διατύπωση

Για $\psi = 0$ ή $\psi = \dfrac{\pi}{2}$, οι εξισώσεις (4.48) δίνουν τα ακόλουθα δύο συστήματα εξισώσεων

$$\theta_t' = \omega_x, \quad \varphi_t' \sin\theta = \omega_y, \quad \varphi_t' \cos\theta = \omega_z, \tag{4.50}$$

και

$$\varphi_t' \sin\theta = 2\frac{\omega_x}{\pi}, \ \theta_t' = -2\frac{\omega_x}{\pi}, \ \theta_t' \cos\theta = \omega_z, \tag{4.51}$$

αντίστοιχα. Για την ολοκλήρωση των παραπάνω συστημάτων πρέπει να ισχύουν δυο συναρτησιακές σχέσεις μεταξύ των ω_x, ω_y, ω_z, οι οποίες είναι

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \tan\left(C + \int \omega_x dt\right), \tag{4.52}$$

και

$$\frac{\omega_x}{\omega_z} = \pi \tan\left(C - \frac{2}{\pi}\int \omega_y dt\right)/2 \ . \tag{4.53}$$

Για το διάστημα τιμών $\psi \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ πολλαπλασιάζοντας τις δυο πρώτες εξισώσεις (4.48) με $\sin\psi$ και $\cos\psi$ και εν συνεχεία αθροίζοντας τα αποτελέσματα ευρίσκουμε

$$\varphi_t' \sin\theta = \frac{\omega_x \sin\psi + \omega_y \cos\psi}{2}. \tag{4.54}$$

Ομοίως πολλαπλασιάζοντας τις δυο πρώτες εξισώσεις (4.48) με $\cos\psi$ αντίστοιχα και $\sin\psi$ και εν συνεχεία αθροίζοντας τις εξισώσεις ευρίσκουμε επίσης

$$\theta_t' = \frac{\omega_x \cos\psi - \omega_y \sin\psi}{2}. \tag{4.55}$$

Συνεπώς το σύστημα (4.48) είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο

$$\varphi_t' \sin\theta = \frac{\omega_x \sin\psi + \omega_y \cos\psi}{2}, \tag{α}$$

$$\theta_t' = \frac{\omega_x \cos\psi - \omega_y \sin\psi}{2}, \tag{β)(4.56}$$

$$\varphi_t' \cos\theta + \psi_t' = \omega_z. \tag{γ}$$

Συνδυάζοντας τις (4.56α) και (4.56γ) προκύπτει

$$\tan\theta = \frac{\omega_x \sin\psi + \omega_y \cos\psi}{2\left(\omega_z - \psi_t'\right)}, \tag{4.57}$$

ενώ διαφορίζοντας την (4.56β) καταλήγουμε στην

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\left(\omega_x \cos\psi - \omega_y \sin\psi\right) = \left(\frac{\omega_x \sin\psi + \omega_y \cos\psi}{\omega_z - \psi_t'}\right)_t' \tag{4.58}$$

Στη συνέχεια συνδυάζοντας τις τελευταίες δύο εξισώσεις και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta},$$

καταλήγουμε στην παρακάτω δεύτερης τάξης διαφορική εξίσωση

$$\left[1 + \frac{\left(\omega_x \sin\psi + \omega_y \cos\psi\right)^2}{4\left(\omega_z - \psi_t'\right)^2}\right]\left(\omega_x \cos\psi - \omega_y \sin\psi\right) = \left(\frac{\omega_x \sin\psi + \omega_y \cos\psi}{\omega_z - \psi_t'}\right)_t' \tag{4.59}$$

Θέτοντας τώρα

$$\frac{\omega_x \sin\psi + \omega_y \cos\psi}{\omega_z - \psi_t'} = A(t) \tag{4.60}$$

η (4.59) γράφεται

$$\left(\omega_x \cos\psi - \omega_y \sin\psi\right)\left(1 + \frac{1}{4}A^2\right) = A_t', \tag{4.61}$$

και λόγω της (4.55) γράφεται επίσης

$$\theta_t' = \frac{2A_t'}{4 + A^2}.$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία εξίσωση προσδιορίζεται η γωνία κλόνισης $\theta(t)$ συναρτήσει της περιστροφής $\psi(t)$ και των συνιστωσών της γωνιακής ταχύτητας $\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)$, δηλαδή

$$\boxed{\theta(t) = \arctan A + C_1 = \arctan\left(\frac{\omega_x \sin\psi + \omega_y \cos\psi}{\omega_z - \psi_t'}\right) + C_1,} \tag{4.62}$$

όπου $C_1 =$ σταθερά ολοκλήρωσης .

Επειδή $\sin\theta = \sin\left(\arctan A + C_1\right)$ και $\cos\theta = \cos\left(\arctan A + C_1\right)$ από τις εξισώσεις (4.54) και (4.60) εξάγουμε

$$\sin\left(\arctan A + C_1\right)\varphi_t' = \left(\omega_z - \psi_t'\right)\frac{A}{2},$$

και από την (4.56γ) εξάγουμε επίσης

$$\sin\left(\arctan A + C_1\right)\varphi_t' = \frac{A}{2}\varphi_t' \cos\theta,$$

δηλαδή

$$2\sin\left(\arctan A + C_1\right)\varphi_t' = A\cos\left(\arctan A + C_1\right). \tag{4.63}$$

Απλοποιώντας την τελευταία εξίσωση υπολογίζουμε

$$\arctan\left(\frac{A}{2}\right) - \arctan A = C_1, \tag{4.64}$$

και παρατηρώντας ότι $A\left(\frac{A}{2}\right) = A^2 / 2 > -1$, η (4.64) γίνεται [Βιβλ. 2 σελ49]

$$\arctan\frac{\frac{A}{2} - A}{1 + \frac{A^2}{2}} = C_1 \Rightarrow -A = \overset{*}{C}_1\left(2 + A^2\right), \quad \overset{*}{C}_1 = \tan C_1 \tag{4.65}$$

ή

$$\overset{*}{C}_1 A^2 + A + 2\overset{*}{C}_1 = 0. \tag{4.66}$$

Υποθέτοντας χωρίς να χαθεί η γενικότητα ότι η (4.66) έχει πραγματικές ρίζες $\left(1 - 8\overset{*}{C}_1^{\,2} > 0\right)$, καταλήγουμε στην παρακάτω μη γραμμική πρώτης τάξης ΣΔΕ για $A(t)$ και $\left(ή\ \psi(t)\right)$

$$A = \frac{\omega_x \sin\psi + \omega_y \cos\psi}{\omega_z - \psi_t'} = \tilde{C}, \quad \tilde{C} = \frac{-1 \mp \sqrt{1 - 8\overset{*}{C}_1}}{2\overset{*}{C}_1}, \tag{4.67}$$

η οποία και λαμβάνει τη τελική μορφή

$$\frac{\omega_z}{\cos\psi} - \frac{\psi_t'}{\cos\psi} = \frac{1}{\tilde{C}}\omega_x \tan\psi + \frac{1}{\tilde{C}}\omega_y. \tag{4.68}$$

Αν η τελευταία εξίσωση ολοκληρωθεί, τότε η γωνία κλόνισης $\theta(t)$ προσδιορίζεται από την (4.62) και η γωνία μεταπτώσεως $\varphi(t)$ υπολογίζεται από την (4.56γ).

Η (4.67) μπορεί επίσης να γραφεί ως εξής

$$\tilde{C}\omega_z - \tilde{C}\psi_t' = \omega_x \sin\psi + \omega_y \cos\psi,$$

ή ,ισοδύναμα, ως

$$\tilde{C}\omega_z - \tilde{C}\psi_t' = \omega_x \frac{2\tan\frac{\psi}{2}}{1+\tan^2\frac{\psi}{2}} + \omega_y \frac{1-\tan^2\frac{\psi}{2}}{1+\tan^2\frac{\psi}{2}}. \tag{4.69}$$

Θέτοντας

$$\tan\frac{\psi}{2} = u \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\frac{\psi}{2}}\frac{1}{2}\psi_t' = u_t' \Rightarrow \psi_t' = \frac{2u_t'}{1+u^2}, \tag{4.70}$$

η (4.69) γράφεται

$$\tilde{C}\omega_z - \tilde{C}\frac{2u_t'}{1+u^2} = \omega_x \frac{2u}{1+u^2} + \omega_y \frac{1-u^2}{1+u^2}, \tag{4.71}$$

η οποία έχει τη γενική μορφή ΣΔΕ τύπου Riccati

$$u_t' = \frac{1}{2}\left(\omega_z + \frac{\omega_y}{\tilde{C}}\right)u^2 - \frac{\omega_x}{\tilde{C}}u + \frac{1}{2}\left(\omega_z - \frac{\omega_y}{\tilde{C}}\right); \quad u = \tan\frac{\psi}{2}. \tag{4.72}$$

Η γενική μορφής της ΣΔΕ Riccati είναι

$$y_x' = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_2(x). \tag{4.73}$$

Εισάγοντας τον μετασχηματισμό

$$x = \varphi(\xi),\ y = \frac{1}{F_2}w - \frac{1}{2}\frac{F_1}{F_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{F_2}\right)_x', \tag{4.74}$$

όπου

$$F_i(\xi) = f_i(\varphi)\varphi'_\xi, \tag{4.75}$$

η (4.73) λαμβάνει την κανονική μορφής της ΣΔΕ Riccati

$$w'_\xi = w^2 + \Psi(\xi), \tag{4.76}$$

όπου

$$\Psi(\xi) = F_0F_2 - \frac{1}{4}F_1^2 + \frac{1}{2}F_1' - \frac{1}{2}F_1\frac{F_2'}{F_2} - \frac{3}{4}\left(\frac{F_2'}{F_2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{F_2''}{F_2}. \tag{4.77}$$

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω μετασχηματισμό στην (4.72) για $\varphi(\xi) = \xi$, $x = t$ και $y = u = \tan\frac{\psi}{2}$ λαμβάνουμε

$$w'_t = w^2 + \Psi(t),$$

$$\Psi(t) = \frac{1}{4}\left(-\frac{\omega_x^{\,2}}{\tilde{C}} - \frac{\omega_y^{\,2}}{\tilde{C}} + \omega_z^{\,2} - \frac{2\omega'_{x_t}}{\tilde{C}} - \frac{2\left(\omega'_{y_t} + \tilde{C}\omega'_{z_t}\right)}{\omega_y + \tilde{C}\omega_z} - \frac{3\left(\omega'_{y_t} + \tilde{C}\omega'_{z_t}\right)^2}{\left(\omega_y + \tilde{C}\omega_z\right)^2} - \frac{3\left(\omega''_{y_t} + \tilde{C}\omega''_{z_t}\right)}{\omega_y + \tilde{C}\omega_z}\right). \tag{4.78}$$

Είναι τώρα προφανές ότι η εξίσωση αυτή Riccati μπορεί να επιλυθεί ακριβώς αναλυτικά με βάση τα ήδη αναπτυχθέντα στο κεφάλαιο αυτό, εφόσον ω_x, ω_y, ω_z είναι γνωστές συναρτήσεις του χρόνου t. Τέλος, εφόσον είναι γνωστές οι εκφράσεις των $\psi(t)$ και $\theta(t)$, η $\varphi(t)$ υπολογίζεται με μια ολοκλήρωση από την τρίτη των εξισώσεων (4.48) των αρχικών εξισώσεων (εισέρχονται τρεις σταθερές ολοκλήρωσης).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Andriotaki P.N. and Panayotounakos D.E. (2005): On the general decoupling and solution of the Euler Kinematic Equantions in Rigid Body Dynamics, *Modern Problems of Deformable Bodies Mechanics,* Collection of papers, Gitutyun NASRA, Yerevan 43-51.

[2] Gradshteyn, I.S and Ryzhik I.M. (1965): *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, New York.

[3] Kamke, E. (1977): *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen,* Vol.1, B,G Teubeur, Stuttgart.

- Lagrange , R. (1938) *, Bulletin Soc. Math.* France 6, 155-163.

- Tchacaloff, L. (1925), *Ciomale Mat.* 63, 139-179.
- Kouresky, M (1926), *Proceedings London Math. Soc.* 2, 202-210.
- Mitrinovitch D. (1938), *Bulletin Sc. Math.* (2) 62, 166-171.
- Rinville,E.D (1936), *Americ. Math. Monthly* 43, 473-476.

[4] Murphy G. (1960): *Ordinary Differential Equations and their Solutions,* Litton Educational Publishing Inc.

[5] Panayotounakos D.E. and Theocaris P.S. (1990): On the decoupling and the solutions of the Euler Kinematic equations governing the motion of a gyro, *Int. Jour. of Non-linear Mech*, No4, 331-341.

[6] Panayotounakos D.E. (2005): Exact analytic solutions of unsolvable classes of first and second order nonlinear ODEs (Part I: Abel's equations), *Appl. Math. Lett.*: 18, 155-162.

[7] Polyanin, A.D. and Zaitsev V.F. (2003): *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, CRC Press, New York, Second edition.

[8] Polyanin, A.D. and Manzhirov, A.V. (2007): *Handbook of Mathematics for Engineers and Scientist*, CRC Press, New York.

[9] Targ, S. (1975): *Theoretical Mechanics, A Short, Course*, Mir Publ., Rylish Translations.

Κεφάλαιο 5

Κατασκευή της γενικής λύσης της εξίσωσης τύπου Emden-Fowler $y''_{xx} = f^n(x)\, y^m\, \left(y'_x\right)^l$ υπό παραμετρική μορφή

Βασικές βιβλιογραφικές αναφορές που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάπτυξη του κεφαλαίου είναι οι εξής: E. Kamke[7], S.P. Timoshenko and J. M. Gere[19], A.D. Polyanin and V.F. Zaitsev[18], D.E. Panayotounakos and P.S. Theocharis[13], D.E. Panayotounakos[13], Panayotounakos D. E. and Zarmpoutis[15], Panayotounakos D. E,. Zarmpoutis T. I. and C.I. Siettos[16], Panayotounakos D. E., Zarmpoutis T. I., Sotiropoulos P. and Kostogiannis[17].

Η γενική μη γραμμική εξίσωση τύπου Emden-Fowler έχει τη μορφή

$$y''_{xx} = f^n(x)\; y^m\; \left(y'_x\right)^l; \quad n, m, l = \text{τυχόντες παράμετροι,} \tag{5.1}$$

όπου f είναι αυθαίρετη λεία συνάρτηση της αντίστοιχης παραμέτρου. Στο Κεφάλαιο αυτό εξετάζονται ειδικές περιπτώσεις της εξίσωσης αυτής όσον αφορά στη δυνατότητα κατασκευής ακριβούς αναλυτικής ή παραμετρικής λύσης της.

Σημειώνουμε ότι πολλές, γνωστές μέχρι σήμερα, εξισώσεις της μαθηματικής φυσικής και της μη γραμμικής μηχανικής καταλήγουν σε εξισώσεις του τύπου (5.1).

5.1 Η εξίσωση $y''_{xx} = f^n(x)\, y^m\, (y'_x)^l$; $n, m, l =$ τυχόντες αριθμοί [16]

Θεωρούμε την εξίσωση τύπου Emden-Fowler

$$y''_{xx} = f^n(x)\, y^m\, (y'_x)^l; \quad n,\, m,\, l = \text{τυχόντες παράμετροι;} \tag{5.2}$$

$$f = \text{γνωστή λεία συνάρτηση της μεταβλητής } x.$$

Εισάγουμε τον μετασχηματισμό

$$U = f^{n-l+2} y^{m+l-1}, \tag{5.3}$$

$$z = \frac{f}{y} y'_x, \;\; y \neq 0, \tag{5.4}$$

$$-\infty < x < +\infty, \; -\infty < z < +\infty.$$

Από την (5.3) ευρίσκουμε

$$dU = f^{n-l+1} y^{m+l-1}\left[(n-l+2) f'_x + (m+l-1) f\, y^{-1} y'_x\right] dx,$$

η οποία λόγω των (5.4) και (5.3) καταλήγει στην

$$dU = \frac{U}{f}\left[(n-l+2) f'_x + (m+l-1) z\right] dx. \tag{5.5}$$

Ομοίως το ολικό διαφορικό της (5.4) οδηγεί στη σχέση

$$dz = \left(\frac{f}{y} y''_{xx} + \frac{f'_x - \frac{f}{y} y'_x}{y} y'_x \right) dx,$$

η οποία , μέσω της ίδιας της(5.3), παρέχει την εξίσωση

$$dz = \left(\frac{f}{y} y''_{xx} + \frac{f'_x - z}{f} z \right) dx. \tag{5.6}$$

Ξαναγράφοντας την (5.3) ως

$$U = f^n y^m f^{-l+2} y^{l-1}. \tag{5.7}$$

και με χρήση της (5.4), η αρχική εξίσωση (5.2) παρέχει τη νέα ισοδύναμη

$$y''_{xx} = \frac{y}{f^2} z^l U \Leftrightarrow \frac{f}{y} y''_{xx} = \frac{1}{f} z^l U .$$

Έτσι η σχέση (5.6) ξαναγράφεται ως εξής

$$dz = \left(\frac{U}{f} z^l + \frac{f'_x - z}{f} z \right) dx . \tag{5.8}$$

Τέλος, από τις (5.5) και (5.8) με διαίρεση κατά μέλη ευρίσκουμε την νέα τελική εξίσωση

$$U'_z = \frac{U\left[(n-l+2) f'_x + (m+l-1) z \right]}{U\ z^l + (f'_x - z) z}, \quad U\ z^l + (f'_x - z) z \neq 0.. \tag{5.9}$$

Θεωρούμε τώρα ότι

$$g(z) = f'_x(x) = f'_z\ z'_x, \tag{5.10}$$

όπου $g(z)$ είναι βοηθητική προσδιοριστέα συνάρτηση της μεταβλητής z. Τότε, η εξίσωση (5.9) παίρνει τη μορφή μιας εξίσωση Abel δευτέρου είδους, δηλαδή τη μορφή

$$\left(U\ z^l + \left[g(z) - z \right] z\right) U'_z = U\left[(n-l+2) g(z) + (m+l-1) z \right]. \tag{5.11}$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε στην εξίσωση (5.11) την κατασκευή Julia[7] που παρουσιάστηκε στην παράγραφο Ι.α. Η συναρτησιακή σχέση η οποία προκύπτει αν θέσουμε

$$\begin{gathered} g_1 \equiv z^l, \quad g_0 \equiv (g - z) z, \quad f_2 \equiv f_0 \equiv 0, \\ f_1 = (n-l+2) g(z) + (m+l-1) z, \end{gathered} \tag{5.12}$$

καταλήγει στη γραμμική ΣΔΕ

$$z\, g'_z + (n - 2l + 3) g = (-m - 2l + 3) z , \tag{5.13}$$

που έχει γενική λύση

$$\begin{gathered} g(z) = z^{-n+2l-3} \left[\left(\frac{-m-2l+3}{n-2l+4} \right) z + C_1 \right], \\ C_1 = \text{πρώτη σταθερά ολοκλήρωσης.} \end{gathered} \tag{5.14}$$

Τότε, η γενική λύση της (5.11) είναι

$$U = -\frac{\left[g(z) - z \right]}{z^{l-1}} \pm \sqrt{\left\{ \frac{\left[g(z) - z \right]}{z^{l-1}} \right\}^2 + C_2} . \tag{5.15}$$

Με βάση τώρα την (5.10) έχουμε

$$g = z^{-n+2l-3}\left[\left(\frac{-m-2l+3}{n-2l+4}\right)z + C_1\right] = f'_x(x) \tag{5.16}$$

η οποία, δεδομένου ότι η $f(x)$ είναι γνωστή συνάρτηση της μεταβλητής x, παρέχει τη συναρτησιακή σχέση μεταξύ z και x από την οποία προκύπτει η παραμετρική έκφραση της μεταβλητής x, δηλαδή η $x = x(z, C_1)$.

Για την πληρότητα της παρούσας ανάλυσης σημειώνεται ότι όταν

$$C_2 < -\frac{\left[g(z)-z\right]^2}{z^{2-2l}}, \tag{5.17}$$

τότε η εξίσωση (5.15) λαμβάνει τη μορφή

$$U = -\frac{\left[g(z)-z\right]}{z^{l-1}} \pm i\sqrt{-\left\{\frac{\left[g(z)-z\right]}{z^{l-1}}\right\}^2 - C_2} \tag{5.18}$$

Συγκεντρώνοντας τα παραπάνω αποτελέσματα έχουμε

$$\begin{gathered} g(z) = \frac{-m-2l+3}{n-2l+4} z^{-n+2(l-1)} + C_1 z^{-n+2l-3} = f'_x(x), \\ U(z) = -\frac{\left[g(z)-z\right]}{z^{l-1}} \pm \sqrt{\left\{\frac{\left[g(z)-z\right]}{z^{l-1}}\right\}^2 + C_2}, \end{gathered} \tag{5.19}$$

$$C_1;\ C_2 = \text{σταθερές ολοκλήρωσης},$$

$$f(x) = \text{γνωστή πραγματική συνάρτηση του } x,$$

$$x = x(z, C_1) = \text{γνωστή συνάρτηση του } -\infty < x < +\infty,\ -\infty < z < +\infty.\ z.$$

Γράφουμε τώρα, μέσω της (5.19), και τη σχέση

$$g'_x = g'_z\, z'_x = f''_{xx}(x) \Leftrightarrow z'_x = \frac{f''_{xx}}{g'_z}, \tag{5.20}$$

δηλαδή την

$$z'_x = \frac{f''_{xx}}{\dfrac{(-m-2l+3)(-n+2l-2)}{(n-2l+4)} z^{-n+2l-3} + C_1(-n+2l-3) z^{-n+2l-4}}. \tag{5.21}$$

Από την πρώτη των (5.19) έχουμε τη μεταβλητή x συναρτήσει της παραμέτρου z, δηλαδή την $x = x(z, C_1)$. Απομένει ο προσδιορισμός της μεταβλητής y συναρτήσει της z για να πετύχουμε μια ακριβή παραμετρική λύση του υπό θεώρηση προβλήματος. Από τις εξισώσεις (5.4) και (5.3) ευρίσκουμε

$$y'_x = \frac{z}{f(x)} y \; ;$$
$$U'_x = U'_z \; z'_x = (n-l+2) f^{n-l+1} f'_x \, y^{m+l-1} + f^{n-l+2}(n+l-1)\, y^{m+l-2} y'_x, \tag{5.22}$$

ή, εισάγοντας την y'_x στην δεύτερη των εξισώσεων αυτών, εξάγουμε τη σχέση

$$\frac{U'_z}{\left[(n-l+2) f'_x + (m+l-1) z\right] f(x)^{n-l+1}} z'_x = y^{n+l-1}, \tag{5.23}$$

όπου η z'_x δίνεται από την (5.21), και η $x = x(z, C_1)$ από τις (5.19), ενώ

$$U'_z = \frac{(g'_z - 1) - (l-1)(g-z)}{z^{l-1}} \left[-1 \pm \frac{\dfrac{g-z}{z^{l-1}}}{\sqrt{\left(\dfrac{g-z}{z^{l-1}}\right)^2 + C_2}} \right],$$
$$g'_z = \frac{(-m-2l+3)(-n+2l-2)}{(n-2l+4)} z^{-n+2l-3} + (n-2l+3) C_1 z^{-n+2l-4}, \tag{5.24}$$
$$x = x(z, C_1).$$

Οι (5.19), (5.22) και (5.24) δίνουν την παραμετρική λύση του υπό εξέταση προβλήματος με παράμετρο την z και C_1, C_2 σταθερές ολοκληρώσης.

Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι αν η τριαδική διάταξη $\{n, m, l\}$ έχει τιμές των εκθετών n, m, l έτσι ώστε η εξίσωση (5.16) να είναι επιλύσιμη ως προς z, τότε γράφουμε $z = P(x, C_1)$ και η δεύτερη των (5.19) παρέχει την $U = Q(x, C_1, C_2)$. Ομοίως, η δεύτερη των (5.22) παρέχει την $U'_x = Q'_x(x, C_1, C_2)$ και η εξίσωση (5.23) γράφεται

$$\frac{Q'_x(x, C_1, C_2)_z}{\left[(n-l+2) f'_x + (m+l-1) P(x, C_1)\right] f(x)^{n-l+1}} = y^{n+l-1}, \tag{5.25}$$

που αποτελεί τη γενική αναλυτική λύση της υπό θεώρηση εξίσωσης Emden-Fowler $y''_{xx} = f^n(x)\, y^m\, (y'_x)^l$ σε κανονική μορφή.

Είναι τώρα προφανές ότι η παραπάνω παραμετρική λύση μπορεί να εφαρμοστεί σε περισσότερες ακόμη περιπτώσεις εξισώσεων τύπου Emden-Fowler όπως είναι η μη γραμμικής ΣΔΕ τύπου Emden-Fowler.

Αναλυτικά, για τριάδα εκθετών $\{n, m, l\} = \{n, m, 0\}$ η οποία αφορά την περίπτωση της μη γραμμικής ΣΔΕ τύπου Emden-Fowler,

$$y''_{xx} = f^n(x)\, y^m. \tag{5.26}$$

Στην περίπτωση αυτή οι παραμετρικές εκφράσεις των λύσεων τους είναι οι κάτωθι:

i) από τις εξισώσεις (5.19)

$$\begin{gathered} g(z) = \frac{-m+3}{n+4} z^{-n-2} + C_1 z^{-n-3} \\ U(z) = -\frac{\left[g(z)-z\right]}{z^{-1}} \pm \sqrt{\left\{\frac{\left[g(z)-z\right]}{z^{-1}}\right\}^2 + C_2}, \end{gathered} \tag{5.27}$$

ii) Από τις εξισώσεις (5.22)

$$\begin{gathered} y'_x = \frac{z}{f(x)} y\ ; \\ U'_x = (n+2) f^{n+1} f'_x\, y^{m-1} + f^{n+2}(n-1)\, y^{m-2} y'_x, \end{gathered} \tag{5.28}$$

iii) Από τις εξισώσεις (5.24)

$$\begin{gathered} g'_z = \frac{(-m+3)(-n-2)}{(n+4)} z^{-n-3} + (n+3) C_1 z^{-n-4}, \\ x = x(z, C_1). \end{gathered} \tag{5.29}$$

5.2 Η εξίσωση «Λευκών Νάνων» (White-Dwarf; εξίσωση Chandrasekhar [1939]) [15]

Με βάση τη γενική θεωρία σχετικότητας ο S. Chandrasekhar[2] διατύπωσε το 1939 τη γενική εξίσωση των άστρων «Λευκών Νάνων», που αφορά στη μηχανική ισορροπία ενός αστέρα στην ειδική περίπτωση της μετάπτωσής του σε μέλανα νάνο, δηλαδή σε αστέρα νετρονίων, στην διατήρηση του, ή στην μετατροπή του σε super nova. Η μη γραμμική ΣΔΕ που διέπει αυτό το πρόβλημα έχει τη μορφή

$$y''_{xx} + \frac{2}{x} y'_x + \left(y^2 - C\right)^{3/2} = 0;\ C = \text{σταθερά}\left(C \in [0,1]\right), \tag{5.30}$$

με αρχική συνθήκη

$$y(0) = 1, \quad y'_x(0) = 0; \quad 0 \le x < +\infty. \tag{5.31}$$

Μόνο λύσεις με αριθμοσειρές στην περιοχή της αρχής έχουν μέχρι σήμερα δοθεί για την εξίσωση αυτή από τον ίδιο τον διατυπώσαντα αυτήν.

Με τη χρήση του μετασχηματισμού

$$y(x)=\eta(\xi), \quad \xi=\frac{1}{x}, \tag{5.32}$$

η (5.30) μεταπίπτει στην

$$\eta''_{\xi\xi}=-\xi^{-4}\left(\eta^2-c\right)^{3/2}, \quad -\infty<\xi\le 0, \tag{5.33}$$

και η οποία, λόγω του ότι ισχύει

$$\eta'_{\xi}=\frac{1}{\xi'_{\eta}}, \tag{5.34}$$

καταλήγει στην μορφή της γενικευμένης εξίσωση τύπου Emden-Fowler

$$\xi''_{nn}=\left(\eta^2-c\right)^{3/2}\xi^{-4}\left(\xi'_{\eta}\right)^3, \tag{5.35}$$

ή ισοδύναμα στην μορφή

$$\xi''_{nn}=\left(\eta^2-c\right)^{n}\xi^{m}\left(\xi'_{\eta}\right)^{l}, \qquad \{n,\ m,\ l\}=\left\{\frac{3}{2},\ -4,\ 3\right\}. \tag{5.36}$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η εξίσωση “White-Dwatf” καταλήγει σε μια γενικευμένη εξίσωση τύπου Emden-Fowler την (5.36), δηλαδή μια εξίσωση της μορφής

$$y''_{xx}=-\left(x^2-C\right)^{3/2}y^{-4}\left(y'_x\right)^3. \tag{5.37}$$

Με τα αναπτυχθέντα στην προηγούμενη παράγραφο 5.1 υπολογίζουμε

$$\begin{gathered}
f(x)=-\left(x^2-C\right), \quad f'_x=-2x, \quad f''_{xx}=-2,\\
g(z)=-2z^{5/2}+C_1z^{3/2}, \ g'_z=-5z^{3/2}+\frac{3C_1}{2}z^{1/2},\\
U(z)=\left(z^{-1}-Cz^{-1/2}+2z^{1/2}\right)\pm\sqrt{\left(z^{-1}-Cz^{-1/2}+2z^{1/2}\right)^2+C_2}, \\
U'_z=\left(z^{-2}+\frac{C}{2}z^{-3/2}+z^{-1/2}\right)\left[1\pm\frac{1}{\sqrt{\left(z^{-1}-Cz^{-1/2}+2z^{1/2}\right)^2+C_2}}\right].
\end{gathered} \tag{5.38}$$

Έτσι, η πρώτη των εξισώσεων (5.19) παρέχει την

$$-2z^{5/2}+C_1z^{3/2}=-2x, \tag{5.39}$$

δηλαδή την παραμετρική έκφραση της $x=x\left(z,C_1\right)$ ως εξής

$$x=z^{5/2}-\frac{C_1}{2}z^{3/2},\quad z=\text{παράμετρος}. \tag{5.40}$$

Επίσης, η εξίσωση (5.23) παρέχει την $y=y\left(z,C_1,C_2\right)$ ως κάτωθι

$$y^{\frac{7}{2}}=\frac{U_z'}{\left(-x-2z\right)\left(x^2-C\right)^{-1/2}}z_x',$$

ή, βάσει της (5.38), ως κάτωθι

$$y^{\frac{7}{2}}=-\frac{U_z'\sqrt{C-\left(z^{5/2}-\frac{C_1}{2}z^{3/2}\right)^2}}{z^{5/2}-\frac{C_1}{2}z^{3/2}+2z}\frac{f_{xx}''}{g_z'}. \tag{5.41}$$

Τέλος, αντικαθιστώντας τις f_{xx}' και g_z' και από τις (5.38) ευρίσκουμε

$$\begin{gathered}y^{\frac{7}{2}}=2\frac{\sqrt{C-\left(z^{5/2}-\frac{C_1}{2}z^{3/2}\right)^2}}{\left(z^{5/2}-\frac{C_1}{2}z^{3/2}+2z\right)\left(5z^{3/2}+\frac{3C_1}{2}z^{1/2}\right)}U_z',\\ U_z'=\left(z^{-2}+\frac{C}{2}z^{-3/2}+z^{-1/2}\right)\left[1\pm\frac{1}{\sqrt{z^{-1}-Cz^{-1/2}+2z^{1/2}+C_2}}\right].\end{gathered} \tag{5.42}$$

Οι εξισώσεις (5.40) και (5.42) περιέχουσες δυο σταθερές ολοκλήρωσης C_1; C_2 και την σταθερά C της εξίσωσης “White – Dwarf”, αποτελούν την παραμετρική λύση της εξίσωσης (5.37). Επομένως, η παραμετρική λύση της εξίσωσης (5.36) γράφεται

$$\begin{gathered}\eta=z^{5/2}-\frac{C_1}{2}z^{3/2},\\ \xi^{\frac{7}{2}}=2\frac{\sqrt{C-\left(z^{5/2}-\frac{C_1}{2}z^{3/2}\right)^2}}{\left(z^{5/2}-\frac{C_1}{2}z^{3/2}+2z\right)\left(5z^{3/2}+\frac{3C_1}{2}z^{1/2}\right)}F\left(z\right),\quad C\geq z^{5/2}-\frac{C_1}{2}z^{3/2},\end{gathered} \tag{5.43}$$

$$F(z)=\left(z^{-2}+\frac{C}{2}z^{-3/2}+z^{-1/2}\right)\left[1\pm\frac{1}{\sqrt{z^{-1}-Cz^{-1/2}+2z^{1/2}+C_2}}\right];$$

$$z=\text{παράμετρος}\,.$$

Τέλος, μέσω της αντικατάστασης (5.34) και τον παραμετρικό μετασχηματισμό (5.32) η παραμετρική λύση της αρχικής εξίσωσης (5.30) (με παράμετρο z) και για πραγματικές μεταβλητές y, x, z προκύπτει ως εξής

$$y=z^{5/2}-\frac{C_1}{2}z^{3/2},$$

$$x=\frac{\left(z^{5/2}-\frac{C_1}{2}z^{3/2}+2z\right)^{\frac{2}{7}}\left(5z^{3/2}+\frac{3C_1}{2}z^{1/2}\right)^{\frac{2}{7}}}{\left[C-\left(z^{5/2}-\frac{C_1}{2}z^{3/2}\right)^2\right]^{\frac{1}{7}}F(z)};$$

$$F(z)=\left(z^{-2}+\frac{C}{2}z^{-3/2}+z^{-1/2}\right)\left[1\pm\frac{1}{2\sqrt{z^{-1}-Cz^{-1/2}+2z^{1/2}+C_2}}\right]; \qquad (5.44)$$

$$C\geq z^{5/2}+\frac{C_1}{2}z^{3/2},\qquad 5z^{3/2}+\frac{3C_1}{2}z^{1/2}>0,$$

$$z^{-2}+\frac{C}{2}z^{-3/2}+z^{-1/2}\geq 0,\quad z^{-1}-Cz^{-1/2}+2z^{1/2}+C_2>0$$

$$C_{1,}\ C_2=\text{σταθερές ολοκλήρωσης;}$$

$$z=\text{παράμετρος}\quad 0\leq x\leq +\infty$$

5.3 Μεγάλες γεωμετρικές ελαστικές παραμορφώσεις λυγιζόμενων ράβδων υπό ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο (1770-1773) [9]

Το πρόβλημα του γραμμικού λυγισμού ευθείας πρισματικής δοκού-υποστηλώματος υπο την ενέργεια του ιδίου βάρους αρχικά εξετάστηκε από τον Euler ο οποίος όμως δεν κατέληξε σε αρκετά ικανοποιητική λύση. Το εν λόγω θέμα λύθηκε από τον Greenhill[3]. Αρκετά προβλήματα γραμμικού λυγισμού Βιβλ. [12] μπορούν να επιλυθούν με τη χρήση των συναρτήσεων Bessel. Έτσι το συγκεκριμένο πρόβλημα του γραμμικού λυγισμού ράβδου υπό την ενέργεια του ίδιου βάρους της επιλύθηκε πλήρως από τους Jasinsky[6], Dondorff[3] και Timoshenko και Gere[19]. Από την άλλη μεριά, το πρόβλημα του μη γραμμικού λυγισμού (γεωμετρικά μεγάλων ελαστικών παραμορφώσεων -πρόβλημα “elastica”) μιας δοκού αρχικά επιλύθηκε από τον Love[10].

Η λύση που προσδιορίστηκε εφαρμόζοντας το θεώρημα του κινητικού αναλόγου του Kirchhoff[8], το οποίο ισοδυναμεί με αυτό μιας ράβδου προβόλου υπό ακραία φόρτιση εκ δυνάμεων και ροπών. Τέλος, αναλυτικές λύσεις του προβλήματος γεωμετρικά μεγάλων παραμορφωμένων ράβδων υπό την επήρεια ομοιόμορφων κατανεμημένων φορτίων παρέχονται στην Βιβλ. [12]. Μια τέτοια δοκός- υποστύλωμα απεικονίζεται στο Σχήμα 5.1.

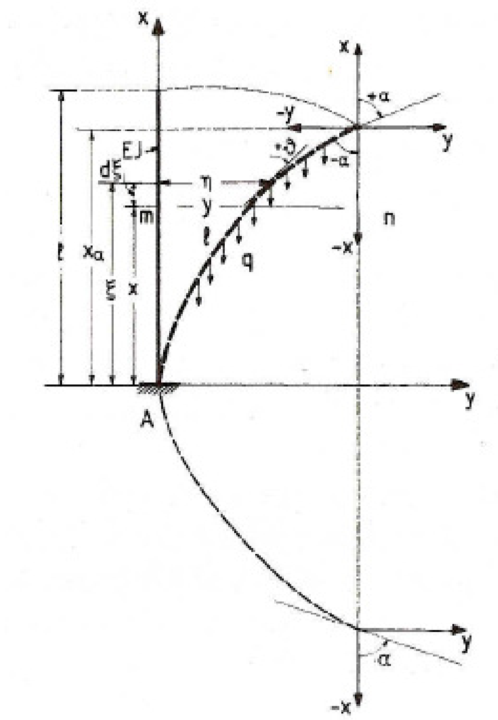
Έχει ήδη αποδειχθεί[12] ότι το πρόβλημα των γεωμετρικά μεγάλων ελαστικών παραμορφώσεων του υποστυλώματος του Σχήματος 5.1 δίνεται από τη μη γραμμική ΣΔΕ δεύτερης τάξης

$$y''_{xx} = A\sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}}\,y^{-\frac{1}{2}}; \quad y \neq 0, \quad x \in [0,1), \quad A > 0, \tag{5.45}$$

που είναι τύπου γενικευμένης εξίσωσης Emden-Fowler με τριάδα δεικτών

$$\{n,\, m,\, l\} = \left\{\frac{1}{2},\, -\frac{1}{2},\, 0\right\} \text{ και } f(x) = \frac{x^2}{(1-x^2)}; \tag{5.46}$$

εδώ A παριστάνει κατάλληλο συντελεστή ώστε η (5.45) να είναι σε αδιαστατοποιημένη μορφή.



Σχήμα 5.1 Γεωμετρία και σήμανση υποστυλώματος

Σύμφωνα με τα αναπτυχθέντα στην παράγραφο 5.2 μορφώνουμε τις αντίστοιχες των (5.38) εξισώσεις, δηλαδή τις εξισώσεις

$$f(x)=\sqrt{A}\,\frac{x^2}{1-x^2},\quad f'_x=2\sqrt{A}\,\frac{x}{\left(1-x^2\right)^2},\quad f''_{xx}=2\sqrt{A}\,\frac{1+3x^2}{\left(1-x^2\right)^3},$$

$$g(z)=\frac{7}{9}z^{-5/2}+C_1z^{-7/2},\quad g'_z=-\frac{35}{18}z^{-7/2}-\frac{7}{2}C_1z^{-9/2}, \tag{5.47}$$

$$U(z)=-\left(\frac{7}{9}z^{-3/2}+C_1z^{-5/2}-z^2\right)\pm\sqrt{\left(\frac{7}{9}z^{-3/2}+C_1z^{-5/2}-z^2\right)^2+C_2},$$

$$U'_z(z)=\left(\frac{21}{18}z^{-5/2}+\frac{5}{2}z^{-7/2}+2z\right)\left[1\pm\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{7}{9}z^{-3/2}+C_1z^{-5/2}-z^2\right)^2+C_2}}\right].$$

Συνεπώς, από την πρώτη των εξισώσεων (5.19) υπολογίζουμε

$$2\sqrt{A}\,\frac{x}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{9}{5z^{-5/2}+9C_1z^{-7/2}}, \tag{5.48}$$

εκ της οποίας προκύπτει η πρώτη μεταβλητή $x(z,C_1)$ με παράμετρο z.
Τώρα η δεύτερη μεταβλητή y προκύπτει από την εξίσωση (5.23) σε συνδυασμό με τις (5.47), δηλαδή

$$y^{-1/2}=\frac{2\left(-1+x^2\right)^{-1/2}U'_Z}{A^{3/4}x^3\left[10A^{1/2}x-3\left(-1+x^2\right)^2z\right]}z'_x, \tag{5.49}$$

όπου $z'_x=\dfrac{f''_{xx}}{g'_z}$, δηλαδή

$$z'_x=\frac{36\sqrt{A}\left(1+3x^2\right)z^{9/2}}{7\left(-1+x^2\right)^3\left(9C_1+5z\right)}. \tag{5.50}$$

Συνεπώς, η παραμετρική λύση της μη γραμμικής ΣΔΕ (5.45) που λύνει το παραπάνω πρόβλημα είναι

$$2\sqrt{A}\,\frac{x}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{9}{5z^{-5/2}+9C_1z^{-7/2}},$$

$$y^{-1/2}=\frac{72\left(1+3x^2\right)z^{9/2}}{7A^{2/4}x^3\left[10A^{1/2}x-3\left(-1+x^2\right)^2z\right]\left(-1+x^2\right)^{7/2}\left(9C_1+5z\right)}U'_Z; \tag{5.51}$$

$$U'_z(z)=\left(\frac{21}{18}z^{-5/2}+\frac{5}{2}z^{-7/2}+2z\right)\left[1\pm\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{7}{9}z^{-3/2}+C_1z^{-5/2}-z^2\right)^2+C_2}}\right];$$

$$C_{1,}\ C_2=\text{σταθερές ολοκλήρωσης;}\quad z=\text{παράμετρος.}$$

Τονίζεται ότι η απαλοιφή της εισαγόμενης παραμέτρου z από αμφότερες τις παραμετρικές λύσεις ((5.51)α) και ((5.51)β) οδηγεί στην διατύπωση της ακριβούς αναλυτικής λύσης του υπό εξέταση προβλήματος.

5.4 Η μονοδιάστατη και μονοπαραμετρική εξίσωση Schrödinger με τύπο $y''_{xx}+\frac{\lambda}{x}y'_x - y + y^3 = 0$

Η μονοδιάστατη εξίσωση Schrödinger είναι:

$$\begin{aligned}&y''_{xx}+\frac{d-1}{x}y'_x-y+y^3=0;\\&d=\text{ακέραιος}\geq 1,\qquad x>0.\end{aligned}\tag{5.52}$$

Θέτοντας

$$\lambda=d-1,\ \lambda\geq 0,\tag{5.53}$$

η (5.52) γράφεται ως μονοδιάστατη αξονοσυμμετρική εξίσωση Schrödinger (NLS) με παράμετρο $\lambda\geq 0$, δηλαδή

$$y''_{xx}+\frac{\lambda}{x}y'_x-y+y^3=0,\quad \frac{\lambda}{x}\geq 0,\quad 0<x<+\infty.\tag{5.54}$$

Α. Η περίπτωση $\lambda = 0, d = 1$

Όταν $\lambda=0$ και συνεπώς λόγω της εξίσωσης (5.53), $d=1$, η εξίσωση (5.54) γράφεται

$$y''_{xx}-y+y^3=0;\ x>0,\ -\infty<y<+\infty,\tag{5.55}$$

δηλαδή λαμβάνει τη μορφή της εξίσωσης Duffing (μη γραμμικών ταλαντωτών) χωρίς απόσβεση.

Με την αντικατάσταση

$$y'_x=P(y)\Leftrightarrow y''_{xx}=\left(y'_x\right)'_x=\left(P\right)'_x=P'_y\ y'_x=P'_y\ P,\tag{5.56}$$

η εξίσωση (5.55) γίνεται

$$P'_y P - y + y^3 = 0, \quad -\infty < y < +\infty, \tag{5.57}$$

η οποία καταλήγει στη διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών

$$P\ dP = \left(y - y^3\right)dy, \quad -\infty < y < +\infty. \tag{5.58}$$

Το ενδιάμεσο ολοκλήρωμα της τελευταίας (το οποίο ονομάζεται και πρώτο ολοκλήρωμα) στο επίπεδο των φάσεων γράφεται

$$\frac{P^2}{2} = \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right) + C_1, \quad -\infty < y < +\infty, \\ C_1 = \text{σταθερά ολοκλήρωσης}, \tag{5.59}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{-\frac{y^4}{2} + y^2 + 2C_1}, \tag{5.60}$$

ή, τέλος, ισοδύναμα

$$\int \frac{dy}{\sqrt{-y^4 + 2y^2 + C_1^*}} = C_2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x, \qquad x > 0, \quad -\infty < y < +\infty, \\ C_1^* = 4\ C_1,\ C_2 = \text{σταθερά ολοκλήρωσης}. \tag{5.61}$$

Για την πληρότητα της παραπάνω ανάλυσης απαιτείται η διερεύνηση του είδους των ριζών της διετετράγωνης αλγεβρικής εξίσωσης

$$y^4 - 2y^2 - C_1^* = 0. \tag{5.62}$$

της οποίας οι λύσεις είναι

$$y = \pm\sqrt{1 \pm \sqrt{1 + C_1^*}}, \tag{5.63}$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις[1]:

1. **Περίπτωση α : $\mathbf{1 + C_1^* > 0}$**

   Στη περίπτωση αυτή από την (5.63) διακρίνουμε τις υποπεριπτώσεις

   $\alpha.1$ $1 + \sqrt{1 + C_1^*} > 0$ και $1 - \sqrt{1 + C_1^*} > 0$

   $\alpha.2$ $1 + \sqrt{1 + C_1^*} > 0$ και $1 - \sqrt{1 + C_1^*} < 0$

   Υποπερίπτωση α.1

   Αν $1 + C_1^* > 0$ και $1 + \sqrt{1 + C_1^*} > 0$, $1 - \sqrt{1 + C_1^*} > 0$, τότε η εξίσωση (5.62) έχει τέσσερεις ρίζες πραγματικές, δηλαδή, τις:

$$
\begin{aligned}
&a = \sqrt{1+\sqrt{1+C_1^*}}, \quad b = \sqrt{1-\sqrt{1+C_1^*}}, \\
&c = -\sqrt{1-\sqrt{1+C_1^*}}, \; d = -\sqrt{1+\sqrt{1+C_1^*}},
\end{aligned} \tag{5.64}
$$

όπου $a > b > c > d$.

Στην υποπερίπτωση αυτή το ολοκλήρωμα (5.61) δίνεται από τις σχέσεις

α.1.1. Όταν $a > b > c > d > y$ τότε [βιβλ. 1 σελ. 98 σχέση 251]

$$
\int_y^d \frac{dt}{\sqrt{(a-t)(b-t)(c-t)(d-t)}} = g\int_0^{u_1} du = g\,u_1 = g\,sn^{-1}(\sin\varphi, k),
$$

δηλαδή

$$
g\,F(\varphi, k) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_2, \qquad x > 0\,, \tag{5.65}
$$

όπου

$$
\begin{aligned}
&k^2 = \frac{(b-c)(a-d)}{(a-c)(b-d)}, \qquad g = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-a)}}, \\
&\alpha^2 = \frac{a-d}{a-c} > 1, \qquad sn^2 u = \frac{(a-c)(d-t)}{(a-d)(c-t)}, \\
&\varphi = am\,u_1 = \sin^{-1}\sqrt{\frac{(a-c)(d-y)}{(a-d)(c-y)}}, \qquad sn\,u_1 = \sin\varphi.
\end{aligned} \tag{5.66}
$$

α.1.2. Όταν $a > b > c \geq y > d$ τότε [βιβλ. 1 σελ. 103 σχέση 252]

$$
\int_d^y \frac{dt}{\sqrt{(a-t)(b-t)(c-t)(t-d)}} = g\int_0^{u_1} du = g\,u_1 = g\,sn^{-1}(\sin\varphi, k)
$$

δηλαδή

$$
g\,F(\varphi, k) = \pm x + C_2, \quad x > 0, \tag{5.67}
$$

όπου:

$$
\begin{aligned}
&k^2 = \frac{(a-b)(c-d)}{(a-c)(b-d)}, \; g = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}, \\
&\alpha^2 = \frac{d-c}{a-c} < 0, \qquad sn^2 u = \frac{(a-c)(t-d)}{(c-d)(a-t)}, .
\end{aligned} \tag{5.68}
$$

$$\varphi = am u_1 = \sin^{-1}\sqrt{\frac{(a-c)(y-d)}{(c-d)(a-y)}},\ sn u_1 = \sin\varphi$$

α.1.3. Όταν $a > b > c > y \geq d$ τότε [βιβλ. 1 σελ. 107 σχέση 253]

$$\int_y^c \frac{dt}{\sqrt{(a-t)(b-t)(c-t)(t-d)}} = g\int_0^{u_1} du = g\,u_1 = g\,sn^{-1}(\sin\varphi, k)$$

δηλαδή

$$g\,F(\varphi,k) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pm x + C_2, \quad x > 0, \tag{5.69}$$

όπου:

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{(a-b)(c-d)}{(a-c)(b-d)},\ g = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}, \\ \alpha^2 &= \frac{c-d}{b-d} < 1, \quad sn^2 u = \frac{(a-c)(t-d)}{(c-d)(a-t)}, \end{aligned} \tag{5.70}$$

$$\varphi = am u_1 = \sin^{-1}\sqrt{\frac{(b-d)(c-y)}{(c-d)(b-y)}}, \quad sn u_1 = \sin\varphi.$$

α.1.4. Όταν $a > b \geq y > c > d$ τότε [βιβλ. 1 σελ. 112 σχέση 254]

$$\int_y^c \frac{dt}{\sqrt{(a-t)(b-t)(t-c)(t-d)}} = g\int_0^{u_1} du = g\,u_1 = g\,sn^{-1}(\sin\varphi, k)$$

δηλαδή

$$g\,F(\varphi,k) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_2, \quad x > 0, \tag{5.71}$$

όπου:

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{(b-c)(a-d)}{(a-c)(b-d)},\ g = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}, \\ 0 < \alpha^2 &= \frac{b-c}{b-d} < k^2, \quad sn^2 u = \frac{(b-d)(t-c)}{(b-c)(t-d)}, \\ \varphi &= am u_1 = \sin^{-1}\sqrt{\frac{(b-d)(y-c)}{(b-c)(y-d)}}, \quad sn u_1 = \sin\varphi. \end{aligned} \tag{5.72}$$

α.1.5. Όταν $a > b > y \geq c > d$ τότε [βιβλ. 1 σελ. 116 σχέση 255]

$$\int_y^b \frac{dt}{\sqrt{(a-t)(b-t)(t-c)(t-d)}} = g\int_0^{u_1} du = g\,u_1 = g\,sn^{-1}(\sin\varphi, k)$$

δηλαδή

$$g\,F(\varphi,k) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_2, \quad x > 0, \tag{5.73}$$

όπου:

$$k^2 = \frac{(b-c)(a-d)}{(a-c)(b-d)}, \; g = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}},$$

$$0 < \alpha^2 = \frac{b-c}{a-c} < k^2, \quad sn^2 u = \frac{(a-c)(b-t)}{(b-c)(a-t)}, \tag{5.74}$$

$$\varphi = am\,u_1 = \sin^{-1}\sqrt{\frac{(a-c)(b-y)}{(b-c)(a-y)}}, \; sn\,u_1 = \sin\varphi.$$

α.1.6. Όταν $a \geq y > b > c > d$ τότε [βιβλ. 1 σελ. 120 σχέση 256]

$$\int_b^y \frac{dt}{\sqrt{(a-t)(t-b)(t-c)(t-d)}} = g\int_o^{u_1} du = g\,u_1 = g\,sn^{-1}(\sin\varphi, k),$$

δηλαδή

$$g\,F(\varphi,k) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_2, \quad x > 0, \tag{5.75}$$

όπου:

$$k^2 = \frac{(a-b)(c-d)}{(a-c)(b-d)}, \; g = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}},$$

$$k^2 < \alpha^2 = \frac{a-b}{a-c} < 1, \; sn^2 u = \frac{(a-c)(t-b)}{(a-b)(t-c)}, \tag{5.76}$$

$$\varphi = am\,u_1 = \sin^{-1}\sqrt{\frac{(a-c)(y-b)}{(a-b)(y-c)}}, \; sn\,u_1 = \sin\varphi.$$

α.1.7. Όταν $a > y \geq b > c > d$ τότε [βιβλ. 1 σελ. 124 σχέση 257]

$$\int_y^a \frac{dt}{\sqrt{(a-t)(t-b)(t-c)(t-d)}} = g\int_0^{u_1} du = g\,u_1 = g\,sn^{-1}(\sin\varphi, k),$$

$$g\,F(\varphi,k) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_2, \quad x>0, \tag{5.77}$$

όπου:

$$k^2 = \frac{(a-b)(c-d)}{(a-c)(b-d)},\ g = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}},$$

$$\alpha^2 = \frac{b-a}{b-d} < 0,\ sn^2u = \frac{(b-d)(a-t)}{(a-b)(t-d)}, \tag{5.78}$$

$$\varphi = am\,u_1 = \sin^{-1}\sqrt{\frac{(b-d)(a-y)}{(a-b)(y-d)}},\ sn\,u_1 = \sin\varphi.$$

α.1.8. Όταν $y > a > b > c > d$ τότε [βιβλ. 1 σελ. 128 σχέση 258]

$$\int_a^y \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)}} = g\int_0^{u_1} du = g\,u_1 = g\,sn^{-1}(\sin\varphi, k)$$

δηλαδή

$$g\,F(\varphi,k) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_2, \quad x>0, \tag{5.79}$$

όπου:

$$k^2 = \frac{(b-c)(a-d)}{(a-c)(b-d)},\ g = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}},$$

$$\alpha^2 = \frac{a-d}{b-d} > 1,\ sn^2u = \frac{(b-d)(t-a)}{(a-d)(t-b)}, \tag{5.80}$$

$$\varphi = am\,u_1 = \sin^{-1}\sqrt{\frac{(b-d)(y-a)}{(a-d)(y-b)}},\ sn\,u_1 = \sin\varphi.$$

Υποπερίπτωση α.2

Αν $1+C_1^* > 0$ και $1+\sqrt{1+C_1^*} > 0$, $1-\sqrt{1+C_1^*} < 0$, τότε η εξίσωση (5.62) έχει δυο ρίζες πραγματικές (a,b) και δυο ρίζες μιγαδικές συζυγείς $(c,\bar{c})$. Συνεπώς με βάση την εξίσωση (5.63), οι ρίζες της (5.62) είναι

$$a=\sqrt{1+\sqrt{1+C_1^*}},\quad b=-\sqrt{1+\sqrt{1+C_1^*}},$$
$$c=i\sqrt{\left|1-\sqrt{1+C_1^*}\right|},\ \bar{c}=-i\sqrt{\left|1-\sqrt{1+C_1^*}\right|}, \tag{5.81}$$

όπου $a>b$.

Στην υποπερίπτωση αυτή το ολοκλήρωμα (5.61) δίνεται από

α.2.1. Όταν $a\geq y>b$ τότε [βιβλ.1 σελ. 133 σχέση 259]

$$\int_a^y \frac{dt}{\sqrt{(a-t)(t-b)(t-c)(t-\bar{c})}} = g\int_0^{u_1} du = g\,u_1 = g\,cn^{-1}(\cos\varphi,k),$$

δηλαδή

$$g\,F(\varphi,k)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_2, \tag{5.82}$$

$x>0,\qquad C_2=$ νέα σταθερά ολοκλήρωσης,

όπου:

$$\sqrt{(a-t)(t-b)(t-\bar{c})}=\sqrt{(a-t)(t-b)\left[(t-b_1)^2+a_1^2\right]},$$

$$b_1=\frac{c+\bar{c}}{2},\ a_1^2=-\frac{c-\bar{c}}{4},\ cnu=\frac{(a-t)B-(t-b)A}{(a-t)B+(t-b)A},$$
$$A^2=(a-b_1)^2+a_1^2,\ B^2=(b-b_1)^2+a_1^2,\ g=\frac{1}{\sqrt{AB}},$$
$$k^2=\frac{(a-b)^2+(A-B)^2}{4AB},\quad cnu_1=\cos\varphi, \tag{5.83}$$
$$\varphi=amu_1=\cos^{-1}\left[\frac{(a-y)B-(y-b)A}{(a-y)B+(y-b)A}\right].$$

α.2.2. Όταν $b<a<y<\infty$ τότε [βιβλ.1 σελ. 135 σχέση 260]

$$\int_a^y \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)(t-\bar{c})}} = g\int_0^{u_1} du = g\,u_1 = g\,cn^{-1}(\cos\varphi,k),$$

δηλαδή

$$g\,F(\varphi,k)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_2, \tag{5.84}$$

$x>0,\quad C_2=$νέα σταθερά ολοκλήρωσης,

όπου:

$$\sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)(t-\bar{c})}=\sqrt{(a-t)(t-b)\left[(t-b_1)^2+a_1^{2}\right]},$$

$$b_1=\frac{c+\bar{c}}{2},\; a_1^2=-\frac{(c-\bar{c})^2}{4},\; A^2=(a-b_1)^2+a_1^2,$$

$$B^2=(b-b_1)^2+a_1^2,\; g=\frac{1}{\sqrt{AB}},$$

$$k^2=\frac{(A+B)^2-(a-b)^2}{4AB},$$

$$cnu=\frac{(t-b)A-B(t-a)}{(t-b)A+B(t-a)},\quad cnu_1=\cos\varphi, \tag{5.85}$$

$$\varphi=amu_1=\cos^{-1}\left[\frac{(A-B)y+aB-bA}{(A+B)y-aB-bA}\right].$$

2. Περίπτωση β : $1+C_1^*<0$

Αν $1+C_1^*<0$ τότε $\sqrt{1+C_1^*}=i\sqrt{|1+C_1^*|}$, και επομένως η εξίσωση (5.62) έχει τέσσερεις μιγαδικές ρίζες ανά δύο συζυγείς, δηλαδή τις

$$\begin{aligned}a&=\sqrt{1+i\sqrt{|1+C_1^*|}},\quad \bar{a}=\sqrt{1-i\sqrt{|1+C_1^*|}},\\ c&=-\sqrt{1-i\sqrt{|1+C_1^*|}},\quad \bar{c}=-\sqrt{1+i\sqrt{|1+C_1^*|}},\end{aligned} \tag{5.86}$$

Στην υποπερίπτωση αυτή το ολοκλήρωμα (5.61) δίνεται από [βιβλ.1 σελ. 146 σχέση 267]

$$\int_a^y\frac{dt}{\sqrt{(t-a)(t-\bar{a})(t-c)(t-\bar{c})}}=g\int_0^{u_1}du=g\,u_1=g\,tn^{-1}(\tan\varphi,k),$$

δηλαδή

$$g\,F(\varphi,k) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_2, \tag{5.87}$$

$x>0,\quad C_2 =$ νέα σταθερά ολοκλήρωσης,

όπου:

$$\sqrt{(t-a)(t-\bar{a})(t-c)(t-\bar{c})} = \sqrt{\left[(t-b_1)^2 + a_1{}^2\right]\left[(t-b_2)^2 + a_2{}^2\right]},$$

$$b_1 = \frac{a+\bar{a}}{2},\ a_1^2 = -\frac{(a-\bar{a})}{4},\ b_2 = \frac{c+\bar{c}}{2},\ a_2^2 = -\frac{c-\bar{c}}{4},$$

$$A^2 = (b_1-b_2)^2 + (a_1+a_2)^2,\ B^2 = (b_1-b_2)^2 + (a_1-a_2)^2,$$

$$k^2 = \frac{4AB}{(A+B)^2},\quad g = \frac{2}{A+B},\ g_1^2 = \frac{4a_1^2 - (A-B)^2}{(A+B)^2 - 4a_1^2},\ y_1 = b_1 - a_1 g_1, \tag{5.88}$$

$$\varphi = am u_1 = \tan^{-1}\left[\frac{y-b_1+a_1g_1}{a_1+g_1b_1-g_1y}\right],\ tnu = \frac{t-b_1+a_1g_1}{a_1+g_1b_1-g_1t},$$

$$tnu_1 = \tan\varphi.$$

3. Περίπτωση γ : $1 + C_1^* = 0$

Αν $1 + C_1^* = 0$ δηλαδή $C_1^* = -1$, τότε η εξίσωση (5.62) λόγω της εξίσωσης (5.63) έχει ρίζες τις $a=1,\ \ b=-1$, με διπλή πολλαπλότητα και συνεπώς το ολοκλήρωμα (5.61) γράφεται

$$\frac{1}{2}Ln\left(\frac{-1+y}{1+y}\right) = C_2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x, \tag{5.89}$$

ή ισοδύναμα

$$y = -Coth\left(C_2 \pm \frac{x}{\sqrt{2}}\right). \tag{5.90}$$

B. Η περίπτωση $\lambda = 2, 3, \ldots;\ d = 3, 4, \ldots$

Για $\lambda \geq 2$ η εξίσωση Schrödinger (5.52) γράφεται ως εξής

$$y''_{xx} + \frac{\lambda}{x}y'_x - y + y^3 = 0;\quad \lambda = 2,3,4,\ldots\infty. \tag{5.91}$$

Εισάγοντας τον παραδεκτό συναρτησιακό μετασχηματισμό

$$y(x)=n(\xi),\quad \xi=\xi(x),\ y'_x=n'_\xi\,\xi'_x,\quad y''_{xx}=n''_{\xi\xi}\,\xi'^2_x+n'_\xi\xi''_{xx},\tag{5.92}$$

η (5.91) γράφεται

$$\eta''_{\xi\xi}\xi'^2_x+n'_\xi\,\xi''_{xx}+\frac{\lambda}{x}n'_\xi\,\xi'_x-n+n^3=0.\tag{5.93}$$

Η εξίσωση $\xi(x)$ μπορεί να προσδιοριστεί από την (5.93) και είναι

$$\xi''_{xx}=-\frac{\lambda}{x}\xi'_x,\tag{5.94}$$

και μετά από ολοκλήρωση προκύπτει

$$\xi=\xi(x)=\frac{x^A}{A},\quad A=1-\lambda,\quad \lambda>2,\quad x>0.\tag{5.95}$$

Εν συνεχεία η συνάρτηση $n(\xi)$ μπορεί να προσδιοριστεί από τις (5.93) και (5.95)

$$n''_{\xi\xi}=B\,\xi^m\left(n-n^3\right),\ \ m=\frac{2(A-1)}{A}=-\frac{2\lambda}{1-\lambda},\ B=A^m.\tag{5.96}$$

Τονίζεται ότι η (5.96) είναι ΣΔΕ τύπου Emden-Fowler type. Εισάγοντας τον μετασχηματισμό

$$n'_\xi=\frac{1}{\xi'_n}\Leftrightarrow n''_{\xi\xi}=\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{\xi'_n}\right)\frac{dn}{d\xi}=-\frac{\xi''_{nn}}{\xi'^3_n},\tag{5.97}$$

προκύπτει η γενικευμένη Emden-Fowler ΣΔΕ

$$\xi''_{nn}=-B\left(n-n^3\right)\xi^m\left(\xi'_n\right)^3,\tag{5.98}$$

όπου

$$B=A^m,\quad A=1-\lambda,\quad m=-\frac{2\lambda}{1-\lambda},\quad \lambda=2,3,4,\dots.\tag{5.99}$$

Συνοψίζοντας τα ανωτέρω αποδείχτηκε ότι η εξίσωση Schrödinger (5.91) για $\lambda\geq 2$, $\lambda=$ακέραιος αριθμός μπορεί να μετασχηματιστεί στη γενικευμένη Emden-Fowler ΣΔΕ (5.98), δηλαδή

$$Y''_{XX}=-(1-\lambda)^{-\frac{2\lambda}{1-\lambda}}\left(X-X^3\right)Y^{-\frac{2\lambda}{1-\lambda}}\left(Y'_X\right)^3,\ \ Y\equiv\xi,\ \ X\equiv n,\tag{5.100}$$

ή ισοδύναμα

$$Y''_{XX} = f^N(X)\, Y^M \left(Y'_X\right)^L,$$
$$\{N, M, L\} = \left\{1, -\frac{2\lambda}{1-\lambda}, 3\right\}, \quad f(X) = -(1-\lambda)^{-\frac{2\lambda}{1-\lambda}}\left(X - X^3\right). \tag{5.101}$$

Σημειώνεται ότι η λύση της (5.91) είναι ισοδύναμη με τη λύση της (5.101) η οποία προκύπτει εφαρμόζοντας την μεθοδολογία της παραγράφου 5.1.
Σύμφωνα με την μεθοδολογία της παραγράφου 5.1 τα αποτελέσματα είναι

$$U(z;\lambda) = \frac{z - C_1 z^2 + z^3\left(-3 + \dfrac{2\lambda}{1-\lambda}\right)}{z^2} + \sqrt{C_2 + \frac{\left[-z + C_1 z^2 - z^3\left(-3+\dfrac{2\lambda}{1-\lambda}\right)\right]^2}{z^4}}, \tag{5.102}$$

και

$$U'_z(z;g) = \frac{(g'_z - 1) - (l-1)(g-z)}{z^{l-1}}\left[-1 \pm \frac{\dfrac{g-z}{z^{l-1}}}{\sqrt{\left(\dfrac{g-z}{z^{l-1}}\right)^2 + C_2}}\right], \tag{5.103}$$

όπου

$$g(z;\lambda) = C_1 z^2 - z^3\left(-3 + \frac{2\lambda}{1-\lambda}\right) \tag{5.104α}$$

$$g'_Z(z) = 2C_1 z - 3z^2\left(-3 + \frac{2\lambda}{1-\lambda}\right). \tag{5.105β}$$

Η ((5.19)α) τελικά καταλήγει

$$C_1 z^2 - z^3\left(-3 + \frac{2\lambda}{1-\lambda}\right) = -\left(1 - 3X^2\right)(1-\lambda)^{\frac{2\lambda}{1-\lambda}}, \tag{5.106}$$

η οποία παρέχει την παραμετρική λύση της μορφής $X = X(z, C_1; \lambda)$ δηλαδή

$$X = \pm\frac{(1-\lambda)^{-\frac{\lambda}{1-\lambda}}\sqrt{C_1 z^2 + 3z^3 + (1-\lambda)^{\frac{2\lambda}{1-\lambda}} - \dfrac{2z^3\lambda}{1-\lambda}}}{\sqrt{3}}, \quad z = \text{παράμετρος}. \tag{5.107}$$

Επίσης λόγω της (5.100), η παραμετρική λύση της μορφής $n = n(z, C_1; \lambda)$ είναι

$$n = \pm\frac{(1-\lambda)^{-\frac{\lambda}{1-\lambda}}\sqrt{C_1 z^2 + 3z^3 + (1-\lambda)^{\frac{2\lambda}{1-\lambda}} - \dfrac{2z^3\lambda}{1-\lambda}}}{\sqrt{3}}, \quad z = \text{παράμετρος}. \tag{5.108}$$

Η εξίσωση $Y = Y\left(z, C_1, C_2\right)$ προσδιορίζεται από την (5.23) και είναι

$$Y^3 = -\frac{X\left(-1+X^2\right)\left(1-\lambda\right)^{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}} U_z'\left(z\right) z_X'\left(X\right)}{2z\left(-1+2\lambda\right)}, \tag{5.109}$$

όπου z_X' μπορεί να προσδιοριστεί από την (5.106) και είναι

$$z_X' = -\frac{6\left(1-\lambda\right)^{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}} X}{z\left[2C_1\left(-1+\lambda\right)+3z\left(-3+5\lambda\right)\right]}. \tag{5.110}$$

Επίσης η $U_z'\left(g, g_z'\right)$ προσδιορίζεται από τις (5.104α,β) και (5.110). Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω αποτελέσματα η λύση της (5.98) δίνεται

$$n = \pm\frac{\left(1-\lambda\right)^{-\frac{\lambda}{1-\lambda}}\sqrt{C_1 z^2 + 3z^3 + \left(1-\lambda\right)^{\frac{2\lambda}{1-\lambda}} - \dfrac{2z^3\lambda}{1-\lambda}}}{\sqrt{3}}, \tag{5.111α}$$

$$\xi^3 = -\frac{n\left(-1+n^2\right)\left(1-\lambda\right)^{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}} U_z'\left(z\right) z_X'\left(n\right)}{2z\left(-1+2\lambda\right)}, \tag{5.112β}$$

όπου η $U\left(z\right)$ δίνεται από την (5.102), η $U'\left(z\right)$ από την (5.103), οι $g\left(z\right), g'\left(z\right)$ από τις (5.104 α,β), (5.113) και επειδή $X \equiv n$ (λόγω της (5.100)),

$$z_X' \equiv z_n' = -\frac{6n\left(1-\lambda\right)^{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}}{z\left[2C_1\left(-1+\lambda\right)+3z\left(-3+5\lambda\right)\right]} \tag{5.114}$$

Η παραμετρική κλειστή λύση της (5.117) μπορεί να προσδιοριστεί με την εφαρμογή των παραδεκτών συναρτησιακών μετασχηματισμών (5.92) και είναι

$$x = \left(A\xi\right)^{1/A}, \qquad \xi = \left[\frac{n\left(1-n^2\right)\left(1-\lambda\right)^{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}} U_z'\left(z\right) z_X'\left(n\right)}{2z\left(-1+2\lambda\right)}\right]^{1/3}, \tag{5.115α}$$

$$y = \pm\frac{\left(1-\lambda\right)^{-\frac{\lambda}{1-\lambda}}\sqrt{C_1 z^2 + 3z^3 + \left(1-\lambda\right)^{\frac{2\lambda}{1-\lambda}} - \dfrac{2z^3\lambda}{1-\lambda}}}{\sqrt{3}}, \tag{5.116β}$$

$$A = 1-\lambda,$$

όπου $\lambda > 2,\ x > 0.$

Γ. Η περίπτωση $\lambda = 1, \quad d = 2$

Σε αυτή την περίπτωση για $\lambda = 1$ και συνεπώς για $d = 2$ η εξίσωση (5.54) λαμβάνει τη μορφή

$$y''_{xx} + \frac{1}{x} y'_x - y + y^3 = 0; \quad +\infty > x, \ -\infty < y < +\infty. \tag{5.117}$$

Εφαρμόζοντας τον συναρτησιακό μετασχηματισμό

$$y(x) = n(\xi), \qquad \xi = \xi(x); \ y'_x = n'_\xi \, \xi'_x = \frac{n'_\xi}{x'_\xi}, \qquad y''_{xx} = \left(\frac{n'_\xi}{x'_\xi} \right)'_\xi \frac{1}{x'_\xi}, \tag{5.118}$$

η (5.117) γίνεται

$$x\, x'_\xi \, n''_{\xi\xi} - x\, x''_{\xi\xi}\, n' + x'^2_\xi \, n'_\xi - x\, x'_\xi \left(n - n^3 \right) = 0; \quad x\, x'_\xi \neq 0. \tag{5.119}$$

η οποία μπορεί να διαχωριστεί σε δυο εξισώσεις

$$n'_\xi = \left(n - n^3 \right) x\, x' \quad \text{και} \quad x\, x''_{\xi\xi} = x'^2_\xi. \tag{5.120α,β}$$

Από την δεύτερη των εξισώσεων αυτών, την (5.120b) , υπολογίζουμε

$$\left(\frac{x'_\xi}{x} \right)'_\xi = 0, \ x \neq 0 \ \Leftrightarrow \ x = C_2 \, e^{C_1 \xi}, \ C_1 > 0, \ C_2 > 0, \tag{5.121}$$

όπου C_1 και C_2 είναι κατάλληλες σταθερές ολοκλήρωσης. Η εξίσωση (5.120a) γίνεται

$$n''_{\xi\xi} = C_1 C_2 \, e^{2 C_1 \xi} \left(n - n^3 \right); \ C_1 > 0, \ C_2 > 0, \tag{5.122}$$

που είναι ΣΔΕ τύπου Emden-Fowler

$$n''_{\xi\xi} = f(\xi)\, g(n) = f(\xi)\, n\left(1 - n^2 \right); \tag{5.123α}$$

$$f(\xi) = A e^{B\xi}, \ A = C_1^2 \, C_2^2 > 0, \ B = 2C_1 > 0; \tag{5.123β}$$

$C_1, C_2 =$ σταθερές ολοκλήρωσης.

Σημειώνεται ότι

$$f(\xi) = A e^{B\xi}, \ f'_\xi = Bf(\xi), \ f''_{\xi\xi} = B^2 f(\xi), \ldots \tag{5.124}$$

Εισάγοντας τον παραδεκτό συναρτησιακό μετασχηματισμό

$$U = f(\xi) = A e^{B\xi}, \ z = \frac{f(\xi)}{n} n'_\xi; \ n = n(\xi), \tag{5.125}$$

με ολικά διαφορικά

$$dU = B\,A e^{B\xi} d\xi,\ \ dz = \left[\frac{f}{n} n''_{\xi\xi} + \frac{nf'_\xi - fn'_\xi}{n^2} n'_\xi\right] d\xi. \tag{5.126}$$

Τα διαφορικά αυτά λόγω των εξισώσεων (5.123a) έως (5.125) λαμβάνουν τη μορφή

$$dU = B\,f\left(\xi\right)d\xi = BUd\xi,\ dz = \left(f\left(1-n^2\right) + B\frac{f}{n} - \frac{z}{n}\right)d\xi, \tag{5.127}$$

και καταλήγουμε στην πρώτης τάξης μη γραμμική ΣΔΕ

$$U'_z = \frac{BU}{\left(1-n^2+\frac{B}{U}\right)U - \frac{z}{n}}. \tag{5.128}$$

Εισάγοντας την ad hoc υπόθεση

$$n = G\left(z\right),$$

όπου $G\left(z\right)$ είναι μια επαρκώς διαφορίσημη συνάρτηση, οδηγούμαστε στην νέα μη γραμμική ΣΔΕ Abel δευτέρου είδους

$$U'_z = \frac{BU}{\left(1-G^2+\frac{B}{G}\right)U - \frac{z}{G}},\quad n = G\left(z\right). \tag{5.129}$$

Λόγω της παραπάνω ad hoc υπόθεση, από την πρώτη από τις δύο προηγούμενες εξισώσεις καταλήγουμε

$$\left[\left(G-G^3+B\right)U - z\right]U'_z = BGU. \tag{5.130}$$

Εφαρμόζοντας την κατασκευή Julia (παράγραφος 1.1.α), για τους συντελεστές της (5.130) ισχύει

$$-z\left(G'_z - 3G^2G'_z\right) = \left(G-G^3+B\right)\left(BG-1\right),$$

ή ισοδύναμα η συναρτησιακή εξίσωση

$$\frac{\left(1-3G^2\right)dg}{\left(G-G^3+B\right)\left(BG-1\right)} = \frac{dz}{z};\quad G-G^3 \neq -B,\ BG\neq 1, \tag{5.131}$$

από την οποία προκύπτει η $G\left(z\right)$ συναρτήσει της παραμέτρου z

$$G = G\left(z\right), \tag{5.132}$$

και η γενική λύση της (5.130) δίνεται από την σχέση

$$\frac{\left(G-G^3+B\right)U^2 - 2zU}{G\,J_1} = 0, \tag{5.133}$$

όπου C_1 είναι μια σταθερά ολοκλήρωσης και J_1 ο πολλαπλασιαστής Euler (ολοκληρών παράγων) όπου $J_1 = 1$. Συνεπώς από την (5.133) εξάγονται οι λύσεις

$$U = \frac{2z}{G(z) - G^2(z) + B}, \quad \int \frac{\left(1-3G^2\right)dG}{\left(G - G^3 + B\right)\left(BG-1\right)} = \ln|z|; \; G(z) \neq 0, \qquad (5.134)$$

και συνεπώς σε αυτήν την περίπτωση οι λύσεις της εξίσωσης Schrödinger δίνονται από τις σχέσεις

$$\ln|z| = \int \frac{\left(1-3G^2\right)dG}{\left(G - G^3 + B\right)\left(BG-1\right)}, \quad U = \frac{2z}{G(z) - G^2(z) + B},$$

$$U = C_2 \exp\left(C_1 \xi\right), \; y = n = \exp\int \frac{z}{f(z)} d\xi = \exp\int \frac{A\exp\left(B\xi\right)}{z} d\xi; \qquad (5.135)$$

$$A = C_1^2 C_2^2 > 0, \;\; B = 2C_1 > 0, \; \text{σταθερές ολοκλήρωσης;}$$

$$-\infty < n < +\infty, \qquad \xi = \text{παράμετρος.}$$

Η επίλυση του ολοκληρώματος $\int \frac{\left(1-3G^2\right)dG}{\left(G - G^3 + B\right)\left(BG-1\right)}$ δίνεται από

$$\frac{\frac{1}{B}\left(1-3G^2\right)}{\left(G - \frac{1}{B}\right)\left(G-P_1\right)\left(G-P_2\right)\left(G-P_3\right)} = \frac{\overset{*}{A}}{G - \frac{1}{B}} + \frac{\overset{*}{B}}{G-P_1} + \frac{\overset{*}{C}}{G-P_2} + \frac{\overset{*}{D}}{G-P_3},$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{1}{3}\left(1-3G^2\right) = \overset{*}{A}\left(G-P_1\right)\left(G-P_2\right)\left(G-P_3\right) + \overset{*}{B}\left(G - \frac{1}{B}\right)\left(G-P_2\right)\left(G-P_3\right) +$$

$$+ \overset{*}{C}\left(G - \frac{1}{B}\right)\left(G-P_2\right)\left(G-P_3\right) + \overset{*}{D}\left(G - \frac{1}{B}\right)\left(G-P_2\right)\left(G-P_3\right)$$

όπου $\overset{*}{A}, \overset{*}{B}, \overset{*}{C}$ και $\overset{*}{D}$ είναι προσδιοριστέοι αριθμοί και P_1, P_2, P_3 είναι οι ρίζες της κυβικής εξίσωσης $G^3 - G + B = 0$. Οι ποσότητες αυτές μπορούν να προσδιοριστούν εφαρμόζοντας τις κλασικές μεθόδους [19].

5.5 Δευτέρας τάξης ομογενής ΣΔΕ

Στην παράγραφο αυτή θα κατασκευαστούν οι γενικές λύσεις την δευτέρας τάξης ομογενούς εξίσωσης.

Σύμφωνα με την κατασκευή που παρουσιάστηκε στην παράγραφο 5.1 για $n = m = 1$; $l= 0$, η εξεταζόμενη ΣΔΕ τύπου Emden-Fowler ODE (5.2) μετατρέπεται σε μια δευτέρας τάξης ομογενής ΣΔΕ

$$y''_{xx} + f(x)\,y = 0,\ \ f(x) \neq 0. \tag{5.136}$$

Ο παραδεκτός μετασχηματισμός (5.3) εκφυλίζεται στη μορφή

$$U = f^3(x);\ \ z = \frac{f(x)}{y}y'_x;\ \ (y \neq 0), \tag{5.137}$$

και η εξίσωση Abel (5.11) γίνεται

$$\left(U + \left[g(z) - z\right]z\right)U'_z = 3g(z)U;\ \ g(z) = f'(x), \tag{5.138}$$

και εφαρμόζοντας το γνωστό μετασχηματισμό [3], μετατρέπεται σε ΣΔΕ Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής

$$\begin{gathered} w\,w'_\xi - w = F(\xi),\ \ F(\xi) = \frac{F_0(z)}{F_1(z)}; \\ F_0(z) = 3g(g-z)z,\ \ F_1(z) = z\,g'_z + 2(g-z); \\ g(z) = f'_x(x). \end{gathered} \tag{5.139}$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την κατασκευή Julia (παρ. 1.1.α). Ο περιορισμός (1.7) στους συντελεστές της εξίσωσης (5.138) παρέχει την εξίσωση

$$z(g'_z - 1) + (g - z) + 3g = 0,\ \text{or}\ \ z\,g'_z + 4g - 2z = 0,$$

με γενική λύση

$$g(z) = 2z/5 + Cz^{-4}, \tag{5.140}$$

και μερική λύση $(C = 0)$,

$$g_p = 2z/5. \tag{5.141}$$

Επειδή $g(z) = g_p = 2z/5$ είναι μια μερική λύση της ΣΔΕ Abel (5.138) τα αποτελέσματα της παρ. 5.1 δίνουν

$$U^2(z) + \frac{4}{5}zU = v;\ \ v = \text{παράμετρος.}$$

και οι ρίζες είναι

Για $\left(\dfrac{4}{25}z^2+\nu\right)>0,$

$$U(z)=-\frac{2}{5}z\pm\sqrt{\left|\frac{4}{25}z^2+\nu\right|},\ \text{ή}\ \ U(z)=-\frac{4}{5}z\ \text{ if }\ \nu=0;$$

Για $\left(\dfrac{4}{25}z^2+\nu\right)<0,$

$$U(z)=-\frac{2}{5}z\pm i\sqrt{\left|\frac{4}{25}z^2+\nu\right|},\ \text{ή}\ \ U(z)=-\frac{4}{5}z\pm i\frac{4}{5}z\ \text{ if }\ \nu=0;$$

,Για $\left(\dfrac{4}{25}z^2+\nu\right)=0,$

$$U(z)=\text{διπλή ρίζα}=-\frac{4}{5}z.$$

Εισάγοντας την πρώτη εξίσωση της (5.137), τα προηγούμενα αποτελέσματα λαμβάνουν τη μορφή

$$\begin{aligned}&\text{Για }\ \frac{4}{25}z^2+\nu<\text{ή}>0,\ z=\frac{5\left(\nu-f^6\right)}{4f^3}\quad\text{και για }\ \nu=0\quad z=-\frac{5}{4}f^3.\\&\text{Για }\ \frac{4}{25}z^2+\nu=0,\ z=-\frac{5}{3}f^3.\end{aligned}\tag{5.142}$$

Υπάρχει μια μοναδική λύση z $\left(z=-5f^3/4\right)$, και ο μετασχηματισμός (5.137) δίνει το αποτέλεσμα

$$U(z)=f^3;\ -\frac{5}{4}f^2=\frac{y'_x}{y},$$

και μια μερική λύση της (5.136) είναι

$$y_{1_p}=\exp\left[1-\frac{4}{5f^2(x)}\right].\tag{5.143}$$

Μια δεύτερη γραμμικώς ανεξάρτητη μερική λύση της (5.136), προσδιορίζεται από την σχέση [18]

$$y_{2_p}(x)=y_1(x)\int\frac{\exp\left(-F(x)\right)}{y_1^2(x)}dx;\quad F(x)=\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx=0.$$

Έτσι υπολογίζεται

$$y_{2_p}(x) = \exp\left[1 - \frac{4}{5f^2(x)}\right] \int \left\{ \exp^{-2}\left[1 - \frac{4}{5f^2(x)}\right] \right\} dx, \tag{5.144}$$

και συνεπώς η γενική λύση της (5.136) δίνεται από την σχέση [18]

$$y(x) = C_1 \exp\left[1 - \frac{4}{5f^2(x)}\right] + C_2 \exp\left[1 - \frac{4}{5f^2(x)}\right] \int \left\{ \exp\left[1 - \frac{4}{5f^2(x)}\right] \right\}^{-2} dx,$$

$C_1;\ C_2 =$ σταθερές ολοκλήρωσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Byrd, P. F. and Friedman, M. D. (1971): *Handbook of Elliptic Integrals –for Engineers and Scientists,* Springer-Verlag, New York.
2. Chandrasekhar, S. (1939): *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, Chicago, 509, In particular Ch.11 (Dover Reprint).
3. Dondorff, J. (1907): *Die Knickfestigkeit dew geraben Stabes mit veränderlichen Querschnitt und veränderlichen Druck, ohne und mit Querstützen,* Dissertation, Düsseldorf.
4. Greenhill, A.G. (1884): *Camb. Phil. Soc. 5* (see also p.101 of Timoshenko and Gere (1961)- *Theory of Elastic Stability*).
5. Halphen, G.H. (1888): La courbe èlastique plane sous pression normal uniforme. *in Traitè des Functions Eliptique,* Vol, 2, Chap. 5 325-336.
6. Jasinsky, F.S. (1902): *Sient. Pap. Petersburg* (see also p. 101 of Timoshenko and Gere (1961)- *Theory of Elastic Stability*).
7. Kamke, E. (1977): *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen,* Vol.1, B,G Teubeur, Stuttgart.
8. Kirchhoff, G.R. (1859): *J. Math. (Grelle),* 56.
9. Lagrange, J.L. (1868): *Ouvre de Langrage,* Gauthier-Villans, Paris.
10. Love, A.E.H (1944): *A Treastise on the Mathematical Theory of Elasticity* , Dover, New York.
11. Murphy G. (1960): *Ordinary Differential Equations and their Solutions,* Litton Educational Publishing Inc.
12. Panayotounakos D.E. and Theocharis P.S. (1988): Large deflections of buckled bars under distributed axial load, *Int. J. Solids and Structures,* 24, No 12, 1179-1992.

13. Panayotounakos, D.E. (2005): Exact analytic solutions of unsolvable classes of first and second order nonlinear ODEs (Part I: Abel's equations) *Appl. Math. Lett.* 18 pp 155-162.

14. Panayotounakos, D.E, Sotiropoulou A.B. and Panayotounakou, N.D., Exact Analytic Solutions of Nonlinear Boundary Value Problems in Fluid Mechanics (Blasius equation) , *J. of Math. Phys., JMP,* 46, (2005), 1-26.

15. Panayotounakos D. E,. Zarmpoutis (2011) T. I. A new mathematical technique in constructing the exact parametric solutions of the nonlinear ODEs of the type $y'' = f^n(x)\, y^m (y'_x)^l$. Application to the white-dwarf relativistic equation, *Presentation 7th Gracm*, Democritos, Athens.

16. Panayotounakos D. E,. Zarmpoutis T. I. and C.I. Siettos, On the construction of the general closed-form solutions of standing waves of the cubic nonlinear Schrödinger equation. *J. Arch. of Appl. Mech.* (accepted for publication, in press).

17. Panayotounakos D. E., Zarmpoutis T. I., Sotiropoulos P. and Kostogiannis A.G. (2012) Exact parametric or closed form solutions of the nonlinear Riccati ODE as well as of some relative classes of linear second order ODEs of variable coefficients, Presentation ICEES 2012, Crete.

18. Polyanin, A.D. and Zaitsev V.F. (2003): *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, CRC Press (sec. ed.), New York.

19. Polyanin, A.D. and Manzhirov A.V. (2007): *Handbook of Mathematics for Engineers and Scientist,* Chapman &Hall/CRC Press, New York.

20. Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. (1961)*: Theory of Elastic Stability,* McGraw-Hill B. Comp., New York, Toronto, London.

Κεφάλαιο 6

Επί της Κατασκευής της Γενικής Εξισώσης Abel Πρώτου Είδους Κανονικής Μορφής $y'_x(x)=y^3(x)+F(x)$

Βασικές βιβλιογραφικές αναφορές που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάπτυξη του κεφαλαίου είναι οι εξής: E. Kamke[2], A.D. Polyanin and Zaitsev[5], Polyanin and Manzhirov[6] και Panayotounakos and Zarmpoutis[10].

Στο Κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε μια νέα τεχνική κατασκευής της γενικής λύσης που αφορά στην μη γραμμική ΣΔΕ Abel πρώτου είδους κανονικής μορφής (γενικευμένη εξίσωση Riccati) του τύπου $y'_x = y^3 + F(x)$. Με άλλα λόγια, η συγκεκριμένη διαδικασία κατασκευής της προαναφερθείσας γενικής λύσης δεν θα στηριχθεί σε τεχνικές και αποτελέσματα των Κεφαλαίων 2 και 4 (ενώ με άλλη μεθοδολογία θα μπορούσε).

6.1 Επί της Κατασκευής Γενικής Λύσης της Abel Πρώτου Είδους

Η γενική μορφή της εξίσωσης Abel πρώτου είδους είναι

$$y'_x = f_3(x)\,y^3 + f_2(x)\,y^2 + f_1(x)\,y + f_0(x). \tag{6.1}$$

Με τη χρήση των μετασχηματισμών (1.81), η (6.1) λαμβάνει την κανονική της μορφή (canonical form)

$$u'_\xi = u^3 + H(\xi), \tag{6.2}$$

όπου η $H(\xi)$ δίνεται από την (1.107).

Έστω λοιπόν η εξίσωση Abel πρώτου είδους κανονικής μορφής

$$y'_x = y^3 + F(x), \tag{6.3}$$

την οποία μπορούμε να γράψουμε ως

$$y'_x = y^3 + \left(\sqrt[3]{F}\right)^3,$$

ή ισοδύναμα ως

$$y'_x = (y+f)\left(y^2 - f\,y + f^2\right), \quad f = \sqrt[3]{F}. \tag{6.4}$$

Συνεπώς η μελέτη της εξίσωσης (6.3) ανάγεται στην μελέτη της εξίσωσης

$$y'_x = \left(y^2 - f\,y + f^2\right)(y+f) = y^2(y+f) - f\,(y-f)(y+f),$$

την οποία ισοδύναμα γράφουμε

$$y'_x + f\left(y^2 - f^2\right) = (y+f)\,y^2. \tag{6.5}$$

Εισάγουμε τώρα μια βοηθητική προς προσδιορισμό συνάρτηση $Q(x)$, έτσι ώστε η (6.5) να διασπάται σε δυο εξισώσεις

$$\begin{aligned} &y'_x + f\,y^2 - f^3 = Q(x), && (\alpha)\\ &(y+f)\,y^2 = Q(x). && (\beta) \end{aligned} \tag{6.6}$$

Παρατηρούμε τώρα τα εξής:

- Η εξίσωση (6.6α) είναι τύπου Riccati, της οποίας ο όρος y λείπει,
- Η εξίσωση (6.6β) είναι μια κυβική εξίσωση του τύπου $y^3 + fy^2 - Q(x) = 0$, όπου $Q(x)$ είναι βοηθητική προς προσδιορισμό συνάρτηση, η οποία εύκολα μετατρέπεται σε κυβική εξίσωση τύπου Cardan παρόμοια της (1.37), που αφορά στην εξίσωση Abel δευτέρου είδους,
- Η απαλοιφή της $Q(x)$ από τις εξισώσεις (6.6) οδηγεί (μαζί με την προς προσδιορισμό της $Q(x)$) στην εξίσωση Abel πρώτου είδους 6.4. Τούτο σημαίνει ότι κάθε λύση της εξίσωσης Riccati (6.6α) υπό τον περιορισμό (6.6β) είναι λύση της εξίσωσης Abel πρώτου είδους κανονικής μορφής (6.4).
- Σε ότι ακολουθεί θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε τη γενική λύση της εξίσωσης Riccati (6.6α) υπό τον περιορισμό (6.6β), που είναι ακριβώς και η γενική λύση της εξίσωσης Abel (6.3). Προς τούτο, γνωρίζοντας ότι κάθε εξίσωση Riccati ανάγεται μέσω παραδεκτών συναρτησιακών μετασχηματισμών σε ομογενής ΣΔΕ δεύτερης τάξης μεταβλητών συντελεστών, θα προσπαθήσουμε να αναχθούμε σε γνωστή κλάση ΣΔΕ δεύτερης τάξης των οποίων γνωρίζουμε την γενική λύση, προσδιορίζοντας συγχρόνως την βοηθητική συνάρτηση $Q(x)$ που εισέρχεται μέσω του περιορισμού (6.6β).

Έτσι, εφαρμόζουμε την κατασκευή Βιβλ. [5, σελ. 105, εξίσωση 38], δηλαδή θεωρούμε την εξίσωση Riccati με κανονική μορφή

$$y'_x = \frac{f_x^{*\prime}}{g^*} y^2 - \frac{g_x^{*\prime}}{f^*}, \tag{6.7}$$

όπου f^* και g^* είναι τυχαίες λείες συναρτήσεις της μεταβλητής x. Για την εξίσωση αυτή μια προφανής μερική λύση δίνεται από τον τύπο

$$y_M = -\frac{g^*}{f^*}. \tag{6.8}$$

Ζητάμε τώρα η εξίσωση Riccati (6.6α) να είναι του τύπου (6.7). Τούτο συνεπάγεται τις σχέσεις

$$\left.\begin{aligned} &f_x^{*\prime} = -f\, g^*, &&(\alpha)\\ &f^* = -\frac{g_x^{*\prime}}{f^3 + Q}. &&(\beta)\end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

Στην περίπτωση αυτή η (6.6α) έχει τη μερική λύση $y_M = -g^*/f^*$. Συγχρόνως, θα πρέπει από την (6.6β) να ισχύει η παρακάτω σχέση

$$Q(x) = y^3 + f\, y^2, \tag{6.10}$$

η οποία συμπληρώνει την (6.7).
Με παραγώγιση η (6.9β) παρέχει την

$$g^{*\,\prime\prime}_{xx} = -\left(f^3+Q\right)'_x f^* - \left(f^3+Q\right) f^{*\prime}_x,$$

ενώ εισάγοντας την ίδια την (6.9α) στην τελευταία εξίσωση προκύπτει η

$$g^{*\,\prime\prime}_{xx} = -\left(f^3+Q\right)'_x f^* + \left(f^3+Q\right) f\, g^*,$$

ή ισοδύναμα προκύπτει η δεύτερης τάξης γραμμική ως προς $g^*(x)$ ΣΔΕ με μεταβλητούς συντελεστές

$$g^{*\,\prime\prime}_{xx} - \frac{\left(f^3+Q\right)'_x}{f^3+Q} g^{*\prime}_x - f\left(f^3+Q\right) g^* = 0. \tag{6.11}$$

Παραγωγίζοντας την (6.9α), προσδιορίζεται η $f^{*\,\prime\prime}_{xx}$ από τη σχέση

$$f^{*\prime}_x = -f\, g^* \Rightarrow f^{*\,\prime\prime}_{xx} = -f'_x g^* - f\, g^{*\prime}_x.$$

Εισάγοντας τις (6.9α) και (6.9β) με τις εκφράσεις

$$g^* = -\frac{f^{*\prime}_x}{f}, \quad \text{και} \quad g^{*\prime}_x = -\left(f^3+Q\right) f^*$$

στην (6.11) καταλήγουμε στην αντίστοιχη προς f^* δεύτερης τάξης ΣΔΕ με μεταβλητούς συντελεστές

$$f^{*\,\prime\prime}_{xx} - \frac{f'_x}{f} f^{*\prime}_x - f\left(f^3+Q\right) f^* = 0. \tag{6.12}$$

Η (6.11) γράφεται

$$\frac{g_{xx}^{*\prime\prime}}{f\,g^{*}}-\frac{\left(f^{3}+Q\right)_{x}^{\prime}}{\left(f^{3}+Q\right)f}\,\frac{g_{x}^{*\prime}}{g^{*}}=\left(f^{3}+Q\right), \tag{6.13}$$

ενώ η (6.12) γράφεται επίσης

$$\frac{f_{xx}^{*\prime\prime}}{f\,f^{*}}-\frac{f_{x}^{\prime}}{f^{2}}\,\frac{f_{x}^{*\prime}}{f^{*}}=\left(f^{3}+Q\right). \tag{6.14}$$

Θέτοντας

$$\Omega\left(x\right)=f^{3}+Q\left(x\right), \tag{6.15}$$

όπου $\Omega\left(x\right)$ μια νέα βοηθητική προς προσδιορισμό συνάρτηση, και από τις (6.13), (6.14) και (6.15), ευρίσκουμε

$$\frac{g_{xx}^{*\prime\prime}}{f\,g^{*}}-\frac{\Omega_{x}^{\prime}}{\Omega f}\,\frac{g_{x}^{*\prime}}{g^{*}}=\frac{f_{xx}^{*\prime\prime}}{f\,f^{*}}-\frac{f_{x}^{\prime}}{f^{2}}\,\frac{f_{x}^{*\prime}}{f^{*}}=\Omega\left(x\right). \tag{6.16}$$

Είναι τώρα προφανές ότι από τις σχέσεις (6.11), (6.12) και (6.9) λαμβάνουμε τις νέες εκφράσεις της δευτέρας τάξης γραμμικής ΣΔΕ ως προς f^{*} και g^{*}, δηλαδή

$$g_{xx}^{*\prime\prime}-\frac{\Omega_{x}^{\prime}}{\Omega}\,g_{x}^{*\prime}-f\,g^{*}\,\Omega=0,\qquad f^{*}=-\frac{g^{*\prime}}{\Omega}, \tag{6.17α,β}$$

και

$$f_{xx}^{*\prime\prime}-\frac{f_{x}^{\prime}}{f}\,f_{x}^{*\prime}-f\;\Omega\;f^{*}=0,\qquad g^{*}=-\frac{f^{*\prime}}{\Omega}. \tag{6.18}$$

Με βάση την Βιβλ. [2, σελ. 441, εξίσωση (15)], θεωρούμε τη γραμμική εξίσωση δεύτερης τάξης με μεταβλητούς συντελεστές

$$z_{xx}^{\prime\prime}-\left[\frac{G_{xx}^{\prime\prime}}{G_{x}^{\prime}}+\left(2\mu-1\right)\frac{G_{x}^{\prime}}{G}\right]z_{x}^{\prime}+\left[\left(\mu^{2}-\nu^{2}\right)\left(\frac{G^{\prime}}{G}\right)^{2}+G^{\prime 2}\right]z=0, \tag{6.18α}$$

όπου $G=G\left(x\right)$ είναι λεία τυχούσα συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x, ενώ μ,ν είναι τυχόντες αριθμοί. Η εξίσωση αυτή αποδεικνύεται[2] ότι εντάσσεται στην κλάση των εξισώσεων Bessel και ότι έχει γενική λύση που δίνεται από τον τύπο

$$z = G^{\mu}\ Z_{\nu}\left(G\right),\ Z_{\nu}\left(G\right) = C_1 J_{\nu}\left(G\right) + C_2 Y_{\nu}\left(G\right). \tag{6.18β}$$

όπου $J_{\nu}\left(G\right)$ και $Y_{\nu}\left(G\right)$ είναι συναρτήσεις Bessel πρώτου και δευτέρου είδους (εξισώσεις Neumann) τάξεως ν αντίστοιχα. Η γενική λύση της εξίσωσης (6.18α) δίνεται από σχέση

$$\begin{gathered} z = G^{\mu}\ Z_{\nu}\left(G\right) = G^{\mu}\left[C_1 J_{\nu}\left(G\right) + C_2 Y_{\nu}\left(G\right)\right]; \\ C_1,\, C_2 = \text{σταθερές ολοκλήρωσης.} \end{gathered} \tag{6.19}$$

Συγκρίνοντας τις (6.17α) με την (6.18α) καταλήγουμε

$$\frac{G''_{xx}}{G'_x} + \left(2\mu - 1\right)\frac{G'_x}{G} = \frac{\Omega'_x}{\Omega},\quad \left(\mu^2 - \nu^2\right)\left(\frac{G'_x}{G}\right)^2 + G'^2 = -f\ \Omega; \tag{6.20α,β}$$

και

$$\Omega\left(x\right) = f^3 + Q\left(x\right) = f^3 + y^3 + f\ y^2, \tag{6.20γ}$$

όπου $y\left(x\right)$ είναι η γενική λύση της εξίσωσης Riccati (6.6α) υπό την περιορισμό της εξίσωσης (6.6β).
Η ολοκλήρωση της εξίσωσης (6.20α) δίνει

$$G'_x = C\,\Omega\, G^{1-2\mu} \Leftrightarrow \frac{G'_x}{G} = C\,\Omega\, G^{-2\mu};\ C = \text{σταθερά ολοκλήρωσης},\ G\left(x\right) \neq 0, \tag{6.21}$$

και εισάγοντας το αποτέλεσμα (6.21) στην δεύτερη εξίσωση (6.20β), καταλήγουμε

$$G^2 = -\frac{f + \left(\mu^2 - \nu^2\right)C^2 \Omega\, G^{-4\mu}}{C^2 \Omega G^{-4\mu}}. \tag{6.22}$$

Υποθέτοντας $\mu = 0$ η εξίσωση Bessel (6.18α) μαζί με τις εξισώσεις (6.17α), (6.15), (6.6β) και (6.21) προκύπτει

$$\begin{gathered} z''_{xx} - \left[\frac{G''_{xx}}{G'_x} - \frac{G'_x}{G}\right]z'_x + \left[G'^2_x - \nu^2\left(\frac{G'_x}{G}\right)^2\right]z = 0; \\ g^*_{p_1}\left(x\right) = J_{\nu}\left(G\right),\quad g^*_{p_2}\left(x\right) = Y_{\nu}\left(G\right);\quad G^2\left(x\right) = \frac{\nu^2 C^2 \Omega - f}{C^2 \Omega}, \end{gathered} \tag{6.23α,β,γ}$$

όπου $g^*_{p_1}, g^*_{p_2}$ δυο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της Bessel ΣΔΕ (6.17α).

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (6.9β), (6.8), (6.21), και τον περιορισμό (6.6α) καθώς επίσης και τις ιδιότητες των εξισώσεων Besssel [1,5,6], εξάγουμε

$$f_{p_1}^* = -\frac{\left(g_{p_1}^*\right)'_x}{\Omega} = -\frac{1}{C}\left[J_{\nu-1}(G) - J_{\nu+1}(G)\right],$$

$$f_{p_2}^* = -\frac{\left(g_{p_2}^*\right)'_x}{\Omega} = -\frac{1}{C}\left[Y_{\nu-1}(G) - Y_{\nu+1}(G)\right]; \qquad (6.24\alpha,\beta)$$

$G^2(x) =$ από την σχέση (6.22) για $\mu = 0$.

Συνεπώς δυο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης Riccati (6.6α) y_{p_1}, y_{p_2} υπό τον περιορισμό (6.6β) είναι

$$y_{p_1}(x) = \frac{2}{C}\frac{J_\nu(G)}{J_{\nu-1}(G) - J_{\nu+1}(G)}, \quad y_{p_2}(x) = \frac{2}{C}\frac{Y_\nu(G)}{Y_{\nu-1}(G) - Y_{\nu+1}(G)}, \qquad (6.25)$$

όπου

$$G^2(x) = \frac{\nu^2 C^2 \Omega - f}{C^2 \Omega}, \quad \Omega(x) = f^3 + y^3 + f\,y^2.$$

Επιπλέον σύμφωνα με την βιβλιογραφική αναφορά [5] η γενική λύση μιας εξίσωσης Riccati (6.6α) δίνεται από τη σχέση

$$y = \frac{C\,y_{p_1} + U\,y_{p_2}}{C + U}, \quad U = \exp\left[\int f\left(y_{p_1} - y_{p_2}\right)dx\right]; \quad C = \text{σταθ. ολοκλήρ.} \qquad (6.26\alpha,\beta)$$

Επιλύοντας την πρώτη ως προς U και εν συνεχεία διαφορίζοντας τις δυο εξισώσεις (6.24α,β), εξάγουμε το αποτέλεσμα

$$\left(y_{p_2} - y_{p_1}\right)\left(y - y_{p_1}\right)'_x - \left(y_{p_2} - y_{p_1}\right)'_x\left(y - y_{p_1}\right) = f\left(y - y_{p_1}\right)\left(y_{p_2} - y_{p_1}\right)^2. \qquad (6.27)$$

Επειδή κάθε λύση της εξίσωσης Riccati (6.6α) υπο τον περιορισμό (6.6β) είναι και λύση της εξίσωσης Abel (6.3α), καταλήγουμε ότι η γενική λύση (6.26α) της Riccati ΣΔΕ (6.6a) υπό τον περιορισμό (6.6β) είναι και γενική λύση της εξίσωσης Abel (6.3). Έχοντας υπόψη

$$y'_x = y^3 + f^3, \quad \left(y_{p_1}\right)'_x = y_{p_1}{}^3 + f^3, \quad \left(y_{p_2}\right)'_x = y_{p_2}{}^3 + f^3,$$

καταλήγουμε ότι η γενική λύση της μη γραμμικής ΣΔΕ Abel (6.4α) ή (6.3) δίνεται από την πεπλεγμένη εξίσωση

$$\left(y - y_{p_1}\right)\left(y + y_{p_1} + y_{p_2}\right) = f\left(y_{p_1} - y_{p_2}\right) \qquad (6.28)$$

ή ισοδύναμα

$$\left(\frac{2}{G}y-\frac{Y_v(G)}{Y_{v-1}(G)-Y_{v+1}(G)}\right)\left(\frac{2}{G}y+\frac{Y_v(G)}{Y_{v-1}(G)-Y_{v+1}(G)}+\frac{J_v(G)}{J_{v-1}(G)-J_{v+1}(G)}\right)=$$

$$f\left(\frac{J_v(G)}{J_{v-1}(G)-J_{v+1}(G)}-\frac{Y_v(G)}{Y_{v-1}(G)-Y_{v+1}(G)}\right); \qquad (6.29α,β,γ,δ)$$

$$G^2(x)=v^2-\frac{f}{C^2\Omega}, \quad \Omega(x)=f^3+y^3+f\,y^2, \quad f=\sqrt[3]{F},$$

όπου $F(x)$ είναι το ελεύθερο μέρος της εξεταζόμενης εξίσωσης Abel, C είναι σταθερά ολοκλήρωσης και θα προσδιοριστεί από τις αρχικές συνθήκες. Επιπροσθέτως v είναι ελεύθερη παράμετρος που καθορίζει την τάξη των εξισώσεων Bessel που εισάγονται.

Από την ανωτέρω ανάλυση συνάγουμε το συμπέρασμα ότι η γενική λύση της μιας εξίσωσης Abel (6.3α) που δίνεται από την πεπλεγμένη σχέση (6.29α) πιθανώς να μην είναι μοναδική σε ένα κύριο διάστημα τιμών $\left[x^0,x^1\right)$ της ανεξάρτητης μεταβλητής x, διότι μπορεί η συνάρτηση $G(x)$ που δίνεται από την (6.29β) μπορεί να αλλάζει μορφή. Η μεταβολή αυτή της τιμής της παραμέτρου v αποδεικνύει ότι και στην περίπτωση της εξίσωσης Abel πρώτου είδους, η γενική λύση στο $\left[x^{(0)},\bar{x}\right]$ μπορεί να μην είναι ενιαία, αλλά να χωρίζεται σε διαφορετικές λύσεις ισχύουσες σε n συγκεκριμένα υποδιαστήματα $\left[x^{(0)},x^{(1)}\right)$, $\left[x^{(1)},x^{(2)}\right),\ldots,\left[x^{(i-1)},x^{(i)}\right),\ldots,\left[x^{(n-1)},\bar{x}\right]$, επιβάλλοντας σε κάθε όριο των υποδιαστημάτων την λειότητα της λύσης

$$y^{(i),\text{αρ.}}=y^{(i),\text{δεξ.}}, \qquad y_x'^{(i),\text{αρ.}}=y_x'^{(i),\text{δεξ.}}. \qquad (6.30)$$

6.2 Πρόβλημα Αρχικών Τιμών

Αρχικά υποθέτουμε ότι η γενική λύση που δίνεται από την (6.29α) παραμένει αμετάβλητη στο πρώτο υποδιάστημα $\left[x^0,x^1\right)$. Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες $x_1=x_1^0=0,\ y_1=y_1^0$, από την (6.29β) εξάγουμε

$$G_1^{0^2}(x)=v_1^{0^2}-\frac{f}{C_1^{0^2}\Omega_1^0}, \quad \Omega_1^0=f^{0^3}+y_1^{0^3}+f^0\,y_1^{0^2};\ x=x^0=0,\ y=y^0, (6.31)$$

όπου ο πρώτος άνω δείκτης δηλώνει τον αριθμό του κάθε υποδιαστήματος $x^0=0,\ y=y^0$. Συνεπώς για τις αρχικές τιμές $\left(0, y_1^0\right)$ καταστρώνουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων

$$\text{Εξίσωση (6.29α)} \Rightarrow \left(\frac{2}{G_1^0} y_1^0 - A^0\right)\left(\frac{2}{G_1^0} y_1^0 + B^0\right) - f_1^0 \varDelta^0 = 0, \qquad (\alpha)$$

$$\text{Παράγωγος (6.29α)} \Rightarrow \left[\left(\frac{2}{G}\right)'_x y^0 + \left(\frac{2}{G}\right)\left(y'_x\right)^0 - \left(A'_x\right)^0\right] \cdot \qquad (6.32)$$

$$\cdot\left[\left(\frac{2}{G}\right)'_x y^0 + \left(\frac{2}{G}\right)\left(y'_x\right)^0 - \left(B'_x\right)^0\right] = \left(f'_x\right)^0 \varDelta + f\left(\varDelta'_x\right)^0, \qquad (\beta)$$

όπου

$$G^2(x) = v^2 - \frac{f}{C^2 \varOmega}, \qquad G'_x = \frac{1}{2G}\left(1 - \frac{1}{C^2}\frac{\varOmega f'_x + \varOmega'_x f}{\varOmega^2}\right),$$

$$\varOmega'_x = 3f^2 f'_x + \left(3y^2 + 2fy\right) y'_x, \qquad y'_x = y^2 + f^3;$$

$$A'_x = \left(\frac{Y_v}{Y_{v-1} - Y_{v+1}}\right)'_G G'_x, \qquad B'_x = \left(\frac{Y_v}{Y_{v-1} - Y_{v+1}} + \frac{J_v}{J_{v-1} - J_{v+1}}\right)'_G G'_x \qquad (6.33)$$

$$\varDelta'_x = \left(\frac{J_v}{J_{v-1} - J_{v+1}} - \frac{Y_v}{Y_{v-1} - Y_{v+1}}\right) G'_x;$$

$$J_v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (G/2)^{v+2p}}{k!\,\Gamma(v+p+1)}, \quad Y_v = \frac{J_v \cos \pi v - J_{-v}}{\sin \pi v},$$

$$J'_{v_G} = \frac{1}{2}\left(J_{v-1} - J_{v+1}\right), \quad Y'_{v_G} = \frac{1}{2}\left(Y_{v-1} - Y_{v+1}\right).$$

Το σύστημα των εξισώσεων (6.32α,β) είναι επαρκές για την εκτίμηση της αρχικής τιμής της σταθεράς ολοκλήρωσης C^0 και της παραμέτρου v^0, έτσι ώστε να είναι δυνατός ο καθορισμός της μονοπαραμετρικής οικογένειας επιφανειών $v = v^0$ και $C = C^0$.

6.3. Εφαρμογές

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε κάποιες ειδικές περιπτώσεις εκφυλισμένων ΣΔΕ Abel πρώτου είδους οι οποίες καλύπτουν της βιβλιογραφικές αναφορές [8,9,10] εφαρμόζοντας απλοποιημένα την προηγούμενη μέθοδο. Θα εξετάσουμε δυο τύπους εκφυλισμένων ΣΔΕ Abel

$$y'_x = f(x)y^3 + g(x)y^2 + h(x) \quad \text{ή} \quad y'_x = f(x)y^3 + g(x)y^2. \tag{6.34}$$

Αρχικά θεωρούμε την πρώτη των δυο εξισώσεων (υποθέτοντας $h(x)=0$). Από την δεύτερη των δυο αυτών εξισώσεων εφαρμόζοντας

$$y'_x(x) = \frac{1}{u(x)};\ u(x)=0, \tag{6.35}$$

εξάγουμε

$$u\,u'_x = f_1(x)u^2 + f_2(x)u + f_3(x), \tag{6.36}$$

και επιπλέον εφαρμόζοντας τον παραδεκτό συναρτησιακό μετασχηματισμό [5; p. 50]

$$w(x) = u(x)E(x);\ E(x) = \exp\left(-\int f_1(x)dx\right), \tag{6.37}$$

καταλήγουμε

$$w\,w'_x = F_1(x)w + F_0(x);\quad F_1(x) = f_2(x)E(x),\ F_0(x) = f_3(x)E^2(x). \tag{6.38}$$

Η προηγούμενη ΣΔΕ είναι μια ΣΔΕ Abel δευτέρου είδους και εφαρμόζοντας τον παραδεκτό συναρτησιακό μετασχηματισμό [5; p.40]

$$\xi(x) = \int F_1(x)dx = \int f_2(x)\exp\left(-\int f_1 dx\right)dx = \Omega(x) \Leftrightarrow x = \Omega^{-1}(\xi), \tag{6.39}$$

προκύπτει μια εξίσωση Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής

$$y(\xi)\,y'_\xi(\xi) - y(\xi) = \mathcal{F}(\xi),\quad \mathcal{F}(\xi) = \frac{F_0(\xi)}{F_1(\xi)} = \frac{F_0(\Omega^{-1}(\xi))}{F_1(\Omega^{-1}(\xi))}. \tag{6.40}$$

Η τελευταία εξίσωση, εισάγοντας την αντικατάσταση

$$y(\xi) = \frac{1}{\omega(\xi)};\quad \omega(\xi)\neq 0;\ y'_\xi = -\frac{\omega'_\xi}{\omega}, \tag{6.41}$$

λαμβάνει την μορφή μιας Abel πρώτου είδους

$$\omega'_\xi = -\mathcal{F}(\xi)\omega^3 + \omega^2. \tag{6.42}$$

Χρησιμοποιώντας τον παραδεκτό συναρτησιακό μετασχηματισμό [2]

$$\omega(\xi) = -\frac{1}{t\,\xi_t'(t)}, \quad t\xi_t' \neq 0, \tag{6.43}$$

εφαρμόζοντας

$$w = -\left(\frac{1}{t\,\xi_t'}\right)t_\xi' = \frac{\xi' - t\xi_{tt}''}{t^2 \xi_t'^{\,2}}\frac{1}{\xi_t'} = \frac{1}{t^2\xi_t'^2} - \frac{\xi_{tt}''}{t\,\xi_t'^{\,3}},$$

μετασχηματίζεται η (6.42) σε μια μη γραμμική ΣΔΕ τύπου Emden-Fowler

$$\xi_{tt}'' = -t^{-2}\mathcal{F}(\xi); \quad t \neq 0, \tag{6.44}$$

όπου $\mathcal{F}(\xi)$ είναι μια επαρκώς διαφορίσημη συνάρτηση της μεταβλητής ξ.

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε την μεθοδολογία που παρουσιάζεται στην βιβλιογραφική αναφορά [10], δηλαδή

$$\begin{aligned} &u = t^{-2} \Rightarrow du = 2t^{-3}dt = 2u\sqrt{u}\,dt; \\ &z = t^{-2}\frac{\xi_t'}{\xi} \Rightarrow dz = \left[\frac{t^{-2}}{\xi}\xi_{tt}'' + \left(\frac{t^{-2}}{\xi}\right)_t'\right]dt, \end{aligned} \tag{6.45}$$

Υπολογίζοντας τα ολικά διαφορικά du και dz εξάγεται

$$u_z' = \frac{du}{dz} = \frac{u\sqrt{u}}{\dfrac{\mathcal{F}(\xi)}{\xi}u^2 - 2z\sqrt{u} - z^2 u}. \tag{6.46}$$

Επιπλέον θέτοντας

$$\sqrt{u(t)} = P(t), \tag{6.47}$$

και υποθέτοντας $G(z) \equiv \left(\mathcal{F}(\xi)P^3/\xi\right) - 2zP,$ προκύπτει η ακόλουθη ΣΔΕ στην οποία η συνάρτηση $G(z)$ πρέπει να προσδιοριστεί

$$P_z' = \frac{P}{G(z) - z^2 P}; \; G \equiv G(z) = \frac{\mathcal{F}(\xi)}{\xi}P^3 - 2z. \tag{6.48}$$

Επιπλέον η ΣΔΕ (6.46) μετατρέπεται στην ακόλουθη μη γραμμική ΣΔΕ Abel πρώτου είδους

$$\left(-z^2 P + G\right)P_z' = P; \; P = P(z). \tag{6.49}$$

Εφαρμόζοντας την κατασκευή Julia (παράγραφος 1.1.α) εξάγουμε τη σχέση για τους συντελεστές της προηγούμενης ΣΔΕ

$$-2zG = -z^2\left(1+G_z'\right),$$

ή ισοδύναμα την γραμμική ΣΔΕ πρώτου βαθμού

$$z\,G_z' - 2G + z = 0,$$

με γενική λύση

$$G(z) = z + \lambda z^2, \tag{6.50}$$

όπου λ, η σταθερά ολοκλήρωσης αποτελεί την ελεύθερη παράμετρο . Τότε η γενική λύση της μη γραμμικής εξίσωσης Abel (6.49), σύμφωνα με τα αποτελέσματα της βιβλιογραφικής αναφοράς [2; p.27] είναι

$$P^2 - \frac{2+\lambda z}{z}P = \mu,$$

όπου μ είναι μια νέα παράμετρος (σταθερά ολοκλήρωσης).Επιλύοντας την τελευταία εξίσωση ως προς P εξάγουμε

$$P = u^{1/2} = \frac{2+\lambda z}{z} \pm \sqrt{\left(\frac{2+\lambda z}{z}\right)^2 - \mu};\ z = \text{parameter}.$$

η οποία λόγω των (6.47) και (6.45), καθορίζουν την ανεξάρτητη μεταβλητή t από τη σχέση

$$\begin{gathered} t = \frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{z}{(2+\lambda z) \pm \sqrt{(2+\lambda z)^2 - \mu z}};\ -\infty < z < +\infty; \\ \lambda,\ \mu = \text{ελεύθεροι παράμετροι (σταθερές ολοκλήρωσης)}. \end{gathered} \tag{6.51}$$

Επιπλέον η εξαρτημένη μεταβλητή ξ μπορεί να προσδιοριστεί από τον συνδιασμό των (6.50) και (6.48) δηλαδή

$$\frac{\mathcal{F}(\xi)}{\xi}u^{3/2} - 2z = z + \lambda z^2,$$

ή ισοδύναμα

$$\mathcal{F}(\xi)\left[\frac{(2+\lambda z) \pm \sqrt{(2+\lambda z)^2 - \mu z^2}}{z}\right]^3 - 2z = z + \lambda z^2,$$

και αναδιατάσοντας τους όρους έχουμε

$$\frac{\mathcal{F}(\xi)}{\xi}=\frac{(3+\lambda z)z^4}{\left[(2+\lambda z)\pm\sqrt{2+\lambda z-\mu z^2}\right]^3}; \quad -\infty<z<+\infty; \tag{6.52}$$

$\mathcal{F}(\xi)=\text{known}; \quad \lambda,\mu=$ ελεύθεροι παράμετροι (σταθερές ολοκλήρωσης).

Οι δύο εξισώσεις (6.51) και (6.52) αποτελούν τις ακριβείς παραμετρικές λύσεις της ΣΔΕ τύπου Emden-Fowler (6.44).

Για $\lambda=\mu=0$ (ελεύθεροι παράμετροι) η λύση που δίνεται από τις (6.51) και (6.52) λαμβάνει τη μορφή

$$t=\frac{1}{4}z; \quad \frac{\mathcal{F}(\xi)}{\xi}=\frac{3}{64}z^4 \Leftrightarrow \frac{\mathcal{F}(\xi)}{\xi}=12t^4,$$

Όπου $\mathcal{F}(\xi)$ είναι γνωστή συνάρτηση της μεταβλητής ξ, όπου ξ είναι συνάρτηση της t.

Ακολουθώντας την ανάστοφη πορεία για $\lambda=0$ (ελεύθερη παράμετρος) από τις λύσεις (6.51),(6.52) έχουμε

$$t=\frac{2}{2\pm\sqrt{2-\mu z^2}}, \quad \frac{\mathcal{F}(\xi)}{\xi}=\frac{3z^4}{\left(2\pm\sqrt{2-\mu z}\right)^3},$$

και καταλήγουμε

$$\frac{\mathcal{F}(\xi)}{\xi}=3t^3z=\pm 6t^3\sqrt{\frac{t}{(1-2\mu t)^2}}; \quad \mu=\text{σταθερά ολοκλήρωσης}. \tag{6.53}$$

Επειδή $\mathcal{F}(\xi)$ είναι γνωστή συνάρτηση της ξ η τελευταία συνάρτηση μας επιτρέπει να καθορίσομε την ξ συναρτήση της μεταβλητής t και κατ' επέκταση προσδιορίζουμε τις συναρτήσεις $w(\xi)$ και $y(\xi)$ μέσω των εξισώσεων (6.43) και (6.41) αντίστοιχα. Τέλος ακολουθώντας την αντίστροφη πορεία προσδιορίζουμε την $y(x)$ μέσω της εξίσωσης (6.34).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Gradsteyn I.S., and Ryzhik I.M. (1965): *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, New York, fifth Edition.
2. Kamke E., (1977): *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen,* Vol.1, B.G Teubeur, Stuttgart.
3. Murray Spiegel R. (1999): *Mathematical Handbook of Formulas and Tables,* Schaum's Outline Series, Mc-Graw-Hill.
4. Murphy G. (1960): *Ordinary Differential Equations and their Solutions,* Litton Educational Publishing Inc.
5. Polyanin A.D. and Zaitsev V.F. (2003): *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, CRC Press, New York, Second edition.
6. Polyanin A.D. and Manzhirov A.V. (2007): *Handbook of Mathematics for Engineers and Scientist*, CRC Press, New York.
7. Cheb-Terrab E.S. and Roche A.D. (2000): Equivalence and Integrable Classes, *Computer Physics Communications,* 130, pp. 204-231.
8. Schwarz F. (1998): Symmetry Analysis of Abel's Equation. *Studies in Applied Mathematics* Vol. 3, pp. 269-294.
9. Markakis M.P. (2009): Closed-form solution of certain Abel equations of the First kind, *App. Math. Letters,* 22, pp. 1401-1405.
10. Panayotounakos D.E. and Zarmpoutis Th. (2011): Construction of exact parametric or closed form solutions of some unsolvable classes of nonlinear ODEs, (Abel's nonlinear ODEs of the first kind and relative degenerate equations). *Int J. of Math. and Math Sciences,* ID 387429 1-11.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Στην παρούσα διδακτορική διατριβή παρουσιάζεται η κατασκευή των ακριβών αναλυτικών λύσεων κλάσεων μη γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης και δεύτερης τάξης, πολύ γνωστών (από το 1700) στην διεθνή βιβλιογραφία, που τυγχάνουν ευρείας εφαρμογής στις θετικές επιστήμες, καθώς επίσης στις οικονομικές και στις κοινωνικές επιστήμες.
Τα πλέον σημαντικά αποτελέσματα συνοψίζονται ως ακολούθως:

1) Αναπτύσσεται μαθηματική τεχνική καταλήγουσα στην κατασκευή της ακριβούς λύσης της εξίσωσης Abel δευτέρου είδους κανονικής μορφής και συνεπώς της γενικής εξίσωσης Abel δευτέρου είδους, καθώς επίσης και των εξισώσεων Emden-Fowler. Εδώ πρέπει να τονιστεί ότι αποδείχθηκε πως η λύση της ως άνω εξίσωσης μπορεί να μην είναι ενιαία σε ένα κύριο διάστημα τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής, αλλά να υποδιαιρείται σε κλάδους λύσεων που ισχύουν σε διαδοχικά υποδιαστήματα του κυρίου ως άνω διαστήματος. Και τούτο λόγω της κατάληξης, μέσω παραδεκτών συναρτησιακών μετασχηματισμών, στο γεγονός ότι οι μερικές λύσεις της εξίσωσης Abel προσδιορίζονται μέσω της λύσης μιας κυβικής εξίσωσης η οποία παρέχει γενικώς τριάδες λύσεων εξαρτώμενες από το ελεύθερο μέλος της εξίσωσης Abel. Η εν λόγω κατασκευή αποτελεί επέκταση και γενίκευση της (AZS) τεχνικής.

2) Εισάγονται νέοι πολυπληθείς γενικοί παραδεκτοί (ένας προς ένα) συναρτησιακοί μετασχηματισμοί που συμπληρώνουν αυτούς των E. Kamke, A.D. Polyanin and V.F. Zaitsev, και οι οποίοι μετατρέπουν κλάσεις ιδιαίτερων μη γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων δεύτερης και ανώτερης τάξης σε εξισώσεις Abel δευτέρου είδους. Οι ως άνω εξισώσεις αφορούν:
   α) Στις εξισώσεις κίνησης στερεού περί σταθερό σημείο (Euler),
   β) Στην εξίσωση μη γραμμικών επιφανειακών κυμάτων Rayleigh,
   γ) Στην εξίσωση θερμοδυναμικής Emden,
   δ) Την εξίσωση οριακού στρώματος Blasius υπό την κανονική και γενικευμένη μορφή της,
   ε) Στην εξίσωση μη γραμμικού ελεύθερου ταλαντωτή Duffing με απόσβεση,
   στ) Στην εξίσωση ροής φορτίου εν κενώ Langmuir,
   ζ) Στην εξίσωση μη γραμμικού ελεύθερου ταλαντωτή van der Pol,
   η) Στην εξίσωση Megareus μεμβρανικών κελυφών εκ περιστροφής,
   θ) Στην εξίσωση Kidder στα πορώδη μέσα,
   ι) Στις εξισώσεις πλαστικού "spin" σε απλή διάτμηση,
   ια) Στην μη γραμμική εξίσωση διάχυσης αερίων υπό πίεση,
   ιβ) Στην εξίσωση στερεών - απολύτως πλαστικών σωμάτων υπό συνθήκες επίπεδης έντασης.
   ιγ) Στις εξίσωσεις που προκύπτουν από τη συγχώνευση πληθυσμών,
   ιδ) Στις εξισώσεις στέγασης πληθυσμών μετά από μεγάλη καταστροφή,
   ιε) Στις εξισώσεις βασικών οικονομικών μοντέλων κλπ.
   ιστ) Στην τροποποιημένη εξίσωση Emden.

   Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι οι πολυπληθέστεροι συναρτησιακοί μετασχηματισμοί που εισάγονται στην παρούσα, αφορούν στην τρίτης τάξης γενικευμένη εξίσωση οριακού στρώματος Blasius. Πρόσφατα, ο R. Iacono [*J. of Math. Phys*. 47(3), 034101 (2006)] αναφέρεται επίσης στην μετατροπή της ως άνω εξίσωσης, και παραδεχόμενος ότι η εισαγόμενη στο παρόν και στη βιβλιογραφική αναφορά (D.E. Panayotounakos (2005), *App. Math. Lett,* 18, 155-162) μετατροπής της είναι γενική και εφαρμόσιμη σε άλλες εξισώσεις, εισάγει αντίστοιχους συναρτησιακούς μετασχηματισμούς που καθιστούν την παρούσα διαδικασία μετάπτωσης της συγκεκριμένης εξίσωσης απλούστερη.

3) Η αναπτυσσόμενη τεχνική κατασκευής της γενική λύσης της εξίσωσης Abel δευτέρου είδους, χρησιμοποιείται επίσης για την κατασκευή της γενικής λύσης της γνωστής εξίσωσης Riccati λόγω της ισοδυναμίας μεταξύ των δύο αυτών εξισώσεων.

4) Παρουσιάζεται η κατασκευή της γενικής εξίσωσης Emden-Fowler της μορφής $y''_{xx} = f^n(x)\, y^m (y'_x)^l$ που περιλαμβάνει τις ήδη κατασκευασθείσα γενική λύση των εξισώσεων Emden-Fowler $y''_{xx} = Ax^n y^m$ και γενικευμένης μορφής Emden-Fowler $y''_{xx} = Ax^n y^m (y'_x)^l, (A = \text{σταθερά})$. Με βάση αυτές τις λύσεις κατασκευά-ζονται οι γενικές λύσεις της σχετικιστικής εξίσωσης «*White Dwarf*», της εξίσωσης του προβλήματος «*elastica*» για ομοιόμορφα κατανεμημένα φορτία, καθώς και των κινηματικών εξισώσεων Euler.

5) Παρουσιάζεται η κατασκευή της γενικής λύσης μιας γενικευμένης εξίσωσης Riccati ή της εξίσωσης Abel πρώτου είδους που περιέχει κυβικούς όρους $\left(y'_x = f_3(x)\,y^3 + f_2(x)\,y^2 + f_1(x)\,y + f_0(x)\right)$.

Τα ανοικτά προς έρευνα προβλήματα που τίθενται με βάση το περιεχόμενο του παρόντος μπορούν να περιγραφούν ως ακολούθως:

1) Η προσπάθεια κατασκευής των γενικών αναλυτικών λύσεων των εξισώσεων τύπου Emden-Fowler της μορφής

$$y''_{xx} = f^n(x)\,y^m(x) \text{ ή } y''_{xx} = f(x)\,g(y)\,h(y'_x).$$

Οι γενικές λύσεις των κλάσεων αυτών οδηγούν στην λύση εξισώσεων τύπου Schrödinger ή εξαναγκασμένων ταλαντωτών τύπου Duffing, δηλαδή εξισώσεων της μορφής

$$y''_{xx} + \frac{1}{x}y'_x - \lambda_1 y + \lambda_2 y^k = 0, \quad y''_{xx} - \lambda_1 y + \lambda_2 y^3 = A\sin(\Omega,)$$

$$y''_{xx} - \lambda_1 y'_x + \lambda_2 y + \lambda_3 y^3 = A\sin(\Omega x),$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, A, \Omega = \text{παράμετροι.}$$

2) Η προσπάθεια κατασκευής αναλυτικών λύσεων των εξισώσεων Painlevè πολύ γνωστών στη μαθηματική φυσική, δηλαδή των εξισώσεων:

- Πρώτη υπερβατική Painlevé

$$y''_{xx} = 6y^2 + x,$$

- Δεύτερη υπερβατική Painlevé

$$y''_{xx} = 2y^3 + xy + a; \quad a = \text{παράμετρος}.$$

- Τρίτη υπερβατική Painlevé

$$y''_{xx} = \frac{1}{y}(y'_x)^2 - \frac{1}{y}y'_x + \frac{1}{x}(ay^2 + \beta) + \gamma y^3 + \frac{1}{y}\delta; \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = \text{παράμετροι.}$$

- Τέταρτη υπερβατική Painlevé

$$y''_{xx} = \frac{1}{xy}(y'_x)^2 + \frac{3}{2}y^3 + 4xy^2 + 2(x^2 - a)\,y + \frac{\beta}{y}; \quad \alpha, \beta = \text{παράμετροι.}$$

- Πέμπτη υπερβατική Painlevé

$$y''_{xx} = \frac{2y-1}{2y(y-1)}(y'_x)^2 - \frac{1}{y}y'_x + \frac{1}{x^2}(x-1)^2\left(\alpha y + \frac{\beta}{y}\right) + \gamma\frac{y}{x} + \frac{\delta y(y+1)}{y-1};$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta = \text{παράμετροι.}$$

- Έκτη υπερβατική Painlevé

$$y''_{xx} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x}\right)(y'_x)^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x}\right)y'_x +$$

$$+\frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)} + \left[\alpha + \beta x\frac{1}{y^2} + \gamma + (x-1)\frac{1}{(y-1)^2} + \delta(x-1)\frac{1}{(y-x)^2}\right];$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta = \text{παράμετροι.}$$

Postface

Exact solutions have always played and still play an important role for properly understanding the qualitative features of many phenomena and processes in various fields of mathematical physics.

Equations of applied and theoretical physics, as well as of mechanics often contain parameters or functions which have been found experimentally and therefore are not stringently fixed. In addition, these equations, that model real phenomena and process, must be simple enough in order to be possible their analysis and solutions. So, the simplicity of a model equation, that admits a solution in a closed form, is very important.

On the other hand, the term *nonlinear mechanics* has been applied in recent years in a series of investigations in the field of *nonlinear differential equations* that have their origin or at least the most of its applications in physical phenomena. Investigations subsumed under the generic titled of nonlinear mechanics are concerned primly with phase spaces, with expressions which represent energy terms, with phenomena included under the subset of relaxation, oscillations, stability and instability points and with certain loci called limit cycles.

In this thesis a new solution of several particular equations which have been faced in the study of physical phenomena is introduced. By this time any one has observed that the term “solved” , when applied to any equation, has a varying degree of uncertainty about it. According to Poincaré, most problems are never actually solved but only "more or less solved''. In the case of differential equations, the reduction of the solution to a function contained in the classical corps of functions is usually considered a highly satisfactory achievement. In other cases the expression of solution in the form of an infinite series, or terms of some other convergent algorithm will suffice. However, those who seek the solution of an equation will not be satisfied until the function has been reduced to a tabular form. In this equation a specified order of approximation must be attained throughout a prescribed range of satisfactory size.

In the international literature, there is a large scale of text books and reference works, where exact solutions in the form of known tabulated functions for several special forms of nonlinear ordinary differential equations (ODES) can be found. The books by Kamke [4], Murphy [5] and Polyonin-Zaitev [12] are the most common. The below table retrieves data from these books about the number of concrete higher order up to the fourth degree (ODES) which can be analytically solved.

Order of equation	**E. Kamke (1976)**	**M. Murphy (1960)**	**A.D. Polyanin και V.F. Zaitsev (1999)**
Second order	249	315	1227
Third order	13	22	587
Fourth order	3	3	75
Fifth and higher order	3	9	160
Total equations	268	349	2049

The above three books includes the following types of equations:

1. Equations that traditionally attracted the attention of many researchers, those of the simplest appearances but involving the most difficulties from integration (Abel equations, Riccati equation, Emden-Fowler equations, Painlevé equations etc.), and
2. Equations that are encountered in various applications (in the theory of mathematical physics and nonlinear mechanics).

This thesis contains introduction, six chapters and conclusions. Each chapter includes also the corresponding bibliography being used through the text. In the first chapter all the well known admissible functional transformations and substitutions that transfer the classes of the Emden-Folwer and Abel nonlinear ODEs of the second kind to Abel equations of the second kind of the normal form are developed. Moreover, an extensive reference to the results of Refs[6,7] about the construction of analytical solutions concerning the normal form of an Abel equation of the second kind are demonstrated.

In the second chapter, combining the results of Refs [7,12] and the construction formulated by Alexeeva, Zaitsev and Shvets (AZS), it is successfully developed a method that leads to the construction of the general solution in analytic form of the above mentioned Abel equation of the second kind. This means that the general solution in analytic form of an Abel equation of the second kind with arbitrary free member can be found as well as the construction of the general solution of the Emden-Fowler and generalized Emden-Fowler equation.

The third chapter contains a variety of second order (ODEs) in the mathematical physics and nonlinear mechanics that can reduce to Abel equations of the second kind. So it is now possible their general solutions to be constructed. These equations are:

1. The dynamic Euler equations (1761) ,
2. The nonlinear Rayleigh equation (1894) ,
3. The Emden equation (1907) ,
4. The Blasius equation (1908) ,
5. The nonlinear Duffing oscillator with damping (1918) ,
6. The Langmuir equation (1923) ,
7. The van der Pol oscillator (1926) ,
8. The Thomas-Fermi equation (1927) ,
9. The Megareus equation in shells of revolution (1939),
10. The Kidder equation in porous media (1957) ,
11. The plastic spin equations in simple shear (1985)-The Volterra equations (alanogous problem (1931)) ,
12. The Goudwin constitutive (1976) ,
13. The nonlinear diffusion equation under pressure (1995) ,
14. The nonlinear equation of the model housing allocation of a homeless population due to a natural disaster (1999, 2003)
15. The equation of rigid perfectly plastic bodies under plane stress conditions (2006), and
16. The modified Emden equation (2008).

In the fourth chapter, according to the results of Ref.[6] in which the equivalence between an Abel equation of the second kind of the normal form and the Riccati equation is proved. A new mathematical technique leading to the construction of the general solution of the Riccati equation is developed. Application is furnished in the Euler kinematic equations.

The general solutions in parametric form of a nonlinear second order Emden- Fowler type ODE [$y''_{xx} = f^n(x)\, y^m (y'_x)^l$] is demonstrated in the fifth chapter. Applications in the white dwarf (Chandrasekhar equation, 1937) and the nonlinear "elastica" problem for bars under uniformly distributed loads are given.

In the sixth chapter through a different methodology and technique, the general solution of an Abel equation of the first kind in analytic form is given.

Summing up, through the conclusions, some open mathematic all problems such as the type of Emden-Fowler equation of the form $y''_{xx} = f(x)\, g(y)\, h(y'_x)$ and the six types of Painlevé transcendent equations are recorded.

The author hopes that this thesis will be helpful for a wide range of scientists, lectures engineers and students engaged in the fields of mathematics, physics, mechanics and chemical engineering science.

Athens, July 2012

---

1. Ince, E.L. (1927): *Ordinary Differential Equations*, Dover Reprint.
2. Davis, H. T. (1962): *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations*, Dover Publ. Inc., New York.
3. Chandrasekar, V.K., Senthilvelan, M. and Lakshmanan, M. (2008): On the general solution for the modified Emden type equation $\ddot{x} + ax\dot{x} + bx^3 = 0$, *J. of Astroph. and Astronomy*, 17, 147-166.
4. Kamke, E. (1977): *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen,* Vol. I, B. G. Teubneur, Stuttgart.
5. Murphy G., (1960): *Ordinary Differential Equations and their Solutions,* Litton Educational Publishing Inc.
6. Panayotounakos D.E. (2005): Exact analytic solutions of unsolvable classes of first and second order nonlinear ODFs (Part I: Abel's equations), *Appl Math Lett.* 18*,* 155-162.

7. Panayotounakos, D.E. and Kravvaritis, D.C. (2006): Exact analytic solutions of the Abel, Emden-Fowler and generalized Emden-Fowler nonlinear ODEs, *Nonlinear Analysis - Real World Applications,* 7, 634-650.

8. Panayotounakos D. E,. Zarmpoutis (2011) T. I. A new mathematical technique in constructing the exact parametric solutions of the nonlinear ODEs of the type $y'' = f^n(x)\, y^m\, (y'_x)^l$. Application to the white-dwarf relativistic equation, *Presentation 7^th^ Gracm*, Democritos, Athens.

9. Panayotounakos D. E,. Zarmpoutis T. I. and C.I. Siettos, On the construction of the general closed-form solutions of standing waves of the cubic nonlinear Schrödinger equation. *J. Arch. of Appl. Mech.* (accepted for publication, in press).

10. Panayotounakos D. E., Zarmpoutis T. I., Sotiropoulos P. and Kostogiannis A.G. (2012) Exact parametric or closed form solutions of the nonlinear Riccati ODE as well as of some relative classes of linear second order ODEs of variable coefficients*, Presentation ICEES 2012*, Crete.

11. Panayotounakos D.E. and Zarmpoutis Th. (2011): Construction of exact parametric or closed form solutions of some unsolvable classes of nonlinear ODEs, (Abel's nonlinear ODEs of the first kind and relative degenerate equations). *Int J. of Math. and Math Sciences,* ID 387429 1-11.

12. Polyanin, A.D., Zaitsev V.F. (2003): *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, CRC Press, New York, Second edition.

13. Sotiropoulos, N. (2007): *Επακριβείς Αναλυτικές Λύσεις Ιδιαίτερων Κλάσεων Συνήθων μη Γραμμικών Εξισώσεων Δεύτερης και Ανώτερης Τάξης της Μαθηματικής Φυσικής και μη Γραμμικής Μηχανικής,* PHD Thesis, School of Applied Mathematical and Physical Science, National Technical University of Athens.