Η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων για Ελλειπτικές Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις και εφαρμογή στην εξίσωση Stokes.

Διπλωματική Εργασία

Πέπονα Μαριάννα

Επιβλέπων Καθηγητής: Κ. Χρυσαφίνος
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Αθήνα 2012

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Σκοπός της διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων για τα προβλήματα συνοριακών τιμών μερικών διαφορικών εξισώσεων ελλειπτικού τύπου, δηλαδή εξισώσεων που περιγράφουν φυσικές καταστάσεις οι οποίες δεν εξελίσσονται στον χρόνο. Η μέθοδος αυτή βασίζεται στη μεταβολική διατύπωση των προβλημάτων, τα οποία έχουν λύση σε ειδικούς χώρους συναρτήσεων, τους επονομαζόμενους χώρους Sobolev, τους οποίους παρουσιάζουμε στο Κεφάλαιο 1.

Στο Κεφάλαιο 2 ορίζουμε τις ασθενείς λύσεις των προβλημάτων, και μελετάμε την ύπαρξή τους σε χώρους Sobolev. Επιπλέον, γίνεται παρουσίαση των βασικών Θεωρημάτων Κανονικότητας, χωρίς ωστόσο την απόδειξη αυτών.

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζουμε τη βασικότερη εκπρόσωπο της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων, τη μέθοδο Ritz-Galerkin, καθώς και τα δημοφιλέστερα πεπερασμένα στοιχεία τα οποία χρησιμοποιούνται στην αριθμητική επίλυση των προβλημάτων. Ωστόσο, ο κύριος στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι οι εκτιμήσεις σφαλμάτων στην §3.4 για τις αριθμητικές λύσεις που προκύπτουν από την εφαρμογή της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων. Οι εκτιμήσεις αυτές αναφέρονται κυρίως στη L^2-νόρμα και τη Sobolev νόρμα $\|\cdot\|_{H^1}$.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 6 μελετάμε τα προβλήματα saddle point, τα οποία προκύπτουν από μεταβολικά προβλήματα που υπόκεινται σε περιορισμούς. Στη συνέχεια, η θεωρία αυτή εφαρμόζεται στο πρόβλημα Stokes, το οποίο αποτελεί ένα πρόβλημα saddle point, όπου ο περιορισμός στην περίπτωση αυτή είναι η συνθήκη μη συμπιεστότητας. Με χρήση του προγράμματος Freefem επιλύουμε αριθμητικά το πρόβλημα Stokes και υπολογίζουμε τα αντίστοιχα σφάλματα για διάφορα βήματα της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων. Με τον τρόπο αυτό, παρατηρούμε τη συσχέτιση που υπάρχει μεταξύ των θεωρητικών αποτελεσμάτων της εκτίμησης σφάλματος με τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα.

Ολοκληρώνοντας την διπλωματική μου εργασία θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Επίκουρο Καθηγητή του Ε.Μ.Π. κ. Χρυσαφίνο Κωνσταντίνο για την άριστη συνεργασία που είχαμε και τη βοήθεια του σε όσα ζητήματα προέκυψαν κατά τη διάρκεια αυτής.

Κεφάλαιο 1

Χώροι Sobolev

1.1 Χώροι Hölder

Υποθέτουμε ότι το σύνολο $U \subset \mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτό, δηλαδή κάθε σημείο του είναι το κέντρο μιας ανοιχτής σφαίρας η οποία είναι υποσύνολο του U, και $0 < \gamma \leq 1$.

Ορισμός 1.1.1 *Μία συνάρτηση $u : U \to \mathbb{R}$ καλείται Lipschitz συνεχής αν για κάθε $x, y \in U$ και για κάποια σταθερά C ικανοποιείται η σχέση :*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|.$$

Ορισμός 1.1.2 *Μία συνάρτηση $u : U \to \mathbb{R}$ καλείται Hölder συνεχής με εκθέτη $0 < \gamma \leq 1$ αν για κάθε $x, y \in U$ και για κάποια σταθερά C ικανοποιείται η σχέση:*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\gamma.$$

Ορισμός 1.1.3 (i) *Αν η συνάρτηση $u : U \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής, τότε γράφουμε :*

$$\|u\|_{C(\bar{U})} := sup_{x \in U}|u(x)|,$$

όπου με $\bar{U}$ συμβολίζεται η κλειστότητα του συνόλου U.

(ii) *Η γ - Hölder ημινόρμα της συνάρτησης $u : U \to \mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής :*

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} := sup_{x,y \in U, x \neq y}\left(\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma}\right),$$

ενώ η γ - Hölder νόρμα της συνάρτησης u ορίζεται ως εξής :

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} := \|u\|_{C(\bar{U})} + [u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})}.$$

Ορισμός 1.1.4 *Ο χώρος Hölder $C^{k,\gamma}(\bar{U})$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $u \in C^k(\bar{U})$ για τις οποίες η νόρμα :*

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\bar{U})} := \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{U})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})}$$

είναι πεπερασμένη.

Δηλαδή, ο χώρος $C^{k,\gamma}(\bar{U})$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις u οι οποίες είναι k φορές συνεχώς παραγωγίσιμες και των οποίων οι k-οστές μερικές της παράγωγοι είναι φραγμένες και Hölder συνεχής με εκθέτη γ.

Θεώρημα 1.1.1 *Ο χώρος των συναρτήσεων $C^{k,\gamma}(\bar{U})$ είναι χώρος Banach .*

1.2 Χώροι Sobolev

Ωστόσο, οι χώροι Hölder δεν αποτελούν κατάλληλα σύνολα για την στοιχειώση θεωρία των μερικών διαφορικών εξισώσεων, καθώς δεν είμαστε συνήθως σε θέση να κάνουμε αρκετά καλές αναλυτικές εκτιμήσεις ώστε να αποδείξουμε ότι οι λύσεις που κατασκευάσαμε ανήκουν όντως στους χώρους αυτούς. Αντίθετα, είναι αναγκαίο κάποιο άλλο είδος χώρων, το οποίο θα πρέπει να αποτελείται από λιγότερο λείες συναρτήσεις όπως, για παράδειγμα, οι χώροι Sobolev $W^{k,p}(U)$.

Έστω το ανοικτό σύνολο $U \subset \mathbb{R}^n$. Υπενθυμίζεται ότι, $C_c^\infty(U)$ είναι ο χώρος όλων των απείρως διαφορίσιμων συναρτήσεων $\phi : U \to \mathbb{R}$, των οποίων το στήριγμα είναι συμπαγές υποσύνολο του U. Το στήριγμα (support) μιας συνεχούς συνάρτησης ορίζεται να είναι το σύνολο (ή η κλειστότητα αυτού) πάνω στο οποίο η συνάρτηση δεν μηδενίζεται. Μία συνάρτηση ϕ η οποία ανήκει στον χώρο $C_c^\infty(U)$ καλείται συνήθως δοκιμαστική συνάρτηση.

Ορισμός 1.2.1 *Έστω οι συναρτήσεις $u, v \in L^1_{loc}(U)$, όπου με $L^1_{loc}(U)$ συμβολίζεται το σύνολο $\{u : U \to \mathbb{R} \mid v \in L^p(V)\ \forall V \subset\subset U\}$, και α ένας πολυδείκτης. Θα λέμε ότι η συνάρτηση v είναι η α-οστή ασθενής μερική παράγωγος της u, και γράφουμε $D^\alpha u = v$, αν ισχύει :*

$$\int_U u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v\phi \, dx$$

για όλες τις δοκιμαστικές συναρτήσεις $\phi \in C_c^\infty(U)$.

Λήμμα 1.2.1 *Μια ασθενής α-οστή μερική παράγωγος της συνάρτησης u, εάν υπάρχει, είναι μοναδικά ορισμένη σε ένα σύνολο μηδενικού μέτρου.*

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $v, \tilde{v} \in L^1_{loc}(U)$ ικανοποιούν την σχέση

$$\int_U u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v\phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U \tilde{v}\phi \, dx \qquad (1.1)$$

για όλες τις συναρτήσεις $\phi \in C_c^\infty(U)$. Τότε

$$\int_U (v - \tilde{v})\phi \, dx = 0$$

για όλες τις συναρτήσεις $\phi \in C_c^\infty(U)$, απ'οπου προκύπτει ότι $v - \tilde{v} = 0$ σχεδόν παντού.

Γνωρίζουμε ότι, αν μία συνάρτηση είναι διαφορίσιμη με την κλασσική έννοια, τότε η ασθενής της παράγωγος υπάρχει, και οι δύο παράγωγοι συμπίπτουν. Σε αυτήν την περίπτωση, η σχέση (1.1) μετατρέπεται στον τύπο του Green για ολοκλήρωση κατά μέρη.

Έστω ο αριθμός $1 \le p \le \infty$ και k ένας μη αρνητικός ακέραιος.

Ορισμός 1.2.2 *Ο χώρος Sobolev $W^{k,p}(U)$ αποτελείται από όλες τις τοπικά αθροίσιμες συναρτήσεις $u : U \to \mathbb{R}$ για τις οποίες η $D^\alpha u$ υπάρχει στην ασθενή της μορφή, για κάθε πολυδείκτη α με $|\alpha| \le k$, και ανήκει στον χώρο $L^p(U)$.*

Εάν $p = 2$, γράφουμε συνήθως

$$H^k(U) = W^{k,2}(U) \ (k = 0, 1, \dots).$$

Χρησιμοποιούμε το γράμμα H, μιας και - όπως θα δούμε - ο $H^k(U)$ είναι χώρος Hilbert. Παρατηρούμε, επίσης, ότι $H^0(U) = L^2(U)$, όπου με $L^2(U)$ συμβολίζεται ο χώρος $\{u : U \to \mathbb{R} \mid \|u\|_{L^2(U)} < \infty\}$ ο οποίος είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$\|u\|_{L^2(U)} = \sqrt{\int_U |u|^2 dx}.$$

Επιπλέον, ορίζουμε τη νόρμα με την οποία είναι εφοδιασμένος ο χώρος $H^1(U)$ και $H^2(U)$, αντίστοιχα, ως εξής

$$\|u\|_{H^1(U)} = \sqrt{\int_U (u^2 + |Du|^2) \, dx}$$

και

$$\|u\|_{H^2(U)} = \sqrt{\int_U (u^2 + |Du|^2 + |D^2 u|^2) \, dx}.$$

Ορισμός 1.2.3 *Αν η συνάρτηση $u \in W^{k,p}(U)$, τότε η νόρμα της ορίζεται ως εξής :*

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} := \begin{cases} (\sum_{|\alpha|\leq k} \int_U |D^\alpha u|^p \, dx)^{1/p} & (1 \leq p < \infty), \\ \sum_{|\alpha|\leq k} ess \; sup_U |D^\alpha u| & (p = \infty). \end{cases}$$

Ορισμός 1.2.4 *(i) Έστω η ακολουθία $\{u_m\}_{m=1}^\infty \in W^{k,p}(U)$ και η συνάρτηση $u \in W^{k,p}(U)$. Θα λέμε ότι η ακολουθία u_m συγκλίνει στο u στον χώρο $W^{k,p}(U)$, και θα γράφουμε*

$$u_m \to u \; in \; W^{k,p}(U),$$

αν ισχύει

$$\lim_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(U)} = 0.$$

(ii) Γράφουμε

$$u_m \to u \; in \; W^{k,p}_{loc}(U),$$

όπου με $W^{k,p}_{loc}(U)$ συμβολίζεται ο χώρος $\{u : U \to \mathbb{R} \mid v \in W^{k,p}(V) \; \forall \; V \subset\subset U\}$, εννοώντας ότι

$$u_m \to u \; in \; W^{k,p}(V)$$

για κάθε $V \subset\subset U$.

Ορισμός 1.2.5 *Συμβολίζουμε με*

$$W_0^{k,p}(U)$$

την κλειστότητα του $C_c^\infty(U)$ στον χώρο $W^{k,p}(U)$.

Δηλαδή, η συνάρτηση $u \in W_0^{k,p}(U)$ αν και μόνο αν υπάρχουν συναρτήσεις $u_m \in C_c^\infty(U)$ τέτοιες, ώστε $u_m \to u$ στον χώρο $W^{k,p}(U)$. Επομένως, ο χώρος $W_0^{k,p}(U)$ περιλαμβάνει όλες εκείνες τις συναρτήσεις $u \in W^{k,p}(U)$ για τις οποίες ισχύει ότι

$$D^\alpha u = 0 \; \forall \; |\alpha| \leq k-1 \; on \; \partial U.$$

Συνηθίζουμε να γράφουμε, επιπλέον, ότι : $H_0^k(U) = W_0^{k,2}(U)$. Δηλαδή, ο χώρος $H_0^1(U)$ περιλαμβάνει όλες εκείνες τις συναρτήσεις $u \in H^1(U)$ για τις οποίες ισχύει ότι $u = 0$ στο σύνορο ∂U του συνόλου U.

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε μερικές ιδιότητες των ασθενών παραγώγων.

Θεώρημα 1.2.2 *Έστω ότι οι συναρτήσεις* $u, v \in W^{k,p}(U)$ *και* $|\alpha| \leq k$. *Τότε:*

(i) $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$ *και* $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta}u$ *για όλους τους πολυδείκτες* α, β *με* $|\alpha| + |\beta| \leq k$.

(ii) Για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(U)$ *και* $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$, $|\alpha| \leq k$.

(iii) Αν το V *είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του* U, *τότε* $u \in W^{k,p}(V)$.

(iv) Αν η συνάρτηση $\zeta \in C_c^\infty(U)$, *τότε* $\zeta u \in W^{k,p}(U)$ *και ισχύει ο κανόνας του Leibniz*

$$D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} D^\beta \zeta D^{\alpha-\beta}u,$$

όπου $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$.

Τέλος, σημειώνουμε ότι για κάθε $k = 1, \ldots$ και $1 \leq p \leq \infty$, ο χώρος Sobolev $W^{k,p}(U)$ είναι χώρος Banach.

1.3 Μελέτη συναρτήσεων σε χώρους Sobolev

Σκοπός μας στην παράγραφο αυτή είναι να μελετήσουμε περαιτέρω ιδιότητες των χώρων Sobolev. Αρχικά, θα χρειαστεί να αναπτύξουμε κάποιες διαδικασίες προσέγγισης μιας συνάρτησης η οποία ανήκει σε έναν χώρο Sobolev από λείες συναρτήσεις.

Έστω ο θετικός ακέραιος αριθμός k και $1 \leq p \leq \infty$. Υπενθυμίζεται ότι $U_\varepsilon = \{x \in U | dist(x, \partial U) > \varepsilon\}$, όπου το σύνολο U είναι ανοικτό.

Επιπλέον, υπενθυμίζουμε ότι η συνάρτηση $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ορίζεται από τον τύπο

$$\eta(x) := \begin{cases} C exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & , |x| < 1, \\ 0 & , |x| \geq 1, \end{cases}$$

όπου η σταθερά $C > 0$ έχει επιλεγεί έτσι, ώστε να ισχύει η σχέση $\int_{\mathbb{R}^n} \eta dx = 1$.

Για κάθε $\varepsilon > 0$, θέτουμε $\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\eta(\frac{x}{\varepsilon})$.

Αν η συνάρτηση $f : U \to \mathbb{R}$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη, τότε ορίζουμε την συνέλιξη αυτής ως εξής $f^\varepsilon := \eta_\varepsilon * f$ στο σύνολο U_ε. Δηλαδή, θα είναι

$$f^\varepsilon(x) = \int_U \eta_\varepsilon(x-y)f(y)dy = \int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(y)f(x-y)dy,$$

για κάθε $x \in U_\varepsilon$.

Το παρακάτω θεώρημα αναφέρεται στην τοπική προσέγγιση μιας συνάρτησης η οποία ανήκει σε χώρο Sobolev από λείες συναρτήσεις.

Θεώρημα 1.3.1 *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση* $u \in W^{k,p}(U)$ *για κάποιο* $1 \leq p < \infty$, *και θέτουμε* $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$ *στο σύνολο* U_ε. *Τότε*
(*i*) $u^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$ *για κάθε* $\varepsilon > 0$, *και*
(*ii*) $u^\varepsilon \to u$ *στο* $W^{k,p}_{loc}(U)$, *καθώς* $\varepsilon \to 0$.

Απόδειξη Δείτε [1].

Ωστόσο, μπορούμε να βρούμε λείες συναρτήσεις οι οποίες να προσεγγίζουν μια συνάρτηση στον χώρο $W^{k,p}(U)$, και όχι στον χώρο $W^{k,p}_{loc}(U)$. Το παρακάτω θεώρημα εκφράζει αυτή ακριβώς την ολική προσέγγιση μιας συνάρτησης η οποία ανήκει σε χώρο Sobolev από λείες συναρτήσεις. Είναι σημαντικό να παρατηρήσετε ότι δεν γίνεται κάποια υπόθεση για το αν είναι λείο ή όχι το σύνορο ∂U.

Θεώρημα 1.3.2 *Υποθέτουμε ότι το σύνολο* U *είναι φραγμένο, και η συνάρτηση* $u \in W^{k,p}(U)$ *για κάποιο* $1 \leq p < \infty$. *Τότε υπάρχουν συναρτήσεις* $u_m \in C^\infty(U) \cap W^{k,p}(U)$ *τέτοιες, ώστε* $u_m \to u$ *στον χώρο* $W^{k,p}(U)$.

Απόδειξη Δείτε [1].

Η προσέγγιση μιας δοθείσας συνάρτησης $u \in W^{k,p}(U)$ από συναρτήσεις οι οποίες ανήκουν στον χώρο $C^\infty(\bar{U})$, και όχι στον χώρο $C^\infty(U)$ απαιτεί μια συνθήκη η οποία να αποκλείει την μη ομαλότητα του συνόρου ∂U. Το ακόλουθο θεώρημα εκφράζει αυτήν ακριβώς την ολική προσέγγιση από συναρτήσεις λείες μέχρι και το σύνορο.

Θεώρημα 1.3.3 *Υποθέτουμε ότι το σύνολο* U *είναι φραγμένο και το σύνορό του* ∂U *είναι* C^1. *Αν η συνάρτηση* $u \in W^{k,p}(U)$ *για κάποιο* $1 \leq p < \infty$, *τότε υπάρχουν συναρτήσεις* $u_m \in C^\infty(\bar{U})$ *τέτοιες, ώστε* $u_m \to u$ *στον χώρο* $W^{k,p}(U)$.

Απόδειξη Δείτε [1].

Στη συνέχεια, θα προσπαθήσουμε να επεκτείνουμε συναρτήσεις από τον χώρο Sobolev $W^{1,p}(U)$ στο χώρο Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Θα πρέπει η επέκταση της συνάρτησης να διατηρεί τις ασθενείς παραγώγους κατά μήκος του συνόρου ∂U.

Θεώρημα 1.3.4 *Έστω ότι* $1 \leq p \leq \infty$. *Υποθέτουμε ότι το σύνολο* U *είναι φραγμένο και το σύνορό του* ∂U *είναι* C^1. *Επιλέγουμε ένα φραγμένο ανοικτό σύνολο* V *τέτοιο, ώστε* $U \subset\subset V$. *Τότε υπάρχει ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής*

$$E : W^{1,p}(U) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

τέτοιος, ώστε για κάθε συνάρτηση $u \in W^{1,p}(U)$ *να ισχύουν τα ακόλουθα :*

(*i*) $Eu = u$ *σχεδόν παντού στο σύνολο* U,

(*ii*) *το* Eu *έχει στήριγμα μέσα στο σύνολο* V, *και*

(*iii*) $\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$, *όπου η σταθερά* C *εξαρτάται μόνο από τα* p, U *και* V.

Απόδειξη Δείτε [1].

Ο τελεστής Eu ονομάζεται επέκταση της συνάρτησης u στον χώρο $\mathbb{R}^n$.

Τέλος, μελετάμε την πιθανότητα εκχώρησης «συνοριακών τιμών» κατά μήκος του συνόρου ∂U σε μια συνάρτηση $u \in W^{1,p}(U)$, υποθέτοντας ότι το σύνορο είναι C^1. Αν η συνάρτηση $u \in C(\bar{U})$, τότε προφανώς η u έχει τιμές στο σύνορο ∂U. Το πρόβλημα είναι ότι μια συνήθης συνάρτηση $u \in W^{1,p}(U)$ δεν είναι εν γένει συνεχής και, επιπλέον, ορίζεται μόνο σχεδόν παντού στο σύνολο U. Το πρόβλημα αυτό επιλύεται με τον ορισμό του τελεστή ίχνους.

Θεώρημα 1.3.5 *Έστω ότι* $1 \leq p < \infty$. *Υποθέτουμε ότι το σύνολο* U *είναι φραγμένο και το σύνορό του* ∂U *είναι* C^1. *Τότε υπάρχει ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής*

$$T : W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U)$$

τέτοιος, ώστε:

(*i*) $Tu = u|_{\partial U}$, *αν η συνάρτηση* $u \in W^{1,p}(U) \cap C(\bar{U})$ *και*

(*ii*) $\|Tu\|_{L^p(\partial U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$, *για κάθε συνάρτηση* $u \in W^{1,p}(U)$, *με την σταθερά* C *να εξαρτάται μόνο από την παράμετρο* p *και το σύνολο* U.

Ο τελεστής Tu ονομάζεται ίχνος της συνάρτησης u στο σύνορο ∂U.

Θεώρημα 1.3.6 *Υποθέτουμε ότι το σύνολο* U *είναι φραγμένο και το σύνορό του* ∂U *είναι* C^1. *Επιπλέον, έστω ότι η συνάρτηση* $u \in W^{1,p}(U)$. *Τότε*

$$u \in W_0^{1,p}(U) \Leftrightarrow Tu = 0|_{\partial U}.$$

1.4 Ανισότητες Sobolev

Στόχος μας στην παράγραφο αυτή είναι να ανακαλύψουμε ενσωματώσεις διαφόρων χώρων Sobolev σε άλλους χώρους. Αρχικά, θεωρούμε μόνο τον χώρο Sobolev $W^{1,p}(U)$ και εξετάζουμε το ακόλουθο βασικό πρόβλημα: Αν μια συνάρτηση u ανήκει στον χώρο Sobolev $W^{1,p}(U)$, τότε να ελεγχθεί αν η u ανήκει αυτόματα σε άλλους χώρους. Η απάντηση στο πρόβλημα αυτό θα είναι θετική, όμως οι χώροι στους οποίους μπορεί να ανήκει η u εξαρτώνται από το διάστημα στο οποίο ανήκει η παράμετρος p. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις: (i) $1 \leq p < n$, (ii) $p = n$, και (iii) $n < p \leq \infty$.

Αρχικά, θα μελετήσουμε την πρώτη περίπτωση, δηλαδή υποθέτουμε ότι $1 \leq p < n$. Στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι υπάρχει μια εκτίμηση της μορφής

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.2}$$

για συγκεκριμένες σταθερές $C > 0$ και $1 \leq q < \infty$, καθώς και για όλες τις συναρτήσεις $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Θα πρέπει, επιπλέον, οι τιμές των σταθερών C και q να μην εξαρτώνται από την συνάρτηση u.

Θα αποδείξουμε ότι αν ισχύει μια ανισότητα της μορφής (1.2), τότε η παράμετρος q δεν μπορεί να είναι αυθαίρετη, αλλά αντίθετα θα πρέπει να έχει μια συγκεκριμένη μορφή. Εξαιτίας αυτού, επιλέγεται μια συνάρτηση $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $u \neq 0$, και για $\lambda > 0$ ορίζεται η συνάρτηση

$$u_\lambda(x) := u(\lambda x), x \in \mathbb{R}^n.$$

Εφαρμόζοντας την σχέση (1.2) για συνάρτηση u_λ, προκύπτει ότι:

$$\|u_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Λόγω των ακόλουθων ισοτήτων

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_\lambda|^q dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\lambda x)|^q dx = \frac{1}{\lambda^n}\int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q dy,$$

και

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Du_\lambda|^p dx = \lambda^p \int_{\mathbb{R}^n} |Du(\lambda x)|^p dx = \frac{\lambda^p}{\lambda^n}\int_{\mathbb{R}^n} |Du(y)|^p dy,$$

η παραπάνω ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$\frac{1}{\lambda^{n/q}}\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\frac{\lambda}{\lambda^{n/p}}\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

ή ισοδύναμα

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\lambda^{1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}}\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Παρατηρούμε ότι αν ίσχυε $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \neq 0$, τότε ο αριθμός λ στην παραπάνω ανισότητα θα μπορούσε να τείνει είτε στο 0 ή στο ∞, με το οποίο όμως καταλήγουμε σε αντίφαση. Συνεπώς, αν ισχύει η ανισότητα της σχέσης (1.2), τότε θα πρέπει αναγκαστικά να έχουμε $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} = 0$ ή, ισοδύναμα, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ και $q = \frac{np}{n-p}$.

Λόγω των παραπάνω, προκύπτει φυσικά ο ακόλουθος ορισμός:

Ορισμός 1.4.1 *Αν $1 \leq p < n$, τότε ο Sobolev συζυγής του αριθμού p είναι*

$$p^* := \frac{np}{n-p}.$$

Η προηγούμενη ανάλυση δείχνει ότι η εκτίμηση (1.2) μπορεί να αληθεύει μόνο για $q = p^*$. Το γεγονός αυτό αποδεικνύεται από το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 1.4.1 *Υποθέτουμε ότι $1 \leq p < n$. Τότε υπάρχει μια σταθερά C, η οποία εξαρτάται μόνο από τις παραμέτρους p και n τέτοια ώστε,*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

για όλες τις συναρτήσεις $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$.

Το παραπάνω θεώρημα είναι γνωστό ως Gagliardo-Nirenberg-Sobolev ανισότητα.

Στα παρακάτω θεωρήματα δίνονται οι ενσωματώσεις των χώρων Sobolev $W^{1,p}(U)$ και $W_0^{1,p}(U)$ σε χώρους L^p στην περίπτωση που το σύνολο $U \subset \mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτό και φραγμένο.

Θεώρημα 1.4.2 *Έστω ότι το σύνολο U είναι φραγμένο, ανοιχτό υποσύνολο του χώρου $\mathbb{R}^n$, και το σύνορό του ∂U είναι C^1. Υποθέτουμε ότι $1 \leq p < n$, και η συνάρτηση $u \in W^{1,p}(U)$. Τότε η $u \in L^{p^*}(U)$, με την ακόλουθη εκτίμηση*

$$\|u\|_{L^{p^*}(U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)},$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από τις παραμέτρους p, n και το σύνολο U.

Απόδειξη Δείτε [1].

Θεώρημα 1.4.3 *Έστω ότι το σύνολο U είναι φραγμένο, ανοιχτό υποσύνολο του χώρου $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $u \in W_0^{1,p}(U)$ για κάποιο $1 \leq p < n$. Τότε ισχύει η εκτίμηση*

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C\|Du\|_{L^p(U)},$$

για κάθε $q \in [1, p^*]$, με την σταθερά C να εξαρτάται μόνο από τις παραμέτρους p, q, n και το σύνολο U.

Απόδειξη Δείτε [1].

Η παραπάνω εκτίμηση καλείται συνήθως ανισότητα Poincaré. Η διαφορά με το Θεώρημα (1.4.2) είναι ότι μόνο η κλίση της συνάρτησης u εμφανίζεται στο δεξί μέλος της ανισότητας. Επιπλέον, η νόρμα $\|Du\|_{L^p(U)}$ είναι ισοδύναμη με τη $\|u\|_{W^{1,p}(U)}$ στον χώρο $W_0^{1,p}(U)$, αν το σύνολο U είναι φραγμένο.

Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε την τρίτη περίπτωση, δηλαδή υποθέτουμε ότι $n < p \leq \infty$. Το ακόλουθο θεώρημα είναι γνωστό ως ανισότητα Morrey.

Θεώρημα 1.4.4 *Υποθέτουμε ότι $n < p \leq \infty$. Τότε υπάρχει μια σταθερά C, η οποία εξαρτάται μόνο από τις παραμέτρους p και n τέτοια, ώστε*

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

για όλες τις συναρτήσεις $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$, με

$$\gamma := 1 - n/p.$$

Απόδειξη Δείτε [1].

Στο παρακάτω θεώρημα δίνεται η ενσωμάτωση του χώρου Sobolev $W^{1,p}(U)$ στον χώρο $C^{0,\gamma}(\bar{U})$. Υπενθυμίζεται ότι μια συνάρτηση u^* καλείται version συνάρτηση μιας δοθείσης u αν και μόνο αν ισχύει $u = u^*$ σχεδόν παντού.

Θεώρημα 1.4.5 *Έστω ότι το σύνολο U είναι φραγμένο, ανοιχτό υποσύνολο του χώρου $\mathbb{R}^n$, και το σύνορό του ∂U είναι C^1. Υποθέτουμε ότι $n < p \leq \infty$, και η συνάρτηση $u \in W^{1,p}(U)$. Τότε η u έχει μια version συνάρτηση $u^* \in C^{0,\gamma}(\bar{U})$, με την εκτίμηση*

$$\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)},$$

για κάποιο $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$. Η σταθερά C εξαρτάται μόνο από τις παραμέτρους p, n και το σύνολο U.

Τέλος, συνδυάζοντας τις παραπάνω εκτιμήσεις, μπορούμε να καταλήξουμε σε περισσότερο πολύπλοκες ανισότητες, οι οποίες είναι γνωστές ως γενικές ανισότητες Sobolev:

Θεώρημα 1.4.6 *Έστω ότι το σύνολο U είναι φραγμένο, ανοιχτό υποσύνολο του χώρου $\mathbb{R}^n$, και το σύνορό του ∂U είναι C^1. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $u \in W^{k,p}(U)$.*

(i) Αν $k < \frac{n}{p}$, τότε η $u \in L^q(U)$, όπου $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$. Επιπλέον, έχουμε την εκτίμηση

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(U)},$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από τις παραμέτρους k, p, n και το σύνολο U.

(ii) Αν $k > \frac{n}{p}$, τότε η $u \in C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\gamma}(\bar{U})$, όπου

$$\gamma = \begin{cases} [\frac{n}{p}] + 1 - \frac{n}{p} & , \frac{n}{p} \notin \mathbb{Z}, \\ 0 < \theta < 1 & , \frac{n}{p} \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Επιπλέον, έχουμε την εκτίμηση

$$\|u\|_{C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\gamma}(\bar{U})} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(U)},$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από τις παραμέτρους k, p, n, γ και το σύνολο U.

Απόδειξη Δείτε [1].

Σημείωση Η περίπτωση $p = n$ μελετάται στην §1.5.2.

1.5 Πρόσθετα θέματα στους χώρους Sobolev

1.5.1 Συμπάγεια

Υπενθυμίζεται ότι η ανισότητα των Gagliardo-Nirenberg-Sobolev συνεπάγεται την ενσωμάτωση του χώρου $W^{1,p}(U)$ στον χώρο $L^{p^*}(U)$ για $1 \leq p < n$, $p^* = \frac{np}{n-p}$. Θα δείξουμε ότι ο χώρος $W^{1,p}(U)$ είναι συμπαγώς ενσωματωμένος στον χώρο $L^q(U)$ για $1 \leq q < p^*$. Η συμπάγεια αυτή είναι θεμελιώδης για τις εφαρμογές της γραμμικής και της μη γραμμικής συναρτησιακής ανάλυσης στις μερικές διαφορικές εξισώσεις.

Ορισμός 1.5.1 *Έστω οι χώροι Banach X και Y, με $X \subset Y$. Θα λέμε ότι ο X είναι συμπαγώς ενσωματωμένος στον Y, και θα γράφουμε $X \subset\subset Y$, αν και μόνο αν ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X, x \in X$, για κάποια σταθερά C,και

(ii) κάθε φραγμένη ακολουθία στον χώρο X είναι σχετικά φραγμένη στον Y.

Στο ακόλουθο θεώρημα συμπάγειας των Rellich-Kondrachov δίνεται η συμπαγής ενσωμάτωση του χώρου $W^{1,p}(U)$ στον $L^q(U)$.

Θεώρημα 1.5.1 *Έστω ότι το σύνολο U είναι φραγμένο, ανοιχτό υποσύνολο του χώρου $\mathbb{R}^n$, και το σύνορό του ∂U είναι C^1. Υποθέτουμε ότι $1 \leq p < n$. Τότε*

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U),$$

για κάθε $1 \leq q < p^*$.

Απόδειξη Δείτε [1].

Παρατηρούμε ότι, επειδή ισχύουν οι σχέσεις $p^* > p$ και $p^* \to \infty$, καθώς $p \to n$, έπεται ότι $W^{1,p}(U) \subset\subset L^p(U)$ για κάθε $1 \leq p \leq \infty$. Επιπλέον, σημειώνουμε ότι ισχύει $W_0^{1,p}(U) \subset\subset L^p(U)$, ακόμα και αν δεν υποθέσουμε ότι το σύνορο ∂U είναι C^1.

1.5.2 Ανισότητες Poincaré και Friedrich

Με τη βοήθεια της συμπάγειας, μπορούμε να παράγουμε νέες ανισότητες, όπως οι ανισότητες Poincaré για σύνολο U ή για μπάλα $B(x,r)$ με κέντρο το σημείο x και ακτίνα r.

Θεώρημα 1.5.2 *Έστω ότι το σύνολο U είναι φραγμένο, συνεκτικό, ανοιχτό υποσύνολο του χώρου $\mathbb{R}^n$, και το σύνορό του ∂U είναι C^1. Υποθέτουμε ότι $1 \leq p \leq \infty$. Τότε υπάρχει μια σταθερά C, η οποία εξαρτάται μόνο από τις παραμέτρους n, p και το σύνολο U τέτοια, ώστε*

$$\|u - (u)_U\|_{L^p(U)} \leq C\|Du\|_{L^p(U)},$$

για κάθε συνάρτηση $u \in W^{1,p}(U)$.

Απόδειξη Δείτε [1].

Υπενθυμίζεται ότι η μέση τιμή της συνάρτησης u πάνω στο σύνολο U συμβολίζεται με $(u)_U = \int_U u dy$, ενώ η μέση τιμή της u πάνω στην μπάλα $B(x,r)$ συμβολίζεται με $(u)_{x,r} = \int_{B(x,r)} u dy$.

Θεώρημα 1.5.3 *Υποθέτουμε ότι $1 \leq p \leq \infty$. Τότε υπάρχει μια σταθερά C, η οποία εξαρτάται μόνο από τις παραμέτρους n και p τέτοια, ώστε*

$$\|u - (u)_{x,r}\|_{L^p(B(x,r))} \leq Cr\|Du\|_{L^p(B(x,r))},$$

για κάθε μπάλα $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$ και για κάθε συνάρτηση $u \in W^{1,p}(B^0(x,r))$.

Απόδειξη Δείτε [1].

Η ακόλουθη ανισότητα, η οποία καλείται ανισότητα του Friedrich, φράσσει την L^p-νόρμα μιας συνάρτησης χρησιμοποιώντας L^p φράγματα στις ασθενείς παραγώγους της συνάρτησης, καθώς και στη γεωμετρία του πεδίου ορισμού της. Η ανισότητα του Friedrich μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδειχθεί ότι συγκεκριμένες νόρμες στους χώρους Sobolev είναι ισοδύναμες.

Θεώρημα 1.5.4 *Έστω ότι το σύνολο U είναι ένα φραγμένο υποσύνολο του χώρου $\mathbb{R}^n$ με διάμετρο d. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $u : U \to \mathbb{R}$ ανήκει στον χώρο Sobolev $W_0^{k,p}(U)$. Τότε ισχύει η ακόλουθη ανισότητα*

$$\|u\|_{L^p(U)} \leq d^k \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(U)} \right)^{1/p},$$

όπου με α συμβολίζεται η διατεταγμένη ν-άδα $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ με $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ και με $D^\alpha u$ συμβολίζεται η μεικτή μερική παράγωγος $\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$.

1.5.3 Πηλίκα διαφορών

Σημαντικό ρόλο στην μετέπειτα εφαρμογή της θεωρίας των χώρων Sobolev στις μερικές διαφορικές εξισώσεις έχουν τα πηλίκα διαφορών, καθώς θα είμαστε υποχρεωμένοι να μελετήσουμε προσεγγίσεις πηλίκων διαφορών σε ασθενείς παραγώγους.

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $u : U \to \mathbb{R}$ είναι τοπικά αθροίσιμη συνάρτηση, και $V \subset\subset U$.

Ορισμός 1.5.2 *(i) Το i-οστό πηλίκο διαφοράς μεγέθους h ορίζεται ως*

$$D_i^h u(x) = \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}\ ,\ i = 1, \ldots, n,$$

για $x \in V$ και $h \in \mathbb{R},\ 0 < |h| < dist(V, \partial U)$.

(ii) $D^h u := (D_1^h u, \ldots, D_n^h u)$.

Θεώρημα 1.5.5 *(i) Έστω ότι $1 \leq p < \infty$ και η συνάρτηση $u \in W^{1,p}(U)$. Τότε για κάθε σύνολο $V \subset\subset U$ ισχύει*

$$\|D^h u\|_{L^p(V)} \leq C \|Du\|_{L^p(U)},$$

για κάποια σταθερά C και για κάθε h με $0 < |h| < \frac{1}{2} dist(V, \partial U)$.

(ii) Έστω ότι $1 < p < \infty$, η συνάρτηση $u \in L^p(V)$, και υπάρχει μια σταθερά C τέτοια, ώστε $\|D^h u\|_{L^p(V)} \leq C$, για κάθε h με $0 < |h| < \frac{1}{2} dist(V, \partial U)$. Τότε

$$u \in W^{1,p}(V),\ \|Du\|_{L^p(V)} \leq C.$$

Στο παρακάτω θεώρημα δίνεται η σχέση ανάμεσα στον χώρο Sobolev $W^{1,\infty}$ και τις Lipschitz συναρτήσεις.

Θεώρημα 1.5.6 *Έστω ότι το σύνολο U είναι ανοιχτό και φραγμένο, με σύνορο ∂U τάξεως C^1. Τότε η συνάρτηση $u : U \to \mathbb{R}$ είναι Lipschitz συνεχής αν και μόνο αν η $u \in W^{1,\infty}(U)$.*

Απόδειξη Δείτε [1].

Με τη βοήθεια του παραπάνω θεωρήματος αποδεικνύεται εύκολα ότι, για κάθε ανοιχτό σύνολο U η συνάρτηση $u \in W^{1,\infty}_{loc}(U)$ αν και μόνο αν η u είναι Lipschitz τοπικά συνεχής στο U. Όμως, για $1 \leq p < \infty$ δεν υπάρχει αντίστοιχος χαρακτηρισμός των χώρων $W^{1,p}$. Τέλος, σημειώνουμε ότι παρά το γεγονός ότι κάθε συνάρτηση $u \in W^{1,p}$, με $n < p < \infty$, ανήκει στον Hölder χώρο $C^{0,1-n/p}$, μια συνάρτηση η οποία είναι Hölder συνεχής με εκθέτη μικρότερο της μονάδας δεν ανήκει απαραίτητα σε κάποιο Sobolev χώρο $W^{1,p}$.

1.5.4 Διαφορισιμότητα

Στη συνέχεια, εξετάζουμε την σχέση ανάμεσα στις ασθενείς μερικές παραγώγους και τις μερικές παραγώγους με βάση τον κλασσικό διαφορικό λογισμό.

Ορισμός 1.5.3 *Μια συνάρτηση $u : U \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη σε ένα σημείο $x \in U$ αν υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο, ώστε*

$$u(y) = u(x) + \alpha(y - x) + o(|y - x|),$$

καθώς $y \to x$.

Ισοδύναμα,

$$\lim_{y \to x} \frac{|u(y) - u(x) - \alpha(y - x)|}{|y - x|} = 0.$$

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι, αν υπάρχει ο αριθμός α, τότε αυτός είναι μοναδικός. Στο εξής θα γράφουμε $Du(x)$ για κάποιον αριθμό α, και θα καλούμε Du την κλίση της συνάρτησης u.

Στο παρακάτω θεώρημα δίνεται η σχέση ανάμεσα στον χώρο Sobolev $W^{1,p}_{loc}$ και την διαφορισιμότητα.

Θεώρημα 1.5.7 *Έστω ότι η συνάρτηση $u \in W^{1,p}_{loc}(U)$ για κάποιο $n < p \leq \infty$. Τότε η u είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού στο σύνολο U, και η κλίση της ισούται με την ασθενή κλίση της σχεδόν παντού.*

Απόδειξη Δείτε [1].

Λήμμα 1.5.8 (Rademacher) *Έστω ότι η συνάρτηση u είναι Lipschitz τοπικά συνεχής στο σύνολο U. Τότε η u είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού στο U.*

1.6 Ο χώρος H^{-1}

Έστω γ ένα μη κενό υποσύνολο του συνόρου ∂U του συνόλου U. Τότε συμβολίζουμε με $H^1_\gamma(U)$ το υποσύνολο του χώρου $H^1(U)$ το οποίο αποτελείται από κάθε συνάρτηση $u \in H^1(U)$ που μηδενίζεται στο γ, δηλαδή $H^1_\gamma(U) = \{u \in H^1(U) | u = 0 \text{ στο } \gamma\}$. Αν $\gamma = \partial U$, τότε ο χώρος $H^1_{\partial U}(U)$ συμβολίζεται με $H^1_0(U)$, δηλαδή $H^1_0(U) = \{u \in H^1(U) | u = 0 \text{ στο } \partial U\}$.

Υπενθυμίζεται ότι, αν X είναι χώρος με νόρμα, τότε το σύνολο των φραγμένων/συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών $f : X \to \mathbb{R}$ αποτελεί τον δυϊκό χώρο X^* του X.

Ορισμός 1.6.1 *Συμβολίζουμε με $H^{-1}(U)$ τον δυϊκό χώρο του $H^1_0(U)$.*

Δηλαδή, το γραμμικό συναρτησοειδές f ανήκει στον χώρο $H^{-1}(U)$ αν το f είναι φραγμένο στον χώρο $H^1_0(U)$.

Ορισμός 1.6.2 *Αν το συναρτησοειδές $f \in H^{-1}(U)$, τότε ορίζεται η ακόλουθη νόρμα*

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} = sup\{< f, u > \mid u \in H^1_0(U), \|u\|_{H^1_0(U)} \leq 1\}.$$

Θεώρημα 1.6.1 *(i) Έστω ότι το συναρτησοειδές $f \in H^{-1}(U)$. Τότε υπάρχουν συναρτήσεις $f^0, f^1, \ldots, f^n$ στον χώρο $L^2(U)$ τέτοιες, ώστε*

$$< f, v >= \int_U f^0 v + \sum_{i=1}^{n} f^i v_{x_i} dx, v \in H^1_0(U). \tag{1.3}$$

(ii) Επιπλέον, $\|f\|_{H^{-1}(U)} = inf\{(\int_U \sum_{i=0}^n |f^i|^2 dx)^{1/2} |$ όπου το f ικανοποιεί την (1.3) για συναρτήσεις $f^0, \ldots, f^n \in L^2(U)\}$.

Κεφάλαιο 2

Ελλειπτικές Εξισώσεις Δεύτερης Τάξης

2.1 Ταξινόμηση μερικών διαφορικών εξισώσεων

Ορισμός 2.1.1 *Μερική διαφορική εξίσωση καλείται μια συναρτησιακή σχέση η οποία συνδέει μια άγνωστη συνάρτηση $u = u(\mathbf{x})$, διανυσματικής μεταβλητής $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in U \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, και πεπερασμένο πλήθος από μερικές παραγώγους της, δηλαδή*

$$F(\mathbf{x}, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_1 x_2}, \ldots) = 0 \ , \tag{2.1}$$

όπου οι δείκτες υποδηλώνουν παραγώγιση στις αντίστοιχες μεταβλητές.

Υπενθυμίζεται ότι, το σύνολο U είναι ένας τόπος, δηλαδή ένα σύνολο ανοιχτό και συνεκτικό. Ένα υποσύνολο U του χώρου $\mathbb{R}^n$ καλείται ανοιχτό όταν κάθε σημείο του είναι το κέντρο μιας ανοιχτής σφαίρας η οποία είναι υποσύνολο του U και συνεκτικό όταν κάθε δύο σημεία του συνδέονται με μια συνεχή γραμμή η οποία ανήκει στο U.

Ορισμός 2.1.2 *Τάξη της μερικής διαφορικής εξίσωσης καλείται η μέγιστης τάξης παραγώγιση της άγνωστης συνάρτησης u η οποία εμφανίζεται στην σχέση (2.1).*

Ορισμός 2.1.3 *Μια μερική διαφορική εξίσωση καλείται γραμμική όταν η συνάρτηση F που την ορίζει είναι γραμμική στην άγνωστη συνάρτηση u και σε όλες τις παραγώγους της u που εμφανίζονται στην εξίσωση.*

Αν στην σχέση (2.1) τόσο η συνάρτηση F όσο και η άγνωστη συνάρτηση u αντικατασταθούν με τις διανυσματικές συναρτήσεις $\mathbf{F}$ και $\mathbf{u}$ αντίστοιχα, τότε προκύπτει ένα σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων το οποίο έχει τόσους αγνώστους όση είναι η διάσταση της $\mathbf{u}$, ενώ το πλήθος των εξισώσεων του συστήματος ισούται με τη διάσταση της $\mathbf{F}$. Ένα σύστημα καλείται γραμμικό όταν κάθε μια από τις εξισώσεις που το αποτελούν είναι γραμμική.

Η γενική μορφή της γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης σε n μεταβλητές είναι η

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x), \tag{2.2}$$

όπου $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Αν οι συναρτήσεις α_{ij}, b_i και c είναι ανεξάρτητες της μεταβλητής x, τότε η μερική διαφορική εξίσωση λέμε ότι έχει σταθερούς συντελεστές. Επιπλέον, για κάθε συνάρτηση η οποία είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη ισχύει ότι $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$.

Ορισμός 2.1.4 *(i) Η εξίσωση (2.2) καλείται ελλειπτική σε ένα σημείο x αν ο πίνακας $A(x) := (\alpha_{ij}(x))$ είναι θετικά ορισμένος.*

(ii) Η εξίσωση (2.2) καλείται υπερβολική σε ένα σημείο x αν ο πίνακας $A(x)$ έχει μια αρνητική και $n-1$ θετικές ιδιοτιμές.

(iii) Η εξίσωση (2.2) καλείται παραβολική σε ένα σημείο x αν ο πίνακας $A(x)$ είναι θετικά ημιορισμένος, και ο βαθμός του επαυξημένου πίνακα $(A(x), b(x))$ ισούται με n.

(iv) Μια εξίσωση καλείται ελλειπτική, υπερβολική ή παραβολική αν η αντίστοιχη ιδιότητα ισχύει για όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού.

Η εξίσωση (2.2) για ελλειπτικά προβλήματα γράφεται συνήθως στη μορφή

$$Lu = f,$$

όπου L ένας ελλειπτικός διαφορικός τελεστής δεύτερης τάξης.

Για παράδειγμα, η εξίσωση Poisson

$$-\Delta u = f.$$

Επιπλέον, οι υπερβολικές διαφορικές εξισώσεις γράφονται συνήθως στη μορφή

$$u_{tt} + Lu = f,$$

ενώ οι παραβολικές γράφονται συνήθως στη μορφή

$$u_t + Lu = f,$$

όπου L ένας ελλειπτικός διαφορικός τελεστής.

Παράδειγμα υπερβολικής διαφορικής εξίσωσης αποτελεί η κυματική εξίσωση

$$\Delta u = \frac{1}{c^2} u_{tt},$$

ενώ παράδειγμα παραβολικής διαφορικής εξίσωσης αποτελεί η εξίσωση διάχυσης

$$\Delta u = \frac{1}{\kappa} u_t.$$

Αν η διαφορική εξίσωση παραμένει αμετάβλητη παρά την εφαρμογή ισομετρικών απεικονίσεων σε αυτήν, τότε ο ελλειπτικός τελεστής L έχει τη μορφή

$$Lu = -\alpha_0 \Delta u + c_0 u.$$

Το γεγονός αυτό εμφανίζεται σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα.

Τέλος, σημειώνουμε ότι σε αντίθεση με τα προβλήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων στα οποία μπορούμε να εφαρμόσουμε είτε αρχικές ή συνοριακές συνθήκες για την επίλυσή τους, αυτό είναι αδύνατο στην περίπτωση των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Στην περίπτωση αυτή, η εφαρμογή αρχικών ή συνοριακών συνθηκών εξαρτάται από το είδος της διαφορικής εξίσωσης. Είναι γνωστό ότι, για διαφορικές εξισώσεις ελλειπτικού τύπου χρειάζεται να ορίσουμε συνοριακές συνθήκες για την επίλυσή τους, για υπερβολικές διαφορικές εξισώσεις χρειάζεται να ορίσουμε αρχικές συνθήκες, ενώ για παραβολικές διαφορικές εξισώσεις ορίζουμε και αρχικές και συνοριακές συνθήκες.

2.2 Βασικές έννοιες

2.2.1 Ελλειπτικές εξισώσεις

Στο κεφάλαιο αυτό, θα ασχοληθούμε κυρίως με το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} Lu = f & u \in U, \\ u = 0 & u \in \partial U, \end{cases} \tag{2.3}$$

όπου το σύνολο U είναι ένα ανοιχτό, φραγμένο υποσύνολο του χώρου $\mathbb{R}^n$, $u : \bar{U} \to \mathbb{R}$ η άγνωστη συνάρτηση $u = u(x)$, $f : U \to \mathbb{R}$ μια δοθείσα συνάρτηση, και L ένας μερικός διαφορικός τελεστής δεύτερης τάξης ο οποίος έχει είτε τη μορφή

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (\alpha^{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) u_{x_i} + c(x) u \tag{2.4}$$

ή

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \alpha^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u, \tag{2.5}$$

όπου α^{ij}, b^i, c για $i, j = 1, \ldots, n$ δοθείσες συναρτήσεις συντελεστών.

Θα λέμε ότι, η μερική διαφορική εξίσωση $Lu = f$ είναι σε μορφή απόκλισης αν ο τελεστής L δίνεται από την σχέση (2.4), ενώ δεν είναι σε μορφή απόκλισης αν ο τελεστής L δίνεται από την σχέση (2.5). Η συνθήκη $u = 0$ στο ∂U στην σχέση (2.3) καλείται συνήθως συνοριακή συνθήκη του Dirichlet.

Παρατηρείται ότι, αν οι συντελεστές υψηλότερης τάξης α^{ij}, για $i, j = 1, \ldots, n$, είναι C^1 συναρτήσεις και ο τελεστής L είναι σε μορφή απόκλισης, τότε ο L μπορεί να γραφεί σε μορφή μη απόκλισης, και αντίστροφα. Πράγματι, η εξίσωση (2.4) γράφεται

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \alpha^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}^i(x)u_{x_i} + c(x)u,$$

όπου $\tilde{b}^i := b^i - \sum_{j=1}^{n} \alpha^{ij}_{x_j}$, για $i = 1, \ldots, n$, και η παραπάνω εξίσωση δεν είναι σε μορφή απόκλισης.

Επιπλέον, αν η συνοριακή συνθήκη Dirichlet είναι μη ομογενής, δηλαδή το πρόβλημα συνοριακών τιμών διέπεται από τις σχέσεις

$$\begin{cases} Lu = f & u \in U, \\ u = g & u \in \partial U, \end{cases}$$

τότε μπορεί να αναχθεί σε ομογενή συνοριακή συνθήκη. Πράγματι, υποθέτουμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση u_0 η οποία συμπίπτει με την συνάρτηση g στο σύνορο ∂U, και για την οποία η συνάρτηση Lu_0 υπάρχει. Τότε, το μη ομογενές πρόβλημα γράφεται

$$\begin{cases} Lw = f_1 & w \in U, \\ w = 0 & w \in \partial U, \end{cases}$$

όπου $w := u - u_0$ και $f_1 := f - Lu_0$.

Υποθέτουμε ότι, ισχύει η συνθήκη συμμετρίας $\alpha^{ij} = \alpha^{ji}$, για $i, j = 1, \ldots, n$.

Ορισμός 2.2.1 *Ο μερικός διαφορικός τελεστής L είναι (ομοιόμορφα) ελλειπτικός αν υπάρχει μια σταθερά $\theta > 0$ τέτοια, ώστε να ισχύει*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha^{ij}(x)\xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2 \tag{2.6}$$

για σχεδόν κάθε $x \in U$ και για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Επομένως, η ελλειπτικότητα σημαίνει ότι για κάθε σημείο $x \in U$, ο συμμετρικός πίνακας $\mathbf{A}(x) = (\alpha^{ij}(x))$ είναι θετικά ορισμένος, με τη μικρότερη ιδιοτιμή του να είναι μεγαλύτερη από ή ίση με την σταθερά θ.

Φυσική Ερμηνεία Τέλος, αν η άγνωστη συνάρτηση u αναπαριστά την πυκνότητα μιας ποσότητας η οποία βρίσκεται σε ισορροπία στην περιοχή U, τότε ο δεύτερης τάξης όρος $\mathbf{A} := D^2 u = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha^{ij} u_{x_i x_j}$ συμβολίζει τη διάχυση της ποσότητας u στην περιοχή U, οι συντελεστές (α^{ij}) περιγράφουν την ανισότροπη, ετερογενή φύση του μέσου και ο όρος $\mathbf{F} := -\mathbf{A}Du$ συμβολίζει τη διαχεόμενη πυκνότητα ροής. Οπότε, η συνθήκη ελλειπτικότητας συνεπάγεται ότι

$$\mathbf{F} \cdot Du \leq 0,$$

το οποίο σημαίνει ότι η ροή γίνεται από περιοχές μεγαλύτερης σε περιοχές μικρότερης συγκέντρωσης της ποσότητας u. Σημειώνουμε ότι, ο πρώτης τάξης όρος $\mathbf{b} \cdot Du = \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i}$ συμβολίζει τη μεταφορά της ποσότητας u στην περιοχή U, και ο μηδενικής τάξης όρος cu περιγράφει την τοπική αύξηση ή μείωση της ποσότητας u.

2.2.2 Ασθενείς λύσεις

Στόχος της παραγράφου αυτής είναι ο ορισμός και, μετέπειτα, η κατασκευή μιας κατάλληλης ασθενούς λύσης u του προβλήματος (2.3). Για το λόγο αυτό, θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών (2.3) όπου ο τελεστής L έχει τη μορφή απόκλισης, δηλαδή δίνεται από την σχέση (2.4). Επιπλέον, υποθέτουμε ότι οι συντελεστές $\alpha^{ij}, b^i, c \in L^\infty(U)$, για $i, j = 1, \ldots, n$, και η δοθείσα συνάρτηση $f \in L^2(U)$.

Ορισμός 2.2.2 *Έστω ο γραμμικός χώρος V. Ένα διγραμμικό συναρτησιακό $B(\cdot\,,\cdot)$ στο V είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $V \times V$ και πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$, με τις ακόλουθες ιδιότητες*

$$B(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = \lambda_1 B(u_1, v) + \lambda_2 B(u_2, v),$$

$$B(u, \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) = \mu_1 B(u, v_1) + \mu_2 B(u, v_2),$$

για κάθε συνάρτηση $u, v, u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$ και σταθερές $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 2.2.3 *(i) Θα λέμε ότι το διγραμμικό συναρτησιακό $B(\cdot,\cdot)$ είναι συμμετρικό αν για κάθε $u, v \in V$ ισχύει*

$$B(u, v) = B(v, u). \tag{2.7}$$

(ii) Θα λέμε ότι το διγραμμικό συναρτησιακό $B(\cdot,\cdot)$ είναι συνεχής συνάρτηση αν για κάθε $u, v \in V$ ισχύει η ανισότητα

$$|B(u, v)| \leq c_1 \|u\|_V \|v\|_V, \tag{2.8}$$

όπου $c_1 \geq 0$ *μια σταθερά.*

(iii) Θα λέμε ότι το διγραμμικό συναρτησιακό $B(\cdot,\cdot)$ *είναι* V*-ελλειπτική συνάρτηση (ή πιεστική) αν για κάθε* $v \in V$ *ισχύει η ανισότητα*

$$B(v,v) \geq c_2 \|v\|_V^2, \tag{2.9}$$

όπου $c_2 > 0$ *μια σταθερά.*

Ορισμός 2.2.4 *(i) Η διγραμμική μορφή* $B[\cdot,\cdot]$ *η οποία συνδέεται με τον ελλειπτικό τελεστή* L *που ορίζεται από την σχέση (2.4) είναι*

$$B[u,v] := \int_U \sum_{i,j=1}^{n} \alpha^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} v + cuv \, dx \tag{2.10}$$

για κάθε συνάρτηση $u, v \in H_0^1(U)$*.*

(ii) Θα λέμε ότι η συνάρτηση $u \in H_0^1(U)$ *είναι μια ασθενής λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (2.3) αν*

$$B[u,v] = (f,v) \tag{2.11}$$

για κάθε συνάρτηση $v \in H_0^1(U)$*, όπου με* $(\cdot,\cdot)$ *συμβολίζεται το εσωτερικό γινόμενο στον χώρο* $L^2(U)$*.*

Η ταυτότητα (2.11) καλείται συνήθως μεταβολική διατύπωση ή ασθενής μορφή του προβλήματος (2.3).

Γενικότερα, θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} Lu = f^0 - \sum_{i=1}^n f^i_{x_i} & u \in U, \\ u = 0 & u \in \partial U, \end{cases} \tag{2.12}$$

όπου ο τελεστής L ορίζεται από την σχέση (2.4) και οι συναρτήσεις $f^i \in L^2(U)$, για $i = 0, \ldots, n$. Με βάση τη θεωρία που διατυπώθηκε στην §1.6, παρατηρούμε ότι ο όρος $f = f^0 - \sum_{i=1}^n f^i_{x_i}$ ανήκει στον χώρο $H^{-1}(U)$, τον δυϊκό χώρο του $H_0^1(U)$.

Ορισμός 2.2.5 *Θα λέμε ότι η συνάρτηση* $u \in H_0^1(U)$ *είναι μια ασθενής λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (2.12) αν*

$$B[u,v] =< f, v >$$

για κάθε συνάρτηση $v \in H_0^1(U)$*, όπου* $< f, v >= \int_U f^0 v + \sum_{i=1}^n f^i v_{x_i} \, dx$ *και με* $< \cdot,\cdot >$ *συμβολίζεται το δυϊκό ζεύγος των χώρων* $H^{-1}(U)$ *και* $H_0^1(U)$*.*

2.2.3 Μεταβολική Διατύπωση και το Πρόβλημα Ελαχιστοποίησης

Έστω ο χώρος Hilbert V, με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)_V$ και νόρμα $\|\cdot\|_V$, $B(\cdot,\cdot)$ ένα διγραμμικό συναρτησιακό στο V και $F=(f,v)$ ένα γραμμικό συναρτησιακό στο V. Υποθέτουμε ότι, το B είναι μια συμμετρική, συνεχής και V-ελλειπτική συνάρτηση, ενώ το F είναι μια συνεχής συνάρτηση, δηλαδή για κάθε $v \in V$ ισχύει η ανισότητα

$$|F(v)| \leq c_3\|v\|_V, \tag{2.13}$$

όπου $c_3 \geq 0$ μια σταθερά.

Όπως είδαμε προηγουμένως, το μεταβολικό (ασθενές) πρόβλημα ορίζεται ως εξής: «Να βρεθεί $u \in V$ τέτοιο, ώστε $B(u,v)=F(v)$ ή ,ισοδύναμα, $B(u,v)=(f,v)$ για κάθε $v \in V$».

Το (μεταβολικό) πρόβλημα ελαχιστοποίησης ορίζεται ως εξής: «Να βρεθεί $u \in V$ τέτοιο, ώστε $J(u)=min_{v\in V}J(v)$», όπου το συναρτησιακό J στον χώρο V ορίζεται από τον ακόλουθο τύπο $J(v)=\frac{1}{2}B(v,v)-F(v)$ ή, ισοδύναμα, $J(v)=\frac{1}{2}B(v,v)-(f,v)$ και καλείται συνήθως ενέργεια του συστήματος.

Θεώρημα 2.2.1 *Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης είναι ισοδύναμο με το μεταβολικό πρόβλημα. Επιπλέον, υπάρχει το πολύ μία λύση του μεταβολικού προβλήματος.*

Απόδειξη Αρχικά, θα δείξουμε ότι αν η συνάρτηση $u \in V$ είναι μια λύση του μεταβολικού προβλήματος, τότε η u είναι και λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης.

Έστω η συνάρτηση $w \in V$. Επειδή ο χώρος V είναι γραμμικός, έπεται ότι η συνάρτηση $u+w \in V$. Παρατηρούμε ,όμως, ότι

$$\begin{aligned} J(u+w) &= \frac{1}{2}B(u+w,u+w)-(f,u+w) && (2.14)\\ &= \frac{1}{2}B(u,u)-(f,u)+\frac{1}{2}B(w,w)-(f,w)+B(u,w) && (2.15)\\ &= J(u)+\frac{1}{2}B(w,w) && (2.16)\\ &\geq J(u), && (2.17)\end{aligned}$$

αφού ,σύμφωνα με τις υποθέσεις, ισχύει $B(w,w) \geq c_2\|w\|_V^2 \geq 0$. Επομένως

$$J(u+w) \geq J(u)\ ,\forall w \in V$$

και θέτοντας $v=u+w$ προκύπτει ότι

$$J(u)=min_{v\in V}J(v),$$

δηλαδή η u είναι και λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης.

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι αν η συνάρτηση $u \in V$ είναι μια λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης, τότε η u είναι και λύση του μεταβολικού προβλήματος.

Έστω η συνάρτηση $v \in V$ και μια αυθαίρετη σταθερά $t \in \mathbb{R}$. Επειδή ο χώρος V είναι γραμμικός, έπεται ότι η συνάρτηση $u + tv \in V$. Επιπλέον, επειδή η u είναι μια λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης, έπεται ότι $J(u) \leq J(u+tv)$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Ορίζουμε την συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με τύπο: $g(t) = J(u + tv)$. Παρατηρούμε ότι, ισχύει $g(0) \leq g(t)$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Επομένως, επειδή το σημείο 0 είναι σημείο ελαχίστου της g, θα είναι $g'(0) = 0$, αν η παράγωγος $g'(0)$ υπάρχει.

Επειδή ισχύει

$$
\begin{aligned}
g(t) &= J(u+tv) = \frac{1}{2}B(u+tv, u+tv) - (f, u+tv) && (2.18)\\
&= \frac{1}{2}B(u,u) - (f,u) + t[B(u,v) - (f,v)] + \frac{1}{2}t^2B(v,v) && (2.19)\\
&= J(u) + t[B(u,v) - (f,v)] + \frac{1}{2}t^2B(v,v) && (2.20)
\end{aligned}
$$

και $g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t)-g(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t(B(u,v)-(f,v))+\frac{1}{2}t^2B(u,v)}{t} = 0$, έπεται ότι $g'(0) = B(u,v) - (f,v) = 0$ ή ,ισοδύναμα, $B(u,v) = (f,v)$, δηλαδή η u είναι και λύση του μεταβολικού προβλήματος.

Η σχέση (2.16) περιγράφει το μέγεθος του J σε απόσταση v από το σημείο ελαχίστου u.

Σημείωση Το θεώρημα (2.2.1) μπορεί να γενικευθεί για κυρτά σύνολα ως εξής:

Η συνάρτηση u είναι η λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης σε ένα κυρτό σύνολο V αν και μόνο αν η ακόλουθη μεταβολική ανισότητα ισχύει

$$B(u, v-u) \geq < f, v-u >, \ \forall v \in V. \tag{2.21}$$

Το ακόλουθο θεώρημα δείχνει ότι το πρόβλημα συνοριακών τιμών (2.3) χαρακτηρίζει τη λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης.

Θεώρημα 2.2.2 *Κάθε κλασσική λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (2.3) όπου ο τελεστής L δίνεται από τον τύπο (2.4) αποτελεί μια λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης μεταξύ όλων των συναρτήσεων που ανήκουν στον χώρο $C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$ με μηδενικές συνοριακές τιμές.*

Σημειώνεται ότι, μια συνάρτηση η οποία ανήκει στον χώρο $C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$ και ικανοποιεί μια δοθείσα μερική διαφορική εξίσωση δευτέρου βαθμού, καθώς και τις προβλεπόμενες συνοριακές συνθήκες Dirichlet καλείται κλασσική λύση της εξίσωσης. Επιπλέον, η διαφορική εξίσωση $Lu = f$ του προβλήματος συνοριακών τιμών καλείται εξίσωση Euler ή εξίσωση Euler-Lagrange του μεταβολικού προβλήματος.

Απόδειξη Έστω ότι οι συναρτήσεις v και w είναι C^1, και με ν_i συμβολίζεται η i-οστή συνιστώσα του διανύσματος ν το οποίο είναι κάθετο στην επιφάνεια ∂U και στραμμένο προς το εξωτερικό αυτής. Τότε, ο τύπος του Green δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\int_U v\partial_i w dx = -\int_U w\partial_i v dx + \int_{\partial U} vw\nu_i ds. \tag{2.22}$$

Θέτοντας $w := \alpha^{ij}\partial_j u$ στην σχέση (2.22) προκύπτει ότι

$$\int_U v\partial_i(\alpha^{ij}\partial_j u)dx = -\int_U \alpha^{ij}\partial_i v\partial_j u dx, \tag{2.23}$$

δεδομένου ότι $v = 0$ στο σύνορο ∂U. Επιπλέον, έχουμε

$$B(u,v) = \int_U \left(\sum_{i,j=1}^{n} \alpha^{ij}\partial_i u\partial_j v + \sum_{i=1}^{n} b^i\partial_i u v + cuv \right) dx, \tag{2.24}$$

και

$$(f,v) = \int_U f v dx. \tag{2.25}$$

Αθροίζοντας την σχέση (2.22) ως προς i, j παίρνουμε ότι για κάθε συνάρτηση $v \in C^1(U) \cap C(\bar{U})$ με $v = 0$ στο σύνορο ∂U ισχύει

$$\begin{aligned} B(u,v) - (f,v) &= \int_U v \left(-\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(\alpha^{ij}\partial_j u) + \sum_{i=1}^{n} b^i\partial_i u + cu - f \right) dx \\ &= \int_U v(Lu - f)dx = 0, \end{aligned} \tag{2.26}$$

αν και μόνο αν ισχύει ότι $Lu = f$, δηλαδή αν και μόνο αν η u αποτελεί κλασσική λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών. Από το Θεώρημα (2.2.1) έπεται το ζητούμενο.

Αντίστροφα, κάθε λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης η οποία ανήκει στον χώρο $C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$ αποτελεί μια κλασσική λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών.

Παράδειγμα 1 Όπως έχουμε δει στην §2.2.1, το πρόβλημα

$$\begin{cases} Lu = f & u \in U, \\ u = g & u \in \partial U, \end{cases}$$

μπορεί να αναχθεί στο ακόλουθο πρόβλημα

$$\begin{cases} Lw = f_1 & w \in U, \\ w = 0 & w \in \partial U, \end{cases}$$

όπου ισχύει ο μετασχηματισμός $w = u - u_0$ και $f_1 = f - Lu_0$, με $u_0 \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U}) \cap H^1(U)$ μια συνάρτηση η οποία συμπίπτει με την g στο σύνορο ∂U του συνόλου U.

Η ασθενής μορφή του μετασχηματισμένου προβλήματος είναι: ≪Να βρεθεί $w \in H_0^1(U)$ τέτοιο, ώστε $B(w, v) = (f - Lu_0, v)$ για κάθε $v \in H_0^1(U)$≫. Επειδή ισχύει $B(u_0, v) = (Lu_0, v)$, το ασθενές πρόβλημα μπορεί να πάρει την ακόλουθη μορφή: ≪Να βρεθεί $u \in H^1(U)$ τέτοιο, ώστε $B(u, v) = (f, v)$ και $u - u_0 \in H_0^1(U)$ για κάθε $v \in H_0^1(U)$≫.

Παράδειγμα 2 Έστω το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -\Delta u = f & u \in U, \\ u = 0 & u \in \partial U. \end{cases} \tag{2.27}$$

Η ασθενής μορφή του προβλήματος αυτού είναι: ≪Να βρεθεί $u \in H_0^1(U)$ τέτοιο, ώστε $B(u, v) = (f, v)$ για κάθε $v \in H_0^1(U)$.≫, όπου το διγραμμικό συναρτησιακό B δίνεται από τον ακόλουθο τύπο με τη βοήθεια του τύπου του Green

$$\begin{aligned} B(u, v) &= -\int_U (\Delta u) v \, dx = -\int_U (\nabla^2 u) v \, dx \\ &= \int_U \nabla u \nabla v \, dx = (\nabla u, \nabla v) \end{aligned} \tag{2.28}$$

και το γραμμικό συναρτησιακό $F(v) = (f, v)$ δίνεται από τον τύπο

$$(f, v) = \int_U f v \, dx. \tag{2.29}$$

Εύκολα παρατηρείται ότι, το συναρτησιακό B είναι διγραμμικό και συμμετρικό, ενώ το συναρτησιακό F είναι γραμμικό. Επιπλέον, τα συναρτησιακά B και F είναι συνεχή, αφού

$$|B(u, v)| \leq \| \, |\nabla u| \, \|_{L^2(U)} \| \, |\nabla v| \, \|_{L^2(U)} \leq \|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)}, \tag{2.30}$$

και
$$|(f,v)| \leq \|f\|_{L^2(U)}\|v\|_{L^2(U)} \leq c\|v\|_{H_0^1(U)}. \tag{2.31}$$

Η H_0^1-ελλειπτικότητα του συναρτησιακού B μπορεί να αποδειχθεί με τη βοήθεια της ακόλουθης ανισότητας του Poincaré

$$\int_U u^2\,dx \leq c\int_U |\nabla u|^2\,dx,\ \forall u \in H_0^1(U),$$

όπου c μια σταθερά. Πράγματι, είναι

$$\begin{aligned} B(u,u) &= \int_U |\nabla u|^2\,dx \geq \frac{1}{c+1}\left(\int_U (u^2 + |\nabla u|^2)\,dx\right) \\ &= \frac{1}{c+1}\|u\|^2_{H^1(U)}. \end{aligned} \tag{2.32}$$

2.3 Ύπαρξη ασθενών λύσεων

2.3.1 Θεώρημα Lax-Milgram

Αρχικά, εισάγουμε μια απλή αφηρημένη αρχή από τη γραμμική συναρτησιακή ανάλυση, η οποία αργότερα θα μας παρέχει σε συγκεκριμένες περιπτώσεις στην §2.3.2 την ύπαρξη και τη μοναδικότητα μιας ασθενούς λύσης στο πρόβλημα συνοριακών τιμών.

Υποθέτουμε ότι, ο χώρος H είναι ένας πραγματικός χώρος Hilbert, με νόρμα $\|\cdot\|$ και εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)$. Υπενθυμίζεται ότι, με $<\cdot,\cdot>$ συμβολίζεται το δυϊκό ζεύγος του χώρου H με τον δυϊκό του.

Θεώρημα 2.3.1 (Lax-Milgram για κυρτά σύνολα) *Έστω ότι το V είναι ένα κλειστό, κυρτό σύνολο σε έναν χώρο Hilbert H, και το $B : H\times H \to \mathbb{R}$ είναι μια ελλειπτική διγραμμική απεικόνιση. Τότε, για κάθε φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές f το πρόβλημα ελαχιστοποίησης έχει μια μοναδική λύση στον χώρο V.*

Απόδειξη Παρατηρούμε ότι, η ενέργεια J του συστήματος είναι κάτω φραγμένη, αφού ισχύει

$$J(v) = \frac{1}{2}B(v,v) - <f,v> \geq \frac{1}{2}c_2\|v\|^2 - \|f\|\|v\| = \frac{1}{2c_2}(c_2\|v\| - \|f\|)^2 - \frac{\|f\|^2}{2c_2} \geq -\frac{\|f\|^2}{2c_2}.$$

Υποθέτουμε ότι, $c := inf\{J(v) \mid v \in V\}$, και $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία η οποία ικανοποιεί την σχέση $\lim_{n\to\infty} J(v_n) = inf_{v\in V} J(v) = c$. Τότε, ισχύει

$$\begin{aligned} c_2\|v_n - v_m\|^2 &\leq B(v_n - v_m, v_n - v_m) \\ &= 2B(v_n, v_n) + 2B(v_m, v_m) - B(v_n + v_m, v_n + v_m) \\ &= 4J(v_n) + 4J(v_m) - 8J(\frac{v_m + v_n}{2}) \\ &\leq 4J(v_n) + 4J(v_m) - 8c, \end{aligned}$$

αφού το σύνολο V είναι κυρτό και, επομένως, $\frac{1}{2}(v_n+v_m) \in V$. Επειδή, επιπλέον, ισχύει ότι $J(v_n), J(v_m) \to c$, έπεται ότι $\|v_n - v_m\| \to 0$ για κάθε $n, m \to \infty$. Συνεπώς, η ακολουθία $\{v_n\}$ είναι μια ακολουθία Cauchy στον χώρο H, και το όριο $u = \lim_{n\to\infty} v_n$ υπάρχει. Επειδή το σύνολο V είναι κλειστό, έπεται ότι $u \in V$. Η συνέχεια του J συνεπάγεται ότι $J(u) = \lim_{n\to\infty} J(v_n) = inf_{v\in V} J(v)$, δηλαδή το πρόβλημα ελαχιστοποίησης έχει λύση στον χώρο V.

Τέλος, θα δείξουμε ότι η λύση αυτή είναι μοναδική. Έστω ότι οι συναρτήσεις u_1, u_2 είναι λύσεις του προβλήματος ελαχιστοποίησης. Προφανώς, η ακολουθία $u_1, u_2, u_1, u_2, \ldots$ είναι μια ακολουθία η οποία ικανοποιεί την σχέση $\lim_{n\to\infty} J(v_n) = c$. Με βάση τους παραπάνω συλλογισμούς, κάθε τέτοια ακολουθία είναι ακολουθία Cauchy, το οποίο, στην περίπτωσή μας, είναι δυνατό αν και μόνο αν $u_1 = u_2$.

Σημείωση Κάθε H-ελλειπτική διγραμμική απεικόνιση B ορίζει μία νόρμα της μορφής

$$\|v\|_B := \sqrt{B(v, v)}. \tag{2.33}$$

Η νόρμα αυτή είναι ισοδύναμη με τη νόρμα που ορίζει ο χώρος Hilbert H και καλείται «ενεργειακή νόρμα».

Το ακόλουθο θεώρημα αποτελεί ειδική περίπτωση του παραπάνω θεωρήματος για $V = H$.

Θεώρημα 2.3.2 (Lax-Milgram) *Έστω ότι*

$$B : H \times H \to \mathbb{R}$$

είναι μια διγραμμική απεικόνιση, για την οποία υπάρχουν σταθερές $\alpha, \beta > 0$ τέτοιες, ώστε

$$|B[u, v]| \leq \alpha\|u\|\ \|v\|,\ u, v \in H$$

και

$$\beta\|u\|^2 \leq B[u, u],\ u \in H.$$

Επιπλέον, έστω $f : H \to \mathbb{R}$ ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον χώρο H. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο $u \in H$ τέτοιο, ώστε

$$B[u,v] =< f, v > \tag{2.34}$$

για κάθε συνάρτηση $v \in H$.

Θεώρημα 2.3.3 (Αναπαράστασης του Riesz) *Για κάθε συνάρτηση $u^* \in H^*$ υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο $u \in H$ τέτοιο, ώστε*

$$< u^*, v >= (u,v), \ \forall v \in H. \tag{2.35}$$

Απόδειξη Με τη βοήθεια του παραπάνω θεωρήματος παρατηρούμε ότι, η απεικόνιση $v \longmapsto B[u,v]$ για κάθε σταθερό σημείο $u \in H$, η οποία είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον χώρο H, συνεπάγεται την ύπαρξη ενός μοναδικού στοιχείου $w \in H$ τέτοιο ώστε,

$$B[u,v] = (w,v), \ \forall v \in H. \tag{2.36}$$

Υποθέτουμε ότι, αν ισχύει η σχέση (2.36), τότε υπάρχει τελεστής A τέτοιος, ώστε να ισχύει $Au = w$. Λόγω της σχέσης αυτής, η (2.36) παίρνει τη μορφή

$$B[u,v] = (Au,v), \ \forall u, v \in H. \tag{2.37}$$

Συνεπώς, θέλουμε να αποδείξουμε ότι το σημείο $u = A^{-1}w$ είναι μοναδικό. Για το λόγο αυτό, πρέπει να αποδείξουμε, αρχικά, ότι ο τελεστής A είναι αντιστρέψιμος.

Αρχικά, θα δείξουμε ότι ο τελεστής $A : H \to H$ είναι γραμμικός και φραγμένος.

Πράγματι, για κάθε $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ και $u_1, u_2 \in H$ παρατηρούμε ότι, για κάθε $v \in H$ ισχύει

$$\begin{aligned}
(A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2), v) &= B[\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v] \\
&= \lambda_1 B[u_1, v] + \lambda_2 B[u_2, v] \\
&= \lambda_1 (Au_1, v) + \lambda_2 (Au_2, v) \\
&= (\lambda_1 Au_1 + \lambda_2 Au_2, v).
\end{aligned}$$

Η ισότητα αυτή συνεπάγεται ότι ο A είναι γραμμικός.

Επιπλέον, για κάθε $u \in H$ ισχύει

$$\|Au\|^2 = (Au, Au) = B[u, Au] \le \alpha \|u\| \|Au\|.$$

Επομένως, για κάθε $u \in H$ ισχύει $\|Au\| \le \alpha \|u\|$, δηλαδή ο A είναι φραγμένος.

Το γεγονός ότι ο A είναι $1-1$, και το εύρος του $R(A)$ είναι κλειστό σύνολο στον χώρο H έπεται από την ακόλουθη ανισότητα

$$\beta\|u\|^2 \leq B[u,u] = (Au,u) \leq \|Au\|\|u\|$$

ή, ισοδύναμα, $\beta\|u\| \leq \|Au\|$.

Σύμφωνα με την παραπάνω ανισότητα, ο A είναι 1-1. Έστω η ακολουθία $\{y_j\}_{j=1}^{\infty} \subset R(A)$ η οποία συγκλίνει στο σημείο $y \in H$. Υπάρχει μοναδική επιλογή σημείου $x_j \in H$ τέτοιο, ώστε $Ax_j = y_j$. Παρατηρούμε ότι $\|y_j - y_k\|_H = \|A(x_j - x_k)\|_H \geq \beta\|x_j - x_k\|_H$, δηλαδή η ακολουθία $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία Cauchy. Επομένως, η $\{x_j\}$ συγκλίνει, δηλαδή ισχύει $x_j \to x \in H$, και ορίζουμε το σημείο $y = Ax \in R(A)$. Επειδή ο A είναι συνεχής, έπεται ότι $y_j = Ax_j \to Ax = y$ και, συνεπώς, το εύρος του $R(A)$ είναι κλειστό.

Για να δείξουμε ότι ο A είναι «επί», αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει $R(A) = H$.

Υποθέτουμε ότι $R(A) \subset H$. Επειδή το σύνολο $R(A)$ είναι κλειστό, έπεται ότι θα υπάρχει ένα μη μηδενικό στοιχείο $w \in H$ με $w \in R(A)^{\perp}$. Όμως, στην περίπτωση αυτή θα ίσχυε $\beta\|w\|^2 \leq B[w,w] = (Aw,w) = 0$, το οποίο είναι άτοπο.

Συνεπώς, ο A είναι αντιστρέψιμος.

Στη συνέχεια, με τη βοήθεια του Θεωρήματος Αναπαράστασης του Riesz παρατηρούμε ότι $< f,v >= (w,v)$ για κάθε $v \in H$ και για κάποιο στοιχείο $w \in H$. Κάνοντας χρήση των ακόλουθων συνθηκών: ο A είναι $1-1$ και «επί» και $R(A) = H$, βρίσκουμε $u \in H$ με $Au = w$. Οπότε, θα είναι

$$B[u,v] = (Au,v) = (w,v) =< f,v >, \ \forall v \in H.$$

Τέλος, δείχνουμε ότι υπάρχει το πολύ ένα στοιχείο $u \in H$ το οποίο επαληθεύει την σχέση (2.34).

Έστω ότι οι συναρτήσεις $u_1, u_2 \in H$ επαληθεύουν την σχέση (2.34), δηλαδή ισχύει $B[u_1,v] =< f,v >$ και $B[u_2,v] =< f,v >$, αντίστοιχα. Τότε, έπεται ότι $B[u_1,v] = B[u_2,v]$ ή, ισοδύναμα, $B[u_1,v] - B[u_2,v] = 0$ ή $B[u_1 - u_2, v] = 0$ για κάθε $v \in H$. Θέτοντας $v = u_1 - u_2$ προκύπτει ότι $\beta\|u_1 - u_2\|^2 \leq B[u_1 - u_2, u_1 - u_2] = 0$ ή, ισοδύναμα, $\|u_1 - u_2\| = 0$ ή $u_1 = u_2$.

2.3.2 Θεωρήματα Ύπαρξης Ασθενών Λύσεων

Αρχικά, θα αποδείξουμε ότι για τη διγραμμική μορφή $B[\cdot,\cdot]$ η οποία ορίζεται από τον τύπο (2.10) ισχύουν οι ακόλουθες εκτιμήσεις, οι οποίες καλούνται συνήθως «ενεργειακές εκτιμήσεις».

Θεώρημα 2.3.4 *Υπάρχουν σταθερές $\alpha, \beta > 0$ και $\gamma \geq 0$ τέτοιες, ώστε να ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες*

$$(i)\ |B[u,v]| \leq \alpha \|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)}$$

και

$$(ii)\ \beta \|u\|^2_{H_0^1(U)} \leq B[u,u] + \gamma \|u\|^2_{L^2(U)}$$

για κάθε $u, v \in H_0^1(U)$.

Απόδειξη Με βάση τον ορισμό της διγραμμικής μορφής $B[\cdot,\cdot]$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
|B[u,v]| &\leq \sum_{i,j=1}^{n} \|\alpha^{ij}\|_{L^\infty(U)} \int_U |Du||Dv| dx \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \|b^i\|_{L^\infty(U)} \int_U |Du||v| dx + \|c\|_{L^\infty(U)} \int_U |u||v| dx \\
&\leq \alpha \|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)},
\end{aligned}$$

για κάποια σταθερά α.

Επιπλέον, σύμφωνα με τον ορισμό (2.2.1) του ελλειπτικού μερικού διαφορικού τελεστή L, ο πίνακας $\alpha^{ij}(x)$ είναι ομοιόμορφα θετικά ορισμένος για κάθε $x \in U$. Επομένως, υπάρχει μια σταθερά θ τέτοια, ώστε για κάθε $x \in U$ να ισχύει

$$\theta \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} \alpha^{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j}.$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω ανισότητα στο σύνολο U και κάνοντας χρήση του ορισμού της B, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\theta \int_U |Du|^2 dx &\leq \int_U \sum_{i,j=1}^{n} \alpha^{ij} u_{x_i} u_{x_j} dx \\
&= B[u,u] - \left(\int_U \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} u + c u^2 dx \right) \\
&\leq B[u,u] + \sum_{i=1}^{n} \|b^i\|_{L^\infty(U)} \int_U |Du||u| dx \\
&+ \|c\|_{L^\infty(U)} \int_U u^2 dx. \qquad (2.38)
\end{aligned}$$

Με τη βοήθεια της ανισότητας του Cauchy με ε

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}, \ \forall \varepsilon > 0,$$

παρατηρούμε ότι

$$\int_U |Du||u|dx \leq \varepsilon \int_U |Du|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_U u^2 dx, \ \forall \varepsilon > 0.$$

Εισάγοντας την παραπάνω εκτίμηση στην σχέση (2.38) και θεωρώντας $\varepsilon > 0$ τέτοιο, ώστε

$$\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \|b^i\|_{L^\infty(U)} < \frac{\theta}{2},$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\theta \int_U |Du|^2 dx \quad &\leq \quad B[u,u] + \sum_{i=1}^{n} \|b^i\|_{L^\infty(U)} \left(\varepsilon \int_U |Du|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_U u^2 dx \right) \\
&+ \quad \|c\|_{L^\infty(U)} \int_U u^2 dx \\
&\leq \quad B[u,u] + \frac{\theta}{2} \int_U |Du|^2 dx + \left(\|c\|_{L^\infty(U)} + \frac{1}{4\varepsilon} \right) \int_U u^2 dx
\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\theta}{2} \int_U |Du|^2 dx \leq B[u,u] + C \int_U u^2 dx,$$

όπου $C := \|c\|_{L^\infty(U)} + \frac{1}{4\varepsilon}$ μια σταθερά η οποία εξαρτάται μόνο από τις συναρτήσεις των συντελεστών b^i, c και το σύνολο U.

Προσθέτοντας κατά μέλη τον όρο $\frac{\theta}{2} \int_U u^2 dx$ στην παραπάνω εκτίμηση, προκύπτει ότι

$$\frac{\theta}{2} \int_U (u^2 + |Du|^2) dx \leq B[u,u] + (C + \frac{\theta}{2}) \int_U u^2 dx$$

ή ισοδύναμα

$$\beta \|u\|^2_{H^1_0(U)} \leq B[u,u] + \gamma \|u\|^2_{L^2(U)},$$

όπου οι $\beta > 0$,$\gamma \geq 0$ κατάλληλες σταθερές.

Σημείωση Παρατηρούμε ότι, αν $\gamma = 0$, τότε η διγραμμική μορφή $B[\cdot, \cdot]$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Lax-Milgram, ενώ σε διαφορετική περίπτωση, η B δεν επαληθεύει ακριβώς τις υποθέσεις του θεωρήματος αυτού.

Η δεύτερη περίπτωση αντιμετωπίζεται με τη βοήθεια του ακόλουθου θεωρήματος:

Θεώρημα 2.3.5 (Πρώτο Θεώρημα Ύπαρξης Ασθενών Λύσεων) *Υπάρχει ένας αριθμός $\gamma \geq 0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $\mu \geq \gamma$ και για κάθε συνάρτηση $f \in L^2(U)$, να υπάρχει μια μοναδική ασθενής λύση $u \in H_0^1(U)$ του προβλήματος συνοριακών τιμών*

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f, & u \in U, \\ u = 0, & u \in \partial U. \end{cases}$$

Απόδειξη Για να αποδείξουμε ότι υπάρχει μια μοναδική ασθενής λύση $u \in H_0^1(U)$ του δοθέντος προβλήματος συνοριακών τιμών, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος Lax-Milgram.

Αρχικά, ορίζουμε τη διγραμμική μορφή B ως εξής

$$B_\mu[u, v] := B[u, v] + \mu(u, v).$$

Παρατηρούμε ότι, ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες

$$\begin{aligned} |B_\mu[u, v]| &= |B[u, v] + \mu(u, v)| \\ &\leq |B[u, v]| + \mu|(u, v)| \\ &\leq \alpha \|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)} + \mu \|u\|_{L^2(U)} \|v\|_{L^2(U)} \\ &\leq c_1 \|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)}, \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \beta \|u\|^2_{H_0^1(U)} &\leq B[u, u] + \gamma \|u\|^2_{L^2(U)} \\ &= B_\mu[u, u] - \mu(u, u) + \gamma \|u\|^2_{L^2(U)} \\ &= B_\mu[u, u] - \mu \|u\|^2_{L^2(U)} + \gamma \|u\|^2_{L^2(U)} \\ &= B_\mu[u, u] + (\gamma - \mu) \|u\|^2_{L^2(U)}, \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$c_2 \|u\|^2_{H_0^1(U)} \leq \beta \|u\|^2_{H_0^1(U)} + (\mu - \gamma) \|u\|^2_{L^2(U)} \leq B_\mu[u, u],$$

οι οποίες εξασφαλίζουν την συνέχεια και την ελλειπτικότητα της B, αντίστοιχα.

Τέλος, η απεικόνιση $v \longmapsto < f, v > := (f, v)$ είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον χώρο $L^2(U)$ και, συνεπώς, στον χώρο $H_0^1(U)$, αφού για κάθε $v \in H_0^1(U)$ ισχύει

$$|< f, v >| = |(f, v)| \leq \|f\|_{L^2(U)} \|v\|_{L^2(U)} \leq c_3 \|v\|_{H_0^1(U)}.$$

Επομένως, από το Θεώρημα Lax-Milgram έπεται ότι, υπάρχει μια μοναδική ασθενής λύση $u \in H_0^1(U)$ του ακόλουθου προβλήματος συνοριακών τιμών $B_\mu[u, v] =< f, v >$ για κάθε $v \in H_0^1(U)$.

Σημείωση Με παρόμοιο τρόπο απόδειξης μπορούμε να δείξουμε ότι, για κάθε $f^i \in L^2(U)$ με $i = 0, 1, \ldots, n$ υπάρχει μια μοναδική ασθενής λύση u του ακόλουθου προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f^0 - \sum_{i=1}^n f^i_{x_i}, & u \in U, \\ u = 0, & u \in \partial U. \end{cases}$$

Παράδειγμα 2 (Συνέχεια) Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 2 της §2.2.3, η διγραμμική μορφή B είναι συνεχής και ελλειπτική, ενώ το γραμμικό συναρτησοειδές f είναι φραγμένο. Συνεπώς, με βάση το Θεώρημα Lax-Milgram, υπάρχει μια μοναδική ασθενής λύση $u \in H_0^1(U)$ του προβλήματος (2.27).

Προτού διατυπώσουμε το Δεύτερο Θεώρημα Ύπαρξης Ασθενών Λύσεων, ορίζουμε τα ακόλουθα:

Ορισμός 2.3.1 *(i) Ο τελεστής L^*, ο οποίος καλείται συζυγής του τελεστή L, ορίζεται ως εξής*

$$L^* v := -\sum_{i,j=1}^n (a^{ij} v_{x_j})_{x_i} - \sum_{i=1}^n b^i v_{x_i} + (c - \sum_{i=1}^n b_{i,x_i}) v, \tag{2.39}$$

αν $b^i \in C^1(\bar{U})$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$.

(ii) Η συζυγής διγραμμική μορφή $B^* : H \times H \to \mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής

$$B^*[v, u] = B[u, v], \tag{2.40}$$

για κάθε $u, v \in H_0^1(U)$.

(iii) Θα λέμε ότι, η συνάρτηση $v \in H_0^1(U)$ είναι μια ασθενής λύση του συζυγούς προβλήματος

$$\begin{cases} L^* v = f, & v \in U, \\ v = 0, & v \in \partial U, \end{cases} \tag{2.41}$$

αν ισχύει

$$B^*[v, u] = (f, u)$$

για κάθε $u \in H_0^1(U)$.

Θεώρημα 2.3.6 (Δεύτερο Θεώρημα Ύπαρξης Ασθενών Λύσεων) *(i) Ακριβώς ένας από τους ακόλουθους ισχυρισμούς είναι δυνατόν να ισχύει:*

είτε (α) για κάθε συναρτησοειδές $f \in L^2(U)$ υπάρχει μια μοναδική ασθενής λύση u του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} Lu = f, & u \in U, \\ u = 0, & u \in \partial U, \end{cases}$$

ή (β) υπάρχει μια ασθενής λύση $u \neq 0$ του ομογενούς προβλήματος

$$\begin{cases} Lu = 0, & u \in U, \\ u = 0, & u \in \partial U. \end{cases}$$

(ii) Επιπλέον, αν ισχύει ο ισχυρισμός (β), τότε η διάσταση του υπόχωρου $N \subset H_0^1(U)$ των ασθενών λύσεων ομογενούς προβλήματος είναι πεπερασμένη και ίση με τη διάσταση του υπόχωρου $N^* \subset H_0^1(U)$ των ασθενών λύσεων του προβλήματος

$$\begin{cases} L^* v = 0, & v \in U, \\ v = 0, & v \in \partial U. \end{cases}$$

(iii) Τέλος, το πρόβλημα συνοριακών τιμών του ισχυρισμού (α) έχει μια ασθενή λύση αν και μόνο αν $(f, v) = 0$ για κάθε $v \in N^*$.

Απόδειξη Δείτε [1].

Τέλος, διατυπώνουμε το Τρίτο Θεώρημα Ύπαρξης Ασθενών Λύσεων:

Θεώρημα 2.3.7 *(i) Υπάρχει ένα σύνολο $\Sigma \subset \mathbb{R}$ το πολύ αριθμήσιμο τέτοιο, ώστε το πρόβλημα συνοριακών τιμών*

$$\begin{cases} Lu = \lambda u + f, & u \in U, \\ u = 0, & u \in \partial U \end{cases}$$

να έχει μια μοναδική ασθενή λύση για κάθε $f \in L^2(U)$ αν και μόνο αν $\lambda \notin \Sigma$.

(ii) Αν το σύνολο Σ είναι αριθμησίμως άπειρο, τότε $\Sigma = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, όπου λ_k οι τιμές μιας μη φθίνουσας ακολουθίας με $\lambda_k \to +\infty$.

Το σύνολο Σ καλείται το (πραγματικό) φάσμα του τελεστή L.

Απόδειξη Δείτε [1].

Σημείωση Συγκεκριμένα, το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} Lu = \lambda u, & u \in U, \\ u = 0, & u \in \partial U, \end{cases}$$

έχει μια μη τετριμμένη λύση $u \neq 0$ αν και μόνο αν $\lambda \in \Sigma$. Στην περίπτωση αυτή, ο αριθμός λ καλείται ιδιοτιμή του τελεστή L, ενώ η συνάρτηση w αποτελεί την αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση.

Τέλος, διαπιστώνουμε ότι ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση:

Θεώρημα 2.3.8 *Αν $\lambda \notin \Sigma$, τότε υπάρχει μια σταθερά C τέτοια, ώστε να ισχύει*

$$\|u\|_{L^2(U)} \leq C\|f\|_{L^2(U)}, \tag{2.42}$$

αν $f \in L^2(U)$ και $u \in H_0^1(U)$ είναι η μοναδική ασθενής λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} Lu = \lambda u + f, & u \in U, \\ u = 0, & u \in \partial U. \end{cases}$$

Η σταθερά C εξαρτάται μόνο από τον αριθμό λ, το σύνολο U και τους συντελεστές του τελεστή L.

2.4 Το Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών Neumann

Παρατηρούμε ότι, στα προβλήματα συνοριακών τιμών Dirichlet οι συνθήκες πρέπει να ενσωματωθούν στον χώρο των συναρτήσεων. Για το λόγο αυτό, οι συνοριακές συνθήκες αυτού του είδους καλούνται «αναγκαίες». Αντίθετα, στα προβλήματα με τα οποία θα ασχοληθούμε στην παράγραφο αυτή, δηλαδή εκείνα στα οποία εφαρμόζουμε συνοριακές συνθήκες Neumann, συνθήκες που διέπουν τις παραγώγους στο σύνορο, οι συνθήκες εφαρμόζονται έμμεσα· και, για τον λόγο αυτό, καλούνται «φυσικές συνοριακές συνθήκες».

Θεώρημα 2.4.1 *Έστω ότι το σύνολο U είναι φραγμένο και το σύνορό του ∂U είναι C^1. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f \in L^2(U)$ και η συνάρτηση $g \in L^2(\partial U)$. Τότε, το πρόβλημα ελαχιστοποίησης: «Να βρεθεί $u \in H^1(U)$ τέτοιο, ώστε $J(u) = min_{v \in H^1(U)} J(v)$», όπου το συναρτησιακό J στον χώρο $H^1(U)$ ορίζεται από τον τύπο*

$$J(v) := \frac{1}{2}B[v,v] - (f,v)_U - (g,v)_{\partial U},$$

έχει ακριβώς μια λύση.

Η λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης ανήκει στον χώρο $C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$ *αν και μόνο αν υπάρχει μια κλασσική λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών*

$$\begin{cases} Lu = f, & u \in U, \\ \sum_{i,k=1}^{n} \nu_i \alpha_{ik} \partial_k u = g, & u \in \partial U. \end{cases} \tag{2.43}$$

Στην περίπτωση αυτή, οι δύο λύσεις είναι ίδιες. [Στο θεώρημα αυτό έχουμε θεωρήσει ότι ο ομοιόμορφα ελλειπτικός διαφορικός τελεστής L *δίνεται από τον τύπο* $Lu := -\sum_{i,k=1}^{n} \partial_i(\alpha_{ik}\partial_k u) + \alpha_0 u$, *όπου* $\alpha_0(x) \geq \alpha > 0$ *για κάθε* $x \in U$ *και για τις ομαλές συναρτήσεις συντελεστών ισχύει* $\alpha_{ik} \geq \alpha$ *για κάθε* $i, k = 1, \ldots, n$. *Με* $\nu := \nu(x)$ *συμβολίζεται το εξωτερικό διάνυσμα, το οποίο ορίζεται σχεδόν παντού στο σύνορο* ∂U.*]*

Απόδειξη Για να δείξουμε ότι το πρόβλημα ελαχιστοποίησης έχει ακριβώς μια λύση, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος Lax-Milgram για το αντίστοιχο ασθενές πρόβλημα.

Εύκολα παρατηρείται ότι, η μορφή B που ορίζεται από τον τύπο

$$B[u,v] := \int_U \left(\sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik} \partial_i u \partial_k v + \alpha_0 uv \right) dx$$

είναι διγραμμική και συνεχής, ενώ το συναρτησοειδές το οποίο ορίζεται από τον τύπο

$$< l, v > := \int_U f v dx + \int_{\partial U} g v ds$$

είναι γραμμικό για κάθε $f \in L^2(U)$ και $g \in L^2(\partial U)$.

Επιπλέον, επειδή για κάθε $v \in H^1(U)$ ισχύει η ακόλουθη ανισότητα

$$B[v,v] \geq \alpha \sum_{|a|=1} \int_U |Dv|^2 dx + \alpha \|v\|^2_{H^0(U)} = \alpha \|v\|^2_{H^1(U)},$$

έπεται ότι η διγραμμική μορφή B είναι ελλειπτική στον χώρο $H^1(U)$.

Τέλος, με τη βοήθεια του Θεωρήματος (1.3.5) προκύπτει ότι το συναρτησοειδές $< l, v >$ είναι φραγμένο.

Επομένως, ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος Lax-Milgram, και συγκεκριμένα, η συνάρτηση u αποτελεί λύση του ασθενούς προβλήματος

$$B[u,v] = (f,v)_U + (g,v)_{\partial U}, \ \forall v \in H^1(U). \tag{2.44}$$

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι η σχέση (2.44) ικανοποιείται για κάθε $u \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$. Επειδή, σύμφωνα με το Θεώρημα (1.3.5), για κάθε $v \in H_0^1(U)$ ισχύει $Tv = 0$, από την σχέση (2.44) έπεται ότι

$$B[u,v] = (f,v), \ \forall v \in H_0^1(U),$$

δηλαδή στο εσωτερικό του συνόλου U ισχύει

$$Lu = f. \tag{2.45}$$

Με τη βοήθεια του τύπου του Green προκύπτει ότι για κάθε $v \in H^1(U)$ ισχύει η ακόλουθη ισότητα

$$\int_U v\partial_i(\alpha_{ik}\partial_k u)dx = -\int_U \partial_i v\alpha_{ik}\partial_k u dx + \int_{\partial U} v\alpha_{ik}\partial_k u\nu_i ds.$$

Επομένως, θα είναι

$$B[u,v] - (f,v)_U - (g,v)_{\partial U} = \int_U v(Lu-f)dx + \int_{\partial U} v\left(\sum_{i,k=1}^n \nu_i\alpha_{ik}\partial_k u - g\right)ds. \tag{2.46}$$

Λόγω των σχέσεων (2.44) και (2.45), θα πρέπει το δεύτερο ολοκλήρωμα στο δεξί μέρος της ισότητας (2.46) να μηδενίζεται.

Έστω ότι η συνάρτηση $v_0 := \nu_i\alpha_{ik}\partial_k u - g$ δεν μηδενίζεται. Τότε, επειδή $\int_{\partial U} v_0^2 ds > 0$ και το σύνολο $C^1(\bar{U})$ είναι πυκνό στο σύνολο $C^0(\bar{U})$, υπάρχει $v \in C^1(\bar{U})$ με $\int_{\partial U} v_0 v ds > 0$, το οποίο είναι άτοπο λόγω της υπόθεσης. Συνεπώς, η συνοριακή συνθήκη ικανοποιείται.

Αντίστροφα, από την σχέση (2.46) είναι προφανές ότι κάθε κλασσική λύση του προβλήματος (2.43) ικανοποιεί την σχέση (2.44), δηλαδή είναι λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης.

Παράδειγμα 3 Η φυσική συνοριακή συνθήκη, η οποία καλείται και συνοριακή συνθήκη Neumann, για την εξίσωση του Helmholtz

$$-\Delta u + \alpha_0(x)u = f, \ u \in U$$

είναι

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} := \nu \cdot \nabla u = g, \ u \in \partial U,$$

όπου με $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ συμβολίζεται η κανονική παράγωγος, δηλαδή η κατεύθυνση η κάθετη στο εφαπτόμενο επίπεδο (αν το σύνορο είναι ομαλό).

Παράδειγμα 4 Η συνοριακή συνθήκη Neumann για την εξίσωση του Poisson

$$-\Delta u = f,\ u \in U$$

είναι

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g,\ u \in \partial U.$$

Παρατηρούμε ότι, με τη βοήθεια του Ολοκληρωτικού Θεωρήματος του Gauss

$$\int_U div(w)dx = \int_{\partial U} w\nu ds$$

οι συναρτήσεις f και g συνδέονται μεταξύ τους μέσω της σχέσης

$$\begin{aligned} \int_U f dx &= -\int_U (\Delta u)dx \\ &= -\int_U div(\bigtriangledown u)dx \\ &= -\int_{\partial U} \bigtriangledown u \cdot \nu ds \\ &= -\int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds \\ &= -\int_{\partial U} g ds \end{aligned}$$

ή ,ισοδύναμα,

$$\int_U f\ dx + \int_{\partial U} g\ ds = 0. \tag{2.47}$$

Η σχέση (2.47) καλείται «συνθήκη συμβιβαστότητας».

Σημείωση Στις εφαρμογές συναντώνται συχνά τα ονομαζόμενα «ελλειπτικά προβλήματα μεικτών συνοριακών συνθηκών» τα οποία είναι της μορφής

$$\left\{ \begin{array}{rl} Lu = f, & u \in U, \\ u = g, & u \in \partial U_1, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = h, & u \in \partial U_2, \end{array} \right. \tag{2.48}$$

όπου $\partial U := \partial U_1 \cup \partial U_2$.

2.5 Κανονικότητα

Στην παράγραφο αυτή, θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα κανονικότητας για τις ασθενείς λύσεις, δηλαδή με το πρόβλημα της ύπαρξης μιας ομαλής/λείας ασθενούς λύσης u της μερικής διαφορικής εξίσωσης $Lu = f$ στο σύνολο U. Αρχικά, θα ορίσουμε το H^s-κανονικό ασθενές πρόβλημα και, στη συνέχεια, θα διατυπώσουμε θεωρήματα τα οποία εξασφαλίζουν την ομαλότητα της ασθενούς λύσης.

Ορισμός 2.5.1 *Έστω ότι το συναρτησιακό $B[\cdot,\cdot]$ είναι διγραμμικό και V-ελλειπτικό, όπου το σύνολο $V \subset H^m(U)$ με $m \geq 1$. Τότε το (μεταβολικό) ασθενές πρόβλημα*

$$B[u, v] = (f, v), \ \forall v \in V$$

καλείται H^s-κανονικό αν υπάρχει μια σταθερά $c = c(U, B, s)$ τέτοια, ώστε για κάθε $f \in H^{s-2m}(U)$ να υπάρχει μια λύση $u \in H^s(U)$ η οποία ικανοποιεί την ακόλουθη εκτίμηση

$$\|u\|_{H^s(U)} \leq c\|f\|_{H^{s-2m}(U)}. \tag{2.49}$$

Υποθέτουμε ότι το σύνολο $U \subset \mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτό και φραγμένο, καθώς και ότι η συνάρτηση $u \in H^1_0(U)$ είναι μια ασθενής λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης $Lu = f$ στο σύνολο U, όπου ο τελεστής L είναι σε μορφή απόκλισης, δηλαδή δίνεται από τον τύπο (2.4).

Τα ακόλουθα θεωρήματα εξασφαλίζουν την ομαλότητα της ασθενούς λύσης u στο εσωτερικό του συνόλου U.

Θεώρημα 2.5.1 (H^2-Κανονικότητα) *Έστω ότι οι συντελεστές του τελεστή L $\alpha^{ij} \in C^1(U)$, $b^i, c \in L^\infty(U)$ για $i, j = 1, \ldots, n$ και η συνάρτηση $f \in L^2(U)$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $u \in H^1(U)$ είναι μια ασθενής λύση της ελλειπτικής μερικής διαφορικής εξίσωσης $Lu = f$ στο σύνολο U. Τότε η $u \in H^2_{loc}(U)$ και για κάθε ανοιχτό σύνολο $V \subset\subset U$ ισχύει η εκτίμηση*

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}\right),$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από τα σύνολα V, U και τους συντελεστές του L.

Απόδειξη Δείτε [1].

Θεώρημα 2.5.2 (Κανονικότητα Υψηλότερης Τάξης) *Έστω ότι οι συντελεστές $\alpha^{ij}, b^i, c \in C^{m+1}(U)$ για $i, j = 1, \ldots, n$, με m έναν μη αρνητικό ακέραιο αριθμό, και η συνάρτηση $f \in H^m(U)$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι* *η συνάρτηση $u \in H^1(U)$ είναι μια ασθενής λύση της ελλειπτικής μερικής διαφορικής εξίσωσης $Lu = f$ στο σύνολο U. Τότε η $u \in H^{m+2}_{loc}(U)$ και για κάθε σύνολο $V \subset\subset U$ ισχύει η εκτίμηση*

$$\|u\|_{H^{m+2}(V)} \leq C \left(\|f\|_{H^m(U)} + \|u\|_{L^2(U)} \right),$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από τον αριθμό m, τα σύνολα U, V και τους συντελεστές του L.

Απόδειξη Δείτε [1].

Θεώρημα 2.5.3 (Άπειρη Διαφορισιμότητα) *Έστω ότι οι συντελεστές $\alpha^{ij}, b^i, c \in C^\infty(U)$ για $i, j = 1, \ldots, n$ και η συνάρτηση $f \in C^\infty(U)$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $u \in H^1(U)$ είναι μια ασθενής λύση της ελλειπτικής μερικής διαφορικής εξίσωσης $Lu = f$ στο σύνολο U. Τότε η $u \in C^\infty(U)$.*

Απόδειξη Δείτε [1].

Τα ακόλουθα θεωρήματα εξασφαλίζουν την ομαλότητα της ασθενούς λύσης u στο σύνορο ∂U του συνόλου U.

Θεώρημα 2.5.4 *Έστω ότι οι συντελεστές $\alpha^{ij} \in C^1(\bar{U})$, $b^i, c \in L^\infty(U)$ για $i, j = 1, \ldots, n$ και η συνάρτηση $f \in L^2(U)$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $u \in H^1_0(U)$ είναι μια ασθενής λύση του ελλειπτικού προβλήματος συνοριακών τιμών*

$$\begin{cases} Lu = f, & u \in U, \\ u = 0, & u \in \partial U. \end{cases}$$

Τέλος, υποθέτουμε ότι το σύνορο ∂U είναι C^2. Τότε η $u \in H^2(U)$, και ισχύει η εκτίμηση

$$\|u\|_{H^2(U)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)} \right),$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από το σύνολο U και τους συντελεστές του L.

Απόδειξη Δείτε [1].

Αν η $u \in H^1_0(U)$ είναι η μοναδική ασθενής λύση του παραπάνω προβλήματος συνοριακών τιμών, η εκτίμηση του παραπάνω Θεωρήματος απλοποιείται ως εξής

$$\|u\|_{H^2(U)} \leq C\|f\|_{L^2(U)}.$$

Θεώρημα 2.5.5 (Κανονικότητα Υψηλότερης Τάξης) *Έστω ότι οι συντελεστές* $\alpha^{ij}, b^i, c \in C^{m+1}(\bar{U})$ *για* $i, j = 1, \ldots, n$, *με* m *έναν μη αρνητικό ακέραιο αριθμό, και η συνάρτηση* $f \in H^m(U)$. *Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση* $u \in H_0^1(U)$ *είναι μια ασθενής λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών*

$$\begin{cases} Lu = f, & u \in U, \\ u = 0, & u \in \partial U. \end{cases}$$

Τέλος, υποθέτουμε ότι το σύνορο ∂U *είναι* C^{m+2}. *Τότε η* $u \in H^{m+2}(U)$, *και ισχύει η εκτίμηση*

$$\|u\|_{H^{m+2}(U)} \leq C \left(\|f\|_{H^m(U)} + \|u\|_{L^2(U)} \right),$$

όπου η σταθερά C *εξαρτάται μόνο από τον αριθμό* m, *το σύνολο* U *και τους συντελεστές του* L.

Απόδειξη Δείτε [1].

Αν η u είναι η μοναδική λύση του παραπάνω προβλήματος, τότε η εκτίμηση του Θεωρήματος απλοποιείται ως εξής

$$\|u\|_{H^{m+2}(U)} \leq C \|f\|_{H^m(U)}.$$

Θεώρημα 2.5.6 (Άπειρη Διαφορισιμότητα) *Έστω ότι οι συντελεστές* $\alpha^{ij}, b^i, c \in C^\infty(\bar{U})$ *για* $i, j = 1, \ldots, n$ *και η συνάρτηση* $f \in C^\infty(\bar{U})$. *Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση* $u \in H_0^1(U)$ *είναι μια ασθενής λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών*

$$\begin{cases} Lu = f, & u \in U, \\ u = 0, & u \in \partial U. \end{cases}$$

Τέλος, υποθέτουμε ότι το σύνορο ∂U *είναι* C^∞. *Τότε η* $u \in C^\infty(\bar{U})$.

Απόδειξη Δείτε [1].

Κεφάλαιο 3

Σύμμορφα Πεπερασμένα Στοιχεία

3.1 Η μέθοδος Ritz-Galerkin

Στην παράγραφο αυτή, θα μελετήσουμε τη μέθοδο Ritz-Galerkin, η οποία μας δίνει μια πρώτη, απλή φυσική προσέγγιση της αριθμητικής λύσης του ελλειπτικού προβλήματος συνοριακών τιμών. Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στην ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού J, το οποίο έχει ορισθεί με βάση το δοθέν μεταβολικό πρόβλημα, σε κάποιον κατάλληλο υπόχωρο πεπερασμένων διαστάσεων, αντί στον χώρο $H^m(U)$. Ο υπόχωρος αυτός συμβολίζεται συνήθως με S_h, όπου η h αντιπροσωπεύει μια παράμετρο διακριτοποίησης. Επιπλέον, ο συμβολισμός αυτός υποδηλώνει ότι η προσεγγιστική λύση θα συγκλίνει στην πραγματική λύση του δοθέντος (συνεχούς) προβλήματος καθώς $h \to 0$.

Όπως έχουμε δει, το ακριβές μεταβολικό πρόβλημα είναι το ακόλουθο: «Να βρεθεί $u \in V$ τέτοιο, ώστε $B[u, v] =< f, v >$ για κάθε $v \in V$». Στη μέθοδο Ritz-Galerkin επιλέγουμε έναν υπόχωρο S_h του χώρου V και θεωρούμε το ακόλουθο προσεγγιστικό πρόβλημα: «Να βρεθεί $u_h \in S_h$ τέτοιο, ώστε $B[u_h, v] =< f, v >$ για κάθε $v \in S_h$». Η u_h καλείται προσεγγιστική λύση της ακριβούς λύσης u.

Έστω ότι το σύνολο $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_N\}$ αποτελεί μια βάση του χώρου S_h. Τότε το προσεγγιστικό πρόβλημα είναι ισοδύναμο με τις N εξισώσεις

$$B[u_h, \psi_i] =< f, \psi_i >, \ i = 1, 2, \ldots, N.$$

Επειδή η u_h μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων ψ_i για $i = 1, \ldots, N$, δηλαδή μπορεί να πάρει τη μορφή

$$u_h = \sum_{j=1}^{N} c_j \psi_j,$$

έπεται ότι το προσεγγιστικό πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων

$$\sum_{j=1}^{N} c_j B[\psi_j, \psi_i] =< f, \psi_i >, \ i = 1, 2, \ldots, N, \tag{3.1}$$

οι οποίες αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα

$$Ac = b, \tag{3.2}$$

όπου $A = (a_{ij}) = B[\psi_j, \psi_i]$, $b = (b_i) =< f, \psi_i >$ και $c = (c_j)$.

Συνεπώς, η μέθοδος Ritz-Galerkin ανάγεται στην επίλυση του γραμμικού συστήματος (3.2).

Σημείωση Στις επιστήμες του μηχανικού, και συγκεκριμένα αν το πρόβλημα ανήκει στη μηχανική συνεχούς μέσου, ο πίνακας A καλείται συνήθως πίνακας ακαμψίας του συστήματος.

Στην παρακάτω θεωρία θα κάνουμε τις ακόλουθες υποθέσεις για το διγραμμικό συναρτησιακό B και το γραμμικό συναρτησιακό $< f, v >$: (i) το B είναι συνεχές και V-ελλειπτικό, και (ii) το $< f, v >$ είναι συνεχές.

Θεώρημα 3.1.1 *Ο πίνακας A της μεθόδου Ritz-Galerkin είναι θετικά ορισμένος, δηλαδή ισχύει*

$$z^T A z > 0, \ \forall z \in \mathbb{R}^N, \ z \neq 0.$$

Απόδειξη Έστω $\{\psi_j\}_{j=1}^N$ μια βάση της μεθόδου Ritz-Galerkin. Αν θέσουμε $u_h = \sum_{j=1}^N c_j \psi_j$, τότε έπεται ότι

$$\begin{aligned} z^T A z &= \sum_{i=1}^{N} z_i \sum_{j=1}^{N} a_{ij} z_j \\ &= \sum_{i=1}^{N} z_i \sum_{j=1}^{N} B[\psi_j, \psi_i] z_j \\ &= B[\sum_{j=1}^{N} z_j \psi_j, \sum_{i=1}^{N} z_i \psi_i] \\ &= B[u_h, u_h] \geq \beta \|u_h\|_V^2 > 0, \end{aligned}$$

αν $u_h \neq 0$ ή ,ισοδύναμα, αν $z \neq 0$.

Θεώρημα 3.1.2 *Ανεξάρτητα από την επιλογή του υπόχωρου S_h του χώρου V, η λύση του προσεγγιστικού προβλήματος ικανοποιεί πάντα την ακόλουθη ανισότητα*

$$\|u_h\|_{H^m(U)} \leq \beta^{-1}\|f\|.$$

Απόδειξη Έστω ότι η συνάρτηση u_h είναι μια λύση του προσεγγιστικού προβλήματος. Αντικαθιστώντας $v = u_h$, έπεται ότι

$$\beta\|u_h\|^2_{H^m(U)} \leq B[u_h, u_h] =< f, u_h >\leq \|f\|\|u_h\|_{H^m(U)}.$$

Διαιρώντας με $\|u_h\|_{H^m(U)}$ και τα δύο μέλη της ανισότητας, έπεται το ζητούμενο.

Λήμμα 3.1.3 (του Céa) *Έστω ότι το διγραμμικό συναρτησιακό B είναι V-ελλειπτικό με $V \subset H^m(U)$. Τότε ισχύει η γενική εκτίμηση σφάλματος*

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{\alpha}{\beta} inf_{v_h \in S_h}\|u - v_h\|_V,$$

όπου u και u_h είναι οι λύσεις του μεταβολικού προβλήματος στον χώρο V και του προσεγγιστικού προβλήματος στον χώρο $S_h \subset V$, αντίστοιχα.

Απόδειξη Λόγω της υπόθεσης, ισχύει ότι

$$B[u, v] =< f, v >, \ \forall v \in V,$$

$$B[u_h, v] =< f, v >, \ \forall v \in S_h.$$

Επειδή $S_h \subset V$, αφαιρώντας τις παραπάνω σχέσεις έπεται ότι

$$B[u - u_h, v] = 0, \ \forall v \in S_h. \tag{3.3}$$

Έστω ότι $v_h \in S_h$. Θέτοντας $v = v_h - u_h \in S_h$ στην σχέση (3.3), έπεται ότι $B[u - u_h, v_h - u_h] = 0$, και

$$\begin{aligned}
\beta\|u - u_h\|^2_V &\leq B[u - u_h, u - u_h] \\
&= B[u - u_h, u - v_h + v_h - u_h] \\
&= B[u - u_h, u - v_h] + B[u - u_h, v_h - u_h] \\
&= B[u - u_h, u - v_h] + B[u, v_h - u_h] - B[u_h, v_h - u_h] \\
&= B[u - u_h, u - v_h] + < f, v_h - u_h > - < f, v_h - u_h > \\
&= B[u - u_h, u - v_h] \\
&\leq \alpha\|u - u_h\|_V\|u - v_h\|_V.
\end{aligned}$$

Διαιρώντας με $\|u - u_h\|_V$ τα δύο μέλη της παραπάνω ανισότητας, έπεται ότι $\|u - u_h\|_V \leq \frac{\alpha}{\beta}\|u - v_h\|_V$, δηλαδή ισχύει η ζητούμενη εκτίμηση.

Σημείωση Η σχέση (3.3) καλείται συνήθως ορθογωνιότητα του Galerkin.

Σε αντιστοιχία με το Θεώρημα (2.2.1) της §2.2.3 ισχύει το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 3.1.4 *Αν το διγραμμικό συναρτησιακό B είναι συμμετρικό, τότε το προσεγγιστικό πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο πρόβλημα ελαχιστοποίησης: «Να βρεθεί $u_h \in S_h$ τέτοιο, ώστε $J(u_h) = min_{v \in S_h} J(v)$».*

Τέλος, θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο Ritz-Galerkin σε ένα ελλειπτικό πρόβλημα συνοριακών τιμών.

Παράδειγμα 2 (Συνέχεια) Έστω το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & u \in U, \\ u = 0, & u \in \Gamma, \end{cases}$$

όπου το σύνολο U είναι το μοναδιαίο τετράγωνο $(0,1) \times (0,1)$ και Γ το σύνορο του U.

Για να επιλύσουμε αριθμητικά το παραπάνω πρόβλημα με τη μέθοδο Ritz-Galerkin, κατασκευάζουμε πρώτα ένα μερισμό της περιοχής U σε τρίγωνα. Θεωρούμε τον χώρο S_h των προσεγγιστικών συναρτήσεων $v(x,y)$ οι οποίες έχουν πεδίο ορισμού το σύνολο U και ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) η $v(x,y)$ είναι γραμμική σε κάθε τρίγωνο T του τριγωνισμού του συνόλου U, δηλαδή είναι της μορφής

$$v(x,y) = ax + by + c.$$

(ii) η $v(x,y)$ είναι συνεχής σε όλη την περιοχή $\bar{U} = [0,1] \times [0,1]$.

(iii) η $v(x,y)$ μηδενίζεται στο σύνορο Γ.

Στη συνέχεια, για κάθε κορυφή $P_j = (x_j, y_j)$, για $j = 1, \ldots, n$, του τριγωνισμού του U που δεν ανήκει στο σύνορο Γ θεωρούμε τη συνάρτηση «πυραμίδα» $\psi_j(x,y)$ η οποία ανήκει στον χώρο S_h και παίρνει την τιμή 1 στην αντίστοιχη κορυφή P_j και την τιμή 0 σε όλες τις άλλες κορυφές του τριγωνισμού, ενώ η απόλυτη τιμή της παραγώγου της είναι ίση με $\frac{1}{h}$. Επομένως, ισχύει $dim S_h = n =$ αριθμός των εσωτερικών κομβικών σημείων, και οι συναρτήσεις ψ_j, για $j = 1, \ldots, n$, καλούνται συναρτήσεις βάσης.

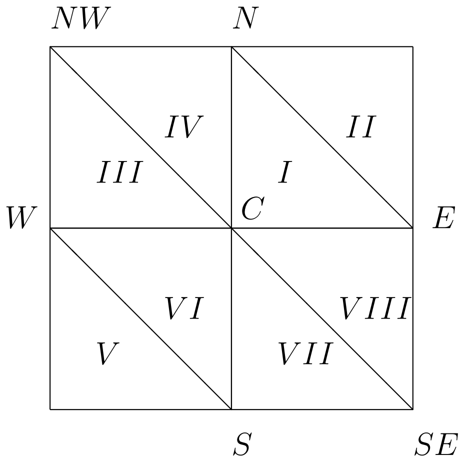
Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Ritz-Galerkin στο πρόβλημα αυτό, καταλήγουμε στο σύστημα εξισώσεων

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \int\int_U \bigtriangledown\psi_j \cdot \bigtriangledown\psi_i \; dx \; dy = \int\int_U f \; \psi_i \; dx \; dy, \; i = 1, \ldots, n,$$

ή ισοδύναμα

$$Ac = b,$$

όπου $A = (a_{ij}) = \int\int_U \bigtriangledown\psi_j \cdot \bigtriangledown\psi_i \; dx \; dy$, $b = (b_i) = \int\int_U f \;\; \psi_i \; dx \; dy$ και $c = (c_j)$.



Έστω ο τριγωνισμός μιας περιοχής του συνόλου U, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Για να σκιαγραφήσουμε τη μορφή του πίνακα ακαμψίας A του συστήματος, θα υπολογίσουμε τα στοιχεία του (a_{ij}) γύρω από το σημείο C. Επειδή:

$$\begin{aligned}
a_{CC} &= \int_{I-VIII} (\bigtriangledown\psi_C)^2 \; dx \; dy \\
&= 2\int_{I+III+IV} \Delta\psi_C^2 \; dx \; dy \\
&= 2\int_{I+III+IV} \left((\partial_x\psi_C)^2 + (\partial_y\psi_C)^2\right) \; dx \; dy \\
&= 2\int_{I+III} (\partial_x\psi_C)^2 \; dx \; dy + 2\int_{I+IV} (\partial_y\psi_C)^2 \; dx \; dy \\
&= 2h^{-2}\int_{I+III} dx \; dy + 2h^{-2}\int_{I+IV} dx \; dy \\
&= 4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{CN} &= \int_{I+IV} \bigtriangledown\psi_C \cdot \bigtriangledown\psi_N \; dx \; dy = \int_{I+IV} \partial_y\psi_C \; \partial_y\psi_N \; dx \; dy \\
&= \int_{I+IV} (-h^{-1})h^{-1} \; dx \; dy = -1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{C\ NW} &= \int_{III+IV} \nabla\psi_C \cdot \nabla\psi_{NW}\ dx\ dy \\ &= \int_{III+IV} (\partial_x\psi_C\partial_x\psi_{NW} + \partial_y\psi_C\partial_y\psi_{NW})\ dx\ dy = 0, \end{aligned}$$

και λόγω συμμετρίας ισχύει:

$$a_{CE} = a_{CS} = a_{CW} = a_{CN} = -1,$$

και

$$a_{C\ SE} = a_{C\ NW} = 0,$$

όπου με ψ_i, $i = \{C, N, S, W, E, NW, SE\}$, συμβολίζεται η συνάρτηση «πυραμίδα» η οποία έχει κορυφή στο σημείο i, έπεται ότι ο πίνακας A του συστήματος γύρω από το σημείο C έχει τη μορφή:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.2 Μερικά Πεπερασμένα Στοιχεία

Στην παράγραφο αυτή, θα ασχοληθούμε αρχικά με τους χώρους πεπερασμένων στοιχείων, και κυρίως με εκείνες τις ιδιότητες οι οποίες χαρακτηρίζουν διαφορετικούς χώρους. Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε δύο μεγάλες κατηγορίες σύμμορφων πεπερασμένων στοιχείων: τα τριγωνικά και τα ορθογώνια στοιχεία. Τέλος, θα αναφερθούμε στα κριτήρια με τη βοήθεια των οποίων επιλέγουμε το κατάλληλο στοιχείο για το διαχωρισμό του συνόλου U.

3.2.1 Χώροι Πεπερασμένων Στοιχείων

Πρακτικά, χώρος πεπερασμένων στοιχείων καλείται ο χώρος στον οποίο λύνεται το μεταβολικό πρόβλημα που αντιστοιχεί στο δοθέν ελλειπτικό πρόβλημα συνοριακών τιμών. Για να ορίσουμε έναν χώρο πεπερασμένων στοιχείων S_h, χρειάζεται να προσδιορίσουμε τα ακόλουθα:

(i) το είδος του διαχωρισμού του συνόλου U.

Τα υποπεδία στα οποία διαχωρίζεται το δοθέν πεδίο U καλούνται στοιχεία. Στην περίπτωση των επίπεδων προβλημάτων, τα στοιχεία αυτά μπορεί να είναι τρίγωνα ή τετράπλευρα, ενώ σε προβλήματα τριών διαστάσεων ως στοιχεία χρησιμοποιούνται συνήθως τετράεδρα, κύβοι, ορθογώνια παραλληλεπίπεδα, κ.λπ. Για λόγους απλότητας, θα περιορίσουμε τη μελέτη μας κυρίως στην περίπτωση των δύο διαστάσεων.

Με τη βοήθεια του ακόλουθου ορισμού, είναι δυνατόν να ελεγχθεί αν ο διαχωρισμός του U είναι αποδεκτός, καθώς και αν ικανοποιεί τις ιδιότητες συγκεκριμένου είδους.

Ορισμός 3.2.1 *Έστω ότι το σύνολο U είναι ένα πολυγωνικό πεδίο το οποίο μπορεί να διαχωριστεί σε τρίγωνα ή τετράπλευρα.*

(i) Ο διαχωρισμός $T = \{T_1, T_2, \ldots, T_M\}$ του U σε τριγωνικά ή τετράπλευρα στοιχεία καλείται αποδεκτός αν ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

(1) $\bar{U} = \cup_{i=1}^{M} T_i$.

(2) Αν η $T_i \cap T_j$ αποτελείται από ένα ακριβώς σημείο, τότε το σημείο αυτό είναι κοινή κορυφή του στοιχείου T_i και του T_j.

(3) Αν για κάθε $i \neq j$ η $T_i \cap T_j$ αποτελείται από περισσότερα του ενός σημεία, τότε η $T_i \cap T_j$ είναι μια κοινή πλευρά των στοιχείων T_i και T_j.

(ii) Ο διαχωρισμός T θα συμβολίζεται με T_h όταν κάθε στοιχείο του έχει διάμετρο το πολύ ίση με $2h$.

(iii) Θα λέμε ότι ο διαχωρισμός είναι κανονικός αν όλα τα στοιχεία του έχουν το ίδιο σχήμα και το ίδιο μέγεθος.

(iv) Μια οικογένεια $\{T_h\}$ διαχωρισμών καλείται κανονική ως προς το σχήμα αν υπάρχει ένας αριθμός $\kappa > 0$ τέτοιος, ώστε κάθε διαχωρισμός $T \in T_h$ να περικλείει έναν κύκλο ακτίνας ρ_T με

$$\rho_T \geq h_T/\kappa,$$

όπου με h_T συμβολίζεται το μισό της διαμέτρου του T.

(v) Μια οικογένεια $\{T_h\}$ διαχωρισμών καλείται ομοιόμορφη (ή κ-κανονική) αν υπάρχει ένας αριθμός $\kappa > 0$ τέτοιος, ώστε κάθε στοιχείο $T \in T_h$ να περικλείει έναν κύκλο ακτίνας $\rho_T \geq h/\kappa$.

Επειδή $h = max_{T \in T_h} h_T$, έπεται ότι η ομοιομορφία ενός πλέγματος αποτελεί ισχυρότερη απαίτηση από την κανονικότητά του ως προς το σχήμα. Για το λόγο αυτό, στην πράξη χρησιμοποιούνται συνηθέστερα κανονικά ως προς το σχήμα πλέγματα, και πολύ σπάνια ομοιόμορφα.

(ii) το είδος της συνάρτησης $v \in S_h$ σε κάθε στοιχείο T_i για $i = 1, 2, \ldots, M$.

Συνήθως, η συνάρτηση v είναι ένα πολυώνυμο. Σε επίπεδα προβλήματα, και για τριγωνισμό του συνόλου U η $v \in P_t$, όπου με

$$P_t := \{v(x,y) = \sum_{i,j\geq 0}^{i+j\leq t} c_{ij}x^i y^j\}, \tag{3.4}$$

συμβολίζεται το σύνολο των πολυωνύμων βαθμού $\leq t$. Αν χρησιμοποιούνται όλα τα πολυώνυμα βαθμού $\leq t$, τότε η v καλείται πεπερασμένο στοιχείο με πλήρες πολυώνυμο.

Αντίθετα, στα ορθογώνια στοιχεία χρησιμοποιούνται συναρτήσεις v οι οποίες ανήκουν στο σύνολο Q_t, όπου με

$$Q_t := \{v(x,y) = \sum_{0\leq i,j\leq t} c_{ij}x^i y^j\} \tag{3.5}$$

συμβολίζεται η παραπάνω πολυωνυμική οικογένεια η οποία περιλαμβάνει τανυστικά γινόμενα.

Τόσο στην περίπτωση των τριγωνικών στοιχείων όσο και σε αυτήν των ορθογωνίων, οι περιορισμοί των πολυωνύμων στις πλευρές των τριγώνων ή των τετραέδρων, αντίστοιχα, είναι πολυώνυμα μιας μεταβλητής.

(iii) τις παραμέτρους που χρησιμοποιούνται για να προσδιοριστούν οι συναρτήσεις $v \in S_h$.

Οι παράμετροι αυτές μπορούν να είναι οι τιμές της v στους κόμβους του στοιχείου T_i, σε ενδιάμεσα σημεία στις πλευρές του στοιχείου, στο κέντρο του στοιχείου, καθώς και οι τιμές των παραγώγων της v στα σημεία αυτά. Οι τιμές αυτές καλούνται συνήθως συνθήκες παρεμβολής.

3.2.2 Μερικά Σύμμορφα Πεπερασμένα Στοιχεία

Αρχικά, θα δώσουμε τον ορισμό του σύμμορφου πεπερασμένου στοιχείου.

Ορισμός 3.2.2 (i) *Ως πεπερασμένο στοιχείο ορίζεται η τριάδα* (T, Π, Σ) *για την οποία ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:*

(1) ο όρος T *αποτελεί ένα πολύεδρο στον χώρο* $\mathbb{R}^n$.

(2) ο όρος Π *είναι ένας πεπερασμένης διάστασης* s *γραμμικός χώρος συναρτήσεων οι οποίες έχουν πεδίο ορισμού το σύνολο* T.

(3) ο όρος Σ *είναι ένα σύνολο* s *γραμμικώς ανεξάρτητων συναρτησοειδών στον χώρο* Π.

Κάθε συνάρτηση $p \in \Pi$ ορίζεται μοναδικά από τις τιμές των s συναρτησοειδών του χώρου Σ, τα οποία καλούνται συνθήκες παρεμβολής. Ο αριθμός s της ιδιότητας (2) καλείται τοπική διάσταση ή τοπικοί βαθμοί ελευθερίας.

(ii) Θα λέμε ότι ένα πεπερασμένο στοιχείο είναι σύμμορφο αν το στοιχείο αυτό ανήκει στον χώρο Sobolev στον οποίο έχουμε θέσει και το μεταβολικό πρόβλημα.

Προτού παρουσιάσουμε μερικά σύμμορφα πεπερασμένα στοιχεία, παρατηρούμε ότι στην σύμμορφη αντιμετώπιση ελλειπτικών προβλημάτων δεύτερης τάξης επιλέγονται πεπερασμένα στοιχεία τα οποία ανήκουν στον χώρο $H^1(U)$. Λόγω του ακόλουθου θεωρήματος

Θεώρημα 3.2.1 *Έστω ότι το σύνολο U είναι φραγμένο, και ο αριθμός $k \geq 1$. Τότε η τμηματικά απείρως διαφορίσιμη συνάρτηση $v : \bar{U} \to \mathbb{R}$ ανήκει στον χώρο $H^k(U)$ αν και μόνο αν η $v \in C^{k-1}(\bar{U})$.*

Απόδειξη Δείτε [2].

έπεται ότι τα στοιχεία αυτά ανήκουν στον χώρο $C^0(\bar{U})$. Για το λόγο αυτό, η παρουσίασή μας περιορίζεται σε C^0-στοιχεία.

Σημείωση Θα λέμε ότι ένα πεπερασμένο στοιχείο v είναι C^k-στοιχείο αν $v \in C^k(U)$.

Παραδείγματα Τριγωνικών Στοιχείων με Πλήρη Πολυώνυμα

(i) Η τριάδα (T, Π, Σ), όπου:

- με T συμβολίζεται ένα τρίγωνο το οποίο έχει κόμβους στις κορυφές του $\alpha_i,\ i = 1, 2, 3$,

- ο χώρος $\Pi = P_1 = \{v(x, y) = a + bx + cy \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ με $dim\Pi = 3$ βαθμούς ελευθερίας,

- το σύνολο $\Sigma = \{p(\alpha_i),\ i = 1, 2, 3\}$ των συνθηκών παρεμβολής, ορίζει το ≪γραμμικό τριγωνικό στοιχείο≫.

(ii) Η τριάδα (T, Π, Σ), όπου:

- με T συμβολίζεται ένα τρίγωνο το οποίο έχει κόμβους στις κορυφές του $\alpha_i,\ i = 1, 2, 3$ και στα μέσα $\beta_i,\ i = 1, 2, 3$ των πλευρών του,

- ο χώρος $\Pi = P_2 = \{v(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2 \mid a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, 6\}$ με $dim\Pi = 6$ βαθμούς ελευθερίας,

- το σύνολο $\Sigma = \{p(\alpha_i), p(\beta_i),\ i = 1, 2, 3\}$ των συνθηκών παρεμβολής, ορίζει το ≪τετραγωνικό τριγωνικό στοιχείο≫.

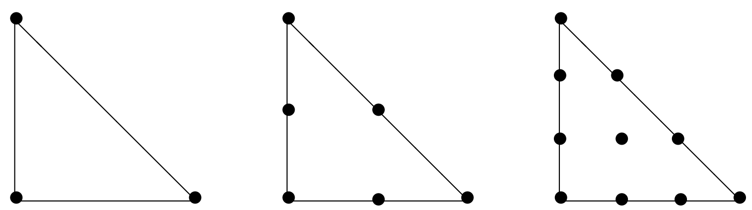
(iii) Η τριάδα (T, Π, Σ), όπου:

- με T συμβολίζεται ένα τρίγωνο το οποίο έχει κόμβους στις κορυφές του α_i, $i = 1, 2, 3$, στα σημεία β_i, γ_i, δ_i, $i = 1, 2$ τα οποία διαχωρίζουν κάθε πλευρά του τριγώνου σε τρία ισομήκη τμήματα και στο κέντρο του $\alpha_{123} = \frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$,

- ο χώρος $\Pi = P_3 = \{v(x,y) = \sum_{i,j \geq 0}^{i+j \leq 3} c_{ij} x^i y^j \mid c_{ij} \in \mathbb{R},\ i,j = 0,1,2,3\}$ με $dim\Pi = 10$ βαθμούς ελευθερίας,

- το σύνολο $\Sigma = \{p(\alpha_i), p(\beta_i), p(\gamma_i), p(\delta_i), p(\alpha_{123}),\ i = 1, 2, 3\}$ των συνθηκών παρεμβολής, ορίζει το «κυβικό τριγωνικό στοιχείο».

Στο ακόλουθο σχήμα παρουσιάζουμε ένα γραμμικό, τετραγωνικό και κυβικό τριγωνικό στοιχείο, αντίστοιχα.



Σημείωση Για τα πεπερασμένα στοιχεία με πλήρη πολυώνυμα χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό

$$M^k := M_k(T) := \{v \in L^2(U) \mid v|_T \in P_k \ \forall \ T \in T_h\}, \tag{3.6}$$

$$M_0^k := M^k \cap H^1(U), \tag{3.7}$$

$$M_{0,0}^k := M^k \cap H_0^1(U). \tag{3.8}$$

Παραδείγματα Ορθογώνιων Στοιχείων

(i) Η τριάδα (T, Π, Σ), όπου:

- με T συμβολίζεται ένα ορθογώνιο το οποίο έχει κόμβους στις κορυφές του α_i, $i = 1, 2, 3, 4$,

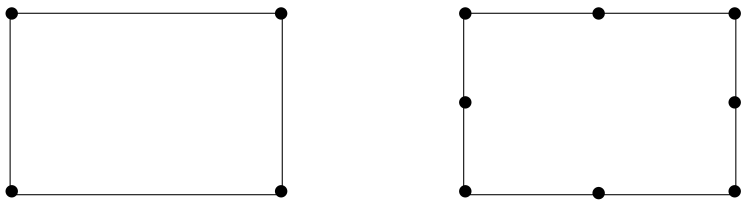
- ο χώρος $\Pi = \{v \in C^0(\bar{U}) \mid v|_T \in P_2,\ v|_{\partial T_i} \in P_1,\ i = 1, 2, 3, 4,\ \forall\ T \in T_h\} = Q_1 = \{v(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy \mid a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, 3, 4\}$ με $dim\Pi = 4$ βαθμούς ελευθερίας,

- το σύνολο $\Sigma = \{p(\alpha_i),\ i = 1, 2, 3, 4\}$ των συνθηκών παρεμβολής, ορίζει το «διγραμμικό ορθογώνιο στοιχείο».

(ii) Η τριάδα (T, Π, Σ), όπου:

- με T συμβολίζεται ένα ορθογώνιο το οποίο έχει κόμβους στις κορυφές του $\alpha_i,\ i = 1,2,3,4$ και στα μέσα $\beta_i,\ i = 1,2,3,4$ των πλευρών του,
- ο χώρος $\Pi = \{v \in C^0(\bar{U}) \mid v|_T \in P_3,\ v|_{\partial T_i} \in P_2,\ i = 1,2,3,4\ \forall\ T \in T_h\} = \{v(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy + a_5(x^2-1)(y-1) + a_6(x^2-1)(y+1) + a_7(x-1)(y^2-1) + a_8(x+1)(y^2-1) \mid a_i \in \mathbb{R},\ i = 1,\ldots,8\}$ με $dim\Pi = 8$ βαθμούς ελευθερίας,
- το σύνολο $\Sigma = \{p(\alpha_i), p(\beta_i),\ i = 1,2,3,4\}$ των συνθηκών παρεμβολής, ορίζει το «στοιχείο serendipity».

Στο ακόλουθο σχήμα παρουσιάζουμε ένα διγραμμικό ορθογώνιο στοιχείο και ένα στοιχείο serendipity, αντίστοιχα.



Σημείωση Η περαιτέρω ανάλυση των χώρων πεπερασμένων στοιχείων μπορεί να ληφθεί από τα αποτελέσματα της ανάλυσης ενός στοιχείου αναφοράς, αν όλα τα στοιχεία του διαχωρισμού του συνόλου U προκύπτουν από το στοιχείο αναφοράς με τη βοήθεια ενός αφφινικού μετασχηματισμού.

Ορισμός 3.2.3 *Μια οικογένεια η οποία αποτελείται από χώρους πεπερασμένων στοιχείων S_h για διαχωρισμούς T_h του συνόλου $U \subset \mathbb{R}^n$ καλείται αφφινική οικογένεια αν υπάρχει ένα πεπερασμένο στοιχείο $(T_{ref}, \Pi_{ref}, \Sigma)$, το οποίο καλείται στοιχείο αναφοράς, με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(4) Για κάθε στοιχείο $T_j \in T_h$ υπάρχει μια αφφινική απεικόνιση $F_j : T_{ref} \to T_j$ τέτοια, ώστε για κάθε $v \in S_h$ ο περιορισμός της στο στοιχείο T_j να είναι της μορφής

$$v(x) = p(F_j^{-1}x),\ p \in \Pi_{ref}.$$

Για παράδειγμα, η οικογένεια M_0^k των τριγωνικών πεπερασμένων στοιχείων με πλήρη πολυώνυμα αποτελεί μια αφφινική οικογένεια, όπου το στοιχείο αναφοράς ορίζεται από την τριάδα (T_{ref}, P_k, Σ_k), με

$$T_{ref} := \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi \geq 0, \eta \geq 0, 1-\xi-\eta \geq 0\} \tag{3.9}$$

να είναι το μοναδιαίο τρίγωνο, P_k το σύνολο των πολυωνύμων βαθμού $\leq k$, και $\Sigma_k := \{p(\alpha_i),\ i = 1,2,\ldots,\frac{(k+1)(k+2)}{2}\}$ το σύνολο των συνθηκών παρεμβολής.

3.2.3 Επιλογή Κατάλληλου Στοιχείου

Η επιλογή της χρήσης τριγωνισμού ή διαχωρισμού σε ορθογώνια του συνόλου U εξαρτάται κυρίως από το σχήμα του πεδίου. Αν και τα τριγωνικά στοιχεία είναι πιο ευέλικτα, στη μηχανική των στερεών προτιμώνται κυρίως τα ορθογωνικά στοιχεία.

Σε προβλήματα με ομαλή συμπεριφορά, η χρήση των (δι-)τετραγωνικών στοιχείων δίνει καλύτερα αποτελέσματα από εκείνη των (δι-)γραμμικών στοιχείων, αν έχουμε θεωρήσει ίδιο αριθμό ελεύθερων παραμέτρων και στα δύο στοιχεία. Ωστόσο, η χρήση (δι-)τετραγωνικών στοιχείων οδηγεί σε γραμμικά συστήματα υψηλότερης τάξης, και επομένως απαιτείται περισσότερη εργασία για τη δημιουργία του πίνακα ακαμψίας του συστήματος. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιούνται συχνά γραμμικά στοιχεία.

3.3 Εκτιμήσεις Σφαλμάτων Προσέγγισης

Στόχος της παραγράφου αυτής είναι η εκτίμηση του σφάλματος προσέγγισης με πεπερασμένα στοιχεία. Επειδή το σφάλμα για μια μέθοδο παρεμβολής μας παρέχει ένα άνω φράγμα του σφάλματος καλύτερης προσέγγισης, έπεται ότι επιθυμούμε μία εκτίμηση της μορφής

$$\|v - I_h v\|_{m,h} \leq c\|v\|_{H^t(U)},\ m \leq t,$$

όπου δοθέντος ενός διαχωρισμού $T_h = \{T_1, T_2, \ldots, T_M\}$ του συνόλου U και ενός αριθμού $m \geq 1$ ορίζουμε τη νόρμα $\|\cdot\|_{m,h}$ ως εξής

$$\|v\|_{m,h} := \sqrt{\sum_{T_j \in T_h} \|v\|^2_{H^m(T_j)}}, \tag{3.10}$$

και με $I_h v$ συμβολίζεται το ορισμένο μονοσήμαντα από τις συνθήκες παρεμβολής πολυώνυμο παρεμβολής στον χώρο S_h. Είναι προφανές ότι, για κάθε $v \in H^m(U)$ ισχύει $\|v\|_{m,h} = \|v\|_{H^m(U)}$.

Αρχικά, θα διατυπώσουμε το Λήμμα των Bramble-Hilbert, με τη βοήθεια του οποίου θα αποδείξουμε εκτιμήσεις σφαλμάτων προσέγγισης για κάποια στοιχεία αναφοράς. Είναι προφανές ότι, λόγω της θεωρίας των αφφινικών οικογενειών, αρκεί να εξετάσουμε ένα στοιχείο αναφοράς, διότι με τη βοήθεια τύπων μετασχηματισμού μπορούμε να εξάγουμε αποτελέσματα για κάθε στοιχείο ενός κανονικού ως προς το σχήμα πλέγματος.

3.3.1 Το Λήμμα των Bramble-Hilbert

Αρχικά, θα διατυπώσουμε μια εκτίμηση σφάλματος για παρεμβολή με πολυώνυμα.

Λήμμα 3.3.1 *Έστω ότι το σύνολο $U \subset \mathbb{R}^2$ έχει Lipschitz συνεχές σύνορο και ικανοποιεί την συνθήκη του κώνου, δηλαδή οι εσωτερικές γωνίες σε κάθε κορυφή του U να είναι θετικές και, επομένως, να μπορεί να τοποθετηθεί στο U ένας μη τετριμμένος κώνος με την άκρη του στην κορυφή αυτή. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι ο αριθμός $t \geq 2$ και $z_1, z_2, \dots, z_s$ είναι $s := t(t+1)/2$ καθορισμένα σημεία στο $\bar{U}$ τέτοια, ώστε ο τελεστής παρεμβολής $I : H^t \to P_{t-1}$ να είναι καλά ορισμένος για πολυώνυμα βαθμού $\leq t-1$. Τότε υπάρχει μια σταθερά $c = c(U, z_1, \dots, z_s)$ τέτοια, ώστε να ισχύει η εκτίμηση*

$$\|u - Iu\|_{H^t(U)} \leq c[u]_{H^t(U)}, \ \forall u \in H^t(U), \tag{3.11}$$

όπου με $[\cdot]_{H^t(U)}$ συμβολίζεται η ημινόρμα

$$[u]_{H^t(U)} := \sqrt{\sum_{|\alpha|=t} \int_U |D^\alpha u|^2 \, dx}.$$

Απόδειξη Έστω ότι εφοδιάζουμε τον χώρο $H^t(U)$ με τη νόρμα

$$|||v||| := [v]_{H^t(U)} + \sum_{i=1}^{s} |v(z_i)|.$$

Στόχος μας είναι να δείξουμε ότι οι νόρμες $\|\cdot\|_{H^t(U)}$ και $|||\cdot|||$ είναι ισοδύναμες, δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι ισχύουν οι ανισότητες $|||v||| \leq c_1 \|v\|_{H^t(U)}$ και $\|v\|_{H^t(U)} \leq c_2 |||v|||$ για κάθε $v \in H^t(U)$.

Επειδή ο χώρος $H^t(U) \subset\subset H^2(U) \subset\subset C^0(U)$, έπεται ότι

$$|v(z_i)| \leq c\|v\|_{H^t(U)}, \ i = 1, 2, \dots, s.$$

Επομένως, θα είναι

$$\begin{aligned} |||v||| &= [v]_{H^t(U)} + \sum_{i=1}^{s} |v(z_i)| \\ &\leq \|v\|_{H^t(U)} + cs\|v\|_{H^t(U)} \\ &= (1 + cs)\|v\|_{H^t(U)}. \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι η αντίστροφη ανισότητα

$$\|v\|_{H^t(U)} \leq c|||v|||, \ \forall v \in H^t(U) \tag{3.12}$$

δεν ισχύει για κάθε θετικό αριθμό c. Τότε υπάρχει μια ακολουθία $(v_k) \in H^t(U)$ με

$$\|v_k\|_{H^t(U)} = 1, \ |||v_k||| \leq \frac{1}{k}, \ k = 1, 2, \dots \ .$$

Λόγω του ορισμού 1.5.1 της §1.5.1, έπεται ότι υπάρχει μια υποακολουθία της (v_k) η οποία συγκλίνει στον χώρο $H^{t-1}(U)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι η ίδια η ακολουθία (v_k) συγκλίνει στον χώρο $H^{t-1}(U)$. Επομένως, η (v_k) είναι μια ακολουθία Cauchy στον χώρο $H^{t-1}(U)$. Επειδή $[v_k]_{H^t(U)} \to 0$ και $\|v_k - v_l\|^2_{H^t(U)} \leq \|v_k - v_l\|^2_{H^{t-1}(U)} + ([v_k]_{H^t(U)} + [v_l]_{H^t(U)})^2$, έπεται ότι η (v_k) είναι μια ακολουθία Cauchy στον χώρο $H^t(U)$. Λόγω της πληρότητας του $H^t(U)$, η (v_k) θα συγκλίνει σε ένα στοιχείο $v^* \in H^t(U)$. Λόγω της συνέχειας, θα είναι

$$\|v^*\|_{H^t(U)} = 1, \ |||v^*||| = 0,$$

το οποίο όμως είναι άτοπο, διότι η συνθήκη $[v^*]_{H^t(U)} = 0$ συνεπάγεται ότι το στοιχείο v^* είναι ένα πολυώνυμο στον χώρο P_{t-1}, και η συνθήκη $v^*(z_i) = 0$ για $i = 1, 2, \ldots, s$ συνεπάγεται ότι το στοιχείο v^* μπορεί να είναι μόνο το μηδενικό πολυώνυμο. Συνεπώς, η ανισότητα (3.12) ισχύει.

Τότε θα είναι

$$\begin{aligned} \|u - Iu\|_{H^t(U)} &\leq c|||u - Iu||| \\ &= c\left([u - Iu]_{H^t(U)} + \sum_{i=1}^{s} |(u - Iu)(z_i)|\right) \\ &= c[u - Iu]_{H^t(U)} = c[u]_{H^t(U)}, \end{aligned}$$

όπου έχουμε κάνει χρήση των εξής γεγονότων: $Iu = u$ στα σημεία παρεμβολής, και $D^\alpha Iu = 0$ για κάθε $|\alpha| = t$.

Με τη βοήθεια του παραπάνω Λήμματος, αποδεικνύεται το Λήμμα των Bramble-Hilbert.

Λήμμα 3.3.2 (Bramble-Hilbert) *Έστω ότι το σύνολο $U \subset \mathbb{R}^2$ έχει Lipschitz συνεχές σύνορο. Υποθέτουμε ότι ο αριθμός $t \geq 2$ και η γραμμική απεικόνιση $L : H^t(U) \to Y$, όπου Y είναι ένας γραμμικός χώρος με νόρμα, είναι φραγμένη. Αν $P_{t-1} \subset kerL$, όπου με $kerL$ συμβολίζεται ο πυρήνας της L, τότε υπάρχει μια σταθερά $c = c(U)\|L\| \geq 0$, όπου $\|L\| := sup\{\|Lv\| \mid \|v\| = 1\}$, τέτοια, ώστε να ισχύει η εκτίμηση*

$$\|Lv\| \leq c[v]_{H^t(U)}, \ \forall v \in H^t(U). \tag{3.13}$$

Απόδειξη Έστω ότι ο τελεστής $I : H^t(U) \to P_{t-1}$ είναι ένας τελεστής παρεμβολής όπως εκείνος που εμφανίζεται στο Λήμμα (3.3.1). Με τη βοήθεια του Λήμματος αυτού, και επειδή $Iv \in kerL$, έπεται ότι

$$\|Lv\| = \|L(v - Iv)\| \leq \|L\| \cdot \|v - Iv\|_{H^t(U)} \leq c\|L\|[v]_{H^t(U)},$$

όπου c η σταθερά της σχέσης (3.11).

3.3.2 Εκτιμήσεις Σφαλμάτων Προσέγγισης για Στοιχεία Αναφοράς

Θεωρούμε τον τριγωνισμό T_h του συνόλου U και τον χώρο πεπερασμένων στοιχείων $S_h = M_0^{t-1}(T_h)$, όπου ο αριθμός $t \geq 2$. Γνωρίζουμε ότι, ο τριγωνισμός T_h συνδέεται με μία παράμετρο σχήματος κ, και ο τελεστής παρεμβολής $I_h : H^t(U) \to S_h$ είναι καλά ορισμένος.

Θεώρημα 3.3.3 *Έστω ότι T_h είναι ένας κανονικός ως προς το σχήμα τριγωνισμός του συνόλου U, και ο αριθμός $t \geq 2$. Τότε υπάρχει μια σταθερά $c = c(U, \kappa, t)$ τέτοια, ώστε να ισχύει η εκτίμηση*

$$\|u - I_h u\|_{m,h} \leq ch^{t-m}[u]_{H^t(U)}, \ \forall u \in H^t(U), \ 0 \leq m \leq t, \tag{3.14}$$

όπου με I_h συμβολίζεται η παρεμβολή από ένα τμηματικά πολυώνυμο βαθμού $t-1$.

Σημείωση Υποθέτουμε ότι ο τριγωνισμός του συνόλου U είναι κανονικός, δηλαδή όλα τα στοιχεία του τριγωνισμού έχουν το ίδιο σχήμα και το ίδιο μέγεθος. Αυτό σημαίνει ότι κάθε στοιχείο του τριγωνισμού μπορεί να θεωρηθεί ως το στοιχείο αναφοράς T_1 υπό κλίμακα, δηλαδή

$$T_h := hT_1 = \{x = hy \mid y \in T_1\}$$

με $h \leq 1$. Στην περίπτωση αυτή, αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $0 \leq m \leq t$ ισχύει

$$\|u - Iu\|_{H^m(T_h)} \leq ch^{t-m}[u]_{H^t(T_h)}, \tag{3.15}$$

όπου Iu είνα το πολυώνυμο στον χώρο P_{t-1} το οποίο παρεμβάλλει την συνάρτηση u, και c η σταθερά του Λήμματος (3.3.1).

Δοθείσης μιας συνάρτησης $u \in H^t(T_h)$, ορίζεται η συνάρτηση $v \in H^t(T_1)$ ως εξής

$$v(y) = u(hy).$$

Επειδή για κάθε $|\alpha| \leq t$ ισχύει $\partial^\alpha v = h^{|\alpha|}\partial^\alpha u$, και ο μετασχηματισμός μιας περιοχής του χώρου $\mathbb{R}^2$ δίνει τον επιπλέον παράγοντα h^{-2}, έπεται ότι

$$[v]^2_{H^l(T_1)} = \sum_{|\alpha|=l} \int_{T_1} |D^\alpha v|^2 \, dy = \sum_{|\alpha|=l} \int_{T_h} h^{2l}|D^\alpha u|^2 h^{-2} \, dx = h^{2l-2}[u]^2_{H^l(T_h)}.$$

Θεωρώντας ότι ο αριθμός $h \leq 1$, έπεται ότι

$$\|u\|^2_{H^m(T_h)} = \sum_{l \leq m} [u]^2_{H^l(T_h)} = \sum_{l \leq m} h^{-2l+2}[v]^2_{H^l(T_1)} \leq h^{-2m+2}\|v\|^2_{H^m(T_1)}.$$

Αντικαθιστώντας το u με $u - Iu$ στον παραπάνω τύπο, προκύπτει ένα αποτέλεσμα για το σφάλμα παρεμβολής. Με τη βοήθεια του Λήμματος (3.3.1) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \|u - Iu\|_{H^m(T_h)} &\leq h^{-m+1}\|v - Iv\|_{H^m(T_1)} \\ &\leq h^{-m+1}\|v - Iv\|_{H^t(T_1)} \\ &\leq h^{-m+1}c[v]_{H^t(T_1)} \\ &\leq ch^{t-m}[u]_{H^t(T_h)}, \end{aligned}$$

για κάθε $m \leq t$.

Αν τετραγωνίσουμε τις εκφράσεις στην σχέση (3.15), και προσθέσουμε αυτές που θα προκύψουν σε όλα τα τρίγωνα του διαχωρισμού του U, προκύπτει η εκτίμηση της σχέσης (3.14).

Προτού προχωρήσουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος (3.3.3), διατυπώνουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 3.3.4 *Έστω ότι τα σύνολα U και $\hat{U}$ είναι αφφινικά ισοδύναμα, δηλαδή υπάρχει μια $1-1$ και «επί» αφφινική απεικόνιση $F : \hat{U} \to U$, με*

$$F\hat{x} = x_0 + B\hat{x}, \tag{3.16}$$

με B έναν μη ιδιόμορφο πίνακα. Αν η συνάρτηση $v \in H^m(U)$, τότε $\hat{v} := v \circ F \in H^m(\hat{U})$, και υπάρχει μια σταθερά $c = c(\hat{U}, m)$ τέτοια, ώστε να ισχύει η εκτίμηση

$$[\hat{v}]_{H^m(\hat{U})} \leq c\|B\|^m |detB|^{-1/2}[v]_{H^m(U)}. \tag{3.17}$$

Σημείωση Έστω ότι η $F : T_1 \to T_2$, με $\hat{x} \mapsto B\hat{x} + x_0$ είναι μια $1-1$ και «επί» αφφινική απεικόνιση. Συμβολίζουμε με ρ_i την ακτίνα του μεγαλύτερου εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο T_i, και με r_i την ακτίνα του μικρότερου περιγεγραμμένου κύκλου στο T_i. Δοθέντος ενός σημείου $x \in \mathbb{R}^2$ με $\|x\| \leq 2\rho_1$, βρίσκουμε δύο σημεία $y_1, z_1 \in T_1$ με $x = y_1 - z_1$. Επειδή $F(y_1), F(z_1) \in T_2$, έπεται ότι $\|Bx\| \leq 2r_2$. Επομένως, θα είναι

$$\|B\| \leq \frac{r_2}{\rho_1}. \tag{3.18}$$

Ανταλλάσοντας τα στοιχεία T_1 και T_2, έπεται ότι ο αντίστροφος πίνακας ικανοποιεί την ανισότητα $\|B^{-1}\| \leq \frac{r_1}{\rho_2}$, και επομένως θα είναι

$$\|B\| \cdot \|B^{-1}\| \leq \frac{r_1 r_2}{\rho_1 \rho_2}. \tag{3.19}$$

Απόδειξη Θεωρήματος 3.3.3 Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε τρίγωνο T_j ενός κανονικού ως προς το σχήμα τριγωνισμού T_h του συνόλου U ισχύει η ανισότητα

$$\|u - I_h u\|_{H^m(T_j)} \le ch^{t-m}[u]_{H^t(T_j)},\ \forall u \in H^t(T_j).$$

Για το λόγο αυτό, επιλέγουμε το στοιχείο αναφοράς που δίνεται από την σχέση (3.9) με $\hat{r} = 2^{-1/2}$ και $\hat{\rho} = (2+\sqrt{2})^{-1} \ge 2/7$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η $1-1$ και «επί» αφφινική απεικόνιση $F : T_{ref} \to T$ με $T = T_j \in T_h$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα (3.3.1) στο τρίγωνο αναφοράς και κάνοντας χρήση της εκτίμησης του Θεωρήματος (3.3.4), έπεται ότι

$$\begin{aligned} [u - I_h u]_{H^m(T)} &\le c\|B\|^{-m}|detB|^{1/2}[\hat{u} - I_h\hat{u}]_{H^m(T_{ref})} \\ &\le c\|B\|^{-m}|detB|^{1/2} \cdot c[\hat{u}]_{H^t(T_{ref})} \\ &\le c\|B\|^{-m}|detB|^{1/2} \cdot c\|B\|^t|detB|^{-1/2}[u]_{H^t(T)} \\ &\le c\left(\|B\| \cdot \|B^{-1}\|\right)^m \|B\|^{t-m}[u]_{H^t(T)}. \end{aligned}$$

Εξαιτίας της κανονικότητας ως προς το σχήμα, θα είναι $r/\rho \le \kappa$, και $\|B\| \cdot \|B^{-1}\| \le (2+\sqrt{2})\kappa$. Επιπλέον, η σχέση (3.18) συνεπάγεται $\|B\| \le h/\hat{\rho} \le 4h$. Επομένως, θα είναι

$$[u - I_h u]_{H^l(T)} \le ch^{t-l}[u]_{H^t(T)}.$$

Αν τετραγωνίσουμε τα μέλη της παραπάνω έκφρασης και αθροίσουμε πάνω στο l από 0 έως m, έπεται το ζητούμενο.

Στη συνέχεια, διατυπώνουμε ανάλογες εκτιμήσεις σφαλμάτων προσέγγισης για διγραμμικά τετράπλευρα στοιχεία και στοιχεία serendipity.

Θεώρημα 3.3.5 *Έστω ότι T_h είναι ένας ημιομοιόμορφος διαχωρισμός του συνόλου U σε παραλληλόγραμμα. Τότε υπάρχει μια σταθερά $c = c(U, \kappa)$ τέτοια, ώστε να ισχύει η εκτίμηση*

$$\|u - I_h u\|_{H^m(U)} \le ch^{2-m}[u]_{H^2(U)},\ \forall u \in H^2(U),$$

όπου η $I_h u$ παρεμβάλλει την συνάρτηση u με τη βοήθεια διγραμμικών στοιχείων.

Θεώρημα 3.3.6 *Έστω ότι T_h είναι ένας ημιομοιόμορφος διαχωρισμός του συνόλου U σε στοιχεία serendipity. Τότε υπάρχει μια σταθερά $c = c(U, \kappa)$ τέτοια, ώστε να ισχύει η εκτίμηση*

$$\|u - I_h u\|_{H^m(U)} \le ch^{t-m}[u]_{H^t(U)},\ \forall u \in H^t(U),\ m = 0, 1,\ t = 2, 3.$$

3.3.3 Αντίστροφες Εκτιμήσεις και η Παρεμβολή του Clément

Θεώρημα 3.3.7 *Έστω ότι (S_h) είναι μια αφφινική οικογένεια πεπερασμένων στοιχείων αποτελούμενων από τμηματικά πολυώνυμα βαθμού k τα οποία συνδέονται με ομοιόμορφα μέρη. Τότε υπάρχει μια σταθερά $c = c(\kappa, k, t)$ τέτοια, ώστε για κάθε $0 \le m \le t$ να ισχύει η εκτίμηση*

$$\|v_h\|_{t,h} \le ch^{m-t}\|v_h\|_{m,h}, \ \forall v_h \in S_h.$$

Απόδειξη Δείτε [2].

Σημείωση Υποθέτουμε ότι ο γραμμικός χώρος X με νόρμα είναι πλήρης και συμπαγώς ενσωματωμένος στον χώρο Y. Τότε υπάρχει μια οικογένεια (S_h) υποχώρων του X η οποία ικανοποιεί την ακόλουθη εκτίμηση προσέγγισης

$$inf_{v_h \in S_h}\|u - v_h\|_Y \le ch^{\alpha}\|u\|_X, \ \forall u \in X, \tag{3.20}$$

και την αντίστροφη εκτίμηση

$$\|v_h\|_X \le ch^{-\beta}\|v_h\|_Y, \ \forall v_h \in S_h. \tag{3.21}$$

Αν $\beta = \alpha$, τότε το ζεύγος των ανισοτήτων (3.20) και (3.21) καλείται βέλτιστη προσέγγιση.

Τέλος, θα αναφερθούμε στην παρεμβολή του Clément.

Παρατηρούμε ότι, ο τελεστής παρεμβολής I_h της σχέσης (3.14) μπορεί να εφαρμοσθεί μόνο σε H^2 συναρτήσεις. Ωστόσο, ο Clément κατασκεύασε μια μέθοδο παρεμβολής η οποία μπορεί να εφαρμοσθεί σε H^1 συναρτήσεις. Ο τελεστής παρεμβολής του Clément ορίζεται ως εξής:

Έστω ότι T_h είναι ένας κανονικός ως προς το σχήμα τριγωνισμός του συνόλου U. Δοθέντος ενός κόμβου x_j, ορίζουμε

$$\omega_j := \omega_{x_j} := \cup\{T' \in T_h \mid x_j \in T'\} \tag{3.22}$$

να είναι το στήριγμα της συνάρτησης σχήματος $v_j \in M_0^1$, όπου $v_j(x_k) = \delta_{jk}$. Επιπλέον, ορίζουμε

$$\tilde{\omega}_T := \cup\{\omega_j \mid x_j \in T\} \tag{3.23}$$

να είναι μια γειτονιά του στοιχείου T. Είναι προφανές ότι, ο αριθμός των τριγώνων τα οποία ανήκουν στο σύνολο $\tilde{\omega}_T$ είναι φραγμένος. Επομένως, ο τελεστής παρεμβολής $I_h v$ του Clément ορίζεται ως εξής

$$I_h v := \sum_j (\tilde{Q}_j v) v_j \in M_0^1, \tag{3.24}$$

όπου

$$\tilde{Q}_j v = \begin{cases} 0, & x_j \in \Gamma_D, \\ Q_j v, & x_j \notin \Gamma_D, \end{cases} \tag{3.25}$$

όπου $\Gamma_D \subset \partial U$ και $Q_j : L^2(\omega_j) \to P_0$ να είναι μια απεικόνιση από την L^2-προβολή στο σύνολο των σταθερών συναρτήσεων.

Για τον τελεστή παρεμβολής του Clément ισχύουν οι ακόλουθες εκτιμήσεις:

Θεώρημα 3.3.8 *Έστω ότι T_h είναι ένας κανονικός ως προς το σχήμα τριγωνισμός του συνόλου U. Τότε υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $I_h : H^1(U) \to M_0^1$ τέτοια, ώστε να ισχύουν οι εκτιμήσεις*

$$\|v - I_h v\|_{H^m(T)} \le c h_T^{1-m} \|v\|_{H^1(\tilde{\omega}_T)}, \ \forall v \in H^1(U), \ m = 0, 1, \ T \in T_h, \tag{3.26}$$

$$\|v - I_h v\|_{H^0(e)} \le c h_T^{1/2} \|v\|_{H^1(\tilde{\omega}_T)}, \ \forall v \in H^1(U), \ e \in \partial T, \ T \in T_h. \tag{3.27}$$

3.4 Εκτιμήσεις Σφαλμάτων Λύσης

Στην παράγραφο αυτή, θα διατυπώσουμε εκτιμήσεις σφαλμάτων για λύσεις με πεπερασμένα στοιχεία, δηλαδή θα διατυπώσουμε ανισότητες της μορφής

$$\|u - u_h\| \le c h^p,$$

όπου u είναι η κλασσική λύση του προβλήματος και $u_h \in S_h$ είναι η προσεγγιστική του λύση. Ο αριθμός p καλείται τάξη της προσέγγισης, και εξαρτάται από την ομαλότητα της λύσης, τον βαθμό των πολυωνύμων στα πεπερασμένα στοιχεία, και τη Sobolev νόρμα στην οποία μετράται το σφάλμα.

Αρχικά, υποθέτουμε ότι το σύνολο U είναι ένα πολυγωνικό πεδίο. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να διαχωριστεί σε τρίγωνα ή τετράπλευρα. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι το U είναι κυρτό σύνολο.

Θεώρημα 3.4.1 *Έστω ότι T_h είναι μια οικογένεια κανονικών ως προς το σχήμα τριγωνισμών του συνόλου U. Τότε η προσέγγιση με πεπερασμένα στοιχεία $u_h \in S_h = M_0^k$, όπου ο αριθμός $k \ge 1$, ικανοποιεί την εκτίμηση*

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{H^1} &\le c h \|u\|_{H^2} \\ &\le c h \|f\|_{H^0}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Απόδειξη Γνωρίζουμε ότι, αν το σύνολο U είναι κυρτό, τότε το ελλειπτικό πρόβλημα συνοριακών συνθηκών Dirichlet είναι H^2-κανονικό, δηλαδή ισχύει η εκτίμηση
$$\|u\|_{H^2} \leq c_1\|f\|_{H^0}.$$
Σύμφωνα με το Θεώρημα (3.3.3), υπάρχει $v_h \in S_h$ τέτοιο, ώστε να ικανοποιείται η ανισότητα
$$\|u-v_h\|_{H^1(U)} = \|u-v_h\|_{1,h} \leq c_2 h\|u\|_{H^2(U)}.$$
Με τη βοήθεια των παραπάνω ανισοτήτων και του Λήμματος του Céa
$$\|u-u_h\|_{H^1} \leq \frac{c_3}{c_4} inf_{v_h\in S_h}\|u-v_h\|_{H^1},$$
έπεται η ζητούμενη εκτίμηση.

Η εκτίμηση (3.28) ισχύει για κάθε αφφινική οικογένεια τριγωνικών στοιχείων η οποία περιλαμβάνει τα P_1 στοιχεία ως υποσύνολο.

Με τη βοήθεια του Θεωρήματος (3.3.5), αποδεικνύεται ότι ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν και στην περίπτωση των διγραμμικών τετραπλευρικών στοιχείων.

Θεώρημα 3.4.2 *Έστω ότι T_h είναι ένας κανονικός ως προς το σχήμα διαχωρισμός του συνόλου U σε παραλληλόγραμμα. Τότε η προσέγγιση με πεπερασμένα στοιχεία $u_h \in S_h$, όπου ο χώρος S_h αποτελείται από διγραμμικά τετραπλευρικά στοιχεία, ικανοποιεί την εκτίμηση*
$$\|u-u_h\|_{H^1} \leq ch\|f\|_{H^0}. \tag{3.29}$$

Στη συνέχεια, θα διατυπώσουμε εκτιμήσεις σφαλμάτων στον χώρο L^2. Για την απόδειξη των εκτιμήσεων αυτών, είναι απαραίτητη η διατύπωση του ακόλουθου Λήμματος:

Λήμμα 3.4.3 (Aubin-Nitsche) *Έστω ότι H είναι ένας χώρος Hilbert εφοδιασμένος με τη νόρμα $|\cdot|$ και το βαθμωτό γινόμενο $(\cdot,\cdot)$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι V είναι ένας υπόχωρος ο οποίος είναι, επίσης, χώρος Hilbert εφοδιασμένος με τη νόρμα $\|\cdot\|$, και ο V είναι συνεχώς ενσωματωμένος στον H. Τότε η λύση που προκύπτει με τη βοήθεια των πεπερασμένων στοιχείων στον χώρο $S_h \subset V$ ικανοποιεί την εκτίμηση*
$$|u-u_h| \leq C\|u-u_h\| sup_{g\in H}\left\{\frac{1}{|g|} inf_{v\in S_h}\|\phi_g - v\|\right\}, \tag{3.30}$$
όπου κάθε $g \in H$, $\phi_g \in V$ υποδηλώνει την αντίστοιχη μοναδική (ασθενή) λύση της εξίσωσης
$$B(w,\phi_g) = (g,w),\ \forall w \in V. \tag{3.31}$$

Απόδειξη Εξαιτίας της δυϊκότητας, η νόρμα ενός στοιχείου w σε έναν χώρο Hilbert μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο

$$|w| = sup_{g\in H}\frac{(g,w)}{|g|}, \tag{3.32}$$

όπου θεωρούμε το supremum μόνο για $g \neq 0$. Υπενθυμίζεται ότι, οι λύσεις u και u_h δίνονται από τους τύπους

$$B(u,v) = < f, v >, \ \forall v \in V,$$

$$B(u_h,v) = < f, v >, \ \forall v \in S_h.$$

Επομένως, για κάθε $v \in S_h$ ισχύει $B(u-u_h,v) = 0$. Επιπλέον, αν θέσουμε $w := u - u_h$ στην σχέση (3.31), έπεται ότι

$$\begin{aligned} (g, u-u_h) &= B(u-u_h,\phi_g) \\ &= B(u-u_h,\phi_g - v) \\ &\leq c_1\|u-u_h\|\cdot\|\phi_g - v\|, \end{aligned}$$

όπου κάναμε χρήση της συνέχειας του διγραμμικού συναρτησιακού B. Επομένως, θα είναι

$$(g,u-u_h) \leq c_1\|u-u_h\| inf_{v\in S_h}\|\phi_g - v\|.$$

Με τη βοήθεια της σχέσης (3.32), έπεται ότι

$$\begin{aligned} |u-u_h| &= sup_{g\in H}\frac{(g,u-u_h)}{|g|} \\ &\leq c_1\|u-u_h\| sup_{g\in H}\left\{inf_{v\in S_h}\frac{\|\phi_g - v\|}{|g|}\right\}. \end{aligned}$$

Θεώρημα 3.4.4 *Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις είτε του Θεωρήματος (3.4.1) ή του Θεωρήματος (3.4.2). Αν η συνάρτηση $u \in H^1(U)$ είναι η λύση του αντίστοιχου μεταβολικού προβλήματος, τότε ισχύει η εκτίμηση*

$$\|u-u_h\|_{H^0} \leq cCh\|u-u_h\|_{H^1}.$$

Επιπλέον, αν η συνάρτηση $f \in L^2(U)$ ώστε η $u \in H^2(U)$, τότε ισχύει η εκτίμηση

$$\|u-u_h\|_{H^0} \leq cC^2h^2\|f\|_{H^0},$$

όπου c και C είναι οι σταθερές που εμφανίζονται στις σχέσεις (3.28) και (3.29)-(3.30), αντίστοιχα.

Απόδειξη Θέτουμε

$$H := H^0(U),\ |\cdot| := \|\cdot\|_{H^0},$$

$$V := H_0^1(U),\ \|\cdot\| := \|\cdot\|_{H^1},$$

οπότε θα είναι $V \subset H$, και η συνέχεια της ενσωμάτωσης του χώρου V στον χώρο H είναι προφανής από την σχέση $\|\cdot\|_{H^0} \leq \|\cdot\|_{H^1}$. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα των Aubin-Nitsche. Με τη βοήθεια του Θεωρήματος (3.4.1) ή (3.4.2), παρατηρείται ότι η ποσότητα εντός των αγκίστρων στην σχέση (3.30) φράσσεται από τον αριθμό ch· οπότε προκύπτει απευθείας από το Λήμμα (3.4.3) η ζητούμενη εκτίμηση.

Τέλος, παρατηρούμε ότι οι παραπάνω εκτιμήσεις δεν αποκλείουν την πιθανότητα το σφάλμα να είναι αρκετά μεγάλο σε συγκεκριμένα σημεία. Για να εμποδίσουμε την ύπαρξη της πιθανότητας αυτής, χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε την L^∞-νόρμα

$$\|v\|_{L^\infty(U)} := sup_{x\in U}|v(x)|.$$

Γνωρίζουμε ότι, για προβλήματα σε διδιάστατα πεδία ορισμού με H^2-κανονικότητα ισχύει η εκτίμηση

$$\|u - u_h\|_{L^\infty} \leq ch^2|logh|^{3/2}\|D^2u\|_{L^\infty},$$

ενώ για ασθενέστερες υποθέσεις ισχύει η εκτίμηση

$$\|u - u_h\|_{L^\infty} \leq ch[u]_{H^2}. \tag{3.33}$$

Κεφάλαιο 4

Η εξίσωση Stokes

4.1 Πρόσθετα Θέματα από την Συναρτησιακή Ανάλυση

4.1.1 Γενικεύσεις του Λήμματος του Céa

Αν ο χώρος των πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιείται για να λυθεί ένα H^m-ελλειπτικό πρόβλημα δεν ανήκει στον χώρο Sobolev $H^m(U)$, τότε τα στοιχεία του χώρου αυτού καλούνται «ασύμμορφα στοιχεία». Στην περίπτωση αυτή, η σύγκλιση της προσεγγιστικής λύσης u_h στην πραγματική λύση u δεν είναι προφανής. Επιπλέον, υπάρχει ένα σφάλμα, εκτός του σφάλματος προσέγγισης, το οποίο καλείται «σφάλμα συνέπειας». Με τη βοήθεια των ακόλουθων γενικεύσεων του Λήμματος του Céa αποδεικνύονται αυτές οι εκτιμήσεις σφαλμάτων.

Έστω ότι το σύνολο $V \subset H^m(U)$ και $S_h \subset V$. Τότε αντικαθιστούμε το δοθέν μεταβολικό πρόβλημα

$$B[u,v] =< f, v >, \ \forall v \in V$$

με μία ακολουθία πεπερασμένης διάστασης προβλημάτων: Να βρεθεί $u_h \in S_h$ τέτοιο, ώστε για κάθε $v \in S_h$ να ισχύει

$$B_h[u_h, v] =< f_h, v > .$$

Υποθέτουμε ότι οι διγραμμικές μορφές B_h είναι ομοιόμορφα ελλειπτικές ως προς τη νόρμα $\| \cdot \|_V$, καθώς και ότι δεν χρειάζεται να ορίζονται για όλες τις συναρτήσεις του χώρου V.

Λήμμα 4.1.1 (του Strang) *Με βάση τις παραπάνω υποθέσεις, υπάρχει μια σταθερά c ανεξάρτητη του αριθμού h τέτοια, ώστε να ισχύει η ακόλουθη εκτί-*

μηση

$$\begin{aligned}\|u-u_h\|_V &\le c\left(inf_{v_h\in S_h}\left\{\|u-v_h\|_V + sup_{w_h\in S_h}\frac{|B[v_h,w_h]-B_h[v_h,w_h]|}{\|w_h\|_V}\right\}\right)\\ &+ c\; sup_{w_h\in S_h}\left\{\frac{<f,w_h>-<f_h,w_h>}{\|w_h\|_V}\right\}.\end{aligned}$$

Απόδειξη Έστω ότι $v_h \in S_h$. Για λόγους ευκολίας, θέτουμε $w_h = u_h - v_h$. Τότε, με τη βοήθεια της ομοιόμορφης ελλειπτικότητας, έχουμε

$$\begin{aligned}c_2\|u_h-v_h\|_V^2 &\le B_h[u_h-v_h,u_h-v_h]\\ &= B_h[u_h-v_h,w_h]\\ &= B[u-v_h,w_h]+(B[v_h,w_h]-B_h[v_h,w_h])+(B_h[u_h,w_h]-B[u,w_h])\\ &= B[u-v_h,w_h]+(B[v_h,w_h]-B_h[v_h,w_h])-(<f,w_h>-<f_h,w_h>).\end{aligned}$$

Διαιρώντας με $\|u_h-v_h\|_V = \|w_h\|_V$ τα μέλη της παραπάνω ανισότητας, και κάνοντας χρήση της συνέχειας της διγραμμικής μορφής B, έπεται ότι

$$\|u_h-v_h\|_V \le C\left(\|u-v_h\|_V + \frac{|B[v_h,w_h]-B_h[v_h,w_h]|}{\|w_h\|_V} + \frac{|<f_h,w_h>-<f,w_h>|}{\|w_h\|_V}\right).$$

Επειδή η v_h είναι ένα αυθαίρετο στοιχείο στον χώρο S_h, η ζητούμενη εκτίμηση έπεται από την τριγωνική ανισότητα

$$\|u-u_h\|_V \le \|u-v_h\|_V + \|u_h-v_h\|_V.$$

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι το σύνολο S_h δεν είναι υποσύνολο του V. Επειδή η H^m-νόρμα ενδέχεται να μην ορίζεται για όλα τα στοιχεία του S_h, θα χρησιμοποιήσουμε την εξαρτώμενη από το πλέγμα νόρμα $\|\cdot\|_h$, όπως αυτή ορίστηκε στην σχέση (3.10). Επιπλέον, οι διγραμμικές μορφές B_h ορίζονται για συναρτήσεις στον χώρο V και S_h, οπότε οι συνθήκες συνέχειας και ελλειπτικότητας της B_h παίρνουν τη μορφή

$$|B_h[u,v]| \le c_1\|u\|_h\|v\|_h,\ \forall u\in V+S_h,\ v\in S_h,$$

$$B_h[v,v] \ge c_2\|v\|_h^2,\ \forall v\in S_h,$$

όπου c_1 και c_2 είναι θετικές σταθερές ανεξάρτητες του h.

Το ακόλουθο λήμμα καλείται συχνά και «δεύτερο Λήμμα του Strang».

Λήμμα 4.1.2 (των Berger, Scott, Strang) *Με βάση τις παραπάνω υποθέσεις, υπάρχει μια σταθερά c ανεξάρτητη του αριθμού h τέτοια, ώστε να ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση*

$$\|u-u_h\|_h \le c\left(inf_{v_h\in S_h}\|u-v_h\|_h + sup_{w_h\in S_h}\frac{|B_h[u,w_h]-<f_h,w_h>|}{\|w_h\|_h}\right).$$

Ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος της παραπάνω εκτίμησης καλείται «σφάλμα προσέγγισης», ενώ ο δεύτερος καλείται «σφάλμα συνέπειας».

Απόδειξη Έστω ότι $v_h \in S_h$. Λόγω της ελλειπτικότητας, έπεται ότι

$$\begin{aligned} c_2\|u_h - v_h\|_h^2 &\leq B_h[u_h - v_h, u_h - v_h] \\ &= B_h[u - v_h, u_h - v_h] + (< f_h, u_h - v_h > - B_h[u, u_h - v_h]) . \end{aligned}$$

Διαιρώντας με $\|u_h - v_h\|_h$ τα μέλη της παραπάνω ανισότητας, και θέτοντας $u_h - v_h = w_h$, έπεται ότι

$$\|u_h - v_h\|_h \leq c_2^{-1}\left(c_1\|u - v_h\|_h + \frac{|B_h[u, w_h] - < f_h, w_h > |}{\|w_h\|_h}\right).$$

Επομένως, η ζητούμενη εκτίμηση έπεται από την τριγωνική ανισότητα

$$\|u - u_h\|_h \leq \|u - v_h\|_h + \|u_h - v_h\|_h.$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας μεθόδους δυϊκότητας στο πλαίσιο των ασύμμορφων στοιχείων, έχουμε δύο επιπλέον όρους σε σύγκριση με το Λήμμα (3.4.3) των Aubin-Nitsche.

Λήμμα 4.1.3 *Έστω ότι οι χώροι Hilbert V και H ικανοποιούν τις υποθέσεις του Λήμματος των Aubin-Nitsche. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι το σύνολο $S_h \subset H$ και ότι η διγραμμική μορφή B_h ορίζεται στο σύνολο $V \cup S_h$ έτσι ώστε να συμπίπτει με τη μορφή B στον χώρο V. Τότε η προσεγγιστική λύση u_h που προκύπτει με τη βοήθεια των πεπερασμένων στοιχείων ικανοποιεί την εκτίμηση*

$$\begin{aligned} |u - u_h| &\leq sup_{g \in H}\frac{1}{|g|}(c_1\|u - u_h\|_h\|\phi_g - \phi_{g,h}\|_h \\ &+ |B_h[u - u_h, \phi_g] - (u - u_h, g)| \\ &+ |B_h[u, \phi_g - \phi_{g,h}] - < f, \phi_g - \phi_{g,h} > |), \end{aligned}$$

όπου $\phi_g \in V$ και $\phi_{g,h} \in S_h$ είναι οι ασθενείς λύσεις του μεταβολικού προβλήματος $B_h[w, \phi] = (w, g)$ για δοθείσα συνάρτηση $g \in H$.

Απόδειξη Από τον ορισμό του u_h, ϕ_g και $\phi_{g,h}$ για κάθε $g \in H$, έπεται ότι

$$\begin{aligned} (u - u_h, g) &= B_h[u, \phi_g] - B_h[u_h, \phi_{g,h}] \\ &= B_h[u - u_h, \phi_g - \phi_{g,h}] + B_h[u_h, \phi_g - \phi_{g,h}] + B_h[u - u_h, \phi_{g,h}] \\ &= B_h[u - u_h, \phi_g - \phi_{g,h}] - (B_h[u - u_h, \phi_g] - (u - u_h, g)) \\ &- (B_h[u, \phi_g - \phi_{g,h}] - < f, \phi_g - \phi_{g,h} >) . \end{aligned}$$

Η ζητούμενη εκτίμηση προκύπτει με τη βοήθεια της σχέσης (3.32) και της συνέχειας της B_h.

4.1.2 Ένα Αφηρημένο Θεώρημα Ύπαρξης και Σύγκλισης

Αρχικά, θα ορίσουμε αρνητικές νόρμες σε χώρους Sobolev, και θα αναφερθούμε στους συζυγείς τελεστές.

Ορισμός 4.1.1 *Έστω ότι ο αριθμός $m \geq 1$. Δοθείσης μιας συνάρτησης $u \in L^2(U)$ ορίζεται η νόρμα*

$$\|u\|_{-m,U} := sup_{v \in H_0^m(U)} \frac{(u,v)}{\|v\|_{H^m(U)}}.$$

Ο χώρος $H^{-m}(U)$ ορίζεται να είναι η συμπλήρωση του χώρου $L^2(U)$ σε σχέση με τη νόρμα $\| \cdot \|_{-m,U}$.

Για τους χώρους Sobolev, ο δυϊκός χώρος του $H_0^m(U)$ έχει ταυτιστεί με τον χώρο $H^{-m}(U)$. Προφανώς, ισχύουν οι σχέσεις

$$\cdots \supset H^{-2}(U) \supset H^{-1}(U) \supset L^2(U) \supset H_0^1(U) \supset H_0^2(U) \supset \ldots$$

$$\cdots \leq \|u\|_{-2,U} \leq \|u\|_{-1,U} \leq \|u\|_{H^0(U)} \leq \|u\|_{H^1(U)} \leq \|u\|_{H^2(U)} \leq \cdots$$

Λήμμα 4.1.4 *Έστω ότι B είναι μια H_0^m-ελλειπτική διγραμμική μορφή. Τότε ισχύει η εκτίμηση*

$$\|u\|_{H^m} \leq c_2^{-1} \|f\|_{-m}.$$

Απόδειξη Λόγω του ορισμού (4.1.1), ισχύει $(u,v) \leq \|u\|_{-m} \|v\|_{H^m}$. Θέτοντας $v = u$ στο μεταβολικό πρόβλημα $B[u,v] = (f,v)$, έπεται ότι

$$c_2 \|u\|_{H^m}^2 \leq B[u,u] = (f,u) \leq \|f\|_{-m} \|u\|_{H^m}.$$

Διαιρώντας με $\|u\|_{H^m}$ τα μέλη της παραπάνω ανισότητας, έπεται η ζητούμενη εκτίμηση.

Με τη βοήθεια της εκτίμησης αυτής και του ορισμού (2.5.1), παρατηρείται ότι το μεταβολικό πρόβλημα το οποίο υπόκειται σε συνοριακές συνθήκες Dirichlet είναι H^m-κανονικό.

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι οι χώροι X και Y είναι χώροι Banach των οποίων οι δυϊκοί χώροι συμβολίζονται με X^* και Y^*, αντίστοιχα. Έστω ότι ο γραμμικός τελεστής $L : X \to Y$ είναι φραγμένος. Δοθέντος $y^* \in Y^*$, η απεικόνιση

$$x \mapsto l_{y^*}(x) := < y^*, Lx >$$

ορίζει ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές στον χώρο X. Η γραμμική απεικόνιση $L^* : Y^* \to X^*$, με $y^* \mapsto l_{y^*}$, $< L^*y^*, x >:=< y^*, Lx >$ καλείται «συζυγής τελεστής» της L.

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι ο υπόχωρος V του χώρου X είναι κλειστός. Τότε το «πολικό σύνολο» του V ορίζεται ως εξής

$$V^0 := \{l \in X^* \mid \ < l, v >= 0 \ \forall v \in V\}.$$

Ωστόσο, δεν πρέπει να συγχέουμε το πολικό σύνολο V^0 με το «ορθογώνιο συμπλήρωμα» $V^\perp$ του V

$$V^\perp := \{x \in X \mid (x, v) = 0 \ \forall v \in V\}.$$

Το ακόλουθο θεώρημα δείχνει ότι ο συζυγής τελεστής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσδιορισθεί η εικόνα της L.

Θεώρημα 4.1.5 *Έστω ότι οι χώροι X και Y είναι Banach, και η γραμμική απεικόνιση $L : X \to Y$ είναι φραγμένη. Τότε οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

(i) Η εικόνα $L(X)$ της L είναι κλειστή στον Y,

(ii) $L(X) = (kerL^*)^0$.

Απόδειξη Δείτε [2].

Τέλος, υποθέτουμε ότι οι χώροι U και V είναι χώροι Hilbert, και η $B : U \times V \to \mathbb{R}$ είναι μια διγραμμική μορφή. Ένας αντίστοιχος γραμμικός τελεστής $L : U \to V^*$ ορίζεται ως εξής

$$< Lu, v >:= B[u, v] \ \forall v \in V.$$

Θεωρούμε το ακόλουθο μεταβολικό πρόβλημα: Δοθείσης $f \in V^*$, να βρεθεί $u \in U$ τέτοιο, ώστε για κάθε $v \in V$ να ισχύει

$$B[u, v] =< f, v > . \tag{4.1}$$

Τότε μπορεί να γραφεί ότι $u = L^{-1}f$.

Ορισμός 4.1.2 *Έστω ότι οι γραμμικοί χώροι U και V είναι εφοδιασμένοι με νόρμα. Η γραμμική απεικόνιση L είναι ένας ισομορφισμός αν είναι 1-1 και «επί» και οι απεικονίσεις L και L^{-1} είναι συνεχείς.*

Θεώρημα 4.1.6 *Έστω ότι οι χώροι U και V είναι χώροι Hilbert. Τότε η γραμμική απεικόνιση $L : U \to V^*$ είναι ένας ισομορφισμός αν και μόνο αν η αντίστοιχη διγραμμική μορφή $B : U \times V \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:*

(i) (Συνέχεια) Υπάρχει μια σταθερά $C \geq 0$ τέτοια, ώστε

$$|B[u, v]| \leq C\|u\|_U \|v\|_V. \tag{4.2}$$

(ii) (Συνθήκη inf-sup) Υπάρχει μια σταθερά $\alpha > 0$ τέτοια, ώστε

$$sup_{v\in V} \frac{B[u, v]}{\|v\|_V} \geq \alpha\|u\|_U, \ \forall u \in U. \tag{4.3}$$

(iii) Για κάθε $v \in V$, υπάρχει ένα στοιχείο $u \in U$ με

$$B[u, v] \neq 0. \tag{4.4}$$

Σημείωση Αν υποθέσουμε ότι ισχύουν μόνο οι συνθήκες (i) και (ii) του παραπάνω Θεωρήματος, τότε η απεικόνιση

$$L : U \to \{v \in V \mid B[u, v] = 0 \ \forall u \in U\}^0 \subset V^* \tag{4.5}$$

είναι ένας ισομορφισμός. Επιπλέον, η σχέση (4.3) είναι ισοδύναμη με

$$\|Lv\|_{V^*} \geq \alpha\|u\|_U, \ \forall u \in U. \tag{4.6}$$

Επιπλέον, η συνθήκη (4.3) διατυπώνεται ισοδύναμα ως εξής

$$inf_{u\in U} sup_{v\in V} \frac{B[u, v]}{\|u\|_U\|v\|_V} \geq \alpha > 0. \tag{4.7}$$

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι συνθήκες (4.2) - (4.4)· οπότε θα δείξουμε ότι η γραμμική απεικόνιση $L : U \to V^*$ είναι ισομορφισμός.

Η συνέχεια της απεικόνισης L έπεται από την σχέση (4.2).

Για να δείξουμε ότι η L είναι 1-1, αρκεί να δείξουμε ότι αν $Lu_1 = Lu_2$ τότε $u_1 = u_2$. Υποθέτουμε ότι $Lu_1 = Lu_2$. Τότε, από τον ορισμό της απεικόνισης L, έπεται ότι $B[u_1, v] = B[u_2, v]$ για κάθε $v \in V$. Επομένως, $sup_{v\in V} B[u_1 - u_2, v] = 0$, και η σχέση (4.3) έπεται ότι $\|u_1 - u_2\| = 0$ ή, ισοδύναμα, $u_1 - u_2 = 0$. Συνεπώς, η L είναι 1-1.

Δοθείσης $f \in L(U)$, έπεται ότι υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο $u = L^{-1}f$. Εφαρμόζουμε πάλι την σχέση (4.3)

$$\alpha\|u\|_U \leq sup_{v\in V} \frac{B[u, v]}{\|v\|_V} = sup_{v\in V} \frac{< f, v >}{\|v\|_V} = \|f\|. \tag{4.8}$$

Η παραπάνω σχέση συμπίπτει με την (4.6), και η απεικόνιση L^{-1} είναι συνεχής στην εικόνα της L.

Η συνέχεια των απεικονίσεων L και L^{-1} συνεπάγεται ότι το σύνολο $L(U)$ είναι κλειστό. Με τη βοήθεια του Θεωρήματος (4.1.5), έπεται ότι ισχύει η σχέση (4.5).

Τέλος, το γεγονός ότι η L είναι «επί» εξασφαλίζεται από την συνθήκη (iii).

Σημείωση Το Θεώρημα Lax-Milgram αποτελεί ειδική περίπτωση του παραπάνω Θεωρήματος. Πράγματι, αν η διγραμμική μορφή B είναι συνεχής και V-ελλειπτική, τότε η συνθήκη inf-sup προκύπτει ως εξής

$$sup_{v\in V}\frac{B[u,v]}{\|v\|_V}\geq\frac{B[u,u]}{\|u\|_U}\geq\alpha\|u\|_U.$$

Για να επιλύσουμε αριθμητικά την εξίσωση (4.1) οδηγούμαστε σε μια μέθοδο Galerkin. Υποθέτουμε ότι οι χώροι $U_h\subset U$ και $V_h\subset V$ είναι πεπερασμένων διαστάσεων. Τότε δοθείσης $f\in V^*$ αναζητούμε $u_h\in U_h$ τέτοια, ώστε για κάθε $v\in V_h$ να ισχύει

$$B[u_h,v]=< f,v > . \tag{4.9}$$

Λήμμα 4.1.7 *Υποθέτουμε ότι η διγραμμική μορφή $B:U\times V\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος (4.1.6). Επιπλέον, υποθέτουμε ότι οι υπόχωροι $U_h\subset U$ και $V_h\subset V$ επιλέγονται έτσι ώστε οι σχέσεις (4.7) και (4.4) να ισχύουν όταν οι χώροι U και V αντικαθίστανται από τους χώρους U_h και V_h, αντίστοιχα. Τότε ισχύει η εκτίμηση*

$$\|u-u_h\|\leq\left(1+\frac{C}{\alpha}\right)inf_{w_h\in U_h}\|u-w_h\|.$$

Θα λέμε ότι οι υπόχωροι U_h και V_h ικανοποιούν την συνθήκη του Babuška ή μια συνθήκη inf-sup αν η σχέση (4.7) ισχύει για τους U_h και V_h.

Απόδειξη Λόγω των σχέσεων (4.1) και (4.9), έχουμε

$$B[u-u_h,v]=0\ \forall v\in V_h.$$

Έστω ότι w_h είναι ένα αυθαίρετο στοιχείο του χώρου U_h. Τότε

$$B[u_h-w_h,v]=B[u-w_h,v]\ \forall v\in V_h.$$

Αν θέσουμε $< l,v >:= B[u-w_h,v]$, τότε έπεται ότι $\|l\|\leq C\|u-w_h\|$. Σύμφωνα με την υπόθεση, η απεικόνιση $L_h:U_h\to V_h^*$ η οποία παράγεται από τη διγραμμική μορφή $B[u_h - w_h, \cdot]$ ικανοποιεί την σχέση $\| (L_h)^{-1} \| \leq 1/\alpha$. Επομένως, θα είναι

$$\|u_h - w_h\| \leq \alpha^{-1}\|l\| \leq \alpha^{-1}C\|u - w_h\|.$$

Η ζητούμενη εκτίμηση έπεται από την τριγωνική ανισότητα

$$\|u - u_h\| \leq \|u - w_h\| + \|u_h - w_h\|.$$

4.2 Προβλήματα Saddle Point

Στην παράγραφο αυτή, θα ασχοληθούμε με μεταβολικά προβλήματα τα οποία υπόκεινται σε περιορισμούς.

Έστω ότι οι χώροι X και M είναι χώροι Hilbert, και οι διγραμμικές μορφές

$$B : X \times X \to \mathbb{R},\ b : X \times M \to \mathbb{R}$$

είναι συνεχείς. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι τα συναρτησοειδή $f \in X^*$ και $g \in M^*$. Τότε θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα ελαχιστοποίησης: Να βρεθεί $u \in X$ τέτοιο, ώστε το συναρτησιακό

$$J(u) = \frac{1}{2}B[u,u] - < f, u > \tag{4.10}$$

το οποίο υπόκειται στον περιορισμό

$$b[u, \mu] = < g, \mu >,\ \forall \mu \in M \tag{4.11}$$

να ελαχιστοποιείται.

Αν $\lambda \in M$, τότε το συναρτησιακό J και η συνάρτηση Lagrange

$$\mathcal{L}(u, \lambda) := J(u) + (b[u, \lambda] - < g, \lambda >) \tag{4.12}$$

έχουν τις ίδιες τιμές στο σύνολο όλων των σημείων που ικανοποιούν τους περιορισμούς. Για το λόγο αυτό, μπορούμε να βρούμε ένα ελάχιστο της συνάρτησης $\mathcal{L}(\cdot, \lambda)$ με σταθερό λ, αντί του ελαχίστου του J. Επειδή η συνάρτηση $\mathcal{L}(u, \lambda)$ περιέχει μόνο διγραμμικές και τετραγωνικές εκφράσεις των u και λ, οδηγούμαστε στο ακόλουθο «πρόβλημα saddle point»: Να βρεθεί $(u, \lambda) \in X \times M$ τέτοιο, ώστε για κάθε $v \in X$ και $\mu \in M$ να ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} B[u, v] + b[v, \lambda] &= < f, v >, \\ b[u, \mu] &= < g, \mu > . \end{aligned} \tag{4.13}$$

Εύκολα παρατηρείται ότι, κάθε λύση (u, λ) του προβλήματος saddle point πρέπει να ικανοποιεί την ιδιότητα του saddle point

$$\mathcal{L}(u, \mu) \leq \mathcal{L}(u, \lambda) \leq \mathcal{L}(v, \lambda)\ \forall (v, \mu) \in X \times M.$$

4.2.1 Η Συνθήκη Inf-Sup

Η εξίσωση (4.13) ορίζει μια γραμμική απεικόνιση

$$\begin{aligned} L : X \times M &\to X^* \times M^* \\ (u, \lambda) &\mapsto (f, g). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Για λόγους ευκολίας, η εξίσωση (4.13) αναδιατυπώνεται σε μια εξίσωση τελεστών ως εξής:

- Η απεικόνιση $A : X \to X^*$, $< Au, v >= B[u, v]$ για κάθε $v \in X$ συνδέεται με τη διγραμμική μορφή B.

- Η απεικόνιση $C : X \to M^*$, $< Cu, \mu >= b[u, \mu]$ για κάθε $\mu \in M$, και η συζυγής της απεικόνιση $C^* : M \to X^*$, $< C^*\lambda, v >= b[v, \lambda]$ για κάθε $v \in X$ συνδέεται με τη διγραμμική μορφή b.

Τότε η εξίσωση (4.13) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση τελεστών

$$\begin{aligned} Au + C^*\lambda &= f, \\ Cu &= g. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Στο ακόλουθο λήμμα, εισάγουμε τον εξής συμβολισμό για τον αφφινικό χώρο των αποδεκτών στοιχείων και τους αντίστοιχους γραμμικούς χώρους

$$\begin{aligned} V(g) &:= \{v \in X \mid b[v, \mu] =< g, \mu > \ \forall \mu \in M\}, \\ V &:= \{v \in X \mid b[v, \mu] = 0 \ \forall \mu \in M\}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Επειδή η μορφή b είναι συνεχής, έπεται ότι το σύνολο V είναι ένας κλειστός υπόχωρος του X.

Λήμμα 4.2.1 *Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

(i) Υπάρχει μια σταθερά $\beta > 0$ τέτοια, ώστε

$$inf_{\mu \in M} sup_{v \in X} \frac{b[v, \mu]}{\|v\| \|\mu\|} \geq \beta. \tag{4.17}$$

(ii) Ο τελεστής $C : V^\perp \to M^*$ είναι ένας ισομορφισμός, και ισχύει η εκτίμηση

$$\|Cv\| \geq \beta \|v\| \ \forall v \in V^\perp. \tag{4.18}$$

(iii) Ο τελεστής $C^* : M \to V^0 \subset X^*$ είναι ένας ισομορφισμός, και ισχύει η εκτίμηση

$$\|C^*\mu\| \geq \beta \|\mu\| \ \forall \mu \in M. \tag{4.19}$$

Απόδειξη Η ισοδυναμία των συνθηκών (i) και (iii) έπεται από τη σημείωση του Θεωρήματος (4.1.6).

Υποθέτουμε ότι ικανοποιείται η συνθήκη (iii). Τότε για δοθέν $v \in V^{\perp}$ ορίζουμε ένα συναρτησοειδές $g \in V^0$ από $w \mapsto (v, w)$. Επειδή η απεικόνιση C^* είναι ένας ισομορφισμός, έπεται ότι υπάρχει $\lambda \in M$ τέτοιο, ώστε για κάθε w να ισχύει

$$b[w, \lambda] = (v, w). \tag{4.20}$$

Από τον ορισμό του συναρτησοειδούς g, έχουμε $\|g\| = \|v\|$, και η σχέση (4.19) συνεπάγεται ότι $\|v\| = \|g\| = \|C^*\lambda\| \geq \beta\|\lambda\|$. Θέτοντας $w = v$ στην σχέση (4.20), έπεται ότι

$$sup_{\mu \in M} \frac{b[v, \mu]}{\|\mu\|} \geq \frac{b[v, \lambda]}{\|\lambda\|} = \frac{(v, v)}{\|\lambda\|} \geq \beta\|v\|.$$

Επομένως, η απεικόνιση $C : V^{\perp} \to M^*$ ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος (4.1.6), και η απεικόνιση C είναι ένας ισομορφισμός.

Υποθέτουμε ότι ικανοποιείται η συνθήκη (ii). Για δοθέν $\mu \in M$, προσδιορίζουμε τη νόρμα μέσω της δυϊκότητας

$$\begin{aligned} \|\mu\| &= sup_{g \in M^*} \frac{< g, \mu >}{\|g\|} = sup_{v \in V^{\perp}} \frac{< Cv, \mu >}{\|Cv\|} \\ &= sup_{v \in V^{\perp}} \frac{b[v, \mu]}{\|Cv\|} \leq sup_{v \in V^{\perp}} \frac{b[v, \mu]}{\beta\|v\|}. \end{aligned}$$

Επομένως, ικανοποιείται η συνθήκη (i).

Θεώρημα 4.2.2 (Διαχωρισμού του Brezzi) *Για το πρόβλημα saddle point (4.13), η απεικόνιση (4.14) ορίζει έναν ισομορφισμό $L : X \times M \to X^* \times M^*$ αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:*

(i) Η διγραμμική μορφή B είναι V-ελλειπτική,

(ii) Η διγραμμική μορφή b ικανοποιεί την συνθήκη inf-sup (4.17).

Η συνθήκη (ii) αναφέρεται συχνά ως «συνθήκη Brezzi».

Απόδειξη Δείτε [2].

4.2.2 Μεικτές Μέθοδοι Πεπερασμένων Στοιχείων

Στη συνέχεια, θα αναφερθούμε στην αριθμητική λύση ενός προβλήματος saddle point: Επιλέγονται πεπερασμένων διαστάσεων υπόχωροι $X_h \subset X$ και $M_h \subset$

M, και λύνεται το ακόλουθο πρόβλημα: Να βρεθεί $(u_h, \lambda_h) \in X_h \times M_h$ τέτοιο, ώστε για κάθε $v \in X_h$ και $\mu \in M_h$ να ισχύουν

$$\begin{aligned} B[u_h, v] + b[v, \lambda_h] &=< f, v >, \\ b[u_h, \mu] &=< g, \mu > . \end{aligned} \tag{4.21}$$

Η προσέγγιση αυτή καλείται «μεικτή μέθοδος».

Στον ακόλουθο ορισμό, εισάγεται ο εξής συμβολισμός

$$V_h := \{v \in X_h \mid b[v, \mu] = 0 \ \forall \mu \in M_h\}.$$

Ορισμός 4.2.1 *Θα λέμε ότι μια οικογένεια χώρων πεπερασμένων στοιχείων X_h, M_h ικανοποιεί την συνθήκη Babuška-Brezzi αν υπάρχουν σταθερές $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ ανεξάρτητες του αριθμού h τέτοιες, ώστε*

(i) η διγραμμική μορφή B να είναι V_h-ελλειπτική με σταθερά ελλειπτικότητας $\alpha > 0$.

(ii) για κάθε $\lambda_h \in M_h$ να ισχύει

$$sup_{v \in X_h} \frac{b[v, \lambda_h]}{\|v\|} \geq \beta \|\lambda_h\|. \tag{4.22}$$

Η συνθήκη (ii) καλείται συχνά συνθήκη Brezzi ή συνθήκη Ladyshenskaja-Babuška-Brezzi (ή, για συντομία, συνθήκη LBB).

Το ακόλουθο θεώρημα αποτελεί μια άμεση συνέπεια του Λήμματος (4.1.7) και του Θεωρήματος (4.2.2).

Θεώρημα 4.2.3 *Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος (4.2.2), και οι χώροι X_h, M_h ικανοποιούν την συνθήκη Babuška-Brezzi. Τότε ισχύει η εκτίμηση*

$$\|u - u_h\| + \|\lambda - \lambda_h\| \leq c \left\{ inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\| + inf_{\mu_h \in M_h} \|\lambda - \mu_h\| \right\}. \tag{4.23}$$

Απόδειξη Δείτε [2].

Ορισμός 4.2.2 *Θα λέμε ότι οι χώροι $X_h \subset X$ και $M_h \subset M$ ικανοποιούν την συνθήκη (C) αν $V_h \subset V$, δηλαδή αν για κάθε $v_h \in X_h$ για το οποίο ισχύει η σχέση $b[v_h, \mu_h] = 0$ για κάθε $\mu_h \in M_h$ έπεται ότι $b[v_h, \mu] = 0$ για κάθε $\mu \in M$.*

Θεώρημα 4.2.4 *Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος (4.2.3), καθώς και η συνθήκη (C). Τότε η λύση του προβλήματος (4.21) ικανοποιεί την εκτίμηση*

$$\|u - u_h\| \leq c \ inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|.$$

Απόδειξη Έστω ότι $v_h \in V_h(g)$. Τότε για κάθε $v \in V_h$ έχουμε

$$\begin{aligned} B[u_h - v_h, v] &= B[u_h, v] - B[u, v] + B[u - v_h, v] \\ &= b[v, \lambda - \lambda_h] + B[u - v_h, v] \\ &\leq C\|u - v_h\| \cdot \|v\|, \end{aligned}$$

αφού ο όρος $b[v, \lambda - \lambda_h]$ μηδενίζεται λόγω της συνθήκης (C). Θέτοντας $v := u_h - v_h$ στην παραπάνω ανισότητα, προκύπτει ότι $\|u_h - v_h\|^2 \leq \alpha^{-1}C\|u_h - v_h\| \cdot \|u - v_h\|$, και η ζητούμενη εκτίμηση προκύπτει αν διαιρέσουμε με $\|u_h - v_h\|$ τα μέλη της παραπάνω σχέσης και εφαρμόσουμε την τριγωνική ανισότητα $\|u - u_h\| \leq \|u - v_h\| + \|u_h - v_h\|$.

4.2.3 Η Παρεμβολή του Fortin

Η παρεμβολή του Fortin αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο για την επαλήθευση της ισχύος της συνθήκης inf-sup.

Θεώρημα 4.2.5 (Κριτήριο του Fortin) *Έστω ότι η διγραμμική μορφή $b : X \times M \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί την συνθήκη inf-sup. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι για τους υπόχωρους X_h, M_h υπάρχει μία φραγμένη γραμμική προβολή $\Pi_h : X \to X_h$ τέτοια, ώστε για $\mu_h \in M_h$ να ισχύει*

$$b[v - \Pi_h v, \mu_h] = 0. \tag{4.24}$$

Αν $\|\Pi_h\| \leq c$ για κάποια σταθερά c ανεξάρτητη του αριθμού h, τότε οι χώροι πεπερασμένων στοιχείων X_h, M_h ικανοποιούν την συνθήκη inf-sup.

Απόδειξη Σύμφωνα με την υπόθεση, για $\mu_h \in M_h$ ισχύει

$$\begin{aligned} \beta\|\mu_h\| &\leq sup_{v \in X} \frac{b[v, \mu_h]}{\|v\|} = sup_{v \in X} \frac{b[\Pi_h v, \mu_h]}{\|v\|} \\ &\leq c\ sup_{v \in X} \frac{b[\Pi_h v, \mu_h]}{\|\Pi_h v\|} = c\ sup_{v_h \in X_h} \frac{b[v_h, \mu_h]}{\|v_h\|}, \end{aligned}$$

αφού $\Pi_h v \in X_h$.

Λήμμα 4.2.6 *Αν οι χώροι πεπερασμένων στοιχείων X_h, M_h ικανοποιούν την συνθήκη inf-sup, τότε υπάρχει μια φραγμένη γραμμική προβολή $\Pi_h : X \to X_h$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση (4.24).*

Η προβολή αυτή καλείται «παρεμβολή του Fortin».

Απόδειξη Δείτε [2].

Τέλος, αποδεικνύουμε μια σχέση ανάμεσα στην προσέγγιση με τον περιορισμό που έπεται από τη διγραμμική μορφή b και την προσέγγιση στο μεγαλύτερο χώρο πεπερασμένων στοιχείων X_h.

Λήμμα 4.2.7 *Αν οι χώροι X_h και M_h ικανοποιούν την συνθήκη inf-sup, τότε υπάρχει μια σταθερά c ανεξάρτητη του αριθμού h τέτοια, ώστε για κάθε $u \in V(g)$ να ισχύει η εκτίμηση*

$$inf_{v_h \in V_h(g)} \|u - v_h\| \leq c \; inf_{w_h \in X_h} \|u - w_h\|.$$

Απόδειξη Κάνοντας χρήση της παρεμβολής του Fortin, προκύπτει ότι για κάθε $w_h \in X_h$ ισχύει $\Pi_h w_h = w_h$. Δοθέντος $u \in V(g)$, έχουμε $\Pi_h u \in V_h(g)$ και

$$\|u - \Pi_h u\| = \|u - w_h - \Pi_h(u - w_h)\| \leq \|u - w_h\| + \|\Pi_h(u - w_h)\| \leq (1 + c)\|u - w_h\|.$$

4.3 Η Εξίσωση Stokes

Η εξίσωση του Stokes περιγράφει τη ροή ενός ιξώδους ρευστού σε ένα πεδίο δύο ή τριών διαστάσεων και δίνεται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} -\mu \Delta u + grad\; p = f \quad & u \in U, \\ div\; u = g \quad & u \in U, \\ u = u_0 \quad & u \in \partial U, \end{aligned}$$

όπου μ είναι το ιξώδες του ρευστού, $u : U \to \mathbb{R}^n$ με $n = 2$ ή 3 το πεδίο ταχύτητας, $p : U \to \mathbb{R}$ η πίεση, f ένα δοθέν εξωτερικό πεδίο δυνάμεων και g, u_0 δοθείσες συναρτήσεις.

Στην εργασία αυτή, θα μελετήσουμε την περίπτωση της ροής ενός ασυμπίεστου ρευστού με ιξώδες $\mu = 1$ σε ένα πεδίο $U \subset \mathbb{R}^2$. Επειδή το ρευστό είναι ασυμπίεστο, έπεται ότι $div\; u = 0$. Επιπλέον, θεωρούμε ομογενείς συνοριακές συνθήκες, δηλαδή $u_0 = 0$· οπότε, η εξίσωση του Stokes παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} -\Delta u + grad\; p = f \quad & u \in U, \\ div\; u = 0 \quad & u \in U, \\ u = 0 \quad & u \in \partial U. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Παρατηρούμε ότι, η ύπαρξη ομογενούς συνοριακής συνθήκης καθίσταται αναγκαία στην περίπτωση ενός ασυμπίεστου ρευστού. Πράγματι, από το Ολοκληρωτικό Θεώρημα του Gauss έπεται ότι

$$\int_U div\; u\; dx = \int_{\partial U} u \cdot \nu \; ds = \int_{\partial U} u_0 \cdot \nu \; ds. \tag{4.26}$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η εξίσωση (4.25) καθορίζει την πίεση p μέχρι μια πρόσθετη σταθερά, η οποία συνήθως καθορίζεται από την επιβολή της κανονικοποίησης

$$\int_U p \; dx = 0. \tag{4.27}$$

Τέλος, αν η εξίσωση (4.25) ικανοποιείται για κάποιες συναρτήσεις $u \in \left(C^2(U) \cap C^0(\bar{U})\right)^2$ και $p \in C^1(U)$, τότε θα λέμε ότι οι συναρτήσεις u και p αποτελούν μια «κλασσική λύση» του προβλήματος του Stokes.

4.3.1 Μεταβολική Διατύπωση

Η ασθενής διατύπωση της εξίσωσης του Stokes οδηγεί στο ακόλουθο πρόβλημα saddle point: Να βρεθεί $(u, p) \in X \times M$ τέτοιο, ώστε για κάθε $v \in X$ και $q \in M$ να ισχύουν οι σχέσεις

$$\left\{ \begin{aligned} B[u, v] + b[v, p] &= (f, v), \\ b[u, q] &= 0, \end{aligned} \right. \tag{4.28}$$

όπου $X = H_0^1(U)^2$, $M = L_0^2(U) := \{q \in L^2(U) \mid \int_U q \; dx = 0\}$,

$$\begin{aligned} B[u, v] &= \textstyle\int_U grad\ u : grad\ v\ dx, \\ grad\ u : grad\ v &\equiv \textstyle\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \\ b[v, q] &= -\textstyle\int_U div\ v\ q\ dx. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $v \in H_0^1$ και $q \in H^1$ ο τύπος του Green δίνει

$$\begin{aligned} b[v, q] &= -\int_U div\ v\ q\ dx \\ &= \int_U v \cdot grad\ q\ dx - \int_{\partial U} v \cdot q\ \nu\ ds \\ &= \int_U v \cdot grad\ q\ dx. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι τελεστές div και $-grad$ είναι συζυγείς.

Επιπλέον, από την σχέση (4.30) είναι προφανές ότι η μορφή $b[v, q]$ παραμένει αμετάβλητη αν προσθέσουμε μια σταθερή συνάρτηση στην q. Συνεπώς, μπορούμε να ταυτίσουμε τον χώρο M με τον χώρο $L^2(U)/\mathbb{R}$, όπου σε αυτόν τον χώρο πηλίκου θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις στον χώρο L^2 είναι ισοδύναμες όταν διαφέρουν μόνο κατά μία σταθερά.

Τέλος, μία λύση (u,p) του προβλήματος (4.28) θα καλείται «κλασσική λύση» του προβλήματος αν η συνάρτηση $u \in \left(C^2(U)\cap C^0(\bar{U})\right)^2$ και η συνάρτηση $p \in C^1(U)$.

Θεώρημα 4.3.1 *Κάθε κλασσική λύση του προβλήματος saddle point (4.28) αποτελεί λύση του προβλήματος (4.25).*

Απόδειξη Έστω ότι (u,p) είναι μια κλασσική λύση του προβλήματος saddle point (4.28). Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $\phi := div\ u \in L^2$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $\phi = q_0 + c$, όπου $q_0 \in M$ και c μια σταθερά.

Επειδή η συνάρτηση $u \in H_0^1$, θέτοντας $v = u$ και $q = 1$ στην σχέση (4.30) έπεται ότι $\int_U div\ u\ dx = 0$. Λόγω της ισότητας αυτής και της σχέσης $b[u,q] = 0$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\int_U (div\ u)^2\, dx &= \int_U (div\ u)\,(div\ u)\, dx = \int_U (div\ u)\,\phi\ dx \\
&= \int_U (div\ u)\,(q_0 + c)\, dx = \int_U (div\ u)\, q_0\ dx + c\int_U div\ u\ dx \\
&= b[u,q_0] + c\int_U div\ u\ dx = 0.
\end{aligned}$$

Επομένως, το ρευστό είναι ασυμπίεστο, αφού ισχύει $div\ u = 0$.

Επιπλέον, η πρώτη εξίσωση του προβλήματος (4.28) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$(grad\ u, grad\ v) = (f - grad\ p, v)\ \ \forall v \in H_0^1(U)^2.$$

Επειδή η συνάρτηση $u \in \left(C^2(U)\cap C^0(\bar{U})\right)^2$, από το Θεώρημα (2.2.2) και (2.2.1) έπεται ότι η u αποτελεί μια κλασσική λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned}
-\Delta u = f - grad\ p &\quad u \in U, \\
u = 0 &\quad u \in \partial U,
\end{aligned}$$

οπότε προκύπτει το ζητούμενο.

4.3.2 Η Συνθήκη Inf-Sup

Για να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα μιας λύσης της εξίσωσης του Stokes, χρειάζεται να επαληθεύσουμε τις συνθήκες (i) και (ii) του Θεωρήματος Διαχωρισμού του Brezzi (4.2.2).

Έστω το σύνολο

$$V := \{v \in X \mid (div\ v, q) = 0\ \forall q \in L^2(U)\}.$$

Επειδή $B[u,u]^{1/2} = \|grad\ u\|_{H^0(U)} = [u]_{H^1(U)}$, έπεται ότι η διγραμμική μορφή B είναι H_0^1-ελλειπτική· οπότε, η συνθήκη (i) ικανοποιείται.

Για να δείξουμε ότι ικανοποιείται η συνθήκη (ii), χρειαζόμαστε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 4.3.2 *Έστω ότι το σύνολο U είναι ένα φραγμένο συνεκτικό πεδίο με Lipschitz συνεχές σύνορο.*

(i) Η εικόνα της γραμμικής απεικόνισης

$$grad : L^2(U) \to H^{-1}(U)^2$$

είναι κλειστή στον χώρο $H^{-1}(U)^2$.

(ii) Υπάρχει μια σταθερά $c = c(U)$ τέτοια, ώστε

$$\|p\|_{H^0(U)} \leq c \left(\|grad\ p\|_{H^{-1}(U)} + \|p\|_{H^{-1}(U)}\right)\ \forall p \in L^2(U), \tag{4.31}$$

$$\|p\|_{H^0(U)} \leq c\|grad\ p\|_{H^{-1}(U)}\ \forall p \in L_0^2(U). \tag{4.32}$$

Θεώρημα 4.3.3 *Με βάση τις υποθέσεις του Θεωρήματος (4.3.2), το πρόβλημα του Stokes (4.28) ικανοποιεί την συνθήκη του Brezzi (4.17).*

Απόδειξη Από την εξίσωση (4.32) έπεται ότι για κάθε $p \in L_0^2(U)$ ισχύει

$$\|grad\ p\|_{H^{-1}(U)} \geq c^{-1}\|p\|_{H^0(U)}.$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της αρνητικής νόρμας (4.1.1), έπεται ότι υπάρχει μια συνάρτηση $v \in H_0^1(U)^2$ με $\|v\|_{H^1(U)} = 1$ και

$$(v, grad\ p) \geq \frac{1}{2}\|v\|_{H^1(U)}\|grad\ p\|_{H^{-1}(U)} \geq \frac{1}{2c}\|p\|_{H^0(U)}.$$

Λόγω της σχέσης (4.30), προκύπτει ότι

$$\frac{b[-v,p]}{\|v\|_{H^1(U)}} = (v, grad\ p) \geq \frac{1}{2c}\|p\|_{H^0(U)},$$

η οποία αποδεικνύει την συνθήκη του Brezzi.

4.3.3 Αριθμητική Επίλυση

Αρχικά, είναι απαραίτητο να ορίσουμε το προσεγγιστικό πρόβλημα το οποίο αντιστοιχεί στο μεταβολικό πρόβλημα του Stokes (4.28)· το οποίο είναι: Να βρεθεί $(u_h, p_h) \in X_h \times M_h$ τέτοιο, ώστε για κάθε $v_h \in X_h \subset X$ και $q_h \in M_h \subset M$ να ισχύουν

$$\begin{cases} B[u_h, v_h] + b[v_h, p_h] = (f, v), \\ \qquad\qquad\quad b[u_h, q_h] = 0, \end{cases} \tag{4.33}$$

όπου

$$\begin{aligned} B[u_h, v_h] &= \textstyle\int_U grad\ u_h : grad\ v_h\ dx, \\ grad\ u_h : grad\ v_h &\equiv \textstyle\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u_{hi}}{\partial x_j}\frac{\partial v_{hi}}{\partial x_j}, \\ b[v_h, q_h] &= -\textstyle\int_U div\ v_h\ q_h\ dx, \end{aligned} \tag{4.34}$$

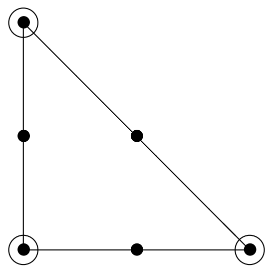
και $X_h \subset X$, $M_h \subset M$ χώροι πεπερασμένων στοιχείων οι οποίοι θα πρέπει να ικανοποιούν την συνθήκη Babuška-Brezzi (Ορισμός 4.2.1) έτσι, ώστε να εξασφαλίζεται η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος (4.33).

Ένα πεπερασμένο στοιχείο το οποίο χρησιμοποιείται συχνά στην αριθμητική επίλυση της εξίσωσης Stokes είναι το επονομαζόμενο «Taylor-Hood στοιχείο», το οποίο ικανοποιεί την συνθήκη Babuška-Brezzi. Το στοιχείο αυτό είναι ένα τριγωνικό στοιχείο στο οποίο το πολυώνυμο που προσεγγίζει την ταχύτητα έχει μεγαλύτερο βαθμό από εκείνο της πίεσης, η οποία θεωρείται ότι είναι συνεχής. Οι χώροι X_h, M_h για το στοιχείο αυτό δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις

$$\begin{aligned} X_h &:= \left(M_{0,0}^2\right)^2 = \{v \in C(\bar{U})^2 \cap H_0^1(U)^2 \mid v|_T \in P_2\ \forall T \in T_h\}, \\ M_h &:= M_0^1 \cap L_0^2 = \{q \in C(U) \cap L_0^2(U) \mid q|_T \in P_1\ \forall T \in T_h\}, \end{aligned} \tag{4.35}$$

όπου με T_h συμβολίζεται ο τριγωνισμός του χωρίου U.

Στο ακόλουθο σχήμα παρουσιάζεται το στοιχείο Taylor-Hood:



όπου με $\bullet$ συμβολίζονται τα σημεία παρεμβολής του πολυωνύμου της ταχύτητας και με κύκλο τα σημεία παρεμβολής του πολυωνύμου της πίεσης.

Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε τη μέθοδο Ritz-Galerkin στο προσεγγιστικό πρόβλημα του Stokes (4.33). Έστω ότι τα σύνολα $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ και $\{\psi_i\}_{i=1}^M$ αποτελούν μια βάση των χώρων X_h και M_h, αντίστοιχα. Επειδή οι συναρτήσεις u_h

και p_h μπορούν να γραφούν ως γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων ϕ_i και ψ_i, αντίστοιχα, δηλαδή μπορούν να πάρουν τη μορφή

$$u_h = \sum_{j=1}^{N} c_j \phi_j, \; p_h = \sum_{j=1}^{M} d_j \psi_j,$$

έπεται ότι το προσεγγιστικό πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο γραμμικό σύστημα

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_N \\ p_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_N \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4.36}$$

όπου ο πίνακας $A = (a_{ij}) = B[\phi_j, \phi_i]$, ο πίνακας $B^T = (b_{ij}) = b[\phi_j, \psi_i]$, το διάνυσμα $u_N = (c_j)$, το διάνυσμα $p_M = (d_j)$ και το διάνυσμα $f_N = (f_i)$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι ο πίνακας B^T έχει τη μορφή

$$B^T = \begin{bmatrix} B_1^T \\ B_2^T \end{bmatrix},$$

όπου

$$B_1^T = -\int_U \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \psi_i \; dxdy, \; j = 1, \ldots, \frac{N}{2}, \; i = 1, \ldots, M,$$

και

$$B_2^T = -\int_U \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \psi_i \; dxdy, \; j = \frac{N}{2} + 1, \ldots, N, \; i = 1, \ldots, M.$$

Έπεται ότι ο πίνακας ακαμψίας A του συστήματος θα έχει τη μορφή

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix},$$

όπου

$$A_1 = \int_U \nabla \phi_j \nabla \phi_i \; dxdy, \; i, j = 1, \ldots, \frac{N}{2}.$$

Τέλος, με τη βοήθεια του στοιχείου Taylor-Hood μπορούμε να υπολογίσουμε τις συναρτήσεις βάσεων $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ και $\{\psi_i\}_{i=1}^M$ σε κάθε τρίγωνο T του διαχωρισμού του U.

4.3.4 Αριθμητικό Παράδειγμα

Έστω το ακόλουθο πρόβλημα του Stokes

$$-\Delta u + grad \; p = f,$$

όπου η συνάρτηση $u : U = [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ συμβολίζει το πεδίο της ταχύτητας, η συνάρτηση $p : U \to \mathbb{R}$ την πίεση και η $f : U \to \mathbb{R}^2$ το πεδίο δυνάμεων, με συνοριακή συνθήκη $u = 0$ στο ∂U. Υποθέτουμε, επίσης, ότι το ρευστό είναι ασυμπίεστο, δηλαδή ισχύει η σχέση $div\ u = 0$.

Παρατηρούμε ότι, ένα πεδίο ταχύτητας το οποίο ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες είναι το ακόλουθο

$$u(x,y) = \begin{bmatrix} u_1(x,y) \\ u_2(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sin^2(\pi x)\ sin(2\pi y) \\ -sin(2\pi x)\ sin^2(\pi y) \end{bmatrix}.$$

Επιλέγουμε αυθαίρετα την συνάρτηση της πίεσης να είναι

$$p(x,y) = cos(xy).$$

Επομένως, από την εξίσωση του Stokes προκύπτει ότι το πεδίο δυνάμεων του ρευστού είναι

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi^2 sin(2\pi y)\,(4sin^2(\pi x) - 2cos(2\pi x)) - ysin(xy) \\ \pi^2 sin(2\pi x)\,(2cos(2\pi y) - 4sin^2(\pi y)) - xsin(xy) \end{bmatrix}.$$

Με χρήση της γλώσσας προγραμματισμού Freefem επιλύουμε αριθμητικά το παραπάνω πρόβλημα και υπολογίζουμε τα σφάλματα L^2 και H^1 μειώνοντας συνεχώς το βήμα της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων έτσι, ώστε το $h \to 0$. Παρακάτω δίνεται ο αντίστοιχος κώδικας.

Δημιουργία ενός $n \times n$ καννάβου στο μοναδιαίο τετράγωνο $[0,1] \times [0,1]$

```
mesh Th=square(n,n);
```

Εύρεση του αριθμού $h = max_{T \in T_h} h_T$, όπου με h_T συμβολίζεται η ακτίνα του στοιχείου T

```
fespace Ph(Th,P0);
Ph h=hTriangle;
cout << " size of mesh = " << h[].max << endl;
```

Ορισμός των Χώρων Πεπερασμένων Στοιχείων για το πεδίο της ταχύτητας και την πίεση, κάνοντας χρήση του στοιχείου Taylor-Hood για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος

```
fespace Xh(Th,P2);
fespace Mh(Th,P1);
```

Ορισμός των αριθμητικών λύσεων u_1, u_2, p του προβλήματος και των δοκιμαστικών συναρτήσεων v_1, v_2, q

```
Xh u1,u2,v1,v2;
Mh p,q;
```

Ορισμός του πεδίου δυνάμεων για την επίλυση του προβλήματος

```
func f1 = -2*pi^2*cos(2*pi*x)*sin(2*pi*y)+(sin(pi*x))^2*4*pi^2*
sin(2*pi*y)-y*sin(x*y);
func f2 = -4*pi^2*sin(2*pi*x)*(sin(pi*y))^2+2*pi^2*sin(2*pi*x)*
cos(2*pi*y)-x*sin(x*y);
```

Ορισμός του πεδίου ταχύτητας και της κλίσης του, καθώς και της πίεσης για τον υπολογισμό των σφαλμάτων

```
func ue1 = ((sin(pi*x))^2)*sin(2*pi*y);
func ue2 = -sin(2*pi*x)*((sin(pi*y))^2);
func pe = cos(x*y);
func ue1x = pi*sin(2*pi*x)*sin(2*pi*y);
func ue1y = 2*pi*(sin(pi*x))^2*cos(2*pi*y);
func ue2x = -2*pi*cos(2*pi*x)*(sin(pi*y))^2;
func ue2y = -pi*sin(2*pi*x)*sin(2*pi*y);
```

Ορισμός του προβλήματος του Stokes

```
solve Stokes(u1,u2,p,v1,v2,q) = int2d(Th) (dx(u1)*dx(v1) +
dy(u1)*dy(v1) + dx(u2)*dx(v2) + dy(u2)*dy(v2)) - int2d(Th)
(p*(dx(v1) + dy(v2))) + int2d(Th) (q*(dx(u1)+dy(u2))) - int2d(Th)
(f1*v1 + f2*v2)
```

Ορισμός των συνοριακών συνθηκών

```
+on(1,2,3,4,u1=0,u2=0);
```

Δημιουργία γραφήματος στο οποίο απεικονίζεται η αριθμητική λύση του πεδίου της ταχύτητας και της πίεσης

```
plot([u1,u2],p);
```

Υπολογισμός του L^2 και H^1 σφάλματος της αριθμητικής λύσης του πεδίου ταχύτητας

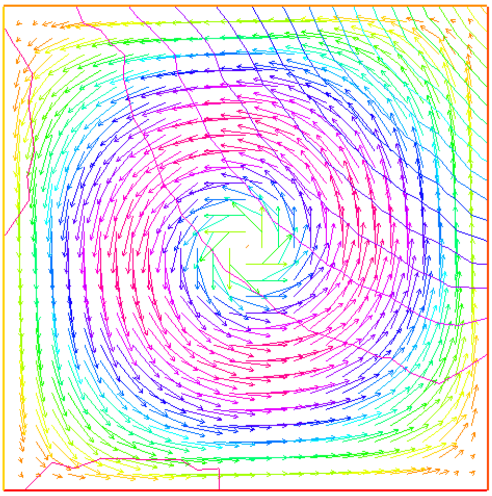
```
cout <<"L2 error of u=" << sqrt( int2d(Th) ((ue1-u1)^2 + (ue2-
u2)^2) ) <<endl;
cout <<"H1 error of u=" << sqrt( int2d(Th) ((ue1-u1)^2 + (ue1x-
dx(u1))^2 + (ue1y-dy(u1))^2 + (ue2-u2)^2 + (ue2x-dx(u2))^2 + (ue2y-
dy(u2))^2) ) <<endl;
```

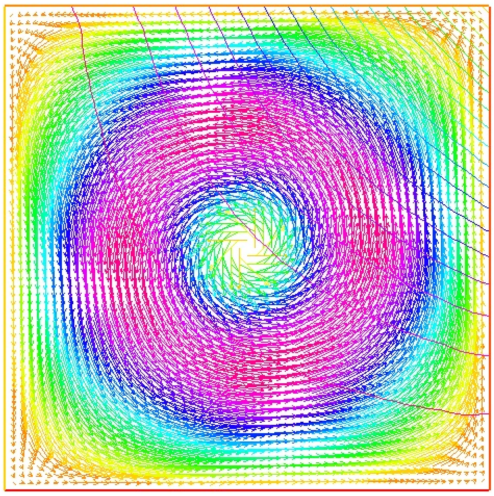
Επειδή το πολυώνυμο που χρησιμοποίειται για την προσέγγιση του πεδίου της ταχύτητας είναι 2ου βαθμού, έπεται ότι θα ισχύουν οι ακόλουθες εκτιμήσεις

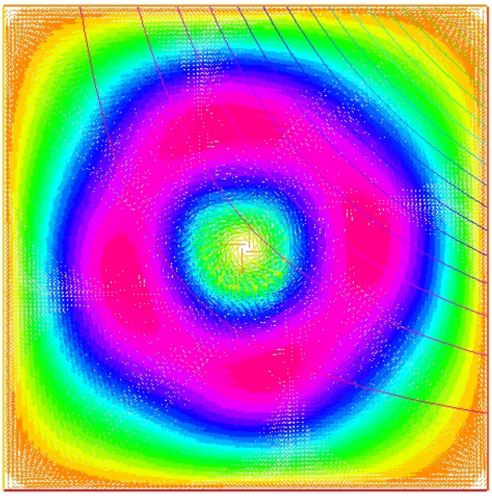
$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq Ch^3, \ \ \|u - u_h\|_{H^1} \leq Ch^2,$$

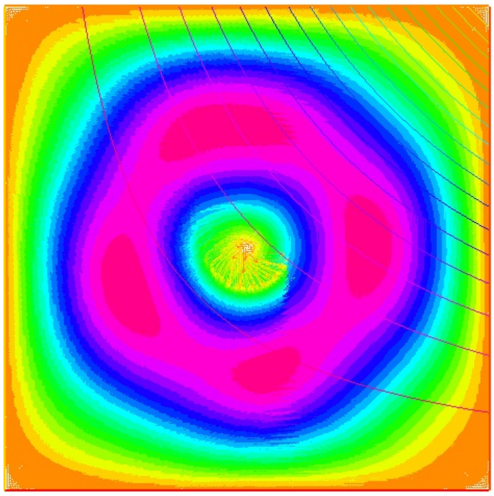
όπου με u συμβολίζεται η ακριβής λύση του προβλήματος και με u_h η αριθμητική λύση του προβλήματος.

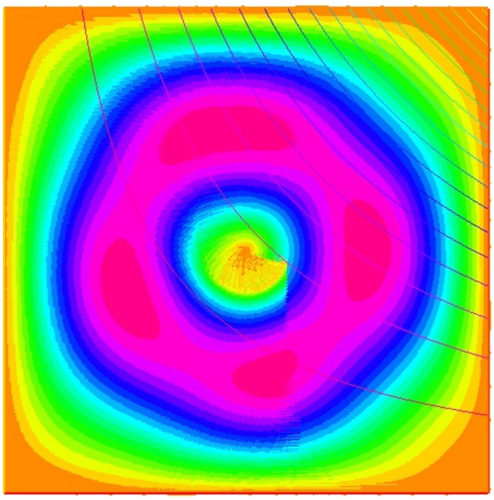
Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε τα διαγράμματα που προκύπτουν από το πρόγραμμα για διαφορετικά n.











Τέλος, στον ακόλουθο πίνακα δίνονται τα αποτελέσματα του προγράμματος για διαφορετικά n.

n	h	$\|u-u_h\|_{L^2}$	$\frac{\|u-u_h\|_{L^2}}{\|u-u_{h/2}\|_{L^2}} \approx 8$	$\|u-u_h\|_{H^1}$	$\frac{\|u-u_h\|_{H^1}}{\|u-u_{h/2}\|_{H^1}} \approx 4$
10	0,141421	0,00151704	-	0,127446	-
20	0,0707107	0,000190793	7,95124	0,032465	3,92564
40	0,0353553	2,39112 10^{-5}	7,97923	0,00815688	3,98008
80	0,0176777	2,99124 10^{-6}	7,99374	0,00204183	3,99489
160	0,00883883	3,73985 10^{-7}	7,99829	0,000510624	3,99870

Βιβλιογραφία

[1] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Math. Society, 1998.

[2] D. Braess, *Finite elements: Theory, fast solvers, and applications in solid mechanics*, Cambridge University Press, 2001.

[3] P.D. Lax, A.N. Milgram, *Parabolic Equations: Contributions to the theory of partial differential equations*, Princeton University Press, 1964.

[4] F. Hecht, *FreeFem++*

[5] Γ. Δάσιος, Κ. Κυριάκη, *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*, 1994.

[6] Α. Μπακόπουλος, Ι. Χρυσοβέργης, *Αριθμητικές μέθοδοι μερικών διαφορικών εξισώσεων, Πεπερασμένα Στοιχεία και Διαφορές*, Εκδόσεις Συμεών, 2003.