



Το Εσωτερικό Πρόβλημα Διαπερατότητας στην Αντίστροφη Σκέδαση και Εφαρμογές

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία
Παλληκαράκης Νικόλαος

Επιβλέπων : Γκιντίδης Δρόσος
Επίκουρος Καθηγητής ΕΜΠ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Τομέας Μαθηματικών
Δ.Π.Μ.Σ. Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες

Αθήνα
Ιούλιος 2012

Πρόλογος

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη του εσωτερικού προβλήματος διαπερατότητας. Το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας είναι ένα μη αυτοσυζυγές πρόβλημα ιδιοτιμών που εμφανίζεται κατά την μελέτη του αντίστροφου προβλήματος σκέδασης σε μη ομογενές φραγμένο μέσο. Θα αξιοποιήσουμε αυτό το πρόβλημα, με σκοπό να υπολογίσουμε τον σταθερό δείκτη διάθλασης για κυκλικό σχεδαστή.

Στο πρώτο κεφάλαιο κάνουμε μία σύντομη εισαγωγή στο μαθηματικό πρόβλημα της θεωρίας σκέδασης και περιγράφουμε τις δύο βασικές του όψεις: το ευθύ και το αντίστροφο πρόβλημα. Στο δεύτερο κεφάλαιο μοντελοποιούμε την διάδοση ενός ακουστικού κύματος μέσα σε ένα μη ομογενές μέσο από τη χρονοανεξάρτητη διαφορική εξίσωση Helmholtz. Μελετάμε το ευθύ πρόβλημα όσον αφορά την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης. Στη συνέχεια, από την μελέτη των βασικών ιδιοτήτων του λεγόμενου πλάτους σκέδασης για το αντίστροφο πρόβλημα, οδηγούμαστε στο εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας. Τέλος, αποδεικνύουμε υπό ποιες προϋποθέσεις έχουμε μοναδικότητα της λύσης για το αντίστροφο πρόβλημα.

Στο τρίτο κεφάλαιο, αναπτύσσουμε την μαθηματική θεωρία που περιγράφει το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας, και ειδικότερα το φάσμα του. Το πρόβλημα αυτό όπως θα δούμε παρουσιάζει ιδιαίτερα χαρακτηριστικά καθώς δεν είναι αυτοσυζυγές. Καταγράφουμε την απόδειξη της ύπαρξης άπειρων ιδιοτιμών για σφαιρικό σχεδαστή αλλά και της ύπαρξης τουλάχιστον μίας ιδιοτιμής για τη γενική περίπτωση του μη ομογενούς μέσου.

Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο, θεωρούμε το πρόβλημα του κυκλικού σχεδαστή με σταθερό δείκτη διάθλασης. Κάνοντας χρήση των αποτελεσμάτων που προηγήθηκαν, προσεγγίζουμε αριθμητικά τον δείκτη διάθλασης από τον υπολογισμό της πρώτης ιδιοτιμής του αντίστοιχου προβλήματος διαπερατότητας.

Abstract

The aim of this master thesis is the study of the interior transmission problem. The interior transmission problem is a non self-adjoint problem in a bounded domain which arises in inverse scattering theory for inhomogeneous medium. We will use this problem in order to calculate the constant index of refraction for a circular scatterer.

In the first chapter we introduce the reader to the mathematical problem of scattering theory and we describe the two aspects of it: the direct and the inverse problem.

In chapter 2, we model the propagation of an acoustic wave in an inhomogeneous medium by the time independent Helmholtz equation. We prove existence and uniqueness for the direct problem. Afterwards, the study of the far field pattern for the inverse problem lead us to the so called interior transmission problem. Finally, we determine that the knowledge of the far field pattern provides enough information to recover the index of refraction for the inverse problem.

In the third chapter, we study the mathematical theory associated with the interior transmission problem and especially it's spectrum. We will see that this problem has a special form because it is not self-adjoint. We describe the proof for the existence of an infinite discrete set of eigenvalues in the case of a spherically stratified medium and for the existence of at least one eigenvalue in the general case of an inhomogeneous medium.

In the final chapter we consider the problem of circular scatterer with constant index of refraction. Using the previous results, we estimate the index by the first transmission eigenvalue.

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επίκουρο καθηγητή του ΕΜΠ κ. Γκιντίδη Δρόσο για την άριστη συνεργασία που είχαμε σε όλη τη διάρκεια της παρούσας μελέτης, για την βοήθεια που μου προσέφερε σε όλα τα ζητήματα που προέκυψαν αλλά ιδιαίτερα για το έναυσμα που μου έδωσε να ασχοληθώ με το αντικείμενο της αντίστροφης σκέδασης. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την καθηγήτρια του ΕΜΠ κ. Κυριάκη Κυριακή για την υποστήριξη που μου παρείχε αλλά και την ενίσχυση σε ζητήματα βιβλιογραφίας όλο αυτό το διάστημα. Τέλος, δεν θα μπορούσα να ξεχάσω την οικογένειά μου αλλά και όλους τους φίλους-ες που είναι δίπλα μου και με στηρίζουν.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	7
1.1	Το ευθύ πρόβλημα σκέδασης	7
1.2	Το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης	9
2	Η μαθηματική θεωρία σκέδασης για μη ομογενές μέσο	11
2.1	Εισαγωγή	11
2.2	Το ευθύ πρόβλημα σκέδασης	14
2.3	Οι ιδιότητες του πλάτους σκέδασης	23
2.4	Η μοναδικότητα του αντίστροφου προβλήματος	30
2.5	Η ασθενής μορφή του προβλήματος σκέδασης	37
3	Το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας	41
3.1	Εισαγωγή	41
3.2	Η περίπτωση του μέσου με σφαιρικά στρώματα	44
3.3	Η γενική περίπτωση του μη ομογενούς μέσου	49
4	Το διακριτό αντίστροφο πρόβλημα διαπερατότητας	57
4.1	Η περιγραφή του προβλήματος	57
4.2	Η περίπτωση του κυκλικού σκεδαστή	59

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η θεωρία της σκέδασης έχει παίξει σημαντικό ρόλο στη μαθηματική φυσική του 20ού αιώνα και μπορεί κανείς να διαπιστώσει πολλές εφαρμογές της σε διάφορες περιοχές της σύγχρονης επιστήμης. Πράγματι, από την εξήγηση του Rayleigh γιατί ο ουρανός έχει μπλε χρώμα, μέχρι τη σύγχρονη ιατρική εφαρμογή του τομογράφου, το σχεδιασμό της ακουστικής ενός κτιρίου, την ανίχνευση ιζημάτων ή και ναρκών στον πυθμένα ενός βυθού καθώς και πλήθος άλλων παραδειγμάτων, τα φαινόμενα σκέδασης έχουν προσελκύσει και προκαλέσει επιστήμονες και μαθηματικούς για περισσότερα από 100 χρόνια [6], [9]. Γενικά, η θεωρία της σκέδασης μελετάει την επίδραση που δέχεται ένα μη ομογενές μέσο από ένα προσπίπτον σωματίδιο ή κύμα. Δηλαδή ασχολείται με την επίδραση των μεταβολών των φυσικών παραμέτρων στη διάδοση ενός κύματος.

Μιλώντας τώρα για ευθέα και αντίστροφα πρόβληματα, θα λέμε ότι δύο πρόβληματα είναι αντίστροφα μεταξύ τους όταν για την επίλυσή του ενός απαιτείται η πλήρης ή μερική γνώση του άλλου. Με αυτόν τον ορισμό βέβαια δεν γίνεται ξεκάθαρο ποιο πρόβλημα είναι το ευθύ και ποιο το αντίστροφο. Συνήθως όμως το ένα από τα δύο μελετήθηκε πρώτο και με μεγαλύτερη λεπτομέρεια. Αυτό θα ονομάζεται ευθύ και το άλλο αντίστροφο.

Επιστρέφοντας τώρα στο πρόβλημα σκέδασης, αν το ολικό πεδίο u παρασταθεί ως η υπέρθεση του προσπίπτοντος πεδίου και του σκεδαζόμενου πεδίου $u = u^i + u^s$, το ευθύ πρόβλημα σκέδασης συνίσταται στον προσδιορισμό του σκεδαζόμενου πεδίου u^s από τη γνώση του προσπίπτοντος, τη διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η κυματική διάδοση και τις συνοριακές συνθήκες που ικανοποιούνται στο σύνορο του σώματος που παρεμβάλλεται στη διάδοση του κύματος. Αντίθετα το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης συνίσταται στον προσδιορισμό της φύσης (σχήμα ή/και φυσικές ιδιότητες) του ανομοιογενούς μέσου που παρεμβάλλεται στην κυματική διάδοση, από τη γνώση της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς του σκεδαζόμενου πεδίου u^s και άλλες πληροφορίες μακριά από τον σκεδαστή.

1.1 Το ευθύ πρόβλημα σκέδασης

Το ευθύ πρόβλημα σκέδασης είναι ένα καλά τοποθετημένο πρόβλημα κατά Hadamard (δηλαδή έχει λύση η οποία μάλιστα είναι μοναδική και εξαρτάται συνεχώς από τα δεδομένα του προβλή-

ματος) και έχει ερευνηθεί σε βάθος τόσο σε θεωρητικό επίπεδο όσο και σε επίπεδο αριθμητικής ανάλυσης. Τα δύο βασικά προβλήματα της κλασικής θεωρίας της σκέδασης είναι η σκέδαση ενός χρονικά αρμονικού ακουστικού κύματος πρώτον από ένα σώμα με καθορισμένο σύνορο και δεύτερον από ένα μη ομογενές μέσο συμπαγούς φορέα.

Θεωρώντας μόνο την περίπτωση ακουστικών κυμάτων, με τα οποία θα ασχοληθούμε στην παρούσα εργασία, έστω ότι το προσπίπτον πεδίο είναι ένα χρονικά αρμονικό επίπεδο ακουστικό κύμα (δηλαδή έχει την ίδια τιμή πάνω σε ένα επίπεδο) της μορφής :

$$u^i(x, t) = e^{i(kx \cdot \hat{\theta} - \omega t)},$$

όπου όπου $k = \omega/c_0$ ο κυματάριθμος, ω η κυκλική συχνότητα, c_0 η ταχύτητα του ήχου στο περιβάλλον μέσο (εννοώντας το μέσο στο οποίο γεννιέται το κύμα, το οποίο είναι διαφορετικό από το σκεδαστή σε κάθε περίπτωση) και τέλος $\hat{\theta}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση της διάδοσης. Η διαφορική εξίσωση που μοντελοποιεί το πρόβλημα είναι η εξίσωση Helmholtz, η οποία η οποία στην περίπτωση όπου το ομογενές περιβάλλον μέσο ταυτίζεται με το μέσο διάδοσης δίνεται από τη σχέση :

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

ενώ στην περίπτωση όπου το περιβάλλον μέσο είναι διαφορετικό από το μέσο διάδοσης δίνεται από τη σχέση :

$$\Delta u(x) + k^2(x)n(x)u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

για $u(x)$ το χρονικά ανεξάρτητο ολικό πεδίο και $n(x)$ τον δείκτη διάθλασης. Σημειώνουμε εδώ ότι αν το μέσο διάδοσης είναι απορροφητικό, τότε ο δείκτης διάθλασης έχει μιγαδική μορφή, ενώ αν είναι μη απορροφητικό είναι μία πραγματική συνάρτηση του x .

Τόσο στο πρόβλημα σκέδασης από ένα μη ομογενές μέσο όσο και στο πρόβλημα σκέδασης από ένα σώμα, ισχύει η λεγόμενη συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld, η οποία μας εξασφαλίζει ότι το σκεδαζόμενο κύμα επεκτείνεται σφαιρικά μακριά από το σκεδαστή με μέτρο αντιστρόφως ανάλογο της απόστασης. Πιο λεπτομερής αναφορά στην εν λόγω συνθήκη θα γίνει στο επόμενο κεφάλαιο.

Μία διαφορά που παρατηρούμε μεταξύ των δύο προβλημάτων σκέδασης από ένα σώμα και από ένα μη ομογενές μέσο είναι ότι στο πρώτο, επιβάλλεται μία συνοριακή συνθήκη η οποία ανταποκρίνεται στον τύπο του αντικειμένου που παρεμβάλλεται στην κυματική διάδοση, ενώ στο δεύτερο πρόβλημα δεν υπάρχει. Αυτό συμβαίνει διότι στο πρόβλημα σκέδασης από ένα μη ομογενές μέσο, γύρω από το σκεδαστή D θεωρώ μία συμπαγή σφαίρα, στο σύνορο της οποίας η μεταβολή του κυματάριθμου και επομένως και της λύσης είναι συνεχής. Εφόσον λοιπόν στην περίπτωση αυτή δεν έχω κάποιου είδους ασυνέχεια, δεν απαιτείται και η επιβολή κάποιας συνοριακής συνθήκης. Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα ασχοληθούμε με το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης σε ένα μη ομογενές μέσο (πρόβλημα διαπερατότητας). Στην περίπτωση όπου μελετάμε τη σκέδαση από ένα σώμα διακρίνουμε τις περιπτώσεις του μαλακού ή σκληρού σκεδαστή όπου στο σύνορο έχουμε συνθήκες Dirichlet και Neumann αντίστοιχα.

Το πρώτο ερώτημα που τίθεται στο ευθύ πρόβλημα σκέδασης είναι η μοναδικότητα της λύσης. Τα βασικά εργαλεία που μας εξασφαλίζουν κάτι τέτοιο είναι τα θεωρήματα του Green και η

αρχή της αναλυτικής συνέχισης των λύσεων μιας ελλειπτικής εξίσωσης. Εξασφαλίζοντας τη μοναδικότητα της λύσης, το επόμενο ερώτημα που τίθεται είναι η ύπαρξη της μοναδικής αυτής λύσης και η δυνατότητα να την προσεγγίσουμε αριθμητικά.

1.2 Το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης

Μία σημαντική συνάρτηση που χρησιμοποιείται στη θεωρία της σκέδασης είναι το πλάτος σκέδασης των ακουστικών κυμάτων. Πιο συγκεκριμένα αν το u^s αναπαριστά το σκεδαζόμενο πεδίο, τότε όπως θα δείξουμε παρακάτω αυτό έχει την εξής ασυμπτωτική συμπεριφορά :

$$u^s(x) = \frac{e^{ikr}}{r} u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \text{καθώς } r = |x| \rightarrow \infty$$

όπου με u_∞ συμβολίζουμε το λεγόμενο πλάτος σκέδασης του u^s και $\hat{x} = x/|x|$. Στο αντίστροφο πρόβλημα γνωρίζοντας το πλάτος σκέδασης του σκεδαζόμενου πεδίου για \hat{x} και $\hat{\theta}$ στη μοναδιαία σφαίρα S^2 του \mathbb{R}^3 , αναζητούμε τον δείκτη διάθλασης ή το σχήμα του σκεδαστή. Στην συνέχεια της εργασίας θα γίνει λεπτομερής μελέτη του πλάτος σκέδασης με χρήση θεωρίας τελεστών.

Όπως σημειώθηκε και παραπάνω, το ευθύ πρόβλημα σκέδασης έχει μελετηθεί εκτενώς και μία αξιοσημείωτη ποσότητα πληροφοριών όσο αφορά τη λύση του είναι διαθέσιμη. Αντίθετα, το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης έχει αναπτυχθεί μόλις τα τελευταία χρόνια και για τη μελέτη του έχουν προταθεί τεχνικές που στηρίζονται σε δύσκολα μαθηματικά εργαλεία. Αυτό συμβαίνει διότι το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης είναι εκ φύσεως μη γραμμικό και μη καλά τοποθετημένο κατά Hadamard (δηλαδή ενδεχομένως να μην υπάρχει λύση ή αν υπάρχει να μην είναι μοναδική ή/και να μην εξαρτάται από τα δεδομένα του προβλήματος κατά συνεχή τρόπο). Συγκεκριμένα μικρές διαταραχές του πλάτους σκέδασης με οποιαδήποτε νόρμα οδηγεί σε μία συνάρτηση η οποία δεν ανήκει στην κλάση των συναρτήσεων που αποτελούν πλάτη σκέδασης. Έτσι, αν δεν χρησιμοποιηθούν μέθοδοι ομαλοποίησης, μικρές μεταβολές στις τιμές του μετρούμενου πεδίου μπορούν να οδηγήσουν σε μεγάλα σφάλματα κατά την ανακατασκευή του σκεδαστή. Ωστόσο το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης είναι βασικό σε διάφορες περιοχές της επιστήμης και αντίστοιχου ενδιαφέροντος με το ευθύ. Το πρόβλημα ανακατασκευής του σκεδαστή από την γνώση του πλάτους σκέδασης έχει μελετηθεί αρκετά τα τελευταία χρόνια. Αντίθετα, ο προσδιορισμός του δείκτη διάθλασης αποτελεί μεγάλη πρόκληση για ερευνητικές ομάδες σε όλο τον κόσμο καθώς έχει εφαρμογή σε πολλές επιστήμες όπως η τομογραφία και η χβαντομηχανική.

Όπως και στο ευθύ πρόβλημα, έτσι και εδώ το πρώτο ερώτημα που θα μας απασχολήσει είναι η μοναδικότητα της λύσης. Σημειώνουμε εξαρχής ότι αυτό το ερώτημα δεν μπορεί να απαντηθεί με σαφήνεια και αυτό οφείλεται στην παρατήρηση που κάναμε πιο πριν ότι είναι μη καλά τοποθετημένο. Το κατάλληλο ερώτημα που μπορούμε να θέσουμε είναι πώς μπορεί το συγκεκριμένο πρόβλημα να ομαλοποιηθεί και πώς μπορούν να βρεθούν προσεγγιστικές λύσεις για το ομαλοποιημένο πλέον πρόβλημα. Παρόλα αυτά, στο τέλος του επόμενου κεφαλαίου θα αποδείξουμε κάτω από ποιες προϋποθέσεις η γνώση του πλάτους σκέδασης u_∞ προσδιορίζει

μοναδικά τον δείκτη διάθλασης $n(x)$ στο πρόβλημα του μη ομογενούς μέσου. Κατά την μελέτη του αντίστροφου προβλήματος σκέδασης θα δούμε ότι εμφανίζεται ένα ασυνήθιστο πρόβλημα ιδιοτιμών, το λεγόμενο εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας. Αυτό το πρόβλημα όπως θα δούμε είναι μη γραμμικό και μη αυτοσυζυγές και γι'αυτό παρουσιάζει ιδιαίτερο μαθηματικό ενδιαφέρον. Η μελέτη του φάσματος αυτού του προβλήματος αποτελεί και το βασικότερο κομμάτι της εργασίας. Το πρόβλημα αυτό έχει ιδιαίτερη χρησιμότητα στην αντίστροφη σκέδαση καθώς όπως θα δούμε, από τη γνώση του φάσματος (και μάλιστα μόνο της πρώτης ιδιοτιμής), μπορούμε να υπολογίσουμε τον δείκτη διάθλασης σε δίσκο.

Κεφάλαιο 2

Η μαθηματική θεωρία σκέδασης για μη ομογενές μέσο

2.1 Εισαγωγή

Υποθέτουμε ότι έχουμε διάδοση ακουστικών κυμάτων σε ένα μέσο όπως ρευστό. Έστω $v(x, t)$ η ταχύτητα ενός σωματιδίου στη θέση $x \in \mathbb{R}^3$ την χρονική στιγμή t . Έστω ότι $p(x, t), \rho(x, t), S(x, t)$ να συμβολίζουν την πίεση, την πυκνότητα και την ειδική ενθαλπία του ρευστού αντίστοιχα. Υποθέτουμε επίσης ότι δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις στο ρευστό. Τότε η κίνηση του σωματιδίου περιγράφεται από τις εξής σχέσεις:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v + \gamma v + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \quad (\text{εξίσωση Euler}) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad (\text{εξίσωση συνέχειας}) \quad (2.2)$$

$$f(\rho, S) = p \quad (\text{καταστατική εξίσωση}) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + v \cdot \nabla S = 0 \quad (\text{αδιαβατική εξίσωση}) \quad (2.4)$$

όπου η συνάρτηση f εξαρτάται από το ρευστό και γ είναι ο συντελεστής απορρόφησης ο οποίος είναι σταθερός. Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων είναι μη γραμμικό στις άγνωστες συναρτήσεις v, ρ, p, S . Υποθέτουμε ότι στην κατάσταση ισορροπίας $v_0 = 0$, η πυκνότητα και η ενθαλπία είναι ανεξάρτητες του χρόνου και η πίεση είναι της μορφής: $p_0 = f(\rho_0(x), S_0(x))$. Η γραμμικοποίηση του συστήματος γίνεται μέσω της παραγωγίσιμης στο σημείο (v_0, p_0, S_0, ρ_0) . Αρχικά αναπτύσσουμε τις άγνωστες συναρτήσεις σε σειρές μίας μικρής παραμέτρου ως εξής:

$$v(x, t) = v_0(x, t) + \epsilon v_1(x, t) + O(\epsilon^2)$$

$$\rho(x, t) = \rho_0(x, t) + \epsilon \rho_1(x, t) + O(\epsilon^2)$$

$$p(x, t) = p_0(x, t) + \epsilon p_1(x, t) + O(\epsilon^2)$$

$$S(x, t) = S_0(x, t) + \epsilon S_1(x, t) + O(\epsilon^2)$$

και τις αντικαθιστούμε στο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων οπότε έχουμε:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \gamma v_1 + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 v_1) = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial f(\rho_0, S_0)}{\partial \rho} \rho_1 + \frac{\partial f(\rho_0, S_0)}{\partial S} S_1 = p_1 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} + v_1 \cdot \nabla S_0 = 0 \quad (2.8)$$

όπου παραλείψαμε τους όρους τάξης $O(\epsilon^2)$. Το σύστημα είναι πλέον γραμμικό και θα απαλείψουμε το S_1 . Επειδή

$$0 = \nabla f(\rho_0(x), S_0(x)) = \frac{\partial f(\rho_0, S_0)}{\partial \rho} \nabla \rho_0 + \frac{\partial f(\rho_0, S_0)}{\partial S} \nabla S_0,$$

άμα παραγωγίσουμε την (2.7) ως προς t και με βάση την (2.8) καταλήγουμε στην:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = c^2(x) \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + v_1 \nabla \rho_0 \right) \quad (2.9)$$

όπου η ταχύτητα του ήχου ορίζεται ως

$$c^2(x) := \frac{\partial f(\rho_0, S_0)}{\partial \rho}$$

Τώρα θα απαλείψουμε τα v_1 και ρ_1 από το σύστημα, διαφορίζοντας την (2.9) ως προς t και χρησιμοποιώντας τις (2.5), (2.6). Έτσι καταλήγουμε στην κυματική εξίσωση για το p_1 :

$$\frac{\partial^2 p_1(x, t)}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial p_1(x, t)}{\partial t} = c^2(x) \rho_0(x) \operatorname{div} \left[\frac{1}{\rho_0(x)} \nabla p_1(x, t) \right] \quad (2.10)$$

Τώρα υποθέτουμε ότι οι όροι που περιέχουν το $\nabla \rho_0$ μπορούν να απαλειφθούν και ότι το p_1 είναι χρονικά περιοδικό της μορφής:

$$p_1(x, t) = \operatorname{Re}[u(x)e^{-i\omega t}] \quad (2.11)$$

με συχνότητα $\omega > 0$ και η μιγαδική συνάρτηση $u(x)$ εξαρτάται μόνο από τη χωρική μεταβλητή. Αντικαθιστώντας τώρα στη κυματική εξίσωση καταλήγουμε στην εξίσωση *Helmholtz* για το u :

$$\Delta u(x) + \frac{\omega^2}{c^2(x)} \left(1 + i \frac{\gamma}{\omega} \right) u = 0 \quad (2.12)$$

Σε άπειρο χωρίο, $c = c_0$ και $\gamma = 0$. Ορίζουμε τον κυματάρημο και τον δείκτη διάθλασης ως:

$$k := \frac{\omega}{c_0} > 0 \quad \text{και} \quad n(x) := \frac{c_0^2}{c^2(x)} \left(1 + i \frac{\gamma}{\omega}\right) \quad (2.13)$$

Έτσι η εξίσωση *Helmholtz* παίρνει την μορφή:

$$\Delta u + k^2 n u = 0 \quad (2.14)$$

όπου το n είναι μιγαδικό με $\text{Re}n(x) > 0$ και $\text{Im}n(x) \geq 0$.

Η παραπάνω εξίσωση ισχύει για κάθε χωρίο του \mathbb{R}^3 χωρίς πηγές. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $a > 0$ τέτοιο ώστε $c(x) = c_0$ και $\gamma(x) = 0$ για κάθε x με $|x| \geq a$, δηλαδή $n(x) = 1$ για $|x| \geq a$. Αυτό σημαίνει ότι το μη ομογενές μέρος $\{x \in \mathbb{R}^3 : n(x) \neq 1\}$ περιέχεται σε μία μπάλα $K(0, a) = \{y \in \mathbb{R}^3 : |y| < a\}$ ακτίνας a . Με $K[0, a] = \{y \in \mathbb{R}^3 : |y| \leq a\}$ θα συμβολίζουμε την κλειστή μπάλα K . Στην συνέχεια της εργασίας υποθέτουμε ότι οι πηγές βρίσκονται έξω από την κλειστή μπάλα.

Οι θεωρούμενες πηγές παράγουν "προσπίπτοντα" πεδία u^i , τα οποία επαληθεύουν την μη διαταραγμένη εξίσωση *Helmholtz*, $\Delta u^i + k^2 u^i = 0$, στο $K[0, a]$. Υποθέτουμε ότι το u^i είναι είτε σημειακή πηγή είτε επίπεδο κύμα οπότε τα χρονικά εξαρτημένα προσπίπτοντα πεδία έχουν τη μορφή:

$$p_1^i(x, t) = \frac{1}{|x - z|} \text{Re} e^{ik|x-z| - i\omega t}, \quad \text{οπότε} \quad u^i(x) = \frac{e^{ik|x-z|}}{|x - z|}, \quad x \neq z$$

για πηγή στο z με $|z| > a$, ή

$$p_1^i(x, t) = \text{Re} e^{ik\hat{\theta} \cdot x - i\omega t}, \quad \text{οπότε} \quad u^i(x) = e^{ik\hat{\theta} \cdot x}$$

για μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^3$

Σε κάθε περίπτωση το u^i είναι λύση της *Helmholtz*, $\Delta u^i + k^2 u^i = 0$ στο $K[0, a]$. Στην πρώτη περίπτωση το p_1^i περιγράφει σφαιρικό κύμα που ταξιδεύει από την πηγή με ταχύτητα c_0 , ενώ στην δεύτερη το p_1^i περιγράφει επίπεδο κύμα που ταξιδεύει στην διεύθυνση $\hat{\theta}$ με ταχύτητα c_0 . Το προσπίπτον πεδίο διαταράσσεται από την αλλαγή στον δείκτη διάθλασης του μέσου n , και "παράγει" ένα σκεδαζόμενο κύμα u^s . Το ολικό πεδίο $u = u^i + u^s$ ικανοποιεί την εξίσωση *Helmholtz*, $\Delta u + k^2 n u = 0$ εκτός απ' τις πηγές. Επιπλέον, απαιτούμε το σκεδαζόμενο πεδίο να συμπεριφέρεται σαν σφαιρικό κύμα μακριά από το μέσο. Αυτό μπορεί να περιγραφεί μέσω της λεγόμενης συνθήκης ακτινοβολίας:

$$\frac{\partial u^s(x)}{\partial r} - i k u^s(x) = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \text{για} \quad r = |x| \rightarrow \infty \quad (2.15)$$

ομοιόμορφα για $x/|x| \in S^2$, όπου με S^2 θα συμβολίζουμε την μοναδιαία σφαίρα στο \mathbb{R}^3 . Μπορούμε τώρα να περιγράψουμε το πρόβλημα σκέδασης

Το ευθύ πρόβλημα σκέδασης:

Έστω ο κυματάρθμος $k > 0$ και ο δείκτης διάθλασης $n = n(x)$ με $n(x) \neq 1$ για $|x| \geq a$, και το προσπίπτον πεδίο u^i να είναι γνωστό. Να καθορισθεί το ολικό πεδίο u που ικανοποιεί τη εξίσωση *Helmholtz* (2.14) στο \mathbb{R}^3 εκτός από την περιοχή της πηγής, ώστε το σχεδαζόμενο πεδίο $u^s = u - u^i$ να ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας (2.15)

Το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης:

Να καθορισθεί ο δείκτης διάθλασης n μέσω μετρήσεων του ολικού πεδίου u έξω από την περιοχή $K[0, a]$, για διάφορες τιμές του προσπίπτοντος πεδίου u^i και του κυματάρθμου k .

Στην επόμενη παράγραφο θα μελετήσουμε το ευθύ πρόβλημα σκέδασης και την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης. Στην παράγραφο 2.3 θα ασχοληθούμε με το λεγόμενο πλάτος σκέδασης και θα δούμε πώς το πρόβλημα σκέδασης συνδέεται με ένα μη αυτοσυζυγές πρόβλημα ιδιοτιμών. Στην παράγραφο 2.4 θα αποδείξουμε κάτω από ποιες προϋποθέσεις το αντίστροφο πρόβλημα έχει μοναδική λύση. Τέλος στην παράγραφο 2.5 θα μελετήσουμε, για μαθηματική πληρότητα, το πρόβλημα σκέδασης στη μεταβολική του μορφή.

2.2 Το ευθύ πρόβλημα σκέδασης

Σε αυτή την παράγραφο θα καταγράψουμε διάφορες ιδιότητες των λύσεων της εξίσωσης *Helmholtz* που θα χρειαστούν και παρακάτω. Θα αποδείξουμε την ύπαρξη και μοναδικότητα για το ευθύ πρόβλημα σκέδασης και θα εισάγουμε την έννοια του πλάτους σκέδασης. Για το υπόλοιπο μέρος αυτού του κεφαλαίου υποθέτουμε ότι έχουμε επίπεδα προσπίπτοντα πεδία. Έστω ότι $n \in C^2(\mathbb{R}^3)$, και $n(x) = 1$, $\forall |x| \geq a$. Υποθέτουμε ακόμα ότι $\text{Re } n(x) > 0$, $\text{Im } n(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$.

Έστω $k \in \mathbb{R}$ με $k > 0$, $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^3$ με $|\hat{\theta}| = 1$ και το προσπίπτον πεδίο έχει την μορφή $u^i(x) = e^{ik\hat{\theta} \cdot x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$. Τότε το u^i επαληθεύει την *Helmholtz*:

$$\Delta u^i + k^2 u^i = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (2.16)$$

Καταγράφουμε ξανά το ευθύ πρόβλημα:

Δεδομένων των $n, k, \hat{\theta}$ να βρεθεί το $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ που επαληθεύει την:

$$\Delta u + k^2 n u = 0, \quad \text{στο } \mathbb{R}^3 \quad (2.17)$$

και το $u^s = u - u^i$ πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας (*Sommerfeld*):

$$\frac{\partial u^s(x)}{\partial r} - i k u^s(x) = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \text{για } r = |x| \rightarrow \infty \quad (2.18)$$

ομοιόμορφα για $x/|x| \in S^2$.

Θα χρειαστούμε ορισμένα αποτελέσματα από την θεωρία της εξίσωσης *Helmholtz*. Αρχικά θα αποδείξουμε το παρακάτω πολύ σημαντικό λήμμα το οποίο χρησιμοποιεί τις ιδιότητες των συναρτήσεων *Bessel*.

Λήμμα 2.2.1 (Rellich) Έστω ότι το u ικανοποιεί την $\Delta u + k^2 u = 0, |x| > a$ και ότι ισχύει

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{|x|=R} |u(x)|^2 ds(x) = 0 \quad (2.19)$$

Τότε $u = 0, \forall |x| > a$.

Απόδειξη.

Επειδή η u είναι μία δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη λύση της εξίσωσης *Helmholtz* είναι αναλυτική, επομένως μπορούμε να την αναπτύξουμε σε σειρά *Fourier*:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_n^m(|x|) Y_n^m(\hat{x}), \quad \hat{x} = \frac{x}{|x|}$$

όπου οι συντελεστές a_n^m δίνονται από τη σχέση

$$a_n^m(|x|) = \int_{\Omega} u(x) \overline{Y_n^m(|x|)} ds_{\hat{x}}$$

και Y_n^m είναι οι σφαιρικές αρμονικές n τάξης.

Από την ισότητα *Parseval* έχουμε

$$\frac{1}{r^2} \int_{\Omega} |u(x)|^2 ds = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n |a_n^m(|x|)|^2$$

Άρα από τη σχέση (2.19)

$$\Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n |a_n^m(|x|)|^2 = 0 \Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 |a_n^m(r)|^2 = 0, \text{ με } |x| = r \text{ και } \forall n, m$$

Οι συντελεστές a_n^m ικανοποιούν την σφαιρική διαφορική εξίσωση *Bessel* δηλαδή:

$$\frac{d^2 a_n^m}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{da_n^m}{dr} + \left(k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) = 0$$

οπότε $a_n^m(r) = c_n^m h_n^{(1)}(kr) + d_n^m h_n^{(2)}(kr)$, με c_n^m, d_n^m σταθερές. Άρα από την ασυμπτωτική συμπεριφορά των συναρτήσεων *Hankel* πρώτου και δευτέρου είδους για $r \rightarrow \infty$ και την παραπάνω σχέση για τα a_n^m έχουμε ότι $c_n^m = d_n^m = 0$.

Επομένως, έξω από μία μεγάλη σφαίρα (για $r \rightarrow \infty$), έχουμε $u = 0$. Άρα τελικά, λόγω αναλυτικότητας της u , έχουμε ότι $u = 0, \forall |x| > a$. \square

Στην πραγματικότητα η συνθήκη (2.19) ισχύει όταν το u φθίνει ταχύτερα από $1/|x|$. Το λήμμα δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για μιγαδικό k ή για $k = 0$.

Χρησιμοποιώντας περιοδικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα-αρχή της αναλυτικής συνέχισης [9]:

Θεώρημα 2.2.1 Έστω $n \in C^2(\mathbb{R}^3)$ με $n(x) = 1$ για $|x| > a$. Έστω επίσης ότι $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ λύση της *Helmholtz*, $\Delta u + k^2 n u = 0$, στο \mathbb{R}^3 τέτοια ώστε $u = 0$, $\forall |x| > b$ για κάποιο $b \geq a$. Τότε $u = 0$ σε όλο το \mathbb{R}^3 .

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το θεώρημα μοναδικότητας της λύσης της εξίσωσης *Helmholtz* για το ευθύ πρόβλημα.

Θεώρημα 2.2.2 (Μοναδικότητα) Το πρόβλημα (2.17)-(2.18) έχει το πολύ μία λύση, δηλαδή αν u λύση με $u^i = 0$ τότε και $u = 0$.

Απόδειξη.

Έστω $u^i = 0$. Από την συνθήκη ακτινοβολίας έχουμε $\frac{\partial u^s(x)}{\partial r} - i k u^s(x) = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$, για $r = |x| \rightarrow \infty$, άρα για $u = u^s \Rightarrow$

$$O\left(\frac{1}{R^2}\right) = \int_{|x|=R} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - i k u \right|^2 ds = \int_{|x|=R} \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + k^2 |u|^2 ds + 2k \operatorname{Im} \int_{|x|=R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} ds$$

Με χρήση του πρώτου θεωρήματος *Green*, μπορούμε να μετασχηματίσουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα ως εξής:

$$\begin{aligned} \int_{|x|=R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} ds &= \int_{|x|<R} (u \Delta \bar{u} + |\nabla u|^2) dx = \int_{|x|<R} (|\nabla u|^2 - k^2 \bar{n} |u|^2) dx \\ &\Rightarrow \operatorname{Im} \int_{|x|=R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} ds = k^2 \int_{|x|<R} \operatorname{Im} n |u|^2 dx \geq 0 \end{aligned}$$

Άρα αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση έχουμε

$$0 \leq \int_{|x|=R} \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + k^2 |u|^2 ds = \int_{|x|=R} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - i k u \right|^2 ds - 2k \operatorname{Im} \int_{|x|=R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} ds$$

και για $R \rightarrow \infty$, έχουμε

$$0 \leq \limsup_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + k^2 |u|^2 ds \leq 0,$$

άρα τελικά:

$$\int_{|x|=R} |u|^2 ds \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

Άρα από το λήμμα του *Rellich* έχουμε ότι $u = 0$ για $|x| > a$. Τέλος, το θεώρημα 2.2.1 μας εξασφαλίζει ότι $u = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$. \square

Τώρα έστω ότι

$$\Phi(x, y) := \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}, \quad \text{με } x, y \in \mathbb{R}^3, x \neq y \quad (2.20)$$

να είναι η θεμελιώδης λύση ή λύση *Green* ελεύθερου χωρίου για την εξίσωση *Helmholtz*. Οι ιδιότητες της θεμελιώδους λύσης περιγράφονται από το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2.2.3 Η $\Phi(\cdot, y)$ επιλύει την εξίσωση Helmholtz, $\Delta u + k^2 u = 0$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus \{y\}$, $\forall y \in \mathbb{R}^3$. Ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας:

$$\frac{x}{|x|} \cdot \nabla_x \Phi(x, y) - ik\Phi(x, y) = O(1/|x|^2)$$

ομοιόμορφα για κάθε $x/|x| \in S^2$ και $y \in Y$, για κάθε ανοικτό και φραγμένο $Y \subset \mathbb{R}^3$. Επιπλέον,

$$\Phi(x, y) = \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|} e^{-ik\hat{x}\cdot y} + O(1/|x|^2) \quad (2.21)$$

ομοιόμορφα για $\hat{x} = x/|x| \in S^2$ και $y \in Y$.

Τώρα θα ορίσουμε το χωρικό δυναμικό με βάση την θεμελιώδη λύση,

Θεώρημα 2.2.4 Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, φραγμένο χωρίο, τότε $\forall \varphi \in C(\bar{\Omega})$ ορίζουμε το χωρικό δυναμικό:

$$v(x) := \int_{\Omega} \varphi(y) \Phi(x, y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

το οποίο είναι μία συνάρτηση $v \in C^{1,a}(\mathbb{R}^3)$, και:

$$\nabla v(x) := \int_{\Omega} \varphi(y) \nabla_x \Phi(x, y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Επίσης το v ικανοποιεί την σχέση ακτινοβολίας (2.18) και ικανοποιεί με την έννοια των κατανομών την σχέση:

$$\Delta v + k^2 v = -\varphi, \quad \text{στο } \Omega. \quad (2.22)$$

Επιπλέον, για κάθε μπάλα $K(0, R)$ που περιέχει το Ω στο εσωτερικό της, υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε $\|v\|_{C^{2,a}(\Omega)} \leq c \cdot \|\varphi\|_{C^a(\Omega)}$.

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να μετασχηματίσουμε το πρόβλημα σκέδασης σε μία ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm 2^{ov} είδους, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε αρκετά παρακάτω.

Θεώρημα 2.2.5 (α) Έστω $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ μία λύση της εξίσωσης Helmholtz, τότε η $u|_{K[0,a]}$ είναι λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Lippmann – Schwinger:

$$u(x) = u^i(x) - k^2 \int_{|y| < a} (1 - n(y)) \Phi(x, y) u(y) dy, \quad x \in K[0, a] \quad (2.23)$$

(β) Αν η $u \in C(K[0, a])$ είναι λύση της Lippmann – Schwinger, τότε $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ και είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz.

Απόδειξη.

(α) Έστω $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ μία λύση της εξίσωσης *Helmholtz*. Τότε,

$$\Delta u(x) + k^2 n(x)u(x) = 0, \quad x \in K[0, a] \quad \text{και} \quad \Delta u^i(x) + k^2 u^i(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

Αν αφαιρέσουμε κατά μέλη παίρνουμε:

$\Delta(u - u^i) + k^2 n u - k^2 u^i = 0 \xrightarrow{\pm k^2 u} \Delta(u - u^i) + (k^2 n - k^2)u + k^2(u - u^i) = 0$
 $\Rightarrow \Delta(u - u^i) + k^2(u - u^i) = k^2(1 - n)u$. Άρα έχουμε την αναπαράσταση στην μορφή του δυναμικού:

$$u - u^i = - \int_{K[0, a]} k^2(1 - n(y))u(y)\Phi(x, y)dy, \Rightarrow$$

$$u(x) = u^i(x) - k^2 \int_{|y| < a} (1 - n(y))\Phi(x, y)u(y)dy, \quad x \in K[0, a]$$

(β) Έστω ότι η $u \in C(K[0, a])$ είναι λύση της *Lippmann - Schwinger*. Εφαρμόζοντας τον $(\Delta + k^2)$ και επεκτείνοντας το u σε όλο το \mathbb{R}^3 έχουμε:

$$(\Delta + k^2)u = (\Delta + k^2)u^i - k^2(\Delta + k^2) \int_{|y| < a} (1 - n(y))\Phi(x, y)u(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

Άρα επειδή $\Delta u^i(x) + k^2 u^i(x) = 0 \Rightarrow$

$$\Delta u + k^2 u = -k^2 \int_{|y| < a} (1 - n(y))(\Delta + k^2)\Phi(x, y)u(y)dy$$

Επίσης, αφού η Φ είναι θεμελιώδης λύση έχουμε ότι $(\Delta + k^2)\Phi(x, y) = -\delta(x, y)$ με την έννοια των κατανομών, άρα:

$$\Delta u + k^2 u = k^2(1 - n(x))u(x) \Rightarrow \Delta u + k^2 n(x)u(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3. \quad \square$$

Σαν συνέπεια μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας για το ευθύ πρόβλημα σκέδασης.

Θεώρημα 2.2.6 Έστω ότι $n \in C^2(\mathbb{R}^3)$, και $n(x) = 1, \forall |x| \geq a$. Υποθέτουμε επίσης ότι $\text{Re}n(x) > 0, \text{Im}n(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^3$. Έστω ακόμα $k \in \mathbb{R}$ με $k > 0, \hat{\theta} \in \mathbb{R}^3$ με $|\hat{\theta}| = 1$. Τότε υπάρχει μοναδική λύση για το πρόβλημα σκέδασης (2.17) – (2.18) ή ισοδύναμα για την ολοκληρωτική εξίσωση (2.23).

Απόδειξη.

Έχουμε την ολοκληρωτική εξίσωση της μορφής $u = u^i - Tu$ όπου $T : C(K[0, a]) \rightarrow C(K[0, a]), (Tu)(x) := k^2 \int_{|y| < a} (1 - n(y))\Phi(x, y)u(y)dy \quad x \in K[0, a]$.

Παρατηρούμε ότι ο τελεστής T είναι συμπαγής επειδή έχει ασθενώς ανώμαλο πυρήνα. Από το θεώρημα 2.2.2, η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση έχει τετριμμένη λύση οπότε με βάση το θεώρημα *Riesz* έχουμε ότι τελικά υπάρχει μοναδική λύση για το πρόβλημα σκέδασης. \square

Σαν μια ακόμα εφαρμογή της εξίσωσης *Lippmann - Schwinger* έχουμε το εξής θεώρημα για την ασυμπτωτική συμπεριφορά της u :

Θεώρημα 2.2.7 Αν u η λύση του προβλήματος σκέδασης τότε:

$$u(x) = u^i(x) + \frac{e^{ik|x|}}{|x|} u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad |x| \rightarrow +\infty \quad (2.24)$$

ομοιόμορφα για $\hat{x} = x/|x|$, όπου:

$$u_\infty(\hat{x}) = -\frac{k^2}{4\pi} \int_{|y|<a} (1 - n(y)) e^{-ik\hat{x}\cdot y} u(y) dy, \quad \hat{x} \in S^2 \quad (2.25)$$

Η συνάρτηση $u_\infty : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ονομάζεται πλάτος σκέδασης και είναι αναλυτική στο S^2 . Επίσης, $u_\infty = 0$ αν και μόνο αν $u^s = 0$ για $|x| > a$.

Απόδειξη.

Έχουμε από την εξίσωση *Lippmann – Schwinger*

$$u(x) = u^i(x) - k^2 \int_{|y|<a} (1 - n(y)) \Phi(x, y) u(y) dy \Rightarrow$$

$$u(x) = u^i(x) - k^2 \int_{|y|<a} (1 - n(y)) \left(\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|} e^{-ik\hat{x}\cdot y} + O(1/|x|^2) \right) u(y) dy \Rightarrow$$

$$u(x) = u^i(x) - \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \frac{k^2}{4\pi} \int_{|y|<a} (1 - n(y)) e^{-ik\hat{x}\cdot y} u(y) dy + O(1/|x|^2)$$

Άρα τελικά $u(x) = u^i(x) + \frac{e^{ik|x|}}{|x|} u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$.

Η u_∞ είναι αναλυτική από τον ορισμό της.

Επίσης αν $u_\infty = 0$ έχουμε:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{|x|=r} |u^s(x)|^2 ds = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{|x|=r} |u(x) - u^i(x)|^2 ds = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\int_{|x|=r} |u_\infty(x)|^2 ds + O(1/|x|^2) \right) = 0$$

Άρα $u^s = 0$ για $|x| > a$. □

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την νόρμα του τελεστή T που ορίσαμε νωρίτερα σε σχέση με την *supremum*-νόρμα.

$$|T(u)(x)| \leq k^2 \|1 - n\|_\infty \|u\|_\infty \max_{|x| \leq a} \int_{|y|<a} |\Phi(x, y)| dy, \quad \in K[0, a].$$

Άρα

$$\|T\|_\infty \leq k^2 \|1 - n\|_\infty \max_{|x| \leq a} \int_{|y|<a} \frac{1}{4\pi|x-y|} dy = \frac{(ka)^2}{2} \|1 - n\|_\infty$$

Άρα για να είναι συστολή ο τελεστής T πρέπει: $\|T\|_\infty < 1 \Leftrightarrow (ka)^2\|1-n\|_\infty < 2$. Σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε να αναπτύξουμε σε σειρά *Neumann* με βάση γνωστό θεώρημα. Πράγματι, επειδή $u = u^i - Tu \Rightarrow u(I+T) = u^i$. Αν $\|T\|_\infty < 1 \Rightarrow (I - (-T))^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j T^j$. Άρα τελικά

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j T^j u^i$$

Ορισμός 2.2.1 Οι πρώτοι δύο όροι της σειράς είναι:

$$u^b(x) = T^0 u^i + T u^i = u^i - k^2 \int_{\mathbb{R}^3} (1-n(y))\Phi(x,y)u^i(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

Το u^b ονομάζεται προσέγγιση *Born* και αποτελεί μία καλή προσέγγιση του u στο $x \in K[0,a]$ για μικρές τιμές του $(ka)^2\|1-n\|_\infty < 2$.

Ειδικότερα,

$$\begin{aligned} \|u - u^b\|_\infty &\leq \sum_{j=2}^{\infty} \|T\|_\infty^j \|u^i\|_\infty = \|T\|_\infty^2 \frac{1}{1 - \|T\|_\infty} \leq \frac{(ka)^4}{4} \|1-n\|_\infty \frac{1}{1 - \frac{(ka)^2}{2} \|1-n\|_\infty} \\ &= \frac{(ka)^4}{2} \frac{\|1-n\|_\infty^2}{2 - (ka)^2 \|1-n\|_\infty} \leq \frac{(ka)^4}{2} \|1-n\|_\infty^2, \quad \text{για } (ka)^2 \|1-n\|_\infty \leq 1 \end{aligned}$$

Το πλάτος σκέδασης εξαρτάται και από την διεύθυνση παρατήρησης $\hat{x} \in S^2$ και από την διεύθυνση $\hat{\theta} \in S^2$ του προσπίπτοντος πεδίου u^i , γι αυτό συμβολίζουμε $u_\infty(\hat{x}; \hat{\theta})$. Για την προσέγγιση *Born* έχουμε:

$$\begin{aligned} u_\infty^b(\hat{x}; \hat{\theta}) &= \frac{k^2}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} (n(y) - 1) e^{-ik\hat{x}\cdot y} u^i(y) dy = \frac{k^2}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} (n(y) - 1) e^{-ik\hat{x}\cdot y} e^{ik\hat{\theta}\cdot y} dy = \\ &= \frac{k^2}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} (n(y) - 1) e^{ik(\hat{\theta} - \hat{x})\cdot y} dy = \frac{k^2}{4\pi} m^\sim(k\hat{x} - k\hat{\theta}) \end{aligned}$$

όπου $m = n - 1$ και ο μετασχηματισμός *Fourier* ορίζεται ως: $f^\sim(x) := \int_{\mathbb{R}^3} f(y) e^{-ix\cdot y} dy$, $x \in \mathbb{R}^3$. Από αυτήν την παρατήρηση προκύπτει η σχέση αμοιβαιότητας:

$$u_\infty^b(\hat{x}; \hat{\theta}) = u_\infty^b(-\hat{\theta}; -\hat{x}), \quad \hat{x}, \hat{\theta} \in S^2$$

Αυτή την συνθήκη θα την δείξουμε αργότερα για το u_∞ γενικά. Πριν φτάσουμε σε αυτό θα αποδείξουμε το πολύ σημαντικό θεώρημα της αναπαράστασης του *Green* που εκφράζει τις ακτινοβόλους λύσεις της *Helmholtz* συναρτήσεων των συνοριακών *Dirichlet* και *Neumann* συνθηκών.

Θεώρημα 2.2.8 (Αναπαράσταση Green) Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ φραγμένο χωρίο και $\Omega^c = \mathbb{R}^3 - \bar{\Omega}$ το εξωτερικό του. Έστω ότι το σύνορό του $\partial\Omega$ είναι αρκετά ομαλό ώστε να ισχύει το θεώρημα Gauss και το μοναδιαίο κάθετο $v(x), x \in \partial\Omega$ να είναι προς το εσωτερικό του Ω .

(α) Αν $u \in C^2(\Omega) \cup C^1(\bar{\Omega})$ τότε

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left(\Phi(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial v(y)} - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial v(y)} \right) ds_y - \int_{\Omega} \Phi(x, y) (\Delta u(y) + k^2 u(y)) dy, \quad x \in \Omega$$

(β) Αν $u^s \in C^2(\Omega^c) \cup C^1(\bar{\Omega}^c)$ λύση της $\Delta u^s + k^2 u^s = 0$, στο Ω^c και η u^s ακτινοβόλος τότε:

$$\int_{\partial\Omega} \left(\Phi(x, \cdot) \frac{\partial u^s}{\partial v} - u^s \frac{\partial \Phi(x, \cdot)}{\partial v} \right) ds_y = \begin{cases} 0, & x \in \Omega \\ -u^s(x), & x \notin \bar{\Omega} \end{cases}$$

$$\text{και } u_{\infty}(\hat{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left(u^s(y) \frac{\partial e^{-ik\hat{x}\cdot y}}{\partial v(y)} - e^{-ik\hat{x}\cdot y} \frac{\partial u^s(y)}{\partial v} \right) ds_y, \quad \hat{x} \in S^2 \quad (2.26)$$

Απόδειξη.

(α) Έστω $x \in \Omega$, και ορίζουμε $S(x, \rho) = \{y \in \mathbb{R}^3 : \|x - y\| = \rho\} \subset \Omega$ και το μοναδιαίο κάθετο v προς τα έξω. Αν ορίσουμε το χωρίο $\Omega_{\rho} = \{y \in \Omega : \|x - y\| > \rho\}$ τότε από τον 2^ο τύπο Green έχουμε:

$$\int_{\partial\Omega \cup S(x, \rho)} \left(\Phi(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial v(y)} - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial v(y)} \right) ds_y = \int_{\Omega_{\rho}} (\Phi(x, y) \Delta u(y) - u(y) \Delta \Phi(x, y)) dy$$

και επειδή $\Delta \Phi(x, y) + k^2 \Phi(x, y) = 0$ στο $\Omega \setminus \{y\} \Rightarrow$

$$\int_{\partial\Omega \cup S(x, \rho)} \left(\Phi(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial v(y)} - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial v(y)} \right) ds_y = \int_{\Omega_{\rho}} (\Delta u(y) + k^2 u(y)) \Phi(x, y) dy \Leftrightarrow$$

$$\int_{\partial\Omega} \left(\Phi(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial v(y)} - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial v(y)} \right) ds_y + \int_{S(x, \rho)} \left(\Phi(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial v(y)} - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial v(y)} \right) ds_y = \int_{\Omega_{\rho}} (\Delta u(y) + k^2 u(y)) \Phi(x, y) dy$$

Όμως στη σφαίρα $S(x, \rho)$ έχουμε: $\Phi(x, y) = \frac{e^{ik\rho}}{4\pi\rho}$, και $\nabla_y \Phi(x, y) = \left(\frac{1}{\rho} - ik \right) \frac{e^{ik\rho}}{4\pi\rho} v(y)$, άρα στο όριο $\rho \rightarrow 0$ ισχύει:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{S(x, \rho)} \left(\Phi(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial v(y)} - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial v(y)} \right) ds_y = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Omega_{\rho}} (\Delta u(y) + k^2 u(y)) \Phi(x, y) dy - \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega} \left(\Phi(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial v(y)} - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial v(y)} \right) ds_y, \quad \text{και } \frac{\partial u}{\partial v} = -\frac{\partial u}{\partial \rho}, \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
& \int_{S(x,\rho)} \left(\Phi(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial v(y)} - u(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial v(y)} \right) ds_y = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\partial u}{\partial \rho} \Phi + u \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) \rho^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{e^{ik\rho}}{4\pi\rho} + u \frac{e^{ik\rho}}{4\pi\rho} (ik - 1/\rho) \right) \rho^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi \left(-\frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{e^{ik\rho}}{4\pi\rho} + u \frac{e^{ik\rho}}{4\pi\rho} (ik - 1/\rho) \right) \rho^2 \\
&= -\frac{\partial u}{\partial \rho} \rho e^{ik\rho} + u \rho i k e^{ik\rho} - u e^{ik\rho} \Rightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{S(x,\rho)} \left(\Phi(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial v(y)} - u(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial v(y)} \right) ds_y = -u(x)
\end{aligned}$$

Άρα τελικά έχουμε:

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left(\Phi(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial v(y)} - u(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial v(y)} \right) ds_y - \int_{\Omega} \Phi(x,y) (\Delta u(y) + k^2 u(y)) dy, \quad x \in \Omega$$

(β) Αν το u^s επαληθεύει την $\Delta u^s + k^2 u^s = 0$ στο Ω^c τότε αν $x \in \Omega^c \Rightarrow$

$$-u^s(x) = \int_{\partial\Omega} \left(\Phi(x, \cdot) \frac{\partial u}{\partial v} - u \frac{\partial \Phi(x, \cdot)}{\partial v} \right) ds$$

όπου το $-$ προέκυψε από την αλλαγή φοράς του μοναδιαίου κάθετου.

Αν $x \in \Omega$ υπάρχει $R > 0$ τέτοιο ώστε $\Omega \subset S(0, R)$ και ορίζουμε $\Omega_1 = S(0, R) - \Omega$ οπότε $\partial\Omega_1 = \partial S \cup \partial\Omega$. Επίσης ισχύει ότι: $(\Delta + k^2)\Phi = 0$ και $(\Delta + k^2)u = 0$, στο Ω_1 άρα:

$$\int_{\partial\Omega_1} \left(\frac{\partial u^s}{\partial v} \Phi - u^s \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) ds = \int_{\partial\Omega_1} [(\Delta + k^2)u^s \Phi - (\Delta + k^2)\Phi u^s] dy = 0$$

Άρα

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u^s}{\partial v} \Phi - u^s \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) ds + \int_{\partial S} \left(\frac{\partial u^s}{\partial v} \Phi - u^s \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) ds = 0$$

οπότε παίρνοντας $R \rightarrow +\infty$ έχουμε:

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u^s}{\partial v} \Phi - u^s \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) ds = 0$$

□

Σαν συνέπεια θα αποδείξουμε το παρακάτω χρήσιμο λήμμα.

Λήμμα 2.2.2 Έστω $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ με $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, και $\partial\Omega_1, \partial\Omega_2$ να είναι τάξης C^2 . Επίσης, $u_j \in C^2(\Omega_j) \cup C^1(\bar{\Omega}_j)$, $j = 1, 2$ με $\Delta u_j + k^2 u_j = 0$ στο Ω_j . Ακόμα $u_1 = u_2$ και $\frac{\partial u_1}{\partial v} = \frac{\partial u_2}{\partial v}$ στο Γ , όπου Γ είναι το κοινό σύνορο των δύο χωρίων. Τότε η συνάρτηση

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in \Omega_1 \\ u_2(x), & x \in \Omega_2 \end{cases}$$

είναι αναλυτική στο Ω και $\Delta u + k^2 u = 0$, στο Ω

Απόδειξη.

Από το θεώρημα αναπαράστασης του *Green* έχουμε ότι u_1, u_2 είναι αναλυτικές στα Ω_1, Ω_2 αντίστοιχα. Έστω $x_0 \in \Gamma \cap \Omega$ και ορίζουμε $K(x_0, \epsilon) \subsetneq \Omega$. Έστω επίσης $K_j = K(x_0, \epsilon) \cap \Omega_j$, $j = 1, 2$ και $x \in K_1$. Τότε για $u_1 \in K_1, u_2 \in K_2$ από το θεώρημα αναπαράστασης για κάθε χωρίο έχουμε :

$$u_1(x) = \int_{\partial K_1} \left(\Phi(x, y) \frac{\partial u_1(y)}{\partial v(y)} - u_1(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial v(y)} \right) ds_y, \quad x \in K_1$$

$$0 = \int_{\partial K_2} \left(\Phi(x, y) \frac{\partial u_2(y)}{\partial v(y)} - u_2(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial v(y)} \right) ds_y, \quad x \in K_1$$

Άρα προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει:

$$u_1(x) = \int_{\partial K} \left(\Phi(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial v(y)} - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial v(y)} \right) ds_y, \quad x \in K_1 \quad (2.27)$$

όπου πρέπει να παρατηρήσουμε ότι οι συνεισφορές στο $\Gamma \cap \Omega$ αλληλοαναιρούνται. Κάνοντας την ίδια διαδικασία για $u_2 \in K_1$ και $u_1 \in K_2$ έχουμε:

$$u_2(x) = \int_{\partial K_1} \left(\Phi(x, y) \frac{\partial u_2(y)}{\partial v(y)} - u_2(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial v(y)} \right) ds_y, \quad x \in K_2$$

$$0 = \int_{\partial K_2} \left(\Phi(x, y) \frac{\partial u_1(y)}{\partial v(y)} - u_1(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial v(y)} \right) ds_y, \quad x \in K_2$$

Άρα προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει:

$$u_2(x) = \int_{\partial K} \left(\Phi(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial v(y)} - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial v(y)} \right) ds_y, \quad x \in K_2 \quad (2.28)$$

Άρα από τις (2.27), (2.28) τα δεύτερα μέλη συμπίπτουν οπότε η u είναι αναλυτική και επαληθεύει την $\Delta u + k^2 u = 0$, στο Ω \square

2.3 Οι ιδιότητες του πλάτους σκέδασης

Αρχικά θα αποδείξουμε την σχέση αμοιβαιότητας που συναντήσαμε και νωρίτερα, για το u_∞ . Αυτή μας δείχνει το γεγονός, ότι είναι το ίδιο να σκεδάζεται ένα αντικείμενο από την διεύθυνση $\hat{\theta}$ και να παρατηρείται από την $-\hat{x}$ και το αντίστροφο: σκέδαση από την \hat{x} και παρατήρηση από την $-\hat{\theta}$.

Θεώρημα 2.3.1 Αν $u_\infty(\hat{x}; \hat{\theta})$ είναι το πλάτος σκέδασης για την διεύθυνση παρατήρησης x και διεύθυνση του προσπίπτοντος κύματος $\hat{\theta}$ τότε:

$$u_\infty(\hat{x}; \hat{\theta}) = u_\infty(-\hat{\theta}; -\hat{x}), \quad \forall \hat{x}, \hat{\theta} \in S^2 \quad (2.29)$$

Απόδειξη.

Έστω το χωρίο $D = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = a\}$. Από το θεώρημα *Green* για τα u^i, u^s στο εσωτερικό και στο εξωτερικό του D αντίστοιχα έχουμε:

$$0 = \int_{|y|=a} \left(u^i(y, \hat{\theta}) \frac{\partial u^i(y, -\hat{x})}{\partial v} - u^i(y, -\hat{x}) \frac{\partial u^i(y, \hat{\theta})}{\partial v} \right) ds_y \quad (2.30)$$

$$0 = \int_{|y|=a} \left(u^s(y, \hat{\theta}) \frac{\partial u^s(y, -\hat{x})}{\partial v} - u^s(y, -\hat{x}) \frac{\partial u^s(y, \hat{\theta})}{\partial v} \right) ds_y \quad (2.31)$$

Επίσης από την αναπαράσταση (2.26) έχουμε ,

$$u_\infty(\hat{x}, \hat{\theta}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left(u^s(y) \frac{\partial e^{-ik\hat{x}\cdot y}}{\partial v(y)} - e^{-ik\hat{x}\cdot y} \frac{\partial u^s(y)}{\partial v(y)} \right) ds_y \Rightarrow$$

$$4\pi u_\infty(\hat{x}, \hat{\theta}) = \int_{|y|=a} \left(u^s(y, \hat{\theta}) \frac{\partial u^i(y, -\hat{x})}{\partial v(y)} - u^i(y, -\hat{x}) \frac{\partial u^s(y, \hat{\theta})}{\partial v(y)} \right) ds_y$$

και όμοια:

$$4\pi u_\infty(-\hat{\theta}, -\hat{x}) = \int_{|y|=a} \left(u^s(y, -\hat{x}) \frac{\partial u^i(y, \hat{\theta})}{\partial v(y)} - u^i(y, \hat{\theta}) \frac{\partial u^s(y, -\hat{x})}{\partial v(y)} \right) ds_y$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω εξισώσεις και χρησιμοποιώντας τους τύπους (2.30), (2.31) και το γεγονός ότι το ολικό πεδίο $u = u^i + u^s$ έχουμε:

$$4\pi(u_\infty(\hat{x}, \hat{\theta}) - u_\infty(-\hat{\theta}, -\hat{x})) = \int_{|y|=a} \left(u(y, \hat{\theta}) \frac{\partial u(y, -\hat{x})}{\partial v(y)} - u(y, -\hat{x}) \frac{\partial u(y, \hat{\theta})}{\partial v(y)} \right) ds_y$$

Άρα με χρήση του 2^{ου} τύπου *Green* \Rightarrow

$$4\pi(u_\infty(\hat{x}, \hat{\theta}) - u_\infty(-\hat{\theta}, -\hat{x})) = \int_{|y|<a} \left(u(y, \hat{\theta}) \Delta u(y, -\hat{x}) - u(y, -\hat{x}) \Delta u(y, \hat{\theta}) \right) dy$$

Επειδή όμως για $|y| < a$ έχουμε: $\Delta u(y, \hat{\theta}) + k^2 n u(y, \hat{\theta}) = 0$, \Rightarrow

$$4\pi(u_\infty(\hat{x}, \hat{\theta}) - u_\infty(-\hat{\theta}, -\hat{x})) = \int_{|y|<a} \left(u(y, \hat{\theta}) \Delta u(y, -\hat{x}) + u(y, -\hat{x}) k^2 n u(y, \hat{\theta}) \right) dy$$

$$= \int_{|y|<a} \left(u(y, \hat{\theta}) [\Delta u(y, -\hat{x}) + k^2 n u(y, -\hat{x})] \right) dy = 0$$

Άρα τελικά ισχύει η σχέση αμοιβαιότητας. □

Ορισμός 2.3.1 Τα πλάτη σκέδασης $u_\infty(\hat{x}, \hat{\theta})$, $\hat{x}, \hat{\theta} \in S^2$ ορίζουν τον ολοκληρωτικό τελεστή

$$Fg(\hat{x}) = \int_{S^2} u_\infty(\hat{x}, \hat{\theta})g(\hat{\theta})ds(\hat{\theta}) \quad (2.32)$$

τον οποίο ονομάζουμε τελεστή πλάτους σκέδασης. Ο F είναι συμπαγής στον $L^2(S^2)$ και με βάση αυτόν ορίζουμε τον τελεστή σκέδασης $S : L^2(S^2) \rightarrow L^2(S^2)$ ως:

$$S = I + \frac{ik}{2\pi}F \quad (2.33)$$

Τα επόμενα αποτελέσματα μας δίνουν κάποιες βασικές ιδιότητες για αυτούς τους τελεστές. Θα συμβολίζουμε με $(\cdot, \cdot)_{L^2(S^2)}$ το εσωτερικό γινόμενο στον χώρο L^2 το οποίο κατα τα γνωστά είναι: $(f, g)_{L^2(S^2)} = \int_{S^2} f(y)\overline{g(y)}dy$, $f, g \in L^2(S^2)$.

Λήμμα 2.3.1 Αν $g, h \in L^2(S^2)$ ορίζουμε τις κυματοσυναρτήσεις v^i, w^i ως:

$$v^i(x) = \int_{S^2} e^{ikx \cdot \hat{\theta}}g(\hat{\theta})ds(\hat{\theta}), \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (2.34)$$

$$w^i(x) = \int_{S^2} e^{ikx \cdot \hat{\theta}}h(\hat{\theta})ds(\hat{\theta}), \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (2.35)$$

Αν οι v, w είναι λύσεις του προβλήματος σκέδασης (2.17)–(2.18) για v^i, w^i δύο προσπίπτοντα πεδία αντίστοιχα τότε:

$$ik^2 \int_{K(0,a)} (\text{Im}n)v\bar{w}dx = 2\pi(Fg, h)_{L^2} - 2\pi(g, Fh)_{L^2} - ik(Fg, Fh)_{L^2}$$

Απόδειξη.

Έστω $v^s = v - v^i$ και $w^s = w - w^i$ τα σκεδαζόμενα πεδία με πλάτη σκέδασης v_∞, w_∞ αντίστοιχα. Τότε λόγω υπέρθεσης έχουμε: $v_\infty = Fg$ και $w_\infty = Fh$. Επίσης έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{K(0,a)} (v\Delta\bar{w} - \bar{w}\Delta v)dx &= -k^2 \int_{K(0,a)} (v\bar{w} \bar{n} - v\bar{w}n)dx = -k^2 \int_{K(0,a)} v\bar{w}(n - \bar{n})dx = \\ &= k^2 2i \int_{K(0,a)} v\bar{w}\text{Im}n dx \end{aligned}$$

όμως από τον 2^ο τύπο Green έχουμε:

$$\int_{K(0,a)} (v\Delta\bar{w} - \bar{w}\Delta v)dx = \int_{\partial K} \left(v \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} - \bar{w} \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds$$

άρα επειδή $v = v^i + v^s, w = w^i + w^s$ ισχύει ότι:

$$2ik^2 \int_{K(0,a)} v\bar{w}\text{Im}n dx = \int_{\partial K} \left(v \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} - \bar{w} \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds =$$

$$= \int_{\partial K} \left(v^i \frac{\partial \bar{w}^i}{\partial n} + v^s \frac{\partial w^i}{\partial n} + v^i \frac{\partial \bar{w}^s}{\partial n} + v^s \frac{\partial \bar{w}^s}{\partial n} - \bar{w}^i \frac{\partial v^i}{\partial n} - \bar{w}^s \frac{\partial v^s}{\partial n} - \bar{w}^i \frac{\partial v^s}{\partial n} - \bar{w}^s \frac{\partial v^i}{\partial n} \right) ds \quad (2.36)$$

Με χρήση του *Green* και της εξίσωσης *Helmholtz* έχουμε:

$$\int_{\partial K} \left(v^i \frac{\partial \bar{w}^i}{\partial n} - \bar{w}^i \frac{\partial v^i}{\partial n} \right) ds = \int_K (v^i \Delta \bar{w}^i - \bar{w}^i \Delta v^i) dx = \int_K (v^i \Delta \bar{w}^i + k^2 v^i \bar{w}^i) dx = 0$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\partial K} \left(v^s \frac{\partial \bar{w}^s}{\partial n} - \bar{w}^s \frac{\partial v^s}{\partial n} \right) ds = \int_{|x|=R} \left(v^s \frac{\partial \bar{w}^s}{\partial n} - \bar{w}^s \frac{\partial v^s}{\partial n} \right) ds \quad \text{έχουμε:}$$

$$v^s = \frac{e^{ikr}}{r} v_\infty(\hat{x}) + O(1/r^2) \Rightarrow \frac{\partial v^s}{\partial r} = \frac{ikr e^{ikr} - e^{ikr}}{r^2} v_\infty + O(1/r^3)$$

$$\bar{w}^s = \frac{e^{-ikr}}{r} \bar{w}_\infty(\hat{x}) + O(1/r^2) \Rightarrow \frac{\partial \bar{w}^s}{\partial r} = \frac{-ikr e^{-ikr} - e^{-ikr}}{r^2} \bar{w}_\infty + O(1/r^3)$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } v^s \frac{\partial \bar{w}^s}{\partial n} - \bar{w}^s \frac{\partial v^s}{\partial n} &= -\frac{ikr}{r^3} v_\infty \bar{w}_\infty - \frac{1}{r^2} v_\infty \bar{w} - \frac{ikr}{r^3} v_\infty \bar{w}_\infty + \frac{1}{r^2} v_\infty \bar{w} + O(1/r^3) = \\ &= -\frac{2ik}{r^2} v_\infty \bar{w}_\infty + O(1/r^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα έχουμε: } \int_{\partial K} \left(v^s \frac{\partial \bar{w}^s}{\partial n} - \bar{w}^s \frac{\partial v^s}{\partial n} \right) ds &= -2ik \int_{|x|=R} 1/r^2 v_\infty \bar{w}_\infty ds + O(1/r^3) = \\ &= -2ik \int_{|x|=R} v_\infty \bar{w}_\infty \sin \theta d\theta d\phi \xrightarrow{R \rightarrow \infty} -2ik \int_{S^2} v_\infty \bar{w}_\infty ds = -2ik(Fg, Fh) \end{aligned}$$

Τέλος για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} &\int_{\partial K} \left(v^i \frac{\partial \bar{w}^s}{\partial n} - \bar{w}^s \frac{\partial v^i}{\partial n} \right) ds \\ \text{έχουμε: } \int_{\partial K} \left(v^i \frac{\partial \bar{w}^s}{\partial n} - \bar{w}^s \frac{\partial v^i}{\partial n} \right) ds &= \int_{S^2} g(\theta) \int_{\partial K} \left(e^{ikx \cdot \hat{\theta}} \frac{\partial \bar{w}^s}{\partial n} - \bar{w}^s \frac{\partial e^{ikx \cdot \hat{\theta}}}{\partial n} \right) ds(x) ds(\hat{\theta}) \\ &= \int_{S^2} g(\hat{\theta}) w w_\infty(\hat{\theta}) ds(\hat{\theta}) = -4\pi(g, Fh) \end{aligned}$$

και όμοια:

$$\int_{\partial K} \left(v^s \frac{\partial \bar{w}^i}{\partial n} - \bar{w}^i \frac{\partial v^s}{\partial n} \right) ds = 4\pi(Fg, h)$$

Αντικαθιστώντας όλα τα παραπάνω στη εξίσωση (2.36) καταλήγουμε στην ζητούμενη:

$$ik^2 \int_{K(0,a)} (\text{Im}n) v \bar{w} dx = 2\pi(Fg, h)_{L^2} - 2\pi(g, Fh)_{L^2} - ik(Fg, Fh)_{L^2}$$

□

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε ότι ο τελεστής σκέδασης S είναι ορθομοναδιαίος για πραγματικό n .

Θεώρημα 2.3.2 Έστω $n \in C^2(\mathbb{R}^3)$ και ο φορέας της m , $\text{supp} m = \text{supp}(n-1) \subsetneq K(0, a)$. Τότε ο F είναι κανονικός, δηλαδή $F^*F = FF^*$ και ο S ορθομοναδιαίος δηλαδή $S^*S = SS^* = I$.

Απόδειξη.

Από το προηγούμενο λήμμα, αφού $\text{Im } n = 0$ έχουμε:

$$ik(Fg, Fh) = 2\pi(Fg, h) - 2\pi(g, Fh) \quad \forall g, h \in L^2(S^2). \quad (2.37)$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας την σχέση αμοιβαιότητας:

$$\begin{aligned} F^*g &= \int_{S^2} \overline{u_\infty(\hat{\theta}, \hat{x})} g(\hat{\theta}) ds(\hat{\theta}) = \int_{S^2} \overline{u_\infty(-\hat{x}, -\hat{\theta})} g(\hat{\theta}) ds(\hat{\theta}) = \int_{S^2} \overline{u_\infty(-\hat{x}, \hat{\theta})} g(-\hat{\theta}) ds(-\hat{\theta}) \\ &= \int_{S^2} u_\infty(-\hat{x}, \hat{\theta}) \overline{g(-\hat{\theta})} ds(\hat{\theta}) \end{aligned}$$

Άρα $F^*g = \overline{RFR\bar{g}}$, όπου $Rf(\hat{x}) := f(-\hat{x}), \hat{x} \in S^2$. Σημειώνοντας ότι $(Rg, Rh)_{L^2} = (g, h)_{L^2} = (\bar{h}, \bar{g})_{L^2}$, $\forall g, h \in L^2(S^2)$ και χρησιμοποιώντας την (2.37) καταλήγουμε ότι:

$$\begin{aligned} ik(F^*, h, F^*g) &= ik(RFR\bar{g}, RFR\bar{h}) = ik(FR\bar{g}, FR\bar{h}) = 2\pi(FR\bar{g}, R\bar{h}) - 2\pi(R\bar{g}, FR\bar{h}) = \\ 2\pi(RFR\bar{g}, \bar{h}) - 2\pi(\bar{g}, RFR\bar{h}) &= 2\pi(h, F^*g) - 2\pi(F^*h, g) = 2\pi(Fh, g) - 2\pi(h, Fg) = ik(Fh, Fg) \end{aligned}$$

Άρα τελικά $F^*F = FF^*$.

Επίσης, από την σχέση (2.37) έχουμε:

$$-(g, ikFF^*h) = 2\pi(g, F^*h - Fh), \quad \forall g, h \in L^2(S^2), \Rightarrow ikFF^* = 2\pi(F - F^*)$$

Έτσι καταλήγουμε:

$$SS^* = \left(I - \frac{ik}{2\pi} F^* \right) \left(I + \frac{ik}{2\pi} F^* \right) = I + \frac{ik^2 FF^*}{2\pi} + \frac{ik(F - F^*)}{4\pi^2} = I + \frac{k^2 FF^*}{2\pi} + \frac{i^2 k^2 FF^*}{2\pi} = I$$

και όμοια $S^*S = I$, άρα ο S είναι ορθομοναδιαίος. \square

Είναι γνωστό ότι οι ιδιοτιμές ενός ορθομοναδιαίου τελεστή βρίσκονται στον μοναδιαίο κύκλο του \mathbb{C} . Από τον ορισμό $S = I + \frac{ik}{2\pi} F$ συμπεραίνουμε ότι οι ιδιοτιμές του F βρίσκονται στον κύκλο $|2\pi i/k - z| = 2\pi/k$ κέντρου $2\pi i/k$ και ακτίνας $2\pi/k$. Αυτό συμβαίνει για πραγματικούς δείκτες διάθλασης n .

Θα μελετήσουμε τώρα την εξίσωση πλάτους σκέδασης:

$$\int_{S^2} u_\infty(\hat{x}, \hat{\theta}) g(\hat{\theta}) ds(\hat{\theta}) = f(\hat{x}) \quad \text{ή} \quad Fg = f \quad \hat{x} \in S^2, \quad (2.38)$$

για διάφορες συναρτήσεις f . Θα δούμε ότι ο μηδενόχωρος αυτής της ολοκληρωτικής εξίσωσης συνδέεται με το ακόλουθο πρόβλημα ιδιοτιμών.

Εσωτερικό Πρόβλημα Διαπερατότητας (Interior Transmission Problem):

Να καθοριστούν τα $v, w \in C^2(K) \cap C^1(\bar{K})$ τέτοια ώστε:

$$\Delta v + k^2 v = 0, \quad \Delta w + k^2 n w = 0 \quad \text{στο } K, \quad (2.39)$$

$$v = w, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} \quad \text{στο } \partial K. \quad (2.40)$$

Θα αποδείξουμε το παρακάτω πολύ σημαντικό θεώρημα.

Θεώρημα 2.3.3 (α) Η συνάρτηση $g \in L^2(S^2)$ είναι λύση της ομογενούς ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$\int_{S^2} u_\infty(\hat{x}, \hat{\theta}) g(\hat{\theta}) ds(\hat{\theta}) = 0, \quad \hat{x} \in S^2 \quad (2.41)$$

αν και μόνο αν υπάρχει συνάρτηση $w \in C^2(K) \cap C^1(\bar{K})$ τέτοια ώστε το (v, w) να επιλύει τις (2.39), (2.40) όπου η v είναι μία κυματοσυνάρτηση Herglotz και ορίζεται ως

$$v(x) = \int_{S^2} e^{ikx \cdot \hat{y}} g(\hat{y}) ds(\hat{y}), \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (2.42)$$

(β) Έστω $z \in K$ σταθερό. Η ολοκληρωτική εξίσωση πρώτου είδους:

$$\int_{S^2} u_\infty(\hat{x}, \hat{\theta}) g(\hat{\theta}) ds(\hat{\theta}) = e^{-ikz \cdot \hat{x}}, \quad \hat{x} \in S^2 \quad (2.43)$$

έχει λύση στο $L^2(S^2)$ αν και μόνο αν το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\Delta v + k^2 v = 0, \quad \Delta w + k^2 n w = 0 \quad \text{στο } K, \quad (2.44)$$

$$w(x) - v(x) = \frac{e^{ik|x-z|}}{|x-z|}, \quad \frac{\partial w(x)}{\partial n} - \frac{\partial v(x)}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ik|x-z|}}{|x-z|} \quad \text{στο } \partial K. \quad (2.45)$$

έχει λύση (v, w) όπου η v είναι της μορφής (2.42).

Απόδειξη.

(α) Θα δείξουμε αρχικά το ευθύ. Έστω g μια λύση της ομογενούς ολοκληρωτικής εξίσωσης (2.41) και ορίζουμε μια συνάρτηση v της μορφής (2.42). Παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_{S^2} u_\infty(\hat{x}, \hat{\theta}) g(\hat{\theta}) ds(\hat{\theta})$$

είναι η υπέρθεση των πλατών σκέδασης και είναι μηδέν. Άρα για προσπίπτον πεδίο v , το πλάτος σκέδασης w_∞ που αντιστοιχεί στο σκεδαζόμενο w^s , θα είναι μηδέν. Το αντίστοιχο

ολικό πεδίο $w = v + w^s$ θα ικανοποιεί την *Helmholtz* $\Delta w + k^2 n w = 0$ στο \mathbb{R}^3 . Για το σκεδαζόμενο πεδίο $w^s = w - v$ ισχύει $\Delta w^s + k^2 w^s = 0$, $|x| > a$ και επειδή $w_\infty = 0$ έχουμε $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} |w^s(x)|^2 dx = 0$. Άρα από το λήμμα *Rellich* $w^s = 0$ για $|x| > a$. Έτσι έχουμε ότι $v - w = 0$ και $\frac{\partial(w-v)}{\partial n} = 0$ στο ∂K .

Για το αντίστροφο έστω ότι v μία *Herglotz* και έστω ότι υπάρχει w ώστε (v, w) να επιλύουν το πρόβλημα (2.39) – (2.40). Επεκτείνουμε την w σε όλο το \mathbb{R}^3 θέτοντας

$$w(x) = \begin{cases} w(x), & x \in K \\ v(x), & x \notin K \end{cases}$$

Άρα $w \in C^1(\mathbb{R}^3)$ και με βάση το λήμμα 2.2.2, $w \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Άρα η w ικανοποιεί την $\Delta w + k^2 n w = 0$, $x \in \mathbb{R}^3$. Άρα η συνάρτηση $w - v = 0$ στο συμπλήρωμα K^c και $\frac{\partial(w-v)}{\partial r} - ik(w-v) = O(1/r^2)$, για $r = |x| \rightarrow +\infty$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι η w είναι το ολικό πεδίο για πεδίο πρόσπτωσης v . Άρα το πλάτος σκέδασης w_∞ του σκεδαζόμενου $w - v$ είναι μηδέν. Οπότε, το w είναι η υπέρθεση των ολικών πεδίων $\int_{S^2} u(x, \hat{\theta}) g(\hat{\theta}) ds(\hat{\theta})$ και $0 = w_\infty(\hat{x}) = \int_{S^2} u_\infty(\hat{x}, \hat{\theta}) g(\hat{\theta}) ds(\hat{\theta})$. Άρα το θεώρημα ισχύει.

(β) Η απόδειξη του δεύτερου σκέλους είναι παραπλήσια του πρώτου. Έστω g η λύση του μη ομογενούς προβλήματος (2.43) και v μία *Herglotz*. Όπως στο (α), το $\int_{S^2} u_\infty(\hat{x}, \hat{\theta}) g(\hat{\theta}) ds(\hat{\theta})$ είναι η υπέρθεση των πλατών σκέδασης. Άρα για το προσπίπτον πεδίο v και το ολικό πεδίο w έχουμε $w_\infty = e^{-ikx \cdot x}$. Από το θεώρημα 2.2.3, η μόνη λύση της *Helmholtz* που ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας είναι ένα σφαιρικό κύμα $\frac{e^{ik|x-z|}}{|x-z|}$. Επειδή $z \in K$ το σκεδαζόμενο πεδίο $w - v$ πρέπει να ισούται $w - v = \frac{e^{ik|x-z|}}{|x-z|}$, στο K^c . Αυτό αποδεικνύει και το θεώρημα. \square

Σαν εφαρμογή του θεωρήματος βρίσκουμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες το πεδίο τιμών του τελεστή πλάτους σκέδασης F είναι πυκνό στο $L^2(S^2)$. Αυτό είναι εύκολο να γίνει καθώς το (α) του παραπάνω θεωρήματος μας δίνει τις συναρτήσεις g που ανήκουν στον πυρήνα του τελεστή F . Επίσης επειδή $(Fg, h)_{L^2} = (g, F^*h)$ για όλες τις $g, h \in L^2(S^2)$, έχουμε ότι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του πεδίου τιμών του F ισούται με τον μηδενόχωρο του συζυγούς F^* .

Θεώρημα 2.3.4 Ο μηδενόχωρος $\{h \in L^2(S^2) : F^*h = 0\}$ του συζυγούς τελεστή F^* , αποτελείται ακριβώς από όλες τις $h \in L^2(S^2)$ για τις οποίες οι αντίστοιχες συναρτήσεις *Herglotz*

$$v(x) := \int_{S^2} e^{ikx \cdot \hat{y}} \overline{h(-\hat{y})} ds(\hat{y}), \quad x \in \mathbb{R}^3$$

ικανοποιούν το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας (2.39) – (2.40) για κάποια $w \in C^2(K) \cap C^1(\overline{K})$.

Απόδειξη.

Έχουμε

$$F^*h = 0 \Leftrightarrow \int_{S^2} \overline{u_\infty(\hat{\theta}, \hat{x})} h(\hat{\theta}) ds(\hat{\theta}) = 0 \Leftrightarrow \int_{S^2} u_\infty(-\hat{x}, -\hat{\theta}) \overline{h(\hat{\theta})} ds(\hat{\theta}) = 0 \quad \forall x \in S^2$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση αμοιβαιότητας παίρνουμε:

$$F^*h = 0 \Leftrightarrow \int_{S^2} u_\infty(\hat{x}, \hat{\theta}) \overline{h(-\hat{\theta})} ds(\hat{\theta}) = 0 \quad \forall x \in S^2$$

Άρα εφαρμόζοντας το θεώρημα 2.3.3 προκύπτει το συμπέρασμα. \square

Από τα παραπάνω εξάγουμε το εξής σημαντικό πόρισμα:

Πόρισμα 2.3.1 *Το πεδίο τιμών του τελεστή F είναι πυκνό στον χώρο $L^2(S^2)$ αν το πρόβλημα (2.39) – (2.40) έχει μόνο τετριμμένη λύση $v = w = 0$.*

Στα επόμενα κεφάλαια θα γίνει λεπτομερέστερη μελέτη του εσωτερικού προβλήματος διαπερατότητας για την περίπτωση που ο δείκτης διάθλασης είναι πραγματικός και το πρόβλημα ακτινικά συμμετρικό αλλά και για τη γενική περίπτωση του μη ομογενούς μέσου.

2.4 Η μοναδικότητα του αντίστροφου προβλήματος

Σε αυτή την παράγραφο θα καθορίσουμε το αν η γνώση του πλάτους σκέδασης $u_\infty(\hat{x}, \hat{\theta})$ είναι αρκετή για να βρούμε τον δείκτη διάθλασης $n(x)$. Έστω λοιπόν δύο συναρτήσεις $n_1, n_2 \in C^2(\mathbb{R}^3)$ με $n_1(x) = n_2(x) = 1 \quad \forall |x| \geq a$ και τα αντίστοιχα πλάτη σκέδασης $u_{1,\infty}, u_{2,\infty}$. Αν τα πλάτη συμπίπτουν, θα δείξουμε ότι συμπίπτουν και οι δείκτες διάθλασης.

Αρχικά, για απλότητα, θεωρούμε τις προσεγγίσεις Born που συναντήσαμε νωρίτερα. Έστω $u_{1,\infty}^b(\hat{x}, \hat{\theta}) = u_{2,\infty}^b(\hat{x}, \hat{\theta})$, $\forall \hat{x} \in S^2$ και κάποιο $\hat{\theta} \in S^2$. Από την μορφή του u_∞^b ως μετασχηματισμός Fourier έχουμε: $m_1^\sim(k\hat{x} - k\hat{\theta}) = m_2^\sim(k\hat{x} - k\hat{\theta})$, $\forall \hat{x} \in S^2$ και κάποιο $\hat{\theta} \in S^2$ άρα έχουμε ότι οι μετασχηματισμοί συμπίπτουν σε κάποιο σύνολο της μορφής $\{k(\hat{x} - \hat{\theta}) : \hat{x}, \hat{\theta} \in S^2\}$, το οποίο περιγράφει μία μπάλα στο \mathbb{R}^3 κέντρου 0 και ακτίνας $2k$. Επειδή οι μετασχηματισμοί Fourier m_1^\sim, m_2^\sim είναι αναλυτικές συναρτήσεις, από την αρχή της αναλυτικής συνέχισης για αναλυτικές συναρτήσεις παίρνουμε ότι $m_1 = m_2$. Έτσι, από την γνώση του $\{u_\infty^b(\hat{x}, \hat{\theta}) : \hat{x}, \hat{\theta} \in S^2\}$ είναι (θεωρητικά) ικανό να μας δώσει τον δείκτη διάθλασης.

Θα δείξουμε τώρα ένα ανάλογο θεώρημα μοναδικότητας για το πλάτος σκέδασης [9]. Η απόδειξη γίνεται σε τρία βήματα, τα οποία θα κατασκευάσουμε σαν λήμματα. Αρχικά θεωρούμε έναν σταθερό δείκτη διάθλασης $n(x) = 1$ για $|x| \geq a$ και θα δείξουμε ότι η θήκη όλων των ολικών πεδίων που αντιστοιχούν στο πρόβλημα σκέδασης για επίπεδα προσπίπτοντα πεδία, είναι πυκνή στον χώρο των λύσεων της εξίσωσης Helmholtz στο $K(0, a)$.

Λήμμα 2.4.1 *Έστω $n \in C^2(\mathbb{R}^3)$ με $n(x) = 1$, για $|x| > a$. Έστω επίσης $u(\cdot, \hat{\theta})$ το ολικό πεδίο για προσπίπτον πεδίο $e^{ik\hat{\theta} \cdot x}$. Έστω $b > a$ και ορίζουμε τον χώρο:*

$$H = \{v \in C^2(K(0, a)) : \Delta v + k^2 n v = 0 \text{ και } K(0, b)\}.$$

Τότε το $\text{span}\{u(\cdot, \hat{\theta})|_{K(0, a)} : \hat{\theta} \in S^2\}$ είναι πυκνό στο $H|_{K(0, a)}$ σε σχέση με την L^2 νόρμα.

Απόδειξη.

Έστω $v \in \overline{H}$ με

$$(v, u(\cdot, \hat{\theta}))_{L^2} := \int_{K(0,a)} v(x) \overline{u(x, \hat{\theta})} dx = 0, \quad \forall \hat{\theta} \in S^2.$$

Από την εξίσωση Lippmann-Schwinger έχουμε $u = (I + T)^{-1}u^i$ και έτσι:

$$0 = (v, (I + T)^{-1}u^i(\cdot, \hat{\theta})) = ((I + T^*)^{-1}v, u^i(\cdot, \hat{\theta})), \quad \forall \hat{\theta} \in S^2.$$

θέτουμε $w := (I + T^*)^{-1}v$. Έτσι, $w \in L^2(K(0, a))$ και ικανοποιεί την εξίσωση για τον συζυγή τελεστή $T^* = \int_{K(0,a)} (1 - \overline{n(x)}) \overline{\Phi(x, y)} u(y) dy$:

$$v(x) = w(x) + k^2(1 - \overline{n(x)}) \int_{K(0,a)} \overline{\Phi(x, y)} w(y) dy, \quad x \in K[0, a],$$

αφού $w = (I + T^*)^{-1}v \Rightarrow v = (I + T^*)w$. Τώρα θέτουμε

$$\tilde{w}(x) := \int_{K(0,a)} \overline{w(y)} \Phi(x, y) dy, \quad x \in R^3.$$

Το $\tilde{w}(x)$ είναι ένα χωρικό δυναμικό με L^2 πυκνότητα το \overline{w} . Επίσης παραμένει μία λύση της εξίσωσης Helmholtz $\Delta \tilde{w} + k^2 \tilde{w} = 0$, για $|x| > a$, όπως έχουμε δείξει πιο πριν. Για το πλάτος σκέδασης που αντιστοιχεί στο \tilde{w} έχουμε:

$$\overline{\tilde{w}_\infty(\hat{\theta})} = 1/4\pi \int_{K(0,a)} e^{ik\hat{\theta} \cdot y} dy = 1/4\pi (w, u^i(\cdot, -\hat{\theta})) = 0, \quad \forall \hat{\theta} \in S^2.$$

Άρα από το λήμμα του Rellich έχουμε ότι $\tilde{w}(x) = 0$, $\forall x \notin K[0, a]$. Τώρα έστω $v_j \in H$ με $v_j \rightarrow v$ στο $L^2(K(0, a))$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{K(0,a)} \overline{v} v_j dx &= \int_{K(0,a)} \overline{w} v_j dx + k^2 \int_{K(0,a)} (1 - n) \tilde{w} v_j dx = \\ &= \int_{K(0,a)} \overline{w} v_j dx + k^2 \int_{K(0,a)} \tilde{w} [\Delta v_j + k^2 v_j] dx. \end{aligned}$$

Από τον ορισμό του \tilde{w} , και αλλάζοντας την σειρά ολοκλήρωσης παίρνουμε:

$$\int_{K(0,a)} \overline{v} v_j dx = \int_{K(0,a)} \overline{w(y)} \left(v_j(y) + \int_{K(0,a)} \Phi(x, y) [\Delta v_j + k^2 v_j] dx \right) dy$$

Άμα χρησιμοποιήσουμε τώρα την αναπαράσταση Green (θεώρημα 1.2.8) η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\int_{K(0,a)} \overline{v} v_j dx = \int_{K(0,a)} \overline{w(y)} \int_{|x|=a} \left(\Phi(\cdot, y) \frac{\partial v_j}{\partial \nu} - v_j \frac{\partial \Phi(\cdot, y)}{\partial \nu} \right) ds ds(y)$$

Επειδή όμως το v_j ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz $\Delta v_j + k^2 v_j = 0$, για $a < |x| < b$, μπορούμε να μετασχηματίσουμε το εσωτερικό ολοκλήρωμα από $\{x : |x| = a\}$ σε $\{x : |x| = c\}$ για κάποιο $a < c < b$. Άμα αλλάξουμε πάλι την σειρά ολοκλήρωσης έχουμε:

$$\int_{K(0,a)} \bar{v} v_j dx = \int_{|x|=c} \left(\tilde{w} \frac{\partial v_j}{\partial v} - v_j \frac{\partial \tilde{w}}{\partial v} \right) ds = 0$$

αφού $\tilde{w} = 0$, για $|x| > a$. Παίρνοντας τώρα $j \rightarrow \infty$, $\Rightarrow \int_{K(0,a)} \bar{v} v dx = 0 \Leftrightarrow (v, v)_{L^2} = \|v\|_{L^2}^2 = 0$. Άρα τελικά $v = 0$. Έτσι $\forall v \in \bar{H}$ με $(v, u(\cdot, \hat{\theta}))_{L^2} = 0 \Rightarrow v = 0$. Οπότε το $\text{span}\{u(\cdot, \hat{\theta})|_{K(0,a)} : \hat{\theta} \in S^2\}$ είναι πυκνό στο $H|_{K(0,a)}$. \square

Το δεύτερο λήμμα μας δίνει μία σχέση ορθογωνιότητας μεταξύ των λύσεων της εξίσωσης Helmholtz με διαφορετικούς δείκτες διάθλασης n_1, n_2 .

Λήμμα 2.4.2 Έστω $n_1, n_2 \in C^2(\mathbb{R}^3)$, δύο δείκτες διάθλασης με $n_1(x) = n_2(x) = 1 \forall |x| \geq a$ και υποθέτουμε ότι $u_{1,\infty}(\hat{x}, \hat{\theta}) = u_{2,\infty}(\hat{x}, \hat{\theta})$ για όλα τα $\hat{x}, \hat{\theta} \in S^2$. Τότε

$$\int_{K(0,a)} v_1(x) v_2(x) [n_1(x) - n_2(x)] dx = 0 \quad (2.46)$$

για όλες τις λύσεις $v_j \in C^2(K(0,a))$ της εξίσωσης Helmholtz $\Delta v_j + k^2 n_j v_j = 0$, $j = 1, 2$ στο $K(0,b)$, όπου $b > a$.

Απόδειξη.

Έστω v_1 μία λύση της $\Delta v_j + k^2 n_1 v_1 = 0$ στο $K(0,a)$. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο λήμμα πυκνότητας θα το δείξουμε για $v_2 = u_2(\cdot, \hat{\theta})$, $\hat{\theta} \in S^2$. Θέτουμε $u = v_1(\cdot, \hat{\theta}) - u_2(\cdot, \hat{\theta})$. Τότε το u ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz της μορφής:

$$\Delta u + k^2 n_1 u = k^2 (n_2 - n_1) u_2$$

αφού $\Delta u + k^2 n_1 u = \Delta v_1 - \Delta u_2 + k^2 n_1 v_1 - k^2 n_1 u_2 = k^2 n_2 u_2 - k^2 n_1 u_2$. Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση με v_1 και την Helmholtz για v_1 με u παίρνουμε:

$$\Delta u v_1 + k^2 n_1 u v_1 = k^2 (n_2 - n_1) u_2 v_1$$

$$\Delta v_1 u + k^2 n_1 v_1 u = 0$$

Αφαιρώντας κατά μέλη και ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$\int_{K(0,a)} (v_1 \Delta u - u \Delta v_1) dx = k^2 \int_{K(0,a)} (n_2 - n_1) u_2 v_1 dx$$

Άμα εφαρμόσουμε το δεύτερο θεώρημα Green στο αριστερό μέλος τότε:

$$\int_{\partial K(0,a)} \left(v_1 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v_1}{\partial n} \right) ds = k^2 \int_{K(0,a)} (n_2 - n_1) u_2 v_1 dx$$

Όμως $u = u_1(\cdot, \hat{\theta}) - u_2(\cdot, \hat{\theta}) = u_1 - v_1$, και $u_\infty = u_{1,\infty} - u_{2,\infty} = 0$. Άρα από το λήμμα του Rellich συνεπάγεται ότι $u = 0$ για $|x| > a$ οπότε τελικά το επιφανειακό ολοκλήρωμα μηδενίζεται. Έτσι τελικά:

$$\int_{K(0,a)} v_1(x)v_2(x)[n_1(x) - n_2(x)]dx = 0.$$

□

Το επόμενο βήμα είναι να δείξουμε ότι το σύνολο όλων των γινομένων u_1u_2 των λύσεων της Helmholtz $\Delta v_j + k^2n_jv_j = 0$ σε κάποιο φραγμένο χωρίο Ω είναι πυκνό στο $L^2(\Omega)$. Αρχικά θεωρούμε την περίπτωση $k = 0$,

Λήμμα 2.4.3 Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ένα φραγμένο χωρίο. Τότε το σύνολο

$$\{u_1u_2 : u_1, u_2 \text{ αρμονικές στο } \Omega\}$$

είναι πυκνό στο $L^2(\Omega)$.

Απόδειξη.

Έστω $g \in L^2(\Omega)$ τέτοια ώστε

$$\int_{\Omega} g(x)u_1(x)u_2(x)dx = 0$$

για όλες τις αρμονικές συναρτήσεις u_1 και u_2 . Σταθεροποιούμε ένα $y \in \mathbb{R}^3$ και ορίζουμε τα μιγαδικά διανύσματα $z^1, z^2 \in \mathbb{C}^3$ με ιδιότητες

$$z^1 \cdot z^1 = z^2 \cdot z^2 = 0 \text{ και } z^1 + z^2 = -iy.$$

Εδώ με $z \cdot z$ συμβολίζουμε το μιγαδικό γινόμενο $z \cdot z = \sum_{j=1}^3 z_j^2 \in \mathbb{C}$. Τέτοια διανύσματα z^1, z^2 υπάρχουν. Ορίζουμε τις συναρτήσεις $u_1 = e^{z^1 \cdot x}$, και $u_2 = e^{z^2 \cdot x}$ οι οποίες είναι αρμονικές στο \mathbb{R}^3 . Πράγματι:

$$\Delta u_1 = \frac{\partial^2 e^{z^1 \cdot x}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 e^{z^1 \cdot x}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e^{z^1 \cdot x}}{\partial x_3^2} = (z^1)^2 e^{z^1 x_1} + (z^1)^2 e^{z^1 x_2} + (z^1)^2 e^{z^1 x_3} = 0$$

και όμοια για το u_2 . Άρα έχουμε:

$$0 = \int_{\Omega} g(x)u_1(x)u_2(x)dx = \int_{\Omega} g(x)e^{(z^1+z^2) \cdot x}dx = \int_{\Omega} g(x)e^{-iy \cdot x}dx.$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $y \in \mathbb{R}^3$ έχουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της g είναι μηδέν σε όλο το \mathbb{R}^3 . Άρα τελικά $g = 0$ οπότε ισχύει η πυκνότητα. □

Η περίπτωσή μας είναι πιο περίπλοκη καθώς πρέπει να θεωρήσουμε γινομένα λύσεων διαφορικών εξισώσεων με μη σταθερούς συντελεστές. Η ιδέα είναι να κατασκευάσουμε λύσεις της Helmholtz $\Delta u + k^2nu = 0$ στο Ω , που συμπεριφέρονται ασυμπτωτικά σαν $e^{z \cdot x}$. Εδώ παίρνουμε $n = n_1$ ή n_2 . Για την απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος θα χρειαστούμε το εξής λήμμα:

Λήμμα 2.4.4 Έστω $a \in \mathbb{R}^3$ και $\hat{e} = (1, i, 0)^T \in \mathbb{C}^3$. Τότε, για κάθε $t > 0$ και για κάθε 2π -περιοδική συνάρτηση $g \in L^2(Q)$, όπου $Q = [-\pi, \pi]^3$, υπάρχει μοναδική 2π -περιοδική λύση $w = w_t(g) \in L^2(Q)$ για την διαφορική εξίσωση

$$\Delta w(x) + (2t\hat{e} - ia) \cdot \nabla w(x) - (it + 1/4)w(x) = g, \text{ στο } \mathbb{R}^3.$$

η λύση ορίζεται με την μεταβολική έννοια δηλαδή:

$$\int_{\mathbb{R}^3} w[\Delta\phi + (2t\hat{e} - ia) \cdot \nabla\phi - (it + 1/4)\phi]dx = \int_{\mathbb{R}^3} g\phi dx$$

και ικανοποιεί την εκτίμηση:

$$\|w\|_{L^2} \leq \frac{1}{t} \|g\|_{L^2(Q)} \text{ για όλα τα } g \in L^2(Q), t > 0.$$

Με βάση τα παραπάνω έχουμε:

Θεώρημα 2.4.1 Έστω $K(0, b) \subset \mathbb{R}^3$ μία μπάλα ακτίνας b και $n \in C^2(K(0, b))$ τέτοιο ώστε το $n - 1$ να έχει συμπαγή φορέα στο $K(0, a)$. Τότε υπάρχει $T > 0$ και $C > 0$ ώστε για όλα τα $z \in \mathbb{C}^3$ με $z \cdot z = 0$ και $|z| \geq T$ να υπάρχει μία λύση $u_z \in L^2(K(0, b))$ της διαφορικής εξίσωσης

$$\Delta u_z + k^2 n u_z = 0 \text{ στο } K(0, b) \quad (2.47)$$

της μορφής

$$u_z(x) = e^{z \cdot x} (1 + v_z(x)), \quad x \in K(0, b). \quad (2.48)$$

Επιπλέον, η v_z ικανοποιεί την εκτίμηση $\|v_z\|_{L^2} \leq C/|z|$ για όλα τα $z \in \mathbb{C}^3$ με $z \cdot z = 0$ και $|z| \geq T$.

Απόδειξη.

Η απόδειξη χωρίζεται σε δύο μέρη. Αρχικά θα κατασκευάσουμε την v_z μόνο για $z = t\hat{e}$, όπου $\hat{e} = (1, i, 0)^T \in \mathbb{C}^3$ και το t να είναι αρκετά μεγάλο. Στο δεύτερο μέρος θεωρούμε την γενικότερη περίπτωση αλλάζοντας την γεωμετρία.

Έστω $z = t\hat{e}$ για κάποιο $t > 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $K(0, b)$ περιέχεται στον κύβο $Q = [-\pi, \pi]^3 \subset \mathbb{R}^3$. Επιπλέον, θα κατασκευάσουμε μία λύση u_z της Helmholtz με την γενικευμένη (μεταβολική) έννοια δηλαδή μία συνάρτηση $u_z \in L^2(Q)$ τέτοια ώστε:

$$\int_Q u_z (\Delta\phi + k^2 n\phi) dx = 0$$

για κάθε $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ με φορέα που περιέχεται στο εσωτερικό του κύβου Q . Από συνθήκες ομαλοποίησης, αν η u_z είναι λύση του μεταβολικού προβλήματος, θα είναι και κλασσική λύση. Αντικαθιστούμε την προσέγγιση $u(x) = e^{t\hat{e} \cdot x} (1 + e^{-i/2x_1} w_t(x))$ στην εξίσωση Helmholtz (2.47). Θα δείξουμε ότι αυτό μας οδηγεί στην εξής διαφορική εξίσωση για το w_t :

$$\Delta w_t(x) + (2t\hat{e} - ia) \cdot \nabla w_t(x) - (it + 1/4)w_t(x) = -k^2 n(x)w_t(x) - k^2 n(x)e^{i/2x_1}, \text{ στο } Q$$

όπου $a = (1, 0, 0)$.

Πράγματι έχουμε

$$\begin{aligned}
\Delta u + k^2 n u &= 0 \Leftrightarrow \Delta (e^{t\hat{e}\cdot x} + e^{t\hat{e}\cdot x} e^{-i/2x_1} w_t(x)) + k^2 n (e^{t\hat{e}\cdot x} + e^{t\hat{e}\cdot x} e^{-i/2x_1} w_t(x)) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Delta e^{t\hat{e}\cdot x} + \Delta (e^{t\hat{e}\cdot x} e^{-i/2x_1} w_t(x)) + k^2 n e^{t\hat{e}\cdot x} + k^2 n e^{-i/2x_1} e^{t\hat{e}\cdot x} w_t(x) = 0 \Rightarrow \\
\Delta (e^{t\hat{e}\cdot x} e^{-i/2x_1}) w_t(x) &+ e^{t\hat{e}\cdot x} e^{-i/2x_1} \Delta w_t(x) + 2\nabla (e^{t\hat{e}\cdot x} e^{-i/2x_1}) \cdot_t(x) = -k^2 n e^{t\hat{e}\cdot x} - k^2 n e^{-i/2x_1} e^{t\hat{e}\cdot x} w_t(x) \\
\Rightarrow -\left(it + \frac{1}{4}\right) e^{t\hat{e}\cdot x} e^{-i/2x_1} w_t(x) &+ e^{t\hat{e}\cdot x} e^{-i/2x_1} \Delta w_t(x) + 2 \left(\left(t - \frac{i}{2}\right) e^{t\hat{e}\cdot x} e^{-i/2x_1}, ite^{t\hat{e}\cdot x} e^{-i/2x_1}, 0 \right) \cdot \nabla w_t(x) \\
&= -k^2 n e^{t\hat{e}\cdot x} - k^2 n e^{-i/2x_1} e^{t\hat{e}\cdot x} w_t(x) \\
\Rightarrow -\left(it + \frac{1}{4}\right) w_t(x) &+ \Delta w_t(x) + (2t\hat{e} - ia) \cdot \nabla w_t(x) = -k^2 n e^{i/2x_1} - k^2 n w_t(x)
\end{aligned}$$

θα υπολογίσουμε μία 2π -περιοδική λύση της παραπάνω εξίσωσης. Αφού η εξίσωση έχει την μορφή του λήμματος 2.4.4 για $\alpha = 1/4$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τον επιλύων τελεστή L_t και να γράψουμε την εξίσωση στην μορφή:

$$w_t + k^2 L_t(nw_t) = L_t \tilde{n} \quad \text{στο } Q, \quad (2.49)$$

όπου θέσαμε $\tilde{n}(x) = -k^2 n(x) e^{i/2x_1}$. Για μεγάλες τιμές του t , ο τελεστής $K_t : w \mapsto k^2 L_t(nw)$, είναι συστολή στο $L^2(Q)$. Πράγματι:

$\|K_t w\|_{L^2} = k^2 \|L_t(nw)\|_{L^2} \leq \frac{k^2}{t} \|nw\|_{L^2} \leq \frac{k^2 \|n\|_\infty}{t} \|w\|_{L^2}$ άρα $\|K_t\|_{L^2} < 1$ για αρκετά μεγάλο t . Για αυτές τις τιμές του t , η εξίσωση (2.49) έχει μοναδική λύση w_t . Επειδή η λύση εξαρτάται συνεχώς από το δεξί μέλος της εξίσωσης έχουμε ότι υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\|w_t\|_{L^2} \leq c \|L_t \tilde{n}\|_{L^2} \leq \frac{ck^2}{t} \|n\|_{L^2}, \quad \forall t > T \text{ και για κάποιο } T > 0.$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Green καταλήγουμε ότι με αυτή τη λύση w_t , η συνάρτηση $u(x) = e^{t\hat{e}\cdot x} [1 + e^{-i/2x_1} w_t(x)]$ είναι μία λύση της (2.47) με την μεταβολική έννοια. Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα για την ειδική περίπτωση όπου $z = t\hat{e}$.

Έστω τώρα $z \in \mathbb{C}^3$ τυχαίο, με $z \cdot z = 0$ και $|z| \geq T$. Από αυτό έχουμε ότι $|Re z| = |Im z|$ και $(Re z) \cdot (Im z) = 0$. Μπορούμε να γράψουμε το z στην μοναδική μορφή $z = t(\hat{a} + i\hat{b})$ με $\hat{a}, \hat{b} \in S^2$ και $t > 0, \hat{a} \cdot \hat{b} = 0$. Ορίζουμε επίσης το εξωτερικό γινόμενο $\hat{c} = \hat{a} \times \hat{b}$ και τον ορθογώνιο πίνακα $R = [\hat{a}\hat{b}\hat{c}] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Έτσι έχουμε ότι $tR\hat{e} = z \Rightarrow R^\top z = t\hat{e}$. Η αντικατάσταση $x \mapsto Rx$ μετασχηματίζει την εξίσωση Helmholtz (2.47) στην:

$$\Delta w(x) + k^2 n(Rx)w(x) = 0, \quad x \in K(0, a),$$

για $w(x) = v(Rx)$, $x \in K(o, a)$. Εφαρμόζοντας το πρώτο μέρος της απόδειξης έχουμε ότι υπάρχει γενικευμένη λύση w για αυτήν την εξίσωση της μορφής:

$$w(x) = e^{t\hat{e}[1 + e^{\frac{-i}{2x_1}} w_t(R^\top x)]},$$

όπου το w_t ικανοποιεί την εκτίμηση $\|w_t\|_{L^2} \leq C/t$ για $t > T$. Επειδή $v(x) = w(R^\top x)$, καταλήγουμε ότι:

$$v(x) = e^{t\hat{e} \cdot R^\top x} [1 + e^{-i/2\hat{a} \cdot x} w_t(R^\top x)] = e^{z \cdot x} [1 + e^{-i/2\hat{a} \cdot x} w_t(R^\top x)].$$

Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα και σε αυτή την περίπτωση. \square

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε το επόμενο:

Θεώρημα 2.4.2 Έστω το $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, ένα φραγμένο χωρίο και έστω $n_1, n_2 \in C^2(\Omega)$ τέτοια ώστε $n_1 - 1$ και $n_2 - 1$ να έχουν συμπαγή φορέα στο Ω . Τότε το σύνολο

$$\{u_1 u_2 : u_j \in C^2(\bar{\Omega}) \text{ να επιλύει την (2.17) για } n = n_j, j = 1, 2\}$$

των γινομένων, είναι πυκνό στο $L^2(\Omega)$.

Απόδειξη.

Επιλέγουμε $b > 0$ τέτοιο ώστε το $\bar{\Omega}$ να περιέχεται στην μπάλα $K(0, b)$. Έστω $g \in L^2(\Omega)$ τέτοιο ώστε

$$\int_{\Omega} g(x) u_1(x) u_2(x) dx = 0$$

για όλες τις λύσεις $u_j \in C^2(\bar{\Omega})$ της εξίσωσης Helmholtz $\Delta u_j + k^2 n_j u_j = 0$ στο Ω , $j = 1, 2$. Η παραπάνω εξίσωση ισχύει για όλες τις λύσεις της Helmholtz στο $K(0, a)$.

Έστω ένα σταθερό διάνυσμα $y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ και ένας αριθμός $\rho > 0$. Επιλέγουμε ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{a} \in \mathbb{R}^3$, ένα διάνυσμα $b \in \mathbb{R}^3$ με $|b|^2 = |y|^2 + \rho^2$ τέτοιο ώστε το $\{y, \hat{a}, b\}$ να σχηματίζει ένα ορθοκανονικό σύστημα στο \mathbb{R}^3 . Ορίζουμε:

$$z^1 := \frac{1}{2}b - \frac{i}{2}(y + \rho\hat{a}) \quad \text{και} \quad z^2 := -\frac{1}{2}b - \frac{i}{2}(y - \rho\hat{a}).$$

Τότε $z^j \cdot z^j = |Re z^j|^2 - |Im z^j|^2 + 2i Re z^j \cdot Im z^j = |b|^2/4 - (|y|^2 + \rho^2)/4 = 0$ και $|z^j|^2 = (|b|^2 + |y|^2 + \rho^2)/4 \geq \rho^2/4$. Επίσης, $z^1 + z^2 = -iy$.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα 2.4.1 για την z^j στην εξίσωση Helmholtz $\Delta u_j + k^2 n_j u_j = 0$, στο $K(0, b)$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.48) έχουμε:

$$u_{z^1} = e^{z^1 \cdot x} \cdot x(1 + v_1(x)) \quad \text{και} \quad u_{z^2} = e^{z^2 \cdot x} \cdot x(1 + v_2(x)).$$

Άρα αφού ισχύει η ορθογωνιότητα $\int_{K(0,b)} g(x) u_1(x) u_2(x) dx = 0 \Rightarrow$

$$0 = \int_{K(0,b)} e^{(z^1+z^2) \cdot x} (1+v_1(x)) \cdot (1+v_2(x)) g(x) dx = \int_{K(0,b)} e^{-iy \cdot x} (1+v_1(x)+v_2(x)+v_1(x)v_2(x)) g(x) dx$$

Από το θεώρημα 2.4.1 έχουμε ότι υπάρχουν σταθερές $T > 0$ και $C > 0$ τέτοιες ώστε:

$$\|v_z\|_{L^2} \leq \frac{C}{|z|} \quad \forall z \in \mathbb{C}^3, \text{ με } z \cdot z = 0 \text{ και } |z| \geq T \quad \implies \quad \|v_j\|_{L^2} \leq \frac{C}{|z^j|} \leq \frac{2C}{\rho}.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την ανισότητα *Cauchy – Schwarz* και στέλνοντας το $\rho \rightarrow \infty$ καταλήγουμε στο

$$\int_{(0,b)} e^{-iy \cdot x} g(x) dx = 0.$$

Από αυτό συμπεραίνουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier $\tilde{m}g(x)$ του g μηδενίζεται. Άρα τελικά $g = 0$, οπότε το γινόμενο των λύσεων της Helmholtz είναι πυκνό στο $L^2(\Omega)$. \square

Χρησιμοποιώντας όλα τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούμε να αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα μοναδικότητας:

Θεώρημα 2.4.3 Έστω $n_1, n_2 \in C^2(\mathbb{R}^3)$ δύο δείκτες διάθλασης, με $n_1(x) = n_2(x) = 1$ για όλα τα $|x| \geq a$. Έστω επίσης $u_{1,\infty}, u_{2,\infty}$ τα αντίστοιχα πλάτη σκέδασης, τα οποία υποθέτουμε ότι συμπίπτουν, δηλαδή $u_{1,\infty}(\hat{x}, \hat{\theta}) = u_{2,\infty}(\hat{x}, \hat{\theta})$ για όλα τα $\hat{x}, \hat{\theta} \in S^2$. Τότε $n_1 = n_2$.

Απόδειξη.

Από το λήμμα ορθογωνιότητας 2.4.2 έχουμε ότι αν $u_{1,\infty}(\hat{x}, \hat{\theta}) = u_{2,\infty}(\hat{x}, \hat{\theta})$ τότε:

$$\int_{K(0,a)} v_1 v_2 [n_1(x) - n_2(x)] dx = 0$$

για όλες τις λύσεις v_j της εξίσωσης $\Delta v_j + k^2 n_j v_j = 0$ στο $K(0,b)$, $b > a$. Επίσης, από το θεώρημα πυκνότητας 2.4.2, για $\Omega = K(0,b)$ έχουμε ότι το σύνολο των λύσεων $\{v_1 v_2 : v_1, v_2 \in C^2(K(0,b))\}$ της Helmholtz είναι πυκνό στο $L^2(K(0,b))$. Άρα αν

$$\int_{K(0,b)} g(x) v_1(x) v_2(x) dx = 0 \Rightarrow g = 0.$$

Οπότε, αν πάρουμε $g = n_1 - n_2$ έχουμε τελικά ότι $n_1(x) = n_2(x) \quad \forall x$. \square

2.5 Η ασθενής μορφή του προβλήματος σκέδασης

Θα ολοκληρώσουμε το κεφάλαιο, γενικεύοντας τα μέχρι τώρα αποτελέσματα σε χώρους μη ομαλών συναρτήσεων. Στην παραπάνω μελέτη υποθέσαμε ότι ο δείκτης διάθλασης που χαρακτηρίζει το πρόβλημα σκέδασης (ευθύ και αντίστροφο), είναι μία συνάρτηση $n \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Επίσης, μελετήσαμε τις διαφορικές εξισώσεις με μεθόδους συνεχών συναρτήσεων. Υποθέτουμε τώρα ότι ο δείκτης διάθλασης είναι μία συνάρτηση $n \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ με $Re n(x) > 0$, $Im n(x) \geq 0$ σχεδόν για όλα τα $x \in \mathbb{R}^3$. Σε αυτή την περίπτωση το ευθύ πρόβλημα σκέδασης διατυπώνεται ως εξής:

Δεδομένων των $n, k, \hat{\theta}$ να καθορισθεί το $u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^3)$ τέτοιο ώστε

$$\Delta u + k^2 n u = 0 \quad \text{στο } \mathbb{R}^3 \tag{2.50}$$

και το σχεδαζόμενο πεδίο $u^s := u - u^i$ ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας

$$\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s = O(1/r^2), \quad r = |x| \rightarrow \infty \quad (2.51)$$

ομοιόμορφα για $x/|x| \in S^2$.

Επειδή το n δεν είναι ομαλή συνάρτηση, δεν μπορούμε να περιμένουμε να είναι ομαλή η λύση u . Σε αυτή την περίπτωση η λύση ανήκει σε έναν κατάλληλο χώρο Sobolev. Για κάθε ανοικτό σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ορίζουμε το χώρο:

$$H^1(\Omega) = \{u \in C^1(\Omega) : u, \nabla u \in L^2(\Omega)\}.$$

Ο χώρος αυτός εφοδιάζεται με την νόρμα $\|u\|_{H^1} = \sqrt{\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx}$. Ο H^1 αποτελεί χώρο Hilbert με εσωτερικό γινόμενο:

$$(u, v)_{H^1} := (u, v)_{L^2} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2}.$$

Ορίζουμε επίσης τον χώρο Sobolev:

$$H^1_{loc}(\Omega) = \{u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C} : u|_K \in H^1(K) \text{ για κάθε μπάλα } K(0, R)\}.$$

Ο H^1_{loc} εφοδιάζεται με την ίδια νόρμα, και είναι επίσης χώρος Hilbert.

Η λύση της εξίσωσης (2.50) ορίζεται με την ασθενή (μεταβολική) έννοια:

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u \cdot \nabla \psi - k^2 nu\psi) dx = 0$$

για κάθε $\psi \in H^1(\mathbb{R}^3)$ με συμπαγή φορέα.

Η παραπάνω σχέση προκύπτει ως εξής:

Πολλαπλασιάζουμε την σχέση (2.50) με μία δοκιμαστική συνάρτηση $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ και έχουμε $\Delta u\psi + k^2 nu\psi = 0$ στο \mathbb{R}^3 . Ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\Delta u\psi + k^2 nu\psi) dx = 0.$$

Χρησιμοποιώντας τον 1^ο τύπο του Green, και επειδή η ψ είναι δοκιμαστική συνάρτηση καταλήγουμε στο

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u \cdot \nabla \psi - k^2 nu\psi) dx = 0, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Από γνωστό θεώρημα εμφύτευσης, η παραπάνω σχέση ισχύει τελικά για κάθε $\psi \in H^1(\mathbb{R}^3)$ με συμπαγή φορέα.

Για $|x| > a$ το ολικό πεδίο u και το σχεδαζόμενο u^s ικανοποιούν την Helmholtz $\Delta u + k^2 nu = 0$. Είναι επίσης γνωστές οι συνθήκες ομαλοποίησης για το u και το u^s για $|x| > a$ και η

συνθήκη ακτινοβολίας είναι καλά ορισμένη.

Για το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης σε αυτή την περίπτωση, ισχύουν τα ίδια αποτελέσματα που έχουμε δείξει, όπου όμως θεωρούμε την λύση της Helmholtz με την ασθενή έννοια.

Για πληρότητα θα διατυπώσουμε το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας στην μεταβολική του μορφή.

Εσωτερικό πρόβλημα ιδιοτιμών

Να καθορίσουν τα $k > 0$ και $(v, w) \in H^1(\Omega)$ με $(v, w) \neq (0, 0)$ τέτοια ώστε:

$$\Delta v + k^2 v = 0, \quad \Delta w + k^2 n w = 0 \quad \text{στο } \Omega, \quad (2.52)$$

$$v = w, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} \quad \text{στο } \partial\Omega. \quad (2.53)$$

Επίσης θεωρούμε και την μη ομογενή εκδοχή του παραπάνω συστήματος:

Εσωτερικό Πρόβλημα Διαπερατότητας

Δεδομένων των f, g να καθορίσουν τα $(v, w) \in H^1(\Omega)$ τέτοια ώστε:

$$\Delta v + k^2 v = 0, \quad \Delta w + k^2 n w = 0 \quad \text{στο } \Omega, \quad (2.54)$$

$$w - v = f, \quad \frac{\partial w}{\partial n} - \frac{\partial v}{\partial n} = g \quad \text{στο } \partial\Omega. \quad (2.55)$$

Εδώ οι λύσεις των (2.52) – (2.53) και (2.54) – (2.55) εννοούνται με την ασθενή μορφή. Θεωρούμε ότι το ζεύγος (v, w) επιλύει το πρόβλημα (2.52) – (2.53) αν:

$$\int_{\Omega} (\nabla w \cdot \nabla \psi - k^2 n w \psi) dx = \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla \psi - k^2 v \psi) dx = 0, \quad (2.56)$$

για κάθε $\psi \in H^1(\Omega)$ με $\psi = 0$ στο $\partial\Omega$.

Αντίστοιχα, θεωρούμε ότι το ζεύγος (v, w) ότι επιλύει το πρόβλημα (2.54) – (2.55) αν:

$$\int_{\Omega} (\nabla w \cdot \nabla \psi - k^2 n w \psi) dx - \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla \psi - k^2 v \psi) dx = \int_{\partial\Omega} g \psi dx, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega). \quad (2.57)$$

Κεφάλαιο 3

Το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας

3.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε πως η μελέτη του προβλήματος σκέδασης μας οδήγησε σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων το οποίο ονομάζεται εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας. Το πρόβλημα αυτό είναι ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών το οποίο εμφανίζεται στην αντίστροφη θεωρία σκέδασης για μη ομογενή μέσα. Παρότι έχει απλή διατύπωση, δεν καλύπτεται από την κλασική θεωρία των ελλειπτικών διαφορικών εξισώσεων, καθώς δεν είναι ούτε ελλειπτικό ούτε αυτοσυζυγές. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το φάσμα που σχετίζεται με αυτό το συνοριακό πρόβλημα και ειδικότερα η ύπαρξη ιδιοτιμών οι οποίες ονομάζονται ιδιοτιμές διαπερατότητας (transmission eigenvalues). Εκτός από την θεωρητική σημασία που έχουν οι ιδιοτιμές του προβλήματος, πρόσφατα έχει αποδειχθεί ότι μπορούμε να ανακτήσουμε δεδομένα για τον δείκτη διάθλασης του μέσου από δεδομένα που μπορούν να μετρηθούν [2]. Αυτό βασίζεται στο σημαντικό γεγονός ότι οι ιδιοτιμές μπορούν να καθοριστούν από την μέτρηση δεδομένων μακριά από τις πηγές.

Για πληρότητα θα επαναδιατυπώσουμε ορισμένα σημαντικά αποτελέσματα από το προηγούμενο κεφάλαιο.

Θεωρούμε κατά τα γνωστά το πρόβλημα σκέδασης για μη ομογενές μέσο:

$$\Delta u + k^2 n(x)u = 0 \quad \text{στο } \mathbb{R}^3 \quad (3.1)$$

$$u = u^i + u^s \quad (3.2)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) = 0, \quad (3.3)$$

όπου $r = |x|$, το μη ομογενές χωρίο περικλείεται σε μία μπάλα B , η ταχύτητα του ήχου $c(x)$ είναι σταθερή ίση με c_0 για $x \in \mathbb{R}^3 \setminus B$ και ο δείκτης διάθλασης είναι

$$n(x) = \frac{c_0^2}{c^2(x)}.$$

Επίσης, ορίσαμε τον ολοκληρωτικό τελεστή πλάτους σκέδασης $F : L^2(S^2) \rightarrow L^2(S^2)$

$$(Fg)(\hat{x}) := \int_{S^2} u_\infty(\hat{x}, \hat{\theta})g(\hat{\theta})ds(\hat{\theta}), \quad (3.4)$$

όπου u_∞ είναι το πλάτος σκέδασης, $\hat{x} = x/|x|$ και $\hat{x}, \hat{\theta} \in S^2$ και S^2 είναι η μοναδιαία σφαίρα του \mathbb{R}^3 . Η σχέση που συνδέει το σκεδαζόμενο πεδίο με το πλάτος σκέδασης (ασυμπτωτική συμπεριφορά) είναι

$$u^s(x) = \frac{e^{ikr}}{r}u_\infty(\hat{x}, \hat{\theta}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (3.5)$$

Από την αρχή της υπέρθεσης έχουμε ότι το $(Fg)(\hat{x})$ είναι το πλάτος σκέδασης για το πρόβλημα (3.1) – (3.2) – (3.3) με προσπίπτον πεδίο u^i να είναι ίσο με την κυματοσυνάρτηση Herglotz v_g με πυρήνα g

$$v_g(x) := \int_{S^2} e^{ikx \cdot \hat{\theta}}g(\hat{\theta})ds(\hat{\theta}). \quad (3.6)$$

Από το θεώρημα 2.3.2 έχουμε ότι για πραγματικό $n \in C^2(\mathbb{R}^3)$ ο τελεστής σκέδασης $S := I + \frac{ik}{2\pi}F$ είναι ορθομοναδιαίος και ο τελεστής F είναι κανονικός. Είδαμε ακόμα ότι η μελέτη της εξίσωσης $Fg = f$ για διάφορες συναρτήσεις f μας οδήγησε στο εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας:

Να καθοριστούν τα $k > 0$ και $(v, w) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ με $(v, w) \neq (0, 0)$ τέτοια ώστε:

$$\Delta v + k^2v = 0, \quad \Delta w + k^2n(x)w = 0 \quad \text{στο } \Omega, \quad (3.7)$$

$$v = w, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} \quad \text{στο } \partial\Omega. \quad (3.8)$$

Σαν συνέπεια του θεωρήματος 2.3.3 αποδεικνύουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.1.1 *Ο τελεστής πλάτους σκέδασης F είναι 1-1 και με πυκνή εικόνα αν και μόνο αν δεν υπάρχει λύση $(v, w) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ για το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας, με v μια συνάρτηση Herglotz, πυρήνα g .*

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι το εσωτερικό πρόβλημα δεν έχει μη τετριμμένες λύσεις και ότι $(Fg)(\hat{x}) = 0, \forall \hat{x} \in S^2$. Άρα η υπέρθεση των σκεδαζόμενων πεδίων, λόγω του λήμματος Rellich είναι

$$U^s(x) := \int_{S^2} u^s(x, \hat{\theta})g(\hat{\theta})ds(\hat{\theta}) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}.$$

Αν $v = v_g$ το προσπίπτον, τότε θα ικανοποιεί το εσωτερικό πρόβλημα για w ίση με:

$$w(x) := \int_{S^2} u(x, \hat{\theta})g(\hat{\theta})ds(\hat{\theta}).$$

Όμως τότε από την υπόθεση πρέπει $v_g \equiv 0$. Άρα, από τον μετασχηματισμό Fourier προκύπτει ότι αναγκαστικά $g = 0$. Οπότε τελικά ο F είναι 1-1. Τέλος, η πυκνότητα του εικόννας του τελεστή F προκύπτει από το πόρισμα 2.3.1. \square

Θα ορίσουμε τώρα την έννοια της ιδιοτιμής για το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας, η οποία παίζει κεντρικό ρόλο στη συνέχεια.

Ορισμός 3.1.1 Οι τιμές $k > 0$ για τις οποίες το πρόβλημα (3.7) – (3.8) έχει μη τετριμμένη λύση ονομάζονται ιδιοτιμές του εσωτερικού προβλήματος διαπερατότητας. Οι αντίστοιχες μη τετριμμένες λύσεις (v, w) ονομάζονται ιδιοζεύγη.

Πόρισμα 3.1.1 Ο τελεστής πλάτους σκέδασης είναι 1-1 και έχει πυκνή εικόνα αν το $k > 0$ δεν είναι ιδιοτιμή για το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας.

Θα ολοκληρώσουμε την παράγραφο με την παρατήρηση ότι για μέσα με απορρόφηση, δηλαδή όταν ο δείκτης διάθλασης έχει μη μηδενικό φανταστικό μέρος, το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας δεν έχει πραγματικές ιδιοτιμές.

Θεώρημα 3.1.2 Αν $\text{Im}n > 0$ σε κάποιο ανοικτό σύνολο $A \subset \Omega$, τότε το πρόβλημα (3.7) – (3.8) δεν έχει πραγματικές ιδιοτιμές $k > 0$.

Απόδειξη.

Έστω (v, w) λύση του προβλήματος (με την μεταβολική έννοια), για κάποιο $k > 0$. Θέτουμε $\psi = \bar{w} - \bar{v}$ στην σχέση (2.56) και έχουμε:

$$\int_{\Omega} (\nabla w \cdot \nabla(\bar{w} - \bar{v}) - k^2 n w (\bar{w} - \bar{v})) dx = 0.$$

Επίσης, θέτουμε $\psi = \bar{v}$ στην εξίσωση (2.57), για $g = 0$ οπότε:

$$\int_{\Omega} (\nabla w \cdot \nabla \bar{v} - k^2 n w \bar{v}) dx - \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla \bar{v} - k^2 v \bar{v}) dx = 0.$$

Προσθέτοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\nabla w \cdot \nabla \bar{w} - k^2 n w \bar{w}) dx - \int_{\Omega} (\nabla w \cdot \nabla \bar{v} - k^2 n w \bar{v}) dx + \\ & \int_{\Omega} (\nabla w \cdot \nabla \bar{v} - k^2 n w \bar{v}) dx - \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla \bar{v} - k^2 v \bar{v}) dx = 0 \\ \Rightarrow & \int_{\Omega} (|\nabla w|^2 - k^2 n |w|^2) dx - \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 - k^2 |v|^2) dx = 0 \end{aligned}$$

Παίρνοντας τώρα το φανταστικό μέρος της παραπάνω εξίσωσης έχουμε

$$\int_{\Omega} \text{Im}n |w|^2 dx = 0.$$

Επειδή όμως έχουμε υποθέσει ότι $\text{Im}n \geq 0 \forall x$, και $\text{Im}n > 0$ στο ανοικτό σύνολο A , πρέπει $w = 0$ στο A . Άρα από την γενικευμένη αρχή της αναλυτικής συνέχισης (θεώρημα 2.2.1) πρέπει $w = 0$ σε όλο το Ω . Άρα τα συνοριακά δεδομένα Cauchy είναι $v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0$ στο $\partial\Omega$. Χρησιμοποιώντας πάλι την σχέση (2.57) για $g = 0$, και επεκτείνοντας την v μηδενικά έξω από το χωρίο Ω προκύπτει:

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\nabla v \cdot \nabla \psi - k^2 v \psi) dx = 0, \quad \forall \psi \in H^1(\mathbb{R}^2).$$

Οπότε τελικά, η αρχή της αναλυτικής συνέχισης μας δίνει ότι $v = 0$ στο Ω . Αφού λοιπόν καταλήξαμε στην τετριμμένη λύση $(v, w) = (0, 0)$ σημαίνει ότι το k δεν είναι ιδιοτιμή. \square

3.2 Η περίπτωση του μέσου με σφαιρικά στρώματα

Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να μελετήσουμε το πρόβλημα (3.7) – (3.8) όταν το μέσο είναι σφαιρικά διαστρωματωμένο [7], [10]. Για αυτή την περίπτωση, αρκετά αποτελέσματα είναι γνωστά, ειδικά όσον αφορά τις ιδιοτιμές. Το κύριο αποτέλεσμα που θα αποδείξουμε είναι ότι όταν ο δείκτης διάθλασης εξαρτάται μόνο από την ακτίνα και είναι πραγματικός τότε υπάρχουν άπειρες ιδιοτιμές, με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις.

Αρχικά υποθέτουμε ότι ο δείκτης διάθλασης $n(x)$ είναι σταθερός. Αν είναι ίσος με μονάδα, τότε δεν υπάρχει ανομοιογένεια, δεν σκεδάζονται κύματα και ο τελεστής σκέδασης είναι ταυτοτικά ίσος με μηδέν άρα κάθε $k > 0$ είναι ιδιοτιμή. Για να αποφύγουμε αυτή την περίπτωση υποθέτουμε ότι:

$$\frac{1}{a} \int_0^a [n(\rho)]^{\frac{1}{2}} d\rho \neq 1 \quad (3.9)$$

Θα αποδείξουμε τώρα το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.2.1 Υποθέτουμε ότι $n(x) = n(r)$, $\text{Im}n = 0$, $\frac{1}{a} \int_0^a [n(\rho)]^{\frac{1}{2}} d\rho \neq 1$ και $n(r) \in C^2(\overline{D})$ όπου $D := \{x : |x| < a\}$. Τότε υπάρχει ένα άπειρο διακριτό σύνολο από ιδιοτιμές με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις για το πρόβλημα (3.7) – (3.8).

Απόδειξη.

Θα περιοριστούμε σε λύσεις του (3.7) – (3.8) που εξαρτώνται μόνο από το $r = |x|$. Τότε η v πρέπει να έχει την μορφή

$$v(x) = a_0 j_0(kr)$$

όπου η j_0 είναι μία σφαιρική συνάρτηση Bessel τάξης 0 και a_0 μία σταθερά. Γράφοντας

$$w(x) = b_0 \frac{y(r)}{r}$$

με b_0 σταθερά τότε αν η y είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών:

$$y'' + k^2 n(r)y = 0 \quad (3.10)$$

με αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ τότε η συνάρτηση w ικανοποιεί την (3.7). Πράγματι, από τον ορισμό του τελεστή Laplace για σφαιρικές συντεταγμένες έχουμε:

$$\begin{aligned}\Delta w + k^2 n w &= \frac{\partial^2 (b_0 \frac{y(r)}{r})}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(b_0 \frac{y(r)}{r} \right) + k^2 n b_0 \frac{y(r)}{r} = \\ &= b_0 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{y'}{r} - \frac{y}{r^2} \right) + b_0 \frac{2y'}{r} - b_0 \frac{2y}{r^3} + k^2 n b_0 \frac{y}{r} = \\ &= b_0 \frac{y'' r - y'}{r^2} - b_0 \frac{y' r^2 - 2yr}{r^4} + b_0 \frac{2y'}{r^2} - b_0 \frac{2y}{r^3} + k^2 n b_0 \frac{y}{r} = \\ &= \frac{b_0}{r} y'' + \frac{b_0}{r} k^2 n y \stackrel{(3.10)}{=} 0\end{aligned}$$

Άρα ισχύει. Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τον μετασχηματισμό Liouville:

$$\zeta := \int_0^r [n(\rho)]^{\frac{1}{2}} d\rho, \quad z(\zeta) := [n(r)]^{\frac{1}{4}} y(r). \quad (3.11)$$

Θα αποδείξουμε ότι αυτός ο μετασχηματισμός μας οδηγεί στο εξής πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$z'' + [k^2 - p(\zeta)]z = 0 \quad (3.12)$$

$$z(0) = 0, \quad z'(0) = [n(0)]^{-\frac{1}{4}} \quad (3.13)$$

όπου

$$p(\zeta) := \frac{n''(r)}{4[n(r)]^2} - \frac{5}{16} \frac{[n'(r)]^2}{[n(r)]^3}. \quad (3.14)$$

Από τον ορισμό του μετασχηματισμού έχουμε:

$$z'(\zeta) = \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \zeta} = \left(\frac{1}{4} [n(r)]^{-\frac{3}{4}} n'(r) y(r) + [n(r)]^{\frac{1}{4}} y'(r) \right) [n(r)]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}z''(\zeta) &= \frac{\partial^2 z}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial}{\partial \zeta} z'(\zeta) = \frac{\partial z'}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \zeta} = \left(-\frac{5}{16} n(r)^{-\frac{9}{4}} [n'(r)]^2 y(r) + \frac{1}{4} [n(r)]^{-\frac{5}{4}} [n''(r)] y(r) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} [n(r)]^{-\frac{5}{4}} n'(r) y'(r) - \frac{1}{4} [n(r)]^{-\frac{5}{4}} n'(r) y'(r) + [n(r)]^{-\frac{1}{4}} y''(r) \right) [n(r)]^{-\frac{2}{4}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow z''(\zeta) = -\frac{5}{16} n(r)^{-\frac{11}{4}} [n'(r)]^2 y(r) + \frac{1}{4} [n(r)]^{-\frac{7}{4}} [n''(r)] y(r) + [n(r)]^{-\frac{3}{4}} y''(r) \quad (3.16)\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις σχέσεις (3.14) – (3.16) στην διαφορική εξίσωση (3.12) παίρνουμε

$$\begin{aligned}z'' + [k^2 - p(\zeta)]z &= -\frac{5}{16} n(r)^{-\frac{11}{4}} [n'(r)]^2 y(r) + \frac{1}{4} [n(r)]^{-\frac{7}{4}} [n''(r)] y(r) + [n(r)]^{-\frac{3}{4}} y''(r) + \\ &+ \left[k^2 - \frac{n''(r)}{4[n(r)]^2} - \frac{5}{16} \frac{[n'(r)]^2}{[n(r)]^3} \right] [n(r)]^{\frac{1}{4}} y(r) = [n(r)]^{-\frac{3}{4}} \left(y''(r) + k^2 n(r) y(r) \right) \stackrel{(2.10)}{=} 0\end{aligned}$$

Οπότε ισχύει. Το επόμενο βήμα είναι να μετασχηματίσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών για το $z(\zeta)$ σε μία ολοκληρωτική εξίσωση Volterra [11].

Το πρόβλημα έχει την γενική μορφή:

$$-(Lz)(\zeta) + \lambda r(\zeta) = h(\zeta)$$

$$z(0) = z_0, \quad z'(0) = z'_0$$

όπου $-(Lz)(\zeta) = z''(\zeta) + k^2 z(\zeta)$, $\lambda = 1$, $r(\zeta) = -p(\zeta)$ και $z(0) = 0$, $z'(0) = [n(0)]^{-\frac{1}{4}}$. Αρχικά βρίσκουμε δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς

$$(Lz)(\zeta) = 0 \Rightarrow z''(\zeta) + k^2 z(\zeta) = 0.$$

Κατά τα γνωστά, οι λύσεις είναι:

$$z_1(\zeta) = A \cos(k\zeta) \quad \text{και} \quad z_2(\zeta) = B \sin(k\zeta) \quad (3.17)$$

Για να υπολογίσουμε τις σταθερές A και B μπορούμε να επιλέξουμε τις λύσεις έτσι ώστε $z_1 z_2' - z_1' z_2 = 1$. Άρα έχουμε:

$$A \cos(k\zeta) B k \cos(k\zeta) + A k \sin(k\zeta) B \sin(k\zeta) = 1 \Rightarrow ABk = 1 \Rightarrow AB = \frac{1}{k}.$$

Επιλέγουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας $A = 1$ και $B = \frac{1}{k}$. Χρησιμοποιώντας τώρα τις αρχικές συνθήκες έχουμε:

$$z(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 z_1(0) + c_2 z_2(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 \cos(k \cdot 0) + c_2 \frac{1}{k} \sin(k \cdot 0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$z'(0) = [n(0)]^{-\frac{1}{4}} \Leftrightarrow c_2 \frac{1}{k} \cos(k \cdot 0) = [n(0)]^{-\frac{1}{4}} \Rightarrow c_2 = \frac{1}{[n(0)]^{\frac{1}{4}}}.$$

Άρα, η λύση γράφεται σαν ο γραμμικός συνδυασμός:

$$\begin{aligned} z(\zeta) &= c_1 z_1(\zeta) + c_2 z_2(\zeta) + \lambda \int_0^\zeta \{z_1(\eta) z_2(\zeta) - z_1(\zeta) z_2(\eta)\} r(\eta) z(\eta) d\eta \Rightarrow \\ z(\zeta) &= \frac{\sin(k\zeta)}{k[n(0)]^{\frac{1}{4}}} + \int_0^\zeta \left\{ \frac{1}{k} \cos(k\eta) \sin k\zeta - \frac{1}{k} \cos(k\zeta) \sin(k\eta) (-p(\eta)) z(\eta) \right\} d\eta \Rightarrow \\ z(\zeta) &= \frac{\sin(k\zeta)}{k[n(0)]^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{k} \int_0^\zeta \{ \cos(k\eta) \sin k\zeta - \cos(k\zeta) \sin(k\eta) p(\eta) z(\eta) \} d\eta \Rightarrow \\ z(\zeta) &= \frac{\sin(k\zeta)}{k[n(0)]^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{k} \int_0^\zeta \{ \sin k(\eta - \zeta) p(\eta) z(\eta) \} d\eta. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Η εξίσωση (3.18) αποτελεί μία ολοκληρωτική εξίσωση Volterra δευτέρου είδους. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων έχουμε ότι:

$$z(\zeta) = \frac{\sin(k\zeta)}{k[n(0)]^{\frac{1}{4}}} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad \text{και} \quad z'(\zeta) = \frac{\cos(k\zeta)}{[n(0)]^{\frac{1}{4}}} + O\left(\frac{1}{k}\right),$$

άρα από την σχέση (3.11) προκύπτει ότι

$$y(r) = \frac{1}{k[n(0)n(r)]^{\frac{1}{4}}} \sin\left(k \int_0^r [n(\rho)]^{\frac{1}{2}} d\rho\right) + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad (3.19)$$

$$y'(r) = \left[\frac{n(r)}{n(0)}\right]^{\frac{1}{4}} \cos\left(k \int_0^r [n(\rho)]^{\frac{1}{2}} d\rho\right) + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad (3.20)$$

ομοιόμορφα στο $[0, a]$.

Στο επόμενο βήμα, απαιτούμε να ισχύουν οι συνοριακές συνθήκες (3.8), άρα έχουμε:

$$w = v \quad \text{στο} \quad \partial D \quad \Leftrightarrow \quad b_0 \frac{y(a)}{a} = a_0 j_0(ka)$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} \quad \text{στο} \quad \partial D \quad \Leftrightarrow \quad b_0 \frac{d}{dr} \left(\frac{y(r)}{r}\right)_{r=a} = a_0 j_0'(kr)|_{r=a}$$

Ισοδύναμα

$$b_0 \frac{y(a)}{a} - a_0 j_0(ka) = 0$$

$$b_0 \frac{d}{dr} \left(\frac{y(r)}{r}\right)_{r=a} - a_0 j_0'(kr)|_{r=a} = 0$$

Το παραπάνω σύστημα έχει μη τετριμμένη λύση αν και μόνο αν η παρακάτω ορίζουσα είναι μηδέν

$$d := \det \begin{pmatrix} \frac{y(a)}{a} & -j_0(ka) \\ \frac{d}{dr} \left(\frac{y(r)}{r}\right)_{r=a} & -j_0'(kr)|_{r=a} \end{pmatrix} = 0$$

Για να υπολογίσουμε την ορίζουσα ορίζουμε αρχικά τις εξής ποσότητες:

$$B = \frac{1}{[n(0)n(a)]^{\frac{1}{4}}}, \quad C = \left(\frac{n(a)}{n(0)}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (3.21)$$

και

$$\delta = \frac{1}{a} \int_0^a [n(\rho)]^{\frac{1}{2}} d\rho. \quad (3.22)$$

Από τις σχέσεις (3.19) – (3.21) παίρνουμε

$$\frac{y(a)}{a} = \frac{1}{ka} B \sin(k\delta a) + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (3.23)$$

Επίσης έχουμε:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{y(r)}{r} \right)_{r=a} = \frac{y'(a)}{a} - \frac{y(a)}{a^2}$$

άρα από τις σχέσεις (3.20) – (3.21) παίρνουμε:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{y(r)}{r} \right)_{r=a} = \frac{C}{a} \cos(k\delta a) - \frac{1}{ka^2} B \sin(k\delta a) + O\left(\frac{1}{k}\right). \quad (3.24)$$

Για την σφαιρική συνάρτηση Bessel μηδενικής τάξης ισχύει ότι $j_0(kr) = \sin kr / kr$ άρα:

$$j_0(ka) = \frac{\sin ka}{ka} \quad (3.25)$$

Επίσης,

$$j_0'(kr) = \frac{k^2 r \cos(kr) - k \sin(kr)}{k^2 a^2}, \quad \text{άρα}$$

$$j_0'(ka) = \frac{\cos(a)}{ka} - \frac{\sin(ka)}{ka^2}. \quad (3.26)$$

Από τις σχέσεις (3.24), (3.25), (3.26), (3.27) μπορούμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα:

$$d = -\frac{1}{ka} B \sin(k\delta a) \left(\frac{\cos(a)}{ka} - \frac{\sin(ka)}{ka^2} \right) + \left(\frac{C}{a} \cos(k\delta a) - \frac{1}{ka^2} B \sin(k\delta a) \right) \frac{\sin ka}{ka} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

άρα τελικά

$$d = \frac{1}{ka^2} \{B \sin(k\delta a) \cos(ka) - C \cos(k\delta a) \sin(ka)\}. \quad (3.27)$$

Για να είναι μηδενική η ορίζουσα πρέπει $B \sin(k\delta a) \cos(ka) - C \cos(k\delta a) \sin(ka) = 0$. Θα διακρίνουμε περιπτώσεις:

Αν το δ είναι ένας ρητός αριθμός, διάφορος της μονάδας, τότε ο πρώτος όρος της εξίσωσης (3.27) είναι μία περιοδική συνάρτηση που παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές. Άρα για k αρκετά μεγάλο υπάρχει μία άπειρη ακολουθία από k , τέτοια ώστε η ορίζουσα να μηδενίζεται. Κάθε τέτοιος αριθμός k είναι ιδιοτιμή για το πρόβλημα διαπερατότητας οπότε αποδεικνύεται το θεώρημα σε αυτή την περίπτωση. Αν το $\delta = 0$ και $B = C$ τότε το d είναι ταυτοτικά μηδέν, αλλά αυτή η περίπτωση αποκλείεται από την υπόθεση. Τέλος, εάν το δ είναι άρρητος μπορούμε πάλι να ισχυριστούμε ότι ισχύει το θεώρημα. Πράγματι, σε αυτή την περίπτωση ο όρος είναι σχεδόν περιοδική συνάρτηση. Επειδή οι περιοδικές συναρτήσεις είναι και σχεδόν περιοδικές, και οι σχεδόν περιοδικές συναρτήσεις αποτελούν άλγεβρα μπορούμε να εξάγουμε το συμπέρασμα χρησιμοποιώντας τον ορισμό των σχεδόν περιοδικών συναρτήσεων. \square

Σαν συμπέρασμα, μπορούμε να διατυπώσουμε το παρακάτω πόρισμα

Πόρισμα 3.2.1 Για σφαιρικά συμμετρικό μέσο με $\text{Im}n = 0$, η εικόνα του τελεστή πλάτους σκέδασης δεν είναι πυκνή στο $L^2(S^2)$ για όλα τα άπειρα k που είναι ρίζες της ορίζουσας (3.27)

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην αντίστροφη θεωρία σκέδασης έχει το αν οι ιδιοτιμές του εσωτερικού προβλήματος διαπερατότητας μπορούν να καθορίσουν τον αντίστοιχο δείκτη διάθλασης $n(r)$. Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα δόθηκε μέσω του παρακάτω θεωρήματος [10]. Πριν διατυπώσουμε το θεώρημα ορίζουμε

$$A := \int_0^a [n(r)]^{\frac{1}{2}} dr$$

και σημειώνουμε ότι οι ιδιοτιμές k_j ικανοποιούν τη σχέση

$$k_j^2 = \frac{j^2 \pi^2}{(A - a)^2} + O(1),$$

με την προϋπόθεση ότι $n(a) = 1$ και ότι ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος 3.2.1.

Θεώρημα 3.2.2 Υποθέτουμε ότι $n_1(r)$ και $n_2(r)$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος 3.2.1 και ότι $n_1(a) = n_2(a) = 1$. Ορίζουμε A_i ως

$$A_i = \int_0^a [n_i(r)]^2 dr$$

για $i = 1, 2$. Υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε όλες οι ιδιοτιμές για n_1 και n_2 , οι οποίες είναι μεγαλύτερες από M , συμπίπτουν. Τότε $A_1 = A_2 = A$. Υποθέτουμε ακόμα ότι υπάρχει μία υπακολουθία από ιδιοτιμές που συμβολίζουμε με $k_j^2, j = 1, 2, \dots$ τέτοια ώστε

1) υπάρχει ένας θετικός ακέραιος m_0 με

$$|k_j^2| < \frac{(m + \frac{1}{2})^2 \pi^2}{(A - a)^2}$$

για $j = 1, 2, \dots, m$ και $m \geq m_0$, και

2) για $j > m_0$ όλα τα k_j^2 είναι πραγματικά και ικανοποιούν τη σχέση

$$|k_j^2| > \frac{(m_0 + \frac{1}{2})^2 \pi^2}{(A - a)^2}.$$

Τότε, αν $3A < a$ έχουμε ότι $n_1(r) = n_2(r)$, για $0 \leq r \leq a$.

3.3 Η γενική περίπτωση του μη ομογενούς μέσου

Θα μελετήσουμε τώρα την περίπτωση όπου το μέσο είναι μη ομογενές, δηλαδή έχει μεταβλητό δείκτη διάθλασης $n(x)$. Αυτό το πρόβλημα παραμένει ανοικτό όσον αφορά το φάσμα του εσωτερικού προβλήματος διαπερατότητας [3], [4], [5]. Θα δείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή με την προϋπόθεση ότι ο δείκτης διάθλασης είναι μικρότερος ή μεγαλύτερος από τη μονάδα μέσα στο μέσο, χωρίς όμως τον περιορισμό να είναι αρκετά μεγάλος. Για την ανάλυση

του προβλήματος θα κατασκευάσουμε ένα βοηθητικό πρόβλημα ιδιοτιμών για έναν αυτοσυζυγή, πιεστικό τελεστή ο οποίος εξαρτάται κατά ένα μη γραμμικό τρόπο από μία παράμετρο. Ειδικές τιμές αυτής της παραμέτρου αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του προβλήματος διαπερατότητας.

Έστω $D \subset \mathbb{R}^3$, ένα φραγμένο και απλά συνεκτικό χωρίο, με σύνορο Lipschitz ∂D . Το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας που αντιστοιχεί σε σκέδαση από ένα ισότροπο, μη ομογενές μέσο D στο \mathbb{R}^3 περιγράφεται από τις σχέσεις (3.7) – (3.8), για $\Omega \equiv D$. Οι συναρτήσεις w, v ανήκουν στον χώρο των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $L^2(D)$ έτσι ώστε $w - v \in H_0^2(D)$, όπου

$$H_0^2(D) = \left\{ u \in H^2(D) : u = 0 \text{ και } \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ στο } \partial D \right\}.$$

Εδώ υποθέτουμε ότι ο δείκτης διάθλασης είναι μία πραγματική συνάρτηση τέτοια ώστε $n \in L^\infty(D)$, $1/|n(x) - 1| \in L^\infty(D)$ και $n(x) \geq \delta > 0$ σχεδόν παντού στο D . (Όπως δείξαμε σε προηγούμενη παράγραφο, όταν ο δείκτης διάθλασης είναι μιγαδική συνάρτηση δεν υπάρχουν πραγματικές ιδιοτιμές). Θα μετατρέψουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών, σε ένα ισοδύναμο τέταρτης τάξης. Κατά τα γνωστά έχουμε το πρόβλημα

$$\Delta v + k^2 n(x)v = 0, \quad \Delta w + k^2 w = 0 \quad \text{στο } D,$$

$$v = w, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial w}{\partial \nu} \quad \text{στο } \partial D,$$

Θέτουμε $u = v - w$ και έχουμε

$$(\Delta + k^2)u = (\Delta + k^2)(v - w) = (\Delta + k^2)v$$

Προσθαιρώντας την ποσότητα $k^2 n v$, προκύπτει

$$(\Delta + k^2)u = (\Delta + k^2)v \pm k^2 n v = (\Delta + k^2 n)v + k^2 v - k^2 n v = k^2 v - k^2 n v = k^2(1 - n)v.$$

Άρα έχουμε

$$(\Delta + k^2 n) \frac{1}{n-1} (\Delta + k^2)u = (\Delta + k^2 n) \frac{1}{n-1} k^2(1-n)v = -(\Delta + k^2 n) k^2 v = 0$$

Οπότε προκύπτει η ισοδύναμη διαφορική εξίσωση τέταρτης τάξης

$$(\Delta + k^2 n) \frac{1}{n-1} (\Delta + k^2)u = 0, \quad \text{στο } D. \quad (3.28)$$

Για τις συνοριακές συνθήκες έχουμε $v - w = 0$, $\frac{\partial v}{\partial \nu} - \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0$ στο ∂D , άρα ισοδύναμα:

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{στο } \partial D. \quad (3.29)$$

Στην μεταβολική μορφή, η εξίσωση (3.28) γράφεται σαν το πρόβλημα εύρεσης μίας $u \in H_0^2(D)$ τέτοια ώστε

$$\int_D \frac{1}{n-1} (\Delta u + k^2 u) (\Delta \bar{v} + k^2 n \bar{v}) dx = 0 \quad \forall v \in H_0^2(D). \quad (3.30)$$

Θέτουμε $k^2 := \tau$, και ορίζουμε τις εξής φραγμένες ημιγραμμικές μορφές (sesquilinear) στο καρτεσιανό $H_0^2(D) \times H_0^2(D)$:

$$\mathcal{A}_\tau(u, v) = \left(\frac{1}{n-1} (\Delta u + \tau u), (\Delta v + \tau v) \right)_D + \tau^2 (u, v)_D, \quad (3.31)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_\tau(u, v) = \left(\frac{1}{n-1} (\Delta u + \tau n u), (\Delta v + \tau n v) \right)_D + \tau^2 (n u, v)_D \quad (3.32)$$

$$= \left(\frac{n}{n-1} (\Delta u + \tau u), (\Delta v + \tau v) \right)_D + (\Delta u, \Delta v)_D$$

και

$$\mathcal{B}(u, v) = (\nabla u, \nabla v)_D \quad (3.33)$$

όπου το $(\cdot, \cdot)_D$ συμβολίζει το εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(D)$. Τότε, η σχέση (3.30) μπορεί να γραφτεί σαν

$$\mathcal{A}_\tau(u, v) - \tau \mathcal{B}(u, v) = 0 \quad \forall v \in H_0^2(D), \quad (3.34)$$

είτε ως

$$\tilde{\mathcal{A}}_\tau(u, v) - \tau \mathcal{B}(u, v) = 0 \quad \forall v \in H_0^2(D). \quad (3.35)$$

Πράγματι, από τις σχέσεις (3.31) – (3.34) έχουμε

$$\begin{aligned} & \int_D \frac{1}{n-1} \Delta u \Delta \bar{v} dx + \tau \int_D \frac{1}{n-1} \Delta u \bar{v} dx + \tau \int_D \frac{1}{n-1} u \Delta \bar{v} dx \\ & + \tau^2 \int_D \frac{1}{n-1} u \bar{v} dx + \tau^2 \int_D u \bar{v} dx - \tau \int_D \nabla u \nabla \bar{v} dx = 0 \end{aligned}$$

Προσθαφαιρώντας το $\tau \int_D \Delta u \bar{v} dx$ έχουμε

$$\begin{aligned} & \int_D \frac{1}{n-1} \Delta u \Delta \bar{v} dx + \tau \int_D \frac{n}{n-1} \Delta u \bar{v} dx + \tau \int_D \frac{1}{n-1} u \Delta \bar{v} dx \\ & + \tau^2 \int_D \frac{n}{n-1} u \bar{v} dx - \tau \int_D \nabla u \nabla \bar{v} dx - \tau \int_D \Delta u \bar{v} dx = 0. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τον πρώτο τύπο Green καταλήγουμε στην σχέση

$$\int_D \frac{1}{n-1} \Delta u \Delta \bar{v} dx + \tau \int_D \frac{n}{n-1} \Delta u \bar{v} dx + \tau \int_D \frac{1}{n-1} u \Delta \bar{v} dx + \tau^2 \int_D \frac{n}{n-1} u \bar{v} dx = 0,$$

οπότε έχουμε την μεταβολική μορφή του προβλήματος (3.30). Όμοια και για την διατύπωση (3.35).

(Χρησιμοποιούμε διαφορετικούς συμβολισμούς \mathcal{A} και $\tilde{\mathcal{A}}$, για λόγους απλότητας όπως θα φανεί παρακάτω.) Ισχύει επίσης ότι $\tilde{\mathcal{A}}_\tau = -\mathcal{A}_\tau + 2\tau\mathcal{B}$.

Θα δείξουμε ότι για $\frac{1}{n(x)-1} > \gamma > 0$ σχεδόν παντού στο D η ημιγραμμική μορφή \mathcal{A}_τ είναι πιεστική. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\tau(u, u) &= \left(\frac{1}{n-1} (\Delta u + \tau u), (\Delta u + \tau u) \right)_D + \tau^2 (u, u)_D \geq \gamma \|\Delta u + \tau u\|_{L^2}^2 + \tau^2 \|u\|_{L^2}^2 \\ &\geq \gamma \|\Delta u\|_{L^2}^2 + \gamma \tau^2 \|u\|_{L^2}^2 + \tau^2 \|u\|_{L^2}^2 - 2\gamma \|\Delta u\|_{L^2} \|u\|_{L^2} = \gamma X^2 + (\gamma + 1)^2 Y^2 - 2\gamma XY \\ &= \varepsilon \left(Y - \frac{\gamma}{\varepsilon} X \right)^2 + \left(\gamma - \frac{\gamma^2}{\varepsilon} \right) X^2 + (1 + \gamma - \varepsilon) Y^2 \geq \left(\gamma - \frac{\gamma^2}{\varepsilon} \right) X^2 + (1 + \gamma - \varepsilon) Y^2 \quad (3.36) \end{aligned}$$

για $\gamma < \varepsilon < \gamma + 1$ και $X := \|\Delta u\|_{L^2}^2$, $Y := \|u\|_{L^2}^2$.

Επίσης, επειδή $\nabla u \in H_0^1(D)^2$ χρησιμοποιώντας την ανισότητα *Poincare* έχουμε

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{\lambda_0(D)} \|\Delta u\|_{L^2}^2, \quad (3.37)$$

όπου με $\lambda_0(D)$ συμβολίζουμε την πρώτη Dirichlet ιδιοτιμή της $-\Delta$ στο χωρίο D . Έτσι καταλήγουμε στο

$$\mathcal{A}_\tau(u, u) \geq C_\tau \|u\|_{L^2}^2$$

για C_τ κάποια θετική σταθερά και άρα η ημιγραμμική μορφή είναι πιεστική. Όμοια για $\frac{n(x)}{1-n(x)} > \gamma > 0$, η $\tilde{\mathcal{A}}_\tau$ είναι πιεστική. Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz ορίζουμε τους γραμμικούς φραγμένους τελεστές

$$\mathbb{A}_\tau : H_0^2(D) \rightarrow H_0^2(D), \quad \tilde{\mathbb{A}}_\tau : H_0^2(D) \rightarrow H_0^2(D) \text{ και } \mathbb{B} : H_0^2(D) \rightarrow H_0^2(D)$$

οι οποίοι συνδέονται με τις ημιγραμμικές μορφές ως εξής:

$$(\mathbb{A}_\tau u, v)_{H^2} = \mathcal{A}_\tau(u, v), \quad (\tilde{\mathbb{A}}_\tau u, v)_{H^2} = \tilde{\mathcal{A}}_\tau(u, v) \text{ και } (\mathbb{B}u, v)_{H^2} = \mathcal{B}(u, v).$$

Επίσης, επειδή ο δείκτης διάθλασης είναι πραγματικός, οι ημιγραμμικές μορφές είναι ερμιτιανές δηλαδή $\mathcal{A}_\tau(u, v) = \overline{\mathcal{A}_\tau(v, u)}$ και αντίστοιχα. Έτσι, οι τελεστές που ορίζονται από το θεώρημα Riesz είναι αυτοσυζυγείς. Πράγματι,

$$(\mathbb{A}_\tau u, u) = \mathcal{A}_\tau(u, u) = \overline{\mathcal{A}_\tau(u, u)} = (\mathbb{A}_\tau^* u, u), \quad \forall u \in H_0^2(D) \Rightarrow \mathbb{A}_\tau = \mathbb{A}_\tau^*$$

και όμοια για τους τελεστές $\tilde{\mathbb{A}}_\tau$ και \mathbb{B} . Επιπλέον, από τον ορισμό, ο \mathbb{B} είναι μη αρνητικός τελεστής και αν $\frac{1}{n(x)-1} > \gamma > 0$ ο \mathbb{A}_τ είναι θετικά ορισμένος. Αντίστοιχα για $\frac{n(x)}{1-n(x)} > \gamma > 0$, ο $\tilde{\mathbb{A}}_\tau$ είναι θετικά ορισμένος. Τέλος, για $u \in H_0^2(D)$ έχουμε $\nabla u \in H_0^1(D)^2$, και επειδή ο χώρος $H_0^1(D)^2$ εμφυτεύεται συμπαγώς στον $L^2(D)$, έχουμε ότι ο τελεστής $\mathbb{B} : H_0^2(D) \rightarrow H_0^2(D)$ είναι συμπαγής. Επίσης, οι $\mathbb{A}_\tau, \tilde{\mathbb{A}}_\tau$ εξαρτώνται συνεχώς από το τ .

Από τα παραπάνω, το $k > 0$ είναι ιδιοτιμή εάν για $\tau = k^2$ ο πυρήνας του τελεστή $\mathbb{A}_\tau - \tau\mathbb{B}$ ή $\tilde{\mathbb{A}}_\tau - \tau\mathbb{B}$ είναι μη τετριμμένος (για $\frac{1}{n(x)-1} > \gamma > 0$ ή $\frac{n(x)}{1-n(x)} > \gamma > 0$ αντίστοιχα). Προκειμένου να μελετήσουμε τον πυρήνα αυτών των τελεστών θεωρούμε το παρακάτω βοηθητικό πρόβλημα ιδιοτιμών

$$\mathbb{A}_\tau u - \lambda(\tau)\mathbb{B}u = 0 \quad u \in H_0^2(D) \quad (3.38)$$

εάν $1/(n(x) - 1) > \gamma > 0$ και

$$\tilde{\mathbb{A}}_\tau u - \lambda(\tau)\mathbb{B}u = 0 \quad u \in H_0^2(D) \quad (3.39)$$

εάν $n(x)/(1 - n(x)) > \gamma > 0$.

Για την μελέτη αυτών των προβλημάτων, θα χρησιμοποιήσουμε ένα πιο γενικό αποτέλεσμα σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert [5].

Έστω λοιπόν U ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο (\cdot, \cdot) . Τότε ισχύει το παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα 3.3.1 Έστω \mathbb{A} ένας φραγμένος, θετικά ορισμένος και αυτοσυζυγής τελεστής στο U και \mathbb{B} ένας μη αρνητικός, αυτοσυζυγής και συμπαγής γραμμικός τελεστής στο U . Τότε υπάρχει μία ακολουθία θετικών αριθμών $(\lambda_j)_{j \geq 1}$ και μία ακολουθία $(u_j)_{j \geq 1}$ από στοιχεία του U τέτοια ώστε $\mathbb{A}u_j = \lambda_j\mathbb{B}u_j$. Η ακολουθία $(u_j)_{j \geq 1}$ αποτελεί μία βάση του $(\ker(\mathbb{B}))^\perp$ και αν το $\ker(\mathbb{B})^\perp$ έχει άπειρη διάσταση τότε $\lambda_j \rightarrow +\infty$ για $j \rightarrow \infty$.

Το επόμενο θεώρημα είναι απαραίτητο για να δείξουμε την ύπαρξη ιδιοτιμής στο πρόβλημα διαπερατότητας.

Θεώρημα 3.3.2 Έστω $\tau \mapsto \mathbb{A}_\tau$ μία συνεχής απεικόνιση από το $[0, \infty]$ στο σύνολο των αυτοσυζυγών και θετικά ορισμένων γραμμικών τελεστών στο U και έστω \mathbb{B} ένας αυτοσυζυγής και μη αρνητικός συμπαγής γραμμικός τελεστής στο U . Υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο σταθερές $\tau_0 > 0$ και $\tau_1 > 0$ τέτοιες ώστε:

1. $\mathbb{A}_{\tau_0} - \tau_0\mathbb{B}$ είναι θετικός στο U ,

2. $\mathbb{A}_{\tau_1} - \tau_1\mathbb{B}$ είναι μη θετικός σε έναν m -διάστατο υπόχωρο του U .

Τότε κάθε μία από τις εξισώσεις $\lambda_j(\tau) = \tau$ για $j = 1, \dots, m$, έχει τουλάχιστον μία λύση στο $[\tau_0, \tau_1]$ όπου $\lambda_j(\tau)$ είναι η j -ιδιοτιμή του \mathbb{A} σε σχέση με το \mathbb{B} , δηλαδή $\ker(\mathbb{A}_\tau - \lambda_j(\tau)\mathbb{B}) \neq \{0\}$.

Επιστρέφοντας στο βοηθητικό πρόβλημα ιδιοτιμών και παίρνοντας $U := H_0^2(D)$, έχουμε ότι οι (3.38) και (3.39) έχουν ένα αριθμήσιμο πλήθος ιδιοτιμών $\{\lambda_j(\tau)\}_{j=1}^\infty$. Επίσης, κάθε $\lambda_j(\tau)$ είναι συνεχής συνάρτηση του τ και το $k > 0$ είναι ιδιοτιμή εάν το $\tau = k^2$ είναι μία ρίζα για κάθε μη γραμμική εξίσωση

$$\lambda_j(\tau) - \tau = 0. \quad (3.40)$$

Τώρα μπορούμε να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα που μας εξασφαλίζει την ύπαρξη τουλάχιστον μίας ιδιοτιμής για το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας, χωρίς την απαίτηση ο δείκτης διάθλασης να είναι αρκετά μεγάλος. Πριν το θεώρημα, θα παρουσιάσουμε κάποια γνωστά αποτελέσματα για τις ιδιοτιμές στο πρόβλημα διαπερατότητας

για μπάλα με σταθερό δείκτη διάθλασης. Έστω λοιπόν B να είναι μία μπάλα του \mathbb{R}^3 με δείκτη διάθλασης $n > 0, n \neq 1$ σταθερό. Το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας διατυπώνεται ως

$$\Delta w + k^2 n w = 0, \quad \text{στο } B,$$

$$\Delta v + k^2 v = 0, \quad \text{στο } B,$$

$$w = v \quad \text{στο } \partial B,$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} \quad \text{στο } \partial B.$$

Όπως δείξαμε στην παράγραφο 3.2, το παραπάνω πρόβλημα έχει ένα αριθμήσιμο διακριτό σύνολο ιδιοτιμών $\{k_j\}_{j=1}^\infty$. Έστω $v_j^{B,n}$ και $w_j^{B,n}$, μία μη μηδενική λύση του προβλήματος που αντιστοιχεί στην $k_j, j = 1, \dots$ ιδιοτιμή. Συμβολίζοντας $u_j^{B,n} := w_j^{B,n} - v_j^{B,n}$ έχουμε ότι $u_j^{B,n} \in H_0^2(B)$ και

$$\int_B \frac{1}{n-1} \left(\Delta u_j^{B,n} + k_j^2 u_j^{B,n} \right) \left(\Delta \bar{u}_j^{B,n} + k_j^2 n \bar{u}_j^{B,n} \right) dx = 0. \quad (3.41)$$

Η $u_j^{B,n}$ ονομάζεται ιδιοσυνάρτηση για το πρόβλημα διαπερατότητας, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή k_j .

Θα δείξουμε ότι για την εξίσωση (3.38) εάν $1/(n-1) > \gamma > 0$ και για την (3.39) εάν $n/(1-n) > \gamma > 0$, υπάρχουν τ_0 και τ_1 που ικανοποιούν τις υποθέσεις 1 και 2 του θεωρήματος 3.3.2.

Συμβολίζουμε $n_* = \inf_D(n)$ και $n^* = \sup_D(n)$, και υποθέτουμε ότι η αρχή του συστήματος συντεταγμένων είναι στο εσωτερικό του D .

Θεώρημα 3.3.3 Έστω $n \in L^\infty(D)$, το οποίο ικανοποιεί μία από τις παρακάτω περιπτώσεις

$$1) 1 + \alpha \leq n_* \leq n(x) \leq n^* < \infty,$$

$$2) 0 \leq n_* \leq n(x) \leq n^* < 1 - \beta,$$

για κάποια $\alpha > 0$ και $\beta > 0$, θετικές σταθερές. Τότε, υπάρχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή για το πρόβλημα διαπερατότητας.

Απόδειξη.

Αρχικά υποθέτουμε ότι ισχύει η περίπτωση 1). Έχουμε ότι $1 + \alpha \leq n_* \leq n(x) \leq n^* < \infty \Rightarrow 0 < \alpha \leq n_* - 1 \leq n(x) - 1 \leq n^* - 1 < \infty$. Άρα ισοδύναμα

$$0 < \frac{1}{n^* - 1} \leq \frac{1}{n(x) - 1} \leq \frac{1}{n_* - 1} \leq \infty$$

Άρα, από την ανάλυση που προηγήθηκε έχουμε ότι ο \mathbb{A}_τ είναι θετικά ορισμένος και αυτοσυζυγής γραμμικός, ενώ ο \mathbb{B} είναι μη αρνητικός, συμπαγής, αυτοσυζυγής γραμμικός τελεστής. Οπότε οι υποθέσεις του θεωρήματος 3.3.2 ικανοποιούνται. Θέλουμε να δείξουμε τώρα ότι

ικανοποιούνται και οι υποθέσεις 1. και 2. του θεωρήματος. Από τις σχέσεις (3.36), (3.37) έχουμε

$$\begin{aligned} (\mathbb{A}_\tau u - \tau \mathbb{B}u, u)_{H_0^2} &= (A_\tau u, u) - \tau (\mathbb{B}u, u) = \mathcal{A}_\tau(u, u) - \tau \mathcal{B}(u, u) = \mathcal{A}_\tau(u, u) - \tau \|\nabla u\|_{L^2}^2 \\ &\geq \left(\gamma - \frac{\gamma^2}{\varepsilon} \right) \|\Delta u\|_{L^2}^2 + (1 + \gamma - \varepsilon) \tau \|u\|_{L^2}^2 - \tau \|\nabla u\|_{L^2}^2 \\ &\geq \left(\gamma - \frac{\gamma^2}{\varepsilon} - \frac{\tau}{\lambda_0(D)} \right) \|\Delta u\|_{L^2}^2 + (1 + \gamma - \varepsilon) \tau \|u\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

για $\gamma = 1/(n^* - 1)$ και $\gamma < \varepsilon < \gamma + 1$. Άρα ο τελεστής $\mathbb{A}_\tau - \tau \mathbb{B}$ είναι θετικός υπο την προϋπόθεση $\tau < (\gamma - \gamma^2/\varepsilon)\lambda_0(D)$. Παίρνοντας $\varepsilon \sim \gamma + 1$, έχουμε ότι ο τελεστής θα είναι θετικός για $\tau < \gamma/(\gamma + 1) \Rightarrow \tau < \lambda_0(D)/n^*$. Άρα για κάθε θετικό αριθμό $\tau_0 < \lambda_0(D)/n^*$ ο τελεστής $\mathbb{A}_\tau - \tau \mathbb{B}$ είναι θετικός και άρα ικανοποιείται η υπόθεση 1. του θεωρήματος 3.3.2. Για την υπόθεση 2. έχουμε

$$\begin{aligned} (\mathbb{A}_\tau u - \tau \mathbb{B}u, u)_{H_0^2} &= \int_D \frac{1}{n-1} |\Delta u + \tau u|^2 dx + \tau^2 \int_D |u|^2 dx - \tau \int_D |\nabla u|^2 dx \\ &\leq \int_D \frac{1}{n_* - 1} |\Delta u + \tau u|^2 dx + \tau^2 \int_D |u|^2 dx - \tau \int_D |\nabla u|^2 dx \end{aligned} \quad (3.42)$$

Έστω τώρα $B_1 \subset D$ μία μπάλα που περιέχεται στο εσωτερικό του D . Έστω επίσης $u_1 := w_{j_0}^{B_1, n_*} - v_{j_0}^{B_1, n_*} \in H_0^2(B_1)$, μία ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή k_{j_0} για κάποιο j_0 , για το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας στην μπάλα B_1 με σταθερό δείκτη διάθλασης n_* , και $\tau_1 = k_{j_0}^2$. Η μηδενική επέκταση της u_1 σαν \tilde{u}_1 σε όλο το D είναι μία συνάρτηση του $H_0^2(D)$ και με βάση την (3.41) ικανοποιεί την

$$\int_D \frac{1}{n_* - 1} \left(\Delta \tilde{u}_1^{B_1, n_*} + \tau_1 \tilde{u}_1^{B_1, n_*} \right) \left(\Delta \tilde{u}_1^{\bar{B}_1, n_*} + \tau_1 n_* \tilde{u}_1^{\bar{B}_1, n_*} \right) dx = 0. \quad (3.43)$$

Από τις εξισώσεις (3.42) και (3.43) έχουμε τελικά ότι

$$(\mathbb{A}_{\tau_1} u_1 - \tau_1 \mathbb{B}u_1, u_1)_{H_0^2} \leq 0,$$

και άρα υπάρχει $\tau_1 > 0$ τέτοιο ώστε ο τελεστής $\mathbb{A}_{\tau_1} - \tau_1 \mathbb{B}$ να ικανοποιεί την υπόθεση 2. του θεωρήματος 3.3.2. Άρα τελικά υπάρχει $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$, $\tau = k^2$ τέτοιο ώστε η εξίσωση $\lambda(\tau) = \tau$ να έχει ρίζα και άρα το k είναι ιδιοτιμή του προβλήματος διαπερατότητας.

Τώρα υποθέτουμε ότι ισχύει η περίπτωση 2) του θεωρήματος. Έχουμε ότι $0 \leq n_* \leq n(x) \leq n^* < 1 - \beta \Rightarrow 1 > 1 - n_* \geq 1 - n \geq 1 - n^* > 1 - \beta$. Άρα ισοδύναμα

$$0 < \frac{n_*}{1 - n_*} \leq \frac{n}{1 - n} \leq \frac{n^*}{1 - n^*} < \infty$$

Έτσι, όπως πριν, οι τελεστές $\tilde{\mathbb{A}}_\tau$ και \mathbb{B} ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος 3.3.2. Για τις υποθέσεις 1. και 2. έχουμε κατά όμοιο τρόπο με την πρώτη περίπτωση

$$\left(\tilde{\mathbb{A}}_\tau u - \tau \mathbb{B}u, u \right)_{H_0^2} \geq \left(1 + \gamma - \varepsilon - \frac{\tau}{\lambda_0(D)} \right) \|\Delta u\|_{L^2}^2 + \tau \left(\gamma - \frac{\gamma^2}{\varepsilon} \right) \|u\|_{L^2}^2$$

για $\gamma = n_*/(1 - n_*)$ και $\gamma < \varepsilon < \gamma + 1$. Άρα ο τελεστής $\mathbb{A}_\tau - \tau\mathbb{B}$ είναι θετικός υπό την προϋπόθεση $\tau < (1 + \gamma - \varepsilon)\lambda_0(D)$. Παίρνοντας $\varepsilon \sim \gamma$, έχουμε ότι ο τελεστής θα είναι θετικός για $\tau < \lambda_0(D)$. Άρα για κάθε θετικό αριθμό $\tau_0 < \lambda_0(D)$ ο τελεστής $\mathbb{A}_\tau - \tau\mathbb{B}$ είναι θετικός και ικανοποιείται η υπόθεση 1. του θεωρήματος 3.3.2.

Για την υπόθεση 2. έχουμε ομοίως με τη πρώτη περίπτωση

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\mathbb{A}}_\tau u - \tau\mathbb{B}u, u \right)_{H_0^2} &= \int_D \frac{1}{n-1} |\Delta u + \tau u|^2 dx + \tau^2 \int_D |u|^2 dx - \tau \int_D |\nabla u|^2 dx \\ &\leq \int_D \frac{n^*}{n^* - 1} |\Delta u + \tau u|^2 dx + \tau^2 \int_D |u|^2 dx - \tau \int_D |\nabla u|^2 dx \end{aligned} \quad (3.44)$$

Πάλι θεωρούμε $B_1 \subset D$ μία μπάλα που περιέχεται στο εσωτερικό του D . Επίσης $u_1 := w_{j_0}^{b_1, n^*} - v_{j_0}^{b_1, n^*} \in H_0^2(B_1)$, μία ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή k_{j_0} για κάποιο j_0 , για το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας στην μπάλα B_1 με σταθερό δείκτη διάθλασης n^* , και $\tau_1 = k_{j_0}^2$. Η μηδενική επέκταση της u_1 σαν \tilde{u}_1 σε όλο το D είναι μία συνάρτηση του $H_0^2(D)$ και με βάση την (3.41) ικανοποιεί την

$$\int_D \frac{1}{n^* - 1} \left(\Delta \tilde{u}_1^{B_1, n^*} + \tau_1 \tilde{u}_1^{B_1, n^*} \right) \left(\Delta \bar{u}_1^{B_1, n^*} + \tau_1 n^* \bar{u}_1^{B_1, n^*} \right) dx = 0. \quad (3.45)$$

Από τις εξισώσεις (3.44) και (3.45) έχουμε τελικά ότι

$$\left(\tilde{\mathbb{A}}_{\tau_1} u_1 - \tau_1 \mathbb{B} u_1, u_1 \right)_{H_0^2} \leq 0,$$

και άρα υπάρχει $\tau_1 > 0$ τέτοιο ώστε ο τελεστής $\tilde{\mathbb{A}}_{\tau_1} - \tau_1 \mathbb{B}$ να ικανοποιεί την υπόθεση 2. του θεωρήματος 3.3.2. Άρα τελικά υπάρχει k το οποίο είναι ιδιοτιμή του προβλήματος διαπερατότητας και στην 2^η περίπτωση. \square

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να γενικευθεί στην ύπαρξη άπειρων διακριτών ιδιοτιμών για το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας [4]. Οι τεχνικές για την απόδειξη είναι αντίστοιχες με αυτές που προηγήθηκαν. Σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε m ανοικτές μπάλες ακτίνας $\varepsilon > 0$ ώστε $B_\varepsilon^j \subset D$, $j = 1 \dots m$ και $\overline{B_\varepsilon^j} \cap \overline{B_\varepsilon^i} = \emptyset$, $i \neq j$. Χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα με πριν αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.3.4 Έστω $n \in L^\infty(D)$, το οποίο ικανοποιεί μία από τις παρακάτω περιπτώσεις

1) $1 + \alpha \leq n_* \leq n(x) \leq n^* < \infty$,

2) $0 \leq n_* \leq n(x) \leq n^* < 1 - \beta$,

για κάποια $\alpha > 0$ και $\beta > 0$, θετικές σταθερές. Τότε, υπάρχει ένα άπειρο σύνολο από ιδιοτιμές με μόνο σημείο συσσώρευσης το $+\infty$ για το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας.

Κεφάλαιο 4

Το διακριτό αντίστροφο πρόβλημα διαπερατότητας

4.1 Η περιγραφή του προβλήματος

Σε αυτή την παράγραφο θα δείξουμε ότι το πρόβλημα υπολογισμού του δείκτη διάθλασης από την γνώση των ιδιοτιμών του προβλήματος διαπερατότητας μπορεί να αντιμετωπιστεί αριθμητικά λύνοντας ένα αντίστροφο τετραγωνικό πρόβλημα ιδιοτιμών. Για λόγους απλότητας, θα περιοριστούμε στην περίπτωση που το n είναι σταθερό.

Όπως δείξαμε στην παράγραφο 3.3, το πρόβλημα διαπερατότητας μπορεί να μετασχηματιστεί στο ισοδύναμο πρόβλημα τέταρτης τάξης:

$$(\Delta + k^2 n) \frac{1}{n-1} (\Delta + k^2) u = 0, \quad \text{στο } D. \quad (4.1)$$

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{στο } \partial D. \quad (4.2)$$

Στην μεταβολική διατύπωση, το πρόβλημα (4.1) – (4.2) για σταθερό n , είναι ισοδύναμο με την εύρεση μίας $u \in H_0^2(D)$, τέτοια ώστε

$$\int_D \frac{1}{n-1} (\Delta u + k^2 u) (\Delta \bar{\phi} + k^2 n \bar{\phi}) dx = 0, \quad \forall \phi \in H_0^2(D). \quad (4.3)$$

Ο χώρος Sobolev $H_0^2(D)$, ορίζεται για $v, w \in L^2(D)$ ως

$$H_0^2(D) = \{u \in H^2(D) : u = 0 \text{ και } \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ στο } \partial D\}.$$

Από την σχέση (4.3) ισοδύναμα ισχύει

$$\int_D \frac{1}{n-1} \Delta u \Delta \bar{\phi} dx + \int_D \frac{1}{n-1} \Delta u k^2 n \bar{\phi} dx + \int_D \frac{1}{n-1} k^2 u \Delta \bar{\phi} dx + \int_D \frac{1}{n-1} k^4 n u \bar{\phi} dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_D \Delta u \Delta \bar{\phi} dx + k^2 n \int_D \Delta u \bar{\phi} dx + k^2 \int_D u \Delta \bar{\phi} dx + k^4 n \int_D u \bar{\phi} dx = 0, \quad \forall \phi \in H_0^2(D) \quad (4.4)$$

Μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω σχέση για $k = k_0$, την μικρότερη ιδιοτιμή του προβλήματος με αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση u_0 . Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$\int_D \Delta u_0 \Delta \bar{\phi} dx + k_0^2 n \int_D \Delta u_0 \bar{\phi} dx + k_0^2 \int_D u_0 \Delta \bar{\phi} dx + k_0^4 n \int_D u_0 \bar{\phi} dx = 0, \quad \forall \phi \in H_0^2(D) \quad (4.5)$$

Προκειμένου να βρούμε τον δείκτη διάθλασης, πρέπει να υπολογίσουμε την ιδιοσυνάρτηση u_0 , αλλά αυτό δεν είναι δυνατόν να γίνει απευθείας γιατί η ιδιοσυνάρτηση εξαρτάται από το n . Για να ξεπεράσουμε αυτό το πρόβλημα θα χρησιμοποιήσουμε ένα πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων στον $H_0^2(D)$. Θεωρούμε ότι το $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι ένα σύνολο ιδιοσυναρτήσεων για το πρόβλημα:

$$\begin{aligned} L\phi_i &= \mu_i \phi_i, \quad \text{στο } D \\ \phi_i &= 0, \quad \frac{\partial \phi_i}{\partial \nu} = 0, \quad \text{στο } \partial D \end{aligned} \quad (4.6)$$

όπου ο L είναι ένας τέταρτης τάξης διαφορικός ελλειπτικός τελεστής. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιονδήποτε τελεστή L . Όταν ο L είναι η bilaplacian, $L = \Delta\Delta$, οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις είναι γνωστές για κύκλο (πρόβλημα πακτωμένης πλάκας). Θα χρησιμοποιήσουμε αυτό το πρόβλημα για να υπολογίσουμε τον σταθερό δείκτη διάθλασης σε κύκλο.

Έστω λοιπόν το σύνολο $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$, ώστε το u_0 να γράφεται ως: $u_0 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i$. Χρησιμοποιώντας την αριθμητική μέθοδο Galerkin στην εξίσωση (4.3) προσεγγίζουμε το u_0 σαν $u_0^{(N)} = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i$. Αντικαθιστώντας στην (4.3), και παίρνοντας σαν δοκιμαστικές συναρτήσεις τις ιδιοσυναρτήσεις ϕ_i , $i = 1, \dots, N$ έχουμε:

$$\sum_{j=1}^N \left[\int_D \Delta \bar{\phi}_i \Delta \phi_j dx + k_0^2 \int_D \Delta \bar{\phi}_i \phi_j dx + k_0^2 n \int_D \bar{\phi}_i \Delta \phi_j dx + k_0^4 n \int_D \bar{\phi}_i \phi_j dx \right] c_j = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.7)$$

Το παραπάνω σύστημα μπορεί να γραφτεί σε μορφή πινάκων

$$A^{(N)} \cdot \mathbf{c}^{(N)} + k_0^2 [B^{(N)} + nC^{(N)}] \cdot \mathbf{c}^{(N)} + nk_0^4 D^{(N)} \cdot \mathbf{c}^{(N)} = \mathbf{0} \quad (4.8)$$

όπου οι $N \times N$ πίνακες ορίζονται ως

$$A^{(N)} := \int_D \Delta \bar{\phi}_i \Delta \phi_j dx, \quad B^{(N)} := \int_D \Delta \bar{\phi}_i \phi_j dx, \quad C^{(N)} := \int_D \bar{\phi}_i \Delta \phi_j dx, \quad D^{(N)} := \int_D \bar{\phi}_i \phi_j dx. \quad (4.9)$$

Η εξίσωση (4.8) αποτελεί μία τυπική μορφή τετραγωνικού προβλήματος ιδιοτιμών. Αφού αυτό το σύστημα είναι μία πεπερασμένη προσέγγιση του (4.5), αναμένουμε οι ιδιοτιμές του να προσεγγίζουν τις πραγματικές ιδιοτιμές.

Το ευθύ πρόβλημα είναι η εύρεση των ιδιοτιμών από τη γνώση του D και του δείκτη διάθλασης n . Στο αντίστροφο πρόβλημα, βρίσκουμε το n από την γνώση του D και των N πρώτων ιδιοτιμών. Το πρόβλημα αυτό είναι μη γραμμικό και μπορεί να μετατραπεί σε ένα

αλγεβρικό πρόβλημα ιδιοτιμών εάν το αρχικό πρόβλημα γραμμικοποιηθεί, μετατραπεί δηλαδή σε ένα κλασσικό γραμμικό πρόβλημα ιδιοτιμών. Για την επίλυση του προβλήματος θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί η αριθμητική μέθοδος Newton ή άλλες μη γραμμικές μέθοδοι. Για την περίπτωση που ο δείκτης διάθλασης είναι σταθερός, θα συγκρίνουμε την μικρότερη υπολογισμένη ιδιοτιμή με την αντίστοιχη του προβλήματος πινάκων, για να προσεγγίσουμε το n .

4.2 Η περίπτωση του κυκλικού σχεδαστή

Θα επιλύσουμε το πρόβλημα που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο για D δίσκο ακτίνας $d = 1/2$. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά τις ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος για $L = \Delta\Delta$ καθώς και τις ιδιοτιμές του προβλήματος διαπερατότητας.

Για το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας (3.7) – (3.8) για δίσκο, θεωρώντας λύσεις με ακτινική συμμετρία έχουμε

$$w(r) = a_0 J_0(kr), \quad v(r) = b_0 J_0(k\sqrt{n}r) \quad (4.10)$$

όπου a_0, b_0 σταθερές και J_0 η συνάρτηση Bessel μηδενικής τάξης. Απαιτώντας να ισχύουν οι συνοριακές συνθήκες (για $r = 1/2$), έχουμε

$$a_0 J_0(k/2) = b_0 J_0(k\sqrt{n}/2)$$

$$a_0 \left. \frac{\partial J_0(kr)}{\partial r} \right|_{r=1/2} = b_0 \left. \frac{\partial J_0(k\sqrt{n}r)}{\partial r} \right|_{r=1/2}$$

Το παραπάνω σύστημα έχει μη τετριμμένη λύση αν και μόνο αν

$$\det \begin{pmatrix} J_0(k/2) & J_0(k\sqrt{n}/2) \\ -J_1(k/2) & -\sqrt{n}J_1(k\sqrt{n}/2) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.11)$$

Η πρώτη ιδιοτιμή είναι ο ελάχιστος θετικός αριθμός που μηδενίζει την παραπάνω ορίζουσα. Θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα για τον δίσκο στην περίπτωση που ο δείκτης διάθλασης παίρνει τιμές $2 \leq n \leq 20$. Χρησιμοποιώντας το mathematica μπορούμε να υπολογίσουμε τις ρίζες της παραπάνω ορίζουσας για τις διάφορες τιμές του n .

δείκτης διάθλασης n	ιδιοτιμή διαπερατότητας k_0
2	14,7503
3	8,31847
4	6,76839
6	3,69944
10	2,59261
12	2,33224
16	1,988
20	1,76309

Για να επιλύσουμε το πρόβλημα πινάκων (4.8) θα προχωρήσουμε ως εξής: Αρχικά θα υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του προβλήματος

$$\Delta\Delta\phi_i = \mu_i\phi_i \quad \text{στο } D, \quad (4.12)$$

$$\phi_i = 0, \quad \frac{\partial\phi_i}{\partial n} = 0 \quad \text{στο } \partial D. \quad (4.13)$$

Ισοδύναμα, [4], μπορούμε να γράψουμε την διαφορική εξίσωση ως

$$(\Delta - \sqrt{\mu_i})(\Delta + \sqrt{\mu_i})\phi_i = 0 \quad \text{στο } D.$$

Κάθε ιδιοσυνάρτηση ϕ_i μπορεί να γραφτεί ως $\phi_i = x_i + \psi_i$ όπου οι x_i, ψ_i ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$(\Delta - \sqrt{\mu_i})\psi_i = 0 \quad \text{στο } D, \quad (4.14)$$

$$(\Delta + \sqrt{\mu_i})x_i = 0 \quad \text{στο } D. \quad (4.15)$$

Η εξίσωση (4.15) αποτελεί την γνωστή μας εξίσωση Helmholtz με $k^2 = \sqrt{\mu_i}$ ενώ η εξίσωση (4.14) αποτελεί την τροποποιημένη εξίσωση Helmholtz. Οι λύσεις των παραπάνω διαφορικών εξισώσεων σε δίσκο έχουν την μορφή [12]:

$$\psi_i(r, \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} I_i(kr)(a_i \cos i\theta + b_i \sin i\theta) \quad (4.16)$$

και

$$x_i(r, \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} J_i(kr)(c_i \cos i\theta + d_i \sin i\theta) \quad (4.17)$$

όπου $k = (\mu_i)^{1/4}$.

Από τις συνοριακές συνθήκες (4.13), για $r = 1/2$ έχουμε:

$$(a_i \cos i\theta + b_i \sin i\theta)I_i(k/2) + (c_i \cos i\theta + d_i \sin i\theta)J_i(k/2) = 0$$

$$(a_i \cos i\theta + b_i \sin i\theta)kJ'_i(k/2) + (c_i \cos i\theta + d_i \sin i\theta)kJ'_i(k/2) = 0.$$

Το παραπάνω σύστημα έχει μη τετριμμένη λύση αν και μόνο αν

$$\det \begin{pmatrix} J_i(k/2) & J'_i(k/2) \\ I_i(k/2) & I'_i(k/2) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.18)$$

Χρησιμοποιώντας το mathematica μπορούμε να υπολογίσουμε τις ρίζες της παραπάνω ορίζουσας για $i \geq 0$. Οι πέντε πρώτες ρίζες είναι

$k_0 = 6.39244$
$k_1 = 9.2218$
$k_2 = 11.8114$
$k_3 = 12.6129$
$k_4 = 14.2871$

Μπορούμε τώρα να πάρουμε τις πέντε πρώτες ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στις παραπάνω ιδιοτιμές στη μορφή

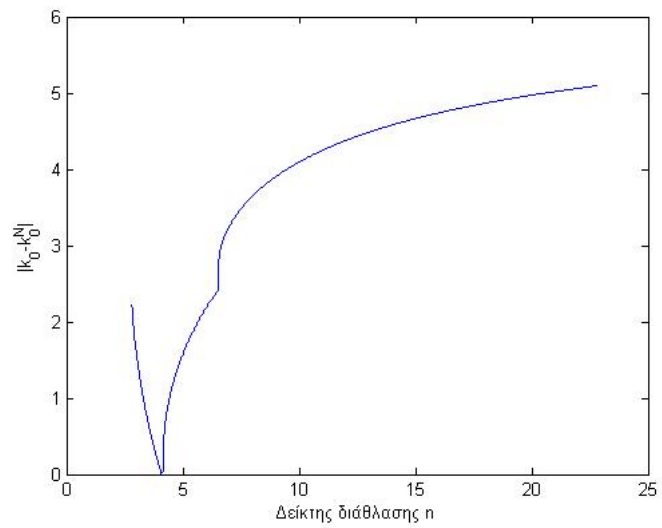
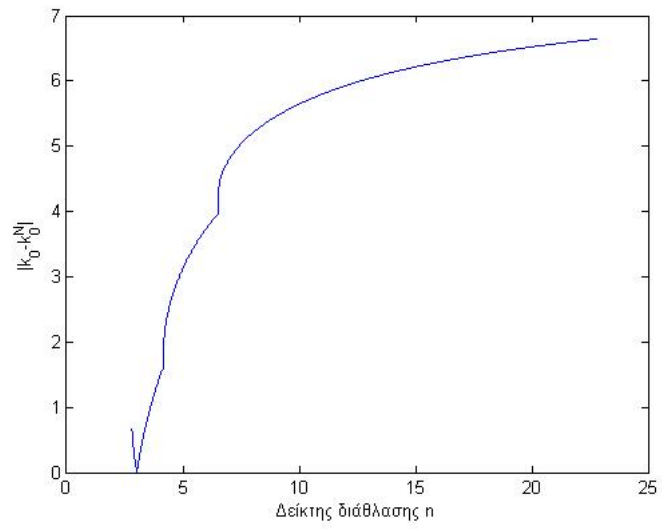
$$\phi_i = (I_i(kr) + J_i(kr))(a_i \cos i\theta + \beta_i \sin i\theta), \quad i = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Από τις συνοριακές συνθήκες (4.13) μπορούμε να υπολογίσουμε τις σταθερές a_i, β_i (όπου μπορούμε να κάνουμε την βάση και ορθοκανονική). Αφού λοιπόν κατασκευάσαμε την βάση μπορούμε να υπολογίσουμε αριθμητικά τους πίνακες $A^{(N)}, B^{(N)}, C^{(N)}, D^{(N)}$ που εμφανίζονται στην εξίσωση (4.8).

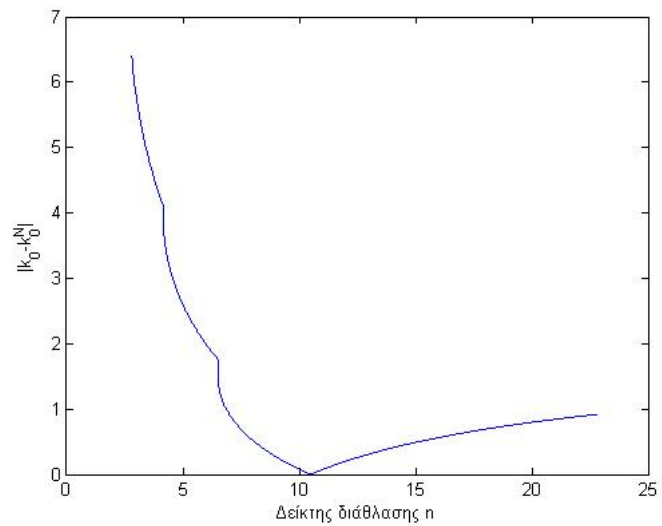
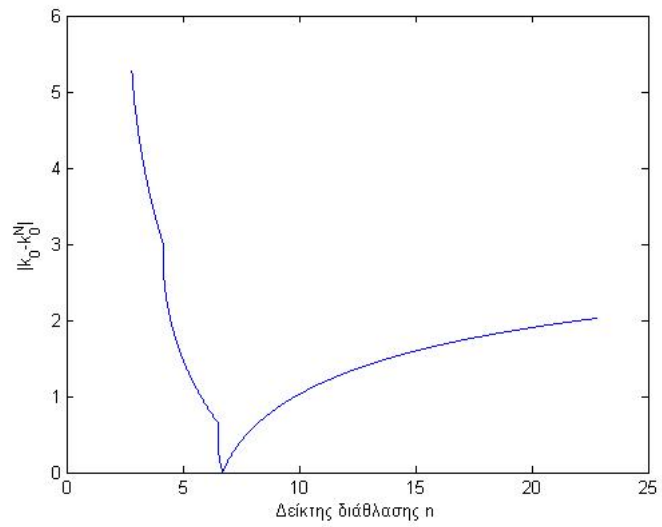
Για την επίλυση της μη γραμμικής εξίσωσης πινάκων του προβλήματος χρησιμοποιούμε την συνάρτηση `polyeig` του Matlab [13]. Μέσω αυτής της συνάρτησης για διάφορες τιμές του δείκτη διάθλασης $n \in [3, 20]$ υπολογίζουμε την αντίστοιχη προσεγγιστική ιδιοτιμή $k_0^{(N)}$. Έπειτα, σχεδιάζουμε την απόλυτη τιμή του σφάλματος $|k_0 - k_0^{(N)}|$ σε συνάρτηση με τις τιμές του δείκτη διάθλασης και παρατηρούμε ότι το σφάλμα ελαχιστοποιείται σε τιμές του n πολύ κοντά στο αντίστοιχο θεωρητικό. Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζονται τα αποτελέσματα τις αριθμητικής διαδικασίας.

δείκτης διάθλασης n	ιδιοτιμή διαπερατότητας k_0	σφάλμα $ k_0 - k_0^{(N)} $	προσεγγιστικό n
3	8,31847	0,0470	3,02
4	6,76839	0,0960	4,1
6	3,69944	0,8833	6,72
10	2,59261	0,0831	10,51
12	2,33224	0,0611	12,54
16	1,988	0,0421	16,62
20	1,76309	0,065	20,71

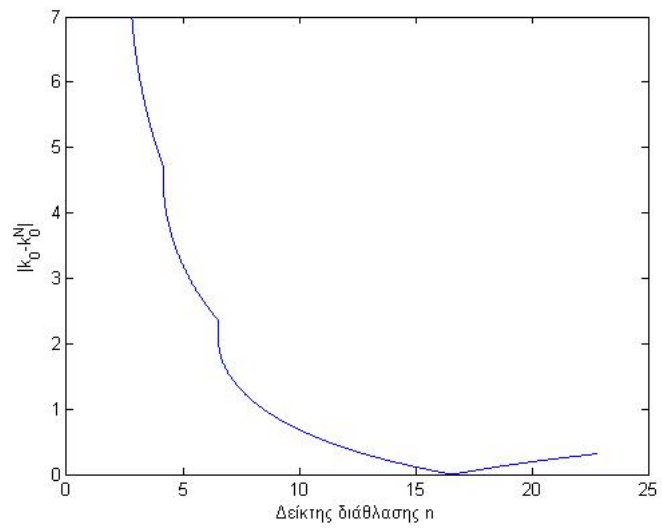
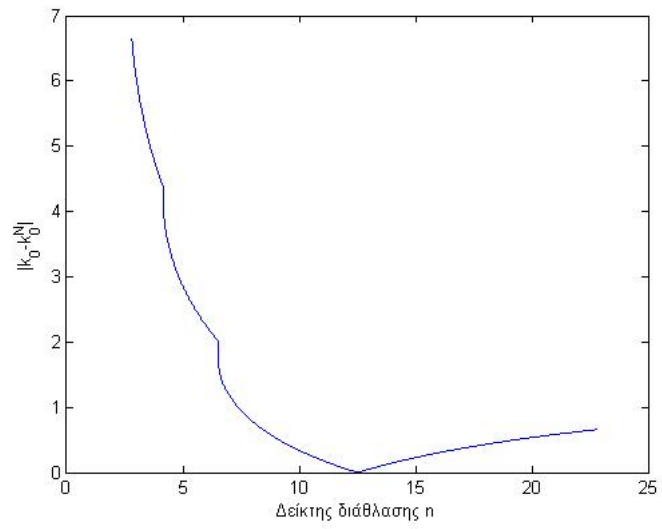
Στις σελίδες που ακολουθούν παρουσιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις όπως προέκυψαν από την αριθμητική διαδικασία.



Γραφήματα του σφάλματος $|k_0 - k_0^{(N)}|$ σε συνάρτηση με τον δείκτη διάθλασης n . Το πάνω γράφημα είναι για αρχικό δείκτη $n = 3$ και το κάτω για $n = 4$.



Γραφήματα του σφάλματος $|k_0 - k_0^{(N)}|$ σε συνάρτηση με τον δείκτη διάθλασης n . Το πάνω γράφημα είναι για αρχικό δείκτη $n = 6$ και το κάτω για $n = 10$.



Γραφήματα του σφάλματος $|k_0 - k_0^{(N)}|$ σε συνάρτηση με τον δείκτη διάθλασης n . Το πάνω γράφημα είναι για αρχικό δείκτη $n = 12$ και το κάτω για $n = 16$.

Από τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις παρατηρούμε ότι από τη γνώση της πρώτης ιδιοτιμής διαπερατότητας για διάφορους δείκτες διάθλασης μπορούμε να προσεγγίσουμε τους δείκτες με πολύ ικανοποιητική ακρίβεια και για ένα μεγάλο εύρος τιμών. Έτσι, αν υπάρχει πληροφορία για τις ιδιοτιμές (μέσω του πλάτους σκέδασης), μπορούμε να υπολογίσουμε τους διάφορους δείκτες σχετικά εύκολα. Για δείκτες διάθλασης κοντά στη μονάδα η παραπάνω αριθμητική διαδικασία δεν μπορεί να μας δώσει πληροφορία καθώς προκύπτουν μιγαδικές ιδιοτιμές, κάτι το οποίο προκύπτει και θεωρητικά [1]. Ένα επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός του n όταν δεν είναι σταθερός και είναι για παράδειγμα κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση.

Βιβλιογραφία

- [1] F. Cakoni, D. Colton and D. Gintides, “The interior transmission eigenvalue problem”, (to appear in SIAM Math. Anal.).
- [2] F. Cakoni, D. Colton and P. Monk, “On the use of transmission eigenvalues to estimate the index of refraction from far field data”, *Inverse Problems*, (2007).
- [3] F. Cakoni and D. Gintides, “New Results on Transmission Eigenvalues”, *Inverse Problems and Imaging*, (2010).
- [4] F. Cakoni, D. Gintides and H. Haddar, “The existence of an infinite discrete set of transmission eigenvalues”, *SIAM Math. Anal.*, (2010).
- [5] F. Cakoni and H. Haddar, “On the existence of transmission eigenvalues in an inhomogeneous medium”, *Applicable Analysis*, (2009).
- [6] D. Colton and R. Kress “Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory”, 2nd ed. Springer-Verlag, (1998).
- [7] D. Colton, L. Paivarinta and J. Sylvester, “The Interior Transmission Problem”, *Inverse Problems and Imaging*, (2007).
- [8] S.H. Gould, “Variational methods for eigenvalue problems, An introduction to the methods of Rayleigh, Ritz, Weinstein and Aronszajn”, Dover (1995).
- [9] A. Kirsch, “An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems”, 2nd ed. , Springer, (2011).
- [10] J.R. McLaughlin and P.L. Polyakov, “On the uniqueness of a spherically symmetric speed of sound from transmission eigenvalues”, *Jour. Differential Equations*, (1994).
- [11] D. Porter and D.G. Stirling, “Integral equations, A practical treatment from spectral theory to applications”, Cambridge University Press, (1990).
- [12] Κ. Κυριάκη και Γ. Δάσιος, “Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις”, (1994).
- [13] Γ.Σ. Παπαγεωργίου, Χ.Γ. Τσίτουρας και Ι.Θ. Φαμέλης “Σύγχρονο Μαθηματικό Λογισμικό, Matlab-Mathematica”, Συμπεών, (2004).

Ευρετήριο

- αναπαράσταση *Green*, 20
αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης, 14
αρχή αναλυτικής συνέχισης, 15
- δείκτης διάθλασης, 13
- εξίσωση *Helmholtz*, 12, 60
εξίσωση *Lippmann – Schwinger*, 17
εξίσωση πλάτους σκέδασης, 27
εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας, 28, 39, 50
ευθύ πρόβλημα σκέδασης, 13, 37
- ημιγραμμική μορφή, 51
- θεμελιώδης λύση, 16
- ιδιοζεύγη, 43
ιδιοτιμές διαπερατότητας, 43
- καλά τοποθετημένο πρόβλημα, 9
κυματάριθμος, 13
κυματοσυνάρτηση *Herglotz*, 28, 42
- λήμμα *Rellich*, 14
- μέθοδος *Galerkin*, 58
μεταβολική διατύπωση, 38, 51, 57
μετασχηματισμός *Fourier*, 20
μετασχηματισμός *Liouville*, 45
- πλάτος σκέδασης, 18, 42
προσέγγιση *Born*, 20
πρόβλημα πακτωμένης πλάκας, 58
- συνθήκη ακτινοβολίας *Sommerfeld*, 13
σχέση αμοιβαιότητας, 20, 23
- τελεστής πλάτους σκέδασης, 24, 42
- τελεστής σκέδασης, 24
τετραγωνικό πρόβλημα ιδιοτιμών, 58
τροποποιημένη εξίσωση *Helmholtz*, 60
- χωρικό δυναμικό, 17
χώρος H^1 , 38
χώρος H_{loc}^1 , 38
χώρος H_0^2 , 50