ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία του Καλλομπράτσου Κωνσταντίνου

Επιβλέπων Καθηγητής : Παναγιώτης Ψαρράκος

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΈΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΏΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία του Καλλομπράτσου Κωνσταντίνου

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή:

1) *Παναγιώτης Ψαρράκος, Καθηγητής Σ.Ε.Μ.Φ.Ε (επιβλέπων)*
2) *Στεφανέας Πέτρος, Καθηγητής Σ.Ε.Μ.Φ.Ε*
3) *Κανελλόπουλος Βασίλειος, Καθηγητής Σ.Ε.Μ.Φ.Ε*

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η ανάλυση πινάκων αποτελεί ένα πεδίο βασικού ενδιαφέροντος και βρίσκει εφαρμογές σε επιστημονικούς υπολογισμούς, θεωρία ελέγχου και συστημάτων, μαθηματική φυσική, στατιστική, οικονομικά και μεθόδους μηχανικής. Μερικές φορές χρειάζεται και σε προβλήματα μαθηματικών.

Πολλά προβλήματα στην ανάλυση πινάκων εμφανίζονται σε μορφή ανισοτήτων. Μπορούμε να πούμε ότι οι ανισότητες πινάκων αντικατοπτρίζουν την ποσοτική πλευρά της ανάλυσης πινάκων. Θα ασχοληθούμε στην συνέχεια με ζητήματα που αφορούν νόρμες πινάκων, ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα καθώς και την μερική σειρά του *Lowner*.

Μεταξύ άλλων αποτελεσμάτων, συμπεριλαμβάνονται παρακάτω κα οι καταφατικές λύσεις των οχτώ υποθέσεων. Πολλά θεωρήματα συναθροίζουν προηγούμενες ανισότητες, τα περισσότερα είναι αποτέλεσμα έρευνας και συγκέντρωσης αποτελεσμάτων από διαφορετικές πηγές. Θα παρατηρήσουμε στην συνέχεια την δύναμη της κλασσικής ανάλυσης σε συνδυασμό με αλγεβρικά επιχειρήματα.

Κάνουμε μία αναφορά σε δύο πολύ χρήσιμα βιβλία σχετικά με την ερευνά μας στις ανισότητες πινάκων, τα οποία αποτελούν έρευνα των τελευταίων δέκα χρόνων. Αυτά είναι, το *Topics in Matrix Analysis* των *R.A.Horn* και *C.R.Johnson Cambridge University press 1991,* καθώς και το *Matrix Analysis* του *R.Bhatia GTM 169 Springer* του 1997.

Προϋποθέσεις για την πλήρη κατανόηση του περιεχομένου περιλαμβάνουν γνώσεις σε γραμμική άλγεβρα, πραγματική και μιγαδική ανάλυση, καθώς και εξοικείωση με τα προαναφερθέντα βιβλία. Ευελπιστώ να κεντρίσω το ενδιαφέρον και να προκαλέσω την εκτίμηση για τις πρακτικές και την κομψότητα των μαθηματικών.

Λέξεις κλειδιά: αναστροφοσυζυγής, θετικά ημιορισμένος(ορισμένος),ερμιτιανός, φασματική ανάλυση, ορθομοναδιαίος, ορθομοναδιαία αναλλοίωτη, κυρτός τελεστής, θετική γραμμική απεικόνιση, πίνακας block(σύνθετος), ιδιάζουσες τιμές, ιδιοτιμές, μεταθέσεις.

PREFACE

Matrix analysis is a research field of basic interest and has applications in scientific computing, control and systems theory, operations research, mathematical physics, statistics, economics and engineering disciplines. Sometimes it is also needed in other areas of pure mathematics. A lot of theorems in matrix analysis appear in the form of inequalities. We may say that matrix inequalities reflect the quantitative aspect of matrix analysis. Thus this research covers such topics as norms, singular values, eigenvalues, the permanent function, and the Löwner partial order. The main purpose of this research is to report on recent developments in the field of matrix inequalities, with emphasis on useful techniques and ingenious ideas. Most of the results and new proofs presented here were obtained in the past eight years. Many theorems unify previous inequalities; several are the culmination of work by many people. Besides frequent use of operator-theoretic methods, the reader will also see the power of classical analysis and algebraic arguments, as well as combinatorial considerations. There are two very nice books on the subject published in the last decade. One is Topics in Matrix Analysis by R. A. Horn and C. R. Johnson, Cambridge University Press, 1991; the other is Matrix Analysis by R. Bhatia, GTM 169, Springer, 1997. Except a few preliminary results, there is no overlap between this book and the two mentioned above. The prerequisites are linear algebra, real and complex analysis, and some familiarity with Bhatia's and Horn-Johnson's books. It is self-contained in the sense that detailed proofs of all the main theorems and important technical lemmas are given. I hope this research will provide them with one more opportunity to appreciate the elegance of mathematics and enjoy the fun of understanding certain phenomena.

Key words: conjugate transpose, positive semidefinite(definite), Hermitian, spectral decomposition, unitary, unitarily invariant, operator convex, positive linear map, block matrix, singular values, eigenvalues, permutations.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. *Ανισότητες στην μερική σειρά του Löwner*

Θα ασχοληθούμε παρακάτω με τετραγωνικούς πίνακες μιγαδικών στοιχείων. Όλα τα αποτελέσματα επεκτείνονται και σε μη τετραγωνικούς πίνακες. Συμβολίζουμε με M_n τον χώρο n x n πινάκων με μιγαδικά στοιχεία. Ένας πίνακας A∈ M_n συχνά θεωρείται και ως ένας γραμμικός τελεστής στο $\mathbb{C}_n$,παρέχοντας το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y\rangle = \sum_j x_j \bar{y}_j$ με $x = (x_j), y = (y_j) \in \mathbb{C}_n$. Ο αναστροφοσυζυγής πίνακας του A συμβολίζεται με A* και είναι ο συμπληρωματικός του. Η ευκλείδεια νόρμα στον χώρο $\mathbb{C}_n$ είναι $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$. Ένας πίνακας $A \in M_n$ ονομάζεται θετικά ημιορισμένος εάν ισχύει,

$$\langle Ax, x\rangle \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{C}_n. \tag{1.1}$$

Επομένως για κάθε θετικά ημιορισμένο *A*, $\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle$. Για κάθε A∈ M_n και $x,y \in \mathbb{C}_n$,έχουμε

$$4\langle Ax, y\rangle = \sum_{k=0}^{3} i^k \langle A(x + i^k y), x + i^k y\rangle,$$

$$4\langle x, Ay\rangle = \sum_{k=0}^{3} i^k \langle x + i^k y, A(x + i^k y)\rangle$$

όπου $i = \sqrt{-1}$. Είναι προφανές από τις δύο παραπάνω εξισώσεις, ότι η (1.1) συνεπάγεται την A*=A. Οπότε ένας θετικά ημιορισμένος πίνακας είναι και ερμιτιανός.

Στην συνέχεια όταν μιλάμε για πίνακες *A,B,C*... χωρίς να αναφέρουμε την τάξη τους, εννοούμε πάντα ίδιας τάξης. Για ερμιτιανούς πίνακες *G,H* γράφουμε $G \geq H$ *ή* $H \geq G$ και εννοούμε ότι είτε ο G - H είτε ο H – G είναι θετικά ημιορισμένος. Συγκεκριμένα, $H \geq 0$ σημαίνει ότι ο H είναι θετικά ημιορισμένος. Αυτό είναι γνωστό και ως η μερική τάξη του Löwner, προκαλείται στον πραγματικό χώρο ερμιτιανών πινάκων από τον θετικό ημιορισμένο κώνο. Εάν ο πίνακας *H* είναι θετικά ορισμένος, δηλαδή θετικά ημιορισμένος και αντιστρέψιμος, γράφουμε ότι $H > 0$.

Υποθέτουμε *f(t) συνεχή συνάρτηση πραγματικών τιμών που ορίζεται σε ένα πραγματικό διάστημα Ω και H έναν ερμιτιανό πίνακα με ιδιοτιμές που ανήκουν στο Ω*. Υποθέτουμε ότι $H = U \operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)U^*$ *είναι η φασματική* ανάλυση του όπου *U* είναι μοναδιαίος πίνακας. Τότε μέσω της χρήσης της συνάρτησης *f* έχουμε το παρακάτω:

$$f(H) \equiv U diag\big(f(\lambda_1), \dots \dots \dots ., f(\lambda_\nu)\big)U^*. \tag{1.2}$$

Η *f(H)* δεν εξαρτάται από κάποια συγκεκριμένη φασματική ανάλυση του *H*. Η (1.2) ανταποκρίνεται κατά φυσικό τρόπο στον γνωστό πολυωνυμικό λογισμό : Εάν $f(t) = \sum_{j=0}^{k} c_j t^j$,τότε $f(H) = \sum_{j=0}^{k} c_j H^j$. Στην συνέχεια, σύμφωνα με το θεώρημα του *Weierstrass*, κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα *Ω*, μπορεί να εκφρασθεί με την χρήση πολυωνύμων. Εδώ θα κάνουμε χρήση της νόρμας σε πίνακες για να δώσουμε ακριβώς το νόημα της προσέγγισης από μία αλληλουχία πινάκων. Δηλώνουμε με $\|A\|_\infty$ την φασματική νόρμα του *A* : $\|A\|_\infty \equiv \max\{\|Ax\| : \|x\| = 1 , x \in \mathbb{C}n\}$. Η φασματική νόρμα είναι υποπολλαπλασιαστική, δηλαδή ισχύει $\|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|B\|_\infty$. Κάποια αποτελέσματα σε αυτό το κεφάλαιο αποτελούν την βάση για τις ανισότητες για τις ιδιοτιμές και τις νόρμες στα επόμενα κεφάλαια. Χρησιμοποιούμε πάντα κεφαλαία γράμματα για τους πίνακες και μικρά για γράμματα.

1.1 Η Ανισότητα του Löwner-Heinz

Με I εννοούμε τον μοναδιαίο πίνακα. Ένας πίνακας C λέγεται πίνακας συστολής, εάν ισχύει ότι $C^*C \leq I$, ή αλλιώς $\|C\|_\infty \leq 1$. Συμβολίζουμε με $\rho(A)$ την φασματική ακτίνα του A. Τότε $\rho(A) \leq \|A\|_\infty$. Εφόσον οι AB και BA έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές, $\rho(AB) = \rho(BA)$.

Θεώρημα 1.1 (Löwner-Heinz) : Εάν $A \geq B \geq 0$ και $0 \leq r \leq 1$, τότε $A^r \geq B^r$ (1.3)

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε το παραπάνω συμπέρασμα σε θετικά ημιορισμένους πίνακες, αρκεί να το αποδείξουμε για θετικά ορισμένους θεωρώντας $A + \epsilon I$, με $\epsilon \to 0$. Θεωρούμε ότι *A* > 0. Θεωρούμε επίσης το *Δ* να είναι το σύνολο των $r \in [0,1]$ όπως στην (1.3). Προφανώς τα 0,1 ∈ *Δ* και το *Δ* είναι κλειστό. Στην συνέχεια αποδεικνύουμε ότι το *Δ* είναι κυρτό , και εφόσον $\Delta = [0,1]$ τότε τελειώνουμε την απόδειξη . Υποθέτοντας *s*,$t \in$ *Δ*, έχουμε ότι:

$$\left\|B^{s/2}A^{-s/2}\right\|_\infty \leq 1 , \left\|B^{\frac{t}{2}}A^{-\frac{t}{2}}\right\|_\infty \leq 1 \Rightarrow \left\|A^{-(s+t)/4}B^{(s+t)/2}A^{-(s+t)/4}\right\|_\infty = \rho\left(A^{-\frac{s+t}{4}}B^{\frac{s+t}{2}}A^{-\frac{s+t}{4}}\right) = \rho\left(A^{-\frac{s}{2}}B^{\frac{t+s}{2}}A^{-\frac{t}{2}}\right) = \left\|A^{-s/2}B^{(t+s)/2}A^{-t/2}\right\|_\infty \leq \left\|B^{\frac{s}{2}}A^{-\frac{s}{2}}\right\|_\infty \left\|B^{\frac{t}{2}}A^{-\frac{t}{2}}\right\|_\infty \leq 1.$$

Έτσι λοιπόν έχουμε ότι $A^{-\frac{s+t}{4}}B^{\frac{s+t}{2}}A^{-\frac{s+t}{4}} \leq I$ και επομένως $B^{\frac{s+t}{2}} \leq A^{\frac{s+t}{2}}$, (s+t)/2 ∈ Δ και επομένως αποδείξαμε ότι το Δ *είναι κυρτό*. . □

Τί γίνεται αν θεωρήσουμε ότι $r > 1$; Το αποτέλεσμα είναι αρνητικό στην γενική περίπτωση. Για παράδειγμα,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

αποδεικνύει ότι $A \geq B \geq 0 \nRightarrow A^2 \geq B^2$.Το επόμενο αποτέλεσμα μας επιτρέπει την πλήρη κατανόηση και δείχνει ένα τυπικό τρόπο για την μαθηματική σκέψη. Θεωρούμε έναν χώρο Banach, έστω $\mathcal{A}$, πάνω από τον $\mathbb{C}$. Αν ο $\mathcal{A}$ είναι επίσης μία άλγεβρα όπου η νόρμα είναι υποπολλαπλασιαστική : $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, τότε ο χώρος καλείται άλγεβρα Banach. Μία συνέλιξη στον $\mathcal{A}$ είναι μία απεικόνιση $A \to A^*$, τέτοια ώστε για κάθε A,B ∈ $\mathcal{A}$ και α ∈ $\mathbb{C}$ να ισχύουν τα παρακάτω :

$$\text{(i) } (A^*)^* = A \qquad \text{(ii) } (AB)^* = B^*A^* \quad \text{(iii) } (\alpha A + B)^* = \bar{\alpha}A^* + B^*.$$

Ένας C^*- άλγεβρα χώρος $\mathcal{A}$ είναι μία Banach άλγεβρα με συνέλιξη έτσι ώστε:

$$\|A^*A\| = \|A\|^2 \text{ για κάθε } A \in \mathcal{A}.$$

Ένα στοιχείο Α ∈ $\mathcal{A}$ λέγεται θετικό εάν $A = B^*B$ για κάποιο Β ∈ $\mathcal{A}$. Είναι ξεκάθαρο ότι το M_n με την φασματική νόρμα και τον αναστροφοσυζυγή να είναι η συνέλιξη, είναι μια C^*- άλγεβρα. Σημειώνεται ότι η ανισότητα Löwner-Heinz ισχύει και για στοιχεία C^*- άλγεβρας, καθώς ισχύει και η ίδια απόδειξη εφόσον $\rho(AB) = \rho(BA)$. Κάθε στοιχείο Τ ∈ $\mathcal{A}$ μπορεί να γραφτεί μοναδικά ως $T = A + iB$ για Α,Β ερμιτιανά. Συγκεκριμένα $A = (T + T^*)/2$, $B = (T - T^*)/2i$. Αυτό ονομάζεται καρτεσιανή ανάλυση του Τ. Λέμε επίσης ότι ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στον χώρο $\mathcal{A}$ εάν για οποιαδήποτε στοιχεία Α,Β αυτού ισχύει ότι ΑΒ=ΒΑ.

Θεώρημα 1.2 : Υποθέτουμε ότι $\mathcal{A}$ είναι μια C^*- άλγεβρα και $r > 1$. Εάν $A \geq B \geq 0, A, B \in \mathcal{A}$ συνεπάγεται ότι $A^r \geq B^r$, τότε λέμε ότι το $\mathcal{A}$ είναι αντιμεταθετική.

Απόδειξη : Εφόσον $r > 1$, υπάρχει ένας θετικός ακέραιος k τέτοιος ώστε $r^k > 2$. Υποθέτουμε ότι $A \geq B \geq 0$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση k-φορές παίρνουμε $A^{r^k} \geq B^{r^k}$. Ύστερα χρησιμοποιώντας την ανισότητα Löwner-Heinz με την δύναμη $2/r^k < 1$ παίρνουμε $A^2 \geq B^2$. Οπότε είναι επαρκής η απόδειξη για μόλις $r = 2$. Για οποιαδήποτε Α,Β ≥ 0 , $\epsilon > 0$ ισχύει ότι $A + B\epsilon \geq A$. Από υπόθεση ισχύει $(A + B\epsilon)^2 \geq A^2$. Αυτό μας δίνει ότι,

$AB + BA + \epsilon B^2 \geq 0$ για κάθε $\epsilon > 0$. Επομένως $AB + BA \geq 0$ για κάθε A,B≥ 0. (1.4)
Έστω $AB = G + iH$ με G, H ερμιτιανά. Τότε από την (1.4) έχουμε $G \geq 0$. Εφαρμόζοντας αυτό για A, BAB παίρνουμε :

$$A(BAB) = G^2 - H^2 + i(GH + HG) \tag{1.5}$$

το οποίο μας δίνει $G^2 \geq H^2$. Οπότε το σύνολο :

$$\Gamma = \{a \geq 1 : G^2 \geq aH^2 \; για \; κάθε \; A, B \geq 0 \; και \; AB = G + iH\}$$

όπου $G + iH$ είναι η καρτεσιανή ανάλυση, δεν είναι κενό. Υποθέτοντας ότι το Γ είναι φραγμένο και επειδή είναι και κλειστό, περιέχει το μεγαλύτερο στοιχείο λ. Από την (1.4) $H^2(G^2 - \lambda H^2) + (G^2 - \lambda H^2)H^2 \geq 0$,

$$G^2H^2 + H^2G^2 \geq 2\lambda H^4 \tag{1.6}$$

Από την (1.5) έχουμε: $(G^2 - H^2)^2 \geq \lambda(GH + HG)^2$,

$$G^4 + H^4 - (G^2H^2 + H^2G^2) \geq \lambda(GH^2G + HG^2H + G(HGH) + (HGH)G)$$

Με βάση την προηγούμενη ανισότητα και με χρήση της (1.6) και τις ανισότητες που προκύπτουν από την (1.4) με $G \geq 0$, $GH^2G \geq 0, G(HGH) + (HGH)G \geq 0, HG^2H \geq \lambda H^4$,έχουμε:

$G^4 \geq (\lambda^2 + 2\lambda - 1)H^4$,το οποίο αξιοποιώντας την ανισότητα Löwner-Heinz γίνεται,

$G^2 \geq (\lambda^2 + 2\lambda - 1)^{1/2}H^2$ για όλα τα G,H με $GH = A + iB \; και \; A, B \geq 0$. Επομένως $(\lambda^2 + 2\lambda - 1)^{1/2} \in \Gamma$ και $(\lambda^2 + 2\lambda - 1)^{1/2} < \lambda$. Συνεπώς $\lambda \leq 1/2$, το οποίο δεν είναι συμβατό με την υπόθεση του $\lambda \geq 1$. Οπότε το Γ είναι μη φραγμένο και $G^2 \geq aH^2$, για κάθε $a \geq 1$, το οποίο συμβαίνει μόνο όταν $H = 0$. Επομένως για όλα τα $A, B \geq 0, BA = AB$. Τέλος, σύμφωνα με την καρτεσιανή ανάλυση και επειδή όλα τα ερμιατιανά στοιχεία γράφονται ως διαφορά δύο θετικών στοιχείων, ισχύει ότι $X\Upsilon = \Upsilon X$, για όλα τα $X, \Upsilon \in A$. □

1.2 Απεικονίσεις σε χώρους πινάκων.

Μία πραγματική συνεχής συνάρτηση $f(t)$ ορισμένη σε ένα πραγματικό διάστημα Ω λέγεται τελεστής μονότονος εάν $A \leq B \quad \Rightarrow \quad f(A) \leq f(B)$

για όλους του ερμιτιανούς πίνακες A,B όλων των τάξεων των οποίων οι ιδιοτιμές περιέχονται στο σύνολο Ω.Λέμε μία συνάρτηση f κυρτός τελεστής εάν για κάθε $0 < \lambda < 1$,

$$f(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B)$$

το οποίο ισχύει για όλους τους ερμιτιανούς πίνακες A,B όλων των τάξεων με ιδιοτιμές στο Ω. Η f λέγεται κοίλος τελεστής εάν η $-f$ είναι κυρτός. Έτσι η ανισότητα Lӧwner-Heinz δείχνει την συνάρτηση $f(t) = t^r, 0 < r \leq 1$ ως μονότονο τελεστή στο σύνολο $[0, \infty)$. Ένα άλλο παράδειγμα συνάρτησης ως μονότονου τελεστή είναι η $\log t$ στο $(0, \infty)$, ενώ ένα παράδειγμα κυρτού τελεστή είναι η συνάρτηση $g(t) = t^r$ στο $(0, \infty)$ για $-1 \leq r \leq 0$ ή $1 \leq r \leq 2$. Εάν ξέρουμε την παρακάτω φόρμουλα :

$$t^r = \frac{\sin r\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{s^{r-1}t}{s+t} ds\,,\ 0 < r < 1$$

τότε το Θεώρημα (1.1) γίνεται αντιληπτό. Στο επόμενο θεώρημα έχουμε μία πιο ελκυστική παρουσίαση για συναρτήσεις τελεστών μονότονων και κυρτών.

Θεώρημα 1.3 : Εάν η f είναι μια συνάρτηση μονότονου τελεστή στο $[0, \infty)$ τότε υπάρχει θετικό μ στο ίδιο διάστημα τέτοιο ώστε:

$$f(t) = \alpha + \beta t + \int_0^\infty \frac{st}{s+t} d\mu(s) \tag{1.7}$$

όπου α, β πραγματικοί αριθμοί και $\beta \geq 0$.Εάν g είναι μία συνάρτηση κυρτού τελεστή στο $[0, \infty)$ τότε υπάρχει ένα θετικό α στο ίδιο διάστημα τέτοιο ώστε:

$$g(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \int_0^\infty \frac{st^2}{s+t}\, d\mu(s) \tag{1.8}$$

με α, β, γ πραγματικούς και $\gamma \geq 0$.

Μία συνάρτηση απεικόνισης $\Phi\colon M_m \to M_n$ λέγεται θετική εάν οδηγεί θετικά ημιορισμένους πίνακες σε θετικά ημιορισμένους πίνακες: $A \geq 0 \Rightarrow \Phi(A) \geq 0$. Σημειώνουμε με I_n τον μοναδιαίο πίνακα στο M_n. Η Φ λέγεται ταυτοτική εάν $\Phi(I_m) = I_n$.

Πρώτα θα παρουσιάσουμε κάποιες ανισότητες που αφορούν γραμμικές απεικονίσεις, συναρτήσεις μονότονων τελεστών καθώς και κυρτών τελεστών, και στην συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε αυτά τα αποτελέσματα για να πάρουμε τις ανισότητες στους παραγόμενους Hadamard πίνακες. Το επόμενο λήμμα είναι εξαιρετικά χρήσιμο.

Λήμμα 1.4 Έστω $A > 0$. Τότε:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0$$

αν και μόνο αν το συμπλήρωμα Schur $C - B^* A^{-1} B \geq 0.$

Λήμμα 1.5 Έστω Φ μία γραμμική απεικόνιση από το M_m στο M_n, όπου για $A \geq 0 \Rightarrow \Phi(A) \geq 0$,καθώς επίσης απεικονίζει το ταυτοτικό στοιχείο του ενός χώρου στο αντίστοιχο ταυτοτικό του άλλου. Τότε,

$$\Phi(A^2) \geq \Phi(A)^2 \quad A \geq 0 \tag{1.9}$$

$$\Phi(A^{-1}) \geq \Phi(A)^{-1} \quad A > 0 \tag{1.10}$$

Απόδειξη : Έστω $A = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j E_j$ η φασματική ανάλυση του A, όπου $\lambda_j \geq 0$ $(j = 1, \ldots\ldots, m)$ είναι οι ιδιοτιμές και E_j $(j = 1, \ldots\ldots m)$ οι αντίστοιχοι ιδιοτελεστές πρώτης τάξης με $\sum_{j=1}^{m} E_j = I_m$. Τότε, εφόσον $A^2 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^2 E_j$ και $I_n = \Phi(I_m) = \sum_{j=1}^{m} \Phi(E_j)$, έχουμε

$$\begin{bmatrix} I_n & \Phi(A) \\ \Phi(A) & \Phi(A^2) \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{m} \begin{bmatrix} 1 & \lambda_j \\ \lambda_j & \lambda_j^2 \end{bmatrix} \otimes \Phi(E_j),$$

όπου $\otimes$ είναι ο τανυστής του Kronecker(ή αλλιώς εξωτερικό γινόμενο) . Εφόσον

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_j \\ \lambda_j & \lambda_j^2 \end{bmatrix} \geq 0$$

και επειδή $\Phi(E_j) \geq 0$ για όλα τα j, έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_j \\ \lambda_j & \lambda_j^2 \end{bmatrix} \otimes \Phi(E_j) \geq 0, j = (1, \ldots\ldots m)$$

Επομένως ,

$$\begin{bmatrix} I_n & \Phi(A) \\ \Phi(A) & \Phi(A^2) \end{bmatrix} \geq 0$$

το οποίο μέσω του Λήμματος (1.4) μας δίνει την (1.9).Με παρόμοιο τρόπο χρησιμοποιώντας, $\begin{bmatrix} \lambda_j & 1 \\ 1 & \lambda_j^{-1} \end{bmatrix} \geq 0$, δείχνουμε ότι: $\begin{bmatrix} \Phi(A) & I_n \\ I_n & \Phi(A^{-1}) \end{bmatrix} \geq 0$, το οποίο μας δίνει την (1.10) μέσω του λήμματος (1.4). □

Θεώρημα 1.6 : Έστω Φ μία γραμμική απεικόνιση όπως στο Λήμμα 1.5, από το M_m στο M_n και f μονότονη συνάρτηση τελεστής στο $[0,\infty)$. Τότε για κάθε $A \geq 0$, $\Phi\big(f(A)\big) \leq f(\Phi(A))$.

Απόδειξη : Από την (1.7),αρκεί να αποδείξουμε ότι,

$$\Phi(A)[sI+\Phi(A)]^{-1} \geq \Phi[A(sI+A)^{-1}, \quad \mathrm{s}>0$$

Εφόσον $A(sI+A)^{-1} = I - s(sI+A)^{-1}$, και επειδή ισχύει το ανάλογο για την αριστερή πλευρά, έχουμε ότι

$$[\Phi(sI+A)]^{-1} \leq \Phi[(sI+A)^{-1}]$$ το οποίο είναι ακόλουθο της (1.10) □

Θεώρημα 1.7 : : Έστω Φ μία γραμμική απεικόνιση όπως στο Λήμμα 1.5, από το M_m στο M_n και g κυρτή συνάρτηση τελεστής στο $[0,\infty)$. Τότε για κάθε $A \geq 0$, $g(\Phi(A)) \leq \Phi(g(A))$.

Απόδειξη : Από την ολοκληρωτική αναπαράσταση (1.8) αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\Phi(A)^2 \leq \Phi(A^2) \tag{1.11}$$

και

$$\Phi(A)^2[sI+\Phi(A)]^{-1} \leq \Phi[A^2(sI+A)^{-1}], \qquad s>0 \tag{1.12}$$

Η (1.11) είναι απλά η (1.9) εφόσον,

$$A^2(sI+A)^{-1} = A - sI + s^2(sI+A)^{-1},$$

$$\Phi(A)^2[sI+\Phi(A)]^{-1} = \Phi(A) - sI + s^2[sI+\Phi(A)]^{-1},$$

η (1.12) είναι ακόλουθο της (1.10) και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη □

Εφόσον η $f_1(t) = t^r, 0<r\leq 1$ στο $[0,\infty)$ και η $f_2(t) = \log(t)$ στο $(0,\infty)$, είναι μονότονες συναρτήσεις τελεστές, $g(t) = t^r$ είναι κυρτός τελεστής στο $(0,\infty)$ για $-1 \leq r \leq 0$ και $1 \leq r \leq 2$, από τα Θεωρήματα 1.6 και 1.7 παίρνουμε το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 1.8 : Έστω Φ μία γραμμική απεικόνιση όπως στο Λήμμα 1.5 από M_m στο M_n. Τότε,

$$\Phi(A^r) \leq \Phi(A)^r\,,\ A \geq 0\,,\ 0<r\leq 1$$

$$\Phi(A^r) \geq \Phi(A)^r\,, A>0\ ,-1 \leq r \leq 0 \text{ και } 1 \leq r \leq 2$$

$$\Phi(\log A) \leq \log\big(\Phi(A)\big)\ ,\ \ A>0.$$

Να σημειώσουμε πως $A = \big(a_{ij}\big), B = \big(b_{ij}\big) \in M_n$, καθώς επίσης ότι το Hadamard γινόμενο είναι $A \circ B \equiv \big(a_{ij}b_{ij}\big) \in M_n$. Ορίζουμε με $A[\alpha]$,τον κύριο υποπίνακα τον οποίο ορίζει το a. Η επόμενη παρατήρηση είναι πολύ σημαντική.

Λήμμα 1.9 Για κάθε $A, B \in M_n$, $A \circ B = (A \otimes B)[a]$ όπου $\alpha = \{1, n+2, 2n+3, \dots, n^2\}$. Υπάρχει μία γραμμική απεικόνιση Φ όπως στο Λήμμα 1.5, από το M_{n^2} στο M_n τέτοια ώστε $\Phi(A \otimes B) = A \circ B, \text{για κάθε } A, B \in M_n$.

Μία παρουσίαση της χρησιμότητας αυτού του λήμματος είναι : Εάν $A, B \geq 0 \Rightarrow A \otimes B \geq 0$. Εφόσον $A \circ B$ είναι ένας κύριος υποπίνακας του $A \otimes B, A \circ B \geq 0$. Παρόμοια συμβαίνει εάν $A \circ B > 0$ για την περίπτωση που οι A, B είναι θετικά ορισμένοι. Με άλλα λόγια το Hadamard γινόμενο θετικά ημιορισμένων (ορισμένων) πινάκων είναι θετικά ημιορισμένο (ορισμένο). Αυτό είναι γνωστό ως το θεώρημα γινομένου του Schur.

Πόρισμα 1.10
$$A^r \circ B^r \leq (A \circ B)^r, A, B \geq 0, 0 < r \leq 1 \tag{1.13}$$

$$A^r \circ B^r \geq (A \circ B)^r, A, B > 0, -1 \leq r \leq 0, 1 \leq r \leq 2 \tag{1.14}$$

$$(logA + logB) \circ I \leq \log(A \circ B), A, B > 0 \tag{1.15}$$

Απόδειξη : Με εφαρμογή του Πορίσματος 1.8, όπου αντί για A έχουμε το $A \otimes B$ και την Φ όπως αυτή ορίζεται στο Λήμμα 1.9.Για την (1.13) και (1.14) χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι για πραγματικό t ισχύει $(A \otimes B)^t = A^t \otimes B^t$. Για την 1.15 έχουμε,

$$\log(A \otimes B) = \frac{d}{dt}(A \otimes B)^t|_{t=0} = \frac{d}{dt}(A^t \otimes B^t)|_{t=0} = (logA) \otimes I + I \otimes (logB). \quad \square$$

Παράδειγμα:$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, r = 2, A^2 \circ B^2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

και,
$$(A \circ B)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επισημαίνουμε πως η ανισότητα (1.14) ισχύει και για $A, B \geq 0$ στην περίπτωση που $1 \leq r \leq 2$.

Δεδομένου του θετικού ακεραίου k, επισημαίνουμε τη k-ιοστή Hadamard δύναμη του $A = (a_{ij}) \in M_n$ με $A^{(k)} = \left(a_{ij}^k\right) \in M_n$. Εδώ παρουσιάζουμε δύο πολύ σημαντικές απόρροιες του Πορίσματος 1.10: Για κάθε θετικό ακέραιο k,

$$(A^r)^{(k)} \leq (A^{(k)})^r, A \geq 0, 0 < r \leq 1$$

$$(A^r)^{(k)} \geq (A^{(k)})^r, A > 0, -1 \leq r \leq 0 \text{ ή } 1 \leq r \leq 2.$$

Πόρισμα 1.11: Για $A, B \geq 0$, η συνάρτηση $f(t) = (A^t \circ B^t)^{1/t}$ είναι αύξουσα στο διάστημα $[1, \infty)$,για παράδειγμα,

$$(A^s \circ B^s)^{1/s} \leq (A^t \circ B^t)^{\frac{1}{t}}, 1 \leq s < t$$

Απόδειξη: Από το Πόρισμα 1.10 έχουμε,

$$A^s \circ B^s \leq (A^t \circ B^t)^{\frac{s}{t}}.$$

Τότε εφαρμόζοντας την ανισότητα Lӧwner-Heinz για δύναμη 1/s και παίρνουμε το αποτέλεσμα. ☐

Έστω P_n το σύνολο των θετικά ημιορισμένων πινάκων στο M_n. Μία απεικόνιση $\Psi: P_n \times P_n \to P_m$ λέγεται κοίλη εάν:

$$\Psi(\lambda A + (1-\lambda)B, \lambda C + (1-\lambda)D) \geq \lambda\Psi(A, C) + (1-\lambda)\Psi(B, D)$$

με $A, B, C, D > 0, \;\; 0 < \lambda < 1.$

Για $A, B > 0$, ονομάζουμε παράλληλο άθροισμα δύο πινάκων και το συμβολίζουμε με $A : B$ το ακόλουθο:

$$A : B = (A^{-1} + B^{-1})^{-1}.$$

Σημειώνουμε εδώ ότι $A : B = A - A(A+B)^{-1}A$ και $2(A : B) = \{\frac{A^{-1}+B^{-1}}{2}\}^{-1}$ είναι αρμονικές μέσοι των A,B. Εφόσον $A : B$ μειώνεται καθώς τα A,B μειώνονται , μπορούμε να καθορίσουμε το παράλληλο άθροισμα για $A, B > 0$ ως

$$A : B = \log_{\varepsilon \to 0}\{(A + \varepsilon I)^{-1} + (B + \varepsilon I)^{-1}\}^{-1}.$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.4 είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι:

$$A : B = \max\left\{X \geq 0 : \begin{bmatrix} A - B & A \\ A & A - X \end{bmatrix} \geq 0\right\}$$

όπου το max είναι σύμφωνο με την μερική τάξη του Lӧwner. Από αυτό μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $(A, B) \to A : B$ είναι κοίλη.

Λήμμα 1.12 Για $0 < r < 1$ η απεικόνιση $(A, B) \to A^r \circ B^{1-r}$ είναι κοίλη για $A, B \geq 0.$

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση $(A, B) \to A^r \otimes B^{1-r}$ είναι κοίλη για $A, B \geq 0$ και η απόδειξη θα έρθει μέσω του Λήμματος 1.9. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι

$B > 0$. Χρησιμοποιώντας την $A^r \otimes B^{1-r} = (A \otimes B^{-1})^r (I \otimes B)$ και την ολοκληρωτική αναπαράσταση:

$$t^r = \frac{\sin r\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{s^{r-1}t}{s+t} ds \qquad (0 < r < 1)$$

παίρνουμε $A^r \otimes B^{1-r} = \frac{\sin r\pi}{\pi} \int_0^\infty s^{r-1} (A \otimes B^{-1})(A \otimes B^{-1} + sI \otimes I)^{-1} (I \otimes B) ds$.

Εφόσον $A \otimes B^{-1}$ και $I \otimes B$ μπορούν να εναλλάσσονται είναι εύκολο να δούμε ότι

$$(A \otimes B^{-1})(A \otimes B^{-1} + sI \otimes I)^{-1} (I \otimes B) = (s^{-1} A \otimes I) : (I \otimes B)$$

Ξέρουμε ότι το παράλληλο άθροισμα είναι κοίλο, οπότε το παραπάνω είναι επίσης κοίλο καθώς επίσης και το $A^r \otimes B^{1-r}$. □

Πόρισμα 1.13 Για $A, B, C, D \geq 0$ και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$A \circ B + C \circ D \leq (A^p + C^p)^{\frac{1}{p}} \circ (B^q + D^q)^{1/q}.$$

Απόδειξη: Από το Λήμμα 1.12 όπου $r = 1/p$ και παίρνοντας για $\lambda = 1/2$,αποδεικνύεται το ζητούμενο. □

Έστω $f(x)$ μία διαφορίσιμη συνάρτηση πραγματικών αριθμών η οποία ορίζεται σε ένα πραγματικό διάστημα. Ορίζουμε το πηλίκο διαφοράς $\Delta f(x,y) = [f(x) - f(y)]/(x - y)$ όπου $\Delta f(x,x) = f'(x)$. Έστω $H(t) \in M_n$ να είναι μία οικογένεια ερμιτιανών πινάκων για t σε ένα ανοιχτό πραγματικό διάστημα (a,b) και υποθέτουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές της $H(t)$ περιέχονται σε ένα ανοιχτό πραγματικό διάστημα Ω για όλα τα $t \in (a,b)$. Επίσης ας θεωρήσουμε ότι $H(t) = U(t)\Lambda(t)U(t)^*$ είναι η φασματική ανάλυση, με $U(t)$ ταυτοτική και $\Lambda(t) = diag(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t))$. Υποθέτουμε ότι η $H(t)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο (a,b) και $f : \Omega \to R$ είναι μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση. Τότε είναι γνωστό ότι η $f(H(t))$ είναι μία συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση και ισχύει ότι:

$$\frac{d}{dt} f\big(H(t)\big) = U(t)\{\left[\Delta f\left(\lambda_i(t), \lambda_j(t)\right)\right] \circ [U(t)^* H'(t) U(t)]\} U(t)^*$$

Θεώρημα 1.14 Για $A, B \geq 0$ και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$A \circ B \leq (A^p \circ I)^{1/p} (B^q \circ I)^{1/q}.$$

Απόδειξη: Θέτουμε $C = (A^p \circ I)^{1/p} = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $D = (B^q \circ I)^{1/q} = diag(\mu_1, \dots \mu_n)$. Από συνέχεια μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\lambda_i \neq \lambda_j$, $\mu_\iota \neq \mu_j \; για \; i \neq j$. Έτσι χρησιμοποιώντας την παραπάνω φόρμουλα υπολογίζουμε:

$$\frac{d}{dt}(C^p + tA^p)^{1/p}|_{t=0} = X \circ A^p.$$

$$\frac{d}{dt}(D^q + tB^q)^{1/q}|_{t=0} = Y \circ B^q$$

όπου $X = (x_{ij})$ και $Y = (y_{ij})$ τα οποία υπολογίζονται ως:

$$x_{ij} = (\lambda_\iota - \lambda_j)(\lambda_i^p - \lambda_j^p)^{-1} \; για \; i \neq j \; και \; x_{ii} = p^{-1}\lambda_i^{1-p}$$

$$y_{ij} = (\mu_\iota - \mu_j)(\mu_i^q - \mu_j^q)^{-1} \; για \; i \neq j \; και \; y_{ii} = q^{-1}\mu_i^{1-q}.$$

Από το Πόρισμα 1.13,

$$C \circ D + tA \circ B \leq (C^p + tA^p)^{1/p} \circ (D^q + tB^q)^{1/q}$$

για κάθε $t \geq 0$. Επομένως μετά από διαφόριση για $t = 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} A \circ B &\leq \frac{d}{dt}(C^p + tA^p)^{1/p} \circ (D^q + tB^q)^{1/q}|_{t=0} \\ &= X \circ A^p \circ D + C \circ Y \circ B^q \\ &= (X \circ I)(A^p \circ I)D + C(Y \circ I)(B^q \circ I) \\ &= (A^p \circ I)^{1/p}(B^q \circ I)^{1/q} \end{aligned}$$

□

Ακολουθεί ένα αποτέλεσμα που θα χρειαστούμε για την επόμενη παράγραφο, το οποίο παρουσιάζουμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 1.15 Έστω $f: [0, \infty)$ μία συνάρτηση τελεστής η οποία είναι μονότονη και $g: [0, \infty)$ μία κυρτή συνάρτηση τελεστής με $g(0) \leq 0$. Τότε για κάθε συστολή C, όπως για $\|C\|_\infty \leq 1$ και για κάθε $A \geq 0$,

$$f(C^*AC) \geq C^*f(A)C \tag{1.16}$$

$$g(C^*AC) \geq C^*g(A)C \tag{1.17}$$

1.3 Ανισότητες για δυνάμεις πινάκων

Ο βασικός στόχος αυτής της παραγράφου είναι να αποδειχθεί το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 1.16 Εάν $A \geq B \geq 0$, τότε,

$$(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(2p+r)/q} \tag{1.18}$$

$$A^{(p+2r)/q} \geq (A^r B^p A^r)^{1/q} \tag{1.19}$$

για $r, q \geq 0,\ p \geq 1\ ,\ (1+2r)q \geq p+2r.$

Απόδειξη: Εν συντομία γράφουμε την ανισότητα Löwner-Heinz ως LH και αποδεικνύουμε την (1.18). Εάν $0 \leq p < 1$ τότε από τη LH: $A^p \geq B^p$ και επομένως $B^r A^p B^r \geq B^{p+2r}$. Εφαρμόζοντας την LH ξανά με δύναμη την 1/q παίρνουμε την (1.18). Ύστερα λαμβάνουμε την περίπτωση όπου $p \geq 1$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι,

$$(B^r A^p B^r)^{(1+2r)/(p+2r)} \geq B^{1+2r}$$

για $r \geq 0, p \geq 1$, εφόσον από υπόθεση ισχύει ότι $q \geq (p+2r)/(1+2r)$, και μετά η (1.18) ακολουθεί από την ανισότητα για την LH. Εισάγουμε εδώ την t για να γράψουμε την παραπάνω ανισότητα ως:

$$(B^r A^p B^r)^t \geq B^{1+2r}\ ,\ t = (1+2r)/(p+2r) \tag{1.20}$$

Σημειώνουμε πως $0 < t \leq 1$, εφόσον $p \geq 1$. Θα δείξουμε την (1.20) με επαγωγή για $k = 0,1,2 \ldots.$ για τα διαστήματα $(2^{k-1} - \frac{1}{2}, 2^k - \frac{1}{2}]$ που περιέχουν το r. Εφόσον $(0, \infty) = U_{k=0}^{\infty}(2^{k-1} - \frac{1}{2}, 2^k - \frac{1}{2}]$, η (1.20) αποδείχτηκε. Πρώτα παίρνουμε την περίπτωση $k = 0$, δηλαδή, $0 < r \leq 1/2$. Από την LH $A^{2r} \geq B^{2r}$ και επομένως $B^r A^{-2r} B^r \leq I$ που σημαίνει ότι $A^{-r} B^r$ είναι συστολή. Εφαρμόζοντας την (1.16) στο Θεώρημα 1.15 με $f(x) = x^t$ δίνει:

$$\begin{aligned}(B^r A^p B^r)^t &= [(A^r B^r)^* A^{p+2r} (A^{-r} B^r)]^t \\ &\geq (A^r B^r)^* A^{(p+2r)/t} (A^{-r} B^r) \\ &= B^r A B^r \geq B^{1+2r}\end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει την περίπτωση για $k = 0$.Τώρα υποθέτοντας ότι η (1.20) ισχύει για $r \in (2^{k-1} - \frac{1}{2}, 2^k - \frac{1}{2}]$, ορίζουμε $(B^r A^p B^r)^t = A_1, B^{1+2r} = B_1$.Τότε η υπόθεση μας είναι $A_1 \geq B_1,\ \mu\varepsilon\ t = \frac{1+2r}{p+2r}$, και εφόσον $p_1 \equiv 1/t \geq 1$ εφαρμόζουμε την ήδη αποδεδειγμένη περίπτωση για $r_1 = 1/2$, στο $A_1 \geq B_1$ και παίρνουμε $(B_1^{r_1} A_1^{p_1} B_1^{r_1})^{t_1} \geq B_1^{1+2r_1}$. (1.21)

Σημειώνουμε ότι $t_1 = (2+4r)/(p+4r+1)$. Ορίζουμε $s = 2r + 1/2$ και έχουμε $s \in (2^k - \frac{1}{2}, 2^{k+1} - \frac{1}{2}]$. Τότε η 1.21 γίνεται $(B^s A^p B^s)^{t_1} \geq B^{1+2s}, t_1 = (1+2s)/(p+2s)$ το οποίο μας επιτρέπει να δείξουμε ότι η (1.20) ισχύει για $r \in (2^k - \frac{1}{2}, 2^{k+1} - \frac{1}{2}]$, το οποίο αποδεικνύει την (1.18). Τέλος, $A \geq B > 0$ σημαίνει $B^{-1} \geq A^{-1} \geq 0$. Με αντικατάσταση στην (1.18) των A, B από τα B^{-1}, A^{-1}, αντίστοιχα δίνει την (1.19). □

Η περίπτωση όπου $q = p \geq 1$ στο Θεώρημα 1.16 είναι το επόμενο πόρισμα:

Πόρισμα 1.17 Εάν $A \geq B \geq 0$ τότε,

$$(B^r A^p B^r)^{1/p} \geq B^{(p+2r)/p} \tag{1.18}$$

$$A^{(p+2r)/p} \geq (A^r B^p A^r)^{1/p} \tag{1.19}$$

για όλα τα $r \geq 0\ ,\ p \geq 1$.

Μία ακόμα πιο ειδική περίπτωση είναι η επόμενη:

Πόρισμα 1.18 Εάν $A \geq B \geq 0$, τότε

$$(BA^2B)^{1/2} \geq B^2\ ,\ A^2 \geq (AB^2A)^{1/2}.$$

Με μια πρώτη ματιά το Θεώρημα 1.16 και το Πόρισμα 1.18 είναι περίεργα. Για παράδειγμα, για θετικούς αριθμούς $a \geq b$, ισχύει $a^2 \geq (ba^2b)^{1/2} \geq b^2$. Ξέρουμε ότι κάτι ανάλογο σε πίνακες, $A \geq B \geq 0$, δεν σημαίνει ότι $A^2 \geq B^2$, αλλά το Πόρισμα 1.18 υποδεικνύει ότι το ανάλογο των πινάκων της ισχυρής ανισότητας $(ba^2b)^{1/2} \geq b^2$ ισχύει.

1.4 Τεχνικές πάνω σε πίνακες

Κατά την απόδειξη του Λήμματος 1.15 είδαμε πόσο ισχυρά είναι τα επιχειρήματα σε πίνακες blocks (σύνθετους πίνακες). Σε αυτήν την παράγραφο δίνουμε άλλο ένα παράδειγμα. Σε επόμενες παραγράφους θα συμπεριλάβουμε και άλλες τεχνικές πάνω σε σύνθετους πίνακες.

Θεώρημα 1.19 Έστω A, B, X, Y πίνακες με A, B να είναι θετικά ορισμένοι και X, Y τυχαίοι. Τότε:

$$(X^*A^{-1}X) \circ (Y^*B^{-1}Y) \geq (X \circ Y)^*(A \circ B)^{-1}(X \circ Y), \tag{1.22}$$

$$X^*A^{-1}X + Y^*B^{-1}Y \geq (X + Y)^*(A + B)^{-1}(X + Y) \tag{1.23}$$

Απόδειξη: Από το Λήμμα 1.4 έχουμε:

$$\begin{bmatrix} A & X \\ X^* & X^*A^{-1}X \end{bmatrix} \geq 0 \ , \ \begin{bmatrix} B & Y \\ Y^* & Y^*B^{-1}Y \end{bmatrix} \geq 0$$

εφαρμόζοντας το θεώρημα του Schur παίρνουμε,

$$\begin{bmatrix} A \circ B & X \circ Y \\ (X \circ Y)^* & (X^{**}A^{-1}X) \circ (Y^*A^{-1}Y) \end{bmatrix} \geq 0 \tag{1.24}$$

εφαρμόζοντας το Λήμμα 1.4 ξανά για άλλη διάσταση στην (1.24) παίρνουμε την (1.22). Η ανισότητα (1.23) αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο. □

Τώρα ας σκεφτούμε κάποιες χρήσιμες ειδικές περιπτώσεις αυτού του θεωρήματος. Επιλέγοντας $A = B = I \ \ και \ X = Y = I$ στην (1.22) αντίστοιχα παίρνουμε:

Πόρισμα 1.20 Για κάθε X, Y και θετικά ορισμένους A, B έχουμε,

$$(X^*X) \circ (Y^*Y) \geq (X \circ Y)^*(X \circ Y) \tag{1.25}$$

$$A^{-1} \circ B^{-1} \geq (A \circ B)^{-1} \tag{1.26}$$

Στην (1.26) θέτοντας $B = A^{-1}$ παίρνουμε $A \circ A^{-1} \geq (A \circ A^{-1})^{-1}$ ή αλλιώς

$$A \circ A^{-1} \geq I \ , \ για \ \ A > 0 \tag{1.27}$$

Η (1.27) είναι γνωστή ανισότητα λόγω του M.Fiedler. Σημειώνουμε εδώ ότι οι (1.22) και (1.23) μπορούν να επεκταθούν στην περίπτωση τυχαίου πεπερασμένου αριθμού πινάκων κατά την ίδια απόδειξη. Για παράδειγμα έχουμε,

$$\textstyle\sum_1^k X_j^* A_j^{-1} X_j \geq \left(\sum_1^k X_j\right)^* \left(\sum_1^k A_j\right)^{-1} \left(\sum_1^k X_j\right)$$

για κάθε $X_j \ , \ A_j > 0 \ , \ j = 1,2, \ldots, k$, δύο περιπτώσεις του οποίου είναι αρκετά ενδιαφέρουσες,

$$k \textstyle\sum_1^k (X_j^* X_j) \geq \left(\sum_1^k X_j\right)^* \left(\sum_1^k X_j\right), \quad \sum_1^k A_j^{-1} \geq k^2 \left(\sum_1^k A_j\right)^{-1} \ , \ A_j > 0.$$

Επισημαίνουμε το επόμενο γεγονός για αργότερη χρήση. Μπορούμε να το συγκρίνουμε με το Λήμμα 1.4.

Λήμμα 1.21
$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0 \tag{1.28}$$

αν και μόνο αν $A \geq 0$, $C \geq 0$ και υπάρχει μια συστολή W τέτοια ώστε $B = A^{1/2}WC^{1/2}$.

Απόδειξη: Υπενθυμίζουμε το γεγονός ότι,

$$\begin{bmatrix} I & X \\ X^* & I \end{bmatrix} \geq 0$$

αν και μόνο αν η X είναι συστολή. Αυτή η υπόθεση ελέγχεται με ευκολία. Αντιστρόφως υποθέτουμε ότι ισχύει η (1.28). Πρώτα ας θεωρήσουμε ότι έχουμε $A > 0$, $C > 0.$ Τότε

$$\begin{bmatrix} I & A^{-1/2}BC^{-1/2} \\ (A^{-1/2}BC^{-1/2})^* & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ 0 & C^{-1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ 0 & C^{-1/2} \end{bmatrix} \geq 0$$

Επομένως $W = A^{-1/2}BC^{-1/2}$ είναι συστολή και $B = A^{1/2}WC^{1/2}$. Σε επόμενη φάση για την γενική περίπτωση έχουμε,

$$\begin{bmatrix} A + m^{-1}I & B \\ B^* & C + m^{-1}I \end{bmatrix} \geq 0$$

για κάθε θετικό ακέραιο m. Με ότι έχουμε αποδείξει μέχρι στιγμής, για κάθε m υπάρχει μια συστολή W_m τέτοια ώστε

$$B = (A + m^{-1}I)^{1/2}W_m(C + m^{-1})^{1/2}. \tag{1.29}$$

Εφόσον το εύρος των πινάκων μιας συγκεκριμένης τάξης είναι πεπερασμένης διάστασης, η μοναδιαία σφαίρα κάθε φασματικής νόρμας είναι ένα συμπαγές σύνολο. Έτσι υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία της $\{W_m\}_{m=1}^{\infty}$, δηλαδή $\log_{k\to\infty} W_{m_k} = W$. Προφανώς επειδή η W είναι συστολή και παίρνοντας $\lim$ $για\ k \to \infty$ για την (1.29), παίρνουμε

$$B = A^{1/2}WC^{1/2}. \qquad \square$$

Τέλος, σημειώνουμε ότι το Θεώρημα 1.19 παραμένει σε ισχύ για ορθογώνιους πίνακες X, Y.

2. Υπεροχή και Ιδιοτιμές

Η υπεροχή είναι από τις πιο ισχυρές τεχνικές για να λαμβάνουμε τις ιδιοτιμές. Εισάγουμε πρώτα στην παράγραφο 2.1 την λογική τεσσάρων ειδών υπεροχών, δίνουμε κάποια παραδείγματα πινάκων σχετικά με αυτές, και παρουσιάζουμε αρκετές βασικές αρχές για τις υπεροχές. Έπειτα, στην παράγραφο 2.2 αποδεικνύουμε δύο θεωρήματα ιδιοτιμών πάνω σε Hadamard γινόμενα θετικά ημιορισμένων πινάκων, τα οποία γενικεύουν τις κλασικές ανισότητες του Oppenheim.

2.1 Υπεροχή

Δοσμένου ενός πραγματικού διανύσματος $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, τακτοποιούμε τα στοιχεία του ως $x_{[1]} \geq x_{[2]} \geq \cdots \geq x_{[n]}$.

Ορισμός: Για $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, εάν,

$$\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^{k} y_{[i]} , k = 1,2, \dots, n$$

τότε λέμε ότι το y ασθενώς υπερέχει του x και το συμβολίζουμε με $x \prec_w y.$ Εάν επιπρόσθετα ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$,τότε λέμε ότι το y υπερέχει του x και το συμβολίζουμε με $x \prec y$. Για παράδειγμα εάν κάθε $a_i \geq 0$, $\sum_1^n a_i = 1$, τότε,

$$(1/n, \dots ,1/n) \prec (a_1, \dots, a_n) \prec (1,0, \dots 0).$$

Υπάρχει ένας χρήσιμος χαρακτηρισμός για την υπεροχή. Ονομάζουμε ένα πίνακα μη αρνητικό εάν όλα τα στοιχεία του είναι μη αρνητικοί και πραγματικοί αριθμοί. Ένας με αρνητικός πίνακας καλείται διπλά στοχαστικός εάν όλα τα αθροίσματα στηλών και γραμμών του είναι μονάδες. Θεωρούμε $x, y \in \mathbb{R}^n.$ Το θεώρημα του Hardy-Littlewood-Polya θέτει το ότι $x \prec y$ ισχύει αν και μόνο αν υπάρχει ένας διπλά στοχαστικός πίνακας A τέτοιος ώστε $x = Ay$. Με αυτόν τον χαρακτηρισμό περνάμε στο γνωστό θεώρημα του Schur μέσω της φασματικής ανάλυσης ερμιτιανών πινάκων.

Θεώρημα 2.1 Εάν H είναι ένας ερμιτιανός πίνακας με διαγώνια στοιχεία $(h_1, \dots, h_n)$ και με ιδιοτιμές $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$,

$$(h_1, \dots, h_n) \prec (\lambda_1, \dots, \lambda_n). \tag{2.1}$$

Παράδειγμα: $\mathrm{H} = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 0 \\ 1-i & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \lambda_1 \approx 4{,}78, \lambda_2 \approx 1{,}71, \lambda_3 \approx -0{,}48, tr(H) = 6,$

$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \approx 6$, οπότε βλέπουμε ότι ισχύει η σχέση (2.1) του Θεωρήματος 2.1.

Στην συνέχεια, εάν οι ιδιοτιμές ενός πίνακα H είναι πραγματικές θα τις τοποθετούμε κατά φθίνουσα σειρά $\lambda_1(H) \geq \lambda_2(H) \geq \cdots \geq \lambda_n(H)$ και ορίζουμε το σύνολο $\lambda(H) \equiv (\lambda_1(H), \dots, \lambda_2(H)$. Εάν G,H ερμιτιανοί πίνακες και $\lambda(G) \prec \lambda(H)$, γράφουμε απλά $G \prec H$. Για παράδειγμα το Θεώρημα 2.1 μπορεί να γραφτεί και ως:

$$H \circ I \prec H \quad , \quad H\text{-ερμιτιανός} \tag{2.2}$$

Στα επόμενα θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις $f(t)$, $g(t)$ ορίζονται σε κάποιο διάστημα το οποίο περιέχει τα στοιχεία $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Θεώρημα 2.2 Έστω μία κυρτή συνάρτηση $f(t)$. Τότε,

$$x \prec y \;\; \Rightarrow \;\; (f(x_1), \dots, f(x_n)) \prec_w (f(y_1), \dots, f(y_n)).$$

Θεώρημα 2.3 Έστω μία αύξουσα κυρτή συνάρτηση $g(t)$. Τότε,

$$x \prec_w y \;\; \Rightarrow \;\; (g(x_1), \dots, g(x_n)) \prec_w (g(y_1), \dots, g(y_n)).$$

Για να επιδείξουμε την επίδραση του Θεωρήματος 2.2, υποθέτουμε στο Θεώρημα 2.1 ότι $H > 0$, και χωρίς βλάβη της γενικότητας $h_1 \geq \cdots \geq h_n$, $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Έπειτα εφαρμόζουμε το Θεώρημα 2.2 με $f(t) = -logt$ στην υπεροχή του (2.1) για να πάρουμε,

$$\prod_{i=k}^{n} h_i \geq \prod_{i=k}^{n} \lambda_i \quad k = 1,2, \dots, n \tag{2.3}$$

Προφανώς, λόγω συνέχειας η συνθήκη $H > 0$ μπορεί να γίνει και $H \geq 0$. Σημειώνουμε πως η ειδική περίπτωση της (2.3) για $k = 1$ δείχνει ότι η $detH \leq \prod_1^n H_i$ η οποία ονομάζεται ανισότητα Hadamard.

Ορισμός: Έστω τα στοιχεία των $x = (x_1, \dots, x_n)$ και $y = (y_1, \dots, y_n)$ να είναι μη αρνητικά. Εάν,

$$\prod_{i=1}^{k} x_{[i]} \leq \prod_{i=1}^{k} y_{[i]} \;\; , \;\; k = 1,2, \dots, n$$

τότε λέμε ότι η y έχει ασθενή λογαριθμική υπεροχή κατά της x (ή υπερέχει ασθενώς λογαριθμικά) και το συμβολίζουμε με $x \prec_{wlog} y$. Εάν επιπρόσθετα στην $x \prec_{wlog} y$ ισχύει

$\prod_{i=1}^{k} x_i = \prod_{i=1}^{k} y_i$ για με $k = n$, τότε λέμε ότι η y έχει λογαριθμική υπεροχή κατά της x και το συμβολίζουμε με $x \prec_{log} y$.

Η απόλυτη τιμή ενός πίνακα A, ορίζεται ως $|A| \equiv (A^*A)^{1/2}$. Οι ιδιάζουσες τιμές ενός πίνακα A ορίζονται ως οι ιδιοτιμές του $|A|$. Επομένως οι ιδιάζουσες τιμές ενός πίνακα A είναι οι μη αρνητικές τετραγωνικές ρίζες του A^*A. Για θετικά ημιορισμένους πίνακες, οι ιδιάζουσες τιμές και οι ιδιοτιμές συμπίπτουν. Στην συνέχεια γράφουμε τις ιδιάζουσες τιμές σε φθίνουσα σειρά : $s_1(A) \geq \cdots \geq s_n(A)$ και ορίζουμε το σύνολο $s(A) = (s_1(A), \dots, s_n(A))$. Παρατηρούμε ότι η φασματική νόρμα του A, $\|A\|_\infty$ είναι ίση με την $s_1(A)$. Συμβολίζουμε ένα διάνυσμα $(x_1, \dots, x_n)$ με $\{x_i\}$. Στην θεωρία πινάκων υπάρχουν οι επόμενες τρείς βασικές σχέσεις υπεροχής.

Θεώρημα 2.4 Έστω $\lambda_1(A), \dots . \lambda_n(A)$, οι ιδιοτιμές ενός πίνακα A ταξινομημένες έτσι ώστε $|\lambda_1(A)| \geq \cdots \geq |\lambda_n(A)|$. Τότε

$$\{|\lambda_i(A)|\} \prec_{log} s(A).$$

Θεώρημα 2.5 Για οποιουσδήποτε πίνακες A, B ισχύει ότι $s(AB) \prec_{log} \{s_i(A)s_i(B)\}$.

Θεώρημα 2.6 Για οποιουσδήποτε πίνακες A, B ισχύει $s(A \circ B) \prec_w \{s_i(A)s_i(B)\}$.

Σημειώνουμε πως οι ιδιοτιμές του γινομένου δύο θετικά ημιορισμένων πινάκων είναι μη αρνητικές εφόσον $\lambda(AB) = \lambda(A^{1/2}BA^{1/2})$. Εάν A, B είναι θετικά ημιορισμένοι τότε από τα Θεωρήματα 2.4 και 2.5,

$$\lambda(AB) \prec_{log} s(AB) \prec_{log} \{\lambda_i(A)\lambda_i(B)\}$$

και επομένως

$$A, B \geq 0 \ \Rightarrow \ \lambda(AB) \prec_{log} \{\lambda_i(A)\lambda_i(B)\}. \tag{2.4}$$

Παράδειγμα: Για πίνακες, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda(A) = \{1{,}1{,}3\}, \lambda(B) = \{0{,}0.5{,}1.5\}, \lambda(AB) = \{4.5{,}0.5{,}0\}$, οπότε βλέπουμε γιατί ισχύει η σχέση (2.4)

Σημειώνουμε ότι για μη αρνητικά διανύσματα, η ασθενής log-υπεροχή είναι πιο ισχυρή από την ασθενή υπεροχή το οποίο δείχνεται από το Θεώρημα 2.3 στην περίπτωση του $g(t) = e^t$.

Θεώρημα 2.7 Έστω τα στοιχεία των $x, y \in \mathbb{R}^n$ να είναι μη αρνητικά. Τότε

$$x \prec_{wlog} y \ \Rightarrow x \prec_w y$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.7 στα Θεωρήματα 2.4 και 2.5 παίρνουμε το ακόλουθο:

Πόρισμα 2.8 Για κάθε $A, B \in M_n$ ισχύουν:

$$|tr(A)| \leq \sum_{i=1}^{n} s_i(A) \quad , \quad s(AB) \prec_w \{s_i(A)s_i(B)\}.$$

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι αρκετά χρήσιμο,

Θεώρημα 2.9 Έστω $A, B \geq 0$. Εάν $0 < s < t$ τότε,

$$\left\{\lambda_i^{\frac{1}{s}}(A^s B^s)\right\} \prec_{log} \left\{\lambda_i^{\frac{1}{t}}(A^t B^t)\right\}.$$

Σύμφωνα με αυτό το θεώρημα εάν $A, B \geq 0$ και $m \geq 1$,τότε ,

$$\left\{\lambda_j^m(AB)\right\} \prec_{log} \{\lambda_j(A^m B^m)\}$$

και επομένως, $$\left\{\lambda_j^m(AB)\right\} \prec_w \{\lambda_j(A^m B^m)\}.$$

Εάν τώρα το m είναι θετικός ακέραιος, ισχύει ότι $\lambda_j^m(AB) = \lambda_j[(AB)^m]$ και επομένως,

$$\{\lambda_j[(AB)^m]\} \prec_w \{\lambda_j(A^m B^m)\}.$$

Συγκεκριμένα έχουμε: $$tr(AB)^m \leq trA^m B^m.$$

Θεώρημα 2.10 Έστω G, H ερμιτιανοί. Τότε $\lambda(e^{(G+H)}) \prec_{log} \lambda(e^G e^H)$.

Απόδειξη: Έστω G , $H \in M_n$ και σταθερό k τέτοιο ώστε $1 \leq k \leq n$. Από τα Θεωρήματα 2.9 και την φασματική ανάλυση έχουμε ότι για κάθε θετικό ακέραιο m,

$$\prod_{j=1}^{k} \lambda_j \left[\left(e^{\frac{G}{m}} e^{\frac{H}{m}}\right)^m\right] = \prod_{j=1}^{k} \lambda_j^m \left(e^{\frac{G}{m}} e^{\frac{H}{m}}\right) \leq \prod_{j=1}^{k} \lambda_j(e^G e^H). \qquad (2.5)$$

ισχύει επίσης ότι $\lim_{m \to \infty} \left(e^{\frac{X}{m}} e^{\frac{Y}{m}}\right)^m = e^{X+Y}$ για οποιουσδήποτε δύο πίνακες X , Y. Επομένως, παίρνοντας $m \to \infty$ στην σχέση (2.5) έχουμε,

$$\lambda(e^{G+H}) \prec_{wlog} \lambda(e^G e^H).$$

Τέλος επισημάνουμε πως $dete^{G+H} = \det(e^G e^H)$ και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Το Θεώρημα 2.10 ισχυροποιεί την ανισότητα Golden-Thompson:

$$tre^{G+H} \leq tr(e^G e^H)$$

Από τον χαρακτηρισμό των ιδιοτιμών ερμιτιανού πίνακα πηγάζει το γεγονός ότι αν $A \geq B \Rightarrow \lambda_j(A) \geq \lambda_j(B)$ για κάθε j, το οποίο θα το χρησιμοποιούμε συνέχεια από δω και πέρα.

2.2 Ιδιοτιμές γινομένων Hadamard

Έστω $A, B = (b_{ij}) \in M_n$, δύο θετικά ημιορισμένοι πίνακες. Η ανισότητα του Oppenheim δηλώνει ότι,

$$\det(A \circ B) = (detA) \prod_{i=1}^{n} b_{ii} \tag{2.6}$$

Σύμφωνα με την ανισότητα του Hadamard, η (2.6) συνεπάγεται,

$$\det(A \circ B) \geq \det(AB). \tag{2.7}$$

Πρώτα δίνουμε μία γενίκευση της καθοριστικής ανισότητας (2.7), της οποίας η απόδειξη χρησιμοποιεί αρκετά αποτελέσματα τα οποία έχουμε αποδείξει, και ύστερα γενικεύουμε την (2.6).

Έστω $x = \{x_i\}$, $y = \{y_i\} \in \mathbb{R}^n$ με $x_1 \geq \cdots \geq x_n$, $y_1 \geq \cdots \geq y_n$. Παρατηρήστε ότι αν $x \prec y$ τότε,

$$\sum_{i=k}^{n} x_i \geq \sum_{i=k}^{n} y_i \qquad k = 1,2,\ldots,n$$

Επίσης αν τα στοιχεία των x , y είναι θετικά και $x \prec_{log} y$ τότε,

$$\prod_{i=k}^{n} x_i \geq \prod_{i=k}^{n} y_i \qquad k = 1,2,\ldots,n$$

Θεώρημα 2.11 Έστω θετικά ορισμένοι πίνακες A , $B \in M_n$. Τότε,

$$\prod_{j=k}^{n} \lambda_j(A \circ B) \geq \prod_{j=k}^{n} \lambda_j(AB), \qquad k = 1,2,\ldots,n \tag{2.8}$$

Απόδειξη: Από την σχέση (1.15) στο Πόρισμα 1.10 έχουμε:

$$\log(A \circ B) \geq (logA + logB) \circ I$$

το οποίο συνεπάγεται:

$$\log\left[\prod_{j=k}^{n} \lambda_j(A \circ B)\right] = \sum_{j=k}^{n} \lambda_j[log(A \circ B)] \geq \sum_{j=k}^{n} \lambda_j[(logA + logB) \circ I]$$

για κάθε $k = 1,2,\ldots,n$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Schur,

$$(logA + logB) \circ I \prec logA + logB \,,$$

από το οποίο προκύπτει,

$$\sum_{j=k}^{n} \lambda_j [(logA + logB) \circ I] \geq \sum_{j=k}^{n} \lambda_j (logA + logB)$$

για $k = 1,2, \dots, n$.

Από την άλλη πλευρά, θέτοντας στο Θεώρημα 2.10, $G = logA$ και $H = logB$, παίρνουμε:

$$\lambda(e^{(logA+logB)}) \prec_{log} \lambda(AB).$$

Εφόσον $\lambda_j(e^{(logA+logB)}) = e^{\lambda_j(logA+logB)}$, αυτή η log-υπεροχή είναι ανάλογη με την υπεροχή,

$$\lambda(logA + logB) \prec \{log\lambda_j(AB)\}.$$

Αλλά $log\lambda_j(AB) = log[\lambda_j \left(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}\right)] = \lambda_j[\log\left(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}\right)]$, οπότε,

$$logA + logB \prec \log\,(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}).$$

Επομένως ,

$$\sum_{j=k}^{n} \lambda_j (logA + logB) \geq \sum_{j=k}^{n} \lambda_j \,[log(A^{1/2}BA^{1/2})]$$
$$= \log\,[\prod_{j=k}^{n} \lambda_j (AB)]$$

για $k = 1,2, \dots, n$. Συνδυάζοντας τις παραπάνω τρεις ανισότητες παίρνουμε:

$$\prod_{j=k}^{n} \lambda_j (A \circ B) \geq \prod_{j=k}^{n} \lambda_j (AB) \quad , \quad k = 1,2, \dots, n$$

η οποία ανισότητα αποδεικνύει το Θεώρημα 2.11. □

Ορίζουμε με G^T τον ανάστροφο πίνακα του G. Εφόσον για $B > 0$, $logB^T = (logB)^T$ έχουμε ότι,

$$(logB)^T \circ I = (logB^T) \circ I = (logB) \circ I$$

Επομένως στην παραπάνω απόδειξη μπορούμε να αντικαταστήσουμε $(logA + logB) \circ I$

με το $(logA + logB^T) \circ I$. Έτσι παίρνουμε το επόμενο.

Θεώρημα 2.12 Έστω A , B $\in M_n$, θετικά ορισμένοι πίνακες. Τότε,

$$\prod_{j=k}^{n} \lambda_j(A \circ B) \geq \prod_{j=k}^{n} \lambda_j(AB^T)\ ,\ k = 1,2,\dots,n \tag{2.9}$$

Σημειώνουμε εδώ ότι η ειδική περίπτωση για $k = 1$ της (2.8) είναι η ανισότητα (2.7). Για $A, B > 0$, από την log-υπεροχή της 2.4 έχουμε:

$$\prod_{j=k}^{n} \lambda_j(AB) \geq \prod_{j=k}^{n} \lambda_j(A)\lambda_j(B)\ \ ,\ \ k = 1,2,\dots,n \tag{2.10}$$

Συνδυάζοντας τώρα τις (2.8) και (2.10), παίρνουμε το ακόλουθο.

Πόρισμα 2.13 Έστω A , B $\in M_n$, θετικά ορισμένοι πίνακες. Τότε,

$$\prod_{j=k}^{n} \lambda_j(A \circ B) \geq \prod_{j=k}^{n} \lambda_j(A)\lambda_j(B)\ \ ,\ \ k = 1,2,\dots,n$$

Παράδειγμα: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.5 & 1.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 1.2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1.8 & 0.4 & 0.1 \\ 0.4 & 2 & 0.25 \\ 0.1 & 0.25 & 1.6 \end{bmatrix}$, $\lambda(A) \approx \{1.1, 1.2, 2.4\}, \lambda(B) \approx$

$$\{1.4,1.6,2.4\},\quad A \circ B = \begin{bmatrix} 3.6 & 0.2 & 0.03 \\ 0.2 & 3 & 0.05 \\ 0.03 & 0.05 & 1.92 \end{bmatrix},\quad \lambda(A \circ B) \approx \{1.9,2.9,3.7\}, \lambda(AB) \approx$$

$$\{5.6,1.9,1.6\}\ όπου, \prod_{j=1}^{3} \lambda_j(AB^T) \approx 17.02\ , \prod_{j=1}^{3} \lambda_j(A \circ B) \approx 20.4.$$

Σε επόμενη φάση δίνουμε την γενίκευση της ανισότητας Oppenheim (2.6). Μία γραμμική απεικόνιση $\Phi : M_n \to M_n$ είναι διπλά στοχαστική εάν είναι θετική (δηλαδή για $A \geq 0 \Rightarrow \Phi(A) \geq 0$), ισχύει $\Phi(I) = I$ και $tr\Phi(A) = trA$ για κάθε $A \in M_n$. Εφόσον κάθε ερμιτιανός πίνακας μπορεί να γραφτεί ως διαφορά δύο θετικά ημιορισμένων πινάκων: $H = (|H| + H)/2 - (|H| - H)/2$, μία θετική γραμμική απεικόνιση αναγκαστικά διατηρεί το σύνολο ερμιτιανών πινάκων. Το εσωτερικό γινόμενο του Frobenius στον M_n είναι $\langle A, B \rangle \equiv trAB^*$.

Λήμμα 2.14 Έστω $A \in M_n$ ένας ερμιτιανός πίνακας και Φ: $M_n \to M_n$ μία διπλά στοχαστική απεικόνιση. Τότε,

$$\Phi(A) \prec A.$$

Απόδειξη: Έστω $A = Udiag(x_1, \dots, x_n)U^*$, $\Phi(A) = Wdiag(y_1, \dots, y_n)W^*$ να είναι οι φασματικές αναλύσεις με U , W ορθομοναδιαίους. Ορίζουμε:

$$\Psi(X) = W^*\Phi(UXU^*)W.$$

Τότε η Ψ είναι ξανά μία διπλά στοχαστική απεικόνιση και ισχύει,

$$diag(y_1, \dots, y_n) = \Psi(diag(x_1, \dots, x_n)) \tag{2.11}$$

Έστω $P_j \equiv e_j e_j^T$ να είναι η ορθογώνια προβολή στον μονοδιάστατο υπόχωρο, ο οποίος παράγεται από το j-οστό σύνηθες διάνυσμα βάσης $e_j, j = 1,2, \dots, n$. Τότε η (2.11) συνεπάγεται ότι ,

$$(y_1, \dots, y_n)^T = D(x_1, \dots, x_n)^T \tag{2.12}$$

όπου $D = (d_{ij})$, όπου $d_{ij} = \langle \Psi(P_j), P_i \rangle$, για κάθε i, j. Εφόσον η Ψ είναι διπλά στοχαστική, είναι εύκολο να επιβεβαιώσουμε ότι ο D είναι διπλά στοχαστικός πίνακας. Σύμφωνα με το θεώρημα Hardy-Littlewood-Polya, η σχέση (2.12) συνεπάγεται ότι,

$$(y_1, \dots, y_n) \prec (x_1, \dots, x_n)$$

το οποίο αποδεικνύει το Λήμμα 2.14. □

Ένας θετικά ημιορισμένος πίνακας με όλα τα διαγώνια στοιχεία του μονάδες λέγεται πίνακας συσχέτισης. Υποθέτουμε ότι C είναι ένας πίνακας συσχέτισης. Θέτουμε $\Phi_C(X) = X \circ C$. Προφανώς Φ_C είναι μια διπλά στοχαστική απεικόνιση στο M_n. Επομένως έχουμε το παρακάτω.

Πόρισμα 2.15 Εάν A είναι ερμιτιανός και C είναι πίνακας συσχέτισης, τότε,

$$A \circ C \prec A.$$

Θεώρημα 2.16 Έστω $A, B \in M_n$ είναι θετικά ορισμένοι και $\beta_1 \geq \cdots \geq \beta_n$ είναι μία εκ νέου διευθέτηση των διαγώνιων στοιχείων του B. Τότε για κάθε $1 \leq k \leq n$,

$$\prod_{j=k}^{n} \lambda_j(A \circ B) \geq \prod_{j=k}^{n} \lambda_j(A)\beta_j \tag{2.13}$$

Απόδειξη: Έστω $B = (b_{ij})$. Ορίζουμε δύο πίνακες $C = (c_{ij})$, $H = (h_{ij})$ τέτοιους ώστε να ισχύουν:

$$c_{ij} = \frac{b_{ij}}{(b_{ii}b_{jj})^{1/2}} \ , \ h_{ij} = (b_{ii}b_{jj})^{1/2}.$$

Τότε ο C είναι πίνακας συσχέτισης και $B = H \circ C$. Από το Πόρισμα 2.15 έχουμε ότι ισχύει

$$A \circ B = (A \circ H) \circ C \prec A \circ H.$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.2 με $f(t) = -logt$ σε αυτήν την υπεροχή παίρνουμε:

$$\prod_{j=k}^{n} \lambda_j(A \circ B) \geq \prod_{j=k}^{n} \lambda_j(A \circ H) \tag{2.14}$$

Παρατηρήστε πως $A \circ H = DAD$, όπου $D = diaf(\sqrt{b_{11}}, \dots, \sqrt{b_{nn}})$ και $\lambda_j(D^2) = \beta_j$, $για\ j = 1, \dots, n$. Επομένως $\lambda(A \circ H) = \lambda(DAD) = \lambda(AD^2)$. Από την log-υπεροχή (2.4) έχουμε:

$$\prod_{j=k}^{n} \lambda_j(A \circ H) = \prod_{j=k}^{n} \lambda_j(AD^2) \geq \prod_{j=k}^{n} \lambda_j(A)\lambda_j(D^2) = \prod_{j=k}^{n} \lambda_j(A)\beta_j$$

Συνδυάζοντας τώρα την (2.14) και την παραπάνω ανισότητα παίρνουμε την (2.13). □

Η ανισότητα του Oppenheim (2.6) αντιστοιχεί στην ειδική περίπτωση όπου $k = 1$ της (2.13). Επίσης παρατηρήστε ότι εφόσον $\prod_{j=k}^{n} \beta_j \geq \prod_{j=k}^{n} \lambda_j(B)$, το Θεώρημα 2.16 είναι ισχυρότερο από το Πόρισμα 2.13. Επισημαίνουμε ότι γενικά, το Θεώρημα 2.16 και το 2.11 δεν είναι συγκρίσιμα. Στην πραγματικότητα, $\lambda_n(AB) > \lambda_n(A)\beta_n\ και\ \lambda_n(AB) < \lambda_n(A)\beta_n$, μπορούν να ισχύουν:

Για
$$A = diag(1,2)\ ,\ B = diag(2,1)$$
$$\lambda_2(AB) - \lambda_2(A)\beta_2 = 1$$

ενώ για
$$A = I_2\ ,\ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\lambda_2(AB) - \lambda_2(A)\beta_2 = -1.$$

Κάνουμε μία ειδική αναφορά στο ότι πρώτα ο M.Fielder απέδειξε την περίπτωση για $k = n$ του Θεωρήματος 2.12. Οι C.R.Johnson και L.Elsner απέδειξαν την περίπτωση για $k = n$ του Θεωρήματος 2.11 και έπειτα οι C.R.Johnson και R.B.Bapat υπέθεσαν την γενική ανισότητα στο Θεώρημα 2.11 καθώς ύστερα οι T.Ando και G.Visick επιλύσαν αυτήν την ανισότητα ανεξάρτητα. Αυτό το οποίο παρουσιάσαμε σε αυτήν την ενότητα είναι η κομψή απόδειξη του Ando. Το Πόρισμα 2.13 είναι μια υπόθεση του A.W.Marshall και I.Olkin. Οι R.B.Bapat και V.S.Sunder επιλύσαν αυτήν την υπόθεση με την απόδειξη του Θεωρήματος 2.16. Τέλος το Πόρισμα 2.15 υπάρχει λόγω της προσπάθειας των δύο προηγούμενων, ενώ το Λήμμα 2.14 υπάρχει λόγω της προσπάθειας του T.Ando.

3. Ιδιάζουσες Τιμές

Υπενθυμίζουμε ότι οι ιδιάζουσες τιμές ενός πίνακα $A \in M_n$, είναι οι ιδιοτιμές της απόλυτης τιμής του $|A| \equiv (A^*A)^{1/2}$ και έχουμε ορίσει τον συμβολισμό $s(A) = \big(s_1(A), \dots, s_n(A)\big)$ με $s_1(A) \geq \cdots \geq s_n(A)$ για τις ιδιάζουσες τιμές του A. Οι ιδιάζουσες τιμές είναι στενά συνδεδεμένες με τις ορθομοναδιαία αναλλοίωτες νόρμες, οι οποίες αποτελούν και το ζήτημα του επόμενου κεφαλαίου. Οι ανισότητες με ιδιάζουσες τιμές είναι πιο αδύναμες σε σχέση με τις ανισότητες μερικής τάξης του L$\ddot{o}$wner αλλά πιο ισχυρές από τις ορθομοναδιαία αναλλοίωτες νόρμες κατά την επόμενη σχέση:

$$|A| \leq |B| \Rightarrow s_j(A) \leq s_j(B) \text{ για κάθε } j \Rightarrow \|A\| \leq \|B\|$$

για όλες τις ορθομοναδιαία αναλλοίωτες νόρμες. Παρατηρήστε ότι οι ιδιάζουσες τιμές είναι και αυτές ορθομοναδιαία αναλλοίωτες : $s(UAV) = s(A)$, για κάθε U, V ορθομοναδιαίους και κάθε πίνακα *A*.

3.1 Ανισότητες πινάκων του Young

Η πιο σημαντική περίπτωση της ανισότητας του Young επιδεικνύει ότι εάν $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\mu\varepsilon\ p, q > 1$, τότε,

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q} \text{ για } a.b \in \mathbb{C}$$

Μία σύντομη γενίκευση σε πίνακες θα ήταν:

$$|AB| \leq \frac{|A|^p}{p} + \frac{|B|^q}{q}$$

το οποίο είναι λάθος γενικότερα. Εάν $A, B \geq 0$ είναι ένα αντιμεταθετικό ζεύγος, αλλά $AB \geq 0$ και μέσω μιας ορθομοναδιαίας διαγωνοποίησης (παράγραφος 4.5 Πόρισμα 18) είναι προφανές ότι η σχέση,

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$$

ισχύει. Τελικά, βρίσκουμε ότι η μορφή γενίκευσης με τις ιδιάζουσες τιμές της Young ανισότητας είναι αληθής.

Θα χρειαστούμε τις ακόλουθες ειδικές περιπτώσεις του Θεωρήματος 1.15.

Λήμμα 3.1 Έστω Q μία ορθογώνια προβολή και $X \geq 0$. Τότε

$$QX^r Q \leq (QXQ)^r \text{ εάν } 0 \leq r \leq 1,$$

$$QX^r Q \geq (QXQ)^r \text{ εάν } 1 \leq r \leq 2,$$

Θεώρημα 3.2 Έστω $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Τότε για οποιουσδήποτε πίνακες $A, B \in M_n$,

$$s_j(AB^*) \leq s_j(\frac{|A|^p}{p} + \frac{|B|^q}{q}), \quad j = 1,2, \dots n. \tag{3.1}$$

Απόδειξη: Ξέροντας τις αναλύσεις $A = V|A|$, $B = W|B|$, με V, W ορθοκανονικούς, βλέπουμε ότι αρκεί να αποδείξουμε την (3.1) για $A, B \geq 0$. Περνώντας στις ιδιοτιμές, η (3.1) σημαίνει ότι,

$$\lambda_k((BA^2B)^{\frac{1}{2}}) \leq \lambda_k(\frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}) \tag{3.2}$$

για κάθε $1 \leq k \leq n$. Τώρα σταθεροποιώντας το k, δείχνουμε την (3.2). Αφού $\lambda_k\left((BA^2B)^{\frac{1}{2}}\right) = \lambda_k((AB^2A)^{\frac{1}{2}}$, αλλάζοντας απλώς τους ρόλους των *A* και *B*, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $1 < p \leq 2$ και έτσι $2 \leq q < \infty$. Επιπροσθέτως, από το σύνηθες επιχείρημα της συνέχειας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $B > 0$. Εδώ επεξεργαζόμαστε πίνακες στο M_n σαν γραμμικούς τελεστές στο $\mathbb{C}^n$. Γράφουμε $\lambda \equiv \lambda_k((BA^2B)^{\frac{1}{2}})$ και ορίζουμε με P την ορθογώνια προβολή (τάξης *k*) στον φασματικό υπόχωρο ο οποίος ορίζεται από τα ιδιοδιανύσματα τα οποία αναλογούν στα $\lambda_j((BA^2B)^{\frac{1}{2}}$ για $j = 1,2, \dots, k$. Ορίζουμε με Q την ορθογώνια προβολή (τάξης k) στον υπόχωρο $\mathcal{M} \equiv image(B^{-1}P)$. Από τον χαρακτηρισμό ιδιοτιμών ερμιτιανών πινάκων, για την ανισότητα (3.2) αρκεί να δείξουμε ότι ,

$$\lambda Q \leq \frac{QA^pQ}{p} + QB^qQ/q. \tag{3.3}$$

Από τον ορισμό του *Q έχουμε:*

$$QB^{-1}P = B^{-1}P \tag{3.4}$$

και ότι υπάρχει τέτοιο *G* ώστε $Q = B^{-1}PG \Rightarrow BQ = PG$ καθώς επίσης και,

$$PBQ = BQ \tag{3.5}$$

Παίρνοντας τους συμπληρωματικούς στις (3.4) και (3.5) έχουμε,

$$PB^{-1}Q = PB^{-1} \tag{3.6}$$

και,

$$QBP = QB \tag{3.7}$$

Από τις 3.4 και 3.7 έχουμε:

$$(QB^2Q) \cdot (B^{-1}PB^{-1}) = QB^2 \cdot QB^{-1}PB^{-1} = QB^2 \cdot B^{-1}PB^{-1} = QBPB^{-1} = Q$$

και παρόμοια από (3.6) και (3.5) παίρνουμε,

$$(B^{-1}PB^{-1}) \cdot (QB^2Q) = Q.$$

Αυτές οι δύο ισότητες μαζί σημαίνουν ότι $B^{-1}PB^{-1}$ και QB^2Q απεικονίζουν το $\mathcal{M}$ στον εαυτό του, μηδενίζουν πάνω στο ορθογώνιο συμπλήρωμα και είναι αντίστροφες πάνω στο $\mathcal{M}$. Από τον ορισμό του P έχουμε:

$$(BA^2B)^{1/2} \geq \lambda P$$

το οποίο μέσω της αντιμεταθετικότητας των $(BA^2B)^{1/2}$ και P,

$$A^2 \geq \lambda^2 B^{-1}PB^{-1}.$$

Τότε από την ανισότητα του Lӧwner-Heinz (Θεώρημα 1.1) για $r = p/2$ παίρνουμε,

$$A^p \geq \lambda^p \cdot (B^{-1}PB^{-1})^{p/2},$$

και επομένως από τις (3.4) και (3.6),

$$QA^pQ \geq \lambda^p \cdot (B^{-1}PB^{-1})^{p/2} \Rightarrow \; QA^pQ \geq \lambda^p \cdot (QB^2Q)^{-p/2} \tag{3.8}$$

Θεωρούμε την περίπτωση για $2 \leq q \leq 4$. Από Λήμμα 3.1 για $r = q/2$ παίρνουμε,

$$QB^qQ \geq (QB^2Q)^{1/2} \tag{3.9}$$

Από την ανισότητα Young για το αντιμεταθετικό ζευγάρι, $\lambda \cdot (QB^2Q)^{-1/2}$ και $(QB^2Q)^{1/2}$,

$$\frac{QA^pQ}{p} + \frac{QB^qQ}{q} \geq \lambda \cdot (QB^2Q)^{-\frac{1}{2}} \cdot (QB^2Q)^{\frac{1}{2}} = \lambda Q,$$

το οποίο αποδεικνύει την (3.3).

Έστω τώρα η περίπτωση όπου $4 < q < \infty$ και έστω $s = q/2$. Τότε $\frac{q}{s} = 2\,, 0 < 2/s < 1$. Από Λήμμα 3.1 για $r = q/s$ έχουμε,

$$QB^qQ \geq (QB^sQ)^{q/s} \tag{3.10}$$

Από την άλλη, από Λήμμα 3.1 για $r = 2/s$ έχουμε,

$$(QB^sQ)^{2/s} \geq QB^2Q,$$

και από την ανισότητα Löwner-Heinz με $r = p/2$

$$(QB^sQ)^{p/s} \geq (QB^2Q)^{p/2}$$

οπότε στο $\mathcal{M}$,

$$(QB^sQ)^{-p/s} \leq (QB^2Q)^{-p/2} \tag{3.11}$$

Συνδυάζοντας τις (3.8) και (3.11) παίρνουμε,

$$QA^pQ \geq \lambda^p (QB^sQ)^{-p/s}. \tag{3.12}$$

Τώρα μέσω των (3.12) και (3.10) παίρνουμε,

$$\frac{QA^pQ}{p} + \frac{QB^qQ}{q} \geq \lambda^p \cdot \frac{(QB^sQ)^{-\frac{p}{s}}}{p} + \frac{(QB^sQ)^{q/s}}{q}.$$

Από την ανισότητα Young για το αντιμεταθετικό ζευγάρι, $\lambda \cdot (QB^sQ)^{-1/s}$ και $(QB^sQ)^{1/s}$,

$$\frac{QA^pQ}{p} + \frac{QB^qQ}{q} \geq \lambda \cdot (QB^sQ)^{-\frac{1}{s}} \cdot (QB^sQ)^{\frac{1}{s}} = \lambda Q,$$

το οποίο αποδεικνύει την (3.3) και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Η περίπτωση του Θεωρήματος 3.2 όπου $p = q = 2$,έχει την ακόλουθη μορφή:

Πόρισμα 3.3 Για κάθε $X\,, Y \in M_n$,

$$2s_j(XY^*) \leq s_j(X^*X + Y^*Y),\ \ j = 1,2, \dots n \tag{3.13}$$

Το συμπέρασμα του Θεωρήματος 3.2 είναι ισοδύναμο με το ότι υπάρχει ένας ορθομοναδιαίος πίνακας U, βασιζόμενος στα $A\,, B$ τέτοιος ώστε $U|AB^*|U^* \leq \frac{|A|^p}{p} + \frac{|B|^q}{q}$.

Παράδειγμα: Για πίνακες $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, οι ιδιάζουσες τιμές αυτών είναι $s(A) = \{3,1,0\}, s(B) = \{1.5,0.5,0\}, AB = \begin{bmatrix} 2.5 & 2 & 0 \\ 2 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ με $s(AB) = \{4.5,0.5,0\}$ και τέλος $C = A^2 + B^2 = \begin{bmatrix} 6.25 & 5 & 0 \\ 5 & 6.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ με $s(C) = \{11.25,1.25,0\}$ οπότε βλέπουμε ότι ισχύει η ανισότητα του Θεωρήματος 3.2 με $p = q = 2$.

Είναι φυσικό να αναρωτηθούμε την παρακάτω υπόθεση:

Υπόθεση 3.4: Έστω A , $B \in M_n$ θετικά ημιορισμένοι και $0 \leq r \leq 1$. Τότε

$$s_j(A^r B^{1-r} + A^{1-r} B^r) \leq s_j(A + B),\ j = 1,2, \dots, n \tag{3.14}$$

Παρατηρήστε ότι η ειδική περίπτωση για $r = 1/2$ της (3.14), είναι απλά η (3.13) ενώ οι περιπτώσεις για $r = 0,1$ είναι ασήμαντες. Ένα σχετιζόμενο πρόβλημα είναι το εξής.

Ερώτημα 3.5: Έστω $A, B \in M_n$ θετικά ημιορισμένοι πίνακες, ισχύει άραγε το ότι,

$$s_j^{1/2}(AB) \leq \frac{1}{2} s_j(A + B),\ j = 1,2, \dots, n; \tag{3.15}$$

Εφόσον η τετραγωνική συνάρτηση είναι κυρτός τελεστής στο $\mathbb{R}$, για παράδειγμα,

$$((A + B)/2)^2 \leq (A^2 + B^2)/2,$$

η σχέση (3.15) είναι ισχυρότερη από την (3.13).

3.2 Ιδιάζουσες τιμές των γινομένων Hadamard

Έστω πίνακας $A \in M_n$, $A = (a_{ij})$, ορίζουμε τα κατά φθίνουσα τάξη ευκλείδεια μήκη σειρών και στηλών του A με $r_1(A) \geq \dots \geq r_n(A)$, $c_1(A) \geq \dots \geq c_n(A)$ αντίστοιχα. Για παράδειγμα το $r_k(A)$, είναι η *k-οστή* μεγαλύτερη τιμή του $\left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$, $i = 1,2, \dots n$.

Θεώρημα 3.6 Για κάθε $A, B \in M_n$

$$s(A \circ B) \prec_w \{\min\{r_i(A), c_i(A)\}\, s_i(B)\}. \tag{3.16}$$

Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος χωρίζεται σε σειρές από λήμματα.

Λήμμα (χωρίς απόδειξη) 3.7 Για κάθε $A, B, C \in M_n$, $(A \circ B)C$ και $(A \circ C^T)B^T$ έχουνε την ίδια κύρια διαγώνιο. Συγκεκριμένα ,

$$tr(A \circ B)C = tr(A \circ C^T)B^T.$$

Ένας πίνακας ο οποίος έχει r-το πλήθος ιδιάζουσες τιμές ίσες με 1 και όλες οι υπόλοιπες ίσες με 0 λέγεται τάξης-r μερική ισομετρία.

Λήμμα 3.8 Για κάθε $C \in M_n$, $1 \leq k \leq n$, υπάρχει μία τάξης-k μερική ισομετρία $C_k \in M_n$τέτοια ώστε,

$$\sum_{i=1}^{k} s_i(C) = tr(CC_k).$$

Απόδειξη: Έστω $C = U|C|$ να είναι η πολική απεικόνιση με U ορθομοναδιαίο και $U|C|U^* = \sum_{i=1}^{n} s_i(C)P_i$ η φασματική ανάλυση όπου $P_1, \dots, P_n$ είναι τάξης-1 ορθογώνιες προβολές. Τότε $C_k \equiv U^* \sum_{i=1}^{k} P_i$ αποδεικνύει το λήμμα. □

Λήμμα 3.9 Κάθε πίνακας $B \in M_n$ μπορεί να γραφτεί και ως:

$$B = \sum_{i=1}^{n} \mu_i K_i$$

όπου κάθε $\mu_i \geq 0$ και κάθε K_i είναι μία i-τάξης μερική ισομετρία τέτοια ώστε,

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i = s_k(B)\,, \quad k = 1,2, \dots, n$$

Απόδειξη: : Έστω $B = U|B|$ να είναι η πολική ανάλυση με U ορθομοναδιαίο και $|B| = \sum_{i=1}^{n} s_i(B)P_i$ η φασματική ανάλυση με $P_1, \dots, P_n$ είναι τάξης-1 ορθογώνιες προβολές. Τότε,

$$\mu_i \equiv s_i(B) - s_{i+1}(B),\ i = 1, \dots, n-1\ ,\ \mu_n \equiv s_n(B)$$

και
$$K_\iota = U \sum_{j=1}^{i} P_j\ ,\ \ i = 1, \dots, n$$

ικανοποιούν τις απαιτήσεις. □

Λήμμα 3.10 Έστω $A \in M_n$, $a_1 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$ είναι γνωστά. Εάν

$$s(A \circ B) \prec_w \{a_i s_1(B)\}\ \text{για κάθε}\ B \in M_n\,, \tag{3.17}$$

τότε
$$s(A \circ B) \prec_w \{a_i s_n(B)\}\ \text{για κάθε}\ B \in M_n \tag{3.18}$$

Απόδειξη: Έστω ότι ισχύει η (3.17). Πρώτα δείχνουμε ότι αν $K_r, K_t \in M_n$ είναι μερικές ισομετρίες με τάξεις r και t αντίστοιχα τότε,

$$|tr(A \circ K_r)K_t| \leq \sum_{i=1}^{\min\{r,t\}} a_i. \tag{3.19}$$

Μέσω του Λήμματος 3.7 μπορούμε να ισχυρισθούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $t \leq r$. Χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 2.8 και την (3.17) υπολογίζουμε:

$$|tr(A \circ K_r)K_t| \leq \sum_{i=1}^{n} s_i[(A \circ K_r)K_t] \leq \sum_{i=1}^{n} s_i(A \circ K_r)s_i K_t = \sum_{i=1}^{t} s_i(A \circ K_r)$$
$$\leq \sum_{i=1}^{t} a_i$$

το οποίο αποδεικνύει την (3.19). Έπειτα για κάθε k , $1 \leq k \leq n$, από το Λήμμα 3.8 υπάρχει μια τάξης-k μερική ισομετρία C_k τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^{k} s_i(A \circ B) = tr(A \circ B)C_k$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.9 και την (3.19) έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{k} s_i(A \circ B) = tr(A \circ B)C_k = tr[A \circ (\sum_{j=1}^{n} \mu_j K_j)]C_k = \sum_{j=1}^{n} \mu_j tr(A \circ K_j)C_k$$
$$\leq \sum_{j=1}^{n} \mu_j \left|tr(A \circ K_j)\right| C_k$$
$$\leq \sum_{j=1}^{n} \mu_j (\sum_{i=1}^{\min\{j,k\}} a_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{k} a_i s_i(B).$$

το οποίο αποδεικνύει την (3.18). □

Λήμμα 3.11 Για κάθε $A, B \in M_n$,

$$s_i(A \circ B) \leq \min\{r_i(A), s_i(\mathrm{A})\}\, s_i(B) \;,\; i = 1,2, \dots, n.$$

Απόδειξη : Από το Πόρισμα 1.20,

$$(A \circ B)^*(A \circ B) \leq (A^*A) \circ (B^*B).$$

Εφόσον $B^*B \leq s_i(B)^2 I$, το θεώρημα γινομένων του Schur δίνει,

$$(A^*A) \circ (B^*B) \leq (A^*A) \circ (s_1(B)^2 I).$$

Επομένως,
$$(A \circ B)^*(A \circ B) \leq (A^*A) \circ (s_1(B)^2 I). \tag{3.20}$$

Παρατηρήστε ότι $0 \leq X \leq Y \Rightarrow s_i(X) \leq s_i(Y)$, $i = 1,2 \dots$.Από τον ορισμό του $c_i(A)$, η (3.20) συνεπάγεται ότι,

$$s_i(A \circ B) \leq c_i(A) s_1(B) \tag{3.21}$$

Τώρα αντικαθιστώντας τους A, B από τους συμπληρωματικούς τους A^* , B^*, παίρνουμε:

$$s_i(A \circ B) \leq r_i(A)s_1(B).$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Απόδειξη του θεωρήματος 3.6 : Θέτουμε $a_i = \min\{r_i(A), c_i(A)\}$. Το Λήμμα 3.11 δίνει:

$$s_i(A \circ B) \prec_w \{a_i s_i(B)\}.$$

Ύστερα, εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.10 δείχνουμε την (3.16) το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Μία νόρμα στον M_n καλείται ορθομοναδιαία αναλλοίωτη εάν,

$$\|U\,AV\| = \|A\|$$

για κάθε $A \in M_n$ και για ορθομοναδιαίους $U, V \in M_n$. Το θεώρημα υπεροχής του Fan(Λήμμα 4.2 στο επόμενο κεφάλαιο) λέει ότι για $A, B \in M_n$, $\|A\| \leq \|B\|$ για όλες τις ορθομοναδιαία αναλλοίωτες νόρμες αν και μόνο αν $s(A) \prec_w s(B)$. Ας σκεφτούμε τώρα μία εφαρμογή του Θεωρήματος 3.6. Με την λέξη 'διαγώνιος' ενός πίνακα $A = (a_{ij})$ εννοούμε την κύρια διαγώνιο, ή υπερδιαγώνιο, ή υποδιαγώνιο της οποίας τα στοιχεία a_{ij} έχουν τα i,j ως ένα σταθερό αριθμό. Έστω Φ_k να είναι ένας μετασχηματισμός (πράξη) πάνω στον M_n ο οποίος κρατάει ίδια τα πάντα από τις k −διαγωνίους ενός πίνακα αλλά αλλάζει όλα τα άλλα στοιχεία σε 0, $1 \leq k < 2n - 1$. Ορίζουμε $E \in M_n$ με όλα τα στοιχεία του ίσα με 1. Τότε για κάθε $A \in M_n$, $\Phi_k(A) = \Phi_k(E) \circ A$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.6 παίρνουμε,

$$\|\Phi_\kappa(A)\| \leq \sqrt{k}\|A\|$$

για όλες τις ορθομοναδιαία αναλλοίωτες νόρμες. Συγκεκριμένα, εάν $\mathcal{T}(A) \in M_n$, είναι το τριδιαγώνιο μέρος του $A \in M_n$, τότε,

$$\|\mathcal{T}(A)\| \leq \sqrt{3}\|A\|.$$

Η σταθερά $\sqrt{3}$ θα βελτιωθεί στην παράγραφο 4.7. Τέλος παρουσιάζουμε τα επόμενα δυο ζητήματα-ερωτήσεις.

Ζήτημα 3.12 Είναι αληθές ότι για κάθε $A, B \in M_n$, υπάρχουν ορθομοναδιαίοι πίνακες $U, V \in M_n$ τέτοιοι ώστε,

$$|A \circ B| \leq (U|A|U^*) \circ (V|B|V^*)\ ;$$

Ζήτημα 3.13 Είναι αληθές ότι για κάθε $A, B \in M_n$, υπάρχουν ορθομοναδιαίοι πίνακες $U, V \in M_n$ τέτοιοι ώστε**,**

$$s_i(A \circ B) \leq s_i[(U|A|U^*) \circ (V|B|V^*)]\ , i = 1,2, \dots, n;$$

3.3 Διαφορές θετικά ημιορισμένων πινάκων

Για φυσικούς αριθμούς a, b, $|a - b| \leq \max\{a, b\}$. Τώρα ας γενικεύσουμε αυτό σε πίνακες. Θα χρειαστούμε τον επόμενο χαρακτηρισμό προσέγγισης για τις ιδιάζουσες τιμές:

Για $G \in M_n\ ,\ 1 \leq j \leq n$

$$s_j(G) = \min\{\|G - X\|_\infty : rankX \leq j - 1, X \in M_n\}. \tag{3.22}$$

Ο επόμενος χαρακτηρισμός είναι μια άμεση συνέπεια της αρχής για ιδιοτιμές ερμιτιανών πινάκων:

$$s_j(G) = min_{\mathcal{K} \in \mathbb{C}^n} max_{u \in \mathcal{K}} \|Gu\|.$$

με $dim\mathcal{K} = n - j + 1\ , \|u\| = 1.$ Υποθέτουμε $rankX \leq j - 1,$ τότε $dim\, ker(X) \geq n - j + 1.$ Διαλέγουμε οποιονδήποτε υπόχωρο $\mathcal{K}_0 \subset \ker(X)$ $\mu\varepsilon$ $dim\mathcal{K}_0 = n - j + 1.$ Έχουμε τότε:

$$s_j(G) \leq max_{u \in \mathcal{K}, \|u\|=1} \|Gu\| = max_{u \in \mathcal{K}, \|u\|=1} \|(G - X)u\| \leq \|G - X\|_\infty.$$

Από την άλλη, έστω $G = diag(s_1(G), \dots, s_n(G))V$ να είναι η ανάλυση ιδιαζουσών τιμών του G με U, V ορθομοναδιαίους. Τότε $X \equiv Udiag(s_1(G), \dots, s_{j-1}(G), 0, \dots, 0)V$ ικανοποιεί την $rankX \leq j - 1$ και $s_j(G) = \|G - X\|_\infty$. Αυτό ικανοποιεί την (3.22).

Ορίζουμε τον σύνθετο διαγώνιο πίνακα (block-διαγώνιο πίνακα) $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$, με $A \oplus B$.

Θεώρημα 3.14 Έστω $A, B \in M_n$ θετικά ημιορισμένοι πίνακες. Τότε,

$$s_j(A - B) \leq s_j(A \oplus B), j = 1,2, \dots, n \tag{3.23}$$

Απόδειξη 1: Παρατηρήστε ότι $s(A \oplus B) = s(A) \cup s(B)$. Είναι αρκετά εύκολο να δειχθεί ότι για σταθερό j με$1 \leq j \leq n$, υπάρχουν $H, F \in M_n$, τα οποία ικανοποιούν: $0 \leq H \leq A, 0 \leq F \leq B, rankH + rankB \leq j - 1$ και,

$$s_j(\, A\oplus B) = \|(A-H)\oplus(B-F)\|_\infty.$$

Επομένως $s_j(\, A\oplus B) = \max\{\|A-H\|_\infty, \|B-F\|_\infty\} = \gamma$. Εφόσον,

$A-H \geq 0, B-F \geq 0, rank(H-F) \leq rankH + rankF \leq j-1,$ από την (3.22) έχουμε:

$$\begin{aligned} s_j(A-B) &\leq \|A-B-(H-F)\|_\infty \\ &= \left\|\left(A-H-\frac{\gamma I}{2}\right)-(B-F-\gamma I/2)\right\|_\infty \\ &\leq \left\|\left(A-H-\frac{\gamma I}{2}\right)\right\|_\infty + \left\|(B-F-\frac{\gamma I}{2})\right\|_\infty \\ &\leq \frac{\gamma}{2}+\frac{\gamma}{2} = \gamma = s_j(A\oplus B). \end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει την (3.23) □

Απόδειξη 2: Στην σχέση (3.13) του Πορίσματος 3.3 θέτοντας:

$$X = \begin{bmatrix} A^{1/2} & -B^{1/2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} A^{1/2} & B^{1/2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

δίνει την (3.23) □

Παράδειγμα: Παίρνουμε τους παρακάτω θετικά ημιορισμένους πίνακες Α,Β:

$A = \begin{bmatrix} 1.74 & 1.34 & 0.36 \\ 1.34 & 6.39 & 0.76 \\ 0.36 & 0.76 & 0.12 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2.11 & 1.30 & 0.31 \\ 1.30 & 1.49 & 0.09 \\ 0.31 & 0.09 & 1.79 \end{bmatrix}$, $s(B) \approx \{3.16, 1.18, 0.41\}$, $s(A) \approx \{6.85, 1.40, 0.000003\}, s(A-B) \approx \{5.00, -0.37, -1.79\}, s(A\oplus B) \approx \{6.85, 3.16, 1.40, 1.18, 0.41, 0.000003\}$ οπότε βλέπουμε ότι ικανοποιείται το Θεώρημα 3.14.

Η δεύτερη απόδειξη παραπάνω δείχνει ότι το Θεώρημα 3.14 είναι ακόλουθο του Πορίσματος 3.3. Επισημαίνουμε πως το Θεώρημα 3.14 συνεπάγεται το Πόρισμα 3.3 και έτσι είναι ισοδύναμα.

Έστω $T = \begin{bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$, τότε U είναι ορθομοναδιαίος. Από το Θεώρημα 3.14,

$$\begin{aligned} 2s_j \begin{bmatrix} XY^* & 0 \\ 0 & XY^* \end{bmatrix} = 2s_j \begin{bmatrix} 0 & YX^* \\ YX^* & 0 \end{bmatrix} &= s_j[TT^* - U(TT^*)U^*] \\ &\leq s_j \begin{bmatrix} TT^* & 0 \\ 0 & U(TT^*)U^* \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= s_j \begin{bmatrix} T^*T & 0 \\ 0 & T^*T \end{bmatrix}$$

$$= s_j \begin{bmatrix} (X^*X + Y^*Y)\oplus 0 & 0 \\ 0 & (X^*X + Y^*Y)\oplus 0 \end{bmatrix}.$$

Επομένως $2s_j(XY^*) \leq s_j(X^*X + Y^*Y)$.

Για φυσικούς αριθμούς $a, b, |a-b| \leq \max\{a, b\} \leq a + b$. Τί γίνεται όμως τώρα με την γενίκευση πάνω σε πίνακες της πιο αδύναμης σχέσης $|a-b| \leq a+b$; Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.14, μπορεί κάποιος να ισχυρισθεί ότι : $A, B \geq 0 \Rightarrow s_j(A-B) \leq s_j(A+B)$, το οποίο γενικά είναι λάθος για $j \geq 2$. Για παράδειγμα έχουμε:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$s(A-B) = \{5{,}5\}, s(A+B) = \{16.21 \ldots, 1.78 \ldots\}$.

Μία ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα θεωρείται τυπικά ορισμένη στον M_n για όλες τις τάξεις *n* σύμφωνα με τον κανόνα,

$$\|A\| = \left\| \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|,$$

όπου, προσθέτοντας ή αφαιρώντας ιδιάζουσες μηδενικές τιμές δεν επηρεάζει την τιμή αυτής της νόρμας. Σύμφωνα με αυτόν τον τρόπο, η αρχή της υπεροχής του Fan μπορεί να εφαρμοσθεί σε πίνακες διαφορετικών μεγεθών. Εφόσον το Θεώρημα 3.14 συνεπάγεται ότι $s(A-B) \prec_w s(A\oplus B)$, έχουμε το επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 3.15 Έστω $A, B \in M_n$ θετικά ημιορισμένοι πίνακες. Τότε,

$$\|A - B\| \leq \|A \oplus B\|$$

για όλες τις ορθομοναδιαία αναλλοίωτες νόρμες.

Παράδειγμα: Για τους ίδιους πίνακες στο παράδειγμα του Θεωρήματος 3.14 έχουμε: $\|A - B\|_\infty \approx 5.00 \; ενώ \; \|A\oplus B\|_\infty \approx 6.85$, οπότε βλέπουμε ότι ικανοποιεί την ανισότητα του Πορίσματος 3.15.

Θεώρημα 3.16 Έστω $A, B \in M_n$ θετικά ημιορισμένοι πίνακες. Τότε για οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό z,

$$s(A-|z|B) \prec_{wlog} s(A+zB) \prec_{wlog} s(A+|z|B). \tag{3.24}$$

Απόδειξη: Πρώτα αποδεικνύουμε την ανισότητα οριζουσών για θετικά ημιορισμένους πίνακες P, Q ίδιας τάξης.

$$|\det(P-|z|Q)| \leq |\det(P+zQ)|. \tag{3.25}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι ο P είναι θετικά ορισμένος. Έστω οι ιδιοτιμές του $P^{-1}Q$ να είναι $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq 0$. Τότε,

$$\begin{aligned} |det\,(P-|z|Q)| &= |detP \cdot \det(I-|z|P^{-1}Q)| \\ &= detP \textstyle\prod_i |1-|z|\lambda_i| \\ &\leq \ detP \textstyle\prod_i |1+z\lambda_i| \\ &= |detP \cdot \det(I+zP^{-1}Q)| \\ &= |det\,(P+zQ)|. \end{aligned}$$

Εφόσον $A-|z|B$ είναι ερμιτιανός, για $1 \leq k \leq n$ υπάρχει ένας $n \times k$ πίνακας U τέτοιος ώστε $U^*U = I$ και,

$$\textstyle\prod_{j=1}^{k} s_j\,(A-|z|B) = |\det[U^*(A-|z|B)U]|.$$

Χρησιμοποιώντας την (3.25) και το γεγονός ότι για κάθε $G \in M_n, s_j(U^*GU) \leq s_j(G), j = 1,2,..,k$ έχουμε,

$$\begin{aligned} \textstyle\prod_{j=1}^{k} s_j\,(A-|z|B) &= |\det[U^*(A-|z|B)U]| \\ &= |det\,(U^*AU-|z|U^*BU)| \\ &\leq |det\,(U^*AU+zU^*BU)| \\ &= \textstyle\prod_{j=1}^{k} s_j[U^*(A+zB)U] \\ &\leq \textstyle\prod_{j=1}^{k} s_j(A+zB). \end{aligned}$$

Στην τρίτη ανισότητα παραπάνω έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι για κάθε $F \in M_k, |detF| = \prod_{j=1}^{k} s_j(F)$. Αυτό αποδεικνύει το πρώτο μέρος της (3.24). Ας θυμηθούμε τώρα πως μία συνεχής συνάρτηση μιγαδικών αριθμών f στον M_n, λέγεται συνάρτηση Lieb εάν ικανοποιεί τις επόμενες δύο συνθήκες:

(i) $0 \leq f(A) \leq f(B)$ εάν $0 \leq A \leq B$, (ii) $|f(A^*B)|^2 \leq f(A^*A)f(B^*B)$ $για\ κάθε\ A, B$

Είναι γνωστό ότι εάν $N, R \in M_n$ είναι κανονικοί, τότε για κάθε συνάρτηση Lieb f στον M_n

$$|f(N+R)| \leq f(|N|+|R|) \tag{3.26}$$

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι $f(G) \equiv \prod_{j=1}^{k} s_j(G)$ είναι μια Lieb συνάρτηση. Εφαρμόζοντας την (3.26) στην f $με$ $N = A, R = zB$ παίρνουμε,

$$s(A+zB) \prec_{wlog} s(A+|z|B).$$

Αυτό ολοκληρώνει και την απόδειξη. □

Πόρισμα 3.17 Έστω $A, B \in M_n$ θετικά ημιορισμένοι πίνακες. Τότε για κάθε μιγαδικό αριθμό z και για κάθε ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα,

$$\|A-|z|B\| \leq \|A+zB\| \leq \|A+|z|B\|.$$

Τα Πορίσματα 3.15 και 3.17 είναι μια ευγενική συνεισφορά στην επιστήμη από τους R.Bhatia και F.Kittaneh.

3.4 Καρτεσιανές αναλύσεις πινάκων

Σε αυτήν την παράγραφο $i \equiv \sqrt{-1}$. Κάθε πίνακας T μπορεί να γραφτεί μοναδικά ως $T = A + iB$, με A, B ερμιτιανούς όπου:

$$A = \frac{T+T^*}{2}\ ,\ B = \frac{T-T^*}{2i} \tag{3.27}$$

Αυτή είναι η καρτεσιανή ανάλυση πινάκων. Τα A , B καλούνται τα πραγματικά και φανταστικά μέρη του T. Θα μελετήσουμε τις σχέσεις μεταξύ ιδιοτιμών των A, B και ιδιαζουσών τιμών του T. Θα χρειαστούμε τα ακόλουθα δύο αποτελέσματα στις ιδιοτιμές ερμιτιανών πινάκων. Πάντα γράφουμε και εννοούμε τις ιδιοτιμές ενός ερμιτιανού πίνακα A κατά φθίνουσα σειρά,

$$\lambda_1(A) \geq \cdots \geq \lambda_n(A), με\ \lambda(A) \equiv (\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)).$$

Λήμμα 3.18 (Lidskii) Έστω G , $H \in M_n$ ερμιτιανοί πίνακες. Τότε,

$$\{\lambda_j(G) + \lambda_{n-j+1}(H)\} \prec \lambda(G+H) \prec \{\lambda_j(G) + \lambda_j(H)\}.$$

Λήμμα 3.19 (Η αρχή ελαχίστου) Έστω $A \in M_n$ ερμιτιανός πίνακας. Τότε για κάθε $1 \leq k \leq n$

$$\sum_{j=n-k+1}^{n} \lambda_j(A) = \min\{trU^*AU : U^*U = I, U \in M_{n,k}\}$$

όπου $M_{n,k}$ είναι ο χώρος των $n \times k$ πινάκων.

Σε όλο το εύρος αυτής της παραγράφου θεωρούμε την καρτεσιανή ανάλυση $T = A + iB \in M_n$, και ορίζουμε με $s_1 \geq \cdots \geq s_n$ τις ιδιάζουσες τιμές του T, με α_j *και* β_j τις ιδιοτιμές των A *και* B αντίστοιχα με σειρά τέτοια ώστε $|\alpha_1| \geq \cdots \geq |\alpha_n|$ και $|\beta_1| \geq \cdots \geq |\beta_n|$.

Θεώρημα 3.20 Ισχύουν οι επόμενες σχέσεις ταξινόμησης:

$$\left\{\left|\alpha_j + i\beta_{n-j+1}\right|^2\right\} \prec \left\{s_j^2\right\}, \tag{3.28}$$

$$\left\{\frac{{s_j}^2 + s_{n-j+1}^2}{2}\right\} \prec \left\{\left|\alpha_j + i\beta_j\right|^2\right\}. \tag{3.29}$$

Απόδειξη: Από Λήμμα 3.18 για $G = A^2$, $H = B^2$ έχουμε,

$$\left\{\left|\alpha_j + i\beta_{n-j+1}\right|^2\right\} \prec \{s_j(A^2 + B^2)\} \prec \left\{\left|\alpha_j + i\beta_j\right|^2\right\} \tag{3.30}$$

Παρατηρούμε ότι,

$$A^2 + B^2 = (T^*T + TT^*)/2$$

καθώς και ότι ,

$$s_j(T^*T) = s_j(TT^*) = s_j^2$$

Εφαρμόζοντας το λήμμα 3.18 ξανά με $G = \frac{T^*T}{2}$, $H = \frac{TT^*}{2}$ δίνει,

$$\left\{\frac{{s_j}^2 + s_{n-j+1}^2}{2}\right\} \prec \left\{s_j(A^2 + B^2)\right\} \prec \left\{s_j^2\right\}. \tag{3.31}$$

Συνδυάζοντας τις (3.30) και (3.31) παίρνουμε τις 3.28 και 3.29. □

Μία σημαντική κλάση από ορθομοναδιαία αναλλοίωτες νόρμες είναι οι Schatten *p*-νόρμες. Είναι οι l_p νόρμες για ιδιάζουσες τιμές:

$$\|A\|_p \equiv \left(\sum_{j=1}^{n} s_j(A)^p\right)^{\frac{1}{p}} , A \in M_n.$$

Σημειώνουμε ότι η περίπτωση όπου $p = \infty$ συμπίπτει με ότι έχουμε πει παραπάνω: $\|A\|_\infty = s_1(A)$ είναι η φασματική νόρμα , $\|\cdot\|_2$ είναι η νόρμα Frobenius (ή Hilbert-Scmidt): $\|A\|_2 = tr(AA^*)^{1/2} = \left(\sum_{j,k}\left|a_{jk}\right|^2\right)^{1/2}$ για $A = (\alpha_{jk})$ και η $\|\cdot\|_1$ καλείται νόρμα ίχνος (νόρμα ένα).

Θεώρημα 3.21 Έστω $T = A + iB$ με A, B ερμιτιανούς . Τότε,

$$2^{\frac{2}{p}-1}(\|A\|_p^2 + \|B\|_p^2) \leq \|T\|_p^2 \leq 2^{1-2/p}(\|A\|_p^2 + \|B\|_p^2) \tag{3.32}$$

για $2 \leq p \leq \infty$ και,

$$2^{\frac{2}{p}-1}(\|A\|_p^2 + \|B\|_p^2) \geq \|T\|_p^2 \geq 2^{1-\frac{2}{p}}(\|A\|_p^2 + \|B\|_p^2) \tag{3.33}$$

για $1 \leq p \leq 2$.

Απόδειξη: Όταν $p \geq 2$, $f(t) = t^{p/2}$ στο $[0, \infty)$ είναι κυρτή και όταν $1 \leq p \leq 2$, $g(t) = -t^{p/2}$ στο $[0, \infty)$ είναι κυρτή. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.2 και την (3.29) παίρνουμε,

$$\left\{2^{-\frac{p}{2}}\left(s_j^2 + s_{n-j+1}^2\right)^{\frac{p}{2}}\right\} \prec_w \left\{\left|\alpha_j + i\beta_j\right|^p\right\} \ \ \gamma\iota\alpha\ p \geq 2,$$

$$\left\{-2^{-\frac{p}{2}}\left(s_j^2 + s_{n-j+1}^2\right)^{\frac{p}{2}}\right\} \prec_w \left\{-\left|\alpha_j + i\beta_j\right|^p\right\} \ \ \gamma\iota\alpha\ 1 \leq p \leq 2.$$

Συγκεκριμένα παίρνουμε,

$$\sum_{j=1}^n\left(s_j^2 + s_{n-j+1}^2\right)^{\frac{p}{2}} \leq 2^{p/2}\sum_{j=1}^n\left|\alpha_j + i\beta_j\right|^p \ \ \gamma\iota\alpha\ p \geq 2, \tag{3.34}$$

$$\sum_{j=1}^n\left(s_j^2 + s_{n-j+1}^2\right)^{\frac{p}{2}} \geq 2^{p/2}\sum_{j=1}^n\left|\alpha_j + i\beta_j\right|^p \ \ \gamma\iota\alpha\ \ 1 \leq p \leq 2, \tag{3.35}$$

Εφόσον για σταθερούς μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς a, b η συνάρτηση $t \to (a^t + b^t)^{1/t}$ ελαττώνεται στο $(0, \infty)$,

$$\sum_{j=1}^n s_j^p \leq 2^{\frac{p}{2}-1}\sum_{j=1}^n\left|\alpha_j + i\beta_j\right|^p \ \ \gamma\iota\alpha\ p \geq 2 \tag{3.36}$$

$$\sum_{j=1}^n s_j^p \geq 2^{\frac{p}{2}-1}\sum_{j=1}^n\left|\alpha_j + i\beta_j\right|^p \ \ \gamma\iota\alpha\ \ 1 \leq p \leq 2 \tag{3.37}$$

Τέλος, εφαρμόζοντας την ανισότητα Minkowski,

$$(\sum_j (x_j + y_j)^r)^{1/r} \le \left(\sum_j x_j\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_j y_j\right)^{\frac{1}{r}},\ \gamma\iota\alpha\ \ r \ge 1,$$

$$(\sum_j (x_j + y_j)^r)^{1/r} \ge \left(\sum_j x_j\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_j y_j\right)^{\frac{1}{r}},\ \gamma\iota\alpha\ \ 0 < r \le 1,$$

για μη αρνητικές ακολουθίες $\{x_j\}, \{y_j\}$ στις παραπάνω δύο ανισότητες παίρνουμε τα δεξιά μέλη των (3.32) και (3.33). Τα αριστερά μέλη μπορούν να απορρεύσουν από την (3.28) με παρόμοια διαδικασία. □

Παράδειγμα: Λαμβάνοντας τους παρακάτω πίνακες έτσι ώστε $T = A + iB$, έχουμε:

$$A = \begin{bmatrix} 0.001 & -0.30 + 0.20i & -0.11 - 0.17i \\ -0.30 + 0.20i & -0.45 & 0.17 + 0.66i \\ -0.11 - 0.17i & 0.17 + 0.66i & -0.49 \end{bmatrix}, \mu\varepsilon\ \|A\|_2 \approx 1.31\ \kappa\alpha\iota\ \|A\|_{\frac{3}{2}} \approx 1.47,$$

$$B = \begin{bmatrix} -1.90 & -0.76 + 0.74i & -0.84 + 0.46i \\ -0.76 + 0.74i & -1.27 & -0.76 + 0.74i \\ -0.84 + 0.46i & -0.76 + 0.74i & -2.52 \end{bmatrix}, \mu\varepsilon\ \|B\|_2 \approx 4.21\ \kappa\alpha\iota\ \|B\|_{\frac{3}{2}} \approx 4.75,$$

επομένως, μετά από πράξεις, $\|T\|_2 \approx 4.41\ \kappa\alpha\iota\ \|T\|_{\frac{3}{2}} \approx 4.83$. Οπότε βάζοντας αυτά τα στοιχεία στις σχέσεις (3.32) και (3.33) παίρνουμε ότι ισχύει η ισότητα για την νόρμα Schatten-2 ενώ για την Schatten-3/2 :$31.15 \ge 23.33 \ge 19.53$.

Από τις σχέσεις μερικής διάταξης στην (3.31), χρησιμοποιώντας παρόμοιο επιχείρημα όπως παραπάνω, μπορούμε να πάρουμε τις παρακάτω ανισότητες:

$$\left\|(A^2 + B^2)^{1/2}\right\|_p \le \|T\|_p \le 2^{\frac{1}{2} - 1/p} \left\|(A^2 + B^2)^{1/2}\right\|_p \tag{3.38}$$

για $2 \le p \le \infty$ και,

$$\left\|(A^2 + B^2)^{1/2}\right\|_p \ge \|T\|_p \ge 2^{\frac{1}{2} - 1/p} \left\|(A^2 + B^2)^{1/2}\right\|_p \tag{3.39}$$

για $1 \le p \le 2$.

Το παρακάτω παράδειγμα,

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

δείχνει ότι οι δεύτερες ανισότητες στις (3.32) (3.33) (3.38) και (3.39) είναι ακριβείς ενώ το παρακάτω παράδειγμα,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

δείχνει ότι οι πρώτες ανισότητες στις (3.32) και (3.33) είναι ακριβείς.

Θεώρημα 3.22 Έστω $T = A + iB \ \in M_n$, όπου A, B ερμιτιανοί με αντίστοιχες ιδιοτιμές α_j, β_j τέτοιες ώστε $|\alpha_1| \geq \cdots \geq |\alpha_n|, |\beta_1| \geq \cdots \geq |\beta_n|$. Τότε,

$$|detT| \leq \prod_{j=1}^{n} \left|\alpha_j + i\beta_{n-j+1}\right|.$$

Απόδειξη: Εφόσον το σύνολο των αντιστρέψιμων πινάκων είναι πυκνό στον M_n, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο T είναι αντιστρέψιμος. Τότε κάθε $s_j > 0$ και από την (3.28) συνεπάγεται ότι $\left|\alpha_j + i\beta_{n-j+1}\right| > 0 \ για \ κάθε \ j$. Εφαρμόζοντας την κυρτή συνάρτηση $f(t) = -\frac{1}{2} logt$ ορισμένη στο $(0, \infty)$, στην μερική διάταξη της (3.28) ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Ερευνούμε τώρα την περίπτωση όπου ένα από τα πραγματικά και φανταστικά μέρη, ας πούμε το πραγματικό μέρος του A, είναι θετικά ημιορισμένο. Για την περίπτωση όπου $B \geq 0$, θεωρώντας το $-iT$ επιστρέφουμε στην προηγούμενη περίπτωση και όλα τα αποτελέσματα είναι παρόμοια. Χρησιμοποιούμε το ίδιο επιχείρημα όπως παραπάνω: Πρώτα λαμβάνουμε μία σχέση μερικής διάταξης, και ύστερα εφαρμόζουμε αρχές της για να λάβουμε ανισότητες για Schatten p-νόρμες. Η περίπτωση της νόρμας ίχνους θα αναπτυχθεί ξεχωριστά. Συνεχίζοντας να κάνουμε χρήση των συμβόλων s_j, α_j, β_j. Ορίζουμε μία ακόμα μη αρνητική n-πλειάδα $\{\gamma_j\}$ όπως ακολουθεί. Εάν n είναι ένας άρτιος αριθμός και $n = 2m$, τότε:

$$\gamma_j^2 \equiv \begin{cases} \beta_j^2 + \beta_{2j-1}^2 \ , 1 \leq j \leq m \\ 0 \ , m+1 \leq j \leq n \end{cases}$$

Εάν n είναι μονός αριθμός και $n = 2m + 1$, τότε:

$$\gamma_j^2 \equiv \begin{cases} \beta_j^2 + \beta_{2j-1}^2 \ , \ \ 1 \leq j \leq m \\ \beta_n^2 \quad , j = m+1 \\ 0 \quad , \ \ m+2 \leq j \leq n \end{cases}$$

Θεώρημα 3.23 Έστω $T = A + iB \ \in M_n$, όπου A θετικά ημιορισμένος και B ερμιτιανός. Τότε έχουμε την διάταξη,

$$\{s_j^2\} \prec \{a_j^2 + \gamma_j^2\}. \tag{3.40}$$

Παρατηρείστε ότι η σχέση (3.40) είναι ισοδύναμη με τις επόμενες τρεις εξισώσεις ταυτόχρονα:

$$\sum_{j=1}^{k} s_j^2 \leq \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^2 + \sum_{j=1}^{2k} \beta_j^2 \quad , \ \gamma\iota\alpha\ 1 \leq k \leq n/2 \tag{3.41}$$

$$\sum_{j=1}^{k} s_j^2 \leq \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \beta_j^2 \quad , \ \gamma\iota\alpha\ n/2 \leq k \leq n \tag{3.42}$$

$$\sum_{j=1}^{n} s_j^2 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \beta_j^2 \tag{3.43}$$

Από αυτές η σχέση (3.43) είναι μια επαναδιατύπωση της,

$$\|T\|_2^2 = \|A\|_2^2 + \|B\|_2^2$$

το οποίο είναι εύκολο να δειχθεί . Για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.23 θα χρειαστούμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 3.24 Έστω k, n θετικοί ακέραιοι με $1 \leq k < n/2$. Έστω $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n\ \ \kappa\alpha\iota\ \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_{n-k}$ να είναι πραγματικοί αριθμοί οι οποίοι ικανοποιούν τις συμπλεκόμενες ανισότητες,

$$\mu_j \geq \lambda_j \geq \mu_{j+k}\ \ \gamma\iota\alpha\ j = 1,2, \dots, n-k$$

Τότε μπορούμε να επιλέξουμε τους $n - 2k$ διακεκριμένους δείκτες $j_1, \dots j_{n-2k}$ από το σύνολο $\{1, \dots, n-k\}$ έτσι ώστε,

$$\left|\lambda_{j_s}\right| \geq |\mu_{k+s}|\ \ \gamma\iota\alpha\ s = 1,2, \dots, n-2k.$$

Απόδειξη: Έχουμε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις. Τις καταγράφουμε μαζί με τις αντίστοιχες επιλογές:

(i) Εάν $\mu_{n-k} \geq 0$, τότε επιλέγουμε,

$$\{j_1, \dots, j_{n-2k}\} = \{1, \dots, n-2k\}.$$

(ii) Εάν για κάποιο r ,$n - k > r \geq k + 1$, έχουμε $\mu_r \geq 0 \geq \mu_{r+1}$, τότε επιλέγουμε,

$$\{j_1, \dots, j_{n-2k}\} = \{1, \dots, r-k, r+1, \dots, n-k\}.$$

(iii) Εάν $0 > \mu_{k+1}$, τότε επιλέγουμε,

$$\{j_1, \dots, j_{n-2k}\} = \{k+1, \dots, n-k\}.$$

Σε κάθε περίπτωση ο ισχυρισμός του λήμματος αποδεικνύεται εύκολα. □

Απόδειξη του θεωρήματος 3.23: Έστω $k < n/2$. Σύμφωνα με την (3.43), η ανισότητα (3.41) είναι ισοδύναμη με,

$$\sum_{j=k+1}^{n} s_j^2 \le \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j^2 + \sum_{j=2k+1}^{n} \beta_j^2. \tag{3.45}$$

Από το Λήμμα 3.19 υπάρχει ένας $n \times (n-k)$ πίνακας U με $U^*U = I$ τέτοιος ώστε:

$$\sum_{j=k+1}^{n} s_j^2 = trU^*T^*TU. \tag{3.46}$$

Εφόσον $UU^* \le I$,

$$trU^*T^*TU \ge trU^*T^*U \cdot U^*TU.$$

Από την παραπάνω, χρησιμοποιώντας και την (3.44) (όπου $U^*TU \ \ \alpha\nu\tau\acute{\iota} \ T$) παίρνουμε:

$$trU^*T^*TU \ge tr(U^*AU)^2 + tr(U^*BU)^2. \tag{3.47}$$

Έστω V ένας $n \times k$ πίνακας τέτοιος ώστε $W \equiv (U, V)$ να είναι ορθομοναδιαίος. Τότε U^*AU , U^*BU είναι κύριοι υποπίνακες των W^*AW και W^*BW αντίστοιχα. Παρατηρείστε επίσης ότι $\lambda(W^*AW) = \lambda(A)$, $\lambda(W^*BW) = \lambda(B)$. Επομένως από το Θεώρημα του Cauchy για ιδιοτιμές ερμιτιανών πινάκων έχουμε ότι:

$$\lambda_j(U^*AU) \ge \lambda_{j+k}(A), \ 1 \le j \le n-k,$$

και
$$\lambda_j(B) \ge \lambda_j(U^*BU) \ge \lambda_{j+k}(B), \ 1 \le j \le n-k$$

Η πρώτη από αυτές τις ανισότητες δείχνει ότι:

$$tr(U^*AU)^2 = \sum_{j=1}^{n-k} [\lambda_j(U^*AU)]^2 \ge \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j^2. \tag{3.48}$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.24 στην δεύτερη ανισότητα, βλέπουμε ότι υπάρχουν $n-2k$ μοναδικοί δείκτες $j_1, \dots, j_{n-2k}$ τέτοιοι ώστε:

$$\left|\lambda_{j_s}(U^*BU)\right| \ge |\lambda_{k+s}(B)|, \ \ s = 1,2, \dots, n-2k$$

Επομένως,

$$tr(U^*BU)^2 \ge \sum_{j=1}^{n-k} [\lambda_j(U^*BU)]^2 \ge \sum_{j=2k+1}^{n} \beta_j^2. \tag{3.49}$$

Συνδυάζοντας τις τελευταίες τέσσερις ανισότητες (3.46-3.49) παίρνουμε την (3.45) ως αποτέλεσμα. Τώρα έστω ότι $n/2 \le k \le n$. Ξανά λόγω της (3.43), η ανισότητα (3.42) είναι ισοδύναμη με,

$$\sum_{j=k+1}^{n} s_j^2 \ge \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j^2.$$

Η απόδειξη της παραπάνω είναι ευκολότερη. Αφήνοντας τον τελευταίο όρο της (3.47) και χρησιμοποιώντας την (3.48) έχουμε το αποτέλεσμα. □

Για την εφαρμογή του Θεωρήματος 3.23 πρέπει πρώτα να εδραιώσουμε μία σχέση μεταξύ των νορμών των πλειάδων $\{\gamma_j\}, \{\beta_j\}$. Δοσμένης μιας *n*-πλειάδας $\delta = \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ και μιας *m*-πλειάδας $\sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$, γράφουμε $\delta \vee \sigma$ για την *(n+m)*-πλειάδα μετά την σύζευξή τους. Ορίζουμε την $\delta \vee 0$ με δ. Γράφουμε δ^2 για την πλειάδα $\{\delta_1^2, \dots, \delta_n^2\}$. Παρατηρήστε ότι από τον ορισμό της $\{\gamma_j\}$ είναι ακόλουθο το ότι,

$$\gamma^2 \vee \gamma^2 \prec 2\beta^2. \tag{3.50}$$

Λήμμα 3.25 Έχουμε τις ανισότητες,

$$\|\gamma\|_p^2 \leq 2^{1-\frac{2}{p}} \|\beta\|_p^2 \quad , \quad 2 \leq p \leq \infty,$$

$$\|\gamma\|_p^2 \geq 2^{1-\frac{2}{p}} \|\beta\|_p^2 \quad , \quad 1 \leq p \leq 2.$$

Απόδειξη: Για όλες τις τιμές του $p > 0$,

$$\|\gamma\|_p^2 = 2^{-2/p} \|\gamma \vee \gamma\|_p^2 = 2^{-2/p} \|\gamma^2 \vee \gamma^2\|_{p/2}^2.$$

Από την 3.50 χρησιμοποιώντας ιδιότητες διατάξεων παίρνουμε,

$$\|\gamma^2 \vee \gamma^2\|_{p/2} \leq 2\|\beta^2\|_{\frac{p}{2}} \ , \ 2 \leq p \leq \infty$$

και την αντίθετη ανισότητα για $1 \leq p \leq 2$. Επομένως για $2 \leq p \leq \infty$, έχουμε,

$$\|\gamma\|_p^2 \leq 2^{1-\frac{2}{p}} \|\beta^2\|_{p/2} = 2^{1-\frac{2}{p}} \|\beta\|_p^2$$

και όσων αφορά την περίπτωση όπου $1 \leq p \leq 2$, η ανισότητα απλώς αντιστρέφεται. □

Θεώρημα 3.26 Έστω $T = A + iB \ \in M_n$, όπου A θετικά ημιορισμένος και B ερμιτιανός. Τότε,

$$\|T\|_p^2 \leq \|A\|_p^2 + 2^{1-\frac{2}{p}} \|B\|_p^2 \ , \ \gamma\iota\alpha \ 2 \leq p \leq \infty \tag{3.51}$$

$$\|T\|_p^2 \geq \|A\|_p^2 + 2^{1-\frac{2}{p}} \|B\|_p^2 \ , \ \gamma\iota\alpha \ 1 \leq p \leq 2 \tag{3.52}$$

Απόδειξη: Ορίζουμε $\Gamma = diag(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Έστω $p \geq 2$. Χρησιμοποιώντας την κυρτότητα της συνάρτησης $f(t) = t^{p/2}$ στα θετικά, το Θεώρημα 2.2 και την ανισότητα Minkowski, παίρνουμε από την σχέση (3.40) την ανισότητα,

$$\|T\|_p^2 \leq \|A\|_p^2 + \|\Gamma\|_p^2.$$

Τώρα χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.25 λαμβάνουμε την (3.51).

Όλες οι ανισότητες που χρησιμοποιούνται σε αυτό το επιχείρημα είναι αντεστραμμένες για $1 \leq p \leq 2$. Αυτό οδηγεί στην 3.52. $\square$

Παράδειγμα: Έστω, A-θετικά ημιορισμένος και B-ερμιτιανός πίνακες έτσι ώστε $T = A + iB$,

$$A = \begin{bmatrix} 2.77 & 0.21 & 0.02 \\ 0.21 & 1.22 & 0.19 \\ 0.02 & 0.19 & 0.80 \end{bmatrix} \ \mu\varepsilon\ s(A) \approx \{2.80, 1.26, 0.72\}, \|A\|_{\frac{3}{2}} \approx 3.56, \|A\|_3 \approx 2.90$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.32 & 0.65 - 0.25i & -0.69 - 1.48i \\ 0.65 - 0.25i & -0.67 & 1.26 + 0.64i \\ -0.69 - 1.48i & 1.26 + 0.64i & -0.66 \end{bmatrix}, s(B) \approx \{2.98, 1.54, 0.21\}, \|B\|_{\frac{3}{2}} \approx$$

$3.79, \|B\|_3 \approx 3.04, \|T\|_{\frac{3}{2}} \approx 5.12, \|T\|_3 \approx 4.23.$ Οπότε βάζοντας αυτά τα αποτελέσματα στις σχέσεις (3.51) και (3.52) βλέπουμε ότι: (3.52)$\Rightarrow$ $26.18 \geq 24.11$, ενώ η (3.51)$\Rightarrow$ $17.92 \leq 20.04$.

Συζητάμε τώρα περί ακρίβειας των ορίων στην (3.51) και (3.52). Όταν $p \geq 2$, ο παράγοντας $2^{1-\frac{2}{p}}$ στην (3.51) δεν μπορεί να αντικατασταθεί από οποιοδήποτε μικρότερο αριθμό. Σκεφτείτε το παράδειγμα,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ , \ B = \begin{bmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{bmatrix}$$

όπου t-πραγματικός αριθμός. Βλέπουμε ότι σε αυτήν την περίπτωση το δεξί μέρος την (3.51), για όλες τις τιμές του p είναι ίσο με $1 + 2t^2$. Εάν για κάποια $2 < p < \infty$, μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε το $1 + 2t^2$ στην (3.51) από ένα μικρότερο αριθμό, τότε θα είχαμε το παρακάτω σε αυτήν την περίπτωση,

$$(1 + 2t^2 + \sqrt{1 + 4t^2})/2 = \|T\|_\infty^2 \leq \|T\|_p^2 < 1 + (2 - \epsilon)t^2.$$

Αλλά το αριστερό μέρος είναι μεγαλύτερο από το δεξί μέρος για μικρότερα t. Εξαιτίας των εκτιμήσεων συμμετρίας κάποιος θα περίμενε η ανισότητα (3.52) να είναι επίσης ακριβής.

Θεώρημα 3.27 Έστω $T = A + iB \ \in M_n$, όπου A θετικά ημιορισμένος και B ερμιτιανός. Τότε,

$$\|T\|_1^2 \geq \|A\|_1^2 + \|B\|_1^2 \tag{3.53}$$

Απόδειξη: Πρώτα αναλογιζόμαστε την περίπτωση όπου η τάξη των πινάκων είναι $n = 2$. Εξαιτίας της (3.44), η ανισότητα (3.55) είναι ισοδύναμη με την σχέση,

$$|detT| \geq detA + |detB|. \tag{3.54}$$

Εφαρμόζοντας τις ορθομοναδιαίες συζυγίες (εύρεση ορθομοναδιαίων συζυγών), μπορούμε να υποθέσουμε ότι:

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \ \ , \ \ B = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}$$

όπου a, b θετικοί και c, b πραγματικοί αριθμοί. Η ανισότητα (3.54) τότε επιβάλει,

$$|(ab - c^2 - st) + i(at + bs)| \geq ab - c^2 + |st|.$$

Εάν το st είναι αρνητικό, τότε είναι προφανές. Εάν το st είναι θετικό, ισχύει η ανισότητα,

$$(ab - c^2 + st)^2 - (ab - c^2 + st)^2 = 4(ab - c^2)st \leq 4abst \leq (at + bs)^2.$$

Έστω τώρα η τάξη-n να είναι αυθαίρετη. Ξανά, λόγω της (3.44) η ανισότητα (3.53) παίρνει την μορφή:

$$\sum_{j<k} s_j s_k \geq \sum_{j<k} \alpha_j \alpha_k + \sum_{j<k} \left|\beta_j \beta_k\right|,$$

όπου $s_j, \alpha_j, \left|\beta_j\right|, 1 \leq j \leq n$ είναι οι ιδιάζουσες τιμές των T, A, B αντίστοιχα. Έστω $\wedge^2 T$ να ορίζει την δεύτερη αντισυμμετρική τανυστική δύναμη του T. Τότε αυτή η ανισότητα μπορεί να ξαναγραφεί ως,

$$\|\wedge^2 T\|_1 \geq \|\wedge^2 A\|_1 + \|\wedge^2 B\|_1. \tag{3.55}$$

Για κάθε ζευγάρι $j < k$, θέτουμε με $C_{jk}(T)$ να είναι η ορίζουσα του 2×2 κύριου υποπίνακα του T ορισμένο ως $\begin{bmatrix} t_{jj} & t_{jk} \\ t_{kj} & t_{kk} \end{bmatrix}$. Αυτά είναι τα διαγώνια στοιχεία του $\wedge^2 T$. Εφόσον κάθε ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα ελαττώνεται όταν αντικαθιστούμε τον πίνακα με το διαγώνιο μέρος του,

$$\|\wedge^2 T\|_1 \geq \sum_{j<k} \left|C_{jk}(T)\right|.$$

Από την (3.54) $\left|C_{jk}(T)\right| \geq C_{jk}(A) + \left|C_{jk}(B)\right|$ για κάθε $j < k$. Εφαρμόζοντας μια ορθομοναδιαία συζυγία μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο B είναι διαγώνιος. Τότε σύμφωνα με τα παραπάνω, είναι εύκολο να δούμε ότι:

$$\|\wedge^2 T\|_1 \geq tr \wedge^2 A + tr|\wedge^2 B|.$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Παράδειγμα: Για τους ίδιους πίνακες στο παράδειγμα του Θεωρήματος 3.26, υπολογίζουμε $\|T\|_1^2 \geq \|A\|_1^2 + \|B\|_1^2 \Rightarrow 55.80 \geq 22.37 + 22.94 = 45.31$, το οποίο επιβεβαιώνει την (3.53).

Μέσω του Θεωρήματος 3.27, βλέπουμε πως η ανισότητα της (3.52) για $p = 1$, δεν είναι ακριβής. Οπότε είναι φυσικό να εισάγουμε το ακόλουθο.

Πρόβλημα 3.28 Για $1 < p < 2$, βρείτε την μεγαλύτερη δυνατή τιμή του c_p έτσι ώστε η σχέση

$$\|T\|_p^2 \geq \|A\|_p^2 + c_p\|B\|_p^2$$

να ισχύει για όλα τα $T = A + iB$, με T θετικά ημιορισμένο και B ερμιτιανό. Συγκεκριμένα, ισχύει άραγε ότι $c_p = 1$ για όλα τα $1 < p < 2$;

Η σχέση (3.40) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρεθούν άλλες ανισότητες. Χρησιμοποιώντας την κυρτότητα της συνάρτησης $f(t) = -\frac{1}{2}logt$ στα θετικά, παίρνουμε τις οικογένειες ανισοτήτων,

$$\prod_{j=k}^n s_j \geq \prod_{j=k}^n \left(\alpha_j^2 + \gamma_j^2\right)^{\frac{1}{2}},\ 1 \leq k \leq n.$$

η ειδική περίπτωση όπου k=1 δίνει

$$|\det\ T| \geq \prod_{j=k}^n \left(\alpha_j^2 + \gamma_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ένα παράδειγμα για την παραπάνω είναι η ανισότητα των Ostrowski και Taussky,

$$|det\ T| \geq \det A = \prod_{j=1}^n \alpha_j$$

όπου $T = A + iB$ με A θετικά ημιορισμένο και B ερμιτιανό. Τώρα ας αναλογιστούμε την ακόμη πιο ειδική περίπτωση όπου και τα πραγματικά και φανταστικά μέρη είναι θετικά ημιορισμένα.

Θεώρημα 3.29 Έστω $T = A + iB \in M_n$ όπου A, B θετικά ημιορισμένοι. Τότε,

$$\left\{s_j^2\right\} \prec \left\{\alpha_j^2 + \beta_j^2\right\}. \tag{3.56}$$

Απόδειξη. Από την σχέση (3.43), για να αποδείξουμε την (3.56) αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\sum_{j=n-k+1}^n s_j^2 \geq \sum_{j=n-k+1}^n \left(\alpha_j^2 + \beta_j^2\right),\ \ 1 \leq k \leq n \tag{3.57}$$

Το αριστερό μέρος της παραπάνω ανισότητας έχει μία αναπαράσταση (Λήμμα 3.19),

$$\sum_{n-k+1}^{n} s_j^2 = \min\{trU^*T^*TU : U \in M_{n,k}, U^*U = I\}. \tag{3.58}$$

Από την συνθήκη $U^*U = I$ παίρνουμε ότι $I \geq UU^*$. Αυτό σημαίνει ότι,

$$\begin{aligned} U^*T^*TU &= U^*T^* \cdot I \cdot TU \geq U^*T^* \cdot UU^* \cdot TU \\ &= U^*(A - iB)U \cdot U^*(A + iB)U \\ &= (U^*AU)^2 + (U^*BU)^2 + i[U^*AU, U^*BU] \end{aligned}$$

όπου το $[X, Y]$ αντικαθιστά τον αντιμεταθέτη $XY - YX$. Συνεπάγεται λοιπόν ότι,

$$trU^*T^*TU \geq tr(U^*AU)^2 + tr(U^*BU)^2. \tag{3.59}$$

Ο τελεστής U^*AU είναι μια συστολή του A σε k-διάστασης υποχώρους. Επομένως από το Θεώρημα διαπλοκής του Cauchy έχουμε:

$$\lambda_j(U^*AU) \geq a_{j+n-k}, \qquad 1 \leq j \leq k.$$

Άρα ισχύει επίσης ότι, $\qquad \lambda_j(U^*BU) \geq \beta_{j+n-k}, \qquad 1 \leq j \leq k.$

Οπότε από την (3.59) παίρνουμε,

$$trU^*T^*TU \geq \sum_{j=n-k+1}^{n} (\alpha_j^2 + \beta_j^2). \tag{3.60}$$

Η ανισότητα (3.57) αποδεικνύεται μέσω των σχέσεων (3.58) και (3.60). □

Θεώρημα 3.30 Έστω $T = A + iB$ με A, B θετικά ημιορισμένους. Τότε,

$$\|T\|_p^2 \leq \|A\|_p^2 + \|B\|_p^2 \ , \ \gamma\iota\alpha\ 2 \leq p \leq \infty \tag{3.61}$$

$$\|T\|_p^2 \geq \|A\|_p^2 + \|B\|_p^2 \ , \ \gamma\iota\alpha\ 1 \leq p \leq 2 \tag{3.62}$$

Απόδειξη. Κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 2.2 , εφαρμόζουμε τις συναρτήσεις $f(t) = t^{p/2}$ $(p \geq 2)$, $g(t) = -t^{p/2}$ $(1 \leq p \leq 2)$ στην μερική σειρά της (3.56) και έπειτα κάνουμε χρήση της ανισότητας Minkowski. □

Θεώρημα 3.31 Έστω $T = A + iB$ με A, B θετικά ημιορισμένους. Τότε,

$$\prod_{j=k}^{n} s_j \geq \prod_{j=k}^{n} |\alpha_j + i\beta_j| \ , \ 1 \leq k \leq n. \tag{3.63}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.2, εφαρμόζουμε την συνάρτηση $f(t) = -\frac{1}{2} logt$ στο θετικό τμήμα της μερικής σειράς της (3.56). □

Ειδικά για την περίπτωση όπου $k = 1$, η (3.63) γράφεται ως εξής:

$$|\det (A)| \geq \prod_{j=1}^{n} |\alpha_j + i\beta_j| \tag{3.64}$$

Παρατηρώντας τις ανισότητες στα Θεωρήματα 3.21, 3.26 και 3.30, έχουμε μία καθαρή εικόνα για τις τρείς περιπτώσεις, από το γενικό στο ειδικό.

Παράδειγμα: Βρίσκουμε θετικά ημιορισμένους πίνακες A,B και T τέτοιο ώστε $T = A + iB$: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 2+2i & 1+2i & 1+i \\ 1+2i & 2+5i & 1+i \\ 1+i & 1+i & 2+2i \end{bmatrix}, s(A) = \{4,1,1\}, \|A\|_{3/2} = 16$ $\|A\|_3 \approx 4.04, s(B) = \{6.41,1.82,0.77\}, \|B\|_{\frac{3}{2}} \approx 22.65, \|B\|_3 = 6.46, \|T\|_{\frac{3}{2}} = 29.11, \|T\|_3 \approx 7.56, s(T) = \{7.47,2.36,1.27\}$,οπότε αντικαθιστώντας στις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε: (3.61)$\Rightarrow 57.15 \leq 16.32 + 41.73 = 58.05$,(3.62)$\Rightarrow 847.39 \geq 256 + 513.02 = 769.02$.

3.5 Ιδιάζουσες τιμές και στοιχεία πινάκων

Έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ να είναι οι ιδιοτιμές ενός πίνακα $A = (a_{ij}) \in M_n$. Η ανισότητα του Schur μας υποδεικνύει ότι,

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2 \geq \sum_{i,j=1}^{n} |\alpha_{ij}|^2 = \|A\|_2^2$$

και η ισότητα επιτυγχάνεται αν και μόνο αν ο *A* είναι κανονικός. Αυτή είναι μια σχέση μεταξύ των ιδιοτιμών και των στοιχείων του πίνακα. Το μέτρο των στοιχείων του πίνακα δεν είναι μεγαλύτερο από την μεγαλύτερη ιδιάζουσα τιμή(φασματική νόρμα) , για παράδειγμα:

$$max_{i,j} |\alpha_{ij}| \leq s_1(A) \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \sum_{i,j=1}^{n} |\alpha_{ij}|^2 = \sum_{j=1}^{n} s_j(A)^2.$$

Θεώρημα 3.32 Έστω $s_1, s_2, \dots, s_n$ να είναι οι ιδιάζουσες τιμές ενός πίνακα $A = (a_{ij}) \in M_n$. Τότε,

$$\sum_{j=1}^{n} s_j^p \leq \sum_{i,j=1}^{n} |\alpha_{ij}|^p \;\; \gamma\iota\alpha \;\; 0 < p \leq 2, \tag{3.65}$$

$$\sum_{j=1}^{n} s_j^p \geq \sum_{i,j=1}^{n} |\alpha_{ij}|^p \;\; \gamma\iota\alpha \;\; p \geq 2 \tag{3.66}$$

Απόδειξη. Έστω $c_j = (\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2)^{1/2}$ να είναι το ευκλείδειο μήκος της j-οστής στήλης του *A*. Τότε $c_1^2, \dots c_n^2$ και $s_1^2, \dots, s_n^2$ είναι αντίστοιχα τα διαγώνια στοιχεία και ιδιοτιμές του πίνακα A^*A. Από το θεώρημα του Schur (θεώρημα 2.1), έχουμε:

$$\{c_j^2\} \prec \{s_j^2\} \tag{3.67}$$

Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση όπου $p \geq 2$. Εφόσον η συνάρτηση $f(t) = t^{p/2}$ είναι κυρτή $[0, \infty)$, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.2 με την $f(t)$ στην σχέση (3.67), λαμβάνουμε,

$$\{c_j^p\} \prec_w \{s_j^p\}.$$

Συγκεκριμένα,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j^p \leq \sum_{j=1}^{n} s_j^p \tag{3.68}$$

Ισχύει επίσης ότι,

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{p}{2}} = c_j^p \ \ για\ j = 1, \dots, n$$

Και επομένως,

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^p \leq \sum_{j=1}^{n} c_j^p \tag{3.69}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.69) και (3.68) παίρνουμε την σχέση (3.66). Όταν $0 < p \leq 2$, θεωρώντας την κυρτή συνάρτηση $g(t) = -t^{p/2}$ στο σύνολο $[0, \infty)$, αλλάζουν φορά όλες οι παραπάνω ανισότητες. Έτσι αποδεικνύεται η σχέση (3.65). □

Παράδειγμα: Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $s(A) \approx \{3.52, 2.18, 1.70\}$,οπότε για $p = \frac{1}{5}$, η σχέση (3.65)$\Rightarrow 12.02 \leq 13.85$, ενώ για $p = 2$, η σχέση (3.66))$\Rightarrow 20 = 20$. Άρα ικανοποιούνται οι σχέσεις του Θεωρήματος 3.32.

Ας παρατηρήσουμε ότι, παίρνοντας την 1/p-οστή δύναμη και στις δύο μεριές της (3.66) και αφήνοντας $p \to \infty$, λαμβάνουμε ξανά ότι $max_{i,j}|a_{ij}| \leq \|A\|_\infty$.

Έστω τώρα $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές ενός πίνακα *A*. Σύμφωνα με το Θεώρημα του Weyl (Θεώρημα 2.4) παίρνουμε,

$$\{|\lambda_j|^p\} \prec_{log} \{|s_j|^p\}\ για\ κάθε\ p > 0.$$

Εφόσον η ασθενής κατά log υπεροχή μαρτυρά υπεροχή (Θεώρημα 2.7), λαμβάνουμε,

$$\{|\lambda_j|^p\} \prec_w \{|s_j|^p\}\ για\ κάθε\ p > 0.$$

$$\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|^p \leq \sum_{j=1}^{n} s_j^p \quad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ p > 0 \tag{3.70}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.70) και(3.65), λαμβάνουμε το επόμενο:

Πόρισμα 3.33 Έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές ενός πίνακα $A = (a_{ij}) \in M_n$. Τότε,

$$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_j|^p \leq \sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^p \quad \gamma\iota\alpha\ 0 < p \leq 2. \tag{3.71}$$

Παρατηρήστε ότι η ανισότητα του Schur ανταποκρίνεται στην περίπτωση όπου $p = 2$ της σχέσης (3.71). Στην συνέχεια ας παράγουμε δύο ανισότητες πινάκων, από τις οποίες η μία είναι εφαρμογή του Θεωρήματος 3.32. Για δύο n-διάστασης τετραγωνικούς πραγματικούς πίνακες A, B γράφουμε $A \leq_e B$ και εννοούμε ότι $B - A$ είναι μη-αρνητικός. Ορίζουμε $\mathcal{N} \equiv \{1,2, \dots, n\}$. Για $a \subseteq \mathcal{N}$, το α^c ορίζει το συμπλήρωμα $\mathcal{N}/a$ και $|a|$την πληθικότητα του a. Δεδομένων $\alpha, \beta \subseteq \mathcal{N}$ και $A = (a_{ij}) \in M_n$, γράφουμε $A(\alpha, \beta) \equiv \sum_{i\in\alpha, j\in\beta} a_{ij}$.

Λήμμα 3.34 Θεωρούμε τους n-τετραγωνικούς πίνακες B, C που ικανοποιούν την σχέση $C \leq_e B$. Τότε υπάρχει ένας διπλά στοχαστικός πίνακας A, τέτοιος ώστε να ισχύει,

$$C \leq_e A \leq_e B \text{ αν και μόνο αν } \mathrm{B}(\alpha, \beta) \geq C(\alpha^c, \beta^c) + |\alpha| + |\beta| - n$$

$$\gamma\iota\alpha\ \acute{o}\lambda\alpha\ \tau\alpha\ \alpha, \beta \subseteq \mathcal{N}.$$

Ένας μη αρνητικός πίνακας Z λέγεται διπλά υπερστοχαστικός εάν υπάρχει ένας διπλά στοχαστικός πίνακας A τέτοιος ώστε $A \leq_e Z$. Εν συνεχεία ένας μη αρνητικός πίνακας W λέγεται διπλά στοχαστικός εάν υπάρχει ένας διπλά στοχαστικός πίνακας A τέτοιος ώστε $W \leq_e A$. Το επόμενο πόρισμα είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος 3.34.

Πόρισμα 3.35 Έστω Z, W n-τετραγωνικοί μη αρνητικοί πίνακες. Τότε

(i) ο Z είναι διπλά στοχαστικός αν και μόνο αν $Z(\alpha, \beta) \geq |\alpha| + |\beta| - n\ \gamma\iota\alpha\ \acute{o}\lambda\alpha\ \tau\alpha\ \alpha, \beta \subseteq \mathcal{N}$.

(ii) ο W είναι διπλά στοχαστικός αν και μόνο αν όλα τα αθροίσματα στηλών και γραμμών του πίνακα μικρότερα η ίσα από το 1.

Για $A = (a_{ij}) \in M_n$ και πραγματικό αριθμό $p > 0$, ορίζουμε $A^{|\circ|p} \equiv (|a_{ij}|^p) \in M_n$. Η επόμενη ανισότητα περιλαμβάνει την μεγαλύτερη και μικρότερη ιδιάζουσα τιμή.

Θεώρημα 3.36 Έστω $A \in M_n$ και έστω θετικοί πραγματικοί p, q με $0 < p \leq 2$, $q \geq 2$. Τότε υπάρχουν δύο διπλά στοχαστικοί πίνακες $B, C \in M_n$ τέτοιοι ώστε:

$$s_n(A)^p B \leq_e A^{|\circ|p} \tag{3.72}$$

Και,
$$A^{|\circ|q} \leq_e s_1(A)^q C \tag{3.73}$$

Απόδειξη Βλέποντας το Πόρισμα 3.35(i), για να αποδείξουμε τη (3.72) αρκεί να δείξουμε ότι,

$$A^{|\circ|q}(\alpha,\beta) \geq (|\alpha| + |\beta| - n)s_n(A)^p \tag{3.74}$$

για κάθε $\alpha, \beta \subseteq \mathcal{N}$. Για έναν $r \times t$ πίνακα X, προσδιορίζουμε τις ιδιάζουσες τιμές του ως τις ιδιοτιμές του $(X^*X)^{1/2}$ ή $(XX^*)^{1/2}$ σύμφωνα με $r \geq t$ ή $r < t$. Αυτό το κάνουμε για να αποφύγουμε προφανείς μηδενικές ιδιάζουσες τιμές. Είναι γνωστό ότι αν ο X είναι ένας $r \times t$ υποπίνακας ενός n-τετραγωνικού πίνακα Y και $r + t - n \geq 1$, τότε,

$$s_j(X) \geq s_{j+2n-r-t}(Y) \ \ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ j \leq r + t - n.$$

Συγκεκριμένα,
$$s_{r+t-n}(X) \geq s_n(Y). \tag{3.75}$$

Εφόσον οι μη-τετραγωνικοί πίνακες μπορούν να μεταλλαχθούν σε τετραγωνικούς με την πρόσθεση μηδενικών γραμμών και σειρών, το Θεώρημα 3.32 είναι επίσης αληθές για μη-τετραγωνικούς πίνακες. Για παράδειγμα, δοσμένου ενός $r \times t$ πίνακα $X = (x_{ij})$,η ανισότητα (3.65) έχει την εξής μορφή:

$$\sum_{i=1}^{\min\{r,t\}} s_i(X)^p \leq \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{t} \left|x_{ij}\right|^p \ \ \gamma\iota\alpha\ 0 < p \leq 2 \tag{3.76}$$

Τώρα αποδεικνύουμε την (3.74). Εάν $|\alpha| + |\beta| - n \leq 0$, ισχύει η (3.74). Υποθέτουμε $|\alpha| + |\beta| - n \geq 1$, ορίζοντας με $A[\alpha|\beta]$ τον υποπίνακα του A με γραμμές και στήλες που ορίζονται από τα α, β αντίστοιχα. Τότε από την σχέση (3.75) αποκτούμε,

$$s_1(A[\alpha|\beta]) \geq \cdots \geq s_{|\alpha|+|\beta|-n}(A[a|b]) \geq s_n(A). \tag{3.77}$$

Έστω $A = (\alpha_{ij})$. Κάνοντας χρήση της (3.76) και (3.77) παραλαμβάνουμε:

$$A^{|\circ|p}(\alpha,\beta) = \sum_{i\in\alpha, j\in\beta} \left|a_{ij}\right|^p \geq \sum_{i=1}^{\min\{|\alpha|,|\beta|\}} s_i(A[\alpha|\beta])^p \geq (|a| + |\beta| - n)s_n(A)^p$$

Το παραπάνω αποδεικνύει την σχέση (3.74) και κατ' επέκταση την (3.72). Ορίζουμε τώρα με $v(X)$ το μεγαλύτερο άθροισμα από στήλες και γραμμές ενός μη αρνητικού πίνακα X. Από το Πόρισμα 3.35(ii) η επόμενη ανισότητα θα σημαίνει την ύπαρξη ενός διπλά στοχαστικού πίνακα C που ικανοποιεί την σχέση (3.73):

$$v(A^{|\circ|q}) \leq s_1(A)^q \tag{3.78}$$

Αλλά η (3.78) είναι ισοδύναμη με,

$$(v(A^{|\circ|q}))^{1/q} \leq s_1(A)$$

το οποίο είναι εμφανές καθώς για $q \geq 2$,

$$(v(A^{|\circ|q}))^{1/q} \leq \left(v\left(A^{|\circ|2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \leq s_1(A).$$

Αυτό αποδεικνύει την σχέση (3.73). □

4. Ανισότητες Νορμών

Σχετικές έρευνες πάνω σε ανισότητες νορμών βρίσκονται σε εξέλιξη. Τέτοιες ανισότητες δεν αποτελούν μόνο πεδίο θεωρητικού ενδιαφέροντος αλλά και πρακτικής σημασίας. Από την άλλη πλευρά όλες οι νόρμες σε ένα πεπερασμένης διάστασης χώρο κατά έναν τρόπο ισοδύναμες, όπως για οποιεσδήποτε δύο νόρμες $\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta$, υπάρχουν θετικές σταθερές c_1, c_2 , τέτοιες ώστε να ισχύει:

$$c_1\|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq \ c_2\|x\|_\alpha \ \text{για κάθε } x.$$

Γι' αυτό όλες οι νόρμες σε ένα πεπερασμένης διάστασης χώρο διανυσμάτων παράγουν την ίδια τοπολογία. Έτσι σε τοπολογικά προβλήματα, διαφορετικές επιλογές νορμών παράγουν τα ίδια αποτελέσματα. Σε διαφορετική περίπτωση, όπως σε προβλήματα ανάλυσης, μπορεί η χρήση μιας συγκεκριμένης νόρμας να είναι πιο ελκυστική για την λύση ενός προβλήματος από κάποια άλλη. Για παράδειγμα, η φασματική νόρμα ενώ έχει καλές γεωμετρικές ιδιότητες, είναι δύσκολο να υπολογιστεί με ακρίβεια, ενώ η νόρμα Frobenius είναι εύκολα υπολογίσιμη αλλά μπορεί να μην ειδικεύεται για την επεξήγηση ενός προβλήματος. Επομένως καθιστάτε αναγκαία η χρήση διαφορετικών νορμών. Θυμηθείτε ότι μια νόρμα $\|\cdot\|$ στον M_n καλείται ορθομοναδιαία αναλλοίωτη εάν $\|UAV\| = \|A\|$ για κάθε A και για κάθε ορθομοναδιαίους U, V. Το θεώρημα ανάλυσης ιδιαζουσών τιμών υποδεικνύει ότι για οποιοδήποτε δοσμένο $A \in M_n$, υπάρχουν ορθομοναδιαίοι πίνακες U, V τέτοιοι ώστε $A = Udiag(s_1(A), \dots, s_n(A))V$. Έτσι ορθομοναδιαία αναλλοίωτες νόρμες είναι συναρτήσεις ιδιαζουσών τιμών. Ο von Neumann απέδειξε ότι αυτές οι συναρτήσεις, για παράδειγμα νόρμες Φ στον $\mathbb{R}^n$ ικανοποιούν τα παρακάτω:

(i) $\Phi(Px) = \Phi(x)$ για κάθε πίνακα μετάθεσης P και $x \in \mathbb{R}^n$,

(ii) $\Phi(\epsilon_1 x_1, \dots, \epsilon_n x_n) = \Phi(x_1, \dots, x_n)$ εάν $\epsilon_j = \pm 1$.

Με άλλα λόγια έχουμε ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ ορθομοναδιαία αναλλοίωτων νορμών $\|\cdot\|_\Phi$ και των συμμετρικών συναρτήσεων Φ.τα οποία σχετίζονται ως εξής:

$$\|A\|_\Phi = \Phi\big(s_1(A), \dots, s_n(A)\big) \ \text{για όλα τα } A \in M_n.$$

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, μιλήσαμε για μία κλάση ορθομοναδιαία αναλλοίωτων νορμών, τις Schatten p-νόρμες. Μία εξίσου σημαντική κλάση από ορθομοναδιαία αναλλοίωτες νόρμες είναι οι Fan k-νόρμες οι οποίες ορίζονται ως εξής:

$$\|A\|_{(k)} = \sum_{j=1}^{k} s_j\,(A)\,,\ 1 \le k \le n$$

Παρατηρήστε πως σε αυτήν την σχέση $\|\cdot\|_{(1)} = \|\cdot\|_{\infty}$ και $\|\cdot\|_{(n)} = \|\cdot\|_1$. Έστω μία γνωστή νόρμα $\|\cdot\|$ στον M_n. Η δυαδική νόρμα της $\|\cdot\|$ σε αναλογία με το εσωτερικό γινόμενο του Frobenius καθορίζεται από:

$$\|A\|^D \equiv \max\{|trAB^*|: \|B\| = 1, B\epsilon M_n\}$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η δυαδική νόρμα μιας ορθομοναδιαία αναλλοίωτης νόρμας είναι επίσης ορθομοναδιαία αναλλοίωτη. Από το Πόρισμα 2.8, η δυαδική νόρμα μιας ορθομοναδιαία αναλλοίωτης νόρμας μπορεί να γραφτεί και ως,

$$\|A\|^D \equiv max\,\{\sum_{j=1}^{n} s_j(A)s_j(B) : \|B\| = 1, B\epsilon M_n\} \tag{4.1}$$

Ως αποτέλεσμα παίρνουμε $(\|\cdot\|^D)^D = \|\cdot\|$ από το Θεώρημα δυαδικότητας. Δοσμένου $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, με $\gamma_1 \ge \cdots \ge \gamma_n \ge 0$, $\gamma_1 > 0$, ορίζουμε

$$\|A\|_{\gamma} \equiv \sum_{j=1}^{n} \gamma_j s_j(A)\ \ ,\ A \in M_n.$$

Τότε αυτή είναι μία ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα. Χρησιμοποιώντας αυτήν την σήμανση και σε συνάθροιση με το προηγούμενο αποτέλεσμα, από την (4.1) λαμβάνουμε το εξής:

Λήμμα 4.1 Έστω $\|\cdot\|$ μία ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα στον M_n και ορίζουμε $\Gamma \equiv \{s(X): \|X\|^D = 1, X \in M_n\}$. Τότε για όλα τα A,

$$\|A\| = \max\{\|A\|_{\gamma}: \gamma \in \Gamma\}.$$

Από αυτό το λήμμα και την σχέση,

$$\|A\|_{\gamma} = \sum_{j=1}^{n-1}(\gamma_j - \gamma_{j+1})\|A\|_{(j)} + \gamma_n\|A\|_n$$

προκύπτει το επόμενο σημαντικό λήμμα.

Λήμμα 4.2 (Αρχή κυριαρχίας του Fan) Έστω $A, B \in M_n$. Εάν ,

$$\|A\|_{(k)} \le \|B\|_{(k)}\,,\ \ k = 1,2, \dots, n$$

Τότε,

$$\|A\| \le \|B\|$$

για όλες τις ορθομοναδιαία αναλλοίωτες νόρμες.

4.1 Τελεστές μονότονων συναρτήσεων

Σε αυτήν την παράγραφο θα ασχοληθούμε με ανισότητες νορμών που περιέχουν τελεστές μονότονων συναρτήσεων. Θα χρειαστούμε το επόμενο λήμμα:

Λήμμα 4.3 Έστω $A \in M_n$ ερμιτιανός. Τότε για $1 \leq k \leq n$,

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j(A) = max \sum_{j=1}^{k} \langle Ax_j, x_j \rangle$$

όπου το max έχει παρθεί για όλες τις ορθοκανονικές k-πλειάδες $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{C}^n$.

Από το Θεώρημα 1.3, κάθε μη αρνητικός τελεστής μονότονης συνάρτησης $f(t)$ στο $[0, \infty)$ έχει την ακόλουθη ολοκληρωτική αναπαράσταση:

$$f(t) = \alpha + \beta t + \int_0^\infty \frac{st}{s+t} d\mu(s) \qquad (4.2)$$

όπου $\alpha, \beta \geq 0$ σταθερές και μ είναι θετικό στο $[0, \infty)$. Σε αυτήν την περίπτωση, για $A \geq 0$ και οποιοδήποτε διάνυσμα u,

$$\langle f(A)u, u \rangle = \alpha \langle u, u \rangle + \beta \langle fu, u \rangle + \int_0^\infty s \langle A(A + sI)^{-1}u, u \rangle d\mu(s) \qquad (4.3)$$

Εφόσον η $f(t)$ είναι αύξουσα, για $j = 1,2, \dots, n$, ένα ιδιοδυάνυσμα u_j του A το οποίο αναφέρεται σε μία ιδιοτιμή $\lambda_j(A)$ γίνεται ιδιοδυάνυσμα του $f(A)$ που ανταποκρίνεται σε ιδιοτιμή $\lambda_j(f(A)) = f(\lambda_j(A))$, οπότε σύμφωνα με τον ορισμό των νορμών του Fan,

$$\|f(A)\|_{(k)} = \sum_{j=1}^{k} \langle f(A)u_j, u_j \rangle \ , \ \ k = 1,2, \dots, n \qquad (4.4)$$

Το πρώτο μας αποτέλεσμα είναι το επόμενο:

Θεώρημα 4.4 Έστω A, B θετικά ημιορισμένοι πίνακες και $\|\cdot\|$ ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα, τότε οι επόμενοι ισχυρισμοί έχουν βάση.

(i) Για κάθε μη αρνητικό τελεστή μονότονης συνάρτησης $f(t)$ στο $[0, \infty)$,

$$\|f(A + B)\| \leq \|f(A) + f(B)\| \qquad (4.5)$$

(ii) Για κάθε μη αρνητική συνάρτηση $g(t)$ στο $[0, \infty)$, με $g(0) = 0$, $g(\infty) = \infty$, της οποίας η αντίστροφη συνάρτηση είναι μονότονος τελεστής,

$$\|g(A + B)\| \geq \|g(A) + g(B)\| \qquad (4.6)$$

Το κύριο μέρος της απόδειξης έγκειται στο να δείξουμε τα δύο παρακάτω λήμματα. Ορίζουμε με $\|X\|_F$ την νόρμα Frobenius ενός ορθογώνιου $l \times m$ πίνακα X,

$$\|X\|_F \equiv \{tr(X^*X)\}^{\frac{1}{2}} = \{tr(XX^*)\}^{\frac{1}{2}} = \{\sum_{i,j}|x_{ij}|^2\}^{1/2}.$$

Προφανώς η νόρμα αυτή είναι ορθομοναδιαία αναλλοίωτη κατά τέτοιο τρόπο ώστε:

$$\|UXV\|_F = \|X\|_F$$

για κάθε X και για όλους τους ορθομοναδιαίους πίνακες $U \in M_l$, $V \in M_m$.

Λήμμα 4.5 Δεδομένου ενός πίνακα $C \geq 0$, έστω $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του μαζί με τα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Παίρνουμε ακέραιο $k\ \tau.\omega. 1 \leq k \leq n$ και ορίζουμε $n \times k$ πίνακα U_1 και έναν $n \times (n-k)$ πίνακα U_2 ως εξής:

$$U_1 \equiv (v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{n-k+1})\ \kappa\alpha\iota\ U_2 \equiv (v_{n-k}, v_{n-k-1}, \ldots, v_1).$$

Τότε για κάθε ερμιτιανό πίνακα H,

$$\|HCU_1\|_F \leq \|CHU_1\|_F\ \kappa\alpha\iota\ \|HCU_2\|_F \geq \|CHU_2\|_F.$$

Απόδειξη Έστω,

$$D_1 \equiv diag(\lambda_n, \lambda_{n-1}, \ldots, \lambda_{n-k+1})\ ,\ D_2 \equiv diag(\lambda_{n-k}, \lambda_{n-k-1}, \ldots, \lambda_1)$$

Τότε από ορισμό έχουμε,

$$CU_1 = U_1D_1\ \kappa\alpha\iota\ CU_2 = U_2D_2.$$

Εφόσον ο πίνακας $W = (U_1, U_2)$ και ο συμπληρωματικός του W^* είναι ορθομοναδιαίοι, λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}\|HCU_1\|_F^2 &= \|W^*HU_1D_1\|_F^2 \\ &= \left\|\begin{bmatrix} U_1^*HU_1D_1 \\ U_2^*HU_1D_1 \end{bmatrix}\right\|_F^2 \\ &= \|U_1^*HU_1D_1\|_F^2 + \|U_2^*HU_1D_1\|_F^2 \\ &\leq \|U_1^*HU_1D_1\|_F^2 + \lambda_{n-k+1}^2\|U_2^*HU_1\|_F^2\end{aligned}$$

Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε το εξής,

$$\begin{aligned}\|CHU_1\|_F^2 &= \|(CHU_1)^*W\|_F^2 \\ &= \|U_1HC\cdot(U_1,U_2)\|_F^2 \\ &= \|U_1HU_1D_1\|_F^2 + \|U_1HU_2D_2\|_F^2 \\ &= \|U_1HU_1D_1\|_F^2 + \|D_2U_2^*HU_1\|_F^2 \\ &\geq \|U_1HU_1D_1\|_F^2 + \lambda_{n-k}^2\|U_2^*HU_1\|_F^2.\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις δύο αυτές ανισότητες λαμβάνουμε την πρώτη ανισότητα του ισχυρισμού. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται και η δεύτερη ανισότητα. □

Λήμμα 4.6 Έστω $A, B \geq 0$ και u_j τα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα του $A+B$ με τις αντίστοιχες ιδιοτιμές $\lambda_j(A+B), j = 1,2,\dots,n$. Τότε ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις,

$$\sum_{j=1}^{k}\langle\{A(A+I)^{-1} + B(B+I)^{-1}\}u_j, u_j\rangle \geq \sum_{j=1}^{k}\langle(A+B)(A+B+I)^{-1}u_j, u_j\rangle$$

για $k = 1,2,\dots,n$.

Απόδειξη Έστω $C = (A+B+I)^{-1/2}$ $\kappa\alpha\iota\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Εφόσον,

$$(A+B)(A+B+I)^{-1} = CAC + CBC,$$

για την απόδειξη του λήμματος αρκεί να δείξουμε τις επόμενες ανισότητες:

$$\sum_{j=1}^{k}\langle\{A(A+I)^{-1}\}u_j, u_j\rangle \geq \sum_{j=1}^{k}\langle CACu_j, u_j\rangle \tag{4.7}$$

και

$$\sum_{j=1}^{k}\langle\{B(B+I)^{-1}\}u_j, u_j\rangle \geq \sum_{j=1}^{k}\langle CBCu_j, u_j\rangle \tag{4.8}$$

Για κάθε $j = 1,2,\dots,n$ το διάνυσμα u_j συμπίπτει με το ιδιοδιάνυσμα u_{n-j+1} του C. Έστω,

$$U_1 \equiv (u_n, u_{n-1}, \dots, u_{n-k+1}) = (u_1, u_2, \dots, u_k)$$

Τότε η ανισότητα (4.7) μπορεί να γραφτεί και ως:

$$tr[U_1^*A(A+I)^{-1}U_1] \geq tr(U_1^*CACU_1). \tag{4.9}$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.5 με $A^{1/2}$ αντί του H και παίρνοντας την παρακάτω ανισότητα,

$$C^2 = (A+B+I)^{-1} \leq (A+I)^{-1}$$

Λαμβάνουμε,

$$tr(U_1^*CACU_1) = \left\|A^{\frac{1}{2}}CU_1\right\|_F^2$$

$$\leq \left\|CA^{\frac{1}{2}}U_1\right\|_F^2 = tr(U_1^*A^{1/2}C^2A^{\frac{1}{2}}U_1)$$

$$\leq tr(U_1^*A^{1/2}(A+I)^{-1}A^{\frac{1}{2}}U_1)$$

$$= tr(U_1^*A(A+I)^{-1}U_1)$$

το οποίο αποδεικνύει την (4.9). Τέλος η σχέση (4.8) έπεται από την (4.7) μετά από μία αλλαγή ρόλων των A , B . Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Απόδειξη θεωρήματος 4.4 Είναι εύκολο να δούμε από το Λήμμα 4.6 ότι για κάθε $s > 0$,

$$\sum_{j=1}^{k} s\langle (A+B)(A+B+sI)^{-1}u_j, u_j\rangle$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k}\langle \{sA(A+sI)^{-1} + sB(B+sI)^{-1}\}u_j, u_j\rangle.$$

Μέσω της (4.3), παίρνουμε:

$$\sum_{j=1}^{k}\langle f(A+B)u_j, u_j\rangle \leq \sum_{j=1}^{k}\langle \{f(A)+f(B)\}u_j, u_j\rangle,$$

και μέσω της (4.4) και της αντικατάστασης του $A+B$ στην θέση του A,

$$\sum_{j=1}^{k}\langle f(A+B)u_j, u_j\rangle = \|f(A+B)\|_{(k)}.$$

Από την άλλη μεριά, το Λήμμα 4.3 δείχνει,

$$\sum_{j=1}^{k}\langle \{f(A)+f(B)\}u_j, u_j\rangle \leq \|f(A)+f(B)\|_{(k)}$$

και συνεπώς,

$$\|f(A+B)\|_{(k)} \leq \|f(A)+f(B)\|_{(k)}$$

για $k = 1,2,\dots,n$. Τέλος εφαρμόζοντας την αρχή κυριαρχίας του Fan (Λήμμα 4.2) τελειώνει η απόδειξη του (i). Για την απόδειξη του (ii), εφαρμόστε το (i) στην αντίστροφη συνάρτηση $f(t)$ του $g(t)$, όπου είναι μονότονος τελεστής, με πίνακες $g(A), g(B) \geq 0$, και τις νόρμες του Fan για να πάρετε,

$$\|A+B\|_{(k)} = \|f[g(A)] + f[g(B)]\|_{(k)}$$

$$\geq \|f[g(A)+g(B)]\|_{(k)}.$$

και επομένως,

$$\|A+B\|_{(k)} \geq \|f[g(A)+g(B)]\|_{(k)} \ \ \gamma\iota\alpha\ k=1,2,\ldots,n \tag{4.10}$$

Εφόσον μία μη αρνητική συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο $[0,\infty)$, είναι μονότονος τελεστής αν και μόνο αν είναι κοίλος τελεστής, η $f(t)$ είναι μία αύξουσα κοίλη συνάρτηση. Ως αποτέλεσμα η $g(t)$ είναι μία αύξουσα κυρτή συνάρτηση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.3 με την $g(t)$ στην (4.10) παίρνουμε:

$$\|g(A+B)\|_{(k)} \geq \ \|g(A)+g(B)\|_{(k)} \ \ \gamma\iota\alpha\ k=1,2,\ldots,n$$

το οποίο υποδεικνύει μέσω του Λήμματος 4.2 ότι,

$$\|g(A+B)\| \geq \|g(A)+g(B)\|$$

για όλες τις ορθομοναδιαία αναλλοίωτες νόρμες. ☐

Πόρισμα 4.7 Για όλα τα $X,Y \geq 0$ και για κάθε ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα $\|\cdot\|$,

$$\|(X+Y)^r\| \leq \|X^r+Y^r\| \ \ \mu\varepsilon\ 0<r\leq 1 \tag{4.11}$$

και,

$$\|(X+Y)^r\| \geq \|X^r+Y^r\| \ \ \mu\varepsilon\ 1\leq r<\infty \tag{4.12}$$

Απόδειξη Εφόσον t^r είναι μονότονος τελεστής για $0<r\leq 1$ και η αντίστροφη συνάρτηση είναι τελεστής μονότονος για $1\leq r<\infty$, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.4 ολοκληρώνουμε την απόδειξη. ☐

Πόρισμα 4.8 Για όλους τους $A,B \geq 0$ και για κάθε ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα $\|\cdot\|$,

$$\|\log(A+B+I)\| \leq \|\log(A+I)+\log(B+I)\| \ \ \kappa\alpha\iota\ \|e^A+e^B\| \leq \|e^{A+B}+I\|.$$

Απόδειξη Η πρώτη ανισότητα είναι αποτέλεσμα της εφαρμογής στο Θεώρημα 4.4 του μονότονου τελεστή συνάρτησης $\log(t+1)$. Ξανά από το Θεώρημα 4.4, εφαρμόζοντας το με τις νόρμες Fan και την συνάρτηση e^t-1 της οποίας η αντίστροφη συνάρτηση είναι μονότονος τελεστής, λαμβάνουμε για κάθε $1\leq k\leq n$,

$$\|(e^A-I)+(e^B-I)\|_{(k)} \leq \|e^{A+B}-I\|_{(k)}$$

Εφόσον από τον ορισμό των νορμών Fan,

$$\|(e^A-I)+(e^B-I)\|_{(k)} \leq \|e^A+e^B\|_{(k)}-2k$$

καθώς επίσης,

$$\|e^{A+B}-I\|_{(k)} = \|e^{A+B}+I\|_{(k)}-2k,$$

συμπεραίνουμε ότι,

$$\|e^A + e^B\|_{(k)} \leq \|e^{A+B} + I\|_{(k)}$$

για κάθε $1 \leq k \leq n$. Τώρα η αρχή υπεροχής του Fan μας δίνει την δεύτερη ανισότητα. $\square$

Πόρισμα 4.9 Έστω $g(t)$ ένας μη αρνητικός τελεστής κυρτής συνάρτησης στο $[0, \infty)$ με $g(0) = 0$. Τότε,

$$\|g(A + B)\| \geq \|g(A) + g(B)\|$$

για κάθε $A, B \geq 0$ και για κάθε ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα.

Απόδειξη Είναι γνωστό ότι μία συνάρτηση $g(t)$ στο $[0, \infty)$ με $g(0) = 0$ είναι κυρτός τελεστής αν και μόνο αν το $g(t)/t$ είναι μονότονος τελεστής. Επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι $g(t) = tf(t)$ με $f(t)$ μονότονο τελεστή. Έχει αποδειχθεί ότι η αντίστροφη συνάρτηση του $tf(t)$ είναι μονότονος τελεστής. Επομένως εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.4 (ii) ολοκληρώνεται η απόδειξη. $\square$

Ας σημειωθεί ότι το παρακάτω αποτέλεσμα πάνω σε διαφορές πινάκων έχει αποδειχθεί από τον T.Ando. Κάτω από τις ίδιες προϋποθέσεις του Θεωρήματος 4.4,

$$\|f(|A - B|)\| \geq \|f(A) - f(B)\| \quad \kappa\alpha\iota \quad \|g(|A - B|)\| \leq \|g(A) - g(B)\|.$$

Μία νόρμα M_n ονομάζεται κανονικοποιημένη εάν $\|diag(1,0, \ldots ,0)\| = 1$. Προφανώς όλες οι k-νόρμες Fan $(k = 1,2, \ldots , n)$ αλλά και οι p-νόρμες Schatten $(1 \leq p \leq \infty)$ είναι κανονικοποιημένες.

Εάν $\|\cdot\|$ είναι μία ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα στον M_n και $A \geq 0$, τότε το Λήμμα 4.1 παίρνει την εξής μορφή:

$$\|A\| = \max\{trAB : B \geq 0, \|B\|^D = 1, B \in M_n\}. \tag{4.13}$$

Θεώρημα 4.10 Έστω $f(t)$ μη αρνητικός τελεστής μονότονης συνάρτησης στο $[0, \infty)$ και $\|\cdot\|$ μία κανονικοποιημένη ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα. Τότε για κάθε πίνακα A,

$$f(\|A\|) \leq \|f|A|\|. \tag{4.14}$$

Απόδειξη Αφού $\|A\| = \||A|\|$, αρκεί να δείξουμε την σχέση (4.14) για την περίπτωση όπου ο A είναι θετικά ημιορισμένος. Υποθέτουμε ότι, βάση της (4.13) υπάρχει ένας πίνακας $B \geq 0$ με $\|B\|^D = 1$ τέτοιος ώστε,

$$\|A\| = tr\, AB \tag{4.15}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι κάθε κανονικοποιημένη ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα ικανοποιεί την εξής σχέση:

$$\|X\|_\infty \leq \|X\| \leq \|X\|_1 \quad \text{για κάθε } X$$

Εφόσον η $\|\cdot\|$ είναι κανονικοποιημένη, η νόρμα $\|\cdot\|^D$ είναι επίσης κανονικοποιημένη ορθοκανονικά αναλλοίωτη νόρμα, επομένως,

$$1 = \|B\|^D \leq \|B\|_1 = trB. \tag{4.16}$$

Από $\|A\|_\infty \leq \|A\|$ και σχέση (4.15), παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\frac{s\|A\|}{s+\|A\|} \leq \frac{s\|A\|}{s+\|A\|_\infty} &= tr\frac{sAB}{s+\|A\|_\infty}\\ &= trB^{1/2}\frac{sA}{s+\|A\|_\infty}B^{1/2}\\ &\leq trB^{\frac{1}{2}}\{sA(sI+A)^{-1}\}B^{\frac{1}{2}}\\ &= tr\, sA(sI+A)^{-1}B\end{aligned}$$

για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $s > 0$. Στην τελευταία πάνω ανισότητα χρησιμοποιήσαμε το δεδομένο $\frac{sA}{s+\|A\|_\infty} \leq sA(sI+A)^{-1}$. Ως αποτέλεσμα,

$$\frac{s\|A\|}{s+\|A\|} \leq tr\, sA(sI+A)^{-1}B. \tag{4.17}$$

Εκμεταλλεύονται την ολοκληρωτική αναπαράσταση (4.2) του $f(t)$, (4.16), (4.15), (4.17) και (4.13), υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}f(\|A\|) &= \alpha + \beta\|A\| + \int_0^\infty \frac{s\|A\|}{s+\|A\|}d\mu(s)\\ &\leq \alpha trB + \beta trAB + \int_0^\infty tr\, sA(sI+A)^{-1}Bd\mu(s)\\ &= tr\{\alpha I + \beta A + \int_0^\infty tr\, sA(sI+A)^{-1}d\mu(s)\}B\\ &= trf(A)B\\ &\leq \|f(A)\|.\end{aligned}$$

□

Λέμε ότι μία νόρμα $\|\cdot\|$ είναι αυστηρά αύξουσα εάν $0 \leq A \leq B$ και $\|A\| = \|B\| \Rightarrow A = B$. Για παράδειγμα, η p-νόρμα Schatten $\|\cdot\|_p$ είναι αυστηρά αύξουσα για κάθε $1 \leq p \leq \infty$.

Παράδειγμα: Επιλέγουμε πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $f(x) = \sqrt{x}$ και την φασματική νόρμα $\|\cdot\|_\infty$. Οι ιδιοτιμές του $|A|$ είναι οι ιδιάζουσες τιμές του πίνακα A,$s(A) \approx \{3.52{,}2.18{,}1.70\}$, $\sqrt{s(A)} \approx \{1.88{,}1.48{,}1.30\}$ επομένως $f(\|A\|_\infty) = \sqrt{3.52} \approx 1.88 = \|f(|A|)\|_\infty$, οπότε ισχύει η (4.14).

Θεώρημα 4.11 Έστω $f(t)$ ένας μη αρνητικός τελεστής μονότονης συνάρτησης στο $[0, \infty)$ και θεωρούμε ότι $f(t)$ είναι μη γραμμικός. Έστω $\|\cdot\|$ μία αυστηρά αύξουσα, κανονικοποιημένη, ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα και $A \in M_n$ με $n \geq 2$. Τότε,

$$f(\|A\|) = \|f|A|\| \leftrightarrow f(0) = 0 \text{ και } rankA \leq 1.$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 4.11 παραλείπεται.

Θεώρημα 4.12 Έστω $f(t)$ ένας μη αρνητικός τελεστής μονότονης συνάρτησης στο $[0, \infty)$ και $\|\cdot\|$ μία ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα με $\|I\| = 1$. Τότε για κάθε πίνακα A,

$$f(\|A\|) \geq \|f(|A|)\|.$$

Απόδειξη Μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο πίνακας A είναι θετικά ημιορισμένος. Εφόσον,

$$f(A) = \alpha I + \beta A + \int_0^\infty sA(sI + A)^{-1} d\mu(s)$$

όπως και στην απόδειξη στην σχέση (4.10), λαμβάνουμε,

$$\|f(A)\| \leq \alpha + \beta\|A\| + \int_0^\infty \|sA(sI + A)^{-1}\| d\mu(s)$$

αφού $\|I\| = 1$. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι,

$$\|A(sI + A)^{-1}\| \leq \frac{\|A\|}{s + \|A\|} \quad \mu\varepsilon\ s > 0. \tag{4.18}$$

Για κάθε $s > 0$, εφόσον,

$$\frac{x}{s + x} \leq t^2 + (1 - t)^2 \frac{x}{s}$$

για κάθε $x > 0$, $0 < t < 1$, παίρνουμε:

$$A(sI + A)^{-1} \leq t^2 I + (1 - t)^2 s^{-1} A$$

έτσι ώστε,

$$\|A(sI + A)^{-1}\| \leq \|t^2 I + (1 - t)^2 s^{-1} A\| \leq t^2 + (1 - t)^2 s^{-1}\|A\|. \tag{4.19}$$

Ελαχιστοποιώντας το δεξί μέλος της (4.19) για $t \in (0,1)$ παίρνουμε την (4.18). □

Παράδειγμα: Παίρνουμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, f(x) = \sqrt{x}$, και την νόρμα Schatten-1, όπου τις ιδιάζουσες τιμές τις ξέρουμε από το προηγούμενο παράδειγμα, $\|A\|_1 \approx 2.46, f(\|A\|_1) \approx 1.57, \|f(|A|)\|_1 \approx 1.55$. Άρα ισχύει η σχέση του Θεωρήματος 4.12.

Ορίζουμε $E = diag(1,0,\dots,0)$. Συνοψίζοντας τα θεωρήματα (4.10) και (4.12), λαμβάνουμε τα παρακάτω πορίσματα.

Πόρισμα 4.13 Έστω $f(t)$ ένας μη αρνητικός τελεστής μονότονης συνάρτησης στο $[0,\infty)$ και $\|\cdot\|$ μία ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα. Τότε για κάθε πίνακα A,

$$\|E\| \cdot f\left(\frac{\|A\|}{\|E\|}\right) \leq \|f(|A|)\| \leq \|I\| f\left(\frac{\|A\|}{\|I\|}\right).$$

Πόρισμα 4.14 Έστω $g(t)$ μία αυστηρά (γνησίως) αύξουσα συνάρτηση στο $[0,\infty)$ τέτοια ώστε $g(0) = 0$, $g(\infty) = \infty$ και η αντίστροφη της συνάρτηση $g^{-1} \in [0,\infty)$ η οποία είναι μονότονος τελεστής. Έστω $\|\cdot\|$ μία ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα. Τότε για κάθε πίνακα A,

$$\|I\| \cdot g\left(\frac{\|A\|}{\|I\|}\right) \leq \|g(|A|)\| \leq \|E\| g\left(\frac{\|A\|}{\|E\|}\right).$$

Στην συνέχεια θα μελετήσουμε κάποια χαρακτηριστικά μονοτονίας για κάποιες ιδιότητες νορμών μέσω εφαρμογών ειδικών περιπτώσεων των Θεωρημάτων 4.10 και 4.4. Δοσμένου του ότι μία ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα $\|\cdot\| \in M_n$, για $p > 0$ ορίζει,

$$\|X\|^{(p)} \equiv \|\,|X|\,\|^{\frac{1}{p}} \quad \mu\varepsilon\ X \in M_n \tag{4.20}$$

Τότε είναι γνωστό (Λήμμα 2.13) ότι όταν $p \geq 1$, $\|\cdot\|^{(p)}$ είναι επίσης μία ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα.

Θεώρημα 4.15 Έστω $\|\cdot\|$ να είναι μία κανονικοποιημένη ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα. Τότε για οποιονδήποτε πίνακα A , η συνάρτηση $p \to \|A\|^{(p)}$ είναι φθίνουσα στο $(0,\infty)$. Για κάθε ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα,

$$\lim_{p\to\infty} \|A\|^{(p)} = \|A\|_\infty.$$

Απόδειξη Το μέλος σχετικά με την μονοτονία είναι η ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 4.10 όπου $f(t) = t^r$, $0 < r \leq 1$,πάραυτα παρουσιάζουμε μία μικρή άμεση απόδειξη. Αρκεί να σκεφτούμε την περίπτωση όπου ο A είναι θετικά ημιορισμένος, και τώρα κάνουμε την εξής υπόθεση. Πρώτα υποθέτουμε ότι $\|\cdot\|$ είναι μία κανονικοποιημένη νόρμα. Ας δείξουμε ότι,

$$\|A^r\| \geq \|A\|^r \;\; \gamma\iota\alpha \; 0 < r \leq 1 \tag{4.21}$$

$$\|A^r\| \leq \|A\|^r \;\; \gamma\iota\alpha \; 1 \leq r < \infty \tag{4.22}$$

Εφόσον $\|A\|_\infty \leq \|A\|$, για $r \geq 1$ παίρνουμε:

$$\|A^r\| = \|AA^{r-1}\| \leq \|A\|\|A^{r-1}\|_\infty$$
$$= \|A\|\|A\|_\infty^{r-1} \leq \|A\|\|A\|^{r-1} = \|A\|^r,$$

Το οποίο αποδεικνύει την (4.22). Η ανισότητα της (4.21) έπεται από την (4.22).Για $0 < r \leq 1$, $\|A\| = \left\|(A^r)^{1/r}\right\| \leq \|A^r\|^{\frac{1}{r}}$. Εάν $0 < p < q$, τότε,

$$\|A^p\| = \left\|(A^q)^{p/q}\right\| \geq \|A^q\|^{p/q}$$

έτσι ώστε $\|A^p\|^{1/p} \geq \|A^q\|^{\frac{1}{q}}$. Επιπρόσθετα ,

$$\|A\|_\infty = \|A^p\|_\infty^{1/p} \leq \|A^p\|^{1/p} \leq \|A^p\|_1^{1/p} = \|A\|_p \to \|A\|_\infty$$

καθώς $p \to \infty$, όπου $\|\cdot\|_p$ είναι η p-νόρμα Schatten. Για την προσέγγιση του ορίου όταν η νόρμα δεν είναι κανονικοποιημένη , εφαρμόζουμε την κανονικοποιημένη περίπτωση στο $\|\cdot\|/\|diag(1,0,\ldots,0)\|$. □

Έπειτα αναφερόμαστε στην μονοτονία των συναρτήσεων $p \to \left\|(A^p + B^p)^{1/p}\right\|$ και $p \to \|(A^p + B^p)\|^{1/p}$. Ορίζουμε με $A \vee B$ το “supremum” ή αλλιώς ελάχιστο άνω φράγμα δύο θετικά ημιορισμένων πινάκων. Είναι το όριο μιας αύξουσας ακολουθίας:

$$A \vee B = \lim_{p\to\infty}\{(A^p + B^p)\,/2\}^{\frac{1}{p}}.$$

Θεώρημα 4.16 Έστω $A, B \in M_n$ θετικά ημιορισμένοι. Για κάθε ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα, η συνάρτηση $p \to \left\|(A^p + B^p)^{1/p}\right\|$ είναι φθίνουσα στο (0,1]. Για κάθε κανονικοποιημένη ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα, η συνάρτηση $p \to \|A^p + B^p\|^{1/p}$ είναι φθίνουσα στο $(0, \infty)$ και για κάθε ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα,

$$\lim_{p\to\infty}\|A^p + B^p\|^{1/p} = \|A \vee B\|_\infty.$$

Απόδειξη Έστω $0 < p < q \leq 1$. Θέτουμε $r = \frac{q}{p}$, $X = A^p, Y = B^p$ στην 4.12 για να αποκτήσουμε,

$$\left\|(A^p + B^p)^{q/p}\right\| \geq \|A^q + B^q\|. \tag{4.23}$$

Χρησιμοποιώντας την αρχή κυριαρχίας (Θεώρημα 2.3) καθώς και το Λήμμα 4.2 της αρχής κυριαρχίας του Fan, μπορούμε να εφαρμόσουμε την αύξουσα κυρτή συνάρτηση $t^{1/q} \in [0,\infty)$ στην (4.23) για να παραλάβουμε:

$$\left\|(A^p+B^p)^{1/p}\right\| \geq \left\|(A^q+B^q)^{1/q}\right\|$$

το οποίο δείχνει το πρώτο σκέλος. Για να δείξουμε το δεύτερο σκέλος πρέπει να δείξουμε:

$$\|A^p+B^p\|^{1/p} \geq \|A^q+B^q\|^{1/q} \tag{4.24}$$

για $0<p<q$ και για κάθε κανονικοποιημένη ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα $\|\cdot\|$. Είναι εύκολο να εντοπίσουμε ότι η σχέση (4.24) είναι ισοδύναμη με:

$$\|A+B\|^r \geq \|A^r+B^r\|$$

για κάθε $r \geq 1$ και για κάθε θετικά ημιορισμένους πίνακες $A, B \in M_n$, το οποίο είναι επόμενο από τις σχέσεις (4.22) και (4.12),

$$\|A+B\|^r \geq \|(A+B)^r\| \geq \|A^r+B^r\|.$$

Ξανά, για να δείξουμε το όριο αρκεί να σκεφτούμε την περίπτωση όπου $\|\cdot\|$ είναι κανονικοποιημένη. Σε αυτήν την περίπτωση για $p \geq 1$,

$$\begin{aligned}\left\|(A^p+B^p)^{1/p}\right\|_\infty &= \|A^p+B^p\|_\infty^{1/p}\\ &\leq \|A^p+B^p\|^{1/p}\\ &\leq \|A^p+B^p\|_1^{1/p}\\ &= \left\|(A^p+B^p)^{1/p}\right\|_p\\ &\leq \left\|(A^p+B^p)^{\frac{1}{p}}-(A\vee B)\right\|_p + \|A\vee B\|_p\\ &\leq \left\|(A^p+B^p)^{\frac{1}{p}}-(A\vee B)\right\|_1 + \|A\vee B\|_p\end{aligned}$$

Εφόσον

$$\lim_{p\to\infty}(A^p+B^p)^{1/p} = \lim_{p\to\infty}\left(\frac{A^p+B^p}{2}\right)^{1/p} = A\vee B$$

$$\lim_{p\to\infty} \|A \vee B\|_p = \|A \vee B\|_\infty,$$

παίρνουμε,

$$\lim_{p\to\infty} \|A^p + B^p\|^{1/p} = \|A \vee B\|_\infty$$

Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Ας σημειωθεί ότι υπάρχουν μερικές ορθομοναδιαία αναλλοίωτες νόρμες για τις όποιες $p \to \left\|(A^p + B^p)^{1/p}\right\|$ δεν είναι φθίνουσα στο $(1,\infty)$. Σκεφτείτε την νόρμα ίχνος (στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι απλά το ίχνος εφόσον οι πίνακες που εμπλέκονται είναι θετικά ημιορισμένοι). Συγκεκριμένα, για τους 2 × 2 πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_t = \begin{bmatrix} t^2 & t\sqrt{1-t^2} \\ t\sqrt{1-t^2} & 1-t^2 \end{bmatrix} \ \mu\varepsilon\ 0 < t < 1$$

είναι αποδεδειγμένο (Λήμμα 3.3) ότι για κάθε $p_0 > 2$ υπάρχει ένα $t \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $p \to tr\{(A^p + B_t^p)^{1/p}\}$ να είναι αυστηρά αύξουσα στο $[p_0,\infty)$. Επίσης σκεφτείτε το παράδειγμα $\psi(p) = tr\{(A^p + B^p)^{1/p}\}$ με,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, B_t = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -6 & 50 \end{bmatrix}$$

Τότε $\psi(1.5) - \psi(8) \approx -1.5719$. Επομένως $\psi(1.5) < \psi(8)$. Άρα η $\psi(p)$ δεν είναι φθίνουσα στο κλειστό διάστημα $[1.5,8]$.

4.2 Επιστροφή σε καρτεσιανές αναλύσεις

Στην παράγραφο 3.4 με την εύρεση σχέσεων υπεροχής για ιδιάζουσες τιμές παρήγαμε μερικές ανισότητες με Schatten p-νόρμες οι οποίες σχετίζονται με την καρτεσιανή ανάλυση πινάκων. Τώρα ας αποδείξουμε την ανισότητα για γενικευμένα ορθομοναδιαίες αναλλοίωτες νόρμες. Για $x = (x_j) \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε:

$$\Phi_k(x) \equiv \max\left\{\sum_{m=1}^{k} \left|x_{j_m}\right| :\ 1 \le j_1 \le j_2 \le \cdots \le j_k \le n\right\}$$

Τότε το $\Phi_{(k)}(\cdot)$ είναι η συμμετρική συνάρτηση βαθμίδα που αντιστοιχεί στην Fan k-νόρμα $\|\cdot\|_{(k)}$:

$$\|A\|_{(k)} = \Phi_{(k)}(s(A))$$

Χρειαζόμαστε το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 4.17 Έστω $T \in M_n$. Τότε για κάθε $k = 1,2, \dots, n$,

$$\|T\|_{(k)} = \min\{\|X\|_1 + k\|Y\|_\infty : T = X + Y\}.$$

Απόδειξη Εάν $T = X + Y$,τότε,

$$\|T\|_{(k)} \leq \|X\|_{(k)} + \|Y\|_{(k)} \leq \|X\|_1 + k\|Y\|_\infty.$$

Τώρα έστω $A = Udiag(s_1, \dots, s_n)V$ να είναι η ιδιάζουσα τιμή ανάλυσης με U, V ορθομοναδιαίους και $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_n \geq 0$. Τότε,

$$X \equiv Udiag(s_1 - s_k, s_2 - s_k, \dots, s_k - s_k, 0, \dots, 0)V$$

και:

$$Y = Udiag(s_k, \dots, s_k, s_{k+1}, \dots, s_n)V$$

ικανοποιούν:

$$T = X + Y$$

και:

$$\|T\|_{(k)} = \|X\|_1 + k\|Y\|_\infty \qquad \square$$

Για $x = (x_j) \in \mathbb{C}^n$ ορίζουμε $|x| = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$. Παρατηρείστε ότι οι ιδιάζουσες τιμές ενός ερμιτιανού πίνακα είναι οι απόλυτες τιμές των ιδιοτιμών του.

Θεώρημα 4.18 Έστω $T = A + iB \in M_n, i = \sqrt{-1}$ και A, B ερμιτιανούς. Έστω α_j, β_j οι ιδιοτιμές των A, B αντίστοιχα κατανεμημένες κατά σειρά έτσι ώστε $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n$, $\beta_1 \geq \cdots \geq \beta_n$. Τότε,

$$\|diag(\alpha_1 + i\beta_1, \dots, \alpha_n + i\beta_n)\| \leq \sqrt{2}\|T\| \qquad (4.25)$$

για κάθε ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα.

Απόδειξη Παρατηρήστε ότι,

$$\|diag(\alpha_1 + i\beta_1, \dots, \alpha_n + i\beta_n)\| = \|diag(|\alpha_1| + i|\beta_1|, \dots, |\alpha_n| + i|\beta_n|)\|$$

για κάθε ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα. Από το Λήμμα 4.2 της αρχής κυριαρχίας του Fan, αρκεί να δείξουμε την σχέση (4.25) για όλες τις k-νόρμες του Fan με $k = 1,2, \dots, n$. Πρώτα δείχνουμε ότι η (4.25) είναι αληθής για τις δύο ειδικές περιπτώσεις όπου η $\|\cdot\|$ είναι η νόρμα ίχνος (νόρμα 1) $\|\cdot\|_{(n)}(=\|\cdot\|_1)$ ή ,η φασματική νόρμα $\|\cdot\|_{(1)}(=\|\cdot\|_\infty)$. Η περίπτωση για $k=1$ της ανισότητας (3.37) στην παράγραφο 3.4 δείχνει ότι η (4.25) είναι αληθής για την φασματική νόρμα. Από

$$A=\frac{T+T^*}{2} \ \ ,B=\frac{T-T^*}{2i}$$

παίρνουμε ότι $|\alpha_1|=\|A\|_{(1)}\leq\|T\|_{(1)}$, $|\beta_1|=\|B\|_{(1)}\leq\|T\|_{(1)}$ και συνεπώς $|\alpha_1|+i|\beta_1|\leq\sqrt{2}\|T\|_{(1)}$. Οπότε η (4.25) ισχύει για την φασματική νόρμα. Τώρα ας θέσουμε k , $1\leq k\leq n$. Από το Λήμμα 4.17 υπάρχουν $X,Y\in M_n$, $T=X+Y$ και,

$$\|T\|_{(k)}=\|X\|_{(n)}+k\|Y\|_{(1)}. \tag{4.26}$$

Έστω $X=C+iD$, $Y=E+iF$ οι καρτεσιανές αναλύσεις του X , Y με C,D,E,F να είναι όλοι ερμιτιανοί. Επομένως $T=C+E+i(D+F)$. Εφόσον η καρτεσιανή ανάλυση ενός πίνακα είναι μοναδική, είναι προκαθορισμένο ότι θα λάβουμε το παρακάτω:

$$A=C+E \ \ \kappa\alpha\iota \ \ B=D+F \tag{4.27}$$

Από τις δύο ήδη αποδεδειγμένες σχέσεις της (4.25) λαμβάνουμε:

$$\sqrt{2}\|X\|_{(n)}\geq\Phi_{(n)}(|s(C)+is(D)|) \tag{4.28}$$

$$\sqrt{2}\|Y\|_{(1)}\geq\Phi_{(1)}(|s(E)+is(F)|) \tag{4.29}$$

Συνδυάζοντας τις (4.26),(4.28) και (4.29) παίρνουμε,

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\|T\|_{(k)}&\geq\Phi_{(n)}(|s(C)+is(D)|)+k\Phi_{(1)}(|s(E)+is(F)|)\\&\geq\textstyle\sum_{j=1}^{k}\left|s_j(C)+is_j(D)\right|+k|s_1(E)+is_1(F)|.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\sqrt{2}\|T\|_{(k)}\geq\textstyle\sum_{j=1}^{k}\left|s_j(C)+is_j(D)\right|+k|s_1(E)+is_1(F)|. \tag{4.30}$$

Είναι γνωστό επίσης ότι για κάθε $W,Z\in M_n$,

$$max_j\left|s_j(W)-s_j(Z)\right|\leq s_1(W-Z).$$

Άρα,

$$s_j(C+E)\leq s_j(C)+s_1(E)\ ,\ \ s_j(D+F)\leq s_j(D)+s_1(F) \tag{4.31}$$

για $j=1,2,\ldots,n$. Κάνοντας χρήση των (4.31) και (4.27), υπολογίζουμε,

$$\sum_{j=1}^{k}\left|s_j(C)+is_j(D)\right|+k|s_1(E)+is_1(F)|$$
$$=\sum_{j=1}^{k}\{\left|s_j(C)+is_j(D)\right|+|s_1(E)+is_1(F)|\}$$
$$\geq \sum_{j=1}^{k}\left|\left[s_j(C)+s_1(E)\right]+i\left[s_j(D)+s_1(F)\right]\right|$$
$$\geq \sum_{j=1}^{k}\left|s_j(C+E)+is_j(D+F)\right|=\Phi_{(\kappa)}(|s(A)+is(B)|).$$

Επομένως,

$$\sum_{j=1}^{k}\left|s_j(C)+is_j(D)\right|+k|s_1(E)+is_1(F)|\geq \Phi_{(\kappa)}(|s(A)+is(B)|). \qquad (4.32)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.30) και (4.32), παίρνουμε,

$$\sqrt{2}\|T\|_{(k)}\geq \Phi_{(\kappa)}(|s(A)+is(B)|)$$

για $k=1,2,\dots,n$. □

Ας σημειωθεί εδώ ότι ο παράγοντας $\sqrt{2}$ στην σχέση (4.25) είναι ο βέλτιστος δυνατός. Για να γίνει αντιληπτό, θεωρείστε την νόρμα ίχνος $\|\cdot\|_{(2)}$ με το παράδειγμα,

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\quad \kappa\alpha\iota\quad B=\begin{bmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{bmatrix}.$$

Ένας πίνακας S ονομάζεται αντιερμιτιανός εάν ισχύει ότι $S^*=-S$. Ας ταξινομήσουμε τις ιδιοτιμές ενός πίνακα $G\in M_n$ σε φθίνουσα σειρά, $|\lambda_1|\geq|\lambda_2|\geq\cdots\geq|\lambda_n|$, και να ορίσουμε $Eig(G)\equiv diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$. Μπορούμε επίσης να ερμηνεύσουμε την σχέση (4.25) ως το επόμενο θεώρημα διαταραχής φάσματος.

Θεώρημα 4.18΄ Εάν H-ερμιτιανός και S αντιερμιτιανός, τότε,

$$\|Eig(H)-Eig(S)\|\leq\sqrt{2}\|H-S\|$$

για κάθε ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα.

Παράδειγμα: Έστω, ερμιτιανός $H=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$, αντιερμιτιανός $S=\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ -2 & 0 & 4\\ 1 & -4 & 0\end{bmatrix}$, $\lambda(H)\approx\{2.46,-1.70,0.24\}$, $\lambda(S)\approx\{-4.58,4.58,2.75\cdot 10^{-16}\}$, $\|\cdot\|_2$,οπότε υπολογίζουμε $\|Eig(H)-Eig(S)\|_2\approx 9.44$, $\|H-S\|_2\approx 7.14$, $\sqrt{2}\|H-S\|_2\approx 10.09$ και επομένως ικανοποιείται η ανισότητα του Θεωρήματος 4.18’.

4.3 Αριθμητικός-γεωμετρικός μέσος ανισοτήτων

Η αριθμητική-γεωμετρική μέση ανισότητα για μιγαδικούς αριθμούς a, b είναι $|ab| \leq (|a|^2 + |b|^2)/2$. Μία παραλλαγή με πίνακα αυτής την ανισότητας είναι το επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.19 Για οποιουσδήποτε τρεις πίνακες A, B, X ισχύει το παρακάτω,

$$\|AXB^*\| \leq \frac{1}{2}\|A^*AX + XB^*B\| \tag{4.33}$$

για όλες τις ορθομοναδιαία αναλλοίωτες νόρμες.

Για να το αποδείξουμε θα χρειαστούμε κάποιες παραδοχές. Αρχικά για έναν πίνακα A γράφουμε το πραγματικό του μέρος ως $ReA = (A + A^*)/2$, ενώ για ένα διάνυσμα $x = (x_1, \dots, x_n)$, ορίζουμε $Rex = (Rex_1, \dots, Rex_n)$, $|x| = (|x_1|, \dots, |x_n|)$.

Λήμμα 4.20 Για κάθε πίνακα A,

$$Re\lambda(A) \prec \lambda(ReA).$$

Απόδειξη Εφόσον οποιοσδήποτε πίνακας είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με έναν άνω τριγωνικό, στο πρόβλημα μας θα υποθέσουμε ότι ο A είναι άνω τριγωνικός. Τότε τα στοιχεία του $Re\lambda(A)$ είναι τα διαγώνια στοιχεία του ReA. Επομένως εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.1 μας δίνει το ζητούμενο. □

Λήμμα 4.21 Έστω A, B δύο τυχαίοι πίνακες τέτοιοι ώστε ο AB να είναι ερμιτιανός. Τότε,

$$\|AB\| \leq \|Re(BA)\|.$$

για κάθε ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα.

Απόδειξη Εφόσον $\lambda(AB) = \lambda(BA)$, οι ιδιοτιμές του BA είναι όλες πραγματικές. Από το Λήμμα 4.20,

$$\lambda(BA) \prec \lambda(Re(BA)) \tag{4.34}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.2 στην κυρτή συνάρτηση $f(t) = |t| \in \mathbb{R}$, γνωρίζουμε ότι $x \prec y \to |x| \prec_w |y|$. Επομένως από την σχέση (4.34) λαμβάνουμε,

$$|\lambda(AB)| = |\lambda(BA)| \prec_w |\lambda[Re(BA)]|$$

Λόγω του ότι AB, $Re(BA)$ είναι ερμιτιανοί, η παραπάνω μετατρέπεται σε,

$$s(AB) \prec_w s[Re(BA)].$$

Τέλος η αρχή κυριαρχίας του Fan θα μας δώσει,

$$\|AB\| \leq \|Re(BA)\|$$

Το οποίο ολοκληρώνει και την απόδειξη. □

Απόδειξη του θεωρήματος 4.19 Από τις αναλύσεις $A = U|A|$,$B = V|B|$ με U, V ορθομοναδιαίους αρκεί να αποδείξουμε την (4.33) για την περίπτωση όπου A, B είναι θετικά ημιορισμένοι. Πρώτα θεωρούμε ότι $A = B$, $X^* = X$. Τότε το Λήμμα 4.21 δίνει,

$$\|AXA\| \leq \|Re(XA^2)\| = \frac{1}{2}\|A^2X + XA^2\|. \tag{4.35}$$

Σε επόμενο βήμα σκεφτείτε την γενική περίπτωση. Έστω,

$$T = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \ , \ Y = \begin{bmatrix} 0 & X \\ X^* & 0 \end{bmatrix}$$

Αντικαθιστώντας τα A και X στην (4.35) από τα T και Y αντίστοιχα, παίρνουμε,

$$\left\|\begin{bmatrix} 0 & AXB \\ (AXB)^* & 0 \end{bmatrix}\right\| \leq \frac{1}{2}\left\|\begin{bmatrix} 0 & A^2X + XB^2 \\ (A^2X + XB^2)^* & 0 \end{bmatrix}\right\|.$$

Σημειώνουμε εδώ ότι για $C \in M_n$,

$$s\left(\begin{bmatrix} 0 & C \\ C^* & 0 \end{bmatrix}\right) = \left(s_1(C), s_1(C), s_2(C), s_2(C), \dots, s_n(C), s_n(C)\right).$$

Χρησιμοποιώντας την αρχή κυριαρχίας του Fan είναι ξεκάθαρο ότι η παραπάνω ανίσωση ισχύει και για όλες τις ορθομοναδιαία αναλλοίωτες νόρμες αν και μόνο αν,

$$\|AXB\| \leq \frac{1}{2}\|A^2X + XB^2\|$$

ισχύει για όλες τις ορθομοναδιαία αναλλοίωτες νόρμες. □

Παράδειγμα: Έστω οι πίνακες, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ και η νόρμα $\|\cdot\|_2$, τότε μετά από υπολογισμούς βρίσκουμε ότι: $\|AXB\|_2 \approx 6.93, \frac{1}{2}\|A^2X + XB^2\| \approx 7.25$, οπότε βλέπουμε ότι ισχύει η ανισότητα (4.33).

Για $0 < \theta < 1$, θέτουμε $d\mu_\theta(t) = a_\theta(t)dt$ και $d\nu_\theta(t) = b_\theta(t)dt$ όπου,

$$a_\theta(t) = \frac{\sin(\pi\theta)}{2(\cosh(\pi t) - \cos(\pi\theta))} \ , b_\theta(t) = \frac{\sin(\pi\theta)}{2(\cosh(\pi t) + \cos(\pi\theta))}.$$

Για μία φραγμένη και συνεχή συνάρτηση $f(z)$ στην λωρίδα $\Omega = \{z \in \mathbb{C}: 0 \leq Imz \leq 1\}$ η οποία είναι αναλυτική στο εσωτερικό, έχουμε την γνωστή φόρμουλα Poisson,

$$f(i\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)d\mu_\theta(t) + \int_{-\infty}^{\infty} f(i+t)d\nu_\theta(t), \tag{4.36}$$

και οι συνολικές μάζες των υπολογισμών για τα $d\mu_\theta(t), d\nu_\theta(t)$ είναι $1-\theta$, θ αντίστοιχα. Συγκεκριμένα για $d\nu_{1/2}(t) = d\mu_{1/2}(t) = dt/2\cosh(\pi t)$ έχει την συνολική μάζα 1/2 . Σε επόμενη φάση δίνουμε μία γενίκευση της ανισότητας (4.33). Θα χρειαστούμε κάποια προκαταρτικά αποτελέσματα. Εάν ένας πίνακας $X = (x_{ij})$ είναι θετικά ημιορισμένος, τότε για κάθε πίνακα Y έχουμε,

$$\|X \circ Y\| \leq \max_i x_{ii} \|Y\| \tag{4.38}$$

για κάθε ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα. Μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ λέγεται θετικά ορισμένη εάν ο πίνακας $[f(x_i - x_j)] \in M_n$ είναι θετικά ημιορισμένος για κάθε επιλογή σημείων $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ και για κάθε $n = 1,2, \dots$. Ένα ολοκλήρωμα πυρήνα $K(x,y)$ λέγεται θετικά ορισμένο σε ένα πραγματικό διάστημα Δ εάν,

$$\iint K(x,y)\bar{f}(x) f(y)dxdy \geq 0$$

για όλες τις συνεχείς μιγαδικές συναρτήσεις στο Δ. Είναι γνωστό ότι ένας συνεχής πυρήνας είναι θετικά ορισμένος στο Δ αν και μόνο αν ο πίνακας $[K(x_i, x_j)] \in M_n$ είναι θετικά ημιορισμένος για όλες τις επιλογές σημείων $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \Delta$ και $n = 1,2, \dots$. Έστω f μία συνάρτηση στο $L^1(\mathbb{R})$. Ο μετασχηματισμός Fourier αυτής της συνάρτησης είναι η συνάρτηση $\hat{f}$ οριζόμενη ως,

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\, dx.$$

Όταν γράφουμε μετασχηματισμούς Fourier, αγνοούμε σταθερούς συντελεστές, εφόσον η μοναδική ιδιότητα της f που χρησιμοποιούμε είναι η μη αρνητικότητα σχεδόν παντού. Ένα γνωστό θεώρημα του Bochner διορίζει την $\hat{f}(\xi)$ ως θετικά ορισμένη αν και μόνο αν $f(x) \geq 0$ για σχεδόν όλα τα x. Πρώτα χρησιμοποιούμε το Θεώρημα του Bochner για να δείξουμε τον θετικό ημιορισμό ενός πίνακα ειδικής δομής και ύστερα κάνουμε χρήση της (4.38) για να λάβουμε μία ανισότητα νόρμας.

Λήμμα 4.22 Έστω $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Τότε για $-1 \leq r \leq 1$ ο $n \times n$ πίνακας,

$$Z = \frac{(\sigma_i^r + \sigma_j^r)}{(\sigma_i + \sigma_j)}$$

είναι θετικά ημιορισμένος.

Απόδειξη Λόγω συνέχειας, αρκεί επισκεφτούμε την περίπτωση όπου $-1 < r < 1$. Εφόσον $\sigma_i > 0$, μπορούμε να βάλουμε $\sigma_i = e^{xi}$ για κάποια πραγματικά x_i. Επομένως για να δείξουμε ότι ο πίνακας Z είναι θετικά ημιορισμένος, αρκεί να δείξουμε ότι ο πυρήνας,

$$K(x,y) = \frac{(e^{rx}+e^{ry})}{(e^{x}+e^{y})}$$

είναι θετικά ορισμένος. Σημειώνουμε ότι,

$$K(x,y) = \frac{e^{\frac{rx}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}}\left(\frac{(e^{r(x-y)/2}+e^{r(y-x)/2})}{(e^{(x-y)/2}+e^{(y-x)/2})}\right)\frac{e^{ry/2}}{e^{y/2}}$$

$$= \frac{e^{\frac{rx}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}}\left(\frac{coshr(x-y)/2}{\cosh(x-y)/2}\right)\frac{e^{ry/2}}{e^{y/2}}$$

Οπότε ο πυρήνας $K(x,y)$ είναι θετικά ορισμένος αν και μόνο αν ο πυρήνας,

$$L(x,y) = \frac{coshr(x-y)/2}{cosh(x-y)/2}$$

είναι θετικά ορισμένος, το οποίο θα ακολουθήσει όταν δείξουμε ότι,

$$f(x) = \frac{coshrx}{coshx}$$

είναι θετικά ορισμένη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι άρτια. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης είναι:

$$\check{f}(w) = \frac{cos(\frac{r\pi}{2})\cosh(\frac{w\pi}{2})}{\cos(r\pi)+\cosh(w\pi)}.$$

Για $-1 < r < 1$, $cos(\frac{r\pi}{2})$ είναι θετικό. Για όλα τα $w \neq 0$, $\cosh(w\pi) > 1$. Επομένως, $\check{f}(w) \geq 0$. Από το θεώρημα του Bochner , $f(x)$ είναι θετικά ορισμένη. □

Παρατηρείστε ότι η ειδική περίπτωση του Λήμματος 4.22 όπου $r = 0$ είναι το γνωστό δεδομένο ότι ο πίνακας Cauchy,

$$\left(\frac{1}{\sigma_i+\sigma_j}\right)$$

είναι θετικά ημιορισμένος. Θυμηθείτε ότι το Θεώρημα γινομένου του Schur λέει ότι το γινόμενο Hadamard δύο θετικά ημιορισμένων πινάκων, είναι θετικά ημιορισμένος.

Επομένως, εάν $A = (a_{ij})$ είναι θετικά ημιορισμένος και $x_1, \dots, x_n$ πραγματικοί αριθμοί, τότε οι πίνακες,

$$(a_{ij}^k) \quad και \quad (x_i x_j a_{ij}) = diag(x_1, \dots, x_n) A diag(x_1, \dots, x_n)$$

είναι θετικά ημιορισμένοι για κάθε θετικό ακέραιο k.

Λήμμα 4.23 Έστω $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί, $-1 \leq r \leq 1$ και $-2 < t \leq 2$. Τότε ο $n \times n$ πίνακας,

$$W = \left(\frac{\sigma_i^r + \sigma_j^r}{\sigma_i^2 + t\sigma_i\sigma_j + \sigma_j^2}\right)$$

είναι θετικά ημιορισμένος.

Απόδειξη Έστω $W = (w_{ij})$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.22 καθώς και το Θεώρημα γινομένου του Schur στην παρακάτω σχέση,

$$w_{ij} = \frac{1}{\sigma_i + \sigma_j} \frac{\sigma_i^r + \sigma_j^r}{\sigma_i + \sigma_j} \sum_{k=0}^{\infty} (2-t)^k \left[\frac{\sigma_i \sigma_j}{(\sigma_i + \sigma_j)^2}\right]^k$$

ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Θεώρημα 4.24 Έστω $A, B, X \in M_n$ με A, B θετικά ημιορισμένους. Τότε,

$$(2+t)\|A^r X B^{2-r} + A^{2-r} X B^r\| \leq 2\|A^2 X + tAXB + XB^2\| \tag{4.39}$$

ισχύει για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς r, t που ικανοποιούν $1 \leq 2r \leq 3, -2 \leq t \leq 2$ και για κάθε ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα.

Απόδειξη Πρώτα δείχνουμε την ειδική περίπτωση όπου $A = B$,

$$(2+t)\|A^r X A^{2-r} + A^{2-r} X A^r\| \leq 2\|A^2 X + tAXA + XA^2\|. \tag{4.40}$$

Από συνέχεια και χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι ο A είναι θετικά ορισμένος. Έστω $A = U\Sigma U^*$ να είναι η φασματική ανάλυση με U ορθομοναδιαίο και $\Sigma = diag(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, με κάθε σ_j θετική. Εφόσον $\|\cdot\|$ είναι ορθομοναδιαία αναλλοίωτη, η σχέση (4.40) είναι ισοδύναμη με,

$$(2+t)\|\Sigma^r Q \Sigma^{2-r} + \Sigma^{2-r} Q \Sigma^r\| \leq 2\|\Sigma^2 Q + t\Sigma Q \Sigma + Q\Sigma^2\|$$

με $Q = U^* X U$, το οποίο μπορεί να γραφτεί και ως:

$$(2+t)\left\|[(\sigma^r \sigma^{2-r} + \sigma^{2-r}\sigma^r) y_{ij}]\right\| \leq 2\left\|[(\sigma_i^2 + t\sigma_i\sigma_j + \sigma_j^2) y_{ij}]\right\|$$

για όλα τα $Y = (y_{ij}) \in M_n$. Το οποίο είναι ισοδύναμο με,

$$\|G \circ Z\| \leq \|Z\| \ \ για \ όλα \ τα \ Z \in M_n \tag{4.41}$$

Όπου,

$$G = \frac{2+t}{2}\left(\frac{\sigma^r\sigma^{2-r}+\sigma^{2-r}\sigma^r}{\sigma_i^2+t\sigma_i\sigma_j+\sigma_j^2}\right) \in M_n.$$

Εφόσον $1 \leq 2r \leq 3, -1 \leq 2(1-r) \leq 1$, από Λήμμα 4.23:

$$G = \frac{2+t}{2}\Sigma^r\left(\frac{\sigma_i^{2(1-r)}+\sigma_j^{2(1-r)}}{\sigma_i^2+t\sigma_i\sigma_j+\sigma_j^2}\right)\Sigma^r$$

είναι θετικά ημιορισμένος. Ειδικά, ο G είναι πίνακας συσχέτισης, όλα τα διαγώνια του στοιχεία είναι 1. Επομένως από την (4.38), η ανισότητα (4.41) είναι αληθής και επομένως η αντίστοιχη της (4.40) αποδειχθείσα. Για την γενική περίπτωση εφαρμόζοντας την σχέση (4.40) με αντικατάσταση των A, X από τα,

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

αντιστοίχως, ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παρατηρείστε ότι η ανισότητα (4.33) αντιστοιχεί στην περίπτωση $r = 1, t = 0$ της ανισότητας (4.39). Τέλος δίνουμε μία ακόμα ανισότητα.

Θεώρημα 4.25 Έστω $A, B \in M_n$ θετικά ημιορισμένοι. Τότε,

$$4\|AB\| \leq \|(A+B)^2\| \tag{4.42}$$

για κάθε ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα.

Απόδειξη Από το Θεώρημα 4.19,

$$\|AB\| = \left\|A^{1/2}(A^{1/2}B^{1/2})B^{1/2}\right\| \leq \frac{1}{2}\left\|A^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}} + A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{2}}\right\|.$$

Οπότε για την (4.42), αρκεί να δείξουμε ότι:

$$2\left\|A^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}} + A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{2}}\right\| \leq \|(A+B)^2\|$$

Θα εξακριβώσουμε περισσότερα αποδεικνύοντας την παρακάτω ανισότητα ιδιαζουσών τιμών για κάθε $1 \leq j \leq n$:

$$2s_j\left(A^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}}+A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{2}}\right)\le s_j(A+B)^2. \tag{4.43}$$

Έστω $X=\begin{bmatrix}A^{1/2} & 0\\ B^{1/2} & 0\end{bmatrix}$ και $T=XX^*=\begin{bmatrix}A & A^{1/2}B^{1/2}\\ B^{1/2}A^{1/2} & B\end{bmatrix}$. Τότε ο T είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος του πίνακα,

$$G\equiv X^*X=\begin{bmatrix}A+B & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

και περαιτέρω,

$$T^2=\begin{bmatrix}\star & A^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}}+A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{2}}\\ B^{1/2}A^{3/2}+B^{3/2}A^{1/2} & \star\end{bmatrix}$$

είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με

$$G^2=\begin{bmatrix}(A+B)^2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Συγκεκριμένα, T^2 και G^2 έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Τώρα έστω $U=I\oplus -I$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.14, λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}
&2s_j\begin{bmatrix}A^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}}+A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{2}} & 0\\ 0 & A^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}}+A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{2}}\end{bmatrix}\\
&=2s_j\begin{bmatrix}0 & A^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}}+A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{2}}\\ B^{1/2}A^{3/2}+B^{3/2}A^{1/2} & 0\end{bmatrix}\\
&=s_j(T^2-UT^2U^*)\\
&\le s_j\begin{bmatrix}T^2 & 0\\ 0 & UT^2U^*\end{bmatrix}\\
&=s_j\begin{bmatrix}G^2 & 0\\ 0 & G^2\end{bmatrix}\\
&=s_j\begin{bmatrix}(A+B)^2\oplus 0 & 0\\ 0 & (A+B)^2\oplus 0\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Και επομένως,

$$2s_j\begin{bmatrix}A^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}}+A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{2}} & 0\\ 0 & A^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}}+A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{2}}\end{bmatrix}\le s_j\begin{bmatrix}(A+B)^2\oplus 0 & 0\\ 0 & (A+B)^2\oplus 0\end{bmatrix}$$

Το οποίο είναι το ίδιο με την (4.43). Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Παράδειγμα: Έστω $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \lambda(A) \approx \{6.41, 1.82, 0.77\} \approx \lambda(B)$ και για την νόρμα $\|\cdot\|_2$, υπολογίσαμε $4\|AB\|_2 \approx 140.97$, $\|(A+B)^2\|_2 \approx 144.56$ άρα βλέπουμε ότι ικανοποιείται η σχέση (4.42).

4.4 Ανισότητες τύπου Holder και Minkowski

Σε αυτήν την παράγραφο αναλύουμε διαφορετικές εκδοχές με πίνακες των κλασσικών Holder(Cauchy-Schwarz) και Minkowski ανισοτήτων.

Λήμμα 4.26 Έστω $X, Y, Z \in M_n$. Εάν,

$$\begin{bmatrix} X & Z \\ Z^* & Y \end{bmatrix} \geq 0$$

Τότε,
$$\||Z|^r\| \leq \left\|X^{pr/2}\right\|^{1/p} \left\|Y^{qr/2}\right\|^{1/q}$$

για όλους τους θετικούς αριθμούς r, q, p τέτοιους ώστε $p^{-1} + q^{-1} = 1$, και για κάθε ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα.

Απόδειξη Από το Λήμμα 1.21 , υπάρχει μία συστολή G τέτοια ώστε $Z = X^{1/2}GY^{1/2}$. Έστω $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ με $\gamma_1 \geq \cdots \geq \gamma_n \geq 0$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.5 έχουμε:

$$\left\{\gamma_j s_j^r(Z)\right\} \prec_{wlog} \left\{\gamma_j^{\frac{1}{p}} s_j^{\frac{r}{2}}(X) \cdot \gamma_j^{\frac{1}{q}} s_j^{\frac{r}{2}}(Y)\right\}.$$

Εφόσον η ασθενής υπεροχή κατά log σημαίνει ασθενής υπεροχή (Θεώρημα 2.7), λαμβάνουμε:

$$\left\{\gamma_j s_j^r(Z)\right\} \prec_{w} \left\{\gamma_j^{\frac{1}{p}} s_j^{\frac{r}{2}}(X) \cdot \gamma_j^{\frac{1}{q}} s_j^{\frac{r}{2}}(Y)\right\}$$

από το οποίο ακολουθεί και λόγω της κλασσικής ανισότητας Holder,

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_j s_j^r(Z) \leq \left[\sum_{j=1}^{n} \gamma_j s_j^{\frac{pr}{2}}(X)\right]^{1/p} \left[\sum_{j=1}^{n} \gamma_j s_j^{\frac{qr}{2}}(Y)\right]^{1/q},$$

για παράδειγμα,
$$\||Z|^r\|_\gamma \leq \left\|X^{pr/2}\right\|_\gamma^{1/p} \left\|Y^{qr/2}\right\|_\gamma^{1/q} \tag{4.44}$$

Από το Λήμμα 4.1, δεδομένης οποιασδήποτε ορθομοναδιαία αναλλοίωτης νόρμας, υπάρχει ένα σύνολο K το οποίο εξαρτάται μόνο από αυτήν τέτοιο ώστε:

$$\|A\| = \max_{\gamma\in K}\|A\|_\gamma \ \ για\ κάθε\ \gamma \in M_n$$

Επομένως παίρνοντας το max και στις δύο πλευρές τις σχέσης (4.44), ολοκληρώνει την απόδειξη □

Θέτοντας $X = AA^*, Y = B^*B, Z = AB$ στο Λήμμα 4.26, δίνει το παρακάτω πόρισμα:

Πόρισμα 4.27 Για όλα τα $A, B \in M_n$ και για όλες τις ορθομοναδιαία αναλλοίωτες νόρμες,

$$\||AB|^r\| \le \||A|^{pr}\|^{1/p}\||B|^{qr}\|^{1/q} \tag{4.45}$$

όπου r, p, q είναι πραγματικοί θετικοί αριθμοί με $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Το επόμενο λήμμα είναι συνέπεια του Θεωρήματος 2.9.

Λήμμα 4.28 Έστω A, B θετικά ημιορισμένοι πίνακες, τότε για τους πραγματικούς αριθμούς $r > 0$, $0 < s < t$,

$$\left\{\lambda_j^{\frac{r}{s}}(A^sB^s)\right\} \prec_w \left\{\lambda_j^{\frac{r}{t}}(A^tB^t)\right\}.$$

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι ανισότητα πίνακα Holder.

Θεώρημα 4.29 Έστω $A, B, X \in M_n$ με A, B θετικά ημιορισμένους. Τότε,

$$\||AXB|^r\| \le \||A^pX|^r\|^{1/p}\||XB^q|^r\|^{1/q} \tag{4.46}$$

για όλους τους θετικούς αριθμούς r, q, p με $p^{-1} + q^{-1} = 1$ και για κάθε ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα.

Απόδειξη Έστω $X = UT$ να είναι η ανάλυση με U ορθομοναδιαίο και $T = |X|$. Γράφουμε $AXB = (AUT^{\frac{1}{p}})(T^{\frac{1}{q}}B)$ και χρησιμοποιώντας το (4.45) παίρνουμε,

$$\||AXB|^r\| \le \left\|\left(T^{\frac{1}{p}}U^*A^2UT^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{pr}{2}}\right\|^{\frac{1}{p}}\left\|\left(BT^{\frac{2}{q}}B\right)^{\frac{qr}{2}}\right\|^{\frac{1}{q}} \tag{4.47}$$

Εφόσον YZ , ZY έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές, το Λήμμα 4.28 σιγουρεύει ότι,

$$\left\{\lambda_j^{\frac{pr}{2}}\left(T^{\frac{1}{p}}U^*A^2UT^{\frac{1}{p}}\right)\right\} = \{\lambda_j^{\frac{pr}{2}}\left[(A^{2p})^{\frac{1}{p}}(UT^2U^*)^{\frac{1}{p}}\right]\}$$

$$\prec_w \left\{\lambda_j^{\frac{r}{2}}(A^{2p}UT^2U^*)\right\}, (p^{-1} < 1)$$

$$= \left\{\lambda_j^{\frac{r}{2}}(A^{2p}XX^*)\right\}$$

$$= \{\lambda_j^{\frac{r}{2}}[(A^pX)^*(A^pX)]\}$$

$$= \{s_j^r(A^pX)\}$$

και
$$\left\{\lambda_j^{\frac{qr}{2}}\left(BT^{\frac{2}{q}}B\right)\right\} = \left\{\lambda_j^{\frac{qr}{2}}\left[(T^2)^{\frac{1}{q}}(B^{2q})^{\frac{1}{q}}\right]\right\}$$

$$\prec_{\mathrm{w}} \left\{\lambda_j^{\frac{r}{2}}(T^2B^{2q})\right\}, (q^{-1} < 1)$$

$$= \{\lambda_j^{\frac{r}{2}}(X^*XB^{2q})\}$$

$$= \left\{s_j^r(XB^q)\right\}.$$

Επομένως,
$$\left\{\lambda_j^{\frac{pr}{2}}\left(T^{\frac{1}{p}}U^*A^2UT^{\frac{1}{p}}\right)\right\} \prec_w \left\{s_j^r(A^pX)\right\} \tag{4.48}$$

$$\left\{\lambda_j^{\frac{qr}{2}}\left(BT^{\frac{2}{q}}B\right)\right\} \prec_w \left\{s_j^r(XB^q)\right\} \tag{4.49}$$

Από την αρχή κυριαρχίας του Fan, οι ασθενείς υπεροχές (4.48) και (4.49) σημαίνουν,

$$\left\|(T^{1/p}U^*A^2UT^{1/p})^{pr/2}\right\| \le \||A^pX|^r\|$$

και
$$\left\|(BT^{2/q}B)^{qr/2}\right\| \le \||XB^q|^r\|$$

για κάθε ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα. Συνδυάζοντας αυτές τις δύο ανισότητες και την (4.47) μας δίνουν την (4.46). □

Ας σκεφτούμε τώρα μερικές ειδικές περιπτώσεις του Θεωρήματος 4.29. Η περίπτωση όπου $p = q = 2$ της (4.46) είναι η εξής ανισότητα πίνακα Cauchy-Schwarz:

$$\left\||A^{1/2}XB^{1/2}|^r\right\|^2 \le \||AX|^r\| \cdot \||XB|^r\| \tag{4.50}$$

για $A, B \ge 0$, οποιοδήποτε X και $r > 0$, το οποίο είναι ισοδύναμο με,

$$\||AXB^*|^r\|^2 \le \||A^*AX|^r\| \cdot \||XB^*B|^r\| \tag{4.51}$$

για όλα τα A, B, X και $r > 0$. Η ειδική περίπτωση $X = I$ της (4.51) έχει την εξής μορφή,

$$\||A^*B|^r\|^2 \leq \|(A^*A)^r\| \cdot \|(B^*B)^r\| \tag{4.52}$$

Η περίπτωση $r = 1$ της (4.46) είναι η επόμενη ανισότητα,

$$\|AXB\| \leq \|A^pX\|^{1/p} \cdot \|XB^q\|^{1/q} \tag{4.53}$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την φόρμουλα (4.36) και με $\theta = 1/q\,, f(t) = A^{1+it}XB^{-it}, t \in \mathbb{R}$ για να δείξουμε την (4.53) στην συνέχεια.

$$A^{1/p}XB^{1/q} = f\left(\frac{i}{q}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)d\mu_{1/q}(t) + \int_{-\infty}^{\infty} f(i+t)d\nu_{\frac{1}{q}}(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} A^{it}(AX)B^{-it}d\mu_{1/q}(t) + \int_{-\infty}^{\infty} A^{it}(XB)B^{-it}d\nu_{\frac{1}{q}}(t).$$

και ως αποτέλεσμα, $$\left\|A^{1/p}XB^{1/q}\right\| \leq \frac{\|AX\|}{p} + \frac{\|XB\|}{q}$$

για κάθε ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα. Τώρα για κάθε πραγματικό $a > 0$, αντικαθιστώντας τα A, B με $\alpha^pA, \alpha^{-q}B$ αντιστοίχως , λαμβάνουμε,

$$\left\|A^{1/p}XB^{1/q}\right\| \leq \frac{\alpha^p}{p}\|AX\| + \frac{\alpha^{-q}}{q}\|XB\|.$$

και εφόσον το ελάχιστο όριο στο δεξί μέλος για όλα τα $a > 0$ είναι $\|AX\|^{1/p}\|XB\|^{1/q}$, παίρνουμε την (4.53). Στην συνέχεια εμβαθύνουμε περαιτέρω στην ανισότητα Cauchy-Schwarz (4.50).

Θεώρημα 4.30 Έστω $A, B, X \in M_n$ με A, B θετικά ημιορισμένους και X τυχαίο. Για οποιοδήποτε θετικό πραγματικό αριθμό r, και κάθε ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα, η συνάρτηση,

$$\varphi(t) = \||A^tXB^{1-t}|^r\| \cdot \||A^{1-t}XB^t|^r\|$$

είναι κυρτή στο διάστημα $[0,1]$ και αποκτά το ελάχιστο της για $t = 1/2$. Συνεπώς είναι φθίνουσα στο $[0, 1/2]$ και αύξουσα στο $[1/2,1]$.

Απόδειξη Εφόσον η $\varphi(t)$ είναι συνεχής και συμμετρική σε σχέση με το $t = 1/2$, όλα τα αποτελέσματα θα δειχθούν αφότου πρώτα δείξουμε ότι:

$$\varphi(t) \leq \{\varphi(t+s) + \varphi(t-s)\}/2 \tag{4.54}$$

για $t \pm s \in [0,1]$. Από την (4.50) παίρνουμε ότι,

$$\||A^tXB^{1-t}|^r\| = \||A^s(A^{t-s}XB^{1-t-s})B^s|^r\|$$

$$\leq \{|||\, |A^{t+s}XB^{1-(t+s)}|^r \,||| \cdot |||\, |A^{t-s}XB^{1-(t-s)}|^r \,|||\}^{1/2}$$

και ανάλογα, $|||\, |A^{1-t}XB^t|^r \,||| \leq \{|||\, |A^{1-(t-s)}XB^{t-s}|^r \,||| \cdot |||\, |A^{1-(t+s)}XB^{t+s}|^r \,|||\}^{1/2}$

Με πολλαπλασιασμό των δύο παραπάνω ανισοτήτων λαμβάνουμε,

$$|||\, |A^tXB^{1-t}|^r \,||| \cdot |||\, |A^{1-t}XB^t|^r \,||| \leq \{\varphi(t+s)\varphi(t-s)\}^{1/2} \tag{4.55}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου στο δεξί μέλος της (4.55) μας δίνει την (4.54). Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Μία άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 4.30 παρεμβάλει την Cauchy-Schwarz ανισότητα (4.50) όπως ακολουθεί.

Πόρισμα 4.31 Έστω $A, B, X \in M_n$ με A, B θετικά ημιορισμένους και X τυχαίο. Για οποιοδήποτε θετικό πραγματικό αριθμό r, και κάθε ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα,

$$\begin{aligned} |||\, |A^{1/2}XB^{1/2}|^r \,|||^2 &\leq |||\, |A^tXB^{1-t}|^r \,||| \cdot |||\, |A^{1-t}XB^t|^r \,||| \\ &\leq |||\, |AX|^r \,||| \cdot |||\, |XB|^r \,||| \end{aligned}$$

όπου ισχύει για $0 \leq t \leq 1$. Ένα άλλο πόρισμα του Θεωρήματος 4.30 είναι το εξής.

Πόρισμα 4.32 Έστω $A, B, X \in M_n$ με A, B θετικά ημιορισμένους και X τυχαίο. Για οποιοδήποτε θετικό πραγματικό αριθμό r και κάθε ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα, η συνάρτηση,

$$\psi(s) = |||\, |A^sXB^s|^r \,||| \cdot |||\, |A^{-s}XB^{-s}|^r \,|||$$

είναι κυρτή στο $(-\infty, \infty)$, επιτυγχάνει το ελάχιστο στο $s = 0$,και επομένως είναι φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και αύξουσα στο $(0, \infty)$.

Απόδειξη Στο Θεώρημα 4.30, αντικαθιστώντας A, B, X, t από $A^2, B^{-2}, A^{-1}XB, (1+s)/2$ αντίστοιχα, παρατηρούμε ότι η $\psi(s)$ είναι κυρτή στο $(-1,1)$, φθίνουσα στο $(-1,0)$, αύξουσα στο $(0,1)$ και πιάνει το ελάχιστο για $s = 0$ όταν $-1 \leq s \leq 1$. Ακολούθως, αντικαθιστώντας τις A, B από τις ανάλογες δυνάμεις τους είναι προφανές ότι η παραπάνω κυρτότητα και μονοτονία της $\psi(s)$ σε αυτά τα διαστήματα είναι ανάλογες των ιδίων ιδιοτήτων στα $(-\infty, \infty), (-\infty, 0), (0, \infty)$ αντίστοιχα. □

Δεδομένης νόρμας $\|\cdot\|$ στον M_n, ο δείκτης κατάστασης ενός αντιστρέψιμου πίνακα A ορίζεται ως:

$$c(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

Αυτό αποτελεί ένα από τα βασικά θέματα στην αριθμητική ανάλυση καθώς εξυπηρετεί ως ένα μέτρο δυσκολίας για την λύση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων. Οι ειδικές περιπτώσεις για $r = 1, X = B = I$ του Πορίσματος 4.32 δίνουν το επόμενο αξιοσημείωτο.

Πόρισμα 4.33 Έστω A θετικά ορισμένος. Τότε για κάθε ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα,

$$c(A^s) = \|A^s\| \cdot \|A^{-s}\|$$

αυξάνεται για $s > 0$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.15 και 4.16, $\||X|^p\|^{1/p}$ για $p = \infty$ συμπεριφέρεται όπως η $\|X\|_\infty$ και $\||A|^p + |B|^p\|^{1/p}$ για $p = \infty$ όπως το $\||A| \vee |B|\|_\infty$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η περίπτωση $X = I$ της (4.53) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα και ως

$$\|Y^*X\| \leq \||X|^p\|^{1/p} \||Y|^q\|^{1/q} \tag{4.56}$$

για όλα τα X, Y. Εδώ σημειώνουμε ότι $\||X^*|^r\| = \||X|^r\|$ για οποιοδήποτε $r > 0$ και κάθε ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα. Στην συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε το εξής δεδομένο: Έστω A, B θετικά ημιορισμένοι πίνακες με τις αντίστοιχες ιδιοτιμές τους $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n (\geq 0)$ και $\beta_1 \geq \cdots \geq \beta_n (\geq 0)$. Εάν $\alpha_i \leq \beta_i$ για $i = 1,2, \dots, n$, (δηλαδή $A \leq B$) τότε υπάρχει ένας ορθομοναδιαίος U τέτοιος ώστε $A^r \leq UB^rU^*$ για όλα τα $r > 0$. Το επόμενο αποτέλεσμα είναι και αυτό μία ακόμα ανισότητα πίνακα Holder.

Θεώρημα 4.34 Έστω $1 \leq p, q \leq \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Τότε για όλους τους πίνακες $A, B, C, D \in M_n$ καθώς και για όλες τις ορθομοναδιαία αναλλοίωτες νόρμες,

$$2^{-\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|} \|C^*A + D^*B\| \leq \||A|^p + |B|^p\|^{\frac{1}{p}} \, \||A|^q + |B|^q\|^{\frac{1}{q}}. \tag{4.57}$$

με την σταθερά $2^{-\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|}$ να είναι η βέλτιστη δυνατή.

Απόδειξη Εφόσον $\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right|$ και η ανισότητα είναι συμμετρική ως προς p, q , μπορούμε να υποθέσουμε ότι $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$. Παρατηρήσετε ότι,

$$\begin{bmatrix} C & 0 \\ D & 0 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^*A + D^*B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Από την σχέση (4.56) συνεπάγεται ότι,

$$\begin{aligned} \|C^*A + D^*B\| &= \left\| \begin{bmatrix} C & 0 \\ D & 0 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} \right\| \\ &\leq \left\| \left| \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} \right|^p \right\|^{1/p} \cdot \left\| \left| \begin{bmatrix} C & 0 \\ D & 0 \end{bmatrix} \right|^q \right\|^{1/q} \end{aligned}$$

$$= \left\|(|A|^2+|B|^2)^{p/2}\right\|^{1/p}\left\|(|C|^2+|D|^2)^{q/2}\right\|^{1/q}$$

Εφόσον $1 \leq p \leq 2$, η (4.11) υποδεικνύει ότι:

$$\left\|(|A|^2+|B|^2)^{p/2}\right\| \leq \||A|^p+|B|^p\|.$$

Αφού ο κοίλος τελεστής του $t^{2/q}$ δίνει,

$$\frac{|C|^2+|D|^2}{2} \leq \left(\frac{|C|^q+|D|^q}{2}\right)^{\frac{2}{q}},$$

από την σημείωση πριν το θεώρημα παίρνουμε,

$$\left(\frac{|C|^q+|D|^q}{2}\right)^{\frac{2}{q}} \leq U\left(\frac{|C|^q+|D|^q}{2}\right)U^*$$

Για κάποιο ορθομοναδιαίο U. Επομένως λαμβάνουμε,

$$\left\|(|C|^2+|D|^2)^{q/2}\right\|^{1/q} \leq 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\||C|^q+|D|^q\|^{\frac{1}{q}}$$
$$= 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\||C|^q+|D|^q\|^{\frac{1}{q}}.$$

και επομένως ακολουθεί η σχέση που θέλουμε (4.57). Η καλύτερη περίπτωση για την σταθερά γίνεται αντιληπτή από το επόμενο παράδειγμα,

$$A=C=D=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

με την νόρμα τελεστή $\|\cdot\|_\infty$. □

Συγκεκριμένα η περίπτωση $p=q=2$ της 4.57 είναι

$$\|C^*A+D^*B\|^2 \leq \||A|^2+|B|^2\| \cdot \||C|^2+|D|^2\|.$$

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι μία ανισότητα πινάκων Minkowski.

Θεώρημα 4.35 Έστω $1 \leq p < \infty$. Για $A_i, B_i \in M_n (i=1,2)$ και κάθε ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα,

$$2^{-\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|}\||A_1+A_2|^p+|B_1+B_2|^p\|^{1/p} \leq \||A_1|^p+|B_1|^p\|^{\frac{1}{p}}+\||A_2|^p+|B_2|^p\|^{\frac{1}{p}}.$$

Απόδειξη Εφόσον,

$$\left\|(|A|^2+|B|^2)^{p/2}\right\|^{1/p} = \left\|\left|\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix}\right|^p\right\|^{1/p}$$

είναι μία νόρμα στο (A,B), έχουμε,

$$\left\|(|A_1+A_2|^2+|B_1+B_2|^2)^{\frac{p}{2}}\right\|^{\frac{1}{p}} \leq \left\|(|A_1|^2+|B_1|^2)^{\frac{p}{2}}\right\|^{\frac{1}{p}} + \left\|(|A_2|^2+|B_2|^2)^{\frac{p}{2}}\right\|^{\frac{1}{p}} \quad (4.58)$$

Όταν $1 \leq p \leq 2$, η σχέση (4.11) δείχνει ότι,

$$\left\|(|A_i|^2+|B_i|^2)^{p/2}\right\| \leq \||A_i|^p+|B_i|^p\| \;,\; i=1,2. \quad (4.59)$$

Από τον κοίλο τελεστή $t \to t^{p/2}$ λαμβάνουμε,

$$\frac{|A_1+A_2|^p+|B_1+B_2|^p}{2} \leq \left(\frac{|A_1+A_2|^2+|B_1+B_2|^2}{2}\right)^{p/2}$$

έτσι ώστε,

$$2^{\frac{p}{2}-1}\||A_1+A_2|^p+|B_1+B_2|^p\| \leq \left\|(|A_1+A_2|^2+|B_1+B_2|^2)^{\frac{p}{2}}\right\| \quad (4.60)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.60),(4.58) και (4.59) παίρνουμε,

$$2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\||A_1+A_2|^p+|B_1+B_2|^p\|^{1/p} \leq \||A_1|^p+|B_1|^p\|^{\frac{1}{p}} + \||A_2|^p+|B_2|^p\|^{\frac{1}{p}}.$$

Όταν $p \geq 2$, η σχέση (4.12) υποδεικνύει,

$$\||A_1+A_2|^p+|B_1+B_2|^p\| \leq \left\|(|A_1+A_2|^2+|B_1+B_2|^2)^{\frac{p}{2}}\right\|. \quad (4.61)$$

Επομένως, όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.34,

$$\left(\frac{|A_i|^2+|B_i|^2}{2}\right)^{p/2} \leq U_i\left(\frac{|A_i|^p+|B_i|^p}{2}\right)U_i^*$$

για κάποιο ορθομοναδιαίο U_i, παίρνουμε,

$$2^{1-\frac{p}{2}}\left\|(|A_i|^2+|B_i|^2)^{p/2}\right\| \leq \||A_i|^p+|B_i|^p\| \;,\; i=1,2 \quad (4.62)$$

Συνδυάζοντας τώρα τις σχέσεις (4.61),(4.62) και (4.58), λαμβάνουμε,

$$2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\||A_1+A_2|^p+|B_1+B_2|^p\|^{1/p} \leq \||A_1|^p+|B_1|^p\|^{\frac{1}{p}} + \||A_2|^p+|B_2|^p\|^{\frac{1}{p}}.$$

το οποίο ολοκληρώνει και την απόδειξη. □

Το παράδειγμα $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ με την φασματική νόρμα δείχνει ότι όταν $1 \le p \le 2$ είναι σταθερή και η νόρμα $\|\cdot\|$ είναι τυχαία, η σταθερά $2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$ στο Θεώρημα 4.35 είναι η βέλτιστη δυνατή. Όταν A_i, B_i $(i = 1,2)$ είναι θετικά ημιορισμένοι πίνακες, υπάρχει η δυνατότητα να αποκτήσουμε μία καλύτερη ανισότητα. Όταν $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty, 1 \le p \le 2$, αποδεικνύεται ότι,

$$\|(A_1 + A_2)^p + (B_1 + B_2)^p\|_\infty^{1/p} \le \left\|A_1^p + B_1^p\right\|_\infty^{\frac{1}{p}} + \left\|A_2^p + B_2^p\right\|_\infty^{\frac{1}{p}}.$$

Επίσης έχουμε,

$$2^{\frac{1}{p}-1}\|(A_1 + A_2)^p + (B_1 + B_2)^p\|^{1/p} \le \left\|A_1^p + B_1^p\right\|^{\frac{1}{p}} + \left\|A_2^p + B_2^p\right\|^{1/p}$$

για κάθε ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα και $1 \le p \le 2$. Η σταθερά $2^{\frac{1}{p}-1}$ είναι καλύτερη από την $2^{-\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|}$ για $1 \le p \le 4/3$. Πράγματι, εφόσον ο κοίλος τελεστής του t^p δίνει,

$$2^{1-p}(A_1 + A_2)^p \le A_1^p + A_2^p \ , 2^{1-p}(B_1 + B_2)^p \le B_1^p + B_2^p \ ,$$

παίρνουμε,

$$\begin{aligned} 2^{\frac{1}{p}-1}\|(A_1 + A_2)^p + (B_1 + B_2)^p\|^{1/p} &\le \left\|A_1^p + A_2^p + B_1^p + B_2^p\right\|^{1/p} \\ &\le (\left\|A_1^p + B_1^p\right\| + \left\|A_2^p + B_2^p\right\|)^{1/p} \\ &\le \left\|A_1^p + B_1^p\right\|^{\frac{1}{p}} + \left\|A_2^p + B_2^p\right\|^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

4.5 Μεταθέσεις στοιχείων πινάκων

Σε αυτήν την παράγραφο μελετάμε παραλλαγές νορμών πινάκων υπό την επήρεια μεταθέσεων των στοιχείων τους. Μία απεικόνιση $\Phi: M_n \to M_n$ ονομάζεται τελεστής μετάθεσης εάν για κάθε A τα στοιχεία της $\Phi(A)$ είναι μία σταθερή αναδιάταξη αυτών των A. Οικεία παραδείγματα τελεστών μετάθεσης είναι ο ανάστροφος τελεστής, μεταθέσεις σειρών και στηλών. Μία βασική παρατήρηση είναι ότι κάθε τελεστής μετάθεσης είναι και μία αντιστρέψιμη γραμμική απεικόνιση. Έστω τώρα ο χώρος M_n εφοδιασμένος με νόρμα $\|\cdot\|$ και $\Phi: M_n \to M_n$ μία γραμμική απεικόνιση. Χρησιμοποιούμε τον ίδιο ορισμό για τον τελεστή νόρμας της Φ:

$$\|\Phi\| \equiv \sup\{\|\Phi(A)\|: \|A\| \le 1, A \in M_n\}.$$

Το επόμενο αποτέλεσμα θα απλοποιήσει την μελέτη μας. Το μέγιστο τελεστών νορμών μιας γραμμικής απεικόνισης σε χώρο πινάκων επαγόμενο από ορθομοναδιαίες αναλλοίωτες νόρμες επιτυγχάνεται στην νόρμα επαγόμενη είτε από την φασματική νόρμα ή την νόρμα ίχνος.

Λήμμα 4.36 Έστω $\Phi: M_n \to M_n$ μία γραμμική απεικόνιση. Τότε για κάθε ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα στον M_n

$$\|\Phi\| \leq \max\{\|\Phi\|_\infty, \|\Phi\|_1\}. \tag{4.36}$$

Απόδειξη Ορίζουμε με N_{ui} το σύνολο των ορθομοναδιαία αναλλοίωτων νορμών στο M_n. Από την αρχή κυριαρχίας του Fan (Λήμμα 4.2) έχουμε ότι:

$$\max\{\|\Phi\|: \|\cdot\| \in N_{ui}\} = \max\{\|\Phi\|_{(k)}: 1 \leq k \leq n\}. \tag{4.64}$$

Από την άλλη, το Λήμμα 4.17 βεβαιώνει ότι για κάθε $T \in M_n$ και για κάθε $1 \leq k \leq n$,

$$\|T\|_{(k)} = \min\{k\|X\|_\infty + \|Y\|_1: T = X + Y\}. \tag{4.65}$$

Υποθέτουμε ότι $\|\Phi\|_{(k)} = \|\Phi(A)\|_{(k)}$ με $\|A\|_{(k)} = 1$. Τότε από την σχέση (4.65) υπάρχουν $X, Y \in M_n$ τέτοια ώστε:

$$A = X + Y \ , \ 1 = \|A\|_{(k)} = k\|X\|_\infty + \|Y\|_1. \tag{4.66}$$

Παρατηρήστε ότι η Φ είναι γραμμική. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.65) και (4.66) ξανά, λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned}
\|\Phi\|_{(k)} = \|\Phi(A)\|_{(k)} &= \|\Phi(X) + \Phi(Y)\|_{(k)} \\
&\leq k\|\Phi(X)\|_\infty + \|\Phi(Y)\|_1 \\
&= k\|X\|_\infty \cdot \frac{\|\Phi(X)\|_\infty}{\|X\|_\infty} + \|Y\|_1 \cdot \frac{\|\Phi(Y)\|_1}{\|Y\|_1} \\
&\leq \max\left\{\frac{\|\Phi(X)\|_\infty}{\|X\|_\infty}, \frac{\|\Phi(Y)\|_1}{\|Y\|_1}\right\} \\
&\leq \max\{\|\Phi\|_\infty, \|\Phi\|_1\}.
\end{aligned}$$

Επομένως, $$\|\Phi\|_{(k)} \leq max\{\|\Phi\|_\infty, \|\Phi\|_1\}.$$

Συνδυάζοντας την παραπάνω ανισότητα με την (4.64), παίρνουμε την (4.63). □

Δοσμένου πίνακα $A \in M_n$, ας σκεφτούμε τον πολλαπλασιαστή Hadamard $T_A: M_n \to M_n$

οριζόμενο ως $T_A(X) = A \circ X$. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ο συμπληρωματικός τελεστής του T_A, σύμφωνα με το εσωτερικό γινόμενο Frobenius $< X, Y >= trXY^*$ είναι $T_A^* = T_{\bar{A}}$ (το $\bar{A}$ αναφέρεται στον μιγαδικό συζυγή πίνακα του A). Επιπροσθέτως, η φασματική νόρμα και η νόρμα ίχνος είναι δυικές (δυικό ζεύγος) υπό την έννοια ότι:

$$\|A\|_\infty = \sup_{X \neq 0} \frac{|<A,X>|}{\|X\|_1} \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \|A\|_1 = \sup_{X \neq 0} \frac{|<A,X>|}{\|X\|_\infty}$$

Παρατηρήστε ότι $\|T_{\bar{A}}\|_\infty = \|T_A\|_\infty$. Επομένως το επόμενο πόρισμα είναι αποτέλεσμα του Λήμματος 4.36.

Πόρισμα 4.37 Δοσμένου πίνακα $A \in M_n$, έστω T_A να είναι ο πολλαπλασιαστής Hadamard ο οποίος ορίζεται από τον A. Τότε για κάθε ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα,

$$\|T_A\| \leq \|T_A\|_\infty.$$

Αυτό το πόρισμα υποδεικνύει για κάποια προβλήματα με ορθομοναδιαία αναλλοίωτες νόρμες που συμπεριλαμβάνουν γινόμενα Hadamard, αρκεί να σκεφτούμε την περίπτωση της φασματικής νόρμας. Η νόρμα Frobenius $\|(a_{ij})\|_2 = (\sum_{i,j} |a_{ij}|^2)^{1/2}$ γεφυρώνει την ανάλυση μας. Ας θυμηθούμε ότι $\|A\|_2 = (\sum_j s_j(A)^2)^{\frac{1}{2}}$.

Θεώρημα 4.38 Για κάθε τελεστή μετάθεσης Φ και όλες τις ορθομοναδιαία αναλλοίωτες νόρμες στον M_n,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\| \leq \|\Phi(A)\| \leq \sqrt{n} \|A\| \, , A \in M_n \tag{4.67}$$

με τις σταθερές $\sqrt{n}$, $1/\sqrt{n}$ να είναι οι βέλτιστες δυνατές.

Απόδειξη Η πρώτη ανισότητα προκύπτει από την δεύτερη. Εφόσον ένας τελεστής μετάθεσης είναι ένα προς ένα και επί, στην δεύτερη ανισότητα μπορούμε να αντικαταστήσουμε το A με το $\Phi^{-1}(A)$ και έπειτα το Φ με το Φ^{-1}. Με αυτόν τον τρόπο αρκεί να δείξουμε την δεύτερη ανισότητα. Το συμπέρασμα είναι ισοδύναμο με $\|\Phi\| \leq \sqrt{n}$. Από το Λήμμα 4.36 αρκεί να δείξουμε ότι $\|\Phi\|_\infty \leq \sqrt{n}$ και $\|\Phi\|_1 \leq \sqrt{n}$. Αλλά αυτό είναι επόμενο από,

$$\|\Phi(A)\|_\infty \leq \|\Phi(A)\|_2 = \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_\infty$$

και

$$\|\Phi(A)\|_1 \leq \sqrt{n} \|\Phi(A)\|_2 = \sqrt{n} \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1.$$

Τώρα σκεφτείτε τον τελεστή μετάθεσης Ψ ο οποίος εναλλάσσει την πρώτη στήλη και την διαγώνιο ενός πίνακα και κρατάει όλα τα άλλα στοιχεία σταθερά. Έστω $I \in M_n$ ο μοναδιαίος πίνακας. Τότε $\|\Psi(I)\|_\infty = \sqrt{n} \|I\|_\infty = \sqrt{n}$. Έστω $e \in \mathbb{C}^n$ να είναι το διάνυσμα με κάθε στοιχείο μονάδα και $B = (e, 0, \dots, 0)$. Τότε $\|\Psi(B)\|_1 = \sqrt{n}\|B\|_1 = n$. Οπότε παρατηρούμε ότι η σταθερά $\sqrt{n}$ στην (4.67) είναι βέλτιστη δυνατή για την νόρμα ίχνος και νόρμα τελεστή. □

Παράδειγμα: Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ο τελεστής μετάθεση Φ τέτοιος ώστε $\Phi = PA$ με $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ και κάνουμε τους υπολογισμούς βάσει της νόρμας Frobenius, με $\|A\|_2 = \sqrt{7}$, $\|PA\|_2 = \sqrt{7}$, επομένως με αντικατάσταση στην ανισότητα (4.67)$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{7} \le \sqrt{7} \le \sqrt{3}\sqrt{7}$.

Για πραγματικούς αριθμούς $x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge 0$ και $1 \le k \le n$ ακέραιο, έχουμε ότι,

$$x_1 + \cdots + x_k \le \sqrt{k}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{n}(x_1 + \cdots + x_k).$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις δύο ανισότητες για να δώσουμε μία άλλη απόδειξη του Θεωρήματος 4.38 ως ακολούθως.

$$\|\Phi(A)\|_{(k)} \le \sqrt{k}\|\Phi(A)\|_2 = \sqrt{k}\|A\|_2 \le \sqrt{n}\|A\|_{(k)}.$$

Επομένως, $$\|\Phi(A)\|_{(k)} \le \sqrt{n}\|A\|_{(k)} \ , \ k = 1,2, \dots, n$$

Τέλος, εφαρμόζοντας την αρχή κυριαρχίας του Fan δίνει την (4.67). Για γενικές Schatten p-νόρμες, η εκτίμηση (4.67) μπορεί να βελτιωθεί.

Θεώρημα 4.39 Για κάθε τελεστή μετάθεσης Φ στον M_n και για κάθε $A \in M_n$,

$$n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\|A\|_p \le \|\Phi(A)\|_p \le n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\|A\|_p \ , \ 2 \le p \le \infty \tag{4.68}$$

$$n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\|A\|_p \le \|\Phi(A)\|_p \le n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\|A\|_p \ , \ 1 \le p \le 2 \tag{4.69}$$

και όλες αυτές οι ανισότητες είναι ακριβείς.

Απόδειξη Ξανά, τα αριστερά μέλη των ανισοτήτων έπονται από τα ανάλογα δεξιά μέλη. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι εάν $p \ge 2$ τότε για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$, $\|x\|_2 \le n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\|x\|_p$ έχουμε,

$$\|\Phi(A)\|_p \le \|\Phi(A)\|_2 = \|A\|_2 \le n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\|A\|_p.$$

Αυτό αποδεικνύει την σχέση (4.68). Τώρα ας υποθέσουμε $1 \le p \le 2$. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$,$\|x\|_p \le n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\|x\|_2$. Ως αποτέλεσμα,

$$\|\Phi(A)\|_p \le n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\|\Phi(A)\|_2 = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\|A\|_2 \le n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\|A\|_p.$$

Αυτό αποδεικνύει την (4.69). Τα παραδείγματα με Ψ, I, B στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.38 επίσης δείχνουν ότι η σχέση (4.68) και η (4.69) είναι ακριβείς. □

Η κεντρική ιδέα στην παραπάνω απόδειξη είναι απλή : Η νόρμα Frobenius είναι αναλλοίωτη σε μεταθέσεις στοιχείων πινάκων. Το επόμενο αποτέλεσμα υποδεικνύει ότι και το αντίστροφο είναι επίσης αληθές.

Θεώρημα 4.40 Έστω $\|\cdot\|$ ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα στον M_n. Εάν $\|\Phi(A)\| = \|A\|$ ισχύει για όλους τους τελεστές μεταθέσεων Φ και για όλους τους $A \in M_n$, τότε η νόρμα είναι σταθερό πολλαπλάσιο της $\|\cdot\|_2$.

Απόδειξη Έστω Ψ όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.38 και $A = diag(s_1, s_2, \dots, s_n)$ όπου $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Έστω φ η συμμετρική συνάρτηση βαθμίδας που αντιστοιχεί στην $\|\cdot\|$. Τότε,

$$\varphi(s_1, s_2, \dots, s_n) = \|A\| = \|\Psi(A)\| = \varphi\left(\left(\sum_1^n s_j^2\right)^{\frac{1}{2}}, 0, \dots, 0\right)$$

$$= \left(\sum_1^n s_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \varphi(1,0,\dots,0)$$

$$= \varphi(1,0,\dots,0)\|A\|_2.$$

Εφόσον τα $s_1, s_2, \dots, s_n$ είναι αυθαίρετα, $\|\cdot\| = \varphi(1,0,\dots,0)\|\cdot\|_2$. □

Μία απεικόνιση $\Phi: M_n \to M_n$ καλείται θετική εάν διατηρεί το σύνολο $\mathcal{P}_n$ θετικά ημιορισμένων πινάκων στον M_n , για παράδειγμα $\Phi(\mathcal{P}_n) \subseteq \mathcal{P}_n$. Δεν είναι δύσκολο να αποδείξουμε ότι εάν η $\Phi: M_n \to M_n$ θετικός τελεστής μετάθεσης , τότε υπάρχει ένας τελεστής μετάθεσης P τέτοιος ώστε,

$$\Phi(A) = PAP^t \ \text{για όλα τα} \ A \in M_n$$

ή,

$$\Phi(A) = PA^tP^t \ \text{για όλα τα} \ A \in M_n$$

όπου X^t είναι ο ανάστροφος του X. Αυτό το αποτέλεσμα δείχνει ότι μεταξύ των τελεστών μετάθεσης, μόνο οι ανάστροφοι τελεστές και οι ταυτόχρονα σειρών και γραμμών μεταθέσεων μπορούν να διατηρήσουν τον θετικό ημιορισμό.

4.6 Η αριθμητική ακτίνα

Έστω η ευκλείδεια νόρμα στον χώρο $\mathbb{C}^n$. Το πεδίο τιμών ενός πίνακα $A \in M_n$ ορίζεται ως εξής:

$$W(A) \equiv \{< Ax, x >: \|x\| = 1, x \in \mathbb{C}^n\}.$$

Για κάθε $A \in M_n$, το $W(A)$ είναι ένα κυρτό συμπαγές υποσύνολο του μιγαδικού χώρου το οποίο περιέχει τις ιδιοτιμές του A. Η αριθμητική ακτίνα του $A \in M_n$ είναι από ορισμό,

$$w(A) \equiv \max\{|z|: z \in W(A)\}.$$

Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι το $w(\cdot)$ είναι μία νόρμα στον χώρο M_n και έχουμε:

$$\frac{1}{2}\|A\|_\infty \leq w(A) \leq \|A\|_\infty.$$

Η δεύτερη ανισότητα είναι εμφανής ενώ η πρώτη μπορεί να δειχθεί από την καρτεσιανή ανάλυση. Τώρα ονομάζουμε μία νόρμα $\|\cdot\| \in M_n$ ασθενώς ορθομοναδιαία αναλλοίωτη εάν

$$\|UAU^*\| = \|A\|$$

για όλους τους πίνακες A και ορθομοναδιαίους U. Προφανώς η αριθμητική ακτίνα είναι μία τέτοια νόρμα. Εφόσον,

$$w\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1$$

η αριθμητική ακτίνα δεν είναι ορθομοναδιαία αναλλοίωτη (συγκεκριμένα, αυτό το παράδειγμα μας δείχνει ότι $w(\cdot)$ δεν είναι καν αναλλοίωτη-μετάθεσης),δεν είναι υποπολλαπλασιαστική:

$$w(AB) \leq w(A)w(B)$$

είναι εν γένει λάθος ακόμα και για αντιμεταθετικούς A, B. Σκεφτείτε τον παρακάτω πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και θέστε $B = A^2$. Τότε $w(A) < 1, w(A^2) = 1/2$ και $w(A^3) = 1/2$. Αλλά το επόμενο θεώρημα είναι αληθές.

Θεώρημα 4.41 (δυναμική ανισότητα) Για κάθε πίνακα A και για κάθε θετικό ακέραιο k,

$$w(A^k) \leq w(A)^k \tag{4.70}$$

Απόδειξη Εφόσον $w(\cdot)$ είναι θετικά ομογενής, αρκεί να δείξουμε ότι $w(A^k) \leq 1$ υπό την υπόθεση ότι $w(A) \leq 1$. Ορίζουμε με $ReA = (A + A^*)/2$ το πραγματικό μέρος ενός πίνακα A. Έστω a, z μιγαδικοί αριθμοί. Τότε $|a| \leq 1$ αν και μόνο αν $Re(1 - za) \geq 0$ για κάθε z , $|z| < 1$. Προφανώς,

$$w(A) \leq 1 \; αν \; και \; μόνο \; αν \; Re(I - zA) \geq 0 \;\; για \; |z| < 1. \tag{4.71}$$

Για έναν μη ιδιάζων πίνακα $B, B + B^* = B[B^{-1} + (B^{-1})^*]B^*$. Επομένως $ReB \geq 0$ αν και μόνο αν $Re(B^{-1}) \geq 0$. Από την σχέση (4.71) λαμβάνουμε:

$$w(A) \leq 1 \; αν \; και \; μόνο \; αν \; Re(I - zA)^{-1} \geq 0 \;\; για \; |z| < 1$$

Παρατηρήσετε ότι εάν $\omega = e^{2\pi i/k}$, είναι αρχική k-οστή ρίζα μονάδας, τότε,

$$\frac{1}{1 - z^k} = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{1 - \omega^j z}$$

για όλα τα z εκτός δυνάμεων του ω. Αυτή η ταυτότητα μπορεί να ελεγχθεί ως ακολούθως. Πρώτα έχουμε την ταυτότητα $1 - z^k = \prod_{j=0}^{k-1}(1 - \omega^j z)$. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της ταυτότητας με $1 - z^k$, παρατηρήστε ότι το δεξί μέλος γίνεται πολυώνυμο βαθμού το πολύ μέχρι $k - 1$ το οποίο είναι αναλλοίωτο υπό κάθε εκ των k αλλαγών,

$$z \to \omega^j z \;\; (j = 0, \dots, k - 1)$$

και εκ του αποτελέσματος είναι σταθερό, και ύστερα αξιολογήστε την σταθερά αφού θέσετε το z ως μηδενικό. Η παραπάνω ταυτότητα υποδεικνύει ότι εάν $w(A) \leq 1$ τότε,

$$(I - z^k A^k)^{-1} = \tfrac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}(I \; - \omega^j zA)^{-1}$$

όποτε $|z| < 1$. Εφόσον $w(\omega^j A) \leq 1$, από την σχέση (4.72) κάθε άθροιση στο δεξί μέλος έχει θετικά ημιορισμένο πραγματικό μέρος. Επομένως και το δεξί μέλος έχει θετικά ημιορισμένο πραγματικό μέρος. Εφαρμόζοντας την (4.72) ξανά $w(A^k) \leq 1$. □

Η παραπάνω απόδειξη είναι βέβαια αρκετά ευφυής, αλλά μπορούμε να καταλάβουμε το αποτέλεσμα με άλλο τρόπο. Σε επόμενη φάση θα εδραιώσουμε ένα θεώρημα το οποίο χαρακτηρίζει την μοναδιαία μπάλα του χώρου M_n με την αριθμητική ακτίνα ως την νόρμα, έτσι ώστε η δυναμική ανισότητα γίνεται εντελώς αντιληπτή. Έστω $\mathcal{M}$ ο υπόχωρος του M_m ο οποίος περιέχει τον ταυτοτικό πίνακα και είναι αυτοσυζυγής, όπου $A \in \mathcal{M}$ τότε και $A^* \in \mathcal{M}$. Μία γραμμική απεικόνιση $\Phi: \mathcal{M} \to M_n$ λέγεται ότι είναι απολύτως θετική(ή ολοκληρωτικά θετική) εάν για οποιονδήποτε σύνθετο πίνακα (block) $[X_{ij}]$ οτιδήποτε τάξης με $X_{ij} \in \mathcal{M}$,

$$\left[X_{ij}\right] \geq 0 \;\; σημαίνει \; [\Phi(X_{ij})] \geq 0$$

Το επόμενο λήμμα αποτελεί μία ειδική περίπτωση του Θεωρήματος επέκτασης του Arveson σε C^* −άλγεβρα.

Λήμμα 4.42 Έστω $\mathcal{M}$ αυτοσυζυγής υπόχωρος του M_m που περιέχει τον ταυτοτικό πίνακα. Εάν $\Phi\colon \mathcal{M} \to M_n$ είναι απολύτως θετική γραμμική απεικόνιση, τότε η Φ μπορεί να επεκταθεί σε μία απολύτως θετική γραμμική απεικόνιση από τον χώρο M_m στον χώρο M_n.

Θεώρημα 4.43 (T.Ando) Έστω $A \in M_n$. Τότε $w(A) \leq 1$ αν και μόνο αν υπάρχουν συστολικοί $W, Z \in M_n$ με Z ερμιτιανό, τέτοιοι ώστε:

$$A = (I+Z)^{1/2} W (I-Z)^{1/2} \tag{4.73}$$

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι ο πίνακας A έχει την μορφή της σχέσης (4.73), τότε για κάθε $u \in \mathbb{C}^n$, από τη ανισότητα Cauchy-Schwarz,

$$|< Au, u >| \leq \frac{1}{2}\{\left\|(I+Z)^{1/2}u\right\|^2 + \left\|(I-Z)^{1/2}u\right\|^2\} = \|u\|^2$$

Αντιθέτως, υποθέτουμε ότι $w(A) \leq 1$. Από το Λήμμα 1.21 η ύπαρξη των συστολών W, Z με Z ερμιτιανό που ικανοποιεί την συνθήκη της (4.73) είναι ισοδύναμη με αυτή όπου Z- ερμιτιανή συστολή τέτοια ώστε:

$$\begin{bmatrix} I+Z & A \\ A^* & I-Z \end{bmatrix} \geq 0.$$

Έστω $\mathcal{M}$ ο μιγαδικός υπόχωρος του M_2, ο οποίος παράγεται από τους πίνακες

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Τότε ο $\mathcal{M}$ είναι αυτοσυζυγής υπόχωρος του M_2, που περιέχει τον ταυτοτικό πίνακα. Τα στοιχεία του είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & x \end{bmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{C}$$

Ορίζουμε μία γραμμική απεικόνιση $\Phi\colon \mathcal{M} \to M_n$ με το εξής τρόπο:

$$\Phi\colon \begin{bmatrix} x & y \\ z & x \end{bmatrix} \to xI + \frac{1}{2}(yA + zA^*)$$

Θα αποδείξουμε ότι η Φ είναι απολύτως θετική. Έστω N ένας αυθαίρετα θετικός ακέραιος. Υποθέτοντας ότι ένας πίνακας στον χώρο $M_N \otimes \mathcal{M}$ είναι θετικά ημιορισμένος:

$$\left(\begin{bmatrix} x_{ij} & y_{ij} \\ z_{ij} & x_{ij} \end{bmatrix}\right)_{i,j=1}^{N} \geq 0$$

Πρέπει να δείξουμε ότι:

$$[x_{ij}I + \frac{1}{2}\left(y_{ij}A + z_{ij}A^*\right)]_{i,j=1}^{N} \geq 0$$

Με άλλα λόγια πρέπει να αποδείξουμε ότι για $X, Y \in M_n$,

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^* & X \end{bmatrix} \geq 0 \ \Rightarrow X \otimes I_n + \frac{1}{2}(Y \otimes A + Y^* \otimes A^*) \geq 0.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $X > 0$. Εφαρμόζοντας τους ορθογώνιους μετασχηματισμούς ομοιότητας με το $diag(X^{1/2}, X^{1/2})$, $X^{-1/2} \otimes I_n$ στις παραπάνω δύο ανισότητες αντιστοίχως, παρατηρούμε ότι το πρόβλημα ανάγεται στο να δείξουμε ότι,

$$\begin{bmatrix} I & Y \\ Y^* & I \end{bmatrix} \geq 0 \ \Rightarrow I_N \otimes I_n + \frac{1}{2}(Y \otimes A + Y^* \otimes A^*) \geq 0,$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το ότι για $A \in M_n, Y \in M_N$,

$$w(A) \leq 1 \ \kappa\alpha\iota \ \|Y\|_\infty \leq 1 \ \Rightarrow w(Y \otimes A) \leq 1.$$

Εφόσον κάθε συστολή είναι ένας κυρτός συνδυασμός ορθομοναδιαίων πινάκων (συγκεκριμένα, από την ανάλυση ιδιαζουσών τιμών είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι κάθε συστολή Y μπορεί να γραφθεί και ως $Y = (U_1 + U_2)/2$ με U_1, U_2 ορθομοναδιαίους), αρκεί να δείξουμε ότι εάν $w(A) \leq 1$ τότε $w(U \otimes A) \leq 1$ για ορθομοναδιαίο $U \in M_N$. Για να γίνει αντιληπτό αυτό ας δούμε την φασματική ανάλυση:

$$U = V diag(\lambda_1, \dots, \lambda_N) V^*$$

με V ορθομοναδιαίο και $|\lambda_j| = 1, j = 1,2, \dots, N$. Τότε αφού $w(\cdot)$ είναι ασθενώς ορθομοναδιαία αναλλοίωτη, παίρνουμε,

$$\begin{aligned} w(U \otimes A) &= w[(V \otimes I_n)(diag(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \otimes A)(V \otimes I_n)^*] \\ &= w(diag(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \otimes A) \\ &= \max_{1 \leq j \leq N} w(\lambda_j A) = w(A) \leq 1. \end{aligned}$$

Οπότε έχουμε αποδείξει ότι η Φ είναι απολύτως θετική(ή ολοκληρωτικά θετική). Τώρα από το Λήμμα 4.42 η Φ μπορεί να επεκταθεί σε μία απολύτως θετική απεικόνιση από M_2 στο M_n το οποίο ορίζουμε με τον ίδιο συμβολισμό Φ. Επομένως,

$$\begin{bmatrix} \Phi(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) & \Phi(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) \\ \Phi(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}) & \Phi(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) \end{bmatrix} \geq 0 \tag{4.74}$$

Αφού, $\Phi\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + \Phi\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \Phi\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = I_n,$

υπάρχει ερμιτιανός πίνακας Z τέτοιος ώστε,

$$\Phi\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right) = \tfrac{1}{2}(I+Z)\ \kappa\alpha\iota\ \ \Phi\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) = \tfrac{1}{2}(I-Z)$$

από την άλλη πλευρά, από ορισμό,

$$\Phi(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}A\ ,\ \Phi\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right) = \tfrac{1}{2}A^*.$$

Οπότε η (4.74) αποκτά την μορφή:

$$\begin{bmatrix}I+Z & A\\ A^* & I-Z\end{bmatrix} \geq 0.$$

και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. ☐

Απόδειξη (δεύτερη) θεωρήματος 4.41 Υποθέτουμε $w(A) \leq 1$. Από το Θεώρημα 4.43 ο A έχει τον επαναπροσδιορισμό,

$$A = (I+Z)^{1/2}W(I-Z)^{1/2}$$

όπου W, Z είναι συστολές και Z ερμιτιανός. Τότε,

$$A^k = (I+Z)^{1/2}C(I-Z)^{1/2}$$

όπου $C = [W(I-Z^2)^{1/2}]^{k-1}W$. Προφανώς ο C είναι συστολή. Οπότε ο A^k είναι της ίδιας μορφής όπως ο A στην σχέση (4.73). Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.43 ξανά κατά την άλλη διεύθυνση μας δίνει ότι το $w(A^k) \leq 1$. ☐

4.7 Εκτιμήσεις με νόρμες σε διαγώνιους πίνακες

Θεωρούμε,
$$A = \begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\quad B = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι $\|A\|_\infty = \sqrt{2}, \|B\|_\infty = (1+\sqrt{5})/2$. Επομένως αντικαθιστώντας ένα στοιχείο ενός πίνακα με μηδέν μπορεί να αυξήσει την νόρμα τελεστή του. Από την άλλη πλευρά, η νόρμα Frobenius ενός πίνακα ελαττώνεται εάν κάποιο στοιχείο του αντικατασταθεί από κάποιο με μικρότερη απόλυτη τιμή. Είναι αξιοσημείωτο γεγονός ότι, μεταξύ όλων των ορθομοναδιαία αναλλοίωτων νορμών, η νόρμα Frobenius (και τα σταθερά πολλαπλάσια της) είναι η μοναδική με αυτήν την ιδιότητα. Σε αυτήν την παράγραφο μελετάμε τις παραλλαγές νορμών πίνακα όταν κάποιες από τις διαγώνιους του αντικαθίστανται από μηδενικά. Ένας πίνακας $A = (a_{ij})$ λέγεται ότι έχει άνω πλάτος ζώνης (εύρος) q εάν $a_{ij} = 0$ όποτε $j - i > q$.

Έχει το κάτω πλάτος ζώνης p όταν $a_{ij} = 0$ όποτε $i - j > p$. Για παράδειγμα, τριδιαγώνιοι πίνακες έχουν άνω και κάτω πλάτος ζώνης 1, ενώ άνω τριγωνικοί πίνακες έχουν κάτω πλάτος ζώνης 0. Για $A \in M_n$, έστω $D_0(A)$ να είναι το διαγώνιο μέρος του A,δηλαδή, ο πίνακας που παράγεται από τον A με την αντικατάσταση όλων των μη-διαγώνιων στοιχείων του από μηδενικά. Για $1 \leq j \leq n-1$, έστω $D_j(A)$ να είναι ο πίνακας παραγόμενος από τον A με την αντικατάσταση όλων των στοιχείων του εκτός αυτών στην j-οστή υπερδιαγώνιο με 0. Ομοίως, έστω $D_{-j}(A)$ να είναι ο πίνακας ο οποίος παράγεται με την διατήρηση μόνο της j-οστής υποδιαγώνιο του A. Έστω $\omega = e^{2\pi i/n}$ με $i = \sqrt{1}$, και έστω U να είναι ο διαγώνιος πίνακας με στοιχεία $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ στην διαγώνιο του. Τότε έχουμε,

$$D_0(A) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j A U^{*j}. \tag{4.75}$$

Από την παραπάνω έκφραση συνεπάγεται αμέσως ότι για κάθε ασθενή ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα,

$$\|D_0(A)\| \leq \|A\|. \tag{4.76}$$

Τώρα έχουμε την ιδέα κλειδί. Η σχέση (4.75) αντιπροσωπεύει την κύρια διαγώνιο σαν ένα μέσο όρο ορθομοναδιαίων συζυγών του A. Ως αποτέλεσμα, αυτή η ιδέα μπορεί να γενικευθεί με το να σκεπτούμε μία συνεχή εκδοχή, δηλαδή, χρησιμοποιώντας ολοκληρώματα, έτσι ώστε κάθε διαγώνιος έχει παρόμοια έκφραση. Για κάθε πραγματικό αριθμό θ, έστω U_θ να είναι ο διαγώνιος πίνακας με στοιχεία $e^{ir\theta}$ με $1 \leq r \leq n$ κατά την διαγώνιο του. Τότε το στοιχείο (r, s) του πίνακα $U_\theta A U_\theta^*$ είναι $e^{i(r-s)\theta} a_{rs}$. Επομένως έχουμε,

$$D_k(A) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} U_\theta A U_\theta^* d\theta. \tag{4.77}$$

Παρατηρήστε ότι όταν $k = 0$, αυτή δίνει μία άλλη έκφραση για το $D_0(A)$. Από την (4.77) παίρνουμε,

$$\|D_k(A)\| \leq \|A\| \;,\; 1 - n \leq k \leq n - 1 \tag{4.78}$$

για κάθε ασθενώς ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα. Στην συνέχεια, όλες οι αναφέρουσες νόρμες είναι ασθενώς ορθομοναδιαία αναλλοίωτες εκτός αν ειπωθεί αλλιώς. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (4.77) για να γράψουμε:

$$D_k(A) + D_{-k}(A) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\cos k\theta \, U_\theta A U_\theta^* d\theta.$$

Επομένως,

$$\|D_k(A) + D_{-k}(A)\| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |2\cos k\theta| d\theta \|A\|.$$

Είναι εύκολος ο υπολογισμός αυτού του ολοκληρώματος,

$$\|D_k(A) + D_{-k}(A)\| \leq \frac{4}{\pi}\|A\|. \tag{4.79}$$

Έστω $\mathcal{T}_3(A) = D_{-1}(A) + D_0(A) + D_1(A)$ το τριδιαγώνιο μέρος του A. Χρησιμοποιώντας το ίδιο επιχείρημα βλέπουμε ότι,

$$\|\mathcal{T}_3(A)\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|1 + 2\cos\theta|d\theta\|A\|.$$

Όπως και προηγουμένως, είναι εύκολο να υπολογίσουμε αυτό το ολοκλήρωμα,

$$\|\mathcal{T}_3(A)\| \leq \left(\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\right)\|A\|. \tag{4.80}$$

Ο σταθερός παράγοντας στην σχέση (4.80) είναι μικρότερος από 1.436, ενώ αυτός στην (4.79) είναι μικρότερος από 1.274. Πιο γενικά, σκεφτείτε το “ξάκρισμα” του A που μένει εάν αντικαταστήσουμε όλες τις διαγώνιους του εκατέρωθεν των $-k \leq j \leq k$ με μηδενικά, για παράδειγμα σκεφτείτε τους πίνακες:

$$\mathcal{T}_{2k+1}(A) \equiv \sum_{j=-k}^{k} D_j(A),\ 1 \leq k \leq n-1.$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να παράγουμε,

$$\|\mathcal{T}_{2k+1}(A)\| \leq L_k\|A\| \tag{4.81}$$

Όπου το L_k είναι η σταθερά Lebesgue:

$$L_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{j=-k}^{k} e^{ij\theta}\right|d\theta.$$

Είναι γνωστό ότι,

$$L_k \leq \log k + \log\pi + \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{1}{2k}\right),$$

καθώς επίσης,

$$L_k = \frac{4}{\pi^2}\log k + O(1).$$

Έστω Δ να είναι η γραμμική απεικόνιση στον χώρο πινάκων ενός σταθερού μεγέθους που λαμβάνει ένα πίνακα B και τον πάει στον άνω τριγωνικό μέρος, δηλαδή, αντικαθιστά όλα τα στοιχεία του πίνακα αυτού κάτω από την κύρια διαγώνιο με μηδενικά. Δεδομένου $k \times k$ πίνακα B, σκεφτείτε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 0 & B^* \\ B & 0 \end{bmatrix}$. Τότε,

$$\mathcal{T}_{2k+1}(A) = \begin{bmatrix} 0 & \Delta(B)^* \\ \Delta(B) & 0 \end{bmatrix}.$$

Εφόσον οι ιδιάζουσες τιμές του A είναι αυτές του B μετρημένες δύο φορές, από την (4.81), μέσω της αρχής κυριαρχίας του Fan, λαμβάνουμε,

$$\|\Delta(B)\| \leq L_k \|B\|$$

για κάθε ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα. Τώρα ας δείξουμε ότι τα όρια στις σχέσεις (4.79) και (4.80) είναι ακριβή για την νόρμα ίχνος ασυμπτωτικά, και επομένως, είναι ακριβή για την νόρμα τελεστή. Έστω $A = E$, ένας $n \times n$ πίνακας με όλα τα στοιχεία του 1.Τότε,

$$D_1(A) + D_{-1}(A) = B$$

όπου B είναι ο τριδιαγώνιος πίνακας με όλα τα στοιχεία του στην πρώτη υπερδιαγώνιο και πρώτη υποδιαγώνιο ίσα με μονάδες, και όλα τα άλλα στοιχεία του ίσα με 0. Οι ιδιοτιμές του πίνακα B είναι $2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right), j = 1, \dots, n.$ Έτσι:

$$\frac{\|B\|_1}{\|A\|_1} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \left|2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)\right|. \tag{4.82}$$

Έστω $f(\theta) = |2\cos\theta|$. Το άθροισμα,

$$\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} \left|2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)\right|$$

είναι ένα άθροισμα Riemann για την συνάρτηση $\pi^{-1}f(\theta)$ πάνω σε ένα χωρισμό του διαστήματος $[0,\pi]$ σε $n+1$ ίσα μέρη. Όσο το $n \to \infty$, αυτό το άθροισμα και το άθροισμα στην σχέση (4.82) τείνουν στο ίδιο όριο,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|2\cos\theta|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|2\cos\theta|d\theta = \frac{4}{\pi}.$$

Αυτό δείχνει ότι η ανισότητα (4.79) δεν μπορεί να υποστεί βελτίωση εάν πρέπει να ισχύει για όλες τις διαστάσεις n και για κάθε ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα. Το ίδιο αποτέλεσμα δείχνει επίσης ότι η ανισότητα (4.80) είναι ισχυρή.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. *A. D. Alexandroff, Zur Theorie der gemischten Volumina von Konvexen Körpern IV, Mat. Sbornik 3(45) (1938) 227-251.*
2. *T. Ando, Structure of operators with numerical radius one, Acta Sci. Math (Szeged), 34(1973) 11-15*
3. *T. Ando, Concavity of certain maps on positive definite matrices and applications to Hadamard products, Linear Algebra Appl., 26(1979) 203-241*
4. *T. Ando, Comparison of norms* $|||f(A) - f(B)|||$ *and* $|||f(|A - B|)|||$*, Math. Z., 197(1988) 403-409.*
5. *T. Ando, Majorizations, doubly stochastic matrices, and comparison of eigenvalues, Linear Algebra Appl., 118(1989) 163-248.*
6. *T. Ando, Majorization relations for Hadamard products, Linear Algebra Appl., 223/224(1995) 57-64*
7. *T. Ando, Matrix Young inequalities, Operator Theory: Advances and Applications, 75(1995) 33-38*
8. *T. Ando, Operator-Theoretic Methods for Matrix Inequalities, Hokusei Gakuen Univ., 1998*
9. *T. Ando and R. Bhatia, Eigenvalue inequalities associated with the Cartesian decomposition, Linear and Multilinear Algebra, 22(1987) 133-147*
10. *T. Ando and F. Hiai, Hölder type inequalities for matrices, Math. Ineq. Appl., 1(1998) 1-30.*
11. *T. Ando and X. Zhan, Norm inequalities related to operator monotone functions, Math. Ann., 315(1999) 771-780*
12. *R. B. Bapat and V. S. Sunder, On majorization and Schur products, Linear Algebra Appl., 72(1985) 107-117.*
13. *C. A. Berger, Abstract 625-152, Notices Amer. Math. Soc., 12(1965) 590.*
14. *C. A. Berger and J. G. Stampfli, Norm relations and skew dilations, Acta Sci. Math. (Szeged), 28(1967) 191-195.*
15. *C. A. Berger and J. G. Stampfli, Mapping theorems for the numerical range, Amer. J. Math., 89(1967) 1047-1055.*
16. *R. Bhatia, Perturbation Bounds for Matrix Eigenvalues, Longman, 1987*
17. *R. Bhatia, Matrix Analysis, GTM 169, Springer-Verlag, New York, 1997.*
18. *R. Bhatia, Pinching, trimming, truncating, and averaging of matrices, Amer. Math. Monthly, 107(2000) 602-608*
19. *R. Bhatia and C. Davis, More matrix forms of the arithmetic-geometric mean inequality, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 14 (1993) 132-136*

20. R. Bhatia and C. Davis, A Cauchy-Schwarz inequality for operators with applications, Linear Algebra Appl., 223/224(1995) 119-129.
21. R. Bhatia, C. Davis and M. D. Choi, Comparing a matrix to its off-diagonal part, Operator Theory: Advances and Applications, 40(1989) 151-164
22. R. Bhatia and F. Kittaneh, On the singular values of a product of operators, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 11(1990) 272-277.
23. R. Bhatia and F. Kittaneh, Norm inequalities for positive operators, Lett. Math. Phys., 43(1998) 225-231.
24. R. Bhatia and F. Kittaneh, Notes on matrix arithmetic-geometric mean inequalities, Linear Algebra Appl., 308(2000) 203-211
25. R. Bhatia and F. Kittaneh, Cartesian decompositions and Schatten norms, Linear Algebra Appl., 318(2000) 109-116
26. R. Bhatia and K. R. Parthasarathy, Positive definite functions and operator inequalities, Bull. London Math. Soc., 32(2000) 214-228.
27. R. Bhatia and X. Zhan, Compact operators whose real and imaginary parts are positive, Proc. Amer. Math. Soc., 129(2001) 2277-2281.
28. R. Bhatia and X. Zhan, Norm inequalities for operators with positive real part, J. Operator Theory, to appear.
29. N. N. Chan and M. K. Kwong, Hermitian matrix inequalities and a conjecture, Amer. Math. Monthly, 92(1985) 533-541.
30. K. R. Davidson, Nest Algebras, Longman, 1988.
31. W. F. Donoghue, Distributions and Fourier Transforms, Academic Press, 1969.
32. W. F. Donoghue, Monotone Matrix Functions and Analytic Continuation, Springer-Verlag, 1974.
33. G. P. Egorychev, The solution of van der Waerden's problem for permanents, Adv. in Math., 42(1981), 299-305.
34. L. Elsner and S. Friedland, Singular values, doubly stochastic matrices, and applications, Linear Algebra Appl., 220(1995) 161-169
35. D. I. Falikman, A proof of the van der Waerden conjecture on the permanent of a doubly stochastic matrix, Mathematiceski Zametki, 29(1981) 931-938 (Russian).
36. W. Fenchel, Inegalites quadratiques entre les volumes mixtes des corps convexes, Comptes Rendus, Acad. Sci., Paris, 203 (1936) 647-650
37. M. Fiedler, A note on the Hadamard product of matrices, Linear Algebra Appl., 49(1983) 233-235.
38. T. Furuta, Two operator functions with monotone property, Proc. Amer. Math. Soc., 111(1991) 511-516.
39. I. C. Gohberg and M. G. Krein, Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators, AMS, Providence, RI, 1969.

40. *I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Tables of Integrals, Series, and Products, 5th Ed., Academic Press, New York, 1994.*
41. *P. R. Halmos, A Hilbert Space Problem Book, GTM 19, 2nd Ed., Springer- Verlag, 1982.*
42. *F. Hansen, An operator inequality, Math. Ann., 246(1980) 249-250.*
43. *F. Hansen and G. K. Pedersen, Jensen's inequality for operators and Löwner's theorem, Math. Ann, 258(1982) 229-241.*
44. *H. Helson, Harmonic Analysis, 2nd Ed., Hindustan Book Agency, Delhi, 1995.*
45. *F. Hiai, Log-majorizations and norm inequalities for exponential operators, Banach Center Publications, Vol. 38, pp.119-181, 1997.*
46. *F. Hiai and H. Kosaki, Comparison of various means for operators, J. Funct. Anal., 163(1999) 300-323.*
47. *F. Hiai and H. Kosaki, Means for matrices and comparison of their norms, Indiana Univ. Math. J., 48(1999) 899-936.*
48. *F. Hiai and X. Zhan, Inequalities involving unitarily invariant norms and operator monotone functions, Linear Algebra Appl., 341(2002), 151-169.*
49. *R. A. Horn, Norm bounds for Hadamard products and the arithmetic- geometric mean inequality for unitarily invariant norms, Linear Algebra Appl., 223/224(1995), 355-361.*
50. *R. A. Horn and C. R. Johnson, Matrix Analysis, Cambridge University Press, 1985.*
51. *R. A. Horn and C. R. Johnson, Topics in Matrix Analysis, Cambridge University Press, 1991.*
52. *R. A. Horn and R. Mathias, Cauchy-Schwarz inequalities associated with positive semidefinite matrices, Linear Algebra Appl., 142(1990) 63-82.*
53. *R. A. Horn and R. Mathias, An analog of the Cauchy-Schwarz inequality* for *Hadamard products and unitarily invariant norms, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 11(1990) 481-498.*
54. *R. A. Horn and X. Zhan, Inequalities for C-S seminorms and Lieb functions, Linear Algebra Appl., 291(1999) 103-113.*
55. *K. D. Ikramov, A simple proof of the generalized Schur inequality, Linear Algebra Appl., 199(1994) 143-149.*
56. *C. R. Johnson and R. B. Bapat, A weak multiplicative majorization conjecture for Hadamard products, Linear Algebra Appl., 104(1988) 246-247.*
57. *C. R. Johnson and L. Elsner, The relationship between Hadamard and conventional multiplications for positive definite matrices, Linear Algebra Appl., 92(1987) 231-240.*
58. *T. Kato, Some mapping theorems for the numerical range, Proc. Japan Acad. 41(1965) 652-655.*

59. *T. Kato, Spectral order and a matrix limit theorem, Linear and Multilinear Algebra, 8(1979) 15-19.*
60. *F. Kittaneh, A note on the arithmetic-geometric inequality for matrices, Linear Algebra Appl., 171(1992) 1-8.*
61. *F. Kittaneh, Norm inequalities for fractional powers of positive operators, Lett. Math. Phys., 27(1993) 279-285.*
62. *D. E. Knuth, A permanent inequality, Amer. Math. Monthly, 88(1981) 731-740.*
63. *H. Kosaki, Arithmetic-geometric mean and related inequalities for operators, J. Funct. Anal., 156(1998) 429-451.*
64. *S. Kwapien and A. Pelczynski, The main triangle projection in matrix spaces and its applications, Studia Math., 34(1970) 43-68.*
65. *M. K. Kwong, Some results on matrix monotone functions, Linear Algebra Appl., 118(1989) 129-153.*
66. *. H. van Lint, Notes on Egoritsjev's proof of the van der Waerden conjecture, Linear Algebra Appl., 39(1981) 1-8.*
67. *J. H. van Lint, The van der Waerden conjecture: two proofs in one year, Math. Intelligencer, 4(1982) 72-77.*
68. *D. London, Some notes on the van der Waerden conjecture, Linear Algebra Appl., 4(1971) 155-160.*
69. *M. Marcus and M. Newman, On the minimum of the permanent of a doubly stochastic matrix, Duke Math. J. 26(1959) 61-72.*
70. *A. W. Marshall and I. Olkin, Norms and inequalities for condition numbers, Pacific J. Math., 15(1965) 241-247.*
71. *A. W. Marshall and I. Olkin, Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications, Academic Press, 1979.*
72. *R. Mathias, An arithmetic-geometric-harmonic mean inequality involving Hadamard products, Linear Algebra Appl., 184 (1993) 71-78.*
73. *A. McIntosh, Heinz inequalities and perturbation of spectral families, Macquarie Mathematical Reports 79-0006, 1979.*
74. *H. Minc, Permanents, Addison-Wesley, Reading, MA, 1978.*
75. *B. Sz-Nagy and C. Foias, On certain classes of power-bounded operators in Hilbert space, Acta Szeged 27(1966) 17-25.*
76. *T. Ogasawara, A theorem on operator algebras, J. Sci. Hiroshima Univ., 18(1955) 307-309.*
77. *C. Pearcy, An elementary proof of the power inequality for the numerical radius, Mich. Math. J., 13(1966) 289-291.*
78. *G. K. Pedersen, Some operator monotone functions, Proc. Amer. Math. Soc., 36(1972) 309-310.*

79. J. F. Queiró and A. L. Duarte, On the Cartesian decomposition of a matrix, Linear and Multilinear Algebra, 18(1985) 77-85.
80. E. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.
81. G. Visick, A weak majorization involving the matrices $A \circ B$ and AB, Linear Algebra Appl., 223/224(1995) 731-744.
82. B. L. van der Waerden, Aufgabe 45, Jahresber. d. D.M.V., 35(1926) 117.
83. B. Y. Wang and F. Zhang, Schur complements and matrix inequalities of Hadamard products, Linear and Multilinear Algebra, 43(1997) 315-326.
84. X. Zhan, Inequalities for the singular values of Hadamard products, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 18(1997) 1093-1095.
85. X. Zhan, Inequalities involving Hadamard products and unitarily invariant norms, Adv. Math. (China), 27(1998) 416-422.
86. X. Zhan, Inequalities for unitarily invariant norms, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 20(1998) 466-470.
87. X. Zhan, Norm inequalities for Cartesian decompositions, Linear Algebra Appl., 286(1999) 297-301.
88. X. Zhan, Some research problems on the Hadamard product and singular values of matrices, Linear and Multilinear Algebra, 47(2000) 191-194.
89. X. Zhan, Singular values of differences of positive semidefinite matrices, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 22(2000) 819-823.
90. X. Zhan, Linear preservers that permute the entries of a matrix, Amer. Math. Monthly, 108(2001) 643-645.