



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής  
& Βελτιστοποίησης

ΣΥΜΒΟΛΗ ΣΤΟ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟ  
ΘΕΡΜΟ-ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ ΜΕ  
ΧΡΗΣΗ ΑΙΤΙΟΚΡΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΞΕΛΙΚΤΙΚΩΝ  
ΜΕΘΟΔΩΝ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Διδακτορική Διατριβή

ΕΥΓΕΝΙΑ Α. ΚΟΝΤΟΛΕΟΝΤΟΣ

Επιβλέπων : ΚΥΡΙΑΚΟΣ Χ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΓΛΟΥ  
Καθηγητής ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ, 2012





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής  
& Βελτιστοποίησης

Συμβολή στο σχεδιασμό θερμο-ρευστοδυναμικών διατάξεων με  
χρήση αιτιοκρατικών και εξελικτικών μεθόδων βελτιστοποίησης

Διδακτορική Διατριβή

Ευγενία Α. Κοντολέοντος

Επταμελής Εξεταστική Επιτροπή:

1. Αναγνωστόπουλος Ιωάννης  
Επ. Καθηγητής ΕΜΠ  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
2. Βουτσινάς Σπυρίδων  
Αν. Καθηγητής ΕΜΠ  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
3. Γιαννάκογλου Κυριάκος (επιβλέπων)\*  
Καθηγητής ΕΜΠ  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
4. Μαθιουδάκης Κωνσταντίνος\*  
Καθηγητής ΕΜΠ  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
5. Μπεργελές Γεώργιος\*  
Ομ. Καθηγητής ΕΜΠ  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
6. Τζαμπίρας Γεώργιος  
Καθηγητής ΕΜΠ  
Σχολή Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών
7. Τσαγγάρης Σωκράτης  
Καθηγητής ΕΜΠ  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών

\* Μέλος της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής.

ΑΘΗΝΑ 2012



## Περίληψη

Η παρούσα διδακτορική διατριβή ασχολείται με την ανάπτυξη μεθόδων βελτιστοποίησης με κριτήρια που σχετίζονται με τη ρευστοδυναμική συμπεριφορά των σχεδιαζόμενων συστημάτων με ή χωρίς μεταφορά θερμότητας. Οι μέθοδοι που παρουσιάζονται έχουν ως βάση τις συνεχείς συζυγείς μεθόδους (ως τη βασική συνιστώσα αιτιοκρατικών μεθόδων βελτιστοποίησης, όπου αυτές είναι εφαρμόσιμες) και τους εξελικτικούς αλγόριθμους (στοχαστικές πληθυσμιακές μεθόδους βελτιστοποίησης) ενώ επιχειρείται και ο συνδυασμός-υβριδισμός τους. Όσον αφορά στις συζυγείς μεθόδους, πέραν των εφαρμογών βελτιστοποίησης μορφής, παρουσιάζεται και μία νέα διαδικασία βελτιστοποίησης τοπολογίας για ρευστοδυναμικά προβλήματα, με ή χωρίς μεταφορά θερμότητας. Μέχρι τώρα, το πεδίο εφαρμογής των μεθόδων βελτιστοποίησης, που έχουν αναπτυχθεί στο πλαίσιο προηγούμενων διατριβών στη Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης (ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ), περιελάμβανε συναρτήσεις-στόχους οι οποίες αφορούσαν κυρίως στην αεροδυναμική απόδοση συστημάτων ή συνιστωσών τους, χωρίς να δίνεται έμφαση στη μεταφορά θερμότητας. Στην παρούσα διατριβή, το πεδίο εφαρμογής των μεθόδων συμπεριλαμβάνει συναρτήσεις-στόχους, στις οποίες η μεταφορά θερμότητας παίζει βασικό ρόλο. Ως εκ τούτου, το πεδίο εφαρμογής των μεθόδων, εκτός των στροβιλομηχανών, επεκτείνεται επίσης στη βελτιστοποίηση συστημάτων μεταφοράς θερμότητας, όπως συστήματα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, συστήματα γεωθερμικών αντλιών θερμότητας καθώς και στη βελτιστοποίηση σημαντικών συνιστωσών αυτών των συστημάτων π.χ. εναλλακτών θερμότητας.

Οι νέες συζυγείς διατυπώσεις που παρουσιάζονται χρησιμοποιούν ως βάση τη συνεχή συζυγή (continuous adjoint) διατύπωση που έχει αναπτυχθεί στη ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ, στη διδακτορική διατριβή του Α. Ζυμάρη όπου για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία διατυπώθηκαν οι συζυγείς εξισώσεις γνωστών μοντέλων τύρβης για τον ακριβή υπολογισμό παραγώγων ευαισθησίας στην περίπτωση τυρβωδών ροών. Η παρούσα διατριβή επεκτείνει τη μέθοδο σε ασυμπίεστες ροές με μεταφορά θερμότητας, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στον ακριβή υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας. Για να επιτευχθεί αυτό, διατυπώνονται οι συζυγείς μερικές διαφορικές εξισώσεις για ασυμπίεστο ρευστό με την προσθήκη της ενεργειακής εξίσωσης η οποία, ενώ στο ευθύ πρόβλημα λύνεται απεμπλεγμένη από τις υπόλοιπες εξισώσεις ροής και την εξίσωση του μοντέλου τύρβης (εδώ του μοντέλου μιας εξίσωσης των Spalart-Allmaras), στο συζυγές πρόβλημα παραμένει πεπλεγμένη με τη συζυγή εξίσωση της ορμής καθώς και τη συζυγή εξίσωση του μοντέλου τύρβης. Η διατύπωση των συζυγών εξισώσεων λαμβάνοντας υπόψη την ενεργειακή εξίσωση αποτελεί το πρώτο στοιχείο πρωτοτυπίας της παρούσας διατριβής. Το πεδίο εφαρμογής της μεθόδου περιλαμβάνει κυρίως αγωγούς καθώς και εναλλάκτες θερμότητας. Η μείωση των απωλειών λόγω συνεκτικότητας και η αύξηση της μεταφοράς θερμότητας αποτελούν τις συναρτήσεις-στόχους των εφαρμογών. Από τις εφαρμογές συμπεραίνεται ότι η μέθοδος μπορεί να υπολογίσει παραγώγους ευαισθησίας με υψηλή ακρίβεια. Από τη διερεύνηση της επίδρασης των νέων όρων που εμφανίζονται στις συζυγείς εξισώσεις της ορμής και του μοντέλου τύρβης λόγω της προσθήκης της εξίσωσης της ενέργειας στο σύστημα των εξισώσεων κατάστασης, συμπεραίνεται ότι οι όροι αυτοί συμβάλλουν στη διατήρηση της ακρίβειας των παραγώγων ευαισθησίας

και, συνεπώς, κρίνεται σκόπιμο να χρησιμοποιούνται.

Στοχεύοντας σε μείωση του υπολογιστικού κόστους μιας διαδικασίας βελτιστοποίησης, παράλληλα με την κλασική αιτιοκρατική μέθοδο βελτιστοποίησης η οποία περιλαμβάνει, σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, πρώτα την επίλυση των εξισώσεων ροής, μετά αυτήν των συζυγών εξισώσεων και, στο τέλος, την ανανέωση των μεταβλητών ελέγχου/σχεδιασμού βάσει των υπολογισθειςών παραγώγων ευαισθησίας, προγραμματίστηκε και παρουσιάζεται η επονομασθείσα “συγχρονισμένη επαναληπτική τεχνική επίλυσης” (one-shot technique). Η τεχνική αυτή βασίζεται στην ταυτόχρονη ανανέωση του ευθέος και συζυγούς πεδίου ροής καθώς και των μεταβλητών ελέγχου/σχεδιασμού και οδηγεί σε ταχύτερη εύρεση της βέλτιστης λύσης σε σχέση με την απεμπλεγμένη επαναληπτική διαχείριση/επίλυση αυτών. Με στόχο την περαιτέρω μείωση του υπολογιστικού κόστους, ο ίδιος αλγόριθμος της τεχνικής one-shot είναι πλέον προγραμματισμένος και σε επεξεργαστές καρτών γραφικών (GPUs), κάνοντας χρήση της σχετικής τεχνογνωσίας προγραμματισμού που ταυτόχρονα αναπτύσσεται από συναδέλφους στη ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ. Επιλύοντας προβλήματα βελτιστοποίησης μέσω αιτιοκρατικών μεθόδων, της συζυγούς one-shot τεχνικής, σε κάρτες γραφικών, επιτυγχάνεται αισθητή μείωση του πραγματικού χρόνου υλοποίησης της βελτιστοποίησης.

Παράλληλα με τη βελτιστοποίηση μορφής, η διατριβή επεκτείνεται και σε προβλήματα βελτιστοποίησης τοπολογίας στη μηχανική των ρευστών. Με τον όρο βελτιστοποίηση τοπολογίας νοείται η διαδικασία αναζήτησης της βέλτιστης (ως προς συγκεκριμένη συνάρτηση-στόχο) τοπολογίας της ροής (λ.χ. μορφής αγωγών και των διακλαδώσεών τους) σε ένα ευρύ χωρίο σχεδιασμού. Αυτό υλοποιείται ορίζοντας ένα πεδίο εικονικού “πορώδους” (σε διακριτή μορφή, κάθε κόμβος του πλέγματος φέρει, πέραν των μεγεθών της ροής, και μια τιμή του μεγέθους “πορώδες”) όπου ώστε αφού με βάση τις τοπικές τιμές πορώδους “στερεοποιηθεί” τμήμα του χωρίου, το απομένον τμήμα να αποτελεί το βέλτιστο (ως προς τα ίδια κριτήρια) αγωγό ροής. Στη βελτιστοποίηση τοπολογίας, οι τιμές του πορώδους σε κάθε σημείο-κόμβο του υπολογιστικού χωρίου καθορίζουν τις περιοχές στερεού και ρευστού και αποτελούν τις μεταβλητές ελέγχου του προβλήματος βελτιστοποίησης. Συνεπώς, οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι πολύ μεγάλου πλήθους (όσοι και οι κόμβοι του υπολογιστικού πλέγματος) και η συζυγής μέθοδος αποτελεί τη ενδεικνυόμενη τεχνική επίλυσης του σχετικού προβλήματος βελτιστοποίησης. Στην παρούσα διατριβή αναπτύχθηκε αλγόριθμος και προγραμματίστηκε λογισμικό βελτιστοποίησης τοπολογίας για προβλήματα στρωτής και τυρβώδους ροής ασυμπίεστου ρευστού με μεταφορά θερμότητας. Η διατύπωση των εξισώσεων της ροής και των συζυγών εξισώσεων για στρωτές και τυρβώδεις ροές με μεταφορά θερμότητας, στις οποίες μέσω νέων όρων εισάγεται η επίδραση του πορώδους, παρουσιάζεται για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία. Για την περίπτωση των τυρβωδών ροών, οι διατυπώσεις αυτές καλύπτουν την περίπτωση χρήσης μοντέλων τύρβης χαμηλών αριθμών Reynolds. Με την εισαγωγή του πορώδους στην εξίσωση του μοντέλου τύρβης επιτυγχάνεται ακριβέστερος καθορισμός του στερεού τοιχώματος κατά τη διάρκεια των κύκλων βελτιστοποίησης (λόγω του ακριβέστερου υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας). Ο αλγόριθμος εφαρμόζεται για την εύρεση της βέλτιστης τοπολογίας δικτύου αγωγών. Σε προβλήματα με περισσότερες από μία εξόδους της ροής, αναγκαία είναι η επιβολή περιορισμών, αντιπροσωπευτικών με αυτούς που συναντά κανείς σε

---

---

βιομηχανικές εφαρμογές, όπως λ.χ. περιορισμοί ως προς την ποσόστωση παροχής μάζας και/ή τη μέση θερμοκρασία της ροής σε κάθε έξοδο.

Όσον αφορά στις στοχαστικές μεθόδους βελτιστοποίησης και έχοντας ως στόχο την επίλυση μεγάλης κλίμακας (άρα και μεγάλου κόστους) προβλημάτων βελτιστοποίησης, με όσο το δυνατό χαμηλότερο υπολογιστικό κόστος, η διατριβή ασχολείται με τη σύζευξη ενός ασύγχρονου εξελικτικού αλγορίθμου (AEA, Asynchronous Evolutionary Algorithm), που αναπτύχθηκε στη διδακτορική διατριβή της Β. Ασούτη, με μία μέθοδο τοπικής ανίχνευσης. Πρόκειται, ουσιαστικά, για μια σύνθετη μέθοδο βελτιστοποίησης η οποία συνδυάζει στοχαστικές και αιτιοκρατικές τεχνικές ανίχνευσης και η οποία εντάσσεται στις λεγόμενες “υβριδικές μεθόδους βελτιστοποίησης” ή, ειδικότερα, στους λεγόμενους μιμητικούς αλγορίθμους. Με τον προτεινόμενο υβριδισμό, εκμεταλλευόμαστε την προηγηθείσα ανάπτυξη συζυγών μεθόδων και λογισμικού για τη διεκπεραίωση της διαδικασίας τοπικής ανίχνευσης με τη μέθοδο απότομης καθόδου. Ο ασύγχρονος εξελικτικός αλγόριθμος παρουσιάζει ιδιαίτερα πλεονεκτήματα λόγω της κατάργησης της έννοιας της γενιάς, μεγιστοποιώντας με αυτόν τον τρόπο την εκμετάλλευση των διαθέσιμων επεξεργαστών. Ο υβριδισμός του AEA με μία μέθοδο τοπικής ανίχνευσης οδήγησε στην ανάπτυξη ενός ασύγχρονου μιμητικού αλγορίθμου υποστηριζόμενου από μεταπρότυπα (AMAMA, Asynchronous Metamodel-Assisted Memetic Algorithm), υπερτερεί σε απόδοση του AEA και παρουσιάζεται για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία.

Στο νέο αυτόν αλγόριθμο, στην περίπτωση πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης, κάθε άτομο που έχει ήδη αξιολογηθεί και εντάσσεται στο μέτωπο των μη-κυριαρχούμενων λύσεων προωθείται για περαιτέρω βελτίωση με τη μέθοδο τοπικής ανίχνευσης. Η μέθοδος τοπικής ανίχνευσης απαιτεί τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας, την ανανέωση του ατόμου μέσω ενός βήματος της μεθόδου απότομης καθόδου και την επαναξιολόγηση του νέου ατόμου, το οποίο, κατά περίπτωση, εκτοπίζει ή όχι το αρχικό στον τρέχοντα πληθυσμό. Για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας χρησιμοποιήθηκε η προαναφερθείσα συζυγής μέθοδος. Ειδικά στην πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση, προτείνεται ένας νέος τρόπος, χαμηλού κόστους, για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας στο μιμητικό αλγόριθμο ώστε να επιλύονται οι συζυγείς εξισώσεις μία φορά σε κάθε αξιολόγηση και όχι τόσες φορές όσες και οι στόχοι. Αυτό επιτυγχάνεται με τη σύνθεση των στόχων σε μία βαθμωτή συνάρτηση με κατάλληλη επιλογή των συντελεστών βαρύτητας. Ο χειρισμός αυτός αποτελεί ένα ακόμη στοιχείο πρωτοτυπίας της διατριβής. Ο AMAMA εφαρμόζεται-πιστοποιείται σε αγωγούς, εναλλάκτες θερμότητας και πτερυγώσεις στροβιλομηχανών, όπου συμπεραίνεται ότι η εισαγωγή της μεθόδου τοπικής ανίχνευσης στον AEA μειώνει ακόμα περισσότερο το υπολογιστικό κόστος για την εύρεση της βέλτιστης λύσης.

Ο ασύγχρονος εξελικτικός αλγόριθμος χρησιμοποιήθηκε επίσης για τη βελτιστοποίηση συστημάτων μεταφοράς θερμότητας, όπως μονάδων παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας με χρήση γεωθερμίας και γεωθερμικών αντλιών θερμότητας. Όσον αφορά στις μονάδες παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, ο σχεδιασμός και η ανάπτυξη μιας πρότυπης μονάδας οργανικού κύκλου Rankine (Organic Rankine Cycle), χρησιμοποιώντας γεωθερμικά πεδία χαμηλής ενθαλπίας, αποτέλεσαν βασικό στόχο του έργου LOW-BIN, (Efficient Low Temperature Geothermal Binary Power (FP6)), του οποίου συντονι-

---

στής ήταν το ΚΑΠΕ (Κέντρο Ανανεώσιμων Πηγών Ενέργειας και Εξοικονόμησης). Η συμμετοχή της ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ, όπως αποτυπώνεται και στην παρούσα διατριβή, έγκειται στην παροχή τεχνογνωσίας ως προς τις μεθόδους βελτιστοποίησης για το σχεδιασμό μιας τέτοιας μονάδας με στόχο τη μεγιστοποίηση του βαθμού απόδοσης και την ελαχιστοποίηση του κόστους κατασκευής της. Η εκμετάλλευση γεωθερμικών πεδίων χαμηλής ενθαλπίας ( $65^{\circ}\text{C} < T < 90^{\circ}\text{C}$ ) καθιστά απαραίτητη την ανάπτυξη και τη βελτιστοποίηση της τεχνολογίας του οργανικού κύκλου Rankine. Στο πλαίσιο της βελτιστοποίησης του οργανικού κύκλου Rankine εντάσσεται η διερεύνηση για τον εντοπισμό του βέλτιστου οργανικού ρευστού καθώς και των βέλτιστων τύπων των εναλλακτών θερμότητας που χρησιμοποιούνται στον κύκλο. Για την επιλογή του βέλτιστου οργανικού μέσου, τα οργανικά μέσα τα οποία δοκιμάστηκαν είναι το R-134a, R-410A, R-407C και το R-600a, ενώ όσον αφορά στους εναλλάκτες θερμότητας συγκρίνονται πλακοειδείς εναλλάκτες και εναλλάκτες κελύφους-αυλών. Στο πλαίσιο του έργου LOW-BIN, μετά την ανάπτυξη της τεχνολογίας οργανικού κύκλου για χαμηλή ενθαλπία, κατασκευάστηκε, εγκαταστάθηκε και λειτουργεί μία πρότυπη μονάδα χρησιμοποιώντας το γεωθερμικό πεδίο της πόλης Simbach στη Γερμανία αποδίδοντας 200kWe ηλεκτρικής ενέργειας. Η δεύτερη εφαρμογή στο πεδίο της γεωθερμίας αφορά στο σχεδιασμό βέλτιστων γεωθερμικών αντλιών θερμότητας κάνοντας χρήση του ΑΕΑ. Στο πλαίσιο του έργου GROUND-MED, (Advanced Ground Source Heat Pump Systems for Heating and Cooling in Mediterranean (FP7)), του οποίου συντονιστής είναι το ΚΑΠΕ, η ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ, διά της παρούσας διατριβής, συνέβαλε στο σχεδιασμό βέλτιστων γεωθερμικών αντλιών θερμότητας με στόχους τη μεγιστοποίηση της απόδοσης και, ταυτόχρονα, την ελαχιστοποίηση της επιφάνειας των εναλλακτών.

---



# Designing Thermo-Fluid Systems using Gradient-based Optimization Methods and Evolutionary Algorithms

Evgenia A. Kontoleontos

PhD Thesis

National Technical University of Athens (NTUA)  
School of Mechanical Engineering  
Laboratory of Thermal Turbomachines (LTT)  
Parallel CFD & Optimization Unit (PCOpt)

Supervisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, 2012

## Abstract

This PhD thesis focuses on the development of optimization methods for the design of thermo-fluid systems based on criteria related to fluid mechanics and/or heat transfer. This thesis is concerned with the continuous adjoint method, as the basic component of gradient-based optimization methods and evolutionary algorithms, which are stochastic population-based search methods. The hybridization of gradient-based and stochastic methods is also presented. Regarding the adjoint methods, in addition to shape optimization, a new topology optimization method for CFD applications with or without heat transfer is presented. Thus far, the optimization methods developed in the context of previous PhD theses in PCOpt/LTT was used along with objective functions related to the aerodynamic performance of the systems, without laying emphasis on heat transfer effects. In this PhD thesis, objective functions in which heat transfer plays an important role are used. Therefore, the application domain, apart from turbomachinery applications, extends to the design of heat transfer systems, such as geothermal power plants, ground source heat pump systems and the design of some key components of them, such as heat exchangers.

The developed adjoint methods are based on the continuous adjoint formulation proposed in a previous PhD thesis (A. Zymaris, NTUA), where, for the first time in the literature, the continuous adjoint to the turbulence model equation(s) was presented so as to compute exact sensitivity derivatives in case of turbulent flows. The present thesis extends this method to incompressible flows with heat transfer, by

---

focusing on the accuracy of the computed sensitivity derivatives. For this purpose, the formulation of the continuous adjoint equations for incompressible flows with the addition of the energy equation is presented. Regarding the formulation of the adjoint problem, the resulting adjoint momentum and turbulence model equation (here, the Spalart-Allmaras one) are coupled to the energy equation, even though the primal ones are decoupled to the energy one. The first point of novelty of this thesis is the continuous adjoint method for incompressible flows with heat transfer, which is presented for the first time. The method is applied mainly to ducts and heat exchangers. The objective functions take into account viscous losses and exchanged heat.

In the present PhD thesis, emphasis is laid to the reduction of the computational cost of the optimization procedure. In standard gradient-based optimization methods, within each cycle, the flow and the adjoint equations are solved in a segregated manner, followed by the shape update using the gradient of the objective function. Over and above, this thesis presents the one-shot optimization technique, applied to the aforementioned problems. The one-shot technique is based on the simultaneous solution of the flow, adjoint and shape correction equations and reduces the overall computational cost. In order to further reduce the turnaround time of the optimization, the one-shot algorithm was ported on NVIDIA Graphics Processing Units (GPUs), by using the PCOpt/LTT's experience in programming on GPUs. The gain from the use of the one-shot is superimposed to the gain in efficiency due to the use of GPUs.

Apart from shape optimization, the present thesis is extended to topology optimization problems in fluid mechanics and heat transfer. In fluid mechanics, topology optimization is used for designing flow passages, connecting predefined inlets and outlets, with optimal performance based on selected criteria. A variable porosity field, to be determined during the optimization, is the means to define the optimal topology. The computation of a real-valued porosity field must be performed over an extended domain. Based on local porosity values, parts of the domain can be solidified and the remaining areas define the optimal flow passage. In topology optimization, the porosity values at each node of the computational grid stands for the design variables. Since the number of design variables is equal to the number of nodes, which depending to the problem might be very high, the adjoint method is the, by far, most appropriate optimization technique. In the present thesis, a topology optimization algorithm for incompressible, laminar and turbulent flow problems including heat transfer, was developed. The formulation of the primal and adjoint equations for laminar and turbulent flows with heat transfer, by introducing new porosity dependent terms, is presented for the first time in the literature. In turbulent flows, the formulation is developed for low-Reynolds number turbulence model. The topology optimization algorithm is used for the design of ducts/manifolds for minimum total pressure losses and/or maximum temperature rise between the outlet from and the inlet to the domain. In the topology optimization of manifolds with more than one outlets, constraints similar to those used in industrial applications are imposed. Among them, constraints on the desirable volume flow rate per outlet

---

section and/or on the mean temperature of the outgoing flow, are worked out.

Regarding the stochastic optimization methods, aiming at the solution of computationally demanding optimization problems, the present PhD thesis is concerned with the combined use of an Asynchronous Evolutionary Algorithm (AEA), which was initially presented in a previous PhD thesis (V. Asouti, NTUA) together with a gradient-based method. With the proposed hybridization, the developed adjoint methods and software are being used as local search tools. The AEA is a non-generation-based algorithm, which, as such, maximizes the exploitation of the available computational resources. The hybridization of the AEA with a local search method gave rise to a new asynchronous metamodel-assisted memetic algorithm (AMAMA), which performs better than AEA. When this new algorithm is used to solve multi-objective optimization problems, all individuals that enter the current front of non-dominated individuals are automatically selected to undergo local search. The local search method includes the computation of the objective function gradient with respect to the design variables, the refinement of the individual using steepest-descent and the re-evaluation of the refined individual, which may displace or not the current individual.

In multi-objective optimization problems, in order to further reduce the CPU cost, a new scheme for the computation of the sensitivity derivatives in the memetic algorithm, according to which the adjoint equations are solved only once, instead of as many times as the objectives, is proposed. This scheme is based on the synthesis of the objectives into a scalar function multiplied by appropriate coefficients. The latter is another novelty of this PhD thesis. The proposed algorithm is used to optimize heat exchangers and turbomachinery cascades. It is concluded that the implementation of local search which transformed the AEA to an asynchronous memetic algorithm further reduces the computational cost of the optimization.

The AEA was also used for the optimization of heat transfer systems, such as geothermal power plants and ground source heat pump systems. Regarding the geothermal power plants, the design and the development of an Organic Rankine Cycle (ORC) prototype, using low temperature geothermal resources, was the main goal of the European project LOW-BIN (Efficient Low Temperature Geothermal Binary Power, FP6). CRES (Centre for Renewable Energy Sources and Saving, Greece) was the coordinator of this project and the contribution of PCOpt/LTT, as reflected in this thesis, was to provide expertise on optimization methods for the design of an efficient, low-cost ORC. The exploitation of low temperature geothermal fields ( $65^{\circ}\text{C} < T < 90^{\circ}\text{C}$ ) requires the development and optimization of organic Rankine cycle technologies. During the ORC optimization, the research focused on the identification of the optimal organic fluid and the optimal heat exchanger types. Regarding the organic fluids, the purpose was to choose among R-134a, R-410A, R-407C and R-600a. On the other hand, flat plate and shell-and-tube heat exchangers were compared. The project resulted in the manufacturing and installation of an ORC prototype for low temperature geothermal resources. This produces 200kWe using the geothermal field at Simbach in Germany. The second application in the field of geothermal energy is concerned with the design of ground source

---

heat pump systems (GSHPs) using the AEA. In the European project GROUND-MED (Advanced Ground Source Heat Pump Systems for Heating and Cooling in Mediterranean, FP7), coordinated by CRES, PCOpt/LTT through this thesis, contributed to the desing of optimal GSHPs with maximum efficiency and miminum heat exchangers' surface.

## Αντί προλόγου

Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε όλους όσους συνετέλεσαν στην ολοκλήρωση της παρούσας διατριβής. Κατ' αρχήν, ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα της παρούσας διατριβής Καθηγητή ΕΜΠ Κ. Γιαννάκογλου, ο οποίος με επιμονή και υπομονή, με επέβλεψε, καθοδήγησε και υποστήριξε σε όλη τη διάρκεια της διατριβής. Επίσης, θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για τη διάθεση σημαντικού μέρους του χρόνου του τόσο κατά τη φάση ανάπτυξης των μεθόδων όσο και κατά τη φάση της συγγραφής της διατριβής καθώς και των σχετικών ερευνητικών δημοσιεύσεων. Επιπλέον θέλω να τον ευχαριστήσω για τη δυνατότητα που μου έδωσε να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα καθώς και για τις γνώσεις που απέκτησα κατά την παραμονή μου στο Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών.

Στη συνέχεια, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής, τον ομότιμο καθηγητή ΕΜΠ Γ. Μπεργελέ και τον καθηγητή ΕΜΠ Κ. Μαθιουδάκη, για την εμπιστοσύνη που μου έδειξαν με την ανάθεση της διατριβής, τις εύστοχες παρατηρήσεις τους σχετικά με την εργασία και τις υποδείξεις για την παρουσίασή της. Ευχαριστώ, επίσης, τα υπόλοιπα μέλη της επταμελούς εξεταστικής επιτροπής, Επ. Καθηγητή ΕΜΠ Ι. Αναγνωστόπουλο, Αν. Καθηγητή ΕΜΠ Σ. Βουτσινάς, Καθηγητή ΕΜΠ Γ. Τζαμπίρας και Καθηγητή ΕΜΠ Σ. Τσαγγάρη για την τιμή που μου κάνουν να συμμετάσχουν σε αυτή.

Σημαντική και απαραίτητη ήταν επίσης η συμβολή όλων των μελών της ερευνητικής ομάδας της Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης, Δρ. Δ. Παπαδημητρίου, Δρ. Π. Λιακόπουλο, Δρ. Β. Ασούτη, Δρ. Χ. Γεωργοπούλου, Δρ. Ι. Καμπόλη, Δρ. Α. Ζυμάρη, Δρ. Θ. Ζερβογιάννη, Ξ. Τρομπούκη, Σ. Κυριάκου, Ε. Παπουτσή, Κ. Τσιάκα και Ι. Καββαδία, στη δημιουργία ευχάριστου κλίματος συνεργασίας. Ειδικότερα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Δρ. Δ. Παπαδημητρίου και τον Δρ. Α. Ζυμάρη για την υποστήριξη που μου παρείχαν κατά την έναρξη της ενασχόλησής μου με τις συζυγείς μεθόδους, τις πολύτιμες συμβουλές τους και τη δημιουργική συνεργασία όλα αυτά τα χρόνια. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τη Δρ. Β. Ασούτη για την υποστήριξή της τόσο σε θέματα υπολογιστικής ρευστοδυναμικής όσο και σε θέματα εξελικτικών αλγορίθμων καθώς και για την εξαιρετική συνεργασία μας. Θερμά ευχαριστώ τους υποψήφιους Διδάκτορες της ερευνητικής ομάδας του εργαστηρίου, τον Ξ. Τρομπούκη, που ολοκληρώνει τη διατριβή του στην αριθμητική επίλυση προβλημάτων αεροδυναμικής και αεροελαστικότητας σε επεξεργαστές καρτών γραφικών, για την καθημερινή επικοινωνιακή συνεργασία που είχαμε όλα αυτά τα χρόνια και τον Ε. Παπουτσή για τη συνεργασία μας σε θέματα βελτιστοποίησης τοπολογίας.

Τέλος, θέλω να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες προς το Κέντρο Ανανεώσιμων Πηγών Ενέργειας και Εξοικονόμησης (ΚΑΠΕ) το οποίο υποστήριξε οικονομικά την παρούσα διατριβή δίνοντάς μου τη δυνατότητα να πραγματοποιήσω την παρούσα έρευνα. Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Δρ. Κ. Καρύτσα για την πολύτιμη υποστήριξή του παρέχοντάς μου τα μέσα να εφαρμόσω τις αναπτυχθείσες μεθόδους σε πραγματικές εφαρμογές στον τομέα της γεωθερμίας. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους συναδέλφους του τμήματος Γεωθερμίας του ΚΑΠΕ για την εξαιρετική συνεργασία και τις γνώσεις που μοιράστηκαν μαζί μου.



# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1	Μέθοδοι Βελτιστοποίησης σε προβλήματα θερμο-ρυστοδυναμικής- Συμβολή της διατριβής . . . . .	2
1.2	Δομή της διατριβής . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων ασυμπίεστης ροής με μεταφορά θερμότητας</b>	<b>9</b>
2.1	Οι εξισώσεις του ασυμπίεστου ρευστού . . . . .	9
2.2	Ιδιαιτέρες και ιδιοδιανύσματα του μητρώου $A_T$ . . . . .	12
2.3	Διακριτοποίηση του διανύσματος ροής . . . . .	13
2.4	Υπολογισμός ψευδοχρονικού βήματος . . . . .	16
2.5	Μέθοδος αριθμητικής επίλυσης . . . . .	16
2.6	Μοντελοποίηση της τύρβης και της μεταφοράς θερμότητας . . . . .	17
2.7	Το σύστημα των εξισώσεων . . . . .	18
2.8	Πιστοποίηση του λογισμικού επίλυσης . . . . .	19
2.8.1	Στρωτή ροή σε 2Δ πτερύγωση . . . . .	19
2.8.2	Τυρβώδης ροή γύρω από μεμονωμένη αεροτομή . . . . .	20
2.8.3	Τυρβώδης ροή με μεταφορά θερμότητας σε 2Δ αγωγό . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Η συνεχής συζυγής μέθοδος για ασυμπίεστες στρωτές ροές με μεταφορά θερμότητας</b>	<b>27</b>
3.1	Βιβλιογραφική Επισκόπηση . . . . .	27
3.2	Η διατύπωση του συζυγούς προβλήματος . . . . .	30
3.3	Χρησιμοποιούμενες συναρτήσεις-στόχοι . . . . .	34
3.4	Οι συζυγείς εξισώσεις . . . . .	36
3.5	Οι συζυγείς οριακές συνθήκες . . . . .	38
3.5.1	Συζυγείς οριακές συνθήκες εισόδου . . . . .	38
3.5.2	Συζυγείς οριακές συνθήκες εξόδου . . . . .	38
3.5.3	Συζυγείς οριακές συνθήκες στερεού τοιχώματος . . . . .	39
3.6	Έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας . . . . .	40
3.7	Πιστοποίηση της ακρίβειας υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας . . . . .	41
3.7.1	Αγωγός με στροφή $90^\circ$ . . . . .	42
3.7.2	Αγωγός εναλλάκτη κελύφους/αυλών . . . . .	42

<b>4</b>	<b>Η συζυγής μέθοδος για ασυμπίεστες τυρβώδεις ροές με μεταφορά θερμότητας- One-shot παραλλαγή και πιστοποίηση</b>	<b>47</b>
4.1	Η διατύπωση του συζυγούς προβλήματος . . . . .	47
4.2	Οι συζυγείς εξισώσεις . . . . .	52
4.3	Οι συζυγείς οριακές συνθήκες . . . . .	53
4.3.1	Συζυγείς οριακές συνθήκες εισόδου . . . . .	53
4.3.2	Συζυγείς οριακές συνθήκες εξόδου . . . . .	54
4.3.3	Συζυγείς οριακές συνθήκες στερεού τοιχώματος . . . . .	54
4.4	Έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας . . . . .	55
4.5	Πιστοποίηση της ακρίβειας των παραγώγων ευαισθησίας . . . . .	56
4.5.1	Αγωγός με στροφή $90^\circ$ . . . . .	57
4.5.2	Αγωγός εναλλάκτη κελύφους/αυλών . . . . .	57
4.5.3	2Δ πτερύγωση στροβίλου . . . . .	58
4.6	Βελτιστοποίηση με χρήση της τεχνικής one-shot . . . . .	64
4.6.1	Σχεδιασμός αγωγού με στροφή $90^\circ$ . . . . .	65
4.6.2	Σχεδιασμός βέλτιστου εναλλάκτη θερμότητας . . . . .	67
<b>5</b>	<b>Βελτιστοποίηση τοπολογίας με τη συζυγή μέθοδο</b>	<b>73</b>
5.1	Εξισώσεις της ροής . . . . .	78
5.2	Συναρτήσεις-στόχοι . . . . .	79
5.3	Οι συναρτήσεις των περιορισμών . . . . .	80
5.4	Διατύπωση των συζυγών εξισώσεων . . . . .	81
5.5	Οι συζυγείς εξισώσεις . . . . .	83
5.6	Οι συζυγείς οριακές συνθήκες . . . . .	84
5.7	Έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας . . . . .	85
5.8	Αλγόριθμος βελτιστοποίησης τοπολογίας . . . . .	85
5.9	Εφαρμογές . . . . .	88
5.9.1	Επανασχεδιασμός βέλτιστου αγωγού τύπου $S$ . . . . .	88
5.9.2	Σχεδιασμός δικτύου αγωγών με μεταφορά θερμότητας . . . . .	98
<b>6</b>	<b>Ασύγχρονοι Μιμητικοί Αλγόριθμοι</b>	<b>109</b>
6.1	Βιβλιογραφική επισκόπηση . . . . .	110
6.2	Γενικευμένος (μ,λ) ΕΑ . . . . .	113
6.2.1	Ορισμός Προβλήματος Βελτιστοποίησης . . . . .	113
6.2.2	Περιγραφή του (μ,λ) ΕΑ . . . . .	113
6.2.3	Διαχείριση προβλημάτων πολλών στόχων . . . . .	115
6.2.4	Διαχείριση περιορισμών . . . . .	116
6.3	Ο Ασύγχρονος ΕΑ (ΑΕΑ)-Περιγραφή . . . . .	117
6.4	Ο Ασύγχρονος Μιμητικός Αλγόριθμος . . . . .	120
6.4.1	Πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση μέσω του AMAMA . . . . .	121
6.5	Πιστοποίηση-Εφαρμογές . . . . .	125
6.5.1	Μαθηματικές Συναρτήσεις . . . . .	125
6.5.2	Σχεδιασμός βέλτιστης 2Δ πτερύγωσης συμπίεστη . . . . .	129
6.5.3	Σχεδιασμός βέλτιστου εναλλάκτη θερμότητας . . . . .	137



---

<b>7</b>	<b>Σχεδιασμός βέλτιστων συστημάτων μεταφοράς θερμότητας – Εφαρμογές Γεωθερμίας</b>	<b>143</b>
7.1	Σχεδιασμός βέλτιστων κύκλων ηλεκτροπαραγωγής με χρήση γεωθερμίας	144
7.1.1	Κύκλοι ηλεκτροπαραγωγής με χρήση γεωθερμίας . . . . .	144
7.1.2	Διαδικός κύκλος - Ανάπτυξη της τεχνολογίας για γεωθερμικά πεδία χαμηλής ενθαλπίας . . . . .	145
7.1.3	Διατύπωση του προβλήματος . . . . .	147
7.1.4	Αποτελέσματα βελτιστοποίησης . . . . .	161
7.1.5	Μία πρότυπη μονάδα δυαδικού κύκλου . . . . .	169
7.2	Σχεδιασμός βέλτιστων γεωθερμικών αντλιών θερμότητας . . . . .	173
7.2.1	Διατύπωση του προβλήματος . . . . .	174
7.2.2	Αποτελέσματα βελτιστοποίησης . . . . .	176
<b>8</b>	<b>Συμπεράσματα</b>	<b>179</b>
8.1	Στοιχεία πρωτοτυπίας της διατριβής . . . . .	182
8.2	Προτάσεις για μελλοντική έρευνα . . . . .	183
<b>A'</b>	<b>Υπολογισμός του συντελεστή μεταφοράς θερμότητας</b>	<b>185</b>
A'.1	Γενικές συσχετίσεις των συντελεστών μεταφοράς θερμότητας . . . . .	185
A'.1.1	Εξάτμιση-Πλακοειδής Εναλλάκτης . . . . .	185
A'.1.2	Συμπύκνωση-Πλακοειδής Εναλλάκτης . . . . .	186
A'.1.3	Συμπύκνωση-Εναλλάκτης κελύφους-αυλών . . . . .	187
A'.2	R-134a-Ακριβείς συσχετίσεις . . . . .	187
A'.2.1	Εξάτμιση-Πλακοειδής Εναλλάκτης . . . . .	187
A'.2.2	Συμπύκνωση-Πλακοειδής Εναλλάκτης . . . . .	188
A'.3	R-410a-Ακριβείς συσχετίσεις . . . . .	188
A'.3.1	Εξάτμιση-Πλακοειδής Εναλλάκτης . . . . .	188
A'.3.2	Συμπύκνωση-Πλακοειδής Εναλλάκτης . . . . .	188

---



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Σκοπός της παρούσας διατριβής είναι η ανάπτυξη νέων μεθόδων βελτιστοποίησης, κατάλληλων για εφαρμογές στο πεδίο της θερμο-ρυστοδυναμικής. Οι μέθοδοι οι οποίες παρουσιάζονται έχουν ως βάση τις συνεχείς συζυγείς μεθόδους (adjoint methods) (ως τη βασική συνιστώσα αιτιοκρατικών μεθόδων βελτιστοποίησης, όπου αυτές είναι εφαρμόσιμες) και τους εξελικτικούς αλγόριθμους (στοχαστικές πληθυσμιακές μεθόδους βελτιστοποίησης), ενώ επιχειρείται και η συνεργατική χρήση των δύο αυτών μεθόδων με τη δημιουργία ενός υβριδικού σχήματος βελτιστοποίησης. Όσον αφορά στις συζυγείς μεθόδους, πέραν των εφαρμογών βελτιστοποίησης μορφής όπου οι μεταβλητές σχεδιασμού αποτελούν συνήθως τις συντεταγμένες σημείων ελέγχου παραμετρικών καμπυλών που ελέγχουν το σχήμα του σχεδιαζόμενου σώματος, παρουσιάζεται και μία νέα διαδικασία βελτιστοποίησης τοπολογίας για θερμο-ρυστοδυναμικά προβλήματα, η οποία στοχεύει πλέον στην εύρεση της βέλτιστης τοπολογίας της ροής και όχι του βέλτιστου παραμετροποιημένου σχήματος.

Στα επόμενα κεφάλαια που πραγματεύονται τη συνεισφορά της παρούσας διατριβής στην περιοχή της ανάπτυξης των συζυγών μεθόδων παρουσιάζεται η σχετική βιβλιογραφική επισκόπηση και εντοπίζονται τα στοιχεία πρωτοτυπίας της παρούσας διατριβής. Πέραν τούτου, αξίζει να τοποθετηθεί η παρούσα διατριβή στο πλαίσιο της σχετικής έρευνας που πραγματοποιείται στη Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρυστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης (ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ). Έτσι, μέχρι τώρα, το πεδίο εφαρμογής των μεθόδων βελτιστοποίησης, που έχουν αναπτυχθεί σε προηγούμενες διατριβές στη ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ, περιελάμβανε συναρτήσεις-στόχους οι οποίες αφορούσαν κυρίως στην αεροδυναμική απόδοση συστημάτων ή συνιστωσών τους, χωρίς να δίνεται έμφαση στη μεταφορά θερμότητας. Στην παρούσα διατριβή, το πεδίο εφαρμογής των μεθόδων συμπεριλαμβάνει συναρτήσεις-στόχους στις οποίες υπεισέρχεται η μεταφορά θερμότητας. Ως εκ τούτου, το πεδίο εφαρμογής των μεθόδων, εκτός των στροβιλομηχανών, επεκτείνεται επίσης στη βελτιστοποίηση συστημάτων μεταφοράς θερμότητας καθώς και σημαντικών συνιστωσών αυτών των συστημάτων. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι μέθοδοι βελτιστοποίησης που παρουσιάζονται στην παρούσα διατριβή καλύπτουν, εκτός από τη θερμο-ρυστοδυναμική βελτιστοποίηση (λ.χ. συζυγείς μέθοδοι), προβλήματα από διαφορετικές επιστημονικές περιοχές. Ειδικότερα, οι εξελικτικοί αλγόριθμοι, όπως εξελίσσονται στην παρούσα διατριβή, εφαρμόζονται μεταξύ

άλλων, και σε προβλήματα σχεδιασμού βέλτιστων συστημάτων παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας με χρήση γεωθερμίας και γεωθερμικών αντλιών θερμότητας. Οι αλγόριθμοι αυτοί μπορούν να εφαρμοστούν και σε κάθε άλλο πρόβλημα αρκεί να είναι διαθέσιμο το σχετικό λογισμικό αξιολόγησης. Στο εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο ακολουθεί μία σύντομη αναφορά στο θέμα των μεθόδων βελτιστοποίησης στη μηχανική των ρευστών. Επιμέρους επισκοπήσεις και αναφορές σε εργασίες άλλων, παρουσιάζονται στις εισαγωγικές ενότητες των επιμέρους κεφαλαίων. Το κεφάλαιο 1 κλείνει με μία συνοπτική παρουσίαση της δομής της διατριβής.

## 1.1 Μέθοδοι Βελτιστοποίησης σε προβλήματα θερμο-ρευστοδυναμικής- Συμβολή της διατριβής

Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης διακρίνονται σε δύο βασικές κατηγορίες, τις αιτιοκρατικές και τις στοχαστικές. Ο κύριος άξονας της παρούσας διατριβής κινείται γύρω από τις αιτιοκρατικές μεθόδους βελτιστοποίησης, όπως αυτές χρησιμοποιούνται για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης μορφής αλλά και τοπολογίας. Επιπλέον χρησιμοποιούνται για τον υβριδισμό στοχαστικών μεθόδων βελτιστοποίησης, πάντα στο πλαίσιο εφαρμογών θερμο-ρευστοδυναμικής. Οι αιτιοκρατικές μέθοδοι απαιτούν τον υπολογισμό της κλίσης της συνάρτησης-στόχου, μέσω της οποίας επιχειρείται η διαρκής βηματική αναβάθμιση μιας αρχικής λύσης. Οι βασικές μέθοδοι αναζήτησης, οι οποίες χρησιμοποιούν την κλίση της συνάρτησης-στόχου για την εύρεση της βέλτιστης λύσης, είναι η μέθοδος της απότομης καθόδου, των συζυγών κλίσεων και η μέθοδος Newton στις διάφορες παραλλαγές της, [102, 151]. Βασική προαπαιτήση των αιτιοκρατικών μεθόδων είναι ο υπολογισμός της κλίσης της συνάρτησης-στόχου. Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών, η οποία απαιτεί πλήθος επιλύσεων των εξισώσεων της ροής ανάλογο του πλήθους των μεταβλητών σχεδιασμού, προκειμένου να υπολογίσει την κλίση της συνάρτησης-στόχου, είναι αρκετά χρονοβόρα ώστε να χρησιμοποιηθεί ως “εργαλείο” υπολογισμού των κλίσεων. Αντιθέτως, η συζυγής μέθοδος, η οποία πρωτοεμφανίστηκε το 1984, [122], σε προβλήματα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης, και συγκεκριμένα δυναμικών ροών, είναι ανεξάρτητη του αριθμού των μεταβλητών σχεδιασμού και το κόστος της επίλυσης των συζυγών εξισώσεων σχεδόν ισοδυναμεί με το κόστος επίλυσης των εξισώσεων της ροής. Αργότερα, η συζυγής μέθοδος αναπτύσσεται για τις εξισώσεις Euler του συμπιεστού ρευστού, [69], και επεκτείνεται στη συνέχεια στις συνεκτικές ροές, [71], και σε μη-δομημένα πλέγματα, [11], για το σχεδιασμό 2D και 3D μορφών σε προβλήματα εξωτερικής αεροδυναμικής και στροβιλομηχανών, [114, 111, 112]. Ανάλογα με τον τρόπο σχηματισμού των συζυγών εξισώσεων διακρίνονται δύο είδη συζυγών μεθόδων, οι συνεχείς και οι διακριτές. Οι συζυγείς εξισώσεις, βάσει της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, προκύπτουν από τις εξισώσεις της ροής πριν αυτές διακριτοποιηθούν ενώ οι διακριτές συζυγείς εξισώσεις σχηματίζονται από τις ήδη διακριτοποιημένες εξισώσεις της ροής. Η σχετική βιβλιογραφική επισκόπηση παρουσιάζεται στο σχετικό με τις συζυγείς τεχνικές κεφάλαιο.

Η ανάπτυξη των συζυγών μεθόδων στη ΜΠΤΡ&Β/ΕΘΣ αποτυπώνεται σε μια σειρά δημοσιεύσεων και σε δύο διδακτορικές διατριβές, [140, 143]. Στην περίπτωση των τυρβωδών ροών και όσον αφορά στη συνεχή συζυγή μέθοδο, η διατριβή [143] και οι εργασίες [166, 167] διατυπώνουν πρώτες τις συνεχείς συζυγείς εξισώσεις για τα χρησιμοποιούμενα μοντέλα τύρβης, αποφεύγοντας τη συνήθη παραδοχή της βιβλιογραφίας, η οποία αμελεί τις μεταβολές των μεταβλητών των μοντέλων τύρβης ως προς τις μεταβολές των μεταβλητών σχεδιασμού. Όσον αφορά στην ανάπτυξη των συζυγών μεθόδων για την επίλυση προβλημάτων με κριτήρια που σχετίζονται με τη θερμο-ρευστοδυναμική απόδοση των σχεδιαζόμενων συστημάτων, αξίζει να σημειωθεί ότι η βιβλιογραφία περιορίζεται σε ελάχιστες εργασίες με εφαρμογές συμπίεστου ρευστού με μεταφορά θερμότητας. Βασικός σκοπός της παρούσας διατριβής είναι η ανάπτυξη συζυγών μεθόδων για την επίλυση προβλημάτων ασυμπίεστης ροής με μεταφορά θερμότητας σε μη-δομημένα πλέγματα, οι οποίες να αποτελέσουν τη βάση για τη χρήση τους στη βελτιστοποίηση μορφής και τοπολογίας. Για το λόγο αυτό, η διατριβή επικεντρώνεται στη διατύπωση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου σε ασυμπίεστες στρωτές και τυρβώδεις ροές με μεταφορά θερμότητας. Όσον αφορά στη βελτιστοποίηση μορφής, οι συζυγείς αυτές μέθοδοι χρησιμοποιούνται σε σχήμα βελτιστοποίησης βασισμένο στην ταυτόχρονη ανανέωση του ευθέως και συζυγούς πεδίου ροής καθώς και των μεταβλητών σχεδιασμού. Η τεχνική αυτή ονομάζεται συγχρονισμένη επαναληπτική τεχνική επίλυσης (one-shot technique), [62, 61, 60], και μειώνει τον απαιτούμενο χρόνο για την εύρεση της βέλτιστης λύσης περίπου στο μισό σε σχέση με την “κλασική” αιτιοκρατική μέθοδο βελτιστοποίησης που περιλαμβάνει σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης πρώτα την επίλυση των εξισώσεων ροής, μετά αυτήν των συζυγών εξισώσεων και, στο τέλος, την ανανέωση των τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού.

Στην κατηγορία των στοχαστικών μεθόδων βελτιστοποίησης, οι εξελικτικοί αλγόριθμοι (ΕΑ) αποτελούν την πλέον διαδεδομένη πληθυσμιακή μέθοδο, η οποία αρχίζει να χρησιμοποιείται ευρέως στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση στη δεκαετία του 1990. Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι, λόγω της “οργανωμένης τυχαιότητας” με την οποία δημιουργούνται οι υποψήφιοι λύσεις, δεν απαιτούν, σε αντίθεση με τις αιτιοκρατικές μεθόδους βελτιστοποίησης, τη συνέχεια των συναρτήσεων-στόχων, ούτε την ύπαρξη λογισμικού υπολογισμού των κλίσεων αυτών ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Μόνη απαίτηση είναι η ύπαρξη ενός λογισμικού αξιολόγησης των υποψηφίων λύσεων, καθιστώντας με αυτό τον τρόπο τους ΕΑ άμεσα προσαρμόσιμους σε κάθε πρόβλημα βελτιστοποίησης, ανεξαρτήτως της διαθεσιμότητας ανοιχτού ή κλειστού λογισμικού αξιολόγησης. Οι ΕΑ έχουν ως στόχο την ανίχνευση των περιοχών με πιθανά ακρότατα οδηγώντας στην εύρεση του ολικού ακρότατου, αποφεύγοντας τον εγκλωβισμό σε τοπικά ακρότατα λόγω της στοχαστικότητας με την οποία εξερευνούν το πεδίο ορισμού. Ωστόσο, για την εύρεση της βέλτιστης λύσης, απαιτείται συνήθως μεγάλος αριθμός αξιολογήσεων ο οποίος αυξάνει τον υπολογιστικό χρόνο ειδικότερα στα προβλήματα της ρευστοδυναμικής, όπου το λογισμικό αξιολόγησης υλοποιεί τη χρονοβόρα επίλυση των εξισώσεων της ροής. Τα τελευταία χρόνια, εξαιτίας αυτού του υψηλού υπολογιστικού κόστους, ένα μεγάλο μέρος της σχετικής έρευνας κινείται στην κατεύθυνση της μείωσης του απαιτούμενου υπολογιστικού χρόνου των ΕΑ.

Οι βασικότεροι τρόποι αντιμετώπισης αυτού του προβλήματος συνοψίζονται στη

παραλληλοποίηση των ΕΑ, στη χρήση προσεγγιστικών προτύπων αξιολόγησης ή μετα-προτύπων και στην υβριδοποίησή τους με αιτιοκρατικές μεθόδους βελτιστοποίησης. Η παρούσα διατριβή κάνει χρήση και των τριών αυτών τεχνικών προτείνοντας έναν ΕΑ με ιδιαίτερα πλεονεκτήματα. Τα μεταπρότυπα χρησιμοποιούνται στους ΕΑ ως λογισμικά γρήγορης αλλά προσεγγιστικής προ-αξιολόγησης υποκαθιστώντας το χρονοβόρο “ακριβές” λογισμικό αξιολόγησης. Η αποδοτική χρήση των προσεγγιστικών προτύπων αξιολόγησης σε προβλήματα ενός ή περισσότερων στόχων αποτέλεσε το αντικείμενο προηγούμενης έρευνας στη ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ που αποτυπώνεται στις διδακτορικές διατριβές [150, 152, 147, 148], με στόχο τη βελτίωση της απόδοσης των ΕΑ. Από την άλλη, ο υβριδισμός των στοχαστικών μεθόδων με τις αιτιοκρατικές μεθόδους βελτιστοποίησης αποτελεί έναν τρόπο εκμετάλλευσης των πλεονεκτημάτων και των δύο μεθόδων. Η συνέργειά τους, [123, 42, 78, 167], οδηγεί στη δημιουργία ενός υβριδικού σχήματος, όπου οι ΕΑ χρησιμοποιούνται για τον εντοπισμό των περιοχών όπου υπάρχουν ακρότατα και, στη συνέχεια, οι αιτιοκρατικές μέθοδοι εκμεταλλεύονται αυτήν την πληροφορία εστιάζοντας σε αυτές τις περιοχές για τη λεπτομερή εύρεση των ακρότατων. Ένας τρόπος υβριδισμού τους παρουσιάζεται στις [78, 167, 150] μέσω του πολυεπίπεδου ιεραρχικού αλγορίθμου βελτιστοποίησης. Μία κατηγορία υβριδικών μεθόδων βελτιστοποίησης είναι οι μιμητικοί αλγόριθμοι (Memetic Algorithms, MA), [56, 106], οι οποίοι συνδυάζουν τις μεθόδους ολικής εξερεύνησης και τοπικής βελτίωσης. Κατά την παραλληλοποίηση των ΕΑ, μέσω της ταυτόχρονης αξιολόγησης των ατόμων μιας γενιάς σε διαφορετικούς επεξεργαστές, αναγνωρίστηκαν οι επιπτώσεις του συγχρονισμού (στο τέλος κάθε γενιάς), η οποία περιορίζει το κέρδος από την παράλληλη αξιολόγηση. Αυτό το πρόβλημα αντιμετωπίστηκε με τους ασύγχρονους εξελικτικούς αλγορίθμους (ΑΕΑ), [8, 12], οι οποίοι καταργούν τη γενιά και μεγιστοποιούν την εκμετάλλευση των διαθέσιμων υπολογιστικών πόρων. Σε προηγούμενη διατριβή στη ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ, [148], αναπτύχθηκε ένας νέος ασύγχρονος εξελικτικός αλγόριθμος (ΑΕΑ) υποβοηθούμενος από μεταπρότυπα. Στην παρούσα διατριβή, ο αλγόριθμος αυτός εμπλουτίζεται με αιτιοκρατικές μεθόδους βελτιστοποίησης και, συγκεκριμένα με τις συζυγείς μεθόδους που αναπτύσσονται εδώ, δημιουργώντας ένα νέο ασύγχρονο μιμητικό αλγόριθμο υποστηριζόμενο από μεταπρότυπα, ο οποίος παρουσιάζεται για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία.

Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης, οι οποίες έχουν παρουσιασθεί μέχρι στιγμής, χρονολογούνται από τις αρχές της δεκαετίας του 1990, όσον αφορά στους ΕΑ, [52, 98], όταν αρχίζει ουσιαστικά η εξάπλωσή τους και η χρήση τους στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση, ενώ η συζυγής μέθοδος πρωτοεμφανίστηκε σε προβλήματα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης το 1984, [122]. Αντιθέτως, η ιδέα της βελτιστοποίησης τοπολογίας στη μηχανική των ρευστών εμφανίζεται για πρώτη φορά μόλις πριν μία δεκαετία, και συγκεκριμένα το 2003, [22], εμπνευσμένη από τη χρήση της βελτιστοποίησης τοπολογίας στην περιοχή της μηχανικής στερεού σώματος. Από το 1988 χρησιμοποιείται η βελτιστοποίηση τοπολογίας για το σχεδιασμό μηχανικών δομών σε φόρτιση με στόχο την επίτευξη δομικής δυσκαμψίας ελαχιστοποιώντας την ελαστικότητα αυτών των δομών. Μέχρι σήμερα, η μέθοδος της βελτιστοποίησης τοπολογίας βρίσκει εφαρμογή σε διάφορους τομείς, όπως λ.χ. για την επίλυση προβλημάτων ακουστικής, [41, 40], οπτικής, [21, 72], καθώς και μικρο-ηλεκτρομηχανικών συστημάτων, [92]. Η βασική ιδέα της βελτιστοποίη-

σης τοπολογίας, τόσο στο μηχανική στερεού σώματος όσο και στη μηχανική των ρευστών, συνοψίζεται στη μη-χρήση παραμετροποίησης της μορφής, δεδομένου ότι δεν βασίζεται σε μία προκαθορισμένη γεωμετρία από την αρχή της βελτιστοποίησης, όπως συμβαίνει με τη βελτιστοποίηση μορφής. Αντιθέτως, η βελτιστοποίηση τοπολογίας, λ.χ. στη μηχανική ρευστών, μπορεί να ορισθεί ως η διαδικασία αναζήτησης βέλτιστων (ως προς συγκεκριμένη συνάρτηση-στόχο) σχηματισμών των πεδίων ροής σε ένα ευρύ χωρίο σχεδιασμού, απαλλαγμένων από περιορισμούς που θα επέβαλε η εκάστοτε μέθοδος παραμετροποίησης στην περίπτωση της βελτιστοποίησης μορφής. Η υλοποίηση της ιδέας αυτής πραγματοποιείται με την εισαγωγή της έννοιας του πορώδους σε κάθε κόμβο, υποδεικνύοντας ποιοι κόμβοι πρέπει να “στερεοποιηθούν” ώστε οι εναπομείναντες να δημιουργήσουν τη βέλτιστη διαδρομή της ροής. Δεδομένου ότι οι τιμές του πορώδους σε κάθε κόμβο του χωρίου αποτελούν τις μεταβλητές σχεδιασμού στη βελτιστοποίηση τοπολογίας, είναι προφανές ότι ο μεγάλος αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού επιβάλλει τη χρήση της συζυγούς μεθόδου. Οι πρώτες εφαρμογές της βελτιστοποίησης τοπολογίας με χρήση της συζυγούς μεθόδου εμφανίζονται στον τομέα της μηχανικής των ρευστών, σε ροές Stokes, [22, 54] και, στη συνέχεια, επεκτείνονται σε στρωτές ροές [54, 47, 104, 132], αναπτύσσοντας τη συνεχή και τη διακριτή μέθοδο. Το ενδιαφέρον της βιομηχανίας για τη βελτιστοποίηση τοπολογίας στη μηχανική ρευστών γίνεται εμφανές τα τελευταία χρόνια, ειδικότερα στην αυτοκινητοβιομηχανία, [76, 110, 109], δίνοντας έμφαση στην εύρεση της βέλτιστης τοπολογίας της ροής για τη δημιουργία, από την αρχή, αγωγών, [57]. Οι εργασίες αυτές αφορούν σε στρωτές και τυρβώδεις ροές χωρίς μεταφορά θερμότητας, αμελώντας μεταβολές της τυρβώδους συνεκτικότητας, ως προς το πορώδες σε κάθε σημείο του χωρίου. Η παρούσα διατριβή, μεταξύ άλλων, διευρύνει τη χρήση της βελτιστοποίησης τοπολογίας παρουσιάζοντάς την, για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία, για προβλήματα ασυμπίεστων τυρβωδών ροών με μεταφορά θερμότητας. Βασίζεται στον υπολογισμό των ακριβών κλίσεων της συνάρτησης-στόχου, διατυπώνοντας τις συνεχείς συζυγείς εξισώσεις του μοντέλου τύρβης Spalart-Allmaras και της εξίσωσης της ενέργειας.

Η χρήση των μεθόδων βελτιστοποίησης δεν περιορίζεται όμως μόνο σε εφαρμογές σχεδιασμού βέλτιστων συνιστωσών συστημάτων μεταφοράς θερμότητας, αλλά επεκτείνεται και στο σχεδιασμό των συστημάτων αυτών καθαυτών. Στην παρούσα διατριβή παρουσιάζεται ο σχεδιασμός-βελτιστοποίηση συστημάτων μεταφοράς θερμότητας, τα οποία χρησιμοποιούν τη γεωθερμική ενέργεια για παραγωγή είτε ηλεκτρικής ή θερμικής/ψυκτικής ενέργειας. Οι εφαρμογές αυτές αφορούν σε κύκλους παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας με χρήση γεωθερμίας χαμηλής ενθαλπίας καθώς και σε γεωθερμικές αντλίες θερμότητας για θέρμανση/ψύξη κτιρίων. Οι τεχνολογίες αυτές συγκεντρώνουν μεγάλο ενδιαφέρον, το οποίο επικεντρώνεται τόσο στην ανάπτυξη όσο και στη βελτιστοποίηση των σχετικών συστημάτων. Ως προς τα συστήματα ηλεκτροπαραγωγής με χρήση γεωθερμίας, οι τεχνολογίες για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας από υψηλής και μέσης ενθαλπίας γεωθερμικά ρευστά (θερμοκρασίας μεγαλύτερης από  $90^{\circ}\text{C}$ ) βρίσκονται πλέον σε επίπεδα ωριμότητας, λόγω της ομοιότητας τους με τους συμβατικούς κύκλους ηλεκτροπαραγωγής. Αντιθέτως, οι κύκλοι ηλεκτροπαραγωγής με γεωθερμικά ρευστά χαμηλής ενθαλπίας (θερμοκρασίας  $65 - 90^{\circ}\text{C}$ ) βασίζονται στην τεχνολογία του οργανικού κύκλου Rankine (Organic Rankine Cycle) και δεν χρησι-

μοποιούν το γεωθερμικό ατμό για εκτόνωση στο στρόβιλο, αλλά ένα οργανικό ρευστό στο οποίο μεταφέρεται μέρος της θερμότητας του γεωθερμικού ρευστού. Σήμερα, εξαιρώντας ελάχιστες πειραματικές μονάδες, δεν υπάρχουν μονάδες ηλεκτροπαραγωγής χαμηλής ενθαλπίας σε εμπορική λειτουργία, [26, 94]. Αυτό καθιστά ιδιαίτερα σημαντική την ανάπτυξη αυτής της τεχνολογίας καθώς και τη βελτιστοποίηση αυτών των συστημάτων. Η σπουδαιότητα της βελτιστοποίησης των συστημάτων ηλεκτροπαραγωγής με χαμηλής ενθαλπίας γεωθερμιά επιβεβαιώνεται ανατρέχοντας στα ερευνητικά έργα που χρηματοδοτούνται από την Ευρωπαϊκή Ένωση στον τομέα των ανανεώσιμων πηγών ενέργειας. Πιο συγκεκριμένα, τα περισσότερα ερευνητικά προγράμματα περιλαμβάνουν ως επιμέρους συνιστώσα τη βελτιστοποίηση των συστημάτων που πρόκειται να αναπτυχθούν. Η παρούσα διατριβή συνέβαλε στο σχεδιασμό βέλτιστων οργανικών κύκλων που λειτουργούν με χαμηλής ενθαλπίας γεωθερμιά με τη χρήση των ασύγχρονων ΕΑ, έχοντας ως στόχους τη μεγιστοποίηση της απόδοσης και την ελαχιστοποίηση του κόστους των συστημάτων αυτών. Η πραγματοποιηθείσα έρευνα σχετίζεται με το ευρωπαϊκό έργο LOW-BIN, Efficient Low Temperature Geothermal Binary Power, του οποίου συντονιστής ήταν το ΚΑΠΕ, το οποίο υποστηριζόμενο σε θέματα βελτιστοποίησης από τη ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ συνέβαλε, δια της παρούσας διατριβής, στο σχεδιασμό ενός βέλτιστου οργανικού κύκλου. Στόχος του έργου αυτού, εκτός από το σχεδιασμό βέλτιστων μονάδων, υπήρξε και η κατασκευή και λειτουργία μίας πρότυπης μονάδας ORC.

Ανάλογο ενδιαφέρον συγκεντρώνουν και οι Γεωθερμικές Αντλίες Θερμότητας. Ευρωπαϊκά έργα όπως το GROUNDHIT, Ground Coupled Heat Pumps of High Technology και το GROUND-MED, Advanced Ground Source Heat Pump Systems for Heating and Cooling in Mediterranean επεδίωξαν και συνεχίζουν να επιδιώκουν την ανάπτυξη νέων τεχνολογιών γεωθερμικών αντλιών θερμότητας, θέτοντας ως βασικό στόχο την αύξηση της απόδοσης των συστημάτων αυτών. Συγχρόνως, επιδιώκουν τη μείωση του κόστους τους, ώστε να αυξηθεί η ανταγωνιστικότητά τους και η διείσδυσή τους στις αγορές της βόρειας και κεντρικής Ευρώπης αλλά και των μεσογειακών χωρών. Η παρούσα διατριβή συνέβαλε στο σχεδιασμό βέλτιστων γεωθερμικών αντλιών θερμότητας με τη χρήση ασύγχρονων ΕΑ με στόχους τη μεγιστοποίηση του απόδοσης και την ελαχιστοποίηση του κόστους. Οι ΑΕΑ χρησιμοποιήθηκαν στο πλαίσιο του έργου GROUND-MED, του οποίου συντονιστής είναι το ΚΑΠΕ, για το σχεδιασμό βέλτιστων γεωθερμικών αντλιών θερμότητας για θέρμανση/ψύξη κτιρίων.

Η διατριβή ασχολείται εκτενώς με όλα τα παραπάνω. Εκτός από τη σύντομη αναφορά που προηγήθηκε, ο αναγνώστης μπορεί να βρει εκτενέστερη βιβλιογραφική επισκόπηση στα αντίστοιχα κεφάλαια.

## 1.2 Δομή της διατριβής

Ακολουθεί μία σύντομη παράθεση των περιεχομένων των κεφαλαίων της παρούσας διατριβής:

Στο κεφάλαιο 2 γίνεται αναφορά στις εξισώσεις ασυμπίεστης ροής για στρωτές και τυρβώδεις ροές με μεταφορά θερμότητας, οι οποίες επιλύονται κάνοντας χρήση



της τεχνικής της ψευδοσυμπιεστότητας. Επιπλέον, παρουσιάζεται αναλυτικά η διακριτοποίηση των εξισώσεων και η επίλυσή τους με μεθόδους χρονοπροέλασης. Οι όγκοι ελέγχου σχηματίζονται γύρω από τους κόμβους μη-δομημένου υπολογιστικού πλέγματος σύμφωνα με την κεντροκομβική διατύπωση της τεχνικής των πεπερασμένων όγκων. Το κεφάλαιο 2 καταλήγει με την πιστοποίηση του λογισμικού επίλυσης σε εφαρμογές στρωτής και τυρβώδους ροής με και χωρίς μεταφορά θερμότητας.

Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται η συνεχής συζυγής μέθοδος για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας σε προβλήματα ασυμπιεστων στρωτών ροών με μεταφορά θερμότητας. Το μεγαλύτερο τμήμα του κεφαλαίου ασχολείται με την ανάπτυξη του συζυγούς προβλήματος, διατυπώνοντας τις συζυγείς εξισώσεις, τις συζυγείς οριακές συνθήκες και την έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας για στρωτές ροές με μεταφορά θερμότητας. Δεδομένου ότι η παρούσα διατριβή επεκτείνει τη συζυγή μέθοδο σε ασυμπιεστες ροές με μεταφορά θερμότητας, κατά τη διατύπωση των συζυγών εξισώσεων συμπεριλαμβάνεται και η εξίσωση της ενέργειας. Στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι η πιστοποίηση της ακρίβειας των παραγώγων ευαισθησίας που υπολογίζονται με την προτεινόμενη συζυγή μέθοδο, επιδιώκοντας ταύτιση των παραγώγων αυτών με τις τιμές αναφοράς που προκύπτουν από τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Για το λόγο αυτό, το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την παρουσίαση εφαρμογών μεταφοράς θερμότητας οι οποίες κυρίως αποσκοπούν στη σύγκριση των παραγώγων ευαισθησίας. Συμπληρωματικά, στο κεφάλαιο 4 αρχικά παρουσιάζεται η διατύπωση του συζυγούς προβλήματος για ασυμπιεστες τυρβώδεις ροές με μεταφορά θερμότητας και συγκρίνονται οι υπολογιζόμενες παράγωγοι ευαισθησίας με τις παραγώγους αναφοράς καθώς και με τις παραγώγους που θα υπολόγιζε η συζυγής μέθοδος αμελώντας τη μεταβολή της τυρβώδους συνεκτικότητας. Τέλος, στο ίδιο κεφάλαιο παρουσιάζεται η ένταξη της συζυγούς μεθόδου σε βρόχο βελτιστοποίησης. Εκτός από την κλασική αιτιοκρατική μέθοδο βελτιστοποίησης, παρουσιάζεται και η “συγχρονισμένη επαναληπτική τεχνική επίλυσης” (one-shot technique). Δεδομένου ότι ο αλγόριθμος της τεχνικής one-shot και αυτός της κλασικής (απεμπλεγμένης) αιτιοκρατικής μεθόδου βελτιστοποίησης είναι πλέον προγραμματισμένος και σε επεξεργαστές καρτών γραφικών (GPUs), στις εφαρμογές που παρουσιάζονται, εκτός από το σχεδιασμό αυτό καθαυτό, δίνεται έμφαση στο κέρδος από την αισθητή μείωση του χρόνου βελτιστοποίησης λόγω της χρήσης της συζυγούς one-shot τεχνικής σε κάρτες γραφικών.

Το κεφάλαιο 5 επεκτείνει τη χρήση των συζυγών μεθόδων σε προβλήματα βελτιστοποίησης τοπολογίας στη μηχανική των ρευστών. Αρχικά παρατίθεται βιβλιογραφική επισκόπηση της βελτιστοποίησης τοπολογίας τόσο στη μηχανική των ρευστών όσο και στη μηχανική του στερεού σώματος, όπου πρωτοεμφανίστηκε, επισημαίνοντας τα πλεονεκτήματα της βελτιστοποίησης τοπολογίας σε σχέση με τη βελτιστοποίηση μορφής. Αμέσως μετά, παρουσιάζεται η προσθήκη νέων όρων που εξαρτώνται από το πορώδες στην εξίσωση της ενέργειας και στην εξίσωση του μοντέλου τύρβης, με στόχο την επέκταση της βελτιστοποίησης τοπολογίας σε προβλήματα τυρβωδών ροών με μεταφορά θερμότητας. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η μαθηματική διατύπωση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου για στρωτές και τυρβώδεις ροές με μεταφορά θερμότητας με στόχο τον υπολογισμό ακριβών παραγώγων ευαισθησίας των συναρτήσεων-στόχων ως προς το πορώδες. Τέλος, οι παράγωγοι αυτές χρησιμοποιούνται σε μια

σειρά από προβλήματα βελτιστοποίησης τοπολογίας με στόχο την εύρεση της βέλτιστης τοπολογίας δικτύων αγωγών, για στρωτές και τυρβώδεις ροές, με ή χωρίς μεταφορά θερμότητας.

Το κεφάλαιο 6 επικεντρώνεται στη χρήση των συζυγών μεθόδων που αναπτύχθηκαν στα δύο πρώτα κεφάλαια κατά τον υβριδισμό στοχαστικών και αιτιοκρατικών μεθόδων βελτιστοποίησης. Συγκεκριμένα, στο κεφάλαιο αυτό μετά τη βιβλιογραφική επισκόπηση των στοχαστικών μεθόδων βελτιστοποίησης, και ειδικότερα στους ΕΑ, παρουσιάζεται ένας νέος ασύγχρονος μιμητικός αλγόριθμος υποστηριζόμενος από μεταπρότυπα (A-MAMA, Asynchronous Metamodel Assisted Memetic Algorithm). Αυτός βασίζεται στον υβριδισμό του ασύγχρονου εξελικτικού αλγορίθμου (AEA, Asynchronous Evolutionary Algorithm) της ΜΠΥΡ&B/ΕΘΣ με τις συζυγείς μεθόδους που αναπτύσσονται στη διατριβή, με στόχο τη μείωση του χρόνου εύρεσης της βέλτιστης λύσης. Για το λόγο αυτό, αρχικά παρουσιάζεται ο ΑΕΑ και, στη συνέχεια, δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στον τρόπο με τον οποίο εντάσσεται η συζυγής μέθοδος στον ΑΕΑ για τη δημιουργία του προτεινόμενου μιμητικού αλγορίθμου. Ο νέος αυτός αλγόριθμος πιστοποιείται αρχικά σε μαθηματικές συναρτήσεις χαμηλού υπολογιστικού κόστους και, στη συνέχεια, στο σχεδιασμό- βελτιστοποίηση συνιστωσών συστημάτων, όπως εναλλακτών θερμότητας και πτερυγώσεων στροβιλομηχανών. Επιπλέον, δίνεται έμφαση στην πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση, όπου παρουσιάζεται μία νέα χαμηλού κόστους τεχνική για τον υπολογισμό των παραγώγων των συναρτήσεων-στόχων στο μιμητικό αλγόριθμο ώστε να επιλύονται οι συζυγείς εξισώσεις μία φορά και όχι τόσες φορές όσες και οι στόχοι.

Στο κεφάλαιο 7, ως συνέχεια του κεφαλαίου 6, παρουσιάζεται η χρήση του ΑΕΑ σε προβλήματα σχεδιασμού βέλτιστων συστημάτων μεταφοράς θερμότητας, με έμφαση στον τομέα της γεωθερμίας. Οι εφαρμογές αφορούν στη βελτιστοποίηση κύκλων παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας με χρήση γεωθερμίας (μονάδες οργανικού κύκλου Rankine) καθώς και γεωθερμικές αντλίες θερμότητας με στόχο τη μεγιστοποίηση του βαθμού απόδοσης και την ελαχιστοποίηση του κόστους κατασκευής των συστημάτων αυτών. Αρχικά παρουσιάζεται μία σύντομη περιγραφή του οργανικού κύκλου Rankine και των γεωθερμικών αντλιών θερμότητας και σχολιάζεται η σημασία βελτιστοποίησης των συστημάτων αυτών. Επιπλέον, στο ίδιο κεφάλαιο περιγράφονται οι αλγόριθμοι που δημιουργήθηκαν για την ανάλυση/αξιολόγηση αυτών των συστημάτων. Τέλος, παρουσιάζεται η διατύπωση κάθε σχετικού προβλήματος βελτιστοποίησης που πραγματοποιήθηκε, περιγράφοντας τις μεταβλητές σχεδιασμού και τους περιορισμούς που επιβάλλονται και τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης.

Τέλος, το κεφάλαιο 8 συνοψίζει τα συμπεράσματα της παρούσας διδακτορικής διατριβής.

## Κεφάλαιο 2

# Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων ασυμπίεστης ροής με μεταφορά θερμότητας

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται ο επιλύτης των εξισώσεων ασυμπίεστης ροής για στρωτές και τυρβώδεις ροές με μεταφορά θερμότητας, κάνοντας χρήση της τεχνικής της ψευδοσυμπιεστότητας. Επιπλέον, παρουσιάζεται η ανάπτυξη των εξισώσεων του ασυμπίεστου ρευστού, η διακριτοποίησή τους καθώς και η επίλυση τους με μεθόδους χρονοπροέλασης. Το παρόν κεφάλαιο καταλήγει με την πιστοποίηση του επιλύτη σε εφαρμογές στρωτής και τυρβώδους ροής με και χωρίς μεταφορά θερμότητας, μέσω της σύγκρισής του με αποτελέσματα άλλων αριθμητικών προλέξεων ή/και πειραματικών μετρήσεων.

### 2.1 Οι εξισώσεις του ασυμπίεστου ρευστού

Οι δύο βασικές τεχνικές οι οποίες συναντώνται στη βιβλιογραφία, για την επίλυση ασυμπίεστων ροών είναι η τεχνική της διόρθωσης πίεσης και η τεχνική της ψευδοσυμπιεστότητας. Στην εργασία [119], παρουσιάστηκε από τους Patankar, Spalding η τεχνική της διόρθωσης πίεσης, και, σύμφωνα με αυτήν, αρχικά επιλύονται οι εξισώσεις της ορμής για τον υπολογισμό του πεδίου της ταχύτητας με βάση ένα αρχικό πεδίο πίεσης. Στη συνέχεια, το πεδίο της πίεσης διορθώνεται για την ικανοποίηση της εξίσωσης της συνέχειας. Η πρόοδος, η οποία παρατηρήθηκε, στη δεκαετία του 1980, στην ανάπτυξη αριθμητικών μεθόδων για την επίλυση συμπίεστων ροών, έδωσε ώθηση στην ανάπτυξη των μεθόδων της ψευδοσυμπιεστότητας για την επίλυση ασυμπίεστων ροών. Η μέθοδος της ψευδοσυμπιεστότητας, αναπτύχθηκε από τον Chorin, [28], εισάγοντας έναν όρο τεχνητής συμπίεστότητας στην εξίσωση της συνέχειας, μέσω της ψευδοχρονικής παραγωγού της πίεσης. Με αυτό το τέχνασμα, η ελλειπτική-παραβολική φύση των εξισώσεων μετατρέπεται σε υπερβολική-παραβολική και έτσι “ελέγχεται” η σύζευξη των εξισώσεων συνέχειας και ορμής. Αυτή η τεχνική έδωσε τη δυνατότητα σε μεθόδους που χρησιμοποιούνταν ήδη στις συμπίεστες ροές να χρησιμοποιηθούν και στις ασυμπί-

εστες. Στην παρούσα διατριβή, προγραμματίστηκε επιλύτης ο οποίος βασίζεται στη μέθοδο της ψευδοσυμπίεστότητας. Οι εξισώσεις ασυμπίεστου ρευστού με την τεχνική της ψευδοσυμπίεστότητας, όπως αναπτύχθηκε από τον Chorin, [28], διατυπώνονται στη μορφή

$$\begin{aligned} R_p &= \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \\ R_{v_i} &= \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

όπου με  $p$  συμβολίζεται η στατική πίεση διαιρεμένη με την πυκνότητα  $\rho$ ,  $v_i$  είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας και  $\nu$  η κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού. Με  $\beta$  συμβολίζεται ο συντελεστής ψευδοσυμπίεστότητας και ο όρος  $\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial p}{\partial t}$  αντιστοιχεί στην ψευδοχρονική παράγωγο της πίεσης η οποία εισάγεται στην εξίσωση της συνέχειας. Ο συντελεστής  $\beta$ , [28, 120], παίζει σημαντικό ρόλο στην επιτάχυνση της σύγκλισης και στην ευστάθεια της μεθόδου.

Η μέθοδος της ψευδοσυμπίεστότητας επεκτείνεται το 1987 από τον Turkel, [154], προσθέτοντας χρονικές παραγώγους της πίεσης σε όλες τις εξισώσεις. Η εργασία [154] παρουσιάζει μία μελέτη των λεγόμενων μεθόδων προσταθεροποίησης για την επίλυση των ασυμπίεστων ροών, αλλά και των συμπίεστων σε χαμηλές ταχύτητες. Η προσθήκη τεχνητών χρονικών παραγώγων της πίεσης σε όλες τις εξισώσεις, και όχι μόνο στην εξίσωση της συνέχειας, επιτρέπει ταχύτερη σύγκλιση και ενιαία διαχείριση του συστήματος των εξισώσεων για τις συντηρητικές και μη-συντηρητικές μεταβλητές. Οι εξισώσεις της ροής, σε μη-συντηρητική μορφή, όπως προτείνεται από τον Turkel, γράφονται στη μορφή

$$\begin{aligned} R_p &= \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \\ R_{v_i} &= \frac{a v_i}{\beta^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

όπου, εκτός από το συντελεστή ψευδοσυμπίεστότητας  $\beta$ , εισάγεται ο συντελεστής  $a$  μέσω της προσθήκης των χρονικών παραγώγων της πίεσης στις εξισώσεις της ορμής. Στην παρούσα διδακτορική διατριβή επιλέγεται η ανάπτυξη και διακριτοποίηση του συστήματος των γενικότερων εξισώσεων 2.2. Σε αυτές βασίζεται και ο επιλύτης που προγραμματίστηκε. Σε περίπτωση που είναι επιθυμητή η επίλυση των εξισώσεων 2.1, επιλέγεται απλά  $a = 0$ . Το προσταθεροποιημένο σύστημα των εξισώσεων 2.2 σε συντηρητική μορφή γράφεται

$$\begin{aligned} R_p &= \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \\ R_{v_i} &= \frac{(a+1) v_i}{\beta^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial (v_i v_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Με αυτόν τον τρόπο, το σύστημα 2.3 λαμβάνει πλήρως συντηρητική μορφή, για τις χρονικά μόνιμες ροές. Το σύστημα των εξισώσεων 2.3 μπορεί να γραφεί σε συντηρητική διανυσματική μορφή ως

$$\Gamma^{-1} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}_i^{inv}}{\partial x_i} - \frac{\partial \vec{f}_i^{vis}}{\partial x_i} = 0 \quad (2.4)$$

όπου  $\vec{V}$  το διάνυσμα των μεταβλητών της ροής και  $\vec{f}_i^{inv}$ ,  $\vec{f}_i^{vis}$  τα διανύσματα των ατριβών και συννεκτικών ροών, αντίστοιχα. Για 2Δ ροές και καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, είναι

$$\vec{V} = \begin{Bmatrix} p \\ v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}, \vec{f}_1^{inv} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ p + v_1^2 \\ v_1 v_2 \end{Bmatrix}, \vec{f}_2^{inv} = \begin{Bmatrix} v_2 \\ v_1 v_2 \\ p + v_2^2 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{f}_1^{vis} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2\nu \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \\ \nu \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \end{Bmatrix}, \vec{f}_2^{vis} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \nu \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \\ 2\nu \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \end{Bmatrix}$$

Στην εξίσωση 2.4, ως  $\Gamma^{-1}$  εμφανίζεται ο αντίστροφος ενός μητρώου  $\Gamma$ , το οποίο ονομάζεται μητρώο προσταθεροποίησης (preconditioning matrix) και ο οποίος πολλαπλασιάζει τον ψευδοχρονικό όρο των εξισώσεων. Το μητρώο προσταθεροποίησης  $\Gamma$  καθώς και ο αντίστροφος του  $\Gamma^{-1}$ , όπως προκύπτουν από τη συντηρητική γραφή των εξισώσεων 2.3, είναι

$$\Gamma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta^2} & 0 & 0 \\ \frac{(a+1)v_1}{\beta^2} & 1 & 0 \\ \frac{(a+1)v_2}{\beta^2} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} \beta^2 & 0 & 0 \\ -(a+1)v_1 & 1 & 0 \\ -(a+1)v_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Πολλαπλασιάζοντας, αριστερά, με  $\Gamma$  την εξίσωση 2.4, αν θεωρήσουμε μόνο τους ατριβείς όρους, προκύπτει

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \Gamma \frac{\partial \vec{f}_i^{inv}}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \Gamma \frac{\partial \vec{f}_i^{inv}}{\partial \vec{V}} \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \Gamma A_i \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_i} = 0 \quad (2.6)$$

όπου  $A_i = \frac{\partial \vec{f}_i^{inv}}{\partial \vec{V}}$  είναι τα Ιακωβιανά μητρώα των ατριβών ροών, ενώ με  $A_{\Gamma_i} = \Gamma A_i$  συμβολίζονται τα προσταθεροποιημένα ιακωβιανά μητρώα, όπως φαίνεται στην εξίσωση 2.7.

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \Gamma A_i \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + A_{\Gamma_i} \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_i} = 0 \quad (2.7)$$

## 2.2 Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα του μητρώου $A_\Gamma$

Για την επίλυση των εξισώσεων της ροής είναι απαραίτητη η εύρεση των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων της ορίζουσας του προσταθεροποιημένου μητρώου  $A_\Gamma = A_{\Gamma_i} n_i$ , όπου  $n_i$  οι συνιστώσες του διανύσματος  $\vec{n}$ . Το μητρώο  $A_\Gamma$  ισούται με

$$A_\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & \beta^2 n_1 & \beta^2 n_2 \\ n_1 & -av_1 n_1 + v_n & -av_1 n_2 \\ n_2 & -av_2 n_1 & -av_2 n_2 + v_n \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

όπου  $v_n = v_i n_i$ . Το διαγώνιο μητρώο  $\Lambda$  των ιδιοτιμών  $\lambda_i$ , οι οποίες υπολογίζονται από τη σχέση  $|\lambda_i I - A_\Gamma| = 0$ , είναι το

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

με

$$\begin{aligned} \lambda_{1,3} &= \frac{1}{2} \left[ (1-a) v_n \pm \sqrt{(1-a)^2 v_n^2 + 4\beta^2} \right] \\ \lambda_2 &= v_n \end{aligned} \quad (2.10)$$

Τα μητρώα των ιδιοδιανυσμάτων,  $L$  και  $L^{-1}$ , τα οποία διαγωνοποιούν την ορίζουσα  $A_\Gamma$ , επιτρέποντας αυτή να γραφεί ως  $A_\Gamma = L \Lambda L^{-1}$ , περιέχουν τα δεξιά ιδιοδιανύσματα στηλών και τα αριστερά ιδιοδιανύσματα γραμμής του  $A$ , αντίστοιχα, και υπολογίζονται ως

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_2 n_1 & \lambda_2 n_2 \\ a(v_1 n_2 - v_2 n_1) & \beta^2 n_2 - av_2 v_n & -\beta^2 n_1 - av_1 v_n \\ 1 & \lambda_3 n_1 & \lambda_3 n_2 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} & 0 & \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3} \\ l_{21} & \frac{n_2}{\beta^2 - av_n^2} & l_{23} \\ l_{31} & -\frac{n_1}{\beta^2 - av_n^2} & l_{33} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

όπου

$$\begin{aligned}
l_{21} &= \frac{-a(v_1 n_2 - v_2 n_1) \lambda_3 n_2 + a v_1 v_n - \beta^2 n_1}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\beta^2 - a v_n^2)} \\
l_{23} &= \frac{a(v_1 n_2 - v_2 n_1) \lambda_2 n_2 - a v_1 v_n + \beta^2 n_1}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\beta^2 - a v_n^2)} \\
l_{31} &= \frac{a(v_1 n_2 - v_2 n_1) \lambda_3 n_1 + a v_2 v_n - \beta^2 n_2}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\beta^2 - a v_n^2)} \\
l_{33} &= \frac{-a(v_1 n_2 - v_2 n_1) \lambda_2 n_1 - a v_2 v_n + \beta^2 n_2}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\beta^2 - a v_n^2)}
\end{aligned}$$

## 2.3 Διακριτοποίηση του διανύσματος ροής

Για τη διακριτοποίηση του διανύσματος της ροής χρησιμοποιείται η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων με κεντροκομβική αποθήκευση των μεταβλητών της ροής, η οποία εφαρμόζεται σε μη-δομημένα και υβριδικά πλέγματα. Για την επίλυση 2Δ ροών το υπολογιστικό πλέγμα μπορεί να αποτελείται από τριγωνικά και τετραπλευρικά στοιχεία. Για την ολοκλήρωση των εξισώσεων της ροής απαιτείται ο ορισμός του όγκου ελέγχου. Η σχηματική απεικόνιση του όγκου ελέγχου γύρω από έναν κόμβο του πλέγματος φαίνεται στο σχήμα 2.1. Οι όγκοι ελέγχου γύρω από κάθε κόμβο σχηματίζονται από τα βαρύκεντρα των γύρω στοιχείων και τα μέσα των ακμών που συντρέχουν στον κόμβο. Οι προσταθεροποιημένες εξισώσεις 2.6 ολοκληρώνονται στον όγκο ελέγχου  $\Omega$  του κόμβου  $P$ ,

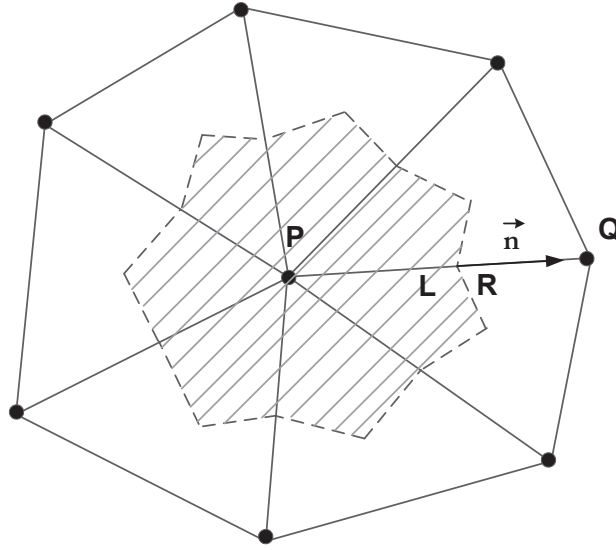
$$\int_{\Omega} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} d\Omega + \Gamma \int_{\Omega} \frac{\partial \vec{f}_i^{inv}}{\partial x_i} d\Omega = 0 \quad (2.13)$$

Όπως και στη διατριβή [148], όπου αναπτύχθηκε η τεχνική της προσταθεροποίησης χαμηλών αριθμών Mach στις συμπιεστές ροές, εισάγεται η πρώτη παραδοχή ότι το μητρώο  $\Gamma$  παραμένει εκτός του ολοκληρώματος στην εξίσωση 2.13 ώστε να διευκολυνθεί η εφαρμογή του θεωρήματος Green-Gauss. Αυτό παύει να είναι παραδοχή αν το μητρώο  $\Gamma$  είναι ανεξάρτητο των ροϊκών μεγεθών, αν δηλαδή  $a = -1$ . Εφαρμόζοντας το θεώρημα Green-Gauss, προκύπτει ότι

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} d\Omega + \Gamma \int_S \vec{f}_i^{inv} n_i dS = 0 \quad (2.14)$$

όπου  $S$  το όριο του όγκου ελέγχου  $\Omega$ . Γράφοντας σε διακριτή μορφή την εξίσωση 2.14 προκύπτει

$$\frac{\Omega_P}{\Delta t_P} \Delta \vec{V}_P + \Gamma_P \sum_{Q \in nei(P)} \vec{\Phi}_{PQ}^{inv} \Delta S = 0 \quad (2.15)$$



**Σχήμα 2.1:** Όγκος ελέγχου γύρω από τον κόμβο  $P$  σε  $2\Delta$  πλέγμα τριγωνικών στοιχείων. Με  $Q$  συμβολίζεται ένας γειτονικός κόμβος του κόμβου  $P$  και με  $\vec{n}$  το κάθετο διάνυσμα στον όγκο ελέγχου.

όπου  $Q$  ο κάθε γειτονικός κόμβος του  $P$  ( $Q \in nei(P)$ ) και  $\vec{\Phi}_{PQ}^{inv}$  το διάνυσμα ροής ανά μονάδα μήκους του κοινού ορίου δύο υπολογιστικών κυψελών, που ορίζονται γύρω από τους κόμβους  $P$  και  $Q$ .

Για τον υπολογισμό του διανύσματος της ατριβούς ροής χρησιμοποιείται ο μονοδιάστατος επιλύτης Riemann, [10, 139], όπου

$$\vec{\Phi}_{PQ}^{inv} = \frac{1}{2} \left[ \vec{H}^{inv}(\vec{V}_{PQ}^L, \vec{n}_{PQ}) + \vec{H}^{inv}(\vec{V}_{PQ}^R, \vec{n}_{PQ}) \right] - \frac{1}{2} |A_{PQ}| (\vec{V}_{PQ}^R - \vec{V}_{PQ}^L) \quad (2.16)$$

όπου  $|A_{PQ}|$  η Ιακωβιανή ορίζουσα για τις απόλυτες ιδιοτιμές υπολογιζόμενη με τις μέσες τιμές των μεταβλητών στο μεσόκομβο και  $\vec{H}^{inv} = \vec{f}_i^{inv} n_i$ . Τα  $\vec{V}_{PQ}^L$  και  $\vec{V}_{PQ}^R$  είναι τα διανύσματα των μεταβλητών ροής αριστερά και δεξιά της διεπιφάνειας, δηλαδή του μέσου του τμήματος  $PQ$ , αντίστοιχα, όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.1. Τα διανύσματα της ροής  $\vec{H}^{inv}(\vec{V}_{PQ}^L, \vec{n}_{PQ})$  και  $\vec{H}^{inv}(\vec{V}_{PQ}^R, \vec{n}_{PQ})$  δίνονται από τις σχέσεις

$$\vec{H}^{inv}(\vec{V}_{PQ}^L, \vec{n}_{PQ}) = A_P \vec{V}_P \quad (2.17)$$

$$\vec{H}^{inv}(\vec{V}_{PQ}^R, \vec{n}_{PQ}) = A_Q \vec{V}_Q \quad (2.18)$$

και η σχέση 2.16 ξαναγράφεται ως

$$\vec{\Phi}_{PQ}^{inv} = \frac{1}{2} [A_P \vec{V}_P + A_Q \vec{V}_Q] - \frac{1}{2} |A_{PQ}| (\vec{V}_{PQ}^R - \vec{V}_{PQ}^L) \quad (2.19)$$



Όπως και στη διατριβή [148], το διάνυσμα της ατριβούς ροής, εξίσωση 2.19, πολυπλασιάζεται με το μοναδιαίο μητρώο  $\Gamma^{-1}\Gamma$  και, υπό παραδοχές, δίνει την τελική έκφραση του διανύσματος της ατριβούς ροής

$$\begin{aligned}\vec{\Phi}_{PQ}^{inv} &= \frac{1}{2} [A_P \vec{V}_P + A_Q \vec{V}_Q] - \frac{1}{2} |\bar{\Gamma}_{PQ}^{-1} \bar{\Gamma}_{PQ} A_{PQ}| (\vec{V}_Q - \vec{V}_P) \\ &\simeq \frac{1}{2} [A_P \vec{V}_P + A_Q \vec{V}_Q] - \frac{1}{2} \bar{\Gamma}_{PQ}^{-1} |\bar{\Gamma}_{PQ} A_{PQ}| (\vec{V}_Q - \vec{V}_P) \\ &= \frac{1}{2} [A_P \vec{V}_P + A_Q \vec{V}_Q] - \frac{1}{2} \bar{\Gamma}_{PQ}^{-1} |A_{\Gamma PQ}| (\vec{V}_Q - \vec{V}_P)\end{aligned}\quad (2.20)$$

Λαμβάνοντας υπόψη και τη διακριτοποίηση του διανύσματος της συνεκτικής ροής, η εξίσωση 2.15 γράφεται

$$\frac{\Omega_P}{\Delta t_P} \Delta \vec{V}_P + \Gamma_P \sum_{Q \in nei(P)} \vec{\Phi}_{PQ}^{inv} \Delta S + \Gamma_P \sum_{T \in nei_T(P)} \vec{\Phi}_{P,T}^{vis} \Delta S = 0 \quad (2.21)$$

όπου  $nei_T(P)$  είναι το σύνολο των τριγώνων που περιβάλλουν τον όγκο ελέγχου  $\Omega_P$ .

Το διάνυσμα της συνεκτικής ροής  $\vec{\Phi}_{P,T}^{vis}$  υπολογίζεται με δύο τρόπους, ανάλογα με το είδος του πλέγματος. Σε πλέγματα τριγωνικών στοιχείων χρησιμοποιείται ο “ανά στοιχείο” υπολογισμός, υπολογίζοντας το διάνυσμα  $\vec{\Phi}_T^{vis}$  σε κάθε στοιχείο του πλέγματος. Αντίθετα, ο “ανά ακμή” υπολογισμός, ο οποίος είναι πιο γενικός, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για υβριδικά πλέγματα, σαρώνοντας τις ακμές του πλέγματος και αποδίδοντας τιμή στο διάνυσμα  $\vec{\Phi}_{PQ}^{vis}$  σε κάθε ακμή που συνδέει τους κόμβους  $P$  και  $Q$ . Για τον υπολογισμό των παραγώγων της ταχύτητας σύμφωνα με τον “ανά στοιχείο” υπολογισμό ισχύει

$$\left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_T = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial L_k}{\partial x_k} v_{i,k} \quad (2.22)$$

όπου  $L_k$  οι συναρτήσεις μορφής του κόμβου  $k$  του τριγώνου. Αντίστοιχα, η παράγωγος της ταχύτητας σε μία ακμή που συνδέει τους κόμβους  $P$  και  $Q$  δίνεται από τη σχέση

$$\left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{PQ} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_P + \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_Q \right] - \left[ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_P + \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_Q \right] n_j - \frac{v_i^Q - v_i^P}{|PQ|} \right] n_j \quad (2.23)$$

Περισσότερες λεπτομέρειες για τους τρόπους διακριτοποίησης του διανύσματος της συνεκτικής ροής παρουσιάζονται στις διατριβές [139, 144].

## 2.4 Υπολογισμός ψευδοχρονικού βήματος

Ο υπολογισμός του ψευδοχρονικού βήματος ολοκλήρωσης γίνεται και αυτός με δύο τρόπους, “ανά στοιχείο” και “ανά ακμή”, βρίσκοντας εφαρμογή σε πλέγματα με τριγωνικά στοιχεία και σε πλέγματα με οποιονδήποτε συνδυασμό στοιχείων, αντίστοιχα. Στην πρώτη περίπτωση ισχύει ότι, [139],

$$\Delta t_P = CFL \frac{h_T^2}{\lambda_{max} h_T + 2\frac{\nu}{Pr}} \quad (2.24)$$

όπου

$$\lambda_{max} = \frac{1}{2} \left[ (1-a) |\vec{v}| + \sqrt{(1-a)^2 |\vec{v}|^2 + 4\beta^2} \right]$$

όπου  $h_T$  το ελάχιστο ύψος του τριγωνικού στοιχείου, ενώ το  $\lambda_{max}$  αντιστοιχεί στη μέγιστη ιδιοτιμή. Με  $CFL$  συμβολίζεται ο αριθμός Courant-Friedrichs-Lewy, [30, 65, 66], ο οποίος πολλαπλασιάζει το χρονικό βήμα καθορίζοντας την τιμή του ώστε το σχήμα να είναι ευσταθές. Ο συντελεστής ψευδοσυμπίεστότητας  $\beta$  μέσω της ιδιοτιμής  $\lambda_{max}$  επηρεάζει την τιμή του ψευδοχρονικού βήματος συμβάλλοντας σημαντικά στην επιτάχυνση της σύγκλισης και στην ευστάθεια της μεθόδου.

Για τη δεύτερη περίπτωση, αντί του υπολογισμού του ψευδοχρονικού βήματος “ανά ακμή”, [75], ισχύει ότι

$$\Delta t_P = \frac{CFL \Omega_P}{\sum_i \lambda_{max} \Omega_{P_i} + 2\nu \frac{\Omega_P}{\sum_i \Omega_{P_i}}} \quad (2.25)$$

όπου  $\Omega_{P_i}$  οι προβολές του όγκου ελέγχου του κόμβου  $P$  κατά τις κατευθύνσεις  $q_i = 1, 2$ .

## 2.5 Μέθοδος αριθμητικής επίλυσης

Για την επίλυση των εξισώσεων της ροής χρησιμοποιείται το σημειακά πεπλεγμένο σχήμα. Σύμφωνα με αυτό και τη δέλτα διατύπωση, βάσει της οποίας υπολογίζεται η διόρθωση  $\Delta \vec{V}_P^{n+1}$  στο ψευδοχρονικό βήμα  $n+1$ , η εξίσωση 2.21 γράφεται στη μορφή

$$\frac{\Omega_P}{\Delta t_P} \Delta \vec{V}_P^{n+1} = -\vec{R}_{\Gamma_P}^n \quad (2.26)$$

όπου  $\vec{R}_{\Gamma_P}^{n+1}$  το υπόλοιπο των διακριτοποιημένων εξισώσεων της ροής, ενώ το  $\Delta \vec{V}_P^{n+1} = \vec{V}_P^{n+1} - \vec{V}_P^n$  αντιστοιχεί στη διόρθωση των μεταβλητών ανά ψευδοχρονικό βήμα  $n$ . Το υπόλοιπο των εξισώσεων ισούται με

$$\vec{R}_{\Gamma_P}^n = \Gamma_P \sum_{Q \in nei(P)} (\vec{\Phi}_{PQ}^{inv} - \vec{\Phi}_{PQ}^{vis}) \Delta S \quad (2.27)$$

και γράφεται συναρτήσει του υπολοίπου στο προηγούμενο βήμα  $n$  ως

$$\vec{R}_{\Gamma_P}^{n+1} = \vec{R}_{\Gamma_P}^n + \frac{\partial \vec{R}_{\Gamma_P}}{\partial \vec{V}} \Delta \vec{V}_P^{n+1} \quad (2.28)$$

Επομένως, η σχέση 2.26 γράφεται ως

$$\left( \frac{\Omega_P}{\Delta t_P} I_P + \left( \frac{\partial \vec{R}_{\Gamma_P}}{\partial \vec{V}} \right)_P \right) \Delta \vec{V}_P^{n+1} = -\vec{R}_{\Gamma_P}^n \quad (2.29)$$

όπου  $I_P$  το μοναδιαίο μητρώο, με μη-μηδενικές τιμές τις τιμές των στοιχείων στην κύρια διαγώνιο που αντιστοιχούν στον κόμβο  $P$ . Δεδομένου ότι ο όρος  $\left( \frac{\partial \vec{R}_{\Gamma_P}}{\partial \vec{V}} \right)_P$  αποτελείται από διαγώνια ( $D_P^n$ ) και μη-διαγώνια ( $Z_Q^n$ ) στοιχεία, τα οποία εκφράζουν την εμπλοκή των γειτόνων του κόμβου  $P$ , η εξίσωση 2.29 γράφεται

$$D_P^n \Delta \vec{V}_P^{n+1} + Z_Q^n \Delta \vec{V}_Q^{n+1} = -\vec{R}_{\Gamma_P}^n \quad (2.30)$$

η οποία επιλύεται επαναληπτικά με τη μέθοδο Jacobi, με  $j_{max}$  εσωτερικές επαναλήψεις, ως προς τη διόρθωση  $\Delta \vec{V}_P^{n+1}$ .

## 2.6 Μοντελοποίηση της τύρβης και της μεταφοράς θερμότητας

Για τη μοντελοποίηση της τύρβης στην παρούσα διατριβή χρησιμοποιείται το μοντέλο τύρβης μίας εξίσωσης των Spalart και Allmaras, [135], η οποία γράφεται ως

$$R_{\tilde{\nu}} = \frac{\partial(v_i \tilde{\nu})}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \nu + \frac{\tilde{\nu}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \right] - \frac{c_{b2}}{\sigma} \left( \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \right)^2 - \tilde{\nu} P(\tilde{\nu}) + \tilde{\nu} D(\tilde{\nu}) = 0 \quad (2.31)$$

όπου με  $\tilde{\nu}$  συμβολίζεται η μεταβλητή του μοντέλου τύρβης, από την οποία υπολογίζεται η τυρβώδης συνεκτικότητα

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1} \quad (2.32)$$

ενώ

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}, \quad \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu} \quad (2.33)$$

Οι όροι παραγωγής  $P(\tilde{\nu})$  και καταστροφής  $D(\tilde{\nu})$  της εξίσωσης 2.31 δίνονται από τις σχέσεις

$$P(\tilde{\nu}) = c_{b1}\tilde{S}, \quad D(\tilde{\nu}) = c_{w1}f_w \frac{\tilde{\nu}}{d^2} \quad (2.34)$$

όπου

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= Sf_{v3} + \frac{\tilde{\nu}}{d^2\kappa^2}f_{v2}, \quad S = |e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \vec{i}_i|, \quad f_{v2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\chi}{c_{v2}}\right)^3}, \\ f_{v3} &= \frac{1 + \chi f_{v1}}{c_{v2}} \left[ 3 \left(1 + \frac{\chi}{c_{v2}}\right) + \left(\frac{\chi}{c_{v2}}\right)^2 \right] \left(1 + \frac{\chi}{c_{v2}}\right)^{-3}, \quad f_w = g \left(\frac{1 + c_{w3}^6}{g + c_{w3}^6}\right)^{1/6}, \\ g &= r + c_{w2}(r^6 - r), \quad r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S}\kappa^2 d^2} \end{aligned}$$

με  $d$  την απόσταση κάθε κόμβου από τα στερεά τοιχώματα και  $S$  το μέτρο της στροβιλότητας. Οι σταθερές που εμφανίζονται στις παραπάνω σχέσεις λαμβάνουν τις τιμές

$$\begin{aligned} c_{b1} &= 0.1355, \quad c_{b2} = 0.622, \quad \kappa = 0.4187, \quad \sigma = \frac{2}{3}, \quad c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma}, \quad c_{w2} = 0.3, \\ c_{w3} &= 2, \quad c_{v1} = 7.1, \quad c_{v2} = 5 \end{aligned}$$

Για τη μοντελοποίηση της μεταφοράς θερμότητας σε ασυμπίεστες ροές επιλύεται αριθμητικά η εξίσωση της ενέργειας, [84], η οποία δίνεται από τη σχέση

$$R_T = \frac{\partial(v_i T)}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial x_i} \right] = 0 \quad (2.35)$$

όπου  $Pr = 0.71$  και  $Pr_t = 0.9$ , αντίστοιχα. Ο όρος  $\frac{\nu}{Pr}$  αντιστοιχεί στο συντελεστή θερμικής διάχυσης, ο οποίος συμβολίζεται με  $a_{diff}$ , όπου  $a_{diff} = \frac{\nu}{Pr} = \frac{k}{\rho c_p}$  με  $k$  την θερμική αγωγιμότητα και  $c_p$  το συντελεστή θερμοχωρητικότητας.

## 2.7 Το σύστημα των εξισώσεων

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, ενώ η διατύπωση, διακριτοποίηση και προγραμματισμός των εξισώσεων βασίστηκε στις προσταθεροποιημένες εξισώσεις 2.3, στις εφαρμογές που ακολουθούν επιλέγεται  $a = -1$ , καταλήγοντας στην κλασική τεχνική της ψευδοσυμπίεστης. Ως προς τον όρο που αντιστοιχεί στο συντελεστή ψευδοσυμπίεστης, επιλέγεται  $\beta^2 = 10$ . Το σύστημα των εξισώσεων που επιλύεται για τυρβώδεις ασυμπίεστες ροές με μεταφορά θερμότητας είναι το εξής

$$\begin{aligned}
R_p &= \beta^2 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \\
R_{v_i} &= v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] = 0 \\
R_{\tilde{v}} &= \frac{\partial (v_i \tilde{v})}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \nu + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} \right] - \frac{c_{b2}}{\sigma} \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} \right)^2 - \tilde{v} P(\tilde{v}) + \tilde{v} D(\tilde{v}) = 0 \\
R_T &= \frac{\partial (v_i T)}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial x_i} \right] = 0
\end{aligned} \tag{2.36}$$

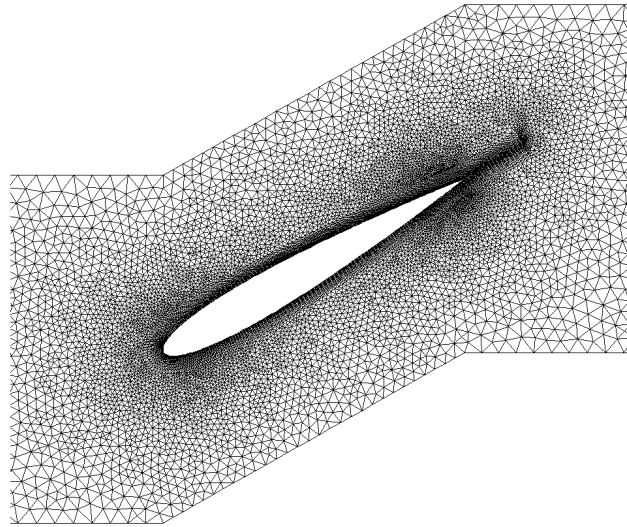
Σημειώνεται ότι η εξίσωση της ενέργειας δεν είναι πεπλεγμένη με τις εξισώσεις της ροής και, για αυτό το λόγο, αυτή μπορεί να λυθεί ανεξάρτητα από το σύστημα των υπολοίπων εξισώσεων ( $R_p = 0, R_{v_i} = 0, R_{\tilde{v}} = 0$ ), χρησιμοποιώντας απλά το πεδίο ταχύτητας και τυρβώδους συνεκτικότητας που υπολογίσθηκε από αυτές. Οι συνθήκες που “κλείνουν” το σύστημα των εξισώσεων στα όρια του πεδίου ροής είναι οι εξής: (α) στην είσοδο του πεδίου επιβάλλονται για την ταχύτητα, τη μεταβλητή  $\tilde{v}$  και τη θερμοκρασία συνθήκες τύπου Dirichlet και για τη στατική πίεση μηδενική Neumann συνθήκη (β) στην έξοδο του πεδίου, για την ταχύτητα, τη μεταβλητή  $\tilde{v}$  και τη θερμοκρασία επιβάλλεται μηδενική Neumann συνθήκη και για την πίεση μηδενική Dirichlet συνθήκη, και (γ) στα στερεά τοιχώματα δίνεται για την ταχύτητα και τη μεταβλητή  $\tilde{v}$  μηδενική Dirichlet συνθήκη, Dirichlet συνθήκη για τη θερμοκρασία και μηδενική Neumann συνθήκη για τη στατική πίεση.

## 2.8 Πιστοποίηση του λογισμικού επίλυσης με μεταφορά θερμότητας

Στόχος της ενότητας αυτής είναι η πιστοποίηση του λογισμικού επίλυσης των ασυμπίεστων ροών με μεταφορά θερμότητας. Έτσι, στις εφαρμογές που ακολουθούν παρουσιάζονται συγκρίσεις των αποτελεσμάτων του λογισμικού επίλυσης με άλλους υπολογισμούς από τη βιβλιογραφία ή πειραματικές μετρήσεις. Για λόγους πληρότητας, οι εφαρμογές αυτές περιλαμβάνουν στρωτές και τυρβώδεις ροές, με ή χωρίς μεταφορά θερμότητας.

### 2.8.1 Στρωτή ροή σε $2\Delta$ πτερύγωση

Η πρώτη εφαρμογή αφορά στην πρόλεξη στρωτής ασυμπίεστης ροής σε μία  $2\Delta$  πτερύγωση με αεροτομή NACA 0012. Ο αριθμός Reynolds της ροής που βασίζεται στη χορδή της αεροτομής ισούται με  $Re_c = 1000$ . Η πτερύγωση έχει γωνία κλίσης  $30^\circ$  και η γωνία πρόσπτωσης της ροής ισούται με  $\alpha_1 = 0^\circ$ . Το υπολογιστικό πλέγμα, με περίπου 11000 κόμβους και 22000 στοιχεία, γύρω από την πτερύγωση φαίνεται στο σχήμα 2.2. Η ροή γύρω από αυτή την πτερύγωση υπολογίσθηκε αρχικά από τους Rosenfeld και Wolfshtein, [127]. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την παρούσα

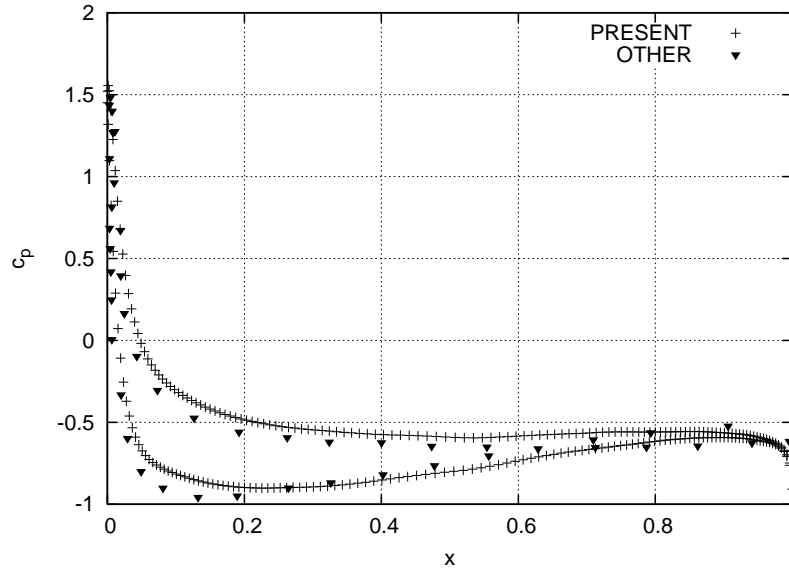


**Σχήμα 2.2:** Στρωτή ροή σε 2Δ περύγωση. Το υπολογιστικό πλέγμα του χωρίου κοντά στην αεροτομή της περύγωσης.

ανάλυση συγκρίνονται με τα αποτελέσματα της εργασίας [127]. Η σύγκριση αφορά στην κατανομή του συντελεστή πίεσης στην αεροτομή,  $c_p = \frac{p_T - \bar{p}_{in}}{\frac{1}{2}v_{1,in}^2}$ , όπου  $p_T$  η ολική πίεση,  $\bar{p}_{in}$  η μέση στατική πίεση στην είσοδο και  $v_{1,in}$  η αξονική ταχύτητα στην είσοδο. Στο σχήμα 2.3 παρουσιάζεται σύγκριση της κατανομής του συντελεστή πίεσης που προκύπτει από το λογισμικό επίλυσης που αναπτύχθηκε στην παρούσα διατριβή και τις προλέξεις των Rosenfeld και Wolfshtein. Όπως φαίνεται και από το σχήμα, η σύγκριση των αποτελεσμάτων είναι πολύ ικανοποιητική.

### 2.8.2 Τυρβώδης ροή γύρω από μεμονωμένη αεροτομή

Στην παρούσα εφαρμογή επιλύεται η ροή γύρω από τη μεμονωμένη αεροτομή NACA 0012 και συγκρίνεται με τα πειραματικά αποτελέσματα του Gregory, [53]. Στο σχήμα 2.4 φαίνεται λεπτομέρεια του υρβιδικού υπολογιστικού πλέγματος, με περίπου 14000 κόμβους και 28000 στοιχεία, γύρω από την περύγωση. Η ροή επιλύεται για δύο περιπτώσεις με τις εξής συνθήκες για τον αριθμό Reynolds και την επ' άπειρο γωνία ροής: (α)  $Re_\infty = 2.8 \times 10^6$  και  $\alpha_\infty = 0^\circ$ , (β)  $Re_\infty = 2.8 \times 10^6$  και  $\alpha_\infty = 6^\circ$ . Η σύγκριση των παρόντων αποτελεσμάτων με τα πειραματικά αφορά στο συντελεστή πίεσης κατά μήκος της αεροτομής, ο οποίος ορίζεται ως  $c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}v_\infty^2}$ , όπου  $p_\infty$  και  $v_\infty$  η στατική πίεση και ταχύτητα της επ' άπειρο ροής. Οι συγκρίσεις, οι οποίες παρουσιάζονται στο σχήμα 2.5, πιστοποιούν τα αποτελέσματα του λογισμικού επίλυσης που χρησιμοποιείται



**Σχήμα 2.3:** Στρωτή ροή σε 2Δ πτερύγωση ( $Re_c = 1000$ ,  $\alpha_1 = 0^\circ$ ). Σύγκριση της κατανομής του συντελεστή πίεσης υπολογισμένου με το λογισμικό επίλυσης της ροής της παρούσας διατριβής και τη μέθοδο της εργασίας [127].

στην παρούσα διατριβή.

### 2.8.3 Τυρβώδης ροή με μεταφορά θερμότητας σε 2Δ αγωγό

Η παρούσα εφαρμογή αφορά στην πρόλεξη της τυρβώδους ροής σε ένα 2Δ ευθύ αγωγό με μεταφορά θερμότητας. Στόχος της εφαρμογής είναι η πιστοποίηση του λογισμικού επίλυσης σε ροές με μεταφορά θερμότητας. Το ρευστό εισέρχεται σε ένα λείο αγωγό με θερμοκρασία  $T_{in} = 293K$ , ενώ τα στερεά τοιχώματα του αγωγού έχουν σταθερή θερμοκρασία  $T_{wall} = 353K$ . Για τον υπολογισμό του αριθμού Nusselt για τυρβώδεις ροές σε λείους αγωγούς η βιβλιογραφία προτείνει την εξίσωση Dittus-Boelter, [39],

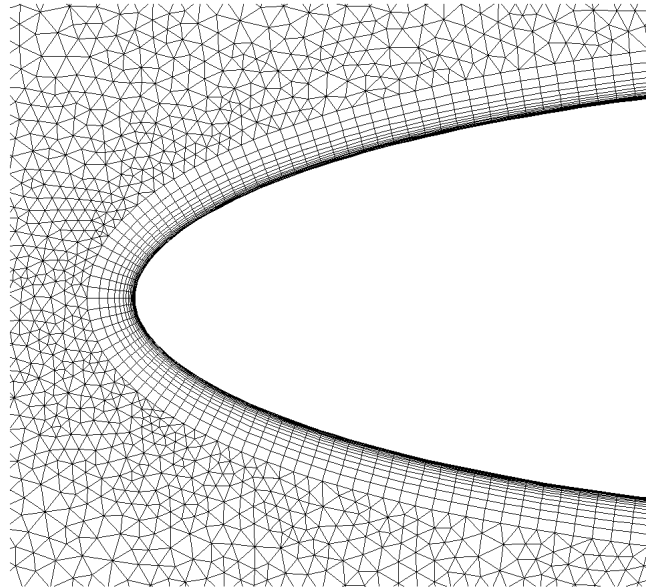
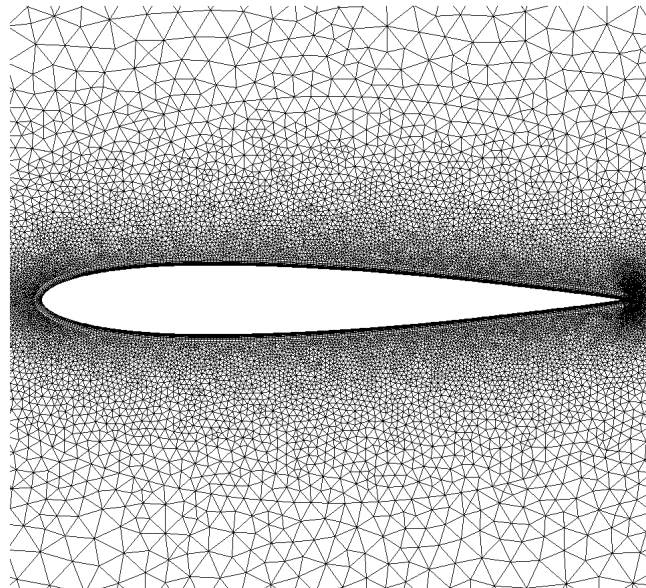
$$Nu = 0.023Re^{0.8}Pr^{0.4} \quad (2.37)$$

η οποία έχει προκύψει από πειραματικές μετρήσεις. Η συσχέτιση αυτή χρησιμοποιείται συνήθως για  $Re > 10000$  και αγωγούς με  $L/D > 10$ , όπου  $L$  το μήκος και  $D$  η διάμετρος του αγωγού. Όμως, στην πράξη, η συσχέτιση αυτή χρησιμοποιείται και για χαμηλότερους αριθμούς Reynolds υπολογίζοντας με ακρίβεια τον αριθμό  $Nu$  αρκεί η ροή να παραμένει τυρβώδης, [124, 133, 6]. Στην παρούσα εφαρμογή η ροή επιλύεται, με το αναπτυχθέν λογισμικό, για αριθμούς Reynolds στο διάστημα 3000–9000 υπολογίζοντας τους αντίστοιχους αριθμούς Nusselt, οι οποίοι συγκρίνονται στο σχήμα 2.6 με τον αριθμό Nusselt όπως υπολογίζεται από την εξίσωση 2.37. Ο μέσος αριθμός Nusselt,  $Nu$ , στον αγωγό υπολογίζεται ως

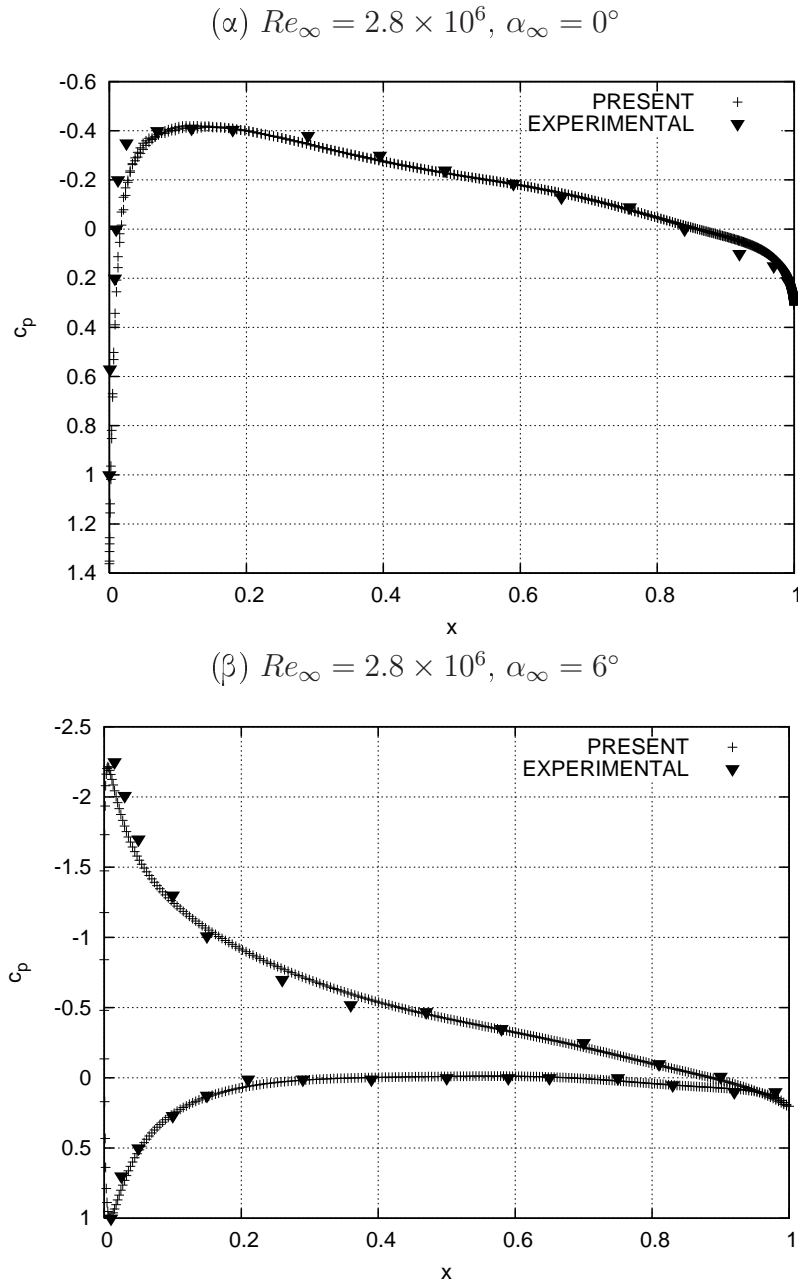
$$Nu = \frac{qD}{Ak(T_{wall} - \bar{T})} \quad (2.38)$$

όπου  $q$  η θερμότητα που μεταφέρεται στο ρευστό,  $D$  η διάμετρος του αγωγού,  $k$  η θερμική αγωγιμότητα του ρευστού και  $\bar{T} = \frac{\bar{T}_{in} + \bar{T}_{out}}{2}$ , όπου  $\bar{T}_{in}$  και  $\bar{T}_{out}$  η μέση θερμοκρασία στην είσοδο και έξοδο του χωρίου, αντίστοιχα. Οι συγκρίσεις οι οποίες παρουσιάζονται στο σχήμα 2.6 πιστοποιούν τα αποτελέσματα του λογισμικού επίλυσης που χρησιμοποιείται στην παρούσα διατριβή σε προβλήματα μεταφοράς θερμότητας.

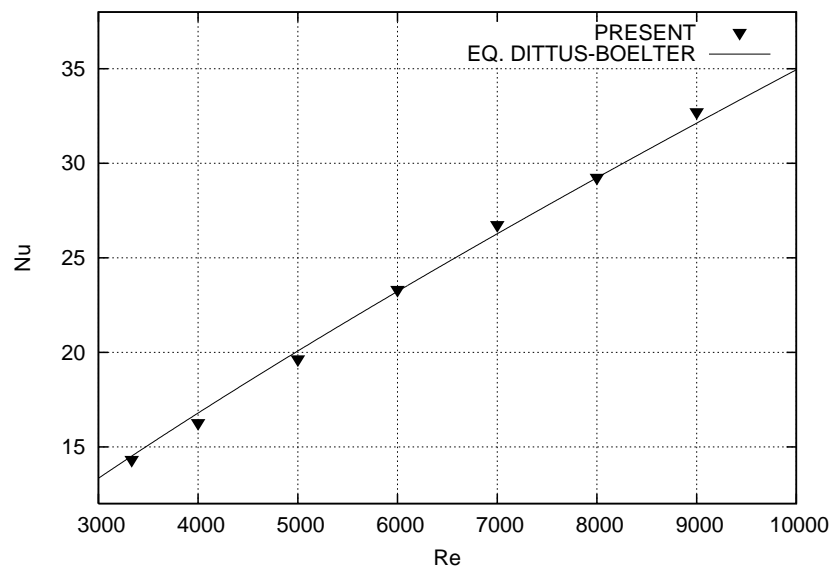




**Σχήμα 2.4:** Τυρβώδης ροή γύρω από μεμονωμένη αεροτομή. Λεπτομέρειες του υβριδικού υπολογιστικού πλέγματος κοντά στην αεροτομή.



**Σχήμα 2.5:** Τυρβώδης ροή γύρω από μεμονωμένη αεροτομή. Σύγκριση της κατανομής του συντελεστή πίεσης με πειραματικά αποτελέσματα της εργασίας [53].



**Σχήμα 2.6:** Τυρβώδης ροή με μεταφορά θερμότητας σε 2Δ αγωγό. Σύγκριση του μέσου αριθμού Nusselt του αγωγού υπολογισμένου από την εξίσωση 2.38 με τον αριθμό Nusselt που προκύπτει από την εξίσωση Dittus-Boelter, εξίσωση 2.37, συναρτήσει του αριθμού Reynolds.



## Κεφάλαιο 3

# Η συνεχής συζυγής μέθοδος για ασυμπίεστες στρωτές ροές με μεταφορά θερμότητας

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η συνεχής συζυγής μέθοδος για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας σε προβλήματα ασυμπίεστων στρωτών ροών με μεταφορά θερμότητας. Το κεφάλαιο ξεκινά με μια γενικότερη εισαγωγή στις συζυγείς τεχνικές με ιδιαίτερες αναφορές σε εργασίες οι οποίες αφορούν στη χρήση των συζυγών τεχνικών σε προβλήματα μεταφοράς θερμότητας. Στη συνέχεια, λαμβάνει χώρα η ανάπτυξη του συζυγούς προβλήματος διατυπώνοντας τις συζυγείς εξισώσεις, τις συζυγείς οριακές συνθήκες και την έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας για στρωτές ροές με μεταφορά θερμότητας. Στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζεται η διατύπωση για τυρβώδεις ροές με μεταφορά θερμότητας. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την παρουσίαση εφαρμογών με σκοπό την πιστοποίηση της ακρίβειας των παραγώγων ευαισθησίας που υπολογίζονται με την προτεινόμενη μέθοδο.

### 3.1 Βιβλιογραφική Επισκόπηση

Η συζυγής μέθοδος πρωτοεμφανίστηκε το 1984 από τον Pironneau, [122], σε προβλήματα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης και συγκεκριμένα δυναμικών ροών, τα οποία διέπονται από ελλειπτικές εξισώσεις. Το 1988 ο Jameson, [69], επεκτείνει τη συζυγή μέθοδο αναπτύσσοντας τη συνεχή συζυγή μέθοδο για τις εξισώσεις Euler του συμπιεστού ρευστού. Σε επόμενη εργασία του, [70], παρατηρείται σημαντική πρόοδος, φτάνοντας στο σχεδιασμό 2Δ και 3Δ μορφών για τις εξισώσεις Euler. Στις εργασίες αυτές παρουσιάζονται εφαρμογές της μεθόδου για το σχεδιασμό βέλτιστων αεροτομών και πτερύγων σε διηχητικές ροές. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι εργασίες αυτές αφορούν στην επίλυση των εξισώσεων Euler και των συζυγών εξισώσεων σε δομημένα πλέγματα. Τα επόμενα χρόνια η ερευνητική ομάδα του Jameson επεκτείνει τη συνεχή συζυγή μέθοδο σε προβλήματα βελτιστοποίησης υπερηχητικών ροών σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον, [126]. Στην εργασία [71] διατυπώνεται η συζυγής μέθοδος για τις εξισώ-

σεις Navier Stokes επεκτείνοντας, με αυτόν τον τρόπο, τη μέθοδο και στις συνεκτικές ροές. Οι συναρτήσεις στόχου που χρησιμοποιούνται στις εργασίες αυτές αφορούν στην ελαχιστοποίηση του συντελεστή οπισθέλκουσας καθώς και στο σχεδιασμό πτέρυγας αεροσκάφους με στόχο δεδομένη κατανομή πίεσης. Το 1997 οι Anderson, Venkatakrishnan διατυπώνουν τη συνεχή και διακριτή συζυγή τεχνική σε μη-δομημένα πλέγματα για συνεκτικές ροές, [11], προχωρώντας στη σύγκριση των δύο μεθόδων καθώς και στη σύγκριση των παραγώγων ευαισθησίας που υπολογίζονται με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών.

Οι συνεχείς διατυπώσεις στις εργασίες που έχουν αναφερθεί μέχρι στιγμής εμπεριέχουν στις εκφράσεις των παραγώγων ευαισθησίας χωρικούς όρους (χωρικά ολοκληρώματα των μεταβολών των γεωμετρικών ποσοτήτων), ο υπολογισμός των οποίων απαιτεί αρκετό υπολογιστικό χρόνο και εισάγει ανακρίβειες. Το 2003, ο Jameson πρότεινε για ατριβείς ροές και δομημένα πλέγματα, μια διατύπωση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, η οποία επιτρέπει τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας με βάση συνοριακά ολοκληρώματα και μόνο. Στις εργασίες [18, 134] παρουσιάζεται επίσης η συζυγής μέθοδος για ατριβείς ροές, με την έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας να είναι ανεξάρτητη από χωρικά ολοκληρώματα. Στην εργασία [113] παρουσιάζεται για πρώτη φορά από τους Papadimitriou, Giannakoglou διατύπωση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, για συνεκτικές ροές, η οποία χρησιμοποιεί μόνο συνοριακά ολοκληρώματα για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας. Καθιστώντας τις παραγώγους ευαισθησίας ανεξάρτητες μεταβολών των γεωμετρικών ποσοτήτων του πλέγματος, η μέθοδος γενικεύεται σε δομημένα και μη-δομημένα πλέγματα. Στην εργασία [113] καθώς και σε επόμενες, [114, 111, 112], αναπτύσσεται η συνεχής συζυγής μέθοδος τόσο για προβλήματα αντίστροφου σχεδιασμού (με τη συνάρτηση-στόχο να ορίζεται στα στερεά τοιχώματα) όσο και για άλλες συναρτήσεις-στόχους, όπως τη γένεση εντροπίας στο πεδίο (χωρικό ολοκλήρωμα) και τις απώλειες ολικής πίεσης (ολοκλήρωμα στα σύνορα εισόδου και εξόδου του πεδίου), με τις εφαρμογές να επεκτείνονται και στο σχεδιασμό πτερυγώσεων στροβιλομηχανών.

Το 1996, παράλληλα με τη συνεχή συζυγή μέθοδο, αναπτύσσεται η διακριτή συζυγής μέθοδος, με την οποία δεν ασχολείται η παρούσα διατριβή. Στην περίπτωση των συνεχών συζυγών μεθόδων, οι συζυγείς εξισώσεις προκύπτουν από τις εξισώσεις της ροής πριν αυτές διακριτοποιηθούν. Η διακριτοποίηση των συζυγών εξισώσεων πραγματοποιείται σε δεύτερη φάση. Αντιθέτως, στη διακριτή συζυγή μέθοδο, οι διακριτές συζυγείς εξισώσεις σχηματίζονται απ' απευθείας από τις διακριτοποιημένες εξισώσεις της ροής. Η ανάπτυξη της διακριτής συζυγούς μεθόδου πραγματοποιήθηκε αρχικά από τους Elliott, Peraire το 1996 για ατριβείς ροές και μη-δομημένα πλέγματα, [43], ενώ, στη συνέχεια, επεκτάθηκε στις συνεκτικές ροές, [44, 11]. Η διακριτή συζυγής μέθοδος παρουσιάζεται επίσης στις εργασίες των Giles και Pierce, όπου παρουσιάζεται σύγκριση της συνεχούς με τη διακριτή μέθοδο σε εφαρμογές ροών εξωτερικής αεροδυναμικής με κύματα κρούσης και σε πτερυγώσεις στροβιλομηχανών, [51, 50]. Στην εργασία [112] παρουσιάζονται επίσης συγκρίσεις μεταξύ συνεχούς και διακριτής μεθόδου. Αμφότερες επεκτείνονται σε προβλήματα αεροδυναμικού σχεδιασμού σε χαμηλές ταχύτητες με χρήση προσταθεροποίησης χαμηλών αριθμών Mach στην εργασία [16]. Η σύγκριση των δύο μεθόδων δείχνει ότι η διαφορά στην ακρίβεια των παραγώγων ευαισθησίας που

υπολογίζονται με τις δύο μεθόδους μειώνεται όσο αυξάνεται η διάσταση του υπολογιστικού πλέγματος. Όσον αφορά στη μαθηματική διατύπωση, η συνεχής μέθοδος είναι εκ των πραγμάτων πιο απαιτητική από ότι η διακριτή. Όμως αξίζει να σημειωθεί ότι η διακριτή μέθοδος δεν παρέχει ευελιξία σε επίπεδο μαθηματικής διατύπωσης, δεδομένου ότι οι διακριτές συζυγείς εξισώσεις προκύπτουν άμεσα από τις διακριτοποιημένες εξισώσεις της ροής με αναστροφή των μητρώων που προκύπτουν από τη γραμμικοποίηση των εξισώσεων της ροής.

Στην περίπτωση των τυρβωδών ροών, η ερευνητική ομάδα του Anderson αναπτύσσει τη διακριτή συζυγή μέθοδο για τυρβώδεις ροές, [9, 101], στην οποία λαμβάνεται υπόψη η μεταβολή των τυρβωδών ποσοτήτων της ροής διατυπώνοντας τη συζυγή εξίσωση του μοντέλου τύρβης των Spalart-Allmaras, η οποία επιλύεται ταυτόχρονα με τις συζυγείς εξισώσεις. Όσον αφορά στη συνεχή συζυγή μέθοδο για τυρβώδεις ροές, η διδακτορική διατριβή του Α. Ζυμάρη, [143], και οι εργασίες [166, 167] είναι οι πρώτες που διατυπώνουν τις συνεχείς συζυγείς εξισώσεις για μοντέλα τύρβης χαμηλών και υψηλών αριθμών Reynolds κάνοντας χρήση του μοντέλου τύρβης μίας εξίσωσης των Spalart-Allmaras και του μοντέλου τύρβης δύο εξισώσεων  $k - \epsilon$  με συναρτήσεις τοίχου, αντίστοιχα. Στις εργασίες αυτές αποφεύγεται η συνήθης παραδοχή της βιβλιογραφίας, [11, 113, 108], ότι οι μεταβολές των μεταβλητών των μοντέλων τύρβης ως προς τις μεταβολές της προς σχεδιασμό μορφής είναι αμελητέες. Σε πολλές περιπτώσεις, η παραδοχή αυτή μπορεί να οδηγήσει σε αρκετά λανθασμένες εκτιμήσεις των παραγώγων ευαισθησίας.

Στην πλειονότητά τους, οι εργασίες οι οποίες παρουσιάστηκαν μέχρι τώρα, περιλαμβάνουν εφαρμογές συμπιεστού ρευστού όπου οι συναρτήσεις-στόχοι αφορούν κυρίως στην αεροδυναμική απόδοση των προς σχεδιασμό μορφών, χωρίς να δίνεται έμφαση στη μεταφορά θερμότητας. Δεδομένου ότι το πεδίο εφαρμογής της παρούσας διατριβής αφορά στο σχεδιασμό βέλτιστων μορφών όπου η μεταφορά θερμότητας παίζει βασικό ρόλο, παρατίθεται στη συνέχεια η βιβλιογραφία η οποία αναφέρεται στη χρήση συζυγών μεθόδων για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης με μεταφορά θερμότητας. Όσον αφορά στη μεταφορά θερμότητας σε στερεό σώμα, η συζυγής μέθοδος χρησιμοποιείται σε μια σειρά από εργασίες, [17, 81, 159, 157, 68, 155], οι οποίες αφορούν σε προβλήματα βελτιστοποίησης μορφής με στόχο τη μεγιστοποίηση της θέρμανσης ή ψύξης επιφανειών, σε προβλήματα ελέγχου της θερμοκρασίας και σε προβλήματα αντίστροφου σχεδιασμού (με στόχο δεδομένη μορφή σώματος ή κατανομή θερμοκρασίας). Ενδεικτικά, στην εργασία [17], αναπτύσσεται η διακριτή συζυγής μέθοδος για τη 1Δ εξίσωση της συναγωγής της θερμότητας για το σχεδιασμό της βέλτιστης μορφής πτερυγίου εναλλάκτη θερμότητας, έχοντας ως στόχο την ελαχιστοποίηση της θερμοκρασίας του πτερυγίου. Η ερευνητική ομάδα του Zabaras σε μία σειρά από εργασίες, [81, 159, 157], στις οποίες ασχολείται με τη μεταφορά θερμότητας κατά τη διαδικασία στερεοποίησης ενός υλικού, αναπτύσσει τη συνεχή συζυγή μέθοδο για προβλήματα αντίστροφου σχεδιασμού (με στόχο δεδομένη μορφή της διεπιφάνειας μεταξύ στερεού και υγρού) καθώς και για προβλήματα ελέγχου της θερμοκρασίας στα στερεά τοιχώματα της διεπιφάνειας. Στην κατηγορία των προβλημάτων ελέγχου με χρήση της συζυγούς τεχνικής, σε πρόσφατη εργασία τους το 2011 οι Ito, Suzuki, [68], αναπτύσσουν τη συζυγή μέθοδο για τη 1Δ εξίσωση της συναγωγής θερμότητας με σκοπό το

βέλτιστο έλεγχο της θερμοκρασίας των υλικών στο εσωτερικό ηλεκτρονικών συσκευών και, συγκεκριμένα, στη δίοδο ενός παλμικού laser. Τα τελευταία χρόνια, οι συζυγείς μέθοδοι χρησιμοποιούνται επίσης για τον προσδιορισμό του μητρώου των δευτέρων παραγώγων, [116, 16, 115, 117]. Οι παράγωγοι αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν, στη συνέχεια, από τη μέθοδο Newton. Στην εργασία [155], υπολογίζονται οι δεύτερες παράγωγοι κάνοντας χρήση της συζυγούς μεθόδου και, μέσω της μεθόδου Newton, επιτυγχάνεται ο βέλτιστος έλεγχος της θερμοκρασίας ασυμπιεστού ρευστού.

Η χρήση των συζυγών μεθόδων για την επίλυση προβλημάτων με μεταφορά θερμότητας στη ρευστοδυναμική παρουσιάζεται σε ελάχιστες εργασίες συγκριτικά με αυτές που αφορούν στη μεταφορά θερμότητας σε στερεό σώμα. Στην εργασία [99], οι Morimoto, Suzuki, Kasagi αναπτύσσουν τη συζυγή τεχνική για το σχεδιασμό εναλλακτών θερμότητας και, συγκεκριμένα, για την εύρεση της βέλτιστης κυματοειδούς μορφής των πλακών πλακοειδούς εναλλάκτη με στόχο την αύξηση της μεταφοράς θερμότητας. Στην εργασία αυτή χρησιμοποιείται η συζυγής συνεχής μέθοδος για στρωτές ροές. Η παρούσα διατριβή και η συναφής εργασία [86] είναι η πρώτη που παρουσιάζει τη διατύπωση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου σε ασυμπιεστές στρωτές και τυρβώδεις ροές με μεταφορά θερμότητας. Περιλαμβάνει το σχεδιασμό αγωγών και εναλλακτών θερμότητας όπου, εκτός από τη μείωση των απωλειών λόγω συνεκτικότητας, η αύξηση της μεταφοράς θερμότητας αποτελεί μία επιπλέον συνάρτηση-στόχο.

Στο παρόν κεφάλαιο αναπτύσσεται η διατύπωση του συνεχούς συζυγούς προβλήματος για στρωτές ασυμπιεστές ροές με μεταφορά θερμότητας, ενώ στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται για πρώτη φορά η διατύπωση για τυρβώδεις ροές με μεταφορά θερμότητας, χρησιμοποιώντας ως βάση τη συνεχή συζυγή διατύπωση για τυρβώδεις ροές που αναπτύχθηκε στη διδακτορική διατριβή του Α. Ζυμάρη, [143]. Πέραν της διατύπωσης των συνεχών συζυγών εξισώσεων για τη ροή ασυμπιεστού ρευστού με μεταφορά θερμότητας παρουσιάζονται εφαρμογές μεταφοράς θερμότητας. Σε αυτές συγκρίνονται οι παράγωγοι που υπολογίζει η προτεινόμενη συζυγής μέθοδος με αυτές που προκύπτουν από τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών και οι οποίες θα θεωρούνται ως “τιμές αναφοράς”.

## 3.2 Η διατύπωση του συζυγούς προβλήματος

Έστω ότι είναι επιθυμητός ο σχεδιασμός-βελτιστοποίηση μιας ρευστοδυναμικής μορφής με βάση ένα προκαθορισμένο κριτήριο. Το κριτήριο αυτό εκφράζεται από την ελαχιστοποίηση της τιμής μιας προκαθορισμένης συνάρτησης-στόχου  $F$ . Για το σχεδιασμό της ρευστοδυναμικής μορφής απαιτείται η παραμετροποίηση της γεωμετρίας της μορφής χρησιμοποιώντας πολυώνυμα Bézier-Bernstein, Splines, NURBS κ.α., τα οποία καθορίζουν το διάνυσμα των  $\mathcal{N}$  μεταβλητών σχεδιασμού  $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_{\mathcal{N}})$ . Η συνάρτηση-στόχος εξαρτάται από τις μεταβλητές σχεδιασμού τόσο άμεσα όσο και έμμεσα μέσω των μεταβλητών της ροής  $\vec{V}(\vec{b})$ . Για κάθε μεταβολή των μεταβλητών σχεδιασμού  $\vec{b}$ , η οποία αντιστοιχεί σε μεταβολή της γεωμετρίας της μορφής, το  $\vec{V}(\vec{b})$  μεταβάλλεται ικανοποιώντας τις εξισώσεις ροής,  $R_{\vec{r}} = 0$ , στο νέο χωρίο της ροής, δηλαδή στο νέο υπολογιστικό πλέγμα το οποίο προκύπτει. Για το λόγο αυτό, η συνάρτηση-στόχος



**Πίνακας 3.1:** Οι πρωτεύουσες μεταβλητές και οι αντίστοιχες συζυγείς μεταβλητές τους, για στρωτές αλλά και τυρβώδεις (με βάση το μοντέλο τύρβης μιας εξίσωσης των Spalart-Allmaras) ροές.

Πρωτεύουσα μεταβλητή	Αντίστοιχη συζυγής μεταβλητή
Πίεση $p$	Συζυγής πίεση $q$
Συνιστώσες της ταχύτητας $u_i$	Συζυγείς συνιστώσες της ταχύτητας $u_i$
Θερμοκρασία $T$	Συζυγής θερμοκρασία $T_a$
Μεταβλητή του μοντέλου τύρβης $\tilde{\nu}$	Συζυγής μεταβλητή του μοντέλου τύρβης $\tilde{\nu}_a$

διατυπώνεται ως  $F = F(\vec{V}(\vec{b}), \vec{b})$ .

Για τη διατύπωση του συζυγούς προβλήματος χρησιμοποιούνται πολλαπλασιαστές Lagrange για το σχηματισμό της λεγόμενης επαυξημένης συνάρτησης-στόχου,  $F_{aug}$ . Δεδομένου ότι  $R_{\vec{v}} = 0$ , από τη στιγμή που ικανοποιούνται οι εξισώσεις της ροής, για τη δημιουργία της  $F_{aug}$  προστίθεται στη συνάρτηση-στόχο  $F$  το χωρικό ολοκλήρωμα του  $R_{\vec{v}}$  πολλαπλασιασμένο με πολλαπλασιαστές Lagrange. Οι πολλαπλασιαστές αυτοί δεν είναι άλλοι από το διάνυσμα  $\vec{\Psi}$  των συζυγών μεταβλητών. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η επαυξημένη συνάρτηση-στόχος ορίζεται ως

$$F_{aug} = F + \int_{\Omega} \vec{\Psi} R_{\vec{v}} d\Omega = F + \int_{\Omega} q R_p d\Omega + \int_{\Omega} u_i R_{v_i} d\Omega + \int_{\Omega} T_a R_T d\Omega \quad (3.1)$$

όπου  $\vec{\Psi} = [q, u_i, T_a]^T$ . Οι συζυγείς μεταβλητές  $q, u_i, T_a$  καθώς και η συζυγής μεταβλητή του μοντέλου τύρβης  $\tilde{\nu}_a$ , η οποία εισάγεται στο κεφάλαιο 4, συγκεντρώνονται στον πίνακα 3.1.

Για την εισαγωγή της μεταφοράς θερμότητας στο συζυγές πρόβλημα, προστίθεται στην επαυξημένη συνάρτηση το χωρικό ολοκλήρωμα της εξίσωσης της ενέργειας πολλαπλασιασμένο με τη νέα συζυγή μεταβλητή, ήτοι τη συζυγή θερμοκρασία  $T_a$ . Δεδομένου ότι ο δεύτερος όρος της εξίσωσης 3.1,  $\int_{\Omega} \vec{\Psi} R_{\vec{v}} d\Omega$ , ισούται με μηδέν, για τον υπολογισμό του ρυθμού μεταβολής της συνάρτησης-στόχου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού,  $\frac{\delta F}{\delta b_l}$ , αρκεί να υπολογιστεί ο ρυθμός της μεταβολής,  $\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_l}$ , της επαυξημένης συνάρτησης ως προς το  $b_l$  ( $l = 1, \dots, N$ ), ως

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_l} = \frac{\delta F}{\delta b_l} + \int_{\Omega} \vec{\Psi} \frac{\delta R_{\vec{v}}}{\delta b_l} d\Omega + \int_{\Omega} \vec{\Psi} R_{\vec{v}} \frac{\delta (d\Omega)}{\delta b_l} \quad (3.2)$$

Ο ολικός ρυθμός μεταβολής μιας ποσότητας της ροής  $\Phi$  ως προς  $b_l$  εκφράζεται ως το άθροισμα του ρυθμού μεταβολής,  $\frac{\partial \Phi}{\partial b_l}$ , της κομβικής ποσότητας  $\Phi$  λόγω της μεταβολής του  $b_l$ , και του ρυθμού μεταβολής του  $\Phi$  λόγω της μετατόπισης του αντίστοιχου κόμβου, δηλαδή

$$\frac{\delta \Phi}{\delta b_l} = \frac{\partial \Phi}{\partial b_l} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_l} \quad (3.3)$$

Για το ρυθμό μεταβολής του στοιχειώδους όγκου,  $\frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_l}$ , όπως έχει αποδειχθεί στη διδακτορική διατριβή του Δ. Παπαδημητρίου, [140], ισχύει

$$\frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_l} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_l} \right) d\Omega \quad (3.4)$$

Για  $\Phi = R_{\vec{v}}$  ο δεύτερος όρος της εξίσωσης 3.2 γίνεται

$$\int_{\Omega} \vec{\Psi} \frac{\delta R_{\vec{v}}}{\delta b_l} d\Omega = \int_{\Omega} \vec{\Psi} \frac{\partial R_{\vec{v}}}{\partial b_l} d\Omega + \int_{\Omega} \vec{\Psi} \frac{\partial R_{\vec{v}}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_l} d\Omega \quad (3.5)$$

Κάνοντας χρήση της σχέσης 3.4 και ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες, το τελευταίο ολοκλήρωμα της εξίσωσης 3.2, ισούται με

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vec{\Psi} R_{\vec{v}} \frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_l} &= \int_{\Omega} \vec{\Psi} R_{\vec{v}} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_l} \right) d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x_k} R_{\vec{v}} \frac{\delta x_k}{\delta b_l} d\Omega - \int_{\Omega} \vec{\Psi} \frac{\partial R_{\vec{v}}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_l} d\Omega + \int_S \vec{\Psi} R_{\vec{v}} \frac{\delta x_k}{\delta b_l} n_k dS \end{aligned} \quad (3.6)$$

όπου  $S$  το όριο του πεδίου της ροής  $\Omega$  και  $n_k$  οι συνιστώσες του κάθετου μονοδιάστατου διανύσματος στο  $S$ . Το  $S$  ορίζεται ως  $S = S_I \cup S_O \cup S_W$  με  $S_I$  την είσοδο,  $S_O$  την έξοδο και  $S_W$  τα στερεά τοιχώματα που πεδίου ροής. Μετά την αντικατάσταση των εξισώσεων 3.5 και 3.6 στην εξίσωση 3.2, ο ρυθμός μεταβολής της επαυξημένης συνάρτησης-στόχου δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_l} &= \frac{\delta F}{\delta b_l} + \int_{\Omega} \vec{\Psi} \frac{\partial R_{\vec{v}}}{\partial b_l} d\Omega + \int_S \vec{\Psi} R_{\vec{v}} \frac{\partial x_k}{\partial b_l} n_k dS \\ &= \frac{\delta F}{\delta b_l} + \int_{\Omega} q \frac{\partial R_p}{\partial b_l} d\Omega + \int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_{v_i}}{\partial b_l} d\Omega + \int_{\Omega} T_a \frac{\partial R_T}{\partial b_l} d\Omega \\ &\quad + \int_S (q R_p + u_i R_{v_i} + T_a R_T) \frac{\delta x_k}{\delta b_l} n_k dS \end{aligned} \quad (3.7)$$

Στην εξίσωση 3.7 εμφανίζονται οι ρυθμοί μεταβολής των εξισώσεων της ροής,  $\frac{\partial R_p}{\partial b_l}$  και  $\frac{\partial R_{v_i}}{\partial b_l}$ , και της εξίσωσης της ενέργειας,  $\frac{\partial R_T}{\partial b_l}$ , ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Για τον υπολογισμό αυτών των ποσοτήτων παρουσιάζεται, στη συνέχεια, η διαφορίση των εξισώσεων της ροής και της ενέργειας. Οι εξισώσεις της ροής και της ενέργειας για στρωτή ροή δίνονται από τις εξισώσεις 2.36 όπου  $\nu_t = 0$ . Διαφορίζοντας την εξίσωση της συνέχειας προκύπτει

$$\frac{\partial R_p}{\partial b_l} = \beta^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_j}{\partial b_l} \right) \quad (3.8)$$

Αντικαθιστώντας τον όρο  $\frac{\partial R_p}{\partial b_l}$  στο ολοκλήρωμα  $\int_{\Omega} q \frac{\partial R_p}{\partial b_l} d\Omega$  της εξίσωσης 3.7 και κάνοντας χρήση του θεωρήματος Green-Gauss προκύπτει

$$\int_{\Omega} \beta^2 q \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_j}{\partial b_l} \right) d\Omega = \int_S \beta^2 q \frac{\partial v_j}{\partial b_l} n_j dS - \int_{\Omega} \beta^2 \frac{\partial q}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial b_l} d\Omega \quad (3.9)$$

Αντίστοιχα, από τη διαφορίση των εξισώσεων  $R_{v_i}$  λαμβάνεται η σχέση

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{v_i}}{\partial b_l} &= \frac{\partial v_j}{\partial b_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial p}{\partial b_l} \right) \\ &\quad - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial b_l} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

Αναπτύσσοντας το ολοκλήρωμα  $\int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_{v_i}}{\partial b_l} d\Omega$  της εξίσωσης 3.7, με την αντικατάσταση των τεσσάρων όρων της εξίσωσης 3.10, προκύπτουν εκφράσεις για τα τέσσερα χωρικά ολοκληρώματα

$$\int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial b_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega = \int_S u_i v_i n_j \frac{\partial v_j}{\partial b_l} dS - \int_{\Omega} v_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_i \frac{\partial v_j}{\partial b_l} \right) d\Omega \quad (3.11)$$

$$\int_{\Omega} u_i v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_l} \right) d\Omega = \int_S u_i v_j n_j \frac{\partial v_i}{\partial b_l} dS - \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial b_l} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i v_j) d\Omega \quad (3.12)$$

$$\int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial p}{\partial b_l} \right) d\Omega = \int_S u_i n_i \frac{\partial p}{\partial b_l} dS - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial b_l} d\Omega \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_i \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial b_l} \right) \right] d\Omega &= \int_S \nu u_i n_j \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial b_l} \right) \right] dS \\ &\quad - \int_{\Omega} \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial b_l} \right) \right] d\Omega \\ &= \int_S \nu u_i n_j \frac{\partial}{\partial b_l} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dS \\ &\quad - \int_S \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial b_l} n_j dS - \int_S \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial b_l} n_i dS \\ &\quad + \int_{\Omega} \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \frac{\partial v_i}{\partial b_l} d\Omega + \int_{\Omega} \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial b_l} d\Omega \end{aligned} \quad (3.14)$$

Από τη διαφορίση της εξίσωσης της ενέργειας προκύπτει

$$\frac{\partial R_T}{\partial b_l} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( T \frac{\partial v_i}{\partial b_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( v_i \frac{\partial T}{\partial b_l} \right) - \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial}{\partial b_l} \left( \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3.15)$$

Όμοια, για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος  $\int_{\Omega} T_a \frac{\partial R_T}{\partial b_l} d\Omega$ , οι τρεις όροι της προηγούμενης έκφρασης γράφονται

$$\int_{\Omega} T_a \frac{\partial}{\partial x_i} \left( T \frac{\partial v_i}{\partial b_l} \right) d\Omega = \int_S T_a T n_i \frac{\partial v_i}{\partial b_l} dS - \int_{\Omega} \frac{\partial T_a}{\partial x_i} T \frac{\partial v_i}{\partial b_l} d\Omega \quad (3.16)$$

$$\int_{\Omega} T_a \frac{\partial}{\partial x_i} \left( v_i \frac{\partial T}{\partial b_l} \right) d\Omega = \int_S T_a v_i n_i \frac{\partial T}{\partial b_l} dS - \int_{\Omega} \frac{\partial T_a}{\partial x_i} v_i \frac{\partial T}{\partial b_l} d\Omega \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\nu}{Pr} T_a \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial}{\partial b_l} \left( \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \right] d\Omega &= \int_S \frac{\nu}{Pr} T_a n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial T}{\partial b_l} \right) dS - \int_{\Omega} \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T_a}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial T}{\partial b_l} \right) d\Omega \\ &= \int_S \frac{\nu}{Pr} T_a n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial T}{\partial b_l} \right) dS - \int_S \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T_a}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial b_l} n_i dS \\ &\quad + \int_{\Omega} \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 T_a}{\partial x_i^2} \frac{\partial T}{\partial b_l} d\Omega \end{aligned} \quad (3.18)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις 3.9, 3.11 έως 3.14 και 3.16 έως 3.18 στην έκφραση της μεταβολής της επαυξημένης συνάρτησης-στόχου, εξίσωση 3.7, και ομαδοποιώντας τους όρους των συνοριακών και χωρικών ολοκληρωμάτων, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_l} &= \frac{\delta F}{\delta b_l} + \int_S (u_i n_i) \frac{\partial p}{\partial b_l} dS - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial b_l} d\Omega \\ &\quad + \int_S \left[ \beta^2 q n_i + u_i v_i n_j + u_i v_j n_j + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j + T_a T n_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_l} dS \\ &\quad + \int_{\Omega} \left[ -v_j \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \beta^2 \frac{\partial q}{\partial x_j} - T \frac{\partial T_a}{\partial x_i} \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_l} d\Omega \\ &\quad + \int_S \left( T_a v_i n_i + \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T_a}{\partial x_i} n_i \right) \frac{\partial T}{\partial b_l} dS - \int_{\Omega} \left( v_i \frac{\partial T_a}{\partial x_i} + \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 T_a}{\partial x_i^2} \right) \frac{\partial T}{\partial b_l} d\Omega \\ &\quad - \int_S \nu u_i n_j \frac{\partial}{\partial b_l} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dS - \int_S \frac{\nu}{Pr} T_a n_i \frac{\partial}{\partial b_l} \left( \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) dS \\ &\quad + \int_S (q R_p + u_i R_{v_i} + T_a R_T) \frac{\delta x_k}{\delta b_l} n_k dS \end{aligned} \quad (3.19)$$

### 3.3 Χρησιμοποιούμενες συναρτήσεις-στόχοι

Στην ενότητα αυτή, διατυπώνονται οι συναρτήσεις-στόχοι  $F$  προς ελαχιστοποίηση, οι οποίες χρησιμοποιούνται στα προβλήματα βελτιστοποίησης μορφής που αναλύονται στην παρούσα διατριβή. Στα προβλήματα τα οποία πρόκειται να παρουσιαστούν στη συνέχεια και τα οποία αφορούν, κυρίως, στο σχεδιασμό βέλτιστων αγωγών καθώς και πτερυγώσεων στροβιλομηχανών, συχνά επιδιώκεται η ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης της ροής μεταξύ της εισόδου ( $S_I$ ) και της εξόδου ( $S_O$ ) του χωρίου της ροής. Για το λόγο αυτό, η συνάρτηση-στόχος αποτελείται από συνοριακά ολοκληρώματα των ποσοτήτων των απωλειών ολικής πίεσης στην είσοδο και την έξοδο του χωρίου και εκφράζεται ως

$$F_{1S_{I,O}} = - \int_{S_I} \left( p + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) v_i n_i dS - \int_{S_O} \left( p + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) v_i n_i dS \quad (3.20)$$

όπου  $v$  το μέτρο του διανύσματος της ταχύτητας. Η ολική πίεση είναι πολλαπλασιασμένη με την παροχή όγκου του ρευστού που διέρχεται από την καθορισμένη διατομή της εισόδου ή εξόδου του πεδίου ροής. Το αρνητικό πρόσημο και στους δύο όρους οφείλεται στην κατεύθυνση του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος  $n_i$ , η οποία εξ ορισμού είναι προς το εξωτερικό του  $\Omega$ .

Στην παρούσα διατριβή παρουσιάζονται κυρίως εφαρμογές με μεταφορά θερμότητας οι οποίες αφορούν στο σχεδιασμό βέλτιστων αγωγών με στόχο τη μεγιστοποίηση της μεταφοράς θερμότητας μεταξύ των θερμών στερεών τοιχωμάτων και του ρευστού που διαρρέει το χωρίο. Δεδομένου ότι η οριακή συνθήκη εισόδου του προβλήματος της ροής είναι καθορισμένη-γνωστή κατανομή θερμοκρασίας, η μεγιστοποίηση της μεταφοράς θερμότητας ισοδυναμεί με τη μεγιστοποίηση της θερμοκρασίας στην έξοδο του χωρίου. Για το λόγο αυτό, η συνάρτηση-στόχος εκφράζεται ως η διαφορά της θερμοκρασίας μεταξύ της εισόδου και της εξόδου του χωρίου

$$F_{2S_{I,O}} = \int_{S_O} T dS - \int_{S_I} T dS \quad (3.21)$$

Σε επόμενο κεφάλαιο θα χρησιμοποιηθεί εναλλακτικά η σχέση 5.6 η οποία βασίζεται στα ολοκληρώματα των θερμοκρασιών πολλαπλασιασμένων με τη παροχή όγκου του ρευστού. Σε ορισμένες από τις εφαρμογές που ακολουθούν επιδιώκεται ταυτοχρόνως η ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης και η μεγιστοποίηση της διαφοράς της θερμοκρασίας. Στα προβλήματα αυτά, σχηματίζεται ενιαία συνάρτηση  $F$ , η οποία αποτελείται από το άθροισμα των δύο επιμέρους συναρτήσεων-στόχων,  $F_1$  και  $F_2$ , πολλαπλασιασμένων με συντελεστές βαρύτητας,  $\omega_1$  και  $\omega_2$ , τους οποίους επιλέγει ο χρήστης. Είναι δηλαδή

$$F = \omega_1 F_1 - \omega_2 F_2 \quad (3.22)$$

Οι μονάδες των  $\omega_1$  και  $\omega_2$  είναι κατάλληλες ώστε να είναι εφικτή η άθροιση των διαστατών συναρτήσεων  $F_1$  και  $F_2$  πολλαπλασιασμένων με τους συντελεστές αυτούς. Στη συνέχεια, τα διαστατά μεγέθη  $\omega_1$  και  $\omega_2$  θα παρουσιάζονται χωρίς να αναγράφονται οι σχετικές διαστάσεις. Στην έκφραση 3.19 εμφανίζεται η παράγωγος  $\frac{\delta F}{\delta b_l}$  η οποία, δεδομένου ότι αποτελείται μόνο από συνοριακά ολοκληρώματα, μπορεί να γραφεί στη γενική της μορφή ως

$$\frac{\delta F}{\delta b_l} = \int_S \frac{\partial F}{\partial b_l} dS + \int_S \frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_l} dS + \int_S F \frac{\delta(dS)}{\delta b_l} \quad (3.23)$$

Για διευκόλυνση της ομαδοποίησης των συνοριακών ολοκληρωμάτων στην έκφραση 3.19 ως προς τις μεταβολές των ροϊκών μεγεθών,  $\frac{\partial p}{\partial b_l}$ ,  $\frac{\partial v_i}{\partial b_l}$  και  $\frac{\partial T}{\partial b_l}$ , η εξίσωση 3.23 γίνεται

$$\frac{\delta F}{\delta b_l} = \int_S \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial b_l} dS + \int_S \frac{\partial F}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial b_l} dS + \int_S \frac{\partial F}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial b_l} dS + \int_S \frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_l} dS + \int_S F \frac{\delta(dS)}{\delta b_l} \quad (3.24)$$

Στην περίπτωση των επιμέρους συναρτήσεων-στόχων που παρουσιάστηκαν προηγουμένως, ενοποιημένων στη συνάρτηση  $F$ , οι μεταβολές της  $F$  ως προς τις ποσότητες της ροής δίνονται από τις εκφράσεις

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_{S_I}}{\partial p} &= -\omega_1 v_i n_i \\ \frac{\partial F_{S_O}}{\partial v_i} &= -\omega_1 \left( \frac{1}{2} v^2 n_i + v_i v_\lambda n_\lambda + p n_i \right) \\ \frac{\partial F_{S_O}}{\partial T} &= -\omega_2\end{aligned}\quad (3.25)$$

Στη συνέχεια, η συζυγής μέθοδος παρουσιάζεται ανεξάρτητα από τις χρησιμοποιούμενες συναρτήσεις-στόχους.

### 3.4 Οι συζυγείς εξισώσεις

Μετά από αντικατάσταση της έκφρασης της παραγώγου  $\frac{\delta F}{\delta b_l}$ , εξίσωση 3.24, η εξίσωση 3.19 λαμβάνει τη μορφή

$$\begin{aligned}\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_l} &= \int_S \left( u_i n_i + \frac{\partial F}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial b_l} dS - \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial b_l} d\Omega \\ &+ \int_S \left[ \beta^2 q n_i + u_i v_i n_j + u_i v_j n_j + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j + T_a T n_i + \frac{\partial F}{\partial v_i} \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_l} dS \\ &+ \int_\Omega \left[ -v_j \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \beta^2 \frac{\partial q}{\partial x_j} - T \frac{\partial T_a}{\partial x_i} \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_l} d\Omega \\ &+ \int_S \left( T_a v_i n_i + \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T_a}{\partial x_i} n_i + \frac{\partial F}{\partial T} \right) \frac{\partial T}{\partial b_l} dS - \int_\Omega \left( v_i \frac{\partial T_a}{\partial x_i} + \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 T_a}{\partial x_i^2} \right) \frac{\partial T}{\partial b_l} d\Omega \\ &- \int_S \nu u_i n_j \frac{\partial}{\partial b_l} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dS - \int_S \frac{\nu}{Pr} T_a n_i \frac{\partial}{\partial b_l} \left( \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) dS \\ &+ \int_S (q R_p + u_i R_{v_i} + T_a R_T) \frac{\delta x_k}{\delta b_l} n_k dS \\ &+ \int_S \frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_l} dS + \int_S F \frac{\delta (dS)}{\delta b_l}\end{aligned}\quad (3.26)$$

Στην έκφραση 3.26, η παράγωγος ευαισθησίας της επαυξημένης συνάρτησης-στόχου αποτελείται από συνοριακά και χωρικά ολοκληρώματα τα οποία εξαρτώνται από τους ρυθμούς μεταβολής των ροϊκών μεταβλητών, όπως  $\frac{\partial p}{\partial b_l}$ ,  $\frac{\partial v_i}{\partial b_l}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial b_l}$ , καθώς και από όρους οι οποίοι εξαρτώνται από τους ρυθμούς μεταβολής γεωμετρικών ποσοτήτων, όπως  $\frac{\delta (dS)}{\delta b_l}$ ,  $\frac{\delta x_k}{\delta b_l}$ , ως προς  $b_l$ . Είναι προφανές ότι, για τον υπολογισμό των μεταβολών των μεταβλητών της ροής κάνοντας λ.χ. χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών, θα απαιτείτο μεγάλο υπολογιστικό κόστος. Αντιθέτως, το κόστος που απαιτείται για τον υπολογισμό των μεταβολών της παραμετροποιημένης γεωμετρίας είναι σχεδόν

αμελητέο. Για το λόγο αυτό, κατά τη συζυγή μέθοδο αποφασίζεται η απαλοιφή των όρων που περιλαμβάνουν μεταβολές ροϊκών μεταβλητών. Με αυτόν τον τρόπο, απαλείφοντας τα χωρικά και συννοριακά ολοκληρώματα, στα οποία εμφανίζονται ποσότητες που εξαρτώνται από τις μεταβολές των ροϊκών μεγεθών, προκύπτουν οι συζυγείς πεδιακές εξισώσεις και οριακές συνθήκες, αντίστοιχα.

Οι πεδιακές συζυγείς εξισώσεις της ροής ( $R_q = 0$ ,  $R_{u_i} = 0$ ) και της εξίσωσης της ενέργειας ( $R_{T_a} = 0$ ) προκύπτουν στη μορφή

$$R_q = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.27)$$

$$R_{u_i} = -v_j \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \beta^2 \frac{\partial q}{\partial x_j} - T \frac{\partial T_a}{\partial x_i} = 0 \quad (3.28)$$

$$R_{T_a} = -v_i \frac{\partial T_a}{\partial x_i} - \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 T_a}{\partial x_i^2} = 0 \quad (3.29)$$

Από τη διαφορίση της εξίσωσης της ενέργειας εμφανίζεται στη συζυγή εξίσωση της ορμής ο όρος  $T \frac{\partial T_a}{\partial x_i}$ , ο οποίος εξαρτάται από τη συζυγή μεταβλητή της θερμοκρασίας. Η παρουσία αυτού του όρου στη συζυγή εξίσωση της ορμής την καθιστά πεπλεγμένη με τη συζυγή εξίσωση της ενέργειας και, για το λόγο αυτό, απαιτείται η ταυτόχρονη επίλυση των συζυγών εξισώσεων, όταν στο πρωτεύον πρόβλημα οι εξισώσεις διατήρησης παροχής και ορμής δεν είναι πεπλεγμένες με την εξίσωση της ενέργειας.

Για τη διακριτοποίηση των προσταθεροποιημένων συζυγών εξισώσεων 3.27, 3.28 και 3.29 χρησιμοποιείται η τεχνική των πεπερασμένων όγκων, όπως και στο ευθύ πρόβλημα, όπως παρουσιάστηκε και στη διατριβή [148] για τη διακριτοποίηση των προσταθεροποιημένων συζυγών εξισώσεων χαμηλών αριθμών Mach για συμπιεστές ροές. Ικανοποιώντας τις συζυγείς εξισώσεις 3.27, 3.28 και 3.29 με τις οριακές συνθήκες που ακολουθούν στην ενότητα 3.5, η έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_l} &= \int_S \left[ \beta^2 q n_i + u_i v_i n_j + u_i v_j n_j + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j + T_a T n_i + \frac{\partial F_{S_o}}{\partial v_i} \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_l} dS \\ &+ \int_S \left( u_i n_i + \frac{\partial F_{S_I}}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial b_l} dS + \int_S \left( T_a v_i n_i + \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T_a}{\partial x_i} n_i + \frac{\partial F_{S_o}}{\partial T} \right) \frac{\partial T}{\partial b_l} dS \\ &- \int_S \nu u_i n_j \frac{\partial}{\partial b_l} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dS - \int_S \frac{\nu}{Pr} T_a n_i \frac{\partial}{\partial b_l} \left( \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) dS \\ &+ \int_S (q R_p + u_i R_{v_i} + T_a R_T) \frac{\delta x_k}{\delta b_l} n_k dS \\ &+ \int_S \frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_l} dS + \int_S F \frac{\delta (dS)}{\delta b_l} \end{aligned} \quad (3.30)$$

### 3.5 Οι συζυγείς οριακές συνθήκες

Οι συζυγείς οριακές συνθήκες προκύπτουν από την έκφραση της επαυξημένης συνάρτησης-στόχου, εξίσωση 3.30, ύστερα από απαλοιφή των συνοριακών ολοκληρωμάτων τα οποία εξαρτώνται από τις μεταβολές των ροϊκών μεταβλητών ως προς  $b_l$ .

#### 3.5.1 Συζυγείς οριακές συνθήκες εισόδου

Δεδομένου ότι η μορφή των ορίων της εισόδου  $S_I$  δεν μεταβάλλεται, τα τρία τελευταία ολοκληρώματα της εξίσωσης 3.30 μηδενίζονται. Επίσης δεδομένου ότι οι συνθήκες εισόδου του προβλήματος της ροής είναι καθορισμένες κατανομές ταχύτητας και θερμοκρασίας, οι οποίες είναι ανεξάρτητες των μεταβολών της γεωμετρίας, ισχύει  $\frac{\delta v_i}{\delta b_l} = 0$  και  $\frac{\delta T}{\delta b_l} = 0$ . Επομένως από την εξίσωση 3.3 ισχύει

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_i}{\partial b_l} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_l} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial b_l} + \frac{\partial T}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_l} &= 0\end{aligned}$$

όπου, αφού  $\frac{\delta x_k}{\delta b_l} = 0$  στην είσοδο, μηδενίζονται οι όροι που εξαρτώνται από τους ρυθμούς μεταβολής  $\frac{\partial v_i}{\partial b_l}$  και  $\frac{\partial T}{\partial b_l}$ . Για την απαλοιφή των όρων που απέμειναν στην εξίσωση 3.30 πρέπει να ισχύουν οι

$$\begin{aligned}\nu u_i n_j \frac{\partial}{\partial b_l} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) &= 0 \\ u_i n_i + \frac{\partial F_{S_I}}{\partial p} &= 0 \\ \frac{\nu}{Pr} T_a n_i \frac{\partial}{\partial b_l} \left( \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) &= 0\end{aligned}\tag{3.31}$$

καταλήγοντας στις οριακές συνθήκες εισόδου του συζυγούς προβλήματος,

$$\begin{aligned}u_i t_i &= 0 \\ u_i n_i &= -\frac{\partial F_{S_I}}{\partial p} \\ T_a &= 0\end{aligned}\tag{3.32}$$

όπου  $t_i$  οι συνιστώσες του μοναδιαίου εφαπτομενικού διανύσματος.

#### 3.5.2 Συζυγείς οριακές συνθήκες εξόδου

Στα όρια της εξόδου  $S_O$ , επειδή  $\frac{\delta p}{\delta b_l} = 0$  και η μορφή του ορίου παραμένει ανεπηρέαστη από μεταβολές της γεωμετρίας που βελτιστοποιείται, τα τρία τελευταία ολοκληρώματα της εξίσωσης 3.30 και ο όρος που εξαρτάται από τη μεταβολή  $\frac{\delta p}{\delta b_l} = 0$  μηδενίζονται.



Για να καταστεί η έκφραση της παραγώγου ευαισθησίας  $\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_l}$  ανεξάρτητη του  $\frac{\partial v_i}{\partial b_l}$  επιβάλλεται η επόμενη συνθήκη

$$\beta^2 q n_i + u_i v_i n_j + u_i v_j n_j + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j + T_a T n_i + \frac{\partial F_{S_o}}{\partial v_i} = 0 \quad (3.33)$$

η οποία καθορίζει τις τιμές της συζυγούς πίεσης και μίας εκ των δύο συνιστωσών της ταχύτητας (σε 2Δ προβλήματα), ενώ η άλλη υπολογίζεται από το εσωτερικό του χωρίου με προεκβολή.

Επίσης, παρατηρείται ότι, όπως η πεδιακή συζυγής εξίσωση της ορμής εξαρτάται από τη συζυγή μεταβλητή  $T_a$ , το ίδιο ισχύει και για την οριακή συνθήκη της συζυγούς ταχύτητας λόγω της παρουσίας του όρου  $T_a T n_i$ . Αναλόγως, για την ανεξαρτησία της παραγώγου ευαισθησίας στην έξοδο από τον όρο  $\frac{\partial T}{\partial b_l}$  ισχύει

$$T_a v_i n_i + \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T_a}{\partial x_i} n_i + \frac{\partial F_{S_o}}{\partial T} = 0 \quad (3.34)$$

### 3.5.3 Συζυγείς οριακές συνθήκες στερεού τοιχώματος

Οι οριακές συνθήκες του πρωτεύοντος προβλήματος στο  $S_W$  επιβάλλουν  $v_i = 0$  και  $T = T_{wall}$  (το  $T_{wall}$  είναι δεδομένο) άρα  $\frac{\delta v_i}{\delta b_l} = 0$  και  $\frac{\delta T}{\delta b_l} = 0$ . Επομένως από την εξίσωση 3.3, δεδομένου ότι η μορφή του στερεού ορίου επηρεάζεται από μεταβολές των μεταβλητών σχεδιασμού, ισχύει

$$\frac{\partial v_i}{\partial b_l} = - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_l} \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial T}{\partial b_l} = - \frac{\partial T}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_l} \quad (3.36)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις 3.35 και 3.36 στην έκφραση της παραγώγου ευαισθησίας της εξίσωσης 3.30 ισχύει

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_l} = & - \int_S \left[ \beta^2 q n_i + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j + T_a T n_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_l} dS \\ & - \int_S \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T_a}{\partial x_i} n_i \frac{\partial T}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_l} dS + \int_S \left( u_i n_i + \frac{\partial F_{S_w}}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial b_l} dS \\ & - \int_S \nu u_i n_j \frac{\partial}{\partial b_l} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dS - \int_S \frac{\nu}{Pr} T_a n_i \frac{\partial}{\partial b_l} \left( \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) dS \\ & + \int_S (q R_p + u_i R_{v_i} + T_a R_T) \frac{\delta x_k}{\delta b_l} n_k dS \end{aligned} \quad (3.37)$$

Στα στερεά όρια, για την ανεξαρτησία της παραγώγου ευαισθησίας από τον όρο  $\frac{\partial p}{\partial b_l}$ , επιβάλλεται η συνθήκη

$$u_i n_i + \frac{\partial F_{S_w}}{\partial p} = 0 \quad (3.38)$$

Οι όροι που περιέχουν τις μεταβολές  $\frac{\partial}{\partial b_l} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$  και  $\frac{\partial}{\partial b_l} \left( \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)$  αναπτύσσονται ακολούθως

$$\begin{aligned} \nu u_i n_j \frac{\partial}{\partial b_l} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) &= \nu u_i \frac{\delta}{\delta b_l} \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] - \nu u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] \frac{\partial x_k}{\partial b_l} \\ &\quad - \nu u_i \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta n_j}{\delta b_l} \end{aligned} \quad (3.39)$$

και

$$\frac{\nu}{Pr} T_a n_i \frac{\partial}{\partial b_l} \left( \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = \frac{\nu}{Pr} T_a \frac{\delta}{\delta b_l} \left( \frac{\partial T}{\partial x_i} n_i \right) - \frac{\nu}{Pr} T_a \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_i} n_i \frac{\partial x_k}{\partial b_l} - \frac{\nu}{Pr} T_a \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\delta n_i}{\delta b_l} \quad (3.40)$$

Όπως έχει αποδειχθεί στη διδακτορική διατριβή του Α. Ζυμάρη, [143],  $\frac{\delta}{\delta b_l} \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] = 0$ . Για την απαλοιφή του όρου  $\frac{\nu}{Pr} T_a \frac{\delta}{\delta b_l} \left( \frac{\partial T}{\partial x_i} n_i \right)$  της εξίσωσης 3.40 επιλέγεται η ακόλουθη οριακή συνθήκη για τη συζυγή θερμοκρασία στα στερεά τοιχώματα

$$T_a = 0 \quad (3.41)$$

απαλείφοντας με αυτό τον τρόπο όλους τους όρους της εξίσωσης 3.40 που εξαρτώνται από το  $T_a$ .

### 3.6 Έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας

Μετά την απαλοιφή των όρων που εξαρτώνται από τις μεταβολές των ροϊκών μεγεθών, η γενική τελική έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας της επαυξημένης συνάρτησης δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_l} &= - \int_{S_W} \left[ \beta^2 q n_i + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_l} dS - \int_{S_W} \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T_a}{\partial x_i} n_i \frac{\partial T}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_l} dS \\ &\quad + \int_{S_W} (q R_p + u_i R_{v_i}) \frac{\delta x_k}{\delta b_l} n_k dS + \int_{S_W} \nu u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] \frac{\delta x_k}{\delta b_l} dS \\ &\quad + \int_{S_W} \nu u_i \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta n_j}{\delta b_l} dS \end{aligned} \quad (3.42)$$

Για τις συναρτήσεις-στόχους που χρησιμοποιούνται στην παρούσα διατριβή και βάσει της σχέσης  $\frac{\partial F_{SW}}{\partial p} = -\omega_1 v_i n_i = 0$  στα στερεά τοιχώματα, η σχέση 3.38 μηδενίζει τις συζυγείς ταχύτητες  $u_i = 0$ . Επιπλέον, αντικαθιστώντας την έκφραση του  $R_p$  στην εξίσωση 3.42 η παράγωγος ευαισθησίας λαμβάνει την τελική μορφή

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_l} &= - \int_{S_W} \left[ \beta^2 q n_i + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_l} dS - \int_{S_W} \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T_a}{\partial x_i} n_i \frac{\partial T}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_l} dS \\ &\quad + \int_{S_W} \beta^2 q \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \frac{\delta x_k}{\delta b_l} n_k dS \end{aligned} \quad (3.43)$$

Η έκφραση αυτή εξαρτάται μόνο από τους ρυθμούς μεταβολής των γεωμετρικών ποσοτήτων καθώς και τις μεταβλητές της ροής και τις συζυγείς τους, οι οποίες είναι γνωστές μετά την επίλυση των εξισώσεων της ροής και των συζυγών εξισώσεων.

### 3.7 Πιστοποίηση της ακρίβειας υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, η διατύπωση των συζυγών εξισώσεων για ασυμπίεστες ροές λαμβάνοντας υπόψη και την εξίσωση της ενέργειας παρουσιάζεται για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία. Στόχος της ενότητας αυτής είναι η πιστοποίηση της προτεινόμενης ακριβούς συζυγούς μεθόδου για ασυμπίεστες στρωτές ροές με μεταφορά θερμότητας. Η ένταξη της συζυγούς μεθόδου σε βρόχο βελτιστοποίησης-σχεδιασμού μορφών δεν αποτελεί στόχο αυτής της ενότητας, αλλά θα ακολουθήσει στο επόμενο κεφάλαιο. Για την πιστοποίηση της μεθόδου απαιτείται έλεγχος της ακρίβειας των παραγώγων ευαισθησίας που υπολογίζονται. Στόχος είναι ναδειχθεί ότι η προτεινόμενη μέθοδος μπορεί να υπολογίσει τις ζητούμενες παραγώγους ευαισθησίας με υψηλή πιστότητα. Για το λόγο αυτό, στις εφαρμογές που παρουσιάζονται σε αυτή την ενότητα, γίνεται σύγκριση των παραγώγων που υπολογίζει η προτεινόμενη μέθοδος με τις παραγώγους που προκύπτουν από τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, η οποία υπολογίζει τις λεγόμενες “παραγώγους αναφοράς”. Η ταύτιση των παραγώγων ευαισθησίας με τις παραγώγους των πεπερασμένων διαφορών αποδεικνύει την πιστότητα της μεθόδου για στρωτές ροές με μεταφορά θερμότητας. Η μέθοδος των κεντρικών πεπερασμένων διαφορών για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας  $\frac{\delta F}{\delta b_l}$  είναι δεύτερης τάξης ακρίβειας και οι παράγωγοι δίνονται από τη σχέση

$$\frac{\delta F}{\delta b_l} = \frac{F(b_1, \dots, b_l + \varepsilon, \dots, b_N) - F(b_1, \dots, b_l - \varepsilon, \dots, b_N)}{2\varepsilon} \quad (3.44)$$

όπου  $l = 1, \dots, N$ . Για τον υπολογισμό των παραγώγων απαιτείται να επιλυθούν δύο φορές οι εξισώσεις της ροής για κάθε μία από τις  $N$  μεταβλητές σχεδιασμού. Στη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, στις εφαρμογές που ακολουθούν, δοκιμάζονται διαφορετικές τιμές της στοιχειώδους ποσότητας διαφόρισης  $\varepsilon$  για τον υπολογισμό των παραγώγων και υιοθετούνται τα αποτελέσματα της μεθόδου που είναι ανεξάρτητα του  $\varepsilon$ . Η παραμετρική αυτή μελέτη είναι υποχρεωτική και πραγματοποιείται οποτεδήποτε χρησιμοποιείται η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών στην παρούσα διατριβή.

Οι εφαρμογές περιλαμβάνουν περιπτώσεις ροών σε αγωγούς και η συνάρτηση-στόχος που χρησιμοποιείται αφορά στη μεγιστοποίηση της μεταφοράς θερμότητας, εξίσωση 3.21, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η μείωση των απωλειών ολικής πίεσης, έτσι ώστε να ελεγχθούν οι παράγωγοι ευαισθησίας της συνάρτησης-στόχου  $F_2$  και, συνεπώς, να ελεγχθεί η διατύπωση του συζυγούς προβλήματος με την προσθήκη της εξίσωσης της ενέργειας. Για το λόγο αυτό επιλέγονται συντελεστές βαρύτητας  $\omega_1 = 0.0$ ,  $\omega_2 = 1.0$ , οπότε για τη συνάρτηση-στόχο ισχύει  $F = F_2$ .

### 3.7.1 Αγωγός με στροφή 90°

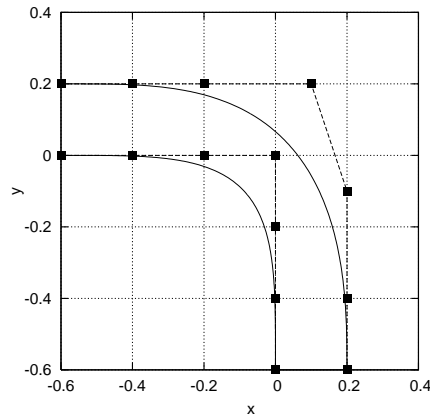
Η εφαρμογή αυτή αφορά στη μελέτη της ροής στο εσωτερικό ενός αγωγού με στροφή της ροής κατά 90°. Ο αριθμός Reynolds υπολογισμένος με βάση το ύψος του αγωγού στην είσοδο ισούται με  $Re = 500$ . Το ρευστό εισέρχεται στο χωρίο με σταθερή θερμοκρασία  $T_{SI} = 293K$ , ενώ τα τοιχώματα του αγωγού έχουν σταθερή θερμοκρασία  $T_{SW} = 353K$  μεταφέροντας τη θερμότητα τους στο χαμηλότερης θερμοκρασίας ρευστό. Το τμήμα της στροφής του αγωγού παραμετροποιείται χρησιμοποιώντας πολυώνυμα Bézier-Bernstein με 7 σημεία ελέγχου σε κάθε πλευρά του αγωγού, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.1. Το πρώτο και το τελευταίο σημείο ελέγχου της εσωτερικής και της εξωτερικής πλευράς του αγωγού διατηρούνται σταθερά και το ίδιο ισχύει για τις τετμημένες των υπολοίπων σημείων ελέγχου, καταλήγοντας τελικά σε 10 μεταβλητές σχεδιασμού.

Για αυτά τα σημεία ελέγχου υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας με την προτεινόμενη μέθοδο και, στο σχήμα 3.2, συγκρίνονται με τις παραγώγους που προκύπτουν χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Παρατηρείται ταύτιση των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων. Οι τιμές των παραγώγων των σημείων ελέγχου στο τμήμα της στροφής της ροής αντιστοιχούν σε μεταβολές της γεωμετρίας οι οποίες θα οδηγούσαν στην ελαχιστοποίηση της συνάρτησης-στόχου, δηλαδή στη μεγιστοποίηση της θερμοκρασίας στην έξοδο του αγωγού. Οι πρώτες 5 αρνητικές παράγωγοι και οι επόμενες 5 θετικές του σχήματος 3.2 αντιστοιχούν στα σημεία ελέγχου στην εσωτερική και εξωτερική πλευρά του αγωγού, αντίστοιχα. Αυτό υποδηλώνει ότι τα σημεία ελέγχου πρέπει να κινηθούν προς το εσωτερικό του αγωγού μειώνοντας τη διατομή στο τμήμα της στροφής του, το οποίο θα προκαλούσε επιτάχυνση και κατ' επέκταση αύξηση της μεταφοράς θερμότητας στο σημείο αυτό.

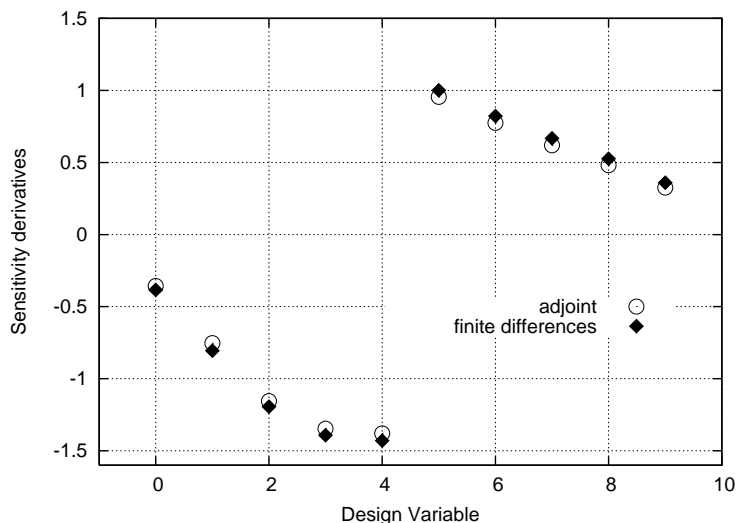
Στο σχήμα 3.3 παρουσιάζονται το πεδίο της θερμοκρασίας και το πεδίο της συζυγούς θερμοκρασίας. Παρατηρείται ότι ο ομόρρους του πεδίου της συζυγούς θερμοκρασίας είναι “ανάποδος” αυτού του πεδίου της θερμοκρασίας. Αυτό οφείλεται στο διαφορετικό πρόσημο που έχουν οι όροι της μεταφοράς στην εξίσωση της ενέργειας και στη συζυγή εξίσωση της ενέργειας, το οποίο υποδηλώνει την αντίθετη κατεύθυνση της μετάδοσης της πληροφορίας στα δύο πεδία.

### 3.7.2 Αγωγός εναλλάκτη κελύφους/αυλών

Στην εφαρμογή αυτή μελετάται η μεταφορά θερμότητας γύρω από τον αγωγό ενός εναλλάκτη κελύφους/αυλών. Στη θέση μιας τυπικής διατομής ενός αγωγού εναλλάκτη κελύφους/αυλών επιλέγεται η αεροτομή του σχήματος 3.4. Η ροή εισέρχεται με μηδενική γωνία και με σταθερή θερμοκρασία  $T_{SI} = 293K$  και έρχεται σε επαφή με τα σταθερές θερμοκρασίας,  $T_{SW} = 353K$ , τοιχώματα του αγωγού. Ο αριθμός Reynolds βασισμένος στο μήκος της διατομής του αγωγού (χορδή της αεροτομής) ισούται με  $Re = 100$ . Η γεωμετρία του αγωγού παραμετροποιείται χρησιμοποιώντας πολυώνυμα Bézier-Bernstein με 8 σημεία ελέγχου σε κάθε πλευρά, σχήμα 3.4. Όλα τα σημεία ελέγχου, εκτός των δύο πρώτων στην ακμή πρόσπτωσης και αυτού στην ακμή εκφυγής στις δύο πλευρές του αγωγού, είναι ελεύθερα να μετακινηθούν κατά

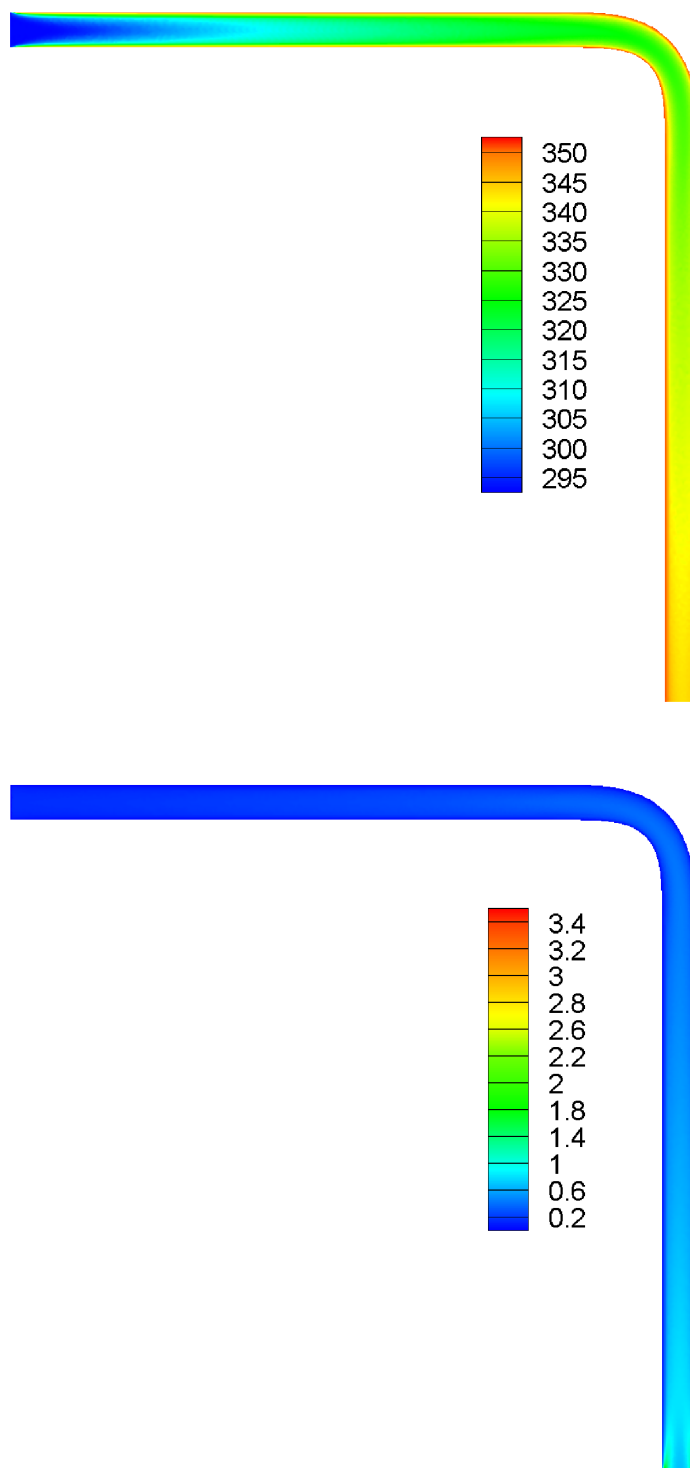


**Σχήμα 3.1:** Αγωγός με στροφή  $90^\circ$ . Το σχήμα του αγωγού και τα 8 σημεία ελέγχου Bézier. Όλα τα σημεία ελέγχου εκτός του πρώτου και του τελευταίου στην εσωτερική και εξωτερική πλευρά του αγωγού είναι ελεύθερα να μετακινήθούν κατά  $y$ .

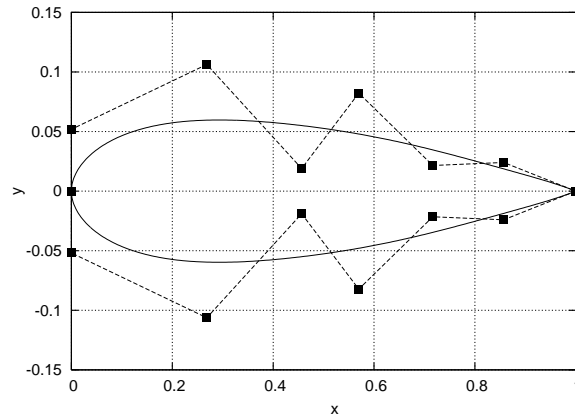


**Σχήμα 3.2:** Αγωγός με στροφή  $90^\circ$ . Σύγκριση των παραγώγων ευαισθησίας που υπολογίζει η συζυγής μέθοδος με τις παραγώγους που προκύπτουν από τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών.

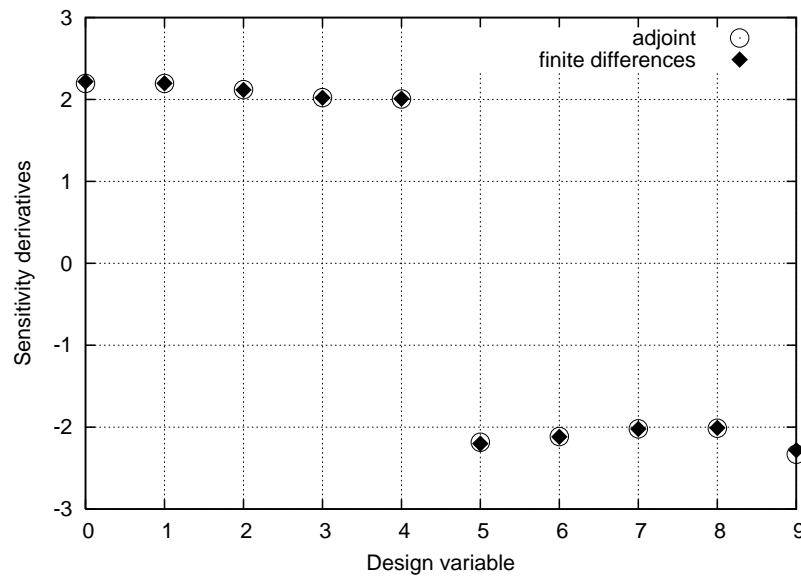
$y$ . Επομένως, ορίζονται 10 μεταβλητές σχεδιασμού συνολικά, για τις οποίες υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας από τη σχέση 3.44. Στο σχήμα 3.5 παρουσιάζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας οι οποίες υπολογίζονται με την προτεινόμενη μέθοδο και τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Παρατηρείται ότι οι παράγωγοι που υπολογίστηκαν με τη συζυγή μέθοδο που αναπτύχθηκε βρίσκονται σε απόλυτη ταύτιση με τις παραγώγους αναφοράς. Το πρόσημο των παραγώγων των σημείων ελέγχου της άνω και κάτω πλευράς του αγωγού αντιστοιχεί σε μια τέτοια μεταβολή των τεταγμένων των σημείων ελέγχου η οποία θα οδηγούσε σε αύξηση του πάχους του αγωγού και



**Σχήμα 3.3:** Αγωγός με στροφή  $90^\circ$ . Το πεδίο της θερμοκρασίας  $T$  (πάνω) και της συζυγούς θερμοκρασίας  $T_a$  (κάτω).

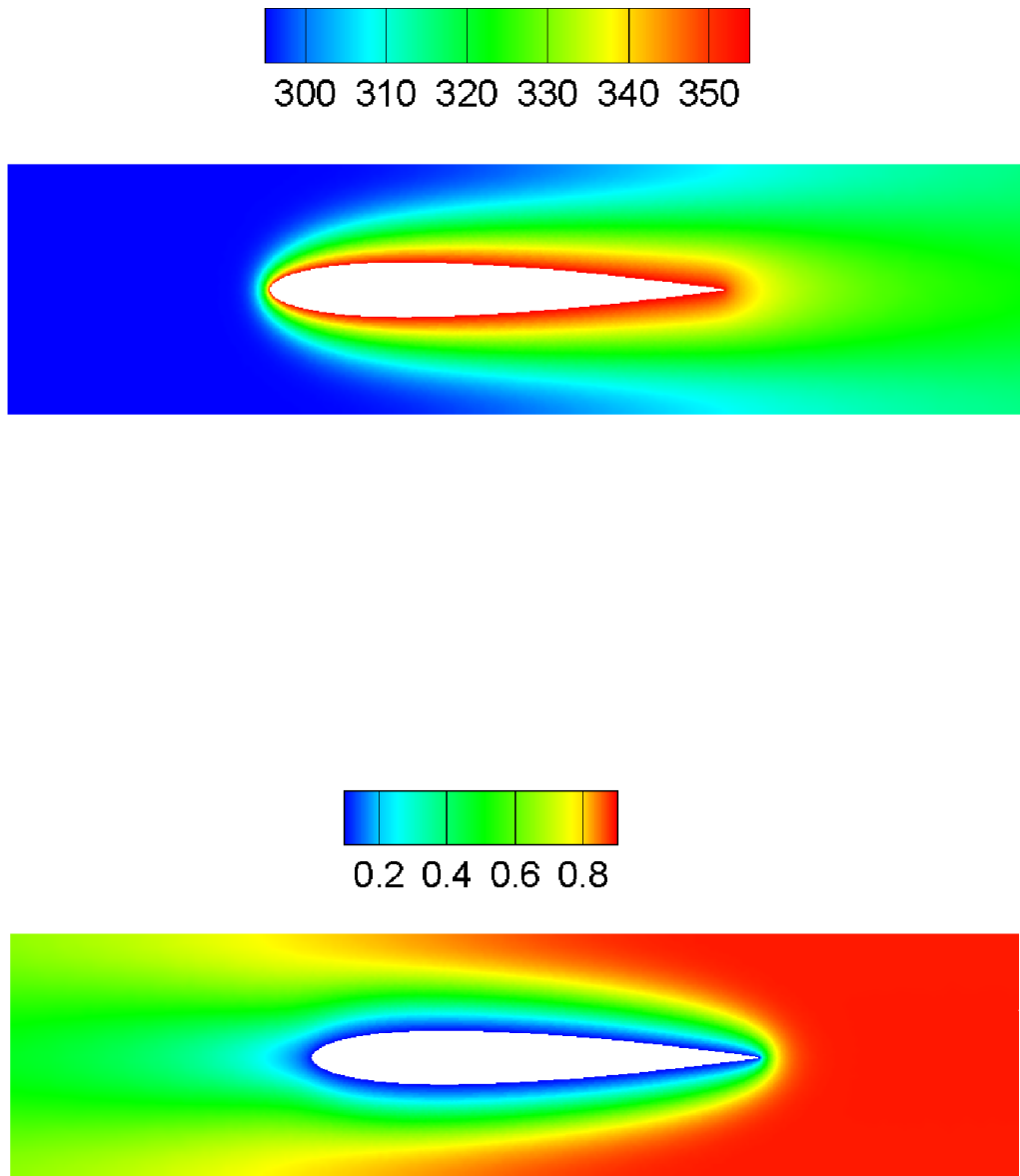


**Σχήμα 3.4:** Αγωγός εναλλάκτη κελύφους/αυλών. Η γεωμετρία του αγωγού και τα σημεία ελέγχου Bézier. Όλα τα σημεία ελέγχου εκτός των δύο πρώτων στην ακμή πρόσπτωσης και αυτού στην ακμή εκφυγής είναι ελεύθερα να μετακινηθούν κατά  $y$  και στις δύο πλευρές του αγωγού.



**Σχήμα 3.5:** Αγωγός εναλλάκτη κελύφους/αυλών. Σύγκριση των παραγώγων ευαισθησίας που υπολογίζει η συζυγής μέθοδος με τις παραγώγους που προκύπτουν από τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών.

ως προς τις δύο πλευρές. Αυτή η αύξηση του πάχους οδηγεί σε ταυτόχρονη αύξηση της επιφάνειας συναλλαγής θερμότητας. Το πεδίο της θερμοκρασίας και το πεδίο της συζυγούς θερμοκρασίας παρουσιάζονται στο σχήμα 3.6, όπου, όπως και στην προηγούμενη εφαρμογή, παρατηρείται ότι σχηματίζεται ο ομόρρους του πεδίου της συζυγούς θερμοκρασίας σε ανάποδη φορά αυτού του πεδίου της θερμοκρασίας.



**Σχήμα 3.6:** Αγωγός εναλλάκτη κελύφους/αυλών. Το πεδίο της θερμοκρασίας  $T$  (πάνω) και της συζυγούς θερμοκρασίας  $T_a$  (κάτω).



## Κεφάλαιο 4

# Η συζυγής μέθοδος για ασυμπίεστες τυρβώδεις ροές με μεταφορά θερμότητας- One-shot παραλλαγή και πιστοποίηση

Η ανάπτυξη της συνεχούς συζυγούς μεθόδου σε ασυμπίεστες στρωτές ροές με μεταφορά θερμότητας και η πιστοποίηση της μεθόδου ως προς τις ζητούμενες παραγώγους ευαισθησίας αποτελεί αξιόπιστη βάση για την επέκταση της μεθόδου σε τυρβώδεις ροές. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται αρχικά η διατύπωση του συνεχούς συζυγούς προβλήματος για ασυμπίεστες τυρβώδεις ροές με μεταφορά θερμότητας. Στη συνέχεια, πραγματοποιείται σύγκριση των παραγώγων ευαισθησίας που υπολογίζει η προτεινόμενη μέθοδος με τις παραγώγους που υπολογίζονται με πεπερασμένες διαφορές ώστε να ελεγχθεί η ακριβειά τους. Στην τελευταία ενότητα του κεφαλαίου, παρουσιάζεται η ένταξη της συζυγούς μεθόδου σε βρόχο βελτιστοποίησης, βασισμένη στην “κλασική” αιτιοκρατική μέθοδο βελτιστοποίησης και στην τεχνική one-shot, αλλά και η χρήση των δύο αυτών μεθόδων σε εφαρμογές βελτιστοποίησης μορφής.

### 4.1 Η διατύπωση του συζυγούς προβλήματος

Για τη διατύπωση των συζυγών εξισώσεων για τυρβώδεις ροές, οι οποίες στην παρούσα διατριβή μοντελοποιούνται μέσω του μοντέλου τύρβης των Spalart-Allmaras, είναι απαραίτητη η εισαγωγή της συζυγούς μεταβλητής του μοντέλου τύρβης  $\tilde{\nu}_a$ , όπως παρουσιάστηκε στη διδακτορική διατριβή του Α. Ζυμάρη, [143]. Επομένως, το διάνυσμα των συζυγών μεταβλητών είναι πλέον  $\vec{\Psi} = [q, u_i, T_a, \tilde{\nu}_a]^T$  και η επαυξημένη συνάρτηση-στόχος ορίζεται ως

$$F_{aug} = F + \int_{\Omega} \vec{\Psi} R_{\vec{\Psi}} d\Omega = F + \int_{\Omega} q R_p d\Omega + \int_{\Omega} u_i R_{v_i} d\Omega + \int_{\Omega} T_a R_T d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\nu}_a R_{\tilde{\nu}} d\Omega \quad (4.1)$$

Ο ρυθμός μεταβολής της επαυξημένης συνάρτησης-στόχου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού  $b_l$  δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_l} &= \frac{\delta F}{\delta b_l} + \int_{\Omega} q \frac{\partial R_p}{\partial b_l} d\Omega + \int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_{v_i}}{\partial b_l} d\Omega + \int_{\Omega} T_a \frac{\partial R_T}{\partial b_l} d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\nu}_a \frac{\delta R_{\tilde{\nu}}}{\delta b_l} d\Omega \\ &+ \int_S (qR_p + u_i R_{v_i} + T_a R_T + \tilde{\nu}_a R_{\tilde{\nu}}) \frac{\delta x_k}{\delta b_l} n_k dS \end{aligned} \quad (4.2)$$

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η διαφορίση των εξισώσεων της ροής και αναπτύσσονται οι όροι οι οποίοι προκύπτουν από την ολοκλήρωση των ρυθμών μεταβολής τους. Η ανάπτυξη αυτή, χωρίς τη συμβολή της εξίσωσης της ενέργειας, έχει παρουσιασθεί αναλυτικά στην [143]. Για την εξίσωση της συνέχειας, στη διατύπωση που συμπεριλαμβάνει (σε αντίθεση με την εργασία [143]) και το συντελεστή ψευδοσυμπίεστότητας, όπως παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 3, προκύπτει

$$\frac{\partial R_p}{\partial b_l} = \beta^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_j}{\partial b_l} \right) \quad (4.3)$$

$$\int_{\Omega} \beta^2 q \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_j}{\partial b_l} \right) d\Omega = \int_S \beta^2 q \frac{\partial v_j}{\partial b_l} n_j dS - \int_{\Omega} \beta^2 \frac{\partial q}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial b_l} d\Omega \quad (4.4)$$

Από τη διαφορίση των εξισώσεων  $R_{v_i}$  προκύπτει η σχέση

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{v_i}}{\partial b_l} &= \frac{\partial v_j}{\partial b_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial p}{\partial b_l} \right) - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial \nu_t}{\partial b_l} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right]}_{term_{\nu_t R_{v_i}}} \\ &- \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial b_l} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Οι τρεις πρώτοι όροι του δεξιού μέλους της εξίσωσης 4.5 είναι οι ίδιοι με τους αντίστοιχους τρεις όρους της εξίσωσης 3.10 που διέπει στρωτές ροές. Η ύπαρξη της τυρβώδους συνεκτικότητας  $\nu_t$  διαφοροποιεί τον τελευταίο όρο ενώ εμφανίζεται και ένας επιπλέον όρος, ο  $term_{\nu_t R_{v_i}}$ , ο οποίος εξαρτάται από το ρυθμό μεταβολής της τυρβώδους συνεκτικότητας. Από την ανάπτυξη των δύο τελευταίων όρων της εξίσωσης 4.5 προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial \nu_t}{\partial b_l} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] d\Omega &= \int_S u_i n_j \frac{\partial \nu_t}{\partial b_l} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dS \\ &- \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \nu_t}{\partial b_l} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial b_l} \right) \right) \right] d\Omega = \\
& \int_S (\nu + \nu_t) u_i n_j \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial b_l} \right) \right] dS \\
& - \int_{\Omega} (\nu + \nu_t) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial b_l} \right) \right] d\Omega = \\
& \int_S (\nu + \nu_t) u_i n_j \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial b_l} \right) \right] dS \\
& - \int_S (\nu + \nu_t) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial b_l} n_j dS - \int_S (\nu + \nu_t) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial b_l} n_i dS \\
& + \int_{\Omega} (\nu + \nu_t) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \frac{\partial v_i}{\partial b_l} d\Omega + \int_{\Omega} (\nu + \nu_t) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial b_l} d\Omega \quad (4.7)
\end{aligned}$$

Από τη διαφορίση της εξίσωσης της ενέργειας, εξίσωση 4.8, εμφανίζεται ο όρος  $term_{\nu_t R_T}$ , ο οποίος δεν υπάρχει στην αντίστοιχη εξίσωση 3.15 του κεφαλαίου 3 και προέρχεται από το ρυθμό μεταβολής της τυρβώδους συνεκτικότητας. Είναι

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_T}{\partial b_l} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( T \frac{\partial v_i}{\partial b_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( v_i \frac{\partial T}{\partial b_l} \right) - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \nu_t}{\partial b_l} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)}_{term_{\nu_t R_T}} \\
&- \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial}{\partial b_l} \left( \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \right] \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος  $\int_{\Omega} T_a \frac{\partial R_T}{\partial b_l} d\Omega$ , η ολοκλήρωση των δύο πρώτων όρων της προηγούμενης έκφρασης δίνεται από τις σχέσεις 3.16 και 3.17, ενώ τα χωρικά ολοκληρώματα των δύο τελευταίων όρων γράφονται

$$\int_{\Omega} T_a \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \nu_t}{\partial b_l} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) d\Omega = \int_S T_a n_i \frac{\partial \nu_t}{\partial b_l} \frac{\partial T}{\partial x_i} dS - \int_{\Omega} \frac{\partial T_a}{\partial x_i} \frac{\partial \nu_t}{\partial b_l} \frac{\partial T}{\partial x_i} d\Omega \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} T_a \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial}{\partial b_l} \left( \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \right] d\Omega &= \int_S \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) T_a n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial T}{\partial b_l} \right) dS \\
&- \int_{\Omega} \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T_a}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial T}{\partial b_l} \right) d\Omega \\
&= \int_S \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) T_a n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial T}{\partial b_l} \right) dS \\
&- \int_S \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T_a}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial b_l} n_i dS \\
&+ \int_{\Omega} \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial^2 T_a}{\partial x_i^2} \frac{\partial T}{\partial b_l} d\Omega \quad (4.10)
\end{aligned}$$

Λόγω του

$$\frac{\partial \nu_t}{\partial b_l} = \frac{\delta \nu_t}{\delta \tilde{\nu}} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_l}$$

οι όροι 4.6 και 4.9 γράφονται ως εξής

$$\begin{aligned} & \int_S u_i n_j \frac{\partial \nu_t}{\partial b_l} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dS - \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \nu_t}{\partial b_l} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) d\Omega = \\ & \int_S u_i n_j \frac{\delta \nu_t}{\delta \tilde{\nu}} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_l} dS - \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\delta \nu_t}{\delta \tilde{\nu}} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_l} d\Omega \end{aligned} \quad (4.11)$$

και

$$\int_S T_a n_i \frac{\partial \nu_t}{\partial b_l} \frac{\partial T}{\partial x_i} dS - \int_\Omega \frac{\partial T_a}{\partial x_i} \frac{\partial \nu_t}{\partial b_l} \frac{\partial T}{\partial x_i} d\Omega = \int_S T_a n_i \frac{\delta \nu_t}{\delta \tilde{\nu}} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_l} dS - \int_\Omega \frac{\partial T_a}{\partial x_i} \frac{\delta \nu_t}{\delta \tilde{\nu}} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_l} d\Omega \quad (4.12)$$

Διαφορίζοντας την εξίσωση του μοντέλου Spalart-Allmaras καταλήγουμε στην έκφραση

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{\tilde{\nu}}}{\partial b_l} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_l} \tilde{\nu} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_l} v_i \right) - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_l} \right) \right] - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_l} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_l} \right) \\ &- 2 \frac{c_{b2}}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_l} \right) + \tilde{\nu} \left( -\frac{\partial P}{\partial b_l} + \frac{\partial D}{\partial b_l} \right) + (-P + D) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_l} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Η ανάπτυξη του ολοκληρώματος  $\int_\Omega \tilde{\nu}_a \frac{\delta R_{\tilde{\nu}}}{\delta b_l} d\Omega$  παρουσιάζεται αναλυτικά, για κάθε όρο της εξίσωσης 4.13, στη διδακτορική διατριβή του Α. Ζυμάρη. Οι όροι που προκύπτουν από αυτήν την ανάπτυξη φαίνονται στην έκφραση του ρυθμού μεταβολής της επαυξημένης συνάρτησης-στόχου, εξίσωση 4.14, η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_l} &= \frac{\delta F}{\delta b_l} + \int_S (u_i n_i) \frac{\partial p}{\partial b_l} dS - \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial b_l} d\Omega \\
&+ \int_S \left[ \beta^2 q n_i + u_i v_i n_j + u_i v_j n_j + (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j + T_a T n_i + \tilde{\nu}_a \tilde{\nu} n_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_l} dS \\
&+ \int_\Omega \left[ -v_j \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - (\nu + \nu_t) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \beta^2 \frac{\partial q}{\partial x_j} - T \frac{\partial T_a}{\partial x_i} - \tilde{\nu} \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_i} \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_l} d\Omega \\
&+ \int_S \left( T_a v_i n_i + \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T_a}{\partial x_i} n_i \right) \frac{\partial T}{\partial b_l} dS - \int_\Omega \left( v_i \frac{\partial T_a}{\partial x_i} + \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial^2 T_a}{\partial x_i^2} \right) \frac{\partial T}{\partial b_l} d\Omega \\
&- \int_S \frac{\delta \nu_t}{\delta \tilde{\nu}} u_i n_j \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_l} dS + \int_\Omega \frac{\delta \nu_t}{\delta \tilde{\nu}} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_l} d\Omega \\
&- \int_S \frac{\delta \nu_t}{\delta \tilde{\nu}} T_a n_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_l} dS + \int_\Omega \frac{\delta \nu_t}{\delta \tilde{\nu}} \frac{\partial T_a}{\partial x_i} \frac{\delta \nu_t}{\delta \tilde{\nu}} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_l} d\Omega \\
&- \int_S (\nu + \nu_t) u_i n_j \frac{\partial}{\partial b_l} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dS - \int_S \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) T_a n_i \frac{\partial}{\partial b_l} \left( \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) dS \\
&- \int_\Omega v_j \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_l} d\Omega - \int_\Omega \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} \right] \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_l} d\Omega + \int_\Omega \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_l} d\Omega \\
&+ \int_\Omega 2 \frac{c_{b2}}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \tilde{\nu}_a \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_l} d\Omega + \int_\Omega \tilde{\nu}_a \tilde{\nu} \left( \frac{\partial D}{\partial \tilde{\nu}} - \frac{\partial P}{\partial \tilde{\nu}} \right) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_l} d\Omega \\
&+ \int_\Omega \frac{\delta \nu_t}{\delta \tilde{\nu}} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_l} d\Omega - \int_\Omega (-P + D) \tilde{\nu}_a \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_l} d\Omega \\
&- \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \tilde{\nu}_a \tilde{\nu} e_{jli} e_{jmq} \frac{C_S}{S} \frac{\partial v_q}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v_k}{\delta b_l} d\Omega + \int_S \tilde{\nu}_a v_i n_i \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_l} dS + \int_S \frac{1}{\sigma} \tilde{\nu}_a \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} n_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_l} dS \\
&- \int_S \tilde{\nu}_a \frac{1}{\sigma} (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_l} \right) n_j dS - \int_S \frac{1}{\sigma} (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_l} n_j dS - \int_S 2 \frac{c_{b2}}{\sigma} \tilde{\nu}_a \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_l} n_j dS \\
&+ \int_S \tilde{\nu}_a \tilde{\nu} e_{jli} e_{jmq} \frac{C_S}{S} \frac{\partial v_q}{\partial x_j} n_l \frac{\partial v_k}{\delta b_l} dS + \int_S (q R_p + u_i R_{v_i} + T_a R_T + \tilde{\nu}_a R_{\tilde{\nu}}) \frac{\delta x_k}{\delta b_l} n_k dS
\end{aligned} \tag{4.14}$$

όπου

$$\begin{aligned}
S &= \left| e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \vec{l}_i \right| \\
C_S &= \left( -c_{b1} - c_{w1} \mathcal{C}(\tilde{\nu}) \frac{r}{d} \right) f_{v3}, \mathcal{C}(\tilde{\nu}) = \frac{\partial f_w}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial r} \frac{\tilde{\nu}}{d^2} \\
C_{\tilde{\nu}} &= \left( -c_{b1} - c_{w1} \mathcal{C}(\tilde{\nu}) \frac{r}{d} \right) \left( \frac{\delta f_{v3}}{\delta \tilde{\nu}} d + \frac{1}{\kappa^2 d^2} f_{v2} + \frac{\delta f_{v2}}{\delta \tilde{\nu}} \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} \right) \\
&+ c_{w1} \mathcal{C}(\tilde{\nu}) \frac{r}{\tilde{\nu}} + c_{w1} \frac{f_w}{d^2}
\end{aligned}$$

Για διευκόλυνση της ομαδοποίησης των συνοριακών ολοκληρωμάτων στην έκφραση 4.14 ως προς τις μεταβολές των ροϊκών μεγεθών,  $\frac{\partial p}{\partial b_l}$ ,  $\frac{\partial v_i}{\partial b_l}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial b_l}$  και  $\frac{\partial T}{\partial \tilde{\nu}}$  η μεταβολή  $\frac{\delta F}{\delta b_l}$

γράφεται ως

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_l} &= \int_S \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial b_l} dS + \int_S \frac{\partial F}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial b_l} dS + \int_S \frac{\partial F}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial b_l} dS + \int_S \frac{\partial F}{\partial \tilde{v}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_l} dS \\ &+ \int_S \frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_l} dS + \int_S F \frac{\delta(dS)}{\delta b_l} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Στην περίπτωση των συναρτήσεων-στόχων που παρουσιάστηκαν στην ενότητα 3.3, οι μεταβολές της  $F$  ως προς τις ποσότητες της ροής δίνονται από τις εκφράσεις

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{S_I}}{\partial p} &= -\omega_1 v_i n_i \\ \frac{\partial F_{S_O}}{\partial v_i} &= -\omega_1 \left( \frac{1}{2} v^2 n_i + v_i v_\lambda n_\lambda + p n_i \right) \\ \frac{\partial F_{S_O}}{\partial T} &= -\omega_2 \\ \frac{\partial F_{S_O}}{\partial \tilde{v}} &= 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

## 4.2 Οι συζυγείς εξισώσεις

Οι συζυγείς πεδιακές εξισώσεις για τυρβώδεις ροές με μεταφορά θερμότητας προκύπτουν απαλείφοντας τα χωρικά ολοκληρώματα στα οποία εμφανίζονται ποσότητες που εξαρτώνται από τις μεταβολές των ροϊκών μεγεθών, όπως οι  $\frac{\partial p}{\partial b_l}$ ,  $\frac{\partial v_i}{\partial b_l}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial b_l}$ ,  $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_l}$ . Οι συζυγείς εξισώσεις της διατήρησης της παροχής και ορμής ( $R_q = 0$ ,  $R_{u_i} = 0$ ), της εξίσωσης της ενέργειας ( $R_{T_a} = 0$ ) και της εξίσωσης του μοντέλου τύρβης ( $R_{\tilde{v}_a} = 0$ ) διατυπώνονται ως

$$R_q = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} R_{u_i} &= -v_j \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] - \beta^2 \frac{\partial q}{\partial x_j} - \underbrace{T \frac{\partial T_a}{\partial x_i}}_{\text{term}_{TR_{u_i}}} \\ &- \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_l} \left( e_{jli} e_{jmq} \frac{C_S}{S} \frac{\partial v_q}{\partial x_m} \tilde{v} \tilde{v}_a \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$R_{T_a} = -v_i \frac{\partial T_a}{\partial x_i} - \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial^2 T_a}{\partial x_i^2} = 0 \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} R_{\tilde{v}_a} &= v_j \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_j} \right] - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} - 2 \frac{c_{b2}}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \tilde{v}_a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \right) \\ &- \tilde{v}_a \tilde{v} C_{\tilde{v}}(\tilde{v}, \tilde{v}) - \frac{\delta \nu_t}{\delta \tilde{v}} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - (-P + D) \tilde{v}_a + \underbrace{\frac{\delta \nu_t}{\delta \tilde{v}} \frac{\partial T_a}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_i}}_{\text{term}_{TR_{\tilde{v}_a}}} = 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Στη συζυγή εξίσωση της ορμής, εξίσωση 4.18, σε σύγκριση με την εξίσωση 3.28 για στρωτές ροές, εκτός από τον όρο  $term_{T_{Ru_i}}$ , ο οποίος υπήρχε λόγω της διαφορίσης της εξίσωσης της ενέργειας, εμφανίζονται και οι δύο τελευταίοι όροι οι οποίοι προέρχονται από τη διαφορίση του μοντέλου τύρβης. Αντίστοιχα, στη συζυγή εξίσωση του μοντέλου τύρβης, εμφανίζονται δύο νέοι όροι οι οποίοι προέρχονται από τον όρο διάχυσης της εξίσωσης της ορμής και τον όρο διάχυσης της εξίσωσης της ενέργειας,  $term_{T_{\tilde{\nu}_a}}$ . Σε προβλήματα μεταφοράς θερμότητας για τυρβώδεις ροές, η παρουσία των όρων  $term_{T_{Ru_i}}$  και  $term_{T_{\tilde{\nu}_a}}$  στην εξίσωση της ορμής και του μοντέλου τύρβης, αντίστοιχα, καθιστά τις δύο αυτές εξισώσεις πεπλεγμένες με την εξίσωση της ενέργειας.

### 4.3 Οι συζυγείς οριακές συνθήκες

Οι συζυγείς οριακές συνθήκες προκύπτουν, όπως και στο κεφάλαιο 3, ύστερα από απαλοιφή των συνοριακών ολοκληρωμάτων που εξαρτώνται από τους ρυθμούς μεταβολής των ροϊκών μεταβλητών ως προς το  $b_l$  από την έκφραση της επαυξημένης συνάρτησης-στόχου, εξίσωση 4.14.

#### 4.3.1 Συζυγείς οριακές συνθήκες εισόδου

Δεδομένου ότι στην είσοδο του πεδίου ροής επιβάλλονται συνθήκες τύπου Dirichlet για τις μεταβλητές της ροής  $v_i, T$  και  $\tilde{\nu}$ , και αφού  $\frac{\delta x_k}{\delta b_l} = 0$  ισχύει  $\frac{\partial v_i}{\partial b_l} = \frac{\partial T}{\partial b_l} = \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_l} = 0$ . Για την απαλοιφή των όρων που απομένουν στην εξίσωση 4.14 πρέπει να ισχύει

$$\begin{aligned} \nu u_i n_j \frac{\partial}{\partial b_l} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) &= 0 \\ u_i n_i + \frac{\partial F_{S_I}}{\partial p} &= 0 \\ \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) T_a n_i \frac{\partial}{\partial b_l} \left( \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) &= 0 \\ \tilde{\nu}_a \frac{1}{\sigma} (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_l} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Για αυτό το λόγο επιβάλλονται οι συνθήκες

$$\begin{aligned} u_i t_i &= 0 \\ u_i n_i &= -\frac{\partial F_{S_I}}{\partial p} \\ T_a &= 0 \\ \tilde{\nu}_a &= 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

όπου  $t_i$  οι συνιστώσες του μοναδιαίου εφαπτομενικού διανύσματος.

### 4.3.2 Συζυγείς οριακές συνθήκες εξόδου

Στα όρια της εξόδου του πεδίου ροής επιβάλλεται συνθήκη τύπου Dirichlet για την πίεση και αφού  $\frac{\delta x_k}{\delta b_l} = 0$  ισχύει  $\frac{\partial p}{\partial b_l} = 0$ . Επιπλέον, λόγω των συνθηκών τύπου Neumann για τα  $v_i, \tilde{\nu}$  και  $T$ , μηδενίζονται οι μεταβολές  $\frac{\partial}{\partial b_l} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} n_j \right)$ ,  $\frac{\partial}{\partial b_l} \left( \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} n_j \right)$  και  $\frac{\partial}{\partial b_l} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} n_j \right)$ . Προκειμένου να απαλειφθούν όροι οι οποίοι εξαρτώνται από τους ρυθμούς μεταβολής  $\frac{\partial v_i}{\partial b_l}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial b_l}$  και  $\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_l}$ , επιβάλλονται αντίστοιχα οι συνθήκες

$$\begin{aligned} \beta^2 q n_i + u_i v_i n_j + u_i v_j n_j + (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j + \frac{\partial F_{S_O}}{\partial v_i} + \underbrace{T_a T n_i}_{S-term_{TR_{u_i}}} + \tilde{\nu}_a \tilde{\nu} n_i \\ + \tilde{\nu}_a \tilde{\nu} e_{jli} e_{jmq} \frac{C_S}{S} \frac{\partial v_q}{\partial x_j} n_l \frac{\partial v_k}{\delta b_l} = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$T_a v_i n_i + \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T_a}{\partial x_i} n_i + \frac{\partial F_{S_O}}{\partial T} = 0 \quad (4.24)$$

$$\tilde{\nu}_a v_j n_j + \left( \nu + \frac{\tilde{\nu}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} n_j - \frac{\delta \nu_t}{\delta \tilde{\nu}} u_i \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j + \frac{\partial S_O}{\partial \tilde{\nu}} - \underbrace{\frac{\delta \nu_t}{\delta \tilde{\nu}} T_a n_i \frac{\partial T}{\partial x_i}}_{S-term_{TR_{\tilde{\nu}_a}}} = 0 \quad (4.25)$$

Στην έξοδο του χωρίου, οι εξισώσεις 4.23, 4.24 και 4.25 χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό της συζυγούς πίεσης και μίας εκ των δύο συνιστωσών της συζυγούς ταχύτητας, της συζυγούς θερμοκρασίας και της συζυγούς μεταβλητής του μοντέλου τύρβης, αντίστοιχα. Οι όροι  $S-term_{TR_{u_i}}$  και  $S-term_{TR_{\tilde{\nu}_a}}$  προέρχονται από τη διαφορίση των όρων της μεταφοράς και της διάχυσης της εξίσωσης της ενέργειας, εξίσωση 4.8, αντίστοιχα.

### 4.3.3 Συζυγείς οριακές συνθήκες στερεού τοιχώματος

Η οριακή συνθήκη τύπου Dirichlet που επιβάλλεται στη μεταβλητή του μοντέλου τύρβης στο στερεό τοίχωμα,  $\tilde{\nu} = 0$ , δίνει  $\frac{\delta \tilde{\nu}}{\delta b_l} = 0$  και κατ' επέκταση

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial b_l} = - \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_l} \quad (4.26)$$

Με αντικατάσταση της προηγούμενης έκφρασης στην εξίσωση 4.14 και δεδομένου ότι  $v_i = 0$ , ισχύει για το ρυθμό μεταβολής της επαυξημένης συνάρτησης στα στερεά όρια ότι



$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_l} = & - \int_S \left[ \beta^2 q n_i + (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j + T_a T n_i + \tilde{\nu}_a \tilde{\nu} n_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_l} dS \\
& - \int_S \left( \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T_a}{\partial x_i} n_i \right) \frac{\partial T}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_l} dS + \int_S \left( u_i n_i + \frac{\partial F_{Sw}}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial b_l} dS \\
& - \int_S (\nu + \nu_t) u_i n_j \frac{\partial}{\partial b_l} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dS \\
& - \int_S \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) T_a n_i \frac{\partial}{\partial b_l} \left( \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) dS - \int_S \tilde{\nu}_a \frac{1}{\sigma} (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial}{\partial b_l} \left( \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) n_j dS \\
& + \int_S \frac{1}{\sigma} \tilde{\nu}_a \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} n_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_l} dS - \int_S \nu \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} n_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_l} dS \\
& + \int_S \nu \tilde{\nu}_a \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\delta n_j}{\delta b_l} dS + \int_S \nu \tilde{\nu}_a \frac{\partial^2 \tilde{\nu}}{\partial x_j \partial x_k} n_j \frac{\delta x_k}{\delta b_l} dS \\
& + \int_S 2 \frac{c_{b2}}{\sigma} \tilde{\nu}_a \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} n_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_l} dS + \int_S (q R_p + u_i R_{v_i} + T_a R_T + \tilde{\nu}_a R_{\tilde{\nu}}) \frac{\delta x_k}{\delta b_l} n_k dS
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Όπως παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 3, οι οριακές συνθήκες που επιβάλλονται στα στερεά τοιχώματα για τη συζυγή ταχύτητα και θερμοκρασία είναι οι εξής

$$u_i n_i + \frac{\partial F_{Sw}}{\partial p} = 0 \tag{4.28}$$

$$T_a = 0 \tag{4.29}$$

Ομοίως, για την απαλοιφή των όρων που εξαρτώνται από την παράγωγο  $\frac{\partial}{\partial b_l} \left( \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right)$  επιβάλλεται ότι  $\tilde{\nu}_a = 0$  στο  $S_W$ .

## 4.4 Έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας

Η γενική τελική έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας για τυρβώδεις ροές με μεταφορά θερμότητας είναι η

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_l} = & - \int_{S_W} \left[ \beta^2 q n_i + (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_l} dS \\
& - \int_{S_W} \left( \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T_a}{\partial x_i} n_i \right) \frac{\partial T}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_l} dS - \int_{S_W} \nu \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} n_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_l} dS \\
& + \int_{S_W} (q R_p + u_i R_{v_i}) \frac{\delta x_k}{\delta b_l} n_k dS + \int_{S_W} \nu u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] \frac{\partial x_k}{\delta b_l} dS \\
& + \int_{\Omega} \tilde{\nu}_a \tilde{\nu} \mathcal{C}_d(\tilde{\nu}, \vec{v}) \frac{\partial d}{\partial b_l} d\Omega + \int_{S_W} \nu u_i \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta n_j}{\delta b_l} dS
\end{aligned} \tag{4.30}$$

όπου

$$C_d = -\frac{2}{d^3} \left[ c_{w1} r C(\tilde{\nu}) \left( \frac{1}{d} - \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2} f_{v2} \right) + c_{w1} f_w \tilde{\nu} - c_{b1} \frac{f_{v2}}{\kappa^2} \tilde{\nu} \right]$$

Για τις συναρτήσεις-στόχους που χρησιμοποιούνται στην παρούσα διατριβή και βάσει της μεταβολής  $\frac{\partial F_{SW}}{\partial p} = -\omega_1 v_i n_i = 0$  στα στερεά τοιχώματα, η σχέση 3.38 μηδενίζει τις συνιστώσες της συζυγούς ταχύτητας  $u_i = 0$ . Αντικαθιστώντας επιπλέον την έκφραση του  $R_p$  στην εξίσωση 4.30, οι παράγωγοι ευαισθησίας λαμβάνουν τη μορφή

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_l} = & - \int_{S_w} \left[ \beta^2 q n_i + (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_l} dS \\ & - \int_{S_w} \left( \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T_a}{\partial x_i} n_i \right) \frac{\partial T}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_l} dS + \int_{S_w} \beta^2 q \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \frac{\delta x_k}{\delta b_l} n_k dS \\ & - \int_{S_w} \nu \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_j} n_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_l} dS + \int_{\Omega} \tilde{\nu}_a \tilde{\nu} C_d(\tilde{\nu}, \vec{v}) \frac{\partial d}{\partial b_l} d\Omega \end{aligned} \quad (4.31)$$

## 4.5 Πιστοποίηση της ακρίβειας των παραγώγων ευαισθησίας

Έχοντας καταλήξει στην τελική έκφραση για τις παραγώγους ευαισθησίας, που υπολογίζει η συνεχής συζυγής μέθοδος για ασυμπίεστες τυρβώδεις ροές με μεταφορά θερμότητας, η πιστοποίηση της μεθόδου αποτελεί τον επόμενο στόχο. Όπως και στο κεφάλαιο 3, οι παράγωγοι που υπολογίζει η προτεινόμενη μέθοδος συγκρίνονται με τις παραγώγους αναφοράς που προκύπτουν από τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Επιπλέον, υπολογίζονται οι παράγωγοι με τη συζυγή μέθοδο κάνοντας χρήση της συνήθους παραδοχής της “παγωμένης” τυρβώδους συνεκτικότητας, δηλαδή αμελώντας τη μεταβολή της τυρβώδους συνεκτικότητας,  $\frac{\delta \nu_t}{\delta b_l} = 0$ . Εφαρμόζοντας αυτήν την παραδοχή, δεν απαιτείται η διαφορίση του μοντέλου τύρβης και κατ’ επέκταση και οι επιπλέον όροι που εμφανίζονται στη συζυγή εξίσωση της ορμής, εξίσωση 4.18, και στις οριακές συνθήκες για τη συζυγή ταχύτητα και πίεση, εξίσωση 4.23, λόγω μεταβολής των ποσοτήτων της τύρβης. Επίσης, κατά τον υπολογισμό των παραγώγων, δεν συμπεριλαμβάνονται οι δύο τελευταίοι όροι στην τελική έκφραση των παραγώγων της εξίσωσης 4.31, δηλαδή οι όροι που προέρχονται από τη διαφορίση του μοντέλου τύρβης.

Στη διδακτορική διατριβή [143] πιστοποιήθηκε ότι η χρήση της παραδοχής της “παγωμένης” τυρβώδους συνεκτικότητας δεν οδηγεί σε ακριβείς παραγώγους ευαισθησίας. Αντίθετα, η επιπλέον επίλυση των συζυγών εξισώσεων του μοντέλου τύρβης οδηγεί σε παραγώγους υψηλής πιστότητας. Στόχος των εφαρμογών μεταφοράς θερμότητας που ακολουθούν είναι η πιστοποίηση της ακρίβειας της προτεινόμενης συζυγούς διατύπωσης, η οποία περιλαμβάνει την εισαγωγή της μεταφοράς θερμότητας σε τυρβώδεις ροές, συγκρίνοντας τις παραγώγους που υπολογίζονται με τις παραγώγους αναφοράς. Παράλληλα, πραγματοποιείται σύγκριση με τις παραγώγους που υπολογίζονται με την παραδοχή της “παγωμένης” τυρβώδους συνεκτικότητας ώστε να φανεί η διαφορά στην

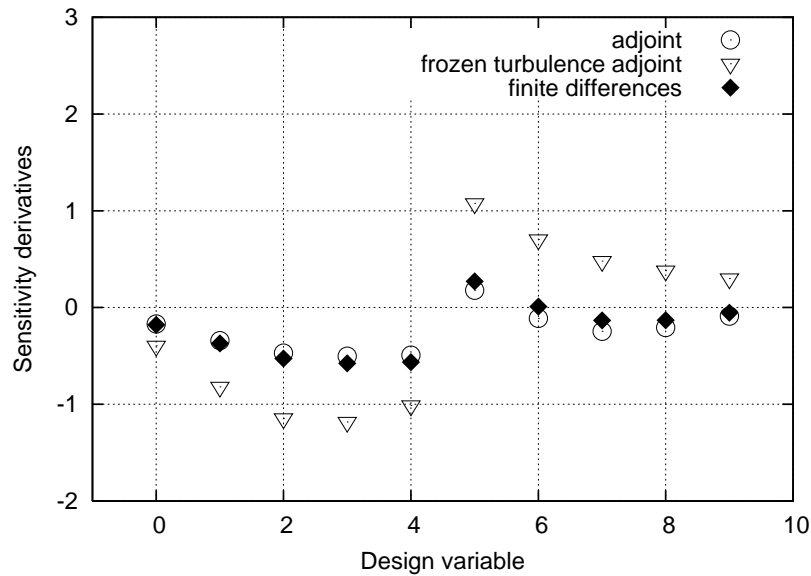
ακρίβεια με την οποία υπολογίζονται οι παράγωγοι με τις δύο αυτές μεθόδους. Η συνάρτηση-στόχος που χρησιμοποιείται στις επόμενες εφαρμογές εκφράζει μόνο τη μεγιστοποίηση της μεταφοράς θερμότητας, εξίσωση 3.21, ( $\omega_1 = 0.0$ ,  $\omega_2 = 1.0$ ).

#### 4.5.1 Αγωγός με στροφή 90°

Στην εφαρμογή αυτή υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας σε έναν αγωγό ο οποίος πραγματοποιεί στροφή της ροής κατά 90° και η γεωμετρία του είναι ίδια με αυτήν της εφαρμογής 3.7.1. Ο αριθμός Reynolds της ροής, υπολογισμένος με βάση το ύψος του αγωγού στην είσοδο ισούται με  $Re = 6 \times 10^5$ . Η συνάρτηση-στόχος αφορά τη μεγιστοποίηση της θερμοκρασίας εξόδου του ρευστού όταν αυτό εισέρχεται στον αγωγό με  $T_{SI} = 293K$  και αυξάνει τη θερμοκρασία του καθώς έρχεται σε επαφή με τα σταθερές θερμοκρασίας,  $T_{SW} = 353K$ , τοιχώματα του αγωγού. Οι παράγωγοι ευαισθησίας που υπολογίζονται με την προτεινόμενη μέθοδο, την παραδοχή της “παγωμένης” τυρβώδους συνεκτικότητας και τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών υπολογίζονται για 10 σημεία ελέγχου, σχήμα 3.1, και παρουσιάζονται στο σχήμα 4.1. Οι βασισμένες στην έκφραση 4.31 παράγωγοι ευαισθησίας σχεδόν ταυτίζονται απόλυτα με τις παραγώγους αναφοράς πιστοποιώντας με αυτό τον τρόπο την ακρίβεια της προτεινόμενης συζυγούς διατύπωσης. Από την άλλη, οι παράγωγοι που υπολογίζονται με την παραδοχή της “παγωμένης” τυρβώδους συνεκτικότητας όχι μόνο διαφέρουν από τις παραγώγους των πεπερασμένων διαφορών αλλά, για κάποια σημεία, έχουν και αντίθετο πρόσημο. Στο σχήμα 4.1 φαίνεται ότι οι παράγωγοι αυτές, που αντιστοιχούν στα τέσσερα σημεία ελέγχου της εξωτερικής πλευράς του αγωγού, έχουν αντίθετο πρόσημο από τις παραγώγους αναφοράς. Αυτό σημαίνει ότι, αν χρησιμοποιούνταν αυτές οι παράγωγοι με μέθοδο βελτιστοποίησης μορφής βασισμένη στην κλίση, θα οδηγούσαν τη βελτιστοποίηση σε λάθος κατεύθυνση, δηλαδή η ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού δεν θα οδηγούσε σε σχήμα το οποίο θα ελαχιστοποιούσε τη συνάρτηση-στόχο. Στο σχήμα 4.2 παρουσιάζονται το πεδίο της θερμοκρασίας και της συζυγούς θερμοκρασίας. Σε σύγκριση με την εφαρμογή 3.7.1 για στρωτή ροή, ο ανάποδος ομόρρους του πεδίου της συζυγούς θερμοκρασίας είναι πιο ευδιάκριτος. Στο συζυγές πρόβλημα, η πληροφορία μεταδίδεται από την έξοδο, όπου καθορίζεται η τιμή της συζυγούς θερμοκρασίας μέσω της εξίσωσης 4.24. Στο πρωτεύον πρόβλημα, η μετάδοση της πληροφορίας έχει αντίθετη κατεύθυνση με οριακή συνθήκη  $T_{SI} = 293K$  στην είσοδο. Η αντιστοιχία των δύο αυτών πεδίων γίνεται αντιληπτή παρατηρώντας τα πεδία στην είσοδο και στην έξοδο του αγωγού. Οι αποστάσεις που απαιτούνται για να “σβήσουν” οι οριακές συνθήκες της συζυγούς θερμοκρασίας στην έξοδο της θερμοκρασίας στην είσοδο είναι περίπου ίδιες.

#### 4.5.2 Αγωγός εναλλάκτη κελύφους/αυλών

Η εφαρμογή αφορά στη μεταφορά θερμότητας γύρω από αγωγό εναλλάκτη κελύφους/αυλών και είναι παρόμοια με την εφαρμογή 3.7.2 με τον αριθμό Reynolds να ισούται τώρα με  $Re = 1 \times 10^5$ , υπολογισμένο με βάση το μήκος της διατομής του αγωγού. Και σε αυτήν την εφαρμογή, η συνάρτηση-στόχος αφορά στη μεγιστοποίηση

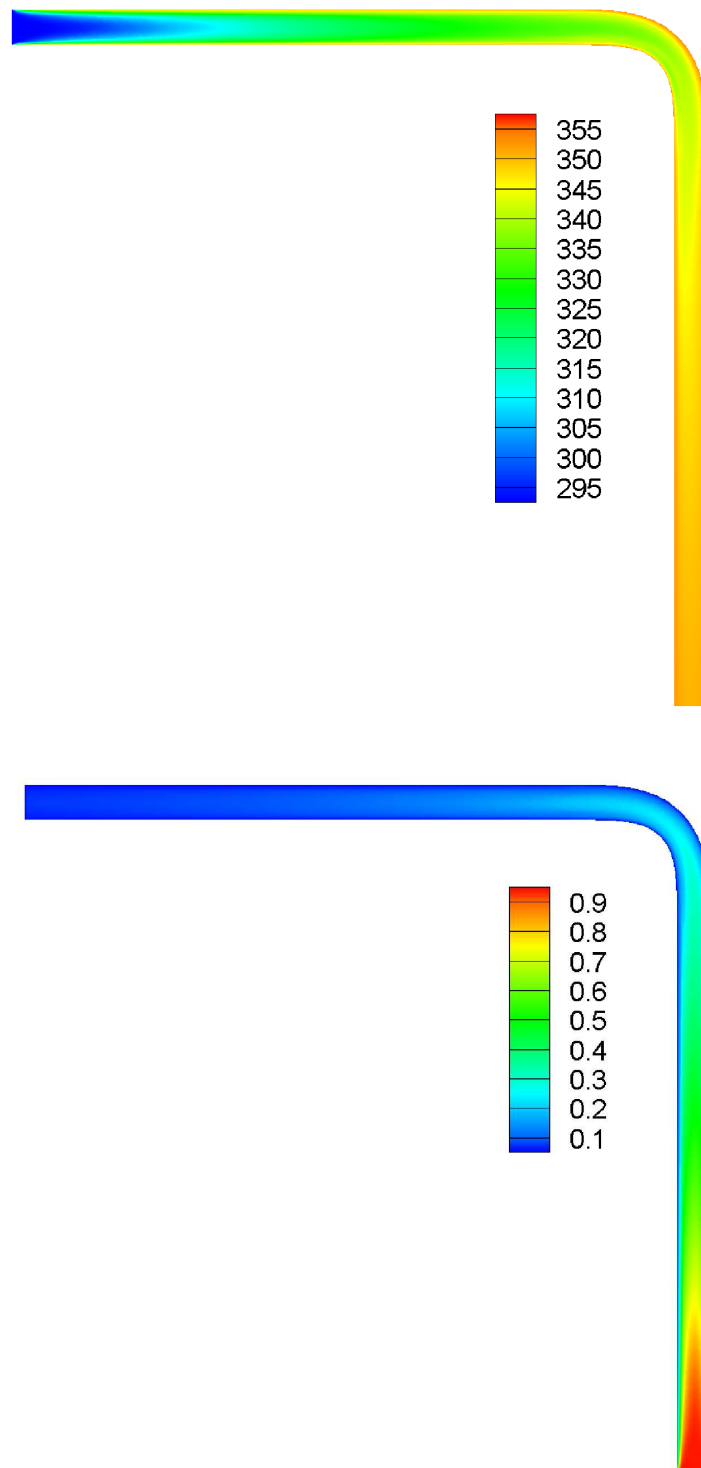


**Σχήμα 4.1:** Αγωγός με στροφή 90°. Παράγωγοι ευαισθησίας υπολογισμένες χρησιμοποιώντας την προτεινόμενη μέθοδο (adjoint), την παραδοχή της “παγωμένης” τυρβώδους συνεκτικότητας και τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών.

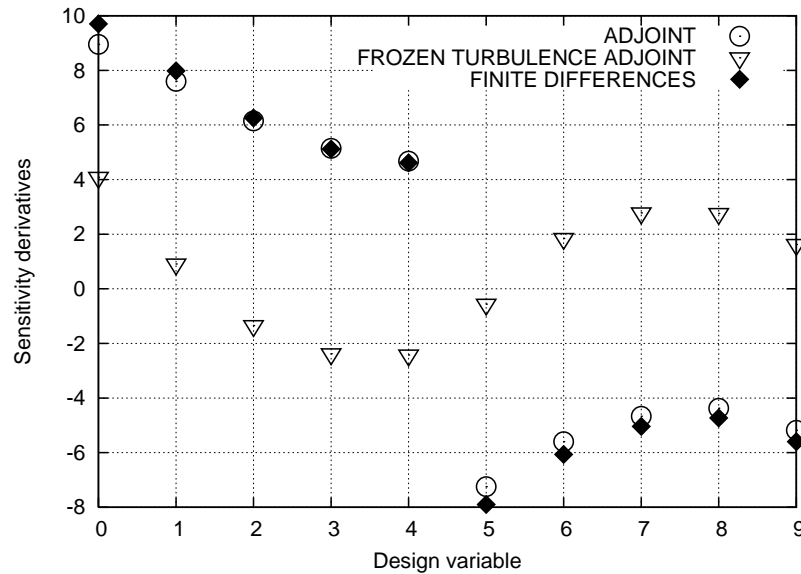
της θερμοκρασίας εξόδου του ρευστού ( $T_{SI} = 293K$ ) αφού έρθει σε επαφή με τον αγωγό που έχει θερμοκρασία τοιχωμάτων  $T_{SW} = 353K$ . Η εφαρμογή αποσκοπεί στην επιβεβαίωση των συμπερασμάτων της προηγούμενης εφαρμογής ως προς την ακρίβεια με την οποία υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας όταν διαφορίζονται και οι εξισώσεις του μοντέλου τύρβης. Η γεωμετρία του αγωγού παραμετροποιείται χρησιμοποιώντας πολυώνυμα Bézier-Bernstein με 8 σημεία ελέγχου σε κάθε πλευρά, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.4. Μετά τη σύγκριση των παραγώγων που υπολογίζονται με την προτεινόμενη μέθοδο, την παραδοχή της “παγωμένης” τυρβώδους συνεκτικότητας και τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών για 10 σημεία ελέγχου, σχήμα 4.3, επιβεβαιώνεται για μία ακόμη φορά το συμπέρασμα ότι οι παράγωγοι ευαισθησίας που υπολογίζονται από την έκφραση 4.31 δίνουν με εξαιρετική ακρίβεια τις παραγώγους αναφοράς. Έχει ιδιαίτερη σημασία να προσέξει κανείς ότι 7 στις 10 παραγώγους που υπολογίζονται με την παραδοχή της “παγωμένης” τυρβώδους συνεκτικότητας έχουν αντίθετο πρόσημο από αυτό των πεπερασμένων διαφορών. Στο σχήμα 4.4 παρουσιάζεται η μεταφορά θερμότητας από τον αγωγό στο ρευστό καθώς και το πεδίο της συζυγούς θερμοκρασίας.

### 4.5.3 2Δ πτερύγωση στροβίλου

Η εφαρμογή αυτή αφορά στην πιστοποίηση της ακρίβειας των παραγώγων ευαισθησίας σε μια 2Δ πτερύγωση στροβίλου. Η πτερύγωση έχει σταθερή γωνία κλίσης 38.44° και λόγο βήματος προς χορδή ίσο με 0.8. Η ροή εισέρχεται με μηδενική γωνία και με θερμοκρασία  $T_{SI} = 293K$  ενώ η θερμοκρασία στα τοιχώματα της πτερύγωσης είναι ίση με  $T_{SW} = 353K$ . Ο αριθμός Reynolds βασισμένος στη χορδή ισούται με

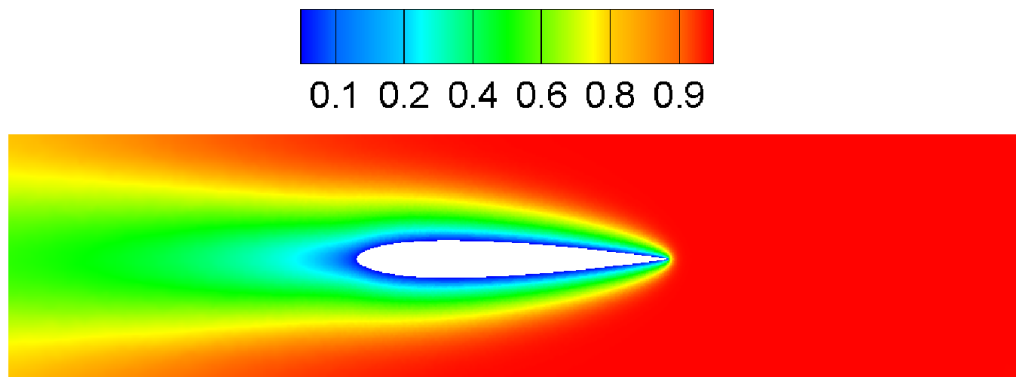
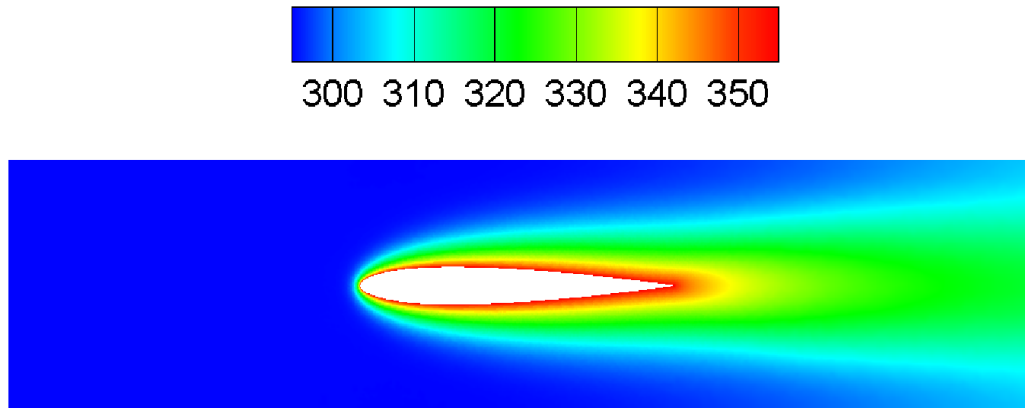


**Σχήμα 4.2:** Αγωγός με στροφή  $90^\circ$ . Το πεδίο της θερμοκρασίας  $T$  (πάνω) και της συζυγούς θερμοκρασίας  $T_a$  (κάτω).

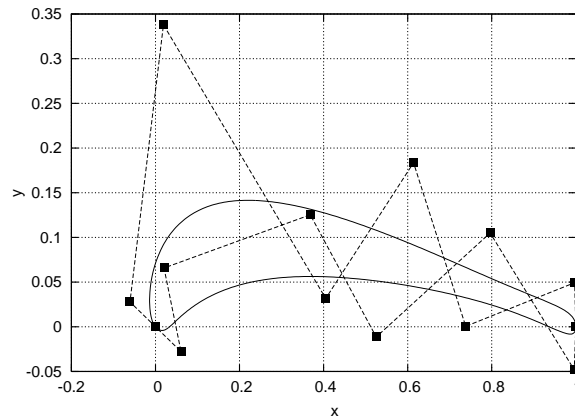


**Σχήμα 4.3:** Αγωγός εναλλάκτη κελύφους/αυλών. Παράγωγοι ευαισθησίας υπολογισμένες χρησιμοποιώντας την προτεινόμενη μέθοδο (adjoint), την παραδοχή της “παγωμένης” τυρβώδους συνεκτικότητας και τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών.

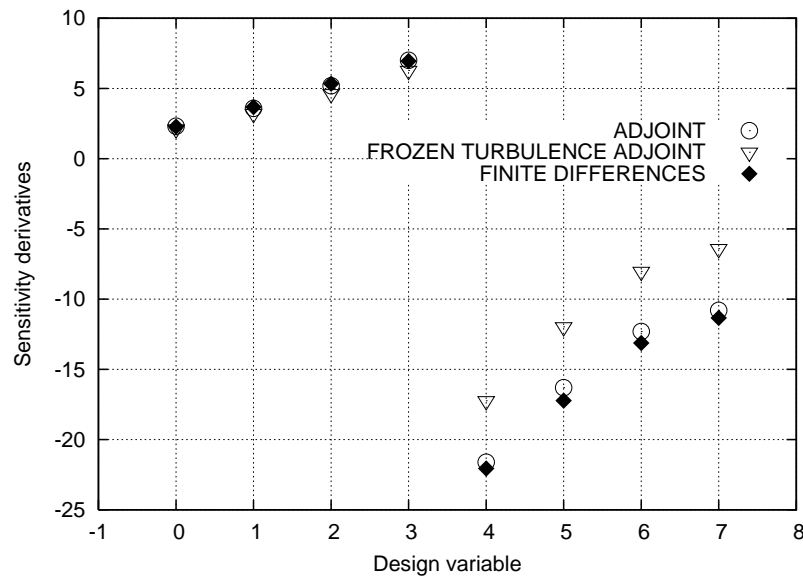
$Re_c = 1 \times 10^6$ . Η αεροτομή παραμετροποιείται χρησιμοποιώντας 8 σημεία ελέγχου σε κάθε πλευρά, σχήμα 4.5. Και στις δύο πλευρές της αεροτομής, τα δύο πρώτα σημεία ελέγχου στην ακμή πρόσπτωσης και τα δύο στην ακμή εκφυγής παραμένουν αμετάβλητα. Τα υπόλοιπα σημεία είναι ελεύθερα να μετακινηθούν κατά  $y$ . Επομένως, χρησιμοποιούνται 8 σημεία ελέγχου συνολικά για τα οποία υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας. Στο σχήμα 4.6 παρουσιάζεται η σύγκριση των παραγώγων ευαισθησίας που υπολογίζονται με την προτεινόμενη μέθοδο και την παραδοχή της “παγωμένης” τυρβώδους συνεκτικότητας με τις παραγώγους που προκύπτουν από τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Παρατηρείται ότι οι παράγωγοι που υπολογίστηκαν με την προτεινόμενη μέθοδο ταυτίζονται με τις παραγώγους αναφοράς. Αντιθέτως, η παραδοχή της “παγωμένης” τυρβώδους συνεκτικότητας υποεκτιμά τις παραγώγους. Ειδικότερα στην πλευρά υποπίεσης, στην οποία αντιστοιχούν το τέταρτο έως το όγδοο σημείο ελέγχου του σχήματος 4.6, παρατηρείται μεγαλύτερη απόκλιση από τις τιμές αναφοράς. Τα πεδία της θερμοκρασίας  $T$  και το πεδίο της συζυγούς θερμοκρασίας  $T_a$  παρουσιάζονται στο σχήμα 4.7, όπου διακρίνεται ο ανάποδος ομόρρους του πεδίου της συζυγούς θερμοκρασίας  $T_a$  σε σχέση με αυτόν του πεδίου της θερμοκρασίας  $T$ .



**Σχήμα 4.4:** Αγωγός εναλλάκτη κελύφους/αυλών. Το πεδίο της θερμοκρασίας  $T$  (πάνω) και της συζυγούς θερμοκρασίας  $T_a$  (κάτω).

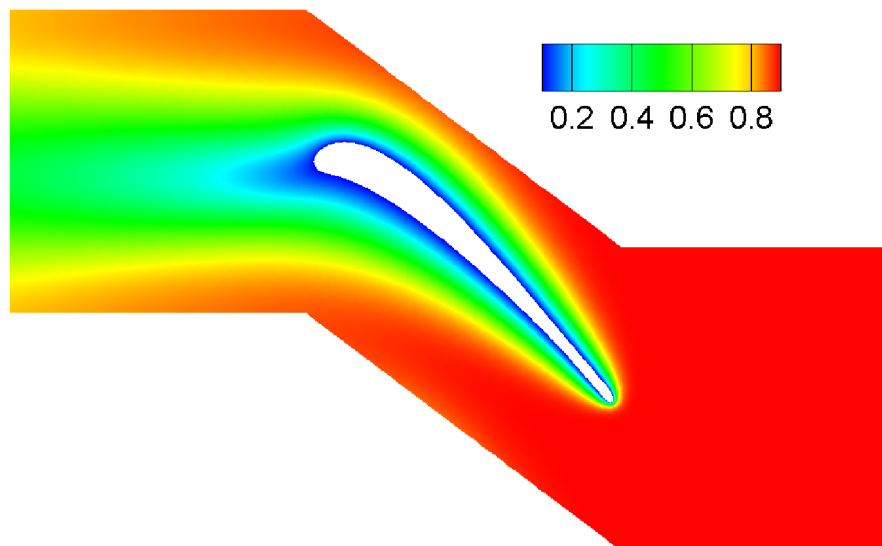
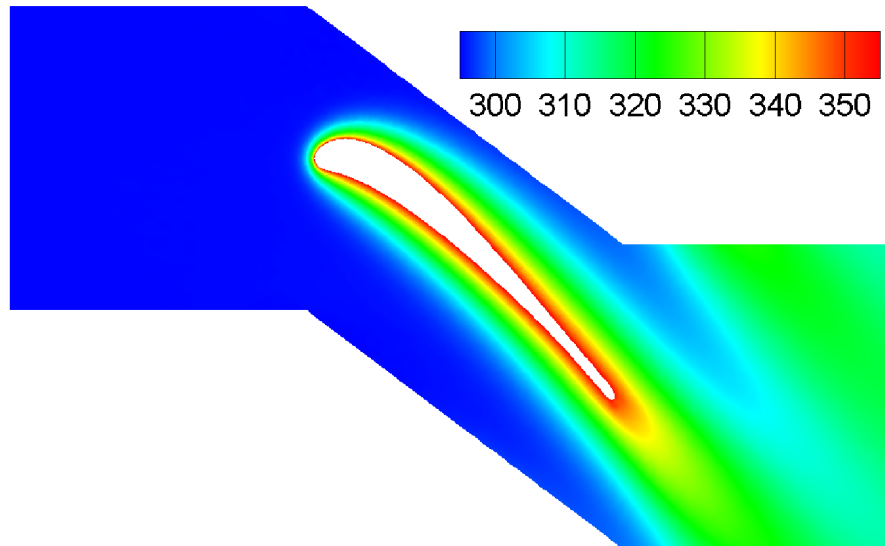


**Σχήμα 4.5:** 2Δ περύγωση στροβίλου. Το περίγραμμα της αεροτομής και τα σημεία ελέγχου Bézier. Όλα τα σημεία ελέγχου εκτός των δύο πρώτων στην ακμή πρόσπτωσης και των δύο τελευταίων στην ακμή εκφυγής, και στις δύο πλευρές της αεροτομής, είναι ελεύθερα να μετακινούνται κατά  $y$ .



**Σχήμα 4.6:** 2Δ περύγωση στροβίλου. Παράγωγοι ευαισθησίας υπολογισμένες χρησιμοποιώντας την προτεινόμενη μέθοδο (adjoint), την παραδοχή της “παγωμένης” τυρβώδους συνεκτικότητας και τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών.



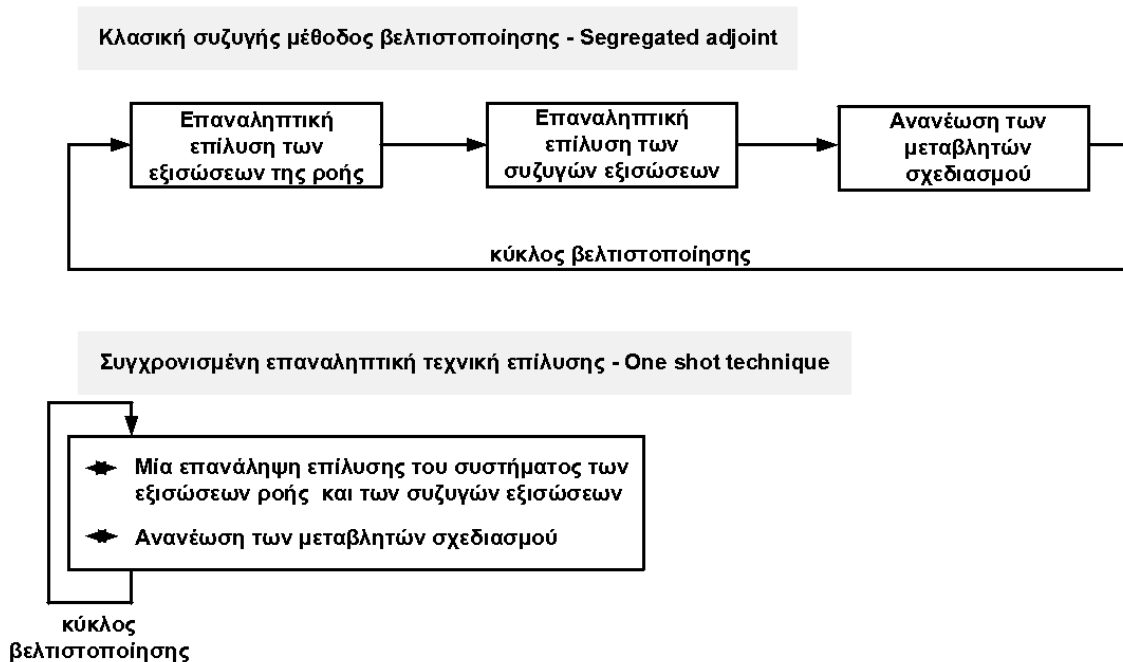


Σχήμα 4.7: 2Δ περύγωση στροβίλου. Το πεδίο της θερμοκρασίας  $T$  (πάνω) και της συζυγούς θερμοκρασίας  $T_a$  (κάτω).

## 4.6 Βελτιστοποίηση με χρήση της τεχνικής one-shot

Η “κλασική” αιτιοκρατική μέθοδος βελτιστοποίησης περιλαμβάνει, σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, πρώτα την επίλυση των εξισώσεων ροής, μετά αυτήν των συζυγών εξισώσεων και, στο τέλος, την ανανέωση των μεταβλητών ελέγχου/σχεδιασμού βάσει των υπολογισθειςών παραγώγων ευαισθησίας, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.8 (πάνω). Στοχεύοντας σε μείωση του υπολογιστικού κόστους μιας διαδικασίας βελτιστοποίησης, στη βιβλιογραφία παρουσιάζεται η επονομασθείσα “συγχρονισμένη επαναληπτική τεχνική επίλυσης” (one-shot technique), [138, 91, 59, 62, 61, 60], η οποία βασίζεται στην ταυτόχρονη ανανέωση του ευθέος και συζυγούς πεδίου ροής καθώς και των μεταβλητών σχεδιασμού, σχήμα 4.8 (κάτω). Αυτή οδηγεί σε ταχύτερη εύρεση της βέλτιστης λύσης σε σχέση με την απεμπλεγμένη επαναληπτική διαχείριση/επίλυση αυτών. Ενώ στις προηγούμενες εργασίες προτείνεται η πραγματοποίηση ενός ψευδο-χρονικού βήματος για τις εξισώσεις της ροής και τις συζυγείς εξισώσεις σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, στις εργασίες [31, 32] πραγματοποιείται ένας αριθμός επαναλήψεων για την επίλυση των εξισώσεων της ροής και των συζυγών εξισώσεων, υπολογίζοντας προσεγγιστικούς παραγώγους ευαισθησίας και ανανεώνοντας στη συνέχεια, βάσει αυτών, τις μεταβλητές σχεδιασμού. Κάνοντας χρήση της τεχνικής one-shot, ο απαιτούμενος χρόνος για την εύρεση της βέλτιστης λύσης είναι περίπου ο μισός αυτού της “κλασικής” προσέγγισης. Για την κλασική αιτιοκρατική μέθοδο η οποία βασίζεται στην απεμπλεγμένη επαναληπτική επίλυση των εξισώσεων της ροής και των συζυγών εξισώσεων χρησιμοποιείται ο αγγλικός όρος segregated adjoint. Για τις εφαρμογές που ακολουθούν, προγραμματίστηκαν και παρουσιάζονται και οι δύο τεχνικές βελτιστοποίησης δίνοντας έμφαση στην επιτάχυνση που επιτυγχάνεται λόγω χρήσης της τεχνικής one-shot.

Έχοντας ως στόχο την περαιτέρω μείωση του υπολογιστικού κόστους, ο αλγόριθμος της τεχνικής one-shot και της κλασικής τεχνικής προγραμματίστηκε και σε επεξεργαστές καρτών γραφικών (GPUs), κάνοντας χρήση της σχετικής τεχνογνωσίας προγραμματισμού που ταυτόχρονα αναπτύσσεται στο πλαίσιο της διδακτορικής διατριβής του Ξ. Τρομπούκη στη ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ, [145]. Η μετάβαση από την εποχή προγραμματισμού σε κεντρικές μονάδες επεξεργασίας (CPUs) στις πολλά υποσχόμενες μονάδες επεξεργασίας γραφικών (GPUs) επιτάχυνε την επίλυση προβλημάτων διαφόρων επιστημονικών κλάδων. Στον τομέα της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής, η χρήση των GPUs οδήγησε σε σημαντική επιτάχυνση της πρόλεξης της ροής. Στη διατριβή [145] και στις σχετικές εργασίες [79, 15, 153] παρουσιάζεται η ανάπτυξη ενός επιλύτη των 2Δ χρονικά μη-μόνιμων εξισώσεων Navier-Stokes και των 3Δ χρονικά μη-μόνιμων εξισώσεων Euler σε κάρτες γραφικών καθώς και η επιτάχυνση η οποία επιτυγχάνεται σε σχέση με τον αντίστοιχο επιλύτη στις CPUs. Η εμπειρία αυτή χρησιμοποιήθηκε για την αποδοτική μεταφορά του κώδικα επίλυσης των εξισώσεων ασυμπίεστης ροής αλλά και των αντίστοιχων συζυγών εξισώσεων, όπως αυτές παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια, από τη CPU στη GPU, [14]. Στην παρούσα διατριβή, η χρήση της συζυγούς one-shot τεχνικής σε κάρτες γραφικών, υπερθέτει στην ήδη υπάρχουσα επιτάχυνση



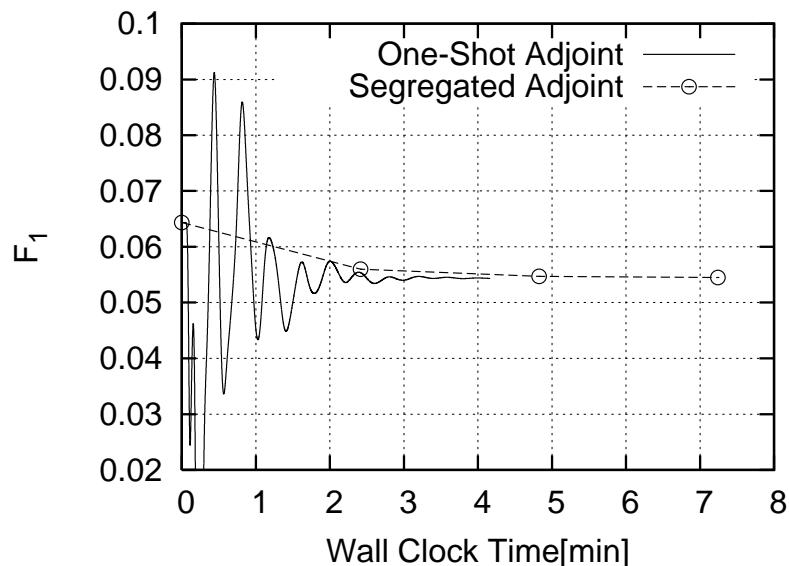
**Σχήμα 4.8:** Η “κλασική” αιτιοκρατική μέθοδος βελτιστοποίησης (segregated adjoint) (πάνω) και η “συγχρονισμένη επαναληπτική τεχνική επίλυσης” (one-shot technique) (κάτω).

ση, που επιτυγχάνεται από τον αλγόριθμο one-shot, την επιτάχυνση που επιφέρει η μεταφορά του αλγορίθμου από τη CPU στη GPU. Με αυτόν τον τρόπο, μειώνεται αισθητά ο πραγματικός χρόνος υλοποίησης της βελτιστοποίησης. Στην παρούσα ενότητα χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος one-shot για το σχεδιασμό αγωγού με στροφή  $90^\circ$  και το σχεδιασμό της μορφής των αγωγών εναλλάκτη.

#### 4.6.1 Σχεδιασμός αγωγού με στροφή $90^\circ$

Η εφαρμογή αυτή αφορά στο σχεδιασμό ενός αγωγού με στροφή της ροής κατά  $90^\circ$  με στόχο την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης στη μορφή της συνάρτησης  $F_1$ . Η συνάρτηση-στόχος  $F_1$  ορίζεται από την εξίσωση 3.20. Ο αριθμός Reynolds υπολογισμένος με βάση το ύψος του αγωγού στην είσοδο ισούται με  $Re = 65000$ . Το τμήμα της στροφής του αγωγού παραμετροποιείται χρησιμοποιώντας πολυώνυμα Bézier-Bernstein με 7 σημεία ελέγχου σε κάθε πλευρά του αγωγού, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.1 της εφαρμογής 3.7.1 όπου εκεί πραγματοποιείται πιστοποίηση των παραγώγων ευαισθησίας. Το πρώτο και το τελευταίο σημείο ελέγχου της εσωτερικής και της εξωτερικής πλευράς του αγωγού και οι τετμημένες των υπολοίπων σημείων ελέγχου διατηρούνται σταθερά καταλήγοντας συνολικά σε 10 μεταβλητές σχεδιασμού.

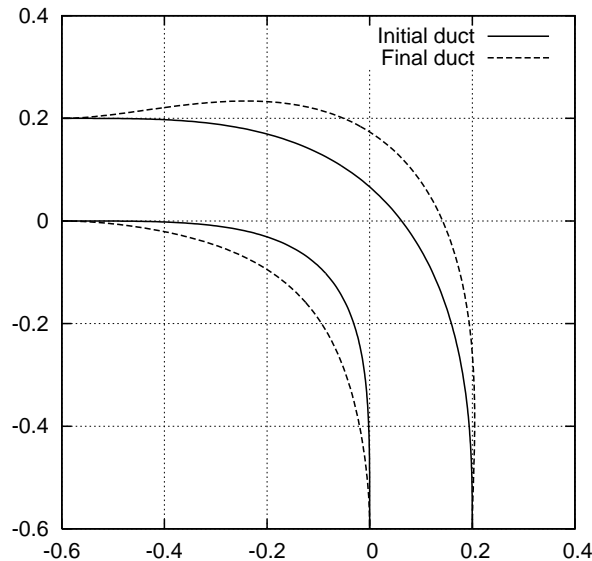
Ο αλγόριθμος της τεχνικής one-shot και της κλασικής τεχνικής, προγραμματισμένος σε GPUs, χρησιμοποιείται για το σχεδιασμό του αγωγού κάνοντας χρήση και των δύο τεχνικών. Στο σχήμα 4.9, πραγματοποιείται σύγκριση της πορείας σύγκλισης



**Σχήμα 4.9:** Σχεδιασμός αγωγού με στροφή  $90^\circ$ . Η πορεία της σύγκλισης με την “κλασική” αιτιοκρατική μέθοδο και την τεχνική one-shot. Οι απώλειες ολικής πίεσης  $F_1$  ως προς τον πραγματικό χρόνο βελτιστοποίησης (wall clock time).

της κλασικής αιτιοκρατικής μεθόδου και της τεχνικής one-shot ως προς τον πραγματικό χρόνο βελτιστοποίησης (wall clock time). Στο σχήμα αυτό ο πρώτος κύκλος βελτιστοποίησης της τεχνικής one-shot, όπου οι εξισώσεις του πρωτεύοντος και του συζυγούς προβλήματος συγκλίνουν πλήρως (όπως συμβαίνει δηλαδή στην κλασική τεχνική) παραλείπεται και για τις δύο τεχνικές. Παρατηρείται ότι η τεχνική one-shot βρίσκει την ίδια βέλτιστη λύση περίπου 1.7 φορές γρηγορότερα από την κλασική τεχνική, δεδομένου ότι απαιτούνται περίπου 4 λεπτά αντί 7 που χρειάζεται η κλασική τεχνική (στον ίδιο επεξεργαστή κάρτας γραφικών NVIDIA Tesla M2050), όπως φαίνεται και από το σχήμα 4.9.

Επιπλέον, όσον αφορά στην επιτάχυνση που επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας το GPU κώδικα της τεχνικής one-shot σε σχέση με τον αντίστοιχο CPU αυτή είναι έως και 37x για πλέγμα περίπου 40000 κόμβων που χρησιμοποιείται στην παρούσα εφαρμογή. Συνολικά, υπερθέτοντας, στο κέρδος από τη χρήση της τεχνικής one-shot (1.7x), την επιτάχυνση λόγω της μεταφοράς του αλγορίθμου από τη CPU στη GPU (37x), η εύρεση της βέλτιστης λύσης πραγματοποιείται περίπου 60 φορές πιο γρήγορα από το να χρησιμοποιούσε κανείς την κλασική τεχνική προγραμματισμένη στη CPU. Για τη μέτρηση αυτής της επιτάχυνσης (37x), ο CPU κώδικας εκτελείται σε επεξεργαστή Intel Xeon (E5620). Το αρχικό και το βέλτιστο σχήμα του αγωγού φαίνονται στο σχήμα 4.10, ενώ τα πεδία της ταχύτητας για τον αρχικό και το βέλτιστο αγωγό του σχήματος 4.10 φαίνονται στο σχήμα 4.11.

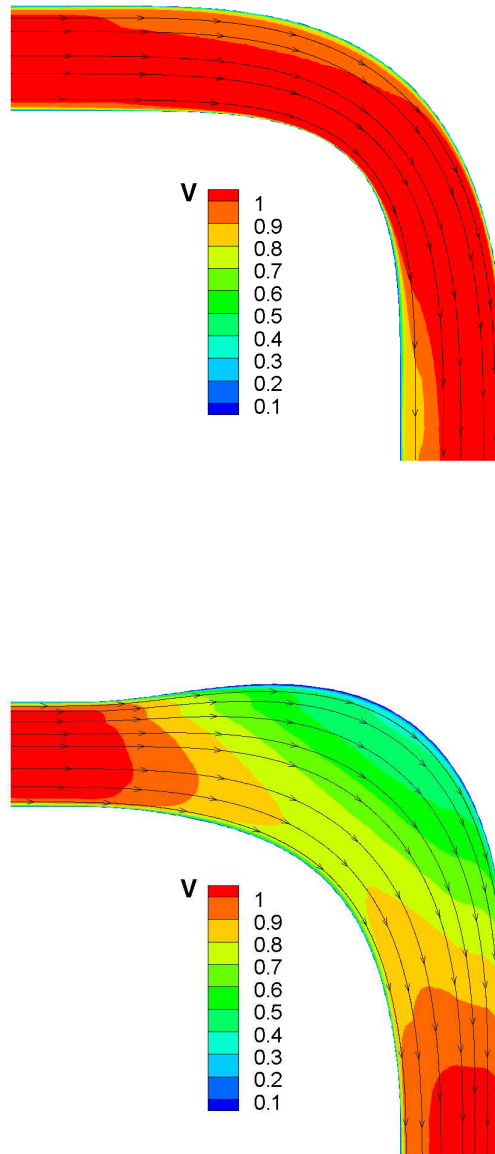


**Σχήμα 4.10:** Σχεδιασμός αγωγού με στροφή  $90^\circ$ . Το αρχικό (συνεχής γραμμή) και το βέλτιστο (διακεκομμένη γραμμή) σχήμα του αγωγού (πάνω).

#### 4.6.2 Σχεδιασμός βέλτιστου εναλλάκτη θερμότητας

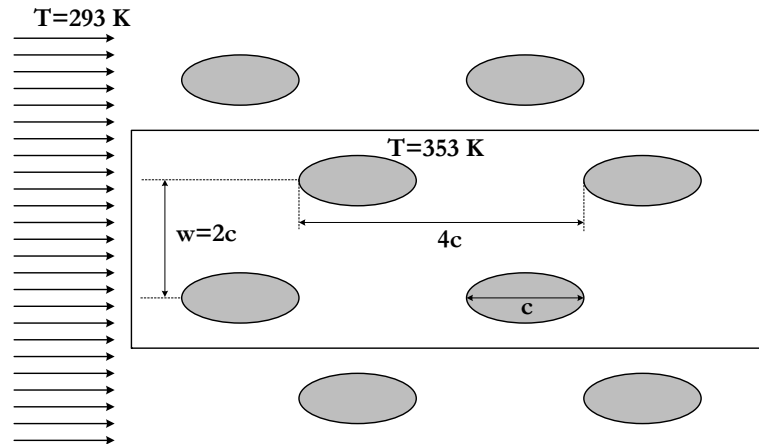
Η εφαρμογή αυτή παρουσιάζει τη βελτιστοποίηση του σχήματος ενός αγωγού εναλλάκτη κελύφους/αυλών με στόχο ελάχιστες απώλειες ολικής πίεσης, στη μορφή της συνάρτησης  $F_1$ , και μέγιστη μεταφορά θερμότητας, στη μορφή της συνάρτησης  $F_2$ . Οι συναρτήσεις-στόχοι  $F_1$  και  $F_2$  ορίστηκαν στις εξισώσεις 3.20 και 3.21. Για τη σύνθεση των δύο στόχων σε μία ενιαία συνάρτηση-στόχο επιλέγονται συντελεστές βαρύτητας  $\omega_1 = 0.9$  και  $\omega_2 = 0.1$ . Οι εναλλάκτες θερμότητας κελύφους/αυλών χρησιμοποιούνται ευρέως σε βιομηχανικές εφαρμογές. Αυτή η  $2\Delta$  μελέτη είναι, φυσικά, επαρκής μιας και η ροή γύρω από την πλάκα στο μέσο του μήκους του εναλλάκτη θερμότητας αντιπροσωπεύει ένα μεγάλο τμήμα της  $3\Delta$  ροής αν εξαιρέσουμε τα άκρα. Σημειώνεται ότι το μήκος των αγωγών είναι αρκετά μεγαλύτερο από το πλάτος τους, [160]. Οι αγωγοί και τα όρια του  $2\Delta$  υπολογιστικού χωρίου φαίνονται στο σχήμα 4.12. Λόγω της περιοδικά επαναλαμβανόμενης διάταξης των αγωγών, το υπολογιστικό χωρίο συμπεριλαμβάνει τέσσερις αγωγούς. Το όριο της εξόδου τοποθετείται σε απόσταση αρκετών χορδών μετά τους τελευταίους αγωγούς, κάτι το οποίο δε φαίνεται στο σχήμα 4.12. Το μη-δομημένο υπολογιστικό πλέγμα έχει περίπου 85000 κόμβους και 170000 τριγωνικά στοιχεία. Το ρευστό εισέρχεται στο χωρίο με θερμοκρασία  $T_{inlet} = 293K$  και ο αριθμός Reynolds της ροής, βασισμένος στο μήκος  $w$  (σχήμα 4.12), ισούται με  $Re = 160$ . Στο εσωτερικό των αγωγών θεωρείται ότι ρέει ρευστό υψηλής θερμοκρασίας, διατηρώντας σταθερή τη θερμοκρασία στην επιφάνεια τους,  $T_{wall} = 353K$  (ανεξαρτήτως από την οποιαδήποτε μεταβολή του σχήματος των αγωγών κατά τη βελτιστοποίηση και κατ' επέκταση της παροχής του ρευστού που ρέει στο εσωτερικό τους).

Το σχήμα των αγωγών είναι συμμετρικό ως προς τον οριζόντιο άξονα και παραμετρο-

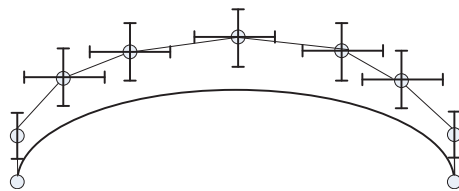


**Σχήμα 4.11:** Σχεδιασμός αγωγού με στροφή  $90^\circ$ . Τα πεδία της ταχύτητας της αρχικής (πάνω) και της βέλτιστης λύσης (κάτω).

ποιείται χρησιμοποιώντας πολυώνυμα Bézier-Bernstein με 8 σημεία ελέγχου σε κάθε πλευρά. 4 από αυτά μπορούν να μεταβάλλονται και στις δύο κατευθύνσεις ενώ το δεύτερο και το έβδομο μεταβάλλονται μόνο κατά την κάθετη στη χορδή κατεύθυνση καταλήγοντας συνολικά σε 10 μεταβλητές σχεδιασμού, όπως φαίνεται στο 4.13. Όλοι



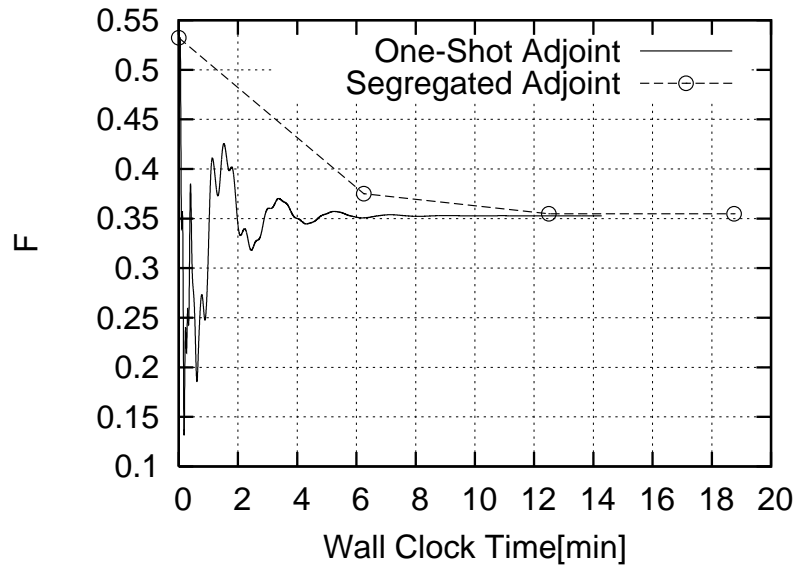
**Σχήμα 4.12:** Σχεδιασμός βέλτιστου εναλλάκτη θερμότητας. Σχηματική αναπαράσταση ενός εναλλάκτη κελύφους/αυλών. Η μαύρη γραμμή σημειώνει τα όρια του υπολογιστικού χωρίου.



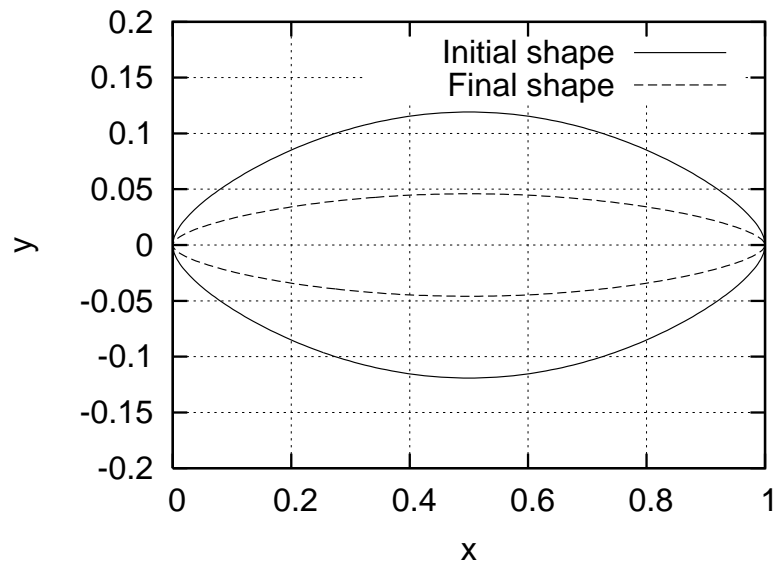
**Σχήμα 4.13:** Σχεδιασμός βέλτιστου εναλλάκτη θερμότητας. Παραμετροποίηση της άνω πλευράς του σχήματος του αγωγού. Η παραμετροποίηση της κάτω πλευράς καθορίζεται αυτόματα από την ως προς τον οριζόντιο άξονα συμμετρία. Οι μεταβλητές σχεδιασμού αντιστοιχούν στις συνιστώσες των σημείων ελέγχου Bézier.

οι αγωγοί είναι πανομοιότυποι και τοποθετημένοι σε προκαθορισμένες θέσεις.

Και σε αυτήν την εφαρμογή συγκρίνεται η πορεία σύγκλισης της GPU εκδοχής του κώδικα της κλασικής αιτιοκρατικής μεθόδου και της τεχνικής one-shot ως προς τον πραγματικό χρόνο βελτιστοποίησης (wall clock time), σχήμα 4.14. Παρατηρείται ότι η τεχνική one-shot οδηγεί στην εύρεση της βέλτιστης λύσης σε περίπου 10 λεπτά έναντι 18 λεπτών της κλασικής τεχνικής (επιτάχυνση 1.78x). Δεδομένου ότι η επιτάχυνση του αλγορίθμου στη GPU εξαρτάται από το πλήθος των κόμβων του υπολογιστικού πλέγματος, στην παρούσα εφαρμογή η επιτάχυνση του GPU αλγορίθμου της τεχνικής one-shot σε σχέση με τον αντίστοιχο CPU είναι περίπου 40x. Επομένως, η GPU εκδοχή του κώδικα της τεχνικής one-shot είναι 70 φορές πιο γρήγορη από την κλασική αιτιοκρατική μέθοδο προγραμματισμένη στη CPU. Το αρχικό ( $F_1=0.89$ ,  $F_2=35.23$ ) και το βέλτιστο ( $F_1=0.70$ ,  $F_2=34.1$ ) σχήμα του αγωγού παρουσιάζονται στο σχήμα 4.15, ενώ τα πεδία της θερμοκρασίας για τον αρχικό και το βέλτιστο αγωγό του σχήματος 4.15 φαίνονται στο σχήμα 4.16.

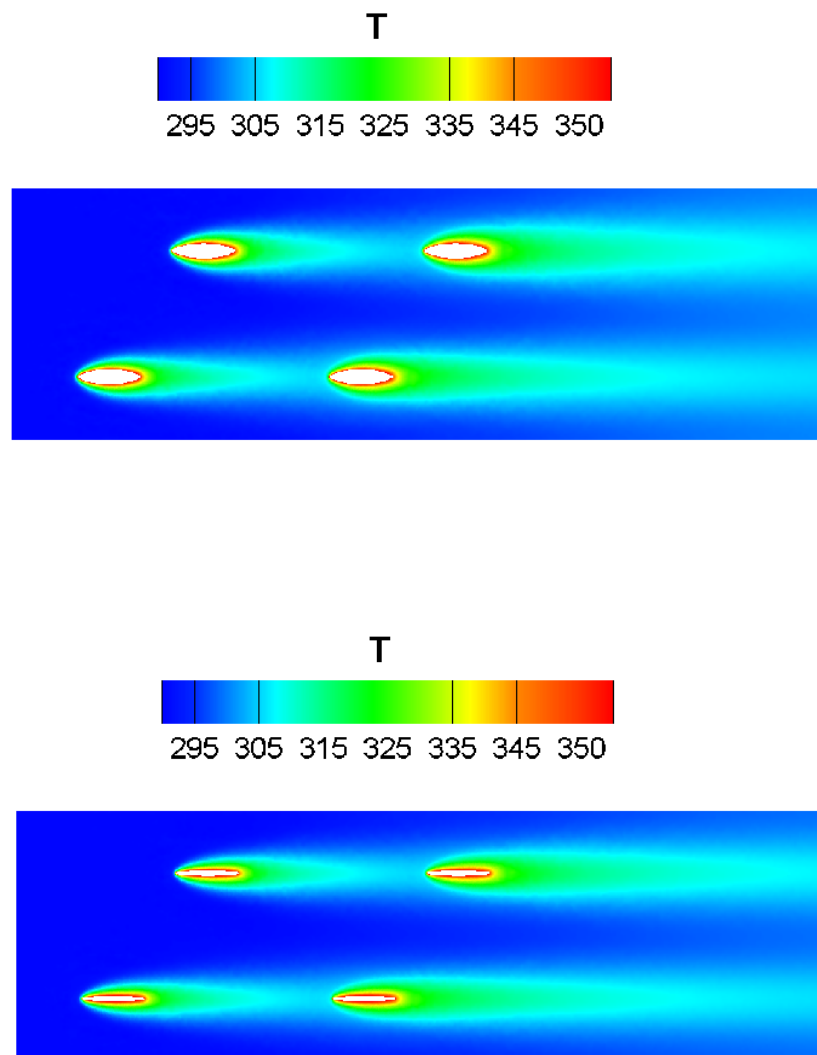


**Σχήμα 4.14:** Σχεδιασμός βέλτιστου εναλλάκτη θερμότητας. Η πορεία της σύγκλισης με την “κλασική” αυτοκρατική μέθοδο και την τεχνική one-shot. Η ενιαία συνάρτηση  $F$  ( $F = 0.9F_1 - 0.1F_2$ ) ως προς τον πραγματικό χρόνο βελτιστοποίησης (wall clock time).



**Σχήμα 4.15:** Σχεδιασμός βέλτιστου εναλλάκτη θερμότητας. Το αρχικό ( $F_1=0.89$ ,  $F_2=35.23$ ) και το βέλτιστο ( $F_1=0.70$ ,  $F_2=34.1$ ) σχήμα του αγωγού του εναλλάκτη θερμότητας.





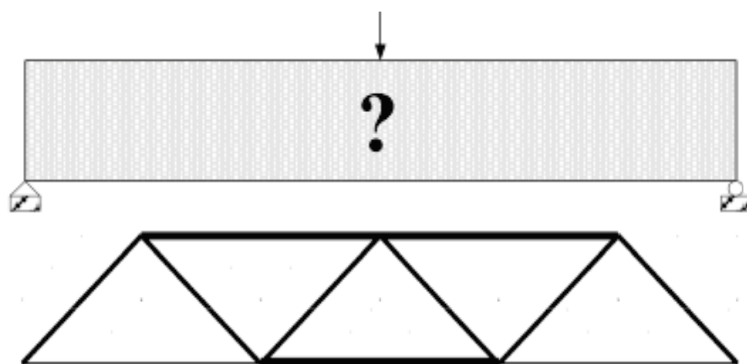
**Σχήμα 4.16:** Σχεδιασμός βέλτιστου εναλλάκτη θερμότητας. Τα πεδία της θερμοκρασίας για τον αρχικό (πάνω) και το βέλτιστο αγωγό (κάτω) του σχήματος 4.15.



## Κεφάλαιο 5

# Βελτιστοποίηση τοπολογίας με τη συζυγή μέθοδο

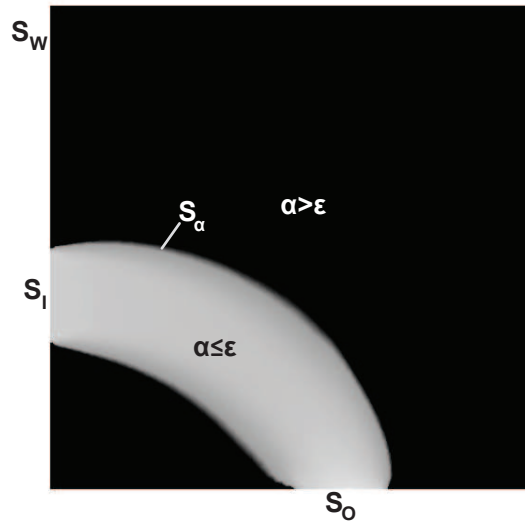
Στο κεφάλαιο αυτό, σε αντίθεση με τα δύο προηγούμενα κεφάλαια όπου αναπτύχθηκε η συνεχής συζυγής μέθοδος για προβλήματα βελτιστοποίησης μορφής, παρουσιάζεται μια μέθοδος βελτιστοποίησης τοπολογίας, κάνοντας χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, σε προβλήματα ασυμπίεστων τυρβωδών ροών με μεταφορά θερμότητας. Μία επισκόπηση της βιβλιογραφίας της βελτιστοποίησης τοπολογίας δείχνει ότι η ιδέα της βελτιστοποίησης τοπολογίας πρωτοεμφανίστηκε στην περιοχή της μηχανικής του στερεού σώματος. Για πρώτη φορά το 1988 οι Bendsoe και Kikuchi, [19], χρησιμοποιούν τη βελτιστοποίηση τοπολογίας για το σχεδιασμό μηχανικών δομών σε φόρτιση με στόχο την επίτευξη δομικής δυσκαμψίας ελαχιστοποιώντας την ελαστικότητα αυτών των δομών. Η ιδέα βασίζεται στη χρήση μιας συνεχούς συνάρτησης για την πυκνότητα του υλικού στο υπό μελέτη χωρίο όπου μεγάλες τιμές πυκνότητας αντιστοιχούν σε υλικό ενώ μικρές τιμές σε κενό. Με βάση αυτό, οι μεταβλητές σχεδιασμού της βελτιστοποίησης είναι η πυκνότητα του υλικού σε κάθε σημείο του διακριτού χωρίου. Με την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης υπολογίζεται η βέλτιστη για δομική δυσκαμψία κατανομή πυκνότητας στο χωρίο μελέτης και, συνεπώς, προσδιορίζεται η μορφή της μηχανικής δομής (π.χ. η δομή ενός δικτυώματος, σχήμα 5.1). Τα επόμενα χρόνια η χρήση της μεθόδου επεκτείνεται σε ένα μεγάλο αριθμό προβλημάτων της δομικής μηχανικής. Πολλές από τις σχετικές εργασίες βρίσκονται συγκεντρωμένες στο βιβλίο *Topology optimization - Theory, methods and applications*, [20]. Στις εργασίες [131, 46, 163] παρουσιάζεται η βελτιστοποίηση τοπολογίας σε προβλήματα συναγωγής θερμότητας στη δομική μηχανική με στόχο την εύρεση της βέλτιστης κατανομής του υλικού στο χωρίο ώστε να ελαχιστοποιείται η θερμότητα που αποθηκεύεται στο σύστημα λόγω της επιβολής δεδομένων θερμικών φορτίων. Στην πλειοψηφία των προβλημάτων βελτιστοποίησης τοπολογίας στη δομική μηχανική είναι απαραίτητη η επιβολή περιορισμών που αφορούν στο ελάχιστο επιτρεπόμενο ποσοστό του όγκου του χωρίου μελέτης που μπορεί να καταλαμβάνει η μηχανική δομή. Η μέθοδος της βελτιστοποίησης τοπολογίας βρίσκει, επίσης, εφαρμογή σε διάφορους τομείς, όπως λ.χ. για την επίλυση προβλημάτων ακουστικής, [41, 40], οπτικής, [21, 72] καθώς και μικροηλεκτρομηχανικών συστημάτων, [92].



**Σχήμα 5.1:** Βελτιστοποίηση τοπολογίας στη δομική μηχανική με στόχο την εύρεση της βέλτιστης κατανομής της πυκνότητας υλικού σε κάθε σημείο του χωρίου (δοκός MBB, [132], πάνω) για την απόκτηση της βέλτιστης μορφής με τη μέγιστη δυσκαμψία (κάτω). Οι δοκοί με μαύρο χρώμα αντιστοιχούν σε μεγάλες τιμές πυκνότητας, δηλαδή υλικό, ενώ τα χωρία με άσπρο χρώμα σε μηδενικές πυκνότητες δηλαδή κενό.

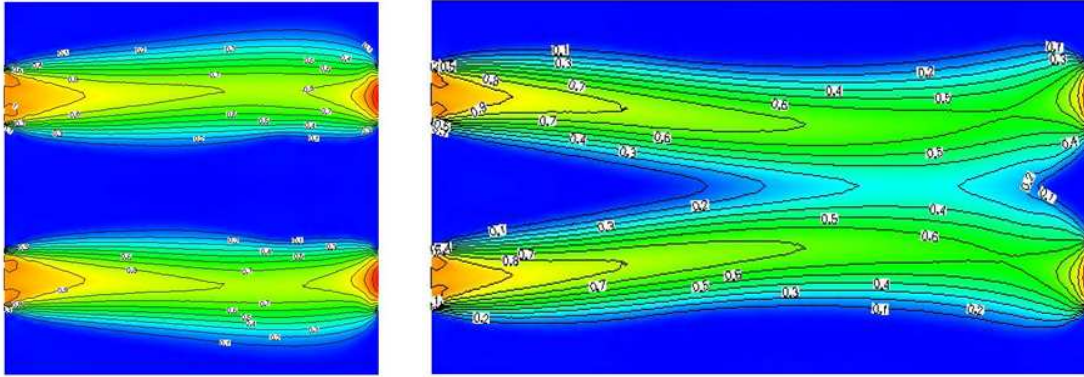
Στον τομέα της μηχανικής των ρευστών, η βελτιστοποίηση τοπολογίας παρουσιάζεται σε ελάχιστες εργασίες, συγκριτικά με άλλες περιοχές. Οι περισσότερες από αυτές αφορούν σε ροές χαμηλών αριθμών Reynolds (έρπουσες) στις οποίες είναι κυρίαρχοι οι συνεκτικοί όροι. Στην εργασία [22], εμφανίζεται για πρώτη φορά η ιδέα της βελτιστοποίησης τοπολογίας στη μηχανική των ρευστών, και, συγκεκριμένα, σε προβλήματα ροών Stokes με στόχο την ελαχιστοποίηση των απωλειών ενέργειας στο υπό μελέτη χωρίο. Ουσιαστικά, μεταφέρεται η ιδέα της κατανομής της πυκνότητας ενός υλικού στο υπό μελέτη χωρίο από τη μηχανική στερεού σώματος στη μηχανική των ρευστών, εισάγοντας ένα μεταβλητό πεδίο πορώδους στις εξισώσεις ορμής, [22]. Το “πορώδες” (porosity), ή αλλιώς “μη-διαπερατότητα” (non-permeability) όπως αναφέρεται στην εργασία [22], αποτελεί την αντίστοιχη έννοια της πυκνότητας του υλικού στη μηχανική των ρευστών. Μη-μηδενικές τοπικές τιμές του πορώδους, το οποίο συμβολίζεται με  $\alpha$ , αντιστοιχούν σε περιοχές που πρέπει να στερεοποιηθούν ενώ μηδενικές τιμές αντιστοιχούν σε περιοχές ρέοντος ρευστού. Στη μηχανική των ρευστών η βελτιστοποίηση τοπολογίας ορίζεται ως η διαδικασία κατά την οποία αναζητείται το βέλτιστο (ως προς συγκεκριμένη συνάρτηση-στόχο) πεδίο του πορώδους σε ένα ευρύ χωρίο μελέτης ώστε, αφού με βάση τις τοπικές τιμές πορώδους στερεοποιηθεί τμήμα του χωρίου, το απομένον τμήμα να αποτελεί το βέλτιστο (ως προς τα ίδια κριτήρια) αγωγό ροής. Στο σχήμα 5.2 παρουσιάζεται η λογική της βελτιστοποίησης τοπολογίας στη μηχανική των ρευστών.

Βασίζόμενοι σε αυτήν τη λογική και πριν την επισκόπηση της βιβλιογραφίας της βελτιστοποίησης τοπολογίας στη μηχανική των ρευστών, αξίζει να επισημανθούν τα πλεονεκτήματα της βελτιστοποίησης τοπολογίας σε σχέση με τη βελτιστοποίηση μορφής. Στη βελτιστοποίηση μορφής, προαπαιτούμενο είναι η παραμετροποίηση της σχε-



**Σχήμα 5.2:** Βελτιστοποίηση τοπολογίας στη μηχανική των ρευστών-σχηματική αναπαράσταση του βέλτιστου πεδίου του πορώδους. Στόχος της βελτιστοποίησης είναι η εύρεση της βέλτιστης διαδρομής της ροής, δηλαδή της βέλτιστης κατανομής του πορώδους στο χωρίο αυτό με στερεά τοιχώματα  $S_W$ , ανάμεσα σε μία είσοδο  $S_I$  και μία έξοδο  $S_O$ , με σκοπό την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης-στόχου, έστω λ.χ. των απωλειών ολικής πίεσης. Μετά το πέρας της βελτιστοποίησης, περιοχές με μη-μηδενική τιμή του πορώδους ( $\alpha \neq 0$ , πρακτικά  $\alpha > \varepsilon$  όπου  $\varepsilon$  είναι μία απειροστά μικρή θετική ποσότητα), οι οποίες φαίνονται με μαύρο χρώμα, αντιστοιχούν στις περιοχές που πρέπει να στερεοποιηθούν (περιοχές χωρίς ροή). Αντιθέτως, περιοχές με γκρι χρώμα υποδεικνύουν τη διαδρομή του ρεόντος ρευστού και το πορώδες έχει εκεί μηδενική τιμή ( $\alpha = 0$  ή, πρακτικά,  $\alpha \leq \varepsilon$ ). Οι διεπιφάνειες ανάμεσα στις δύο προαναφερθείσες περιοχές αποτελούν τα στερεά τοιχώματα,  $S_\alpha$ , του βέλτιστου αγωγού.

διαζόμενης μορφής, μέσω μεθόδων περιγραφής καμπυλών ή επιφανειών (πολυωνυμικές εκφράσεις, NURBS, κλπ). Αυτό προϋποθέτει τη γνώση εκ των προτέρων της εν γένει μορφής τους σχήματος που πρόκειται να παραμετροποιηθεί. Η παραμετροποίηση αυτή καθορίζει τις μεταβλητές σχεδιασμού, αλλά περιορίζει ταυτόχρονα τη μορφοποίηση του τελικού σώματος, αποκλείοντας ενδεχομένως καλύτερες σε απόδοση μορφές, μη-αναπαράξιμες από αυτήν. Ως παράδειγμα, στην περίπτωση του σχήματος 5.3, όπου φαίνονται τα πεδία ροής για δύο διαφορετικές τοπολογίες σε ένα χωρίο, η παραμετροποίηση μορφής μπορεί να δώσει αυστηρά μία από τις δύο τοπολογίες, αναλόγως της παραμετροποίησης, που υιοθετήθηκε, αδυνατώντας εκ των πραγμάτων να διερευνήσει ενδεχόμενη καταλληλότητα της άλλης. Αντιθέτως, η βελτιστοποίηση τοπολογίας, η οποία ορίσθηκε ως η διαδικασία αναζήτησης βέλτιστων σχηματισμών των πεδίων ροής σε ένα χωρίο βάσει της συνάρτησης-στόχου, δεν βασίζεται σε γεωμετρία προκαθορισμένη από την αρχή της βελτιστοποίησης. Λ.χ. στο παράδειγμα του σχήματος 5.3, η βελτιστοποίηση τοπολογίας θα αποφασίσει πόσες και ποιές συνενώσεις ή διακλαδώσεις είναι απαραίτητες ώστε να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση-στόχος. Σε αυτό το παράδειγμα, στόχος



**Σχήμα 5.3:** Βελτιστοποίηση τοπολογίας. Σχεδιασμός αγωγού που συνδέει δύο προκαθορισμένες εισόδους της ροής στα αριστερά του χωρίου μελέτης με δύο προκαθορισμένες εξόδους στα δεξιά. Στην πρώτη περίπτωση (αριστερά) δημιουργούνται δύο ξεχωριστές διαδρομές ενώ, στη δεύτερη περίπτωση (δεξιά), αυξάνοντας το μήκος του χωρίου, η τοπολογία της ροής διαφέρει από την πρώτη σχηματίζοντας δύο αγωγούς οι οποίοι ενώνονται για να ελαχιστοποιήσουν τα τοιχώματα τους άρα και τις απώλειες ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου.

της βελτιστοποίησης είναι η εύρεση της τοπολογίας των αγωγών με ελάχιστες απώλειες λόγω συνεκτικότητας σε στρωτή ροή. Οι δύο μορφές του αγωγού που παρουσιάζονται αντιπροσωπεύουν δύο πιθανές τοπολογίες. Η βέλτιστη λύση εξαρτάται ουσιαστικά από την οριζόντια απόσταση μεταξύ εισόδου και εξόδου. Για μικρά μήκη, όπως αναμένεται, δύο διακριτοί αγωγοί δίνουν μικρότερες απώλειες ενώ, για μεγάλα μήκη, υπερτερεί η συνένωση των δύο σε ενιαίο αγωγό κατά το μεγαλύτερο μέρος του χωρίου. Στη βελτιστοποίηση μορφής, η παραμετροποίηση θα καθόριζε ποια από τις δύο τοπολογίες μπορεί να προκύψει, αποκλείοντας εξαρχής την άλλη.

Παρόλα αυτά, αξίζει να σημειωθεί ότι η βέλτιστη τοπολογία, η οποία προκύπτει από τη διαδικασία βελτιστοποίησης τοπολογίας, αντιστοιχεί σε μια μορφή η οποία δεν μπορεί να κατασκευαστεί χωρίς προηγούμενη μετεπεξεργασία-εξομάλυνση. Αυτό οφείλεται στα μη-λεία στερεά τοιχώματα τα οποία καθορίζονται από την τιμή του πορώδους στους κόμβους του υπολογιστικού πλέγματος. Είναι προφανές ότι η διεπιφάνεια  $S_\alpha$  του σχήματος 5.2 αποτελείται από ένα σύνολο ακμών οι οποίες την καθιστούν μη-λεία, δεχόμενοι ότι το υπολογιστικό πλέγμα που χρησιμοποιείται δεν είναι απείρως πυκνό. Για το λόγο αυτό, η διαδικασία της βελτιστοποίησης τοπολογίας ενέχει ουσιαστικά και ένα τελικό βήμα, το οποίο αφορά στην απόκτηση του τελικού (λείου) σχήματος, προσεγγίζοντας τη βέλτιστη γεωμετρία.

Δεδομένου ότι οι τιμές του πορώδους σε κάθε κόμβο του χωρίου αποτελούν τις μεταβλητές σχεδιασμού της βελτιστοποίησης τοπολογίας, ο αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού ισούται με τον αριθμό των κόμβων του εκάστοτε χωρίου. Για το λόγο αυτό, για την υλοποίηση της βελτιστοποίησης τοπολογίας η συζυγής μέθοδος είναι, με διαφορά, η πλέον κατάλληλη μιας και το κόστος υπολογισμού των παραγώγων είναι ανεξάρτητο του αριθμού των μεταβλητών σχεδιασμού. Είναι προφανές ότι η χρήση μιας στοχαστικής μεθόδου βελτιστοποίησης θα ήταν απαγορευτική λόγω της εξάρτησης του

κόστους της με τον αριθμό των μεταβλητών. Στην εργασία [22], χρησιμοποιήθηκε η συζυγής μέθοδος για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας της συνάρτησης-στόχου ως προς την τιμή του πορώδους σε κάθε σημείο του χώρου. Επεκτείνοντας τη μέθοδο αυτή, στην εργασία [54] προτείνεται μία νέα μεθοδολογία για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης τοπολογίας σε ροές Stokes, όπου αντί να επιλύονται οι εξισώσεις Stokes σε όλο το χωρίο, [22], επιλέγεται η επίλυση των εξισώσεων Stokes στο χωρίο της ροής και η χρήση του νόμου του Darcy στο στερεό σώμα. Στην εργασία [47], επεκτείνεται η βελτιστοποίηση τοπολογίας σε στρωτές ροές με την εισαγωγή του μεταβλητού πεδίου του πορώδους στις εξισώσεις ορμής των εξισώσεων Navier Stokes. Στις εργασίες [54, 47] καθώς και στις [104, 132], για στρωτές ροές, χρησιμοποιείται η διακριτή συζυγής μέθοδος για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας. Στις εργασίες [76] και [110] χρησιμοποιήθηκε η τεχνική της αυτόματης ή αλγοριθμικής διαφορίσης (automatic or algorithmic differentiation) για τη δημιουργία του διακριτού συστήματος των συζυγών εξισώσεων.

Όσον αφορά στη βελτιστοποίηση τοπολογίας για τυρβώδεις ροές, δεν έχει παρουσιαστεί μέχρι στιγμής στη βιβλιογραφία. Μοναδική εξαίρεση αποτελεί η εργασία [108], η οποία χρησιμοποιεί τη συνεχή συζυγή μέθοδο για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας. Η εργασία αυτή επιχειρεί τη βελτιστοποίηση τοπολογίας σε προβλήματα τυρβωδών ροών, χωρίς όμως να αναπτύσσει και να επιλύει τις συζυγείς εξισώσεις του μοντέλου τύρβης, αμελώντας δηλαδή τη μεταβολή της τυρβώδους συνεκτικότητας ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, δηλαδή ως προς το πορώδες σε κάθε σημείο του χωρίου. Η παραδοχή της “παγωμένης” τυρβώδους συνεκτικότητας  $\nu_t$  ως προς το  $\alpha$  (δηλαδή  $\frac{\partial \nu_t}{\partial \alpha} = 0$ ), καθιστά πιο απλή τη μαθηματική διατύπωση των συζυγών εξισώσεων και δεν απαιτείται η επίλυση των επιπλέον εξισώσεων του μοντέλου τύρβης. Εφαρμόζοντας, παρόλα αυτά, την παραδοχή αυτή, όπως παρουσιάστηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, προκύπτουν τιμές παραγώγων ευαισθησίας διαφορετικές από τις πραγματικές.

Η παρούσα διατριβή παρουσιάζει, για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία, τη βελτιστοποίηση τοπολογίας για προβλήματα ασυμπίεστων τυρβωδών ροών, βασιζόμενη στον υπολογισμό των ακριβών κλίσεων της συνάρτησης-στόχου. Για το λόγο αυτό, επαναδιατυπώνονται οι εξισώσεις του μοντέλου τύρβης Spalart-Allmaras με την προσθήκη νέων όρων, οι οποίοι εισάγουν το πορώδες στην εξίσωση του μοντέλου. Επιπλέον, για την αποφυγή της παραδοχής της “παγωμένης” τυρβώδους συνεκτικότητας, διατυπώνονται οι συνεχείς συζυγείς εξισώσεις του μοντέλου τύρβης, για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία, για την περίπτωση της βελτιστοποίησης τοπολογίας.

Όσον αφορά στην επίλυση προβλημάτων με μεταφορά θερμότητας στη βελτιστοποίηση τοπολογίας, στις εργασίες [158, 35, 97] παρουσιάζεται η εύρεση της βέλτιστης τοπολογίας της ροής για στρωτές ροές με μεταφορά θερμότητας με στόχο την ελαχιστοποίηση της θερμοκρασίας στο χωρίο μελέτης. Στις εργασίες αυτές παρεμβάλλονται οι τιμές της θερμικής αγωγιμότητας ανάμεσα σε δύο όρια βασιζόμενοι στις τοπικές τιμές του πορώδους. Το κάτω όριο αντιστοιχεί στην τιμή της θερμικής αγωγιμότητας στο ρευστό, ενώ το άνω όριο στην τιμή της στο στερεό σώμα. Η χρήση αυτής της παρεμβολής ήταν υποχρεωτική στις εργασίες όπου η συνάρτηση-στόχος εξαρτάται από χωρικά ολοκληρώματα της θερμοκρασίας, οπότε η εξίσωση της ενέργειας έπρεπε

να επιλυθεί και εντός του στερεοποιημένου χωρίου. Η παρούσα διδακτορική διατριβή ασχολείται αποκλειστικά με τη μεταφορά θερμότητας στο ρευστό χωρίς να ενδιαφέρεται για την κατανομή της θερμοκρασίας στο στερεό σώμα. Για το λόγο αυτό, οι συναρτήσεις-στόχοι, οι οποίες επιλέγονται, περιλαμβάνουν μόνο συνοριακά ολοκληρώματα της θερμοκρασίας στην είσοδο και έξοδο του χωρίου. Επομένως, σημαντικό ρόλο παίζει η γνώση της θερμοκρασίας στα στερεά τοιχώματα. Αυτό οδήγησε στη διατύπωση εκ νέου της εξίσωσης της ενέργειας, στην οποία εισάγεται το πορώδες μέσω της προσθήκης νέων κατάλληλων όρων και, στη συνέχεια, της συζυγούς εξίσωσης αυτής. Οι τρεις αυτές εργασίες δεν χρησιμοποιούν τη συζυγή μέθοδο για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας αλλά τη μέθοδο κινούμενων ασυμπτωτών, (Method of Moving Asymptotes, MMA), [137], η οποία χρησιμοποιείται σε προβλήματα της μηχανικής στερεού σώματος και αποτελεί μια μέθοδο προσέγγισης παραγώγου. Σε σύγκριση με τις προαναφερθείσες εργασίες, η μέθοδος η οποία αναπτύχθηκε εδώ για την επίλυση προβλημάτων μεταφοράς θερμότητας διαφοροποιείται επιπλέον ως προς το ότι βασίζεται στη συνεχή συζυγή μέθοδο καθώς επίσης ότι υπολογίζει την ακριβή κλίση της συνάρτησης-στόχου για τυρβώδεις ροές με μεταφορά θερμότητας.

Στο παρόν κεφάλαιο εκτός από τη διατύπωση του συζυγούς προβλήματος για τυρβώδεις ροές με μεταφορά θερμότητας, παρουσιάζεται μια σειρά από προβλήματα βελτιστοποίησης τοπολογίας που αφορούν στο σχεδιασμό δικτύων αγωγών, για στρωτές και τυρβώδεις ροές, με ή χωρίς μεταφορά θερμότητας.

## 5.1 Εξισώσεις της ροής

Όπως αναφέρθηκε ήδη στη βιβλιογραφία, η εισαγωγή του πορώδους στις εξισώσεις Navier-Stokes για το ασυμπίεστο ρευστό γίνεται με την προσθήκη ενός όρου που εξαρτάται από το πεδίο του πορώδους  $\alpha$  στις εξισώσεις της ορμής, [158, 35, 97]. Η παρούσα διατριβή προτείνει την πρόσθεση αντίστοιχων όρων στην εξίσωση της ενέργειας και στην εξίσωση του μοντέλου τύρβης Spalart-Allmaras με στόχο την επέκταση της βελτιστοποίησης τοπολογίας σε προβλήματα τυρβωδών ροών με μεταφορά θερμότητας. Οι προτεινόμενες εξισώσεις κατάστασης

$$R_p = 0, \quad R_{v_i} = 0, \quad R_T = 0, \quad R_{\tilde{\nu}} = 0$$

για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης τοπολογίας είναι οι εξής

$$R_p = \beta^2 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (5.1)$$

$$R_{v_i} = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + \alpha v_i = 0 \quad (5.2)$$

$$R_T = \frac{\partial (v_j T)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] + \alpha (T - T_{wall}) = 0 \quad (5.3)$$

$$R_{\tilde{\nu}} = \frac{\partial (v_i \tilde{\nu})}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \nu + \frac{\tilde{\nu}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \right] - \frac{c_{b2}}{\sigma} \left( \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \right)^2 - \tilde{\nu} P(\tilde{\nu}) + \tilde{\nu} D(\tilde{\nu}) + \alpha \tilde{\nu} = 0 \quad (5.4)$$



όπου  $T_{wall}$  είναι η θερμοκρασία των στερεών τοιχωμάτων που περιβάλλουν τη ροή. Οι όροι  $av_i$ ,  $\alpha(T - T_{wall})$  και  $\alpha\tilde{v}$  προστίθενται τεχνηέντως στις εξισώσεις κατάστασης. Για κάθε κόμβο στον οποίο υπολογίζεται μηδενική τιμή του πορώδους  $\alpha$ , οι όροι αυτοί εξαφανίζονται και οι κόμβοι αντιστοιχούν σε περιοχή ροής, δεδομένου ότι οι μεταβλητές κατάστασης ικανοποιούν πλέον τις κλασικές εξισώσεις ροής. Αντιθέτως, κόμβοι με  $\alpha \neq 0$ , που αντιστοιχούν σε στερεό σώμα, αποκτούν μηδενική ταχύτητα για να ελαχιστοποιήσουν τον όρο  $av_i$  στην εξίσωση 5.2. Αντίστοιχα, επιλέγεται η προσθήκη του όρου  $\alpha\tilde{v}$  στην εξίσωση του μοντέλου τύρβης έτσι ώστε στους κόμβους με  $\alpha \neq 0$ , το  $\tilde{v}$  και, κατά συνέπεια, και το  $\nu_t$  να ισούται επίσης με μηδέν. Όσον αφορά στην εξίσωση ενέργειας, δεδομένου ότι είναι επιθυμητή η επιβολή δεδομένης θερμοκρασίας στα τοιχώματα του αγωγού που δημιουργείται στο χωρίο μελέτης, προστίθεται ο όρος  $\alpha(T - T_{wall})$ . Για την ελαχιστοποίηση αυτού του όρου, στους κόμβους με  $\alpha \neq 0$ , η τοπική θερμοκρασία ισούται με  $T_{wall}$  και αντιστοιχεί στο τμήμα του χωρίου που στερεοποιείται.

## 5.2 Συναρτήσεις-στόχοι

Οι συναρτήσεις-στόχοι της βελτιστοποίησης τοπολογίας, που χρησιμοποιούνται στις εφαρμογές που παρουσιάζονται στην ενότητα 5.9, εκφράζουν την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης,  $F_1$ , και τη μεγιστοποίηση της διαφοράς της θερμοκρασίας,  $F_2$ , μεταξύ της εξόδου ( $S_O$ ) και της εισόδου ( $S_I$ ) του χωρίου, όπου

$$F_1 = - \int_{S_I} \left( p + \frac{1}{2}\rho v^2 \right) v_i n_i dS - \int_{S_O} \left( p + \frac{1}{2}\rho v^2 \right) v_i n_i dS \quad (5.5)$$

$$F_2 = \int_{S_I} T v_i n_i dS + \int_{S_O} T v_i n_i dS \quad (5.6)$$

Οι δύο παραπάνω ποσότητες εκφράζουν την ολική πίεση και τη θερμοκρασία ολοκληρωμένες στην παροχή όγκου του ρευστού που διέρχεται από τις γνωστές διατομές εισόδου και εξόδου του πεδίου ροής. Στην περίπτωση της βελτιστοποίησης τοπολογίας θεωρήθηκε σκόπιμο, σε αντίθεση με την εξίσωση 3.21 για προβλήματα βελτιστοποίησης μορφής, να χρησιμοποιηθεί η ολοκληρωμένη στην παροχή όγκου του ρευστού έκφραση για το στόχο  $F_2$ . Όπως και στην περίπτωση της βελτιστοποίησης μορφής (ενότητα 3.3) στα προβλήματα με μεταφορά θερμότητας, σχηματίζεται ενιαία συνάρτηση  $F$ , η οποία αποτελείται από το άθροισμα των δύο επιμέρους συναρτήσεων-στόχων,  $F_i$ , πολλαπλασιασμένων με κατάλληλους συντελεστές βαρύτητας,  $\omega_i$ , που επιλέγει ο χρήστης, ως

$$F = \omega_1 F_1 - \omega_2 F_2 \quad (5.7)$$

Οι μονάδες των  $\omega_1$  και  $\omega_2$  είναι κατάλληλες ώστε να είναι εφικτή η άθροιση των διαστατών συναρτήσεων  $F_1$  και  $F_2$  πολλαπλασιασμένων με τους συντελεστές αυτούς. Στη συνέχεια, τα διαστατά μεγέθη  $\omega_1$  και  $\omega_2$  θα παρουσιάζονται χωρίς να αναγράφονται

οι σχετικές διαστάσεις. Η διαφορά στο πρόσημο των δύο όρων υπαγορεύεται από ότι η μεν  $F_1$  ελαχιστοποιείται ενώ, η  $F_2$  μεγιστοποιείται. Προφανώς, εδώ, η νέα συνάρτηση  $F$  πρέπει να ελαχιστοποιηθεί. Οι μεταβολές της ενιαίας συνάρτησης-στόχου ως προς τις ροϊκές μεταβλητές,  $p, v_i, T, \tilde{v}$ , είναι μηδενικές στα στερεά τοιχώματα  $S_W$  και  $S_\alpha$  ενώ, στα  $S_I$  και  $S_O$  δίνονται από τις εκφράσεις

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial p} &= -\omega_1 v_i n_i \\ \frac{\partial F}{\partial v_i} &= -\omega_1 \left( \frac{1}{2} v^2 n_i + v_i v_\lambda n_\lambda + p n_i \right) - \omega_2 T n_i \\ \frac{\partial F}{\partial T} &= -\omega_2 v_i n_i \\ \frac{\partial F}{\partial \tilde{v}} &= 0\end{aligned}\quad (5.8)$$

### 5.3 Οι συναρτήσεις των περιορισμών

Στα προβλήματα βελτιστοποίησης τοπολογίας με περισσότερες από μία εξόδους είναι συχνά απαραίτητη η επιβολή περιορισμών που αφορούν στον καθορισμό της παροχής του ρευστού σε κάθε έξοδο. Όμοια, σε προβλήματα μεταφοράς θερμότητας, οι περιορισμοί αφορούν στην επιθυμία καθορισμού της θερμοκρασίας του ρευστού σε κάθε έξοδο. Έστω ότι το χωρίο μελέτης περιλαμβάνει  $L$  εξόδους, ο περιορισμός για τον καθορισμό της παροχής σε κάθε έξοδο δίνεται από τη σχέση

$$c_1 = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L (\Delta m_l)^2 = 0 \quad (5.9)$$

όπου

$$\Delta m_l = \int_{S_{O_l}} v_i n_i dS + r_l \int_{S_I} v_i n_i dS$$

και  $r_l$  αντιστοιχεί στο ποσοστό της παροχής της ροής της εισόδου που επιδιώκεται να εξέλθει από την έξοδο  $l$ .

Επίσης, συχνά σε αρκετές βιομηχανικές εφαρμογές, είναι επιθυμητή η δυνατότητα καθορισμού της μέσης θερμοκρασίας του ρευστού σε κάθε έξοδο. Για το λόγο αυτό, επιβάλλεται ο ακόλουθος περιορισμός  $c_2$

$$c_2 = \frac{\sum_{l=1}^L \int_{S_{O_l}} v_i n_i (T - \bar{T}_O)^2 dS}{\int_{S_I} v_i n_i dS} = 0 \quad (5.10)$$

όπου  $\bar{T}_O$  η μέση θερμοκρασία του ρευστού στις εξόδους, η οποία αλλάζει δυναμικά σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης και δίνεται από τη σχέση

$$\bar{T}_O = \frac{\sum_{l=1}^L \int_{S_{O_l}} T dS}{\sum_{l=1}^L \int_{S_{O_l}} dS} \quad (5.11)$$

Οι μεταβολές των συναρτήσεων των περιορισμών ως προς τις ποσότητες της ροής στις εξόδους  $S_{O_l}$ ,  $l = 1, L$  δίνονται από τις εκφράσεις

$$\begin{aligned}\frac{\partial c_1}{\partial p} &= \frac{\partial c_2}{\partial p} = 0 \\ \frac{\partial c_1}{\partial v_i} &= \Delta m_i n_i, \quad \frac{\partial c_2}{\partial v_i} = \frac{n_i (T - \bar{T}_O)^2}{\int_{S_I} v_i n_i dS} \\ \frac{\partial c_1}{\partial T} &= 0, \quad \frac{\partial c_2}{\partial T} = \frac{2v_i n_i (T - \bar{T}_O)}{\int_{S_I} v_i n_i dS} \\ \frac{\partial c_1}{\partial \tilde{v}} &= \frac{\partial c_2}{\partial \tilde{v}} = 0\end{aligned}\tag{5.12}$$

## 5.4 Διατύπωση των συζυγών εξισώσεων

Στην παρούσα ενότητα, αναπτύσσεται η μαθηματική διατύπωση του συνεχούς συζυγούς προβλήματος για τη βελτιστοποίηση τοπολογίας, όπως και στο κεφάλαιο 4 για τη βελτιστοποίηση μορφής, με τη διαφορά ότι το πορώδες σε κάθε κόμβο αποτελεί τις μεταβλητές σχεδιασμού στη βελτιστοποίηση τοπολογίας. Η επαυξημένη συνάρτησης-στόχος δίνεται από τη σχέση

$$F_{aug} = F + \int_{\Omega} q R_p d\Omega + \int_{\Omega} u_i R_{v_i} d\Omega + \int_{\Omega} T_a R_T d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{v}_a R_{\tilde{v}} d\Omega + w_k c_k \tag{5.13}$$

όπου  $q, u_i, T_a, \tilde{v}_a$  οι συζυγείς μεταβλητές της πίεσης, των ταχυτήτων, της θερμοκρασίας και της μεταβλητής του μοντέλου τύρβης, αντίστοιχα. Οι  $K$  περιορισμοί εισάγονται στο πρόβλημα βελτιστοποίησης τοπολογίας με τον όρο  $w_k c_k = \sum_{k=1}^K w_k c_k$ , όπου  $w_k$  κατάλληλοι συντελεστές βαρύτητας που επιλέγει ο χρήστης.

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση 3.3, ο ολικός ρυθμός μεταβολής μιας ποσότητας της ροής  $\Phi$  ως προς το πεδίο του πορώδους  $\alpha$ , αντί των μεταβλητών σχεδιασμού  $\vec{b}$ , εκφράζεται ως το άθροισμα του ρυθμού μεταβολής της ποσότητας  $\Phi$  λόγω της μεταβολής του  $\alpha$  ( $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}$ ) και της μεταβολής του  $\Phi$  λόγω της μετατόπισης του αντίστοιχου κόμβου, δηλαδή

$$\frac{\delta \Phi}{\delta \alpha} = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta \alpha} \tag{5.14}$$

Στη βελτιστοποίηση τοπολογίας, το πεδίο μελέτης καθώς και το υπολογιστικό πλέγμα του χωρίου δεν μεταβάλλονται παρά τις όποιες αλλαγές του πεδίου του  $\alpha$  σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης. Για το λόγο αυτό,  $\frac{\delta x_k}{\delta \alpha} = 0$ , άρα δεν υπάρχει διαφορά στη χρήση των συμβόλων  $\delta$  και  $\partial$ , ( $\frac{\delta \Phi}{\delta \alpha} = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}$ ).

Η μεταβολή της επαυξημένης συνάρτησης-στόχου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού  $\alpha$  δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta \alpha} &= \frac{\delta F}{\delta \alpha} + \int_{\Omega} q \frac{\partial R_p}{\partial \alpha} d\Omega + \int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_{v_i}}{\partial \alpha} d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} T_a \frac{\partial R_T}{\partial \alpha} d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\nu}_a \frac{\partial R_{\tilde{\nu}}}{\partial \alpha} d\Omega + w_k \frac{\partial c_k}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Η ανάπτυξη των τεσσάρων ολοκληρωμάτων της εξίσωσης 5.15 είναι παρόμοια με αυτή που παρουσιάζεται στα κεφάλαια 3 και 4 με τη διαφορά ότι οι εξισώσεις διαφορίζονται εκεί ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού που εισήγαγε η παραμετροποίηση ενώ εδώ ως προς το πορώδες  $\alpha$ . Για το λόγο αυτό, στη συνέχεια, αναπτύσσεται ενδεικτικά μόνο η έκφραση του ρυθμού μεταβολής της εξίσωσης της ενέργειας ως προς το  $\alpha$  ενώ ανάλογη είναι και η ανάπτυξη των τριών άλλων ολοκληρωμάτων. Είναι

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_T}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( T \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( v_i \frac{\partial T}{\partial \alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_t}{\partial \alpha} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \\ &- \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.16)$$

Το χωρικό ολοκλήρωμα  $\int_{\Omega} T_a \frac{\partial R_T}{\partial \alpha} d\Omega$  της εξίσωσης 5.15, αντικαθιστώντας το  $\frac{\partial R_T}{\partial \alpha}$ , κάνοντας χρήση του θεωρήματος Green-Gauss και αναπτύσσοντας τον κάθε όρο χωριστά μπορεί να γραφεί ως

$$\int_{\Omega} T_a \frac{\partial}{\partial x_i} \left( T \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} \right) d\Omega = \int_S T_a T n_i \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} dS - \int_{\Omega} \frac{\partial T_a}{\partial x_i} T \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} d\Omega \quad (5.17)$$

$$\int_{\Omega} T_a \frac{\partial}{\partial x_i} \left( v_i \frac{\partial T}{\partial \alpha} \right) d\Omega = \int_S T_a v_i n_i \frac{\partial T}{\partial \alpha} dS - \int_{\Omega} \frac{\partial T_a}{\partial x_i} v_i \frac{\partial T}{\partial \alpha} d\Omega \quad (5.18)$$

$$\int_{\Omega} T_a \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_t}{\partial \alpha} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) d\Omega = \int_S T_a n_i \frac{\partial v_t}{\partial \alpha} \frac{\partial T}{\partial x_i} dS - \int_{\Omega} \frac{\partial T_a}{\partial x_i} \frac{\partial v_t}{\partial \alpha} \frac{\partial T}{\partial x_i} d\Omega \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} T_a \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \right] d\Omega &= \int_S \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) T_a n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial T}{\partial \alpha} \right) dS \\ &- \int_S \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T_a}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial \alpha} n_i dS \\ &+ \int_{\Omega} \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial^2 T_a}{\partial x_i^2} \frac{\partial T}{\partial \alpha} d\Omega \end{aligned} \quad (5.20)$$

Με βάση τα παραπάνω, η εξίσωση 5.15 γράφεται συνολικά

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta \alpha} &= \int_{\Omega} R_q \frac{\partial p}{\partial \alpha} d\Omega + \int_{\Omega} R_{u_i} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} d\Omega + \int_{\Omega} R_{\tilde{\nu}_a} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial \alpha} d\Omega + \int_{\Omega} R_{T_a} \frac{\partial T}{\partial \alpha} d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} v_i u_i d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\nu} \tilde{\nu}_a d\Omega + \int_{\Omega} (T - T_{wall}) T_{\alpha} d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\nu}_a \tilde{\nu} \mathcal{C}_d(\tilde{\nu}, \vec{v}) \frac{\partial d}{\partial \alpha} d\Omega \\
&+ \int_S \mathcal{BC}_1 \frac{\partial p}{\partial \alpha} dS + \int_S \mathcal{BC}_{2,i} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} dS + \int_S \mathcal{BC}_3 \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial \alpha} dS + \int_S \mathcal{BC}_4 \frac{\partial T}{\partial \alpha} dS \\
&- \int_S (\nu + \nu_t) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) u_i n_j dS - \int_S \tilde{\nu}_a \left( \nu + \frac{\tilde{\nu}}{\sigma} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} n_j \right) dS \\
&- \int_S T_a \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} n_j \right) dS \tag{5.21}
\end{aligned}$$

όπου  $S = S_I \cup S_O \cup S_W$  με  $S_I$  την είσοδο,  $S_O$  την έξοδο και  $S_W$  τα στερεά τοιχώματα επί του περιγράμματος του αρχικού χωρίου μελέτης, όπως φαίνονται στο σχήμα 5.2. Οι όροι  $\mathcal{BC}_1, \mathcal{BC}_{2,i}, \mathcal{BC}_3, \mathcal{BC}_4$  και  $R_q, R_{u_i}, R_{\tilde{\nu}_a}, R_{T_a}$  αναλύονται στις δύο επόμενες ενότητες.

## 5.5 Οι συζυγείς εξισώσεις

Οι πεδιακές συζυγείς εξισώσεις προκύπτουν απαλείφοντας τα χωρικά ολοκληρώματα στα οποία εμφανίζονται ποσότητες που εξαρτώνται από τους ρυθμούς μεταβολής των ροϊκών μεγεθών, ως προς το πορώδες, δηλαδή οι ποσότητες  $\frac{\partial p}{\partial \alpha}, \frac{\partial v_i}{\partial \alpha}, \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial \alpha}, \frac{\partial T}{\partial \alpha}$ . Οι συζυγείς εξισώσεις της μέσης ροής ( $R_q = 0, R_{u_i} = 0$ ), της εξίσωσης της ενέργειας ( $R_{T_a} = 0$ ) και της εξίσωσης του μοντέλου τύρβης ( $R_{\tilde{\nu}_a} = 0$ ) δίνονται από τις επόμενες σχέσεις

$$R_q = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}
R_{u_i} &= -v_j \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \beta^2 \frac{\partial q}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \\
&- \tilde{\nu} \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( e_{jki} e_{jmq} \frac{\mathcal{C}_S}{S} \frac{\partial v_q}{\partial x_m} \tilde{\nu} \tilde{\nu}_a \right) - \underbrace{T \frac{\partial T_a}{\partial x_i}}_{term_{R_{u_i}}} + \alpha u_i \tag{5.23}
\end{aligned}$$

$$R_{T_a} = -v_j \frac{\partial T_a}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T_a}{\partial x_j} \right] + \alpha T_a \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned}
R_{\tilde{\nu}_a} &= -v_j \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\tilde{\nu}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} \right] + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} + 2 \frac{c_{b2}}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \tilde{\nu}_a \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) \\
&+ \tilde{\nu}_a \tilde{\nu} \mathcal{C}_{\tilde{\nu}}(\tilde{\nu}, \vec{v}) + (-P + D) \tilde{\nu}_a + \frac{\delta \nu_t}{\delta \tilde{\nu}} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\
&+ \frac{\delta \nu_t}{\delta \tilde{\nu}} \frac{1}{Pr_t} \frac{\partial T_a}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j} + \alpha \tilde{\nu}_a \tag{5.25}
\end{aligned}$$

Παρατηρείται ότι όροι οι οποίοι εξαρτώνται από το πορώδες  $\alpha$  ( $\alpha u_i$ ,  $\alpha T_a$  και  $\alpha \tilde{v}_a$ ) εμφανίζονται και στις συζυγείς εξισώσεις. Επιπλέον, παρατηρείται ότι ενώ η εξίσωση της ορμής δεν είναι πεπλεγμένη με την εξίσωση της ενέργειας (εξισώσεις 5.2 και 5.3) στο πρωτεύον πρόβλημα, η παρουσία του όρου  $term_{T_{R_{u_i}}}$  στη συζυγή εξίσωση της ορμής καθιστά πεπλεγμένες τις δύο αυτές συζυγείς εξισώσεις (εξισώσεις 5.23 και 5.24).

## 5.6 Οι συζυγείς οριακές συνθήκες

Όπως και στο κεφάλαιο 4, οι συζυγείς οριακές συνθήκες προκύπτουν από την επαυξημένη συνάρτηση-στόχο (εξίσωση 5.21) ύστερα από απαλοιφή των συνοριακών ολοκληρωμάτων τα οποία εμπεριέχουν μεταβολές των ροϊκών μεταβλητών ως προς το  $\alpha$ .

Στην είσοδο και στα στερεά τοιχώματα του πεδίου ροής επιβάλλονται συνθήκες τύπου Dirichlet για τις μεταβλητές της ροής,  $v_i$ ,  $\tilde{v}$  και  $T$  και, για αυτόν το λόγο, για τους ρυθμούς μεταβολής τους ως προς  $\alpha$  ισχύει

$$\frac{\partial v_i}{\partial \alpha} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \alpha} = \frac{\partial T}{\partial \alpha} = 0 \quad (5.26)$$

Για την απαλοιφή των όρων της  $\frac{\delta F_{aug}}{\delta \alpha}$  που εξαρτώνται από τις μεταβολές  $\frac{\partial p}{\partial \alpha}$  και  $\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j \right]$  επιβάλλεται η ακόλουθη οριακή συνθήκη

$$BC_1 = u_i n_i + \frac{\partial F}{\partial p} + w_k \frac{\partial c_k}{\partial p} = 0 \quad (5.27)$$

$$u_i t_i = 0 \quad (5.28)$$

Όπως παρουσιάστηκε και στο κεφάλαιο 4, οι οριακές συνθήκες στην είσοδο και την έξοδο για τη συζυγή πίεση  $q$ , τη συζυγή μεταβλητή του μοντέλου τύρβης  $\tilde{v}_a$  και για τη συζυγή θερμοκρασία  $T_a$  επιλέγονται να είναι οι  $\frac{\partial q}{\partial n} = 0$ ,  $\tilde{v}_a = 0$  και  $T_a = 0$ .

Στην έξοδο του πεδίου της ροής, δεδομένου ότι για το  $p$  επιβάλλονται συνθήκες τύπου Dirichlet και για τα  $v_i$ ,  $\tilde{v}$  και  $T$  συνθήκες τύπου Neumann, οι παράγωγοι  $\frac{\partial p}{\partial \alpha}$ ,  $\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} n_j \right)$ ,  $\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} n_j \right)$  και  $\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} n_j \right)$  μηδενίζονται. Συνεπώς, για να γίνει η έκφραση της παραγωγού ευαισθησίας  $\frac{\delta F_{aug}}{\delta \alpha}$  ανεξάρτητη του  $\frac{\partial v_i}{\partial \alpha}$  επιβάλλεται η συνθήκη

$$\begin{aligned} BC_{2,i} = & \beta^2 q n_i + u_i v_i n_j + u_i v_j n_j + (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \\ & + T_a T n_i + \tilde{v}_a \tilde{v} n_i + \frac{\partial F}{\partial v_i} + w_k \frac{\partial c_k}{\partial v_i} = 0 \end{aligned} \quad (5.29)$$

Οι οριακές συνθήκες της εξόδου για τη συζυγή θερμοκρασία και τη συζυγή μεταβλητή του μοντέλου τύρβης προκύπτουν επιβάλλοντας  $BC_3 = 0$  και  $BC_4 = 0$  όπου

$$\mathcal{BC}_3 = v_i n_i T_a + \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T_a}{\partial x_j} n_j + \frac{\partial F}{\partial T} + w_k \frac{\partial c_k}{\partial T} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{BC}_4 = & -\frac{\delta \nu_t}{\delta \tilde{\nu}} u_i \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j - \frac{\delta \nu_t}{\delta \tilde{\nu}} \frac{T_a}{Pr_t} \frac{\partial T}{\partial x_j} n_j + \tilde{\nu}_a v_j n_j \\ & + \left( \nu + \frac{\tilde{\nu}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_j} n_j + \frac{\partial F}{\partial \tilde{\nu}} + w_k \frac{\partial c_k}{\partial \tilde{\nu}} \end{aligned} \quad (5.31)$$

οι οποίες καθιστούν τη  $\frac{\delta F_{aug}}{\delta \alpha}$  ανεξάρτητη των παραγώγων  $\frac{\partial T}{\partial \alpha}$  και  $\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial \alpha}$ . Βάσει των περιορισμών  $c_1$  και  $c_2$  και των παραγώγων τους ως προς τις μεταβλητές της ροής, εξισώσεις 5.12, εμφανίζονται νέοι όροι στις συζυγείς οριακές συνθήκες της εξόδου, εξισώσεις 5.29 και 5.30, καθορίζοντας με αυτόν τον τρόπο την παροχή και τη θερμοκρασία του ρευστού σε κάθε έξοδο.

## 5.7 Έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας

Οι αναπομείναντες όροι στην εξίσωση 5.21 δίνουν την έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας ως προς το πορώδες  $\alpha$ ,

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta \alpha} = \int_{\Omega} v_i u_i d\Omega + \int_{\Omega} (T - T_{wall}) T_a d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\nu}_a d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\nu}_a \tilde{\nu} C_d(\tilde{\nu}, \vec{v}) \frac{\partial d}{\partial \alpha} d\Omega \quad (5.32)$$

όπου η απόσταση  $d$  ορίζεται ως η απόσταση κάθε κόμβου από το (υπό διαμόρφωση) στερεό όριο  $S_\alpha$ , που διαχωρίζει την περιοχή της ροής ( $\alpha = 0$ ) από την περιοχή του στερεοποιημένου σώματος ( $\alpha \neq 0$ ).

## 5.8 Αλγόριθμος βελτιστοποίησης τοπολογίας

Τα βήματα του αλγόριθμου της βελτιστοποίησης τοπολογίας συνοψίζονται στα ακόλουθα, ενώ ακολουθεί η περιγραφή της προσαρμογής του πλέγματος που είναι απαραίτητη σε προβλήματα τυρβωδών ροών:

**Βήμα 1:** Αρχικοποίηση του πεδίου του πορώδους  $\alpha$  στο τρέχον υπολογιστικό πλέγμα, το οποίο είναι πυκνό στα στερεά όρια του χωρίου μελέτης.

**Βήμα 2:** Επίλυση των εξισώσεων της ροής.

**Βήμα 3:** Υπολογισμός των συναρτήσεων-στόχων και των τιμών των περιορισμών.

**Βήμα 4:** Επίλυση των συζυγών εξισώσεων.

**Βήμα 5:** Υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας  $\frac{\delta F_{aug}}{\delta \alpha}$  (εξίσωση 5.32).

**Βήμα 6:** Ανανέωση των τιμών του  $\alpha$  μέσω της μεθόδου της απότομης καθόδου

$$\alpha^{j+1} = \alpha^j - \eta \frac{\delta F_{aug}}{\delta \alpha} \quad (5.33)$$

όπου  $j$  είναι ο κύκλος βελτιστοποίησης και  $\eta$  το βήμα που επιλέγει ο χρήστης.

**Βήμα 7:** Προσαρμογή του τρέχοντος πλέγματος βάσει της τιμής του πορώδους  $\alpha$ . Δημιουργία νέου πλέγματος το οποίο είναι πυκνό στην περιοχή κοντά στα νέα διαμορφούμενα στερεά τοιχώματα  $S_\alpha$ .

**Βήμα 8:** Για  $|F^{j+1} - F^j| > 0$  επιστροφή στο **Βήμα 2** κάνοντας χρήση του νέου πλέγματος.

### Προσαρμογή του πλέγματος κατά τη βελτιστοποίηση τοπολογίας

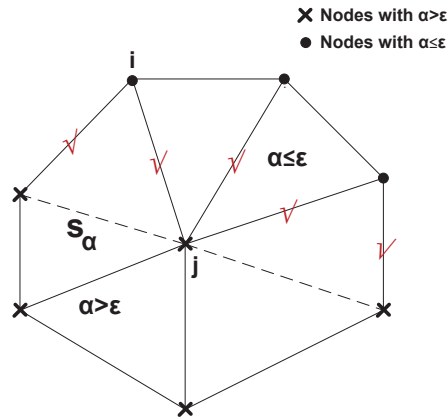
Σε κάθε κύκλο της βελτιστοποίησης τοπολογίας, μετά από κάθε ανανέωση του πεδίου του πορώδους προκύπτουν νέα στερεά τοιχώματα  $S_\alpha$ , τα οποία αποτελούν τη διεπιφάνεια μεταξύ των περιοχών στερεού σώματος και των περιοχών ροής, σχήμα 5.2. Κατά την επίλυση τυρβωδών ροών, ειδικότερα χρησιμοποιώντας μοντέλα τύρβης χαμηλών αριθμών Reynolds όπου ολοκληρώνονται οι ισχύουσες εξισώσεις μέχρι το στερεό τοίχωμα  $S_\alpha$ , το υπολογιστικό πλέγμα πρέπει να είναι ιδιαίτερα πυκνό κοντά στα στερεά τοιχώματα. Για το λόγο αυτό, είναι απαραίτητη η προσαρμογή του πλέγματος σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης. Στην παρούσα διδακτορική διατριβή, χρησιμοποιήθηκε προϋπάρχων αλγόριθμος και λογισμικό προσαρμογής πλέγματος τριγωνικών στοιχείων, [141, 139], με νέο-κατάλληλο αισθητήριο για την καθοδήγηση της προσαρμογής. Η μέθοδος περιλαμβάνει εμπλουτισμό του πλέγματος με εισαγωγή επιπλέον κόμβων καταλήγοντας σε ένα πλέγμα επαρκώς πυκνωμένο στις περιοχές που απαιτείται.

Για τον εντοπισμό αυτών των περιοχών χρησιμοποιούνται κριτήρια βάσει των οποίων εντοπίζονται οι ακμές του πλέγματος που είναι υποψήφιας για διάσπαση. Στις [144, 141, 139], για τον εντοπισμό των υποψήφιων προς διάσπαση ακμών ακολουθούνται τα εξής βήματα: (α) επιλέγεται ένα ροϊκό μέγεθος ως αισθητήριο, (β) διατυπώνεται μια συνάρτηση κρίσης που χρησιμοποιεί το αισθητήριο για τη βαθμολόγηση των ακμών και (γ) ορίζεται ένα κατώφλι εμπλουτισμού,  $\epsilon$ , η τιμή του οποίου συγκρίνεται με την τιμή της συνάρτησης κρίσης υποδεικνύοντας τις υποψήφιας για διάσπαση ακμές.

Στην παρούσα διατριβή, κατά την προσαρμογή του πλέγματος στη βελτιστοποίηση τοπολογίας, δεδομένου ότι επιδιώκεται η εύρεση του ορίου  $S_\alpha$  μεταξύ των περιοχών με  $\alpha > \epsilon$  και  $\alpha \leq \epsilon$  ( $\epsilon$  είναι μία απειροστά μικρή θετική ποσότητα) δεν χρησιμοποιείται ροϊκό μέγεθος ως αισθητήριο αλλά η τιμή του πορώδους σε κάθε κόμβο. Το  $S_\alpha$  είναι πρακτικά μία σειρά διαδοχικών ακμών, η οποία σημειώνεται στο σχήμα 5.4 με διακεκομμένη γραμμή.

Οι ακμές των οποίων οι κόμβοι διαθέτουν  $\alpha > \epsilon$  και  $\alpha \leq \epsilon$  αποτελούν τις ακμές στις οποίες υπάρχει ανάγκη δημιουργίας επιπλέον κόμβων ώστε να δημιουργηθεί ένα πυκνό πλέγμα κοντά στα νέα στερεά τοιχώματα. Οι ακμές αυτές σημειώνονται στο σχήμα 5.4 και είναι υποψήφιας προς διάσπαση.





**Σχήμα 5.4:** Λεπτομέρεια του υπολογιστικού πλέγματος τριγωνικών στοιχείων γύρω από το στερεό όριο  $S_\alpha$  που συμβολίζεται με διακεκομμένη γραμμή. Οι ακμές των οποίων οι κόμβοι διαθέτουν  $\alpha > \epsilon$  (x σύμβολο) και  $\alpha \leq \epsilon$  (κύκλο ως σύμβολο), σημειώνονται και επιλέγονται για διάσπαση κατά την προσαρμογή πλέγματος καθορίζοντας, με αυτόν τον τρόπο, τα στοιχεία τα οποία θα εμπλουτιστούν.

Η διαδικασία προσαρμογής πλέγματος συμβάλλει, επίσης ώστε η ζητούμενη καμπύλη των νέων στερεών τοιχωμάτων να είναι ιδιαίτερα “ραφιναρισμένη” καθορίζοντας με αυτό τον τρόπο ακριβέστερα τη γεωμετρία της βέλτιστης λύσης. Στις εφαρμογές της ενότητας 5.9 που αφορούν τυρβώδεις ροές, χρησιμοποιείται η προσαρμογή του πλέγματος σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης παρουσιάζοντας τα πλέγματα που προκύπτουν από αυτή.

## 5.9 Εφαρμογές

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται 2Δ εφαρμογές στις οποίες χρησιμοποιείται η βελτιστοποίηση τοπολογίας για το σχεδιασμό δικτύων αγωγών τόσο σε στρωτές όσο και τυρβώδεις ροές, με και χωρίς μεταφορά θερμότητας. Στις εφαρμογές με περισσότερες από μία εξόδους της ροής χρησιμοποιούνται περιορισμοί για την επίτευξη επιθυμητής παροχής και μέσης θερμοκρασίας σε κάθε έξοδο. Επίσης πραγματοποιείται επαλήθευση του πρωτεύοντος προβλήματος και της εισαγωγής των όρων  $av_i$ ,  $\alpha(T - T_{wall})$  και  $a\bar{v}$  στις εξισώσεις 5.2, 5.3 και 5.4, αντίστοιχα, όπως παρουσιάστηκε στην ενότητα 5.1. Αυτό επιτυγχάνεται ελέγχοντας εάν η προσθήκη αυτών των όρων προσομοιώνει τη ροή ως εάν να χρησιμοποιούνταν “πραγματικά” στερεά τοιχώματα μεταξύ της περιοχής του ρεόντος ρευστού ( $\alpha \leq \varepsilon$ ) και της περιοχής του στερεού σώματος ( $\alpha > \varepsilon$ ). Τέλος, στις εφαρμογές που αφορούν σε τυρβώδεις ροές, πιστοποιείται η ακρίβεια των παραγώγων ευαισθησίας που υπολογίζονται από την προτεινόμενη μέθοδο βελτιστοποίησης τοπολογίας, πραγματοποιώντας σύγκριση των παραγώγων αυτών με αυτές που υπολογίζονται με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών.

### 5.9.1 Επανασχεδιασμός βέλτιστου αγωγού τύπου $S$

Η εφαρμογή αυτή αφορά στο σχεδιασμό ενός βέλτιστου αγωγού τύπου  $S$  με ελάχιστες απώλειες ολικής πίεσης. Η ροή είναι τυρβώδης με  $Re = 1.2 \times 10^5$ , υπολογισμένος με βάση το πλάτος εισόδου του αγωγού. Το πεδίο της ταχύτητας του αγωγού φαίνεται στο σχήμα 5.5 (πάνω αριστερά) και χαρακτηριστικό του είναι ότι παρουσιάζει μία μεγάλη περιοχή ανακυκλοφορίας με απώλειες ολικής πίεσης που δίνουν τιμή της αντίστοιχης συνάρτησης-στόχου ίση με  $F_1 = 0.188$ . Το χωρίο μελέτης ταυτίζεται με τον αγωγό, θέτοντας αρχικοποίηση του πορώδους  $\alpha = 0$  σε όλο τον αγωγό και πραγματοποιείται βελτιστοποίηση τοπολογίας, η οποία έχει σκοπό τον ενδεχόμενο μετασχηματισμό τμημάτων του αγωγού σε στερεό σώμα για τη μείωση των απωλειών ολικής πίεσης. Πρόκειται, ουσιαστικά, για προσπάθεια επέμβασης (διόρθωσης) στο σχήμα ενός υπάρχοντος αγωγού. Μετά από 10 κύκλους βελτιστοποίησης, το βέλτιστο πεδίο του πορώδους φαίνεται στο σχήμα 5.5 (πάνω αριστερά), όπου το τμήμα του χωρίου με σκούρο χρώμα αντιστοιχεί σε μη-μηδενικές τιμές του πορώδους και αντιπροσωπεύει το τμήμα της περιοχής ανακυκλοφορίας που στερεοποιείται. Αντίστοιχα, στο σχήμα 5.5 (κάτω αριστερά) παρουσιάζεται το πεδίο της ταχύτητας της βέλτιστης λύσης. Η τιμή της ταχύτητας στο στερεοποιημένο τμήμα είναι μηδενική. Το νέο κάτω στερεό όριο του βέλτιστου αγωγού υπολογίζεται προσδιορίζοντας τη γραμμή που σχηματίζουν οι κόμβοι με  $\alpha = \varepsilon$  η οποία καθορίζει το όριο ανάμεσα στην περιοχή ροής και την περιοχή του στερεοποιημένου σώματος. Για την απόκτηση του τελικού (λείου) σχήματος του βέλτιστου αγωγού, κατά τη φάση της μετεπεξεργασίας, το κάτω όριο του αγωγού παραμετροποιείται χρησιμοποιώντας μία καμπύλη Bézier-Bernstein με 9 σημεία ελέγχου. Η διαδικασία αυτή, έτσι όπως πραγματοποιήθηκε στη διατριβή, ενέχει την παρέμβαση του χρήστη, δηλαδή δεν κρίθηκε σκόπιμο να αυτοματοποιηθεί. Το τελικό σχήμα καθώς και το πεδίο της ταχύτητας με μειωμένη περιοχή ανακυκλοφορίας ( $F_1 = 0.158$ ) φαίνονται στο σχήμα 5.5 (κάτω δεξιά) και αντιστοιχεί σε 15% μείωση

των απωλειών ολικής πίεσης.

### Πιστοποίηση των παραγώγων ευαισθησίας

Ένας επιπλέον στόχος της εφαρμογής αυτής είναι να πιστοποιηθεί ότι η προτεινόμενη μέθοδος βελτιστοποίησης τοπολογίας μπορεί να υπολογίζει με σημαντική ακρίβεια τις ζητούμενες παραγώγους ευαισθησίας, κάτι το οποίο δεν θα ίσχυε στην περίπτωση που είχε χρησιμοποιηθεί η παραδοχή της “παγωμένης” τυρβώδους συνεκτικότητας. Για αυτό το λόγο, παρουσιάζεται σύγκριση των παραγώγων ευαισθησίας που υπολογίστηκαν με την προτεινόμενη μέθοδο αφενός και με την παραδοχή της “παγωμένης” τυρβώδους συνεκτικότητας αφετέρου. Η προτεινόμενη μέθοδος περιλαμβάνει την επίλυση της συζυγούς εξίσωσης του μοντέλου τύρβης και τον υπολογισμό της παραγώγου από την εξίσωση 5.32. Αντιθέτως, η παραδοχή της “παγωμένης” τυρβώδους συνεκτικότητας αμελεί την διαφορίση του μοντέλου τύρβης και κατ’ επέκταση και τους δύο τελευταίους όρους της εξίσωσης 5.32 που προέρχονται από τη διαφορίση του μοντέλου. Επιλέγονται τυχαία κόμβοι του υπολογιστικού χωρίου με αρνητικές τιμές των παραγώγων ευαισθησίας, οι οποίες μέσω της μεθόδου απότομης καθόδου (εξίσωση 5.33) θα οδηγήσουν σε θετικές τιμές του πορώδους δηλαδή σε τμήματα του χωρίου που πρόκειται να στερεοποιηθούν, δεδομένου ότι στον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης οι αρχικές τιμές του πορώδους είναι μηδενικές. Στο σχήμα 5.6, εκτός από σύγκριση των παραγώγων των δύο μεθόδων, παρουσιάζονται και οι παράγωγοι που έχουν υπολογισθεί με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών (παράγωγοι αναφοράς). Παρατηρείται ότι οι παράγωγοι που υπολογίστηκαν με την προτεινόμενη μέθοδο βρίσκονται σε απόλυτη ταύτιση με τις παραγώγους αναφοράς. Αντιθέτως, η χρησιμοποίηση της παραδοχής της “παγωμένης” τυρβώδους συνεκτικότητας οδηγεί σε παραγώγους ευαισθησίας οι οποίες αποκλίνουν από τις τιμές αναφοράς. Αυτό σημαίνει ότι αν χρησιμοποιούνταν αυτές οι παράγωγοι, οι οποίες υπολογίστηκαν κατά τον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης, θα μπορούσαν να οδηγήσουν σε λανθασμένη στερεοποίηση περιοχών του χωρίου οι οποίες θα έπρεπε να παραμείνουν περιοχές ροής. Αυτό οδηγεί τη βελτιστοποίηση σε λάθος κατεύθυνση δεδομένου ότι, όπως παρουσιάστηκε και προηγουμένως, ο πρώτος κύκλος βελτιστοποίησης παίζει σημαντικό ρόλο στη βελτιστοποίηση τοπολογίας καθιστώντας πολύ δύσκολο, όχι όμως ακατόρθωτο, να μετατραπούν οι περιοχές που στερεοποιήθηκαν σε περιοχές ροής.

### Μελέτη της επίδρασης της αρχικοποίησης του πεδίου του πορώδους

Η παρούσα εφαρμογή δεν αποτελεί μία κλασική εφαρμογή βελτιστοποίησης τοπολογίας, δεδομένου ότι το πεδίο μελέτης ταυτίζεται με έναν υπάρχοντα αγωγό ο οποίος αποτελεί την αφετηρία για τη βελτιστοποίηση τοπολογίας και όχι ένα διευρυμένο πεδίο μελέτης, λ.χ. σχήμα 5.2, το οποίο ενδεχομένως θα επέτρεπε πολλές διαφορετικές μορφοποιήσεις του αγωγού. Επιπλέον, επειδή η βελτιστοποίηση τοπολογίας δεν έχει τη δυνατότητα να δημιουργήσει στερεά όρια έξω από το πεδίο μελέτης, το βέλτιστο σχήμα του αγωγού περιορίζεται από τα αρχικά στερεά όρια του αγωγού  $S_W$ . Για το λόγο αυτό, μελετάται η επίδραση της επέκτασης του πεδίου μελέτης καθώς και της διαφορετικής αρχικοποίησης

του πεδίου του πορώδους στο βέλτιστο σχήμα του αγωγού. Στη συνέχεια, μελετώνται τρεις διαφορετικές περιπτώσεις στις οποίες διευρύνεται το πεδίο μελέτης, το οποίο αποτελείται πλέον από τη σύνθεση των χωρίων  $D_1$ ,  $D_2$  και  $D_3$  όπως φαίνεται στο σχήμα 5.7. Πρακτικά, ο αρχικός αγωγός του σχήματος 5.5 περιβάλλεται από τα χωρία  $D_1$  και  $D_3$  ώστε να σχηματιστεί ένα τετράγωνο. Για να αποφευχθούν ανεπιθύμητες επιδράσεις από την “απότομη” επιβολή των συνθηκών εισόδου και εξόδου της ροής, οι οποίες ως γνωστόν είναι συχνές στην υπολογιστική ρευστομηχανική, επιβάλλονται τεχνητά ευθείες προεκτάσεις ανάντι και κατάντι, σε συμφωνία με το σχήμα του αρχικού αγωγού. Οι τρεις περιπτώσεις που μελετώνται παρουσιάζονται παρακάτω:

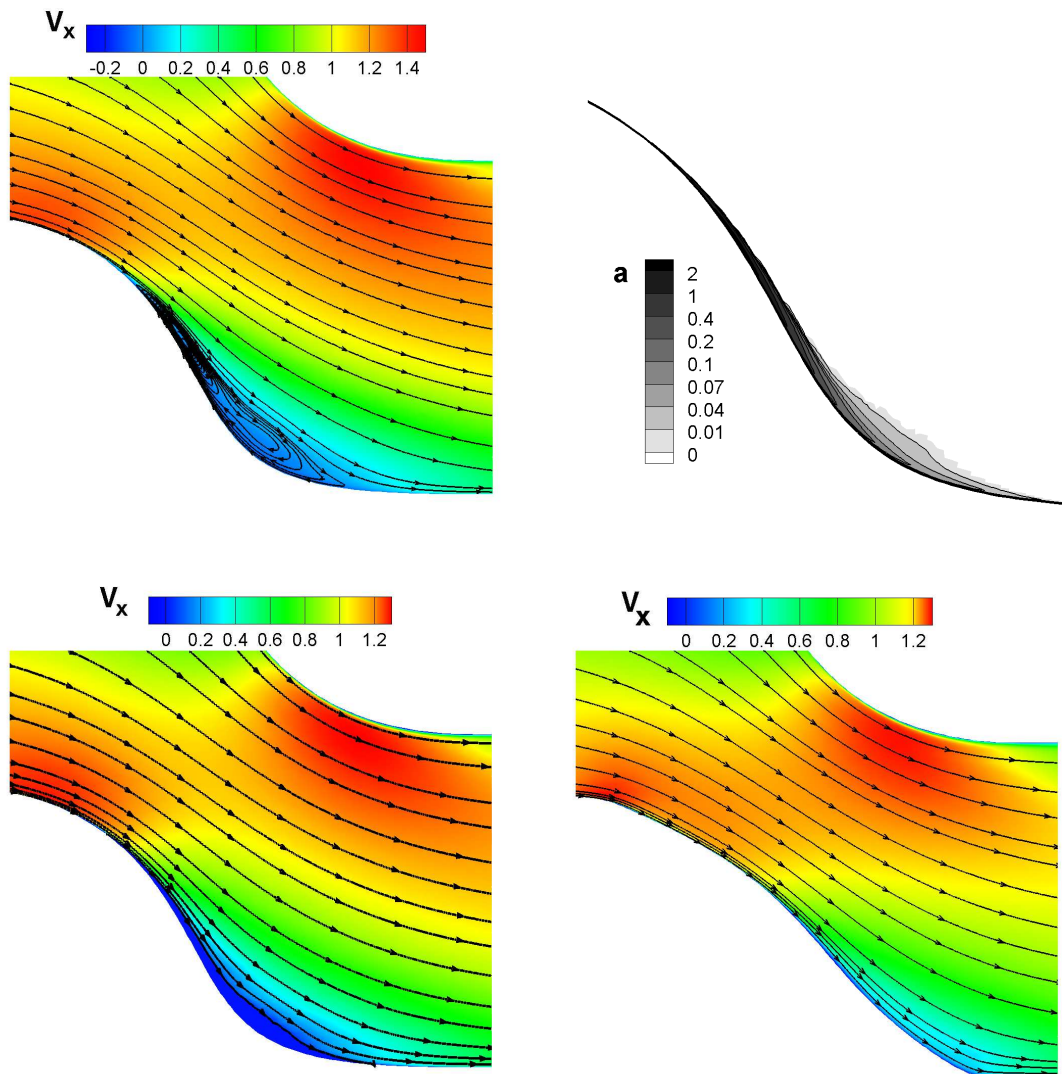
(α') Το πεδίο του πορώδους αρχικοποιείται θέτοντας  $\alpha \neq 0$  στα  $D_1$  και  $D_3$ , δημιουργώντας, με αυτόν τον τρόπο, ένα στερεοποιημένο χωρίο γύρω από το  $D_2$ , το οποίο αρχικοποιείται με  $\alpha = 0$ . Η περίπτωση αυτή θυμίζει την αρχική του σχήματος 5.5, μόνο που, τώρα, δίνεται η δυνατότητα στη βελτιστοποίηση τοπολογίας να μετακινήσει τα στερεά όρια του αγωγού και έξω από το χωρίο  $D_2$  διεισδύοντας στα  $D_1$  και  $D_3$ . Το βέλτιστο σχήμα του αγωγού, μέσω της παρουσίασης του πεδίου του πορώδους,  $\alpha = 0$  (άσπρο) και  $\alpha \neq 0$  (μαύρο), καθώς και το πεδίο της ταχύτητας που αντιστοιχεί σε αυτό τον αγωγό χρησιμοποιώντας την προαναφερθείσα αρχικοποίηση του πεδίου του πορώδους φαίνεται στο σχήμα 5.9 (πάνω). Στο σχήμα 5.10, παρουσιάζεται λεπτομέρεια του συνεχούς πεδίου του πορώδους στην περιοχή ανακυκλοφορίας. Ο αγωγός αυτός έχει απώλειες ολικής πίεσης  $F_1 = 0.156$ , ελάχιστα καλύτερα από το βέλτιστο αγωγό του σχήματος 5.5. Η μικρή μεταβολή στο  $F_1$  οφείλεται στην περαιτέρω βελτίωση του κάτω στερεού ορίου, το οποίο διατήρησε σχεδόν το σχήμα του στην περιοχή  $S_2$ , αλλά μετατόπισε την περιοχή  $S_1$  προς τα έξω, διεισδύοντας στο  $D_1$ . Συγχρόνως, παρατηρήθηκαν μικρές αλλαγές στο άνω στερεό όριο. Στο σχήμα 5.11 παρουσιάζεται μια λεπτομέρεια του πλέγματος στην περιοχή του κάτω ορίου, όπου φαίνεται η πυκνωση του πλέγματος γύρω από το νέο στερεό όριο μετά την προσαρμογή του.

Αυτή η περίπτωση μας δίνει τη δυνατότητα να επαληθευτεί η βασική ιδέα της βελτιστοποίησης τοπολογίας, όπως παρουσιάστηκε στην ενότητα 5.1, η οποία βασίζεται στην εισαγωγή των όρων  $u_i$  και  $u_{\bar{v}}$  στις εξισώσεις ροής και στην εξίσωση του μοντέλου τύρβης. Για αυτό το λόγο, επιλέγεται να επιλυθεί η ροή στο χωρίο  $D$  με  $\alpha \neq 0$  στα  $D_1$  και  $D_3$  και να συγκριθεί με τη λύση της ροής όταν μόνο το  $D_2$  αποτελούσε το χωρίο επίλυσης (σχήμα 5.5, πάνω αριστερά). Στο σχήμα 5.8 παρουσιάζεται το πεδίο της ταχύτητας για τις δύο αυτές περιπτώσεις. Η τιμή του  $F_1$  και στις δύο περιπτώσεις ισούται με 0.188. Αυτό αποδεικνύει ότι οι εξισώσεις 5.2 και 5.4, στις οποίες εισάγονται οι όροι  $u_i$  και  $u_{\bar{v}}$ , αντίστοιχα, προσομοιώνουν τη ροή ως εάν να χρησιμοποιούνταν “πραγματικά” στερεά τοιχώματα μεταξύ της περιοχής της ροής ( $\alpha \leq \varepsilon$ ) και της περιοχής του στερεού σώματος ( $\alpha > \varepsilon$ ). Αυτή η διαπίστωση είναι σημαντική γιατί, με αυτό τον τρόπο, επιβεβαιώνονται οι επιπλέον όροι που εισήχθησαν στο πρωτεύον πρόβλημα και εξαρτώνται από το  $\alpha$ . Επίσης είναι ιδιαίτερα σημαντική για τις εφαρμογές τυρβώδους ροής όπου η ροή μοντελοποιείται χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο τύρβης χαμηλών αριθμών Reynolds, στο οποίο η ποιότητα του πλέγματος κοντά στο στερεό όριο παίζει σημαντικό

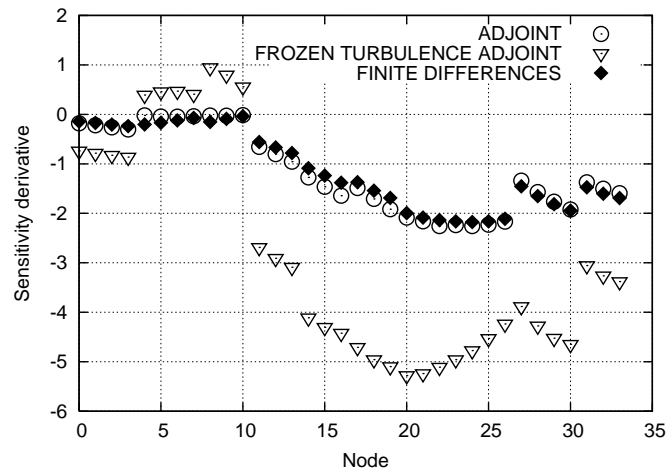
ρόλο. Για αυτό το λόγο πραγματοποιείται προσαρμογή πλέγματος γύρω από το στερεό όριο  $S_\alpha$  σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης.

- (β') Σε αυτήν την περίπτωση, το αρχικό πεδίο του πορώδους ισούται με  $\alpha \neq 0$  στο  $D_1$  και  $\alpha = 0$  στο υπόλοιπο χωρίο. Αυτή η αρχικοποίηση δίνει τη δυνατότητα στο "αναισθητο" σε μεταβολές άνω στερεό σώμα να διαμορφώσει ελεύθερα το σχήμα του καθώς επηρεάζεται από τη ροή που εισέρχεται στο χωρίο. Όπως φαίνεται και από το σχήμα 5.9 (μέση), η ροή αναπόφευκτα διείσδυσε στο χωρίο  $D_3$  καθορίζοντας το άνω στερεό όριο και διαμόρφωσε, στη συνέχεια, αναλόγως το κάτω όριο. Έτσι, κατέληξε στο τελικό σχήμα του αγωγού με  $F_1 = 0.150$ , καλύτερη από αυτήν της περίπτωσης (α).
- (γ') Στην τελευταία περίπτωση, το πεδίο του πορώδους μηδενίζεται σε όλο το χωρίο  $D$ . Από τον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης, λόγω της έλλειψης του στερεού σώματος στο χωρίο  $D_1$  (περίπτωση (β)), η εισερχόμενη ροή διαμορφώνει διαφορετικά το άνω όριο του αγωγού και, στη συνέχεια, το κάτω όριο ακολουθεί ανάλογα με τη διαμόρφωση του άνω. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα το βέλτιστο σχήμα του αγωγού στο σχήμα 5.9 (κάτω δεξιά με  $F = 0.146$ ), το οποίο οδήγησε σε ακόμη χαμηλότερη τιμή του  $F_1$ .

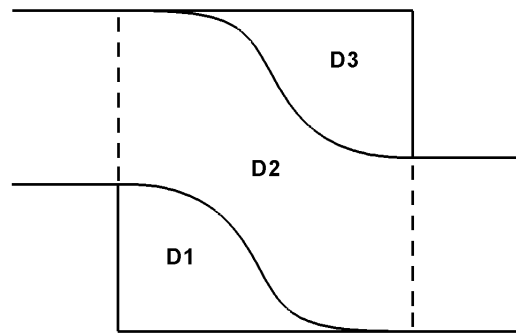
Από τη μελέτη αυτή προκύπτει ότι η μεταβολή των ορίων του πεδίου μελέτης καθώς και διαφοροποιήσεις της αρχικοποίησης του πεδίου του πορώδους μπορούν να οδηγήσουν σε διαφορετικά τοπικά ελάχιστα. Αυτό δε θα μπορούσε, εκ προοιμίου, να αποκλειστεί, δεδομένου ότι μια μέθοδος απότομης καθόδου μπορεί να εγκλωβιστεί σε τοπικά ακρότατα.



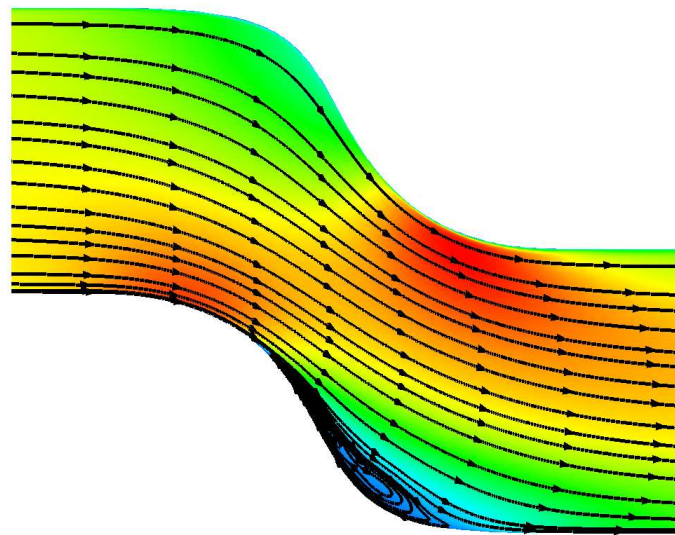
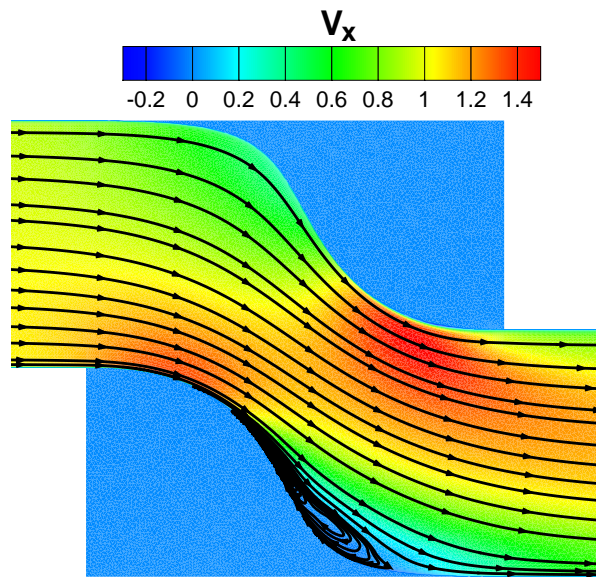
**Σχήμα 5.5:** Επανασχεδιασμός βέλτιστου αγωγού τύπου  $S$  με στόχο την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης. Πάνω αριστερά-αρχικός αγωγός: πεδίο αξονικής ταχύτητας και γραμμές ροής. Πάνω δεξιά-βέλτιστη λύση: υπολογισθέν (συνεχές) πεδίο του πορώδους  $a$ . Το χωρίο με σκούρο χρώμα αντιστοιχεί σε περιοχές προς στερεοποίηση. Κάτω αριστερά-βέλτιστη λύση: πεδίο αξονικής ταχύτητας και γραμμές ροής. Κάτω δεξιά-τελικός αγωγός: πεδίο αξονικής ταχύτητας και γραμμές ροής στον αγωγό που προκύπτει μετά τον προσδιορισμό και την τεχνητή εξομάλυνση του κάτω στερεού ορίου και την επίλυση της ροής. Η μείωση της περιοχής ανακυκλοφορίας είναι εμφανής.



**Σχήμα 5.6:** Επανασχεδιασμός βέλτιστου αγωγού τύπου  $S$ . Παράγωγοι ευαισθησίας υπολογισμένες χρησιμοποιώντας την προτεινόμενη μέθοδο, την παραδοχή της “παγωμένης” τυρβώδους συνεκτικότητας και τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών (παράγωγοι αναφοράς) σε 35 αυθαίρετα επιλεγμένους κόμβους.

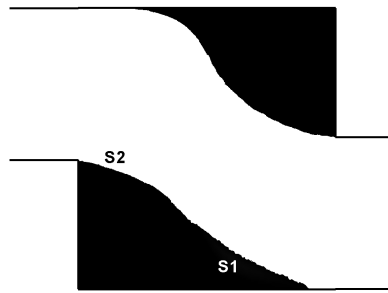
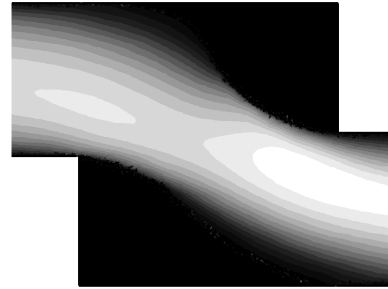
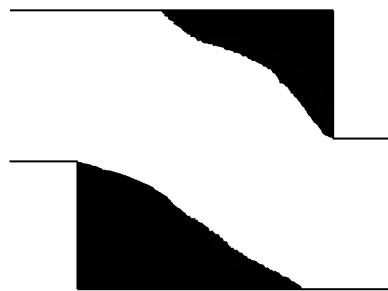
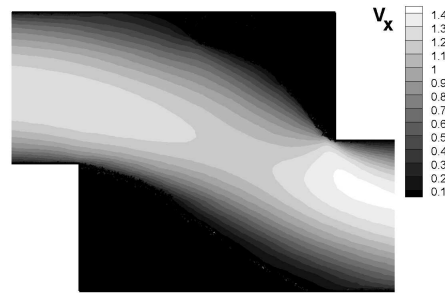
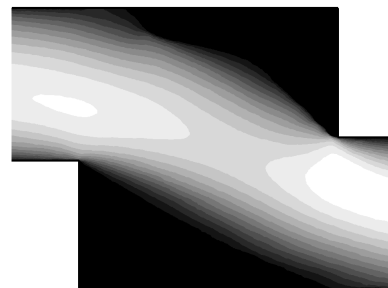


**Σχήμα 5.7:** Επανασχεδιασμός βέλτιστου αγωγού τύπου  $S$ . Το χωρίο  $D_2$  συμπίπτει με τον αρχικό αγωγό του σχήματος 5.5. Τα χωρία  $D_1$  και  $D_3$  περιβάλλουν το  $D_2$  σχηματίζοντας το “ολικό” χωρίο  $D$  που αποτελεί το χωρίο μελέτης στις τρεις περιπτώσεις που παρουσιάζονται.

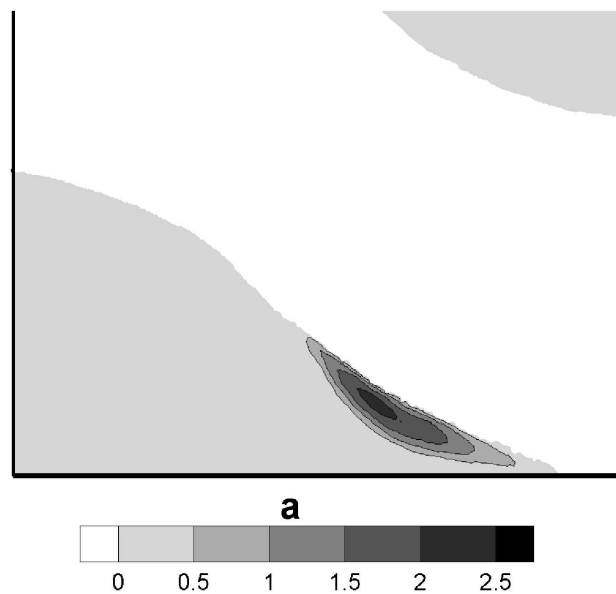


**Σχήμα 5.8:** Επανασχεδιασμός βέλτιστου αγωγού τύπου  $S$ . Το πεδίο ταχύτητας στο χωρίο  $D$  με  $\alpha \neq 0$  στα  $D_1$  και  $D_3$  (πάνω) και το πεδίο ταχύτητας στο χωρίο  $D_2$  (κάτω). Η τιμή του  $F_1$  και στις δύο περιπτώσεις ισούται με 0.188.

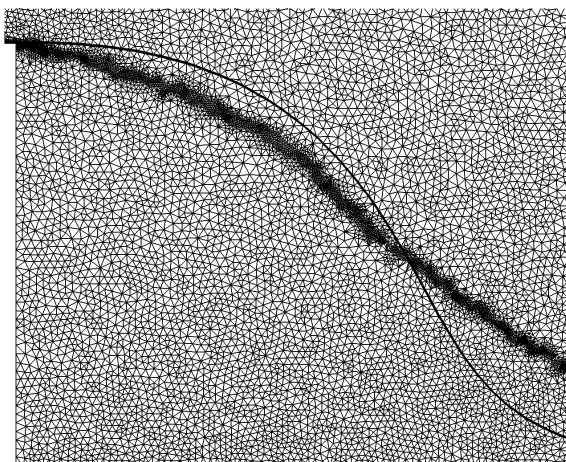


 $(\alpha') F = 0.156$  $(\beta') F = 0.156$  $(\gamma') F = 0.150$  $(\delta') F = 0.150$  $(\epsilon') F = 0.146$  $(\varphi') F = 0.146$ 

**Σχήμα 5.9:** Επανασχεδιασμός βέλτιστου αγωγού τύπου  $S$ . Βέλτιστα πεδία του πορώδους (αριστερά) και της ταχύτητας (δεξιά) τα οποία υπολογίσθηκαν για τις τρεις περιπτώσεις που μελετώνται. Το τμήμα του χωρίου με μαύρο χρώμα αντιστοιχεί στις περιοχές που στερεοποιούνται για να σχηματίσουν το βέλτιστο αγωγό.



**Σχήμα 5.10:** Επανασχεδιασμός βέλτιστου αγωγού τύπου  $S$ . Λεπτομέρεια του βέλτιστου πεδίου του υπολογισθέντος πεδίου του πορώδους του σχήματος 5.9 για την περίπτωση  $(\alpha)$  στην περιοχή  $S_1$ . Η τιμή του πορώδους κατά την αρχικοποίηση του πεδίου στα  $D_1$  και  $D_3$  είναι  $\alpha = 0.5$ . Οι περιοχές με μεγαλύτερες τιμές του  $\alpha$  αντιστοιχούν στην περιοχή της ανακυκλοφορίας, η οποία στερεοποιείται στο τέλος της βελτιστοποίησης. Οι περιοχές με άσπρο αντιστοιχούν σε μηδενικές τιμές του πορώδους, δηλαδή σε περιοχές ρέοντος ρευστού.



**Σχήμα 5.11:** Επανασχεδιασμός βέλτιστου αγωγού τύπου  $S$ . Λεπτομέρεια του πλέγματος στην περιοχή του κάτω στερεού ορίου, όπου φαίνεται η πύκνωση του πλέγματος γύρω από το νέο στερεό όριο του βέλτιστου αγωγού του σχήματος 5.9 στην πρώτη περίπτωση (α). Η πύκνωση αυτή οφείλεται στην προσαρμογή του πλέγματος που πραγματοποιείται σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης. Στο σχήμα φαίνεται, επίσης, το όριο του αρχικού αγωγού, δηλαδή η διεπιφάνεια μεταξύ των χωρίων  $D_1$  και  $D_2$ .

### 5.9.2 Σχεδιασμός δικτύου αγωγών με μεταφορά θερμότητας

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, ενότητα 5.1, η παρούσα διατριβή προτείνει την προσθήκη νέων όρων στην εξίσωση της ενέργειας ( $\alpha(T - T_{wall})$ ) και στην εξίσωση του μοντέλου τύρβης Spalart-Allmaras ( $\alpha\tilde{\nu}$ ) με στόχο την επέκταση της βελτιστοποίησης τοπολογίας σε προβλήματα τυρβωδών ροών με μεταφορά θερμότητας. Στην προηγούμενη εφαρμογή επαληθεύτηκε η προσθήκη του όρου  $\alpha\tilde{\nu}$  στην εξίσωση του μοντέλου τύρβης, σχήμα 5.8, στην οποία στηρίχτηκε η βελτιστοποίηση τοπολογίας για τυρβώδεις ροές. Για την επαλήθευση της προσθήκης αυτού του όρου επιλέχθηκε να επιλυθεί η ροή στο χωρίο  $D$  με  $\alpha \neq 0$  στα  $D_1$  και  $D_3$ , ως εάν να χρησιμοποιούνταν “πραγματικά” στερεά τοιχώματα μεταξύ της περιοχής της ροής και της περιοχής του στερεού σώματος, και στη συνέχεια να συγκριθεί με τη λύση της ροής όταν μόνο το  $D_2$  αποτελούσε το χωρίο επίλυσης (σχήμα 5.5, πάνω αριστερά).

Πριν την παρουσίαση των εφαρμογών που αφορούν στο σχεδιασμό δικτύων αγωγών για ροές με μεταφορά θερμότητας, απαραίτητος είναι ο έλεγχος ότι η εισαγωγή του όρου  $\alpha(T - T_{wall})$  στην εξίσωση ενέργειας κατά τη βελτιστοποίηση τοπολογίας προσομοιώνει σωστά τη μεταφορά θερμότητας ανάμεσα στην περιοχή ροής ( $\alpha=0$ ) και την περιοχή στερεού σώματος ( $\alpha \neq 0$ ).

Για την επαλήθευση της προσθήκης αυτού του όρου στην εξίσωση ενέργειας, επιλέγεται να επιλυθεί η ροή σε έναν αγωγό που προκαλεί στροφή της ροής κατά  $90^\circ$  με  $Re=1000$  και  $T_{wall} = 353K$ , ο οποίος αντιστοιχεί στον αγωγό  $D_2$  του σχήματος 5.12. Συγχρόνως, ο αγωγός  $D_2$  περιβάλλεται από τα χωρία  $D_1$  και  $D_3$  σχηματίζοντας το “ολικό” χωρίο  $D$ . Στο χωρίο αυτό επιλύεται η ροή για τις ίδιες συνθήκες, με  $\alpha \neq 0$  στα  $D_1$  και  $D_3$ , και συγκρίνεται με τη λύση της ροής όταν μόνο το  $D_2$  αποτελούσε το χωρίο επίλυσης. Τονίζεται ότι, εδώ, γίνεται αναφορά σε επιλύσεις μόνο του ευθέως προβλήματος. Στο σχήμα 5.13 παρουσιάζονται τα πεδία της θερμοκρασίας για τις δύο αυτές περιπτώσεις. Η τιμή της συνάρτησης-στόχου  $F_2$  που αντιστοιχεί στην αύξηση της μεταφοράς θερμότητας ισούται με  $F_2 = 11$  και στις δύο περιπτώσεις. Αυτό αποδεικνύει ότι η εξίσωση της ενέργειας 5.3, στην οποία εισάγεται ο όρος  $\alpha(T - T_{wall})$ , προσομοιώνει σωστά τη μεταφορά θερμότητας από τα στερεά τοιχώματα στο ρευστό ως εάν να χρησιμοποιούνταν “πραγματικά” στερεά τοιχώματα μεταξύ της περιοχής της ροής και της περιοχής του στερεού σώματος.

### Σχεδιασμός δικτύου αγωγών-Στρωτή ροή με μεταφορά θερμότητας

Η πρώτη εφαρμογή αφορά στο σχεδιασμό της βέλτιστης διαδρομής της ροής δημιουργώντας ένα δίκτυο αγωγών στο χωρίο του σχήματος 5.14. Η ροή εισέρχεται στο χωρίο με σταθερή θερμοκρασία  $T_{I_1} = T_{I_2} = 289K$  από δύο εισόδους ( $S_{I_1}$  και  $S_{I_2}$ ). Η ροή έχει αριθμό Reynolds  $Re=1000$  βασισμένο στο πλάτος μιας από τις ίσες σε διάσταση εισόδους και εξόδους και εξέρχεται από δύο εξόδους  $S_{O_{i=1,2}}$ . Η εν δυνάμει θερμοκρασία  $T_{wall}$  στον υπό διαμόρφωση τοίχο, δηλαδή στη λύση του προβλήματος τοπολογίας, μπορεί να μεταβάλλεται εξαρτώμενη από τις συντεταγμένες  $(x, y)$  του κάθε κόμβου του χωρίου και δίνεται από τη σχέση  $T_{wall}(x, y) = 313 + x^2 - 12\cos(3\pi x) + y^2 - 12\cos(3\pi y)$ ,

σχήμα 5.14. Διευκρινίζεται ότι, η κατανομή  $T_{wall}$  αποτελεί την εν δυνάμει θερμοκρασία την οποία αποκτούν οι κόμβοι στη διεπιφάνεια μεταξύ ρευστού ( $\alpha = 0$ ) και του προς στερεοποίηση χωρίου ( $\alpha \neq 0$ ), όπως περιγράφηκε στην ενότητα 5.1. Στις περιοχές της ροής ( $\alpha = 0$ ) που σχηματίζονται από τη βελτιστοποίηση, η παραπάνω κατανομή της θερμοκρασίας δεν υπεισέρχεται από τη στιγμή που ο όρος  $\alpha(T - T_{wall})$  εξαφανίζεται. Σε αυτές τις περιοχές η θερμοκρασία του ρευστού καθορίζεται από την επίλυση της εξίσωσης της ενέργειας χωρίς να λαμβάνεται υπόψη το πεδίο  $T_{wall}$  του σχήματος 5.14. Επομένως, πρακτικά, η κατανομή  $T_{wall}(x, y)$  έχει ενδιαφέρον μόνο στους κόμβους του περιγράμματος  $S_\alpha$  που θα προκύψει.

Στην εφαρμογή αυτή πραγματοποιούνται δύο βελτιστοποιήσεις με τους εξής στόχους:

- (α') Ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης
- (β') Ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης και μεγιστοποίηση της θερμοκρασίας εξόδου του ρευστού

Στο σχήμα 5.15(α') παρουσιάζεται η βέλτιστη διαδρομή που ακολουθεί το πεδίο ροής, όπως υπολογίσθηκε μετά από 12 κύκλους βελτιστοποίησης, όταν η ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης αποτελεί το μοναδικό στόχο της βελτιστοποίησης. Σε αυτήν την περίπτωση, το πεδίο της ροής αγνοεί τελείως την κατανομή της θερμοκρασίας  $T_{wall}$  επιλέγοντας τη μικρότερη διαδρομή που, ουσιαστικά, ελαχιστοποιεί τα στερεά τοιχώματα και, κατά συνέπεια, τις απώλειες ολικής πίεσης. Τα τμήματα του χωρίου με μαύρο χρώμα αντιστοιχούν σε μη-μηδενικές τιμές του πορώδους και αντιπροσωπεύουν τα τμήματα που πρέπει να στερεοποιηθούν. Εισάγοντας ως δεύτερο στόχο τη μεγιστοποίηση της θερμοκρασίας εξόδου ( $F = \omega_1 F_1 + \omega_2 F_2$ ) με  $\omega_1 = 1.0$  και  $\omega_2 = 0.005$ , η βέλτιστη διαδρομή της ροής παρουσιάζεται στο σχήμα 5.15(β') αυξάνοντας τη θερμοκρασία στην έξοδο κατά  $15K$ . Η λύση του σχήματος 5.15(α') αντιστοιχεί σε  $F_1 = 0.16$  και  $F_2 = 6.8$  ( $\Delta T = 3K$ ), ενώ του σχήματος 5.15(β') σε  $F_1 = 0.47$  και  $F_2 = 12.7$  ( $\Delta T = 15K$ ). Στη δεύτερη περίπτωση, παρατηρώντας το βέλτιστο σχήμα του αγωγού σε σχέση με το πεδίο της θερμοκρασίας  $T_{wall}$ , σχήμα 5.15(γ'), συνάγεται ότι τα στερεά τοιχώματα του αγωγού σχηματίζονται ορθώς γύρω από τις περιοχές με τις υψηλότερες θερμοκρασίες έτσι ώστε να αυξηθεί η θερμοκρασία του ρευστού που είναι σε επαφή με τα θερμότερα, κατά το δυνατόν, τοιχώματα. Παράλληλα, η πλειοψηφία των ψυχρών περιοχών παύει να υφίσταται καθώς το ρευστό επιλέγει να περάσει πάνω από αυτές τις περιοχές και να τις "ακυρώσει". Ο μηχανισμός ελαχιστοποίησης των ψυχρών περιοχών μπορεί να γίνει αντιληπτός παρατηρώντας την εξίσωση 5.3, όπου επιτυγχάνεται η εξάλειψη της επίδρασης του  $T_{wall}$  μηδενίζοντας το πορώδες  $\alpha$ , δηλαδή δημιουργώντας ροή σε αυτές τις περιοχές.

Και στις δύο αυτές περιπτώσεις, η μέση θερμοκρασία εξόδου του ρευστού είναι η ίδια και στις δύο εξόδους ως αποτέλεσμα της συμμετρικότητας των αγωγών που σχηματίζονται. Στην περίπτωση που επιθυμούμε τον καθορισμό διαφορετικής μέσης θερμοκρασίας σε κάθε έξοδο, είναι απαραίτητη η επιβολή του περιορισμού  $c_2$ . Συγκεκριμένα, επιβάλλονται επιθυμητές μέσες θερμοκρασίες  $\bar{T}_{O_{i=1}} = \bar{T}_O + 3.5$  και  $\bar{T}_{O_{i=2}} = \bar{T}_O - 3.5$  σε κάθε έξοδο αντίστοιχα, δηλαδή είναι επιθυμητό οι δύο εξοδοί να έχουν διαφορά θερμοκρασίας  $7K$ . Για αυτό το λόγο, ο περιορισμός που επιβάλλεται δίνεται από μια παραλλαγή του περιορισμού  $c_2$  (σχέση 5.10) ως

$$c'_2 = \frac{\int_{S_{O_{l=1}}} v_i n_i (T - \bar{T}_{O_{l=1}})^2 dS}{\int_{S_I} v_i n_i dS} + \frac{\int_{S_{O_{l=2}}} v_i n_i (T - \bar{T}_{O_{l=2}})^2 dS}{\int_{S_I} v_i n_i dS} = 0 \quad (5.34)$$

Το βέλτιστο σχήμα του αγωγού που υπολογίστηκε φαίνεται στο σχήμα 5.15(γ') με θερμοκρασίες  $\bar{T}_{O_{l=1}} = 319K$  και  $\bar{T}_{O_{l=2}} = 312K$  σε κάθε έξοδο, αντίστοιχα, ικανοποιώντας τον περιορισμό. Για να διατηρηθεί θερμοκρασιακή διαφορά  $7K$  μεταξύ των δύο εξόδων, αναπτύσσονται αναγκαστικά διαφορετικές διαδρομές ροής στα δύο συμμετρικά τμήματα του χωρίου.

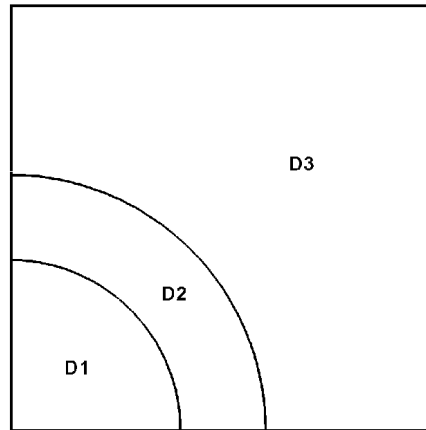
### Σχεδιασμός δικτύου αγωγών-Τυρβώδης ροή με μεταφορά θερμότητας

Η εφαρμογή αυτή αφορά στο σχεδιασμό ενός δικτύου αγωγών με μία είσοδο και τέσσερις εξόδους σε ένα τετραγωνικό χωρίο μελέτης. Το πρόβλημα δεν είναι συμμετρικό, δηλαδή οι τέσσερις εξοδοί του δεν είναι συμμετρικά τοποθετημένες. Η ροή είναι τυρβώδης, με  $Re = 10000$  βασισμένο στο πλάτος μιας από τις, ίσες σε διάσταση, εισόδους και εξόδους. Το ρευστό εισέρχεται στο χωρίο με θερμοκρασία  $T_I = 289K$ . Η εν δυνάμει θερμοκρασία  $T_{wall}$  στον υπό διαμόρφωση τοίχο περιγράφεται όπως και στην προηγούμενη εφαρμογή από τη σχέση  $T_{wall}(x, y) = 313 + x^2 - 12\cos(3\pi x) + y^2 - 12\cos(3\pi y)$ . Η είσοδος και οι εξοδοί του χωρίου καθώς και η κατανομή της θερμοκρασίας  $T_{wall}$  φαίνονται στο σχήμα 5.16.

Στο σχήμα 5.17 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα τεσσάρων βελτιστοποιήσεων, τα οποία προέκυψαν μετά από 15 κύκλους βελτιστοποίησης και αφορούν στο σχεδιασμό δικτύων αγωγών με διαφορετικούς στόχους και περιορισμούς σε κάθε περίπτωση:

- (α') Στόχος: Ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης- Περιορισμός: κανένας.
- (β') Στόχος: Ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης- Περιορισμός: ίση παροχή όγκου σε κάθε έξοδο του χωρίου.
- (γ') Στόχοι: Ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης και μεγιστοποίηση της μέσης θερμοκρασίας εξόδου του ρευστού- Περιορισμός: ίση παροχή όγκου σε κάθε έξοδο του χωρίου.
- (δ') Στόχοι: Ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης και μεγιστοποίηση της μέσης θερμοκρασίας εξόδου του ρευστού- Περιορισμός: ίσες μέσες θερμοκρασίες σε κάθε έξοδο του χωρίου.

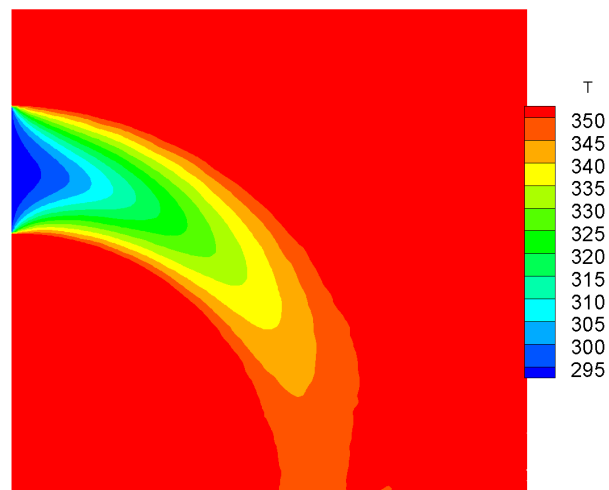
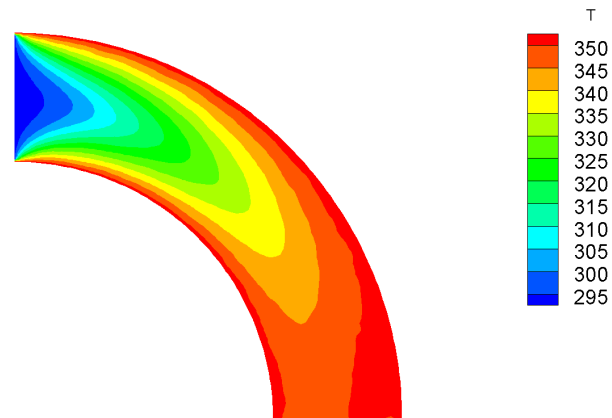
Στο σχήμα 5.17(α') παρουσιάζεται η βέλτιστη λύση όταν στόχος ήταν η ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης. Η μη-επιβολή περιορισμού στο ποσοστό της παροχής της εισόδου που εξέρχεται από κάθε έξοδο δημιουργεί αγωγό ο οποίος οδηγεί το σύνολο της παροχής της εισόδου στη δεύτερη έξοδο  $S_{O_{l=2}}$ , αγνοώντας τις υπόλοιπες εξόδους. Είναι εμφανές ότι αυτό γίνεται ώστε να ελαχιστοποιηθεί το μήκος του αγωγού και, κατ' επέκταση, οι απώλειες συνεκτικότητας της ροής. Για αυτό το λόγο, έχοντας



**Σχήμα 5.12:** Το χωρίο  $D_2$  συμπίπτει με τον αγωγό που προκαλεί στροφή της ροής κατά  $90^\circ$ . Τα χωρία  $D_1$  και  $D_3$  περιβάλλουν το  $D_2$  σχηματίζοντας το “ολικό” χωρίο  $D$ .

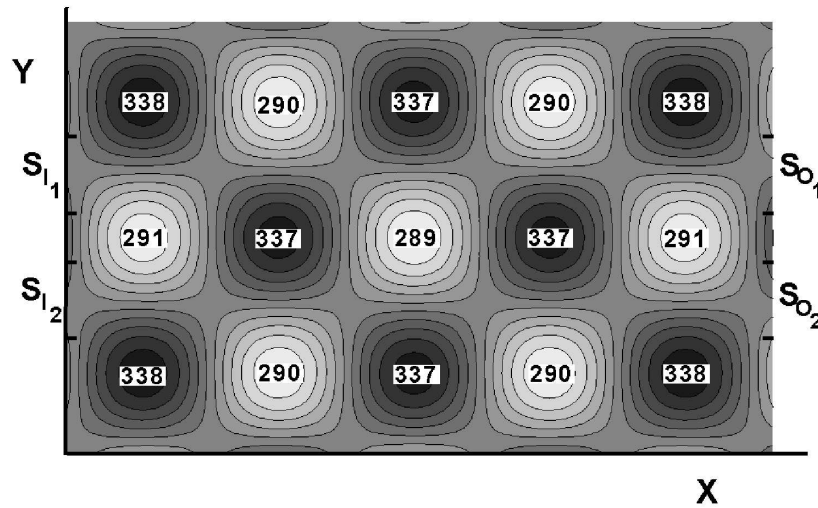
ως στόχο την ισοκατανομή σε κάθε έξοδο, επιβάλλεται ο περιορισμός  $c_1$  (σχέση 5.9) με  $r_l = 0.25, l = 1 \dots 4$ . Η βέλτιστη διαδρομή του ρευστού για τις περιπτώσεις (β) και (γ) φαίνεται στα σχήματα 5.17(β') και 5.17(γ'), αντίστοιχα. Στο σχήμα 5.17(γ'), όπου η βελτιστοποίηση αφορά συνδυαστικά και στους δύο στόχους με  $\omega_1 = 1.0$  και  $\omega_2 = 0.01$ , παρατηρείται ότι το ρευστό κινείται προς τις θερμές περιοχές σχηματίζοντας τοιχώματα υψηλής θερμοκρασίας και αυξάνοντας, με αυτόν τον τρόπο, το  $\Delta T$  κατά 16% σε σχέση με την περίπτωση (β). Αυτό γίνεται πιο ευδιάκριτο στο σχήμα 5.18 όπου παρουσιάζονται οι γραμμές ροής της βέλτιστης λύσης του σχήματος 5.17(γ') σχεδιασμένες πάνω στο πεδίο της θερμοκρασίας  $T_{wall}$ . Σε αυτήν την περίπτωση, όπου πραγματοποιείται επίσης προσαρμογή του πλέγματος σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, επιλέγεται και παρουσιάζεται στο σχήμα 5.19 λεπτομέρεια του πλέγματος στην περιοχή της εισόδου του χωρίου, όπου φαίνεται η πύκνωση του πλέγματος στα στερεοποιημένα τοιχώματα της βέλτιστης τοπολογίας.

Στις περιπτώσεις (α), (β) και (γ) οι μέσες θερμοκρασίες σε κάθε έξοδο δεν ταυτίζονται. Για αυτό το λόγο, πραγματοποιείται βελτιστοποίηση υπό τον περιορισμό της ίδιας θερμοκρασίας ρευστού σε κάθε έξοδο, περιορισμός  $c_2$ . Στο σχήμα 5.17(δ') παρουσιάζεται η βέλτιστη τοπολογία με  $\bar{T}_O = 317K$  σε κάθε έξοδο, η οποία επιτυγχάνεται με τη δημιουργία διακλαδώσεων με διαφορετικά ποσοστά παροχής σε καθεμιά.

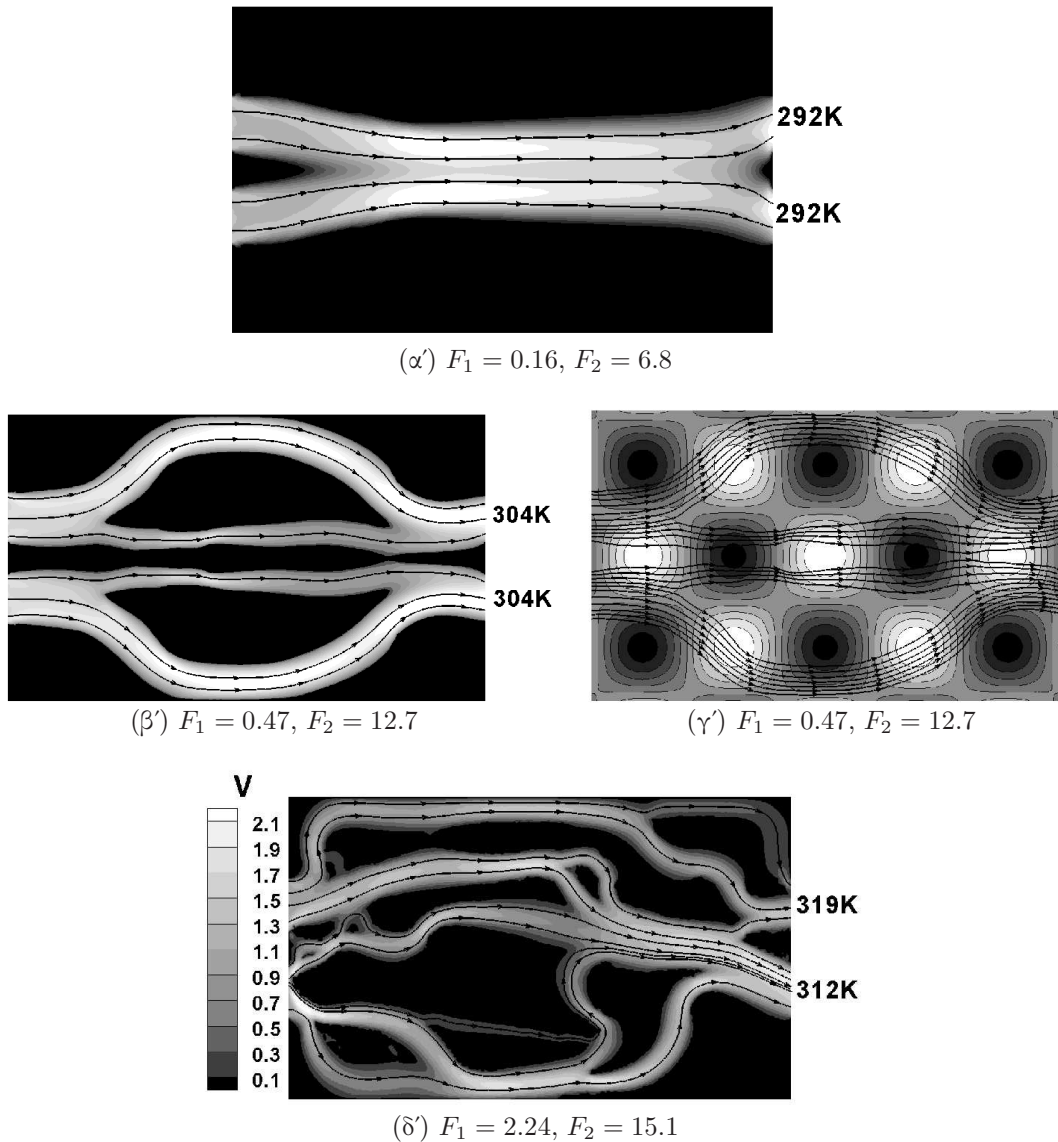


**Σχήμα 5.13:** Το πεδίο θερμοκρασίας στο χωρίο  $D_2$  που αντιστοιχεί στον αγωγό με στροφή  $90^\circ$  (πάνω) και το πεδίο θερμοκρασίας σε μια λεπτομέρεια του χωρίου  $D$  με  $\alpha \neq 0$  στα  $D_1$  και  $D_3$  (κάτω). Οι τιμές του  $F_1$  και  $F_2$  και στις δύο περιπτώσεις ισούνται με 0.27 και 11 αντίστοιχα.

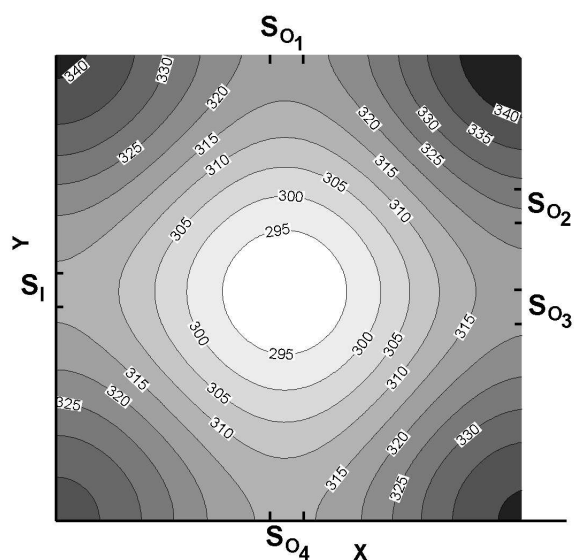




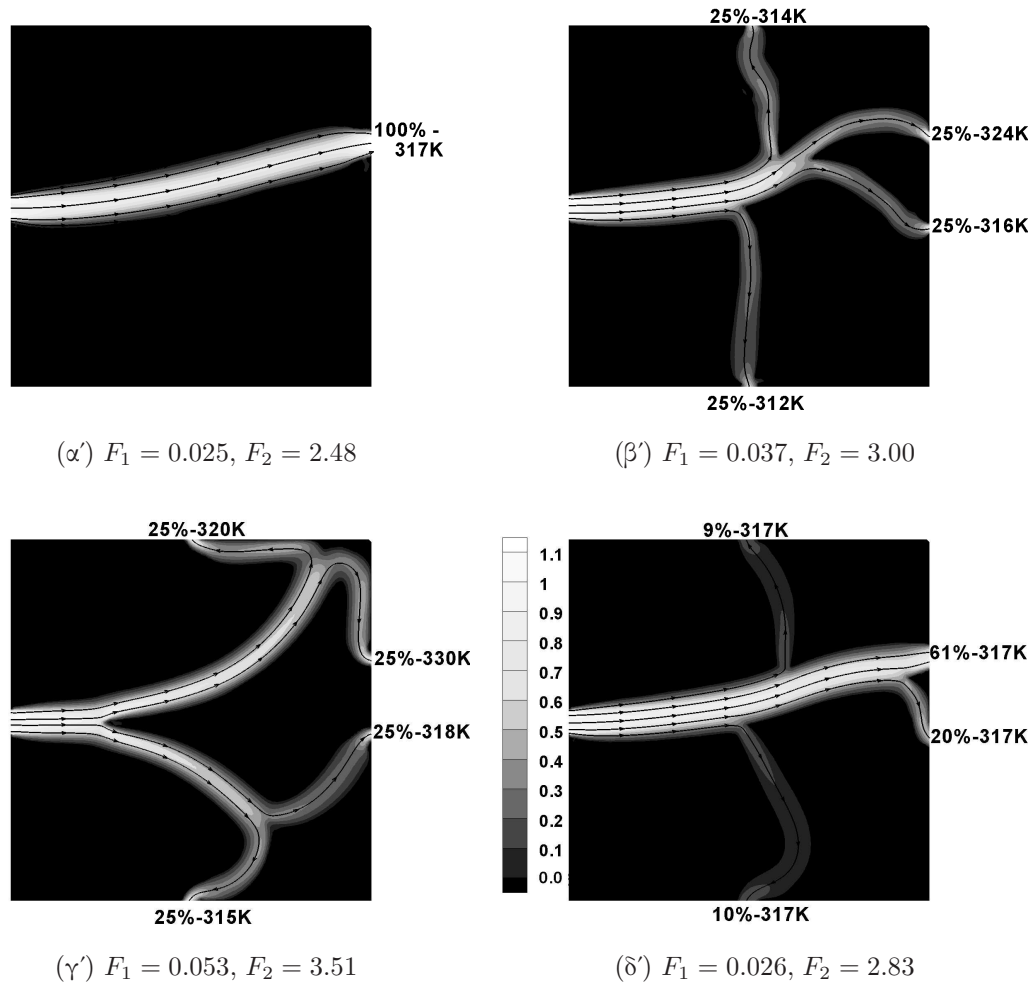
**Σχήμα 5.14:** Σχεδιασμός δικτύου αγωγών-Στρωτή ροή με μεταφορά θερμότητας. Εν δυνάμει κατανομή της θερμοκρασίας στον τοίχο  $T_{wall}$ ,  $T_{wall}(x, y) = 313 + x^2 - 12\cos(3\pi x) + y^2 - 12\cos(3\pi y)$ , την οποία αποκτά κάθε κόμβος του περιγράμματος  $S_\alpha$ . Με  $S_{I_l}$  και  $S_{O_l}$ ,  $l = 1, 2$  συμβολίζονται τα όρια εισόδου και εξόδου του χωρίου μελέτης.



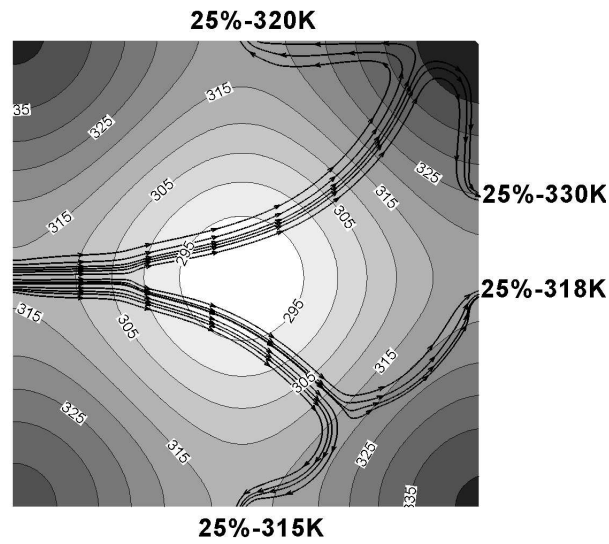
**Σχήμα 5.15:** Σχεδιασμός δικτύου αγωγών-Στρωτή ροή με μεταφορά θερμότητας. Σχεδιασμός βέλτιστου δικτύου αγωγών σε χωρίο 2 εισόδων/2 εξόδων με στόχους: (α) την ελαχιστοποίηση των  $\Delta p_t$ , (β, γ) την ελαχιστοποίηση των  $\Delta p_t$  και μεγιστοποίηση του  $\Delta T$  και (δ) την ελαχιστοποίηση των  $\Delta p_t$  και μεγιστοποίηση του  $\Delta T$  με την προσθήκη του περιορισμού  $c_2'$  ως προς τη μέση θερμοκρασία της κάθε εξόδου. Παρουσιάζονται τα βέλτιστα πεδία ταχύτητας, οι γραμμές ροής και οι μέσες θερμοκρασίες σε κάθε έξοδο και για τις τρεις περιπτώσεις.



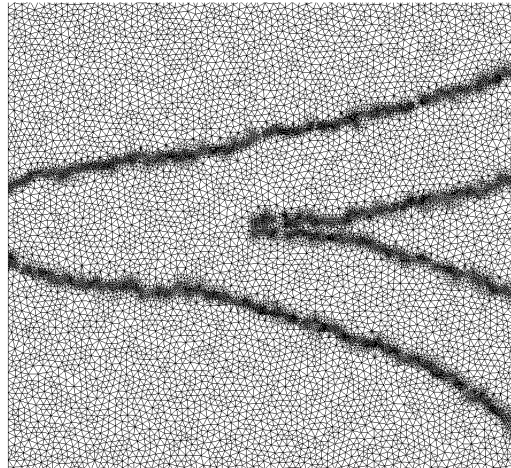
**Σχήμα 5.16:** Σχεδιασμός δικτύου αγωγών-Τυρβώδης ροή με μεταφορά θερμότητας. Εν δυνάμει κατανομή της θερμοκρασίας στον τοίχο  $T_{wall}$ ,  $T_{wall}(x, y) = 313 + x^2 - 12\cos(3\pi x) + y^2 - 12\cos(3\pi y)$ , την οποία αποκτά κάθε κόμβος του περιγράμματος  $S_\alpha$ . Με  $S_I$  και  $S_{O_l}$ ,  $l = 1 \dots 4$  συμβολίζονται τα όρια εισόδου και εξόδου του χωρίου μελέτης.



**Σχήμα 5.17:** Σχεδιασμός δικτύου αγωγών-Τυρβώδης ροή με μεταφορά θερμότητας. Σχεδιασμός βέλτιστου αγωγού μίας εισόδου/4 εξόδων με στόχους: (α) την ελαχιστοποίηση των  $\Delta p_t$  χωρίς την επιβολή περιορισμών, (β) την ελαχιστοποίηση των  $\Delta p_t$  με ίση παροχή σε κάθε έξοδο, (γ) την ελαχιστοποίηση των  $\Delta p_t$  και μεγιστοποίηση του  $\Delta T$  με ίση παροχή σε κάθε έξοδο και (δ) την ελαχιστοποίηση των  $\Delta p_t$  και μεγιστοποίηση του  $\Delta T$  με ίδια θερμοκρασία σε κάθε έξοδο. Απεικονίζονται τα βέλτιστα πεδία ταχύτητας και οι γραμμές ροής σε κάθε έξοδο και για τις τέσσερις περιπτώσεις.



**Σχήμα 5.18:** Σχεδιασμός δικτύου αγωγών-Τυρβώδης ροή με μεταφορά θερμότητας. Οι γραμμές ροής της βέλτιστης λύσης του σχήματος 5.17(γ') σχεδιασμένες πάνω στο πεδίο της θερμοκρασίας  $T_{wall}$ .



**Σχήμα 5.19:** Σχεδιασμός δικτύου αγωγών-Τυρβώδης ροή με μεταφορά θερμότητας. Λεπτομέρεια του πλέγματος στην περιοχή της εισόδου του χωρίου μετά την προσαρμογή του πλέγματος γύρω από το στερεό όριο του βέλτιστου αγωγού του σχήματος 5.17(γ').



## Κεφάλαιο 6

# Ασύγχρονοι Μιμητικοί Αλγόριθμοι

Στα προηγούμενα κεφάλαια τόσο για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης μορφής όσο και για αυτά της βελτιστοποίησης τοπολογίας χρησιμοποιήθηκαν αιτιοκρατικές μέθοδοι βασισμένες στη συζυγή τεχνική για τον υπολογισμό της κλίσης της συνάρτησης-στόχου. Στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάζεται η σύζευξη των αιτιοκρατικών μεθόδων που αναπτύχθηκαν προηγουμένως με στοχαστικές μεθόδους βελτιστοποίησης, και συγκεκριμένα με τον ασύγχρονο εξελικτικό αλγόριθμο (AEA) της ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ, ώστε να εκμεταλλευτούμε τα πλεονεκτήματα και των δύο μεθόδων.

Ο ασύγχρονος αυτός εξελικτικός αλγόριθμος (AEA), ο οποίος αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της διδακτορικής διατριβής της Β. Ασούτη, [148], υπερτερεί των “σύγχρονων” εξελικτικών αλγορίθμων και παρουσιάζει ιδιαίτερα πλεονεκτήματα λόγω της κατάργησης της έννοιας της γενιάς, μεγιστοποιώντας με αυτό τον τρόπο την εκμετάλλευση των διαθέσιμων επεξεργαστών. Ο υβριδισμός αυτού του αλγορίθμου με την αιτιοκρατική μέθοδο οδήγησε στην ανάπτυξη ενός ασύγχρονου μιμητικού αλγορίθμου (AMA) ο οποίος υπερτερεί σε απόδοση του AEA και παρουσιάζεται στην παρούσα διατριβή για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία. Όσον αφορά ειδικά στην πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση, στην παρούσα διατριβή προτείνεται μία νέα χαμηλού κόστους τεχνική για τον υπολογισμό των κλίσεων των συναρτήσεων-στόχων στο μιμητικό αλγόριθμο ώστε να επιλύονται οι συζυγείς εξισώσεις μία φορά και όχι τόσες φορές όσες και οι στόχοι. Ο χειρισμός αυτός αποτελεί ένα ακόμη στοιχείο πρωτοτυπίας της διατριβής.

Στην ενότητα των εφαρμογών του κεφαλαίου αυτού, πιστοποιείται η απόδοση του προτεινόμενου AMA στο σχεδιασμό-βελτιστοποίηση συνιστώσεων συστημάτων, όπως εναλλακτών θερμότητας και 2Δ πτερυγώσεων στροβιλομηχανών. Επιπλέον στο κεφάλαιο 7, παρουσιάζεται η χρήση του ασύγχρονου εξελικτικού αλγορίθμου για την επίλυση προβλημάτων σχεδιασμού βέλτιστων συστημάτων μεταφοράς θερμότητας, όπως κύκλων παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας με χρήση γεωθερμίας και γεωθερμικών αντλιών θερμότητας.

Πίνακας 6.1: Συντομογραφίες χρησιμοποιούμενων και προτεινόμενων αλγορίθμων.

Συντομογραφία	Ονομασία	Αγγλική ορολογία
EA	Εξελικτικοί Αλγόριθμοι	Evolutionary Algorithms
MAEA	Εξελικτικοί Αλγόριθμοι υποστηριζόμενοι από μεταπρότυπα	Metamodel-Assisted Evolutionary Algorithms
MA	Μιμητικοί Αλγόριθμοι	Memetic Algorithms
MAMA	Μιμητικοί Αλγόριθμοι υποστηριζόμενοι από μεταπρότυπα	Metamodel-Assisted Memetic Algorithms
AEA	Ασύγχρονοι Εξελικτικοί Αλγόριθμοι	Asynchronous Evolutionary Algorithms
AMEA	Ασύγχρονοι Εξελικτικοί Αλγόριθμοι υποστηριζόμενοι από μεταπρότυπα	Asynchronous Metamodel-Assisted Evolutionary Algorithms
AMA	Ασύγχρονοι Μιμητικοί Αλγόριθμοι	Asynchronous Memetic Algorithms
AMAMA	Ασύγχρονοι Μιμητικοί Αλγόριθμοι υποστηριζόμενοι από μεταπρότυπα	Asynchronous Metamodel-Assisted Memetic Algorithms

## 6.1 Βιβλιογραφική επισκόπηση

Προβλήματα βελτιστοποίησης στη θερμο-ρευστοδυναμική, όπως αυτά που μελετώνται στην παρούσα διατριβή, μπορούν να επιλυθούν χρησιμοποιώντας στοχαστικές ή/και αιτιοκρατικές μεθόδους βελτιστοποίησης. Όσον αφορά στις στοχαστικές μεθόδους βελτιστοποίησης, οι εξελικτικοί αλγόριθμοι ανήκουν στην κατηγορία των πληθυσμιακών στοχαστικών μεθόδων και ασχολούνται με την ολική εξερεύνηση του πεδίου ορισμού των μεταβλητών σχεδιασμού της βελτιστοποίησης. Έχουν ως στόχο την ανίχνευση των περιοχών με πιθανά ακρότατα οδηγώντας στην εύρεση του ολικού ακρότατου, αποφεύγοντας τον εγκλωβισμό σε τοπικά ακρότατα λόγω της στοχαστικότητας με την οποία εξερευνούν το πεδίο ορισμού. Ωστόσο, για την εύρεση της βέλτιστης λύσης, απαιτείται συνήθως μεγάλος αριθμός αξιολογήσεων ο οποίος αυξάνει τον υπολογιστικό χρόνο ειδικότερα στα προβλήματα της ρευστοδυναμικής, όπου το λογισμικό αξιολόγησης αντιστοιχεί στη χρονοβόρα επίλυση των εξισώσεων της ροής. Αντιθέτως, οι αιτιοκρατικές μέθοδοι βελτιστοποίησης, οι οποίες βασίζονται στον υπολογισμό της κλίσης της συνάρτησης-στόχου και ανήκουν στις μεθόδους τοπικής ανίχνευσης, είναι κατάλληλες για την τοπική βελτίωση των υποψηφίων λύσεων. Ένας τρόπος να αντιμετωπιστεί η βασική αδυναμία των στοχαστικών μεθόδων βελτιστοποίησης, μειώνοντας το χρόνο της βελτιστοποίησης, είναι η συνέργειά τους με τις μεθόδους τοπικής ανίχνευσης, συνδυάζοντας τα πλεονεκτήματα των δύο μεθόδων. Στα υβριδικά σχήμα-



τα, οι εξελικτικοί αλγόριθμοι χρησιμοποιούνται για τον εντοπισμό των περιοχών όπου υπάρχουν ακρότατα και στη συνέχεια, οι αιτιοκρατικές μέθοδοι εκμεταλλεύονται αυτήν την πληροφορία εστιάζοντας σε αυτές τις περιοχές για το λεπτομερή εντοπισμό των ακρότατων. Οι τελευταίες βελτιώνουν περαιτέρω τις υποσχόμενες λύσεις με μεθόδους που απαιτούν τον ακριβή ή προσεγγιστικό υπολογισμό της κλίσης της συνάρτησης-στόχου.

Ο υβριδισμός των στοχαστικών και αιτιοκρατικών μεθόδων βελτιστοποίησης μπορεί να υλοποιηθεί με διάφορους τρόπους και παρουσιάζεται σε μια σειρά από εργασίες, [123, 130, 36, 42, 83, 77, 78]. Στις [77, 78, 150] ο υβριδισμός των δύο μεθόδων πραγματοποιείται μέσω του πολυεπίπεδου αλγορίθμου βελτιστοποίησης χρησιμοποιώντας διαφορετική μέθοδο ανίχνευσης σε κάθε επίπεδο, με τους σύγχρονους εξελικτικούς αλγορίθμους να δραστηριοποιούνται στο κατώτερο επίπεδο για την ανίχνευση του χώρου ενώ η μέθοδος καθόδου στο ανώτερο για την περαιτέρω βελτίωση των υποσχόμενων λύσεων του κατώτερου επιπέδου. Η μετάδοση της πληροφορίας πραγματοποιείται με την αμφίδρομη μετανάστευση τρεχουσών βέλτιστων λύσεων μεταξύ των επιπέδων. Στις εργασίες αυτές γίνεται χρήση των συζυγών τεχνικών για τον υπολογισμό της κλίσης της συνάρτησης-στόχου που καθορίζει την κατεύθυνση βελτίωσης των λύσεων στις μεθόδους τοπικής ανίχνευσης.

Μια κατηγορία υβριδικών μεθόδων βελτιστοποίησης είναι οι μιμητικοί αλγόριθμοι (MA), [33, 56, 106], οι οποίοι συνδυάζουν τις μεθόδους ολικής εξερεύνησης και τοπικής βελτίωσης [85, 105, 88]. Οι μιμητικοί αλγόριθμοι, υλοποιούνται με βάση δύο τεχνικές εκμάθησης, δηλαδή δύο τεχνικές οι οποίες αφορούν στον τρόπο με τον οποίο γίνεται χρήση της πληροφορίας της τοπικής βελτίωσης από την πληθυσμιακή μέθοδο ολικής εξερεύνησης. Αυτοί είναι η εκμάθηση κατά Baldwin (Baldwinian learning), [161, 89], και η εκμάθηση κατά Lamarck (Lamarckian learning), [89]. Στην κατά Lamarck εκμάθηση η βελτιωμένη υποψήφια λύση αντικαθιστά την αρχική, δηλαδή τις μεταβλητές σχεδιασμού και τη συνάρτηση-στόχο της αρχικής λύσης. Στην εκμάθηση κατά Baldwin ανανεώνεται μόνο η βελτιωμένη συνάρτηση-στόχος και όχι το διάγραμμα των μεταβλητών σχεδιασμού.

Η χρήση των υβριδικών μεθόδων βελτιστοποίησης μπορεί να μειώνει το συνολικό κόστος της βελτιστοποίησης όμως, στην περίπτωση υπολογιστικά ακριβού λογισμικού αξιολόγησης η βελτιστοποίηση καθίσταται σχεδόν απαγορευτική ως καθημερινό εργαλείο σχεδιασμού στη βιομηχανία. Για την περαιτέρω μείωση του χρόνου βελτιστοποίησης, μπορούν να χρησιμοποιηθούν προσεγγιστικά πρότυπα αξιολόγησης ή μεταπρότυπα ως λογισμικό γρήγορης αλλά προσεγγιστικής προ-αξιολόγησης. Τα μεταπρότυπα αποτελούν, πρακτικά, μεθόδους παρεμβολής/προσέγγισης της συνάρτησης-στόχου χρησιμοποιώντας πληροφορία από τις ήδη αξιολογημένες λύσεις με το ακριβές λογισμικό αξιολόγησης, παρέχοντας με αυτό τον τρόπο μια προσεγγιστική κατάταξη των μελών του πληθυσμού. Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι υποστηριζόμενοι από μεταπρότυπα (MAEA), [48, 49, 82, 107, 121, 73, 24, 125, 96], χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, σε αυτήν που τα μεταπρότυπα εκπαιδεύονται χωριστά από την εξελικτική διαδικασία (off-line), [25, 121, 73, 24], και σε αυτή όπου η εκπαίδευση των μεταπρότυπων είναι συνδεδεμένη (on-line) με τη διαδικασία εξέλιξης, [82, 49, 48, 45, 82, 23]. Στην παρούσα διατριβή, γίνεται χρήση των (on-line) μεταπρότυπων χρησιμοποιώντας

την τεχνική της προσεγγιστικής προ-αξιολόγησης, Inexact pre-evaluation (IPE) technique, η οποία έχει αναπτυχθεί από τη ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ, [49]. Σύμφωνα με αυτήν την τεχνική σε κάθε γενιά αξιολογούνται όλες οι υποψήφιες λύσεις με το μεταπρότυπο και οι υποσχόμενες λύσεις στέλνονται για επαν-αξιολόγηση με το ακριβές λογισμικό. Οι σύγχρονοι μιμητικοί αλγόριθμοι (MA) υποστηριζόμενοι από μεταπρότυπα (MAMA) έχουν παρουσιαστεί σε προηγούμενη διατριβή, [142], όπου τα μεταπρότυπα, εκτός από την προσεγγιστική προ-αξιολόγηση των λύσεων χρησιμοποιήθηκαν επιπλέον για την καθοδήγηση της αιτιοκρατικής μεθόδου υπολογίζοντας προσεγγιστικά την παράγωγο της συνάρτησης-στόχου. Με αυτόν τον τρόπο αποφεύγεται η χρήση της συζυγούς ή άλλης σχετικής μεθόδου. Σχετικές εργασίες στους MAMA παρουσιάζονται στις [161, 162].

Η βιβλιογραφία μέχρι στιγμής, σε συντριπτικό ποσοστό, αναφέρεται στους σύγχρονους ΕΑ οι οποίοι χαρακτηρίζονται από την έννοια της γενιάς. Ένας ακόμη τρόπος μείωσης του υπολογιστικού χρόνου της βελτιστοποίησης στους σύγχρονους ΕΑ επιτυγχάνεται με την ταυτόχρονη αξιολόγηση των ατόμων μιας γενιάς σε διαφορετικούς επεξεργαστές. Αυτός αποτελεί τον απλούστερο τρόπο εκμετάλλευσης της παραλληλοποίησης στους ΕΑ. Στη βιβλιογραφία, η παραλληλοποίηση των ΕΑ υλοποιείται με διάφορους τρόπους, [27, 103, 7], έχοντας ως στόχο την καλύτερη απόδοση του αλγορίθμου ώστε να μειωθεί αισθητά ο χρόνος υπολογισμού. Παρόλα αυτά, η βασισμένη στη γενιά εξέλιξη του παράλληλου αλγορίθμου περιορίζει την παράλληλη απόδοση του, περιορίζοντας το μέγιστο κέρδος στο χρόνο υπολογισμού. Αυτό οφείλεται στο συγχρονισμό στο τέλος κάθε γενιάς, δηλαδή στην αναμονή της ολοκλήρωσης των αξιολογήσεων μιας γενιάς από όλους τους επεξεργαστές για την αξιολόγηση των ατόμων της επόμενης γενιάς. Αυτό σημαίνει ότι, σε περίπτωση που ένας επεξεργαστής καθυστερήσει να ολοκληρώσει την αξιολόγηση ενός ατόμου της γενιάς, αυτόματα καθυστερεί ολόκληρη η γενιά και κατ' επέκταση ολόκληρη η διαδικασία βελτιστοποίησης. Αυτό το μειονέκτημα των σύγχρονων αλγορίθμων αντιμετωπίστηκε με την κατάργηση της γενιάς, η οποία οδήγησε στη δημιουργία των ασύγχρονων εξελικτικών αλγορίθμων (ΑΕΑ), [56, 8, 12]. Αυτοί είναι πλήρως ασύγχρονοι καθώς με την ολοκλήρωση μιας αξιολόγησης και την απελευθέρωση ενός επεξεργαστή, ένα νέο άτομο οδηγείται ακαριαία προς αξιολόγηση, μεγιστοποιώντας με αυτόν τον τρόπο την εκμετάλλευση των διαθέσιμων υπολογιστικών πόρων.

Σε προηγούμενη διατριβή στη ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ, [148], αναπτύχθηκε ένας νέος ασύγχρονος εξελικτικός αλγόριθμος (ΑΕΑ), ο οποίος υπερτερεί των σύγχρονων ΕΑ, και στον οποίο ο πληθυσμός αναπτύσσεται σε ένα 2Δ δομημένο πλέγμα βάσης παρουσιάζοντας ένα νέο τρόπο διαχωρισμού του πληθυσμού σε δήμους με επιπλέον διαφορές στην εφαρμογή των εξελικτικών τελεστών. Η προσθήκη μεταπρωτύπων στον ΑΕΑ παρουσιάστηκε στην εργασία [13], μειώνοντας σημαντικά το χρόνο βελτιστοποίησης. Ο αλγόριθμος αυτός περιγράφεται αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο, δεδομένου ότι αποτελεί τη βάση για το νέο αλγόριθμο που αναπτύσσεται στην παρούσα διατριβή. Η παρούσα διδακτορική διατριβή, εκμεταλλευόμενη τις συζυγείς μεθόδους που αναπτύχθηκαν στα κεφάλαια 3 και 4, προχωρά στη δημιουργία ενός νέου ασύγχρονου μιμητικού αλγορίθμου υποστηριζόμενου από μεταπρότυπα (AMAMA), ο οποίος βασίζεται στον υβριδισμό του ΑΕΑ με τις συζυγείς μεθόδους, και παρουσιάζεται για πρώτη

φορά στη βιβλιογραφία, [86].

Πριν την περιγραφή του ασύγχρονου ΕΑ, ο οποίος χρησιμοποιήθηκε ως λογισμικό βάσης για τη δημιουργία του AMAMA, παρουσιάζεται, στην επόμενη ενότητα, ο γενικευμένος ΕΑ, με σκοπό την περιγραφή της διαχείρισης προβλημάτων πολλών στόχων, προβλημάτων με περιορισμούς, των εξελικτικών τελεστών κ.α., τα οποία είναι απαραίτητα να αναλυθούν εκ των προτέρων, δεδομένου ότι χρησιμοποιούνται στον ΑΕΑ, και κατ' επέκταση και στον AMAMA.

## 6.2 Γενικευμένος (μ,λ) ΕΑ

Ο γενικευμένος (μ,λ) ΕΑ, ο οποίος αναπτύσσεται στη ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ (λογισμικό EASY, [4]), είναι αποτέλεσμα μιας σειράς διδακτορικών διατριβών [147, 152, 150], που έχουν πραγματοποιηθεί στη ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ αποτελώντας τη βάση για την ανάπτυξη του ΑΕΑ στη διδακτορική διατριβή [148].

### 6.2.1 Ορισμός Προβλήματος Βελτιστοποίησης

Τα προβλήματα που επιλύονται στην παρούσα διατριβή με σκοπό την ελαχιστοποίηση  $M$  στόχων διατυπώνονται ως

$$\min \vec{F}(\vec{b}) = \min \{F_1(\vec{b}), \dots, F_M(\vec{b})\} \quad (6.1)$$

υπό τους περιορισμούς

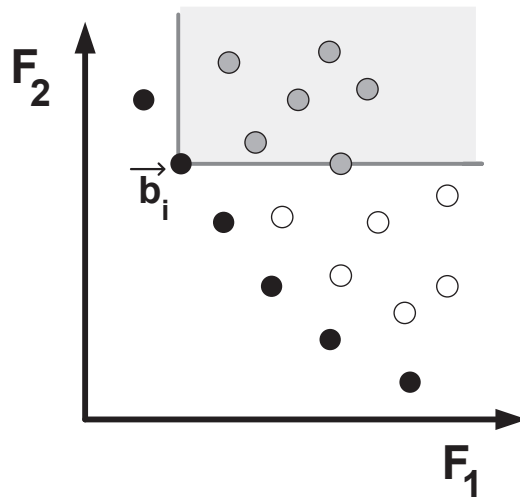
$$c_k(\vec{b}) \leq c_k^{thres}, k = 1, K \quad (6.2)$$

όπου  $\vec{b}$  το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού,  $\vec{b} \in \mathcal{R}^N$ , το οποίο ορίζεται από ανώτερα και κατώτερα όρια των μεταβλητών σχεδιασμού,  $F_1(\vec{b}), \dots, F_M(\vec{b})$  οι  $M$  συναρτήσεις-στόχοι και  $c_k(\vec{b})$  οι  $K$  περιορισμοί.

Στην περίπτωση της πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης ( $M > 1$ ), για τη σύγκριση δύο λύσεων, έστω  $\vec{b}_1$  και  $\vec{b}_2$ , χρησιμοποιείται η έννοια της κυριαρχίας κατά Pareto, [118]. Σύμφωνα με αυτή, η λύση  $\vec{b}_1$  κυριαρχεί της  $\vec{b}_2$  και συμβολίζεται με  $\vec{b}_1 \succ \vec{b}_2$  όταν και μόνο όταν ισχύει  $F_m(\vec{b}_1) \leq F_m(\vec{b}_2)$  για όλους τους στόχους ( $m \in [1, M]$ ). Μία λύση είναι βέλτιστη κατά Pareto αν και μόνο αν δεν κυριαρχείται από καμία άλλη λύση. Το σύνολο των μη-κυριαρχούμενων λύσεων ή αλλιώς βέλτιστων λύσεων αποτελούν μαζί ένα μέτωπο βέλτιστων λύσεων, το γνωστό και ως μέτωπο Pareto. Το σχήμα 6.1 αναπαριστά σχηματικά την κυριαρχία ενός ατόμου ( $\vec{b}_i$ ) του πληθυσμού στα υπόλοιπα άτομα του για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων, καθιστώντας ταυτόχρονα αυτό το άτομο βέλτιστο κατά Pareto. Στο ίδιο σχήμα φαίνεται και το μέτωπο Pareto (μαύροι κύκλοι).

### 6.2.2 Περιγραφή του (μ,λ) ΕΑ

Ο (μ,λ) ΕΑ διαχειρίζεται σε κάθε γενιά τρεις διακριτούς πληθυσμούς λύσεων: τους γονείς  $\mathcal{P}_\mu^g$ , τους απογόνους  $\mathcal{P}_\lambda^g$  και τους επίλεκτους  $\mathcal{P}_e^g$ . Οι δείκτες  $\mu$ ,  $\lambda$  και  $e$  εκφράζουν



**Σχήμα 6.1:** Κυριαρχία κατά Pareto. Τα άτομα τα οποία βρίσκονται μέσα στη γκριζα περιοχή κυριαρχούνται από το άτομο  $\vec{b}_i$  του πληθυσμού, το οποίο αποτελεί ταυτόχρονα και μέλος του μετώπου Pareto από τη στιγμή που δεν κυριαρχείται από άλλο άτομο. Τα άτομα με τους μαύρους κύκλους αντιστοιχούν στα μέλη του μετώπου Pareto.

το πλήθος των ατόμων σε κάθε πληθυσμό ενώ ο δείκτης  $g$  υποδηλώνει τη γενιά. Ο  $(\mu, \lambda)$  EA αποτελεί έναν ιεραρχικό καταναμημένο αλγόριθμο, ο οποίος υποστηρίζεται από μεταπρότυπα. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η βασική του δομή, [147, 152, 150], η οποία περιλαμβάνει τα εξής βήματα:

- EA-1:** Αρχικοποίηση των απογόνων της πρώτης γενιάς,  $\mathcal{P}_\lambda^1$ , μέσω κλήσεων της γεννήτριας τυχαίων αριθμών.
- EA-2:** Αξιολόγηση των απογόνων για τον υπολογισμό της συνάρτησης κόστους  $F(\vec{b})$ .
- EA-3:** Απόδοση μιας βαθμωτής τιμής κόστους  $\phi$  στους απογόνους για την ιεράρχησή τους, όπως περιγράφεται στην ενότητα 6.2.3.
- EA-4:** Ανανέωση του συνόλου των επιλέκτων, ώστε να αποτελείται μόνο από μη-κυριαρχούμενα μέλη επιλεγμένα μεταξύ παλαιών επιλέκτων και των νέων απογόνων. Σε αυτό το σύνολο εφαρμόζεται προαιρετικά τελεστής αραίωσης, διατηρώντας ένα μέγιστο αριθμό στο σύνολο τους. Προαιρετικά εφαρμόζεται και ένας τελεστής ελιτισμού, σύμφωνα με τον οποίο εισάγεται στο σύνολο των απογόνων ένας μικρός αριθμός επιλέκτων, τυχαία επιλεγμένων, αντικαθιστώντας τα χειρότερα μέλη.
- EA-5:** Ανανέωση του συνόλου των γονέων από το σύνολο των νέων απογόνων και των παλαιών γονέων βάσει του μέγιστου αριθμού γενιών που μπορεί να επιβιώσει ένα άτομο.

**EA-6:** Αναπαραγωγή των  $\mu$  γονέων χρησιμοποιώντας τελεστές διασταύρωσης, οι οποίοι επιβάλλονται σε ένα αριθμό ατόμων από το  $\mathcal{P}_\mu^{g+1}$  και το  $\mathcal{P}_e^{g+1}$  (με μικρή πιθανότητα) καθώς και τελεστών μετάλλαξης για τη δημιουργία του νέου πληθυσμού των απογόνων  $\mathcal{P}_\mu^{g+1}$ .

**EA-7:** Έλεγχος των κριτηρίων τερματισμού που αφορούν λ.χ. το μέγιστο αριθμό αξιολογήσεων, μέγιστο αριθμό γενιών, αδυναμία περαιτέρω βελτίωσης της λύσης. Αν δεν ικανοποιούνται τα κριτήρια αυξάνεται κατά μία μονάδα ο μετρητής  $g \leftarrow g + 1$  επιστρέφοντας στο βήμα EA-2, αλλιώς ο αλγόριθμος τερματίζεται.

Η προσθήκη των μεταπροτύπων στον EA βασίστηκε στην τεχνική της προσεγγιστικής προ-αξιολόγησης (IPE), όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως. Ως μεταπρότυπα, στον EA καθώς και στον AMAMA, χρησιμοποιούνται τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα και ειδικότερα τα δίκτυα ακτινικών συναρτήσεων βάσης (Radial Basis Function Networks-RBFN), [58, 29]. Η επίδραση των μεταπροτύπων στον αλγόριθμο ξεκινά μετά από ένα ελάχιστο αριθμό αξιολογήσεων με το ακριβές λογισμικό, δηλαδή αφού έχει αποκτήσει η βάση δεδομένων (*DB*) αρκετές εγγραφές. Ο αριθμός των ελάχιστων εγγραφών ( $N_{IPE_{start}}$ ) στη *DB* καθορίζεται από το χρήστη και αποφασίζεται με βάση την πολυπλοκότητα του εκάστοτε προβλήματος. Μετά την ενεργοποίηση του μεταπρότυπου, για κάθε απόγονο κατασκευάζεται και εκπαιδεύεται τοπικά ένα μεταπρότυπο γύρω από τη γειτονιά του. Στη συνέχεια, το μεταπρότυπο χρησιμοποιείται για να αποδώσει μία προσεγγιστική τιμή της συνάρτησης-στόχου σε κάθε μέλος της γενιάς. Βάσει των προσεγγιστικών αυτών τιμών, τα  $N_{best}$  καλύτερα της γενιάς προκρίνονται για επαν-αξιολόγηση με το ακριβές λογισμικό, [150], μειώνοντας έτσι το συνολικό υπολογιστικό κόστος της βελτιστοποίησης.

### 6.2.3 Διαχείριση προβλημάτων πολλών στόχων

Στον EA, σε προβλήματα ενός στόχου η ιεράρχηση των ατόμων του πληθυσμού  $N_P$  πραγματοποιείται ως προς την τιμή της συνάρτησης-στόχου του κάθε ατόμου. Σε προβλήματα πολλών στόχων, για την ιεράρχηση των λύσεων και την εύρεση του μετώπου Pareto χρησιμοποιείται μία βαθμωτή τιμή κόστους  $\phi$ , η οποία αποδίδεται σε κάθε άτομο του πληθυσμού και αντικαθιστά πρακτικά τη συνάρτηση-στόχο στη διαδικασία ιεράρχησης των λύσεων. Αυτή η τιμή κόστους υπολογίζεται βάσει των τιμών των συναρτήσεων-στόχων των ατόμων του πληθυσμού. Στον υπόψη αλγόριθμο χρησιμοποιούνται δύο τρόποι απόδοσης τιμής κόστους κάνοντας χρήση των αλγορίθμων SPEA II, [165], και NSGA II, [34]. Στη συνέχεια, περιγράφεται ο αλγόριθμος SPEA II ο οποίος χρησιμοποιείται στην παρούσα διατριβή.

#### Αλγόριθμος SPEA II

Η απόδοση της τιμής  $\phi$  πραγματοποιείται ακολουθώντας τα εξής βήματα, [165], για κάθε άτομο  $i$  του πληθυσμού:

**SPEA II-1:** Υπολογισμός της τιμής της δύναμης  $S_i$  (Strength), η οποία ισούται με τον αριθμό των ατόμων του πληθυσμού στα οποία κυριαρχεί το άτομο  $i$ .

**SPEA II-2:** Υπολογισμός της τιμής της κυριαρχίας  $R_i$ , η οποία προκύπτει από την άθροιση της δύναμης κάθε ατόμου από τα οποία κυριαρχείται το άτομο  $i$ .

**SPEA II-3:** Υπολογισμός της πυκνότητας  $D_i$ , η οποία ποσοτικοποιείται μέσω της απόστασης  $d_{ij}$  του ατόμου  $i$  στο χώρο των στόχων από το  $j$ -ιοστό πλησιέστερό του,  $D_i = \frac{1}{d_{ij+2}}$ , όπου  $j = \sqrt{N_p}$  με  $N_p$  το σύνολο των ατόμων του πληθυσμού.

**SPEA II-4:** Υπολογισμός της βαθμωτής τιμής κόστους  $\phi = R_i + D_i$  για κάθε άτομο  $i$  του πληθυσμού.

Η σχηματική αναπαράσταση του αλγορίθμου φαίνεται στο σχήμα 6.2.

### Δείκτης υπερόγκου

Για τη σύγκριση της απόδοσης διαφόρων αλγορίθμων στην ενότητα 6.5, είναι απαραίτητη η σύγκριση των μετώπων Pareto που υπολογίζονται από κάθε αλγόριθμο. Μία τεχνική η οποία ποσοτικοποιεί την ποιότητα του κάθε μετώπου και χρησιμοποιείται στην παρούσα διατριβή για τη σύγκριση των μετώπων είναι ο δείκτης υπερόγκου  $I_H$ . Ο δείκτης υπερόγκου μετρά το χώρο στον οποίο κυριαρχεί το μέτωπο, δηλαδή όσο μεγαλύτερη τιμή έχει ο δείκτης υπερόγκου τόσο καλύτερη είναι η προσέγγιση του μετώπου Pareto. Για τον υπολογισμό του δείκτη υπερόγκου είναι απαραίτητος ο ορισμός ενός σημείου αναφοράς, το οποίο χρησιμοποιείται για τον καθορισμό των ορίων του χώρου στο οποίο κυριαρχεί το μέτωπο. Στο σχήμα 6.3 φαίνεται η σχηματική αναπαράσταση του δείκτη υπερόγκου για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων κατά τη σύγκριση δύο μετώπων Pareto.

### 6.2.4 Διαχείριση περιορισμών

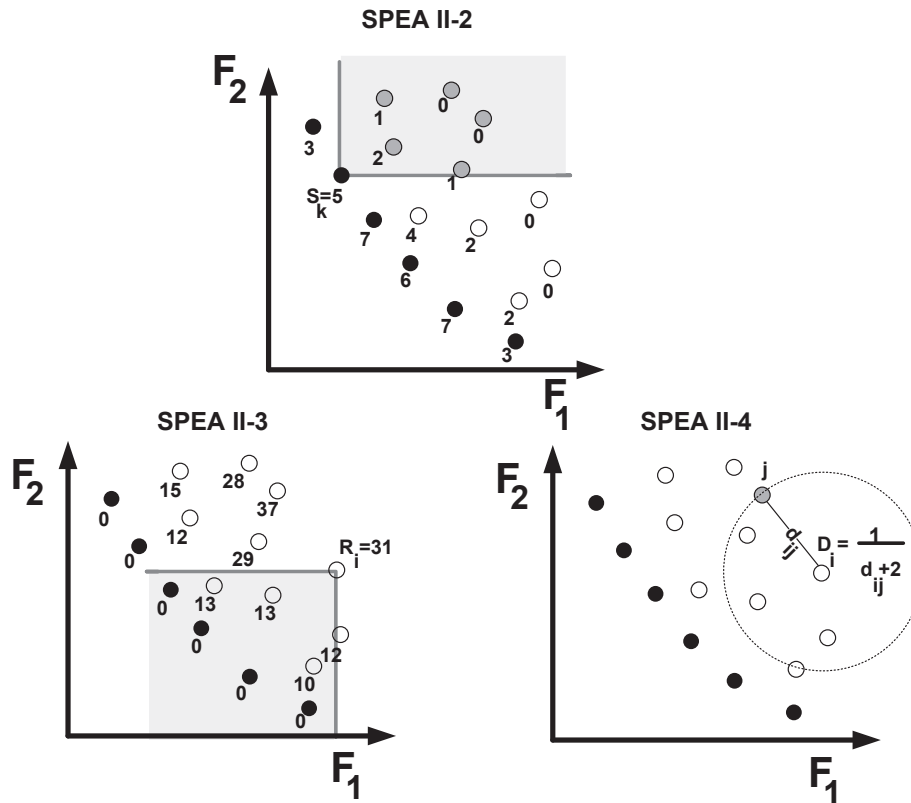
Για τη διαχείριση των περιορισμών εισάγεται ένας όρος ποινής  $P_k$ , έτσι ώστε κάθε φορά που μία υποψήφια λύση  $k$  παραβιάζει έναν από τους περιορισμούς, οι συναρτήσεις-στόχοι της λύσης αυτής να επαυξάνονται με κατάλληλο όρο ποινής ο οποίος ποσοτικοποιεί το μέγεθος της παραβίασης. Ως συνάρτηση ποινής επιλέγεται μία εκθετικής μορφής συνάρτηση ως προς την παραβίαση του περιορισμού και οι όροι ποινής ορίζονται ως

$$P_k = \begin{cases} \infty & , c_k(\vec{b}) > c_k^{death} \\ \exp\left(\frac{c_k(\vec{b}) - c_k^{thres}}{c_k^{death} - c_k^{thres}}\right) & , c_k^{thres} < c_k(\vec{b}) \leq c_k^{death} \\ 1 & , c_k(\vec{b}) \leq c_k^{thres} \end{cases} \quad (6.3)$$

όπου  $c_k^{death}$  είναι μία ακραία τιμή για τον υπόψη περιορισμό.

Η τιμή του όρου ποινής  $P_k$  πολλαπλασιάζει τις συναρτήσεις-στόχους  $F(\vec{b})$  ως

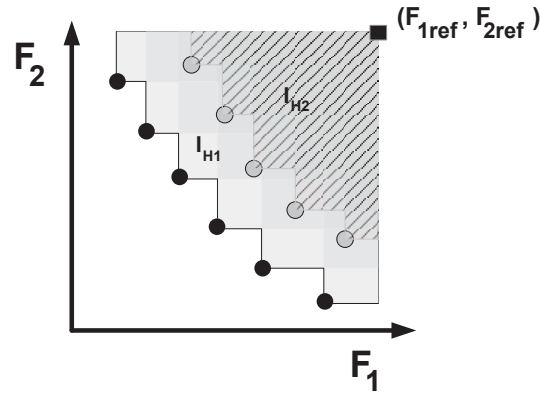
$$F(\vec{b}) = F(\vec{b}) \prod_{k=1}^K P_k \quad (6.4)$$



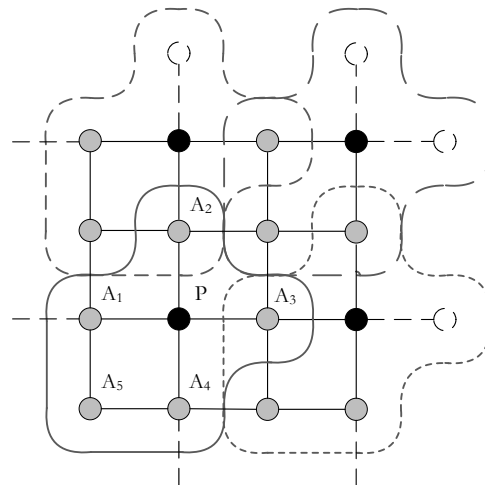
**Σχήμα 6.2:** Σχηματική αναπαράσταση των βημάτων SPEA II-2, SPEA II-3 και SPEA II-4 του αλγορίθμου SPEA II για την απόδοση της βαθμωτής τιμής κόστους  $\phi$  στα άτομα ενός πληθυσμού σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων.

### 6.3 Ο Ασύγχρονος ΕΑ (ΑΕΑ)-Περιγραφή

Τα βασικά χαρακτηριστικά του ΑΕΑ είναι η τοπολογία στην οποία τοποθετείται ο πληθυσμός, ο χωρισμός του πληθυσμού σε δήμους με την εκμετάλλευση αυτής της τοπολογίας και ο τρόπος με τον οποίο οι δήμοι επικαλύπτονται και μοιράζονται τα άτομα του πληθυσμού. Στον ΑΕΑ, που χρησιμοποιείται εδώ, οι υποψήφιες λύσεις του πληθυσμού συσχετίζονται με τους κόμβους ενός  $n_1 \times n_2$  δομημένου πλέγματος βάσης στο οποίο ισχύει η περιοδικότητα προς όλες τις διευθύνσεις. Το πλέγμα διαμερίζεται σε δήμους  $D_p$  των έξι κόμβων, οι οποίοι αποτελούνται από έναν πόλο (pole)  $P$  και πέντε πράκτορες (agents),  $A_1$  έως  $A_5$ , όπως φαίνεται και στο σχήμα 6.4. Ο ρόλος των πόλων σε κάθε δήμο είναι σημαντικός, δεδομένου ότι σε αυτούς αποθηκεύονται πληροφορίες σχετικές με το βέλτιστο άτομο του δήμου. Οι πράκτορες είναι αυτοί που αναλαμβάνουν την αξιολόγηση των υποψηφίων λύσεων. Όσον αφορά στον αριθμό των πόλων και τον αριθμό των πρακτόρων σε ένα πλέγμα  $n_1 \times n_2$  με συνολικό αριθμό κόμβων  $N_{mesh}$ , ο αριθμός των πόλων ισούται με  $N_{poles} = N_{mesh}/4$  και ο αριθμός των πρακτόρων με  $N_{agents} = 3N_{mesh}/4$ . Σύμφωνα με το σχήμα 6.4, κάθε δήμος



**Σχήμα 6.3:** Σχηματική αναπαράσταση του δείκτη υπερόγκου,  $I_{H1}$ , του μετώπου Pareto με τα μαύρα άτομα  $\mathcal{P}_{a1}$  (γκρίζο χωρίο) αλλά και του δείκτη υπερόγκου  $I_{H2}$  του μετώπου με τα γκρι άτομα,  $\mathcal{P}_{a2}$ , (διαγραμμισμένο χωρίο) υπολογισμένοι με σημείο αναφοράς το  $(F_{1ref}, F_{2ref})$  για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων. Είναι  $I_{H1} > I_{H2}$  και επομένως  $\mathcal{P}_{a1} > \mathcal{P}_{a2}$ .



**Σχήμα 6.4:** Ασύγχρονος ΕΑ (ΑΕΑ): λεπτομέρεια τμήματος του δομημένου πλέγματος βάσης όπου φαίνονται ο πόλος  $P$  (μαύροι κύκλοι) και οι πέντε πράκτορες (γκρίζοι κύκλοι),  $A_1$  έως  $A_5$ , για το δήμο που περιβάλλεται από τη συνεχή γραμμή.

μοιράζεται τέσσερις από τους πέντε πράκτορες με τους γειτονικούς του δήμους και μέσω των κοινών αυτών πρακτόρων αλληλεπιδρούν οι δήμοι μεταξύ τους. Η εφαρμογή των εξελικτικών τελεστών περιορίζεται στο εσωτερικό κάθε δήμου.

Η βελτιστοποίηση αρχίζει δημιουργώντας τυχαία τόσα άτομα όσα και ο αριθμός των διαθέσιμων επεξεργαστών  $N_{CPU}$ . Οι  $N_{CPU}$  υποψήφιας λύσεις συσχετίζονται τυχαία με  $N_{CPU}$  πράκτορες, οι οποίοι αναλαμβάνουν την αξιολόγηση τους σε  $N_{CPU}$  επεξεργαστές. Μετά το πέρας της αξιολόγησης μιας υποψήφιας λύσης,  $\vec{b}_a$ , η αντίστοιχη  $CPU$  παραμένει ελεύθερη περιμένοντας την επόμενη αξιολόγηση. “Ακαριαία”, δημιουργείται ένα νέο άτομο προς αξιολόγηση, μέσω δια- και ενδο-δημοτικών διεργασιών. Μέσω μίας



ενδο-δημοτικής διεργασίας, η οποία βασίζεται σε κριτήρια κυριαρχίας, αποφασίζεται αν το άτομο το οποίο μόλις αξιολογήθηκε πρέπει να αντικαταστήσει ή όχι τον αντίστοιχο πόλο ( $\vec{b}_p$ ).

Επόμενο βήμα του αλγορίθμου είναι η επιλογή νέου πράκτορα για το σχηματισμό του νέου απογόνου προς αξιολόγηση. Η επιλογή αυτή βασίζεται σε μια σειρά από δημοτικές διεργασίες επιλέγοντας αρχικά το δήμο με τη μέγιστη προτεραιότητα και, στη συνέχεια, τον πράκτορα. Για να οριστεί η προτεραιότητα κάθε πόλου  $Pr_p$ , χρησιμοποιούνται δύο βασικές έννοιες προτεραιοτήτων του ασύγχρονου ΕΑ, η προτεραιότητα βάσει της ηλικίας  $Pr_p^{age}$  και η προτεραιότητα βάσει της τιμής καταλληλότητας/συνάρτησης-στόχου  $Pr_p^{cost}$  ως  $Pr_p = Pr_p^{age} Pr_p^{cost}$ , [12, 148]. Η ηλικία  $A_k$  ενός πράκτορα ορίζεται ως η διαφορά του αύξοντος αριθμού της τελευταίας αξιολόγησης που πραγματοποιήθηκε από αυτόν τον πράκτορα και του αύξοντος αριθμού της τρέχουσας αξιολόγησης. Η ηλικία κάθε πόλου είναι η μέση ηλικία των πρακτόρων του υπόψη δήμου. Η προτεραιότητα βάσει της ηλικίας ταυτίζεται με την ηλικία του πόλου διαιρεμένη με τη μέγιστη ηλικία των πόλων.

Σε προβλήματα δύο στόχων, η προτεραιότητα βάσει της τιμής καταλληλότητας/συνάρτησης-στόχου,  $Pr_p^{cost}$ , ορίζεται χρησιμοποιώντας τα κριτήρια δύναμης και κυριαρχίας που εφαρμόζονται στον αλγόριθμο SPEA II. Ο πόλος με τη μεγαλύτερη τιμή προτεραιότητας  $Pr_p$  υποδεικνύει το δήμο από τον οποίο, στη συνέχεια, επιλέγεται ο πράκτορας με τη μέγιστη ηλικία  $A_k$  για το σχηματισμό και την άμεση αξιολόγηση του νέου απογόνου  $\vec{b}_a$ .

Στον ασύγχρονο ΕΑ, για τις μεταβλητές σχεδιασμού χρησιμοποιείται πραγματική κωδικοποίηση. Για τη δημιουργία της νέας υποψήφιας λύσης προς αξιολόγηση (στον πράκτορα και δήμο που ήδη επελέγησαν), προστίθεται στην τιμή του πόλου ένα ποσοστό της διαφοράς δύο πρακτόρων του δήμου, σύμφωνα με το σχήμα

$$\vec{b}_a = \vec{b}_p + \omega_r (\vec{b}_{k_1} - \vec{b}_{k_2}) k_1, k_2 \in \mathcal{D}_p \ \& \ k_1 \neq k_2$$

όπου  $\omega_r$  μία τυχαία τιμή στο διάστημα  $[0, 1]$ . Μετά την εφαρμογή της διασταύρωσης, εφαρμόζεται ο τελεστής μετάλλαξης στο  $\vec{b}_a$ . Το άτομο που προκύπτει από τη μετάλλαξη αποτελεί το νέο άτομο το οποίο προωθείται για αξιολόγηση στον πρώτο ελεύθερο επεξεργαστή. Λόγω της ασύγχρονης λειτουργίας του αλγορίθμου και της κατάρτησης της ανάγκης συγχρονισμού, ο αλγόριθμος είναι κατάλληλος για πολυεπεξεργαστικά συστήματα με  $N_{CPU} \leq N_{agents}$  επεξεργαστές.

Η απόδοση του ΑΕΑ βελτιώθηκε επιπλέον με την προσθήκη μεταπροτύπων, τα οποία εκπαιδεύονται χρησιμοποιώντας ένα σύνολο ατόμων τα οποία έχουν αξιολογηθεί προηγουμένως, δημιουργώντας τον ασύγχρονο αλγόριθμο υποβοηθούμενο από μεταπρότυπα, AMAEA, [13]. Η εκπαίδευση των μεταπροτύπων, που χρησιμοποιούνται για την προσεγγιστική προ-αξιολόγηση (IPE) των υποψηφίων λύσεων, είναι συνδεδεμένη (on-line) με τη διαδικασία εξέλιξης. Η προσθήκη των μεταπροτύπων στον ασύγχρονο αλγόριθμο πραγματοποιείται όπως και στους σύγχρονους αλγορίθμους με κάποιες διαφορές λόγω της κατάρτησης της έννοιας της γενιάς. Η χρήση των μεταπροτύπων ενεργοποιείται, και πάλι, μετά από ένα συγκεκριμένο αριθμό αξιολογήσεων με το ακριβές λογισμικό ( $N_{IPE_{start}}$ ), ο οποίος καθορίζεται από το χρήστη. Από αυτό το

σημείο και μετά, για κάθε διαθέσιμο επεξεργαστή *CPU*, αντί της δημιουργίας και αξιολόγησης μιας νέας υποψήφιας λύσης, δημιουργούνται  $N_{IPE}$  υποψήφιες λύσεις από τους εξελικτικούς τελεστές που εφαρμόζονται στο δήμο. Για κάθε έναν από αυτούς, εκπαιδεύεται τοπικά ένα μεταπρότυπο πάνω σε ένα σύνολο δειγμάτων εκπαίδευσης. Τα δείγματα επιλέγονται από τη βάση δεδομένων ως τα πλησιέστερα στο σημείο πρόβλεψης, με αποστάσεις μετρούμενες στο χώρο σχεδιασμού. Για κάθε ένα από τα  $N_{IPE}$  άτομα υπολογίζονται προσεγγιστικές τιμές της συνάρτησης-στόχου ( $\vec{F}$ ) με χρήση των μεταπροτύπων. Το καλύτερο από αυτά, βάσει της εκτίμησης του μεταπροτύπου, επαν-αξιολογείται με το ακριβές λογισμικό. Η δομή του AMAEA φαίνεται στην επόμενη ενότητα, στη μορφή του ψευδοκώδικα 1.

## 6.4 Ο Ασύγχρονος Μιμητικός Αλγόριθμος

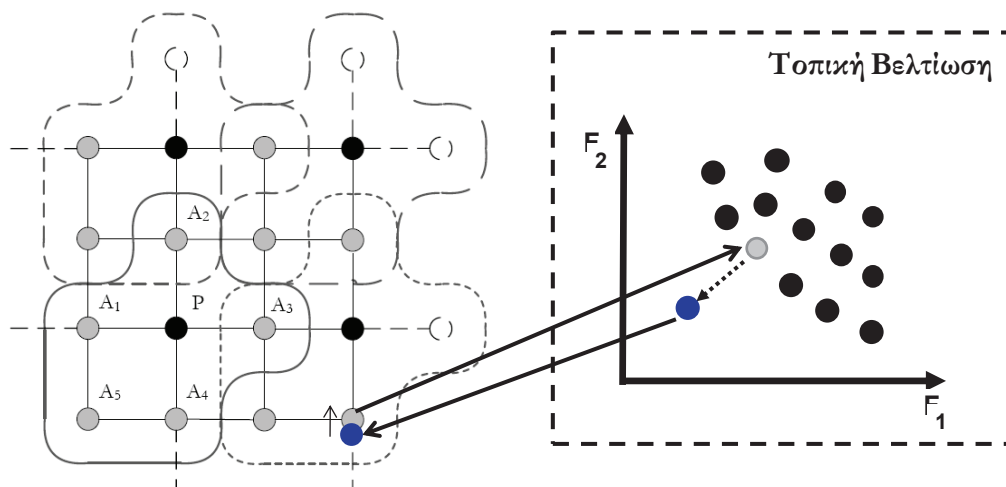
Για την προσθήκη της μεθόδου τοπικής ανίχνευσης στον ασύγχρονο αλγόριθμο έπρεπε να αποφασιστεί ποιά από τα άτομα του πληθυσμού θα επιλέγονται και θα οδηγούνται σε περαιτέρω βελτίωση με τη μέθοδο της τοπικής ανίχνευσης. Για ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης πολλών στόχων, τα άτομα αυτά επιλέγονται βάσει κριτηρίων κυριαρχίας, τα οποία εφαρμόζονται σε ένα σύνολο ατόμων που αποτελείται από το άτομο που μόλις αξιολογήθηκε ( $\vec{b}_a, \vec{F}(\vec{b}_a)$ ) και το τρέχον, δυναμικά ανανεούμενο μέτωπο των μη-κυριαρχούμενων λύσεων ( $\mathcal{P}_a$ ). Η μέθοδος τοπικής ανίχνευσης ενεργοποιείται αυτόματα κάθε φορά που ένα νέο άτομο ( $\vec{b}_a$ ) εισάγεται στο  $\mathcal{P}_a$ , δηλαδή γίνεται μέλος του μετώπου, σχήμα 6.5. Για αυτά τα άτομα η μέθοδος τοπικής ανίχνευσης εκτελείται υποχρεωτικά και περιλαμβάνει τις εξής δράσεις:

- (α') Υπολογισμός της παραγώγου ευαισθησίας της συνάρτησης-στόχου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού ( $\frac{\delta F}{\delta \vec{b}_a}$ ), η οποία καθορίζει την κατεύθυνση κατά την οποία πρόκειται να βελτιωθεί η λύση. Η παράγωγος ευαισθησίας σε προβλήματα βελτιστοποίησης στη ρευστοδυναμική υπολογίζεται από την επίλυση συζυγών εξισώσεων, ιδίων ή ομοίων αυτών που διατυπώθηκαν στο κεφάλαιο 4.
- (β') Ανανέωση του αρχικού ατόμου χρησιμοποιώντας τη μέθοδο απότομης καθόδου και δημιουργία ενός νέου ατόμου  $\vec{b}_a^{new}$ :

$$\vec{b}_a^{new} = \vec{b}_a - \eta \frac{\delta F}{\delta \vec{b}_a} \quad (6.5)$$

- (γ') Επαν-αξιολόγηση του νέου ατόμου με το ακριβές λογισμικό αξιολόγησης, επιλύοντας τις εξισώσεις ροής, για την απόκτηση της τιμής της συνάρτησης-στόχου  $\vec{F}(\vec{b}_a^{new})$ .

Με την ολοκλήρωση ενός βήματος τοπικής ανίχνευσης, στην περίπτωση που το νέο άτομο που μόλις αξιολογήθηκε είναι καλύτερο από το αρχικό, ( $\vec{F}(\vec{b}_a^{new}) > \vec{F}(\vec{b}_a)$ ), το νέο άτομο εκτοπίζει το αρχικό από τον πληθυσμό σύμφωνα με τους κανόνες της



**Σχήμα 6.5:** Ασύγχρονος μιμητικός αλγόριθμος (AMA): Εποπτική παρουσίαση της αλληλεπίδρασης του ασύγχρονου EA και της μεθόδου τοπικής ανίχνευσης που στηρίζεται στη συζυγή τεχνική στον προτεινόμενο αλγόριθμο.

Lamarckian εκμάθησης, (Lamarckian learning) [89], δηλαδή αντικαθιστώντας τις μεταβλητές σχεδιασμού  $\vec{b}_a$  και την τιμή της συνάρτησης-στόχου  $F$  του αρχικού ατόμου. Εκτός από τα άτομα που ανήκουν στον αρχικό τυχαίο πληθυσμό, όλα τα υπόλοιπα άτομα μπορούν να επιλεγούν για περαιτέρω βελτίωση με τη μέθοδο της τοπικής ανίχνευσης αρκεί να ενταχθούν στο τρέχον μέτωπο  $\mathcal{P}_a$ . Αυτό σημαίνει ότι, ταυτόχρονα, μπορούν να υπόκεινται σε τοπική βελτίωση το πολύ τόσα άτομα όσοι και οι χρησιμοποιούμενοι επεξεργαστές.

Η δομή του ασύγχρονου μιμητικού αλγορίθμου υποστηριζόμενου από μεταπρότυπα (AMAMA) παρουσιάζεται στον ψευδοκώδικα 1. Οι γραμμές 14 – 24 του ψευδοκώδικα αντιστοιχούν στη διαδικασία της τοπικής ανίχνευσης.

### 6.4.1 Πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση μέσω του AMAMA

Στην πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση, κατά τη μέθοδο τοπικής ανίχνευσης είναι απαραίτητος ο υπολογισμός των παραγώγων  $\frac{\delta F_1}{\delta b_a}, \dots, \frac{\delta F_M}{\delta b_a}$ , δηλαδή είναι απαραίτητη η κλήση των συζυγών εξισώσεων τόσες φορές όσες και οι στόχοι. Αυτή η τακτική ακολουθείται και στον πολυεπίπεδο EA στη διδακτορική διατριβή [150] για τον υπολογισμό των παραγώγων κατά τον υβριδισμό του σύγχρονου EA με τη συζυγή μέθοδο. Για την περαιτέρω μείωση του υπολογιστικού χρόνου σε προβλήματα πολλών στόχων, παρακάτω προτείνεται ένα νέο σχήμα σύμφωνα με το οποίο οι συζυγείς εξισώσεις επιλύονται μόνο μία φορά και όχι τόσες όσες οι στόχοι.

Στα προβλήματα ενός στόχου, η παράγωγος της συνάρτησης-στόχου, καθορίζει την κατεύθυνση της βελτίωσης του  $\vec{b}_a$ . Όπως έχει ήδη αναφερθεί, στα προβλήμα-

---

**Ψευδοκώδικας 1 AMAMA**


---

```

1:  $n_e \leftarrow 0$  //  $n_e$ : μετρητής επαναλήψεων
2: for  $i \leftarrow 1, N_{CPU}$  do
3:    $\vec{b}_a \leftarrow \text{Init}()$ 
4:   Ανάθεση Αξιολόγησης( $\vec{b}_a$ )
5:    $CPU_{\vec{b}_a} \leftarrow$  Μη διαθέσιμη()
6: end for
7: while Λήψη ( $\vec{b}_a, \vec{F}(\vec{b}_a)$  or  $\frac{d\vec{F}}{db}$ ) do
8:    $CPU_{\vec{b}_a} \leftarrow$  Διαθέσιμη()
9:    $n_e \leftarrow n_e + 1$ 
10:   $\vec{b}_p \leftarrow$  Κυριαρχία ( $\vec{b}_a, \vec{b}_p$ ) // Αντικατάσταση ή όχι του πόλου
11:   $\mathcal{P}_a \leftarrow$  Ενημέρωση ()
12:  for  $k \leftarrow 1, N_{agents}$  do
13:     $A_k \leftarrow \text{Age}(n_e, n_{lasteval})$  // Ανανέωση Ηλικιών
14:  end for
15:  if  $\vec{b}_a \in \mathcal{P}_a$  then
16:    Ανάθεση Υπολογισμού Παραγώγου( $\vec{b}_a$ )
17:     $CPU_{\vec{b}_a} \leftarrow$  Διαθέσιμη()
18:    Continue // Πήγαινε στη γραμμή 7
19:  end if
20:  if Λήψη  $\frac{d\vec{F}}{db}$  then
21:     $\vec{b}_a \leftarrow \vec{b}_a - \eta \frac{d\vec{F}}{db}$  // Βελτίωση μέσω της μεθόδου απότομης καθόδου
22:    Ανάθεση Αξιολόγησης( $\vec{b}_a$ )
23:     $CPU_{\vec{b}_a} \leftarrow$  Μη διαθέσιμη()
24:    Continue // Πήγαινε στη γραμμή 7
25:  end if
26:  for  $p \leftarrow 1, N_{poles}$  do
27:     $A_p \leftarrow$  Υπολογισμός μέσης ηλικίας ( $A_k; k \in \mathcal{D}_p$ )
28:     $\phi_p \leftarrow$  Κυριαρχία ( $\mathcal{P}_a, \vec{F}(\vec{b}_p)$ )
29:     $Pr_p^{age} \leftarrow A_p / \max(A_1, \dots, A_{N_{poles}})$ 
30:     $Pr_p^{cost} \leftarrow \phi_p / (\phi_{max} - \phi_{min})$ 
31:     $Pr_p \leftarrow Pr_p^{age} Pr_p^{cost}$  // Ανανέωση προτεραιοτήτων
32:  end for
33:   $\mathcal{D}_p \leftarrow \text{Select}(Pr_p)$  // Επιλογή νέου δήμου
34:   $A_k \leftarrow$  Επιλογή ( $A_k, \mathcal{D}_p$ ) // Επιλογή νέου πράκτορα
35:  if IPE then
36:    // Δημιουργία και προ-αξιολόγηση  $N_{IPE}$  ατόμων
37:    for  $t \leftarrow 1, N_{IPE}$  do
38:       $\vec{b}_a^t \leftarrow$  Διασταύρωση & Μετάλλαξη( $\vec{b}_a^t, \mathcal{D}_p$ )
39:      RBF network  $\leftarrow$  Εκπαίδευση μεταπροτύπου()
40:       $\vec{F}(\vec{b}_a^t) \leftarrow$  Χρήση μεταπροτύπου()
41:    end for

```

---

---

```

42:    $\vec{b}_a \leftarrow \text{Επιλογή} (\vec{F}(\vec{b}_a^t))$ 
43:   else
44:      $\vec{b}_a \leftarrow \text{Διασταύρωση \& Μετάλλαξη}(\vec{b}_a, \mathcal{D}_p)$ 
45:   end if
46:   Ανάθεση Αξιολόγησης ( $\vec{b}_a$ )
47:    $CPU_{\vec{b}_a} \leftarrow \text{Μη διαθέσιμη}()$ 
48: end while

```

---

τα πολλών στόχων, ο αλγόριθμος SPEA II, χρησιμοποιείται για την απόδοση μιας βαθμωτής τιμής κόστους σε κάθε άτομο του πληθυσμού. Βάσει αυτής της τιμής κατατάσσονται τα άτομα του πληθυσμού και επιλέγονται αυτά τα οποία θα αποτελέσουν τα μη-κυριαρχούμενα μέλη του μετώπου Pareto, [150]. Αυτή η τιμή κόστους  $\phi = \phi(F_1, F_2, \dots, F_M)$  καθορίζει πρακτικά την κατεύθυνση βελτίωσης των λύσεων στο χώρο των στόχων. Η μέθοδος τοπικής ανίχνευσης στον AMAMA είναι επιθυμητό να βελτιώνει το εκάστοτε μέτωπο των μη-κυριαρχούμενων λύσεων ως προς όλους τους στόχους, όπως δηλαδή δείχνουν τα βέλη στο σχήμα 6.6 για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων. Για τον καθορισμό της κατεύθυνσης βελτίωσης είναι απαραίτητος ο υπολογισμός της κλίσης της βαθμωτής τιμής κόστους ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού,  $\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\vec{b}_a}$ .

Σε αυτό το σημείο προκύπτουν δύο βασικά προβλήματα. Το πρώτο αφορά στη δυσκολία υπολογισμού της  $\nabla\phi$ , δεδομένου ότι η  $\phi$  είναι μη-διαφορίσιμη συνάρτηση των  $F_i, i=1, \dots, M$ . Το δεύτερο έχει να κάνει με την ανάγκη της, κατά το δυνατό, μείωσης του κόστους υπολογισμού των παραγώγων. Στο πρώτο πρόβλημα δόθηκε λύση σε προηγούμενη διατριβή, [150], όπου προτάθηκε να υπολογισθεί το  $\nabla\phi$  και να χρησιμοποιηθεί για τον καθορισμό της κατεύθυνσης βελτίωσης σε προβλήματα βελτιστοποίησης πολλών στόχων κατά τον υβριδισμό του EA με τη συζυγή μέθοδο. Στην [150], επειδή η ακριβής συνάρτηση  $\phi$  δεν παραγωγίζεται, προτάθηκε η χρήση μιας συνάρτησης που προσεγγίζει πολύ καλά τη  $\phi$ , αλλά είναι παραγωγίσιμη, υπολογίζοντας με αυτό τον τρόπο το  $\frac{\partial\phi}{\partial F_i}$ . Αυτή η προσέγγιση χρησιμοποιείται και στην παρούσα διατριβή για τον υπολογισμό του  $\frac{\partial\phi}{\partial F_i}$  για κάθε άτομο του πληθυσμού, το οποίο υποδηλώνει τις κατευθύνσεις της βελτίωσης ως προς τα  $F_i$ . Κατά τη μέθοδο τοπικής ανίχνευσης, ανατίθεται σε κάθε άτομο μία τιμή  $\frac{\partial\phi}{\partial F_i}$ . Από τον κανόνα της αλυσίδας για το  $\nabla\phi$  προκύπτει

$$\nabla\phi = \sum_{i=1}^M \frac{\partial\phi}{\partial F_i} \frac{\partial F_i}{\partial\vec{b}_a} \quad (6.6)$$

Είναι προφανές ότι αν η συζυγής μέθοδος χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των παραγώγων  $\frac{\partial F_i}{\partial\vec{b}_a}$  για  $M$  στόχους, θα ήταν απαραίτητες  $M$  επίλυσεις των συζυγών εξισώσεων. Ανεξαρτήτως του αριθμού  $N$  των μεταβλητών σχεδιασμού, η επίλυση των συζυγών εξισώσεων κοστίζει περίπου όσο και η επίλυση των εξισώσεων κατάστασης. Επομένως, συμπεραίνει κανείς ότι το συνολικό κόστος μίας μόνο τοπικής βελτίωσης, συμπεριλαμβάνοντας τον υπολογισμό  $M$  παραγώγων, την ανανέωση του τρέχοντος ατόμου και, τέλος, την επαν-αξιολόγηση του νέου ατόμου μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά με το κόστος επίλυσης των εξισώσεων ροής  $M+1$  φορές, [150].

---

Στα κεφάλαια 3, 4 και 5, κατά την ανάπτυξη του συζυγούς προβλήματος, η συνάρτηση-στόχος που χρησιμοποιήθηκε στα προβλήματα δύο στόχων αφορούσε στο σχηματισμό μιας βαθμωτής συνάρτησης  $F$ , η οποία αποτελείται από το άθροισμα των επιμέρους συναρτήσεων-στόχων  $F_i$  πολλαπλασιασμένων με κατάλληλους συντελεστές βαρύτητας  $\omega_i$  που επιλέγει ο χρήστης

$$F = \sum_{i=1}^M \omega_i F_i \quad (6.7)$$

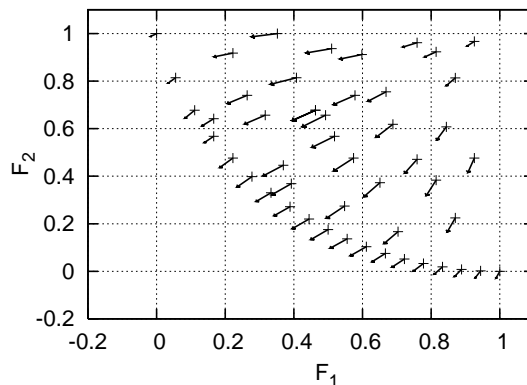
με παράγωγο ως προς  $\vec{b}_a$

$$\nabla F = \sum_{i=1}^M \omega_i \frac{\partial F_i}{\partial \vec{b}_a} \quad (6.8)$$

Για τη μείωση του κόστους της μεθόδου τοπικής ανίχνευσης, λαμβάνοντας υπόψη τις εξισώσεις 6.6 και 6.8, στην παρούσα διατριβή προτείνεται η χρήση μίας βαθμωτής συνάρτησης  $F$  στην πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση με τους συντελεστές βαρύτητας να ισούνται με τις παραγώγους της συνάρτησης  $\phi$  του αλγορίθμου SPEA II δηλαδή

$$\omega_i = \frac{\partial \phi}{\partial F_i} \quad (6.9)$$

Οι συντελεστές  $\omega_i$  υπολογίζονται δυναμικά για κάθε άτομο του πληθυσμού βάσει της σχέσης 6.9. Με αυτόν τον τρόπο, απαιτείται πλέον μία μόνο επίλυση των συζυγών εξισώσεων χρησιμοποιώντας τα  $\omega_i$  που παρέχει ο ΕΑ στην αιτιοκρατική μέθοδο. Με αυτό τον τρόπο, εκτός της μείωσης του υπολογιστικού κόστους, υπάρχει και το θετικό στοιχείο ότι επιχειρείται βελτίωση των ατόμων προς τη σωστή κατεύθυνση (κατεύθυνση βελτίωσης όλων των στόχων). Στο σχήμα 6.6, για ένα πρόβλημα δύο στόχων φαίνονται τα διανύσματα των παραγώγων  $\frac{\partial \phi}{\partial F_1}$  και  $\frac{\partial \phi}{\partial F_2}$  τα οποία αποτελούν τους συντελεστές βαρύτητας  $\omega_1$  και  $\omega_2$  που χρησιμοποιούνται στη βαθμωτή συνάρτηση  $F$ , όπως υπολογίστηκαν από τη διαφορίση της συνάρτησης  $\phi$  του αλγορίθμου SPEA II. Με αυτόν τον τρόπο, το συνολικό υπολογιστικό κόστος μίας μόνο τοπικής βελτίωσης στον AMAMA ισούται με δύο “ισοδύναμες” επιλύσεις των εξισώσεων της ροής (μία των συζυγών εξισώσεων για τον υπολογισμό της παραγώγου και μία των εξισώσεων της ροής για την αξιολόγηση του νέου ατόμου) ανεξαρτήτως του αριθμού των στόχων, αντί των  $M+1$  επιλύσεων.



**Σχήμα 6.6:** Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων. Τα διανύσματα των παραγώγων  $\frac{\partial \phi}{\partial F_1}$  και  $\frac{\partial \phi}{\partial F_2}$  τα οποία αποτελούν τους συντελεστές βαρύτητας  $w_1$  και  $w_2$  που χρησιμοποιούνται στη βαθμωτή συνάρτηση  $F$ , όπως υπολογίστηκαν από τη διαφορά της συνάρτησης  $\phi$  του αλγορίθμου SPEA II για ένα πρόβλημα δύο στόχων.

## 6.5 Πιστοποίηση-Εφαρμογές

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται εφαρμογές για την πιστοποίηση του AMAMA. Αρχικά, επιλύονται δύο προβλήματα ελαχιστοποίησης μαθηματικών συναρτήσεων, ενός και δύο στόχων αντίστοιχα, τα οποία λόγω χαμηλού υπολογιστικού κόστους κατέστη δυνατό να επαναληφθούν πολλές φορές ώστε να επιβεβαιωθεί η απόδοση του αλγορίθμου. Και στα δύο προβλήματα, οι βελτιστοποιήσεις επαναλαμβάνονται 30 φορές, με διαφορετικές κλήσεις της γεννήτριας τυχαίων αριθμών (Random Number Generator, RNG), δηλαδή με διαφορετική αρχικοποίηση του πληθυσμού κάθε φορά, υπολογίζοντας τη μέση απόδοση που προκύπτει από τις βελτιστοποιήσεις. Εδώ, ειδικά, για τη μέθοδο τοπικής ανίχνευσης, οι παράγωγοι των συναρτήσεων-στόχων υπολογίζονται αναλυτικά, θεωρώντας όμως ότι ο υπολογισμός αυτός κοστίζει όσο και ο υπολογισμός των συναρτήσεων-στόχων, δηλαδή ως να χρησιμοποιείτο η συζυγής μέθοδος.

Στη συνέχεια, εφαρμόζεται ο AMAMA για το σχεδιασμό μιας 2Δ πτερύγωσης ενός συμπίεστη καθώς και το σχεδιασμό των αυλών ενός εναλλάκτη κελύφους/αυλών. Σε όλες τις εφαρμογές, μεταξύ άλλων, παρουσιάζεται και η σύγκριση του AMAMA με τον AMAEA. Στα προβλήματα δύο στόχων, κατά τη μέθοδο τοπικής ανίχνευσης χρησιμοποιείται η σύνθεση των στόχων σε ενιαία βαθμωτή συνάρτηση και παρουσιάζονται οι συντελεστές βαρύτητας, οι οποίοι υπολογίζονται ως  $w_i = \frac{\partial \phi}{\partial F_i}$ , ώστε να αξιολογηθεί η συμβολή τους στην απόδοση του AMAMA.

### 6.5.1 Μαθηματικές Συναρτήσεις

#### Συνάρτηση Ackley

Η πρώτη εφαρμογή συνίσταται στην ελαχιστοποίηση της τιμής της συνάρτησης που προτάθηκε από τον Ackley, [5], για  $N = 20$  βαθμούς ελευθερίας

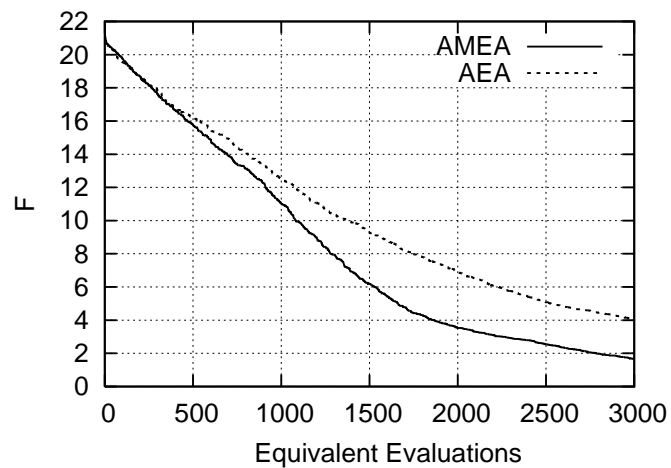
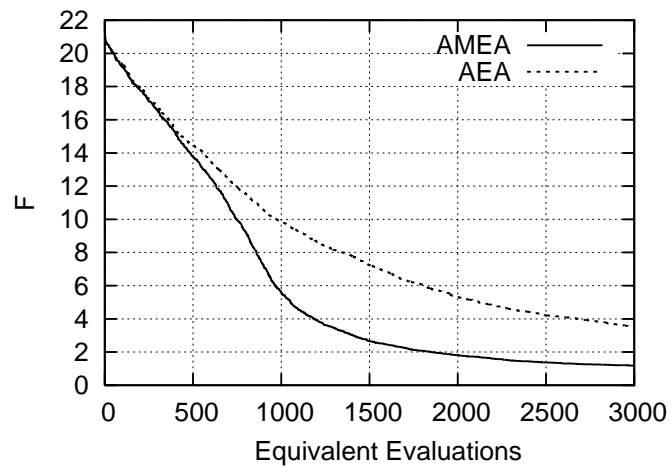
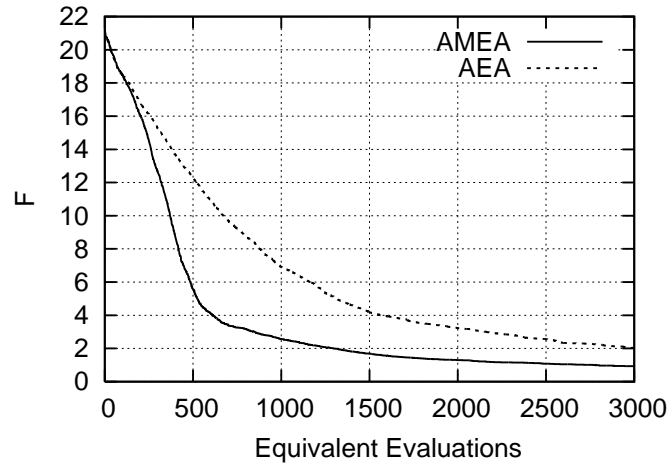
$$F(\vec{x}) = -20 \exp\left(0.2 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} x_i^2}{\mathcal{N}}}\right) - \exp\left(\frac{\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \cos(2\pi x_i)}{\mathcal{N}}\right) + 20 + e \quad (6.10)$$

όπου  $x_i \in [-32.768, 32.768]$  και το ολικό της ελάχιστο βρίσκεται στη θέση  $x_i = 0$ . Η βελτιστοποίηση επαναλαμβάνεται 30 φορές, επιλέγοντας ανώτατο όριο αξιολογήσεων τις 3000 κάθε φορά. Χρησιμοποιούνται 5, 20 και 40 *CPUs*, πραγματοποιώντας συνολικά  $3 \times 30 = 90$  βελτιστοποιήσεις. Και στις τρεις περιπτώσεις χρησιμοποιείται πλέγμα βάσης  $8 \times 8$  (48 πράκτορες και 16 πόλοι) ενώ τα μεταπρότυπα τα οποία χρησιμοποιούνται στον *AMAEA* και στον *AMAMA* ενεργοποιούνται μετά από τις πρώτες  $N_{IPE_{start}} = 100$  αξιολογήσεις, δηλαδή όταν έχουν καταχωρηθεί 100 εγγραφές στη βάση δεδομένων. Όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 6.2.2, το μέγεθος  $N_{IPE_{start}}$  ορίζεται από το χρήστη και επιλέγεται με βάση την πολυπλοκότητα του εκάστοτε προβλήματος. Για το λόγο αυτό, η πολυπλοκότητα των μαθηματικών εφαρμογών οδηγεί στην επιλογή μεγαλύτερου αριθμού ακριβών αξιολογήσεων πριν την ενεργοποίηση της προσεγγιστικής προ-αξιολόγησης σε σχέση με τις μη-μαθηματικές εφαρμογές, όπως θα φανεί και στη συνέχεια. Κατά την προσεγγιστική προ-αξιολόγηση προκρίνονται  $N_{IPE} = 3$  άτομα για αξιολόγηση με τα μεταπρότυπα με σκοπό την επιλογή ενός εξ' αυτών που θα επαν-αξιολογηθεί με το ακριβές λογισμικό.

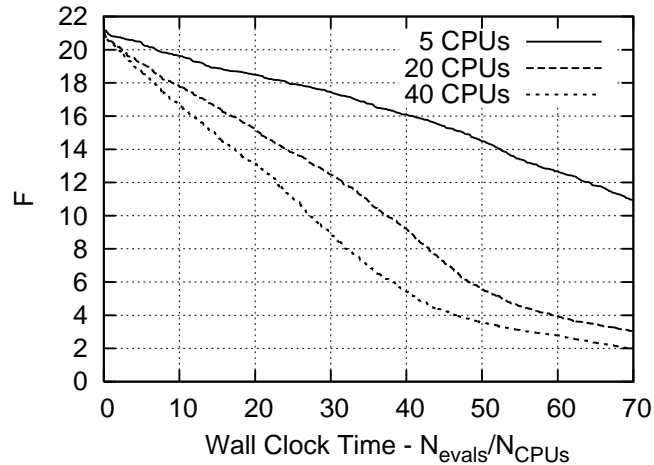
Η μέση σύγκλιση από τις 30 βελτιστοποιήσεις χρησιμοποιώντας τον *AMAEA* και τον *AMAMA* σε 5, 20 και 40 *CPUs*, αντίστοιχα, παρουσιάζεται στο σχήμα 6.7, όπου παρατηρείται ότι ο *AMAMA* επιτυγχάνει καλύτερη μέση τιμή της συνάρτησης συγκρινόμενος με τον *AMAEA* ανεξαρτήτως του αριθμού των *CPUs*. Για την καλύτερη σύγκριση των δύο αλγορίθμων, ο πίνακας 6.2 συγκεντρώνει τις μέσες, ελάχιστες και μέγιστες τιμές καθώς και την τυπική απόκλιση της συνάρτησης-στόχου. Για τον έλεγχο των μέσων τιμών των δύο μεθόδων πραγματοποιούνται t-tests και συγκρίνονται οι τιμές οι οποίες υπολογίζονται από τα t-tests ( $t_0$ ) με την κρίσιμη (θεωρητική) τιμή ( $t_{th}$ ) που αντιστοιχεί στους δεδομένους αριθμούς δειγμάτων (30) για μία επιλεγμένη στάθμη εμπιστοσύνης (0.025). Οι κρίσιμες αυτές τιμές υπάρχουν σε βιβλία στατιστικής και πρέπει να ισχύει  $t_0 > t_{th}$  για να υπερτερεί ο *AMAMA* στη συγκρίσή του με τον *AMAEA*. Από τις τιμές  $t_0$  και  $t_{th}$  του πίνακα 6.2, είναι φανερό ότι ο προτεινόμενος *AMAMA* αποδίδει καλύτερα από τον κλασικό (ασύγχρονο) ανεξαρτήτως του αριθμού των *CPUs*. Συγκεκριμένα, οι τιμές  $t_0 = 6.367$  για τις 5,  $t_0 = 9.828$  για τις 20 και  $t_0 = 15.465$  για τις 40 *CPUs*, είναι μεγαλύτερες από την κρίσιμη τιμή  $t_{th} = 2.045$  αποδεικνύοντας ότι ο *AMAMA* είναι σημαντικά καλύτερος από τον *AMAEA*. Ο πίνακας 6.2 περιλαμβάνει επίσης το μέσο αριθμό των κλήσεων της μεθόδου τοπικής ανίχνευσης (LS, Local Search) που πραγματοποιούνται από τον *AMAMA*.

Στο σχήμα 6.8 παρουσιάζεται, σε αναλογία με το σχήμα 6.7, η μέση σύγκλιση του *AMAMA* στις 5, 20 και 40 *CPUs* ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων ανηγμένο με τον αριθμό των *CPUs* ( $N_{evals}/N_{CPUs}$ ), πραγματοποιώντας με αυτόν τον τρόπο σύγκριση ως προς το "χρόνο" που απαιτείται για την εύρεση της βέλτιστης λύσης με διαφορετικό αριθμό *CPUs*.





**Σχήμα 6.7:** Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης Ackley με  $\mathcal{N} = 20$  βαθμούς ελευθερίας. Η μέση σύγκλιση από τις 30 βελτιστοποιήσεις χρησιμοποιώντας τον *AMEA* και τον *AMAMA* σε 5, 20 και 40 *CPUs*.



**Σχήμα 6.8:** Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης Ackley με  $\mathcal{N} = 20$  βαθμούς ελευθερίας. Η μέση σύγκλιση του *AMAMA* στις 5, 20 και 40 *CPUs* ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων ανηγμένο με τον αριθμό των *CPUs* ( $N_{evals}/N_{CPUs}$ ).

**Πίνακας 6.2:** Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης Ackley με  $\mathcal{N} = 20$  βαθμούς ελευθερίας. Σύγκριση του *AMAEA* με τον *AMAMA* για τις 5, 20 και 40 *CPUs*.

	5 <i>CPUs</i>		20 <i>CPUs</i>		40 <i>CPUs</i>	
	AMAEA	AMAMA	AMAEA	AMAMA	AMAEA	AMAMA
$F_{mean}$	2.037	0.933	3.481	1.175	4.067	1.662
$F_{min}$	0.167	0.019	1.992	0.055	2.567	0.686
$F_{max}$	4.204	2.013	6.679	2.498	5.309	2.510
$s$	0.663	0.680	1.032	0.766	0.683	0.509
$t_0$		6.367		9.828		15.465
$t_{th}$		2.045		2.045		2.045
$LS$		107.4		97.6		61.2

### Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων ZDT3

Η δεύτερη μαθηματική εφαρμογή αφορά στην εύρεση του μετώπου Pareto του προβλήματος δύο στόχων ελαχιστοποιώντας τη συνάρτηση ZDT3, [164],

$$F_1(x) = x_1 F_2(x) = g(x_2, \dots, x_N), \quad h(F_1(x_1), g(x_2, \dots, x_N)) \quad (6.11)$$

όπου

$$g(x_2, \dots, x_N) = 1 + 9 \sum_{i=2}^N \frac{x_i}{N-1} h(F_1, g) = 1 - \sqrt{\frac{F_1}{g}} - \left(\frac{F_1}{g}\right) \sin(10\pi F_1) \quad (6.12)$$

όπου  $x_i \in [0, 1]$  με  $\mathcal{N} = 30$  μεταβλητές σχεδιασμού. Όπως και στην προηγούμενη εφαρμογή, πραγματοποιήθηκαν 30 βελτιστοποιήσεις με τους *AMAEA* και *AMAMA*,

**Πίνακας 6.3:** Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων ZDT3 με  $N = 30$  βαθμούς ελευθερίας. Σύγκριση των μέσων τιμών και των τυπικών αποκλίσεων του δείκτη υπερόγκου  $I_H$  από τις 30 βελτιστοποιήσεις καθώς και οι τιμές  $t_0$  που λαμβάνονται από τα t-tests ανάμεσα στον AMAEA και τον AMAMA.

	AMAEA	AMAMA	Ακριβές Μέτωπο
$I_H$	4.760	4.790	4.803
$s$	0.023	0.074	-
$t_0$		2.210	
$t_{th}$		2.045	

αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας πλέγμα βάσης  $6 \times 6$  (27 πράκτορες και 9 πόλοι) με ανώτατο επιτρεπτό όριο αξιολογήσεων τις 3000. Και στις δύο περιπτώσεις τα μεταπρότυπα εισάγονται στη βελτιστοποίηση μετά από 500 αξιολογήσεις με  $N_{IPE} = 4$  άτομα για προσεγγιστική προ-αξιολόγηση. Στο σχήμα 6.9 παρουσιάζεται η πορεία εξέλιξης των μετώπων των μη-κυριαρχούμενων λύσεων του AMAEA και του AMAMA αποτυπώνοντας τα μέτωπα μετά από 1000, 2000 και 3000 αξιολογήσεις. Τα μέτωπα αυτά αντιστοιχούν στο καλύτερο μέτωπο ανάμεσα στις 30 βελτιστοποιήσεις, σύμφωνα με το δείκτη υπερόγκου  $I_H$ , ο οποίος υπολογίστηκε με σημείο αναφοράς το  $(F_1, F_2) = (1, 5)$ .

Μετά από 2000 αξιολογήσεις, όπως φαίνεται στο σχήμα 6.9, το μέτωπο που υπολογίζεται με τον AMAMA προσεγγίζει πολύ καλύτερα το αναλυτικό μέτωπο Pareto σε σχέση με τον AMAEA, όντας πρακτικά πάνω στα αναλυτικά υπολογιζόμενα μέτωπα. Μετά από 3000 επαναλήψεις, το μέτωπο του AMAMA έχει εμπλουτιστεί με περισσότερα μέλη και δύσκολα ξεχωρίζει από το ακριβές μέτωπο, ενώ το μέτωπο χρησιμοποιώντας τον AMAEA δεν το έχει ακόμα προσεγγίσει. Στο σχήμα 6.10 παρουσιάζεται μια λεπτομέρεια του δεύτερου τμήματος του μετώπου των 3000 επαναλήψεων όπου είναι πιο ευδιάκριτο το ακριβές μέτωπο και τα μέλη του μετώπου που υπολογίζεται με το AMAMA.

Τα αποτελέσματα αυτά επιβεβαιώνονται και από το δείκτη υπερόγκου  $I_H$ . Στον πίνακα 6.3 παρουσιάζονται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του  $I_H$  για τις 30 βελτιστοποιήσεις καθώς και οι τιμές  $t_0$  και  $t_{th}$  που λαμβάνονται από τα t-tests για τη σύγκριση του AMAEA με τον AMAMA. Είναι εμφανές ότι ο AMAMA παρουσιάζει καλύτερη απόδοση από τον AMAEA.

### 6.5.2 Σχεδιασμός βέλτιστης 2Δ πτερύγωσης συμπίεστη

Η παρούσα εφαρμογή αφορά στο σχεδιασμό μιας πτερύγωσης συμπίεστη με στόχο τις ελάχιστες απώλειες ολικής πίεσης σε δεδομένες συνθήκες λειτουργίας/ροής. Η πτερύγωση έχει σταθερή γωνία κλίσης  $35^\circ$  και λόγο βήματος προς χορδή ίσο με 0.6. Ο σχεδιασμός γίνεται για γωνία εισόδου της ροής  $\alpha_1 = 52^\circ$  και αριθμό Reynolds βασισμένο στη χορδή  $Re_c = 9 \times 10^5$ . Η γεωμετρία της αεροτομής παραμετροποιείται χρησιμοποιώντας πολυώνυμα Bézier-Bernstein με 8 σημεία ελέγχου σε κάθε πλευρά της, σχήμα 6.12. Τα σημεία στην ακμή πρόσπτωσης και στην ακμή εκφυγής παραμένουν σταθερά ενώ τα υπόλοιπα μεταβάλλονται καταλήγοντας συνολικά σε 24 μεταβλητές σχεδιασμού.

Στην εφαρμογή αυτή επιβάλλονται γεωμετρικοί περιορισμοί σχετικά με τη γεωμετρία. Για την αποφυγή πολύ λεπτών αεροτομών επιβάλλονται περιορισμοί στο πάχος  $t$  της αεροτομής,

$$t(0.25c) \geq 0.05c, \quad t(0.50c) \geq 0.045c, \quad t(0.85c) \geq 0.017c$$

όπου  $c$  το μήκος της χορδής. Επιπλέον, στη στροφή της ροής που πραγματοποιεί η σχεδιαζόμενη πτερύγωση επιβάλλεται κάτω όριο ως εξής  $a_1 - a_2 \geq 22^\circ$ . Για την αξιολόγηση των υποψηφίων λύσεων χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό επίλυσης των εξισώσεων ασυμπίεστης ροής χρησιμοποιώντας το μοντέλο τύρβης Spalart-Allmaras, όπως παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 4.

Πραγματοποιούνται βελτιστοποιήσεις χρησιμοποιώντας τον AMAEA και τον AMAMA σε 20 και 40 *CPUs* με το ίδιο  $10 \times 10$  πλέγμα (75 πράκτορες και 25 πόλοι). Το μεταπρότυπο ενεργοποιείται μετά από 50 επαναλήψεις με  $N_{IPE} = 8$  άτομα. Στο σχήμα 6.11 γίνεται σύγκριση της πορείας σύγκλισης του AMAEA και AMAMA για 20 και 40 *CPUs*. Είναι φανερό ότι, ανεξαρτήτως του αριθμού των *CPUs*, ο AMAMA παρουσιάζει καλύτερη απόδοση από τον AMAEA σε όλη τη διάρκεια της εξέλιξης της βελτιστοποίησης. Στο σχήμα 6.11 οι λύσεις οι οποίες προέρχονται από τη μέθοδο τοπικής ανίχνευσης σημειώνονται με τετράγωνο.

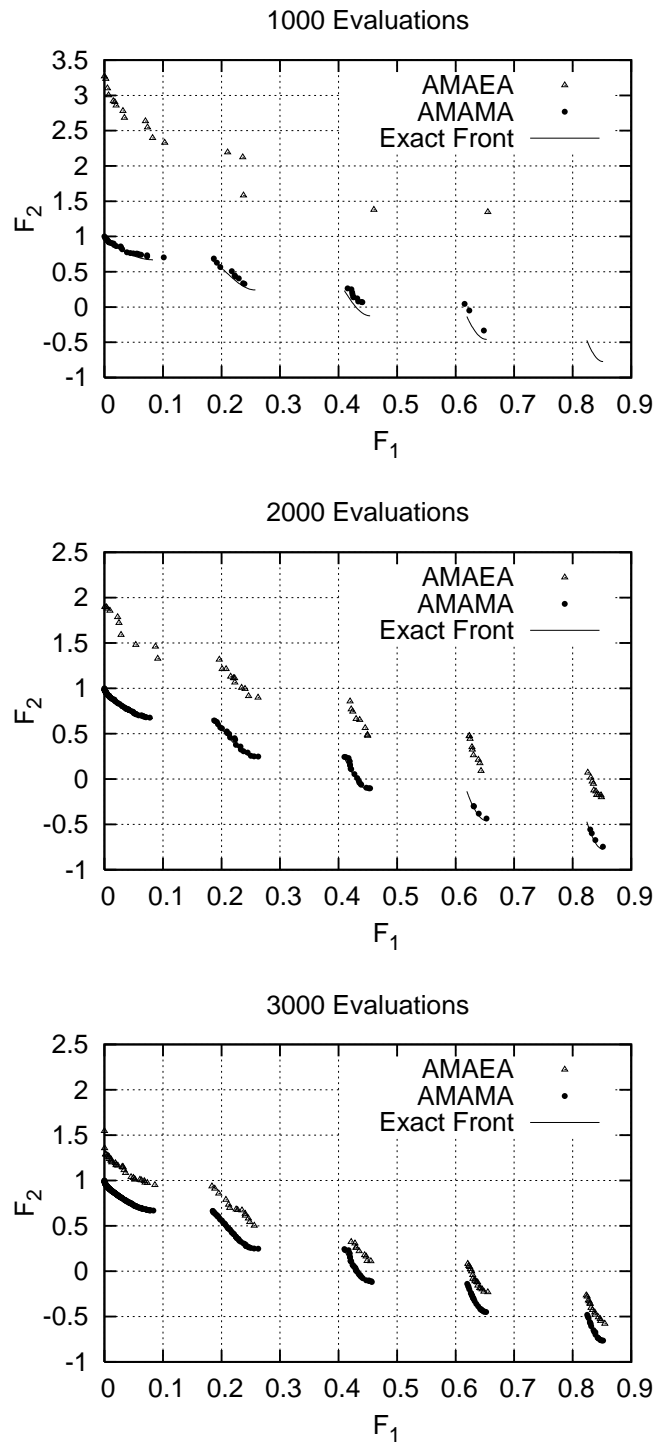
Στον πίνακα 6.4 παρουσιάζονται στατιστικά σχετικά με την απόδοση της μεθόδου τοπικής ανίχνευσης στις 20 και 40 *CPUs*. Και στις δύο περιπτώσεις πραγματοποιούνται 300 ισοδύναμες αξιολογήσεις. Για τις 20 *CPUs*, 266 από αυτές τις αξιολογήσεις αντιστοιχούν στην αξιολόγηση της συνάρτησης-στόχου, δηλαδή πρόκειται για 266 επιλύσεις της ροής, 17 αντιστοιχούν σε κλήσεις της μεθόδου τοπικής ανίχνευσης, δηλαδή 17 επιλύσεις των συζυγών εξισώσεων και 17 επαν-αξιολογήσεις της συνάρτησης-στόχου. Το σύνολο των δράσεων της μεθόδου τοπικής ανίχνευσης χαρακτηρίζονται ως επιτυχημένες με την έννοια ότι τα άτομα που προέρχονται από τη μέθοδο τοπικής βελτίωσης είναι πραγματικά καλύτερα από τα αρχικά άτομα. Παρόλα αυτά είναι σημαντικό να διερευνηθεί αν το άτομο που δημιουργείται από τη μέθοδο τοπικής βελτίωσης είναι καλύτερο από το μέχρι εκείνη τη στιγμή βέλτιστο ή άλλοι επεξεργαστές μπορεί να έχουν επιστρέψει, εν τω μεταξύ, καλύτερα άτομα. Τα στατιστικά στοιχεία του πίνακα 6.4 δείχνουν ότι το 42% των ατόμων που προέρχονται από τη μέθοδο τοπικής ανίχνευσης σε 20 *CPUs* αποτελούν και το καθολικό βέλτιστο εκείνη τη στιγμή. Το αντίστοιχο ποσοστό για τις 40 *CPUs* είναι 55%.

Σύμφωνα με τον πίνακα 6.4 και το σχήμα 6.11, αυξάνοντας τον αριθμό των *CPUs*, πραγματοποιούνται λιγότερες κλήσεις της μεθόδου τοπικής ανίχνευσης και αυτό επηρεάζει ελάχιστα τη βέλτιστη τιμή της συνάρτησης-στόχου, η οποία υπολογίζεται μετά από 300 αξιολογήσεις. Παρόμοια αποτελέσματα παρουσιάστηκαν κατά την ελαχιστοποίηση της χαμηλού υπολογιστικού κόστους συνάρτησης Ackley σε 5, 20 και 40 *CPUs*. Όμως, στην υψηλότερου κόστους εφαρμογή, η επίδραση του αριθμού των *CPUs* στη βέλτιστη λύση είναι ελάχιστη.

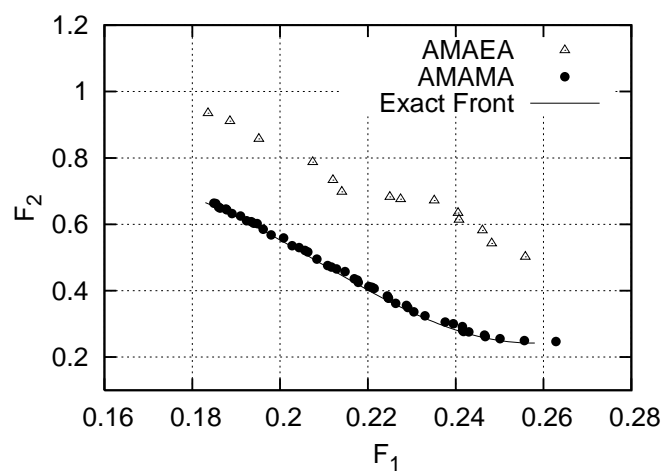
Το βέλτιστο σχήμα της αεροτομής που προέρχεται από τη χρήση του AMAMA σε 20 *CPUs* και το πεδίο του μέτρου της ταχύτητας της βέλτιστης αυτής πτερύγωσης φαίνονται στο σχήμα 6.13.

**Πίνακας 6.4:** Σχεδιασμός βέλτιστης 2Δ περύγωσης συμπίεστη. Στατιστικά σχετικά με την απόδοση της μεθόδου τοπικής ανίχνευσης σε 20 και 40 *CPU*s.

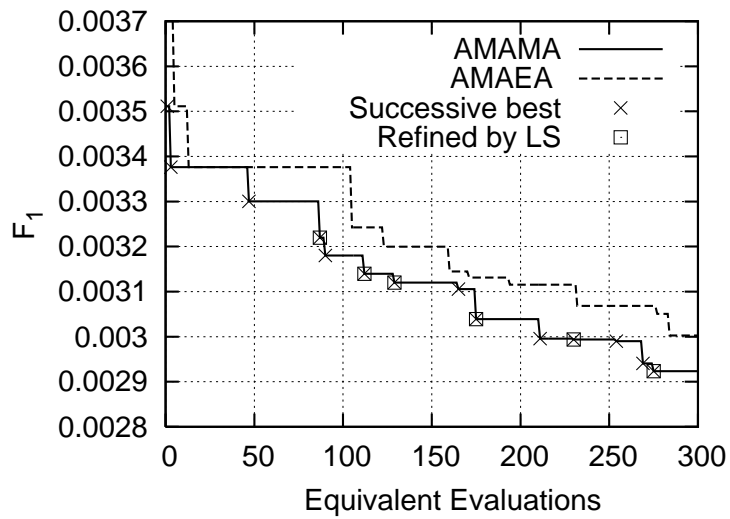
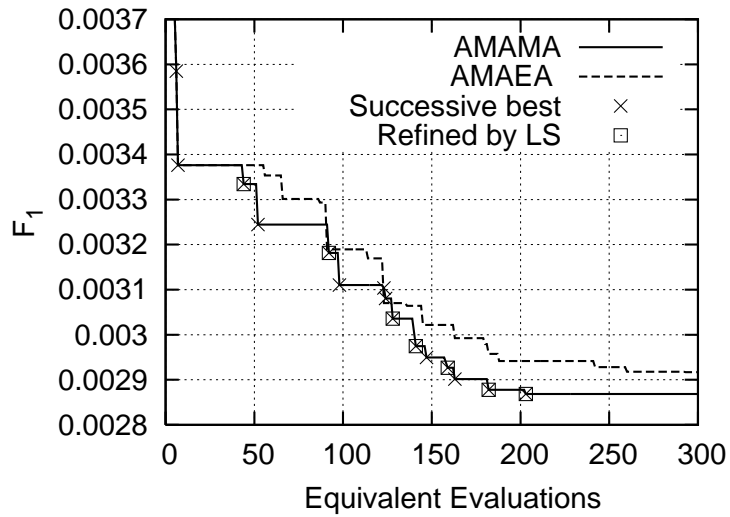
	20 <i>CPU</i> s	40 <i>CPU</i> s
Σύνολο αξιολογήσεων	300	300
Κλήσεις της μεθόδου τοπικής ανίχνευσης	17	11
Κλήσεις της μεθόδου τοπικής ανίχνευσης που κατέληξαν σε καλύτερο άτομο από αυτό με το οποίο ξεκίνησε η τοπική ανίχνευση	17	11
Κλήσεις της μεθόδου τοπικής ανίχνευσης που έδωσαν ένα νέο “τρέχον βέλτιστο”	7/17	6/11



**Σχήμα 6.9:** Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων ZDT3 με  $\mathcal{N} = 30$  βαθμούς ελευθερίας. Πορεία μετώπου των μη-κυριαρχούμενων λύσεων κατά τη διάρκεια της βελτιστοποίησης, στις 1000, 2000 και 3000 αξιολογήσεις, χρησιμοποιώντας τον AMAEA και τον AMAMA. Μετά τις 3000 αξιολογήσεις, το μέτωπο του AMAMA δύσκολα ξεχωρίζει από το ακριβές-αναλυτικό μέτωπο, που φαίνεται με τη συνεχή γραμμή.

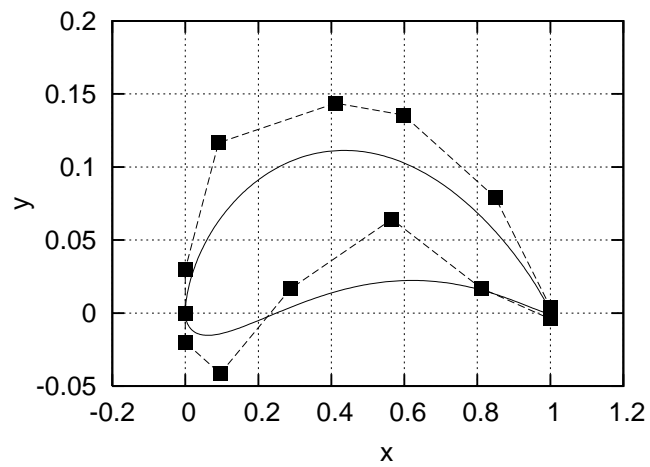


**Σχήμα 6.10:** Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων ZDT3 με  $\mathcal{N} = 30$  βαθμούς ελευθερίας. Λεπτομέρεια του δεύτερου τμήματος του τελικού μετώπου του AMAMA μετά από 3000 αξιολογήσεις.

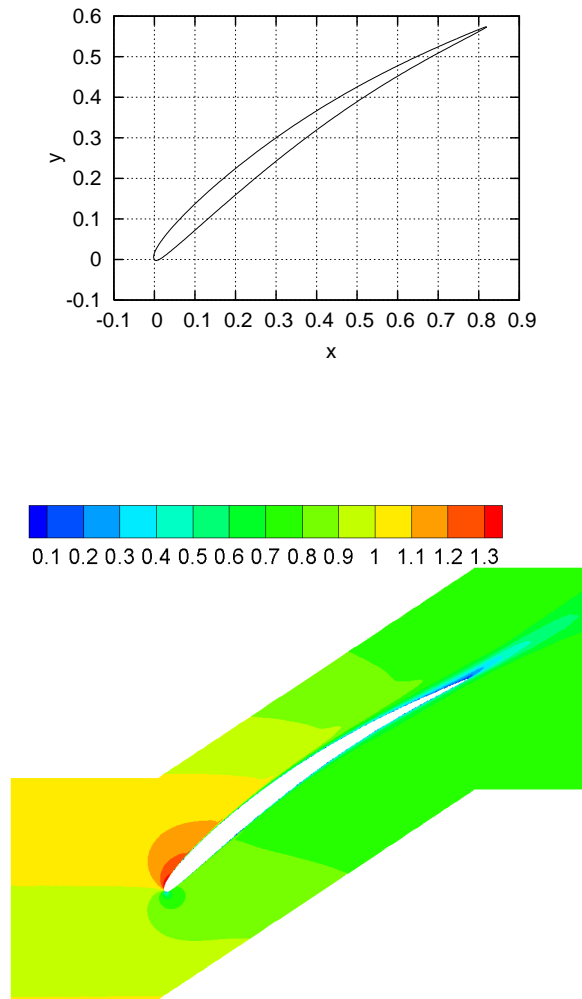


**Σχήμα 6.11:** Σχεδιασμός βέλτιστης 2Δ πτερύγωσης συμπίεστη. Η πορεία της σύγκλισης με τον AMAEA και τον AMAMA σε 20 CPUs (πάνω) και 40 CPUs (κάτω) καθώς και οι λύσεις που προέρχονται από τη μέθοδο τοπικής ανίχνευσης (συμβολίζονται με τετράγωνο) σε σύγκριση με τα διαδοχικά βέλτιστα (συμβολίζονται με x) κατά τη διάρκεια της εξέλιξης.

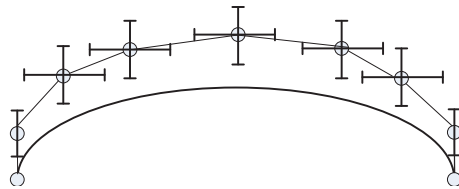




**Σχήμα 6.12:** Σχεδιασμός βέλτιστης 2Δ πτερύγωσης συμπίεστη. Αεροτομή και σημεία ελέγχου Bézier της αρχικής γεωμετρίας σε μηδενική γωνία κλίσης. Οι δύο άξονες δεν είναι σε ίδια κλίμακα. Η παραμετροποίηση της μορφής της αεροτομής γίνεται σε μηδενική γωνία κλίσης.



**Σχήμα 6.13:** Σχεδιασμός βέλτιστης 2Δ πτερύγωσης συμπίεστη. Το βέλτιστο σχήμα (πάνω) που αποκτήθηκε από το AMAMA στις 20 *CPU*s και το πεδίο του μέτρου της ταχύτητας (κάτω) που αντιστοιχεί σε αυτήν την πτερύγωση συμπίεστη.

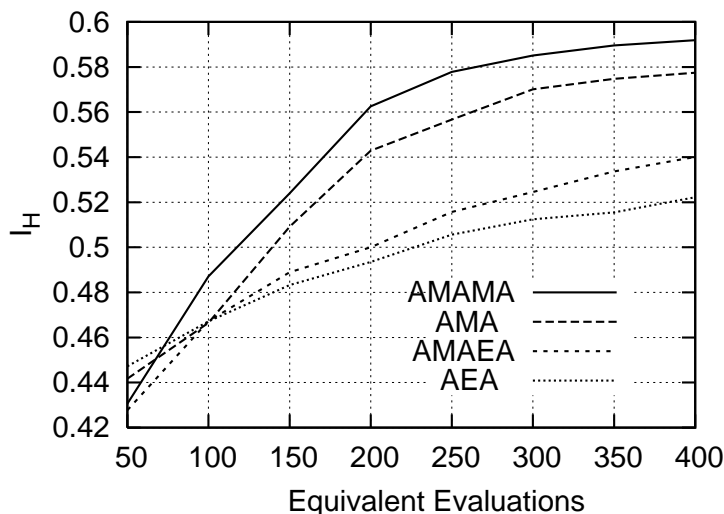


**Σχήμα 6.14:** Σχεδιασμός βέλτιστου εναλλάκτη θερμότητας. Παραμετροποίηση της άνω πλευράς του σχήματος του αγωγού. Η παραμετροποίηση της κάτω πλευράς καθορίζεται αυτόματα από την ως προς τον οριζόντιο άξονα συμμετρία. Οι μεταβλητές σχεδιασμού αντιστοιχούν στις συνιστώσες των σημείων ελέγχου Bézier.

### 6.5.3 Σχεδιασμός βέλτιστου εναλλάκτη θερμότητας

Η εφαρμογή αυτή αφορά στη βελτιστοποίηση ενός εναλλάκτη κελύφους/αυλών και συγκεκριμένα στο σχεδιασμό βέλτιστων αυλών του εναλλάκτη με ελάχιστες απώλειες ολικής πίεσης,  $F_1$ , και μέγιστη μεταφορά θερμότητας,  $F_2$ , [64]. Οι συναρτήσεις-στόχοι  $F_1$  και  $F_2$  ορίστηκαν στις εξισώσεις 3.20 και 3.21 της ενότητας 3. Η γεωμετρία των αγωγών, η οποία είναι όμοια με αυτήν της εφαρμογής 4.6.2, παραμετροποιείται χρησιμοποιώντας πολυώνυμα Bézier-Bernstein με 8 σημεία ελέγχου σε κάθε πλευρά, όπως φαίνεται στο σχήμα 6.14 που επαναλαμβάνεται εδώ για λόγους εποπτικών. Δεδομένου ότι 4 από αυτά μπορούν να μεταβάλλονται και στις δύο κατευθύνσεις, ενώ το δεύτερο και το έβδομο μεταβάλλονται μόνο κατά την κάθετη στη χορδή κατεύθυνση, συνολικά χρησιμοποιούνται 10 μεταβλητές σχεδιασμού. Για την αποφυγή σχηματισμού πολύ λεπτών αγωγών, επιβάλλονται κατάλληλα κατώτερα όρια των μεταβλητών σχεδιασμού  $\vec{b}$ . Το ρευστό εισέρχεται στο χωρίο με θερμοκρασία  $T_{inlet} = 293K$  και ο αριθμός Reynolds της ροής ισούται με  $Re = 140$ . Στο εσωτερικό των αγωγών θεωρείται ότι ρέει ρευστό υψηλής θερμοκρασίας, διατηρώντας σταθερή τη θερμοκρασία,  $T_{wall} = 353K$ , στην επιφάνειά τους ανεξαρτήτως μεταβολών του σχήματος των αγωγών κατά τη βελτιστοποίηση και κατ' επέκταση της παροχής του ρευστού που ρέει στο εσωτερικό τους. Ως λογισμικό αξιολόγησης χρησιμοποιήθηκε και πάλι το λογισμικό επίλυσης των εξισώσεων ασυμπίεστης ροής του κεφαλαίου 2.

Η περίπτωση αυτή μελετήθηκε χρησιμοποιώντας όλες τις ασύγχρονες παραλλαγές που προαναφέρθηκαν, ήτοι τους AEA, AMAEA, AMA και AMAMA, σε ένα πλέγμα βάσης  $10 \times 10$  (75 πράκτορες και 25 πόλοι) σε 40 CPUs. Όσον αφορά στις μεταβλητές του μεταπροτύπου,  $N_{IPE} = 7$  άτομα προ-αξιολογούνται πριν αξιολογηθούν με το ακριβές λογισμικό (επίλυσης των εξισώσεων της ροής) και αυτό ενεργοποιείται μετά από τις πρώτες 50 ακριβείς αξιολογήσεις. Πραγματοποιήθηκαν 5 βελτιστοποιήσεις με διαφορετικές κλήσεις της γεννήτριας τυχαίων αριθμών για όλες τις παραλλαγές του αλγορίθμου. Η εξέλιξη του μέσου δείκτη υπερόγκου ( $I_H$ ) που υπολογίζεται από τις 5 βελτιστοποιήσεις φαίνεται στο σχήμα 6.15. Είναι φανερό ότι ο AMAMA υπερτερεί και πάλι όλων των άλλων παραλλαγών. Η συμβολή της μεθόδου τοπικής ανίχνευσης είναι εμφανής με και χωρίς τη χρήση μεταπροτύπων.

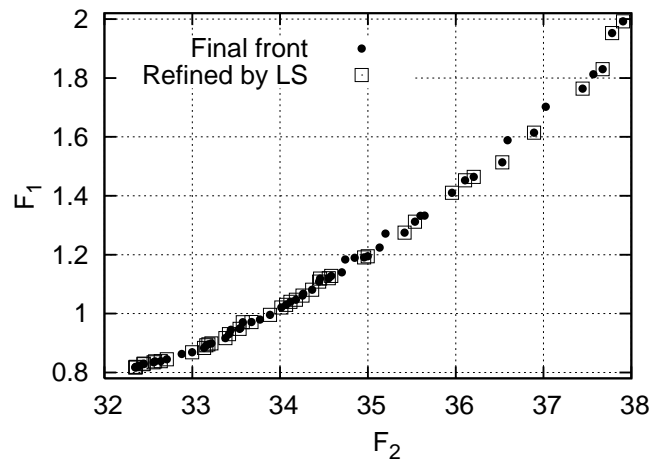


**Σχήμα 6.15:** Σχεδιασμός βέλτιστου εναλλάκτη θερμότητας. Εξέλιξη του δείκτη υπερόγκου  $I_H$  χρησιμοποιώντας όλες τις ασύγχρονες παραλλαγές που προαναφέρθηκαν, ήτοι τους AEA, AMAEA, AMA και AMAMA.

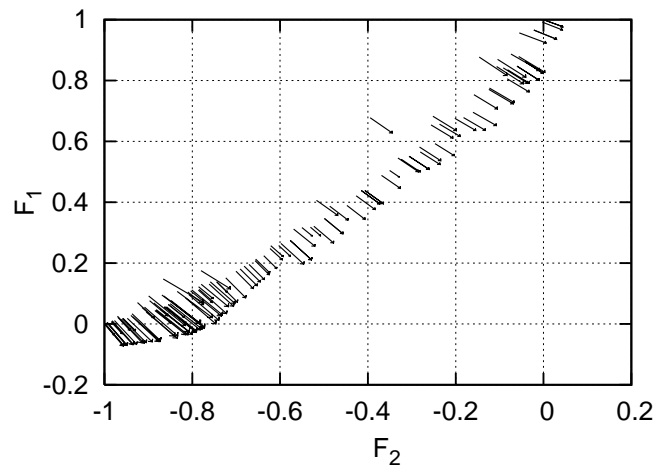
Στο σχήμα 6.16 παρουσιάζεται το μέτωπο των μη-κυριαρχούμενων λύσεων μίας από τις 3 βελτιστοποιήσεις μετά από 400 αξιολογήσεις. Από τις 400 αυτές αξιολογήσεις του AMAMA, 180 αντιστοιχούν σε αξιολόγηση των συναρτήσεων-στόχων, δηλαδή 180 κλήσεις του κώδικα επίλυσης της ροής, και 110 σε κλήσεις της μεθόδου τοπικής ανίχνευσης, δηλαδή 110 κλήσεις της συζυγούς μεθόδου και 110 επαν-αξιολογήσεις των συναρτήσεων-στόχων. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο υπολογισμός των τιμών των δύο στόχων απορρέει από μία επίλυση των εξισώσεων της ροής. 73 από τις 110 κλήσεις της μεθόδου τοπικής ανίχνευσης οδηγούν σε βελτιωμένες λύσεις οι οποίες γίνονται μέλη του εκάστοτε μετώπου των μη-κυριαρχούμενων λύσεων κατά τη διάρκεια της βελτιστοποίησης. Περισσότερα από 70% των μελών του τελικού μετώπου των μη-κυριαρχούμενων λύσεων, δηλαδή 43 από τα 60 μέλη, έχουν προέλθει απ' ευθείας από τη μέθοδο τοπικής ανίχνευσης. Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώνει τη σημαντική συμβολή της μεθόδου τοπικής ανίχνευσης στον ασύγχρονο EA. Στο σχήμα 6.16 τα 43 αυτά μέλη σημειώνονται με τετράγωνο.

Η κατάλληλη επιλογή των συντελεστών βαρύτητας ως  $\omega_i = \frac{\partial \phi}{\partial F_i}$  και η χρήση τους για τη σύνθεση των δύο στόχων σε μία ενιαία βαθμωτή συνάρτηση συνέβαλε καθοριστικά στην αύξηση της απόδοσης του AMAMA. Τα διανύσματα των παραγώγων  $\frac{\partial \phi}{\partial F_1}$  και  $\frac{\partial \phi}{\partial F_2}$  όπως υπολογίστηκαν για τα μέλη του τελικού πληθυσμού παρουσιάζονται στο σχήμα 6.17 και είναι φανερό ότι ταυτίζονται με την κατεύθυνση βελτίωσης των λύσεων.

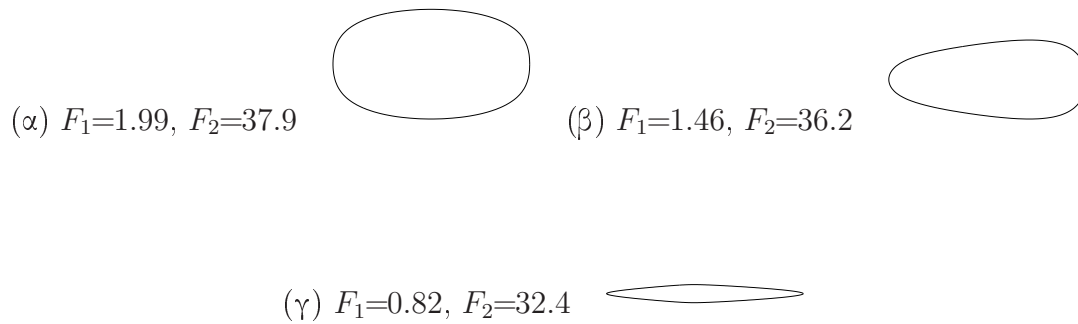
Όσον αφορά το σχήμα των βέλτιστων αγωγών, επιλέχθηκαν τρεις λύσεις του μετώπου του σχήματος 6.16 και τα σχήματά τους φαίνονται στο σχήμα 6.18, ενώ το πεδίο της θερμοκρασίας για τους αγωγούς (α), (β) και (γ) του σχήματος 6.18 φαίνονται στα σχήματα 6.19, 6.20 και 6.21, αντίστοιχα.



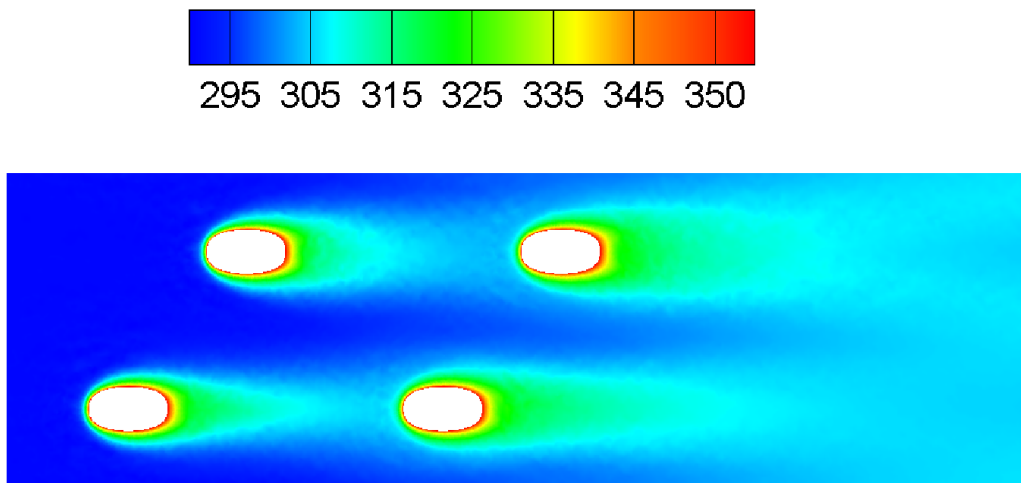
**Σχήμα 6.16:** Σχεδιασμός βέλτιστου εναλλάκτη θερμότητας. Μέτωπο των μη-κυριαρχούμενων λύσεων μετά από 400 επαναλήψεις. Τα μέλη του μετώπου που προέρχονται από τη μέθοδο τοπικής ανίχνευσης σημειώνονται με τετράγωνο κενό.



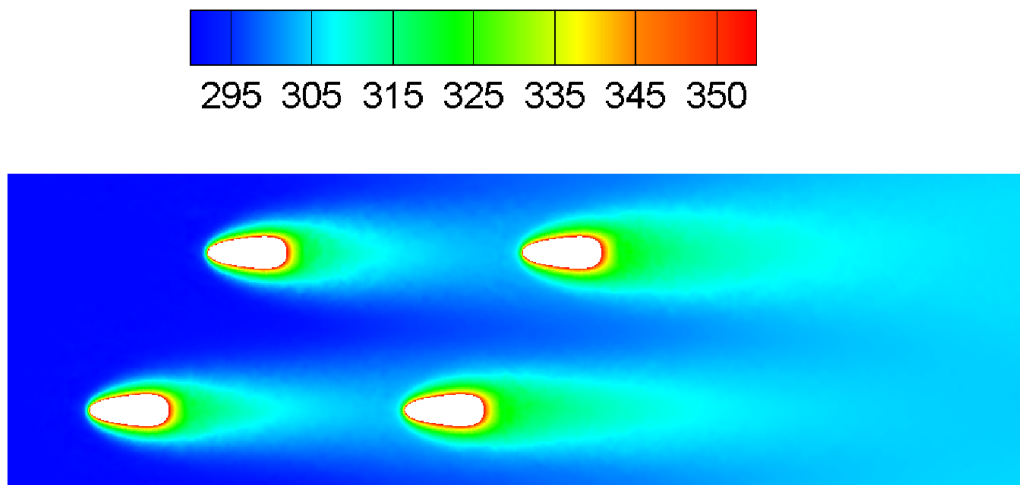
**Σχήμα 6.17:** Σχεδιασμός βέλτιστου εναλλάκτη θερμότητας. Τα διανύσματα των παραγώγων  $\frac{\partial \phi}{\partial F_1}$  και  $\frac{\partial \phi}{\partial F_2}$  τα οποία αποτελούν τους συντελεστές βαρύτητας  $w_1$  και  $w_2$  που συνθέτουν τη βαθμωτή συνάρτηση  $F$ , όπως υπολογίστηκαν για τα μέλη του τελικού πληθυσμού.



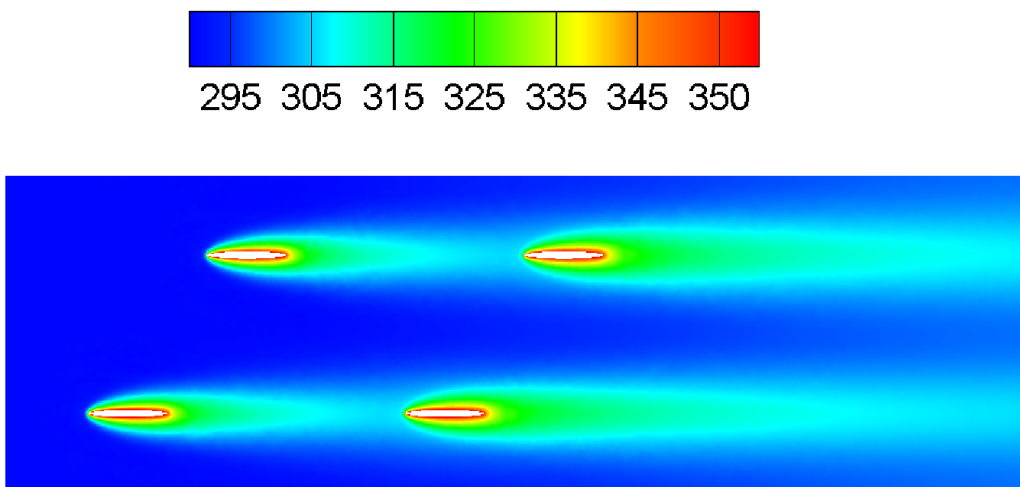
**Σχήμα 6.18:** Σχεδιασμός βέλτιστου εναλλάκτη θερμότητας. Τρία σχήματα του αγωγού που αντιστοιχούν σε τρεις μη-κυριαρχούμενες λύσεις του μετώπου, επιλεγμένες από το σχήμα 6.16: (α) ένα σχήμα αγωγού με μέγιστη μεταφορά θερμότητας και υψηλές απώλειες ολικής πίεσης και (γ) ένα σχήμα αγωγού με ελάχιστες απώλειες ολικής πίεσης και μικρή μεταφορά θερμότητας. Οι (α) και (γ) αγωγοί πρακτικά αντιστοιχούν στα δύο άκρα του μετώπου του σχήματος 6.16 ενώ ο (β) αποτελεί μία λύση περίπου από το μέσο του μετώπου.



**Σχήμα 6.19:** Σχεδιασμός βέλτιστου εναλλάκτη θερμότητας. Το πεδίο της θερμοκρασίας για το βέλτιστο αγωγό (α) του σχήματος 6.18.



**Σχήμα 6.20:** Σχεδιασμός βέλτιστου εναλλάκτη θερμότητας. Το πεδίο της θερμοκρασίας για το βέλτιστο αγωγό ( $\beta$ ) του σχήματος 6.18.



**Σχήμα 6.21:** Σχεδιασμός βέλτιστου εναλλάκτη θερμότητας. Το πεδίο της θερμοκρασίας για το βέλτιστο αγωγό ( $\gamma$ ) του σχήματος 6.18.





## Κεφάλαιο 7

# Σχεδιασμός βέλτιστων συστημάτων μεταφοράς θερμότητας-Εφαρμογές Γεωθερμίας

Σε συνέχεια του κεφαλαίου των ασύγχρονων εξελικτικών αλγορίθμων (ΑΕΑ) και της χρήσης τους στο σχεδιασμό-βελτιστοποίηση συνιστωσών συστημάτων, όπως εναλλακτών θερμότητας και πτερυγώσεων στροβιλομηχανών, παρουσιάζεται, στο παρόν κεφάλαιο, η χρήση τους σε προβλήματα σχεδιασμού βέλτιστων συστημάτων μεταφοράς θερμότητας, με έμφαση στον τομέα της γεωθερμίας. Οι εφαρμογές αυτές συμπεριλαμβάνουν κύκλους παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας με χρήση γεωθερμίας και γεωθερμικές αντλίες θερμότητας.

Όσον αφορά στους κύκλους παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας με γεωθερμία, ο σχεδιασμός και η ανάπτυξη μιας πρότυπης μονάδας οργανικού κύκλου Rankine (Organic Rankine Cycle), χρησιμοποιώντας γεωθερμικά πεδία χαμηλής ενθαλπίας, αποτέλεσαν βασικό στόχο του έργου LOW-BIN, Efficient Low Temperature Geothermal Binary Power (FP6), του οποίου συντονιστής ήταν το ΚΑΠΕ. Το έργο απαίτησε τη συμβολή πολλών επιστημονικών ειδικοτήτων για το σχεδιασμό μιας βέλτιστης μονάδας. Η συμμετοχή της ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ (όπως αποτυπώνεται και στην παρούσα διατριβή) έγκειται στην παροχή τεχνογνωσίας ως προς τις μεθόδους βελτιστοποίησης για το σχεδιασμό μιας τέτοιας μονάδας, με στόχο τη μεγιστοποίηση του βαθμού απόδοσης και την ελαχιστοποίηση του κόστους κατασκευής της. Στην ίδια ενότητα παρουσιάζεται η πρότυπη μονάδα που κατασκευάστηκε και λειτουργεί στην πόλη Simbach (στα σύνορα Γερμανίας-Αυστρίας), ως αποτέλεσμα του προαναφερθέντος Ευρωπαϊκού Προγράμματος. Επίσης, η ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ και η παρούσα διατριβή ασχολείται στο πλαίσιο του έργου GROUND-MED, Advanced Ground Source Heat Pump Systems for Heating and Cooling in Mediterranean (FP7), του οποίου συντονιστής είναι το ΚΑΠΕ, με το σχεδιασμό μιας βέλτιστης γεωθερμικής αντλίας θερμότητας κάνοντας χρήση του ΑΕΑ.

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφονται η λειτουργία των μονάδων οργανικού κύκλου

καθώς και των γεωθερμικών αντλιών θερμότητας, ο αλγόριθμος που υπολοποιήθηκε για την αξιολόγηση τους από τον ΑΕΑ και παρουσιάζονται επίσης τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης.

## 7.1 Σχεδιασμός βέλτιστων κύκλων ηλεκτροπαραγωγής με χρήση γεωθερμίας

### 7.1.1 Κύκλοι ηλεκτροπαραγωγής με χρήση γεωθερμίας

Το πλέον συνηθισμένο κριτήριο για την ταξινόμηση των γεωθερμικών πόρων είναι η ενθαλπία των γεωθερμικών ρευστών, τα οποία λειτουργούν ως φορέας μεταφοράς της θερμότητας από τα βαθιά και θερμά πετρώματα προς την επιφάνεια. Τα γεωθερμικά ρευστά βρίσκονται σε αέρια (ατμός) ή υγρή (νερό) κατάσταση και διακρίνονται σε χαμηλής, μέσης και υψηλής ενθαλπίας, ανάλογα με το ενεργειακό τους περιεχόμενο και τις πιθανές μορφές αξιοποίησής τους. Σύμφωνα με τους Muffler and Cataldi, [100], τα γεωθερμικά ρευστά με θερμοκρασία χαμηλότερη των  $90^{\circ}\text{C}$  χαρακτηρίζονται ως χαμηλής ενθαλπίας ενώ θεωρούνται μέσης ενθαλπίας όταν η θερμοκρασία κυμαίνεται από  $90$  μέχρι  $150^{\circ}\text{C}$  και υψηλής ενθαλπίας όταν η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από  $150^{\circ}\text{C}$ .

Η παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας είναι η πιο σημαντική μορφή αξιοποίησης των γεωθερμικών πόρων. Ανάλογα με τη θερμοκρασία και την πίεση του γεωθερμικού ρευστού (δηλαδή την κατάσταση στην οποία βρίσκεται, ατμός ή νερό), έχουν αναπτυχθεί τρεις διαφορετικές τεχνολογίες για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας: (α) ξηρού ατμού (Dry-Steam Power Plant), (β) εκτόνωσης διφασικού ρευστού (Flash-Steam Power Plant) και (γ) δυαδικού κύκλου (Binary-Cycle Power Plant) ή κύκλου Rankine οργανικού ρευστού (Organic Rankine Cycle) ή κύκλου Kalina (Kalina Cycle), [37, 38]. Τονίζεται ότι για την εκμετάλλευση του γεωθερμικού ρευστού διανοίγονται, στις περιπτώσεις που χρειάζονται, δύο γεωτρήσεις, η παραγωγική γεώτρηση, από την οποία αντλείται το γεωθερμικό ρευστό και η γεώτρηση επανεισαγωγής, μέσω της οποίας επανεισάγεται το ρευστό μετά την απόδοση μέρους της θερμότητας του στο σύστημα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας. Ενώ οι τεχνολογίες ξηρού ατμού και εκτόνωσης διφασικού ρευστού χρησιμοποιούνται για ρευστά υψηλής ενθαλπίας, οι μονάδες δυαδικού κύκλου αξιοποιούν ρευστά χαμηλής και μέσης ενθαλπίας. Οι τεχνολογίες ξηρού ατμού και εκτόνωσης διφασικού ρευστού περιγράφονται συνοπτικά στη συνέχεια. Αυτή του δυαδικού κύκλου περιγράφεται πιο αναλυτικά στην επόμενη παράγραφο, μιας και αποτελεί το αντικείμενο της βελτιστοποίησης που πραγματοποιήθηκε στην παρούσα διατριβή.

**Σύστημα ξηρού ατμού (Dry-Steam Power Plant).** Τα συστήματα ξηρού ατμού χρησιμοποιούν γεωθερμικό ρευστό υψηλής ενθαλπίας, το οποίο εξέρχεται από την παραγωγική γεώτρηση σε κατάσταση ξηρού ή υπέρθερμου ατμού (θερμοκρασίας μεγαλύτερης από  $260^{\circ}\text{C}$ ). Με τον όρο ξηρό ατμό αναφερόμαστε στον κορεσμένο ατμό χωρίς υδρατμούς. Αυξάνοντας τη θερμοκρασία του ξηρού ατμού και διατηρώντας την πίεση σταθερή, ο ξηρός ατμός μετατρέπεται σε υπέρθερμο ατμό. Ο ατμός αυτός οδηγεί

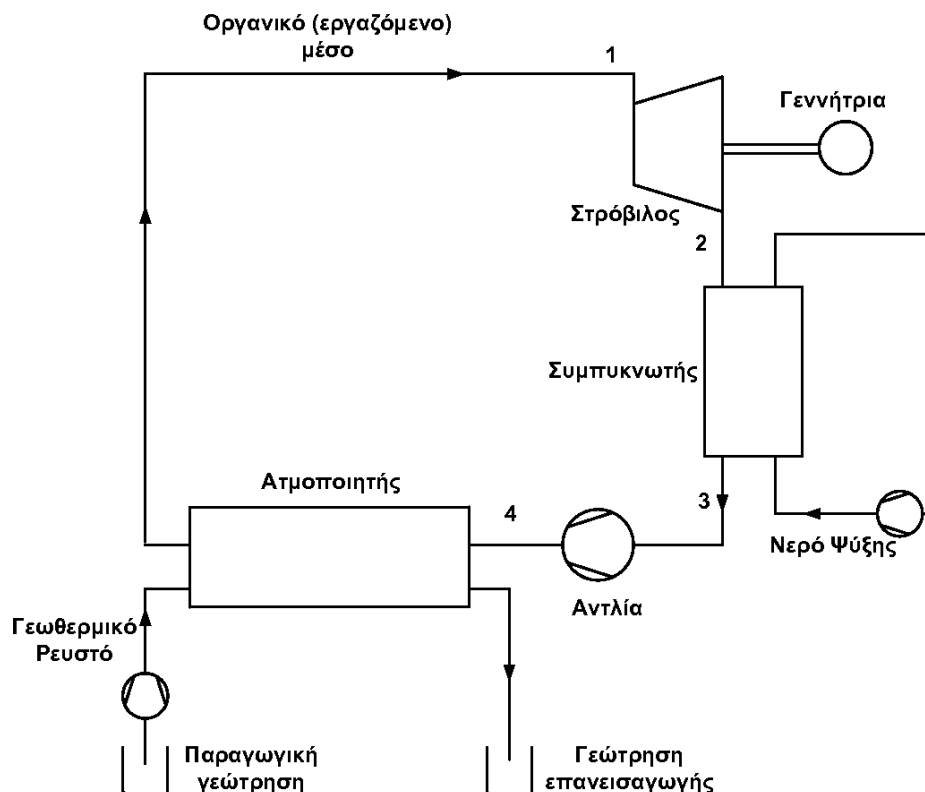
ται απ' ευθείας στο στρόβιλο, εκτονώνεται και, στη συνέχεια, είτε γίνεται διάθεση του ατμού στην ατμόσφαιρα, είτε (σε περίπτωση κατά την οποία η μονάδα λειτουργεί με συμπυκνωτές) συμπυκνώνεται και επανεισάγεται στη γεώτρηση επανεισαγωγής, [38].

**Σύστημα εκτόνωσης διφασικού ρευστού (Flash-Steam Power Plant).** Στα συστήματα εκτόνωσης διφασικού ρευστού, υγρός ατμός υψηλής πίεσης και θερμοκρασίας (μεγαλύτερης από  $180^{\circ}\text{C}$ ) αντλείται από τη γεώτρηση. Με τον όρο υγρό ατμό αναφερόμαστε στον κορεσμένο ατμό που περιέχει υδρατμούς. Καθώς το γεωθερμικό ρευστό φτάνει στην επιφάνεια της γεώτρησης και εισάγεται στη μονάδα, η πίεση μειώνεται απότομα (λόγω του ότι βρίσκεται σε ατμοσφαιρική πίεση) με αποτέλεσμα την αστραπιαία ατμοποίηση ενός μέρους του νερού. Μετά το διαχωρισμό του νερού από τον ατμό μέσω ενός διαχωριστή, ο ατμός συνεχίζει στον ατμοστρόβιλο, ενώ το νερό οδηγείται στη γεώτρηση επανεισαγωγής. Όπως και στις μονάδες ξηρού ατμού, μετά τον ατμοστρόβιλο μπορεί να γίνει είτε διάθεση του ατμού στην ατμόσφαιρα, είτε συμπύκνωσή του και προώθησή του στη γεώτρηση επανεισαγωγής, [38].

### 7.1.2 Δυαδικός κύκλος - Ανάπτυξη της τεχνολογίας για γεωθερμικά πεδία χαμηλής ενθαλπίας

Οι μονάδες δυαδικού κύκλου, σε αντίθεση με τις μονάδες ξηρού ατμού και εκτόνωσης διφασικού ρευστού που χρησιμοποιούν ρευστά υψηλής ενθαλπίας, αξιοποιούν ρευστά χαμηλής και μέσης ενθαλπίας. Οι μονάδες δυαδικού κύκλου διαφέρουν από τις δύο προηγούμενες ως προς το ότι το γεωθερμικό ρευστό δεν έρχεται σε επαφή με το στρόβιλο, αλλά χρησιμοποιείται για να μεταφέρει μέρος της θερμότητας του σε ένα δευτερεύον κύκλωμα ρευστού, μέσω ενός εναλλάκτη θερμότητας (ατμοποιητή), σχήμα 7.1. Το δευτερεύον ρευστό μπορεί να είναι ένα οργανικό ρευστό, συνήθως υδρογονάνθρακας (HC) (ισοβουτάνιο ή ισοπεντάνιο) ή υδροφθοράνθρακας (HFC), (Organic Rankine Cycle-ORC), ή αμμωνία (Kalina Cycle). Το πλεονέκτημα αυτής της τεχνολογίας συνίσταται στο ότι το δευτερεύον ρευστό έχει χαμηλό σημείο ζέσης και υψηλή τάση ατμών σε χαμηλές θερμοκρασίες, οπότε και ατμοποιείται στον ατμοποιητή σε χαμηλότερες θερμοκρασίες από ότι το νερό. Ο ατμός του δευτερεύοντος ρευστού που παράγεται κινεί το στρόβιλο, στη συνέχεια ψύχεται και συμπυκνώνεται μέσω ενός δεύτερου εναλλάκτη θερμότητας (συμπυκνωτή) και οδηγείται, εκ νέου, στον αρχικό εναλλάκτη θερμότητας. Το γεωθερμικό ρευστό μετά τον ατμοποιητή επανεισάγεται στη γεώτρηση επανεισαγωγής. Ο όρος δυαδικός χρησιμοποιείται συνήθως για να περιγράψει κύκλους, όπου έργο παράγεται ταυτόχρονα από δύο διαφορετικά εργαζόμενα μέσα. Παρόλα αυτά, στο δυαδικό κύκλο Rankine, παράγεται έργο μόνο από το δευτερεύον ρευστό.

Το χαμηλό σημείο ζέσης των οργανικών ρευστών διευκολύνει τη χρήση γεωθερμικών πεδίων χαμηλής ενθαλπίας για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας. Η μονάδα δυαδικού κύκλου με τη χαμηλότερη θερμοκρασία γεωθερμικού ρευστού σε εμπορική λειτουργία στον κόσμο κατασκευάστηκε στην Αυστραλία το 1984-1985 με γεωθερμικό ρευστό  $86^{\circ}\text{C}$ , [26]. Εξαιρώντας λίγες πειραματικές μονάδες, η πλειοψηφία των μονάδων δυαδικού κύκλου που λειτουργούν σήμερα χρησιμοποιούν γεωθερμικό ρευστό μέσης ενθαλπίας με θερμοκρασία μεγαλύτερη των  $100^{\circ}\text{C}$ . Σήμερα δεν υπάρχει μονάδα δυαδικού



Σχήμα 7.1: Σχηματικό διάγραμμα του δυαδικού κύκλου χρησιμοποιώντας γεωθερμικό πεδίο χαμηλής ενθαλπίας.

κύκλου σε εμπορική λειτουργία με θερμοκρασία μικρότερη των  $86^{\circ}\text{C}$ , [94].

Η σημασία ανάπτυξης της τεχνολογίας του δυαδικού κύκλου σε γεωθερμικά πεδία χαμηλής ενθαλπίας ενισχύεται αν ληφθεί υπόψη ότι για το θερμοκρασιακό πεδίο των  $65 - 90^{\circ}\text{C}$ , τα γεωθερμικά πεδία στην Ευρώπη μπορούν να παράγουν δυναμικά συνολική ηλεκτρική ενέργεια 10500 MWe. Προς αυτήν την κατεύθυνση κινήθηκε το έργο LOW-BIN<sup>1</sup>, [1], του οποίου συντονιστής ήταν το ΚΑΠΕ και η ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ, δια της παρούσας διατριβής, συνέβαλε στο σχεδιασμό ενός βέλτιστου δυαδικού κύκλου με τη χρήση ΕΑ, [87]. Το έργο αυτό στόχευε στη διεύρυνση της εφαρμογής της τεχνολογίας του δυαδικού κύκλου για εμπορική λειτουργία σε γεωθερμικά πεδία χαμηλής ενθαλπίας ( $65^{\circ}\text{C} \leq T \leq 90^{\circ}\text{C}$ ), επιτυγχάνοντας βελτίωση του ολικού βαθμού απόδοσης του κύκλου και μείωση του κόστους εγκατάστασης της μονάδας. Βασικά στοιχεία της έρευνας για την αύξηση του ολικού βαθμού απόδοσης και μείωση του κόστους εγκατάστασης αποτέλεσαν:

(α) η επιλογή του βέλτιστου δευτερεύοντος ρευστού, εκείνου δηλαδή που δίνει το καλύτερο θερμοδυναμικό “ταίριασμα” με τη θερμοκρασία του γεωθερμικού ρευστού

<sup>1</sup>LOW-BIN, Efficient Low Temperature Geothermal Binary Power, Contract No 518277, που χρηματοδοτήθηκε από την Ευρωπαϊκή Ένωση.

$$(65^{\circ}\text{C} \leq T \leq 90^{\circ}\text{C})$$

(β) ο καλύτερος σχεδιασμός του στροβίλου (βελτίωση του βαθμού απόδοσης του στροβίλου)

(γ) η επιλογή των κατάλληλων τύπων των εναλλακτών θερμότητας, ανάλογα με το δευτερεύον ρευστό.

Όσον αφορά στη μείωση του κόστους, οι ήδη υπάρχουσες μονάδες έχουν σχεδιαστεί για υψηλές θερμοκρασίες και συμπεριλαμβάνουν ακριβά υλικά ανθεκτικά σε διάβρωση και υψηλές θερμοκρασίες. Αντιθέτως, σε εφαρμογές χαμηλής θερμοκρασίας, για τη μείωση του κόστους εγκατάστασης είναι προτιμότερο να χρησιμοποιηθούν υλικά χαμηλού κόστους. Για αυτό το λόγο, βασικός στόχος της έρευνας της διδακτορικής διατριβής, που συνευθυγραμμίζεται με τους στόχους του έργου LOW-BIN, είναι ο βέλτιστος σχεδιασμός, η ανάπτυξη και η κατασκευή από την αρχή μίας πρότυπης μονάδας δυαδικού κύκλου για γεωθερμικά πεδία χαμηλής ενθαλπίας, έχοντας τη δυνατότητα της επιλογής εναλλακτικών υλικών χαμηλού κόστους.

### 7.1.3 Διατύπωση του προβλήματος

Όπως έχει προαναφερθεί, η συμβολή της διατριβής συνίσταται στη βελτιστοποίηση του δυαδικού κύκλου με τη χρήση ασύγχρονων ΕΑ. Στην ενότητα αυτή μελετάται ο σχεδιασμός-βελτιστοποίηση μονάδας δυαδικού κύκλου με γεωθερμικό ρευστό (σταθερής) θερμοκρασίας  $65^{\circ}\text{C}$  για διάφορα οργανικά μέσα και τύπους εναλλακτών θερμότητας στοχεύοντας:

- στη μεγιστοποίηση του ολικού βαθμού απόδοσης του κύκλου  $\eta_{cycle}$  και
- στην ελαχιστοποίηση του κόστους εγκατάστασης της μονάδας.

Στα συστήματα χαμηλής ενθαλπίας, λόγω της χαμηλής διαθέσιμης θερμοκρασιακής διαφοράς στον ατμοποιητή, είναι απαραίτητες μεγάλες επιφάνειες εναλλακτών θερμότητας για την παραγωγή του ίδιου ποσού ηλεκτρικής ενέργειας σε σχέση με τα συστήματα μέσης ενθαλπίας. Κατ' επέκταση, οι εναλλάκτες θερμότητας αποτελούν βασικό τμήμα του συστήματος και το κόστος εγκατάστασης τους συμβάλλει σημαντικά στο συνολικό κόστος. Για αυτό το λόγο, επιλέγεται ως δεύτερος στόχος, πρακτικά, η ελαχιστοποίηση της συνολικής επιφάνειας των εναλλακτών θερμότητας οπότε οι δύο στόχοι επαναδιατυπώνονται ως εξής:

- μεγιστοποίηση του ολικού βαθμού απόδοσης του κύκλου  $\eta_{cycle}$  και
- ελαχιστοποίηση της συνολικής επιφάνειας των εναλλακτών θερμότητας (ατμοποιητή και συμπυκνωτή)  $A_T$ .

Παράλληλα, πραγματοποιείται βελτιστοποίηση του δυαδικού κύκλου με τρεις στόχους, όπου η επιφάνεια του ατμοποιητή και του συμπυκνωτή λογίζονται χωριστά και αποτελούν το δεύτερο και τρίτο στόχο, αντίστοιχα. Στην περίπτωση αυτή, οι τρεις στόχοι της βελτιστοποίησης είναι:

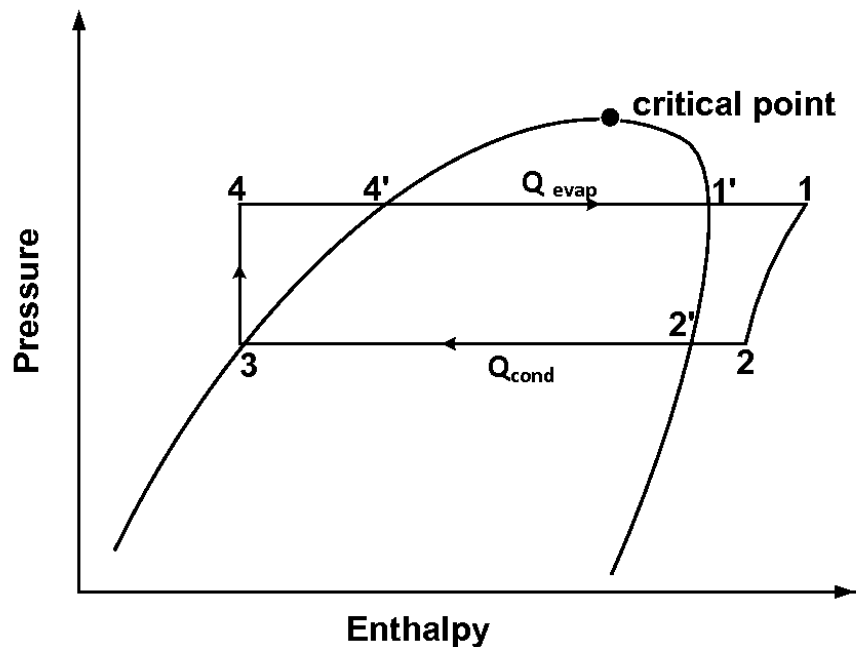
- η μεγιστοποίηση του ολικού βαθμού απόδοσης του κύκλου  $\eta_{cycle}$  και
- η ελαχιστοποίηση της επιφάνειας του ατμοποιητή και
- η ελαχιστοποίηση της επιφάνειας του συμπυκνωτή.

Στη βιβλιογραφία, είτε χρησιμοποιείται η μεγιστοποίηση του ολικού βαθμού απόδοσης του κύκλου ή της παραγόμενης ηλεκτρικής ισχύος, [136], είτε χρησιμοποιείται ο συνδυασμός όλων των στόχων σε ένα, ώστε η βελτιστοποίηση να επιδιώκει την ελαχιστοποίηση του λόγου της συνολικής επιφάνειας των εναλλακτών προς τη συνολική παραγόμενη ηλεκτρική ενέργεια,  $P_{elec}$ , δηλαδή του πηλίκου,  $\frac{AT}{P_{elec}}$ , [63]. Αντίθετα, στην παρούσα διατριβή, η βελτιστοποίηση είναι είτε δικριτηριακή είτε τρικριτηριακή και οι βέλτιστες λύσεις που προκύπτουν είναι περισσότερες από μια και σχηματίζουν μέτωπο μη-κυριαρχούμενων λύσεων (μέτωπο Pareto), [87].

### Υπολογισμός του βαθμού απόδοσης του κύκλου

Το σχηματικό διάγραμμα του δυαδικού κύκλου και το θερμοδυναμικό διάγραμμα πίεσης-ενθαλπίας ( $p - h$ ) παρουσιάζονται στα σχήματα 7.1 και 7.2, αντίστοιχα. Η θερμότητα του γεωθερμικού ρευστού μεταδίδεται στο οργανικό (ή, αλλιώς, εργαζόμενο) μέσο, το οποίο ατμοποιείται στον ατμοποιητή (θέση 1) και λόγω της εκτόνωσης του ατμού στο στρόβιλο (μεταβολή 1-2), κινείται γεννήτρια και παράγεται ηλεκτρική ενέργεια. Ανάμεσα στη γεννήτρια και στο στρόβιλο υπάρχει μετατροπέας στροφών. Το εργαζόμενο μέσο, εγκαταλείποντας το στρόβιλο (θέση 2), ψύχεται στο συμπυκνωτή (έξοδος συμπυκνωτή στη θέση 3) και μέσω μιας αντλίας επιστρέφει στον ατμοποιητή (θέση 4). Στην παρούσα διατριβή, μελετάται ο υποκρίσιμος οργανικός κύκλος, δηλαδή ο κύκλος ο οποίος δεν υπερβαίνει το κρίσιμο σημείο του θερμοδυναμικού διαγράμματος του εργαζόμενου μέσου. Ως κρίσιμο σημείο ορίζεται το σημείο του θερμοδυναμικού διαγράμματος όπου η καμπύλη ισορροπίας υγρού και αερίου τερματίζεται διότι οι φάσεις παύουν να διαφέρουν, σχήμα 7.2.

Τα σύμβολα και οι δείκτες που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή των στόχων της βελτιστοποίησης εξηγούνται στον πίνακα 7.1.



**Σχήμα 7.2:** Σχηματικό διάγραμμα πίεσης-ενθαλπίας του δευτερεύοντος ρευστού στο δυαδικό κύκλο. Η μεταβολή (1 – 2) αντιπροσωπεύει την εκτόνωση του εργαζόμενου μέσου στο στρόβιλο, η (2 – 3) τη συμπύκνωση, η (3 – 4) την αύξηση της πίεσης στην αντλία και η (4 – 1) την ατμοποίηση. Με 4', 1' συμβολίζονται οι φάσεις του κορεσμένου υγρού και ατμού, αντίστοιχα, κατά την ατμοποίηση, ενώ με 2' συμβολίζεται ο κορεσμένος ατμός κατά τη συμπύκνωση. Με critical point συμβολίζεται το κρίσιμο σημείο του θερμοδυναμικού διαγράμματος.

**Πίνακας 7.1:** Σύμβολα και δείκτες που χρησιμοποιούνται για την παρουσίαση των χαρακτηριστικών της εφαρμογής (στόχοι, παράμετροι και περιορισμοί της βελτιστοποίησης).

Συμβολισμός	Περιγραφή και Μονάδες
$P$	Ισχύς, $kW$
$Q$	Θερμότητα, $kW$
$H$	Ενθαλπία, $\frac{kJ}{kg}$
$p$	Πίεση, $Pa$
$\dot{m}$	Παροχή μάζας $\frac{kg}{s}$
$\eta$	Βαθμός απόδοσης
$T$	Θερμοκρασία, $K$
$A$	Επιφάνεια μεταφοράς θερμότητας, $m^2$
$k$	Θερμική αγωγιμότητα, $\frac{kW}{mK}$
$h$	Συντελεστής μεταφοράς θερμότητας, $\frac{kW}{m^2K}$
$U$	Ολικός συντελεστής μεταφοράς θερμότητας, $\frac{kW}{m^2K}$
$\Delta x$	Πάχος τοιχώματος πλάκας πλακοειδή εναλλάκτη, $m$
$\Delta T_m$	Μέση λογαριθμική θερμοκρασιακή διαφορά (log mean temperature difference (LMTD))
$d$	Διάμετρος αυλών, $m$
$l$	Μήκος αυλών, $m$
$g$	Επιτάχυνση της βαρύτητας, $\frac{m}{s^2}$
$evap$	Δείκτης μεγεθών που αφορούν στον ατμοποιητή
$cond$	Δείκτης μεγεθών που αφορούν στο συμπυκνωτή
$pump$	Δείκτης μεγεθών που αφορούν στην αντλία που κυκλοφορεί το εργαζόμενο μέσο και την αντλία που κυκλοφορεί το νερό ψύξης
$gen$	Δείκτης μεγεθών που αφορούν στη γεννήτρια
$elec$	Δείκτης μεγεθών που αφορούν στην καθαρή ηλεκτρική ενέργεια που παράγεται από το στρόβιλο
$inv$	Δείκτης μεγεθών που αφορούν στο μετατροπέα στροφών
$l$	Δείκτης μεγεθών που αφορούν στην υγρή φάση
$g$	Δείκτης μεγεθών που αφορούν στην αέρια φάση
$tp$	Δείκτης μεγεθών που αφορούν στη διφασική κατάσταση
$i, o$	Δείκτης που αφορά στην εσωτερική/εξωτερική επιφάνεια των αυλών ενός εναλλάκτη κελύφους-αυλών
$in, out$	Δείκτης που αφορά στην είσοδο του νερού προς και έξοδο του από τους εναλλάκτες
$cw$	Δείκτης μεγεθών που αφορούν στο νερό ψύξης
$wf$	Δείκτης μεγεθών που αφορούν στο εργαζόμενο μέσο
$gw$	Δείκτης μεγεθών που αφορούν στο γεωθερμικό ρευστό
$wb$	Δείκτης μεγεθών που αφορούν στο νερό του δικτύου θέρμανσης



Ο πρώτος στόχος της βελτιστοποίησης,  $\eta_{cycle}$ , υπολογίζεται ως

$$\eta_{cycle} = \frac{P_{elec} - P_{pump}}{Q_{evap}} \quad (7.1)$$

όπου

$$P_{elec} = \eta_{gen} \eta_{inv} \dot{m}_{wf} (H_{wf1} - H_{wf2})$$

$$P_{pump} = \frac{\Delta p_{wfg} \dot{m}_{wf}}{\eta_{pumpwf}} + \frac{\Delta p_{cwg} \dot{m}_{cw}}{\eta_{pumpcw}}$$

$$Q_{evap} = \dot{m}_{wf} (H_{wf1} - H_{wf4})$$

Τα σύμβολα είναι συμβατά με τον πίνακα 7.1 και την αρίθμηση θέσεων του σχήματος 7.2. Τα θερμοδυναμικά μεγέθη του εργαζόμενου (οργανικού) μέσου στα διάφορα σημεία του κύκλου υπολογίζονται μέσω του λογισμικού REFPROP, (Reference Fluid Thermodynamic and Transport Properties Database) του NIST, (National Institute of Standards and Technology), [2, 93], που διαθέτει το ΚΑΠΕ. Το REFPROP διαθέτει βιβλιοθήκες με τις ιδιότητες διαφόρων ρευστών και μιγμάτων.

### Υπολογισμός της επιφάνειας των εναλλακτών θερμότητας

Ο υπολογισμός της επιφάνειας των εναλλακτών θερμότητας,  $A$ , υλοποιείται με τη χρήση του ολικού συντελεστή μεταφοράς θερμότητας  $U$  μέσω της θεμελιώδους σχέσης της ολικής μεταφοράς θερμότητας στον εναλλάκτη

$$A = Q/U\Delta T_m \quad (7.2)$$

όπου

$$\Delta T_m = \frac{(T_{gw_{out}} - T_{wf_{out}}) - (T_{gw_{in}} - T_{wf_{in}})}{\ln \left[ (T_{gw_{out}} - T_{wf_{out}}) / (T_{gw_{in}} - T_{wf_{in}}) \right]}$$

όπου  $T_{gw_{out}}$ ,  $T_{wf_{out}}$ ,  $T_{gw_{in}}$ ,  $T_{wf_{in}}$  οι θερμοκρασίες εξόδου και εισόδου του γεωθερμικού ρευστού και του εργαζόμενου μέσου στον εναλλάκτη θερμότητας, αντίστοιχα.

Ο ολικός συντελεστής μεταφοράς θερμότητας,  $U$ , συνδυάζει τη μεταφορά θερμότητας με συναγωγή στο γεωθερμικό ρευστό και στο εργαζόμενο μέσο με τη μεταφορά θερμότητας με αγωγή στο τοίχωμα της διεπιφάνειας μεταξύ γεωθερμικού ρευστού και εργαζόμενου μέσου.

Για πλακοειδή εναλλάκτη, ο ολικός συντελεστής μεταφοράς θερμότητας,  $U_{plate}$ , δίνεται από τη σχέση

$$U_{plate} = \frac{1}{\frac{1}{h_{wf}} + \frac{\Delta x}{k} + \frac{1}{h_{gw}}} \quad (7.3)$$

Σύμφωνα με το θερμοδυναμικό διάγραμμα του κύκλου, σχήμα 7.2, κατά την ατμοποίηση (μεταβολή 4-1), το οργανικό ρευστό από την υγρή φάση στην οποία βρίσκεται αρχικά, περνά στη διφασική (συνύπαρξη υγρής και αέριας φάσης) και, τελικά, στην αέρια φάση. Για τον ακριβέστερο υπολογισμό της επιφάνειας, για κάθε κατάσταση του οργανικού ρευστού (4-4', 4'-1', 1'-1) υπολογίζεται κατά περίπτωση ο αντίστοιχος συντελεστής  $U$ , ήτοι οι  $U_{4-4'}$ ,  $U_{4'-1'}$ ,  $U_{1'-1}$ , και η επιφάνεια υπολογίζεται για κάθε φάση χωριστά. Είναι:

$$U_{4-4',1'-1} = \frac{1}{\frac{1}{h_{wf1,g}} + \frac{\Delta x}{k} + \frac{1}{h_{gw}}}, \quad U_{4'-1'} = \frac{1}{\frac{1}{h_{wf1p}} + \frac{\Delta x}{k} + \frac{1}{h_{gw}}} \quad (7.4)$$

Αντίστοιχα, κατά τη συμπύκνωση (μεταβολή 2-3), η ροή του οργανικού ρευστού είναι μονοφασική (αέρια φάση, 2-2') και διφασική (συνύπαρξη υγρής και αέριας φάσης, 2'-3). Για κάθε κατάσταση του οργανικού ρευστού υπολογίζεται ένας συντελεστής  $U$ , ήτοι  $U_{2-2'}$ ,  $U_{2'-3}$ ,

$$U_{2-2'} = \frac{1}{\frac{1}{h_{wf,g}} + \frac{\Delta x}{k} + \frac{1}{h_{gw}}}, \quad U_{2'-3} = \frac{1}{\frac{1}{h_{wf1p}} + \frac{\Delta x}{k} + \frac{1}{h_{gw}}} \quad (7.5)$$

Στην περίπτωση που χρησιμοποιηθεί εναλλάκτης κελύφους-αυλών ως συμπυκνωτής, ο ολικός συντελεστής μεταφοράς θερμότητας,  $U_{tube}$ , δίνεται από τη σχέση

$$U_{tube} = \frac{1}{\frac{A_o}{A_i} \frac{1}{h_{wf}} + \frac{A_o \ln(d_o/d_i)}{2\pi k l} + \frac{1}{h_{gw}}} \quad (7.6)$$

Για τον υπολογισμό του ολικού συντελεστή μεταφοράς θερμότητας,  $U$ , απαιτείται υπολογισμός των συντελεστών μεταφοράς θερμότητας,  $h$ , οι οποίοι διαφέρουν ανάλογα με το οργανικό ρευστό και τον τύπο του εναλλάκτη που χρησιμοποιείται.

Για την επιλογή του βέλτιστου οργανικού μέσου, τα οργανικά μέσα τα οποία δοκιμάζονται είναι το R-134a, R-410A, R-407C και το R-600a, τα οποία ανήκουν στην κατηγορία των υδροφθορανθράκων (HFCs). Λόγω της τρύπας του όζοντος, έχει απαγορευτεί από το 1996 η χρήση των χλωροφθορανθράκων (CFCs) και θα υπάρξει απαγόρευση της χρήσης του συνόλου των υδροχλωροφθορανθράκων (HCFCs) από το 2015. Για αυτό το λόγο, οι υδροφθοράνθρακες (HFCs), οι οποίοι δεν περιέχουν χλώριο, το οποίο συμβάλλει στην αύξηση της τρύπας του όζοντος, έχουν υποκαταστήσει τους χλωροφθοράνθρακες στα ψυκτικά και κλιματιστικά συστήματα. Κατ' επέκταση, πρέπει να μελετηθεί η απόδοση αυτών των οργανικών μέσων στα συστήματα δυαδικού κύκλου.

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν γενικές συσχετίσεις (προσεγγίσεις) του συντελεστή μεταφοράς θερμότητας, ανεξαρτήτως του εργαζόμενου μέσου για την ατμοποίηση και τη συμπύκνωση σε εναλλάκτες με διαμόρφωση πλάκας και αγωγού, αντίστοιχα, καθώς και συσχετίσεις οι οποίες έχουν προέλθει από πειραματικές δοκιμές στα διάφορα οργανικά ρευστά. Όσον αφορά στα εργαζόμενα μέσα που χρησιμοποιούνται εδώ, και συγκεκριμένα για το R-134a και το R-410A, λόγω της ευρείας χρήσης τους στις γεωθερμικές αντλίες θερμότητας, δίνονται στη βιβλιογραφία ακόμη περισσότερο ακριβείς συσχετίσεις του συντελεστή μεταφοράς θερμότητας,  $h$ , για την ατμοποίηση και τη συμπύκνωση σε εναλλάκτες με διαμόρφωση πλάκας και αγωγού αντίστοιχα. Στην

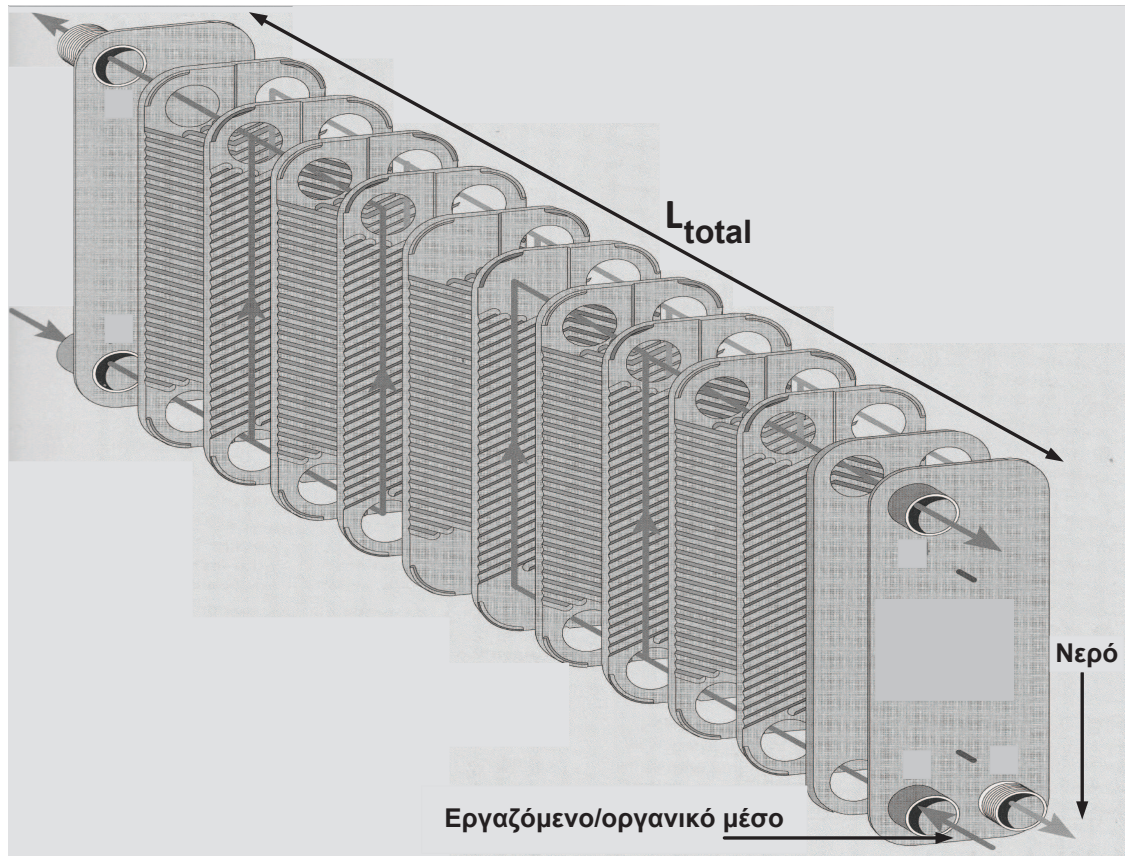
παρούσα διατριβή, χρησιμοποιούνται αρχικά οι ίδιες γενικές συσχετίσεις του συντελεστή μεταφοράς θερμότητας για τα τέσσερα οργανικά ρευστά για την επιλογή του βέλτιστου, καθώς επίσης συγκρίνονται οι γενικές με τις ακριβέστερες συσχετίσεις. Οι τύποι των συντελεστών μεταφοράς θερμότητας για τα R-134a, R-410A, R-407C και R-600a για τον πλακοειδή και τον εναλλάκτη κελύφους-αυλών καθώς και οι ακριβέστερες συσχετίσεις της βιβλιογραφίας για το R-134a παρατίθενται στο Παράρτημα Α'.

### Εναλλάκτες μεταφοράς θερμότητας

Όσον αφορά στην επιλογή του τύπου των εναλλακτών επιλέγονται μεταξύ πλακοειδών εναλλακτών θερμότητας (plate heat exchangers (PHE)) και εναλλακτών κελύφους-αυλών (shell-and-tube heat exchanger (STHE)), προτιμώνται συνήθως οι πρώτοι για τον ατμοποιητή, λόγω της ύπαρξης αλάτων στο γεωθερμικό ρευστό, τα οποία επικαθονται στις επιφάνειες των εναλλακτών. Η απομάκρυνση αυτών των σωματιδίων είναι ευκολότερη από τις πλάκες των πλακοειδών εναλλακτών δεδομένου ότι μπορούν εύκολα να αποσυναρμολογηθούν και να καθαριστούν σε σύγκριση με τους εναλλάκτες κελύφους-αυλών. Για το συμπυκνωτή, εξετάζονται (κατά τη διαδικασία της βελτιστοποίησης) και οι δύο τύποι των εναλλακτών, πλακοειδείς και κελύφους-αυλών, ώστε να επιλεγεί ο βέλτιστος τύπος εναλλάκτη, δηλαδή εκείνος που θα αντιστοιχεί σε οργανικό κύκλο Rankine με μέγιστο βαθμός απόδοσης και ελάχιστη επιφάνεια εναλλακτών.

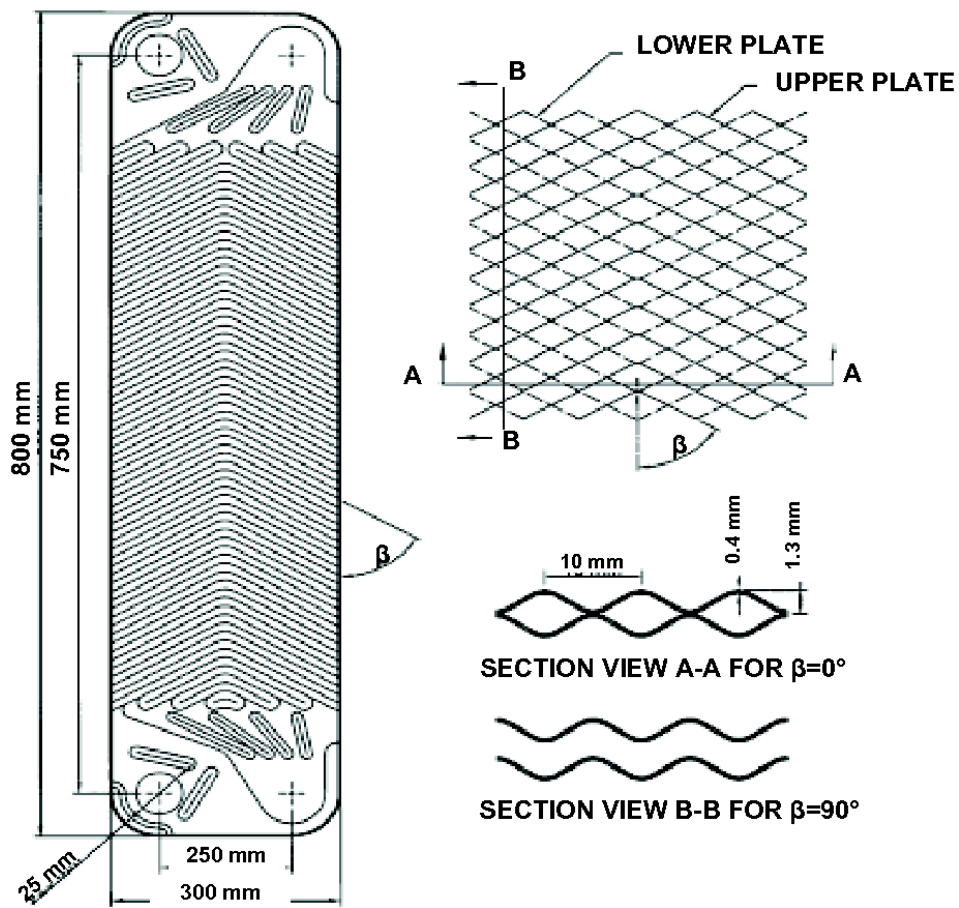
Στο σχήμα 7.3 παρουσιάζεται το σχηματικό διάγραμμα ενός πλακοειδούς εναλλάκτη στο οποίο φαίνονται η διάταξη των πλακών και τα κανάλια στα οποία ρέουν το εργαζόμενο μέσο και το γεωθερμικό ρευστό. Επίσης στο σχήμα 7.4 φαίνεται το σχηματικό διάγραμμα μιας πλάκας ενός πλακοειδούς εναλλάκτη συμπεριλαμβανομένων των διαστάσεων της, οι οποίες αναφέρονται επίσης και στον πίνακα 7.3 και χρησιμοποιούνται στη συγκεκριμένη εφαρμογή. Στο σχήμα 7.4 φαίνεται η διαμόρφωση της επιφάνειας της πλάκας, όπου στην επιφάνεια σχηματίζονται αυλακώσεις ημιτονοειδούς σχήματος με μία κλίση,  $\beta$ , αυξάνοντας την τύρβη της ροής. Αυτό εξασφαλίζει καλύτερη μεταφορά θερμότητας, αλλά παράλληλα αυξάνεται η πτώση πίεσης στον εναλλάκτη. Το υλικό κατασκευής των πλακών ενός εναλλάκτη που χρησιμοποιείται ως ατμοποιητής σε εφαρμογές γεωθερμίας είναι το τιτάνιο για την αποφυγή διάβρωσης των πλακών από το γεωθερμικό ρευστό. Το σχηματικό διάγραμμα ενός εναλλάκτη κελύφους-αυλών φαίνεται στο σχήμα 7.5. Στην παρούσα διατριβή, ο εναλλακτής κελύφους-αυλών χρησιμοποιείται για τη συμπύκνωση του οργανικού ρευστού. Δεδομένου ότι δεν έρχεται σε επαφή με το γεωθερμικό ρευστό το υλικό κατασκευής των αυλών και του κελύφους είναι χάλυβας.

Για τη διαστασιολόγηση των εναλλακτών θερμότητας επιλέγονται οι διαστάσεις από τυποποιημένους πλακοειδείς και εναλλάκτες κελύφους-αυλών, οι οποίες παρατίθενται στον πίνακα 7.3 και χρησιμοποιούνται στη συγκεκριμένη εφαρμογή. Κατά τη βελτιστοποίηση, για τον πλακοειδή εναλλάκτη, γνωστά είναι το μήκος  $l$ , πλάτος  $w$  και πάχος  $\Delta x$  της πλάκας (επιφάνεια πλάκας  $A = lw$ ). Συνεπώς, μετά τον υπολογισμό της συνολικής επιφάνειας του πλακοειδούς εναλλάκτη,  $A_{plate}$ , υπολογίζεται ο αριθμός των πλακών του εναλλάκτη και κατ' επέκταση το συνολικό μήκος του εναλλάκτη ( $L_{total}$ ).

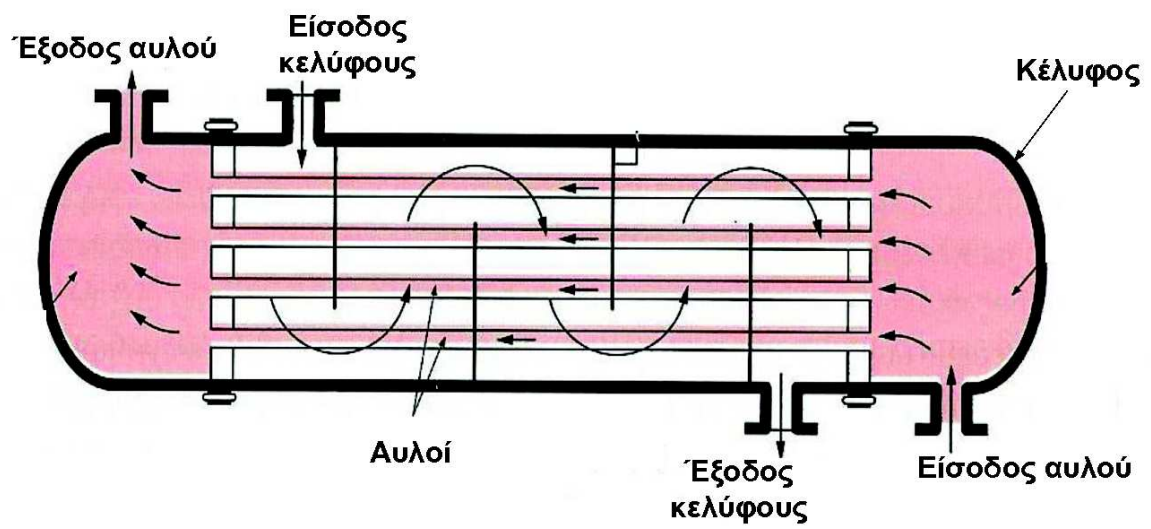


**Σχήμα 7.3:** Σκιαγράφιση μορφής ενός πλακοειδούς εναλλάκτη θερμότητας (plate heat exchangers (PHE)).

Αντίστοιχα, για τον εναλλάκτη κελύφους-αυλών, επιλέγονται η εσωτερική  $d_i$ , εξωτερική  $d_o$  διάμετρος και το μήκος του κάθε αυλού  $l_{tube}$  (επιφάνεια του κάθε αυλού  $A_o = \pi d_o l_{tube}$ ). Με τον υπολογισμό της συνολικής επιφάνειας,  $A_{tube}$ , υπολογίζεται ο αριθμός των αυλών του εναλλάκτη, ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διάταξη των αυλών μέσα στο κέλυφος του εναλλάκτη.



Σχήμα 7.4: Σκιαγράφιση μορφής πλάκας ενός πλακωειδούς εναλλάκτη θερμότητας (plate heat exchangers (PHE)), [90].



Σχήμα 7.5: Σχηματικό διάγραμμα ενός εναλλάκτη κελύφους-αυλών (shell and tube heat exchanger (STHE)).

**Πίνακας 7.2:** Σχεδιασμός βέλτιστων κύκλων ηλεκτροπαραγωγής με χρήση γεωθερμίας. Μεταβλητές σχεδιασμού. Τα σύμβολα είναι συμβατά με τον πίνακα 7.1 και την αρίθμηση του σχήματος 7.2.

Μεταβλητή		Κάτω όριο	Άνω όριο	Μονάδες Μέτρησης	Σχόλια
$p_1$	R-134a	900	4059	$kPa$	Πίεση του εργαζόμενου μέσου στην είσοδο του στροβίλου.
	R-407C	1300	4365	$kPa$	
	R-410A	1800	4902	$kPa$	
	R-600a	400	3640	$kPa$	
$\dot{m}_{wf}$		40	90	$\frac{kg}{s}$	Παροχή μάζας του εργαζόμενου μέσου.
$\dot{m}_{gw}$		5	30	$\frac{kg}{s}$	Παροχή μάζας του γεωθερμικού ρευστού.
$T_1 - T_4$		10	30	$K$	Θερμοκρασιακή διαφορά εισόδου και εξόδου του εργαζόμενου μέσου στον ατμοποιητή.
$T_2 - T_3$		7.5	12.5	$K$	Θερμοκρασιακή διαφορά εισόδου και εξόδου του εργαζόμενου μέσου στο συμπυκνωτή.
$T_3$		288	300	$K$	Θερμοκρασία του εργαζόμενου μέσου στην έξοδο του συμπυκνωτή.

Η εφαρμογή χαρακτηρίζεται από  $N = 6$  μεταβλητές σχεδιασμού, που συνοψίζονται στον πίνακα 7.2. Τα όρια της πίεσης  $p_1$  είναι διαφορετικά για κάθε οργανικό μέσο. Το άνω όριο της  $p_1$  καθορίζεται από την πίεση του κρίσιμου σημείου κάθε οργανικού μέσου (σχήμα 7.2), δεδομένου ότι μελετάται ο υποκρίσιμος κύκλος. Κατά τη βελτιστοποίηση, διατηρούνται σταθερές οι παράμετροι του πίνακα 7.3. Οι τιμές που παρουσιάζονται στηρίζονται σε πραγματικά δεδομένα, λ.χ. οι τιμές των βαθμών απόδοσης του στροβίλου, της γεννήτριας, του μετατροπέα στροφών και της αντλίας αντιστοιχούν σε αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στην πρότυπη μονάδα.

Τέλος, στον πίνακα 7.4 παρουσιάζονται οι περιορισμοί που επιβάλλονται κατά τη βελτιστοποίηση. Ο πρώτος περιορισμός ( $170kWe \leq P_{elec} \leq 230kWe$ ) αναφέρεται στην παραγόμενη ηλεκτρική ενέργεια δεδομένου ότι η πρότυπη μονάδα ORC που κατασκευάστηκε αποδίδει περίπου 200kWe ηλεκτρική ενέργεια. Χρησιμοποιείται παράλληλα αυτός τέτοιος περιορισμός διότι ένας περιορισμός ισότητας ή ακόμα και ένας περιορισμός ανισότητας με στενά όρια (λ.χ.  $199kWe \leq P_{elec} \leq 201kWe$ ) σε συνδυασμό

**Πίνακας 7.3:** Σχεδιασμός βέλτιστων κύκλων ηλεκτροπαραγωγής με χρήση γεωθερμίας. Μεγέθη που διατηρούνται σταθερά κατά τη βελτιστοποίηση. Τα σύμβολα είναι συμβατά με τον πίνακα 7.1 και την αρίθμηση του σχήματος 7.2.

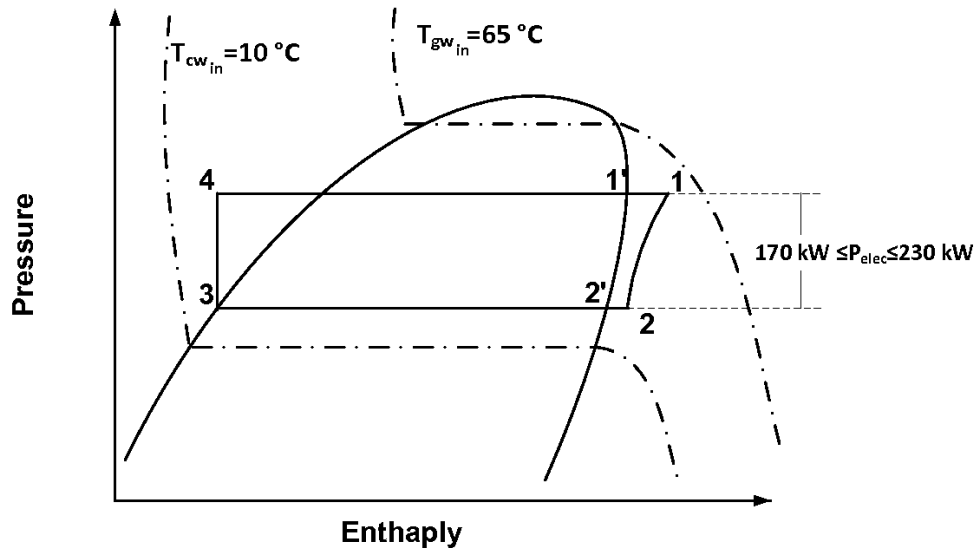
	Σταθερές ποσότητες	Συμβολισμός/Τιμή
ORC	Θερμοκρασία γεωθερμικού ρευστού	$T_{gwin} = 65^{\circ}C$
	Θερμοκρασία νερού ψύξης	$T_{cwin} = 10^{\circ}C$
	Ισεντροπικός βαθμός απόδοσης του στροβίλου	$\eta_{is,T} = 0.80$
	Βαθμός απόδοσης γεννήτριας	$\eta_{gen} = 0.96$
	Βαθμός απόδοσης μετατροπέα στροφών	$\eta_{inv} = 0.92$
	Βαθμός απόδοσης αντλίας του κύκλου	$\eta_C = 0.70$
	PHE	Μήκος πλάκας
Πλάτος πλάκας		$w = 0.30m$
Πάχος πλάκας		$\Delta x = 0.0004m$
Απόσταση δύο πλακών		$t = 0.0026m$
Υλικό πλάκας		τιτάνιο
STHE	Εσωτερική διάμετρος αυλών	$d_i = 0.013m$
	Εξωτερική διάμετρος αυλών	$d_o = 0.040m$
	Μήκος αυλών	$l_{tube} = 3.00m$
	Υλικό αυλών	χάλυβας

με ένα “λογικό” αριθμό ατόμων επιλέκτων, δυσκολεύει τη δημιουργία μετώπου βέλτιστων λύσεων, καθώς οι υποψήφιες λύσεις αποτυγχάνουν να ικανοποιήσουν έναν τέτοιο περιορισμό. Ο δεύτερος περιορισμός αφορά τη θερμοκρασία του εργαζόμενου μέσου στην έξοδο του ατμοποιητή,  $T_{wf_1}$ . Μετά τον ατμοποιητή και πριν το εργαζόμενο μέσο εισέλθει στο στροβίλο (θέση 1), πρέπει ο ατμός να είναι απαλλαγμένος από σταγονίδια τα οποία θα μπορούσαν να προκαλέσουν βλάβη στα πτερύγια του στροβίλου. Για αυτό το λόγο, το σημείο 1 του κύκλου πρέπει να βρίσκεται δεξιά της καμπύλης κορεσμένου ατμού ( $T_{wf_{1'}} \leq T_{wf_1}$ ). Το αντίστοιχο ισχύει και για τη θέση 2, για την οποία ο αντίστοιχος περιορισμός γράφεται  $T_{wf_2} \geq T_{wf_{2'}}$ . Επιπροσθέτως, η θερμοκρασία εξόδου του εργαζόμενου μέσου από τον ατμοποιητή δεν μπορεί να υπερβεί τη θερμοκρασία με την οποία εισέρχεται το γεωθερμικό ρευστό στον εναλλάκτη ( $T_{gwin} = 65^{\circ}C$ ). Επομένως, η θερμοκρασία  $T_{wf_1}$  περιορίζεται ως ακολούθως,  $T_{wf_{1'}} \leq T_{wf_1} \leq T_{gwin}$ . Αντιστοίχως στο συμπυκνωτή, η θερμοκρασία εξόδου του εργαζόμενου μέσου δεν επιτρέπεται να λάβει τιμές χαμηλότερες από τη θερμοκρασία εισόδου του νερού ψύξης στον εναλλάκτη ( $T_{wf_3} \geq T_{cwin}$ ). Στο σχηματικό διάγραμμα πίεσης-ενθαλπίας, σχήμα 7.6, απεικονίζονται οι περιορισμοί πάνω στον κύκλο. Ο δεύτερος περιορισμός καθορίζει το χωρίο μέσα στο οποίο βρίσκεται το σημείο 1 στο διάγραμμα. Το χωρίο αυτό περιβάλλεται από τις θερμοκρασίες  $T_{wf_{1'}}$  και  $T_{gwin}$ . Η  $T_{cwin}$  φαίνεται επίσης στο διάγραμμα. Τα σημεία του κύκλου στο σχήμα 7.6 είναι τέτοια ώστε να ικανοποιείται ο πρώτος περιορισμός και να παράγεται ηλεκτρική ενέργεια στο διάστημα από  $170kWe$  μέχρι  $230kWe$ .



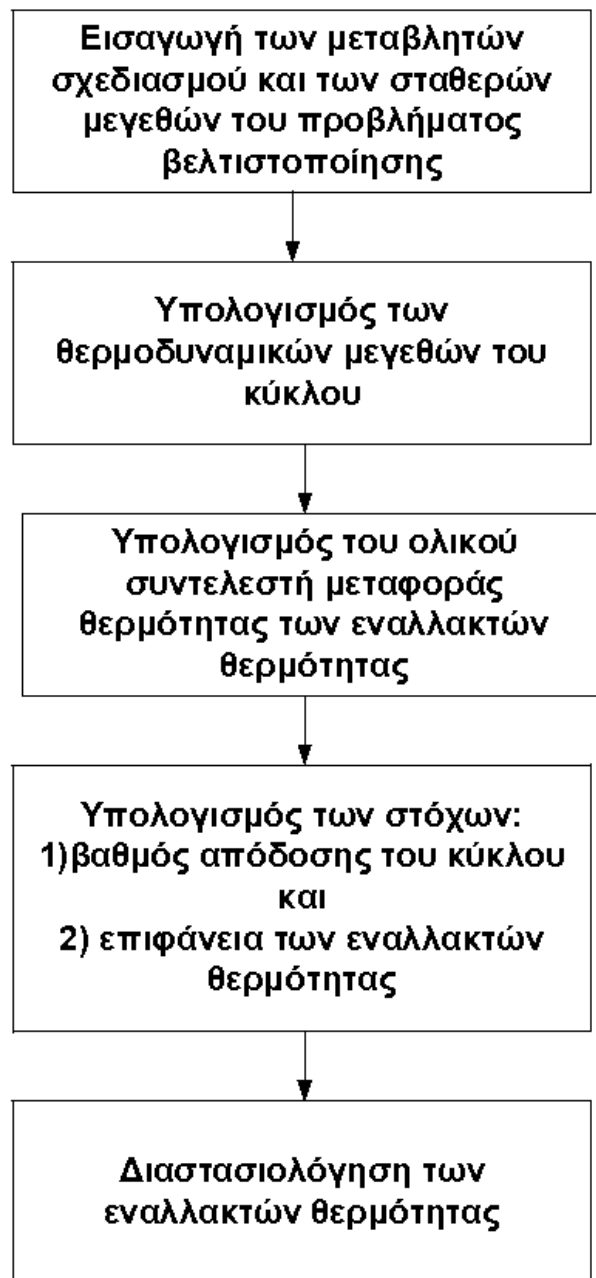
**Πίνακας 7.4:** Σχεδιασμός βέλτιστων κύκλων ηλεκτροπαραγωγής με χρήση γεωθερμίας. Περιορισμοί που επιβάλλονται κατά τη βελτιστοποίηση. Τα σύμβολα είναι συμβατά με τον πίνακα 7.1 και την αρίθμηση του σχήματος 7.2.

Περιορισμός	Περιγραφή
$170\text{kWe} \leq P_{elec} \leq 230\text{kWe}$ $T_{wf1'} \leq T_{wf1} \leq T_{gwin}$	Παραγόμενη ηλεκτρική ενέργεια. Ατμοποιητής: Έξοδος εργαζόμενου μέσου. $T_{wf1'}$ Θερμοκρασία εργαζόμενου μέσου στο σημείο κορεσμένου ατμού, $T_{gwin}$ θερμοκρασία εισόδου του γεωθερμικού ρευστού.
$T_{wf3} \geq T_{cwin}$	Συμπυκνωτής: Έξοδος εργαζόμενου μέσου. $T_{cwin}$ θερμοκρασία εισόδου του νερού ψύξης.
$T_{wf2} \geq T_{wf2'}$	Στρόβιλος: Έξοδος εργαζόμενου μέσου. $T_{wf2'}$ θερμοκρασία εργαζόμενου μέσου στο σημείο κορεσμένου ατμού.



**Σχήμα 7.6:** Σχεδιασμός βέλτιστων κύκλων ηλεκτροπαραγωγής με χρήση γεωθερμίας. Σχηματικό διάγραμμα πίεσης-ενθαλπίας. Απεικόνιση των περιορισμών του πίνακα 7.4.

Στο σχήμα 7.7, παρουσιάζονται τα βήματα του αλγόριθμου αξιολόγησης του δυαδικού κύκλου όπου, μετά τον υπολογισμό του βαθμού απόδοσης και της επιφάνειας των εναλλακτών θερμότητας, επιχειρείται διαστασιολόγηση των εναλλακτών θερμότητας.



**Σχήμα 7.7:** Αλγόριθμος αξιολόγησης κάθε δυαδικού κύκλου, δηλαδή κάθε υποψήφιας λύσης κατά τη βελτιστοποίηση μέσω *EA*.

### 7.1.4 Αποτελέσματα βελτιστοποίησης

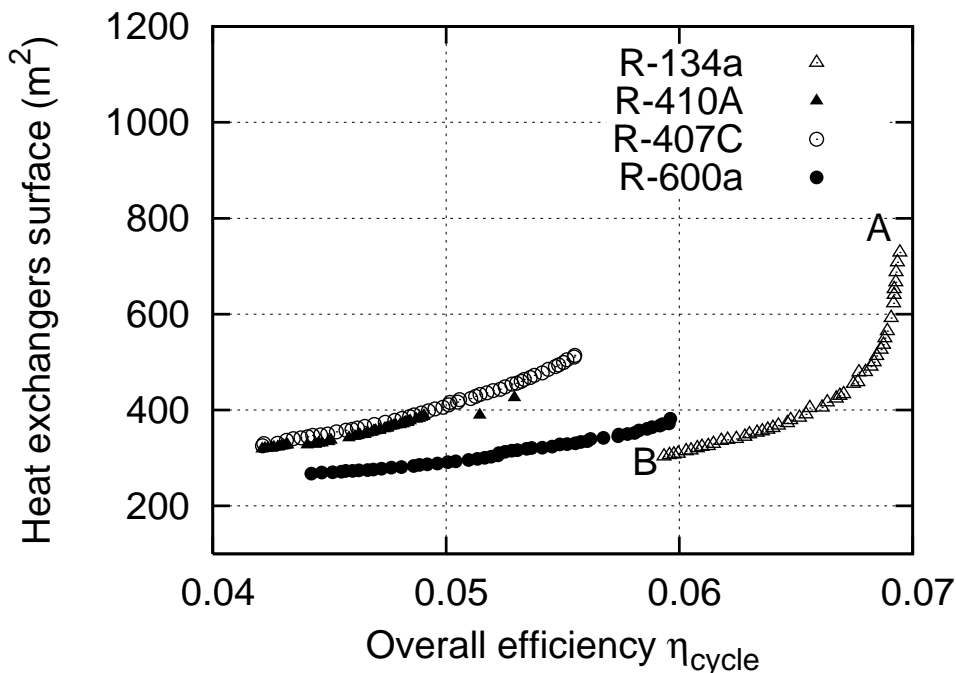
Για τη βελτιστοποίηση χρησιμοποιήθηκε ο AMAEA. Λόγω του χαμηλού υπολογιστικού κόστους ανά αξιολόγηση κρίθηκε μη συμφέρουσα η χρήση του μιμητικού αλγορίθμου AMAMA. Η βελτιστοποίηση πραγματοποιήθηκε σε πλέγμα βάσης  $8 \times 8$  (48 πράκτορες και 16 πόλοι) σε 20 επεξεργαστές με ανώτατο επιτρεπτό όριο αξιολογήσεων τις 10000. Το μεταπρότυπο ενεργοποιείται μετά από τις πρώτες 50 ακριβείς αξιολογήσεις με  $N_{IPE}=5$ . Τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης παρουσιάζονται στη συνέχεια για καθένα από τα ακόλουθα τρία θέματα που αφορούν το μηχανικό-σχεδιαστή του συστήματος:

- (α') Σύγκριση και επιλογή του βέλτιστου εργαζόμενου μέσου.
- (β') Σύγκριση μεταξύ των ακριβών και των προσεγγιστικών σχέσεων για τον υπολογισμό του συντελεστή μεταφοράς θερμότητας και κατ' επέκταση της επιφάνειας των εναλλακτών.
- (γ') Επιλογή του βέλτιστου τύπου εναλλάκτη για τη συμπύκνωση.

#### (α') Επιλογή βέλτιστου οργανικού μέσου

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, για τον υπολογισμό του συντελεστή μεταφοράς θερμότητας και τη σύγκριση των οργανικών μέσων χρησιμοποιήθηκαν οι ίδιες γενικές συσχετίσεις του Παραρτήματος Α' για τα τέσσερα οργανικά ρευστά. Στο σχήμα 7.8 παρουσιάζονται τα μέτωπα των βέλτιστων λύσεων για τα διάφορα οργανικά μέσα (R-134a, R-410A, R-407C, R-600a), όταν για την ατμοποίηση και τη συμπύκνωση του εργαζόμενου μέσου χρησιμοποιείται πλακοειδής εναλλάκτης (PHE). Αντιστοίχως, στο σχήμα 7.9 γίνεται σύγκριση των διαφόρων οργανικών μέσων στην περίπτωση χρήσης εναλλάκτη κελύφους-αυλών (STHE) για τη συμπύκνωση. Και στα δύο σχήματα βελτιστοποιείται ο κύκλος Rankine έχοντας ως δεύτερο στόχο την ελαχιστοποίηση της συνολικής επιφάνειας των εναλλακτών. Παράλληλα επιλέγεται να βελτιστοποιηθεί ο κύκλος ελαχιστοποιώντας την επιφάνεια του ατμοποιητή και του συμπυκνωτή χωριστά, ώστε να μελετηθεί η επίδραση του κάθε οργανικού μέσου στο μέγεθος των δύο επιφανειών, σχήματα 7.10 και 7.11. Ένας ακόμη λόγος που επιλέγεται η βελτιστοποίηση τριών στόχων είναι γιατί οι τιμές της επιφάνειας του PHE και STHE εναλλάκτη δεν μπορούν να συγκριθούν επειδή διαφέρουν σε τάξη μεγέθους εξαιτίας του διαφορετικού τρόπου υπολογισμού της επιφάνειας.

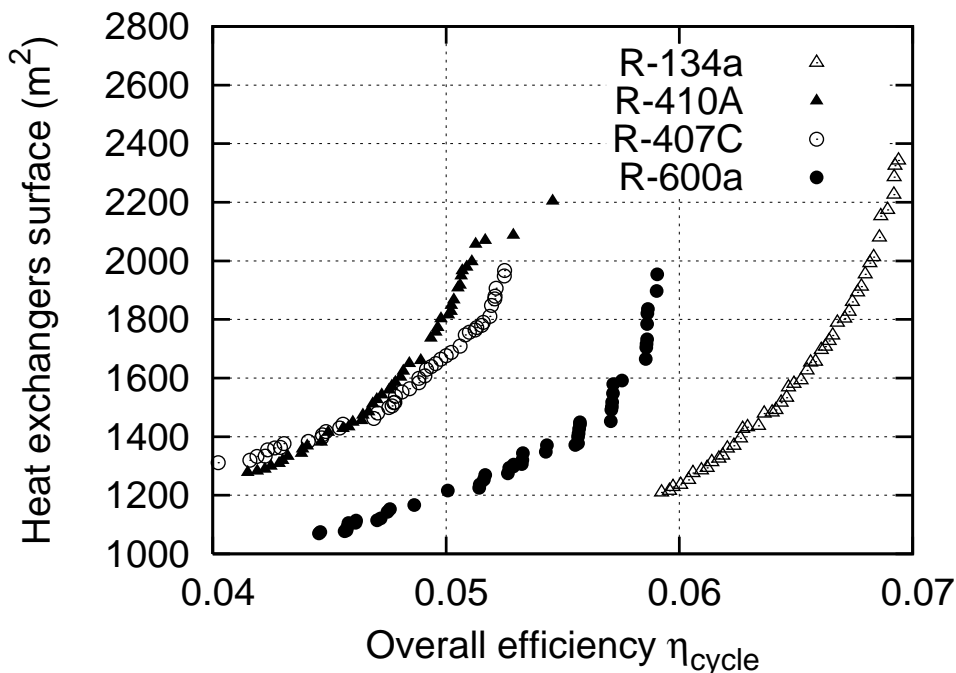
Και από τα τέσσερα σχήματα συμπεραίνεται ότι το R-134a επιτυγχάνει μεγαλύτερο βαθμό απόδοσης ( $\eta_{cycle} = 6-7\%$ ), σε σύγκριση με τα υπόλοιπα οργανικά μέσα και για τις δύο περιπτώσεις (με PHE ή STHE ως συμπυκνωτή). Αυτό σημαίνει ότι το R-134a έχει τη βέλτιστη θερμοδυναμική συμπεριφορά για την υπόψη θερμοκρασία του γεωθερμικού ρευστού ( $65^\circ\text{C}$ ) και βάσει των θερμοδυναμικών του ιδιοτήτων εκμεταλλεύεται, καλύτερα από τα υπόλοιπα οργανικά μέσα τη θερμότητα που μεταφέρεται από το έδαφος. Όσον αφορά στα υπόλοιπα οργανικά μέσα τα μείγματα R-410A, R-407C παρουσιάζουν παρόμοια μεταξύ τους συμπεριφορά ως προς το



**Σχήμα 7.8:** Σχεδιασμός βέλτιστων κύκλων ηλεκτροπαραγωγής με χρήση γεωθερμίας. Τα υπολογισθέντα μετώπα των μη-κυριαρχούμενων λύσεων για τα R-134a, R-410A, R-407C και R-600a χρησιμοποιώντας PHE για την ατμοποίηση και συμπύκνωση του εργαζόμενου μέσου. Στόχοι: (α) μεγιστοποίηση του ολικού βαθμού απόδοσης του κύκλου και (β) ελαχιστοποίηση της συνολικής επιφάνειας των εναλλακτών θερμότητας (ατμοποιητή και συμπυκνωτή).

βαθμό απόδοσης ενώ το R-600a ακολουθεί το R-134a σε απόδοση με χαμηλότερες τιμές επιφάνειας. Το R-410A αποτελείται από το R-32 και το R-125 σε αναλογίες 69,8% και 30,2%, αντίστοιχα, ενώ το R-407C αποτελείται από το R-32, το R-125 και το R-134a σε αναλογίες 23%, 25% και 52%, αντίστοιχα. Η ύπαρξη του R-134a σε αυτή την αναλογία στο R-407C οδηγεί στη δημιουργία ενός ευρύτερου μετώπου Pareto σε σχέση με το R-410A, επιτυγχάνοντας μεγαλύτερο βαθμό απόδοσης (σχήμα 7.8).

Όσον αφορά στις δύο επιφάνειες, από το σχήμα 7.10 (PHE για την ατμοποίηση και τη συμπύκνωση) συμπεραίνεται ότι το R-134a, το R-410A και το R-407C απαιτούν μεγαλύτερη επιφάνεια συμπυκνωτή από ότι επιφάνεια ατμοποιητή. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο και για το R-600a, όπου οι δύο επιφάνειες έχουν περίπου τις ίδιες τιμές. Αντιστοίχως, στο σχήμα 7.11 (PHE για την ατμοποίηση και STHE για τη συμπύκνωση) απαιτούνται μεγαλύτερες επιφάνειες ατμοποιητή απαιτούνται για τα R-134a και R-600a ενώ τα R-134a και R-410A δίνουν μεγαλύτερες επιφάνειες συμπυκνωτή. Στο σχήμα 7.12 συγκρίνονται η βελτιστοποίηση δύο (σχήμα 7.9) και τριών (σχήμα 7.11) στόχων για το οργανικό μέσο R-600a, αθροίζοντας τις δύο επιφάνειες κάθε λύσης της βελτιστοποίησης τριών στόχων. Στην περίπτωση

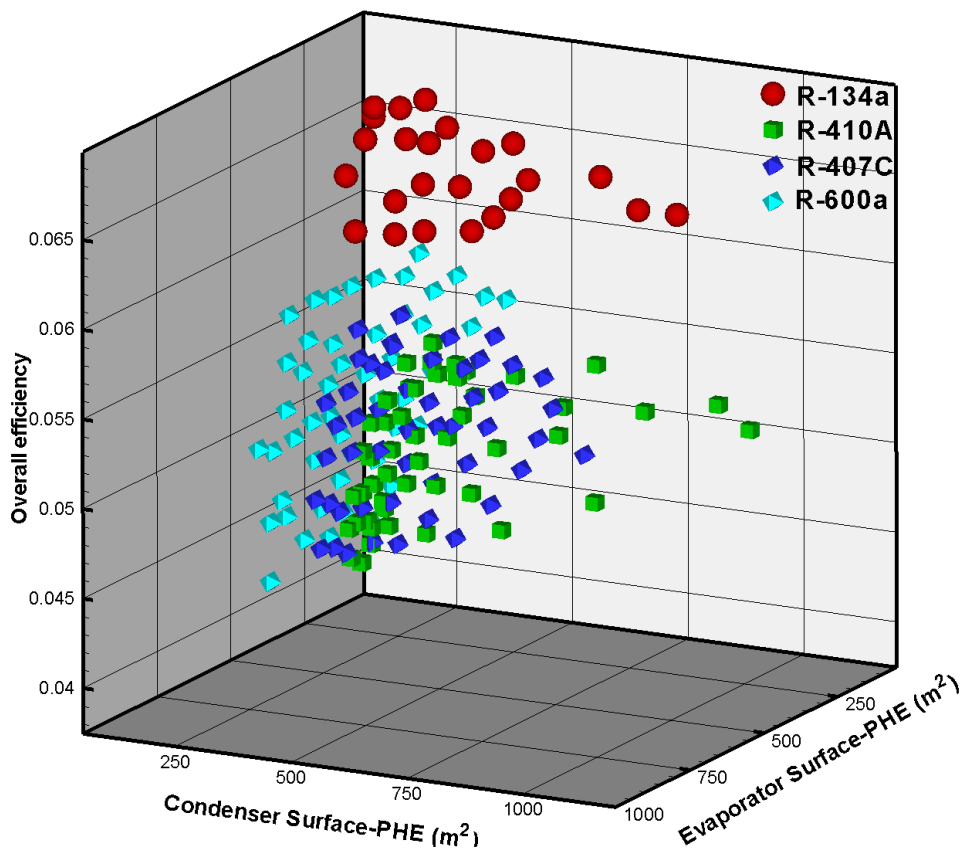


**Σχήμα 7.9:** Σχεδιασμός βέλτιστων κύκλων ηλεκτροπαραγωγής με χρήση γεωθερμίας. Τα υπολογισθέντα μέτωπα Pareto των μη-κυριαρχούμενων λύσεων για τα R-134a, R-410A, R-407C και R-600a χρησιμοποιώντας PHE για την ατμοποίηση και STH και τη συμπύκνωση του εργαζόμενου μέσου. Στόχοι: (α) μεγιστοποίηση του ολικού βαθμού απόδοσης του κύκλου και (β) ελαχιστοποίηση της συνολικής επιφάνειας των εναλλακτών θερμότητας (ατμοποιητή και συμπυκνωτή).

βελτιστοποίησης τριών στόχων, οι προσπάθειες για την ελαχιστοποίηση των τριών στόχων μοιράζονται σε τρεις κατευθύνσεις με αποτέλεσμα η βελτιστοποίηση δύο στόχων να υπολογίζει καλύτερο μέτωπο Pareto.

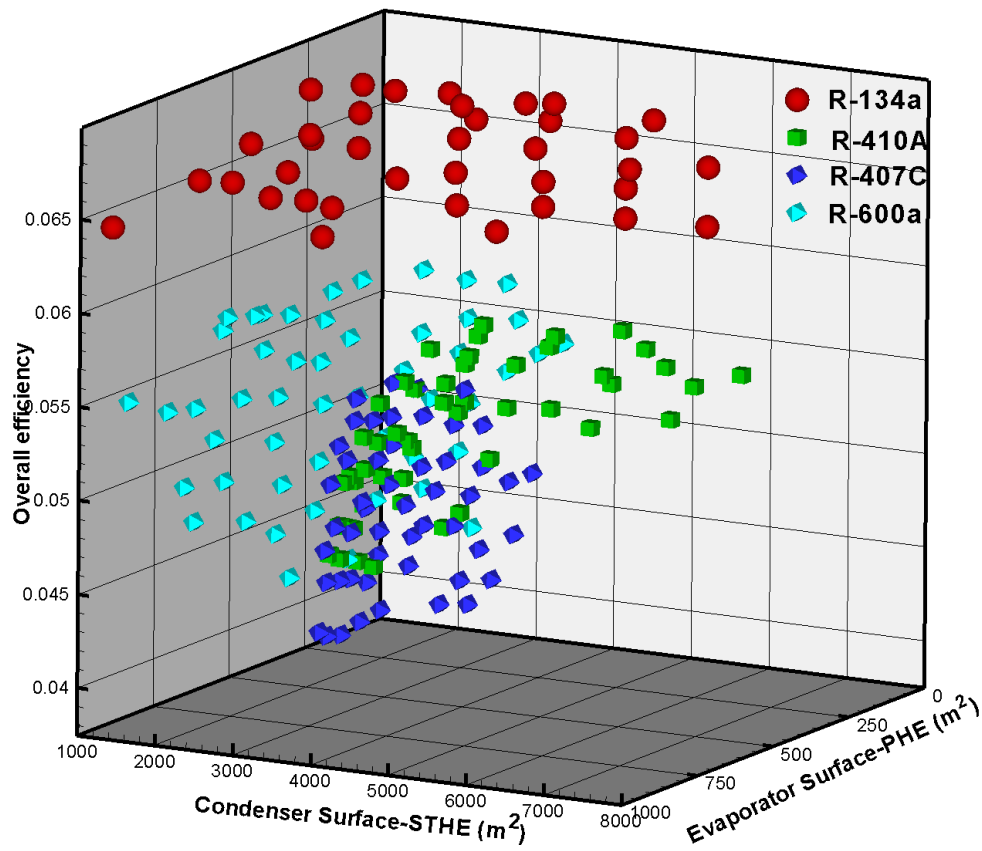
Για καλύτερη σύγκριση των εργαζόμενων μέσων, παρουσιάζονται στον πίνακα 7.5 οι βέλτιστες λύσεις του σχήματος 7.8 για καθένα από τα εργαζόμενα μέσα στην περίπτωση κατασκευής μίας μονάδας συγκεκριμένης ισχύος, έστω  $P_{elec} = 190kW$ . Οι μεταβλητές σχεδιασμού καθώς και οι στόχοι των τεσσάρων αυτών λύσεων φαίνονται επίσης στον ίδιο πίνακα. Η μικρότερη επιφάνεια εναλλακτών αντιστοιχεί στο R-600a, ενώ το R-134a επιτυγχάνει το μεγαλύτερο βαθμό απόδοσης.

Ανάλυση της επίδρασης των παραμέτρων σχεδιασμού στις βέλτιστες λύσεις του R-134a, που αποτελεί το βέλτιστο εργαζόμενο μέσο, φαίνεται στον πίνακα 7.6, όπου παρουσιάζονται οι δύο ακραίες λύσεις από το υπολογισθέν μέτωπο Pareto: η λύση με τη μεγαλύτερη απόδοση  $\eta_{cycle} = 6.95\%$  (λύση A) και η λύση με τη μικρότερη επιφάνεια  $A = 303m^2$  (λύση B). Παρατηρείται ότι η πίεση στην είσοδο του στροβίλου  $p_1$  (υψηλή πίεση) αποτελεί τη βασικότερη παράμετρο σχεδιασμού της οποίας η τιμή διαφοροποιείται αισθητά μεταξύ των δύο ακραίων λύσεων. Μεγάλες τιμές πίεσης στο στρόβιλο ( $p_1 = 1439kPa$  (λύση A)) αντιστοιχούν σε αύξηση

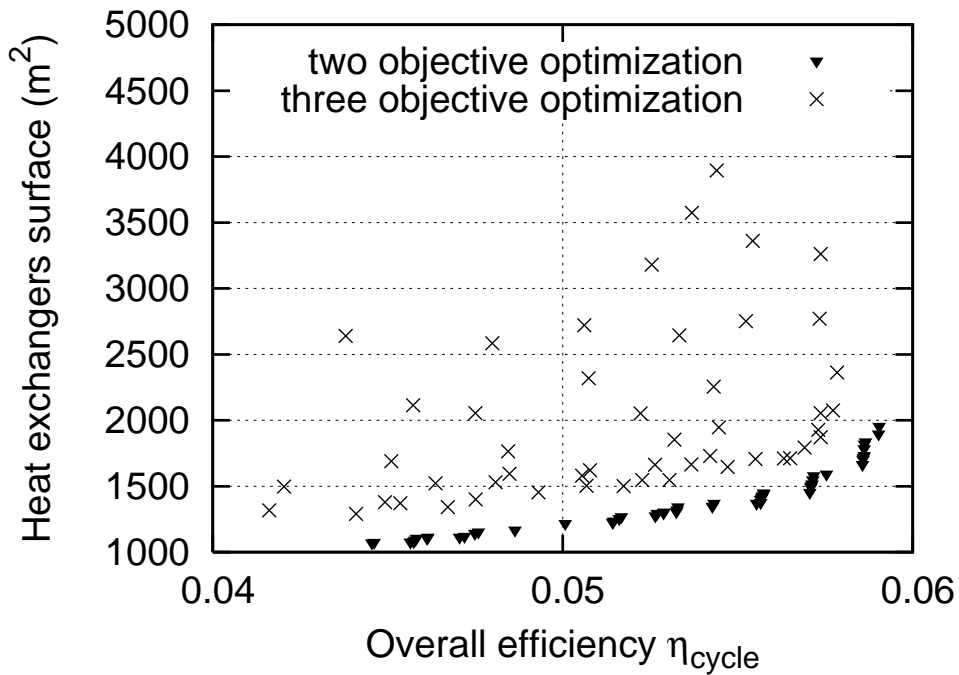


**Σχήμα 7.10:** Σχεδιασμός βέλτιστων κύκλων ηλεκτροπαραγωγής με χρήση γεωθερμίας. Τα υπολογισθέντα μέτωπα των μη-κυριαρχούμενων λύσεων για τα R-134a, R-410A, R-407C και R-600a, χρησιμοποιώντας PHE για την ατμοποίηση και συμπύκνωση του εργαζόμενου μέσου. Στόχοι: (α) μεγιστοποίηση του ολικού βαθμού απόδοσης του κύκλου, (β) ελαχιστοποίηση της επιφάνειας του ατμοποιητή και (γ) ελαχιστοποίηση της επιφάνειας του συμπυκνωτή.

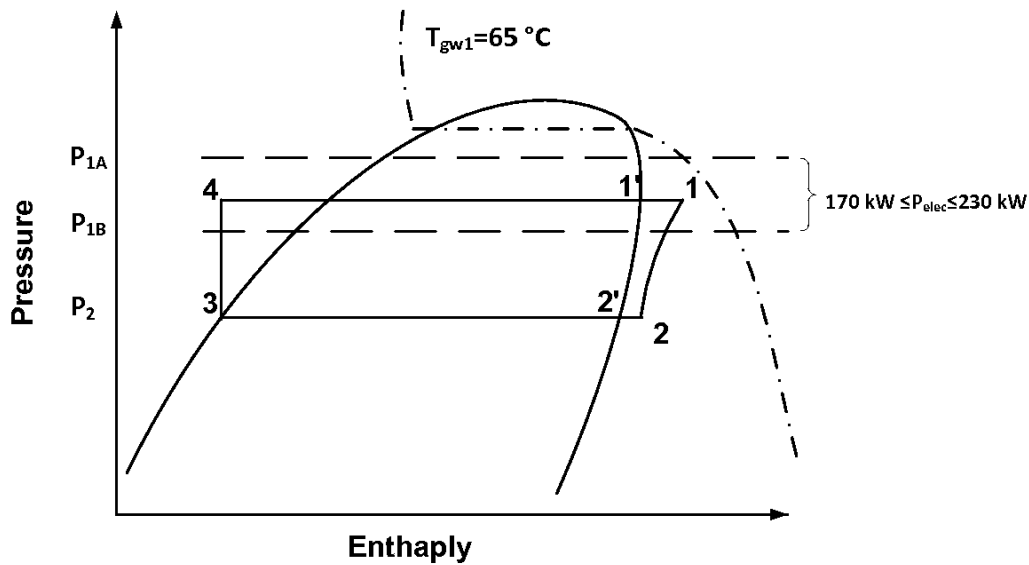
της απόδοσης του κύκλου ενώ όσο πέφτει η πίεση παρατηρούνται μικρότερες τιμές του  $\eta_{cycle}$ . Τα όρια της πίεσης  $p_1$  μέσα στα οποία κινούνται οι βέλτιστες λύσεις καθορίζονται κυρίως από τον πρώτο περιορισμό,  $170kWe \leq P_{elec} \leq 230kWe$ . Όπως φαίνεται και στο σχηματικό διάγραμμα πίεσης-ενθαλπίας, σχήμα 7.13, ο περιορισμός στην  $P_{elec}$  καθορίζει το άνω και κάτω όριο της πίεσης  $p_1$  για τις βέλτιστες λύσεις,  $p_{1B}$  και  $p_{1A}$  αντίστοιχα.



**Σχήμα 7.11:** Σχεδιασμός βέλτιστων κύκλων ηλεκτροπαραγωγής με χρήση γεωθερμίας. Τα υπολογισθέντα μέτωπα των μη-κυριαρχούμενων λύσεων για τα R-134a, R-410A, R-407C και R-600a χρησιμοποιώντας PHE για την ατμοποίηση και STHE για τη συμπύκνωση του εργαζόμενου μέσου. Στόχοι: (α) μεγιστοποίηση του ολικού βαθμού απόδοσης του κύκλου, (β) ελαχιστοποίηση της επιφάνειας του ατμοποιητή και (γ) ελαχιστοποίηση της επιφάνειας του συμπυκνωτή.



**Σχήμα 7.12:** Σχεδιασμός βέλτιστων κύκλων ηλεκτροπαραγωγής με χρήση γεωθερμίας. Σύγκριση των μη-κυριαρχούμενων λύσεων που έδωσαν οι βελτιστοποιήσεις με δύο (σχήμα 7.9) και τρεις (σχήμα 7.11) στόχους για το οργανικό μέσο R-600a.



**Σχήμα 7.13:** Σχεδιασμός βέλτιστων κύκλων ηλεκτροπαραγωγής με χρήση γεωθερμίας. Σχηματικό διάγραμμα πίεσης-ενθαλπίας. Τα  $p_{1B}$  και  $p_{1A}$  αντιστοιχούν το κάτω και άνω όριο της πίεσης  $p_1$  για τις βέλτιστες λύσεις και καθορίζονται από τον περιορισμό,  $170\text{kWe} \leq P_{elec} \leq 230\text{kWe}$ .

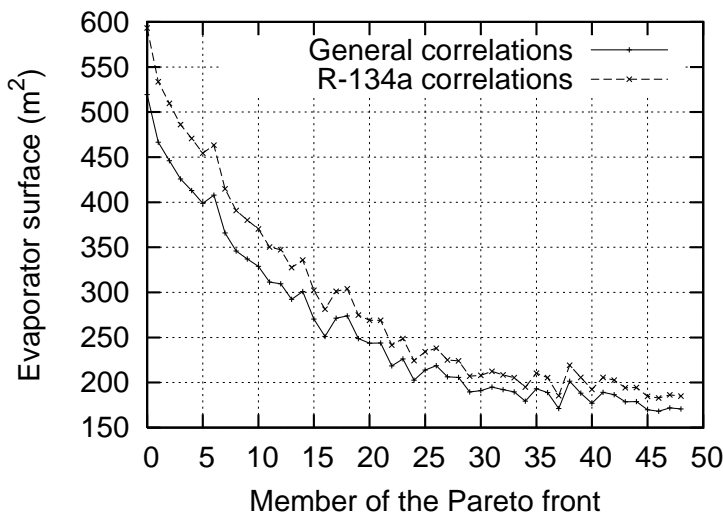


**Πίνακας 7.5:** Σχεδιασμός βέλτιστων κύκλων ηλεκτροπαραγωγής με χρήση γεωθερμίας. Αποδόσεις και τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού για τις βέλτιστες λύσεις του σχήματος 7.8 που αντιστοιχούν σε ισχύ  $P_{elec} = 190kW$  για τα R-134a, R-410A, R-407C και R-600a.

Αποδόσεις	R-134a	R-600a	R-410A	R-407C	Μονάδες Μέτρησης
$\eta_{cycle}$	6.6	5.0	4.8	4.7	%
A	405	288	377	365	$m^2$
Μεταβλητή	R-134a	R-600a	R-410A	R-407C	Μονάδες Μέτρησης
$p_1$	1355	593	2832	1707	$kPa$
$\dot{m}_{gw}$	44.4	52.5	74.3	50.0	$kg/s$
$\dot{m}_{wf}$	13.6	10.5	18.4	18.8	$kg/s$
$T_1 - T_4$	15.6	17.5	12.7	19.4	$K$
$T_2 - T_3$	7.5	7.6	7.6	7.5	$K$
$T_3$	288	293	293	290	$kPa$

**Πίνακας 7.6:** Σχεδιασμός βέλτιστων κύκλων ηλεκτροπαραγωγής με χρήση γεωθερμίας. Αποδόσεις και τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού για τα ακραία άτομα του βέλτιστου μετώπου του σχήματος 7.8 για το R-134a. Η λύση A έχει τη μεγαλύτερη απόδοση  $\eta_{cycle}$  και η λύση B τη μικρότερη επιφάνεια A.

Αποδόσεις	Λύση A	Λύση B	Μονάδες Μέτρησης
$\eta_{cycle}$	6.95	5.93	%
A	728	303	$m^2$
Μεταβλητή	Λύση A	Λύση B	Μονάδες Μέτρησης
$p_1$	1439	1249	$kPa$
$\dot{m}_{gw}$	44.64	43.34	$kg/s$
$\dot{m}_{wf}$	13.6	14.4	$kg/s$
$T_1 - T_4$	15.4	15.8	$K$
$T_2 - T_3$	7.5	8.5	$K$
$T_3$	288	289	$K$



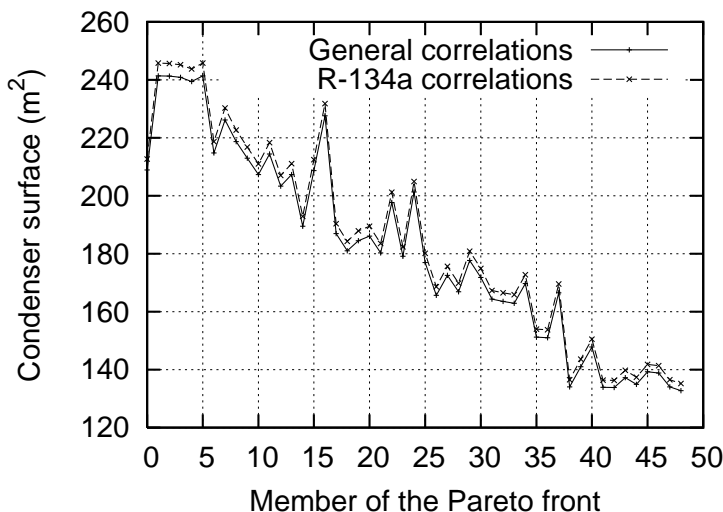
**Σχήμα 7.14:** Σχεδιασμός βέλτιστων κύκλων ηλεκτροπαραγωγής με χρήση γεωθερμίας. Η επιφάνεια του PHE ατμοποιητή για τις λύσεις του μετώπου Pareto του R-134a του σχήματος 7.8, αξιολογημένη με τις γενικές (general correlations) και τις ειδικές (R-134a correlations) συσχετίσεις για τον υπολογισμό του συντελεστή μεταφοράς θερμότητας.

(β') Υπολογισμός του συντελεστή μεταφοράς θερμότητας με τις ακριβέστερες σχέσεις

Μετά τη σύγκριση των οργανικών μέσων και δεδομένου ότι το R-134a αποτελεί το βέλτιστο εργαζόμενο μέσο, επιλέγεται να χρησιμοποιηθούν οι ειδικές (ακριβείς) σχέσεις της βιβλιογραφίας (Παράρτημα Α') για τον υπολογισμό του συντελεστή μεταφοράς θερμότητας,  $h$ , που θα οδηγήσει σε ακριβέστερο υπολογισμό της επιφάνειας των πλακοειδών εναλλακτών για το R-134a. Για τον εναλλάκτη κελύφους-αυλών συνεχίζεται η χρήση των γενικών σχέσεων. Οι λύσεις του μετώπου Pareto του σχήματος 7.8 αξιολογούνται χρησιμοποιώντας τις ειδικές σχέσεις και τα αποτελέσματα της αξιολόγησης, η επιφάνεια του ατμοποιητή και του συμπυκνωτή, φαίνονται στα σχήματα 7.14 και 7.15, αντίστοιχα, σε σύγκριση με τις γενικές (προσεγγιστικές) συσχετίσεις. Από τη σύγκριση παρατηρείται ότι οι τιμές της επιφάνειας του ατμοποιητή (σχήμα 7.14) υπολογισμένες με τις προσεγγιστικές συσχετίσεις διαφέρουν αρκετά από εκείνες με τις ακριβέστερες σχέσεις. Σε περίπτωση χρήσης των γενικών συσχετίσεων για τον υπολογισμό της επιφάνειας ατμοποιητή, ο ατμοποιητής θα υποδιαστασιολογηθεί και αυτό θα μειώσει την απόδοσή του. Αντίθετα, στην περίπτωση του συμπυκνωτή η απόκλιση δεν είναι μεγάλη, σχήμα 7.15.

(γ') Επιλογή του βέλτιστου τύπου εναλλάκτη για τη συμπύκνωση

Τέλος, συγκρίνεται η επίδραση του τύπου του συμπυκνωτή στους δύο στόχους της βελτιστοποίησης. Για το R-134a χρησιμοποιώντας τις ακριβείς συσχετίσεις

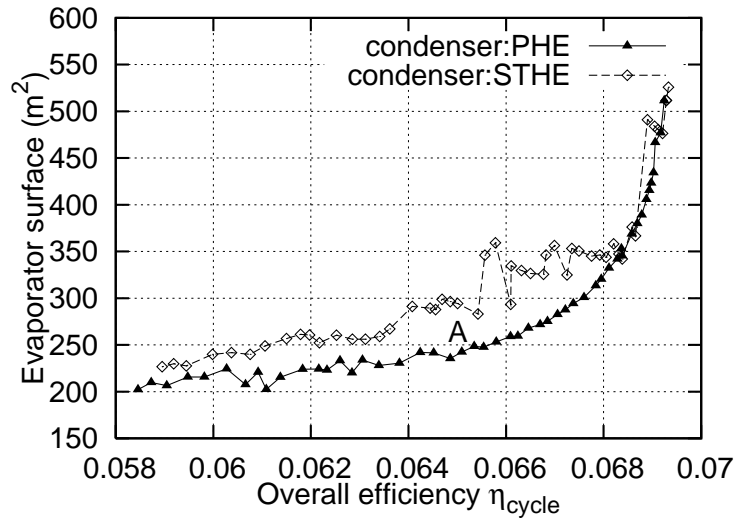


**Σχήμα 7.15:** Σχεδιασμός βέλτιστων κύκλων ηλεκτροπαραγωγής με χρήση γεωθερμίας. Η επιφάνεια του STHE συμπυκνωτή για τις λύσεις του μετώπου Pareto του R-134a του σχήματος 7.8, αξιολογημένη με τις γενικές (general correlations) και τις ειδικές (R-134a correlations) συσχετίσεις για τον υπολογισμό του συντελεστή μεταφοράς θερμότητας.

για τον υπολογισμό του συντελεστή μεταφοράς θερμότητας βελτιστοποιείται ο κύκλος Rankine χρησιμοποιώντας πλακοειδή (PHE) ή εναλλάκτη κελύφους-αυλών (STHE) για τον συμπυκνωτή. Επειδή οι τιμές της επιφάνειας του συμπυκνωτή για PHE και STHE δεν μπορούν να συγκριθούν, επειδή διαφέρουν σε τάξη μεγέθους, επιλέγεται να συγκριθούν οι βέλτιστες λύσεις ως προς τον βαθμό απόδοσης και την επιφάνεια του ατμοποιητή. Για αυτό το λόγο, στο σχήμα 7.16 παρουσιάζεται η επιφάνεια του PHE ατμοποιητή συναρτήσει του βαθμού απόδοσης και παρατηρείται ότι είτε χρησιμοποιηθεί πλακοειδής είτε κελύφους-αυλών συμπυκνωτής, ο βαθμός απόδοσης δεν διαφέρει σημαντικά. Δεν παρατηρείται όμως το ίδιο όσον αφορά στην επίδραση της χρήσης PHE ή STHE συμπυκνωτή στην επιφάνεια του ατμοποιητή και συμπεραίνεται ότι όταν χρησιμοποιηθεί STHE συμπυκνωτής απαιτείται μεγαλύτερης επιφάνειας PHE ατμοποιητής για να διατηρήσει την ίδια απόδοση. Επιλέγοντας τη χρήση PHE συμπυκνωτή παρουσιάζεται μία λύση με ολικό βαθμό απόδοσης 6.5% από το μέτωπο των βέλτιστων λύσεων του σχήματος 7.16 (βέλτιστη λύση A) στον πίνακα 7.7. Επίσης, επιχειρείται μία πρώτη διαστασιολόγηση των πλακοειδών εναλλακτών στον πίνακα 7.8, όπου βάσει της συνολικής επιφάνειας υπολογίζεται ο αριθμός των πλακών και το συνολικό μήκος του εναλλάκτη.

### 7.1.5 Μία πρότυπη μονάδα δυαδικού κύκλου

Στο πλαίσιο του έργου LOW-BIN, μετά την ανάπτυξη της τεχνολογίας δυαδικού κύκλου για χαμηλή ενθαλπία, μία πρότυπη μονάδα δυαδικού κύκλου κατασκευάστηκε,



**Σχήμα 7.16:** Σχεδιασμός βέλτιστων κύκλων ηλεκτροπαραγωγής με χρήση γεωθερμίας. Σύγκριση του ολικού βαθμού απόδοσης του κύκλου και της επιφάνειας του ατμοποιητή για τις βέλτιστες λύσεις του R-134a για PHE και STHE συμπυκνωτή.

**Πίνακας 7.7:** Σχεδιασμός βέλτιστων κύκλων ηλεκτροπαραγωγής με χρήση γεωθερμίας. Βέλτιστη λύση A-σχήμα 7.16 με ολικό βαθμό απόδοσης 6.5%.

Μέγεθος	Λύση A	Μονάδες Μέτρησης
$p_1$	1318	$kPa$
$\dot{m}_{gw}$	44.6	$\frac{kg}{s}$
$\dot{m}_{wf}$	13.6	$\frac{kg}{s}$
$\dot{m}_{cw}$	84.3	$\frac{kg}{s}$
$T_1 - T_4$	15.6	$K$
$T_2 - T_3$	7.6	$K$
$T_3$	288	$K$
$P_{pump_{wf}}$	16.2	$kW$
$P_{pump_{cw}}$	7.2	$kW$
$Q_{evap}$	2918	$kW$
$Q_{cond}$	2685	$kW$
$P_{turb}$	190	$kW$

εγκαταστάθηκε και λειτουργεί χρησιμοποιώντας το γεωθερμικό πεδίο της πόλης Simbach (στα σύνορα Γερμανίας-Αυστρίας), αποδίδοντας 200kWe ηλεκτρική ενέργεια, [1]. Η παραγωγική γεώτρηση έχει βάθος 1850m και η γεώτρηση επανεισαγωγής 1970m. Η θερμοκρασία του γεωθερμικού ρευστού ανέρχεται στους 80°C με παροχή 60kg/s, ενώ

**Πίνακας 7.8:** Σχεδιασμός βέλτιστων κύκλων ηλεκτροπαραγωγής με χρήση γεωθερμίας. Διαστασιολόγηση των πλακοειδών εναλλακτών (Λύση Α)

	Εξατμιστής	Συμπυκνωτής
Επιφάνεια ( $m^2$ )	243	163
Αριθμός πλακών	505	340
Μήκος εναλλάκτη ( $m$ )	1.5	1.10

η θερμοκρασία του νερού ψύξης είναι  $17^\circ C$ . Η εγκατάσταση της μονάδας δυαδικού κύκλου παρουσιάζεται στο σχήμα 7.17. Σε σχέση με το σχεδιασμό της βέλτιστης μονάδας που πραγματοποιήθηκε στο έργο (και που προφανώς υλοποιήθηκε με το λογισμικό της παρούσας διατριβής) και τη μονάδα που κατασκευάστηκε υπήρξε μικρός αριθμός διαφοροποιήσεων.



**Σχήμα 7.17:** Σχεδιασμός βέλτιστων κύκλων ηλεκτροπαραγωγής με χρήση γεωθερμίας. Η πρότυπη μονάδα δυαδικού κύκλου στο Simbach, [1], που κατασκευάστηκε στο πλαίσιο του ευρωπαϊκού έργου LOW-BIN.

## 7.2 Σχεδιασμός βέλτιστων γεωθερμικών αντλιών θερμότητας

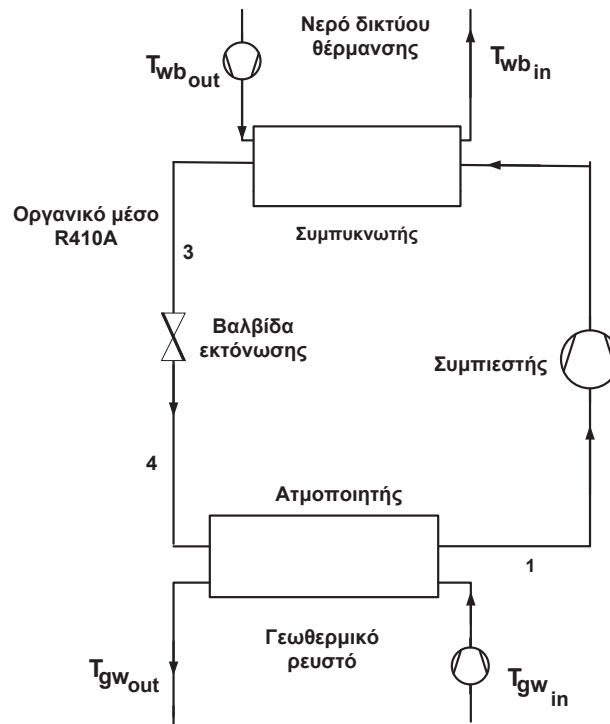
Οι Γεωθερμικές Αντλίες Θερμότητας (ΓΑΘ) είναι συστήματα θέρμανσης/κλιματισμού, τα οποία χρησιμοποιούνται για θέρμανση και ψύξη κτιρίων, όπως επίσης και για παροχή ζεστού νερού χρήσης, [129, 95, 128]. Αξιοποιώντας το θερμικό δυναμικό του εδάφους εξοικονομούν ηλεκτρική και πρωτογενή ενέργεια, με αποτέλεσμα να συμβάλλουν στη μείωση των εκπομπών αερίων του θερμοκηπίου. Τα βασικά εξαρτήματα από τα οποία αποτελείται μια γεωθερμική αντλία θερμότητας είναι ο συμπιεστής, ο συμπυκνωτής, ο ατμοποιητής και η βαλβίδα εκτόνωσης, σχήμα 7.18. Κατά τη λειτουργία της θέρμανσης, η θερμότητα του εδάφους μεταδίδεται στο οργανικό μέσο μέσω ενός εναλλάκτη θερμότητας (ατμοποιητής). Στη συνέχεια, το οργανικό μέσο αυξάνει περαιτέρω την πίεση και τη θερμοκρασία του κατά τη συμπίεση του στον συμπιεστή. Η θερμότητα αυτή του οργανικού μέσου μεταφέρεται μέσω ενός δεύτερου εναλλάκτη θερμότητας (συμπυκνωτής) στο νερό του δικτύου θέρμανσης. Με αυτό τον τρόπο, συμπυκνώνεται το οργανικό μέσο και μετά την εκτόνωσή του σε μία βαλβίδα εκτόνωσης οδηγείται, εκ νέου, στον αρχικό εναλλάκτη θερμότητας. Όσον αφορά στα οργανικά μέσα τα οποία χρησιμοποιούνται, τα R-407C ή R-134a έχουν την τάση να αντικατασταθούν από το R-410A, το οποίο έχει καλύτερες ιδιότητες μετάδοσης θερμότητας και καλύτερη απόδοση σε αναστρέψιμα συστήματα για λειτουργία θέρμανσης/ψύξης.

Η αγορά των συστημάτων γεωθερμικών αντλιών θερμότητας, που εκμεταλλεύονται την αβαθή γεωθερμία (βάθος έως 150m) για θέρμανση/ψύξη και παροχή ζεστού νερού χρήσης, στηρίζεται σε μία ώριμη και δοκιμασμένη τεχνολογία. Παρόλα αυτά όπως αποδεικνύεται από τα μέχρι σήμερα αποτελέσματα επιδεικτικών ευρωπαϊκών έργων ο βαθμός απόδοσης των γεωθερμικών αντλιών θερμότητας επιδέχεται περαιτέρω βελτίωση, [3]. Σημειώνεται ότι η αγορά των ΓΑΘ αναπτύσσεται σε παγκόσμια κλίμακα τα τελευταία 15 χρόνια με σταθερά υψηλούς ρυθμούς άνω του 25% ανά έτος. Ο λόγος της παρατηρούμενης ευρείας διάδοσης των ως άνω εφαρμογών έγκειται στο ότι με την εφαρμογή των γεωθερμικών αντλιών θερμότητας επιτυγχάνεται σημαντική εξοικονόμηση ενέργειας (άνω του 50%) σε σχέση με τους συμβατικούς τρόπους θέρμανσης/ψύξης (λ.χ. με φυσικό αέριο). Αυτή τη στιγμή, η πλειονότητα των γεωθερμικών αντλιών θερμότητας της αγοράς παρουσιάζουν βαθμό απόδοσης ή, όπως ονομάζεται για τις αντλίες θερμότητας, συντελεστή συμπεριφοράς (Coefficient of Performance, COP) μεταξύ 4 και 5.5. Ένας από τους στόχους του ευρωπαϊκού έργου GROUND-MED<sup>2</sup>, το οποίο χρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση και του οποίου συντονιστής είναι το ΚΑΠΕ, αποτελεί η αύξηση της απόδοσης των γεωθερμικών αντλιών θερμότητας επιτυγχάνοντας  $COP > 6$  μέσω βελτιώσεων και καινοτόμων παρεμβάσεων, καθώς και η κατασκευή αυτών των ΓΑΘ. Η ΜΠΥΡ&B/ΕΘΣ, δια της παρούσας διατριβής, συνέβαλε στο σχεδιασμό βέλτιστων γεωθερμικών αντλιών θερμότητας με τη χρήση ΑΕΑ με στόχους τη μεγιστοποίηση του COP και την ελαχιστοποίηση της επιφάνειας των εναλλακτών.

---

<sup>2</sup>GROUND-MED, Advanced Ground Source Heat Pump Systems for Heating and Cooling in Mediterranean, Contract No 218895

---



**Σχήμα 7.18:** Σχεδιασμός βέλτιστων γεωθερμικών αντλιών θερμότητας. Σχηματικό διάγραμμα μιας γεωθερμικής αντλίας θερμότητας (ΓΑΘ).

### 7.2.1 Διατύπωση του προβλήματος

Η εφαρμογή αυτή αφορά στο σχεδιασμό-βελτιστοποίηση δύο γεωθερμικών αντλιών θερμότητας κατά τη λειτουργία τους για θέρμανση κτιρίων, αποδίδοντας  $60kW_{th}$  και  $80kW_{th}$  θερμική ισχύ, αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας οργανικό μέσο R-410A. Οι στόχοι της βελτιστοποίησης αφορούν στη

- μεγιστοποίηση του συντελεστή συμπεριφοράς COP της ΓΑΘ και
- ελαχιστοποίηση της επιφάνειας των εναλλακτών.

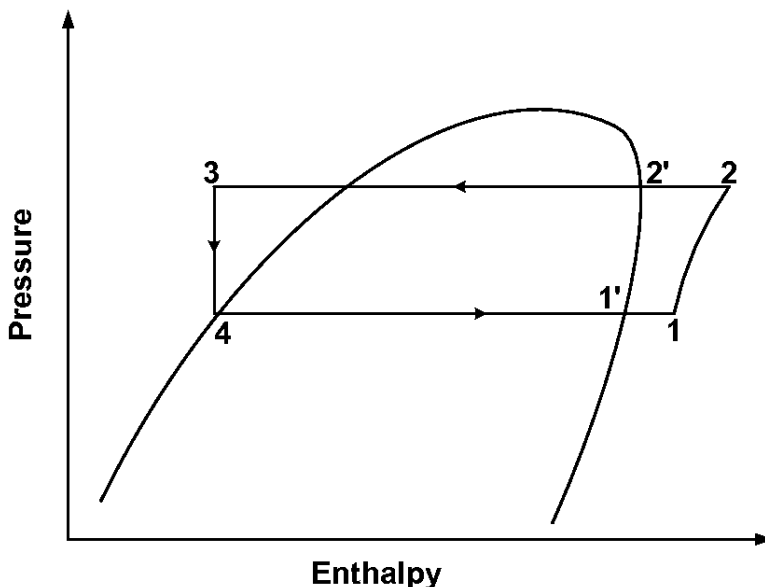
Ο συντελεστής συμπεριφοράς COP υπολογίζεται ως ο λόγος της αποδιδόμενης από την αντλία θερμότητας θερμικής ενέργειας σε  $kW_{th}$  προς την ηλεκτρική κατανάλωση του συμπιεστή σε  $kW_e$

$$COP = \frac{Q_{th}}{Q_C}$$

όπου

$$Q_{th} = \dot{m}_{wf} (H_{wf2} - H_{wf3}), \quad Q_C = \dot{m}_{wf} (H_{wf1} - H_{wf2})$$





**Σχήμα 7.19:** Σχεδιασμός βέλτιστων γεωθερμικών αντλιών θερμότητας. Σχηματικό διάγραμμα πίεσης-ενθαλπίας του κύκλου της ΓΑΘ. Η θερμότητα του γεωθερμικού ρευστού μεταδίδεται στο οργανικό μέσο, το οποίο ατμοποιείται στον ατμοποιητή (θέση 1) και λόγω της συμπίεσής του στο συμπιεστή (μεταβολή 1-2) αυξάνει την πίεση και τη θερμοκρασία του έχοντας ως στόχο την απόδοση μέρους της θερμότητας που αποκτά (θέση 2) στο νερό του δικτύου θέρμανσης του κτιρίου, (θέση 3). Τέλος, το οργανικό μέσο εκτονώνεται μέσω μιας βαλβίδας εκτόνωσης, (θέση 4).

Τα σύμβολα είναι συμβατά με τον πίνακα 7.1 και την αρίθμηση θέσεων του σχήματος 7.19, όπου παρουσιάζεται το θερμοδυναμικό διάγραμμα πίεσης-ενθαλπίας ( $p-h$ ) της ΓΑΘ. Τα θερμοδυναμικά μεγέθη του οργανικού μέσου στα διάφορα σημεία του κύκλου υπολογίζονται όπως και στην προηγούμενη εφαρμογή μέσω του λογισμικού REFPROP.

Για τη συμπύκνωση και την ατμοποίηση του οργανικού μέσου, χρησιμοποιούνται πλακοειδείς εναλλάκτες. Ο υπολογισμός της επιφάνειας των εναλλακτών θερμότητας  $A$ , πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας τους τύπους της ενότητας 7.1.3, που αφορούν σε πλακοειδή εναλλάκτη. Όσον αφορά στον υπολογισμό των συντελεστών μεταφοράς θερμότητας  $h$  για την ατμοποίηση και τη συμπύκνωση σε πλακοειδής εναλλάκτες, χρησιμοποιούνται οι ακριβείς συσχετίσεις της βιβλιογραφίας για το R-410A, οι οποίες παρατίθενται στο Παράρτημα Α'. Στο πλαίσιο της διατριβής, για τη βελτιστοποίηση της ΓΑΘ αναπτύχθηκε λογισμικό αξιολόγησης, το οποίο υπολογίζει το συντελεστή συμπεριφοράς καθώς και τις απαραίτητες επιφάνειες των εναλλακτών.

Οι  $N = 4$  μεταβλητές σχεδιασμού συνοψίζονται στον πίνακα 7.9. Κατά τη βελτιστοποίηση, διατηρούνται σταθερές οι παράμετροι του πίνακα 7.10. Οι τιμές που παρουσιάζονται στηρίζονται σε πραγματικά δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή των πρωτοτύπων. Τέλος, στον πίνακα 7.11 παρουσιάζονται οι περιορισμοί που επιβάλλονται κατά τη βελτιστοποίηση, αντιστοιχεί με αυτούς που επιβλήθηκαν στην εφαρμογή

**Πίνακας 7.9:** Σχεδιασμός βέλτιστων γεωθερμικών αντλιών θερμότητας. Μεταβλητές σχεδιασμού. Τα σύμβολα είναι συμβατά με τον πίνακα 7.1 και την αρίθμηση του σχήματος 7.19.

Μεταβλητή	Κάτω όριο	Άνω όριο	Μονάδες Μέτρησης	Σχόλια
$p_1$	1000	1500	$kPa$	Πίεση του εργαζόμενου μέσου στην είσοδο του συμπιεστή
$p_2$	2000	3000	$kPa$	Πίεση του εργαζόμενου μέσου στην έξοδο του συμπιεστή
$\dot{m}_{wf}$	0.3	0.5	$\frac{kg}{s}$	Παροχή μάζας του εργαζόμενου μέσου.
$\dot{m}_{gw}$	2.5	4.0	$\frac{kg}{s}$	Παροχή μάζας του γεωθερμικού ρευστού.

**Πίνακας 7.10:** Σχεδιασμός βέλτιστων γεωθερμικών αντλιών θερμότητας. Μεγέθη που διατηρούνται σταθερά κατά τη βελτιστοποίηση. Τα σύμβολα είναι συμβατά με τον πίνακα 7.1 και την αρίθμηση του σχήματος 7.19.

Σταθερές ποσότητες	Συμβολισμός/Τιμή
Θερμοκρασία γεωθερμικού ρευστού-είσοδος	$T_{gw_{in}} = 20^\circ C$
Θερμοκρασία γεωθερμικού ρευστού-έξοδος	$T_{gw_{out}} = 15^\circ C$
Θερμοκρασία νερού του δικτύου θέρμανσης-είσοδος	$T_{w_{bin}} = 35^\circ C$
Θερμοκρασία νερού του δικτύου θέρμανσης-έξοδος	$T_{w_{bout}} = 30^\circ C$
Ισεντροπικός βαθμός απόδοσης συμπιεστή	$\eta_C = 0.77$
Μήκος πλάκας	$l = 0.525m$
Πλάτος πλάκας	$w = 0.243m$
Πάχος πλάκας	$\Delta x = 0.0004m$
Απόσταση δύο πλακών	$t = 0.0033m$
Υλικό πλάκας	τιτάνιο

7.1. Δεδομένου ότι ο σχεδιασμός γίνεται για ΓΑΘ ισχύος  $60kW_{th}$  και  $80kW_{th}$ , επιβάλλεται ο περιορισμός  $55kWe \leq Q_{th} \leq 65kWe$  και  $75kWe \leq Q_{th} \leq 85kWe$ , αντίστοιχα.

## 7.2.2 Αποτελέσματα βελτιστοποίησης

Η περίπτωση αυτή μελετήθηκε χρησιμοποιώντας τον AMAEA σε ένα πλέγμα βάσης  $8 \times 8$  σε 20 CPUs. Το μεταπρότυπο ενεργοποιείται μετά από τις πρώτες 50 ακριβείς αξιολογήσεις με  $N_{IPE} = 5$ . Στο σχήμα 7.20, παρουσιάζονται τα μέτωπα των μη-κυριαρχούμενων λύσεων για ΓΑΘ ισχύος  $60kW_{th}$  και  $80kW_{th}$ . Στον πίνακα 7.12,

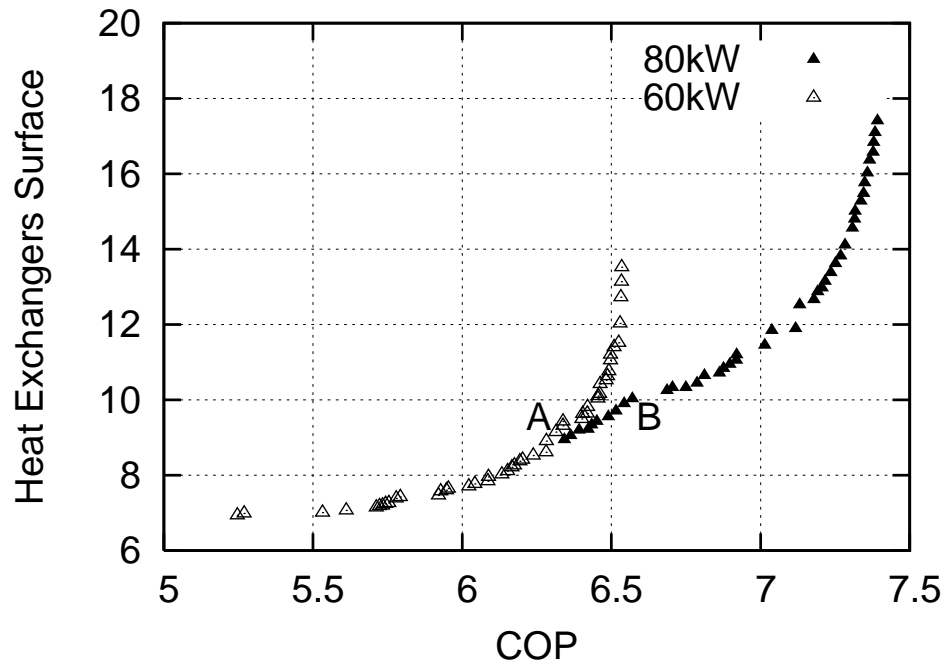
**Πίνακας 7.11:** Σχεδιασμός βέλτιστων γεωθερμικών αντλιών θερμότητας. Περιορισμοί που επιβάλλονται κατά τη βελτιστοποίηση. Τα σύμβολα είναι συμβατά με τον πίνακα 7.1 και την αρίθμηση του σχήματος 7.19.

Περιορισμός	Περιγραφή
$55kW_{th} \leq Q_{th} \leq 65kW_{th}$	Παραγόμενη θερμική ισχύς- $60kW_{th}$ ή
$75kW_{th} \leq Q_{th} \leq 85kW_{th}$	Παραγόμενη θερμική ισχύς- $80kW_{th}$ .
$T_{wf1'} \leq T_{wf1} \leq T_{gwin}$	Ατμοποιητής: Έξοδος εργαζόμενου μέσου. $T_{wf1'}$ θερμοκρασία εργαζόμενου μέσου στο σημείο κορεσμένου ατμού, $T_{gwin}$ θερμοκρασία εισόδου του γεωθερμικού ρευστού.
$T_{wf3} \geq T_{wbin}$	Συμπυκνωτής: Έξοδος εργαζόμενου μέσου. $T_{wbin}$ θερμοκρασία εισόδου του νερού χρήσης στο κτίριο.
$T_{wf2} \geq T_{wf2'}$	Συμπιεστής: Έξοδος εργαζόμενου μέσου. $T_{wf2'}$ θερμοκρασία εργαζόμενου μέσου στο σημείο κορεσμένου ατμού.

**Πίνακας 7.12:** Σχεδιασμός βέλτιστων γεωθερμικών αντλιών θερμότητας. Βέλτιστη λύση A ( $60kW_{th}$ ) και λύση B( $80kW_{th}$ ) του σχήματος 7.20

Μέγεθος	Λύση A- $60kW_{th}$	Λύση B- $80kW_{th}$	Μονάδες Μέτρησης
$p_2$	2768	2548	$kPa$
$p_1$	1181	1117	$kPa$
$\dot{m}_{gw}$	2.6	3.2	$\frac{kg}{s}$
$\dot{m}_{wf}$	0.35	0.4	$\frac{kg}{s}$
$\dot{m}_{wb}$	3.1	3.7	$\frac{kg}{s}$
$Q_C$	10.4	11.8	$kW$
$Q_{th}$	65	78	$kW$
$Q_{gw}$	55	66	$kW$
$COP$	6.3	6.6	

παρουσιάζονται δύο λύσεις με COP 6.3 και 6.6 από τα μέτωπα των βέλτιστων λύσεων του σχήματος 7.20 για 60 και  $80kW_{th}$ , αντίστοιχα (βέλτιστη λύση A για  $60kW_{th}$  και B για  $80kW_{th}$ ). Επίσης, στον πίνακα 7.13 φαίνονται η συνολική επιφάνεια των εναλλακτών, ο αριθμός των πλακών και το συνολικό μήκος του κάθε εναλλάκτη σε κάθε περίπτωση. Ο στόχος του  $COP > 6$  ικανοποιείται τόσο από τις τιμές που υπολογίσθηκαν όσο και από τα πρωτότυπα που κατασκευάστηκαν και λειτουργούν, [3].



**Σχήμα 7.20:** Σχεδιασμός βέλτιστων γεωθερμικών αντλιών θερμότητας. Τα υπολογισθέντα μέτωπα των μη-κυριαρχούμενων λύσεων για ΓΑΘ ισχύος  $60kW_{th}$  και  $80kW_{th}$ .

**Πίνακας 7.13:** Σχεδιασμός βέλτιστων γεωθερμικών αντλιών θερμότητας. Διαστασιολόγηση των πλακοειδών εναλλακτών (Λύση A και λύση B)

	Λύση A	Εξατμιστής	Συμπυκνωτής
Επιφάνεια ( $m^2$ )		4.8	4.3
Αριθμός πλακών		38	34
Μήκος εναλλάκτη ( $m$ )		0.35	0.3
	Λύση B	Εξατμιστής	Συμπυκνωτής
Επιφάνεια ( $m^2$ )		5.2	4.6
Αριθμός πλακών		41	36
Μήκος εναλλάκτη ( $m$ )		0.45	0.4

# Κεφάλαιο 8

## Συμπεράσματα

Η διδακτορική διατριβή αυτή είχε ως στόχο την ανάπτυξη και τον προγραμματισμό μεθόδων βελτιστοποίησης που έχουν ως βάση τις συνεχείς συζυγείς μεθόδους και τους εξελικτικούς αλγορίθμους καθώς και το συνδυασμό τους, για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης μορφής και βελτιστοποίησης τοπολογίας. Όσον αφορά στην ανάπτυξη των συζυγών μεθόδων, τόσο για τη βελτιστοποίηση μορφής όσο και τοπολογίας, η διατριβή επικεντρώθηκε στην επέκταση των συζυγών μεθόδων για την επίλυση προβλημάτων με συναρτήσεις-στόχους όπου η μεταφορά θερμότητας παίζει βασικό ρόλο. Επίσης ιδιαίτερη σημασία δόθηκε στον ακριβή υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας που υπολογίζουν οι συζυγείς μέθοδοι ενώ, ως προς τους εξελικτικούς αλγορίθμους, επικεντρώθηκε στη μείωση του υπολογιστικού κόστους για την εύρεση της βέλτιστης λύσης. Στη συνέχεια, συνοψίζονται τα βασικά στοιχεία της διατριβής μαζί με τα συμπεράσματα που εξήχθησαν στα προηγούμενα κεφάλαια της διατριβής.

Ως προς τη βελτιστοποίηση μορφής, στα κεφάλαια 3 και 4 διατυπώθηκε μαθηματικά μια νέα συνεχής συζυγής μέθοδος για στρωτές και τυρβώδεις ασυμπίεστες ροές με μεταφορά θερμότητας. Αξίζει να σημειωθεί ότι, για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία των ασυμπίεστων ροών παρουσιάζεται η διατύπωση των συνεχών συζυγών εξισώσεων λαμβάνοντας υπόψη και την εξίσωση της ενέργειας. Στην περίπτωση τυρβώδους ροής, οι νέες συζυγείς διατυπώσεις χρησιμοποιήσαν ως βάση τη συνεχή συζυγή διατύπωση του μοντέλου τύρβης των Spalart-Allmaras της διατριβής [143], λαμβάνοντας υπόψη τις μεταβολές του πεδίου της τυρβώδους συνεκτικότητας ως προς τις μεταβολές των μεταβλητών σχεδιασμού. Από τις εφαρμογές που παρουσιάστηκαν, τόσο για στρωτές όσο και για τυρβώδεις ροές, συμπεραίνεται ότι η μέθοδος μπορεί να υπολογίσει παραγώγους ευαισθησίας υψηλής ακρίβειας σε σχέση με τις παραγώγους αναφοράς οι οποίες υπολογίζονται από τις πεπερασμένες διαφορές. Επιπλέον, για τυρβώδεις ροές, συγκρίνοντας τις παραγώγους που υπολογίζει η προτεινόμενη μέθοδος με τις παραγώγους που υπολογίζονται αν χρησιμοποιούνταν η παραδοχή της “παγωμένης” τυρβώδους συνεκτικότητας, συμπεραίνεται ότι, και στην περίπτωση τυρβωδών ροών με μεταφορά θερμότητας, η χρήση της συνήθους παραδοχής οδηγεί σε παραγώγους που διαφέρουν αρκετά από τις τιμές αναφοράς. Δεδομένου ότι με την προτεινόμενη μέθοδο οι παράγωγοι ταυτίζονται με τις τιμές αναφοράς, φαίνεται ότι οι νέοι όροι που εμφανίζονται στις συζυγείς εξισώσεις της ορμής και του μοντέλου τύρβης λόγω της προσθήκης της

εξίσωσης της ενέργειας στο σύστημα των εξισώσεων κατάστασης συμβάλλουν στη διατήρηση της ακρίβειας των παραγώγων ευαισθησίας. Στη συνέχεια, η συζυγής μέθοδος εντάχθηκε σε βρόχο βελτιστοποίησης για το σχεδιασμό της βέλτιστης γεωμετρίας αγωγών χρησιμοποιώντας τη “συγχρονισμένη επαναληπτική τεχνική επίλυσης” (one-shot technique), όπου το ευθύ και συζυγές πεδίο καθώς και οι μεταβλητές σχεδιασμού ανανεώνονται ταυτόχρονα, επιτυγχάνοντας επιτάχυνση περίπου 1.7x σε σχέση με την “κλασική” αιτιοκρατική μέθοδο βελτιστοποίησης. Η επιτάχυνση από τη μεταφορά του CPU αλγορίθμου one-shot στη GPU (κέρδος περίπου 40x, για πλέγμα  $\sim 80000$  κόμβων) οδήγησε στη δημιουργία ενός αλγορίθμου ο οποίος υπολογίζει τη βέλτιστη λύση περίπου 70 φορές πιο γρήγορα από την κλασική τεχνική προγραμματισμένη στη CPU.

Η δεύτερη συμβολή της παρούσας διατριβής αφορά στη βελτιστοποίηση τοπολογίας, όπως αυτή παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 5. Αξίζει να σημειωθεί ότι, μέχρι σήμερα, στη μηχανική των ρευστών, η βελτιστοποίηση τοπολογίας περιοριζόταν σε στρωτές ροές. Στην περίπτωση τυρβώδους ροής, βασιζόταν αποκλειστικά στη συνήθη παραδοχή της “παγωμένης” τυρβώδους συνεκτικότητας κατά τη διατύπωση των συζυγών εξισώσεων. Η παρούσα διατριβή επεκτείνει τη βελτιστοποίηση τοπολογίας σε προβλήματα τυρβωδών ροών με μεταφορά θερμότητας, προτείνοντας την προσθήκη νέων όρων συναρτήσεως του πορώδους στην εξίσωση της ενέργειας και στην εξίσωση του μοντέλου τύρβης Spalart-Allmaras. Η προσθήκη των νέων αυτών όρων επιτρέπει τη διατύπωση των συνεχών συζυγών εξισώσεων της εξίσωσης της ενέργειας και του μοντέλου τύρβης, για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία, για τη βελτιστοποίηση τοπολογίας. Όπως συμπεραίνεται από τις εφαρμογές που παρουσιάστηκαν, η συζυγής μέθοδος, αποφεύγοντας την παραδοχή της “παγωμένης” τυρβώδους συνεκτικότητας, υπολογίζει ακριβείς παραγώγους ευαισθησίας. Η ακρίβεια των υπολογιζόμενων παραγώγων ευαισθησίας και στη βελτιστοποίηση τοπολογίας αποδεικνύεται σημαντική, από τη στιγμή που μη-ακριβείς παράγωγοι, κατά τον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης, μπορούν να οδηγήσουν σε λανθασμένη στερεοποίηση περιοχών του χωρίου, οι οποίες είναι πολύ δύσκολο να μετατραπούν σε περιοχές ροής στους επόμενους κύκλους. Στο κεφάλαιο αυτό μελετήθηκε, επίσης, η εξάρτηση της βέλτιστης τοπολογίας από την αρχικοποίηση που χρησιμοποιείται για το πεδίο του πορώδους, αποδεικνύοντας ότι διαφορετική αρχικοποίηση του πεδίου του πορώδους μπορεί να οδηγήσει σε διαφορετικά τοπικά ελάχιστα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές τοπολογίες. Για τη διεύρυνση του πεδίου εφαρμογής της μεθόδου, παρουσιάστηκε η εισαγωγή περιορισμών, δίνοντας τη δυνατότητα στο σχεδιαστή να καθορίσει το ποσοστό της ροής σε κάθε έξοδο και να ελέγξει πιθανές ή μη ανομοιομορφίες της θερμοκρασίας της ροής σε κάθε έξοδο. Στις παρουσιαζόμενες εφαρμογές, ο αλγόριθμος χρησιμοποιήθηκε για την εύρεση της βέλτιστης τοπολογίας δικτύου αγωγών για τυρβώδεις ροές με μεταφορά θερμότητας, λαμβάνοντας υπόψη τους παραπάνω περιορισμούς.

Όσον αφορά στις στοχαστικές μεθόδους βελτιστοποίησης, στόχος της παρούσας διατριβής ήταν η επέκταση του ασύγχρονου εξελικτικού αλγορίθμου (AEA) της διατριβής [148], ο οποίος, λόγω απουσίας της έννοιας της γενιάς, εξαλείφει τα προβλήματα συγχρονισμού των “σύγχρονων” εξελικτικών αλγορίθμων και εκμεταλλεύεται στο μέγιστο βαθμό την πολυεπεξεργασία. Στο κεφάλαιο 6, έχοντας ως στόχο τη δημιουργία ενός ακόμα πιο αποδοτικού λογισμικού βελτιστοποίησης, παρουσιάστηκε η

εισαγωγή μιας μεθόδου τοπικής ανίχνευσης στον ΑΕΑ, η οποία μετέτρεψε τον αλγόριθμο αυτό σε ένα νέο ασύγχρονο μιμητικό αλγόριθμο (ΑΜΑ). Ο τελευταίος, με τη χρήση μεταπρότυπων, αναβάθμιστηκε σε έναν ασύγχρονο μιμητικό αλγόριθμο υποστηριζόμενο από μεταπρότυπα (ΑΜΑΜΑ). Με τον προτεινόμενο υβριδισμό, δόθηκε η δυνατότητα περαιτέρω εκμετάλλευσης των συζυγών μεθόδων που αναπτύχθηκαν στην παρούσα διατριβή, για τον ακριβή και οικονομικό (από πλευράς υπολογιστικού κόστους) υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας, που απαιτεί η μέθοδος απότομης καθόδου κατά τη διαδικασία τοπικής ανίχνευσης. Όσον αφορά στον τρόπο λειτουργίας της μεθόδου τοπικής ανίχνευσης στον ασύγχρονο αλγόριθμο, η μέθοδος τοπικής ανίχνευσης ενεργοποιείται για τα καλύτερα άτομα του τρέχοντος πληθυσμού, όπως αυτά προκρίνονται από τον ΑΕΑ. Από τις εφαρμογές του αλγορίθμου συμπεραίνεται ότι ο τρόπος εισαγωγής της μεθόδου τοπικής ανίχνευσης στον ΑΕΑ συνέβαλε σημαντικά στην αύξηση της απόδοσης του ΑΜΑΜΑ, δεδομένου ότι η πλειοψηφία των μελών των τελικών μετώπων των μη-κυριαρχούμενων λύσεων προέρχεται απ' ευθείας από τη μέθοδο τοπικής ανίχνευσης.

Στο νέο αυτόν αλγόριθμο, προτάθηκε ένας “έξυπνος” τρόπος για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας στην πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση, ο οποίος βασίζεται σε μία ενιαία κλήση της συζυγούς μεθόδου και όχι τόσες όσοι οι στόχοι. Αυτό επιτυγχάνεται με τη σύνθεση των στόχων σε μία βαθμωτή συνάρτηση, όπου οι παράγωγοι της συνάρτησης  $\phi$  του αλγορίθμου SPEA II ως προς τους στόχους αποτελούν τους συντελεστές βαρύτητας. Με αυτό τον τρόπο, απαιτείται μία μόνο επίλυση των συζυγών εξισώσεων χρησιμοποιώντας τους συντελεστές βαρύτητας που παρέχει ο ΕΑ στη μέθοδο τοπικής ανίχνευσης. Έτσι, εκτός της μείωσης του υπολογιστικού κόστους, επιτυγχάνεται βελτίωση των ατόμων προς τη σωστή κατεύθυνση, δηλαδή την κατεύθυνση βελτίωσης όλων των στόχων, το οποίο συμβάλλει καθοριστικά στην αύξηση της απόδοσης του ΑΜΑΜΑ. Από τις εφαρμογές-πιστοποίηση του αλγορίθμου συμπεραίνεται ότι ο ΑΜΑΜΑ, μέσω της εισαγωγής της μεθόδου τοπικής ανίχνευσης στον ΑΕΑ, παρουσιάζει καλύτερη απόδοση από τον ΑΕΑ, μειώνοντας ακόμα περισσότερο το υπολογιστικό κόστος για την εύρεση της (ίδιας) βέλτιστης λύσης. Στο κεφάλαιο 7 παρουσιάστηκε η συμβολή του αλγορίθμου στη βελτιστοποίηση δύο συστημάτων, ενός γεωθερμικού οργανικού κύκλου Rankine και μιας γεωθερμικής αντλίας θερμότητας. Όσον αφορά στον  $200\text{kWe}$  οργανικό κύκλο Rankine αποδείχθηκε ότι για γεωθερμικά πεδία χαμηλής ενθαλπίας ( $65^\circ\text{C}$ ) επιτυγχάνεται μεγιστοποίηση του βαθμού απόδοσης του κύκλου με ελάχιστη επιφάνεια εναλλαχτών χρησιμοποιώντας το R-134a ως οργανικό μέσο και πλακοειδή εναλλάκτη ως συμπυκνωτή. Οι εργασίες αυτές έγιναν σε συνεργασία με μηχανικούς-ερευνητές του ΚΑΠΕ.

## 8.1 Στοιχεία πρωτοτυπίας της διατριβής

Παρακάτω συνοψίζονται τα στοιχεία πρωτοτυπίας της διδακτορικής διατριβής:

- Η διατύπωση των συνεχών συζυγών εξισώσεων για ασυμπίεστο ρευστό με την προσθήκη της εξίσωσης της ενέργειας οδήγησε στην ανάπτυξη της συνεχούς συζυγούς μεθόδου για ασυμπίεστες, στρωτές και τυρβώδεις ροές, με μεταφορά θερμότητας. Με τη χρήση της προτεινόμενης μεθόδου μπορούν να υπολογιστούν με ακρίβεια οι παράγωγοι ευαισθησίας σε προβλήματα μεταφοράς θερμότητας.
- Η διατύπωση των εξισώσεων της ροής και των συνεχών συζυγών εξισώσεων για τυρβώδεις ροές με μεταφορά θερμότητας, για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης τοπολογίας. Αυτό υλοποιήθηκε εισάγοντας την έννοια του πορώδους, μέσω νέων όρων, στις εξισώσεις του μοντέλου τύρβης Spalart-Allmaras και στην εξίσωση της ενέργειας. Με αυτήν τη μέθοδο, είναι εφικτή η εύρεση της βέλτιστης τοπολογίας με χρήση συζυγών τεχνικών σε προβλήματα τυρβώδους ροής με μεταφορά θερμότητας.
- Η δημιουργία ενός νέου ασύγχρονου μιμητικού αλγορίθμου υποστηριζόμενου από μεταπρότυπα (AMAMA) ως αποτέλεσμα του υβριδισμού ενός ασύγχρονου EA (AEA) με μία μέθοδο τοπικής ανίχνευσης, η οποία για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας βασίζεται στις συνεχείς συζυγείς μεθόδους που αναπτύσσονται στην παρούσα διατριβή. Ο νέος ασύγχρονος αλγόριθμος, πέραν του ότι εξασφαλίζει τη μέγιστη δυνατή εκμετάλλευση της υπολογιστικής ισχύος, παρουσιάζει καλύτερη απόδοση, άρα μικρότερο υπολογιστικό κόστος, από ότι οι AEA.
- Προτείνεται ένας νέος τρόπος, χαμηλού κόστους, για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας στον AMAMA σε προβλήματα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης, έτσι ώστε να επιλύονται οι συζυγείς εξισώσεις μία φορά σε κάθε αξιολόγηση και όχι τόσες φορές όσες και οι στόχοι, οδηγώντας σε περαιτέρω μείωση του υπολογιστικού κόστους.

### Δημοσιεύσεις του έργου της διατριβής

- E. Kontoleonos, V. Asouti, K. Giannakoglou, “An Asynchronous Metamodel Assisted Memetic Algorithm for CFD-based Shape Optimization”, *Engineering Optimization*, Vol. 44, No. 2, p. 157-173, 2012.
- E. Kontoleonos, C. Karytsas, D. Mendrinou, P. Georgilakis, “Optimized geothermal binary power cycles”, *Journal of Optoelectronics and Advanced Materials*, Vol. 10, No. 5, p. 1228-1232, May 2008.
- E. Papoutsis-Kiachagias, E. Kontoleonos, A. Zymaris, D. Papadimitriou, K. Giannakoglou, “Constrained topology optimization for laminar and turbulent flows, including heat transfer”, *EUROGEN 2011 Evolutionary and Deterministic Methods for Design, Optimization and Control*, Italy, Capua, September 2011.



- V. Asouti, E. Kontoleonos, X. Trompoukis and K. Giannakoglou, “Shape Optimization using the one-shot Adjoint Technique on Graphics Processing Units”, 7th GRACM International Congress on Computational Mechanics, Athens, Greece, 30 June-2 July 2011.
- E. Kontoleonos, C. Karytsas, D. Mendrinou, P. Georgilakis, “Optimized geothermal binary power cycles”, JAPMED’5-Fifth Japanese-Mediterranean Workshop on Applied Electromagnetic Engineering for Magnetic, Superconducting and Nano Materials, Larnaca, Cyprus, September 16-19 2007.
- E. Kontoleonos, K. Giannakoglou, D. Kouboγιannis, “Robust design of compressor cascade airfoils, using evolutionary algorithms and surrogate models”, 1st International Conference on Experiments/Process/System Modelling/Simulation/Optimization, Athens, Greece, July 2005.

## 8.2 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Ακολουθεί σύντομη αναφορά σε ορισμένα στοιχεία τα οποία αποτελούν προτάσεις για περαιτέρω έρευνα στις θεματικές περιοχές της παρούσας διατριβής:

- Οι συζυγείς μέθοδοι που παρουσιάστηκαν στην παρούσα διατριβή για την επίλυση προβλημάτων μεταφοράς θερμότητας θα μπορούσαν να επεκταθούν και σε άλλα μοντέλα τύρβης, διατυπώνοντας εκ νέου το συζυγές πρόβλημα.
- Η επέκταση της χρήσης της συνεχούς συζυγούς μεθόδου σε 3Δ εφαρμογές. Αυτό συμπεριλαμβάνει την επέκταση του πρωτεύοντος και συζυγούς προβλήματος για ασυμπίεστες ροές με μεταφορά θερμότητας. Η επέκταση του λογισμικού για την επίλυση 3Δ ασυμπίεστων ροών με μεταφορά θερμότητας, προγραμματισμένη σε επεξεργαστές καρτών γραφικών (GPUs), πραγματοποιείται στην υπό εξέλιξη διδακτορική διατριβή [146], στην ίδια ερευνητική ομάδα. Για την επιτάχυνση της επίλυσης προβλημάτων μεγάλης κλίμακας, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί η εμπειρία που αποκτήθηκε στη διατριβή [145], όπου αναπτύχθηκε παράλληλο λογισμικό για συστοιχίες καρτών γραφικών για την επίλυση συμπιεστών ροών, και στο GPU λογισμικό βελτιστοποίησης της παρούσας διατριβής.
- Σε ό,τι αφορά στη βελτιστοποίηση τοπολογίας, για την επίλυση τυρβωδών ροών, η συζυγής μέθοδος θα μπορούσε να επεκταθεί για την περίπτωση χρήσης μοντέλων υψηλών αριθμών Reynolds με συναρτήσεις τοίχου (διδακτορική διατριβή υπό εξέλιξη [149]). Τα μοντέλα τύρβης χαμηλών αριθμών Reynolds, όπως της παρούσας διατριβής, ολοκληρώνουν τις ισχύουσες εξισώσεις μέχρι το στερεό τοίχωμα, με ιδιαίτερα πυκνό πλέγμα, έχοντας ως προϋπόθεση τη γνώση της θέσης του στερεού τοιχώματος. Από την άλλη, τα μοντέλα υψηλών αριθμών Reynolds επιλύουν τις εξισώσεις ροής μέχρι ενός σημείου στη λογαριθμική περιοχή του οριακού στρώματος και “γεφυρώνουν το χάσμα” με το στερεό τοίχωμα μέσω των συναρτήσεων τοίχου εισάγοντας την ταχύτητα τριβής στον τοίχο. Για το

λόγο αυτό, όπως και στην περίπτωση των μοντέλων τύρβης χαμηλών αριθμών Reynolds, είναι απαραίτητος ο σωστός καθορισμός του στερεού τοιχώματος στη βελτιστοποίηση τοπολογίας. Για την επίτευξη αυτού μπορεί να χρησιμοποιηθεί η τεχνογνωσία που αποκτήθηκε στην παρούσα διατριβή από την εισαγωγή του μοντέλου τύρβης Spalart-Allmaras στη βελτιστοποίηση τοπολογίας καθώς και η τεχνογνωσία στη διατριβή [143] που αποκτήθηκε για τη διατύπωση του συζυγούς προβλήματος για μοντέλα τύρβης που χρησιμοποιούν συναρτήσεις τοίχου.

---

# Παράρτημα Α΄

## Υπολογισμός του συντελεστή μεταφοράς θερμότητας

Στο παράρτημα αυτό παρατίθενται οι γενικές συσχετίσεις των συντελεστών μεταφοράς θερμότητας,  $h$ , ανεξαρτήτως του εργαζόμενου μέσου για τον πλακοειδή και τον εναλλάκτη κελύφους-αυλών καθώς και οι ακριβέστερες συσχετίσεις στην περίπτωση του R-134a. Τα σύμβολα και οι δείκτες που χρησιμοποιούνται στις σχέσεις του Παραρτήματος Α΄ περιγράφονται στον πίνακα Α΄.1.

### Α΄.1 Γενικές συσχετίσεις των συντελεστών μεταφοράς θερμότητας

#### Α΄.1.1 Εξάτμιση-Πλακοειδής Εναλλάκτης

Για την υγρή φάση (για το οργανικό μέσο και το γεωθερμικό ρευστό), ο συντελεστής μεταφοράς θερμότητας σε αγωγό δίνεται από τη σχέση των Dittus-Boelter, [55],

$$h_{wf,gwl} = 0.023 \frac{k_l}{d_h} Re_l^{0.8} Pr_l^{0.4} \quad (A'.1)$$

Για τη διφασική ροή, η ίδια ποσότητα δίνεται από τη σχέση Α΄.2, όπου ο πρώτος όρος αντιπροσωπεύει τη συμβολή της υγρής και ο δεύτερος της αέριας φάσης, [55].

$$h_{wf,tp} = E h_{wf,l} + S h_{pool} \quad (A'.2)$$

όπου

$$\begin{aligned} h_{pool} &= 55 p_{wf}^{0.12} (-\log_{10} p_{wf})^{-0.55} M^{-0.5} q^{0.67} \\ E &= 1 + 24000 Bo^{1.16} + 1.37 \left( \frac{1}{X_{tt}} \right)^{0.86} \\ S &= \left( 1 + 1.1510^{-6} E^2 Re_l^{1.17} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (A'.3)$$

όπου  $X_{tt}$  η παράμετρος *Martinelli*, [55],

**Πίνακας Α'.1:** Σύμβολα και δείκτες που συναντώνται στις σχέσεις του Παραρτήματος Α'.

Συμβολισμός	Περιγραφή
$k$	Θερμική αγωγιμότητα, $\frac{kW}{mK}$
$h$	Συντελεστής μεταφοράς θερμότητας, $\frac{kW}{m^2K}$
$d$	Διάμετρος αυλών, $m$
$x$	Ποιότητα ατμού
$Re$	Αριθμός Reynolds
$Pr$	Αριθμός Prandtl
$Bo$	Αριθμός Βρασμού
$Fr$	Αριθμός Froud, $\frac{G^2}{\rho_l^2 g d}$
$Co$	Αριθμός συναγωγής, $\left(\frac{1-x}{x}\right)^{0.8}$
$M$	Μοριακό Βάρος
$p$	Πίεση, $Pa$
$T$	Θερμοκρασία, $K$
$i_{fg}$	Λανθάνουσα θερμότητα ατμοποίησης, $\frac{J}{kg}$
$G$	Παροχή μάζας ανά $m^2$ , $\frac{kg}{m^2s}$
$q$	Ροή θερμότητας, $\frac{W}{m^2}$
$\rho$	Πυκνότητα, $\frac{kg}{m^3}$
$\mu$	Δυναμική συνεκτικότητα, $\frac{kg}{ms}$
$w_f$	Δείκτης μεγεθών που αφορούν στο εργαζόμενο μέσο
$w_w$	Δείκτης μεγεθών που αφορούν στο νερό ψύξης
$l$	Δείκτης μεγεθών που αφορούν στην υγρή φάση
$g$	Δείκτης μεγεθών που αφορούν στην αέρια φάση
$w$	Δείκτης μεγεθών που αφορούν στα τοιχώματα αυλού
$eq$	Δείκτης μεγεθών που αφορούν στο ισοδύναμο

$$X_{tt} = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{0.9} \left(\frac{\rho_v}{\rho_l}\right)^{0.5} \left(\frac{\mu_l}{\mu_v}\right)^{0.1} \quad (A'.4)$$

### Α'.1.2 Συμπύκνωση-Πλακοειδής Εναλλάκτης

Για την αέρια φάση, ο συντελεστής μεταφοράς θερμότητας σε αγωγό δίνεται από τη σχέση Α'.1 ενώ για τη διαφασική ροή ανάλογα με την τιμή του αριθμού συναγωγής  $Co$  υπολογίζεται ως εξής, [80],

$$h_{wftp} = h_{wfl} \left( 1.136Co^{-0.9}25Fr_l^{0.3} + 667.2Bo^{0.7} \right), Co < 0.65 \quad (A'.5)$$

$$h_{wftp} = h_{wfl} \left( 0.668Co^{-0.2}25Fr_l^{0.3} + 1058.0Bo^{0.7} \right), Co > 0.65 \quad (A'.6)$$

### Α'.1.3 Συμπύκνωση-Εναλλάκτης κελύφους-αυλών

Ο μέσος συντελεστής μεταφοράς θερμότητας για στρωτή ροή σε συμπύκνωση σε έναν εναλλάκτη κελύφους-αυλών δίνεται από τη σχέση

$$\bar{h}_{wf} = 0.725 \left[ \frac{\rho_l (\rho_l - \rho_v) g h_{fg} k^3}{\mu d (\bar{T}_{wf} - \bar{T}_{cw})} \right]^{0.25} \quad (A'.7)$$

## Α'.2 R-134a-Ακριβείς συσχετίσεις

Ακολουθούν οι σχέσεις που δίνουν το συντελεστή μεταφοράς θερμότητας για το R-134a για πλακοειδή εναλλάκτη. Αντιθέτως, για τον εναλλάκτη κελύφους-αυλών, ισχύει η σχέση Α'.7.

### Α'.2.1 Εξάτμιση-Πλακοειδής Εναλλάκτης

Για την υγρή και την αέρια φάση του οργανικού μέσου R-134a, ο συντελεστής μεταφοράς θερμότητας σε αγωγό δίνεται από τη σχέση, [74],

$$h_{wfl,g} = 0.023 \frac{k_l}{d_h} Re^{0.8} Pr_l^{\frac{1}{3}} \left( \frac{\bar{\mu}_{wf}}{\bar{\mu}_w} \right)^{0.17} \quad (A'.8)$$

ενώ, για τη διφασική ροή, δίνεται από τη σχέση

$$h_{wftp} = F h_{wfl} \quad (A'.9)$$

όπου

$$F = 1 + 1.37 \left( \frac{1}{X_{tt}} \right)^{0.86} \quad (A'.10)$$

### Α'.2.2 Συμπύκνωση-Πλακοειδής Εναλλάκτης

Ο μέσος συντελεστής μεταφοράς θερμότητας για συμπύκνωση σε πλακοειδή εναλλάκτη δίνεται από τη σχέση, [156],

$$\bar{h}_{wf} = 4.118 \frac{k_l}{d_h} Re_{eq}^{0.4} Pr_l^{\frac{1}{3}} \quad (A'.11)$$

## Α'.3 R-410a-Ακριβείς συσχετίσεις

Ακολουθούν οι σχέσεις που δίνουν το συντελεστή μεταφοράς θερμότητας για το R-410a για πλακοειδή εναλλάκτη. Αντιθέτως, για τον εναλλάκτη κελύφους-αυλών, ισχύει η σχέση Α'.7.

### Α'.3.1 Εξάτμιση-Πλακοειδής Εναλλάκτης

Για την υγρή και την αέρια φάση του οργανικού μέσου R-410a, ο συντελεστής μεταφοράς θερμότητας δίνεται από τη σχέση, [67],

$$h_{wf,l} = 0.023 \frac{k_l}{d_h} Re_l^{0.8} Pr_l^{0.4} \quad (A'.12)$$

Για τη διφασική ροή, η ίδια ποσότητα δίνεται από τη σχέση Α'.13, όπου ο πρώτος όρος αντιπροσωπεύει τη συμβολή της υγρής και ο δεύτερος της αέριας φάσης, [67].

$$h_{wf,tp} = E h_{wf,l} + S h_{pool} \quad (A'.13)$$

όπου

$$\begin{aligned} h_{pool} &= 55 p_{wf}^{0.12} (-\log_{10} p_{wf})^{-0.55} M^{-0.5} q^{0.67} \\ E &= 1 + 24000 Bo^{1.16} + 1.37 \left( \frac{1}{X_{tt}} \right)^{0.86} \\ S &= \left( 1 + 1.1510^{-6} E^2 Re_l^{1.17} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (A'.14)$$

### Α'.3.2 Συμπύκνωση-Πλακοειδής Εναλλάκτης

Ο μέσος συντελεστής μεταφοράς θερμότητας για συμπύκνωση σε πλακοειδή εναλλάκτη δίνεται από τη σχέση, [90],

$$h_{wf} = h_{wf,l} \left( 0.25 Co^{-0.45} Fr_l^{0.25} + 75 Bo^{0.75} \right) \quad (A'.15)$$

$$h_{wf,l} = 0.2092 \frac{k_l}{d_h} Re^{0.78} Pr^{\frac{1}{3}} \left( \frac{\mu_{ave}}{\mu_w} \right)^{0.14} \quad (A'.16)$$

$$Fr_l = G^2 \frac{1}{\rho^2 g d_h}, Bo = \frac{q}{Gi_{fg}}, \quad (A'.17)$$

$$Co = \frac{\rho_g}{\rho_l} \left( \frac{1 - x_m}{x_m} \right)^{0.8} \quad (A'.18)$$





# Βιβλιογραφία

- [1] <http://www.lowbin.eu>.
- [2] <http://www.nist.gov/srd/nist23.cfm>.
- [3] <http://www.groundmed.eu>.
- [4] The EASY (Evolutionary Algorithms SYstem) software, <http://velos0.ltt.mech.ntua.gr/EASY/>, 2008.
- [5] D. Ackley. *A connectionist machine for genetic hillclimbing*. Kluwer Academic Publishers, Boston, Boston, 1987.
- [6] K. Aharwala, B. Gandhib, and J. Saini. Experimental investigation on heat-transfer enhancement due to a gap in an inclined continuous rib arrangement in a rectangular duct of solar air heater. *Renewable Energy*, 33:585–596, 2008.
- [7] E. Alba and M. Tomassini. Parallelism and evolutionary algorithms. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6(5):443–462, 2002.
- [8] E. Alba and J. Troya. Analyzing synchronous and asynchronous parallel distributed genetic algorithms. *Future Generation Computer Systems*, 4:451–465, 2001.
- [9] W. Anderson and D. Bonhaus. Airfoil design on unstructured grids for turbulent flows. *AIAA Journal*, 37(2):185–191, 1999.
- [10] W. Anderson, R. Rausch, and D. Bonhaus. Implicit/multigrid algorithms for incompressible turbulent flows on unstructured grids. *Journal of Computational Physics*, 128:391–408, 1996.
- [11] W. Anderson and V. Venkatakrishnan. Aerodynamic design optimization on unstructured grids with a continuous adjoint formulation. AIAA Paper 1997-0643, 35th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, USA, 1997.
- [12] V. Asouti and K. Giannakoglou. Aerodynamic optimization using a parallel asynchronous evolutionary algorithm controlled by strongly interacting demes. *Engineering Optimization*, 41(3):241–257, 2009.

- 
- [13] V. Asouti, I. Kampolis, and K. Giannakoglou. A grid-enabled asynchronous metamodel-assisted evolutionary algorithm for aerodynamic optimization. *Genetic Programming and Evolvable Machines (SI:Parallel and Distributed Evolutionary Algorithms, Part One)*, 10(3):373–389, 2009.
- [14] V. Asouti, E. Kontoleonos, X. Trompoukis, and K. Giannakoglou. Shape optimization using the one-shot adjoint technique on Graphics Processing Units. In *7th GRACM International Congress on Computational Mechanics*. Athens, 30 June-2 July 2011.
- [15] V. Asouti, X. Trompoukis, I. Kampolis, and K. Giannakoglou. Unsteady CFD computations using vertex-centered finite volumes for unstructured grids on Graphics Processing Units. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 67(2):232–246, 2011.
- [16] V. Asouti, A. Zymaris, D. Papadimitriou, and K. Giannakoglou. Continuous and discrete adjoint approaches for aerodynamic shape optimization with low Mach number preconditioning. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 57(10):1485–1504, 2008.
- [17] D. Balagangadhar and R. Subrata. Design sensitivity analysis and optimization of steady fluid-thermal systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(35):509–510, 2001.
- [18] O. Baysal and K. Ghayour. Continuous adjoint sensitivities for optimization with general cost functionals on unstructured meshes. *AIAA Journal*, 39(1):48–55, 2001.
- [19] M. Bendsoe and N. Kikuchi. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71:197–224, 1988.
- [20] M. Bendsoe and O. Sigmund. *Topology Optimization - Theory, Methods and Applications*. Springer Verlag, 2004.
- [21] P. Borel, A. Harpoth, L. Frandsen, M. Kristensen, J. Jensen, P. Shi, and O. Sigmund. Topology optimization and fabrication of photonic crystal structures. *Optics Express*, 19(9):1996–2001, 2004.
- [22] T. Borvall and J. Peterson. Topology optimization of fluids in Stokes flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 41:77–107, 2003.
- [23] J. Branke and C. Schmidt. Faster convergence by means of fitness estimation. *Soft Computing - A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications*, 9(1):13–20, 2005.
-

- 
- [24] D. Büche, N. Schraudolph, and P. Koumoutsakos. Accelerating evolutionary algorithms with Gaussian process fitness function models. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics — Part C: Applications and Reviews*, 35(2):183–194, 2005.
- [25] L. Bull. On model-based evolutionary computation. *Soft Computing — A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications*, 3(2):76–82, 1999.
- [26] K. Burns, C. Weber, J. Perry, and H. Harrington. Status of geothermal industry in Australia. *Proceedings World Geothermal Congress 2000*, Kyushu-Tohoku, Japan, May 28 - June 10:99–108, 2000.
- [27] E. Cantú-Paz. A survey of parallel genetic algorithms. *Calculateurs Paralleles, Reseaux et Systemes Repartis*, 10:141–171, 1998.
- [28] A. Chorin. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *Journal of Computational Physics*, 2(1):12–26, 1967.
- [29] A. Cicochi and R. Unbenhauen. *Neural Networks for Optimization and Signal Processing*. John Wiley & Sons, New York, 1993.
- [30] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy. Über die partiellen differenzgleichungen der mathematischen physik. *Mathematische Annalen*, 100:32–74, 1928.
- [31] A. Dadone and B. Grossman. Progressive optimization of inverse fluid dynamic design problems. *Computers & Fluids*, 29(1):1–32, 2000.
- [32] A. Dadone and B. Grossman. Fast convergence of inviscid fluid dynamic design problems. *Computers & Fluids*, 32(4):607–627, 2003.
- [33] R. Dawkin. *The Selfish Gene*. Oxford University Press, 1976.
- [34] K. Deb, S. Agrawal, A. Pratap, and T. Meyarivan. A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: NSGA-II. In Schoenauer, M., Deb, K., Rudolph, G., Yao, X., Lutton, E., Merelo Guervos, J. J., and Schwefel, H. P. (editors): *Proceedings of the Parallel Problem Solving from Nature VI Conference*, Paris, France, 2000.
- [35] E. Dede. Multiphysics optimization, synthesis, and application of jet impingement target surfaces. *Thermal and Thermomechanical Phenomena in Electronic Systems (ITherm)*, 12th IEEE Intersociety Conference on, 2010.
- [36] J. Desideri and A. Janka. Hierarchical parametrization for multilevel evolutionary shape optimization with application to aerodynamics. In *EUROGEN 2003, Evolutionary Methods for Design, Optimisation and Control with Applications to Industrial Problems*, Barcelona (Spain), 2003.
-

- 
- [37] M. Dickson and M. Fanelli. What is geothermal energy? *Geothermics*, 7:53–89, 1978.
- [38] R. DiPippo. Geothermal power plants: principles, applications, case studies and environmental impact. *Elsevier*, 2005.
- [39] F. Dittus and Boelter L. Publications in engineering. *University of California, Berkeley, CA*, 2:443, 1930.
- [40] M. Duhring, J. Jensen, and O. Sigmund. Topology optimization for acoustic structure interaction problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 70(9):1049–1075, 2007.
- [41] M. Duhring, J. Jensen, and O. Sigmund. Acoustic design by topology optimization. *Journal of Sound and Vibration*, 71:555–575, 2008.
- [42] R. Duvigneau, B. Chaigne, and J. Désidéri. Multi-level parameterization for shape optimization in aerodynamics and electromagnetics using a particle swarm optimization algorithm. Research Report RR-6003, INRIA, 2006.
- [43] J. Elliot and J. Peraire. Aerodynamic design using unstructured meshes. AIAA Paper 1996-1941, 27th Fluid Dynamics Conference, New Orleans, LA, USA, 1996.
- [44] J. Elliot and J. Peraire. Aerodynamic optimization on unstructured meshes with viscous effects, June-July 1997.
- [45] M. Emmerich, A. Giotis, M. Ozdemir, T. Back, and K. Giannakoglou. Metamodel-assisted evolution strategies. In *Parallel Problem Solving from Nature – PPSN VII*, pages 361–370, Granada, Spain, 2002.
- [46] A. Gersborg-Hansen, M. Bendsoe, and O. Sigmund. Topology optimization of heat conduction problems using the finite volume method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 31:251–259, 2006.
- [47] A. Gersborg-Hansen, O. Sigmund, and R. Haber. Topology optimization of channel flow problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 30:181–192, 2005.
- [48] K. Giannakoglou. Design of optimal aerodynamic shapes using stochastic optimization methods and computational intelligence. *Progress in Aerospace Sciences*, 38(1):43–76, 2002.
- [49] K. Giannakoglou, A. Giotis, and M. Karakasis. Low-cost genetic optimization based on inexact pre-evaluations and the sensitivity analysis of design parameters. *Inverse Problems in Engineering*, 9:389–412, 2001.
- [50] M. Giles. *Discrete adjoint approximations with shocks*. Springer-Verlag, New York, 2003.
-

- 
- [51] M. Giles and N. Pierce. Adjoint equations in CFD: duality, boundary conditions and solution behaviour. AIAA 97-1850, 13th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Snowmass Village, CO, USA, 1997.
- [52] D. Goldberg. Genetic algorithms in search, optimization and machine learning. *Addison-Wesley*, 1989.
- [53] N. Gregory and C. O'Reilly. Low-speed aerodynamic characteristics of NACA 0012 aerofoil sections, including the effects of upper-surface roughness simulation hoar frost. *NASA R&M 3726*, January 1970.
- [54] J. Guest and J. Prevost. Topology optimization of creeping fluid flows using a Darcy-Stokes finite element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66:461–484, 2006.
- [55] K. Gungor and R. Winterton. A general correlation for blow boiling in tubes and annuli. *International Heat Mass Transfer*, 29(3):351–358, 1986.
- [56] W. Hart. *Adaptive Global Optimization with Local Search*. PhD thesis, University of California, San Diego, USA, 1994.
- [57] P. Haussler, I. Nitsopoulos, J. Sauter, and M. Stephan. Topology and shape optimization methods for CFD problems. *24th CADFEM Users' Meeting 2006 International Congress on FEM Technology with 2006 German ANSYS Conference, Schwabenlandhalle Stuttgart/Fellbach, Germany*, October 25-27, 2006.
- [58] S. Haykin. *Neural networks: A comprehensive foundation*. Prentice Hall, New Jersey, USA, 1999.
- [59] S. Hazra. An efficient method for aerodynamic shape optimization. AIAA Paper 2004-4628, 10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference, Albany, New York, August 30-1 2004.
- [60] S. Hazra. Multigrid one-shot method for state constrained aerodynamic shape optimization. *SIAM Journal on Scientific Computing (SISC)*, 30(6):3220–3248, 2008.
- [61] S. Hazra and V. Schulz. Simultaneous pseudo-timestepping for aerodynamic shape optimization problems with state constraints. *SIAM Journal on Scientific Computing (SISC)*, 28(3):1078–1099, 2006.
- [62] S. Hazra, V. Schulz, J. Brezillon, and N. Gauger. Aerodynamic shape optimization using simultaneous pseudo-timestepping. *Journal of Computational Physics*, 204(1):46–64, 2005.
- [63] H. Hettiarachchi, M. Golubovic, W. Worek, and Y. Ikegami. Optimum design criteria for an Organic Rankine Cycle using low-temperature geothermal heat sources. *Energy*, 32:1698–1706, 2007.
-

- 
- [64] R. Hilbert, G. Janiga, R. Baron, and D. Thévenin. A multi-objective shape optimization of a heat exchanger using parallel genetic algorithms. *Interational Journal of Heat and Mass Transfer*, 49:2567–2577, 2006.
- [65] C. Hirsch. Numerical computation of internal and external flows, vol1, fundamentals of numerical discretization. *John Wiley & Sons Publication*, 1992.
- [66] C. Hirsch. Numerical computation of internal and external flows, vol2, computational methods for inviscid and viscous flows. *John Wiley & Sons Publication*, 1992.
- [67] Y. Hsieh and T. Lin. Evaporation heat transfer and pressure drop of refrigerant R-410a flow in a vertical plate heat exchanger. *Journal of Heat Transfer, ASME*, 125:852–857, 2003.
- [68] S. Ito and Y. Suzuki. High speed transient temperature profile control using adjoint-based optimal control scheme. ASME/JSME 2011 8th Thermal Engineering Joint Conference, Honolulu, Hawaii, USA, March 13-17 2011.
- [69] A. Jameson. Aerodynamic design via control theory. *Journal of Scientific Computing*, 3:233–260, 1988.
- [70] A. Jameson. Optimum aerodynamic design using CFD and control theory. AIAA Paper 1995-1729, 12th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, San Diego, CA, June 1995.
- [71] A. Jameson, N. Pierce, and L. Martinelli. Optimum aerodynamic design using the Navier-Stokes equations. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 10:213–237, 1998.
- [72] J. Jensen and O. Sigmund. Systematic design of photonic crystal structures using topology optimization: Low-loss waveguide bends. *Applied Physics Letters*, 84(12):2022–2024, 2004.
- [73] Y. Jin, M. Olhofer, and B. Sendhoff. A framework for evolutionary optimization with approximate fitness functions. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6(5):481–494, 2002.
- [74] A. Jokar, M. Hosni, and S. Eckels. Dimensional analysis on the evaporation and condensation of refrigerant R-134a in minichannel plate heat exchangers. *Applied Thermal Engineering*, 26:2287–2300, 2006.
- [75] Y. Kallinderis. A 3-D finite-volume method for the Navier-Stokes equations with adaptive hybrid grids. *Applied Numerical Mathematics*, 20:387–406, 1996.
- [76] T. Kaminski, R. Giering, and C. Othmer. Topological design based on highly efficiency adjoints generated by automatic differentiation. *ERCOTAC Design Optimization Conference, Las Palmas*, 2006.
-

- 
- [77] I. Kampolis and K. Giannakoglou. A multilevel approach to single- and multi-objective aerodynamic optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(33-40):2963–2975, 2008.
- [78] I. Kampolis and K. Giannakoglou. Distributed evolutionary algorithms with hierarchical evaluation, engineering optimization. *Engineering Optimization*, 41(11):1037–1049, 2009.
- [79] I. Kampolis, X. Trompoukis, V. Asouti, and K. Giannakoglou. CFD-based analysis and two-level aerodynamic optimization on Graphics Processing Units. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(9-12):712–722, 2010.
- [80] S. Kandlikar. A general correlation for saturated two-phase flow boiling heat transfer inside horizontal and vertical tubes. *Journal of Heat Transfer*, 112(219), 1990.
- [81] S. Kang and N. Zabaras. Control of the freezing interface motion in two-dimensional solidification processes using the adjoint method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38:63–80, 1995.
- [82] M. Karakasis and K. Giannakoglou. On the use of metamodel-assisted, multi-objective evolutionary algorithms. *Engineering Optimization*, 38(8):941–957, 2006.
- [83] M. Karakasis, D. Koubogiannis, and K. Giannakoglou. Hierarchical distributed evolutionary algorithms in shape optimization. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 53(3):455–469, 2007.
- [84] J. Kestin and P. Richardson. Heat transfer across turbulent, incompressible boundary layers. *International Journal Heat Mass Transfer*, 6:147–189, 1963.
- [85] J. Knowles and D. Corne. M-PAES: A memetic algorithm for multiobjective optimization. 2000 Congress on Evolutionary Computation – CEC '00, San Diego, CA. New York, September 2000.
- [86] E. Kontoleontos, V. Asouti, and K. Giannakoglou. An asynchronous metamodel-assisted memetic algorithm for CFD-based shape optimization. *Engineering Optimization*, 44(2):157–173, 2012.
- [87] E. Kontoleontos, C. Karytsas, D. Mendrinou, and P. Georgilakis. Optimized geothermal binary power cycles. *Journal of Optoelectronics and Advanced Materials*, 10(5):1228–1232, May 2008.
- [88] N. Krasnogor and J. Smith. A tutorial for competent memetic algorithms: model, taxonomy, and design issues. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 9(5):474–488, 2005.
-

- 
- [89] K. Ku and M. Mak. Exploring the effects of lamarkian and baldwinian learning in evolving recurrent neural networks. In *In Proceedings of the IEEE International Conference on the Evolutionary Computation*, Indianapolis USA, April 1997.
- [90] W. Kuo, Y. Lie, Y. Hsieh, and T. Lin. Condensation heat transfer and pressure drop of refrigerant R-410a flow in a vertical plate heat exchanger. *Heat and Mass Transfer*, 48:5205–5220, 2005.
- [91] G. Kuruvila, S. Taasan, and M. Salas. Airfoil design and optimization by the one-shot method. AIAA Paper 1995-478, 33rd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, January 9–12 1995.
- [92] U. Larsen, O. Sigmund, and S. Bouwsta. Design and fabrication of compliant micromechanisms and structures with negative Poisson’s ratio. *IEEE J. Microelectromechanical Systems*, 6(2):99–106, 1997.
- [93] E. Lemmon, M. Huber, and M. McLinden. NIST Reference Fluid Thermodynamic and Transport Properties-REFPROP, Version 9.0, User’s Guide. *Thermophysical Properties Division National Institute of Standards and Technology*, 2010.
- [94] J. Lund and T. Boyd. Small geothermal power project examples. *Geo-Heat Center Bulletin*, pages 9–26, June 1999.
- [95] J. Lund, B. Sanner, L. Rybach, R. Curtis, and G. Hellstrom. Geothermal (Ground Source) Heat Pumps - A world overview. *GHC Bulletin*, September 2004.
- [96] Y. Mack, T. Goel, W. Shyy, and R. Haftka. Surrogate model-based optimization framework: A case study in aerospace design. In Y.S. Ong and Y. Jin, editors, *Evolutionary Computation in Dynamic and Uncertain Environments*. Singapore, 2007.
- [97] T. Matsumori, A. Kawamoto, and T. Kondoh. Topology optimization for fluid-thermal interaction problems. 6th China-Japan-Korea Joint Symposium on Optimization of Structural and Mechanical Systems, Kyoto, Japan, June 22-25 2010.
- [98] Z. Michalewicz. Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs. *Springer-Verlang, 3rd edition*, 1996.
- [99] K. Morimoto, Y. Suzuki, and N. Kasagi. Optimal shape design of compact heat exchangers based on adjoint analysis of momentum and heat transfer. *Journal of Thermal Science and Technology*, 5(1):24–35, 2010.
- [100] P. Muffler and R. Cataldi. Methods for regional assessment of geothermal resources. *Geothermics*, 7:53–89, 1978.
-



- 
- [101] E. Nielsen and W. Anderson. Aerodynamic design optimization on unstructured meshes using the Navier-Stokes equations. *AIAA Journal*, 37(11):1411–1419, 1999.
- [102] J. Nocedal and S. Wright. *Numerical Optimization*. Springer Series in Operations Research, New York, 1999.
- [103] M. Nowostawski and R. Poli. Parallel genetic algorithm taxonomy. In *Third International Conference on Knowledge-based Intelligent Information Engineering Systems KES'99*, 1999.
- [104] L. Olesen, F. Okkels, and H. Bruus. A high-level programming-language implementation of topology optimization applied to steady-state Navier-Stokes flow. *International Journal for Numerical methods in Engineering*, 65:975–1001, 2006.
- [105] Y. Ong and A. Keane. Meta-lamarckian learning in memetic algorithms. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 8(2):99–110, 2004.
- [106] Y. Ong, M. Lim, N. Zhu, and K. Wong. Classification of adaptive memetic algorithms: a comparative study. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part B*, 36(1):141–152, 2006.
- [107] Y. Ong, P. Nair, and A. Keane. Evolutionary optimization of computationally expensive problems via surrogate modeling. *AIAA Journal*, 41(4):687–696, 2003.
- [108] C. Othmer. A continuous adjoint formulation for the computation of topological and surface sensitivities of ducted flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 58(8):861–877, 2008.
- [109] C. Othmer and T. Grahs. Approaches to fluid dynamic optimization in the car development process. *EUROGEN 2005, Munich*, 2005.
- [110] C. Othmer, T. Kaminski, and R. Giering. Computation of topological sensitivities in fluid dynamics: Cost function versatility. *ERCOFTAC CFD 2006, Delft*, 2006.
- [111] D. Papadimitriou and K. Giannakoglou. Compressor blade optimization using a continuous adjoint formulation. ASME Paper GT 06/90466, 2006.
- [112] D. Papadimitriou and K. Giannakoglou. A continuous adjoint method for the minimization of losses in cascade viscous flows. AIAA Paper 2006-0116, 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting, Reno, NV, USA, January 2006.
- [113] D. Papadimitriou and K. Giannakoglou. A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals for inviscid and viscous flows. *Computers & Fluids*, 36(2):325–341, 2007.
-

- 
- [114] D. Papadimitriou and K. Giannakoglou. Total pressure loss minimization in turbomachinery cascades using a new continuous adjoint formulation. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A: Journal of Power and Energy*, 221(6):865–872, 2007.
- [115] D. Papadimitriou and K. Giannakoglou. Aerodynamic shape optimization using adjoint and direct approaches. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 15(4):447–488, 2008.
- [116] D. Papadimitriou and K. Giannakoglou. Direct, adjoint and mixed approaches for the computation of Hessian in airfoil design problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 56(10):1929–1943, 2008.
- [117] D. Papadimitriou and K. Giannakoglou. The continuous direct-adjoint approach for second order sensitivities in viscous aerodynamic inverse design problems. *Computers & Fluids*, 38(8):1539–1548, 2009.
- [118] V. Pareto. Cours d' Economie politique professe a l' Univerisité de Lausanne. *Lausanne, Francois-Rouge*, 1896-1897.
- [119] S. Patankar and D. Spalding. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three dimensional parabolic flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15(10):1787–1806, 1972.
- [120] R. Peyret and T. Taylor. Computational methods for fluid flow. *Springer-Verlag*, 1983.
- [121] S. Pierret and R. Van den Braembussche. Turbomachinery blade design using a Navier-Stokes solver and artificial neural network. *Journal of Turbomachinery*, 121(2):326–332, 1999.
- [122] O. Pironneau. *Optimal shape design for elliptic systems*. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [123] C. Poloni, A. Giurgevich, L. Onesti, and V. Pediroda. Hybridization of a multi-objective genetic algorithm, a neural network and a classical optimizer for a complex design problem in fluid dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 186(2-4):403–420, 2000.
- [124] P. Promvonge. Thermal augmentation in circular tube with twisted tape and wire coil turbulators. *Energy Conversion and Management*, 49:2949–2955, 2008.
- [125] T. Ray and W. Smith. A surrogate assisted parallel multiobjective evolutionary algorithm for robust engineering design. *Engineering Optimization*, 38(8):997–1011, 2006.
-

- 
- [126] J. Reuther, J. Alonso, M. Rimlinger, and A. Jameson. Aerodynamic shape optimization of supersonic aircraft configurations via an adjoint formulation on distributed memory parallel computers. *Computers & Fluids*, 28(4-5):675–700, 1999.
- [127] M. Rosenfeld and M. Wolfshtein. Numerical calculation of a laminar two-dimensional straight cascade flow. *Computers & Fluids*, 12:293–310, 1984.
- [128] B. Sanner, C. Karytsas, M. Abry, L. Coelho, J. Goldbrunner, and D. Mendrinos. GROUNDHIT-Advancement in Ground Source Heat Pumps through EU support. *Proceedings European Geothermal Congress 2007, Unterhaching, Germany*, 30 May-1 June 2007.
- [129] B. Sanner, C. Karytsas, D. Mendrinos, and L. Rybach. Current status of Ground Source Heat Pumps and underground thermal energy storage in Europe. *Geothermics*, 32:579–588, 2003.
- [130] M. Sefrioui and J. Periaux. A hierarchical genetic algorithm using multiple models for optimization. Proceedings of the 6th international conference on parallel problem solving from nature (PPSN VI). Lecture Notes in Computer Science, 2000.
- [131] H. Seung-Hyun and C. Seonho. Topological shape optimization of heat conduction problems using level set approach. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 48:67–88, 2005.
- [132] O. Sigmund, A. Gersborg-Hansen, and R. Haber. Topology optimization for multiphysics problems: A future FEMLAB application. Nordic Matlab Conference (NMC2003), 2003.
- [133] S. Singh, S. Chander, and J. Saini. Investigations on thermo-hydraulic performance due to flow-attack-angle in v-down rib with gap in a rectangular duct of solar air heater. *Applied Energy*, 97:907–912, 2012.
- [134] O. Soto and R. Lohner. On the computation of flow sensitivities from boundary integrals. *AIAA Paper 04-0112*, 2004.
- [135] P. Spalart and S. Allmaras. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *La Recherche Aéronautique*, 1:5–21, 1994.
- [136] J. Sun and W. Li. Operation optimization of an Organic Rankine Cycle (ORC) heat recovery power plant. *Applied Thermal Engineering*, 31:2032–2031, 2011.
- [137] K. Svanberg. The method of moving asymptotes, a new method for structural optimization. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 24:359–373, 1987.
-

- [138] S. Taasan, G. Kuruvila, and M. Salas. Aerodynamic design and optimization in one-shot. AIAA Paper 1992-25, 30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, January 6–9 1992.
- [139] Δ. Κουμπογιάννης. Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Navier Stokes με χρήση μη-δομημένων πλεγμάτων σε περιβάλλον παράλληλης επεξεργασίας. *Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Τομέας Ρευστών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, 1998.*
- [140] Δ. Παπαδημητρίου. Συζυγείς (Adjoint) Διατυπώσεις για την ανάλυση - σχεδίαση πτερυγώσεων στροβιλομηχανών και τη βέλτιστη προσαρμογή πλέγματος με α ποστεριορι εκτίμηση σφάλματος. *Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Τομέας Ρευστών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, 2007.*
- [141] Π. Λιακόπουλος. Γένεση μη-δομημένων πλεγμάτων και διαχείρισή τους σε μεθόδους ανάλυσης και βελτιστοποίησης συνιστωσών στροβιλομηχανών και εφαρμογές, αξιοποιώντας τεχνολογίες πλέγματος (Grid computing). *Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Τομέας Ρευστών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, 2008.*
- [142] Χ. Γεωργοπούλου. Τεχνικές βελτιστοποίησης για τον προγραμματισμό λειτουργίας αεριο/ατμοστροβιλικών μονάδων και το σχεδιασμό συνιστωσών τους. *Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Τομέας Ρευστών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, 2010.*
- [143] Α. Ζυμάρης. Συζυγείς μέθοδοι για το σχεδιασμό μορφών με βέλτιστη αεροδυναμική συμπεριφορά σε στρωτές και τυρβώδεις ροές. *Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Τομέας Ρευστών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, 2010.*
- [144] Θ. Ζερβογιάννης. Ανάπτυξη μεθόδων σχεδίασης βέλτιστων μορφών στην αεροδυναμική και στις στροβιλομηχανές μέσω εξελικτικών αλγορίθμων και συζυγών τεχνικών. *Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Τομέας Ρευστών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, 2011.*
- [145] Ξ. Τρομπούκης. Αριθμητική επίλυση προβλημάτων αεροδυναμικής-αεροελαστικότητας σε επεξεργαστές καρτών γραφικών. *Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Τομέας Ρευστών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, υπό εξέλιξη.*
- [146] Κ. Τσιάκας. Ανάπτυξη Μεθόδων Βελτιστοποίησης με χρήση Επεξεργαστών Καρτών Γραφικών και Εφαρμογή στις Στροβιλομηχανές. *Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Τομέας Ρευστών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, υπό εξέλιξη.*
-

- [147] Α. Γιώτης. Χρήση εξελικτικών τεχνικών, υπολογιστικής ευφυΐας και μεθόδων υπολογιστικής ρευστομηχανικής στη βελτιστοποίηση-αντίστροφη σχεδίαση πτερυγώσεων στροβιλομηχανών μέσω παράλληλης επεξεργασίας. *Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Τομέας Ρευστών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, 2003.*
- [148] Β. Ασούτη. Μέθοδοι αεροδυναμικής ανάλυσης και σχεδιασμού για ροές υψηλών και χαμηλών ταχυτήτων, σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον. *Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Τομέας Ρευστών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, 2009.*
- [149] Ε. Παπουτσής-Κιαχαγιάς. Συζυγείς μέθοδοι χαμηλού υπολογιστικού κόστους για τυρβώδεις ροές, στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση. *Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, υπό εξέλιξη.*
- [150] Ι. Καμπόλης. Πολυεπίπεδοι, πολυεπεξεργαστικοί αλγόριθμοι αεροδυναμικής βελτιστοποίησης στις στροβιλομηχανές. *Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, 2009.*
- [151] Κ. Γιαννάκογλου. *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική.* ΕΜΠ, 2005.
- [152] Μ. Καρακάσης. Ιεραρχικοί, κατανεμημένοι εξελικτικοί αλγόριθμοι και υπολογιστική ευφυΐα στη σχεδίαση βέλτιστων αεροδυναμικών μορφών, σε περιβάλλον πολυεπεξεργασίας. *Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Τομέας Ρευστών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, 2006.*
- [153] X. Trompoukis, V. Asouti, I. Kampsolis, and K. Giannakoglou. *CUDA implementation of Vertex-Centered, Finite Volume CFD methods on Unstructured Grids with Flow Control Applications.* Morgan Kaufmann, 2011.
- [154] E. Turkel. Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations. *Journal of Computational Physics*, 72:277–298, 1987.
- [155] D. Yamazaki and M. Kawahara. Optimal control of temperature in fluid flow using four types of minimization techniques. *Journal of Algorithms & Computational Technology*, 4(2):207–230, 2010.
- [156] Y. Yan, H. Lio, and T. Lin. Condensation heat transfer and pressure drop of refrigerant R-134a in a plate heat exchanger. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 42:993–1006, 1999.
- [157] G. Yang and N. Zabararas. An adjoint method for the inverse design of solidification process with natural convection. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42:1121–1144, 1998.
-

- 
- [158] G. Yoon. Topological design of heat dissipating structure with forced convective heat transfer. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 24(6):1225–1233, 2010.
- [159] N. Zabarar and T. Hung Nguyen. Control of the freezing interface morphology in solidification processes in the presence of natural convection. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38:1555–1578, 1995.
- [160] F. Zdravistch, A. Fletcher, and M. Behnia. Numerical laminar and turbulent fluid flow and heat transfer predictions in tube banks. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 5(8):717–733, 1995.
- [161] Z. Zhou, Y. Ong, M. Lim, and B. Lee. Memetic algorithm using multi-surrogates for computationally expensive optimization problems. *Journal of Soft Computing*, 11(10):957–971, 2007.
- [162] Z. Zhou, Y. Ong, P. Nair, A. Keane, and K. Lum. Combining global and local surrogate models to accelerate evolutionary optimization. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part C: Applications and Reviews*, 37(1):66–76, 2007.
- [163] C. Zhuang, Z. Xiong, and H. Ding. A level set method for topology optimization of heat conduction problem under multiple load cases. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 196:1074–1084, 2007.
- [164] E. Zitzler, K. Deb, and L. Thiele. Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: Empirical results. *Evolutionary Computation*, 8:173–195, 2002.
- [165] E. Zitzler, M. Laumanns, and L. Thiele. SPEA2: Improving the strength Pareto evolutionary algorithm for multiobjective optimization. In *EUROGEN 2001, Evolutionary methods for design, optimisation and control with application to industrial problems*, Athens, 2001.
- [166] A. Zymaris, D. Papadimitriou, K. Giannakoglou, and C. Othmer. Continuous adjoint approach to the Spalart-Allmaras turbulence model for incompressible flows. *Computers & Fluids*, 38(8):1528–1538, 2009.
- [167] A. Zymaris, D. Papadimitriou, K. Giannakoglou, and C. Othmer. Adjoint wall functions: A new concept for use in aerodynamic shape optimization. *Journal of Computational Physics*, 229(13):5228–5245, 2010.
-