ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΧΗΜΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Τομέας ΙΙ: Ανάλυσης, Σχεδιασμού και Ανάπτυξης Διεργασιών και Συστημάτων
Εργαστήριο Βιομηχανικής & Ενεργειακής Οικονομίας

Συνδυασμός Πολυκριτηριακής Ανάλυσης και Πολυκριτηριακού Προγραμματισμού στην επιλογή χαρτοφυλακίου επενδυτικών σχεδίων. Εφαρμογή σε πρόβλημα διαχείρισης υδάτινων πόρων.

Διπλωματική εργασία

Λιοτατής Ευάγγελος

Επιβλέπων: Γ. Μαυρωτάς

ΑΘΗΝΑ 2012

Στους γονείς μου,

Κώστα και Χρυσούλα

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στο Εργαστήριο Βιομηχανικής και Ενεργειακής Οικονομίας της σχολής Χημικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου κατά το ακαδημαϊκό έτος 2011-2012 υπό την επίβλεψη του Επίκουρου Καθηγητή Γεώργιου Μαυρωτά. Σκοπός της εργασίας αποτελεί η συνδυαστική εφαρμογή Πολυκριτηριακής Ανάλυσης και Πολυκριτηριακού Προγραμματισμού στην επιλογή χαρτοφυλακίου επενδυτικών σχεδίων.

Στο σημείο αυτό, θα ήθελα να εκφράσω τις ειλικρινείς μου ευχαριστίες στον Δρ. Γεώργιο Μαυρωτά, Επίκουρο Καθηγητή του τμήματος Χημικών Μηχανικών του Ε.Μ.Π., για την πολύτιμη βοήθειά του και την αρωγή του καθ' όλη την διάρκεια της εκπόνησης και συγγραφής της διπλωματικής μου εργασίας. Η συμβολή του υπήρξε καθοριστική για την ολοκλήρωσή της.

Βαγγέλης Λιοτατής

Αθήνα, 03/07/2012

Περίληψη

Ο σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η παρουσίαση μιας πρωτότυπης εκδοχής της πολύ γνωστής πολυκριτηριακής μεθόδου PROMETHEE, η οποία ασχολείται με τους περιορισμούς κατάτμησης. Η προτεινόμενη μέθοδος PROMETHEE V2 βασίζεται στις αρχές της PROMETHEE V, αλλά χρησιμοποιεί τα αποτελέσματα από την PROMETHEE I αντί αυτών της PROMETHEE II και αξιοποιεί τις πληροφορίες που παρέχονται από τις θετικές και αρνητικές ροές προκειμένου να διαμορφώσει ένα δικριτηριακό πρόβλημα Ακέραιου Προγραμματισμού. Η επίλυση του προβλήματος αυτού, μας δίνει τις κατά Pareto βέλτιστες λύσεις που είναι συνήθως περισσότερες της μίας. Λόγω της δομής της, η όλη διαδικασία λήψης της απόφασης είναι ιδιαίτερα κατάλληλη για την παροχή υποστήριξης αποφάσεων σε ομάδα αποφασιζόντων.

Λέξεις κλειδιά

PROMETHEE, Πολυκριτηριακή Ανάλυση, Πολυκριτηριακός Προγραμματισμός, Ακέραιος Προγραμματισμός, Επιλογή Έργου, Επιλογή Χαρτοφυλακίου

Abstract

The aim of the present paper is to present a novel version of the well known multicriteria method PROMETHEE that deals with segmentation constraints and is also suitable for group decision making. The proposed method, named PROMETHEE V2, is based on the principles of PROMETHEE V but uses the results of PROMETHEE I instead of PROMETHEE II and exploits the information provided by the leaving and entering flows in order to formulate a bi-objective Integer Programming problem. The solution of the latter produces the Pareto optimal solutions which are usually more than one. Due to its structure, the whole decision process is especially suitable for group decision making.

Keywords

PROMETHEE, Multicirteria Decision Analysis, Multiobjective Programming, Integer Programming, Project Selection, Portfolio Selection

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Από τις πρώτες μεθόδους που αναπτύχθηκαν στον τομέα της επιχειρησιακής έρευνας, βασικός σκοπός ήταν η επίλυση προβλημάτων και η υποστήριξη στη λήψη αποφάσεων ούτως ώστε να προσδιοριστεί η βέλτιστη λύση. Η βέλτιστη λύση είναι ένα χαρακτηριστικό των μονοκριτηριακών προβλημάτων, όπου το κριτήριο απόφασης είναι ένα. Η έρευνα γύρω από τα μονοκριτηριακά προβλήματα έφτασε στο αποκορύφωμα τις τα τελευταία πενήντα χρόνια. Χιλιάδες πρακτικά προβλήματα έχουν επιλυθεί με αυτή την μεθοδολογία, με μόνο κριτήριο συνήθως το κόστος. Καθώς όμως βρισκόμαστε πλέον στην εποχή της πληροφορίας, μια τέτοια προσέγγιση θεωρείται απαρχαιωμένη. Σήμερα υπάρχει η ανάγκη για θεώρηση περισσότερων του ενός κριτηρίου για την αντιμετώπιση των πολύπλοκων προβλημάτων που παρουσιάζονται. Έτσι δημιουργήθηκε ένας νέος τομέας της επιχειρησιακής έρευνας, η λήψη αποφάσεων με πολλαπλά κριτήρια, η οποία αναπτύχθηκε κυρίως μετά το 1970.

Η διαμόρφωση της στρατηγικής μιας επιχείρησης (βελτίωση κερδοφορίας, αύξηση της ποιότητας των προϊόντων, βελτίωση παροχών στους εργαζομένους), η ομαδοποίηση και επιλογή μεταξύ διαφόρων επενδυτικών προτάσεων και η κατάταξη υποψήφιων υπαλλήλων για συγκεκριμένες θέσεις σε μια επιχείρηση αποτελούν παραδείγματα προβλημάτων λήψης απόφασης με πολλαπλά κριτήρια. Αλλά και σε επίπεδο εθνικής οικονομίας, η λήψη αποφάσεων πρέπει να λάβει υπ’ όψιν της πολλά κριτήρια (π.χ. μείωση πληθωρισμού, μείωση γραφειοκρατίας) ή σε επίπεδο ενεργειακού σχεδιασμού όπου η ελαχιστοποίηση του κόστους και η ελαχιστοποίηση των περιβαλλοντικών επιπτώσεων πρέπει να συνδυαστούν.

Είναι πολύ σημαντικό να ξεκαθαριστεί ότι στην πολυκριτηριακή λήψη αποφάσεων, σκοπός δεν είναι η εύρεση της βέλτιστης λύσης γιατί πολύ απλά δεν υπάρχει. Σκοπός είναι η χρησιμοποίηση των ικανών ή κατά Pareto βέλτιστων λύσεων και η επιλογή στη συνέχεια μιας σχετικά βέλτιστης λύσης. Η ικανοποίηση των στόχων της απόφασης δεν μπορεί να είναι πλήρης, ή με άλλα λόγια δεν υπάρχει λύση που να εμφανίζει τις καλύτερες επιδόσεις σε όλα τα κριτήρια, γιατί τότε δεν θα υπήρχε πρόβλημα απόφασης. Η επιλογή που θα εμφάνιζε τέτοιες επιδόσεις θα προκρινόταν, χωρίς αμφιβολία ως προς την ορθότητα της απόφασης. Στην πράξη όμως, οι αποφασίζοντες έρχονται αντιμέτωποι με αντιμαχόμενους στόχους και πρέπει να επιλέξουν τους στόχους που επιθυμούν να βελτιστοποιήσουν και εκείνους για τους οποίους είναι διατεθειμένοι να δεχθούν απόκλιση από τις βέλτιστες αποδόσεις. Για κάθε εναλλακτική λύση οι αποφασίζοντες θέτουν τις επιδόσεις της σε κάθε κριτήριο και από αυτές τις επιδόσεις προκύπτουν οι ικανές λύσεις. Μία ικανή λύση ούτε υπερτερεί ούτε υστερεί έναντι των υπόλοιπων ικανών λύσεων Είναι δηλαδή αντικειμενικά ισοδύναμες μεταξύ τους και η τελική επιλογή εξαρτάται από τον αποφασίζοντα.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η επέκταση και βελτίωση της μεθόδου PROMETHEE V που παρουσιάστηκε από τους Abu-Taleb και Mareschal το 1995. Με τη μέθοδο αυτή αντιμετωπίζονται προβλήματα, όπου εκτός από την πολυκριτηριακή αξιολόγηση των επιλογών, υπάρχουν και επιπλέον περιορισμοί που πρέπει να ικανοποιούνται από αυτές. Οι εναλλακτικές επιλογές δεν είναι δηλαδή ανεξάρτητες μεταξύ τους όπως συμβαίνει στις μεθόδους PROMETHEE I και II. Η διαδικασία λήψης απόφασης χωρίζεται σε δύο φάσεις: Στην πρώτη φάση γίνεται η πολυκριτηριακή αξιολόγηση των επιλογών με τη μέθοδο PROMETHEE II και στη δεύτερη φάση διαμορφώνεται το κατάλληλο μοντέλο ακέραιου προγραμματισμού ώστε να συμπεριληφθούν οι περιορισμοί. Στην αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος συμμετέχουν ως συντελεστές οι επιδόσεις των επιλογών που υπολογίστηκαν με τη μέθοδο PROMETHEE II (καθαρές ροές). Το τελικό αποτέλεσμα είναι ο βέλτιστος συνδυασμός των εναλλακτικών επιλογών που ικανοποιούν ταυτόχρονα και τους περιορισμούς.

Η προτεινόμενη μέθοδος, PROMETHEE V2, που παρουσιάστηκε από τους Μαυρωτά και Ροζάκη το 2009, είναι μια επέκταση της μεθόδου PROMETHEE V, που εκμεταλλεύεται πλήρως τα πλεονεκτήματα της οικογένειας μεθόδων PROMETHEE και προσφέρει μεγάλη ευελιξία στον αποφασίζοντα. Η PROMETHEE V2 χρησιμοποιεί τις πληροφορίες που παρέχονται από την PROMETHEE I στη μορφή των θετικών $\varphi(\alpha^{+})$ και αρνητικών $\varphi(\alpha^{-})$ ροών και διαμορφώνει ένα πολυκριτηριακό πρόβλημα ΑΠ. Προκειμένου να βοηθήσει τον αποφασίζοντα να διαλέξει την πιο προτιμώμενη λύση, αναπτύχθηκε και μια μεθοδολογία υποστήριξης αποφάσεων. Η μέθοδος PROMETHEE V2 είναι ιδιαίτερα κατάλληλη σε προβλήματα που απαιτείται μια ομάδα λύσεων, καθώς μπορεί με αποτελεσματικότητα και διαφάνεια ενσωματώσει τις προτιμήσεις όλων των ενδιαφερομένων στην τελική απόφαση.

Η εφαρμογή της προτεινόμενης μεθόδου, έγινε με βάση την εργασία των Al-Shemmeri, Al-Kloub και Pearman με τίτλο Computer aided decision support system for water strategic planning in Jordan του 1995. Η εργασία αυτή ασχολείται με την ανάπτυξη ενός συστήματος υποστήριξης αποφάσεων για τον στρατηγικό σχεδιασμό των υδάτινων πόρων στην Ιορδανία χρησιμοποιώντας την μέθοδο PROMETHEE V. Από 72 έργα υδατικής ανάπτυξης, γίνεται η επιλογή του συνδυασμού των έργων που έχουν τις καλύτερες επιδόσεις στα κριτήρια και ταυτόχρονα ικανοποιούν τους περιορισμούς του προβλήματος (προϋπολογισμός, αρδευόμενη περιοχή κλπ).

Στο 2ο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας, παρατίθενται τα βασικά χαρακτηριστικά της Πολυκριτηριακής Ανάλυσης και του Ακέραιου Πολυκριτηριακού Προγραμματισμού (θεωρητικό υπόβαθρο, τύποι, μεθοδολογία). Στο 3ο κεφάλαιο, παρουσιάζεται η προτεινόμενη μέθοδος PROMETHEE V2, ενώ στο 4ο κεφάλαιο παρατίθεται το παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου (case study) με περιγραφή του προβλήματος και της μοντελοποίησης του, καθώς και τα αποτελέσματα που προέκυψαν. Στο τελευταίο κεφάλαιο περιλαμβάνονται κάποια γενικά συμπεράσματα που προκύπτουν από το σύνολο της εργασίας και κάποιες προτάσεις, που είναι απόρροια αυτών των συμπερασμάτων.

Τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν είναι το λογισμικό GAMS (General Algebraic Modeling System) και η μέθοδος PROMETHEE I και II όπως έχει κωδικοποιηθεί σε Excel.

Κεφάλαιο 2

Μεθοδολογικό μέρος

2.1 ΠΟΛΥΚΡΙΤΗΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

2.1.1 Εισαγωγή

Η Πολυκριτηριακή Ανάλυση Αποφάσεων (Multi-Criteria Decision Analysis) αποτελεί έναν εξελιγμένο χώρο της επιχειρησιακής έρευνας, ο οποίος τις τελευταίες τέσσερις δεκαετίες έχει γνωρίσει ιδιαίτερη άνθηση τόσο σε θεωρητικό όσο και σε πρακτικό επίπεδο. Βασικό ρόλο στην ανάπτυξη και διάδοσή της αποτέλεσε η απλή διαπίστωση, ότι η επίλυση πολύπλοκων προβλημάτων λήψης αποφάσεων δεν είναι δυνατό να πραγματοποιείται μέσω μιας μονόπλευρης και μονοδιάστατης ανάλυσης.[1]

Η Πολυκριτηριακή Ανάλυση (ΠΚΑ) αποτελεί μία συστηματική λογική και μαθηματική προσέγγιση που βοηθάει τους αποφασίζοντες να επιλύσουν διλήμματα που προκύπτουν από την επιδίωξη πολλών αντιμαχόμενων στόχων στη λήψη των αποφάσεων. Επιπρόσθετα, η ΠΚΑ είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν, εκτός από τη σύγκρουση των στόχων-κριτηρίων, υπάρχει σημαντική αβεβαιότητα στη μέτρηση των επιδόσεων των εναλλακτικών λύσεων σε κάθε κριτήριο, ή στη διατύπωση των προτιμήσεων του αποφασίζοντα. Τέλος, η ΠΚΑ μπορεί να βοηθήσει στην επίλυση των διαφωνιών που προκύπτουν όταν στην απόφαση εμπλέκονται πολλοί αποφασίζοντες, ο καθένας με διαφορετικό σύστημα προτιμήσεων.

Οι μέθοδοι που αναπτύχθηκαν για την πολυκριτηριακή λήψη αποφάσεων, δεν αποσκοπούν στην εξεύρεση μιας άριστης λύσης, γιατί πρακτικά δεν υπάρχει μια τέτοια λύση. Η πολυκριτηριακή λήψη αποφάσεων προωθεί το ρόλο του αποφασίζοντα στη διαδικασία λήψης απόφασης, διευκολύνοντας το συμβιβασμό και τη λήψη συλλογικών αποφάσεων.[2] Ασχολείται συχνά με την ταξινόμηση των εναλλακτικών λύσεων, από τις καλύτερες στις χειρότερες, βασιζόμενη σε αντικρουόμενα κριτήρια. Ασχολείται επίσης με τη θεωρία και τη μεθοδολογία, η οποία μπορεί να αντιμετωπίσει σύνθετα προβλήματα που παρουσιάζονται σε τομείς όπως το Μάνατζμεντ, οι Επιχειρήσεις, η Μηχανική, η Επιστήμη αλλά και άλλους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας.[3]

Η επιστημονική περιοχή της ΠΚΑ περιλαμβάνει κατ' αρχήν ένα θεωρητικό υπόβαθρο, στο οποίο αναπτύσσεται η βασική λογική για την προσέγγιση τέτοιου είδους προβλημάτων. Ακόμη προσδιορίζονται τα κύρια δομικά στοιχεία του προβλήματος και αναλύονται οι βασικές τους ιδιότητες. Με βάση αυτό το θεωρητικό υπόβαθρο έχει αναπτυχθεί ένα πλήθος τεχνικών, κατάλληλων για την αντιμετώπιση ενός μεγάλου εύρους προβλημάτων που προκύπτουν στην πράξη. Αν και η ταξινόμηση των τεχνικών αυτών σε ιδιαίτερες κατηγορίες δεν είναι αυστηρή, διακρίνονται τρεις βασικές ομάδες μεθόδων:

- Πολυκριτηριακή ιεράρχηση επιλογών
- Πολυκριτηριακός μαθηματικός προγραμματισμός
- Πολυκριτηριακή θεωρία χρησιμότητας

Το βασικό στοιχείο που διαφοροποιεί τις δύο πρώτες κατηγορίες είναι το είδος του συνόλου των επιλογών. Συγκεκριμένα, η πρώτη κατηγορία εφαρμόζεται σε προβλήματα που εξετάζουν ένα πεπερασμένο σύνολο διακριτών επιλογών, ενώ η δεύτερη σε προβλήματα με συνεχές σύνολο άπειρου αριθμού επιλογών, στα οποία κατ' αναλογία με τα προβλήματα γραμμικού μονοκριτηριακού προγραμματισμού, οι μεταβλητές απόφασης μπορεί να παίρνουν οποιαδήποτε τιμή εντός ενός καθορισμένου πεδίου. Τέλος, η τρίτη κατηγορία μεθόδων εφαρμόζεται και σε συνεχές και σε διακριτό σύνολο επιλογών και στηρίζεται στη λογική της αναγωγής του πολυκριτηριακού σε μονοκριτηριακό πρόβλημα μέσω του προσδιορισμού μιας συνολικής συνάρτησης χρησιμότητας που συνθέτει τις επιμέρους (ανά κριτήριο) προτιμήσεις του αποφασίζοντα σε ένα ενιαίο μέτρο με βάση το οποίο προχωράει στη λήψη της απόφασης.[4]

2.1.1.1 Βασικά χαρακτηριστικά προβλήματος ΠΚΑ

Κάθε πρόβλημα ΠΚΑ προσδιορίζεται από ορισμένα δομικά χαρακτηριστικά, που απορρέουν είτε από την ίδια τη φύση του προβλήματος, είτε από τις απόψεις και τις προτιμήσεις του αποφασίζοντα. Η ταυτοποίηση του αντικειμένου της πολυκριτηριακής ανάλυσης ως προς τα χαρακτηριστικά αυτά αποτελεί ένα πρώτο στάδιο της αναλυτικής διαδικασίας, που διευκολύνει την κατανόηση του προβλήματος και επιτρέπει την επιλογή της κατάλληλης μεθόδου επίλυσης.

Η αναγνώριση των δομικών στοιχείων ενός πολυκριτηριακού προβλήματος εντάσσεται κατά κανόνα σε ένα συστηματικό πλαίσιο ανάλυσης. Ένα τέτοιο πλαίσιο, γνωστό ως πλαίσιο CAUSE (Criteria, Alternatives, Uncertainty, Stakeholders, Environment) αναγνωρίζει πέντε βασικά δομικά στοιχεία.

- **Κριτήρια**

Το πιο σημαντικό στοιχείο ενός προβλήματος είναι η μήτρα αξιολόγησης (Πίνακας 2.1), που περιλαμβάνει ένα σύνολο διακριτών επιλογών, ένα σύνολο κριτηρίων αξιολόγησης και την επίδοση της κάθε επιλογής στο αντίστοιχο κριτήριο και το σύστημα προτιμήσεων του αποφασίζοντα που εμπεριέχει τη σχετική βαρύτητα των κριτηρίων, την κατεύθυνση προτίμησης των επιδόσεων (ελάχιστο ή μέγιστο) και τα όρια ανοχής.

Κάθε εναλλακτική λύση E_i προσδιορίζεται από την επίδοση της g_{ij}, σε κάθε κριτήριο αξιολόγησης K_j, ενώ χαρακτηριστικό του προβλήματος είναι ότι δεν υπάρχει λύση που να υπερέχει έναντι όλων των άλλων σε όλα τα κριτήρια. Τα κριτήρια αποτελούν τους άξονες αξιολόγησης πάνω στους οποίους θα κριθούν οι εναλλακτικές λύσεις και εκφράζουν τις παράλληλες επιδιώξεις του αποφασίζοντα ή άλλων εμπλεκομένων στη διαδικασία ΛΑ (Λήψης Απόφασης).

ΕΠΙΛΟΓΕΣ	ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΑΠΟΦΑΣΗΣ			
	K_1	K_2	K_j	K_m
E_1	g_{11}	g_{11}	• • •	g_{1m}
E_2	g_{21}	g_{11}	• • •	g_{2m}
E_3	g_{31}	g_{11}	• • •	g_{3m}
•	•	•	• • •	•
•	•	•	• • •	•
•	•	•	• • •	•
E_n	g_{n1}	g_{n2}	• • •	g_{nm}

Πίνακας 2.1 Παράδειγμα μήτρας επιδόσεων διακριτών επιλογών σε πολλαπλά κριτήρια

- **Εναλλακτικές λύσεις**

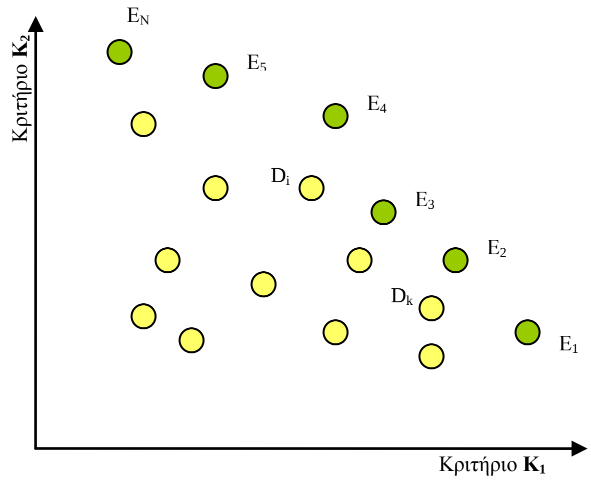
Για να θεωρηθεί ότι μία λύση ανήκει στο σύνολο των εξεταζομένων εναλλακτικών λύσεων, πρέπει η λύση να είναι εφικτή, δηλαδή να εμφανίζει προοπτικές πρακτικής εφαρμογής της ή, σε όρους μαθηματικής διατύπωσης, να μην παραβιάζει τους περιορισμούς του προβλήματος.

Οι εφικτές λύσεις διακρίνονται σε:

- **Ικανές** ή αποτελεσματικές ή κυρίαρχες λύσεις (efficient ή dominant)
- **Μη αποτελεσματικές** ή κυριαρχούμενες λύσεις (non-efficient ή dominated).

Η έννοια της αποτελεσματικότητας ή κυριαρχίας (efficiency, dominance) διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τον Ιταλό οικονομολόγο Pareto και προσδιορίζει καταστάσεις ισορροπίας του συστήματος, στις οποίες δεν είναι δυνατή η βελτίωση της θέσης ενός στοιχείου του συστήματος χωρίς ταυτόχρονη χειροτέρευση της θέσης ενός άλλου στοιχείου. Ονομάζεται δε αρχή Pareto ή αρχή αριστοποίησης κατά Pareto υποδηλώνοντας την υπό όρους αριστοποίηση. Για παράδειγμα, σύμφωνα με την αρχή αυτή, σε μία άριστη κατά Pareto κατάσταση δεν είναι δυνατή η βελτίωση της θέσης των παραγωγών, π.χ. η αύξηση της τιμής και κατά συνέπεια των κερδών τους, χωρίς την ταυτόχρονη επιδείνωση της κατάστασης των καταναλωτών, που θα πρέπει να πληρώνουν σε υψηλότερη τιμή τα παραγόμενα αγαθά. Αντίθετα, μία κατάσταση, στην οποία οι παραγωγοί έχουν τη δυνατότητα να εκμεταλλευθούν πιο αποδοτικά τους πόρους τους, π.χ. με εξοικονόμηση πρώτων υλών και ενέργειας, είναι μη άριστη κατά Pareto (μη αποτελεσματική), καθώς είναι δυνατό να αυξηθούν τα κέρδη των παραγωγών χωρίς αύξηση της τιμής των προϊόντων και επιβάρυνση των καταναλωτών.[5]

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1, στην περίπτωση προβλήματος με δύο κριτήρια, ο αποφασίζων θα πρέπει να αναζητήσει τη λύση του μεταξύ των επιλογών E_i που αποτελούν τις αποτελεσματικές λύσεις του προβλήματος.



Σχήμα 2.1 Ικανές (E_i) και κυριαρχούμενες λύσεις (D_i) σε πρόβλημα 2 κριτηρίων

Έτσι, υποθέτοντας ότι και στα δύο κριτήρια, K_1 και K2 επιδιώκεται η μεγιστοποίηση των επιδόσεων, η λύση E_3 υπερέχει των λύσεων E_2 και E_1, ως προς το κριτήριο K_2, ενώ είναι κατώτερη ως προς το κριτήριο K_1. Αντίστοιχα, σε σχέση με τις επιλογές E_4, E_5 και E_N, η λύση E_3 υπερέχει ως προς το κριτήριο K_1, ενώ είναι κατώτερη ως προς το κριτήριο K_2. Επομένως, κάθε μία από τις λύσεις E_i, αποτελεί εν δυνάμει μία πιθανή λύση του προβλήματος ή μία κατά Pareto άριστη λύση. Η επιλογή μίας λύσης E_i έναντι μίας άλλης ικανής λύσης εξαρτάται από τη σχετική σημαντικότητα που αποδίδεται στα κριτήρια K_1 και K_2. Το χαρακτηριστικό των αποτελεσματικών λύσεων είναι ότι δεν είναι δυνατή η βελτίωση της επίδοσης σε ένα κριτήριο χωρίς ταυτόχρονη χειροτέρευση της επίδοσης σε ένα ή περισσότερα άλλα κριτήρια.

Αντίθετα, ο αποφασίζων δεν έχει λόγο να επιλέξει ή να εξετάσει μία κυριαρχούμενη λύση D_i, καθώς υπάρχει τουλάχιστον μία ικανή λύση E_i, που υπερέχει και ως προς τα δύο κριτήρια αξιολόγησης. Στο παράδειγμα του Σχήμα 2.1 δεν θα υπήρχε λόγος επιλογής της D_i, καθώς η λύση E_4 υπερέχει και ως προς τα δύο κριτήρια, ενώ αντίστοιχα, η λύση E_2 κυριαρχεί της λύσης D_k.

- **Αβεβαιότητα**

Η αβεβαιότητα είναι βασικό χαρακτηριστικό του σύγχρονου κόσμου, που προκύπτει από την συνεχώς αυξανόμενη πολυπλοκότητα των συστημάτων και τη μεταβλητότητα των παραμέτρων. Αυτά δυσκολεύουν πολύ τον αποφασίζοντα, ο οποίος πρέπει να συνυπολογίσει όλα τα πολύπλοκα φαινόμενα, να κατανοήσει όλες τις πληροφορίες και να εκφράσει την αντικειμενική αξία των κρίσεών του.[6]

Οι παράγοντες αβεβαιότητας διακρίνονται σε δύο κατηγορίες:

- **Εσωτερική αβεβαιότητα:** αναφέρεται στην ασαφή εικόνα που μπορεί να έχουν οι αποφασίζοντες για την ίδια τη φύση του εξεταζόμενου προβλήματος, δηλαδή για το ποιοί θα πρέπει να είναι οι στόχοι και τα κριτήρια της απόφασης, ποιά η εφεκτικότητα κάποιων εναλλακτικών λύσεων κλπ. Η σημαντικότερη όμως παράμετρος εσωτερικής αβεβαιότητας αφορά τη σχετική βαρύτητα των κριτηρίων.
- **Εξωτερική αβεβαιότητα:** οφείλεται στη στοχαστικότητα ορισμένων παραμέτρων που συνδέονται ή επηρεάζουν την απόφαση (ζήτηση, τιμές κλπ.) ή στην ανεπαρκή γνώση άλλων φαινομένων ή παραμέτρων της απόφασης (ύψος περιβαλλοντικών επιπτώσεων).

Και οι δύο παραπάνω μορφές μπορούν να αντιμετωπισθούν ικανοποιητικά με χρήση τεχνικών που επιλέγονται ανάλογα με το είδος και την έκταση της αβεβαιότητας και με τρόπο ώστε να επιτυγχάνεται συμβατότητα με το μοντέλο λήψης απόφασης που εφαρμόζεται για την επίλυση του προβλήματος.

- **Αποφασίζοντες και εμπλεκόμενοι στην απόφαση**

Όπως και σε κάθε διαδικασία ΛΑ, οι αποφασίζοντες (decision makers) είναι αυτοί που έχουν την αρμοδιότητα να εντοπίσουν το πρόβλημα, να επιλέξουν τη λύση του, αλλά ακόμα και να μεριμνήσουν για την υλοποίηση της πολλές φορές. Ο όρος «εμπλεκόμενοι» (stakeholders) είναι ευρύτερος, καθώς περιλαμβάνει τους αποφασίζοντες αλλά και όλους όσους ενδιαφέρονται για τη λύση του προβλήματος, γιατί θα επηρεάσει άμεσα ή έμμεσα τις δραστηριότητες τους ή την ευημερία τους. Συχνά δε, ορισμένοι εμπλεκόμενοι αν και δεν έχουν την αρμοδιότητα να λάβουν και να εφαρμόσουν την απόφαση, έχουν τη δύναμη να παρεμποδίσουν την υλοποίηση της αν κρίνουν ότι μία τέτοια απόφαση είναι αντίθετη προς τα συμφέροντα τους.

- **Εξωτερικό περιβάλλον**

Αυτή η τελευταία πτυχή του προβλήματος δόμησης, είναι στενά, αλλά όχι αποκλειστικά συνδεδεμένη με το βαθμό αβεβαιότητας που σχετίζεται με τις εξωτερικές συνθήκες. Μία λύση που προκρίνεται σε ορισμένες συνθήκες πιθανό να μην είναι η καταλληλότερη σε κάποιο διαφορετικό περιβάλλον, αν δηλαδή μεταβληθούν κάποιες παράμετροι που επηρεάζουν άμεσα τις επιδόσεις των επιλογών ή τις προτιμήσεις των αποφασιζόντων σε σχέση με αυτές τις επιδόσεις.

2.1.1.2 Μοντέλα έκφρασης προτιμήσεων

Τα μοντέλα έκφρασης προτιμήσεως έχουν ως στόχο την καταγραφή των προτιμήσεων των εμπλεκομένων στο συγκεκριμένο πλαίσιο αποφάσεων. Η έκφραση των προτιμήσεων διευκολύνεται με την εφαρμογή τεχνικών που έχουν στόχο να θέσουν με ένα σαφή τρόπο την ουσία του διλήμματος, απέναντι στο οποίο θα πρέπει να τοποθετηθεί ο αποφασίζων και να αποτυπώσουν ποσοτικά τη στάση του, έτσι ώστε να ενσωματωθεί στο μοντέλο που θα χρησιμοποιηθεί στην τελική φάση της επίλυσης του προβλήματος.

Οι ανθρώπινες προτιμήσεις σε ένα πολυκριτηριακό πρόβλημα διακρίνονται σε:

- **Ενδοκριτηριακές προτιμήσεις** (intra-criterion preferences): σχετίζονται με τις επιδόσεις των επιλογών σε ένα κριτήριο. Αν πρόκειται για μεθόδους πολυκριτηριακής θεωρίας αξίας ή χρησιμότητας, οι ενδοκριτηριακές προτιμήσεις εκφράζονται με τον καθορισμό των μερικών συναρτήσεων αξίας ή χρησιμότητας, ενώ σε περίπτωση μεθόδων υπεροχής με τον προσδιορισμό ορίων αδιαφορίας ή προτίμησης ανά κριτήριο.
- **Διακριτηριακές προτιμήσεις** (inter-criterion preferences): αφορούν τη συμβολή κάθε κριτηρίου στη συνολική αξιολόγηση κάθε λύσης. Εδώ οι προτιμήσεις εκφράζονται με τεχνικές εκτίμησης των συντελεστών βαρύτητας του συνόλου των κριτηρίων.[7]

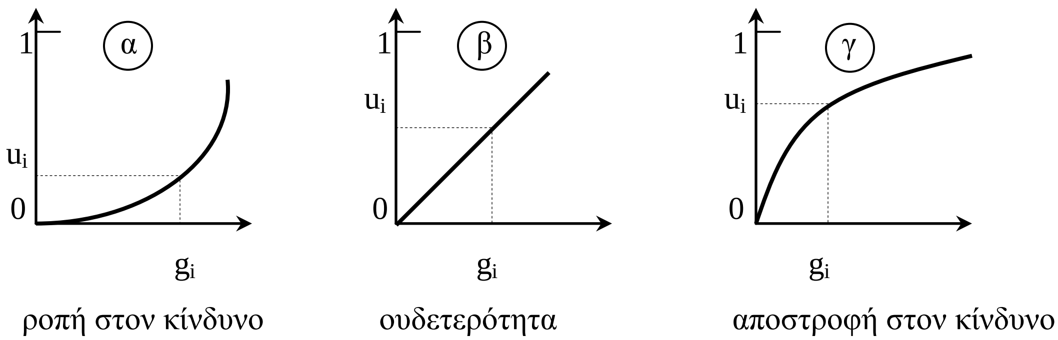
2.1.1.3 Μερικές συναρτήσεις αξίας ή χρησιμότητας

Οι επιδόσεις των επιλογών σε κάθε κριτήριο ανάγονται στην κλίμακα [0,1] ανάλογα με τον τύπο της συνάρτησης χρησιμότητας που επιλέγεται. Υπάρχουν τρεις βασικές μορφές συναρτήσεων, που η κάθε μια εκφράζει και μια διαφορετική στάση του αποφασίζοντα (Σχήμα 2.2):

α) η κοίλη καμπύλη αποδίδει αναλογικά χαμηλότερες τιμές χρησιμότητας u_j σε μία μέση επίδοση g_j και εκφράζει ροπή προς τον κίνδυνο και ριψοκίνδυνη συμπεριφορά.

β) η ευθεία γραμμή αποδίδει τιμές χρησιμότητας u_j σε ευθεία αναλογία με τις τιμές επιδόσεων g_j και εκφράζει ουδετερότητα απέναντι στον κίνδυνο.

γ) η κυρτή καμπύλη αποδίδει αναλογικά υψηλότερες τιμές χρησιμότητας u_j σε μία χαμηλή επίδοση g_j και εκφράζει αποστροφή στον κίνδυνο και συντηρητική συμπεριφορά.



Σχήμα 2.2 Μορφές συναρτήσεων χρησιμότητας

Όταν επιζητάμε τη μεγιστοποίηση, η συνάρτηση είναι μονοτονικά αύξουσα και στην περίπτωση γραμμικής συνάρτησης η αξία $v_j(\alpha)$ της επιλογής α υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$v_j(\alpha) = \frac{g_j(\alpha) - g_j(\min)}{g_j(\max) - g_j(\min)} \tag{2.1}$$

Όταν επιζητάμε την ελαχιστοποίηση, η συνάρτηση είναι μονοτονικά φθίνουσα και στην περίπτωση της γραμμικής συνάρτησης η αξία $v_j(\alpha)$ της επιλογής α υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$v_j(\alpha) = \frac{g_j(\max) - g_j(\alpha)}{g_j(\max) - g_j(\min)} \tag{2.2}$$

Οι μη γραμμικές συναρτήσεις χρησιμότητας επιτρέπουν τη διασπορά ή συγκέντρωση των επιδόσεων ανάλογα με τις προτιμήσεις του αποφασίζοντα. Η αναγωγή των γραμμικών συναρτήσεων σε μη γραμμικές γίνεται με τη χρήση της εξίσωσης:

$$v_j(\alpha) = \frac{1 - e^{-c v_j(\alpha)}}{1 - e^{-c}} \tag{2.3}$$

Με την επιλογή κατάλληλης τιμής στον συντελεστή c διαχωρίζονται οι κοίλες ($c < 0$) από τις κυρτές ($c > 0$).

Το μοντέλο προτιμήσεων που είναι συμβατό με τη θεωρία χρησιμότητας και εφαρμόζεται τόσο σε μονοκριτηριακά όσο και σε πολυκριτηριακά προβλήματα αναγνωρίζει δύο σαφείς και αλληλοαποκλειόμενες καταστάσεις:

- **Την κατάσταση αδιαφορίας**: ο αποφασίζων είναι αδιάφορος μεταξύ των επιλογών a και b στο κριτήριο j μόνο αν η αξία τους ταυτίζονται.
- **Την κατάσταση προτίμησης**: ο αποφασίζων προτιμά την επιλογή α από την επιλογή b στο κριτήριο j, αν η αξία της α είναι μεγαλύτερη από την αξία της b.

2.1.1.4 Εκτίμηση συντελεστών βαρύτητας

Για την επίλυση ενός πολυκριτηριακού προβλήματος πρέπει, εκτός από τις ενδοκριτηριακές προτιμήσεις, να προσδιορισθούν και οι διακριτηριακές επιδόσεις του αποφασίζοντα, με τι ποσοστό δηλαδή συμμετέχει ένα κριτήριο στη συνολική αξιολόγηση. Η σημαντικότητα των κριτηρίων εκφράζεται ποσοτικά με τους συντελεστές βαρύτητας w_j, ενώ για την απόδοση της σχετικότητας, οι τιμές τους ανάγονται έτσι ώστε το άθροισμά τους να ισούται με την μονάδα ($\sum w_j = 1$).

Στη βιβλιογραφία έχουν προταθεί διάφορες μέθοδοι εκτίμησης των συντελεστών βαρύτητας χρησιμοποιώντας ακριβείς τιμές. Από σχετικά απλές, όπως τις ευρέως χρησιμοποιούμενες Άμεσες Μεθόδους (Direct Rating) και τις Μεθόδους Κατανομής (Point Allocation), μέχρι πιο προηγμένες μεθόδους, όπως η Μέθοδος Μετατόπισης (Swing) και η Απλή Πολυκριτηριακή Τεχνική Αξιολόγησης (SMART). Υπάρχουν επίσης και οι Μέθοδοι Αντιστάθμισης, οι οποίοι όμως έχουν την τάση να δίνουν μεγαλύτερο βάρος στο πιο σημαντικό χαρακτηριστικό, σε σύγκριση με μεθόδους όπως οι Άμεσοι και οι Μετατόπισης. Πολλοί μέθοδοι φαίνεται να είναι μικρές παραλλαγές ο ένας του άλλου, αλλά οι μικρές διαφορές που έχουν είναι δυνατόν να προκαλέσουν σημαντικές επιπτώσεις στη διαδικασία λήψης απόφασης.[8]

Δεν θα ασχοληθούμε περεταίρω με τις τεχνικές αυτές, διότι στην εφαρμογή της μεθόδου μας χρησιμοποιούμε μεν τους συντελεστές βαρύτητας, αλλά τους λαμβάνουμε ως δεδομένους από άλλη εργασία και δεν τους υπολογίζουμε.

2.1.2 Μέθοδος PROMETHEE

2.1.2.1 Γενικά

Οι Μέθοδοι Υπεροχής (Outranking Methods) στηρίζονται στην οικοδόμηση μιας σχέσης προτίμησης -η οποία συνήθως ονομάζεται σχέση υπεροχής- με δυαδικές συγκρίσεις των επιλογών σε κάθε μεμονωμένο κριτήριο, με βάση τις επιδόσεις τους. Χαρακτηριστικό τους είναι ότι η σύγκριση δε γίνεται με αναγωγή στο διάστημα [0,1], αλλά στην αρχική κλίμακα και ο δείκτης που προκύπτει συντίθεται με έναν συνολικό δυαδικό δείκτη. Οι δείκτες αυτοί, ανάλογα με τον τρόπο υπολογισμού τους, ονομάζονται δείκτες προτίμησης ή δείκτες συμφωνίας.

Στις σχέσεις υπεροχής δεν ισχύει η υπόθεση της μεταβατικότητας. Δηλαδή αν μια λύση α υπερέχει της b, και η λύση b υπερέχει της c, δε σημαίνει απαραίτητα ότι και η λύση α υπερέχει της λύσης c. Συνεπώς η αρχική κατάταξη των επιλογών είναι μερική (περιλαμβάνει και καταστάσεις ασυγκρισιμότητας), η οποία μπορεί να αναχθεί σε πλήρη. Το χαρακτηριστικό αυτό είναι αρκετά χρήσιμο, γιατί παρέχει πληροφορίες στον αποφασίζοντα.

Στις μεθόδους υπεροχής ακολουθείται διαφορετικό μοντέλο ενδοκριτηριακών προτιμήσεων. Εδώ θεωρείται ότι η ανθρώπινη συμπεριφορά δεν μπορεί να εκφρασθεί μόνο με δυο καταστάσεις (αδιαφορία και προτίμηση) μπροστά σε δυο διαφορετικές επιδόσεις και πως οι καταστάσεις αυτές δεν μπορούν να ορισθούν μαθηματικά απόλυτα.

Το μοντέλο αυτό έχει 2 κύρια γνωρίσματα:

- **τη διεύρυνση της κατάστασης αδιαφορίας**, όπου η προϋπόθεση της ισότητας των επιδόσεων ισχύει και για επιλογές που η διαφορά των επιδόσεών τους δεν είναι αρκετά μεγάλη.
- **τη διαφοροποίηση της κατάστασης προτίμησης**, όπου η ένταση προτίμησης έχει διαφορές (ασθενής, ισχυρή, αναμφισβήτητη).

Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, κάθε κριτήριο μπορεί να έχει κατώφλια αδιαφορίας και προτίμησης και τέτοια κριτήρια ονομάζονται ψευδοκριτήρια.

Οι καταστάσεις προτίμησης αναφέρονται σε συγκρίσεις μεταξύ δυο επιλογών a και b και προσδιορίζονται με ένα δείκτη προτίμησης $p_j(a,b)$ που παίρνει τιμές στο διάστημα [0,1]. Σε κατάσταση αδιαφορίας ο δείκτης παίρνει την τιμή 0, σε κατάσταση σαφούς προτίμησης την τιμή 1, και σε καταστάσεις ασθενούς ή ισχυρής προτίμησης παίρνει τιμές από 0 μέχρι 1.

Οι Μέθοδοι Υπεροχής αναπτύχθηκαν στην Γαλλία στα τέλη τις δεκαετίας του ’60, για την αντιμετώπιση πρακτικών προβλημάτων στην προσέγγιση της συνάρτησης αξίας. Πρωτοεισήχθησαν από τον Bernard Roy με την μέθοδο ELECTRE. Η οικογένεια μεθόδων ELECTRE, μαζί με την οικογένεια μεθόδων PROMETHEE που αναπτύχθηκε τη δεκαετία του ’80 είναι οι πιο γνωστές μέθοδοι υπεροχής.[9]

2.1.2.2 Περιγραφή της μεθόδου

Η μέθοδος PROMETHEE (Preference Ranking Organization Method for Enrichment of Evaluations) θεωρείται μια από τις απλούστερες μεθόδους ΠΚΑ. Ακολουθεί μια διαφανή υπολογιστική διαδικασία και μπορεί εύκολα να γίνει κατανοητή από τους αποφασίζοντες που δεν είναι εξοικειωμένοι με ανάλογες τεχνικές.[10]

Η μέθοδος PROMETHEE χρησιμοποιεί για τη δυαδική σύγκριση τους εξής 6 τύπους κριτηρίων (Σχήμα 2.3):

- **Τύπος 1:** Κανονικό κριτήριο (usual type)
- **Τύπος 2:** Κριτήριο με κατώφλι αδιαφορίας (U-type)
- **Τύπος 3:** Κριτήριο με κατώφλι προτίμησης (V-type)
- **Τύπος 4:** Βαθμωτό κριτήριο (level type)
- **Τύπος 5:** Γραμμικό κριτήριο (linear type)
- **Τύπος 6:** Κριτήριο Gauss (Gauss type)

Από μαθηματική σκοπιά οι τύποι 1, 2 και 3 είναι ειδικές περιπτώσεις του τύπου 5. Όμως, είναι ευκολότερο να παρουσιάζονται ξεχωριστά στον αποφασίζοντα, καθώς κάθε τύπος αντιστοιχεί σε πολύ συγκεκριμένη συμπεριφορά κατά τη σύγκριση των επιδόσεων δύο εναλλακτικών στο ίδιο κριτήριο.

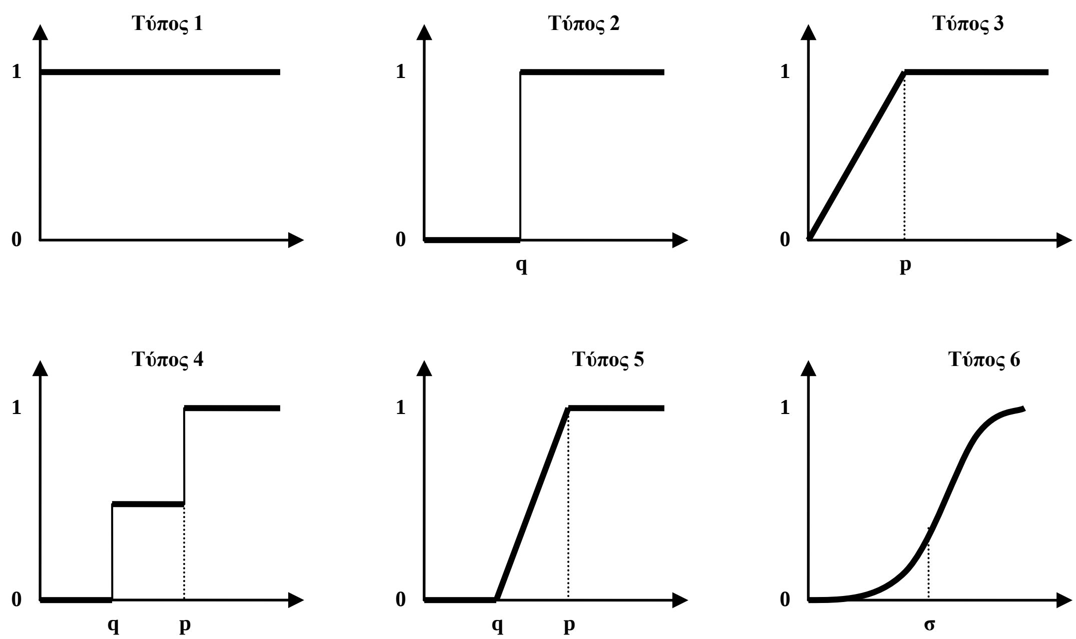
Η επίλυση του πολυκριτηριακού προβλήματος με τη μέθοδο PROMETHEE ακολουθεί τα εξής διαδοχικά στάδια:

1) **Δυαδική σύγκριση επιλογών ανά κριτήριο**: εξετάζονται όλα τα ζεύγη επιλογών σε κάθε κριτήριο και με βάση τη διαφορά των επιδόσεών τους και τον τύπο του κριτηρίου υπολογίζονται οι δείκτες προτίμησης p_j. Οι δείκτες παίρνουν τιμές στο διάστημα [0,1] και αναφέρονται στο συγκεκριμένο κριτήριο.

2) **Υπολογισμός συνολικών δεικτών προτίμησης:** υπολογίζεται μια συνολική σχέση προτίμησης $P(a,b)$ για κάθε ζεύγος επιλογών a, b ως άθροισμα των δεικτών προτίμησης $p_j(a,b)$, σταθμισμένο ανάλογα με τους συντελεστές βαρύτητας των κριτηρίων:

$$P(a,b) = \sum_{j=1}^{m} w_j \cdot p_j(\alpha,b) \tag{2.4}$$

Και οι δείκτες $P(a,b)$ παίρνουν τιμές στο διάστημα [0,1] αλλά αναφέρονται στο σύνολο των κριτηρίων.



Σχήμα 2.3 Τύποι κριτηρίων

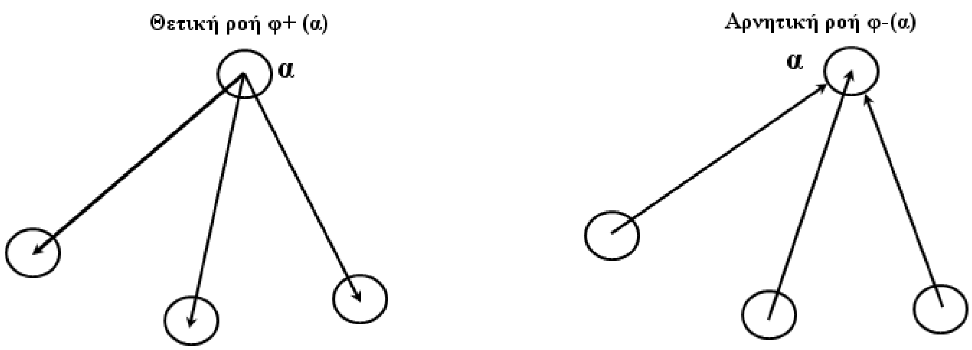
3) **Υπολογισμός θετικών και αρνητικών ροών:** υπολογίζονται για κάθε επιλογή a δυο μέτρα αξιολόγησης:

- **Θετική ροή:** $$\varphi^{+}(\mathrm{a}) = \frac{\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{P(a,j)}}{\mathrm{n-1}} \tag{2.5}$$

  Η θετική ροή προκύπτει από το άθροισμα των στοιχείων της αντίστοιχης σειράς δια του αριθμού των υπολοίπων επιλογών (n-1) και εκφράζει σε τι βαθμό η επιλογή a κυριαρχεί όλων των υπολοίπων.

- **Αρνητική ροή:** $$\varphi^{-}(a)=\frac{\sum_{j=1}^{n} P(j,a)}{n-1} \qquad (2.6)$$

Η αρνητική ροή προκύπτει από το άθροισμα των στοιχείων της αντίστοιχης στήλης δια του αριθμού των υπολοίπων επιλογών (n-1) και εκφράζει σε τι βαθμό η επιλογή *α* κυριαρχείται από όλες τις υπόλοιπες.



Σχήμα 2.4 Η έννοια της θετικής και αρνητικής ροής στην μέθοδο PROMETHEE

4) **Μερική κατάταξη των επιλογών (PROMETHEE I):** κατασκευάζονται δυο αρχικές πλήρεις κατατάξεις με βάση τις τιμές των θετικών και αρνητικών ροών. Η μερική κατάταξη PROMETHEE I προκύπτει ως τομή των δυο αυτών κατατάξεων και περιλαμβάνει καταστάσεις προτίμησης, αδιαφορίας και ασυγκρισιμότητας.

   a) ***<u>Κατάταξη με βάση τις θετικές ροές:</u>***

   - **$\alpha\ S^{+}\ b$** **Αν $\varphi^{+}(\alpha) > \varphi^{+}(b)$** **Θετική υπεροχή**
   - **$\alpha\ I^{+}\ b$** **Αν $\varphi^{+}(\alpha) = \varphi^{+}(b)$** **Θετική αδιαφορία**

   b) ***<u>Κατάταξη με βάση τις αρνητικές ροές:</u>***

   - **$\alpha\ S^{-}\ b$** **Αν $\varphi^{-}(\alpha) < \varphi^{-}(b)$** **Αρνητική υπεροχή**
   - **$\alpha\ I^{-}\ b$** **Αν $\varphi^{-}(\alpha) = \varphi^{-}(b)$** **Αρνητική αδιαφορία**

Η μερική κατάταξη που περιλαμβάνει καταστάσεις προτίμησης, αδιαφορίας και ασυγκρισημότητας, προκύπτει ως τομή των δύο αυτών κατατάξεων (θετικής και αρνητικής) ως εξής:

Προτίμηση:	**α P_I b**	**αν**	**α S^+ b**	**και**	**α S^- b**	**ή**
			α S^+ b	**και**	**α I^- b**	**ή**
			α I^+ b	**και**	**α S^- b**	
Αδιαφορία:	**α I_I b**	**αν**	**α I^+ b**	**και**	**α I^- b**	
Ασυγκρισιμότητα:	**α R_I b**	**αν**	**α S^+ b**	**και**	**b S^- a**	

5) **Πλήρης κατάταξη των επιλογών (PROMETHEE II):** κατασκευάζεται μια πλήρης κατάταξη των επιλογών με βάση ένα καθαρό μέτρο υπεροχής:

- **Καθαρή ροή:** $\varphi(a) = \varphi^+(a) - \varphi^-(a)$ (2.7)

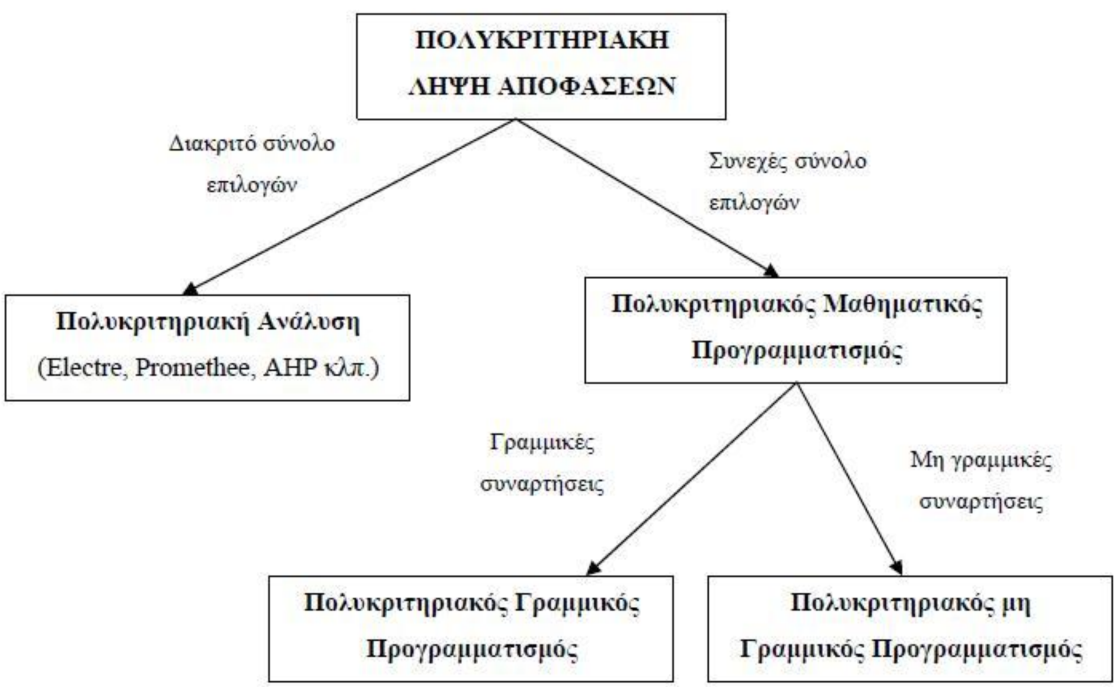
Η καθαρή ροή αναγνωρίζει μόνο καταστάσεις προτίμησης και αδιαφορίας (PROMETHEE II) και είναι ευκολότερα αντιληπτή στον αποφασίζοντα. Περιέχει όμως μικρότερη ποσότητα πληροφορίας από την PROMETHEE I.

Προτίμηση:	**α P_{II} b**	**αν**	**φ(α) > φ(b)**
Αδιαφορία:	**α P_{II} b**	**αν**	**φ(α) = φ(b)**

2.2 ΑΚΕΡΑΙΟΣ ΠΟΛΥΚΡΙΤΗΡΙΑΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

2.2.1 Εισαγωγή

Ο Πολυκριτηριακός Μαθηματικός Προγραμματισμός, ΠΚΜΠ (Multiple Objective Mathematical Programming, MOMP) ασχολείται με την επίλυση προβλημάτων στα οποία το σύνολο των δυνατών επιλογών δεν δίδεται ρητά, αλλά έμμεσα μέσω των τιμών των μεταβλητών απόφασης ενός προβλήματος μαθηματικού προγραμματισμού. Οι μαθηματικές σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών απόφασης που πρέπει να ικανοποιούνται αποτελούν τους περιορισμούς του προβλήματος, ενώ οι συναρτήσεις εκείνες των μεταβλητών απόφασης που πρέπει να αριστοποιηθούν ονομάζονται αντικειμενικές συναρτήσεις. Με τον όρο λύση του προβλήματος εννοείται κάθε συνδυασμός τιμών που μπορούν να λάβουν οι μεταβλητές απόφασης. Ο ΠΚΜΠ επιλύει το πρόβλημα της διανυσματικής βελτιστοποίησης (vector optimization) που αποτελεί μία επέκταση της βαθμωτής βελτιστοποίησης (scalar optimization) με την οποία ασχολείται ο συμβατικός Μαθηματικός Προγραμματισμός με μία αντικειμενική συνάρτηση.



Σχήμα 2.5 Ταξινόμηση μεθόδων ΠΚΛΑ

Όταν επιπλέον, οι περιορισμοί και οι αντικειμενικές συναρτήσεις είναι γραμμικές συναρτήσεις των μεταβλητών απόφασης, τότε το πρόβλημα ανήκει στον Πολυκριτηριακό Γραμμικό Προγραμματισμό, ΠΚΓΠ (Multiple Objective Linear Programming, MOLP), που αποτελεί με τη σειρά του επέκταση του συμβατικού Γραμμικού Προγραμματισμού (ΓΠ).

Ο Ακέραιος ΠΚΓΠ (ΑΠΚΓΠ), αποσκοπεί στην επίλυση προβλημάτων ΠΚΓΠ με ακέραιες μεταβλητές απόφασης. Τέτοιες μεταβλητές απόφασης χρησιμοποιούνται για την ενσωμάτωση στο μοντέλο διακριτών μεγεθών, προσδίδοντας συνήθως μια πιο ρεαλιστική απεικόνιση της πραγματικότητας, αλλά συγχρόνως δυσχεραίνοντας τη διαδικασία επίλυσης. Με τις ακέραιες μεταβλητές μπορούν να εισαχθούν στο μοντέλο λογικές συνθήκες, οικονομίες κλίμακας, σταθερά κόστη κλπ, δηλαδή φαινόμενα που δεν μπορούν να εκφρασθούν με τη χρήση συνεχών μεταβλητών.[11]

2.2.2 Βασικά χαρακτηριστικά προβλήματος ΑΠΚΓΠ

Ένα πρόβλημα ΑΠΚΓΠ με p αντικειμενικές συναρτήσεις, n μεταβλητές απόφασης και m περιορισμούς μαθηματικά ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} &\max f_1(x) = z_1 \\ &\max f_2(x) = z_2 \\ &\quad \cdots\cdots \\ &\max f_p(x) = z_p \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$s.t \quad x \in S$$

όπου S είναι το εφικτό χωρίο των περιορισμών που καθορίζεται από τους m περιορισμούς, x είναι το διάνυσμα των n μεταβλητών απόφασης και $f_1, f_2, \dots, f_p$ οι p αντικειμενικές συναρτήσεις.

Ορισμός: Μία λύση x' του προβλήματος (2.8) λέγεται κατά Pareto άριστη λύση (ή πιο σύντομα λύση Pareto) αν και μόνο αν $x' \in S$ και δεν υπάρχει άλλη λύση $x \in S$ τέτοια ώστε $f_i = (x) \geq f_i(x')$ για κάθε $i = 1,2, \dots, p$ και $f_i(x) > f_i(x')$ για τουλάχιστον ένα i.

- **Μεταβλητές απόφασης:** εκφράζουν ουσιαστικά τους αγνώστους του προβλήματος και είναι οι μεταβλητές που ελέγχει ο αποφασίζων, δηλαδή εκείνες των οποίων τις τιμές μπορεί να καθορίσει. Το σύνολο των μεταβλητών απόφασης αποτελεί ουσιαστικά το αντικείμενο της διαδικασίας λήψης απόφασης. Η διαδικασία αριστοποίησης αποσκοπεί στο να βρεθούν οι τιμές εκείνες για τις μεταβλητές απόφασης οι οποίες βελτιστοποιούν την αντικειμενική συνάρτηση.
- **Αντικειμενική συνάρτηση:** αποτελεί τη μαθηματική σχέση των μεταβλητών απόφασης που εκφράζει το κριτήριο βελτιστοποίησης. Επιδιώκεται είτε η ελαχιστοποίηση είτε η μεγιστοποίησή της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης. Στα προβλήματα Πολυκριτηριακού Μαθηματικού Προγραμματισμού υπάρχουν περισσότερες από μία αντικειμενικές συναρτήσεις (κριτήρια απόφασης), γι αυτό και τα προβλήματα αυτά αναφέρονται και ως προβλήματα διανυσματικής βελτιστοποίησης (vector optimization).
- **Περιορισμοί:** είναι οι μαθηματικές σχέσεις που καθορίζουν τις τιμές που μπορούν να πάρουν οι μεταβλητές απόφασης στη διαδικασία της βελτιστοποίησης. Καθορίζουν δηλαδή το πεδίο ορισμού (εφικτό χωρίο) του προβλήματος. Οι περιορισμοί μπορεί να είναι ισότητες ή ανισότητες.
- **Παράμετροι:** είναι τα εξωγενώς οριζόμενα (εκτός του ελέγχου του αποφασίζοντα) μεγέθη του προβλήματος. Πρόκειται ουσιαστικά για τους γνωστούς όρους του προβλήματος οι οποίοι έχουν σταθερή τιμή στη διαδικασία βελτιστοποίησης. Συνήθως είναι συντελεστές των μεταβλητών απόφασης ή εκφράζουν ποσότητες απαραίτητες στη διαμόρφωση των περιορισμών (π.χ. την απαιτούμενη ζήτηση μιας δραστηριότητας).

Για την καλύτερη κατανόηση του ΑΠΚΓΠ και των χαρακτηριστικών του παρατίθεται το ακόλουθο παράδειγμα:

Πρόβλημα

Μια κατασκευαστική εταιρία στην Καλιφόρνια μελετά την επέκταση της κτίζοντας καινούργιο εργοστάσιο, που θα είναι είτε στο Λος Άντζελες, είτε στο Σαν Φρανσίσκο, είτε θα κτιστεί και στις δύο πόλεις. Επίσης θα προβεί στην κατασκευή μιας μόνο νέας αποθήκης, αλλά αυτή θα πρέπει να γίνει σε πόλη στην οποία θα κτιστεί καινούργιο εργοστάσιο.[12]

Αρ. Απόφασης	Ερώτηση Ναι-ή-Όχι	Μεταβλητή Απόφασης	Καθαρή Παρούσα Αξία	Απαιτούμενο Κεφάλαιο
1	Να κτιστεί εργοστάσιο στο Λος Άντζελες;	x_1	\$9 εκατομμύρια	\$6 εκατομμύρια
2	Να κτιστεί εργοστάσιο στο Σαν Φρανσίσκο;	x_2	\$5 εκατομμύρια	\$3 εκατομμύρια
3	Να κτιστεί αποθήκη στο Λος Άντζελες;	x_3	\$6 εκατομμύρια	\$5 εκατομμύρια
4	Να κτιστεί αποθήκη στο Σαν Φρανσίσκο;	x_4	\$4 εκατομμύρια	\$2 εκατομμύρια
				Διαθέσιμο Κεφάλαιο: \$10 εκατομμύρια

Πίνακας 2.1 Δεδομένα παραδείγματος

Στόχος είναι να εξευρεθεί ένας εφικτός συνδυασμός των εναλλακτικών ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνολική Καθαρή Παρούσα Αξία.

- **Μεταβλητές Απόφασης**

Το ερώτημα που τίθεται είναι εάν θα διαλέξουμε ένα σχέδιο ή όχι. Εδώ υπεισέρχονται οι μεταβλητές που παίρνουν τις ακέραιες τιμές 0 ή 1 και αντιπροσωπεύουν δυαδικές αποφάσεις (επιλέγουμε ένα σχέδιο ή δεν επιλέγουμε ένα σχέδιο) με:

- τη θετική απόφαση να αντιπροσωπεύεται από την αξία 1 και
- την αρνητική απόφαση να αντιπροσωπεύεται από την αξία 0.

Τέτοιες μεταβλητές ονομάζονται 0/1 ή *δυαδικές μεταβλητές*.

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{εάν αποφασίσουμε να διαλέξουμε το σχέδιο j,} \\ 0 & \text{εάν αποφασίσουμε να μην διαλέξουμε το σχέδιο j,} \end{cases} \quad (j = 1,2,3,4)$$

- **Περιορισμοί**

Οι δύο τελευταίες αποφάσεις, 3 και 4, αλληλοαναιρούνται αφού η εταιρία θα κτίσει μόνο μία αποθήκη, οπότε έχουμε τον περιορισμό:

$$x_3 + x_4 \leq 1$$

Οι αποφάσεις 3 και 4 είναι επίσης εξαρτώμενες αποφάσεις από τις 1 και 2 αντίστοιχα, οπόταν έχουμε τους περιορισμούς:

$$x_3 \leq x_1$$

$$x_4 \leq x_2$$

- **Αντικειμενική συνάρτηση**

Για την μεγιστοποίηση της Καθαρής Παρούσας Αξίας έχουμε:

$$Maximize \quad Z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

- **Πλήρες πρόβλημα**

$$Maximize \quad Z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

subject

$$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10$$

$$x_3 + x_4 \leq 1$$

$$-x_1 + x_3 \leq 0$$

$$-x_2 + x_4 \leq 0$$

$$x_j \leq 1$$

$$x_j \leq 0$$

and

$$x_j \text{ } is \text{ } an \text{ } integer, \quad for \text{ } j = 1,2,3,4.$$

Το παράδειγμα αυτό μπορεί να είναι μικρό, αλλά είναι ένα τυπικό παράδειγμα πολλών πραγματικών εφαρμογών του Ακέραιου Προγραμματισμού (ΑΠ), όπου οι κύριες αποφάσεις είναι του τύπου «Ναι-ή-Όχι». Αποφάσεις αυτού του τύπου, όπως στο δεύτερο ζεύγος αποφάσεων αυτού του παραδείγματος, συγκροτούν συχνά ομάδες αλληλοαναιρούμενων εναλλακτικών, από τις οποίες μόνο μία μπορεί να πάρει την τιμή 1. Σε κάποιες άλλες περιπτώσεις, αποφάσεις του τύπου «Ναι-ή-Όχι» μπορεί να είναι εξαρτώμενες αποφάσεις, δηλαδή να εξαρτώνται από προηγούμενες, όπως οι απόφαση 3 με την 1, και η 4 με την 2 στο παράδειγμα.

2.2.3 Μέθοδοι επίλυσης

2.2.3.1 Γενικά

Με τον όρο επίλυση στα προβλήματα Πολυκριτηριακού Μαθηματικού Προγραμματισμού (ΠΚΜΠ), εννοείται η εύρεση εκείνης της ικανής (κατά Pareto άριστης) λύσης που ικανοποιεί περισσότερο τον αποφασίζοντα. Οι μέθοδοι ΠΚΜΠ μπορούν να ταξινομηθούν ανάλογα με το στάδιο στο οποίο εμπλέκεται ο αποφασίζων στη διαδικασία λήψης απόφασης.[13] Αν δηλαδή εκφράζει τις προτιμήσεις του πριν την επίλυση (μέθοδοι a priori, π.χ. προγραμματισμός στόχων, goal programming), κατά τη διάρκεια της επίλυσης (αλληλεπιδραστικές μέθοδοι, interactive methods) ή μετά την επίλυση (μέθοδοι παραγωγής, generation methods).

Η πλειοψηφία των μεθόδων και των εφαρμογών ΠΚΜΠ ανήκουν στις μεθόδους Προγραμματισμού Στόχων και στις Αλληλεπιδραστικές Μεθόδους, κυρίως λόγω του τρόπου υπολογισμού των ικανών λύσεων όπου αρκεί ένας επιλυτής Μαθηματικού Προγραμματισμού. Οι Μέθοδοι Παραγωγής είναι υπολογιστικά πιο πολύπλοκοι, απαιτούν ιδιαίτερο λογισμικό και το πεδίο εφαρμογής τους περιορίζεται όσο αυξάνει το μέγεθος του προβλήματος. Σήμερα υπάρχουν αλγόριθμοι εύρεσης του συνόλου Pareto (αλγόριθμοι διανυσματικής βελτιστοποίησης, vector maximum algorithms) μόνο για γραμμικά προβλήματα και είναι ουσιαστικά μέθοδοι που στηρίζονται στη μέθοδο Simplex και στις παραλλαγές της (εξαντλητικές μέθοδοι).Τις περισσότερες φορές χρησιμοποιούνται μη-εξαντλητικές μέθοδοι παραγωγής με τις οποίες παράγεται ένα αντιπροσωπευτικό υποσύνολο των κατά Pareto άριστων λύσεων χρησιμοποιώντας κυρίως την παραμετρική επίλυση κατάλληλα διαμορφωμένων προβλημάτων Μαθηματικού Προγραμματισμού (ΜΠ).

Οι μέθοδοι παραγωγής σε σχέση με τις a priori μεθόδους και τις αλληλεπιδραστικές μεθόδους έχουν συγκεκριμένα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα. Στα μειονεκτήματα είναι ο χρόνος επίλυσης και η περιορισμένη δυνατότητα χειρισμού μεγάλων προβλημάτων. Στα πλεονεκτήματα είναι η δυνατότητα που δίνεται στον αποφασίζοντα να δει τη συνολική εικόνα πριν αποφασίσει, δηλαδή το σύνολο (ή ένα αντιπροσωπευτικό υποσύνολο) των υποψηφίων για αποδοχή λύσεων. Τόσο στις a priori μεθόδους όσο και στις αλληλεπιδραστικές μεθόδους ο αποφασίζων δε βλέπει παρά ένα μικρό μέρος των υποψηφίων για αποδοχή λύσεων. Με τη χρήση μη-εξαντλητικών μεθόδων παραγωγής μπορεί να ξεπεραστούν τα μειονεκτήματα χωρίς να επηρεαστούν τα αντίστοιχα πλεονεκτήματα. Επίσης, με τη ραγδαία αύξηση της υπολογιστικής ισχύος, όλο και μεγαλύτερα προβλήματα ΠΚΜΠ είναι δυνατό να επιλυθούν πλέον με μεθόδους παραγωγής.

Στις μη-εξαντλητικές μεθόδους παραγωγής κυριαρχούν τρεις μέθοδοι: Η μέθοδος των συντελεστών βαρύτητας, η μέθοδος των περιορισμών και η μέθοδος σημείου αναφοράς.[11] Στη μέθοδο των συντελεστών βαρύτητας (weight method) βελτιστοποιείται το σταθμισμένο άθροισμα των αντικειμενικών συναρτήσεων και παράγονται οι αντίστοιχες κατά Pareto άριστες λύσεις. Εναλλάσσοντας του συντελεστές βαρύτητας λαμβάνονται διαφορετικές κατά Pareto άριστες λύσεις. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι αντικειμενικές συναρτήσεις πρέπει να έχουν αναχθεί προηγουμένως σε κοινή κλίμακα (ώστε να έχει νόημα το σταθμισμένο άθροισμα). Βασικά μειονεκτήματα της μεθόδου των συντελεστών βαρύτητας είναι ότι δεν παράγει όλες τις ικανές λύσεις σε προβλήματα με ακέραιες μεταβλητές, ενώ συνήθως καταλήγει σε ανομοιόμορφα κατανεμημένο υποσύνολο ικανών λύσεων διότι παράγει μόνο ακραίες κατά Pareto άριστες λύσεις (efficient extreme solutions).

Στη μέθοδο των περιορισμών (ε-constraint method) βελτιστοποιείται μία αντικειμενική συνάρτηση ενώ οι υπόλοιπες συμμετέχουν ως περιορισμοί. Μεταβάλλοντας παραμετρικά το δεξί σκέλος αυτών των περιορισμών και επιλύοντας το μοντέλο ΜΠ που προκύπτει, παράγονται οι αντίστοιχες κατά Pareto άριστες λύσεις. Με τον τρόπο αυτό παράγονται και μη ακραίες ικανές λύσεις. Προϋπόθεση όμως για να είναι η βέλτιστη λύση του προβλήματος ΜΠ κατά Pareto άριστη για το πρόβλημα ΠΚΜΠ, είναι οι περιορισμοί των αντικειμενικών συναρτήσεων στη βέλτιστη λύση να είναι ενεργοί, δηλαδή να ικανοποιούνται ως ισότητες.

Στη μέθοδο του σημείου αναφοράς (reference point method) επιχειρείται η ελαχιστοποίηση του σταθμισμένου αθροίσματος των αποστάσεων από ένα σημείο αναφοράς (reference point). Η μέθοδος αυτή έχει αρκετά κοινά σημεία με τον προγραμματισμό στόχων (goal programming). Σε πολλές περιπτώσεις χρησιμοποιείται η απόσταση Chebyshev, ανάγοντας το συγκεκριμένο πρόβλημα σε min-max βελτιστοποίηση (ελαχιστοποίηση της μέγιστης απόστασης) ενώ πολύ συχνά αποδίδονται και συντελεστές βαρύτητας στις αποστάσεις.[14]

Στην συγκεκριμένη εργασία γίνεται χρήση της μεθόδου περιορισμών AUGMECON για την παραγωγή ενός αντιπροσωπευτικού συνόλου των κατά Pareto άριστων λύσεων.

2.2.3.2 Μέθοδος περιορισμών ε-constraint

Η μέθοδος ε-constraint αποτελείται από δύο εκδοχές, τη συμβατική μέθοδο (convecon method) και την επαυξημένη μέθοδο (augmecon method). Αυτές οι μέθοδοι χρησιμοποιούνται για να παρέχουν ένα αντιπροσωπευτικό υποσύνολο του αποδοτικού συνόλου.

- **Η Μέθοδος CONVECON (Conventional ε-constraint method)**

Έστω ένα πρόβλημα ΠΚΜΠ με p αντικειμενικές συναρτήσεις:

$$\max\left(f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)\right) \qquad (2.9)$$
$$x \in S$$

Με βάση τη μέθοδο αυτή, επιλέγεται μία αντικειμενική συνάρτηση και οι υπόλοιπες μετατρέπονται σε περιορισμούς του προβλήματος, ανάλογα με την κατεύθυνση της αριστοποίησής τους. Αν δηλαδή μία αντικειμενική συνάρτηση είναι προς μεγιστοποίηση, τότε μετατρέπεται σε περιορισμό «μεγαλύτερο ή ίσο», ενώ αν πρόκειται να ελαχιστοποιηθεί μετατρέπεται σε περιορισμό «μικρότερο ή ίσο». Για την προηγούμενη περίπτωση δηλαδή το πρόβλημα Μαθηματικού Προγραμματισμού που επιλύεται είναι το εξής:

$$\begin{gathered} \max f_1(x) \\ f_2(x) \geq e_2 \\ f_3(x) \geq e_3 \\ \cdots\cdots \\ f_p(x) \geq e_p \\ x \in S \end{gathered} \qquad (2.10)$$

Η άριστη λύση του προκύπτοντος προβλήματος ΜΠ αποτελεί ικανή λύση, μόνο εάν όλοι οι περιορισμοί που προκύπτουν από τις υπόλοιπες αντικειμενικές συναρτήσεις ικανοποιούνται ως ισότητες (binding constraints). Εάν δε συμβαίνει αυτό και υπάρχουν εναλλακτικά άριστα, τότε η άριστη λύση που θα βρεθεί μπορεί να μην αποτελεί ικανή λύση του προβλήματος ΠΚΜΠ. Μεταβάλλοντας συστηματικά το δεξί σκέλος των περιορισμών των αντικειμενικών συναρτήσεων (e_i), «σαρώνεται» το σύνολο των ικανών λύσεων. Όσο μεγαλύτερο είναι το βήμα της συστηματικής μεταβολής του δεξιού σκέλους των περιορισμών των αντικειμενικών συναρτήσεων, τόσο συντομότερη είναι η διαδικασία αλλά είναι και «αραιότερο» το αντιπροσωπευτικό υποσύνολο των ικανών λύσεων.

- **Η Μέθοδος AUGMECON (Augmented ε-constraint method)**

Η επαυξημένη μέθοδος των περιορισμών, AUGMECON, θα παρουσιασθεί μέσω ενός παραδείγματος έτσι ώστε να εξηγηθούν καλύτερα οι διαφορές της με την κλασσική μέθοδο των περιορισμών.[15] Το παράδειγμα περιλαμβάνει δύο μεταβλητές απόφασης και δύο αντικειμενικές συναρτήσεις για να μπορεί να παρασταθεί γραφικά:

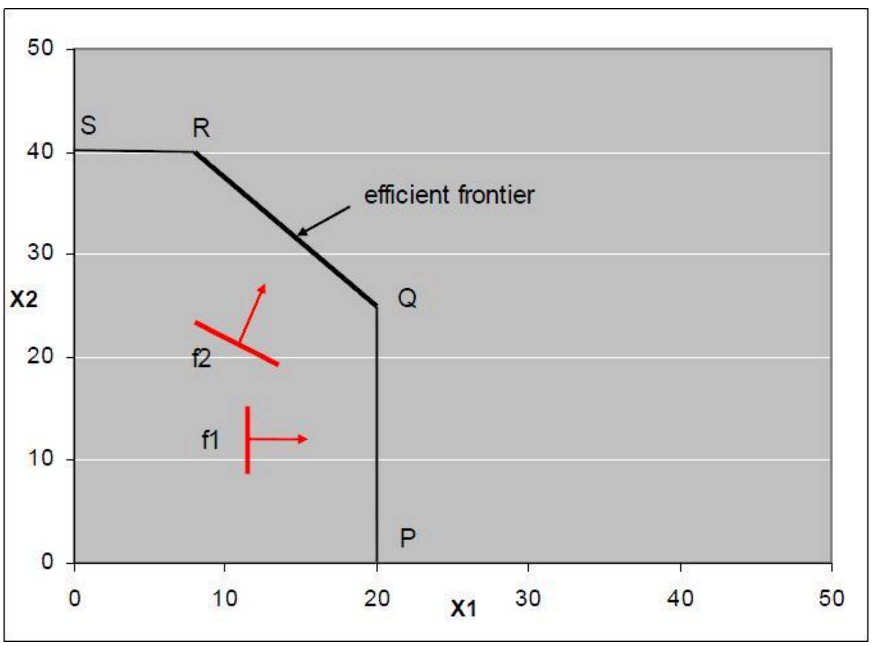
Πρόβλημα

$$\begin{gathered} \max f_1 = x_1 \\ \max f_2 = 3x_1 + 4x_2 \\ x_1 \leq 20 \\ x_2 \leq 40 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 200 \end{gathered} \tag{2.11}$$

Το πεδίο εφικτών λύσεων και η κατεύθυνση των δύο αντικειμενικών συναρτήσεων φαίνονται στο Σχήμα 2.6. Το σύνολο των ικανών λύσεων (Pareto set) για αυτό το πρόβλημα παρίσταται από την έντονη γραμμή (τμήμα RQ).

- **Λεξικογραφική Βελτιστοποίηση του Πίνακα Πληρωμών**

Για να μπορέσει να εφαρμοσθεί η μέθοδος των περιορισμών θα πρέπει να γνωρίζουμε το εύρος της κάθε αντικειμενικής συνάρτησης, τουλάχιστον για τις $p-1$ αντικειμενικές συναρτήσεις οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν ως περιορισμοί. Ο υπολογισμός του εύρους των αντικειμενικών συναρτήσεων στο σύνολο του εφικτού πεδίου τιμών δεν είναι κάτι τετριμμένο. Ενώ η καλύτερη τιμή είναι εύκολο να βρεθεί μέσα από ατομική βελτιστοποίηση, η χειρότερη τιμή όχι. Η πιο κοινή προσέγγιση είναι να υπολογισθούν τα εύρη από τον πίνακα πληρωμών (ο πίνακας με τα αποτελέσματα από την ανεξάρτητη βελτιστοποίηση των p αντικειμενικών συναρτήσεων). Η χειρότερη τιμή συνήθως προσεγγίζεται από το ελάχιστο της αντίστοιχης στήλης. Παρόλα αυτά, ακόμα και σε αυτή την περίπτωση, πρέπει να ήμαστε σίγουροι ότι οι λύσεις της ανεξάρτητης βελτιστοποίησης είναι όντως κατά Pareto βέλτιστες (ή ικανές) λύσεις. Παρουσία εναλλακτικών βέλτιστων, η λύση που παράγεται από ένα εμπορικό λογισμικό δεν είναι εγγυημένα μια κατά Pareto βέλτιστη λύση. Για να ξεπεράσουμε αυτή την ασάφεια, προτείνεται η λεξικογραφική βελτιστοποίηση για κάθε αντικειμενική συνάρτηση, έτσι ώστε να κατασκευαστεί ο πίνακας πληρωμών με μόνο κατά Pareto βέλτιστες λύσεις.



Σχήμα 2.6 Πεδίο εφικτών λύσεων και κατευθύνσεις των αντικειμενικών συναρτήσεων

Μια εναλλακτική, απλή διαδικασία για να ξεπεραστεί η δυσκολία υπολογισμού των χείριστων λύσεων των αντικειμενικών συναρτήσεων, είναι να καθοριστούν κατώτατα όρια για τις αντικειμενικές συναρτήσεις (κατώτατα σε προβλήματα μεγιστοποίησης και ανώτατα σε επίπεδα ελαχιστοποίησης). Τα κατώτατα όρια παίζουν το ρόλο φραγμών στη βελτιστοποίηση. Λύσεις χειρότερες των ακραίων δεν είναι επιτρεπόμενες.

Στο παράδειγμα πρώτα υπολογίζουμε τον πίνακα πληρωμών υπολογίζοντας απλά τα βέλτιστα των αντικειμενικών συναρτήσεων. Ένα συμβατικό πρόγραμμα θα παράγει τον παρακάτω πίνακα πληρωμών:

	f_1	**f_2**
max f_1	20	60
max f_2	8	184

Πίνακας 2.2 Πίνακας πληρωμών από συμβατικό πρόγραμμα

Παρατηρώντας το Σχήμα 2.6 βλέπουμε ότι η βέλτιστη λύση για την f_1 που αντιστοιχεί στο σημείο P είναι μια κυριαρχούμενη λύση (dominated solution) εξαιτίας του εναλλακτικού βέλτιστου (σημείο Q). Παρόλα αυτά είναι σχεδόν σίγουρο ότι ένα συμβατικό πρόγραμμα θα υπολογίσει πρώτα τη λύση του σημείου P και θα σταματήσει την αναζήτηση δίνοντας αυτή τη λύση σαν αποτέλεσμα. Για να αποφευχθεί αυτό, γίνεται λεξικογραφική βελτιστοποίηση των αντικειμενικών συναρτήσεων και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.3.

	f_1	**f_2**
max f_1	20	160
max f_2	8	184

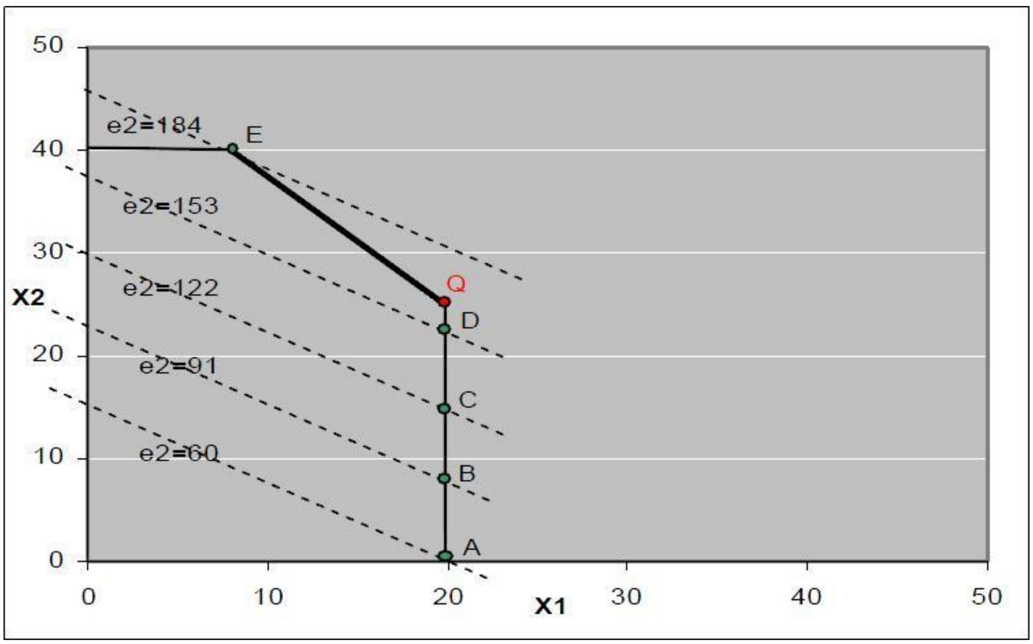
Πίνακας 2.3 Πίνακας πληρωμών μετά από λεξικογραφική βελτιστοποίηση

Με την λεξικογραφική βελτιστοποίηση λαμβάνεται σαν λύση που μεγιστοποιεί την f_1, η λύση που αντιστοιχεί στο σημείο Q που είναι κατά Pareto βέλτιστη (non-dominated solution).

Γενικά, η λεξικογραφική βελτιστοποίηση μιας σειράς αντικειμενικών συναρτήσεων, είναι η βελτιστοποίηση της πρώτης αντικειμενικής συνάρτησης και μετά μεταξύ των εναλλακτικών βέλτιστων να βελτιστοποιηθεί η δεύτερη και ούτω καθεξής. Πρακτικά, η διαδικασία της βελτιστοποίησης γίνεται ως εξής: βελτιστοποιείται η πρώτη αντικειμενική συνάρτηση (υψηλότερης προτεραιότητας), max $f_1=z_1^*$. Κατόπιν, βελτιστοποιείται η δεύτερη αντικειμενική συνάρτηση προσθέτοντας τον περιορισμό $f_1=z_1^*$ έτσι ώστε να κρατηθεί η βέλτιστη λύση της πρώτης βελτιστοποίησης. Υποθέτουμε ότι λαμβάνουμε max $f_2=z_2^*$.

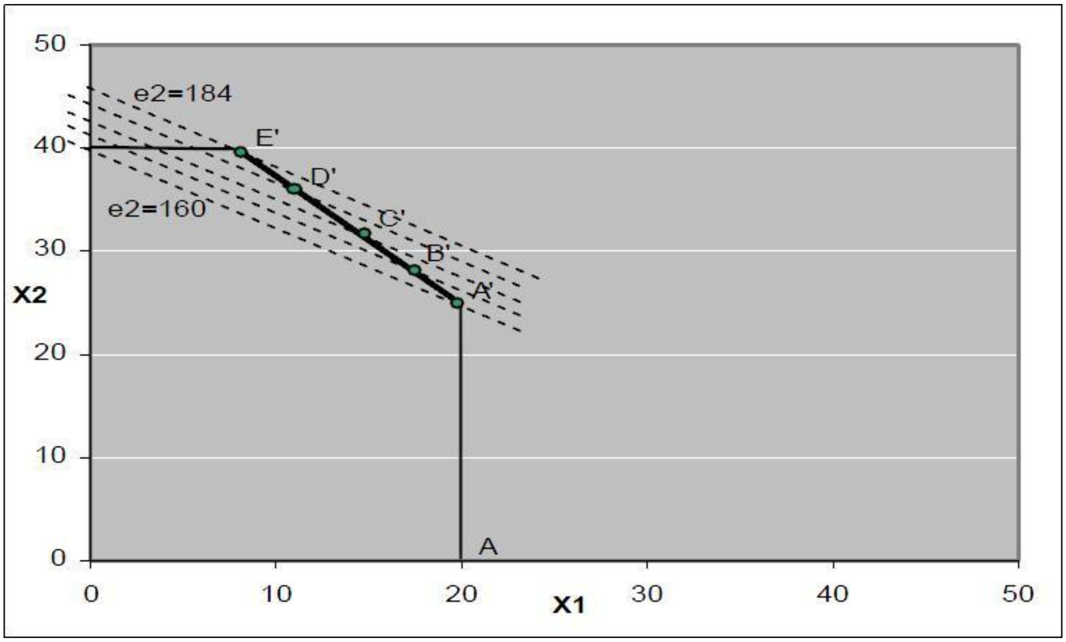
Ακολούθως, βελτιστοποιείται η τρίτη αντικειμενική συνάρτηση προσθέτοντας τους περιορισμούς $f_1=z_1*$ και $f_2=z_2*$ με σκοπό να κρατήσουμε τις προηγούμενες βέλτιστες λύσεις και ούτω καθεξής, μέχρι να τελειώσουμε με τις αντικειμενικές συναρτήσεις.

Μετά τον υπολογισμό του πίνακα πληρωμών, χωρίζονται τα εύρη των αντικειμενικών συναρτήσεων σε τέσσερα διαστήματα και χρησιμοποιούμε πέντε grid points σαν τιμές της e_2 στην μέθοδο των περιορισμών. Στην πρώτη περίπτωση εφαρμόζουμε την συμβατική μέθοδο των περιορισμών. Τα αποτελέσματα φαίνονται παρακάτω:



Σχήμα 2.7 Αποτελέσματα της μεθόδου CONVECON

Οι λύσεις που αντιστοιχούν στα σημεία A,B,C,D,E είναι τα αποτελέσματα της μεθόδου. Στην πραγματικότητα μόνο το σημείο E είναι ικανή λύση ενώ τα άλλα τέσσερα σημεία κυριαρχούνται από το σημείο Q (dominated solutions). Από την άλλη πλευρά, βέβαια, εάν χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα πληρωμών από την λεξικογραφική βελτιστοποίηση, τα αποτελέσματα της μεθόδου είναι περισσότερο μεστά νοήματος. Παρέχουν μια πιο ικανοποιητική αναπαράσταση του συνόλου των ικανών λύσεων. Παρατηρούμε στο Σχήμα 2.8 ότι τα σημεία A’,B’,C’,D’ και E’ είναι όλα βέλτιστα σημεία και περιγράφουν ικανοποιητικά το σύνολο των ικανών λύσεων.



Σχήμα 2.8 Αποτελέσματα μετά από λεξικογραφική βελτιστοποίηση

- **Αποτελεσματικότητα των Λύσεων**

Το δεύτερο σημείο που χρίζει προσοχής είναι ότι η λύση του προβλήματος θα είναι κατά Pareto βέλτιστη μόνο όταν οι $p-1$ αντικειμενικές συναρτήσεις που είναι περιορισμοί ικανοποιούνται ως ισότητες. Διαφορετικά, εάν υπάρχουν εναλλακτικά βέλτιστα η αποκτηθείσα λύση για το πρόβλημα δεν είναι Pareto βέλτιστη, αλλά μια ασθενώς Pareto βέλτιστη λύση (weakly efficient solution). Με σκοπό να ξεπεραστεί αυτή η ασάφεια προτείνεται η μετατροπή των περιοριστικών αντικειμενικών συναρτήσεων σε ισότητες ενσωματώνοντας την κατάλληλη μεταβλητή απόκλισης. Ταυτόχρονα, αυτές οι μεταβλητές χρησιμοποιούνται σαν δεύτερος όρος (με χαμηλότερη προτεραιότητα) στην αντικειμενική συνάρτηση, αναγκάζοντας το πρόγραμμα να παράγει μόνο ικανές λύσεις. Το νέο πρόβλημα γίνεται:

$$
\begin{gathered}
\max\left(f_1(x) + epsx\left(s_2 + s_3 + \cdots + s_p\right)\right) \\
f_2(x) - s_2 = e_2 \\
f_3(x) - s_3 = e_3 \\
\cdots\cdots \\
f_p(x) - s_p = e_p
\end{gathered}
\tag{2.12}
$$

$$x \in S \; και \; s_i \in R^+$$

Όπου eps είναι ένας μικρός αριθμός (συνήθως μεταξύ 10^{-3} και 10^{-6})

Πρόταση: Η παραπάνω διατύπωση της μεθόδου των περιορισμών παράγει μόνο ικανές λύσεις.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι το πρόβλημα έχει εναλλακτικά βέλτιστα και ένα από αυτά (x') κυριαρχεί την βέλτιστη λύση (x) που παρήγαγε το πρόβλημα. Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα $(z_1, e_2 + s_2, \dots, e_p + s_p)$ κυριαρχείται από το διάνυσμα $(z_1, e_2 + s'_2, \dots, e_p + s'_p)$ ή αλλιώς:

$$\begin{gathered} \mathrm{e_2} + \mathrm{s_2} \le \mathrm{e_2} + \mathrm{s'_2} \\ \mathrm{e_3} + \mathrm{s_3} \le \mathrm{e_3} + \mathrm{s'_3} \\ \cdots\cdots \\ \mathrm{e_p} + \mathrm{s_p} \le \mathrm{e_p} + \mathrm{s'_p} \end{gathered} \tag{2.13}$$

με αυστηρή ανισότητα. Προσθέτοντας τις παραπάνω σχέσεις και βασισμένοι στο γεγονός ότι ισχύει μια τουλάχιστον αυστηρά ανισότητα καταλήγουμε:

$$\sum_{i=2}^{p} s_i = \sum_{i=2}^{p} s'_i \tag{2.14}$$

Αλλά αυτό αντικρούει την αρχική υπόθεση ότι η βέλτιστη λύση του προβλήματος μεγιστοποιεί το άθροισμα των s_i. Επομένως, δεν υπάρχει λύση x' η οποία κυριαρχεί της παραγόμενης λύσης x, ή διαφορετικά η λύση x του προβλήματος είναι ικανή λύση.

Για να αποφευχθούν προβλήματα λόγω διαφοράς κλίμακας μεταξύ των αντικειμενικών συναρτήσεων προτείνεται να αντικατασταθεί το s_i στον δεύτερο όρο της αντικειμενικής συνάρτησης από το s_i/r_i, όπου το r_i είναι το εύρος της i-οστής αντικειμενικής συνάρτησης. Έτσι, η αντικειμενική συνάρτηση της μεθόδου των περιορισμών γίνεται:

$$\max \left(f_1(x) + epsx\left(\frac{s_2}{r_2} + \frac{s_3}{r_3} + \cdots + \frac{s_p}{r_p}\right)\right) \tag{2.15}$$

- **Επιτάχυνση του Αλγόριθμου με Πρώιμη Έξοδο από τις Επαναλήψεις**

Μια επιπρόσθετη καινοτομία του αλγορίθμου είναι η πρώιμη έξοδος από τους βρόγχους όπου το πρόβλημα γίνεται ανέφικτο, κάτι που επιταχύνει τον αλγόριθμο σε περιπτώσεις πολλαπλών αντικειμενικών συναρτήσεων (περισσότερες από τρεις). Ο αλγόριθμος ξεκινά με την πιο χαλαρή έκδοση των περιοριστικών αντικειμενικών συναρτήσεων και σταδιακά περιορίζει τις ισότητες. Αυτό σημαίνει ότι για μεγιστοποίηση αντικειμενικών συναρτήσεων, ξεκινά από το ελάχιστο και σταδιακά αυξάνει το δεξί σκέλος (RHS) του αντίστοιχου περιορισμού. Σε αυτή τη διεργασία, όπου το πρόβλημα γίνεται ανέφικτο, σημαίνει ότι δεν χρειάζεται περαιτέρω περιορισμός της αντίστοιχης αντικειμενικής συνάρτησης, αφού θα καταλήξει σε ανέφικτες λύσεις. Επομένως, ο αλγόριθμος βγαίνει από τον εσώτατο βρόγχο και συνεχίζει με το επόμενο σημείο του πλέγματος (grid point) της προηγούμενης αντικειμενικής συνάρτησης που αντιστοιχεί στον εξωτερικό βρόγχο.

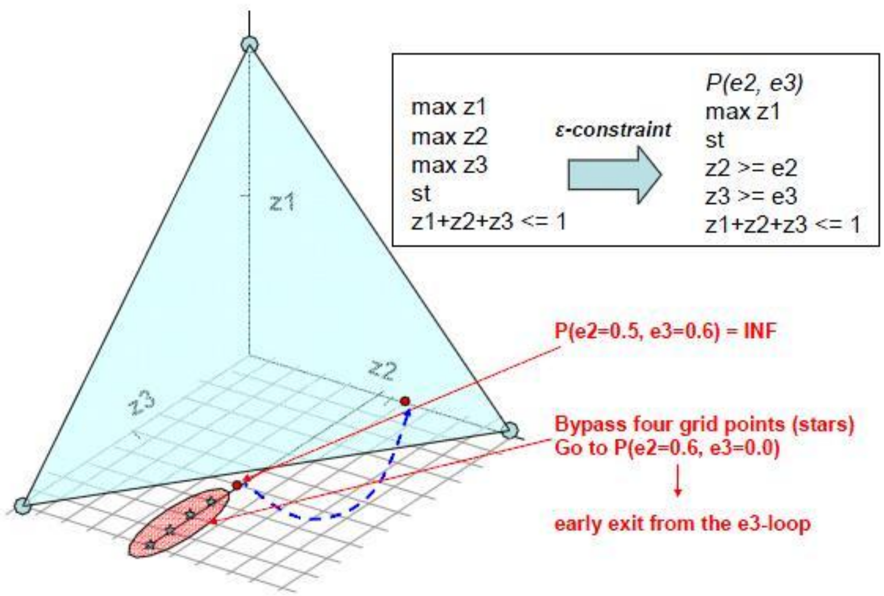
Η επιτάχυνση του αλγορίθμου παρουσιάζεται με ένα γραφικό παράδειγμα. Υποθέτουμε το απλό πολυκριτηριακό πρόβλημα τριών αντικειμενικών συναρτήσεων:

$$\begin{gathered}\max z_1 = x_1 \\ \max z_2 = x_2 \\ \max z_3 = x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\end{gathered} \tag{2.16}$$

Το παραπάνω πρόβλημα μετατρέπεται στο αντίστοιχο των περιορισμών που είναι ένα παραμετρικό πρόβλημα των e_2 και e_3 το οποίο παρέχει τις κατά Pareto άριστες λύσεις διαφοροποιώντας τα e_2 και e_3:

$$\begin{gathered}\max z_1 = x_1 \\ x_2 \geq e_2 \\ x_3 \geq e_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\end{gathered} \tag{2.17}$$

Στο Σχήμα 2.9 φαίνεται το πεδίο των εφικτών λύσεων και τα βήματα της μεθόδου των περιορισμών. Το εύρος της κάθε μίας από τις δύο αντικειμενικές συναρτήσεις χωρίζεται σε δέκα διαστήματα (11 grid points). Κατά την εξέλιξη της μεθόδου, όταν $e_2 = 0.5$ και $e_3 = 0.6$ το πρόβλημα γίνεται ανέφικτο. Σε αυτή την περίπτωση δεν χρειάζεται να γίνει έλεγχος για $e_2 = 0.7$, $e_3 = 0.8$ και ούτω καθεξής. Έτσι ο αλγόριθμος βγαίνει από τον e_3 βρόγχο και κατευθείαν πηγαίνει στον $e_2 = 0.6$ και $e_3 = 0$.

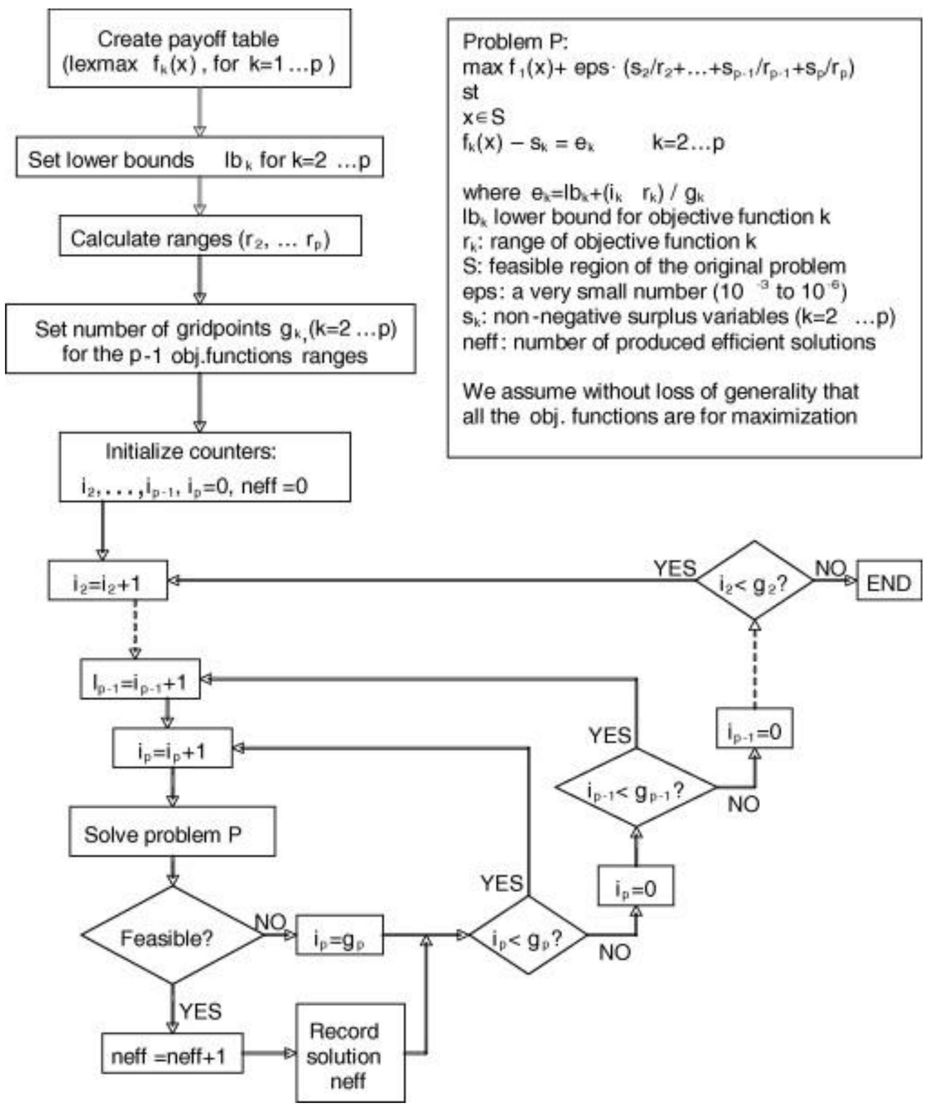


Σχήμα 2.9 Απεικόνιση του συνόλου Pareto και το χαρακτηριστικό της πρώιμης εξόδου από τις επαναλήψεις.

Η γρήγορη έξοδος εξοικονομεί υπολογιστικό χρόνο σε προβλήματα με περισσότερες από δυο με τρείς αντικειμενικές συναρτήσεις. Αυτή η τεχνική είναι ιδιαίτερα ωφέλιμη όταν υπάρχουν αρκετές αντικειμενικές συναρτήσεις στο πρόβλημα.

- **Υλοποίηση**

Πρακτικά, η μέθοδος των περιορισμών εφαρμόζεται ως εξής: από τον πίνακα πληρωμών λαμβάνουμε το εύρος κάθε μιας από τις $p - 1$ αντικειμενικές συναρτήσεις οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν ως περιορισμοί. Κατόπιν χωρίζουμε το εύρος της i-οστής αντικειμενικής συνάρτησης σε q_i ίσα διαστήματα χρησιμοποιώντας $(q_i - 1)$ ενδιάμεσα ισαπέχοντα grid points. Έτσι έχουμε συνολικά $(q_i - 1)$ grid points που χρησιμοποιούνται για να διαφοροποιήσουν παραμετρικά το RHS (e_i) της i-οστής αντικειμενικής συνάρτησης. Ο συνολικός αριθμός των τρεξιμάτων είναι $(q_2 + 1)x(q_3 + 1)x \dots (q_p + 1)x$. Μια επιθυμητή ιδιότητα της μεθόδου των περιορισμών είναι ότι μπορούμε να ελέγξουμε την πυκνότητα της αναπαράστασης του συνόλου των ικανών λύσεων με σωστή ανάθεση των τιμών στο q_i. Όσο πιο μεγάλος είναι ο αριθμός των grid points τόσο πιο πολλές είναι και οι ικανές λύσεις, με το κόστος όμως, του παραπάνω υπολογιστικού χρόνου. Το διάγραμμα ροής [16] του αλγορίθμου παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.10.



Σχήμα 2.10 Διάγραμμα ροής της μεθόδου AUGMECON

- **Η Μέθοδος AUGMECON2**

Η μέθοδος AUGMECON2 αποτελεί ουσιαστικά μια βελτίωση της μεθόδου AUGMECON. Όπως είδαμε στη μέθοδο AUGMECON, το εύρος κάθε αντικειμενικής συνάρτησης η οποία χρησιμοποιείται ως περιορισμός, διαιρείται σε διαστήματα και τα ισαπέχοντα σημεία ορισμού των διαστημάτων χρησιμοποιούνται ως δεξί σκέλος στους αντίστοιχους περιορισμούς. Αν λοιπόν θεωρήσουμε την αντικειμενική συνάρτηση k η οποία έχει εύρος r_k και χωρίζεται σε q_k ίσα διαστήματα, τότε το βήμα με το οποίο μεταβάλλεται το αντίστοιχο δεξί σκέλος του σχετικού περιορισμού είναι:

$$step_k = {}^{r_k}/_{q_k} \tag{2.18}$$

Κατά τη διάρκεια της διαδικασίας, πραγματοποιείται όπως είδαμε μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση και υπολογίζεται για κάθε περιορισμό που αντιστοιχεί σε αντικειμενική συνάρτηση και η αντίστοιχη μεταβλητή απόκλισης s_k. Για την k-αντικειμενική συνάρτηση έχουμε:

$$f_k(x) - s_k = e_k \tag{2.19}$$

Το e_k προσδιορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$e_k = fmin_k + t \times step_k \tag{2.20}$$

όπου $fmin_k$ είναι το ελάχιστο της k-αντικειμενικής συνάρτησης και t ο μετρητής των επαναλήψεων που διατρέχει τα gridpoints ($t = 0 \ldots q_k$).

Σε κάθε επανάληψη ελέγχουμε τη μεταβλητή απόκλισης που αντιστοιχεί στην αντικειμενική συνάρτηση του πιο εσωτερικού βρόγχου. Αν υποθέσουμε ότι ο πιο εσωτερικός βρόγχος αντιστοιχεί στην αντικειμενική συνάρτηση p τότε υπολογίζεται ο συντελεστής παράκαμψης b ως εξής:

$$b = int\left(s_p/step_p\right) \tag{2.21}$$

όπου $int(s_p/step_p)$ είναι η συνάρτηση που επιστρέφει το ακέραιο μέρος ενός πραγματικού αριθμού, s_p είναι η μεταβλητή απόκλισης που προκύπτει και $step_p$το βήμα μεταβολής του δεξιού σκέλους κατά τη διαδικασία της ε-constraint που αντιστοιχεί στην p-αντικειμενική συνάρτηση.

Όταν ο η μεταβλητή απόκλισης s_p είναι μεγαλύτερη από το βήμα μεταβολής $step_p$ τότε αυτό σημαίνει ότι και στην επόμενη επανάληψη θα προκύψει η ίδια κατά Pareto άριστη λύση, οπότε η συγκεκριμένη επανάληψη είναι περιττή και μπορεί να παρακαμφθεί. Το πόσες συνεχόμενες επαναλήψεις μπορούμε να παρακάμψουμε με αυτόν τον τρόπο μας το λέει ο συντελεστής παράκαμψης b.

Με την εισαγωγή της συγκεκριμένης τεχνικής της παράκαμψης περιττών επαναλήψεων, μπορούμε να επιτύχουμε σημαντική οικονομία, κυρίως σε προβλήματα τα οποία έχουν και δυαδικές μεταβλητές.

2.2.3.3 Άλλες μέθοδοι

- **Μέθοδος απαρίθμησης**

Η μέθοδος απαρίθμησης είναι η απλούστερη μέθοδος από τις συνδυαστικές τεχνικές αριστοποίησης. Αρχή αυτής της μεθόδου είναι η αξιολόγηση όλων των πιθανών συνδυασμών των διακριτών μεταβλητών. Ο συνολικός αριθμός αξιολόγησης n_ε είναι:

$$\mathrm{n_e} = \prod_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n_d}} \mathrm{p_i} \qquad (2.22)$$

όπου n_d είναι ο αριθμός των διακριτών μεταβλητών και p_i το σύνολο των προκαθορισμένων διακριτών τιμών. Η βέλτιστη λύση, είναι έτσι η ελάχιστη τιμή που λαμβάνεται από τη σάρωση της λίστας των εφικτών λύσεων. Η μέθοδος αυτή προσδιορίζει την άριστη λύση, αλλά ο υπολογιστικός χρόνος είναι πολύ μεγάλος. [17]

Εννοιολογικά δεν υπάρχει κάποιο πρόβλημα με τη μέθοδο αυτή. Απαριθμούνται όλα τα ενδεχόμενα και επιλέγεται το καλύτερο. Υπολογιστικά όμως, αυτό είναι εντελώς αδύνατο για τις πλείστες εφαρμογές.

- **Ο αλγόριθμος Branch & Bound για πολλές αντικειμενικές συναρτήσεις (Multicriteria Branch & Bound)**

Ο αλγόριθμος Multicriteria Branch & Bound (MCB&B) σχεδιάστηκε έτσι ώστε να επιλύει το πρόβλημα της διανυσματικής βελτιστοποίησης για προβλήματα Μικτού 0-1 ΠΚΓΠ (Μ0-1ΠΚΓΠ), δηλαδή να παράγει το σύνολο των ικανών λύσεων για τα προβλήματα αυτά. [18] Η προσαρμογή του αλγορίθμου Branch & Bound στα πολυκριτηριακά χαρακτηριστικά του προβλήματος, έχει γίνει συνδυάζοντας στοιχεία από τον Μ0-1ΓΠ και τον ΠΚΓΠ. Τα προβλήματα ΜΑΠΚΓΠ επιλύονται με τον αλγόριθμο αυτό αφού πρώτα πραγματοποιηθεί η μετατροπή των ακεραίων μεταβλητών σε δυαδικές με τον ακόλουθο μετασχηματισμό. Αν y είναι η ακέραια μεταβλητή με άνω όριο UB, τότε το y μπορεί να εκφρασθεί ως:

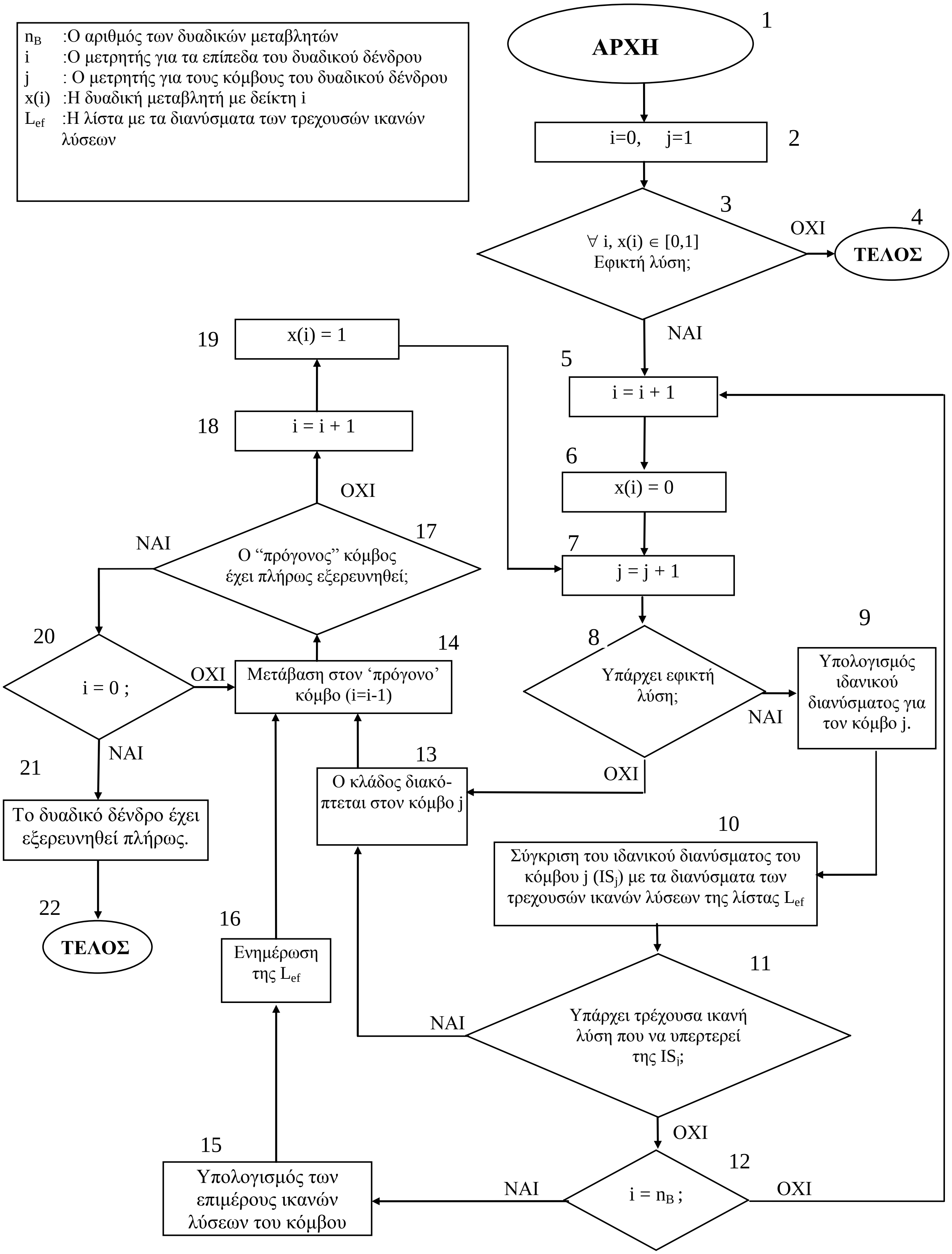
$$y = \delta_0 + 2\delta_1 + 4\delta_2 + 8\delta_3 + \cdots + 2^k\delta_k \tag{2.23}$$

όπου τα δ_i είναι δυαδικές μεταβλητές και $2^k \leq \mathrm{UB} \leq 2^{k+1}$. Με τον τρόπο αυτό κάθε ακέραια μεταβλητή μπορεί να εκφρασθεί μονοσήμαντα ως άθροισμα δυαδικών. Αν και με το μετασχηματισμό αυτό αυξάνεται ο αριθμός των μεταβλητών του προβλήματος, εν τούτοις χρησιμοποιείται ακόμα και σε εμπορικούς επιλύτες λόγω των απλούστερων χαρακτηριστικών του στη διαδικασία Branch & Bound.

Η πορεία της επίλυσης με βάση τον αλγόριθμο MCB&B περιγράφεται, όπως και στην μονοκριτηριακή περίπτωση, με ένα δυαδικό δένδρο όπου κάθε κόμβος έχει δύο απογόνους και χαρακτηρίζεται από τον συνδυασμό των τιμών που έχουν δοθεί στις δυαδικές μεταβλητές. Το διάγραμμα ροής του αλγορίθμου φαίνεται στο Σχήμα 2.11. Αρχικά θεωρείται ότι όλες οι δυαδικές μεταβλητές παίρνουν τιμές στο διάστημα [0,1], είναι δηλαδή «ελεύθερες» μεταβλητές. Στη συνέχεια αποδίδονται σταδιακά στις δυαδικές μεταβλητές οι τιμές 0 (βήμα 6) ή 1 (βήμα 19) κι έτσι σχηματίζεται το δυαδικό δένδρο. Η εξέταση του δένδρου γίνεται με την τεχνική depth first search, δηλαδή εξετάζουμε κάθε κλάδο του δένδρου μέχρι το τελευταίο επίπεδο, όπου όλες οι δυαδικές μεταβλητές έχουν δεσμευθεί στην τιμή “0” ή “1”, και μετά επιστρέφουμε στη πιο πρόσφατη ανεξερεύνητη διακλάδωση την οποία εξετάζουμε ως το τελευταίο επίπεδο κ.ο.κ. Στους κόμβους του τελευταίου επιπέδου παράγονται οι ικανές λύσεις (βήμα 15) που ονομάζονται επιμέρους ικανές λύσεις (partially efficient solutions) διότι αφορούν μόνο τον αντίστοιχο συνδυασμό των μεταβλητών κι όχι το συνολικό πρόβλημα. Οι τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων των επιμέρους ικανών λύσεων αποθηκεύονται στη λίστα Lef μαζί με την ταυτότητα του συνδυασμού από τον οποίο προέρχονται.. Οι νέες αυτές λύσεις, πριν εισαχθούν στην Lef, ελέγχονται αν κυριαρχούνται από κάποια λύση που ήδη υπάρχει στην Lef. Επίσης αν υπάρχουν στην Lef λύσεις που κυριαρχούνται από τις νεοεισαχθείσες, τότε αυτές διαγράφονται από την Lef. Η Lef δηλαδή αποτελεί μια δυναμική λίστα η οποία ενημερώνεται μετά από κάθε κόμβο τελευταίου επιπέδου (βήμα 16) και περιέχει τις τρέχουσες ικανές λύσεις υπό τη μορφή των τιμών των αντικειμενικών συναρτήσεων.

Σύμφωνα με την αρχή του αλγορίθμου Branch & Bound, σε κάθε κόμβο εξετάζεται αν από τον αντίστοιχο συνδυασμό δυαδικών μεταβλητών προκύπτει εφικτή λύση. Αν δεν υπάρχει εφικτή λύση τότε δεν έχει νόημα να συνεχίσουμε στο συγκεκριμένο κλάδο ως το τελευταίο επίπεδο, γιατί δεν θα υπάρχουν εφικτές λύσεις ούτε στη συνέχεια όταν θα δεσμευθούν οι υπόλοιπες δυαδικές μεταβλητές. Αν υπάρχει εφικτή λύση, τότε υπολογίζεται το ιδανικό διάνυσμα (ideal vector) του κόμβου, το οποίο αποτελείται από τις άριστες τιμές κάθε μιας από τις αντικειμενικές συναρτήσεις, για το πρόβλημα ΠΚΓΠ του συγκεκριμένου κόμβου (βήμα 9) και προκύπτει από τις αντίστοιχες αριστοποιήσεις. Πρέπει να σημειωθεί ότι το ιδανικό διάνυσμα αντιστοιχεί σε μη εφικτή λύση καθότι δεν υπάρχει λύση που να οδηγεί στην ταυτόχρονη αριστοποίηση των αντικειμενικών συναρτήσεων.

Στη συνέχεια εξετάζεται αν το ιδανικό διάνυσμα του προβλήματος του συγκεκριμένου κόμβου κυριαρχείται από κάποια τρέχουσα ικανή λύση της Lef (βήματα 10, 11). Αν αυτό ισχύει τότε δεν έχει νόημα να συνεχίσουμε στο συγκεκριμένο κλάδο ως το τελευταίο επίπεδο, διότι οι επιμέρους ικανές λύσεις που θα προκύψουν θα κυριαρχούνται από τις ήδη υπάρχουσες. Στην περίπτωση μη εφικτής λύσης και στην περίπτωση κυριαρχίας επί της ιδανικής λύση του κόμβου, εφαρμόζεται η συνθήκη διακοπής της αναζήτησης στο συγκεκριμένο κλάδο (fathoming condition). Η αναζήτηση διακόπτεται στο συγκεκριμένο κόμβο και ο αλγόριθμος ανατρέχει στην πλησιέστερη ανεξερεύνητη διακλάδωση για να συνεχίσει τη διαδικασία (βήμα 14). Η διαδικασία τερματίζεται όταν δεν υπάρχουν πια ανεξερεύνητοι κόμβοι. Οι λύσεις που υπάρχουν τότε στην Lef αποτελούν και τις ικανές λύσεις του προβλήματος. Με τον αλγόριθμο αυτό εξετάζονται συστηματικά όλοι οι αναγκαίοι κόμβοι του δένδρου και επιτυγχάνεται σημαντική εξοικονόμηση χρόνου γιατί τελικά εξετάζεται μόνο ένα μικρό κλάσμα (συνήθως << 1%) του συνόλου των πιθανών συνδυασμών των δυαδικών μεταβλητών.



Σχήμα 2.11 Το λογικό διάγραμμα ροής του αλγορίθμου Multicriteria Branch & Bound

- **Ευρεστικοί αλγόριθμοι**

Ένα βασικό πρόβλημα που συναντάμε σε προβλήματα ΑΠ είναι η δυσκολία επίλυσής τους με τρόπους αριστοποίησης. Ακόμα και η μέθοδος των διαδοχικών ορίων, η πιο αξιόπιστη μέθοδος, δεν είναι πρακτικά χρήσιμη για προβλήματα μεγάλου μεγέθους. Πολλά προβλήματα είναι εξαιρετικά πολύπλοκα, με πλήθος μεταβλητών και περιορισμών, σε βαθμό που η βέλτιστη λύση είτε δεν είναι εύκολο να προσδιοριστεί σε λογικά χρονικά πλαίσια, είτε κοστίζει πολύ και δε συμφέρει. Για το σκοπό αυτό, έχουν κατασκευαστεί προσεγγιστικοί αλγόριθμοι, οι οποίοι δίνουν μια αρκετά καλή προσέγγιση της βέλτιστης λύσης και είναι και εύκολοι στην εφαρμογή τους. Αυτοί οι αλγόριθμοι ονομάζονται ευρεστικοί.

Ένας ευρεστικός αλγόριθμος αναπτύσσεται με βάση την εμπειρία του αναλυτή σε παρόμοια προβλήματα, αλλά και βάση της λογικής που πρέπει να ακολουθηθεί στη λύση. Λογικό είναι, λοιπόν, για ένα πρόβλημα να υπάρχουν περισσότεροι του ενός ευρεστικοί αλγόριθμοι, οι οποίοι μπορούν συνεχώς να βελτιώνονται.

Μια ευρεστική μέθοδος όμως δεν μας δίνει την άριστη λύση, οπότε για να αξιολογήσουμε την ποιότητά της και να συγκρίνουμε δυο αλγόριθμους μεταξύ τους, χρησιμοποιούμε κάποια κριτήρια αξιολόγησης. Το κύριο μειονέκτημα των ευρεστικών μεθόδων είναι ότι δεν υπάρχει μεθοδολογία κατασκευής τους. Έχουν όμως καταγραφεί, αξιολογηθεί και ομαδοποιηθεί πολλοί αλγόριθμοι για μεγάλη ποικιλία προβλημάτων.

Μερικά παραδείγματα ευρεστικών αλγορίθμων είναι [19]:

- **Αλγόριθμος προσομοιωμένης ανόπτησης** (Simulated annealing algorithm), αναπτύχθηκε το 1983 και χρησιμοποιεί μια προσέγγιση που παρομοιάζεται με την αναρρίχηση λόφων. Περιστασιακά όμως αποδέχεται λύσεις που είναι χειρότερες από την τρέχουσα, αλλά με μεγαλύτερους χρόνους η πιθανότητα να εμφανιστεί ένα τέτοιο ενδεχόμενο μειώνεται.
- **Αναζήτηση Tabu** (Tabu search), είναι μια επέκταση του Αλγόριθμου προσομοιωμένης ανόπτησης η οποία απαγορεύει την επανάληψη των κινήσεων που έχουν γίνει πρόσφατα, χρησιμοποιώντας δομές τις μνήμης. Έτσι αποφεύγεται ένα σοβαρό μειονέκτημα του αλγορίθμου.
- **Νοημοσύνη σμήνους** (Swarm intelligence), εισήχθηκε το 1989 και πρόκειται για την εφαρμογή στον τομέα της τεχνητής νοημοσύνης της συλλογικής συμπεριφοράς αποκεντρωμένων, αυτοοργανωμένων συστημάτων, φυσικών ή τεχνητών. Τα συστήματα

νοημοσύνης σμήνους κατά κανόνα αποτελούνται από έναν πληθυσμό απλών παραγόντων που αλληλεπιδρούν τοπικά ο ένας με τον άλλον και με το περιβάλλον τους. Φυσικά παραδείγματα της νοημοσύνης σμήνους περιλαμβάνουν τις αποικίες μυρμηγκιών(Ant Colony Optimization) και τις συμπεριφορές της σμήνους πουλιών (Particle Swarm Optimization).

- **Εξελικτικοί αλγόριθμοι** (Evolutionary Algorithms), επιτυγχάνουν την αντιμετώπιση της πρόωρης σύγκλισης λαμβάνοντας υπ' όψιν ένα αριθμό λύσεων ταυτόχρονα.
- **Νευρωνικά δίκτυα** (Neural Networks), είναι δίκτυα από απλούς υπολογιστικούς κόμβους (νευρώνες), διασυνδεδεμένους μεταξύ τους και είναι εμπνευσμένα από το Κεντρικό Νευρικό Σύστημα (ΚΝΣ) το οποίο προσπαθεί να προσομοιώσει. Παρουσιάζουν συχνά προβλήματα ακρίβειας και πρόωρης σύγκλισης.
- **Μηχανές Διανυσματικής Υποστήριξης** (Support Vector Machines), επεκτείνουν τις ιδέες των Νευρωνικών Δικτύων και στηρίζονται στη κλασσική τεχνική διαίρει και βασίλευε ώστε να ξεπεραστεί η πρόωρη σύγκλιση.

Κεφάλαιο 3

Η προτεινόμενη μέθοδος

3.1 ΣΚΟΠΟΣ

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, ο σκοπός αυτής της εργασίας είναι η βελτίωση της μεθόδου PROMETHEE V που παρουσιάστηκε από τους Abu-Taleb και Mareschal το 1995. Στην βασική μέθοδο PROMETHEE, που έχει ήδη περιγραφεί (Κεφ. 2), το ζητούμενο ήταν να κάνει ο αποφασίζων όσο το δυνατόν λιγότερο οδυνηρούς συμβιβασμούς. Το ζητούμενο στην εξελιγμένη μέθοδο, PROMETHEE V, ήταν να γίνει επιλογή μεταξύ κάποιων εναλλακτικών, οι οποίες υπόκεινται κάτω από συγκεκριμένους περιορισμούς.

Η προτεινόμενη μέθοδος, PROMETHEE V2, που παρουσιάστηκε από τους Μαυρωτά και Ροζάκη το 2009, είναι μια επέκταση της μεθόδου PROMETHEE V, που εκμεταλλεύεται πλήρως τα πλεονεκτήματα της οικογένειας μεθόδων PROMETHEE και προσφέρει μεγάλη ευελιξία στον αποφασίζοντα. Η PROMETHEE V2 χρησιμοποιεί τις πληροφορίες που παρέχονται από την PROMETHEE I στη μορφή των θετικών $\varphi(\alpha^{+})$ και αρνητικών $\varphi(\alpha^{-})$ ροών και διαμορφώνει ένα πολυκριτηριακό πρόβλημα ΑΠ. Προκειμένου να βοηθήσει τον αποφασίζοντα να διαλέξει την πιο προτιμώμενη λύση, αναπτύχθηκε και μια μεθοδολογία υποστήριξης αποφάσεων. Η μέθοδος PROMETHEE V2 είναι ιδιαίτερα κατάλληλη σε προβλήματα που απαιτείται μια ομάδα λύσεων, καθώς μπορεί με αποτελεσματικότητα και διαφάνεια ενσωματώσει τις προτιμήσεις όλων των ενδιαφερομένων στην τελική απόφαση.

3.1.1 Μέθοδος PROMETHEE V

Παρακάτω θα παρουσιαστούν οι βασικές αρχές της μεθόδου PROMETHEE V.[20] Η μέθοδος αυτή επιτρέπει στον αποφασίζοντα να λάβει υπόψη και κάποιους περιορισμούς, οι οποίοι πιθανώς υπάρχουν στο πρόβλημα που τον απασχολεί. Η μέθοδος PROMETHEE V περιλαμβάνει δύο στάδια:

1. Αντιμετωπίζεται πρώτα το πολυκριτηριακό πρόβλημα χωρίς να λαμβάνονται υπόψη οι περιορισμοί. Υπολογίζεται η καθαρή ροή φ(α) και σύμφωνα με αυτή κατατάσσονται οι επιλογές (PROMETHEE II).
2. Στο δεύτερο στάδιο λαμβάνονται υπ’ όψιν και οι περιορισμοί, καθώς επιλύεται το ακόλουθο πρόβλημα 0-1ΑΓΠ:

$$\max \sum_{\alpha \in A} \varphi(\alpha) X_\alpha \tag{3.1}$$

   όπου το X_α οι μεταβλητές απόφασης και ισούται με 1 όταν αν το α έχει επιλεγεί και 0 αν όχι. Το πρόβλημα 0-1ΑΓΠ επιλύεται με τα κλασσικά εργαλεία βελτιστοποίησης μιας αντικειμενικής συνάρτησης.

3.2 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

3.2.1 Γενικά

Η μέθοδος PROMETHEE V2 [21] εμπνεύστηκε από την PROMETHEE V και αναπτύχθηκε με σκοπό τον χειρισμό πολυκριτηριακών προβλημάτων, στα οποία εμπλέκονται πολλοί περιορισμοί και αποφασίζοντες. Στην PROMETHEE V, το πρόβλημα ΑΠ οδηγεί σε μια βέλτιστη λύση, η οποία υποδεικνύει την βέλτιστη επιλογή. Καθώς δεν παρέχεται καμιά πληροφορία για τις εναλλακτικές βέλτιστες (οι περισσότεροι εμπορικοί λύτες ΑΠ δεν μπορούν να τις προσδιορίσουν), ο αποφασίζοντας είναι περιορισμένος στη μοναδική βέλτιστη λύση, χωρίς να έχει καμιά ευελιξία να εξετάσει εναλλακτικές, ή λύσεις κοντά στη βέλτιστη.

Η PROMETHEE V χρησιμοποιεί τα αποτελέσματα της PROMETHEE II όπου όλες οι εναλλακτικές αναγκάζονται να συγκριθούν μεταξύ τους. Ωστόσο, σύμφωνα με την PROMETHEE I έχουμε περιπτώσεις όπου καμιά λύση δεν υπερέχει καθαρά, λόγω ασυγκρισιμότητας μεταξύ των εναλλακτικών. Γενικότερα, στο πλαίσιο των μεθόδων PROMETHEE, οι πληροφορίες προτιμήσεως εκφράζονται μέσω των θετικών $φ(α^+)$ και αρνητικών $φ(α^-)$ ροών, οι οποίες παρέχουν περισσότερη πληροφορία σε σχέση με την καθαρή φ(α) ροή. Κατ' ακρίβεια αυτό είναι και το βασικό πλεονέκτημα των μεθόδων υπεροχής έναντι των συναρτήσεων αξίας: αποδέχονται ότι δύο εναλλακτικές μπορεί να είναι ασύγκριτες. Για αυτό, έγινε προσπάθεια να προσπελαστούν αυτά τα προβλήματα, με την ανάπτυξη της μεθόδου PROMETHEE V2.

Η μέθοδος PROMETHEE V2 χρησιμοποιεί ρητά τις πληροφορίες που δίνονται από την PROMETHEE I στην μορφή των θετικών $φ(α^+)$ και αρνητικών $φ(α^-)$ ροών και διαμορφώνει ένα δικριτηριακό πρόβλημα ΑΠ. Πρώτη αντικειμενική συνάρτηση είναι η μεγιστοποίηση του αθροίσματος των θετικών $φ(α^+)$ ροών των επιλεγμένων εναλλακτικών και δεύτερη αντικειμενική συνάρτηση είναι η ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των αρνητικών $φ(α^-)$ ροών. Οι κατά Pareto βέλτιστες λύσεις του δικριτηριακού προβλήματος, εκφράζουν τους περισσότερο προτιμώμενους συνδυασμούς των υποψήφιων εναλλακτικών -οι οποίοι είναι και αντικειμενικά ισοδύναμοι- από τους οποίους μπορεί να διαλέξει ο αποφασίζοντας. Εάν υπάρχουν περισσότερες τις μιας κατά Pareto άριστες λύσεις, τότε χαρακτηρίζονται είτε από αδιαφορία, είτε από ασυγκρισιμότητα μεταξύ τους. Με αυτό το τρόπο, η πιθανότητα ασυγκρισιμότητας που υπάρχει μεταξύ των εναλλακτικών, μπορεί επίσης να υπάρξει και στο επίπεδο του συνδυασμού εναλλακτικών.

Στη συνέχεια, προκειμένου να προσδιοριστεί η πιο επιθυμητή λύση (συνδυασμός εναλλακτικών), οι εναλλακτικές του προβλήματος διαχωρίζονται σε τρία διαζευκτικά σύνολα:

1) οι εναλλακτικές που παρουσιάζονται σε όλες τις κατά Pareto άριστες λύσεις, οι οποίες αναμφίβολα επιλέγονται και αποτελούν το «πράσινο» σύνολο εναλλακτικών
2) οι εναλλακτικές που δεν παρουσιάζονται σε καμία από τις κατά Pareto άριστες λύσεις, οι οποίες αναμφίβολα αποκλείονται και αποτελούν το «κόκκινο» σύνολο εναλλακτικών
3) οι εναλλακτικές που παρουσιάζονται σε κάποιες από τις κατά Pareto άριστες λύσεις (αλλά όχι σε όλες), και αποτελούν το «γκρίζο» σύνολο.

Οι εναλλακτικές του γκρίζου συνόλου χρήζουν περαιτέρω διερεύνησης, προκειμένου να επιλεγούν αυτές που θα προχωρήσουν μαζί με το πράσινο σύνολο για την τελική επιλογή. Για αυτό το σκοπό, διαμορφώνεται ένα νέο πρόβλημα ΑΠ όπου λαμβάνουν μέρος μόνο οι «γκρίζες» εναλλακτικές, ως δυαδικές μεταβλητές απόφασης. Οι περιορισμοί κατάτμησης τροποποιήθηκαν κατάλληλα, ώστε να συνυπολογίζουν την a priori επιλογή «πράσινων» εναλλακτικών. Η αντικειμενική συνάρτηση του συγκεκριμένου προβλήματος ΑΠ, έχει ως στόχο να εκφράσει την αρχή της πλειοψηφίας: Οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης του ΑΠ, εκφράζουν τον αριθμό των εμφανίσεων κάθε εναλλακτικής στην κατά Pareto άριστη λύση του δικριτηριακού προβλήματος. Ως εκ τούτου, όσο περισσότερες φορές εμφανίζεται μια εναλλακτική στην κατά Pareto βέλτιστη λύση, τόσο μεγαλύτερο το ενδεχόμενο να επιλεγεί. Πρέπει να σημειωθεί ότι η προτεινόμενη προσέγγιση είναι πολύ κατάλληλη για λήψη αποφάσεων από μια ομάδα, αφού τελικά προσφέρει μια συναινετική λύση, λαμβάνοντας υπ’ όψιν όλες τις κατά Pareto βέλτιστες λύσεις, απ’ όλα τα μέλη της ομάδας. Ένα μέρος των εναλλακτικών επιλέγεται από ομοφωνία (οι «πράσινες») και οι υπόλοιπες επιλέγονται βάση της πλειοψηφίας.

3.2.2 Περιγραφή της μεθόδου

Η μέθοδος PROMETHEE V2 για την επιλογή του πιο επιθυμητού συνδυασμού εναλλακτικών μπορεί να χωριστεί σε τρεις διαφορετικές φάσεις απόφασης:

1. Εφαρμογή της μεθόδου PROMETHEE I για να επιτευχθούν οι θετικές $φ(α^+)$ και αρνητικές $φ(α^-)$ ροές.

2. Διαμόρφωση του δικριτηριακού προβλήματος ΑΠ με τους περιορισμούς κατάτμησης και τις συνολικές θετικές $\varphi(\alpha^{+})$ και αρνητικές $\varphi(\alpha^{-})$ ροές, που χρησιμοποιούνται ως αντικειμενικές συναρτήσεις που μεγιστοποιούνται και ελαχιστοποιούνται αντίστοιχα. Παραγωγή των κατά Pareto βέλτιστων λύσεων και ταξινόμηση των εναλλακτικών σε τρία υποσύνολα:
   - το πράσινο (αναμφίβολα επιλεγόμενες)
   - το κόκκινο (κομμένες)
   - το γκρίζο (περαιτέρω διερεύνηση)
3. Επιλογή των εναλλακτικών του γκρίζου συνόλου χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο ΑΠ, συνυπολογίζοντας την αρχή της πλειοψηφίας.

Ακολούθως οι φάσεις 2 και 3 θα περιγραφούν πιο αναλυτικά. Η φάση 1 έχει περιγραφεί στο υποκεφάλαιο 2.1.1.

3.2.2.1 Δεύτερη Φάση: Το δικριτηριακό μοντέλο ΑΠ

Το βασικό κίνητρο πίσω από την ανάπτυξη της PROMETHEE V2 ήταν να διατηρηθεί η δυνατότητα της ασυγκρισιμότητας μεταξύ των λύσεων. Η έννοια της ασυγκρισιμότητας είναι ένα από τα κύρια στοιχεία που διακρίνουν τις μεθόδους υπεροχής από τις προσεγγίσεις των συναρτήσεων αξίας. Όπως αναφέραμε, στην PROMETHEE V απουσιάζει η έννοια της ασυγκρισιμότητας, αφού χρησιμοποιεί την καθαρή φ(α) ροή από την PROMETHEE II ως αντικειμενική συνάρτηση. Στην PROMETHEE V2 το στοιχείο της ασυγκρισιμότητας που μπορεί να υπάρχει μεταξύ των εναλλακτικών, μεταφέρεται και στην λύση του μοντέλου ΑΠ.

Σύμφωνα με την PROMETHEE V2, τα αποτελέσματα της πρώτης φάσης (PROMETHEE I), χρησιμοποιούνται με τη μορφή των θετικών $\varphi(\alpha^{+}_{i})$ και αρνητικών $\varphi(\alpha^{-}_{i})$ ροών. Οι δύο αντικειμενικές συναρτήσεις είναι:

1) Η μεγιστοποίηση του αθροίσματος των θετικών ροών ($\sum \varphi_i^{+} x_i$)
2) Η ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των αρνητικών ροών ($\sum \varphi_i^{-} x_i$)

Ως εκ τούτου, το δικριτηριακό μοντέλο ΑΠ έχει την εξής μορφή:

$$\max \sum \varphi_i^{+} x_i$$
$$\min \sum \varphi_i^{-} x_i$$
$$st \tag{3.2}$$

$$x_i \in S$$
$$x_i \in \{0, 1\}$$

όπου x_i είναι η δυαδική μεταβλητή απόφασης που υποδηλώνει αν η i-οστή εναλλακτική λύση έχει επιλεγεί ($x_i = 1$) ή όχι ($x_i = 0$) και S είναι η εφικτή περιοχή που ορίζεται από τους περιορισμούς κατάτμησης. Με τον ορισμό των κατά Pareto βέλτιστου και τον ορισμό της υπεροχής σύμφωνα με την PROMETHEE I, οι κατά Pareto άριστες λύσεις αυτού του δικριτηριακού προβλήματος, είναι «οι πιο προτιμώμενες» λύσεις από όλες τις υποψήφιες για επιλογή (συμβολίζονται με P). Οι κυριαρχούμενες λύσεις (συμβολίζονται με D) αυτού του προβλήματος είναι αυτές που υστερούν σε σχέση με τις «πιο προτιμώμενες» λύσεις:

$$\forall d \in D \; \exists \; p \in P \quad (\sum \varphi_i^+ x_i)_p \geq (\sum \varphi_i^- x_i)_d \; \Delta \; (\sum \varphi_i^- x_i)_p \leq (\sum \varphi_i^- x_i)_d \qquad (3.3)$$

με τουλάχιστον μια αυστηρή ανισότητα.

Οι διαφορετικές κατά Pareto άριστες λύσεις, υποδεικνύουν διαφορετικούς συνδυασμούς των επιλεγμένων εναλλακτικών. Αν είναι περισσότερες της μίας, σημαίνει ότι υπάρχει αδιαφορία ή ασυγκρισιμότητα. Αδιαφορία ορίζεται ως η κατάσταση όπου δύο ή περισσότερες κατά Pareto άριστες λύσεις (διαφορετικοί συνδυασμοί του x_i) έχουν ταυτόσημες τιμές στις αντικειμενικές τους συναρτήσεις. Ασυγκρισιμότητα μεταξύ δύο λύσεων Α και Β, ορίζεται η κατάσταση όπου η λύση Α είναι καλύτερη της Β σε μια αντικειμενική συνάρτηση και χειρότερη σε μια άλλη. Αυτές οι κατά Pareto άριστες λύσεις περιλαμβάνουν αρχικές εναλλακτικές, οι οποίες είναι ασύγκριτες μεταξύ τους. Με αυτό το τρόπο, η πληροφορία της ασυγκρισιμότητας δεν κρύβεται πίσω από μια μοναδική τιμή της καθαρής φ(α) ροής που χαρακτηρίζει κάθε εναλλακτική, αλλά διατηρείται στην τελική επιλογή. Συμπερασματικά, με την PROMETHEE V2 ο αποφασίζοντας τροφοδοτείται με περισσότερες γόνιμες πληροφορίες και έχει μεγαλύτερο βαθμό ελευθερίας στην τελική επιλογή. Ακόμα ένα πλεονέκτημα της PROMETHEE V2 έναντι της PROMETHEE V, είναι ότι δεν υπάρχει αναγκαιότητα μετασχηματισμού των καθαρών φ(α) ροών για να αποφευχθούν αρνητικές τιμές, αφού εκ του ορισμού οι θετικές $\varphi(\alpha^+)$ και αρνητικές $\varphi(\alpha^-)$ ροές είναι εκ του ορισμού θετικοί αριθμοί.

Συνήθως, περισσότερες τις μιας κατά Pareto άριστες λύσεις παράγονται από το δικριτηριακό μοντέλο ΑΠ της δεύτερης φάσης (στην σπάνια περίπτωση που παράγεται μόνο μία κατά Pareto άριστη λύση, τότε προφανώς αυτή καθορίζει την τελική επιλογή). Η ύπαρξη περισσότερων της μίας κατά Pareto άριστων λύσεων, προϋποθέτει τη χρήση πρόσθετων βοηθημάτων για υποστήριξη αποφάσεων, ούτως ώστε να προσδιοριστεί η τελική επιλογή των εναλλακτικών. Φυσικά ο αποφασίζοντας μπορεί να σταματήσει τη διαδικασία απόφασης με αυτές τις αντικειμενικά ισοδύναμες λύσεις και να διαλέξει μια από αυτές κατά αποκλειστικά δική του επιλογή. Παρ' όλα αυτά, στη περίπτωση που χρειάζεται περισσότερη υποστήριξη, αναπτύχθηκε μια απλή διαδικασία που μπορεί να βοηθήσει τον αποφασίζοντα: διαχωρισμός των εναλλακτικών στα τρία σύνολα που αναφέραμε προηγουμένως, βάση των κατά Pareto βέλτιστων λύσεων που πήραμε από το πρόβλημα του ΑΠ.

3.2.2.2 Τρίτη Φάση: Η επιλογή από την ομάδα των «γκρίζων» εναλλακτικών

Ο σκοπός της τρίτης φάσης είναι να προσδιοριστούν ποιες από τις εναλλακτικές του γκρίζου συνόλου θα προσαρτηθούν στο πράσινη σύνολο, προκειμένου να γίνει η τελική επιλογή. Στην περίπτωση που το σύνολο των «γκρίζων» εναλλακτικών περιέχει μόνο λίγες εναλλακτικές (2-3), η άμεση σύγκριση αυτών των εναλλακτικών μπορεί εύκολα να γίνει απλά καθορίζοντας τις επιλεγμένες εναλλακτικές. Ωστόσο, όταν υπάρχουν περισσότερες εναλλακτικές στο γκρίζο σύνολο (όπως γίνεται συνήθως), η επιλογή ανάμεσά τους γίνεται πολύπλοκη και απαιτείται συστηματική προσέγγιση. Προκειμένου να γίνει η επιλογή, διαμορφώνεται ένα μοντέλο ΑΠ το οποίο περιλαμβάνει ως μεταβλητές απόφασης τις γκρίζες εναλλακτικές και έχει την πιο κάτω μορφή:

$$\begin{gathered} \max \sum n_j x_j \\ st \\ x_j \in S' \\ x_j \in \{0,1\} \end{gathered} \tag{3.4}$$

όπου n_j είναι ο αριθμός των εμφανίσεων της j-οστής εναλλακτικής στις κατά Pareto άριστες λύσεις του δικριτηριακού προβλήματος ΑΠ, x_j είναι η δυαδική μεταβλητή απόφασης που αναφέρει αν η j-οστή εναλλακτική της γκρίζας ομάδας έχει επιλεγεί ή όχι. Η εφικτή περιοχή S' ορίζεται από τους περιορισμούς κατάτμησης, που αφορούν μόνο τις εναλλακτικές του γκρίζου συνόλου, συνυπολογίζοντας την κατάσταση των εναλλακτικών στο πράσινο και κόκκινο σύνολο. Για παράδειγμα, αν οι αρχικοί περιορισμοί κατάτμησης ήταν:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 4 \tag{3.5}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι οι εναλλακτικές x_3 και x_4 βρέθηκαν να είναι στο πράσινο σύνολο και η x_6 στο κόκκινο. Ως εκ τούτου, ο προσαρμοσμένος περιορισμός κατάτμησης γίνεται:

$$x_1 + x_2 + x_5 \leq 2 \tag{3.6}$$

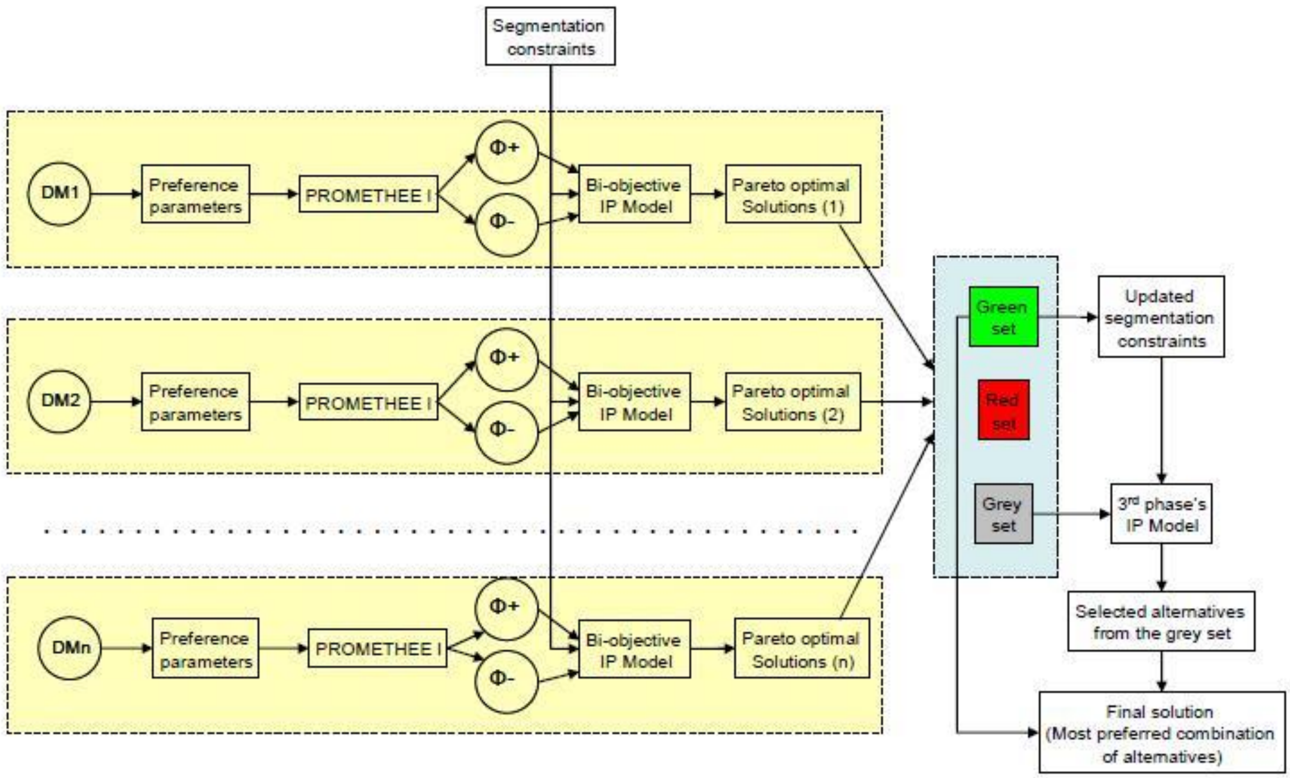
Η εξίσωση (3.6) προκύπτει άμεσα από την εξίσωση (3.5) αφού οι αρχικές μεταβλητές x_3, x_4 και x_6, γίνονται τώρα παράμετροι με τιμές 1, 1 και 0 αντίστοιχα. Η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος ΑΠ στην τρίτη φάση, εκφράζει στην πραγματικότητα την αρχή της πλειοψηφίας, αφού όσες περισσότερες φορές εμφανίζεται μια εναλλακτική στις κατά Pareto άριστες λύσεις, τόσο μεγαλύτερο το ενδεχόμενο να επιλεγεί.

3.2.2.3 Εφαρμογή όταν εμπλέκονται πολλοί αποφασίζοντες

Η προαναφερθείσα διαδικασία λήψης απόφασης είναι ιδιαίτερα κατάλληλη όταν εμπλέκονται πολλοί αποφασίζοντες. Η πρώτη φάση (PROMETHEE I) μπορεί να γίνει μεμονωμένα, με τον κάθε αποφασίζοντα να χρησιμοποιεί τις δικές του παραμέτρους προτίμησης (βαρύτητα κριτηρίων, αδιαφορία, κατώτατα όρια προτίμησης). Στη συνέχεια, οι θετικές $\varphi(\alpha^+)$ και αρνητικές $\varphi(\alpha^-)$ ροές χρησιμοποιούνται για να σχηματίσουν τις αντικειμενικές συναρτήσεις του δικριτηριακού προβλήματος ΑΠ της δεύτερης φάσης, που σημαίνει ότι για κάθε ένα από τους n αποφασίζοντες θα δημιουργηθεί ένα ξεχωριστό δικριτηριακό πρόβλημα ΑΠ. Αυτά τα προβλήματα ΑΠ διαφέρουν μόνο στις αντικειμενικές τους συναρτήσεις, καθώς οι περιορισμοί κατάτμησης είναι ίδιοι για όλους τους αποφασίζοντες.

Η λύση των n δικριτηριακών προβλημάτων ΑΠ παρέχει τις αντίστοιχες κατά Pareto άριστες λύσεις. Το πράσινο, το κόκκινο και το γκρίζο σύνολο εναλλακτικών, διαμορφώνονται σύμφωνα με τις κατευθυντήριες γραμμές της δεύτερης φάσης. Η μόνη διαφορά είναι ότι τώρα λαμβάνουμε υπ' όψιν τις κατά Pareto άριστες λύσεις από όλα τα n δικριτηριακά προβλήματα ΑΠ. Ως εκ τούτου, λόγω του μεγάλου αριθμού των κατά Pareto άριστων λύσεων, ο αριθμός των «γκρίζων» εναλλακτικών είναι συνήθως μεγαλύτερος από την απλή περίπτωση και η διαδικασία λήψης της απόφασης στην τρίτη φάση, αποκτά ακόμα μεγαλύτερο νόημα.

Τελικά, το υποσύνολο της τελικής λύσης που περιλαμβάνει τις εναλλακτικές του πράσινου συνόλου θεωρείται ότι αποφασίζεται ομόφωνα, ενώ το υποσύνολο που περιλαμβάνει τις «γκρίζες» εναλλακτικές αποφασίζεται βάση της αρχής πλειοψηφίας. Το πλήρες διάγραμμα της μεθόδου αυτής φαίνεται στο Σχήμα 3.1.



Σχήμα 3.1 Το διάγραμμα ροής της PROMETHEE V2 όταν εμπλέκονται πολλοί αποφασίζοντες.

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογή της μεθόδου

4.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

4.1.1 Εισαγωγή

Το ζήτημα των υδάτινων πόρων στην Μέση Ανατολή, είναι μια πολύ σημαντική παράμετρος της κοινωνικοπολιτικής κατάστασης στην περιοχή. Η έλλειψη πληρότητας και αποδοτικότητας στην διαχείριση των υδάτινων πόρων, είναι ένα από τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν διαχρονικά οι χώρες της περιοχής και συγκεκριμένα η Ιορδανία, η οποία έχει ένα από τα χαμηλότερα επίπεδα υδάτινων πόρων κατά κεφαλήν παγκοσμίως και παρουσίασε τις τελευταίες δεκαετίες την πιο ραγδαία ανάπτυξη πληθυσμού στην Μέση Ανατολή.

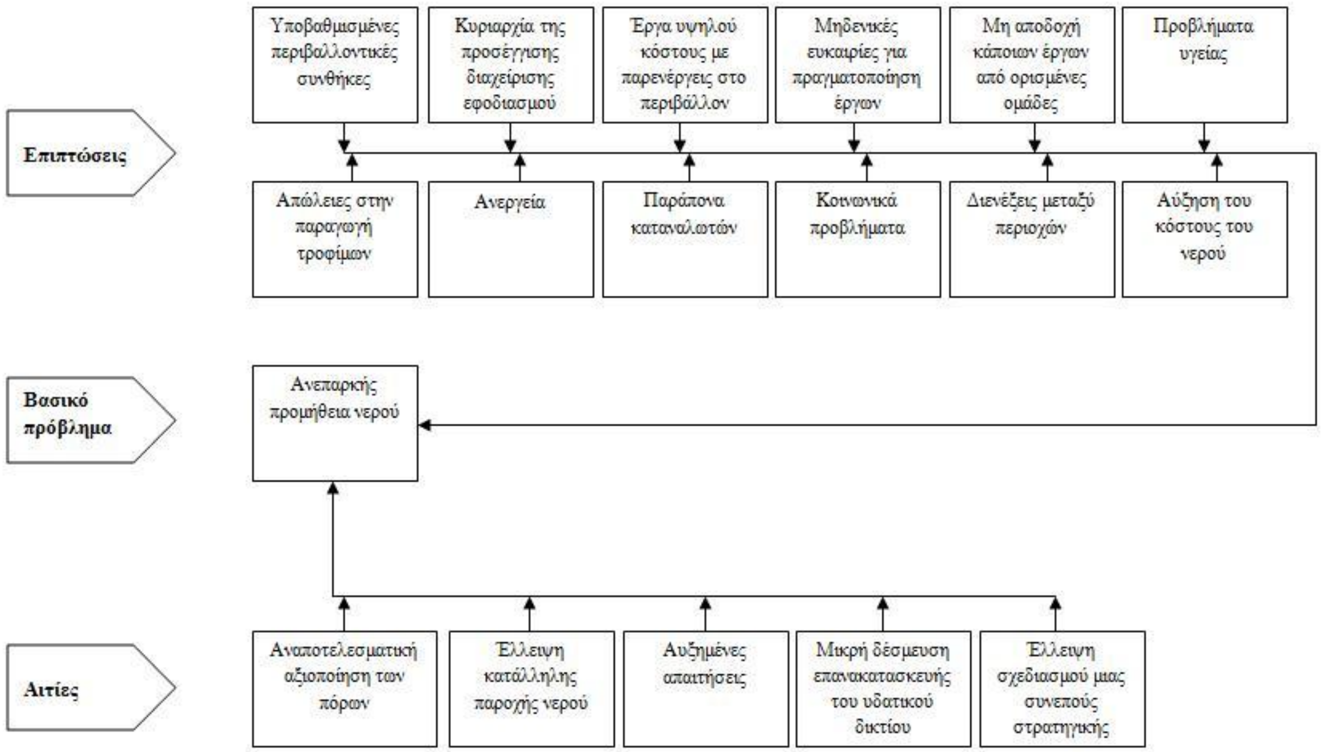
Η εφαρμογή της μεθόδου PROMETHEE V2 στην παρούσα εργασία, έγινε με βάση την εργασία των Al-Shemmeri, Al-Kloub και Pearman με τίτλο Computer aided decision support system for water strategic planning in Jordan του 1995.[22] Η εργασία αυτή ασχολείται με την ανάπτυξη ενός συστήματος υποστήριξης αποφάσεων για τον στρατηγικό σχεδιασμό των υδάτινων πόρων στην Ιορδανία χρησιμοποιώντας την μέθοδο PROMETHEE V.

Το 1995, οπόταν και συντάχθηκε η εργασία των Al-Shemmeri, Al-Kloub και Pearman, το πρόβλημα της λειψυδρίας στην Ιορδανία ήταν πολύ μεγάλο και αποτελούσε σημαντικό εμπόδιο για την ανάπτυξη της χώρας. Ήταν επιτακτική η ανάγκη μιας στρατηγικής ανάπτυξης για αντιμετώπιση της, αφού δεν υπήρχε ολοκληρωμένο πλαίσιο για την ανάλυση πολιτικών και προτεραιοτήτων, ώστε να καθοδηγηθούν οι αποφάσεις σχετικά με την διαχείριση των υδάτινων πόρων. Η ιεράρχηση και η επιλογή των έργων υδατικής ανάπτυξης κυριαρχούταν πάντοτε από μια μονοκριτηριακή ανάλυση, που συνήθως αφορούσε την οικονομική δυνατότητα για πραγματοποίηση του έργου. Αυτή η μη βέλτιστη επιλογή των έργων ανάπτυξης, είχε οδηγήσει σε αλυσιδωτές επιπτώσεις, όπως η σπατάλη πόρων, η περιβαλλοντική υποβάθμιση, η απώλεια ευκαιριών για εξωτερική υποστήριξη και η ανεπαρκής υποστήριξη από την κοινωνία στα αναπτυξιακά έργα ύδρευσης.

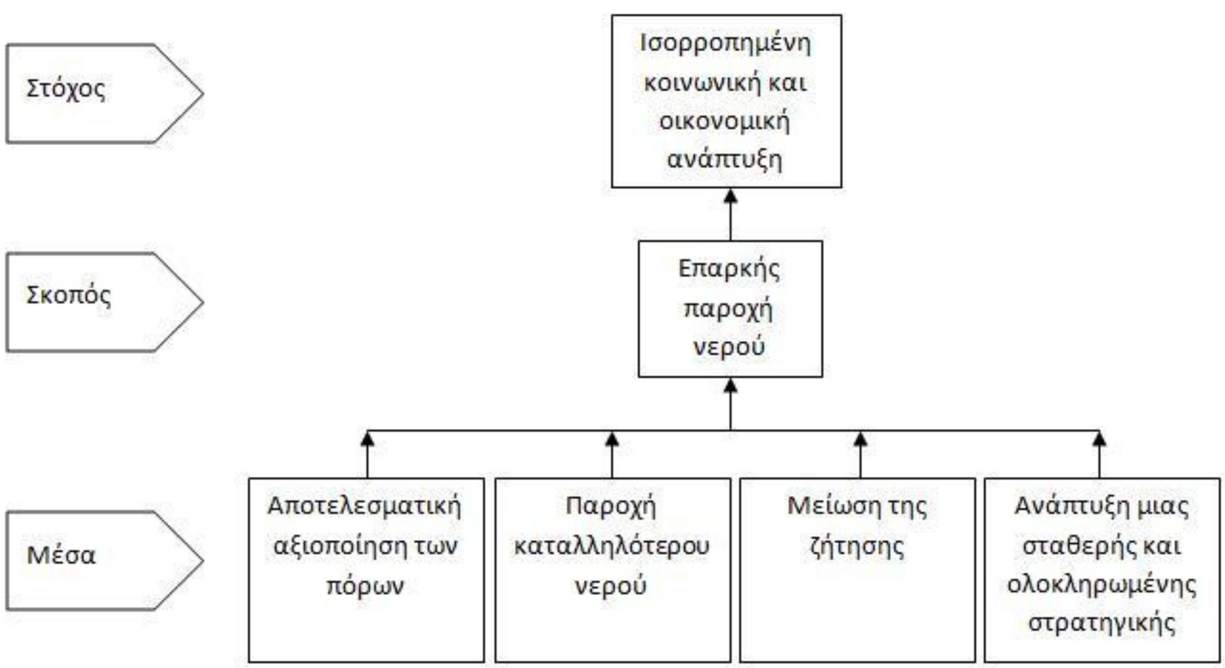
Η ενσωμάτωση της μεθοδολογίας της Πολυκριτηριακής Ανάλυσης σε ένα μοντέλο στρατηγικού σχεδιασμού είναι απαραίτητη, ειδικά σε προβλήματα όπου υπάρχουν περιορισμένοι πόροι για επενδύσεις και μια αποτελεσματική επενδυτική απόφαση είναι αναγκαία για την ικανοποίηση των στόχων που καθορίζονται από τις κοινωνικοπολιτικές συνθήκες, που είναι πολλές φορές ασύμμετρες και έχουν επιπτώσεις στη φύση. Το αναλυτικό πεδίο της ΠΚΑ προσφέρει έναν τρόπο για την αντιμετώπιση των προβλημάτων, ώστε να γίνεται βέλτιστη χρήση των πόρων.

4.1.2 Επιλογή έργων υδατικής ανάπτυξης για την Ιορδανία

Η εργασία μας ασχολείται με την διαδικασία επιλογής υδατικών έργων για την Ιορδανία με σκοπό την αντιμετώπιση του προβλήματος της λειψυδρίας. Το πρόβλημα παρουσιάζεται στο δενδροειδές διάγραμμα του Σχήματος 4.1 όπου απεικονίζεται το βασικό πρόβλημα, οι αιτίες και οι επιπτώσεις του. Ακολούθως στο σχήμα 4.2 απεικονίζεται ο σκοπός, ο στόχος και τα μέσα (ή επιμέρους στόχοι) που θα χρησιμοποιηθούν για την επίτευξη τους.



Σχήμα 4.1 Απεικόνιση του προβλήματος



Σχήμα 4.2 Απεικόνιση του σκοπού

Με περαιτέρω ανάπτυξη του δενδροειδούς διαγράμματος του σκοπού (Σχ. 4.2), καταλήξαμε σε 24 επιμέρους στόχους, οι οποίοι αποτελούν τελικώς και τα κριτήρια του προβλήματος μας (C1-C24 Πίνακας 4.1). Στον πίνακα προσδιορίζεται ο τύπος και η κλίμακα μέτρησης τους, όπως καθορίστηκαν από τους αποφασίζοντες. Επίσης, από την υποκειμενική κρίση των αποφασιζόντων (ομάδα εμπειρογνωμόνων) προσδιορίστηκε συλλογικά η βαρύτητα κάθε κριτηρίου, όπως φαίνεται στην πέμπτη στήλη του Πίνακα 4.1.

Σε αυτό το ανεπτυγμένο σύνολο των 24 κριτηρίων θα εξεταστούν 72 έργα υδατικής ανάπτυξης. Ειδική ομάδα Ιορδανών εμπειρογνωμόνων, λαμβάνοντας υπ’ όψιν όλες τις πληροφορίες για κάθε έργο (τη φύση και το είδος του έργου, το κόστος, τα οφέλη και τους κινδύνους που εμπλέκονται στην εφαρμογή του), αξιολόγησαν την απόδοση τους σε κάθε κριτήριο και έτσι δημιουργήθηκαν οι Πίνακες Α.1 και Α.2 του Παραρτήματος Α. Τα 72 έργα υδατικής ανάπτυξης χωρίστηκαν σε 4 κατηγορίες:

- Τεχνικά έργα: (1-59)
    - Τοπικά (1-48)
    - Περιφερειακά (49-59)
- Διαχειριστικά έργα (60-65)
- Έργα τιμολόγησης (66-70)
- Ρυθμιστικά έργα (71-72)

Στο πρόβλημα υπεισέρχονται και κάποιοι περιορισμοί. Κύριος περιορισμός του προβλήματος είναι ο προϋπολογισμός, ο οποίος είναι 600 εκατομμύρια δηνάρια (JD). Επίσης, υπάρχουν περιορισμοί για την ελάχιστη αρδεύσιμη έκταση η οποία είναι 110 χιλιάδες εκτάρια και για την ελάχιστη παροχή νερού η οποία είναι 8 δισεκατομμύρια κυβικά μέτρα. Περαιτέρω, υπάρχουν και περιορισμοί ανάλογα με την κατηγορία των έργων, οι λεγόμενοι περιορισμοί κατάτμησης. Πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον 5 τοπικά τεχνικά έργα, 2 περιφερειακά τεχνικά έργα, 2 διαχειριστικά έργα και ένα έργο τιμολόγησης. Τέλος υπάρχουν δύο περιορισμοί μεταξύ των έργων. Ο πρώτος περιορισμός λέει ότι μεταξύ των έργων 4, 6 και 8 μπορεί να γίνει μόνο ένα έργο και ο δεύτερος λέει ότι αν γίνει το έργο 21 τότε θα πρέπει να γίνει και το έργο 27.

α/α	Κριτήριο	Τύπος (min/max)	Κλίμακα μέτρησης	Βαρύτητα
C1	Άντληση υπογείων υδάτων	min	Εκατομμύρια m^3	2.0
C2	Ποιότητα των επιφανειακών υδάτων	max	1-4	1.0
C3	Ποσότητα των επιφανειακών υδάτων	max	Εκατομμύρια m^3	1.0
C4	Ποιότητα υπογείων υδάτων	max	1-4	1.5
C5	Ποσότητα υπογείων υδάτων	max	Εκατομμύρια m^3	1.0
C6	Καθίζηση	min	Εκατομμύρια τόνοι	1.0
C7	Ποιότητα του εδάφους	max	1-6	0.5
C8	Αισθητική	max	1-6	0.5
C9	Ποιότητα αέρα	max	1-6	0.5
C10	Υγιεινή	max	% αλλαγή	2.0
C11	Παροχή νερού	max	Εκατομμύρια m^3	18.6
C12	Διατήρηση	max	Εκατομμύρια m^3	1.3
C13	Ενεργειακή απαίτηση	min	MWh	4.1
C14	Ξένο εργατικό δυναμικό	min	Αριθμός εργατών	4.1
C15	Αρδευόμενη περιοχή	max	Χιλιάδες εκτάρια	3.08
C16	Απόδοση	max	Εκατομμύρια JD	3.08
C17	Αποδοτικότητα	max	Εκατομμύρια m^3	3.08
C18	Αφοσίωση σε ένα σταθερό και ολοκληρωμένο πλάνο	max	1-100	17.1
C19	Αφοσίωση στην ανακατασκευή του υδατικού δικτύου	max	1-100	8.8
C20	Διαχείριση της ζήτησης	max	1-100	9.7
C21	Ευαισθητοποίηση του κοινού	max	1-100	7.8
C22	Εξάτμιση	min	1-6	1.0
C23	Κόστος κεφαλαίου	min	Εκατομμύρια JD	4.1
C24	Ανάκτηση κόστους	max	% επένδυσης	3.08

Πίνακας 4.1 Πληροφορίες κριτηρίων

4.2 ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

4.2.1 Πρώτη φάση: PROMETHEE I

Για την εκτέλεση της PROMETHEE I χρησιμοποιούνται τα είδη των κριτηρίων όπως φαίνονται στο κάτω μέρος των πινάκων Α.1 και Α.2 του Παραρτήματος Α. Όπως παρατηρείται χρησιμοποιείται κυρίως το κριτήριο τύπου 3, όπως επίσης και τα κριτήρια τύπου 1 και 4. Τα αποτελέσματα της PROMETHEE I για τα 72 προτεινόμενα έργα παρουσιάζονται στον Πίνακα Α.3 του Παραρτήματος Α, στη μορφή των θετικών $\varphi(\alpha^{+})$, αρνητικών $\varphi(\alpha^{-})$ και καθαρών $\varphi(\alpha)$ ροών.

4.2.2 Δεύτερη φάση: Δικριτηριακό πρόβλημα ΑΠ

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, το δικριτηριακό πρόβλημα ΑΠ περιλαμβάνει μόνο δυαδικές μεταβλητές απόφασης, που δηλώνουν την επιλογή ή όχι μιας εναλλακτικής. Στο πρόβλημα μας οι αντικειμενικές συναρτήσεις διαμορφώνονται ως εξής:

- Η μεγιστοποίηση του αθροίσματος των θετικών ροών

$$\max \sum_{i=1}^{72} \varphi(\alpha^{+}) x_i$$

- Η ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των αρνητικών ροών

$$\min \sum_{i=1}^{72} \varphi(\alpha^{-}) x_i$$

Οι περιορισμοί που αποφασίστηκαν, εκφράζονται στο πρόβλημα του ΑΠ όπως παρακάτω:

Προϋπολογισμός (εκατομμύρια δηνάρια):

$$\max \sum_{i=Cost}^{72} x_i \leq 600$$

Ελάχιστη αρδεύσιμη έκταση (χιλιάδες εκτάρια):

$$\max \sum_{i=IArea}^{72} x_i \geq 110$$

Ελάχιστη παροχή νερού (δισεκατομμύρια κυβικά μέτρα):

$$\max \sum_{i=WSupply}^{72} x_i \geq 8$$

Πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον 5 τοπικά τεχνικά έργα, δηλαδή πρέπει να επιλεγούν τουλάχιστον 5 από τα έργα 1-48 (υποσύνολο TL):

$$\sum_{i=TL} x_i \geq 5$$

Πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον 2 περιφερειακά τεχνικά έργα, δηλαδή πρέπει να επιλεγούν τουλάχιστον 2 από τα έργα 49-59 (υποσύνολο TR):

$$\sum_{i=TR} x_i \geq 2$$

Πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον 2 διαχειριστικά έργα, δηλαδή πρέπει να επιλεγούν τουλάχιστον 2 από τα έργα 60-65 (υποσύνολο M):

$$\sum_{i=M} x_i \geq 2$$

Πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον 1 έργο τιμολόγησης, δηλαδή πρέπει να επιλεγεί τουλάχιστον 1 από τα έργα 66-70 (υποσύνολο P):

$$\sum_{i=P} x_i \geq 1$$

Μπορεί να γίνει μόνο ένα έργο μεταξύ των έργων 4, 6 και 8:

$$x_4 + x_6 + x_8 \leq 1$$

Αν γίνει το έργο 21 τότε θα πρέπει να γίνει και το έργο 27:

$$x_{21} - x_{27} \leq 0$$

Οι 50 (οι λύσεις που μας έδωσε το πρόγραμμα ήταν 51 αλλά 2 από τις λύσεις ήταν ίδιες) αντιπροσωπευτικές κατά Pareto βέλτιστες λύσεις από το δικριτηριακό πρόβλημα ΑΠ παρουσιάζονται στο Πίνακα Α.4 του Παραρτήματος Α. Στη τελευταία γραμμή του πίνακα μπορούμε να δούμε τη συχνότητα που παρουσιάζεται η κάθε εναλλακτική στις βέλτιστες λύσεις. Με πράσινο χρώμα χαρακτηρίστηκαν οι 9 εναλλακτικές που σχηματίζουν το πράσινο σύνολο (1, 19, 47, 52, 53, 61, 66, 67, 71) και με κόκκινο οι 12 του κόκκινου συνόλου (2, 4, 6, 30, 50, 51, 54, 55, 56, 57, 58, 59). Οι υπόλοιπες 51 εναλλακτικές σχηματίζουν το γκρίζο σύνολο.

Το πλήρες ανάπτυγμα του μοντέλου της δεύτερης φάσης στο GAMS παρουσιάζεται στο Παράρτημα Β.1.

4.2.3 Τρίτη φάση: Η επιλογή από την ομάδα των «γκρίζων» εναλλακτικών

Οι 51 εναλλακτικές του γκρίζου συνόλου επεξεργάστηκαν περαιτέρω, ούτως ώστε να γίνει η επιλογή μεταξύ τους των υπολοίπων που χρειάζονται για την τελική επιλογή. Έτσι αναπτύσσεται ένα μοντέλο ΑΠ που έχει ως αντικειμενική συνάρτηση:

$$\max \sum_{i=Shows}^{51} x_i$$

Οι περιορισμοί παραμένουν οι ίδιοι με το πρόβλημα της δεύτερης φάσης και απλά προστίθεται ένας ακόμα περιορισμός ο οποίος δηλώνει ότι όλες οι εναλλακτικές του πράσινου συνόλου πρέπει να επιλεγούν:

$$x_1 + x_{19} + x_{47} + x_{52} + x_{53} + x_{61} + x_{66} + x_{67} + x_{71} = 9$$

Για τα έργα του κόκκινου συνόλου δεν χρειάζεται να προστεθεί κάποιος περιορισμός, αφού έχουν τιμή 0 στις εμφανίσεις και έτσι δεν υπάρχει περίπτωση να επιλεγούν.

Η λύση αυτού του προβλήματος ΑΠ μας παρέχει τις εναλλακτικές από το γκρίζο σύνολο που θα υπάρχουν στη τελική λύση. Η τελική λύση παρουσιάζεται στο Πίνακα 4.2. Τα επιλεγμένα έργα έχουν την τιμή 1 και πράσινο χρώμα και τα μη επιλεγμένα την τιμή 0. Οι εναλλακτικές του γκρίζου συνόλου έχουν την τιμή 1 πιο έντονη (bold).

1	1	**37**	**1**
2	0	**38**	**1**
3	**1**	**39**	**1**
4	0	**40**	**1**
5	0	**41**	**1**
6	0	**42**	**1**
7	**1**	**43**	**1**
8	**1**	**44**	**1**
9	0	**45**	**1**
10	**1**	**46**	**1**
11	**1**	**47**	1
12	0	**48**	**1**
13	**1**	**49**	**1**
14	**1**	**50**	0
15	**1**	**51**	0
16	**1**	**52**	1
17	**1**	**53**	1
18	**1**	**54**	0
19	1	**55**	0
20	0	**56**	0
21	**1**	**57**	0
22	**1**	**58**	0
23	**1**	**59**	0
24	**1**	**60**	**1**
25	0	**61**	1
26	**1**	**62**	**1**
27	**1**	**63**	**1**
28	0	**64**	**1**
29	**1**	**65**	**1**
30	0	**66**	1
31	**1**	**67**	1
32	**1**	**68**	**1**
33	**1**	**69**	**1**
34	**1**	**70**	**1**
35	**1**	**71**	1
36	**1**	**72**	**1**

Πίνακας 4.2 Τελική λύση

Τα συνοπτικά αποτελέσματα της τελικής λύσης φαίνονται στον Πίνακα 4.3. Επιλέχθηκαν συνολικά 54 από τα 72 έργα και ο προϋπολογισμός εξαντλήθηκε στο έπακρο φτάνοντας στο συνολικό κόστος των 600 εκατομμυρίων δηναρίων. Η συνολική αρδευόμενη περιοχή έφτασε τα 140.81 χιλιάδες εκτάρια, ξεπερνώντας το ελάχιστο προαπαιτούμενο που ήταν 110 χιλιάδες εκτάρια και η συνολική παροχή νερού έφτασε τα 10.890 δισεκατομμύρια κυβικά μέτρα νερού, σχεδόν 3 εκατομμύρια περισσότερα από την ελάχιστη προαπαιτούμενη παροχή που ήταν 8 δισεκατομμύρια κυβικά μέτρα.

Το πλήρες ανάπτυγμα του μοντέλου της τρίτης φάσης στο GAMS παρουσιάζεται στο Παράρτημα Β.2.

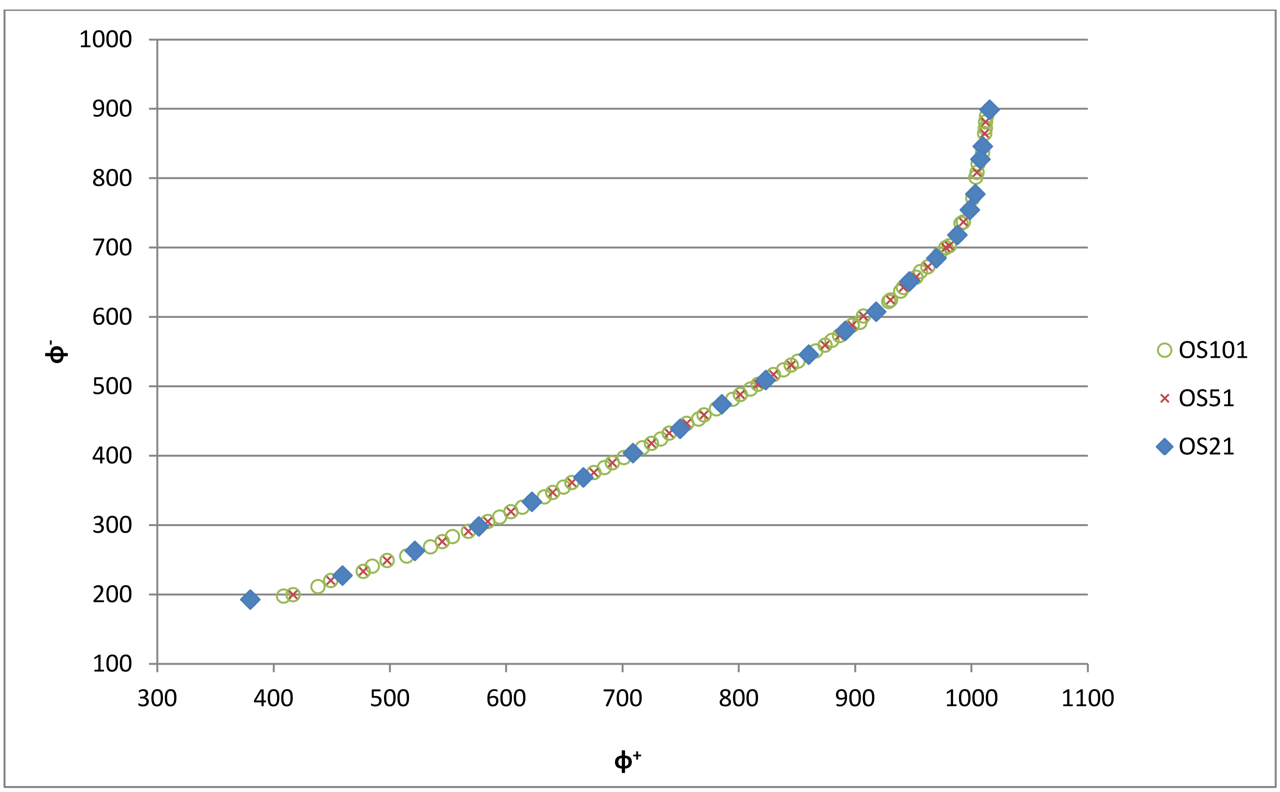
Έργα που επιλέχθηκαν	**Συνολικό κόστος (εκατομμύρια JD)**	**Συνολική αρδευόμενη περιοχή (χιλιάδες εκτάρια)**	**Συνολική παροχή νερού (δισεκατομμύρια m^3)**
54	600	140.81	10.890

Πίνακας 4.3 Συνοπτικά αποτελέσματα

4.3 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ & ΣΥΖΗΤΗΣΗ

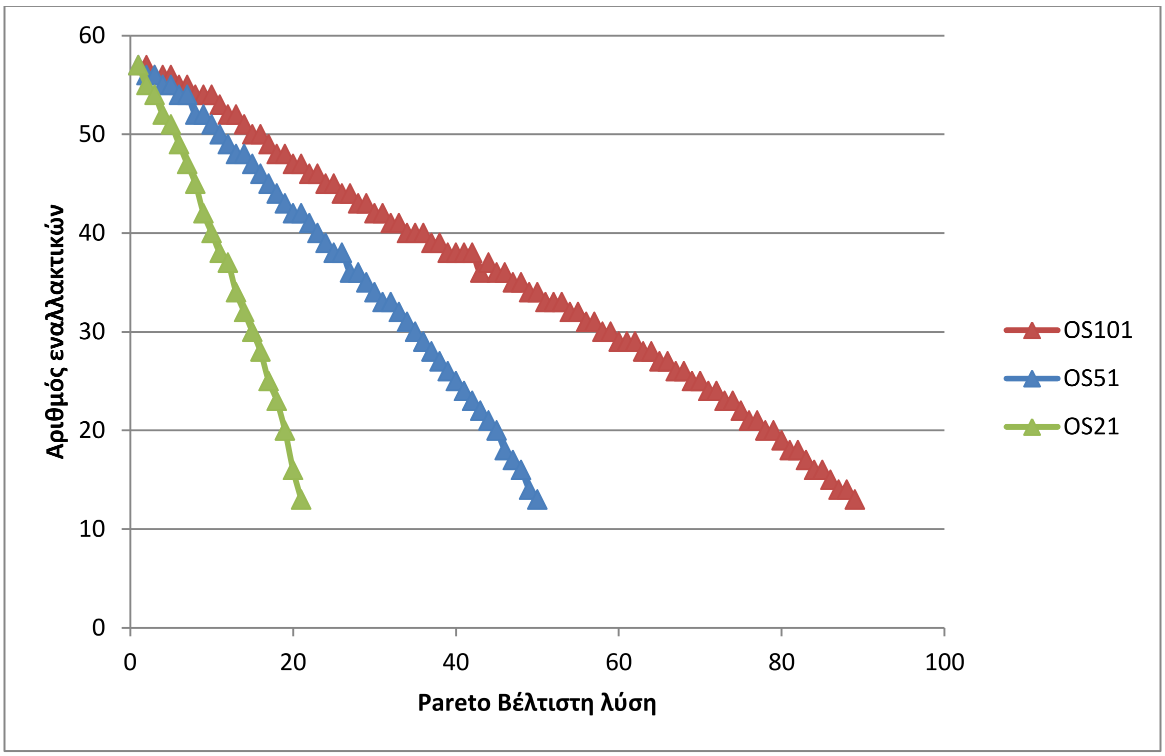
4.3.1 Τρεις περιπτώσεις με διαφορετικό αριθμό αντιπροσωπευτικών κατά Pareto βέλτιστων λύσεων

Το μοντέλο του Κεφαλαίου 4.2 αποτελεί το σενάριο αναφοράς της εργασίας μας. Αρχικά εξετάστηκαν τρία πανομοιότυπα μοντέλα, όπου από τη δεύτερη φάση τους πήραμε 21, 51 και 101 αντιπροσωπευτικές κατά Pareto βέλτιστες λύσεις αντίστοιχα (20, 50, 100 grid points αντίστοιχα). Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.3 δεν υπάρχει κάποια διαφοροποίηση ως προς τις τιμές των θετικών φ^+ και των αρνητικών φ^- ροών, απλά αλλάζει η πυκνότητα των βέλτιστων λύσεων. Παρόμοια συμπεράσματα μπορούν να βγουν και από το Σχήμα 4.4 όπου παρουσιάζεται ο αριθμός των εναλλακτικών που εμφανίζονται σε κάθε βέλτιστη λύση για τις 3 περιπτώσεις. Ο μέγιστος και ο ελάχιστος αριθμός των εμφανίσεων είναι ο ίδιος, κυμαίνονται από 13 μέχρι 57 έργα, αλλά αλλάζει η πυκνότητα των βέλτιστων λύσεων.



Σχήμα 4.3 Οι βέλτιστες λύσεις σε σχέση με τις θετικές φ^+ και αρνητικές φ^- ροές

Μετά την ολοκλήρωση όμως της δεύτερης φάσης παρατηρήθηκαν μικροδιαφορές. Πιο συγκεκριμένα, όπως βλέπουμε στο Πίνακα 4.4 όπου παρουσιάζονται οι εμφανίσεις της κάθε εναλλακτικής στις 3 διαφορετικές περιπτώσεις, παρατηρούμε ότι στην περίπτωση των 21 λύσεων, η εναλλακτική 25 ανήκει στο κόκκινο σύνολο και η εναλλακτική 36 ανήκει στο πράσινο σύνολο, που δεν ισχύει και για τις περιπτώσεις των 51 και 101 κατά Pareto βέλτιστων λύσεων. Επίσης, στην περίπτωση των 101 λύσεων, παρατηρούμε ότι οι εναλλακτικές 4 και 57 δεν αποτελούν μέρος του κόκκινου συνόλου, όπως στις περιπτώσεις των 21 και 51 κατά Pareto βέλτιστων λύσεων.



Σχήμα 4.4 Αριθμός των έργων για κάθε Pareto βέλτιστη λύση για τις 3 περιπτώσεις

Αφού ολοκληρώθηκε και η τρίτη φάση, οι τελικές λύσεις στις 3 διαφορετικές περιπτώσεις διαμορφώθηκαν όπως παρουσιάζονται στο Πίνακα 4.5. Εδώ φαίνεται ξεκάθαρα ότι τελικές λύσεις στις περιπτώσεις των 51 και 101 κατά Pareto βέλτιστων λύσεων είναι ακριβώς οι

	OS21	OS51	OS101		OS21	OS51	OS101
1	21	50	89	**37**	11	24	43
2	0	0	0	**38**	18	44	79
3	2	4	8	**39**	17	39	65
4	0	0	1	**40**	19	47	83
5	2	6	8	**41**	18	42	74
6	0	0	0	**42**	18	45	81
7	2	3	4	**43**	19	42	74
8	19	48	84	**44**	16	35	59
9	2	11	13	**45**	16	38	68
10	3	8	12	**46**	19	46	84
11	5	11	15	**47**	21	50	89
12	1	4	7	**48**	20	49	88
13	8	15	22	**49**	11	26	41
14	7	15	20	**50**	0	0	0
15	16	39	69	**51**	0	0	0
16	4	7	11	**52**	21	50	89
17	8	18	28	**53**	21	50	89
18	10	24	35	**54**	0	0	0
19	21	50	89	**55**	0	0	0
20	2	3	3	**56**	0	0	0
21	12	26	43	**57**	0	0	1
22	11	28	45	**58**	0	0	0
23	12	35	58	**59**	0	0	0
24	20	48	86	**60**	17	41	73
25	0	1	3	**61**	21	50	89
26	5	11	15	**62**	17	40	72
27	12	26	43	**63**	19	45	79
28	5	9	13	**64**	11	28	46
29	5	10	15	**65**	14	30	52
30	0	0	0	**66**	21	50	89
31	16	38	65	**67**	21	50	89
32	20	46	79	**68**	17	42	72
33	9	21	31	**69**	20	48	86
34	8	20	28	**70**	15	35	61
35	8	16	25	**71**	21	50	89
36	21	48	85	**72**	12	30	42

Πίνακας 4.4 Εμφανίσεις στις κατά Pareto βέλτιστες λύσεις

	OS20	OS50	OS100
1	1	1	1
2	0	0	0
3	1	1	1
4	0	0	0
5	1	0	0
6	0	0	0
7	1	1	1
8	1	1	1
9	1	0	0
10	1	1	1
11	1	1	1
12	0	0	0
13	1	1	1
14	1	1	1
15	1	1	1
16	1	1	1
17	1	1	1
18	1	1	1
19	1	1	1
20	0	0	0
21	1	1	1
22	1	1	1
23	1	1	1
24	1	1	1
25	0	0	0
26	1	1	1
27	1	1	1
28	1	0	0
29	1	1	1
30	0	0	0
31	1	1	1
32	1	1	1
33	1	1	1
34	1	1	1
35	1	1	1
36	1	1	1
37	1	1	1
38	1	1	1
39	1	1	1
40	1	1	1
41	1	1	1
42	1	1	1
43	1	1	1
44	1	1	1
45	1	1	1
46	0	1	1
47	1	1	1
48	1	1	1
49	1	1	1
50	0	0	0
51	0	0	0
52	1	1	1
53	1	1	1
54	0	0	0
55	0	0	0
56	0	0	0
57	0	0	0
58	0	0	0
59	0	0	0
60	1	1	1
61	1	1	1
62	1	1	1
63	1	1	1
64	1	1	1
65	1	1	1
66	1	1	1
67	1	1	1
68	1	1	1
69	1	1	1
70	1	1	1
71	1	1	1
72	1	1	1

Πίνακας 4.5 Τελικές λύσεις στις 3 διαφορετικές περιπτώσεις

ίδιες, ενώ για την περίπτωση των 21 λύσεων υπάρχουν κάποιες μικρές διαφορές στην επιλογή των εναλλακτικών.

Πρέπει να σημειωθεί ότι θεωρούνται πράσινες εναλλακτικές όσες παρουσιάζουν 50 εμφανίσεις στην δεύτερη περίπτωση και 89 εμφανίσεις στην τρίτη περίπτωση, για το λόγο ότι μία λύση και 12 λύσεις για την κάθε περίπτωση αντίστοιχα, ήταν όμοιες με κάποιες άλλες.

Έτσι, ως μοντέλο αναφοράς κρατήσαμε την περίπτωση των 51 κατά Pareto βέλτιστων λύσεων, που όπως αποδείξαμε είναι αντιπροσωπευτική. Προτιμάτε από τη λύση των 101 κατά Pareto βέλτιστων λύσεων, αν και θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι παρέχει περισσότερες πληροφορίες, γιατί όπως μπορούμε να δούμε στον Πίνακα 4.6 οι χρόνοι επεξεργασίας παρουσιάζουν διαφορές που για μεγαλύτερα προβλήματα θα είναι πολύ αισθητές.

OS21	OS51	OS101
4,025s	10,389s	16,895s

Πίνακας 4.6 Υπολογιστικοί χρόνοι της δεύτερης φάσης

4.3.2 Τρία σενάρια με διαφορετική βαρύτητα κριτηρίων

Για την περαιτέρω μελέτη του μοντέλου του Κεφαλαίου 4.2, εξετάσαμε ακόμα δύο σενάρια με διαφορετική βαρύτητα των κριτηρίων όπως φαίνονται στον Πίνακα 4.7. Το Case 1 αντιπροσωπεύει την περίπτωση που πήραμε από την εργασία των Al-Shemmeri, Al-Kloub και Pearman και είδαμε στην ανάπτυξη του μοντέλου νωρίτερα. Το Case 2 είναι μια παραλλαγή του Case 1 αλλά με μεγαλύτερη προσήλωση στον οικονομικό παράγοντα και το Case 3 μια παραλλαγή με πιο ανθρωποκεντρική προσέγγιση. Με πράσινο είναι οι συντελεστές βαρύτητας που αυξήθηκαν και με κόκκινο αυτοί που ελαττώθηκαν. Όπως μπορεί να παρατηρηθεί από το Σχήμα 4.5, η γενική μορφή των τριών σεναρίων είναι η ίδια, αλλά αλλάζουν λίγο τα όρια των θετικών φ^+ και αρνητικών φ^- ροών.

Στον Πίνακα 4.8 βλέπουμε τα αποτελέσματα της δεύτερης φάσης και στα τρία σενάρια. Γενικά, παρατηρείται μια σύγκλιση, αφού οι εναλλακτικές 19, 47, 53, 66, 67, 71 ανήκουν στο πράσινο σύνολο και στις τρεις περιπτώσεις και οι εναλλακτικές 2, 30, 50, 51, 55, 56 , 58, 59 ανήκουν στο κόκκινο σύνολο και στις τρεις περιπτώσεις επίσης. Υπάρχουν όμως και διαφοροποιήσεις. Οι εναλλακτική 46 είναι πράσινη στις δύο περιπτώσεις, εκτός από το Case 1, το οποίο είναι και το μόνο που έχει την εναλλακτική 56 κόκκινη και την εναλλακτική 61 πράσινη. Επίσης η εναλλακτική 25 είναι κόκκινη μόνο στο Case 3. Οι περισσότερες διαφοροποιήσεις όμως έχουν να κάνουν με το Case 2. Οι εναλλακτικές 1 και 52 είναι πράσινες στα δύο σενάρια εκτός από το Case 2 και οι εναλλακτικές 4,5 και 54 είναι κόκκινες εκτός από το Case 2. Αυτή η διαφοροποίηση φαίνεται και στο Σχήμα 4.7, όπου παρουσιάζονται σε γράφημα οι εμφανίσεις σε κάθε περίπτωση, ανηγμένες στην ίδια κλίμακα. Σε πολλές περιπτώσεις οι τιμές των Case 1 και 3 συμπίπτουν ή είναι πολύ κοντά, ενώ οι τιμές του Case 2 διαφοροποιούνται, με κυριότερα παραδείγματα τις εναλλακτικές 4 και 54, τα οποία εμφανίζονται μόνο στο Case 2. Η διαφοροποίηση του Case 2 επιβεβαιώνεται και από το Σχήμα 4.6 όπου παρουσιάζονται ο αριθμός των εναλλακτικών σε κάθε βέλτιστη λύση για τα τρία σενάρια.

		Case 1	Case 2	Case 3
C 1	Ground water extraction	2	2	2
C2	Surface water quality	1	1	4
C3	Surface water quantity	1	1	1
C4	Ground water quality	1.5	1.5	4.5
C5	Ground water quantity	1	1	1
C6	Sedimentation	1	1	1
C7	Land quality	0.5	0.5	2.5
C8	Aesthetics	0.5	0.5	0.5
C9	Air quality	0.5	0.5	2.5
C10	Sanitation	2	2	6.5
C 11	Water supply	18.6	10	11
C12	Conservation	1.3	1.3	2.3
C 13	Energy requirement	4.1	10	4.1
C 14	Foreign labour	4.1	2	1.5
C15	Irrigated area	3.08	3.08	3.08
C16	Output	3.08	10	3.08
C17	Efficiency	3.08	3.08	5
C18	Commitment to a comprehensive and stable plan	17.1	10	11.5
C19	Commitment to restructuring of the water sector	8.8	6	12
C20	Utilise demand management	9.7	7	8
C21	Public awareness	7.8	5.5	7
C22	Evaporation	1	1	1
C23	Capital cost	4.1	10	3
C24	Cost recovery	3.08	10	2

Πίνακας 4.7 Τα τρία σενάρια διαφορετικής βαρύτητας των κριτηρίων

OS50	Case 1	Case 2	Case 3
1	50	50	51
2	0	0	0
3	4	9	4
4	0	13	0
5	6	13	4
6	0	21	0
7	3	6	5
8	48	9	48
9	11	1	29
10	8	4	12
11	11	14	13
12	4	7	7
13	15	17	13
14	15	17	12
15	39	36	35
16	7	4	4
17	18	26	12
18	24	13	12
19	50	51	51
20	3	8	2
21	26	32	32
22	28	44	26
23	35	47	30
24	48	42	41
25	1	7	0
26	11	12	13
27	26	32	32
28	9	35	33
29	10	10	16
30	0	0	0
31	38	39	43
32	46	45	49
33	21	23	30
34	20	18	6
35	16	32	16
36	48	48	42

OS50	Case 1	Case 2	Case 3
37	24	25	22
38	44	44	48
39	39	43	21
40	47	48	47
41	42	41	43
42	45	46	49
43	42	42	46
44	35	42	43
45	38	46	46
46	46	51	51
47	50	51	51
48	49	50	50
49	26	28	28
50	0	0	0
51	0	0	0
52	50	49	51
53	50	51	51
54	0	20	0
55	0	0	0
56	0	0	0
57	0	3	14
58	0	0	0
59	0	0	0
60	41	28	46
61	50	29	28
62	40	48	36
63	45	50	47
64	28	44	20
65	30	46	37
66	50	51	51
67	50	51	51
68	42	35	41
69	48	50	48
70	35	35	41
71	50	51	51
72	30	50	40

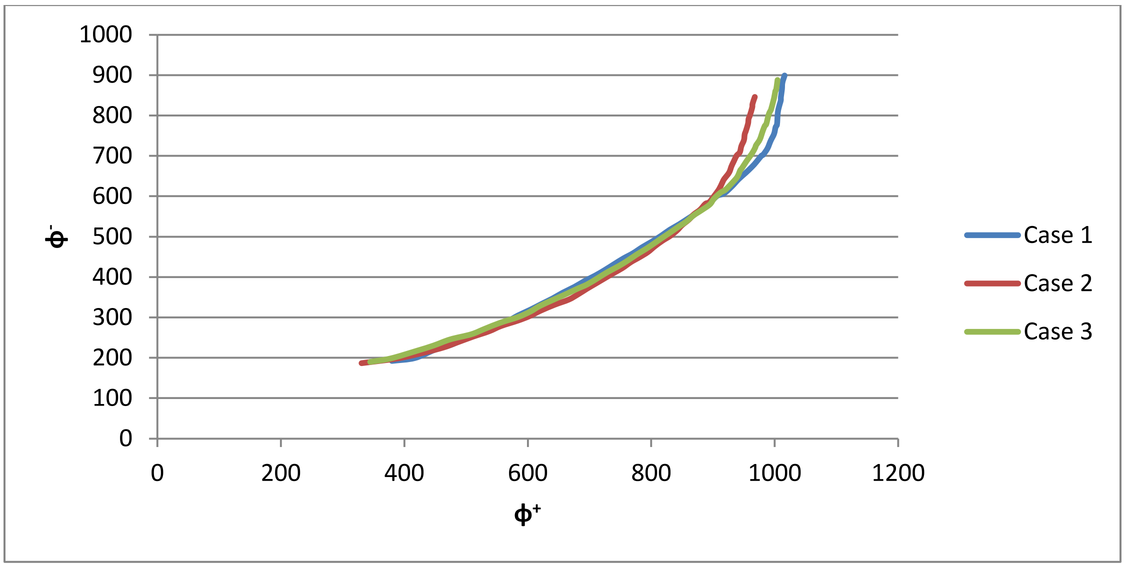
Πίνακας 4.8 Εμφανίσεις στις κατά Pareto βέλτιστες λύσεις στα τρία σενάρια

OS50	Case 1	Case 2	Case 3
1	1	1	1
2	0	0	0
3	1	1	1
4	0	1	0
5	0	1	0
6	0	0	0
7	1	1	1
8	1	0	1
9	0	0	1
10	1	0	1
11	1	1	1
12	0	0	1
13	1	1	1
14	1	1	1
15	1	1	1
16	1	1	1
17	1	1	1
18	1	0	1
19	1	1	1
20	0	1	0
21	1	1	1
22	1	1	1
23	1	1	1
24	1	1	1
25	0	0	0
26	1	1	1
27	1	1	1
28	0	1	1
29	1	1	1
30	0	0	0
31	1	1	1
32	1	1	1
33	1	1	1
34	1	1	1
35	1	1	1
36	1	1	0

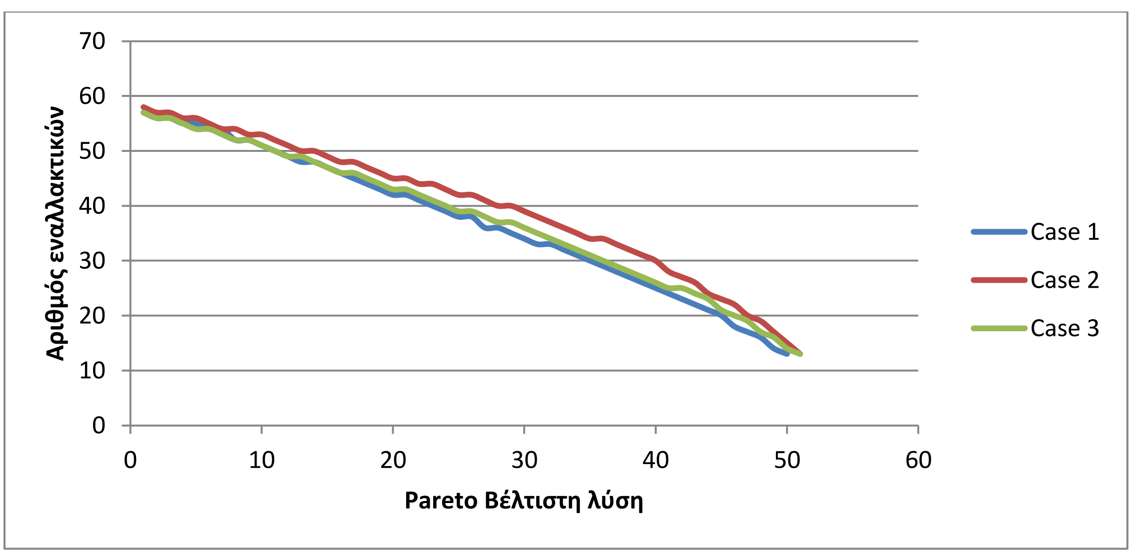
OS50	Case 1	Case 2	Case 3
37	1	1	1
38	1	1	1
39	1	1	1
40	1	1	1
41	1	1	1
42	1	1	1
43	1	1	1
44	1	1	1
45	1	1	1
46	1	1	1
47	1	1	1
48	1	1	1
49	1	1	1
50	0	0	0
51	0	0	0
52	1	1	1
53	1	1	1
54	0	0	0
55	0	0	0
56	0	0	0
57	0	0	0
58	0	0	0
59	0	0	0
60	1	1	1
61	1	1	1
62	1	1	1
63	1	1	1
64	1	1	1
65	1	1	1
66	1	1	1
67	1	1	1
68	1	1	1
69	1	1	1
70	1	1	1
71	1	1	1
72	1	1	1

Πίνακας 4.9 Τελικές λύσεις στα τρία διαφορετικά σενάρια συντελεστών βαρύτητας

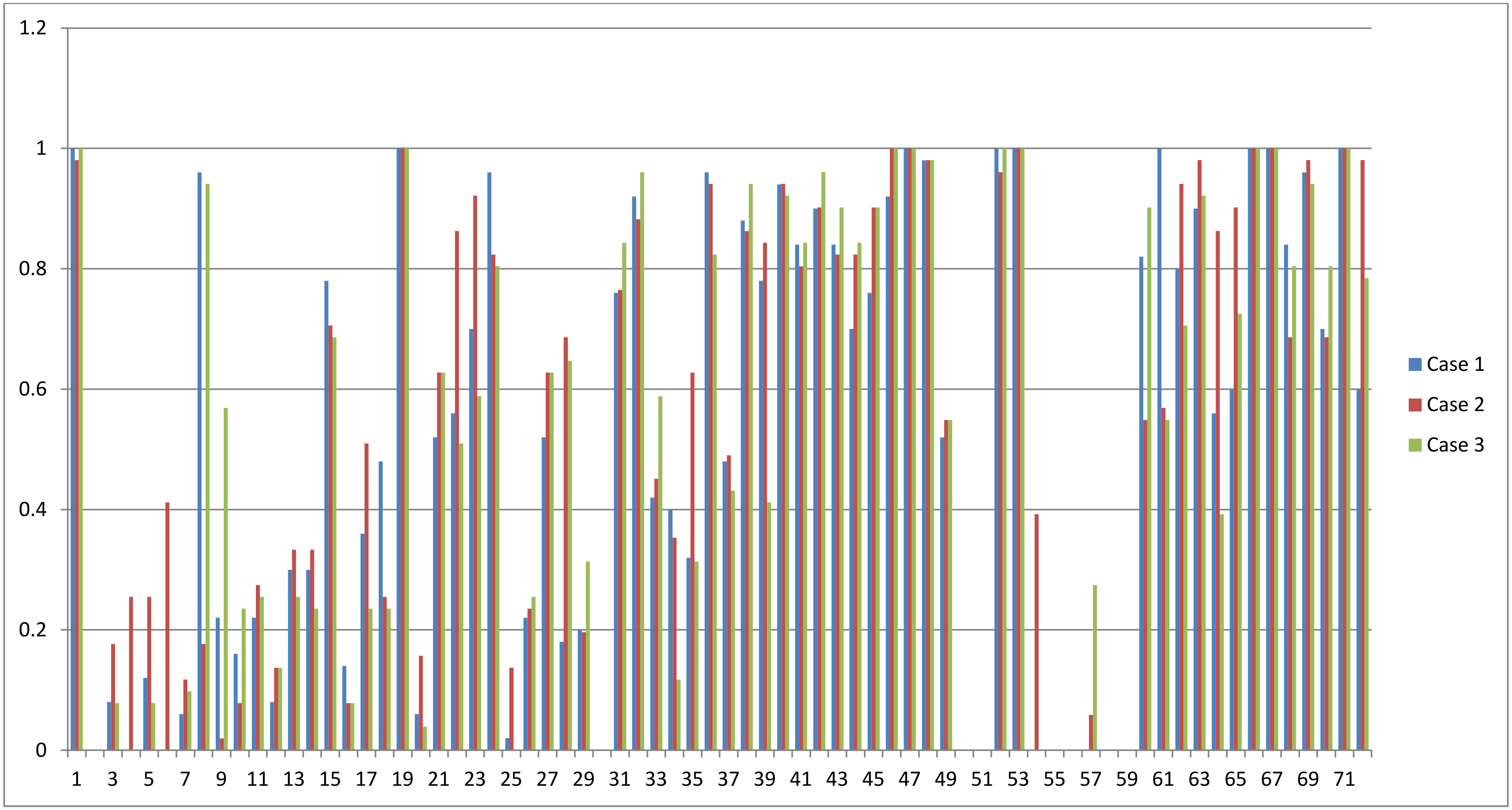
Μετά την ολοκλήρωση και της τρίτης φάσης λαμβάνεται η τελική λύση που παρουσιάζεται στον Πίνακα 4.9. Οι λύσεις των σεναρίων 1 και 3 είναι ίδιες, με μόνη διαφορά ότι στο Case 3 επιλέχθηκαν οι εναλλακτικές 9, 12 και 28 στη θέση της εναλλακτικής 36 που επιλέχθηκε στο Case 1. Το σενάριο 2 έχει περισσότερες διαφορές με το σενάριο αναφοράς. Δεν υπάρχουν στη τελική λύση οι εναλλακτικές 8, 10 και 18 και στη θέση τους υπάρχουν οι 4, 5, 20 και 28. Φαίνεται έτσι ξεκάθαρα η διαφοροποίηση των αποτελεσμάτων της τελικής λύσης όταν αλλάξουν οι συντελεστές βαρύτητας των κριτηρίων.



Σχήμα 4.5 Τα 3 σενάρια σε σχέση με τις θετικές φ^{+} και αρνητικές φ^{-} ροές



Σχήμα 4.6 Αριθμός των έργων σε κάθε Pareto βέλτιστη λύση



Σχήμα 4.7 Εμφανίσεις στα 3 σενάρια ανηγμένες στην ίδια κλίμακα

Τόσο από το Σχήμα 4.7, όσο και από τον Πίνακα 4.8 μπορούμε να δούμε ποια έργα είναι στο πράσινο και στο κόκκινο σύνολο και στα τρία σενάρια. Όσον αφορά την πράσινη ομάδα, τα έργα 19, 47, 53, 66, 67 και 71 ανήκουν σε αυτή και στις τρεις περιπτώσεις. Αυτά θεωρούνται οι «δυνατές» εναλλακτικές του μοντέλου. Όσον αφορά την κόκκινη ομάδα, σε αυτή και στα τρία σενάρια ανήκουν τα έργα 2, 30, 50, 51, 55 ,56 ,58 και 59. Επίσης από τον Πίνακα 4.8 μπορούμε να δούμε ότι 50 έργα είναι στη τελική λύση και στα τρία σενάρια.

4.3.3 Η περίπτωση μόνο με τον περιορισμό του προϋπολογισμού

Μια ακόμα περίπτωση που εξετάσαμε ήταν αυτή της κατάργησης των περιορισμών. Αφήσαμε μόνο τον κύριο περιορισμό του προϋπολογισμού και οι υπόλοιποι περιορισμοί και οι περιορισμοί κατάτμησης αφαιρέθηκαν από το μοντέλο.

Τα αποτελέσματα της δεύτερης φάσης μπορούμε να τα δούμε στον Πίνακα 4.11. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε εύκολα, η κατάργηση των περιορισμών είχε ως αποτέλεσμα μεγαλύτερη ποικιλία των εναλλακτικών, αφού το πράσινο σύνολο αποτελείται από μία μόνο εναλλακτική, σε αντίθεση με τις 9 του πρότυπου σεναρίου. Αντίθετα, οι περισσότερες από τις κόκκινες εναλλακτικές του πρότυπου σεναρίου διατηρούνται, εκτός από δύο. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί λόγω του ότι οι συγκεκριμένες εναλλακτικές έχουν πολύ υψηλό κόστος και επηρεάζονται άμεσα από τον κύριο περιορισμό, τον οποίο διατηρήσαμε στο μοντέλο.

Οι τελική λύση του μοντέλου χωρίς περιορισμούς φαίνεται στον Πίνακα 4.12. Μπορούμε να παρατηρήσουμε πως ο κύριος περιορισμός κρατάει το μεγαλύτερο μέρος της τελικής λύσης ίδιο με αυτό της λύσης του πρότυπου μοντέλου. Βλέπουμε όμως ότι από εκεί και πέρα η απουσία των υπόλοιπων περιορισμών, δημιουργεί διαφορές στην επιλογή των εναλλακτικών-έργων στις δύο τελικές λύσεις.

OS50	Con	No Con
1	50	34
2	0	0
3	4	4
4	0	17
5	6	7
6	0	14
7	3	3
8	48	42
9	11	5
10	8	7
11	11	9
12	4	3
13	15	16
14	15	13
15	39	31
16	7	7
17	18	16
18	24	19
19	50	43
20	3	4
21	26	44
22	28	23
23	35	27
24	48	43
25	1	1
26	11	10
27	26	5
28	9	10
29	10	11
30	0	0
31	38	29
32	46	35
33	21	18
34	20	15
35	16	16
36	48	41

OS50	Con	No Con
37	24	23
38	44	39
39	39	31
40	47	41
41	42	35
42	45	41
43	42	35
44	35	29
45	38	33
46	46	45
47	50	50
48	49	46
49	26	22
50	0	0
51	0	0
52	50	44
53	50	49
54	0	0
55	0	0
56	0	0
57	0	0
58	0	0
59	0	0
60	41	28
61	50	38
62	40	35
63	45	39
64	28	22
65	30	23
66	50	46
67	50	49
68	42	36
69	48	46
70	35	30
71	50	47
72	30	22

Πίνακας 4.11 Εμφανίσεις στις κατά Pareto βέλτιστες λύσεις με περιορισμούς και χωρίς

OS50	Con	No Con
1	1	1
2	0	0
3	1	1
4	0	1
5	0	0
6	0	0
7	1	1
8	1	1
9	0	0
10	1	0
11	1	1
12	0	0
13	1	1
14	1	1
15	1	1
16	1	1
17	1	1
18	1	1
19	1	1
20	0	0
21	1	1
22	1	1
23	1	1
24	1	1
25	0	0
26	1	1
27	1	0
28	0	1
29	1	1
30	0	0
31	1	1
32	1	1
33	1	1
34	1	1
35	1	1
36	1	1

OS50	Con	No Con
37	1	1
38	1	1
39	1	1
40	1	1
41	1	1
42	1	1
43	1	1
44	1	1
45	1	1
46	1	1
47	1	1
48	1	1
49	1	1
50	0	0
51	0	0
52	1	1
53	1	1
54	0	0
55	0	0
56	0	0
57	0	0
58	0	0
59	0	0
60	1	1
61	1	1
62	1	1
63	1	1
64	1	1
65	1	1
66	1	1
67	1	1
68	1	1
69	1	1
70	1	1
71	1	1
72	1	1

Πίνακας 4.12 Τελικές λύσεις με περιορισμούς και χωρίς

4.3.4 Η λύση με PROMETHEE V

Τέλος, επιλύσαμε το μοντέλο μας βάση του αρχικού αναπτύγματος, δηλαδή με την μέθοδο PROMETHEE V. Χρησιμοποιήσαμε ως αντικειμενική συνάρτηση την μεγιστοποίηση της καθαρής φ(α) ροής:

$$\max \sum_{i=1}^{72} \varphi(\alpha) x_i$$

Η τελική λύση φαίνεται στον Πίνακα 4.13 και είναι σαφής η διαφορά με την τελική λύση του πρότυπου μοντέλου. Αν και χρησιμοποιούνται ακριβώς οι ίδιοι περιορισμοί, υπάρχουν έξι διαφορετικές επιλογές εναλλακτικών-έργων. Αυτό βέβαια οφείλεται στο ότι η θετική $\varphi(\alpha^+)$ και η αρνητική $\varphi(\alpha^-)$ ροή περιέχουν περισσότερη πληροφορία από την καθαρή φ(α) ροή που χρησιμοποιείται στην PROMETHEE V.

Στον Πίνακα 4.10 μπορούμε να δούμε τα διαφορετικά έργα που επιλέγηκαν στις δύο περιπτώσεις μαζί με τις θετικές $\varphi(\alpha^+)$, τις αρνητικές $\varphi(\alpha^-)$ και τις καθαρές φ(α) ροές τους. Με κίτρινο χρώμα είναι τα έργα τα οποία έχουν επιλεγεί με την PROMETHEE V2 αλλά όχι με την PROMETHEE V. Βλέπουμε ότι το έργο 1 έχει μια ψηλή καθαρή ροή συγκριτικά και με όλα τα έργα όπως φαίνεται στον Πίνακα Α.3 του Παραρτήματος Α και σε όλες τις περιπτώσεις που εξετάσαμε ήταν στο πράσινο σύνολο της PROMETHEE V2. Παρ' όλα αυτά προτιμούνται έργα με αρνητικές καθαρές ροές από την PROMETHEE V αντί αυτού.

	Έργο	**P. V**	**P. V2**	**$\varphi(\alpha^+)$**	**$\varphi(\alpha^-)$**	**φ(α)**
1	1	0	1	25.326	18.937	6.390
2	5	1	0	8.134473	15.34713	-7.21266
3	7	0	1	3.948303	25.83999	-21.8917
4	12	1	0	6.117347	17.38944	-11.2721
5	25	1	0	6.554249	25.67231	-19.1181
6	28	1	0	9.942092	18.16136	-8.21927

Πίνακας 4.10 Διαφορές έργων στις τελικές λύσεις με PROMETHEE V και V2

Πρέπει να σημειωθεί ότι αναμέναμε η λύση που πήραμε με την PROMETHEE V, να είναι μία από τις αντιπροσωπευτικές κατά Pareto βέλτιστες που εξετάστηκαν από την PROMETHEE V2 αλλά μέχρι και το δείγμα των 101 που εξετάσαμε δεν εμφανίστηκε.

	P. V	P. V2		P. V	P. V2
1	0	1	**37**	1	1
2	0	0	**38**	1	1
3	1	1	**39**	1	1
4	0	0	**40**	1	1
5	1	0	**41**	1	1
6	0	0	**42**	1	1
7	0	1	**43**	1	1
8	1	1	**44**	1	1
9	0	0	**45**	1	1
10	1	1	**46**	1	1
11	1	1	**47**	1	1
12	1	0	**48**	1	1
13	1	1	**49**	1	1
14	1	1	**50**	0	0
15	1	1	**51**	0	0
16	1	1	**52**	1	1
17	1	1	**53**	1	1
18	1	1	**54**	0	0
19	1	1	**55**	0	0
20	0	0	**56**	0	0
21	1	1	**57**	0	0
22	1	1	**58**	0	0
23	1	1	**59**	0	0
24	1	1	**60**	1	1
25	1	0	**61**	1	1
26	1	1	**62**	1	1
27	1	1	**63**	1	1
28	1	0	**64**	1	1
29	1	1	**65**	1	1
30	0	0	**66**	1	1
31	1	1	**67**	1	1
32	1	1	**68**	1	1
33	1	1	**69**	1	1
34	1	1	**70**	1	1
35	1	1	**71**	1	1
36	1	1	**72**	1	1

Πίνακας 4.13 Τελικές λύσεις μοντέλου PROMETHEE V και μοντέλου PROMETHEE V2

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα

Με την παρουσία των περιορισμών κατάτμησης οι εναλλακτικές ενός τυπικού προβλήματος ΠΚΑ δεν είναι πλέον ανεξάρτητες, αφού επιτρέπονται μόνο συγκεκριμένοι συνδυασμοί εναλλακτικών. Έτσι, σε αυτά τα προβλήματα σκοπός δεν είναι η εύρεση των «καλύτερων» εναλλακτικών, αλλά η εύρεση του «καλύτερου» συνδυασμού εναλλακτικών ο οποίος συμμορφώνεται με τους καθορισμένους περιορισμούς κατάτμησης. Ένας πολύ καλός τρόπος για την αντιμετώπιση τέτοιου είδους συνδυαστικών προβλημάτων είναι η χρήση ενός κατάλληλου μοντέλου ΑΠ. Η PROMETHEE V2 είναι μια εξέλιξη των μεθόδων PROMETHEE η οποία περιλαμβάνει την έννοια της ασυγκρισιμότητας μεταξύ των εναλλακτικών στη διαδικασία λήψης απόφασης με ταυτόχρονη παρουσία και περιορισμών κατάτμησης. Το απλό μοντέλο ΑΠ της πρότυπης μεθόδου PROMETHEE V έχει αντικατασταθεί από ένα δικριτηριακό μοντέλο ΑΠ με δύο αντικειμενικές συναρτήσεις, στο οποίο χρησιμοποιούνται τα αποτελέσματα της PROMETHEE I (όπου υπάρχει η έννοια της ασυγκρισιμότητας μεταξύ των εναλλακτικών) για την ανάπτυξη του. Η κύρια καινοτομία της PROMETHEE V2 είναι ότι δεν δίνει απλά ένα βέλτιστο συνδυασμό εναλλακτικών, αλλά ένα σύνολο κατά Pareto βέλτιστων συνδυασμών εναλλακτικών, δίνοντας έτσι μεγαλύτερη ευελιξία στον αποφασίζοντα, τον τροφοδοτεί με περισσότερες γόνιμες πληροφορίες και του δίνει μεγαλύτερο βαθμό ελευθερίας στην τελική επιλογή.

Για την επιλογή ενός και μόνου συνδυασμού εναλλακτικών (του πιο προτιμώμενου ανάμεσα στους Pareto βέλτιστους) αναπτύχθηκε μια μέθοδος η οποία εφαρμόζει τις αρχές της ομοφωνίας και της πλειοψηφίας. Συγκεκριμένα, οι εναλλακτικές που είναι παρούσες σε όλες τις κατά Pareto βέλτιστες λύσεις επιλέγονται αναμφίβολα, οι επιλογές που δεν εμφανίζονται καθόλου απορρίπτονται και στη συνέχεια οι υπόλοιπες εναλλακτικές επιλέγονται ανάλογα με τη συχνότητα που εμφανίζονται με ένα ad hoc μοντέλο ΑΠ.

Η μέθοδος αυτή είναι ιδιαίτερα κατάλληλη για λήψη αποφάσεων από ομάδα αποφασιζόντων, για τον λόγο ότι μπορούν να συνυπολογιστούν οι προτιμήσεις όλων των μελών της ομάδας, βάση των αρχών της ομοφωνίας και της πλειοψηφίας όπως προαναφέραμε. Η μέθοδος PROMETHEE V2 χαρακτηρίζεται από πλήρη διαφάνεια και προσήλωση στο στόχο και είναι τόσο ξεκάθαρη, που γεμίζει τον αποφασίζοντα με αυτοπεποίθηση για την τελική του επιλογή. Είναι μια μέθοδος που δίνει στον αποφασίζοντα να καταλάβει τον ρόλο του στη διαδικασία λήψης της απόφασης και τις συνέπειες των αποφάσεων του στο τελικό αποτέλεσμα.

Η PROMETHEE V2 εφαρμόστηκε στο πρόβλημα της επιλογής έργων για τον στρατηγικό σχεδιασμό των υδάτινων πόρων στην Ιορδανία. Από την εφαρμογή καταδεικνύεται ότι δεν χρειάζεται να εξεταστεί πολύ μεγάλος αριθμός αντιπροσωπευτικών κατά Pareto βέλτιστων συνδυασμών για να προσδιοριστεί ο πιο προτιμώμενος. Από τη μελέτη σε μοντέλα με διαφορετικό αριθμό αντιπροσωπευτικών κατά Pareto βέλτιστων συνδυασμών είδαμε ότι μπορεί να προσδιοριστεί η ίδια τελική λύση με μικρότερο αριθμό συνδυασμών, γεγονός που συνεπάγεται μικρότερο υπολογιστικό χρόνο και μικρότερη απαιτούμενη υπολογιστική ισχύ.

Οποιαδήποτε ουσιαστική μεταβολή στους συντελεστές βαρύτητας ή μεταβολή στους περιορισμούς του προβλήματος, επιφέρει μεταβολή στη τελική λύση του προβλήματος. Η PROMETHEE V2 μέσα από αυτές τις μεταβολές μπορεί να ξεχωρίσει τις «δυνατές» εναλλακτικές που παρ’ όλες τις μεταβολές παραμένουν πάντα, όχι μόνο στην τελική λύση, αλλά και στο πράσινο σύνολο των εναλλακτικών.

Η PROMETHEE V2 χρησιμοποιεί τις θετικές $φ(α^+)$ και αρνητικές $φ(α^-)$ ροές για την ανάπτυξη του μοντέλου ΑΠ, οι οποίες περιέχουν περισσότερη πληροφορία από την καθαρή φ(α) ροή που χρησιμοποιεί η PROMETHEE V. Εκτός αυτού η καθαρή φ(α) ροή είναι και πιο δύσχρηστη λόγω των αρνητικών τιμών που μπορεί να λαμβάνει και δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν χωρίς να τροποποιηθούν στο μοντέλο του ΑΠ.

Όπως είδαμε στην παρούσα εργασία μια ομάδα εμπειρογνωμόνων λαμβάνοντας υπ' όψιν όλες τις παραμέτρους αποφάσισε συλλογικά τους συντελεστές βαρύτητας των κριτηρίων. Στην μέθοδο PROMETHEE V2 όμως, υπάρχει η δυνατότητα η πρώτη φάση (PROMETHEE I) και η δεύτερη φάση (δικριτηριακό πρόβλημα ΑΠ) να γίνει ξεχωριστά για κάθε αποφασίζοντα και στην τρίτη φάση να εξεταστούν όλοι οι κατά Pareto βέλτιστοι συνδυασμοί που προκύπτουν. Σε μια μελλοντική εργασία μπορεί να μελετηθεί αυτή η περίπτωση. Επίσης, για την διαχείριση της αβεβαιότητας που μπορεί να υπάρχει στους συντελεστές βαρύτητας ή σε άλλες παραμέτρους του μοντέλου προτίμησης (π.χ. κατώφλια αδιαφορίας), μπορεί σε μελλοντική εργασία να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Monte Carlo, η οποία χρησιμοποιεί μια κατηγορία υπολογιστικών αλγορίθμων που στηρίζονται σε επαναλαμβανόμενες τυχαίες δειγματοληψίες για τον υπολογισμό των αποτελεσμάτων της.

Βιβλιογραφία

1. Ζοπουνίδης Κ., Βασικές Αρχές και Σύγχρονα Θέματα του Χρηματοοικονομικού Μάνατζμεντ, εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2003, σελ. 331.
2. Διακουλάκη Δ., Ανάλυση Συστημάτων και Λήψη Αποφάσεων, Ε.Μ.Π., 2003, σελ. 33-78.
3. M. Behzadian, R.B. Kazemzadeh, A. Albadvi, M. Aghdasi, Decision Support. PROMETHEE: A comprehensive literature review on methodologies and applications. European Journal of Operational Research 200, 2010, p. 198–215.
4. Unit of Enviromental Science and Technology (UEST), Έκθεση σχετικά με τις μεθόδους πολυκριτηριακής ανάλυσης, Development of best management systems for high priority waste streams in Cyprus, LIFE03 TCY/CY/000018, N.T.U.A., 2005.
5. Γιαλαμά Δ., Συνδυασμός πολυκριτηριακής ανάλυσης και μαθηματικού προγραμματισμού στην επιλογή επενδυτικών σχεδίων: Η Μέθοδος PROMETHEE VI, Ε.Μ.Π., 2005.
6. D. Diakoulaki, C.H. Antunes, A.G. Martins, MCDA and Energy Planning, Multiple Criteria Decision Analysis: State Of The Art Surveys, International Series in Operations Research & Management Science, 2005, Volume 78, VII, 859-890.
7. D. Diakoulaki, S. Grafakos, Externalities of Energy: Extension of Accounting Framework and Policy Applications, N.T.U.A, 2004.
8. M. Riabacke, M. Danielson, L. Ekenberg, A. Larsson, A Prescriptive Approach for Eliciting Imprecise Weight Statements in an MCDA Process, ADT '09 Proceedings of the 1st International Conference on Algorithmic Decision Theory, 2009, p. 168-179.
9. D. Bouyssou, Entry 'Outranking Methods', in "Encyclopedia of Optimization", C.A. Floudas, P.M. Pardalos (eds.), Kluwer, 2001, vol. 4, 249–255.
10. E. Georgopoulou, Y. Sarafidis, D. Diakoulaki, Design and implementation of a group DSS for sustaining renewable energies exploitation, European Journal of Operational Research 109, 1998, p. 483-500.
11. Μαυρωτάς Γ., Πολυκριτηριακός Προγραμματισμός σε Συνθήκες Αβεβαιότητας, Κατασκευή Συστήματος Υποστήριξης Αποφάσεων και Εφαρμογή στον Ενεργειακό Σχεδιασμό, Διδακτορική Διατριβή, Ε.Μ.Π., Τμήμα Χημικών Μηχανικών, Αθήνα 2000
12. F.S. Hillier, G.J. Lieberman, Introduction To Operations Research, 6th ed. McGraw-Hill, 1995, p. 494-541.

13. C.L. Hwang, A. Masud, Multiple Objective Decision Making. Methods and Applications: A state of the art survey. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems Vol. 164. Springer-Verlag, Berlin, 1979.
14. Αλιβιζάτος Σ., Εφαρμογές Πολυκριτηριακού Μαθηματικού Προγραμματισμού με τη χρήση της γλώσσας μοντελοποίησης GAMS, Ε.Μ.Π., 2011.
15. G. Mavrotas, Generation of efficient solutions in Multiobjective Mathematical Programming problems using GAMS. Effective implementation of the ε-constraint method, Applied Mathematics and Computation, 2009, 213, p. 455-465.
16. P. Xidonas, G. Mavrotas, C. Zopounidis, I. Psarras IPSSIS: An integrated multicriteria decision support system for equity portfolio construction and selection, European Journal of Operational Research, vol. 210, no. 2, 2011, 398 - 409.
17. F. Moussouni, T. V. Tran, S. Brisset, P. Brochet, Optimization methods, Exhaustive Enumeration (EE) method, EC Lille, France, 2007.
18. G. Mavrotas, D. Diakoulaki, Multi-criteria branch and bound: A vector maximization algorithm for Mixed 0-1 Multiple Objective Linear Programming, Volume 171, Issue 1, 2005, p. 53–71.
19. N. Kokash, An introduction to heuristic algorithms, Department of Informatics and Telecommunications, University of Trento, Italy, 2008.
20. M.F. Abu-Taleb, B. Mareschal, Water resources planning in the Middle East: Application of the PROMETHEE V multicriteria method, European Journal of Operational Research 81, 1995, p. 500-511.
21. G. Mavrotas, S. Rozakis, Extensions of the PROMETHEE method to deal with segmentation constraints: Application in a students' selection problem, Journal of Decision Sciences 18(2), 2009, p. 203-209.
22. T. Al-Shemmeri, B. Al-Kloub, A. Pearman, Computer aided decision support system for water strategic planning in Jordan, European Journal of Operational Research 102, 1997, p. 455-472.

Παράρτημα Α

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12
1	0	3	120	30	5	2	4	5	3	0	952	0
2	0	1	0	3	0	0.25	5	5	3	0	98	0
3	3	0	6	3	3	0.07	4	5	3	0	16.8	0
4	2	3	5	3	2	0.25	5	5	3	0	56	0
5	0	0	0	3	5	0.5	3	4	3	0	70	0
6	0	3	12	3	4	0.5	3	5	3	0	168	0
7	0	3	4	3	3	0.4	5	5	3	0	11.2	0
8	0	4	12	4	8	1.5	6	6	3	0	168	0
9	0	3	10	3	0	0	3	4	4	20	34.4	0
10	0	3	4	3	4	0	4	4	4	4	12	0
11	0	3	0.5	3	0	0	3	4	4	0.5	0	0.5
12	0	3	4.5	3	0	0	3	4	4	0.5	0	4.5
13	0	2	0	1	0	0	4	4	4	0	140	0
14	0	2	0	1	0	0	4	4	4	0	70	0
15	0	2	10	1	0	0	6	6	4	0	0	10
16	10	2	10	2	0	0	5	4	4	0	28	0
17	12	0	0	0	0	0	3	4	4	0	168	0
18	0	2	0	2	0	0	4	4	4	0	280	0
19	0	3	20	4	10	0	5	4	4	0	280	20
20	10	2	0	2	0	0	4	4	4	0	140	0
21	0	2	0	3	7	0	4	4	4	0	140	0
22	0	2	0	3	2	0	4	4	4	0	28	0
23	0	2	0	3	1	0	4	4	4	0	70	0
24	0	2	20	2	0	0	4	4	4	0	56	0
25	75	2	0	0	1	0	4	3	4	0	140	0
26	0	3	0.2	3	0	0	3	5	4	0	10	0
27	0	3	7	3	0	0	4	5	4	6	24	0
28	0	4	2	3	0	0	4	5	4	70	7	0
29	0	3	3	3	0	0	4	5	4	4	18	0
30	0	4	0	4	0	0	5	5	6	0	0	0
31	0	3	20	3	0	0	5	5	4	0	200	20
32	0	4	17	3	0	0	5	5	4	0	250	17
33	0	4	12	3	8	0.1	4	4	3	0	36	10
34	20	0	0	0	0	0	3	5	4	0	280	0

35	0	0	0	0	0	0	3	2	3	0	30	0
36	7	3	28	2	5	3	5	5	3	0	345	0
37	9	2	4	0	9	0	5	6	2	0	55	0
38	0	3	6	4	0	0	3	2	4	90	8	0
39	2	0	0	0	0	0	3	3	0	0	50	4
40	0	3	15	4	0	0	3	3	3	22	15	4
41	0	4	2	4	1	0	3	3	3	9	4	1
42	0	4	4	4	3	0	5	6	4	100	15	2
43	0	4	10	4	3	0	3	4	3	50	30	3
44	0	4	15	4	2	0	3	4	3	40	50	4
45	0	4	4	4	1	0	4	4	4	100	12	0
46	0	4	30	4	0	0	4	4	4	70	170	12
47	0	4	22	4	2	0	4	4	4	0	220	22
48	3	5	4	4	50	0	4	6	4	100	50	4
49	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
50	0	0	0	0	0	0	6	6	3	0	200	0
51	0	0	0	0	0	0	6	6	6	0	50	0
52	0	4	120	4	5	2	6	6	5	0	1000	0
53	0	4	25	4	6	1	6	6	5	0	500	0
54	0	0	0	0	15	3	6	6	6	0	45	0
55	0	0	20	4	4	0	6	6	6	0	23	0
56	0	4	13	4	0	4	6	6	4	0	60	0
57	0	4	20	4	13	0	6	6	4	0	30	0
58	0	4	50	0	0	0	3	4	3	0	50	0
59	0	4	200	0	0	3	6	6	6	0	200	0
60	50	2	50	3	50	0	5	4	3	0	700	50
61	50	0	0	3	50	0	2	1	1	0	700	50
62	0	3	0	3	0	0	4	1	1	0	70	10
63	0	3	0	3	0	0	4	1	1	0	100	0
64	5	0	5	3	0	0	2	1	1	2	70	5
65	0	3	7	3	7	0	6	6	1	0	0	7
66	40	0	30	4	40	0	2	1	1	0	980	70
67	40	0	30	4	40	0	2	1	1	0	980	70
68	0	2	0	2	0	0	2	1	1	10	0	0
69	12	3	12	3	12	0	2	1	1	0	168	12

70	0	2	0	2	0	0	2	1	6	0	0	0
71	40	2	30	3	40	0	2	1	1	0	980	0
72	4	3	4	3	4	0	2	1	1	0	350	25
direction	min	max	max	max	max	min	max	max	max	max	max	max
type	3	4	3	4	3	3	4	4	4	3	3	3
q (or s)		0.5		0.5			1.5	0.5	1.5			
p	30.0	1.5	40	1.5	25	0.6	2.5	1.5	3.5	12.0	513.5	35.0
weight	2.0	1.0	1.0	1.5	1.0	1.0	0.5	0.5	0.5	2.0	18.6	1.3

Πίνακας Α.1 Επιδόσεις των έργων στα κριτήρια C1-C12

	C13	C14	C15	C16	C17	C18	C19	C20	C21	C22	C23	C24
1	200	50	3.5	7	0	51.5	13.8	0	0	5	50	70
2	500	0	3	6	0	33.7	13.8	0	0	6	30	20
3	5	0	0.3	0.6	0	29.5	13.8	0	0	6	3	30
4	12	0	0.05	1	0	78.77	13.8	0	0	6	4	50
5	10	0	0	1	0	62.97	13.8	0	0	0	15	30
6	12	0	0	4	0	71.27	13.8	0	0	6	40	80
7	15	0	0.3	1	0	26.2	13.8	0	0	5	4	10
8	0	0	0.1	0	0	95	13.8	0	0	1	15	5
9	100	5	0.1	2	0	74.27	13.8	0	0	5	25	10
10	100	0	0.05	1	0	58.47	13.8	0	0	5	10	10
11	0	0	0.06	0.1	0	58.47	13.8	0	0	5	3	10
12	0	0	0.45	0.8	0	58.47	13.8	0	0	5	10	8
13	100	0	0	0	0	66.7	13.8	0	0	2	7	20
14	50	0	0	0	0	66.7	13.8	0	0	3	4	20
15	0	0	1	2	10	61.27	24	10	0	0	6	10
16	300	0	1	2	0	49.67	13.8	0	0	5	3	10
17	36	0	0	4	0	65.97	13.8	0	0	3	6	50
18	300	0	0	4	0	66.87	13.8	0	0	0	20	20
19	0	0	100	2	20	67.07	13.8	0	0	0	6	0
20	100	0	0	2	0	17.5	13.8	0	0	0	10	30
21	0	0	0	1.2	7	70.47	13.8	10	0	4	10	100
22	0	0	0	0.4	2	54.27	13.8	10	0	4	9	100
23	0	0	0	0.2	1	54.27	13.8	10	0	4	5	100
24	0	0	2	4	20	78.77	13.8	10	0	2	4.5	10
25	250	0	0	10	0	35.1	13.8	0	0	4	13	50
26	20	0	0.1	0.2	0.2	58.47	13.8	0	0	4	3.5	10
27	200	0	0.7	1.3	7	58.47	13.8	0	0	4	13	10
28	20	40	0.1	0.4	2	58.47	13.8	0	0	4	15	100
29	80	0	0.2	0.6	3	58.47	13.8	0	0	5	6	8
30	0	0	0	0	0	76.07	13.8	0	0	0	5000	0
31	17	0	2	4	20	42	13.8	10	0	0	12	10
32	20	0	3	4.5	17	42	13.8	10	0	0	13	15
33	20	0	3	4	5	42	13.8	10	0	0	22	30
34	150	0	0	4	0	58.47	13.8	0	0	0	16	40

35	0	0	0	0.8	0	67	20	0	0	4	3	80
36	100	55	4	9	0	95	13.8	0	0	0	55	70
37	25	40	1	1	0	92	20	0	0	4	9	40
38	2	0	0	0.3	3	90	20	0	0	4	4.5	60
39	5	0	0	2	3	92	13.8	0	0	4	10	90
40	1	0	0.1	2	3	95	13.8	0	0	3	6	70
41	0.5	0	0.1	0.4	1	90	13.8	0	0	4	7	60
42	0.5	0	1	0.5	1	93	13.8	0	0	4	10	60
43	0.5	0	1.5	3	0	80	13.8	0	0	4	22	65
44	50	0	2	2	2	73	13.8	0	0	4	15	80
45	2	0	1.5	0.6	3	78	13.8	0	0	4	5	75
46	5	0	6	5	20	95	13.8	0	0	4	60	90
47	3	0	2	5	25	90	13.8	10	0	2	22	80
48	1	0	0.5	3	0	100	13.8	0	0	2	5.5	80
49	0	0	0	0	0	20	100	15	50	6	1	0
50	500	100	0	5	0	70	13.8	0	0	3	780	100
51	0	50	0	7	0	90	13.8	0	0	4	3000	60
52	250	50	4	7.5	0	80	13.8	0	0	4	60	60
53	4	100	3	7	0	75	20	0	0	4	20	100
54	0	0	4	8	0	60	13.8	0	0	2	55	100
55	625	100	4	8	0	66	13.8	0	0	4	1000	100
56	0	0	5	5	0	60	13.8	0	0	0	200	70
57	20	0	3	5	0	60	13.8	0	0	0	40	40
58	500	100	0	7	0	60	13.8	0	0	0	1000	50
59	700	200	0	9	0	60	13.8	0	0	0	8000	70
60	0.2	-1000	-5	-25	0	36.77	13.8	0	0	0	0	0
61	0	-1000	-5	-25	0	54.87	13.8	0	0	0	3	0
62	0	0	0	1	0	70.07	24.5	0	0	0	4	100
63	0	0	2.5	12	25	53.77	37.9	0	0	0	1	1000
64	0	0	0	0	0	74.87	13.8	0	0	0	7	100
65	0	0	0.5	2.5	0	48.1	24.3	0	100	3	2	100
66	-20	0	0	3.7	0	26.1	47.3	20	0	0	2	100
67	0	0	0	3.7	0	30	47.3	20	0	0	2	100
68	0	0	0	5	0	48	47.3	25	0	0	2	0
69	12.5	0	1.3	3	0	48.1	47.3	20	0	0	2	100

70	0	0	0	5	0	48.4	47.3	15	0	0	7	0
71	20	0	0	37	70	44	81.3	0	0	0	1	100
72	0	0	2.5	6.3	0	0	47.3	0	0	0	1	100
direction	min	min	max	max	max	max	max	max	max	min	min	max
type	3.0	1.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	1.0	1.0	1.0	3.0	3.0
q (or s)												
p	375.0		22.23	40.0	30.0	43.17	25.60				215.13	60.0
weight	4.1	4.1	3.08	3.08	3.08	17.1	8.8	9.7	7.8	1.0	4.1	3.08

Πίνακας Α.2 Επιδόσεις των έργων στα κριτήρια C13-C24

	φ(α$^+$)	φ(α$^-$)	φ(α)
1	25.326	18.937	6.390
2	5.187	26.595	-21.408
3	3.988	24.944	-20.956
4	11.990	12.641	-0.651
5	8.134	15.347	-7.213
6	13.295	12.316	0.979
7	3.948	25.840	-21.892
8	19.747	11.044	8.703
9	11.070	18.037	-6.968
10	6.371	17.653	-11.282
11	6.018	17.449	-11.430
12	6.117	17.389	-11.272
13	9.934	15.007	-5.074
14	8.437	15.377	-6.940
15	18.917	14.861	4.056
16	4.723	22.693	-17.969
17	10.822	14.816	-3.994
18	13.933	15.309	-1.376
19	20.910	11.132	9.778
20	6.310	26.327	-20.017
21	21.081	9.956	11.125
22	15.278	14.756	0.522
23	15.887	14.076	1.812
24	21.422	11.618	9.804
25	6.554	25.672	-19.118
26	6.119	16.894	-10.774
27	7.383	17.742	-10.359
28	9.942	18.161	-8.219
29	6.695	17.242	-10.548
30	10.840	17.543	-6.704
31	19.612	16.357	3.254
32	21.076	15.937	5.139
33	14.743	18.096	-3.353
34	12.320	16.994	-4.674
35	10.259	14.930	-4.671
36	25.493	14.437	11.056

	φ(α$^+$)	φ(α$^-$)	φ(α)
37	16.694	16.232	0.462
38	18.760	11.439	7.322
39	15.743	12.652	3.090
40	19.163	10.904	8.260
41	16.533	11.840	4.693
42	18.623	10.633	7.990
43	15.082	11.411	3.671
44	13.962	11.649	2.314
45	14.775	11.491	3.284
46	25.503	8.540	16.963
47	31.840	6.845	24.995
48	22.791	9.266	13.525
49	27.704	27.240	0.464
50	12.915	23.101	-10.186
51	14.611	19.710	-5.099
52	31.076	14.230	16.847
53	28.014	12.722	15.292
54	9.841	16.498	-6.657
55	9.715	24.333	-14.619
56	10.325	16.845	-6.520
57	9.547	14.402	-4.855
58	7.390	25.981	-18.590
59	11.922	25.341	-13.420
60	26.866	22.445	4.421
61	26.881	18.893	7.987
62	14.680	11.322	3.357
63	20.452	13.276	7.176
64	12.593	12.260	0.333
65	18.605	17.098	1.507
66	42.678	17.736	24.943
67	42.587	16.800	25.787
68	23.716	17.618	6.097
69	27.919	13.116	14.803
70	21.935	17.938	3.996
71	38.955	14.519	24.436
72	23.290	23.112	0.178

Πίνακας Α.3 Ροές PROMETHEE I

Φ+	Φ-	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
1015.798	898.698	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1012.287	881.141	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1011.515	864.432	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1009.879	845.872	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1009.686	836.934	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1007.862	827.324	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
1004.973	808.344	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1003.497	777.048	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1001.32	771.236	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
998.774	754.355	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
993.207	736.989	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
988.076	718.117	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
981.07	702.646	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1
978.134	699.956	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1
970	684.609	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1
962.699	672.262	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1
952.44	657.332	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0
941.618	642.516	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0
930.548	624.479	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0
918.228	607.485	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0
907.258	601.367	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0
897.613	587.973	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
886.791	573.157	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
874.274	559.324	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
860.265	545.588	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
845.154	530.608	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
829.89	517.024	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
816.69	502.91	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
801.412	488.154	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
785.525	474.078	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0

770.214	458.796	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
755.357	446.569	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
740.267	432.502	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
724.989	417.746	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
709.102	403.67	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
691.415	389.74	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
675.528	375.664	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
656.612	361.331	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
640.079	347.014	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
622.225	333.483	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
604.159	319.25	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
584.278	305.082	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
567.612	290.964	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
545.103	276.1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
521.595	262.685	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
497.707	248.85	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
477.171	233.184	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
449.252	220.068	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
416.839	199.618	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
380.062	192.545	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		50	0	4	0	6	0	3	48	11	8	11	4	15	15	39	7	18	24	50	3	26	28	35	48	1	11	26	9	10	0	38	46	21	20	16

36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
48	24	44	39	47	42	45	42	35	38	46	50	49	26	0	0	50	50	0	0	0	0	0	0	41	50	40	45	28	30	50	50	42	48	35	50	30

Πίνακας Α.4 Κατά Pareto βέλτιστες λύσεις του προβλήματος ΑΠ

Παράρτημα Β

B.1 Μοντέλο δεύτερης φάσης στο GAMS

```
$eolcom //

SETS
I  projects          /1*72/
J  flows             /FP, FM/

TL(I)    projects dealing with Technical Options Local          /1*48/
TR(I)    projects dealing with Technical Options Regional       /49*59/
M(I)     projects dealing with Managerial Options               /60*65/
P(I)     projects dealing with Pricing Options                  /66*70/
R(I)     projects dealing with Regulatory Options               /71*72/

k    objective functions              / FP, FM /

$set min -1
$set max +1
Parameter dir(k) direction of the objective functions
                              / FP %max%, FM %min% /
;

TABLE flows(I,J)
       FP        FM
1      25.326    18.937
2      5.187     26.595
3      3.988     24.944
4      11.990    12.641
5      8.134     15.347
6      13.295    12.316
7      3.948     25.840
8      19.747    11.044
9      11.070    18.037
10     6.371     17.653
11     6.018     17.449
12     6.117     17.389
13     9.934     15.007
14     8.437     15.377
15     18.917    14.861
16     4.723     22.693
17     10.822    14.816
18     13.933    15.309
19     20.910    11.132
20     6.310     26.327
21     21.081    9.956
22     15.278    14.756
```

23	15.887	14.076
24	21.422	11.618
25	6.554	25.672
26	6.119	16.894
27	7.383	17.742
28	9.942	18.161
29	6.695	17.242
30	10.840	17.543
31	19.612	16.357
32	21.076	15.937
33	14.743	18.096
34	12.320	16.994
35	10.259	14.930
36	25.493	14.437
37	16.694	16.232
38	18.760	11.439
39	15.743	12.652
40	19.163	10.904
41	16.533	11.840
42	18.623	10.633
43	15.082	11.411
44	13.962	11.649
45	14.775	11.491
46	25.503	8.540
47	31.840	6.845
48	22.791	9.266
49	27.704	27.240
50	12.915	23.101
51	14.611	19.710
52	31.076	14.230
53	28.014	12.722
54	9.841	16.498
55	9.715	24.333
56	10.325	16.845
57	9.547	14.402
58	7.390	25.981
59	11.922	25.341
60	26.866	22.445
61	26.881	18.893
62	14.680	11.322
63	20.452	13.276
64	12.593	12.260
65	18.605	17.098
66	42.678	17.736
67	42.587	16.800
68	23.716	17.618
69	27.919	13.116

```
70      21.935      17.938
71      38.955      14.519
72      23.290      23.112
;

SCALAR
maxinvestment    maximum investment in million Jordanian Dinars          /600/
irarea           minimum irrigated area in thousan hectars               /110/
wsupmin          minimum water supply million cubic meters (MCM)         /8000/
;

PARAMETER Cost(I)
/
1       50
2       30
3       3
4       4
5       15
6       40
7       4
8       15
9       25
10      10
11      3
12      10
13      7
14      4
15      6
16      3
17      6
18      20
19      6
20      10
21      10
22      9
23      5
24      4.5
25      13
26      3.5
27      13
28      15
29      6
30      5000
31      12
32      13
33      22
34      16
```

35	3
36	55
37	9
38	4.5
39	10
40	6
41	7
42	10
43	22
44	15
45	5
46	60
47	22
48	5.5
49	1
50	780
51	3000
52	60
53	20
54	55
55	1000
56	200
57	40
58	1000
59	8000
60	0
61	3
62	4
63	1
64	7
65	2
66	2
67	2
68	2
69	2
70	7
71	1
72	1
/
;

PARAMETER IArea(I)
/
1	3.5
2	3
3	0.3
4	0.05

5	0
6	0
7	0.3
8	0.1
9	0.1
10	0.05
11	0.06
12	0.45
13	0
14	0
15	1
16	1
17	0
18	0
19	100
20	0
21	0
22	0
23	0
24	2
25	0
26	0.1
27	0.7
28	0.1
29	0.2
30	0
31	2
32	3
33	3
34	0
35	0
36	4
37	1
38	0
39	0
40	0.1
41	0.1
42	1
43	1.5
44	2
45	1.5
46	6
47	2
48	0.5
49	0
50	0
51	0

```
52      4
53      3
54      4
55      4
56      5
57      3
58      0
59      0
60      -5
61      -5
62      0
63      2.5
64      0
65      0.5
66      0
67      0
68      0
69      1.3
70      0
71      0
72      2.5
/
;

PARAMETER Wsupply(I)
/
1       952
2       98
3       16.8
4       56
5       70
6       168
7       11.2
8       168
9       34.4
10       12
11       0
12       0
13       140
14       70
15       0
16       28
17       168
18       280
19       280
20       140
21       140
```

22	28
23	70
24	56
25	140
26	10
27	24
28	7
29	18
30	0
31	200
32	250
33	36
34	280
35	30
36	345
37	55
38	8
39	50
40	15
41	4
42	15
43	30
44	50
45	12
46	170
47	220
48	50
49	0
50	200
51	50
52	1000
53	500
54	45
55	23
56	60
57	30
58	50
59	200
60	700
61	700
62	70
63	100
64	70
65	0
66	980
67	980
68	0

```
69      168
70      0
71      980
72      350
/
;


Variables
z(k)      objective function variables
;

BINARY VARIABLES
X
;

EQUATIONS
objFP    objective for maximizing leaving flows
objFM    objective for minimizing entering flows

EQ_FCON1       constraint 1
EQ_ACON2       constraint 2
EQ_RCON3TL     constraint 3 for projects TL
EQ_RCON3TR     constraint 3 for projects TR
EQ_RCON3M      constraint 3 for projects M
EQ_RCON3P      constraint 3 for projects P
EQ_ICON4       constraint 4
EQ_ICON5       constraint 5
EQ_WATERSUP    water supply
;

objFP..    z('FP') =e= sum(I, flows(I,'FP')*X(I));
objFM..    z('FM') =e= sum(I, flows(I,'FM')*X(I));

EQ_FCON1..       sum(I,Cost(I)*X(I)) =l= maxinvestment;
EQ_ACON2..       sum(I,IArea(I)*X(I)) =g= irarea;
EQ_RCON3TL..     sum(TL(I),X(I)) =g= 5;
EQ_RCON3TR..     sum(TR(I),X(I)) =g= 2;
EQ_RCON3M..      sum(M(I),X(I)) =g= 2;
EQ_RCON3P..      sum(P(I),X(I)) =g= 1;
EQ_ICON4..       X('4')+X('6')+X('8') =l= 1;
EQ_ICON5..       X('21')-X('27') =l= 0;
EQ_WATERSUP..    sum(I,wsupply(I)*X(I)) =g= wsupmin;
;

MODEL example /ALL/
;
```

```
******************************************************************************
$STitle eps-constraint method

Set k1(k) the first element of k, km1(k) all but the first elements of k;
k1(k)$(ord(k)=1) = yes; km1(k)=yes; km1(k1) = no;
Set kk(k)     active objective function in constraint allobj
Parameter
   rhs(k)     right hand side of the constrained obj functions in eps-constraint
   maxobj(k)  maximum value from the payoff table
   minobj(k)  minimum value from the payoff table
Variables
   a_objval   auxiliary variable for the objective function
   obj        auxiliary variable during the construction of the payoff table
Positive Variables
   sl(k)      slack or surplus variables for the eps-constraints
Equations
   con_obj(k) constrained objective functions
   augm_obj   augmented objective function to avoid weakly efficient solutions
   allobj     all the objective functions in one expression;

con_obj(km1)..   z(km1) - dir(km1)*sl(km1) =e= rhs(km1);

* We optimize the first objective function and put the others as constraints
* the second term is for avoiding weakly efficient points
augm_obj..
  sum(k1,dir(k1)*z(k1))+1e-4*sum(km1,sl(km1)/(maxobj(km1)-minobj(km1))) =e= a_objval;

allobj..  sum(kk, dir(kk)*z(kk)) =e= obj;

*Model mod_payoff    / objcost, objco2, objes, defcap, defdem, allobj / ;
*Model mod_epsmethod / objcost, objco2, objes, defcap, defdem, con_obj, augm_obj / ;

Model mod_payoff    / example, allobj / ;
Model mod_epsmethod / example, con_obj, augm_obj / ;

option limrow=0, limcol=0, solprint=off, solvelink=2;
option optcr=0.000;


Parameter
  payoff(k,k)  payoff tables entries;
Alias(k,kp);

*start=jnow;

* Generate payoff table applying lexicographic optimization
```

```
loop(kp,
  kk(kp)=yes;
  repeat
    solve mod_payoff using mip maximizing obj;
    if (mod_payoff.modelstat<>1 and mod_payoff.modelstat<>8, abort 'no optimal solution for mod_payoff');
    payoff(kp,kk) = z.l(kk);
    z.fx(kk) = z.l(kk);   // freeze the value of the last objective optimized
    kk(k++1) = kk(k);     // cycle through the objective functions
  until kk(kp);
  kk(kp) = no;
* release the fixed values of the objective functions for the new iteration
  z.up(k) = inf;
  z.lo(k) = -inf;
);

display payoff;
minobj(k)=smin(kp,payoff(kp,k));
maxobj(k)=smax(kp,payoff(kp,k));

option optcr=0.000;

*$set fname p.scr
File fx  / c:\gams\prom12.out /;
File rhsx  / c:\gams\rhs_prom12.out /;
fx.pw=2000;

PUT fx ' PAYOFF TABLE'/   ;
loop (kp,
        loop(k, put (payoff(kp,k)):12:4);
        put /;
     );
put fx /;

*File fx solution points from epsi-method / "%gams.scrdir%%fname%" /;
*FILE fx /D:\research\gams\posix-gams-epscm\econ4.out/;

$if not set gridpoints $set gridpoints 50

Set g grid points /g0*g%gridpoints%/
    grid(k,g) grid
Parameter
    gridrhs(k,g) rhs of eps-constraint at grid point
    maxg(k) maximum point in grid for objective k
    posg(k) grid position of objective
    firstOffMax, lastZero some counters
    numk(k) ordinal value of k starting with 1
    numg(g) ordinal value of g starting with 0
```

```
    earlyex, pareto_num, numloop  parameters auxiliary ;


lastZero=1; loop(km1, numk(km1)=lastZero; lastZero=lastZero+1); numg(g) = ord(g)-1;

grid(km1,g) = yes; // Here we could define different grid intervals for different objectives
maxg(km1) = smax(grid(km1,g), numg(g));   //used if different number of grid points are set for objective km1
gridrhs(grid(km1,g))$(dir(km1)=-1) = maxobj(km1) - numg(g)/maxg(km1)*(maxobj(km1)- minobj(km1));
gridrhs(grid(km1,g))$(dir(km1)=1) = minobj(km1) + numg(g)/maxg(km1)*(maxobj(km1)- minobj(km1));
display gridrhs;

* Walk the grid points and take shortcuts if the model becomes infeasible
posg(km1) = 0;
earlyex=0;
pareto_num=0;
numloop=0;
put fx '   #      FP         FM         ';
loop(I, put fx I.tl:6); put fx /;

repeat
  numloop=numloop+1;
  rhs(km1) = sum(grid(km1,g)$(numg(g)=posg(km1)), gridrhs(km1,g));
  loop((km1,g)$(numg(g)=posg(km1)),put rhsx gridrhs(km1,g):10:4);
  solve mod_epsmethod maximizing a_objval using mip;
  if (mod_epsmethod.modelstat<>1 and mod_epsmethod.modelstat<>8,  // not optimal is in this case infeasible
    put rhsx 'INF'/;
    lastZero = 0; loop(km1$(posg(km1)>0 and lastZero=0), lastZero=numk(km1));   //find the first non-zero posg
    posg(km1)$(numk(km1)<=lastZero) = maxg(km1); // skip all solves for more demanding values of rhs(km1)
    earlyex=earlyex+1
  else
    put rhsx /;
    pareto_num:=pareto_num+1;
    put fx pareto_num:4:0;
    loop(k, put fx (Z.l(k)):12:4);
*    put fx DZ.l('1'):12:4 ;
    loop(I, put X.l(I):6:0);
*    loop(j,if (B.L(J)=1, put ord(J):4:0, ' ',X.l(J):6:3));
    put /;
    );

* Proceed forward in the grid
  firstOffMax = 0;
  loop(km1$(posg(km1)<maxg(km1) and firstOffMax=0), posg(km1)=posg(km1)+1; firstOffMax=numk(km1));
  posg(km1)$(numk(km1)<firstOffMax) = 0;
until sum(km1$(posg(km1)=maxg(km1)),1)=card(km1) and firstOffMax=0;

*finish=jnow;
```

```
putclose rhsx;

put fx 'Number of solves in e-constraint: ', numloop:0:0/;
put fx 'Number of early exits from the loop: ', earlyex:0:0/;
*elapsed_time=mod_payoff.resusd+mod_epsmethod.resusd;
*elapsed_time=(finish-start)*86400;
*put fx 'Elapsed time: ',elapsed_time:7:2, ' seconds' / ;
putclose fx; // close the point file
```

B.2 Μοντέλο τρίτης φάσης στο GAMS

```
SETS
I  projects            /1*72/

TL(I)    projects dealing with Technical Options Local           /1*48/
TR(I)    projects dealing with Technical Options Regional        /49*59/
M(I)     projects dealing with Managerial Options                /60*65/
P(I)     projects dealing with Pricing Options                   /66*70/
R(I)     projects dealing with Regulatory Options                /71*72/
;

PARAMETER Cost(I)
/
1      50
2      30
3      3
4      4
5      15
6      40
7      4
8      15
9      25
10     10
11     3
12     10
13     7
14     4
15     6
16     3
17     6
18     20
19     6
20     10
21     10
22     9
23     5
24     4.5
25     13
26     3.5
27     13
28     15
29     6
30     5000
31     12
32     13
```

```
33      22
34      16
35      3
36      55
37      9
38      4.5
39      10
40      6
41      7
42      10
43      22
44      15
45      5
46      60
47      22
48      5.5
49      1
50      780
51      3000
52      60
53      20
54      55
55      1000
56      200
57      40
58      1000
59      8000
60      0
61      3
62      4
63      1
64      7
65      2
66      2
67      2
68      2
69      2
70      7
71      1
72      1
/
;

SCALAR
maxinvestment    maximum investment in million Jordanian Dinars        /600/
irarea           minimum irrigated area in thousan hectars            /110/
wsupmin          minimum water supply million cubic meters (MCM)       /8000/
```

```
;

PARAMETER Shows(I)
/
1    50
2    0
3    4
4    0
5    6
6    0
7    3
8    48
9    11
10    8
11    11
12    4
13    15
14    15
15    39
16    7
17    18
18    24
19    50
20    3
21    26
22    28
23    35
24    48
25    1
26    11
27    26
28    9
29    10
30    0
31    38
32    46
33    21
34    20
35    16
36    48
37    24
38    44
39    39
40    47
41    42
42    45
43    42
```

44 35
45 38
46 46
47 50
48 49
49 26
50 0
51 0
52 50
53 50
54 0
55 0
56 0
57 0
58 0
59 0
60 41
61 50
62 40
63 45
64 28
65 30
66 50
67 50
68 42
69 48
70 35
71 50
72 30
/
;

PARAMETER IArea(I)
/
1 3.5
2 3
3 0.3
4 0.05
5 0
6 0
7 0.3
8 0.1
9 0.1
10 0.05
11 0.06
12 0.45
13 0

14	0
15	1
16	1
17	0
18	0
19	100
20	0
21	0
22	0
23	0
24	2
25	0
26	0.1
27	0.7
28	0.1
29	0.2
30	0
31	2
32	3
33	3
34	0
35	0
36	4
37	1
38	0
39	0
40	0.1
41	0.1
42	1
43	1.5
44	2
45	1.5
46	6
47	2
48	0.5
49	0
50	0
51	0
52	4
53	3
54	4
55	4
56	5
57	3
58	0
59	0
60	-5

```
61      -5
62      0
63      2.5
64      0
65      0.5
66      0
67      0
68      0
69      1.3
70      0
71      0
72      2.5
/
;

PARAMETER Wsupply(I)
/
1       952
2       98
3       16.8
4       56
5       70
6       168
7       11.2
8       168
9       34.4
10      12
11      0
12      0
13      140
14      70
15      0
16      28
17      168
18      280
19      280
20      140
21      140
22      28
23      70
24      56
25      140
26      10
27      24
28      7
29      18
30      0
```

31	200
32	250
33	36
34	280
35	30
36	345
37	55
38	8
39	50
40	15
41	4
42	15
43	30
44	50
45	12
46	170
47	220
48	50
49	0
50	200
51	50
52	1000
53	500
54	45
55	23
56	60
57	30
58	50
59	200
60	700
61	700
62	70
63	100
64	70
65	0
66	980
67	980
68	0
69	168
70	0
71	980
72	350

/

;

FREE VARIABLES

showssum sum of the shows

```
;

BINARY VARIABLES
X
;

EQUATIONS
objshows        objective for maximizing shows

EQ_FCON1        constraint 1
EQ_ACON2        constraint 2
EQ_RCON3TL      constraint 3 for projects TL
EQ_RCON3TR      constraint 3 for projects TR
EQ_RCON3M       constraint 3 for projects M
EQ_RCON3P       constraint 3 for projects P
EQ_ICON4        constraint 4
EQ_ICON5        constraint 5
EQ_GREEN        green set
EQ_WATERSUP     water supply
;

objshows..      showssum =e= sum(I, Shows(I)*X(I));

EQ_FCON1..      sum(I,Cost(I)*X(I)) =l= maxinvestment;
EQ_ACON2..      sum(I,IArea(I)*X(I)) =g= irarea;
EQ_RCON3TL..    sum(TL(I),X(I)) =g= 5;
EQ_RCON3TR..    sum(TR(I),X(I)) =g= 2;
EQ_RCON3M..     sum(M(I),X(I)) =g= 2;
EQ_RCON3P..     sum(P(I),X(I)) =g= 1;
EQ_ICON4..      X('4')+X('6')+X('8') =l= 1;
EQ_ICON5..      X('21')-X('27') =l= 0;
EQ_GREEN..      X('1')+X('19')+X('47')+X('52')+X('53')+X('61')+X('66')+X('67')+X('71') =e= 9;
EQ_WATERSUP..   sum(I,wsupply(I)*X(I)) =g= wsupmin;

MODEL RP /ALL/
;

SOLVE RP using MIP maximizing showssum
;
```