

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ



ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

**Εισαγωγή στην επανακανονικοποίηση της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής και
χρωμοδυναμικής**

Διπλωματική εργασία
του
Σπύρου Δημήτρη

Επιβλέπων: Τράκας Νικόλαος
Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούλιος 2012

.....
Σπύρου Δημήτρης
Διπλωματούχος Φυσικός Εφαρμογών ΣΕΜΦΕ-ΕΜΠ

©2012, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Ευχαριστίες

Ολοκληρώνοντας την διπλωματική μου εργασία θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους αυτούς τους ανθρώπους που με ενέπνευσαν να ασχοληθώ με τη φυσική και με καθοδήγησαν όλα αυτά τα χρόνια ως μαθητή και μετέπειτα ως φοιτητή.

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κύριο Νικόλαο Τράκα για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση κατά τη διάρκεια της εκπόνησης αυτής της εργασίας.

Ευχαριστώ επίσης τους συμφοιτητές και φίλους μου για τις συμβουλές και τη βοήθεια που μου παρείχαν όποτε χρειάστηκε.

Τέλος ένα μεγάλο ευχαριστώ ανήκει στην οικογένεια μου για την ηθική και υλική υποστήριξη τους τα χρόνια των σπουδών μου και γενικότερα στη ζωή μου.

Περίληψη

Η εργασία αυτή είναι αφιερωμένη στη μελέτη της μεθόδου της επανακανονικοποίησης. Είναι μια μέθοδος που εφαρμόζεται για την συστηματική απαλλαγή μας από αφύσικους απειρισμούς που εμφανίζονται σε ανώτερες τάξης της θεωρίας διαταραχών και δεν παρατηρούνται στα πειράματά μας. Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται κάποιες εισαγωγικές έννοιες της σχετικιστικής κβαντομηχανικής και της θεωρίας σκέδασης με τη χρήση των συναρτήσεων Green, οι οποίες αποτελούν και βασικό αντικείμενο της επανακανονικοποίησης, ενώ ταυτόχρονα εφαρμόζονται σε παραδείγματα σκέδασης. Τέλος, γίνεται μια μικρή εισαγωγή στην κβαντική χρωμοδυναμική (ΚΧΔ). Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μια διεξοδική εφαρμογή της επανακανονικοποίησης στην κβαντική ηλεκτροδυναμική (ΚΗΔ) στην δεύτερη τάξη της θεωρίας διαταραχών και εξετάζονται μερικά παραδείγματα στην ΚΧΔ, ενώ γίνεται μια εισαγωγή στις μεθόδους της ομάδας επανακανονικοποίησης.

Abstract

This diploma thesis is dedicated to the study of the method of renormalization. It is a method applied for our systematic release from unnatural divergences that appear in higher orders of perturbation theory and are not noted in our experiments. In the first chapter, there are certain introductory concepts of the relativistic quantum mechanics and of the theory of scattering presented with the use of Green's functions, which constitute the basic object of renormalization, whilst they are simultaneously applied to examples of scattering. Finally, there is a small introduction in the quantum chromodynamics (QCD). In the second chapter takes place a detailed application of the renormalization in the quantum electrodynamics (QED) on the second order of perturbation theory and some examples are tested in QCD, whilst an introduction to the methods of the renormalization group equation is made.

Περιεχόμενα

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 1 | Εισαγωγή στη σχετικιστική κβαντομηχανική | 1 |
| 1.1 | Εξίσωση Dirac | 1 |
| 1.2 | Γενικευμένη Αρχή του Huygens – Διαδότες – Συναρτήσεις Green . . . | 5 |
| 1.2.1 | Μη σχετικιστική περίπτωση | 5 |
| 1.2.2 | Σχετικιστική περίπτωση | 9 |
| 1.3 | Διαδικασίες σκέδασης στην ΚΗΔ | 14 |
| 1.4 | Κβαντική Χρωμοδυναμική | 18 |
| 1.4.1 | Η ιδέα του αναλλοίωτου βαθμίδα | 18 |
| 1.4.2 | Η Λαγκρανζιανή της ΚΗΔ σαν πρότυπο | 19 |
| 1.4.3 | Η Λαγκρανζιανή της ΚΧΔ και ο μετασχηματισμός BRST . . . | 20 |
| 1.5 | Κανόνες Feynman | 21 |
| 2 | Επανακανονικοποίηση | 25 |
| 2.1 | Εισαγωγή | 25 |
| 2.2 | Διορθώσεις 1 βρόγχου στην ΚΗΔ | 27 |
| 2.2.1 | Διαδότης ηλεκτρονίου | 28 |
| 2.2.2 | Πόλωση του κενού | 30 |
| 2.2.3 | Διαμόρφωση ρεύματος | 33 |
| 2.2.4 | Ταντότητα Ward-Takahashi | 35 |
| 2.2.5 | Counterterms | 36 |
| 2.3 | Κβαντική χρωμοδυναμική | 39 |
| 2.3.1 | Βρόγχος γλουονίων | 39 |
| 2.3.2 | Κορυφή τριών γλουονίων | 40 |
| 2.4 | Εξίσωση Ομάδας Επανακανονικοποίησης | 43 |
| Α΄ | Ιδιότητες πινάκων γ στις n διαστάσεις | 51 |
| Β΄ | Η Lie άλγεβρα $SU(N)$ | 53 |

| | |
|---|-----------|
| Γ' Συνάρτηση Γ | 55 |
| Δ' Χρήσιμα ολοκλήρωματα στις n διαστάσεις | 57 |
| Ε' Ανώμαλη μαγνητική ροπή ηλεκτρονίου | 61 |
| Βιβλιογραφία | 65 |

Κατάλογος σχημάτων

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Αναπαράσταση της συνεισφοράς της n -οστής τάξης στην συνάρτηση Green $G^+(x'; x)$ | 9 |
| 1.2 | Μερικά παραδείγματα διαδικασιών. | 10 |
| 1.3 | Μερικά διαγράμματα: (a) που περιέχονται; (b) που δεν περιέχονται στην $G^{(4)}(p_1, \dots, p_4)$ | 13 |
| 1.4 | Παραδείγματα ενός 1PI (a) και ενός μη 1PI (b) διαγράμματος | 13 |
| 1.5 | Σχηματική αναπαράσταση της Εξ.(1.41) | 13 |
| 1.6 | Διάγραμμα Feynman της σκέδασης $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ | 14 |
| 1.7 | Κάποια επιπλέον διαγράμματα Feynman που περιγράφουν διαδικασίες σκέδασης | 18 |
| 2.1 | Μερικά διαγράμματα δεύτερης τάξης της $e^- e^+ \rightarrow e^- e^+$ | 27 |
| 2.2 | Οι τρεις κύριοι βρόγχοι που απειρίζονται | 27 |
| 2.3 | Κανόνες Feynman για την $\Delta\mathcal{L}$ | 39 |
| 2.4 | Διάγραμμα βρόγχου γλουονίων | 39 |
| 2.5 | Τα επιπλέον διαγράμματα που συνεισφέρουν στον διαδότη του γλουονίου | 40 |
| 2.6 | Ο φερμιονικός βρόγχος που συνεισφέρει στην κορυφή τριών γλουονίων | 41 |
| 2.7 | Μερικά από τα επιπλέον διαγράμματα που συνεισφέρουν στην κορυφή τριών γλουονίων | 43 |
| 2.8 | Σχηματική αναπαράσταση των τεσσάρων πιθανών μορφών της $\beta(g)$ | 45 |

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στη σχετικιστική κβαντομηχανική

1.1 Εξίσωση Dirac

Για κάποιο χρονικό διάστημα η εξίσωση Klein-Gordon θεωρούταν η μόνη σχετικιστική κβαντομηχανική εξίσωση, ώσπου ο Dirac ανακάλυψε μια νέα. Ο στόχος του ήταν να βρει μια διαφορική εξίσωση που να είναι γραμμική ως προς την χρονική παράγωγο $\partial/\partial t^1$ (σε αντίθεση με την εξίσωση Klein-Gordon), επομένως και ως προς τον τελεστή ∇ , οπότε θα έχει τη γενική μορφή

$$H\psi = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)\psi \quad (1.1)$$

Οι συντελεστές α_i ($i = 1, 2, 3$) και β υπολογίζονται από την απαίτηση το ελεύθερο σωματίδιο να ικανοποιεί την σχετικιστική σχέση

$$H^2\psi = (\mathbf{p}^2 + m^2)\psi$$

οπότε από την Εξ.(1.1) έχουμε

$$\begin{aligned} H^2\psi &= (\alpha_i \cdot p_i + \beta m)(\alpha_j \cdot p_j + \beta m)\psi \\ &= [\alpha_i^2 \cdot p_i^2 + \underbrace{(\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i)}_0 p_i p_j + \underbrace{(\alpha_i \beta + \beta \alpha_i)}_0 p_i m + \beta^2 m^2] \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας τις παραπάνω εξισώσεις καταλήγουμε στις εξής σχέσεις για τους συντελεστές

¹Το κίνητρό του ήταν να γράψει μια εξίσωση που δεν θα δίνει αρνητική πυκνότητα πιθανότητας όπως αυτή των Klein-Gordon. Ο Dirac κατάλαβε ότι η ρίζα του προβλήματος είναι ότι η εξίσωση Klein-Gordon είναι δευτεροβάθμια ως προς τη χρονική μεταβολή.

- $\alpha_i^2 = \beta^2 = 1$
- $\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0$
- $\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0$

Λόγω των σχέσεων αντιμετάθεσης που ισχύουν, τα α_i και β δεν είναι απλοί αριθμοί αλλά πίνακες που δρουν στην κυματοσυνάρτηση ψ . Αποδεικνύεται ότι οι μικρότερης διάστασης πίνακες που ικανοποιούν τις παραπάνω σχέσεις, είναι 4×4 ερμητιανοί, άιχνοι πίνακες με ιδιοτιμές ± 1 . Η αναπαράσταση των πινάκων δεν είναι μοναδική αλλά οι δύο πιο συνηθισμένες στην σωματιδιακή φυσική είναι η Dirac-Pauli όπου

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

και η Weyl με

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

όπου I είναι ο μοναδιαίος 2×2 πίνακας και $\boldsymbol{\sigma}$ οι πίνακες Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε την αναπαράσταση Dirac-Pauli. Το τετραδιάστατο διάνυσμα στήλη ψ που ικανοποιεί την εξίσωση Dirac καλείται σπινόρας Dirac και περιγράφει ένα σπιν $1/2$ σωματίδιο και το αντισωματίδιό του, όπως θα δούμε.

Αν θέλουμε να γράψουμε την εξίσωση Dirac σε συναλλοίωτη μορφή πολλαπλασιάζουμε την Εξ.(1.1) από αριστερά με β και κάνουμε τις συνήθεις αντικαταστάσεις

$$H \rightarrow i\partial/\partial t \quad \text{και} \quad \vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla}$$

οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} i\beta \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -i\beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \psi + m\psi \Rightarrow \\ (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

όπου εισάγαμε τους πίνακες Dirac

$$\gamma^\mu \equiv (\beta, \beta \boldsymbol{\alpha}) \quad (1.3)$$

που ικανοποιούν την σχέση αντιμετάθεσης

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (1.4)$$

Το επόμενο βήμα είναι να ορίσουμε το τετραδιάνυσμα του ρεύματος πυκνότητας πιθανότητας για την κυματοσυνάρτηση. Για να το πετύχουμε αυτό εισάγουμε τον συζυγή σπίνορα (στήλη) $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ και παίρνουμε την ερμητιανή συζυγή της εξίσωσης Dirac

$$i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu - m\bar{\psi} = 0 \quad (1.5)$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα την Εξ.(1.2) από αριστερά με $\bar{\psi}$ και την Εξ.(1.5) από δεξιά με ψ και προσθέτοντάς τες βρίσκουμε

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0 \quad (1.6)$$

οπότε έχουμε

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

αφού ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας. Η πυκνότητα πιθανότητας

$$\rho \equiv j^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi = \sum_{i=1}^4 |\psi_i|^2$$

είναι θετική ποσότητα όπως ακριβώς επιθυμούσε ο Dirac.

Ας αναζητήσουμε τώρα τις λύσεις της εξίσωσης Dirac. Για ένα ελεύθερο σωματίδιο αναμένουμε λύσεις επίπεδου κύματος, δηλαδή της μορφής

$$\psi = u(p) e^{-ipx} \quad (1.7)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ.(1.7) στην Εξ.(1.2) και χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό $\not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$ έχουμε

$$(\not{p} - m)u = 0 \quad (1.8)$$

που είναι η εξίσωση Dirac στον χώρο των ορμών. Μιας και ψάχνουμε ιδιοδιανύσματα της ενέργειας είναι καλύτερα να χρησιμοποιήσουμε την αρχική μορφή του τελεστή της ενέργειας

$$Hu = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)u = Eu \quad (1.9)$$

Ας πάρουμε πρώτα την περίπτωση του ακίνητου σωματιδίου όπου $\mathbf{p} = 0$ οπότε έχουμε

$$Hu = \beta m u = \begin{pmatrix} mI & 0 \\ 0 & -mI \end{pmatrix} u = Eu$$

με ιδιοτιμές $E = m, m, -m, -m$ και ιδιοδιανύσματα

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Οι δύο πρώτες λύσεις με $E > 0$ περιγράφουν το σωματίδιο, ενώ οι δύο λύσεις με $E < 0$ περιγράφουν ένα αντισωματίδιο με $E > 0$. Αντίθετα, αν $\mathbf{p} \neq 0$ η Εξ.(1.9) γίνεται

$$Hu = \begin{pmatrix} m & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} u_B &= (E - m)u_A \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} u_A &= (E + m)u_B \end{aligned} \quad (1.10)$$

πού οι σπίνορες u_A και u_B είναι διάστασης δύο. Για $E > 0$ έχουμε τις λύσεις

$$u_A^{(s)} = \chi^{(s)} \quad \text{και} \quad u_B^{(s)} = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \chi^{(s)}$$

επομένως ο σπίνορας Dirac γίνεται

$$u^{(s)} = N \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \chi^{(s)} \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

όπου $s = 1, 2$, N η σταθερά κανονικοποίησης και

$$\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Για $E < 0$ ο σπίνορας Dirac είναι

$$u^{(s+2)} = N \begin{pmatrix} \frac{-\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|E| + m} \chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Συνήθως για ευκολία χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $u^{(3,4)}(-p) = v^{(2,1)}(p)$ για το αντισωματίδιο που ικανοποιεί την εξίσωση

$$(\not{p} + m)v = 0 \quad (1.13)$$

Όσον αφορά την κανονικοποίηση των κυματοσυναρτήσεων θεωρούμε ότι έχουμε $2E$ σωματίδια ανά μονάδα όγκου, δηλαδή

$$\int \rho dV = \int \psi^\dagger \psi dV = u^\dagger u = 2E$$

απ' όπου προκύπτουν οι σχέσεις ορθογωνιότητας

$$u^{(r)\dagger} u^{(s)} = 2E \delta_{rs}, \quad v^{(r)\dagger} v^{(s)} = 2E \delta_{rs} \quad \text{με } r, s = 1, 2 \quad (1.14)$$

οπότε η σταθερά κανονικοποίησης είναι $N = \sqrt{E + m}$. Για τις συζυγείς κυματοσυναρτήσεις $\bar{u} \equiv u^\dagger \gamma^0$ και $\bar{v} \equiv v^\dagger \gamma^0$ έχουμε τις εξισώσεις

$$\bar{u}(\not{p} - m) = 0 \quad (1.15)$$

$$\bar{v}(\not{p} + m) = 0 \quad (1.16)$$

με την βοήθεια των οποίων αποδεικνύονται εύκολα οι σχέσεις

$$\bar{u}^{(s)} u^{(s)} = 2m, \quad \bar{v}^{(s)} v^{(s)} = 2m$$

καθώς και οι σχέσεις πληρότητας

$$\sum_{s=1,2} u^{(s)}(p) \bar{u}^{(s)}(p) = \not{p} + m \quad (1.17)$$

$$\sum_{s=1,2} v^{(s)}(p) \bar{v}^{(s)}(p) = \not{p} - m \quad (1.18)$$

Τέλος να αναφέρουμε άλλη μια επιτυχία της εξίσωσης Dirac. Στο μη σχετικιστικό όριο δίνει, για ένα ηλεκτρόνιο εντός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, την εξίσωση Pauli-Schrödinger και προβλέπει ότι ο γυρομαγνητικός λόγος $g = 2$ ενώ πειραματικά είναι $g = 2.00232$. Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε που οφείλεται αυτή η μικρή διαφορά.

1.2 Γενικευμένη Αρχή του Huygens – Διαδότες – Συναρτήσεις Green

1.2.1 Μη σχετικιστική περίπτωση

Στις διαδικασίες σκέδασης θεωρούμε κυματοπακέτα που εξελίσσονται στον χρόνο από μια αρχική κατάσταση η οποία είναι σταθερή στο παρελθόν. Το ερώτημα που

τίθεται στο πρόβλημα είναι τι συμβαίνει στο κυματοπακέτο όταν πλησιάζει ένα κέντρο σκέδασης (ένα δυναμικό ή ένα άλλο σωματίδιο). Η Γενικευμένη Αρχή του Huygens λέει ότι αν ξέρουμε τη συνάρτηση $\psi(x, t)$ σε ένα συγκεκριμένο σημείο, τότε η μορφή του σε μια μετέπειτα χρονική στιγμή t' μπορεί να εξαχθεί θεωρώντας ότι κάθε σημείο x τη στιγμή t είναι πηγή σφαιρικών κυμάτων. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ένταση του κύματος που δημιουργείται από το σημείο x και φτάνει στο σημείο x' τη στιγμή t' είναι ανάλογη του αρχικού πλάτους κύματος $\psi(x, t)$. Ας ονομάσουμε τη σταθερά αναλογίας $iG(x', t'; x, t)$. Η Γενικευμένη Αρχή του Huygens γράφεται τότε

$$\psi(x', t') = i \int d^3x G(x', t'; x, t) \psi(x, t) \quad , \quad t' > t \quad (1.19)$$

Η συνάρτηση $G(x', t'; x, t)$ είναι γνωστή σαν συνάρτηση Green ή διαδότης και περιγράφει τη επίδραση του κύματος $\psi(x, t)$ στο $\psi(x', t')$. Άρα η γνώση της συνάρτησης Green λύνει το πρόβλημα σκέδασης ή ισοδύναμα είναι σαν να ξέρουμε τη λύση της εξίσωσης Schrödinger.

Για να εξηγήσουμε την μαθηματική ιδέα των εξισώσεων Green είναι καλύτερο να λύσουμε την εξίσωση του Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \hat{H} \psi(x, t) = (\hat{H}_0 + V(x, t)) \psi(x, t) \quad (1.20)$$

με $\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$ που περιγράφει την αλληλεπίδραση ενός σωματιδίου μάζας m με μια σημειακή πηγή δυναμικού. Η διαφορική εξίσωση είναι 1ου βαθμού ως προς τον χρόνο που σημαίνει ότι αν γνωστή η $\psi(x, t_0)$ τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την $\psi(x, t)$ τόσο για προηγούμενες, όσο και για μεταγενέστερες χρονικές στιγμές. Επιπλέον η εξίσωση του Schrödinger είναι γραμμική οπότε ισχύει η αρχή της επαλληλίας. Οπότε η σχέση μεταξύ της συνάρτησης $\psi(x, t)$ σε διαφορετικές χρονικές στιγμές είναι γραμμική. Άρα η συνάρτηση του $\psi(x, t)$ πρέπει να ικανοποιεί μια γραμμική ομογενή ολοκληρωτική εξίσωση της μορφής

$$\psi(x', t') = i \int d^3x G(x', t'; x, t) \psi(x, t) \quad (1.21)$$

Αυτή η σχέση ορίζει την συνάρτηση G που είναι η συνάρτηση Green της Χαμιλτονιανής. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι η συνάρτηση της Εξ.(1.21) δεν διαχωρίζει την διάδοση της ψ μπροστά στο χρόνο ($t' > t$) ή πίσω στο χρόνο ($t' < t$). Παρόλα αυτά για να ισχύει η αρχή της αιτιότητας είναι χρήσιμο να ορίσουμε την καθυστερημένη συνάρτηση Green

$$G^+(x', t'; x, t) = \begin{cases} G(x', t'; x, t) & \text{για } t' > t \\ 0 & \text{για } t' < t \end{cases} \quad (1.22)$$

που περιγράφει τη διάδοση του κύματος μπροστά στο χρόνο. Έτσι η Εξ.(1.21) γίνεται

$$\Theta(t' - t)\psi(x', t') = i \int d^3x G^+(x', t'; x, t)\psi(x, t) \quad \text{για } t' < t \quad (1.23)$$

με

$$\Theta(t' - t) = \begin{cases} 1 & \text{για } t' > t \\ 0 & \text{για } t' < t \end{cases}$$

Αν θέλουμε να περιγράψουμε την διάδοση πίσω στο χρόνο ορίζουμε την προχωρημένη συνάρτηση Green

$$G^-(x', t'; x, t) = \begin{cases} -G(x', t'; x, t) & \text{για } t' < t \\ 0 & \text{για } t' > t \end{cases} \quad (1.24)$$

Αν εφαρμόσουμε τον τελεστή της εξίσωσης Schrödinger

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t'} - \hat{H}(x')) \quad (1.25)$$

στην Εξ.(1.23) θα έχουμε:

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t'} - \hat{H}(x'))\Theta(t' - t)\psi(x') = i \int d^3x (i\hbar \frac{\partial}{\partial t'} - \hat{H}(x'))G^+(x'; x)\psi(x)$$

όπου το $\chi = \{\vec{x}, t\}$ οπότε

$$i \int d^3x [(i\hbar \frac{\partial}{\partial t'} - \hat{H}(x'))G^+(x'; \chi) - \hbar\delta^3(\vec{x}' - \vec{x})\delta(t' - t)]\psi(x) = 0$$

Επειδή αυτό συμβαίνει για τυχαία συνάρτηση $\psi(x)$ συνεπάγεται ότι

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t'} - \hat{H}(x'))G^+(x'; \chi) = \hbar\delta^4(x' - \chi) \quad (1.26)$$

Η Εξ.(1.26) μαζί με την οριακή συνθήκη $G^+(x', \chi) = 0$ για $t' < t$ ορίζει πλήρως την καθυστερημένη συνάρτηση Green. Από την Εξ.(1.26) φαίνεται επίσης ότι η συνάρτηση Green είναι το κύμα που δημιουργείται από μία σημειακή πηγή. Επίσης είναι χρήσιμη ώστε να λύσουμε την μη ομογενή εξίσωση Schrödinger

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}(x))\psi(x) = \varrho(x) \quad (1.27)$$

με μια πηγή $\varrho(x)$. Οπότε η λύση είναι

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \frac{1}{\hbar} \int d^4x' G^+(x'; x) \varrho(x') \quad \text{για } t' > t \quad (1.28)$$

όπου $\psi_0(x)$ είναι η λύση της ομογενούς εξίσωσης. Η Εξ.(1.26) μπορεί να γραφτεί με την εξής μορφή

$$(i \frac{\partial}{\partial t'} - \hat{H}_0(x')) G^+(x'; x) = \delta^4(x' - x) + V(x') G^+(x'; x) \quad (1.29)$$

οπότε θα έχουμε τη λύση

$$\begin{aligned} G^+(x'; x) &= \int d^4x_1 G_0^+(x'; x_1) (\delta^4(x_1 - x) + V(x_1) G^+(x_1; x)) \\ &= G_0^+(x'; x) + \int d^4x_1 G_0^+(x'; x_1) V(x_1) G^+(x_1; x) \end{aligned} \quad (1.30)$$

όπου $G_0^+(x'; x)$ είναι ο ελεύθερος διαδότης. Η Εξ.(1.30) (καλείται συχνά και εξίσωση Lippmann-Schwinger) είναι μια ολοκληρωτική εξίσωση για τον διαδότη $G^+(x'; x)$ και μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά όπως παρακάτω

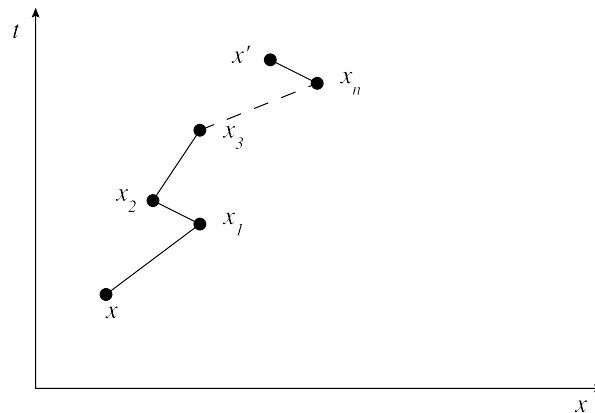
$$\begin{aligned} G^+(x'; x) &= G_0^+(x'; x) + \int d^4x_1 G_0^+(x'; x_1) V(x_1) G_0^+(x_1; x) \\ &\quad + \int d^4x_1 d^4x_2 G_0^+(x'; x_1) V(x_1) G_0^+(x_1; x_2) V(x_2) G_0^+(x_2; x) \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (1.31)$$

που σημαίνει ότι η Εξ.(1.30) μας δίνει τον διαδότη διαδικασιών πολλαπλής σκέδασης. Το πλάτος πιθανότητας για την σκέδαση ενός σωματιδίου από μια αρχική σε μια τελική κατάσταση είναι το στοιχείο του πίνακα σκέδασης

$$S_{fi} = \langle \phi_f(x') | \phi_i(x') \rangle = \int d^4x' d^4x \phi_f^*(x') G^+(x'; x) \phi_i(x)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση την (1.31) και ολοκληρώνοντας ως προς x' και x έχουμε

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \delta_{fi} - i \int d^4x_1 \phi_f^*(x_1) V(x_1) \phi_i(x_1) \\ &\quad - i \int d^4x_1 d^4x_2 \phi_f^*(x_1) V(x_1) G_0^+(x_1; x_2) V(x_2) \phi_i(x_2) \\ &\quad - i \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 \phi_f^*(x_1) V(x_1) G_0^+(x_1; x_2) V(x_2) G_0^+(x_2; x_3) V(x_3) \phi_i(x_3) \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$



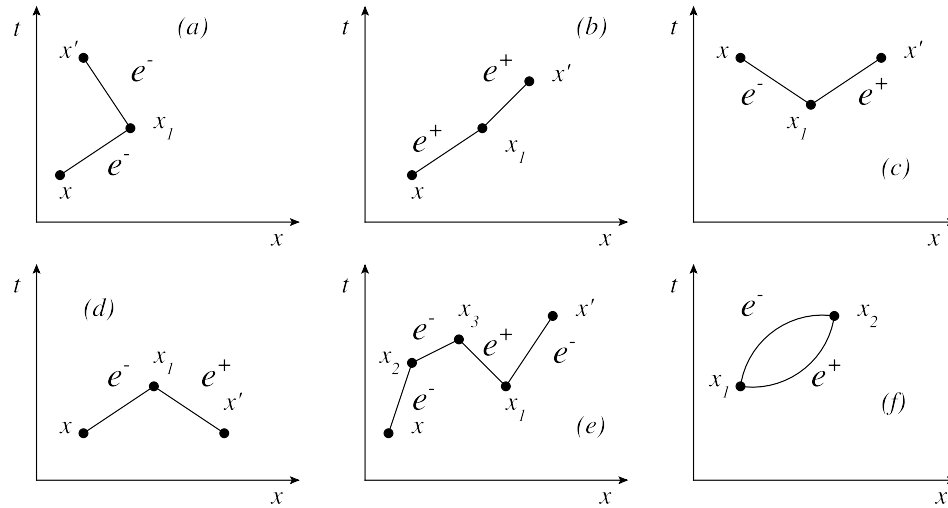
Σχήμα 1.1: Αναπαράσταση της συνεισφοράς της n -οστής τάξης στην συνάρτηση Green $G^+(x'; x)$

Αυτό είναι το διαταρακτικό ανάπτυγμα του πίνακα S , όπου ο πρώτος όρος περιγράφει τη διάδοση χωρίς αλληλεπίδραση, ο δεύτερος με μία κτλ.

1.2.2 Σχετικιστική περίπτωση

Στα προηγούμενα μελετήσαμε την μη σχετικιστική θεωρία διαδοτών όπου ερμηνεύσαμε την συνάρτηση $G(x'; x)$ ως το πλάτος πιθανότητας ένα σωματιδιακό κύμα που δημιουργείται σε ένα χωροχρονικό x να διαδοθεί μέχρι το σημείο x' . Αυτό το πλάτος μπορεί να αναλυθεί σε ένα άθροισμα χωρικών πλατών όπου ο n -οστός όρος αποτελείται από παράγοντες που διαγραμματικά φαίνονται στο Σχ.1.1. Κάθε γραμμή αναπαριστά την ελεύθερη συνάρτηση Green $G_0^+(x_i; x_{i-1})$ δηλαδή το πλάτος πιθανότητας ένα σωματιδιακό κύμα να διαδοθεί ελεύθερα από x_{i-1} στο x_i . Τα σημεία όπου συμβαίνει μια αλληλεπίδραση, τα οποία καλούνται κορυφές, αναπαριστώνται με μικρούς κύκλους. Σε κάθε τέτοιο σημείο x_i το σωματίδιο σκεδάζεται με πλάτος πιθανότητας $V(x_i)$ ανά μονάδα όγκου.

Μια άλλη ερμηνεία για κάθε διαφορετική σκέδαση, που συνάδει τόσο με μια κβαντική θεωρία πεδίου όσο και με μια σχετικιστική διατύπωση στα πλαίσια της θεωρίας του Dirac, είναι ότι στην i -οστή κορυφή, λόγω της αλληλεπίδρασης, καταστρέφεται ή εξαϋλώνεται το σωματίδιο που διαδόθηκε ελεύθερα ως το x_i και δημιουργείται ένα που διαδίδεται ως το x_{i+1} με $t_{i+1} \geq t_i$. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να μελετήσουμε και να ερμηνεύσουμε διαδικασίες που συναντάμε σε ένα σχετικιστικό πλαίσιο όπως η δημιουργία και η εξαϋλωση ζεύγους σωματιδίου-αντισωματιδίου. Στο Σχ.1.2 φαίνονται κάποιες από αυτές. Όπως παρατηρούμε στα Σχ.1.2(a) και 1.2(b) έχουμε τη



Σχήμα 1.2: Μερικά παραδείγματα διαδικασιών.

σκέδαση ενός ηλεκτρονίου και ενός ποζιτρονίου αντίστοιχα. Στο Σχ.1.2(c) ένα ζεύγος ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου δημιουργείται από ένα δυναμικό στο x_1 και μετά διαδίδονται ελεύθερα, ενώ στο Σχ.1.2(d) ένα ηλεκτρόνιο και ένα ποζιτρόνιο που ξεκινάνε από τα σημεία x και x' αντίστοιχα, εξαυλώνονται στο x_1 . Τέλος το Σχ.1.2(f) δείχνει ένα ζεύγος που δημιουργείται στο x_1 διαδίδεται ελεύθερα και έπειτα εξαυλώνεται στο x_2 . Τέτοιες “εικονικές” διαδικασίες που συμβαίνουν για ένα μικρό ενδιαμέσο χρονικό διάστημα θα αποτελέσουν κεντρικό θέμα στο επόμενο κεφάλαιο. Από τα παραπάνω είναι εμφανές ότι σε ένα σχετικιστικό πλαίσιο εκτός από τον διαδότη του ηλεκτρονίου πρέπει να ορίσουμε και τον διαδότη για το ποζιτρόνιο.

Ο Dirac στο πλαίσιο της θεωρίας του ερμήνευσε το ποζιτρόνιο σαν μια οπή στη θάλασσα Dirac, ή αλλιώς σαν την απουσία ενός ηλεκτρονίου με αρνητική ενέργεια. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι η καταστροφή του ποζιτρονίου σε ένα σημείο, ισοδυναμεί με τη δημιουργία ενός ηλεκτρονίου με αρνητική ενέργεια. Για παράδειγμα, στο Σχ.1.2(e) το ποζιτρόνιο που διαδίδεται από το x_1 στο x_3 ισοδυναμεί με ένα ηλεκτρόνιο αρνητικής ενέργειας που διαδίδεται από το x_3 στο x_1 , δηλαδή πίσω στο χρόνο. Έτσι οι Feynman και Stückelberg όρισαν ότι ένα ποζιτρόνιο με θετική ενέργεια που διαδίδεται μπροστά στο χρόνο αντιστοιχεί σε ένα ηλεκτρόνιο με αρνητική ενέργεια που ταξιδεύει πίσω στο χρόνο, ένας ορισμός που ικανοποιεί τις συμμετρίες αναστροφής χρόνου και PCT, ενώ το ηλεκτρόνιο αναπαριστάται από ένα κύμα με θετική ενέργεια που διαδίδεται μπροστά στο χρόνο. Το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε τον σχετικιστικό διαδότη για τα σωματίδιά μας.

Ας ορίσουμε ως $S_F(x'; x; A)$ τον διαδότη του σωματιδίου που προκύπτει από πολ-

λαπλές σκεδάσεις και $S_F(x'; x)$ τον ελεύθερο διαδότη (συχνά καλούνται και διαδότες Feynman). Τότε αυτοί πρέπει να ικανοποιούν τις αντίστοιχες σχετικιστικές εξισώσεις σε φυσικές μονάδες

$$(i \not{\mathcal{N}}' - e \not{A}' - m_0)S_F(x'; x; A) = \delta^4(x' - x) \quad (1.32)$$

$$(i \not{\mathcal{N}}' - m_0)S_F(x'; x) = \delta^4(x' - x) \quad (1.33)$$

Αυτό που πρέπει να τονισθεί είναι ότι οι διαδότες $S_F(x'; x; A)$ και $S_F(x'; x)$ είναι πίνακες 4×4 άρα οι δύο παραπάνω εξισώσεις είναι εξισώσεις πινάκων. Η εξίσωση για τον ελεύθερο διαδότη λύνεται πιο εύκολα στον χώρο των ορμών και επιτυγχάνεται μέσω των μετασχηματισμών Fourier αφού πρώτα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι η συνάρτηση $S_F(x'; x)$ εξαρτάται μόνο από την απόσταση $x' - x$ λόγω ομοιογένειας του χωροχρόνου. Έτσι έχουμε

$$S_F(x'; x) = S_F(x' - x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S_F(p) \exp[-ip(x' - x)] \quad (1.34)$$

Έτσι έχουμε για την εξίσωση Dirac στον χώρο των ορμών

$$\begin{aligned} (\not{p} - m_0)S_F(p) &= I \Rightarrow \\ (\not{p} + m_0)(\not{p} - m_0)S_F(p) &= (\not{p} + m_0) \Rightarrow \\ (p^2 - m_0^2)S_F(p) &= (\not{p} + m_0) \end{aligned} \quad (1.35)$$

ή

$$S_F(p) = \frac{(\not{p} + m_0)}{(p^2 - m_0^2)} \quad \text{για } p^2 \neq m_0^2 \quad (1.36)$$

Για τον πλήρη ορισμό της $S_F(p)$ πρέπει να βρούμε έναν τρόπο να χειριστούμε την απροσδιοριστία που προκύπτει για $p^2 = m_0^2$ ή $p_0 = \pm \sqrt{m_0^2 + \vec{p}^2} = \pm E_p$ (mass-shell). Η επιπλέον πληροφορία που χρειαζόμαστε εμπεριέχεται στις συνοριακές συνθήκες της $S_F(x' - x)$. Τέλος πρέπει να σημειώσουμε ότι η $S_F(p)$ αποτελεί τον διαδότη τόσο του ηλεκτρονίου όσο και του ποζιτρονίου στον χώρο των ορμών καθώς επίσης και οποιουδήποτε άλλου σωματιδίου με σπιν $s = \frac{1}{2}$. Εφαρμόζοντας τον τύπο (1.36) στον τύπο (1.34) και ολοκληρώνοντας ως προς την ενέργεια κατά μήκος μιας ειδικής καμπύλης C ώστε να συνεισφέρει ο αρνητικός πόλος $-E_p$ για $t' < t$ και ο θετικός για $+E_p$ για $t' > t$ (για περισσότερες λεπτομέρειες ανατρέξτε στο [6]) καταλήγουμε σε μια έκφραση για την $S_F(x' - x)$ που περιέχει δύο όρους, ο πρώτος περιγράφει την διάδοση καταστάσεων θετικής ενέργειας μπροστά στον χρόνο και ο δεύτερος καταστάσεις αρνητικής ενέργειας πίσω στο χρόνο. Παρ' όλα αυτά δεν θα ασχοληθούμε περαιτέρω με

την $S_F(x'-x)$ διότι όπως θα δούμε και στα επόμενα κεφάλαια η $S_F(p)$ θα μας φανεί πιο χρήσιμη για την πραγματοποίηση υπολογισμών.

Πάντως για να έχουμε τη δυνατότητα να περιγράψουμε τις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ δύο σωματιδίων θα χρειαστούμε και το διαδότη του φωτονίου. Για την εύρεση του θα πρέπει να λύσουμε τη σχετικιστική εξίσωση που ικανοποιεί το διανυσματικό δυναμικό $A^\mu(x)$

$$\square A^\mu(x) - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu(x) = J^\mu(x) \quad (1.37)$$

Επειδή έχουμε τη δυνατότητα να αντικαταστήσουμε το $A^\mu(x)$ με το

$$A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x)' = A^\mu(x) + \partial^\mu \chi \quad (1.38)$$

πρέπει να επιλέξουμε μια συγκεκριμένη βαθμίδα ώστε να βρούμε το διαδότη του φωτονίου. Αυτή που επιλέγεται συνήθως, μιας και απλοποιεί την Εξ.(1.37), είναι η βαθμίδα Lorentz $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$. Έτσι έχουμε για τον διαδότη $D_F(x-y)$

$$\square D_F(x-y) = \delta^4(x-y) \quad (1.39)$$

ενώ μέσω του μετασχηματισμού Fourier έχουμε στον χώρο των ορμών την εξίσωση

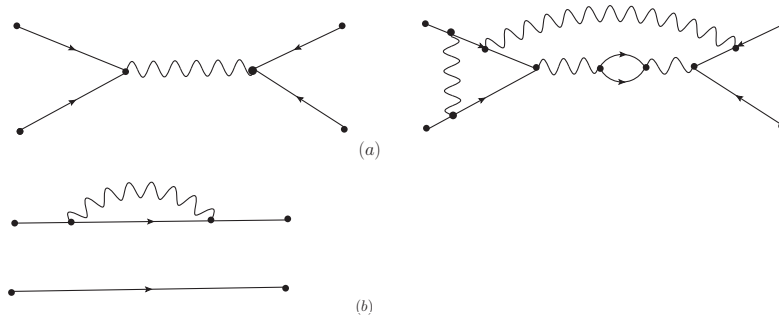
$$\begin{aligned} q^2 D_F(q^2) &= 1 \Rightarrow \\ D_F(q^2) &= \frac{1}{q^2} \quad \text{ή} \\ D_F^{\mu\nu}(q^2) &= \frac{g^{\mu\nu}}{q^2} \quad \text{για } q^2 \neq 0 \end{aligned} \quad (1.40)$$

Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι η συνάρτηση $D_F(q^2)$ εξαρτάται από την βαθμίδα που επιλέγουμε χωρίς όμως να επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα στο οποίο καταλήγουμε για άλλα φυσικά μεγέθη. Επίσης, περιγράφει τον διαδότη οποιουδήποτε άμαζου σωματιδίου με σπιν $s = 1$.

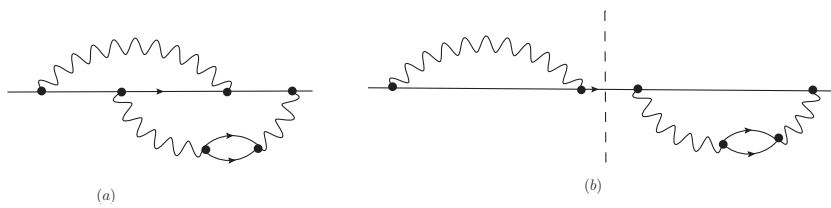
Τέλος να εισάγουμε την έννοια της γενικευμένης συνάρτησης Green στον χώρο των ορμών και των 1PI (*one-particle irreducible*) διαγραμμμάτων. Η $G^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$ περιγράφει διαδικασίες αλληλεπίδρασης (connected) οποιασδήποτε τάξης. Τα 1PI διαγράμματα είναι εκείνα τα οποία δεν μπορείς να τα χωρίσεις σε δύο ανεξάρτητα διαγράμματα κόβοντας μια εσωτερική γραμμή. Μπορούμε να ορίσουμε τώρα την 1PI γενικευμένη συνάρτηση Green, $\Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$ την οποία βρίσκουμε αφαιρώντας τα μη 1PI διαγράμματα από την $G^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$ καθώς και τους διαδότες από τις εξωτερικές γραμμές, δηλαδή ισχύει η αλγεβρική σχέση

$$G^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \prod_{i=1}^n \Delta(p_i) \Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \quad (1.41)$$

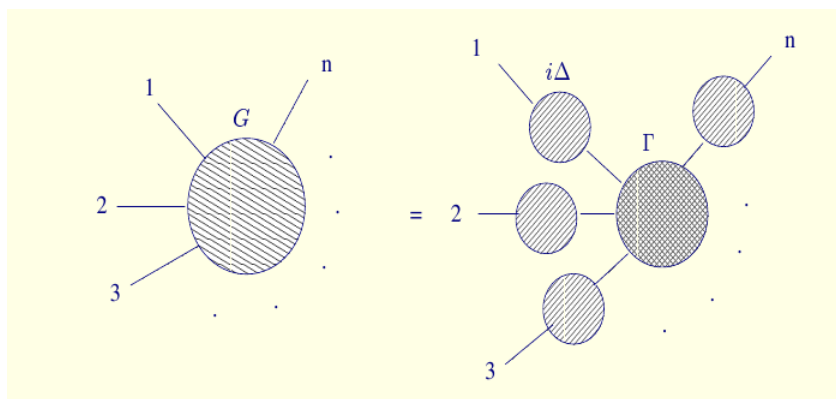
όπου $\Delta(p_i)$ ο διαδότης του πεδίου.



Σχήμα 1.3: Μερικά διαγράμματα: (a) που περιέχονται; (b) που δεν περιέχονται στην $G^{(4)}(p_1, \dots, p_4)$



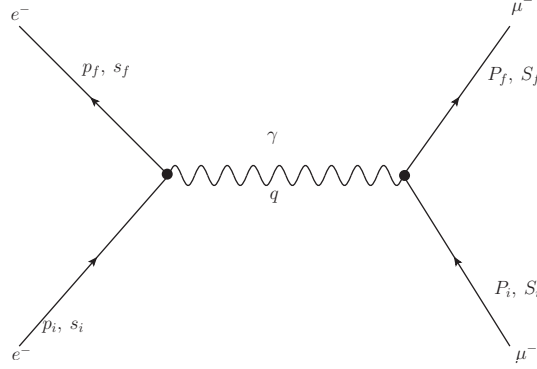
Σχήμα 1.4: Παραδείγματα ενός 1PI (a) και ενός μη 1PI (b) διαγράμματος



Σχήμα 1.5: Σχηματική αναπαράσταση της Εξ.(1.41)

1.3 Διαδικασίες σκέδασης στην ΚΗΔ

Ας εφαρμόσουμε τώρα τα παραπάνω ώστε να βρούμε την διαφορική ενεργό διατομή της σκέδασης ηλεκτρονίου από μιονίο. Το στοιχείο του πίνακα-S θα είναι λοιπόν



Σχήμα 1.6: Διάγραμμα Feynman της σκέδασης $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$

$$S_{fi} = -ie \int d^4x \bar{\psi}_f(x) \not{A}(x) \psi_i(x) \quad (1.42)$$

όπου το διανυσματικό δυναμικό οφείλεται στο ρεύμα του μιονίου οπότε θα έχουμε

$$S_{fi} = -i \int d^4x d^4y [e \bar{\psi}_f(x) \gamma_\mu \psi_i(x) D_F^{\mu\nu}(x-y) J_\nu(y)] \quad (1.43)$$

με

$$J_\nu(y) = -e \bar{\Psi}_f(y) \gamma_\nu \Psi_i(y) = -e N'_f N'_i \exp[i(P_f - P_i)y] \bar{u}(P_f, S_f) \gamma_\nu u(P_i, S_i)$$

όπου N η σταθερά κανονικοποίησης, οπότε καταλήγουμε στη σχέση

$$\begin{aligned} S_{fi} &= ie^2 N'_f N'_i N_f N_i [\bar{u}(p_f, s_f) \gamma_\mu u(p_i, s_i)] \times \\ &\int d^4x d^4y \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \exp[-iq(x-y)] \times \\ &\exp[i(P_f - P_i) \cdot y] \exp[i(p_f - p_i) \cdot x] \cdot \left(\frac{g^{\mu\nu}}{q^2} \right) [\bar{u}(P_f, S_f) \gamma_\nu u(P_i, S_i)] \end{aligned} \quad (1.44)$$

Ολοκληρώνοντας τώρα προκύπτει ότι

$$S_{fi} = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i + p_f - p_i) N'_f N'_i N_f N_i [-ie \bar{u} \gamma_\mu u] \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} [-ie \bar{u} \gamma_\nu u] \quad (1.45)$$

με $q = P_f - P_i = p_f - p_i$. Παρατηρούμε ότι το ηλεκτρόνιο και το μιονίο εισέρχονται στην εξίσωση με ένα τελείως συμμετρικό τρόπο, γεγονός που είναι λογικό αφού δεν υπάρχει διαφορά ανάμεσα στην σκέδαση του ηλεκτρονίου από το πεδίο του μιονίου ή το αντίστροφο. Το γινόμενο

$$\mathcal{M}_{fi} = [-ie\bar{u}\gamma_\mu u] \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} [-ie\bar{u}\gamma_\nu u]$$

καλείται αναλλοίωτο πλάτος και προκύπτει από το διάγραμμα Feynman, αφού κάθε γραμμή ή κορυφή αντιστοιχεί σε κάποιον παράγοντα. Τέλος, η συνάρτηση δέλτα εξασφαλίζει την διατήρηση της τετραορμής κατά τη σκέδαση.

Συνεχίζοντας, ορίζουμε την *συχνότητα μετάβασης ανά μονά όγκου* ως

$$W_{fi} = \frac{|S_{fi}|^2}{VT} = (2\pi)^4 \frac{1}{V^4} \delta^4(P_f - P_i + p_f - p_i) |\mathcal{M}_{fi}|^2 \quad (1.46)$$

που θεωρήσαμε $N = \sqrt{1/V}$. Για να βρούμε την διαφορική ενεργό διατομή διαιρούμε την W_{fi} με την ροή εισερχόμενων σωματιδίων $|\mathbf{J}_{inc}|$, με τον αριθμό των στόχων ανά μονάδα όγκου και πολλαπλασιάζουμε με τον αριθμό των τελικών καταστάσεων της ορμής των σωματιδίων. Έχουμε συνεπώς

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{V^2}{|v_{rel}| 2E_i 2E'_i} \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2 (2\pi)^4}{V^4} \frac{(2\pi)^6}{(2\pi)^6} \delta^4(P_f + p_f - P_i - p_i) \frac{d^3p_f}{2E_f} \frac{d^3P_f}{2E'_f} V^2 \\ &= \frac{1}{4|v_{rel}| E_i E'_i} \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{(2\pi)^2} \delta^4(P_f + p_f - P_i - p_i) \frac{d^3p_f}{2E_f} \frac{d^3P_f}{2E'_f} \end{aligned} \quad (1.47)$$

Βέβαια, η Εξ.(1.47) δίνει τη διαφορική ενεργό διατομή μιας συγκεκριμένης κατάστασης αρχικών και τελικών spin. Για αυτό ορίζουμε τη μέση διαφορική ενεργό διατομή ως

$$d\bar{\sigma} = \frac{1}{4|v_{rel}| E_i E'_i} \frac{|\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2}{(2\pi)^2} \delta^4(P_f + p_f - P_i - p_i) \frac{d^3p_f}{2E_f} \frac{d^3P_f}{2E'_f} \quad (1.48)$$

όπου

$$\begin{aligned}
\overline{|M_{fi}|^2} &\equiv \frac{1}{(2s_i + 1)(2S_i + 1)} \sum_{S_i, S_f, s_i, s_f} |M_{fi}|^2 \\
&= \frac{1}{4} \sum_{S_f S_i s_f s_i} \left| \bar{u}(s_f) \gamma^\mu u(s_i) \frac{e^2}{q^2} \bar{u}(S_f) \gamma_\mu u(S_i) \right|^2 = \\
&= \frac{1}{4} \frac{e^4}{q^4} \text{Tr} [\gamma^\mu (\not{p}_f + m_0) \gamma^\nu (\not{p}_i + m_0)] \text{Tr} [\gamma_\mu (\not{P}_f + M_0) \gamma_\nu (\not{P}_i + M_0)] \\
&= \frac{e^4}{q^4} L_{(e)}^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^{(\mu)} \tag{1.49}
\end{aligned}$$

με

$$L_{(e)}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Tr} [\gamma^\mu (\not{p}_f + m_0) \gamma^\nu (\not{p}_i + m_0)] \tag{1.50}$$

ο λεπτονικός τανυστής του ηλεκτρονίου και αντίστοιχα για το μόνιο.

$$\begin{aligned}
L_{(e)}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \text{Tr} [\not{p}_f \gamma^\mu \not{p}_i \gamma^\nu + m_0^2 \gamma^\mu \gamma^\nu] \\
&= 2 [p_f^\mu p_i^\nu + p_i^\mu p_f^\nu - g^{\mu\nu} (p_f p_i - m_0^2)] \tag{1.51}
\end{aligned}$$

Άρα καταλήγουμε για το αναλλοίωτο πλάτος

$$\overline{|M_{fi}|^2} = \frac{8e^4}{q^4} [(p_i P_i) (p_f P_f) + (p_i P_f) (p_f P_i) - (p_i p_f) M_0^2 - (P_i P_f) m_0^2 + 2M_0^2 m_0^2] \tag{1.52}$$

Για να προχωρήσουμε περαιτέρω πρέπει να επιλέξουμε ένα συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς. Ας επιλέξουμε το σύστημα ηρεμίας του μιονίου, οπότε θα είναι $P_i = (M_0, 0)$, $p_i = (E, \mathbf{p}) \equiv p$, $p_f = (E', \mathbf{p}') \equiv p'$ και ας υποθέσουμε ότι έχουμε υπερσχετικιστικό ηλεκτρόνιο ($E, E' \gg m_0$) οπότε μπορούμε να αγνοήσουμε τη μάζα του. Έτσι θα έχουμε τις εξισώσεις

$$\frac{1}{4|v_{rel}|E_i E'_i} = \frac{1}{4EM_0} \tag{1.53}$$

$$\begin{aligned}
\overline{|M_{fi}|^2} &= \frac{8e^4}{q^4} [(p_i P_i) (p_f P_f) + (p_i P_f) (p_f P_i) - (p_i p_f) M_0^2] \\
&= \frac{8e^4}{q^4} \left[-\frac{1}{2} q^2 (p \cdot P_i - p' \cdot P_i) + 2(p' \cdot P_i)(p \cdot P_i) + \frac{1}{2} M_0^2 q^2 \right] \tag{1.54}
\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε ότι $P_f = p - p' + P_i$, $p^2 = p'^2 \simeq 0$ και $q \simeq -2p \cdot p'$. Αντικαθιστώντας τώρα στην Εξ.(1.) τα p , p' και P_i έχουμε τελικά

$$\overline{|M_{fi}|^2} = \frac{8e^4}{q^4} 2M_0 E' E \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M_0^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \quad (1.55)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις κινηματικές σχέσεις

$$q^2 \simeq -2p \cdot p' \simeq -2EE'(1 - \cos \theta) = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$q^2 \simeq -2P_i q = -2\nu M \quad \text{με} \quad \nu \equiv E - E' = -\frac{q^2}{2M_0}$$

Επομένως έχουμε για την Εξ.(1.)

$$\begin{aligned} d\bar{\sigma} &= \frac{1}{4EM_0} \frac{\overline{|M_{fi}|^2}}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} E' dE' d\Omega \delta^4(P_f + p_f - P_i - p_i) \frac{d^3 P_f}{2E'_f} \\ &= \frac{1}{4EM_0} \frac{\overline{|M_{fi}|^2}}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} E' dE' d\Omega \delta^4(P_i + q - P_f) \frac{d^3 P_f}{2E'_f} \end{aligned} \quad (1.56)$$

Ολοκληρώνοντας τώρα ως προς P_f θα γίνει

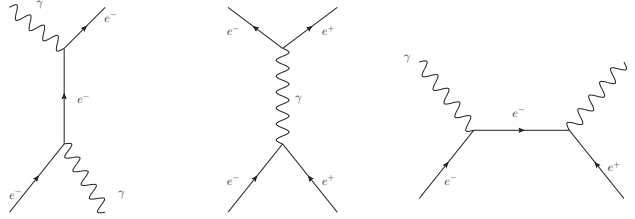
$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} &= \frac{1}{4EM_0} \frac{\overline{|M_{fi}|^2}}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} E' dE' \int \frac{d^3 P_f}{2E'_f} \delta^4(P_i + q - P_f) \\ &= \frac{1}{4EM_0} \frac{\overline{|M_{fi}|^2}}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} E' dE' \int d^3 P_f dE'_f \delta^4(P_i + q - P_f) \theta(E'_f) \delta(P_f^2 - M_0^2) \\ &= \frac{1}{4EM_0} \frac{\overline{|M_{fi}|^2}}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} E' dE' \frac{1}{2M_0} \delta(\nu + \frac{q^2}{2M_0}) \end{aligned} \quad (1.57)$$

Τέλος, αντικαθιστώντας την Εξ.(1.μ) στην Εξ.(1.) και ολοκληρώνοντας ως προς E' έχουμε

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \left(\frac{a^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \right) \frac{E'}{E} \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M_0^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \quad (1.58)$$

με

$$E' = E \frac{1}{1 + \frac{2E}{M_0} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad \text{την ενέργεια ανάκρουσης του στόχου.}$$



Σχήμα 1.7: Κάποια επιπλέον διαγράμματα Feynman που περιγράφουν διαδικασίες σκεδάσης

1.4 Κβαντική Χρωμοδυναμική

1.4.1 Η ιδέα του αναλλοίωτου βαθμίδας

Στην κβαντική μηχανική αν πολλαπλασιάσουμε την κυματοσυνάρτηση με έναν παράγοντα φάσης $e^{i\alpha}$ δεν υπάρχει κάποια παρατηρήσιμη μεταβολή. Παρ' όλα αυτά αν ο παράγοντας φάσης εξαρτάται από το σημείο τότε η κυματοσυνάρτηση δεν αποτελεί πλέον λύση της εξίσωσης Schrödinger για ελεύθερο σωματίδιο. Αν θέλουμε να διατηρείται η τοπική συμμετρία βαθμίδας πρέπει να εισάγουμε ένα πεδίο που αλληλεπιδρά με το σωματίδιο και μετασχηματίζεται με τον ίδιο τρόπο. Πράγματι, αν θεωρήσουμε την εξίσωση Schrödinger ενός ηλεκτρονίου σε μαγνητικό πεδίο με διανυσματικό δυναμικό $\vec{A}(\vec{x}, t)$ είναι

$$\frac{\hbar^2}{2m}(i\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{x}, t))^2\psi(\vec{x}, t) = i\hbar\partial_t\psi(\vec{x}, t) \quad (1.59)$$

όπου ισχύει

$$\vec{A}(\vec{x}, t) \rightarrow \vec{A}(\vec{x}, t) - \frac{c}{e}\vec{\nabla}a(\vec{x})$$

τότε τόσο η $\psi(\vec{x}, t)$ όσο και η $\exp(i\alpha(\vec{x}))\psi(\vec{x}, t)$ αποτελούν λύσεις της εξίσωσης. Από το παράδειγμα καταλαβαίνουμε η τοπική διατήρηση βαθμίδας της κυματοσυνάρτησης απαιτεί απαραίτητα την αλληλεπίδραση του σωματιδίου με ένα διανυσματικό πεδίο. Παρακάτω θα δούμε πως το αναλλοίωτο βαθμίδας θα μας οδηγήσει στην κατασκευή της σωστής Λαγκρανζιανής για την ΚΗΔ, που θα χρησιμοποιήσουμε ως πρότυπο για την ΚΧΔ.

1.4.2 Η Λαγκρανζιανή της ΚΗΔ σαν πρότυπο

Η Λαγκρανζιανή που περιγράφει ένα ελεύθερο πεδίου Dirac (όπως του ηλεκτρονίου) με μάζα m είναι

$$\mathcal{L}_{free} = \bar{\psi}(x)(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi(x) \quad (1.60)$$

Κάτω από έναν τοπικό $U(1)$ μετασχηματισμό φάσης έχουμε για την κυματοσυνάρτηση

$$\psi(x) \rightarrow \exp(-i\theta(x)\mathbf{1})\psi(x)$$

ενώ στην κλίση υπάρχει ένας επιπλέον όρος

$$\partial^\mu\psi(x) \rightarrow \exp(-i\theta(x)\mathbf{1})\partial^\mu\psi(x) - i\exp(-i\theta(x)\mathbf{1})\psi(x)\partial^\mu\theta(x)$$

οπότε εισάγουμε ένα διανυσματικό πεδίο που μετασχηματίζεται

$$A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) - \frac{1}{e}\partial^\mu\theta(x)$$

και ορίζουμε τη συναλλοίωτη παράγωγο

$$D^\mu\psi(x) \equiv (\partial^\mu + ieA^\mu(x))\psi(x)$$

που μετασχηματίζεται με τον ίδιο τρόπο όπως το πεδίο. Έτσι έχουμε για την Λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(iD_\mu\gamma^\mu - m)\psi(x) = \mathcal{L}_{free} - eA_\mu(x)\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \quad (1.61)$$

Ο δεύτερος όρος δίνει την αλληλεπίδραση του πεδίου Dirac με το διανυσματικό πεδίο. Η πλήρης Λαγκρανζιανή της ΚΗΔ επιτυγχάνεται αν προσθέσουμε έναν κινηματικό όρο για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο και έναν όρο βαθμίδας (βαθμίδα Lorentz) ώστε να εξασφαλίζεται η ύπαρξη του διαδότη του φωτονίου

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial^\mu A_\mu\partial_\mu A^\mu \quad (1.62)$$

όπου $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ είναι ο ηλεκτρομαγνητικός τανυστής με αποτέλεσμα

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_\gamma$$

Στην παραπάνω εξίσωση δεν θα μπορούσαμε να προσθέσουμε έναν όρο μάζας $m^2 A^\mu A_\mu$ διότι παραβιάζει το αναλλοίωτο βαθμίδας, γεγονός που οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το φωτόνιο δεν έχει μάζα.

1.4.3 Η Λαγκρανζιανή της ΚΧΔ και ο μετασχηματισμός BRST

Η περίπτωση της ΚΧΔ είναι είναι παρόμοια με αυτήν της ΚΗΔ αν και κάπως πιο περίπλοκη λόγω της μη αβελιανής δομής της $SU_C(3)$ που αντιστοιχεί στη συμμετρία χρώματος. Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα γράφεται

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}G_a^{\mu\nu}G_{\mu\nu}^a + i\bar{\psi}_j^\alpha\gamma^\mu(D_\mu)_{\alpha\beta}\psi_j^\beta - m_j\bar{\psi}_j^\alpha\psi_{j,\alpha} - \frac{1}{2}\partial^\mu A_\mu^a\partial_\mu A_\mu^a - \partial_\mu\bar{\varphi}_a D^\mu\varphi^a \quad (1.63)$$

όπου $G_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc}A_\mu^b A_\nu^c$ ($a = 1, 2, \dots, 8$) είναι ο τανυστής έντασης του πεδίου των γλουονίων ψ_j είναι το πεδίο quark γεύσης j ενώ φ^a είναι τα 8 βαθμωτά πεδία που ακολουθούν στατιστική φερμιονίων και ονομάζονται Faddeev-Popov ghosts particles τα οποία είναι αναγκαία για μια συνεπή κβάντωση της θεωρίας, μέσω των ολοκληρωμάτων διαδρομών, αφού εξαλείφουν αφύσικες καταστάσεις στον διαδότη των γλουονίων (εξαλείφουν το διαμήκες μέρος που εμφανίζεται σε βρόχους γλουονίων). $(D_\mu)_{\alpha\beta} \equiv \delta_{\alpha\beta}\partial_\mu - ig\sum_a \frac{1}{2}\lambda_{\alpha\beta}^a A_\mu^a$ είναι η συναλλοίωτη παράγωγος που δρα στο χρώμα των quark, ενώ $\lambda_{\alpha\beta}^a$ είναι οι $8 \cdot 3 \times 3$ πίνακες χρώματος και f_{abc} είναι οι πραγματικές σταθερές δομής της $SU(3)$ άλγεβρας Lie

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c$$

όπου $(T^a)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\lambda_{\alpha\beta}^a$ είναι η θεμελιώδης αναπαράσταση χρώματος και $(T_a)_{bc} = -if_{abc}$ η συζυγής αναπαράσταση. Ο προτελευταίος όρος είναι για την επιλογή βαθμίδα (βαθμίδα Lorentz), που είναι απαραίτητος για την συναλλοίωτη κβάντωση του πεδίου των γλουονίων. Μπορούμε να ξαναγράψουμε την Λαγκρανζιανή στην εξής μορφή

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{free} + \mathcal{L}_I^{qg} + \mathcal{L}_I^{gg} + \mathcal{L}_I^{FPg} \quad (1.64)$$

όπου

$$\mathcal{L}_{free} = \mathcal{L}_{free}^q + \mathcal{L}_{free}^g + \mathcal{L}_{free}^{FP} \quad (1.65)$$

περιέχει τους κινητικούς όρους των πεδίων

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{free}^q &= i\bar{\psi}_j^\alpha\gamma^\mu(\partial_\mu)_{\alpha\beta}\psi_j^\beta - m_j\bar{\psi}_j^\alpha\psi_{j,\alpha} \\ \mathcal{L}_{free}^g &= -\frac{1}{4}(\partial^\mu A_\mu^a - \partial^\nu A_\nu^a)(\partial_\mu A_\mu^a - \partial_\nu A_\nu^a) - \frac{1}{2}\partial^\mu A_\mu^a\partial_\mu A_\mu^a \\ \mathcal{L}_{free}^{FP} &= -\partial_\mu\bar{\varphi}_a\partial^\mu\varphi^a \end{aligned} \quad (1.66)$$

Η Λαγκρανζιανή της αλληλεπίδρασης των γλουονίων, με τα quark, τον εαυτό τους και με τα Faddeev-Popov ghosts είναι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_I^{qg} &= g A_a^\mu \bar{\psi}_j^\alpha \gamma^\mu \left(\frac{\lambda_a}{2} \right)_{\alpha\beta} \psi_j^\beta \\ \mathcal{L}_I^{gg} &= -\frac{g}{2} (\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu) A_{b,\mu} A_{c,\nu} - \frac{g^2}{2} f^{abc} f_{ade} A_b^\mu A_c^\nu A_\mu^d A_\nu^e \\ \mathcal{L}_I^{FPg} &= g f_{abc} (\partial_\mu \bar{\varphi}^a) \varphi^b A_\mu^c\end{aligned}\quad (1.67)$$

Το νέο στοιχείο σε σχέση με την αβελιανή ΚΗΔ είναι η αλληλεπίδραση του γλουονίου με τον εαυτό του και λόγω αυτού, η εισαγωγή του πεδίου Faddeev-Popov. Η L_{QCD} είναι τοπικά αναλλοίωτη κάτω από το μετασχηματισμό BRST

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \omega(x) D_\mu \varphi \quad (1.68)$$

$$\psi_i \rightarrow \exp(-ig\omega(x) \vec{T} \cdot \vec{\varphi}) \psi_i(x) \quad (1.69)$$

$$\bar{\varphi} \rightarrow \bar{\varphi} + \omega(x) \partial_\mu A^\mu \quad (1.70)$$

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{1}{2} g \omega(x) \vec{\varphi} \times \vec{\varphi} \quad (1.71)$$

όπου $\omega(x)$ είναι μια αυθαίρετη παράμετρος. Ο μετασχηματισμός BRST είναι χρήσιμος για την εξαγωγή των ταυτοτήτων Slavnov-Taylor-Ward. Με τη βοήθεια των τελευταίων αποδεικνύεται ότι σε όλες τις τάξεις της θεωρίας διαταραχών το μη εγκάρσιο τμήμα του διαδότη του γλουονίου παραμένει το ίδιο με τον ελεύθερο διαδότη και δεν συμβάλλει στην ενεργό διατομή διαφόρων σκεδάσεων.

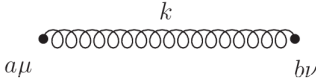
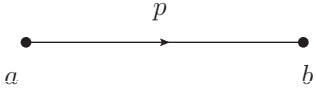
1.5 Κανόνες Feynman

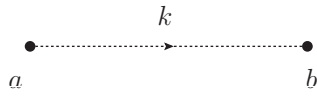
Στα προηγούμενα είδαμε ότι κάθε γραμμή ή κορυφή των διαγραμμάτων Feynman αντιστοιχεί σε κάποιον παράγοντα του αναλλοίωτου πλάτους που πηγάζει από την Λαγκρανζιανή της θεωρίας. Ο Feynman ομαδοποίησε σε μνημονικούς κανόνες αυτούς τους παράγοντες ώστε ο υπολογισμός του \mathcal{M} να γίνεται αρκετά απλός, όπως φαίνεται στον Πίνακα 1.1. Σε αυτούς πρέπει να προσθέσουμε επιπλέον

- Σε κάθε κλειστό βρόγχο ολοκληρώνουμε ως προς την απροσδιόριστη ορμή $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$
- Αν ο βρόγχος είναι φερμιονικός πολλαπλασιάζουμε με -1 και πέρνουμε το ίχνος

Τέλος να αναφαιρούμε ότι σε κάθε κορυφή διατηρείται η τετραορμή.

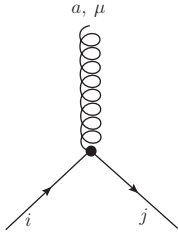
Πίνακας 1.1: Κανόνες Feynman για την ΚΗΔ και την ΚΧΔ

| | | Multiplicative Factor |
|---|--|--|
| QED | | |
| • External Lines | | |
| spin-0 boson (or antiboson) | | 1 |
| spin- $\frac{1}{2}$ fermion (in, out) | | u, \bar{u} |
| spin- $\frac{1}{2}$ antifermion (in, out) | | \bar{v}, v |
| spin-1 photon (in, out) | | $\epsilon_\mu, \epsilon_\mu^*$ |
| • Internal Lines – Propagators | | |
| spin-0 boson | | $\frac{i}{p^2 - m^2}$ |
| spin- $\frac{1}{2}$ fermion | | $\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}$ |
| massive spin-1 boson | | $\frac{-i(g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / M^2)}{p^2 - M^2}$ |
| massless spin-1 boson (Feynman gauge) | | $\frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2}$ |
| • Vertex Factors | | |
| photon–spin-0 (charge e) | | $-ie(p + p')^\mu$ |
| photon–spin- $\frac{1}{2}$ (charge e) | | $-ie\gamma^\mu$ |
| QCD | | |
| • Internal Lines – Propagators | | |
|  | | $-i\delta_{ab} \frac{g_{\mu\nu}}{k^2}$ |
|  | | $i\delta_{ab} \frac{1}{\not{p} - m}$ |

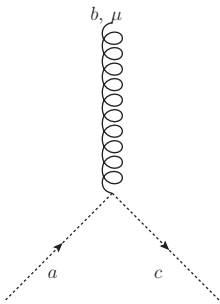


$$-i\delta_{ab}\frac{1}{k^2}$$

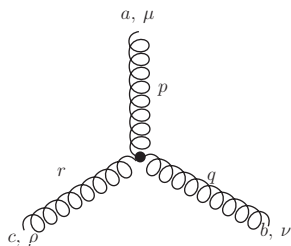
• Vertex Factors



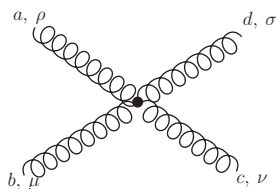
$$ig\gamma^\mu T_{ij}^a$$



$$-igf^{abc}p^\mu$$



$$gf^{abc}[(p-q)_\rho g_{\mu\nu} + (q-r)_\mu g_{\nu\rho} + (r-p)_\nu g_{\rho\mu}]$$



$$\begin{aligned} &-ig^2 f^{abe} f^{cde} (g_{\rho\nu} g_{\mu\sigma} - g_{\rho\sigma} g_{\mu\nu}) \\ &-ig^2 f^{ace} f^{bde} (g_{\rho\mu} g_{\nu\sigma} - g_{\rho\sigma} g_{\mu\nu}) \\ &-ig^2 f^{ade} f^{cbe} (g_{\rho\nu} g_{\mu\sigma} - g_{\rho\mu} g_{\sigma\nu}) \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 2

Επανακανονικοποίηση

2.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε διαδικασίες σε πρώτη τάξη στη θεωρία διαταραχών. Αν προχωρήσουμε στην επόμενη τάξη θα διαπιστώσουμε ότι τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στους βρόγχους απειρίζονται, οπότε χρειάζεται μια μέθοδος με την οποία θα απαλλαγούμε από τους αφύσικους αυτούς απειρισμούς με έναν συστηματικό και συνεπή τρόπο. Η μέθοδος με την οποία επιτυγχάνουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα ονομάζεται επανακανονικοποίηση (renormalization) και η βασική της ιδέα έγκυται στο γεγονός ότι τα φυσικά μεγέθη (μάζα, φορτίο κλπ) τα οποία εμφανίζονται στην Λαγκρανζιανή της θεωρίας δεν είναι αυτά που παρατηρούνται στο πείραμα, οπότε τα επαναορίζουμε με τέτοιο τρόπο ώστε τα τελικά αποτελέσματα να είναι πεπερασμένα. Ο τρόπος με τον οποίο επιτυγχάνεται αυτό, είναι η πρόσθεση στην Λαγκρανζιανή επιπλέον όρων (counter terms¹) ώστε να εξαφανίζονται οι αποκλίσεις. Αποδεικνύεται έτσι ότι μια θεωρία λέγεται επανακανονικοποιήσιμη όταν σε κάθε τάξη της θεωρίας διαταραχών προστίθενται στην Λαγκρανζιανή πεπερασμένος αριθμός από αυτούς τους επιπλέον όρους.

Η ενδιάμεση διαδικασία που ακολουθούμε για να φτάσουμε στο τελικό αποτέλεσμα ονομάζεται ομαλοποίηση (regularization) και έχει ως σκοπό τον διαχωρισμό των ολοκληρωμάτων σε ένα πεπερασμένο μέρος και σε ένα που αποκλίνει ώστε να μπορέσουμε να βρούμε τους όρους που εξαλείφουν τους απειρισμούς. Οι φυσικοί ανέπτυξαν πολλούς τρόπους ομαλοποίησης τους οποίους θα σχολιάσουμε παρακάτω:

1) Μέθοδος Pauli-Villars

¹ Αυτή η μέθοδος επανακανονικοποίησης ονομάζεται BHPZ από τα ονόματα των Bogoliubov, Parasin, Hepp και Zimmerman

Στη μέθοδο Pauli-Villars αντικαθιστούμε το διαδότη ως εξής:

$$\frac{1}{q^2 - m^2} \rightarrow \frac{1}{q^2 - m^2} - \frac{1}{q^2 - M^2}$$

όπου M μια αυθαίρετη σταθερά με διαστάσεις μάζας, ενώ διατηρεί το αναλλοίωτο των μετασχηματισμών Lorentz, αλλά δε συμβαίνει και το ίδιο με το αναλλοίωτο βαθμίδας ειδικά στις περιπτώσεις που θεωρούμε ότι τα πεδία έχουν μάζα.

2) Αναλυτική ομαλοποίηση

Όπως και στην προηγούμενη μέθοδο έτσι και αυτή έχει το βασικό μειονέκτημα ότι δε διατηρεί τη συμμετρία βαθμίδος της θεωρίας, ενώ συνίσταται στην αντικατάσταση του διαδότη

$$\frac{1}{q^2 - m^2} \rightarrow \frac{1}{(q^2 - m^2)^a}$$

όπου a είναι μιγαδικός με $\text{Re} a > 1$, ώστε να εξασφαλίζεται η σύγκλιση των ολοκληρωμάτων. Ο αρχικός διαδότης ανακτάται για $a \rightarrow 1$.

3) Ομαλοποίηση πλέγματος (lattice regularization) Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι η αντικατάσταση του χωρόχρονου από ένα κυβικό πλέγμα όπου η απόσταση μεταξύ δύο σημείων είναι a . Βασικό της πλεονέκτημα είναι ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε υπολογιστικές μεθόδους (lattice QCD) ενώ διατηρεί ταυτόχρονα τις συμμετρίες βαθμίδος, αλλά όχι και την Lorentz συμμετρία του χωρόχρονου.

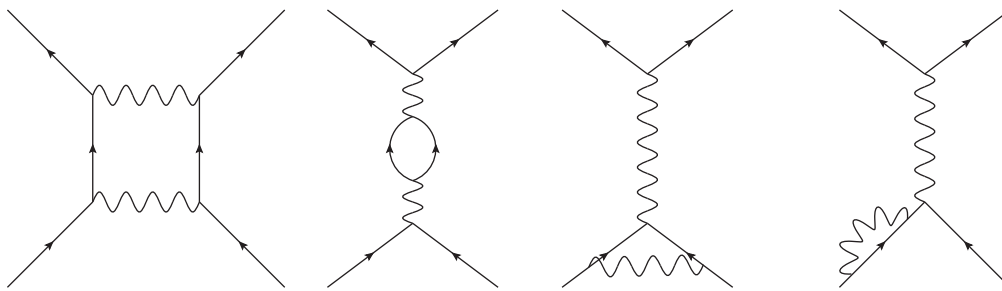
4) Διαστατική ομαλοποίηση (dimensional regularization)

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{k^2 + m^2} d^n k$ σε έναν 2-διάστατο χώρο ($n = 2$). Μετά το πέρας των υπολογισμών βλέπουμε ότι το τελικό αποτέλεσμα δεν απειρίζεται, ενώ αν το υπολογίζαμε σε ένα 4-διάστατο χώρο θα εμφάνιζε λογαριθμική απειρία. Αυτή η παρατήρηση αποτελεί και τη βασική ιδέα της μεθόδου στην οποία τα διαγράμματα υπολογίζονται σε ένα n -διάστατο χώρο, όπου συνήθως $n = 4 - 2\epsilon$. Οι απειρίες εμφανίζονται ως πόλοι της μορφής $1/\epsilon$ ενώ αφού κάνουμε τους υπολογισμούς παίρνουμε το όριο $\epsilon \rightarrow 0$. Η διαστατική ομαλοποίηση μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε απλούς αλγεβρικούς κανόνες για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων που προκύπτουν από τα διαγράμματα Feynman, ενώ δεν εμφανίζονται επιφανειακοί όροι κατά την ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Επιπλέον η μέθοδος διατηρεί τη συμμετρία Lorentz του χωρόχρονου και τη συμμετρία βαθμίδος. Παρ' όλα αυτά η μέθοδος έχει και κάποια μειονεκτήματα, καθώς υπάρχουν μεγέθη που δεν γενικεύονται εύκολα στις n διαστάσεις όπως ο πίνακας γ_5 με αποτέλεσμα αν έχουμε μια θεωρία με άμαζα φερμιόνια που διαθέτει συμμετρία ως προς τη χειραλικότητα (chiral symmetry), αυτή να μην διατηρείται στις n διαστάσεις και ορισμένες φορές ούτε στο όριο $\epsilon \rightarrow 0$ (axial anomaly). Επιπλέον αλλάζει και η διαστατικότητα διαφόρων μεγεθών, όπως το φορτίο του ηλεκτρονίου- για να παραμείνει αδιάστατο στις n διαστάσεις

πολλαπλασιάζεται με μια σταθερά με διαστάσεις μάζας, δηλαδή $e \rightarrow e\mu^{2-n/2}$ - με αποτέλεσμα αν η 4-διάστατη θεωρία μας είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς κλίμακας (scale invariant), η συμμετρία αυτή να σπάει μετά την ομαλοποίηση (conformal anomaly). Μια άλλη σημαντική συμμετρία που δεν διατηρείται κατά την διαστατική ομαλοποίηση είναι η υπερσυμμετρία -αν και υπάρχει μια παραλλαγή της μεθόδου που την διατηρεί (dimensional reduction)- και αυτό διότι ο αριθμός των μποζονικών και φερμιονικών βαθμών ελευθερίας εξαρτάται από τη διάσταση του χώρου με διαφορετικό τρόπο. Παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε αυτή τη μέθοδο για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων.

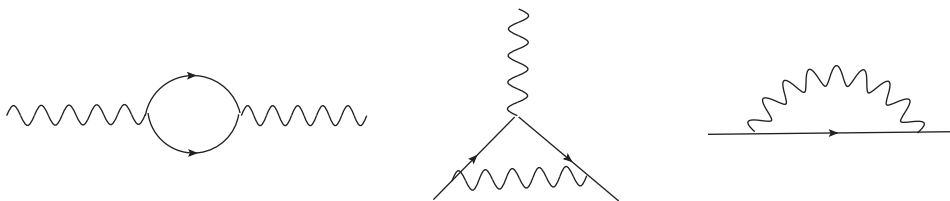
2.2 Διορθώσεις 1 βρόγχου στην ΚΗΔ

Για να μελετήσουμε τις πιθανές διαδικασίες που λαμβάνουν χώρα σε δεύτερη τάξη της θεωρίας διαταραχών θα θεωρήσουμε σαν παράδειγμα την σκέδαση ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου. Θα πρέπει να σχεδιάσουμε λοιπόν όλα τα διαφορετικά τοπολογικά διαγράμματα που έχουν τέσσερις κορυφές. Μερικά από αυτά φαίνονται στο Σχ.(2.1). Με



Σχήμα 2.1: Μερικά διαγράμματα δεύτερης τάξης της $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$

για γρήγορη ματιά παρατηρούμε ότι υπάρχουν τρία χαρακτηριστικά υποδιαγράμματα τα οποία απεικονίζονται στο Σχ.(2.2). Αυτά έχουν ειδική ονομασία το καθένα, πόλωση



Σχήμα 2.2: Οι τρεις κύριοι βρόγχοι που απειρίζονται

$$\begin{aligned}
-i\Sigma(p) &= (ie\mu^\epsilon)^2 \int \frac{d^n k}{2\pi^n} \gamma^\mu \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m} \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2} \gamma^\nu \\
&= -e^2 \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^n k}{2\pi^n} \frac{\gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_\mu}{[(p-k)^2 - m^2] k^2} \\
&= -e^2 \mu^{2\epsilon} \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^n k}{2\pi^n} \frac{\gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_\mu}{[\alpha(p-k)^2 - \alpha m^2 + (1-\alpha)k^2]^2} \\
&= -e^2 \mu^{2\epsilon} \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^n k}{2\pi^n} \frac{\gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_\mu}{[\alpha(p^2 - 2pk + k^2) - \alpha m^2 + (1-\alpha)k^2]^2} \quad (2.5)
\end{aligned}$$

Ο παρονομαστής, προσθαφαιρώντας $\alpha^2 p^2$, γίνεται

$$\alpha p^2 + \alpha k^2 - 2\alpha p \cdot k - \alpha m^2 + k^2 - \alpha k^2 \pm \alpha^2 p^2 = \alpha(1-\alpha)p^2 + (k-\alpha p)^2 - \alpha m^2$$

και με αλλαγή την μεταβλητής $(k-\alpha p) \rightarrow k'$ και $d^n k \rightarrow d^n k'$ έχουμε για την Εξ.(2.5)

$$\begin{aligned}
-i\Sigma(p) &= -e^2 \mu^{2\epsilon} \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^n k'}{2\pi^n} \frac{\gamma^\mu [(1-\alpha) \not{p} - \not{k}' + m] \gamma_\mu}{[k'^2 - \alpha m^2 + \alpha(1-\alpha)p^2]^2} \\
&= -e^2 \mu^{2\epsilon} \int_0^1 d\alpha \gamma^\mu [(1-\alpha) \not{p} + m] \gamma_\mu \int \frac{d^n k'}{2\pi^n} \frac{1}{[k'^2 - \alpha m^2 + \alpha(1-\alpha)p^2]^2} + \\
&\quad + e^2 \mu^{2\epsilon} \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^n k'}{2\pi^n} \frac{\gamma^\mu \not{k}' \gamma_\mu}{[k'^2 - \alpha m^2 + \alpha(1-\alpha)p^2]^2} \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Από το παράρτημα έχουμε για τον πρώτο όρο

$$\begin{aligned}
&-e^2 \mu^{2\epsilon} \int_0^1 d\alpha \gamma^\mu [(1-\alpha) \not{p} + m] \gamma_\mu \int \frac{d^n k'}{2\pi^n} \frac{1}{[k'^2 - \alpha m^2 + \alpha(1-\alpha)p^2]^2} = \\
&= -ie^2 \mu^{2\epsilon} \frac{\Gamma(2-n/2)}{(4\pi)^{n/2}} \int_0^1 d\alpha \gamma^\mu [(1-\alpha) \not{p} + m] \gamma_\mu [\alpha m^2 - \alpha(1-\alpha)p^2]^{n/2-2} \\
&= -ie^2 \mu^{2\epsilon} \frac{\Gamma(2-n/2)}{(4\pi)^{n/2}} \int_0^1 d\alpha [(1-\alpha) \not{p}(2-n) + nm] [\alpha m^2 - \alpha(1-\alpha)p^2]^{n/2-2} \\
&= -ie^2 \frac{\Gamma(\epsilon)}{16\pi^2} \int_0^1 d\alpha [(1-\alpha) \not{p}(2\epsilon-2) + (4-2\epsilon)m] \left[\frac{\alpha m^2 - \alpha(1-\alpha)p^2}{4\pi\mu^2} \right]^\epsilon \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Θέτουμε

$$\left[\frac{\alpha m^2 - \alpha(1-\alpha)p^2}{4\pi\mu^2} \right]^\epsilon = e^{-\epsilon \ln(Q(p,m,\mu))}$$

με $Q(p, m, \mu) = \frac{\alpha m^2 - \alpha(1-\alpha)p^2}{4\pi\mu^2}$ και αναπτύσσουμε για $\epsilon \ll 1$ οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} & -ie^2 \frac{(1/\epsilon - \gamma)}{16\pi^2} \int_0^1 d\alpha [(1-\alpha) \not{p}(2\epsilon - 2) + (4 - 2\epsilon)m][1 - \epsilon \ln(Q(p, m, \mu))] = \\ & = \frac{-ie^2}{16\pi^2\epsilon} (\not{p} + 4m) + \text{πεπερασμένοι όροι} \end{aligned} \quad (2.8)$$

ενώ ο δεύτερος όρος μηδενίζεται. Επομένως, από τις Εξ.(2.6) και (2.8) έχουμε

$$-i\Sigma(p) = \frac{-ie^2}{16\pi^2\epsilon} (\not{p} + 4m) + \text{πεπερασμένοι όροι} \quad (2.9)$$

2.2.2 Πόλωση του κενού

Όπως και στην περίπτωση του ηλεκτρονίου, έτσι και εδώ μπορούμε να αναπτύξουμε το πλήρη διαδότη σύμφωνα με την προσέγγιση αλυσίδας. Παρ' όλα αυτά θα περάσουμε κατευθείαν στον υπολογισμό της διόρθωσης στον διαδότη.

$$\begin{aligned} i\Pi_{\mu\nu} &= -(-ie\mu^\epsilon)^2 \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \text{Tr} \left(\gamma_\mu \frac{i}{\not{k} - m} \gamma_\nu \frac{i}{\not{q} - \not{k} - m} \right) \\ &= -e^2 \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{\text{Tr}[\gamma_\mu(\not{k} + m)\gamma_\nu(\not{q} - \not{k} + m)]}{[(q - k)^2 - m^2](k^2 - m^2)} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Με ομαδοποίηση a la Feymann και λίγες πράξεις κατά τα γνωστά έχουμε

$$i\Pi_{\mu\nu} = -e^2 \mu^{2\epsilon} \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{\text{Tr}[\gamma_\mu(\not{k} + m)\gamma_\nu(\not{q} - \not{k} + m)]}{[(k - \alpha q)^2 - m^2 + q^2\alpha(1 - \alpha)]^2}$$

Έπειτα κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $k - \alpha q \rightarrow k'$ και $d^n k \rightarrow d^n k'$ οπότε

$$i\Pi_{\mu\nu} = -e^2 \mu^{2\epsilon} \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{\text{Tr}[\gamma_\mu(\not{k}' + \alpha q + m)\gamma_\nu(\not{k}' - (1 - \alpha)\not{q} + m)]}{[k'^2 - m^2 + q^2\alpha(1 - \alpha)]^2} \quad (2.11)$$

Για τον αριθμητή έχουμε

$$\begin{aligned} N &= \text{Tr}[\gamma_\mu(\not{k}' + \alpha q + m)\gamma_\nu(\not{k}' - (1 - \alpha)\not{q} + m)] \\ &= \text{Tr}[\gamma_\mu \not{k}' \gamma_\nu \not{k}' - (1 - \alpha)\gamma_\mu \not{k}' \gamma_\nu \not{q} + m\gamma_\mu \not{k}' \gamma_\nu + \alpha\gamma_\mu \not{q} \gamma_\nu \not{k}' - \\ &\quad - \alpha(1 - \alpha)\gamma_\mu \not{q} \gamma_\nu \not{q} + \alpha m\gamma_\mu \not{q} \gamma_\nu + \\ &\quad + m\gamma_\mu \gamma_\nu \not{k}' - m(1 - \alpha)\gamma_\mu \gamma_\nu \not{q} + m^2\gamma_\mu \gamma_\nu] \end{aligned} \quad (2.12)$$

Οι όροι με περιττό αριθμό γ_μ μηδενίζονται, ενώ όροι ανάλογοι του $\gamma_\mu k'_\nu$ δίνουν ολοκληρώματα τύπου

$$C(q, g_{\mu\nu}) \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k'_\mu}{[k'^2 - m^2 + q^2\alpha(1-\alpha)]^2} = 0$$

Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} N &= [k'^\rho k'^\sigma - \alpha(1-\alpha)q^\rho q^\sigma] Tr[\gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\sigma] + m^2 Tr[\gamma_\mu \gamma_\nu] = \\ &= 2^{n/2} \{ [k'^\rho k'^\sigma - \alpha(1-\alpha)q^\rho q^\sigma] [g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}] + m^2 g_{\mu\nu} \} = \\ &= 2^{n/2} \{ 2k'_\mu k'_\nu - 2\alpha(1-\alpha)q_\mu q_\nu - [k'^2 - \alpha(1-\alpha)q^2 - m^2] g_{\mu\nu} \} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Γράφουμε τον όρο $\alpha(1-\alpha)q^2$ σαν $2\alpha(1-\alpha)q^2 - \alpha(1-\alpha)q^2$, οπότε καταλήγουμε

$$N = 2^{n/2} \{ 2k'_\mu k'_\nu - 2\alpha(1-\alpha)(q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) [k'^2 + \alpha(1-\alpha)q^2 - m^2] g_{\mu\nu} \}$$

Άρα ο τανυστής γίνεται

$$\begin{aligned} i\Pi_{\mu\nu} &= (-2^{n/2} e^2 \mu^{2\epsilon}) \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k'_\mu k'_\nu}{[k'^2 + \alpha(1-\alpha)q^2 - m^2]^2} - \frac{2\alpha(1-\alpha)(q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu})}{[k'^2 + \alpha(1-\alpha)q^2 - m^2]^2} \\ &\quad - \frac{g_{\mu\nu} [k'^2 + \alpha(1-\alpha)q^2 - m^2]}{[k'^2 + \alpha(1-\alpha)q^2 - m^2]^2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Για τον πρώτο όρο της Εξ.(2.14) έχουμε

$$\begin{aligned} &- e^2 2^{\frac{n}{2}} \mu^{2\epsilon} \int da \int \frac{dk'}{(2\pi)^n} \frac{k'_\mu k'_\nu}{[k'^2 + q^2\alpha(1-\alpha) - m^2]^2} = \\ &= -e^2 2^{\frac{n}{2}} \mu^{2\epsilon} \int da i(-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} \Gamma(2)} \left[\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\Gamma(1 - \frac{n}{2})}{[q^2\alpha(1-\alpha) - m^2]^{1 - \frac{n}{2}}} \right] = \\ &= -e^2 2^{\frac{n}{2}} \mu^{2\epsilon} \int d\alpha \frac{i(-1)^{\frac{n}{2}}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \left[g_{\mu\nu} \frac{\Gamma(1 - \frac{n}{2})}{[q^2\alpha(1-\alpha) - m^2]^{1 - \frac{n}{2}}} \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

Για τον δεύτερο όρο είναι

$$\begin{aligned} &- e^2 \mu^{2\epsilon} 2^{\frac{n}{2}} [q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}] \int d\alpha \int \frac{d^n k'}{(2\pi)^n} \left[\frac{-2(1-\alpha)\alpha}{[k'^2 + q^2(1-\alpha)\alpha - m^2]^2} \right] = \\ &= e^2 \mu^{2\epsilon} 2^{2-\epsilon} [q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}] \int d\alpha 2\alpha(1-\alpha) i(-1)^{2-\epsilon} \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^{2-\epsilon} \Gamma(2)} [q^2\alpha(1-\alpha) - m^2]^{-\epsilon} = \\ &= i e^2 \mu^{2\epsilon} 2^{2-\epsilon} [q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}] \int d\alpha \frac{2\alpha(1-\alpha)\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^{2-\epsilon}} [m^2 - q^2\alpha(1-\alpha)]^{-\epsilon} = \\ &= \frac{i e^2}{2\pi^2} [q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}] \int d\alpha \alpha(1-\alpha) \Gamma(\epsilon) \left[\frac{m^2 - q^2(1-\alpha)}{2\pi\mu^2} \right]^{-\epsilon} = \end{aligned} \quad (2.16)$$

Θέτουμε $Q = \frac{m^2 - q^2(1-\alpha)}{2\pi\mu^2}$ στην Εξ.(2.16) και έχουμε

$$\begin{aligned}
& \frac{ie^2}{2\pi^2} [q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}] \int_0^1 d\alpha \left[\alpha(1-\alpha) \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma \right) [1 - \epsilon \ln(Q)] \right] = \\
& = \frac{ie^2}{2\pi^2} [q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}] \left\{ \int_0^1 d\alpha \alpha(1-\alpha) \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma \right) - \int_0^1 d\alpha \alpha(1-\alpha) \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma \right) \epsilon \ln(Q) \right\} = \\
& = \frac{ie^2}{12\pi^2 \epsilon} [q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}] + O(\epsilon^0) + O(\epsilon) \tag{2.17}
\end{aligned}$$

με $O(\epsilon^0) = -\frac{ie^2}{2\pi^2} [q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}] \left[\frac{\gamma}{6} - \int d\alpha \alpha(1-\alpha) \ln(Q) \right]$ και

$$O(\epsilon) = \frac{ie^2}{2\pi^2} \left[\int d\alpha \alpha(1-\alpha) \gamma \ln(Q) \right] [q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}]$$

Για τον τρίτο όρο έχουμε

$$\begin{aligned}
& 2^{\frac{n}{2}} e^2 \mu 2\epsilon \int da \int \frac{d^n k'}{(2\pi)^n} \frac{g_{\mu\nu} [k' + q^2 \alpha(1-\alpha) - m^2]}{[k' + q^2 \alpha(1-\alpha) - m^2]^2} = \\
& = 2^{\frac{n}{2}} e^2 \mu^{2\epsilon} \int da g_{\mu\nu} \int \frac{d^n k'}{(2\pi)^n} \frac{1}{k' + q^2 \alpha(1-\alpha) - m^2} = \\
& = 2^{\frac{n}{2}} e^2 \mu^{2\epsilon} \int da \frac{i(-1)^{\frac{n}{2}}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{\Gamma(1 - \frac{n}{2}) g_{\mu\nu}}{[q^2 \alpha(1-\alpha) - m^2]^{1 - \frac{n}{2}}} \tag{2.18}
\end{aligned}$$

Όπως βλέπουμε ο πρώτος και τρίτος όρος είναι αντίθετοι οπότε αντικαθιστώντας τις Εξ.(2.15)(2.17)(2.18) στην Εξ.(2.14) έχουμε για τον διαδότη

$$i\Pi_{\mu\nu} = \frac{ie^2}{12\pi^2 \epsilon} [q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}] + \text{πεπερασμένοι όροι} \tag{2.19}$$

2.2.3 Διαμόρφωση ρεύματος

$$\begin{aligned}
- ie\mu^\epsilon \Lambda_\mu &= (-ie\mu^\epsilon)^3 \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} - \frac{ig_{\nu\rho}}{k^2} \gamma_\nu \frac{i}{\not{p}' - \not{k} - m} \gamma_\mu \frac{i}{\not{p}' - \not{k} - m} \gamma_\rho \\
&= -(ie\mu^\epsilon)^3 \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{\gamma_\nu (\not{p}' - k + m) \gamma_\mu (\not{p}' - k + m) \gamma^\nu}{k^2 [(\not{p}' - k)^2 - m^2][(\not{p}' - k)^2 - m^2]} \\
&= -2(e\mu^\epsilon)^3 \int_0^1 d\alpha \int_0^{1-\alpha} d\beta \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{\gamma_\nu (\not{p}' - k + m) \gamma_\mu (\not{p}' - k + m) \gamma^\nu}{[k^2 - m^2(\alpha + \beta) - 2k(\alpha p + \beta p') + \alpha p^2 + \beta p'^2]^3} \quad (2.20)
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον τύπο

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 d\alpha \int_0^{1-\alpha} d\beta \frac{1}{[a(1-\alpha-\beta) + \alpha b + \beta c]^3}$$

Προσθαφαιρούμε στον παρονομαστή τους όρους $2\alpha\beta pp'$, $(\alpha p)^2$, $(\beta p')^2$ και έχουμε

$$[(k - \alpha p - \beta p')^2 - m^2(\alpha + \beta) + p^2\alpha(1 - \alpha) + p'^2\beta(1 - \beta) - 2\alpha\beta pp']^3$$

Έπειτα κάνουμε την αλλαγή $k - \alpha p - \beta p' \rightarrow k'$ οπότε καταλήγουμε

$$\begin{aligned}
- ie\mu^\epsilon \Lambda_\mu &= -2(e\mu^\epsilon)^3 \int_0^1 d\alpha \int_0^{1-\alpha} d\beta \\
&\int \frac{d^n k'}{(2\pi)^n} \frac{\gamma_\nu [\not{p}'(1-\beta) - a \not{p} - k' + m] \gamma_\mu [\not{p}(1-\alpha) - \beta \not{p}' - k' + m] \gamma^\nu}{[k'^2 - m^2(\alpha + \beta) + \alpha(1-\alpha)p^2 + \beta(1-\beta)p'^2 - 2\alpha\beta p'p]^3} = \\
&= -2(e\mu^\epsilon)^3 \int_0^1 d\alpha \int_0^{1-\alpha} d\beta \\
&\int \frac{d^n k'}{(2\pi)^n} \frac{\gamma_\nu [\dots]_1 \gamma_\mu [\dots]_2 \gamma^\nu - \gamma_\nu [\dots]_1 \gamma_\mu \not{k}' \gamma^\nu - \gamma_\nu \not{k}' \gamma_\mu [\dots]_2 \gamma^\nu + \gamma_\nu \not{k}' \gamma_\mu \not{k}' \gamma^\nu}{[k'^2 - m^2(\alpha + \beta) + \alpha(1-\alpha)p^2 + \beta(1-\beta)p'^2 - 2\alpha\beta p'p]^3} \quad (2.21)
\end{aligned}$$

όπου για συντομία γράφουμε

$$[\dots]_1 = [\not{p}'(1-\beta) + m - \alpha \not{p}] \quad \text{και} \quad [\dots]_2 = [\not{p}(1-\alpha) + m - \beta \not{p}']$$

Οι δύο μεσαίοι όροι όπως έχουμε δει και στα προηγούμενα μηδενίζονται οπότε μένουν μόνο ο πρώτος και ο τέταρτος όρος. Ο πρώτος δεν περιέχει k στον αριθμητή και είναι

εύκολο να δει κανείς ότι δεν απειρίζεται. Οπότε γράφουμε την Εξ.(2.21) στην μορφή $\Lambda_\mu = \Lambda_\mu^{(1)} + \Lambda_\mu^{(2)}$ με

$$\Lambda_\mu^{(1)} = -2i(e\mu^\epsilon)^2 \int_0^1 d\alpha \int_0^{1-\alpha} d\beta \int \frac{d^n k'}{(2\pi)^n} \frac{\gamma_\nu k'_\mu \gamma_\mu k'_\nu}{[k'^2 - m^2(\alpha + \beta) + \alpha(1 - \alpha)p^2 + \beta(1 - \beta)p^2 - 2\alpha\beta p'p]^3} \quad (2.22)$$

$$\Lambda_\mu^{(2)} = -2i(e\mu^\epsilon)^2 \int_0^1 d\alpha \int_0^{1-\alpha} d\beta \int \frac{d^n k'}{(2\pi)^n} \frac{\gamma_\nu [\not{p}'(1 - \beta) - \alpha \not{p} + m] \gamma_\mu [\not{p}(1 - \alpha) - \beta \not{p}' + m] \gamma^\nu}{[k'^2 - m^2(\alpha + \beta) + \alpha(1 - \alpha)p^2 + \beta(1 - \beta)p^2 - 2\alpha\beta p'p]^3} \quad (2.23)$$

Ας εξετάσουμε πρώτα τον όρο $\Lambda_\mu^{(1)}$

$$\Lambda_\mu^{(1)} = -2i(e\mu^\epsilon)^2 \int_0^1 d\alpha \int_0^{1-\alpha} d\beta \gamma_\nu \gamma^\rho \gamma_\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu \int \frac{d^n k'}{(2\pi)^n} \frac{k'_\rho k'_\sigma}{[k'^2 - m^2(\alpha + \beta) + \alpha(1 - \alpha)p^2 + \beta(1 - \beta)p^2 - 2\alpha\beta p'p]^3} \quad (2.24)$$

Θέτουμε $m^2(\alpha + \beta) - \alpha(1 - \alpha)p^2 - \beta(1 - \beta)p^2 + 2\alpha\beta p'p = M^2$ και γράφουμε

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu^{(1)} &= -2i(e\mu^\epsilon)^2 \int_0^1 d\alpha \int_0^{1-\alpha} d\beta \gamma_\nu \gamma^\rho \gamma_\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu \left[i(-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} \Gamma(3)} \frac{g_{\rho\sigma}}{2} \frac{\Gamma(2 - \frac{n}{2})}{[M^2]^{2 - \frac{n}{2}}} \right] \\ &= -2i(e\mu^\epsilon)^2 \int_0^1 d\alpha \int_0^{1-\alpha} d\beta \frac{i(-1)^{\frac{n}{2}} (2 - n)^2 \gamma_\mu \Gamma(2 - \frac{n}{2})}{4(4\pi)^{n/2} M^{4-n}} \\ &= -2i(e\mu^\epsilon)^2 \int_0^1 d\alpha \int_0^{1-\alpha} d\beta \frac{i(2\epsilon - 2)^2 \gamma_\mu \Gamma(\epsilon)}{4(4\pi)^{2-\epsilon} M^{2\epsilon}} \\ &= 2e^2 \int_0^1 d\alpha \int_0^{1-\alpha} d\beta \frac{(4\epsilon^2 - 8\epsilon + 4) \gamma_\mu (\frac{1}{\epsilon} - \gamma)}{4(4\pi)^2} \left[1 - \epsilon \ln\left(\frac{M^2}{4\pi\mu^2}\right) \right] \\ &= \frac{e^2 \gamma_\mu}{32\pi^2} \left\{ \frac{2}{\epsilon} - 4 \int_0^1 d\alpha \int_0^{1-\alpha} d\beta [2 + \gamma + \ln Q] + \text{όροι μεγαλύτερης τάξης} \right\} \end{aligned} \quad (2.25)$$

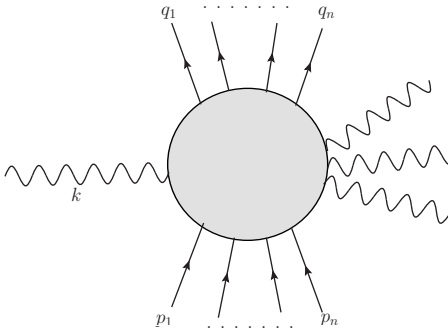
όπου $Q = \frac{M^2}{4\pi\mu^2}$. Τελικά έχουμε

$$\Lambda_\mu^{(1)} = \frac{e^2 \gamma_\mu}{16\pi^2 \epsilon} + \text{πεπερασμένοι όροι μεγαλύτερης τάξης} \quad (2.26)$$

Το $\Lambda_\mu^{(2)}$ συνεισφέρει στην ανώμαλη μαγνητική ροπή του ηλεκτρονίου (για περαιτέρω λεπτομέρειες ανατρέξτε στο παράρτημα).

2.2.4 Ταυτότητα Ward-Takahashi

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα αναλλοίωτο πλάτος \mathcal{M} το οποίο έχει $2n$ εξωτερικές γραμμές ηλεκτρονίων (όχι κατ' ανάγκη on mass-shell) και ένα εισερχόμενο φωτόνιο (μπορεί να έχει και ένα αυθαίρετο αριθμό εξερχόμενων φωτονίων γενικά). Συμβολίζουμε με p_i τις n εισερχόμενες ορμές και με q_i τις n εξερχόμενες και με k την ορμή του φωτονίου.

$$\mathcal{M}(k; p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n) =$$


Θέλουμε να βρούμε ένα τρόπο να υπολογίζουμε το πλάτος \mathcal{M} από ένα πιο απλό πλάτος \mathcal{M}_0 που δεν περιέχει το εισερχόμενο φωτόνιο και είναι ταυτόσημο με το αρχικό. Για να σχηματίσουμε το $\mathcal{M} = k_\mu \mathcal{M}^\mu$ από το \mathcal{M}_0 πρέπει να αθροίσουμε όλα τα διαγράμματα που συνεισφέρουν στο \mathcal{M}_0 και για κάθε ένα από αυτά τα διαγράμματα να αθροίσουμε πάνω σε όλα τα σημεία που μπορούμε να εισάγουμε το φωτόνιο. Αθροίζοντας πάνω σε όλα τα σημεία εισαγωγής έχουμε σχηματικά

$$\sum_{\text{Σημεία εισαγωγής}} k_\mu \left(\begin{array}{c} q_1 \dots q_n \\ \mu \text{ wavy line } k \\ \text{circle} \\ p_1 \dots p_n \end{array} \right) = e \sum_i \left(\begin{array}{c} q_1, \dots, q_i - k, \dots \\ \text{circle} \\ p_1, \dots, p_n \end{array} - \begin{array}{c} q_1, \dots, q_n \\ \text{circle} \\ p_1, \dots, p_i + k, \dots \end{array} \right)$$

Αθροίζοντας όλα τα παραπάνω διαγράμματα που προκύπτουν έχουμε τελικά

$$k_\mu \mathcal{M}^\mu = e \sum_i [\mathcal{M}_0(p_1 \dots p_n; q_1 \dots (q_i - k) \dots) - \mathcal{M}_0(p_1 \dots (p_i + k) \dots; q_1 \dots (q_n)] \quad (2.27)$$

Η Εξ.(2.27) ονομάζεται ταυτότητα *Ward-Takahashi* για τις συναρτήσεις συσχετισμού της ΚΗΔ. Στην ειδική περίπτωση που το \mathcal{M} είναι μέρος κάποιου στοιχείου του πίνακα

οι οποίοι πρέπει να απαλειφθούν από όρους της μορφής

$$\Delta\mathcal{L}_\psi = iB\bar{\psi}\not{\partial}\psi - A\bar{\psi}\psi$$

Οι κανόνες Feynman που προκύπτουν είναι $iB\not{p}$ και $-iA$ αντίστοιχα, οπότε θα είναι

$$A = -\frac{me^2}{4\pi^2\epsilon} \quad \text{και} \quad B = -\frac{e^2}{16\pi^2\epsilon} \quad (2.30)$$

Άρα θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\psi + \Delta\mathcal{L}_\psi &= \mathcal{L}_{\psi_0} \Rightarrow \\ i(1+B)\bar{\psi}\not{\partial}\psi - (m+A)\bar{\psi}\psi &= i\bar{\psi}_0\not{\partial}\psi_0 - m_0\bar{\psi}_0\psi_0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Αυτό επιτυγχάνεται με την επανακανονικοποίηση της κυματοσυνάρτησης και της μάζας ως εξής

$$\psi_0 = \sqrt{Z_2}\psi \quad \text{και} \quad m_0 = m + \delta m \quad (2.32)$$

με

$$Z_2 = 1 + B = 1 - \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon} \quad (2.33)$$

$$m_0 = Z_2^{-1}(m + A) = m \left(1 + \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon}\right) \left(1 - \frac{e^2}{4\pi^2\epsilon}\right) = m \left(1 - \frac{3e^2}{16\pi^2\epsilon}\right) = m + \delta m \quad (2.34)$$

Η Εξ.(2.32) έχει σαν επακόλουθο την επανακανονικοποίησης και των γενικευμένων συναρτήσεων Green και των 1PI συναρτήσεων Green

$$G^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = Z_2^{-n/2} G_0^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \quad (2.35)$$

$$\Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = Z_2^{n/2} \Gamma_0^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \quad (2.36)$$

Ας συνεχίσουμε τώρα με τον διαδότη του φωτονίου. Οι επιτρεπόμενοι όροι που μπορούμε να προσθέσουμε είναι της μορφής

$$\Delta\mathcal{L}_\gamma = -\frac{C}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{E}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2$$

Οι κανόνες Feynman που προέρχονται από την $\Delta\mathcal{L}_\gamma$ είναι

$$-iC(k^2g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu), \quad -iEk^2g^{\mu\nu}$$

οπότε συγκρίνοντάς τες με την Εξ.(2.19) συμπεραίνουμε ότι

$$C = -\frac{e^2}{12\pi^2\epsilon}, \quad E = 0$$

Κατά τα γνωστά, θα πρέπει να έχουμε

$$\mathcal{L}_\gamma + \Delta\mathcal{L}_\gamma = -\frac{Z_3}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2 = \mathcal{L}_{0\gamma}$$

με

$$Z_3 = 1 + C = 1 - \frac{e^2}{12\pi^2\epsilon} \quad (2.37)$$

που ισχύει αν επανακανονικοποιήσουμε το πεδίο του φωτονίου, οπότε

$$A_0^\mu = \sqrt{Z_3}A^\mu \quad (2.38)$$

Σημαντικό είναι να επισημάνουμε ότι ο διαδότης του φωτονίου έχει ακόμα πόλο στο $q^2 = 0$ γεγονός που σημαίνει ότι το φωτόνιο παραμένει άμαζι και διατηρείται η συμμετρία βαθμίδος κατά την επανακανονικοποίηση.

Τέλος έχουμε τη διαμόρφωση του ρεύματος. Ακολουθώντας όμοια πορεία με προηγούμενως, η $\Delta\mathcal{L}_{ee\gamma}$ είναι

$$-De\mu^\epsilon\bar{\psi} \not{A}\psi$$

ενώ για το D ισχύει η σχέση

$$D = -\frac{e^2}{16\pi^2\epsilon}$$

Έτσι θα έχουμε για την πλήρη Λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L}_{ee\gamma} + \Delta\mathcal{L}_{ee\gamma} = -Z_1e\mu^\epsilon\bar{\psi} \not{A}\psi = \mathcal{L}_{0ee\gamma} \quad (2.39)$$

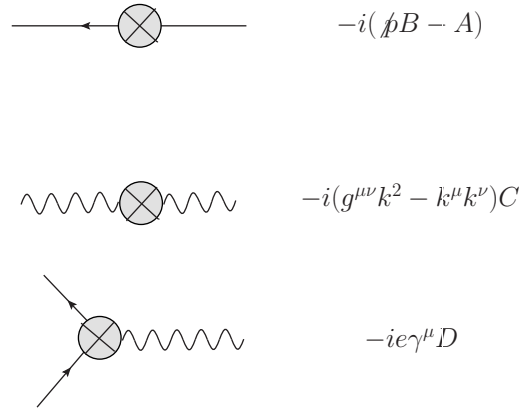
$$\text{με} \quad Z_1 = 1 - \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon} = Z_2 \quad (2.40)$$

Το γεγονός ότι $Z_1 = Z_2$ δεν είναι σύμπτωση, αλλά είναι απόρροια της ταυτότητας Ward-Takahashi και εξασφαλίζει ότι το φορτίο θα είναι ίδιο για όλα τα σωματίδια μετά την επανακανονικοποίηση, αφού από την Εξ.(2.39) έχουμε

$$-Z_1e\mu^\epsilon A^\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi = -e_0A_0^\mu\bar{\psi}_0\gamma_\mu\psi_0 = -e_0\sqrt{Z_3}(\sqrt{Z_2})^2 A^\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \quad (2.41)$$

από όπου καταλήγουμε στην επανακανονικοποίηση του ηλεκτρικού φορτίου

$$e_0 = \frac{Z_1e\mu^\epsilon}{Z_3^{1/2}Z_2} = Z_3^{-1/2}e\mu^\epsilon \quad (2.42)$$

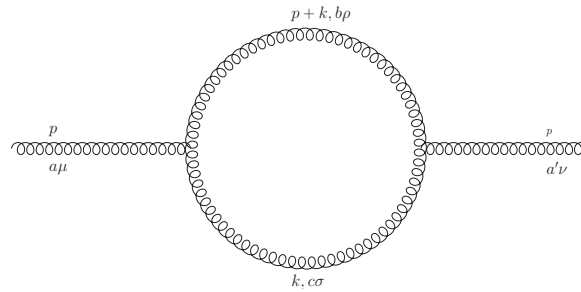


Σχήμα 2.3: Κανόνες Feynman για την $\Delta\mathcal{L}$

2.3 Κβαντική χρωμοδυναμική

Λόγω της πολυπλοκότητας της θεωρίας δεν θα ασχοληθούμε συστηματικά με την επανακανονικοποίηση της ΚΧΔ και την εύρεση των επιπλέον όρων στην Λαγκρανζιανή, αλλά θα εξετάσουμε κάποια παραδείγματα.

2.3.1 Βρόγχος γλουονίων



Σχήμα 2.4: Διάγραμμα βρόγχου γλουονίων

Εφαρμόζοντας τους κανόνες Feynman για το Σχ.(2.4) έχουμε

$$\begin{aligned}
 i\Pi_{\mu\nu}^{ab} &= f^{adc} f^{bdc} \frac{(-ig\mu^\epsilon)^2}{2} \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{N_{\mu\nu}}{p^2(p+k)^2} \\
 &= C_A \delta^{ab} \frac{(-ig\mu^\epsilon)^2}{2} \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{N_{\mu\nu}}{[(p+\alpha k)^2 + \alpha(1-\alpha)k^2]}
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

με

$$\begin{aligned}
N_{\mu\nu} &= [g_{\mu\sigma}(-k+p)_\rho + g_{\mu\rho}(p+2k)_\sigma + g_{\rho\sigma}(-2p-k)_\mu] \cdot \\
&\quad \cdot [g_{\sigma'\nu}(p-k)_{\rho'} + g_{\rho'\sigma'}(-2p-k)_\nu + g_{\rho'\nu}(p+2k)_{\sigma'}] (-ig^{\rho\rho'})(-ig^{\sigma\sigma'}) \\
&= -g_{\mu\nu} [5k^2 + 2p^2 + 2kp] - (n-6)k_\mu k_\nu - (4n-6)p_\mu p_\nu - (2n-3)(p_\mu k_\nu + p_\nu k_\mu)
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Κατά τα γνωστά κάνουμε την αλλαγή $p + \alpha k \rightarrow p'$ και έχουμε για τον αριθμητή

$$N_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \left[k^2(5 - 2\alpha(1 - \alpha)) + 6p'^2 \left(\frac{n-1}{n} \right) \right] - k_\mu k_\nu [(6 - 4n)\alpha(1 - \alpha) + n - 6] \tag{2.45}$$

ενώ ο παρονομαστής γίνεται

$$D = [p'^2 + \alpha(1 - \alpha)k^2]^2 \tag{2.46}$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις Εξ.(2.45) και (2.46) στην (2.43) έχουμε

$$\begin{aligned}
i\Pi_{\mu\nu}^{ab} &= C_A \delta^{ab} \frac{(-ig\mu^\epsilon)^2}{2} \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^n p'}{(2\pi)^n} \frac{N_{\mu\nu}}{D} = C_A \delta^{ab} \frac{g^2}{2} \int_0^1 d\alpha (-1)^{2-\epsilon} \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{-1}{\left(\frac{\alpha(1-\alpha)k^2}{4\pi\mu^2}\right)^\epsilon} \times \\
&\quad \{ g_{\mu\nu} [k^2[5 - 2\alpha(1 - \alpha)]\Gamma(\epsilon)3(3 - 2\epsilon)k^2\alpha(1 - \alpha)\Gamma(2\epsilon - 1)] \\
&\quad \quad + k_\mu k_\nu [(8\epsilon - 10)\alpha(1 - \alpha) + 2\epsilon - 2]\Gamma(\epsilon) \} \\
&= C_A \delta^{ab} \frac{-g^2}{2} \frac{i}{(4\pi)^2} \Gamma(\epsilon) \left\{ \frac{11}{3} k_\mu k_\nu - \frac{19}{6} g_{\mu\nu} k^2 \right\} + \text{πεπερασμένοι όροι} \tag{2.47}
\end{aligned}$$

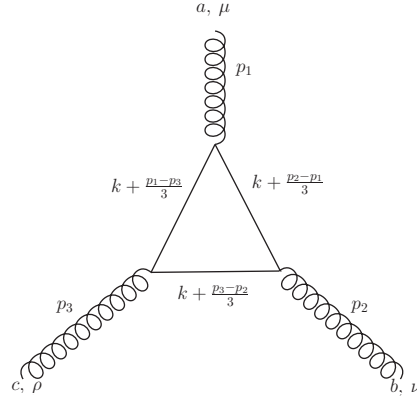
Παρατηρούμε ότι για τον τανυστή ισχύει η σχέση $k^\mu \Pi_{\mu\nu} \neq 0$, δηλαδή παραβιάζεται η συμμετρία βαθμίδας. Θα πρέπει να προσθέσουμε και τη συνεισφορά από τα ghost particles για να μην παραβιαστεί.



Σχήμα 2.5: Τα επιπλέον διαγράμματα που συνεισφέρουν στον διαδότη του γλουονίου

2.3.2 Κορυφή τριών γλουονίων

Ας θεωρήσουμε για ευκολία ότι έχουμε άμαζα quark τότε



Σχήμα 2.6: Ο φερμιονικός βρόγχος που συνεισφέρει στην κορυφή τριών γλουονίων

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mu\nu\rho} &= -i \text{Tr}[T^a T^b T^c] (g\mu^\epsilon)^3 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} \left[\gamma^\mu \left(\not{k} + \frac{\not{p}_2 - \not{p}_1}{3} \right) \gamma^\nu \left(\not{k} + \frac{\not{p}_3 - \not{p}_2}{3} \right) \gamma^\rho \left(\not{k} + \frac{\not{p}_1 - \not{p}_3}{3} \right) \right]}{\left(k + \frac{p_2 - p_1}{3} \right)^2 \left(k + \frac{p_3 - p_2}{3} \right)^2 \left(k + \frac{p_1 - p_3}{3} \right)^2} \\
&= -i \frac{d^{abc} + i f^{abc}}{4} (g\mu^\epsilon)^3 \int_0^1 d\alpha \int_0^{1-\alpha} d\beta \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \\
&\quad \frac{\text{Tr} \left[\gamma^\mu \left(\not{k} + \frac{\not{p}_2 - \not{p}_1}{3} \right) \gamma^\nu \left(\not{k} + \frac{\not{p}_3 - \not{p}_2}{3} \right) \gamma^\rho \left(\not{k} + \frac{\not{p}_1 - \not{p}_3}{3} \right) \right]}{\left(k + \frac{p_2 - p_1}{3} \right)^2 (1 - \alpha - \beta) + \left(k + \frac{p_3 - p_2}{3} \right)^2 \alpha + \left(k + \frac{p_1 - p_3}{3} \right)^2 \beta}
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Ας εξετάσουμε πρώτα τον παρονομαστή

$$\begin{aligned}
D &= \left(k + \frac{p_2 - p_1}{3} \right)^2 (1 - \alpha - \beta) + \left(k + \frac{p_3 - p_2}{3} \right)^2 \alpha + \left(k + \frac{p_1 - p_3}{3} \right)^2 \beta \\
&= k^2 + \frac{2k}{3} [p_2(1 - 3\alpha) - p_1(1 - 3\beta)] \pm \left[\frac{p_2(1 - 3\alpha) - p_1(1 - 3\beta)}{3} \right]^2 + \\
&\quad + \frac{\alpha}{3} [(p_2 - p_1)^2 + (p_1 + 2p_2)]^2 + \frac{\beta}{3} [(p_2 - p_1)^2 + (p_2 + 2p_1)]^2 \\
&= \left[k + \frac{1}{3} p_2(1 - 3\alpha) - \frac{1}{3} p_1(1 - 3\beta) \right]^2 + \Lambda^2
\end{aligned} \tag{2.49}$$

με

$$\Lambda^2 = \frac{\alpha}{3} [(p_2 - p_1)^2 + (p_1 + 2p_2)]^2 + \frac{\beta}{3} [(p_2 - p_1)^2 + (p_2 + 2p_1)]^2 - \left[\frac{p_2(1 - 3\alpha) - p_1(1 - 3\beta)}{3} \right]^2$$

Κάνουμε τώρα την αλλαγή $k + \frac{1}{3}p_2(1 - 3\alpha) - \frac{1}{3}p_1(1 - 3\beta) \rightarrow k'$, οπότε ο αριθμητής γίνεται

$$Tr \left[\gamma^\mu (\not{k}' + \alpha \not{p}_2 - \beta \not{p}_1) \gamma^\nu [\not{k}' + \not{p}_2(\frac{1}{3} + \alpha) + \not{p}_1(\frac{1}{3} - \beta)] \gamma^\rho [\not{k}' + \not{p}_1(1 - \beta) + \alpha \not{p}_2] \right] \quad (2.50)$$

Έπειτα από κάποιες πράξεις καταλήγουμε στη σχέση

$$N = Tr \left[\gamma^\mu \not{k}' \gamma^\nu \not{k}' \gamma^\rho \not{k}' + \underbrace{\gamma^\mu \not{k}' \gamma^\nu \not{k}' \gamma^\rho}_{A} (\cdot)_3 \right. \\ \left. + \underbrace{\gamma^\mu \not{k}' \gamma^\nu (\cdot)_2 \gamma^\rho \not{k}'}_B + \underbrace{\gamma^\mu (\cdot)_1 \gamma^\nu \not{k}' \gamma^\rho \not{k}'}_C + \gamma^\mu (\cdot)_1 \gamma^\nu (\cdot)_2 \gamma^\rho (\cdot)_3 \right] \quad (2.51)$$

όπου

$$(\cdot)_1 = \alpha \not{p}_2 - \beta \not{p}_1, \quad (\cdot)_2 = (\frac{1}{3} + \alpha) \not{p}_2 + (\frac{1}{3} - \beta) \not{p}_1, \quad (\cdot)_3 = \alpha \not{p}_2 + (1 - \beta) \not{p}_1$$

Ο πρώτος όρος της Εξ.(2.51) έχει περιττό αριθμό k' οπότε μετά την ολοκλήρωση θα μηδενιστεί, ενώ ο τελευταίος δεν απειρίζεται. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των πινάκων γ θα έχουμε

$$A = 2^{n/2} [4k'^\mu k'^\nu - 3k'^2 g^{\mu\nu}] (\cdot)_3^\rho \quad (2.52)$$

$$B = 2^{n/2} [4k'^\mu k'^\nu - 3k'^2 g^{\mu\nu}] (\cdot)_2^\rho \quad (2.53)$$

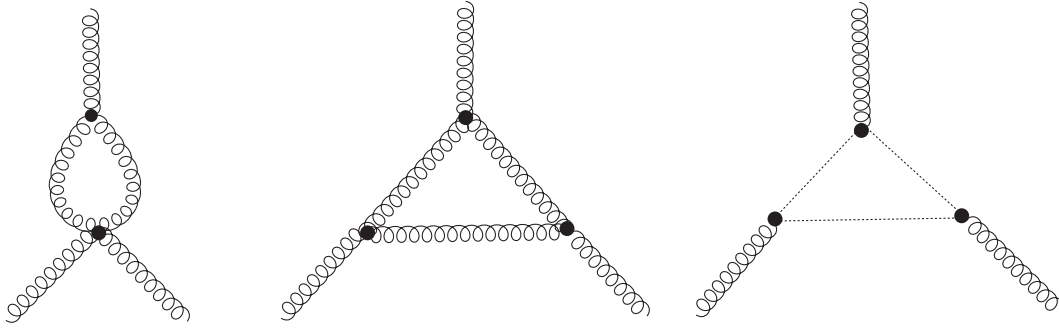
$$C = 2^{n/2} [4k'^\mu k'^\nu - 3k'^2 g^{\mu\nu}] (\cdot)_1^\rho \quad (2.54)$$

Για καθένα από τους παραπάνω τρεις τύπους θα προκύπτει, μετά την ολοκλήρωση ένας όρος της μορφής

$$2^{n/2} i (-1)^{n/2} \frac{1}{(4\pi)^{n/2} \Gamma(3)} \frac{g^{\mu\nu} \Gamma(2 - n/2)}{2 (\Lambda^2)^{2-n/2}} [4 - 3n] (\cdot)_i^\rho \quad (2.55)$$

Οπότε προσθέτοντάς τας και ολοκληρώνοντας ως προς α και β έχουμε το τελικό αποτέλεσμα

$$\Gamma^{\mu\nu\rho} = -\frac{d^{abc} + i f^{abc}}{2\pi^2 \Gamma(3)} g^3 \Gamma(\epsilon) \left\{ \frac{g^{\mu\nu}}{6} (p_2 - p_1)^\rho + \frac{g^{\mu\nu}}{3} (\frac{1}{3} p_2 - 2p_1)^\rho + \frac{g^{\mu\nu}}{3} (p_2 + p_1)^\rho \right\} \quad (2.56)$$



Σχήμα 2.7: Μερικά από τα επιπλέον διαγράμματα που συνεισφέρουν στην κορυφή τριών γλουονίων

2.4 Εξίσωση Ομάδας Επανακανονικοποίησης

Όπως είδαμε κατά την διαδικασία της διαστατικής ομαλοποίησης (αλλά και στις άλλες μεθόδους ομαλοποίησης) εισάγαμε μια αυθαίρετη σταθερά μ η οποία έχει διαστάσεις μάζας. Αυτό γεννά το ερώτημα αν και κατά πόσο αλλάζουν τα αποτελέσματα μας αν κάνουμε μια αλλαγή $\mu \rightarrow \mu'$. Φυσικά αναμένουμε ποσότητες όπως η "γυμνή" μάζα ή το "γυμνό" φορτίο του ηλεκτρονίου να παραμένουν αναλλοίωτες. Ας δούμε για παράδειγμα το e_0 όπου έχουμε

$$\begin{aligned}
 e_0 &= e\mu^\epsilon Z_3^{-1/2} \\
 &= e\mu^\epsilon \left(1 - \frac{e^2}{12\pi^2\epsilon}\right)^{-1/2} \\
 &= e\mu^\epsilon \left(1 + \frac{e^2}{24\pi^2\epsilon}\right) + O(e^4)
 \end{aligned}
 \tag{2.57}$$

οπότε παραγωγίζοντας μερικώς ως προς μ καταλήγουμε στην σχέση

$$\begin{aligned}
 \mu \frac{\partial e_0}{\partial \mu} &= 0 \Rightarrow \\
 e\mu^\epsilon \left(1 + \frac{e^2}{24\pi^2\epsilon}\right) + \mu \frac{\partial e}{\partial \mu} \mu^\epsilon \left(1 + \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}\right) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.58}$$

Ορίζουμε τώρα την συνάρτηση βήτα ως

$$\begin{aligned} \beta(e) &\equiv \mu \frac{\partial e}{\partial \mu} = & (2.59) \\ &= -\epsilon e \left(1 + \frac{e^2}{24\pi^2\epsilon}\right) \left(1 + \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}\right)^{-1} \\ &= -\epsilon e \left(1 - \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon} + O(e^4)\right) \rightarrow \frac{e^3}{6\pi^2} \quad \text{για } \epsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης βρίσκεται εύκολα αν την ξαναγράψουμε με την εξής μορφή

$$\mu \frac{\partial e^2}{\partial \mu} = \frac{(e^2)^2}{6\pi^2}$$

οπότε έχουμε

$$e^2(\mu) = \frac{e^2(\mu_0)}{1 - \frac{e^2(\mu_0)}{6\pi^2} \ln \frac{\mu}{\mu_0}}$$

ή

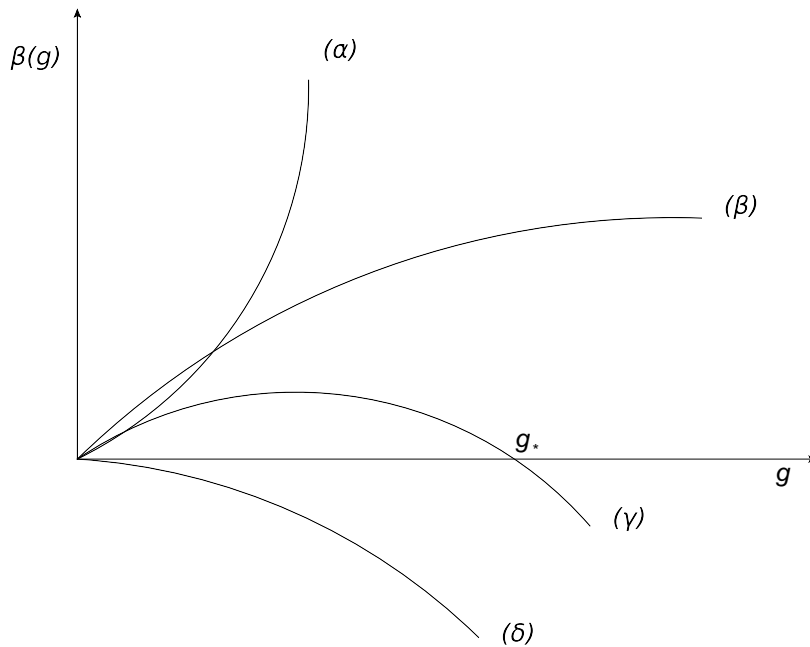
$$a(\mu) = \frac{a(\mu_0)}{1 - \frac{2a(\mu_0)}{3\pi} \ln \frac{\mu}{\mu_0}}$$

Η συνάρτηση $a(\mu)$ ονομάζεται *running coupling constant* και δείχνει πως μεταβάλλεται η σταθερά λεπτής υφής ή ισοδύναμα η ένταση της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης με την ενέργεια. Για τον ηλεκτρομαγνητισμό η $a(\mu)$ αυξάνεται με την ενέργεια, κάτι που έχει παρατηρηθεί και πειραματικά. Για ενέργειες της κλίμακας των 91 GeV είναι $a(\mu = 91 \text{ GeV}) \simeq \frac{1}{128}$. Το σημείο στο οποίο η $a(\mu)$ απειρίζεται είναι

$$\mu = \mu_0 \exp\left(\frac{3\pi}{2a(\mu_0)}\right) \sim 10^{92} \text{ GeV}$$

Το γεγονός ότι το ηλεκτρικό φορτίο αυξάνεται με την ενέργεια έχει μια προφανή φυσική εξήγηση. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια πηγή με φορτίο $-e$ το οποίο και θέλουμε να μετρήσουμε. Γύρω από αυτό το φορτίο δημιουργούνται συνεχώς βρόχοι ηλεκτρονίων-ποζιτρονίων οι οποίοι πολώνονται (όπως σε ένα διηλεκτρικό μέσο) με αποτέλεσμα το ποζιτρόνιο να περνά περισσότερο χρόνο κοντά στην πηγή. Λόγω αυτού του γεγονότος το φορτίο της πηγής θωρακίζεται από την πόλωση του κενού. Όσο πλησιάζει κανείς λοιπόν στο φορτίο της πηγής (ή ισοδύναμα αυξάνεται η κλίμακα ενέργειας) τόσο περισσότερο διεισδύει μέσα σε αυτό το σύννεφο και αισθάνεται το "γυμνό" φορτίο της πηγής.

Ας επανέλθουμε τώρα στη συνάρτηση $\beta(g)$ και να δούμε κάποιες ενδιαφέρουσες περιπτώσεις. Οι μέθοδοι της ομάδας επανακανονικοποίησης μας δίνουν πληροφορίες για την ασυμπτωτική συμπεριφορά της θεωρίας ακόμα και όταν η σταθερά ζεύξης $g(\mu)$ της θεωρίας δεν είναι μικρή ώστε να επιτρέπει τη χρήση διαταρακτικών μεθόδων. Υπάρχουν τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις για το πως συμπεριφέρεται η $g(\mu)$ καθώς $\mu \rightarrow \infty$ που σχετίζονται με τις διαφορετικές μορφές της $\beta(g)$ όταν η θεωρία έχει μια σταθερά αλληλεπίδρασης.



Σχήμα 2.8: Σχηματική αναπαράσταση των τεσσάρων πιθανών μορφών της $\beta(g)$

(α) Απειρισμός σε πεπερασμένη ενέργεια

Στην περίπτωση που $\beta(g) > 0$ για $g \rightarrow 0^+$ και αυξάνεται έπειτα με τέτοιο ρυθμό ώστε να ισχύει η συνθήκη

$$\int_c^\infty \frac{dg}{\beta(g)} < \infty$$

τότε η $g(\mu) \rightarrow \infty$ σε μια πεπερασμένη τιμή της ενέργειας E_∞ που ονομάζεται πόλος Landau και ισούται με

$$E_\infty = \mu \exp\left(\int_{g_\mu}^\infty \frac{dg}{\beta(g)}\right)$$

όπου μ η κλίμακα επανακανονικοποίησης. Το γεγονός ότι η $g(\mu)$ γίνεται "ισχυρή" σε μια ενεργειακή κλίμακα $E < E_\infty$, πράγμα που σημαίνει ότι η θεωρία διαταραχών δεν θα μας δίνει σωστά αποτελέσματα, ή ότι εμφανίζει μια αφύσικη απειρία στην E_∞ δεν είναι απαραίτητα καταστροφικό μιας και η θεωρία μπορεί να είναι μια προσέγγιση χαμηλών ενεργειών μιας μεγαλύτερης θεωρίας - μια προσέγγιση που είναι έγκυρη μόνο για $E \ll E_\infty$ - όπως συμβαίνει για παράδειγμα με την ΚΗΔ που ανήκει σε αυτήν την περίπτωση όπως είδαμε.

(β)Συνεχείς αύξηση

Όπως προηγουμένως, έτσι και εδώ $\beta(g) > 0$ για $g \rightarrow 0^+$ όμως

$$\int_c^\infty \frac{dg}{\beta(g)} \rightarrow \infty$$

Τώρα η $g(\mu)$ συνεχίζει να αυξάνει αλλά απειρίζεται στο όριο $\mu \rightarrow \infty$, ενώ η ασυμπτωτική συμπεριφορά της είναι ανεξάρτητη από την αρχική συνθήκη.

(γ)Σταθερό πεπερασμένο σημείο

Έστω ότι είναι $\beta(g) > 0$ για $0 < g < g_*$ μηδενίζεται για $g = g_*$ και $\beta(g) < 0$ για $g > g_*$. Τότε καθώς αυξάνεται το μ η $g(\mu)$ αυξάνεται αν είναι $g(\mu) < g_*$ και μειώνεται αν είναι $g(\mu) > g_*$, οπότε και στις δύο περιπτώσεις $g(\mu) \rightarrow g_*$ για $\mu \rightarrow \infty$. Αντίθετα αν είναι $\beta(g) < 0$ για $0 < g < g_*$ και $\beta(g) > 0$ για $g > g_*$ τότε η $g(\mu) \rightarrow 0$ αν $g(\mu) < g_*$ ή $g(\mu) \rightarrow \infty$ αν $g(\mu) > g_*$.

(δ)Ασυμπτωτική ελευθερία

Αν είναι $\beta(g) < 0$ για $g \rightarrow 0^+$ - επι παραδείγματι ας υποθέσουμε ότι $\beta(g) = -bg^n$ με $b > 0$ και $n > 1$ - τότε από την Εξ.(2.59) βρίσκουμε ότι

$$g(\mu) = g(\mu_0) \left[1 + b(n-1)g^{n-1}(\mu_0) \ln\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right) \right]^{-1/(n-1)}$$

για την οποία ισχύει $g(\mu) \rightarrow 0$ για $\mu \rightarrow \infty$. Σε αυτήν την περίπτωση ανήκει η ΚΧΔ όπου $n = 3$ και

$$b = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{11}{3}C - \frac{2}{3}N_f \right)$$

με $C = 3$ και $N_f = 6$, ο αριθμός των χρωμάτων και των "γεύσεων" των quarks. Έτσι αν ορίσουμε a_s την σταθερά λεπτής υφής για την ισχυρή αλληλεπίδραση έχουμε

$$a_s(\mu) = \frac{a_s(\mu_0)}{1 + \frac{11-\frac{2}{3}N_f}{4\pi} a_s(\mu_0) \ln\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)}$$

Μπορούμε να εισάγουμε μια νέα παράμετρο Λ_{QCD} τέτοια ώστε

$$\frac{11 - \frac{2}{3}N_f}{4\pi} a_s(\mu_0) \ln\left(\frac{\Lambda_{QCD}}{\mu_0}\right) = -1$$

και καταλήγουμε

$$a_s(\mu) = \frac{4\pi}{\left(11 - \frac{2}{3}N_f\right) \ln\left(\frac{\mu}{\Lambda_{QCD}}\right)}$$

Η Λ_{QCD} είναι της τάξης των $300 MeV$ και δείχνει την ενεργειακή κλίμακα στην οποία η θεωρία διαταραχών καταρρέει για την ΚΧΔ.

Ας δούμε τώρα την εξίσωση της ομάδας επανακανονικοποίησης για την 1PI γενικευμένη συνάρτηση Green $\Gamma_0^N(p_1 \dots p_N; \lambda_0, m_0)$ για την οποία ισχύει η σχέση

$$\Gamma_0^N(p_1 \dots p_N; \lambda_0, m_0) = Z_\psi^{-N/2} \Gamma_R^N(p_1 \dots p_N; \lambda(\mu), m(\mu), \mu)^2$$

οπότε εφαρμόζοντας τον τελεστή $\mu \frac{\partial}{\partial \mu}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \Gamma_0^N}{\partial \mu} &= 0 \\ &= \left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \mu \frac{\partial m}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial m} - \frac{N}{2} \frac{\mu \frac{\partial Z_\psi}{\partial \mu}}{Z_\psi} \right] \Gamma_R^N \\ &= \left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + m \gamma_m(\lambda) \frac{\partial}{\partial m} - N \gamma_d(\lambda) \right] \Gamma_R^N \end{aligned} \quad (2.60)$$

όπου ορίσαμε $\gamma_m(\lambda) \equiv \mu \frac{\partial \ln(m)}{\partial \mu}$ και $\gamma_d(\lambda) \equiv \frac{1}{2} \mu \frac{\partial \ln(Z_\psi)}{\partial \mu}$ (anomalous dimension). Η παραπάνω εξίσωση αναφέρεται συχνά και ως Callan-Symanzik και είναι χρήσιμη για να βρούμε πως συμπεριφέρεται η Γ_R^N κάτω από μετασχηματισμούς κλίμακας ($p_i \rightarrow sp_i$ όπου s μια αδιάστατη σταθερά). Έτσι θα έχουμε

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + s \frac{\partial}{\partial s} + m \frac{\partial}{\partial m} \right] \Gamma_R^N(sp; \lambda, m, \mu) = D_\Gamma \Gamma_R^N(sp; \lambda, m, \mu) \quad (2.61)$$

²Στην περίπτωση που δεν έχουμε μόνο ένα πεδίο η σχέση γενικεύεται

$$\Gamma_0^N(p_1 \dots p_N, k_1 \dots k_M, \dots; \lambda_0, m_0) = Z_1^{-N/2} Z_2^{-M/2} \dots \Gamma_R^N(p_1 \dots p_N, k_1 \dots k_M, \dots; \lambda(\mu), m(\mu), \mu)$$

όπου D_Γ^3 είναι η διάσταση της Γ_R^N σε μονάδες μάζας και γράψαμε $p = (p_i, \dots, p_N)$ για συντομία. Λύνοντας την Εξ.(2.61) ως προς $\mu \frac{\partial}{\partial \mu}$ και αντικαθιστώντας στην Εξ.(2.60) καταλήγουμε στην ομογενή διαφορική εξίσωση

$$\left[-s \frac{\partial}{\partial s} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + m(\gamma_m(\lambda) - 1) \frac{\partial}{\partial m} + D_\Gamma - N\gamma_d(\lambda) \right] \Gamma_R^N(sp; \lambda, m, \mu) = 0 \quad (2.62)$$

Αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$\Gamma_R^N(sp; \lambda, m, \mu) = f(s) \Gamma_R^N(p; \lambda(s), m(s), \mu)$$

οπότε παραγωγίζοντας μερικώς ως προς s έχουμε

$$\begin{aligned} s \frac{\partial}{\partial s} \Gamma_R^N(sp; \lambda, m, \mu) &= \left[s \frac{\partial f}{\partial s} + f(s) s \frac{\partial m(s)}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} + f(s) s \frac{\partial \lambda(s)}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \right] \Gamma_R^N(p; \lambda(s), m(s), \mu) \\ &= \left[s \frac{\partial f}{\partial s} + f(s) s \frac{\partial m(s)}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} + f(s) s \frac{\partial \lambda(s)}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \right] \frac{1}{f(s)} \Gamma_R^N(sp; \lambda, m, \mu) \\ &= \left[\frac{s}{f(s)} \frac{\partial f}{\partial s} + s \frac{\partial m(s)}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} + s \frac{\partial \lambda(s)}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \right] \Gamma_R^N(sp; \lambda, m, \mu) \Rightarrow \\ &\left[-s \frac{\partial}{\partial s} + \frac{s}{f(s)} \frac{\partial f}{\partial s} + s \frac{\partial m(s)}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} + s \frac{\partial \lambda(s)}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \right] \Gamma_R^N(sp; \lambda, m, \mu) = 0 \end{aligned} \quad (2.63)$$

Συγκρίνοντας τώρα τις Εξ.(2.62) και (2.63) καταλήγουμε στο εξής σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$s \frac{\partial \lambda(s)}{\partial s} = \beta(\lambda(s)) \quad (2.64)$$

$$s \frac{\partial m(s)}{\partial s} = m(s)(\gamma_m(\lambda(s)) - 1) \quad (2.65)$$

$$\frac{s}{f(s)} \frac{\partial f(s)}{\partial s} = D_\Gamma - N\gamma_d(\lambda(s)) \quad (2.66)$$

Οι λύσεις των δύο πρώτων διαφορικών δίνουν τις "running" τιμές της σταθεράς ζεύξης και μάζας με αρχικές τιμές

$$\lambda(s=1) = \lambda \quad \text{και} \quad m(s=1) = m$$

³Η τιμή εξαρτάται από το είδος του πεδίου το οποίο εισέρχεται στην Γ_R^N , για ένα βαθμωτό πεδίο είναι $D_\Gamma = 4 - N$ ενώ για ένα πεδίο Dirac $D_\Gamma = 4 - \frac{3}{2}N$ στον τετραδιάστατο χώρο.

ενώ η τρίτη ολοκληρώνεται εύκολα και δίνει

$$f(s) = s^{D_\Gamma} \exp \left[- \int_1^s \frac{N\gamma(\lambda(s')) ds'}{s'} \right]$$

οπότε θα έχουμε

$$\Gamma_R^N(sp; \lambda, m, \mu) = s^{D_\Gamma} \exp \left[- \int_1^s \frac{N\gamma(\lambda(s')) ds'}{s'} \right] \Gamma_R^N(p; \lambda(s), m(s), \mu)$$

Η παραπάνω εξίσωση μας δείχνει ότι αν θέλουμε να βρούμε πως συμπεριφέρεται η Γ_R^N όταν η ορμή μεγεθυνθεί κατά έναν παράγοντα s το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να αλλάξουμε τη σταθερά ζεύξης και τη μάζα στη νέα κλίμακα και να πολλαπλασιάσουμε με ένα παράγοντα που φέρει τη διάσταση της Γ_R^N αλλά και την "ανώμαλη" διάσταση που προκύπτει από την επανακανονικοποίηση της κυματοσυνάρτησης του πεδίου. Τέλος να επισημάνουμε ότι οι μέθοδοι της ομάδας επανακανονικοποίησης εφαρμόζονται, εκτός από την φυσική υψηλών ενεργειών, στην κοσμολογία, στην φυσική στερεάς κατάστασης και στην μελέτη κρίσιμων φαινομένων και μεταβάσεων φάσης.

Παράρτημα Α΄

Ιδιότητες πινάκων γ στις n διαστάσεις

- $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$
- $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = \delta_\mu^\mu = n$
- $\gamma^\mu \gamma_\mu = n$
- $\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = (2 - n)\gamma^\nu$
- $\gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma^\mu = 4g_{\rho\nu} - (4 - n)\gamma_\rho \gamma_\nu$
- $\gamma_\mu \gamma_\sigma \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma^\mu = -2\gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma + (4 - n)\gamma_\sigma \gamma_\rho \gamma_\nu$
- $Tr[\mathbf{1}] = 2^{\frac{n}{2}}$
- $Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 2^{\frac{n}{2}} g^{\mu\nu}$
- $Tr[\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma] = 2^{\frac{n}{2}} [g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}]$
- $Tr[\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\kappa \gamma_\lambda] = 2^{\frac{n}{2}} [g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}g_{\kappa\lambda} - g_{\mu\nu}g_{\rho\kappa}g_{\sigma\lambda} + g_{\mu\nu}g_{\rho\lambda}g_{\sigma\kappa} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}g_{\kappa\lambda} + g_{\mu\rho}g_{\nu\kappa}g_{\sigma\lambda} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}g_{\sigma\kappa} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}g_{\kappa\lambda} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\kappa}g_{\rho\lambda} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda}g_{\rho\kappa} - g_{\mu\kappa}g_{\nu\rho}g_{\sigma\lambda} + g_{\mu\kappa}g_{\nu\sigma}g_{\rho\lambda} - g_{\mu\kappa}g_{\nu\lambda}g_{\rho\sigma} + g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}g_{\sigma\kappa} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma}g_{\rho\kappa} + g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa}g_{\rho\sigma}]$
- $Tr[\text{odd } \# \gamma^\mu] = 0$

Παράρτημα Β΄

Η Lie άλγεβρα $SU(N)$

Οι $N - 1$ γεννήτορες T^a της $SU(N)$ ικανοποιούν την σχέση μετάθεσης

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$$

και για τους οποίους ισχύει

$$Tr[T^a] = 0$$

και κανονικοποιούνται μέσω της σχέσης

$$Tr[T^a T^b] = T_F \delta^{ab}$$

όπου συνήθως επιλέγεται $T_F = 1/2$. Οι σταθερές δομής f^{abc} είναι πραγματικές, πλήρως αντισυμμετρικές και ικανοποιούν τη σχέση

$$f^{adc} f^{bdc} = 2T_F N \delta^{ab}$$

Στην θεμελιώδη αναπαράσταση και στη συζητή ισχύουν οι σχέσεις

$$T^a = \frac{\lambda^a}{2} \quad \text{και} \quad (T^a)_{bc} = -if^{abc}$$

ενώ οι τελεστές Casimir C , που ορίζονται μέσω της σχέσης $(T^a)_{bc}(T^a)_{cd} = C\delta_{bd}$ είναι για την βασική και τη συζητή αναπαράσταση $C_F = \frac{1}{T_F} \frac{N^2-1}{N}$ και $C_A = 2T_F N$ αντίστοιχα. Στην περίπτωση που $N = 3$ οι πίνακες λ^a είναι οι πίνακες Gell-Mann. Παρακάτω παρουσιάζονται κάποιες ιδιότητές τους

- $Tr[\lambda^a \lambda^b] = 2\delta^{ab}$
- $Tr[\lambda^a \lambda^b \lambda^c] = 2(d^{abc} + if^{abc})$, όπου d^{abc} ένας πραγματικός, πλήρως συμμετρικός τανυστής

Παράρτημα Γ'

Συνάρτηση Γ

Η συνάρτηση γάμμα ορίζεται στο πεδίο $H(0) = \{z : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ σύμφωνα με:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Η συνάρτηση γάμμα ικανοποιεί την συναρτηρησιακή σχέση:

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$$

Από τη σχέση αυτή και από $\Gamma(1) = 1$ προκύπτει:

$$\Gamma(n+1) = n!, n \in \mathbf{N}$$

Για το λόγο αυτό η συνάρτηση γάμμα θεωρείται επέκταση του παραγοντικού. Εφαρμόζοντας την συναρτηρησιακή σχέση $n+1$ φορές προκύπτει:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

Το δεξί μέρος της εξίσωσης ορίζει μία συνάρτηση στο $z : \operatorname{Re}(z) > -n-1$ με πόλους πρώτου βαθμού στα $z = -k, k = 0, 1, \dots, n$. Σύμφωνα με αυτή τη σχέση η συνάρτηση γάμμα επεκτείνεται αναλυτικά συνάρτηση σε όλο το \mathbf{C} με πόλους πρώτου βαθμού στα $z = -n, n \in \mathbf{N}_0$. Για $\epsilon \ll 1$ έχουμε το ανάπτυγμα

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon)$$

όπου $\gamma \approx 0.5772$ είναι η σταθερά Euler-Mascheroni. Τέλος, δύο χρήσιμες σχέσεις που ικανοποιεί η συνάρτηση Γ είναι

$$\int_0^{\pi} \sin^m \theta d\theta = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m+2}{2})} \quad (\Gamma'.1)$$

και

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{m-1} dt}{(t + A^2)^n} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n-m)}{\Gamma(n)} \frac{1}{(A^2)^{n-m}} \quad (\Gamma'.2)$$

Παράρτημα Δ'

Χρήσιμα ολοκλήρωματα στις n διαστάσεις

$$\bullet \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{[k^2 + 2pk - M^2]^a} = \frac{i(-1)^a}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\Gamma(a - \frac{n}{2})}{\Gamma(a)} \frac{1}{[M^2 + p^2]^{a-n/2}} \quad (\Delta'.1)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{[k^2 + 2pk - M^2]^a} &= \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{[k^2 + 2pk \pm p^2 - M^2]^a} = \\ \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{[(k+p)^2 - M^2 - p^2]^a} &= \\ \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{[(k+p)^2 - (M^2 + p^2)]^a} &\stackrel{k'=k+p}{=} \int \frac{d^n k'}{(2\pi)^n} \frac{1}{[k'^2 - (M^2 + p^2)]^a} = \\ \int \frac{d^n k'}{(2\pi)^n} \frac{1}{[k'^2 - A^2]^a} &\stackrel{\text{wick rotation}}{=} \\ = i \int \frac{d^n k'}{(2\pi)^n} \frac{1}{[-|k'|^2 - A^2]^a} &= \frac{i}{(-1)^a} \int \frac{d^n k'}{(2\pi)^n} \frac{1}{[k'^2 + A^2]^a} \end{aligned}$$

όπου κάνουμε την αντικατάσταση $k'^0 = ik'_E{}^0$ στην Wick-rotation, οπότε $k'^2 = -k'_E{}^2$.
Επιπλέον

$$\begin{aligned} \int d^n k' &= \int_0^\infty k'^{n-1} dk' \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^\pi \sin\theta_2 d\theta_2 \cdots \int_0^\pi \sin^{n-2}\theta_{n-1} d\theta_{n-1} \\ &= \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \int_0^\infty k'^{n-1} dk' \end{aligned}$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (Γ'.1). Άρα έχουμε

$$\frac{i}{(-1)^a} \frac{2\pi^{n/2}}{(2\pi)^n} \frac{1}{\Gamma(n/2)} \int_0^\infty \frac{k'^{n-1} dk'}{[k'^2 + A^2]^a}$$

Όμως

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{k'^{n-1} dk'}{[k'^2 + A^2]^a} &= \int_0^\infty \frac{t^{n-\frac{1}{2}} dt}{2\sqrt{t} [t + A^2]^a} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{t^{n/2-1} dt}{[t + A^2]^a} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(n/2)\Gamma(a - n/2)}{\Gamma(a)} \frac{1}{(A^2)^{a-n/2}} \end{aligned}$$

όπου κάναμε την αλλαγή μεταβλητής $k'^2 = t \Rightarrow k' = \sqrt{t}$ και $dt = 2k' dk' \Rightarrow dk' = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ και χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (Γ'.2) Οπότε έχουμε το τελικό αποτέλεσμα

$$\begin{aligned} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{[k^2 + 2pk - M^2]^a} &= \frac{\not{2}i(-1)^a}{(4\pi)^{n/2}} \frac{1}{\not{2}(A^2)^{a-n/2}} \frac{1}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a - n/2)}{\Gamma(a)} = \\ &= \frac{i(-1)^a}{(4\pi)^{n/2}} \frac{1}{(M^2 + p^2)^{a-n/2}} \frac{\Gamma(a - n/2)}{\Gamma(a)} \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $p=0$ τότε έχουμε τον τύπο

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{[k^2 - M^2]^a} = \frac{i(-1)^a}{(4\pi)^{n/2}} \frac{1}{(M^2)^{a-n/2}} \frac{\Gamma(a - n/2)}{\Gamma(a)} \quad (\Delta'.2)$$

Επίσης ισχύει

$$\int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{[l^2 + 2pl + M^2]^a} = \frac{i(-1)^{n/2}}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\Gamma(a - n/2)}{\Gamma(a)} \frac{1}{[M^2 - p^2]^{a-n/2}} \quad (\Delta'.3)$$

$$\bullet \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{l_\mu}{[l^2 + 2pl + M^2]^a} = -i(-1)^{n/2} \frac{\Gamma(a - \frac{n}{2})}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(a)} \frac{p_\mu}{(M^2 - p^2)^{a-n/2}} \quad (\Delta'.4)$$

$$\bullet \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{l_\mu}{[l^2 + 2pl - M^2]^a} = i(-1)^a \frac{\Gamma(a - \frac{n}{2})}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(a)} \frac{p_\mu}{(M^2 + p^2)^{a-n/2}} \quad (\Delta'.5)$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{l_\mu}{[l^2 + 2pl + M^2]^a} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{a-1} \frac{\partial}{\partial p_\mu} \int \frac{1}{(l^2 + M^2 + 2lp)^{a-1}} = \\
&= -\frac{1}{2} \frac{1}{a-1} \frac{\partial}{\partial p_\mu} \left[i(-1)^{n/2} \frac{\Gamma(a-1-\frac{n}{2})}{(4\pi)^{n/2} \Gamma(a-1)} \frac{1}{(M^2 - p^2)^{a-1-n/2}} \right] = \\
&= -i(-1)^{n/2} \frac{\Gamma(a-\frac{n}{2})}{(4\pi)^{n/2} \Gamma(a)} \frac{p_\mu}{(M^2 - p^2)^{a-n/2}}
\end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και ο τύπος (Δ'.5). Παρατηρούμε ότι για $p=0$ τα ολοκληρώματα μηδενίζονται. Ομοίως αποδεικνύονται και οι δύο επόμενοι τύποι

$$\begin{aligned}
\bullet \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k_\mu k_\nu}{[k^2 + M^2 + 2kp]^a} &= i(-1)^{n/2} \frac{1}{(4\pi)^{n/2} \Gamma(a)} \left[\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\Gamma(a-1-\frac{n}{2})}{(M^2 - p^2)^{a-1-\frac{n}{2}}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\Gamma(a-\frac{n}{2}) p_\mu p_\nu}{(M^2 - p^2)^{a-\frac{n}{2}}} \right] \quad (\Delta'.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k_\mu k_\nu}{[k^2 - M^2 + 2kp]^a} &= -i(-1)^a \frac{1}{(4\pi)^{n/2} \Gamma(a)} \left[\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\Gamma(a-1-\frac{n}{2})}{(M^2 + p^2)^{a-1-\frac{n}{2}}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\Gamma(a-\frac{n}{2}) p_\mu p_\nu}{(M^2 + p^2)^{a-\frac{n}{2}}} \right] \quad (\Delta'.7)
\end{aligned}$$

Τέλος ο γενικό τύπος για τον συνδιασμό των παρονομαστών που προκύπτουν από τους διαδότες Feynman είναι

$$\frac{1}{A_1 A_2 \cdots A_n} = \int_0^1 dx_1 \cdots dx_n \delta(\sum x_i - 1) \frac{(n-1)!}{[x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n]^n} \quad (\Delta'.8)$$

Παράρτημα Ε΄

Ανώμαλη μαγνητική ροπή ηλεκτρονίου

Ας δούμε τώρα πώς το $\Lambda_\mu^{(2)}$ συνεισφέρει στην μαγνητική ροπή του ηλεκτρονίου

$$\begin{aligned}\Lambda_\mu^{(2)} &= -2i(e\mu^\epsilon)^2 \int_0^1 d\alpha \int_0^{1-\alpha} d\beta \gamma_\nu [\not{p}'(1-\beta) + m - \alpha \not{p}] \gamma_\mu [\not{p}(1-\alpha) + m - \beta \not{p}'] \gamma^\nu \\ &\quad \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} [k^2 - M^2]^{-3} \\ &= -2i(e\mu^\epsilon)^2 \int_0^1 d\alpha \int_0^{1-\alpha} d\beta N i \frac{(-1)^3 \Gamma(3-2)}{(4\pi)^2 \Gamma(3)} [M^2]^{-1} \\ &= \frac{-e^2}{16\pi^2} \int_0^1 d\alpha \int_0^{1-\alpha} d\beta N M^{-2}\end{aligned}\tag{Ε.1}$$

$$\begin{aligned}N &= \{\gamma_\nu [\not{p}'(1-\beta) - \alpha \not{p}] + \gamma_\nu m\} \gamma_\mu \{[\not{p}(1-\alpha) - \beta \not{p}'] \gamma^\nu + m \gamma^\nu\} \\ &= \gamma_\nu [\not{p}'(1-\beta) - \alpha \not{p}] \gamma_\mu [\not{p}(1-\alpha) - \beta \not{p}'] \gamma^\nu + \gamma_\nu [\not{p}'(1-\beta) - \alpha \not{p}] \gamma_\mu m \gamma^\nu + \\ &\quad + m \gamma_\nu \gamma_\mu [\not{p}(1-\alpha) - \beta \not{p}'] \gamma^\nu + m^2 \gamma_\nu \gamma^\nu \gamma_\mu \\ &= -2 [\not{p}(1-\alpha) - \beta \not{p}'] \gamma_\mu [\not{p}'(1-\beta) - \alpha p] + 4m [p_\mu(1-\alpha) - \beta p'_\mu] + \\ &\quad + 4m [p'_\mu(1-\beta) - \alpha p_\mu] - 2\gamma_\mu m^2 \\ &= -2 [\not{p}(1-\alpha) - \beta \not{p}'] \gamma_\mu [\not{p}'(1-\beta) - \alpha p] + \\ &\quad + 4m [p_\mu(1-2\alpha) + p'_\mu(1-2\beta)] - 2\gamma_\mu m^2 \\ &= -2 [\not{p} \gamma_\mu \not{p}'(1-\beta)(1-\alpha) - \not{p} \gamma_\mu \not{p}(1-\alpha)\alpha - \beta(1-\beta) \not{p}' \gamma_\mu \not{p} + \alpha\beta \not{p}' \gamma_\mu \not{p}] + \\ &\quad + 4m [p_\mu(1-2\alpha) + p'_\mu(1-2\beta)] - 2\gamma_\mu m^2\end{aligned}\tag{Ε.2}$$

Από την εξίσωση Dirac ($\not{p} \rightarrow m$) με κινηματική $p^2 = m^2$, $p'^2 = m^2$ και $(p - p')^2 = q^2 = 2m^2 - 2pp' = 0 \Rightarrow 2m^2 = 2pp'$ έχουμε

$$\begin{aligned}
N &= -2 \{ (1 - \alpha)(1 - \beta) [2(p + p')_\mu m - 3m^2 \gamma_\mu] - \beta(1 - \beta)m(2p'_\mu - m\gamma_\mu) \\
&\quad - \alpha(1 - \alpha)m(2p_\mu - m\gamma_\mu) + \alpha\beta m^2 \} + 4m [p'_\mu(1 - 2\beta) + p_\mu(1 - 2\alpha)] - 2\gamma_\mu m^2 \\
&= -2\gamma_\mu m^2 [-3(1 - \alpha)(1 - \beta) + \beta(1 - \beta) + \alpha(1 - \alpha) + \alpha\beta + 1] \\
&\quad + 4p_\mu m [\beta - \alpha\beta - \alpha^2] + 4p'_\mu m [\alpha - \beta\alpha - \beta^2] \\
&= -2\gamma_\mu m^2 [4(\alpha + \beta) - (\alpha + \beta)^2 - 2] + 2(p + p')_\mu m [(\alpha + \beta) - (\alpha + \beta)^2] \quad (\text{E'.3})
\end{aligned}$$

Ενώ ο παρονομαστής είναι

$$D = M^2 = m^2(\alpha + \beta)^2$$

Άρα για το ρεύμα $\bar{u}(p')\Lambda_\mu^{(2)}u(p)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p')\Lambda_\mu^{(2)}u(p) &= u(p') \frac{e^2}{16\pi^2 m^2} \int_0^1 d\alpha \int_0^{1-\alpha} \frac{1}{(\alpha + \beta)^2} \times \\
&\quad \{ -2\gamma_\mu m^2 [4(\alpha + \beta) - (\alpha + \beta)^2 - 2] + 2(p + p')_\mu m [(\alpha + \beta) - (\alpha + \beta)^2] \} u(p) \quad (\text{E'.4})
\end{aligned}$$

Από την ταυτότητα του Gordon έχουμε

$$(p + p')_\mu = 2m\gamma_\mu - i\sigma_{\mu\nu}q^\nu$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p')\Lambda_\mu^{(2)}u(p) &= \bar{u}(p') \frac{-e^2}{16\pi^2 m^2} \int_0^1 d\alpha \int_0^{1-\alpha} d\beta \frac{1}{(\alpha + \beta)^2} \times \\
&\quad \{ -2\gamma_\mu m^2 [4(\alpha + \beta) - (\alpha + \beta)^2 - 2] + 2[2m\gamma_\mu - i\sigma_{\mu\nu}q^\nu] m [(\alpha + \beta) - (\alpha + \beta)^2] \} u(p) \\
&= \bar{u}(p') \frac{-e^2}{16\pi^2 m^2} \int_0^1 d\alpha \int_0^{1-\alpha} d\beta \frac{1}{(\alpha + \beta)^2} \{ -2\gamma_\mu m^2 [2(\alpha + \beta) + (\alpha + \beta)^2 - 2] \\
&\quad - 2i\sigma_{\mu\nu}q^\nu m [(\alpha + \beta) - (\alpha + \beta)^2] \} u(p) \quad (\text{E'.5})
\end{aligned}$$

Εμάς μας ενδιαφέρει ο συντελεστής $i\sigma_{\mu\nu}q^\nu/2m$. Οπότε έχουμε

$$\frac{2ie^2\sigma_{\mu\nu}q^\nu}{16\pi^2 m^2} \int_0^1 d\alpha \int_0^{1-\alpha} d\beta \left[\frac{1}{\alpha + \beta} - 1 \right] = \frac{i\sigma_{\mu\nu}q^\nu}{2m} \left[\frac{e^2}{8\pi^2} \right] = \frac{i\sigma_{\mu\nu}q^\nu}{2m} \left[\frac{a}{2\pi} \right] \quad (\text{E'.6})$$

Συνεπώς η διόρθωση στη μαγνητική ροπή είναι $a/2\pi$ επομένως ο γυρομαγνητικός λόγος γίνεται

$$\left(\frac{g_e}{2}\right)_{total} = 1 + \frac{a}{2\pi}$$

σε προσέγγιση δεύτερης τάξης, αποτέλεσμα το οποίο είναι σε μεγάλη συμφωνία με το πείραμα.

Βιβλιογραφία

- [1] S. Narison, *QCD as a Theory of Hadrons: From Partons to Confinement*, Cambridge, 2004.
- [2] W. Greiner, S. Schramm, E. Stein, *Quantum Chromodynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [3] J. C. Collins, *Renormalization*, Cambridge, 1984.
- [4] F. Halzen, A. D. Martin, *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*, John Wiley & Sons, 1984.
- [5] M. E. Peskin, D. V. Schroder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Perseus Books, 1995.
- [6] W. Greiner, J. Reinhart, *Quantum Electrodynamics*, Springer-Verlag, 3rd Edition, Berlin, 2006.
- [7] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Vol.1 Foundations*, Cambridge, 1995.
- [8] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Vol.2 Modern Applications*, Cambridge, 1996.
- [9] Ν. Τράκας, *Σημειώσεις Μεταπτυχιακού μαθήματος Στοιχειωδών Σωματιδίων*, Αθήνα, 2011
- [10] G. 't Hooft, M. Veltman, *Regularization and Renormalization of Gauge Fields*, Nuclear Physics B44 (1972) 189-213.
- [11] G. 't Hooft, *Dimensional Regularization and the Renormalization Group*, Nuclear Physics B61 (1973) 455-468.