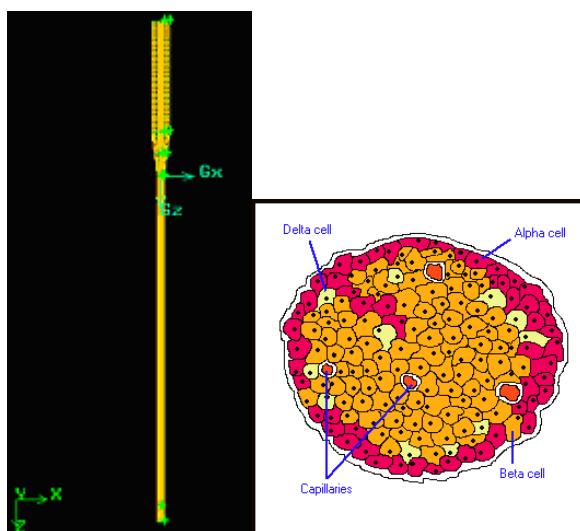




ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΧΗΜΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Υδροδυναμικός εστιασμός νησιδίων παγκρεατικών κυττάρων
σε ομόκεντρους κυλίνδρους



Γεώργιος Ε. Πασούρης

Ημερομηνία Παράδοσης : 12 / 07 / 2012

Επιβλέπων Καθηγητής : Χατζηαβραμιδης Δημήτρης

ΑΘΗΝΑ 2012

Ευχαριστίες

Κατ'αρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μου κο. Δημήτρη Χατζηαβραμίδα, για την καθοδήγηση και τη βοήθεια του. Θέλω να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στους γονείς μου για την διαρκή τους υποστήριξη, που επέτρεψε την επιτυχή διεκπεραίωση των σπουδών μου. Τέλος θέλω να ευχαριστήσω τον Συνταγματάρχη Πυροβολικού Στυλιανό Μπακογιάννη για όποια διευκόλυνση είχα στην στρατιωτική μου θητεία για να διεκπεραιώσω την διπλωματική μου εργασία.

Γεώργιος Ε. Πασβούρης
Αθήνα, 12^{ης} Ιουλίου 2012

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα.....	σελ.1
Περίληψη.....	σελ.2
Abstract.....	σελ.3
Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή.....	σελ.5
1.1 Εισαγωγή.....	σελ.6
1.2 Νησίδες παγκρεατικών κυττάρων.....	σελ.9
Κεφάλαιο 2 Η αρχή της ιδέας και η μοντελοποίηση του Lee.....	σελ.10
2.1 Η αρχή της ιδέας.....	σελ.11
2.1.1 Εισαγωγή στο μοντέλο του Lee.....	σελ.11
2.1.2 <<Εικόνα>> της ροής.....	σελ.15
2.2 Θεωρητικό μοντέλο του Lee.....	σελ.16
2.3 Συμπεράσματα από το μοντέλο του Lee.....	σελ.19
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΚΙΝΗΣΗ ΤΩΝ ΝΗΣΙΔΙΩΝ ΣΕ ΝΕΥΤΩΝΙΚΟ ΡΕΥΣΤΟ PEG.....	σελ.20
3.1 Εισαγωγή.....	σελ.21
3.2 Έρπουσα ροή.....	σελ.21
3.3 Κατανομή ταχύτητας γύρω από το νησίδιο στην έρπουσα ροή.....	σελ.21
3.4 Οριακές συνθήκες έρπουσας ροής.....	σελ.27
3.5 Πίεση και Τάσεις των δυνάμεων συνάφειας στην επιφάνεια μιας σφαίρας.....	σελ.29
3.6 Κίνηση νησιδίων σε κύλινδρο	σελ.30
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 Εξισώσεις κινήσεις.....	σελ.33
4.1 Εξισώσεις κίνησης στη ροή του ρευστού PEG.....	σελ.34
4.2 Εξισώσεις Navier-Stokes.....	σελ.34
4.2.1 Εξισώσεις κίνησης για τα Νευτώνικα ρευστά.....	σελ.34
4.3 Εξισώσεις κίνησης στη ροή του νησιδίου παγκρεατικών κυττάρων.....	σελ.36
4.4 Εξισώσεις κίνησης της σύνθεσης στη ροή 2-φάσεων... ..	σελ.37
4.4.1 Εξισώσεις για σύνθεση φάσεων.....	σελ.37
4.4.2 Διατήρηση μάζας.....	σελ.38
4.4.3 Διατήρηση της γραμμικής ορμής.....	σελ.39
4.4.4 Διατήρηση της ταξινόμησης	σελ.40
4.4.5 Ισορροπία μάζας	σελ.41
4.4.6 Ισορροπία της Γραμμικής Ορμής.....	σελ.42
4.4.7 Συγκέντρωση όγκου στη φάση του στερεού.....	σελ.42
4.5 Ασυμπίεστες ροές Δύο-Φάσεων	σελ.43
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 Ανάλυση Ισοζυγίων για τη ροή 2- φάσεων.....	σελ.45
5.1 Ισοζύγιο μάζας για ροή αιώρησης.....	σελ.48
5.2 Γραμμικό ισοζύγιο ορμής.....	σελ.53
5.3 Ισοζύγιο Μηχανικής Ενέργειας.....	σελ.56
5.3.1 Συνολικό ισοζύγιο μηχανικής ενέργειας.....	σελ.56
5.3.2 Επίδραση της ολίσθησης επί του συνολικού ισοζυγίου της μηχανικής ενέργειας.....	σελ.58
5.4 Ορισμός των Συντελεστών Τριβής.....	σελ.59
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 ΔΥΝΑΜΕΙΣ.....	σελ.62
6.1 Η δύναμη που δρα στο νησίδιο εξαιτίας της αξονοσυμμετρικής ροής γύρω από τον άξονα z.....	σελ.63

6.2	Οι δυνάμεις που ασκούνται στα νησίδα παγκρεατικών κυττάρων.....σελ.64
6.2.1	Βαρυτική Δύναμη.....σελ.65
6.2.2.	Δύναμη Άνωσηςσελ.66
6.2.3.	Οπισθέλκουσα Δύναμη.....σελ.67
6.2.3.1.	Οπισθέλκουσα Δύναμη.....σελ.67
6.2.3.2.	Συντελεστής οπισθέλκουσας.....σελ.68
6.2.3.2.1	Συντελεστής οπισθέλκουσας και είδη ροής.....σελ.68
6.2.3.2.2.	Εξάρτηση του C_D από το Σχήμα του Σώματος.....σελ.69
6.2.3.2.3.	Εξάρτηση του C_D από τον Αριθμό Reynolds.....σελ.70
6.2.3.2.4.	Εξάρτηση του C_D από τη Σχετική Τραχύτητα.....σελ.71
6.2.3.3.	Ασυμπίεστη και Συμπιεστή ροή.....σελ.71
6.3.	Αρχή της ομοιότητας – Ο αριθμός Reynolds και Mach.....σελ.72
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7	Συνθήκες για την πραγματοποίηση του ομαλού υδροδυναμικού εστιασμού και Οριακές Συνθήκες στο σύστημα 2-φάσεων.....σελ.75
7.1	Συνθήκες για την πραγματοποίηση του ομαλού υδροδυναμικού εστιασμού.....σελ.76
7.2	Αρχικές και οριακές συνθήκες.....σελ.76
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8	Ροή Jet.....σελ.78
8.1	Ροή jet.....σελ.79
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9	Υπολογισμοί.....σελ.85
9.1	Υπολογισμός της απόστασης μεταξύ δύο διαδοχικών νησίδων.σελ.86
9.2	Μήκος εσωτερικού κυλίνδρου.....σελ.94
9.3	Υπολογισμός πυκνότητας ροής 2-φάσεων.....σελ.97
9.4	Ιξώδες μείγματος.....σελ.99
9.5	Αριθμός Stokes.....σελ.100
9.6	Υπολογισμός σχετικής ταχύτητας.....σελ.101
9.7	Υπολογισμοί στον εξωτερικό κύλινδρο.....σελ.103
9.8	Υπολογισμοί στο κομμάτι της κυτταροκαλλιέργειας.....σελ.108
	Συμπεράσματα.....σελ.111
	Βιβλιογραφία.....σελ.117
	Βιβλία.....σελ.117
	Δημοσιεύσεις και Άρθρα.....σελ.118
	Ιστοσελίδες.....σελ.119

Περίληψη

Σ'αυτή την διπλωματική εργασία μελετάται ο υδροδυναμικός εστιασμός νησιδίων παγκρεατικών κυττάρων διαμέσο δύο ομόκεντρων κυλίνδρων. Στόχος μας είναι να εισέλθουν οι νησίδες των παγκρεατικών κυττάρων στον σωλήνα επικάλυψης κεντραρισμένες και με τέτοια ταχύτητα ώστε ο ογκομετρικός ρυθμός ροής μέσα σε αυτόν να είναι 1 νησίδα/s. Απότερος στόχος είναι η ομοιόμορφη επικάλυψη των νησίδων ώστε οι επικαλυμμένες νησίδες να μην μπορούν να καταστραφούν από τα β' λεμφοκύτταρα.

Κατά την εκπόνηση αυτής της διπλωματικής αναλύεται το μαθηματικό υποβαθρό που θα χρησιμοποιήσουμε για να επιτύχουμε τον υδροδυναμικό εστιασμό νησιδίων παγκρεατικών κυττάρων που διέρχονται μέσα από ομόκεντρους κυλίνδρους. Θα αναλύσουμε το μοντέλο του Lee πάνω στον υδροδυναμικό εστιασμό. Θα βρούμε και θα αναλύσουμε, καθώς και θα ποσοτικοποιήσουμε τις συνθήκες στην είσοδο, στην έξοδο αλλά και στο εσωτερικό των κυλίνδρων. Θα μελετήσουμε τις εξισώσεις Navier-Stokes για ροή 2-φάσεων, τις εξισώσεις κίνησης καθώς και τα ισοζύγια μάζας, ορμής και ενέργειας. Ακόμα μελετάμε τι δυνάμεις υπάρχουν στο σύστημα που μελετάται και μελετώνται οι εξισώσεις που τις ιέπουν. Στο τέλος θα κάνουμε υπολογισμούς ώστε και να διαστασιολογήσουμε τα κομμάτια των δυο κυλίνδρων σε σχέση με τις συνθήκες που επιθυμούμε να υπάρχουν και να ορίσουμε τιμές για τις ιδιότητες της ροής 2-φάσεων αλλά και για τις μεταβλητές που παίζουν ρόλο στον υδροδυναμικό εστιασμό.

Abstract

In this thesis studied the hydrodynamic focusing on the islet pancreatic cells through two concentric cylinders. Our goal is to enter the islets of pancreatic cells centered in the pipe coating and with such speed that the volumetric flow rate within this strip is $1 / \text{s}$. The big goal is a uniform coating of islets that overlapped islands can not be destroyed by the B-lymphocytes. In preparing this thesis analyzes the mathematical background that we will use to achieve the hydrodynamic focusing pancreatic islet cells passing through concentric cylinders. We will analyze the Lee's model on the hydrodynamic focusing. We find and analyze and to quantify the conditions at the entrance, exit and inside the cylinders. We study the Navier-Stokes equations for 2-phase flow, the equations of motion and mass balance equations, momentum and energy. Still we study what forces exist in the system being studied and studied the equations for these. At the end we will calculate and dimension that the pieces of the two cylinders in relation to the conditions that exist and we want to define values for properties of 2-phase flow and the variables that play a role in hydrodynamic focusing.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Εισαγωγή

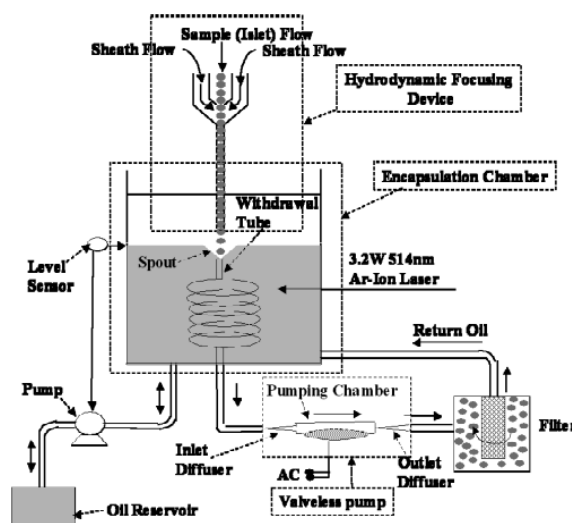
Η διπλωματική που εκπονείται σε αυτό το σύγγραμμα αποτελεί κομμάτι μιας έρευνας για την θεραπεία του διαβήτη τύπου I . Συγκεκριμένα γίνεται προσπάθεια για την μοντελοποίηση της κίνησης νησιδίων παγκρεατικών κυττάρων που κινούνται μέσα σε ρέον βιο-πολυμερές διαμέσο δύο ομόκεντρων κυλίνδρων.

Το σκεπτικό της μεθόδου θεραπείας θα αναλυθεί παρακάτω. Υπάρχει μια συσκευή που θα επικαλύπτει με βιο-πολυμερές PEG νησίδες παγκρεατικών κυττάρων. Το αποτέλεσμα αυτής της επικάλυψης είναι ότι όταν αυτές οι επικαλυπτόμενες νησίδες παγκρεατικών κυττάρων θα μεταμοσχεύονται σε ασθενής που πάσχουν από διαβήτη τύπου I , αυτές ναι μεν θα απορρίπτονται από τον οργανισμό ως κάτι το ξένο άλλα από την άλλη ο οργανισμός με την άμεση επέμβαση των Β-λεμφοκυττάρων δε θα μπορεί να τις καταστρέψει γιατί το βιο-πολυμερές θα δρα ως ασπίδα προστασίας για αυτές. Έτσι τα νησίδια των υγιών παγκρεατικών κυττάρων θα λειτουργούν και θα δρουν κανονικά μέσα στον οργανισμό έτσι ώστε θα υπάρχει σωστά η ινσουλίνη στον οργανισμό για την διάσπαση των υδατανθράκων.

Εδώ σίγουρα θα γεννιέται σε κάποιον το ερώτημα : Πως θα καταφέρουν να επιβιώσουν τα κύτταρα στον οργανισμό ;

Το συγκεκριμένο βιο-πολυμερές με βάση το οποίο γίνεται η έρευνα έχει πολύ συγκεκριμένες ιδιότητες. Έτσι τα κύτταρα μπορούν και να τραφούν κανονικά και να απορρίψουν τοξικές για την ύπαρξή τους και τη εύροστη λειτουργία τους ουσίες ή απορρίματα για αυτά και να δώσουν στον οργανισμό τις ουσίες που χρειάζονται για την σωστή λειτουργία του.

Η παραπάνω έρευνα γίνεται πάνω σε μια συσκευή που ο τελικός της στόχος είναι η ομοιόμορφη επικάλυψη των νησιδίων. Η συσκευή αυτή είναι η παρακάτω



Στο πρώτο τμήμα πραγματοποιείται ο υδροδυναμικός εστιασμός. Το σημείο εστιασμού είναι το σημείο στο οποίο θέλουμε να φτάσει ώστε να

επικαλυφθεί και να γίνει αυτό και ομοιόμορφα. Η επικάλυψη πραγματοποιείται στο δεύτερο τμήμα της συσκευής. Ενώ το τρίτο τμήμα της συσκευής αποτελείται από την αντλία που δημιουργεί διαφορά πίεσης και έτσι προκαλείται η ροή στους αγωγούς.

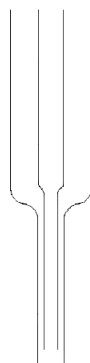
Από τι αποτελείται η συσκευή

Η συσκευή αποτελείται από τρία τμήματα :

1. Το τμήμα κυτταροκαλλιέργειας και των δυο ομόκεντρων κυλίνδρων διαμέσο των οποίων θα γίνει ο υδροδυναμικός εστιασμός των νησιδίων των παγκρεατικών κυττάρων.
2. Το τμήμα της επικάλυψης των νησιδίων από το PEG.
3. Το τμήμα της αντλίας.

Τι θα μελετήσουμε εμείς

Σ'αυτή τη διπλωματική διατριβή θα μελετήσουμε το πρώτο τμήμα.



Θα προσπαθήσουμε να εξάγουμε με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια τις εξισώσεις κινήσεις των νησιδίων, τα μοντέλα και τους νόμους κινήσεις που ισχύουν ώστε ο ρυθμός εισόδου των νησιδίων στο δεύτερο τμήμα να είναι 1 νησίδα ανά δευτερόλεπτο.

Το πρόβλημα που έχουμε να αντιμετωπίσουμε είναι ο υδροδυναμικός εστιασμός των νησιδίων παγκρεατικών κυττάρων που κινούνται προς τα κάτω μέσα σε κινούμενο προς τα κάτω ρευστό βιο-πολυμερές PEG ανάμεσα σε δύο ομόκεντρους σωλήνες.

Οι συνθήκες που έχουμε να αντιμετωπίσουμε στην προσπάθεια να πραγματοποιηθεί ο υδροδυναμικός εστιασμός όσο το δυνατόν περισσότερο αποτελεσματικά, είναι :

- i. Η πιο σημαντική συνθήκη που συναντάται είναι ότι στην έξοδο από το τμήμα της συσκευής τα νησιδία πρέπει να εξέλθουν με ρυθμό ροής 1 νησίδιο ανά δευτερόλεπτο ώστε εφόσον εισέλθει στο δεύτερο τμήμα να πραγματοποιηθεί ομοιόμορφη επικάλυψη , η οποία θα εκπληρώνει και όλες τις προδιαγραφές.
- ii. Έχουμε παρεμπόδιση από το ρεύμα του εξωτερικού αγωγού στο ρεύμα(κύριο ρεύμα) του εσωτερικού αγωγού στην έξοδο του εσωτερικού αγωγού, με αποτέλεσμα να σχηματίζεται ένα διαφορετικό είδος ροής, γνωστό ως ροή jet , με διαφορετικές ιδιότητες από τις άλλες δυο συνεχές και στρωτές ροές.

- iii. Επειδή επιδιώκουμε το κεντράρισμα των νησιδίων αλλά και μια κίνηση χωρίς παρεμβολές επιδιώκουμε η ροή να είναι συνεχώς στρωτή.

Στη μελέτη μας όπως είδαμε και παραπάνω θα συναντήσουμε νησιδία παγκρεατικών κυττάρων να κινούνται μέσα σε ρευστό βιο-πολυμερές ανάμεσα σε ομόκεντρους κυλίνδρους. Το αξιοσημείωτο είναι ότι οι διαστάσεις των νησιδίων είναι μετρήσιμες και συγκρίσιμες σε σχέση με τις διαστάσεις των ομόκεντρων κυλίνδρων. Άρα, θεωρούμε ότι έχουμε ένα ετερογενές σύστημα 2-φάσεων ρευστού-νησιδίων. Μια θεώρηση που θα βοηθήσει στο να κατανοήσουμε καλύτερα το πρόβλημα είναι ότι αυτό το ετερογενές σύστημα θα το θεωρήσουμε ως μια ροή 2-φάσεων και όχι ως δυο ξεχωριστές ροές, άρα μπορούμε να απλοποιήσουμε την σκέψη μας θεωρώντας το σύστημα ως ομογενές που έχει τα χαρακτηριστικά της σύνθεσης των δύο φάσεων.

Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τη μελέτη του Lee σαν οδηγό στην μελέτη του προβλήματος των νησιδίων παγκρεατικών κυττάρων. Η δικιά μας περίπτωση όμως διαφοροποιείται σε μεγάλο βαθμό από την περίπτωση του Lee. Τα χαρακτηριστικά και οι υποθέσεις του υδροδυναμικού εστιασμού, βέβαια, παραμένουν σταθερά.

Το πως επηρεάζει η γεωμετρία τον υδροδυναμικό εστιασμό είναι το ίδιο και στις δύο περιπτώσεις, άρα θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε κάποια δεδομένα από την μελέτη του Lee.

Αυτό που αλλάζει είναι ότι ενώ ο Lee ασχολείται με πάρα πολύ μικρά στερεά σε ρευστό, σε τέτοιο βαθμό, που χαρακτηρίζουμε το σύστημα ομογενές και 1-φάσης. Στη δικιά μας περίπτωση θα ασχοληθούμε με μεγάλα στερεά (νησιδία παγκρεατικών κυττάρων) σε σύγκριση με τις διαστάσεις των αγωγών σε ρευστό (βιο-πολυμερές PEG) σε τέτοιο βαθμό που το σύστημα χαρακτηρίζεται ετερογενές και 2-φάσεων. Δηλαδή, ενώ ο Lee ασχολείται με εξισώσεις ροής 1-φάσης, εμείς θα ασχοληθούμε με εξισώσεις ροής 2-φάσεων. Αυτό αλλάζει τον τρόπο που αντιμετωπίζουμε τον υδροδυναμικό εστιασμό.

Θα κάνουμε τις ίδιες υποθέσεις γιατί αυτές δεν επηρεάζονται από το είδος του συστήματος. Επίσης πολύ σημαντική είναι η επιλογή της γεωμετρίας του τμήματος για να είναι πιο αποτελεσματική και πιο εύκολη η αριθμητική ανάλυση, όπως επίσης να μην διαταράσσονται οι υποθέσεις που θα κάνουμε π.χ. να μην διαταράσσεται η στρωτή ροή που θα είχαμε σε ένα κυλινδρικό αγωγό και να γίνονταν τυρβώδεις σε ένα ορθογώνιο αγωγό.

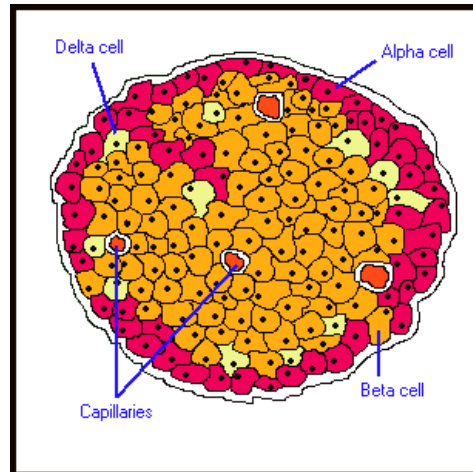
Εμείς θα επιλέξουμε να έχουμε κυλινδρικούς αγωγούς και να δουλέψουμε με κυλινδρικές συντεταγμένες για λόγους που θα αναλυθούν παρακάτω.

Στον παρακάτω πίνακα θα δούμε μεγέθη στα οποία ο τρόπος υπολογισμού τους ή θεώρησης αλλάζουν ανάλογα με ποια από τις δύο περιπτώσεις έχουμε (Lee ή δικιά μας).

1.2 Νησίδες παγκρεατικών κυττάρων

Τα νησίδια παγκρεατικών κυττάρων για τα οποία γίνεται λόγος σ'αυτή τη μελέτη είναι τύπου Langerhans.

Η μορφή, η δομή και η σύσταση αυτών των νησιδίων παρουσιάζονται στην παρακάτω εικόνα.

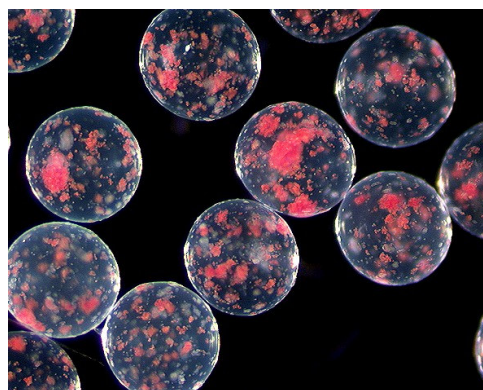


Τα νησίδια του Langerhans σχηματίζουν μόνο το 1-2% των συνολικών παγκρεατικών κυττάρων αν και το συνολικό ανθρώπινο πάγκρεας έχει περίπου 1 εκατομμύριο από αυτά. Από αυτά τα κύτταρα εκκρίνονται οι ορμόνες ινσουλίνη και γλυκαγόνο. Ένα Δέλτα κύτταρο είναι ένα κύτταρο που εκκρίνει σωματοστατίνη. Τα νησίδια συντίθενται από 4 τύπους ανώτερων κυττάρων. Κάθε μια σύνθεση και έκκριση μιας διαφορετικής ορμόνης αν και εμάς μας ενδιαφέρουν δυο από αυτά. Αυτά είναι τα α-κύτταρα και τα β-κύτταρα.

Τα α-κύτταρα συνθέτουν και εκκρίνουν το γλυκαγόνο.

Τα β-κύτταρα συνθέτουν και εκκρίνουν την ινσουλίνη.

Στην παρακάτω εικόνα παρατηρούμε επικαλυμμένα νησίδια παγκρεατικών κυττάρων με τη χρήση αλγών.



Τα νησίδια στην περίπτωση της επικάλυψης με το βιο-πολυμερές PEG θα έχουν περίπου την ίδια μορφή μετά την επικάλυψη με το PEG.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

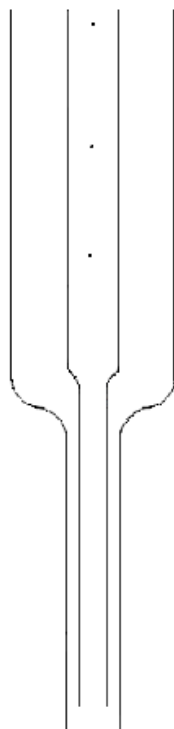
2

Η αρχή της ιδέας και η μοντελοποίηση του Lee

2.1 Η αρχή της ιδέας

2.1.1 Εισαγωγή στο μοντέλο του Lee

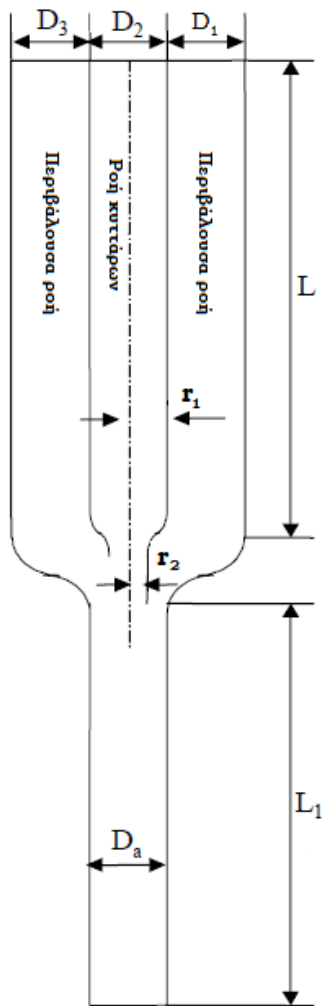
Την αρχή στη μελέτη της κίνησης και του υδροδυναμικού εστιασμού διαμέσου ομόκεντρων κυλίνδρων την έκανε ο Gwo-Bin Lee. Ο Lee μελέτησε τον υδροδυναμικό εστιασμό ροής μικροσυσκευής κυτταρομέτρου. Ανέλυσε τον υδροδυναμικό εστιασμό κυττάρων διαμέσου 2 ομόκεντρων κυττάρων.



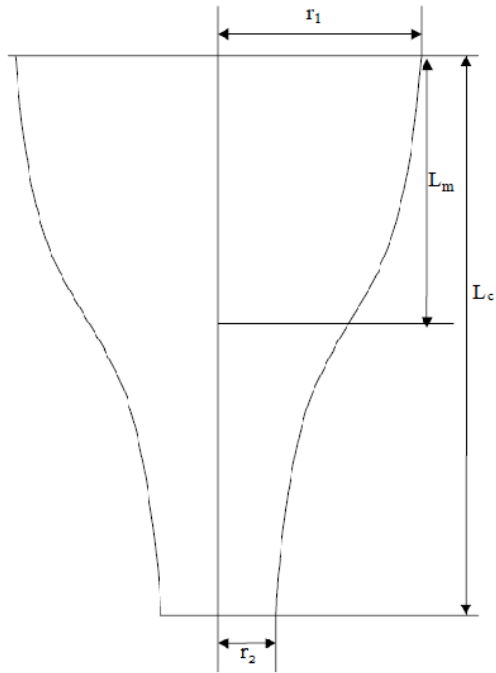
Σχήμα 1. Ομόκεντροι κύλινδροι και κύτταρα που κινούνται διαμέσου αυτών.

Ο Lee χρησιμοποιώντας τις τεχνικές των μικρομηχανών και την τεχνολογία των μικρο-ηλεκτρο-μηχανικών συστημάτων όπου αναπτύχθηκαν στα μικρορευστά, μελέτησε σε ένα μικροκυτταρόμετρο ροής, τον υδροδυναμικό εστιασμό μέσα στην συσκευή.

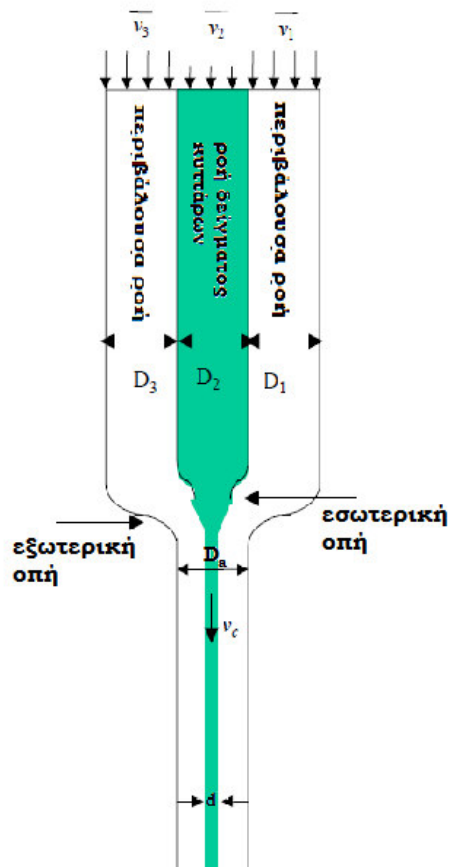
Τη συσκευή μέσα στην οποία μελέτησε τον υδροδυναμικό εστιασμό των κυττάρων την παρατηρήσαμε στο παραπάνω σχήμα.



Σχήμα 2. Αναλυτικότερη σχηματική αναπαράσταση του μικροκυτταρομέτρου ροής του Lee .



Σχήμα 3. Σχηματικό κοντινό πλάνο της συγκλίνουσας οπής.



Σχήμα 4. Σχηματική αναπαράσταση του κυτταρομέτρου ροής με το χαρακτηριστικό γνώρισμα ότι η έξοδος του εσωτερικού ακροφυσίου ευθυγραμμίζεται με την είσοδο του εξωτερικού ακροφυσίου.

A : εμβαδόν της δεξαμενής κυτταροκαλλιέργειας
 a : εμβαδόν εντός του αγωγού
 D_1 : πλάτος της εισόδου του 1^{ου} καναλιού στο οποίο έχουμε περιβάλλουσα ροή, πριν την εστίαση
 D_2 : πλάτος της εισόδου του 2^{ου} καναλιού (μεσαίο κανάλι) στο οποίο έχουμε περιβάλλουσα ροή, πριν την εστίαση
 D_3 : πλάτος της εισόδου του 3^{ου} καναλιού στο οποίο έχουμε περιβάλλουσα ροή, πριν την εστίαση
 D_a : πλάτος στην έξοδο του περιβάλλοντα αγωγού
 d : πλάτος του ρεύματος στο οποίο γίνεται η εστίαση
 d_0 : πλάτος του μετρούμενου ρεύματος στο οποίο γίνεται η εστίαση στην έξοδο της εσωτερικής οπής
 d_1 : πλάτος του μετρούμενου ρεύματος στο οποίο γίνεται η εστίαση στο τέλος του συγκλίνον τμήματος στην εξωτερική οπή
 d_2 : πλάτος του μετρούμενου ρεύματος στο οποίο γίνεται η εστίαση στην έξοδο του κυτταρομέτρου ροής
 L : μήκος του τμήματος εισαγωγής του δείγματος κυττάρων
 L_1 : μήκος του τμήματος εξαγωγής του δείγματος κυττάρων
 L_C : συνολικό μήκος του τμήματος σύγκλισης
 L_m : μήκος στο σημείο αλλαγής καμπυλότητας του τμήματος σύγκλισης
 l : αξονικές συντεταγμένες του τμήματος σύγκλισης
 p : πίεση
 R : ακτίνα του σωλήνα
 r : ακτινικές συντεταγμένες του συγκλίνοντος τμήματος
 r_1 : το μισό του πλάτους του συγκλίνοντος τμήματος στην αρχική θέση
 r_2 : το μισό του πλάτους του συγκλίνοντος τμήματος στην τελική θέση
 s : απόσταση από την είσοδο του σωλήνα
 V_A : ταχύτητα στο σημείο A
 x : αξονικές συντεταγμένες
 \bar{v} : ταχύτητα στην είσοδο του σωλήνα
 \bar{v}_α : μέση ταχύτητα στο τμήμα εξόδου
 v_c : ταχύτητα στο ρεύμα που εστιάζεται
 \bar{v}_1 : ταχύτητα μέσα στο πρώτο κανάλι
 \bar{v}_2 : ταχύτητα μέσα στο δεύτερο (μεσαίο) κανάλι
 \bar{v}_3 : ταχύτητα μέσα στο τρίτο ρεύμα
 \dot{m}_{in} : ρυθμός ροής μάζας στη ροή εισόδου
 \dot{m}_{out} : ρυθμός ροής μάζας στη ροή εξόδου
 ρ : πυκνότητα του ρευστού
 τ_{ij} : τανυστής τάσης διάτμησης

Ο Lee στη μελέτη του έκανε την παραδοχή ότι το σύστημα κυττάρων-ρέων ρευστο είναι ομογενές , καθώς τα κύτταρα είναι τόσο μικρά σε

σχέση με τη διάμετρο των κυλίνδρων που τα θεωρούμε σα σταγόνες. Έτσι, δε μπορεί να γίνει σύγκριση των διαστάσεων των κυττάρων και του εσωτερικού κυλίνδρου άρα θεωρούμε ότι το σύστημα κυττάρων-ρέων ρευστού είναι ομογενές. Μ'αυτό το τρόπο η μελέτη του απλοποιήθηκε σε ένα πρόβλημα ενός ρευστού που κινείται δια μέσου δυο ομόκεντρων κυλίνδρων. Οι εξισώσεις που λαμβάνουν χώρα και χρησιμοποιήθηκαν από τον Lee θα αναλυθούν παρακάτω.

2.1.2 <<Εικόνα>> της ροής

Το κυτταρόμετρο αποτελείται από 3 κανάλια ροής, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1. Τα κύτταρα εκχέονται ενέσιμα στο μεσαίο κανάλι, ενώ η ροή τους παρεμποδίζεται από τη ροή στα άλλα δύο κανάλια.

Το προφίλ των συγκλινουσών μερών είναι κρίσιμο για το σχεδιασμό του ακροφυσίου. Ένα ομαλό προφίλ εφαρμόζεται προκειμένου να αποφευχθεί πιθανή απώλεια της ενέργειας των ροών. Η γεωμετρία του εσωτερικού και εξωτερικού ακροφυσίου περιγράφεται από τις ακόλουθες εξισώσεις .

(i) $l < L_m$

$$r = (r_1 - r_2) \left[1 - \frac{\left(\frac{l}{L_c}\right)^3}{\left(\frac{L_m}{L_c}\right)^2} \right] + r_2 \quad (2.1)$$

(ii) $l > L_m$

$$r = (r_1 - r_2) \frac{\left[\left(1 - \frac{l}{L_c}\right)^3 \right]}{\left[\left(1 - \frac{L_m}{L_c}\right)^2 \right]} + r_2 \quad , \quad L_m = L_c / 2 \quad (2.2)$$

όπου r και l είναι η ακτινική και η αξονική συνιστώσα, αντίστοιχα.

2.2 Θεωρητικό μοντέλο του Lee

Θα προταθεί ένα θεωρητικό μοντέλο για να προβλέψει το πλάτος του εστιασμένου κέντρου ροής μέσα σε ένα μικρο κυτταρομετρητή ροής. Ο Kachel et al. εξετάζει τις υδροδυναμικές ιδιότητες των συνηθισμένων οργάνων κυτταρομετρίας ροής χρησιμοποιώντας τη θεωρία του δυναμικού ροής. Θεωρούμε μια περιοχή (A) που βρίσκεται σε απόσταση (s) από την είσοδο του σωλήνα με ακτίνα (R). Υποθέτοντας ότι το υγρό περνά μέσα από κάθε διατομή με την ίδια ταχύτητα, η διατήρηση μάζας εξασφαλίζει την ακόλουθη εξίσωση:

$$V_A 2 \cdot \pi \cdot s^2 = \bar{v} \cdot \pi R^2 \quad (2.3)$$

$$\frac{V_A}{\bar{v}} = \frac{R^2}{2s^2} \quad (2.4)$$

όπου V_A και \bar{v} είναι οι ταχύτητες στο σημείο A και στην είσοδο του σωλήνα, αντίστοιχα. Η παραπάνω εξίσωση είναι η αρχή της "υδροδυναμικής εστίασης" που χρησιμοποιείται στα περισσότερα κυτταρομετρικά όργανα ροής. Η περιοχή (A) αντιπροσωπεύει την διατομή της εγχυόμενης περιοχής του σωλήνα που περιέχει τα κύτταρα στην περίπτωση μας. Τα κύτταρα αυτά θα εστιαστούν σε ένα μικρό εγκάρσιο ρεύμα της περιοχής (a), όπου θα πρέπει να πραγματοποιηθεί η ανίχνευση των κυττάρων.

Στο παρακάτω Σχήμα 2 μελετάται μια κατάσταση 2-διαστάσεων όπου η ροή δείγματος είναι από ένα μεγάλο εσωτερικό ακροφύσιο σε ένα μικρό εστιασμένο ρεύμα κυττάρων. Ομοίως, η διατήρηση της μάζας απαιτεί το ποσό του ρευστού που διέρχεται από το κέντρο του καναλιού πρέπει να ισούται με το ποσό του ρευστού που διέρχεται από το εστιασμένο ρεύμα. Επομένως,

$$\bar{v}_2 \cdot D_2 = v_c \cdot d \quad (2-5)$$

$$d = \frac{\bar{v}_2}{v_c} \cdot D_2 \quad (2-6)$$

όπου D_2 , d , \bar{v}_2 , v_c είναι το πλάτος του κέντρου του καναλιού πριν από την εστίαση, το πλάτος του εστιασμένου ρεύματος, οι ταχύτητες εσωτερικά στο κέντρο του καναλιού και του εστιασμένου ρεύματος, αντίστοιχα. Η ροή μέσα στο μικρο κυτταρομετρητή θεωρείται ότι είναι στρωτή, και η διάχυση και η μίξη μεταξύ των ροών του εστιασμένου ρεύματος και του γύρο ρεύματος θεωρείται αμελητέα. Με την παραπάνω υπόθεση, η διατήρηση της μάζας εξασφαλίζει τις ακόλουθες εξισώσεις

$$\dot{m}_m = \rho_1 \bar{v}_1 \cdot D_1 + \rho_2 \bar{v}_2 \cdot D_2 + \rho_3 \bar{v}_3 \cdot D_3 \quad (2-7)$$

$$\dot{m}_{out} = \rho_a \bar{v}_a \cdot D_a \quad (2-8)$$

$$\bar{v}_a = \frac{(\rho_1 \bar{v}_1 D_1 + \rho_2 \bar{v}_2 D_2 + \rho_3 \bar{v}_3 D_3)}{\rho_a D_a} \quad (2-9)$$

Όπου \dot{m}_{in} και \dot{m}_{out} είναι οι ρυθμοί ροής μάζας στην είσοδο και έξοδο των ροών. D_1 και D_3 είναι το πλάτος της εισόδου των καναλιών 1 και 3, αντίστοιχα. Οι \bar{v}_1 , \bar{v}_2 και \bar{v}_3 είναι οι ταχύτητες στα τμήματα 1, 2, και 3. Η \bar{v}_a είναι η μέση ταχύτητα στο εξωτερικό τμήμα D_a . Αν υποθέσουμε ότι πρόκειται για μια πλήρως αναπτυσσόμενη στρωτή ροή μέσα στο κανάλι εξόδου, το προφίλ της ταχύτητας μέσα στο τμήμα D_a διανέμεται παραβολικά. Επομένως,

$$v_c = v_{max} = 1,5 \bar{v}_a \quad (2.10)$$

όπου v_c είναι η ταχύτητα στην κεντρική γραμμή του καναλιού.

Επομένως, το πλάτος του ρεύματος με εστιασμένο κέντρο μπορεί να παρουσιαστεί ως

$$d = \frac{\bar{v}_2}{v_c} \cdot D_2 = \frac{\rho_a \bar{v}_2 \cdot D_2 D_a}{1,5 \cdot (\rho_1 \bar{v}_1 D_1 + \rho_2 \bar{v}_2 D_2 + \rho_3 \bar{v}_3 D_3)} = \frac{\rho_a D_a}{1,5 \cdot \left(\rho_1 \frac{\bar{v}_1}{v_2} \frac{D_1}{D_2} + \rho_2 + \rho_3 \frac{\bar{v}_3}{v_2} \frac{D_3}{D_2} \right)} \quad (2.11)$$

Ο Lee χρησιμοποίησε την παραπάνω εξίσωση για να προβλέψει το πλάτος του ρεύματος εστιασμού μέσα στο κυτταρόμετρο ροής. Παρατηρούμε ότι το πλάτος του ρεύματος εστίασης είναι αντιστρόφως ανάλογο από το αντίστοιχο του περιβάλλοντος ρεύματος και του ρυθμού ροής του δείγματος κυττάρων και ανάλογο του ογκομετρικού ρυθμού ροής της ροής του δείγματος κυττάρων. Η παραπάνω εξίσωση (2.11) δεν μας παρέχει καμία άλλη πληροφορία σχετικά με την επίδραση της γεωμετρίας της συσκευής στο πλάτος του ρεύματος που εστιάζεται. Για να εξεταστεί η επίδραση της γεωμετρίας στο πλάτος του ρεύματος που εστιάζεται θα χρησιμοποιηθεί η αριθμητική μέθοδος προσωμοίωσης.

Ο Lee για απλοποίηση του μαθηματικού μοντέλου έκανε τις εξής υποθέσεις:

- 1) Η ροή είναι Νευτωνική, στρωτή και ασυμπίεστη.
- 2) Η ροή είναι 2-διαστάσεων.
- 3) Θεωρούμε αμελητέα τη δύναμη της βαρύτητας.
- 4) Στο όριο του στερεού εμφανίζονται συνθήκες μη-ολίσθησης.
- 5) Υποθέτουμε ότι το θερμοκρασιακό πεδίο κατανέμεται ισοθερμικά.

Οι εξισώσεις που κατευθύνουν τη μελέτη του Lee είναι :

a) Εξίσωση Συνέχειας

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = 0$$

όπου ρ και u_j είναι η πυκνότητα και το διάνυσμα ταχύτητας, αντίστοιχα.

b) Εξίσωσης Ορμής

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i}$$

όπου p και τ_{ij} είναι η πίεση και ο τανυστής τάσης, αντίστοιχα.

Για την επίλυση του προβλήματος ο Lee χρησιμοποίησε τις εξισώσεις Navier-Stokes με τις οριακές συνθήκες να λύνονται αριθμητικά με τη χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων όγκων.

Στη μελέτη που έκανε ο Lee ασχολήθηκε και με τη γεωμετρία των εξωτερικών ακροφυσίων, κάτι που είναι πολύ σημαντικό για να εξελιχθεί ομαλά η επίλυση του προβλήματος του υδροδυναμικού εστιασμού. Έχουν επιλεγεί τρεις τύποι εξωτερικών ακροφυσίων για την εκτίμηση της επίδρασης της γεωμετρίας πάνω στον υδροδυναμικό εστιασμό.

Ο σχετικός ρυθμός ροής του περιβάλλοντος ρευστού και του δείγματος διατηρείται σταθερός (10:1) για να επιτευχθεί μετρήσιμη εστίαση ροής και η θέση του εσωτερικού ακροφυσίου κανονίζεται ανάλογα την περίπτωση.

Μελετώντας την επίδραση της γεωμετρίας πάνω στον υδροδυναμικό εστιασμό ο Lee εξήγαγε ότι η επίδραση στον εστιασμό γίνεται σημαντική όταν το εξωτερικό ακροφύσιο είναι βραχύτερο. Επίσης η κατάλληλη σχεδίαση για ένα εξωτερικό ακροφύσιο μπορεί να βελτιωθεί μέσω της εκτίμησης της απόδοσης του υδροδυναμικού εστιασμού.

Αυτό συνεπάγεται ότι επιτυγχάνεται αποτελεσματικός υδροδυναμικός εστιασμός σε πολύ μικρά μήκη.

Στην πραγματοποίηση του υδροδυναμικού εστιασμού μεγάλο ρόλο παίζει και η θέση των εσωτερικών ακροφυσίων. Η θέση του εσωτερικού ακροφυσίου για την ροή εγχυόμενου δείγματος μπορεί να παίζει σπουδαίο ρόλο στον υδροδυναμικό εστιασμό. Μετά από υπολογισμούς που έγιναν εξήχθη ότι το πλάτος του ρεύματος εστιασμού είναι ισχυρή συνάρτηση των θέσεων του εσωτερικού ακροφυσίου.

Όταν η έξοδος του εσωτερικού ακροφυσίου ευθυγραμμίζεται με την είσοδο του εξωτερικού ακροφυσίου έχουμε μικρότερο πλάτος στο ρεύμα εστιασμού στην έξοδο του εξωτερικού ακροφυσίου απ'ότι όταν το εξωτερικό ακροφύσιο μετακινείται στην επικείμενη θέση που προάγεται

η κατεύθυνση του ρεύματος, δηλαδή ευθυγραμμίζεται η είσοδος του εσωτερικού ακροφυσίου με του εξωτερικού ακροφυσίου.

Η αριθμητική ανάλυση έδειξε ότι ο καλύτερος υδροδυναμικός εστιασμός της ροής στο κέντρο πετυχαίνεται όταν το εσωτερικό ακροφύσιο τοποθετείται έτσι ώστε η μεσαία θέση του εσωτερικού ακροφυσίου να είναι ευθυγραμμισμένη με την είσοδο του εξωτερικού ακροφυσίου.

Μια άλλη σημαντική παράμετρος για τη λειτουργία του κυτταρόμετρου ροής είναι ο σχετικός ρυθμός ροής του περιβάλλοντος ρευστού και του δείγματος. Από την εξίσωση <<11>> λαμβάνουμε την πληροφορία ότι το πλάτος του ρεύματος εστιασμού μειώνεται όταν ο σχετικός ρυθμός ροής του περιβάλλοντος ρευστού και του δείγματος αυξάνεται. Ο Lee παρατήρησε ότι το πλάτος του εστιασμένου ρεύματος είναι αντιστρόφως ανάλογο από το σχετικό ρυθμό ροής του περιβάλλοντος ρευστού και του δείγματος. Άρα μεγαλύτερος σχετικός ρυθμός ροής του περιβάλλοντος ρευστού και του δείγματος σημαίνει μικρότερο μήκος εστιασμού.

2.3 Συμπεράσματα από το μοντέλο του Lee

Όταν το μήκος του καναλιού είναι πολύ μικρό, η ροή στο κέντρο, δεν μπορεί να συγκεντρωθεί ικανοποιητικά όπως αυτή που πέρνουμε όταν το μήκος είναι μεγαλύτερο, που τότε έχουμε ικανοποιητικό εστιασμό.

Το πλάτος του ρεύματος εστιασμού είναι μεγαλύτερο στην 3-διαστάσεων ροή απ'ότι στην 2-διαστάσεων περίπτωση.

Οι ιξώδεις δυνάμεις στα ανώτερα και κατώτερα τοιχώματα κάνουν αναποτελεσματικό τον υδροδυναμικό εστιασμό. Άρα για καλύτερο υδροδυναμικό εστιασμό πρέπει να αποφεύγουμε την ανάπτυξη ιξώδων δυνάμεων.

Επίσης, το πλάτος της ροής των κυττάρων στο κέντρο μειώνεται υδροδυναμικά όταν μόνο ένα κύτταρο βρίσκεται στην περιοχή του κέντρου.

Τέλος, απαιτείται το μέγεθος του ρεύματος εστιασμού του δείγματος να μπορεί να μειωθεί σε λιγότερο από 10μm, το οποίο είναι το κατάλληλο για να ταξινομηθεί και να αριθμηθεί ένα κύτταρο.

[7]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

3

ΚΙΝΗΣΗ ΤΩΝ ΝΗΣΙΔΙΩΝ ΣΕ ΝΕΥΤΩΝΙΚΟ ΡΕΥΣΤΟ ΡΕΓ

3.1 Εισαγωγή

Τα νησίδια των παγκρεατικών κυττάρων θα κινούνται διαμέσο των ομόκεντρων κυλίνδρων όπως οι σκληρές σφαίρες. Αυτή η θεώρηση γίνεται καθώς θεωρούμε ότι είναι πολύ συμπαγής.

Τα νησίδια ακολουθούν έρπουσα στρωτή ροή. Μ' αυτό τον τρόπο θα αποφευχθούν οι δίνες και δε θα έχουμε αλλαγές στα χαρακτηριστικά της κίνησης των νησιδίων.

3.2 Έρπουσα ροή

Έρπουσα ροή, η οποία είναι γνωστή και ως ροή Stoke's λαμβάνει μέρος όταν η ταχύτητα του ρευστού είναι πολύ χαμηλή ή όταν το ιξώδες των ρευστών είναι πολύ υψηλό και/ή το μέγεθος των σωματιδίων μικρό. Στην έρπουσα ροή ο αριθμός Reynolds είναι πολύ μικρός ($Re \ll 1$) έτσι τα αποτελέσματα λόγω αδράνειας μπορούν να αγνοηθούν σε σύγκριση με την αντίσταση που ασκεί το ιξώδες.

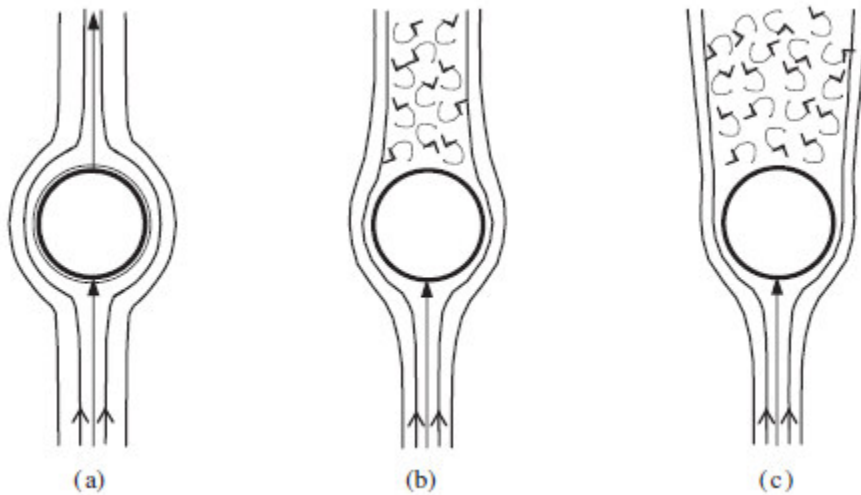
Η κίνηση του ρευστού περιγράφεται με τη βοήθεια των ροογραμμών και των συναρτήσεων του ρεύματος. Μία ροογραμμή καθορίζεται ως ένα μονοπάτι μέσα σε όλο το ρευστό στο οποίο δεν εμφανίζεται ροή και η επαπτόμενη της δίνει την διεύθυνση της τοπικής ταχύτητας σε αυτό το σημείο. Η ταχύτητα στην περιοχή της έρπουσας ροής είναι τόσο μικρή που οι ροογραμμές μπορούν να αποκλίνουν όσο πλησιάζουν το νησίδιο, να ρευσσουν γύρω από την επιφάνεια του και τότε να συγκλίνουν ξανά στο κάτω μέρος του όπως φαίνεται στο Σχήμα 3-1α. Όταν ο αριθμός Reynolds αυξάνεται, δίνες αρχίζουν να εμφανίζονται στο ίχνος της σφαίρας που φαίνεται από τον διαχωρισμό του οριακού στρώματος από την επιφάνεια όπως φαίνεται στο Σχήμα 3-1β. Το σημείο διαχωρισμού του οριακού στρώματος κινείται προς τα κάτω προς τη μέση του νησιδίου, με μία αύξηση στην ταχύτητα του ρευστού σε υψηλότερες τιμές.

Οι συναρτήσεις του ρεύματος, ψ , χρησιμοποιούνται για να καθορίσουμε και να σχεδιάσουμε τις ροογραμμές. Οι γραμμές της σταθεράς ψ είναι οι ροογραμμές της ροής, δηλαδή, αυτές είναι παντού παράλληλες με το διάνυσμα της τοπικής ταχύτητας. Έτσι, οι επιλεγμένες γραμμές ψ μπορούν να ερμηνευτούν ως όρια της ροής. Οι συνιστώσες της ταχύτητας σε οποιαδήποτε σύστημα συντεταγμένων σε ένα δεδομένο σημείο περιγράφονται από τις μερικές παραγώγους του ψ σε αυτό το σημείο. Η συνάρτηση του ρεύματος γενικά καθορίζεται για ροή 2-διαστάσεων δια μέσου ή γύρω σε διάφορες γεωμετρίες ως $\psi = \psi(x, y)$.

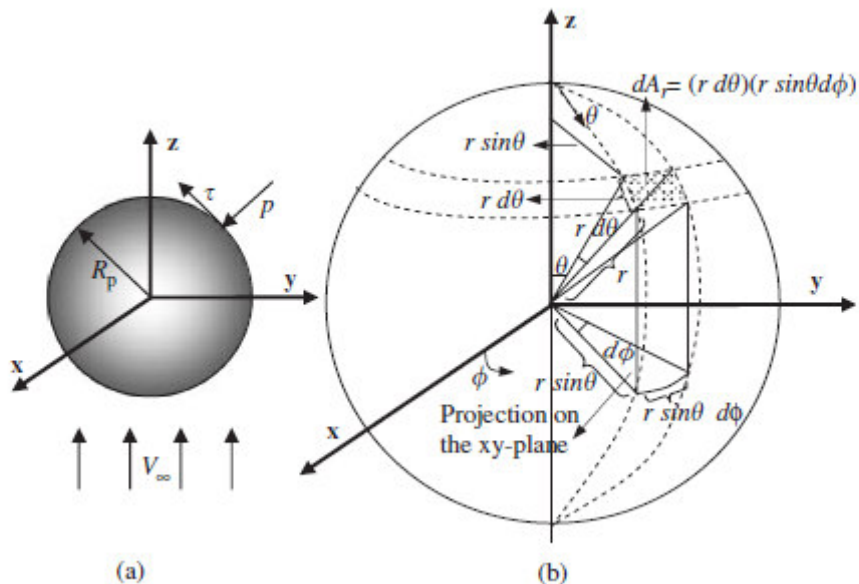
3.3 Κατανομή ταχύτητας γύρω από το νησίδιο στην έρπουσα ροή

Η ροή ενός ασυμπίεστου Νευτωνικού ρευστού γύρω από ένα στάσιμο νησίδιο με ακτίνα R_p είναι ένα παράδειγμα έρπουσας ροής. Η ροή με

μία ομοιόμορφη ταχύτητα V_∞ του ελεύθερου ρεύματος προσεγγίζει μια σταθερή σφαίρα με διάμετρο d_p κάθετα προς τα πάνω στον άξονα των z όπως φαίνεται



Σχήμα 3-1. Υπόδειγμα ροής για τη ροή γύρω από μία σφαίρα (α) για συνθήκες έρπουσας ροής (β) όταν ο αριθμός Reynolds αυξάνεται (γ) για υψηλούς αριθμούς Reynolds.



Σχήμα 3-2. (α) Σχηματική αναπαράσταση μιας σφαίρας, την οποία το ρευστό πλησιάζει με μία ταχύτητα V_∞ στον άξονα z , (β) στοιχειακή επιφάνεια της σφαίρας, εμφανίζεται ως σκιασμένη περιοχή.

στο Σχήμα 3-2(α). Οι συνθήκες της έρπουσας ροής ισχύουν με την προϋπόθεση ότι ο αριθμός Reynolds , που βασίζεται στην ταχύτητα του ελεύθερου ρεύματος V_∞ και στην διάμετρο του σωματιδίου d_p , είναι μικρότερη από ένα :

$$\text{Re} = \frac{\rho V_\infty d_p}{\mu} \leq 1 \quad (3.1)$$

όπου ρ και μ είναι η πυκνότητα και το ιξώδες του ρευστού, αντίστοιχα.

Οι σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ) θα χρησιμοποιηθούν για να αναλυθεί το σύστημα με αρχή το κέντρο της σφαίρας και με τις συνιστώσες της ταχύτητας στη μορφή :

$$V_r = V_r(r, \theta), \quad V_\theta = V_\theta(r, \theta), \quad V_\phi = 0 \quad (3.2)$$

Οι λύσεις της εξίσωσης της κίνησης (εξισώσεις Navier-Stokes) σε τρεις διαστάσεις είναι δύσκολο να συμβεί εξαιτίας της εξάρτησης της από τις μεταβλητές της ταχύτητας και της πίεσης. Ως εκ τούτου , η λύση είναι απλοποιημένη με την υπόθεση της αξονικά συμμετρικής ροής γύρω από τον άξονα των z , για την οποία $\partial/\partial\phi = 0$ και $V_\phi = 0$. Με την κατάργηση της διαφοροποίησης στην τρίτη κατεύθυνση, γίνεται πιθανό να λυθεί η εξίσωση της κίνησης στη ροή δύο διαστάσεων με την εισαγωγή της λειτουργίας του ρεύματος, $\psi(r, \theta)$. Οι συνιστώσες της ταχύτητας (V_r και V_θ) της ροής αρχικά παρουσιάζονται ως παράγωγοι του ψ . Έπειτα, οι r - και θ - συνιστώσες της εξίσωσης κίνησης Navier - Stokes συνδυάζονται σε μια εξίσωση χρησιμοποιώντας τις λειτουργίες του ρεύματος. Οι συνιστώσες της ταχύτητας μπορούν να βρεθούν αφού βρεθεί το ψ .

Η εξίσωση συνέχειας για δυο διαστάσεων ασυμπίεστη ροή σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \sin \theta) = 0 \quad (3.3)$$

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω εξίσωση με $r^2 \sin \theta$ δίνει :

$$\frac{\partial}{\partial r} (-V_r r^2 \sin \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta r \sin \theta) \quad (3.4)$$

Η συνάρτηση ρεύματος πρέπει αυτομάτως να ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας και είναι επίσης ακριβές διαφορικό :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial r} \quad (3.5)$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (3.4) και (3.5) δίνονται οι εκφράσεις για τις συνιστώσες της ταχύτητας όσον αφορά τη συνάρτηση του ρεύματος ως :

$$V_r = -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (3.6)$$

$$V_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (3.7)$$

Η εξίσωση συνέχειας αυτομάτως ικανοποιείται από την αντικατάσταση των εξισώσεων (3.6) και (3.7) στην εξίσωση (3.3).

Οι εξισώσεις Navier Stokes για σφαιρικές συντεταγμένες με ασυμπίεστη ροή δίνονται στον παρακάτω πίνακα :

ΠΙΝΑΚΑΣ 3-1

Εξισώσεις της κίνησης Νευτωνικού ρευστού με σταθερή πυκνότητα ρ , και ιξώδες μ

$\left[\frac{\rho D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g} \right]$	
Καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y,z)	
$\rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right] + \rho g_x$	3-1.1
$\rho \left(\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right] + \rho g_y$	3-1.2
$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$	3-1.3
Κυλινδρικές συντεταγμένες (r,θ,z)	
$\rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right] + \rho g_r$	3-1.4
$\rho \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{V_r V_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] + \rho g_\theta$	3-1.5
$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$	3-1.6
Σφαιρικές συντεταγμένες (r,θ,φ)	
$\rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{V_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} - \frac{V_\theta^2 + V_\phi^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 V_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \phi^2} \right] + \rho g_r$	3-1.7
$\rho \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \phi} - \frac{V_r V_\theta + V_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cot \theta}{r^2} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \right] + \rho g_\theta$	3-1.8
$\rho \left(\frac{\partial V_\phi}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\phi}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial \theta} + \frac{V_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{V_\phi V_r + V_\theta V_\phi \cot \theta}{r} \right) = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \mu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\phi \sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cot \theta}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \phi} \right] + \rho g_\phi$	3-1.9

Αυτές οι εξισώσεις μπορούν να γραφτούν ως :

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g} \quad (3.8)$$

όπου \mathbf{V} είναι το διάνυσμα της ταχύτητας του ρευστού σε ένα σταθερό σημείο σε ένα διάστημα σε 3-διαστάσεων, το $D\mathbf{V}/Dt$ δίνει την ολική παράγωγο της ταχύτητας \mathbf{V} και το $\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}$ υποδικνύει τον όρο αδράνειας.

Η r-συνιστώσα και η θ-συνιστώσα των εξισώσεων Navier Stokes πρώτα γράφτηκαν ως όροι του ψ από την αντικατάσταση στις εξισώσεις (3.6) και (3.7) . Τότε οι διαφορικές επιλύσεις, π.χ. η εξίσωση της θ σε σχέση με το r και η εξίσωση του r σε σχέση με το θ, εξάγονται και ισοδυναμούν με τις δεύτερες παραγώγους της πίεσης.

$$\frac{\partial}{\partial t} (E^2 \psi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial(\psi, E^2 \psi)}{\partial(r, \theta)} - \frac{2E^2 \psi}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \sin \theta \right) = \nu E^4 \psi \quad (3.9a)$$

όπου το ν είναι το κινηματικό ιξώδες και είναι ίσο με $\nu = \mu/\rho$, και ο Ιακωβιανός συμβολισμός $\partial(\psi, E^2 \psi)/\partial(r, \theta)$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$\frac{\partial(\psi, E^2 \psi)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial r} & \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial(E^2 \psi)}{\partial r} & \frac{\partial(E^2 \psi)}{\partial \theta} \end{vmatrix} \quad (3.9\beta)$$

και ακόμα το E^2 εκφράζει τις δεύτερες παραγώγους σε σχέση με τα r και θ στη μορφή:

$$E^2 \equiv \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \quad (3.9\gamma)$$

Αν ικανοποιούνται οι συνθήκες της έρπουσας ροής , ο όρος $\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}$ μπορεί να αμεληθεί και για μόνιμες συνθήκες π.χ. $\partial/\partial t = 0$, το LHSs των εξισώσεων (3.8) και (3.9) γίνεται μηδέν. Γι'αυτό το λόγο στην εξίσωση Navier - Stoke οι όροι της συνάρτησης ροής για έρπουσα ροή γίνονται :

$$E^4 \psi = 0 \quad \text{ή} \quad E^2(E^2 \psi) = 0 \quad (3.10a)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]^2 \psi = 0 \quad (3.10\beta)$$

3.4 Οριακές συνθήκες έρπουσας ροής

Οι οριακές συνθήκες (ΟΣ) είναι :

$$\text{ΟΣ1 : για } r = R_p, V_r = -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \quad (3.11)$$

$$\text{ΟΣ2 : για } r = R_p, V_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad (3.12)$$

$$\text{ΟΣ3 : για } r \rightarrow \infty, \psi \rightarrow -\frac{1}{2} V_\infty r^2 \sin^2 \theta \quad (3.13)$$

Οι οριακές συνθήκες ΟΣ1 και ΟΣ2 περιγράφουν τη συνθήκη μη - ολίσθησης στην επιφάνεια του νησιδίου . Η τρίτη κατάσταση εμφανίζεται από την υπόθεση του ημιάπειρου μέσου όπου

$$V_z \rightarrow V_\infty \text{ για } r \rightarrow \infty .$$

Η κατάσταση της τελευταίας οριακής συνθήκης οδηγεί ώστε το $\psi(r, \theta)$ να πάρει τη μορφή :

$$\psi = f(r) \sin^2 \theta \quad (3.14)$$

Αν και $\psi(\theta) \propto \sin^2 \theta$, το $\psi(r)$ δεν είναι τόσο ακριβές όσο το $\psi(r) \propto r^2$ λόγω των περιορισμών στην ταχύτητα στην επιφάνεια της σφαίρας. Η αντικατάσταση της εξίσωσης (3.14) μέσα στην (3.10β) και ο διαχωρισμός των μεταβλητών οδηγούν σε μια ομογενή και τετάρτου βαθμού διαφορική εξίσωση , με όρους την συνάρτηση f της εξίσωσης (3.14) :

$$\frac{d^4 f}{dr^4} - \frac{4}{r^2} \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{8}{r^3} \frac{df}{dr} - \frac{8}{r^4} f = 0 \quad (3.15)$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια λύση της μορφής $f(r) = C_n r^n$, όπου C_n είναι μια σταθερά. Επαναλαμβάνοντας τη διαφορήση του $f(r)$ και αντικαθιστώντας αυτές τις παραγώγους μέσα στην εξίσωση (3.15) δίνονται λύσεις για

$$n = -1, 1, 2, 4.$$

Επομένως , η $f(r)$ έχει μια γενική λύση της μορφής :

$$f(r) = \frac{C_1}{r} + C_2 r + C_3 r^2 + C_4 r^4 \quad (3.16)$$

Χρησιμοποιώντας την (ΟΣ3) , με τις σταθερές C_3 και C_4 να είναι:

$$C_3 = -\frac{1}{2}V_\infty \quad \text{και} \quad C_4 = 0 \quad (3.17)$$

και επίσης χρησιμοποιούμε τις οριακές συνθήκες (ΟΣ1) και (ΟΣ2) για $r = R_p$,
με C_1 και C_2 :

$$C_1 = -\frac{1}{4}V_\infty R_p^3 \quad \text{και} \quad C_2 = -\frac{3}{4}V_\infty R_p \quad (3.18)$$

Γι' αυτό το λόγο η έκφραση της συνάρτησης ροής παίρνει τη μορφή :

$$\psi = \left[-\frac{1}{4} \frac{R_p^3}{r} + \frac{3}{4} R_p r - \frac{1}{2} r^2 \right] V_\infty \sin^2 \theta \quad (3.19)$$

Οι συνιστώσες της ταχύτητας μέσα στο ρευστό που παίρνονται μετά από την αντικατάσταση του ορισμού της συνάρτησης ροής της παραπάνω εξίσωσης μέσα στις εξισώσεις (3.6) και (3.7) δίνουν κατ'ακολουθίαν :

$$\frac{V_r}{V_\infty} = \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{R_p}{r} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{R_p}{r} \right)^3 \right] \cos \theta \quad (3.20)$$

$$\frac{V_\theta}{V_\infty} = \left[1 - \frac{3}{4} \left(\frac{R_p}{r} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{R_p}{r} \right)^3 \right] \sin \theta \quad (3.21)$$

Οι εξισώσεις επιβεβαιώνουν την μηδενική ταχύτητα στην επιφάνεια του νησιδίου και επίσης δείχνουν ότι για $r \rightarrow \infty$ η ταχύτητα του ρευστού είναι στον άξονα z : $V_z \rightarrow V_\infty$ ($V_r = V_\infty \cos \theta$ και $V_\theta = -V_\infty \sin \theta$).

3.5 Πίεση και Τάσεις των δυνάμεων συνάφειας στην επιφάνεια μιας σφαίρας

Η κατανομή της πίεσης μέσα στο ρευστό σε συνθήκες έρπουσας ροής που βρίσκεται από την αντικατάσταση των συνιστωσών της ταχύτητας μέσα στις συνιστώσες r και θ των εξισώσεων Navier-Stokes (εξίσωση 3.8) μετατρέπεται σε :

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g} \quad (3.22)$$

Μετά από μαθηματικούς χειρισμούς , οι κατανομές της πίεσης μέσα στο ρευστό στις r - και θ - διευθύνσεις δίνονται :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 3\mu V_\infty \frac{R_p}{r^3} \cos \theta \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{3}{2} \mu V_\infty \frac{R_p}{r^2} \sin \theta \quad (3.24)$$

όπου P είναι η τροποποιημένη πίεση και ισούται με $P = p + \rho gz$.

Η κατανομή της πίεσης καθορίζεται μετά την ολοκλήρωση των εξισώσεων (3.23) και (3.24) με τη συνθήκη ότι όταν $r \rightarrow \infty$ η τροποποιημένη πίεση ισούται με p_0 (πίεση περιβάλλοντος, η πίεση στο επίπεδο $z=0$ μακριά από το νησίδιο)

$$p = p_0 - \rho gz - \frac{3}{2} \mu V_\infty \frac{R_p}{r^2} \cos \theta \quad (3.25)$$

όπου το ρgz υποδηλώνει την υδροστατική πίεση που προκύπτει από το βάρος του ρευστού και ο τελευταίος όρος αντιπροσωπεύει τη συνεισφορά από την κίνηση του ρευστού. Η κατανομή της σφαίρας στην επιφάνεια του στερεού σωματιδίου βρίσκεται από την αξιολόγηση (εξίσωση 3.25) για $r = R_p$ και $z = R_p \cos \theta$

$$(p) \Big|_{r=R_p} = p_0 - \rho g R_p \cos \theta - \frac{3}{2} \mu V_\infty \frac{\cos \theta}{R_p} \quad (3.26)$$

Η διατμητική τάση τ , που δρα παρεπιπτόντως στο νησίδιο, όπως φαίνεται στο Σχήμα (3-2α) λαμβάνεται ως

$$\tau_{r\theta} = \frac{3}{2} \frac{\mu V_\infty}{R_p} \left(\frac{R_p}{r} \right)^4 \sin \theta \quad (3.27)$$

Η κάθετη (p) και εφαπτομενική (τ) δυνάμεις που ασκούνται από τη ροή του ρευστού δρουν σε κάθε σημείο της επιφάνειας του νησιδίου.

[I]

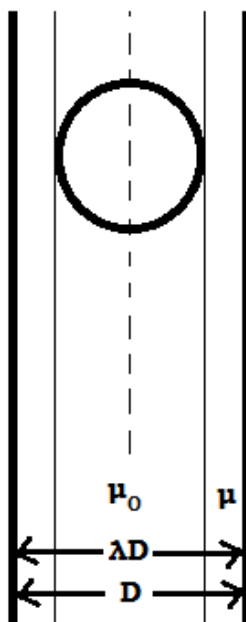
3.6 Κίνηση νησιδίων σε κύλινδρο

Για μια μόνιμη ροή ενός ομογενούς Νευτωνικού ρευστού διαμέσου ενός κυκλικού κυλινδρικού αγωγού, ο ογκομετρικός ρυθμός ροής Q ποικίλει ανάλογα με την διαφορά πίεσης διαμέσου του αγωγού και της τέταρτης δύναμης της διαμέτρου του αγωγού :

$$Q = \frac{\pi(\Delta p)D^4}{128\mu L} \quad (3.28)$$

όπου L είναι το μήκος του εσωτερικού κυλίνδρου και μ είναι το ιξώδες του ρευστού.

Όλες οι νησίδες υποθέτουμε ότι βρίσκονται σε ένα τμήμα εσωτερικά του κυλίνδρου με διάμετρο λD (όπου $0 < \lambda < 1$) με άξονα ενός κυλίνδρου με διάμετρο D . Έξω από αυτό το τμήμα, αλλά μέσα στον κύλινδρο, ένα στρώμα PEG στο τοίχωμα με ιξώδες μ , και στο τμήμα αυτό θεωρούμε ότι έχουμε ένα Νευτωνικό ρευστό PEG με ιξώδες μ_0 .



Η συνέχεια της ταχύτητας και των τάσεων στο ρευστό του εξωτερικού κυλίνδρου με τις συνθήκες μη ολίσθησης να κυριαρχούν στα τοιχώματα του αγωγού δίνουν το προφίλ της ταχύτητας σε ακτινικές συντεταγμένες r , ως

$$u = \begin{cases} \frac{a}{4\mu} \left(\left(\frac{D}{2} \right)^2 - r^2 \right) , & \left(\lambda \frac{D}{2} \leq r \leq \frac{D}{2} \right) \\ \frac{a}{4\mu_0} \left(\left(\frac{\lambda D}{2} \right)^2 - r^2 \right) + \frac{a}{4\mu} \left(\frac{D}{2} \right)^2 , & \left(0 \leq r \leq \frac{\lambda D}{2} \right) \end{cases} \quad (3.29)$$

όπου το a αντιπροσωπεύει τη βαθμίδα της πίεσης κατά μήκος στον άξονα του σωλήνα.

Ο ρύθμος ροής διαμέσου του αγωγού και ο αριθμητικός μέσος της ταχύτητας του μεγαλύτερου τμήματος δίνονται από :

$$Q = \frac{\pi a D^4}{128} \left(\frac{\lambda^4}{\mu_0} + \frac{1 - \lambda^4}{\mu} \right) \quad (3.30)$$

$$v = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{a D^2}{32} \left(\frac{\lambda^4}{\mu_0} + \frac{1 - \lambda^4}{\mu} \right) \quad (3.31)$$

αντίστοιχα .

Ο αρχικός αριθμητικός μέσος της ταχύτητας του μεσαίου τμήματος με το νησίδιο είναι :

$$u_c = \frac{a D^2}{32} \left(\frac{\lambda^2}{\mu_0} + \frac{2(1 - \lambda^2)}{\mu} \right) \quad (3.32)$$

Το φαινομενικό ιξώδες της ροής 2-φάσεων είναι :

$$\mu_a = \frac{\pi(\Delta p)D^4}{128QL} \quad (3.33)$$

Ο αριθμός Reynolds των νησιδίων μέσα στο PEG είναι πολύ μικρότερος του 1, έτσι τα όρια αδράνειας στην εξίσωση της κίνησης περιγράφουν ότι η ροή του PEG και η κίνηση των νησιδίων μπορούν να θεωρηθούν αμελητέα. Το PEG είναι ένα ασυμπιεστο Νευτωνικό ρευστό και γι'αυτό το λόγο η κίνηση του καθοδηγείται από την εξίσωση του Stokes .

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (3.34)$$

Και η εξίσωση συνέχειας είναι :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.35)$$

όπου \mathbf{v} είναι το διάνυσμα ταχύτητας, p είναι η πίεση, ρ είναι η πυκνότητα, μ είναι το ιξώδες του PEG.

[6]

Ο αριθμός Reynolds για τη νέα ροή είναι :

$$\text{Re} = \frac{2r_p \rho_f |\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p|}{\mu_m} \quad (3.36)$$

Το σύμβολο μ_m προσδιορίζει το δυναμικό ιξώδες της νέας φάσης.

$$\mu_m = \mu_f \left(1 - \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{pm}} \right)^{-2.5\varepsilon_{pm}} \quad (3.37)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

4

Εξισώσεις κινήσεις

4.1 Εξισώσεις κίνησης στη ροή του ρευστού PEG

Θα χρησιμοποιήσουμε μέσες εξισώσεις κίνησης για την φάση του ρευστού.

Η εξίσωση συνέχειας είναι :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f \alpha_f) + \nabla \cdot (\rho_f \alpha_f \mathbf{v}_f) = 0 \quad (4.1)$$

όπου ρ_f είναι η πυκνότητα του ρευστού PEG, α_f είναι το κλάσμα όγκου του ρευστού και \mathbf{v}_f είναι η μέση ταχύτητα της φάσης του ρευστού.

Για μικρά σωματίδια η μέση εξίσωση ορμής της φάσης του ρευστού είναι

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f \alpha_f \mathbf{v}_f) + \nabla \cdot (\rho_f \alpha_f \mathbf{v}_f \mathbf{v}_f) = -\nabla(\alpha_f p) + \nabla \cdot [\mu_f \mathbf{D}_m] + \nabla \cdot \mathbf{S}_p - \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{M}_r + \nabla \cdot \mathbf{S}_m \quad (4.2)$$

όπου p είναι η μέση δυναμική πίεση στη φάση του ρευστού, μ_f είναι το ιξώδες της φάσης του ρευστού, το $\mathbf{D}_m = \nabla \mathbf{v}_m + \nabla \mathbf{v}_m^T$ είναι ο μέσος ρυθμός παραμόρφωσης της σύνθεσης του PEG και του νησιδίου, \mathbf{v}_m είναι η σύνθετη ταχύτητα της μίξης, \mathbf{S}_p είναι η τάση λόγω εφαρμογής ροπής ανά μονάδα όγκου που δρα στην φάση του ρευστού, \mathbf{F} είναι ο ρυθμός της ανταλλαγής ορμής ανά μονάδα όγκου μεταξύ της φάσης του ρευστού και της φάσης του νησιδίου, \mathbf{M}_r είναι η συνεισφορά στην τάση του Reynold και \mathbf{S}_m είναι η συνεισφορά στην τάση εξαιτίας των υψηλών αποκλίσεων της αντίστασης λόγω τριβών στην επιφάνεια στο κέντρο του νησιδίου.

Η παραπάνω εξίσωση εφαρμόζεται σε αιωρήματα για σκληρές σφαίρες σε ασυμπιεστα Νευτωνικά ρευστά. Τέτοιο σύστημα είναι και το σύστημα της κίνησης των νησιδίων μέσα από το ρευστό PEG.

[2]

4.2 Εξισώσεις Navier-Stokes

Θα μελετήσουμε κάποιες γενικές ιδιότητες των εξισώσεων Navier-Stokes. Στη μελέτη μας θα περιοριστούμε σε ασυμπιεστα ιξώδη ρευστά.

4.2.1 Εξισώσεις κίνησης για τα Νευτωνικά ρευστά

Οι εξισώσεις που λύνονται με ευκολία για ένα νευτωνικό ρευστό είναι οι ακόλουθες. Στο ρευστό έχουμε

$$\nabla \mathbf{u} = 0 \quad (4.3)$$

$$\rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \rho_f \mathbf{g} - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} \quad (4.4)$$

Για την απλότητα της παρουσίασης εξετάζουμε τα σφαιρικά σωματίδια. Το κέντρο μάζας των σφαιρών είναι στο $\mathbf{X}(t)$. Οι εξισώσεις της κίνησης των σωματιδίων είναι

$$M \frac{d\mathbf{U}}{dt} = M\mathbf{g} + \mathbf{F}[\mathbf{u}] \quad , \quad I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{T}[\mathbf{u}]$$

$$(4.5) \quad \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{U} \quad , \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega$$

όπου $\mathbf{F}[\mathbf{u}]$ είναι η δύναμη πάνω στο σωματίδιο και η $\mathbf{T}[\mathbf{u}]$ είναι η ροπή που ασκείται πάνω στο σωματίδιο. Η ταχύτητα του ρευστού είναι η ίδια με την ταχύτητα του σωματιδίου στην επιφάνεια του σωματιδίου

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} \quad (4.6)$$

Η δύναμη του ρευστού $\mathbf{F}[\mathbf{u}]$ που δρα στο όριο του σωματιδίου είναι το ολοκλήρωμα της αντίστασης λόγω τριβής πέρα από την επιφάνεια του σώματος

Η αντίσταση λόγω τριβής είναι :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = -p\mathbf{n} + 2\eta \mathbf{D}[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} \quad (4.7)$$

όπου

$$\mathbf{D}[\mathbf{u}] = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$$

είναι ο ρυθμός ροπής και \mathbf{n} είναι η εξωτερική ομαλή κατάσταση και $\mathbf{T}[\mathbf{u}]$ είναι το ολοκλήρωμα της ορμής του διανύσματος αντίστασης στη τριβή.

Οι εξισώσεις Navier-Stokes εκφράζουν τις συνθήκες της ισορροπίας, δηλαδή ότι για κάθε σωματίδιο υπάρχει ισορροπία μεταξύ των δυνάμεων του σώματος (βάρος), των δυνάμεων επιφανείας και δυνάμεων αδράνειας. Οι δυνάμεις επιφανείας αποτελούνται από δυνάμεις πίεσης (κάθετες δυνάμεις) και δυνάμεις τριβής (διατμητικές δυνάμεις). Οι δυνάμεις του σώματος είναι σημαντικές μόνο στις περιπτώσεις όπου υπάρχει μια ελεύθερη επιφάνεια ή όταν η κατανομή της ταχύτητας είναι ανομοιογενής. Στην περίπτωση ενός ομοιογενούς ρευστού απουσία

ελεύθερης επιφάνειας υπάρχει ισορροπία μεταξύ του βάρους του σωματιδίου και της υδροστατικής δύναμης της άνωσής του, με τον ίδιο τρόπο όπως στην ακινησία.

Γι' αυτό το λόγο στην κίνηση του ομοιογενούς ρευστού, με απουσία ελεύθερης επιφάνειας, οι δυνάμεις σώματος μπορούν να εξαλειφθούν εαν η πίεση δείχνει την διαφορά μεταξύ της κίνησης και της ακινησίας.

Στην ακόλουθη συζήτηση περιορίζουμε την προσοχή μας στις περιπτώσεις για τις οποίες αυτές οι υποθέσεις είναι αληθής γιατί είναι οι πιο σημαντικές στις εφαρμογές.

Έτσι, οι εξισώσεις Navier-Stokes για ένα ασυμπιεστο ρευστό, περιορίζονται σε σταθερό ρευστό και στο σχηματισμό του διανύσματος, απλοποιώντας :

$$\rho(\mathbf{w} \cdot \text{grad})\mathbf{w} = -\text{grad}p + \mu \nabla^2 \omega \quad (4.8)$$

[V]

4.3 Εξισώσεις κίνησης στη ροή του νησιδίου παγκρεατικών κυττάρων

Η εξέλιξη της φάσης του σωματιδίου συντονίζεται από μια εξίσωση του Liouville για την κατανομή της συνάρτησης $\varphi(\mathbf{x}_p, \mathbf{v}_p, \rho_p, V_p, t)$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\varphi \mathbf{v}_p) + \nabla_{\mathbf{v}_p} \cdot (\varphi \mathbf{A}_p) = 0 \quad (4.9)$$

όπου \mathbf{x}_p είναι η θέση του νησιδίου, \mathbf{v}_p είναι η ταχύτητα του νησιδίου, ρ_p είναι η πυκνότητα του νησιδίου και V_p είναι ο όγκος του νησιδίου.

Η επιτάχυνση \mathbf{A}_p του νησιδίου δίνεται από την εξίσωση

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_p = \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = & D_p(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p) - \frac{1}{\rho_p} \nabla p_p + \frac{1}{\rho_p} \nabla \cdot (\mu_f [\nabla \mathbf{v}_f + \nabla \mathbf{v}_f^T])_p + \\ & + \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_s}\right) \mathbf{g} + \mathbf{A}_{fp} \end{aligned} \quad (4.10)$$

όπου ∇p_p υποδηλώνει την βαθμίδα της πίεσης του ρευστού στην περιοχή του νησιδίου και το $\nabla \cdot (\mu_f [\nabla \mathbf{v}_f + \nabla \mathbf{v}_f^T])_p$ υποδηλώνει μια δύναμη στα νησίδια εξαιτίας της βαθμίδας της ιξώδους τάσης στη φάση του ρευστού.

Η παραπάνω εξίσωση της σχηματίζει την επιτάχυνση εξαιτίας της υδροδυναμικής οπισθέλκουσας, δυναμικής βαθμίδας πίεσης, βαθμίδας ιξώδους τάσης στη φάση του ρευστού, **net buoyant force** και της σύγκρουσης μεταξύ των σωματιδίων (\mathbf{A}_{fp}).

[2]

4.4 Εξισώσεις κίνησης της σύνθεσης στη ροή 2-φάσεων

4.4.1 Εξισώσεις για σύνθεση φάσεων

Αρχικά θα κάνουμε κάποιες υποθέσεις :

- Η συγκέντρωση όγκου της στερεάς φάσης είναι μικρή
- Οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ της ρευστής και της στερεάς φάσης είναι αμελητέες
- Μπορούμε να αγνοήσουμε τους όρους συναγωγής και στις δύο εξισώσεις ορμής
- Το ρευστό είναι ασυμπίεστο.

Κάνοντας τις παραπάνω παραδοχές και αντικαθιστώντας την πίεση με

$$p_{new} = \frac{1}{\rho_f^{ref}} p - g \quad (4.11)$$

με $\mathbf{g} = (0, g)$ να δηλώνει το διάνυσμα της επιτάχυνσης της βαρύτητας πέρνουμε τις παρακάτω εξισώσεις για την ισορροπία της γραμμικής ορμής :

$$\frac{\partial(\varepsilon_f \mathbf{v}_f)}{\partial t} = \nabla \cdot (\varepsilon_f \nu_f \nabla \mathbf{v}_v) - \varepsilon_f \nabla p_{new} + \varepsilon_f \mathbf{g} \left(-1 + \frac{\rho_f}{\rho_f^{ref}} \right) \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial(\varepsilon_p \mathbf{v}_p)}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\beta \varepsilon_p \frac{\rho_f^{ref}}{\rho_p} \nu_f \nabla \mathbf{v}_v \right) - \varepsilon_p \frac{\rho_f^{ref}}{\rho_p} \nabla p_{new} + \varepsilon_p \mathbf{g} \left(1 - \frac{\rho_f^{ref}}{\rho_p} \right) \quad (4.13)$$

Με ν_f δηλώνει το κινηματικό ιξώδες της φάσης του ρευστού.

Οι εξισώσεις συνέχειας (ισορροπία μάζας) γίνονται :

$$\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_f \mathbf{v}_f) = 0 \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_p \mathbf{v}_p) = 0 \quad (4.15)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις ορμής στην εξίσωση για την ταχύτητα στο κέντρο του όγκου \mathbf{v}_v :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_v}{\partial t} = & \nabla \cdot \left[\left(\varepsilon_f + \beta \varepsilon_p \frac{\rho_f^{ref}}{\rho_p} \right) \mathbf{v}_f \nabla \mathbf{v}_v \right] - \left(\varepsilon_f + \varepsilon_p \frac{\rho_f^{ref}}{\rho_p} \right) \nabla p_{new} + \\ & + \varepsilon_f \mathbf{g} \left(-1 + \frac{\rho_f}{\rho_f^{ref}} \right) + \varepsilon_p \mathbf{g} \left(1 - \frac{\rho_f^{ref}}{\rho_p} \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις συνέχειας πέρνουμε για το σύστημα 2-φάσεων (δηλαδή το μείγμα)

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_v = 0 \quad (4.17)$$

[1]

4.4.2 Διατήρηση μάζας

Η διατήρηση της μάζας για τα νησίδια και το συνεχές ρευστό PEG μπορεί να εκφραστεί ως

$$\frac{\partial (\varepsilon_\kappa \rho_\kappa)}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_\kappa \rho_\kappa \mathbf{v}_\kappa) = \dot{M}_\kappa \quad (\kappa = p \text{ ή } f)$$

$$(4.18)$$

ή

$$\frac{\partial (\varphi_\kappa \rho)}{\partial t} + \nabla \cdot (\varphi_\kappa \mathbf{v}_\kappa) = \dot{M}_\kappa$$

όπου ε_κ και φ_κ είναι αντίστοιχα ο τοπικός κλάσμα όγκου και κλάσμα μάζας και το \dot{M}_κ υποδηλώνει την δημιουργία μάζας της συνιστώσας κ

ανά μονάδα όγκου του μείγματος. Το p αναφέρεται σε νησίδιο και το f αναφέρεται στο PEG.

Η πυκνότητα του συστήματος 2-φάσεων ρ και η ταχύτητα (μετά από τη σύνθεση μαζών) \mathbf{v} καθορίζονται ως

$$\rho = \varepsilon_p \rho_p + \varepsilon_f \rho_f \quad (4.19)$$

και

$$\mathbf{v} = \varphi_p \mathbf{v}_p + \varphi_f \mathbf{v}_f = \frac{1}{\rho} (\varepsilon_p \rho_p \mathbf{v}_p + \varepsilon_f \rho_f \mathbf{v}_f) \quad (4.20)$$

ή

η ταχύτητα (μετά από σύνθεση μαζών) εκφράζεται ως

$$\mathbf{v} = \varphi_p \mathbf{v}_p + \varphi_f \mathbf{v}_f = \mathbf{v}_f + \varphi_p \mathbf{v}_r \quad (4.21)$$

όπου $\mathbf{v}_r = (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f)$ είναι η σχετική ταχύτητα του νησιδίου σε συνεχές PEG.

Η εξίσωση συνέχειας για τη διατήρηση της μάζας λαμβάνεται από το άθροισμα των εξισώσεων της διατήρησης μάζας για τις συνιστώσες. Ισχύει :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (4.22)$$

4.4.3 Διατήρηση της γραμμικής ορμής

Η εξίσωση της διατήρησης γραμμικής ορμής για τα νησίδια και το συνεχές ρευστό γράφεται :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_\kappa \rho_\kappa \mathbf{v}_\kappa) + \nabla \cdot (\varepsilon_\kappa \rho_\kappa \mathbf{v}_\kappa \mathbf{v}_\kappa) = \quad (4.23)$$

$$= -\nabla \cdot (\varepsilon_\kappa \rho_\kappa) + \nabla \cdot (\varepsilon_\kappa \tau_\kappa) + \varepsilon_\kappa \rho_\kappa \mathbf{b} + \varepsilon_\kappa \mathbf{G}_\kappa + \varepsilon_\kappa \dot{M}_\kappa \mathbf{v}_\kappa$$

όπου ($\kappa = p$ ή f)

όπου το $\dot{M}_\kappa \mathbf{v}_\kappa$ αναφέρεται στην μεταφορά ορμής μέσα σε διάκενο ανά μονάδα όγκου εξαιτίας της δημιουργίας μάζας στη συνιστώσα κ .

Η περιγραφή του \mathbf{G}_k για την σε διάκενο αλληλεπίδραση ορμής μεταξύ του συνεχούς PEG και των νησιδίων, περιλαμβάνοντας την οπισθέλκουσα δύναμη, τη δύναμη Saffman και τη δύναμη Magnus.

Η σχετική ταχύτητα από το νόμο του Stokes για την βαρύτητα είναι :

$$\mathbf{v}_r = \frac{1}{18} \frac{\rho d_p^2}{\mu} \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right) \mathbf{g} \quad (4.24)$$

Για τους όρους πίεσης και τάσεων ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις :

$$\nabla_p = \nabla \cdot \left(\sum \varepsilon_k \tau_k \right) \quad (4.25)$$

$$\nabla \cdot \tau = \nabla \cdot \left(\sum \varepsilon_k \tau_k \right) \quad (4.26)$$

$$\nabla \cdot \tau = \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{v}) \quad (4.27)$$

όπου μ είναι το ενεργό ιξώδες του μείγματος. Η εξίσωση ορμής του μείγματος γράφεται :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \varphi_p \varphi_f \mathbf{v}_r \mathbf{v}_r) = -\nabla p + \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{v}) + \rho \mathbf{b} \quad (4.28)$$

όπου \mathbf{b} είναι η δύναμη του σώματος η οποία από δω και στο εξής υποθέτουμε ότι διατηρείται.

4.4.4 Διατήρηση της ταξινόμησης

Η μεταφορά μάζας των νησιδίων στο συνεχές ρευστό εκφράζεται ως

$$\frac{\partial (\rho \varphi_p)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_p \varphi_p) = 0 \quad (4.29)$$

Από τη διακύμανση της μάζας με έμφαση στην ταχύτητα (από τη σύνθεση μαζών) έχουμε

$$j_p = \rho \varphi_p (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}) \quad (4.30)$$

Πέρνοντας τις δυο παραπάνω εξισώσεις έχουμε :

$$\frac{\partial (\rho \varphi_p)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \varphi_p) = -\nabla \cdot j_p \quad (4.31)$$

και η διακύμανση της μάζας των νησιδίων j_p γράφεται :

$$j_p = -\rho D_c \nabla \varphi_p + \rho \varphi_p \varphi_f \mathbf{v}_r \quad (4.32)$$

όπου D_c είναι η διάχυση μάζας συνδεόμενη με τη διάχυση του Brown.

Αρα η εξίσωση διατήρησης για τα νησιδία είναι :

$$\frac{\partial(\rho \varphi_p)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \varphi_p \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\rho D_c \nabla \varphi_p) - \nabla \cdot (\rho \varphi_f \mathbf{v} \varphi_p) \quad (4.33)$$

Έχουμε το ρευστό PEG με πυκνότητα ρ_f , δυναμικό ιξώδες μ_f , ταχύτητα v_f , και κλάσμα όγκου ε_f . Το PEG περιέχει <<στερεά>> νησιδία παγκρεατικών κυττάρων με πυκνότητα ρ_p , ταχύτητα v_f και κλάσμα όγκου ε_p . Το σύστημα είναι αξονοσυμμετρικό σύστημα 2-φάσεων και ισχύει $\varepsilon_f = 1 - \varepsilon_p$.

Αν είναι γνωστό το κλάσμα όγκου προσδιορίζουμε της πυκνότητα του συστήματος 2—φάσεων.

$$\rho = \sum_{k=f,p} \varepsilon_k \rho_k \quad (4.34)$$

Ενώ η ρ_k είναι η φυσική (ή επίσης αληθινή) πυκνότητα, η $\varepsilon_k \rho_k$ καλείται συνολική μετά από συνάθροιση πυκνότητα.

Η ταχύτητα της νέας φάσης δίνεται από την εξίσωση :

$$v = \frac{1}{\rho} \sum_{k=f,p} \varepsilon_k \rho_k v_k \quad (4.35)$$

Αυτή η ταχύτητα συχνά καλείται και ως ταχύτητα στο κέντρο μάζας του σωματιδίου.

4.4.5 Ισορροπία μάζας

Οι εξισώσεις ισορροπίας της μάζας είναι :

$$\frac{\partial \varepsilon_f \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_f \rho_f v_f) = 0 \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_p \rho_p}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_p \rho_p \mathbf{v}_p) = 0 \quad (4.37)$$

4.4.6 Ισορροπία της Γραμμικής Ορμής

Οι εξισώσεις της ισορροπίας γραμμικής ορμής έχουν την ακόλουθη μορφή :

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\varepsilon_f \rho_f \mathbf{v}_f)}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_f \rho_f \mathbf{v}_f \otimes \mathbf{v}_f) &= \\ &= \nabla \cdot \varepsilon_f \mu_f \left[\nabla \mathbf{v}_v + (\nabla \mathbf{v}_v)^T \right] - \varepsilon_f \nabla p + \varepsilon_f \rho_f \mathbf{g} + \mathbf{F}_D - \mathbf{F}_{vm} + \mathbf{F}_L \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\varepsilon_p \rho_p \mathbf{v}_p)}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_p \rho_p \mathbf{v}_p \otimes \mathbf{v}_p) &= \\ &= \nabla \cdot \beta \varepsilon_p \mu_f \left[\nabla \mathbf{v}_v + (\nabla \mathbf{v}_v)^T \right] - \varepsilon_p \nabla p \omega + \varepsilon_p \rho_p \mathbf{g} - \mathbf{F}_D + \mathbf{F}_{vm} - \mathbf{F}_L \end{aligned} \quad (4.39)$$

Τα σύμβολα p και \mathbf{g} δηλώνουν την πίεση στο νέο σύστημα 2-φάσεων και το διάνυσμα της επιτάχυνσης της βαρύτητας, αντίστοιχα. Η ταχύτητα στο κέντρο του όγκου που περιέχει και τους ιξώδους όρους δίνεται από την

$$\mathbf{v}_v = \varepsilon_f \mathbf{v}_f + \varepsilon_p \mathbf{v}_p \quad (4.40)$$

Οι όροι ιξώδους παραλείπονται στη στερεά φάση και πέρνουμε την παρακάτω μορφή για την εξίσωση ορμής :

$$\frac{\partial (\varepsilon_p \rho_p \mathbf{v}_p)}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_p \rho_p \mathbf{v}_p \otimes \mathbf{v}_p) = -\varepsilon_p \nabla p + \varepsilon_p \rho_p \mathbf{g} - \mathbf{F}_D + \mathbf{F}_{vm} - \mathbf{F}_L \quad (4.41)$$

[1]

4.4.7 Συγκέντρωση όγκου στη φάση του στερεού

Η ογκομετρική συγκέντρωση ε_p υπολογίζεται από την εξίσωση :

$$\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_p \varepsilon_p) = D \Delta \varepsilon_p \quad (4.42)$$

όπου D είναι ο συντελεστής διάχυσης για κίνηση Brown των νησιδίων.

Στην παραπάνω εξίσωση η ταχύτητα της στερεάς φάσης \mathbf{v}_p αντικαθίσταται από την $\mathbf{v}_v + \mathbf{v}_{St}$ όπου \mathbf{v}_{St} είναι η ταχύτητα Stokes που δίνεται από την εξίσωση :

$$\mathbf{v}_{St} = \frac{2}{9} \frac{(\rho_p - \rho_f) r_p^2 \mathbf{g}}{\mu_f} . \quad (4.43)$$

[1]

4.5 Ασυμπίεστες ροές Δύο-Φάσεων

Το μοντέλο Navier-Stokes για ασυμπίεστες ροές δύο-φάσεων είναι:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_i \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \rho_i \mathbf{g} + \operatorname{div}(\mu_i \mathbf{D}(\mathbf{u})) \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \end{array} \right. \quad \text{στο } \Omega_i, \quad (4.44)$$

$$[\sigma \mathbf{n}]_\Gamma = -\tau \kappa \mathbf{n} \quad , \quad [\mathbf{u}] = 0 \quad \text{στο } \Gamma \quad (4.45)$$

$$V_\Gamma = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad (4.46)$$

Ο ορισμός του τανυστή τάσης είναι :

$$\boldsymbol{\sigma} := -p \mathbf{I} + \mu \mathbf{D}(\mathbf{u})$$

και του τανυστή παραμόρφωσης :

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) := \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T$$

Για την ταχύτητα χρησιμοποιούμε τις οριακές συνθήκες του Dirichlet

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D \quad \text{στο } \partial\Omega_D$$

και φυσικές οριακές συνθήκες στο $\partial\Omega \setminus \partial\Omega_D$.

Οι αρχικές συνθήκες για την ταχύτητα είναι

$$\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x) \quad , \quad x \in (\Omega_1 \cup \Omega_2)(0)$$

με μια δοσμένη συνάρτηση $\mathbf{u}_0 : \Omega \rightarrow R^3$.

Ακόμη θεωρούμε ότι η αρχική κοινή επιφάνεια $\Gamma(0)$ δίνεται.

Θα διατυπώσουμε τις παραπάνω εκφράσεις του μοντέλου της ροής δύο φάσεων σε εκφράσεις αδιάστατων μεταβλητών. Σ' αυτό το μοντέλο έχουμε δύο εξισώσεις Navier-Stokes στα δύο υποχωρία Ω_i , $i=1,2$. Επομένως, αυτή είναι μια επιλογή να θεωρήσουμε ενά υποχωρίο κλιμακούμενα εξαρτημένη. Για τις αδιάστατες μεταβλητές χρησιμοποιούμε την ίδια παράγωγο που χρησιμοποιούμε στην αδιάστατη μιας - φάσης εξίσωση Navier-Stokes : $\bar{x}, \bar{t}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{p}$. Δεν προκαλεί εντύπωση η χρήση διαφορετικών κλίμακων του χώρου στα δύο υποχωρία. Έτσι, επιλέγουμε ένα τυπικής κλίμακας μήκος, που δηλώνεται από το L . Θέλουμε να διατηρήσουμε την ιδιότητα της συνέχειας $[\mathbf{u}]_{\Gamma} = 0$ επίσης στις μετασχηματισμένες μεταβλητές και γ' αυτό το λόγο επιλέγουμε μια τυπική διάσταση U . Στη επαναθεώρηση της κλίμακας της πίεσης μας επιτρέπεται ένα υποχωρίο που εξαρτάται από την επαναθεώρηση της κλίμακας με $\tilde{\rho}_i > 0$ μιας δοθείσας σταθεράς στο Ω_i (με μονάδες kg/m^3). Η αντίστοιχη σταθερή συνάρτηση με ξεχώριστα βήματα στο Ω , δηλώνεται από $\tilde{\rho}$. Λόγω αυτού, οι αδιάστατες μεταβλητές δίνονται από

$$\bar{x} = \frac{1}{L}x$$

$$\bar{t} = \frac{U}{L}t$$

$$\bar{\mathbf{u}}(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{\mathbf{u}(x,t)}{U}$$

$$\bar{p}_i(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{p(x,t)}{\tilde{\rho}_i U^2} \quad , \quad i=1,2$$

Ακόμη, $\bar{\Omega} := \frac{1}{L}\Omega := \{\bar{x} \in R^3 : L\bar{x} \in \Omega\}$ και $\bar{\mathbf{g}} := \frac{L}{U^2}\mathbf{g}$. Οι μερικά

διαφορικές εξισώσεις στην (7.10) μπορούν να γραφτούν σε αυτές τις αδιάστατες ποσότητες όπως ακολούθως, όπου οι διαφορικοί τελεστές όπως τα \bar{x}_i και \bar{t} δηλώνονται με ένα - (για παράδειγμα $\bar{\nabla}$:

$$\frac{\rho_i}{\tilde{\rho}_i} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \bar{t}} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\nabla}) \bar{\mathbf{u}} \right) = -\bar{\nabla} \bar{p} + \frac{\rho_i}{\tilde{\rho}_i} \bar{\mathbf{g}} + \overline{\text{div}} \left(\frac{1}{\text{Re}_i} \bar{\mathbf{D}}(\bar{\mathbf{u}}) \right) = \overline{\text{div}}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \frac{\rho_i}{\tilde{\rho}_i} \bar{\mathbf{g}} \quad \text{στο } \bar{\Omega}_i \quad ,$$

$$(4.47) \quad \overline{\text{div}} \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{στο } \bar{\Omega}_i \quad ,$$

με τον αδιάστατο αριθμό Reynolds

$$\text{Re}_i = \frac{\bar{\rho}_i LU}{\mu_i} \quad , \quad i=1,2$$

και

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = -\bar{p}\mathbf{I} + \frac{1}{\text{Re}_i}(\bar{\nabla}\bar{\mathbf{u}} + \bar{\nabla}\bar{\mathbf{u}}^T)$$

Δεδομένου αυτού του επακλιμακούμενου προβλήματος είναι δελεαστικό να επιλέξουμε $\tilde{\rho}_i = \rho_i$, από αυτή την απλοποίηση. Συγκεκριμένα εν συνεχεία έχει μια σταθερά 1 μπροστά από την παράγωγο του υλικού. Όμως, είναι επίσης απαραίτητο να επανακλιμάκωση τις καταστάσεις αλληλεπίδρασης στις (7.11) και (7.12). Οι υποθέσεις $[\mathbf{u}] = 0$ και $V_\Gamma = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ μετασχηματίζονται σε

$$[\bar{\mathbf{u}}] = 0 \quad , \quad \bar{V}_\Gamma = \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{n}} \quad (4.48)$$

με $\bar{\mathbf{n}}(\bar{x}) = \mathbf{n}(x)$.

Ο όρος του ισοζυγίου ορμής

$$[\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}] = -\tau\kappa\mathbf{n}$$

παίρνει τη μορφή

$$[\tilde{\rho}U^2\bar{\boldsymbol{\sigma}}\bar{\mathbf{n}}] = -\frac{\tau}{L}\bar{\kappa}\bar{\mathbf{n}}$$

με $\bar{\kappa} = \overline{\text{div}_\Gamma\bar{\mathbf{n}}}$, η καμπύλωση των μετασχηματισμένων μεταβλητών.

Να είναι σε θέση να γράψει τον όρο του ισοζυγίου της ορμής στη συνήθη μορφή $[\bar{\boldsymbol{\sigma}}\bar{\mathbf{n}}] = a\bar{\kappa}\bar{\mathbf{n}}$, $a \in R$, η κλίμακα συνάρτηση $\tilde{\rho}$ γίνεται σταθερή διαμήκος της Γ , και έτσι $\tilde{\rho}_1 = \tilde{\rho}_2 = \tilde{\rho}$. Επομένως, στον μετασχηματισμό των αδιάστατων μεταβλητών κάθετα παίρνει μια σταθερού συντελεστή κλιμάκωσης πυκνότητα (π.χ. $\tilde{\rho} = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$) και έπειτα η συνθήκη αλληλεπίδρασης της ορμής δίνεται από την

$$[\bar{\boldsymbol{\sigma}}\bar{\mathbf{n}}] = -\frac{1}{We}\bar{\kappa}\bar{\mathbf{n}} \quad , \quad We := \frac{\tilde{\rho}U^2L}{\tau} \quad (4.49).$$

Ο αδιάστατος αριθμός Weber είναι ένα μέτρο για τη σύγκριση του μεγέθους των αδρανειακών και των επιφανειακών τάσεων δυνάμεων. Στη εξίσωση ροής μιας φάσης υπάρχει μια τμηματική σταθερή πυκνότητα $\rho/\tilde{\rho}$ και ένα τμηματικό σταθερό ιξώδες $1/Re_i$. **Αυτή είναι μία σημαντική διαφορά σε σύγκριση με το αδιάστατο μίας-φάσης προβλήματος Navier-Stokes.**

Συζητάμε μια ασθενή διατύπωση των εξισώσεων Navier-Stokes. Θεωρούμε το μοντέλο σε φυσικές διαστάσεις.

Χρησιμοποιούμε τα διαστήματα Sobolev

$$\mathbf{V} := H^1(\Omega)^3,$$

$$\mathbf{V}_0 := \{ \mathbf{v} \in \mathbf{V} : \mathbf{v} = 0 \text{ στο } \partial\Omega_D \},$$

$$\mathbf{V}_D := \{ \mathbf{v} \in \mathbf{V} : \mathbf{v} = \mathbf{u}_D \text{ στο } \partial\Omega_D \},$$

$$Q := L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q dx = 0 \right\}$$

και ορίζουμε διγραμμικές μορφές

$$\begin{aligned} m : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow R & : \quad m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{v} dx \quad , \\ a : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow R & : \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu(\text{tr}) (\mathbf{D}(\mathbf{u}) \mathbf{D}(\mathbf{v})) dx \\ & = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu \sum_{i,j=1}^3 (\mathbf{D}(\mathbf{u}))_{ij} (\mathbf{D}(\mathbf{v}))_{ij} dx \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$b : \mathbf{V} \times Q \rightarrow R : \quad b(\mathbf{v}, q) := - \int_{\Omega} q \text{div} \mathbf{v} dx$$

και η τριγραμμική μορφή

$$c : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow R : \quad c(\mathbf{u}; \mathbf{v}, \mathbf{w}) := \int_{\Omega} \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}) \mathbf{w} dx .$$

[IV]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

5

Ανάλυση Ισοζυγίων για τη ροή 2-φάσεων

5.1 Ισοζύγιο μάζας για ροή αιώρησης

Το συνολικό ισοζύγιο μάζας για ροή αιώρησης από το τμήμα εισόδου A στο τμήμα εξόδου C κάτω από σταθερές συνθήκες, έτσι ώστε ο ρυθμός μάζας της ροής αιώρησης είναι σταθερός μεταξύ του τμήματος A και C

$$\dot{m}_{sA} = \dot{m}_{sC} = \dot{m}_s \quad (5.1)$$

Το ισοζύγιο μάζας για ροή , \dot{m}_s , μπορεί να γραφτεί σε όρους του στερεού, \dot{m}_p , και του υγρού, \dot{m}_c , συνιστώσες της ροής ως

$$\dot{m}_s = \dot{m}_p + \dot{m}_c \quad (5.2)$$

ή

$$\dot{m}_s = \rho_s Q_s = \rho_p Q_p + \rho Q_c \quad (5.3)$$

σε όρους ογκομετρικής παροχής, Q .

Οι δείκτες s, p, και c δηλώνουν αιώρηση, particle(σωματίδιο) (διασκορπισμένο), και liquid(υγρό) (συνεχείς) φάσεις, αντίστοιχα. Εδώ, η πυκνότητα αιώρησης, s, είναι γραμμένη ως μια συνάρτηση των πυκνοτήτων των στερεών σωματιδίων και του υγρού ως

$$\rho_s = \varphi_d \rho_p + (1 - \varphi_d) \rho \quad (5.4)$$

όπου φ_d (χρησιμοποιείται ευρέως ως C_{vd} στη βιβλιογραφία) είναι το ελεύθερο κλάσμα όγκου στην στερεή φάση σε αυτό το σύστημα ροής αιώρησης. Το φ_d ορίζεται ως ο λόγος της ογκομετρικής παροχής των στερεών σωματιδίων προς τη συνολική ογκομετρική παροχή της αιώρησης:

$$\varphi_d = \frac{Q_p}{Q_s} \quad (5.5)$$

Η ελεύθερη συγκέντρωση του στερεού φ_d πρέπει να είναι μικρότερη από 0,30 για τη διασπορά (πλήρως αιωρούμενο) ροή, όπου χρησιμοποιούνται μάλλον υψηλές ταχύτητες. Το φ_d μπορεί να είναι τόσο υψηλό μέχρι 0,5 στο μεταφορές των πυκνών αιωρημάτων σε σχετικά χαμηλές ταχύτητες (δύο στρώματα ροής).

Η ογκομετρική παροχή σε ροή δύο φάσεων θα μπορούσε να γραφτεί με όρους της επιφανειακής ταχύτητας, $V_{i,av}$ με βάση τη διατομή, A , της γραμμής μεταφοράς, όπως

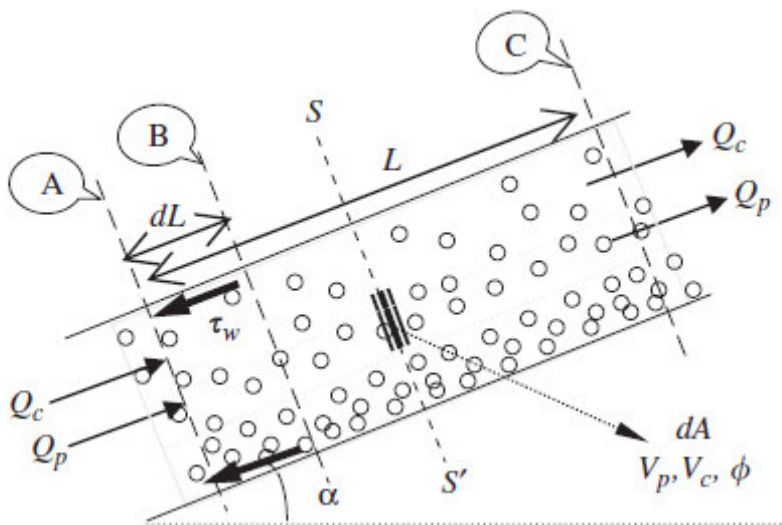
$$Q_i = V_{i,av}A \quad (5.6)$$

όπου ο δείκτης i μπορεί να είναι p , l , ή s δηλώνοντας τις φάσεις σωματιδίων και υγρών και μίγμα τους (αιώρηση), αντίστοιχα. Η σχέση μεταξύ των ταχυτήτων της επιφάνειας των στερεών και των ταχυτήτων αιώρησης μπορεί να δοθεί χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (5.5) και (5.6) ως

$$\phi_d = \frac{V_{p,av}A}{V_{s,av}A} = \left(\frac{V_{p,av}}{V_{s,av}} \right) \quad (5.7)$$

Για να βρείτε τις χώρο-κατά μέσο όρο ιδιότητες του υγρού και τις φάσεις των σωματιδίων, η αντίστοιχη περιοχή, A , μπορεί επίσης να εκφράζεται σε κλάσμα όγκου των σωματιδίων ως

$$A = \phi A + (1 - \phi)A \quad (5.8)$$



ΣΧΗΜΑ 5-1 . Ροή των στερεών υγρών αιωρημάτων σε ένα κεκλιμένο κανάλι. Η V είναι η τοπική ταχύτητα και ϕ είναι το κλάσμα όγκου των τοπικών σωματιδίων. Οι δείκτες p και c υποδηλώνουν τις φάσεις του σωματιδίου και του υγρού. Αυτό το σύστημα σχηματίζει γωνία α με το οριζόντιο επίπεδο.

ΠΙΝΑΚΑΣ 5-1

Μέσες ποσότητες της φάσης διασποράς που βασίζεται στο dA στην SS' γραμμή στο παραπάνω Σχήμα 5-1.

Ποσότητα	Φάση Διασποράς
Κλάσμα όγκου περιοχής-κατά μέσο όρο	$\varphi_t = \frac{1}{A} \int_A \varphi dA \quad (5-1.1)$
Ρυθμός ροής μάζας	$\dot{m}_p = \int_A \rho_p V_p \varphi dA \quad (5-1.2)$
	$\dot{m}_p = \rho_p \bar{V}_p \varphi_t A \quad (5-1.2a)$
Ογκομετρική περιοχή	$Q_p = \int_A V_p \varphi dA = \bar{V}_p \int_A \varphi dA \quad (5-1.3)$
	$Q_p = \bar{V}_p \varphi_t A \quad (5-1.3a)$
Μέση ταχύτητα	$\bar{V}_p = \frac{1}{A} \int_A V_p dA \quad (5-1.4)$
	$\bar{V}_p = \frac{Q_p}{\varphi_t A} \quad (5-1.4a)$
Ορμή	$\bar{J}_{Mp} = \dot{m}_p \bar{V}_p = \int_A \rho_p V_p^2 \varphi dA \quad (5-1.5)$
	$\bar{J}_{Mp} = \rho_p \bar{V}_p^2 \varphi_t A = \dot{m}_p \bar{V}_p \quad (5-1.5a)$
Κινητική Ενέργεια	$\bar{E}_{Kp} = \int_A \rho_p V_p \varphi \left(\frac{V_p^2}{2} \right) dA \quad (5-1.6)$
	$\bar{E}_{Kp} = \rho_p \bar{V}_p \varphi_t A \left(\frac{\bar{V}_p^2}{2} \right) = \dot{m}_p \left(\frac{\bar{V}_p^2}{2} \right) \quad (5-1.6a)$

και η διαφορική περιοχή, dA , στο τμήμα SS' στο παραπάνω Σχήμα 7-1 στη ροή αιώρησης δίνεται ως

$$dA = \phi dA + (1 - \phi)dA \quad (5.8a)$$

dA δεν καλύπτει ολόκληρη την επιφάνεια διατομής από το κλάσμα όγκου των στερεών σωματιδίων παρουσιάζει διαφορές μεταξύ του εν λόγω τομέα (κάθετα της κατεύθυνσης της ροής). Έτσι, οι τοπικές τιμές, όπως το τοπικό κλάσμα όγκου, ϕ , και οι τοπικές ταχύτητες (V_p, V_c) για dA χρησιμοποιούνται για να καθορίσουν τις ποσότητες της κατά μέσο όρο-περιοχής (μέσα κλάσματα όγκου, ϕ_t , και μέσες ταχύτητες των στερεών, \bar{V}_p , και των υγρών, \bar{V}_c , οι φάσεις και οι ρυθμοί ροής τους). Για παράδειγμα, η ολοκλήρωση του τοπικού ογκομετρικού κλάσματος των στερεών σε όλη την διατομή δίνει το κλάσμα όγκου στη κατά μέσο όρο-περιοχή, ϕ_t .

Με παρόμοιο τρόπο, η αντικατάσταση με την (5-1.3a) να καθορίσει την Q_p στην εξίσωση του απελευθερωμένου κλάσματος όγκου της στερεάς φάσης, ϕ_d , δίνει μια σχέση μεταξύ της κατά μέσο όρο-περιοχής του στερεού σωματιδίου και των επιφανειακών ταχυτήτων αιώρησης

$$\phi_d = \frac{1}{V_{s,av} A} \int_A V_p \phi dA \quad (5.9)$$

ή

$$\phi_d = \frac{A \phi_t \bar{V}_p}{V_{s,av} A} = \left(\frac{\bar{V}_p}{V_{s,av}} \right) \phi_t \quad (5.9a)$$

Η εξίσωση (5.9) δείχνει ότι υπάρχει ολίσθηση μεταξύ των φάσεων, έτσι ώστε $\bar{V}_p \neq V_{s,av}$, και το μέσο και το απελευθερωμένο κλάσμα όγκου είναι διαφορετικό. Η ταχύτητα ολίσθησης εκφράζεται ως η διαφορά μεταξύ των ταχυτήτων των στερεής και της υγρής φάσης. Οι τοπικές ($V_c - V_p$) και οι μέσες ($\bar{V}_c - \bar{V}_p$) ταχύτητες ολίσθησης ορίζονται σε μια στοιχειώδη περιοχή dA και διαμέσου της διατομής SS' , αντίστοιχα. Οι εξισώσεις στους παραπάνω Πίνακες χρησιμοποιήθηκαν για την παραγωγή της ακόλουθης εξίσωσης, την εξίσωση της μέσης ταχύτητας ολίσθησης, το οποίο δείχνει ότι δεν υπάρχει απλή σχέση μεταξύ των τοπικών και η μέσων ταχυτήτων:

$$\bar{V}_c - \bar{V}_p = \frac{Q_c}{(1-\varphi_t)A} - \frac{Q_p}{\varphi_t A} = \frac{\int_A V_c(1-\varphi)dA}{\int_A (1-\varphi)dA} - \frac{\int_A V_p \varphi dA}{\int_A \varphi dA} \quad (5.10)$$

Ωστόσο, μερικές φορές η ταχύτητα ολίσθησης (ή καθυστέρησης) και η αδιάστατη ταχύτητα ολίσθησης (λόγος καθυστέρησης), λ_{slip} , ορίζονται ως η διαφορά ταχύτητας μεταξύ της suspension και της στερεής φάσης ($V_{s,av} - \bar{V}_p$) και δίνεται από την

$$\lambda_{slip} = \frac{V_{s,av} - \bar{V}_p}{\bar{V}_p} \quad (5.11)$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 5-2

Μέσες ποσότητες για συνεχή φάση που βασίζεται στο dA στην SS' γραμμή στο παραπάνω Σχήμα 7-1 .

Ποσότητα	Συνεχής φάση
Ρυθμός ροής μάζας	$\dot{m}_c = \int_A \rho V_c(1-\varphi)dA$ (5-2.1)
	$\dot{m}_c = \rho \bar{V}_c(1-\varphi_t)A$ (5-2.1α)
Ογκομετρική παροχή	$Q_c = \int_A V_c(1-\varphi)dA$ (5-2.2)
	$Q_c = \bar{V}_c(1-\varphi_t)A$ (5-2.2α)
Μέση ταχύτητα	$\bar{V}_c = \frac{1}{A} \int_A V_c dA$ (5-2.3)
	$\bar{V}_c = \frac{Q_c}{(1-\varphi_t)A}$ (5-2.3α)
Ορμή	$\bar{J}_{Mc} = \dot{m}_c V_c = \int_A \rho V_c^2(1-\varphi_t)dA$ (5-2.4)
	$\bar{J}_{Mc} = \rho \bar{V}_c^2(1-\varphi_t)A = \dot{m}_c \bar{V}_c$ (5-2.4α)

Κινητική Ενέργεια	$\bar{E}_{Mc} = \int_A \rho V_c (1-\varphi) \left(\frac{V_c^2}{2} \right) dA \quad (5-2.5)$
	$\bar{E}_{Kc} = \rho \bar{V}_c (1-\varphi_t) A \left(\frac{\bar{V}_c^2}{2} \right) = \dot{m}_c \left(\frac{\bar{V}_c^2}{2} \right) \quad (5-2.5a)$

Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας την $V_{s,av} / \bar{V}_p = 1 + \lambda_{slip}$ στην εξίσωση (5.9a), το απελευθερωμένο κλάσμα όγκου της στερεής φάσης φ_d σε όρους της αδιάστατης ταχύτητας ολίσθησης λ_{slip} λαμβάνεται ως

$$\varphi_d = \frac{\varphi_t}{1 + \lambda_{slip}} \quad (5.12)$$

η λ_{slip} μειώνεται με τη μείωση της ταχύτητας ολίσθησης και ο λόγος $1/(1 + \lambda_{slip})$ στην παραπάνω εξίσωση αυξάνεται. Γι'αυτό τον λόγο, η διαφορά μεταξύ της κατά μέσο όρο-περιοχής και του απελευθερωμένου κλάσματος όγκου μειώνονται και γίνονται ίδια κάτω από συνθήκες μη-ολίσθησης.

5.2 Γραμμικό ισοζύγιο ορμής

Η γραμμική δυναμική ισορροπία για την suspension ροή είναι γραμμένη ως διαφορά των ποσοτήτων της μέσης επιφανείας εισόδου και εξόδου του στοιχειακού όγκου (από το σημείο A στο B) στο παραπάνω Σχήμα 7-1 κάτω από συνθήκες σταθερής κατάστασης

$$\left[(\bar{J}_{Ms})_B - (\bar{J}_{Ms})_A \right] + A(P_B - P_A) + A(\Delta L) \rho_{s,av} g \sin \alpha + S\tau_w = 0 \quad (5.13)$$

όπου \bar{J}_{Ms} είναι η μέση περιοχή της ορμης της αιώρησης, P η πίεση, α είναι η γωνία της κλίσης, S είναι η περιφεριακή περιοχή της γραμμής μεταφοράς (αγωγός), η οποία είναι παράλληλη προς την κατεύθυνση ροής, A είναι η κάθετος προς την περιοχή της ροής αιώρησης, και $\rho_{s,av}$ είναι η πυκνότητα του αιωρήματος μέσου όγκου στον όγκο ελέγχου επειδή η πυκνότητα των αλλαγών του αιωρήματος αλλάζουν ανάλογα με το στερεό κλάσμα όγκου κατά μήκος της ροής (από το τμήμα A στο B και σε όλη την διατομή) σε ετερογενή ροή.

Οι όροι που αγκύλη στην εξίσωση δείχνουν τις μέσες περιοχές συνολικών ποσοστών ορμής της ροής, ο δεύτερος και τρίτος όρος, δίνουν την ορμή που οφείλονται σε εξωτερικές δυνάμεις (πίεση και τη βαρύτητα), και ο τέταρτος όρος που συνδέεται με τη απώλεια ορμής λόγω διατμητικών τάσεων στα τοιχώματα. Η εξίσωση (5.13) σε διαφορική μορφή είναι

$$\left(\frac{d\bar{J}_{Ms}}{dL} \right) = -A \left(\frac{dP}{dL} \right) - A\rho_{s,av}g \sin a - \frac{S\tau_w}{dL} \quad (5.13a)$$

Η suspension πυκνότητα ρ_s δίνεται από τους όρους της τοπικού κλάσματος όγκου του στερεού και από τις πυκνότητες της κάθε φάσης,

$$\rho_s = \varphi\rho_p + (1-\varphi)\rho \quad (5.14)$$

σε όλη την διαφορική διατομή, dA . Η πυκνότητα της suspension μέσης επιφάνειας, $\bar{\rho}_s$, εκφράζεται από την εξίσωση (5-3.1) στον παρακάτω ΠΙΝΑΚΑ 5-3 αντικαθιστώντας το τοπικό κλάσμα όγκου του στερεού, φ , με το κλάσμα όγκου της μέσης επιφάνειας, φ_t . Οι ποσότητες της μέσης επιφάνειας που σχετίζονται με την ροή αιώρησης, όπως των ρυθμών ροής της μάζας, της ορμής, και της κινητικής ενέργειας συνοψίζονται στον παρακάτω ΠΙΝΑΚΑ 5-3.

Η πυκνότητα της μέσης επιφάνειας αιώρησης, $\bar{\rho}_s$, μετατρέπεται σε ποσότητες μέσου όγκου μέσω της

$$\rho_{s,av} = \frac{\int_{L_A}^{L_B} \bar{\rho}_s dL}{\int_{L_A}^{L_B} dL} \quad (5.15)$$

Μια έκφραση για την πυκνότητα του μέσου όγκου αιώρησης $\rho_{s,av}$ επιτυγχάνεται αντικαθιστώντας την εξίσωση (5-3.1) στην (5.15), στη συνέχεια, λαμβάνοντας το ολοκλήρωμα και εφαρμόζοντας τα όρια ολοκλήρωσης:

$$\rho_{s,av} = \frac{(\rho_p\varphi_t + \rho(1-\varphi_t)L)_B + (\rho_p\varphi_t + \rho(1-\varphi_t)L)_A}{\Delta L} \quad (5.16)$$

Η αναδιάταξη της παραπάνω εξίσωσης δίνει

$$\rho_{s,av} = \frac{(\rho_p - \rho)((\varphi_t L)_B - (\varphi_t L)_A)}{\Delta L} + \rho \quad (5.16a)$$

Με την προσθήκη των εκφράσεων για μέσες τιμές ποσοτήτων στην εξίσωση (5.13)) μια γενική γραμμική εξίσωση του ισοζυγίου ορμής περιγράφεται από την πτώση της πίεσης κατά μήκος της υδραυλικής γραμμής μεταφοράς που απορρέει από τις συνθήκες σταθερής κατάστασης τόσο για ομοιογενείς όσο και για ετερογενείς ροές

$$\left(\frac{dP}{dL} \right) = - \frac{S\tau_w}{AdL} - \left[\frac{(\rho_p - \rho)((\varphi_t L)_B - (\varphi_t L)_A)}{\Delta L} + \rho \right] g \sin a - \left(\frac{\dot{m}_p}{A} \frac{d\bar{V}_p}{dL} + \frac{\dot{m}_c}{A} \frac{d\bar{V}_c}{dL} \right) \quad (5.17)$$

όπου ο πρώτος όρος δηλώνει τις διατμητικές τάσεις στον τοίχο, ο δεύτερος όρος το αποτέλεσμα της βαρύτητας λόγω του βάρους του αιωρήματος και ο τρίτος όρος την επιτάχυνση των δύο φάσεων που ρέουν. Στην περίπτωση της πολλαπλής ροής, το τ_w στον πρώτο όρο υποδηλώνει την άθροιση των διατμητικών τάσεων στο άνω και κάτω όρια του κάθε στρώματος.

Η γραμμική εξίσωση του ισοζυγίου ορμής (εξίσωση (5.17)) μπορεί να απλοποιηθεί με την ακόλουθη :

Πλήρως αναπτυγμένη ετερογενής ροή: Δεν υπάρχει καμία αλλαγή στις μέσες ταχύτητες των δύο φάσεων της περιοχής κατά μήκος του σωλήνα και ο όρος της επιτάχυνσης είναι μηδέν σε αυτό το είδος της ροής. Στην περίπτωση αυτή, η εξίσωση απλοποιείται

$$\left(\frac{dP}{dL} \right) = - \frac{S\tau_w}{AdL} - \left[\frac{(\rho_p - \rho)((\varphi_t L)_B - (\varphi_t L)_A)}{\Delta L} + \rho \right] g \sin a \quad (5.17a)$$

Πλήρως Αναπτυγμένη ομοιογενής ροή: Το κλάσμα όγκου των φάσεων στα τμήματα A και B κάθετα στη ροή της αιώρησης παραμένει σταθερό δια μέσου της γραμμής μεταφοράς, έτσι $\varphi_{tA} = \varphi_{tB} = \varphi_t$ και, κατά συνέπεια, ο δεύτερος όρος στην εξίσωση (7.76a) μειώνεται σε μια απλούστερη μορφή:

$$\left(\frac{dP}{dL} \right) = - \frac{S\tau_w}{AdL} - [\rho_p \varphi_t + (1 - \varphi_t) \rho] g \sin a \quad (5.17\beta)$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι γενικές και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για οποιαδήποτε γωνία κλίσης του αγωγού από οριζόντια σε κάθετη θέση. Στην εξίσωση, το $\sin a = 0$, για οριζόντια ροή και $\sin a = 1$ για κάθετη ροή.

ΠΙΝΑΚΑΣ 5-3

Μέσες ποσότητες για αιώρηση βασισμένη στο Da στη γραμμή SS' στο παραπάνω Σχήμα

Ποσότητες μέσης επιφάνειας	Αιώρηση	
Πυκνότητα	$\bar{\rho}_s = \varphi_t \rho_p + (1 - \varphi_t) \rho$	(5-3.1)
Ρυθμός ροής μάζας	$\dot{m}_s = \rho_p \bar{V}_p \varphi_t A + \rho \bar{V}_c (1 - \varphi_t) A$	(5-3.2)
Ορμή	$\bar{J}_{Ms} = \int_A \rho_p V_p^2 \varphi dA + \int_A \rho V_c^2 (1 - \varphi) dA$	(5-3.3)
	$\bar{J}_{Ms} = [\rho_p \bar{V}_p^2 \varphi_t A + \rho \bar{V}_c^2 (1 - \varphi_t) A]$	(5-3.4)
	$\bar{J}_{Ms} = \dot{m}_p \bar{V}_p + \dot{m}_c \bar{V}_c$	(5-3.5)
	$\bar{J}_{Ms} = \bar{J}_{Mp} + \bar{J}_{Mc}$	(5-3.6)
Κινητική Ενέργεια	$\bar{E}_{Ks} = \int_A \rho_p V_p \varphi \left(\frac{V_p^2}{2} \right) dA + \int_A \rho V_c (1 - \varphi) \left(\frac{V_c^2}{2} \right) dA$	(5-3.7)
	$\bar{E}_{Ks} = \dot{m}_p \left(\frac{\bar{V}_p^2}{2} \right) + \dot{m}_c \left(\frac{\bar{V}_c^2}{2} \right)$	(5-3.8)
	$\bar{E}_{Ks} = \bar{E}_{Kp} + \bar{E}_{Kc}$	(5-3.9)

[1]

5.3 Ισοζύγιο Μηχανικής Ενέργειας

5.3.1 Συνολικό ισοζύγιο μηχανικής ενέργειας

Το συνολικό ισοζύγιο μηχανικής ενέργειας μεταξύ των τμημάτων A και B στο παραπάνω σχήμα 7-1 είναι :

$$(P + \bar{P}_{KE} + \rho_{s,av} L g \sin \alpha)_A = (P + \bar{P}_{KE} + \rho_{s,av} L g \sin \alpha)_B + \Delta P_{loss} \quad (5.18)$$

όπου P είναι η πίεση, \bar{P}_{KE} είναι η μέση περιοχική κινητικής ενέργειας σε μονάδες πίεσης, και ΔP_{loss} είναι η πίεση ή απώλειες τριβών λόγω της διάχυσης της ενέργειας στη γραμμή μεταφοράς. Η μέση περιοχική κινητικής ενέργειας των διάσπαρτων και συνεχών φάσεων SS' στη γραμμή στο παραπάνω σχήμα 5-1 σε όρους τοπικών και περιοχών μέσω ποσοτήτων. .

Η κινητική ενέργεια αιώρησης σε όρους της μονάδας πίεσης μπορεί να εκφραστεί ως

$$\bar{P}_{KEs} = \frac{\bar{E}_{Kp}}{\bar{V}_p \phi_t A} + \frac{\bar{E}_{Kc}}{\bar{V}_c (1-\phi_t) A} = \rho_p \left(\frac{\bar{V}_p^2}{2} \right) + \rho_c \left(\frac{\bar{V}_c^2}{2} \right) \quad (5.19)$$

Η Εξ. (5.18) μπορεί επίσης να γραφτεί σε διαφορική μορφή ως:

$$-\frac{dP_{loss}}{dL} = -\frac{dP}{dL} - \frac{d(\bar{P}_{KEs})}{dL} - \rho_{s,av} g \sin \alpha \quad (5.20)$$

Η Εξ. (7.79) καθορίζει τη συνολική μηχανική ενέργεια ανά μονάδα όγκου. Για να εκφραστεί η συνολική μηχανική ενέργεια με βάση το συνολικό όγκο, εξίσωση (5.20) είναι γραμμένο με την αντικατάσταση \bar{P}_{KEs} με \bar{E}_{Ks} , $\rho_{s,av}$ με $(\dot{m}_p + \dot{m}_c)$, και πολλαπλασιάζοντας τους όρους dP/dL και dP_{loss}/dL με τη συνολική ογκομετρική ροή, Q_s , όπως

$$-Q_s \frac{dP_{loss}}{dL} = -Q_s \frac{dP}{dL} - \frac{d}{dL} (\bar{E}_s) - (\dot{m}_p + \dot{m}_c) g \sin \alpha \quad (5.21)$$

Η αναδιοργάνωση της πιο πάνω εξίσωσης από την αντικατάσταση $Q_s = Q_p + Q_c$, και από τη χρήση της εξίσωσης (5-3.8) αποδίδεται ως

$$-\frac{dP_{loss}}{dL} = -\frac{dP}{dL} - \frac{1}{Q_p + Q_c} \left(\dot{m}_p \bar{V}_p \frac{d\bar{V}_p}{dL} + \dot{m}_c \bar{V}_c \frac{d\bar{V}_c}{dL} \right) - \left(\frac{\dot{m}_p + \dot{m}_c}{Q_p + Q_c} \right) g \sin \alpha \quad (5.22)$$

όπου ο λόγος του $(\dot{m}_p + \dot{m}_c)$ προς $Q_p + Q_c$ στο τελευταίο διάστημα δίνει την πυκνότητα, γνωστή ως η μέση παραδοθείσα πυκνότητα αιώρησης, $\rho_{s,av}$

$$\rho_{s,av} = \left[\frac{\dot{m}_p + \dot{m}_c}{Q_p + Q_c} \right] \quad (5.23)$$

Περαιτέρω αντικατάσταση των εξισώσεων (5.17) και (5.23) στην εξίσωση (5.22) δίνει

$$-\frac{dP_{loss}}{dL} = + \frac{S\tau_w}{AdL} + \left[\frac{(\rho_p - \rho)((\varphi_t L)_B - (\varphi_t L)_A)}{\Delta L} + \rho - \rho_{s,av} \right] g \sin \alpha \quad (5.24)$$

$$+ \left[\left(\frac{\dot{m}_p}{A} - \frac{\dot{m}_p \bar{V}_p}{Q_p + Q_c} \right) \frac{d\bar{V}_p}{dL} + \left(\frac{\dot{m}_c}{A} - \frac{\dot{m}_c \bar{V}_c}{Q_p + Q_c} \right) \frac{d\bar{V}_c}{dL} \right]$$

όπου ο πρώτος, ο δεύτερος και ο τρίτος όροι υποδεικνύουν τη διατμητική τάση στο τοίχωμα, την επίδραση της βαρύτητας, και την επιτάχυνση των διάσπαρτων και συνεχών φάσεων, αντίστοιχα. Έτσι, οι όροι καθορίζουν τις ίδιες ποσότητες όπως στην εξίσωση (5.17). Στην περίπτωση της πλήρως ανεπτυγμένης ετερογενούς ροής, ο τρίτος όρος γίνεται μηδέν και το συνολικό ισοζύγιο μηχανικής ενέργειας γίνεται

$$-\frac{dP_{loss}}{dL} = + \frac{S\tau_w}{AdL} + \left[\frac{(\rho_p - \rho)((\varphi_t L)_B - (\varphi_t L)_A)}{\Delta L} + \rho - \rho_{s,av} \right] g \sin \alpha \quad (5.25)$$

Για την πλήρως ανάπτυξη ομοιογενούς ροής, ο δεύτερος όρος στην παραπάνω εξίσωση απλοποιείται όταν δεν υπάρχει καμία αλλαγή στο κλάσμα όγκου της διεσπαρμένης φάσης σε όλο το σύστημα

$$-\frac{dP_{loss}}{dL} = + \frac{S\tau_w}{AdL} + \left[\rho_p \varphi_t + \rho(1 - \varphi_t) - \rho_{s,av} \right] g \sin \alpha \quad (5.26)$$

Οι όροι σε αγκύλες δείχνουν τη διαφορά μεταξύ των μέσων περιοχών (εξίσωση (5-3.1)) και τη μέση παραδοθείσα πυκνότητα αιωρήματος, έτσι ώστε η μέση πυκνότητα του μείγματος να λαμβάνεται υπόψιν.

5.3.2 Επίδραση της ολίσθησης επί του συνολικού ισοζυγίου της μηχανικής ενέργειας

Η διαφορά πυκνότητας που δόθηκε στις αγκύλες στην εξίσωση (5.25) μπορεί επίσης να οριστεί από τη χρήση των εξισώσεων (5-3.1) και (5.12) σε όρους της αδιάστατης ταχύτητας ολίσθησης, λ_{slip}

$$\bar{\rho}_s - \rho_{s,av} = (\rho_p + \rho)(\varphi_t - \varphi_d) = (\rho_p - \rho)\varphi_d \lambda_{slip} \quad (5.27)$$

Εάν η αιώρηση μπορεί να ρέει προς τα πάνω, αυτό σημαίνει ότι η επιφανειακή ταχύτητα αιώρησης είναι μεγαλύτερη από την μέση ταχύτητα των σωματιδίων περιοχής της περιοχής, $V_{s,av} > \bar{V}_p$, και η αδιάστατη ταχύτητα ολίσθησης λ_{slip} , γίνεται θετική. Ως εκ τούτου, η διαφορά πυκνότητας από την εξίσωση (5.27) που χρησιμοποιείται για τον δεύτερο όρο του συνολικού ισοζυγίου μηχανικής ενέργειας (εξίσωση (5.26)) γίνεται θετική. Αυτό δείχνει ότι η διάχυση της μηχανικής ενέργειας, από την εξίσωση (5.26) έχει αρνητικό πρόσημο. Στην περίπτωση της ροής προς τα κάτω, το $\sin \alpha$, γίνεται αρνητικό και $V_{s,av} < \bar{V}_p$. το οποίο προκαλεί την αδιάστατη ταχύτητα ολίσθησης, λ_{slip} , και τη διαφορά στην πυκνότητα εξίσωση (5.27) να είναι αρνητική. Κατά συνέπεια, η ολίσθηση της διεσπαρμένης φάσης προκαλεί μηχανική διάχυση της ενέργειας και στις δύο ανοδικές και καθοδικές ροές αιώρησης.

[1]

5.4 Ορισμός των Συντελεστών Τριβής

Θεωρούμε ότι η σταθερή ροή οδηγείται από ένα ρευστό με σταθερή πυκνότητα σε ένα από τα δύο συστήματα: (α) το ρευστό ρέει ευθεία σε αγωγό ενιαίας διατομής (β) το ρευστό ρέει γύρω από ένα βυθισμένο αντικείμενο που έχει έναν άξονα συμμετρίας (ή δύο επίπεδα συμμετρίας) παράλληλα προς την κατεύθυνση του προσεγγισιμού ρευστού. Θα υπάρξει μια δύναμη $\mathbf{F}_{f \rightarrow s}$, που ασκείται από το ρευστό στην επιφάνεια του στερεού. Είναι βολικό να χωρίσει αυτή η δύναμη σε δύο μέρη: \mathbf{F}_s , η δύναμη που θα ασκείται από το ρευστό, ακόμη και αν ήταν ακίνητο και, \mathbf{F}_k , η πρόσθετη δύναμη που σχετίζεται με την κίνηση του ρευστού. Στα συστήματα του τύπου (α), η \mathbf{F}_k σημειώνεται στην ίδια κατεύθυνση με τη μέση ταχύτητα $\langle \mathbf{v} \rangle$ στον αγωγό, και στα συστήματα του τύπου (β), η \mathbf{F}_k σημειώνεται στην ίδια κατεύθυνση με την προσεγγιστική ταχύτητα \mathbf{v}_∞ .

Και για τους δύο τύπους συστημάτων δηλώνουμε ότι το μέγεθος της δύναμης \mathbf{F}_k είναι ανάλογη με μια χαρακτηριστική περιοχή A και μια χαρακτηριστική κινητική ενέργεια K ανά μονάδα όγκου, έτσι

$$\mathbf{F}_k = AKf \quad (5.28)$$

στην οποία η σταθερά αναλογίας f ονομάζεται συντελεστής τριβής. Σημειώστε ότι η εξίσωση (5.28) δεν είναι ένας νόμος της μηχανικής των

ρευστών, αλλά μόνο ένας ορισμός για την f . Αυτός είναι ένας χρήσιμος ορισμός, επειδή η αδιάστατη ποσότητα f μπορεί να δοθεί ως μια σχετικά απλή συνάρτηση του αριθμού Reynolds και του σχήματος του συστήματος. Προφανώς, για ένα δοθέν σύστημα ροής, η f δεν ορίζεται με τον ορισμό των A και K . Τώρα θα δούμε ποιοι είναι οι συνήθεις ορισμοί:

(α) Για ροή σε αγωγούς, η A συνήθως θεωρείται ότι είναι η υγρή επιφάνεια, και η K λαμβάνεται ως

$$\frac{1}{2}\rho\langle v \rangle^2$$

Συγκεκριμένα, για τους κυλινδρικούς σωλήνες ακτίνας R και μήκους L ορίζουμε το f από την

$$F_k = (2\pi RL) \left(\frac{1}{2}\rho\langle v \rangle^2 \right) f \quad (5.29)$$

Σε γενικές γραμμές, η μετρούμενη ποσότητα δεν είναι η F_k , αλλά η διαφορά πίεσης $p_0 - p_L$ και η διαφορά ανύψωσης $h_0 - h_L$. Δίνεται μια ισορροπία δυνάμεων στο ρευστό μεταξύ του 0 και του L προς την κατεύθυνση της ροής, για πλήρως ανεπτυγμένη ροή.

$$F_k = [(p_0 - p_L) + \rho g (h_0 - h_L)] \pi R^2 = (P_0 - P_L) \pi R^2 \quad (5.30)$$

Απαλοιφή της F_k μεταξύ των δύο τελευταίων εξισώσεων στη συνέχεια δίνει :

$$f = \frac{1}{4} \left(\frac{D}{L} \right) \left(\frac{P_0 - P_L}{\frac{1}{2}\rho\langle v \rangle^2} \right) \quad (5.31)$$

στην οποία η $D = 2R$ είναι η διάμετρος του σωλήνα. Οι εξισώσεις (5.28) έως (5.31) δείχνουν πώς να υπολογιστεί από τα πειραματικά δεδομένα. Η ποσότητα f ονομάζεται η συντελεστής τριβής.

(β) Για ροή γύρω από βυθισμένα αντικείμενα, η χαρακτηριστική περιοχή A λαμβάνεται συνήθως για να είναι η έκταση που επιτυγχάνεται με την προβολή των στερεών επάνω σε ένα επίπεδο κάθετη προς την ταχύτητα του προσεγγιστικού ρευστού. Η ποσότητα K θεωρείται ότι είναι $\frac{1}{2}\rho v_\infty^2$,

όπου v_∞ είναι η προσεγγιστική ταχύτητα του ρευστού σε μια μεγάλη απόσταση από το αντικείμενο. Για παράδειγμα, για τη ροή γύρω από μια σφαίρα ακτίνας R , ορίζουμε την f από την εξίσωση

$$F_k = (\pi R^2) \left(\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 \right) f \quad (5.32)$$

Εάν δεν είναι δυνατόν να μετρηθεί το F_k τότε μπορούμε να μετρήσουμε την τελική ταχύτητα της σφαίρα όταν πέφτει διαμέσου του ρευστού (στην περίπτωση αυτή, το v_∞ ερμηνεύεται ως η τελική ταχύτητα σφαίρας). Για την πώση μιας σφαίρας σε ένα ρευστό σε σταθερές συνθήκες, η δύναμη F_k , είναι η αντιστάθμιση της βαρυτικής δύναμης στη σφαίρα και λιγότερο την ανοδική δύναμη :

$$F_k = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{sph} g - \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g \quad (5.33)$$

Απαλοιφή της F_k , μεταξύ των (5.32) και (5.33) στη συνέχεια δίνει :

$$f = \frac{4}{3} \frac{gD}{v_\infty^2} \left(\frac{\rho_{sph} - \rho}{\rho} \right) \quad (5.34)$$

Η έκφραση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθούν για να λάβουμε το f από τα δεδομένα της τελικής ταχύτητας. Ο συντελεστής τριβής χρησιμοποιείται στις εξισώσεις (5.32) και (5.34) μερικές φορές για αποκαλέσουμε τον συντελεστή οπισθέλκουσας και τον συμβολίζουμε με C_D .

Είδαμε ότι ο «συντελεστής οπισθέλκουσας» για βυθισμένα αντικείμενα και ο «συντελεστής τριβής» για τη ροή του καναλιού καθορίζονται με τον ίδιο γενικό τρόπο. Για το λόγο αυτό προτιμάται να χρησιμοποιείται το ίδιο σύμβολο και το όνομα και για τους δύο.

[VI]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

6

ΔΥΝΑΜΕΙΣ

6.1 Η δύναμη που δρα στο νησίδιο εξαιτίας της αξονοσυμμετρικής ροής γύρω από τον άξονα z.

Η τελική δύναμη F_p δρα σε μια σφαίρα στη διεύθυνση z εξαιτίας της αξονοσυμμετρικής ροής γύρω από τον άξονα z . Έτσι, η τελική δύναμη λαμβάνεται από την ολοκλήρωση των z - συνιστωσών της κάθετης (p) και εφαπτομενικής (τ) δυναμεων εγκάρσια της σφαίρας ($r=R_p$)

$$F_p = F_n + F_t = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi ((-p)|_{r=R_p} \cos \theta) R_p^2 \sin \theta d\theta d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^\pi ((\tau_{r\theta})|_{r=R_p} \sin \theta) R_p^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (6.1)$$

όπου $((-p)|_{r=R_p} \cos \theta)$ και $((\tau_{r\theta})|_{r=R_p} \sin \theta)$ δηλώνουν τις z -συνιστώσες της κάθετης (p) και εφαπτομενικής (τ) δυναμεων, αντίστοιχα. Μια στοιχειώδη διαφορική επιφάνεια του συστήματος ισούται με $dA = R_p^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ στην επιφάνεια της σφαίρας. Η κατανομή πίεσης και διατμητική τάση αντικαθίσταται μέσα στην εξίσωση (6.1) για $r=R_p$ και η τελική δύναμη του ρευστού στη σφαίρα λαμβάνεται όπως παρακάτω

$$F_p = \frac{4}{3} \pi R_p^3 \rho g + 2\pi \mu R_p V_\infty + 4\pi \mu R_p V_\infty \quad (6.2)$$

Ο πρώτος όρος από τα δεξιά της ισότητας είναι η δύναμη άνωσης την οποία ασκεί το ρευστό στη σφαίρα, ο δεύτερος όρος από τα δεξιά της ισότητας αντιστοιχεί στην μορφή οπισθέλκουσας που προκύπτει ως αποτέλεσμα των κανονικών δυνάμεων και ο τρίτος όρος από τα δεξιά της ισότητας δίνει την οπισθέλκουσα λόγω τριβών που προκύπτει ως αποτέλεσμα των εφαπτομενικών δυνάμεων. Η συνολική οπισθέλκουσα δύναμη, F_D , που ασκείται στο σωματίδιο εξαιτίας της κίνησης στο ρευστό και είναι γνωστή και ως νόμος του Stoke [I] δίνεται από την

$$F_D = \varepsilon_p \rho_f \frac{3}{8r_p} C_D |\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p| (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p) \quad (6.3)$$

όπου C_D είναι ο αδιάστατος συντελεστής οπισθέλκουσας και r_p είναι η ακτίνα του νησιδίου. Το C_D δίνεται από το

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}}$$

όπου

$$\text{Re} = \frac{2r_p \rho_f |\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p|}{\mu_m}$$

Το σύμβολο μ_m προσδιορίζει το δυναμικό ιξώδες της νέας φάσης.

$$\mu_m = \mu_f \left(1 - \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{pm}} \right)^{-2.5\varepsilon_{pm}}$$

Η παράμετρος ε_{pm} είναι το κλάσμα όγκου. Στις περισσότερες περιπτώσεις ισχύει

$$\varepsilon_{pm} = 0.62$$

Η πραγματική δύναμη μάζας είναι η δύναμη που επηρεάζει ένα επιταχυνόμενο αντικείμενο. Το αντικείμενο επιταχύνει το περιβάλλον ρευστό και αυτό οδηγεί σε μια δύναμη αλληλεπίδρασης με το αντικείμενο με τη μορφή :

$$\mathbf{F}_{vm} = C_{vm} \varepsilon_p \rho_f \left[\left(\frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \nabla \mathbf{v}_f \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial t} + \mathbf{v}_p \cdot \nabla \mathbf{v}_p \right) \right] \quad (6.4)$$

όπου C_{vm} είναι ο πραγματικός συντελεστής μάζας και είναι ίσος με $C_{vm} = 0.5$ για εναιώρημα σφαιρών αραιά διασκορπισμένων σε ένα ρευστό.

[1]

6.2 Οι δυνάμεις που ασκούνται στα νησίδια παγκρεατικών κυττάρων

Η δύναμη μπορεί εν συντομία να περιγραφεί ως μία επίδραση στο νησίδιο, η οποία προκαλεί σε αυτό μια επιτάχυνση. Η δύναμη ορίζεται μέσω των νόμων της κίνησης του Newton. Οι νόμοι κίνησης του Newton έχουν δύο θεμελιώδης αρχές οι οποίες αποτελούν τη βάση της κλασικής μηχανικής. Ο πρώτος νόμος, επίσης καλείται νόμος της αδράνειας, εκφράζει ότι αν ένα σώμα είναι ακίνητο ή κινείται με σταθερή ταχύτητα, αυτό μπορεί να συνεχίσει να το κάνει αυτό αν δεν του ασκείται κάποια άλλη δύναμη. Ο δεύτερος νόμος εκφράζει ότι η δύναμη F_p που ασκείται σε ένα σώμα είναι ίση με το πηλίκο της μάζας του σώματος m επί την επιτάχυνση του a ,

$$F_p = ma = \rho_p u_p \frac{dV}{dt} \quad (6.5)$$

όπου ρ_p είναι η πυκνότητα του σώματος και u_p είναι ο όγκος του σώματος.

Η δύναμη μπορεί επίσης να οριστεί με βαθμωτούς όρους ενέργειας ως εξής :

$$F_p = -\frac{dU}{dx} \quad (6.6)$$

Ειδικό ενδιαφέρον παρουσιάζει η παράγωγος της λανθάνουσας ενέργειας, η οποία καλείται λανθάνουσα, εν συντομία. Κάθε σωματίδιο βρίσκεται σε ένα πεδίο και υφίσταται μια επίδραση από μια δύναμη που ασκείται σε αυτό. Η δύναμη στο πεδίο περιγράφει ένα μέτρο της δύναμης την οποία το πεδίο ασκεί σε μια μάζα. Παραδείγματα είναι η βαρυτικές, η μαγνητικές και η ηλεκτροστατικές δυνάμεις που δρουν κάτω από το βαρυτικό, μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο, αντίστοιχα.

Είναι λάθος να ταξινομηθούν οι δυνάμεις σύμφωνα με την ακτίνα δράσης τους καθώς το αν είναι μικρή ή μακρυνά η ακτίνα δράσης δε σημαίνει κάτι για την κλίμακα μήκους. Οι επιφανειακές δυνάμεις δρουν στην κλίμακα μήκους του μορίου και στα κολλοειδή σωματίδια. Συνεπώς, οι επιδρασή τους παρατηρείται σε αυτή τη διαδικασία ως σύνολο σωματιδίων. Οι δυνάμεις οι οποίες παρουσιάζονται σε αυτό το κεφάλαιο επιδρούν σε ευρύτερη περιοχή αποστάσεων από ότι του σωματιδίου ή των συνολικών διαστάσεων.

[1]

6.2.1 Βαρυτική Δύναμη

Η δύναμη του βαρυτικού πεδίου (ως διάνυσμα) ορίζεται ως η δύναμη ανά μονάδα μάζας που δρα στο νησίδιο

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} \quad (6.7)$$

Η βαρυτική δύναμη, F_g , του νησιδίου εκφράζεται σε όρους όγκου του νησιδίου ως εξής

$$F_g = \rho_p u_p g \quad (6.8)$$

όπου ρ_p είναι η πυκνότητα του νησιδίου, u_p είναι ο όγκος του νησιδίου ($u_p = \frac{\pi d_p^3}{6}$ για σφαιρικά σωματίδια διαμέτρου d_p) και g η επιτάχυνση εξαιτίας της βαρύτητας ($g = 9,81 \frac{m}{s^2}$) στην επιφάνεια της γης. Για μικρά σωματίδια με χαμηλή τελική ταχύτητα, η κίνηση κάτω από την επίδραση της βαρύτητας θα είναι αργή. Μέχρι να επιταχύνθει η διαδικασία, η επιτάχυνση μπορεί να αυξηθεί από την περιστροφή σε ένα φυγοκεντρικό πεδίο υπό γωνιακή ταχύτητα, ω

$$F_c = mr\omega^2 = \rho_p u_p r \omega^2 \quad (6.9)$$

όπου r είναι η απόσταση μεταξύ του σωματιδίου και του άξονα περιστροφής. Κάτω από ένα φυγοκεντρικό πεδίο, τα σωματίδια κινούνται ακτινικά εξωτερικά.

Στην παρούσα εργασία δε θα αντιμετωπίσουμε τέτοια περίπτωση.

6.2.2. Δύναμη Άνωσης

Η άνωση προκαλείται από τη διαφορά πίεσης στο χαμηλότερο τμήμα του νησιδίου για να πάει ψηλότερα προς το τμήμα της κορυφής. Το αποτέλεσμα είναι μια δύναμη η οποία έχει κατεύθυνση αντίθετη της βαρύτητας. Η άνωση υπολογίζεται με τη χρήση της αρχής του Αρχιμήδη, η οποία εκφράζει ότι το μέγεθος της δύναμης της άνωσης είναι ίσο με το βάρος του εκτοπιζόμενου ρευστού. Έτσι, η δύναμη άνωσης, F_b είναι ανάλογη του όγκου του PEG το οποίο εκτοπίζεται, την επιτάχυνση της βαρύτητας, και την πυκνότητα του PEG και μπορεί να γραφτεί ως

$$F_b = \rho u_p g \quad (6.10)$$

Αμφότερες οι βαρυτικές και οι άνωσης δυνάμεις εξαρτώνται από τον όγκο του νησιδίου και δρουν πάνω στο νησί είτε αυτό είναι ακίνητο είτε κινείται σε ένα ρευστό. Άρα την πέρνουμε υπόψιν στη παρούσα εργασία.

[1]

Διεισδύοντας πιο πολύ στην έννοια της δύναμης της άνωσης, η δύναμη άνωσης υπάρχει εξαιτίας των περιστροφών του νησιδίου δρα εγκάρσια προς την κατεύθυνση κίνησης του ρευστού και γράφεται ως

$$\mathbf{F}_L = -C_L \varepsilon_p \rho_f (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f) \times (\nabla \times \mathbf{v}_f) \quad (6.11)$$

Ο συντελεστής C_L καλείται συντελεστής άνωσης. Για ροές σφαιρών αραιά διασκορπισμένων σε ένα ρευστό $C_L=0.25$.

[1]

6.2.3. Οπισθέλκουσα Δύναμη

6.2.3.1. Οπισθέλκουσα Δύναμη

Η αντίσταση του νησιδίου στην κίνηση καλείται οπισθέλκουσα δύναμη. Το μέγεθος της οπισθέλκουσας δύναμης ασκείται στο νησιδίο που κινείται στο ΡΕΓ και εξαρτάται από τη σχετική ταχύτητα του ρευστού ως προς το νησιδίο , το ιζώδες και την πυκνότητα του μέσου, το σχήμα και την διατομή , και την τραχύτητα της επιφάνειας. Η οπισθέλκουσα δύναμη πάντα δρα αντίθετα στη κατεύθυνση των νησιδίων και εκφράζεται ως

$$F_D = \frac{C_D A_o \rho u_\infty^2}{2} \quad (6.12)$$

όπου C_D είναι ο συντελεστής οπισθέλκουσας , A_o είναι η μετωπική επιφάνεια (δηλαδή, η μέγιστη διατομή του σώματος καθέτως προς το ρεύμα), και u_∞ είναι η σχετική ταχύτητα του ρευστού ως προς τη σφαίρα. Ο συντελεστής οπισθέλκουσας C_D εξαρτάται από την ταχύτητα του νησιδίου, το ιζώδες του μέσου, το σχήμα του σωματιδίου και την τραχύτητα της επιφάνειας του νησιδίου.

Ο αριθμός Reynolds του νησιδίου, Re_p , είναι ένας χρήσιμος αδιάστατος αριθμός ο οποίος μπορεί να χαρακτηρίσει το πως επηρεάζει ο συντελεστής οπισθέλκουσας την ταχύτητα.

[1]

Η οπισθέλκουσα δύναμη για ένα σφαιρικό σωματίδιο ορίζεται ως

$$F_D = \frac{C_D \pi d_p^2 \rho V^2}{8} \quad (6.13)$$

ή

$$\mathbf{F}_D = \varepsilon_p \rho_f \frac{3}{8 r_p} C_D |\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p| (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p) \quad (6.14)$$

6.2.3.2. Συντελεστής οπισθέλκουσας

6.2.3.2.1 Συντελεστής οπισθέλκουσας και είδη ροής

Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις για τον συντελεστή οπισθέλκουσας στη ροή γύρω από σφαιρικό σωματίδιο :

1. Κατάσταση στρωτής ροής ($Re_p < 1$) :

Συνθήκες έρπουσας ροής είναι αποτελεσματικές για μικρές τιμές του αριθμού Reynolds , όπου τα φαινόμενα αδράνειας είναι αμελητέα σε σύγκριση με τις ιξώδεις δυνάμεις και υπερνικούνται οι ιξώδεις δυνάμεις ([II]) . Ο Stokes εξήγαγε τη συνολική δύναμη αντίστασης σε ένα σφαιρικό σωματίδιο για τη συνθήκη που ισχύει στο νόμο του Stokes, που είδαμε παραπάνω, μπορεί να ξαναγραφεί σε όρους της διαμέτρου του σωματιδίου ως

$$F_D = 3\pi\mu d_p V \quad (6.15)$$

[I]

Για μικρούς αριθμούς Reynolds ($Re < 1$), η ροή είναι παντού στρωτή. Στην έρπουσα ροή, το σχεδιογράφημά της με ροϊκές γραμμές είναι σχεδόν συμμετρικό, η ροή βρίσκεται συνεχώς σε επαφή με το νησίδιο και ο όγκος (δηλαδή η περιοχή γύρω από το σώμα) είναι ελεύθερος δινών. Ως γνωστόν ο όγκος παριστάνει το λόγο των δυνάμεων αδρανείας προς τις ιξώδεις δυνάμεις που δρουν πάνω στο ρευστό. Επομένως, στην έρπουσα ροή, υπερισχύουν οι ιξώδεις δυνάμεις και η δράση τους εκτείνεται σε ολόκληρο το πεδίο ροής.

Για την έρπουσα ροή γύρω από σφαίρα, ο συντελεστής C_D μπορεί να εκφραστεί ως απλή μαθηματική συνάρτηση του αριθμού Reynolds της κύριας ροής (με χαρακτηριστικό μήκος τη διάμετρο της σφαίρας), ως έξης :

$$C_D = \frac{24}{Re} \quad (6.16)$$

Από τη θεωρητική μελέτη της ροής γύρω από σφαίρα, αποδεικνύεται ότι το 1/3 της οπισθέλκουσας δύναμης είναι οπισθέλκουσα πίεσης και τα υπόλοιπα 2/3 οπισθέλκουσα τριβής.

Η εξίσωση $F_D = 3\pi\mu d_p V$ είναι γνωστή ως νόμος του Stokes. Σύμφωνα με το νόμο αυτό, στην έρπουσα ροή γύρω από σφαίρα, η αναπτυσσόμενη οπισθέλκουσα είναι ευθέως ανάλογη προς την πρώτη δύναμη της ταχύτητας u_∞ .

Η εξίσωση αυτή δίνει ακριβή αποτέλεσμα για τιμές $Re \leq 0,1$. Για $Re = 1$, η οπισθέλκουσα δύναμη που υπολογίζεται με βάση την εξίσωση αυτή είναι περίπου 10% μικρότερη από την πραγματική οπισθέλκουσα.

Ο νόμος του Stokes είναι ιδιαίτερα χρήσιμος για τη μελέτη της κίνησης μικρών σωματιδίων σε αέρια ή λεπτόρευστα υγρά ή μεγαλύτερων σωματιδίων σε πυκνόρευστα υγρά.

[I], [III]

Για ροή γύρω από σώματα βυθισμένα στο κινούμενο ρευστό, ο συντελεστής οπισθέλκουσας, C_D , εξαρτάται από το σχήμα του σώματος, τον αριθμό Reynolds, Re , τον αριθμό Mach, M , και τη σχετική τραχύτητα, e/l της επιφάνειας του σώματος. Δηλαδή,

$$C_D = f(\text{Σχήμα}, Re, M, e/l)$$

6.2.3.2.2. Εξάρτηση του C_D από το Σχήμα του Σώματος

Ο συντελεστής οπισθέλκουσας εξαρτάται από το σχήμα του σώματος και κυρίως από τη μορφή του πίσω τμήματός του. Επίσης, η τιμή του C_D μπορεί να εξαρτάται από το αν το σώμα είναι διδιάστατο (δηλαδή, απειρώς μακρύ κάθετα προς τη διεύθυνση ροής) ή τριδιάστατο (δηλαδή, πεπερασμένου μήκους). Για σώματα τα οποία έχουν σχήμα διάφορο του σφαιρικού, είναι απαραίτητο να προσδιορίζεται το μέγεθος, το γεωμετρικό σχήμα και ο προσανατολισμός του σώματος ως προς την κύρια διεύθυνση ροής.

Για σώματα τα οποία δεν έχουν κανονικό σχήμα και δεν υπάρχουν για αυτά διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα, μπορεί να θεωρηθούν σαν κύλινδροι, σφαίρες ή δίσκοι, ανάλογα με την τιμή του συντελεστή σχήματος, $1/d$, και ακολούθως να χρησιμοποιηθούν τα υπάρχοντα δεδομένα για τα αντίστοιχα σώματα κανονικού σχήματος. Διακρίνουμε τρία είδη σωμάτων, μακρόστενα, βραχέα και πεπλατισμένα.

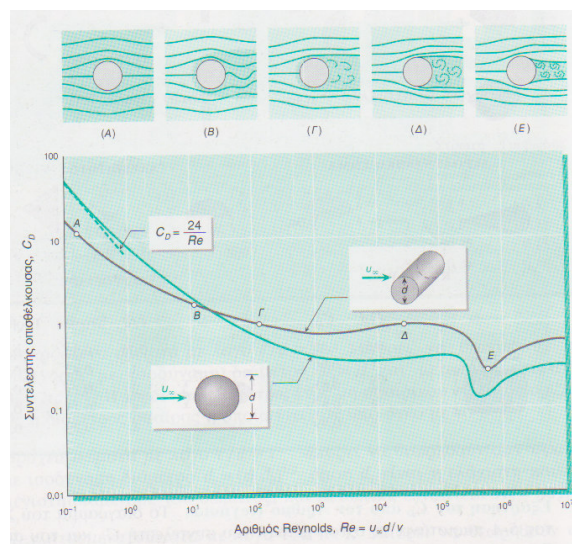
Μακρόστενα σώματα με λόγο $1/d > 10$: Μπορεί να θεωρηθούν σαν κύλινδροι με ισοδύναμη διάμετρο $d_e = d$ και μετωπική επιφάνεια $A_0 = \pi d_e^2 / 4$. Η ισοδύναμη διάμετρος ενός μη σφαιρικού σώματος ορίζεται ως η διάμετρος σφαίρας η οποία έχει τον ίδιο όγκο με το σώμα.

Βραχέα σώματα με λόγο $1/d \approx 1$: Μπορεί να θεωρηθούν σαν σφαίρες με ισοδύναμη διάμετρο $d_e = (d_1 d_2)^{1/2}$, όπου d_1 είναι η ελάχιστη και d_2 η μέγιστη διάμετρος του σώματος, και μετωπική επιφάνεια $A_0 = \pi d_e^2 / 4$.

Πεπλατισμένα σώματα με λόγο $1/d \ll 1$: Μπορεί να θεωρηθούν σαν δίσκοι με ισοδύναμη διάμετρο $d_e = (d_1 d_2)^{1/2}$, όπου d_1 είναι η ελάχιστη και d_2 η μέγιστη διάμετρος του σώματος, και μετωπική επιφάνεια $A_0 = \pi d_e^2 / 4$.

6.2.3.2.3. Εξάρτηση του C_D από τον Αριθμό Reynolds

Το διάγραμμα του παρακάτω Σχήματος 4-1 παριστάνει τη σχέση μεταξύ του συντελεστή C_D και του αριθμού Reynolds για ασυμπίεστη ροή γύρω από λεία σφαίρα. Οι μεταβολές της κλίσης της καμπύλης $C_D = f(Re)$ σε διάφορους αριθμούς Reynolds, είναι το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των διαφόρων παραγόντων οι οποίοι ελέγχουν την οπισθέλκουσα πίεσης και την οπισθέλκουσα τριβής. Στο επάνω μέρος του διαγράμματος του παρακάτω Σχήματος δίνονται σε αδρές γραμμές τα σχεδιογραφήματα του πεδίου ροής γύρω από την σφαίρα για διάφορες τιμές Re . Με βάση τα γενικά χαρακτηριστικά του πεδίου ροής, διακρίνουμε τρεις περιοχές τιμών αριθμού Reynolds. Στην πρώτη περιοχή ($Re < 1$), η ροή χαρακτηρίζεται από απουσία δινών (και αναφέρεται συνήθως ως έρπουσα ροή, στη δεύτερη ($1 < Re < 10^4$), συμβαίνει σχηματισμός και απόσπαση δινών και στην τρίτη περιοχή ($Re > 10^4$), αποκόλληση οριακού στρώματος από την επιφάνεια του κυλίνδρου.

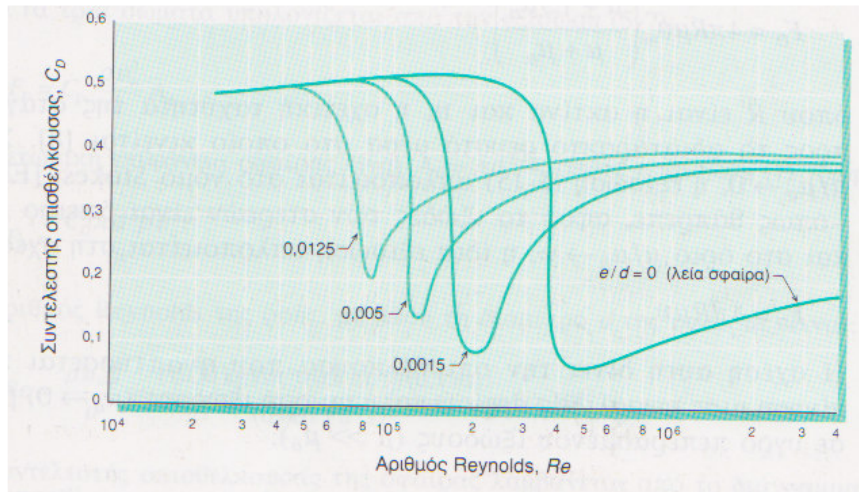


Σχήμα 4-1. Ο συντελεστής οπισθέλκουσας για ασυμπίεστη ροή γύρω από λεία σφαίρα και λείο κύλινδρο απείρου μήκους ως σύναρτηση του αριθμού Reynolds.

[III]

6.2.3.2.4. Εξάρτηση του C_D από τη Σχετική Τραχύτητα

Στο παρακάτω Σχήμα 4-2 δίνονται οι τιμές του συντελεστή C_D ως συνάρτηση του αριθμού Reynolds για ασυμπίεστη ροή γύρω από σφαίρα με παράμετρο τη σχετική τραχύτητα της επιφάνειάς της.



Σχήμα 4-2. Η επίδραση της τραχύτητας της επιφάνειας στο συντελεστή για ασυμπίεστη ροή γύρω από σφαίρα στην περιοχή τιμών αριθμού Reynolds όπου το οριακό στρώμα από στρωτό μεταπίπτει σε τυρβώδες.

Παρατηρούμε ότι, η αύξηση της τραχύτητας της επιφάνειας της σφαίρας προκαλεί μείωση της τιμής του συντελεστή οπισθέλκουσας.

Όταν η ροή στο οριακό στρώμα μεταπίπτει από στρωτή σε τυρβώδη μειώνεται σημαντικά η οπισθέλκουσα πίεση και αυξάνεται λίγο η οπισθέλκουσα τριβή, αλλά ο συνδυασμός αυτών οδηγεί σε μείωση της ολικής οπισθέλκουσας (άρα και του συντελεστή C_D).

[III]

6.2.3.3. Ασυμπίεστη και Συμπίεστη ροή

Ασυμπίεστη ροή ονομάζεται η ροή ενός ρευστού πραγματικού ή ιδανικού) κατά την οποία οι μεταβολές της πυκνότητας σε όλη την έκταση του πεδίου ροής είναι αμελητέες. Αντίθετα, συμπίεστη ροή ονομάζεται η ροή κατά την οποία οι μεταβολές της πυκνότητας είναι σημαντικές. Τα φαινόμενα συμπίεστικότητας εμφανίζονται συνήθως σε υψηλές ταχύτητες.

Όταν η ταχύτητα του ρευστού μεταβάλλεται σημαντικά, η πίεση (άρα και η πυκνότητα του) μεταβάλλεται επίσης σημαντικά. Συνήθως το

χαρακτηρισμό μιας ροής ως συμπιεστής ή ασυμπιέστης χρησιμοποιείται ο αριθμός Mach, M , ο οποίος ορίζεται από την σχέση

$$M = \frac{u}{a} \quad (6.17)$$

όπου u είναι η τοπική ταχύτητα του ρευστού και a η αντίστοιχη ταχύτητα του ήχου.

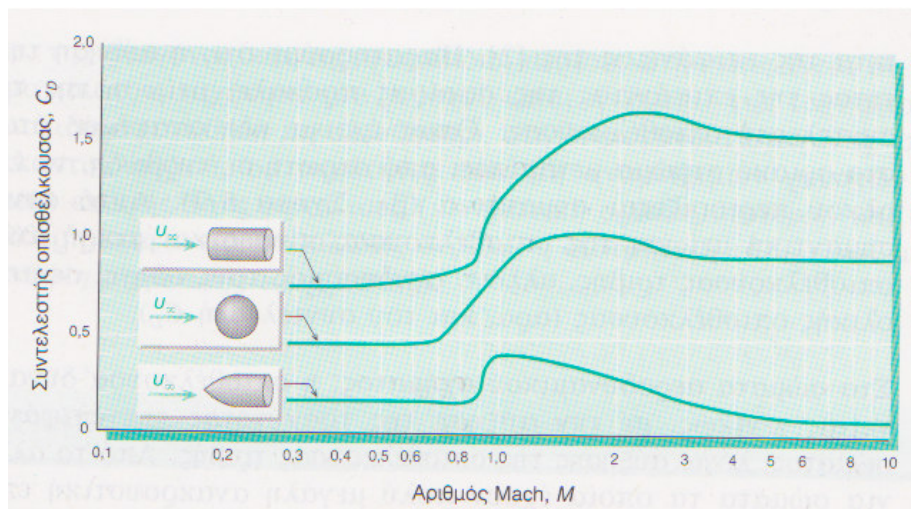
Στην πράξη, ως ασυμπιέστη ροή χαρακτηρίζεται κάθε ροή στην οποία ο αριθμός Mach είναι μικρότερος ή το πολύ ίσος μς 0,3 :

$$M \leq 0,3 \quad [\text{Συνθήκη ασυμπιέστης ροής}]$$

[III]

Για τιμές $M \leq 0,5$, ο συντελεστής οπισθέλκουσας έχει σταθερή τιμή.

Για αριθμούς Mach κοντά στην τιμή $M = 1$ (ηχητική ροή), οι τιμές των συντελεστών C_D αυξάνονται δραματικά.



ΣΧΗΜΑ 4-3. Εξάρτηση του συντελεστή οπισθέλκουσας από τον αριθμό Mach για ροή γύρω από σφαίρα.

6.3. Αρχή της ομοιότητας – Ο αριθμός Reynolds και Mach

Η ταχύτητα u σε μερικά σημεία του πεδίου της ταχύτητας είναι ανάλογη με την ελεύθερη ταχύτητα του ρέοντος υγρού V , η βαθμίδα ταχύτητας

είναι ανάλογη με το V/d και όμοια το $\partial^2 u / \partial y^2$ είναι ανάλογο με το V/d^2 . Γι' αυτό το λόγο, ο λόγος :

$$\frac{\text{Δυνάμεις Αδράνειας}}{\text{Δυνάμεις Τριβής}} = \frac{\rho u \partial u / \partial x}{\mu \partial^2 u / \partial y^2} = \frac{\rho V^2 / d}{\mu V / d^2} = \frac{\rho V d}{\mu}$$

Επομένως, η συνθήκη ομοιότητας ικανοποιείται εαν η ποσότητα $\frac{\rho V d}{\mu}$ έχει την ίδια τιμή και στις δύο ροές. Η ποσότητα $\frac{\rho V d}{\mu}$, η οποία, με $\frac{\mu}{\rho} = \nu$, μπορεί επίσης να γραφτεί ως $\frac{V d}{\nu}$, είναι ένας αδιάστατος αριθμός γιατί είναι ο λόγος δύο δυνάμεων. Αυτός είναι γνωστός ως αριθμός Reynold, R . Συνεπώς, δύο ροές είναι όμοιες όταν ο αριθμός Reynold

$$R = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{V d}{\nu} \quad (6.18)$$

Είναι ίσος και για τις δύο ροές. Αυτή η αρχή αρχικά ειπώθηκε επίσημα από τον Osborne Reynolds σε σύνδεση με της ερευνές του μέσα σε ροές διαμέσου σωλήνων και είναι γνωστή ως η αρχή της ομοιότητας του Reynolds.

Στην περίπτωση που ο αριθμός Reynolds είναι αδιάστατος μπορούμε να τον μελετήσουμε από πλευρά μονάδων :

$$\rho \left[\frac{\text{lb} \cdot \text{sec}^2}{\text{ft}^4} \right], \quad V \left[\frac{\text{ft}}{\text{sec}} \right], \quad d [\text{ft}], \quad \mu \left[\frac{\text{lb} \cdot \text{sec}}{\text{ft}^3} \right]$$

Έτσι

$$\frac{\rho V d}{\mu} = \frac{\text{lb} \cdot \text{sec}^2}{\text{ft}^4} \cdot \frac{\text{ft}}{\text{sec}} \cdot \text{ft} \cdot \frac{\text{ft}^3}{\text{lb} \cdot \text{sec}} = 1$$

[V]

Ο αριθμός Reynolds είναι μια αδιάστατη ομάδα γεωμετρικών και φυσικών μεταβλητών.

Για τη ροή στον αγωγό κυκλικής διατομής, ο αριθμός Reynolds της ροής ορίζεται από τη σχέση :

$$\text{Re} = \frac{\rho u d}{\mu} \quad (6.19)$$

όπου d είναι η εσωτερική διάμετρος του αγωγού, ρ η πυκνότητα, μ το δυναμικό ιξώδες και u η μέση ταχύτητα του ρευστού. Αν ο λόγος μ/ρ αντικατασταθεί με το κινηματικό ιξώδες, ν , η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$\text{Re} = \frac{ud}{\nu} \quad (6.20)$$

Η μετατροπή της ιξώδους ροής από στρωτή σε τυρβώδη γίνεται όταν ο αριθμός Reynolds αποκτήσει μια κρίσιμη τιμή, Re_c , η οποία είναι γνωστή ως κρίσιμος αριθμός Reynolds.

Για ροή σε αγωγό, ο κρίσιμος αριθμός Reynolds εξαρτάται από την τραχύτητα των εσωτερικών τοιχωμάτων του αγωγού και κυρίως, από τις αρχικές διαταραχές της ροής (δηλαδή, τις διαταραχές που συμβαίνουν κατά την είσοδο του ρευστού στον αγωγό).

Ο αριθμός Reynolds του ρευστού στον αγωγό γιά να έχουμε στρωτή ροή πρέπει να είναι : $\text{Re}_f < 2000$

$$\text{Re}_f = 2000$$

[III]

Οι δυνάμεις \mathbf{F}_D , \mathbf{F}_{vm} , \mathbf{F}_L μπορούν να επιτελέσουν μέσω του μέσου όρου τους τις κατάλληλες δυνάμεις για το νησίδιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

7

**Συνθήκες για την
πραγματοποίηση του ομαλού
υδροδυναμικού εστιασμού
και
Οριακές Συνθήκες
στο σύστημα 2-φάσεων**

7.1 Συνθήκες για την πραγματοποίηση του ομαλού υδροδυναμικού εστιασμού

Οι συνθήκες οι οποίες πρέπει να ισοχύνονται ώστε να είναι επιτρεπτός και ομαλός ο υδροδυναμικός εστιασμός είναι :

- a) Ότι πρέπει από την αποκία να περνάει μόνο μια νησίδα παγκρεατικών κυττάρων κάθε φορά.
- b) Η ροή στους ομόκεντρους κυλίνδρους πρέπει να είναι στρωτή για να μην καθεί το κεντράρισμα από τυχόν δίνες σε αντίθετη περίπτωση.
- c) Η ταχύτητα στην jet ροή και η διάμετρος της jet ροής πρέπει να είναι τέτοια ώστε ο ογκομετρικός ρυθμός ροής να είναι 1νησίδα/s.
- d) Το μήκος εισόδου πρέπει να είναι πολύ μικρό γιατί πρέπει οι νησίδες γρήγορα να αναπτύξουν την επιθυμητή ροή μέσα στον αγωγό.
- e) Πρέπει να επιτευχθεί στοιχίση και οι νησίδες να είναι μεμονωμένες μέσα στον σωλήνα και να μην επηρεάζει η ροή της μιας την ροή της άλλης, αλλά και να την επηρεάζει να μην καταστρέφει τον εστιασμό. Έτσι θα πρέπει να μελετηθεί η αλληλεπίδραση των νησίδων (σφαιρικά σωματίδια).
- f) Η ροή ανάμεσα σε μια νησίδα (σφαιρικό σωματίδιο) και στο τοίχωμα του εσωτερικού κυλίνδρου πρέπει να είναι στρωτή και να μην αναπτύσσονται πολλές τριβές μεταξύ τους. Γιατί σε περίπτωση έστω και μιας δίνης θα χάσουμε και την στοιχίση και τον εστιασμό και θα υπάρξει αλλοίωση της ταχύτητας.
- g) Ο αριθμός Stokes , Stk , είναι πολύ σημαντικός γιατί δείχνει πως ανταποκρίνονται τα σωματίδια στις μεταβολές της ταχύτητας του ρευστού. Στην περίπτωση μας θέλουμε $Stk < 0,1$ για να έχουν τα σωματίδια αρκετό χρόνο να ανταποκριθούν στις αλλαγές στην ταχύτητα του ρευστού και η ταχύτητα των σωματιδίων προσεγγίζει την ταχύτητα.
- h) Διατηρώντας σταθερή την διάμετρο θα πρέπει να βρούμε σε ποιες ταχύτητες επιτυγχάνουμε στρωτή ροή δηλαδή $Re_p < 0,1$.
- i) Η ροή είναι Νευτωνική, στρωτή και ασυμπίεστη.
- j) Η ροή είναι 3-διαστάσεων.
- k) Θεωρούμε αμελητέα τη δύναμη της βαρύτητας.
- l) Στο όριο του στερεού εμφανίζονται συνθήκες μη-ολίσθησης.
- m) Υποθέτουμε ότι το θερμοκρασιακό πεδίο κατανέμεται ισοθερμικά.

7.2 Αρχικές και οριακές συνθήκες

Οι αρχικές συνθήκες για όλες τις υπολογίσιμες ποσότητες (ταχύτητα, θερμοκρασία και συγκέντρωση) μπορούν να ρυθμιστούν.

Οι οριακές συνθήκες για τη συγκέντρωση είναι :

$$\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \mathbf{n}} = 0$$

το οποίο σημαίνει ότι δεν υπάρχει ροή της συγκέντρωσης δια μέσου των ορίων. Η πηγή της συγκέντρωσης εξαιτίας της είσοδος των νησιδίων μπορεί να προστεθεί σαν ένα αυθαίρετο κομμάτι των υπολογισμών.

Οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι μηδέν στα όρια (αποκαλούμενες οριακές συνθήκες μη-ολίσθησης) .

[1]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

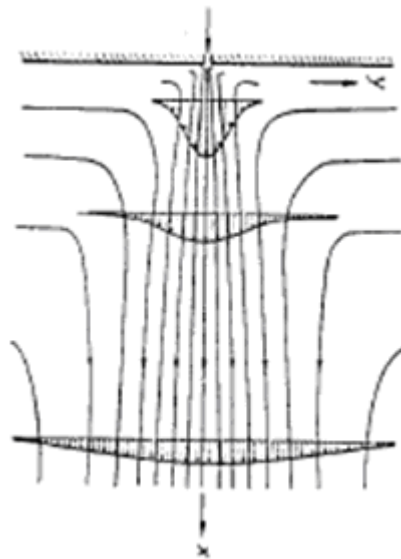
8

Jet Poή

8.1 Ροή jet

Η εκροή μιας jet ροής από ένα στόμιο παρέχει ένα περαιτέρω παράδειγμα κίνησης με απουσία ορίων του στερεού στο οποίο είναι πιθανόν να εφαρμόζει η θεωρία του οριακού στρώματος. Θα ήταν καλό να συζητηθεί ένα 2-διαστάσεων πρόβλημα ως εξής : η jet ροή δημιουργείται από μια μακρυνά, στενή σχισμή και αναμιγνύεται με το περιβάλλον ρευστό. Αυτό το πρόβλημα λύθηκε από τον H. Schlichting και τον W.Bickley. Στην πράξη, σε αυτήν την περίπτωση η ροή γίνεται τυρβώδης. Θα συζητηθεί εν τούτοις εδώ η περίπτωση της στρωτής με μερικές λεπτομέρειες, από τη στιγμή που η τυρβώδη jet ροή, η οποία εξετάστηκε πριν, μπορεί να αναλυθεί μαθηματικά με έναν ίδιο τρόπο.

Η jet ροή που εμφανίζεται, μεταφέρεται με αυτό το ρευστό, το οποίο είναι αρχικά σε ηρεμία, εξαιτίας της ανάπτυξης τριβών στην περιφέρεια του. Το προκύπτον σχέδιο των ροογραμίων φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα 8-1. Θεωρείται ένα σύστημα συντεταγμένων με αρχή στην σχισμή και άξονες του τις τετμημένες που συμπίπτουν με τους άξονες του jet.



Σχήμα 8-1 . Η στρωτή 2-διαστάσεων ελεύθερη jet ροή.

Η jet ροή απλώνεται προς τα έξω στη διεύθυνση κατεύθυνσης της ροής οφειλόμενο στην επιρροή της τριβής, εξαιτίας αυτού η ταχύτητα στο κέντρο μειώνεται προς την ίδια κατεύθυνση. Για χάρην απλότητας θα θεωρήσουμε δεδομένο ότι η σχισμή είναι απείρως μικρή, όμως για να διατηρηθεί ένας πεπερασμένος όγκος ροής όπως και μια πεπερασμένη ορμή, είναι απαραίτητο να θεωρήσουμε δεδομένο μια άπειρη ταχύτητα ρευστού στη σχισμή. Η βαθμίδα της πίεσης $\frac{dp}{dx}$ στη διεύθυνση $-x$ μπορεί εδώ, να παραβλεφθεί, γιατί η σταθερή πίεση στο περιβάλλον ρευστό εφαρμόζεται αυτό καθαυτό στη jet ροή. Συνεπώς, η συνολική ορμή στη

διεύθυνση $-x$, που εκφράζεται με το J , πρέπει να παραμείνει σταθερή και ανεξάρτητη της διεύθυνσης $-x$ από το στόμιο.

Ως εκ τούτου :

$$J = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dy = const. \quad (8.1)$$

Είναι πιθανό να γίνει μια κατάλληλη υπόθεση σχετικά με την κατανομή της ταχύτητας αν εξεταστεί το προφίλ της ταχύτητας $u(x,y)$, σχεδόν όπως στην περίπτωση μια επίπεδης πλάκας με μηδενικό ρυθμό ροής, είναι πιθανά όμοιο, γιατί το πρόβλημα ως σύνολο δεν διαθέτει χαρακτηριστική γραμμική διάσταση. Θα θεωρηθεί δεδομένο, ως εκτούτου, ότι η ταχύτητα u είναι μια συνάρτηση του $\frac{y}{b}$, όπου το b είναι το πλάτος της jet ροής κατάλληλα προσαρμοσμένο. Ακόμα θεωρείται δεδομένο ότι το b είναι ανάλογο του x^q . Σύμφωνα με το ότι μπορούμε να γράψουμε την συνάρτηση της ροής στη μορφή :

$$\psi \sim x^p f\left(\frac{y}{b}\right) = x^p f\left(\frac{y}{x^q}\right) \quad (8.2)$$

Οι δύο άγνωστοι εκθέτες p και q θα προσδιοριστούν από τις ακόλουθες συνθήκες :

1. Η συνεχής αλλαγή της ορμής στην διεύθυνση $-x$ είναι ανεξάρτητη του x , σύμφωνα με την εξίσωση (8.1).
2. Οι όροι της επιτάχυνσης και ο όρος της τριβής στην εξίσωση :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (8.3)$$

είναι ίδιου μεγέθους βαθμό.

Αυτό δίνει δύο εξισώσεις για το p και το q :

$$2p - q = 0 \quad \text{και} \quad 2p - 2q - 1 = p - 3q$$

και ως εκ τούτου

$$p = \frac{1}{3}, \quad q = \frac{2}{3}$$

Συνεπώς, οι υποθέσεις για τις ανεξάρτητες μεταβλητές και για τη συνάρτηση ροής μπορούν να γραφτεί ως :

$$\eta = \frac{1}{3\nu^{1/2}} \frac{y}{x^{2/3}}, \quad \psi = \frac{\nu^{1/2} x^{1/3}}{(\eta)}$$

εάν συμπεριλαμβάνονται οι κατάλληλοι σταθεροί συντελεστές.

Ως εκ τούτου, οι συνιστώσες της ταχύτητας δίνονται από τις ακόλουθες εκφράσεις :

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{3x^{1/3}} f'(\eta) \\ u &= -\frac{3}{x^{2/3}} (f - 2\eta f') \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

Εισάγονται αυτές οι τιμές μέσα στην διαφορική εξίσωση (9.3) και εξισώνουν τον όρο της πίεσης με το μηδέν, απόκτουμε την ακόλουθη διαφορική εξίσωση για τη συνάρτηση ροής $f(\eta)$:

$$f'^2 + ff'' + f''' = 0 \quad (8.5)$$

Με τις οριακές συνθήκες :

$$v = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{για} \quad y = 0$$

$$\text{και} \quad u = 0 \quad \text{για} \quad y = \infty$$

Έτσι

$$\eta = 0 : f = 0 \quad , \quad f'' = 0 \quad ; \quad \eta = \infty : f' = 0 \quad (8.6)$$

Η λύση της εξίσωσης (9.5) είναι μη αναμενόμενα απλή. Με ολοκλήρωση έχουμε :

$$ff' + f'' = 0$$

Η σταθερά ολοκλήρωσης είναι μηδέν εξαιτίας των συνθηκών στα όρια στο $\eta = 0$ και το αποτέλεσμα της διαφορικής εξίσωσης 2^{ης} τάξης μπορεί να ενσωματωθεί αμέσως εάν ο πρώτος όρος περιέχεται στον 2^ο παράγοντα. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί από τον παρακάτω μετασχηματισμό :

$$\xi = \alpha \cdot \eta$$

$$f = 2\alpha F(\xi)$$

όπου α = μια ελεύθερη σταθερά που θα προσδιοριστεί αργότερα. Έτσι η παραπάνω εξίσωση μετατρέπεται σε :

$$F'' + 2FF' = 0 \quad (8.7)$$

και η ορμή τώρα εκφράζει την διάκριση στην εκτίμηση ως προς το ξ . Οι οριακές συνθήκες είναι :

$$\xi = 0 : F = 0 \quad ; \quad \xi = \infty : F' = 0 \quad (8.8)$$

και η εξίσωση μπορεί να ολοκληρωθεί μόνο εαν επιπλέον δίνεται :

$$F' + F^2 = 1 \quad (8.9)$$

όπου η σταθερά της ολοκλήρωσης γίνεται ίση με 1. Αυτό ακολουθείται εάν θέσουμε $F'(0) = 1$, το οποίο είναι γενικά επιτρεπτό δίχως απώλειες εξαιτίας της ελεύθερης σταθεράς a στην σχέση ανάμεσα στο f και στο F . Η εξίσωση (8.9) είναι μια διαφορική εξίσωση τύπου Riccati και μπορεί να ολοκληρωθεί με πεπερασμένα όρια. Παίρνουμε :

$$\xi = \int_0^F \frac{dF}{1-F^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+F}{1-F} = \tanh^{-1} F$$

Αντιστρέφοντας αυτήν την εξίσωση παίρνουμε :

$$F = \tanh \xi = \frac{1 - \exp(-2\xi)}{1 + \exp(-2\xi)} \quad (8.10)$$

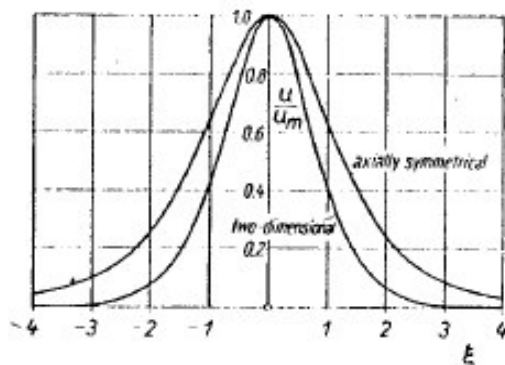
Επειδή, επιπλέον,

$$\frac{dF}{d\xi} = 1 - \tanh^2 \xi$$

η κατανομή ταχύτητας μπορεί να εξαχθεί αφαιρετικά από την εξίσωση (8.4) και είναι :

$$u = \frac{2}{3} \frac{\alpha^2}{x^{1/3}} (1 - \tanh^2 \xi) \quad (8.11)$$

Την κατανομή ταχύτητας από την εξίσωση (8.4) την βλέπουμε σχεδιοποιημένη στο παρακάτω Σχήμα 8-2



Σχήμα 8-2. Κατανομή ταχύτητας σε μια 2-διαστάσεων και κυκλική ελεύθερη jet ροή από την εξίσωση (11) και την εξίσωση

$$u = \frac{3}{8\pi} \frac{K'}{\nu x} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4}\xi^2\right)^2}, \text{ αντιστοίχως.}$$

Για 2-διαστάσεων jet ροή

$$\xi = 0,275 \cdot K^{1/3} \frac{y}{(\nu x)^{2/3}}$$

και για την κυκλική ροή

$$\xi = 0,244 \cdot K^{1/2} \frac{y}{\nu x}$$

Τα K και K' εκφράζουν την κινηματική ορμή $\frac{J}{\rho}$.

Τώρα απομένει να καθοριστεί η σταθερά α , και αυτό μπορεί να γίνει με τη βοήθεια της συνθήκης (8.1) η οποία εκφράζει το ότι η ορμή στην x -διεύθυνση είναι σταθερή. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (8.11) και (8.1) προκύπτει :


$$J = \frac{4}{3} \rho \alpha^3 \nu^{1/2} \int_0^{\infty} (1 - \tanh^2 \xi)^2 d\xi = \frac{16}{9} \rho \alpha^3 \nu^{1/2} \quad (8.12)$$

Θα υποθέσουμε ότι η κατανομή της ορμής, J , για την jet ροή δίνεται. Αυτή είναι ανάλογη με την υπέρβαση της πίεσης με την οποία η jet ροή αφήνει την σχισμή. Εισαγωγικά η κινηματική ορμή $\frac{J}{\rho} = K$, έχουμε από

την εξίσωση (8.12) :

$$\alpha = 0,8255 \left(\frac{K}{\nu^{1/2}} \right)^{1/3}$$

και γι'αυτό το λόγο για την κατανομή της ταχύτητας

$$\begin{aligned}
 u &= 0,4543 \left(\frac{K^2}{\nu x} \right)^{1/3} (1 - \tanh^2 \xi) \\
 v &= 0,5503 \left(\frac{K\nu}{x^2} \right)^{1/3} [2\xi(1 - \tanh^2 \xi) - \tanh \xi] \\
 \xi &= 0,2752 \left(\frac{K}{\nu^2} \right)^{1/3} \frac{y}{x^{2/3}}
 \end{aligned}
 \tag{8.13}$$


Η εγκάρσια ταχύτητα στο όριο της jet ροής είναι :

$$v_\infty = -0,550 \left(\frac{K\nu}{x^2} \right)^{1/3} \tag{8.14}$$

και ο ογκομετρικός ρυθμός εκκένωσης ανά μονάδα ύψος της οριζοντίως γίνεται

$$\begin{aligned}
 Q &= \rho \int_{-\infty}^{+\infty} u dy \\
 &\dot{\eta} \\
 Q &= 3,3019 (K\nu x)^{1/3}
 \end{aligned}
 \tag{8.15}$$

και

$$v = \left(\frac{Q}{3,3019} \right)^3 \frac{1}{kx} \tag{8.16}$$

[V]

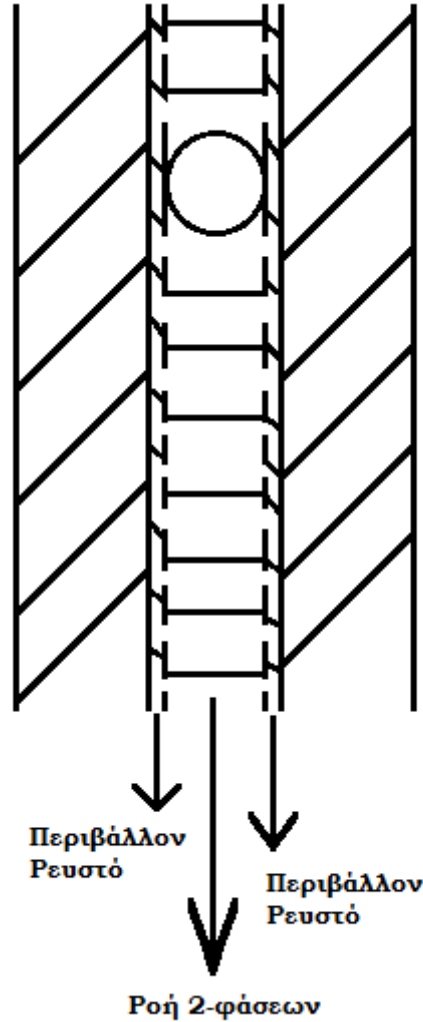
ΚΕΦΑΛΑΙΟ

9

Υπολογισμοί

9.1 Υπολογισμός της απόστασης μεταξύ δύο διαδοχικών νησίδων

Αν το σκεφτούμε θα μπορούσαμε να πούμε πως στο μεσαίο αγωγό έχουμε 3 κανάλια όπως παρακάτω.



Αν η ροή μας κατανέμεται στους αγωγούς όπως το παραπάνω σχήμα τότε η ροή δύο φάσεων εξελίσσεται όπως φαίνεται στο ίδιο σχήμα.

Αν θέλουμε όλο το μεσαίο κανάλι να διαρέεται από τη ροή 2-φάσεων πρέπει $b=R$ σύμφωνα με το μαθηματικό μοντέλο του Blyth.

$$b = \alpha a$$

άρα

$$\alpha = \frac{b}{a}$$

Έχουμε

$$\alpha > 1$$

άρα

$$\frac{b}{a} > 1$$

Άρα είναι επιτρεπτός ο υδροδυναμικός εστιασμός.

$$b^2 = \frac{4\alpha^3 a^3}{3L^*}$$

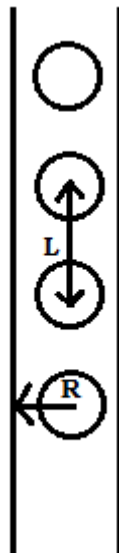
$$L^* = \frac{4\alpha^3 a^3}{3b^2} = 4\left(\frac{a}{b}\right)^2 a\alpha^3 = \frac{4}{3}a\alpha = \frac{4}{3}R$$

Θεωρώντας $L=L^*$ βρούμε την απόσταση των νησίδων ώστε να έχουμε δικλείδες ασφαλείας στους υπολογισμούς και να μη χάσουμε ούτε το κεντράρισμα ούτε να έχουμε ανισορροπία στον υδροδυναμικό εστιασμό.

Άρα η απόσταση μεταξύ των νησίδων πρέπει να είναι :

$$L = \frac{4}{3}R$$

[4]



Για $L = 2a$:



όπου κάτι τέτοιο θα έκανε τον υδροδυναμικό εστιασμό αδύνατο όπως επίσης κάτι τέτοιο δε θα συμφωνούσε με τη λογική ότι θέλουμε τα νησίδια να κινούνται ξεχωριστά το ένα από το άλλο.

Για $L = a$:



όπου κάτι τέτοιο θα έκανε τον υδροδυναμικό εστιασμό αδύνατο όπως επίσης κάτι τέτοιο δε θα συμφωνούσε με τη λογική ότι θέλουμε τα νησίδια να κινούνται ξεχωριστά το ένα από το άλλο. Επίσης είναι αδύνατον να συναντήσουμε σε τέτοια κατάσταση τις νησίδες παγκρεατικών κυττάρων μεταξύ τους και δεν επιθυμούμε και να συμβεί και τυχαία κάτι τέτοιο.

Άρα πρέπει $L > 2a$

Στο πρόβλημά μας θα μελετήσουμε το L για διάφορες τιμές του a – όπου θα το πετύχουμε αλλάζοντας τις τιμές a και R και θεωρώντας κάθε φορά την τιμή του b .

Το b είναι η ακτίνα της ροής 2-φάσεων. Έτσι θα είναι μεγαλύτερο από την ακτίνα του νησιδίου παγκρεατικών κυττάρων και μικρότερο από την ακτίνα του εσωτερικού κυλίνδρου.

Για διάμετρο των νησιδίων ίση με $300\mu\text{m}$ και του εσωτερικού κυλίνδρου σε ένα εύρος τιμών και κάνοντας την θεώρηση $b=R$ παίρνουμε τον ακόλουθο πίνακα .

a (μm)	R (μm)	L	a	b	2a	b/R	b/a
150	150	200	1	150	300	1	1
150	175	233,3333	1,166667	175	300	1	1,166667
150	200	266,6667	1,333333	200	300	1	1,333333
150	225	300	1,5	225	300	1	1,5
150	250	333,3333	1,666667	250	300	1	1,666667
150	275	366,6667	1,833333	275	300	1	1,833333
150	300	400	2	300	300	1	2
150	325	433,3333	2,166667	325	300	1	2,166667

Παρατηρούμε ότι για τις τιμές που έχουμε δεχτεί ότι ισχύουν, $L > 2a$ έχουμε για $R \geq 250 \mu\text{m}$.

Για διάμετρο των νησιδίων ίση με $300 \mu\text{m}$ και του εσωτερικού κυλίνδρου και κάνοντας την θεώρηση $b = \frac{R}{2}$ παίρνουμε τον ακόλουθο πίνακα.

a (μm)	R (μm)	L	α	b	2a	b/R	b/a
150	150	800	1	75	300	0,5	0,5
150	175	933,3333	1,166667	87,5	300	0,5	0,583333
150	200	1066,667	1,333333	100	300	0,5	0,666667
150	225	1200	1,5	112,5	300	0,5	0,75
150	250	1333,333	1,666667	125	300	0,5	0,833333
150	275	1466,667	1,833333	137,5	300	0,5	0,916667
150	300	1600	2	150	300	0,5	1
150	325	1733,333	2,166667	162,5	300	0,5	1,083333

Παρατηρούμε ότι για τις τιμές που έχουμε δεχτεί ότι ισχύουν, $L > 2a$ έχουμε για όλα τα μελετώμενα R αλλά $b > a$ μόνο για $R \geq 300 \mu\text{m}$.

Για διάμετρο των νησιδίων ίση με $300 \mu\text{m}$ και του εσωτερικού κυλίνδρου και κάνοντας την θεώρηση $b = \frac{3}{4}R$ παίρνουμε τον ακόλουθο πίνακα.

a (μm)	R (μm)	L	α	b	2a	b/R	b/a
150	150	355,5556	1	112,5	300	0,75	0,75
150	175	414,8148	1,166667	131,25	300	0,75	0,875
150	200	474,0741		150	300	0,75	1
150	225	533,3333	1,5	168,75	300	0,75	1,125
150	250	592,5926	1,666667	187,5	300	0,75	1,25
150	275	651,8519	1,833333	206,25	300	0,75	1,375
150	300	711,1111	2	225	300	0,75	1,5
150	325	770,3704	2,166667	243,75	300	0,75	1,625

Παρατηρούμε ότι για τις τιμές που έχουμε δεχτεί ότι ισχύουν $L > 2a$ έχουμε για όλες τις τιμές R που θα επιλέγαμε αλλά $b > a$ έχουμε για $R \geq 200$.

Για διάμετρο των νησιδίων ίση με $150 \mu\text{m}$ και του εσωτερικού κυλίνδρου και κάνοντας την θεώρηση $b = \frac{1}{4}R$ παίρνουμε τον ακόλουθο πίνακα.

a (μm)	R (μm)	L	α	b	2a	b/R	b/a
150	150	3200	1	37,5	300	0,25	0,25

150	175	3733,333	1,166667	43,75	300	0,25	0,291667
150	200	4266,667		50	300	0,25	0,333333
150	225	4800	1,5	56,25	300	0,25	0,375
150	250	5333,333	1,666667	62,5	300	0,25	0,416667
150	275	5866,667	1,833333	68,75	300	0,25	0,458333
150	300	6400	2	75	300	0,25	0,5
150	325	6933,333	2,166667	81,25	300	0,25	0,541667

Παρατηρούμε ότι για τις τιμές που έχουμε δεχτεί ότι ισχύουν, $L > 2a$ έχουμε για όλες τις τιμές R που θα επιλέγαμε αλλά $\beta > a$ δεν ισχύει για καμία τιμή που πήραμε. Όπως παρατηρούμε θα έπρεπε να πάρουμε μεγαλύτερη ακτίνα εσωτερικού κυλίνδρου απ' ότι πήραμε στην παραπάνω μελέτη.

Για διάμετρο των νησιδίων ίση με $150\mu\text{m}$ και του εσωτερικού κυλίνδρου και κάνοντας την θεώρηση $b = \frac{9}{10}R$ παίρνουμε τον ακόλουθο πίνακα .

a (μm)	R (μm)	L	α	b	2a	b/R	b/a
150	150	246,9136	1	135	300	0,9	0,9
150	175	288,0658	1,166667	157,5	300	0,9	1,05
150	200	329,2181		180	300	0,9	1,2
150	225	370,3704	1,5	202,5	300	0,9	1,35
150	250	411,5226	1,666667	225	300	0,9	1,5
150	275	452,6749	1,833333	247,5	300	0,9	1,65
150	300	493,8272	2	270	300	0,9	1,8
150	325	534,9794	2,166667	292,5	300	0,9	1,95

Παρατηρούμε ότι για τις τιμές που έχουμε δεχτεί ότι ισχύουν, $L > 2a$ έχουμε για $R \geq 175\mu\text{m}$.

Για $L > 2a$ και $b = \sqrt{\frac{4a^3\alpha^3}{3L}}$ με $a = 150\mu\text{m}$ και $R = 175\mu\text{m}$ έχουμε :

a (μm)	R (μm)	L	α	b	2a	b/R	b/a
150	175	160	1,166667	211,3326	300	1,207615	1,408884
150	175	170	1,166667	205,0227	300	1,171558	1,366818
150	175	180	1,166667	199,2463	300	1,13855	1,328308
150	175	190	1,166667	193,9321	300	1,108183	1,29288
150	175	200	1,166667	189,0216	300	1,080123	1,260144
150	175	210	1,166667	184,4662	300	1,054093	1,229775
150	175	220	1,166667	180,225	300	1,029857	1,2015
150	175	230	1,166667	176,2636	300	1,00722	1,17509
150	175	240	1,166667	172,5523	300	0,986013	1,150349
150	175	250	1,166667	169,0661	300	0,966092	1,127107
150	175	260	1,166667	165,7829	300	0,947331	1,105219
150	175	270	1,166667	162,6839	300	0,929622	1,084559

150	175	280	1,166667	159,7524	300	0,912871	1,065016
150	175	290	1,166667	156,9739	300	0,896994	1,046493
150	175	300	1,166667	154,3355	300	0,881917	1,028903

Για $L > 2a$ και $b = \sqrt{\frac{4a^3\alpha^3}{3L}}$ με $a = 150\mu\text{m}$ και $R = 200\mu\text{m}$ έχουμε :

a (μm)	R (μm)	L	α	b	2a	b/R	b/a
150	200	160	1,333333	258,1989	300	1,290994	1,721326
150	200	170	1,333333	250,4897	300	1,252449	1,669931
150	200	180	1,333333	243,4322	300	1,217161	1,622882
150	200	190	1,333333	236,9396	300	1,184698	1,579597
150	200	200	1,333333	230,9401	300	1,154701	1,539601
150	200	210	1,333333	225,3745	300	1,126872	1,502496
150	200	220	1,333333	220,1928	300	1,100964	1,467952
150	200	230	1,333333	215,3528	300	1,076764	1,435685
150	200	240	1,333333	210,8185	300	1,054093	1,405457
150	200	250	1,333333	206,5591	300	1,032796	1,377061
150	200	260	1,333333	202,5479	300	1,012739	1,350319
150	200	270	1,333333	198,7616	300	0,993808	1,325077
150	200	280	1,333333	195,18	300	0,9759	1,3012
150	200	290	1,333333	191,7853	300	0,958927	1,278569
150	200	300	1,333333	188,5618	300	0,942809	1,257079

Για $L > 2a$ και $b = \sqrt{\frac{4a^3\alpha^3}{3L}}$ με $a = 150\mu\text{m}$ και $R = 225\mu\text{m}$ έχουμε :

a (μm)	R (μm)	L	α	b	2a	b/R	b/a
150	225	160	1,5	308,0939	300	1,369306	2,05396
150	225	170	1,5	298,895	300	1,328422	1,992633
150	225	180	1,5	290,4738	300	1,290994	1,936492
150	225	190	1,5	282,7264	300	1,256562	1,884843
150	225	200	1,5	275,5676	300	1,224745	1,837117
150	225	210	1,5	268,9264	300	1,195229	1,792843
150	225	220	1,5	262,7434	300	1,167748	1,751623
150	225	230	1,5	256,9681	300	1,14208	1,713121
150	225	240	1,5	251,5576	300	1,118034	1,677051
150	225	250	1,5	246,4752	300	1,095445	1,643168
150	225	260	1,5	241,6888	300	1,074172	1,611258
150	225	270	1,5	237,1708	300	1,054093	1,581139
150	225	280	1,5	232,8971	300	1,035098	1,552648
150	225	290	1,5	228,8464	300	1,017095	1,525643
150	225	300	1,5	225	300	1	1,5

Για $L > 2a$ και $b = \sqrt{\frac{4a^3\alpha^3}{3L}}$ με $a = 150\mu\text{m}$ και $R = 250\mu\text{m}$ έχουμε :

a (μm)	R (μm)	L	A	b	2a	b/R	b/a
150	250	160	1,666667	360,8439	300	1,443376	2,405626
150	250	170	1,666667	350,07	300	1,40028	2,3338
150	250	180	1,666667	340,2069	300	1,360828	2,268046
150	250	190	1,666667	331,1331	300	1,324532	2,207554
150	250	200	1,666667	322,7486	300	1,290994	2,151657
150	250	210	1,666667	314,9704	300	1,259882	2,099803
150	250	220	1,666667	307,7287	300	1,230915	2,051525
150	250	230	1,666667	300,9646	300	1,203859	2,006431
150	250	240	1,666667	294,6278	300	1,178511	1,964186
150	250	250	1,666667	288,6751	300	1,154701	1,924501
150	250	260	1,666667	283,0693	300	1,132277	1,887128
150	250	270	1,666667	277,7778	300	1,111111	1,851852
150	250	280	1,666667	272,7724	300	1,091089	1,818482
150	250	290	1,666667	268,0281	300	1,072113	1,786854
150	250	300	1,666667	263,5231	300	1,054093	1,756821

Για $L > 2a$ και $b = \sqrt{\frac{4a^3\alpha^3}{3L}}$ με $a = 150\mu\text{m}$ και $R = 275\mu\text{m}$ έχουμε :

a (μm)	R (μm)	L	α	b	2a	b/R	b/a
150	275	160	1,833333	416,3019	300	1,513825	2,775346
150	275	170	1,833333	403,8722	300	1,468626	2,692481
150	275	180	1,833333	392,4932	300	1,427248	2,616621
150	275	190	1,833333	382,0248	300	1,389181	2,546832
150	275	200	1,833333	372,3518	300	1,354006	2,482345
150	275	210	1,833333	363,3781	300	1,321375	2,422521
150	275	220	1,833333	355,0235	300	1,290994	2,366823
150	275	230	1,833333	347,2198	300	1,262617	2,314799
150	275	240	1,833333	339,9091	300	1,236033	2,266061
150	275	250	1,833333	333,0415	300	1,21106	2,220277
150	275	260	1,833333	326,5741	300	1,187542	2,177161
150	275	270	1,833333	320,4694	300	1,165343	2,136462
150	275	280	1,833333	314,6947	300	1,144344	2,097964
150	275	290	1,833333	309,2213	300	1,124441	2,061475
150	275	300	1,833333	304,0239	300	1,105542	2,026826

Για $L > 2a$ και $b = \sqrt{\frac{4a^3\alpha^3}{3L}}$ με $a = 150\mu\text{m}$ και $R = 300\mu\text{m}$ έχουμε :

a (μm)	R (μm)	L	α	b	2a	b/R	b/a
150	300	160	2	474,3416	300	1,581139	3,162278
150	300	170	2	460,179	300	1,53393	3,06786
150	300	180	2	447,2136	300	1,490712	2,981424
150	300	190	2	435,2858	300	1,450953	2,901905
150	300	200	2	424,2641	300	1,414214	2,828427
150	300	210	2	414,0393	300	1,380131	2,760262
150	300	220	2	404,5199	300	1,3484	2,696799
150	300	230	2	395,6283	300	1,318761	2,637522
150	300	240	2	387,2983	300	1,290994	2,581989
150	300	250	2	379,4733	300	1,264911	2,529822
150	300	260	2	372,1042	300	1,240347	2,480695
150	300	270	2	365,1484	300	1,217161	2,434322
150	300	280	2	358,5686	300	1,195229	2,390457
150	300	290	2	352,3321	300	1,17444	2,348881
150	300	300	2	346,4102	300	1,154701	2,309401

Για $L > 2a$ και $b = \sqrt{\frac{4a^3\alpha^3}{3L}}$ με $a = 150\mu\text{m}$ και $R = 325\mu\text{m}$ έχουμε :

a (μm)	R (μm)	L	α	b	2a	b/R	b/a
150	325	160	2,166667	534,853	300	1,645701	3,565687
150	325	170	2,166667	518,8836	300	1,596565	3,459224
150	325	180	2,166667	504,2642	300	1,551582	3,361761
150	325	190	2,166667	490,8148	300	1,510199	3,272098
150	325	200	2,166667	478,387	300	1,47196	3,189247
150	325	210	2,166667	466,858	300	1,436486	3,112386
150	325	220	2,166667	456,1242	300	1,403459	3,040828
150	325	230	2,166667	446,0982	300	1,37261	2,973988
150	325	240	2,166667	436,7056	300	1,34371	2,911371
150	325	250	2,166667	427,8824	300	1,316561	2,852549
150	325	260	2,166667	419,5732	300	1,290994	2,797155
150	325	270	2,166667	411,73	300	1,266862	2,744867
150	325	280	2,166667	404,3108	300	1,244033	2,695406
150	325	290	2,166667	397,2788	300	1,222396	2,648525
150	325	300	2,166667	390,6014	300	1,20185	2,604009

Αν θεωρήσουμε $a=150\mu\text{m}$ και $R=250\mu\text{m}$ και b κοντά στο R μέσω του Blyth θα υπολογίσουμε την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών νησιδίων.

a (μm)	R (μm)	L	a	b	2a	b/R	b/a
150	250	310	1,666667	259,2379	300	1,036952	1,728253
150	250	320	1,666667	255,1552	300	1,020621	1,701035
150	250	330	1,666667	251,2595	300	1,005038	1,675063
150	250	340	1,666667	247,5369	300	0,990148	1,650246
150	250	350	1,666667	243,975	300	0,9759	1,6265

Και από παραπάνω μελέτη για $b=R$:

a (μm)	R (μm)	L	a	b	2a	b/R	b/a
150	250	333,3333	1,666667	250	300	1	1,666667

Μέσω των εξισώσεων του Blyth υπολογίσαμε ότι η απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών νησιδίων θα είναι $333,33\mu\text{m}$.

9.2 Μήκος εσωτερικού κυλίνδρου

Για να υπολογίσουμε το μήκος ή για να θεωρήσουμε την τιμή του πρέπει να λάβουμε υπόψιν το μήκος εισόδου.

Θα μελετήσουμε το μήκος εισόδου για διάφορες τιμές του αριθμού Reynold.

le μm	d μm	Re
2,875	500	0,1
2,5875	500	0,09
2,3	500	0,08
2,0125	500	0,07
1,725	500	0,06
1,4375	500	0,05
1,15	500	0,04
0,8625	500	0,03
0,575	500	0,02
0,2875	500	0,01
0,25875	500	0,009
0,23	500	0,008
0,20125	500	0,007
0,1725	500	0,006
0,14375	500	0,005
0,115	500	0,004
0,08625	500	0,003
0,0575	500	0,002
0,02875	500	0,001

Παρατηρούμε ότι το μήκος εισόδου είναι πολύ μικρό και δε το λαμβάνουμε υπόψιν μας. Άρα θεωρούμε ότι έχουμε κατευθείαν ανεπτυγμένη ροή.

Όπως είδαμε παραπάνω η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων είναι 333,33 μm . Ακτίνα του εσωτερικού σωλήνα έχουμε θέσει 250 μm και ακτίνα νησιδίων παγκρεατικών κυττάρων έχουμε θεωρήσει 150 μm . Πέρνουμε κάποιες τιμές για το μήκος του εσωτερικού αγωγού και μελετάται πως μεταβάλλεται ο όγκος του εσωτερικού σωλήνα καθώς και το κλάσμα όγκου των νησιδίων, καθώς και το κλάσμα όγκου του ρευστού PEG.

L μεταξύ νησιδίων v mm	r εσωτ mm	L εσωτ. κυλ. mm	Vεσωτ mm ³	Vεσωτ cm ³	Αριθμός νησιδίων στο σωλήνα	r νησιδίου v mm	V νησιδίου v mm ³	V PEG mm ³	ϵ νησιδίων	ϵ PEG
0,333	0,25 0	1,000	0,196	0,0002 0	3,003	0,150	0,042	0,154	0,216	0,784
0,333	0,25 0	1,100	0,216	0,0002 2	3,303	0,150	0,047	0,169	0,216	0,784
0,333	0,25 0	1,200	0,236	0,0002 4	3,604	0,150	0,051	0,185	0,216	0,784
0,333	0,25 0	1,300	0,255	0,0002 6	3,904	0,150	0,055	0,200	0,216	0,784
0,333	0,25 0	1,400	0,275	0,0002 7	4,204	0,150	0,059	0,215	0,216	0,784
0,333	0,25 0	1,500	0,295	0,0002 9	4,505	0,150	0,064	0,231	0,216	0,784
0,333	0,25 0	1,600	0,314	0,0003 1	4,805	0,150	0,068	0,246	0,216	0,784
0,333	0,25 0	1,700	0,334	0,0003 3	5,105	0,150	0,072	0,262	0,216	0,784
0,333	0,25 0	1,800	0,353	0,0003 5	5,405	0,150	0,076	0,277	0,216	0,784
0,333	0,25 0	1,900	0,373	0,0003 7	5,706	0,150	0,081	0,292	0,216	0,784
0,333	0,25 0	2,000	0,393	0,0003 9	6,006	0,150	0,085	0,308	0,216	0,784
0,333	0,25 0	2,100	0,412	0,0004 1	6,306	0,150	0,089	0,323	0,216	0,784
0,333	0,25 0	2,200	0,432	0,0004 3	6,607	0,150	0,093	0,339	0,216	0,784
0,333	0,25 0	2,300	0,452	0,0004 5	6,907	0,150	0,098	0,354	0,216	0,784
0,333	0,25 0	2,400	0,471	0,0004 7	7,207	0,150	0,102	0,369	0,216	0,784
0,333	0,25 0	2,500	0,491	0,0004 9	7,508	0,150	0,106	0,385	0,216	0,784
0,333	0,25 0	2,600	0,511	0,0005 1	7,808	0,150	0,110	0,400	0,216	0,784
0,333	0,25 0	2,700	0,530	0,0005 3	8,108	0,150	0,115	0,416	0,216	0,784
0,333	0,25 0	2,800	0,550	0,0005 5	8,408	0,150	0,119	0,431	0,216	0,784
0,333	0,25 0	2,900	0,569	0,0005 7	8,709	0,150	0,123	0,446	0,216	0,784

0,333	0,25 0	3,000	0,589	0,0005 9	9,009	0,150	0,127	0,462	0,216	0,784
0,333	0,25 0	10,00 0	1,963	0,0019 6	30,030	0,150	0,425	1,539	0,216	0,784
0,333	0,25 0	11,00 0	2,160	0,0021 6	33,033	0,150	0,467	1,693	0,216	0,784
0,333	0,25 0	12,00 0	2,356	0,0023 6	36,036	0,150	0,509	1,847	0,216	0,784
0,333	0,25 0	13,00 0	2,553	0,0025 5	39,039	0,150	0,552	2,001	0,216	0,784
0,333	0,25 0	14,00 0	2,749	0,0027 5	42,042	0,150	0,594	2,155	0,216	0,784
0,333	0,25 0	15,00 0	2,945	0,0029 5	45,045	0,150	0,637	2,308	0,216	0,784
0,333	0,25 0	16,00 0	3,142	0,0031 4	48,048	0,150	0,679	2,462	0,216	0,784
0,333	0,25 0	17,00 0	3,338	0,0033 4	51,051	0,150	0,722	2,616	0,216	0,784
0,333	0,25 0	18,00 0	3,534	0,0035 3	54,054	0,150	0,764	2,770	0,216	0,784
0,333	0,25 0	19,00 0	3,731	0,0037 3	57,057	0,150	0,807	2,924	0,216	0,784
0,333	0,25 0	20,00 0	3,927	0,0039 3	60,060	0,150	0,849	3,078	0,216	0,784
0,333	0,25 0	21,00 0	4,123	0,0041 2	63,063	0,150	0,892	3,232	0,216	0,784
0,333	0,25 0	22,00 0	4,320	0,0043 2	66,066	0,150	0,934	3,386	0,216	0,784
0,333	0,25 0	23,00 0	4,516	0,0045 2	69,069	0,150	0,976	3,540	0,216	0,784
0,333	0,25 0	24,00 0	4,712	0,0047 1	72,072	0,150	1,019	3,693	0,216	0,784
0,333	0,25 0	25,00 0	4,909	0,0049 1	75,075	0,150	1,061	3,847	0,216	0,784
0,333	0,25 0	26,00 0	5,105	0,0051 1	78,078	0,150	1,104	4,001	0,216	0,784
0,333	0,25 0	27,00 0	5,301	0,0053 0	81,081	0,150	1,146	4,155	0,216	0,784
0,333	0,25 0	28,00 0	5,498	0,0055 0	84,084	0,150	1,189	4,309	0,216	0,784
0,333	0,25 0	29,00 0	5,694	0,0056 9	87,087	0,150	1,231	4,463	0,216	0,784
0,333	0,25 0	30,00 0	5,890	0,0058 9	90,090	0,150	1,274	4,617	0,216	0,784
0,333	0,25 0	100,0 00	19,635	0,0196 3	300,300	0,150	4,245	15,39 0	0,216	0,784
0,333	0,25 0	150,0 00	29,452	0,0294 5	450,450	0,150	6,368	23,08 4	0,216	0,784
0,333	0,25 0	200,0 00	39,270	0,0392 7	600,601	0,150	8,491	30,77 9	0,216	0,784
0,333	0,25 0	250,0 00	49,087	0,0490 9	750,751	0,150	10,613	38,47 4	0,216	0,784
0,333	0,25 0	300,0 00	58,905	0,0589 0	900,901	0,150	12,736	46,16 9	0,216	0,784
0,333	0,25 0	350,0 00	68,722	0,0687 2	1051,051	0,150	14,859	53,86 3	0,216	0,784
0,333	0,25 0	400,0 00	78,540	0,0785 4	1201,201	0,150	16,982	61,55 8	0,216	0,784

Από την παραπάνω μελέτη που κάνουμε εξάγεται ότι το κλάσμα όγκου του νησιδίου είναι $\varepsilon_p = 0,216$ και το κλάσμα όγκου του ρευστού PEG είναι $\varepsilon_f = 0,784$.

Μελετώντας τα παραπάνω αποτελέσματα, θα λάβουμε ως μήκος του εσωτερικού σωλήνα τα 300 mm δηλαδή 30 cm. Σε ένα τέτοιο κύλινδρο με μήκος 30 cm και διάμετρο 500 μm χωράνε περίπου 900 νησίδα (για την ακρίβεια 900,901 νησίδα) .

9.3 Υπολογισμός πυκνότητας ροής 2-φάσεων

Με βάση αυτά τα δεδομένα η αθροιστική πυκνότητα υπολογίζεται με βάση τον τύπο

$$\rho = \varepsilon_p \rho_p + \varepsilon_f \rho_f$$

ως εξής

$$\text{Αθροιστική πυκνότητα} = \rho = 1,0409 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

ή

$$\rho = 0,001041 \frac{\text{g}}{\text{mm}^3} .$$

Με το ίδιο σκεπτικό με παραπάνω πέρνουμε κάποιες τιμές για το μήκος του εσωτερικού αγωγού και μελετάται πως μεταβάλλεται η μάζα της ροής του εσωτερικού σωλήνα καθώς και το κλάσμα μάζας των νησιδίων, καθώς και το κλάσμα μάζας του ρευστού PEG.

$$\text{Η πυκνότητα του νησιδίου είναι :} \quad \rho = 1,102 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} =$$

$$0,001102 \frac{\text{g}}{\text{mm}^3}$$

$$\text{Η πυκνότητα του ρευστού PEG είναι :} \quad \rho = 1,024 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} =$$

$$0,001024 \frac{\text{g}}{\text{mm}^3}$$

$$\text{Η αθροιστική πυκνότητα είναι :} \quad \rho = 1,0409 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 0,001041 \frac{\text{g}}{\text{mm}^3}$$

L εσωτ.κυλ. mm	ε νησιδίων	ε PEG	m νησιδίων g	m PEG g	m αθροιστικό g	φ νησιδίων	φ PEG
1,000	0,216	0,784	4,68E-05	0,000158	0,0002044	0,228916	0,771084
1,100	0,216	0,784	5,15E-05	0,000173	0,0002248	0,228916	0,771084
1,200	0,216	0,784	5,61E-05	0,000189	0,0002452	0,228916	0,771084
1,300	0,216	0,784	6,08E-05	0,000205	0,0002657	0,228916	0,771084
1,400	0,216	0,784	6,55E-05	0,000221	0,0002861	0,228916	0,771084
1,500	0,216	0,784	7,02E-05	0,000236	0,0003066	0,228916	0,771084
1,600	0,216	0,784	7,49E-05	0,000252	0,000327	0,228916	0,771084
1,700	0,216	0,784	7,95E-05	0,000268	0,0003474	0,228916	0,771084
1,800	0,216	0,784	8,42E-05	0,000284	0,0003679	0,228916	0,771084
1,900	0,216	0,784	8,89E-05	0,000299	0,0003883	0,228916	0,771084
2,000	0,216	0,784	9,36E-05	0,000315	0,0004087	0,228916	0,771084
2,100	0,216	0,784	9,82E-05	0,000331	0,0004292	0,228916	0,771084
2,200	0,216	0,784	0,000103	0,000347	0,0004496	0,228916	0,771084
2,300	0,216	0,784	0,000108	0,000362	0,0004701	0,228916	0,771084
2,400	0,216	0,784	0,000112	0,000378	0,0004905	0,228916	0,771084
2,500	0,216	0,784	0,000117	0,000394	0,0005109	0,228916	0,771084
2,600	0,216	0,784	0,000122	0,00041	0,0005314	0,228916	0,771084
2,700	0,216	0,784	0,000126	0,000425	0,0005518	0,228916	0,771084
2,800	0,216	0,784	0,000131	0,000441	0,0005722	0,228916	0,771084
2,900	0,216	0,784	0,000136	0,000457	0,0005927	0,228916	0,771084
3,000	0,216	0,784	0,00014	0,000473	0,0006131	0,228916	0,771084
10,000	0,216	0,784	0,000468	0,001576	0,0020437	0,228916	0,771084
11,000	0,216	0,784	0,000515	0,001733	0,0022481	0,228916	0,771084
12,000	0,216	0,784	0,000561	0,001891	0,0024525	0,228916	0,771084
13,000	0,216	0,784	0,000608	0,002049	0,0026569	0,228916	0,771084
14,000	0,216	0,784	0,000655	0,002206	0,0028612	0,228916	0,771084
15,000	0,216	0,784	0,000702	0,002364	0,0030656	0,228916	0,771084
16,000	0,216	0,784	0,000749	0,002521	0,00327	0,228916	0,771084
17,000	0,216	0,784	0,000795	0,002679	0,0034743	0,228916	0,771084
18,000	0,216	0,784	0,000842	0,002837	0,0036787	0,228916	0,771084
19,000	0,216	0,784	0,000889	0,002994	0,0038831	0,228916	0,771084
20,000	0,216	0,784	0,000936	0,003152	0,0040875	0,228916	0,771084
21,000	0,216	0,784	0,000982	0,003309	0,0042918	0,228916	0,771084
22,000	0,216	0,784	0,001029	0,003467	0,0044962	0,228916	0,771084
23,000	0,216	0,784	0,001076	0,003625	0,0047006	0,228916	0,771084
24,000	0,216	0,784	0,001123	0,003782	0,004905	0,228916	0,771084
25,000	0,216	0,784	0,00117	0,00394	0,0051093	0,228916	0,771084
26,000	0,216	0,784	0,001216	0,004097	0,0053137	0,228916	0,771084
27,000	0,216	0,784	0,001263	0,004255	0,0055181	0,228916	0,771084
28,000	0,216	0,784	0,00131	0,004412	0,0057225	0,228916	0,771084
29,000	0,216	0,784	0,001357	0,00457	0,0059268	0,228916	0,771084
30,000	0,216	0,784	0,001404	0,004728	0,0061312	0,228916	0,771084
100,000	0,216	0,784	0,004678	0,015759	0,0204373	0,228916	0,771084
150,000	0,216	0,784	0,007018	0,023638	0,030656	0,228916	0,771084
200,000	0,216	0,784	0,009357	0,031518	0,0408747	0,228916	0,771084
250,000	0,216	0,784	0,011696	0,039397	0,0510933	0,228916	0,771084
300,000	0,216	0,784	0,014035	0,047277	0,061312	0,228916	0,771084
350,000	0,216	0,784	0,016374	0,055156	0,0715307	0,228916	0,771084
400,000	0,216	0,784	0,018714	0,063036	0,0817493	0,228916	0,771084

Από την παραπάνω μελέτη που κάνουμε εξάγεται ότι το κλάσμα μάζας του νησιδίου είναι $\varphi_p = 0,228916$ και το κλάσμα μάζας του ρευστού PEG είναι $\varphi_f = 0,771084$.

Μελετώντας τα παραπάνω αποτελέσματα, και λαμβάνοντας ως μήκος του εσωτερικού σωλήνα τα 300 mm δηλαδή 30cm λαμβάνουμε τη συνολική μάζα των νησιδίων που βρίσκονται σ'αυτών των διαστάσεων σωλήνα ίση με $m_{\nu\eta\sigma\iota\delta\iota\omega\nu} = 0,014035g$ και τη μάζα του ρευστού PEG ίση με $m_{PEG} = 0,047277g$. Επίσης η αθροιστική μάζα της ροής 2-φάσεων διαμέσου του εσωτερικού κυλίνδρου με μήκος 40 cm και διάμετρο 500μm είναι

$$m_{average} = 0,061312g \quad .$$

Χρησιμοποιώντας το τύπο

$$\mathbf{v} = \varphi_p \mathbf{v}_p + \varphi_f \mathbf{v}_f = \mathbf{v}_f + \varphi_p \mathbf{v}_r$$

όπου $\mathbf{v}_r = (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f)$ είναι η σχετική ταχύτητα του νησιδίου σε συνεχές PEG ,

υπολογίζουμε την ταχύτητα (μετά από σύνθεση μαζών)

$$\mathbf{v} = 0,228916\mathbf{v}_p + 0,771084\mathbf{v}_f$$

ή

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_f + 0,228916\mathbf{v}_r \quad .$$

9.4 Ιξώδες μείγματος

Το ιξώδες του ρευστού PEG είναι : $\mu_f = 0,1 \frac{cm^2}{s}$

Το δυναμικό ιξώδες της νέας φάσης (ροή 2-φάσεων) υπολογίζεται από το

$$\mu_m = \mu_f \left(1 - \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{pm}} \right)^{-2,5\varepsilon_{pm}}$$

Η παράμετρος ε_{pm} είναι το κλάσμα όγκου που εξάγεται πειραματικά για συστήματα ρευστών-στερεών όπως είναι η περίπτωση PEG – νησιδίου παγκρεατικών κυττάρων και ισχύει

$$\varepsilon_{pm} = 0.62$$

Όπως υπολογίσαμε παραπάνω

$$\varepsilon_p = 0,216$$

Άρα το δυναμικό ιξώδες (το αθροιστικό των δυο φάσεων) είναι

$$\mu_m = 0,19423 \frac{cm^2}{s}$$

ή

$$\mu_m = 19,423 \frac{mm^2}{s} .$$

9.5 Αριθμός Stokes

Ο τύπος που μας δίνει τον αριθμό Stokes είναι

$$Stk = \frac{mv_p}{6\pi r^2 \mu} = \frac{1}{9} \frac{\rho_p}{\rho_f} Re$$

Στην περίπτωση που μελετάται

$$\frac{\rho_p}{\rho_f} = 1,0762$$

και

$$\frac{1}{9} \frac{\rho_p}{\rho_f} = 0,1196$$

Για να μπορούν τα σωματίδια να έχουν αρκετό χρόνο για να ανταποκριθούν στις αλλαγές στην ταχύτητα του ρευστού και η ταχύτητα των σωματιδίων να προσεγγίζει την ταχύτητα του ρευστού πρέπει

$$St < 0,1$$

Άρα

$$0,1196Re < 0,1$$

άρα

$$Re < 0,8361$$

Σε μικρότερες τιμές του αριθμού Reynolds , Re, το ρευστό σχηματίζει περισσότερες τροχιές γύρω από το νησίδιο άρα σταθεροποιείται περισσότερο η ροή των 2-φάσεων .

Με λίγα λόγια κατανέμεται καλύτερα το ρευστό γύρω από το νησίδιο και χειριζόμαστε το σύστημα πολύ καλύτερα.

9.6 Υπολογισμός σχετικής ταχύτητας

Η σχετική ταχύτητα από το νόμο του Stokes για την βαρύτητα υπολογίζεται από την εξίσωση

$$\mathbf{v}_r = \frac{1}{18} \frac{\rho d_p^2}{\mu} \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right) \mathbf{g}$$

Άρα, αντικαθιστώντας

$$v_{\text{σχετική},r} = 0,000154 \frac{mm}{s}$$

υπολογίσαμε την σχετική ταχύτητα .

Άρα, επειδή $\mathbf{v}_r = (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f)$,

$$(\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f) = 0,000154 \frac{mm}{s} .$$

Παρατηρούμε ότι η σχετική ταχύτητα είναι πολύ μικρή και ότι η ταχύτητα των νησιδίων είναι πάρα πολύ κοντά στην ταχύτητα του ρευστού PEG σε σημείο που μπορούμε να πούμε – όπως είδαμε και από τον αριθμό Stokes – ότι σωματίδια έχουν αρκετό χρόνο για να ανταποκριθούν στις αλλαγές στην ταχύτητα του ρευστού και η ταχύτητα των σωματιδίων προσεγγίζει την ταχύτητα του ρευστού.

Ο αριθμός Reynolds των νησιδίων στην ροή 2-φάσεων υπολογίζεται από την εξίσωση :

$$Re_p = \frac{2r_p \rho_f |\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p|}{\mu_m}$$

$$\text{Re}_p = 2,43645 \cdot 10^{-9}$$

Αν αντικαταστήσουμε στην

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_f + 0,228916\mathbf{v}_r$$

το $\mathbf{v}_r = (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f) = 0,000154 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$, πέρνουμε :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_f + 3,52531 \cdot 10^{-5}$$

Έτσι την εξίσωση της ταχύτητας τη μετατρέψαμε σε μια εξίσωση πρώτου βαθμού μεταξύ της ταχύτητας της ρροής 2-φάσεων και της ταχύτητας του ρευστού .

Η τελική ταχύτητα των σωματιδίων στην ενδιάμεση περίπτωση μπορεί να γραφτεί ως

$$V_t = \left[\frac{2(\rho_p - \rho)v_p g}{\rho A C_D} \right]^{1/2}$$

όπου απλοποιείται στην παρακάτω εξίσωση για σφαιρικά σωματίδια :

$$V_t = \left[\frac{4(\rho_p - \rho)gd_p}{3\rho C_D} \right]^{1/2}$$

Το C_D στην στρωτή ροή 2-φάσεων ($\text{Re}_p < 1$) μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}}$$

Και ο αριθμός Reynolds των σωματιδίων , Re_p , για τη ροή των δύο φάσεων υπολογίζεται ως εξής

$$\text{Re}_p = \frac{2r_p \rho_f |\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p|}{\mu_m}$$

Επίσης

$$|\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p| = V_t$$

Επειδή η σχετική ταχύτητα του νησιδίου ως προς το ρευστό υπολογίζεται και με βάση την εξίσωση

$$V_t = \left[\frac{4(\rho_p - \rho)gd_p}{3\rho C_D} \right]^{1/2}$$

θα κάνουμε μια επαλήθευση.

Αντικαθιστούμε και βρίσκουμε

$$v_t = 0,000154 \frac{mm}{s} .$$

9.7 Υπολογισμοί στον εξωτερικό κύλινδρο

Θα μελετήσουμε πως αλλάζει η ογκομετρική παροχή της ροής του ρευστού PEG μέσα από τον εξωτερικό κύλινδρο σε σχέση με την τιμή που δίνουμε στην διάμετρό του. Ξέρουμε ότι στην έξοδο από το πρώτο τμήμα της συσκευής θέλουμε η ογκομετρική παροχή να είναι :

$$Q = 1 \frac{νησίδιο}{s}$$

Αν θεωρήσουμε ότι αυτός ο ρυθμός μας παραπέμπει σε ένα χώρο του νησιδίου που περιέχει το νησίδιο και ρευστό PEG και από πάνω και από κάτω από το νησίδιο σε απόσταση από το νησίδιο ίση με το μισό της απόστασης μεταξύ δύο νησιδίων.

Άρα ο όγκος της ροής που περνάει κάθε δευτερόλεπτο είναι :

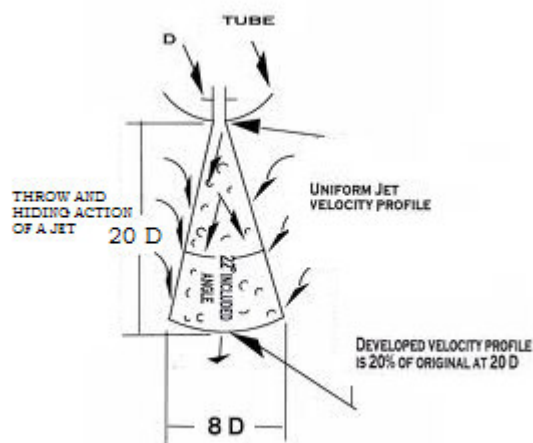
$$V = A_{\text{περιβάλλουσας}} h$$

πλάτος εξωτερικού κυλίνδρου mm	διάμετρος εξωτερικού κυλίνδρου mm	ακτίνα εξωτερικού κυλίνδρου mm	ακτίνα εσωτερικού κυλίνδρου mm	A εσωτερική mm ²	A εξωτερική mm ²	A περιβάλλουσας mm ²	Q mm ³ /s	h mm	(h+1) mm
0,1	0,7	0,35	0,25	0,1963 495	0,38484 5	0,188495 559	0,09110 6	0,47 3466	1,47 3466
0,125	0,75	0,375	0,25	0,1963 495	0,44178 6	0,245436 926	0,11862 7	0,53 7033	1,53 7033
0,15	0,8	0,4	0,25	0,1963	0,50265	0,306305	0,14804	0,58	1,58

				495	5	284	7	9058	9058
0,175	0,85	0,425	0,25	0,1963 495	0,56745	0,371100 632	0,17936 4	0,63 2176	1,63 2176
0,2	0,9	0,45	0,25	0,1963 495	0,63617 3	0,439822 972	0,21258	0,66 8308	1,66 8308
0,225	0,95	0,475	0,25	0,1963 495	0,70882 2	0,512472 302	0,24769 3	0,69 8887	1,69 8887
0,25	1	0,5	0,25	0,1963 495	0,78539 8	0,589048 623	0,28470 5	0,72 4995	1,72 4995
0,275	1,05	0,525	0,25	0,1963 495	0,86590 1	0,669551 934	0,32361 5	0,74 7463	1,74 7463
0,3	1,1	0,55	0,25	0,1963 495	0,95033 2	0,753982 237	0,36442 2	0,76 6937	1,76 6937
0,325	1,15	0,575	0,25	0,1963 495	1,03868 9	0,842339 53	0,40712 8	0,78 3927	1,78 3927
0,35	1,2	0,6	0,25	0,1963 495	1,13097 3	0,934623 814	0,45173 2	0,79 8837	1,79 8837
0,375	1,25	0,625	0,25	0,1963 495	1,22718 5	1,030835 089	0,49823 4	0,81 1994	1,81 1994
0,4	1,3	0,65	0,25	0,1963 495	1,32732 3	1,130973 355	0,54663 3	0,82 3663	1,82 3663
0,425	1,35	0,675	0,25	0,1963 495	1,43138 8	1,235038 612	0,59693 1	0,83 4059	1,83 4059
0,45	1,4	0,7	0,25	0,1963 495	1,53938	1,343030 859	0,64912 7	0,84 3362	1,84 3362
0,475	1,45	0,725	0,25	0,1963 495	1,6513	1,454950 098	0,70322 1	0,85 1718	1,85 1718
0,5	1,5	0,75	0,25	0,1963 495	1,76714 6	1,570796 327	0,75921 3	0,85 9253	1,85 9253
0,525	1,55	0,775	0,25	0,1963 495	1,88691 9	1,690569 547	0,81710 3	0,86 6071	1,86 6071
0,55	1,6	0,8	0,25	0,1963 495	2,01061 9	1,814269 757	0,87689 1	0,87 226	1,87 226
0,75	2	1	0,25	0,1963 495	3,14159 3	2,945243 113	1,42352 4	0,90 6244	1,90 6244
1,25	3	1,5	0,25	0,1963 495	7,06858 3	6,872233 93	3,32155 7	0,93 9808	1,93 9808
1,75	4	2	0,25	0,1963 495	12,5663 7	12,37002 107	5,97880 2	0,95 1556	1,95 1556
2,25	5	2,5	0,25	0,1963 495	19,6349 5	19,43860 454	9,39526 1	0,95 6993	1,95 6993
2,75	6	3	0,25	0,1963 495	28,2743 3	28,07798 434	13,5709 3	0,95 9947	1,95 9947
3,25	7	3,5	0,25	0,1963 495	38,4845 1	38,28816 047	18,5058 2	0,96 1728	1,96 1728
3,75	8	4	0,25	0,1963 495	50,2654 8	50,06913 292	24,1999 1	0,96 2884	1,96 2884
4,75	10	5	0,25	0,1963 495	78,5398 2	78,34346 68	37,8657 5	0,96 4243	1,96 4243
9,75	20	10	0,25	0,1963 495	314,159 3	313,9629 158	151,747 7	0,96 6056	1,96 6056
14,75	30	15	0,25	0,1963 495	706,858 3	706,6619 975	341,550 9	0,96 6391	1,96 6391
19,75	40	20	0,25	0,1963 495	1256,63 7	1256,440 712	607,275 5	0,96 6509	1,96 6509
24,75	50	25	0,25	0,1963 495	1963,49 5	1963,299 059	948,921 3	0,96 6563	1,96 6563
29,75	60	30	0,25	0,1963	2827,43	2827,237	1366,48	0,96	1,96

				495	3	039	8	6593	6593
34,75	70	35	0,25	0,1963 495	3848,45 1	3848,254 651	1859,97 7	0,96 6611	1,96 6611
39,75	80	40	0,25	0,1963 495	5026,54 8	5026,351 896	2429,38 7	0,96 6622	1,96 6622
44,75	90	45	0,25	0,1963 495	6361,72 5	6361,528 774	3074,71 8	0,96 663	1,96 663
49,75	100	50	0,25	0,1963 495	7853,98 2	7853,785 284	3795,97	0,96 6636	1,96 6636

Με βάση βιβλιογραφική έρευνα στην jet flow ισχύει το παρακάτω σχήμα όπου έχει αναπτυχθεί το 20% της τελικής ταχύτητας εξόδου που θα μας δώσει το 1 νησίδιο/s . Επίσης σ' αυτή τη φάση έχει αναπτυχθεί το 90% του μείγματος της ροής από τον εσωτερικό κύλινδρο και από τον εξωτερικό.



Και με το παραπάνω σκεπτικό προκύπτει ο παρακάτω ΠΙΝΑΚΑΣ

διάμετρος εξωτερικού κυλίνδρου σε σχέση με την διάμετρο του εσωτερικού κυλίνδρου mm	πλάτος εξωτερικό ή κυλίνδρου υ mm	διάμετρος εξωτερικού κυλίνδρου mm	ακτίνα εξωτερικού κυλίνδρου mm	ακτίνα εσωτερικού κυλίνδρου mm	A εσωτερική mm ²	A εξωτερική mm ²	A περιβάλλουσας mm ²	Q mm ³ /s	h mm
2D	0,25	1	0,5	0,25	0,19635	0,785	0,589	0,28470 5	2,5
3D	0,5	1,5	0,75	0,25	0,19635	1,767	1,571	0,75921 3	3,75
4D	0,75	2	1	0,25	0,19635	3,142	2,945	1,42352 4	5

5D	1	2,5	1,25	0,25	0,19635	4,909	4,712	2,27763 9	6,25
6D	1,25	3	1,5	0,25	0,19635	7,069	6,872	3,32155 7	7,5
7D	1,5	3,5	1,75	0,25	0,19635	9,621	9,425	4,55527 8	8,75
8D	1,75	4	2	0,25	0,19635	12,566	12,370	5,97880 2	10
9D	2	4,5	2,25	0,25	0,19635	15,904	15,708	7,59213	11,25
10D	2,25	5	2,5	0,25	0,19635	19,635	19,439	9,39526 1	12,5
20D	4,75	10	5	0,25	0,19635	78,540	78,343	37,8657 5	25
30D	7,25	15	7,5	0,25	0,19635	176,715	176,518	85,3165 6	37,5
40D	9,75	20	10	0,25	0,19635	314,159	313,963	151,747 7	50
50D	12,25	25	12,5	0,25	0,19635	490,874	490,678	237,159 2	62,5
55D	13,5	27,5	13,75	0,25	0,19635	593,957	593,761	286,982 5	68,75
56D	13,75	28	14	0,25	0,19635	615,752	615,556	297,516 6	70
57D	14	28,5	14,25	0,25	0,19635	637,940	637,743	308,240 5	71,25
58D	14,25	29	14,5	0,25	0,19635	660,520	660,324	319,154 2	72,5
59D	14,5	29,5	14,75	0,25	0,19635	683,493	683,296	330,257 7	73,75
60D	14,75	30	15	0,25	0,19635	706,858	706,662	341,550 9	75

Για την περίπτωση που παρουσιάζεται και στο παραπάνω σχήμα έχουμε

διάμετρος εξωτερικού κυλίνδρου σε σχέση με την διάμετρο του εσωτερικού κυλίνδρου mm	πλάτος εξωτερικού κυλίνδρου mm	διάμετρος εξωτερικού κυλίνδρου mm	ακτίνα εξωτερικού κυλίνδρου mm	ακτίνα εσωτερικού κυλίνδρου mm	A εσωτερικ ή mm ²	A εξωτερική mm ²	A περιβάλλουσας mm ²	Q mm ³ /s	h mm
8D	1,75	4	2	0,25	0,196	12,566	12,37	5,978 802	10

Η ακτίνα του εξωτερικού κυλίνδρου είναι ίση με $8d_{\text{εσωτερικού κυλίνδρου}} = 4 \text{ mm}$ και το μήκος από την έξοδο του εσωτερικού κυλίνδρου μέχρι την έξοδο του εξωτερικού κυλίνδρου είναι $20d_{\text{εσωτερικού κυλίνδρου}} = 10 \text{ mm}$.

Υπό αυτές τις προϋποθέσεις ο ογκομετρικός ρυθμός της ροής είναι

$$Q = 5,9788 \frac{\text{mm}^3}{\text{s}} .$$

Μελετώντας την ταχύτητα του ρευστού στην περιβάλλουσα ροή και τον αριθμό Reynolds σ'αυτή πέρνουμε τα παρακάτω αποτελέσματα

διάμετρος εξωτερικού κυλίνδρου σε σχέση με την διάμετρο του εσωτερικού κυλίνδρου mm	v f mm/s	Re	ρf g/mm ³	μf mm ² /s
2D	0,0769244	1,9693E-06	0,001024	10
3D	0,0769244	3,9385E-06	0,001024	10
4D	0,0769244	5,9078E-06	0,001024	10
5D	0,0769244	7,8771E-06	0,001024	10
6D	0,0769244	9,8463E-06	0,001024	10
7D	0,0769244	1,1816E-05	0,001024	10
8D	0,0769244	1,3785E-05	0,001024	10
9D	0,0769244	1,5754E-05	0,001024	10
10D	0,0769244	1,7723E-05	0,001024	10
20D	0,0769244	3,7416E-05	0,001024	10
30D	0,0769244	5,7109E-05	0,001024	10
40D	0,0769244	7,6801E-05	0,001024	10
50D	0,0769244	9,6494E-05	0,001024	10
55D	0,0769244	0,00010634	0,001024	10
56D	0,0769244	0,00010831	0,001024	10
57D	0,0769244	0,00011028	0,001024	10
58D	0,0769244	0,00011225	0,001024	10
59D	0,0769244	0,00011422	0,001024	10
60D	0,0769244	0,00011619	0,001024	10

Επειδή η διάμετρος του κυλίνδρου είναι πολύ μικρή η ροή μας θα είναι με ασφάλεια στρωτή στο επίπεδο διαστάσεων που δουλεύουμε.

Ας υποθέσουμε ότι για διάμετρο εξωτερικού κυλίνδρου $d_{\text{εξωτ.κυλίνδρου}} = 5\text{mm}$ άρα το μήκος από την έξοδο του εσωτερικού κυλίνδρου μέχρι την έξοδο του εξωτερικού κυλίνδρου είναι $h = 12,5\text{ mm}$

διάμετρος εξωτερικού κυλίνδρου σε σχέση με την διάμετρο του εσωτερικού κυλίνδρου	πλάτος εξωτερικού κυλίνδρου mm	διάμετρος εξωτερικού κυλίνδρου mm	ακτίνα εξωτερικού κυλίνδρου mm	ακτίνα εσωτερικού κυλίνδρου mm	A εσωτερική mm ²	A εξωτερική mm ²	A περιβάλλουσας mm ²	Q mm ³ /s	h mm
--	--------------------------------	-----------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	-----------------------------	-----------------------------	---------------------------------	----------------------	------

mm									
10D	2,25	5	2,5	0,25	0,1964	19,635	19,43 86	9,3953	12,5

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι ο ογκομετρικός ρυθμός της ροής jet είναι

$$Q_{εξ} = 9,3953 \frac{mm^3}{s} .$$

Άρα στην έξοδο του 1^{ου} τμήματος της συσκευής ο ογκομετρικός ρυθμός ροής είναι $Q_{εισ} = Q_{εξ} = 9,3953 \frac{mm^3}{s} .$

Στην είσοδο του 1^{ου} τμήματος ο ογκομετρικός ρυθμός ροής είναι

$$Q_{εισ} = Q_{εξ} = 9,3953 \frac{mm^3}{s}$$

Ο ογκομετρικός ρυθμός ροής σπάει σε δύο ίσους ρυθμούς ροής στην είσοδο σε κάθε σωλήνα

$$Q_{εισ,1} = \frac{Q_{εισ}}{2} = 4,6976 \frac{mm^3}{s}$$

$$Q_{εισ,2} = \frac{Q_{εισ}}{2} = 4,6976 \frac{mm^3}{s}$$

1.3 Υπολογισμοί στο κομμάτι της κυτταροκαλλιέργειας

Στην είσοδο του 1^{ου} τμήματος θεωρούμε ότι έχουμε ένα κομμάτι (πριν τις συγκλίνοσες) που λειτουργεί ως βιοαντιδραστήρας .

Θεωρούμε ότι η κίνηση και το είδος αυτής των νησιδίων δια μέσου των ομόκεντρων κυλίνδρων δεν επηρεάζουν τις εξισώσεις των ισοζυγίων μάζας τόσο των νησίδων που είναι συμπλέγματα κυττάρων όσο και του θρεπτικού υλικού.

Θα μελετήσουμε το μεμονομένο σύστημα του νησιδίου που εξέρχεται από το πρώτο τμήμα της συσκευής. Μετά από έρευνα στο δεύτερο τμήμα της εξείχθει το συμπέρασμα πως στην είσοδο του δεύτερου τμήματος (άρα στην έξοδο του πρώτου τμήματος) ο ρυθμός κίνησης που επιθυμούμε είναι 1 islet/s .

Η διάμετρος του τμήματος που βρίσκεται η κυτταροκαλλιέργεια είναι

$$D = 7,9mm$$

Επειδή δε θέλουμε να φρακάρουν τα νησίδια στη σχισμή και θέλουμε να έχουν μια σχετική ελευθερία κινήσεων στη κυτταροκαλλιέργεια για να εξαγεται ένα νησίδιο κάθε στιγμή από αυτή στον εσωτερικό κύλινδρο θα υποθέσουμε ότι ο μισός όγκος της κυτταροκαλλιέργειας είναι PEG και ο άλλος μισός νησίδια.

μήκος κυλίνδρου κυτταροκαλλιέργειας mm	Διάμετρος κυλίνδρου κυτταροκαλλιέργειας mm	όγκος συνολικών νησιδίων mm ³	όγκος νησιδίου mm ³	όγκος κυλίνδρου κυτταροκαλλιέργειας mm ³	Ημερες τροφδοσίας με νησίδες κυττάρων	Αριθμός νησιδίων κυττάρων την ώρα τροφοδοσίας τους	μάζα ενός νησιδίου g	Συνολική μάζα τροφδοσίας g
40	7	1221,451	0,01413717	1539,3804	1	86400	1,55792E-05	1,346039
40	8	1221,451	0,01413717	2010,6193	1	86400	1,55792E-05	1,346039
40	9	1221,451	0,01413717	2544,69005	1	86400	1,55792E-05	1,346039
40	10	1221,451	0,01413717	3141,59265	1	86400	1,55792E-05	1,346039
40	11	1221,451	0,01413717	3801,32711	1	86400	1,55792E-05	1,346039
40	12	1221,451	0,01413717	4523,89342	1	86400	1,55792E-05	1,346039
40	13	1221,451	0,01413717	5309,29158	1	86400	1,55792E-05	1,346039
40	14	1221,451	0,01413717	6157,5216	1	86400	1,55792E-05	1,346039
40	15	1221,451	0,01413717	7068,58347	1	86400	1,55792E-05	1,346039
40	16	1221,451	0,01413717	8042,47719	1	86400	1,55792E-05	1,346039
40	17	1221,451	0,01413717	9079,20277	1	86400	1,55792E-05	1,346039
40	18	1221,451	0,01413717	10178,7602	1	86400	1,55792E-05	1,346039
40	19	1221,451	0,01413717	11341,1495	1	86400	1,55792E-05	1,346039
40	20	1221,451	0,01413717	12566,3706	1	86400	1,55792E-05	1,346039
100	8	1221,451	0,01413717	5026,54825	1	86400	1,55792E-05	1,346039
100	10	1221,451	0,01413717	7853,98163	1	86400	1,55792E-05	1,346039
100	5	1221,451	0,01413717	1963,49541	1	86400	1,55792E-05	1,346039

Μετά από κάποιους υπολογισμούς που έγιναν καταλήξαμε στην επιλογή των 100 mm για το μήκος του κυλίνδρου.

Παρατηρούμε ότι την αναλογία που επιθυμούμε σε συνάρτηση όμως με μια καλή αναλογία διαμέτρου και μήκους είναι για διάμετρο 5 mm .

Υπο αυτές τις συνθήκες έχουμε μια αναλογία όγκων

$$\frac{V_{\text{νησιδίων}}}{V_{\text{εσωτ.κυλίνδρου}}} = \frac{1221,45}{1963,50} = 0,6221$$

που είναι αποδεκτή.

Και η συγκέντρωση των νησιδίων στον κύλινδρο κυτταροκαλλιέργειας την στιγμή της τροφοδοσίας θα είναι $0,000668 \text{ g/mm}^3$.

Επιθυμούμε ένα αραιό διάλυμα νησιδίων γιατί έτσι αυξάνουμε στο μέγιστο τις πιθανότητες να περάσει ένα νησίδιο από τη σχισμή χωρίς την παρεμπόδιση στην κίνησή του από κάποιο άλλο νησίδιο.

Στο σημείο καμπής της καμπυλότητας πρέπει να έχουμε $d < 600 \mu\text{m}$ ώστε να αποτρέψουμε την περίπτωση να περάσουν δυο σφαίρες και να φρακάρουν.

Το καλύτερο είναι

$$d = 590 \mu\text{m} \text{ ή } 0,590 \text{mm} .$$

Έτσι θα περάσει το ένα από τα δύο νησίδια αλλά το άλλο που δε θα περάσει , για να απομακρυνθεί και να μη περάσει πρέπει με την κίνησή του το άλλο να του ασκήσει τέτοια ροπή μέσω του ρευστού ώστε να μη περάσει μέχρι να περάσει το άλλο.

Αυτό γίνεται μέσω συγκεκριμένης ταχύτητας στο ρευστό PEG στην κυτταροκαλλιέργεια.

Από τη στιγμή που η ροή στην κυτταροκαλλιέργεια είναι συνεχής και λαμβάνοντας υπόψιν ότι έχουμε αμελητέο μήκος εισόδου στον εσωτερικό κύλινδρο τότε σε κάποια στιγμή η ταχύτητα εξόδου προς το κομμάτι που θα γίνει ο υδροδυναμικός εστιασμός θα είναι ίση με την σταθερή ταχύτητα του νησιδίου μέσα στον εσωτερικό κύλινδρο.

Συμπεράσματα

Στην παραπάνω διπλωματική διατριβή αναπτύχθηκαν οι εξισώσεις και οι συνθήκες που διέπουν τη ροή 2-φάσεων (νησίδια παγκρεατικών κυττάρων-ρευστό PEG) καθώς και μελετήθηκαν οι ιδιότητες όλων των ροών . Μελετήσαμε κάτω από ποιες συνθήκες πραγματοποιήτε ο υδροδυναμικός εστιασμός και πως επιδρά η γεωμετρία του τμήματος της συσκευής στο οποίο γίνεται η μελέτη τον υδροδυναμικό εστιασμό.

Οι οριακές συνθήκες για την έρπουσα ροή δίνονται από τις εξισώσεις :

$$\text{για } r = R_p, V_r = -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0$$

$$\text{για } r = R_p, V_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

$$\text{για } r \rightarrow \infty, \psi \rightarrow -\frac{1}{2} V_\infty r^2 \sin^2 \theta$$

Ο αριθμός Reynolds για τη νέα ροή είναι :

$$\text{Re} = \frac{2r_p \rho_f |\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p|}{\mu_m}$$

Το σύμβολο μ_m προσδιορίζει το δυναμικό ιξώδες της νέας φάσης.

$$\mu_m = \mu_f \left(1 - \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{pm}} \right)^{-2.5 \varepsilon_{pm}}$$

Η εξίσωση συνέχειας του ρευστού είναι :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_f \varepsilon_f) + \nabla \cdot (\rho_f \varepsilon_f \mathbf{v}_f) = 0$$

Για μικρά σωματίδια η μέση εξίσωση ορμής της φάσης του ρευστού είναι

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_f \varepsilon_f \mathbf{v}_f) + \nabla \cdot (\rho_f \varepsilon_f \mathbf{v}_f \mathbf{v}_f) = -\nabla (\varepsilon_f p) + \nabla \cdot [\mu_f \mathbf{D}_m] + \nabla \cdot \mathbf{S}_p - \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{M}_r + \nabla \cdot \mathbf{S}_m$$

Η εξίσωση συνέχειας για το σύστημα 2-φάσεων είναι

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_v = 0 .$$

Η πυκνότητα του συστήματος 2-φάσεων ρ και η ταχύτητα (μετά από τη σύνθεση μαζών) \mathbf{v} καθορίζονται ως

$$\rho = \varepsilon_p \rho_p + \varepsilon_f \rho_f$$

και

$$\mathbf{v} = \varphi_p \mathbf{v}_p + \varphi_f \mathbf{v}_f = \frac{1}{\rho} (\varepsilon_p \rho_p \mathbf{v}_p + \varepsilon_f \rho_f \mathbf{v}_f)$$

Η εξίσωση συνέχειας για τη διατήρηση της μάζας είναι :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

. Η εξίσωση ορμής του μείγματος γράφεται :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) + \nabla (\rho \varphi_p \varphi_f \mathbf{v}_r \mathbf{v}_r) = -\nabla p + \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{v}) + \rho \mathbf{b}$$

Η εξίσωση διατήρησης της ταξινόμησης για τα νησίδα είναι :

$$\frac{\partial (\rho \varphi_p)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \varphi_p \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\rho D_c \nabla \varphi_p) - \nabla \cdot (\rho \varphi_f \mathbf{v} \varphi_p)$$

Το μοντέλο Navier-Stokes για ασυμπιεστές ροές δύο-φάσεων είναι:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_i \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \rho_i \mathbf{g} + \text{div}(\mu_i \mathbf{D}(\mathbf{u})) \\ \text{div} \mathbf{u} = 0 \end{array} \right.$$

Η δύναμη που ασκείτε στο νησίδιο είναι :

$$F_p = F_g - F_b - F_D$$

Μέσω των εξισώσεων του Blyth υπολογίσαμε ότι η απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών νησιδίων θα είναι 333,33μm.

Παρατηρήσαμε ότι το μήκος εισόδου είναι πολύ μικρό και δε το λαμβάνουμε υπόψιν μας. Άρα θεωρούμε ότι έχουμε κατευθείαν ανεπτυγμένη ροή.

Ακτίνα του εσωτερικού σωλήνα έχουμε θέσει 250 μm και ακτίνα νησιδίων παγκρεατικών κυττάρων έχουμε θεωρήσει 150 μm

Από την παραπάνω μελέτη που κάνουμε εξάγεται ότι το κλάσμα όγκου του νησιδίου είναι $\varepsilon_p = 0,216$ και το κλάσμα όγκου του ρευστού PEG είναι $\varepsilon_f = 0,784$.

Μελετήσαμε τα παραπάνω αποτελέσματα, και λάβαμε ως μήκος του εσωτερικού σωλήνα τα 300 mm δηλαδή 30 cm. Σε ένα τέτοιο κύλινδρο με μήκος 30 cm και διάμετρο 500 μm χωράνε περίπου 900 νησίδα (για την ακρίβεια 900,901 νησίδα) .

Η αθροιστική πυκνότητα υπολογίστηκε

$$\rho = 1,0409 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

ή

$$\rho = 0,001041 \frac{\text{g}}{\text{mm}^3}$$

Εξάγαμε ότι το κλάσμα μάζας του νησιδίου είναι $\varphi_p = 0,228916$ και το κλάσμα μάζας του ρευστού PEG είναι $\varphi_f = 0,771084$.

Μελετώντας τα παραπάνω αποτελέσματα, και λαμβάνοντας ως μήκος του εσωτερικού σωλήνα τα 300 mm δηλαδή 30cm λαμβάνουμε τη συνολική μάζα των νησιδίων που βρίσκονται σ'αυτών των διαστάσεων σωλήνα ίση με $m_{\text{νησιδίων}} = 0,014035 \text{g}$ και τη μάζα του ρευστού PEG ίση με $m_{\text{PEG}} = 0,047277 \text{g}$. Επίσης η αθροιστική μάζα της ροής 2-φάσεων διαμέσου του εσωτερικού κυλίνδρου με μήκος 40 cm και διάμετρο 500 μm είναι

$$m_{\text{average}} = 0,061312 \text{g} \quad .$$

Χρησιμοποιώντας το τύπο

$$\mathbf{v} = \varphi_p \mathbf{v}_p + \varphi_f \mathbf{v}_f = \mathbf{v}_f + \varphi_p \mathbf{v}_r$$

όπου $\mathbf{v}_r = (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f)$ είναι η σχετική ταχύτητα του νησιδίου σε συνεχές PEG ,

υπολογίσαμε την ταχύτητα (μετά από σύνθεση μαζών)

$$\mathbf{v} = 0,228916\mathbf{v}_p + 0,771084\mathbf{v}_f$$

ή

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_f + 0,228916\mathbf{v}_r .$$

Το δυναμικό ιξώδες (το αθροιστικό των δυο φάσεων) υπολογίστηκε

$$\mu_m = 0,19423 \frac{cm^2}{s}$$

ή

$$\mu_m = 19,423 \frac{mm^2}{s} .$$

Ο αριθμός Stokes

$$St < 0,1$$

έτσι τα σωματίδια έχουν αρκετό χρόνο για να ανταποκριθούν στις αλλαγές στην ταχύτητα του ρευστού και η ταχύτητα των σωματιδίων προσεγγίζει την ταχύτητα του ρευστού .

Η σχετική ταχύτητα υπολογίστηκε

$$v_{\text{σχετική},r} = 0,000154 \frac{mm}{s}$$

Παρατηρούμε ότι η σχετική ταχύτητα είναι πολύ μικρή και ότι η ταχύτητα των νησιδίων είναι πάρα πολύ κοντά στην ταχύτητα του ρευστού PEG σε σημείο που μπορούμε να πούμε – όπως είδαμε και από τον αριθμό Stokes – ότι σωματίδια έχουν αρκετό χρόνο για να ανταποκριθούν στις αλλαγές στην ταχύτητα του ρευστού και η ταχύτητα των σωματιδίων προσεγγίζει την ταχύτητα του ρευστού.

Ο αριθμός Reynolds των νησιδίων στην ροή 2-φάσεων υπολογίστηκε :

$$Re_p = 2,43645 \cdot 10^{-9}$$

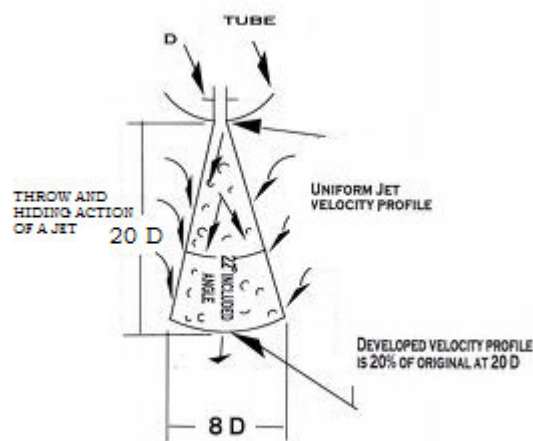
Επίσης πήραμε την εξίσωση

$$v = v_f + 3,52531 \cdot 10^{-5}$$

που μας δίνει την ταχύτητα της ροής 2-φάσεων σε σχέση με την ταχύτητα του ρευστού στον εσωτερικό κύλινδρο.

Έτσι την εξίσωση της ταχύτητας τη μετατρέψαμε σε μια εξίσωση πρώτου βαθμού μεταξύ της ταχύτητας της ροής 2-φάσεων και της ταχύτητας του ρευστού .

Με βάση βιβλιογραφική έρευνα στην jet flow ισχύει το παρακάτω σχήμα όπου έχει αναπτυχθεί το 20% της τελικής ταχύτητας εξόδου που θα μας δώσει το 1 νησίδιο/s . Επίσης σ'αυτή τη φάση έχει αναπτυχθεί το 90% του μείγματος της ροής από τον εσωτερικό κύλινδρο και από τον εξωτερικό.



[α]

Υπό αυτές τις συνθήκες η ακτίνα του εξωτερικού κυλίνδρου είναι ίση με $8d_{\text{εσωτερικού κυλίνδρου}} = 4 \text{ mm}$ και το μήκος από την έξοδο του εσωτερικού κυλίνδρου μέχρι την έξοδο του εξωτερικού κυλίνδρου είναι $20d_{\text{εσωτερικού κυλίνδρου}} = 10 \text{ mm}$.

Υπό αυτές τις προϋποθέσεις ο ογκομετρικός ρυθμός της ροής είναι

$$Q = 5,9788 \frac{\text{mm}^3}{\text{s}} . \text{ Θεωρήσαμε ότι 100\% ανάπτυξη μείγματος θα έχουμε}$$

για διάμετρο εξωτερικού κυλίνδρου $d_{\text{εξωτ.κυλίνδρου}} = 5 \text{ mm}$ άρα το μήκος από την έξοδο του εσωτερικού κυλίνδρου μέχρι την έξοδο του εξωτερικού κυλίνδρου ώστε το πλάτος της ροής jet να ισούται με τη διάμετρο του εξωτερικού κυλίνδρου είναι $h = 12,5 \text{ mm}$.

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι ο ογκομετρικός ρυθμός ροής είναι

$$Q_{εξ} = 9,3953 \frac{mm^3}{s} .$$

Άρα στην έξοδο του 1^{ου} τμήματος της συσκευής ο ογκομετρικός ρυθμός της ροής jet είναι

$$Q_{εισ} = Q_{εξ} = 9,3953 \frac{mm^3}{s} .$$

Στην είσοδο του 1^{ου} τμήματος ο ογκομετρικός ρυθμός ροής είναι

$$Q_{εισ} = Q_{εξ} = 9,3953 \frac{mm^3}{s}$$

Ο ογκομετρικός ρυθμός ροής σπάει σε δύο ίσους ρυθμούς ροής στην είσοδο σε κάθε σωλήνα

$$Q_{εισ,1} = \frac{Q_{εισ}}{2} = 4,6976 \frac{mm^3}{s}$$

$$Q_{εισ,2} = \frac{Q_{εισ}}{2} = 4,6976 \frac{mm^3}{s}$$

Θεωρήσαμε ότι η διάμετρος του τμήματος που βρίσκεται η κυτταροκαλλιέργεια είναι

$$D = 7,9mm .$$

Μετά από κάποιους υπολογισμούς που έγιναν καταλήξαμε στην επιλογή των 100 mm για το μήκος του κυλίνδρου.

Υπο αυτές τις συνθήκες έχουμε στην κυτταροκαλλιέργεια μια αναλογία όγκων

$$\frac{V_{νησιδίων}}{V_{εσωτ.κυλίνδρου}} = \frac{1221,45}{1963,50} = 0,6221$$

Και η συγκέντρωση των νησιδίων στον κύλινδρο κυτταροκαλλιέργειας την στιγμή της τροφοδοσίας θα είναι $0,000668 \text{ g/mm}^3$.

Στο σημείο αλλαγής καμπής στο κομμάτι των συγκλινοσών έχουμε

$$d = 590\mu m \text{ ή } 0,590mm$$

Βιβλιογραφία

Βιβλία

- I.** Solid-Liquid Two Phase Flow, Elsevier, Sümer M. Peker Serife - S. Helvacı, Department of Chemical Engineering, Ege University, Izmir, Turkey, 2008 [σελ.245-262, 291-295, 315-325]
- II.** Solid - Liquid Separation, Fourth Edition, Butterworth Heinemann, Ladislav Svarovsky, Dipl Ing, PhD, CEng, FIChemE, Professor of Chemical Engineering, FPS Institute, England and University of Pardubice, Czech Republic, 2000
- III.** Μηχανική Των Ρευστών, 2^η Έκδοση, Τόμος II, Παπαϊωάννου Θ. Άγγελου, Αναπληρωτή Καθηγητή Ε.Μ.Πολυτεχνείου, Τμήμα Χημικών Μηχανικών, 2002
- IV.** Numerical Methods For Two - Phase Incompressible Flows, Springer Series in Computational Mathematics 40, Sven Gross - Universität Bonn Institut für Numerische Simulation, Germany, Arnold Reusken - RWTH Aachen Lehrstuhl für Numerische Mathematik , Germany, 2011 [σελ.161-190]
- V.** Boundary - Layer Theory, Seventh Edition, McGraw-Hill Book Company, Dr. Hermann Schlichting, Professor Emeritus at the Engineering University of Braunschweig, Germany Former Director of the Aerodynamische Versuchsanstalt Gottingen, (Translated by Dr. J. Kestin, Professor at Brown University in Providence, Rhode Island), 1979 [σελ.179-182]
- VI.** Transport Phenomena, Second Edition, John Wiley & Sons Inc. ,R. Byron Bird - Warren E. Stewart - Edwin N. Lightfoot, Chemical Engineering Department, University of Wisconsin-Madison, 2002[σελ.178,179]

Δημοσιεύσεις και Άρθρα

1. Mathematical Model of two phase Flows, Jin Brada, Glass Service, Inc., Vsetin, Czech Republic, WM'01 Conference, February 25-March 1, 2001, Tucson, AZ
2. Modeling and numerical simulation of particulate flows by the Eulerian-Lagrangian approach, N. A. Patankar and D.D. Joseph, Department of Aerospace Engineering and Mechanics, University of Minnesota, Minneapolis, MN 55455
3. Terminal Velocity of Solid Spheres Falling in Newtonian and non-Newtonian Liquids, Vassilios, Kelessidis, Assistant Professor Technical University of Crete
4. Particle encapsulation due to thread breakup in Stokes flow, M.G. Blyth and C. Pozikridis, School of Mathematics, University of East Anglia, Norwich, NR4 7TJ, UK, Department of Mechanical and Aerospace Engineering, University of California, San Diego, La Jolla, CA 92093-0411, USA
5. New Paradigms in Chemical Engineering : Health, Climate Change and Energy, and Product Design, Dimitris T. Hatzivramidis, School of Chemical Engineering, National Technical University of Athens, Zografou Campus 15780, Athens, Greece
6. Blood flow and permeability in microvessels, Masako Sugihara-Seki, Faculty of Engineering, Kansai University, Suita, Osaka 564-8680, Japan, Bingmei M. Fu, Department of Mechanical Engineering, University of Nevada, Las Vegas, Las Vegas, NV 89154-4027, USA
7. Hydrodynamic Focusing for a Micromachined Flow Cytometer, A Proposed Paper Submitted to the ASME Journal of Fluids Engineering, Gwo-Bin Lee, Department of Engineering Science, Chen-I Hung, Department of Mechanical Engineering, Bin-Jo Ke, Department of Mechanical Engineering, Guan-Ruey Huang, Department of Engineering Science, Bao-Herng Hwei, Department of Engineering Science, Hui-Fang Lai, Department of Engineering Science, National Cheng Kung University

Ιστοσελίδες

- a. http://www.energyjet.com/jet_flow_&_mixing_action.htm