Τελεστής Souslin
Μετρησιμότητα, Αναλυτικά σύνολα
Εφαρμογές

Παναγιωτόπουλος Αριστοτέλης

Επιβλέπων: Σπηλιώτης Ιωάννης, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών ΕπιστημώνΤομέας Μαθηματικών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Τελεστής Souslin
Μετρησιμότητα, Αναλυτικά σύνολα
Εφαρμογές

Αριστοτέλης Παναγιωτόπουλος

Στον Μάριο και τον Στέφανο
Στα κύματα που ήρθαν και θα έρθουν

Πρόλογος

Στόχος της εργασίας αυτής, είναι η μελέτη του τελεστή Souslin και των συνόλων που παράγονται από την δράση αυτού πάνω σε συγκεκριμένες οικογένειες συνόλων. Η περιγραφή της λειτουργίας του τελεστή Souslin, προϋποθέτει την αναφορά σε αντικείμενα που ορίζονται μέσα στην δευτεροβάθμια αριθμητική Peano και τα οποία, η αντίστοιχη πρωτοβάθμια αδυνατεί να ορίσει. Αυτό έχει ως συνέπεια την ύπαρξη, σε κάθε υπεραριθμήσιμο πολωνικό χώρο, συνόλων αναλυτικών και όχι Borel. Το αποτέλεσμα αυτό, μαζί με κάποια παραδείγματα τέτοιων συνόλων, καθώς και η ανάπτυξη της αναγκαίας περιβάλλουσας θεωρίας μπορούν να βρεθούν στα δύο τελευταία κεφάλαια 4 και 5.

Εντούτοις, εξαρχής έχει γίνει η προσπάθεια αποσύμπλεξης του τελεστή Souslin από την τοπολογία με απώτερο στόχο την μελέτη της σχέσης του με τον αφηρημένο χώρο μέτρου. Έτσι στο κεφάλαιο 3 αποδεικνύεται αφενός ότι η εφαρμογή του τελεστή Souslin σε ένα σύστημα μετρήσιμων συνόλων ενός εξωτερικού μέτρου, παράγει μετρήσιμο σύνολο και αφετέρου το θεώρημα της μετρήσιμης προβολής. Τα δύο αυτά θεωρήματα, αποτελούν ισχυρά εργαλεία όταν θέλει κανείς να διαπιστώσει την μετρησιμότητα διαφόρων συνόλων όπως αυτών που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό.

Τέλος ιδιαίτερη έμφαση έχει δοθεί στην ανάπτυξη των ιστορικών λόγων που οδήγησαν στις διάφορες ιδέες τις οποίες αυτή η εργασία πραγματεύεται καθώς και στην αναφορά συνδέσεων με την θεωρία υπολογισιμότητας και πολυπλοκότητας.

Ελλάδα, Αθήνα

Αριστοτέλης Παναγιωτόπουλος
aristotelis.panagiotopoulos@gmail.com

Ιούλιος 2012

Ευχαριστίες

Θα ήθελα σε αυτό το σημείο να ευχαριστήσω των επιβλέποντα καθηγητή Ιωάννη Σπηλιώτη, για την ουσιαστική καθοδήγησή του εντός και εκτός σχολής, καθώς και τους καθηγητές της εξεταστικής επιτροπής Σπύρο Αργυρό και Βασίλη Κανελλόπουλο οι οποίοι ήταν πάντα εκεί για μένα. Δεν θα μπορούσα επίσης να μην ευχαριστήσω τους καθηγητές Αριστείδη Αραγεώργη, Στάθη Ζάχο, Αλέξανδρο Αρβανιτάκη και Δημήτρη Απατσίδη, τον σκληρό πυρήνα του γραφείου 126: Γιάννη, Φώτη, Μήτσο, Μίλτο, αλλά και όσους πέρναγαν κατά καιρούς απο εκεί, την Θέκλα Κατσαΐτη και τον Λορένζτο για τις στιγμές που μοιραστήκαμε, όλους τους φίλους, τον πατέρα μου, την μητέρα μου και την Σελήνη που με ανέχτηκαν όλα αυτά τα χρόνια, τον θείο Σταύρο και φυσικά την γιαγιά Ντίνα.

Αν δεν είχα βρεθεί στην τάξη του κ. Σπύρου Αργυρού, δεν θα είχα ανακαλύψει τα μαθηματικά ή ακόμα και αν τα είχα ανακαλύψει, δεν θα είχα καταφέρει ποτέ να δω την βαθύτητα και τον ρόλο τους σε κάθε πρωτόκολλο στοχασμού.

Αν δεν είχα βρεθεί στην τάξη του κ. Ιωάννη Σπηλιώτη, δεν θα είχα βρει τον λόγο στην τότε πολύ άσχημη προσωπικά περίοδο να μην εγκαταλείψω πολλά από αυτά που πλέον είμαι.

Αν δεν είχα βρεθεί στην τάξη του κ. Βασίλη Κανελλόπουλου δεν θα είχα ανακαλύψει ποτέ το χιούμορ που κρύβεται πίσω από τις πιο σοβαρές ιδέες.

Υπήρξαν και οι τρεις πραγματικοί δάσκαλοι για εμένα και τους ευχαριστώ για άλλη μια φορά.

Περιεχόμενα

1 Ιστορικά

1.1 Πρόλογος

Η ιστορία του τελεστή Souslin και των αναλυτικών συνόλων ξεκινάει από την Μόσχα. Το καλοκαίρι του 1916, ο νεαρός Mikhail Yakovlevich Suslin κάτω από την καθοδήγηση του καθηγητή Nikolai Nikolaevich Luzin παρουσίασε το πρώτο παράδειγμα συνόλου που ενώ δεν ήταν Borel, μπορούσε εντούτοις να δοθεί ρητά μέσα από απλές εκφράσεις της ανάλυσης. Το αποτέλεσμα αυτό επηρέασε με τρόπο ουσιαστικό ολόκληρα τμήματα της μαθηματικής ανάλυσης, της μαθηματικής λογικής και της θεωρίας συνόλων. Σήμερα τα αναλυτικά σύνολα και η θεωρία που δημιουργήθηκε γύρω από αυτά, συνιστούν ένα πεδίο όπου σκέψεις γύρω από την γλώσσα, την θεωρία πολυπλοκότητας και τα μαθηματικά του απείρου συναντώνται. Για να δούμε τους λόγους που οδήγησαν σε αυτή την ανακάλυψη και για καταλάβουμε την σημασία της για την εποχή εκείνη, πρέπει να ακολουθήσουμε την αλληλουχία των γεγονότων από την αρχή τους.

1.2 Κεντρική Ευρώπη 1870-1905

Η δουλειά του Cantor μεταξύ του 1870 και 1890 είναι ένα φυσιολογικό σημείο εκκίνησης, καθότι παράθεσε τα βασικά εργαλεία και τεχνικές για την μελέτη του εν ενεργεία απείρου. Καθιστώντας με αυτόν τον τρόπο την συνολοθεωρία ένα τυπικό σύστημα όπου μέσα από τον απλό φορμαλισμό του επέτρεψε την ρητή έκφραση και επεξεργασία ερωτημάτων που έως τότε φαίνονταν να ανήκουν στην σφαίρα του μεταφυσικού. Μερικά από τα βασικά εργαλεία που εισήχθησαν τότε είναι οι έννοιες των διατακτικών αριθμών, της πληθικότητας άπειρων συνόλων καθώς και τεχνική της απόδειξης με διαγώνια επιχειρήματα.

Ένα από τα προβλήματα που ο Cantor από νωρίς αντιμετώπισε και όπως θα δούμε οδήγησε στην γέννηση των αναλυτικών συνόλων, είναι γνωστό πλέον ως η υπόθεση του συνεχούς (CH). Ο Cantor το είχε θέσει σε μορφή καταφατικής εικασίας: “Κάθε υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει την πληθικότητα του συνεχούς[1]”. Πίστευε ότι ήταν θέμα χρόνου να αποδείξει κανείς την αλήθεια αυτής της πρότασης. Οι ιδέες του Cantor για τις υπερπεπερασμένες πληθικότητες

[1] ισοδύναμα: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$

και διατακτικούς αντιμετωπίστηκαν αρχικά με δυσπιστία. Δεν άργησαν όμως να εισχωρήσουν στην πρακτική της ανάλυσης και να αποτελέσουν ένα από τα αναπόσπαστα εργαλεία της [2] καθώς και να εγείρουν μερικές από τις πιο ενδιαφέρουσες μέχρι και σήμερα και φιλοσοφικές και μεταμαθηματικές συζητήσεις.

Τα πρώτα παραδείγματα χρήσης -αριθμήσιμων- διατακτικών εμφανίστηκαν στις δουλειές των γάλλων μαθηματικών της εικοσαετίας 1890-1910 Baire, Borel και Lebesgue οι οποίοι προσπαθούσαν να αποσαφηνίσουν τα όρια της γλώσσας της ανάλυσης στην δυνατότητα της να ορίζει συναρτήσεις, παραδείγματος χάριν χρήσει δυναμοσειρών. Ο Dirichlet είχε ήδη δώσει ήδη από το 1829 έναν συνολοθεωρητικό ορισμό της έννοιας της συνάρτησης, δίχως να προϋποθέτει η συνάρτηση αυτή να προέρχεται από κάποιο κλειστό τύπο. Όρισε την συνάρτηση ως μια αντιστοίχιση f μεταξύ στοιχείων δύο συνόλων με την μοναδική απαίτηση “σε κάθε x να υπάρχει μοναδικό, πεπερασμενο[3] y έτσι ώστε $f(x) = y$”. Ο Dirichlet είχε με τον ορισμό αυτό συμπεριλάβει στην έννοια της συνάρτησης απεικονίσεις που δεν ορίζονταν αλγεβρικά όπως η ομώνυμη συνάρτηση Dirichlet[4]

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{αν} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \tag{1.1}$$

Αυτό που δεν είχε γίνει ακόμα σαφές ήταν το ποιές συναρτήσεις, για παράδειγμα από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, ήταν ορίσιμες μέσα από την μαθηματική γλώσσα.

Εδώ οφείλουμε να ανοίξουμε μια μικρή παρένθεση. Τα μαθηματικά προϋποθέτουν την γλώσσα. Και τα αξιώματα της κάθε θεωρίας, πέραν της παραγωγής αποδεικτικών συλλογισμών είναι αυτά που σου επιτρέπουν να ορίζεις αντικείμενα μέσα στον κόσμο που γεννούν. Όταν συλλογίζεται κανείς το συνεχές, εύκολα σκέφτεται ένα τυχαίο σημείο x να περιφέρεται στην ευθεία. Αυτό όμως που έχει ενδιαφέρον σε σχέση με την παρούσα συζήτηση, είναι το σε ποιές θέσεις της πραγματικής ευθείας μπορείς να υποδείξεις στο σημείο να σταθεί. Ποιές από τις υπεραριθμήσιμες θέσεις της πραγματικής ευθείας είναι ορίσιμες στην εκάστοτε(υποχρεωτικά εν-δυνάμει-αριθμήσιμη) τυπική γλώσσα.

Επιστρέφοντας στην ευκλείδεια γεωμετρία, τα αξιώματα που έχεις, είναι ουσιαστικά οι κινήσεις του κανόνα και του διαβήτη. Δοθέντος του μοναδιαίου μήκους, με κινήσεις μόνο κανόνα και διαβήτη, τα σημεία που μπορείς να ορίσεις πάνω στην ευθεία είναι μόνο οι γεωμετρικοί αριθμοί $\mathcal{G}$ που ορίζονται αναδρομικά ως

$$\mathbb{Q} \subset \mathcal{G}, \qquad a, b \in \mathcal{G} \Rightarrow a + \sqrt{b} \in \mathcal{G} \tag{1.2}$$

Υπάρχει επίσης μια φυσική ιεραρχία μήκους ω_0 που να περιλαμβάνει κάθε γεωμετρικό αριθμό

$$\mathcal{G}_0 = \mathbb{Q} \qquad \mathcal{G}_{n+1} = \{a + \sqrt{b},\ a, b \in \mathcal{G}_n\},\ n \in \mathbb{N} \tag{1.3}$$

με $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\omega_0} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n$

[2] Δικαιολογώντας και την περίφημη ρήση του Hilbert: “κανείς δεν πρόκειται να μας στερήσει από τον παράδεισο που δημιούργησε ο Cantor για μας”.

[3] Η έννοια της συνάρτησης και του συνόλου αποσαφηνίζονταν εκείνη την περίοδο συνεπώς έχει ιστορικό ενδιαφέρον η έμφαση που έδινε ο Dirichlet στο ότι το y έπρεπε να ειναι πεπερασμένο

[4] Είναι χρήσιμο για την εξέλιξη της ιστορίας να παρατηρήσουμε ότι για αυτή την συνάρτηση τα πάνω και κάτω αθροίσματα Darboux δεν ταυτίζονται και άρα δεν μπορούσε να ολοκληρωθεί κατά Riemann. Συνεπώς αυτή η συνάρτηση δημιουργούσε μια τρύπα στην τότε θεωρία ολοκλήρωσης. Ένα κενό που -καθόλου τυχαία- έσπευσαν να καλύψουν οι Borel και Lebesgue.

Τα γνωστά άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας -δήλιο πρόβλημα, τετραγωνισμός του κύκλου,...- ήταν αδύνατον να λυθούν από την ευκλείδεια γεωμετρία διότι από την φύση τους, η λύση προϋπέθετε να μπορεί το σύστημά σου να κατασκευάσει(ορίσει) αριθμούς -$\sqrt[3]{2}, \pi$- μη γεωμετρικούς. Το κενό αυτό ήρθε εν μέρει να καλύψει η άλγεβρα[5]. Μέσα στο ισχυρότερο σύστημα της άλγεβρας μπορούσε κανείς να ορίσει μήκη όπως το $\sqrt[3]{2}$ και γενικότερα κάθε αλγεβρικό αριθμό. Εντούτοις, τυπικός ορισμός του π μπορούσε να επιτευχθεί μόνο μέσα από ένα τυπικό σύστημα ικανό να πραγματεύεται το όριο και το οποίο συνεπώς, υποχρεωτικά θα προϋπέθετε το εν ενεργεία άπειρο. Ένα τέτοιο τυπικό σύστημα[6] ήταν η θεωρία της ανάλυσης. Κλείνοντας την παρένθεση, και περνώντας από τον ορισμό σημείων-πρωτοβάθμια γλώσσα-, στον ορισμό υποσυνόλων και συναρτήσεων-δευτεροβάθμια γλώσσα-, ένας από τους βασικούς προβληματισμός των γάλλων μαθηματικών του 1900 που εξετάζουμε είναι: “Τί μπορεί να οριστεί μέσα από την γλώσσα της ανάλυσης;”

Ο Baire εισήγαγε(1897-1899) την πρώτη ταξινόμηση συναρτήσεων προς αυτήν την κατεύθυνση κάνοντας χρήση των αμφίβολων για την εποχή διατακτικών αριθμών. Οι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις ονομάστηκαν Baire 0-τάξης. Οι συναρτήσεις Baire τάξης-1 ήταν όλες εκείνες οι συναρτήσεις που μπορούσε κανείς να μαζέψει ως κατα σημείο όριο συνεχών. Γενικότερα, χρησιμοποιώντας υπερπεπερασμένη επαγωγή για πρώτη φορά μετά τον Cantor, όρισε για κάθε αριθμήσιμο διατακτικο ξ τις συναρτήσεις Baire τάξης-ξ ως όλες εκείνες τις συναρτήσεις f για τις οποίες υπάρχει ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με f_n Baire τάξης μικρότερης από ξ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ για κάθε x[7].

Παράλληλα ο Borel 1898 ενδιαφερόμενος για την έννοια του σ-αθροιστικού μέτρου -που ο ίδιος εισήγαγε ως γενίκευση του κατά Jordan-Peano μέτρου- και του μετρήσιμου συνόλου, όρισε την οικογένεια Borel συνόλων ως την ελάχιστη οικογένεια συνόλων που περιέχει τα διαστήματα και είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις και τα συμπληρώματα.

Ο Lebesgue, μερικά χρόνια αργότερα, εμπνεόμενος από τις ιδέες του Borel και του Baire, κατάφερε να κάνει την πρώτη σύνδεση μεταξύ των Borel συνόλων και Baire συναρτήσεων. Η εργασία του *“Sur les fonctions representables analytiquement”*, έδωσε τις βάσεις και τους λόγους για να αποσχιστεί από την ανάλυση και την συνολοθεωρία και να καταστεί ένας νέος αυτοτελης κλάδος των Μαθηματικών και της Λογικής η Περιγραφική συνολοθεωρία. Ο λόγος είναι διπλός. Αφενός λόγω των αποτελεσμάτων που κατάφερε να εδραιώσει και αφετέρου, λόγω ενός παρακάμψιμου μεν για την συγκεκριμένη απόδειξη, υπερβολικά δε καρποφόρου λάθους του.

Συγκεκριμένα στο *“Sur les fonctions representables analytiquement”* ο Lebesgue:

1. Όρισε οικογένεια των *αναλυτικά αναπαραστάσιμων συναρτήσεων* ως το μικρότερο σύνολο συναρτήσεων $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ το οποίο:

    - Περιέχει τις όλες σταθερές συναρτήσεις.
    - Περιέχει τις συναρτήσεις προβολής $(x_1, x_2, \dots, x_n) \to x_i \;\; 0 < i \leq n$

[5]Προφανώς η σκέψη των αρχαίων γεωμετρών δεν περιορίστηκε από ένα σημείο και μετά στον κανόνα και τον διαβήτη. Πολλά προβλήματα αν όχι όλα, είχαν πρακτικά λυθεί πολύ πριν την εμφάνιση του αλγεβρικού φορμαλισμού και της ανάλυσης(κωνικές τομές, μέθοδος εξάντλησης,...).

[6]Μετά τους $\epsilon - \delta$ ορισμούς των Bolzano-Cauchy ήταν πλέον τυπικό

[7]Ο Baire ασχολήθηκε με τις πρώτες λίγες μόνο τάξεις Baire και θεωρούσε ότι αριθμοί πιο ψηλά από το ω είναι απλά “σχήματα λόγου”. Έδειξε για παράδειγμα ότι υπάρχουν συναρτήσεις Baire τάξης-1 που δεν είναι Baire τάξης-0 και όμοια Baire τάξης-2 που δεν είναι Baire τάξης-1. Ένα τέτοιο παράδειγμα συνάρτησης που δεν γράφεται ως κατά σημείο όριο συνεχών είναι η ίδια η συνάρτηση Dirichlet η οποία μπορεί να γραφτεί ως $\lim\limits_{m\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} \cos^{2n}(m!\pi x)$ και άρα είναι τάξης-2

- Είναι κλειστό αλγεβρικά $(+,*)$, περιέχει δηλαδή όλα τα πολυώνυμα
- Είναι κλειστό κάτω από την λήψη κατά σημείο ορίων.

2. Έδειξε ότι η οικογένεια των *αναλυτικά αναπαραστάσιμων συναρτήσεων* ταυτίζεται με την οικογένεια των Baire συναρτήσεων.

3. Έδειξε ότι η οικογένεια των Borel συνόλων ταυτίζεται με την οικογένεια των αντίστροφων εικόνων ανοικτών διαστημάτων μέσω Baire συναρτήσεων
$\mathcal{B} = \{f^{-1}(I) :$ όπου f είναι Baire συνάρτηση και $I \subset \mathbb{R}$ ανοικτό διάστημα$\}$

Θεμελιώνοντας την παραπάνω σύνδεση, κατάφερε για πρώτη φορά να εισάγει μια ιεραρχία στην πολυπλοκότητα των Borel συνόλων. Όρισε για κάθε διατακτικό αριθμό ξ τα Borel σύνολα τάξης ξ να είναι οι αντίστροφες εικόνες ανοικτών διαστημάτων μέσω συναρτήσεων Baire τάξης-ξ τα οποία δεν ήταν ήδη Borel σύνολα χαμηλότερης τάξης. [8] Απέδειξε επίσης τα δύο πολύ βασικά θεωρήματα:

A. Η Baire ιεραρχία είναι αυστηρή. Δηλαδή για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό ξ υπάρχει συνάρτηση Baire τάξης-ξ που δεν βρίσκεται σε καμία προηγούμενη τάξη(και συνεπώς για κάθε ξ, υπάρχει Borel σύνολο τάξης-ξ). [9]

B. Υπήρχε συνάρτηση Lebesgue μετρήσιμη η οποία δεν άνηκε στην ιεραρχία του Baire, δηλαδη δεν ήταν *αναλυτικά αναπαραστάσιμη* (όμοια λοιπόν υπήρχε Lebesgue μετρήσιμο σύνολο όχι Borel).

Όπως θα δούμε, ενώ το θεώρημα A. ειναι μια αληθής και αποδείξιμη πρόταση, η απόδειξη που παρουσίασε ο Lebesgue στο *"Sur les fonctions representables analytiquement"* ήταν λάθος. Έχει επίσης ενδιαφέρον ότι για να αποδείξει το θεώρημα B. ο Lebesgue δημιούργησε ένα σαφώς οριζόμενο από την γλώσσα της ανάλυσης σύνολο το οποίο έμελε αργότερα να αποτελέσει το πρώτο παράδειγμα *Αναλυτικού* όχι Borel συνόλου.

Για πρώτη φορά φάνηκε ότι ο διατακτικός αριθμός ω_1 ήταν μάλλον απαραίτητος στην μελέτη μαθηματικών αντικειμένων-και όχι απλά ένα περιττό συντακτικό παιχνίδι- καθότι κανένας προηγούμενος διατακτικός αριθμός δεν παρείχε αρκετό μήκος για μια φυσική ταξινόμηση, αφενός των Borel συνόλων και αφετέρου των Baire συναρτήσεων. Η μαθηματική πρακτική ξεπέρασε το φράγμα του ω_0 για να φτάσει στον πρώτο υπεραριθμήσιμο διατακτικό ω_1 και αυτό γέννησε με την σειρά του νέες φιλοσοφικές διαμάχες περί οντολογίας των διαφόρων μαθηματικών αντικειμένων. [10] Επιπλέον οι τεχνικές και τα ερωτήματα που γεννήθηκαν κυρίως από τον Cantor και τον Lebesgue[11] (διαγώνια επιχειρήματα,universal sets,χρήση μαθηματικών αντικειμένων) ήταν ο προάγγελος της μεγάλης στροφής της μαθηματικής σκέψης στην γλώσσα και την λογική. Αυτό που έλειπε ήταν η τυποποίηση της μαθηματικής γλώσσας. Γεγονός που το 1931 έφερε εις πέρας ο Godel.

[8] Τα Borel σύνολα τάξης-0 είναι με αυτόν τον ορισμό τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$

[9] Υπενθυμίζουμε ότι ο Baire δεν είχε ασχοληθεί με τάξεις μεγαλύτερες του πρώτου αριθμήσιμου διατακτικού ω

[10] Poincare(1906),Shoenflies(1905),Brouwer(1907)

[11] Έχει επίσης ενδιαφέρον η συμβολή του Borel στην εργασία του Lebesgue. Λέγεται ότι ο ενώ ο Lebesgue κατασκεύασε universal sets για κάθε τάξη Baire συναρτήσεων, ο Borel ήταν εκείνος που του έδωσε εν συνεχεία την ιδέα της διαγωνοποίησης.

1.3 Μόσχα 1914-1917

Η ιστορία οφείλει μάλλον την συνέχεια της στον νεαρό τότε λέκτορα του πανεπιστημίου της Μόσχας(Moscow Imperial University) Nikolai Nikolaevich Luzin. Το 1914 ο Luzin είχε μόλις επιστρέψει από ένα μεγάλο ταξίδι στο Παρίσι το Gottingen και το Λονδίνο. Επηρεασμένος από τις ιδέες στις οποίες είχε εκτεθεί, διοργάνωσε μαζί με το καθηγητή D.F.Egorov ένα σεμινάριο πάνω στην *"Θεωρία συνόλων και συναρτήσεων"*. Ο χαρακτήρας και η πολυεπίπεδη ιδιοφυία του Luzin συγκέντρωσε γύρω του μια πληθώρα φοιτητών. Μέλη της ομάδας αυτής που αυτοαποκαλούταν χαριτολογώντας *Luzitania* ήταν οι D.E.Men'shov, A.Ya.Kinchin, P.S.Aleksandrov, M.Y.Suslin καθώς και ο πολωνός μαθηματικός Waclaw Sierpinski, ο οποίος μέχρι την λήξη του Α' παγκόσμιου πολέμου το 1918 παρέμεινε αναγκαστικά με την οικογένεια του στην Μόσχα. [12]

Την άνοιξη του 1915, ο Luzin έδωσε στον Aleksandrov να κοιτάξει το πρόβλημα της πληθικότητας των υποσυνόλων του συνεχούς(CH). Ο Cantor[13] το 1883 είχε δείξει ότι κάθε κλειστό υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει μη κενό τέλειο υποσύνολο(δες ορισμό 4.13). Ως εκ'τούτου κάθε κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είτε είναι αριθμήσιμο, είτε έχει την πληθικότητα του συνεχούς($2^{\aleph_0}$). Το πρόβλημα λοιπόν που ήταν ανοικτό και προτάθηκε στον Aleksandrov ήταν να εξετάσει το κατά πόσο μπορούσε να γενικεύσει το ίδιο αποτέλεσμα για το τυχών Borel σύνολο.

Το 1915 ο Aleksandrov και παράλληλα -στην αποκομμένη λόγω Α' παγκοσμίου πολέμου Βόννη- ο Haussdorff απέδειξαν την υπόθεση του συνεχούς για τα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Και οι δύο χρησιμοποίησαν για το συγκεκριμένο $\xi < \omega_1$ κατάλληλες αναπαραστάσεις μέσω κλειστών συνόλων [14] για όλα τα Borel σύνολα τάξης ξ. Μέσα από αυτήν την αναπαράσταση και χρήση υπερπεπερασμένης επαγωγής πάνω στο ξ μπόρεσαν να δείξουν ότι: Κάθε υπεραριθμήσιμο Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ έχει την πληθικότητα του συνεχούς.

Η μέθοδος αυτή του Aleksandrov πήγαινε μόνο προς την μία κατεύθυνση. Το επιλεγμένο σύνολο Borel τάξης ξ αναλύονταν σε κατάλληλα κλειστά σύνολα.(δες σχήμα 1.1)

Αμέσως μετά ο Luzin πρότεινε στο νέο μαθητή του, Suslin να δοκιμάσουν μαζί με τον Aleksandrov να φορμαλίσουν την αναπαράσταση του Aleksandrov ώστε να μπορούν να παράγουν κάθε Borel σύνολο, ανεξαρτήτως τάξης, με έναν ενιαίο τρόπο. Ο Aleksandrov ύστερα από λίγο καιρό παραιτήθηκε [15] από την προσπάθειά ενώ ο Suslin κατάφερε να συστηματοποιήσει την διαδικασία.

Πρότεινε την επαναδείκτηση μιας ακολουθίας κλειστών συνόλων $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με δείκτες από το σύνολο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών φυσικών αριθμών, χρησιμοποιώντας έτσι εξ αρχής δέντρο με κλαδιά απείρου μήκους: [16].

$$\{A_{n_1,n_2,\ldots,n_k}\}_{k,n_1,\ldots,n_k=1}^{\infty} = \{A_s, s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\} \tag{1.4}$$

[12]Έχει πραγματικά ενδιαφέρον να δει κανείς την ιστορία των *αναλυτικών* συνόλων από εδώ και πέρα ως μια υποιστορία μέσα στα τεράστια ιστορικά γεγονότα που λάμβαναν χώρα αφενός παγκοσμίως(Α' παγκόσμιος πόλεμος 1914-1918) αλλά και ειδικά στην Μόσχα(Ρώσικη επανάσταση 1917).

[13]και ανεξάρτητα ο Bendixson

[14]Ο Haussdorff χρησιμοποίησε ανοικτά αντί υποσύνολα και ελαφρώς διαφορετική και πιο κοντινή στον σημερινή ιεράρχηση των Borel συνόλων.

[15]Η έγγραπτη παραίτησή του αποτέλεσε αποδεικτικό στοιχείο υπέρ του Luzin στην δίκη του 1936 όπου ο Aleksandrov τον κατηγορούσε για λογοκλοπή. Το σταλινικό καθεστώς είχε κλείσει σε προηγούμενη δίκη τον Egorov στην φυλακή κατηγορώντας τον για ιδεαλισμό! Λίγο καιρό αργότερα εξαφανίστηκε και κανείς δεν τον ξαναείδε.

[16]Αυτό είναι εφικτό διότι το σύνολο των πεπερασμένων ακολουθιών φυσικών αριθμών είναι αριθμήσιμο

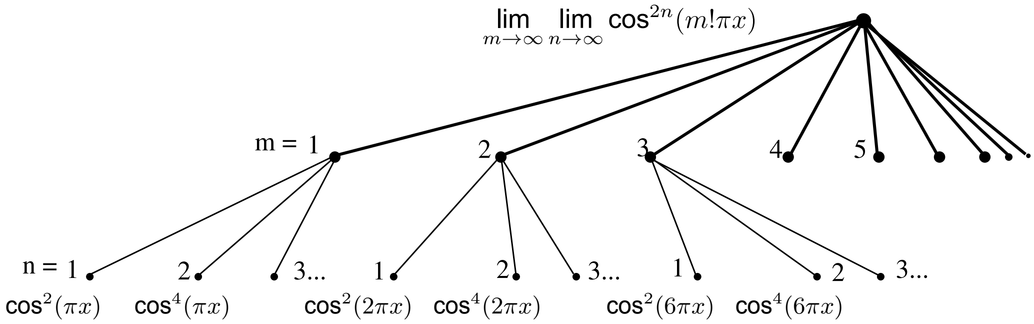

Figure 1.1: *Χρησιμοποιώντας το παραπάνω δέντρο βλέπουμε σχηματικά το πως η συνάρτηση Baire τάξης-2 του Dirichlet αναλύεται τελικά σε συνεχείς συναρτήσεις. Τις συναρτήσεις δηλαδή που βρίσκονται στα φύλλα του δέντρου τα οποία απέχουν στο συγκεκριμένο σχήμα απόσταση δύο από την ρίζα του δέντρου. Κάθε συνάρτηση Baire τάξης ξ όπου $\xi < \omega_1$ μπορεί να αναλυθεί σε συνεχείς συναρτήσεις χρησιμοποιώντας κάποιο αντίστοιχο δέντρο όπου κάθε τελικό φύλλο απέχει πεπερασμένη πάντα απόσταση από την ρίζα. Αυτά τα δέντρα ονομάζονται καλά θεμελιωμένα. Δοθέντος τώρα ενός Borel συνόλου τάξης ξ, ο Aleksandrov κατάφερε να το αναλύσει με παρόμοιο τρόπο σε κλειστά υποσύνολα χρησιμοποιώντας επί της ουσίας ένα καλά θεμελιωμένο δέντρο*

Εν συνεχεία όρισε πάνω στο παραπάνω σχήμα τον τελεστή:

$$\mathcal{A}\{A_s\} = \left\{ \bigcup_{(n_1,n_2,n_3,n_4,\dots)\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} A_{n_1} \cap A_{n_1,n_2} \cap A_{n_1,n_2,n_3} \cap \cdots \right\} \tag{1.5}$$

και τον ονόμασε $\mathcal{A}$-τελεστή προς τιμήν του Alexandrov.

Έτσι κατάφερε να εκφράσει ρητά κάθε Borel σύνολο[17] ως αποτέλεσμα της δράσης του $\mathcal{A}$-τελεστή πάνω σε σχήματα κλειστών συνόλων. Δηλαδή είχε στα χέρια του μια γενική μέθοδο κατασκευής Borel(και όχι μόνο) συνόλων η οποία δεν χρησιμοποιούσε υπερπεπερασμένους διατακτικούς. Η σημασία του γεγονότος αυτού για την εποχή αυτή φαίνεται από τον τίτλο της δημοσίευσης, “Sur une defition des ensembles measurables B sans nobres transfinis”. [18]

Παράλληλα ο Suslin με τη προτροπή του Luzin μελετούσε την δουλειά του Lebesgue[1905]. Ο Lebesgue, για να καταφέρει αποδείξει το Θεώρημα Α. κατασκεύαζε για τον τυχαίο διατακτικό αριθμο ξ, ένα universal set[19](δες θεώρημα 5.1) για όλες τα σύνολα Borel τάξης-ξ το οποίο εν συνεχεία διαγωνοποιούσε με ένα επιχείρημα τύπου Cantor για να οδηγηθεί σε ένα σύνολο Borel μεγαλύτερης τάξης. Το συνολικό επιχείρημα δε, στηριζόταν στο *θεώρημα της εμμέσως αναλυτικά ορίσιμης συνάρτησης* το οποίο παρά το παρακάτω σφάλμα στην αρχική απόδειξη του Lebesque, αποδείχτηκε εκ των υστέρων αληθές.

Θα το παρουσιάσουμε στην απλή περίπτωση όπου $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Θεώρημα 1.1 (Θεώρημα τις έμμεσα ορίσιμης συνάρτησης) *(Αληθές):*
Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ αναλυτικά αναπαραστάσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει επιπλέον ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x, y) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση y. Τότε η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπου $g(x)$ είναι το μοναδικό αυτό y, είναι αναλυτικά αναπαραστάσιμη.

[17] Αν και όπως είδε στην πορεία, η παραγόμενη οικογένεια ήταν ευρύτερη των Borel

[18] Μτφρ:“Ενας ορισμός των Β-μετρήσιμων(Borel) συνόλων δίχως υπερπεπερασμένους αριθμούς”.

[19] έννοια που ο ίδιος πρωτοεισήγαγε

Το λάθος στην απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος απο τον Lebesgue βρισκόταν στο παρακάτω ψευδές λήμμα:

Θεώρημα 1.2 *(Ψευδές): Η προβολή ενός συνόλου Borel του $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$ όπου $m < n$ είναι Borel*

Ο Lebesgue περιέγραφε μία απόδειξη του παραπάνω λήμματος όπου κάποια βήματα αφήνονταν ως προφανή. Η απόδειξη πήγαινε κάπως έτσι:

Δοθέντος $E \subset \mathbb{R}^n$ Borel θα δείξω ότι η προβολή του στον $\mathbb{R}^m$ είναι Borel. Αυτό όμως είναι προφανές αν το E είναι n-διάστατο διάστημα $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$. Όμως κάθε Borel σύνολο του $\mathbb{R}^i, i \in \mathbb{N}$ μπορεί να δημιουργηθεί ξεκινώντας από τα διαστήματα του $\mathbb{R}^i$ και εφαρμόζοντας διαδοχικά τις εξής δύο πράξεις:

1. $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ όπου $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ φθίνουσα ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}^i$, $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$
2. $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ όπου $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}^i$,

Οι πράξεις αυτές όμως διατηρούνται μέσω της προβολής του $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$, δηλαδή

$$\text{proj}_{\mathbb{R}^m}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \cup_{n=1}^{\infty} \text{proj}_{\mathbb{R}^m}(A_n) \quad \text{όπου, } \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ ακολουθία υποσυνόλων του } \mathbb{R}^n \tag{1.6}$$

και

$$\text{proj}_{\mathbb{R}^m}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \cap_{n=1}^{\infty} \text{proj}_{\mathbb{R}^m}(A_n) \quad \text{όπου, } \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ φθίνουσα ακολουθία υποσυνόλων του } \mathbb{R}^n \tag{1.7}$$

και άρα η απόδειξη του λήμματος, έχει ολοκληρωθεί...

Η απόδειξη όμως ήταν λάθος διότι ενώ $\text{proj}_{\mathbb{R}^m}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \cup_{n=1}^{\infty} \text{proj}_{\mathbb{R}^m}(A_n)$, το ίδιο δεν αληθεύει με την τομή, ακόμα και φθίνουσας ακολουθίας συνόλων.

Παράδειγμα 1.3 Για $n = 2$ και $m = 1$ και $A_n = \{0\} \times (0, \frac{1}{n})$ έχουμε ότι:
$\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, και $\text{proj}_{\mathbb{R}}(A_n) = \{0\}\ \forall n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς, $\text{proj}_{\mathbb{R}}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \emptyset$ ενώ $\cap_{n=1}^{\infty} \text{proj}_{\mathbb{R}}(A_n) = \{0\}$

Ο Suslin ήταν αυτός που εντόπισε το λάθος στην απόδειξη του Lebesgue και βρήκε ενα αντιπαράδειγμα για το λήμμα αυτο. Δηλαδή βρήκε ένα σύνολο Borel του $\mathbb{R}^2$ όπου η προβολή του στο $\mathbb{R}$ δεν είναι Borel. Ταυτόχρονα συνέδεσε την πράξη της προβολής με την δράση του $\mathcal{A}$-τελεστή και απέδειξε τα πρώτα αποτελέσματα για την νέα αυτή οικογένεια συνόλων που ονομάστηκαν αναλυτικά σύνολα. Ο Luzin πιο μετά έδειξε ότι το αρχικό θεώρημα του Lebesgue, παρά την λάθος του απόδειξη, ήταν αληθές.

Η άριστη καθοδήγηση του Luzin, η προηγηθείσα δουλειά του Aleksandrov και η επιμονή του Suslin οδήγησαν τον τελευταίο στην κατασκευή (το 1916) ενός διπλού αντιπαραδείγματος. Το πρώτο σύνολο που δεν ήταν Borel προερχόμενο εντούτοις από ένα Borel σύνολο μέσω της προβολής. Το πρώτο όχι Borel σύνολο, προερχόμενο από την $\mathcal{A}$-operation. Ήταν το πρώτο σύνολο που ενώ δεν ήταν Borel, ήταν ”αναλυτικά αναπαραστάσιμο”.

2 Δέντρα, ο χώρος Baire και ο τελεστής Souslin

2.1 Δέντρα

Έστω μη κενό σύνολο A. Συμβολίζουμε με $A^{<\mathbb{N}}$ όλες τις πεπερασμένες ακολουθίες από στοιχεία του A συμπεριλαμβανομένης της κενής ακολουθίας που συνήθως συμβολίζεται με e ή με $(\emptyset)$ και με $A^{\mathbb{N}}$ όλες τις αριθμήσιμες ακολουθίες από στοιχεία του A. Το σύνολο A στην εργασία αυτή θα είναι συνήθως το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, πιο σπάνια το σύνολο $\{0,1\}$ και σε μια-δύο περιπτώσεις το $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Θα χρησιμοποιούμε συνήθως τα γράμματα

- $n, m, k, l, \ldots$ για να συμβολίσουμε στοιχεία του A,
- $s, t, r, \ldots$ για να συμβολίσουμε στοιχεία του $A^{<\mathbb{N}}$, και
- $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ για να συμβολίσουμε στοιχεία του $A^{\mathbb{N}}$

Αν $s \in A^{<\mathbb{N}}$, συμβολίζουμε με $|s|$ το μήκος της πεπερασμένης ακολουθίας. Ορίζουμε για την κενή ακολουθία $|e| = 0$. Αν $\alpha \in A^{\mathbb{N}}$ τότε με $\alpha(k)$ συμβολίζουμε την k-οστή συντεταγμένη του α που είναι στοιχείο του A. Με $\alpha|k$ συμβολίζουμε την πεπερασμένη ακολουθία $s \in A^{<\mathbb{N}}$ οποία είναι το αρχικό τμήμα του α μήκους k. Όμοια ορίζονται τα παραπάνω για την ακολουθία s, αν βέβαια $k \leq |s|$. Αν $s \in A^{<\mathbb{N}}$ με $|s| = k$ και $n \in A$, συμβολίζουμε με $s*n = t$ την πεπερασμένη ακολουθία μήκους $|s|+1$ της οποίας η s είναι αρχικό τμήμα και το τελευταίο στοιχείο της είναι το n. Τέλος αν η πεπερασμένη ακολουθία $s \in A^{<\mathbb{N}}$ είναι αρχικό τμήμα της πεπερασμένης ακολουθίας $t \in A^{<\mathbb{N}}$ (όπου υποχρεωτικά τότε $|s| \leq |t|$) ή της άπειρης ακολουθίας α, τότε γράφουμε $s \prec t$ και $s \prec \alpha$ αντίστοιχα.

Για παράδειγμα με $A = \mathbb{N}$, με:

$$\begin{aligned}
s_0 &= (3,1,4)\\
t_0 &= (3,1,4,1,5)\\
r_0 &= (1,1,1,1,1,1)\\
\alpha_0 &= (3,1,4,1,5,9,2,6,\ldots,i,\ldots) \text{ όπου } \alpha(i) \text{ το i-οστό δεκαδικό ψηφίο του π}
\end{aligned}$$

έχουμε $|r_0| = 6,\ s_0(2) = 1,\ \alpha_0(3) = 4,\ \alpha_0|5 = t_0,\ s_0 \prec t_0 \prec \alpha_0,\ s_0 * 1 * 5 = t_0.$

Η διμελής σχέση $\prec$ ορίζει μια μερική διάταξη στο $A^{<\mathbb{N}}$ και σε κάθε υποσύνολο του $A^{<\mathbb{N}}$. Στο παραπάνω παράδειγμα τα r_0 και s_0 είναι ασύγκριτα και το γεγονός αυτό το συμβολίζουμε με $r_0 \perp s_0$

Ορισμός 2.1 Δέντρο στο σύνολο A ονομάζεται κάθε $T \subset A^{<\mathbb{N}}$ τέτοιο ώστε $e \in T$ και για κάθε $t \in T$ υπάρχει $s \in T$ ώστε $s \prec t$. ■

Σε ένα δέντρο T λοιπόν υπάρχει πάντα το "ελάχιστο" στοιχείο e που συγκρίνεται με όλα τα στοιχεία του δέντρου. Κάθε μεγιστικό ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του T ονομάζεται κλαδί. Ένα κλαδί K μπορεί να είναι πεπερασμένο σε μήκος αν υπάρχει $s \in K$ ώστε για κάθε άλλο $t \in K$, $t \prec s$. Το s καλείται φύλλο του δέντρου. Αν υπάρχει $\alpha \in A^{\mathbb{N}}$ τέτοιο ώστε για κάθε φυσικό αριθμό n, $\alpha|n \in T$, τότε λέμε ότι το α είναι φύλλο ενός άπειρου κλαδιού ή απλά πως είναι ένα άπειρο κλαδί.

Γράφουμε $[T]$ και καλούμε "σώμα του δέντρου T" το σύνολο όλων τον άπειρων κλαδιών του T . Δηλαδή

$$[T] = \{\alpha \in A^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N} \;\; \alpha|n \in T\} \tag{2.1}$$

Είναι σημαντικό να προσέξει κανείς κανένα στοιχείο του $[T]$ δεν ανήκει στο δέντρο T. Το T είναι υποσύνολο του $A^{<\mathbb{N}}$, ενώ το $[T]$ είναι υποσύνολο του $A^{\mathbb{N}}$.

Αν το σύνολο A είναι άπειρο, μπορεί κανείς να δημιουργήσει δέντρα T με άπειρα στοιχεία και $[T] = \emptyset$. Αν όμως το T είναι "finitely splitting", δηλαδή αν για κάθε στοιχείο t του T υπάρχουν πεπερασμένα μόνο το πλήθος παιδιά[1], τότε αυτό βάση του παρακάτω λήμματος που ονομάζεται λήμμα του Konig είναι αδύνατο.

Θεώρημα 2.2 *Έστω ένα "finitely splitting", άπειρο δέντρο T στο σύνολο A. Τότε $[T] \neq \emptyset$.*

Απόδειξη

Αφού το δέντρο είναι άπειρο, η ρίζα e έχει άπειρους απογόνους. Όμως επειδή είναι "finitely splitting", έχει πεπερασμένα παιδιά συνεπώς για κάποιο $n_1 \in A$, ο κόμβος (n_1) θα έχει άπειρους απογόνους που πάλι θα μοιράζονται στα πεπερασμένα του παιδιά. Συνεπώς θα υπάρχει $n_2 \in A$ έτσι ώστε το (n_1, n_2) να επεκτείνει το (n_1) και παράλληλα να έχει άπειρους απογόνους. Έτσι χτίζουμε επαγωγικά μια άπειρη ακολουθία $\alpha = (n_1, n_2, n_3, \ldots)$ ώστε $\alpha|k \in T$ για κάθε φυσικό k. Συνεπώς, $\alpha \in [T] \neq \emptyset$. □

2.2 Ο χώρος Baire $\mathcal{N}$

Πολλά από αυτά που ειπώθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο θα εφαρμοστούν στο εξής σχεδόν αποκλειστικά, στην περίπτωση όπου $A = \mathbb{N}$. Σε αυτό το κεφάλαιο θα εφοδιάσουμε το σύνολο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ με μια τοπολογία. Ο τοπολογικός χώρος που θα πάρουμε ονομάζεται χώρος Baire, συμβολίζεται με $\mathcal{N}$ και είναι πολύ σημαντικός για τα παρακάτω.

Αφενός είναι κατά μία έννοια αρχέτυπο μια μεγάλης κλάσης τοπολογικών χώρων όπως θα δούμε στο κεφάλαιο των πολωνικών χώρων και αφετέρου έχει μια πολύ χρήσιμη ιδιότητα που τον καθιστά κατάλληλο για την μελέτη εννοιών πολυπλοκότητας πάνω στο συνεχές. Είναι ισομορφικός με όλα τα πεπερασμένα και αριθμήσιμα γινόμενα αυτού με τον εαυτό του: $\mathcal{N}^2, \mathcal{N}^3, \ldots, \mathcal{N}^{\mathbb{N}}, \ldots, (\mathcal{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}, \ldots$

Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{N}$ όλων των φυσικών αριθμών εφοδιασμένο με την μετρική

$$\rho(n, m) = |n - m| \tag{2.2}$$

που παράγει την διακριτή τοπολογία. Μια ακολουθία $\{n_k\}$ φυσικών συγκλίνει συνεπώς στο $m \in \mathbb{N}$ αν η ακολουθία είναι τελικά σταθερή και ίση με m. Ο χώρος $(\mathbb{N}, \rho)$ είναι διαχωρίσιμος και

[1] Το σύνολο $\{s : s * n = t$ για κάποιο $n \in A\}$ είναι πεπερασμένο

πλήρης. Ορίζουμε τον χώρο Baire($\mathcal{N}$) να είναι ο μετρικός χώρος γινόμενο

$$\prod_{i=1}^{\infty} X_i \quad \text{όπου} \quad X_i = (\mathbb{N}, \rho), \text{ για κάθε } i \tag{2.3}$$

Ο χώρος Baire είναι διαχωρίσιμος και πλήρης μετρικός χώρος ως αριθμήσιμο γινόμενο διαχωρίσιμων χώρων οι οποίοι είναι πλήρεις. Επιπλέον μια ακολουθία $\{\alpha_n\}$ στον $\mathcal{N}$ συγκλίνει στο $\beta \in \mathcal{N}$ αν συγκλίνει κατά συντεταγμένη δηλαδή αν

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k > k_0\ \ \alpha_k(n) = \beta(n) \in \mathbb{N} \tag{2.4}$$

Αυτή είναι μια πολύ σημαντική ιδιότητα του χώρου Baire η οποία του δικαιολογεί τον χαρακτηρισμό: "Ο χώρος Baire είναι η "διακριτοποίηση" του συνεχούς".

Για κάθε $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ ορίζουμε το σύνολο

$$\mathcal{N}_s = \{\alpha \in \mathcal{N} : \ \alpha \succ s\}, \tag{2.5}$$

το οποίο είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{N}$ και μάλιστα η συλλογή

$$\mathcal{N}_s,\ s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \tag{2.6}$$

αποτελεί μια βάση της τοπολογίας του χώρου Baire. Μάλιστα επειδή

$$\mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_s = \bigcup_{t:t \perp s} \mathcal{N}_t \tag{2.7}$$

έχουμε ότι για κάθε s το $\mathcal{N}_s$ είναι και κλειστό. Συνεπώς ο χώρος Baire έχει μια βάση από clopen σύνολα και άρα είναι μηδενοδιάστατος.

Ήδη φαίνεται πως η τοπολογία του χώρου Baire μπορεί να μελετηθεί με συνδυαστικούς όρους μέσω του χώρου $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Έχουμε για παράδειγμα τον εξής χαρακτηρισμό για τα κλειστά υποσύνολα του χώρου $\mathcal{N}$

Θεώρημα 2.3 *Το σύνολο $F \subset \mathcal{N}$ είναι κλειστό αν και μόνο αν υπάρχει δέντρο T στο $\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $[T] = F$*

Απόδειξη
Έστω F ένα κλειστό υποσύνολο του χώρου Baire. Θέτουμε

$$T = \{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : s \prec \alpha \text{ για κάποιο } \alpha \in F\} \tag{2.8}$$

Τότε το T είναι δέντρο στο $\mathbb{N}$ και είναι προφανές πως αν $\alpha \in F$ τότε $\alpha \in [T]$.

Από την άλλη, αν $\beta \notin F$ τότε υπάρχει $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ ώστε $\beta \in \mathcal{N}_s \subset \mathcal{N} \setminus F$.Τότε όμως $s \notin T$ διότι ειδάλλως θα υπήρχε $\alpha \in F$ με $s \prec \alpha$ και άρα $F \cap \mathcal{N}_s \neq \emptyset$.

Για το αντίστροφο, παρατηρείστε ότι αν $\beta \notin [T]$ για κάποιο δέντρο T στο $\mathbb{N}$, θα υπάρχει υποχρεωτικά $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\beta|n \notin T$ και συνεπώς $\mathcal{N}_{\beta|n} \cap [T] = \emptyset$ □

Το επόμενο θεώρημα είναι πολύ σημαντικό για τα παρακάτω.

Θεώρημα 2.4 *Όλοι οι παρακάτω χώροι είναι ισομορφικοί με τον $\mathcal{N}$*

1. $\mathbb{N} \times \mathcal{N}$
2. $\mathcal{N}^k$ *για κάθε φυσικό* k
3. $\mathcal{N}^{\mathbb{N}}$

Απόδειξη

1. Ορίζουμε την $f : \mathbb{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, με

$$(n, (n_1, n_2, n_3, \ldots)) = (n, \alpha) \to (n, n_1, n_2, n_3, \ldots) = \beta \tag{2.9}$$

2. Έστω $k \in \mathbb{N}$, ορίζουμε την $g : \mathcal{N}^k \to \mathcal{N}$, με

$$((n_{11}, n_{12}, \ldots), (n_{21}, n_{22}, \ldots), \ldots (n_{k1}, n_{k2}, \ldots)) \to (n_{11}, n_{21}, \ldots, n_{k1}, n_{12}, n_{22}, \ldots, n_{k2}, \ldots) \tag{2.10}$$

3. Έστω $u : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ μια "1-1" και επί συνάρτηση όπως για παράδειγμα η $u(m,n) = 2^m(2n+1) - 1$. Ορίζουμε την $h : \mathcal{N}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{N}$, με

$$h(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots) = \beta \text{ όπου } \beta(u(m,n)) = \alpha_m(n) \tag{2.11}$$

Οι συναρτήσεις f, g, h είναι όλες "1-1" και επί. Επιπλέον, επειδή η σύγκλιση μιας ακολουθίας σε οποιονδήποτε από τους παραπάνω χώρους μεταφράζεται σε κατά συντεταγμένη σύγκλιση, δηλαδή κάθε συντεταγμένη της ακολουθίας πρέπει να είναι τελικά σταθερή, είναι εύκολο να δούμε πως οι f, g, h είναι αμφισυνεχείς. Αφού στέλνουν και επιστρέφουν, συγκλίνουσες σε συγκλίνουσες ακολουθίες. □

Παρατήρηση 2.5 Χρησιμοποιώντας το παραπάνω θεώρημα και την σύνθεση συναρτήσεων μπορούμε να δούμε ότι κάθε πιθανό γινόμενο συνδυασμού των παραπάνω χώρων είναι ισομορφικό με το $\mathcal{N}$.

2.3 Τελεστής Souslin

Έστω σύνολο X και $\mathcal{F}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X. Μπορούμε -κάνοντας χρήση διάφορων τελεστών που δρουν πάνω σε δεικτοδοτημένες ομάδες συνόλων, να δημιουργήσουμε από την $\mathcal{F}$ νέες οικογένειες συνόλων. Έτσι έχουμε για παράδειγμα:

$$\mathcal{F}_\sigma = \{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \ : \ A_n \in \mathcal{F}, \ \forall n \in \mathbb{N}\} \tag{2.12}$$

$$\mathcal{F}_\delta = \{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \ : \ A_n \in \mathcal{F}, \ \forall n \in \mathbb{N}\} \tag{2.13}$$

$$\neg\mathcal{F} = \{X \setminus A \ : \ A \in \mathcal{F}\} \tag{2.14}$$

Είναι εύκολο να δει κανείς πως από τους παραπάνω ορισμούς έχουμε άμεσα πως $\neg\neg\mathcal{F} = \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_{\sigma\sigma} = \mathcal{F}_\sigma$, $\mathcal{F}_{\delta\delta} = \mathcal{F}_\delta$, $\mathcal{F}_\sigma = \neg(\neg\mathcal{F})_\delta$, $\mathcal{F}_\delta = \neg(\neg\mathcal{F})_\sigma$

Για παράδειγμα, μπορούμε να αποδείξουμε την τελευταία σχέση:

Απόδειξη

Έστω $A \in \mathcal{F}_\delta$ τότε $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ με $A_n \in \mathcal{F}, \ \forall n \in \mathbb{N}$ οπότε:

$$A = ((\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n)^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}} \quad \text{με} \quad A_n \in \mathcal{F}, \ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$A = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}} \quad \text{με} \quad A_n \in \mathcal{F}, \ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$A = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n)^{\mathsf{c}} \quad \text{με} \quad B_n \in \neg\mathcal{F},\ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$A = B^{\mathsf{c}} \quad \text{με} \quad B \in (\neg\mathcal{F})_\sigma \Leftrightarrow$$

$$A \in \neg(\neg\mathcal{F})_\sigma$$

□

Μια οικογένεια $\{A_s : s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ υποσυνόλων του X δεικτοδοτημένη με το σύνολο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών φυσικών αριθμών -για παράδειγμα ένας δείκτης είναι το $s = (3, 14, 1, 5, 7, 1)$- θα την καλούμε *σύστημα συνόλων* και συχνά θα την συμβολίζουμε απλά με $\{A_s\}$.

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι το πλήθος του συνόλου των πεπερασμένων ακολουθιών φυσικών αριθμών είναι αριθμήσιμο. Δηλαδή ένα σύστημα συνόλων παρά την παράξενη δεικτοδότηση σε σχήμα "δένδρου", δεν πάβει να είναι μια αριθμήσιμη οικογένεια συνόλων.

Ορισμός 2.6 Ένα σύστημα $\{A_s\}$ λέγεται κανονικό αν $A_s \subset A_t \Leftrightarrow s \succ t$. Δηλαδή αν τα αρχικά τμήματα καθώς "κατεβαίνει" κανείς ένα κλαδί, δεικτοδοτούν μια φθίνουσα ακολουθία συνόλων.■

Ορίζουμε τον τελεστή Suslin, τον οποίο συμβολίζουμε με $\mathcal{A}$, μέσα από την δράση του σε ένα σύστημα συνόλων:

$$\mathcal{A}(\{A_s\}) = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{N}} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha|n} \tag{2.15}$$

Επιπλέον, για την τυχούσα οικογένεια $\mathcal{F}$ υποσυνόλων του X θέτουμε:

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{A}(\{A_s\}) : A_s \in \mathcal{F} \text{ για κάθε } s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\} \tag{2.16}$$

Δηλαδή η $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ είναι μια νέα οικογένεια υποσυνόλων του X η οποία παράγεται δρώντας τον τελεστή Souslin σε κάθε δυνατό σύστημα συνόλων από την οικογένεια $\mathcal{F}$

Παρατήρηση 2.7 Αν η $\mathcal{F}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές, είναι εύκολο να δούμε ότι η οικογένεια $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ μπορεί να παραχθεί δρώντας τον τελεστή Souslin μόνο σε κανονικά συστήματα της $\mathcal{F}$

Ας παρατηρήσουμε ακόμη ότι η δράση του τελεστή Souslin περιλαμβάνει λήψη υπεραριθμήσιμων ενώσεων. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού στην συνέχεια θα τον χρησιμοποιήσουμε για να παράγουμε σύνολα τα οποία δε είναι Borel πράγμα που δεν θα μπορούσε να γίνει αν οι πράξεις-ενώσεις και τομές- που χρησιμοποιούσαμε ήταν αριθμήσιμες. Εντούτοις, αυτό που έχει ενδιαφέρον εδώ και υπό μία έννοια καθιστά τα σύνολα της $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ "κατασκευάσιμα" δοθείσας $\mathcal{F}$ είναι ότι ο τελεστής αυτός δρα κάθε φορά σε αριθμήσιμες το πλήθος οικογένειες-συστήματα $\{\mathrm{A}_s\}$.

Πολλές φορές είναι δύσκολο να μελετήσουμε τα σύνολα $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ορισμό και μόνο. Υπάρχουν διάφοροι ισοδύναμοι ορισμοί της οικογένειας $\mathcal{A}(\mathcal{F})$. Για την ώρα αρκεί (και είναι χρήσιμο) να δούμε το ότι ο τελεστής Souslin σχετίζεται στενά με την έννοια της προβολής ως εξής:

Έστω $B \subset X \times I$ όπου X, I μη κενά σύνολα και έστω $\mathrm{proj}^I : X \times I \to X$ με $\mathrm{proj}^I(x, i) = x$, η συνάρτηση προβολής στον X (προσοχή στον συμβολισμό)[2].

[2]Γενικά αυτό που έχει σημασία στα παρακάτω δεν είναι τόσο το σε ποιον χώρο γίνεται η προβολή(εν προκειμένω στον X) αλλά κατά μήκος ποιού χώρου γίνεται (του I). Θα βάζουμε τον χώρο πάνω στον οποίο προβάλουμε ως κάτω δείκτη ενώ ως πάνω δεικτη θα βάζουμε τον χώρο κατά μήκος του οποίου προβάλουμε. Συνήθως βέβαια θα παραλείπουμε έναν από τους δύο.

Γράφουμε επίσης $B_i = \{x \in X$ για τα οποία $(x,i) \in B\}$

Είναι εύκολο να δούμε πως

$$\text{proj}^I(B) = \bigcup_{i \in I} B_i \tag{2.17}$$

Έτσι γίνεται φανερό πως εν γένει, μια υπεραριθμήσιμη ένωση μπορεί να γραφτεί ως προβολή ενός κατάλληλου συνόλου σε έναν κατάλληλο χώρο γινόμενο. Η ρητή έκφραση όμως της υπεραριθμήσιμης ένωσης του τελεστή Souslin, μας επιτρέπει να πούμε κάτι παραπάνω για την μορφή του χώρου γινόμενο και του συνόλου που προβάλουμε.

Θεώρημα 2.8 *Έστω $\{A_s : s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ ένα σύστημα υποσυνόλων του X και έστω*

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{|s|=n} A_s \times \mathcal{N}_s \qquad \text{δηλαδή },\ B \subset X \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \tag{2.18}$$

Τότε $\mathcal{A}(\{A_s\}) = \text{proj}^{\mathcal{N}}(B)$.

Απόδειξη

Θα δείξουμε ότι $\mathcal{A}(\{A_s\}) \subset \text{proj}^{\mathcal{N}}(B)$ και $\mathcal{A}(\{A_s\}) \supset \text{proj}^{\mathcal{N}}(B)$. Έστω $x \in \mathcal{A}(\{A_s\})$ τότε $\exists \alpha \in \mathcal{N}$ ώστε $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha|n}$.

Επειδή εξ ορισμού $\alpha \in \mathcal{N}_{\alpha|n}\ \forall n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι $(x,\alpha) \in A_{\alpha|n} \times \mathcal{N}_{\alpha|n} \forall n \in \mathbb{N}$

Όμως $A_{\alpha|n} \times \mathcal{N}_{\alpha|n} \subset \bigcup_{s:|s|=1} A_s \times \mathcal{N}_s$ άρα $(x,\alpha) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{s:|s|=n} A_s \times \mathcal{N}_s = B$. Συνεπώς $x \in \text{proj}^{\mathcal{N}} B$ άρα

$$\mathcal{A}(\{A_s\}) \subset \text{proj}^{\mathcal{N}}(B) \tag{2.19}$$

Αντίστροφα, έστω $x \in \text{proj}^{\mathcal{N}} B$ τότε

$$\exists \alpha \in \mathcal{N} \quad \text{ώστε} \quad (x,\alpha) \in B \Rightarrow \tag{2.20}$$

$$(x,\alpha) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{s:|s|=n} A_s \times \mathcal{N}_s \Rightarrow \tag{2.21}$$

$$(x,\alpha) \in \bigcup_{s:|s|=n} A_s \times \mathcal{N}_s \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.22}$$

$$(x,\alpha) \in A_{\alpha|n} \times \mathcal{N}_{\alpha|n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.23}$$

□

αφού η μόνη από τις περιοχές $\mathcal{N}_s, |\ s\ |= n$ που περιέχει το α είναι η $\mathcal{N}_{\alpha|n}$.

Άρα, $x \in A_{\alpha|n} \forall n \in \mathbb{N}$ άρα $x \in \bigcup_{\alpha \in \mathcal{N}} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha|n}$ και συνεπώς

$$\mathcal{A}(\{A_s\}) \supset \text{proj}^{\mathcal{N}}(B) \tag{2.24}$$

Μια παρατήρηση που οφείλουμε να κάνουμε εδώ είναι ότι ο χώρος Baire εμφυτεύεται ισομορφικά σε ένα G_δ υποσύνολο του $\mathbb{R}$.[3] Συνεπώς υπάρχει τρόπος στο παραπάνω θεώρημα να αντικαταστήσουμε τον $\mathcal{N}$ με τον $\mathbb{R}$. Γενικότερα όπως θα δουμε στο κεφάλαιο των πολωνικών χώρων, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για το ίδιο αποτέλεσμα κάθε υπεραριθμήσιμο πολωνικό χώρο στην θέση του $\mathcal{N}$.

[3] Μπορεί κανείς να αντιστοιχίσει σε κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$ τον πραγματικό αριθμό που οι συντελεστές του συνεχούς του κλάσματος είναι οι όροι της ακολουθίας α . Είναι εύκολο να δει κανείς πως η απεικόνιση αυτή είναι ομοιομορφισμός του χώρου $\mathcal{N}$ με το σύνολο των θετικών άρρητων πραγματικών αριθμών το οποίο είναι G_δ υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Η ακολουθία $(1,1,1,1,1,\ldots) \in \mathcal{N}$ μέσω της απεικόνισης αυτής αντιστοιχίζεται στην χρυσή τομή $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Είναι χρήσιμο αυτήν την στιγμή ο αναγνώστης να εξετάσει το γιατί εν γένει

$$\mathcal{A}\{A_s\} \neq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{s:|s|=n} A_s \tag{2.25}$$

Θεώρημα 2.9 *Έστω $\{A_s : s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ ένα σύστημα συνόλων με $A_s \cap A_t = \emptyset$ όταν $s \perp t$. Τότε:*

$$\mathcal{A}\{A_s\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{s:|s|=n} A_s \tag{2.26}$$

Απόδειξη
Είναι άμεσο ότι $\mathcal{A}\{A_s\} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{s:|s|=n} A_s$.
Αντίστροφα έστω $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{s:|s|=n} A_s$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ διαλέγουμε $s_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $\mid s_n \mid= n$ ώστε $x \in A_{s_n}$. Επειδή $A_s \cap A_t = \emptyset$ όταν $s \perp t$, τα s_n είναι συγκρίσιμα μεταξύ τους και ειδικότερα $s_1 \prec s_2 \prec s_3 \prec \ldots$. Άρα υπάρχει $\alpha \in \mathcal{N}$ ώστε $\alpha \mid n = s_n \forall n \in \mathbb{N}$ □

Θεώρημα 2.10 *Έστω $\{A_s : s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ ένα κανονικό σύστημα συνόλων με την επιπλέον ιδιότητα ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $\{s : \ \mid s \mid= n$ και $A_s \neq \emptyset\}$ είναι πεπερασμένο. Τότε:*

$$\mathcal{A}\{A_s\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{s:|s|=n} A_s \tag{2.27}$$

Απόδειξη
Αρκεί όπως και πριν να δείξουμε ότι $\mathcal{A}\{A_s\} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{s:|s|=n} A_s$. Έστω $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{s:|s|=n} A_s$. Λόγω του ότι το $\{A_s\}$ είναι κανονικό, έχουμε ότι το $T = \{s : s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ ώστε $x \in A_s\}$ είναι δέντρο στο $\mathbb{N}$. Λόγω της δεύτερης ιδιότητας ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $\{s : \ \mid s \mid= n$ και $A_s \neq \emptyset\}$ είναι πεπερασμένο, το δέντρο T είναι επιπλέον finite splitting και επειδή $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{s:|s|=n} A_s$, το T είναι άπειρο. Άρα από το λήμμα του Konig(δες δέντρα) έχουμε ότι $\exists \alpha \in \mathcal{N}$ ώστε $\alpha \mid n \in T \ \forall n \in \mathbb{N}$. Άρα $x \in A_{\alpha|n} \forall n \in \mathbb{N}$ δηλαδή $x \in \mathcal{A}(\{A_s\})$ □

2.4 Ιδιότητες κλειστότητας του τελεστή Souslin

Έστω σύνολο X. και $\mathcal{F}$ οικογένεια υποσυνόλων του X.Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε την σχέση της οικογένειας συνόλων $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ με άλλες οικογένειες $\mathcal{F}_\delta, \mathcal{F}_\sigma, \mathcal{F}_{\delta\sigma}, \mathcal{A}\mathcal{A}(\mathcal{F}), \mathcal{A}(\mathcal{F})_{\delta\sigma}, \ldots$ προερχόμενες από την $\mathcal{F}$

Πρόταση 2.11 *Έστω $\mathcal{F}$ οικογένεια συνόλων. Τότε $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}(\mathcal{F})$*

Απόδειξη
Έστω $F \in \mathcal{F}$ και έστω το σύστημα $\{A_s : s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ με $A_s = F$ για κάθε $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Τότε $\mathcal{A}(\{A_s\}) = F$. □

Πρόταση 2.12 *Έστω $\mathcal{F}$ οικογένεια συνόλων με $X \in \mathcal{F}$. Τότε $(\mathcal{A}(\mathcal{F}))_\sigma \subset \mathcal{A}(\mathcal{F})$ και συνεπώς από την προηγούμενη πρόταση έχουμε πως $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{A}(\mathcal{F})$* □

Απόδειξη
Έστω $A_n \in \mathcal{A}(\mathcal{F}),\ \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει σχήμα

$$\{F^n_s : \quad s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\} \subset \mathcal{F} \quad \text{με} \quad A_n = \mathcal{A}(F^n_s) \tag{2.28}$$

Ορίζουμε ένα νέο σχήμα $\{F_t : \quad t \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\} \subset \mathcal{F}$ ως εξής:

- $F_{(m_0)} = X \quad \forall m_0 \in \mathbb{N}$,
- $F_{(m_0,m_1,\ldots,m_k)} = F^{m_0}_{(m_1,\ldots,m_k)}$ για κάθε $(m_0, m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $k > 0$

Θα δείξουμε πως $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \mathcal{A}(F_t)$.
Έστω $x \in \mathcal{A}(F_t)$ τότε

$$\text{υπάρχει } (n_0, n_1, \ldots) \in \mathcal{N} \text{ με } x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} F_{(n_0,\ldots,n_k)} \tag{2.29}$$

$$\text{άρα } x \in F^{n_0}_{(n_1,\ldots,n_k)} \ \forall k \in \mathbb{N} \tag{2.30}$$

$$\text{και άρα } \exists \alpha = (n_1, n_2, \ldots) \in \mathcal{N} \text{ με } \bigcap_{m=1}^{\infty} F^{n_0}_{\alpha|m} \tag{2.31}$$

□

Συνεπώς $x \in \mathcal{A}(\{F^{n_0}_s\})$ δηλαδή $x \in A_{n_0}$ άρα $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$
Αντίστροφα,
έστω $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ τότε $x \in A_n$ για κάποιο n . Άρα υπάρχει $(n_0, n_1, n_3, \ldots) \in \mathcal{N}$ ώστε $x \in F^n_{(n_0,n_1,\ldots,n_k)}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Συνεπώς $x \in F(n, n_0, n_1, \ldots, n_k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$ και αφού εξ ορισμού $x \in F_n$, έχουμε ότι $x \in \mathcal{A}(\{\mathcal{F}_t\})$.

$$\text{Συνεπώς} \quad \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \mathcal{A}(\{\mathcal{F}_t\}) \in \mathcal{A}(\mathcal{F}) \tag{2.32}$$

Αξίζει να κάνουμε την εξής παρατήρηση αναφορικά με την προηγούμενη απόδειξη η οποία θα ξεκαθαρίσει τον μηχανισμό που δίνει στον τελεστή Souslin όλες τις χρήσιμες ιδιότητες κλειστότητας.

Παρατήρηση 2.13 Στην προηγούμενη πρόταση θέλαμε να δείξουμε ότι $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$. Παρατηρούμε ότι $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ σημαίνει:

$$\exists n \in \mathbb{N} \ \exists \alpha \in \mathcal{N} \ \forall k \in \mathbb{N} \ x \in F^n_{\alpha|k} \tag{2.33}$$

Μια έκφραση που για τους στόχους της απόδειξης θέλουμε να φέρουμε στην μορφή:

$$\exists \beta \in \mathcal{N} \ \forall m \in \mathbb{N} \ x \in F_{\beta|m} \tag{2.34}$$

Ουσιαστικά αυτό που αρχικά καλούμαστε να κάνουμε, είναι να δημιουργήσουμε μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, "1-1" και *επί*. Αυτό όμως δεν αρκεί!

Είναι απαραίτητο επιπλέον η συνάρτηση αυτή που θα δημιουργήσουμε, να είναι αμφισυνεχής. Συνθήκη που υπονοεί αφενός -και είναι ικανή εν προκειμένω για να δημιουργήσει- παράλληλα με την f, και μία δεύτερη συνάρτηση $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ που θα αντιστοιχίσει με "1-1" και *επί* τρόπο τα σύνολα $F^n_{\alpha|k}$ και $F_{\alpha|m}$ που συναντά κανείς καθώς κατεβαίνει την διαδρομή που προσεγγίζει τα κλαδιά $n \times \alpha = f^{-1}(\beta) \in \mathbb{N} \times \mathcal{N}$ από την μία και $\beta = f(n \times \alpha) \in \mathcal{N}$ από την άλλη.

Θα χρησιμοποιήσουμε την παρατήρηση αυτή για να αποδείξουμε σε "υψηλό επίπεδο" την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.14 *Έστω* $A_n \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. *Τότε* $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$ □

Απόδειξη
Έστω $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ τότε:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists \alpha \in \mathcal{N} \ \forall k \in \mathbb{N} \ x \in F^n_{\alpha|k} \tag{2.35}$$

όπου $A_n = \mathcal{A}(\{F_s^n\})$ για κάποιο σχήμα συνόλων της $\mathcal{F}$. Θέλουμε να φέρουμε την παραπάνω έκφραση στην μορφή:

$$\exists \beta \in \mathcal{N} \ \forall m \in \mathbb{N} \ x \in F_{\beta|m} \tag{2.36}$$

όπου $F_s \in \mathcal{F}$ $\forall s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Η έκφραση όμως $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists \alpha \in \mathcal{N}$ είναι ισοδύναμη με την έκφραση $\exists \alpha_n \in \mathcal{N}^{\mathbb{N}}$. Συνεπώς, από την προηγούμενη συζήτηση αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $f : \mathcal{N}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{N}$ "1-1", *επί* και αμφισυνεχής(Η οποία θα χρησιμοποιηθεί επιπλέον για να ορίσει τα $F_{\beta|m}$ χρήσει των $F^n_{\alpha|k}$). Συνεπώς από θεώρημα (2.4) έχουμε το ζητούμενο. □

Πόρισμα 2.15 *Από τις προηγούμενες δύο προτάσεις έχουμε πως η οικογένεια $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες ενώσεις και τομές.*

Το επόμενο και τελευταίο θεώρημα της παραγράφου είναι πολύ σημαντικό για την συνέχεια.

Αφενός οι προηγούμενες προτάσεις -που αποδείχθηκαν ανεξαρτητα για λόγους εξοικείωσης με τις τεχνικές που θα χρησιμοποιηθούν- μπορουν να ληφθούν ως πορίσματα του επόμενου θεωρήματος χρήση ενός απλού λήμματος[4].

Αφετέρου, το επόμενο θεώρημα, που καθιστά την οικογένεια $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ κλειστή κάτω από την εκ νέου εφαρμογή του τελεστή Souslin, θα μας επιτρέψει στην συνέχεια να δούμε ότι τα αναλυτικά σύνολα είναι μια οικογένεια σταθερη κάτω από ένα πλήθος συνολο-πράξεων όπως η προβολή κατά μήκος ενός πολωνικού χώρου [5] ή η ευθεία εικόνα μέσω συνεχούς συνάρτησης.

Η απόδειξη θα γίνει αναλυτικά αλλά έχει σημασία κανείς να κατανοήσει (μέσω της προηγηθείσας συζήτησης) τα κίνητρα που μας οδηγούν στις συναρτήσεις u, v, ϕ, ψ.

Θεώρημα 2.16 *Έστω $\mathcal{F}$ οικογένεια υποσυνόλων του X. Τότε*

$$\mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{F})) = \mathcal{A}(\mathcal{F}) \tag{2.37}$$

Απόδειξη

Από την πρόταση (2.11) έχουμε ότι $\mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{F})) \supset \mathcal{A}(\mathcal{F})$ άρα αρκεί να δείξουμε τον ανάποδο εγκλεισμό.

Έστω λοιπόν $A \in \mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{F}))$. Τότε υπάρχει $\{A_s : s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ συνόλων της $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ ώστε

$$A = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{N}} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha|n} \tag{2.38}$$

Επειδή όμως $A_s \in \mathcal{A}(\mathcal{F}),\ \forall s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, μπορούμε για κάθε $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ να βρούμε ένα σύστημα $\{B_{s,t},\ \ t \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ συνόλων της $\mathcal{F}$ ώστε

$$A_s = \bigcup_{\gamma \in \mathcal{N}} \bigcap_{m=1}^{\infty} B_{s,\gamma|m} \tag{2.39}$$

Αυτό που θέλουμε, είναι να ορίσουμε κατάλληλα ένα σύστημα $\{C_s\}$ ώστε $\forall x \in X$ να έχουμε

$$x \in A \Leftrightarrow \exists \beta \in \mathcal{N} \ \forall k \in \mathbb{N} \ x \in C_{\beta|k} \tag{2.40}$$

Έστω λοιπόν $x \in A$. Τότε

$$\exists \alpha \in \mathcal{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \ [x \in A_{\alpha|m}] \Leftrightarrow \tag{2.41}$$

$$\exists \alpha \in \mathcal{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \ \exists \gamma \in \mathcal{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ [x \in B_{\alpha|m,\gamma|n}] \Leftrightarrow \tag{2.42}$$

$$\exists \alpha \in \mathcal{N} \quad \exists \gamma_p \in \mathcal{N}^{\mathbb{N}} \ \forall m \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ [x \in B_{\alpha|m,\gamma_m|n}] \tag{2.43}$$

[4]Του λήμματος $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{A}(\mathcal{F})$ και $\mathcal{F}_\delta \subset \mathcal{A}(\mathcal{F})$ που είναι αρκετά απλούστερα από τις προηγούμενες προτάσεις

[5]συνόλων του χώρου γινομένου

Και την τελευταία έκφραση θέλουμε να την φέρουμε στην μορφή

$$\exists \beta \in \mathcal{N} \ \ \forall k \in \mathbb{N} \ \ [x \in C_{\beta|k}] \tag{2.44}$$

Για τον σκοπό αυτό θα χρειαστεί να κατασκευάσουμε τις συναρτήσεις

- $v : \mathcal{N} \times \mathcal{N}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{N}, \quad "1-1"$ και *επί*
- $u : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad "1-1"$ και *επί*
- $\phi : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$
- $\psi : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$

για τις οποίες επιπλέον πρέπει να ισχύει ότι για κάθε $(\alpha, \gamma_p) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}^{\mathbb{N}}$, αν $v(\alpha, \gamma_p) = \beta$ και $s = \beta \mid u(m,n)$ για κάποια $m,n \in \mathbb{N}$ τότε $\phi(s) = \alpha \mid m$ και $\psi(s) = \gamma_m \mid n$.

Ας υποθέσουμε προς στιγμήν πως οι συναρτήσεις αυτές υπάρχουν.Τότε ορίζουμε

$$C_s = B_{\phi(s),\psi(s)}, \quad s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \tag{2.45}$$

και ισχυριζόμαστε πως

$$A = \mathcal{A}(\{C_s\}) \tag{2.46}$$

$\Rightarrow$ $A \subset \mathcal{A}(\{C_s\})$. Έστω $x \in A$. Είδαμε ότι αυτό σημαίνει πως υπάρχουν $\alpha \in \mathcal{N}$ και $\gamma_p \in \mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ ώστε για κάθε m και n, $x \in B_{\alpha|m,\gamma_m|n}$. Έστω τότε $\beta = v(\alpha, \gamma_p)$ και $k \in \mathbb{N}$. Έστω επίσης m,n με $k = u(m,n)$. Τότε, $\phi(\beta \mid k) = \alpha \mid m$ και $\psi(\beta \mid k) = \gamma_m \mid n$ και συνεπώς $x \in B_{\alpha|m,\gamma_m|n} = C_{\beta|k}$. Δηλαδή $x \in \mathcal{A}(\{C_s\})$.

$\Leftarrow$ $A \supset \mathcal{A}(\{C_s\})$. Έστω $x \in \mathcal{A}(\{C_s\})$. Τότε $\exists \beta \in \mathcal{N}$ ώστε $x \in C_{\beta|k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Διαλέγουμε (α, γ_p) ώστε $v(\alpha, \gamma_p) = \beta$. Για τα τυχαία m,n, θέτουμε $k = u(m,n)$ και παρατηρούμε ότι $x \in C_{\beta|k} = B_{\alpha|m,\gamma_m|n}$. Άρα $x \in A$.

Συνεπώς μένει να δείξουμε πως οι συναρτήσεις u, v, ϕ, ψ με τις παραπάνω ιδιότητες υπάρχουν.

u : Έστω $u : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με

$$u(m,n) = 2^m(2n+1) - 1 \tag{2.47}$$

Τότε η u είναι αμφιμονοσήμαντη και για κάθε m,n,p με $n < p$ έχουμε $m \leq u(m,n)$ και $u(m,n) < u(m,p)$.
Ορίζουμε από εδώ και στο εξής για κάθε $k \in \mathbb{N}$ τις βοηθητικές συναρτήσεις $l, r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ως τις μοναδικές συναρτήσεις με $k = u(l(k), r(k))$.

v : Έστω $v : \mathcal{N} \times \mathcal{N}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{N}$ με

$$v(\alpha, \gamma_n) = \beta \text{ όπου } \beta(k) = u(\alpha(k), \gamma_{l(k)}(r(k))), k \in \mathbb{N}. \tag{2.48}$$

Λόγω του ότι η u είναι “1-1” είναι εύκολο να δούμε πως και η v είναι “1-1”. Επιπλέον, η v είναι *επί* αφού για το τυχαίο $\beta \in \mathcal{N}$ μπορούμε να βρούμε $\alpha \in \mathcal{N}$ και $\gamma_n \in \mathcal{N}$, $n \in \mathbb{N}$ με

$$\alpha(k) = l(\beta(k)), \ k \in \mathbb{N} \text{ και } \gamma_n(m) = r(\beta(u(n,m))) \ m,n \in \mathbb{N} \tag{2.49}$$

για τα οποία να ισχύει το εξής.

Για σταθερό $k \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
v(\alpha, \gamma_n)(k) &= u(\alpha(k), \gamma_{l(k)}(r(k))) && (2.50)\\
&= u(l(\beta(k)), r(\beta(u(l(k), (r(k)))))) && (2.51)\\
&= u(l(\beta(k)), r(\beta(k))) && (2.52)\\
&= \beta(k) && (2.53)
\end{aligned}
$$

Δηλαδή, $v(\alpha, \gamma_n) = \beta$

ϕ : Έστω $\phi : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με

$$
\begin{aligned}
\phi(s) = (l(s_0), l(s_1), \ldots, l(s_{m-1})) \quad \text{όπου} && (2.54)\\
s = (s_0, s_1, \ldots, s_{k-1}) \quad \text{και} \quad m = l(k) = l(|\ s\ |) && (2.55)
\end{aligned}
$$

Επειδή $m = l(k) \leq k$ (αφού εξ ορισμού της συνάρτησης u έχουμε $i \leq u(i, j), \ \ \forall i, j \in \mathbb{N}$), ο παραπάνω ορισμός έχει νόημα.

ψ : Έστω $\psi : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με

$$
\begin{aligned}
\psi(s) = (r(p_0), r(p_1), \ldots, r(p_{n-1})), \quad p_i = s_{u(m,i)}, \ \ i < n \quad \text{όπου} && (2.56)\\
n = r(k) = r(|\ s\ |), \quad \text{και} \quad s, m \quad \text{όπως στον ορισμό της} \quad \phi && (2.57)
\end{aligned}
$$

Επειδή $i < n \Rightarrow u(m, i) < u(n, n) = k$, το p_i είναι καλά ορισμένο.

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη πρέπει να δείξουμε ότι αν $(\alpha, \gamma_p) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}^{\mathbb{N}}$, $\beta = v(\alpha, \gamma_p)$, $k = u(m, n)$ και $s = \beta \mid k$ τότε: $\phi(s) = \alpha \mid m$ και $\psi(s) = \gamma_m \mid n$.
Όμως

$$
\begin{aligned}
\phi(s) &= (l(s_0), l(s_1), \ldots, l(s_{m-1})) && (2.58)\\
&= (l(\beta(0)), l(\beta(1)), \ldots, l(\beta(m-1))) && (2.59)\\
&= \alpha \mid m && (2.60)
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
\psi(s) &= (r(p_0), r(p_1), \ldots, r(p_{n-1}))\\
&= (r(\beta(u(m, 0))), r(\beta(u(m, 1))), \ldots, r(\beta(u(m, n-1))))\\
&= \gamma_m \mid n
\end{aligned}
$$

□

Παρότι φαίνεται ότι ο τελεστής Souslin είναι ικανός να παράξει κάθε σύνολο προερχόμενο από τις κλασσικές αριθμήσιμες συνολο-πράξεις της ανάλυσης, εντούτις υπάρχουν περιπτώσεις όπου $\neg\mathcal{F} \not\subseteq \mathcal{A}\{F\}$. Για παράδειγμα τα ίδια τα αναλυτικά σύνολα όπως θα δούμε, δεν είναι κλειστά στα συμπληρώματα

3 Μέτρο, τελεστής Souslin και προβολές

3.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο, ακολουθώντας την οπτική Καραθεοδωρή σε σχέση με το μέτρο, θα εισάγουμε την έννοια του εξωτερικού μέτρου μ^* πάνω σε ένα σύνολο X. Αυτό που κυρίως μας ενδιαφέρει είναι να μελετήσουμε την έννοια της μετρησιμότητας. Δηλαδή την ευρύτερη οικογένεια υποσυνόλων του X στην οποία αν περιορίσουμε το μ^*, θα αποκτήσει την- χρήσιμη για την μοντελοποίηση κάθε είδους έννοιας μάζας,μήκους,πιθανότητας,...- ιδιότητα της σ-αθροιστικότητας. Την οικογένεια $\mathcal{M}$ των μετρήσιμων κατά μ^* συνόλων. Ένα εξωτερικό μέτρο περιορισμένο σε μια τέτοια οικογένεια ονομάζεται σ-αθροιστικό μέτρο ή απλά μέτρο. Είναι σχετικά εύκολο να δούμε πως η οικογένεια $\mathcal{M}$ είναι κλειστή στα συμπληρώματα και στις αριθμήσιμες ενώσεις και τομές. Ο στόχος είναι να δείξουμε πως ακόμα και στην πιο γενική περίπτωση χώρου μέτρου, η οικογένεια των μετρήσιμων συνόλων $\mathcal{M}$ είναι κλειστή κάτω από την δράση του τελεστή Souslin. Δηλαδή $\mathcal{A}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$.
Η παρουσία του κεφαλαίου αυτού σε αυτό το σημείο, μας απομακρύνει φαινομενικά από τον πρωταρχικό στόχο μας που είναι η παρουσίαση συνόλων αναλυτικών και όχι Borel. Εντούτοις το κεφάλαιο αυτό, εκτός του ότι καταλήγει σε ένα πολύ σημαντικό και χρήσιμο αποτέλεσμα, βρίσκεται εδώ και για έναν επιπλέον λόγο. Ο λόγος είναι η συνειδητή προσκόλληση στην αξιωματική μέθοδο-της θεωρίας μέτρου εν προκειμένω- που επιτάσσει αφενός οικονομία στα εργαλεία που χρησιμοποιούνται – για τα αποτελέσματα του κεφαλαίου αυτού δεν θα χρειαστούμε καμία επιπλέον έννοια και πρόταση αναφορικά με τον τελεστή Souslin- και αφετέρου τα πιο καθολικά και εγγενή αποτελέσματα, να παρουσιάζονται πρώτα.Τέλος είναι φανερό και από τα ιστορικά στοιχεία που παρατίθενται στην εισαγωγή, πως η ανακάλυψη των αναλυτικών συνόλων ήταν αποτέλεσμα ζυμώσεων που έγιναν με αφορμή το μέτρο.

Από το 1880 είχε γίνει φανερό πως η θεωρία ολοκλήρωσης συσχετιζόταν άμεσα με έννοιες όπως το “μήκος” υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ή το “εμβαδόν” υποσυνόλων του $\mathbb{R}^2$. Στην αλλαγή του αιώνα, υπήρχαν δύο βασικές εναλλακτικές προσεγγίσεις για το πώς θα μπορούσε να επεκτείνει κανείς την έννοια του μήκους απο διαστήματα του $\mathbb{R}$ σε πιο σύνθετα υποσύνολα. Η προσέγγιση Peano-Cantor-Jordan όριζε την έννοια του “εξωτερικού περιεχομένου” με όρους προσεγγίσεων από πεπερασμένες ακολουθίες διαστημάτων ενώ η μέθοδος Borel-Lebesgue χρησιμοποιούσε αριθμήσιμες ακολουθίες διαστημάτων για να ορίσει αντίστοιχα την έννοια του εξωτερικού μέτρου.

Για κάθε $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα, ορίζουμε $|I|$ να είναι το μήκος του. Δηλαδή, $|[a,b]| = b-a, \ |[a,\infty]| = \infty, \ |[-\infty, b]| = \infty$.

Ορισμός 3.1 Έστω $E \subset \mathbb{R}$. Τότε ορίζουμε

$$c^*(E) = \text{inf}\left\{ \sum_{i=1}^{n} |I_i| : \ \bigcup_{i=1}^{n} I_i \supset E, \ n \in \mathbb{N} \right\} \tag{3.1}$$

να είναι το κατά Jordan "εξωτερικό περιεχόμενο" του E, και

$$\lambda^*(E) = \text{inf}\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| : \ \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \supset E \right\} \tag{3.2}$$

να είναι το κατά Lebesgue "εξωτερικό μέτρο" του E. ■

Οι δύο αυτές έννοιες μήκους έχουν παρόμοια συμπεριφορά, αλλά και κάποιες σημαντικές διαφορές. Για παράδειγμα ειναι εύκολο να δει κανείς πως

- Για κάθε σύνολο $E, \ \ c^*(E) \geq \lambda^*(E)$
- Για κάθε συμπαγές σύνολο $K, \ \ c^*(K) = \lambda^*(K)$
- Τα c^* και λ^* είναι αναλλοίωτα στις μεταφορές
- Για κάθε σύνολο $E, \ \ c^*(E) = c^*(\overline{E})$ όπου $\overline{E}$, η κλειστότητα του E

Παρατηρήστε πως η τελευταία ιδιότητα προτείνει πως αν $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ και $B = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ τότε

$$\text{παρότι } A \cap B = \emptyset, \quad c^*(A) + c^*(B) \neq c^*(A \cup B) \tag{3.3}$$

δηλαδή το c^* δεν ήταν "πεπερασμένα αθροιστικό". Κάτι που εκτός του ότι είναι αντίθετο με την διαίσθηση κάθε έννοιας μήκους[1],έκανε αδύνατο τον ορισμό του ολοκληρώματος(Riemann) για συναρτήσεις οπως αυτη του Dirichlet.

Παρόλα αυτά, αν περιορίζαμε το c^* να μιλάει για μήκος μόνο στην οικογένεια $\mathcal{PJ}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ όπου

$$\mathcal{PJ} = \{E : E \subset \mathbb{R} \quad \text{με } c^*(\overline{E} \setminus E)\} \tag{3.4}$$

τότε το πρόβλημα αυτό αίρονταν. Δηλαδη

$$\text{για κάθε } A, B \in \mathcal{PJ}, \quad A \cap B = \emptyset \Rightarrow c^*(A) + c^*(B) = c^*(A \cup B) \tag{3.5}$$

Από αυτήν την σκοπιά, το εξωτερικό μέτρο Lebesque ήταν πολλα υποσχόμενο. Η χρήση αριθμήσιμων ακολουθιών διαστημάτων του επέτρεπε να διακρίνει πολύ πιο λεπτές υφές σε σχέση με το c^* χωρίς να φαινόταν αρχικά να σκοντάφτει σε προβλήματα όπως το παραπάνω. Επιπλέον μπορούσε κανείς αντί για πεπερασμένη αθροιστικότητα, να μιλάει για σ-αθροιστικότητα. Φαινόταν δηλαδή να ίσχυε ότι για κάθε ακολουθία $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ξένων ανα δύο υποσυνόλων του $\mathbb{R}$

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda^*(A_i) = \lambda^*(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \tag{3.6}$$

[1] Τί είναι αντίθετο με την διαισθηση βέβαια, ειναι κάτι για το οποίο δεν μπορούμε να αποφανθούμε πάντα. Έχει ενδιαφέρον για παράδειγμα πως για καιρό η ιδιότητα αυτή θεωρούταν θεμελιώδης, αν ένα σύνολο $A \subset B$ είναι πυκνό στο B, όφειλε να έχει το ίδιο "μήκος" με το B !

Το 1905 ο Giuseppe Vitali παρουσίασε ένα σύνολο όπου η υπεραριθμήσιμα πεπλεγμένη δομή του, υπερέβαινε την διακριτικότητα του λ^* και παρείχε ένα αντιπαράδειγμα για την πεπερασμένη αθροιστικότητά του(και αρα και για την σ-αθροιστικότητά του).

Ενώ μέσω του Θεωρήματος Hahn-Banach μπορεί να επεκτείνει κανείς το λ^* σε ένα πεπερασμένα αθροιστικό μέτρο[2], αναλλοίωτο στις μεταφορές, ορισμένο σε κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}$, το ίδιο δεν μπορεί να γίνει με την απαίτηση το τελικό μέτρο να είναι σ-αθροιστικό. Και αυτό δεν είναι ένα πρόβλημα που έχει να κάνει με την επιθυμία μας να διατηρήσουμε το μέτρο αναλλοίωτο κάτω από την μεταφορά ή από την επιθυμία μας για οποιαδήποτε άλλη συνεργασία του μέτρου με την δομή του $\mathbb{R}$ που έχει να κάνει με την τοπολογία, την διάταξη, τις πράξεις. Το πρόβλημα είναι ένα εγγενές πρόβλημα πληθικότητας. Συγκεκριμένα υπάρχει το εξής ενδιαφέρον αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.2 (Ulam) *Έστω Ω ο πρώτος υπεραριθμήσιμος διατακτικός, και έστω $X = [0, \Omega) = \Omega$. Άν το μ είναι ένα σ-αθροιστικό μέτρο που ορίζεται και παίρνει πεπερασμένη τιμη σε κάθε υποσύνολο του X με την επιπλέον ιδιότητα $\mu(\{x\}) = 0, \ \ \forall x \in X$ τότε $\mu(X) = 0$*

Απόδειξη

Για κάθε $y \in X$, θέτουμε $A_y = \{x \in X : \quad x < y\}$. Κάθε A_y είναι αριθμήσιμο άρα υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση

$$f_y : A_y \to \mathbb{N} \tag{3.7}$$

Ορίζουμε για κάθε $x \in X$ και $n \in \mathbb{N}$

$$B_{x,n} = \{z \in X : \ x < z, \ f_z(x) = n\} \tag{3.8}$$

Αν $x_1 \neq x_2$ τότε προφανώς τα $B_{x_1,n}, B_{x_2,n}$ είναι ξένα και επειδή το μ είναι πεπερασμένο, για κάθε n στο $\mathbb{N}$, έχουμε $\mu(B_{x,n}) > 0$ για αριθμήσιμα μόνο το πλήθος $x \in X$. Επειδή όμως το X είναι υπεραριθμήσιμο, αναγκαστικά υπάρχει x_0 ώστε $\mu(B_{x_0,n}) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε παρατηρούμε ότι για το

$$B_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{x_0,n} \quad \text{έχουμε} \quad \mu(B_0) = 0 \tag{3.9}$$

Επιπλέον, αν $y > x_0$ τότε $f_y(x_0) = n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και άρα $\{y \in X : y > x_0\} \subset B_0$. Συνεπώς

$$X = B_0 \cup \{y \in X : \ y \leq x_0\} \tag{3.10}$$

Έτσι εκφράσαμε το X ως ένωση ενός συνόλου με μέτρο 0 και ενός αριθμήσιμου συνόλου.
Άρα $\mu(X) = 0$ □

Είτε με την υπόθεση του συνεχούς, είτε χρήσει άλλων συνολοθεωρητικών αξιωμάτων, το παραπάνω θεώρημα μπορεί να μεταφερθεί στο συνεχές. Συνεπώς οποιαδήποτε προσπάθεια να δημιουργήσουμε ένα σ-αθροιστικό μέτρο μ σε έναν κλασσικό υπεραριθμήσμο χώρο θα προυποθέτει εξαρχής τον περιορισμό του μέτρου αυτού σε μία οικογένεια συνόλων μικρότερη του $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Την οικογένεια $\mathcal{M}_\mu$ των μετρήσιμων κατά μ συνόλων.

Παράδειγμα 3.3 Έστω $\Omega_1 = (0, 1)$ και $\mathcal{M}$ η οικογένεια των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων. Έστω επιπλέον τα υποσύνολα του Ω_1

$$N_2 = \left\{ x \in \Omega_1 : \quad \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} x(i)}{n} = \frac{1}{2} \quad \right\} \tag{3.11}$$

[2]Το λ^* στο $[0, 1]$ μπορεί κανείς να το δει ως στοιχείο του $C[0, 1]^*$. Ο $C[0, 1]$ όμως είναι κλειστός υπόχωρος του $L_\infty[0, 1]$ άρα μπορεί κανείς να επεκτείνει το λ^* σε στοιχείο του $L_\infty[0, 1]^*$. Αποδεικνύεται ότι η επέκταση αυτή ορίζει ένα πεπερασμένα αθροιστικό μέτρο του $[0, 1]$ που επεκτείνει το λ^*

όπου $x(i)$ ο i όρος στο δυαδικό ανάπτυγμα του x $\quad (x = 0, x(0)x(1)x(2)\dots \quad x(i) \in \{0,1\})$, και

$$\Delta = \Big\{x \in \Omega_1 : \quad \text{υπάρχει αύξουσα ακολουθία φυσικών } k_n, n \in \mathbb{N} \text{ ώστε } \forall n \in \mathbb{N}\ x[k_n] \Big| x[k_{n+1}]\Big\} \tag{3.12}$$

όπου $a\Big|b \Rightarrow$ 'ο a διαιρεί τον b' και $x[i]$ ο i όρος στο αρμονικό ανάπτυγμα του x, δηλαδή

$$x = \frac{1}{x[0] + \frac{1}{x[1] + \frac{1}{x[2]+\dots}}}, \quad x[i] \in 1,2,3,\dots \tag{3.13}$$

Ένα στιγμιότυπο του προβλήματος που αυτό το κεφάλαιο επιδιώκει να λύσει είναι το ερώτημα: "Ανήκουν τα σύνολα N_2, Δ στην οικογένεια $\mathcal{M}$ των Lebesque μετρήσιμων συνόλων;".

3.2 Εξωτερικά μέτρα, Μέτρα και μετρήσιμα σύνολα

Έστω Ω σύνολο και $\mathcal{P}(\Omega) = \{A : \quad A \subset \Omega\}$ το δυναμοσύνολό του.

Ορισμός 3.4 Μια συνάρτηση $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ονομάζεται εξωτερικό μέτρο στον Ω αν ικανοποιεί τα εξής:

(a) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(b) Αν $E_1 \subset E_2$ τότε $\mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2)$

(c) Αν $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ακολουθία υποσυνόλων του Ω τότε

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i) \tag{3.14}$$

Είναι εύκολο να δούμε παραδείγματα εξωτερικών μέτρων ακόμα και σε χώρους χωρίς καμία επιπλέον δομή πέραν της συνολοθεωρητικής.

Παράδειγμα 3.5 Διάλεξε έναν υπερπεπερασμένο πληθικό κ αριθμό και όρισε για κάθε $E \in \Omega$

$$\mu^*_\infty(E) = \begin{cases} 0 & \text{αν} |E| \leq \kappa \\ 1 & \text{αν} |E| > \kappa \end{cases} \tag{3.15}$$

και

$$\mu^*_1(E) = \begin{cases} 0 & \text{αν} |E| \leq \kappa \\ 1 & \text{αν} |E| > \kappa \end{cases} \tag{3.16}$$

Τα μ^*_1 και μ^*_∞ είναι εξωτερικά μέτρα.

Ορισμός 3.6 Έστω μ^* εξωτερικό μέτρο στον Ω. Ένα σύνολο E λέγεται μ^*-μετρήσιμο αν για κάθε $A, B \subset \Omega$ με

$$A \subset E, \quad B \subset \Omega \setminus E$$
$$\text{έχουμε} \quad \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

Όταν $A \subset E, \quad B \subset \Omega \setminus E,$ όπως πάνω, λέμε ότι τα σύνολα A, B διαχωρίζονται από το E. Γράφουμε $\mathcal{M}^*_\mu$ ή απλά $\mathcal{M}$ για την οικογένεια των μ^*-μετρήσιμων συνόλων του Ω ■

Γενικότερα όταν θέλουμε να εξετάσουμε την μετρησιμότητα ενός συνόλου, είναι χρήσιμο το εξής πιο απλό κριτήριο:

Θεώρημα 3.7 (1ο κριτήριο μετρησιμότητας) *Δοθέντος εξωτερικού μέτρου μ^* στο σύνολο Ω, ένα σύνολο E είναι μ^*-μετρήσιμο αν*

$$\mu^*(A \cup B) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B) \tag{3.17}$$

για κάθε A και B σύνολα πεπερασμένου μ^*-εξωτερικού μέτρου τα οποία διαχωρίζονται από το E.

Απόδειξη
Εφαρμόζοντας την ιδιότητα (c) του εξωτερικού μέτρου στην ακολουθία $A, B, \emptyset, \emptyset, \ldots$ και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (a) έχουμε

$$\mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B) \quad \text{για κάθε } A, B \tag{3.18}$$

συνεπώς για να δείξουμε την ισότητα των δύο μελών αρκεί να δείξουμε την ανισότητα της εκφώνησης για κάθε A, B που διαχωρίζονται από το E. Η οποία ισχύει πάντα λόγω της ιδιότητας (b) όταν έστω και ένα από τα A, B παίρνουν μ^*-τιμή άπειρο. □

Μπορούμε να αποδείξουμε τώρα την παρακάτω πρόταση η οποία λέει πως όταν έχουμε έναν χώρο μέτρου $(\Omega, \mathcal{M}, \mu^*)$ και ένα τυχαίο υποσύνολο X του Ω. Τότε ο περιορισμός του χώρου μέτρου στο X, $(\Omega, \mathcal{M}, \mu^*)\,|_X$ είναι ένας νέος χώρος μέτρου.

Πρόταση 3.8 *Έστω μ^* εξωτερικό μέτρο στον Ω και X υποσύνολο του Ω. Η συνάρτηση*

$$\mu^*_X : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad \text{με} \quad \mu^*_X(E) = \mu^*(E \cap X) \tag{3.19}$$

είναι εξωτερικό μέτρο στον Ω. Επιπλέον κάθε μ^*-μετρήσιμο σύνολο είναι και μ^*_X-μετρήσιμο. □

Απόδειξη

(a) Εξ ορισμού $0 \leq \mu^*_X(E) \leq +\infty$ για κάθε E στο Ω

(b) $\mu^*_X(\emptyset) = \mu^*(\emptyset) = 0$

(c) Αν $E_1 \subset E_2$ τότε

$$\mu^*_X(E_1) = \mu^*(E_1 \cap X) \leq \mu^*(E_2 \cap X) = \mu^*_X(E_2) \tag{3.20}$$

(d) Αν E_i είναι μια ακολουθία υποσυνόλων του Ω τότε

$$\mu^*_X(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty}(X \cap E_i)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(X \cap E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*_X(E_i) \tag{3.21}$$

(e) Αν E είναι μ^*-μετρήσιμο σύνολο που διαχωρίζει τα A, B, τότε τα $A \cap X, B \cap X$ επίσης διαχωρίζονται από το E. Συνεπώς

$$\begin{aligned} \mu^*_X(A \cup B) &= \mu^*((A \cap X) \cup (B \cap X)) && (3.22)\\ &= \mu^*(A \cap X) + \mu^*(B \cap X) && (3.23)\\ &= \mu^*_X(A) + \mu^*_X(B) && (3.24) \end{aligned}$$

□

Πόρισμα 3.9 *Αν το μ^* παίρνει μόνο τις τιμές 0 και ∞ τότε κάθε σύνολο είναι μ^*-μετρήσιμο.* □

Απόδειξη
Έστω A και B με πεπερασμένο μ^*. Τότε $\mu^*(A) = \mu^*(B) = 0$ και συνεπώς

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B) \tag{3.25}$$

Το παραπάνω πόρισμα μας λέει ότι το για το μ^*_∞ του προηγουμενου παραδείγματος ισχύει ότι

$$\mathcal{M}_{\mu^*_\infty} = \mathcal{P}(\Omega) \tag{3.26}$$

Γενικότερα μπορεί κανείς να πειραματιστεί με το μ^*_1 για να δει πως εν γένει υπάρχουν μη μετρήσιμα σύνολα για το τυχαίο εξωτερικό μέτρο. Η πρόταση (3.13) μας δίνει εν τούτις κάποιες πληροφορίες για το περιεχόμενο και τις ιδιότητες κάθε οικογένειας $\mathcal{M}$ μετρήσιμων συνόλων. Πριν όμως, θα εισάγουμε την έννοια της σ-άλγεβρας και θα αποδείξουμε ένα λήμμα σε σχέση με τις σ-άλγεβρες.

Ορισμός 3.10 Μία οικογένεια $\mathcal{G}$ υποσυνόλων του Ω λέγεται σ-άλγεβρα αν έχει τις εξής ιδιότητες:

(a) $\emptyset \in \mathcal{G}$

(b) Αν $A \in \mathcal{G}$ τότε $\Omega \setminus A \in \mathcal{G}$ (δηλαδή $\neg\mathcal{G} = \mathcal{G}$)

(c) Αν $A_i \in \mathcal{G}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ τότε $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{G}$ (δηλαδή $\mathcal{G}_\sigma = \mathcal{G}$) ■

Παρατήρηση 3.11 Λόγω του ότι

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \setminus [\bigcup_{i=1}^{\infty} (\Omega \setminus A_i)] \tag{3.27}$$

έχουμε αυτόματα ότι μια σ-άλγεβρα είναι κλειστη στις αριθμήσιμες τομές δηλαδή $\mathcal{G}_\delta = \mathcal{G}$

Λήμμα 3.12 *Αν για μια οικογένεια $\mathcal{G}$ υποσυνόλων του Ω γνωρίζουμε ότι έχει τις εξής ιδιότητες:*

(a) $\emptyset \in \mathcal{G}$

(b) Αν $A \in \mathcal{G}$ τότε $\Omega \setminus A \in \mathcal{G}$

(c_1) Αν $A_1, A_2 \in \mathcal{G}$ τότε $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{G}$

(c_2) Αν $A_i \in \mathcal{G}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και τα $A_1, A_2, \ldots$ είναι ξένα μεταξύ τους, τότε $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{G}$

Τότε η οικογένεια $\mathcal{G}$ είναι σ-άλγεβρα □

Απόδειξη
Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η (c).Όμως

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} [A_i \cap \{\Omega \setminus \bigcup_{j<i} A_j\}] \tag{3.28}$$

Η δεύτερη ένωση λαμβάνεται σε ξένα μεταξύ τους σύνολα όπου χρήσει των ιδιοτήτων $(a), (b), (c_1)$ είναι εύκολο να δούμε ότι για κάθε i ανήκουν στην οικογένεια $\mathcal{G}$. Συνεπώς $A \in \mathcal{G}$ και άρα η $\mathcal{G}$ είναι σ-άλγεβρα □

Θεώρημα 3.13 *Έστω μ^* εξωτερικό μέτρο στο Ω και $\mathcal{M}$ η οικογένεια των μ^*-μετρήσιμων συνόλων. Τότε*

(i) *Αν $\mu^*(N) = 0$, τότε $N \in \mathcal{M}$.*

(ii) *Η οικογένεια $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα.*

(iii) *Αν* $E_1, E_2, \ldots$ *είναι ακολουθία ξένων ανά δύο μετρήσιμων συνόλων,*

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i) \tag{3.29}$$

Απόδειξη

(i). Έστω $N \subset \Omega$ με $\mu^*(N) = 0$ και έστω ότι τα σύνολα A, B διαχωρίζονται από το B με $A \subset N$. Τότε από τις ιδιότητες του μ^* έχουμε

$$\begin{aligned} \mu^*(B) \leq \mu^*(A \cup B) &\leq \mu^*(A) + \mu^*(B) \\ &\leq \mu^*(N) + \mu^*(B) \\ &= \mu^*(B) \end{aligned}$$

και συνεπώς

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B). \text{ Άρα } N \in \mathcal{M} \tag{3.30}$$

(ii). Θα δείξουμε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του προηγούμενου λήμματος. Γεγονός που εξασφαλίζει ότι η $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα.

(a). Άμεσο από το (i) και το ότι $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(b). Αν $E \in \mathcal{M}$, το ίδιο συμβαίνει με το $\Omega \setminus E$ λόγω της συμμετρίας του ορισμού της μετρησιμότητας.

(c_1). Έστω $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ και έστω A, B με πεπερασμένη μ^*-τιμη ώστε

$$A \subset E_1 \cup E_2, \quad B \subset \Omega \setminus (E_1 \cup E_2). \tag{3.31}$$

Όμως

$$A \cup B = [A \cap E_1] \cup [\{A \cup B\} \cap \{\Omega \setminus E_1\}] \tag{3.32}$$

και τα σύνολα της ένωσης του δεύτερου μέλους διαχωρίζονται από το μετρήσιμο E_1. Άρα

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(\{A \cup B\} \cap \{\Omega \setminus E_1\}) \tag{3.33}$$

και με τον ίδιο τρόπο, χρήσει της μετρησιμότητας του E_2

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap (\Omega \setminus E_1)) + \mu^*(B) \tag{3.34}$$

πάλι από την μετρησιμότητα του E_1 προκύπτει

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B) \tag{3.35}$$

και συνεπώς $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}$.

(c_2). Έστω $\{E_i\}$ μια ακολουθία ξένων ανα δύο μετρήσιμων συνόλων. Γράφουμε

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \tag{3.36}$$

και έστω $A \subset E,\ B \subset \Omega \setminus E$. Με διαδοχικές επαναλήψεις του $(ii)_{(c_1)}$ βλέπουμε πως το σύνολο $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ είναι μετρήσιμο για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα

$$\mu^*(A \cup B) \geq \mu^*\big([A \cap \{\bigcup_{i=1}^{n} E_i\}] \cup B\big) = \mu^*\big([A \cap \{\bigcup_{i=1}^{n} E_i\}]\big) + \mu^*(B) \tag{3.37}$$

Λόγω του ότι τα σύνολα $E_n, E_{n-1}, \ldots, E_1$ είναι μετρήσιμα και ξένα έχουμε

$$\mu^*\big([A \cap \{\bigcup_{i=1}^{n} E_i\}]\big) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_2) + \ldots + \mu^*(A \cap E_n) \tag{3.38}$$

Άρα

$$\mu^*(A \cup B) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(B) \tag{3.39}$$

Και επειδή αυτό ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cup B) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(B) \\ &\geq \mu^*\big(A \cap \{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\}\big) + \mu^*(B) \\ &\geq \mu^*(A) + \mu^*(B) \\ &\geq \mu^*(A \cup B) \end{aligned}$$

Άρα το σύνολο $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ είναι μετρήσιμο. □

Από το λήμμα (3.12) έχουμε το ζητούμενο.

(iii). Επαναλαμβάνοντας την απόδειξη του $(ii)_{(c_2)}$ για $A = E$ και $B = \emptyset$ έχουμε από τις τελευταίες ανισότητες ζητούμενο.

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i) \tag{3.40}$$

Η ιδιότητα (iii) είναι η ιδιότητα της σ-αθροιστικότητας και η προηγούμενη πρόταση μας λέει ότι αν περιορίσουμε το εξωτερικό μας μέτρο μ^* στην σ-άλγεβρα των μ^*-μετρήσιμων συνόλων τότε αυτό έχει την πολύ χρήσιμη ιδιότητα της σ-αθροιστικότητας. Η συνάρτηση που προκύπτει απο τον περιορισμό του εξωτερικού μέτρου μ^* στην σ-άλγεβρα των μ^*-μετρήσιμων συνόλων την ονομαζουμε μέτρο μ αφαιρώντας το $*$. Όταν επιπλέον μιλάμε για μέτρο, θα υπονοούμε ότι προϋπάρχει ένας μετρήσιμος χώρος $(\Omega, \mathcal{M})$
Συγκεκριμένα ορίζουμε:

Ορισμός 3.14 Έστω Ω σύνολο και $\mathcal{G}$ σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω. Μια συνάρτηση $\mu : \mathcal{G} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ονομάζεται μέτρο στην $\mathcal{G}$ αν ικανοποιεί τα εξής:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$

(b) Αν $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ακολουθία ξένων ανα δύο συνόλων της $\mathcal{G}$ τότε

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i) \tag{3.41}$$

Έχουμε λοιπόν από τα παραπάνω το εξης θεώρημα

Θεώρημα 3.15 *Αν μ^* είναι ένα εξωτερικό μέτρο στον Ω, η οικογένεια $\mathcal{M}$ των μ^*-μετρήσιμων συνόλων είναι μια σ-άλγεβρα που περιέχει όλα τα υποσύνολα N του Ω με $\mu^*(N) = 0$ και ο περιορισμός μ του μ^* στην $\mathcal{M}$ είναι ένα σ-αθροιστικό μέτρο στην $\mathcal{M}$.*

Παράδειγμα 3.16 (Συνέχεια του παραδείγματος 3.3) Παρατηρήστε πως το σύνολο N_2 γράφεται

$$\left\{x \in \Omega_1 : \quad \forall k \in \mathbb{N}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0\ |\frac{\sum_{i=0}^{n} x(i)}{n} - \frac{1}{2}| < \frac{1}{k}\ \right\} \tag{3.42}$$

όπου $x(i)$ ο i όρος στο δυαδικό ανάπτυγμα του x $\quad (x = 0, x(0)x(1)x(2)\ldots \quad x(i) \in \{0,1\})$ δηλαδή

$$N_2 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcap_{n=n_0}^{\infty} A_{n,k} \quad \text{όπου} \quad A_{n,k} = \left\{x \in \Omega_1 : \quad |\frac{\sum_{i=0}^{n} x(i)}{n} - \frac{1}{2}| < \frac{1}{k}\ \right\} \tag{3.43}$$

όμως το $A_{n,k}$ είναι για κάθε n και k πεπερασμένη ένωση διαστημάτων. Άρα από την θεωρία του μέτρου Lebesque $A_{n,k} \in \mathcal{M}$ και από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε πως $\mathcal{M}_{\delta\sigma\delta} = \mathcal{M}$. Άρα

$$N_2 \in \mathcal{M}$$

Κάποιος μπορεί να περιμένει ότι θα μπορούσε να πετύχει κάτι ανάλογο με το σύνολο Δ. Δηλαδή να καταφέρει να το γράψει ως αποτέλεσμα διαδοχικών δράσεων αριθμήσιμων ενώσεων και τομών πάνω στην οικογένεια $\mathcal{I} = \{I : \quad I \subset \mathbb{R}$ διάστημα$\}$. για παράδειγμα. Επειδή αποδεικνύεται εύκολα ότι $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}$, θα είχε αποδείξει πως $\Delta \in \mathcal{M}$. Η πραγματικότητα όμως καθιστά αυτήν την υποτιθέμενη απόδειξη αδύνατη. Συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε σε επόμενο κεφάλαιο ότι το σύνολο Δ δεν ανήκει στην οικογένεια Borel συνόλων του $\mathbb{R}$.[3]

Παρόλα αυτά, αν συμβολίσουμε με $\mathcal{N}^<$ τον υπόχωρο του $\mathcal{N}$ των γνησίως αυξανόμενων ακολουθιών φυσικών αριθμών, υπάρχει ισομορφισμός

$$g : \mathcal{N} \to \mathcal{N}^< \quad \text{με} \quad g(\alpha)_{(n)} = \beta(n) = \begin{cases} \alpha(0) & \text{αν} \quad n = 0 \\ (n-1) + \sum_{i=0}^{n} \alpha(i) & \text{αν} \quad n > 0 \end{cases} \tag{3.44}$$

Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε το σύνολο

$$\Delta = \big\{x \in \Omega_1 : \quad \text{υπάρχει αύξουσα ακολουθία φυσικών } k_n, n \in \mathbb{N} \text{ ώστε } \forall n \in \mathbb{N}\ x[k_n] \Big| x[k_{n+1}]\big\} \tag{3.45}$$

ως

$$\big\{x \in \Omega_1 : \quad \exists \alpha \in \mathcal{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad x[g(\alpha)_{(n)}] \Big| x[g(\alpha)_{(n+1)}]\big\} \tag{3.46}$$

δηλαδή

$$\Delta = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{N}} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha|n} \quad \text{όπου} \quad A_{\alpha|n} = \{x : \quad x[k] \Big| x[l]\} \text{ με } k = g(\alpha)_{(n)} < l = g(\alpha)_{(n+1)}] \tag{3.47}$$

όμως το $A_{\alpha|n}$ ανήκει στην $\mathcal{M}$ για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$ και $n \in \mathbb{N}$ αφού αν συμβολίσουμε για σταθερό α και n:

$$K_i = \{x : x[k] = i\}, \quad k = g(\alpha)_{(n)} \quad \text{και} \quad L_j = \{x : x[l] = j\}, \quad k = g(\alpha)_{(n)} \tag{3.48}$$

[3] Την ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του χώρου και συνεπώς και τα διαστήματα αν ο χώρος είναι ο $\mathbb{R}$

έχουμε ότι

$$A_{\alpha|n} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{K_i \cap \big(\bigcup_{j=1}^{\infty} L_{i\times j}\big)\} \tag{3.49}$$

και τα K_i και L_j είναι εύκολο να δει κανείς πως είναι αριθμήσιμες ενώσεις διαστημάτων. Συνεπώς αυτό που ξέρουμε σίγουρα είναι πως

$$\Delta \in \mathcal{A}(\mathcal{M}) \tag{3.50}$$

Το υπόλοιπο του κεφαλαίου θα το αφιερώσουμε στο να δείξουμε πως για την οικογένεια $\mathcal{M}$ των μετρήσιμων συνόλων οποιουδήποτε εξωτερικού μέτρου ισχύει πως $\mathcal{A}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ και άρα και στο συγκεκριμένο παράδειγμα

$$\Delta \in \mathcal{M} \tag{3.51}$$

Θα χρειαστούμε πρώτα όμως να δούμε κάποιες επιπλέον ιδιότητες του μέτρου. Από εδώ και στο εξής θα χρησιμοποιούμε κάποιες φορές την έκφραση $\mu(A)$ αντί της $\mu^*(A)$ όταν το σύνολο A είναι μ^*-μετρήσιμο. Από την απόδειξη 3.13$(ii)_{(c_2)}$ με $B = \emptyset$ και $A = T \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ όπου T τυχών υποσύνολο του Ω έχουμε την εξής πρόταση:

Πόρισμα 3.17 *Έστω T ένα -όχι κατ' ανάγκη μετρήσιμο- υποσύνολο του Ω. Έστω επίσης $\{E_i\}$ μια ακολουθία ξένων ανά δύο μ^*-μετρήσιμων υποσυνόλων του Ω. Τότε*

$$\mu^*(T \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(T \cap E_i) \tag{3.52}$$

Θεώρημα 3.18 *Έστω μ μέτρο στον χώρο $(\Omega, \mathcal{M})$ και έστω $\{A_i\}$ ακολουθία μ^*-μετρήσιμων συνόλων.*

(a) *Αν $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ και $X \subset \Omega$, τότε*

$$\mu^*(X \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sup_i \mu^*(X \cap A_i) \tag{3.53}$$

(b) *Αν $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$, $X \subset \Omega$ και $\mu^*(X \cap A_i) < +\infty$ από κάποιο i και μετά. Τότε*

$$\mu^*(X \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \inf_i \mu^*(X \cap A_i) \tag{3.54}$$

Απόδειξη

(a) Γράφοντας

$$B_1 = A_1, \quad B_i = A_i \setminus A_{i-1} i = 2, 3, \ldots$$

Έχουμε μια ακολουθία $\{B_i\}$ ξένων ανά δύο μετρήσιμων συνόλων με $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} {}_i$. Τότε

$$
\begin{aligned}
\mu^*(X \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) &= \mu^*(X \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(X \cap B_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu^*(X \cap B_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu^*(X \cap \bigcup_{i=1}^{n} B_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu^*(X \cap A_n) \\
&= \sup_i \mu^*(X \cap A_i)
\end{aligned}
$$

(b) Έστω $\mu^*(X \cap A_n) < +\infty$. Γράφοντας

$$B_i = A_n \setminus A_{n+i} \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

έχουμε μια ακολουθία μετρήσιμων συνόλων

$$B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \ldots \tag{3.55}$$

και άρα από το (a) έχουμε

$$\mu^*(X \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sup_i \mu^*(X \cap B_i) \tag{3.56}$$

Άρα

$$\mu^*\big((X \cap A_n) \setminus \bigcap_{j=n+1}^{\infty} A_i\big) = \sup_j \mu^*\big(X \cap (A_n \setminus A_{n+j})\big) \tag{3.57}$$

και αφού τα $A_1, A_2, \ldots$ είναι μετρήσιμα,

$$\mu^*(X \cap A_n) = \mu^*(X \cap \bigcap_{j=n+1}^{\infty} A_i) + \mu^*\big((X \cap A_n) \setminus \bigcap_{j=n+1}^{\infty} A_i\big), \tag{3.58}$$

$$\mu^*(X \cap A_n) = \mu^*(X \cap A_{n+i}) + \mu^*\big((X \cap A_n) \setminus A_{n+i}\big), \quad \forall i \in \mathbb{N} \tag{3.59}$$

και αφού το $\mu^*(X \cap A_n)$ είναι πεπερασμένο, το ίδιο ισχύει και για όλα τις άλλες παραπάνω εκφράσεις. Άρα

$$\mu^*(X \cap A_n) - \mu^*(X \cap \bigcap_{j=n+1}^{\infty} A_i) = \sup_i \{\mu^*(X \cap A_n) - \mu^*(X \cap A_{n+i})\} \tag{3.60}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\mu^*(X \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) &= \mu^*(X \cap \bigcap_{j=n+1}^{\infty} A_j) \\ &= \inf_i \mu^*(X \cap A_{n+i}) \\ &= \inf_i \mu^*(X \cap A_i)\end{aligned}$$

□

Μέχρι στιγμής η θεωρία που αναπτύξαμε αφορά σε κάθε είδους μέτρα, εξωτερικά μέτρα, μετρήσιμους χώρους. Το τελικό αποτέλεσμα του κεφαλαίου επίσης θα εφαρμόζεται στην γενική περίπτωση. Για να φτάσουμε όμως στην απόδειξή του, θα χρειαστεί να περιορίστουμε[4] για λίγο στην οικογένεια των κανονικών εξωτερικών μέτρων τα οποία έχουν κάποιες επιπλέον καλές ιδιότητες.

Μια παρατήρηση που πρέπει να γίνει εδώ είναι ότι ο όρος “κανονικό εξωτερικό μέτρο” δεν χρησιμοποιείται όπως στην κλασσική βιβλιογραφία(κανονικά μέτρα,μέτρα Radon) αφού αυτό θα προϋπέθετε ύπαρξη τοπολογίας. Εν τούτοις, οι έννοιες είναι κοντινές και έχουν να κάνουν με την δυνατότητά να προσεγγίζουν το εξωτερικό μέτρο του τυχαίου συνόλου μέσα από τις τιμές του μέτρου συνόλων που το σκεπάζουν και ανήκουν σε μια καλή οικογένεια. Στην περίπτωση μας η οικογένεια αυτή είναι η ευρύτερη δυνατή. Η οικογένεια $\mathcal{M}$ των μετρήσιμων συνόλων.

Ορισμός 3.19 Ένα εξωτερικό μέτρο μ^* στον Ω καλείται κανονικό αν για κάθε $E \subset \Omega$ υπάρχει ένα μ^*-μετρήσιμο σύνολο A με

$$E \subset A, \qquad \mu^*(E) = \mu^*(A) \tag{3.61}$$

Το (a) του προηγούμενου θεωρήματος μπορεί τώρα να επεκταθεί ως εξής [5]

Θεώρημα 3.20 *Έστω μ^* κανονικό εξωτερικό μέτρο στον Ω. Έστω επίσης $\{A_i\}$ αύξουσα ακολουθία τυχαίων υποσυνόλων του Ω. Τότε*

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sup_i \mu^*(A_i) \tag{3.62}$$

Απόδειξη
Έχουμε άμεσα ότι

$$\sup_i \mu^*(A_i) \leq \sup_i \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \tag{3.63}$$

Για το αντίστροφο και αφού το μ^* είναι κανονικό, μπορούμε να διαλέξουμε για κάθε i

$$A_i \subset B_i, \qquad \mu^*(A_i) = \mu(B_i) \tag{3.64}$$

Γράφοντας $C_i = \bigcap_{j \geq i} B_j$ έχουμε

$$A_i \subset C_i \subset B_i, \quad \text{αφού} \quad A_i \subset A_j \subset B_j \ (j \geq i) \tag{3.65}$$

[4] Στην πραγματικότητα κάθε εξωτερικό μέτρο που συναντά κανείς στην πράξη αλλά και στην θεωρία είναι κανονικό. Μεταφερόμενοι στην γενική τοπολογία, είναι σαν να μιλούσαμε τόση ώρα για κάθε τοπολογικό χώρο και τώρα να περιοριζόμαστε στους T_0

[5] το (b) είναι αδύνατον να επεκταθεί ακόμα και όταν μιλάμε για το μέτρο Lebesque στο $\mathbb{R}$

και

$$\mu^*(A_i) \leq \mu(C_i) \leq \mu(B_i) = \mu^*(A_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots \tag{3.66}$$

Και αφού η $\{C_i\}$ είναι αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων, έχουμε απο το (a) του παραπάνω θεωρήματος

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i) = \sup_i \mu(C_i) = \sup_i \mu^*(A_i) \tag{3.67}$$

Για τα κανονικά εξωτερικά μέτρα, το κριτήριο μετρησιμότητας ενός συνόλου πεπερασμένου μέτρου απλοποιείται σημαντικά.

Θεώρημα 3.21 (2ο κριτήριο μετρησιμότητας) *Έστω μ^* ένα κανονικό εξωτερικό μέτρο στον Ω και M ένα μ^*-μετρήσιμο υποσύνολο του Ω με $\mu^*(M)$ πεπερασμένο. Αν $E \subset M$, το E είναι μετρήσιμο αν και μόνο αν*

$$\mu^*(M) = \mu^*(E) + \mu^*(M \setminus E). \tag{3.68}$$

Απόδειξη
Αν το E είναι μετρήσιμο τότε η παραπάνω σχέση ισχύει.

Έστω τώρα ότι το E ικανοποιεί την παραπάνω σχέση. Θέτουμε $F = M \setminus E$ και αφού το μ^* είναι κανονικό διαλέγουμε E^*, F^* με

$$E \subset E^* \subset M \quad \text{και} \quad \mu^*(E) = \mu(E^*) \tag{3.69}$$

και

$$F \subset F^* \subset M \quad \text{και} \quad \mu^*(F) = \mu(F^*) \tag{3.70}$$

Λόγω της μετρησιμότητας των E^*, F^* έχουμε

$$\begin{aligned} \mu(E^* \setminus F^*) + \mu(E^* \cap F^*) + \mu(F^* \setminus E^*) &= \mu(E^* \cup F^*) \\ &\geq \mu(E \cup F) = \mu(M) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας ανεξάρτητα δύο φορές την σχέση της εκφώνησης έχουμε

$$\begin{aligned} \mu(E^* \setminus F^*) + 2\mu(E^* \cap F^*) + \mu(F^* \setminus E^*) &= \mu(E^*) + \mu(F^*) \\ &= \mu^*(E) + \mu^*(F) \\ &= \mu^*(E) + \mu^*(M \setminus E) \\ &= \mu(M) \end{aligned}$$

□

Άρα συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις παίρνουμε $\mu(E^* \cap F^*) = 0$ και αν θέσουμε $N = E^* \setminus E$ έχουμε

$$N = E^* \setminus E = E^* \cap (M \setminus E) = E^* \cap F \subset E^* \cap F^* \tag{3.71}$$

Αρα $\mu(N) = 0$ και συνεπώς το E είναι μετρήσιμο αφού γράφεται ως ένωση μετρήσιμων:

$$E = E^* \cap (\Omega \setminus N) \tag{3.72}$$

3.3 $\mathcal{A}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$

θα αποδείξουμε ότι $\mathcal{A}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ αρχικά όταν $\mathcal{M}$ είναι η οικογένεια μετρήσιμων συνόλων ενός κανονικού εξωτερικού μέτρου.

Θεώρημα 3.22 *Έστω μ^* ένα κανονικό εξωτερικό μέτρο στον Ω και έστω $\mathcal{M}$ η οικογένεια των μ^*-μετρήσιμων υποσυνόλων του Ω. Τότε*

$$\mathcal{A}(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \tag{3.73}$$

Απόδειξη
Άπο την πρόταση (2.11) έχουμε

$$\mathcal{A}(\mathcal{M}) \supset \mathcal{M} \tag{3.74}$$

Συνεπώς αρκεί να δείξουμε τον ανάποδο εγκλεισμό.

Για τον σκοπό αυτό θα ξεκινήσουμε από το αυθαίρετο $E \in \mathcal{A}(\mathcal{M})$ και θα διαλέξουμε τυχαία A, B πεπερασμένου μ^*, που διαχωρίζονται από το E, με A υποσύνολο του E.

Η παρατήρηση που πρέπει να κάνουμε εδω είναι ότι αρκεί για κάθε $\epsilon > 0$ να κατασκευάσουμε ένα σύνολο N με

$$N \subset E, \quad N \in \mathcal{M}, \quad \text{με} \quad \mu^*(N \cap A) \geq \mu^*(A) - \epsilon \tag{3.75}$$

διότι τότε τα σύνολα $A \cap N$ και B διαχωρίζονται από το N και επειδή το N είναι μετρήσιμο θα έχουμε

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cup B) &\geq \mu^*\big((A \cap N) \cup B\big) \\ &= \mu^*(A \cap N) + \mu^*(B) \\ &\geq \mu^*(A) - \epsilon + \mu^*(B) \end{aligned}$$

Και αφού για κάθε $\epsilon > 0$ θα μπορούμε να επαναλάβουμε[6]το παραπάνω επιχείρημα χρησιμοποιώντας την δυνατότητά μας για κάθε $\epsilon > 0$ να κατασκευάζουμε ένα N με τις παραπάνω ιδιότητες, θα έχουμε στην πραγματικότητα δείξει ότι

$$\mu^*(A \cup B) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B) \tag{3.76}$$

και συνεπώς από το πρώτο κριτήριο μετρησιμότητας θα έχουμε ότι το είναι μετρήσιμο.

Έστω λοιπόν $E \in \mathcal{A}(\mathcal{M})$. Επειδή η οικογένεια $\mathcal{M}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σύστημα $\{A_s : s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ που παράγει το E είναι κανονικό. Δηλαδή

$$E = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{N}} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha|n}, \quad \text{όπου} \quad A_s \subset A_t \text{ αν } s \succ t \tag{3.77}$$

Έστω τώρα A, B υποσύνολα το Ω πεπερασμένου μ^* εξωτερικού μέτρου με

$$A \subset E, \qquad B \subset \Omega \setminus E \tag{3.78}$$

και έστω $\epsilon > 0$ δοθέν. Θα συμβολίσουμε για $k \geq 0$

$$\mathcal{N}[1; k] = \{\alpha \ : \alpha \in \mathcal{N} \quad \text{με} \quad \alpha(1) \leq k\} \tag{3.79}$$

και γενικότερα για $k \geq 0$ και $i \geq 1$

$$\mathcal{N}[i; k] = \{\alpha \ : \alpha \in \mathcal{N} \quad \text{με} \quad \alpha(i) \leq k\} \tag{3.80}$$

[6]Η αν για κάθε $\epsilon > 0$ συμβολίσουμε με N_ϵ το αντίστοιχο N με τις παραπάνω ιδιότητες τότε το σύνολο $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_{\frac{1}{k}}$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δείξει απευθείας ότι $\mu^*(A \cup B) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B)$

Οπότε

$$E = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{N}} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha|n} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{\alpha\in\mathcal{N}[1;k]} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha|n} \tag{3.81}$$

Τότε όμως η ακολουθία

$$A \cap \left(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{N}[1;k]} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha|n} \right) \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.82}$$

είναι μια αύξουσα ακολουθία συνόλων όπου η ένωσή τους δίνει $A \cap E = A$ και αφού το εξωτερικό μέτρο μ^* είναι κανονικό, μπορούμε από το θεώρημα (3.20) να επιλέξουμε φυσικό αριθμό k_1 ώστε

$$\mu^*(A \cap (\bigcup_{\alpha\in\mathcal{N}[1;k_1]} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha|n})) > \mu^*(A) - \epsilon \tag{3.83}$$

Έστω τώρα ότι για $r \geq 1$ έχουμε διαλέξει φυσικούς $k_1, k_2, \ldots, k_r$ ώστε

$$\mu^*(A \cap (\bigcup_{\alpha\in K(r)} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha|n})) > \mu^*(A) - \epsilon \tag{3.84}$$

όπου

$$K(r) = \mathcal{N}[1; k_1] \cap \mathcal{N}[2; k_2] \cap \ldots \cap \mathcal{N}[r; k_r] \tag{3.85}$$

Τότε η ακολουθία

$$A \cap \left(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{N}[r+1;k]\cap K(r)} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha|n} \right) \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.86}$$

είναι πάλι μια αύξουσα ακολουθία συνόλων των οποίων η ένωση δίνει

$$A \cap (\bigcup_{\alpha\in K(r)} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha|n}) \tag{3.87}$$

άρα πάλι μπορούμε να διαλέξουμε φυσικό αριθμό k_{r+1} έτσι ωστε

$$\mu^*(A \cap (\bigcup_{\alpha\in K(r+1)} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha|n})) > \mu^*(A) - \epsilon \tag{3.88}$$

όπου

$$K(r+1) = \mathcal{N}[r+1; k_{r+1}] \cap K(r) \tag{3.89}$$

Έτσι, χρήσει επαγωγής έχουμε καταφέρει να διαλέξουμε $k_1, k_2, k_3, \ldots$ εξασφαλίζοντας ότι για κάθε φυσικό αριθμό r ισχύει

$$\mu^*(A \cap (\bigcup_{\alpha\in K(r)} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha|n})) > \mu^*(A) - \epsilon \tag{3.90}$$

Υιοθετώντας τώρα μια νέα οπτική γωνία, για κάθε $r > 1$ έχουμε

$$\bigcup_{\alpha\in K(r)} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha|n} \subset \bigcup_{\alpha\in K(r)} A_{\alpha|r} \tag{3.91}$$

άρα

$$\mu^*(A) - \epsilon < \mu^*\big(A \cap (\bigcup_{\alpha\in K(r)} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha|n})\big) \leq \mu^*\big(A \cap \bigcup_{\alpha\in K(r)} A_{\alpha|r}\big) \tag{3.92}$$

Όμως καθώς η ένωση διατρέχει το $K(r)$, το $\alpha \mid r$ λαμβάνει μόνο πεπερασμένο $(k_1 \times k_2 \times \ldots \times k_r)$ το πλήθος τιμές. Άρα η φθίνουσα -εφόσον το $\{A_s\}$ είναι κανονικό- ακολουθία συνόλων

$$\bigcup_{\alpha\in K(r)} A_{\alpha|r} \qquad r = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.93}$$

αποτελείται μ^*-μετρήσιμα σύνολα. Από το θεώρημα 3.8, τα σύνολα αυτά είναι μετρήσιμα και για το εξωτερικό μέτρο

$$\mu^*_A(S) = \mu^*(A \cap S), \qquad S \subset \Omega \tag{3.94}$$

Το μ^*_A όμως παίρνει μόνο πεπερασμένες τιμές συνεπώς από θεώρημα 3.18

$$\begin{aligned} \mu^*_A\big(\bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{\alpha\in K(r)} A_{\alpha|r}\big) &= \inf \mu^*_A\big(\bigcup_{\alpha\in K(r)} A_{\alpha|r}\big) \\ &= \inf \mu^*\big(A \cap \bigcup_{\alpha\in K(r)} A_{\alpha|r}\big) \\ &\geq \mu^*(A) - \epsilon \end{aligned}$$

Συμβολίζοντας με

$$K = \bigcap_{r=1}^{\infty} K(r), \qquad N = \bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{\alpha\in K(r)} A_{\alpha|r} \tag{3.95}$$

Έχουμε από τα παραπάνω ότι $N \in \mathcal{M}$ και $\mu^*(N \cap A) = \mu^*_A(N) \geq \mu^*(A) - \epsilon$.

Λόγω όμως του ότι το K είναι σώμα δένδρου πεπερασμένης διακλάδωσης, απο το θεώρημα 2.10 έχουμε

$$E = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{N}} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha|n} \supset \bigcup_{\alpha\in K} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha|n} = \bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{\alpha\in K(r)} A_{\alpha|r} = N \tag{3.96}$$

και συνεπώς καταφέραμε να βρούμε το N με τις ιδιότητες που όπως περιγράψαμε στην αρχή, μας εξασφαλίζουν την μετρησιμότητα του E $\square$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η οικογένεια των μετρήσιμων συνόλων ενός κανονικού εξωτερικού μέτρου παραμένει κλειστή κάτω από την δράση του τελεστη Souslin. Για να γενικεύσουμε το αποτέλεσμα αυτό στην γενική περίπτωση του τυχαίου εξωτερικού μέτρου μ^*, θα ορίσουμε μέσω του μ^* ένα κανονικό εξωτερικό μέτρο ν^* που σχετίζεται με το μ^*. Θα χρησιμοποιήσουμε εν συνεχεία το ν^* για να αποδείξουμε την κλειστότητα της οικογένειας των μ^*-μετρήσιμων συνόλων κάτω από την δράση του τελεστη Souslin.

Υπάρχει για γενική μέθοδος κατασκευής εξωτερικών μέτρων γνωστή και ως *Method* I:

Ορισμός 3.23 Μια συνάρτηση τ ορισμένη σε μία οικογένεια $\mathcal{C}$ υποσυνόλων του Ω θα λέγεται προ-μέτρο αν

(a) $\emptyset \in \mathcal{C}$

(b) $0 \leq \tau(C) \leq \infty$ για κάθε C στην $\mathcal{C}$

(c) $\tau(\emptyset) = 0$ ■

Θα παραθέσουμε τα παρακάτω δύο αποτελέσματα χωρίς απόδειξη καθότι είναι πέρα από τους στόχους της εργασίας. Η απόδειξη και των δύο είναι περισσότερο θέμα επαλήθευσης των ιδιοτήτων και μπορεί να βρεθεί στο βιβλίο: ”Hausdorff Measures, C.A. Rogers”(δες βιβλιογραφία)

Θεώρημα 3.24 (Method I) *Έστω τ προ-μέτρο ορισμένο σε μία κλάση $\mathcal{C}$ υποσυνόλων του Ω. Η συνολοσυνάρτηση*

$$\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty] \quad \textit{με} \quad \mu^*(E) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \tau(C_i), \quad \forall i \in \mathbb{N}\ C_i \in \mathcal{C},\ \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \supset E\} \tag{3.97}$$

είναι εξωτερικό μέτρο στον Ω

Θεώρημα 3.25 *Έστω μ^* εξωτερικό μέτρο στον Ω. Έστω ν ο περιορισμός του μ^* στην οικογένεια $\mathcal{M}$ των μ^*-μετρήσιμων συνόλων. Τότε το ν είναι ένα προ-μέτρο και το εξωτερικό μέτρο λ^* που ορίζεται από το ν μέσω της* Method I *είναι κανονικό. Επιπλέον κάθε μ^*-μετρήσιμο σύνολο είναι και λ^*-μετρήσιμο, κάθε λ^*-μετρήσιμο σύνολο με πεπερασμένο λ^* μέτρο έχει πεπερασμένο μ^* μέτρο και $\lambda^*(E) = \nu(E)$ για κάθε ν-μετρήσιμο σύνολο E*

Θεώρημα 3.26 *Έστω μ^* εξωτερικό μέτρο στον Ω και $\mathcal{M}$ η οικογένεια των μ^*-μετρήσιμων συνόλων. Τότε $\mathcal{A}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$*

Απόδειξη
Αρκεί όπως πριν να δείξουμε μόνο ότι

$$\mathcal{A}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M} \tag{3.98}$$

Έστω $S \in \mathcal{A}(\mathcal{M})$ και έστω A, B πεπερασμένου μ^* μέτρου με

$$A \subset S, \qquad B \subset \Omega \setminus S \tag{3.99}$$

Ορίζουμε την συνολοσυνάρτηση

$$\nu^*(E) = \mu^*((A \cup B) \cap E), \qquad E \subset \Omega \tag{3.100}$$

Άπο το θεώρημα (3.8) έχουμε ότι το ν^* είναι ένα εξωτερικό μέτρο και κάθε σύνολο μ^*-μετρήσιμο, είναι και ν^*-μετρήσιμο. Επιπλέον

$$\nu^*(\Omega \setminus (A \cup B)) = \mu^*(\emptyset) = 0 \tag{3.101}$$

Δηλαδη το $\Omega \setminus (A \cup B)$ και το $(A \cup B)$ είναι ν^*-μετρήσιμα. Ορίζουμε τώρα το εξωτερικό μέτρο λ^* χρησιμοποιώντας την *Method* I και το ν^* περιορισμένο στην οικογένεια των ν^*-μετρήσιμων συνόλων ως προ-μέτρο. Από τα παραπάνω, το λ^* είναι ένα κανονικό μέτρο και όλα τα ν^*-μετρήσιμα σύνολα είναι λ^*-μετρήσιμα. Συνεπώς επειδή το $A \cup B$ είναι ν^*-μετρήσιμο, έχουμε

$$\lambda^*(A \cup B) = \nu^*(A \cup B) = \mu^*(A \cup B) \tag{3.102}$$

και επειδή εν γένει τα A και B δεν είναι ν^*-μετρήσιμα έχουμε

$$\lambda^*(A) \geq \nu^*(A) = \mu^*(A) \quad \text{και} \quad \lambda^*(B) \geq \nu^*(B) = \mu^*(B) \tag{3.103}$$

Επειδή όμως το S ανήκει στην $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ και κάθε σύνολο που ανήκει στην $\mathcal{M}$ είναι λ^*-μετρήσιμο για το κανονικό εξωτερικό μέτρο λ^*, έχουμε από το θεώρημα (3.25) ότι το S είναι λ^*-μετρήσιμο. Δηλαδή

$$\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B) \Rightarrow \tag{3.104}$$

$$\mu^*(A \cup B) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B) \tag{3.105}$$

Άρα $S \in \mathcal{M}$ οπότε $\mathcal{A}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ □

3.4 Το θεώρημα της μετρήσιμης προβολής και εφαρμογές

Ένα πρόβλημα που συναντάει κανείς όταν μελετάει ιδιότητες μετρησιμότητας σε χώρους γινόμενα είναι το εξής:

Παράδειγμα 3.27 Έστω $(\Omega_1, \mathcal{M}_1), (\Omega_2, \mathcal{M}_2)$ μετρήσιμοι χώροι και έστω

$$A \subset \Omega_1 \times \Omega_2 \quad \text{όπου} \quad A \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2, \tag{3.106}$$

όπου $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ η σ-άλγεβρα γινόμενο. Τότε μπορούμε να ξέρουμε αν

$$\text{proj}_{\Omega_1}(A) \in \mathcal{M}_1\,; \tag{3.107}$$

Αν οι χώροι αυτοί είναι πολωνικοί και τα μέτρα κανονικά-συνεργάζονται με την τοπολογία-, τότε συμβολίζοντας με $\mathcal{B}$ τα Borel σύνολα του κάθε χώρου, θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο ότι

$$\text{proj}_{\Omega_1}(A) \in \mathcal{A}(\mathcal{B}_1) \subset \mathcal{M}_1 \tag{3.108}$$

αν

$$A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \quad \text{ή αν} \quad A \in \mathcal{A}(\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2) \tag{3.109}$$

Όμως στην περίπτωση όπου απουσιάζει η τοπολογική δομή δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα εργαλεία του επόμενου κεφαλαίου. Το κεφάλαιο αυτό παρουσιάζει κάποια αποτελέσματα που έχουν αναπτυχθεί προς αυτήν την κατεύθυνση στην περίπτωση που ο χώρος κατά μήκος του οποίου προβάλουμε είναι συμπαγής ή σ-συμπαγής τοπολογικός χώρος.

Τα αποτελέσματα αυτά έχουν ενδιαφέρων για δύο κυρίως λόγους. Αφενός για τον χώρο μέτρου πάνω στον οποίο προβάλλουμε δεν απαιτούμε τίποτα πέραν της πληρότητας της σ-άλγεβρας $\mathcal{M}_1$, πράγμα το οποίο ικανοποιείται αυτομάτως όταν η $\mathcal{M}_1$ είναι η οικογένεια των μετρήσιμων συνόλων ενός εξωτερικού μέτρου. Αφετέρου, τα αποτελέσματα αυτά είναι πολύ χρήσιμα όταν κάποιος μελετάει στοχαστικές ανελίξεις συνεχούς χρόνου, ακριβώς διότι ο χώρος πάνω στον οποίον ορίζεται η στοχαστική ανέλιξη αυτή έχει την δομή που μόλις περιγράψαμε.

Έτσι αρχικά θα παρουσιάσουμε κάποια αποτελέσματα σε χώρους γινόμενο με την παραπάνω δομή και εν συνεχεία θα δώσουμε δύο εφαρμογές που προκύπτουν άμεσα από αυτά. Όσο αναπτύσσουμε την θεωρία θα συμβολίζουμε τον ένα χώρο-ο οποίος είναι ο αφηρημένος χώρος μέτρου- με Ω και με T τον χώρο που θα παίξει το ρόλο του τοπολογικού πάνω στον οποίον θα μπορούσε να τρέχει ο “χρόνος” της στοχαστικής ανέλιξης.

Ορισμός 3.28 Μια οικογένεια $\mathcal{K}$ υποσυνόλων ενός συνόλου T λέγεται συμπαγής κλάση αν για κάθε ακολουθία $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με $K_n \in \mathcal{K}$ για κάθε n, ισχύει

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} \bigcap_{n=1}^{k} K_n = \emptyset \tag{3.110}$$

Παρατήρηση 3.29 Η οικογένεια των συμπαγών συνόλων ενός τοπολογικού χώρου, είναι μία συμπαγής κλάση.

Ορισμός 3.30 Έστω σύνολα Ω, T και αντίστοιχα $\mathcal{F}, \mathcal{E}$ οικογένειες υποσυνόλων τους. Ορίζουμε τις οικογένειες υποσυνόλων του χώρου $\Omega \times T$

$$\mathcal{F} \times \mathcal{E} = \{F \times E : \ F \in \mathcal{F}, \ E \in \mathcal{E}\} \tag{3.111}$$

και

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{E} = \sigma(\{F \times E : \ F \in \mathcal{F}, \ E \in \mathcal{E}\}) \tag{3.112}$$

Θεώρημα 3.31 *Έστω σύνολα Ω, T και $\mathcal{F}, \mathcal{K}$ οικογένειες υποσυνόλων του Ω και T αντίστοιχα, κλειστές στις πεπερασμένες τομές. Αν επιπλέον η $\mathcal{K}$ είναι συμπαγής κλάση και $\emptyset \in \mathcal{F}$, τότε*

$$A \in \mathcal{A}(\mathcal{F} \times \mathcal{K}) \Rightarrow \text{proj}_{\Omega}(A) \in \mathcal{A}(\mathcal{F}) \tag{3.113}$$

Απόδειξη
Επειδή οι $\mathcal{F}$ και $\mathcal{K}$ είναι κλειστές στις πεπερασμένες τομές, το ίδιο θα συμβαίνει και με την οικογένεια $\mathcal{F} \times \mathcal{K}$. Άρα για κάθε σύνολο

$$A \in \mathcal{A}(\mathcal{F} \times \mathcal{K}), \tag{3.114}$$

θα υπάρχει κανονικό σύστημα συνόλων $\{(F \times K)_s\} = \{F_s \times K_s\}$ ώστε

$$A = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{N}} \bigcap_{n=1}^{\infty} (F_{\alpha|n} \times K_{\alpha|n}) \tag{3.115}$$

Επειδή το σύστημα $\{F_s \times K_s\}$ είναι κανονικό, το σύστημα $\{K_s\}$ είναι επίσης κανονικό. Τότε

$$\text{proj}_{\Omega}(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{N}} \bigcap_{n=1}^{\infty} (F_{\alpha|n} \times K_{\alpha|n})) = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{N}} \text{proj}_{\Omega}(\bigcap_{n=1}^{\infty} (F_{\alpha|n} \times K_{\alpha|n})) \tag{3.116}$$

Αφού η προβολή αντιμετατίθεται με την ένωση. Όμως $\forall \alpha \in \mathcal{N}$,

$$\text{proj}_{\Omega}(\bigcap_{n=1}^{\infty} (F_{\alpha|n} \times K_{\alpha|n})) = \begin{cases} \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{\alpha|n} & \text{αν } \forall n \in \mathbb{N} \ K_{\alpha|n} \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{αν } \exists n \in \mathbb{N} \ K_{\alpha|n} = \emptyset \end{cases} \tag{3.117}$$

αφού λόγω της ιδιότητας της συμπαγούς κλάσης, αν $\forall n \in \mathbb{N} \ K_{\alpha|n} \neq \emptyset$ τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_\alpha|n \neq \emptyset$. Ορίζουμε λοιπόν ένα σύστημα συνόλων στον Ω ως εξής

$$E_s = \begin{cases} F_s & \text{αν } K_s \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{αν } K_s = \emptyset \end{cases} \tag{3.118}$$

Τότε

$$\text{proj}_{\Omega}(A) = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{N}} \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{\alpha|n} \in \mathcal{A}(\mathcal{F}) \tag{3.119}$$

Λήμμα 3.32 *Έστω T συμπαγής τοπολογικός χώρος και $\mathcal{K}$ η οικογένεια των συμπαγών υποσυνόλων του T. Αν επιπλέον*

$$\neg\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_\sigma \tag{3.120}$$

τότε

$$\mathcal{B}(T) = \sigma(\mathcal{K}) \tag{3.121}$$

Απόδειξη
Παρατηρούμε αρχικά ότι

$$\mathcal{B}(T) \supset \sigma(\mathcal{K}) \tag{3.122}$$

αφού $\sigma(\mathcal{K}) \subset \sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}(T)$, όπου $\mathcal{F}$ η οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του T

Απο την άλλη για το τυχαίο ανοικτό $U \subset T$, το $T \setminus U$ είναι συμπαγές αφού T συμπαγής. Άρα $U \in \mathcal{K}_\sigma$ συνεπώς,

$$\sigma(\mathcal{G}) \subset \sigma(\mathcal{K}) = \mathcal{B}(T) \tag{3.123}$$

όπου $\mathcal{G}$ η οικογένεια των ανοικτών του T.

Θεώρημα 3.33 *Έστω $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ πλήρης χώρος μέτρου και $(T, \mathcal{K})$ όπως στο προηγούμενο λήμμα. Τότε*

$$\text{proj}_\Omega(\mathcal{M} \otimes \mathcal{B}) \subset \mathcal{M} \tag{3.124}$$

Απόδειξη
Γνωρίζουμε ότι

- $\mathcal{A}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ από κεφάλαιο 3.3
- $\text{proj}_\Omega(\mathcal{A}(\mathcal{M} \times \mathcal{K})) \in \mathcal{A}(\mathcal{M})$ από θεώρημα 3.31
- $\mathcal{M} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{M} \times \sigma(\mathcal{K})) = \sigma(\mathcal{M} \times \mathcal{K})$ από προηγούμενο λήμμα □

Συνεπώς αρκεί να δείξω ότι $\sigma(\mathcal{M} \times \mathcal{K}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{M} \times \mathcal{K})$, διότι τότε, συνδυαστικά από όλα τα παραπάνω, έχουμε

$$\text{proj}_\Omega(\mathcal{M} \otimes \mathcal{B}) = \text{proj}_\Omega(\sigma(\mathcal{M} \times \mathcal{K})) \subset \text{proj}_\Omega(\mathcal{A}(\mathcal{M} \times \mathcal{K})) \subset \mathcal{A}(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \tag{3.125}$$

Έστω λοιπόν $A \in \mathcal{M} \times \mathcal{K}$, δηλαδή $A = M \times K$ με $M \in \mathcal{M}$ και $K \in \mathcal{K}$. Τότε

$$A^c = (M \times K)^c = (M^c \times T) \cup (\Omega \times K^c) \tag{3.126}$$

Το πρώτο σύνολο ανήκει στην $\mathcal{M} \times \mathcal{K}$ και άρα στην $\mathcal{A}(\mathcal{M} \times \mathcal{K})$. Για το δεύτερο, εφόσον $\neg\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_\sigma$ έχουμε

$$\Omega \times K^c = \Omega \times \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\Omega \times K_n) \in \mathcal{A}(\mathcal{M} \times \mathcal{K}) \tag{3.127}$$

Άρα, $A^c \in \mathcal{A}(\mathcal{M} \times \mathcal{K})$ και επειδή η οικογένεια $\mathcal{A}(\mathcal{M} \times \mathcal{K})$ είναι κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις και τομές, με υπερπεπερασμένη επαγωγή μπορούμε να δούμε ότι

$$B \in \sigma(\mathcal{M} \times \mathcal{K}) \Rightarrow B \in \mathcal{A}(\mathcal{M} \times \mathcal{K}) \tag{3.128}$$

Παρατήρηση 3.34 Το παραπάνω θεώρημα ισχύει ακόμα και αν ελαφρύνουμε τις συνθήκες ώστε το T να είναι K_σ. Αυτό διότι τότε

$$T = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \quad \text{όπου για κάθε } n \ K_n \in \mathcal{K} \tag{3.129}$$

Εφαρμόζοντας λοιπόν το προηγούμενο θεώρημα για $T_n = K_n, \mathcal{K}_n = \mathcal{K}|K_n$, έχουμε ότι

$$\text{proj}_\Omega(\mathcal{M} \otimes \mathcal{K}_n) \subset \mathcal{M} \tag{3.130}$$

Όμως κάθε σύνολο Borel του $\bigcup_{n=1}^\infty K_n$ είναι ένωση Borel συνόλων των K_n. Άρα αν $A \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{K}$ τότε

$$\text{proj}_\Omega(A) = \text{proj}_\Omega(\bigcup_{n=1}^\infty (A \cap K_n)) = \bigcup_{n=1}^\infty \text{proj}_\Omega(A \cap K_n) \in \mathcal{M} \tag{3.131}$$

Ορισμός 3.35 Έστω T ένα σύνολο δεικτών. Στοχαστική ανέλιξη στο T με τιμές στο $\mathbb{R}^m$ ονομάζεται μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X_t, t \in T\}$ σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$.■

Θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με την περίπτωση όπου $T = [0, +\infty)$.

Ορισμός 3.36 Ένας χώρος πιθανότητας λέγεται ότι είναι εφοδιασμένος με μια διύλιση $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$, όταν για κάθε $t \in T$ η $\mathcal{F}_t$ είναι σ-άλγεβρα, με $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ και αν $t < s$ τότε $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$. Η στοχαστική ανέλιξη $\{X_t, t \in T\}$ ορισμένη στον $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ λέγεται $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένη αν για κάθε $t \in T$, η X_t είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη. ■

Μια στοχαστική ανέλιξη είναι επί της ουσίας μια συνάρτηση δύο μεταβλητών

$$X : \Omega \times T \to \mathbb{R}^m \tag{3.132}$$

όπου για κάθε $t \in T$ η

$$X(\ ,t) : \Omega \to \mathbb{R}^m \tag{3.133}$$

είναι μετρήσιμη στον $(\Omega, \mathcal{M})$.

Ορισμός 3.37 Έστω στοχαστική ανέλιξη $\{X_t, t \in T\}$ σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ εφοδιασμένο με μια διύλιση $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$. Λέμε ότι η στοχαστική ανέλιξη

$$X : \Omega \times T \to \mathbb{R}^m \tag{3.134}$$

είναι $\mathcal{F}_t$-προοδευτικά μετρήσιμη αν για κάθε $t \geq 0$ η συνάρτηση

$$X|_{\Omega \times [0,t]} : \Omega \times [0,t] \to \mathbb{R}^m \tag{3.135}$$

είναι $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-μετρήσιμη. ■

Ορισμός 3.38 Έστω $(\Omega, \mathcal{M})$ μετρήσιμος χώρος, εφοδιασμένος με τη διύλιση $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$. Μια τυχαία μεταβλητή $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ λέγεται $\mathcal{F}_t$-χρόνος διακοπής αν

$$\tau^{-1}([0,t]) \in \mathcal{F}_t \quad \text{για κάθε } t \in T \tag{3.136}$$

Αποδεικνύεται πως αν μια στοχαστική ανέλιξη $\{X_t, t \in T\}$ με τιμές στο $\mathbb{R}^m$ είναι $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένη και συνεχής, δηλαδή σχεδόν για κάθε ω η συνάρτηση

$$X(\omega,\ ) : T \to \mathbb{R}^m \tag{3.137}$$

είναι συνεχής και $E \subset \mathbb{R}^m$ κλειστό τότε η τυχαία μεταβλητή

$$\tau(\omega) \begin{cases} \inf\{t \geq 0 : X_t(\omega) \in E\} & \text{αν } \{t \geq 0 : X_t(\omega) \in E\} \neq \emptyset \\ \infty & \text{αν } \{t \geq 0 : X_t(\omega) \in E\} = \emptyset \end{cases} \tag{3.138}$$

είναι $\mathcal{F}_t$-χρόνος διακοπής. Επιπλέον η συνέχεια της $\{X_t, t \in T\}$ ή ακόμα και η δεξιά συνέχεια καθιστά την $\mathcal{F}_t$-προοδευτικά μετρήσιμη.

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της μετρήσιμης προβολής θα γενικεύσουμε το παραπάνω αποτέλεσμα ως εξής

Θεώρημα 3.39 *Έστω $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ πλήρης χώρος μέτρου, $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ διύλιση η οποία για κάθε t περιέχει όλα τα σύνολα μέτρου μηδέν της $\mathcal{M}$. Έστω επιπλέον στοχαστική ανέλιξη $X : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^m$, $\mathcal{F}_t$-προοδευτικά μετρήσιμη. Τότε για κάθε Borel σύνολο B του $\mathbb{R}^m$, η συνάρτηση*

$$\tau(\omega) : \Omega \to [0, \infty] \quad \text{με} \quad \tau \begin{cases} \inf\{t \geq 0 : X_t(\omega) \in B\} & \text{αν } \{t \geq 0 : X_t(\omega) \in B\} \neq \emptyset \\ \infty & \text{αν } \{t \geq 0 : X_t(\omega) \in E\} = \emptyset \end{cases} \tag{3.139}$$

είναι ένας $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$-χρόνος διακοπής.

Απόδειξη

Για κάθε ω, ορίζουμε το σύνολο

$$A(\omega) = \{t \in T : X(\omega, t) \in B\} \tag{3.140}$$

Τότε

$$\begin{aligned} M &= \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \\ &= \{\omega \in \Omega : \inf\{A(\omega) \leq t\} \\ &= \{\omega \in \Omega : \forall n \in \mathbb{N}\ \exists s \in [0, t + \frac{1}{n}] \text{ με } X(\omega, s) \in B\} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{proj}^{[0,t+\frac{1}{n}]}\{\omega \in \Omega : X(\omega, s) \in B\} \end{aligned}$$ □

Όμως επειδή η X είναι $\mathcal{F}_t$-προοδευτικά μετρήσιμη,

$$A_n = X|^{-1}_{\Omega \times [0, t+\frac{1}{n}]}(B) \ \in \ \mathcal{F}_{t+\frac{1}{n}} \otimes \mathcal{B}([0, t + \frac{1}{n}]) \tag{3.141}$$

Άρα από θεώρημα μετρήσιμης προβολής, $\text{proj}^{[0,t+\frac{1}{n}]}(A_n) \in \mathcal{F}_{t+\frac{1}{n}}$ για κάθε φυσικό n, και συνεπώς

$$A \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{t+\frac{1}{n}} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s \text{ λόγω μονοτονίας της } \mathcal{F}_t \tag{3.142}$$

Η παρακάτω πρόταση αποδεικνύεται εύκολα αν οι τροχιές της στοχαστικής ανέλιξης είναι συνεχείς. Ακόμα όμως και στην γενική περίπτωση, μέσω του θεωρήματος της μετρήσιμης προβολής έχουμε:

Θεώρημα 3.40 *Έστω $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ πλήρης χώρος μέτρου, $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ διύλιση η οποία για κάθε t περιέχει όλα τα σύνολα μέτρου μηδέν της $\mathcal{M}$. Έστω επιπλέον ότι $\mathcal{F}_t$-προοδευτικά μετρήσιμη στοχαστική ανέλιξη $\{X_t, t \in T\}$ στον $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ με τιμές στο $\mathbb{R}$. Τότε η στοχαστική ανέλιξη*

$$X^*(\omega, t) = \sup_{s \leq t} X(\omega, s) \tag{3.143}$$

είναι $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένη

Απόδειξη

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $t \in T$ σταθερό,

$$\{\omega \in \Omega : X^*(\omega, t) > x\} = \text{proj}^{[0,t]}\, X|^{-1}_{\Omega \times [0,t]}\big((x, \infty)\big) \tag{3.144}$$

επειδή η X είναι $\mathcal{F}_t$-προοδευτικά μετρήσιμη,

$$X|^{-1}_{\Omega \times [0,t]}\big((x, \infty)\big) \ \in \ \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0, t]) \tag{3.145}$$

άρα από το θεώρημα μετρήσιμης προβολής έχουμε ότι για κάθε $t \geq 0$, η $X_t^*(\omega)$ είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη. □

4 Τοπολογία και τελεστής Souslin

4.1 Εισαγωγή

Η θεωρία που προκύπτει από την αλληλεπίδραση τελεστή Souslin και της τοπολογίας είναι ο σκληρός πυρήνας του αντικειμένου που ονομάζεται περιγραφική συνολοθεωρία. Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε μερικά μόνο βασικά αποτελέσματα στη γραμμή αυτή.

Ορισμός 4.1 Έστω σύνολο X και $\mathcal{T}$ οικογένεια υποσυνόλων του X τέτοια ώστε

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

(ii) Η οικογένεια $\mathcal{T}$ είναι κλειστή κάτω απο την λήψη αυθαίρετων ενώσεων

(iii) Η οικογένεια $\mathcal{T}$ είναι κλειστή κάτω απο την λήψη πεπερασμένων τομών

Τότε η οικογένεια $\mathcal{T}$ καλείται τοπολογία στο X, κάθε στοιχείο της $\mathcal{T}$ καλείται ανοικτό υποσύνολο του X και το ζεύγος $(X,\mathcal{T})$ καλείται τοπολογικός χώρος ■

Ορισμός 4.2 Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος τότε ορίζουμε την οικογένεια $\mathcal{B}$ των Borel συνόλων του τοπολογικού χώρου ως την ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά του X ■

Είδαμε ήδη ότι η οικογένεια $\mathcal{M}$ των μετρήσιμων συνόλων ενός χώρου μέτρου παραμένει αναλλοίωτη κάτω από την δράση του τελεστή Souslin. Είναι φυσικό να μην περιμένουμε το ίδιο από την οικογένεια $\mathcal{T}$ των ανοικτών συνόλων ενός τοπολογικού χώρου. Αυτό διότι εκτός από περιπτώσεις τετριμμένων τοπολογικών χώρων, η οικογένεια $\mathcal{T}$ δεν είναι κλειστή ούτε κάτω από αριθμήσιμες τομές. Όμως, από τις πρωταρχικές ιδιότητες του τελεστή που έχουμε περιγράψει, γνωρίζουμε ότι

$$\mathcal{T}_\delta, \quad \mathcal{T}_{\delta\sigma}, \quad \mathcal{T}_{\delta\sigma\delta}, \quad \ldots \subset \mathcal{A}(\mathcal{T}) \tag{4.1}$$

Συνεπώς το επόμενο βήμα είναι να δούμε το κατά πόσο η οικογένεια $\mathcal{B}$ των Borel συνόλων του τοπολογικού χώρου -δηλαδή η ελάχιστη οικογένεια που περιέχει τα ανοικτά και είναι κλειστή κάτω από αριθμήσιμες ενώσεις, συμπληρώματα και συνεπώς αριθμήσιμες τομές- είναι κλειστή κάτω από τον τελεστή Souslin. Θα δούμε ότι αυτό στην γενική περίπτωση δεν συμβαίνει.

Ορισμός 4.3 Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Ονομάζουμε την οικογένεια $\mathcal{A}(\mathcal{T})$, οικογένεια αναλυτικών συνόλων και κάθε σύνολο που ανήκει σε αυτήν, αναλυτικό. ■

Και από τα παραπάνω έχουμε ότι

$$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{T}) \tag{4.2}$$

Όπου ο πρώτος εγκλεισμός είναι αυστηρός πλην κάποιων τετριμμένων ή τεχνιτών παραδειγμάτων. Ένας από τους στόχους του κεφαλαίου αυτού είναι να δείξει ότι και ο δεύτερος εγκλεισμός είναι αυστηρός σχεδόν σε κάθε κλασικό τοπολογικό χώρο της ανάλυσης.

Υπάρχει εδώ όμως ένα ενδιαφέρον φαινόμενο που πρέπει εξ αρχής να αναδείξουμε. Έστω $\{A_i\}_{i\in I}$ μια αριθμήσιμη οικογένεια συνόλων. Όταν χρησιμοποιούμε τους φυσικούς αριθμούς$(I = \mathbb{N})$ ως δείκτες για να αριθμήσουμε για ακολουθία συνόλων και να δράσουμε μετά με την πράξη της τομής για παράδειγμα, οι δείκτες λίγο πολύ χρησιμεύουν μόνο για να υποδηλώσουν την αριθμήσιμη πληθικότητα της οικογένειας στην οποία θα δράσουμε.

$$A_0, A_1, A_2, A_3, \dots \qquad \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \tag{4.3}$$

Όταν θέλουμε να κάνουμε κάτι πιο περίπλοκο με την οικογένεια, χρησιμοποιούμε δείκτες οι οποίοι υποδηλώνουν και περιέχουν εγγενώς πληροφορία για την φύση της δράσης. Για παράδειγμα δεικτοδοτούμε με $i \in I = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ όταν θέλουμε να δράσουμε αρχικά με αριθμήσιμη τομή και μετά με αριθμήσιμη ένωση.

$$\bigcup_{j=0}^{\infty} \bigcap_{i=0}^{\infty} A_{i,j} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
&A_{0,0}, A_{0,1}, A_{0,2}, A_{0,3}, \dots && (4.5)\\
&A_{1,0}, A_{1,1}, A_{1,2}, && (4.6)\\
&A_{2,0}, A_{2,1}, && (4.7)\\
&A_{3,0}, && (4.8)\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \ddots && (4.9)\\
& && (4.10)
\end{aligned}$$

Η χρήση διατεταγμένων (i, j) ζευγών υποδηλώνει -αλλά και επιβάλλεται από- την μη αντιμεταθετικότητα των πράξεων της τομής και της ένωσης.

Στην περίπτωση του τελεστή Souslin, η φύση της δράσης περιέχει την έννοια της εγγύτητας. Έστω δηλαδή ένα κανονικό[1] σύστημα υποσυνόλων $\{A_s : s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ ενός χώρου X και έστω A με

$$A = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{N}} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha|n} \tag{4.11}$$

Αν ορίσουμε $A_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha|n}$ για κάθε α στο $\mathcal{N}$, τότε το πόσο διαφέρει το A_α από το A_β, με β επίσης στο $\mathcal{N}$, έχει να κάνει με το πόσο “κοντά” είναι το α και το β στον μετρικό-τοπολογικό χώρο $\mathcal{N}$. Δηλαδή από τον αριθμό m όπου

$$m = \sup\{n \in \mathbb{N} : \quad \alpha|n = \beta|n\} \tag{4.12}$$

[1] Επειδή οι οικογένειες που θα χρησιμοποιήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο είναι κλειστές στις πεπερασμένες τομές, μπορούμε να χρησιμοποιούμε κανονικά σχήματα αντί για τυχαία σχήματα Souslin

Αν λοιπόν αποφασίσουμε να μελετήσουμε τον χώρο $\mathcal{N}$ ως τοπολογικό χώρο, και ιδιαίτερα την συμπεριφορά της τοπολογίας του χώρου $\mathcal{N}$ κάτω από την δράση του τελεστή Souslin, ο οποίος χρησιμοποιεί "a priori" την τοπολογική δομή του χώρου $\mathcal{N}$, καταλήγουμε σε ένα αυτοαναφορκό παιχνίδι. Γεγονός το οποίο θα εκμεταλλευτούμε για να αποδείξουμε ότι υπάρχουν σύνολα αναλυτικά και όχι Borel στον τοπολογικό χώρο $\mathcal{N}$.

Αυτό όμως το οποίο έχει σημασία εδώ, είναι ότι ο χώρος $\mathcal{N}$ δεν είναι ένας τυχαίος τοπολογικός χώρος. Είναι ο χώρος πρότυπο μιας μεγάλης κλάσης τοπολογικών χώρων που περιλαμβάνει χώρους όπως οι[2] $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $C[0,1]$, $c_0(\mathbb{N})$, $l_{p,\,0\leq p<+\infty}$,...

Η κλάση αυτή, είναι η κλάση των Πολωνικών χώρων που ευθύς θα ορίσουμε. Εν συνεχεία θα αποδείξουμε τα βασικά θεωρήματα που μας επιτρέπουν να μεταφέρουμε κάθε αποτέλεσμα που αποδεικνύουμε για τον χώρο $\mathcal{N}$, σχετικό με την τοπολογία και την πολυπλοκότητα, σε αυτούς.

4.2 Πολωνικοί χώροι και θεωρήματα μεταφοράς

Ορισμός 4.4 Ένας τοπολογικός χώρος $(X,\mathcal{T})$ διαχωρίσιμος και μετρικοποιήσιμος, με ισοδύναμη πλήρη μετρική, ονομάζεται πολωνικός χώρος και γράφεται (X,d) όπου d μια ισοδύναμη της τοπολογίας μετρική που καθιστά τον X πλήρη. ■

Μερικά παραδείγματα χώρων που είναι με την συνήθη τοπολογία πολωνικοί χώροι:
$\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{N}$, $C[0,1]$, $c_0(\mathbb{N})$, $l_{p,\,0\leq p<+\infty}$, $[-2,1]\cup\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $(0,1)$,...

Μερικά παραδείγματα χώρων που δεν είναι πολωνικοί:
$(\mathbb{R}, d_{\text{διακριτή}})$, l_∞, $(l_p, \mathcal{T}_{\text{weak}})$, $\mathcal{U}(\mathbb{N})$(Ο χώρος των υπερφίλτρων στο $\mathbb{N}$),...

Παρατήρηση 4.5 (a) Αν (X,d) είναι πολωνικός χώρος, εύκολα μπορούμε να δούμε ότι η μετρική ρ με

$$\rho(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \tag{4.13}$$

είναι μια εξίσου πλήρης μετρική, ισοδύναμη με την ρ με την οποία $diam(X)<1$. Από εδώ και πέρα θα χρησιμοποιούμε ελεύθερα αυτό το γεγονός.

(b) Το γινόμενο μιας ακολουθίας $(X_i,d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ πολωνικών χώρων [3] με την τοπολογία γινόμενο είναι πολωνικός χώρος με ισοδύναμη μετρική

$$d(x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}d_i(x_i,y_i) \quad \text{με} \quad d<1 \tag{4.14}$$

(c) Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε επίσης ότι η πληρότητα δεν είναι μια τοπολογική ιδιότητα. Για παράδειγμα ο χώρος

$$\big((0,1),d\big), \qquad d(x,y)=|x-y|+|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}|+|\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-y}| \tag{4.15}$$

είναι πλήρης και η d είναι ισοδύναμη με την απόλυτη τιμή. Γενικότερα αποδομώντας το παραπάνω επιχείρημα μπορεί κανείς νε δει ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο πολωνικού χώρου

[2] Θεωρούμενοι πάντα με την κλασική τοπολογία

[3] ήδη θεωρούμε ότι $d_i<1$ για κάθε $i\in\mathbb{N}$

είναι πολωνικός χώρος. Στην γραμμή αυτή υπάρχει και το θεώρημα του Aleksandrov που λέει ότι: “Αν (X,d) είναι πολωνικός χώρος” και $A \subset X$. Ο (A,d) είναι πολωνικός χώρος αν και μόνο αν το A είναι G_δ υποσύνολο του (X,d)

Από την παραπάνω παρατήρηση (b) έχουμε με τετριμμένο τρόπο πως το σύνολο Cantor $\mathcal{C} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ και ο χώρος $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ με την τοπολογία γινόμενο είναι πολωνικοί χώροι.

Υπενθυμίζουμε ότι η τοπολογία γινόμενο είναι η ελάχιστη τοπολογία που κάνει συνεχείς τις προβολές συνεπώς για ακολουθία $\{\alpha_n\}$ στον χώρο $\mathcal{N}$ για παράδειγμα, συγκλίνει στο α αν και μόνο αν για κάθε συντεταγμένη i, η ακολουθία $\alpha_n(i)$ συγκλίνει στο $\alpha(i)$. Μια άλλη ισοδύναμη μετρική της τοπολογίας γινόμενο του $A^{\mathbb{N}}$, είναι η

$$d(\alpha,\beta) = \frac{1}{2^{k+1}} \quad \text{όπου} \quad k = \min\{i : \ \alpha(i) \neq \beta(i)\} \quad \text{με} \quad \alpha,\beta \in A^{\mathbb{N}} \tag{4.16}$$

την οποία θα χρησιμοποιήσουμε στο εξής για τους χώρους $\mathcal{N}$ και $\mathcal{C}$

Παρατήρηση 4.6 Σχετικά με την συμπάγεια

- Ο χώρος $\mathcal{C}$ είναι συμπαγής και γενικότερα κάθε σώμα $[T]$ finite splitting δέντρου T είναι συμπαγές.
- Ο $\mathcal{N}$ όχι μόνο δεν είναι συμπαγής αλλά ούτε τοπικά συμπαγής και ως εκ τούτου ούτε K_σ.

Ας παρατηρήσουμε αρχικά ότι υπάρχει μια φυσιολογική εμφύτευση του $\mathcal{C}$ στον $\mathcal{N}$

$$T : \mathcal{C} \to \mathcal{N} \quad \text{με} \quad T(x) = x \tag{4.17}$$

Αλλά και αντίστροφα:

Θεώρημα 4.7 *Υπάρχει G_δ υποσύνολο E του $\mathcal{C}$ ώστε το E και το $\mathcal{N}$ να είναι ομοιομορφικά*
Απόδειξη
Αν συμβολίσουμε με 0^n την πεπερασμένη ακολουθία από n το πλήθος μηδενικά η συνάρτηση

$$f : \mathcal{N} \to \mathcal{C} \quad \text{με} \quad T(\alpha) = 0^{\alpha(0)}10^{\alpha(1)}10^{\alpha(2)}1\ldots \tag{4.18}$$

είναι ένα προς ένα και επί του συνόλου $E \subset \mathcal{C}$ με

$$E = (\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{\infty} A_{n,m}) \quad \text{όπου} \quad A_{n,m} = \{x \in \mathcal{C} : \ x(n+m) = 1\} \tag{4.19}$$

και επειδή για κάθε n και m το $A_{n,m}$ είναι πεπερασμένη ένωση βασικών ανοικτών, $E \in G_\delta$. Η αμφισυνέχεια δείχνεται εύκολα σε αυτούς τους χώρους χρησιμοποιώντας ακολουθίες επειδή η σύγκλιση μιας ακολουθίας εξασφαλίζει -αλλά και εξασφαλίζεται από- την κατά συντεταγμένη σύγκλιση. □

Τα επόμενα θεωρήματα δείχνουν γιατί ο χώρος $\mathcal{N}$(και $\mathcal{C}$) είναι πρότυπα δομής κάθε πολωνικού χώρου(συμπαγούς πολωνικού χωρου αντίστοιχα).

Σε κάθε πολωνικό χώρο (X,d) μπορούμε να εντοπίσουμε κάθε στοιχείο $x \in X$ τέμνοντας μια κατάλληλη, φθίνουσα ακολουθία περιοχών που το περιέχουν. Με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο θα εντοπίζαμε ένα $\alpha \in \mathcal{N}$ κατεβαίνοντας ένα άπειρο κλαδί στο δένδρο $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Η ιδέα αυτή αποσαφηνίζεται μέσω των παρακάτω ορισμών και παρατηρήσεων.

Ορισμός 4.8 Έστω (X,d) ένας πολωνικός χώρος με $d < 1$ και έστω ένα μη κενό σύνολο A.

- Ένα σχήμα Souslin $\{F_s : \ s \in A^{<\mathbb{N}}\}$ στον X είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του X με δείκτες από τον χώρο $A^{<\mathbb{N}}$ ώστε

  (i) $cl(F_{s*a}) \subset F_s$ για κάθε $s \in A^{<\mathbb{N}}$, $a \in A$

  (ii) για κάθε $\alpha \in A^{\mathbb{N}}$, $\ diameter(F_{\alpha|n}) \to 0$ όταν $n \to \infty$

- Ένα σχήμα Souslin $\{F_s : \ s \in A^{<\mathbb{N}}\}$ στον X λέγεται σχήμα Luzin στον X όταν επιπλέον ισχύει το εξής
$$\forall s,t \in A^{<\mathbb{N}} \ \text{ με } \ s \perp t \quad \Rightarrow \quad F_s \cap F_t = \emptyset \tag{4.20}$$

- Ένα σχήμα Luzin $\{F_s : \ s \in A^{<\mathbb{N}}\}$ στον X λέγεται σχήμα Cantor στον X αν $A = \{0,1\}$ και F_s κλειστό για κάθε $s \in A^{<\mathbb{N}}$ ■

Πριν περάσουμε σε κάποιες παρατηρήσεις που προκύπτουν από τους παραπάνω ορισμούς, ας δούμε ένα παράδειγμα χρήσης ενός σχήματος Souslin στο αυθαίρετο πολωνικό χώρο (X,d).

Θεώρημα 4.9 *Κάθε πολωνικός χώρος (X,d) είναι συνεχής εικόνα του $\mathcal{N}$.*

Απόδειξη
Έστω (X,d) πολωνικός χώρος $(d < 1)$. Αφού ο X είναι διαχωρίσιμος, μπορεί να γραφτεί σαν ένωση κλειστών συνόλων(για παράδειγμα κλειστών μπαλών) με μικρή διάμετρο[4].

$$X = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i, \qquad \text{όπου } F_i \text{ κλειστό με } diameter(F_i) < \frac{1}{2^2} \tag{4.21}$$

Μπορούμε τώρα να συνεχίσουμε γράφοντας κάθε F_i ως αριθμήσιμη ένωση ακόμα μικρότερων κλειστών συνόλων που βρίσκονται εξ ολοκλήρου εντός του F_i.[5] Έτσι επαγωγικά ορίζουμε για κάθε k φυσικό, μη κενά κλειστά σύνολα

$$F_{n_1,n_2,\ldots,n_k} \quad \text{με} \quad diameter(F_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) < \frac{1}{2^{k+1}} \quad \text{ώστε} \tag{4.22}$$

- $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$
- $F_{n_1,n_2,\ldots,n_{k-1}} = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_{n_1,n_2,\ldots,n_{k-1},n_i}$
- $F_{n_1,n_2,\ldots,n_{k-1}} \supset F_{n_1,n_2,\ldots,n_{k-1},n_i}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ □

Η πληρότητα του χώρου X εξασφαλίζει ότι για κάθε α στον $\mathcal{N}$ θα υπάρχει μοναδικό $x = x_\alpha$ στον X ώστε
$$\bigcap_{i=1}^{\infty} F_{\alpha|i} = \{x_\alpha\} \tag{4.23}$$

Έτσι ορίζουμε την συνάρτηση

$$g : \mathcal{N} \to X \quad \text{με} \quad g(\alpha) = x_\alpha \tag{4.24}$$

Η g δεν είναι απαραίτητα "1-1" αφού εν γένει $F_{n_1,n_2,\ldots,n_k,i} \cap F_{n_1,n_2,\ldots,n_k,j} \neq \emptyset$. Όμως η g είναι Lipschitz σταθεράς 1 και άρα συνεχής: Έστω α και β στο $\mathcal{N}$ με $d_{\mathcal{N}}(\alpha,\beta) < \frac{1}{4}$. Τότε απο τον ορισμό της μετρικής του $\mathcal{N}$ που παραθέσαμε πιο πάνω, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\frac{1}{2^{k+2}} \leq d_{\mathcal{N}}(\alpha,\beta) < \frac{1}{2^{k+1}} \tag{4.25}$$

[4]γενικά επιτρέπουμε $F_i \cap F_j \neq \emptyset$

[5]κλειστό υποσύνολο πολωνικού χώρου, είναι πολωνικός χώρος.

Άρα $m_i \neq n_i$ για κάθε $i \leq k$. Συνεπώς

$$d(g(\alpha), g(\beta)) \leq diameter(F_{\alpha|k}) \leq \frac{1}{2^{k+1}} \leq d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta) \tag{4.26}$$

Για τους σκοπούς της παραπάνω απόδειξης κατασκευάσαμε ένα σχήμα Souslin με $A = \mathbb{N}$ και δείξαμε ότι αυτό οδήγησε σε μια συνάρτηση $g : A^{\mathbb{N}} \to X$.Η g αυτή δεν είναι απαραίτητα "1-1" αλλά ακόμα και αν τύχει να είναι, δεν γνωρίζουμε αν η g^{-1} είναι συνεχής. Δηλαδή η g δεν είναι -και δεν θα μπορούσε εν γένει να είναι- ομοιομορφισμός.

Αν θέλουμε να πλησιάσουμε τον ομοιομορφισμό, είμαστε υποχρεωμένοι να χαλαρώσουμε εν γένει τις υπόλοιπες απαιτήσεις μας και να κοιτάξουμε μέσα στον $\mathcal{N}$ ή τον X για να βρούμε κατάλληλα υποσύνολα. Με αυτόν τον τρόπο θα αποδείξουμε τα εξής θεωρήματα

- Κάθε πολωνικός χώρος είναι συνεχής και "1-1" εικόνα ενός κλειστού υποσυνόλου D του $\mathcal{N}$.
- Κάθε υπεραριθμήσιμος πολωνικός χώρος, περιέχει ένα $\mathcal{G}_\delta$ υποσύνολο A ομοιομορφικό με τον $\mathcal{N}$

Ας επιστρέψουμε πρώτα όμως στους ορισμούς και ας κάνουμε μερικές παρατηρήσεις πρώτα.

Παρατήρηση 4.10 Έστω $\{F_s : \quad s \in A^{<\mathbb{N}}\}$ ένα σύστημα Souslin στον X και ας θεωρήσουμε ως συνήθως τον χώρο $A^{\mathbb{N}}$ με την τοπολογία γινόμενο[6].

1. Έστω $D = \{\alpha \in A^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N} \ \ F_{\alpha|n} \neq \emptyset\}$ τότε το D είναι κλειστό υποσύνολο του $A^{\mathbb{N}}$

   Απόδειξη

   Έστω $\alpha \in A^{\mathbb{N}} \setminus D$ τότε υπάρχει φυσικός αριθμος n ώστε $F_{\alpha|n} = \emptyset$ και έτσι $F_s = \emptyset$ για κάθε s στο $A^{<\mathbb{N}}$ με $s \succ \alpha|n$. Συνεπώς, για την βασική περιοχή του $\alpha \quad N_{\alpha|n}$ ισχύει, $A^{\mathbb{N}} \setminus D \supset N_{\alpha|n}$$\square$

2. Επειδή ο X είναι πλήρης, για κάθε $\alpha \in D$, το $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F_{\alpha|n}}$ είναι μονοσύνολο. Όμως από τον ορισμό του σχήματος Souslin

   $$\overline{F_{s*a}} \subset F_s, \qquad \forall s \in A^{<\mathbb{N}}, \quad \forall a \in A \tag{4.27}$$

   και επειδή $F_s \subset \overline{F_s}$ έχουμε ότι

   $$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F_{\alpha|n}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{\alpha|n} \tag{4.28}$$

   Άρα μπορούμε να ορίσουμε για κάθε σχήμα Souslin,

   $$f : D \to X \qquad \text{με} \quad \{f(\alpha)\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{\alpha|n} \tag{4.29}$$

   όπου $D \subset A^{\mathbb{N}}$ της προηγούμενης παρατήρησης.

   Κάθε τέτοια συνάρτηση είναι συνεχής αφού αν $\alpha \in D$ και $\varepsilon > 0$ από τον ορισμό του σχήματος Souslin υπάρχει φυσικός αριθμός n ώστε $diameter(F_{\alpha|n}) < \varepsilon$ και άρα

   $$f(D \cap N_{\alpha|n}) \subset B_X(f(\alpha), \varepsilon) \tag{4.30}$$

3. Αν επιπλέον υποθέσουμε -όπως για παράδειγμα στο προηγούμενο θεώρημα- ότι $F_\emptyset = X$ και για κάθε $s \in A^{<\mathbb{N}} \Rightarrow F_s = \bigcup_{a \in A} F_{s*a}$ τότε η απεικόνιση f είναι επί του X

[6] των χώρων A με την διακριτή τοπολογία

4. Αν το σχήμα $\{F_s : \quad s \in A^{<\mathbb{N}}\}$ είναι σχήμα Lusin στο X, η f είναι "1-1" αφού αν $\alpha \neq \beta \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ ώστε $\alpha|n \perp \beta|n$ και άρα $f(\alpha) \neq f(\beta)$ αφού $F_{\alpha|n} \cap F_{\beta|n} = \emptyset$

5. Ένα βασικό πόρισμα που προκύπτει από τις παρατηρήσεις αυτές είναι ότι αν δημιουργήσουμε ένα σχήμα Cantor στον X τότε η f είναι ομοιομορφική εμφύτευση του $\mathcal{C}$ στον X

Έτσι παραλλάσσοντας το προηγούμενη απόδειξη και χρησιμοποιώντας ένα σχήμα Luzin έχουμε το παρακάτω:

Θεώρημα 4.11 *Κάθε πολωνικός χώρος $(X,d),\ \ d<1$ είναι συνεχής και "1-1" εικόνα ενός κλειστού υποσυνόλου D του $\mathcal{N}$.*

Απόδειξη
Θα κατασκευάσουμε ένα σχήμα Luzin $\{F_s : \quad s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ στον X έτσι ώστε

- $F_\emptyset = X$
- $F_s = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_{s*i}$
- για κάθε $s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ το F_s είναι αριθμήσιμη ένωση κλειστών ($\mathcal{F}_\sigma$)

Χρησιμοποιώντας επαγωγή στο μήκος του s, έστω ότι το F_s έχει οριστεί. Επειδή είναι $\mathcal{F}_\sigma$, μπορει να γραφτεί ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών -στην τοπολογία του X- υποσυνόλων του $\{C_i\}i \in \mathbb{N}$ ώστε $diameter(C_i) < \frac{1}{2^{|s|+1}}$. Θέτουμε

$$F_{s*1} = C_1 \qquad \text{και} \quad \forall i > 1\ \ F_{s*i} \;=\; C_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} C_k \;=\; C_i \cap (\bigcap_{k=1}^{i-1} X \setminus C_k) \tag{4.31}$$

Όμως το σύνολο $\bigcap_{k=1}^{i-1} X \setminus C_k$ είναι πεπερασμένη ένωση ανοικτών και έτσι για να ολοκληρωθεί η απόδειξη, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο ενός πολωνικού χώρου είναι $\mathcal{F}_\sigma$. Έχουμε όμως το εξής ισχυρότερο λήμμα με το οποίο θεωρούμε την απόδειξη ολοκληρωμένη.□

Λήμμα 4.12 *Σε κάθε μετρικό χώρο (X,d) κάθε ανοικτό υποσύνολο U είναι $\mathcal{F}_\sigma$.* □

Απόδειξη
Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε κλειστό F υποσύνολο του X είναι $\mathcal{G}_\delta$. Αφού τότε

$$X \setminus U = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \Rightarrow U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \setminus U_n \quad \text{όπου } \forall n \in \mathbb{N},\ U_n \text{ ανοικτό} \tag{4.32}$$

Όμως για κάθε κλειστο F, θέτοντας $U_n = \{x \in X : \exists x_0 \in F$ ώστε $d(x_0,x) < \frac{1}{n}\}$ έχουμε $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \Leftrightarrow x \in F$ και κάθε U_n είναι ανοικτό αφού

$$U_n = \bigcup_{x_0\in F} B_X(x_0, \frac{1}{n}) \tag{4.33}$$

Ορισμός 4.13 Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $A \subset X$. Το σημείο $x \in A$ λέγεται μεμονωμένο σημείο του A αν υπάρχει U ανοικτό ώστε $A \cap U = \{x\}$. Ένα σύνολο A λέγεται "πυκνό στον εαυτό του" αν $A \neq \emptyset$ και δεν έχει μεμονωμένα σημεία. Τέλος ένα συμπαγές και "πυκνό στον εαυτό του" σύνολο λέγεται "τέλειο" ■

Θεώρημα 4.14 *Κάθε "πυκνός στον εαυτό του" πολωνικός χώρος, περιέχει ένα συμπαγές υποσύνολο ομοιομορφικό με το $\mathcal{C}$.*

Απόδειξη
Αρκεί να κατασκευάσουμε ένα σχήμα Souslin $\{U_s : \quad s \in 2^{\mathbb{N}}\}$ μη κενών ανοικτών υποσυνόλων του X ώστε

$$s \perp t \Rightarrow \overline{U_s} \cap \overline{U_t} = \emptyset \quad \forall s, t \in 2^{\mathbb{N}} \tag{4.34}$$

Τότε το σχήμα $\{F_s : \quad s \in 2^{\mathbb{N}}\}$ με $F_s = \overline{U_s}$ θα είναι ένα σχήμα Cantor στον X και συνεπώς η παραγόμενη συνάρτηση $f : \mathcal{C} \to X$ θα είναι από την παραπάνω παρατήρηση (5) ομοιομορφική εμφύτευση.

Θα ορίσουμε το $\{U_s : \quad s \in 2^{\mathbb{N}}\}$ στο μήκος του s. Θέτουμε $U_\emptyset = X$ και έστω για $s \in 2^{\mathbb{N}}$ έχουμε ορίσει το U_s ώστε να είναι μη κενό, ανοικτό, υποσύνολο του X. Αφού ο X είναι "πυκνός στον εαυτό του", υπάρχουν x_1 και x_2 στο U_s με $x_1 \neq x_2$. Επιλέγουμε ανοικτά υποσύνολα $U_s * 0, U_s * 1$ που περιέχουν το x_0 και x_1 αντίστοιχα, με διάμετρο μικρότερη από $\frac{d(x_1,x_2)}{2}$ και περιέχονται στο U_s □

Θεώρημα 4.15 (Cantor-Bendixson) *Κάθε διαχωρίσιμος μετρικός χώρος (X, d) μπορεί να γραφτεί ως ένωση $Z \cup Y$ όπου Z αριθμήσιμο και Y κλειστό "πυκνό στον εαυτό του"*

Απόδειξη
Διάλεξε μια αριθμημένη βάση περιοχών του X, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και θέσε $C = \{n \in \mathbb{N} : \quad U_n \text{ αριθμήσιμο }\}$. Τα σύνολα

$$Z = \bigcup_{n\in C} U_n \qquad Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus C} U_n \tag{4.35}$$

είναι η επιθυμητή διάσπαση. □

Θεώρημα 4.16 *Κάθε υπεραριθμήσιμος πολωνικός χώρος, περιέχει ένα $\mathcal{G}_\delta$ υποσύνολο A ομοιομορφικό με τον $\mathcal{N}$*

Απόδειξη
Έστω $X = Y \cap Z$ η διάσπαση Cantor-Bendixson τότε το υποσύνολο Y είναι μη κενό, κλειστό και "πυκνό στον εαυτό του" υποσύνολο του πολωνικού X άρα είναι το ίδιο "πυκνός στον εαυτό του" πολωνικός χώρος. Συνεπώς από το παραπάνω θεώρημα (4.14) περιέχει ένα σύνολο C όμοιομορφικό του $\mathcal{C}$ το οποίο με την σειρά του περιέχει (δες θεώρημα 4.7) ένα $\mathcal{G}_\delta$ υποσύνολο A ομοιομορφικό με τον $\mathcal{N}$. □

4.3 Borel και αναλυτικά σύνολα

Περιοριζόμενοι σε πολωνικούς χώρους, όπου $F \in \mathcal{G}_\delta$ και $U \in \mathcal{F}_\sigma$ για κάθε κλειστό F και ανοικτό U υποσύνολο πολωνικού χώρου, έχουμε ορίσει τα αναλυτικά σύνολα να είναι τα σύνολα που περιέχονται στην οικογένεια

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}) = \mathcal{A}(\mathcal{T}) = \mathcal{A}(\mathcal{F}) \tag{4.36}$$

όπου $\mathcal{B}, \mathcal{T}, \mathcal{F}$ οι οικογένειες των Borel, ανοικτών, κλειστών αντίστοιχα υποσυνόλων του πολωνικού χώρου. Υπάρχουν όμως και άλλοι ισοδύναμοι τρόποι να ορίσεις τα αναλυτικά υποσύνολα ενός πολωνικου χώρου.

Υπενθυμίζουμε ότι $\mathrm{proj}_{\mathrm{Y}}^{\mathrm{X}}(B)$ είναι η συνάρτηση προβολής απο τον χώρο γινόμενο $X \times Y$ στον Y. Ο εκθέτης (εδώ X) υποδηλώνει τον χώρο κατά μήκος του οποίου προβάλουμε ενώ ο δείκτης τον χώρο πάνω στον οποίο προβάλουμε. Συνήθως τον δείκτη θα τον παραλείπουμε.

Θεώρημα 4.17 *Έστω (X, d) πολωνικός χώρος και έστω $A \subset X$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το A είναι αναλυτικό ($A \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$)*

(ii) *Υπάρχει $C \subset X \times \mathcal{N}$ κλειστό με $A = \mathrm{proj}^{\mathcal{N}}(C)$*

(iii) *Υπάρχει συνεχής συνάρτηση* $f : \mathcal{N} \to X$ *με* $f(\mathcal{N}) = A$

(iv) *Υπάρχει κανονικό σύστημα* $\{A_s\}$ *κλειστών συνόλων του* X *με* $diameter_{n\to\infty}(A_{\alpha|n}) \to 0$ *ώστε* $\mathcal{A}(A_s) = A$

Απόδειξη

$(i) \to (ii)$ Έστω σύστημα $\{F_s\}$ κλειστών συνόλων του X με $\mathcal{A}(F_s) = A$. Όπως στο θεώρημα 2.8,

$$A = \text{proj}^{\mathcal{N}}(C), \quad \text{όπου} \quad C = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{|s|=n} F_s \times \mathcal{N}_s \tag{4.37}$$

Θα δείξουμε ότι το C είναι κλειστό. Έστω $C_n = \bigcup_{|s|=n} F_s \times \mathcal{N}_s$, τότε αν $(x, \alpha) \in X \setminus C_n \Rightarrow x \notin F_{\alpha|n}$. Επειδή όμως το $F_{\alpha|n}$ είναι κλειστό, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε

$$B_X(x, \varepsilon) \times F_{\alpha|n} = \emptyset \tag{4.38}$$

τότε όμως

$$(x, \alpha) \in \overbrace{B_X(x, \varepsilon) \times \mathcal{N}_{\alpha|n}}^{\text{βασικό ανοικτό}} \subset X \setminus C_n \tag{4.39}$$

Άρα το C_n είναι κλειστό και συνεπώς και το C ως τομή κλειστών.

$(ii) \to (iii)$ Επειδή το C είναι κλειστό υποσύνολο του πολωνικού χώρου $X \times \mathcal{N}$, είναι με την σειρά του πολωνικός χώρος. Συνεπώς από τα θεωρήματα μεταφοράς, υπάρχει συνεχής συνάρτηση

$$g : \mathcal{N} \to C \qquad \text{με} \quad g(\mathcal{N}) = C \tag{4.40}$$

και επειδή η συνάρτηση προβολής είναι πάντα συνεχής στην τοπολογία γινόμενο, η συνάρτηση

$$f : \mathcal{N} \to X \qquad \text{με} \quad f = \text{proj}_{\mathsf{X}}^{\mathcal{N}} \circ g \tag{4.41}$$

είναι συνεχής με $f(\mathcal{N}) = A$

$(iii) \to (iv)$ Έστω f συνεχής με $f(\mathcal{N}) = A$. Ορίζουμε $A_s = \overline{f(\mathcal{N}_s)}$. Έστω τώρα $\alpha \in \mathcal{N}$, τότε

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \alpha \in \mathcal{N}_{\alpha|n} \Rightarrow \tag{4.42}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ f(\alpha) \in A_{\alpha|n} \Rightarrow \tag{4.43}$$

$$f(\alpha) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha|n} \tag{4.44}$$

Αφού όμως $diameter(\mathcal{N}_{\alpha|n}) \to 0$ όπου η περιοχή $\mathcal{N}_{\alpha|n}$ συρρικνούται γύρω από το α και η f είναι συνεχής,

$$diameter(A_{\alpha|n}) = diameter(\overline{f(\mathcal{N}_{\alpha|n})}) \to 0 \tag{4.45}$$

άρα η τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha|n}$ είναι μονοσύνολο και συνεπώς

$$A = f(\mathcal{N}) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{N}} \{f(\alpha)\} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{N}} \bigcap_{n=1} A_{\alpha|n} \tag{4.46}$$

Όπου το σύστημα $\{A_s\}$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του (iv)

$(iv) \to (i)$ Είναι προφανές. □

Τα θεωρήματα μεταφοράς, μας επιτρέπουν επίσης να ορίσουμε τα αναλυτικά σύνολο με όρους πολωνικών χώρων.

Θεώρημα 4.18 *Έστω (X, d) πολωνικός χώρος και έστω $A \subset X$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το A είναι αναλυτικό*

(ii) *Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : Y \to X$ με $f(Y) = A$ όπου Y υπεραριθμήσιμος πολωνικός χώρος*

(iii) *$A = \mathrm{proj}^{\mathrm{Y}}(D)$ όπου Y υπεραριθμήσιμος πολωνικός χώρος και το D είναι $\mathcal{G}_\delta$ υποσύνολο του χώρου γινόμενο $X \times Y$*

Απόδειξη

$(i) \Leftrightarrow (ii)$ Έστω A αναλυτικό υποσύνολο του X τότε από το προηγούμενο θεώρημα υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathcal{N} \to X$ με $f(\mathcal{N}) = A$ και ο $\mathcal{N}$ είναι υπεραριθμήσιμος πολωνικός χώρος

Έστω τώρα (αριθμήσιμος και μη) πολωνικός χώρος Y και $f : Y \to X$ συνεχής με $f(Y) = A$. Τότε από τα θεωρήματα μεταφοράς, υπάρχεί $g : \mathcal{N} \to Y$ συνεχής με $g(\mathcal{N}) = Y$ και συνεπώς η σύνθεση $f \circ g : \mathcal{N} \to X$ είναι συνεχής με $f \circ g(\mathcal{N}) = A$ και συνεπώς το A είναι αναλυτικό

$(i) \Leftrightarrow (iii)$ Από τα θεωρήματα μεταφοράς γνωρίζουμε ότι μέσα σε κάθε υπεραριθμήσιμο πολωνικό χώρο μπορούμε να βρουμε ένα $\mathcal{G}_\delta$ υποσύνολο E ομοιομορφικό με τον χώρο $\mathcal{N}$ και συνεπώς χρησιμοποιώντας το κλειστό-μέσα στο $X \times E$ υποσύνολο C της προηγούμενης απόδειξης, έχουμε το $\mathcal{G}_\delta$ υποσύνολο του $X \times Y$, $D = C \cap X \times E$

Αντίστροφα έχουμε ότι από το θεώρημα του Aleksandrov ότι κάθε $\mathcal{G}_\delta$ υποσύνολο πολωνικού χώρου είναι πολωνικός χώρος. Συνεπώς μπορεί κανείς να δει την συνάρτηση της προβολής από τον $X \times Y$ στον X ως μια συνεχή συνάρτηση f από τον πολωνικό χώρο D στον X με $f(X) = A$. άρα από το (ii) αυτού του θεωρήματος έχουμε ότι το A είναι αναλυτικό. □

Από το τελευταίο θεώρημα προκύπτει ότι τα αναλυτικά σύνολα για παράδειγμα του $\mathbb{R}$ είναι ακριβώς οι προβολές των $\mathcal{G}_\delta$ υποσυνόλων του επιπέδου $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Συνεπώς κάποιος μπορεί να αναρωτηθεί, τι θα συμβεί αν αντί για $\mathcal{G}_\delta$, προβάλουμε κάποιο πιο ψηλά στην ιεραρχία των Borel υποσύνολο B του $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Η απάντηση είναι απολύτως τίποτα πέραν αυτού που έχουμε ήδη καταφέρει αφού κάθε Borel σύνολο είναι και αναλυτικό και συνεπώς θα βρούμε μια συνεχή συνάρτηση f από το $\mathcal{N}$ στον $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ με $f(\mathcal{N}) = B$. Συνεπώς χρησιμοποιώντας την πράξη της σύνθεσης της f με την συνάρτηση προβολής, πετυχαίνουμε να γράψουμε το τελικό σύνολο ως εικόνα συνεχούς συνάρτησης του χώρου Baire.

Εντούτοις για την f αυτήν, και εφόσον το σύνολο B είναι Borel, μπορούμε να πούμε και κάτι παραπάνω. Συγκεκριμένα όπως χαρακτηρίσαμε τα αναλυτικά σύνολα με μια σειρά από ισοδύναμους τρόπος, το ίδιο μπορούμε να κάνουμε και για τα Borel. Οι τρόποι είναι οι ίδιοι, αλλά η ελάφρυνση των υποθέσεων -απο αναλυτικά σε Borel- μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε "1-1" αντιστοιχίσεις πέραν της συνέχεια σε ότι κάνουμε.

Θεώρημα 4.19 *Έστω X πολωνικός χώρος. Η οικογένεια των Borel συνόλων μπορεί να οριστεί ισοδύναμα με οποιονδήποτε από τους παρακάτω τρόπους:*

(i) *Η οικογένεια των συνόλων που είναι "1-1" και συνεχείς εικόνες του χώρου $\mathcal{N}$.*

(ii) *Η οικογένεια των συνόλων που είναι "1-1" και συνεχείς εικόνες των Borel συνόλων πολωνικών χώρων.*

(iii) *Η οικογένεια των συνόλων που είναι "1-1" προβολές στον X κλειστών υποσυνόλων του χώρου $X \times \mathcal{N}$.*

(iv) *Η οικογένεια των αναλυτικών συνόλων των οποίων τα συμπληρώματα είναι επίσης αναλυτικά.*

Θα αποδείξουμε την κάθε πρόταση ανεξάρτητα.

Θεώρημα 4.20 *Έστω B Borel υποσύνολο ενός πολωνικού χώρου X. Τότε $B = \text{proj}^{\mathcal{N}}(C)$ όπου η προβολή είναι "1-1" και C κλειστό υποσύνολο του $X \times \mathcal{N}$*

Απόδειξη
Έστω $\mathcal{B}$ η οικογένεια των υποσυνόλων του X τα οποία είναι "1-1" προβολές στον X κλειστών υποσυνόλων του χώρου $X \times \mathcal{N}$. Θα δείξουμε αρχικά ότι τα ανοικτά περιέχονται σε αυτήν την οικογένεια.

Έστω G ανοικτό υποσύνολο του X, τότε το

$$E = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : \quad dist(x, X \setminus G) = \frac{1}{t}\} \tag{4.47}$$

είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times \mathbb{R}$ και το G είναι "1-1" προβολή του E στον X. Από τα θεωρήματα μεταφοράς υπάρχει $D \subset \mathcal{N}$ κλειστό και g συνεχής "1-1" συνάρτηση επί του $\mathbb{R}$.[7] Τότε το κλειστό σύνολο

$$C = \{(x,\alpha) \in X \times \mathcal{N} : \quad \alpha \in D, \quad (x, g(\alpha)) \in E\} \tag{4.48}$$

προβάλλεται κατά τρόπο "1-1", επί του G.

Έστω τώρα $\{A_i\}$ ακολουθία ξένων συνόλων της οικογένειας $\mathcal{B}$. Θα δείξουμε ότι η ένωση $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ανήκει επίσης στην $\mathcal{B}$. Μπορούμε για κάθε $i \in \mathbb{N}$, εφόσον $A_i \in \mathcal{B}$ να διαλέξουμε κλειστό σύνολο

$$C_i \subset X \times \{i\} \times \mathcal{N} \tag{4.49}$$

που προβάλλεται κατά τρόπο "1-1", επί του A_i. Τότε το σύνολο

$$F = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \tag{4.50}$$

είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $X \times \mathbb{N} \times \mathcal{N}$ το οποίο προβάλλεται κατά τρόπο "1-1", επί του $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Το αποτέλεσμα προκύπτει δεδομένου ότι ο χώρος είναι $\mathbb{N} \times \mathcal{N}$ ομοιομορφικός με τον $\mathcal{N}$.

Τέλος έστω $\{A_i\}$ ακολουθία συνόλων της οικογένειας $\mathcal{B}$. Θα δείξουμε ότι η τομή $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ ανήκει επίσης στην $\mathcal{B}$. Διαλέγουμε πάλι για κάθε i κλειστό υποσύνολο $C_i \subset X \times \mathcal{N}$ που προβάλλεται κατά τρόπο "1-1", επί του A_i. Τότε το σύνολο

$$\{(x, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots) \in X \times \mathcal{N}^{\mathbb{N}}, \qquad \forall i \in \mathbb{N} \ (x, \alpha_i) \in C_i\} \tag{4.51}$$

είναι κλειστό και προβάλλεται κατά μήκος του $\mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ με τρόπο "1-1", επί του $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$. Συνεπώς επειδή οι χώροι $\mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ και $\mathcal{N}$ είναι ομοιομορφικοί, έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Αφού η οικογένεια $\mathcal{B}$ περιέχει τα ανοικτά, είναι κλειστή στις αριθμήσιμες τομές και αριθμήσιμες ξένες ενώσεις, περιέχει και τα κλειστά[8]και είναι σ-άλγεβρα. Συνεπώς περιέχει και τα Borel. $\square$

[7]Μπορεί μάλιστα κανείς να βρει και μία τέτοια, για παράδειγμα να χρησιμοποιήσει το $\{1\} \times \mathcal{N}$ για τους άρρητους και τα $(k, 1, 1, 1, 1, \ldots), \ k > 2$ για τους ρητούς.

[8]είμαστε σε πολωνικό και άρα μετρικό χώρο

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι γνωστό και ως το διαχωριστικό θεώρημα του Luzin. Από το αποτέλεσμα αυτό απορρέει ο (iv) χαρακτηρισμός τον Borel συνόλων. Το αποτέλεσμα αυτό είναι πολύ σημαντικό διότι υπονοεί ένα ακόμα σημείο επαφής της θεωρίας που παρουσιάζουμε με την θεωρία υπολογισιμότητας.[9]

Δύο ξένα υποσύνολα P και Q ονομάζονται Borel-διαχωρίσιμα αν υπάρχουν δύο ξένα Borel σύνολα B_1, B_2 με $P \subset B_1$ και $Q \subset B_2$. Έχουμε πρώτα το παρακάτω λήμμα

Λήμμα 4.21 *Έστω ότι τα σύνολα Q_i είναι Borel-διαχωρίσιμα από τα P_j για κάθε επιλογή φυσικών i, j. Τότε τα σύνολα*

1. $\bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i$ *και* $\bigcap_{j=1}^{\infty} P_j$ *είναι Borel-διαχωρίσιμα.*
2. $\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ *και* $\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$ *είναι Borel-διαχωρίσιμα.*
3. $\bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i$ *και* $\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$ *είναι Borel-διαχωρίσιμα(Λόγω συμμετρίας τότε και το ανάποδο).* □

Απόδειξη
Παρατηρήστε ότι αν $B_{(i,j)}$ και $B_{(j,i)}$ είναι Borel και διαχωρίζουν το Q_i από το P_j, τότε για κάθε i και j τα σύνολα

$$B_i = \bigcap_{j=1}^{\infty} B_{(i,j)} \quad \text{και} \quad B_j = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_{(j,i)} \tag{4.52}$$

είναι Borel. □

Θεώρημα 4.22 *Έστω πολωνικός χώρος Y και A, B δύο ξένα μεταξύ τους αναλυτικά υποσύνολα του Y. Τότε τα A, B είναι Borel-διαχωρίσιμα*

Απόδειξη
Αφού τα A, B είναι αναλυτικά, μπορούμε να βρούμε ένα πολωνικό χώρο X, δύο ξένα κλειστά υποσύνολά του C, D και μία συνεχή συνάρτηση $f : X \to Y$ με $f(C) = A$ και $f(D) = B$.[10]

Έστω πως τα A, B δεν είναι Borel-διαχωρίσιμα. Τότε όπως στα θεωρήματα μεταφοράς, γράφουμε τον χώρο X ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων μικρής διαμέτρου E_i.

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \tag{4.53}$$

Αναγκαστικά, λόγω του προηγούμενου λήμματος, πρέπει να υπάρχουν $n_1, m_1 \in \mathbb{N}$ ώστε τα σύνολα $f(C \cap E_{n_1})$ και $f(D \cap E_{m_1})$ να μην είναι Borel-διαχωρίσιμα. Συνεχίζοντας όπως στα θεωρήματα μεταφοράς, λαμβάνουμε $(n_1, n_2, n_3, \ldots), (m_1, m_2, m_3, \ldots) \in \mathcal{N}$ ώστε τα σύνολα

$$f(C \cap E_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) \quad \text{και} \quad f(D \cap E_{m_1,m_2,\ldots,m_k}) \tag{4.54}$$

Όμως τα σύνολα

$$C \cap E_{n_1,n_2,\ldots,n_k} \quad \text{και} \quad D \cap E_{m_1,m_2,\ldots,m_k} \tag{4.55}$$

λόγω πληρότητας συρρικνούνται σε $c \in C$ και $d \in D$ αντίστοιχα. Συνεπώς, λόγω συνέχειας της f, θα έπρεπε αναγκαστικά για αρκετά μεγάλο k, τα σύνολα

$$f(C \cap E_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) \quad \text{και} \quad f(D \cap E_{m_1,m_2,\ldots,m_k}) \tag{4.56}$$

να διαχωρίζονται από σφαίρες με κέντρα $f(c)$ και $f(d)$.

Η κατάληξή μας σε άτοπο δηλώνει την ισχύ της προς απόδειξη πρότασης. □

---

[9]Μπορεί κανείς για παράδειγμα να σκεφτεί την κλασική πρόταση της θεωρίας αναδρομής: "Ένα πρόβλημα είναι αναδρομικό αν και αυτό και το συμπλήρωμά του είναι αναδρομικά απαριθμητό."

[10]Μπορούμε για παράδειγμα να στείλουμε το $\{1\} \times \mathcal{N}$ στο A και το $\{2\} \times \mathcal{N}$ στο B.

Από το παραπάνω θεώρημα έχουμε το εξής πολύ ενδιαφέρον πόρισμα

Πόρισμα 4.23 *Έστω πολωνικός χώρος X. Αν A και $X \setminus A$ αναλυτικά τότε και τα δύο είναι Borel*$\square$

Απόδειξη

Τα μόνα σύνολα που μπορούν υπό αυτές τις συνθήκες να διαχωρίσουν τα A και $X \setminus A$ είναι τα ίδια τα A και $X \setminus A$. Το προηγούμενο θεώρημα τα εξαναγκάζει να είναι Borel. $\square$

Έχουμε επιπλέον συνδυαστικά από το προηγούμενο θεώρημα και λήμμα το επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 4.24 *Έστω πολωνικός χώρος X και $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ξένων ανά δύο αναλυτικών υποσυνόλων του X. Τότε υπάρχει $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ξένων ανά δύο Borel συνόλων έτσι ώστε $A_i \subset B_i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$* $\square$

Δείξαμε ότι κάθε Borel σύνολο είναι εικόνα συνεχούς και "1-1" συνάρτησης πολωνικού χώρου X . Συγκεκριμένα η συνάρτηση ήταν η συνάρτηση της προβολής("1-1") και ο X κλειστό υποσύνολο του πολωνικού χώρου $Y \times \mathcal{N}$. Θα αποδείξουμε τώρα το ανάποδο.

Θεώρημα 4.25 *Έστω πολωνικοί χώροι X, Y και $f : X \to Y$ συνεχής και "1-1" συνάρτηση. Αν C κλειστό υποσύνολο του X, τότε το σύνολο $f(C)$ είναι Borel υποσύνολο του Y.*

Απόδειξη

Χρησιμοποιώντας πάλι τις ιδέες που χρησιμοποιήσαμε στα θεωρήματα μεταφοράς, πλακοστρώνουμε για κάθε k τον X με ακολουθίες $A_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ ξένων ανά δύο Borel($\mathcal{F}_\sigma$) συνόλων με όλο και πιο μικρή διάμετρο όσο μεγαλώνει το k με

$$X = \bigcup_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)\in\mathbb{N}^k} A_{n_1,n_2,\ldots,n_k} \qquad \forall k \in \mathbb{N} \tag{4.57}$$

κατασκευάζοντας έτσι ένα κανονικό σχήμα Luzin πάνω στον X. Αφού η f είναι "1-1", τα σύνολα $f(C \cap A_{n_1,n_2,\ldots,n_k})$ είναι ξένα για κάθε δύο διαφορετικά $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$. Συνεπώς χρησιμοποιώντας το τελευταίο πόρισμα, μπορούμε να βρούμε ξένα ανά δύο Borel σύνολα $B(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ ώστε

$$f(C \cap A_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) \subset B(n_1, n_2, \ldots, n_k) \subset \tag{4.58}$$

$$B(n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}) \cap \overline{f(C \cap A_{n_1,n_2,\ldots,n_k})} \tag{4.59}$$

$\square$

Θέτοντας

$$T = \bigcup_{(n_1,n_2,\ldots)\in\mathcal{N}} \bigcap_{k=1}^{\infty} B(n_1, n_2, \ldots, n_k) \tag{4.60}$$

παρατηρούμε ότι αυτό είναι ένα Borel σύνολο αφού γράφεται λόγω του θεωρήματος (2.9)

$$T = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)\in\mathbb{N}^k} B(n_1, n_2, \ldots, n_k) \tag{4.61}$$

Αρκεί να δείξουμε λοιπόν ότι $T = f(C)$. Το $T \supset f(C)$ είναι άμεσο από τον ορισμό του T.

Όμως και ανάποδα αφού η f είναι συνεχής και για κάθε $(n_1, n_2, \ldots)$ το σύνολο $C \cap A_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ συρρικνούται σε σημείο,

$$T \subset \bigcup_{(n_1,n_2,\ldots)\in\mathcal{N}} \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{f(C \cap A_{n_1,n_2,\ldots,n_k})} \subset f(C) \tag{4.62}$$

5 Αναλυτικά όχι Borel σύνολα

Από την αρχή αυτής της εργασίας υπάρχει μια εκκρεμότητα, να παρουσιάσουμε ένα αναλυτικό σύνολο το οποίο να μην είναι Borel δικαιώνοντας έτσι κατά κάποιο τρόπο και την ανάπτυξη όλης αυτής της θεωρίας. Στην πραγματικότητα έχουμε ήδη δει ένα παράδειγμα αναλυτικού συνόλου το οποίο δεν είναι Borel. Το σύνολο

$$\Delta = \Big\{ x \in \Omega_1 : \quad \text{υπάρχει αύξουσα ακολουθία φυσικών } k_n, n \in \mathbb{N} \text{ ώστε } \forall n \in \mathbb{N} \ x[k_n] \Big| x[k_{n+1}] \Big\} \tag{5.1}$$

όπου $a \Big| b \Rightarrow$ 'ο a διαιρεί τον b' και $x[i]$ ο i όρος στο αρμονικό ανάπτυγμα του x, δηλαδή

$$x = \frac{1}{x[0] + \frac{1}{x[1] + \frac{1}{x[2] + \ldots}}}, \quad x[i] \in 1, 2, 3, \ldots \tag{5.2}$$

Στο παράδειγμα 3.16 δείξαμε ότι το Δ γράφεται ως

$$\Delta = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{N}} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha|n} \quad \text{όπου κάθε σύνολο } A_{\alpha|n} \quad \text{είναι Borel} \tag{5.3}$$

και συνεπώς είναι αναλυτικό. Το δύσκολο μέρος πάντα είναι να δειξουμε ότι το σύνολο αυτό δεν είναι Borel. Για αυτόν τον σκοπό θα δημιουργήσουμε μια γενική μέθοδο η οποία όμως προϋποθέτει την ύπαρξη τουλάχιστον ενός αναλυτικού, όχι Borel συνόλου. Θα εξασφαλίσουμε συνεπώς αρχικά την ύπαρξη ενός τέτοιου συνόλου χρησιμοποιώντας ένα διαγώνιο επιχείρημα

5.1 Υπάρχει αναλυτικό και όχι Borel σύνολο

Θεώρημα 5.1 *Έστω υπεραριθμήσιμος πολωνικός χώρος X. Τότε υπάρχει $A \subset X$ με*

$$A \in \mathcal{A}(\mathcal{B}) \quad \text{και} \quad A \notin \mathcal{B} \tag{5.4}$$

Απόδειξη
Αρχικά ας παρατηρήσουμε ότι αρκεί να το δείξουμε για τον χώρο $\mathcal{N}$. Τότε στον X μπορούμε να βρούμε ένα $\mathcal{G}_\delta$ υποσύνολο B ομοιομορφικό με τον $\mathcal{N}$. Συνεπώς μπορούμε με μία "1-1" συνεχή και επί του B συνάρτηση f, να μεταφέρουμε το A μέσα στο B και άρα μέσα στον X. Το $f(A)$ δεν μπορεί να είναι Borel στον X διότι αν ήταν, ο περιορισμός του στο $\mathcal{G}_\delta$ σύνολο, B θα ήταν επίσης Borel. Αυτό όμως δεν μπορεί να συμβαίνει διότι η f επιστρέφει Borel σε Borel και επειδή είναι "1-1", αυτό θα σήμαινε πως και το A θα ήταν Borel στον $\mathcal{N}$.

Αρχικά θα δείξουμε ότι για καθε πολωνικό χώρο Z, μπορούμε να βρούμε ένα $\mathcal{N}$-universal σύνολο για τα κλειστά υποσύνολα του Z. Δηλαδή ένα κλειστό C υποσύνολο του $Z \times \mathcal{N}$ το οποίο να περιέχει κάθε κλειστό F υποσύνολο του Z ως "slice". Δηλαδή να υπάρχει για κάθε κλειστό F υποσύνολο του Z, $\alpha \in \mathcal{N}$ ώστε

$$F = C_\alpha = \{z : \ (z, \alpha) \in C\} \tag{5.5}$$

Έστω $\{U_i\}$ μια αριθμήσιμη βάση της τοπολογίας του Z. Μπορούμε να κωδικοποιήσουμε με κάθε ακολουθία $\alpha = (n_1, n_2, n_3, \dots) \in \mathcal{N}$, το σύνολο όλων των σημείων του Z που δεν ανήκουν σε κανένα από τα $U_{n_k}, \ k \in \mathbb{N}$. Δηλαδή αντιστοιχούμε σε κάθε $\alpha = (n_1, n_2, n_3, \dots) \in \mathcal{N}$ το κλειστό σύνολο

$$Z \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{n_k} \tag{5.6}$$

Ορίσαμε λοιπόν το σύνολο

$$C = \{(z, n_1, n_2, n_3, \dots) \in Z \times \mathcal{N} : \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad z \notin U_{n_k}\} \tag{5.7}$$

Το C είναι κλειστό διότι αν πάρουμε $(z, \alpha) \in \big(Z \times \mathcal{N}\big) \setminus C$, τότε θα υπάρχει k_0 ώστε $z \in U_{\alpha(k_0)}$

$$(z, \alpha) \in \overbrace{U_{\alpha(k_0)} \times \mathcal{N}_{\alpha|k_0}}^{\text{βασικό ανοικτό}} \subset \big(Z \times \mathcal{N}\big) \tag{5.8}$$

και συνεπώς το $\big(Z \times \mathcal{N}\big) \setminus C$ είναι ανοικτό. Είναι προφανές επίσης πώς κάθε κλειστό υποσύνολο του Z προκύπτει ως "slice" του C για κάποιο $\alpha \in \mathcal{N}$.

Το δεύτερο βήμα είναι να δείξουμε πως για καθε πολωνικό χώρο Y μπορούμε να βρούμε ένα $\mathcal{N}$-universal σύνολο για τα αναλυτικά υποσύνολα του Y. Δηλαδή ένα αναλυτικό G υποσύνολο του $Y \times \mathcal{N}$ το οποίο να περιέχει κάθε αναλυτικό N υποσύνολο του Y ως "slice". Δηλαδή να υπάρχει για κάθε αναλυτικό N υποσύνολο του Y, $\alpha \in \mathcal{N}$ ώστε

$$N = G_\alpha = \{y : \ (y, \alpha) \in G\} \tag{5.9}$$

Αν εφαρμόσουμε το προηγούμενο βήμα στον χώρο $Z = Y \times \mathcal{N}$,μπορούμε να πάρουμε ένα κλειστό σύνολο

$$C \subset Y \times \mathcal{N} \times \mathcal{N} \tag{5.10}$$

τέτοιο ώστε κάθε κλειστο F υποσύνολο του $Z = Y \times \mathcal{N}$ να προκύπτει ως "slice" για κάποιο $\beta \in \mathcal{N}$:

$$F = C_\beta = \{(y, \alpha) : \ (y, \alpha, \beta) \in C\} \tag{5.11}$$

Κρατώντας σταθερή την τρίτη συντεταγμένη β κάθε φορά, προβάλουμε το κλειστό "slice" C_β κατά μήκος του χώρου $\mathcal{N}$ της "α-συντεταγμένης" πάνω στον Y. Μαζεύοντας έτσι όλα τα αναλυτικά του χώρου Y ως "slices" του συνόλου

$$N = \{(y, \beta) : \exists \alpha \in \mathcal{N} \ (y, \alpha, \beta) \in C\} \tag{5.12}$$

Το σύνολο N είναι αναλυτικό υποσύνολο του $Y \times \mathcal{N}$ αφού είναι προβολή του κλειστού συνόλου C κατά μήκος του χώρου $\mathcal{N}$. Τα "slices" του είναι όλα ακριβώς τα αναλυτικά υποσύνολα του Y αφού έρχονται σε ένα προς ένα αντιστοιχία με όλα ακριβώς τα κλειστά του χώρου $Y \times \mathcal{N}$ μέσω της προβολής.

Το τελευταίο βήμα είναι να διαγωνοποιήσουμε το σύνολο N όταν $Y = \mathcal{N}$.

Από το δεύτερο βήμα με $Y = \mathcal{N}$, έχουμε ένα αναλυτικό υποσύνολο

$$N \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N} \tag{5.13}$$

ώστε κάθε αναλυτικό υποσύνολο του $\mathcal{N}$ να προκύπτει ως "slice" του N:

$$N_\beta = \{\alpha : (\alpha, \beta) \in N\} \tag{5.14}$$

Τώρα μπορούμε να εφαρμόσουμε ένα κλασικό διαγώνιο επιχείρημα. Φανταστείτε την διαγώνιο D του $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$

$$D = \{(\alpha, \alpha) : \ \alpha \in \mathcal{N}\} \tag{5.15}$$

το οποίο είναι ένα κλειστό σύνολο και άρα η τομή

$$D \cap N \tag{5.16}$$

είναι αναλυτικό και συνεπώς η προβολή A του $D \cap N$ στον $Y = \mathcal{N}$ είναι επίσης αναλυτικό. Το συμπλήρωμά του όμως

$$\mathcal{N} \setminus A = \{\alpha \in \mathcal{N} : \ (\alpha, \alpha) \notin N\} \tag{5.17}$$

δεν είναι μπορεί να είναι αναλυτικό διότι αν ήταν , θα προέκυπτε ως "slice" για κάποιο β. Τότε όμως δύο είναι τα τινά:

- Αν $(\beta, \beta) \in N$ τότε λόγω του ορισμού του A, $\beta \in A$ ενώ ταυτόχρονα λόγω του ότι $\beta \in N_\beta = \mathcal{N} \setminus A$, συνεπάγεται ότι $\beta \in \mathcal{N} \setminus A$
- Αν από την άλλη $(\beta, \beta) \notin N$ τότε λόγω του ορισμού του A, $\beta \notin A$ ενώ ταυτόχρονα λόγω του ότι $\beta \notin N_\beta = \mathcal{N} \setminus A$, συνεπάγεται ότι $\beta \notin \mathcal{N} \setminus A$

Οπότε συνοψίζοντας, καταφέραμε να βρούμε ένα αναλυτικό υποσύνολο A του $\mathcal{N}$ του οποίου το συμπλήρωμα δεν είναι αναλυτικό. Αυτό σημαίνει ότι ούτε το ένα ούτε το άλλο είναι Borel διότι συμπλήρωμα Borel είναι Borel και συνεπώς αναλυτικό. □

Γενικότερα λόγω του θεωρήματος 4.22 κάθε φορά που θα βρίσκουμε ένα αναλυτικό και όχι Borel σύνολο, το συμπλήρωμά του δεν θα είναι αναλυτικό.

Συγκεκριμένα έχουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 5.2 Έστω $(X, \mathcal{T})$ πολωνικός χώρος, ορίζουμε την οικογένεια των συν-αναλυτικών συνόλων

$$\mathcal{C}_o\mathcal{A}(\mathcal{T}) = \neg\mathcal{A}(\mathcal{T}) = \{X \setminus A : A \in \mathcal{A}(\mathcal{T})\} \tag{5.18}$$

5.2 Μερικά αρχικά παραδείγματα

Ο στόχος εξαρχής του κεφαλαίου αυτού είναι να παρουσιάσει μερικά παραδείγματα αναλυτικών και συν-αναλυτικών συνόλων τα οποία δεν είναι Borel. Για να το κάνουμε αυτό πρέπει πρώτα να αναπτύξουμε μια μέθοδο με την οποία να μπορεί κανείς να δει αν ένα αναλυτικό ή συν-αναλυτικό σύνολο δεν είναι Borel. Θα παρουσιάσουμε αρχικά μερικά παραδείγματα που θα μας εξοικειώσουν με την φιλοσοφία των τελικών παραδειγμάτων όπως για παράδειγμα αντιστοιχίες υποσυνόλων του $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με στοιχεία του συνόλου $\mathcal{C} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Επειδή από δω και πέρα οι ιδέες και τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται είναι πολύ κοντά στις ιδέες και τα εργαλεία της θεωρίας αναδρομής και της θεωρίας αλγορίθμων, είναι καλό να δώσουμε και μια νέα οπτική γωνία σε αυτά που είπαμε ως τώρα. Τα ανοικτά και του κλειστά υποσύνολα ενός πολωνικού χώρου -εκτός του ότι αποτελούν την βάση της γλώσσας της πραγματικής ανάλυσης- έχουν ιδιαίτερα χρήσιμες ιδιότητες και από την σκοπιά της λογικής και της υπολογισιμότητας.

Αν για παράδειγμα σου δώσει κάποιος ένα ανοικτό υποσύνολο U ενός πολωνικού χώρου X σαφώς[1] ορισμένο, και ένα σημείο $x \in X$, η ερώτηση: "Ανήκει το x στο U;", είναι μια ημιαναδρομική ερώτηση. Δηλαδή αν έτυχε το x να ανήκει όντως στο U, αυτό εχεις τρόπο να το ξέρεις σίγουρα σε πεπερασμένα το πλήθος. Αν όχι τότε πιθανότατα να μην έχεις τρόπο να το ξέρεις σε πεπερασμένα βήματα.

Παρατήρηση 5.3 Σκεφτείτε για παράδειγμα το τριαδικό σύνολο Cantor. Δηλαδή το σύνολο $\mathcal{C}_{0,2}$ όλων των x του $[0,1]$ στα οποία το τριαδικό τους ανάπτυγμα αποτελείται μόνο από τα ψηφία 0 και 2. Το $\mathcal{C}_{0,2}$ είναι κλειστό ενώ το συμπλήρωμά του $U = [0,1] \setminus \mathcal{C}_{0,2}$ ανοικτό. Δοθέντος σημείου x, αν αυτό ανήκει στο U, θα υπάρχει κάποιο $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε το n-οστό τριαδικό του ψηφίο να είναι 1 και συνεπώς ελέγχοντας 1-1 τα ψηφία του τριαδικού αναπτύγματος, σε n χρόνο θα ξέρεις ότι $x \in U$. Αν το x δεν ανήκει στο U, ο έλεγχος αυτός θα τρέχει επ άπειρον. Ή αλλιώς θα ξέρουμε ότι $x \notin U$ σε ω_0 χρόνο.[2].

Ένας λόγος ακόμα λοιπόν που ο χώρος Baire είναι πολύ χρήσιμος, είναι ότι ως μηδενοδιάστατος, έχει βάση από clopen. Αυτό σημαίνει ότι αν το U είναι ένα από τα clopen αυτά, η ερώτηση "Ανήκει το x στο U;" θα απαντηθεί σε πεπερασμένο χρόνο είτε θετικά, είτε αρνητικά. Δηλαδή το πρόβλημα της απόκρισης είναι ένα αναδρομικό πρόβλημα.

Γενικά όσο ψηλά στέκεται ένα σύνολο στην Borel και μετά στην προβολική ιεραρχία, τόσο πιο απομακρυσμένο από τα ανοικτά και τα κλειστά του χώρου είναι. Συνεπώς η καταφατική ή αποφατική απάντηση στην ερώτηση: "Ανήκει το x στο U;", γίνεται όλο και πιο δύσκολη. Στην Borel ιεραρχία, η απομάκρυνση από τα ανοικτα επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας αριθμησιμες ενώσεις και τομές, ενώ στην προβολική ιεραρχία χρησιμοποιώντας προβολές και συν-προβολες κλειστών κατά μήκος ενός πολωνικού χώρου[3]. Τα αναλυτικά και τα συν-αναλυτικά συνολα είναι η πρώτη ομάδα πολυπλοκότητας στην προβολική ιεραρχία.

Θα ξεκινήσουμε με μερικές παρατηρήσεις.

- Το σύνολο $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ -συμπεριλαμβανομένης της κενής ακολουθίας- ειναι αριθμήσιμο, συνεπώς μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ "1-1" και επί. Η αντιστοίχιση αυτή μπορεί μάλιστα να είναι αναδρομική, επιτρέποντας μας να γνωρίζουμε σε πεπερασμένο χρόνο την τιμη $f(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f^{-1}(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ για κάθε $(n_1, n_2, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

- Μπορούμε τώρα να φανταστούμε τον μετρικό χώρο $2^{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ όλων των υποσυνόλων του $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με την μετρική γινόμενο, αριθμήσιμου πλήθους των διακριτών μετρικών χώρων $\{0,1\}$. Δηλαδή να αντιστοιχίσουμε κάθε υποσυνόλων του $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ στην χαρακτηριστική του συνάρτηση. Ο χώρος αυτός είναι ισομετρικός με τον χώρο Cantor $\mathcal{C} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Συνεπώς κάθε υποσύνολο του $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ μπορεί κανείς να το δει ως σημείο του συνόλου Cantor και κάθε οικογένεια υποσυνόλων του $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ ως υποσύνολο του συνόλου Cantor. Όμοια μπορεί κανείς να δει πως ο χώρος όλων των υποσυνόλων του $\{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ είναι ισομετρικός με τον χώρο Cantor $\mathcal{C} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

[1] αναδρομικά

[2] Έχει ενδιαφέρον εδώ η σχέση με την θεωρία αυτομάτων και τυπικών γλωσσών. Πάνω σε αυτήν την κατεύθυνση υπάρχουν και η μελέτες πάνω στα Buchi αυτόματα άπειρου χρόνου.

[3] Στην πραγματικότητα, και οι αριθμήσιμες ενώσεις και τομές είναι προβολές κατά μήκος του χώρου $\mathbb{N}$

- Οι οικογένεια $\mathfrak{T} = \{T \subset \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : \emptyset \in T,$ και για κάθε $s \in T, \quad t \prec s \Rightarrow t \in T\}$ και $\mathfrak{T}_2 = \{T \subset 2^{<\mathbb{N}} : \emptyset \in T,$ και για κάθε $s \in T, \quad t \prec s \Rightarrow t \in T\}$ όλων των δέντρων στους φυσικούς και στο $\{0,1\}$ αντίστοιχα, είναι -μέσα από την αντιστοιχία που κάναμε- κλειστά υποσύνολα του $\mathcal{C}$. Συνεπώς οι χώροι $\mathfrak{T}$ και $\mathfrak{T}_2$ είναι πολωνικοί χώροι.
Απόδειξη
Θα το αποδείξουμε στην περίπτωση του $\mathfrak{T}$. Η άλλη περίπτωση αποδεικνύεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο. Θα δείξουμε ότι το $\mathcal{C} \setminus \mathfrak{T}$ είναι ανοικτό. Αν όμως $x \in \mathcal{C} \setminus \mathfrak{T}$ τότε είτε

  1) $x(n) = 0$ όπου $n = f^{-1}(\emptyset)$ είτε
  2) $x(k) = 0$ και $x(l) = 1$ όπου $k = f^{-1}(t), l = f^{-1}(s)$ με $t \prec s$.

  Στην πρώτη περίπτωση το σύνολο $\{x \in \mathcal{C} : \ x(n) = 0\}$ περιέχει το x, ανήκει εξ ολοκλήρου στο $\mathcal{C} \setminus \mathfrak{T}$ και είναι ανοικτό ως πεπερασμένη ένωση βασικών.

  Στην δεύτερη περίπτωση όμοια, το σύνολο $\{x \in \mathcal{C} : \ x(k) = 0$ και $x(l) = 1 \}$ περιέχει το x, ανήκει εξ ολοκλήρου στο $\mathcal{C} \setminus \mathfrak{T}$ και είναι ανοικτό ως πεπερασμένη ένωση βασικών. □

- Έστω το σύνολο $\mathfrak{T}^{\text{inf}}$ όλων των άπειρον δέντρων στους φυσικούς. Τότε το σύνολο αυτό είναι ένα $\mathcal{G}_\delta$ υποσύνολο του πολωνικού χώρου $\mathfrak{T}$.[4] Όμοια το $\mathfrak{T}_2^{\text{inf}}$ είναι ένα $\mathcal{G}_\delta$ υποσύνολο του πολωνικού χώρου $\mathfrak{T}_2$.
Απόδειξη
Επειδή

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}^{\text{inf}} &= \{x \in \mathfrak{T} : \ \forall n_0 \in \mathbb{N} \ \exists n > n_0 \ \text{ώστε} \ x(n) = 1\} && (5.19) \\ &= \bigcap_{n_0} \bigcup_{n > n_0} \{x : \ x(n) = 1\} \cap \mathfrak{T} && (5.20) \end{aligned}$$

  Όπου επειδή τα σύνολα $\{x : \ x(n) = 1\} \cap \mathfrak{T}$ είναι πεπερασμένη ένωση βασικών υποσυνόλων του $\mathfrak{T}$, έχουμε ότι το σύνολο $\mathfrak{T}^{\text{inf}}$ είναι ένα $\mathcal{G}_\delta$ υποσύνολο του πολωνικού χώρου $\mathfrak{T}$. □

- Έστω τώρα το σύνολο

$$\mathcal{WF}(\mathfrak{T}) = \{T \in \mathfrak{T} : \ [T] = \emptyset \ \} = \{T \in \mathfrak{T} : \ \forall \alpha \in \mathcal{N} \ \exists n \in \mathbb{N} \ \alpha(n) \notin T \ \} \qquad (5.21)$$

  όλων των καλά θεμελιωμένων δέντρων στους φυσικούς. Δηλαδή όλων εκείνων των δέντρων που δεν έχουν κανένα άπειρο κλαδί. Καθώς και το συμπλήρωμά του

$$\mathcal{IF}(\mathfrak{T}) = \{T \in \mathfrak{T} : \ [T] \neq \emptyset \ \} = \{T \in \mathfrak{T} : \ \exists \alpha \in \mathcal{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ \alpha(n) \in T \ \} \qquad (5.22)$$

  το σύνολο των κακώς θεμελιωμένων δέντρων. Όμοια ορίζουμε τα $\mathcal{WF}(\mathfrak{T}_2)$ και $\mathcal{IF}(\mathfrak{T}_2)$.

  Παρατηρήστε ότι λόγω του λήμματος του Konig, το σύνολο $\mathcal{IF}(\mathfrak{T}_2)$ είναι ουσιαστικά το σύνολο $\mathfrak{T}_2^{\text{inf}}$ και συνεπώς είναι ένα G_δ υποσύνολο του $\mathfrak{T}_2$ και άρα και του $\mathcal{C}$. Όμοια το σύνολο $\mathcal{WF}(\mathfrak{T}_2)$ είναι $\mathcal{F}_\sigma$ υποσύνολο του $\mathfrak{T}_2$ και άρα και του $\mathcal{C}$.

  Τα πράγματα όμως είναι τελείως διαφορετικά για τα σύνολα $\mathcal{WF}(\mathfrak{T})$ και $\mathcal{IF}(\mathfrak{T})$. Τα σύνολα αυτά δεν ανήκουν στην Borel ιεραρχία, το σύνολο $\mathcal{WF}(\mathfrak{T})$ είναι ένα παράδειγμα συν-αναλυτικού ενώ το σύνολο $\mathcal{IF}(\mathfrak{T})$ είναι ένα παράδειγμα αναλυτικού συνόλου και τα παραδείγματα αυτά δεν είναι τυχαία. Είναι παραδείγματα πρότυπα, που ενσωματώνουν με τρόπο ουσιαστικό απογυμνωμένη την εγγενή πολυπλοκότητα όλων των συνόλων αυτής της κατηγορίας. Κάθε άλλο αναλυτικό σύνολο μπορεί να αναχθεί υπό μία έννοια που θα συζητήσουμε αμέσως στο $\mathcal{IF}(\mathfrak{T})$ και κάθε συν-αναλυτικό μπορεί να αναχθεί στο $\mathcal{WF}(\mathfrak{T})$. Τα σύνολα που έχουν αυτήν την ιδιότητα ονομάζονται πλήρη.

[4] Θεωρούμενο πάντα ως υποσύνολο του $\mathcal{C}$

5.3 Η μέθοδος και δύο πρότυπα σύνολα

Ορισμός 5.4 Έστω πολωνικός χώρος X και $A \subset X$. Λέμε ότι το σύνολο A είναι πλήρες αναλυτικό(συν-αναλυτικό) αν το A είναι αναλυτικό και για κάθε $B \subset \mathcal{N}$ αναλυτικό(συν-αναλυτικό) υπάρχει Borel συνάρτηση f

$$f : \mathcal{N} \to X \qquad \text{με} \qquad f^{-1}(A) = B \tag{5.23}$$

Μια άμεση παρατήρηση είναι ότι ένα πλήρες αναλυτικό -για παράδειγμα- σύνολο δεν γίνεται να είναι είναι Borel. Αυτό διότι όπως αποδείξαμε χρησιμοποιώντας ένα διαγώνιο επιχείρημα, ο χώρος $\mathcal{N}$ περιέχει τουλάχιστον ένα αναλυτικό και όχι Borel σύνολο B. Αν το A ήταν Borel, δεν θα μπορούσαμε να βρούμε Borel συνάρτηση που να αντιστρέφει το A στο B.

Συνεπώς έχουμε στα χέρια μας μία μέθοδο για να δείχνουμε πότε ένα σύνολο το οποίο είναι αναλυτικό δεν είναι Borel. Αρκεί να δείχνουμε ότι είναι πλήρες αναλυτικό. Θα μπορούσε όμως κανείς να διερωτηθεί το τί γίνεται με τα αναλυτικά σύνολα που δεν είναι Borel αλλά ούτε πλήρη. Υπάρχουν τέτοια σύνολα; Η απάντηση είναι πως αυτή η ερώτηση δεν μπορεί να απαντηθεί από τα αξιώματα της ZFC και μόνο. Αν υιοθετήσεις όμως επιπλέον αξιώματα όπως το “analytic determinancy” ή κάποια άλλα αξιώματα που αφορούν σε μεγάλους πληθαρίθμους, η απάντηση είναι πως όχι. Δεν υπάρχουν αναλυτικά σύνολα που δεν είναι ούτε πλήρη αλλά ούτε και Borel. Επιπλέον, οι λογικοί έχουν και λιγότερο μεταφυσικούς λόγους -από την τυφλή παραδοχή ενός αξιώματος- για να πιστεύουν στην ισχύ του αξιώματος της “analytic determinancy”.

Λήμμα 5.5 *Έστω $A \subset \mathcal{N}$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα*

(i) *Το σύνολο A είναι συν-αναλυτικό*

(ii) *Υπάρχει δέντρο στο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε*

$$\alpha \in A \Leftrightarrow T_\alpha \in \mathcal{WF}(\mathfrak{T}) \tag{5.24}$$

όπου

$$T_\alpha = \{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : \quad \text{θέτοντας } |s| = n, \quad \exists \beta \in \mathcal{N} \quad (\alpha|n, \beta|n) \in T\} \tag{5.25}$$

το “slice” δέντρο στο α □

Απόδειξη

$(i) \to (ii)$ Θα συμβολίσουμε τον χώρο Baire που περιέχει το A, $\mathcal{N}_1$ για να τον ξεχωρίσουμε από τον $\mathcal{N}_2$ που θα τον χρησιμοποιήσουμε σαν βοηθητικό χώρο κατά μήκος του οποίου θα μπορούμε να προβάλουμε. Αφού το A είναι συν-αναλυτικό, το $X \setminus A$ είναι αναλυτικό. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να βρούμε ένα κλειστό υποσύνολο C του $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$ έτσι ώστε

$$X \setminus A = \text{proj}^{\mathcal{N}_2}(C) \tag{5.26}$$

Επειδή όμως το C είναι κλειστό, υπάρχει δέντρο T στο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ έτσι ώστε $C = [T]$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} \alpha \in X \setminus A \quad &\Leftrightarrow \quad \exists \beta \in \mathcal{N}_2 \ \text{ ώστε } \ (\alpha, \beta) \in [T] && (5.27) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists \beta \in T_\alpha && (5.28) \\ &\Leftrightarrow \quad T_\alpha \notin \mathcal{WF}(\mathfrak{T}) && (5.29) \end{aligned}$$

$(ii) \to (i)$ Αν υπάρχει τέτοιο δέντρο τότε το $X \setminus A$ είναι ακριβώς η προβολή του $[T]$ πάνω στο $\mathcal{N}_1$. Δηλαδή το $X \setminus A$ είναι αναλυτικό και συνεπώς το A αναλυτικό. □

Θεώρημα 5.6 *Το σύνολο $\mathcal{WF}(\mathfrak{T})$ είναι πλήρες συν-αναλυτικό υποσύνολο του χώρου $\mathcal{C} \cap \mathfrak{T}$ και συνεπώς και το συμπλήρωμά του, $\mathcal{IF}(\mathfrak{T})$ είναι πλήρες αναλυτικό.*

Απόδειξη
Πρώτα θα δείξουμε ότι το $\mathcal{WF}(\mathfrak{T})$ είναι συν-αναλυτικό. Έστω $T \in \mathfrak{T}$ τότε

$$T \in \mathcal{WF}(\mathfrak{T}) \Leftrightarrow T \in \bigcap_{\beta \in \mathcal{N}} \bigcup_{n=0}^{\infty} \{T \in \mathfrak{T} : T(\beta|n) = 0\} \tag{5.30}$$

Όπου το σύνολο $\{T \in \mathfrak{T} : T(\beta|n) = 0\}$ είναι πεπερασμένη ένωση βασικών ανοικτών στο $\mathcal{C}$ για κάθε $\beta \in \mathcal{N}$ και $n \in \mathbb{N}$. Άρα το συμπλήρωμα

$$\mathfrak{T} \setminus \mathcal{WF}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{T} \setminus \bigcap_{\beta \in \mathcal{N}} \bigcup_{n=0}^{\infty} \{T \in \mathfrak{T} : T(\beta|n) = 0\} \tag{5.31}$$

$$= \bigcup_{\beta \in \mathcal{N}} \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{T} \setminus \{T \in \mathfrak{T} : T(\beta|n) = 0\} \tag{5.32}$$

είναι αναλυτικό και συνεπώς το $\mathcal{WF}(\mathfrak{T})$ είναι συν-αναλυτικό.

Θα δείξουμε τώρα ότι είναι και πλήρες. Έστω λοιπόν $C \in \mathcal{N}$ συν-αναλυτικό. Απο το προηγούμενο λήμμα υπάρχει δέντρο στο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\alpha \in C \Leftrightarrow T_\alpha \in \mathcal{WF}(\mathfrak{T}) \tag{5.33}$$

Ορίζουμε λοιπόν $f : \mathcal{N} \to \mathfrak{T}$ με

$$f(\alpha) = T_\alpha \tag{5.34}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής[5] αφού αν την δούμε κατά σημείο, δηλαδή αν πάρουμε $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $|s| = n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$f(\alpha)(s) = 1 \Leftrightarrow T(\alpha|n, s) = 1 \tag{5.35}$$

Δηλαδή η ανοικτή περιοχή στον $\mathfrak{T}$ όλων των δέντρων R για τα οποία $R(s) = 1$[6] αντιστρέφεται μέσω της f σε όλα τα $\alpha \in \mathcal{N}$ για τα οποία $T(\alpha|n, s) = 1$ δηλαδή σε ανοικτά υποσύνολα -καθορίζονται από τις πρώτες n συντεταγμένες- του χώρου $\mathcal{N}$. Επιπλέον $C = f^{-1}(\mathcal{WF}(\mathfrak{T}))$. Συνεπώς αφου για το τυχαίο συν-αναλυτικό υποσύνολο του $\mathcal{N}$ βρήκαμε f συνάρτηση Borel (και μάλιστα συνεχή) με $C = f^{-1}(\mathcal{WF}(\mathfrak{T}))$, αποδείξαμε ότι το σύνολο $\mathcal{WF}(\mathfrak{T})$ είναι πλήρες συν-αναλυτικό. Επιπλέον παρατηρείστε ότι ταυτόχρονα δείξαμε ότι το σύνολο $\mathcal{IF}(\mathfrak{T})$ είναι πλήρες αναλυτικό. □

Δοθέντος λοιπόν ενός συνόλου A αναλυτικού(συν-αναλυτικου)μπορούμε να δείξουμε ότι αυτό δεν είναι Borel, δουλεύοντας όπως στο παραπάνω παράδειγμα. Επιπλέον, έχοντας στα χέρια μας τα παραδείγματα $\mathcal{IF}(\mathfrak{T})$ και $\mathcal{WF}(\mathfrak{T})$, υπάρχει και άλλος ένας τρόπος να κινηθούμε. Μπορούμε να ανάγουμε το -ήδη γνωστό για την πολυπλοκότητά του- $\mathcal{IF}(\mathfrak{T})$ στο σύνολο A με τρόπο που ευθύς θα εξηγήσουμε, καθιστώντας και το A πολυπλοκότερο από Borel.

Σε αυτό το σημείο έχει ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι η μεθοδολογία που αναπτύσσουμε είναι επί της ουσίας ίδια με την μεθοδολογία που χρησιμοποιείται στην θεωρία αλγορίθμων και πολυπλοκότητας όταν για παράδειγμα θέλουμε να αποδείξουμε ένα πρόβλημα είναι στην κλάση NP και όχι στην P. Οι αναγωγές εκεί γίνονται με πολυωνυμικές συναρτήσεις αφού αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η πολυωνυμικότητα του χρόνου, ενώ εδώ οι αναγωγές γίνονται με Borel συναρτήσεις.

[5]Κάντε και ένα σχήμα, και με λίγη υπομονή...

[6]Παρατηρήστε ότι το σύνολο όλων των περιοχών του $\mathfrak{T} \cap \mathcal{C}$ που περιγράφουμε αποτελούν μια υποβάση της τοπολογίας του $\mathfrak{T} \cap \mathcal{C}$ και συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι τα σύνολα αυτά επιστρέφονται σε ανοικτά

Ορισμός 5.7 Έστω πολωνικοί χώροι X, Y και σύνολα $A \subset X,\ B \subset Y$. Λέμε ότι το A ανάγεται με τρόπο Borel στο B αν υπάρχει Borel συνάρτηση $f : X \to Y$ τέτοια ώστε $f^{-1}(B) = A$ ■

Παρατήρηση 5.8 Αν το A ανάγεται με τρόπο Borel στο B και το A είναι πλήρες αναλυτικό, τότε αναγκαστικά και το B είναι πλήρες αναλυτικό. Διότι κάθε φορά που ένα αναλυτικό σύνολο ανάγεται στο πλήρες A, χρήσει της σύνθεσης συναρτήσεων, θα ανάγεται και στο B.

5.4 Μερικά τελικά παραδείγματα

- *Το σύνολο WO όλων των καλών διατάξεων που μπορούν να οριστούν στους φυσικούς είναι ενα πλήρες συν-αναλυτικό υποσύνολο του χώρου $2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$*

Αναπαριστώντας για άλλη μια φορά το σύνολο των διμελών σχέσεων $n \sim m$ στους φυσικούς με σημεία του χώρου $2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ [7]$\cong (2^{\mathbb{N}})$, μπορούμε να ορίσουμε τα σύνολα

$$LO = \{\alpha \in 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} :\ \text{το } \alpha \text{ αναπαριστά μια γραμμική διάταξη}\} \tag{5.36}$$

και

$$WO = \{\alpha \in 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} :\ \text{το } \alpha \text{ αναπαριστά μια καλή διάταξη}\} \tag{5.37}$$

Το σύνολο LO, είναι Borel αφού μπορεί να γραφτεί ως τομή των εξής συνόλων

- ◦ $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \alpha(n,n) = 1$ (αυτοπάθεια)
- ◦ $\bigcap_{n,m,k\in\mathbb{N}} \big(\alpha(n,m) = 0 \cup \alpha(m,k) = 0 \cup \alpha(n,k) = 1\big)$ (μεταβατικότητα)
- ◦ $\bigcup_{n\neq m\in\mathbb{N}} (\alpha(m,n) = 0 \cup \alpha(n,m) = 0)$ (αντισυμμετρικότητα)
- ◦ $\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} \big(\alpha(m,n) = 1 \cup \alpha(m,n) = 1\big)$ (γραμμικότητα)

όπου με $\alpha(m,n) = 1$ εννοούμε το σύνολο $\{\alpha \in 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} :\ \alpha(m,n) = 1\}$.

Από την άλλη το σύνολο WO είναι πλήρες συν-αναλυτικό. Αρχικά παρατηρήστε ότι γράφεται ως τομή των τριών πρώτων πάνω συνόλων και του

$$\bigcap_{\beta\in\mathcal{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\alpha \in 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} :\ \forall m \in \mathbb{N}\ \alpha\big(\beta(n), \beta(m)\big) = 1\} \tag{5.38}$$

όπου για κάθε $\beta \in \mathcal{N}$ και $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $\{\alpha \in 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} :\ \forall m \in \mathbb{N}\ \alpha\big(\beta(n), \beta(m)\big) = 1\}$ είναι Borel. Άρα όπως και στο παράδειγμα με τα καλά θεμελιωμένα δέντρα, το WO είναι συν-αναλυτικό. Θα δείξουμε τώρα ότι είναι πλήρες. Σύμφωνα με την τελευταία παρατήρηση της προηγούμενης ενότητας, αρκεί να ανάγουμε με τρόπο Borel, το σύνολο $\mathcal{WF}(\mathfrak{T}) \subset \mathfrak{T}$ στο σύνολο $WO \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$. Θα χρειαστούμε όμως πρώτα έναν ορισμό και ένα λήμμα.

Ορισμός 5.9 Έστω T ένα δέντρο στο $\mathbb{N}$. Ορίζουμε την γραμμική διάταξη Kleene-Brouwer($\leq_{KB}$) στο δέντρο ως εξής: Έστω $s = (s_0, \ldots, s_{m-1}), t = (t_0, \ldots, t_{n-1}) \in T$, $s \leq_{KB} t$ αν

- ◦ $t \prec s$ ή
- ◦ $t = s$ ή
- ◦ $\exists i < \min\{m, n\}$ ώστε $\forall j < i,\ \ s_j = t_j$ και $s_i < t_i$ ■

Λήμμα 5.10 *Για κάθε δέντρο T στο $\mathbb{N}$*

$$T \in \mathcal{WF}(\mathfrak{T}) \Leftrightarrow \textit{Η διάταξη } \leq_{KB} \textit{ στο } T \textit{ είναι καλή} \tag{5.39}$$

[7] εφοδιασμένο με την μετρική γινόμενο αριθμήσιμων $(\{0,1\}, d_{\text{διακριτή}})$

Απόδειξη
Αν $T \notin \mathcal{WF}(\mathfrak{T})$ τότε υπάρχει $\alpha \in \mathcal{N}$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\alpha|n \in T$. Τότε η διάταξη $\leq_{KB}$ δεν μπορεί να είναι καλή διότι

$$\alpha|(n+1) \leq_{KB} \alpha|n \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{5.40}$$

Αντίστροφα έστω ότι η διάταξη $\leq_{KB}$ δεν είναι καλή. Τότε υπάρχει γνησίως φθίνουσα ακολουθία $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε όμως επειδή η κλασική διάταξη στο $\mathbb{N}$ είναι καλή, και $s_1(0) \geq s_2(0) \geq s_3(0) \geq \ldots$, θα υπάρχει k_0 έτσι ώστε

$$\exists n \in \mathbb{N} \ \forall m \in \mathbb{N} \ k_0 = s_n(0) \tag{5.41}$$

Συνεπώς για κάθε φυσικό n' μεγαλύτερο του n ορίζεται το $s_{n'}(1)$ και $s_{n'+1}(1) \geq s_{n'+2}(1) \geq s_{n'+3}(1) \geq \ldots$. Όμοια και αυτή η ακολουθία σταθεροποιείται σε κάποιο k_1 και έτσι επαγωγικά μπορούμε να χτίσουμε ένα $(k_0, k_1, k_2, \ldots) \in [T]$ □

Θα δημιουργήσουμε τώρα μια συνεχή συνάρτηση $R : \mathfrak{T} \to 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ με $R^{-1}(WO) = \mathcal{WF}(\mathfrak{T})$.

Διαλέγουμε αρχικά μια “1-1” και επί συνάρτηση $u : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Θέλουμε να κατασκευάσουμε με οδηγό το κάθε δέντρο μια διμελή σχέση στους φυσικούς που να είναι καλη αν μόνο αν το δέντρο είναι καλά θεμελιωμένο.Για αυτόν τον λόγο θα συγκρίνουμε δύο φυσικούς k, l χρησιμοποιώντας την $\leq_{KB}$ στα $s = u(k), t = u(l)$ αν αυτά ανήκουν και τα δυο στο δέντρο. Αν κανένα από τα δύο δεν ανήκει στο δέντρο, θα χρησιμοποιήσουμε την διάταξη των φυσικών στα k, l η οποία επειδή είναι καλή, δεν θα επηρεάσει το αποτέλεσμα. Όμοια αν μόνο το $s = u(k)$ για παράδειγμα δεν ανήκει στο δέντρο, στέλνουμε το k ψηλά έτσι ώστε η καλή διαταξιμότητα να κριθεί μόνο από το δέντρο. Συνεπώς ορίζουμε για κάθε δέντρο T, την διμελή σχέση $R(T)$ πάνω στο $\mathbb{N}$ ως εξής:

$$k \ R(T) \ l \quad \Leftrightarrow \quad \big(u(k), u(l) \notin T \ \text{ και } \ k \leq l\big) \ \text{ ή} \tag{5.42}$$
$$\big(u(k) \in T \ \text{ και } \ u(l) \notin T\big) \ \text{ ή} \tag{5.43}$$
$$\big(u(k) \leq^T_{KB} u(l)\big) \tag{5.44}$$

Επειδή από το παραπάνω λήμμα, η $\leq^T_{KB}$ είναι καλή διάταξη αν και μόνο αν το T είναι ένα καλά θεμελιωμένο δέντρο, έχουμε άμεσα ότι $R^{-1}(WO) = \mathcal{WF}(\mathfrak{T})$.

Επιπλέον, η R είναι συνεχής. Αυτό μπορούμε να το δείξουμε όπως πριν. Εναλλακτικά παρατηρήστε ότι επειδή ταυτίζουμε κάθε δέντρο με ένα στοιχείο του $2^{\mathbb{N}} (\cong \{0,1\}^{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}})$ μία ακολουθία δέντρων $\{T_n\}$ συγκλίνει στο δέντρο T, αν και μόνο αν συγκλίνει κατά συντεταγμένη στο δέντρο T. Δηλαδή αν για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $T_n(k) \to T(k)$ καθώς $n \to \infty$. Το οποίο, λόγω της φύσης του χώρου συμβαίνει μόνο αν για κάθε $k \in \mathbb{N}$, η ακολουθία $\{T_n(k)\}$ είναι τελικά σταθερή. Συνεπώς η ακολουθία $\{R\big(T_n(k)\big)\}$ είναι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ τελικά σταθερή και ίση με $\{R\big(T(k)\big)\}$ το οποίο σημαίνει ότι η ακολουθία διατάξεων $R(T_n)$ συγκλίνει στην διάταξη $R(T)$ κατά σημείο και συνεπώς και στην τοπολογία του χώρου $2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \cong (2^{\mathbb{N}})$. Άρα η R είναι συνεχής και συνεπώς το σύνολο WO είναι πλήρες συν-αναλυτικό υποσύνολο του χώρου $2^{\mathbb{N}}$.

- *Το σύνολο Δ είναι ένα πλήρες αναλυτικό υποσύνολο του* $[0,1)$

  Υπενθυμίζουμε για άλλη μια φορά το παράδειγμα

$$\Delta = \Big\{x \in (0,1) : \ \text{υπάρχει αύξουσα ακολουθία φυσικών } \{k_n\} \text{ ώστε } \forall n \in \mathbb{N} \ \ x[k_n] \Big| x[k_{n+1}]\Big\} \tag{5.45}$$

όπου $a\Big|b \Rightarrow$ 'ο a διαιρεί τον b' και $x[i]$ ο i όρος στο αρμονικό ανάπτυγμα του x, δηλαδή

$$x = \frac{1}{x[0] + \frac{1}{x[1]+\frac{1}{x[2]+\dots}}}, \quad x[i] \in 1, 2, 3, \dots \tag{5.46}$$

Επειδή υπάρχει όπως είδαμε ισομορφισμός

$$g : \mathcal{N} \to \mathcal{N}^{<} \quad \text{με} \quad g(\alpha)_{(n)} = \beta(n) = \begin{cases} \alpha(0) & \text{αν} \quad n = 0 \\ (n-1) + \sum_{i=0}^{n} \alpha(i) & \text{αν} \quad n > 0 \end{cases} \tag{5.47}$$

μπορούμε να γράψουμε το σύνολο ως

$$\Delta = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{N}} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha|n} \quad \text{όπου} \quad A_{\alpha|n} = \{x : \quad x[k]\Big|x[l]\} \quad \text{με} \quad k = g(\alpha)_{(n)} < l = g(\alpha)_{(n+1)} \tag{5.48}$$

και το $A_{\alpha|n}$ είναι Borel για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$ και $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς το σύνολο Δ είναι ένα αναλυτικό υποσύνολο του $[0, 1)$. Θα δείξουμε ότι είναι και πλήρες.

Θέλουμε λοιπόν να δημιουργήσουμε μια συνάρτηση Borel

$$S : \mathfrak{T} \to X = \{1, 2, 3, \dots\}^{\mathbb{N}} (\cong \mathcal{N}) \tag{5.49}$$

ώστε αν $L = \{\alpha \in X :$ υπάρχει $k_0 < k_1 < k_2 < \dots$ ώστε $\forall i \in \mathbb{N} \ \ \alpha(k_i)|\alpha(k_{i+1})\}$, τότε

$$S^{-1}(L) = \mathcal{IF}(\mathfrak{T}) \tag{5.50}$$

Έστω $f : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ μια "1-1" και επί συνάρτηση και $p_0, p_1, p_2, \dots$ η κλασική αρίθμηση των πρώτων. Ορίζουμε για κάθε $T \in \mathfrak{T}$ το $\alpha = S(T)$ ως εξής:

Αν $f^{-1}(n) = s \in T$ με $s = (s_0, s_1, \dots s_m)$ τότε $\alpha(n) = p_{f(s_0)} p_{f(s_0,s_1)} \cdots p_{f(s_0,s_1,\dots s_m)}$.

Αν $f^{-1}(n) = s \notin T$ με $s = (s_0, s_1, \dots s_m)$ τότε $\alpha(n) = p_n$. Η S πληρεί τις παραπάνω προδιαγραφές και μάλιστα όπως στα προηγούμενα παραδείγματα, μπορούμε να δείξουμε πως είναι συνεχής.

- *Το σύνολο $\mathcal{D}iff$ όλων των παντού παραγωγήσιμων συναρτήσεων $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι πλήρες συν-αναλυτικό υποσύνολο του χώρου $(C[0, 1], \| \|_\infty)$*

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε αρχικά το σύνολο

$$A \subset C[0, 1] \times [0, 1] \quad \text{με} \quad A = \{(f, x) : \text{ η } f'(x) \text{ υπάρχει} \} \tag{5.51}$$

Έστω επιπλέον $\{q_n\}_n \in \mathbb{N}$ μια αρίθμηση των ρητών του $[0, 1]$. Τότε:

$$A = \{(f, x) : \forall k \in \mathbb{N} \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall m \in \mathbb{N} \left\{ (|q_n - x| < \frac{1}{n_0}) \wedge \right. \tag{5.52}$$

$$\left. (|q_m - x| < \frac{1}{n_0}) \right\} \Rightarrow (|\frac{f(q_n) - f(x)}{q_n - x} - \frac{f(q_m) - x}{q_m - x}| < \frac{1}{k})\} \tag{5.53}$$

Δηλαδή συμβολίζοντας με N_1 το σύνολο των n στο $\mathbb{N}$ με $|q_n - x| < \frac{1}{n_0}$ και όμοια με N_2 το σύνολο των m στο $\mathbb{N}$ με $|q_m - x| < \frac{1}{n_0}$,

$$A = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in N_1} \bigcap_{m \in N_2} \{(f, x) : |\frac{f(q_n) - f(x)}{q_n - x} - \frac{f(q_m) - x}{q_m - x}| < \frac{1}{k}\} \tag{5.54}$$

Τότε όμως επειδή η συνάρτηση από το $C[0,1] \times [0,1]$ στο $\mathbb{R}$ με

$$(f,x) \to f(x) \tag{5.55}$$

είναι συνεχής και ως προς τις δύο μεταβλητές , το παραπάνω σύνολο στο οποίο δρουν οι αριθμήσιμες ενώσεις και τομές είναι ανοικτό και συνεπώς το A είναι Borel. Το σύνολο $\mathcal{D}iff$ όμως είναι η συμπροβολή του A κατά μήκος του πολωνικού χώρου $[0,1]$ και ως εκ τούτου είναι συναναλυτικό σύνολο.

Θα δείξουμε τώρα ότι το σύνολο αυτό είναι και πλήρες συναναλυτικό κατασκευάζοντας μια Borel-και μάλιστα συνεχή- συνάρτηση

$$F : \mathfrak{T} \to C[0,1] \quad \text{με} \quad F^{-1}(\mathcal{D}iff) = \mathcal{WF}(\mathfrak{T}). \tag{5.56}$$

Έστω για αυτόν το σκοπό $\langle\rangle : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ μια αρίθμηση των $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Συμβολίζουμε για κάθε διάστημα $I = [a,b]$, $|I| = b - a$ το μήκος του.

Ξεκινώντας με την κενή ακολουθία φυσικών και με επαγωγή στο k, ορίζουμε για κάθε $s = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$ ένα ανοικτό διάστημα $J_s \subset [0,1]$ και ένα αρκετά μικρότερο κλειστό υποδιάστημα K_s ώστε να ισχύουν τα εξής:

1. Το κλειστό διάστημα K_s είναι ομόκεντρο με το J_s και
$$|K_s| < \frac{1}{2^{\langle s\rangle}}|J_s| \tag{5.57}$$
2. Για κάθε n φυσικό,
$$J_{(s*n)} \subset L_s \tag{5.58}$$
όπου το L_s είναι το ανοικτό αριστερό ημιδιάστημα του K_s
3. Αν $n \neq m$ τότε
$$J_{(s*n)} \cap J_{(s*m)} = \emptyset \tag{5.59}$$

Ονομάζουμε επίσης R_s το δεξί μισό κλειστό υποδιάστημα του K_s. Λόγω της απαίτησης (2), παρατηρήστε ότι, τα διαστήματα $\{R_s, s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ είναι όλα ξένα μεταξύ τους.

Για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$ γράφουμε $x(\alpha)$ για το μοναδικό σημείο που βρίσκεται στην τομή

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} J_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} L_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} K_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)} \tag{5.60}$$

Για κάθε δέντρο στο $\mathbb{N}$ θα χρησιμοποιήσουμε το παραπάνω σύστημα για κατασκευάσουμε μια συνεχή συνάρτηση στο $[0,1]$. Για κάθε διάστημα $[a,b] \subset [0,1]$, συμβολίζουμε με $\phi(x,[a,b])$ την συνάρτηση

$$\phi(x,[a,b]) = \begin{cases} 16(x-a)^2(x-b)^2(b-a)^{-1} & \text{αν} \quad x \in [a,b] \\ 0 & \text{αν} \quad x \in [0,1] \setminus [a,b] \end{cases} \tag{5.61}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής, παντού παραγωγίσιμη και παίρνει την μέγιστη τιμή της $b-a$ στο κέντρο του διαστήματος $[a,b]$.

Για κάθε δέντρο T στους φυσικούς, ορίζουμε την συνάρτηση

$$F_T(x) = \sum_{s\in T} \phi(x, R_s) \tag{5.62}$$

Επειδή

$$|\phi(x, R_s)| \leq |R_s| \leq 2^{-\langle s \rangle} \tag{5.63}$$

η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση $F_T(x)$ και συνεπώς η τελευταία ανήκει στον $C[0,1]$. Επιπλέον, για τον ίδιο λόγο η απεικόνιση F από τον χώρο $\mathfrak{T}$ στον $C[0,1]$ είναι συνεχής. Μένει να δείξουμε ότι

$$T \in \mathcal{WF}(\mathfrak{T}) \;\Leftrightarrow\; F_T \in \mathcal{D}iff \tag{5.64}$$

Θα δείξουμε λοιπόν ότι

1. Αν $\alpha \in [T]$ και $x_0 = x(\alpha)$ το αντίστοιχο σημείο στο $[0,1]$ τότε η $F'_T(x_0)$ δεν υπάρχει και
2. Αν $x_0 \in [0,1]$ για το οποίο δεν υπάρχει στοιχείο $\alpha \in [T]$ ώστε $x_0 = x(\alpha)$, τότε η $F'_T(x_0)$ υπάρχει.

Έστω λοιπόν προς απόδειξη του (1), $\alpha \in [T]$ και $x_0 = x(\alpha)$. Τότε το x_0 ανήκει στο $L_{\alpha|n}$ για κάθε φυσικό αριθμό n και συνεπώς $F_T(x_0) = 0$. Έστω η_n το κέντρο του διαστήματος $R_{\alpha|n}$ και $\xi_n = |R_{\alpha|n}|/2$. Επειδή το $\xi_n + \eta_n$ είναι το δεξί άκρο του δεξιού διαστήματος, γνωρίζουμε πως $F_T(\xi_n + \eta_n) = 0$. Επιπλέον, επειδή το x_0 βρίσκεται εντός του $L_{\alpha|n} \subset K_{\alpha|n}$ έχουμε:

$$|x_0 - \xi_n| < 3\eta_n \tag{5.65}$$

Άρα

$$F_T(\xi_n) = 2\eta_n \geq \frac{2}{3}|x_0 - \xi_n| \tag{5.66}$$

Συνεπώς η $F'_T(x_0)$ δεν υπάρχει αφού καθώς $n \to \infty$,

$$\xi_n \to x_0 \quad \text{και} \quad \xi_n + \eta_n \to x_0 \tag{5.67}$$

και παράλληλα, ενώ

$$\frac{F_T(\xi_n + \eta_n) - F_T(x_0)}{\xi_n + \eta_n - x_0} = 0, \tag{5.68}$$

έχουμε

$$\frac{F_T(\xi_n) - F_T(x_0)}{\xi_n - x_0} \geq \frac{2}{3}. \tag{5.69}$$

Για το (2), έστω $x_0 \in [0,1]$ για το οποίο δεν υπάρχει στοιχείο $\alpha \in [T]$ ώστε $x_0 = x(\alpha)$. Τότε υπάρχει φυσικός αριθμός N ώστε για κάθε $s \in T$ με $\langle s \rangle > N$, το x_0 να μην ανήκει στο J_s. Αρα για $\langle s \rangle > N$ είναι εύκολο να δούμε πώς

$$|\frac{\phi(x_0 + t, R_s) - \phi(x_0, R_s)}{t}| \leq 2^{-\langle s \rangle} \tag{5.70}$$

Όμως η F_T γράφεται ως ομοιόμορφο όριο μιας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων:

$$F_T(x) = \lim_{k\to\infty} F_T^k(x) = lim_{k\to\infty} \sum_{s \in T, \langle s \rangle \leq k} \phi(x, R_s) \tag{5.71}$$

Και για $k \geq N$ έχουμε από τα παραπάνω

$$\left| \frac{F_T(x_0 + t) - F_T(x_0)}{t} - \frac{F_T^k(x_0 + t) - F_T^k(x_0)}{t} \right| \leq \sum_{m=k+1}^{\infty} 2^{-m} \leq 2^{-k} \to 0 \tag{5.72}$$

καθώς $k \to \infty$. Οπότε μπορούμε να βρούμε πάνω και κάτω φράγματα για την ποσότητα

$$\left| \frac{F_T(x_0 + t) - F_T(x_0)}{t} \right| \tag{5.73}$$

χρήσει των

$$\left| \frac{F_T^k(x_0 + t) - F_T^k(x_0)}{t} \right| \tag{5.74}$$

όπου για κάθε k το τελευταίο κλάσμα συγκλίνει καθώς $t \to 0$. Άρα η $F_T'(x_0)$ υπάρχει. $\square$

Bibliography

[1] Kechris, A. S. (1995), Classical Descriptive Set Theory, Berlin, New York: Springer-Verlag,

[2] Moschovakis, Y. N. (2009), Descriptive Set Theory, American Mathematical Society

[3] Srivastava S. M. (1998), A Course on Borel Sets, Springer

[4] Rogers C. A. (1998), Hausdorff Measures, Cambridge University Press; 2 edition

[5] Rao M. M. (2004), Measure Theory and Integration, Marcel Dekker

[6] Neveu Jacque (1965), Mathematical foundations of the calculus of probability, Holden-Day

[7] Brian S. Thomson, Andrew M. Bruckner, Judith B. Bruckner (2008), Real Analysis, ClassicalRealAnalysis.com

[8] G. G. Lorentz, ”Who discovered analytic sets?”, Journal: Mathematical Intelligencer - MATH INTELL , vol. 23, no. 4, pp. 28-32, 2001

[9] N. Lusin, “Mémoire sur les ensembles analytiques et projectifs”, Mat. Sb., 33:3 (1926), 237–290

[10] Akihiro Kanamori (1995), ”The Emergence of Descriptive Set Theory”, in: Jaakko Hintikka (editor), From Dedekind to G¨odel: Essays on the Development of the foundations of Mathematics, Synthese Library volume 251, Kluwer, Dordrecht.

[11] V. I. Igoshin (1996), “A short biography of Mikhail Yakovlevich Suslin”, Uspekhi Mat. Nauk, 51:3(309), 3–16

[12] Γιάννης Μοσχοβάκης (2007), Σημειώσεις στην συνολοθεωρία, εκδ. Νεφέλη

[13] Σπηλιώτης Ιωάννης (2004), Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις και Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά, εκδ. Συμεών

Τομέας Μαθηματικών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο