



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

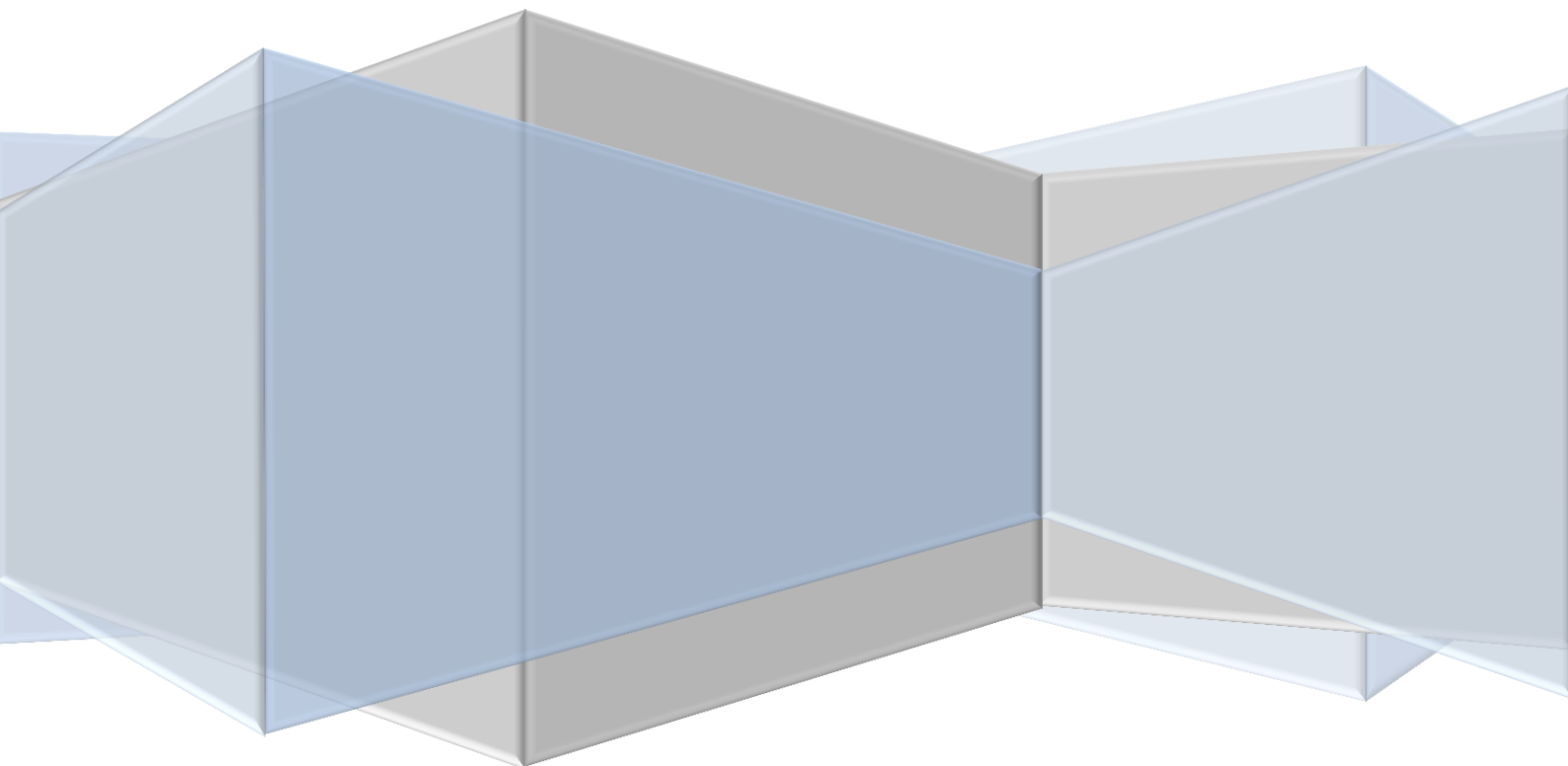
**ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ**

# **ΥΣΤΕΡΗΤΙΚΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΔΟΚΟΥ ΜΕ ΑΠΟΜΕΙΟΥΜΕΝΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑΤΑ ΤΥΠΟΥ ΒΟΥΣ-WEN**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ: Σοφιανός Χρήστος**

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: Κουμούσης Βλάσης Καθηγητής Ε.Μ.Π.**



Αθήνα Ιούλιος 2012



## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Τελειώνοντας τη διπλωματική μου εργασία θα ήθελα να εκφράσω την εκτίμησή μου και τα θερμά μου ευχαριστώ σε όλους όσους ήταν δίπλα μου για την ολοκλήρωσή της:

Πρώτα πρώτα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κ. Κουμούση Βλάση για την πολύτιμη καθοδήγησή του και τις απαραίτητες και καθοριστικές συμβουλές του για την ολοκλήρωση αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Ακόμη ευχαριστώ τον Υποψήφιο Διδάκτορα Ε.Μ.Π. Ηλία Γκιμούση για την ουσιαστική βοήθειά του σε όλη την πορεία εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας, με την παροχή χρήσιμου υλικού και ουσιαστικών παρατηρήσεων σε προγραμματιστικό επίπεδο.

Τέλος, ευχαριστώ τον Διδάκτορα Ε.Μ.Π. Σάββα Τριανταφύλλου, για τη συμβολή του στην επίλυση προβλημάτων προγραμματισμού και θα ήθελα να αναγνωρίσω τη συμβολή της Αλεξάνδρας Κότταρη όσον αφορά στο προσομοίωμα Sivaselvan-Reinhorn.



ΠΕΡΙΛΗΨΗΥΣΤΕΡΗΤΙΚΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΔΟΚΟΥ ΜΕ ΑΠΟΜΕΙΟΥΜΕΝΑ  
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑΤΑ ΤΥΠΟΥ BOUC-WEN

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως αντικείμενό της την ενσωμάτωση υστερητικών προσομοιωμάτων στη ανελαστική δυναμική ανάλυση μονοβάθμιων και πολυβάθμιων συστημάτων με τη χρήση πεπερασμένου στοιχείου δοκού. Μετά από μια αρχική αναφορά στους τύπους των μοντέλων υστέρησης που έχουν αναπτυχθεί (πολυγραμμικά και ομαλά υστερητικά) εξετάζονται αναλυτικά τα προσομοιώματα των Bouc-Wen και Sivaselvan-Reinhorn. Αυτά αποτελούνται κυρίως από μια μη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης της μορφής  $\dot{z}(t) = f(\dot{u}(t), z(t))$ , που αποτελεί την υστερητική συνάρτηση και από παραμέτρους που δίνονται από το χρήστη και ελέγχουν τη μορφή των βρόχων που προκύπτουν. Η  $z$  είναι η υστερητική συνάρτηση και  $\dot{z}$  είναι η παράγωγος της  $z$  ως προς το χρόνο η οποία ισούται με τη παράγωγο των μετατοπίσεων ως προς το χρόνο (ταχύτητες) πολλαπλασιασμένες με ένα μη γραμμικό συντελεστή. Παρουσιάζονται διάφορα παραδείγματα αποκρίσεων έτσι ώστε να γίνει κατανοητή η λειτουργία των προσομοιωμάτων καθώς και η επιρροή των παραμέτρων.

Στη συνέχεια ακολουθεί η εισαγωγή των απομειώσεων αντοχής και δυσκαμψίας καθώς και του φαινομένου της στένωσης. Ειδικότερα οι νόμοι απομείωσης αντοχής και δυσκαμψίας εισήχθησαν στο προσομοίωμα με βάση την πρόταση των Baber και Wen (1981), ενώ το φαινόμενο της στένωσης σύμφωνα με τη θεώρηση του Foliente (1995). Η εφαρμογή των απομειώσεων και της στένωσης γίνεται με την εισαγωγή στη υστερητική εξίσωση κατάλληλων συντελεστών οι οποίοι βασίζονται στον υπολογισμό της υστερητικής ενέργειας δηλαδή της ενέργειας που διαχέεται από το υστερητικό ελατήριο. Παρουσιάζονται διάφορα παραδείγματα έτσι ώστε να γίνει κατανοητή η συμπεριφορά των προσομοιωμάτων μετά την εφαρμογή των απομειώσεων και η σύγκρισή τους με πριν.

Το πεπερασμένο στοιχείο δοκού που αναλύεται στη συνέχεια εισάγει νέους υστερητικούς βαθμούς ελευθερίας οι οποίοι υπόκεινται στις εξελκτικές εξισώσεις τύπου Bouc-Wen. Αυτοί οι νέοι βαθμοί ελευθερίας θεωρούνται ως υστερητικές καμπυλότητες και υστερητικές κεντρικές αξονικές παραμορφώσεις. Δημιουργείται ένα σύστημα εξισώσεων που είναι οι γραμμικές εξισώσεις κίνησης σε επίπεδο κατασκευής και οι μη γραμμικές υστερητικές εξισώσεις σε

---

επίπεδο στοιχείου. Το σύστημα των εξισώσεων έρχεται σε μορφή χώρου κατάστασης (state space form) και επιλύεται ταυτόχρονα. Έτσι ενσωματώνεται η υστέρηση στη θεωρία των πεπερασμένων στοιχείων και αποφεύγεται η γραμμικοποίηση στο καθολικό επίπεδο της κατασκευής.

Ακολουθώ ένα τυπικό δίστηλο πλαίσιο κατασκευασμένο από χάλυβα υποβάλλεται σε τέσσερις σεισμικές δονήσεις και αναλύεται η συμπεριφορά του με βάση τα όσα προηγήθηκαν. Συγκεκριμένα οι σεισμοί που επιλέχθηκαν είναι Kocaeli Duzce 270, Rinaldi Rss 228, Tarzana 090, και Kobe Takatori 090 πολλαπλασιασμένοι κάθε φορά με κατάλληλο συντελεστή ώστε να υπάρξει διαρροή. Παρουσιάζονται τα διαγράμματα ροπών καμπυλοτήτων που προκύπτουν από την ανάλυση για χαρακτηριστικούς κόμβους του φορέα, καθώς και οι χρονοϊστορίες των μετακινήσεων της κορυφής. Στο ίδιο πλαίσιο ακολουθεί ανάλυση με την εφαρμογή των απομειώσεων αντοχής και δυσκαμψίας και συγκρίνονται οι αποκρίσεις με τις προηγούμενες. Επίσης αναλύεται και ένα πλαίσιο από ωπλισμένο σκυρόδεμα στο σεισμό Kocaeli Duzce 270 με την εφαρμογή των απομειώσεων και του φαινομένου της στένωσης. Τέλος ακολουθεί η ανελαστική ανάλυση ενός πολυώροφου κτηρίου και συγκεκριμένα του νοσοκομείου Woodland Hills Hospital στην California. Το κτήριο υποβλήθηκε στο σεισμό El Centro με τα σεισμικά μεγέθη πολλαπλασιασμένα επί 2 έτσι ώστε να γίνει φανερή η διαρροή των διατομών. Το υλικό θεωρήθηκε ότι ακολουθεί διγραμμική συμπεριφορά. Και εδώ γίνεται σύγκριση των αποκρίσεων με και χωρίς απομειώσεις καθώς και της διαχεόμενης ενέργειας. Τέλος παρουσιάζονται και τα αποτελέσματα της ανάλυσης αν θεωρούσαμε υλικό με κράτυνση.

**ABSTRACT****HYSTERETIC BEAM ELEMENT WITH DEGRADING BOUC WEN TYPE MODELS**

The purpose of this diploma thesis is the incorporation of hysteretic modelling in nonlinear dynamic analysis of single and multi-degree of freedom systems using a beam element. After an initial reference in the type of hysteretic models developed (namely polygonal and smooth hysteretic) Bouc-Wen and Sivaselvan-Reinhorn models are presented and assessed in detail. Multiple examples of responses demonstrate the influence of the model parameters. Then the stiffness degradation, the strength deterioration and pinching are introduced. The stiffness degradation and strength deterioration rules used herein are based on Baber και Wen (1981), while pinching is based on the work of Foliente (1995). Both of these rules are based on the calculation of the hysteretic energy namely the energy dissipated by the hysteretic spring. Various examples are presented to reveal the range of validity of the proposed degrading model. The beam element analyzed introduces new hysteretic degrees of freedom subjected to an evolution equation of the Bouc-Wen type. These new hysteretic degrees of freedom are considered as hysteretic curvatures and hysteretic axial deformations. The system of equations i.e., the linear global equations of motion and nonlinear local constitutive equations for every element is converted into state space form and solved simultaneously. This way hysteresis is introduced in the finite element method. Finally a typical two column frame buildings as well as a multi-storey building are subject to various earthquakes and their behavior is discussed.





**ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ**

<b>1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....</b>	<b>1</b>
1.1 ΓΕΝΙΚΑ .....	2
1.2 ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ.....	5
1.3 ΔΟΜΗ ΚΑΙ ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ .....	6
<b>2. ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑΤΑ ΤΥΠΟΥ ΒΟΥC-WEN .....</b>	<b>9</b>
2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑ ΒΟΥC-WEN .....	10
2.2 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑ SIVASELVAN-REINHORN .....	13
2.3 ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΤΟΥ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑΤΟΣ ΤΩΝ SIVASELVAN REINHORN.....	16
2.4 ΥΣΤΕΡΗΣΗ ΜΕ ΑΣΣΥΜΕΤΡΗ ΡΟΠΗ ΔΙΑΡΡΟΗΣ.....	19
2.5 ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑΤΟΣ.....	21
<b>3. ΑΠΟΜΕΙΩΣΕΙΣ ΣΤΟ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑ SIVASELVAN - REINHORN.....</b>	<b>25</b>
3.1 ΥΣΤΕΡΗΣΗ ΜΕ ΑΠΟΜΕΙΩΣΗ ΤΗΣ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ .....	26
3.2 ΥΣΤΕΡΗΣΗ ΜΕ ΑΠΟΜΕΙΩΣΗ ΤΗΣ ΑΝΤΟΧΗΣ.....	30
3.3 ΣΤΕΝΩΣΗ.....	32
3.4 ΑΠΟΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗΝ ΕΝΕΡΓΕΙΑ.....	33
3.4.1 Απομειώσεις αντοχής και δυσκαμψίας .....	35
3.4.2 Στένωση .....	37
3.4.3 Υστερητική ενέργεια.....	40
<b>4. ΤΟ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ.....</b>	<b>43</b>
4.1 ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ .....	44
4.2 ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.....	46
4.3 ΒΑΣΙΚΗ ΣΧΕΣΗ ΕΠΙΛΥΣΗΣ .....	49
4.4 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΣΕ ΚΑΘΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ.....	50
4.5 ΕΞΕΛΙΚΤΙΚΕΣ ΕΙΣΩΣΕΙΣ.....	51
4.6 ΕΙΣΩΣΗ ΚΙΝΗΣΗΣ .....	53
4.7 ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ.....	54
4.8 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΥΣΤΕΡΗΤΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ .....	56
<b>5. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΑΝΑΛΥΣΕΙΣ .....</b>	<b>59</b>
5.1 ΚΟCΑΕΛΙ DУZCE 270 .....	61
5.2 RINALDI RSS 228 .....	63
5.3 TARZANA 090 .....	65
5.4 ΚΟΒΕ ΤΑΚΑΤΟΡΙ 090.....	67

5.5	ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΜΕ ΑΠΟΜΕΙΩΣΕΙΣ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ ΚΑΙ ΑΝΤΟΧΗΣ .....	69
5.5.1	Kocaeli Duzce 270 .....	69
5.5.2	Rinaldi Rss 228.....	69
5.5.3	Tarzana 090 .....	70
5.5.4	Kobe Takatori 090.....	70
5.6	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	71
5.6	ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΤΗΣ ΣΤΕΝΩΣΗΣ.....	72
<b>6.</b>	<b>ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΥΩΡΟΦΟΥ ΚΤΗΡΙΟΥ .....</b>	<b>75</b>
6.1	ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ, ΔΙΑΤΟΜΕΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ .....	76
6.2	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ .....	77
6.3	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΜΕ ΑΠΟΜΕΙΩΣΕΙΣ .....	79
6.4	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΜΕ ΚΡΑΤΥΝΣΗ.....	81
6.5	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	82
<b>7.</b>	<b>ΣΥΝΟΨΗ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.....</b>	<b>83</b>
7.1	ΜΟΝΤΕΛΟ BOUC-WEN ΚΑΙ SIVASELVAN-REINHORN .....	84
7.2	ΑΠΟΜΕΙΩΣΕΙΣ .....	84
7.3	ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΔΟΚΟΥ .....	85
7.3	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	85
7.3	ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ .....	86
	<b>Βιβλιογραφικές αναφορές.....</b>	<b>89</b>

**ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΣΧΗΜΑΤΩΝ**

<u>Σχήμα 1.1</u>	Παράδειγμα πολυγραμμικού προσομοιώματος (Q-hyst).....	3
<u>Σχήμα 1.2</u>	Παράδειγμα ομαλού υστερητικού προσομοιώματος (Foliente 1995).....	4
<u>Σχήμα 1.3</u>	Παράδειγμα πειραματικών αποτελεσμάτων σε μέλος από ωπλισμένο σκυρόδεμα .....	5
<u>Σχήμα 2.1</u>	Μοντέλο Bouc – Wen εκφρασμένο ως προς τις ροπές - καμπυλότητες.....	11
<u>Σχήμα 2.2</u>	Διάταξη ελατηρίων του μοντέλου των Sivaselvan - Reinhorn.....	14
<u>Σχήμα 2.3</u>	Απόκριση για διάφορες τιμές του N για ημιτονική φόρτιση.....	17
<u>Σχήμα 2.4</u>	Επιρροή των συντελεστών $\eta_1$ και $\eta_2$ .....	18
<u>Σχήμα 2.5</u>	Απόκριση με ασύμμετρη ροπή διαρροής.....	21
<u>Σχήμα 2.6</u>	Παραβίαση του Αξιώματος του Drucker .....	22
<u>Σχήμα 2.7</u>	Παραβίαση του Αξιώματος του Ilyushin .....	22
<u>Σχήμα 3.1</u>	Απεικόνιση της Λειτουργίας του Σημείου Περιστροφής (Pivot Rule).....	27
<u>Σχήμα 3.2</u>	Ημιτονική Φόρτιση.....	28
<u>Σχήμα 3.3</u>	Παράδειγμα βρόχων με Απομείωση Δυσκαμψίας.....	28
<u>Σχήμα 3.4</u>	Παράδειγμα βρόχων με Απομείωση Αντοχής.....	32
<u>Σχήμα 3.5</u>	Παράδειγμα βρόχων με απομείωση δυσκαμψίας για διάφορες τιμές του $c_n$ .....	36
<u>Σχήμα 3.6</u>	Παράδειγμα βρόχων με απομείωση αντοχής για διάφορες τιμές του $c_n$ .....	36
<u>Σχήμα 3.7</u>	Παράδειγμα βρόχων με στένωση.....	38
<u>Σχήμα 3.8</u>	Παράδειγμα βρόχων με στένωση για διάφορες τιμές της παραμέτρου $\zeta_{1,0}$ .....	38
<u>Σχήμα 3.9</u>	Παράδειγμα βρόχων με στένωση για διάφορες τιμές των παραμέτρων $\psi_0$ και $\delta\psi$ .....	39
<u>Σχήμα 3.10</u>	Παράδειγμα βρόχων με στένωση για διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda$ .....	39
<u>Σχήμα 3.11</u>	Παράδειγμα βρόχων με στένωση και απομείωση της δυσκαμψίας και της αντοχής.....	40
<u>Σχήμα 3.12</u>	Υπολογισμός υστερητικής πυκνότητας ενέργειας.....	41
<u>Σχήμα 4.1</u>	Στοιχείο δοκού .....	44
<u>Σχήμα 5.1</u>	Τυπικό πλαίσιο.....	60
<u>Σχήμα 5.1.1</u>	Χρονοϊστορία σεισμικής διέγερσης (KOCAELI DUZCE 270) .....	61
<u>Σχήμα 5.1.2</u>	Χρονοϊστορία Μετατόπισης κόμβου 2 (KOCAELI DUZCE 270) .....	61
<u>Σχήμα 5.1.3</u>	Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων Κόμβου 1 (KOCAELI DUZCE 270).....	62
<u>Σχήμα 5.1.4</u>	Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων Κόμβου 2 (KOCAELI DUZCE 270).....	62
<u>Σχήμα 5.2.1</u>	Χρονοϊστορία σεισμικής διέγερσης (RINALDI RSS 228) .....	63
<u>Σχήμα 5.2.2</u>	Χρονοϊστορία Μετατόπισης κόμβου 2 (RINALDI RSS 228) .....	63
<u>Σχήμα 5.2.3</u>	Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων Κόμβου 1 (RINALDI RSS 228).....	64
<u>Σχήμα 5.2.4</u>	Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων Κόμβου 2 (RINALDI RSS 228).....	64
<u>Σχήμα 5.3.1</u>	Χρονοϊστορία σεισμικής διέγερσης (TARZANA 090) .....	65
<u>Σχήμα 5.3.2</u>	Χρονοϊστορία Μετατόπισης κόμβου 2 (TARZANA 090) .....	65
<u>Σχήμα 5.3.3</u>	Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων Κόμβου 1 (TARZANA 090).....	66

<u>Σχήμα 5.3.4</u> Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων Κόμβου 2 (TARZANA 090).....	66
<u>Σχήμα 5.4.1</u> Χρονοϊστορία σεισμικής διέγερσης (KOBE TAKATORI 090) .....	67
<u>Σχήμα 5.4.2</u> Χρονοϊστορία Μετατόπισης κόμβου 2 (KOBE TAKATORI 090).....	67
<u>Σχήμα 5.4.3</u> Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων Κόμβου 1 (KOBE TAKATORI 090).....	68
<u>Σχήμα 5.4.4</u> Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων Κόμβου 2 (KOBE TAKATORI 090).....	68
<u>Σχήμα 5.5.1</u> Απόκριση πριν και μετά τις απομειώσεις για το σεισμό Koaceli Duzce 270 .....	69
<u>Σχήμα 5.5.2</u> Απόκριση πριν και μετά τις απομειώσεις για το σεισμό Rinaldi Rss 228.....	69
<u>Σχήμα 5.5.3</u> Απόκριση πριν και μετά τις απομειώσεις για το σεισμό Tarzana 090 .....	70
<u>Σχήμα 5.5.4</u> Απόκριση πριν και μετά τις απομειώσεις για το σεισμό Kobe Takatori 090.....	70
<u>Σχήμα 5.6</u> Περιβάλλοντες διαγραμμάτων ροπών καμπυλοτήτων για τα σχήματα 5.5.1 έως 5.5.4.....	71
<u>Σχήμα 5.7</u> Απόκριση μετά την εφαρμογή της στένωσης για το σεισμό RinaldiRss228 και τη διατομή 1..	72
<u>Σχήμα 5.8</u> Απόκριση πριν και μετά την εφαρμογή της στένωσης για το σεισμό Rinaldi Rss 228 και τη διατομή 1 .....	73
<u>Σχήμα 5.9</u> Μετακίνηση κορυφής πριν και μετά την εφαρμογή της στένωσης για το σεισμό Rinaldi Rss 228.....	73
<u>Σχήμα 6.1</u> Τυπικό πλαίσιο του νοσοκομείου Woodland Hills στην California .....	76
<u>Σχήμα 6.2</u> Επιταχυνσιογράφημα σεισμού El Centro .....	77
<u>Σχήμα 6.3</u> Μετακίνηση κορυφής (El Centro).....	78
<u>Σχήμα 6.4</u> Διάγραμμα ροπών καμπυλοτήτων για τον κόμβο i του μέλους 25 (El Centro).....	78
<u>Σχήμα 6.5</u> Διάγραμμα ροπών καμπυλοτήτων για τον κόμβο i του μέλους 2 (El Centro).....	79
<u>Σχήμα 6.6</u> Διαγράμματα ροπών καμπυλοτήτων για τον κόμβο i του μέλους 2 πριν και μετά τις απομειώσεις (El Centro).....	79
<u>Σχήμα 6.7</u> Διαγράμματα ροπών καμπυλοτήτων για τον κόμβο i του μέλους 25 πριν και μετά τις απομειώσεις (El Centro).....	80
<u>Σχήμα 6.8</u> Διαχεόμενη ενέργεια για τον κόμβο i του μέλους 25 πριν και μετά τις απομειώσεις (El Centro) .....	80
<u>Σχήμα 6.9</u> Διαγράμματα ροπών καμπυλοτήτων για τον κόμβο i του μέλους 2 με κράτυνση και απομειώσεις (El Centro).....	81
<u>Σχήμα 6.10</u> Διαγράμματα ροπών καμπυλοτήτων για τον κόμβο i του μέλους 25 με κράτυνση και απομειώσεις (El Centro).....	81

# 1

---

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

## 1.1 ΓΕΝΙΚΑ

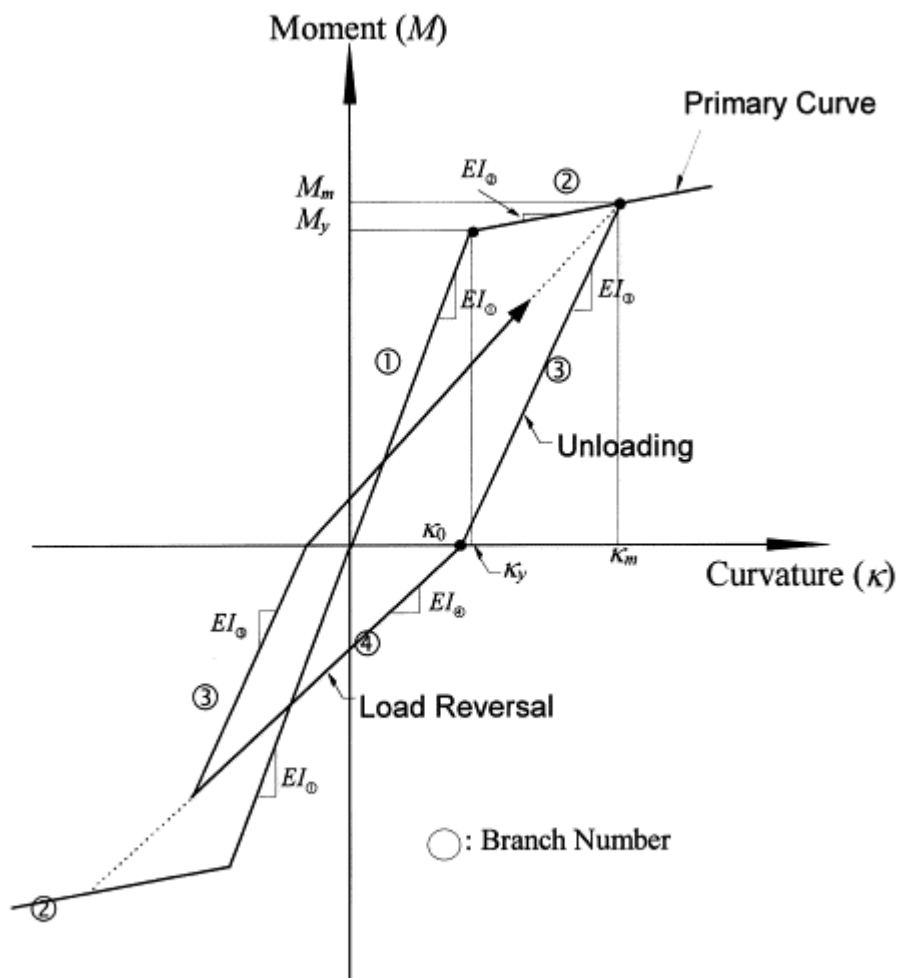
Υστέρηση ορίζεται η εξάρτηση ενός συστήματος όχι μόνο από την τρέχουσα κατάσταση του αλλά και από την ιστορία των καταστάσεων στις οποίες έχει βρεθεί. Είναι ένα φαινόμενο εντόνως μη γραμμικό και ανεξάρτητο του ρυθμού επιβολής της διέγερσης, το οποίο διέπει τη συμπεριφορά συστημάτων που διαθέτουν "μνήμη". Η υστέρηση απαντάται σε πολλά φυσικά φαινόμενα όπως η τριβή, ο ηλεκτρισμός, και ο μαγνητισμός. Επίσης η έννοια της υστέρησης απαντάται και σε άλλα επιστημονικά πεδία όπως της Βιολογίας της Χημείας καθώς και της Μηχανικής. Όσον αφορά την επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού, κατασκευές που συμπεριφέρονται ελαστοπλαστικά, υπό δυναμική ή ανακυκλιζόμενη φόρτιση παρουσιάζουν έντονα το φαινόμενο της υστέρησης.

Για πολλά χρόνια στο σχεδιασμό των κατασκευών επικρατούσε η ελαστική ανάλυση. Τα πλεονεκτήματά της είναι η απλότητά της καθώς και ο μικρός υπολογιστικός φόρτος που απαιτείται για την επίλυση. Βασικό μειονέκτημά της όμως είναι ότι δεν προσεγγίζει την πραγματική συμπεριφορά των φορέων με συνέπεια την υπερδιαστασιολόγηση των διατομών. Η εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών όμως έδωσε τη δυνατότητα στον Μελετητή Μηχανικό να μπορεί να επιλύσει πολύπλοκα προσομοιώματα σε μικρότερο χρόνο καθώς και να είναι σε θέση να διαχειριστεί μεγάλο όγκο αποτελεσμάτων. Έτσι άρχισαν να αναπτύσσονται προσομοιώματα τα οποία προσεγγίζουν μεν σε μακροσκοπικό επίπεδο τη συμπεριφορά των κατασκευών, δίνουν δε αποτελέσματα με ικανοποιητική ακρίβεια όσον αφορά τις αποκρίσεις τους.

Τα τελευταία χρόνια έχει συντελεστεί μεγάλη πρόοδος στην προσέγγιση και μοντελοποίηση του φαινομένου της υστέρησης. Έχουν αναπτυχθεί διάφορα υστερητικά μοντέλα τα οποία διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες, τα πολυγραμμικά (polygonal hysteretic models - PHM) και τα ομαλά (smooth hysteretic models - SHM).

Τα πολυγραμμικά προσομοιώματα θεωρούν πολυγραμμική συμπεριφορά των υλικών και προηγήθηκαν χρονικά των ομαλών. Σε αυτά η συμπεριφορά του υλικού χωρίζεται σε κατά τμήματα γραμμικά στάδια, που συνήθως είναι η αρχική ελαστική περιοχή, η διαρροή, η

ρηγμάτωση, η μείωση της δυσκαμψίας και της αντοχής και το κλείσιμο των ρωγμών. Παραδείγματα αποτελούν τα μοντέλα των Clough(1966), Takeda (Takeda et al. 1970), Park (Park et al. 1987), Costa & Costa (1987), Roufaiel & Meyer (1987), Coelho & Carvalho (1990) και το προσομοίωμα Q-hyst (Saiidi M. and Sozen M. 1979) [12]. Ένα παράδειγμα πολυγραμμικού υστερητικού προσομοιώματος παρουσιάζεται στο σχήμα 1.1 και πιο συγκεκριμένα το προσομοίωμα Q-hyst.

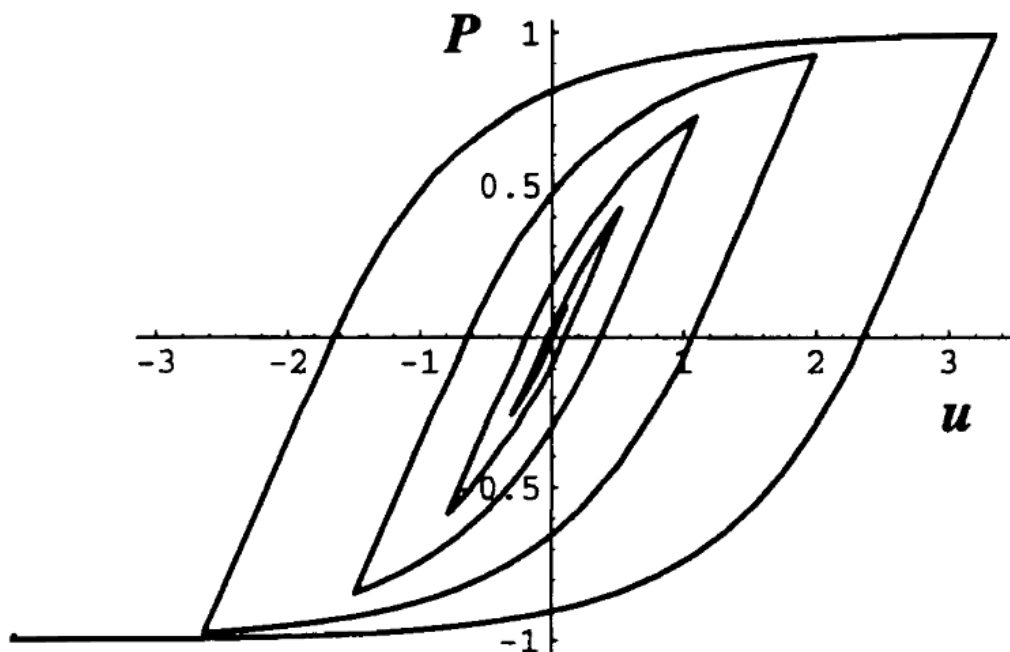


Σχ. 1.1 Παράδειγμα πολυγραμμικού προσομοιώματος (Q-hyst) [11]

Αντίθετα τα ομαλά υστερητικά προσομοιώματα βασίζονται στη συνεχόμενη αλλαγή της δυσκαμψίας εξαιτίας της διαρροής και σε έντονες αλλαγές εξαιτίας της αποφόρτισης. Αυτά τα προσομοιώματα έχουν τη δυνατότητα προσομοίωσης διαφορετικών τύπων υστερητικής συμπεριφοράς χρησιμοποιώντας μία απλή ομαλή υστερητική συνάρτηση με ένα σύνολο

παραμέτρων που καθορίζονται από το χρήστη. Μετά τον Massing (1925) και τον Preisac (1935) ο Bouc (1967) παρουσίασε το δικό του μοντέλο για μονοβάθμιο υστερητικό σύστημα.

Το μοντέλο του Bouc είναι και αυτό που έγινε ευρύτατα γνωστό εξαιτίας της δυνατότητάς του να προσομοιάσει ένα μεγάλο πλήθος υστερητικών συμπεριφορών σε διάφορα επιστημονικά ερευνητικά παιδιά. Η ευελιξία του αυτή και η ευκολία του στη προσομοίωση του μαθηματικά δύσκολου φαινομένου της υστέρησης συντέλεσαν στη χρησιμοποίησή του σε μεγάλη ποικιλία προβλημάτων μηχανικού, όπως σε πλαισιωτές πολυώροφες κατασκευές, σε πολυβάθμια συστήματα, σε μοντέλα εδαφικής ρευστοποίησης καθώς και σε συστήματα σεισμικής μόνωσης. Μεταγενέστερα έγιναν αρκετές τροποποιήσεις όπως η γενίκευσή του από τον Wen το 1976, το προσομοίωμα Baber - Noori (1985), το προσομοίωμα Baber – Wen (1981), το προσομοίωμα Foliente (1995) καθώς και αυτό των Sivaselvan και Reinhorn (2000) (για το οποίο γίνεται εκτενέστερη αναφορά σε επόμενο κεφάλαιο).

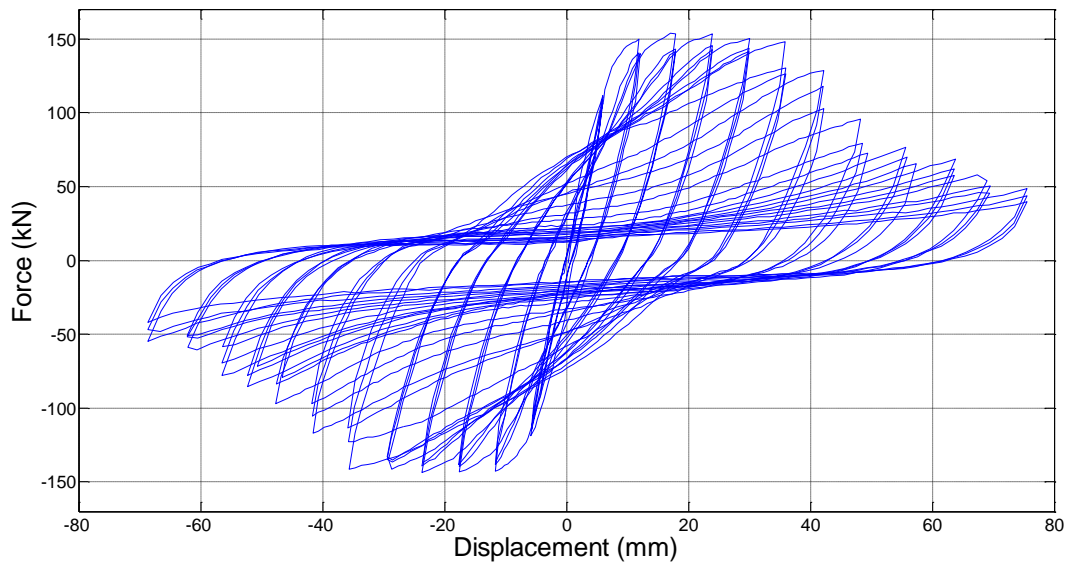


Σχ. 1.2 Παράδειγμα ομαλού υστερητικού προσομοιώματος (Foliente 1993) [14]

Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφέρουμε ότι τα προσομοιώματα τύπου Bouc-Wen αντιμετωπίζουν φαινομενολογικά το φαινόμενο της υστέρησης. Αυτό σημαίνει ότι δεν λαμβάνουν υπόψη τους μηχανισμούς που δημιουργούν την υστέρηση σε μικροσκοπικό επίπεδο



αλλά αντίθετα δίνουν έμφαση στα μακροσκοπικά αποτελέσματα. Γι αυτό και η προσομοίωση και η επιλογή των παραμέτρων του μοντέλου γίνεται έτσι ώστε η απόκριση που προκύπτει από την ανάλυση να πλησιάζει αυτή των πειραματικών δεδομένων μέσα από μία επαναληπτική διαδικασία.



Σχ. 1.3 Παράδειγμα πειραματικών αποτελεσμάτων σε μέλος από ωπλισμένο σκυρόδεμα [13]

## 1.2 ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η παρουσίαση των προσομοιωμάτων υστερητικών συστημάτων τύπου Bouc – Wen, η ενσωμάτωσή τους στο πεπερασμένο στοιχείο δοκού και η εφαρμογή των απομειώσεων αντοχής και δυσκαμψίας καθώς και του φαινομένου της στένωσης. Έτσι εξάγονται συμπεράσματα όσον αφορά την παραγόμενη απόκριση των υστερητικών μοντέλων υπό δυναμική φόρτιση. Οι εξισώσεις που περιγράφουν την συμπεριφορά συστημάτων με υστέρηση προγραμματίστηκαν σε γλώσσα προγραμματισμού Matlab. Τα μητρώα που χρειάζονται για την επίλυση μορφώνονται με βάση τη μέθοδο άμεσης ακαμψίας. Ο προγραμματισμός έγινε με βάση και τη θεωρία του πεπερασμένου στοιχείου δοκού η οποία επεξηγείται στο Κεφάλαιο 4. Έτσι ενσωματώθηκαν οι υστερητικές εξισώσεις στη θεωρία των Πεπερασμένων Στοιχείων.

### 1.3 ΔΟΜΗ ΚΑΙ ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Η παρούσα διπλωματική περιλαμβάνει επτά Κεφάλαια συμπεριλαμβανομένου του παρόντος εισαγωγικού **Κεφαλαίου 1**.

Στο **2<sup>ο</sup> Κεφάλαιο** παρουσιάζονται τα προσομοιώματα των Bouc Wen και Sivaselvan Reinhorn. Γίνεται αναφορά στο θεωρητικό υπόβαθρο καθώς και στη μαθηματική διατύπωση των δύο προσομοιωμάτων. Αναλύονται οι παράμετροι των μοντέλων και παρατίθενται οι αποκρίσεις που προκύπτουν για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων έτσι ώστε να γίνει κατανοητή η επιρροή τους. Επιπρόσθετα παρουσιάζεται η αντιστοίχιση μεταξύ των δύο αυτών μοντέλων καθώς και η περίπτωση υστέρησης με ασύμμετρη ροπή διαρροής.

Στο **3<sup>ο</sup> Κεφάλαιο** παρουσιάζονται οι εξισώσεις που περιγράφουν τα φαινόμενα της απομείωσης της δυσκαμψίας και της αντοχής καθώς και το φαινόμενο της στένωσης με βάση τη θεώρηση των Sivaselvan Reinhorn αλλά και με βάση την διαχεόμενη ενέργεια. Αναλύονται οι διάφορες παράμετροι και πως αυτές επηρεάζουν τη μορφή των υστερητικών βρόχων που προκύπτουν. Οι εξισώσεις αυτές προγραμματίστηκαν σε γλώσσα προγραμματισμού Matlab και ενσωματώθηκαν στη θεωρία του πεπερασμένου στοιχείου που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 4.

Στο **4<sup>ο</sup> Κεφάλαιο** αναπτύσσεται το προτεινόμενο πεπερασμένο στοιχείο δοκού το οποίο είναι κατάλληλο για τη δυναμική ανάλυση των κατασκευών. Εισάγονται νέοι υστερητικοί βαθμοί ελευθερίας οι οποίοι υπόκεινται στις εξελκτικές εξισώσεις τύπου Bouc-Wen. Αυτοί οι νέοι βαθμοί ελευθερίας θεωρούνται ως υστερητικές καμπυλότητες και υστερητικές κεντρικές αξονικές παραμορφώσεις. Παρουσιάζονται οι εξισώσεις που διέπουν το πεπερασμένο στοιχείο και η συνολική διαδικασία επίλυσης με το μετασχηματισμό των εξισώσεων σε μορφή χώρου κατάστασης (state space form). Τέλος δίνονται οι εξισώσεις που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό της διαχεόμενης ενέργειας.

Στο **5<sup>ο</sup> Κεφάλαιο** παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των δυναμικών αναλύσεων που έγιναν σε ένα τυπικό μονώροφο δίστηλο πλαίσιο. Αυτό αποτελείται από διατομές υποστυλωμάτων HEB220 και διατομή ζυγώματος IPE300. Το πλαίσιο υποβλήθηκε σε 4 διαφορετικούς σεισμούς

και πιο συγκεκριμένα στους Kocaeli Duzce 270, Rinaldi Rss 228, Tarzana 090 και Kobe Takatori 090. Με τη παρουσίαση των αποτελεσμάτων γίνεται κατανοητή η συμπεριφορά του μοντέλου και συγκρίνονται οι αποκρίσεις πριν και μετά την εφαρμογή των απομειώσεων. Έτσι εξάγονται συμπεράσματα σχετικά με την ανάγκη εφαρμογής ή όχι του μοντέλου με απομειώσεις κατά τη διαδικασία σχεδιασμού.

Στο **6<sup>ο</sup> Κεφάλαιο** ακολουθεί η δυναμική ανάλυση ενός πολυώροφου κτηρίου και πιο συγκεκριμένα του νοσοκομείου Woodland Hills Hospital στην California το οποίο αποτελείται από χαλύβδινα μέλη. Το κτήριο υποβλήθηκε στο σεισμό El Centro και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα απόκρισης χαρακτηριστικών διατομών, υποστυλώματος και δοκαριού με τη θεώρηση διγραμμικού διαγράμματος ροπών καμπυλοτήτων καθώς και η μετακίνηση της κορυφής του κτηρίου. Επίσης παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης με τα φαινόμενα της απομείωσης δυσκαμψίας και αντοχής να έχουν ληφθεί υπόψη καθώς και η σύγκριση της διαχεόμενης ενέργειας πριν και μετά την εφαρμογή των μειώσεων. Τέλος δίνονται και οι αποκρίσεις που προκύπτουν αν θεωρήσουμε το υλικό με κράτυνση.

Τέλος στο **7<sup>ο</sup> Κεφάλαιο** γίνεται μια ανακεφαλαίωση των όσων προηγήθηκαν, συνοψίζονται τα συμπεράσματα της διπλωματικής και γίνονται προτάσεις για περαιτέρω έρευνα.



# 2

---

## ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑΤΑ ΤΥΠΟΥ BOUC-WEN

## 2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑ BOUC-WEN

Το μοντέλο αυτό προτάθηκε αρχικά από τον Bouc, το 1971 και κατόπιν γενικεύτηκε από τον Wen [4]. Από τότε το μοντέλο είναι γνωστό ως Bouc-Wen. Αποτελείται από μία μη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης και από παραμέτρους που δίνονται από το χρήστη και έχει χρησιμοποιηθεί ευρύτατα για να περιγράψει συστήματα με υστερητική συμπεριφορά

Η διατύπωση του προσομοιώματος που παρουσίασε ο Wen έχει ορισμένες τροποποιήσεις ως προς αυτό του Bouc και παρουσιάζεται ως εξής:

$$\begin{cases} m\ddot{u} + w = p \\ w = c\dot{u} + \alpha K_0 u + z \\ \dot{z} = K\dot{u} \\ K = K(z, \text{sgn}(du)) = (1-a) K_0 [A - |z|^n (\gamma + \beta \text{sgn}(zdu))] \end{cases} \quad (2.1)$$

όπου το  $a$  ορίζεται ως:

$$a = \frac{K_{pl}}{K_{el}} \quad (2.2)$$

είναι δηλαδή το πηλίκο της μετελαστικής προς την ελαστική δυσκαμψία. Παρατηρούμε την εισαγωγή στην εξίσωση κίνησης της μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης  $\dot{z} = K\dot{u}$ . Η  $z$  είναι η υστερητική παράμετρος και  $\dot{z}$  είναι η παράγωγος της  $z$  ως προς το χρόνο η οποία σχετίζεται με τη παράγωγο των μετατοπίσεων ως προς το χρόνο με ένα μη γραμμικό συντελεστή. Οι παράμετροι  $A$  και  $K_0$  αποτελούν πλεονασμό, όπως παρουσιάστηκε από τους Ma et al [3] και εξηγούνται στη συνέχεια.

Αν θεωρήσουμε ένα μονοβάθμιο σύστημα η δύναμη επαναφοράς του είναι:

$$F(t) = a \frac{F_y}{u_y} u(t) + (1-a) F_y z(t) \quad (2.3)$$

όπου:

- $F_y$ , η δύναμη διαρροής του συστήματος
- $u_y$ , η παραμόρφωση διαρροής
- $z(t)$ , η υστερητική παράμετρος
- $a$  ο λόγος της μετελαστικής προς την ελαστική δυσκαμψία

Παρατηρούμε ότι η δύναμη επαναφοράς είναι το άθροισμα μίας γραμμικώς ελαστικής και μίας υστερητικής δύναμης  $F^{el}$  και  $F^h$  αντίστοιχα:

$$F^{el}(t) = \alpha \frac{F_y}{u_y} u(t) \quad (2.4)$$

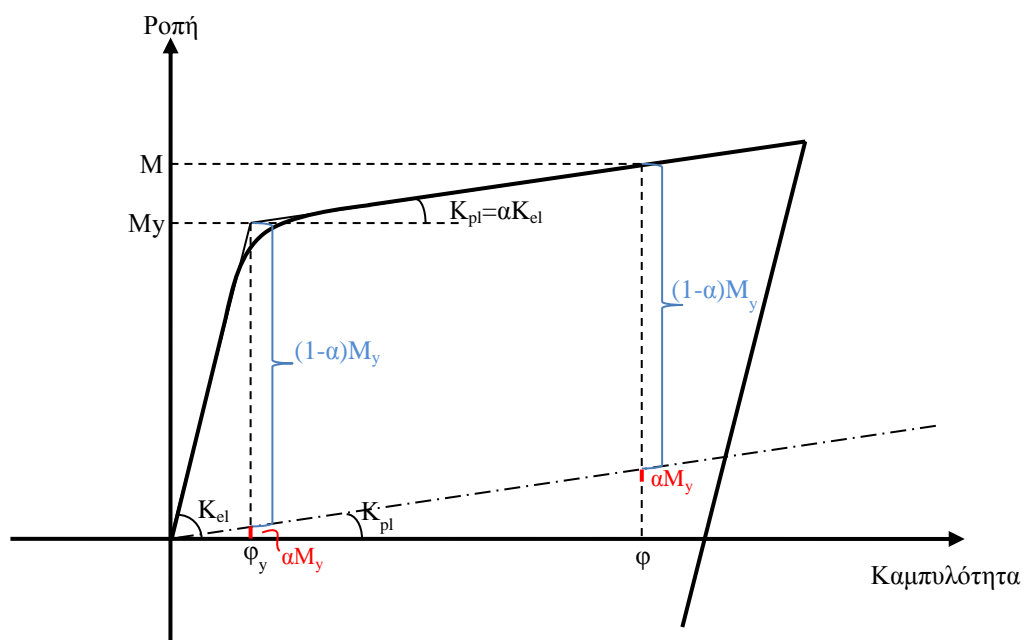
$$F^h(t) = (1-\alpha) F_y z(t)$$

Το σύστημα επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αναπαρίσταται από δύο ελατήρια συνδεδεμένα παράλληλα με αρχικές δυσκαμψίες:

- $\alpha k_{el} = \alpha \frac{F_y}{u_y}$  , για το γραμμικώς ελαστικό ελατήριο
- $(1-\alpha) k_{el}$  για το υστερητικό ελατήριο

Αντίστοιχα με βάση τις ροπές για ένα μονοβάθμιο σύστημα (μία διατομή) μπορεί να γραφτεί:

$$M(t) = M_y \left[ \alpha \frac{\varphi(t)}{\varphi_y} + (1-\alpha) z(t) \right] = \alpha EI \varphi(t) + (1-\alpha) EI z(t) \quad (2.5)$$



Σχ. 2.1 Μοντέλο Bouc – Wen εκφρασμένο ως προς τις ροπές - καμυλότητες

Η υστερητική παράμετρος  $z$  πρέπει να ικανοποιεί την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$\dot{z}(t) = \frac{1}{u_y} \left[ A - |z(t)|^n \left( \beta \operatorname{sgn} \left( \dot{u}(t) z(t) \right) + \gamma \right) \right] \dot{u}(t) \quad (2.6)$$

όπου:

- $A, \beta, \gamma$  παράμετροι που καθορίζουν τη μορφή και το μέγεθος του βρόχου υστέρησης,
- $u_y$ , η παραμόρφωση διαρροής,
- $u(t)$  η παραμόρφωση,
- $n$  παράμετρος που καθορίζει τη μετάβαση από τον ελαστικό στο μετελαστικό κλάδο,
- $F_y$ , η δύναμη διαρροής του συστήματος

Οι Ma et al [3] απέδειξαν ότι μία από τις παραμέτρους είναι περιττή και μέσω μια κατάλληλης μετατροπής μπορεί να αποκλειστεί από το προσομοίωμα. Αυτό το διαπίστωσαν μέσα από πειράματα όπου μετέβαλλαν κάθε φορά την τιμή σε μία από τις μεταβλητές του προσομοιώματος, κρατώντας τις υπόλοιπες σταθερές. Έτσι με βάση τη μελέτη τους η παράμετρος  $A$  θεωρείται ως η λιγότερο ευαίσθητη μεταβλητή και τίθεται ίση με τη μονάδα. Για να αποδειχθεί ο παραπάνω ισχυρισμός θεωρούμε τα παρακάτω:

Γνωρίζουμε ότι ισχύει βάσει της εξίσωσης (2.5) και αν θέσουμε  $t = 0$ :

$$\left. \frac{dz}{du} \right|_{t=0} = \frac{A}{u_y} \quad (2.7)$$

Επίσης προκύπτει από την εξίσωση (2.3):

$$\frac{dF}{du} = \alpha \frac{dF_y}{u_y} + (1-\alpha) F_y \frac{dz}{du} \quad (2.8)$$

Από τις εξισώσεις (2.7), (2.8) έχουμε:

$$\left. \frac{dF}{du} \right|_{t=0} = k_i^* = \alpha \frac{F_y}{u_y} + (1-\alpha) \frac{F_y}{u_y} A \quad (2.9)$$



Επομένως η αρχική δυσκαμψία του συστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$k_i^* = \alpha \frac{F_y}{u_y} + (1-\alpha) \frac{F_y}{u_y} A \quad (2.10)$$

Από τη σχέση (2.10) είναι φανερό ότι η αρχική δυσκαμψία του συστήματος γίνεται ίση με τη «φυσικώς» εννοούμενη αρχική δυσκαμψία  $k_i = F_y / u_y$  όταν και μόνο όταν ισχύει:

$$\frac{k_i}{u_y} = \alpha \frac{F_y}{u_y} + (1-\alpha) \frac{F_y}{u_y} A \Leftrightarrow A = 1 \quad (2.11)$$

Δηλαδή όταν:

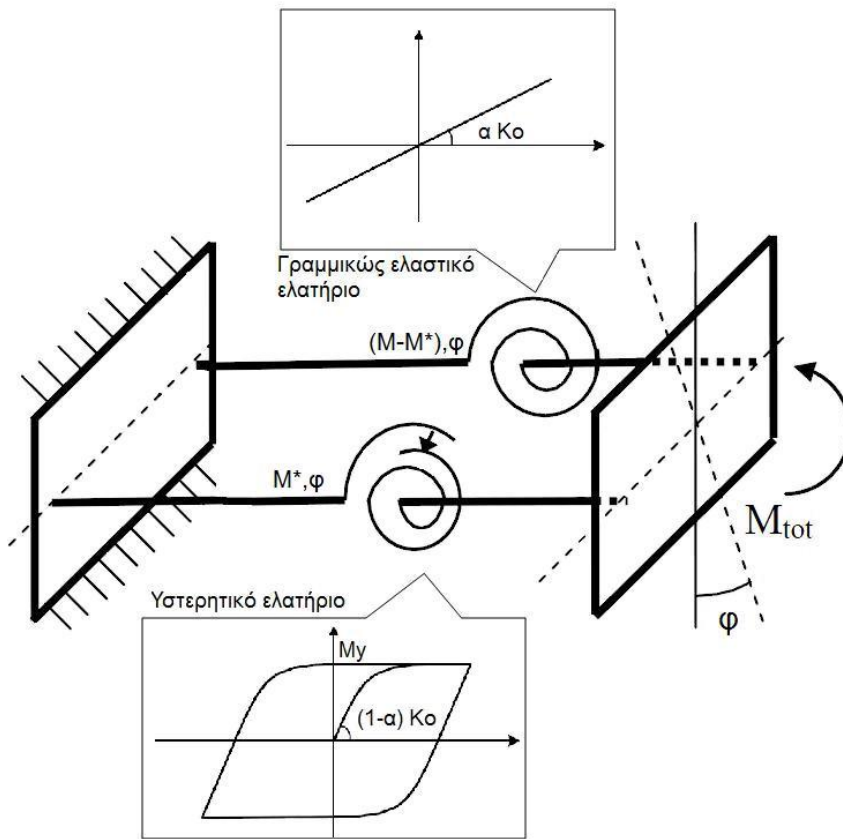
$$A = 1 \quad (2.12)$$

Οι παράμετροι  $\beta$  και  $\gamma$  επηρεάζουν τη μορφή του βρόχου. Στην ειδική περίπτωση που  $\beta = \gamma = 0.5$  τότε οι κλάδοι αποφόρτισης είναι ευθείες γραμμές. Έχει αποδειχθεί ότι για τις παραμέτρους  $\beta$ ,  $\gamma$  πρέπει να ισχύει:  $\beta + \gamma = 1$  το οποίο εξηγείται και στη συνέχεια στο προσομοίωμα των Sivaselvan – Reinhorn. Επίσης για λόγους θερμοδυναμικής φύσεως πρέπει να ισχύει:  $\gamma \geq \beta$ .

Τέλος ο συντελεστής  $n$  ελέγχει τη μετάβαση από τον ελαστικό στο μετελαστικό κλάδο. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του τόσο περισσότερο η συμπεριφορά τείνει στη διγραμμική

## 2.2 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑ SIVASELVAN – REINHORN

Οι Sivaselvan και Reinhorn πρότειναν ένα νέο ομαλό υστερητικό προσομοίωμα το οποίο λαμβάνει υπόψη τα φαινόμενα της μείωσης της δυσκαμψίας, της μείωσης της αντοχής καθώς και το φαινόμενο της στένωσης [1],[27]. Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό η υστερητική συμπεριφορά ενός συστήματος μπορεί να προσομοιωθεί με τη χρήση δύο ελατηρίων τα οποία είναι συνδεδεμένα παράλληλα. Το ένα συμπεριφέρεται γραμμικά ελαστικά καθ' όλη τη διάρκεια της φόρτισης ενώ το δεύτερο είναι υστερητικό και παρουσιάζει ομαλή μετάβαση από τον ελαστικό στον μετελαστικό κλάδο (Σχ.2.2). Τα δύο ελατήρια υφίστανται την ίδια παραμόρφωση υπό την επίδραση καμπτικής (ή οποιασδήποτε γενικά) έντασης. Επιπλέον η ένταση αυτή κατανέμεται στα δύο ελατήρια ανάλογα με τη στιγμιαία δυσκαμψία τους [26].



Σχ. 2.2 Διάταξη ελατηρίων του μοντέλου των Sivaselvan – Reinhorn [7]

Για το πρώτο ελατήριο, το οποίο συμπεριφέρεται γραμμικά ελαστικά όπως ειπώθηκε, η (σταθερή) δυσκαμψία του ισούται με τη μετελαστική δυσκαμψία του συστήματος και δίνεται από τη σχέση:

$$K_1 = aK_0 \quad (2.13)$$

όπου:

- $a$  είναι ο λόγος της μετελαστικής δυσκαμψίας προς την ελαστική αρχική δυσκαμψία
- $K_0$  είναι η αρχική ελαστική δυσκαμψία

Για το δεύτερο υστερητικό ελατήριο η δυσκαμψία του δίνεται από τη σχέση:

$$K_2 = (1-a)K_0 \left\{ 1 - \left| \frac{M^*}{M_y} \right|^N (\eta_1 \operatorname{sgn}(M^* \dot{\varphi}) + \eta_2) \right\} \quad (2.14)$$

όπου:

- $M^*$  η ροπή που αναλαμβάνει το υστερητικό ελατήριο
- $M_y^*$  η ροπή διαρροής του υστερητικού ελατηρίου. Ισχύει  $M_y^* = (1-a)M_y$
- $N$  θετική παράμετρος που ελέγχει τη μετάβαση από τον ελαστικό στον μετελαστικό κλάδο
- $\eta_1$  και  $\eta_2$  παράμετροι που ελέγχουν το σχήμα των υστερητικών βρόγχων
- $\text{sgn}$  (signum function) είναι συνάρτηση που ορίζεται ως:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{αν } x < 0, \\ 0 & \text{αν } x = 0, \\ 1 & \text{αν } x > 0. \end{cases}$$

Συνεπώς, η ολική δυσκαμψία του συστήματος (Σχ. 2.2) είναι (αφού τα δύο ελατήρια είναι συνδεδεμένα παράλληλα):

$$K = K_1 + K_2 \quad (2.15)$$

και έτσι το μοντέλο εκφράζεται από την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$\dot{M} = \dot{M}_1 + \dot{M}_2 = aK_0\dot{\phi}(t) + (1-\alpha)K_0 \left\{ 1 - \left| \frac{M^*}{M_y^*} \right|^N (\eta_1 \text{sgn}(M^* \dot{\phi}) + \eta_2) \right\} \dot{\phi}(t) \quad (2.16)$$

Το μοντέλο είναι παρόμοιο με αυτό που προτάθηκε από τους Bouc και Wen, αλλά ο βαθμός διαρροής του υστερητικού ελατηρίου εκφράζεται ως συνάρτηση του λόγου της ροπής προς τη ροπή διαρροής του τελευταίου. Η αντιστοίχιση μεταξύ των δύο μοντέλων φαίνεται πιο κάτω:

Sivaselvan-Reinhorn	$\dot{M}^* = (1-\alpha)K_0 \left\{ 1 - \left  \frac{M^*}{M_y^*} \right ^N (\eta_1 \text{sgn}(M^* \dot{\phi}) + \eta_2) \right\} \dot{\phi}$
Bouc-Wen	$\dot{z} = \left\{ 1 - \left  \frac{z}{z_y} \right ^n (\gamma \text{sgn}(z\dot{\phi}) + \beta) \right\} \dot{\phi}$

Πίνακας 2.1 Αντιστοίχιση μοντέλων Bouc-Wen και Sivaselvan-Reinhorn

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές  $\eta_1$  και  $\eta_2$  του προσομοιώματος των Sivaselvan-Reinhorn αντιστοιχούν στους συντελεστές  $\beta$  και  $\gamma$  του προσομοιώματος του Bouc και Wen. Επίσης όπως αναφέρθηκε νωρίτερα  $M^*$  είναι η ροπή που αναλαμβάνει το υστερητικό ελατήριο και ισχύει  $M^* = (1-a)EIz$ . Οπότε παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο έχουμε  $\frac{\dot{M}^*}{(1-a)EI} = \dot{z}$ . Ομοίως είναι

$$M_y^* = (1-a)EIz_y.$$

Ουσιαστικά το προσομοίωμα των Sivaselvan – Reinhorn πρόκειται για αυτό των Bouc- Wen εκφρασμένο με όρους ροπών καμπυλοτήτων. Ο λόγος που οι Sivaselvan – Reinhorn επέλεξαν αυτή τη διατύπωση, όπως θα δούμε και πιο κάτω, είναι έτσι ώστε να εισάγουν τις απομειώσεις της αντοχής, της δυσκαμψίας και τη στένωση απευθείας στο μοντέλο με παραμέτρους που ελέγχουν άμεσα τη δυσκαμψία.

### 2.3 ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΤΟΥ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑΤΟΣ ΤΩΝ SIVASELVAN-REINHORN

- **Υστερητική ροπή διαρροής :**

Η ροπή διαρροής του υστερητικού ελατηρίου λαμβάνει τις τιμές:

$$M_y^* = (1-\alpha)M_y \quad (2.17)$$

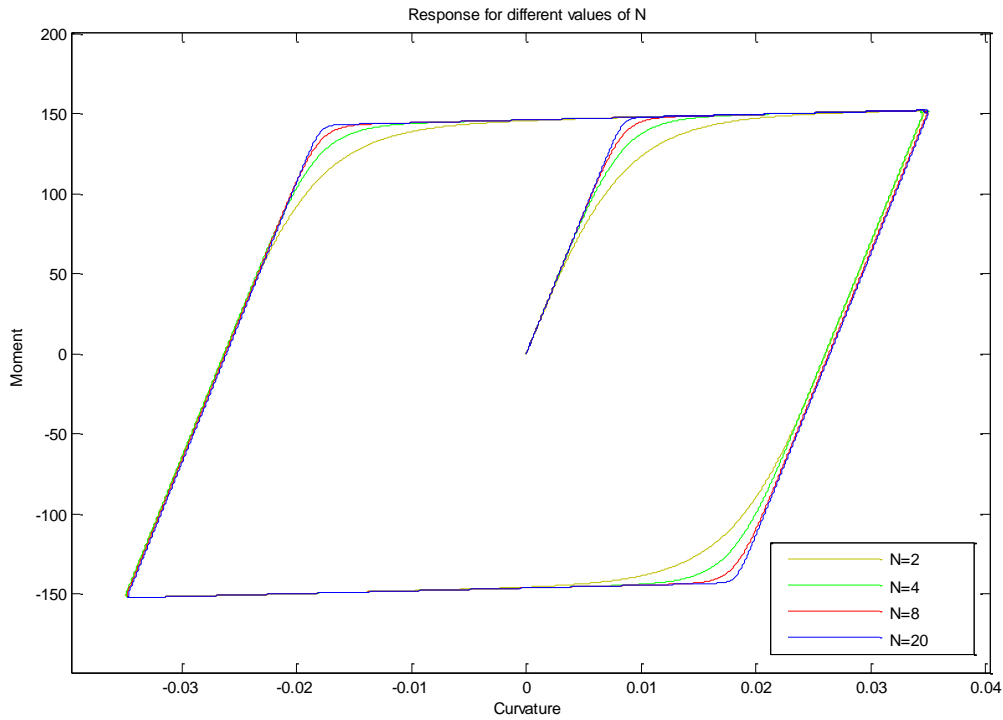
όπου η ροπή διαρροής  $M_y$  λαμβάνει τις τιμές  $M_y^+, M_y^-$  ανάλογα με τη φόρτιση.

- **Συντελεστής N:**

Ο θετικός αυτός συντελεστής όπως αναφέρθηκε ελέγχει τη μετάβαση από τον ελαστικό στο μετελαστικό κλάδο. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του τόσο περισσότερο η συμπεριφορά τείνει στη διγραμμική. Η επιρροή του συντελεστή N φαίνεται στο Σχήμα (2.3) για ημιτονική φόρτιση.

- **Συντελεστές  $\eta_1$  και  $\eta_2$ :**

Οι συντελεστές  $\eta_1$  και  $\eta_2$  καθορίζουν το σχήμα των υστερητικών βρόχων. Για να είναι συμβατοί με τη θεωρία της πλαστικότητας πρέπει το άθροισμά τους να είναι ίσο με τη μονάδα. Αυτός ο περιορισμός αποδεικνύεται ως εξής:



Σχήμα 2.3 Απόκριση για διάφορες τιμές του N για ημιτονική φόρτιση

Θεωρούμε το υστερητικό ελατήριο το οποίο φορτίζεται μονοτονικά και φτάνει τη ροπή διαρροής του.

Από τη σχέση:

$$\dot{M}^* = (1 - \alpha) K_0 \left\{ 1 - \left| \frac{M^*}{M_y} \right|^N (\eta_1 \operatorname{sgn}(M^* \dot{\varphi}) + \eta_2) \right\} \dot{\varphi} \quad (2.18)$$

Προκύπτει με απαλοιφή του χρόνου:

$$\frac{dM^*}{d\varphi} = (1 - \alpha) K_0 \left\{ 1 - \left| \frac{M^*}{M_y} \right|^N (\eta_1 \operatorname{sgn}(M^* \dot{\varphi}) + \eta_2) \right\} \quad (2.19)$$

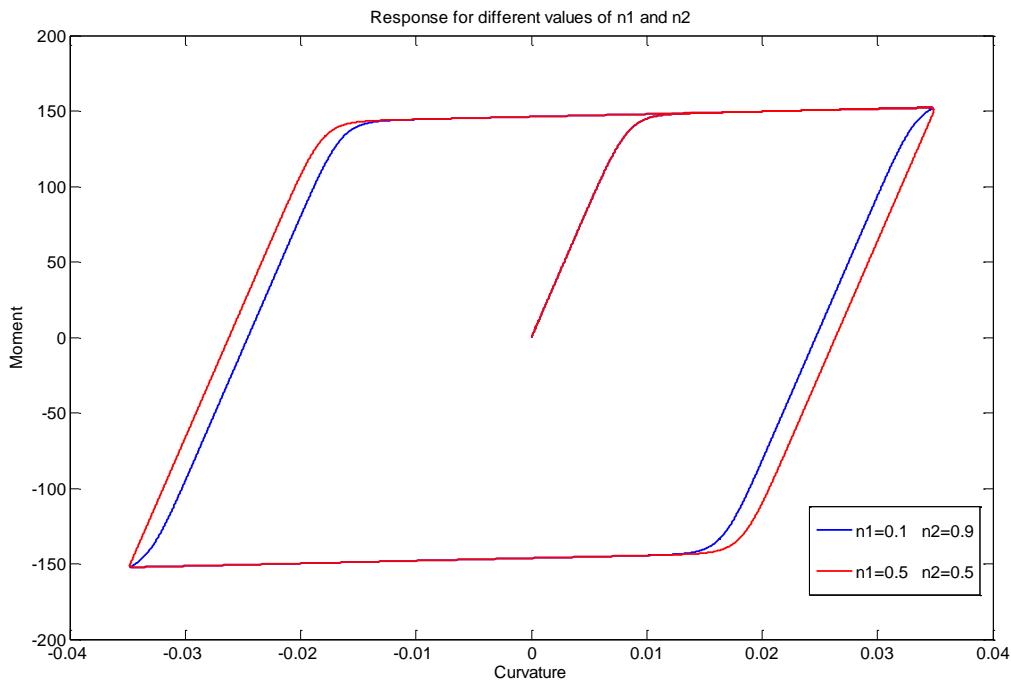
Όταν το υστερητικό ελατήριο φτάσει τη ροπή διαρροής του τότε η δυσκαμψία του μηδενίζεται:

$$K_2 = \frac{dM^*}{d\varphi} = 0, \quad \frac{M^*}{M_y} = 1, \quad \operatorname{sgn}(M^* \dot{\varphi}) = 1 \quad (2.20)$$

Δηλαδή:

$$\begin{aligned}
 K_2 = 0 &\Leftrightarrow \\
 (1-\alpha)K_0 \left\{ 1 - \left| \frac{M^*}{M_y^*} \right|^N (\eta_1 \operatorname{sgn}(M^* \dot{\varphi}) + \eta_2) \right\} = 0 &\Leftrightarrow \\
 \left\{ 1 - \left| \frac{M^*}{M_y^*} \right|^N (\eta_1 \operatorname{sgn}(M^* \dot{\varphi}) + \eta_2) \right\} = 0 &\Leftrightarrow \\
 (\eta_1 \operatorname{sgn}(M^* \dot{\varphi}) + \eta_2) = 1 &\Leftrightarrow \\
 \eta_1 + \eta_2 = 1
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Η επιρροή των συντελεστών  $\eta_1$  και  $\eta_2$  στη μορφή των υστερητικών βρόχων φαίνεται στο επόμενο σχήμα (Σχ. 2.4):



Σχήμα 2.4 Επιρροή των συντελεστών  $\eta_1$  και  $\eta_2$

Στην ειδική περίπτωση που  $\eta_1 = \eta_2 = 0.5$  οι κλάδοι αποφόρτισης είναι ευθείες γραμμές.

## 2.4 ΥΣΤΕΡΗΣΗ ΜΕ ΑΣΥΜΜΕΤΡΗ ΡΟΠΗ ΔΙΑΡΡΟΗΣ

Για την περίπτωση διατομής με διαφορετικές ροπές διαρροής για τα δύο άκρα οι Reinhorn και Sivaselvan πρότειναν αρχικά την εξής σχέση:

$$M_y^* = (1-\alpha) \left[ \left( \frac{1+\text{sgn}(\dot{\phi})}{2} M_y^+ \right) + \left( \frac{1-\text{sgn}(\dot{\phi})}{2} M_y^- \right) \right] \quad (2.22)$$

Ανάλογα με το πρόσημο της  $\dot{\phi}$  στη προηγούμενη εξίσωση η υστερητική ροπή διαρροής λαμβάνει τις εξής τιμές:

$$\begin{cases} M_y^* = (1-\alpha) M_y^+ \Rightarrow \text{sgn}(\dot{\phi}) = 1 \Leftrightarrow \dot{\phi} > 0 \\ M_y^* = (1-\alpha) M_y^- \Rightarrow \text{sgn}(\dot{\phi}) = -1 \Leftrightarrow \dot{\phi} < 0 \\ M_y^* = (1-\alpha)(0.5M_y^- + 0.5M_y^+) \Rightarrow \text{sgn}(\dot{\phi}) = 0 \Leftrightarrow \dot{\phi} = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

όπου  $M_y^+$ ,  $M_y^-$  είναι οι ροπές διαρροής κατά τη θετική και αρνητική διεύθυνση φόρτισης.

Όμως η εξίσωση (2.22) αποδεικνύεται ότι υπό ορισμένες περιπτώσεις δίνει λανθασμένα αποτελέσματα, γεγονός το οποίο επισημάνθηκε από τους Wang και Foliente [2] και αναλύεται στη συνέχεια.

Οι Wang και Foliente παρατήρησαν ότι αν ισχύει η (2.22) τότε η παράγωγος της ροπής του συστήματος των ελατηρίων ως προς το χρόνο είναι:

$$\dot{M}^* = (1-\alpha) K_0 \left( 1 - \left| \frac{M^*}{M_y^*} \right|^N \left[ \eta_1 \text{sgn}(M^* \dot{\phi}) + \eta_2 \right] \right) \dot{\phi} \quad (2.24)$$

και με απαλοιφή του χρόνου έχουμε:

$$\frac{dM^*}{d\phi} = (1-\alpha) K_0 \left( 1 - \left| \frac{M^*}{M_y^*} \right|^N \left[ \eta_1 \text{sgn}(M^* \dot{\phi}) + \eta_2 \right] \right) \quad (2.25)$$

Συνεπώς παρατήρησαν ότι όταν έχουμε διαρροή και η ροπή τείνει στη ροπή διαρροής του υστερητικού ελατηρίου τότε  $(dM^* / d\phi) \rightarrow 0$ ,  $\text{sgn}(M^* \dot{\phi}) = 1$  και η τιμή της  $M^*$  είναι:

$$\begin{cases} M_y^* \rightarrow (1-\alpha) M_y^+, \text{ για } M^* > 0 \\ M_y^* \rightarrow (1-\alpha) M_y^-, \text{ για } M^* < 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

επίσης :

$$\begin{cases} M_y^* = (1-\alpha)M_y^+, \text{ για } \text{sgn}(\dot{\phi}) = 1 \\ M_y^* = (1-\alpha)M_y^-, \text{ για } \text{sgn}(\dot{\phi}) = -1 \end{cases} \quad (2.27)$$

Στην περίπτωση που έχουμε αποφόρτιση ισχύει  $(dM^*/d\phi) > 0, \text{sgn}(M^*\dot{\phi}) = -1$  και έτσι πρέπει:

$$\frac{dM^*}{d\phi} = (1-\alpha)K_0 \left( 1 - \left| \frac{M^*}{M_y^*} \right|^N [-\eta_1 + \eta_2] \right) > 0 \quad (2.28)$$

άρα:

$$\left| \frac{M^*}{M_y^*} \right|^N [\eta_2 - \eta_1] > 0 \quad (2.29)$$

Αν αμέσως μετά την αποφόρτιση ακολουθήσει διαρροή τότε η  $M^* \rightarrow (1-a)M_y^*$  και  $\text{sgn}(\dot{\phi}) = -1$ , οπότε έχουμε:

$$\frac{M^*}{M_y^*} \cong \frac{M_y^+}{M_y^-} \quad (2.30)$$

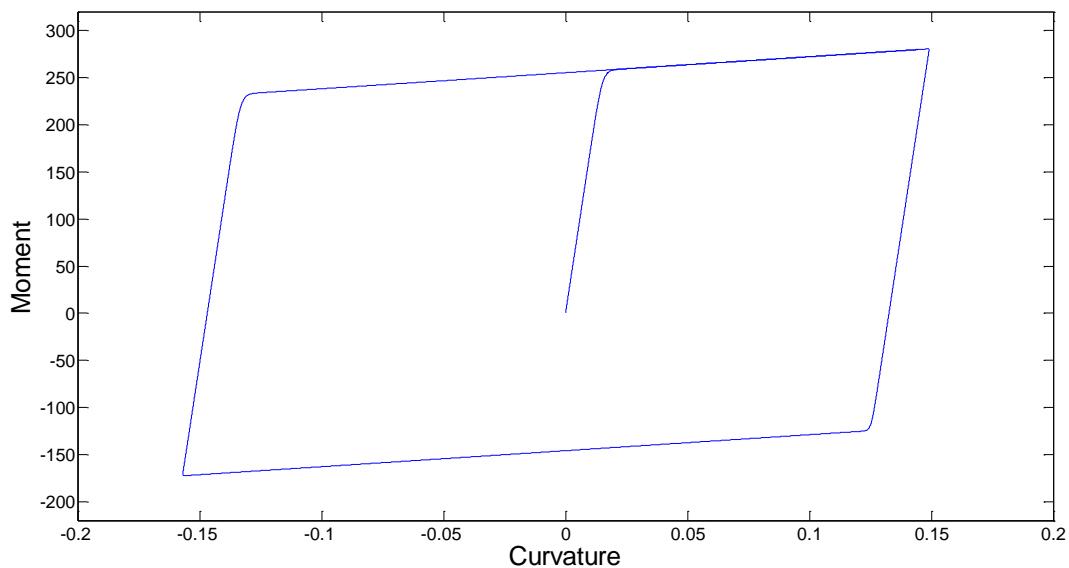
οπότε μπορεί να προκύψει  $|M^*/M_y^*| > 1$  κάτι το οποίο παραβιάζει την εξίσωση υπό ασύμμετρη φόρτιση και  $\eta_1 \neq \eta_2$ . Πρότειναν λοιπόν την εξής τροποποίηση της αρχικής εξίσωσης:

$$M_y^* = (1-\alpha) \left[ \left( \frac{1 + \text{sgn}(M^*)}{2} M_y^+ \right) + \left( \frac{1 - \text{sgn}(M^*)}{2} M_y^- \right) \right] \quad (2.31)$$

Έτσι βάσει της νέας εξίσωσης (2.31), που βασίζεται στο πρόσημο όχι της μεταβολής της καμπυλότητας, αλλά της μεταβολής της ροπής και προτάθηκε από τους Wang και Foliente [2] το μοντέλο παρουσιάζει βελτιωμένη και πιο ρεαλιστική απόκριση.

Η ασύμμετρη ροπή υπό ημιτονοειδής φόρτιση σύμφωνα με την πρόταση των Wang και Foliente αποτυπώνεται ως εξής:





Σχ. 2.5 Απόκριση με ασύμμετρη ροπή διαρροής

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η ροπή διαρροής για θετικές ροπές είναι 250 kN ενώ για αρνητικές ροπές είναι 150 kN.

## 2.5 ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑΤΟΣ

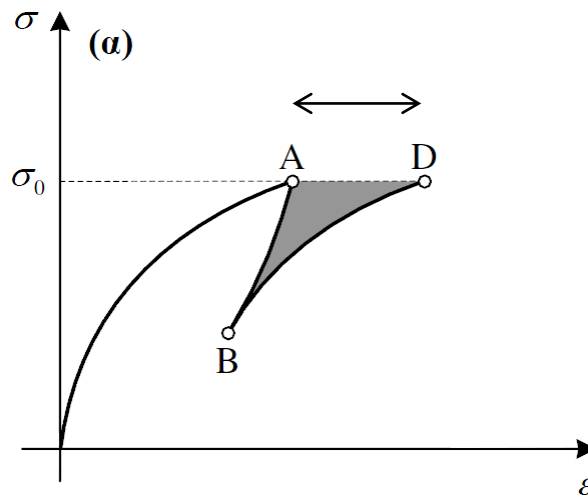
Τα μειονεκτήματα του προσομοιώματος έχουν επισημανθεί από αρκετούς μελετητές (Sandler [19], Casciati [20], Thyagarajan [21], Spacone et al [22]). Αυτά αφορούν κατά κύριο λόγο τη συμπεριφορά του μοντέλου σε σύντομους κύκλους φόρτισης – αποφόρτισης – επαναφόρτισης. Κατά τη διάρκεια αυτών παρουσιάζεται τοπική παραβίαση των αξιωμάτων της πλαστικότητας του Drucker και του Pyushin. Αυτό το μειονέκτημα των προσομοιωμάτων Bouc-Wen και Sivaselvan-Reinhorn αντιμετωπίστηκε αποτελεσματικά πρόσφατα από τον Α. Ε Χαραλαμπίκη [18] και την Α. Κότταρη [27].

Οι αρχές της πλαστικότητας του Drucker [24] και του Pyushin [23] έχουν μεγάλη σημασία για την κλασική θεωρία της πλαστικότητας. Η αρχή του Pyushin είναι πιο γενική και χαρακτηρίζει την συμπεριφορά μιας μεγάλης κατηγορίας υλικών, ενώ έχει τις ίδιες συνέπειες με την αρχή του Drucker. Τόσο η αρχή του Drucker όσο και αυτή του Pyushin συνεπάγονται την αρχή της μέγιστης πλαστικής απώλειας (postulate of maximum plastic dissipation), ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει. Σε ορισμένα υλικά, η ισχύς των αρχών των Drucker και Pyushin μπορεί να μην είναι επιβεβλημένη, όπως για παράδειγμα στη περίπτωση εδαφικών σχηματισμών.

Σύμφωνα με το αξίωμα του Drucker, το έργο που παράγεται κατά έναν κλειστό κύκλο τάσης είναι μη αρνητικό δηλαδή πρέπει να ισχύει:

$$\int (\sigma - \sigma_o) d\varepsilon \geq 0 \quad (2.32)$$

Σχηματικά η παραβίαση του αξιώματος του Drucker έχει ως εξής:

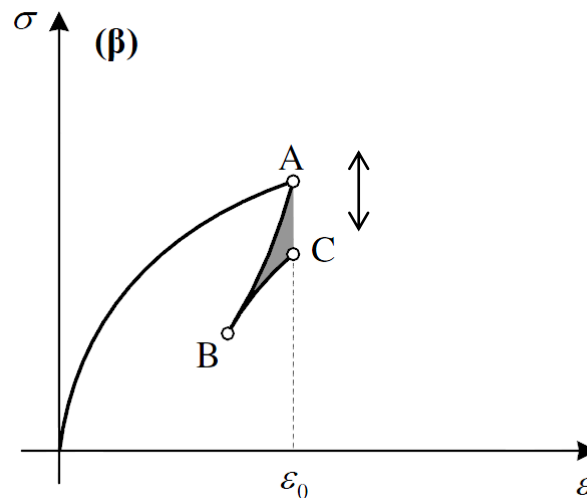


Σχ. 2.6 Παραβίαση του Αξιώματος του Drucker

Το αξίωμα του Pyushin αναφέρεται στο έργο που παράγεται κατά ένα κλειστό κύκλο παραμόρφωσης είναι μη αρνητικό και έχει ως εξής:

$$\int \sigma d\varepsilon \geq 0 \quad (2.33)$$

Σχηματικά η παραβίαση του αξιώματος του Pyushin είναι:



Σχ. 2.7 Παραβίαση του Αξιώματος του Pyushin

Η προτεινόμενη τροποποίηση που παρουσίασε ο Α. Χαραλαμπίδης [18] μαζί με την Α. Κότταρη [27] βασίζεται στην εισαγωγή ενός συντελεστή  $R_{smod}$ . Συγκεκριμένα, η τροποποίηση που εφαρμόζεται στο μοντέλο Sivaselvan-Reinhorn είναι:

$$\dot{M}^*(t) = (1-a)Ko \left[ 1 - \left| \frac{M^*}{M_y^*} \right|^n \left( n1 + \frac{\text{sgn}(\dot{\phi}(t)M^*(t)) - 2H\left(\dot{\phi}(t)\frac{M^*(t)}{M_y^*(t)}\right)R_{smod}\left(\phi, \frac{M^*(t)}{M_y^*(t)}\right)}{n2} \right) \right] \dot{\phi}(t) \quad (2.34)$$

Στον προηγούμενο τύπο έχει προστεθεί ο υπογραμμισμένος όρος, ο οποίος περιλαμβάνει:

- Τον συντελεστή αύξησης της δυσκαμψίας  $R_{smod}$
- Τη συνάρτηση Heaviside

Ο συντελεστής  $R_{smod}$  παίρνει τιμές στο σύνολο  $[0,1]$ . Όταν μηδενίζεται τότε μηδενίζεται και ο δεύτερος όρος της εξίσωσης (2.34) και το τροποποιημένο προσομοίωμα γίνεται όμοιο με το αρχικό. Αντίθετα, όταν ο  $R_{smod}$  πάρει τη τιμή 1 η δυσκαμψία επαναφόρτισης αυξάνεται και γίνεται ίση με την δυσκαμψία αποφόρτισης στο ίδιο σημείο.



# 3

---

## ΑΠΟΜΕΙΩΣΕΙΣ ΣΤΟ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑ SIVASELVAN-REINHORN

Οι υστερητικοί βρόχοι που παρουσιάζονται στα σχήματα (2.3) και (2.4) δεν περιγράφουν πλήρως την πραγματική συμπεριφορά των κατασκευών υπό ανακυκλιζόμενη φόρτιση. Αυτό συμβαίνει διότι επιπρόσθετα παρουσιάζονται τα φαινόμενα της απομείωσης της δυσκαμψίας (stiffness degradation), της απομείωσης της αντοχής (strength deterioration) καθώς και το φαινόμενο της στένωσης (pinching). Απομείωση της δυσκαμψίας είναι η προοδευτική μείωση της ακαμψίας σε κάθε κύκλο φόρτισης ενώ απομείωση της αντοχής είναι η ελάττωση της αντοχής της διατομής όταν η φόρτιση γίνεται μέχρι το ίδιο σημείο παραμόρφωσης. Πιο συγκεκριμένα ανακυκλιζόμενες φορτίσεις δημιουργούν μικρορωγμές στο υλικό, οι οποίες και πολλαπλασιάζονται σε μεταγενέστερους κύκλους φόρτισης και οδηγούν στις μειώσεις της αντοχής και δυσκαμψίας. Όσον αφορά τη στένωση αυτή είναι η ξαφνική μείωση της δυσκαμψίας που έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία βρόχων μικρότερου εύρους στο κέντρο απ' ό,τι στα άκρα. Ειδικά σε ωπλισμένο σκυρόδεμα το φαινόμενο της στένωσης οφείλεται στο κλείσιμο των ρωγμών κατά την αλλαγή της φοράς φόρτισης καθώς και στην ολίσθηση του οπλισμού. Σε σιδηρές κατασκευές και κατασκευές από ξύλο η στένωση οφείλεται στην ολίσθηση των κοχλιών στις συνδέσεις. Αυτό το Κεφάλαιο βασίστηκε στην διπλωματική της Αλεξάνδρας Κότταρης 'Γενικευμένα προσομοιώματα Bouc-Wen στην ελαστοπλαστική ανάλυση κατασκευών'[26].

### 3.1 ΥΣΤΕΡΗΣΗ ΜΕ ΑΠΟΜΕΙΩΣΗ ΤΗΣ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ

Ο Park [5] διατύπωσε ένα μοντέλο κατά το οποίο η μείωση της δυσκαμψίας περιγράφεται από τον κανόνα του σημείου περιστροφής (pivot rule). Σύμφωνα με το μοντέλο θεωρείται ότι οι κλάδοι φόρτισης και αποφόρτισης τέμνονται σε ένα σημείο επί του αρχικού ελαστικού κλάδου, το οποίο απέχει  $\alpha_1 \cdot M_y$  από την αρχή των αξόνων και βρίσκεται στο ημιεπίπεδο ροπής αντίθετου προσήμου. Από τη γεωμετρία προκύπτει:

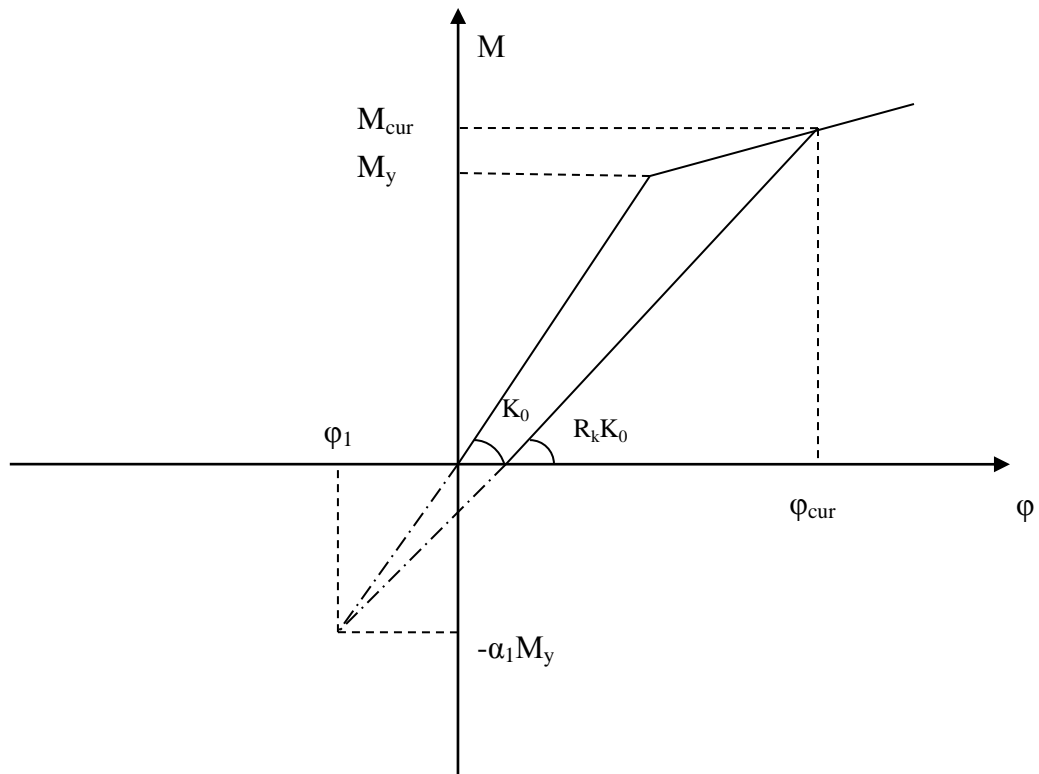
$$K_{cur} = R_k K_0 = \frac{M_{cur} + \alpha_1 M_y}{K_0 \varphi_{cur} + \alpha_1 M_y} K_0 \quad (3.1)$$

Όπου:

- $M_{cur}$ ,  $\varphi_{cur}$  τρέχουσα ροπή και καμπυλότητα,
- $\alpha_1$  είναι η παράμετρος μείωσης της δυσκαμψίας,
- $M_y = M_y^+$  ή  $M_y = M_y^-$  ανάλογα με τη θέση του σημείου ( $M_{cur}$ ,  $\varphi_{cur}$ ). Αν το σημείο ( $M_{cur}$ ,  $\varphi_{cur}$ ) βρίσκεται στο δεξί ημιεπίπεδο που ορίζει ο αρχικός ελαστικός κλάδος τότε  $M_y = M_y^+$ , ενώ αν βρίσκεται στο αριστερό  $M_y = M_y^-$ .

Η μείωση της δυσκαμψίας συμβαίνει μόνο στο υστερητικό ελατήριο και άρα η δυσκαμψία του μεταβάλλεται ως εξής:

$$K_{hysteretic} = (R_k - \alpha) K_0 \left( 1 - \left| \frac{M^*}{M_y} \right|^N \left[ \eta_1 \operatorname{sgn}(M^* \dot{\varphi}) + \eta_2 \right] \right) \quad (3.2)$$

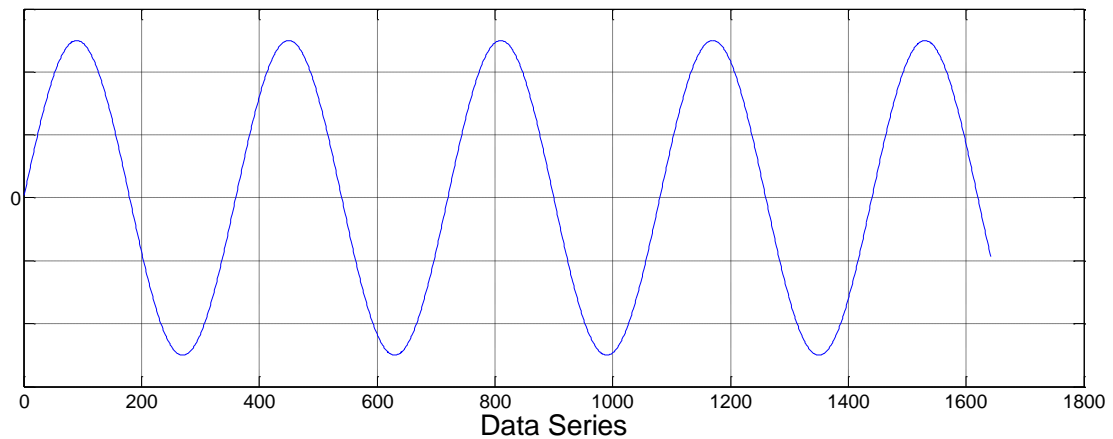


Σχ. 3.1 Απεικόνιση της Λειτουργίας του Σημείου Περιστροφής (Pivot Rule)

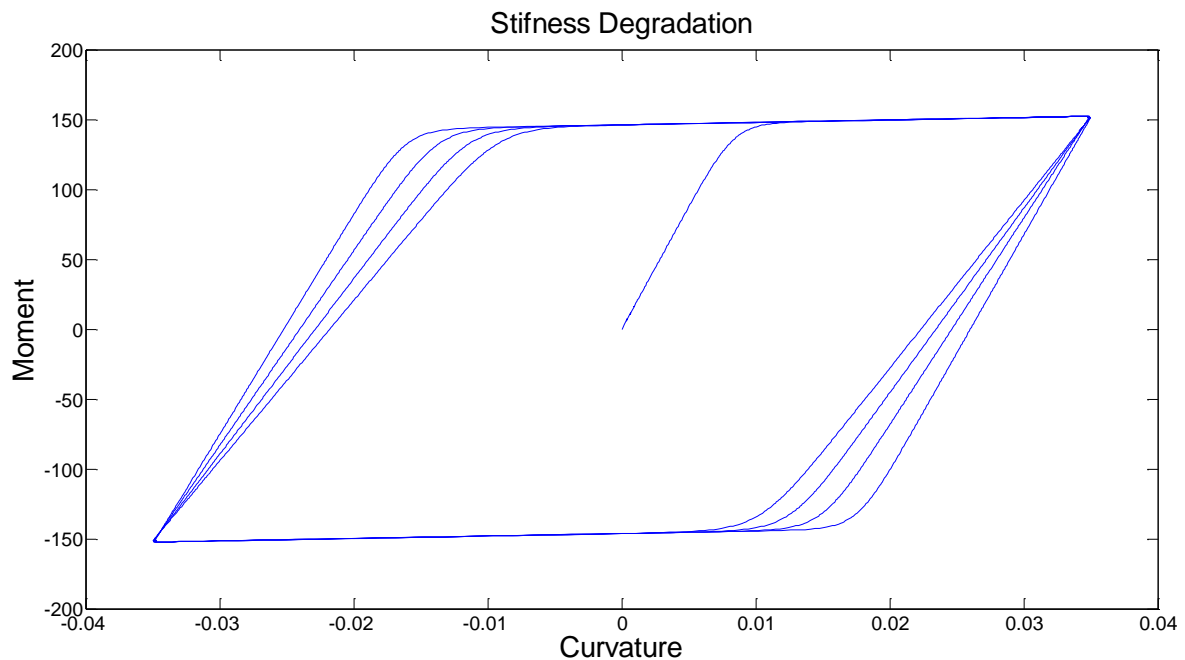
Η τιμή του συντελεστή  $\alpha_1$  καθορίζει το σημείο περιστροφής επί του αρχικού ελαστικού κλάδου, αλλά και την απομείωση ή όχι της δυσκαμψίας του συστήματος. Για μεγάλες τιμές του  $\alpha_1$  ( $\alpha_1 > 200$ ) δεν έχουμε απομείωση της δυσκαμψίας, ενώ το αντίθετο συμβαίνει για μικρές τιμές του  $\alpha_1$ . Παρακάτω παρατίθεται ένα παράδειγμα βρόχων με απομείωση δυσκαμψίας για ημιτονική φόρτιση του σχήματος (3.2) και τις παραμέτρους του πίνακα (3.1):

Ροπή διαρροής	147.7 kNm
$\alpha$	0.01
N	8
n1	0.5
n2	0.5

Πίνακας (3.1)



Σχ. 3.2 Ημιτονική Φόρτιση



Σχ. 3.3 Παράδειγμα βρόχων με Απομείωση Δυσκαμψίας

Παρατηρήθηκε ότι και για την απομείωση της δυσκαμψίας, οι Reinhorn και Sivaselvan δεν έλαβαν υπόψη τους όλους τους πιθανούς τρόπους φόρτισης και τις ενδεχόμενες αποκρίσεις του μοντέλου, γεγονός που επίσης επισημάνθηκε από τους Wang και Foliente [2].

Σύμφωνα με τους Wang και Foliente η τιμή του  $R_k$  εξαρτάται μόνο από τις τρέχουσες τιμές των παραμέτρων  $M_{cur}$ ,  $\varphi_{cur}$  οι οποίες και προσδιορίζουν και τις συντεταγμένες του σημείου περιστροφής. Αυτό οδηγεί σε δύο λανθασμένες συμπεριφορές του μοντέλου. Αφενός το προσομοίωμα δεν λαμβάνει υπόψη την συσσωρευτική δράση του φαινομένου της απομείωσης



της δυσκαμψίας. Αφετέρου, παρατήρησαν ότι αν σε επόμενο κύκλο φόρτισης η καμπυλότητα είναι μικρότερη αυτής του προηγούμενου κύκλου τότε το σύστημα παρουσιάζει αύξηση της δυσκαμψίας, καθώς ο κλάδος αποφόρτισης στοχεύει το σημείο περιστροφής. Σημείωσαν λοιπόν ότι η μέθοδος του Park μπορεί να εφαρμοστεί μόνο στην περίπτωση που έχουμε αυξανόμενο εύρος φόρτισης.

Το πρόβλημα αυτό γίνεται πιο κατανοητό αν θεωρήσουμε την απόκριση ενός συστήματος σε ανακυκλιζόμενη φόρτιση αυξανόμενου και μειούμενου εύρους, κατά τις οποίες οι αποκρίσεις είναι όμοιες και μάλιστα στην δεύτερη περίπτωση η δυσκαμψία αυξάνεται, κάτι το οποίο δεν συνάδει με την πραγματική συμπεριφορά.

Σε απάντηση των Wang και Foliente, οι Reinhorn και Sivaselvan ισχυρίστηκαν ότι το μοντέλο αναφέρεται σε υλικά τα οποία παρουσιάζουν αποκατάσταση δυσκαμψίας όπως είναι οι μεταλλικοί αποσβεστήρες. Ανέφεραν ωστόσο ότι αν το σύστημα δεν παρουσιάζει αποκατάσταση δυσκαμψίας τότε το  $R_k$  θα μπορούσε να μεταβάλλεται ανάλογα με την τιμή της  $\varphi_{\max}$  ή μια σταθμισμένη τιμή των  $\varphi_{cur}$  και  $\varphi_{\max}$ , αντί να χρησιμοποιείται μόνο η τιμή της  $\varphi_{cur}$ . Δεν πρότειναν όμως κάποιον τρόπο αντιμετώπισης του μειονεκτήματος αυτής της μεθόδου.

Στα πλαίσια της διδακτορικής του διατριβής ο Α. Χαραλαμπίδης [18] πρότεινε τον απευθείας έλεγχο του συντελεστή  $R_k$ . Έτσι σε κάθε χρονική στιγμή ελέγχεται σε πιο ημιεπίπεδο σε σχέση με τον αρχικό ελαστικό κλάδο βρίσκεται η τρέχουσα θέση ( $M_{cur}$ ,  $\varphi_{cur}$ ) και αναλόγως λαμβάνεται το κατάλληλο πρόσημο της ροπής διαρροής. Δηλαδή, αν το σημείο ( $M_{cur}$ ,  $\varphi_{cur}$ ) βρίσκεται στο δεξί ημιεπίπεδο που ορίζει ο αρχικός ελαστικός κλάδος τότε  $M_y = M_y^+$ , ενώ αν βρίσκεται στο αριστερό  $M_y = M_y^-$ . Τέλος αν το σημείο βρίσκεται επί του ελαστικού κλάδου το πρόσημο της ροπής διαρροής λαμβάνεται ανάλογα με το πρόσημο του ρυθμού μεταβολής της καμπυλότητας. Έτσι αν  $\dot{\varphi} > 0$  τότε  $M_y = M_y^+$ , ενώ αν  $\dot{\varphi} < 0$  τότε  $M_y = M_y^-$ .

Η δοκιμαστική τιμή του  $R_k$  υπολογίζεται ανάλογα με την τρέχουσα θέση:

$$R_k^{trial} = \frac{M_{cur} + \alpha M_y}{K_0 \varphi_{cur} + \alpha M_y} \quad (3.3)$$

Ταυτόχρονα συγκρατείται κάθε φορά η μικρότερη τιμή της  $R_k$  και τίθεται ίση με  $R_k^{min}$ , στην οποία αρχικά δίνεται η τιμή της μονάδας. Δηλαδή σε κάθε βήμα γίνεται ο έλεγχος ανάμεσα σε  $R_k^{trial}$  και  $R_k^{min}$  και συγκρατείται η μικρότερη των δύο:

$$R_k^{\min} = \min [R_k^{\min}, R_k^{\text{trial}}] \quad (3.4)$$

Τέλος, εισάγεται επιπλέον μεταβλητή  $a_2$  τέτοια ώστε η τελική τιμή του συντελεστή μείωσης δυσκαμψίας να προκύπτει ως μία σταθμισμένη τιμή των  $R_k^{\text{trial}}$  και  $R_k^{\min}$ , ως εξής:

$$R_k = R_k^{\text{trial}} + (1 - a_2) * (R_k^{\min} - R_k^{\text{trial}}) \quad (3.5)$$

Όταν  $a_2=1$  τότε το σύστημα ταυτίζεται με την αρχική θεώρηση των Sivaselvan-Reinhorn κατά την οποία δεν λαμβάνεται υπόψη η μικρότερη τιμή της  $R_k$  παρά μόνο η τρέχουσα τιμή. Αντίθετα όταν  $a_2=0$  το σύστημα παρουσιάζει μηδενική αποκατάσταση δυσκαμψίας. Ο συντελεστής  $a_2$  ονομάζεται βαθμός αποκατάστασης δυσκαμψίας.

### 3.2 ΥΣΤΕΡΗΣΗ ΜΕ ΑΠΟΜΕΙΩΣΗ ΤΗΣ ΑΝΤΟΧΗΣ

Η απομείωση της αντοχής προσομοιώνεται μειώνοντας τη ροπή αντοχής [1]. Αυτό επιτυγχάνεται με τη θεώρηση δύο όρων. Η σχέση είναι η ακόλουθη:

$$M_y = M_{y0} \left[ 1 - \left( \frac{\phi_{\max}}{\phi_u} \right) \right] \left[ 1 - \frac{\beta_2}{1 - \beta_2} \frac{H}{H_{ult}} \right] \quad (3.6)$$

όπου:

- $M_y$  η τρέχουσα ροπή διαρροής,
- $M_{y0}$  η αρχική ροπή διαρροής,
- $\phi_{\max}$  η μέγιστη αναπτυχθείσα καμπυλότητα,
- $\phi_u$  η μέγιστη επιτρεπόμενη καμπυλότητα,
- $H$  η αναλίσκόμενη ενέργεια παραμορφώσεως του υστερητικού ελατηρίου,
- $H_{ult}$  η μέγιστη ενέργεια που μπορεί να αναλωθεί από το υστερητικό ελατήριο για μονοτονική φόρτιση και
- $\beta_1$ , παράμετρος απομείωσης αντοχής που σχετίζεται με την πλαστιμότητα
- $\beta_2$  παράμετρος απομείωσης αντοχής που σχετίζεται με την ενέργεια που αναλώνεται

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η εξίσωση (3.6) περιέχει δύο όρους. Ο πρώτος ελέγχει και απομειώνει την αντοχή κάθε φορά που η τρέχουσα παραμόρφωση ξεπερνά τη μέγιστη

παρελθούσα παραμόρφωση. Ο δεύτερος απομειώνει σε κάθε κύκλο την αντοχή, ανάλογα με την συνολική ενέργεια παραμόρφωσης.

Η αναλίσκόμενη ενέργεια παραμορφώσεως προκύπτει από την ολοκλήρωση του διαφορικού της υστερητικής ενέργειας:

$$\Delta H = \left[ \frac{M + (M + \Delta M)}{2} \right] \left( \Delta \phi - \frac{\Delta M}{R_k K_0} \right) \quad (3.7)$$

Οι διαφορικές εξισώσεις οι οποίες διέπουν το φαινόμενο της απομείωσης αντοχής προκύπτουν τελικά από τη διαφορίση της (3.6) ώστε:

$$\frac{dM_y^{+/-}}{dt} = M_{y0}^{+/-} \left\{ \begin{array}{l} \left[ 1 - \frac{\beta_2}{1 - \beta_2} \frac{H}{H_{ult}} \right] \left[ - \frac{1}{\beta_1 \left( \phi_u^{+/-} \right)^{1/\beta_1}} \left( \phi_{max}^{+/-} \right)^{(1-\beta_1)/\beta_1} \right] \left( \phi_{max}^{+/-} \right) + \\ + \left[ 1 - \left( \frac{\phi_{max}^{+/-}}{\phi_u^{+/-}} \right)^{1/\beta_1} \right] \left[ - \frac{\beta_2}{(1 - \beta_2) H_{ult}} \right] \dot{H} \end{array} \right\} \quad (3.8)$$

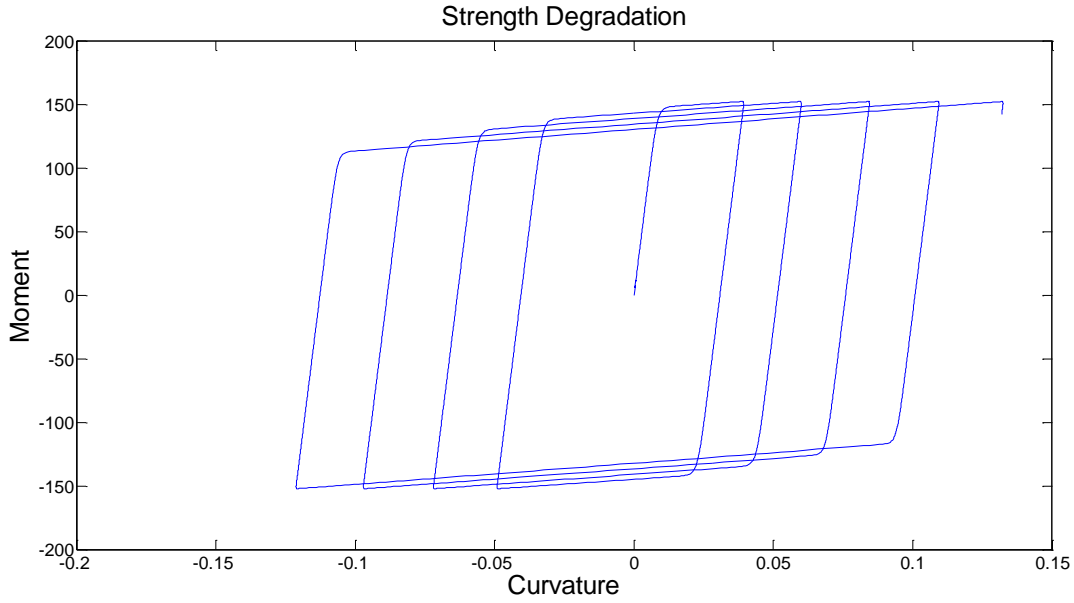
Για την επίλυση της (3.8) μας είναι απαραίτητη η διαφορική έκφραση της (3.7):

$$\dot{H} = M \left( \dot{\phi} - \frac{\dot{M}}{R_k K_0} \right) = M \dot{\phi} \left[ 1 - \frac{(K_{postyield} + R_k K_{hysteretic})}{R_k K_0} \right] \quad (3.9)$$

Τέλος, αν γραφτεί:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{max}^+ &= \dot{\phi} U(\phi - \phi_{max}^+) U(\dot{\phi}), \\ \dot{\phi}_{max}^- &= \dot{\phi} U(\phi - \phi_{max}^-) (1 - U(\dot{\phi})) \end{aligned} \quad (3.10)$$

όπου  $U$  η συνάρτηση βήματος, λαμβάνονται όλες τις εξισώσεις (3.8), (3.9), (3.10) για τη θεμελίωση του νόμου απομείωσης της αντοχής του υστερητικού ελατηρίου. Ακολουθεί ένα παράδειγμα των βρόχων που δημιουργούνται με απομείωση της αντοχής για την ημιτονοειδή φόρτιση.



Σχ. 3.4 Παράδειγμα βρόχων με Απομείωση Αντοχής

### 3.3 ΣΤΕΝΩΣΗ

Το προσομοίωμα Baber-Noori 1985 [8] είναι το πρώτο το οποίο ενσωματώνει το φαινόμενο στένωσης. Είναι ουσιαστικά ένα απομειούμενο προσομοίωμα Bouc-Wen με στένωση. Για την απόδοση του φαινομένου της στένωσης θεώρησαν ένα ελατήριο συνδεδεμένο σε σειρά με το υστερητικό. Το προσομοίωμα είναι:

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{u} + w = p \\ w = f(u) + \alpha K_0 u + z \\ \dot{z} = \frac{K_h K_p}{K_h + K_p} \dot{u} \\ \dot{e} = z \dot{u} \\ K_h = K_h(z, \text{sgn}(du), e) = \frac{(1-a)K_0}{n} [A - \nu |z|^n (\gamma + \beta \text{sgn}(zdu))] \\ K_p = K_p(z, e) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi Z_\sigma}} \Delta_u e^{-\frac{z^2}{2Z_\sigma^2}} \right) \end{array} \right.$$

όπου:

$$\begin{aligned} A &= A(e) = A_0 - \delta_A e \\ \nu &= \nu(e) = \nu_0 + \delta_\nu e \\ n &= n(e) = n_0 + \delta_n e \end{aligned}$$

Το  $\Delta u$  σχετίζεται με τον  $K_p$  ο οποίος αναφέρεται στο φαινόμενο στένωσης και ορίζει τη συνολική ολίσθηση η οποία λαμβάνει χώρα υπό θετική και αντίστοιχα αρνητική φόρτιση στο διάστημα  $z = -\infty$ , (αντίστοιχα  $z = \infty$ ) και  $z = \infty$  (αντίστοιχα  $z = -\infty$ ). Μπορεί να θεωρηθεί ότι το φαινόμενο λαμβάνει χώρα στο διάστημα  $(3Z_\sigma, 3Z_\sigma)$ . Η παράμετρος  $3Z_\sigma$  σχετίζεται με την κατανομή της στένωσης. Αυξημένες τιμές του  $Z_\sigma$  έχουν ως αποτέλεσμα πιο ομοιόμορφη κατανομή. Οι συγγραφείς πρότειναν τις εξής σχέσεις:

$$\begin{cases} \Delta u = \Delta u(e) = \delta_u e \\ Z_\sigma = Z_\sigma(e) = Z_{\sigma 0} + \delta_\sigma e \end{cases} \quad (3.11)$$

Οι Baber και Noori το 1986 [9] πρότειναν ένα διαφορετικό τρόπο για την προσομοίωση του φαινομένου της στένωσης στο υστερητικό προσομοίωμα. Εισήγαγαν μία πρόσθετη συνάρτηση  $h=h(z)$  η οποία πολλαπλασιάζεται με την υστερητική δυσκαμψία  $K$ .

Προκύπτει λοιπόν:

$$\begin{cases} m\ddot{u} + w = p \\ w = c\dot{u} + \alpha K_0 u + z \\ \dot{z} = K\dot{u} \\ \dot{e} = z\dot{u} \\ K = K(z, \text{sgn}(du), e) = (1-a)A \frac{h}{\eta} [1 - |z|^n (\gamma + \beta \text{sgn}(zdu))] \end{cases} \quad (3.12)$$

με:

$$\begin{aligned} A &= A(e) = A_0 - \delta_A e \\ v &= v(e) = v_0 + \delta_v e \\ n &= n(e) = n_0 + \delta_n e \end{aligned} \quad (3.13)$$

και:

$$\begin{cases} h = h(z, e) = 1 - \zeta_1 \exp\left(\frac{z^2}{2\zeta_2^2}\right) \\ \zeta_1 = \zeta_1(e) = \zeta_{1,0} (1 - \exp(-pe)) \\ \zeta_2 = \zeta_2(e) = (\zeta_0 + \delta_\zeta)(\lambda + \zeta_1(e)) \end{cases} \quad (3.14)$$

Προκύπτει ότι η συσχέτιση της  $h$  με την  $z$  ακολουθεί κατανομή Gauss με μέση τιμή μηδέν.

Τελικά η συνολική δυσκαμψία του ελαστοπλαστικού συστήματος προκύπτει:

$$K = K_{\text{postyield}} + \frac{K_{\text{hysteretic}} K_{\text{sliplock}}}{K_{\text{hysteretic}} + K_{\text{sliplock}}} \quad (3.16)$$

Η δυσκαμψία του πρόσθετου ελατηρίου μπορεί να ακολουθεί κατανομή Gauss ή οποιαδήποτε άλλη κατανομή τέτοια ώστε:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{K_{\text{sliplock}}} dM = s \quad (3.17)$$

Οι Foliente και Wang [2] παρατήρησαν ότι κατά τους Sivaselvan και Reinhorn [1] οι ροπές  $M^*, M_{\sigma}^*$  εξαρτώνται από τη ροπή  $M_y^*$ , η οποία μπορεί όμως να πάρει και αρνητική τιμή. Σαν αποτέλεσμα η  $M_{\sigma}^*$  θα μπορούσε να λάβει αρνητική τιμή, κάτι το οποίο αντιτίθεται στην τον ορισμό της τυπικής απόκλισης. Επιπλέον, προσέθεσαν ότι για να συμβεί η στένωση συμμετρικά ως προς τη θετική και την αρνητική ροπή θα πρέπει να ληφθεί υπόψη το πρόσημο της ταχύτητας μεταβολής της καμπυλότητας. Πρότειναν λοιπόν την ακόλουθη σχέση:

$$K_{\text{sliplock}} = \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{s}{|M_{\sigma}^*|} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{M^* - |\bar{M}^*| \operatorname{sgn}(\dot{\varphi})}{|M_{\sigma}^*|} \right)^2 \right] \right\}^{-1} \quad (3.18)$$

Παρατηρήθηκε όμως [32] ότι ούτε η μορφή της είναι σωστή και αυτό διότι δεδομένου μια τυχαία μεταβλητή ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\mu$  και τυπική απόκλιση  $\sigma$  όταν:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in (-\infty, +\infty)$$

Επομένως συγκρίνοντας τις σχέσεις παρατήρησαν ότι η ορθή μορφή είναι:

$$K_{\text{sliplock}} = \left\{ \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \frac{s}{|M_{\sigma}^*|} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{M^* - |\bar{M}^*| \operatorname{sgn}(\dot{\varphi})}{|M_{\sigma}^*|} \right)^2 \right] \right\}^{-1} \quad (3.19)$$

### 3.4 ΑΠΟΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗΝ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

#### 3.4.1 Απομείωση αντοχής και δυσκαμψίας

Οι σχέσεις που προηγήθηκαν οδηγούν σε αποτελέσματα όσον αφορά μονοβάθμια συστήματα στα οποία η ακαμψία είναι συγκεκριμένη και μπορεί να μεταβάλλεται από βήμα σε βήμα με τον κανόνα του σημείου περιστροφής. Η ενσωμάτωση όμως των μειώσεων σε πολυβάθμια συστήματα και μάλιστα με βάση το πεπερασμένο στοιχείο δοκού το οποίο περιγράφεται στο επόμενο κεφάλαιο, δεν είναι εφικτή. Αυτό συμβαίνει διότι σύμφωνα με τη θεώρηση που γίνεται τα μητρώα ακαμψίας μορφώνονται στην αρχή και διατηρούνται αναλλοίωτα καθ' όλη τη διάρκεια της επίλυσης. Έτσι επιχειρείται μία νέα προσέγγιση στις μειώσεις, και πιο συγκεκριμένα με βάση την ενέργεια.

Οι Baber και Wen (1981) [6] παρουσίασαν δύο πρόσθετες παραμέτρους για να εισάγουν τα φαινόμενα της απομείωσης της δυσκαμψίας και της αντοχής στο μοντέλο. Έτσι η υστερητική εξίσωση γίνεται:

$$\dot{z}(t) = \left\{ 1 - \nu_s \left| \frac{z}{z_y} \right|^n (\gamma \operatorname{sgn}(z\dot{\phi}) + \beta) \right\} \frac{\dot{\phi}}{n_s} \quad (3.20)$$

Όπου:

- $\nu_s$  είναι η παράμετρος μείωσης της αντοχής (strength degradation),
- $n_s$  είναι η παράμετρος μείωσης της δυσκαμψίας (stiffness deterioration)

Οι δύο αυτές παράμετροι δίνονται από τους ακόλουθους τύπους:

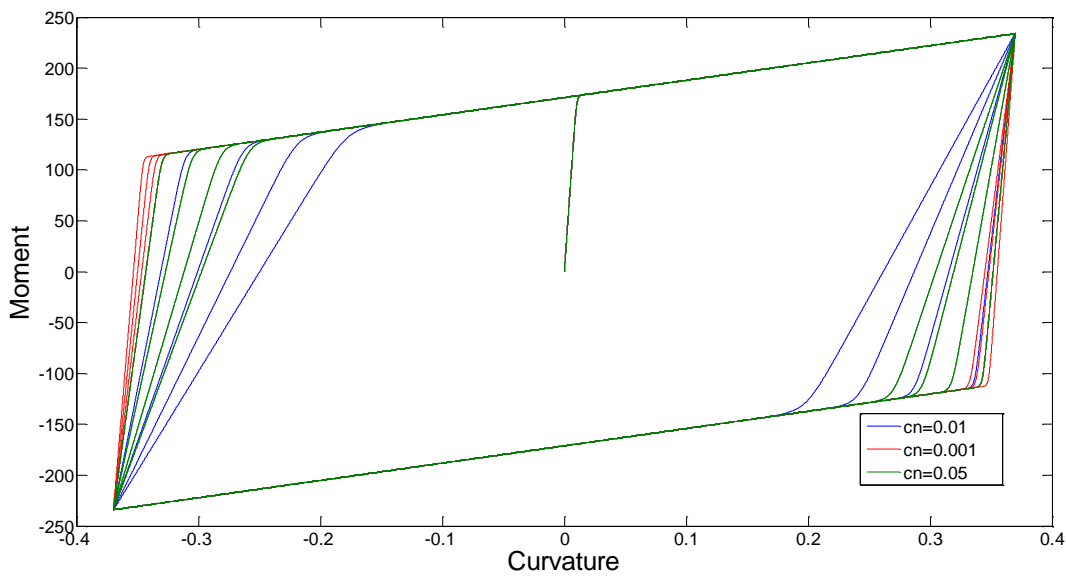
$$\begin{aligned} n_s &= 1 + c_n e^h, & \mu\epsilon & c_n \geq 0 \\ \nu_s &= 1 + c_\nu e^h, & \mu\epsilon & c_\nu \geq 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Όπως παρατηρούμε και στις δύο παραμέτρους χρησιμοποιείται η υστερητική πυκνότητα ενέργειας  $e^h$  (δηλαδή ενέργεια ανά μονάδα όγκου) που διαχέεται από το υστερητικό ελατήριο και δίνεται από τους κάτωθι τύπους για τους καμπτικούς και τους αξονικούς βαθμούς ελευθερίας αντίστοιχα:

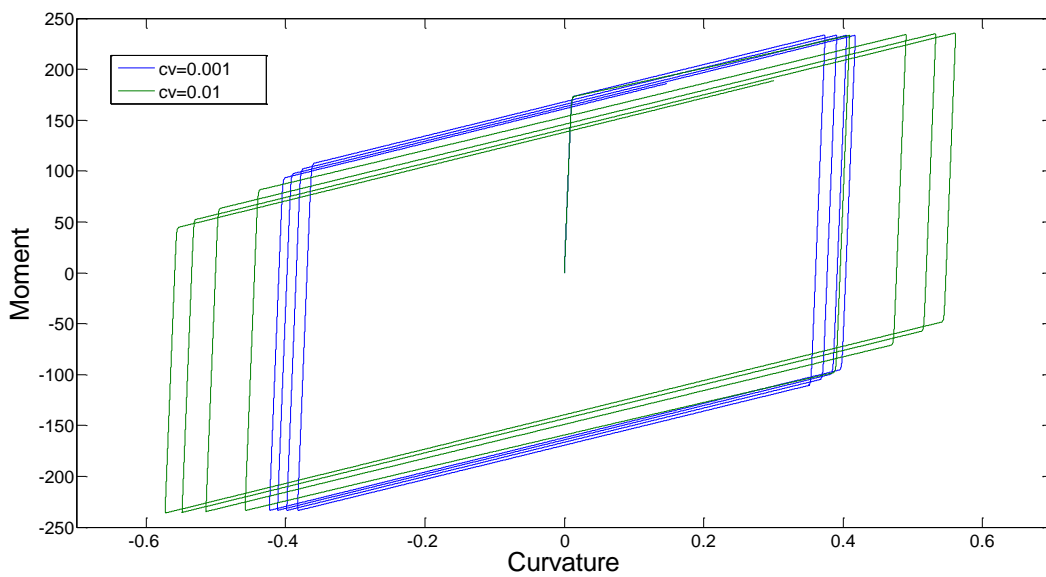
$$e^h = \int (1-a)EIz(t)d\varphi$$

$$e^h = \int (1-a)EAz(t)d\varepsilon$$
(3.22)

Οι συντελεστές  $c_n$  και  $c_v$  είναι θετικοί συντελεστές με συνήθεις τιμές της τάξεως του  $10^{-3}$  έως  $10^{-4}$ . Ακολουθεί παράθεση αποτελεσμάτων αποκρίσεων για διάφορες τιμές των συντελεστών μείωσης της δυσκαμψίας και αντοχής για να γίνει κατανοητή η επιρροή τους. Επίσης αν οι συντελεστές  $c_n$  και  $c_v$  τεθούν ίσοι με τη μονάδα τότε το μοντέλο δεν παρουσιάζει απομειούμενη συμπεριφορά.



Σχ. 3.5 Παράδειγμα βρόχων με απομείωση δυσκαμψίας για διάφορες τιμές του  $c_n$



Σχ. 3.6 Παράδειγμα βρόχων με απομείωση αντοχής για διάφορες τιμές του  $c_v$



### 3.4.2 Στένωση

Όσον αφορά τη στένωση (pinching) στη παρούσα διπλωματική εργασία χρησιμοποιήθηκε το προσομοίωμα του Foliente (1995) [10]. Αυτό βασίστηκε στο προσομοίωμα των Baber-Noori μόνο που τώρα η συσχέτιση των μεταβλητών  $h$  και  $z$  ακολουθεί κατανομή Gauss, αλλά με μέση τιμή  $\bar{z}$  διάφορη του μηδενός. Το φαινόμενο της στένωσης ο Foliente το παρουσίασε εισάγοντας μία νέα παράμετρο στην υστερητική διαφορική εξίσωση η οποία πλέον γίνεται:

$$\dot{z}(t) = h(z) \left\{ 1 - v_s \left| \frac{z}{z_y} \right|^n (\gamma \operatorname{sgn}(z\dot{\phi}) + \beta) \right\} \frac{\dot{\phi}}{n_s} \quad (3.23)$$

Όπου η παράμετρος  $h(z)$  δίνεται από τον τύπο:

$$h = h(z, \operatorname{sgn}(du), e) = 1 - \zeta_1 \exp\left(-\frac{(z \operatorname{sgn}(du) - qz_u)^2}{\zeta_2^2}\right) \quad (3.24)$$

Και είναι:

$$z_u = z_u(e) = q \left( \frac{1}{v(\gamma + \beta)} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (3.25)$$

$$\zeta_1 = \zeta_1(e) = \zeta_{1,0} (1 - \exp(-pe)) \quad (3.26)$$

$$\zeta_2 = \zeta_2(e) = (\psi_0 + \delta_\psi e)(\lambda + \zeta_1(e)) \quad (3.27)$$

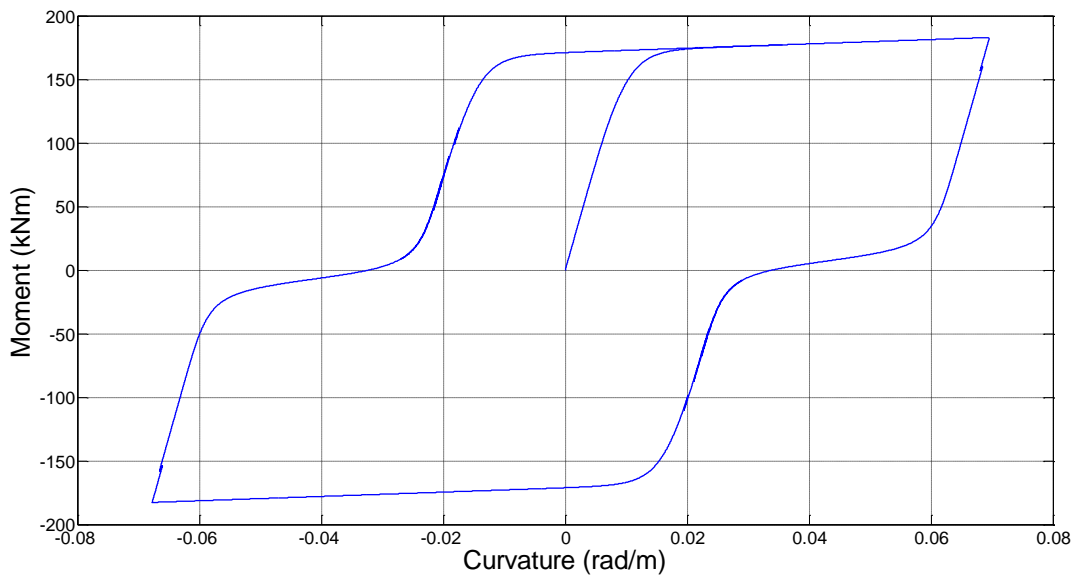
Όσον αφορά τις παραμέτρους των προηγούμενων εξισώσεων αυτές είναι:

- $p$  παράμετρος που ελέγχει την αρχική μείωση της κλίσης,
- $\zeta_{1,0}$  μέτρο της συνολικής ολίσθησης,
- $\psi_0$  παράμετρος η οποία συμβάλλει στο μέγεθος της στένωσης,
- $\delta_\psi$  παράμετρος που καθορίζει την επιθυμητή τιμή της εξάπλωσης της στένωσης.
- $\lambda$  παράμετρος η οποία ελέγχει το ρυθμό αλλαγής του  $\zeta_2$  όπως αλλάζει το  $\zeta_1$
- $q$  σταθερά που θέτει ένα μέρος του  $z_u$  ως το επίπεδο της στένωσης

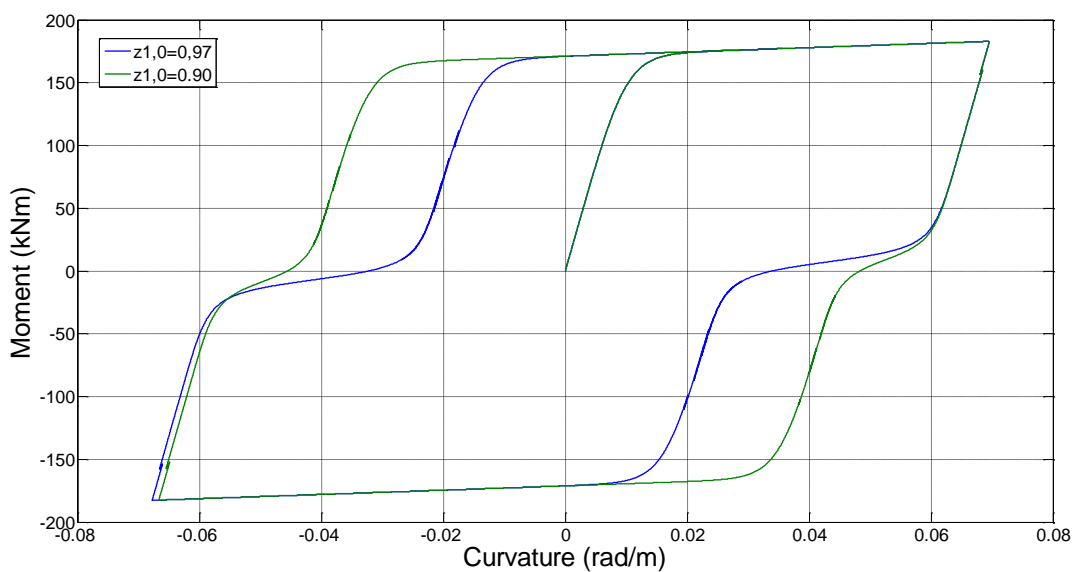
Για  $q=0$  προκύπτει το αρχικό μοντέλο των Baber και Noori (1986). Επίσης  $e$  είναι η ενέργεια που διαχέεται από το υστερητικό ελατήριο.

Οι παράμετροι  $\zeta_1$  και  $\zeta_2$  είναι μη γραμμικές συναρτήσεις της υστερητικής ενέργειας ενώ ισχύει  $0 \leq \zeta_1 < 1$ . Η  $\zeta_1$  ελέγχει το μέγεθος της αρχικής κλίσης, ενώ η  $\zeta_2$  αυξάνει την περιοχή της στένωσης.

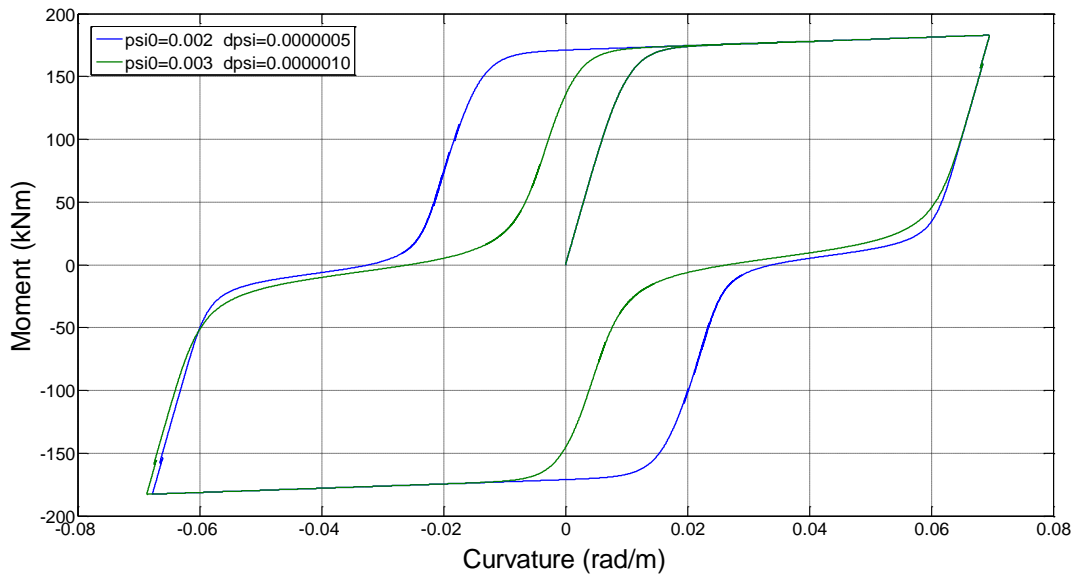
Πιο κάτω παρουσιάζεται ένα παράδειγμα βρόχων που δημιουργούνται εξαιτίας της στένωσης αγνοώντας τα φαινόμενα μείωσης αντοχής και δυσκαμψίας στο σχήμα (Σχ. 3.7) καθώς και παράδειγμα βρόχων και με τα τρία φαινόμενα, στο σχήμα (Σχ. 3.11). Επίσης για διάφορες τιμές των παραμέτρων δίνονται τα διαγράμματα που προκύπτουν



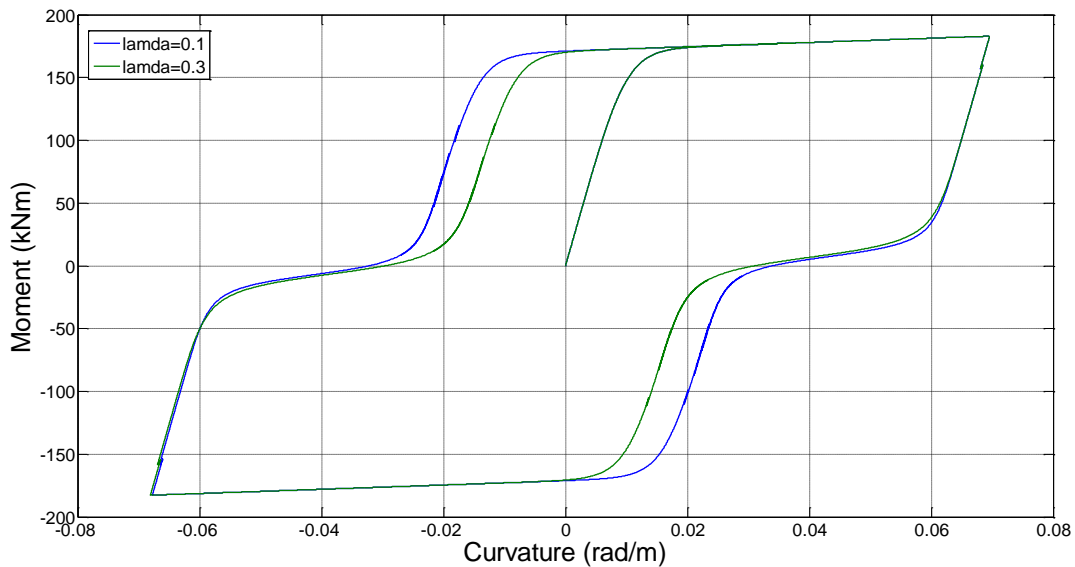
Σχ. 3.7 Παράδειγμα βρόχων με στένωση



Σχ. 3.8 Παράδειγμα βρόχων με στένωση για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\zeta_{1,0}$



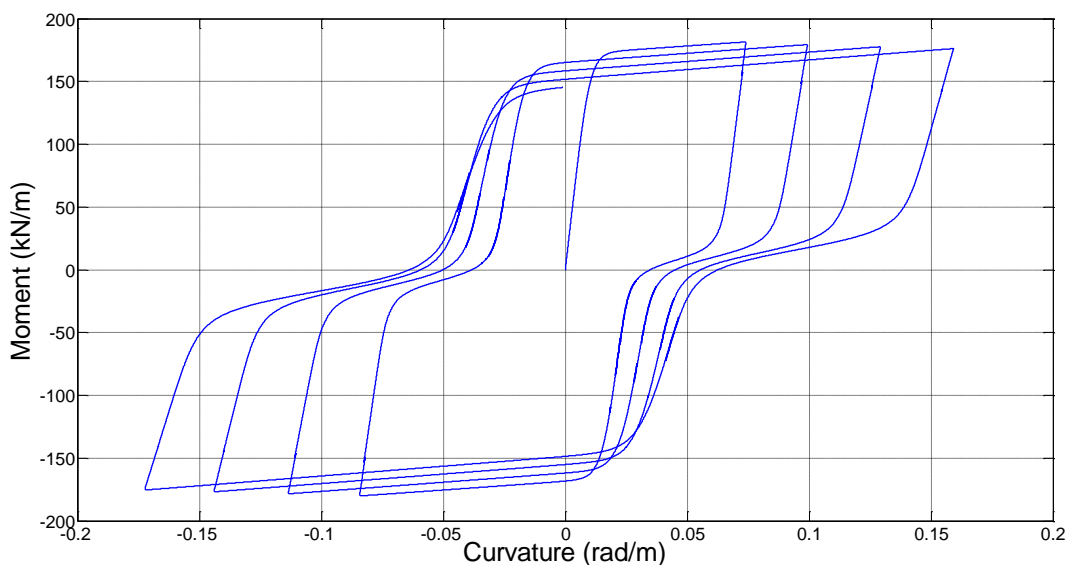
Σχ. 3.9 Παράδειγμα βρόχων με στένωση για διάφορες τιμές των παραμέτρων  $\psi_0$  και  $\delta_\psi$



Σχ. 3.10 Παράδειγμα βρόχων με στένωση για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\lambda$

Για να παραχθούν οι βρόχοι της στένωσης η παράμετρος  $h(z)$  θα πρέπει να παίρνει μικρή τιμή για  $z=0$  και να ελαχιστοποιείται για  $z=q \cdot z_u$ . Όσο η  $z$  αυξάνεται θα πρέπει η  $h(z)$  να πλησιάζει τη τιμή 1. Κατά την αποφόρτιση η  $h(z)$  δεν θα πρέπει να δημιουργεί στένωση ακόμα και για  $z=q \cdot z_u$ . Έτσι η στένωση θα πρέπει να εισάγεται μόνο κατά τη φόρτιση [10]. Τέλος οι τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν αρχικά από τον Foliente ήταν της τάξης του  $\psi=0.2$  και  $\delta\psi=0.002$ . Όμως με αυτές τις τιμές των παραμέτρων οι βρόχοι που προέκυπταν στα παραπάνω

σχήματα ήταν λανθασμένοι. Αυτό συμβαίνει γιατί τα συγκεκριμένα παραδείγματα προέκυψαν από την ανάλυση ενός πλαισίου με χαλύβδινα μέλη ενώ στην αρχική του διατύπωση ο Foliente ασχολήθηκε με ξύλινες κατασκευές. Έτσι αυτές οι παράμετροι που ουσιαστικά πολλαπλασιάζονται με την ενέργεια έπρεπε να πάρουν μικρότερη τιμή αφού η ενέργεια που διαχέεται από μία κατασκευή από χάλυβα είναι μεγαλύτερη από αυτή που διαχέεται σε μία ξύλινη κατασκευή



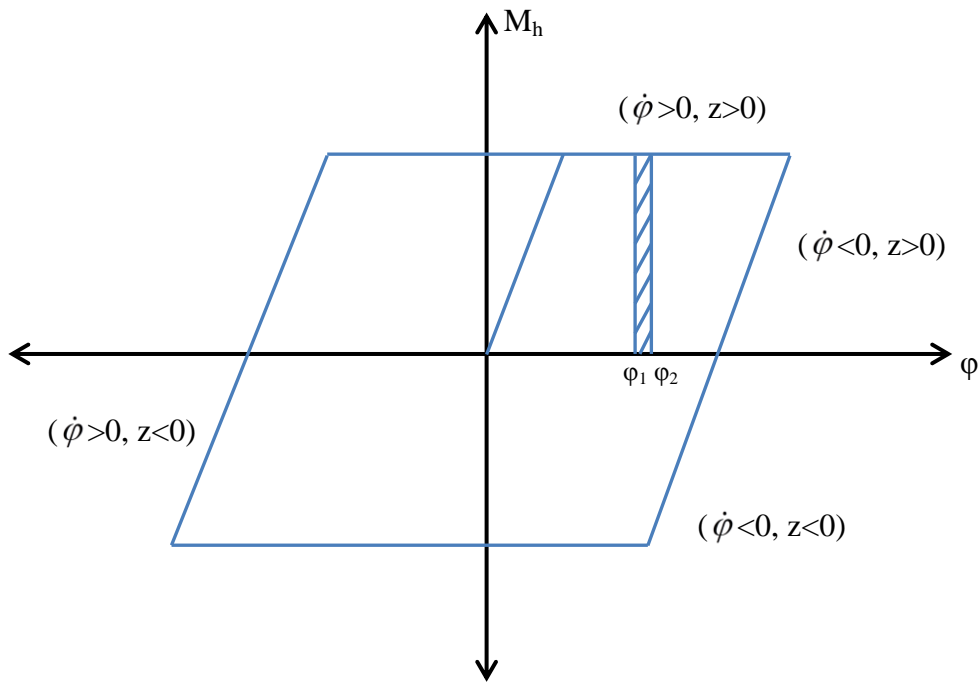
Σχ. 3.11 Παράδειγμα βρόχων με στένωση και απομείωση της δυσκαμψίας και της αντοχής

### 3.4.3 Υστερητική ενέργεια

Ο υπολογισμός της υστερητικής πυκνότητας ενέργειας, δηλαδή της ενέργειας που διαχέεται από το υστερητικό ελατήριο, έγινε με βάση τον υπολογισμό διαδοχικών ορθογωνίων. Η προσέγγιση αυτή επιτρέπεται αφού το βήμα ολοκλήρωσης είναι πολύ μικρό και άρα η απόκλιση από την τιμή της ενέργειας που προκύπτει από αναλυτικούς υπολογισμούς είναι μικρή.

Κατά τη διάρκεια κάθε χρονικού βήματος υπολογίζονται η τρέχουσα καμπυλότητα  $\varphi_2$ , η τρέχουσα μεταβολή της καμπυλότητας  $\dot{\varphi}_2$  ως προς το χρόνο και εισάγονται ως γνωστά μεγέθη η καμπυλότητα  $\varphi_1$  και η μεταβολή της καμπυλότητας  $\dot{\varphi}_1$  του προηγούμενου βήματος. Επίσης υπολογίζεται η υστερητική ροπή  $Mh$  και ακολούθως η υστερητική ενέργεια ως το εμβαδόν του ορθογωνίου  $Mh^*(\varphi_2 - \varphi_1)$  όπως φαίνεται στο σχήμα (Σχ.3.7).

Οι εξισώσεις για τον υπολογισμό της υστερητικής ενέργειας όπως ενσωματώθηκαν στο προτεινόμενο πεπερασμένο στοιχείο δοκού παρατίθενται στο τέλος του επόμενου κεφαλαίου.



Σχ. 3.12 Υπολογισμός υστερητικής πυκνότητας ενέργειας



# 4

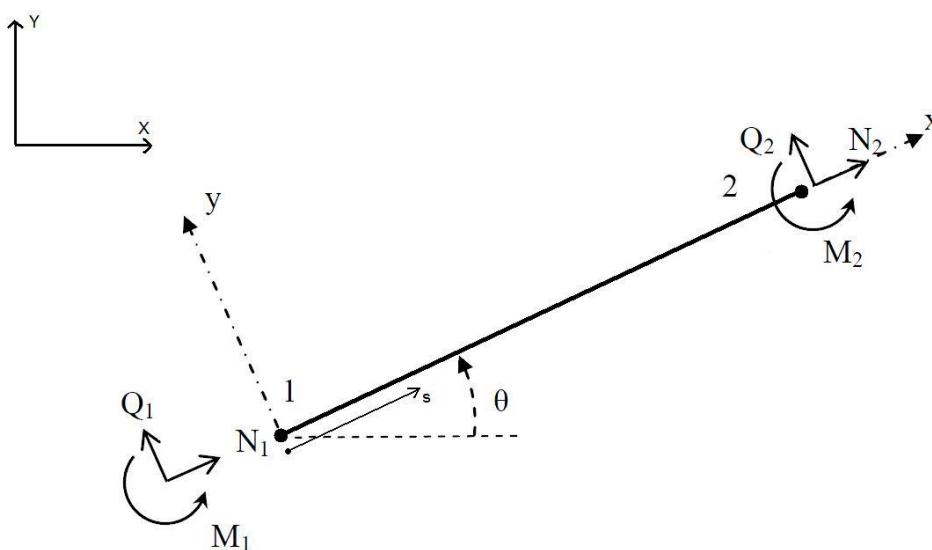
---

## ΤΟ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ

Ακολουθεί η ανάπτυξη στοιχείου δοκού με βάση τη θεωρία των Πεπερασμένων Στοιχείων, κατάλληλο για τη μη γραμμική δυναμική ανάλυση των κατασκευών [7]. Εισάγονται νέοι υστερητικοί βαθμοί ελευθερίας οι οποίοι υπόκεινται στις εξελικτικές εξισώσεις τύπου Bouc-Wen. Αυτοί οι νέοι βαθμοί ελευθερίας θεωρούνται ως υστερητικές καμπυλότητες και υστερητικές κεντρικές αξονικές παραμορφώσεις. Με βάση την αρχή των δυνατών έργων παράγεται μία σχέση για τα ελαστοπλαστικά υστερητικά μητρώα ακαμψίας, η οποία μαζί με τις εξελικτικές εξισώσεις αρκούν για να περιγράψουν πλήρως τη συμπεριφορά του στοιχείου. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τη μέθοδο άμεσης ακαμψίας μορφώνονται το μητρώο μάζας και το μητρώο απόσβεσης της κατασκευής, καθώς και μέρος του μητρώου ακαμψίας και του υστερητικού μητρώου και τέλος μορφώνονται οι εξισώσεις κίνησης. Το σύστημα των εξισώσεων, δηλαδή οι γραμμικές εξισώσεις κίνησης σε επίπεδο κατασκευής και οι μη γραμμικές υστερητικές εξισώσεις σε επίπεδο στοιχείου, έρχεται σε μορφή χώρου κατάστασης (state space form) για να επιλυθεί ταυτόχρονα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ολοκλήρωσης κατά τον αλγόριθμο Livermore. Με αυτό τον τρόπο αποφεύγεται η γραμμικοποίηση των εξισώσεων στο καθολικό επίπεδο της κατασκευής.

#### 4.1 ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Οι επικόμβιες δυνάμεις του πρισματικού στοιχείου δοκού, το οποίο είναι μέρος μιας πλαισιωτής κατασκευής φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



Σχ.4.1 Στοιχείο δοκού



Η ανελαστική σχέση ροπών-καμπυλοτήτων σε μία διατομή σε απόσταση  $s$  από το άκρο, ακολουθεί τον παρακάτω νόμο:

$$M(s,t) = M_y \left[ a \frac{\varphi(s,t)}{\varphi_y} + (1-a) \frac{z(s,t)}{\varphi_y} \right] = aEI\varphi(s,t) + (1-a)EIz(s,t) \quad (4.1)$$

Όπου:

- $M(s,t)$  είναι η εσωτερική ροπή,
- $\varphi$  η καμπυλότητα,
- $E$  και  $I$  το μέτρο ελαστικότητας και η ροπή αδρανείας της διατομής αντίστοιχα,
- $EI$  η αρχική ακαμψία,
- $z(s,t)$  το υστερητικό κομμάτι της καμπυλότητας

Η υστερητική εξίσωση είναι η ακόλουθη μη γραμμική διαφορική εξίσωση [7]:

$$\dot{z}(s,t) = \dot{\varphi} \left[ 1 - \left| \frac{z}{z_y} \right|^n (\beta + \gamma \operatorname{sgn}(z\dot{\varphi})) \right] \quad (4.2)$$

και εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της υστερητικής καμπυλότητας σε σχέση με το ρυθμό μεταβολής της καμπυλότητας επί ένα μη γραμμικό συντελεστή.

Σύμφωνα με την παραδοχή Euler-Bernulli ισχύει η παρακάτω σχέση καμπυλοτήτων-βυθίσεων

$$\varphi = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \quad (4.3)$$

όπου  $w$  η βύθιση της διατομής. Αντικαθιστώντας τη σχέση (4.3) στη (4.1) προκύπτει η ακόλουθη έκφραση:

$$\begin{aligned} M(s,t) &= EI\tilde{\varphi}(s,t) \\ \tilde{\varphi}(s,t) &= a \frac{\partial^2 w(s,t)}{\partial s^2} + (1-a)z(s,t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

όπου η  $\tilde{\varphi}(s,t)$  μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μέτρο της ‘ισοδύναμης γενικευμένης καμπυλότητας’ σε δεδομένο σημείο  $s$  κατά μήκος της δοκού

Ομοίως όσον αφορά τις αξονικές παραμορφώσεις μπορεί να γραφεί:

$$\begin{aligned}
 N(s,t) &= E\tilde{\varepsilon}_0(s,t) \\
 \tilde{\varepsilon}_0(s,t) &= a_u \frac{\partial u(s,t)}{\partial s} + (1-a_u)z_u(s,t)
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

Όπου  $\tilde{\varepsilon}_0$  είναι η γενικευμένη κεντρική αξονική παραμόρφωση παρόμοια με την γενικευμένη καμπυλότητα,  $N$  είναι η αξονική δύναμη και  $z_u$  είναι η αξονική υστερητική παραμόρφωση όμοια με την υστερητική καμπυλότητα. Η αντίστοιχη υστερητική εξίσωση [7] είναι:

$$\dot{z}_u(s,t) = \dot{\varepsilon}_0 \left[ 1 - \left| \frac{z_u}{\varepsilon_{0,y}} \right|^n (\beta + \gamma \operatorname{sgn}(z \cdot \dot{\varepsilon}_0)) \right]
 \tag{4.6}$$

Η παράμετροι  $a$  και  $a_u$  εξαρτώνται από το υλικό της κατασκευής και μπορούν να προσδιορισθούν μετά από κατάλληλες δοκιμές. Επίσης αν δεν υπάρχουν λεπτομερείς πληροφορίες για αυτές τις παραμέτρους, τότε μπορούν να πάρουν την ίδια τιμή. Αν τεθούν ίσες με τη μονάδα τότε το στοιχείο θα συμπεριφερθεί ελαστικά και δεν θα ληφθεί υπόψη η υστερητική συμπεριφορά.

## 4.2 ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Χρησιμοποιώντας κυβικές πολυωνυμικές συναρτήσεις παρεμβολής για το πεδίο των μετατοπίσεων προκύπτει η ακόλουθη σχέση [7]:

$$\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & N_4 & 0 & N_5 & N_6 \end{bmatrix} \{d\}
 \tag{4.7}$$

Όπου το διάνυσμα των επικόμβιων μετατοπίσεων  $\{d\}$  ορίζεται ως:

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}
 \tag{4.8}$$

Οι αντίστοιχες συναρτήσεις σχήματος είναι [7]:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= 1 - \frac{s}{L} \\
 N_2 &= \frac{s}{L} \\
 N_3 &= 1 - \frac{3s^2}{L^2} + 2\frac{s^3}{L^3} \\
 N_4 &= s - \frac{2s^2}{L} + \frac{s^3}{L^2} \\
 N_5 &= \frac{3s^2}{L^2} - 2\frac{s^3}{L^3} \\
 N_6 &= -\frac{s^2}{L} + \frac{s^3}{L^2}
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Σύμφωνα με την εξίσωση (4.3) και χρησιμοποιώντας την (4.7) η ολική καμπυλότητα  $\varphi$  μπορεί να γραφτεί ως :

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 & N_{3,ss} & N_{4,ss} & 0 & N_{5,ss} & N_{6,ss} \end{bmatrix} \{d\} = [B_b(s)] \{d\} \tag{4.10}$$

όπου το σύμβολο  $_{,ss}$  δηλώνει διπλή παραγωγή ως προς τη μεταβλητή  $s$  δηλαδή:

$$\varphi(s) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{6}{L^2} + \frac{12s}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6s}{L^2} & 0 & \frac{6}{L^2} - \frac{12s}{L^3} & -\frac{2}{L} + \frac{6s}{L^2} \end{bmatrix} \{d\} \tag{4.11}$$

Επιπρόσθετα αφού οι ροπές στα άκρα του στοιχείου ( $M_1$  και  $M_2$ ) είναι σε ισορροπία και δεν υπάρχει ενδιάμεση δύναμη, η εσωτερική ροπή σε διατομή σε απόσταση  $s$  από το άκρο είναι:

$$M(s,t) = (1 - \frac{s}{L})M_1 + \frac{s}{L}M_2 \tag{4.12}$$

Επίσης από τη σχέση (4.4) συνεπάγεται:

$$\tilde{\varphi}(s,t) = (1 - \frac{s}{L})\tilde{\varphi}_1 + \frac{s}{L}\tilde{\varphi}_2 \tag{4.13}$$

Το πεδίο των υστερητικών καμπυλοτήτων παρεμβάλλεται χρησιμοποιώντας τις παρακάτω συναρτήσεις σχήματος [7]:

$$\begin{aligned} N_7 &= 1 - \frac{s}{L} \\ N_8 &= \frac{s}{L} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Και άρα:

$$z_\varphi = [N_7 \quad N_8] \begin{Bmatrix} z_1^b \\ z_2^b \end{Bmatrix} = [N]_z^b \begin{Bmatrix} z_1^b \\ z_2^b \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

Τέλος αντικαθιστώντας τις (4.7) και (4.15) στη (4.4) προκύπτει:

$$\tilde{\varphi} = a [0 \quad N_{2,ss} \quad N_{3,ss} \quad 0 \quad N_{5,ss} \quad N_{6,ss}] \{d\} + (1-a) [N_7 \quad N_8] \begin{Bmatrix} z_1^b \\ z_2^b \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

Ομοίως η αξονική παραμόρφωση είναι:

$$\varepsilon_0 = [N_{1,s} \quad 0 \quad 0 \quad N_{2,s} \quad 0 \quad 0] \{d\} = [B_u(s)] \{d\} \quad (4.17)$$

Και το αντίστοιχο υστερητικό μέρος προκύπτει ως:

$$z_u = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1^u \\ z_2^u \end{Bmatrix} = [N_z^u] \begin{Bmatrix} z_1^u \\ z_2^u \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

Με [7]:

$$\begin{aligned} N_9 &= -\frac{1}{L} \\ N_{10} &= \frac{1}{L} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.18) και (4.19) στη (4.5) προκύπτει η ακόλουθη σχέση όμοια με τη (4.16):

$$\tilde{\varepsilon}_0 = \alpha [N_{1,s} \quad 0 \quad 0 \quad N_{2,s} \quad 0 \quad 0] \{d\} + (1-\alpha) [N_9 \quad N_{10}] \begin{Bmatrix} z_1^u \\ z_2^u \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

### 4.3 ΒΑΣΙΚΗ ΣΧΕΣΗ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

Λαμβάνοντας υπόψη την αρχή των δυνατών έργων και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.1) ύστερα από υπολογισμούς [7] προκύπτει η ακόλουθη θεμελιώδης μητρική σχέση του στοιχείου:

$$\begin{bmatrix} \frac{a_u EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{a_u EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{(1-a_u)EA}{2} & -\frac{(1-a_u)EA}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12aEI}{L^3} & \frac{6aEI}{L^2} & 0 & -\frac{12aEI}{L^3} & \frac{6aEI}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{(1-a)EI}{L} & \frac{(1-a)EI}{L} \\ 0 & \frac{6aEI}{L^2} & \frac{4aEI}{L} & 0 & -\frac{6aEI}{L^2} & \frac{2aEI}{L} & 0 & 0 & -(1-a)EI & 0 \\ -\frac{a_u EA}{L} & 0 & 0 & \frac{a_u EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{(1-a_u)EA}{2} & -\frac{(1-a_u)EA}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12aEI}{L^3} & -\frac{6aEI}{L^2} & 0 & \frac{12aEI}{L^3} & -\frac{6aEI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{(1-a)EI}{L} & -\frac{(1-a)EI}{L} \\ 0 & \frac{6aEI}{L^2} & \frac{2aEI}{L} & 0 & -\frac{6aEI}{L^2} & \frac{4aEI}{L} & 0 & 0 & 0 & (1-a)EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \{z_u\} \\ \{z_b\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

Η παραπάνω σχέση εμπεριέχει την ελαστική και την υστερητική συμπεριφορά του στοιχείου, όπου στα πλαίσια των μικρών μετατοπίσεων οι αξονικοί βαθμοί ελευθερίας είναι ασύζευκτοι ως προς τους καμπτικούς και τους διατμητικούς. Επιπρόσθετα μπορεί να γραφτεί πιο διακριτά στην εξής μορφή:

$$\{f\} = \alpha [k] \{d\} + (1-\alpha) [h] \{z\} \quad (4.22)$$

όπου ο πρώτος όρος του αθροίσματος αντιπροσωπεύει την ελαστική συμπεριφορά με βάση τη μειωμένη δυσκαμψία και ο δεύτερος όρος την υστερητική. Είναι φανερό ότι στην περίπτωση που  $\alpha=1$  απαλείφονται οι υστερητικοί βαθμοί ελευθερίας και παραμένει το ελαστικό μητρώο δυσκαμψίας της δοκού.

Έχουμε λοιπόν ορίσει το ελαστικό μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου  $[k]$  (6x6) και το υστερητικό  $[h]$  (6x4). Τα βασικά αυτά μητρώα ορίζονται σε επίπεδο στοιχείου και υπολογίζονται μία φορά στην αρχή της ανάλυσης χωρίς να απαιτείται επαναυπολογισμός τους, σε

αντίθεση με τις κλασικές επαυξητικές μεθόδους όπου σε κάθε επαυξητικό βήμα το μητρώο δυσκαμψίας εξαρτάται από το επίπεδο της πλαστικοποίησης στο αμέσως προηγούμενο βήμα.

$$a[k] = \begin{bmatrix} \frac{aEA}{L} & 0 & 0 & -\frac{aEA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12aEI}{L^3} & \frac{6aEI}{L^2} & 0 & -\frac{12aEI}{L^3} & \frac{6aEI}{L^2} \\ 0 & \frac{6aEI}{L^2} & \frac{4aEI}{L} & 0 & -\frac{6aEI}{L^2} & \frac{2aEI}{L} \\ -\frac{aEA}{L} & 0 & 0 & \frac{aEA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12aEI}{L^3} & -\frac{6aEI}{L^2} & 0 & \frac{12aEI}{L^3} & -\frac{6aEI}{L^2} \\ 0 & \frac{6aEI}{L^2} & \frac{2aEI}{L} & 0 & -\frac{6aEI}{L^2} & \frac{4aEI}{L} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$(1-a)[h] = \begin{bmatrix} \frac{-(1-a)EA}{2} & \frac{-(1-a)EA}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(1-a)EI}{L} & \frac{(1-a)EI}{L} \\ 0 & 0 & -(1-a)EI & 0 \\ \frac{-(1-a)EA}{2} & \frac{-(1-a)EA}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-a)EI}{L} & -\frac{(1-a)EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & -(1-a)EI \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

#### 4.4 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΣΕ ΚΑΘΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Οι μετατοπίσεις των άκρων του στοιχείου στο καθολικό σύστημα δίνονται από την ακόλουθη σχέση:

$$\{d\} = [\Lambda]\{u\} \quad (4.25)$$

Όπου  $[\Lambda]$  είναι το δισδιάστατο μητρώο μετασχηματισμού:

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

και  $\theta$  είναι η γωνία μεταξύ του καθολικού άξονα και του τοπικού άξονα του στοιχείου.

Ομοίως οι δυνάμεις στα άκρα του στοιχείου στο καθολικό σύστημα σχετίζονται με αυτές στο τοπικό μέσω της σχέσης:

$$\{F\} = [\Lambda]\{f\} \quad (4.27)$$

Συμπερασματικά η εξίσωση (4.22) γράφεται ως εξής:

$$\{F\} = \alpha [\Lambda]^T [k][\Lambda]\{u\} + (1-\alpha)[\Lambda]^T [h]\{z\} \quad (4.28)$$

## 4.5 ΕΞΕΛΙΚΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Η εξίσωση (4.2) με βάση την (4.11) και τους μετασχηματισμούς σε καθολικές συντεταγμένες μπορεί να εκφρασθεί με όρους επικόμβιων ταχυτήτων ως εξής:

$$\dot{z}_b(s,t) = \left( 1 - \left| \frac{z(s,t)}{z_y} \right|^n (\beta + \gamma \operatorname{sgn}(z(s,t)[B_b(s)][\Lambda]\{\dot{u}\})) \right) [B_b(s)][\Lambda]\{\dot{u}\} \quad (4.29)$$

Από την οποία προκύπτουν για κάθε άκρο της δοκού:

$$\dot{z}_1^b(t) = \left( 1 - \left| \frac{z_1^b(t)}{z_y} \right|^n (\beta + \gamma \operatorname{sgn}(z_1^b(t) [B_b(0)] [\Lambda] \{\dot{u}\})) \right) [B_b(0)] [\Lambda] \{\dot{u}\} \quad (4.30\alpha)$$

$$\dot{z}_2^b(t) = \left( 1 - \left| \frac{z_2^b(t)}{z_y} \right|^n (\beta + \gamma \operatorname{sgn}(z_2^b(t) [B_b(L)] [\Lambda] \{\dot{u}\})) \right) [B_b(L)] [\Lambda] \{\dot{u}\} \quad (4.30\beta)$$

Όπου:

$$\begin{aligned} [B_b(0)] &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{6}{L^2} & -\frac{4}{L} & 0 & \frac{6}{L^2} & -\frac{2}{L} \end{bmatrix} \\ [B_b(L)] &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & 0 & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Παρόμοιες σχέσεις ισχύουν και για την ανελαστική αξονική συνιστώσα όπου για κάθε άκρο της δοκού έχουμε:

$$\dot{z}_1^u(t) = \left( 1 - \left| \frac{z_1^u(t)}{z_y} \right|^n (\beta + \gamma \operatorname{sgn}(z_1^u(t) [B_u(0)] [\Lambda] \{\dot{u}\})) \right) [B_u(0)] [\Lambda] \{\dot{u}\} \quad (4.32\alpha)$$

$$\dot{z}_2^u(t) = \left( 1 - \left| \frac{z_2^u(t)}{z_y} \right|^n (\beta + \gamma \operatorname{sgn}(z_2^u(t) [B_u(L)] [\Lambda] \{\dot{u}\})) \right) [B_u(L)] [\Lambda] \{\dot{u}\} \quad (4.32\beta)$$

Όπου:

$$\begin{aligned} [B_u(0)] &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [B_u(L)] &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.33)$$



Οι υστερητικές εξισώσεις των σχέσεων (4.30α), (4.30β), (4.32α) και (4.32β) περιγράφουν επαρκώς τη μη γραμμική συμπεριφορά του στοιχείου δοκού. Επίσης οι υστερητικές εξισώσεις βασίζονται στις ταχύτητες των κόμβων του κάθε στοιχείου και έτσι αντιμετωπίζονται ξεχωριστά και παράλληλα σε επίπεδο στοιχείου για ένα συγκεκριμένο διάνυσμα επικόμβιων ταχυτήτων. Αυτό είναι και ένα σημαντικό βήμα στην ενσωμάτωση των εξισώσεων των υστερητικών προσομοιωμάτων στη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων [7].

Επίσης πρέπει να αναφέρουμε ότι η μεθοδολογία που αναφέρθηκε μπορεί να εφαρμοσθεί με οποιοδήποτε ομαλό υστερητικό προσομοίωμα όπως είναι και το προσομοίωμα των Sivaselvan – Reinhorn. Αυτό συμβαίνει γιατί η επιλογή του προσομοιώματος δεν επηρεάζει τις εξισώσεις κίνησης αφού οι υστερητικές εξισώσεις εισάγονται σε επίπεδο στοιχείου.

#### 4.6 ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΙΝΗΣΗΣ

Η δυναμική εξίσωση κίνησης ενός πολυβάθμιου συστήματος είναι:

$$[M]_s \{\ddot{U}\} + [C]_s \{\dot{U}\} + [K]_s \{U\} + [H]_s \{Z\} = \{P(t)\} \quad (4.34)$$

Όπου:

- $[M]_s$  είναι το μητρώο μάζας
- $[C]_s$  είναι το μητρώο απόσβεσης
- $[K]_s$  το μητρώο ακαμψίας

τα παραπάνω μητρώα είναι τετραγωνικά με διαστάσεις ( $n_f \times n_f$ ) όπου  $n_f$  είναι οι συνολικοί βαθμοί ελευθερίας του συστήματος.

- $[H]_s$  είναι το υστερητικό μητρώο της κατασκευής, είναι ορθογωνικό διαστάσεων ( $n_f \times 4n_{el}$ ) όπου  $n_{el}$  είναι το πλήθος των στοιχείων.
- $\{P(t)\}$  είναι το διάνυσμα των εξωτερικών δυνάμεων με ( $n_f \times 1$ ) στοιχεία.
- Τα διανύσματα  $\{U\}$  και  $\{Z\}$  έχουν διαστάσεις ( $n_f \times 1$ ) και ( $4n_{el} \times 1$ ) αντίστοιχα.

Τα μητρώα αυτά μορφώνονται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο άμεσης ακαμψίας, Bathe (2007) [15] όπου το μητρώο ακαμψίας  $[K]_s$  περιέχει μόνο το ελαστικό μέρος της (3.15) ενώ το  $[H]_s$  μόνο το υστερητικό μέρος. Επιπλέον το υστερητικό μητρώο της κατασκευής μορφώνεται από την προσάρτηση των υστερητικών μητρώων των μελών εκφρασμένα στο καθολικό σύστημα. Το μητρώο απόσβεσης  $[C]_s$  είναι της μορφής ενός μητρώου απόσβεσης Rayleigh, Chopra (2006) [16]. Επιπρόσθετα το μητρώο μάζας  $[M]_s$  μπορεί να είναι είτε το διαγώνιο μητρώο με συγκεντρωμένες μάζες (lumped mass diagonal matrix) είτε το πλήρες μητρώο μάζας (consistent mass matrix), Bathe (2007) [15].

$$[M]_s = \frac{\bar{m}L}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

(Consistent Mass Matrix)

## 4.7 ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

Εισάγοντας ως επίσης άγνωστο το διάνυσμα των επικόμβιων ταχυτήτων  $\{\dot{U}\}$  η δυναμική εξίσωση κίνησης (4.34) μπορεί να γραφτεί σε μορφή χώρου κατάστασης (state-space form) ως  $2n_f$  γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης:

$$\begin{Bmatrix} \{\dot{U}\} \\ \{\ddot{U}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] & -[M]^{-1}[H] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{\dot{U}\} \\ \{Z\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \{P(t)\} \end{Bmatrix} \quad (4.36)$$

Αυτές συνδέονται με τις μη γραμμικές υστερητικές εξισώσεις (πλήθους  $2 n_{el}$ ) της μορφής:

$$\{\dot{Z}\} = f(\{\dot{U}\}, \{Z\}) \quad (4.37)$$

οι οποίες με τη σειρά τους αναλύονται περισσότερο σε 2  $n_{el}$  ζευγάρια εξισώσεων σύμφωνα με τις σχέσεις (4.30α) και (4.30β).

Σε επίπεδο μικρών μετατοπίσεων η εξίσωση (4.36) εμπεριέχει τα καθολικά μητρώα του συστήματος τα οποία ορίζονται στην αρχή της ανάλυσης και παραμένουν σταθερά κατά τη διάρκεια της επίλυσης.

Όμως το παραπάνω σύστημα δεν οδηγεί σε αναλυτική λύση και πρέπει να γραφεί σαν μία ομάδα μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Αυτό επιτυγχάνεται γράφοντας την εξίσωση (3.28) στην ακόλουθη μορφή:

$$\{\dot{x}\} = G(\{x\}) + \{P(t)\} \quad (4.38)$$

Το διάνυσμα  $\{x\}$  ορίζεται ως:

$$\{x\}^T = \left[ \{U\}^T \quad \{\dot{U}\}^T \quad \{Z\}^T \right] \quad (4.39)$$

Και είναι:

$$G(\{x\}) = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ [M]^{-1}[K] & [M]^{-1}[C] & [M]^{-1}[H] \\ 0 & Y(\{\dot{U}\}, \{Z\}) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Στον πιο πάνω τύπο (4.40) το  $Y$  εμπεριέχει τις υστερητικές εξισώσεις για κάθε στοιχείο  $i$ .

$$Y_j^i(\{\dot{u}\}^i, \{z\}^i) = \left( 1 - \left| \frac{z_j(t)}{z_y} \right|^n \left( \beta + \gamma \operatorname{sgn}(z_j(t)[B]_j[\Lambda]\{\dot{u}\}) \right) \right) [B]_j[\Lambda]\{\dot{u}\}^i \quad (4.41)$$

Έτσι το σύστημα των εξισώσεων για δοσμένο δυναμικό φορτίο και έχοντας τις αρχικές συνθήκες στο διάνυσμα  $\{x\}$ , μπορεί να επιλυθεί χρησιμοποιώντας τους αλγορίθμους Livermore ή κατά Runge-Kutta.

Κατά την επίλυση του συστήματος χρησιμοποιήθηκε η εντολή της γλώσσας προγραμματισμού Matlab, ode15s. Μέσω της ode15s υλοποιούνται όσα αναφέρονται παραπάνω και υπάρχει η δυνατότητα καθορισμού του εύρους σύγκλισης και με τον τρόπο αυτό να βελτιωθεί περαιτέρω η ακρίβεια επίλυσης. Συγκεκριμένα τα στοιχεία που δίνονται από το χρήστη είναι:

Η ποσότητα RelTol, η οποία είναι ένα μέτρο για το σχετικό λάθος του μεγέθους κάθε συντελεστή της επίλυσης. Η ποσότητα αυτή ελέγχει δηλαδή τον αριθμό των σωστών ψηφίων, εκτός από τα ψηφία τα οποία είναι μικρότερα από το κατώφλι που ορίζεται από την ποσότητα AbsTol.

Το AbsTol είναι η ποσότητα εκείνη κάτω από την οποία η τιμή της ν-οστής λύσης δεν είναι σημαντική. Η ποσότητα αυτή καθορίζει την ακρίβεια όταν η λύση πλησιάζει το μηδέν και είναι διάνυσμα, το μήκος του οποίου πρέπει να είναι ίσο με το μήκος του διανύσματος των αγνώστων.

## 4.8 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΥΣΤΕΡΗΤΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Ο υπολογισμός της ενέργειας που διαχέεται από το υστερητικό ελατήριο γίνεται σε κάθε χρονικό βήμα ως εξής για κάθε άκρο του στοιχείου δοκού:

Αρχικά υπολογίζεται η τρέχουσα καμπυλότητα στο άκρο:

$$\varphi_2 = Bb * [\Lambda] * \{u\} \quad (4.42)$$

όπου το μητρώο  $Bb$  (με διαστάσεις  $1 \times 6$ ) δίνεται από τη σχέση (4.31) ανάλογα αν αναφερόμαστε στον αρχικό ή στον τελικό κόμβο του στοιχείου,  $[\Lambda]$  το μητρώο μετασχηματισμού του μέλους (με διαστάσεις  $6 \times 6$ ) και  $\{u\}$  διάνυσμα διαστάσεων  $(6 \times 1)$  με τις επικόμβιες μετατοπίσεις.

Επίσης η τρέχουσα μεταβολή της καμπυλότητας ως προς το χρόνο είναι:

$$\dot{\varphi}_2 = Bb^*[\Lambda]^*\{\dot{u}\} \quad (4.43)$$

όπου  $\{\dot{u}\}$  διάνυσμα επικόμβιων ταχυτήτων διαστάσεων (6x1).

Η υστερητική ροπή υπολογίζεται ως:

$$M_h = (1 - \alpha)EIz^b \quad (4.44)$$

όπου  $z^b$  η υστερητική καμπυλότητα του άκρου.

Επίσης σε κάθε χρονικό βήμα συγκρατείται η προηγούμενη τιμή της καμπυλότητας  $\varphi_1$

Ακολουθως ανάλογα με το πρόσημο της μεταβολής της καμπυλότητας  $\dot{\varphi}_2$  και της υστερητικής καμπυλότητας (Σχ. 3.7) υπολογίζεται η υστερητική ενέργεια έτσι ώστε να είναι θετική ποσότητα.

$$E_h = |M_h^*(\varphi_2 - \varphi_1)| \quad (4.45)$$

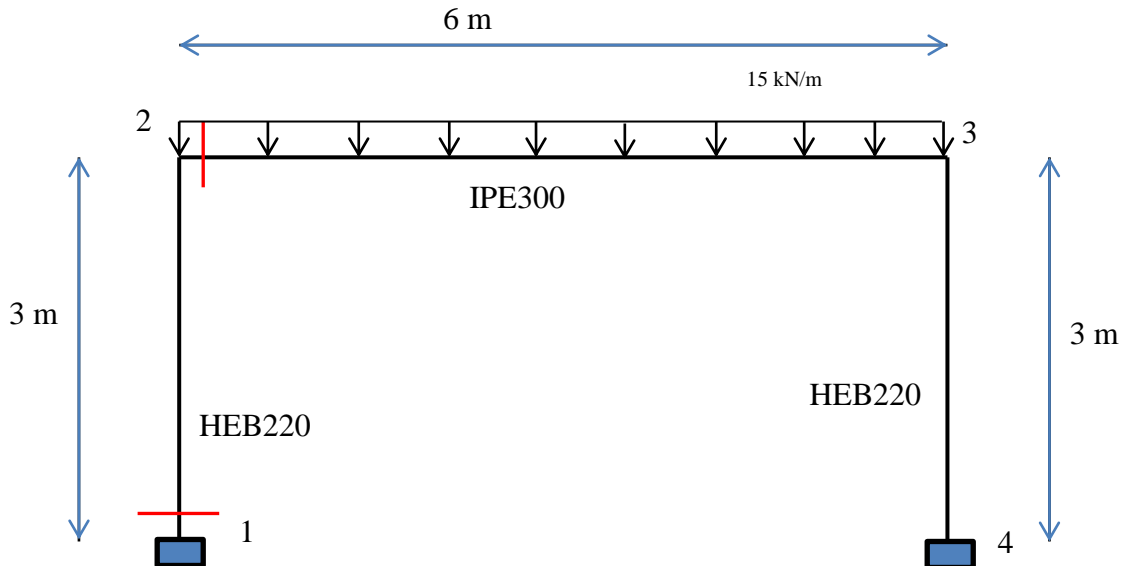


# 5

---

## ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΑΝΑΛΥΣΕΙΣ

Σαν πρώτη εφαρμογή θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά ενός τυπικού πλαισίου με τις διαστάσεις που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Τα χαρακτηριστικά των διατομών δίδονται πιο κάτω. Οι τιμές των παραμέτρων της επίλυσης για κάθε σεισμό φαίνονται στους αρχικούς πίνακες για κάθε σεισμό. Η χρονοϊστορία της σεισμικής διέγερσης παρουσιάζεται στο πρώτο σχήμα κάθε φορά. Οι μονάδες της επιτάχυνσης είναι σε g. Κατά τη διάρκεια των σεισμών η κατασκευή συμπεριφέρθηκε ελαστικά. Γι' αυτό επακολούθησαν νέες αναλύσεις με τα μεγέθη σεισμικής έντασης πολλαπλασιασμένα με κατάλληλο συντελεστή κάθε φορά έτσι ώστε να υπάρξει διαρροή. Ακολουθούν τα αποτελέσματα και πιο συγκεκριμένα η χρονοϊστορίες μετατόπισης του κόμβου 2 καθώς και διαγράμματα ροπών καμπυλοτήτων χαρακτηριστικών διατομών.



Σχ.5.1 Τυπικό πλαίσιο

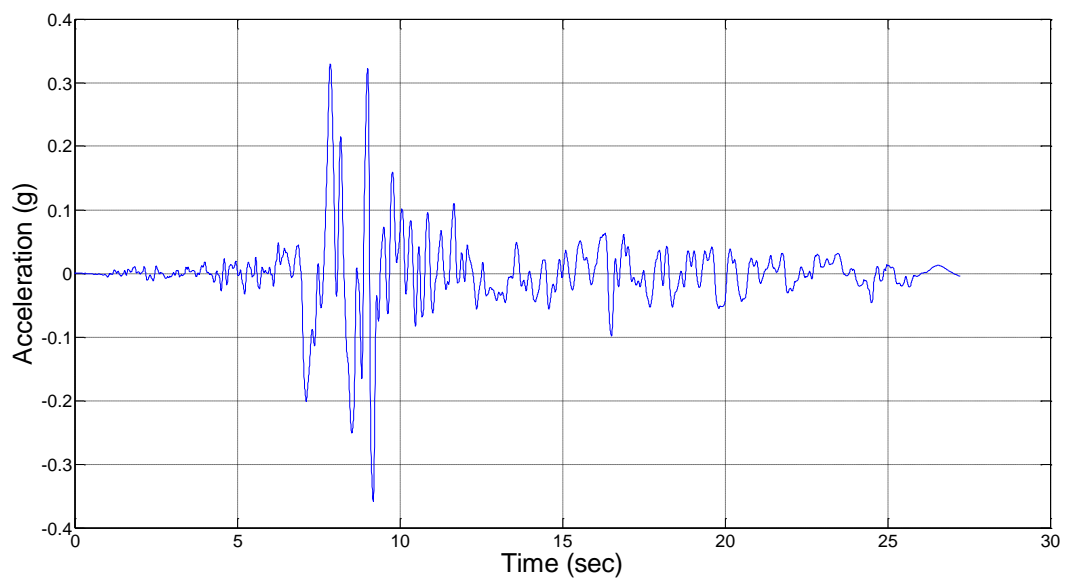
ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΠΛΑΙΣΙΟΥ	
Διατομές Μελών 1,3	HEB220
Διατομή Μέλους 2	IPE300
Ροπή Διαρροής HEB220	172.8 kNm
Ροπή Διαρροής IPE300	130.9 kNm
Κατανεμημένο φορτίο	15 kN/m



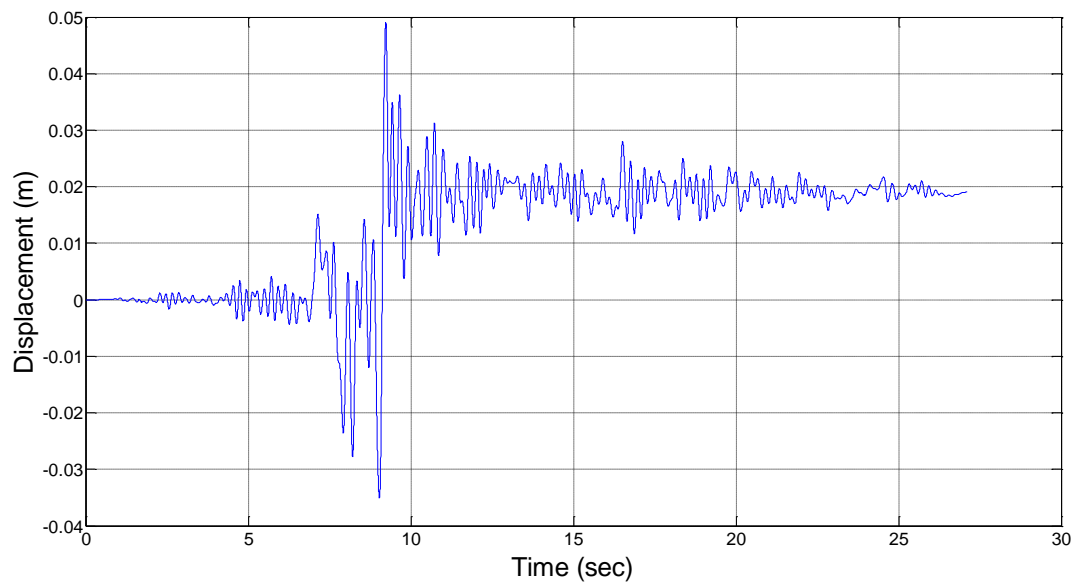
## 5.1 ΚΟΚΑΕΛΙ ΔΥΖΕ 270

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ	
$\alpha$	0.01
n1	0.5
n2	0.5
N	2

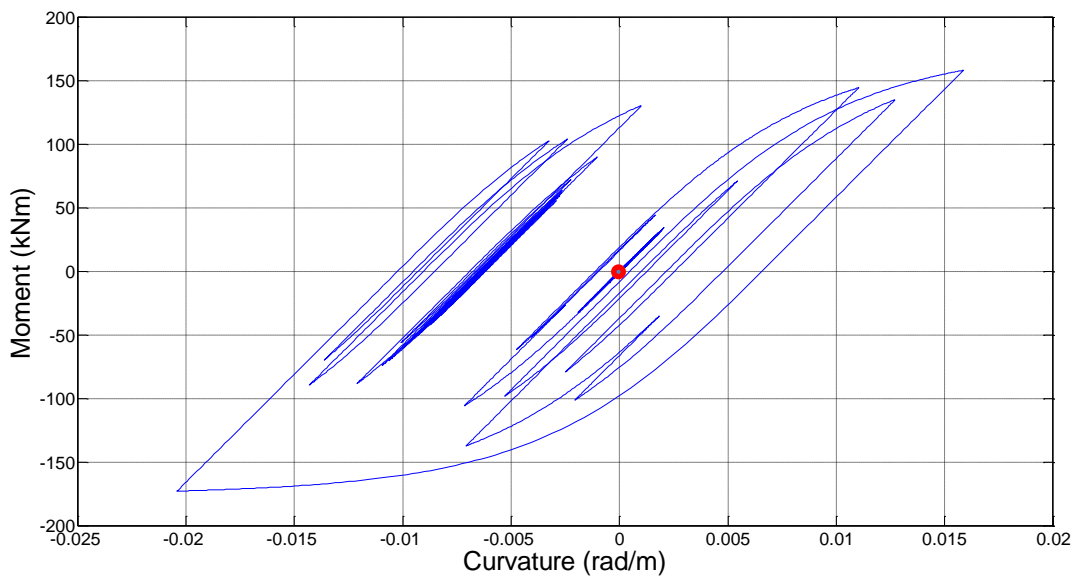
Πίνακας 5.1 Παράμετροι Επίλυσης



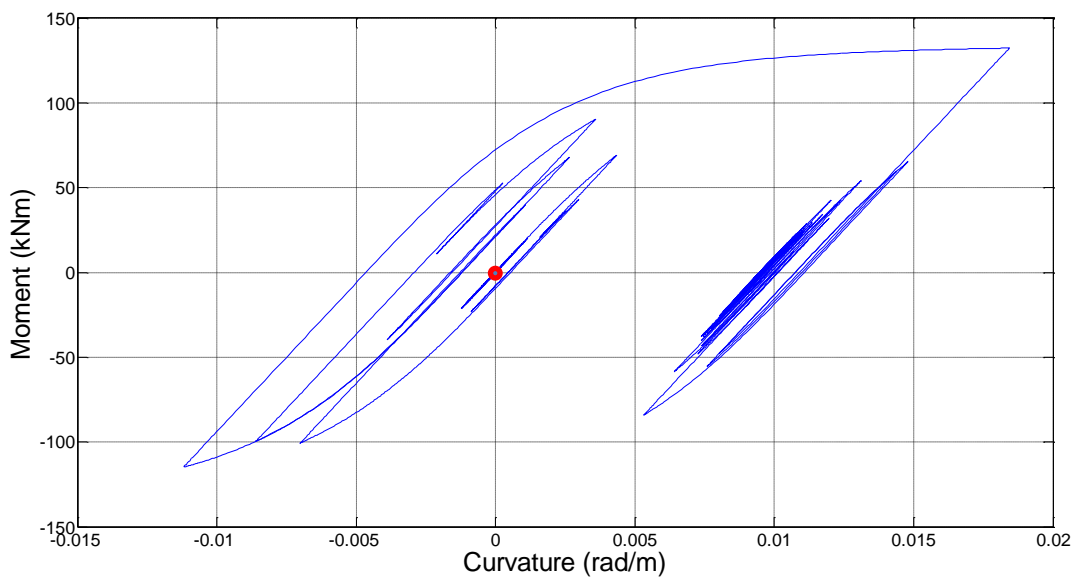
Σχήμα 5.1.1 Χρονοϊστορία σεισμικής διέγερσης (ΚΟΚΑΕΛΙ ΔΥΖΕ 270)



Σχήμα 5.1.2 Χρονοϊστορία Μετατόπισης κόμβου 2 (ΚΟΚΑΕΛΙ ΔΥΖΕ 270)



Σχ.5.1.3 Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων Κόμβου 1 (KOCAELI DUZCE 270)



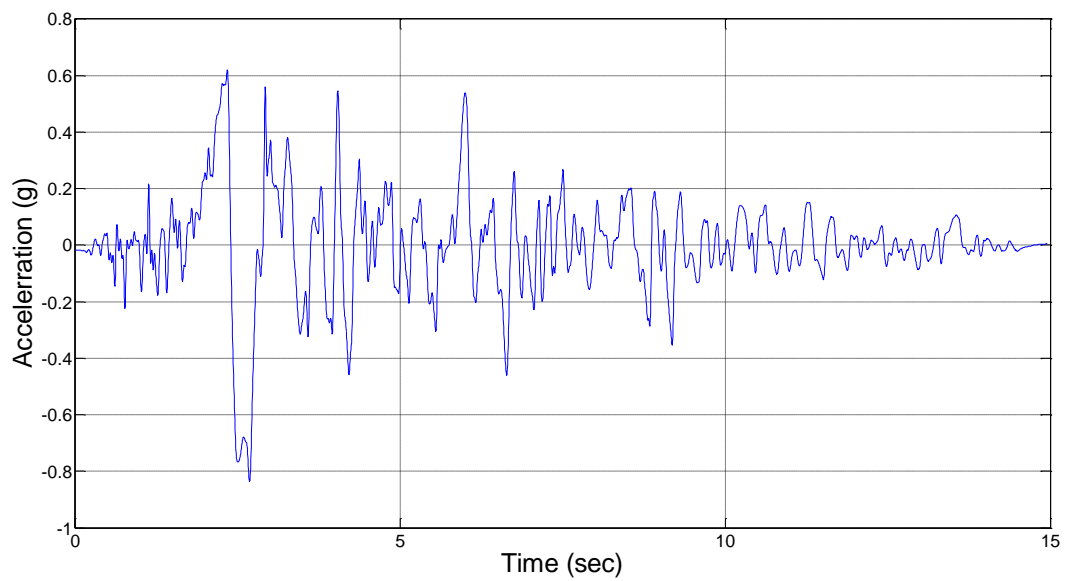
Σχ. 5.1.4 Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων Κόμβου 2 (KOCAELI DUZCE 270)

Κατά τη διάρκεια του σεισμού Koaceli Duzce 270 η κατασκευή συμπεριφέρθηκε ελαστικά, για αυτό και επακολούθησε νέα ανάλυση με τα μεγέθη σεισμικής έντασης πολλαπλασιασμένα επί πέντε (5). Στα σχήματα Σχ.(5.1.1) έως Σχ.(5.1.4) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα. Μπορούμε να παρατηρήσουμε μετά τη διαρροή στα 9 δευτερόλεπτα την παραμένουσα μετατόπιση που προκύπτει.

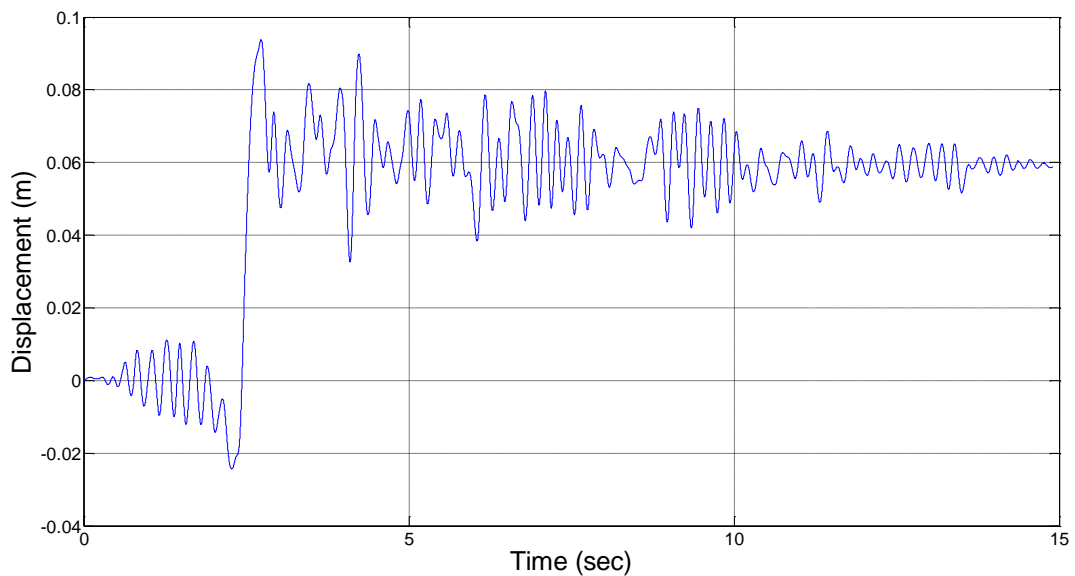
## 5.2 RINALDI RSS 228

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ	
$\alpha$	0.01
n1	0.5
n2	0.5
N	4

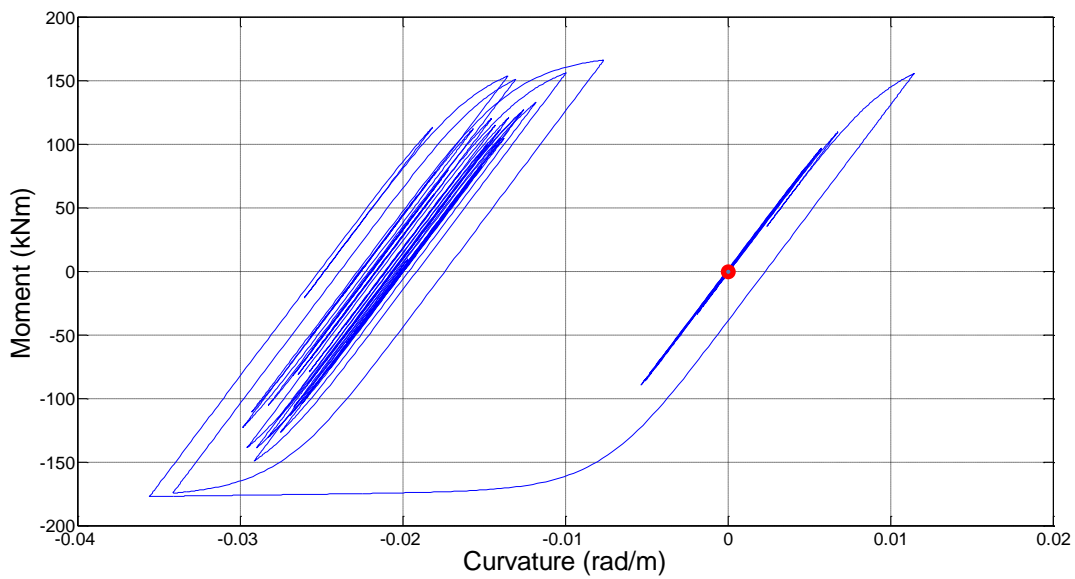
Πίνακας 5.2 Παράμετροι Επίλυσης



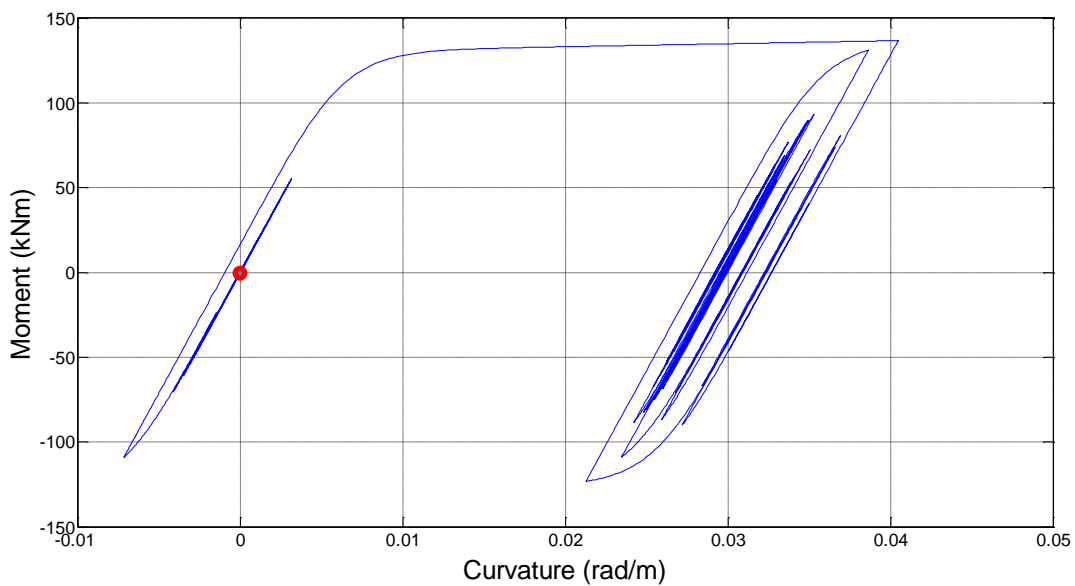
Σχήμα 5.2.1 Χρονοϊστορία σεισμικής διέγερσης (RINALDI RSS 228)



Σχήμα 5.2.2 Χρονοϊστορία Μετατόπισης κόμβου 2 (RINALDI RSS 228)



Σχ.5.2.3 Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων Κόμβου 1 (RINALDI RSS 228)



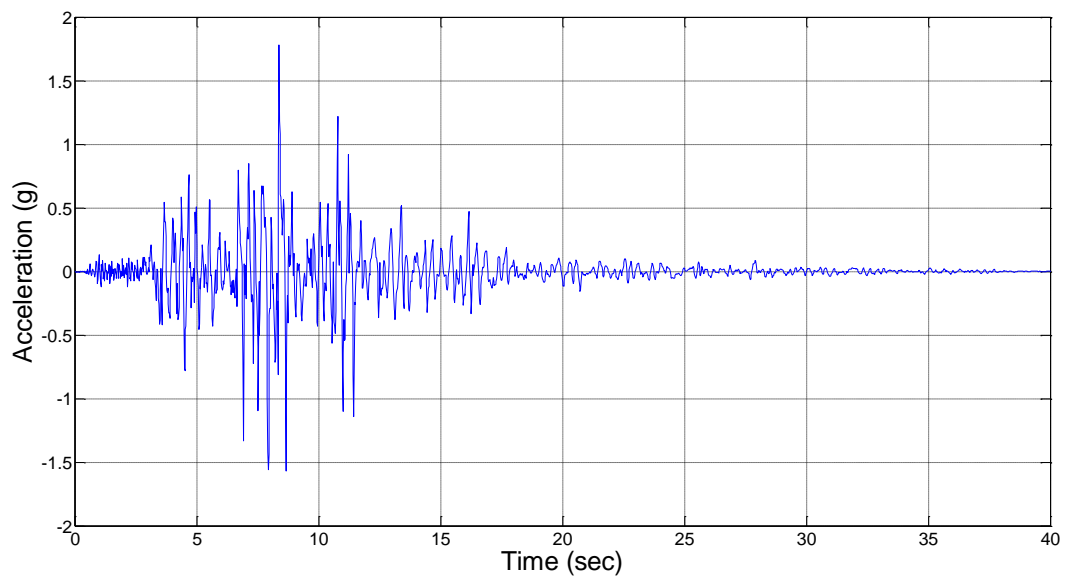
Σχ. 5.2.4 Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων Κόμβου 2 (RINALDI RSS 228)

Για το σεισμό Rinaldi Rss 228 τα μεγέθη σεισμικής έντασης κατά την ανάλυση είναι πολλαπλασιασμένα επί τρία (3). Στα σχήματα Σχ.(5.2.1) έως Σχ.(5.2.4) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης. Είναι χαρακτηριστικό το πλήγμα του σεισμού στα 2.5 δευτερόλεπτα που προκαλεί και τη διαρροή των διατομών.

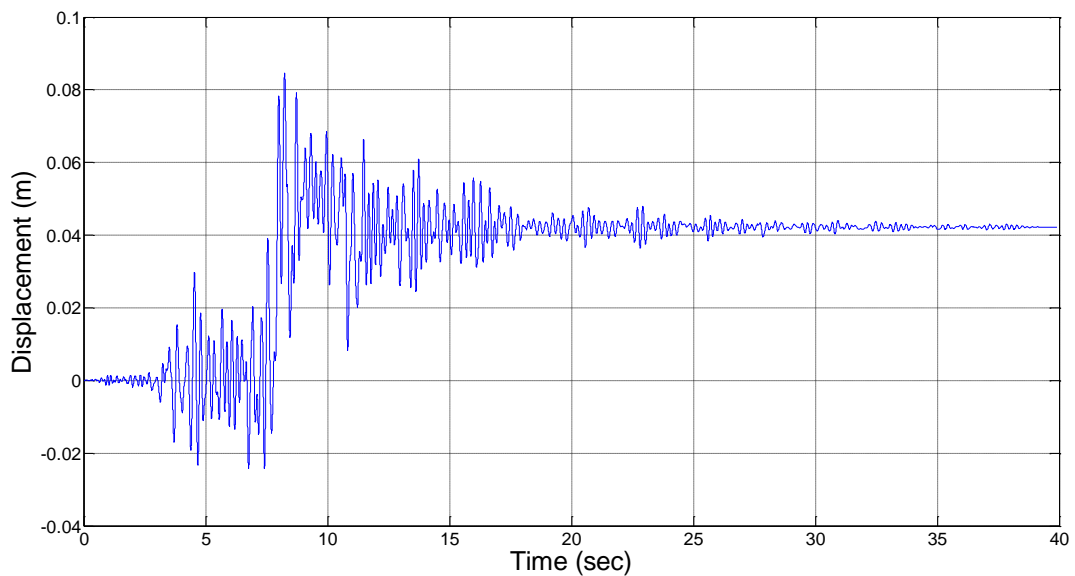
## 5.3 TARZANA 090

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ	
$\alpha$	0.01
n1	0.5
n2	0.5
N	4

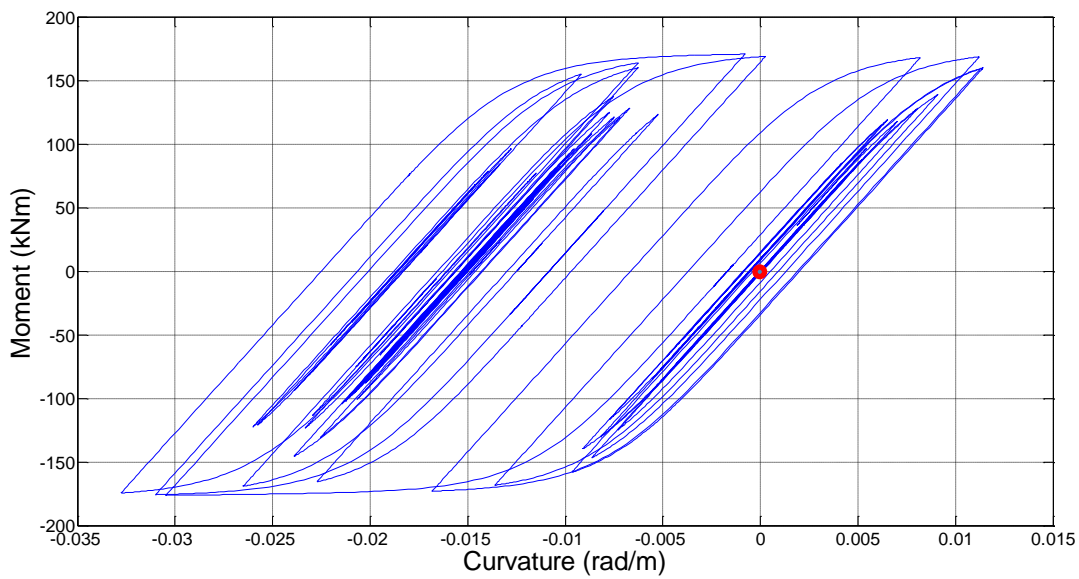
Πίνακας 5.3 Παράμετροι Επίλυσης



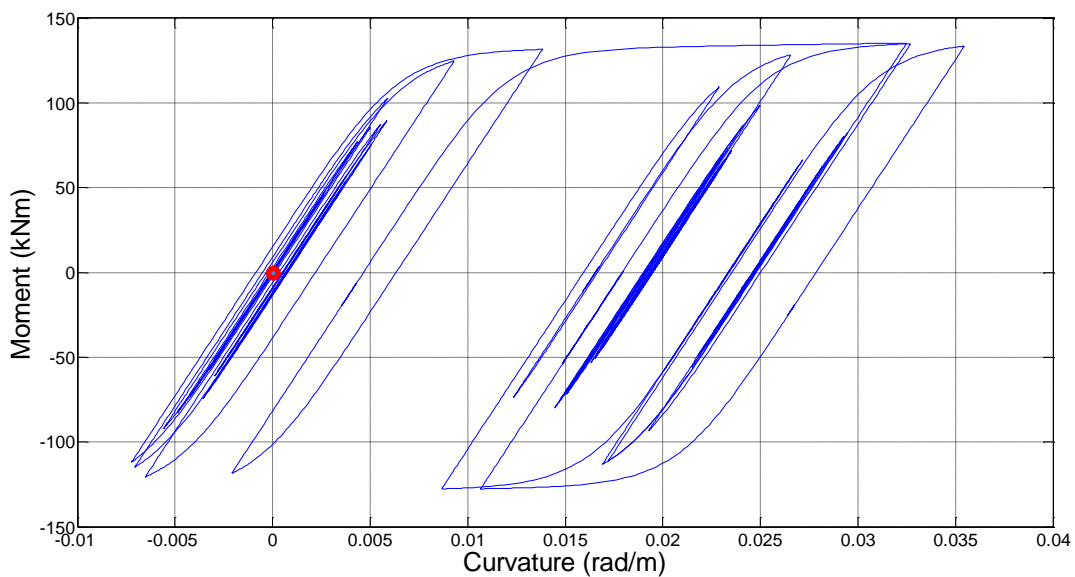
Σχήμα 5.3.1 Χρονοϊστορία σεισμικής διέγερσης (TARZANA 090)



Σχήμα 5.3.2 Χρονοϊστορία Μετατόπισης κόμβου 2 (TARZANA 090)



Σχ.5.3.3 Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων Κόμβου 1 (TARZANA 090)



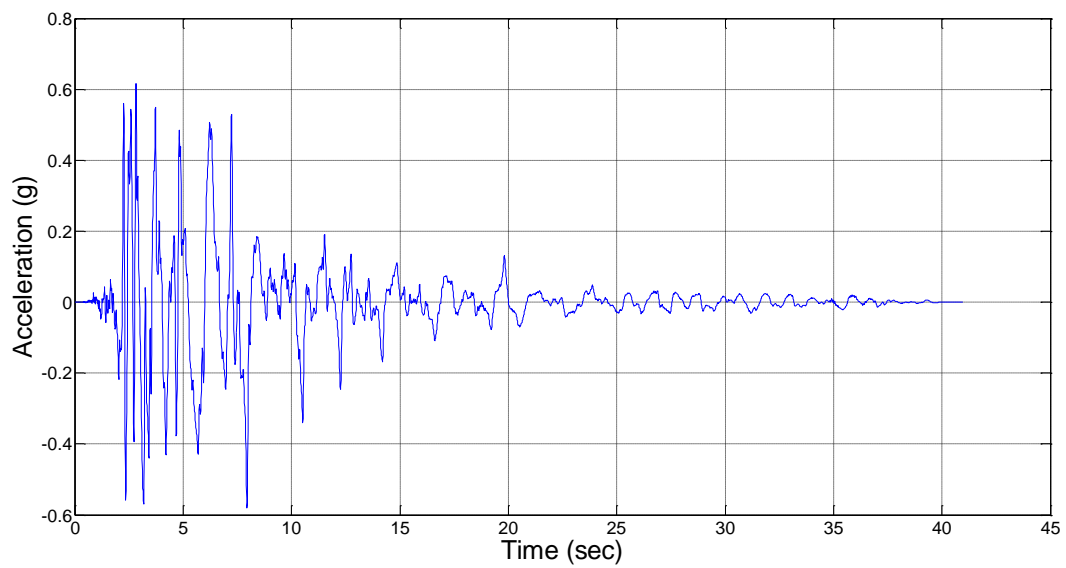
Σχ. 5.3.4 Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων Κόμβου 2 (TARZANA 090)

Για το σεισμό Tarzana 090 τα μεγέθη σεισμικής έντασης κατά την ανάλυση είναι πολλαπλασιασμένα επί δύο (2). Στα σχήματα Σχ.(5.3.1) έως Σχ.(5.3.4) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα. Μπορούμε να παρατηρήσουμε μετά τη διαρροή την παραμένουσα μετατόπιση.

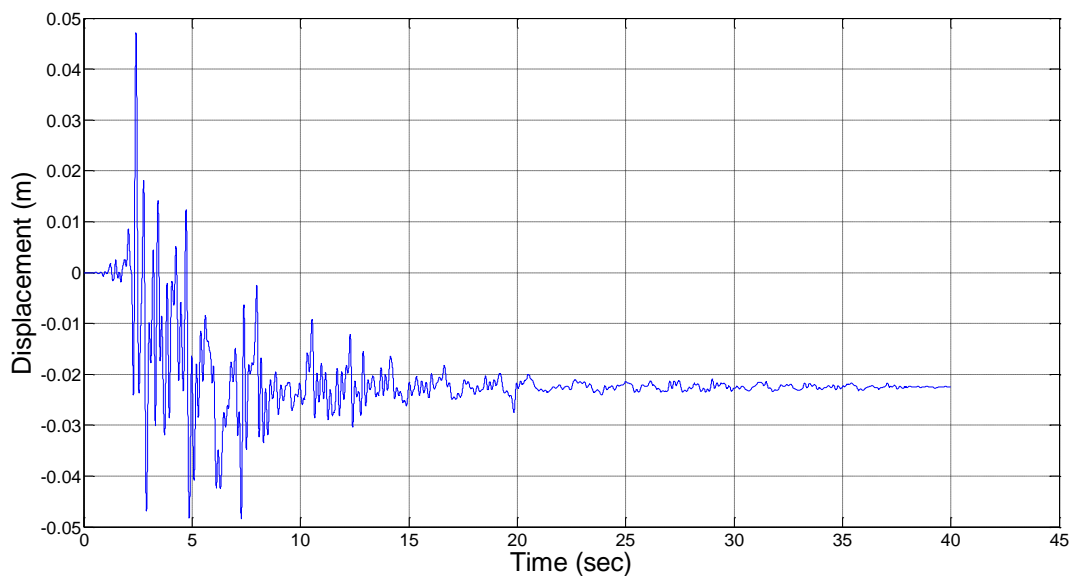
## 5.4 ΚΟΒΕ ΤΑΚΑΤΟΡΙ 090

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ	
$\alpha$	0.02
n1	0.5
n2	0.5
N	6

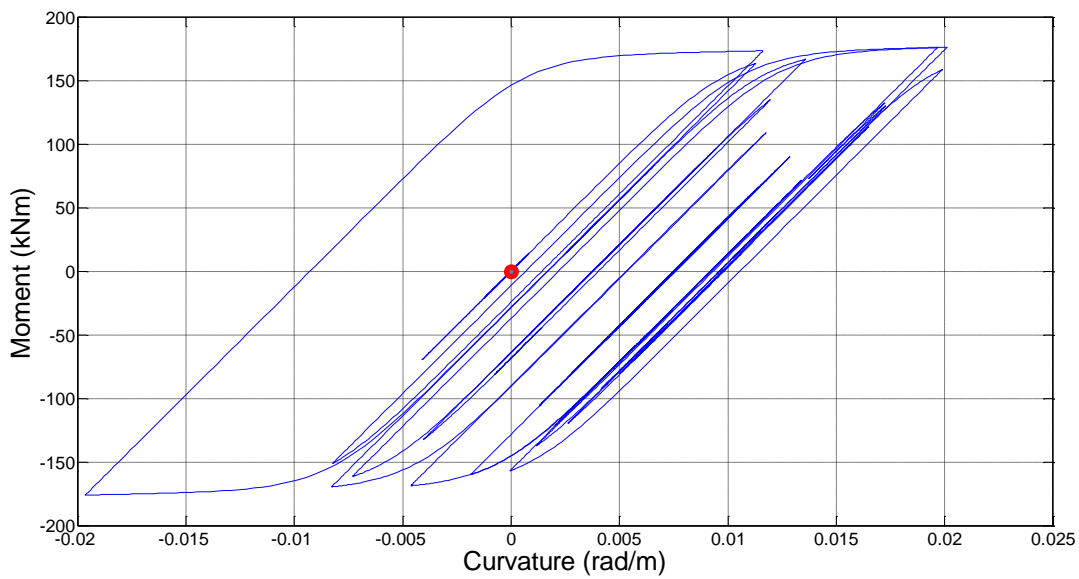
Πίνακας 5.4 Παράμετροι Επίλυσης



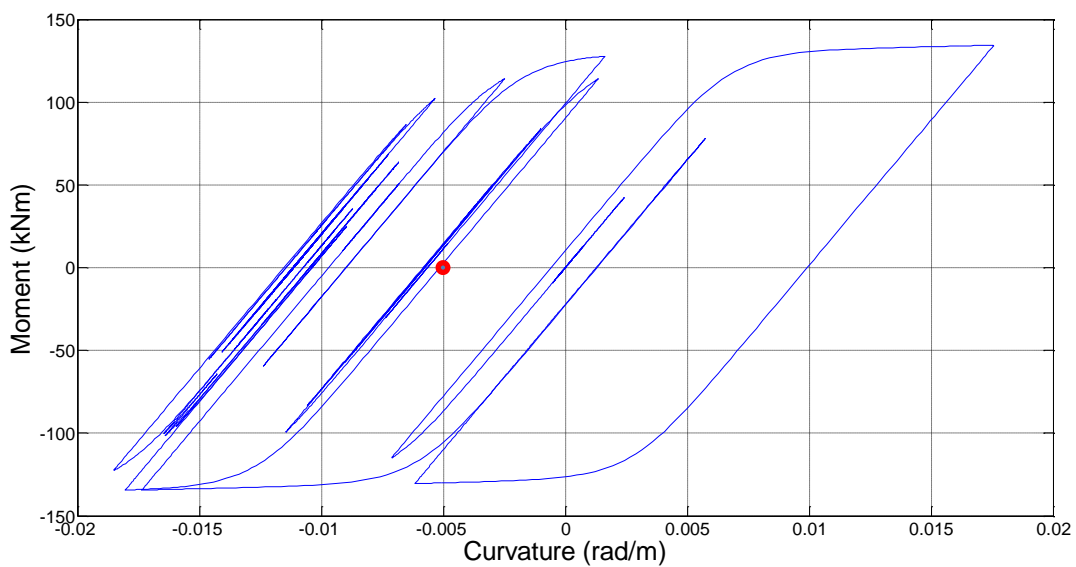
Σχήμα 5.4.1 Χρονοϊστορία σεισμικής διέγερσης (ΚΟΒΕ ΤΑΚΑΤΟΡΙ 090)



Σχήμα 5.4.2 Χρονοϊστορία Μετατόπισης κόμβου 2 (ΚΟΒΕ ΤΑΚΑΤΟΡΙ 090)



Σχ.5.4.3 Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων Κόμβου 1 (ΚΟΒΕ ΤΑΚΑΤΟΡΙ 090)



Σχ. 5.4.4 Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων Κόμβου 2 (ΚΟΒΕ ΤΑΚΑΤΟΡΙ 090)

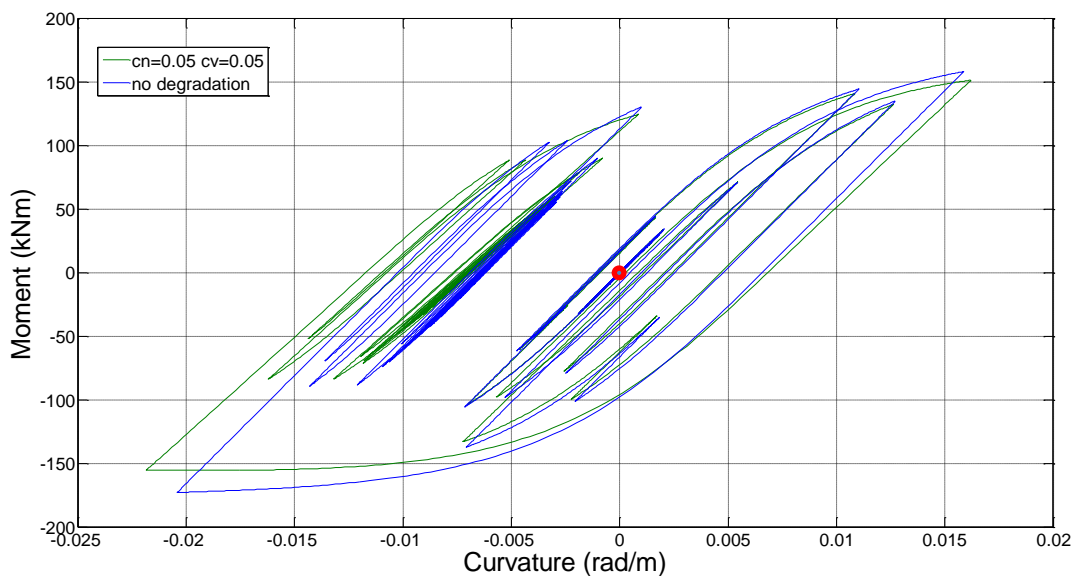
Για το σεισμό Kobe Takatori 090 τα μεγέθη σεισμικής έντασης κατά την ανάλυση είναι πολλαπλασιασμένα επί τρία (3). Στα σχήματα Σχ.(5.4.1) έως Σχ.(5.4.4) παρουσιάζονται οι αποκρίσεις που προκύπτουν.



## 5.5 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΜΕ ΑΠΟΜΕΙΩΣΕΙΣ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ ΚΑΙ ΑΝΤΟΧΗΣ

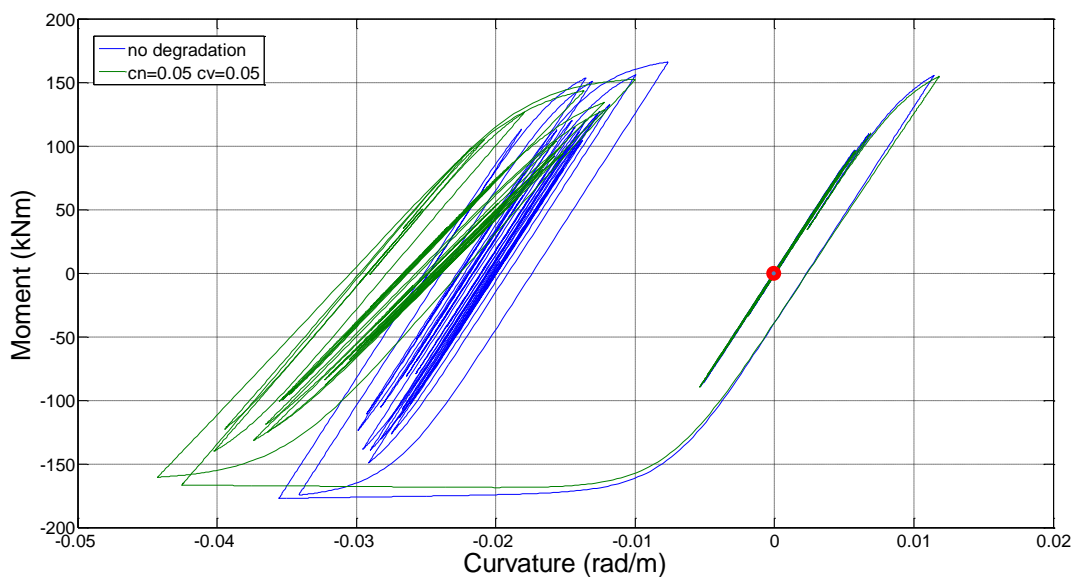
Στη παράγραφο αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων για τις σεισμικές φορτίσεις της προηγούμενης παραγράφου, μετά την εφαρμογή των μειώσεων δυσκαμψίας και αντοχής. Τα διαγράμματα ροπών καμπυλοτήτων που παρουσιάζονται αφορούν τον κόμβο 1 του πλαισίου και παρουσιάζονται ταυτόχρονα με και χωρίς τις απομειώσεις για να γίνουν εμφανείς οι διαφορές.

### 5.5.1 Koaceli Duzce 270



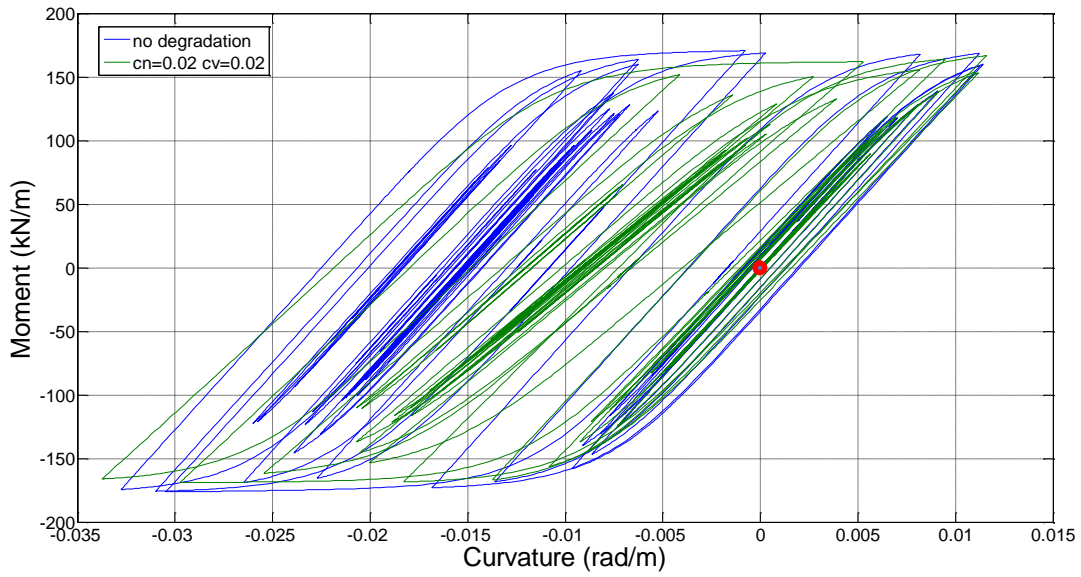
Σχ.5.5.1 Απόκριση πριν και μετά τις απομειώσεις για το σεισμό Koaceli Duzce 270

### 5.5.2 Rinaldi Rss 228



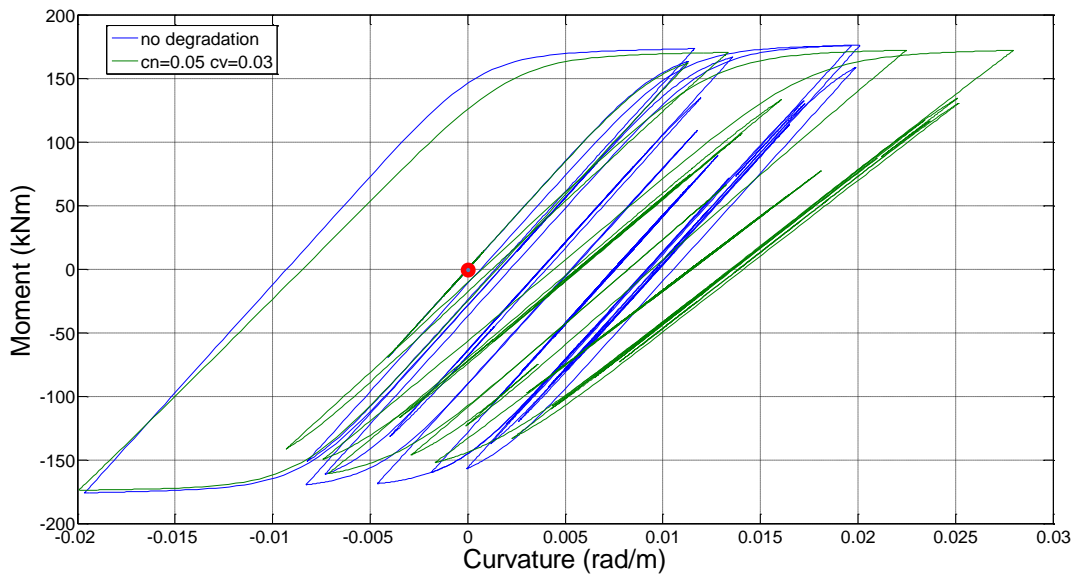
Σχ.5.5.2 Απόκριση πριν και μετά τις απομειώσεις για το σεισμό Rinaldi Rss 228

### 5.5.3 Tarzana 090



Σχ.5.5.3 Απόκριση πριν και μετά τις απομειώσεις για το σεισμό Tarzana 090

### 5.5.4 Kobe Takatori 090

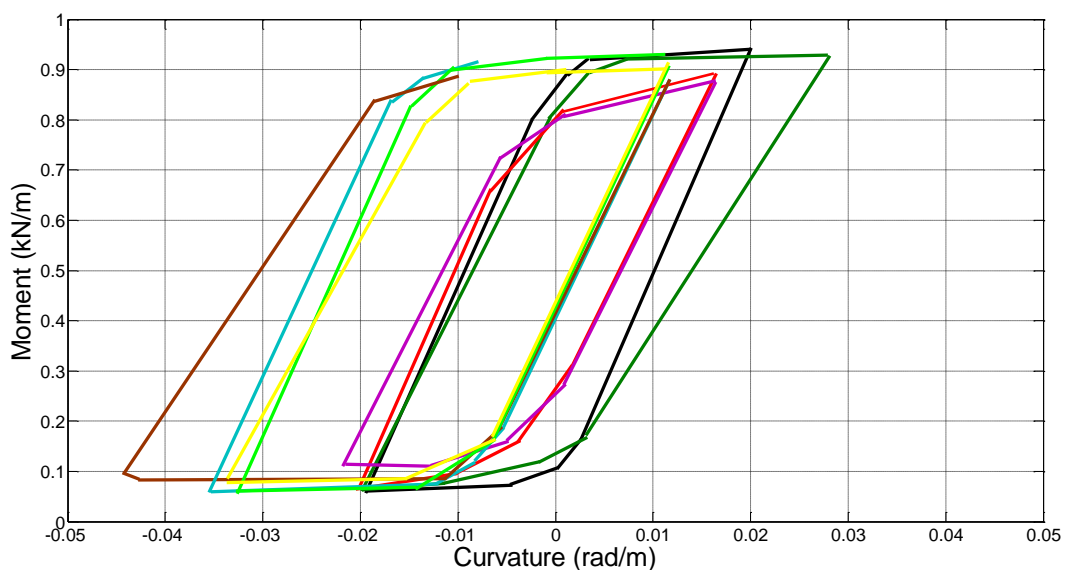


Σχ.5.5.4 Απόκριση πριν και μετά τις απομειώσεις για το σεισμό Kobe Takatori 090

## 5.6 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Με τη σύγκριση των αποκρίσεων που προηγήθηκαν μπορούμε να καταλήξουμε σε κάποια συμπεράσματα όσον αφορά τις μέγιστες τιμές των μεγεθών που προέκυψαν. Αναφερόμενοι στα μέγιστα μεγέθη παρατηρούμε ότι μετά την εφαρμογή των απομειώσεων η μέγιστη απόκλιση στα μεγέθη της καμπυλότητας παρατηρείται για φόρτιση στα θετικά κατά το σεισμό Kobe Takatori 090 (σχήμα 5.5.4) με τιμή 39,08% και κατά τη φόρτιση στα αρνητικά κατά 24,48% στο σεισμό Rinaldi Rss 228 (σχήμα 5.5.2). Η αντίστοιχη διαφορά στα μεγέθη της ροπής είναι για φόρτιση στα θετικά -8,78% στο σεισμό Rinaldi Rss 228 (σχήμα 5.5.2) και -11,18 % στο σεισμό Koaceli Duzce 270 (σχήμα 5.5.1) για φόρτιση στα αρνητικά.

Μπορούμε να θεωρήσουμε τη καμπύλη που περιβάλλει την απόκριση που προκύπτει κάθε φορά (cyclic envelope). Στα σχήματα 5.5.1, 5.5.3 και 5.8 παρατηρούμε ότι η περιβάλλουσα δεν άλλαξε σημαντικά. Αντίθετα στα σχήματα 5.5.2 και 5.5.4 παρουσιάστηκε μετατόπιση προς τα έξω της περιβάλλουσας των βρόχων. Αυτή οφείλεται στη διαφορά της χρονοϊστορίας και της έντασης των σεισμικών δονήσεων καθώς και στην εφαρμογή των απομειώσεων. Στο ακόλουθο σχήμα παρουσιάζονται οι περιβάλλουσες όλων των αποκρίσεων. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι όλες οι συμπεριφορές περιβάλλονται ουσιαστικά από δύο αποκρίσεις, για τα θετικά από την πράσινη γραμμή που αντιστοιχεί στο σεισμό Kobe Takatori μετά την εφαρμογή των μειώσεων και στα αρνητικά από τη καφέ γραμμή που αντιστοιχεί στο Rinaldi Rss 228 μετά την εφαρμογή των μειώσεων.



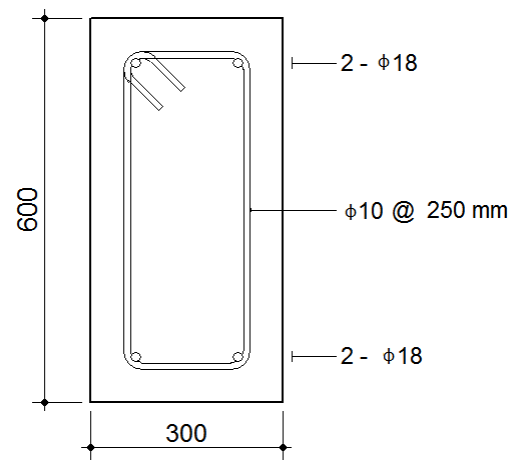
Σχ. 5.6 Περιβάλλουσες διαγραμμάτων ροπών καμπυλότητων για τα σχήματα 5.5.1 έως 5.5.4

### 5.7 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΤΗΣ ΣΤΕΝΩΣΗΣ

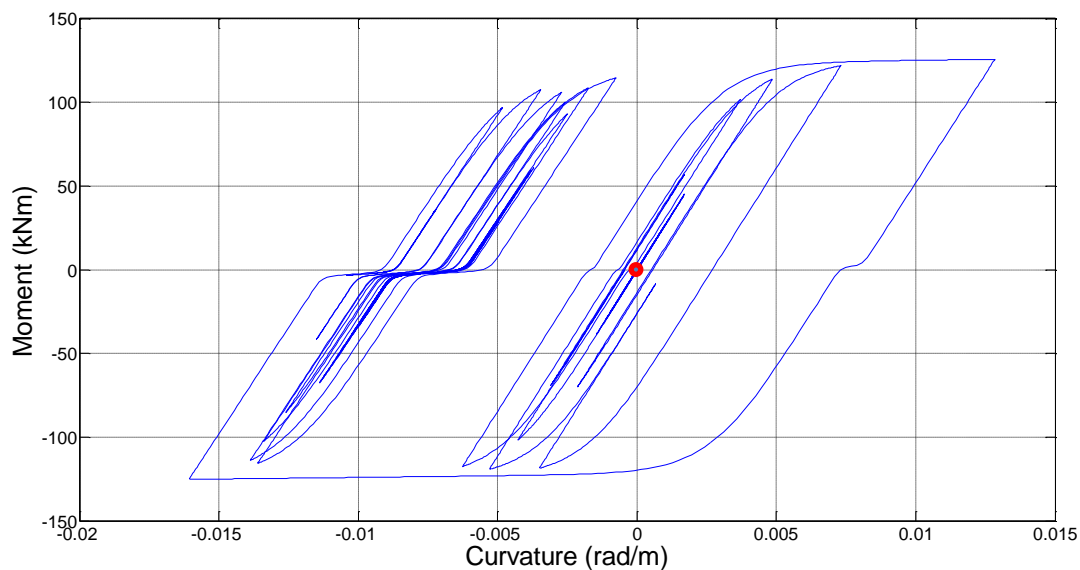
Σε αυτό το Κεφάλαιο θα εξεταστεί η συμπεριφορά ενός πλαισίου όμοιο με αυτό που προηγήθηκε στο σχήμα 5.1 ως προς τις διαστάσεις και τα φορτία, μόνο που τώρα το πλαίσιο είναι κατασκευασμένο από ωπλισμένο σκυρόδεμα. Η διατομή που χρησιμοποιήθηκε φαίνεται στο σχήμα 5.6 και είναι η ίδια και τα υποστυλώματα αλλά και για το ζύγωμα. Το κτήριο υποβλήθηκε στο σεισμό Kocaeli Duzce 270 η χρονοϊστορία του οποίου φαίνεται στο σχήμα 5.1.1 με τα μεγέθη του σεισμού πολλαπλασιασμένα επί 2.

Παράμετρος	Τιμή	Παράμετρος	Τιμή
$N$	4	$\zeta_{1,0}$	0.97
$\alpha$	0.01	$\rho$	1
$\beta$	0.5	$\psi$	0.0001
$\gamma$	0.5	$\delta_\psi$	$10^{-5}$
$c_n$	0.01	$\lambda$	0.1
$c_v$	0.02		

Πίνακας 5.5 Παράμετροι προσομοιώματος

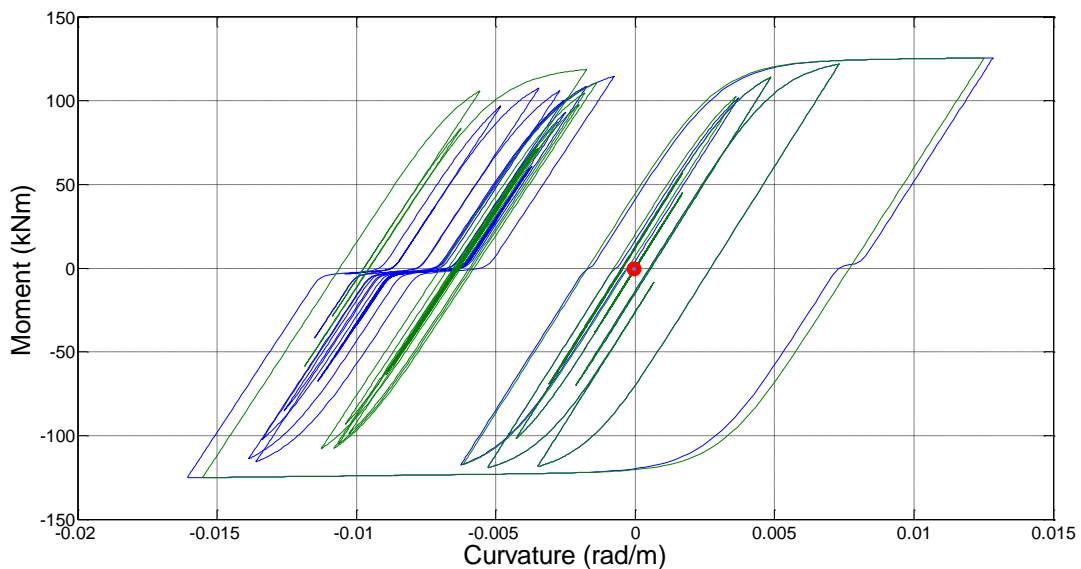


Σχήμα 5.6 Διατομή σκυροδέματος

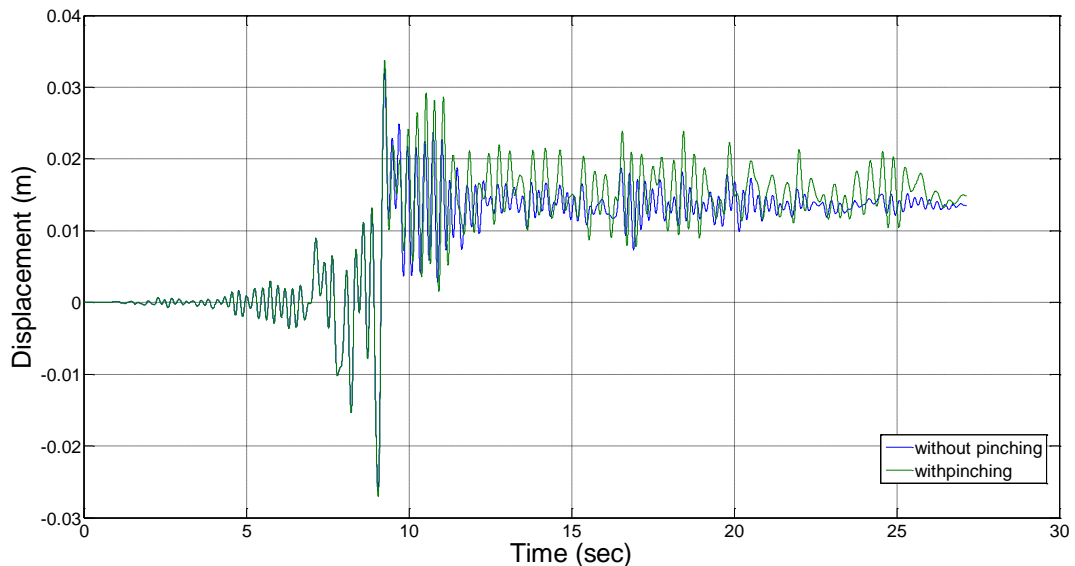


Σχ.5.7 Απόκριση μετά την εφαρμογή της στένωσης για το σεισμό Rinaldi Rss 228 και τη διατομή 1

Στο σήμα 5.7 φαίνεται το διάγραμμα ροπών καμπυλοτήτων για τον κόμβο 1. Το φαινόμενο της στένωσης γίνεται εύκολα αντιληπτό. Επίσης ακολουθούν τα διαγράμματα ροπών καμπυλοτήτων για τον ίδιο κόμβο 1 παρουσιασμένα στο ίδιο διάγραμμα με και χωρίς το φαινόμενο της στένωσης στο σχήμα 5.8 καθώς και οι μετακινήσεις κορυφής πριν και μετά στο σχήμα 5.9.



Σχ.5.8 Απόκριση πριν και μετά την εφαρμογή της στένωσης για το σεισμό Rinaldi Rss 228 και τη διατομή 1



Σχ.5.9 Μετακίνηση κορυφής πριν και μετά την εφαρμογή της στένωσης για το σεισμό Rinaldi Rss 228

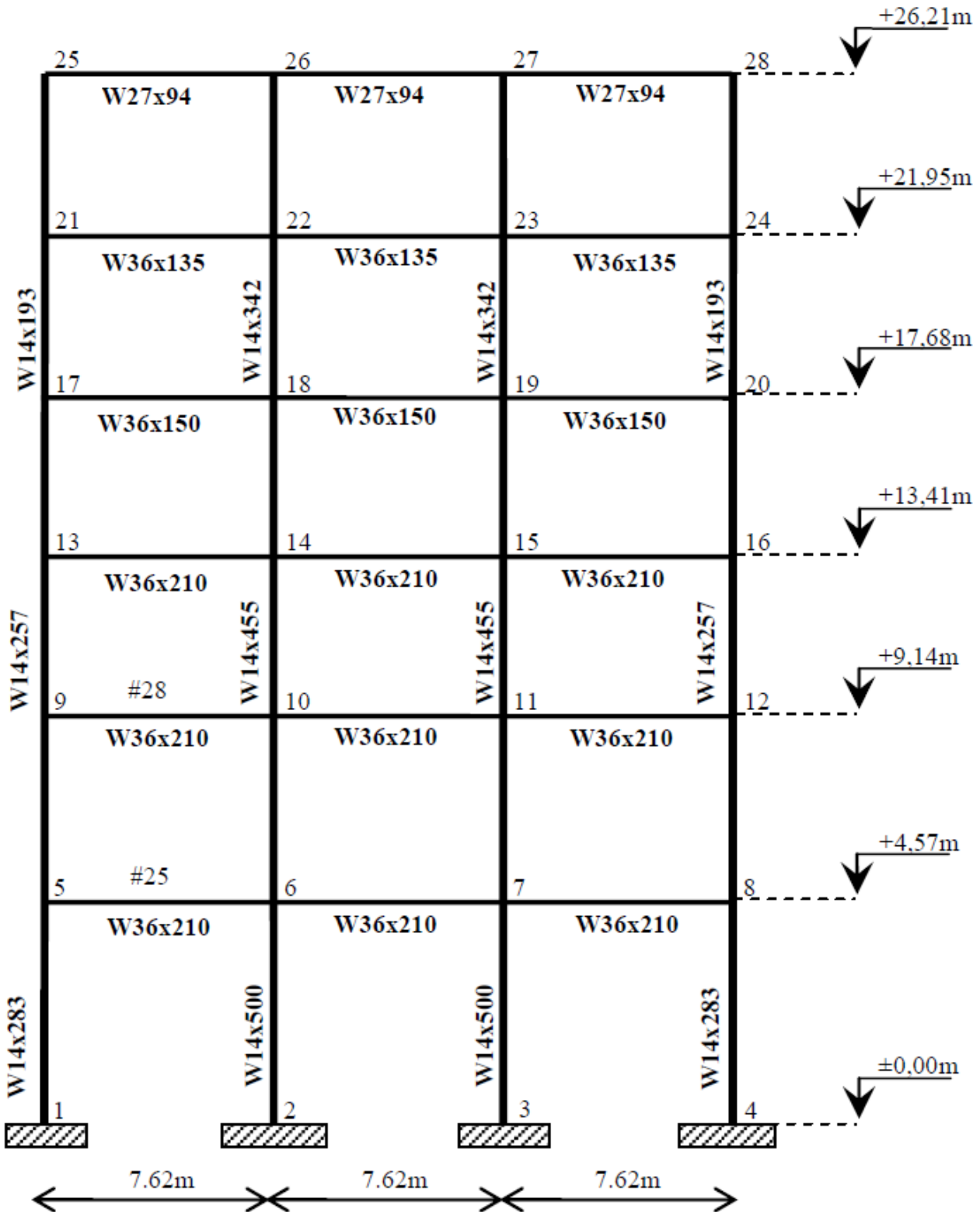


# 6

---

## ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΥΩΡΟΦΟΥ ΚΤΗΡΙΟΥ

**6.1 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ, ΔΙΑΤΟΜΕΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ**



Σχ. 6.1 Τυπικό πλαίσιο του νοσοκομείου Woodland Hills στην California



Σε αυτή την ενότητα θα εξεταστεί η συμπεριφορά ενός πολυώροφου πλαισίου και πιο συγκεκριμένα του Woodland Hills Hospital στην California. Πρόκειται για ένα εξάωρο κτήριο οι διαστάσεις και οι διατομές του οποίου φαίνονται στο σχήμα 6.1. Το κτήριο υποβλήθηκε στο σεισμό El Centro με τα εντατικά μεγέθη του σεισμού πολλαπλασιασμένα επί το συντελεστή 2. Το επιταχυνσιογράφημα του σεισμού πολλαπλασιασμένο επί δύο (2) φαίνεται στο σχήμα 6.2. Επίσης οι παράμετροι του προσομοιώματος φαίνονται στον πίνακα 6.2.

ΔΙΑΤΟΜΗ	z <sub>b<sub>y</sub></sub>	z <sub>u<sub>y</sub></sub>
	Δοκάρια	
W36x210	0.00253	0.00118
W36x150	0.00259	0.00118
W36x135	0.00261	0.00118
W27x94	0.00345	0.00118
Κολώνες		
W14x283	0.00556	0.00118
W14x500	0.00474	0.00118
W14x257	0.00568	0.00118
W14x455	0.00489	0.00118
W14x193	0.00601	0.00118
W14x342	0.00530	0.00118

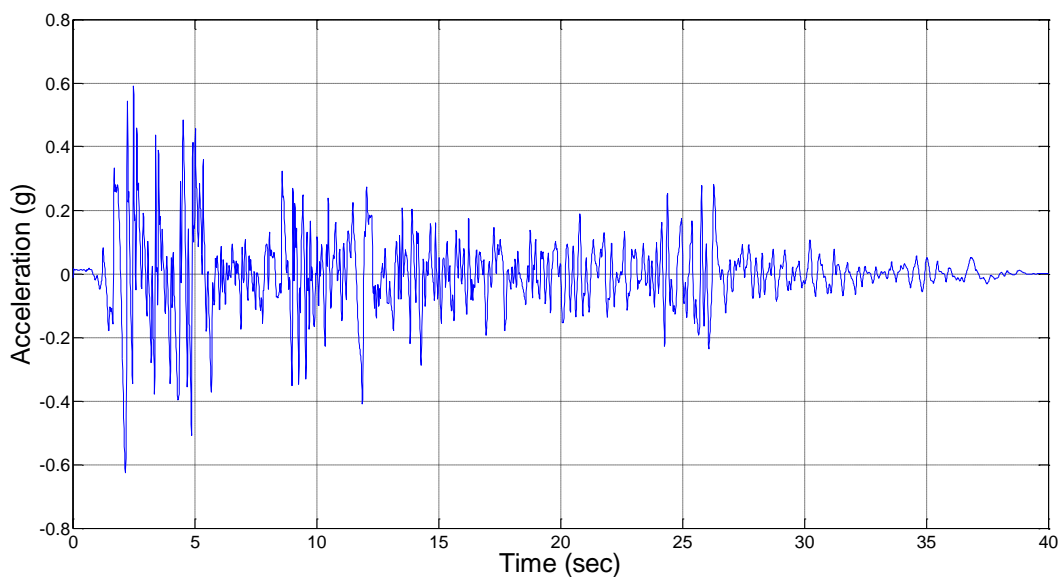
Πίνακας 6.1 Παράμετροι διαρροής διατομών

Όροφος	Μάζες
1	402.8
2	231.2
3	180.4
4	180.4
5	180.4
6	182.1

Πίνακας 6.2 Μάζες ορόφων

Παράμετρος	Τιμή
N	25
$\alpha$	0.0015
$\beta$	0.5
$\gamma$	0.5
f <sub>y</sub>	248200 (kPa)

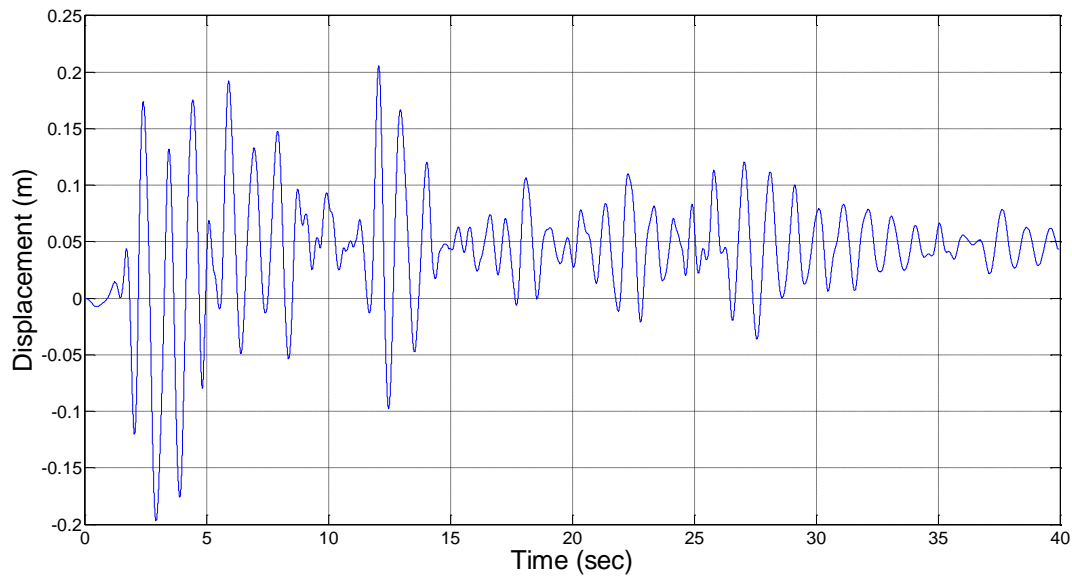
Πίνακας 6.3 Παράμετροι επίλυσης



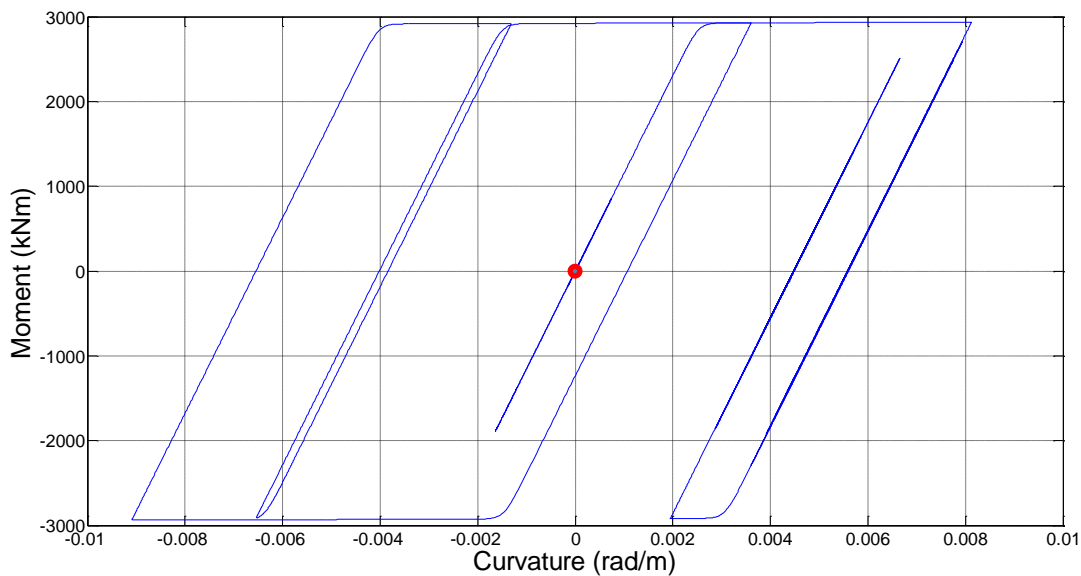
Σχ. 6.2 Επιταχυνσιογράφημα σεισμού El Centro

## 6.2 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Στα επόμενα σχήματα παρουσιάζονται οι μετακινήσεις της κορυφής του κτηρίου καθώς και διαγράμματα ροπών καμπυλοτήτων χαρακτηριστικών κόμβων.

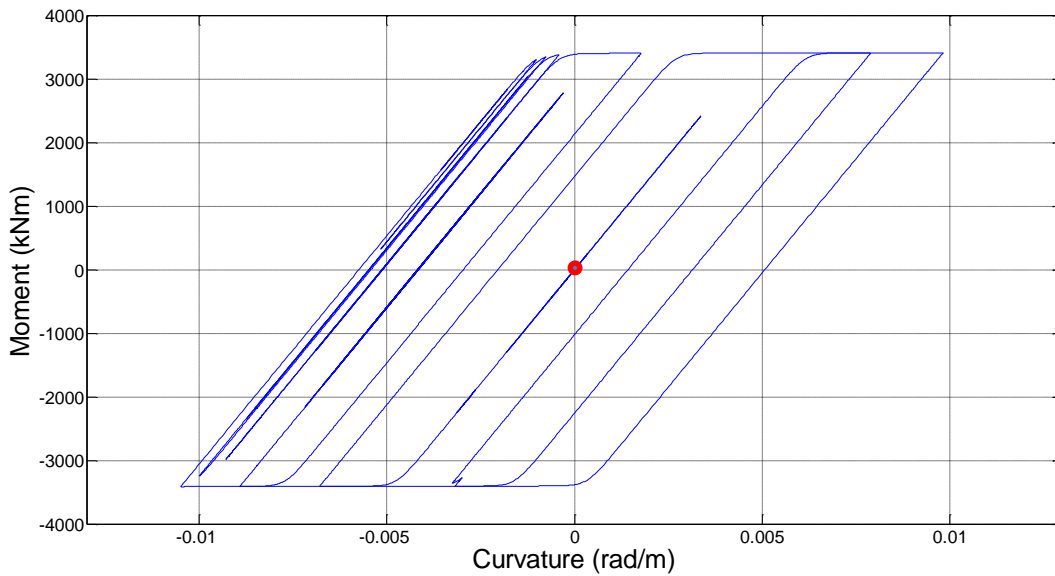


Σχ. 6.3 Μετακίνηση κορυφής (El Centro)



Σχ. 6.4 Διάγραμμα ροπών καμπυλοτήτων για τον κόμβο i του μέλους 25 (El Centro)

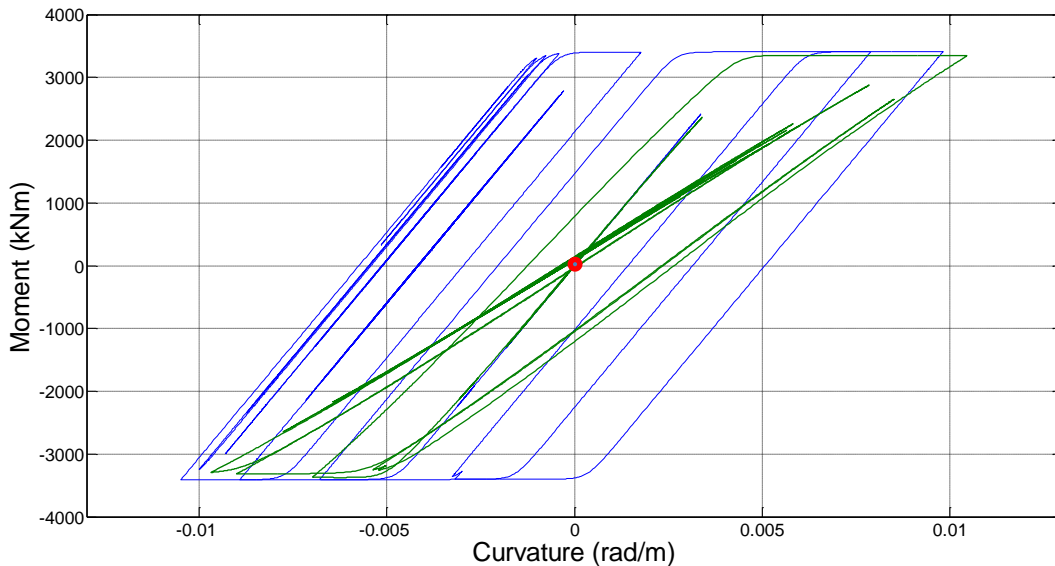
Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι εξαιτίας των παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν ( $\alpha=0.0015$ ,  $\beta=\gamma=0.5$ ), τα διαγράμματα ροπών καμπυλοτήτων είναι διγραμμικά με έντονη τη μετάβαση από τον ελαστικό στον μετελαστικό κλάδο ( $N=25$ ).



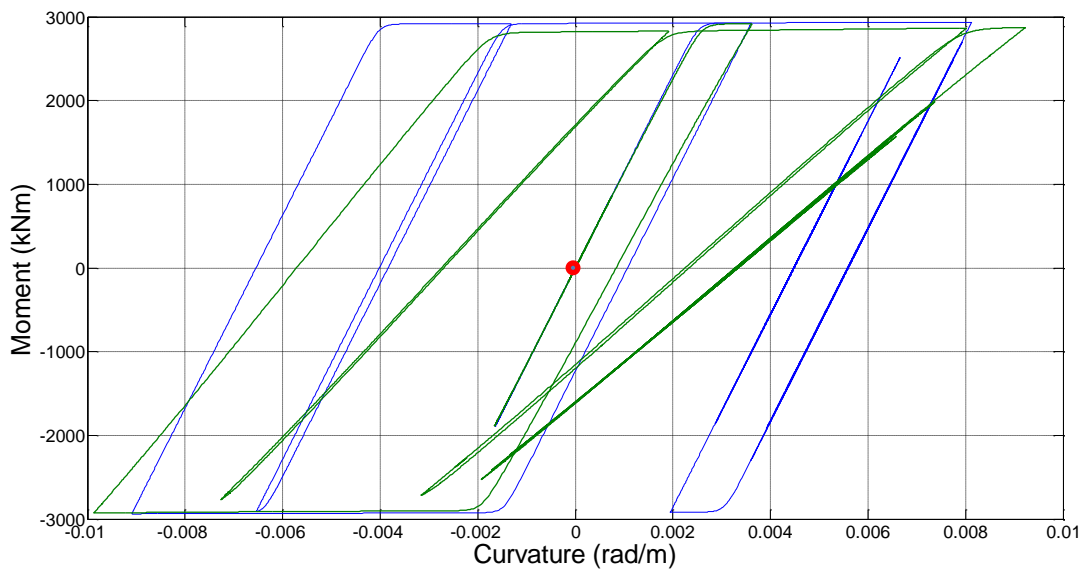
Σχ. 6.5 Διάγραμμα ροπών καμπυλοτήτων για τον κόμβο i του μέλους 2 (EI Centro)

### 6.3 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΜΕ ΑΠΟΜΕΙΩΣΕΙΣ

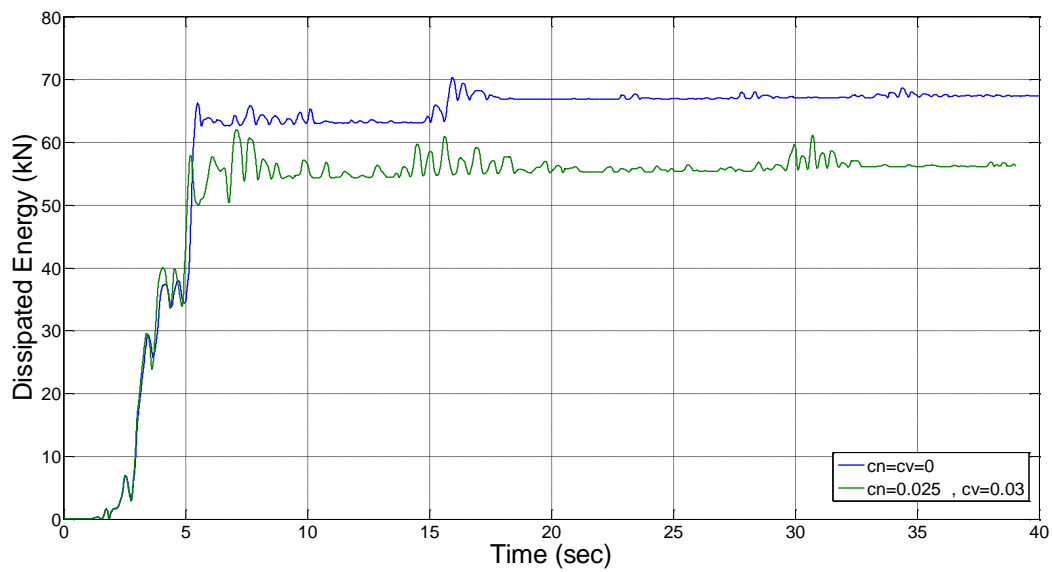
Επακολούθησε νέα ανάλυση αυτή τη φορά λαμβάνοντας υπόψη τα φαινόμενα απομείωσης αντοχής και δυσκαμψίας. Οι τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν είναι  $c_n=0.025$  και  $c_v=0.03$ . Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης.



Σχ. 6.6 Διαγράμματα ροπών καμπυλοτήτων για τον κόμβο i του μέλους 2 πριν και μετά τις απομειώσεις (EI Centro)



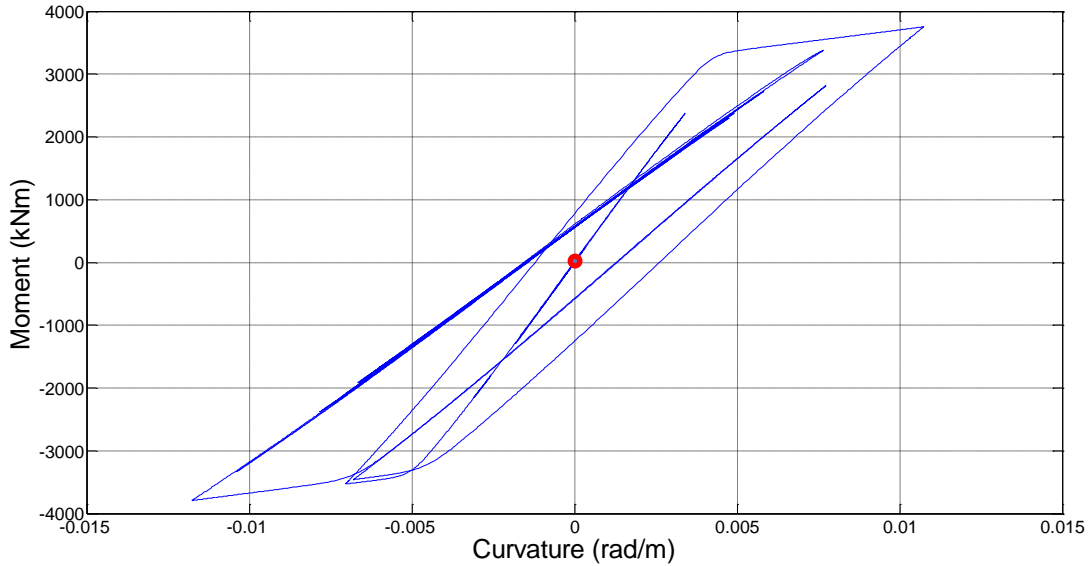
Σχ. 6.7 Διαγράμματα ροπών καμπυλότητας για τον κόμβο *i* του μέλους 25 πριν και μετά τις απομειώσεις (El Centro)



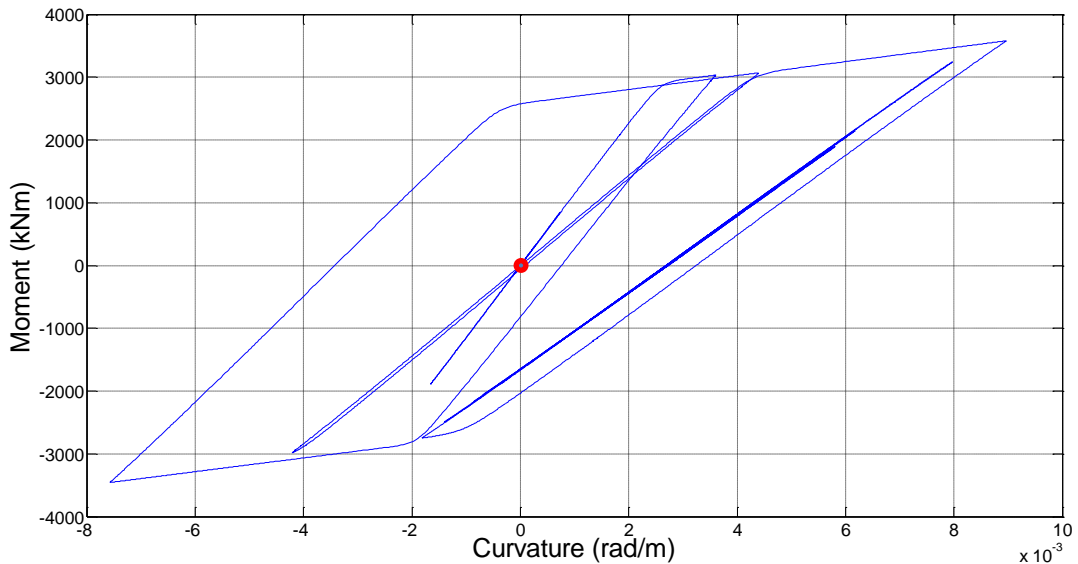
Σχ. 6.8 Διαχέομενη ενέργεια για τον κόμβο *i* του μέλους 25 πριν και μετά τις απομειώσεις (El Centro)

### 6.4 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΜΕ ΚΡΑΤΥΝΣΗ

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται τα διαγράμματα ροπών καμπυλοτήτων για τους δύο κόμβους αρχής των μελών 2 (υποστύλωμα) και 25 (δοκάρι). Οι τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν είναι  $c_n=0.025$  και  $c_v=0.03$ .



Σχ. 6.9 Διαγράμματα ροπών καμπυλοτήτων για τον κόμβο  $i$  του μέλους 2 με κράτυνση και απομειώσεις (El Centro)



Σχ. 6.10 Διαγράμματα ροπών καμπυλοτήτων για τον κόμβο  $i$  του μέλους 25 με κράτυνση και απομειώσεις (El Centro)

## 6.5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Και εδώ όπως και στην παράγραφο 5.6 θα συγκρίνουμε τις αποκρίσεις που προηγήθηκαν. Παρατηρούμε ότι η διαφορά που παρατηρείται στις μέγιστες καμπυλότητες πριν και μετά την εφαρμογή των απομειώσεων είναι 13.52% για το κόμβο *i* του μέλους 25 και για φόρτιση στα θετικά ενώ η διαφορά στις μέγιστες ροπές είναι 3.64% για το κόμβο *i* του μέλους 2 για αρνητικές ροπές. Επίσης η μέγιστη διαφορά στην ενέργεια που διαχέεται είναι 19.7% στο τέλος της σεισμικής διέγερσης για τον κόμβο *i* του μέλους 25.

# 7

---

## **ΣΥΝΟΨΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ**

## 7.1 ΜΟΝΤΕΛΟ BOUC - WEN ΚΑΙ SIVASELVAN - REINHORN

Η πρώτη προσέγγιση που επιχειρήθηκε στην παρούσα διπλωματική εργασία αφορούσε τα μοντέλα Bouc - Wen και Sivaselvan - Reinhorn, τα οποία και προγραμματίστηκαν προκειμένου να διερευνηθεί η συμπεριφορά τους σε ενδεχόμενη μεταβολή των παραμέτρων τους, αλλά και η γενικότερη συμπεριφορά τους υπό φορτίσεις ημιτονικές και σεισμικές. Παρουσιάστηκαν επίσης αποτελέσματα βρόχων που παράγονται για διάφορες σεισμικές διεγέρσεις για ένα τυπικό δίστηλο πλαίσιο στο Κεφάλαιο 5 και για ένα πολυώροφο κτήριο στο Κεφάλαιο 6.

## 7.2 ΑΠΟΜΕΙΩΣΕΙΣ

Η ενσωμάτωση των απομειώσεων, με βάση το προσομοίωμα Sivaselvan- Reinhorn όπως αυτές διατυπώθηκαν αρχικά, σε πολυβάθμια συστήματα και μάλιστα με βάση το προτεινόμενο πεπερασμένο στοιχείο δοκού το οποίο περιγράφεται στο Κεφάλαιο 4, δεν είναι πρόσφορη. Αυτό συμβαίνει διότι σύμφωνα με τη θεώρηση που γίνεται στο πεπερασμένο στοιχείο τα μητρώα ακαμψίας μορφώνονται στην αρχή και διατηρούνται αναλλοίωτα καθ' όλη τη διάρκεια της επίλυσης. Όμως στο μοντέλο των Sivaselvan και Reinhorn οι απομειώσεις εισάγονται με συντελεστές που ελέγχουν άμεσα την ακαμψία σε κάθε χρονικό βήμα. Έτσι επιχειρήθηκε η ενσωμάτωση των απομειώσεων στο μοντέλο με βάση την διαχεόμενη ενέργεια και σύμφωνα με τις προτάσεις των Baber και Wen (1981) για την απομείωση της αντοχής και της δυσκαμψίας και του Foliente (1995) όσον αφορά τη στένωση.

Οι Baber και Wen (1981) παρουσίασαν δύο πρόσθετες παραμέτρους  $n_s$  και  $v_s$  για να εισάγουν τα φαινόμενα της απομείωσης της δυσκαμψίας και της αντοχής στο μοντέλο. Αυτές οι παράμετροι εισάγονται απευθείας στη υστερητική διαφορική εξίσωση και εξαρτώνται από την ενέργεια που διαχέεται από το υστερητικό ελατήριο. Επίσης όσον αφορά τη στένωση χρησιμοποιήθηκε το προσομοίωμα του Foliente. Αυτό το προσομοίωμα εισάγοντας μία νέα παράμετρο στην υστερητική διαφορική εξίσωση όμοια με τις απομειώσεις δυσκαμψίας και αντοχής. Τα παραπάνω προγραμματίστηκαν σε γλώσσα προγραμματισμού Matlab με βάση και το προτεινόμενο πεπερασμένο στοιχείο δοκού. Παρουσιάστηκαν αποτελέσματα αποκρίσεων με κάθε απομείωση ξεχωριστά καθώς και αποτελέσματα αποκρίσεων για διάφορες τιμές των παραμέτρων των απομειώσεων έτσι ώστε να γίνει κατανοητή η συμπεριφορά τους.



### **7.3 ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΔΟΚΟΥ**

Στη συνέχεια παρουσιάστηκε η μεθοδολογία ανάπτυξης στοιχείου δοκού με βάση τη θεωρία των Πεπερασμένων Στοιχείων, κατάλληλο για τη μη γραμμική δυναμική ανάλυση των κατασκευών όπως αυτό διατυπώθηκε από τον Σάββα Τριανταφύλλου [7]. Πιο συγκεκριμένα εισάγονται νέοι υστερητικοί βαθμοί ελευθερίας οι οποίοι υπόκεινται στις εξελικτικές εξισώσεις τύπου Bouc-Wen. Αυτοί οι νέοι βαθμοί ελευθερίας θεωρούνται ως υστερητικές καμπυλότητες και υστερητικές κεντρικές αξονικές παραμορφώσεις. Με βάση την αρχή των δυνατών έργων παράγεται μία σχέση για τα ελαστοπλαστικά υστερητικά μητρώα ακαμψίας, η οποία μαζί με τις εξελικτικές εξισώσεις αρκούν για να περιγράψουν πλήρως τη συμπεριφορά του στοιχείου. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τη μέθοδο άμεσης ακαμψίας μορφώνονται το μητρώο μάζας και το μητρώο απόσβεσης της κατασκευής, καθώς και μέρος του μητρώου ακαμψίας και του υστερητικού μητρώου και τέλος μορφώνονται οι εξισώσεις κίνησης. Το σύστημα των εξισώσεων, δηλαδή οι γραμμικές εξισώσεις κίνησης σε επίπεδο κατασκευής και οι μη γραμμικές υστερητικές εξισώσεις σε επίπεδο στοιχείου, έρχεται σε μορφή χώρου κατάστασης (state space form) για να επιλυθεί ταυτόχρονα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ολοκλήρωσης κατά τον αλγόριθμο Livermore. Με αυτό τον τρόπο αποφεύγεται η γραμμικοποίηση των εξισώσεων στο καθολικό επίπεδο της κατασκευής.

Η θεωρία που προηγήθηκε προγραμματίστηκε σε γλώσσα προγραμματισμού Matlab μαζί με τις απομειώσεις αντοχής δυσκαμψίας και τη στένωση, και εφαρμόστηκε για τέσσερις διαφορετικούς σεισμούς σε ένα μονώροφο δίστηλο πλαίσιο καθώς και σε ένα πολυώροφο κτήριο το Woodland Hills Hospital στη California. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης παρουσιάστηκαν έτσι ώστε να γίνουν φανερές οι διαφορές της ανάλυσης με και χωρίς απομειώσεις.

### **7.4 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ**

Με την ολοκλήρωση όλων των αναλύσεων που προηγήθηκαν στα κεφάλαια 5 και 6 μπορούμε να καταλήξουμε σε ορισμένα χρήσιμα συμπεράσματα. Σε αυτά θα οδηγηθούμε αν θεωρήσουμε τη καμπύλη που περιβάλλει την απόκριση που προκύπτει κάθε φορά (cyclic envelope).

Γενικότερα η απόκριση μιας κατασκευής εξαρτάται άμεσα από τη χρονοϊστορία της φόρτισης. Ερευνητικά πειράματα που πραγματοποίησαν οι Takemura και Kawashima (1997) [13] δείχνουν την επιρροή που έχει η φόρτιση στα χαρακτηριστικά της περιβάλλουσας καμπύλης (cyclic envelope). Σύμφωνα με την έρευνά τους εξετάστηκαν 6 ίδια βάθρα γέφυρας από ωπλισμένο σκυρόδεμα χρησιμοποιώντας 6 διαφορετικά πρωτόκολλα φόρτισης και παράγααν 6 σημαντικά διαφοροποιημένες υστερητικές συμπεριφορές. Στα πρωτόκολλα φόρτισης με περισσότερους κύκλους και αυξανόμενα εύρη φόρτισης σε κάθε κύκλο προέκυψαν μικρότερες περιβάλλουσες. Αντίθετα πρωτόκολλα φόρτισης με λιγότερους κύκλους και μειούμενα εύρη φόρτισης σε κάθε κύκλο έδωσαν μεγαλύτερες περιβάλλουσες. Άρα κατέληξαν ότι οι περιβάλλουσες που προκύπτουν εξαρτώνται άμεσα από τον αριθμό των κύκλων φόρτισης, την ένταση του κάθε κύκλου καθώς και την ακολουθία τους [25].

Είναι τέτοιες οι αβεβαιότητες όσον αφορά τη χρονοϊστορία και την ένταση του σεισμού που θα πλήξει την κατασκευή αλλά και οι δυσκολίες ως προς τη ταυτοποίηση των παραμέτρων του προσομοιώματος που καθιστούν την εφαρμογή των απομειώσεων σε επίπεδο σχεδιασμού δύσκολη στην εφαρμογή της ιδιαίτερα κατά τον αρχικό σχεδιασμό. Σε περιπτώσεις όμως αποτίμησης βλαβών σε υφιστάμενες κατασκευές με έντονη ανελαστική καταπόνηση κρίνονται επιβεβλημένες. Επίσης όσον αφορά την ανάλυση κατασκευών ή την προσομοίωση πειραματικών διατάξεων και την ερμηνεία των καταγραφών η εφαρμογή των απομειώσεων κρίνεται απαραίτητη καθώς χωρίς αυτές οδηγούμαστε σε μη ρεαλιστικές αποκρίσεις.

## **7.5 ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ**

Ορισμένα σημεία που θα μπορούσαν να διερευνηθούν περαιτέρω με έναυσμα την παρούσα διπλωματική εργασία είναι τα ακόλουθα:

- Αρχικά η ενσωμάτωση στο απλό προσομοίωμα αλλά και στο προσομοίωμα με τις απομειώσεις των αξιωματών πλαστικότητας των Drucker και Pyushin που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 2. Αυτό το μειονέκτημα των προσομοιωμάτων Bouc-Wen και Sivaselvan-Reinhorn αντιμετωπίστηκε πρόσφατα από τον Α. Ε Χαραλαμπίκη [18] στη Διδακτορική του διατριβή για το απλό προσομοίωμα.
- Αφετέρου θα μπορούσε να επιχειρηθεί η ταυτοποίηση των παραμέτρων των προσομοιωμάτων με βάση τα υλικά και τους φορείς που χρησιμοποιήθηκαν. Για την ταυτοποίηση αυτή έχουν προταθεί διάφορες μέθοδοι και έχουν γίνει αρκετές μελέτες που

όμως κρίθηκαν ανεπαρκείς. Αυτό συμβαίνει εξαιτίας την έντονης μη γραμμικότητας του προβλήματος. Αυτή η δυσκολία ξεπεράστηκε από τον Α. Ε Χαραλαμπάκη [18] στη Διδακτορική του διατριβή ο οποίος πρότεινε μια νέα μέθοδο ταυτοποίησης των παραμέτρων με έναν νέο υβριδικό εξελικτικό αλγόριθμο. Επίσης προτάθηκε και η ταυτοποίηση των παραμέτρων με τη μέθοδο PSO (Particle Swarm Optimization) δηλαδή με τη μέθοδο της βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων (Χαραλαμπάκης και Δήμου) [15]. Με βάση αυτές τις μεθόδους θα μπορούσε να γίνει η ταυτοποίηση των παραμέτρων των μοντέλων που χρησιμοποιήθηκαν (δίστηλα πλαίσια από χάλυβα και από ωπλισμένο σκυρόδεμα και πολυώροφο νοσοκομείο Woodland Hills).



**ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ**

1. Sivaselvan, M. V, Reinhorn, A. M (2000) "Hysteretic Models For Deteriorating Inelastic Structures", *J. Engrg. Mech.*, ASCE, 126(6):633-640
2. Wang, C., Foliente, G. C (2001) "Hysteretic Models For Deteriorating Inelastic Structures", *J. Engrg. Mech.*, ASCE, 127(11):1200-1202
3. Ma, F. , Zhang, H. , Bockstedte, A. Foliente, G. C, paevere, P. "Parameter analysis of the differential model of hysteresis", *Journal of Applied Mechanics* 71:342-349
4. Wen, Y. -K (1980) "Equivalent linearization for hysteretic system under random excitation", *Journal of Applied Mechanics* 47:150-154
5. Park, Y. J, Reinhorn, A. M, Kunnath, S. K (1987) "IDARC: Inelastic damage analysis of reinforced concrete frame-shear wall structures", National Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York, Buffalo, NY, Tech. Rep. NCEER-87-0008
6. Baber, T. T, Wen, Y. -K (1981) "Random vibration of hysteretic degrading systems", *Journal of the Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE*, 107(6):1069-1087
7. Triantafyllou, S. , Koumoussis, V "Small and large displacement analysis of frame structures based on hysteretic beam elements", *Journal of Engineering Mechanics* 138:36-49
8. Baber, T. T, Noori, M. -N (1985) "Random vibration of degrading pinching systems", *Journal of the Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE*, 11(8):1010-1026
9. Baber, T. T, Noori, M. N (1986) "Modelling general hysteresis behavior and random vibration application", *Journal of Vibration, Acoustic, Stress and Reliability in Design*, 108:411-420
10. Foliente, G. C (1995) "Hysteresis Modelling of Wood Joints and Structural Systems", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 121(6): 1013-1022
11. Lawrence G. Selna, Kyojin Kim (1998) "Use of stiffness measure in nonlinear response analysis of concrete structures", *Computers & Structures* (66):385-394
12. Saidi M., Sozen M. A (1979) "Simple and Complex models for nonlinear seismic response of R/C structures", *Civil Engineering Studies, University of Illinois, Urbana, IL, Struct., Res. Series* 465
13. Takemura, H. and Kawashima, K. (1997), "Effect of loading hysteresis on ductility capacity of reinforced concrete bridge piers," *Journal of Structural Engineering*, Vol. 43A, pp.849-858, Japan
14. Foliente, G. C (1993) "Stochastic Dynamic Response of Wood Structural Systems" PhD dissertation. Virginia Polytechnic Institute and State University. Blacksburg, Virginia
15. A.E. Charalampakis, C.K. Dimou, "Identification of Bouc-Wen hysteretic systems using particle swarm optimization", *Computers & Structures*, Volume 88, Issues 21-22, November 2010, Pages 1197-1205
16. Bathe K.J., 2007, *Finite Element Procedures*, Prentice Hall Engineering, Science, Mathematics, New York.

17. Chopra A., "Dynamics of Structures", 2006, Prentice Hall, New York.
18. Α Χαραλαμπάκης, Α. Ε (2009) "Ανελαστική Δυναμική Ανάλυση Φορέων Με Προσομοίωση Κατά Bouc-Wen", Διδακτορική Διατριβή, Ε. Μ. Π
19. Sandler, I. S (1987) "On the uniqueness and stability of endochronic theories of material behavior", *J. Appl. Mech.*, 45:263-266
20. Casciati, F. (1987) "Nonlinear stochastic dynamics of large structural system by equivalent linearization", *Proc. ICAPS (Int. Conf. on Application of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering), Vancouver, 1987, pp1165-1172*
21. Thyagarajan, R. S (1989) "Modeling and analysis of hysteretic structural behavior", Rep. No EERL-89-03, Earthquake Engineering Research Lab, California Institute of Technology, Pasade
22. Spacone, E., Ciampi, V., Filippou, F. C (1992) "A Beam Element For Seismic Damage Analysis", Rep. No UCB/EERC-92/07, Earthquake Engineering Research Center, University of California Berkeley.
23. Ilyushin, A. A (1961) "On the postulates of plasticity", *Prinkl. Math. Mekh.*, 25:503-507
24. Drucker, D. C (1950) "Some implications of work hardening and ideal plasticity", *Quart. j. Appl. Math.*, 7:411-418
25. Fema p440a, "Effects of strength and stiffness degradation on seismic Responce" June 2009 pp 2-16 - 2-19
26. Κότταρη Α., Κουμούσης Β. "Γενικευμένα προσομοιώματα Bouc-Wen στην ελαστοπλαστική ανάλυση κατασκευών" Διπλωματική εργασία Ιούλιος 2009
27. Kottari, A., Charalampakis, A. E., Koumouisis, V. K., "Degrading Bouc-Wen models compatible with plasticity postulates", *Proc. 9th HSTAM International Congress on Mechanics, Limassol, Cyprus; 2010.*