ΕΞΕΛΙΚΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

Διπλωματική Εργασία

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Αικατερίνη Λογκάκη

Ιούλιος 2012

ΕΞΕΛΙΚΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

Αικατερίνη Λογκάκη, Διπλωματική Εργασία

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο 2012

Η εξελικτική θεωρία παιγνίων είναι μια επέκταση της κλασικής θεωρίας. Ξεκίνησε ως ένα μαθηματικό μοντέλο της θεωρίας της εξέλιξης του Δαρβίνου με σκοπό την ποσοτικοποίηση της ιδέας της " επιβίωσης του δυνατότερου". Ένα από τα πιο επαναστατικά αποτελέσματα της θεωρίας είναι η επιτυχία της στην μοντελοποίηση αλτρουιστικών συμπεριφορών βασισμένη σε καθαρά εγωιστικά κριτήρια. Σήμερα, βρίσκει εφαρμογές σε ένα ευρή φάσμα επιστημών όπως η κοινωνιολογία, τα οικονομικά, η ανθρωπολογία κ.α.. Σε αυτή την εργασία ξεκινάμε παρουσιάζοντας τις απαραίτητες έννοιες από την κλασική θεωρία παιγνίων. Στη συνέχεια, εισάγουμε την βασική εννοια της 'έξελικτικά σταθερής ισορροπίας" σε αντιδιαστολή με την ισορροπία κατά Nash. Στο κεφάλαιο "δυναμική αντιγραφέα" δίνουμε τις διαφορικές εξισώσεις που διέπουν την χρονική εξέλιξη των ποσοστών του πληθυσμού που "παίζουν" συγκεκριμένες συμπεριφορές. Μεγάλο μέρος της θεωρίας στηρίζεται στο βιβλίο Evolutionary Game Theory του Jorgen W. Weibull. Τέλος, κλείνουμε συζητώντας διάφορες εφαρμογές από το πεδίο της βιολογίας και συγκεκριμένα της πρόβλεψης της συμπεριφοράς των ζώων.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα εργασία αποτελεί τη Διπλωματική μου Εργασία στα πλαίσια των σπουδών μου στη σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του ΕΜΠ υπό την επίβλεψη του καθηγητή του τομέα Μαθηματικών Ιωάννη Πολυράκη, στον οποίο οφείλω ιδιαίτερες ευχαριστίες για την ανάθεση της εργασίας και τη συμβολή του στην ολοκλήρωση και παρουσίαση της. Με την ευκαιρία αυτή θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Ηλία για τις πολύτιμες συμβουλές και την υποστήριξη καθ΄ όλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και τους φίλους μου που με στήριζαν και με συμβούλευαν σε κάθε βήμα της φοιτητικής μου ζωής.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η θεωρία παιγνίων ξεκινάει σαν κλάδος των οικονομικών το 1944 από τον John von Neumann και τον Oskar Morgenstern. Το βιβλίο τους, Theory of Games and Economic Behaviour [7], επικεντρώνεται στην ανάλυση αποφάσεων σε καταστάσεις στρατηγικής αλληλεπίδρασης (strategic interdependence). Στους θεμελιωτές της θεωρίας παιγνίων ανήκουν ακόμα ο John Forbes Nash, ο οποίος γενικεύοντας το πρόβλημα σε παίγνια μη μηδενικού αθροίσματος, δίνει σαν λύση την γνωστή ισορροπία κατά Nash [6], ο Reinhard Selten, ο οποίος ασχολείται με την λύση του προβλήματος σε δυναμικά παίγνια με την έννοια της ισορροπίας στα υποπαίγνια και της ισορροπίας τρεμάμενου χεριού [11] και τέλος ο John Harsanyi, ο οποίος ασχολείται με τα παίγνια υπό μερική πληροφόρηση [2]. Οι τελευταίοι θα τιμηθούν το 1994 με το βραβείο της Σουηδικής Ακαδημίας Επιστημών στην μνήμη του Alfred Bernhard Nobel. Μία καλή εισαγωγή στην κλασική θεωρία με εφαρμογές στα οικονομικά μπορεί να βρεθεί στο [9].

Τα επόμενα χρόνια η θεωρία παιγνίων εξελίσσεται και βρίσκει εφαρμογές όχι μόνο στα οικονομικά αλλά και σε άλλες επιστήμες όπως στην βιολογία, στην ψυχολογία, στην κοινωνιολογία. Η εξελικτική θεωρία παιγνίων είναι η εφαρμογή της θεωρίας παιγνίων στις εξελισσόμενες μορφές ζωής. Διαφέρει από την κλασική θεωρία παιγνίων επικεντρώνοντας περισσότερο στις αλλαγές στρατηγικής που προκύπτουν όχι μόνο εξαιτίας της ποικιλίας ανταγωνιστικών συμπεριφορών, αλλά και της συχνότητας με την οποία αυτές εμφανίζονται. Ιδιαίτερα σημαντική θεωρείται η βοήθεια της θεωρίας στην κατανόηση και εξήγηση περίπλοκων και δύσκολων πτυχών της βιολογίας, όπως είναι η επιλογή ομάδων, η σεξουαλική επιλογή, ο αλτρουισμός, η γονική φροντίδα. Αυξανόμενο είναι το ενδιαφέρον για τη θεωρία και από άλλους τομείς εκτός την βιολογίας, όπως των οικονομικών, της ανθρωπολογίας, της κοινωνιολογίας και της φιλοσοφίας.

Η πρώτη προσπάθεια σύνδεσης της θεωρίας παιγνίων με την βιολογία γίνεται το 1961 απο τον Lewontin [4]. Η προσέγγισή του όμως αφορά είδη που "πολεμούν" εναντίον της φύσης και εύρεση στρατηγικής ώστε να ελαχιστοποιηθεί η πιθανότητα εξαφάνισης του είδους. Παρόμοια προσέγγιση ακολουθείται και από τους Slobodkin και Rapoport [12]. Αντιθέτως, ο John Maynard Smith [5] ασχολείται με παίγνια στα οποία τα είδη ανταγωνίζονται μεταξύ τους και μελετά τις ισορροπίες που προκύπτουν. Το μαθηματικό του μοντέλο αποδεικνύεται πιο ρεαλιστικό κι έτσι ο ίδιος βάζει της βάσης της εθελικτικής θεωρίας παιγνίων.

Στην εξελικτική εκδοχή της θεωρίας παιγνίων δεν απαιτείται οι παίκτες να επιλέγουν ορθολογιστικά μια στρατηγική όπως στη κλασική θεωρία. Απαιτείται απλώς να έχουν μια στρατηγική. Οι παίκτες δεν επιλέγουν τη στρατηγική τους και ούτε έχουν την επιλογή να την αλλάξουν. Γεννιούνται με συγκεκριμένη στρατηγική, την οποία και κληρονομούν στους απογόνους τους. Το αποτέλεσμα του παιγνίου θα δείξει πόσο καλή είναι αυτή η στρατηγική. Εξετάζει δηλαδή εναλλακτικές στρατηγικές μελετώντας τις πιθανότητες επιβίωσης και εξέλιξης. Το κλειδί στη θεωρία είναι οτι η επιτυχία μιας στρατηγικής δεν καθορίζεται μόνο απο το πόσο καλή είναι η στρατηγική, αλλά από το πόσο υπερέχει των εναλλακτικών στρατηγικών και της συχνότητας εμφάνισης αυτών στον πληθυσμό. Επίσης, τίθεται και το ερώτημα κατά πόσο αυτή η στρατηγική είναι αποτελεσματική και εναντίον του εαυτού της, δηλαδή μιας ίδιας στρατηγικής, αφού στον κόσμο της Βιολογίας, μια πετυχημένη στρατηγική τελικά θα κυριαρχήσει στον πληθυσμό και τα είδη που ανταγωνίζονται μέσα σ΄ αυτή θα χρειαστεί ν΄ αντιμετωπίσουν ταυτόσημες στρατηγικές με τις δικές τους.

Οι κανόνες περιγράφονται όπως στην κλασσική θεωρία, μόνο που στους κανόνες της εξελικτικής περιλαμβάνεται και η δυναμική του αντιγραφέα. Με άλλα λόγια τα άτομα που θα ακολουθήσουν την πιο αποτελεσματική στρατηγική, θα αναπαραγάγουν αντίγραφα του εαυτού τους στον πληθυσμό, ενώ τα είδη που υιοθετούν λιγότερο υγιείς στρατηγικές αποκόπτωνται από τον πληθυσμό του παίγνιου. Τα παίγνια διαδραματίζονται χωρίς διακοπή. Τα αποτελέσματα που μελετώνται περιλαμβάνουν τη δυναμική των αλλαγών στον πληθυσμό, την επιβίωση των στρατηγικών και τις ισορροπίες που επιτυγχάνονται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΚΛΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

1.1 Βασικοί Ορισμοί

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε $n \in \mathbb{N}$ παίκτες τους οποίους αριθμούμε από 1 έως n και συμβολίζουμε το σύνολο παικτών με

$$I = \{1, \ldots, n\}.$$

Ο κάθε παίκτης, $i \in I$, έχει στη διάθεση του ένα πεπερασμένο σύνολο αμιγών στρατηγικών

$$S_i = \{1, 2, \ldots, m_i\},$$

όπου $m_i \geq 2$. Το καρτεσιανό γινόμενο $\boldsymbol{S} = S_1 \times \cdots \times S_n$, ονομάζεται χώρος αμιγών στρατηγικών. Κάθε σημείο $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in \boldsymbol{S}$ ονομάζεται προφίλ αμιγών στρατηγικών. Όταν λέμε ότι οι παίκτες επιλέγουν να παίξουν το προφίλ καθαρών στρατηγικών $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{S}$, εννοούμε ότι ο $i \in I$ παίκτης επιλέγει να παίξει την αμιγή στρατηγική $s_i \in S_i$. Τέλος, ο κάθε παίκτης $i \in I$ έχει τη δική του συνάρτηση απόδοσης

$$\pi_i : \boldsymbol{S} \to \mathbb{R}.$$

Διαισθητικά, όταν οι παίκτες παίζουν την αμιγή στρατηγική $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in \boldsymbol{S}$, $\pi_i(\boldsymbol{s})$ είναι το όφελος ή η ζημιά του παίκτη $i \in I$. Χάριν συντομίας, ορίζουμε την συλλογική συνάρτηση απόδοσης $\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{S} \to \mathbb{R}^n$ ως

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_n).$$

Είμαστε, πλέον σε θέση να δώσουμε τον μαθηματικό ορισμό ενός παιγνίου:

Ορισμός 1. Ονομάζουμε κανονικό παίγνιο την τριάδα

$$\mathcal{G} = (I, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{\pi}),$$

όπου I, $\boldsymbol{S}$ και $\boldsymbol{\pi}$ είναι το σύνολο των παικτών, ο χώρος αμιγών στρατηγικών και η συλλογική συνάρτηση απόδοσης, αντίστοιχα.

Στο κανονικής μορφής παίγνιο, όλοι οι παίκτες επιλέγουν ταυτόχρονα μια στρατηγική. Ο τελικός συνδυασμός των στρατηγικών που επιλέχθηκαν καθορίζει και το όφελος του κάθε παίκτη. Σημαντικό είναι να διευκρινιστεί πως ενώ οι παίκτες επιλέγουν τη στρατηγική τους ταυτόχρονα, αυτό δεν σημαίνει οτι αναγκαστικά δρούν και ταυτόχρονα. Αρκεί ο καθένας να επιλέγει τη στρατηγική που θα ακολουθήσει χωρίς να έχει επίγνωση των επιλογών των άλλων παικτών.

Παράδειγμα 1. Το πιο διαδεδομένο παράδειγμα παιγνίου κανονικής μορφής είναι "Το Δίλημμα του Κρατουμένου" (*Prisoners' Dilemma*) [10]. Δύο ύποπτοι συλλαμβάνονται και κατηγορούνται για ένα έγκλημα. Κρατούνται σε ξεχωριστά κελιά και τούς δίνονται οι εξής επιλογές:

1. αν κανείς απ΄ τους δύο δεν ομολογήσει, τότε και οι δύο θα καταδικαστούν σε 3 μήνες φυλάκηση,
2. αν ομολογήσουν και οι δύο, τότε και οι δύο θα καταδικαστούν σε 4 μήνες φυλάκιση και τέλος,
3. αν ομολογήσει ο ένας αλλά ο άλλος όξι, τότε αυτός που ομολόγησε θάπελευθερωθεί ενώ ο άλλος θα καταδικαστεί σε 5 μήνες φυλάκιση.

Επομένως, στο παίγνιο αυτό ο κάθε παίκτης έχει δύο διαθέσιμες επιλογές. Μπορεί να ακολουθήσει τη στρατηγική "Καρφώνω" και να ομολογήσει, είτε τη σταρτηγική

		Κρατούμενος 1	
		Σιωπώ	Καρφώνω
Κρατούμενος 2	Σιωπώ	$(4,4)$	$(0,5)$
	Καρφώνω	$5,0)$	$(3,3)$

Πίνακας 1.1: Το Διλημμα του Κρατουμένου.

“Σιωπώ” και να μην ομολογήσει. Βάζοντας τα παραπάνω στο μαθηματικό πλαίσιο που αναπτύξαμε, θα γράφαμε το σύνολο των παικτών I ως

$$I = \{1, 2\},$$

όπου το 1 και το 2 αντιστοιχούν στον Κρατούμενο 1 και στον Κρατούμενο 2 αντίστοιχα. Οι παίκτες έχουν στην διάθεσή τους ακριβώς τις ίδιες αμιγείς στρατηγικές, επομένως το σύνολο των αμιγών στρατηγικών S_i του παίκτη $i = 1, 2$ γράφεται

$$S_1 = \{1, 2\} \text{ και } S_2 = \{1, 2\},$$

όπου η αμιγή στρατηγική 1 αντιστοιχεί στην στρατηγική “Καρφώνω” και η 2 στην “Σιωπώ”. Το προφίλ των αμιγών στρατηγικών είναι

$$\boldsymbol{S} = S_1 \times S_2 = \{1, 2\}^2.$$

Η συνάρτηση απόδοσης του κάθε παίκτη $\pi_i : \boldsymbol{S} \to \mathbb{R}$ είναι

$$\pi_1(1,1) = 4 \quad , \quad \pi_1(1,2) = 0,$$

$$\pi_1(2,1) = 5 \quad , \quad \pi_1(2,2) = 3,$$

για τον Κρατούμενο 1 και

$$\pi_2(1,1) = 4 \quad , \quad \pi_2(1,2) = 5,$$

$$\pi_2(2,1) = 0 \quad , \quad \pi_2(2,2) = 3,$$

για τον Κρατούμενο 2. Η συλλογική συνάρτηση απόδοσης $\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{S} \to \mathbb{R}$ δίνεται από

$$\boldsymbol{\pi}(1,1) = (4,4) \quad , \quad \boldsymbol{\pi}(1,2) = (0,5),$$

$$\boldsymbol{\pi}(2,1) = (5,0) \quad , \quad \boldsymbol{\pi}(2,2) = (3,3).$$

Τέλος, συνηθίζεται να γράφουμε της αποδόσεις ενός παιγνίου δύο παικτών σε μορφή πίνακα (βλ. Πιν. [1.1]). Οι στήλες και οι γραμμές αντιστοιχούν στις αμιγείς στρατηγικές του παίκτη 1 και 2 αντίστοιχα. Το στοιχείο s_1, s_2 του πίνακα αντιστοιχεί στην επιλογή της αμιγής στρατηγικής s_1 από τον παίκτη 1 και s_2 από τον παίκτη 2 και ταυτίζεται με την τιμή της συλλογικής συνάρτησης απόδοσης $\boldsymbol{\pi}(s_1, s_2)$. Δηλαδή, είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος, το πρώτο στοιχείο του οποίου είναι η απόδοση του παίκτη 1 και το δεύτερο η απόδοση του παίκτη 2.

1.2 Μικτές Στρατηγικές

Σε ενα παίγνιο, οι παίκτες μπορούν να επιλέξουν να δράσουν είτε παίζοντας αμιγή στρατηγική, είτε παίζοντας μικτή στρατηγική. Επιλέγοντας αμιγή στρατηγική, ο παίκτης καλείτε να επιλέξει μια μόνο απο τις δυνατές στρατηγικές με πιθανότητα ίση με τη μονάδα, όπως στο παραπάνω παράδειγμα όπου ο παίκτης-κρατούμενος καλείται να επιλέξει είτε "Καρφώνω" είτε "Σιωπώ". Στις μικτές στρατηγικές, ο παίκτης έχει τη δυνατότητα να παίξει περισσότερες στρατηγικές, δίνοντας πιθανότητες σε κάθε μια στρατηγική, οι οποίες συνολικά αθροίζουν στη μονάδα. Πιο συγκεκριμένα:

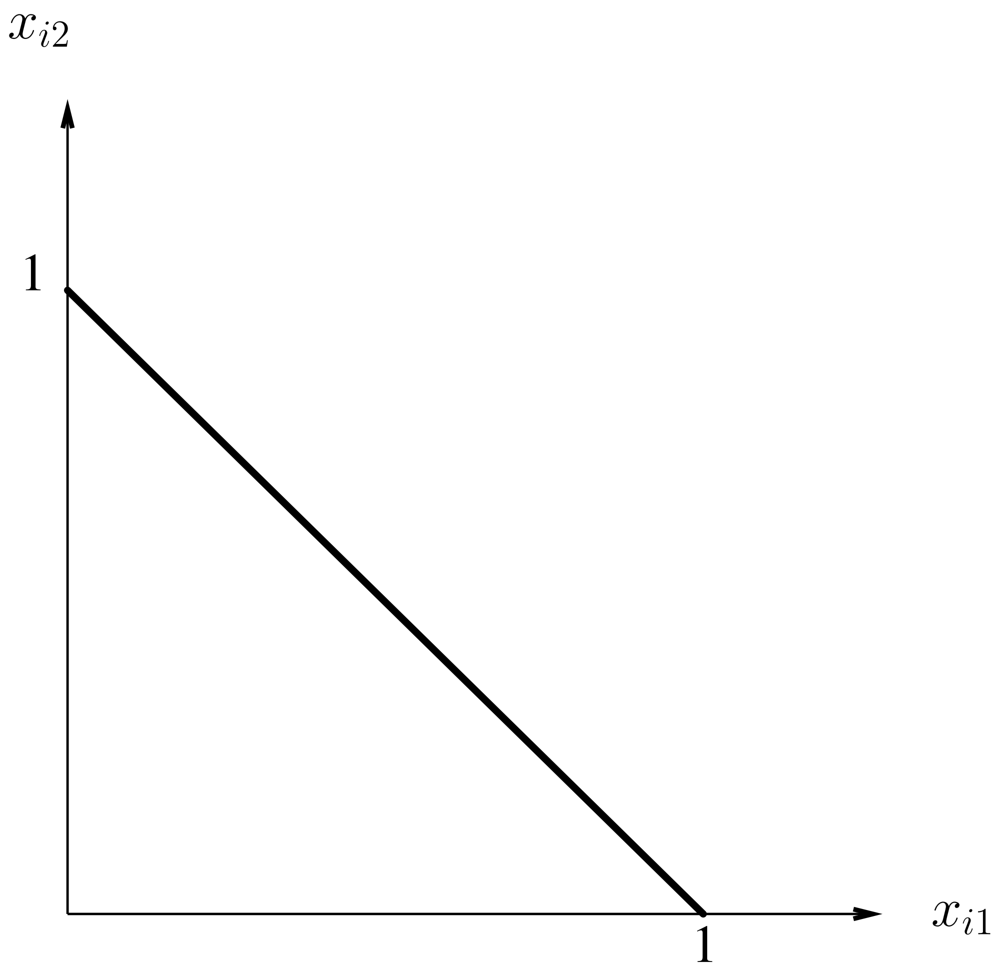
Ορισμός 2. Μικτή Στρατηγική για τον παίκτη i είναι μια κατανομή πιθανότητας επί του συνόλου των καθαρών στρατηγικών S_i. Συγεκριμένα, μια μικτή στρατηγική μπορεί να ταυτιστεί με το διάνυσμα

$$\boldsymbol{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{im_i}) \in \Delta_i,$$

όπου το

$$\Delta_i = \left\{ \boldsymbol{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{im_i}) \in \mathbb{R}_+^{m_i} : \sum_{h=1}^{m_i} x_{ih} = 1 \right\},$$

ονομάζεται σύνολο μικτών στρατηγικών του παίκτη i. Το x_{ih} είναι η πιθανότητα ο παίκτης i να παίξει την στρατηγική $h \in S_i$.



Σχήμα 1.1: Απεικόνηση του συνόλου Δ.

Επιπλέον θα χρειαστούμε και την ένοια της "στήριξης" μίας κατανομής πιθανότητας:

Ορισμός 3. Στήριξη του x_i ονομάζουμε το σύνολο των καθαρών στρατηγικών που αποδίδουν θετικές πιθανότητες σε κάποιες μικτές στρατηγικές και ορίζεται,

$$\mathcal{C}(x_i) = \{h \in S_i : x_{ih} > 0\}.$$

Οι κορυφές του πλέγματος Δ_i είναι τα μοναδιαία διανύσματα στον m_i-χώρο, τα οποία συμβολίζονται, $(e_i^1 = 1, 0, 0, \ldots, 0)$, $(e_i^2 = 0, 1, 0, \ldots, 0)$,..., $(e_i^{m_i} = 0, 0, 0, \ldots, 1)$. Θεωρώντας οτι κάθε μοναδιαίο διάνυσμα e_i^h αντιπροσωπεύει τη μικτή στρατηγική για τον παίκτη i η οποία αποδίδει πιθανότητα 1 στην h^{th} αμιγή στρατηγική του, καταλήγουμε στο συμπέρασμα οτι οι αμιγείς στρατηγικές δεν είναι τίποτα άλλο απο ειδικές, ¨ακραίες' , μικτές στρατηγικές. Κάθε μικτή στρατηγική $x_i \in \Delta_i$ είναι ένας κυρτός συνδυασμός μοναδιαίων διανυσμάτων ή αμιγών στρατηγικών, e_i^h:

$$\boldsymbol{x}_i = \sum_{h=1}^{m_i} x_{ih} \boldsymbol{e}_i^h.$$

Ορισμός 4. Καλούμε(σχετικό) εσωτερικό του συνόλου Δ_i το υποσύνολο,

$$\mathrm{int}(\Delta_i) = \{\boldsymbol{x}_i \in \Delta_i : x_{ih} > 0, \forall h\}.$$

Οι μικτές στρατηγικές πού ανήκουν στο υποσύνολο $\mathrm{int}(\Delta_i)$ καλούνται εσωτερικές ή απολύτως μικτές . Αποδίδουν θετικές πιθανότητες στις αμιγείς στρατηγικές όλων των παικτών κι έτσι έχουν πλήρη στήριξη,

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{x}_i) = \boldsymbol{S}_i, \forall i \in I.$$

Ορισμός 5. Σύνορο του συνόλου Δ_i, καλείται το σύνολο των μη εσωτερικών στρατηγικών και ορίζεται,

$$\mathrm{bd}(\Delta_i) = \{\boldsymbol{x}_i \in \Delta_i : \boldsymbol{x}_i \notin int(\Delta_i)\}$$

Το σύνορο του Δ_i είναι το σύνολο των στρατηγικών $\boldsymbol{x}_i$, για τις οποίες η στήριξη $\mathcal{C}(x_i)$, είναι γνήσιο υποσύνολο του συνόλου των στρατηγικών $\boldsymbol{S}_i$.

Ορισμός 6. Προφίλ μικτών στρατηγικών καλείται ένα διάνυσμα $\boldsymbol{\chi} = (\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n)$, όπου κάθε συνιστώσα $\chi_i \in \Delta_i$ αναφέρεται σε μια μικτή στρατηγική του παίκτη $i \in I$.

Ως εκ τούτου, ένα προφίλ μικτών στρατηγικών $\boldsymbol{\chi}$ είναι ένα σημείο του χώρου,

$$\Theta = \times_{i \in I} \Delta_i.$$

Ορισμός 7. Ένα στρατηγικό προφίλ $\boldsymbol{\chi}$ καλείται εσωτερικό (ή απόλυτα μικτό) αν κάθε συνιστώσα του χ_i είναι εσωτερική. Ένα σύνολο τέτοιων στρατηγικών ορίζεται,

$$\mathrm{int}(\Theta) = \times_{i \in I} \mathrm{int}(\Delta_i).$$

Θα γράφουμε $(\chi_i, \boldsymbol{\psi}_{-j})$ για να περιγράψουμε το στρατηγικό προφίλ στο οποίο ο παίκτης $i \in I$ παίζει τη στρατηγική $\chi_i \in \Delta_i$, ενώ οι υπόλοιποι j παίκτες παίζουν τη στρατηγική $\boldsymbol{\psi} \in \Theta$. Πιο συγκεκριμένα, το στρατηγικό προφίλ $\boldsymbol{\zeta} = (\chi_i, \boldsymbol{\psi}_{-i}) \in \Theta$ ορίζεται ως $\zeta_i = \chi_i$ και $\zeta_j = \psi_j, \forall j \neq i$. Στα παίγνια μη συνεργασίας, οι τυχαίες επιλογές στρατηγικών είναι ανεξάρτητες. Ως εκ τούτου, η πιθανότητα να επιλεγεί ένα συγκεκριμένο καθαρό στρατηγικό προφίλ $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$, όταν παίζεται το μικτό στρατηγικό προφίλ $\boldsymbol{\chi} \in \Theta$, είναι το γινόμενο,

$$\boldsymbol{\chi}(s) = \prod_{i=1}^{n} x_{is_i}$$

Κατα συνέπεια, η μέση τιμή της απόδοσης του παίκτη i, που έχει επιλέξει να παίξει το μικτό στρατηγικό προφίλ $\boldsymbol{\chi} \in \Theta$ είναι,

$$u_i(\boldsymbol{\chi}) = \sum_{s \in S} \boldsymbol{\chi}(s) \pi_i(s).$$

Ορισμός 8. Ο πραγματικός αριθμός $u_i(\boldsymbol{\chi})$ καλείται απόδοση του παίκτη i, που έχει επιλέξει το στρατηγικό προφίλ $\boldsymbol{\chi}$.

Παρατηρούμε οτι το να παίχθει η καθαρή στρατηγική $s_j = k \in S_j$ είναι ισοδύναμο με το να παιχθεί η ακραία μικτή στρατηγική $\boldsymbol{e}_j^k \in \Delta_j$. Συνεπώς, μπορούμε να γράφουμε,

$$u_i(\boldsymbol{e}_j^k, \boldsymbol{\chi}_{-j})$$

για την απόδοση του i παίκτη, όταν ο παίκτης j χρησιμοποιεί την k στρατηγική. Ως εκ τούτου, για κάθε $\boldsymbol{\chi} \in \Theta$ και $i, j \in I$,

$$u_i(\boldsymbol{\chi}) = \sum_{k=1}^{m_j} u_i(\boldsymbol{e}_j^k, \boldsymbol{\chi}_{-j}) \chi_{jk}.$$

Η εξίσωση $u_i(\boldsymbol{\chi}) = \sum_{s \in S} \boldsymbol{\chi}(s)\pi_i(s)$, ορίζει το $u_i(\boldsymbol{\chi})$ ως ενα πραγματικό αριθμό, για όλα τα διανύσματα $\boldsymbol{\chi} \in \mathbb{R}^m$, κι όχι μόνο για εκείνα στο υποσύνολο $\Theta \subset \mathbb{R}^m$. Συνεπώς, η εξίσωση ορίζει το u_i ως μια πολυγραμμική απεικόνιση, δηλαδή μια απεικόνηση γραμμική ως προς κάθε $x_j \in \mathbb{R}^m$.

Ορισμός 9. Η επεκταμένη συνάρτηση $u_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ καλείται συνάρτηση απόδοσης (μικτής στρατηγικής) για τον παίκτη i.

Ορισμός 10. Η συνδιαστική συνάρτηση $u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ που ορίζεται,

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\chi}) = (u_1(\boldsymbol{\chi}), \ldots, u_n(\boldsymbol{\chi}))$$

καλείται συνδιαστική συνάρτηση απόδοσης μικτής στρατηγικής.

Σαν εναλλακτική παρουσίαση του παιγνίου καθαρής στρατηγικής $\mathcal{G} = (I, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{\pi})$, μπορούμε να αναφερόμαστε στη επέκταση αυτού, με την τριάδα,

$$(I, \Theta, \mathbf{u}),$$

όπου Θ ο χώρος μικτής στρατηγικής και u η συνδιαστική συνάρτηση απόδοσης μικτής στρατηγικής.

Στην ειδική περίπτωση όπου έχουμε παίγνιο δύο παικτών, το παίγνιο μπορεί να αναπαρασταθεί από το ζεύγος πινάκων απόδοσης (A, B), όπου $A(B)$ είναι ο πίνακας απόδοσης του παίκτη 1(2). Συνεπώς, για κάθε ζευγάρι μικτών στρατηγικών
$\chi_1 \in \Delta_1$ και $\chi_2 \in \Delta_2$, έχουμε,

$$u_1(\boldsymbol{\chi}) = \sum_{h=1}^{m_1} \sum_{k=1}^{m_2} \chi_{1h} a_{hk} \chi_{2k} = \chi_1 \cdot A\chi_2 \tag{1.1}$$

και

$$u_2(\boldsymbol{\chi}) = \sum_{h=1}^{m_1} \sum_{k=1}^{m_2} \chi_{1h} b_{hk} \chi_{2k} = \chi_1 \cdot B\chi_2 = \chi_2 \cdot B^T \chi_1 \tag{1.2}$$

Όπου με "$\cdot$" νοείτε το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο μεταξύ διανυσμάτων και με "T" η αναστροφή του πίνακα. Παρουσιάζοντας ένα παίγνιο δύο παικτών με πίνακες, ο παίκτης 1 επιλέγει μια γραμμή(καθαρή στρατηγική) ή μια κατανομή πιθανότητας μεταξύ των γραμμών και αντίστοιχα ο παίκτης 2 επιλέγει μια στήλη(αμιγή στρατηγική) ή μια κατανομή πιθανότητας μεταξύ των στηλών(μικτή στρατηγική).

Παράδειγμα 2. Η συνδιαστική συνάρτηση απόδοσης μικτής στρατηγικής $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ στο "Δίλημμα του Κρατούμενου" του Παρ. [1] ορίζεται από τις εξισώσεις,

$$u_1(\boldsymbol{\chi}) = \chi_1 \cdot A\chi_2 = 4\chi_{11}\chi_{21} + \chi_{12}(5\chi_{21} + 3\chi_{22}),$$

και

$$u_2(\boldsymbol{\chi}) = \chi_1 \cdot B\chi_2 = \chi_{11}(4\chi_{21} + 5\chi_{22} + 3\chi_{12}\chi_{22}).$$

Είναι εύκολο να επαληθευτεί οτι η συνάρτηση απόδοσης $u_1(\chi)$ για τον πρώτο παίκτη και για καθορισμένη στρατηγική $\chi_2 \in \Delta_2$ του παίκτη 2, μεγιστοποιείται στο Δ_1 στο σημείο $\chi_1 = \boldsymbol{e}_1^2$. Κάνοντας χρήση της ταυτότητας $\chi_{i1} + \chi_{i2} = 1$, γράφουμε $u_1(\chi) = (1 + 2\chi_{22})\chi_{12} + 4\chi_{21}$, η οποία είναι αύξουσα συνάρτηση του χ_{12}.

1.3 Σχέσεις Κυριαρχίας και Βέλτιστες Αποκρίσεις

Μια στρατηγική λέμε οτι κυριαρχεί ασθενώς σε μια άλλη στρατηγική, αν η πρώτη ποτέ δεν αποκομίζει μικρότερο όφελος από τη δεύτερη, ενώ αντίθετα, κάποιες φορές αποκομίζει μεγαλύτερο όφελος. Μια στρατηγική λέγεται μη-κυριαρχούμενη αν καμία άλλη δεν την κυριαρχεί ασθενώς. Ο ακριβής μαθηματικός ορισμός,

Ορισμός 11. Μια στρατηγική $y \in \Delta_i$ κυριαρχεί αυστηρά την $x_i \in \Delta_i$ αν ,

$$u_i(y_i, z_{-i}) \geq u_i(x_i, z_{-i})$$

$\forall z \in \Theta$. Με αυστηρή ανισότητα για κάποια $z \in \Theta$.

Μια στρατηγική x_i καλείται μη-κυριαρχούμενη αν δεν υπάρχει y_i τέτοια ώστε, να ισχύει η ανισότητα

$$u_i(y_i, z_{-i}) \geq u_i(x_i, z_{-i})$$

Μια στρατηγική λέμε οτι κυριαρχεί αυστηρά όταν δεν υπάρχει άλλη στρατηγική που να αποκομίζει περισσότερα οφέλη.

Ορισμός 12. Η στρατηγική $y_i \in \Delta_i$ κυριαρχεί αυστηρά τη στρατηγική $x_i \in \Delta_i$ αν,

$$u_i(y_i, z_{-i}) > u_i(x_i, z_{-i})$$

$\forall z \in \Theta$.

Στο παράδειγμα του παιγνίου ¨Το Δίλημμα του Κρατουμένου¨, η δεύτερη αμιγή στρατηγική ¨Καρφώνω' κυριαρχεί αυστηρά της πρώτης αμιγής στρατηγικής ¨Σιωπώ¨. Ας θυμηθούμε τον πίνακα αποδόσεων του παιγνίου Πιν. [1.1]. Όπως βλέπουμε αν ο Κρατούμενος 1 ομολογήσει θα πετύχει 5 ή 3, ενώ αν προτιμήσει να σιωπήσει πετυχαίνει 4 ή 0. Είναι ξεκάθαρο οτι η επιλογή να μην ομολογήσει το έγκλημα είναι κυριαρχούμενη (dominated), ενώ η επιλογή να ομολογήσει είναι κυρίαρχη (dominant). Μάλιστα η στρατηγική ¨Σιωπώ' είναι αυστηρά κυριαρχούμενη, καθώς υπάρχει μια άλλη στρατηγική, στο συγκεκριμένο παράδειγμα η στρατηγική ¨Καρφώνω¨, που κυριαρχεί επ΄ αυτής με αυστηρό τρόπο, που σημαίνει πως όλα τα αποτελέσματα αυτής είναι μεγαλύτερα από της αυστηρά κυριαρχούμενης στρατηγικής. Η ίδια ανάλυση ισχύει και για τον Κρατούμενο 2, καθώς το παιχνίδι είναι συμμετρικό. Με βάση αυτή την ανάλυση καταλήγουμε στο (¨Καρφώνω¨, ¨Καρφώνω¨), το οποίο και λέγεται Ισορροπία σε Αυστηρά Κυρίαρχες Στρατηγικές.

Ορισμός 13. Έστω $S^D \subset S$ μη κενό υποσύνολο αμιγών, αυστηρά κυρίαρχων, μη επαναλαμβανόμενων στρατηγικών, ενός πεπερασμένου κανονικής μορφής παιγνίου $\mathcal{G} = (I, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{\pi})$. Αν το σύνολο έχει ακριβώς ένα στοιχείο, τότε λέμε ότι υπάρχει αυστηρά κυρίαρχη λύση *(strictly dominance solvable)*. Το Παίγνιο ¨Το Δίλημμα του Κρατουμένου' έχει αυστηρά κυρίαρχη λύση.

Μια καθαρή καλύτερη απόκριση για τον παίκτη i σε ένα στρατηγικό προφίλ $y \in \Theta$ είναι μια αμιγή στρατηγική $s_i \in S_i$ τέτοια ώστε καμία άλλη αμιγή στρατηγική διαθέσιμη στον παίκτη δεν του δίνει μεγαλύτερο όφελος ενάντιον του y.

Αυτό ορίζει για τον παίκτη i την συνάρτηση $b_i : \Theta \to S_i$ η οποία απεικονίζει κάθε μικτή στρατηγική $y \in \Theta$ στο μη κενό, πεπερασμένο σύνολο καθαρών στρατγικών.

$$\beta_i(y) = h \in S_i : u_i(\boldsymbol{e}_i^h, y_{-i}) \geq u_i(\boldsymbol{e}_i^k, y_{-i}) \forall k \in S_i$$

Καμία μικτή στρατηγική $x_i \in \Delta_i$ δε μπορεί να αποδώσει μεγαλύτερο όφελος στον παίκτη i εναντίον της στρατηγικής $y \in \Theta$ σε σύγκριση με τις αμιγές στρατηγικές. Έτσι, για κάθε $y \in \Theta$, $x_i \in \Delta_i$ και $h \in \beta_i(y)$,

$$u_i(x_i, y_{-i}) = \sum_{k=1}^{m_i} u_i(\boldsymbol{e}_i^k, y_{-i}) x_{ik} \leq \sum_{k=1}^{m_i} u_i(\boldsymbol{e}_i^h, y_{-i}) x_{ik} = u_i(\boldsymbol{e}_i^h, y_{-i}).$$

Ως εκ τούτου,

$$\beta_i(y) = h \in S_i : u_i(\boldsymbol{e}_i^h, y_{-i}) \geq u_i(x_i, y_{-i}) \forall x_i \in \Delta_i.$$

Ορισμός 14. Μια μικτή άριστη απόκριση για τον παίκτη i σε ενα στρατηγικό προφίλ $y \in \Theta$ είναι μια στρατηγική $x_i \in \Delta_i$ τέτοια ώστε καμία άλλη μικτή στρατηγική δεν αποδίδει μεγαλύτερο όφελος στον παίκτη i εναντίον της y.

Κάθε αμιγή βέλτιστη απόκριση,αν τη δούμε σαν μικτή στρατηγική, είναι επίσης μια μικτή βέλτιστη απόκριση. Επιπλέον, απο τη γραμμικότητα του $u_i(x_i, y_{-i})$ στο

x_i, κάθε κυρτός συνδυασμός αμιγών βέλτιστων αποκρίσεων είναι μια μικτή βέλτιστη απόκριση. Αναλόγως , η αντιστοιχία άριστης απόκρισης μικτής στρατηγικής του i παίκτη (mixed-strategy best-reply correspondence) ορίζεται ως:

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_i(y) &= \{x_i \in \Delta_i : u_i(x_i, y_{-i}) \geq u_i(z_i, y_{-i}) \forall z_i \in \Delta_i\} \\ &= \{x_i \in \Delta_i : x_{ih} = 0 \forall h \notin \beta_i(y)\} \\ &= \{x_i \in \Delta_i : C(x_i) \subset \beta_i(y).\}\end{aligned}$$

Το σύνολο βέλτιστων αποκρίσεων $\tilde{\beta}_i(y) \subset \Delta_i$, είναι πάντα μη κενό, κλειστό και κυρτό.

Ορισμός 15. Η συνολική αμιγή στρατηγική βέλτσιστης απόκρισης $\beta : \Theta \to S$ του παιγνίου, ορίζεται σαν το καρτεσιανό γινόμενο όλων των αμιγών στρατηγικών βέλτιστων αποκρίσεων όλων των παικτών:

$$\beta(y) = \times_{i \in I} \beta_i(y) \subset S,$$

και η αντίστοιχη μικτή ως:

$$\tilde{\beta}(y) = \times_{i \in I} \tilde{\beta}_i(y) \subset \Theta.$$

Μια καθαρή στρατηγική που είναι βέλτιστη απόκριση για κάποιο μικτό στρατηγικό προφίλ δε μπορεί να είναι αυστηρά κυριαρχούμενη. Ο Pearse(1984) [8] απέδειξε οτι το αντίστροφο ισχύει σε οποιοδήποτε παίγνιο δύο παικτών: Μια μικτή στρατηγική που δεν είναι αυστηρά κυριαρχούμενη σε ένα τέτοιο παίγνιο, είναι αναγκαστικά βέλτιστη απόκριση σε κάποιο μικτό στρατηγικό προφίλ. Ο Pearse το απέδειξε για κάθε παίγνιο δύο παικτών, ενώ το αντίστροφο ισχύει και εδώ: Μια μη κυριαρχούμενη αμιγή στρατηγική είναι μια βέλτιστη απόκριση σε ενα απόλυτα μικτό στρατηγικό προφίλ. Καμία από αυτές τις αντίστροφες προτάσεις δεν ισχύει εν γένει σε παίγνια με περισσότερους απο δύο παίκτες. Ισχύει επομένως η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 1. Σε ένα παίγνιο δύο παικτών, το $s_i \in S_i$ δεν είναι αυστηρά κυριαρχούμενο αν και μόνο αν

$$s_i \in \beta_i(y)$$

για κάποια $y \in (\Theta)$.

1.4 Ισορροπία κατά **Nash**

Ένας απο τους ακρογωνιαίους λίθους της οικονομικής θεωρίας, που συνδέται με τις περισσότερες σύγχρονες οικονομικές θεωρίες, είναι η έννοια της ισορροπίας κατα Nash (Nash equilibrium) [6]. Στην ουσία στην ισορροπία κατα Nash , απαιτείται οι συνιστώσες x_i του στρατηγικού προφίλ x να είναι οι βέλτιστες για τον i παίκτη έναντι των άλλων στρατηγικων. Ένα στρατηγικό προφίλ $x \in \Theta$ είναι μια στρατηγική κατά Nash , εάν είναι βέλτιστη απόκριση του εαυτού της.

Ορισμός 16. Το στρατηγικό προφίλ $x \in \Theta$ αποτελεί Ισορροπία κατα **Nash** αν

$$x \in \tilde{\beta}(x).$$

Απο την εξίσωση σελιδα 13 αν $x \in \Theta$ είναι Ισορροπία κατά Nash , τότε κάθε αμιγής στρατηγική στην στήριξη κάθε συνιστώσας x_i είναι βέλτιστη απόκριση του x:

$$s_i \in C(x_i) \implies s_i \in \beta_i(x)$$

Ο ορισμός της ισορροπίας κατα Nash εξασφαλίζει πως η αμιγή στρατηγική του κάθε παίκτη αποτελεί βέλτιστη απόκριση στις αμιγείς στρατηγικές των άλλων παικτών. Αν θέλουμε να διευρύνουμε τον ορισμό ώστε να περιλαμβάνει και μικτές στρατηγικές, απλώς απαιτούμε η μικτή στρατηγική κάθε παίκτη να αποτελεί βέλτιστη απόκριση στις μικτές στρατηγικές των άλλων παικτών.

Παράδειγμα 3. Ένα παίγνιο οπου οι αμιγείς στρατηγικές του δεν αποτελούν ισορροπία κατά *Nash* , αλλά μια μικτή στρατηγική του παιγνίου αποτελεί, είναι το παίγνιο "Ταιριαστά κέρματα" *(Matching Pennies)*. Το παίγνιο αυτό είναι μηδενικού αθροίσματος, δύο παικτών, στο οποίο κάθε παίκτης έχει μόνο δύο καθαρές στρατηγικές, όπως δίνεται και στους πίνακες αποδόσεων. Αν αναλύσουμε λοιπόν τους πίνακες καταλήγουμε στο συμπέρασμα οτι πράγματι δεν έχουμε ισορροπία κατά *Nash* : Σε κάθε προφίλ αμιγής στρατηγικής, ακριβώς ένας από τους δύο παίκτες θέλει να αλλάξει τη στρατηγική του. Ωστόσο, αν ένας παίκτης προτίθεται να παίξει τυχαία, ο άλλος παίκτης πρέπει να παίξει και τις δύο στρατηγικές του με ίση πιθανότητα. Ως εκ τούτου η μοναδική Ισορροπία κατά *Nash* ειναι η x, όπου $x_1 = x_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Πράγματι, το προφίλ x είναι ένα καθορισμένο σημείο στο $\tilde{\beta} : x_i \in \tilde{\beta_i(x)} = \Delta$ για $i = 1, 2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ορισμός 17. Μια ισορροπία κατά *Nash* $x \in \Theta$, καλείται αυστηρή αν κάθε συνιστώσα στρατηγική x_i είναι η μοναδική βελτιστη απάντηση, δηλαδή,

$$\tilde{\beta}(x) = \{x\}$$

Μια αυστηρή ισορροπία λοιπόν, δεν περιλαμβάνει καμία τυχαιότητα, αφού τότε θα υπήρχαν κάποιοι παίκτες για τους οποίους τουλάχιστον δύο αμιγείς στρατηγικές θα έδιναν μέγιστη απόδοση. Συνεπώς, κάθε αυστηρή ισορροπία είναι ένα αμιγές στρατηγικό προφίλ. Για παράδειγμα στο παίγνιο "Το Δίλημμα του Κρατουμένου" το αμιγές στρατηγικό προφίλ $s = (2, 2)$ είναι αυστηρή ισορροπία κατά Nash . Μια στρατηγική που αποτελεί ισορροπία κατα Nash δεν μπορεί να είναι αυστηρά κυριαρχούμενη. Ωστόσο, δεν υπάρχει τίποτα στον ορισμό που να μην επιτρέπει την ασθενή κυριαρχεία, αφού μπορεί να υπάρχει μια άλλη βέλτιστη απόκριση που δεν είναι ποτέ χειρότερη απο την στρατηγική ισορροπίας και που είναι καλύτερη από κάποιες άλλες στρατηγικές.

Ορισμός 18. Μια στρατηγική που αποτελεί ισορροπία κατα *Nash* καλείται μη κυριαρχούμενη, αν κάθε συνιστώσα x_i είναι μη κυριαρχούμενη.

Για κάθε παίγνιο, έστω $\Theta^{NE} \subset \Theta$ το σύνολο Ισορροπίας κατά Nash :

Θεώρημα 1. Για κάθε πεπερασμένο παίγνιο $\mathcal{G} : \Theta^{NE} \neq \emptyset$

1.5 Συμμετρικά παίγνια δύο παικτών

Η υποκατηγορία των συμμετρικών παιγνίων δύο παικτών είναι η βάση της Εξελικτικής θεωρίας παιγνίων. Πράγματι, πολλές από τις πιο σημαντικές γνώσεις έχουν αποκτηθεί απο αυτή την ειδική κλάση παιγνίων. Πιο συγκεκριμένα, όταν μιλάμε για συμμετρικό παίγνιο δύο παικτών $\mathcal{G} = (I, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{\pi})$, θεωρούμε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο θέσεις παικτών και κάθε παίκτης έχει ακριβώς τον ίδιο αριθμό αμιγών στρατηγικών.

Ορισμός 19. Ένα παίγνιο $\mathcal{G} = (I, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{\pi})$ ονομάζεται συμμετρικό παίγνιο δύο παικτών αν,

$$I = \{1, 2\},$$

$$S_1 = S_2$$

και

$$\pi_2(s_1, s_2) = \pi_1(s_2, s_1)$$

για κάθε $(s_1, s_2) \in \boldsymbol{S}$.

Η συμμετρία στη συνάρτηση απόδοσης των αμιγών στρατηγικών είναι ισοδύναμη με την απαίτηση οτι ο πίνακας του δεύτερου παίκτη είναι ο ανάστροφος του πρώτου:

$$B = A^T$$

Με άλλα λόγια, η απόδοση b_{ij} του παίκτη 2, όταν ο παίκτης 1 χρησιμοποιεί την καθαρή στρατηγική i και ο παίκτης 2 την j είναι ισοδύναμη με την απόδοση a_{ji} του παίκτη 1 όταν αντίθετα ο παίκτης 1 χρησιμοποιεί τη στρατηγική j και ο παίκτης 2 τη στρατηγική i. Για παράδειγμα "Το Δίλημμα του Κρατουμένου" είναι συμμετρικό παίγνιο, σε αντίθεση με το παίγνιο "Ταιριαστά Κέρματα" που δεν είναι.

Το κοινό σύνολο αμιγών στρατηγικών θα συμβολίζεται:

$$K = \{1, 2, \ldots, k\}$$

οπου k ο αριθμός των αμιγών στρατηγικών που έχουν στη διάθεσή τους οι δύο παίκτες.

Οι μικτές στρατηγικές του πρώτου παίκτη θα συμβολίζονται με $x \in \Delta$ ενώ του δεύτερου με $y \in \Delta$

Το Δ δηλώνει το κοινό σύνολο μικτών στρατηγικών,

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}_+^k : \sum_{i \in K} x_i = 1\}.$$

Οι αποδόσεις κάθε αμιγής στρατηγικής $i \in K$, όταν παίζεται εναντίον κάποιων μικτών στρατηγικών $y \in \Delta$, θα ορίζεται

$$u(\boldsymbol{e}^i, y) = \boldsymbol{e}^i \cdot Ay.$$

Το σύνολο των βέλτιστων αποκρίσεων σε κάθε αντίπαλη στρατηγική $y \in \Delta$ θα ορίζεται:

$$\beta^*(y) = \{x \in \Delta : u(x, y) \geq u(x', y) \forall x' \in \Delta\}.$$

Ως εκ τούτου, αντίθετα με τη συνηθισμένη αντιστοιχία βέλτιστης απόκρισης $\tilde{\beta}$, η οποία απεικονίζει προφίλ στρατηγικών σε σύνολα στρατηγικών, β^* απεικονίζει στρατηγικές σε σύνολα στρατηγικών.

Για οποιοδήποτε συμμετρικό παίγνιο δύο παικτών, και για οποιοδήποτε προφίλ στρατηγικών $(x, y) \in \Theta$:

$$\tilde{\beta}_1(x, y) = \beta^*$$

και

$$\tilde{\beta}_2(x, y) = \beta^*.$$

Εφ όσων η συμμετρία απαιτεί $B^T = A$, ένα συμμετρικό παίγνιο είναι διπλά συμμετρικό αν και μόνο αν $B = A$, ή ισοδύναμα αν $u_(x, y) = u_(y, x)$ για κάθε $x, y \in \Delta$. Το "Δίλημμα του Κρατουμένου" δεν είναι διπλά συμμετρικό.

Ορισμός 20. Ένα συμμετρικό παίγνιο δύο παικτών είναι διπλά συμμετρικό αν $A^T = A$.

1.6 Συμμετρική Ισορροπία κατά **Nash**

Ορισμός 21. Ένα ζεύγος στρατηγικών $(x, y) \in \Theta = \Delta^2$ αποτελεί ισορροπία κατα *Nash* , $(x, y) \in \Theta^{NE}$, αν και μόνο αν

$$x \in \beta^*(y) \ \text{ και } \ y \in \beta^*(x)$$

Ορισμός 22. Μια ισορροπία κατα *Nash* (x, y) καλείται συμμετρική αν $x = y$ δηλαδή αν και οι δύο παίκτες χρησιμοποιούν την ίδια (μικτή ή αμιγή) στρατηγική.

Το υποσύνολο των στρατηγικών $x \in \Delta$ που αποτελούν ισορροπία κατά Nash με τον εαυτό τους ορίζεται:

$$\Delta^{NE} = \{x \in \Delta : (x, x) \in \Theta^{NE}\}.$$

Πρόταση 2. Για κάθε πεπερασμένο και συμμετρικό παίγνιο δύο παικτών, ισχύει:

$$\Delta^{NE} \neq \emptyset.$$

Δηλαδή κάθε συμμετρικό παίγνιο, έχει τουλάχιστον μια συμμετρική ισορροπία κατά Nash .

Παράδειγμα 4. Ένα από τα κλασικά παραδείγματα της εξελικτικής θεωρίας παιγνίων, είναι το παίγνιο "Γεράκι-Περιστερι" *(Hawk-Dove)*, στο οποίο κάθε παίκτης έχει δύο αμιγείς στρατηγικές: " Επίθεση " ή " Υποχώρηση ". Η στρατηγική 1-" Επίθεση ", αποκομίζει όφελος $v > 0$ όταν παίζεται εναντίον της στρατηγικής 2- " Υποχώρηση ", που σε αυτή τη περίπτωση αποκομίζει όφελος 0. Κάθε παίκτης έχει ίδιες πιθανότητες να κερδίσει τον αγώνα, ενώ το κόστος μιας ενδεχόμενης ήττας είναι $c > 0$. Όταν η στρατηγική 1 παίζει εναντίον του εαυτού της, κερδίζει όφελος v με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ και κόστος $-c$ με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Ως εκ τούτου, η αναμενόμενη μέση απόδοση της στρατηγικής 1 εναντίον του εαυτού της είναι $(v - c)/2$. Όταν από την άλλη και οι δύο παίκτες υποχωρούν, τότε ο κάθε ένας παίκτης αποκομίζει όφελος $v/2$. Έτσι, έχουμε τον πίνακα αποδόσεων για τον παίκτη 1:

$$A = \begin{pmatrix} (v-c)/2 & v \\ 0 & v/2 \end{pmatrix}$$

και $B = A^T$. Παίρνουμε ως δεδομένο, ότι το κόστος του αγώνα, υπερβαίνει την αξία της νίκης: $v < c$.

Για τέτοιες αποδόσεις, η αμιγή στρατηγική 2 είναι η μοναδική βέλτιστη απόκριση στη στρατηγική 1. Κάθε ένα από τα ασύμμετρα ζέυγη αμιγών στρατηγικών $(1, 2)$ και $(2, 1)$, αποτελούν μια αυστηρή ισορροπία κατα Nash . Υπάρχει όμως και μια συμμετρική ισορροπία κατα Nash , σε μικτές στρατηγικές. Άν ο παίκτης 2 παίξει τη στρατηγική 1 με πιθανότητα $\lambda = v/c$, τότε οι δύο αμιγείς στρατηγικές του παίκτη 1 καταλήγουν στην ίδια μέση απόδοση. Επομένως, το ζεύγος μικτής στρατηγικής (x, x), όπου το x αποδίδει πιθανότητα λ στη στρατηγική 1 και $1 - \lambda$ στη στρατηγική 2, συνιστά ισορροπία κατα Nash .

Παράδειγμα 5. Έστω το παιδικό παιχνίδι " Πετρα-Ψαλίδι-Χαρτί ": Η πέτρα (στρατηγική 1) νικά το ψαλίδι (στρατηγική 2), που νικά το χαρτί (στρατηγική 3). Το παίγνιο είναι σταθερού αθροίσματος με άθροισμα: $a_{ij} + b_{ij} = a_{ij} + a_{ji}$ Έιναι λοιπόν εύκολο να διαπιστώσουμε οτι το συγκεκριμένο παίγνιο δεν έχει καμία ισορροπία κατα *Nash* σε αμιγείς στρατηγικές, αλλά ακριβώς μια σε μικτές στρατηγικές, δηλαδή το ζεύγος (x, x), στο οποίο και οι δύο παίκτες παίζουν τυχαία, όπου $x = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Ο πίνακας αποδόσεων του συμμετρικού 3×3 παιγνίου δύο παικτών:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΕΞΕΛΙΚΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

2.1 Βασικοί Ορισμοί

Μια βασική έννοια στην εξελικτική θεωρία παιγνίων, είναι αυτή της εξελικτικά σταθερής στρατηγικής (evolutionary stable strategy [5]). Έστω οτι τα άτομα επιλέγονται πάντα τυχαία από ένα μεγάλο πληθυσμό για να παίξουν ενα συμμετρικό παίγνιο δύο παικτών. Υποθέτουμε επιπλέον, οτι είναι προγραμματισμένα να παίξουν μια συγκεκριμένη αμιγή ή μικτή στρατηγική σε αυτό το παίγνιο. Τώρα, έστω οτι εισέρχεται ένας μικρός πληθυσμός που είναι προγραμματισμένος να παίξει μια άλλη στρατηγική, είτε αμιγή είτε μικτή.

Ορισμός 23. Η υποχρεωτική στρατηγική *(incumbent strategy)* ονομάζεται εξελικτικά σταθερή *(evolutionary stable strategy)* ή *(ESS)* αν, για κάθε μεταλλαγμένη στρατηγική *(mutant strategy)*, υπάρχει ένα θετικό φράγμα τέτοιο ώστε, αν ο πληθυσμός των ατόμων που παίζουν τη μεταλλαγμένη στρατηγική πέσει κάτω απο αυτό, τότε η υποχρεωτική στρατηγική κερδίζει μεγαλύτερο όφελος απ΄ οτι η μεταλλαγμένη.

Η προσέγγιση αυτή ωστόσο, περιορίζεται σε αλληλεπιδράσεις ανά ζεύγη μέσα σε έναν μεγάλο πληθυσμό. Συγκεκριμένα, δεν ασχολείτε με αλληλεπιδράσεις στις οποίες λαμβάνουν μέρος πάνω από δύο παίκτες κάθε φορά. Επιπλέον το κριτήριο της εξελικικής σταθερότητας αναφέρεται έμμεσα σε μια στενή σύνδεση μεταξύ των αποδόσεων του παιγνίου και της διάδοσης μιας στρατηγικής στον πληθυσμό. Οι αποδόσεις στο παίγνιο, αντιπροσωπεύουν τη βιολογική ικανότητα επιβίωσης ή την αναπαραγωγική επιτυχία από την εν λόγω αλληλεπίδραση. Η εξελικτική σταθερότητα, όπως και στην ισορροπία κατά Nash δεν εξηγεί πώς ο πληθυσμός αποκτά μια συγκεκριμένη στρατηγική, αλλά θέτει το ερώτημα αν κάποια στιγμή παιχτεί πως αντέχει στις εξελικτικές πιέσεις.

Η εξελικτική σταθερότητα παρέχει επίσης κριτήριο που σχετίζεται με την ανθρώπινη συμπεριφορά πάνω σε ένα ευρύ φάσμα καταστάσεων , συμπεριλαμβανομένων πολλών αλληλεπιδράσεων στη σφαίρα των οικονομικών. Σε ένα κοινωνικό ή οικονομικό περιβάλλον, η εξελικτική σταθερότητα στηρίζει πως μια μικρή ομάδα που δοκιμάζει μια εναλλακτική στρατηγική αποκομίζει λιγότερα, σε αντίθεση με αυτήν που εμμένει στην **status quo** σταρτηγική. Κατά συνέπεια, τα άτομα που χρησιμοποιούν την επικρατούσα στρατηγική δεν έχουν καμία προθεση να αλλάξουν αφού τα πάνε καλύτερα απο αυτός που "πειραματίζονται", ενώ σε αντίθεση οι τελευταίοι έχουν κίνητρο για να αλλάξουν και να επανέλθουν στην υποχρεωτική στρατηγική. Στην ανάλυση που ακολουθεί , επικεντρωνόμαστε αποκλειστικά σε συμμετρικά παίγνια δύο παικτών.

Υποθέτουμε οτι μια μικρή ομάδα μεταλλαγμένων εμφανίζεται σε ένα μεγάλο πληθυσμό ατόμων, οι οποίοι όλοι είναι προγραμματισμένοι να παίξουν την ίδια (αμιγή ή μικτή) στρατηγική $x \in \Delta$. Έστω οτι οι μεταλλαγμένοι είναι όλοι προγραμματισμένοι να παίξουν μια άλλη(αμιγή ή μικτή) στρατηγική $y \in \Delta$. Έστω ϵ το ποσοστό των μεταλλαγμένων στον πληθυσμό , όπου $\epsilon \in (0, 1)$. Ζεύγη ατόμων σ' αυτόν τον πληθυσμό επιλέγονται τυχαία ενώ κάθε παίκτης επιλέγεται με ίση πιθανότητα. Η πιθανότητα ο αντίπαλος να παίξει την μεταλλαγμένη στρατηγική είναι ϵ, ενώ η πιθανότητα να παίξει την υποχρεωτική είναι $1 - \epsilon$. Η απόδοση μιας μάχης είναι η ίδια με της μάχης ενός ατόμου που παίζει τη μικτή στρατηγική $w = \epsilon y + (1 - \epsilon)x \in \Delta$. Η τελική απόδοση στην υποχρεωτική στρατηγική είναι $u(x, w)$ και της μικτής στρατηγικής $u(y, w)$.

Διαισθητικά μπορούμε να ισχυριστούμε οτι οι εξελικτικές δυνάμεις επιλέγουν εναντίον των μεταλλαγμένων στρατηγικών αν και μόνο αν οι αποδώσεις είναι χαμηλότερες από αυτές της υποχρεωτικής στρατηγικής, δηλαδή:

$$u[x, \epsilon y + (1-\epsilon)x] > u[y, \epsilon y + (1-\epsilon)x].$$

Μια στρατηγική $x \in \Delta$ λέμε οτι είναι εξελικτικά σταθερή αν αυτή η ανισότητα ισχύει για κάθε μεταλλαγμένη στρατηγική $y \neq x$, κι εφ' όσων ο πληθυσμός των μεταλλαγμένων είναι αρκούντως μικρός. Ο ακριβής μαθηματικός ορισμός είναι:

Ορισμός 24. Μια στρατηγική $x \in \Delta$ ονομάζεται εξελικτικά σταθερή στρατηγική*(ESS)* αν για κάθε στρατηγική $y \neq x$ υπάρχει κάποιο $\tilde{\epsilon_y} \in (0,1)$ τέτοιο ωστε η ανισότητα

$$u[x, \epsilon y + (1-\epsilon)x] > u[y, \epsilon y + (1-\epsilon)x]$$

να ισχύει για κάθε $\epsilon \in (0, \tilde{\epsilon_y})$.

Έστω $\Delta^{ESS} \subset \Delta$ το σύνολο των εξελικτικά σταθερών στρατηγικών του υπο μελέτη παιγνίου. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί πως κάθε ESS είναι απαραιτήτως βέλτιστη εναντίον του εαυτού της. Αν μια στρατηγική x δεν είναι βέλτιστη εναντίον του εαυτού της, τότε υπάρχει μια άλλη στρατηγική y που αποκομίζει μεγαλύτερα οφέλη εναντίον της x. Επομένως, αν το ποσοστό ϵ τέτοιων μεταλλαγμένων στρατηγικών y είναι αρκετά μικρό, τότε απο τη συνέχεια της u θα κερδίζει περισσότερα εναντίον της μίξης του πληθυσμού $w = \epsilon y + (1-\epsilon)x$, απ' οτι η υποχρεωτική στρατηγική x κι έτσι η x δεν θα είναι εξελικτικά σταθερή. $\Delta^{ESS} \subset \Delta^{NE}$.

Το κριτήριο της εξελικτικής σταθερότητας απαιτεί περισσότερα. Αν η x είναι εξελικτικά σταθερή, και η y είναι μια εναλλακτική βέλτιστη απάντηση στη x , τότε η x πρέπει να είναι μια καλύτερη απάντηση στη y απ' ότι η y στον εαυτό της. Έστω οτι μια εναλλακτική βέλτιστη απάντηση y στη x, κερδίζει παίζοντας εναντίον της, τουλάχιστον όσα και η x. Τότε η y κερδίζει τουλάχιστον όσα η x εναντίον της μικτής $w = \epsilon y + (1-\epsilon)x$, επομένως η x δεν είναι εξελικτικά σταθερή. Το αντίστροφο ισχύει επίσης: Άν $x \in \Delta^{NE}$ και κάθε εναλλακτική βέλτιστη απάντηση y κερδίζει λιγότερα εναντίον του εαυτού της απ' ότι η x εναντίον της, τότε μια τέτοια μετάλλαξη είναι τελικά χειρότερη από την x. Έτσι, καταλήγουμε στην παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 3.

$$\Delta^{ESS} = \{x \in \Delta^{NE} : u(y,y) < u(x,y) \forall y \in \beta^*(x), y \neq x\}.$$

Ένας ισοδύναμος τρόπος να εκφράσουμε αυτό το αποτέλεσμα είναι να πούμε οτι η στρατηγική $x \in \Delta$ είναι εξελικτικά σταθερή αν και μόνο αν ικανοποιεί τις ακόλουθες σχέσεις:

$$u(y,x) \leq u(x,x) \quad \forall y, \tag{2.1}$$

$$u(y,x) = u(x,x) \implies u(y,y) < u(x,y) \quad \forall y \neq x. \tag{2.2}$$

Μαζί οι δύο συνθήκες, χαρακτηρίζουν την εξελικτική σταθερότητα, έτσι όπως ορίστηκε από τον Maynard Smith.

Στο γνωστο παίγνιο "Το δίλημμα του Κρατουμένου", η $x = \boldsymbol{e}^2$ είναι η μοναδική βέλτιστη απόκριση σε οποιαδήποτε στρατηγική $y \in \Delta$ και ως εκ τούτου η μοναδική ESS του παιγνίου. Ωστόσο, οι δύο παίκτες θα είχαν μεγαλύτερο όφελος αν αντί να παίξουν την αμιγή στρατηγική "Καρφώνω", διάλεγαν τη στρατηγική "Σιωπω". Από την άλλη στο παίγνιο "Γερακι-Περιστέρι" [13], αποδυκνείεται πως ESS είναι η στρατηγική που αποτελεί και Ισορροπία κατα Nash . Εστω οι αποδόσεις $v = 4$ και $c = 6$. Ο πίνακας αποδώσεων του παιγνιου είναι:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Η μοναδική συμμετρική ισορροπία κατα Nash είναι η στρατηγική $x = \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \in \Delta$ και αυτή είναι και η μοναδική στρατηγική, υποψήφια για να είναι ESS. Αφού το x είναι εσωτερικό, κάθε στρατηγική $y \in \Delta$ είναι μια βέλτιστη απόκριση στη x. Επιπλέον, η συνθήκη 2.2 απαιτεί να ισχύει $u(x-y,y)>0$ για κάθε $y \neq x$. Για κάθε $x,y \in \Delta, u(x-y,y)=(x_1-y_1)(2-3y_1)$. Για $x=(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$, παίρνουμε $u(x-y,y)=\frac{1}{3}(2-3y_1)^2$, μια θετική ποσότητα, ίση με 0 μόνο αν $x=y$, αποδεικνύοντας οτι $x \in \Delta^{ESS}$. Επομένως, η εξελικτική σταθερότητα απορρίπτει να συμπεριφέρεται κανείς μόνο σαν γεράκι ή μόνο σαν περιστέρι. Για παράδειγμα, ένας πληθυσμός που αποτελείτε μόνο από γεράκια είναι ευάλωτος σε εισβολές μεταλλαγμένων. Σαν αποτέλεσμα, το γεράκι κερδίζει -1, ενώ το περιστέρι 0. Υπάρχουν βέβαια και παίγνια τα οποία δεν έχουν εξελικτικά σταθερή στρατηγική, όπως το παίγνιο "Πέτρα-Ψαλίδι-Χαρτί". Η μοναδική συμμετρική ισορροπία κατα Nash αυτού του παιγνίου είναι η $x=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

2.2 Συμμετρικά παίγνια

Όλες οι διαφορές αποδόσεων, μεταξύ δύο οποιονδήποτε στρατηγικών για έναν παίκτη, δεδομένων των στρατηγικών των υπόλοιπων παικτών, είναι αμετάβλητες στις τοπικές μεταβολές των συναρτήσεων απόδοσης. Έτσι, καθώς η ισορροπία κατα Nash έχει οριστεί σε όρους τέτοιων διαφορών αποδώσεων, το σύνολο Δ^{NE} είναι αμετάβλητο σε τέτοιους μετασχηματισμούς όπως και το σύνολο Δ^{ESS} που είναι επίσης αμετάβλητο.

Κατά συνέπεια, για τους σκοπούς της μελέτης της εξελικτικής σταθερότητας, ο πίνακας απόδοσης A, οποιουδήποτε 2×2 παιγνίου θα αναπαρίσταται χωρίς βλαβη της γενικότητας ως:

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

όπου $a_1=a_11-a_21$ και $a_2=a_22-a_12$. Θα επικεντρωθούμε στη γενική περίπτωση οπου $a_1a_2 \neq 0$.

Κατηγορία I και IV:

Αν a_1 και a_2 είναι ετερόσημα, τότε έχουμε παίγνιο όμοιο μ΄ αυτο του " Διλήμματος του κρατουμένου ", και το παίγνιο έχει ακριβώς μια ισορροπία κατά Nash . Αυτή η ισορροπία είναι αυστηρή και συμμετρική. Ως εκ τούτου, τέτοια παίγνια έχουν ακριβώς μια εξελικτικά σταθερή ισορροπία: $\Delta^{ESS} = \Delta^{NE} = \{\boldsymbol{e}^2\}$αν $a_1 < 0$ (Κατηγορια I) και $\Delta^{ESS} = \Delta^{NE} = \{\boldsymbol{e}^1\}$ αν $a_2 < 0$(Κατηγορία IV).

Κατηγορία II:

Αν και το a_1 και το a_2 είναι θετικά, τότε έχουμε παιχνίδι συνεργασίας και υπάρχουν τρείς ισορροπίες κατά Nash , και όλες είναι συμμετρικές: $\Delta^{NE} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, x\}$, όπου $x\lambda)\boldsymbol{e}^2$ για $\lambda = a_2/(a_1 + a_2)$. Κάθε μια από τις δύο καθαρές ισορροπίες είναι αυστηρή, έτσι τα $\boldsymbol{e}_1$ και $\boldsymbol{e}_2$ είναι εξελικτικά σταθερά. Ωστόσο, η x δεν είναι, εφόσων όλες οι $y \in \Delta$ είναι βέλτιστες αποκρίσεις του x, και για παράδειγμα, η $y = \boldsymbol{e}^1$ κερδίζει περισσότερα εναντίον του εαυτού της παρά η x εναντίον της: $u(\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^1) = a + 1 > \lambda_1 = u(x, \boldsymbol{e}^1)$. Εν ολίγοις, $\Delta^{ESS} = \{\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2\}$.

Κατηγορία III:

Αν και το a_1 και το a_2 είνα αρνητικά, τότε έχουμε παίγνιο "Γεράκι-Περιστέρι". Ένα τέτοιο παίγνιο έχει δύο ασύμμετρες ισορροπίες κατα Nash και μια συμμετρική ισορροπία κατα Nash : $\Delta^{NE} = \{x\}$. Αυτή τη φορά η x είναι εξελικτικά σταθερή, όταν για κάθε $y \in \Delta$,

$$u(x, y) = \lambda a_1 y_1 + (1 - \lambda) a_2 y_2 = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}$$

και για κάθε $y \neq x$,

$$u(y, y) = a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 < \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2},$$

Εν ολίγοις, $\Delta^{ESS} = \{x\}$ για όλα τα παίγνια αυτής της κατηγορίας.

2.3 Δομή του συνόλου Δ^{ESS}

Ένα αποτέλεσμα του χαρακτηρισμού της Πρότασης 3, είναι οτι η στήριξη μιας εξελικτικά σταθερής στρατηγικής δε μπορεί να περιέχει τη στήριξη μιας άλλης εξελικτικά σταθερής στρατηγικής, στη πραγματικότητα, για οποιαδήποτε συμμετρική ισορροπία κατα Nash . Αν υποθέσουμε ότι $x \in \Delta^{ESS}$ και $C(y) \subset C(x)$ για κάποια στρατηγική $y \neq x$. Τότε $u(y,x) = u(x,x)$, με $x \in \Delta^{NE}$, και από τον ορισμό της ισορροπίας κατά Nash έχουμε οτι $u(x,y) > u(y,y)$. Ως εκ τούτου, $y \notin \Delta^{NE}$.

Πρόταση 4. Αν $x \in \Delta^{ESS}$ και $C(y) \subset C(x)$ για κάποιες στρατηγικές $y \neq x$ τότε $y \notin \Delta^{NE}$.

Συγκεκριμένα, αν η ESS είναι εσωτερική, τότε είναι η μοναδική εξελικτικά σταθερή στρατηγική. Επιπλέον, εφόσον υπάρχουν πεπερασμένα στον αριθμό στηρίγματα (σε ένα πεπερασμένο παιχνίδι), ο αριθμός των ESS είναι πάντα πεπερασμένος (πιθανώς μηδέν). Έτσι, αποδείξαμε την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 5. Το σύνολο $\Delta^{ESS} \subset \Delta$ είναι πεπερασμένο. Επίσης, αν $\Delta^{ESS} = \{x\}$, τότε $x \in \Delta^{ESS} \cap \mathrm{int}(\Delta)$.

2.4 Χαρακτηρισμός της Εξελικτικά σταθερής στρατηγικής

Η Πρόταση 4 δίνει έναν χαρακτηρισμό της εξελικτικής σταθερότητας. Θα δώσουμε αλλους δύο χαρακτηρισμούς. Καταρχάς, έχει υποθεί οτι ο ορισμός της εξελικτικής σταθερότητας μιας στρατηγικής x που απαιτεί για κάθε μεταλλαγμένη στρατηγική $y \neq x$ υπάρχει ενα $\tilde{\epsilon_y} > 0$ τέτοιο ώστε η x αντιστέκεται σε μια μόλυνση από το y που εισέρχεται σ΄ ένα πληθυσμό μικρότερο του $\tilde{\epsilon_y}$. Δηλαδή, υπάρχει ένα φράγμα που αντιστέκεται στην εισβολή κάθε μεταλλαγμένης στρατηγικής. Αυτό το φράγμα εξαρτάται απο τη μεταλλαγμένη στρατηγική y. Στα πεπερασμένα παίγνια ωστόσο, η εξελικτική σταθερότητα συνεπάγεται οτι το $\tilde{\epsilon_y}$ μπορεί να είναι ίδιο για όλους τους μεταλλαγμένους. Μια εξελικτικά σταθερή στρατηγική x, έχει ενα ομοιόμορφο φράγμα εισβολής. Αυτό το αποτέλεσμα [1], δικαιολογεί το μέγεθος του πληθυσμού της εξελικτικής σταθερότητας. Για μια ESS x ισχυρής εναντίον μιας μεταλλαγμένης στρατηγικής $y \neq x$ σ' ένα μεγάλο και πεπερασμένο πληθυσμό, που αποτελείται έστω απο n άτομα, είναι απαραίτητο το φράγμα εισβολής $\tilde{\epsilon_y}$ εναντίον της y να υπερβαίνει τουλάχιστον το $1/n$, όπου n το μέγεθος του πληθυσμού και δεδομένου ότι οποιαδήποτε εισβολή αποτελείται απο ένα τουλάχιστον άτομο. Ως εκ τούτου, αν δεν υπάρχει θετικό κάτω φράγμα στα όρια εισβολής εναντίον της x, τότε για κάθε πεπερασμένο πληθυσμό μεγέθους n, θα υπάρχει πάντα μια μεταλλαγμένη στρατηγική y, εναντίον της οποίας η x έχει φράγμα κάτω του $1/n$. Αντίθετα, η ύπαρξη ομοιόμορφου φράγματος εισβολής εγγυάται οτι η εξελικτικά σταθερή στρατηγική x είναι κυρίαρχη εναντίον κάθε μεταλλαγμένης στρατηγικής y που εμφανίζεται ταυτόχρονα σε m άτομα, για κάθε πεπερασμένο πληθυσμό μεγέθους n τέτοιο ώστε m/n είναι μικρότερο από το ομοιόμορφο φράγμα εισβολής του x.

Ορισμός 25. Μια στρατηγική $x \in \Delta$ έχει ένα ομοιόμορφο φράγμα εισβολής αν υπάρχει κάποιο $\tilde{\epsilon} \in (0,1)$ τέτοιο ώστε η ανισότητα 2.1 σελιδα 36 ισχύει για όλες τις στρατηγικές $y \neq x$ και κάθε $\epsilon \in (0, \tilde{\epsilon})$.

Για οποιοδήποτε $x \in \Delta^{ESS}$, το φράγμα εισβολής του $b(y)$ εναντίον οποιασδήποτε άλλης στρατηγικής y είναι το μεγαλύτερο δυνατό $\tilde{\epsilon_y}$ στην ορισμένη ανισότητα.

$$b(y) = \sup\{\delta \in [0,1] : f(\epsilon, y) > 0 \forall \epsilon \in (0, \delta)\}.$$

Από υπόθεση $x \in \Delta^{ESS}$, $b(y) > 0$ για κάθε $y \neq x$. Επιπλέον η x έχει ένα φράγμα εισβολής αν και μόνο αν υπάρχει κάποιο $\beta > 0$ τέτοιο ώστε $b(y) > \beta$ για κάθε $y \neq x$.

Πρόταση 6. Η x ανήκει στο σύνολο Δ^{ESS} αν και μόνο αν η x έχει ένα φράγμα εισβολής.

Ο παραπάνω χαρακτηρισμός δεν συνεπάγεται οτι μια ESS είναι απαραίτητα ανθεκτική απέναντι σε πολλαπλές μεταλλάξεις. Ας υποθέσουμε, παραδείγματος χάριν, οτι $x \in \Delta$ είναι μια εξελικτικά σταθερή στρατηγική με ομοιόμορφο φράγμα εισβολής $\tilde{\epsilon}$, κι έστω δύο διακριτές στρατηγικές y και z που εμφανίζονται στους πληθυσμούς α και β αντίστοιχα έτσι ώστε $\alpha + \beta < \tilde{\epsilon}$. Το προκύπτον μείγμα $(\cdot)$ πληθυσμού είναι,

$$w = (1 - \alpha - \beta)x + \alpha y + \beta z \in \Delta,$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το μείγμα πληθυσμού $(1 - \epsilon)x + \epsilon y' \in \Delta$, όπου $y = \alpha y/(\alpha + \beta) + \beta z/(\alpha + \beta)$ και $\epsilon = \alpha + \beta < \tilde{\epsilon}$. Ως εκ τούτου, η x κερδίζει μεγαλύτερο όφελος από την αντίστοιχη αλλά μεταλλαγμένη, πλασματική στρατηγική y'. Από τη γραμμικότητα της συνάρτησης αποδόσεων, τουλάχιστον μια από τις δύο μεταλλαγμένες στρατηγικές y και z είναι χειρότερες απο τη x. Ωστόσο, δεν είναι απαραίτητη η υπόθεση οτι και οι δύο τα πάνε χειρότερα.

Παράδειγμα 6. Έστω το παίγνιο "Γεράκι-Περιστέρι". Έστω x η μοναδική εξελικτικά σταθερή στρατηγική του, όπου $x = \frac{2}{3}\boldsymbol{e}^1 + \frac{1}{3}\boldsymbol{e}^2$, $y = \boldsymbol{e}^1$ και $z = \boldsymbol{e}^2$. Υποθέτουμε οτι οι μεταλλαγμένες στρατηγικές y και z εισέρχονται στον πληθυσμό ταυτόχρονα, σε ποσοστά $\frac{1}{2}\epsilon$ και $\frac{1}{2}\epsilon$, για κάποιο μικρό $\epsilon > 0$. Η ισοδύναμη πλασματική μετάλλαξη είναι $y' = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}^1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}^2$, κι έτσι η μετ΄ επειτα μίξη πληθυσμόυ είναι $w = (1 - \epsilon)x + \epsilon y'$ με $w_1 < \frac{2}{3}$, $y = \boldsymbol{e}^1$ η μοναδική βέλτιστη απόκριση και $u(x, w) < u(y, w)$. Με άλλα λόγια, η μεταλλαγμένη στρατηγική y κερδίζει περισσότερα μετ΄ επειτα οφέλη απ'οτι η υποχρεωτική *ESS* στρατηγική x.

2.5 Τοπική υπεροχή

Ο δεύτερος χαρακτηρισμός της εξελικτικής σταθερότητας συνδέεται με την παρατήρηση οτι μια εσωτερική ESS κερδίζει απαραιτήτως μεγαλύτερα οφέλη εναντίον όλων των μεταλλαγμένων στρατηγικών απ'οτι αυτες εναντίον των εαυτών τους. Γενικεύωντας αυτή την υπεροχή μιας εσωτερικής ESS , μπορούμε να πούμε οτι οποιαδήποτε ESS είναι τοπικά ανώτερη με την έννοια του μεγαλύτερου κέρδους εναντίον των μεταλλαγμένων και των αποδόσεων που έχουν εναντίον του εαυτού τους. Αυτός ο χαρακτηρισμός της εξελικτικής σταθερότητας οφείλεται στο [3].

Ορισμός 26. Η $x \in \Delta$ είναι τοπικά κυρίαρχη αν υπάρχει μια περιοχή U τέτοια ώστε $u(x, y) > u(y, y)$ για κάθε $y \neq x$ στο U.

Πρόταση 7. Η x ανήκει στο Δ^{ESS} αν και μόνο αν είναι τοπικά κυρίαρχη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΤΙΓΡΑΦΕΑ

3.1 Εισαγωγή

Γενικά η εξελικτική διαδικασία συνδιάζει δύο ασικά στοιχεία: ένα μηχανισμό μετάλλαξης που προσφέρει τα ποικίλα είδη, κι ένα μηχανισμό επιλογής που ευνοεί κάποια είδη έναντι άλλων. Το κριτήριο τις εξελικτικής σταθερότητας υπογραμμίζει το ρόλο της μετάλλαξης, ενώ η δυναμική αντιγραφέα το ρόλο της επιλογής. Η δυναμική αντιγραφέα τυποποιείται σ΄ ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων που δεν περιλαμβάνουν καθόλου μηχανισμούς μετάλλαξης.

Για το χαρακτηρισμό του κριτηρίου της εξελικτικής σταθερότητας, θεωρήθηκε οτι οι πληθυσμοί μπορούν να ακολουθήσουν είτε μικτές είτε αμιγής στρατηγικές. Αντιθέτως, η συνήθης δυναμική αντιγραφέα υποθέτει οτι τα άτομα μπορούν να ακολουθήσουν μόνο αμιγής στρατηγικές που αντιγράφονται χωρίς λάθη από τον γονιό στο παιδί. Όσο η κατάσταση του πληθυσμού αλλάζει, τροποποιούνται αναλόγως οι αποδώσεις των αμιγών στρατηγικών.

Η Εξελικτική θεωρία παιγνίων λοιπόν εστιάζει στις διαθέσιμες στρατηγικές του κάθε παίκτη και μελετά τον τρόπο με τον οποίο εξελίσσονται αυτές ως απόρροια της σχετικής τους επιχίας. Η ιδέα εδώ είναι οτι οι παίκτες λειτουργούν σαν να είναι προγραμματισμένοι να επιλέγουν μια στρατηγική κάθε χρονική στιγμή και σαν να έχουν την τάση να αντιγράφουν την στρατηγική άλλων παικτών ανάλογα με τις αποδόσεις της.

Δύο ερμηνείες για την διαδικασία αντιγραφής είναι οι εξής:

1. Κληρονομική αντιγραφή: Οι παίκτες με τη μεγαλύτερη επιτυχία, δηλαδή με στρατηγική που οδηγεί σε μεγαλύτερη ωφέλεια, έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα να αποκτήσουν περισσότερους απογόνους, στους οποίους θα κληροδοτήσουν τον σχετικάπετυξημένο κώδικα συμπεριφοράς ή φαινότυπο στη Βιολογία. Έτσι απο γενιά σε γενιά παρατηρείτε αύξηση του ποσοστού των ατόμων που είναι προγραμματισμένο να χρησιμοποιεί αυτή τη συμπεριφορά.

2. Αντιγραφή μέσω μίμησης: Οι παίκτες μιμούνται στρατηγικές άλλων παικτών. όταν οι τελευταίες έχουν αποδόσειω υψηλότερες από τις μέσες. Αυτή η ερμηνεία φαίνεται να συνάδει καλύτερα με τις εφαρμογές της Θεωρίας Παιγνίων στην κοινωνική επιστήμη αφού αφήνει ανοικτό το πεδίο σε ορθολογιστές να προσπαθούν,μέσω της εμπειρικής παρατήρησης, να επισημαίνουν και να υιοθετούν, τις στρατηγικές που φαίνεται να έχουν μεαλ·υτερα ποσοστά επιτυχίας σε σχέση με άλλες.

3.2 Βασικές έννοιες

Θεωρούμε έναν μεγάλο αλλά πεπερασμένο πληθυσμό ατόμων που είναι προγραμματισμένοι να παίζουν μιχτες στρατηγικές $i \in K$, σε συμμετρικά παίγνια δύο παικτών, με μικτές στρατηγικές στο Δ και με συναρτήσεις απόδοσης u. Ορίζουμε τον αριθμό των ατόμων που είναι προγραμματισμένοι να παίξουν την μικτή στρατηγική $i \in K$ σε οποιαδήποτε στιγμή t του χρόνου, ως:

$$p_i(t) > 0$$

όπου ο συνολικός πληθυσμός ορίζεται:

$$p(t) = \sum_{i \in K} p_i(t) > 0.$$

Η σχετική κατάσταση του πληθυσμού ορίζεται ως το διάνυσμα:

$$x(t) = (x_1(t), \ldots, x_k(t))$$

όπου κάθε συνιστώσα $x_i(t)$ του διανύσματος εκφράζει το μέρος του πληθυσμού που είναι προγραμματισμέμο να παίξει την αμιγή στρατηγική i σε χρόνο t:

$$x_i(t) = p_i(t)/p(t).$$

Έτσι, $x(t) \in \Delta$, με άλλα λόγια , η κατάσταση του πληθυσμού είναι πανομοιότυπη με μια μικτή στρατηγική.

Η αναμενόμενη απόδοση σε οποιαδήποτε αμιγή στρατηγική i σέναν τυχαίο αγώνα, όταν ο πληθυσμός είναι στην κατάσταση $x \in \Delta$, είναι :

$$u(\boldsymbol{e}^i, x).$$

Πράγματι, είναι αδιάφορο για ένα άτομο, αν αλληλεπιδρά με ενα άτομο που έχει επιλεγεί τυχαία απο έναν τέτοιο πολυμορφικό πληθυσμό ή,ένα άτομο που παίζει μικτή στρατηγική. Η απόδοση ενός ατόμου που έχει επιλεγεί τυχαία από τον πληθυσμό είναι:

$$u(x, x) = \sum_{i=1}^{k} x_i u(\boldsymbol{e}^i, x),$$

δηλαδή η ίδια απόδοση που έχει η μικτή στρατηγική όταν παίζει εναντίον του εαυτού της.

Υποθέτουμε, οτι κάθε απόγονος κληρονομεί την στρατηγική των γονιών του. Αν η αναπαραγωγή γίνεται συνεχόμενα, τότε ο αριθμός των γεννήσεων σε μια οποιαδήποτε στιγμή t, των ατόμων που είναι προγραμματισμένα να παίξουν αμιγή στρατηγική i είναι:

$$\beta + u[\boldsymbol{e}^i, x(t)],$$

όπου $\beta \geq 0$ είναι οι δεδομένες αποδόσεις του πληθυσμού (ανεξαρτήτα των αποτελεσμάτων του υπό μελέτη παιγνίου).

Έστω ο ρυθμός των θανάτων $\delta \geq 0$ ο ίδιος για όλα τα άτομα, με τελείες για τα παράγωγα του χρόνου έχουμε ως αποτέλεσμα την ακόλουθη δυναμική του πληθυσμού:

$$\dot{p}_i = [\beta + u(\boldsymbol{e}^i, x) - \delta]p_i.$$

Η αντίστοιχη δυναμική για τα x_i γίνεται:

$$\dot{x}_i = [u(\boldsymbol{e}^i, x) - u(x, x)]x_i.$$

Για να το δούμε αυτό, ας πάρουμε τη παράγωγο του χρόνου στα δύο μέρη της ταυτότητας $p(t)x_i(t) = p_i(t)$:

$$p\dot{x}_i = \dot{p}_i - \dot{p}x_i = [\beta + u(\boldsymbol{e}^i, x) - \delta]p_i - [\beta + u(x, x) - \delta]px_i.$$

Διαιρώντας με p και τα δύο μέλη παίρνουμε την εξίσωση,

$$\dot{x}_i = [u(\boldsymbol{e}^i, x) - u(x, x)]x_i.$$

Με άλλα λόγια, ο ρυθμός ανάπτυξης $\dot{x}_i/x_i$ του πληθυσμού που χρησιμοποιεί την στρατηγική i ισούται με τη διαφορά μεταξύ της τρέχουσας απόδοσης (**fitness**) της στρατηγικής και της μέσης απόδοσης (**fitness**) του πλυθησμού. Αυτός ο ρυθμός ανάπτυξης είναι ανεξάρτητος του ρυθμού των γεννήσεων β και των θανάτων δ, από τη στιγμή που είναι ίδιοι για όλους τους υποπλυθησμούς. Η εξίσωση,

$$\dot{x}_i = [u(\boldsymbol{e}^i, x) - u(x, x)]x_i,$$

δίνει τη δυναμική αντιγραφέα [14]. Αξιοποιώντας την γραμμικότητα της απόδοσης $u(x, y)$ στο x, μπορούμε να γράψουμε:

$$\dot{x}_i = u(\boldsymbol{e}^i - x, x)x_i$$

Ως εκ τούτου οι υποπληθυσμοί που συνδέονται με καλύτερες απο το μέσο όρο στρατηγικές αυξάνονται, ενώ αυτοί που συνδέονται με χειρότερες από το μέσο όρο στρατηγικές μειώνονται. Οι υποπληθυσμοί που συνδέονται με τις αμιγείς βέλτιστες αποκρίσεις στην τρεχουσα κατάσταση του πληθυσμού $x \in \Delta$ έχουν το μεγαλύτερο ρυθμό αλλαγής.

Η αναλογία μεταξύ δύο οποιονδήποτε πληθυσμών έστω $x_i > 0$ και $x_j > 0$ αυξάνει(μειώνει) με τον χρόνο αν η στρατηγική i εχει μεγαλύτερη(χαμηλότερη) απόδοση από τη στρατηγική j:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{x_i}{x_j}\right] = \frac{\dot{x}_i}{x_j} - \frac{x_i}{x_j}\frac{\dot{x}_j}{x_j} = \left[u(\boldsymbol{e}^i, x) - u(\boldsymbol{e}^j, x)\right]\frac{x_i}{x_j}.$$

3.3 Αμετάβλητο κάτω απο μετασχηματισμούς αποδόσεων

Η δυναμική αντιγραφέα $\dot{x}_i$ είναι αμετάβλητη κάτω απο θετικούς αφινικούς μετασχηματισμούς των αποδόσεων, **modulo** μια αλλαγή στην κλίμακα του χρόνου. Αν η συνάρτηση απόδοσης u, αντικατασταθεί από την εξίσωση:

$$\overline{u} = \lambda u + \mu,$$

για κάποιο θετικό πραγματικό αριθμό έστω λ και για κάποιο πραγματικό έστω μ, τότε η δυναμική αντιραφέα γίνεται:

$$\dot{x}_i = \bar{u}(\boldsymbol{e}^i - x, x)x_i = \lambda u(\boldsymbol{e}^i - x, x)x_i.$$

Το αποτέλεσμα ενός τέτοιου μετασχηματισμού των αποδόσεων είναι ισοδύναμο με μια αλλαγή της κλίμακας χρόνου με παράγοντα λ στη δυναμική αντιγραφέα 3.5. Συγκεκριμένα, όλες οι τροχιές λύσεων είναι οι ίδιες και για τις δύο δυναμικές. Μόνο η ταχήτυτα στην οποία οι πληθυσμοί κινούνται κατά μήκος των τροχιών αυτών διαφέρει κατά συντελεστή λ.

Ομοίως τοπικές μετακινήσεις των συναρτήσεων απόδοσησ(1.3.3) δεν επηρεάζουν καθόλου την δυναμική αντιγραφέα. Αν μια σταθερή $\nu \in \mathbb{R}$ προστίθεται σε όλα τα στοιχεία σε κάποια στήλη j του πίνακα A των αποδόσεων, τότε όλες οι αποδόσεις $u(\boldsymbol{e}^i, x)$ σε κάθε αμιγή στρατηγική i αντικαθίστανται απο:

$$\bar{u}(\boldsymbol{e}^i, x) = u(\boldsymbol{e}^i, x) + \nu x_j,$$

με αποτέλεσμα,

$$\dot{u}(x, x) = u(x, x) + \nu x_j,$$

(καμία αλλαγή στη δυναμική του αντιγραφέα).

3.4 Η προκύπτουσα λύση

Το δεξί μέλος της συνάρτησης

$$\dot{x_i} = u(\boldsymbol{e}^i - x, x)x_i \tag{3.1}$$

καθορίζει το διανυσματικό πεδίο:

$$\phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k,$$

όπου,

$$\phi_i(x) = u(\boldsymbol{e}^i - x, x)x_i.$$

Αφού το διανυσμάτικό πεδίο είναι πολυωνυμικό, από το θεώρημα Picard-Lindelof, το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων του αντιγραφέα έχει μοναδική λύση από οποιαδήποτε αρχική κατάσταση $x^0 \in \mathbb{R}^k$. Επιπλέον, το $\Delta \subset \mathbb{R}^k$ μπορεί να δειχθεί οτι παραμένει αμετάβλητο ως προς τη δυναμική του πεδίου. Δηλαδή, η λύση του συστήματος παραμένει στο Δ ανεξαρτήτως της αρχικής συνθήκης. Διαισθητικά, αυτό είναι προφανές, αφού από την 3.1 το άθροισμα όλων των πληθυσμιακών ποσοστόσεων παραμένει ίσο με τη μονάδα ($\sum \dot{x}_i = 0$ και κανένα ποσοστό πληθυσμού δεν μπορεί να είναι αρνητικό, ($x_i = 0 \implies \dot{x}_i = 0$)).

Πιο συγκεκριμένα, το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων 3.1 καθορίζει μια συνεχή λύση:

$$\xi : \mathbb{R} \times \Delta \to \Delta,$$

η οποία σε κάθε αρχικό ποσοστό $x^0 \in \Delta$ και σε χρόνο $t \in \mathbb{R}$ αντιστοιχεί το ποσοστό πληθυσμού:

$$\xi(t, x^o) \in \Delta,$$

σε χρόνο t.

Εφόσων το Δ είναι αμετάβλητο, το ίδιο ισχύει και για το εσωτερικό του και το σύνορο του. Με άλλα λόγια, εαν οι αμιγείς στρατηγικές είναι παρούσες στον πληθυσμό σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή, τότε υπήρχαν και θα συνεχίσουν να υπάρχουν για πάντα,αν απ΄ την άλλη μια αμιγή στρατηγική είναι απούσα, τότε ήταν και θα είναι για πάντα. Φυσικά δεν αποκλείεται μια εσωτερική λύση στο σύνορο του συνόλου όσο ο χρόνος τείνει στο άπειρο. Τότε, σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή το ποσοστό του πληθυσμού πάει στο μηδέν, και τότε οριακά κάποιες αμιγής στρατηγικές μπορεί να εξαφανιστούν.

3.5 Συμμετρικά 2×2 παίγνια

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα εφαρμόσουμε τη δυναμική αντιγραφέα στην ειδική περίπτωση των συμμετρικών παιγνίων δύο παικτών, με δύο αμιγής στρατηγικές. Αποδυκνείεται οτι σε τέτοια παιγνία το ποσοστό του πληθυσμού είναι ασυμπτωματικά σταθερό στη δυναμική αντιγραφέα αν και μόνο αν οι αντίστοιχες μικτές στρατηγικές είναι εξελικτικά σταθερες.

Δεδομένου οτι η δυναμική αντιγραφέα είναι αμετάβλητη κάτω απο τοπικές μεταβολές των αποδόσεων, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε οτι ο πίνακας αποδόσεων έχει την ακόλουθη μορφή:

$$A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

Επικεντρωνόμαστε στη γενική περίπτωση όπου $a_1 a_2 \neq 0$. Η δυναμική αντιγραφέα σ′ αυτή τη κανονικοποίση αποδόσεων γίνεται:

$$\dot{x_1} = [a_1 x_1 - a_2 x_2] x_1 x_2,$$

όπου $\dot{x_2} = -\dot{x_1}$. Σύμφωνα με τη ταξινόμηση του Κεφαλαίου 1:

Κατηγορία I και IV:

Αν $a_1 a_2 < 0$, τότε το ποσοστό x_1 του πληθυσμού είτε μειώνεται (όταν $a_1 < 0$ και $a_2 > 0$) είτε πάντα αυξάνει (όταν $a_1 > 0$ και $a_2 < 0$). Επομένως, ξεκινώντας απο μια οποιαδήποτε αρχική εσωτερική θέση, το ποσοστό του πληθυσμού συγκλίνει με το καιρό στη μοναδική εξελικτικά σταθερή στρατηγική του παιγνίου.

Κατηγορια II και III:

Αν $a_1 a_2 > 0$, τότε ο ρυθμός ανάπτυξης του x_1 αλλάζει πρόσημο όταν $a_1 x_1 = a_2 x_2$, το οποίο συμβαίνει ακριβώς στο σημείο ισορροπίας κατά Nash : $x_1 = \lambda = a_2/(a_1 + a_2)$. Ας υποθέσουμε αρχικά, οτι και οι δύο αποδοσεις είναι θετικές (κατηγορία II). Τότε το x_1 πέφτει κάτω απο το 0 απο οποιαδήποτε αρχική τιμή $x_1^0 > \lambda$, και αντιστρόφως, αυξάνει πάνω απο το 1 από οποιαδήποτε αρχική τιμή $x_1^0 > \lambda$. Με άλλα λόγια, ξεκινώντας απο μια οποιαδήποτε αρχική, εσωτερική θέση, το ποσοστό του πλυθησμού συγκλίνει σε μια απο τις δύο ESS του παιγνίου. Έπειτα, ας υποθέσουμε οτι και οι δύο αποδόσεις είναι αρνητικές (κατηγορία III). Τότε το ποσοστό του πλυθησμού x_1 αυξάνει προς λ απο οποιαδήποτε χαμηλή(εσωτερική) τιμή και μειώνεται προς λ απο οποιαδήποτε άνω(εσωτερική)αρχική τιμή. Ως εκ τούτου ο πληθυσμός συγκλίνει με το χρόνο στη μοναδική ESS ενός τέτοιου παιγνίου, από οποιαδήποτε αρχική εσωτερική κατάσταση.

Παράδειγμα 7. Για να λάβουμε τη δυναμική αντιγραφέα για το "Δίλημμα του Κρατουμένου", έχουμε:

$$a_1 = -1 \qquad a_2 = 3.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $x_1 + x_2 = 1$ στην εξίσωση (3.9), παίρνουμε:

$$\dot{x_1} = (2x_1 - 3)(1 - x_1)x_1$$

(και $\dot{x_2} = -\dot{x_1}$).

Ομοίως, για το παίγνιο "Γεράκι-Περιστέρι" έχουμε:

$$a_1 = -1 \qquad a_2 = -2$$

άρα,

$$\dot{x_1} = (2 - 3x_1)(1 - x_1)x_1.$$

3.6 Γενίκευση των παιγνίων τύπου "Πέτρα-Ψαλίδι-Χαρτί"

Θεωρούμε την ακόλουθη γενίκευση του παιγνίου "Πέτρα-Ψαλίδι-Χαρτί":

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 2+\alpha \\ 2+\alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

Το αυθετικό "ΠΨΧ" παίγνιο είναι η ειδική περίπτωση όπου $\alpha = 0$. Για οποιοδήποτε α το παίγνιο έχει μοναδική ισορροπία κατα Nash :

$$x^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}).$$

Θα δείξουμε οτι το γινόμενο $x_1x_2x_3$ αυξάνει (μειώνεται, μένει σταθερή) κατά μήκους οποιασδήποτε τροχιάς που ξεκινάει από εσωτερικό σημείο αν το α είναι θετικό (αρνητικό, μηδέν). Για να το δούμε αυτό, παρατηρούμε αρχικά οτι η δυναμική αντιγραφέα γίνεται:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \left(x_1 + (2+\alpha)x_2 - \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}\right) x_1, \\ \dot{x}_2 &= \left(x_2 + (2+\alpha)x_3 - \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}\right) x_2, \\ \dot{x}_3 &= \left(x_3 + (2+\alpha)x_1 - \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}\right) x_3. \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, η παράγωγος του χρόνου της $h(x) = log(x_1x_2x_3)$ είναι,

$$\begin{aligned} \dot{h}(\boldsymbol{x}) &= \dot{x}_1x_2x_3/x_1 + x_1\dot{x}_2x_3/x_2 + x_1x_2\dot{x}_3/x_3 \\ &= (x_1+x_2+x_3) + (2+\alpha)(x_1+x_2+x_3) - 3\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{x} \\ &= 3 + \alpha - 3\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

Από την ταυτότητα,

$$1 = (x_1+x_2+x_3)^2 = \parallel \boldsymbol{x} \parallel^2 + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3),$$

όπου $\| \boldsymbol{x} \|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Η μέση απόδοση $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$ μπορεί να γραφεί:

$$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = 1 + \alpha(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3) = 1 + \frac{\alpha}{2}(1 - \| \boldsymbol{x} \|^2).$$

Επομένως,

$$\dot{h}(x) = \frac{\alpha}{2}(3 \| \boldsymbol{x} \|^2 - 1).$$

Η νόρμα $\| \boldsymbol{x} \|^2$ είναι μέγιστη σε κάθε μια απο τις τρείς κορυφές του Δ, όπου αποκτά τη τιμή 1, και ελάχιστη στο κεντρικό σημείο x^*, όπου αποκτά τη τιμή $\frac{1}{3}$. Επομένως, ο παράγοντας $3 \| \boldsymbol{x} \|^2 - 1$ είναι μηδέν στο $x = x^*$ και θετικός οπουδήποτε αλλού στο Δ.

Άρα, στο αυθεντικό παίγνιο "Πετρα-Ψαλίδι-Χαρτί" ($\alpha = 0$), συνεπάγεται οτι όλες οι λύσεις παθς είναι κύκλοι στο Δ. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε αρχική κατάσταση $x^0 \in \mathrm{int}(\Delta)$, η λύση $\xi(t, x^0)$ κινείται διαρκώς κατά μήκος της κλειστής καμπύλης στην οποία το γινόμενο $x_1 x_2 x_3$ είανι σταθερά ίσο με $\gamma = x_1^0 x_2^0 x_3^0$. Γεωμετρικά, μια τέτοια καμπύλη είναι η τομή της υπερβολής του $\mathbb{R}^3$ που δίνεται απο την εξίσωση $x_1 x_2 x_3 = \gamma$ με το Δ. Αν $x^0 = x^*$, τότε αυτή η τομή γίνεται ένα και μοναδικό σημείο. Από την άλλη για κάθε $x^0 \in \mathrm{int}\,\Delta$, η τομη είναι μία κλειστή καμπύλη στο $\mathrm{int}\,\Delta$. Επομένως κάθε λύση που αντιστοιχεί σε εσωτερική αρχική συνθήκη είναι περιοδική όταν $\alpha = 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Τα τελευταία χρόνια κάποιοι βιολόγοι πήγαν την θεωρία παιγνίων στο επόμενο στάδιο, πραγματοποιώντας εργαστηριακά πειράματα αλλά και παρατηρήσεις στο φυσικό περιβάλλον των ζώων, συγκρίνωντας τ' αποτελέσματα με τις προβλέψεις των μοντέλων. Αυτή η σύνδεση μεταξύ θεωρίας και δεδομένων, επιτρέπει στους ερευνητές να αποκτούν ακριβέστερη κατανόηση για την περίπλοκη συμπεριφορά των ζώων. Από την άλλη, τα μοντέλα της θεωρίας παιγνίων είναι δύσκολο να προβλέψουν είτε να επαληθεύσουν την ανθρώπινη συμπεριφορά. Ο Martin Nowak, ζωολόγος στο Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης, υποστηρίζει οτι το πρόβλημα έγκυται στη γνώση του όφελους που μπορεί να αποδώσει ένα παίγνιο. Είναι πιο επιθυμητό ένα μεγάλο όφελος ή να ωθήσεις τον αντίπαλο σου σε παραίτηση; Με τα ζώα, η επιβράβευση για μια επιτυχημένη στρατηγική, είναι εύκολο να προσδιορισθεί: περισσότερη τροφή, μια υψηλότερη θέση στην ιεραρχία της αγέλης, λιγότερος ανταγωνισμός για ταίρι, όλα αφτά καταλήγουν σε αναπαραγωγική επιτυχία του ζώου.

Τα τελευταία 20 χρόνια μοντελοποιήθηκαν περίπου όλες οι πιθανές συμπεριφορές ως ESS, όπως επιθετικότητα, συνεργασία, κυνήγι, ανατγωνισμός και πολλές άλλες. Ο Peter Hammerstain, θεωρητικός του Ινστιτούτου Max Planck, αναφέρει: "Ήταν συναρπαστικό το γεγονός ότι τα μοντέλα φαίνεται να μπορούν να προλέψουν αυτές τις συμπεριφορές. Αλλά για να βεβαιωτηούμε οτι δεν πρόκειτε για μια επιφανειακή αντιστοιχεία, έπρεπε να ελεγχθούν." Για να αποδειχθεί ότι πράγματι τα ζώα ακολουθούν ESS, οι ερευνητές έπρεπε να συλλέξουν αρκετά δεδομένα, ώστε να υπολογίσουν τα ακριβή αναπαραγωγικά οφέλη για την παρατηρούμενη στρατηγική σε σύγκριση με άλλες.

Τα τεχνάσματα μιας αράχνης.

Η Susan Riechert, ερευνήτρια στο Πανεπιστήμιο του Τενεσσύ, ασχολήθηκε με τις στρατηγικές που αναπτύσσει η αράχνη Agelenopsis aperta και ήρθε αντιμέτωπη μ΄ έναν γρίφο. Παρατήρησε οτι η επιτυχία της αναπαραγωγικής διαδικασίας, εξαρτιόταν σημαντικά από το πού ήταν τοποθετημένος ο ιστός της: Κάποια σημεία προσέφεραν περισσότερα θυράματα, άρα περισσότερη τροφή κι επομένως αυτές οι αράχνες γεννούσαν περισσότερα αυγά. Η S.Riechert όμως παρατηρεί το εξής: Όταν ένας εισβολέας πλησιάζει τον ιστό αυτό πού είναι τοποθετημένος σε προνομιακή θέση, κάποιες φορές απλώς θα τραπεί σε φυγή αμέσως, κάποιες άλλες θα επιδωθεί σε κάποιες επιδεικτικές κινήσεις, ενώ άλλες φορές οι δύο αράχνες θα παλέψουν για την κατάκτηση του ιστού.

Όταν η S.Riechert διάβασε την εργασία του J.M.Smith, σκέφτηκε πως ίσως αυτή η συμπεριφορά να μπορούσε να κατανοηθεί καλύτερα με όρους μιας εξελικτικά σταθερής στρατηγικής. Η S.Riechert μην έχοντας εμπειρία στην θεωρία παιγνίων ζητά τη βοήθεια του P.Hammerstein, ο οποίος είχε συνεργαστεί με τον J.M.Smith και είχε ήδη δημοσιεύσει μια έρευνα για τις στρατηγικές που ακολουθούν οι αράχνες.

Η έρευνα διήρκησε 6 χρόνια. Η S.Riechert υπολόγισε πόση επιπλέον τροφή εξασφάλιζε μια αράχνη κατακτώντας έναν ιστό σε προνομιακή θέση, σε διαφορετικά περιβάλλοντα και επεξεργάστηκε τις συνέπειες στην παραγωγή αυγών. Ανακάλυψε επίσης, οτι όταν οι αράχνες συγκρούονταν με στόχο την κατάκτηση του ιστού, το πιθανό αποτέλεσμα της μάχης είχε να κάνει με το βάρος των αραχνών. Άν μια αράχνη ζύγιζε περίπου 10% περισσότερο από τον αντίπαλο, τότε οι πιθανότητες νίκης ήταν 90% επιπλέον για εκείνη. Ανακαλύπτει οτι μια αράχνη, χάνει ένα πόδι στο 30% των μαχών και το κόστος αυτής της απώλειας είναι περίπου 10% μείωση της τροφής που λαμβάνει καθημερινά και μειώνονται κατά 25% οι πιθανότητες νίκης σε επόμενη μάχη.

Η S.Riechert και ο P.Hammerstein, ήταν πλέον σε θέση να υπολογίσουν τα αναπαραγωγικά οφέλη διαφόρων τύπων συγκρούσεων, που εξαρτώνται από το σημείο που είναι τοποθετημένος ο ιστός και το μέγεθος του αντιπάλου. Για τις αράχνες που έπρεπε να επιβιώσουν σε άγονες περιοχές με λίγα θυράματα, παρατήρησαν οτι οι προνομιούχοι ιστοί, ήταν τόσο σημαντικοί που καμία αράχνη δεν αποσυρώταν αμέσως· και οι δύο θα κάνουν τουλάχιστον μια προσπάθεια. Διαφορετικά, μόνο η αράχνη που ζυγίζει τουλάχιστον 10% επιπλέον σε σύγκριση με τον αντίπαλο προτίθεται να εμπλακεί σε μάχη. Αξίζει επίσης να σημειωθεί οτι οι αράχνες μπορούν να υπολογίσουν το βάρος του αντιπάλου σε σύγκριση με το δικό τους με μεγάλη ακρίβεια.

Σε αντίθεση, στις περιοχές που βρίσκονται κοντά σε νερό, με πολλά θυράματα, η βέλτιστη στρατηγική είναι η αράχνη να υποχωρήσει αμέσως και να μην ρισκάρει. Μεταξύ αραχνών που έχουν ίδιο βάρος, ο "ιδιοκτήτης" θα επιτεθεί, ενώ ο εισβολέας, μην έχοντας επενδύση στον ιστό υποχωρεί.

Η S.Riechert χρησιμοποιεί τα δεδομένα ώστε να τα επιβεβαιώσει, παρατηρώντας τις αράχνες στο φυσικό περιβάλλον. Ανακαλύπτει πως οι αράχνες " συμπεριφέρονταν πολύ κοντά στις προβλέψεις ". Η διαφορά από το μοντέλο παρατηρείται στο ότι οι αράχνες που ζούσαν κοντά σε νερό, είχαν περισσότερες μάχες απ΄ όσες αυτό προέβλεπε, αλλά αυτό μπορεί να εξηγείται απο την διαστάβρωση με πιο μαχητικές αράχνες των άγονων περιοχών.

Το βάθος και η λεπτομερής έρευνα των S.Riechertκαι P.Hammerstein, η οποία ολοκληρώθηκε στα μέσα του 1980, έπεισε κι άλλους ερευνητές οτι η εφαρμογή της θεωρίας ήταν κάτι παραπάνω απο απλή διαίσθηση. Μπορούσε να παράσχει δεδομένα τα οποία ήταν δυνατό να ελεγχθούν και να επιβεβαιωθούν κατά την παρατήρηση.

Τυφλοπόντικες.

Ο Kern Reeve από το Πανεπιστήμιο του Cornell, επιχειρεί την ίδια ποσοτική προσέγγιση εξετάζοντας την συμπεριφορά ενός είδους τυφλοπόντικα από την Ανατολική Αφρική. Μια ομάδα του συγκεκριμένου είδους τυφλοπόντικα, αποτελείται από την βασίλισσα, ένα έως τρία αρσενικά τα οποία μπορούν να λάβουν μέρος στην αναπαραγωγή και περίπου 80 εργάτες, που κάνουν όλες τις δουλειές: σκάβουν και καθαρίζουν τις σύραγγες, βρίσκουν τροφή, και προστατεύουν την αποικία από επιθέσεις αρπακτικών ζώων. Αυτές οι δουλειές φυσικά θέτουν σε κίνδυνο τη ζωή των εργατών αφού για παράδειγμα μπορεί να τους επιτεθούν φίδια. Από την άλλη, όμως φαίνονται πρόθυμοι ν΄ αναλάβουν αυτό το ρίσκο για χάρη της βασίλισσας και των αρσενικών αναπαραγωγής κι αυτό γιατί συνδέονται στενά με την αναπαραγωγική επιτυχία ή μη της βασίλισσας.

Ωστόσο, φαίνεται να υπάρχουν κάποια όρια. Τα μέλη της αποικίας που δεν συμμετέχουν στην αναπαραγωγική διαδικασία, έχουν κι άλλο κίνητρο να παραμείνουν ζωντανά εκτός απο το να συνεχίσουν να εξυπηρετούν την βασίλισσα. Αν η βασίλισσα ή κάποιο απο τα αρσενικά αναπαραγωγής πεθάνει, τότε ένας εργάτης/τρια θα τα αντικαταστήσει. Αυτό δημιουργεί μια κατάσταση σύγκρουσης συμφερόντων: Η βασίλισσα θέλει οι εργάτες της να δουλεύουν όσο πιο σκληρά γίνεται, αλλά από την άλλη κάποια μέλη φαίνεται να μην θέλουν να πάρουν μεγάλα ρίσκα που θέτουν σε κίνδυνο τη ζωή τους.

Ο K.Reeve, χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο θεωρίας παιγνίων, προβλέπει την βέλτιστη στρατηγική που πρέπει να ακολουθηθεί απο τους εργάτες. Η στρατηγική εξαρτάται απο δύο παράγοντες: τη συγγένεια με τη βασίλισσα και την πιθανότητα να γίνει στο μέλλον αναπαραγωγικό μέλος της αποικίας. Τα άτομα που συνδέονται λιγότερο με τη βασίλισσα, έχουν λιγότερα οφέλη από την επιτυχία της αναπαραγωγικής διαδικασίας κι έτσι θα μπορούσαν να είναι πιο τεμπέλικα. Επίσης τα μεγαλύτερα μέλη της αποικίας, που είναι πιο πιθανόν ν΄ ανέβουν την ιεραρχία στο μέλλον, θα πρέπει να αποφεύγουν την πολύ δουλειά, έτσι ωστε να αυξήσουν τις πιθανότητες επιβίωσης ώστε να αναπαραχθούν αργότερα. Έτσι ο K.Reeve συμπεραίνει οτι οι βασίλισσες πρέπει να ελέγχουν περισσότερο τα μεγαλύτερα σε ηλικία και πιο μακρινά σε συγγένεια μέλη της αποικίας.

Πράγματι, η παρατήρηση της αποικίας στο φυσικό περιβάλλον επιεαιώνει το μοντέλο και τις προβλέψεις για αυτού του είδους τις συγκρούσεις στην αποικία των τυφλοπόντικων. Η βασίλισσα σπρώχνει τους εργάτες στα τούνελ ώστε να τους αναγκάσει να δουλέψουν και φαίνεται να επικεντρώνει την προσοχή της κυρίως στα μεγαλύτερα μέλη και στα μέλη με τα οποία σχετίζεται λιγότερο. Πράγματι, όταν η βασίλισσα για κάποιο λόγο απομακρύνεται, οι συγκεκριμένες ομάδες τεμπελιάζουν πολύ περισσότερο απ΄ ότι τα υπόλοιπα μέλη.

BIBLIOGRAPHY

[1] C. Cannings and G.T. Vickers. Patterns of ess's ii. *Journal of Theoretical Biology*, 132(4):409 – 420, 1988.

[2] J. C. Harsanyi. Games with Incomplete Information Played by "Bayesian" Players, I-III. Part I. The Basic Model. *Management Science*, 14(3):159–182, November 1967.

[3] J. Hofbauer, P. Schuster, and K. Sigmund. A note on evolutionary stable strategies and game dynamics. Levine's Working Paper Archive 441, David K. Levine, December 2010.

[4] R. C. Lewontin and K. Kojima. The Evolutionary Dynamics of Complex Polymorphisms. *Evolution*, 14(4):458–472.

[5] John Maynard-Smith. *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge University Press, 1st edition edition, December 1982.

[6] John F. Nash. Equilibrium points in n-person games. In *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 1950.

[7] John Von Neumann and Oskar Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1944.

[8] David G. Pearce. Rationalizable Strategic Behavior and the Problem of Perfection. *Econometrica*, 52(4):1029–1050, 1984.

[9] Ioannis Polyrakis. *Topics in analysis and theory of general theory of equilibrium in economics (in greek)*. 2009.

[10] A. Rapoport and A. M. Chammah. *Prisoner's Dilemma: A Study in Conflict and Cooperation*. University of Michigan Press, Ann Arbor, 1965.

[11] R. Selten. Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games. *International Journal of Game Theory*, 4:25–55, 1975. 10.1007/BF01766400.

[12] Lawrence B. Slobodkin and Anatol Rapoport. An Optimal Strategy of Evolution. *The Quarterly Review of Biology*, 49(3):181–200, 1974.

[13] J. Maynard Smith and G. R. Price. The Logic of Animal Conflict. *Nature*, 246(5427):15–18, November 1973.

[14] Peter D. Taylor and Leo B. Jonker. Evolutionary stable strategies and game dynamics. *Mathematical Biosciences*, 40(1b•“2):145 – 156, 1978.