



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**Δ.Π.Μ.Σ. "ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ"**

Μεταπτυχιακή Εργασία

**Ελαστοδυναμική Ανάλυση Πύργου Ανεμογεννήτριας με  
Προσεγγιστικές Αναλυτικές Μεθόδους**



**Κωνσταντίνος Κ. Τόλης**

**Επιβλέπων Καθηγητής**

Χ.Ι. Γιούνης

Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα 2012

## *Ευχαριστίες*

*Αυτή η διπλωματική εργασία δε θα μπορούσε να ολοκληρωθεί χωρίς τη βοήθεια εκείνων ,τους οποίους θα ήθελα να ευχαριστήσω εγκάρδια.*

*Τον καθηγητή κύριο Χρήστο Γιούνη για την επί της ουσίας επίβλεψη της εργασίας, τις πολύτιμες συμβουλές, την ουσιαστική καθοδήγησή του στο αντικείμενο κατά τη διαδικασία εκπόνησης αυτής της εργασίας και το χρόνο που αφιέρωσε για την αξιολόγησή της.*

*Τον πολύ καλό φίλο και συμφοιτητή μου Δημήτρη Μανιά τόσο για την βοήθεια του στη σχεδίαση των σχημάτων όσο και για την προσωπική υποστήριξη που μου προσέφερε.*

*Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την ηθική υποστήριξη που μου παρέχουν όλα αυτά τα χρόνια και για όλες τις θυσίες που έχουν κάνει. Χωρίς αυτούς τίποτα από όλα αυτά δεν θα ήταν εφικτά.*

*Τόλης Κωνσταντίνος*

*Αθήνα, Ιούλιος 2012*

## Περίληψη

Στην εργασία αυτή γίνεται χρήση αναλυτικής προσεγγιστικής μεθόδου για την επίλυση ενός σχετικά απλού δομικού συστήματος με κατανενημένη μάζα, ακαμψία και απόσβεση. Μετά την επίλυση ακολουθεί η ανάλυση και η μελέτη της συμπεριφοράς του.

Κατ' αρχήν παρουσιάζεται η μεθοδολογία της αναλυτικής προσεγγιστικής «Μεθόδου των Υποθετικών ιδιομορφών» σύμφωνα με την οποία η ζητούμενη απόκριση ενός μηχανικού ή δομικού συστήματος με κατανενημένες ιδιότητες μάζας ακαμψίας και απόσβεσης έχει την μορφή σειράς, δηλαδή ενός γραμμικού συνδυασμού, επιλεγμένων συναρτήσεων (δοκιμαστικές συναρτήσεις) της χωρικής μεταβλητής πολλαπλασιασμένων με συντελεστές- συναρτήσεις του χρόνου οι οποίες στην συνέχεια πρόκειται να υπολογιστούν.

Οι δοκιμαστικές συναρτήσεις της χωρικής μεταβλητής οφείλουν να ικανοποιούν όλες ή ένα μέρος των οριακών συνθηκών του προβλήματος. Οι συντελεστές- συναρτήσεις του χρόνου θεωρούνται ως «γενικευμένες συντεταγμένες» οι οποίες καθορίζουν την απόκριση του συστήματος.

Υπολογίζονται οι εκφράσεις της Δυναμικής και Κινητικής ενέργειας του συστήματος και το δυνατό έργο των μη συντηρητικών δυνάμεων συναρτήσει της θεωρηθείσης σειράς των δοκιμαστικών συναρτήσεων. Τα μεγέθη αυτά οφείλουν να ικανοποιούν τις εξισώσεις Lagrange με άγνωστες συναρτήσεις του χρόνου τις προαναφερθείσες γενικευμένες συντεταγμένες. Έτσι προκύπτει ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων η επίλυση του οποίου παρέχει τους άγνωστους συντελεστές-συναρτήσεις του χρόνου. Έτσι υπολογίζεται η θεωρηθείσα προσέγγιση της απόκρισης συναρτήσει του χρόνου.

Το δομικό σύστημα που επιλύεται στην εργασία αυτή είναι ο πύργος ανεμογεννήτριας που προσομοιώνεται με στοιχείο δοκού σχήματος λεπτότοιχου κοίλου κυκλικού κόλουρου κώνου, ελαστικά πακτωμένου στη βάση του. Ο κινητήρας και τα πτερύγια της ανεμογεννήτριας προσομοιώνονται με μία συγκεντρωμένη μάζα και ροπή αδρανείας στο άνω άκρο του. Η φόρτιση του ανέμου ισοδυναμεί με μία οριζόντια δύναμη μεταβαλλόμενης έντασης ασκούμενη στο άνω άκρο του πύργου.

Θεωρούνται τρεις διαφορετικές οικογένειες δοκιμαστικών συναρτήσεων για κάθε μία από τις οποίες εφαρμόζεται η Μέθοδος των υποθετικών ιδιομορφών. Διαπιστώνεται πολύ ικανοποιητική σύγκλιση των αποτελεσμάτων.

Στη συνέχεια υιοθετώντας μία από αυτές τις οικογένειες δοκιμαστικών συναρτήσεων, διεξάγεται παραμετρική μελέτη για τις ιδιότητες, την απόκριση, την ένταση και την εν γένει συμπεριφορά του πύργου, από την οποία εξάγονται χρησιμοποίησιμα συμπεράσματα.

## Εισαγωγή

Είναι πολύ λίγες οι περιπτώσεις και γενικά είναι σπάνιο να υπάρχει ακριβής αναλυτική επίλυση και εύρεση κλειστών λύσεων στα διαφορικά προβλήματα οριακών τιμών και ιδιοτιμών τα οποία περιγράφουν την απόκριση των δομικών ή μηχανικών συστημάτων με κατανεμημένες ιδιότητες μάζας, ακαμψίας και απόσβεσης. Πράγματι κλειστές λύσεις μπορούν να βρεθούν συνήθως μόνον στις περιπτώσεις ομοιόμορφης κατανομής μάζας, ακαμψίας και απόσβεσης και σε κάποιες άλλες ειδικές περιπτώσεις κατανομής, και μάλιστα όταν υπάρχουν σχετικά απλές οριακές συνθήκες. Είναι αρκετές οι περιπτώσεις που ακόμη και αν είναι δυνατή η ύπαρξη ή η εύρεση κλειστών αναλυτικών λύσεων, ο απαιτούμενος φόρτος για την εύρεση ή τη χρήση τους είναι δυσανάλογα μεγάλος. Γι' αυτό πολύ συχνά κάποιος καταφεύγει στην χρήση προσεγγιστικών μεθόδων.

Η δυσκολία στην επίλυση των διαφορικών προβλημάτων οριακών τιμών και ιδιοτιμών κυρίως έγκειται στην ύπαρξη της χωρικής μεταβλητής και γι' αυτό η προσπάθεια σε όλες τις προσεγγιστικές αναλυτικές μεθόδους είναι η απαλειφή της, δηλαδή η «χωρική διακριτοποίηση» αυτών των διαφορικών προβλημάτων. Οι δύο βασικές κατηγορίες χωρικής διακριτοποίησης είναι α) η διακριτοποίηση μέσω της αντικατάστασης των κατανεμημένων με συγκεντρωμένα μεγέθη (lumping procedures) και β) η διακριτοποίηση με χρήση λύσεων υπό μορφήν σειράς (series discretization). Στη δεύτερη περίπτωση η προσεγγιστική λύση έχει τη μορφή αθροίσματος, δηλαδή ενός γραμμικού συνδυασμού, επιλεγμένων συναρτήσεων (δοκιμαστικές συναρτήσεις) της χωρικής μεταβλητής πολλαπλασιασμένων με συντελεστές- συναρτήσεις του χρόνου οι οποίες στην συνέχεια πρόκειται να υπολογιστούν. Και στις δύο περιπτώσεις το αποτέλεσμα είναι ο μετασχηματισμός των διαφορικών προβλημάτων ιδιοτιμών σε αλγεβρικά προβλήματα ιδιοτιμών.

Η δεύτερη κατηγορία των μεθόδων διακριτοποίησης με χρήση λύσεων υπό μορφή σειράς χωρίζεται σε δύο υποκατηγορίες: α) στις μεθόδους που κάνουν χρήση των ιδιοτήτων στάσιμων τιμών (πηλίκου του Rayleigh, αρχή του D'Alembert) και αναφέρονται με το όνομα «Μέθοδος Rayleigh-Ritz», και β) στις μεθόδους που στηρίζονται στην ιδέα της ελαχιστοποίησης του σφάλματος ή υπολοίπου (residual) που προκύπτει από την χρήση προσεγγιστικής λύσης, και ονομάζονται «μέθοδοι των weighted residuals» με πλέον γνωστή τη «Μέθοδο Galerkin».

Στόχος της εργασίας αυτής είναι η παρουσίαση της «Μεθόδου των υποθετικών ιδιομορφών», η οποία είναι μία παραλλαγή της Μεθόδου Rayleigh-Ritz, και η εφαρμογή της στην ανάλυση ενός σχετικά απλού δομικού συστήματος με κατανεμημένες ιδιότητες μάζας, ακαμψίας και απόσβεσης, του πύργου μιάς ανεμογεννήτριας.

Η χρησιμοποιούμενη προσεγγιστική σειρά περιέχει κατά τα γνωστά τις επιλεγμένες συναρτήσεις (δοκιμαστικές συναρτήσεις) της χωρικής μεταβλητής

πολλαπλασιασμένες με τους κατ' αρχήν άγνωστους συντελεστές- συναρτήσεις του χρόνου οι οποίοι στη συνέχεια πρόκειται να υπολογιστούν.

Οι δοκιμαστικές συναρτήσεις επιλέγονται έτσι ώστε να ικανοποιούν, εάν είναι δυνατόν, όλες τις οριακές συνθήκες, γεωμετρικές και φυσικές (τότε ανήκουν στην κλάση των comparison functions). Στην περίπτωση αυτή η προσέγγιση παρέχει μεγαλύτερη ακρίβεια. Αν αυτό δεν είναι δυνατόν τότε οι δοκιμαστικές συναρτήσεις πρέπει τουλάχιστον να ικανοποιούν όλες τις γεωμετρικές οριακές συνθήκες (τότε ανήκουν στην κλάση των admissible functions). Η ικανοποίηση των φυσικών οριακών συνθηκών λαμβάνεται υπ' όψιν έμμεσα στις εκφράσεις της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας.

Οι προσδιοριστέοι συντελεστές- συναρτήσεις του χρόνου θεωρούνται ως οι «γενικευμένες συντεταγμένες» οι οποίες καθορίζουν τη μορφή και την απόκριση του συστήματος.

Υπολογίζονται οι εκφράσεις της Δυναμικής και Κινητικής ενέργειας του συστήματος και το δυνατό έργο των μη συντηρητικών δυνάμεων συναρτήσει της θεωρηθείσης σειράς των δοκιμαστικών συναρτήσεων. Σε αυτή τη διαδικασία προκύπτει η μορφή των συντελεστών και των αντίστοιχων μητρώων μάζας, ακαμψίας, απόσβεσης και εξωτερικής φόρτισης του συστήματος και γίνεται η απαλειφή της χωρικής μεταβλητής.

Τα μεγέθη αυτά οφείλουν να ικανοποιούν τις εξισώσεις Lagrange οι οποίες διέπουν την κίνηση του συστήματος. Οι εξισώσεις Lagrange περιέχουν ως γενικευμένες συντεταγμένες τους προαναφερθέντες προσδιοριστέους συντελεστές- συναρτήσεις του χρόνου της προσεγγιστικής σειράς. Έτσι προκύπτει ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων η επίλυση του οποίου παρέχει τους ζητούμενους συντελεστές-συναρτήσεις του χρόνου. Με αυτόν τον τρόπο υπολογίζεται η θεωρηθείσα προσέγγιση της απόκρισης συναρτήσει του χρόνου. Όταν δεν υπάρχει απόσβεση το προκύπτον σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων επιλύεται με τη μέθοδο της Modal Analysis. Όταν υπάρχει απόσβεση (εξωτερική ή του υλικού) φαίνεται ότι το προκύπτον μητρώο απόσβεσης δεν μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των μητρώων μάζας και ακαμψίας. Έτσι η Modal Analysis δεν μπορεί να εφαρμοστεί οπότε κανείς καταφεύγει σε αριθμητική ολοκλήρωση του συστήματος των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (μέθοδος Runge-Kutta).

Ο πύργος ανεμογεννήτριας που αναλύεται με την Μέθοδο των υποθετικών ιδιομορφών, προσομοιώνεται με στοιχείο δοκού σχήματος λεπτότοιχου κοίλου κυκλικού κώλουρου κώνου. Στη βάση του θεωρείται ελαστική πάκτωση που περιγράφει τη θεμελίωση επί ελαστικού εδάφους. Ο κινητήρας και τα πτερύγια της ανεμογεννήτριας προσομοιώνονται με μία συγκεντρωμένη μάζα και ροπή αδρανείας στο άνω άκρο του. Η φόρτιση του ανέμου ισοδυναμεί με μία οριζόντια δύναμη μεταβαλλόμενης έντασης ασκούμενη στο άνω άκρο του πύργου.

Θεωρούνται τρεις διαφορετικές οικογένειες δοκιμαστικών συναρτήσεων της κλάσης των admissible functions. Για κάθε μία από αυτές εφαρμόζεται η μέθοδος των υποθετικών ιδιομορφών και διαπιστώνεται πολύ ικανοποιητική σύγκλιση των αποτελεσμάτων.

Στη συνέχεια υιοθετώντας την καταλληλότερη από αυτές τις οικογένειες δοκιμαστικών συναρτήσεων, υπολογίζεται η απόκριση του πύργου και η αναπτυσσόμενη εσωτερική ένταση συναρτήσει του χρόνου, λόγω εξωτερικής δύναμης προκαλούμενη από διάφορες μορφές και εντάσεις της ταχύτητας του ανέμου.

Θεωρώντας ως παραμέτρους του συστήματος την λυγηρότητα του πύργου, την κατά μήκος μεταβολή της διατομής, το πάχος του τοιχώματος της διατομής, το μέτρο ελαστικότητας, την πυκνότητα, τον συντελεστή εσωτερικής απόσβεσης του υλικού του πύργου, το βάρος και τη μαζική ροπή αδρανείας του κινητήρα και των πτερυγίων, καθώς και τον δείκτη ελαστικότητας του εδάφους, διεξάγεται παραμετρική μελέτη για τα δυναμικά χαρακτηριστικά, τις ακραίες τιμές της απόκρισης και της έντασης και την εν γένει συμπεριφορά του πύργου, από την οποία προκύπτουν χρησιμοποιήσιμα συμπεράσματα.

## Περιεχόμενα

<i>Ευχαριστίες</i> .....	i
Περίληψη.....	ii
Εισαγωγή.....	iii
Περιεχόμενα .....	iv

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

<b>Θεωρία ταλαντούμενης δοκού</b> .....	1
1.1) Εξαγωγή της ΜΔΕ της δοκού με χρήση της αρχής του Hamilton .....	1
1.2) Επίλυση της ΜΔΕ κίνησης της δοκού χωρίς απόσβεση με χρήση της Modal Analysis .....	9
1.3) Επίλυση της ΜΔΕ κίνησης της δοκού με χρήση της ASSUMED- MODES METHOD( ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΠΟΘΕΤΙΚΩΝ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ)....	14
1.4) Μέθοδος Galerkin .....	26

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

<b>Πύργος ανεμογεννήτριας</b> .....	29
2.1) Περιγραφή του πύργου της ανεμογεννήτριας .....	29
2.1.1) Γεωμετρικά χαρακτηριστικά του σώματος του πύργου .....	29
2.1.2) Έδραση .....	32
2.1.3) Κατανομή μάζας $m(x)$ , συγκεντρωμένη μάζα $M$ και συγκεντρωμένη μαζική ροπή αδρανείας $J$ .....	34
2.1.4) Ακαμψία .....	35
2.1.5) Οριζόντια δύναμη που ασκείται στα περύγια από τον άνεμο.....	36
2.1.6) Εσωτερική και εξωτερική απόσβεση του πύργου της ανεμογεννήτριας .....	38
2.1.7) Χρόνος – Ιδιοσυχνότητες .....	38
2.2) Περιγραφή του προβλήματος .....	39
2.3) Δοκιμαστικές συναρτήσεις.....	42
2.3.1) Α' Οικογένεια δοκιμαστικών συναρτήσεων ('3').....	42
2.3.2) Β' Οικογένεια δοκιμαστικών συναρτήσεων ('4a') .....	45
2.3.3) Γ' Οικογένεια δοκιμαστικών συναρτήσεων ('4b') .....	48

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

<b>Παραμετρική μελέτη</b> .....	50
3.1) Σύγκριση των τριών οικογενειών δοκιμαστικών συναρτήσεων ( '3' - '4a' - '4b' ) .....	50
3.2) Παραμετρική μελέτη με το '4b' χωρίς απόσβεση.....	57
3.2.1) Παραμετρική μελέτη ως προς τη μεταβολής της διατομής κατά μήκος του άξονα του πύργου $\delta$ .....	57
3.2.2) Παραμετρική μελέτη ως προς τη λυγηρότητα του πύργου $\lambda$ .....	60
3.2.3) Παραμετρική μελέτη ως προς το πάχος του κελύφους $\sigma$ .....	63
3.2.4) Παραμετρική μελέτη ως προς το μέτρο ελαστικότητας $E$ .....	66
3.2.5) Παραμετρική μελέτη ως προς την ταχύτητα του ανέμου $u_{αν}$ .....	69
3.2.6) Παραμετρική μελέτη ως προς τη συχνότητα της εξωτερικής φόρτισης $\omega$ .....	72
3.2.7) Παραμετρική μελέτη ως προς τη συγκεντρωμένη μάζα $M$ ( μάζα του μοτέρ $M_{mot}$ ) .....	74
3.2.8) Παραμετρική μελέτη ως προς τη συγκεντρωμένη μαζική ροπή αδρανείας $J$ .....	77
3.2.9) Παραμετρική μελέτη ως προς το στροφικό ελατήριο ( συντελεστής δείκτης εδάφους $c_{soil}$ ) .....	80
3.2.10) Παραμετρική μελέτη ως προς την πυκνότητα του υλικού $\rho$ .....	83
3.2.11) Παραμετρική μελέτη ως προς το ύψος του πύργου $L$ .....	86
3.3) Παραμετρική μελέτη με το '4b' με απόσβεση με χρήση της αριθμητικής μεθόδου Runge Kutta .....	90
Συμπεράσματα.....	96
Βιβλιογραφικές αναφορές .....	97



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## ΘΕΩΡΙΑ ΤΑΛΑΝΤΟΥΜΕΝΗΣ ΔΟΚΟΥ

### 1.1) Εξαγωγή της ΜΔΕ της δοκού με χρήση της αρχής του Hamilton

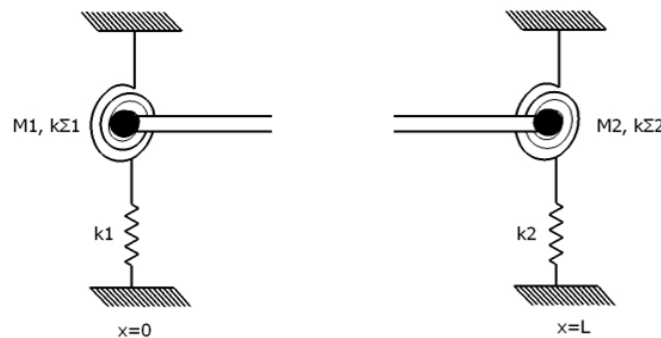
Από την αρχή του Hamilton έχουμε ότι :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0$$

όπου τα  $t_1, t_2$  μπορούν να είναι οποιαδήποτε. Επειδή τα  $t_1, t_2$  έχουν ληφθεί ως δεδομένα και ανεξάρτητα από την κίνηση του συστήματος συναρτήσει του χρόνου προκύπτει ότι :

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (1.1.1)$$

Έστω ότι έχουμε την δοκό όπως φαίνεται στο **Σχήμα 1.1 1** η οποία στα άκρα έχει στερεωμένες μάζες καθώς και γραμμικά και στροφικά ελατήρια. (**σύνθετες οριακές συνθήκες**)



**Σχήμα 1.1 1**

Η κινητική ενέργεια  $T$  της δοκού με σύνθετες οριακές συνθήκες είναι η εξής :

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho I(x) \left( \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} M_1 \left( \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} M_2 \left( \frac{\partial u(L,t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} J_1 \left( \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x \partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} J_2 \left( \frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial x \partial t} \right)^2$$

Η δυνατή μεταβολή της κινητικής ενέργειας  $\delta T$  είναι :

$$\begin{aligned} \delta T &= \int_0^L m(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right) dx + \int_0^L \rho I(x) \left( \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \right) \delta \left( \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \right) dx + M_1 \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} \right) \\ &+ M_2 \frac{\partial u(L,t)}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial u(L,t)}{\partial t} \right) + J_1 \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x \partial t} \delta \left( \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x \partial t} \right) + J_2 \frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial x \partial t} \delta \left( \frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial x \partial t} \right) \Rightarrow \\ \delta T &= \int_0^L m(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \frac{\partial \delta [u(x,t)]}{\partial t} dx + \int_0^L \rho I(x) \left( \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \right) \frac{\partial^2 \delta [u(x,t)]}{\partial x \partial t} dx + M_1 \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} \frac{\partial \delta [u(0,t)]}{\partial t} \\ &+ M_2 \frac{\partial u(L,t)}{\partial t} \frac{\partial \delta [u(L,t)]}{\partial t} + J_1 \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta [u(0,t)]}{\partial x \partial t} + J_2 \frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta [u(L,t)]}{\partial x \partial t} \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

Όμως ισχύει ότι

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \frac{\partial \delta [u(x,t)]}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \delta u(x,t) \right) - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \delta u(x,t) \quad (1.1.3)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta [u(x,t)]}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \frac{\partial \delta u(x,t)}{\partial x} \right) - \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x \partial t^2} \frac{\partial \delta u(x,t)}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \delta \left[ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] \right) - \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x \partial t^2} \delta \left[ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] \quad (1.1.4)$$

Επίσης ισχύει ότι :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta [u(x,t)]}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \frac{\partial \delta u(x,t)}{\partial x} \right) - \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x \partial t^2} \frac{\partial \delta u(x,t)}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \delta \left[ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x \partial t^2} \delta [u(x,t)] \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x \partial t^2} \right] \delta [u(x,t)] \quad (1.1.5)$$

Εισάγοντας τη σχέση (1.1.5) στο δεύτερο όρο της εξίσωσης (1.1.2), ο οποίος αντιπροσωπεύει την περιστροφική κινητική ενέργεια της δοκού, έχουμε ότι :

$$\int_0^L \rho I(x) \left( \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \right) \frac{\partial^2 \delta [u(x,t)]}{\partial x \partial t} dx =$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \rho I(x) \left( \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \right) \delta \left[ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] dx - \rho I(L) \frac{\partial^3 u(L,t)}{\partial x \partial t^2} \delta [u(L,t)] \\ & + \rho I(0) \frac{\partial^3 u(0,t)}{\partial x \partial t^2} \delta [u(0,t)] + \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho I(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x \partial t^2} \right] \delta [u(x,t)] dx \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

Συνάμα εισάγοντας τις σχέσεις (1.1.3), (1.1.4) και (1.1.6) στην εξίσωση (1.1.2) προκύπτει ότι :

$$\begin{aligned} \delta T = & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_0^L m(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \delta [u(x,t)] dx + \int_0^L \rho I(x) \left( \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \right) \delta \left[ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] dx + M_1 \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} \delta [u(0,t)] \right. \\ & \left. + M_2 \frac{\partial u(L,t)}{\partial t} \delta [u(L,t)] + J_1 \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x \partial t} \delta \left[ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} \right] + J_2 \frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial x \partial t} \delta \left[ \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} \right] \right\} \\ & + \int_0^L \left[ -m(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho I(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x \partial t^2} \right) \right] \delta [u(x,t)] dx + \left[ \rho I(0) \frac{\partial^3 u(0,t)}{\partial x \partial t^2} - M_1 \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial t^2} \right] \delta [u(0,t)] \\ & + \left[ -\rho I(L) \frac{\partial^3 u(L,t)}{\partial x \partial t^2} - M_2 \frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial t^2} \right] \delta [u(L,t)] - J_1 \frac{\partial^3 u(0,t)}{\partial x \partial t^2} \delta \left[ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} \right] - J_2 \frac{\partial^3 u(L,t)}{\partial x \partial t^2} \delta \left[ \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

Η δυναμική ενέργεια  $V$  της δοκού με σύνθετες οριακές συνθήκες είναι η εξής :

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left( \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx - \frac{1}{2} P \int_0^L \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} k_1 u^2(0,t) + \frac{1}{2} k_2 u^2(L,t) + \frac{1}{2} k_{\Sigma 1} \left( \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} k_{\Sigma 2} \left( \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} \right)^2$$

όπου  $P$  εξωτερική θλιπτική δύναμη (συντηρητική) που ασκείται στο άκρο  $x = L$  με σταθερή διεύθυνση παράλληλα με τον άξονα  $x$ . Ο όρος  $\frac{1}{2} P \int_0^L \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx$  αντιστοιχεί στη **γεωμετρική ακαμψία**. Η δυνατή μεταβολή της δυναμικής ενέργειας  $\delta V$  είναι :

$$\begin{aligned} \delta V = & \int_0^L EI(x) \left( \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right) \delta \left( \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right) dx - P \int_0^L \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) \delta \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) dx \\ & + k_1 u(0,t) \delta u(0,t) + k_2 u(L,t) \delta u(L,t) + k_{\Sigma 1} \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} \right) + k_{\Sigma 2} \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} \right) \Rightarrow \\ \\ \delta V = & \int_0^L EI(x) \left( \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \delta [u(x,t)]}{\partial x^2} \right) dx - P \int_0^L \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \delta [u(x,t)]}{\partial x} \right) dx \\ & + k_1 u(0,t) \delta u(0,t) + k_2 u(L,t) \delta u(L,t) + k_{\Sigma 1} \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} \right) + k_{\Sigma 2} \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

$$EI(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 \delta[u(x,t)]}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial \delta[u(x,t)]}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] \frac{\partial \delta[u(x,t)]}{\partial x} =$$

I.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial \delta[u(x,t)]}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] \delta[u(x,t)] \right\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] \delta[u(x,t)]$$

Συνεπώς έχουμε ότι :

$$\int_0^L EI(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 \delta[u(x,t)]}{\partial x^2} \right) dx =$$

$$\left[ EI(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \delta[u(x,t)]}{\partial x} \right) \right]_0^L - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] \delta[u(x,t)] \right]_0^L + \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] \delta[u(x,t)] dx =$$

$$\left[ EI(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \delta \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) \right]_0^L - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] \delta[u(x,t)] \right]_0^L + \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] \delta[u(x,t)] dx =$$

$$EI(L) \frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial x^2} \delta \left( \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} \right) - EI(0) \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} \delta \left( \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[ EI(L) \frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial x^2} \right] \delta[u(L,t)]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left[ EI(0) \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} \right] \delta[u(0,t)] + \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] \delta[u(x,t)] dx$$

(1.1.9)

$$\text{II. } P \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \delta[u(x,t)]}{\partial x} \right) = P \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) \delta[u(x,t)] \right] - P \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \delta[u(x,t)]$$

Συνεπώς έχουμε ότι :

$$P \int_0^L \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \delta[u(x,t)]}{\partial x} \right) dx = P \left[ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \delta[u(x,t)] \right]_0^L - P \int_0^L \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \delta[u(x,t)] dx =$$

$$P \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} \delta[u(L,t)] - P \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} \delta[u(0,t)] - P \int_0^L \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \delta[u(x,t)] dx$$

(1.1.10)

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (1.1.9) και (1.1.10) στην εξίσωση (1.1.8) συνεπάγεται ότι :

$$\begin{aligned}
\delta V = & \int_0^L \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] + P \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right\} \delta [u(x,t)] dx \\
& + \left[ k_1 u(0,t) + \frac{\partial}{\partial x} \left( EI(0) \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} \right) + P \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} \right] \delta u(0,t) \\
& + \left[ k_2 u(L,t) - \frac{\partial}{\partial x} \left( EI(L) \frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial x^2} \right) - P \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} \right] \delta u(L,t) \\
& + \left[ k_{\Sigma 1} \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - EI(0) \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} \right] \delta \left( \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} \right) + \left[ k_{\Sigma 2} \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} + EI(L) \frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial x^2} \right] \delta \left( \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} \right)
\end{aligned} \tag{1.1.11}$$

Οι **μη συντηρητικές δυνάμεις** που υπάρχουν στο σύστημα είναι οι εξωτερικές δυνάμεις καθώς και οι δυνάμεις απόσβεσης. Συνεπώς το δυνατό έργο των μη συντηρητικών δυνάμεων είναι :

$$\delta W_{nc} = \delta W_{F\epsilon\xi} + \delta W_{\alpha\pi} \tag{1.1.12}$$

Έστω ότι έχουμε τις εξής εξωτερικές δυνάμεις:

- $f(x,t)$  : κατανεμημένη δύναμη ανά μονάδα μήκους ( $N/m$ )
- $P_r(t)$  :  $k$  συγκεντρωμένα φορτία στις θέσεις  $x_r$
- $M_r(t)$  :  $m$  συγκεντρωμένες ροπές στις θέσεις  $x_r$

Η συνολική εξωτερική δύναμη είναι :

$$F(x,t) = f(x,t) + \sum_{r=1}^k P_r(t) \delta(x-x_r) - \sum_{r=1}^m M_r(t) \delta'(x-x_r) \tag{1.1.13}$$

Το έργο των εξωτερικών δυνάμεων είναι :

$$\delta W_{F\epsilon\xi} = \int_0^L F(x,t) \delta [u(x,t)] dx \tag{1.1.14}$$

Οι δυνάμεις απόσβεσης είναι:

- $D_{ext}(x,t) = -c_{ext}(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$  η έξωθεν κατανεμημένη δύναμη απόσβεσης  $(N/m)$ , όπου  $c_{ext}(x)$  ο συντελεστής εξωτερικής απόσβεσης  $(\frac{N}{m^2} \text{sec})$
- $M_D(x,t) = c_{int} I(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t}$  η ροπή απόσβεσης που αναπτύσσεται εντός της δοκού λόγω της εσωτερικής απόσβεσης του υλικού και αντιτίθεται στη μεταβολή της καμπυλότητας, όπου  $c_{int}$  ο συντελεστής εσωτερικής απόσβεσης  $(\frac{N}{m^2} \text{sec})$

Το έργο των δυνάμεων απόσβεσης είναι :

$$\delta W_{\alpha\pi} = \delta W_{D_{ext}} + \delta W_{M_D} \quad (1.1.15)$$

$$\delta W_{D_{ext}} = \int_0^L D_{ext}(x,t) \delta[u(x,t)] dx = \int_0^L -c_{ext}(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \delta[u(x,t)] dx \quad (1.1.16)$$

$$\delta W_{M_D} = \int_0^L -c_{int} I(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \left( \frac{\partial^2 \delta[u(x,t)]}{\partial x^2} \right) dx$$

$$\begin{aligned} c_{int} I(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \left( \frac{\partial^2 \delta[u(x,t)]}{\partial x^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ c_{int} I(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \frac{\partial \delta[u(x,t)]}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ c_{int} I(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right] \frac{\partial \delta[u(x,t)]}{\partial x} = \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[ c_{int} I(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \frac{\partial \delta[u(x,t)]}{\partial x} \right] &- \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ c_{int} I(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right] \delta[u(x,t)] \right\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ c_{int} I(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right] \delta[u(x,t)] \end{aligned}$$

Συνεπώς έχουμε ότι :

$$\delta W_{M_D} = \int_0^L -c_{int} I(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \left( \frac{\partial^2 \delta[u(x,t)]}{\partial x^2} \right) dx$$

$$- \left[ c_{int} I(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \left( \frac{\partial \delta[u(x,t)]}{\partial x} \right) \right]_0^L + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left[ c_{int} I(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right] \delta[u(x,t)] \right]_0^L - \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ c_{int} I(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right] \delta[u(x,t)] dx =$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ c_{\text{int}} I(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \delta \left( \frac{\partial [u(x,t)]}{\partial x} \right) \right]_0^L + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left[ c_{\text{int}} I(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right] \delta [u(x,t)] \right]_0^L - \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ c_{\text{int}} I(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right] \delta [u(x,t)] dx = \\
& - c_{\text{int}} I(L) \frac{\partial^3 u(L,t)}{\partial x^2 \partial t} \delta \left( \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} \right) + c_{\text{int}} I(0) \frac{\partial^3 u(0,t)}{\partial x^2 \partial t} \delta \left( \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ c_{\text{int}} I(L) \frac{\partial^3 u(L,t)}{\partial x^2 \partial t} \right] \delta [u(L,t)] \\
& - \frac{\partial}{\partial x} \left[ c_{\text{int}} I(0) \frac{\partial^3 u(0,t)}{\partial x^2 \partial t} \right] \delta [u(0,t)] - \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ c_{\text{int}} I(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right] \delta [u(x,t)] dx
\end{aligned} \tag{1.1.17}$$

Εισάγοντας τις εξισώσεις (1.1.16) και (1.1.17) στην (1.1.15) έχουμε ότι :

$$\begin{aligned}
\delta W_{ax} &= \int_0^L - \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ c_{\text{int}} I(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right] + c_{\text{ext}}(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right\} \delta [u(x,t)] dx \\
& - \frac{\partial}{\partial x} \left[ c_{\text{int}} I(0) \frac{\partial^3 u(0,t)}{\partial x^2 \partial t} \right] \delta u(0,t) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ c_{\text{int}} I(L) \frac{\partial^3 u(L,t)}{\partial x^2 \partial t} \right] \delta u(L,t) \\
& + c_{\text{int}} I(0) \frac{\partial^3 u(0,t)}{\partial x^2 \partial t} \delta \left( \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} \right) - c_{\text{int}} I(L) \frac{\partial^3 u(L,t)}{\partial x^2 \partial t} \delta \left( \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} \right)
\end{aligned} \tag{1.1.18}$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (1.1.14) και (1.1.18) στην εξίσωση (1.1.12) συνεπάγεται ότι :

$$\begin{aligned}
\delta W_{nc} &= \int_0^L \left\{ - \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ c_{\text{int}} I(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right] + c_{\text{ext}}(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right\} + F(x,t) \right\} \delta [u(x,t)] dx \\
& - \frac{\partial}{\partial x} \left[ c_{\text{int}} I(0) \frac{\partial^3 u(0,t)}{\partial x^2 \partial t} \right] \delta u(0,t) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ c_{\text{int}} I(L) \frac{\partial^3 u(L,t)}{\partial x^2 \partial t} \right] \delta u(L,t) \\
& + c_{\text{int}} I(0) \frac{\partial^3 u(0,t)}{\partial x^2 \partial t} \delta \left( \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} \right) - c_{\text{int}} I(L) \frac{\partial^3 u(L,t)}{\partial x^2 \partial t} \delta \left( \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} \right)
\end{aligned} \tag{1.1.19}$$

Εισάγοντας τις εξισώσεις (1.1.7), (1.1.11) και (1.1.19) στην εξίσωση (1.1.1) έχουμε ότι:

$$=0, \text{ επειδή } \delta[u(x, t_1)], \delta[u(x, t_2)], \delta\left(\frac{\partial u(x, t_1)}{\partial x}\right), \delta\left(\frac{\partial u(x, t_2)}{\partial x}\right) = 0$$

$$\left. \int_0^L m(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \delta[u(x, t)] dx + \int_0^L \rho I(x) \left( \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} \right) \delta\left[ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] dx + M_1 \frac{\partial u(0, t)}{\partial t} \delta[u(0, t)] \right|_{t_1}^{t_2} +$$

$$+ M_2 \frac{\partial u(L, t)}{\partial t} \delta[u(L, t)] + J_1 \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x \partial t} \delta\left[ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} \right] + J_2 \frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial x \partial t} \delta\left[ \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} \right] \Bigg|_{t_1}^{t_2} +$$

$$\left. \int_0^L \left[ -m(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + c_{\text{int}} I(x) \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \right) \right] \delta[u(x, t)] dx \right.$$

$$+ \left. \left[ \rho I(0) \frac{\partial^3 u(0, t)}{\partial x \partial t^2} - M_1 \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial t^2} - k_1 u(0, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left( EI(0) \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} + c_{\text{int}} I(0) \frac{\partial^3 u(0, t)}{\partial x^2 \partial t} \right) - P \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} \right] \delta[u(0, t)] \right.$$

$$+ \left. \left[ -\rho I(L) \frac{\partial^3 u(L, t)}{\partial x \partial t^2} - M_2 \frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial t^2} - k_2 u(L, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left( EI(L) \frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial x^2} + c_{\text{int}} I(L) \frac{\partial^3 u(L, t)}{\partial x^2 \partial t} \right) + P \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} \right] \delta[u(L, t)] \right. \Bigg|_{t_1}^{t_2} dt = 0$$

$$+ \left. \left[ -J_1 \frac{\partial^3 u(0, t)}{\partial x \partial t^2} - k_{\Sigma 1} \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + EI(0) \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} + c_{\text{int}} I(0) \frac{\partial^3 u(0, t)}{\partial x^2 \partial t} \right] \delta\left( \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} \right) \right.$$

$$+ \left. \left[ -J_2 \frac{\partial^3 u(L, t)}{\partial x \partial t^2} - k_{\Sigma 2} \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} - EI(L) \frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial x^2} - c_{\text{int}} I(L) \frac{\partial^3 u(L, t)}{\partial x^2 \partial t} \right] \delta\left( \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} \right) \right.$$

Επειδή τα  $t_1, t_2$  μπορούν να είναι οποιαδήποτε η παραπάνω αγκύλη είναι μηδέν.

Επίσης επειδή τα  $\delta[u(x, t)], \delta\left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right]$  είναι τυχαία και γραμμικώς ανεξάρτητα

τότε προκύπτει ότι :



$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + c_{\text{int}} I(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho I(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x \partial t^2} \right) - P \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - c_{\text{ext}}(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + F(x,t) = m(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (1.1.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( EI(0) \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} + c_{\text{int}} I(0) \frac{\partial^3 u(0,t)}{\partial x^2 \partial t} \right) + k_1 u(0,t) + P \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + M_1 \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial t^2} - \rho I(0) \frac{\partial^3 u(0,t)}{\partial x \partial t^2} &= 0 & x=0 \\ EI(0) \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} + c_{\text{int}} I(0) \frac{\partial^3 u(0,t)}{\partial x^2 \partial t} - k_{\Sigma 1} \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - J_1 \frac{\partial^3 u(0,t)}{\partial x \partial t^2} &= 0 & x=0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( EI(L) \frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial x^2} + c_{\text{int}} I(L) \frac{\partial^3 u(L,t)}{\partial x^2 \partial t} \right) - k_2 u(L,t) + P \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} - M_2 \frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial t^2} - \rho I(L) \frac{\partial^3 u(L,t)}{\partial x \partial t^2} &= 0 & x=L \\ EI(L) \frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial x^2} + c_{\text{int}} I(L) \frac{\partial^3 u(L,t)}{\partial x^2 \partial t} + k_{\Sigma 2} \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} + J_2 \frac{\partial^3 u(L,t)}{\partial x \partial t^2} &= 0 & x=L \end{aligned} \quad (1.1.21)$$

Η εξίσωση (1.1.20) αποτελεί την μερική διαφορική εξίσωση κίνησης της δοκού η οποία είναι γραμμική τετάρτης τάξεως ως προς τη χωρική μεταβλητή  $x$  και επακόλουθα έχει τις τέσσερις συνοριακές συνθήκες της εξίσωσης (1.1.21) ( δύο στο  $x=0$  και δύο στο  $x=L$ ). Επιπλέον είναι δευτέρας τάξεως ως προς τη χρονική μεταβλητή  $t$ . Συνεπώς πρέπει να δίνονται και δύο αρχικές συνθήκες, οι οποίες είναι η αρχική μετατόπιση  $u(x,0) = g(x)$  και η αρχική ταχύτητα  $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = h(x)$ .

## **1.2) Επίλυση της ΜΔΕ κίνησης της δοκού χωρίς απόσβεση με χρήση της MODAL ANALYSIS**

Αρχικά θεωρείται η **ελεύθερη ταλάντωση (πρόβλημα ιδιοτιμών)** της δοκού, κατά την οποία αμελούμε τον όρο  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho I(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x \partial t^2} \right)$  που αντιστοιχεί στην περιστροφική κινητική ενέργεια και τον όρο  $P \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$  που αντιστοιχεί στην αξονική δύναμη λόγω μικρής συνεισφοράς, οπότε η ΜΔΕ κίνησης παίρνει την εξής μορφή:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1.22)$$

Θεωρούμε **σύγχρονη κίνηση** ( χωρισμός των μεταβλητών), δηλαδή μια λύση της μορφής :

$$v(x,t) = \varphi(x) f(t) \quad (1.1.23)$$

Εισάγοντας τη σχέση (1.1.23) στη σχέση (1.1.22) προκύπτει ότι :

$$f(t) \frac{d^2}{dx^2} \left[ EI(x) \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \right] + \ddot{f}(t) m(x) \varphi(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = - \frac{\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI(x) \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \right]}{m(x) \varphi(x)} = -\omega^2$$

Συνεπώς παίρνουμε τις εξής δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις :

$$\ddot{f}(t) + \omega^2 f(t) = 0 \quad t \geq 0 \quad (1.1.24)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI(x) \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \right] - \omega^2 m(x) \varphi(x) = 0 \quad 0 \leq x \leq L \quad (1.1.25)$$

Συνάμα αντικαθιστούμε τη σχέση (1.1.23) στις συνοριακές συνθήκες ( οι όροι της περιστροφικής ενέργειας έχουν αγνοηθεί) οπότε έχουμε:

$$\left[ EI(0) \varphi''(0) \right]' + k_1 \varphi(0) - \omega^2 M_1 \varphi(0) = 0$$

$$EI(0) \varphi''(0) - k_{\Sigma 1} \varphi'(0) + \omega^2 J_1 \varphi'(0) = 0$$

(1.1.26)

$$\left[ EI(L) \varphi''(L) \right]' - k_2 \varphi(L) + \omega^2 M_2 \varphi(L) = 0$$

$$EI(L) \varphi''(L) + k_{\Sigma 2} \varphi'(L) - \omega^2 J_2 \varphi'(L) = 0$$

Η λύση της εξίσωσης (1.1.24) είναι η εξής (παρατίθενται σε τρεις ισοδύναμες εκφράσεις):

$$f(t) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)$$

ή

$$f(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

ή

$$f(t) = C \cos(\omega t - \varphi)$$

όπου οι σταθερές  $A_1, A_2, C_1, C_2, C, \varphi$  υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Οι εξισώσεις (1.1.25) και (1.1.26) αποτελούν πρόβλημα οριακών τιμών. Η γενική λύση της εξίσωσης (1.1.25) είναι η εξής :

$$\varphi(x) = c_1 \varphi_1(x, \omega) + c_2 \varphi_2(x, \omega) + c_3 \varphi_3(x, \omega) + c_4 \varphi_4(x, \omega) \quad (1.1.27)$$

όπου  $\varphi_1(x, \omega), \varphi_2(x, \omega), \varphi_3(x, \omega), \varphi_4(x, \omega)$  είναι τέσσερις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης (1.1.25). Στην περίπτωση που έχουμε σταθερή κατανομή της ακαμψίας  $EI(x) = EI$  και της μάζας  $m(x) = m$  έχουμε τις εξής τέσσερις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις :

$$\varphi_1(x, \omega) = \cos \frac{\sqrt{\omega} x}{c}, \quad \varphi_2(x, \omega) = \sin \frac{\sqrt{\omega} x}{c}, \quad \varphi_3(x, \omega) = \cosh \frac{\sqrt{\omega} x}{c}, \quad \varphi_4(x, \omega) = \sinh \frac{\sqrt{\omega} x}{c} \quad (1.1.28)$$

$$\text{όπου } c = \sqrt[4]{\frac{EI}{m}}.$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τη σχέση (1.1.27) στις συνοριακές συνθήκες (1.1.26) και προκύπτει ότι :

$$\left[ \begin{array}{c} A_{ij}(\omega^2) \end{array} \right] \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Για να έχουμε μη μηδενική λύση πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών να μηδενίζεται  $\det[A_{ij}(\omega)] = 0$ . Από αυτή την απαίτηση βρίσκουμε τις άπειρες κυκλικές ιδιοσυχνότητες  $\omega_i$  (eigenfrequencies).

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3, \dots$$

όπου  $\omega_i$  είναι η θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα. Για κάθε ιδιοσυχνότητα  $\omega_i, i = 1, 2, 3, \dots$  το σύστημα  $4 \times 4$  παρέχει τα  $c_{1i}, c_{2i}, c_{3i}$  και  $c_{4i}$ , τα οποία δεν είναι μεν καθορισμένα, έχουν όμως καθορισμένο λόγο. Γνωρίζοντας τους συντελεστές  $c_{ij}, j = 1, 2, 3, 4$  και τις ιδιοσυχνότητες  $\omega_i, i = 1, 2, 3, \dots$  μπορούμε από την (1.1.27) να υπολογίσουμε τις

αντίστοιχες **ιδιομορφές**  $\varphi_i(x)$  ( **natural modes**). Για να είναι οι ιδιομορφές  $\varphi_i(x)$  μοναδικά καθορισμένες πρέπει οι συντελεστές  $c_{ij}$  να ρυθμιστούν κατάλληλα από τη **συνθήκη κανονικοποίησης (normalization)** :

$$\int_0^L m(x) \varphi_i^2(x) dx + M_1 \varphi_i^2(0) + J_1 \varphi_i'^2(0) + M_2 \varphi_i^2(L) + J_2 \varphi_i'^2(L) = 1, \quad (1.1.29)$$

Έτσι υπολογίζουμε τις **κανονικοποιημένες ιδιομορφές (normal modes)** για τις οποίες ισχύουν οι **συνθήκες ορθοκανονικότητας (orthonormality conditions)**:

$$\int_0^L m(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + M_1 \varphi_i(0) \varphi_j(0) + J_1 \varphi_i'(0) \varphi_j'(0) + M_2 \varphi_i(L) \varphi_j(L) + J_2 \varphi_i'(L) \varphi_j'(L) = \delta_{ij} \quad (1.1.30)$$

$$\int_0^L \left[ EI(x) \varphi_i''(x) \right]'' \varphi_j(x) dx + \left[ EI(0) \varphi_i''(0) \right]' \varphi_j(0) - \left[ EI(L) \varphi_i''(L) \right]' \varphi_j(L) - EI(0) \varphi_i''(0) \varphi_j'(0) + EI(L) \varphi_i''(L) \varphi_j'(L) + k_1 \varphi_i(0) \varphi_j(0) + k_{\Sigma 1} \varphi_i'(0) \varphi_j'(0) + k_{\Sigma 2} \varphi_i'(L) \varphi_j'(L) + k_2 \varphi_i(L) \varphi_j(L) = \omega_i^2 \delta_{ij} \quad (1.1.31)$$

Υποτίθεται ότι η μερική διαφορική εξίσωση του προβλήματος (1.1.20) έχει λύση της μορφής (**Modal Analysis**):

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} n_i(t) \varphi_i(x) \quad (1.1.32)$$

όπου  $n_i(t)$  είναι οι **κανονικές συντεταγμένες** και  $\varphi_i(x)$  οι κανονικοποιημένες ιδιομορφές. Αντικαθιστώ την (1.1.32) στην (1.1.20) , πολλαπλασιάζω με  $\varphi_j(x)$  και ολοκληρώνω από 0 έως L. Επιπλέον αντικαθιστώ την σχέση (1.1.32) στις συνοριακές συνθήκες (1.1.21) ( οι όροι της περιστροφικής κινητικής ενέργειας έχουν αμεληθεί) πολλαπλασιάζω την πρώτη συνοριακή συνθήκη στο μηδέν με  $\varphi_j(0)$  , τη δεύτερη στο μηδέν με  $\varphi_j'(0)$  , την πρώτη στο L με  $\varphi_j(L)$  και τη δεύτερη στο L με  $\varphi_j'(L)$ . Προσθέτοντας αυτές τις εξισώσεις κατά μέλη προκύπτει ότι :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{n}_i(t) \left[ \int_0^L m(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + M_1 \varphi_i(0) \varphi_j(0) + J_1 \varphi_i'(0) \varphi_j'(0) + \right. \\
& \quad \left. + M_2 \varphi_i(L) \varphi_j(L) + J_2 \varphi_i'(L) \varphi_j'(L) \right] = \\
& = - \sum_{i=1}^{\infty} n_i(t) \left\{ \int_0^L \left[ EI(x) \varphi_i''(x) \right]'' \varphi_j(x) dx + \left[ EI(0) \varphi_i''(0) \right]' \varphi_j(0) - \right. \\
& \quad \left[ EI(L) \varphi_i''(L) \right]' \varphi_j(L) - EI(0) \varphi_i''(0) \varphi_j'(0) \\
& \quad \left. + EI(L) \varphi_i''(L) \varphi_j'(L) + k_1 \varphi_i(0) \varphi_j(0) + k_{\Sigma 1} \varphi_i'(0) \varphi_j'(0) + \right. \\
& \quad \left. k_{\Sigma 2} \varphi_i'(L) \varphi_j'(L) + k_2 \varphi_i(L) \varphi_j(L) \right\} + \\
& + \int_0^L [F(x,t) + \sum_{r=1}^k P_r(t) \delta(x-x_r) - \sum_{r=1}^m M_r(t) \delta'(x-x_r)] \varphi_j(x) dx, \quad j=1,2,\dots
\end{aligned}$$

Η τελευταία, με τη βοήθεια των συνθηκών ορθοκανονικότητας (1.1.30) και (1.1.31) γράφεται :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ddot{n}_i(t) \delta_{ij} + \sum_{i=1}^{\infty} n_i(t) \omega_i^2 \delta_{ij} = N_j(t)$$

όπου  $N_j(t) = \int_0^L [f(x,t) + \sum_{i=1}^k P_i(t) \delta(x-x_i) - \sum_{i=1}^m M_i(t) \delta'(x-x_i)] \varphi_j(x) dx$   $j=1,2,\dots$  τα γενικευμένα φορτία. Η παραπάνω σχέση γράφεται και ως :

$$\ddot{n}_j(t) + \omega_j^2 n_j(t) = N_j(t), \quad j=1,2,\dots \quad (1.1.33)$$

Οι παραπάνω αποτελούν ένα σύνολο ασύζευκτων διαφορικών εξισώσεων, που η καθεμιά τους έχει λύση:

$$n_i(t) = n_i(0) \cos(\omega_i t) + \frac{\dot{n}_i(0)}{\omega_i} \sin(\omega_i t) + \frac{1}{\omega_i} \int_0^t N_i(\tau) \sin[\omega_i(t-\tau)] d\tau \quad (1.1.34)$$

Οι αρχικές συνθήκες των κανονικών συντεταγμένων  $n_i(t)$  με τις αρχικές συνθήκες της δοκού - αρχική μετατόπιση  $u(x,0) = g(x)$  , αρχική ταχύτητα  $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = h(x)$  - συνδέονται με τις εξής σχέσεις :

$$n_j(0) = \int_0^L g(x) m(x) \varphi_j(x) dx + M_1 g(0) \varphi_j(0) + M_2 g(L) \varphi_j(L) + J_1 g'(0) \varphi_j'(0) + J_2 g'(L) \varphi_j'(L), \quad j=1,2,\dots \quad (1.1.35)$$

$$\dot{n}_j(0) = \int_0^L h(x) m(x) \varphi_j(x) dx + M_1 h(0) \varphi_j(0) + M_2 h(L) \varphi_j(L) + J_1 h'(0) \varphi_j'(0) + J_2 h'(L) \varphi_j'(L), \quad j=1,2,\dots \quad (1.1.36)$$

Άρα βρίσκοντας τις κανονικές συντεταγμένες, από τη σχέση (1.1.32) βρίσκουμε την απόκριση της δοκού.

### **1.3) Επίλυση της ΜΔΕ κίνησης της δοκού με χρήση της ASSUMED-MODES METHOD( ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΠΟΘΕΤΙΚΩΝ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ)**

Η μέθοδος των υποθετικών ιδιομορφών αποτελεί ένα τρόπο διακριτοποίησης του συνεχούς συστήματος και υποδηλώνει ότι η απόκριση θα έχει την εξής μορφή :

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^n f_i(x) q_i(t) \quad (1.2.1)$$

όπου  $f_i(x)$  είναι οι (γνωστές) δοκιμαστικές συναρτήσεις (trial functions) και  $q_i(t)$  είναι οι (προς αναζήτηση) γενικευμένες συντεταγμένες του “διακριτοποιημένου” συστήματος με  $n$  βαθμούς ελευθερίας. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Lagrange θα εξαγάγουμε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης του διακριτοποιημένου συστήματος.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_{nci}(t) \quad i=1,2,\dots,n \quad \text{"Εξισώσεις Lagrange"} \quad (1.2.2)$$

όπου  $T$  είναι η κινητική ενέργεια της δοκού κατά τη θεωρούμενη χρονική στιγμή  $t$ ,  $V$  είναι η δυναμική ενέργεια και  $Q_{nci}(t)$  είναι η γενικευμένη μη συντηρητική δύναμη που αντιστοιχεί στην  $i$  γενικευμένη συντεταγμένη και περιλαμβάνει τη δεδομένη εξωτερική φόρτιση (1.1.13) καθώς και τις αναπτυσσόμενες δυνάμεις απόσβεσης.

Η κινητική ενέργεια της δοκού είναι

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho I(x) \left( \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} M_1 \left( \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} M_2 \left( \frac{\partial u(L,t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} J_1 \left( \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x \partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} J_2 \left( \frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial x \partial t} \right)^2 \quad (1.2.3)$$

Αντικαθιστούμε την (1.2.1) διαδοχικά στους έξι όρους της (1.2.3) οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^L m(x) \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx &= \frac{1}{2} \int_0^L m(x) \left[ \sum_{i=1}^n f_i(x) \dot{q}_i(t) \right] \left[ \sum_{j=1}^n f_j(x) \dot{q}_j(t) \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^L m(x) f_i(x) f_j(x) dx \dot{q}_i(t) \dot{q}_j(t) \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^L \rho I(x) \left( \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \right)^2 dx &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho I(x) \left[ \sum_{i=1}^n f_i'(x) \dot{q}_i(t) \right] \left[ \sum_{j=1}^n f_j'(x) \dot{q}_j(t) \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^L \rho I(x) f_i'(x) f_j'(x) dx \dot{q}_i(t) \dot{q}_j(t) \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_1 \left( \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} \right)^2 &= \frac{1}{2} M_1 \left[ \sum_{i=1}^n f_i(0) \dot{q}_i(t) \right] \left[ \sum_{j=1}^n f_j(0) \dot{q}_j(t) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_1 f_i(0) f_j(0) \dot{q}_i(t) \dot{q}_j(t) \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_2 \left( \frac{\partial u(L,t)}{\partial t} \right)^2 &= \frac{1}{2} M_2 \left[ \sum_{i=1}^n f_i(L) \dot{q}_i(t) \right] \left[ \sum_{j=1}^n f_j(L) \dot{q}_j(t) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_2 f_i(L) f_j(L) \dot{q}_i(t) \dot{q}_j(t) \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} J_1 \left( \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x \partial t} \right)^2 &= \frac{1}{2} J_1 \left[ \sum_{i=1}^n f_i'(0) \dot{q}_i(t) \right] \left[ \sum_{j=1}^n f_j'(0) \dot{q}_j(t) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n J_1 f_i'(0) f_j'(0) \dot{q}_i(t) \dot{q}_j(t) \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} J_2 \left( \frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial x \partial t} \right)^2 &= \frac{1}{2} J_2 \left[ \sum_{i=1}^n f_i'(L) \dot{q}_i(t) \right] \left[ \sum_{j=1}^n f_j'(L) \dot{q}_j(t) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n J_2 f_i'(L) f_j'(L) \dot{q}_i(t) \dot{q}_j(t) \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

Η κινητική ενέργεια (1.2.3) λόγω των (1.2.4), (1.2.5), (1.2.6), (1.2.7), (1.2.8), (1.2.9) γράφεται ως

$$T(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i(t) \dot{q}_j(t) \quad (1.2.10)$$

$$m_{ij} = \int_0^L \left[ m(x) f_i(x) f_j(x) + \rho I(x) f_i'(x) f_j'(x) \right] dx + M_1 f_i(0) f_j(0) + M_2 f_i(L) f_j(L) + J_1 f_i'(0) f_j'(0) + J_2 f_i'(L) f_j'(L) \quad (1.2.11)$$

Η (1.2.10) αποτελεί τη μορφή της κινητικής ενέργειας  $n$  βαθμών ελευθερίας όπου  $m_{ij}$  είναι οι συντελεστές του συμμετρικού μητρώου μάζας.

Η δυναμική ενέργεια της δοκού είναι

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left( \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx - \frac{1}{2} P \int_0^L \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} k_1 u^2(0,t) + \frac{1}{2} k_2 u^2(L,t) + \frac{1}{2} k_{\Sigma 1} \left( \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} k_{\Sigma 2} \left( \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} \right)^2 \quad (1.2.12)$$

Αντικαθιστούμε την (1.2.1) διαδοχικά στους έξι όρους της (1.2.12) οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left( \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx &= \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left[ \sum_{i=1}^n f_i''(x) q_i(t) \right] \left[ \sum_{j=1}^n f_j''(x) q_j(t) \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^L EI(x) f_i''(x) f_j''(x) dx q_i(t) q_j(t) \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} P \int_0^L \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx &= \frac{1}{2} P \int_0^L \left[ \sum_{i=1}^n f_i'(x) q_i(t) \right] \left[ \sum_{j=1}^n f_j'(x) q_j(t) \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P \int_0^L f_i'(x) f_j'(x) dx q_i(t) q_j(t) \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

$$\frac{1}{2} k_1 u^2(0,t) = \frac{1}{2} k_1 \sum_{i=1}^n f_i(0) q_i(t) \sum_{j=1}^n f_j(0) q_j(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_1 f_i(0) f_j(0) q_i(t) q_j(t) \quad (1.2.15)$$

$$\frac{1}{2} k_2 u^2(L,t) = \frac{1}{2} k_2 \sum_{i=1}^n f_i(L) q_i(t) \sum_{j=1}^n f_j(L) q_j(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_2 f_i(L) f_j(L) q_i(t) q_j(t) \quad (1.2.16)$$

$$\frac{1}{2} k_{\Sigma 1} \left( \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} k_{\Sigma 1} \sum_{i=1}^n f_i'(0) q_i(t) \sum_{j=1}^n f_j'(0) q_j(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{\Sigma 1} f_i'(0) f_j'(0) q_i(t) q_j(t) \quad (1.2.17)$$

$$\frac{1}{2} k_{\Sigma 2} \left( \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} k_{\Sigma 2} \sum_{i=1}^n f_i'(L) q_i(t) \sum_{j=1}^n f_j'(L) q_j(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{\Sigma 2} f_i'(L) f_j'(L) q_i(t) q_j(t) \quad (1.2.18)$$

Η δυναμική ενέργεια (1.2.12) λόγω των (1.2.13), (1.2.15), (1.2.16), (1.2.17), (1.2.18) γράφεται ως

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} q_i(t) q_j(t) \quad (1.2.19)$$



$$k_{ij} = \int_0^L \left[ EI(x) f_i''(x) f_j''(x) - P f_i'(x) f_j'(x) \right] dx + k_1 f_i(0) f_j(0) + k_2 f_i(L) f_j(L) + k_{\Sigma 1} f_i'(0) f_j'(0) + k_{\Sigma 2} f_i'(L) f_j'(L) \quad (1.2.20)$$

Η (1.2.19) αποτελεί τη μορφή της κινητικής ενέργειας  $n$  βαθμών ελευθερίας όπου  $k_{ij}$  είναι οι συντελεστές του συμμετρικού μητρώου ακαμψίας. Οι δοκιμαστικές συναρτήσεις  $f_i(x)$  μπορούν να είναι **comparison functions**, δηλαδή να ικανοποιούν όλες τις συνοριακές συνθήκες. Όμως, μπορούν να είναι και **admissible functions**, δηλαδή να ικανοποιούν μόνο τις γεωμετρικές συνθήκες, γιατί οι φυσικές συνοριακές συνθήκες υπεισέρχονται στην κινητική και δυναμική ενέργεια.

Οι γενικευμένες μη συντηρητικές δυνάμεις  $Q_{nci}(t)$  υπεισέρχονται, όπως είναι γνωστό, στο δυνατό έργο.

$$\delta W_{nc} = \sum_{i=1}^n Q_{nci}(t) \delta q_i(t) \quad (1.2.21)$$

Αντικαθιστούμε τη σχέση (1.2.1) στην εξίσωση (1.1.14) και παίρνουμε ότι

$$\delta W_{F_{\varepsilon\xi}} = \int_0^L F(x,t) \delta[u(x,t)] dx = \sum_{i=1}^n \int_0^L F(x,t) f_i(x) dx \delta q_i(t) \quad (1.2.22)$$

Συνάμα αντικαθιστούμε τη σχέση (1.2.1) στην εξίσωση (1.1.16) :

$$\begin{aligned} \delta W_{D_{ext}} &= \int_0^L -c_{ext}(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \delta[u(x,t)] dx = - \int_0^L c_{ext}(x) \sum_{j=1}^n f_j(x) \dot{q}_j(t) \sum_{i=1}^n f_i(x) \delta q_i(t) dx = \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n - \int_0^L c_{ext}(x) f_i(x) f_j(x) dx \dot{q}_j(t) \delta q_i(t) \end{aligned} \quad (1.2.23)$$

Επιπλέον αντικαθιστούμε τη σχέση (1.2.1) στο  $\delta W_{M_D}$  :

$$\begin{aligned} \delta W_{M_D} &= \int_0^L -c_{int} I(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \left( \frac{\partial^2 \delta[u(x,t)]}{\partial x^2} \right) dx = - \int_0^L c_{int} I(x) \sum_{j=1}^n f_j''(x) \dot{q}_j(t) \sum_{i=1}^n f_i''(x) \delta q_i(t) dx = \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n - \int_0^L c_{int} I(x) f_i''(x) f_j''(x) dx \dot{q}_j(t) \delta q_i(t) \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (1.2.22), (1.2.23), (1.2.24) στην (1.1.12) (λαμβάνοντας υπ' όψιν και τη σχέση (1.1.15)) προκύπτει ότι :

$$\delta W_{nc} = \sum_{i=1}^n \left[ \int_0^L F(x,t) f_i(x) dx + \sum_{j=1}^n - \int_0^L c_{ext}(x) f_i(x) f_j(x) dx \dot{q}_j(t) + \sum_{j=1}^n - \int_0^L c_{int} I(x) f_i''(x) f_j''(x) dx \dot{q}_j(t) \right] \delta q_i(t) \quad (1.2.25)$$

Άρα σύμφωνα με την εξίσωση (1.2.21) προκύπτει ότι

$$Q_{nci}(t) = \int_0^L F(x,t) f_i(x) dx - \sum_{j=1}^n \int_0^L \left[ c_{ext}(x) f_i(x) f_j(x) + c_{int} I(x) f_i''(x) f_j''(x) \right] dx \dot{q}_j(t) \quad (1.2.26)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.2.10), (1.2.19) και (1.2.26) στις εξισώσεις Lagrange (1.2.2) προκύπτει ότι :

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{q}_j(t) + \sum_{j=1}^n \int_0^L \left[ c_{ext}(x) f_i(x) f_j(x) + c_{int} I(x) f_i''(x) f_j''(x) \right] dx \dot{q}_j(t) + \sum_{j=1}^n k_{ij} q_j(t) = \int_0^L F(x,t) f_i(x) dx \quad (1.2.27)$$

Θέτοντας

$$\int_0^L F(x,t) f_i(x) dx = Q_i(t) \quad (1.2.28)$$

$$c_{ij} = \int_0^L \left[ c_{ext}(x) f_i(x) f_j(x) + c_{int} I(x) f_i''(x) f_j''(x) \right] dx \quad (1.2.29)$$

προκύπτει ότι :

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{q}_j(t) + \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_j(t) + \sum_{j=1}^n k_{ij} q_j(t) = Q_i(t)$$

Η τελευταία σχέση γράφεται σε μητρωϊκή ως εξής :

$$[m]\{\ddot{q}(t)\} + [c]\{\dot{q}(t)\} + [k]\{q(t)\} = \{Q(t)\} \quad (1.2.30)$$

όπου τα σταθερά μητρώα διαστάσεων  $n \times n$   $[m]$ ,  $[c]$ ,  $[k]$  είναι τα μητρώα μάζας, απόσβεσης και ακαμψίας αντίστοιχα, ενώ τα διανύσματα  $\{q\}$ ,  $\{Q\}$  διαστάσεων  $n \times 1$  είναι τα διανύσματα της γενικευμένης συντεταγμένης και της εξωτερικής φόρτισης αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (1.2.30) αποτελεί ένα σύστημα  $n \times n$  πεπλεγμένων διαφορικών εξισώσεων.

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (1.1.13) στην (1.2.28) έχουμε ότι

$$Q_i(t) = \int_0^L f(x,t) f_i(x) dx + \sum_{r=1}^k P_r(t) f_i(x_r) + \sum_{r=1}^m M_r(t) f_i'(x_r) \quad (1.2.31)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη Modal analysis για τα διακριτά συστήματα για να λύσουμε το διαφορικό σύστημα εξισώσεων (1.2.30). Θεωρείται η ελεύθερη ταλάντωση ενός συστήματος  $n$  βαθμών ελευθερίας χωρίς απόσβεση  $[c] = [0]$ , οπότε το διαφορικό σύστημα κίνησης σε μητρωϊκή μορφή γράφεται ως εξής:

$$[m]\{\ddot{q}\} + [k]\{q\} = \{0\} \quad (1.2.32)$$

το οποίο αποτελείται από  $n$  γραμμικές ομογενείς διαφορικές εξισώσεις της μορφής:

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=i}^n k_{ij} q_j = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2.33)$$

Το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στην εύρεση μιας ειδικής μορφής της λύσης της (1.2.33) στην οποία όλες οι φυσικές συντεταγμένες  $q_j(t) (j=1, 2, \dots, n)$  εκτελούν σύγχρονη κίνηση. Τέτοιου είδους κίνηση είναι αυτή στην οποία όλες οι συντεταγμένες έχουν την ίδια χρονική εξάρτηση. Συνεπώς η γενική μορφή της κίνησης δεν αλλάζει, εκτός από το εύρος, ώστε ο λόγος μεταξύ δύο οποιονδήποτε φυσικών συντεταγμένων  $q_i$  και  $q_j \quad i \neq j$  να είναι σταθερός κατά τη διάρκεια της κίνησης. Η μαθηματική μορφή της σύγχρονης κίνησης είναι:

$$q_j = u_j f(t) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1.2.34)$$

όπου  $u_j (j=1, 2, \dots, n)$  είναι σταθερές ποσότητες. Εισάγοντας την εξίσωση (1.2.34) στην (1.2.33) προκύπτει ότι:

$$\ddot{f}(t) \sum_{j=1}^n m_{ij} u_j + f(t) \sum_{j=i}^n k_{ij} u_j = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2.35)$$

η οποία γράφεται ως εξής:

$$-\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = \frac{\sum_{j=i}^n k_{ij} u_j}{\sum_{j=1}^n m_{ij} u_j} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2.36)$$

Παρατηρείται ότι το πρώτο μέλος εξαρτάται από το χρόνο, ενώ το δεύτερο όχι. Συνεπώς οι δύο λόγοι θα πρέπει να είναι ίσοι με μία σταθερή ποσότητα  $\lambda$ , οπότε προκύπτει ότι:

$$\ddot{f}(t) + \lambda f(t) = 0 \quad (1.2.37)$$

$$\sum_{j=1}^n (k_{ij} - \lambda m_{ij}) u_j = 0 \quad i=1,2,\dots,n \quad (1.2.38)$$

Το  $\lambda$  πρέπει να είναι θετικό ( $\lambda = \omega^2$ ) ώστε η λύση της (1.2.37) να είναι πεπερασμένη έτσι ώστε να περιγράφει μία ταλάντωση. Η λύση της (1.2.37) είναι αρμονική της μορφής:

$$f(t) = C \cos(\omega t - \varphi) \quad (1.2.39)$$

όπου  $C$  είναι μία αυθαίρετη σταθερά που καθορίζει το εύρος της ταλάντωσης,  $\omega$  είναι η κυκλική συχνότητα της ελεύθερης ταλάντωσης και  $\varphi$  είναι η αρχική φάση. Όλες αυτές οι ποσότητες είναι ίδιες για κάθε φυσική συντεταγμένη  $q_j(t)$  ( $j=1,2,\dots,n$ ).

Για να συμπληρωθεί η λύση της εξίσωσης (1.2.33) πρέπει να καθοριστούν οι τιμές των σταθερών  $u_j$  ( $j=1,2,\dots,n$ ). Η εξίσωση (1.2.38) αποτελεί ένα σύστημα  $n \times n$  ομογενών γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων με αγνώστους τα  $u_j$  ( $j=1,2,\dots,n$ ), με το  $\lambda = \omega^2$  να έχει το ρόλο της παραμέτρου. Για τυχαίες τιμές της παραμέτρου  $\omega^2$  το σύστημα (1.2.38) δεν έχει μη μηδενικές λύσεις αλλά μόνο για ένα συγκεκριμένο σετ από  $n$  τιμές. Το πρόβλημα του καθορισμού των τιμών του  $\omega^2$  για τις οποίες μία μη μηδενική λύση  $u_j$  ( $j=1,2,\dots,n$ ) υπάρχει είναι γνωστό ως πρόβλημα ιδιοτιμών. Είναι βολικό η εξίσωση (3.1.8) να γραφεί σε μητρωϊκή μορφή:

$$[[k] - \omega^2 [m]] \{u\} = \{0\} \quad (1.2.40)$$

Η εξίσωση (1.2.40) παριστάνει το πρόβλημα ιδιοτιμών με τα μητρώα μάζας  $[m]$  και ακαμψίας  $[k]$  και έχει μη μηδενική λύση εάν και μόνο εάν η ορίζουσα των συντελεστών του  $u_j$  μηδενίζεται, δηλαδή

$$\Delta(\omega^2) = |k_{ij} - \omega^2 m_{ij}| = 0 \quad (1.2.41)$$

όπου η  $\Delta(\omega^2)$  ονομάζεται χαρακτηριστική ορίζουσα και η εξίσωση (1.2.41) ονομάζεται χαρακτηριστική εξίσωση ή εξίσωση ιδιοσυχνοτήτων. Είναι μία εξίσωση  $n$  βαθμού ως προς  $\omega^2$  οπότε έχουμε  $n$  λύσεις του  $\omega^2$ . Η τετραγωνική ρίζα  $\omega_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) των  $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$  ονομάζεται **ι φυσική συχνότητα ή ιδιοσυχνότητα** του συστήματος. Οι ιδιοσυχνότητες μπορούν να γραφούν σε αύξουσα σειρά  $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$ . Η μικρότερη συχνότητα  $\omega_1$  ονομάζεται θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα και είναι πολύ σημαντική σε πολλά πρακτικά προβλήματα.

Σε κάθε μία από τις ιδιοσυχνότητες  $\omega_i$  αντιστοιχεί ένα μη μηδενικό διάνυσμα  $\{u\}_i$ , του οποίου τα στοιχεία  $u_{ji}$  είναι πραγματικοί αριθμοί και το οποίο αποτελεί λύση του προβλήματος ιδιοτιμών όταν η παράμετρος λαμβάνει την τιμή  $\omega_i$ . Αυτό το διάνυσμα ονομάζεται **i ιδιομορφή** που αντιστοιχεί στην ιδιοσυχνότητα  $\omega_i$  και έχει μοναδικό σχήμα με την έννοια ότι ο λόγος μεταξύ δύο οποιωνδήποτε στοιχείων  $u_{ri}$  και  $u_{ji}$  είναι σταθερός (σύγχρονη κίνηση).. Για τον υπολογισμό των ιδιομορφών ακολουθείται η εξής διαδικασία:

Αντικαθιστώντας την  $\omega_i$  στο σύστημα (1.2.40) προκύπτει ένα  $n \times n$  γραμμικό αλγεβρικό ομογενές σύστημα το οποίο είναι απροσδιόριστο επειδή η ορίζουσα των συντελεστών είναι 0. Θεωρώντας οποιοσδήποτε  $n-1$  εξισώσεις προκύπτει ένα σύστημα  $n-1$  εξισώσεων με  $n$  αγνώστους. Το σύστημα μπορεί να επιλυθεί ως προς τους  $n-1$  αγνώστους συναρτήσει του ενός. Ωστόσο οι τιμές των στοιχείων των ιδιομορφών είναι απροσδιόριστες επειδή η εξίσωση (1.2.40) είναι ομογενής, καθώς εάν το  $\{u\}_i$  είναι λύση της εξίσωσης τότε και το  $a_i \{u\}_i$  αποτελεί λύση της εξίσωσης, όπου το  $a_i$  είναι μία αυθαίρετη σταθερά. Από τις άπειρες λύσεις που αντιστοιχούν στην ιδιοσυχνότητα  $\omega_i$  θα χρησιμοποιηθεί μόνο μία η οποία θα υπολογιστεί με τη διαδικασία της κανονικοποίησης:

$$\frac{1}{\sqrt{c}} \{u\}_i^T [m] \frac{1}{\sqrt{c}} \{u\}_i = 1 \quad (1.2.42)$$

όπου  $(1/\sqrt{c})\{u\}_i$  είναι η **i κανονικοποιημένη ιδιομορφή**. Στη συνέχεια θα συμβολίζεται σαν  $\{u\}_i$  η παραπάνω υπολογισθείσα κανονικοποιημένη ιδιομορφή. Για τις κανονικοποιημένες ιδιομορφές ισχύουν οι **συνθήκες ορθοκανονικότητας**.

$$\{u\}_r^T [m] \{u\}_s = \delta_{rs} \quad r, s = 1, 2, \dots, n \quad (1.2.43)$$

$$\{u\}_r^T [k] \{u\}_s = \omega_r^2 \delta_{rs} \quad r, s = 1, 2, \dots, n \quad (1.2.44)$$

Ορίζεται ο **πίνακας των κανονικοποιημένων ιδιομορφών** διαστάσεων  $n \times n$  ως εξής:

$$[u] = [\{u\}_1 \quad \{u\}_2 \quad \dots \quad \{u\}_n] \quad (1.2.45)$$

όπου οι δείκτες των ιδιομορφών αντιστοιχούν στους δείκτες των ιδιοσυχνοτήτων τοποθετημένων με αύξουσα σειρά. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση, οι εξισώσεις (1.2.43) και (1.2.44) γράφονται αντίστοιχα με τις παρακάτω μητρικές μορφές ως:

$$[u]^T [m][u] = [1] \quad (1.2.46)$$

$$[u]^T [k][u] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (1.2.47)$$

Ακολούθως θεωρείται ο γραμμικός μετασχηματισμός:

$$\{q(t)\} = [u]\{n(t)\} \quad (1.2.48)$$

όπου  $\{n(t)\}$  είναι το  $n$ -διάστατο διάνυσμα των κανονικών συντεταγμένων και  $[u]$  το μητρώο των κανονικοποιημένων ιδιομορφών (1.2.45). Επειδή το  $[u]$  είναι σταθερός πίνακας, ο μετασχηματισμός παραμένει αναλλοίωτος μεταξύ των  $\{\ddot{q}(t)\}$ ,  $\{\ddot{n}(t)\}$  και  $\{\dot{q}(t)\}$ ,  $\{\dot{n}(t)\}$ . Αντικαθιστώντας το μετασχηματισμό (1.2.48) στη (1.2.30), πολλαπλασιάζοντας το αποτέλεσμα από αριστερά με  $[u]^T$ , προκύπτει ότι :

$$[u]^T [m][u]\{\ddot{n}(t)\} + [u]^T [c][u]\{\dot{n}(t)\} + [u]^T [k][u]\{n(t)\} = [u]^T \{Q(t)\} \quad (1.2.49)$$

Έστω ότι το μητρώο απόσβεσης  $[c]$  είναι γραμμικός συνδυασμός των μητρώων μαζών και ακαμψίας δηλαδή παίρνει τη μορφή:

$$[c] = a[m] + b[k] \quad (1.2.50)$$

όπου  $a, b$  είναι σταθερές. Τότε πολλαπλασιάζοντας τη (1.2.50) από αριστερά με  $[u]^T$  και από δεξιά με  $[u]$  προκύπτει:

$$[C] = [u]^T [c][u] = a[u]^T [m][u] + b[u]^T [k][u] \quad (1.2.51)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις ορθοκανονικότητας (1.2.46), (1.2.47) συνεπάγεται ότι:

$$[C] = a[1] + b[\omega^2] \quad (1.2.52)$$

το οποίο είναι διαγώνιο μητρώο. Γράφοντας  $[C] = [2\zeta\omega]$  και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις συνθήκες ορθοκανονικότητας (1.2.46), (1.2.47) το σύστημα (1.2.49) γράφεται ως

$$\{\ddot{n}(t)\} + [C]\{\dot{n}(t)\} + [\omega^2]\{n(t)\} = \{N(t)\} \quad (1.2.53)$$

όπου

$$\{N(t)\} = [u]^T \{F(t)\} \quad (1.2.54)$$

τα γενικευμένα φορτία. Η εξίσωση (1.2.53) αναπαριστά  $n$  ανεξάρτητες διαφορικές εξισώσεις της μορφής :

$$\ddot{n}_i(t) + 2\zeta_i\omega_i\dot{n}_i(t) + \omega_i^2n_i(t) = N_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2.55)$$

όπου  $\zeta_i = C_i/2\omega_i$ . Άρα με τη Modal analysis καταφέραμε να αποσυζεύξουμε το πεπλεγμένο διαφορικό σύστημα κίνησης (1.2.30). Κάθε μία από τις εξισώσεις (1.2.55) είναι ίδια με την εξίσωση του μονοβάθμιου ταλαντωτή και έχει λύση της μορφής συναρτήσει των αρχικών συνθηκών και του ολοκληρώματος Duhamel

$$n_i(t) = e^{-\zeta_i\omega_i t} \left[ \frac{\dot{n}_i(0) + n_i(0)\zeta_i\omega_i}{\omega_{di}} \sin \omega_{di}t + n_i(0) \cos \omega_{di}t \right] + \frac{1}{\omega_{di}} \int_0^t N_i(s) e^{-\zeta_i\omega_i(t-s)} \sin \omega_{di}(t-s) ds \quad (1.2.56)$$

όπου  $\omega_{di} = \left( \sqrt{1 - \zeta_i^2} \right) \omega_i$  είναι η  $i$  ιδιοσυχνότητα με απόσβεση,  $n_i(0) - \dot{n}_i(0)$  οι αρχικές συνθήκες των κανονικών συντεταγμένων και  $N_i(s)$  τα γενικευμένα φορτία. Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $\theta_i(x)$  οι οποίες είναι οι ιδιομορφές ελεύθερης ταλάντωσης της δοκού:

$$\theta_i(x) = \vec{f}^T \{u\}_i = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)] \begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ \vdots \\ u_{ni} \end{bmatrix} \quad (1.2.57)$$

για τις οποίες ισχύουν οι συνθήκες ορθοκανονικότητας (1.1.30) και (1.1.31). Οι αρχικές συνθήκες των κανονικών συντεταγμένων δίνονται από τους εξής τύπους:

$$n_j(0) = \int_0^L g(x) m(x) \theta_j(x) dx + M_1 g(0) \theta_j(0) + M_2 g(L) \theta_j(L) + J_1 g'(0) \theta_j'(0) + J_2 g'(L) \theta_j'(L), \quad j = 1, 2, \dots \quad (1.2.58)$$

$$\dot{n}_j(0) = \int_0^L h(x) m(x) \theta_j(x) dx + M_1 h(0) \theta_j(0) + M_2 h(L) \theta_j(L) + J_1 h'(0) \theta_j'(0) + J_2 h'(L) \theta_j'(L), \quad j=1,2,\dots \quad (1.2.59)$$

όπου  $u(x,0) = g(x)$  αρχική μετατόπιση,  $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = h(x)$  αρχική ταχύτητα. -

Σύμφωνα με τις εξισώσεις (1.2.1), (1.2.48) η απόκριση δίνεται από το εξής γινόμενο πινάκων

$$u(x,t) = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ \vdots \\ n_n(t) \end{Bmatrix} \quad (1.2.60)$$

Όταν έχουμε σύστημα χωρίς απόσβεση  $[c]=0$  ή το μητρώο μάζας είναι γραμμικός συνδυασμός των μητρώων μαζών και ακαμψίας  $[c] = a[m] + b[k]$  τότε με τη Modal Analysis το πεπλεγμένο διαφορικό σύστημα κίνησης αποσυσζευγνύεται στις εξισώσεις (1.2.55) και επιλύεται όπως περιγράφηκε παραπάνω.

Στις περιπτώσεις που το μητρώο  $[C]$  δεν είναι διαγώνιο αλλά τα μη διαγώνια στοιχεία του είναι σχετικά μικρά, τότε αυτά μπορούν να αγνοηθούν οπότε το σύστημα (1.2.53) μεταπίπτει πάλι στις εξισώσεις (1.2.55) οι οποίες επιλύονται με τη μέθοδο της Modal Analysis όπως περιγράφηκε παραπάνω.

Στις περιπτώσεις που το μητρώο  $[C]$  δεν είναι διαγώνιο και τα μη διαγώνια στοιχεία του δεν είναι σχετικά μικρά οπότε δεν μπορούν να αγνοηθούν, η προσεγγιστική επίλυση του διαφορικού συστήματος κίνησης με Modal Analysis δεν οδηγεί σε ακριβή αποτελέσματα. Σ' αυτές τις περιπτώσεις διεξάγεται αριθμητική ολοκλήρωση των διαφορικών εξισώσεων κίνησης (1.2.30). Συνήθως χρησιμοποιείται η μέθοδος Runge Kutta, η οποία είναι μία πολύ συνηθισμένη μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης προβλημάτων αρχικών τιμών. Η λογική της μεθόδου Runge Kutta είναι η εξής. Έστω ότι έχουμε τις  $n$  διαφορικές εξισώσεις  $a'$  τάξης:

$$\begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ f_2(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ \vdots \\ f_n(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \end{Bmatrix} \quad (1.2.61)$$

και γνωρίζουμε τις τιμές των  $q_i(t)$   $i=1,2,\dots,n$  τη χρονική στιγμή  $t$  που είναι η αρχή κάποιου βήματος διάρκειας  $h$ . Ζητούνται οι τιμές των  $q_i(t)$   $i=1,2,\dots,n$  την χρονική στιγμή  $t+h$  που είναι το πέρας του συγκεκριμένου βήματος.

Κατ' αρχήν υπολογίζονται οι αυξήσεις  $k_{i1}$  των  $q_i(t)$   $i=1,2,\dots,n$  στη διάρκεια του βήματος από τον τύπο:



$$k_{i1} = hf_i(q_i, t) \quad i=1,2,\dots,n \quad (1.2.62)$$

Στη συνέχεια θεωρώντας ότι τη χρονική στιγμή  $t+h/2$  (στο μέσο του βήματος ολοκλήρωσης) οι  $q_i(t) \quad i=1,2,\dots,n$  έχουν βάσει της (1.2.62) την τιμή  $q_i(t)+k_{i1}/2$  υπολογίζονται οι αυξήσεις  $k_{i2}$  των  $q_i(t) \quad i=1,2,\dots,n$  στη διάρκεια του βήματος από τον τύπο:

$$k_{i2} = hf_i\left(q_i + \frac{1}{2}k_{i1}, t + \frac{1}{2}h\right) \quad (1.2.63)$$

Στη συνέχεια θεωρώντας ότι τη χρονική στιγμή  $t+h/2$  (στο μέσο του βήματος ολοκλήρωσης) οι  $q_i(t) \quad i=1,2,\dots,n$  έχουν βάσει της (1.2.63) την τιμή  $q_i(t)+k_{i2}/2$  υπολογίζονται οι αυξήσεις  $k_{i3}$  των  $q_i(t) \quad i=1,2,\dots,n$  στη διάρκεια του βήματος από τον τύπο:

$$k_{i3} = hf_i\left(q_i + \frac{1}{2}k_{i2}, t + \frac{1}{2}h\right) \quad (1.2.64)$$

Τέλος θεωρώντας ότι τη χρονική στιγμή  $t+h$  (στο πέρας του βήματος ολοκλήρωσης) οι  $q_i(t) \quad i=1,2,\dots,n$  έχουν βάσει της (1.2.64) την τιμή  $q_i(t)+k_{i3}$  υπολογίζονται οι αυξήσεις  $k_{i4}$  των  $q_i(t) \quad i=1,2,\dots,n$  στη διάρκεια του βήματος από τον τύπο:

$$k_{i4} = hf_i(q_i + k_{i3}, t + h) \quad (1.2.65)$$

Οι ζητούμενες τιμές  $q_i(t+h) \quad i=1,2,\dots,n$  των συναρτήσεων στο πέρας του βήματος δίνονται από την:

$$q_i(t+h) = q_i(t) + 1/6(k_{i1} + 2k_{i2} + 2k_{i3} + k_{i4}) \quad (1.2.66)$$

όπου για την αύξηση των  $q_i(t) \quad i=1,2,\dots,n$  εντός του βήματος  $h$  έχει θεωρηθεί ένας μέσος όρος των παραπάνω υπολογισθεισών αυξήσεων  $k_{i1}, k_{i2}, k_{i3}, k_{i4}$ .

## 1.4) Μέθοδος Galerkin

Έστω η ΜΔΕ της άγνωστης συνάρτησης  $u(x,t)$

$$L[u(x,t)] = F(x,t) \quad (1.3.1)$$

όπου  $L[ ]$  ο αντίστοιχος γραμμικός τελεστής στο πεδίου ορισμού  $D$ . Για την περίπτωση της δοκού έχουμε :

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{\text{int}} J(x) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho I(x) \frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} - N(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) - c_{\text{ext}}(x) \frac{\partial}{\partial t} - m(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Η εξίσωση (1.3.1) συνοδεύεται από γραμμικές και ομογενείς συνοριακές συνθήκες ο αριθμός των οποίων εξαρτάται από την τάξη της (1.3.1) ως προς  $x$  και από τις αρχικές συνθήκες  $u(x,0) = g(x)$  και  $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = h(x)$ .

Αναζητούμε λύση της μορφής:

$$u^*(x,t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) f_i(x) \quad (1.3.2)$$

όπου οι  $f_i(x)$  είναι δεδομένες γραμμικώς ανεξάρτητες comparison functions, δηλαδή ικανοποιούν όλες τις οριακές συνθήκες και είναι παραγωγίσιμες όσες φορές απαιτεί ο τελεστής  $L[ ]$ . Εφ' όσον οι οριακές συνθήκες είναι γραμμικές και ομογενείς και εφ' όσον τις ικανοποιεί κάθε  $f_i(x)$  θα τις ικανοποιεί και κάθε γραμμικός συνδυασμός τους, άρα και η έκφραση (1.3.2). Συνεπώς η  $u^*(x,t)$  ικανοποιεί όλες τις οριακές συνθήκες. Δεν ικανοποιεί όμως τη ΜΔΕ (1.3.1) γιατί αν αντικαταστήσουμε την (1.3.2) στην (1.3.1) εν γένει θα προκύψει ένα **υπόλοιπο – residue**  $R(x,t)$

$$L[u^*(x,t) - F(x,t)] = R(x,t) \neq 0 \quad (1.3.3)$$

Οι γραμμικώς ανεξάρτητες  $f_i(x), i=1,2,\dots,n$  μπορούν να θεωρηθούν ότι είναι η βάση ενός διανυσματικού χώρου συναρτήσεων που ορίζεται στο  $D$  μέσα στον οποίο βρίσκεται η συνάρτηση  $R(x,t)$ . Για να γίνει το  $R(x,t)=0$  αρκεί να είναι ορθογώνιο ως προς όλα τα  $f_i(x), i=1,2,\dots,n$ , δηλαδή :

$$\int_D R(x,t) f_i(x) dx = 0$$

ή

$$\int_D L[u^*(x,t) - F(x,t)] f_j(x) dx = 0$$

ή

$$\int_D L[u^*(x,t)] f_j(x) dx = \int_D F(x,t) f_j(x) dx$$

ή

$$\int_D L\left[\sum_{i=1}^n q_i(t) f_i(x)\right] f_j(x) dx = F_j(t) \quad j=1,2,\dots,n$$

Λόγω γραμμικότητας το άθροισμα βγαίνει έξω από το ολοκλήρωμα.

$$\sum_{i=1}^n \int_D L[q_i(t) f_i(x)] f_j(x) dx = F_j(t) \quad j=1,2,\dots,n \quad (1.3.4)$$

Επειδή ο τελεστής  $L[u]$  είναι γραμμικός και η εξίσωση (1.3.2) είναι γραμμικός συνδυασμός με χωριζόμενες μεταβλητές, τα  $q_i(t), \dot{q}_i(t), \ddot{q}_i(t)$  κλπ, θα βγουν εκτός των ολοκληρωμάτων ως προς  $x$ , τα οποία ολοκληρώματα θα πάρουν τις τιμές πραγματικών συντελεστών. Συνεπώς το σύστημα (1.3.4) θα καταλήξει σε σύστημα  $n$  γραμμικών διαφορικών εξισώσεων της μορφής :

$$\begin{aligned} M_1(q_i(t), \dot{q}_i(t), \ddot{q}_i(t), \dots) &= F_1(t) & i=1,2,\dots,n \\ M_2(q_i(t), \dot{q}_i(t), \ddot{q}_i(t), \dots) &= F_2(t) & i=1,2,\dots,n \\ &\vdots \\ M_n(q_i(t), \dot{q}_i(t), \ddot{q}_i(t), \dots) &= F_n(t) & i=1,2,\dots,n \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

όπου  $M_j$  γραμμικές συναρτήσεις.

Για να ολοκληρωθεί το σύστημα (1.3.5) σαν πρόβλημα αρχικών τιμών θα πρέπει να υπολογιστούν οι αρχικές τιμές  $q_i(0), \dot{q}_i(0), i=1,2,\dots,n$ . Γι' αυτό θέτουμε  $t=0$  στην (1.3.2) και παίρνουμε ότι :

$$u^*(x,0) = \sum_{i=1}^n q_i(0) f_i(x) \quad (1.3.6)$$

$$\frac{\partial u^*(x,0)}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i(0) f_i(x) \quad (1.3.7)$$

Αντικαθιστώντας την (1.3.6) στην δοθείσα αρχική συνθήκη της μετατόπισης έχουμε ότι :

$$\sum_{i=1}^n q_i(0) f_i(x) = g(x)$$

Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία διαδοχικά με  $f_j(x), j=1,2,\dots,n$  και ολοκληρώνοντας συνεπάγεται ότι :

$$\sum_{i=1}^n q_i(0) \int_D f_i(x) f_j(x) dx = \int_D g(x) f_j(x) dx \quad j=1,2,\dots,n$$

$d_{ij}$ 
 $e_j$

ή

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \\ \vdots \\ q_n(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{Bmatrix} \quad (1.3.8)$$

Αντικαθιστώντας την (1.3.7) στην δοθείσα αρχική συνθήκη της ταχύτητας έχουμε ότι :

$$\sum_{i=1}^n \dot{q}_i(0) f_i(x) = g(x)$$

Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία διαδοχικά με  $f_j(x), j=1,2,\dots,n$  και ολοκληρώνοντας συνεπάγεται ότι :

$$\sum_{i=1}^n \dot{q}_i(0) \int_D f_i(x) f_j(x) dx = \int_D h(x) f_j(x) dx \quad j=1,2,\dots,n$$

$d_{ij}$ 
 $f_j$

ή

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1(0) \\ \dot{q}_2(0) \\ \vdots \\ \dot{q}_n(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} \quad (1.3.9)$$

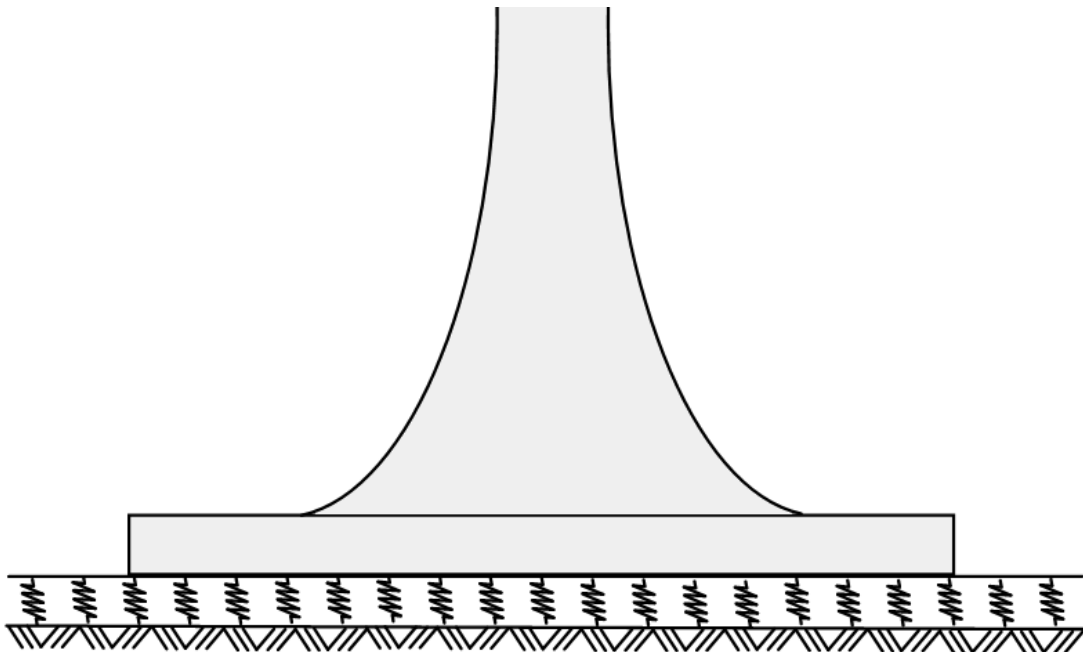
Λύνοντας τα αλγεβρικά συστήματα (1.3.8) και (1.3.9) υπολογίζονται οι αρχικές τιμές  $\{q_1(0), \dots, q_n(0)\}$  και  $\{\dot{q}_1(0), \dots, \dot{q}_n(0)\}$  αντίστοιχα. Πλέον μπορούμε να ολοκληρώσουμε το διαφορικό σύστημα (1.3.5) και να υπολογίσουμε τα  $\{q_1(t), \dots, q_n(t)\}$  οπότε η συνάρτηση  $u^*(x, t)$  της λύσης (1.3.2) είναι γνωστή για  $t \geq 0$ .

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### 2.1) Περιγραφή του πύργου της ανεμογεννήτριας

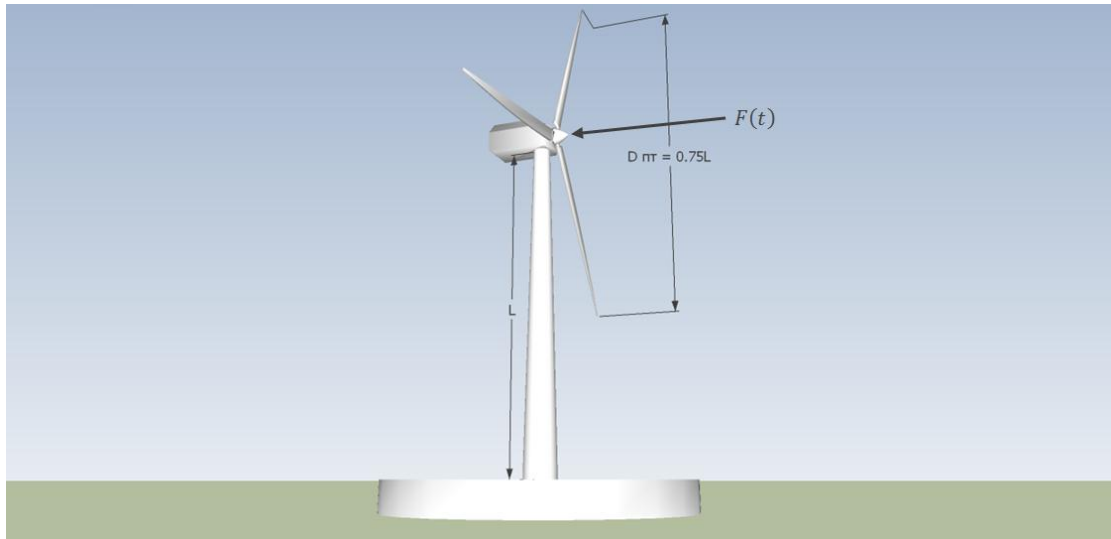
#### 2.1.1) Γεωμετρικά χαρακτηριστικά του σώματος του πύργου

Αρκετοί πύργοι ανεμογεννήτριας δεν έχουν σταθερή κατανομή ακαμψίας κάτι που οφείλεται σε αρχιτεκτονικό σχεδιασμό. Μια μορφή πύργου με μη σταθερή κατανομή ακαμψίας φαίνεται στο **Σχήμα 2.1.1 1**.

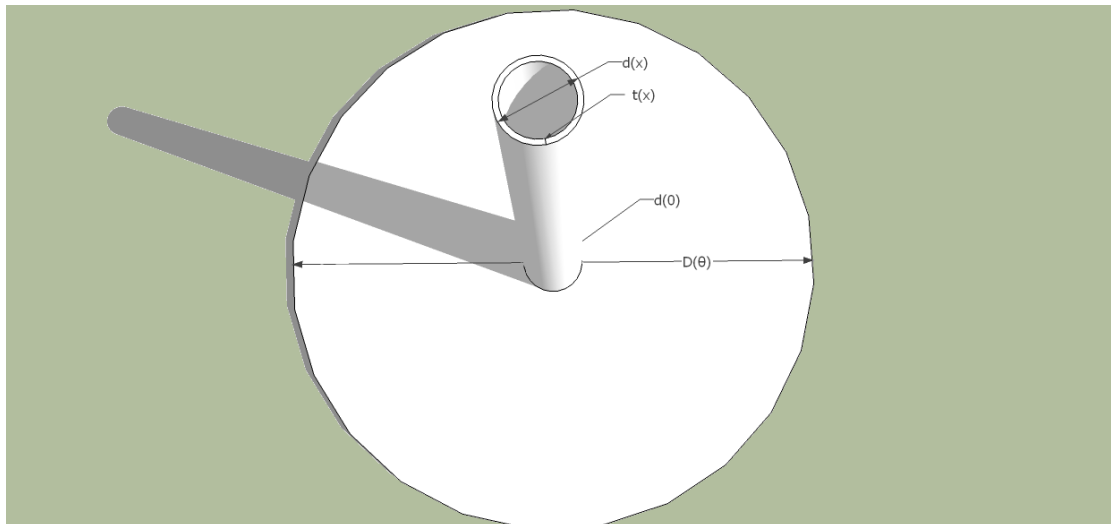


Σχήμα 2.1.1 1

Θα μελετήσουμε τον πύργο ανεμογεννήτριας ύψους  $L$  σχήματος κοίλου λεπτότοιχου κόλουρο κώνου όπως φαίνεται στο **Σχήμα 2.1.1 2**, του οποίου η κοίλη λεπτότοιχη κυκλική διατομή πάχους  $t(x)$  (**Σχήμα 2.1.1 3**) μειώνεται γραμμικά από τη βάση  $x = 0$  έως την κορυφή  $x = L$ .



Σχήμα 2.1.1 2



Σχήμα 2.1.1 3

Για την απλούστευση των εκφράσεων και των σχέσεων θα εισαγάγουμε κάποιες “γεωμετρικές” αδιάστατες ποσότητες.

$$\delta = \frac{d(L)}{d(0)} \quad (2.1.1.1)$$

όπου  $d(L)$  είναι η διάμετρος στην κορυφή και  $d(0)$  είναι η διάμετρος στη βάση. Το  $\delta$  αποτελεί μέτρο της μεταβολής της διατομής κατά μήκος του άξονα του πύργου.

$$\lambda = \frac{L}{d(0)} \quad (2.1.1.2)$$

όπου το  $\lambda$  αποτελεί μέτρο της λυγηρότητας του πύργου.

$$\sigma = \frac{d(x)}{t(x)} \quad (2.1.1.3)$$

όπου το  $\sigma$  είναι το πάχος του κελύφους. Θεωρούμε το  $\xi$  ως την αδιάστατη τετμημένη :

$$\xi = \frac{x}{L} \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (2.1.1.4)$$

Από όμοια τρίγωνα βρίσκουμε ότι  $d(x) = [d(L) - d(0)] \frac{x}{L} + d(0)$ . Συνεπώς έχουμε ότι:

$$\frac{d(x)}{d(0)} = \left[ \frac{d(L) - d(0)}{d(0)} \right] \frac{x}{L} + 1 \Rightarrow d(x) = \frac{d(0)}{L} L \left( \frac{d(L)}{d(0)} - 1 \right) \frac{x}{L} + 1$$

Εισάγοντας τις εξισώσεις (2.1.1.1), (2.1.1.2) και (2.1.1.4) στην τελευταία σχέση έχουμε ότι :

$$d(x) = \frac{L}{\lambda} (\delta - 1) \xi + 1 \quad (2.1.1.5)$$

Το εμβαδόν της κοίλης λεπτότοιχης κυκλικής διατομής είναι:

$$A(x) = \pi \frac{d^2(x)}{4} - \pi \frac{[d(x) - 2t(x)]^2}{4} = \pi d(x)t(x)$$

Όπου έχει παραληφθεί ο όρος  $t^2(x)$  λόγω μικρής συνεισφοράς ( λεπτότοιχη διατομή). Η παραπάνω σχέση λόγω των (2.1.1.3) και (2.1.1.5) μετατρέπεται ως :

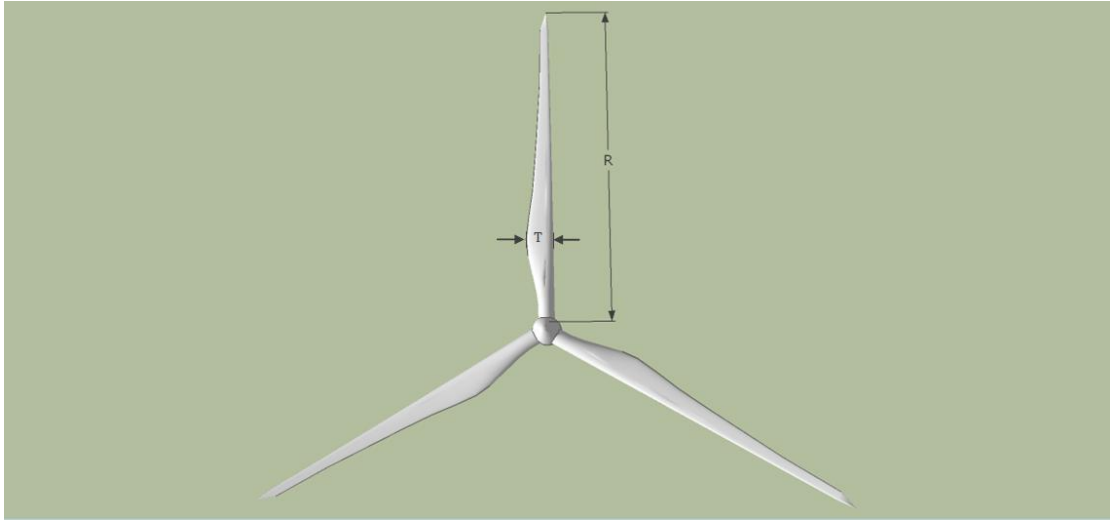
$$A(x) = \frac{\pi}{\sigma \lambda^2} L^2 [(\delta - 1) \xi + 1]^2 \quad (2.1.1.6)$$

Η ροπή αδράνειας της κοίλης λεπτότοιχης κυκλικής διατομής ως προς διάμετρο είναι:

$$I(x) = \frac{1}{2} \int_A r^2 dA = \pi \frac{d^4(x)}{\sigma} = \frac{\pi}{8\sigma \lambda^4} L^4 [(\delta - 1) \xi + 1]^4 \quad (2.1.1.7)$$

Η ανεμογεννήτρια έχει τρία πτερύγια ιδίων διαστάσεων, δηλαδή ίδιο μήκος  $R$  και πλάτος  $T = \frac{R}{15}$ , όπως φαίνεται στο **Σχήμα 2.1.1 4**. Όταν η ανεμογεννήτρια

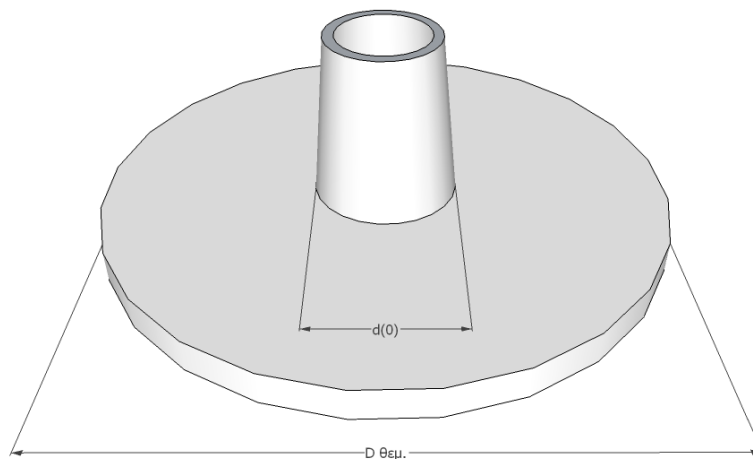
βρίσκεται σε λειτουργία τα κινούμενα περύγια σχηματίζουν κύκλο διαμέτρου  $D_{\pi\tau} = 0.75L$ .



Σχήμα 2.1.1 4

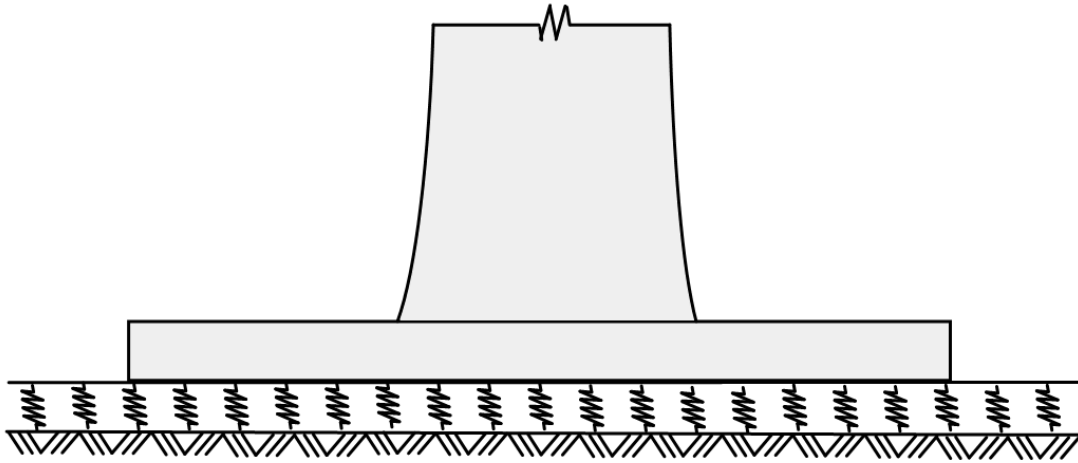
## 2.1.2) Έδραση

Θεωρούμε ότι ο πύργος της ανεμογεννήτριας είναι πακτωμένος πάνω σε ένα θεμέλιο με σχήμα κυκλικού δίσκου διαμέτρου  $D_{\Theta} = (0.4 \div 0.5)L$  όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1.2 1.



Σχήμα 2.1.2 1





Σχήμα 2.1.2.2

Θεωρώντας γραμμικά ελαστικό έδαφος τύπου Winkler model, όπως φαίνεται στο **Σχήμα 2.1.2.2**, το θεμέλιο ισοδυναμεί με ένα στροφικό ελατήριο σταθεράς  $k_{\Sigma}$  [ $N.m$ ] στη βάση  $x=0$ .

$$k_{\Sigma} = C_{soil} I_{\Theta} \quad (2.1.2.1)$$

όπου  $C_{soil}$  [ $N/m^3$ ] είναι ο **συντελεστής ή δείκτης εδάφους (c soil)** και  $I_{\Theta}$  είναι η επιφανειακή ροπή αδρανείας του κυκλικού θεμελίου ως προς διάμετρο η οποία δίνεται από τον εξής τύπο:

$$I_{\Theta} = \frac{\pi D_{\Theta}^4}{64} = (0.0013 \div 0.003) L^4 \quad (2.1.2.2)$$

Συνεπώς έχουμε :

$$k_{\Sigma} = (0.0013 \div 0.003) C_{soil} L^4 \quad (2.1.2.3)$$

Θα αδιαστατοποιήσουμε το στροφικό ελατήριο με τη ροπή  $\frac{EI(0)}{L}$  όπου

$EI(0) = \frac{\pi}{8\sigma\lambda^4} EL^4$  δίνεται από την σχέση (2.1.1.7) για  $x=0$  και λαμβάνοντας υπ' όψιν τη σχέση (2.1.2.3) συνεπάγεται ότι :

$$\frac{\bar{\quad}}{k_{\Sigma}} = \frac{k_{\Sigma} L}{EI(0)} = (0.0013 \div 0.003) \frac{8\sigma\lambda^4}{\pi} \frac{C_{soil} L}{E} \quad (2.1.2.4)$$

### 2.1.3) Κατανομή μάζας $m(x)$ , συγκεντρωμένη μάζα $M$ και συγκεντρωμένη μαζική ροπή αδρανείας $J$

Η κατανομή μάζας  $m(x)$  της ανεμογεννήτριας δίνεται από τον εξής τύπο:

$$m(x) = \rho A(x) \quad (2.1.3.1)$$

Εισάγοντας την εξίσωση (2.1.1.6) στην (2.1.3.1) έχουμε ότι:

$$m(x) = \frac{\pi}{\sigma \lambda^2} \rho L^2 [(\delta - 1)\xi + 1]^2 \quad \text{kg} / \text{m} \quad (2.1.3.2)$$

Συνεπώς

$$m(0) = \frac{\pi}{\sigma \lambda^2} \rho L^2 \quad (2.1.3.3)$$

Αδιαστατοποιούμε την κατανομή της μάζας  $m(x)$  με τη μάζα στη βάση ( $x=0$ ), δηλαδή η **αδιάστατη μάζα**  $\overline{m(\xi)}$  είναι :

$$\overline{m(\xi)} = \frac{m(x)}{m(0)} = [(\delta - 1)\xi + 1]^2 \quad (2.1.3.4)$$

Στη θέση  $x=L$  υπάρχει συγκεντρωμένη μάζα λόγω της μάζας του μοτέρ και των πτερυγίων, δηλαδή ισχύει :

$$M = M_m + M_{\pi\tau}$$

Αδιαστατοποιούμε τη συγκεντρωμένη μάζα με τη συνολική μάζα του πύργου  $m(0)L$  [kg].

$$\overline{M} = \frac{M}{m(0)L} = \frac{\sigma \lambda^2}{\pi} \frac{M}{\rho L^3} \quad (2.1.3.5)$$

Η συγκεντρωμένη μαζική ροπή αδρανείας  $J$  [kg.m<sup>2</sup>] δίνεται από τον εξής τύπο:

$$J = M_{\pi\tau} \frac{D_{\pi\tau}^2}{16}$$

Εισάγοντας στην παραπάνω σχέση ότι  $D_{\pi\pi} = 0.75L$  συνεπάγεται ότι :

$$\boxed{J = 0.0352M_{\pi\pi}L^2} \quad (2.1.3.6)$$

Αδιαστατοποιούμε τη  $J$  με  $m(0)L^3$  [ $kg \cdot m^2$ ] όποτε έχουμε ότι

$$\boxed{\bar{J} = \frac{J}{m(0)L^3} = \frac{\sigma\lambda^2}{\pi} \frac{J}{\rho L^5}} \quad (2.1.3.7)$$

Ο όρος της περιστροφικής αδράνειας  $\rho I(x)$  [ $kg \cdot m$ ] αδιαστατοποιείται με το  $m(0)L^2$  [ $kg \cdot m$ ] συνεπώς η αδιάστατη περιστροφική ενέργεια  $\overline{\rho I(\xi)}$  είναι:

$$\boxed{\overline{\rho I(\xi)} = \frac{\rho I(x)}{m(0)L^2} = \frac{1}{8\lambda^2} [(\delta - 1)\xi + 1]^4} \quad (2.1.3.8)$$

### 2.1.4) Ακαμψία

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.1.1.7) η ακαμψία  $EI(x)$  του πύργου της ανεμογεννήτριας, όπου  $E$  το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της ανεμογεννήτριας, δίνεται από τον εξής τύπο:

$$EI(x) = \frac{\pi}{8\sigma\lambda^4} EL^4 [(\delta - 1)\xi + 1]^4 \quad (2.1.4.1)$$

Για  $x = 0$  έχουμε ότι :

$$EI(0) = \frac{\pi}{8\sigma\lambda^4} EL^4 \quad (2.1.4.2)$$

Αδιαστατοποιούμε την κατανομή της ακαμψίας  $EI(x)$  με την ακαμψία στη βάση ( $x = 0$ ), δηλαδή η **αδιάστατη ακαμψία**  $\overline{EI(\xi)}$  είναι :

$$\boxed{\overline{EI(\xi)} = \frac{EI(x)}{EI(0)} = [(\delta - 1)\xi + 1]^4} \quad (2.1.4.3)$$

Το βάρος της συγκεντρωμένης μάζας  $Mg$ , όπου  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας, αποτελεί μία συντηρητική κατακόρυφη δύναμη. Συνεπώς έχουμε ότι :

$$P = Mg \quad (2.1.4.4)$$

Αδιαστατοποιούμε την εξωτερική θλιπτική κατακόρυφη δύναμη με τον όρο  $\frac{EI(0)}{L^2} = EL^2 \frac{\pi}{8\sigma\lambda^4}$  [N]. Συνεπώς έχουμε ότι:

$$\boxed{\bar{M}g = \frac{8\sigma\lambda^4}{\pi} \frac{Mg}{EL^2}} \quad (2.1.4.5)$$

### **2.1.5) Οριζόντια δύναμη που ασκείται στα πτερύγια από τον άνεμο**

Η δύναμη  $F$  [N] που ασκείται στα πτερύγια από τον άνεμο δίνεται από τον εξής τύπο:

$$F_o = c_p \frac{u_{av}^2}{2} \rho A$$

όπου:

- $c_p = 1.2$  : συντελεστής ώθησης ανέμου.
- $u_{av}$  : ταχύτητα ανέμου
- $\rho = 1.2 \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$  : πυκνότητα αέρα στους  $20^\circ C$ .
- $A = 3RT = 3R \frac{R}{15} = \frac{R^2}{5} = \frac{1}{5} \left( \frac{0.75L}{2} \right)^2 = 0.02813L^2$  η επιφάνεια προβολής των πτερυγίων σε επίπεδο κάθετο στην ταχύτητα του ανέμου.

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω έχουμε ότι :

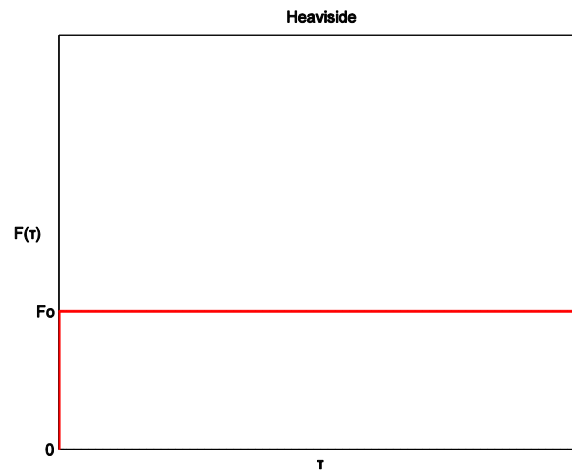
$$F_o = 0.0203u_{av}^2 L^2 \quad (2.1.5.1)$$

Αδιαστατοποιούμε τη δύναμη με τον όρο  $\frac{EI(0)}{L^2} = EL^2 \frac{\pi}{8\sigma\lambda^4}$  [N]. Οπότε έχουμε ότι:

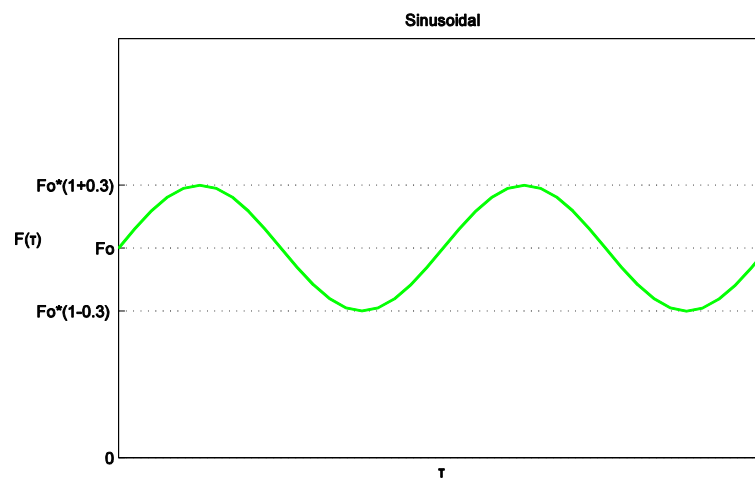
$$\boxed{\bar{F}_o = \frac{F_o L^2}{EI(0)} = \frac{0.1624\sigma\lambda^4}{\pi} \frac{u_{av}^2}{E}} \quad (2.1.5.2)$$

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα χρησιμοποιηθούν δύο είδη φορτίσεων :

### 1. Συνάρτηση βήματος – Heaviside function



### 2. Ημιτονοειδής φόρτιση – Sinusoidal function



### 2.1.6) Εσωτερική και εξωτερική απόσβεση του πύργου της ανεμογεννήτριας

Ο όρος  $c_{int} I(x)$  [ $N \cdot m^2 \cdot sec$ ] που αντιστοιχεί στην εσωτερική απόσβεση του υλικού της ανεμογεννήτριας θα αδιαστατοποιηθεί με τον όρο  $\sqrt{EI(0)m(0)L^2}$  [ $N \cdot m^2 \cdot sec$ ] :

$$\overline{c_{int} I(\xi)} = \frac{c_{int} I(x)}{\sqrt{EI(0)m(0)L^2}} = \frac{c_{int}}{L\sqrt{8E\rho}} \frac{[(\delta-1)\xi+1]^4}{\lambda} \quad (2.1.6.1)$$

Όσον αφορά τον συντελεστή εξωτερικής απόσβεσης  $c_{ext}(x)$  [ $N \cdot sec/m^2$ ] θα αδιαστατοποιηθεί με τον όρο  $\frac{\sqrt{EI(0)m(0)}}{L^2}$  [ $N \cdot sec/m^2$ ] :

$$\overline{c_{ext}(\xi)} = \frac{c_{ext} L^2}{\sqrt{EI(0)m(0)}} = \frac{c_{ext}(x)}{L\sqrt{\frac{E\rho}{8}}} \frac{\sigma\lambda^3}{\pi} \quad (2.1.6.2)$$

### 2.1.7) Χρόνος – Ιδιοσυχνότητες

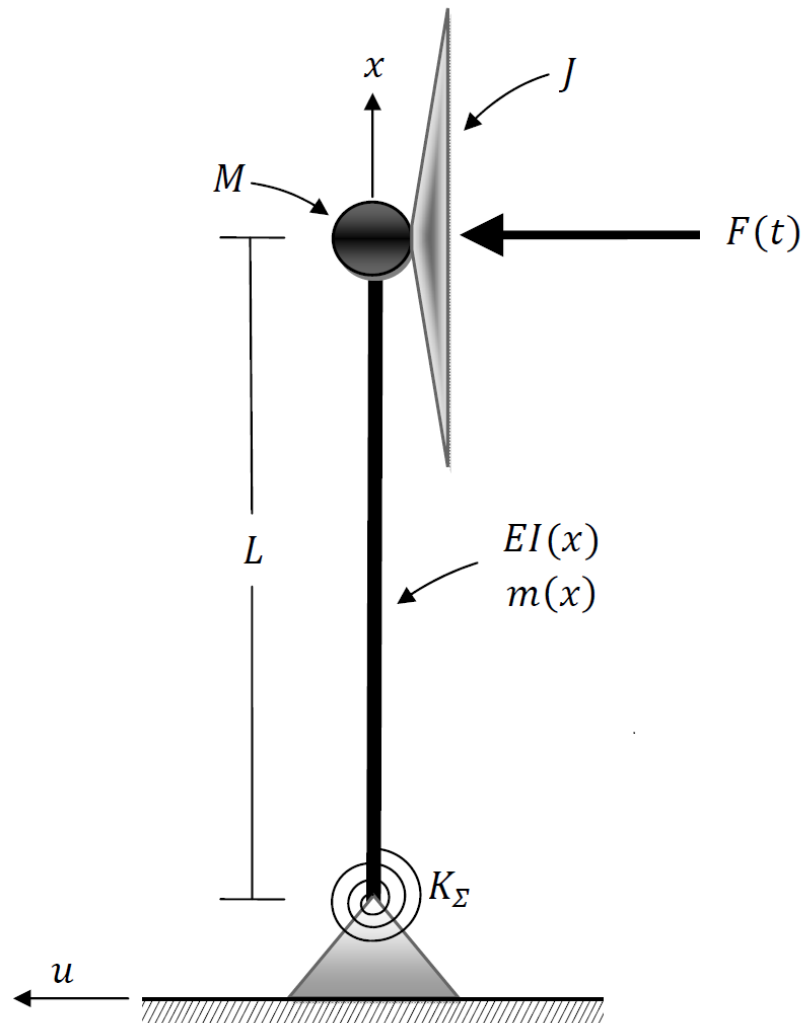
Ο χρόνος αδιαστατοποιείται με τον όρο  $L^2 \sqrt{\frac{m(0)}{EI(0)}}$  [sec] .Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις σχέσεις (2.1.4.2) και (2.1.3.3) έχουμε ότι

$$\tau = \frac{t}{L^2 \sqrt{\frac{m(0)}{EI(0)}}} = \frac{1}{\lambda\sqrt{8}} \frac{t}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.1.7.1)$$

Οι αδιάστατες συχνότητες δίνονται από τον εξής τύπο:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{\frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EI(0)}{m(0)}}} = \lambda\sqrt{8}\omega L \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (2.1.7.2)$$

## 2.2) Περιγραφή του προβλήματος



Σχήμα 2.2 1

Το μηχανικό προσομοίωμα του πύργου φαίνεται στο **Σχήμα 2.2 1**. Η κίνηση του πύργου της ανεμογεννήτριας ισοδυναμεί με κίνηση δοκού, γι' αυτό το λόγο η εξίσωση (1.1.20) είναι η εξίσωση κίνησης του πύργου της ανεμογεννήτριας. Αμελούμε την κατανομημένη εξωτερική φόρτιση και θεωρούμε ότι στην ανεμογεννήτρια ασκείται μόνο μία συγκεντρωμένη δύναμη στο άκρο  $x=L$ . Συνεπώς η μερική διαφορική εξίσωση κίνησης του πύργου της ανεμογεννήτριας είναι:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_{int} I(x) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho I(x) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} - Mg \frac{\partial u}{\partial x} \right) - c_{ext}(x) \frac{\partial u}{\partial t} + F(t) \delta(x-L) = m(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.2.1)$$

με οριακές συνθήκες:

$u(0,t) = 0$	$x = 0$
$EI(0) \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} + c_{\text{int}} I(0) \frac{\partial^3 u(0,t)}{\partial x^2 \partial t} - k_{\Sigma} \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0$	$x = 0$
$\frac{\partial}{\partial x} \left( EI(L) \frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial x^2} + c_{\text{int}} I(L) \frac{\partial^3 u(L,t)}{\partial x^2 \partial t} \right) - M \frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial t^2} + Mg \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} - \rho I(L) \frac{\partial^3 u(L,t)}{\partial x \partial t^2} = 0$	$x = L$
$EI(L) \frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial x^2} + c_{\text{int}} I(L) \frac{\partial^3 u(L,t)}{\partial x^2 \partial t} + J_2 \frac{\partial^3 u(L,t)}{\partial x \partial t^2} = 0$	$x = L$

(2.2.2)

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα θεωρήσουμε μηδενικές αρχικές συνθήκες  $u(x,0) = 0$  και  $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$ .

Το παρόν πρόβλημα (2.2.1)- (2.2.2) θα επιλυθεί με χρήση της Assumed modes Method όπως περιγράφηκε στο εδάφιο 1.3. Το σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων του διακριτοποιημένου συστήματος είναι σύμφωνα με την εξίσωση (1.3.30) :

$$[m]\{\ddot{q}(t)\} + [c]\{\dot{q}(t)\} + [k]\{q(t)\} = \{Q(t)\} \quad (2.2.3)$$

όπου το μητρώο μάζας του πύργου σύμφωνα με την εξίσωση (1.3.11) είναι:

$$m_{ij} = \int_0^L m(x) f_i(x) f_j(x) dx + \int_0^L \rho I(x) f_i'(x) f_j'(x) dx + M f_i(L) f_j(L) + J f_i'(L) f_j'(L) \quad (2.2.4)$$

Το μητρώο απόσβεσης σύμφωνα με την εξίσωση (1.3.29) είναι:

$$c_{ij} = \int_0^L \left[ c_{\text{ext}}(x) f_i(x) f_j(x) + c_{\text{int}} I(x) f_i''(x) f_j''(x) \right] dx \quad (2.2.5)$$

Το μητρώο ακαμψίας σύμφωνα με την εξίσωση (1.3.20) είναι:

$$k_{ij} = \int_0^L \left[ EI(x) f_i''(x) f_j''(x) - M g f_i'(x) f_j'(x) \right] dx + k_{\Sigma} f_i'(0) f_j'(0) \quad (2.2.6)$$

Το διάνυσμα της εξωτερικής φόρτισης σύμφωνα με την εξίσωση (1.3.31) είναι :

$$Q_i(t) = F(t) f_i(L) \quad (2.2.7)$$



Από τον μηδενισμό της ορίζουσας (1.3.41)  $\det[[k]-\omega^2[m]]=0$  βρίσκουμε τις  $i$  προσεγγιστικές ιδιοσυχνότητες  $\omega_i$  και τις αντίστοιχες κανονικοποιημένες ιδιομορφές  $\{u\}_i$ . Το σετ των  $n$  ανεξάρτητων διαφορικών εξισώσεων των κανονικών συντεταγμένων, όταν είναι δυνατή η αποσύζευξη του πεπλεγμένου διαφορικού συστήματος κίνησης (1.3.53), είναι σύμφωνα με την εξίσωση (1.3.55)

$$\ddot{n}_i(t) + 2\zeta_i\omega_i\dot{n}_i(t) + \omega_i^2n_i(t) = N_i(t) \quad i=1,2,\dots,n \quad (2.2.8)$$

Λόγω των μηδενικών αρχικών συνθηκών οι αρχικές συνθήκες των κανονικών συντεταγμένων είναι μηδέν  $n_i(0)=0$  και  $\dot{n}_i(0)=0$ . Συνεπώς στην εξίσωση (1.3.56) ο μόνος όρος που απομένει είναι το ολοκλήρωμα Duhamel :

$$n_i(t) = \frac{1}{\omega_{di}} \int_0^t N_i(s) e^{-\zeta_i\omega_i(t-s)} \sin \omega_{di}(t-s) ds \quad (2.2.9)$$

Κάνοντας αριθμητικό υπολογισμό του ολοκληρώματος Duhamel (2.2.9) βρίσκουμε τις κανονικές συντεταγμένες  $n_i(t)$ . Γνωρίζοντας τις κανονικές συντεταγμένες, τις κανονικοποιημένες ιδιομορφές  $\{u\}_i$  και τις δοκιμαστικές συναρτήσεις τότε η απόκριση του πύργου της ανεμογεννήτριας δίνεται από το γινόμενο πινάκων (1.3.60).

Σε περίπτωση που δεν είναι δυνατή η αποσύζευξη του πεπλεγμένου διαφορικού συστήματος κίνησης (1.3.53) τότε διεξάγεται αριθμητική ολοκλήρωση των διαφορικών εξισώσεων κίνησης (2.2.3) με τη μέθοδο Runge Kutta όπως περιγράφεται στο εδάφιο 1.3.

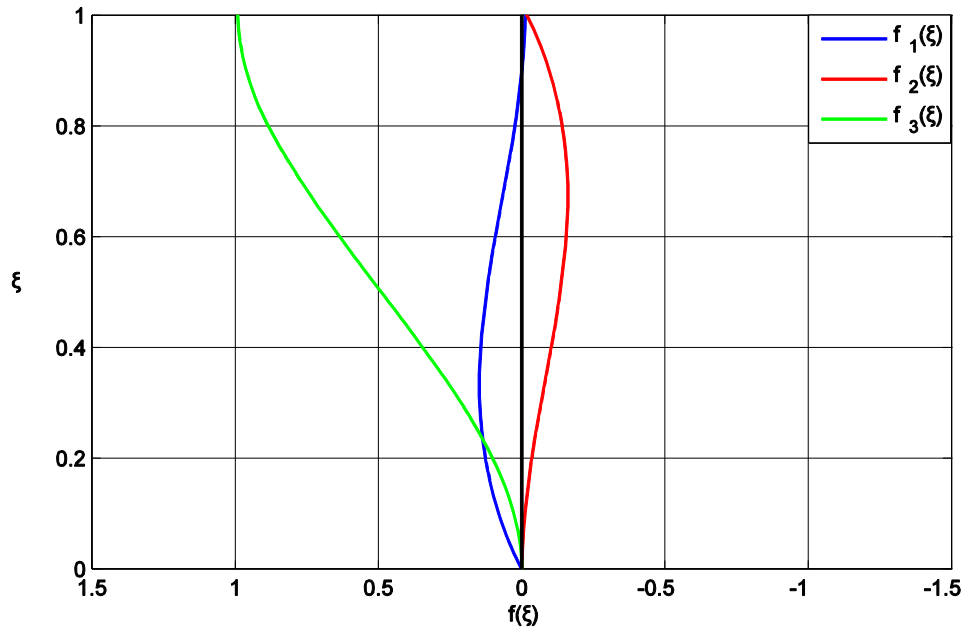
Οι ροπές κάμψης και οι τέμνουσες δυνάμεις δίνονται από τους εξής τύπους:

$$M(x,t) = EI(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \sum_{i=1}^n q_i(t) EI(x) f_i''(x) \quad (2.2.10)$$

$$Q(x,t) = -\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = \sum_{i=1}^n -q_i(t) \left[ EI'(x) f_i''(x) + EI(x) f_i'''(x) \right] \quad (2.2.11)$$

## 2.3) Δοκιμαστικές συναρτήσεις

### 2.3.1) Α' Οικογένεια δοκιμαστικών συναρτήσεων ('3')



**Σχήμα 2.3.1 1** Α' Οικογένεια δοκιμαστικών συναρτήσεων ('3')

Θεωρούμε τις admissible δοκιμαστικές συναρτήσεις  $f_i(x)$   $i=1,2,3$  του σχήματος 2.4 οι οποίες έχουν τους εξής τύπους:

$$f_1(x) = \frac{x^3}{L^2} - \frac{2x^2}{L} + x \quad [m] \quad (2.3.1.1)$$

$$f_2(x) = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \quad [m] \quad (2.3.1.2)$$

$$f_3(x) = -2\xi^3 + 3\xi^2 \quad [\text{αδιάστατη}] \quad (2.3.1.3)$$

Η λύση του προβλήματος έχει θεωρηθεί ότι είναι (Assumed modes method) :

$$u(x,t) = f_1(x)q_1(t) + f_2(x)q_2(t) + f_3(x)q_3(t) \quad (2.3.1.4)$$

Συνεπώς οι γενικευμένες συντεταγμένες  $q_1(t), q_2(t)$  είναι αδιάστατες ενώ η γενικευμένη συντεταγμένη  $q_3(t)$  έχει μονάδες μήκους  $[m]$ .

### Αδιαστατοποίηση διαφορικών εξισώσεων

Η εξίσωση (2.2.3) αποτελεί το διαστατό σύστημα των εξισώσεων κίνησης του διακριτοποιημένου συστήματος. Διαλέγοντας τις συγκεκριμένες δοκιμαστικές συναρτήσεις παρατηρούμε ότι η πρώτη και η δεύτερη διαφορική εξίσωση είναι εξισώσεις ροπής και η τρίτη είναι εξίσωση δύναμης. Συνεπώς τις δύο πρώτες θα τις διαιρέσουμε με τη ροπή  $\frac{EI(0)}{L}$  και την τρίτη με τη δύναμη  $\frac{EI(0)}{L^2}$ . Ο πρώτος όρος της πρώτης εξίσωσης του συστήματος (2.2.3) είναι:

$$\int_0^L \left[ m(x)f_1^2(x) + \rho I(x)(f_1'(x))^2 \right] dx * \ddot{q}_1(t) \quad (2.3.1.5)$$

Συνάμα ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{L} & 0 \leq \xi \leq 1 \\ dx &= Ld\xi \end{aligned} \quad (2.3.1.6)$$

$$\overline{f_1(\xi)} = \frac{f_1(x)}{L} \Rightarrow f_1(x) = \overline{f_1(\xi)}L \quad (2.3.1.7)$$

$$\overline{f_1'(\xi)} = f_1'(x) \quad (2.3.1.8)$$

$$\overline{m(\xi)} = \frac{m(x)}{m(0)} \Rightarrow m(x) = \overline{m(\xi)}m(0) \quad (2.3.1.9)$$

$$\overline{\rho I(\xi)} = \frac{\rho I(x)}{m(0)L^2} \Rightarrow \rho I(x) = \overline{\rho I(\xi)}m(0)L^2 \quad (2.3.1.10)$$

$$\overline{q_1(\tau)} = q_1(t)$$

$$\overline{\dot{q}_1(\tau)} = \frac{dq_1(t)}{d\tau} \Rightarrow \overline{\dot{q}_1(\tau)} = \frac{dq_1(t)}{dt} \frac{dt}{d\tau} \xrightarrow{(2.1.7.1)} \overline{\dot{q}_1(\tau)} = \dot{q}_1(t)L^2 \sqrt{\frac{m(0)}{EI(0)}}$$

$$\overline{\ddot{q}_1(\tau)} = \frac{d\overline{\dot{q}_1(\tau)}}{d\tau} \Rightarrow \overline{\ddot{q}_1(\tau)} = \frac{d}{dt} \left[ \dot{q}_1(t)L^2 \sqrt{\frac{m(0)}{EI(0)}} \right] \frac{dt}{d\tau} \xrightarrow{(2.1.7.1)} \overline{\ddot{q}_1(\tau)} = \ddot{q}_1(t) \frac{L^4 m(0)}{EI(0)}$$

$$\ddot{q}_1(t) = \frac{EI(0)}{L^4 m(0)} \overline{\ddot{q}_1(\tau)} \quad (2.3.1.11)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2.3.1.6), (2.3.1.7), (2.3.1.8), (2.3.1.9), (2.3.1.9), (2.3.1.10) και (2.3.1.11) στην εξίσωση (2.3.1.5) την οποία διαιρούμε με τη ροπή  $\frac{EI(0)}{L}$  συνεπάγεται ότι :

$$\int_0^1 \left[ \overline{m(\xi) f_1^2(\xi)} + \overline{\rho I(\xi) \left( f_1'(\xi) \right)^2} \right] d\xi \overline{\ddot{q}_1(\tau)} \quad (2.3.1.12)$$

Παρατηρούμε ότι η διαστατή με την αδιάστατη μορφή έχουν ακριβώς τις ίδιες εκφράσεις μόνο που στη θέση των διαστατών μεγεθών μπαίνουν τα αντίστοιχα αδιάστατα μεγέθη. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για τις τρεις εξισώσεις καταλήγουμε στο αδιάστατο διαφορικό σύστημα κίνησης του διακριτοποιημένου μασ συστήματος :

$$\left[ \overline{m} \right] \{ \overline{\ddot{q}(\tau)} \} + \left[ \overline{c} \right] \{ \overline{\dot{q}(\tau)} \} + \left[ \overline{k} \right] \{ \overline{q(\tau)} \} = \{ \overline{Q(\tau)} \} \quad (2.3.1.13)$$

όπου  $\left[ \overline{m} \right]$  το αδιάστατο μητρώο μάζας :

$$\overline{m}_{ij} = \int_0^1 \left( \overline{m(\xi) f_i(\xi) f_j(\xi)} + \overline{\rho I(\xi) f_i'(\xi) f_j'(\xi)} \right) d\xi + \overline{M f_i(1) f_j(1)} + \overline{J f_i'(1) f_j'(1)} \quad (2.3.1.14)$$

$\left[ \overline{c} \right]$  το αδιάστατο μητρώο απόσβεσης :

$$\overline{c}_{ij} = \int_0^1 \left[ \overline{c_{ext}(\xi) f_i(\xi) f_j(\xi)} + \overline{c_{int}(\xi) f_i''(\xi) f_j''(\xi)} \right] d\xi \quad (2.3.1.15)$$

$\left[ \overline{k} \right]$  το αδιάστατο μητρώο ακαμψίας :

$$\overline{k}_{ij} = \int_0^1 \left[ \overline{EI(\xi) f_i''(\xi) f_j''(\xi)} - \overline{Mg f_i'(\xi) f_j'(\xi)} \right] d\xi + \overline{k_\Sigma f_i'(0) f_j'(0)} \quad (2.3.1.16)$$

και  $\{ \overline{Q(\tau)} \}$  το αδιάστατο διάνυσμα της εξωτερικής φόρτισης :

$$\overline{Q_i(\tau)} = \overline{F_i(\tau) f_i(1)} \quad (2.3.1.17)$$

Λύνοντας το όπως αναφέρεται στο εδάφιο 2.2 βρίσκουμε την αδιάστατη απόκριση του συστήματος  $\overline{u(\xi, \tau)} = \frac{u(x, t)}{L}$  για οποιαδήποτε αδιάστατη τιμή του χρόνου  $\tau$ .

Οι αδιάστατες μορφές των ροπών κάμψης και των τεμνουσών δυνάμεων είναι:

$$\overline{M(\xi, \tau)} = \overline{EI(\xi)} \frac{\partial^2 \overline{u(\xi, \tau)}}{\partial \xi^2} = \sum_{i=1}^n \overline{q_i(\tau)} \overline{EI(\xi)} \overline{f_i''(\xi)} \quad (2.3.1.18)$$

$$\overline{Q(\xi, \tau)} = -\frac{\partial \overline{M(\xi, \tau)}}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n -\overline{q_i(\tau)} \left[ \overline{EI'(\xi)} \overline{f_i''(\xi)} + \overline{EI(\xi)} \overline{f_i'''(\xi)} \right] \quad (2.3.1.19)$$

### **2.3.2) Β' Οικογένεια δοκιμαστικών συναρτήσεων ('4a')**

Θεωρούμε ως δοκιμαστικές συναρτήσεις τις τέσσερις πρώτες μη κανονικοποιημένες ιδιομορφές του προβλήματος ιδιοτιμών του πύργου ανεμογεννήτριας με σταθερή ακαμψία  $EI$  και σταθερή κατανομή μάζας  $m$ . Σε αυτήν την περίπτωση θεωρούμε ότι ο πύργος έχει την ακαμψία και την κατανομή μάζας της θέσης  $x=L$  δηλαδή  $EI = EI(L)$  και  $m = m(L)$ . Ο όρος της περιστροφικής κίνησης αμελείται οπότε η εξίσωση της ελεύθερης ταλάντωσης είναι:

$$EI(L) \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + m(L) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.3.2.1)$$

Θεωρούμε **σύγχρονη κίνηση** (χωρισμός των μεταβλητών), δηλαδή μια λύση της μορφής :

$$v(x,t) = \varphi(x) f(t) \quad (2.3.2.2)$$

Εισάγοντας τη σχέση (2.3.2.2) στη σχέση (2.3.2.1) προκύπτει ότι :

$$f(t) EI(L) \frac{d^4 \varphi(x)}{dx^4} + \ddot{f}(t) m(L) \varphi(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = -\frac{EI(L) \frac{d^4 \varphi(x)}{dx^4}}{m(L) \varphi(x)} = -\omega^2$$

Συνεπώς παίρνουμε τις εξής δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις :

$$\ddot{f}(t) + \omega^2 f(t) = 0 \quad t \geq 0 \quad (2.3.2.3)$$

$$EI(L) \frac{d^4 \varphi(x)}{dx^4} - \omega^2 m(L) \varphi(x) = 0 \quad 0 \leq x \leq L \quad (2.3.2.4)$$

Συνάμα αντικαθιστούμε τη σχέση (2.3.2.2) στις συνοριακές συνθήκες ( οι όροι της περιστροφικής ενέργειας έχουν αγνοηθεί) οπότε έχουμε:

$$\varphi(0) = 0$$

$$EI(L)\varphi''(0) - k_{\Sigma}\varphi'(0) = 0 \quad (2.3.2.5)$$

$$EI(L)\varphi'''(L) + \omega^2 M\varphi(L) = 0$$

$$EI(L)\varphi''(L) - \omega^2 J\varphi'(L) = 0$$

Η λύση της εξίσωσης (2.3.2.3) είναι η εξής (παρατίθενται σε τρεις ισοδύναμες εκφράσεις):

$$f(t) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)$$

ή

$$f(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

ή

$$f(t) = C \cos(\omega t - \varphi)$$

όπου οι σταθερές  $A_1, A_2, C_1, C_2, C, \varphi$  υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Οι εξισώσεις (2.3.2.4) και (2.3.2.5) αποτελούν πρόβλημα οριακών τιμών . Η γενική λύση της εξίσωσης (2.3.2.4) είναι η εξής :

$$\varphi(x) = c_1\varphi_1(x, \omega) + c_2\varphi_2(x, \omega) + c_3\varphi_3(x, \omega) + c_4\varphi_4(x, \omega) \quad (2.3.2.6)$$

όπου  $\varphi_1(x, \omega), \varphi_2(x, \omega), \varphi_3(x, \omega), \varphi_4(x, \omega)$  είναι τέσσερις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης (2.3.2.4) και είναι οι εξής:

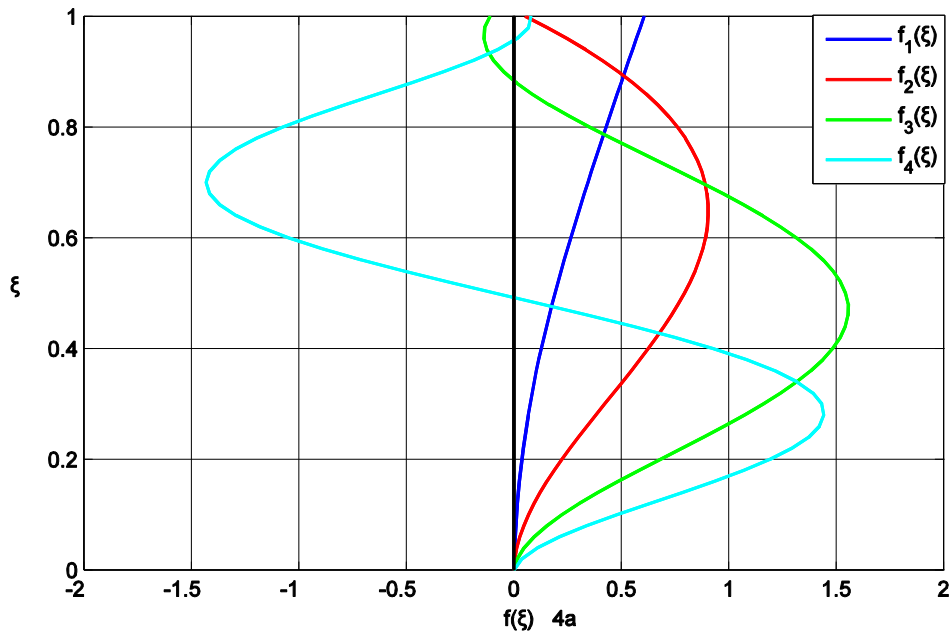
$$\varphi_1(x, \omega) = \cos \frac{\sqrt{\omega}}{c} x, \quad \varphi_2(x, \omega) = \sin \frac{\sqrt{\omega}}{c} x, \quad \varphi_3(x, \omega) = \cosh \frac{\sqrt{\omega}}{c} x, \quad \varphi_4(x, \omega) = \sinh \frac{\sqrt{\omega}}{c} x \quad (2.3.2.7)$$

όπου  $c = \sqrt[4]{\frac{EI(L)}{m(L)}}$  . Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τη σχέση (2.3.2.6) στις συνοριακές συνθήκες (2.3.2.5) και μετά από πράξεις φθάνουμε στο εξής:

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 1 & 0 \\
 -w & -\frac{\bar{k}_y}{\delta^4} & w & -\frac{\bar{k}_y}{\delta^4} \\
 \sin(w) + \frac{\bar{M}}{\delta^2} w \cos(w) & -\cos(w) + \frac{\bar{M}}{\delta^2} w \sin(w) & \sinh(w) + \frac{\bar{M}}{\delta^2} w \cosh(w) & \cosh(w) + \frac{\bar{M}}{\delta^2} w \sinh(w) \\
 -\cos(w) + \frac{\bar{J}}{\delta^2} w^3 \sin(w) & -\sin(w) - \frac{\bar{J}}{\delta^2} w^3 \cos(w) & \cosh(w) - \frac{\bar{J}}{\delta^2} w^3 \sinh(w) & \sinh(w) - \frac{\bar{J}}{\delta^2} w^3 \cosh(w)
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 c_1 \\
 c_2 \\
 c_3 \\
 c_4
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{Bmatrix}$$

(2.3.2.8)

όπου  $w = \sqrt{\frac{\omega}{\delta}}$ . Παρατηρούμε ότι οι παραπάνω εξισώσεις είναι αδιάστατες. Για να έχουμε μη μηδενική λύση πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών να μηδενίζεται. Από αυτή την απαίτηση βρίσκουμε τις τέσσερις πρώτες αδιάστατες ιδιοσυχνότητες  $\bar{\omega}_i$   $i=1,2,3,4$  καθώς και τους αντίστοιχους αδιάστατους συντελεστές  $c_{1i}, c_{2i}, c_{3i}, c_{4i}$   $i=1,2,3,4$ . Γνωρίζοντας τους παραπάνω συντελεστές υπολογίζουμε και τις αντίστοιχες αδιάστατες μη κανονικοποιημένες ιδιομορφές  $\varphi_i(x) = \bar{f}_i(\xi)$   $i=1,2,3,4$  που δίνονται από τη σχέση (2.3.2.6)-(2.3.2.7). Οι μορφές τους για τις μέσες τιμές των παραμέτρων του συστήματος όπως παρατίθενται στο κεφάλαιο 3 είναι οι ακόλουθες:



Σχήμα 2.3.1 2 Β' Οικογένεια δοκιμαστικών συναρτήσεων ('4α')

Ακολούθως εφαρμόζουμε τη μέθοδο των υποθετικών ιδιομορφών :

$$u(x,t) = \overline{f_1(\xi)}q_1(t) + \overline{f_2(\xi)}q_2(t) + \overline{f_3(\xi)}q_3(t) + \overline{f_4(\xi)}q_4(t) \quad (2.3.2.9)$$

όπως αναφέρεται στα εδάφια (1.3)., (2.2) και (2.3.1) (αδιάστατη μορφή) .

### **2.3.3) Γ' Οικογένεια δοκιμαστικών συναρτήσεων ('4b')**

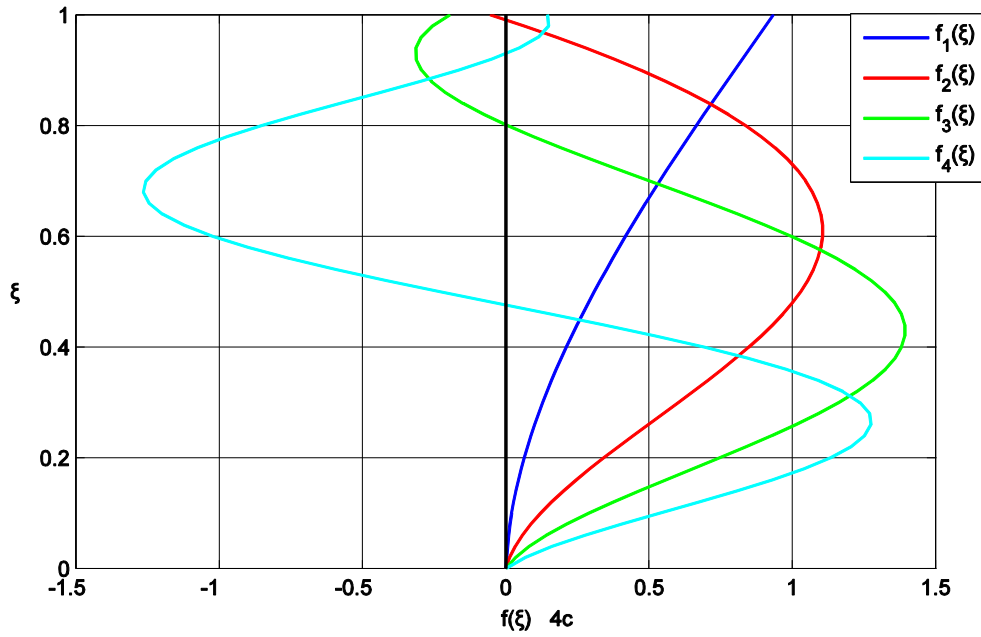
Θεωρούμε ως δοκιμαστικές συναρτήσεις τις τέσσερις πρώτες μη κανονικοποιημένες ιδιομορφές του προβλήματος ιδιοτιμών του πύργου ανεμογεννήτριας με σταθερή ακαμψία  $EI$  και σταθερή κατανομή μάζας  $m$  . Σε αυτήν την περίπτωση θεωρούμε ότι ο πύργος έχει την ακαμψία και την κατανομή μάζας της θέσης  $x = \frac{L}{2}$  δηλαδή  $EI = EI(\frac{L}{2})$  και  $m = m(\frac{L}{2})$  . Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με το εδάφιο 2.3.2 και φθάνουμε στις εξής εξισώσεις :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -w & -\frac{\overline{k_\Sigma}}{(a)^4} & w & -\frac{\overline{k_\Sigma}}{(a)^4} \\ \sin(w) + \frac{\overline{M}}{(a)^2} w \cos(w) & -\cos(w) + \frac{\overline{M}}{(a)^2} w \sin(w) & \sinh(w) + \frac{\overline{M}}{(a)^2} w \cosh(w) & \cosh(w) + \frac{\overline{M}}{(a)^2} w \sinh(w) \\ -\cos(w) + \frac{\overline{J}}{(a)^2} w^3 \sin(w) & -\sin(w) - \frac{\overline{J}}{(a)^2} w^3 \cos(w) & \cosh(w) - \frac{\overline{J}}{(a)^2} w^3 \sinh(w) & \sinh(w) - \frac{\overline{J}}{(a)^2} w^3 \cosh(w) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.3.3.1)$$

όπου  $\alpha = 0.5\delta + 0.5$  και  $w = \sqrt{\frac{\overline{\omega}}{(0.5\delta + 0.5)^2}}$  . Παρατηρούμε ότι οι παραπάνω

εξισώσεις είναι αδιάστατες. Για να έχουμε μη μηδενική λύση πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών να μηδενίζεται. Από αυτή την απαίτηση βρίσκουμε τις τέσσερις πρώτες αδιάστατες ιδιοσυχνότητες  $\overline{\omega}_i$   $i = 1, 2, 3, 4$  καθώς και τους αντίστοιχους αδιάστατους συντελεστές  $c_{1i}, c_{2i}, c_{3i}, c_{4i}$   $i = 1, 2, 3, 4$  . Γνωρίζοντας τους παραπάνω συντελεστές υπολογίζουμε και τις αντίστοιχες αδιάστατες μη κανονικοποιημένες ιδιομορφές  $\varphi_i(x) = \overline{f_i(\xi)}$   $i = 1, 2, 3, 4$  που δίνονται από τη σχέση (2.3.2.6)-(2.3.2.7). Οι μορφές τους για τις μέσες τιμές των παραμέτρων του συστήματος όπως παρατίθενται στο κεφάλαιο 3 είναι οι ακόλουθες:





Σχήμα 2.3.1 3 Γ' Οικογένεια δοκιμαστικών συναρτήσεων ('4b')

Ακολουθώντας εφαρμόζουμε τη μέθοδο των υποθετικών ιδιομορφών :

$$u(x,t) = \overline{f_1(\xi)}q_1(t) + \overline{f_2(\xi)}q_2(t) + \overline{f_3(\xi)}q_3(t) + \overline{f_4(\xi)}q_4(t) \quad (2.3.3.2)$$

όπως αναφέρεται στα εδάφια (1.3)., (2.2) και (2.3.1) (αδιάστατη μορφή) .

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ

Στο τρέχον κεφάλαιο θα πραγματοποιηθεί παραμετρική μελέτη για όλες τις παραμέτρους του συστήματος. Στον παρακάτω πίνακα παρατίθενται οι μέσες τιμές των παραμέτρων καθώς και το εύρος τους

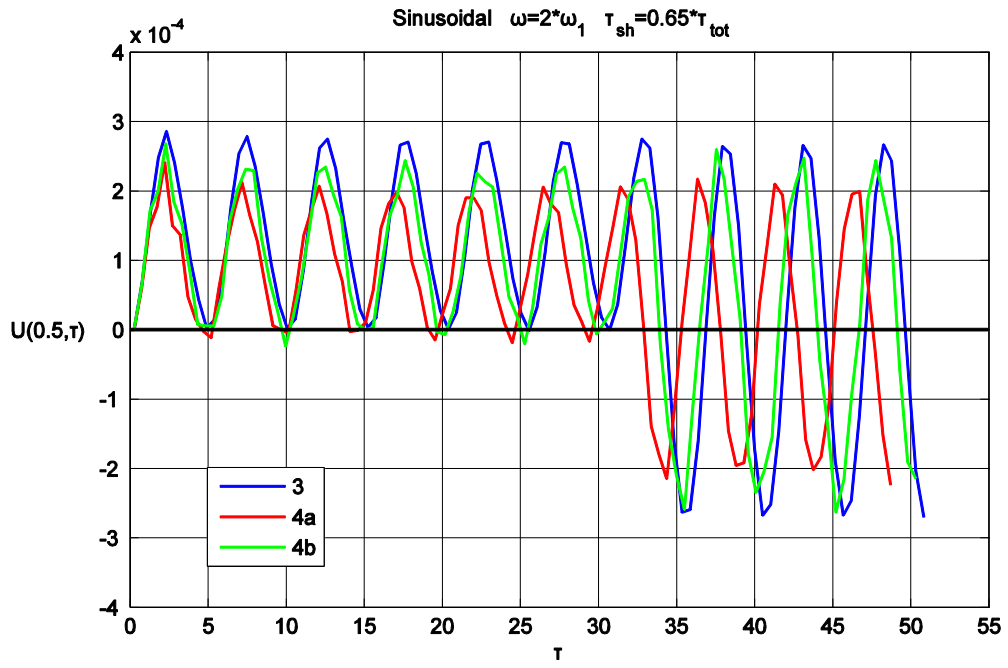
Μέσες τιμές	Εύρος τιμών
$\delta = 0.5$	$\delta = 0.4 \div 0.8$
$\lambda = 20$	$\lambda = 16 \div 24$
$\sigma = 16$	$\sigma = 16 \div 24$
$E = 25 \text{ Gpa}$	$E = 20 \div 30 \text{ Gpa}$
$u_{av} = 10 \text{ m/sec}$	$u_{av} = 5 \div 35 \text{ m/sec}$
$\omega = 2 * \omega_1$	$\omega = (0.5 \div 2.5) * \omega_1$
$M_{mot} = 1000 \text{ kg}$	$M_{mot} = 500 \div 6000 \text{ kg}$
$J = 0.0352 M_{\pi\pi} L^2$	$J = (0.02 \div 0.05) M_{\pi\pi} L^2$
$c_{soil} = 0.1 * 10^7 \text{ N/m}^3$	$c_{soil} = (0.05 \div 0.3) * 10^7 \text{ N/m}^3$
$\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$	$\rho = (500 \div 2000) \text{ kg/m}^3$
$L = 15 \text{ m}$	$L = 5 \div 30 \text{ m}$

### 3.1) Σύγκριση των τριών οικογενειών δοκιμαστικών συναρτήσεων ('3'-'4a'-'4b')

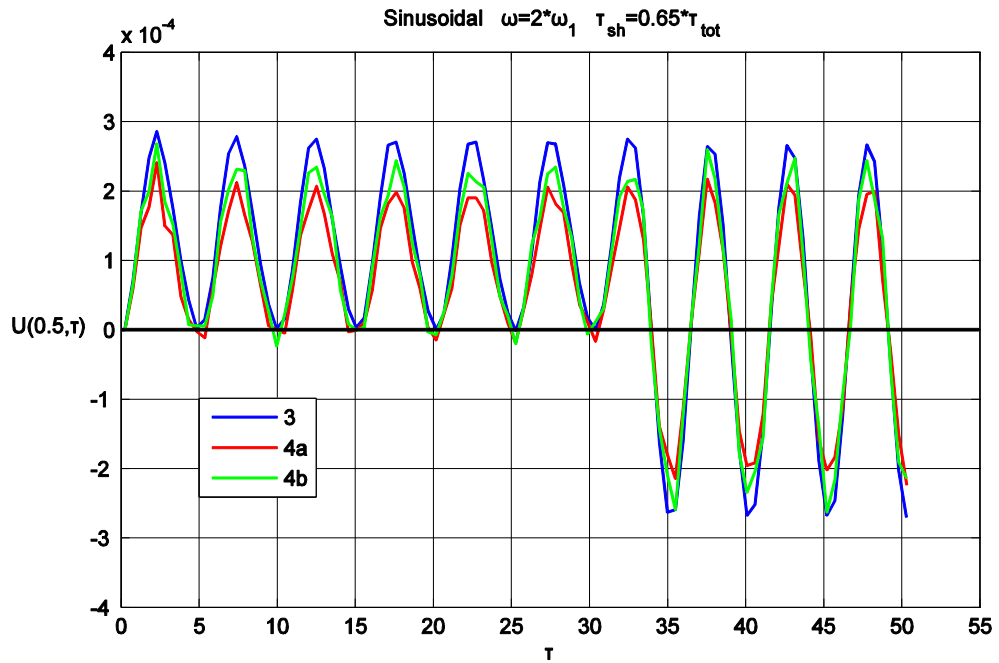
Στο παρόν εδάφιο θα γίνει σύγκριση των τριών οικογενειών δοκιμαστικών συναρτήσεων για τις μέσες τιμές του παραπάνω πίνακα.

Στο **Σχήμα 3.1 1** φαίνεται η απόκριση του μέσου  $\xi = 0.5$  του πύργου της ανεμογεννήτριας για την ημιτονοειδή φόρτιση. Τα '3' και '4b' δίνουν περίπου την ίδια θεμελιώδη ιδιοσυχνότητα και μικρότερη από το '4a'. Ανάγοντας όλα στην ίδια μονάδα του χρόνου έχουμε το **Σχήμα 3.1 2** στο οποίο φαίνεται ότι το '3' μας δίνει μεγαλύτερη απόκριση ενώ τα '4a' και '4b' δίνουν όμοιες αποκρίσεις. Στην ελεύθερη ταλάντωση οι καμπύλες σχεδόν ταυτίζονται.

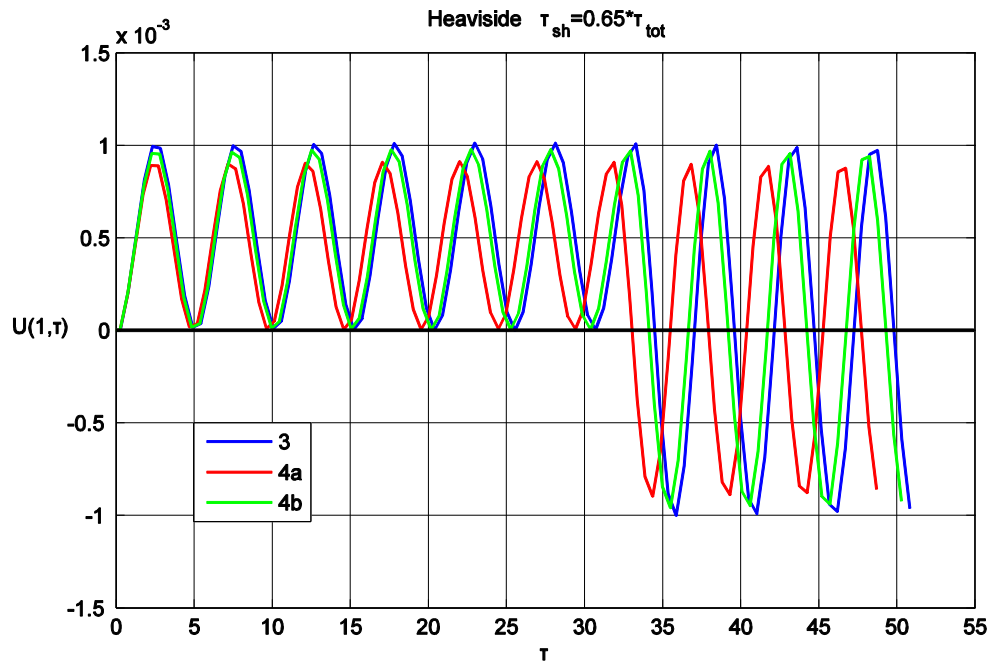
Στο **Σχήμα 3.1 3** φαίνεται η απόκριση του άκρου  $\xi = 1$  του πύργου της ανεμογεννήτριας για τη φόρτιση βήματος. Τα '3' και '4b' δίνουν περίπου την ίδια θεμελιώδη ιδιοσυχνότητα και μικρότερη από το '4a'. Ανάγοντας όλα στην ίδια μονάδα του χρόνου έχουμε το **Σχήμα 3.1 4** στο οποίο φαίνεται ότι οι καμπύλες ταυτίζονται.



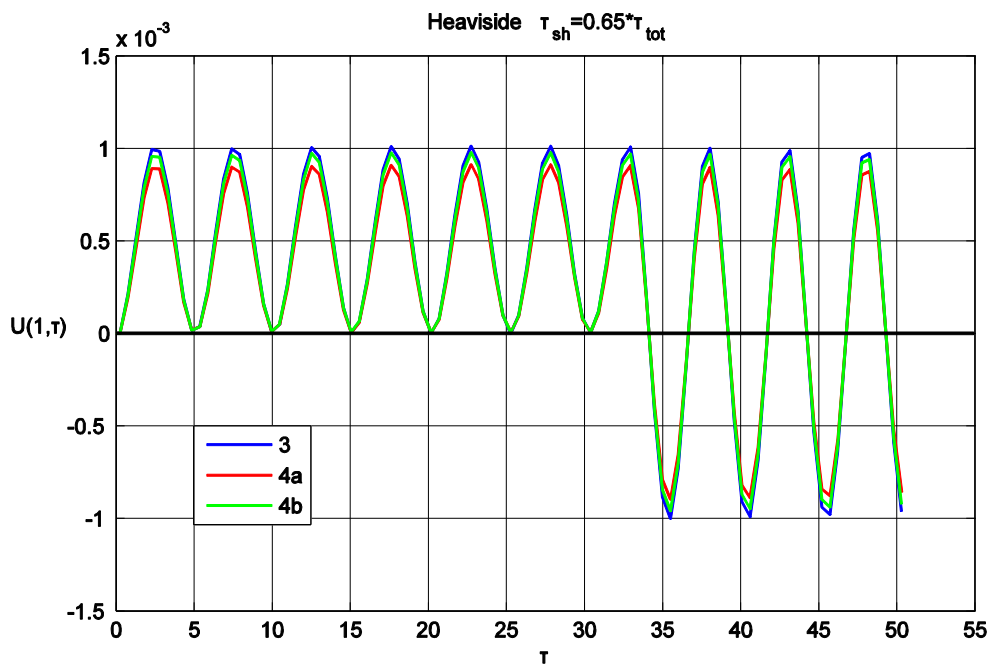
Σχήμα 3.1 1



Σχήμα 3.1 2

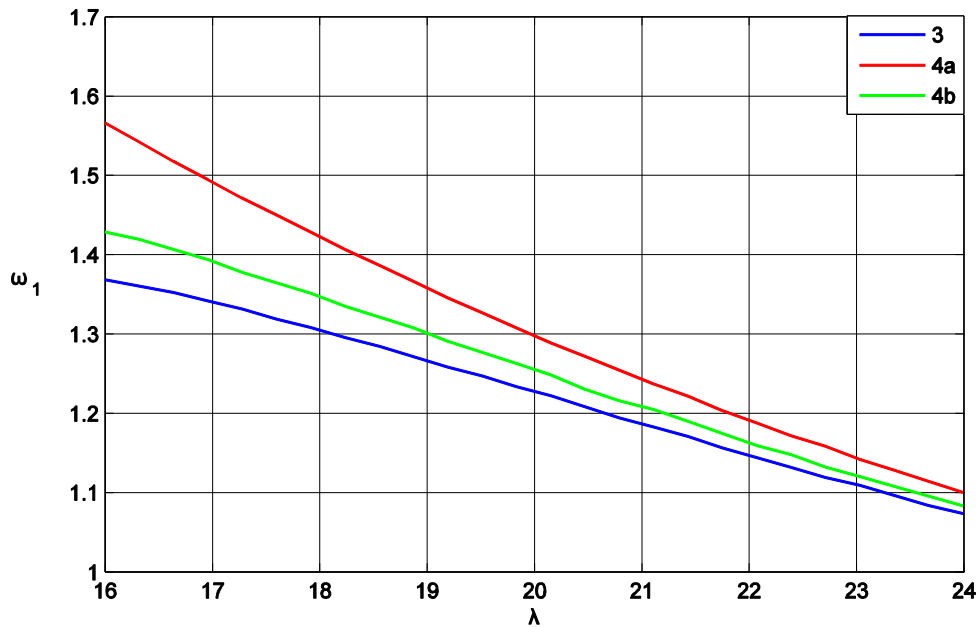


Σχήμα 3.1 3

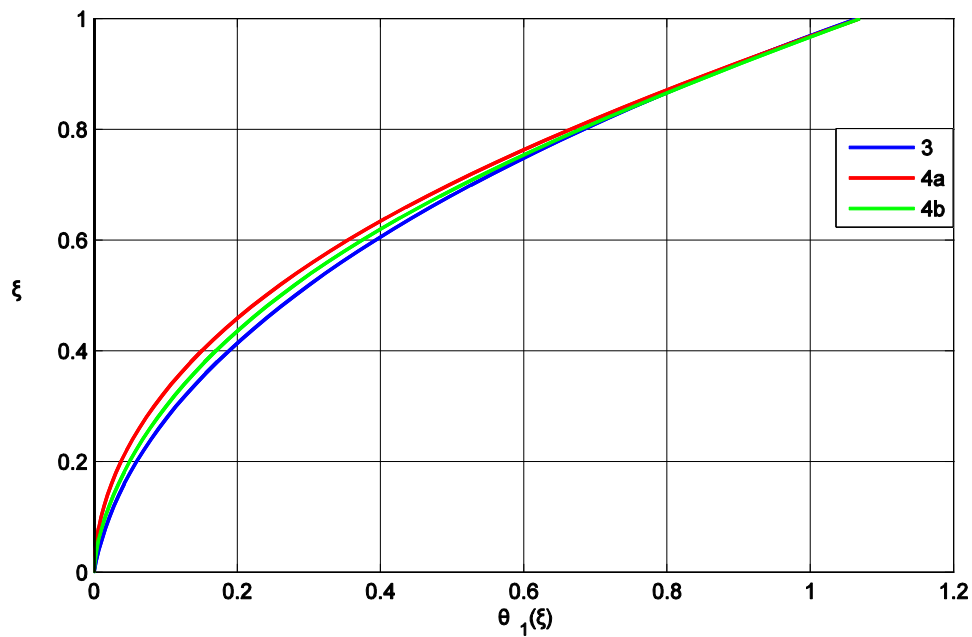


Σχήμα 3.1 4

Στο **Σχήμα 3.1 5** απεικονίζεται η μεταβολή της αδιάστατης θεμελιώδους ιδιοσυχνότητας  $\omega_1$  καθώς μεταβάλλεται το  $\lambda$ . Παρατηρείται η πολύ καλή προσέγγιση για τις τρεις οικογένειες δοκιμαστικών συναρτήσεων. Στο **Σχήμα 3.1 6** παρατηρείται ότι για την πρώτη ιδιομορφή  $\theta_1(\xi)$  υπάρχει πολύ καλή προσέγγιση των τριών οικογενειών καθώς οι καμπύλες σχεδόν ταυτίζονται.

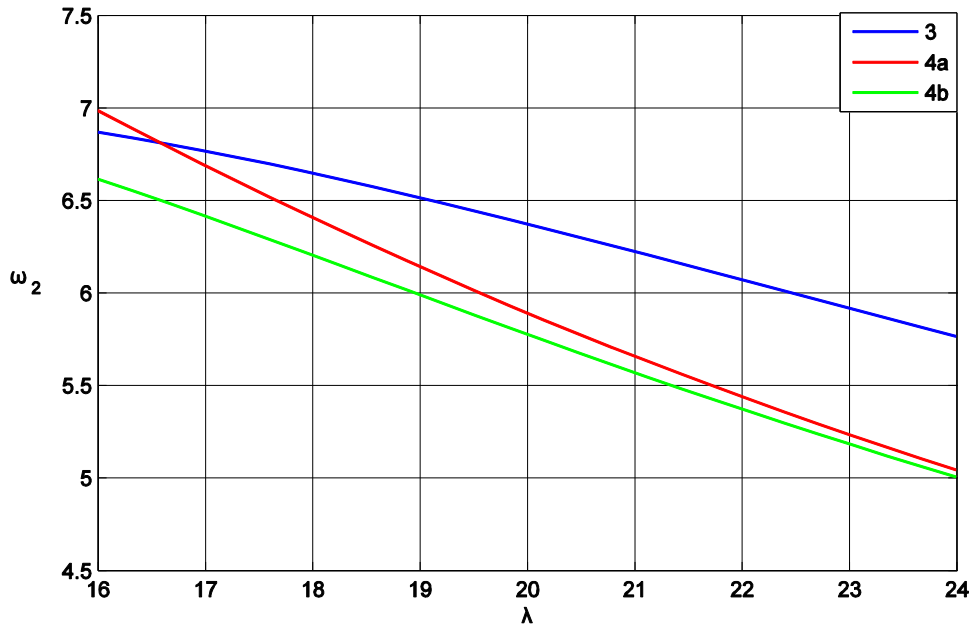


Σχήμα 3.1 5

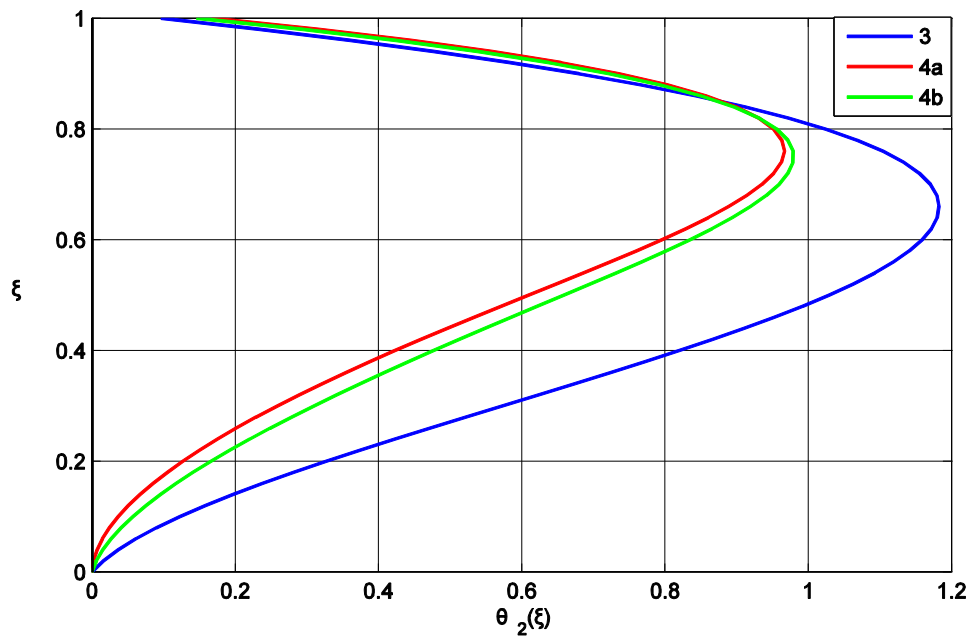


Σχήμα 3.1 6

Στο **Σχήμα 3.1 7** απεικονίζεται η μεταβολή της αδιάστατης ιδιοσυχνότητας  $\omega_2$  καθώς μεταβάλλεται το  $\lambda$ . Παρατηρείται η πολύ καλή προσέγγιση για τις οικογένειες '4a' και '4b' σε σχέση με την '3' που αποκλίνει λίγο κάτω που φαίνεται και στο **Σχήμα 3.1 6** όπου απεικονίζεται η δεύτερη ιδιομορφή  $\theta_2(\xi)$ .

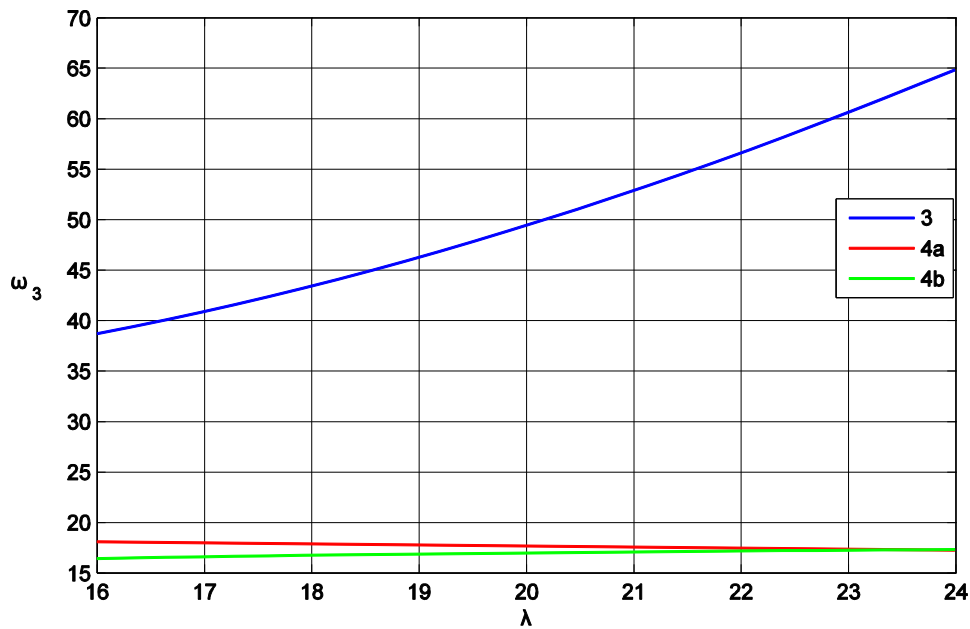


Σχήμα 3.1 7

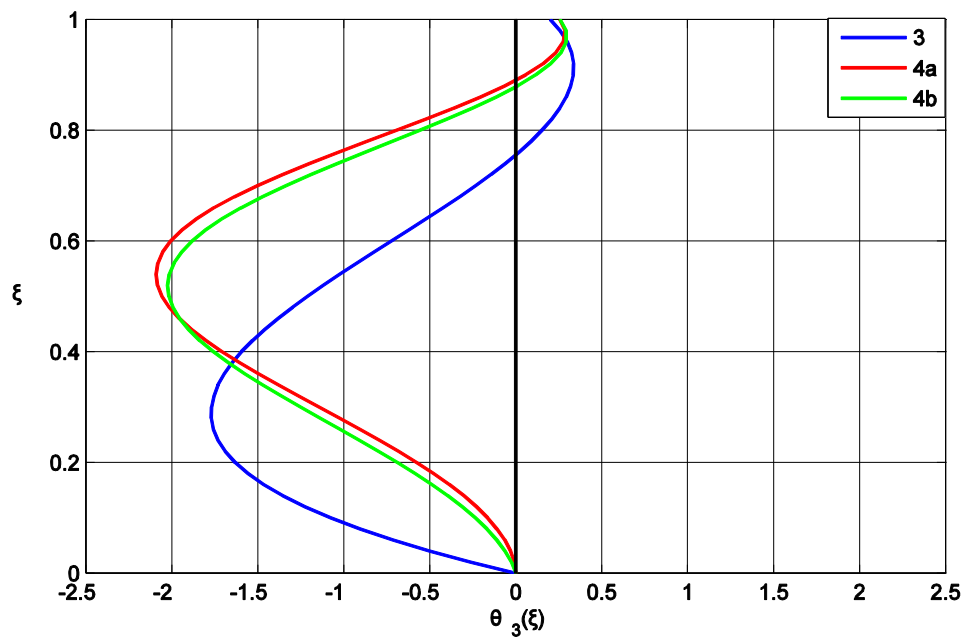


Σχήμα 3.1 8

Στο **Σχήμα 3.1 9** φαίνεται ότι για την τρίτη αδιάστατη ιδιοσυχνότητα  $\omega_3$  η απόκλιση για την οικογένεια '3' γίνεται πολύ μεγάλη σε σχέση με τις οικογένειες '4a' και '4b' όπου έχουμε πολύ καλή προσέγγιση. Το **Σχήμα 3.1 10**, όπου απεικονίζεται η τρίτη ιδιομορφή  $\theta_3(\xi)$  επιβεβαιώνει την απόκλιση της οικογένειας '3'.

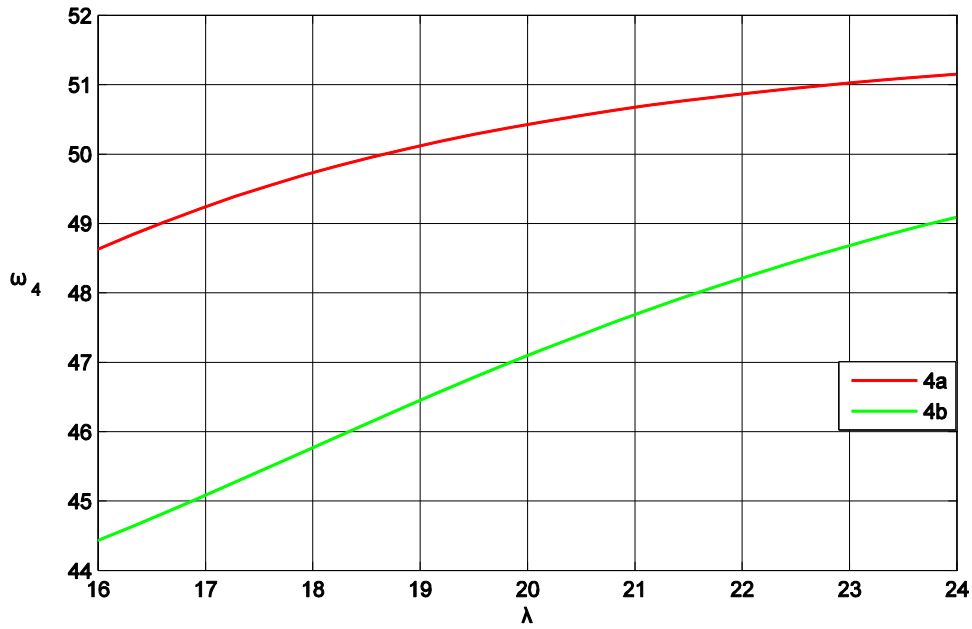


Σχήμα 3.1 9

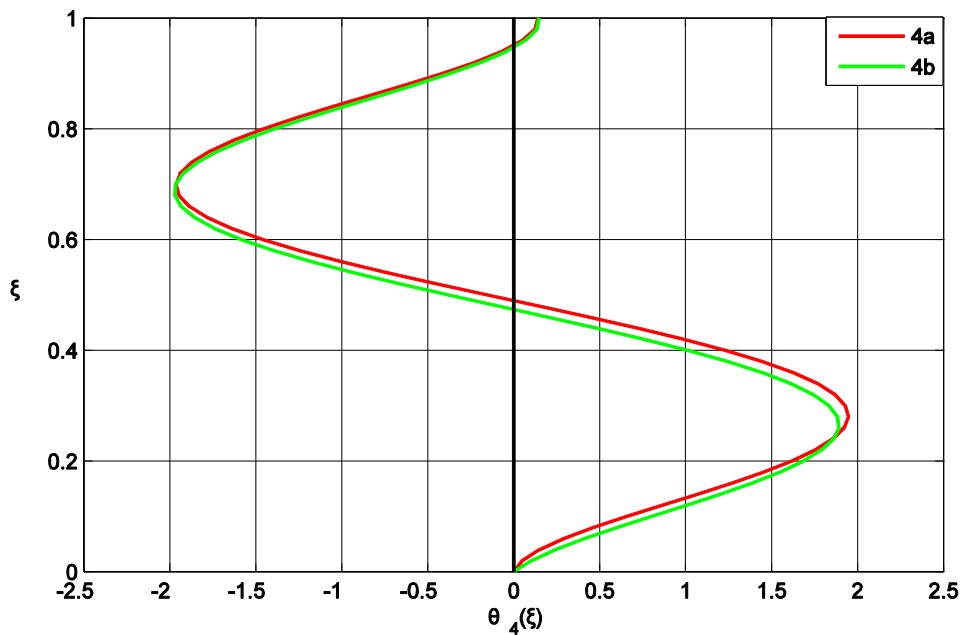


Σχήμα 3.1 10

Στο **Σχήμα 3.1 11** καθώς και στο **Σχήμα 3.1 12** φαίνεται ότι έχουμε πολύ καλή προσέγγιση για τις οικογένειες ‘4a’ και ‘4b’ για την τέταρτη αδιάστατη ιδιοσυχνότητα  $\omega_4$  και για την τέταρτη ιδιομορφή  $\theta_4(\xi)$  αντίστοιχα.



Σχήμα 3.1 11



Σχήμα 3.1 12



## **3.2) Παραμετρική μελέτη με το ‘4b’ χωρίς απόσβεση**

Στο παρόν εδάφιο πραγματοποιείται παραμετρική μελέτη ως προς τις παραμέτρους του συστήματος χρησιμοποιώντας την ‘4b’ οικογένεια δοκιμαστικών συναρτήσεων. Αυτό γίνεται διότι η πραγματική μη σταθερή ακαμψία  $EI(x)$  - μάζα  $m(x)$  του πύργου ανεμογεννήτριας προσεγγίζεται καλύτερα με την τιμή της ακαμψίας -μάζας που έχει στο μέσο  $x = L/2$  παρά με αυτή που έχει στο άκρο  $x = L$ . Σε όλες τις περιπτώσεις κρατάμε σταθερές τις default τιμές και μεταβάλλουμε τις παραμέτρους ως προς οποίες κάνουμε την παραμετρική μελέτη.

Όπως αναφέρεται και στο εδάφιο 2.1 στην παρούσα διπλωματική εργασία χρησιμοποιούνται δύο είδη φόρτισης ανέμου οι οποίες είναι η συνάρτηση βήματος και η ημιτονοειδής φόρτιση. Και στις δύο περιπτώσεις ο χρόνος εφαρμογής της φόρτισης είναι ίσος με το 65% του συνολικού χρόνου ο οποίος είναι ίσος με 10 ιδιοπεριόδους  $T_1 = 2\pi/\omega_1$ . Μετά την αφαίρεση της φόρτισης ο πύργος κάνει ελεύθερη ταλάντωση με αρχικές συνθήκες τις τελικές συνθήκες της εξαναγκασμένης ταλάντωσης. Στην περίπτωση της ημιτονοειδούς φόρτισης η συχνότητα της διεγείρουσας δύναμη είναι διπλάσια από τη θεμελιώδη  $\omega = 2\omega_1$ .

### **3.2.1) Παραμετρική μελέτη ως προς τη μεταβολής της διατομής κατά μήκος του άξονα του πύργου $\delta$**

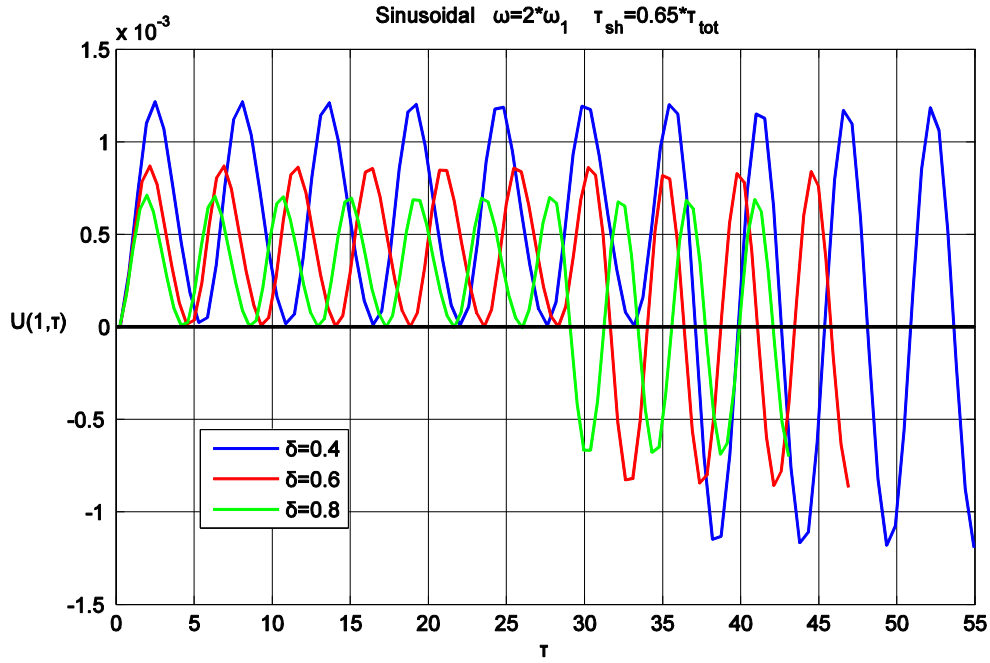
Στο **Σχήμα 3.2.1 1** απεικονίζεται η απόκριση του άκρου του πύργου της ανεμογεννήτριας για τις τιμές  $\delta = 0.4$   $\delta = 0.6$   $\delta = 0.8$  για ημιτονοειδή φόρτιση. Παρατηρείται ότι καθώς το  $\delta$  αυξάνεται, δηλαδή καθώς ο πύργος «παχαίνει», έχουμε μείωση της απόκρισης

Στο **Σχήμα 3.2.1 2** απεικονίζεται το μέγιστο της απόκρισης του άκρου του πύργου της ανεμογεννήτριας συναρτήσει του  $\delta$  για διάφορες τιμές του  $\lambda$ . Παρατηρούμε ότι για σταθερό  $\lambda$  το μέγιστο της απόκρισης μειώνεται με την αύξηση του  $\delta$ . Για σταθερό  $\delta$  το μέγιστο της απόκρισης αυξάνει με την αύξηση του  $\lambda$ .

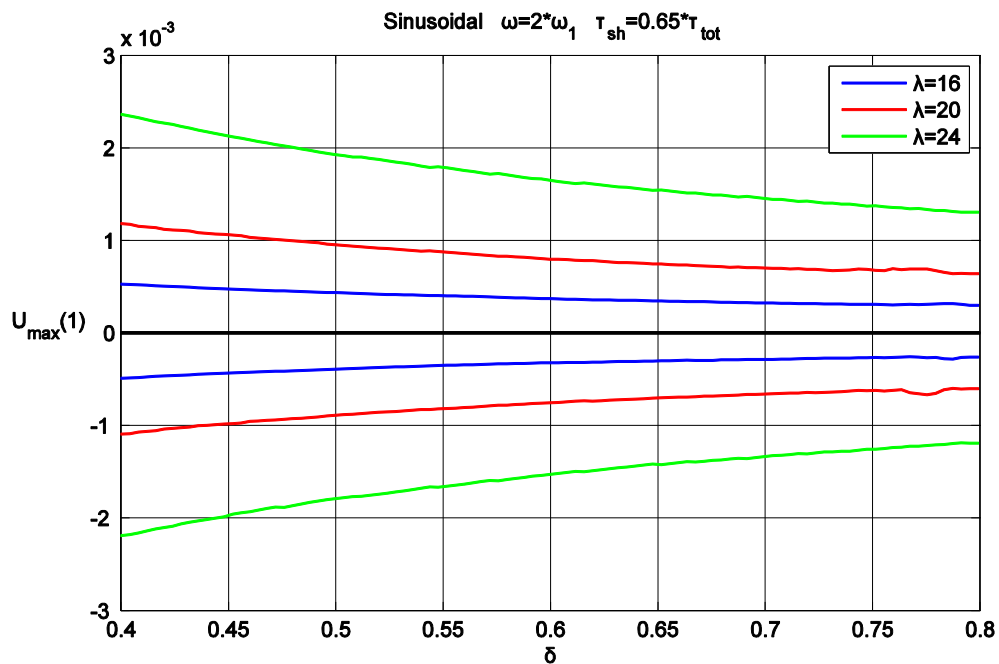
Στο **Σχήμα 3.2.1 3** απεικονίζονται τα μέγιστα της ροπής κάμψης  $M_{\max}$  και παρατηρείται ότι με την αύξηση του  $\delta$  έχουμε μείωση των ροπών κάμψεων. Όσον αφορά τις μέγιστες τέμνουσες  $Q_{\max}$ , όπως φαίνεται στο **Σχήμα 3.2.1 4**, κοντά στη βάση και στην κορυφή αυξάνονται με την αύξηση του  $\delta$ .

Στο **Σχήμα 3.2.1 5** απεικονίζονται οι αδιάστατες ιδιοσυχνότητες  $\omega_i$  συναρτήσει του  $\delta$  και παρατηρείται αύξηση των ιδιοσυχνοτήτων με την αύξηση του  $\delta$ .

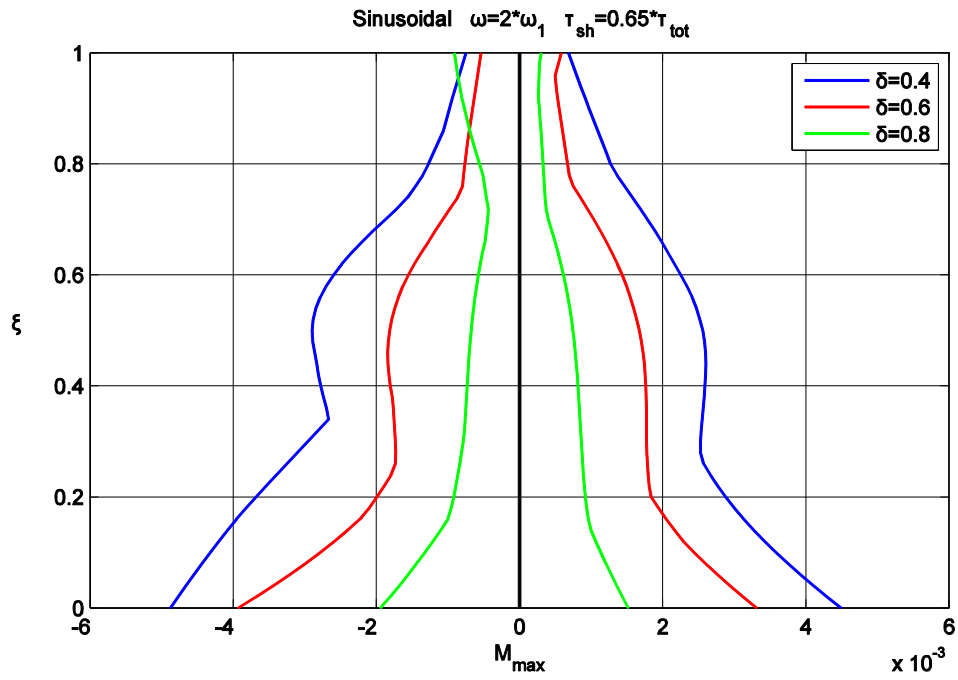
Στο επισυναπτόμενο CD-ROM στο φάκελο  $\delta$  του φακέλου Videos παρατίθενται τα βίντεο για τις περιπτώσεις  $\delta = 0.4$   $\delta = 0.8$ .



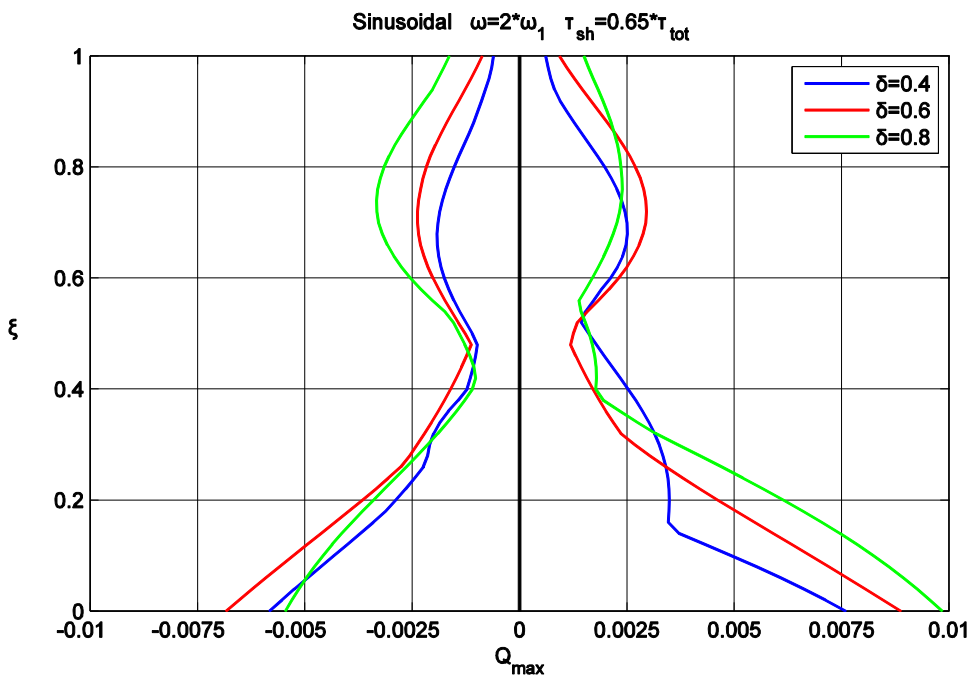
Σχήμα 3.2.1 1



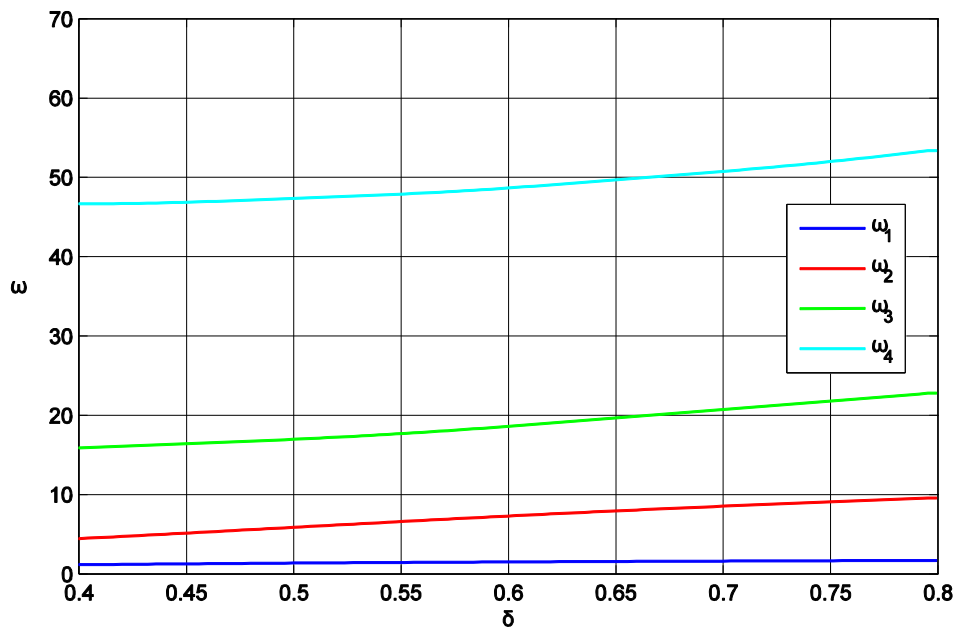
Σχήμα 3.2.1 2



Σχήμα 3.2.1 3



Σχήμα 3.2.1 4



Σχήμα 3.2.1.5

### 3.2.2) Παραμετρική μελέτη ως προς τη λυγρηρότητα του πύργου λ

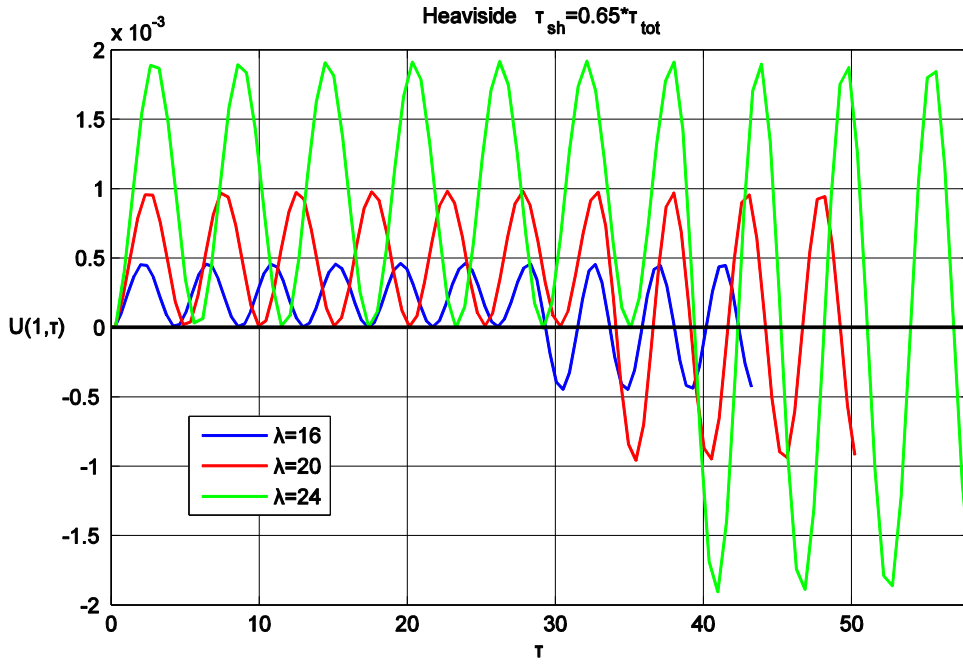
Στο **Σχήμα 3.2.2 1** απεικονίζεται η απόκριση του άκρου του πύργου της ανεμογεννήτριας για τις τιμές  $\lambda=16$   $\lambda=20$   $\lambda=24$  για φόρτιση συνάρτηση βήματος. Παρατηρείται ότι καθώς το  $\lambda$  αυξάνεται έχουμε σημαντική αύξηση της απόκρισης.

Στο **Σχήμα 3.2.2 2** απεικονίζεται το μέγιστο της απόκρισης του άκρου του πύργου της ανεμογεννήτριας συναρτήσει του  $\lambda$  για διάφορες τιμές του  $\delta$ . Παρατηρούμε ότι για σταθερό  $\delta$  το μέγιστο της απόκρισης αυξάνεται με την αύξηση του  $\lambda$ . Για σταθερό  $\lambda$  το μέγιστο της απόκρισης μειώνεται με την αύξηση του  $\delta$ .

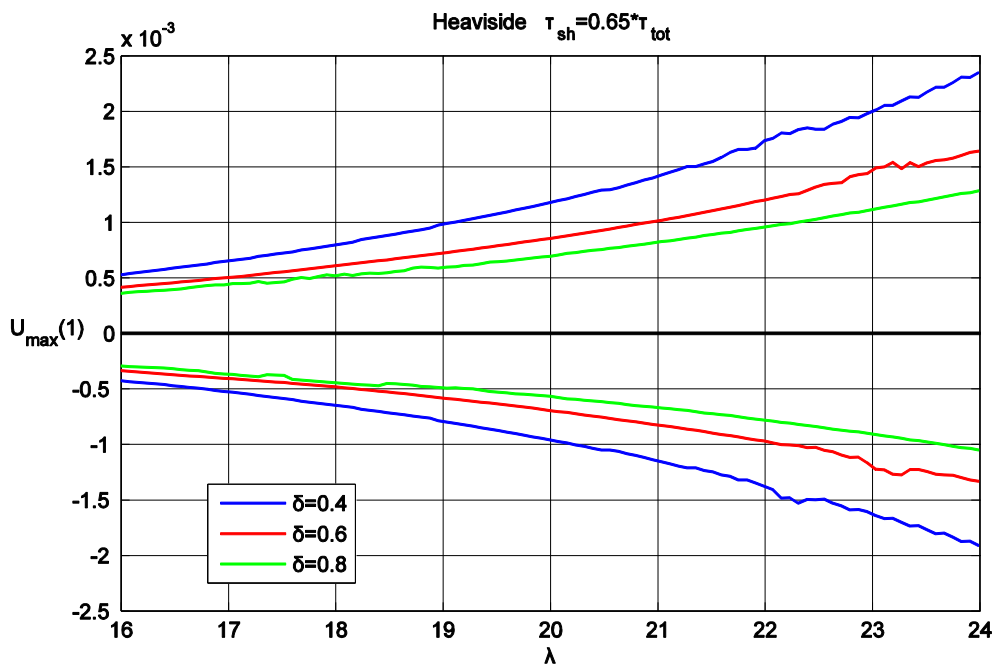
Στο **Σχήμα 3.2.2 3** απεικονίζονται τα μέγιστα της ροπής κάμψης  $M_{\max}$  και παρατηρείται ότι με την αύξηση του  $\lambda$  έχουμε σημαντική αύξηση των ροπών κάμψεων. Όσον αφορά τις μέγιστες τέμνουσες  $Q_{\max}$ , όπως φαίνεται στο **Σχήμα 3.2.2 4**, για  $\lambda=16$  και  $\lambda=20$  έχουμε μικρές μεταβολές ενώ για  $\lambda=24$  έχουμε μεγάλη αύξηση.

Στο **Σχήμα 3.2.2 5** απεικονίζονται οι αδιάστατες ιδιοσυχνότητες  $\omega_i$  συναρτήσει του  $\lambda$  και παρατηρείται ότι για  $\omega_1, \omega_2$  έχουμε μείωση ενώ για  $\omega_3, \omega_4$  έχουμε αύξηση με την αύξηση του  $\lambda$ .

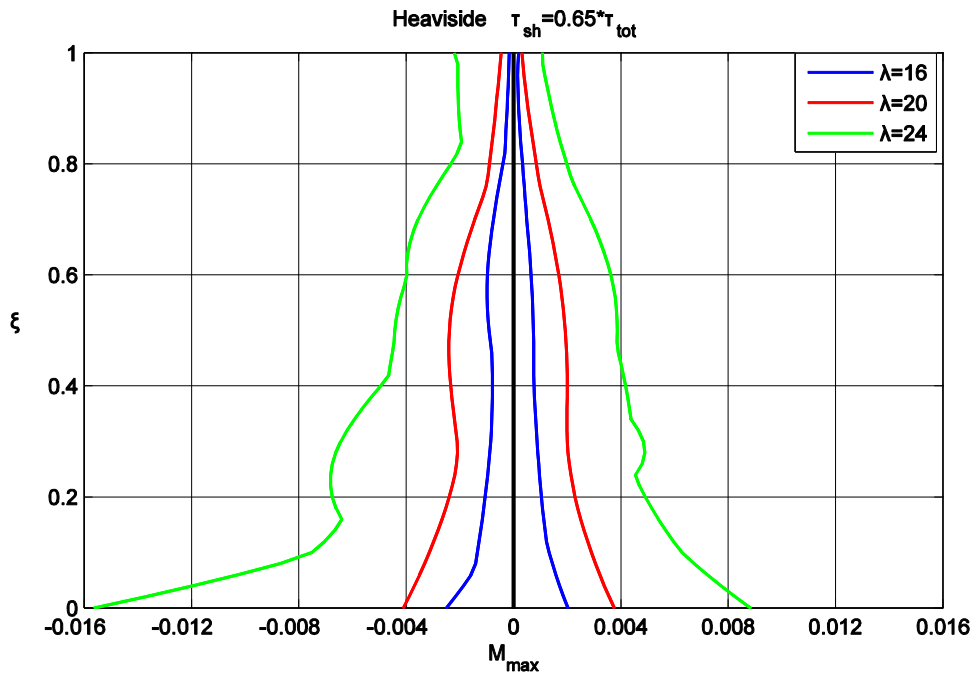
Στο επισυναπτόμενο CD-ROM στο φάκελο  $\lambda$  του φακέλου Videos παρατίθενται τα βίντεο για τις περιπτώσεις  $\lambda=16$   $\lambda=20$ .



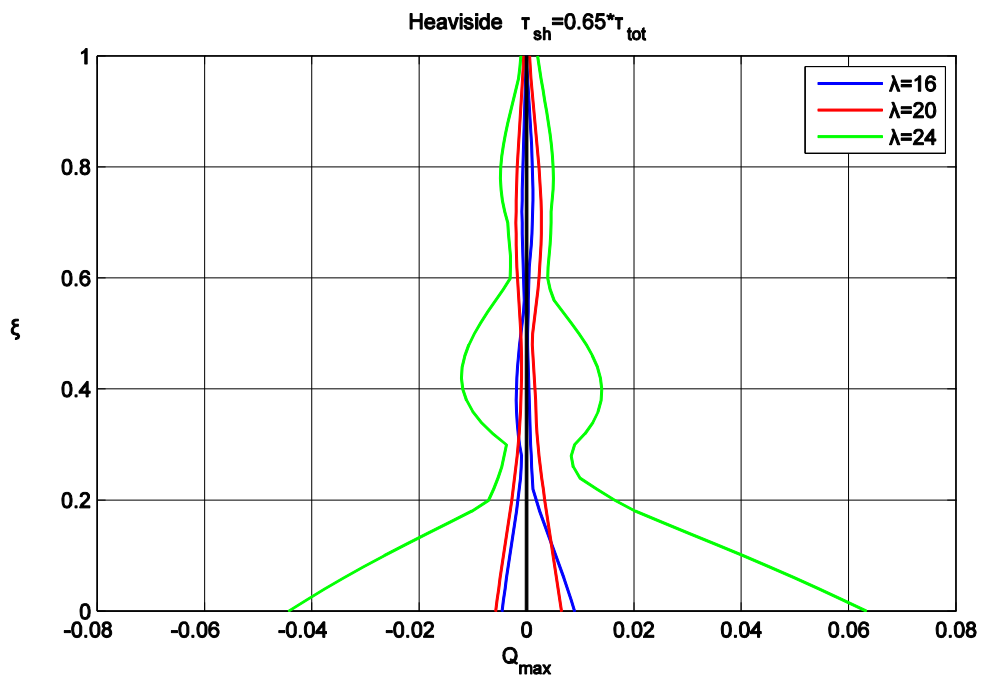
Σχήμα 3.2.2 1



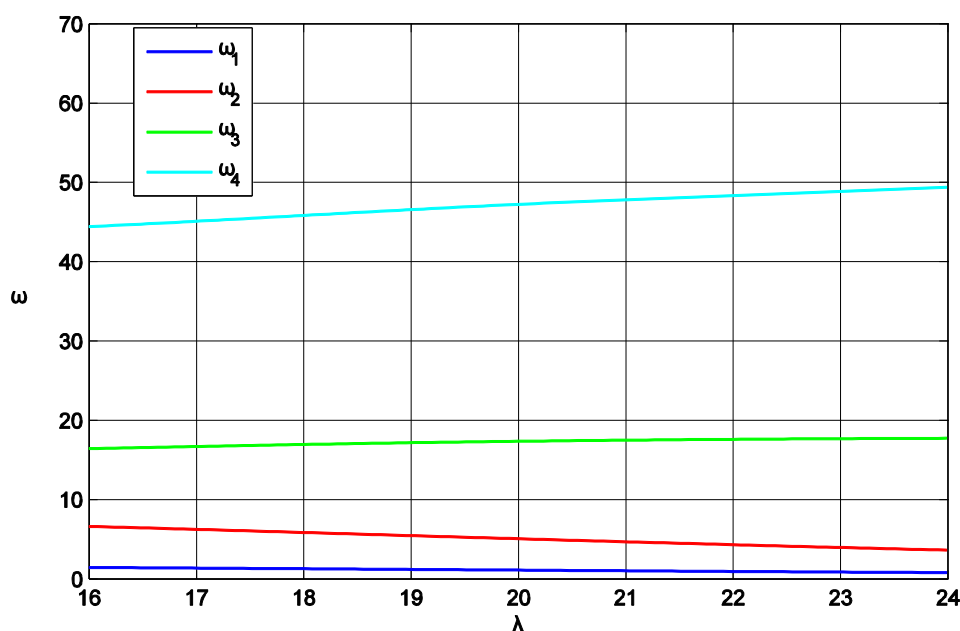
Σχήμα 3.2.2 2



Σχήμα 3.2.2 3



Σχήμα 3.2.2 4



Σχήμα 3.2.2.5

### 3.2.3) Παραμετρική μελέτη ως προς το πάχος του κελύφους $\sigma$

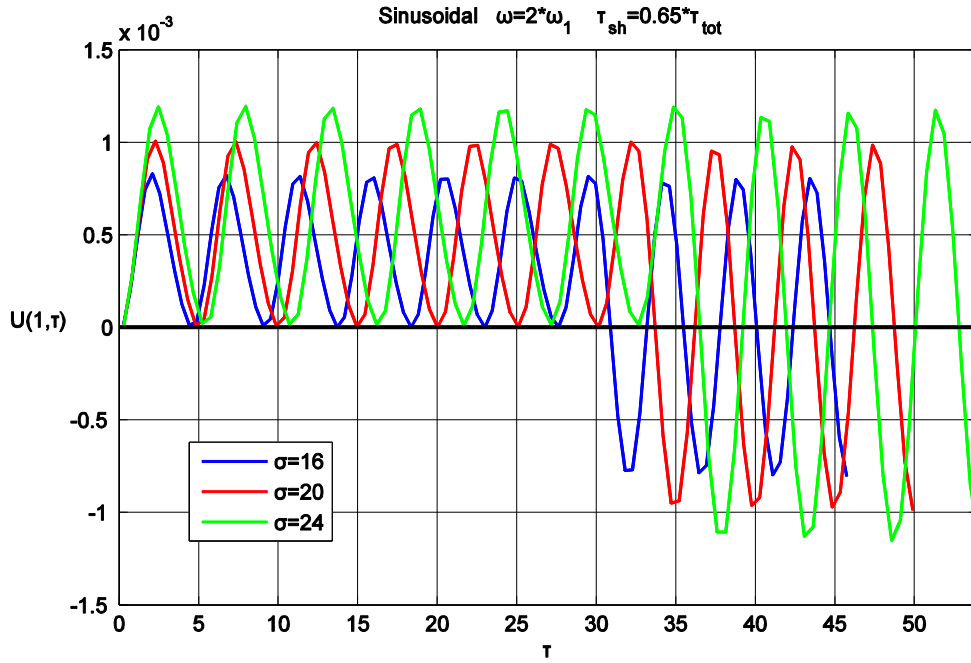
Στο Σχήμα 3.2.3 1 απεικονίζεται η απόκριση του άκρου του πύργου της ανεμογεννήτριας για τις τιμές  $\sigma=16$   $\sigma=20$   $\sigma=24$  για ημιτονοειδής φόρτιση. Παρατηρείται ότι καθώς το  $\sigma$  αυξάνεται έχουμε αύξηση της απόκρισης.

Στο Σχήμα 3.2.3 2 απεικονίζεται το μέγιστο της απόκρισης του άκρου του πύργου της ανεμογεννήτριας συναρτήσει του  $\sigma$  για διάφορες τιμές του  $\delta$ . Παρατηρούμε ότι για σταθερό  $\delta$  το μέγιστο της απόκρισης αυξάνεται με την αύξηση του  $\sigma$ . Για σταθερό  $\sigma$  το μέγιστο της απόκρισης μειώνεται με την αύξηση του  $\delta$ .

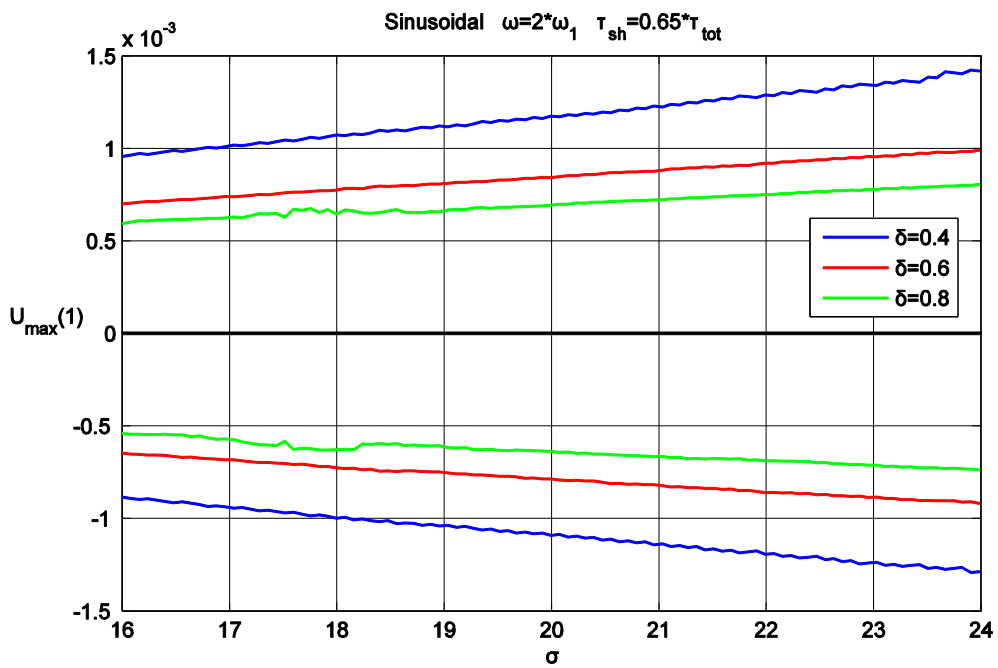
Στο Σχήμα 3.2.3 3 απεικονίζονται τα μέγιστα της ροπής κάμψης  $M_{\max}$  και παρατηρείται ότι με την αύξηση του  $\sigma$  έχουμε σημαντική αύξηση των ροπών κάμψεων. Το ίδιο ισχύει και για τις μέγιστες τέμνουσες  $Q_{\max}$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.2.3 4.

Στο Σχήμα 3.2.2 5 απεικονίζονται οι αδιάστατες ιδιοσυχνότητες  $\omega_i$  συναρτήσει του  $\sigma$  και παρατηρείται ότι για  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  έχουμε μείωση ενώ για  $\omega_4$  έχουμε αύξηση με την αύξηση του  $\sigma$ .

Στο επισυναπτόμενο CD-ROM στο φάκελο  $\sigma$  του φακέλου Videos παρατίθενται τα βίντεο για τις περιπτώσεις  $\sigma=16$   $\sigma=20$ .

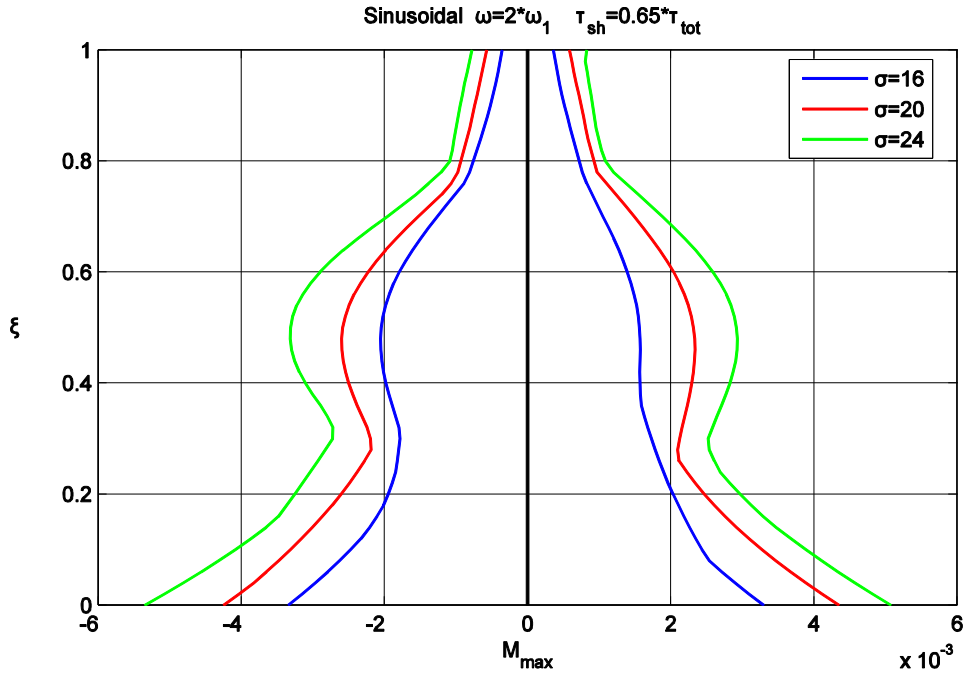


Σχήμα 3.2.3 1

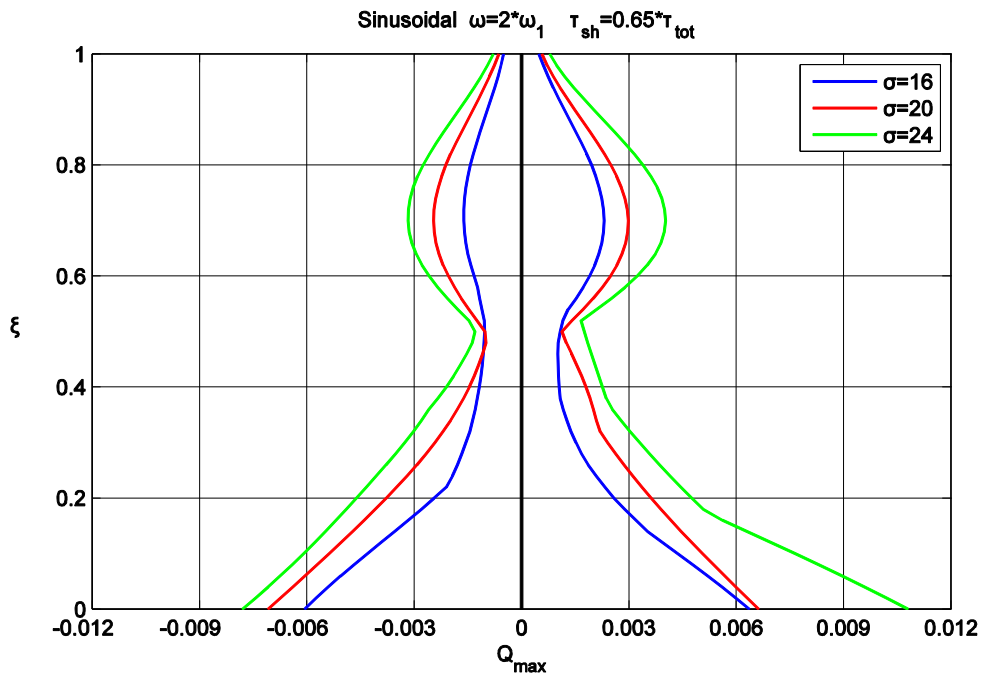


Σχήμα 3.2.3 2

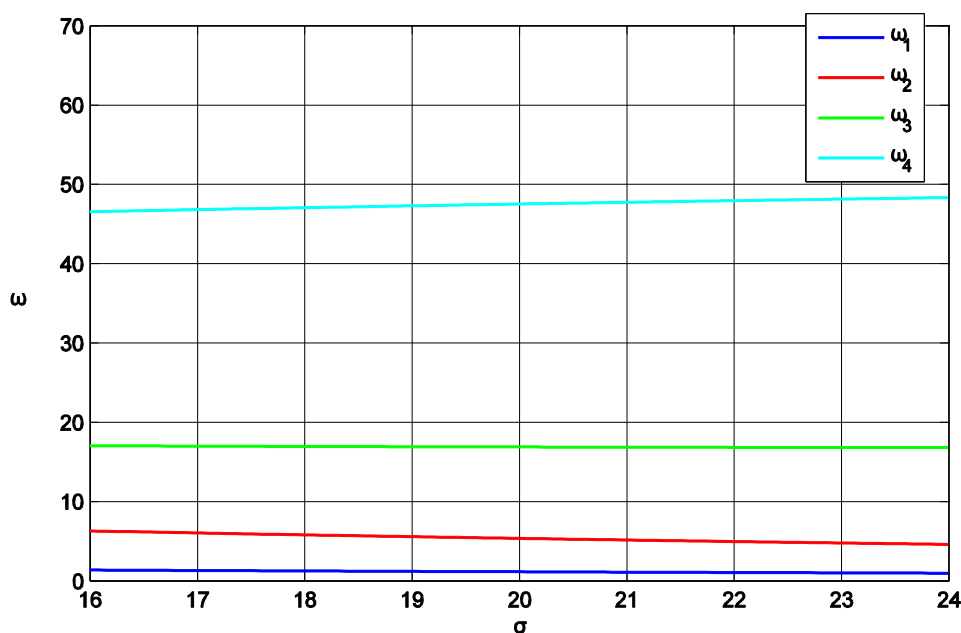




Σχήμα 3.2.3 3



Σχήμα 3.2.3 4



Σχήμα 3.2.3 5

### 3.2.4) Παραμετρική μελέτη ως προς το μέτρο ελαστικότητας E

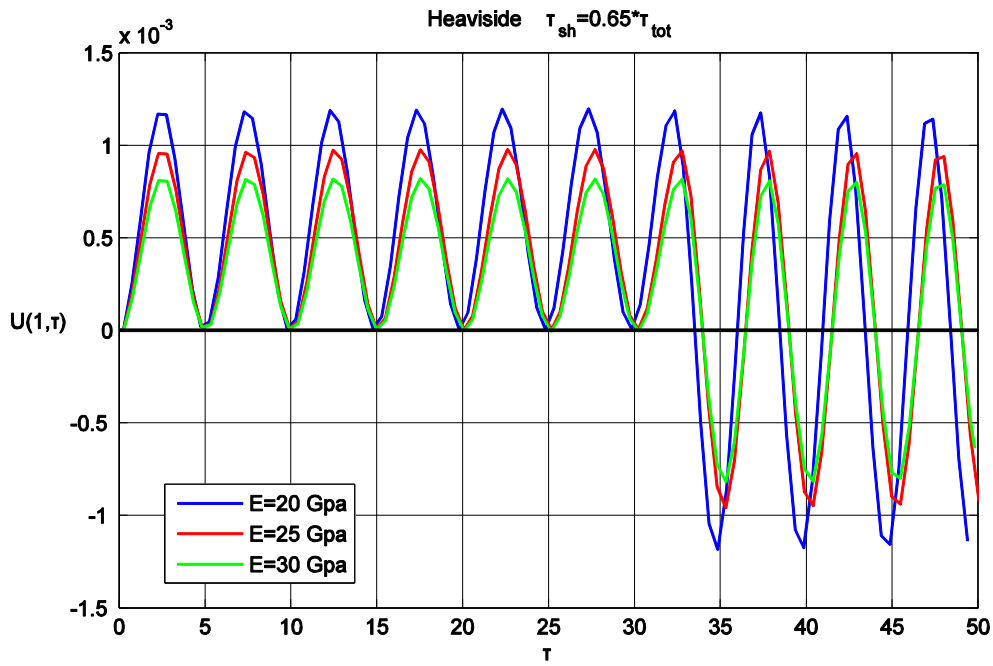
Στο **Σχήμα 3.2.4 1** απεικονίζεται η απόκριση του άκρου του πύργου της ανεμογεννήτριας για τις τιμές  $E = 20 \text{ Gra}$   $E = 25 \text{ Gra}$   $E = 30 \text{ Gra}$  για φόρτιση συνάρτηση βήματος. Παρατηρείται ότι καθώς το  $E$  αυξάνεται έχουμε μείωση της απόκρισης.

Στο **Σχήμα 3.2.4 2** απεικονίζεται το μέγιστο της απόκρισης του άκρου του πύργου της ανεμογεννήτριας συναρτήσει του  $E$  για διάφορες τιμές του  $\sigma$ . Παρατηρούμε ότι για σταθερό  $\sigma$  το μέγιστο της απόκρισης μειώνεται με την αύξηση του  $E$ . Για σταθερό  $E$  το μέγιστο της απόκρισης αυξάνεται με την αύξηση του  $\sigma$ .

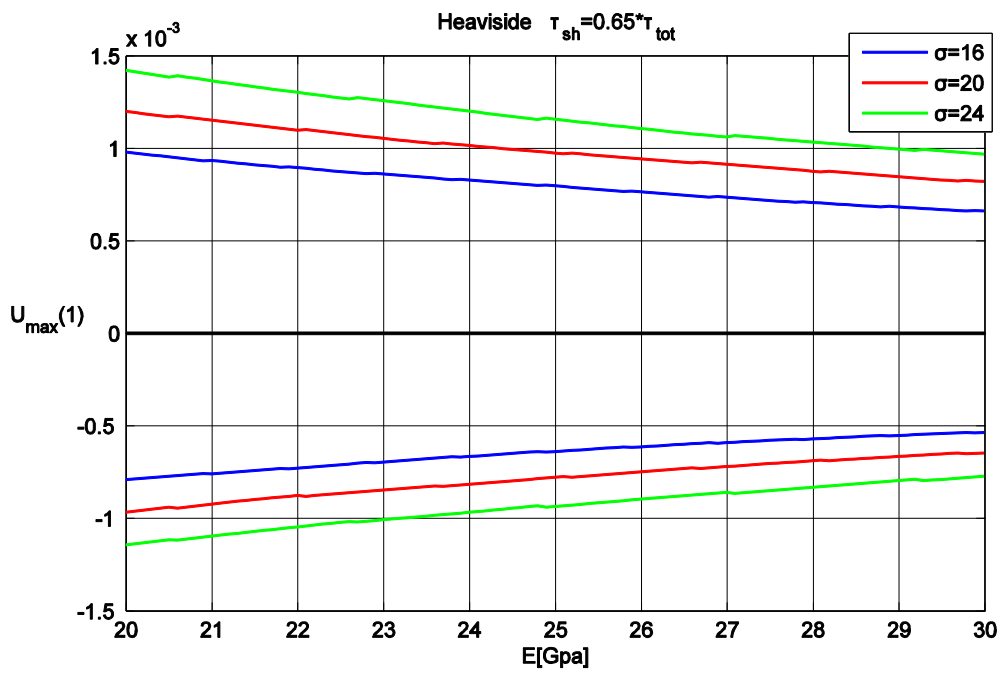
Στο **Σχήμα 3.2.4 3** απεικονίζονται τα μέγιστα της ροπής κάμψης  $M_{\max}$  και παρατηρείται ότι με την αύξηση του  $E$  έχουμε μείωση των ροπών κάμψεων. Το ίδιο ισχύει και για τις μέγιστες τέμνουσες  $Q_{\max}$ , όπως φαίνεται στο **Σχήμα 3.2.4 4**.

Στο **Σχήμα 3.2.4 5** απεικονίζονται οι αδιάστατες ιδιοσυχνότητες  $\omega_i$  συναρτήσει του  $E$  και παρατηρείται ότι για  $\omega_1, \omega_2$  δεν υπάρχει κάποια μεταβολή ενώ για  $\omega_3, \omega_4$  έχουμε μείωση με την αύξηση του  $E$ .

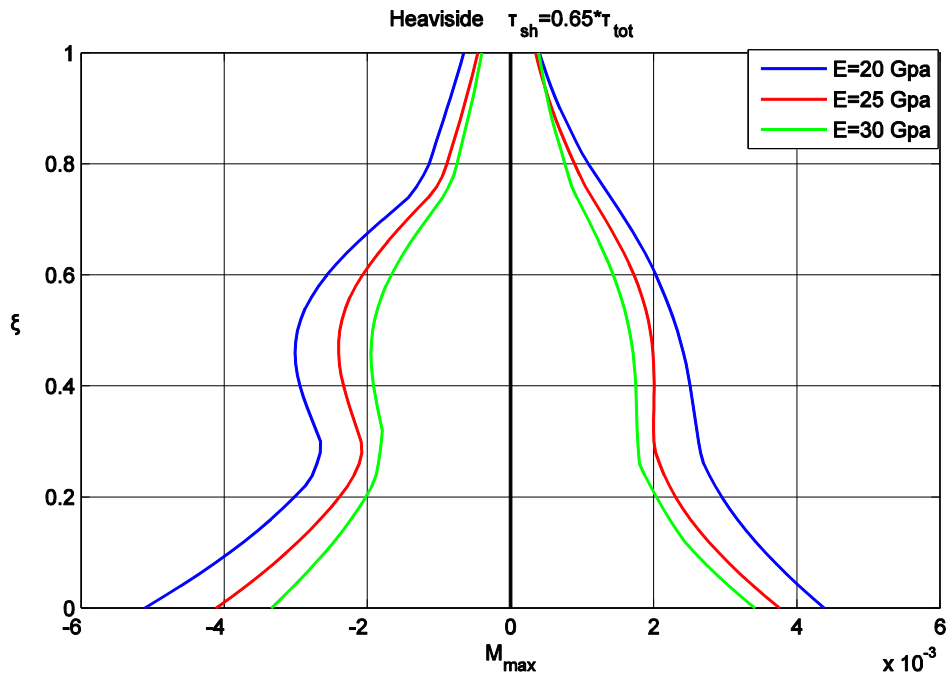
Στο επισυναπτόμενο CD-ROM στο φάκελο **E** του φακέλου Videos παρατίθενται τα βίντεο για τις περιπτώσεις  $E = 20 \text{ Gra}$   $E = 30 \text{ Gra}$ .



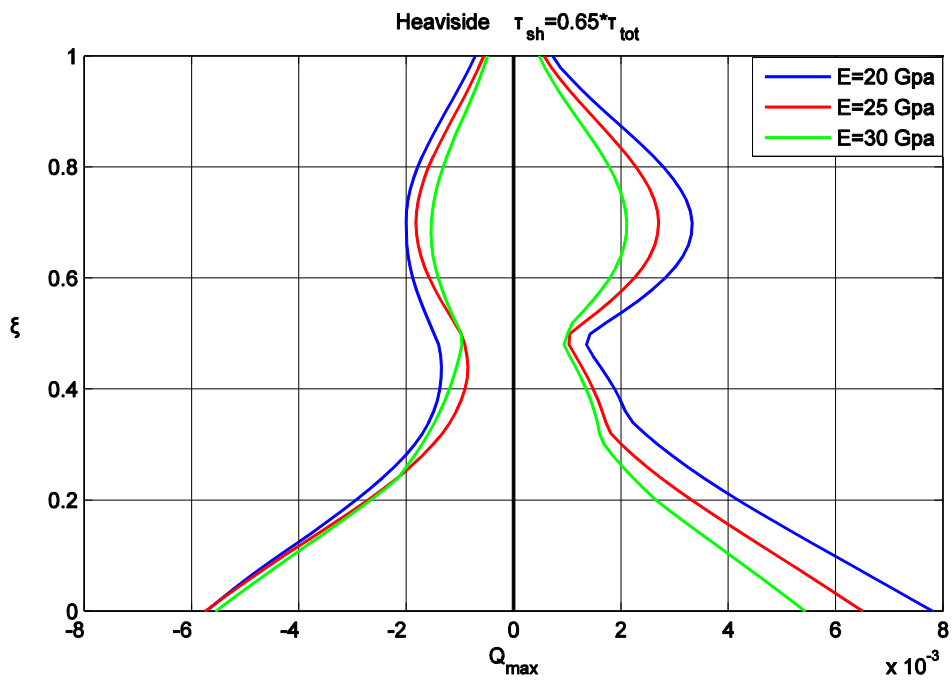
Σχήμα 3.2.4 1



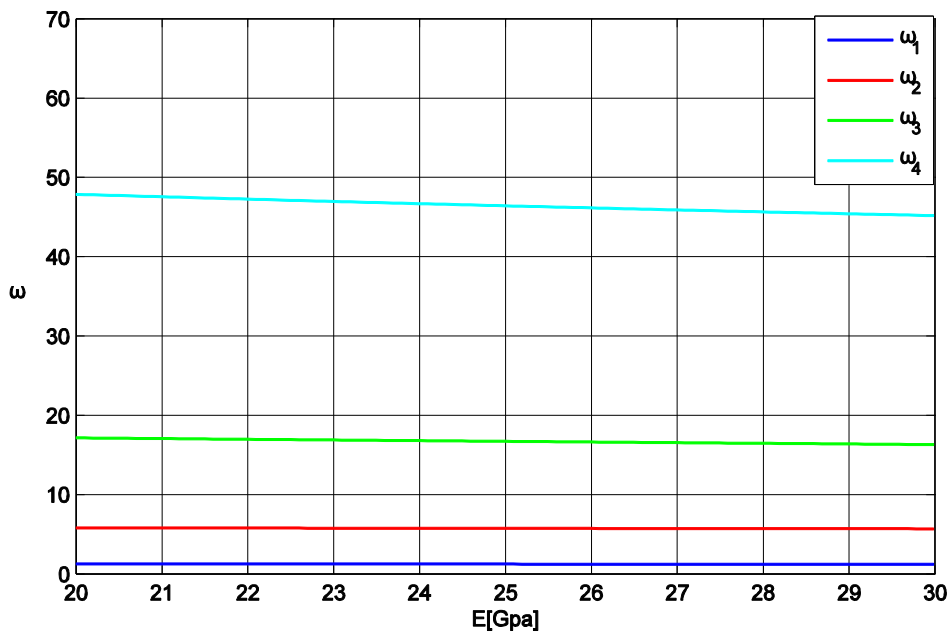
Σχήμα 3.2.4 2



Σχήμα 3.2.4 3



Σχήμα 3.2.4 4



Σχήμα 3.2.4.5

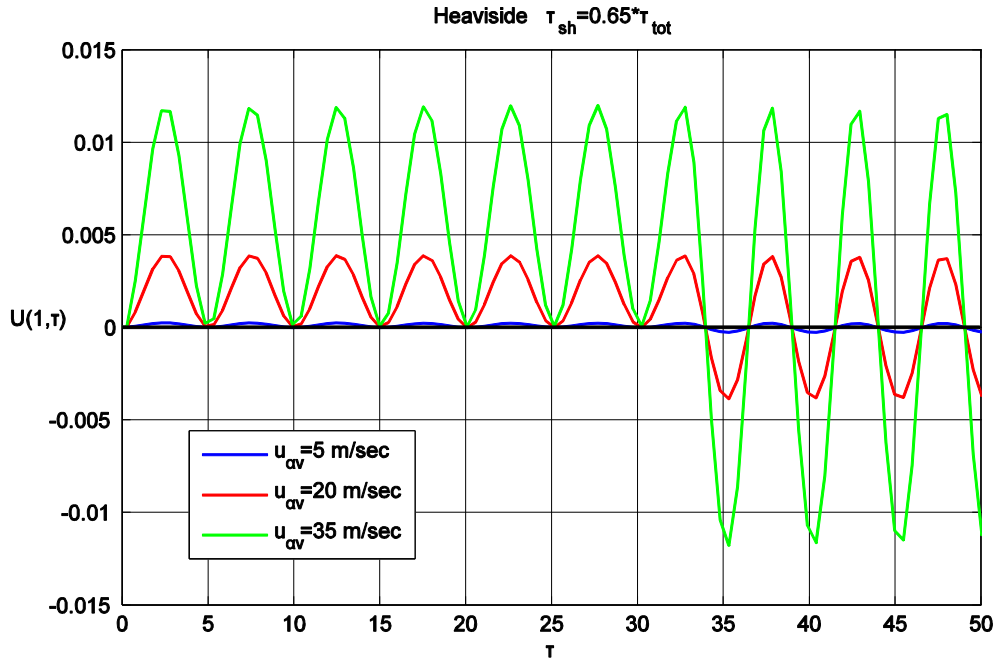
### **3.2.5) Παραμετρική μελέτη ως προς την ταχύτητα του ανέμου $u_{av}$**

Στο **Σχήμα 3.2.5 1** απεικονίζεται η απόκριση του άκρου του πύργου της ανεμογεννήτριας για τις τιμές  $u_{av}=5 \text{ m/sec}$   $u_{av}=20 \text{ m/sec}$   $u_{av}=35 \text{ m/sec}$  για φόρτιση συνάρτηση βήματος. Παρατηρείται ότι καθώς η ταχύτητα του ανέμου αυξάνεται έχουμε σημαντική αύξηση της απόκρισης.

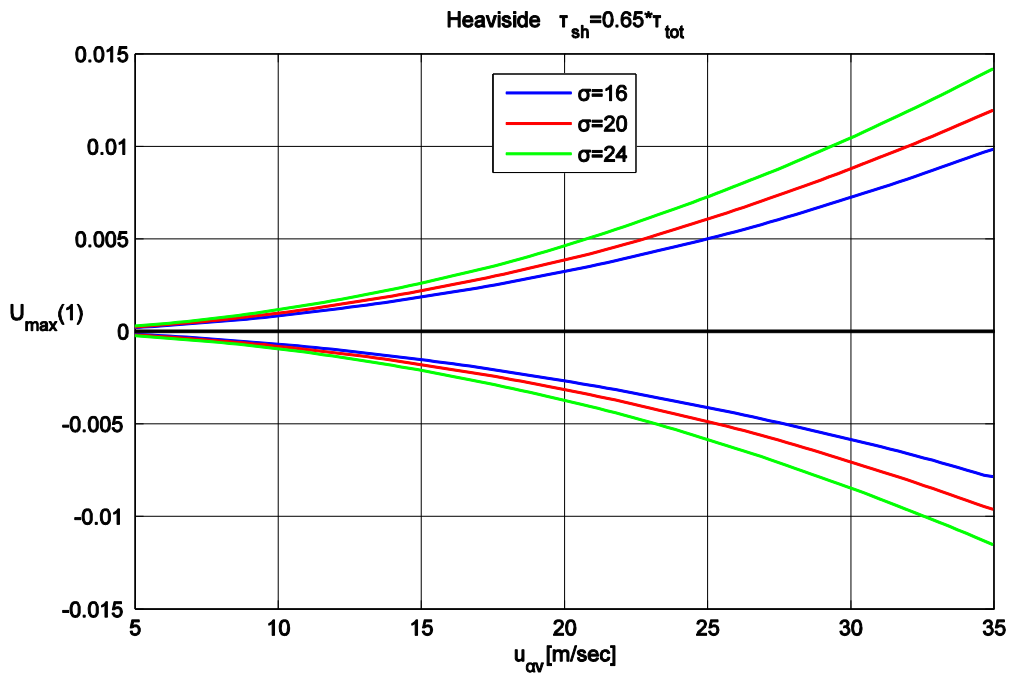
Στο **Σχήμα 3.2.5 2** απεικονίζεται το μέγιστο της απόκρισης του άκρου του πύργου της ανεμογεννήτριας συναρτήσει της ταχύτητας του ανέμου για διάφορες τιμές του  $\sigma$ . Παρατηρούμε ότι για σταθερό  $\sigma$  το μέγιστο της απόκρισης αυξάνεται με την αύξηση της ταχύτητας του ανέμου. Για μια συγκεκριμένη ταχύτητα ανέμου το μέγιστο της απόκρισης αυξάνεται με την αύξηση του  $\sigma$ .

Στο **Σχήμα 3.2.5 3** απεικονίζονται τα μέγιστα της ροπής κάμψης  $M_{max}$  και παρατηρείται ότι καθώς η ταχύτητα του ανέμου αυξάνεται έχουμε σημαντική αύξηση των ροπών κάμψεων. Το ίδιο ισχύει και για τις μέγιστες τέμνουσες  $Q_{max}$ , όπως φαίνεται στο **Σχήμα 3.2.5 4**.

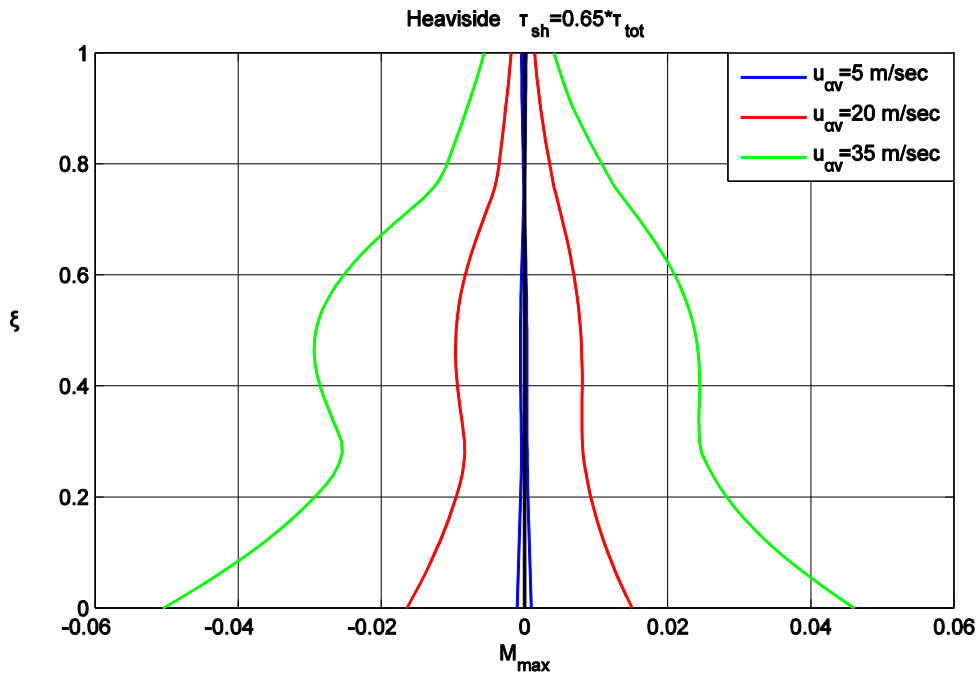
Στο επισυναπτόμενο CD-ROM στο φάκελο  $u_{av}$  του φακέλου Videos παρατίθενται τα βίντεο για τις περιπτώσεις  $u_{av}=5 \text{ m/sec}$   $u_{av}=35 \text{ m/sec}$ .



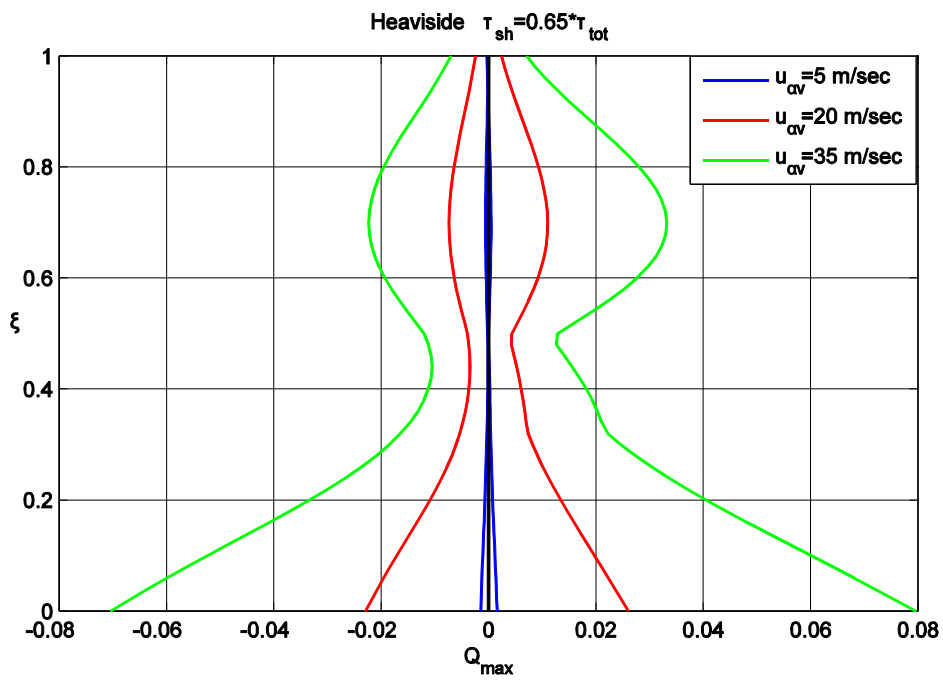
Σχήμα 3.2.5 1



Σχήμα 3.2.5 2



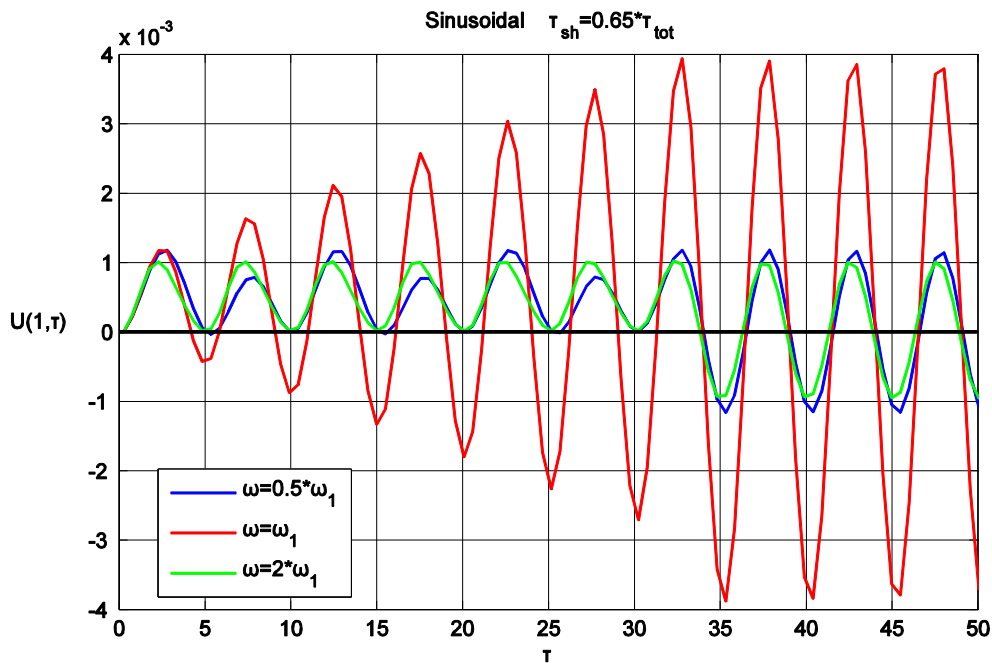
Σχήμα 3.2.5 3



Σχήμα 3.2.5 4

### 3.2.6) Παραμετρική μελέτη ως προς τη συχνότητα της εξωτερικής φόρτισης $\omega$

Στη συγκεκριμένη παραμετρική μελέτη θα μελετήσουμε ένα πολύ σημαντικό φαινόμενο : το **συντονισμό** . Στο **Σχήμα 3.2.6 1** απεικονίζεται η απόκριση του άκρου του πύργου της ανεμογεννήτριας. Παρατηρούμε ότι για  $\omega = \omega_1$  έχουμε συντονισμό κατά τον οποίο η απόκριση αυξάνεται σταδιακά και σημαντικά με την πάροδο του χρόνου μέχρι να σταματήσει η φόρτιση. Από τη χρονική στιγμή εκείνη και μετά ο πύργος ανεμογεννήτριας ταλαντώνεται ελεύθερα. Για τις άλλες τιμές των συχνοτήτων  $\omega = 0.5\omega_1$   $\omega = 2\omega_1$  παρατηρούμε ότι δεν επηρεάζουν τις τιμές της απόκρισης



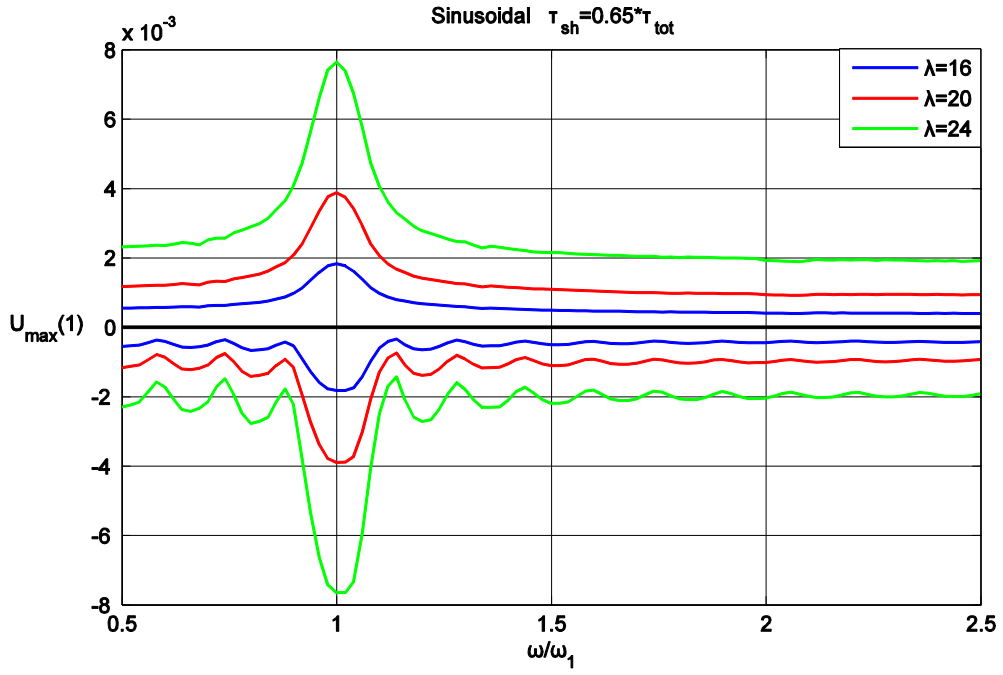
Σχήμα 3.2.6 1

Στο **Σχήμα 3.2.6 2** απεικονίζεται το μέγιστο της απόκρισης του άκρου του πύργου της ανεμογεννήτριας συναρτήσει της συχνότητας της εξωτερικής φόρτισης για διάφορες τιμές του  $\lambda$  και παρατηρούμε ότι στο συντονισμό αυξάνεται πάρα πολύ το μέγιστο της απόκρισης. Μάλιστα όσο πιο μεγάλο είναι το  $\lambda$  τόσο πιο μεγάλες είναι οι τιμές για τις αποκρίσεις.

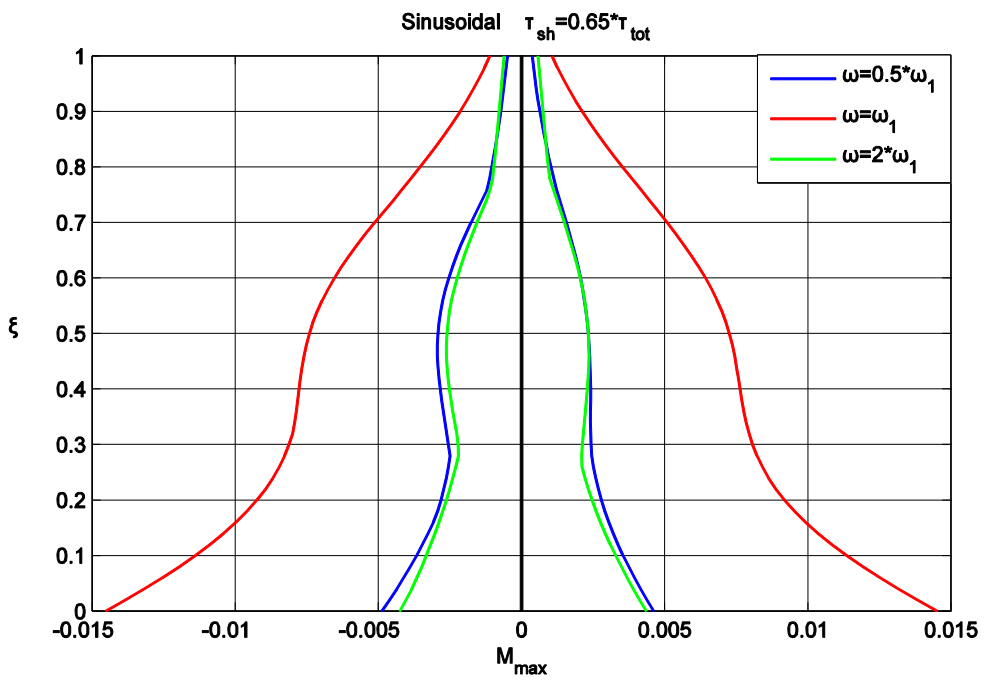
Στο **Σχήμα 3.2.6 3** απεικονίζονται τα μέγιστα της ροπής κάμψης  $M_{max}$  και παρατηρείται ότι στο συντονισμό έχουμε πάρα πολύ μεγαλύτερες τιμές σε σχέση με τις άλλες τιμές των συχνοτήτων. Το ίδιο ισχύει και για τις μέγιστες τέμνουσες  $Q_{max}$ , όπως φαίνεται στο **Σχήμα 3.2.6 4** .

Στο επισυναπτόμενο CD-ROM στο φάκελο  $\omega$  του φακέλου Videos παρατίθενται τα βίντεο για τις περιπτώσεις  $\omega = \omega_1$   $\omega = 2\omega_1$  .

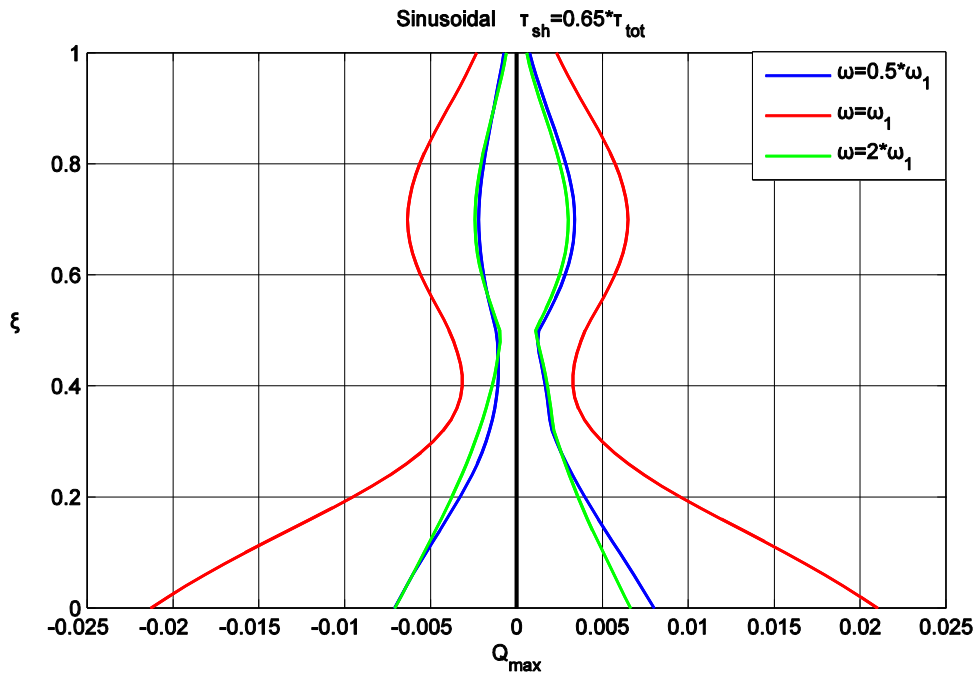




Σχήμα 3.2.6 2



Σχήμα 3.2.6 3



Σχήμα 3.2.6 4

### **3.2.7) Παραμετρική μελέτη ως προς τη συγκεντρωμένη μάζα $M$ (μάζα του μοτέρ $M_{mot}$ )**

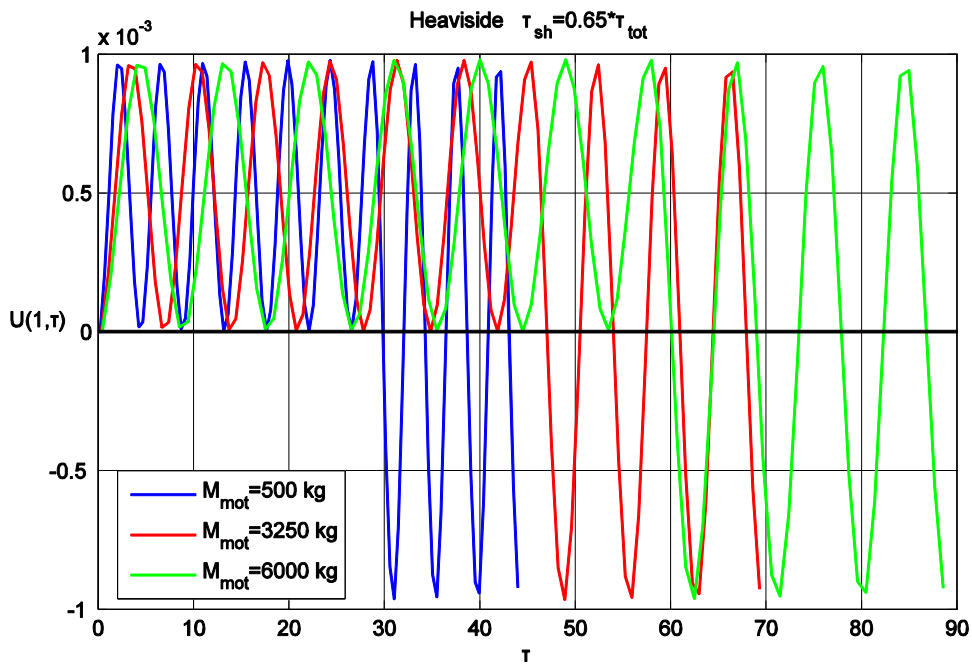
Στο **Σχήμα 3.2.7 1** απεικονίζεται η απόκριση του άκρου του πύργου της ανεμογεννήτριας για τις τιμές  $M_{mot} = 500 \text{ kg}$ ,  $M_{mot} = 3250 \text{ kg}$ ,  $M_{mot} = 6000 \text{ kg}$  για φόρτιση συνάρτηση βήματος. Παρατηρείται ότι η μάζα του μοτέρ δεν επηρεάζει τις μέγιστες τιμές της απόκρισης παρά μόνο την ιδιοσυχνότητα.

Στο **Σχήμα 3.2.7 2** απεικονίζεται το μέγιστο της απόκρισης του άκρου του πύργου της ανεμογεννήτριας συναρτήσει της μάζας του μοτέρ  $M_{mot}$  για διάφορες τιμές του  $E$ . Παρατηρούμε ότι για σταθερό  $E$  το μέγιστο της απόκρισης παραμένει αναλλοίωτο με την αύξηση του  $M_{mot}$ . Για σταθερό  $M_{mot}$  το μέγιστο της απόκρισης μειώνεται με την αύξηση του μέτρου ελαστικότητας  $E$ .

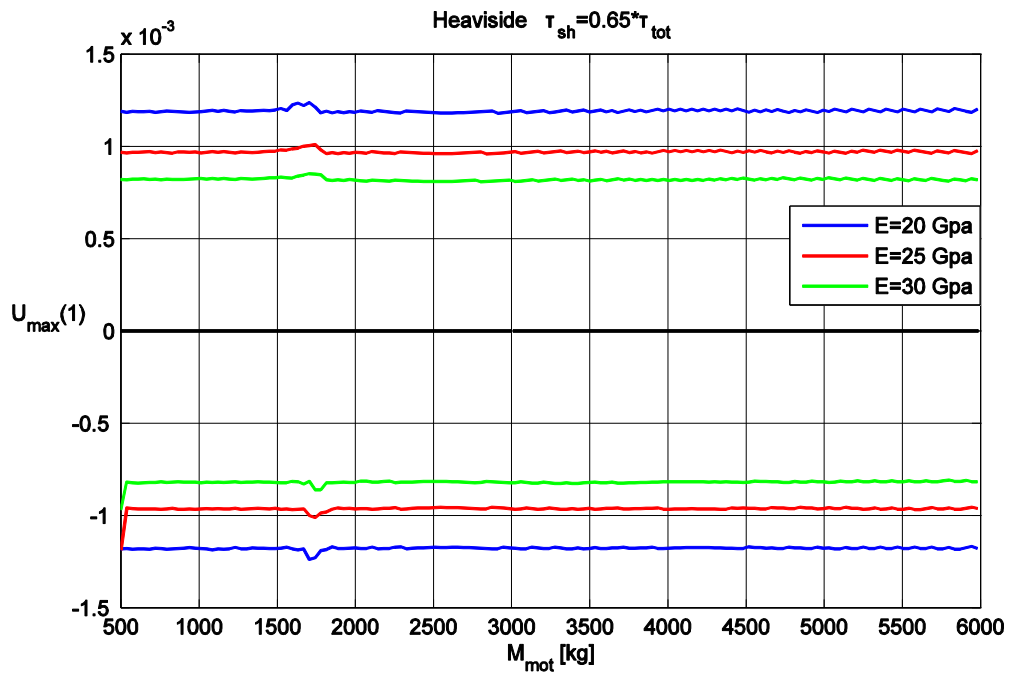
Στο **Σχήμα 3.2.7 3** απεικονίζονται τα μέγιστα της ροπής κάμψης  $M_{max}$  και παρατηρείται ότι έχουμε πολύ μικρές διαφορές. Όσον αφορά τις μέγιστες τέμνουσες δυνάμεις  $Q_{max}$ , έχουμε μεγαλύτερες τιμές για τις μέγιστες θετικές για  $M_{mot} = 500 \text{ kg}$  όπως φαίνεται στο **Σχήμα 3.2.7 4**.

Στο **Σχήμα 3.2.7 5** απεικονίζονται οι αδιάστατες ιδιοσυχνότητες  $\omega_i$  συναρτήσει του  $M_{mot}$  και παρατηρείται έχουμε μείωση για όλες τις ιδιοσυχνότητες με την αύξηση του  $M_{mot}$ .

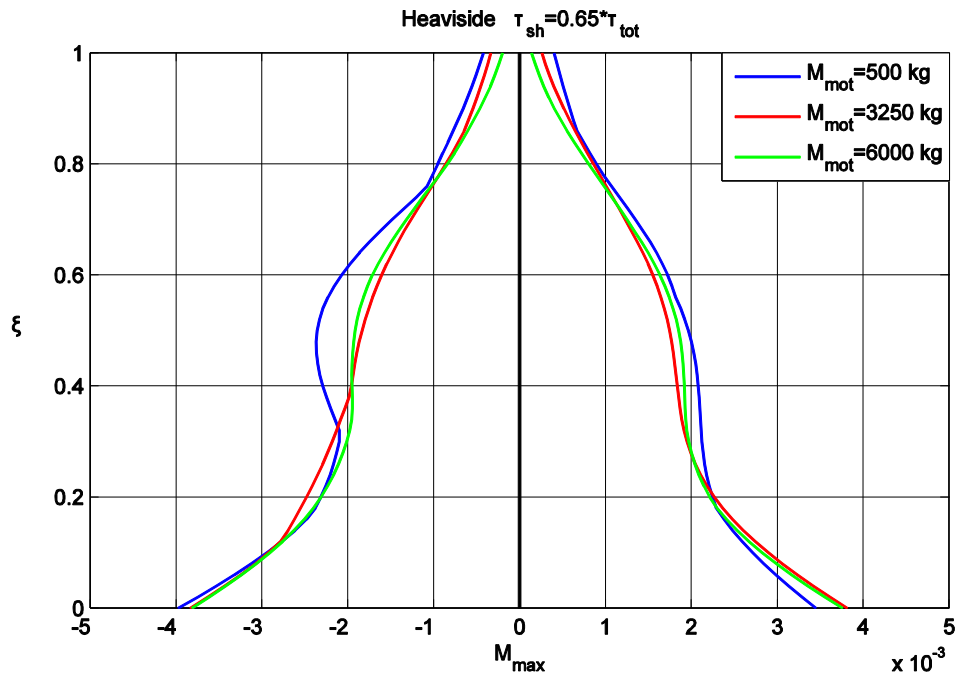
Στο επισυναπτόμενο CD-ROM στο φάκελο **M** του φακέλου Videos παρατίθενται τα βίντεο για τις περιπτώσεις  $M_{mot} = 500 \text{ kg}$ ,  $M_{mot} = 6000 \text{ kg}$ .



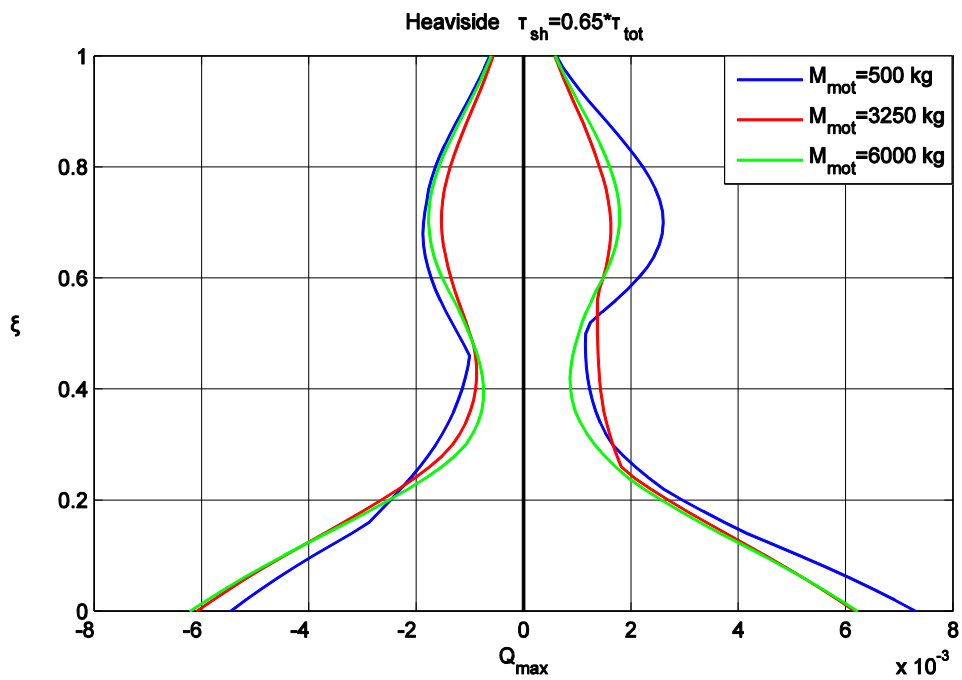
Σχήμα 3.2.7 1



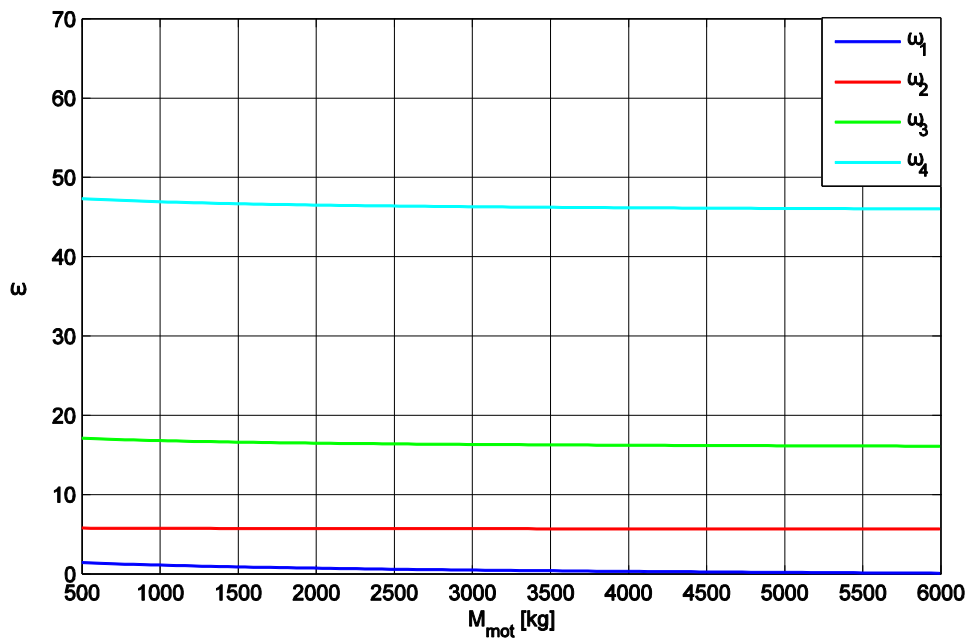
Σχήμα 3.2.7 2



Σχήμα 3.2.7 3



Σχήμα 3.2.7 4



Σχήμα 3.2.7.5

### **3.2.8) Παραμετρική μελέτη ως προς τη συγκεντρωμένη μαζική ροπή αδρανείας J**

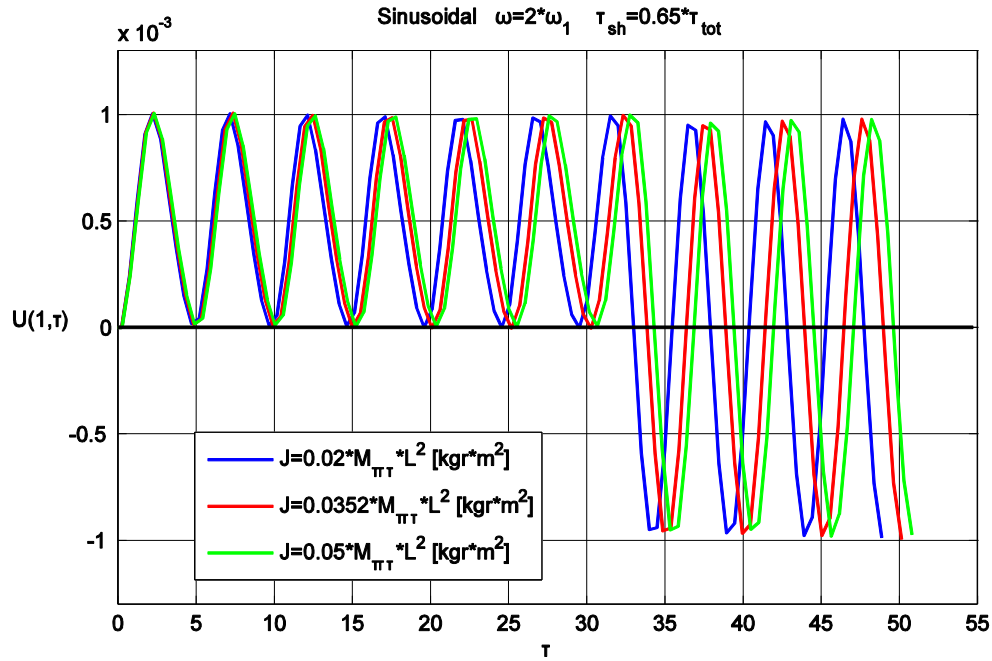
Στο **Σχήμα 3.2.8 1** απεικονίζεται η απόκριση του άκρου του πύργου της ανεμογεννήτριας για τις τιμές  $J = 0.02 * M_{\pi\pi} * L^2 [kgm^2]$ ,  $J = 0.0352 * M_{\pi\pi} * L^2 [kgm^2]$  και  $J = 0.05 * M_{\pi\pi} * L^2 [kgm^2]$  για ημιτονοειδής φόρτιση. Παρατηρείται ότι η αύξηση της μαζικής ροπής αδρανείας δεν επηρεάζει τις μέγιστες τιμές της απόκρισης παρά μόνο την ιδιοσυχνότητα.

Στο **Σχήμα 3.2.8 2** απεικονίζεται το μέγιστο της απόκρισης του άκρου του πύργου της ανεμογεννήτριας συναρτήσει του  $J$  για διάφορες τιμές του  $E$ . Παρατηρούμε ότι για σταθερό  $E$  το μέγιστο της απόκρισης παραμένει αναλλοίωτο με την αύξηση του  $J$ . Για σταθερό  $J$  το μέγιστο της απόκρισης αυξάνεται με την μείωση του μέτρου ελαστικότητας  $E$ .

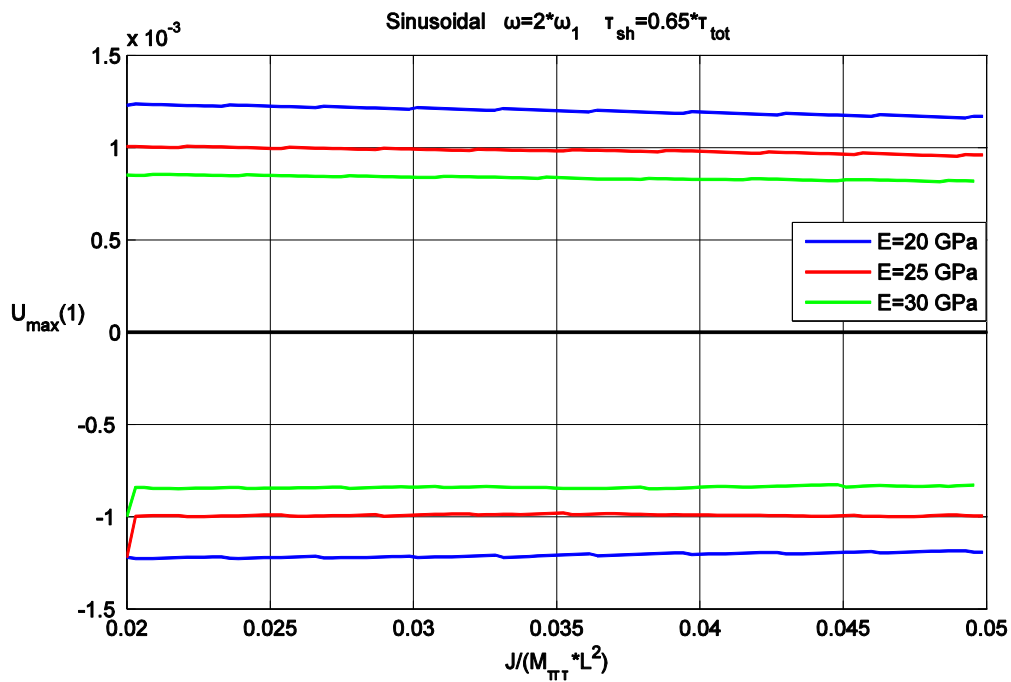
Στο **Σχήμα 3.2.8 3** απεικονίζονται τα μέγιστα της ροπής κάμψης  $M_{\max}$  και παρατηρείται ότι αυξάνονται με την αύξηση του  $J$ . Το ίδιο ισχύει και για τις τέμνουσες δυνάμεις  $Q_{\max}$  όπως φαίνεται στο **Σχήμα 3.2.8 4**.

Στο **Σχήμα 3.2.8 5** απεικονίζονται οι αδιάστατες ιδιοσυχνότητες  $\omega_i$  συναρτήσει του  $J$  και παρατηρείται ότι έχουμε μείωση για όλες τις ιδιοσυχνότητες με την αύξηση του  $J$ .

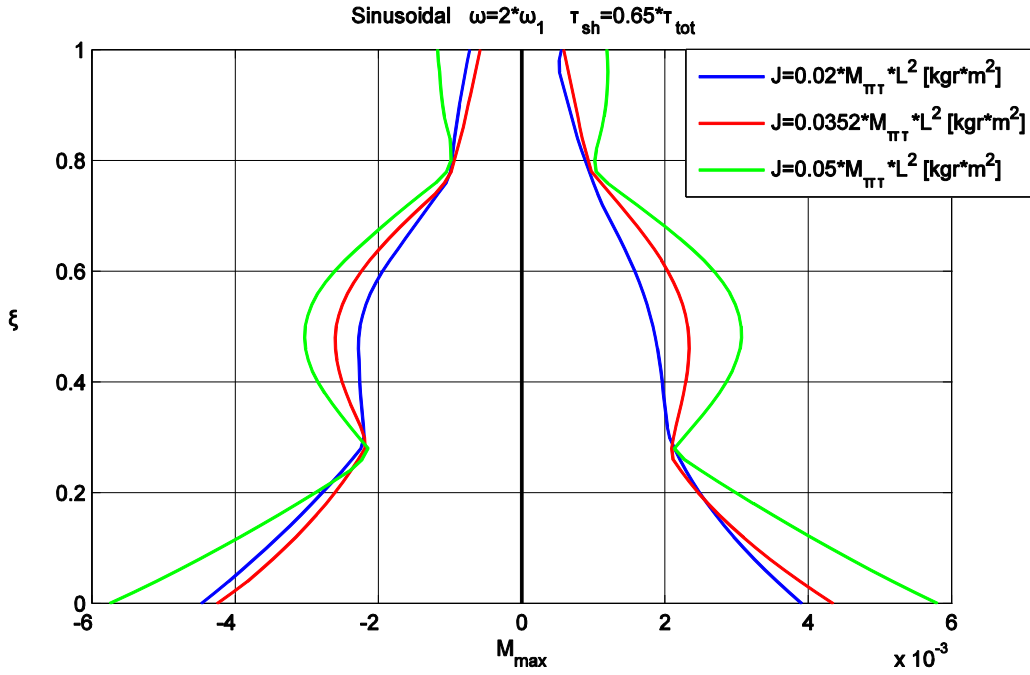
Στο επισυναπτόμενο CD-ROM στο φάκελο **J** του φακέλου Videos παρατίθενται τα βίντεο για τις περιπτώσεις  $J = 0.02 * M_{\pi\tau} * L^2 [kgm^2]$  και  $J = 0.05 * M_{\pi\tau} * L^2 [kgm^2]$



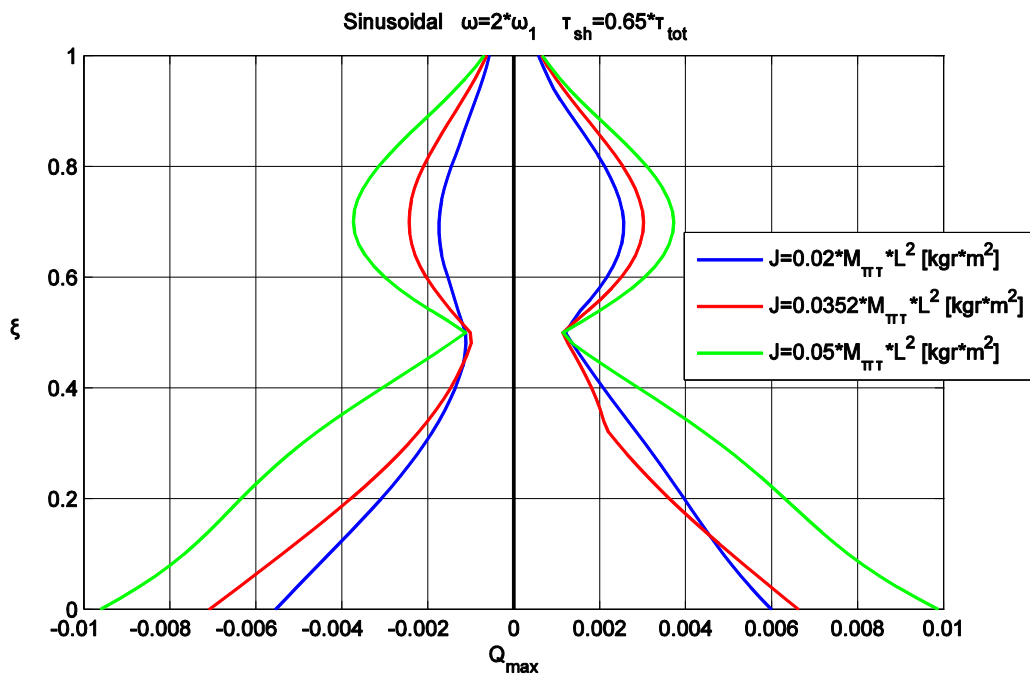
Σχήμα 3.2.8 1



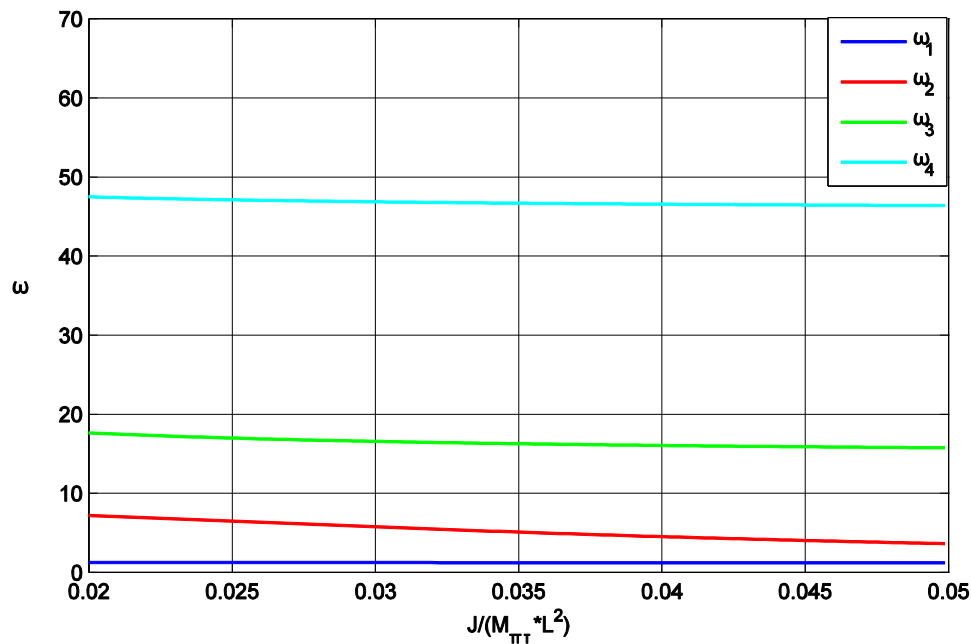
Σχήμα 3.2.8 2



Σχήμα 3.2.8 3



Σχήμα 3.2.8 4



Σχήμα 3.2.8 5

### **3.2.9) Παραμετρική μελέτη ως προς το στροφικό ελατήριο ( συντελεστής δείκτης εδάφους $c_{soil}$ )**

Στο **Σχήμα 3.2.9 1** απεικονίζεται η απόκριση του άκρου του πύργου της ανεμογεννήτριας για τις τιμές  $c_{soil} = 0.05 \cdot 10^7 \text{ N/m}^3$ ,  $c_{soil} = 0.175 \cdot 10^7 \text{ N/m}^3$  και  $c_{soil} = 0.3 \cdot 10^7 \text{ N/m}^3$  για ημιτονοειδής φόρτιση. Παρατηρείται ότι η αύξηση του συντελεστή εδάφους από  $0.05 \cdot 10^7$  έως  $0.175 \cdot 10^7$  μειώνει την απόκριση. Περαιτέρω αύξηση του  $c_{soil}$  δεν επηρεάζει την απόκριση.

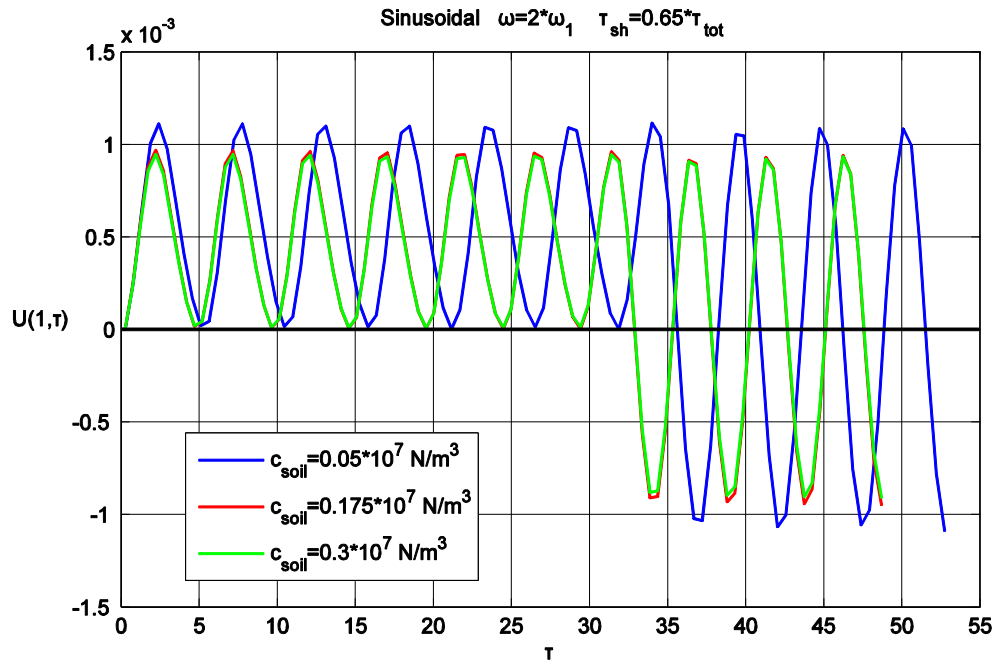
Στο **Σχήμα 3.2.9 2** απεικονίζεται το μέγιστο της απόκρισης του άκρου του πύργου της ανεμογεννήτριας συναρτήσει του  $c_{soil}$  για διάφορες τιμές του  $\lambda$ . Παρατηρούμε ότι για σταθερό  $\lambda$  το μέγιστο της απόκρισης μειώνεται λίγο με την αύξηση του  $c_{soil}$ . Για σταθερό  $c_{soil}$  το μέγιστο της απόκρισης αυξάνεται σημαντικά με την αύξηση του  $\lambda$ .

Στο **Σχήμα 3.2.9 3** απεικονίζονται τα μέγιστα της ροπής κάμψης  $M_{max}$  και παρατηρείται ότι μειώνονται με την αύξηση του  $c_{soil}$  από  $0.05 \cdot 10^7$  έως  $0.175 \cdot 10^7$ . Περαιτέρω αύξηση του  $c_{soil}$  δεν επηρεάζει τα μέγιστα  $M_{max}$ . Το ίδιο ισχύει και για τις τέμνουσες δυνάμεις  $Q_{max}$  όπως φαίνεται στο **Σχήμα 3.2.9 4**.

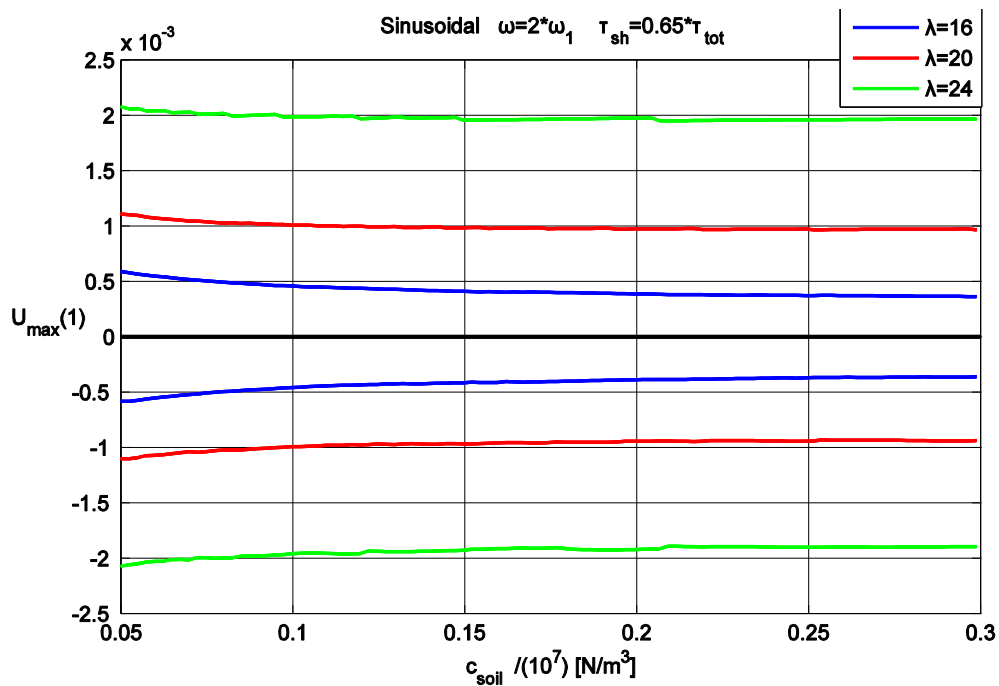
Στο **Σχήμα 3.2.9 5** απεικονίζονται οι αδιάστατες ιδιοσυχνότητες  $\omega_i$  συναρτήσει του  $c_{soil}$  και παρατηρείται ότι έχουμε αύξηση των ιδιοσυχνοτήτων με την αύξηση του  $c_{soil}$ .



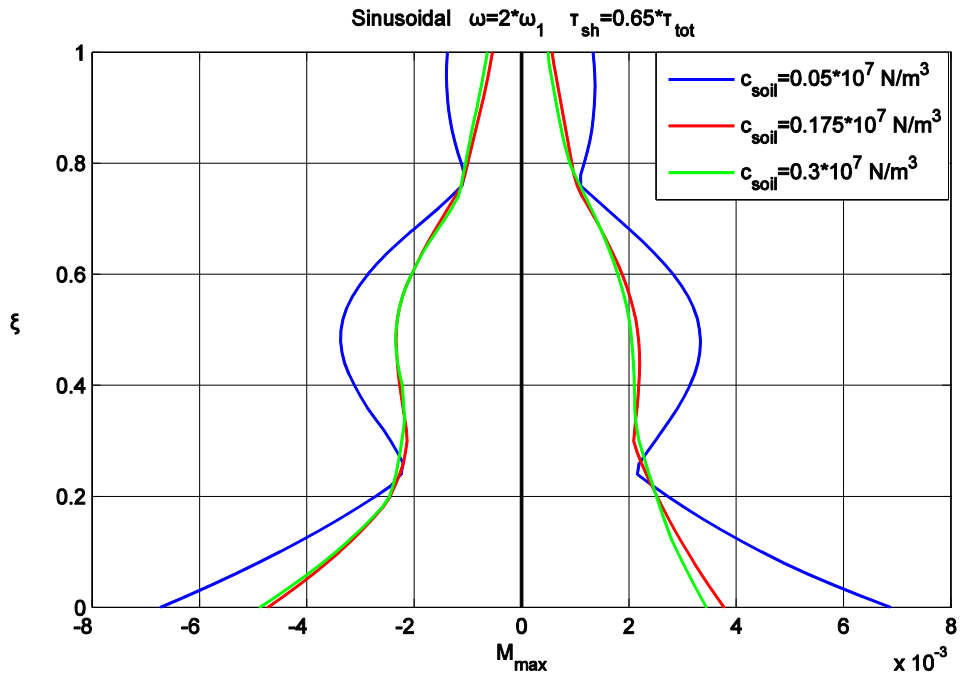
Στο επισυναπτόμενο CD-ROM στο φάκελο  $c_{soil}$  του φακέλου Videos παρατίθενται τα βίντεο για τις περιπτώσεις  $c_{soil} = 0.05 \cdot 10^7 \text{ N/m}^3$  και  $c_{soil} = 0.3 \cdot 10^7 \text{ N/m}^3$



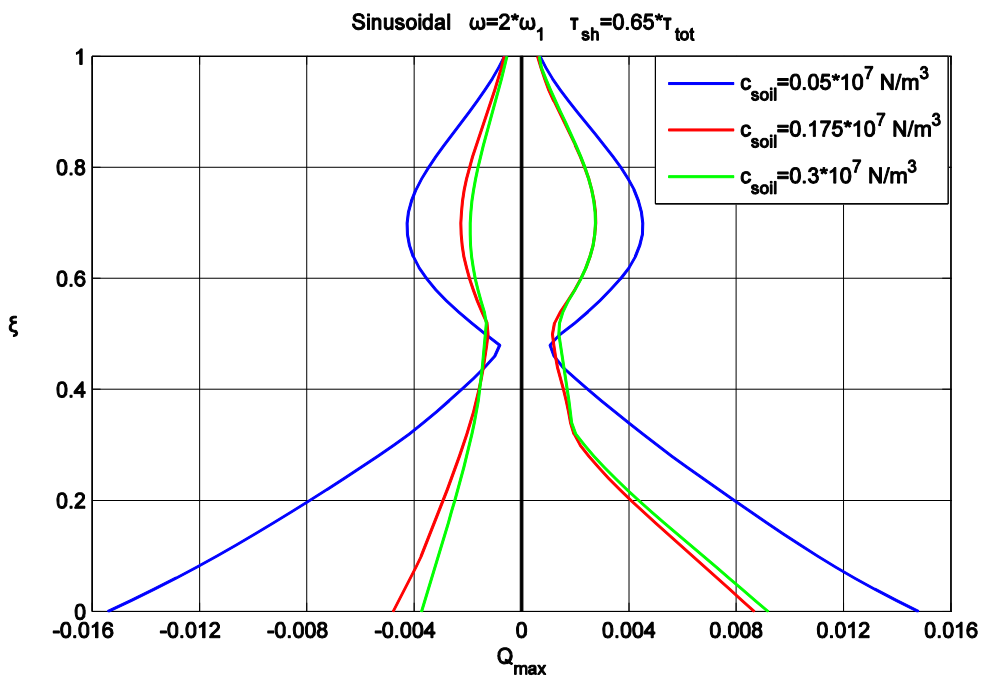
Σχήμα 3.2.9 1



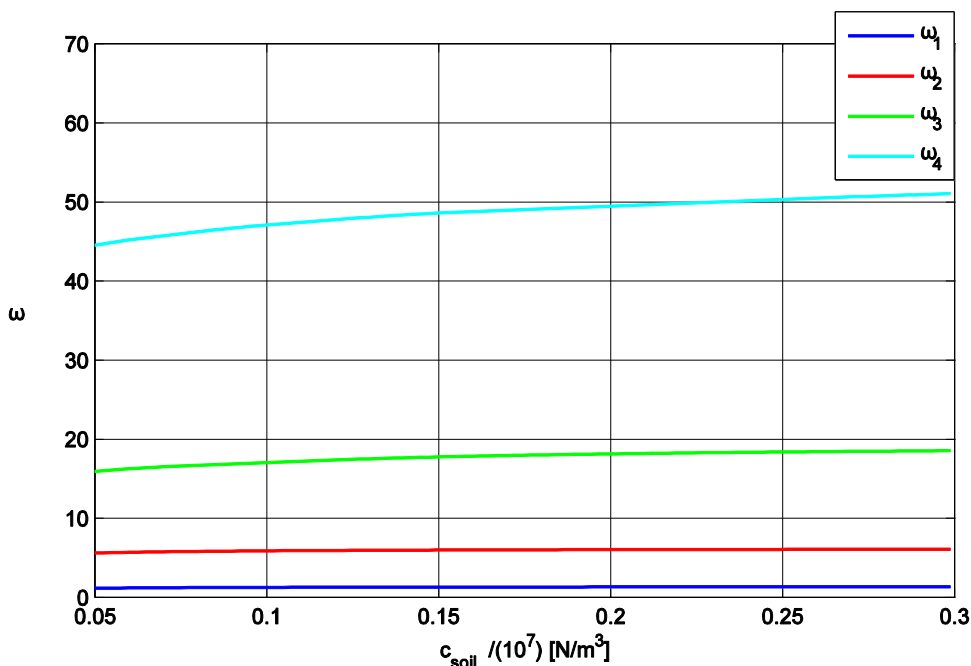
Σχήμα 3.2.9 2



Σχήμα 3.2.9 3



Σχήμα 3.2.9 4



Σχήμα 3.2.9 5

### **3.2.10) Παραμετρική μελέτη ως προς την πυκνότητα του υλικού $\rho$**

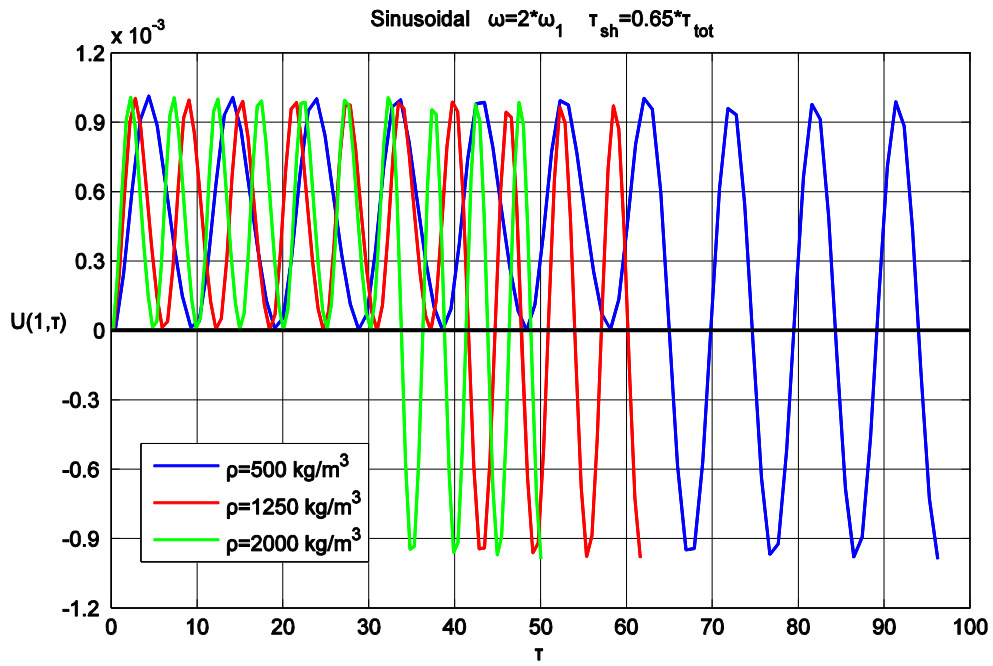
Στο **Σχήμα 3.2.10 1** απεικονίζεται η απόκριση του άκρου του πύργου της ανεμογεννήτριας για τις τιμές  $\rho = 500 \text{ kgr} / \text{m}^3$ ,  $\rho = 1250 \text{ kgr} / \text{m}^3$ ,  $\rho = 2000 \text{ kgr} / \text{m}^3$ , για ημιτονοειδής φόρτιση. Παρατηρείται ότι η αύξηση της πυκνότητας του υλικού  $\rho$  δεν επηρεάζει την απόκριση παρά μόνο την ιδιοσυχνότητα.

Στο **Σχήμα 3.2.10 2** απεικονίζεται το μέγιστο της απόκρισης του άκρου του πύργου της ανεμογεννήτριας συναρτήσει του  $\rho$  για διάφορες τιμές του  $c_{soil}$ . Παρατηρούμε ότι για σταθερό  $c_{soil}$  το μέγιστο της απόκρισης δεν αλλάζει με την αύξηση της πυκνότητας  $\rho$ . Για σταθερό  $\rho$  το μέγιστο της απόκρισης αυξάνεται για τιμές του  $c_{soil}$  από  $0.05 \cdot 10^7$  έως  $0.175 \cdot 10^7$ .

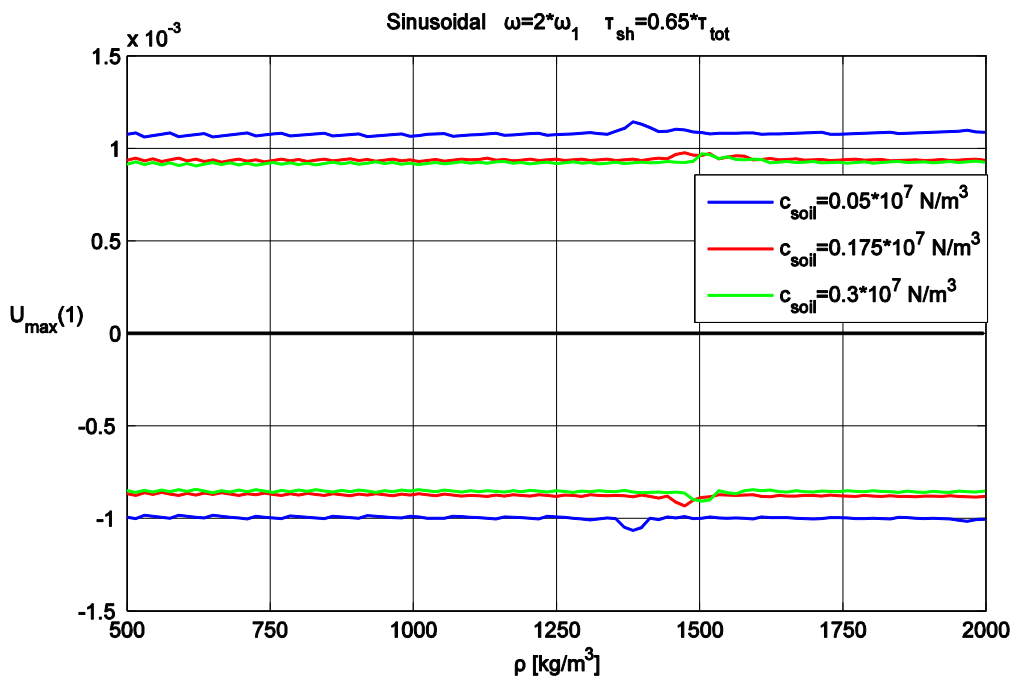
Στο **Σχήμα 3.2.10 3** απεικονίζονται τα μέγιστα της ροπής κάμψης  $M_{max}$  και στο **Σχήμα 3.2.10 4** απεικονίζονται τα μέγιστα των τεμνουσών δυνάμεων  $Q_{max}$ . Παρατηρείται ότι έχουμε τις μέγιστες τιμές για  $\rho = 1250 \text{ kgr} / \text{m}^3$ .

Στο **Σχήμα 3.2.10 5** απεικονίζονται οι αδιάστατες ιδιοσυχνότητες  $\omega_i$  συναρτήσει του  $\rho$  και παρατηρείται ότι έχουμε αύξηση των ιδιοσυχνοτήτων με την αύξηση της πυκνότητας του υλικού  $\rho$ .

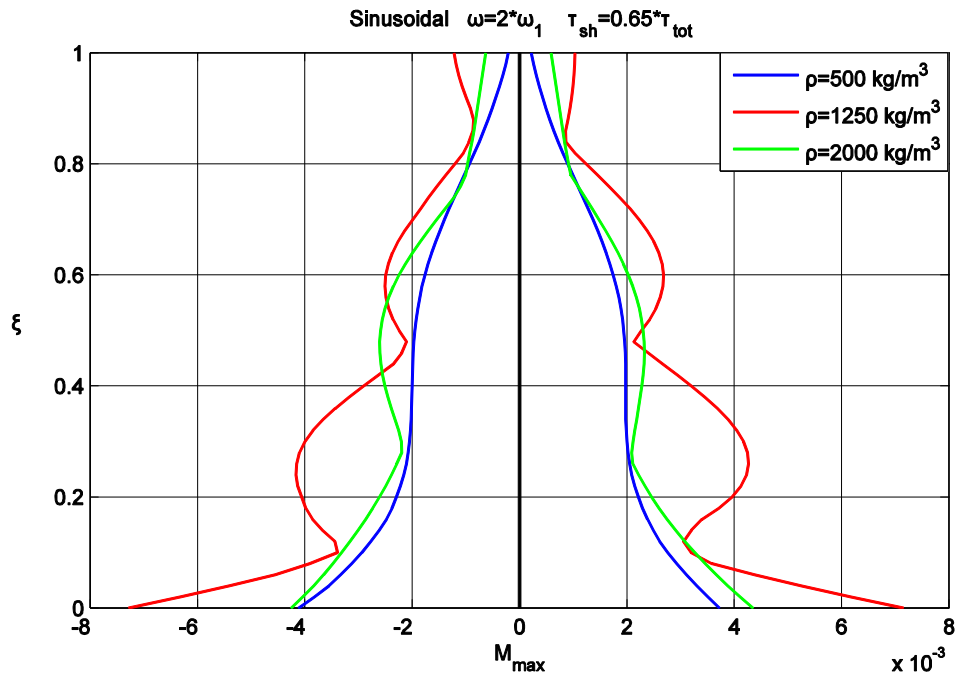
Στο επισυναπτόμενο CD-ROM στο φάκελο **p** του φακέλου Videos παρατίθενται τα βίντεο για τις περιπτώσεις  $\rho = 500 \text{ kgr} / \text{m}^3$  και  $\rho = 2000 \text{ kgr} / \text{m}^3$



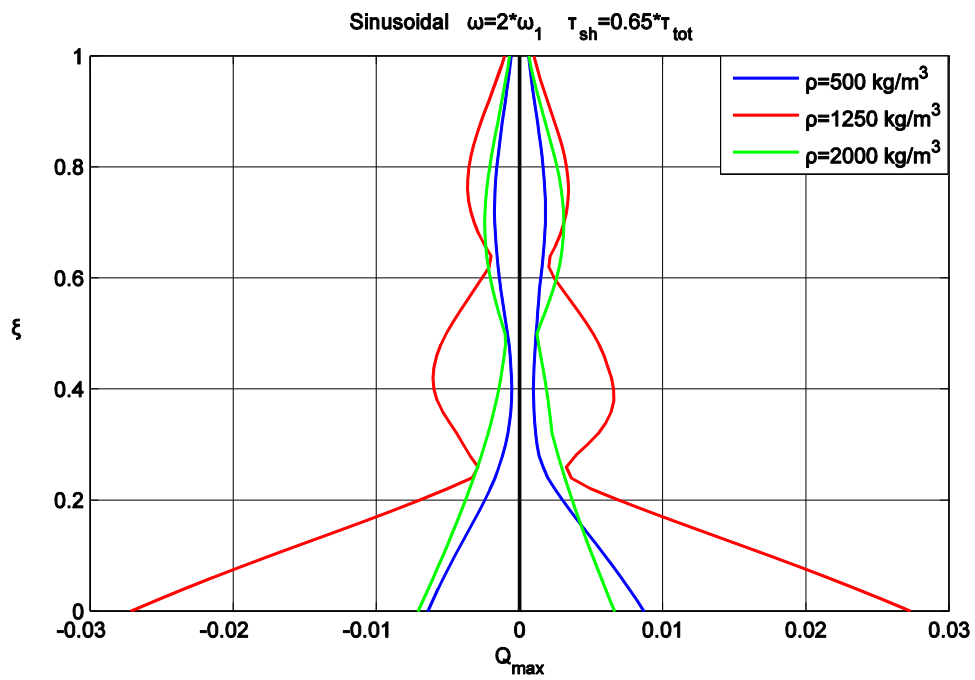
Σχήμα 3.2.10 1



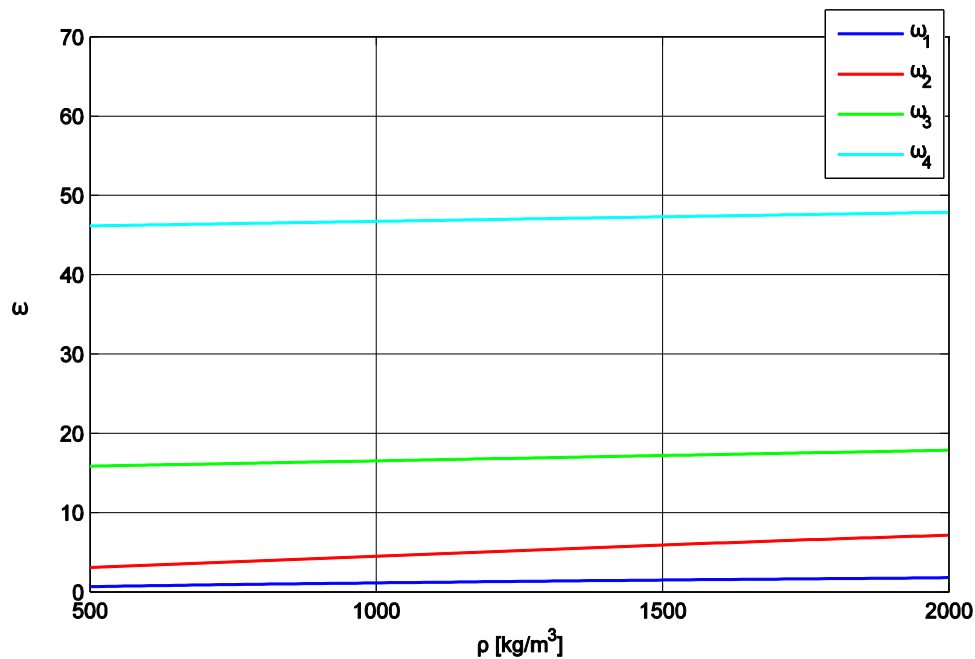
Σχήμα 3.2.10 2



Σχήμα 3.2.10 3



Σχήμα 3.2.10 4



Σχήμα 3.2.10 5

### 3.2.11) Παραμετρική μελέτη ως προς το ύψος του πύργου L

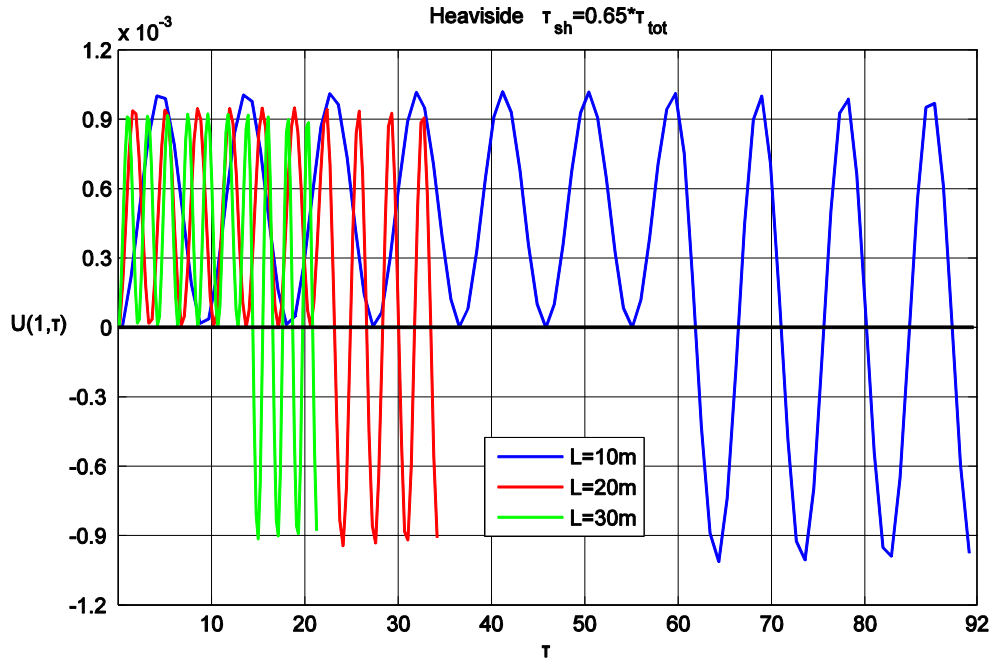
Στο **Σχήμα 3.2.11 1** απεικονίζεται η απόκριση του άκρου του πύργου της ανεμογεννήτριας για τις τιμές  $L=10m$   $L=20m$   $L=30m$ , για φόρτιση συνάρτηση βήματος. Παρατηρείται ότι υπάρχει μία μικρή μείωση στην απόκριση με την αύξηση του ύψους του πύργου.

Στο **Σχήμα 3.2.11 2** απεικονίζεται το μέγιστο της απόκρισης του άκρου του πύργου της ανεμογεννήτριας συναρτήσει του  $L$  για διάφορες τιμές του  $\delta$ . Παρατηρούμε ότι για σταθερό  $\delta$  το μέγιστο της απόκρισης μειώνεται με την αύξηση του ύψους  $L$ . Για σταθερό  $L$  το μέγιστο της απόκρισης μειώνεται καθώς το  $\delta$  αυξάνει.

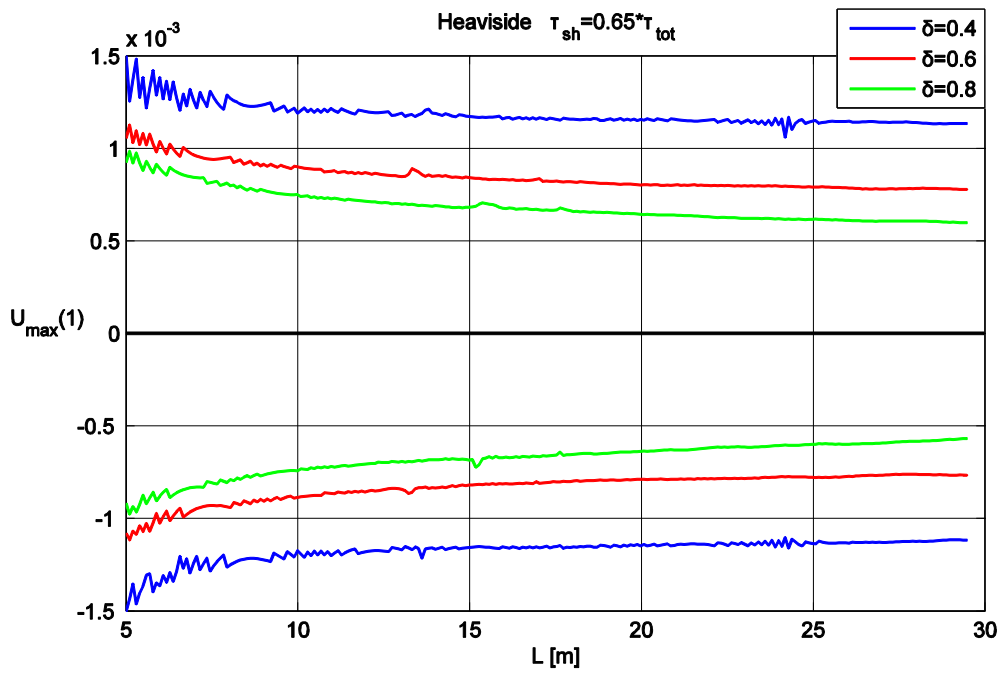
Στο **Σχήμα 3.2.11 3** απεικονίζονται τα μέγιστα της ροπής κάμψης  $M_{max}$  και παρατηρούμε ότι έχουμε μικρή μείωση στις τιμές με την αύξηση του  $L$ . Στο **Σχήμα 3.2.10 4** απεικονίζονται τα μέγιστα των τεμνουσών δυνάμεων  $Q_{max}$  και παρατηρούμε ότι οι τιμές μειώνονται στη βάση με την αύξηση του  $L$ .

Στο **Σχήμα 3.2.11 5** απεικονίζονται οι αδιάστατες ιδιοσυχνότητες  $\omega_i$  συναρτήσει του  $L$  και παρατηρείται ότι έχουμε σημαντική αύξηση των ιδιοσυχνοτήτων με την αύξηση του ύψους  $L$  του πύργου της ανεμογεννήτριας.

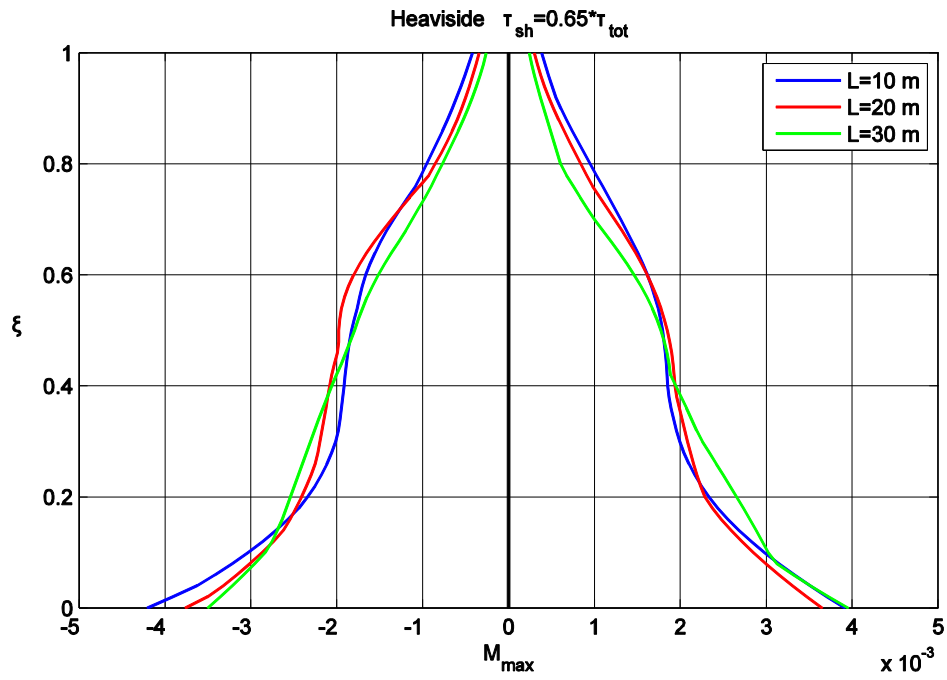
Στο επισυναπτόμενο CD-ROM στο φάκελο **L** του φακέλου Videos παρατίθενται τα βίντεο για τις περιπτώσεις  $L=10m$  και  $L=30m$



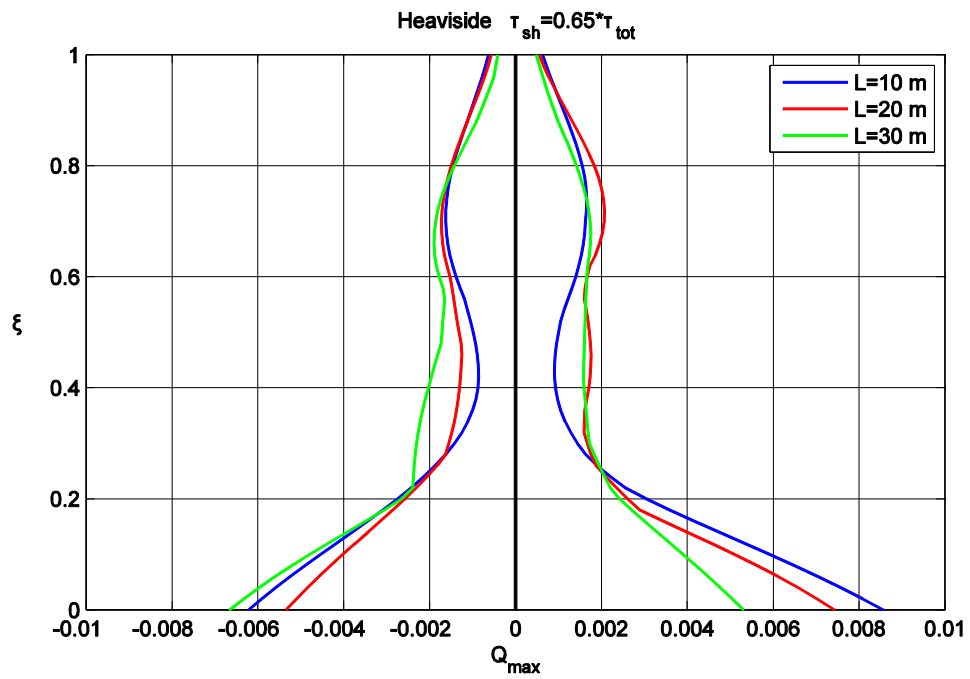
Σχήμα 3.2.11 1



Σχήμα 3.2.11 2

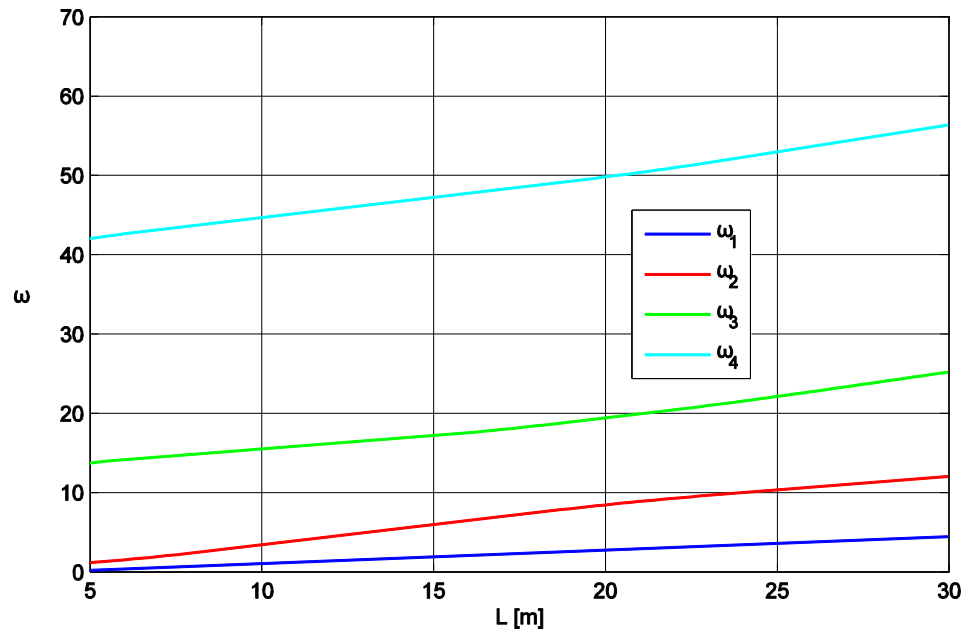


Σχήμα 3.2.11 3



Σχήμα 3.2.11 4

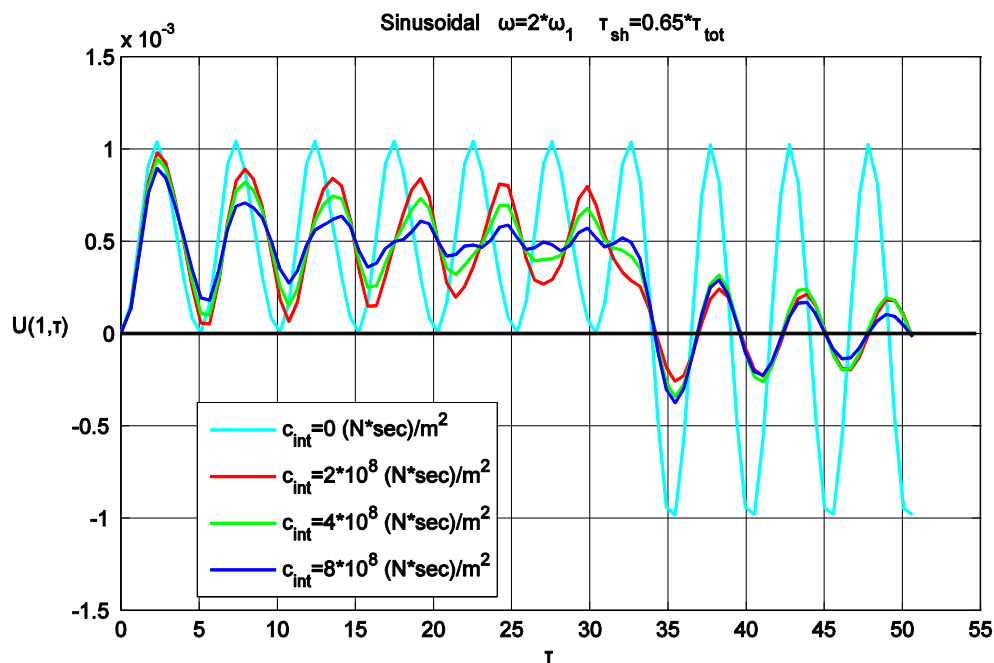




Σχήμα 3.2.11 5

### 3.3) Παραμετρική μελέτη με το ‘4b’ με απόσβεση με χρήση της αριθμητικής μεθόδου Runge Kutta

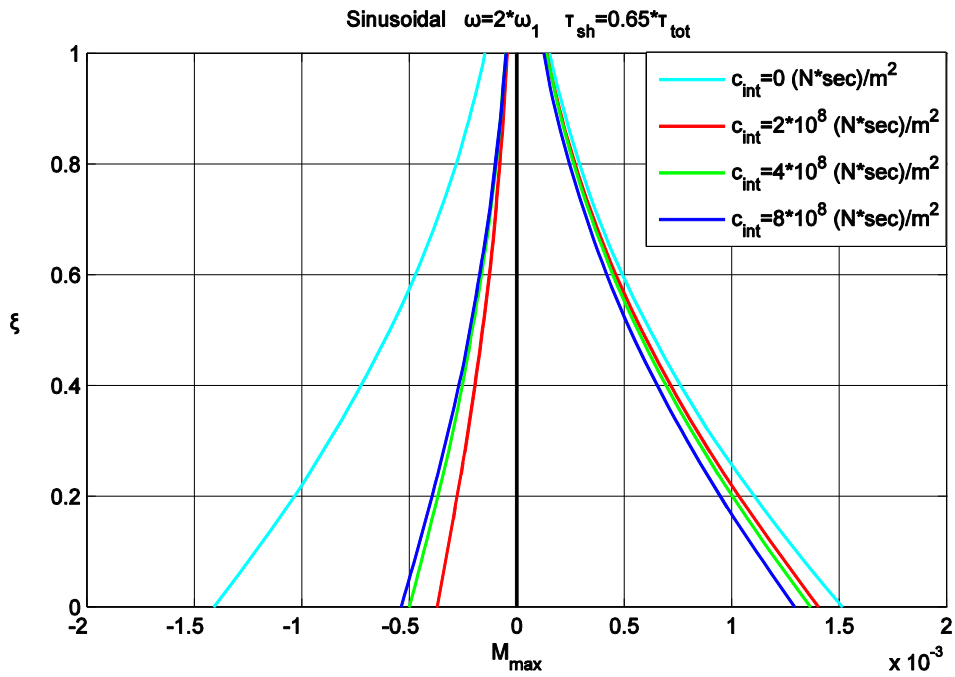
Στο **Σχήμα 3.3 1** απεικονίζεται η απόκριση του άκρου του πύργου της ανεμογεννήτριας για τις τιμές  $c_{int} = 0 \text{ Nsec}/m^2$ ,  $c_{int} = 2 \cdot 10^8 \text{ Nsec}/m^2$ ,  $c_{int} = 4 \cdot 10^8 \text{ Nsec}/m^2$  και  $c_{int} = 8 \cdot 10^8 \text{ Nsec}/m^2$  για ημιτονοειδής φόρτιση με εξωτερική συχνότητα  $\omega = 2\omega_1$ . Παρατηρείται ότι υπάρχει σημαντική μείωση με την πάροδο του χρόνου στην απόκριση με την αύξηση του συντελεστή εσωτερικής απόσβεσης.



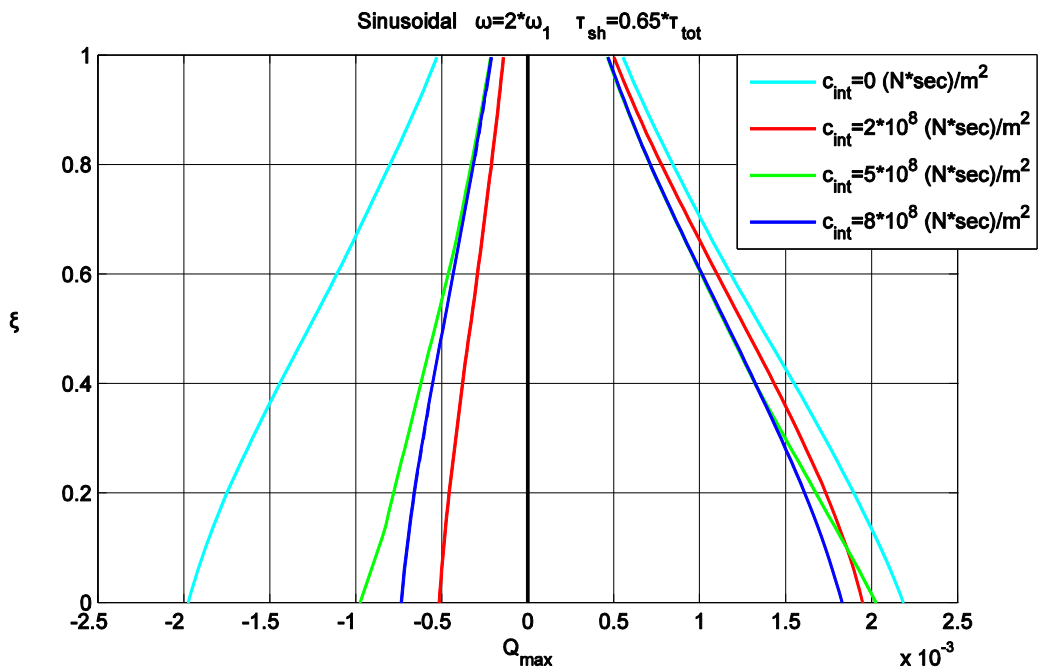
Σχήμα 3.3 1

Στο **Σχήμα 3.3 2** απεικονίζονται τα μέγιστα της ροπής κάμψης  $M_{max}$  και παρατηρούμε ότι έχουμε μικρή μείωση στις μέγιστες θετικές τιμές με την αύξηση του συντελεστή εσωτερικής απόσβεσης  $c_{int}$ . Όσον αφορά τις μέγιστες αρνητικές έχουμε τις μικρότερες τιμές για  $2 \cdot 10^5 \text{ Nsec}/m^2$ . Στο **Σχήμα 3.3 3** απεικονίζονται τα μέγιστα των τεμνουσών δυνάμεων  $Q_{max}$  και παρατηρούμε ότι έχουν την ίδια ‘συμπεριφορά’ με τις ροπές κάμψης.

Στο επισυναπτόμενο CD-ROM στο φάκελο  $\omega=2\omega_1$  του φακέλου  $C_{int}$  του φακέλου Videos παρατίθενται τα βίντεο για τις περιπτώσεις  $c_{int} = 2$  και  $c_{int} = 8 \cdot 10^8 \text{ Nsec}/m^2$

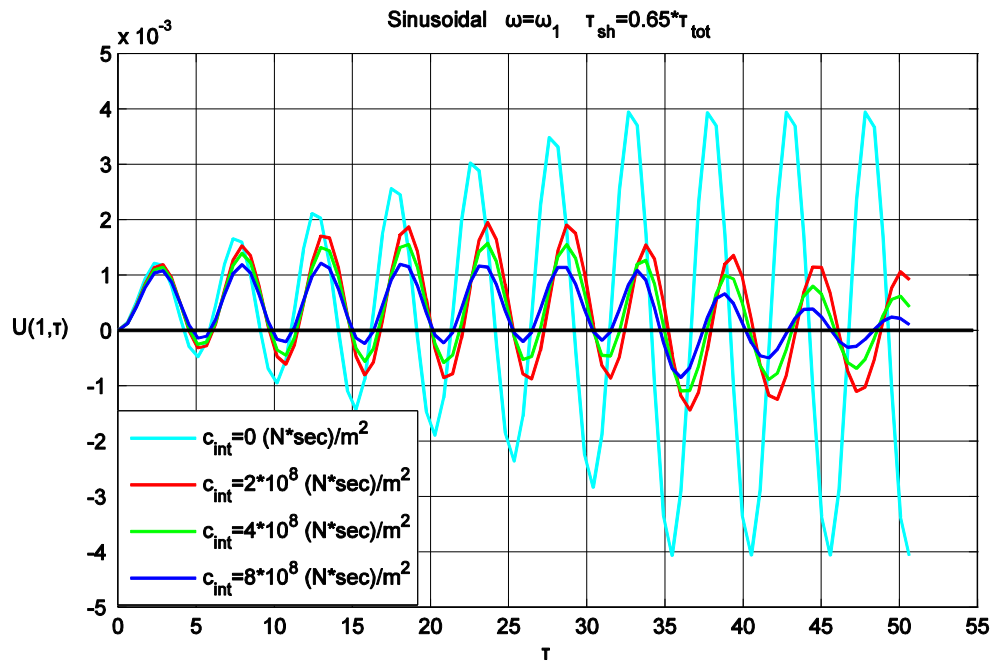


Σχήμα 3.3 2



Σχήμα 3.3 3

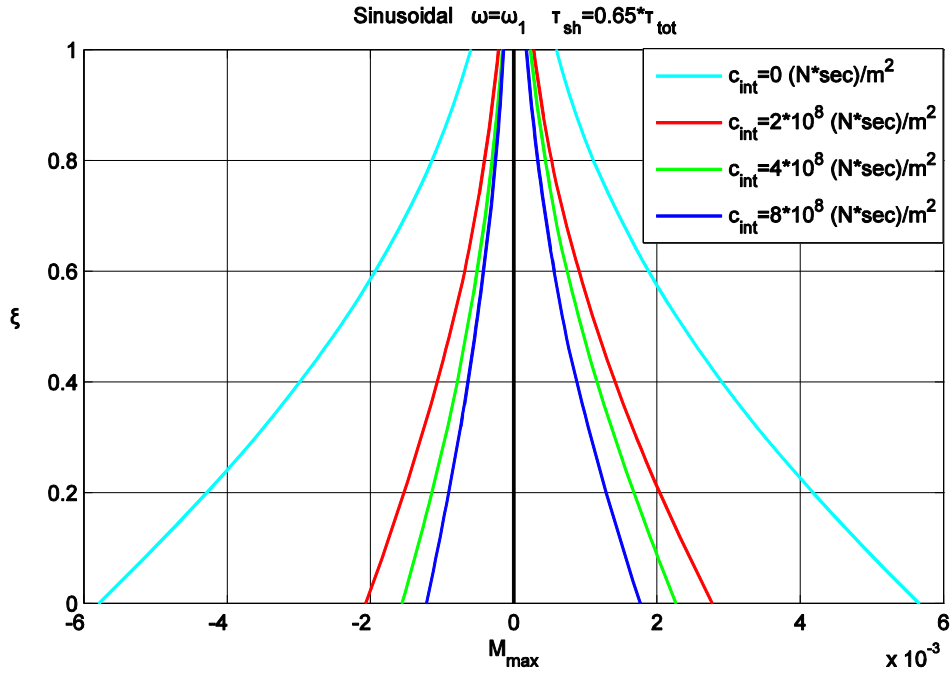
Στο **Σχήμα 3.3 4** απεικονίζεται η απόκριση του άκρου του πύργου της ανεμογεννήτριας για τις τιμές  $c_{int} = 0 \text{ N sec/m}^2$ ,  $c_{int} = 2 \cdot 10^8 \text{ N sec/m}^2$ ,  $c_{int} = 4 \cdot 10^8 \text{ N sec/m}^2$  και  $c_{int} = 8 \cdot 10^8 \text{ N sec/m}^2$  για ημιτονοειδής φόρτιση και για συντονισμό  $\omega = \omega_1$ . Παρατηρείται ότι υπάρχει σημαντική μείωση στην απόκριση με την αύξηση του συντελεστή εσωτερικής απόσβεσης.



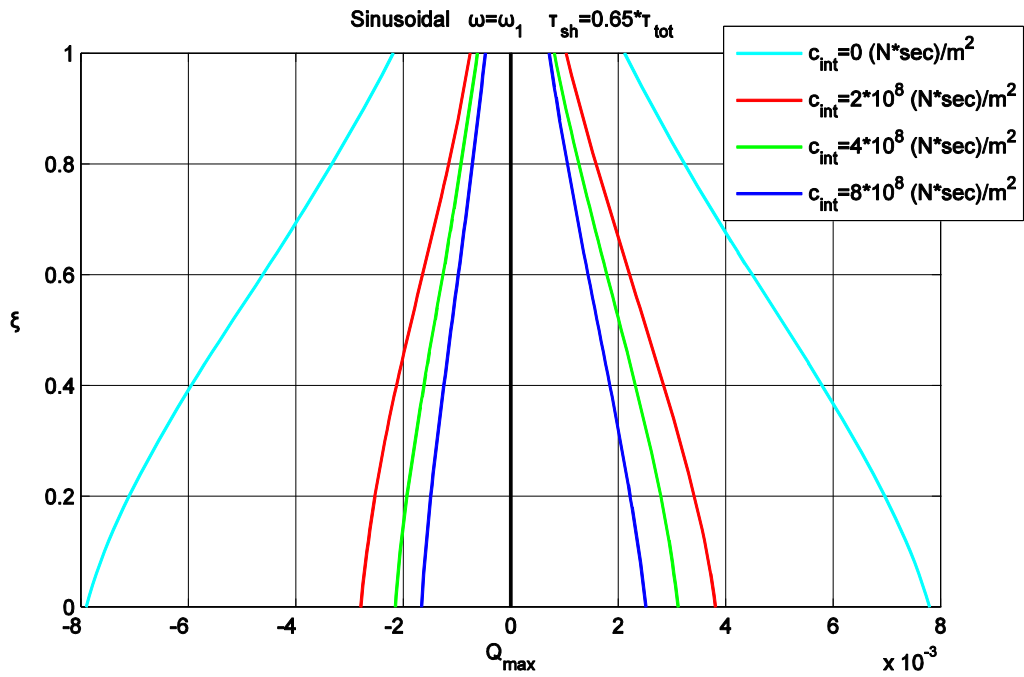
Σχήμα 3.3 4

Στο **Σχήμα 3.3 5** απεικονίζονται τα μέγιστα της ροπής κάμψης  $M_{max}$  και παρατηρούμε ότι έχουμε σημαντική μείωση στις μέγιστες θετικές τιμές με την αύξηση του συντελεστή εσωτερικής απόσβεσης  $c_{int}$ . Όσον αφορά τις μέγιστες αρνητικές έχουμε την ίδια συμπεριφορά. Στο **Σχήμα 3.3 6** απεικονίζονται τα μέγιστα των τεμνουσών δυνάμεων  $Q_{max}$  και παρατηρούμε ότι έχουν την ίδια 'συμπεριφορά' με τις ροπές κάμψης.

Στο επισυναπτόμενο CD-ROM στο φάκελο  $\omega = \omega_1$  του φακέλου  $C_{int}$  του φακέλου Videos παρατίθενται τα βίντεο για τις περιπτώσεις  $c_{int} = 2$  και  $c_{int} = 8 \cdot 10^8 \text{ N sec/m}^2$

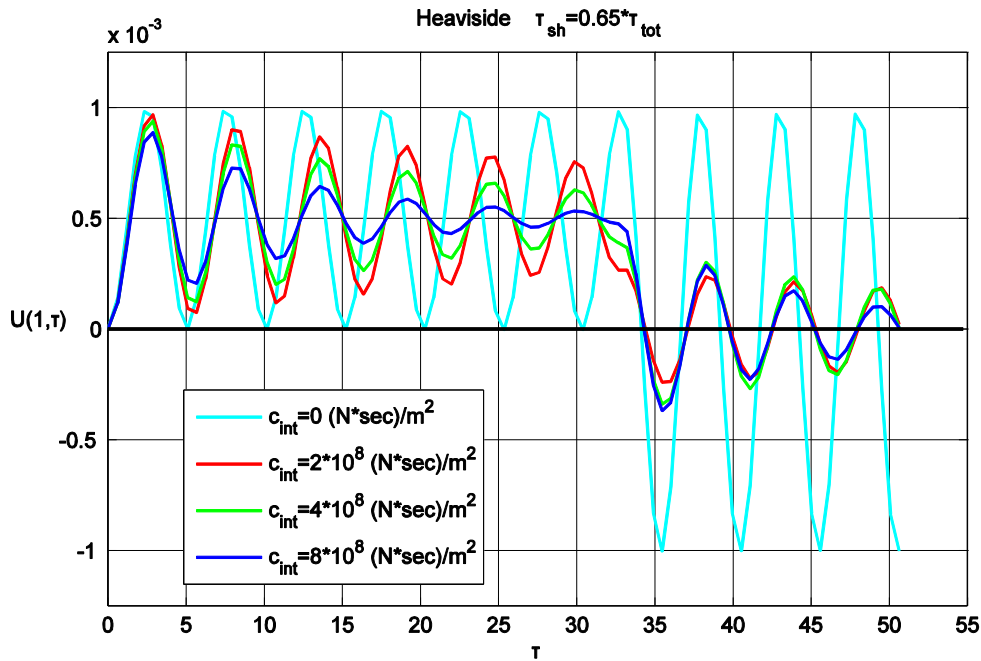


Σχήμα 3.3 5



Σχήμα 3.3 6

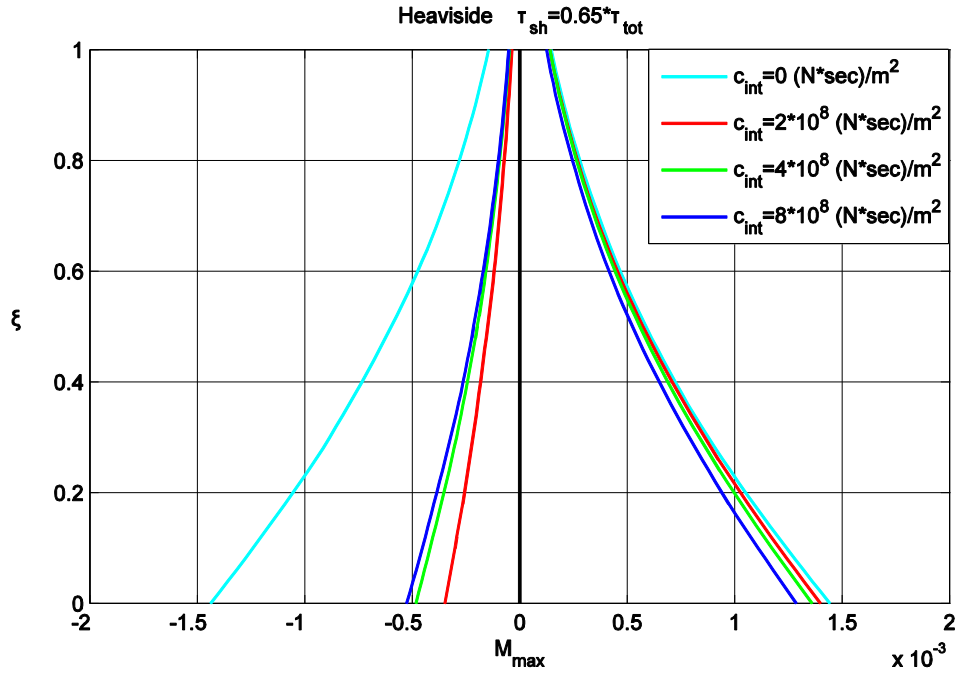
Στο **Σχήμα 3.3 7** απεικονίζεται η απόκριση του άκρου του πύργου της ανεμογεννήτριας για τις τιμές  $c_{int} = 0 \text{ N sec/m}^2$ ,  $c_{int} = 2 \cdot 10^8 \text{ N sec/m}^2$ ,  $c_{int} = 4 \cdot 10^8 \text{ N sec/m}^2$  και  $c_{int} = 8 \cdot 10^8 \text{ N sec/m}^2$  για τη φόρτιση συνάρτηση βήματος. Παρατηρείται ότι υπάρχει σημαντική μείωση στην απόκριση με την αύξηση του συντελεστή εσωτερικής απόσβεσης.



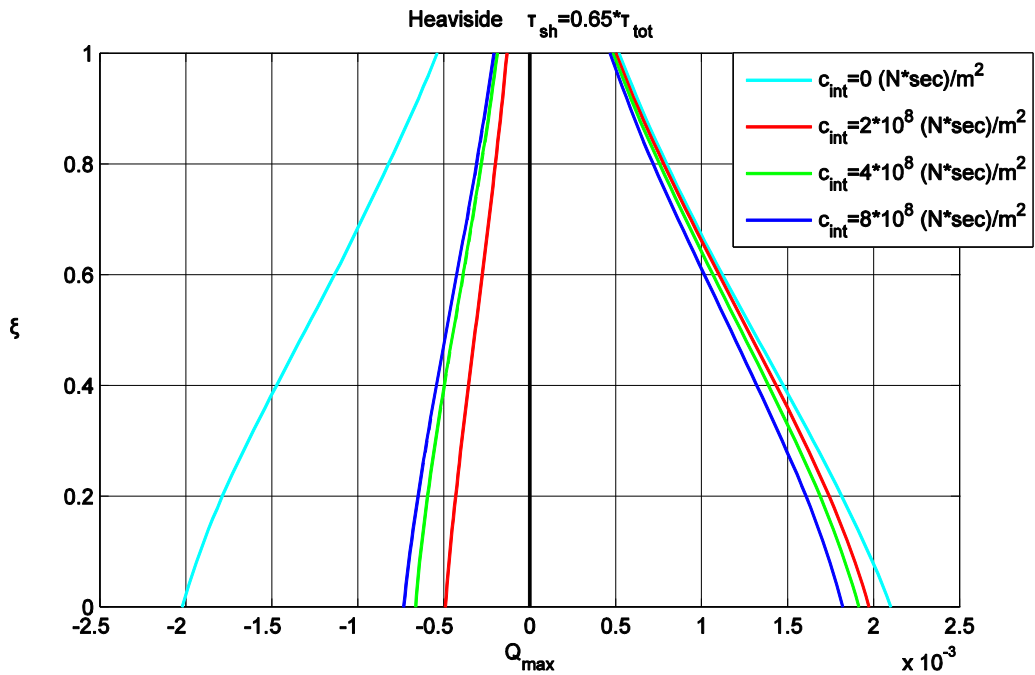
Σχήμα 3.3 7

Στο **Σχήμα 3.3 8** απεικονίζονται τα μέγιστα της ροπής κάμψης  $M_{max}$  και παρατηρούμε ότι έχουμε μικρή μείωση στις μέγιστες θετικές τιμές με την αύξηση του συντελεστή εσωτερικής απόσβεσης  $c_{int}$ . Όσον αφορά τις μέγιστες αρνητικές έχουμε σημαντική μείωση με την ύπαρξη του συντελεστή εσωτερικής απόσβεσης σε σχέση με την περίπτωση που το υλικό δεν έχει εσωτερική απόσβεση. Οι μικρότερες τιμές παρουσιάζονται για  $c_{int} = 2 \cdot 10^8 \text{ N sec/m}^2$ . Στο **Σχήμα 3.3 9** απεικονίζονται τα μέγιστα των τεμνουσών δυνάμεων  $Q_{max}$  και παρατηρούμε ότι έχουν την ίδια 'συμπεριφορά' με τις ροπές κάμψης.

Στο επισυναπτόμενο CD-ROM στο φάκελο **heaviside** του φακέλου **C<sub>int</sub>** του φακέλου **Videos** παρατίθενται τα βίντεο για τις περιπτώσεις  $c_{int} = 4 \cdot 10^8 \text{ N sec/m}^2$  και  $c_{int} = 8 \cdot 10^8 \text{ N sec/m}^2$



Σχήμα 3.3 8



Σχήμα 3.3 9

## Συμπεράσματα

Από την σύγκριση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από την χρήση των τριών οικογενειών δοκιμαστικών συναρτήσεων φαίνεται ότι οι πρώτες ιδιομορφές ελεύθερης ταλάντωσης που υπολογίστηκαν έχουν πολύ καλή έως ικανοποιητική ομοιότητα μεταξύ τους.

Επίσης οι τιμές των πρώτων ιδιοσυχνοτήτων του συστήματος όπως υπολογίστηκαν με βάση αυτές τις τρεις οικογένειες δοκιμαστικών συναρτήσεων έχουν πολύ καλή σύγκλιση.

Ομοίως η σύγκλιση των αποκρίσεων του άνω άκρου του πύργου που προκύπτουν από τις τρεις οικογένειες δοκιμαστικών συναρτήσεων είναι πάρα πολύ ικανοποιητική. Οι αποκρίσεις που προκύπτουν για το μέσον του πύργου έχουν μικρότερη αλλά ικανοποιητική σύγκλιση.

Μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι η μέθοδος των υποθετικών ιδιομορφών μπορεί να χρησιμοποιηθεί με ασφάλεια για μία αρχική χονδρική εκτίμηση μεγεθών και συμπεριφοράς ενός απλού δομικού συστήματος.

Κάποια χρήσιμα συμπεράσματα από την παραμετρική μελέτη για τις ιδιότητες και την συμπεριφορά του πύργου της ανεμογεννήτριας είναι τα εξής:

αύξηση των ακραίων τιμών των ροπών κάμψης κατά μήκος του πύργου με την αύξηση του ρυθμού μεταβολής της διατομής κατά μήκος.

αύξηση των ακραίων τιμών των ροπών κάμψης κατά μήκος του πύργου με την αύξηση της λυγηρότητας του πύργου.

αύξηση των ακραίων τιμών των ροπών κάμψης κατά μήκος του πύργου με την αύξηση της λυγηρότητας του πύργου.

αύξηση των ακραίων τιμών των ροπών κάμψης κατά μήκος του πύργου με την μείωση του μέτρου ελαστικότητας του υλικού.

αύξηση των ακραίων τιμών των ροπών κάμψης κατά μήκος του πύργου με την μείωση του δείκτη ελαστικότητας του εδάφους θεμελίωσης του πύργου.

γενικά αύξηση των ακραίων τιμών των ροπών κάμψης κατά μήκος του πύργου με την μείωση του συντελεστή εσωτερικής απόσβεσης του υλικού του πύργου

το σχήμα των περιβαλλουσών των ροπών κάμψης και των τεμνουσών δυνάμεων επηρεάζεται από το σχήμα των πρώτων ιδιομορφών.

το μέγεθος της συγκεντωμένης μάζας στην κορυφή του πύργου δεν επηρεάζει τις μέγιστες τιμές της απόκρισης της κορυφής του πύργου.



## Βιβλιογραφικές αναφορές

- Meirovitch, L., *Principles and Techniques of Vibrations*, Prentice Hall, 1997
- Meirovitch, L., *Elements of Vibration Analysis*, 2<sup>nd</sup> ed., McGraw-Hill, 1986
- Timoshenko, S., Young, D. H., and Weaver, W. JR., *Vibration Problems in Engineering*, 4<sup>th</sup> ed., John Wiley and Sons, 1974
- Peter Handergon and Anirvan DasGupta, *Vibrations and Waves in Continuous Mechanical Systems*, Wiley, 2007
- Clough, R. W., and Penzien J., *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, 1975
- Chopra, A. K., *Dynamics of Structures*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1995
- Κατσικαδέλης, Ι. Θ., *Δυναμική των Κατασκευών, Τόμος Ι*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2002
- Γιούνης, Χ. Ι., *Μηχανική των Ραβδωτών Φορέων*, Εκδόσεις ΕΜΠ, Αθήνα, 2010