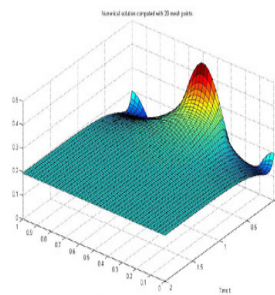


ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΕΣ ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΛΥΔΙΑ ΚΟΡΡΕ



*Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο*

Ιούλιος 2012

Περιεχόμενα

1	Βασικοί Ορισμοί	6
1.1	Γενικοί Ορισμοί	6
1.2	Ασθενείς Παράγωγοι	6
1.3	Ορισμοί Χώρων Sobolev	8
1.4	Προσέγγιση	9
1.5	Επεκτάσεις	10
1.6	Ίχνοι	11
1.7	Δύο Βασικά Θεωρήματα για τους Χώρους Sobolev	11
1.8	Άλλοι Χώροι Συναρτήσεων	12
2	Παραβολικές Εξισώσεις	15
2.1	Ορισμοί	15
2.2	Ύπαρξη Ασθενών Λύσεων	18
2.3	Ομαλότητα	24
3	Προσεγγίσεις για την εξίσωση της θερμότητας στη μία διάσταση	28
3.1	Η Εξίσωση της Θερμότητας	28
3.2	Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών	31
3.3	Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων	33
3.3.1	Ανάλυση ευστάθειας της θ -μεθόδου	35
3.4	Χωροχρονική Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων	40
4	Προσεγγίσεις για την εξίσωση της θερμότητας στις δύο διαστάσεις	43
4.1	Βασικοί Τύποι και Θεωρήματα	43
4.2	Προσεγγίσεις για την Εξίσωση της Θερμότητας	49
4.2.1	Μέθοδος Galerkin για την προς τα πίσω μέθοδο Euler	56
4.2.2	Μέθοδος Galerkin για την Crank-Nicolson	58

4.2.3	Άλλες μέθοδοι εκτίμησης σφαλμάτων	60
5	Υπολογιστικά παραδείγματα για την εξίσωση της θερμότητας	62
5.1	Εκτιμήσεις Σφαλμάτων στο MATLAB	62
5.2	Εκτιμήσεις Σφαλμάτων στο FreeFem++	68

Εισαγωγή

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι η μελέτη της εξίσωσης της θερμότητας στη μία και στις δύο διαστάσεις. Θα ασχοληθούμε με τις εκτιμήσεις σφαλμάτων που προκύπτουν από τις αριθμητικές προσεγγιστικές λύσεις της εξίσωσης της θερμότητας καθώς και με υπολογιστικά παραδείγματα που επιβεβαιώνουν τις θεωρητικές εκτιμήσεις. Στο πρώτο κεφάλαιο, θα αναπτύξουμε βασικούς ορισμούς και Θεωρήματα αναγκαία για τα επόμενα κεφάλαια. Στο δεύτερο κεφάλαιο, θα ορίσουμε τις ασθενείς λύσεις, την ύπαρξη, τη μοναδικότητα τους καθώς και την ομαλότητα. Στο τρίτο και τέταρτο κεφάλαιο, θα ασχοληθούμε με τη χρήση μεθόδων εύρεσης προσεγγιστικών λύσεων, στη μία και στις δύο διαστάσεις αντίστοιχα, καθώς και με τις εκτιμήσεις σφαλμάτων που προκύπτουν. Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο, θα παρουσιάσουμε κάποια υπολογιστικά παραδείγματα που προέκυψαν με τη χρήση υπολογιστικών προγραμμάτων και έτσι θα δούμε τις εκτιμήσεις σφαλμάτων και τις λύσεις που προκύπτουν αριθμητικά.

Αναλυτικότερα, στο πρώτο κεφάλαιο, θα ορίσουμε βασικά Θεωρήματα και έννοιες κυρίως πάνω στους χώρους Sobolev και Hilbert τους οποίους θα χρειαστούμε και στα επόμενα κεφάλαια μιας και οι εκτιμήσεις μας θα είναι μέσα σε αυτούς τους χώρους.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, θα ασχοληθούμε με τις παραβολικές εξισώσεις και θα μελετήσουμε την ύπαρξη και μοναδικότητα των ασθενών λύσεων καθώς και τις εκτιμήσεις που προκύπτουν ανάλογα με την ομαλότητά τους (βελτιωμένη ομαλότητα, υψηλότερη ομαλότητα, άπειρη διαφορισιμότητα).

Στο τρίτο κεφάλαιο, θα παρουσιάσουμε το πρόβλημα συνοριακών συνθηκών Dirichlet για τη μονοδιάστατη περίπτωση της εξίσωσης της θερμότητας. Με τη χρήση της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων (Galerkin), πεπερασμένων διαφορών και με τη χωροχρονική μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων θα μελετήσουμε την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης της θερμότητας με παράλληλη χρήση της θ -μεθόδου και ανάλυση ευστάθειάς της.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, θα παρουσιάσουμε το πρόβλημα συνοριακών συνθηκών Dirichlet για τη δισδιάστατη περίπτωση της εξίσωσης της θερμότητας, όπου πάλι με τη χρήση της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων Galerkin για την προς τα πίσω μέθοδο Euler, για τη μέθοδο Crank-Nicolson και για άλλες μεθόδους, θα προχωρήσουμε σε αριθμητική επίλυση του προβλήματος και σε εκτιμήσεις σφαλμάτων για την εκάστοτε περίπτωση.

Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο, θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα και τις εκτιμήσεις σφαλμάτων στις L^2 και H^1 νόρμες με τη χρήση αλγορίθμου στο πρόγραμμα MATLAB και στο λογισμικό FreeFem++ για συγκεκριμένες λύ-

σεις της εξίσωσης της θερμότητας. Το κεφάλαιο αυτό, περιλαμβάνει διάφορες γραφικές απεικονίσεις μεταξύ αυτών και γραφήματα της θερμότητας που προκύπτουν από το λογισμικό FreeFem++ για τις διάφορες χωροχρονικές τιμές.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ:

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή αυτής της εργασίας, Δρ.Κωνσταντίνο Χρυσάφινο, για την πολύτιμη βοήθειά του στην πραγματοποίηση αυτής της διπλωματικής, για το ενδιαφέρον που έδειξε ώστε να έχουμε το βέλτιστο αποτέλεσμα και για την παρότρυνσή του και τη δυνατότητα που μου έδωσε να μάθω πολλά και καινούρια πράγματα τόσο σε θεωρητικό όσο και σε εφαρμοσμένο επίπεδο, χρήσιμα και σημαντικά για τις μετέπειτα σπουδές μου. Στη συνέχεια, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την ατέρμονη ηθική τους υποστήριξη όλα αυτά τα χρόνια και για την στήριξή τους στο να σπουδάσω αυτό που αγαπώ και στο να πραγματοποιήσω τα μελλοντικά μου σχέδια και τις προσωπικές μου επιδιώξεις. Τέλος, ευχαριστώ όλους τους φίλους μου και ιδιαίτερα τον Βαγγέλη και τη Σουζάνα που ήταν πάντα στο πλευρό μου και πίστευαν σε μένα και με παρότρυναν σε δύσκολες στιγμές και περιόδους άγχους.

Την πτυχιακή μου εργασία την αφιερώνω στη μνήμη της γιαγιάς μου Αλεξάνδρας.

Κεφάλαιο 1

Βασικοί Ορισμοί

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τη διατύπωση βασικών ορισμών και Θεωρημάτων κυρίως σχετικών με τους χώρους Sobolev, καθώς θα μας χρειαστούν στα επόμενα κεφάλαια για τη μελέτη των παραβολικών μερικών διαφορικών εξισώσεων.

1.1 Γενικοί Ορισμοί

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1.1. Έστω X πραγματικός γραμμικός χώρος, τότε η απεικόνιση $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty]$ καλείται νόρμα δεδομένου ότι:

1. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ για όλα τα $u, v \in X$
2. $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$ για όλα τα $u \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$
3. $\|u\| = 0$ αν και μόνο αν $u = 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1.2. Ένας χώρος Banach είναι ένας γραμμικός χώρος με νόρμα ο οποίος είναι πλήρης που σημαίνει ότι κάθε ακολουθία Cauchy σε αυτόν είναι συγκλίνουσα.

1.2 Ασθενείς Παράγωγοι

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2.1. Έστω $C_c^\infty(U)$ ο χώρος των απείρως διαφορίσιμων συναρτήσεων $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ με συμπαγή φορέα στο U . Καλούμε δοκιμαστική συνάρτηση ϕ μια συνάρτηση που ανήκει στον $C_c^\infty(U)$.

Έστω ότι μας δίνεται μία συνάρτηση u που ανήκει στον $C^1(U)$. Τότε εάν ϕ ανήκει στον $C_c^\infty(U)$, παρατηρούμε από την ολοκλήρωση κατά μέλη ότι

$$\int_U u \phi_{x_i} dx = - \int_U u_{x_i} \phi dx \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.1)$$

Δεν υπάρχουν οριακοί όροι καθώς η ϕ έχει συμπαγή φορέα στο U κι έτσι μηδενίζεται κοντά στο σύνορο ∂U .

Πιο γενικά, εάν το k είναι θετικός ακέραιος, $u \in C^k(U)$ και $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ είναι ένας πολυδείκτης τάξης $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$, τότε

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U D^\alpha u \phi dx.$$

Αυτή η ισότητα ισχύει αφού

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \phi$$

και μπορούμε να εφαρμόσουμε την (1.1) $|\alpha|$ φορές.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2.2. Έστω $u, v \in L_{loc}^1(U)$ και α είναι ένας πολυδείκτης. Λέμε ότι το v είναι η $\alpha^{\text{ισσ}}^{\text{τή}}$ ασθενής μερική παράγωγος του u και γράφουμε $D^\alpha u = v$, δεδομένου ότι

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \phi dx \quad (1.2)$$

για όλες τις δοκιμαστικές συναρτήσεις $\phi \in C_c^\infty(U)$.

Με άλλα λόγια, εάν μας δοθεί μία u και συμβεί να υπάρχει συνάρτηση v που να ικανοποιεί την (1.2) για όλες τις ϕ , λέμε ότι $D^\alpha u = v$ με την ασθενή έννοια. Αν δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση v , τότε το u δε διαθέτει $\alpha^{\text{ισσ}}^{\text{τή}}$ ασθενή μερική παράγωγο.

ΛΗΜΜΑ 1.2.3. (Μοναδικότητα των ασθενών παραγώγων): Μία ασθενής $\alpha^{\text{ισσ}}^{\text{τή}}$ μερική παράγωγος του u , εάν υπάρχει, είναι μοναδικά ορισμένη σε ένα σύνολο μέτρου μηδέν.

Απόδειξη: Έστω τα $v, v' \in L_{loc}^1(U)$ ικανοποιούν

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v' \phi dx$$

για όλες τις $\phi \in C_c^\infty(U)$. Τότε

$$\int_U (v - v') \phi dx = 0$$

για όλες τις $\phi \in C_c^\infty(U)$, άρα $v - v' = 0$ σχεδόν παντού.

1.3 Ορισμοί Χώρων Sobolev

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3.1. Ο χώρος Sobolev $W^{k,p}(U)$ αποτελείται από όλες τις τοπικά αθροίσιμες συναρτήσεις $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε για κάθε α με $|\alpha| \leq k$, το $D^\alpha u$ υπάρχει με την ασθενή έννοια και ανήκει στον $L^p(U)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- $L^p(U) = \{u \text{ μετρήσιμη στο } U \text{ και } \int_U |u|^p dx < \infty, \quad 1 \leq p < \infty\}$
- Εάν $p = 2$ γράφουμε $H^k(U) = W^{k,2}(U)$ ($k = 0, 1, \dots$). Το $H^k(U)$ ορίζει έναν χώρο Hilbert.
- $H^0(U) = L^2(U)$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3.2. Εάν $u \in W^{k,p}(U)$, ορίζουμε τη νόρμα του ως:

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_U |D^\alpha u| dx \right)^{\frac{1}{p}} & (1 \leq p < \infty) \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \text{ess sup}_U |D^\alpha u| & (p = \infty) \end{cases}$$

Σημείωση: Ο χώρος H_0^1 ορίζεται ως εξής:

$$H_0^1(U) = \{u \in H^1(U) \mid u = 0 \text{ πάνω στο } \partial U\}$$

$$\text{όπου } H^1(U) = \{u \in L^2(U) \mid \int_U \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 \right) dx dy < \infty\}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3.3. Έστω $\{u_m\}_{m=1}^\infty, u \in W^{k,p}(U)$. Λέμε ότι η u_m συγκλίνει στο u στον $W^{k,p}(U)$ και γράφουμε $u_m \rightarrow u$ στον $W^{k,p}(U)$ δεδομένου ότι $\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(U)} = 0$. Γράφουμε ότι $u_m \rightarrow u$ στον $W_{loc}^{k,p}(U)$ και εννοούμε ότι $u_m \rightarrow u$ στον $W^{k,p}(V) \forall V \subset\subset U$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3.4. Ορίζουμε ως $W_0^{k,p}(U)$ την κλειστότητα του $C_c^\infty(U)$ στον $W^{k,p}(U)$.

ΣΧΟΛΙΟ: $D^\alpha u = 0$ πάνω στο σύνορο ∂U , $\forall |\alpha| \leq k - 1$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3.5. (Ιδιότητες των ασθενών παραγώγων): Έστω $u, v \in W^{k,p}(U)$, $|\alpha| \leq k$. Τότε

α. $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$ και $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta}u$
για όλα τα α, β με $|\alpha| + |\beta| \leq k$.

β. Για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(U)$ και $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$, $|\alpha| \leq k$.

γ. Εάν το V είναι ανοιχτό υποσύνολο του U , τότε το $u \in W^{k,p}(V)$.

δ. Εάν $\zeta \in C_c^\infty(U)$, τότε $\zeta u \in W^{k,p}(U)$ και

$$D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \zeta D^{\alpha-\beta} u \text{ (τύπος Leibniz)}$$

$$\text{όπου } \binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$$

Απόδειξη: Βλ.[2, Κεφάλαιο 5, σελ.247]

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3.6. (Χώροι Sobolev ως συναρτησιακοί χώροι): Για κάθε $k = 1, \dots$ και $1 \leq p \leq \infty$, ο χώρος Sobolev $W^{k,p}(U)$ είναι ένας χώρος Banach.

Απόδειξη: Βλ.[2, Κεφάλαιο 5, σελ.249]

1.4 Προσέγγιση

Τα τρία παρακάτω Θεωρήματα αφορούν σε προσεγγίσεις από ομαλές συναρτήσεις και οι αποδείξεις τους βρίσκονται στο κεφάλαιο [5] σελ.250 – 254 του βιβλίου L.Evans, *Partial Differential Equations*, AMS publications, Graduate Text in Mathematics.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.4.1. (Τοπική προσέγγιση ομαλών συναρτήσεων): Έστω ότι $u \in W^{k,p}(U)$ για κάποια $1 \leq p < \infty$ και θέτουμε $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$ στο U_ε . Τότε

1. $u^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon), \forall \varepsilon > 0$
2. $u^\varepsilon \rightarrow u$ στον $W_{loc}^{k,p}(U)$, καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$.

Σημειώσεις:

- * Ουσιαστικά αυτό το Θεώρημα μας λέει ότι υπάρχουν ομαλές συναρτήσεις των οποίων η συνέλιξη συντελεί στην κατασκευή μιας ακολουθίας ομαλών συναρτήσεων.
- * $U_\varepsilon = \{x \in U \mid \text{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.4.2. (Γεική προσέγγιση ομαλών συναρτήσεων): Έστω U φραγμένο και έστω επίσης ότι $u \in W^{k,p}(U)$ για κάποια $1 \leq p < \infty$. Τότε υπάρχουν συναρτήσεις $u_m \in C^\infty(U) \cap W^{k,p}(U)$ τέτοιες ώστε $u_m \rightarrow u$ στον $W^{k,p}(U)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.4.3. Έστω ότι U είναι φραγμένο και ∂U είναι C^1 . Έστω ότι $u \in W^{k,p}(U)$ για κάποια $1 \leq p < \infty$. Τότε υπάρχουν συναρτήσεις $u_m \in C^\infty(\bar{U})$ τέτοιες ώστε $u_m \rightarrow u$ στον $W^{k,p}(U)$.

1.5 Επεκτάσεις

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.5.1. (Θεώρημα Επέκτασης): Έστω ότι U είναι φραγμένο και ∂U είναι C^1 . Εάν επιλέξουμε ένα φραγμένο ανοιχό σύνολο V τέτοιο ώστε $U \subset\subset V$, τότε υπάρχει ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $E : W^{1,p}(U) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ έτσι ώστε για κάθε $u \in W^{1,p}(U)$ να ισχύουν τα εξής:

1. $Eu = u$ σχεδόν παντού στον U
2. Eu έχει υποστήριξη μεταξύ του V , και
3. $\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$

όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από τα p, U, V .

Απόδειξη: Βλ.[2, Κεφάλαιο 5, σελ.254]

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5.2. Καλούμε Eu μία επέκταση του u στον \mathbb{R}^n .

1.6 Ίχνοι

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.6.1. (Θεώρημα Ίχνους): Έστω ότι U είναι φραγμένο και ∂U είναι C^1 .

Τότε υπάρχει ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : W^{1,p}(U) \rightarrow L^p(\partial U)$ τέτοιος ώστε:

1. $Tu = u|_{\partial U}$ αν $u \in W^{1,p}(U) \cap C(\bar{U})$
2. $\|Tu\|_{L^p(\partial U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$

για κάθε $u \in W^{1,p}(U)$ με τη σταθερά C να εξαρτάται μόνο από τα p, U .

Απόδειξη: Βλ.[2, Κεφάλαιο 5, σελ.258]

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6.2. Καλούμε Tu το ίχνος του u πάνω στο ∂U .

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.6.3. Έστω ότι U είναι φραγμένο και ∂U είναι C^1 . Έστω επίσης ότι $u \in W^{1,p}(U)$. Τότε $u \in W_0^{1,p}(U)$ αν και μόνο αν $Tu = 0$ πάνω στο ∂U .

Απόδειξη: Βλ.[2, Κεφάλαιο 5, σελ.259]

1.7 Δύο Βασικά Θεωρήματα για τους Χώρους Sobolev

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.7.1. (Εκτιμήσεις για τον $W_0^{1,p}, 1 \leq p < n$):

Έστω ότι U είναι ένα φραγμένο, ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Έστω $u \in W_0^{1,p}(U)$ για κάποια $1 \leq p < n$. Τότε έχουμε την εκτίμηση $\|u\|_{L^q(U)} \leq C\|Du\|_{L^p(U)}$ για κάθε $q \in [1, p^*]$ με τη σταθερά C να εξαρτάται μόνο από τα p, q, n και U .

Απόδειξη: Βλ.[2, Κεφάλαιο 5, σελ.265]

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.7.2. (Θεώρημα Συμπάγειας Rellich-Kondrachov):

Έστω ότι U είναι ένα φραγμένο, ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n και ∂U είναι C^1 . Έστω επίσης ότι $1 \leq p < n$. Τότε $W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U), \forall 1 \leq q < p^*$. (Δηλαδή ο $W^{1,p}(U)$ ενσφηνώνεται συμπαγώς στον $L^q(U) \forall 1 \leq q < p^*$.)

Απόδειξη: Βλ.[2, Κεφάλαιο 5, σελ.272]

1.8 Άλλοι Χώροι Συναρτήσεων

Οι παρακάτω ορισμοί, καθώς και τα Θεωρήματα, έχουν να κάνουν με κάποιους άλλους χώρους συναρτήσεων τους οποίους θα χρειαστούμε στη συνέχεια. Οι αποδείξεις των Θεωρημάτων στο τέλος της παραγράφου βρίσκονται στο κεφάλαιο [5.9] του βιβλίου L.Evans, *Partial Differential Equations*, AMS publications, Graduate Text in Mathematics.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8.1. Ορίζουμε ως $H^{-1}(U)$ τον δυικό χώρο του $H_0^1(U)$.

ΣΧΟΛΙΟ: Ουσιαστικά η f ανήκει στον $H^{-1}(U)$ δεδομένου ότι η f ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον $H_0^1(U)$.

Σημείωση: Θα γράφουμε $\langle \cdot, \cdot \rangle$ για να ορίσουμε το ζεύγος $H^{-1}(U)$ και $H_0^1(U)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8.2. Εάν $f \in H^{-1}(U)$, ορίζουμε τη νόρμα

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} = \sup \left\{ \langle f, u \rangle \mid u \in H_0^1(U), \|u\|_{H_0^1(U)} \leq 1 \right\}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8.3. Ο χώρος $L^p(0, T; X)$ αποτελείται από όλες τις μετρήσιμες συναρτήσεις $\vec{u} : [0, T] \rightarrow X$ με

1. $\|\vec{u}\|_{L^p(0, T; X)} := \left(\int_0^T \|\vec{u}(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ για $1 \leq p < \infty$ και
2. $\|\vec{u}\|_{L^\infty(0, T; X)} := \text{ess sup}_{0 \leq t \leq T} \|\vec{u}(t)\| < \infty$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8.4. Ο χώρος $C([0, T]; X)$ περιέχει όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $\vec{u} : [0, T] \rightarrow X$ με

$$\|\vec{u}\|_{C([0, T]; X)} := \max_{0 \leq t \leq T} \|\vec{u}(t)\| < \infty.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8.5. Έστω $\vec{u} \in L^1(0, T; X)$. Λέμε ότι το $\vec{v} \in L^1(0, T; X)$ είναι η ασθενής παράγωγος του \vec{u} και γράφουμε $\vec{u}' = \vec{v}$ δεδομένου ότι

$$\int_0^T \phi'(t) \vec{u}(t) dt = - \int_0^T \phi(t) \vec{v}(t) dt$$

για όλες τις βαθμωτές δοκιμαστικές συναρτήσεις $\phi \in C_c^\infty(0, T)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8.6. • Ο χώρος Sobolev $W^{1,p}(0, T; X)$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $\vec{u} \in L^p(0, T; X)$ έτσι ώστε το \vec{u}' να υπάρχει με την ασθενή έννοια και να ανήκει στον $L^p(0, T; X)$. Επιπλέον

$$\|\vec{u}\|_{W^{1,p}(0,T;X)} := \begin{cases} \left(\int_0^T \|\vec{u}(t)\|^p + \|\vec{u}'(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} & (1 \leq p < \infty) \\ \text{ess sup}_{0 \leq t \leq T} (\|\vec{u}(t)\| + \|\vec{u}'(t)\|) & (p = \infty) \end{cases}$$

• Γράφουμε $H^1(0, T; X) = W^{1,2}(0, T; X)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.8.7. Έστω $\vec{u} \in W^{1,p}(0, T; X)$ για κάποια $1 \leq p \leq \infty$. Τότε

• $\vec{u} \in C([0, T]; X)$ (έπειτα από πιθανό επαναπροσδιορισμό σε ένα σύνολο μέτρου μηδέν)

• $\vec{u}(t) = \vec{u}(s) + \int_s^t \vec{u}'(\tau) d\tau \quad \forall \quad 0 \leq s \leq t \leq T$

• Επιπλέον έχουμε την εκτίμηση

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\vec{u}(t)\| \leq C \|\vec{u}\|_{W^{1,p}(0,T;X)}$$

με τη σταθερά C να εξαρτάται μόνο από το T .

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.8.8. Έστω ότι $\vec{u} \in L^2(0, T; H_0^1(U))$ με το $\vec{u}' \in L^2(0, T; H^{-1}(U))$. Τότε:

• $\vec{u} \in C([0, T]; L^2(U))$ (έπειτα από πιθανό επαναπροσδιορισμό σε ένα σύνολο μέτρου μηδέν).

• Η απεικόνιση $t \mapsto \|\vec{u}(t)\|_{L^2(U)}^2$ είναι απόλυτα συνεχής με

$$\frac{d}{dt} \|\vec{u}(t)\|_{L^2(U)}^2 = 2 \langle \vec{u}'(t), \vec{u}(t) \rangle$$

για σχεδόν παντού $0 \leq t \leq T$.

• Επιπλέον έχουμε την εκτίμηση

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\vec{u}(t)\|_{L^2(U)} \leq C (\|\vec{u}\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))} + \|\vec{u}'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))})$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από το T .

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.8.9. (Απεικονίσεις σε καλύτερους χώρους):

Έστω ότι U είναι ανοιχτό και φραγμένο και ∂U είναι ομαλό. Έστω m ένας μη αρνητικός ακέραιος. Αν υποθέσουμε ότι $\vec{u} \in L^2(0, T; H^{m+2}(U))$ με $\vec{u}' \in L^2(0, T; H^m(U))$

- Τότε $\vec{u} \in C([0, T]; H^{m+1}(U))$ (έπειτα από πιθανό επαναπροσδιορισμό σε ένα σύνολο μέτρου μηδέν).
- Επιπλέον έχουμε την εκτίμηση

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\vec{u}(t)\|_{H^{m+1}(U)} \leq C(\|\vec{u}\|_{L^2(0, T; H^{m+2}(U))} + \|\vec{u}'\|_{L^2(0, T; H^m(U))})$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από το T, U, m .

Κεφάλαιο 2

Παραβολικές Εξισώσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα μελετήσουμε, μέσω της χρήσης ενεργειακών μεθόδων, τις δεύτερης τάξης παραβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις και κατά βάση, την εξίσωση της θερμότητας που αποτελεί το πιο γενικό παράδειγμα παραβολικής εξίσωσης. Επίσης, θα μελετηθούν η ύπαρξη και η μοναδικότητα των ασθενών λύσεων ενώ εν τέλει θα αναφερθούμε και στην ομαλότητά τους.

2.1 Ορισμοί

1. Παραβολικές εξισώσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο υποθέτουμε ότι το U είναι ένα ανοιχτό, φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^n και θέτουμε $U_T = U \times (0, T]$ για κάποιον ορισμένο χρόνο $T > 0$.

Θα εξετάσουμε πρώτα το πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} u_t + Lu = f, & U_T \\ u = 0, & \partial U \times [0, T] \\ u = g, & U \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (2.1)$$

όπου $f : U_T \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δοσμένες και $u : \bar{U}_T \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η άγνωστη $u = u(x, t)$. Το γράμμα L συμβολίζει για κάθε χρονική στιγμή t ένα δεύτερης τάξης μερικό διαφορικό τελεστή που γράφεται είτε στη μορφή απόκλισης (2.2) είτε στη μορφή μη-απόκλισης (2.3)

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n (a^{ij}(x, t)u_{x_j})_{x_i} + \sum_{i=1}^n b^i(x, t)u_{x_i} + c(x, t)u \quad (2.2)$$

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x,t)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u \quad (2.3)$$

για δοσμένους συντελεστές a^{ij}, b^i, c ($i = 1, \dots, n$).

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.1. Λέμε ότι ο μερικός διαφορικός τελεστής $\frac{\partial}{\partial t} + L$ είναι (ομοιόμορφα) παραβολικός εάν υπάρχει μία σταθερά $\theta > 0$ τέτοια ώστε για όλα τα $(x,t) \in U_T, \xi \in \mathbb{R}^n$ να ισχύει η σχέση

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x,t)\xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι για κάθε καθορισμένο χρόνο $0 \leq t \leq T$ ο τελεστής L είναι ένας ομοιόμορφα ελλειπτικός τελεστής στην χωρική μεταβλητή x καθώς θα ισχύει η σχέση $\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2$.

Ένα προφανές παράδειγμα των παραπάνω εξισώσεων παίρνουμε θέτοντας $a^{ij} \equiv 0, a^{ii} \equiv k, b^i \equiv c \equiv f \equiv 0$ όπου $L = -\Delta$ και έτσι η ΜΔΕ $\frac{\partial}{\partial t} + Lu$ γίνεται η εξίσωση θερμότητας. Η εξίσωση της θερμότητας δηλαδή είναι της μορφής $\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \Leftrightarrow u_t - ku_{xx} = 0$, όπου k ο συντελεστής θερμικής διάχυσης. Γενικά, οι δεύτερης τάξης παραβολικές εξισώσεις περιγράφουν σε φυσικές εφαρμογές την εξέλιξη του χρόνου της πυκνότητας κάποιας ποσότητας u , έστω μιας χημικής συγκέντρωσης, μεταξύ της περιοχής του U . Ο δεύτερης τάξης όρος $\sum_{i,j=1}^n a^{ij}u_{x_i x_j}$ περιγράφει τη διάχυση, ο πρώτης τάξης όρος $\sum_{i=1}^n b^i u_{x_i}$ περιγράφει τη μεταφορά και ο μηδενικής τάξης όρος cu περιγράφει τη δημιουργία ή την εξάντληση.

2. Ασθενείς λύσεις

Θεωρώντας την περίπτωση όπου το L είναι της μορφής (2.2), προσπαθούμε να βρούμε μια κατάλληλη ασθενή λύση για το πρόβλημα αρχικών τιμών (2.1).

Υποθέτουμε τώρα ότι

$$a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(U_T) \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

$$f \in L^2(U_T)$$

$$g \in L^2(U)$$

και ότι ισχύει πάντα στην υπόθεσή μας ότι $a^{ij} = a^{ji}$, ($i, j = 1, \dots, n$), δηλαδή το ελλειπτικό μέρος του τελεστή L ανώτερης τάξης είναι συμμετρικό. Ορίζουμε

τον χρονικά εξαρτημένο διγραμμικό τύπο

$$B[u, v; t] := \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\cdot, t) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(\cdot, t) u_{x_i} v + c(\cdot, t) u v dx$$

για $u, v \in H_0^1(U)$ και $0 \leq t \leq T$ σχεδόν παντού.

Για να γίνει κατανοητός ο επόμενος ορισμός της ασθενούς λύσης θεωρούμε προσωρινά ότι η $u = u(x, t)$ είναι στην πραγματικότητα μία ομαλή λύση του παραβολικού προβλήματος (2.1).

Τώρα συσχετίζουμε με το u μια απεικόνιση $\vec{u} : [0, T] \rightarrow H_0^1(U)$ ορισμένη από το $[\vec{u}(t)](x) := u(x, t)$ ($x \in U, 0 \leq t \leq T$). Με άλλα λόγια, θα θεωρήσουμε το u όχι ως μια συνάρτηση του x και t μαζί, αλλά σαν μια απεικόνιση \vec{u} του t μέσα στον χώρο $H_0^1(U)$ των συναρτήσεων του x .

Επιστρέφοντας στο πρόβλημα (2.1) ας ορίσουμε όμοια την $\vec{f} : [0, T] \rightarrow L^2(U)$ ως $[\vec{f}(t)](x) := f(x, t)$ ($x \in U, 0 \leq t \leq T$). Τότε εάν ορίσουμε μία συνάρτηση $v \in H_0^1(U)$, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε την ΜΔΕ $\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f$ με το v και να ολοκληρώσουμε κατά μέλη για να βρούμε $(\vec{u}', v) + B[\vec{u}, v; t] = (\vec{f}, v)$, ($' = \frac{d}{dt}$) όπου για κάθε $0 \leq t \leq T$ το ζεύγος (\cdot, \cdot) δηλώνει το εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(U)$. Έπειτα, παρατηρούμε ότι

$$u_t = g^0 + \sum_{j=1}^n g_{x_j}^j \quad (2.4)$$

στον U_T για $g^0 := f - \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} - cu$ και $g^j := \sum_{i=1}^n a^{ij} u_{x_i}$ ($j = 1, \dots, n$). Κατά συνέπεια η (2.4) και οι ορισμοί (1.8.1, 1.8.2) του πρώτου κεφαλαίου ορίζουν ότι το δεξί μέλος της (2.4) ανήκει στον χώρο Sobolev $H^{-1}(U)$ με

$$\|u_t\|_{H^{-1}(U)} \leq \left(\sum_{j=0}^n \|g^j\|_{L^2(U)}^2 \right)^{1/2} \leq C \left(\|u\|_{H_0^1(U)} + \|f\|_{L^2(U)} \right).$$

Αυτή η εκτίμηση προτείνει ουσιαστικά ότι είναι λογικό να ψάχνουμε για μία ασθενή λύση με $\vec{u}' \in H^{-1}(U)$ για σχεδόν παντού με χρόνο $0 \leq t \leq T$, όπου στην περίπτωση αυτή ο όρος (\vec{u}', v) μπορεί να εκφραστεί ξανά, αυτή τη φορά ως $\langle \vec{u}', v \rangle$, με \langle, \rangle να είναι το ζεύγος των $H^{-1}(U)$ και $H_0^1(U)$. Όλη αυτή η παραπάνω μελέτη υποκινεί τον παρακάτω ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.2. Λέμε ότι μία συνάρτηση

$$\vec{u} \in L^2(0, T; H_0^1(U))$$

με

$$\vec{u}' \in L^2(0, T; H^{-1}(U))$$

είναι μία ασθενής λύση του παραβολικού προβλήματος αρχικών/συνοριακών τιμών (2.1) δεδομένου ότι

- $\langle \vec{u}', v \rangle + B[\vec{u}, v; t] = (\vec{f}, v)$ για κάθε $v \in H_0^1(U)$ και για σχεδόν παντού με χρόνο $0 \leq t \leq T$ και
- $\vec{u}(0) = g$.

ΣΧΟΛΙΟ: Από το Θεώρημα 1.8.8 του πρώτου κεφαλαίου, παρατηρούμε ότι το $\vec{u} \in C([0, T]; L^2(U))$ και συνεπώς η ισότητα $\vec{u}(0) = g$ έχει νόημα.

2.2 Ύπαρξη Ασθενών Λύσεων

1. Προσεγγίσεις Galerkin

Θέλουμε να δημιουργήσουμε μία ασθενή λύση του παραβολικού προβλήματος (2.1) κατασκευάζοντας πρώτα λύσεις συγκεκριμένων πεπερασμένης διάστασης προσεγγίσεων του (2.1) και μετά να περάσουμε στα όρια. Αυτό καλείται μέθοδος *Galerkin*.

Πιο συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις $w_k = w_k(x)$, ($k = 1, \dots, n$) είναι ομαλές :

$\{w_k\}_{k=1}^\infty$ είναι μία ορθογώνια βάση του $H_0^1(U)$,

$\{w_k\}_{k=1}^\infty$ είναι μία ορθογώνια βάση του $L^2(U)$.

Έστω m ένας θετικός ακέραιος. Θα ψάξουμε για μία συνάρτηση $\vec{u}_m : [0, T] \rightarrow H_0^1(U)$ της μορφής

$$\vec{u}_m(t) := \sum_{k=1}^m d_m^k(t) w_k, \quad (2.5)$$

όπου επιλέγουμε τους συντελεστές $d_m^k(t)$ ($0 \leq t \leq T, k = 1, \dots, m$) έτσι ώστε

$$d_m^k(0) = (g, w_k) \quad (2.6)$$

και

$$(\vec{u}_m', w_k) + B[\vec{u}_m, w_k; t] = (\vec{f}, w_k) \quad (0 \leq t \leq T, k = 1, \dots, m). \quad (2.7)$$

Το (\cdot, \cdot) ορίζει το εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(U)$. Συνεπώς, ψάχνουμε μια συνάρτηση \vec{u}_m της μορφής (2.5) που ικανοποιεί την προέκταση (2.7) του προβλήματος (2.1) πάνω στον πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο που έχει επεκταθεί από το $\{w_k\}_{k=1}^m$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2.1. (Κατασκευή προσεγγιστικών λύσεων):

Για κάθε ακέραιο $m = 1, 2, \dots$ υπάρχει μία μοναδική συνάρτηση \vec{u}_m της μορφής (2.5) που ικανοποιεί τις (2.6), (2.7).

Απόδειξη: Υποθέτοντας ότι η \vec{u}_m έχει τη δομή (2.5), παρατηρούμε πρώτα από την σχέση $\{ \{w_k\}_{k=1}^\infty \}$ είναι μία ορθογώνια βάση του $L^2(U)$ ότι

$$(\vec{u}'_m, w_k) = d_m^{k'}(t). \quad (2.8)$$

Επιπλέον,

$$B[\vec{u}_m, w_k; t] = \sum_{l=1}^m e^{kl}(t) d_m^l(t) \quad (2.9)$$

για $e^{kl}(t) := B[w_l, w_k; t]$ ($k, l = 1, \dots, m$). Ας γράψουμε στη συνέχεια $f^k(t) := (\vec{f}'(t), w_k)$ ($k = 1, \dots, m$). Τότε η (2.7) γίνεται το γραμμικό σύστημα της συνήθους διαφορικής εξίσωσης (ΣΔΕ)

$$d_m^{k'}(t) + \sum_{l=1}^m e^{kl}(t) d_m^l(t) = f^k(t) \quad (k = 1, \dots, m) \quad (2.10)$$

υπό της αρχικής συνθήκης (2.6). Σύμφωνα με τη βασική θεωρία ύπαρξης για τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, υπάρχει μία μοναδική απόλυτα συνεχής συνάρτηση $\vec{d}_m(t) = (d_m^1(t), \dots, d_m^m(t))$ που ικανοποιεί τις (2.6), (2.10) για σχεδόν παντού $0 \leq t \leq T$. Τότε η \vec{u}_m που ορίζεται από την (2.5) λύνει την (2.7) για σχεδόν παντού $0 \leq t \leq T$.

2. Ενεργειακές εκτιμήσεις

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2.2. Υπάρχουν σταθερές $\beta > 0$ και $\gamma \geq 0$ τέτοιες ώστε

$$\beta \|u\|_{H_0^1(U)}^2 \leq B[u, u] + \gamma \|u\|_{L^2(U)}$$

για όλα τα $u \in H_0^1(U)$, σχεδόν για όλα τα $t \in [0, T]$.

Απόδειξη: Σύμφωνα με τη συνθήκη $\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2$ για τις ελλειπτικές εξισώσεις (όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 2.1) έχουμε

$$\begin{aligned} \theta \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} dx &= B[u, u] - \int_U \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} u + c u^2 dx \\ &\leq B[u, u] + \sum_{i=1}^n \|b^i\|_{L^\infty} \int_U |Du| |u| dx + \|c\|_{L^\infty} \int_U u^2 dx. \end{aligned}$$

Τώρα από την ανισότητα Cauchy με το ε παρατηρούμε

$$\int_U |Du||u|dx \leq \varepsilon \int_U |Du|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_U u^2 dx \quad (\varepsilon > 0).$$

Εισάγουμε την εκτίμηση αυτή στην πιο παραπάνω σχέση και έπειτα επιλέγουμε ε τόσο μικρό ώστε $\varepsilon \sum_{i=1}^n \|b^i\|_{L^\infty} < \frac{\theta}{2}$. Έτσι $\frac{\theta}{2} \int_U |Du|^2 dx \leq B[u, u] + C \int_U u^2 dx$ για κάποια κατάλληλη σταθερά C . Επιπλέον από την ανισότητα Poincaré έχουμε ότι $\|u\|_{L^2(U)} \leq C \|Du\|_{L^2(U)}$. Εύκολα ακολουθεί ότι $\beta \|u\|_{H_0^1(U)}^2 \leq B[u, u] + \gamma \|u\|_{L^2(U)}^2$ για κατάλληλες σταθερές $\beta > 0, \gamma \geq 0$.

Σημείωση (Ανισότητα του Gronwall): Έστω ότι οι συνεχείς συναρτήσεις $u, \kappa : [0, T] \rightarrow [0, \infty)$ και το $K > 0$ ικανοποιούν τη σχέση

$$u(t) \leq K + \int_0^t u(s)\kappa(s)ds$$

για όλα τα $t \in [0, T]$. Τότε

$$u(t) \leq K \exp\left(\int_0^t \kappa(s)ds\right).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2.3. Υπάρχει μία σταθερά C που εξαρτάται μόνο από τα U, T και τους συντελεστές του L έτσι ώστε να ισχύει

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \|\vec{u}_m(t)\|_{L^2(U)} + \|\vec{u}_m\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))} + \|\vec{u}_m'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))} \\ \leq C(\|\vec{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))} + \|g\|_{L^2(U)}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

για $m = 1, 2, \dots$

Απόδειξη: Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (2.7) με $d_m^k(t)$, αθροίζοντας για $k = 1, \dots, m$ και ανακαλώντας την (2.5) προκύπτει

$$(\vec{u}_m', \vec{u}_m) + B[\vec{u}_m, \vec{u}_m; t] = (\vec{f}, \vec{u}_m) \quad (2.12)$$

για σχεδόν παντού $0 \leq t \leq T$. Όπως αποδείξαμε στο Θεώρημα 2.2.2, υπάρχουν σταθερές $\beta > 0, \gamma \geq 0$ τέτοιες ώστε

$$\beta \|\vec{u}_m\|_{H_0^1(U)}^2 \leq B[\vec{u}_m, \vec{u}_m; t] + \gamma \|\vec{u}_m\|_{L^2(U)}^2 \quad (2.13)$$

σχεδόν για όλα τα $0 \leq t \leq T$, $m = 1, \dots$. Επιπλέον,

$$|(\vec{f}, \vec{u}_m)| \leq \frac{1}{2} \|\vec{f}\|_{L^2(U)}^2 + \frac{1}{2} \|\vec{u}_m\|_{L^2(U)}^2 \text{ και } (\vec{u}'_m, \vec{u}_m) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\vec{u}_m\|_{L^2(U)}^2 \right) \text{ για}$$

σχεδόν παντού $0 \leq t \leq T$.

Κατα συνέπεια η (2.12) αποδίδει την ανισότητα

$$\frac{d}{dt} (\|\vec{u}_m\|_{L^2(U)}^2) + 2\beta \|\vec{u}_m\|_{H_0^1(U)}^2 \leq C_1 \|\vec{u}_m\|_{L^2(U)}^2 + C_2 \|\vec{f}\|_{L^2(U)}^2 \quad (2.14)$$

για σχεδόν παντού $0 \leq t \leq T$ και για κατάλληλες σταθερές C_1 και C_2 .

Τώρα γράφουμε

$$\eta(t) := \|\vec{u}_m(t)\|_{L^2(U)}^2 \quad (2.15)$$

και

$$\xi(t) := \|\vec{f}(t)\|_{L^2(U)}^2. \quad (2.16)$$

Η (2.14) συνεπάγεται $\eta'(t) \leq C_1 \eta(t) + C_2 \xi(t)$ για σχεδόν παντού $0 \leq t \leq T$.

Συνεπώς η διαφορική μορφή της ανισότητας Gronwall δίνει την εκτίμηση

$$\eta(t) \leq e^{C_1 t} \left(\eta(0) + C_2 \int_0^t \xi(s) ds \right) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (2.17)$$

Εφ'όσον $\eta(0) = \|\vec{u}_m(0)\|_{L^2(U)}^2 \leq \|g\|_{L^2(U)}^2$ από την (2.6), παίρνουμε από τις (2.15)-(2.17) την εκτίμηση

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\vec{u}(t)\|_{L^2(U)}^2 \leq C \left(\|g\|_{L^2(U)}^2 + \|\vec{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2 \right).$$

Επιστρέφοντας πάλι στην ανισότητα (2.14), ολοκληρώνουμε από το 0 στο T και εφαρμόζουμε την παραπάνω ανισότητα για να βρούμε

$$\begin{aligned} \|\vec{u}_m\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))}^2 &= \int_0^T \|\vec{u}_m\|_{H_0^1(U)}^2 dt \\ &\leq C \left(\|g\|_{L^2(U)}^2 + \|\vec{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2 \right). \end{aligned}$$

Παίρνουμε οποιοδήποτε $v \in H_0^1(U)$ με $\|v\|_{H_0^1(U)} \leq 1$ και γράφουμε $v = v^1 + v^2$ όπου $v^1 \in \text{span}\{w_k\}_{k=1}^m$ και $(v^2, w_k) = 0$ ($k = 1, \dots, m$).

Εφ'όσον οι συναρτήσεις $\{w_k\}_{k=0}^\infty$ είναι ορθογώνιες στον $H_0^1(U)$ άρα $\|v^1\|_{H_0^1(U)} \leq \|v\|_{H_0^1(U)} \leq 1$. Χρησιμοποιώντας την (2.7) συμπεραίνουμε για σχεδόν παντού $0 \leq t \leq T$ ότι

$$(\vec{u}'_m, v^1) + B[\vec{u}_m, v^1; t] = (\vec{f}, v^1).$$

Τότε, χρησιμοποιώντας την $(v^2, w_k) = 0, \forall k = 1, \dots, m$, η (2.5) δίνει τη σχέση

$$\langle \vec{u}'_m, v \rangle = (\vec{u}'_m, v) = (\vec{u}'_m, v^1) = (\vec{f}, v^1) - B[\vec{u}_m, v^1; t].$$

Κατά συνέπεια,

$$|\langle \vec{u}'_m, v \rangle| \leq C(\|\vec{f}\|_{L^2(U)} + \|\vec{u}_m\|_{H_0^1(U)})$$

αφού $\|v^1\|_{H_0^1(U)} \leq 1$. Έτσι

$$\|\vec{u}'_m\|_{H^{-1}(U)} \leq C(\|\vec{f}\|_{L^2(U)} + \|\vec{u}_m\|_{H_0^1(U)})$$

και άρα

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\vec{u}'_m\|_{H^{-1}(U)}^2 dt &\leq \int_0^T C(\|\vec{f}\|_{L^2(U)} + \|\vec{u}_m\|_{H_0^1(U)}) dt \\ &\leq C(\|g\|_{L^2(U)} + \|\vec{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))}). \end{aligned}$$

3. Ύπαρξη και μοναδικότητα

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2.4. (Ύπαρξη ασθενούς λύσης):

Υπάρχει μία λύση του προβλήματος (2.1)

Απόδειξη: Σύμφωνα με την ενεργειακή εκτίμηση (2.11), παρατηρούμε ότι η ακολουθία $\{\vec{u}_m\}_{m=1}^\infty$ είναι φραγμένη στον $L^2(0, T; H_0^1(U))$ και ότι η $\{\vec{u}'_m\}_{m=1}^\infty$ είναι φραγμένη στον $L^2(0, T; H^{-1}(U))$. Συνεπώς υπάρχει μια υπακολουθία $\{\vec{u}_{m_l}\}_{l=1}^\infty \subset \{\vec{u}_m\}_{m=1}^\infty$ και μία συνάρτηση $\vec{u} \in L^2(0, T; H_0^1(U))$ με $\vec{u}' \in L^2(0, T; H^{-1}(U))$ έτσι ώστε

$$\begin{cases} \vec{u}_{m_l} \rightharpoonup u & \text{ασθενώς στον } L^2(0, T; H_0^1(U)), \\ \vec{u}'_{m_l} \rightharpoonup \vec{u}' & \text{ασθενώς στον } L^2(0, T; H^{-1}(U)). \end{cases} \quad (2.18)$$

Στη συνέχεια, θέτουμε έναν ακέραιο N και επιλέγουμε μία συνάρτηση $\vec{v} \in C^1([0, T]; H_0^1(U))$ που έχει τη μορφή

$$\vec{v}(t) = \sum_{k=1}^N d^k(t)w_k \quad (2.19)$$

όπου οι $\{d^k\}_{k=1}^N$ ομαλές συναρτήσεις και $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ ορθοκανονική βάση του $H_0^1(U)$. Επιλέγουμε $m \geq N$, πολλαπλασιάζουμε την (2.7) με το $d^k(t)$, αθροίζουμε $k = 1, \dots, N$ και μετά ολοκληρώνουμε ως προς το t για να βρούμε

$$\int_0^T \langle \vec{u}', \vec{v} \rangle + B[\vec{u}_m, \vec{v}; t] dt = \int_0^T (\vec{f}, \vec{v}) dt. \quad (2.20)$$

Θέτουμε $m = m_i$ και καλούμε την (2.18) για να βρούμε περνώντας σε ασθενή όρια ότι

$$\int_0^T \langle \vec{u}', \vec{v} \rangle + B[\vec{u}, \vec{v}; t] dt = \int_0^T (\vec{f}, \vec{v}) dt. \quad (2.21)$$

Αυτή η ισότητα τότε ισχύει για όλες τις συναρτήσεις $\vec{v} \in L^2(0, T; H_0^1(U))$ καθώς συναρτήσεις της μορφής (2.19) είναι πυκνές σε αυτόν τον χώρο. (Βλ. [4])

Συγκεκριμένα,

$$\langle \vec{u}', v \rangle + B[\vec{u}, v; t] = (\vec{f}, v) \quad (2.22)$$

για κάθε $v \in H_0^1(U)$ και σχεδόν παντού $0 \leq t \leq T$. Από το Θεώρημα 1.8.8, βλέπουμε ότι επιπλέον $\vec{u} \in C([0, T]; L^2(U))$.

Προκειμένου να αποδείξουμε ότι $\vec{u}(0) = g$ παρατηρούμε πρώτα από την (2.21) ότι

$$\int_0^T - \langle \vec{v}', \vec{u} \rangle + B[\vec{u}, \vec{v}; t] dt = \int_0^T (\vec{f}, \vec{v}) dt + (\vec{u}(0), \vec{v}(0)) \quad (2.23)$$

για κάθε $\vec{v} \in C^1([0, T]; H_0^1(U))$ με $\vec{v}(T) = 0$. Ομοίως, από την (2.20) συμπεραίνουμε ότι

$$\int_0^T - \langle \vec{v}', \vec{u}_m \rangle + B[\vec{u}_m, \vec{v}; t] dt = \int_0^T (\vec{f}, \vec{v}) dt + (\vec{u}_m(0), \vec{v}(0)). \quad (2.24)$$

Θέτουμε $m = m_i$ και άλλη μια φορά το εφαρμόζουμε στην (2.18) για να βρούμε

$$\int_0^T - \langle \vec{v}', \vec{u} \rangle + B[\vec{u}, \vec{v}; t] dt = \int_0^T (\vec{f}, \vec{v}) dt + (g, \vec{v}(0)) \quad (2.25)$$

αφού $\vec{u}_{m_i}(0) \rightarrow g$ στον $L^2(U)$. Καθώς το $\vec{v}(0)$ είναι τυχαίο συγκρίνοντας τις (2.23) και (2.25) καταλήγουμε ότι $\vec{u}(0) = g$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2.5. (Μοναδικότητα των ασθενών λύσεων):

Μία ασθενής λύση του προβλήματος (2.1) είναι μοναδική.

Απόδειξη: Αρκεί να ελέγξουμε ότι η μόνη ασθενής λύση του (2.1) με $\vec{f} \equiv g \equiv 0$ είναι η

$$\vec{u} \equiv 0. \quad (2.26)$$

Για να το αποδείξουμε αυτό, παρατηρούμε ότι θέτοντας $\vec{v} = \vec{u}$ στην ταυτότητα (2.22) (για $\vec{f} \equiv 0$) ισχύει από το Θεώρημα 1.8.8 ότι

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\vec{u}\|_{L^2(U)}^2 \right) + B[\vec{u}, \vec{u}; t] = \langle \vec{u}', \vec{u} \rangle + B[\vec{u}, \vec{u}; t] = 0. \quad (2.27)$$

Αφού

$$B[\vec{u}, \vec{u}; t] \geq \beta \|\vec{u}\|_{H_0^1(U)}^2 - \gamma \|\vec{u}\|_{L^2(U)}^2 \geq -\gamma \|\vec{u}\|_{L^2(U)}^2$$

η ανισότητα του Gronwall και η (2.27) δίνουν την (2.26).

2.3 Ομαλότητα

Για να κατανοήσουμε κάπως γιατί οι βελτιωμένες υποθέσεις ομαλότητας των δεδομένων θα μπορούσαν να οδηγήσουν σε βελτιωμένη ομαλότητα για τη λύση, ας υποθέσουμε προσωρινά ότι η $u = u(x, t)$ είναι μια ομαλή λύση του προβλήματος αρχικών τιμών για την εξίσωση θερμότητας:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{στον } \mathbb{R}^n \times (0, T] \\ u = g & \text{πάνω στον } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

και ας υποθέσουμε επίσης ότι το u πηγαίνει στο μηδέν καθώς $|x| \rightarrow \infty$ επαρκώς γρήγορα ώστε να δικαιολογήσει τους ακόλουθους υπολογισμούς. Έπειτα υπολογίζουμε για $0 \leq t \leq T$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (u_t - \Delta u)^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 - 2\Delta u u_t + (\Delta u)^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 + 2Du \cdot Du_t + (\Delta u)^2 dx. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Τώρα $2Du \cdot Du_t = \frac{d}{dt}(|Du|^2)$ και κατά συνέπεια $\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} 2Du \cdot Du_t dx ds = \int_{\mathbb{R}^n} |Du|^2 dx \Big|_{s=0}^{s=t}$.

Επιπλέον

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u)^2 dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_i x_i} u_{x_j x_j} dx = - \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_i x_i x_j} u_{x_j} dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_i x_j} u_{x_i x_j} dx = \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 u|^2 dx \end{aligned}$$

άρα

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u)^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 u|^2 dx.$$

Χρησιμοποιούμε τις δύο ανισότητες παραπάνω στην σχέση (2.28) και ολοκληρώνουμε ως προς τον χρόνο για να πάρουμε

$$\begin{aligned} &\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^n} |Du|^2 dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 + |D^2 u|^2 dx dt \\ &\leq C \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f^2 dx dt + \int_{\mathbb{R}^n} |Dg|^2 dx \right). \end{aligned}$$

Έτσι βλέπουμε ότι μπορούμε να εκτιμήσουμε τις L^2 νόρμες του u_t και του $D^2 u$ μέσα στον $\mathbb{R}^n \times (0, T)$ σε σχέση με τη L^2 νόρμα της f πάνω στον $\mathbb{R}^n \times (0, T)$ και της L^2 νόρμας του Dg πάνω στον \mathbb{R}^n . Μετά, διαφορίζουμε την ΜΔΕ σε σχέση με το t και θέτουμε $\tilde{u} := u_t$. Τότε

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - \Delta \tilde{u} = \tilde{f} & \text{στον } \mathbb{R}^n \times (0, T] \\ \tilde{u} = \tilde{g} & \text{πάνω στον } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

για $\tilde{f} := f_t, \tilde{g} := u_t(\cdot, 0) = f(\cdot, 0) + \Delta g$.

Πολλαπλασιάζοντας με \tilde{u} , ολοκληρώνοντας κατά μέλη και επικαλούμενοι την ανισότητα Gronwall καταλήγουμε στο

$$\begin{aligned} &\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2 dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |Du_t|^2 dx dt \\ &\leq C \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f_t^2 dx dt + \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 g|^2 + f(\cdot, 0) dx \right). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Αλλά

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|f(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n \times (0, T))} + \|f_t\|_{L^2(\mathbb{R}^n \times (0, T))}) \quad (2.30)$$

σύμφωνα με το Θεώρημα 1.8.7. Επιπλέον γράφοντας $-\Delta u = f - u_t$ βρίσκουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D^2 u|^2 dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} f^2 + u_t^2 dx. \quad (2.31)$$

Συνδυάζοντας τις (2.29)-(2.31) οδηγούμαστε στην εκτίμηση

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2 + |D^2 u|^2 dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |Du_t|^2 dx dt \\ & \leq C \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f_t^2 + f^2 dx dt + \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 g|^2 dx \right) \end{aligned}$$

για κάποια σταθερά C .

Τα παρακάτω Θεωρήματα αφορούν στην ομαλότητα των ασθενών λύσεων \vec{u} στο πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών για τις δεύτερης τάξης παραβολικές εξισώσεις. Οι αποδείξεις τους βρίσκονται στο κεφάλαιο [7.1.3.] του βιβλίου L.Evans, *Partial Differential Equations*, AMS publications, Graduate Text in Mathematics.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3.1. (Βελτιωμένη ομαλότητα):

- Ας υποθέσουμε ότι $g \in H_0^1(U)$, $\vec{f} \in L^2(0, T; L^2(U))$.
Έστω επίσης ότι $\vec{u} \in L^2(0, T; H_0^1(U))$ με $\vec{u}' \in L^2(0, T; H^{-1}(U))$ είναι η ασθενής λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} u_t + Lu = f, & U_T \\ u = 0, & \partial U \times [0, T] \\ u = g, & U \times \{t = 0\} \end{cases}$$

$$\vec{u} \in L^2(0, T; H^2(U)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(U)), \vec{u}' \in L^2(0, T; L^2(U))$$

και έχουμε την εκτίμηση

$$\begin{aligned} & \text{ess sup}_{0 \leq t \leq T} \|\vec{u}(t)\|_{H_0^1(U)} + \|\vec{u}\|_{L^2(0, T; H^2(U))} + \|\vec{u}'\|_{L^2(0, T; L^2(U))} \\ & \leq C \left(\|\vec{f}\|_{L^2(0, T; L^2(U))} + \|g\|_{H_0^1(U)} \right) \end{aligned}$$

με τη σταθερά C να εξαρτάται μόνο από τα U, T και τους συντελεστές του L .

- Επιπρόσθετα, εάν $g \in H^2(U)$, $\vec{f}' \in L^2(0, T; L^2(U))$

τότε

$$\begin{aligned} \vec{u} &\in L^\infty(0, T; H^2(U)), \vec{u}' \in L^\infty(0, T; L^2(U)) \cap L^2(0, T; H_0^1(U)), \\ \vec{u}'' &\in L^2(0, T; H^{-1}(U)) \end{aligned}$$

με την εκτίμηση

$$\begin{aligned} \text{ess sup}_{0 \leq t \leq T} (\|\vec{u}(t)\|_{H^2(U)} + \|\vec{u}'(t)\|_{L^2(U)} + \|\vec{u}'\|_{L^2(0, T; H_0^1(U))}) \\ + \|\vec{u}''\|_{L^2(0, T; H^{-1}(U))} \leq C \left(\|\vec{f}'\|_{H^1(0, T; L^2(U))} + \|g\|_{H^2(U)} \right). \end{aligned}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3.2. (Υψηλότερη ομαλότητα):

Έστω ότι $g \in H^{2m+1}(U)$, $\frac{d^k \vec{f}}{dt^k} \in L^2(0, T; H^{2m-2k}(U))$ ($k = 0, \dots, m$). Έστω επίσης ότι ισχύουν οι ακόλουθες m -ισοστής τάξης συνθήκες συμβατότητας

$$\begin{cases} g_0 := g \in H_0^1(U), g_1 := \vec{f}'(0) - Lg_0 \in H_0^1(U) \\ \dots, g_m := \frac{d^{m-1} \vec{f}}{dt^{m-1}}(0) - Lg_{m-1} \in H_0^1(U) \end{cases}$$

Τότε $\frac{d^k \vec{u}}{dt^k} \in L^2(0, T; H^{2m+2-2k}(U))$ ($k = 0, \dots, m+1$) και έχουμε την εκτίμηση

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m+1} \left\| \frac{d^k \vec{u}}{dt^k} \right\|_{L^2(0, T; H^{2m+2-2k}(U))} \\ \leq C \left(\sum_{k=0}^m \left\| \frac{d^k \vec{f}}{dt^k} \right\|_{L^2(0, T; H^{2m-2k}(U))} + \|g\|_{H^{2m+1}(U)} \right) \end{aligned}$$

με τη σταθερά C να εξαρτάται μόνο από τα m, U, T και τους συντελεστές του L .

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3.3. (Άπειρη διαφορισιμότητα):

Έστω $g \in C^\infty(\bar{U}_T)$ και οι m -ισοστής τάξης συνθήκες συμβατότητας ισχύουν για $m = 0, 1, \dots$. Τότε το παραβολικό πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών (2.1) έχει μία μοναδική λύση $u \in C^\infty(\bar{U}_T)$.

Κεφάλαιο 3

Προσεγγίσεις για την εξίσωση της θερμότητας στη μία διάσταση

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα μελετήσουμε την εξίσωση της θερμότητας στη μία διάσταση καθώς και τους αριθμητικούς τρόπους επίλυσής της και τις εκτιμήσεις σφαλμάτων που προκύπτουν. Θα ασχοληθούμε με τις διάφορες μεθόδους επίλυσης, όπως με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών και την χωροχρονική μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων ενώ θα αναφερθούμε και στην ανάλυση ευστάθειας της θ -μεθόδου.

3.1 Η Εξίσωση της Θερμότητας

Το πρόβλημα μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να βρούμε μία συνάρτηση $u = u(x, t)$ για $x \in [0, 1]$ και $t > 0$ που ικανοποιεί τη μερική διαφορική εξίσωση

$$u_t + Lu = f \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (3.1)$$

με οριακές συνθήκες

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad t > 0 \quad (3.2)$$

και αρχική συνθήκη

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (3.3)$$

Η παραπάνω ΜΔΕ είναι η εξίσωση της θερμότητας όπως ορίστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο ενώ L ο διαφορικός τελεστής που μπορεί να γραφεί και στη

μορφή

$$Lu = -\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.4)$$

Η $u(x, t)$ περιγράφει τη θερμοκρασία στο σημείο x και στον χρόνο t μεταλλικής ράβδου μοναδιαίου μήκους που καταλαμβάνει το διάστημα $[0, 1]$ κάτω από τις ακόλουθες συνθήκες. Η θερμική της αγωγιμότητα είναι σταθερή και ίση με το $\nu > 0$, τα άκρα της διατηρούνται σε σταθερή θερμοκρασία μηδέν βαθμών και σε χρόνο $t = 0$ η θερμοκρασία της στο σημείο x περιγράφεται από την $u_0(x)$. Η $f(x, t)$ αναπαριστά την παραγωγή θερμότητας ανά μονάδα μήκους στο σημείο x και σε χρόνο t . Εδώ, θεωρούμε ότι η ογκομετρική πυκνότητα ρ και η ειδική θερμότητα ανά μονάδα μάζας c_p είναι σταθερές και μοναδιαίες, αλλιώς το $\frac{\partial u}{\partial t}$ θα έπρεπε να πολλαπλασιαστεί με το ρc_p στην (3.1).

Μία λύση του προβλήματος (3.1)-(3.3) δίνεται από σειρές Fourier. Για παράδειγμα, εάν $\nu = 1$ και $f \equiv 0$, η λύση είναι

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{(-n\pi)^2 t} \sin(n\pi x) \quad (3.5)$$

όπου οι συντελεστές c_n είναι οι ημίτονα Fourier συντελεστές του αρχικού δεδομένου $u_0(x)$

$$c_n = 2 \int_0^1 u_0(x) \sin(n\pi x) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Εάν αντί των συνοριακών συνθηκών (3.2) Dirichlet θεωρήσουμε συνθήκες Neumann, δηλαδή

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.6)$$

η αντίστοιχη λύση στην προκειμένη περίπτωση θα είναι

$$u(x, t) = \frac{d_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{(-n\pi)^2 t} \cos(n\pi x), \quad n = 1, 2, \dots$$

όπου d_n οι συνημίτονα Fourier συντελεστές του αρχικού δεδομένου $u_0(x)$. Αυτές οι εκφράσεις υποδηλώνουν ότι η λύση εξασθενεί εκθετικά γρήγορα στον χρόνο. Ένα πιο γενικό παράδειγμα μπορεί να ορισθεί αφορώντας στη συμπεριφορά της ενέργειας στον χρόνο, ορισμένης από την ποσότητα

$$E(t) = \int_0^1 u^2(x, t) dx.$$

Πράγματι, πολλαπλασιάζοντας την (3.1) με u και ολοκληρώνοντας ως προς x στο διάστημα $[0, 1]$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)u(x, t)dx - \nu \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)u(x, t)dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\partial u^2}{\partial t}(x, t)dx + \nu \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 dx - \nu \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)u(x, t) \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{1}{2} E'(t) + \nu \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 dx \end{aligned}$$

έχοντας χρησιμοποιήσει ολοκλήρωση κατά μέλη, τις οριακές συνθήκες (3.2) ή (3.6) και εναλλαγή διαφορίσης - ολοκλήρωσης. Μέσω της ανισότητας Cauchy-Schwarz προκύπτει

$$\int_0^1 f(x, t)u(x, t)dx \leq \sqrt{F(t)}\sqrt{E(t)}$$

όπου $F(t) = \int_0^1 f^2 dx$. Τότε

$$E'(t) + 2\nu \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 dx \leq 2\sqrt{F(t)}\sqrt{E(t)}.$$

Λόγω της ανισότητας Poincaré με $(a, b) = (0, 1)$ έχουμε

$$E'(t) + 2\frac{\nu}{(C_p)^2}E(t) \leq 2\sqrt{F(t)}\sqrt{E(t)}.$$

Με την ανισότητα του Young έχουμε

$$2\sqrt{F(t)}\sqrt{E(t)} \leq \gamma E(t) + \frac{1}{\gamma}F(t)$$

έχοντας θέσει $\gamma = \frac{\nu}{C_p^2}$. Συνεπώς, $E'(t) + \gamma E(t) \leq \frac{1}{\gamma}F(t)$ ή ισοδύναμα $(e^{\gamma t}E(t))' \leq \frac{1}{\gamma}e^{\gamma t}F(t)$. Τότε, ολοκληρώνοντας από 0 έως t παίρνουμε

$$E(t) \leq e^{-\gamma t}E(0) + \frac{1}{\gamma} \int_0^t e^{\gamma(s-t)} F(s)ds. \quad (3.7)$$

Πιο συγκεκριμένα, όταν $f \equiv 0$ η (3.7) δείχνει ότι η ενέργεια $E(t)$ εξασθενεί εκθετικά γρήγορα στον χρόνο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Μία στοιχειώδης περίπτωση της ανισότητας Young είναι η ανισότητα με εκθέτη το 2,

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2}$$

που προκαλεί και την ανισότητα Young με το δ ($\delta > 0, \alpha, \beta \geq 0$),

$$\alpha\beta \leq \delta\alpha^2 + \frac{\beta^2}{4\delta}.$$

3.2 Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών

Για να λυθεί η εξίσωση της θερμότητας αριθμητικά είναι συνήθως απαραίτητη η διάκριση των μεταβλητών x και t . Ξεκινώντας με τη μεταβλητή x ορίζουμε με το $u_i(t)$ μια προσέγγιση της $u(x_i, t)$, $i = 0, \dots, n$ και προσεγγίζουμε το πρόβλημα Dirichlet (3.1)-(3.3) ως εξής:

$$\dot{u}_i(t) - \frac{\nu}{h^2}(u_{i-1}(t) - 2u_i(t) + u_{i+1}(t)) = f_i(t), \quad i = 1, \dots, n-1, \forall t > 0$$

$$u_0(t) = u_n(t) = 0, \quad \forall t > 0$$

$$u_i(0) = u_0(x_i), \quad \forall i = 0, \dots, n$$

όπου η άνω τελεία υποδεικνύει την παράγωγο σε σχέση με τον χρόνο και $f_i(t) = f(x_i, t)$. Αυτό στην πραγματικότητα είναι μια ημι-διακριτοποίηση του προβλήματος (3.1)-(3.3) και είναι ένα σύστημα από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις της παρακάτω μορφής

$$\begin{cases} \dot{\vec{u}}(t) = -\nu A_{fd} \vec{u}(t) + \vec{f}(t), & \forall t > 0 \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0 \end{cases} \quad (3.8)$$

όπου $\vec{u}(t) = [u_1(t), \dots, u_{n-1}(t)]^T$ είναι το διάνυσμα των αγνώστων, $\vec{f}(t) = [f_1(t), \dots, f_{n-1}(t)]^T$, $\vec{u}_0 = [u_0(x_1), \dots, u_0(x_{n-1})]^T$ και A_{fd} τριδιαγώνιος πίνακας, όπου $A_{fd} = 1/h^2 \text{trid}_{n-1}(-1, 2, -1)$. Επίσης, έχουμε υποθέσει ότι $u_0(x_0) = u_0(x_n) = 0$ που είναι λογικά συνεπές με τις οριακές συνθήκες (3.2).

Για την ολοκλήρωση της (3.8) σε σχέση με τον χρόνο θα χρησιμοποιήσουμε τη θ -μέθοδο. Ορίζουμε με v^k την τιμή της μεταβλητής v στον χρόνο $t^k = k\Delta t$ για $\Delta t > 0$ τότε η θ -μέθοδος για την χρονική ολοκλήρωση του (3.8) είναι

$$\begin{cases} \frac{\vec{u}^{k+1} - \vec{u}^k}{\Delta t} = -\nu A_{fd}(\theta \vec{u}^{k+1} + (1-\theta)\vec{u}^k) + \theta \vec{f}^{k+1} + (1-\theta)\vec{f}^k, & k = 0, 1, \dots \\ \vec{u}^0 = \vec{u}_0 \end{cases}$$

(3.9)

ή ισοδύναμα

$$(I + \nu\theta\Delta t A_{fd})\vec{u}^{k+1} = (I - \nu(1 - \theta)\Delta t A_{fd})\vec{u}^k + \vec{g}^{k+1} \quad (3.10)$$

όπου $\vec{g}^{k+1} = \Delta t(\theta\vec{f}^{k+1} + (1 - \theta)\vec{f}^k)$ και I ο μοναδιαίος πίνακας τάξης $n - 1$.

Για κατάλληλες τιμές της παραμέτρου θ η (3.10) συμπίπτει με γνωστές μεθόδους. Για παράδειγμα για $\theta = 0$ η (3.10) συμπίπτει με την προς τα εμπρός μέθοδο Euler και παίρνουμε ρητά \vec{u}^{k+1} , αλλιώς ένα γραμμικό σύστημα με σταθερό πίνακα $I + \nu\theta\Delta t A_{fd}$ χρειάζεται να λυθεί σε κάθε χρονικό βήμα.

Όσον αφορά στην ευστάθεια, έστω ότι $f \equiv 0$ (άρα $\vec{g}^k = \vec{0} \quad \forall k > 0$), έτσι ώστε από την (3.5) η ακριβής λύση $u(x, t)$ τείνει στο μηδέν για κάθε x καθώς $t \rightarrow \infty$. Τότε θα περιμέναμε ότι η διακριτή λύση θα είχε την ίδια συμπεριφορά όπου και θα καλούσαμε το σχήμα μας (3.10) ασυμπτωτικά ευσταθές.

Αν $\theta = 0$ από τη (3.10) έχουμε ότι

$$\vec{u}^k = (I - \nu\Delta t A_{fd})^k \vec{u}^0, \quad k = 1, 2, \dots$$

και καταλήγουμε σύμφωνα με την ανάλυση των συγκλινοσών πινάκων ότι $\vec{u}^k \rightarrow \vec{0}$ καθώς $k \rightarrow \infty$ αν και μόνο αν

$$\rho(I - \nu\Delta t A_{fd}) < 1. \quad (3.11)$$

Οι ιδιοτιμές του A_{fd} δίνονται από τη σχέση

$$\mu_i = \frac{4}{h^2} \sin^2(i\pi h/2), \quad i = 1, \dots, n - 1.$$

Τότε η (3.11) ικανοποιείται αν και μόνο αν

$$\Delta t < \frac{1}{2\nu} h^2.$$

Όπως αναμενόταν η προς τα εμπρός μέθοδος Euler είναι υπό όρους ευσταθής και το χρονικό βήμα Δt φθίνει όπως το τετράγωνο του διαστήματος h του πλέγματος.

Για $\theta = 1$ η (3.10) συμπίπτει με την προς τα πίσω μέθοδο Euler και έχουμε

$$\vec{u}^k = [(I + \nu\Delta t A_{fd})^{-1}]^k \vec{u}^0 \quad k = 1, 2, \dots$$

Εφ'όσον όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα $(I + \nu\Delta t A_{fd})^{-1}$ είναι πραγματικές, θετικές και αυστηρά μικρότερες του 1 για κάθε τιμή του Δt , αυτό το σχήμα θα είναι απόλυτα ευσταθές. Γενικότερα, η θ -μέθοδος είναι απόλυτα ευσταθής για

όλες τις τιμές $1/2 \leq \theta \leq 1$ και υπό όρους ευσταθής εάν $0 \leq \theta < 1/2$. (Βλ. [3]) Σε ότι έχει σχέση με την ακρίβεια της θ -μεθόδου, μπορούμε να αναφέρουμε ότι το τοπικό σφάλμα της είναι τάξης $\Delta t + h^2$ αν $\theta \neq \frac{1}{2}$ ενώ για $\theta = \frac{1}{2}$ είναι τάξης $\Delta t^2 + h^2$. Η μέθοδος που αντιστοιχεί στο $\theta = \frac{1}{2}$ συχνά καλείται μέθοδος Crank-Nicolson και είναι συνεπώς απόλυτα ευσταθής και δεύτερης τάξης ακριβής σε σχέση με το Δt και το h .

3.3 Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων

Η χωρική διακριτοποίηση του (3.1)-(3.3) μπορεί να επιτευχθεί, επίσης, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων Galerkin. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία που πραγματοποιήθηκε στο δεύτερο κεφάλαιο, αρχικά, για κάθε $t > 0$ πολλαπλασιάζουμε την (3.1) με μία δοκιμαστική συνάρτηση $v = v(x)$ και ολοκληρώνουμε στο $(0, 1)$. Έπειτα, θέτοντας $V = H_0^1(0, 1)$ και $\forall t > 0$ ψάχνουμε για μία συνάρτηση $t \rightarrow u(x, t) \in V$ ($u(t) \in V$) ώστε

$$\int_0^1 \frac{\partial u(t)}{\partial t} v dx + \alpha(u(t), v) = F(v), \quad \forall v \in V \quad (3.12)$$

με $u(0) = u_0$. Εδώ, το $\alpha(u(t), v) = \int_0^1 \nu(\partial u(t)/\partial x)(\partial v/\partial x) dx$ και το $F(v) = \int_0^1 f(t)v dx$, είναι η διγραμμική μορφή και το γραμμικό συναρτησοειδές αντίστοιχα που σχετίζονται με τον ελλειπτικό τελεστή L και το δεξί μέλος της f . Έστω V_h ένας κατάλληλος πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του V . Θεωρούμε τον ακόλουθο σχηματισμό Galerkin: $\forall t > 0$, υπάρχει $u_h(t) \in V_h$ τέτοια ώστε

$$\int_0^1 \frac{\partial u_h(t)}{\partial t} v_h dx + \alpha(u_h(t), v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad (3.13)$$

όπου $u_h(0) = u_{0h}$ και $u_{0h} \in V_h$ μια προσέγγιση του u_0 . Το πρόβλημα (3.13) αναφέρεται ως μια ημι-διακριτοποίηση του (3.12) αφού είναι μόνο μια χωρική διακριτοποίηση της εξίσωσης θερμότητας.

Ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία όπως και στην παράγραφο [3.1] για να βρούμε την ενεργειακή εκτίμηση παίρνουμε την ακόλουθη a priori εκτίμηση για τη διακριτή λύση $u_h(t)$ του (3.13)

$$E_h(t) \leq e^{-\gamma t} E_h(0) + \frac{1}{\gamma} \int_0^t e^{\gamma(s-t)} F(s) ds$$

$$\text{όπου } E_h(t) = \int_0^1 u_h^2(x, t) dx.$$

Όσον αφορά στη διακριτοποίηση της (3.13) με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων εισάγουμε τον πεπερασμένων στοιχείων χώρο V_h με την βάση $\{\phi_j\}$. Τότε, η λύση u_h της (3.13) μπορεί να αναζητηθεί στη μορφή

$$u_h(t) = \sum_{j=1}^{N_h} u_j(t) \phi_j$$

όπου $\{u_j(t)\}$ είναι οι άγνωστοι συντελεστές και N_h η διάσταση του V_h . Συνεπώς, από την (3.13) παίρνουμε

$$\int_0^1 \sum_{j=1}^{N_h} \dot{u}_j(t) \phi_j \phi_i dx + \alpha \left(\sum_{j=1}^{N_h} u_j(t) \phi_j, \phi_i \right) = F(\phi_i), \quad i = 1, \dots, N_h$$

όπου είναι

$$\sum_{j=1}^{N_h} \dot{u}_j(t) \int_0^1 \phi_j \phi_i dx + \sum_{j=1}^{N_h} u_j(t) \alpha(\phi_j, \phi_i) = F(\phi_i), \quad i = 1, \dots, N_h.$$

Χρησιμοποιώντας τον ίδιο συμβολισμό με την (3.8) παίρνουμε

$$M \dot{\vec{u}}(t) + A_{fe} \vec{u}(t) = \vec{f}_{fe}(t) \quad (3.14)$$

όπου $A_{fe} = (\alpha(\phi_j, \phi_i))$, $\vec{f}_{fe}(t) = (F(\phi_i))$ και $M = (m_{ij}) = \left(\int_0^1 \phi_j \phi_i dx \right)$ για $i, j = 1, \dots, N_h$. Ο M καλείται πίνακας μάζας. Το σύστημα των ΣΔΕ (3.14) μπορεί να γραφεί σε κανονική μορφή ως

$$\dot{\vec{u}}(t) = -M^{-1} A_{fe} \vec{u}(t) + M^{-1} \vec{f}_{fe}(t). \quad (3.15)$$

Για να λυθεί το (3.15) προσεγγιστικά μπορούμε και σε αυτήν την περίπτωση να εφαρμόσουμε τη θ -μέθοδο και να πάρουμε

$$M \frac{\vec{u}^{k+1} - \vec{u}^k}{\Delta t} + A_{fe} [\theta \vec{u}^{k+1} + (1 - \theta) \vec{u}^k] = \theta \vec{f}_{fe}^{k+1} + (1 - \theta) \vec{f}_{fe}^k. \quad (3.16)$$

Όπως συνήθως, ο άνω δείκτης k εννοεί ότι η ποσότητα κοντά υπολογίζεται σε χρόνο t^k . Όπως και στην περίπτωση των πεπερασμένων διαφορών, για $\theta=0,1$ και $1/2$ παίρνουμε αντίστοιχα την προς τα εμπρός μέθοδο Euler, την προς τα πίσω μέθοδο Euler και την Crank-Nicolson, όπου η Crank-Nicolson μέθοδος

είναι η μόνη που είναι δεύτερης τάξης ακριβής σε σχέση με το Δt . Για κάθε k η (3.16) είναι ένα γραμμικό σύστημα του οποίου ο πίνακας είναι

$$K = \frac{1}{\Delta t}M + \theta A_{fe}.$$

Αφού ο M και ο A_{fe} είναι συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι πίνακες, ο πίνακας K είναι επίσης συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Έτσι, η παραγοντοποίηση Cholesky $K = H^T H$ όπου ο H άνω τριγωνικός μπορεί να πραγματοποιηθεί στο $t = 0$. Συνεπώς, σε κάθε χρονικό βήμα τα δύο επόμενα γραμμικά τριγωνικά συστήματα, με μέγεθος N_h το καθένα, πρέπει να λυθούν με υπολογιστικό κόστος $N_h^2/2$ flops.

$$\begin{cases} H^T \vec{y} = \left[\frac{1}{\Delta t}M - (1 - \theta)A_{fe} \right] \vec{u}^k + \theta \vec{f}_{fe}^{k+1} + (1 - \theta) \vec{f}_{fe}^k \\ H \vec{u}^{k+1} = \vec{y} \end{cases}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Όταν $\theta = 0$, μια κατάλληλη διαγωνοποίηση του M θα επέτρεπε την αποσυνδεδασμένη εξισώσεων (3.16). Η διαδικασία πραγματοποιείται με τη γνωστή μέθοδο *mass lumping* όπου ο M προσεγγίζεται από ένα μη ιδιάζοντα διαγώνιο πίνακα \tilde{M} . Στην περίπτωση των γραμμικών πεπερασμένων στοιχείων ο \tilde{M} μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας την σύνθετη τραπεζοειδή φόρμουλα πάνω στους κόμβους $\{x_i\}$ για να εκτιμηθούν τα ολοκληρώματα $\int_0^1 \phi_j \phi_i dx$ παίρνοντας $\tilde{m}_{ij} = h \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, N_h$.

3.3.1 Ανάλυση ευστάθειας της θ -μεθόδου

Εφαρμόζοντας τη θ -μέθοδο στο πρόβλημα Galerkin (3.13) προκύπτει

$$\begin{aligned} \left(\frac{u_h^{k+1} - u_h^k}{\Delta t}, v_h \right) + \alpha (\theta u_h^{k+1} + (1 - \theta) u_h^k, v_h) \\ = \theta F^{k+1}(v_h) + (1 - \theta) F^k(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \end{aligned} \quad (3.17)$$

για $k \geq 0$ και με $u_h^0 = u_{0h}$, $F^k(v_h) = \int_0^1 f(t^k) v_h(x) dx$. Εφόσον ενδιαφερόμαστε για την ανάλυση ευστάθειας, μπορούμε να θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση όπου $F = 0$. Επιπλέον, θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση όπου $\theta = 1$.

$$\left(\frac{u_h^{k+1} - u_h^k}{\Delta t}, v_h \right) + \alpha (u_h^{k+1}, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h.$$

Θέτοντας $v_h = u_h^{k+1}$ παίρνουμε

$$\left(\frac{u_h^{k+1} - u_h^k}{\Delta t}, u_h^{k+1} \right) + \alpha(u_h^{k+1}, u_h^{k+1}) = 0.$$

Από τον ορισμό του $\alpha(\cdot, \cdot)$ προκύπτει ότι

$$\alpha(u_h^{k+1}, u_h^{k+1}) = \nu \left\| \frac{\partial u_h^{k+1}}{\partial x} \right\|_{L^2(0,1)}^2. \quad (3.18)$$

Επιπλέον, σημειώνουμε ότι

$$\|u_h^{k+1}\|_{L^2(0,1)}^2 + 2\nu\Delta t \left\| \frac{\partial u_h^{k+1}}{\partial x} \right\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \|u_h^k\|_{L^2(0,1)}^2. \quad (3.19)$$

Ακολουθεί ότι $\forall n \geq 1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \|u_h^{k+1}\|_{L^2(0,1)}^2 + 2\nu\Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \frac{\partial u_h^{k+1}}{\partial x} \right\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|u_h^k\|_{L^2(0,1)}^2$$

και παίρνουμε

$$\|u_h^n\|_{L^2(0,1)}^2 + 2\nu\Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \frac{\partial u_h^{k+1}}{\partial x} \right\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \|u_{0h}\|_{L^2(0,1)}^2 \quad (3.20)$$

που δείχνει ότι το σχήμα είναι απόλυτα ευσταθές. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία εάν $f \neq 0$ προκύπτει

$$\begin{aligned} & \|u_h^n\|_{L^2(0,1)}^2 + 2\nu\Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \frac{\partial u_h^{k+1}}{\partial x} \right\|_{L^2(0,1)}^2 \\ & \leq C(n) \left(\|u_{0h}\|_{L^2(0,1)}^2 + \sum_{k=1}^n \Delta t \|f^k\|_{L^2(0,1)}^2 \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

όπου $C(n)$ είναι μια σταθερά ανεξάρτητη και από το h και από το Δt .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Το ίδιο είδος ανισοτήτων ευστάθειας (3.20) και (3.21) μπορεί να προκύψει εάν το $\alpha(\cdot, \cdot)$ είναι μία πιο γενική διγραμμική μορφή δεδομένου ότι είναι συνεχές και πιστικό.

Για να μπορέσουμε να πραγματοποιήσουμε την ανάλυση ευστάθειας της θ -μεθόδου για κάθε $\theta \in [0, 1]$ πρέπει πρώτα να δώσουμε τον ορισμό των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων της διγραμμικής μορφής.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.3.1. Ονομάζουμε το λ μία ιδιοτιμή και το $w \in V$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα για τη διγραμμική μορφή $\alpha(\cdot, \cdot) : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ εάν

$$\alpha(w, v) = \lambda(w, v) \quad \forall v \in V$$

όπου το (\cdot, \cdot) ορίζει το σύννηθες γινόμενο στον $L^2(0, 1)$.

Εάν η διγραμμική μορφή $\alpha(\cdot, \cdot)$ είναι συμμετρική και πιεστική, τότε έχει άπειρες πραγματικές θετικές ιδιοτιμές που σχηματίζουν μια μη φραγμένη ακολουθία. Επιπρόσθετα, τα ιδιοδιανύσματά τους (που ονομάζονται και ιδιοσυναρτήσεις) σχηματίζουν μια βάση για τον χώρο V . Σε ένα διακριτό επίπεδο το αντίστοιχο ζευγάρι $\lambda_h \in \mathbb{R}$, $w_h \in V_h$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\alpha(w_h, v_h) = \lambda_h(w_h, v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (3.22)$$

Από αλγεβρικής σκοπιάς, το πρόβλημα (3.22) μπορεί να γραφεί ως

$$A_f e \vec{w} = \lambda_h M \vec{w},$$

(όπου \vec{w} είναι το διάνυσμα των τιμών του πλέγματος του w_h) και μπορεί να θεωρηθεί ως ένα γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών. Όλες οι ιδιοτιμές $\lambda_h^1, \dots, \lambda_h^{N_h}$ είναι θετικές. Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $w_h^1, \dots, w_h^{N_h}$ σχηματίζουν μια βάση για τον υπόχωρο V_h και μπορούν να επιλεγούν έτσι ώστε να είναι ορθοκανονικά δηλαδή $(w_h^i, w_h^j) = \delta_{ij}, \forall i, j = 1, \dots, N_h$. Πιο συγκεκριμένα, οποιαδήποτε συνάρτηση $v_h \in V_h$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως

$$v_h(x) = \sum_{j=1}^{N_h} v_j w_h^j(x).$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\theta \in [0, 1]$ και ότι η διγραμμική μορφή $\alpha(\cdot, \cdot)$ είναι συμμετρική. Παρ'όλο που το τελικό αποτέλεσμα ευστάθειας ισχύει και στη μη συμμετρική περίπτωση, η απόδειξη που ακολουθεί δεν μπορεί να εφαρμοσθεί αφού σε αυτήν την περίπτωση τα ιδιοδιανύσματα δε θα σχηματίζουν πλέον βάση για τον V_h . Έστω $\{w_h^j\}$ τα ιδιοδιανύσματα του $\alpha(\cdot, \cdot)$ των οποίων η επέκταση σχηματίζει μια ορθοκανονική βάση για τον V_h . Αφού σε κάθε χρονική στιγμή το $u_h^k \in V_h$ μπορούμε να εκφράσουμε το u_h^k ως

$$u_h^k(x) = \sum_{j=1}^{N_h} u_j^k w_h^j(x).$$

Θεωρώντας ότι $F = 0$ στην (3.17) και παίρνοντας $v_h = w_h^i$, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=1}^{N_h} [u_j^{k+1} - u_j^k] (w_h^j, w_h^i) \\ & + \sum_{j=1}^{N_h} [\theta u_j^{k+1} + (1 - \theta) u_j^k] \alpha(w_h^j, w_h^i) = 0, \quad i = 1, \dots, N_h. \end{aligned}$$

Αφού w_h^j οι ιδιοσυναρτήσεις του $\alpha(\cdot, \cdot)$ παίρνουμε

$$\alpha(w_h^j, w_h^i) = \lambda_h^j (w_h^j, w_h^i) = \lambda_h^j \delta_{ij} = \lambda_h^i$$

έτσι ώστε

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} + [\theta u_i^{k+1} + (1 - \theta) u_i^k] \lambda_h^i = 0.$$

Λύνοντας αυτή την εξίσωση σε σχέση με το u_i^{k+1} έχουμε

$$u_i^{k+1} = u_i^k \frac{[1 - (1 - \theta) \lambda_h^i \Delta t]}{[1 + \theta \lambda_h^i \Delta t]}.$$

Για να είναι η μέθοδος ευσταθής πρέπει να ισχύει

$$\left| \frac{1 - (1 - \theta) \lambda_h^i \Delta t}{1 + \theta \lambda_h^i \Delta t} \right| < 1$$

το οποίο συνεπάγεται

$$2\theta - 1 > -\frac{2}{\lambda_h^i \Delta t}.$$

Αν $\theta \geq 1/2$ αυτή η ανισότητα ικανοποιείται για οποιαδήποτε τιμή του Δt . Αντίθετα, αν $\theta < 1/2$ πρέπει να έχουμε

$$\Delta t < \frac{2}{(1 - 2\theta) \lambda_h^i}.$$

Εφ' όσον αυτή η σχέση πρέπει να ισχύει για όλες τις ιδιοτιμές λ_h^i της διγραμμικής μορφής, αρκεί να απαιτήσουμε να ικανοποιείται για τη μεγαλύτερη από αυτές, όπου υποθέτουμε ότι είναι η $\lambda_h^{N_h}$. Συνεπώς, αν $\theta \geq 1/2$ η θ -μέθοδος είναι

απόλυτα ευσταθής (δηλαδή ευσταθής για κάθε Δt), ενώ αν $0 \leq \theta < 1/2$ η θ -μέθοδος είναι ευσταθής μόνο αν

$$\Delta t \leq \frac{2}{(1-2\theta)\lambda_h^{N_h}}.$$

Μπορεί να δειχθεί ότι υπάρχουν δύο θετικές σταθερές c_1 και c_2 , ανεξάρτητες του h ώστε

$$c_1 h^{-2} \leq \lambda_h^{N_h} = c_2 h^{-2}.$$

Σύμφωνα με αυτό, έχουμε ότι αν $0 \leq \theta < 1/2$ η μέθοδος είναι ευσταθής αν και μόνο αν

$$\Delta t \leq C_1(\theta)h^2 \tag{3.23}$$

για κατάλληλη σταθερά $C_1(\theta)$ ανεξάρτητη από το h και το Δt . Με ανάλογη απόδειξη, μπορεί να δειχθεί ότι αν χρησιμοποιηθεί μια ψευδο-φασματική προσέγγιση Galerkin για το πρόβλημα (3.12), η θ -μέθοδος είναι απόλυτα ευσταθής αν $\theta \geq 1/2$, ενώ για $0 \leq \theta < 1/2$ είναι ευσταθής μόνο αν ισχύει ότι

$$\Delta t \leq C_2(\theta)N^{-4} \tag{3.24}$$

για κατάλληλη σταθερά $C_2(\theta)$ ανεξάρτητη από το N και το Δt . Η διαφορά μεταξύ των σχέσεων (3.23) και (3.24) οφείλεται στο γεγονός ότι η μεγαλύτερη ιδιοτιμή της φασματικής ακρίβειας του πίνακα, μεγαλώνει σαν $\mathcal{O}(N^4)$ σε σχέση με το βαθμό του προσεγγιστικού πολυωνύμου. Συγκρίνοντας τη λύση του προβλήματος (3.17) με εκείνη του προβλήματος (3.13), με κατάλληλη χρήση του αποτελέσματος ευστάθειας (3.21) και του σφάλματος χρόνου μπορεί να αποδειχθεί το παρακάτω αποτέλεσμα σύγκλισης

$$\|u(t^k) - u_h^k\|_{L^2(0,1)} \leq C(u_0, f, u)(\Delta t^{p(\theta)} + h^{r+1}), \quad \forall k \geq 1$$

όπου το r παριστάνει τον βαθμό πολυωνύμου του πεπερασμένων στοιχείων χώρου V_h , το $p(\theta) = 1$ αν $\theta \neq 1/2$ ενώ $p(1/2) = 2$ και C είναι μια σταθερά που εξαρτάται από τα ορίσματά της (υποθέτοντας ότι είναι επαρκώς ομαλά) αλλά όχι από το h και το Δt . Ειδικότερα, αν $f \equiv 0$ παίρνουμε την παρακάτω βελτιωμένη εκτίμηση

$$\|u(t^k) - u_h^k\|_{L^2(0,1)} \leq C \left[\left(\frac{h}{\sqrt{t^k}} \right)^{r+1} + \left(\frac{\Delta t}{t^k} \right)^{p(\theta)} \right] \|u_0\|_{L^2(0,1)}$$

για $k \geq 1$, $\theta = 1$ ή $\theta = 1/2$.

3.4 Χωροχρονική Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων

Μία εναλλακτική προσέγγιση για τη χρονική διακριτοποίηση βασίζεται στη χρήση μιας μεθόδου Galerkin που διακριτοποιεί και χωρικές και χρονικές μεταβλητές.

Ας υποθέσουμε πως λύνουμε την εξίσωση θερμοότητας για $x \in [0, 1]$ και $t \in [0, T]$. Ας ορίσουμε με $I_k = [t^{k-1}, t^k]$ το k -ιοστό χρονικό διάστημα για $k = 1, \dots, n$ με $\Delta t^k = t^k - t^{k-1}$. Επιπλέον, $\Delta t = \max_k \Delta t^k$. Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $S_k = [0, 1] \times I_k$ είναι η επονομαζόμενη χωροχρονική πλάκα (slab). Σε κάθε χρονικό επίπεδο t^k , θεωρούμε μια διαμέριση \mathcal{T}_{h_k} του $(0, 1)$ σε m^k υποδιαστήματα $K_j^k = [x_j^k, x_{j+1}^k]$, $j = 0, \dots, m^k - 1$. Θέτουμε $h_j^k = x_{j+1}^k - x_j^k$ και ορίζουμε $h_k = \max_j h_j^k$ και $h = \max_k h^k$.

Επίσης, συσχετίζουμε το S_k με μια χωροχρονική διαμέριση $S_k = \bigcup_{j=1}^{m^k} R_j^k$ όπου $R_j^k = K_j^k \times I_k$ και $K_j^k \in \mathcal{T}_{h_k}$. Η χωροχρονική πλάκα S_k χωρίζεται έτσι σε ορθογώνια παραλληλόγραμμα R_j^k .

Για κάθε χωροχρονική πλάκα S_k ο χωροχρονικός πεπερασμένων στοιχείων χώρος είναι

$$\mathbb{Q}_q(S_k) = \left\{ v \in C^0(S_k), v|_{R_j^k} \in \mathbb{P}_1(K_j^k) \times \mathbb{P}_q(I_k), \quad j = 0, \dots, m^k - 1 \right\}$$

όπου συνήθως $q = 0$ ή $q = 1$. Τότε, ο χώρος αυτός στο $[0, 1] \times [0, T]$ ορίζεται ως εξής:

$$V_{h, \Delta t} = \left\{ v : [0, 1] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} : v|_{S_k} \in Y_{h, k}, \quad k = 1, \dots, n \right\}$$

όπου

$$Y_{h, k} = \left\{ v \in \mathbb{Q}_q(S_k) : v(0, t) = v(1, t) = 0 \quad \forall t \in I_k \right\}.$$

Ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας του $V_{h, \Delta t}$ είναι ίσος με $(q+1)(m^k - 1)$. Οι συναρτήσεις στον $V_{h, \Delta t}$ είναι γραμμικές και συνεχείς στον χώρο ενώ στον χρόνο είναι πολυώνυμα βαθμού q . Αυτές οι συναρτήσεις είναι γενικότερα ασυνεχείς στα χρονικά επίπεδα t^k και οι διαμερίσεις \mathcal{T}_h^k δεν παραβάλλονται στην επαφή μεταξύ συνεχόμενων χρονικών επιπέδων. Για αυτό το λόγο υιοθετούμε τον παρακάτω συμβολισμό

$$v_{\pm}^k = \lim_{\tau \rightarrow 0} v(t^k \pm \tau), [v^k] = v_+^k - v_-^k.$$

Η διακριτοποίηση του προβλήματος (3.12) χρησιμοποιώντας συνεχή πεπερασμένα στοιχεία βαθμού 1 στον χώρο και ασυνεχή πεπερασμένα στοιχεία βαθμού

q στον χρόνο (σε συντομογραφία $cG(1)dG(q)$ μέθοδος) πραγματοποιείται βρίσκοντας $U \in V_{h,\Delta t}$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{k=1}^n \int_{I_k} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial t}, V \right) + \alpha(U, V) \right] dt + \sum_{k=1}^{n-1} ([U^k], V_+^k) + (U_+^0, V_+^0) = \int_0^T (f, V) dt, \quad \forall V \in V_{h,\Delta t}^0$$

όπου

$$V_{h,\Delta t}^0 = \{v \in V_{h,\Delta t} : v(0, t) = v(1, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]\}$$

με $U_-^0 = u_{0h}$, $U^k = U(x, t^k)$ και το $(u, v) = \int_0^1 uv dx$ εκφράζει το βαθμωτό γινόμενο του $L^2(0, 1)$. Η συνέχεια του U σε κάθε σημείο t^k επιβάλλεται συνεπώς μόνο με την ασθενή έννοια.

Για να κατασκευαστούν οι αλγεβρικές εξισώσεις για το άγνωστο U , χρειάζεται να επεκταθεί σε μία βάση στον χρόνο και τον χώρο. Η ενιαία χωρο-χρονική βάση συνάρτηση $\phi_{jl}^k(x, t)$ μπορεί να γραφεί ως $\phi_{jl}^k(x, t) = \phi_j^k(x)\psi_l(t)$, $j = 1, \dots, m^k - 1$, $l = 0, \dots, q$, όπου ϕ_j^k είναι η συνήθης γραμμική βάση συνάρτηση και ψ_l είναι η l -ιστή βάση συνάρτηση του $\mathbb{P}_q(I_k)$.

Όταν $q = 0$ η λύση U είναι σταθερή στον χρόνο. Σε αυτήν την περίπτωση,

$$U^k(x, t) = \sum_{j=1}^{N_h^k} U_j^k \phi_j^k(x), \quad x \in [0, 1], \quad t \in I_k$$

όπου $U_j^k = U^k(x_j, t)$, $\forall t \in I_k$. Έστω

$$A_k = (\alpha_{ij}) = (\alpha(\phi_j^k, \phi_i^k)), \quad M_k = (m_{ij}) = ((\phi_j^k, \phi_i^k))$$

$$\vec{f} = (f_i) = \left(\int_{S_k} f(x, t) \phi_i^k(x) dx dt \right), \quad B_{k,k-1} = (b_{ij}) = ((\phi_j^k, \phi_i^{k-1}))$$

όπου ορίζουν αντίστοιχα τον πίνακα ακαμψίας (stiffness matrix), τον πίνακα μάζας (mass matrix), το διάνυσμα δεδομένων και τον πίνακα προβολής (projection matrix) μεταξύ των V_h^{k-1} και V_h^k στο χρονικό επίπεδο t^k .

Τότε, θέτοντας $\vec{U}^k = (U_j^k)$, σε κάθε k -ιστό χρονικό επίπεδο η μέθοδος $cG(1)dG(0)$ απαιτεί τη λύση του παρακάτω γραμμικού συστήματος

$$(M_k + \Delta t^k A_k) \vec{U}^k = B_{k,k-1} \vec{U}^{k-1} + \vec{f}_k$$

που ουσιαστικά είναι το σχήμα της προς τα πίσω διακριτοποίησης Euler με τροποποιημένο το δεξί μέλος.

Όταν $q = 1$ η λύση είναι γραμμική στον χρόνο. Για ευκολία στον συμβολισμό θέτουμε $U^k(x) = U_-(x, t^k)$ και $U^{k-1}(x) = U_+(x, t^{k-1})$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η χωρική διαμέριση \mathcal{T}_{h_k} δεν αλλάζει με το χρονικό επίπεδο και θέτουμε $m^k = m$ για κάθε $k = 0, \dots, n$. Τότε, μπορούμε να γράψουμε

$$U|_{S_k} = U^{k-1}(x) \frac{t^k - t}{\Delta t^k} + U^k(x) \frac{t - t^{k-1}}{\Delta t^k}.$$

Συνεπώς, η μέθοδος cG(1)dG(1) οδηγεί στη λύση του παρακάτω 2×2 συστήματος με αγνώστους τα $\vec{U}^k = (U_i^k)$ και $\vec{U}^{k-1} = (U_i^{k-1})$, $i = 1, \dots, m-1$

$$\begin{cases} \left(-\frac{1}{2}M_k + \frac{\Delta t^k}{3}A_k\right) \vec{U}^{k-1} + \left(\frac{1}{2}M_k + \frac{\Delta t^k}{6}A_k\right) \vec{U}^k = \vec{f}_{k-1} + B_{k,k-1} \vec{U}_-^{k-1} \\ \left(\frac{1}{2}M_k + \frac{\Delta t^k}{6}A_k\right) \vec{U}^{k-1} + \left(\frac{1}{2}M_k + \frac{\Delta t^k}{3}A_k\right) \vec{U}^k = \vec{f}^k \end{cases}$$

όπου

$$\vec{f}_{k-1} = \int_{S_k} f(x, t) \phi_i^k(x) \psi_1^k(t) dx dt, \quad \vec{f}_k = \int_{S_k} f(x, t) \phi_i^k(x) \psi_2^k(t) dx dt$$

και $\psi_1^k(t) = \frac{(t^k - t)}{\Delta t^k}$, $\psi_2^k(t) = \frac{(t - t^{k-1})}{\Delta t^k}$ είναι οι δύο βάσεις συναρτήσεων του $\mathbb{P}_1(I_k)$.

Υποθέτοντας ότι $V_{h,k-1} \not\subseteq V_{h,k}$ είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι

$$\|u(t^n) - U^n\|_{L^2(0,1)} \leq C(u_0, f, u, n)(\Delta t^2 + h^2) \quad (3.25)$$

όπου C είναι μια σταθερά που εξαρτάται από τα ορίσματά της (υποθέτοντας ότι είναι επαρκώς ομαλά) αλλά όχι από τα h και Δt .

ΣΧΟΛΙΟ: Ένα πλεονέκτημα στη χρήση των χωροχρονικών πεπερασμένων στοιχείων είναι η δυνατότητα εκτέλεσης ενός χωροχρονικού πλέγματος προσαρμοστικότητας σε κάθε χρονική πλάκα βασισμένη σε μια εκτίμηση σφάλματος.

Κεφάλαιο 4

Προσεγγίσεις για την εξίσωση της θερμότητας στις δύο διαστάσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων Galerkin για την προσεγγιστική λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών της εξίσωσης της θερμότητας

$$\begin{aligned}u_t - \Delta u &= f, \quad \text{στο } \Omega, \quad \text{για } t > 0 \\u &= 0, \quad \text{πάνω στο σύνορο } \partial\Omega, \quad \text{για } t > 0 \\ \text{με } u(\cdot, 0) &= v \quad \text{στο } \Omega\end{aligned}\tag{4.1}$$

όπου Ω είναι ένα χωρίο στον \mathbb{R}^d με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$ και όπου ισχύει ότι $u = u(x, t)$, u_t ορίζει το $\frac{\partial u}{\partial t}$ και $\Delta = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ η Λαπλασιανή. Επίσης, θα μελετήσουμε τις μεθόδους εκτίμησης των σφαλμάτων που προκύπτουν.

4.1 Βασικοί Τύποι και Θεωρήματα

Για το σκοπό αυτό του κεφαλαίου θα χρειαστούμε κάποιες βασικές σχέσεις και Θεωρήματα που προκύπτουν από το ελλειπτικό πρόβλημα συνοριακών τιμών Dirichlet της εξίσωσης Poisson,

$$-\Delta u = f, \quad \text{στο } \Omega, \quad \text{με } u = 0 \quad \text{πάνω στο } \partial\Omega.\tag{4.2}$$

Αρχικά, θα ορίσουμε μία προσέγγιση της λύσης u της (4.2) ως μία συνάρτηση u_h που ανήκει σε ένα πεπερασμένης διάστασης γραμμικό χώρο S_h συναρτήσεων του x με ορισμένες προσεγγιστικές ιδιότητες. Αυτή η συνάρτηση, στην απλούστερη περίπτωση μία γραμμική συνάρτηση σε κάποια διαμέριση του Ω , θα είναι μία λύση ενός πεπερασμένου συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Θα δείξουμε λοιπόν βασικές εκτιμήσεις σφαλμάτων για αυτή την προσεγγιστική λύση στην ενεργειακή νόρμα και στην $L^2(\Omega)$ νόρμα.

Όπως και στη μονοδιάστατη περίπτωση, χρησιμοποιώντας ένα μεταβολικό τύπο όπως στην σχέση (4.1) συνεχίζουμε για τη διακριτοποίηση του παραβολικού προβλήματος πρώτα στην χωρική μεταβλητή x , το οποίο έχει ως αποτέλεσμα μια προσεγγιστική λύση $u_h(\cdot, t)$ στον πεπερασμένων στοιχείων χώρο S_h ως μία λύση ενός πεπερασμένου διάστασης συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Έπειτα, ορίζουμε ένα ολικό διακριτό σχήμα διακριτοποιώντας αυτό το σύστημα στον χρόνο με διάφορες προσεγγίσεις πεπερασμένων διαφορών. Αυτό οδηγεί σε μία προσεγγιστική λύση U της (4.1) που ανήκει στον S_h σε διακριτά χρονικά επίπεδα. Τα σφάλματα εκτίμησης προκύπτουν για τις χωρικές και τις ολικά διακριτές λύσεις.

Για τον ορισμό της πεπερασμένων στοιχείων λύσης του (4.2), θεωρούμε γενικότερα την προσέγγιση των ομαλών συναρτήσεων στο Ω όπου μηδενίζεται πάνω στο $\partial\Omega$.

Έστω Ω ένα κυρτό πεδίο σε επίπεδο με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$ και έστω \mathcal{T}_h να ορίζει μια διαμέριση του Ω σε τρίγωνα τ έτσι ώστε η κορυφή του κάθε τριγώνου να κείται στο εσωτερικό μιας πλευράς ενός άλλου τριγώνου και τέτοιο ώστε η ένωση των τριγώνων να καθορίζει ένα πολυγωνικό πεδίο $\Omega_h \subset \Omega$ με συνοριακές κορυφές πάνω στο $\partial\Omega$. Έστω ότι το h ορίζει το μέγιστο μήκος των πλευρών της τριγωνοποίησης \mathcal{T}_h . Συνεπώς, το h είναι μία παράμετρος που μειώνεται καθώς η τριγωνοποίηση γίνεται καλύτερη. Θα υποθέσουμε πως οι γωνίες των τριγωνοποιήσεων είναι κάτω φραγμένες από μία θετική σταθερά, ανεξάρτητη από το h , και ότι κάποιες φορές οι τριγωνοποιήσεις είναι σχεδόν ομοιόμορφες με την έννοια του ότι τα τρίγωνα του \mathcal{T}_h είναι ουσιαστικά του ίδιου μεγέθους, το οποίο εκφράζουμε απαιτώντας η περιοχή του $\tau \in \mathcal{T}_h$ να είναι κάτω φραγμένη από το ch^2 , με $c > 0$, ανεξάρτητο από το h .

Έστω τώρα το S_h να ορίζει τις συνεχείς συναρτήσεις της κλειστότητας $\bar{\Omega}$ του Ω που είναι γραμμικές σε κάθε τρίγωνο του \mathcal{T}_h και που μηδενίζονται έξω από το Ω_h . Έστω ότι $\{P_j\}_{j=1}^{N_h}$ είναι οι εσωτερικές κορυφές του \mathcal{T}_h . Μία συνάρτηση στον S_h είναι τότε μοναδικά ορισμένη από τις τιμές της στα σημεία P_j και έτσι εξαρτάται από τις παραμέτρους N_h . Έστω Φ_j η συνάρτηση πυραμίδας στον S_h που παίρνει την τιμή 1 στο P_j αλλά μηδενίζεται στις άλλες κορυφές. Τότε η

$\{\Phi_j\}_{j=1}^{N_h}$ δημιουργεί μια βάση για τον S_h και κάθε χ στον S_h αναπαρίσταται ως

$$\chi(x) = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j \Phi_j(x), \quad \alpha_j = \chi(P_j).$$

Μία δοσμένη ομαλή συνάρτηση v στο Ω η οποία μηδενίζεται πάνω στο $\partial\Omega$ μπορεί τώρα να προσεγγιστεί από, για παράδειγμα, την παρεμβάλλουσα της $I_h v$ στον S_h , την οποία ορίζουμε ως το στοιχείο του S_h που συμπίπτει με τη v στις εσωτερικές κορυφές,

$$I_h v(x) = \sum_{j=1}^{N_h} v(P_j) \Phi_j(x). \quad (4.3)$$

Γενικότερα, για ένα $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ορίζουμε με $\|\cdot\|$ τη νόρμα στον $L^2 = L^2(\Omega)$ και με $\|\cdot\|_r$ τη νόρμα στον χώρο Sobolev $H^r = H^r(\Omega) = W_2^r(\Omega)$, έτσι ώστε για συναρτήσεις πραγματικών τιμών v να ισχύει

$$\|v\| = \|v\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega} v^2 dx \right)^{1/2}$$

και για r θετικό ακέραιο

$$\|v\|_r = \|v\|_{H^r} = \left(\sum_{|\alpha| \leq r} \|D^\alpha v\|^2 \right)^{1/2} \quad (4.4)$$

όπου με $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, το $D^\alpha = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial/\partial x_d)^{\alpha_d}$ ορίζει μία παράγωγο τάξης $|\alpha| = \sum_{j=1}^d \alpha_j$ στο x , ώστε το άθροισμα στην σχέση (4.4) να περιέχει όλες αυτές τις παραγώγους τάξης το πολύ r . Θυμίζουμε ότι για συναρτήσεις στον $H_0^1(\Omega)$, δηλαδή οι συναρτήσεις v με $\nabla v = \text{grad} v$ στον L_2 και που μηδενίζονται στο σύνορο, $\|\nabla v\|$ και $\|v\|_1$ είναι ισοδύναμες νόρμες.

$$c\|v\|_1 \leq \|\nabla v\| \leq \|v\|_1, \quad \forall v \in H_0^1, \quad c > 0. \quad (4.5)$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το συμβολισμό στο Ω , τα παρακάτω σφάλματα εκτίμησης για την παρεμβάλλουσα που ορίστηκαν στην (4.3) είναι, για $v \in H^2 \cap H_0^1$,

$$\|I_h v - v\| \leq Ch^2 \|v\|_2 \quad \text{και} \quad \|\nabla(I_h v - v)\| \leq Ch \|v\|_2. \quad (4.6)$$

Επιστρέφοντας τώρα στη γενική περίπτωση του Ω στον \mathbb{R}^d έστω ότι μας δίνεται οικογένεια $\{S_h\}$ πεπερασμένης διάστασης υποχώρων του H_0^1 ώστε για κάποιον ακέραιο $r \geq 2$ και για μικρό h να ισχύει

$$\inf_{\chi \in S_h} \{\|v - \chi\| + h\|\nabla(v - \chi)\|\} \leq Ch^s \|v\|_s, \quad 1 \leq s \leq r \quad (4.7)$$

όταν $v \in H^s \cap H_0^1$. Ο αριθμός r αναφέρεται ως τάξη ακρίβειας της οικογένειας $\{S_h\}$. Το παραπάνω παράδειγμα των τμηματικά γραμμικών συναρτήσεων σε επίπεδο πεδίο ($d = 2$) αντιστοιχεί σε $r = 2$. Στην περίπτωση $r > 2$, ο S_h συχνά αποτελείται από τμηματικά πολυώνυμα βαθμού το πολύ $r - 1$ σε μια τριγωνοποίηση \mathcal{T}_h όπως παραπάνω. Για παράδειγμα, για $r = 4$ στην περίπτωση των τμηματικά κυβικών πολυωνυμικών υποχώρων. Επίσης, στη γενική περίπτωση εκτιμήσεις όπως στην (4.7) συχνά αποκτώνται εκθέτοντας έναν τελεστή παρεμβολής $I_h : H^r \cap H_0^1 \rightarrow S_h$ έτσι ώστε

$$\|I_h v - v\| + h\|\nabla(I_h v - v)\| \leq Ch^s \|v\|_s, \quad 1 \leq s \leq r. \quad (4.8)$$

Σημείωση: Εάν η οικογένεια $\{S_h\}$ βασίζεται σε οικογένεια σχεδόν ομοιόμορφων τριγωνοποιήσεων \mathcal{T}_h και ο S_h αποτελείται από τμηματικά πολυώνυμα βαθμού το πολύ $r - 1$, τότε το ένα έχει την αντιστρέψιμη ιδιότητα

$$\|\nabla \chi\| \leq Ch^{-1} \|\chi\|, \quad \forall \chi \in S_h. \quad (4.9)$$

Οι βέλτιστες τάξεις στις οποίες οι συναρτήσεις και οι κλίσεις τους μπορούν να προσεγγισθούν υπό την υπόθεση (4.7), είναι οι $\mathcal{O}(h^r)$ και $\mathcal{O}(h^{r-1})$, αντίστοιχως, και τώρα θα κατασκευάσουμε προσεγγίσεις αυτών των τάξεων για τη λύση του προβλήματος (4.2). Για αυτόν τον σκοπό θα γράψουμε αρχικά το πρόβλημα σε ασθενή μορφή, πολλαπλασιάζοντας την ελλειπτική εξίσωση με μία ομαλή συνάρτηση ϕ που μηδενίζεται στο σύνορο (αρκεί να απαιτήσουμε $\phi \in H_0^1$), ολοκληρώνοντας σε όλο το Ω και εφαρμόζοντας τον τύπο του Green στο αριστερό μέλος ώστε να πάρουμε τελικά

$$(\nabla u, \nabla \phi) = (f, \phi), \quad \forall \phi \in H_0^1 \quad (4.10)$$

όπου χρησιμοποίησαμε τα εσωτερικά γινόμενα του L^2

$$(v, w) = \int_{\Omega} v w dx, \quad (\nabla v, \nabla w) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^d \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_j} dx. \quad (4.11)$$

Στη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων θέτουμε τώρα το προσεγγιστικό πρόβλημα του να βρούμε μία συνάρτηση $u_h \in S_h$ τέτοια ώστε

$$(\nabla u_h, \nabla \chi) = (f, \chi), \quad \forall \chi \in S_h. \quad (4.12)$$

Σημείωση: Ως αποτέλεσμα των (4.10) και (4.12)

$$(\nabla(u_h - u), \nabla \chi) = 0, \quad \forall \chi \in S_h \quad (4.13)$$

δηλαδή το σφάλμα στη διακριτή λύση είναι ορθογώνιο στον S_h συναρτήσεως του εσωτερικού γινόμενου Dirichlet $(\nabla v, \nabla w)$.

Όσον αφορά στη βάση $\{\Phi_j\}_1^{N_h}$ για τον πεπερασμένων στοιχείων χώρο S_h το διακριτό πρόβλημα μπορεί να δηλωθεί ως εξής: Βρείτε τους συντελεστές α_j στην $u_h(x) = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j \Phi_j(x)$ ώστε

$$\sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j (\nabla \Phi_j, \nabla \Phi_k) = (f, \Phi_k), \quad k = 1, \dots, N_h.$$

Σε συμβολισμό πινάκων αυτό μπορεί να εκφραστεί ως

$$A\alpha = \vec{f}$$

όπου $A = (a_{jk})$ είναι ο πίνακας ακαμψίας με στοιχεία τα $a_{jk} = (\nabla \Phi_j, \nabla \Phi_k)$, $\vec{f} = (f_k)$ το διάνυσμα με στοιχεία τα $f_k = (f, \Phi_k)$ και α το διάνυσμα των αγνώστων α_j . Η διάσταση αυτών των διανυσμάτων ισούται με N_h , δηλαδή με τη διάσταση του S_h . Ο πίνακας ακαμψίας A είναι ένας πίνακας Gram και συνεπώς θετικά ορισμένος και αντιστρέψιμος έτσι ώστε το διακριτό μας πρόβλημα να έχει μοναδική λύση. Για να δούμε ότι ο $A = (A_{jk})$ είναι θετικά ορισμένος

$$\sum_{j,k=1}^d a_{jk} \xi_j \xi_k = \|\nabla(\sum_{j=1}^d \xi_j \Phi_j)\|^2 \geq 0.$$

Εδώ η ισότητα ισχύει μόνο αν $\nabla(\sum_{j=1}^d \xi_j \Phi_j) \equiv 0$ ώστε $(\sum_{j=1}^d \xi_j \Phi_j) = 0$ από την σχέση (4.5) και συνεπώς $\xi_j = 0, j = 1, \dots, N_h$.

Όταν ο S_h αποτελείται από τμηματικά πολυωνυμικές συναρτήσεις, τα στοιχεία του A μπορούν να υπολογιστούν ακριβώς. Παρ'όλα αυτά, αν η f δεν έχει κάποια συγκεκριμένη απλή μορφή, τα στοιχεία (f, Φ_j) της \vec{f} πρέπει να υπολογιστούν από κάποιο τετραγωνικό τύπο.

Παρακάτω ακολουθεί η προσέγγιση του σφάλματος μεταξύ των λύσεων του διακριτού και συνεχούς προβλήματος. Αυτές οι εκτιμήσεις, όπως προαναφέρθηκε, είναι βέλτιστης τάξης σύμφωνα με τη σχέση (4.7). Εδώ, όπως και στη συνέχεια θεωρούμε δεδομένο ότι οι δηλώσεις των ανισοτήτων υποθέτουν πως το u είναι επαρκώς κανονικό για τις νόρμες στα δεξιά ώστε να είναι πεπερασμένες.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1.1. Έστω ότι η (4.7) ισχύει και έστω u_h και u οι λύσεις του (4.12) και του (4.2) αντίστοιχα. Τότε, για $1 \leq s \leq r$ ισχύει ότι

$$\|u_h - u\| \leq Ch^s \|u\|_s \quad \text{και} \quad \|\nabla u_h - \nabla u\| \leq Ch^{s-1} \|u\|_s.$$

Απόδειξη: Βλ.[3, Κεφάλαιο 1, σελ.5]

Εξαιτίας του μεταβολικού σχηματισμού της μεθόδου Galerkin, οι φυσικές εκτιμήσεις σφαλμάτων εκφράζονται σε L^2 - βασισμένες νόρμες. Παραθέτουμε την εκτίμηση σφάλματος της μέγιστης - νόρμας για τμηματικά γραμμικές προσεγγιστικές συναρτήσεις σε επίπεδο πεδίο Ω , όπου $L_\infty = L_\infty(\Omega)$ και $W_\infty^r = W_\infty^r(\Omega)$ και

$$\|v\|_{L_\infty} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|, \quad \|v\|_{W_\infty^r} = \max_{|\alpha| \leq r} \|D^\alpha v\|_{L_\infty}.$$

Το σφάλμα στην παρεμβάλλουσα που εισήχθη και παραπάνω είναι δεύτερης τάξης και στη μέγιστη - νόρμα ώστε

$$\|I_h v - v\|_{L_\infty} \leq Ch^2 \|u\|_{W_\infty^2}, \quad v \in W_\infty^2 \cap H_0^1. \quad (4.14)$$

Συγκρινόμενη με αυτή την εκτίμηση, η ακόλουθη εκτίμηση για το ελλειπτικό πρόβλημα περιέχει ένα λογαριθμικό παράγοντα, ο οποίος δεν επηρεάζει με ουσιαστικό τρόπο την τάξη του σφάλματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1.2. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ και έστω ότι ο S_h αποτελείται από τμηματικά γραμμικές πεπερασμένων στοιχείων συναρτήσεις, και ότι η οικογένεια \mathcal{T}_h είναι σχεδόν ομοιόμορφη. Έστω u_h και u οι λύσεις του (4.12) και (4.2) αντίστοιχα. Τότε

$$\|u_h - u\|_{L_\infty} \leq Ch^2 l_h \|u\|_{W_\infty^2}, \quad l_h = \log \frac{1}{h}. \quad (4.15)$$

Απόδειξη: Βλ.[3, Κεφάλαιο 1, σελ.6]

4.2 Προσεγγίσεις για την Εξίσωση της Θερμότητας

Έπειτα από τις εισαγωγικές σχέσεις και επεξηγήσεις της πρώτης παραγράφου αυτού του κεφαλαίου, επιστρέφουμε στο πρόβλημα αρχικών τιμών (4.1) για την εξίσωση της θερμότητας. Θα προχωρήσουμε, όπως και προηγουμένως, σε δύο βήματα με τον ορισμό και την ανάλυση της προσεγγιστικής λύσης. Αρχικά, θα προσεγγίσουμε την $u(x, t)$ ως μια συνάρτηση $u_h(x, t)$, η οποία, για κάθε δεδομένο t , ανήκει σε έναν πεπερασμένης διάστασης γραμμικό χώρο S_h συναρτήσεων του x του τύπου που θεωρήθηκε παραπάνω. Αυτή η συνάρτηση θα είναι μια λύση ενός h - ανεξάρτητου πεπερασμένου συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων στον χρόνο και αναφέρεται ως χωρικά διακριτή ή ημιδιακριτή λύση. Το χωρικά διακριτό πρόβλημα, (όπως και στην ελλειπτική περίπτωση στην προηγούμενη παράγραφο), βασίζεται σε μια μεταβολική μορφή της (4.1). Στη συνέχεια, θα διακριτοποιήσουμε το σύστημα αυτό στην χρονική μεταβλητή για να παραχθεί ένα ολικά διακριτό χρονικού βήματος σχήμα για την προσεγγιστική λύση της (4.1). Αυτή η διακριτοποίηση στον χρόνο θα γίνει μέσω μιας πεπερασμένων διαφορών προσέγγισης της χρονικής παραγώγου. Ως το πρωταρχικό βήμα για τη χωρική ημιδιακριτή προσεγγιστική λύση στο πρόβλημα αρχικών τιμών μας, θα γράψουμε το πρόβλημα σε ασθενή μορφή, πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση της θερμότητας με μία ομαλή συνάρτηση ϕ που μηδενίζεται στο σύνορο ($\partial\Omega$), ολοκληρώνοντας στο Ω και εφαρμόζοντας τον τύπο του Green στο δεύτερο όρο για να πάρουμε τελικά, με (v, w) και $(\nabla v, \nabla w)$ όπως στην (4.11)

$$(u_t, \phi) + (\nabla u, \nabla \phi) = (f, \phi), \quad \forall \phi \in H_0^1, \quad t > 0.$$

Έπειτα, μπορούμε να θέσουμε το προσεγγιστικό πρόβλημα για να βρούμε την $u_h(t) = u_h(\cdot, t)$, που ανήκει στον S_h , για κάθε t , έτσι ώστε

$$(u_{h,t}, \chi) + (\nabla u_h, \nabla \chi) = (f, \chi), \quad \chi \in S_h, \quad t > 0, \quad u_h(0) = v_h \quad (4.16)$$

όπου v_h είναι κάποια προσέγγιση της v στον S_h .

Σύμφωνα με τη βάση $\{\Phi_j\}_1^{N_h}$ για τον S_h , το ημιδιακριτό πρόβλημα τίθεται ως εξής: Βρείτε τους συντελεστές $\alpha_j(t)$ στην $u_h(x, t) = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j(t) \Phi_j(x)$ έτσι ώστε

$$\sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j'(t) (\Phi_j, \Phi_k) + \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j(t) (\nabla \Phi_j, \nabla \Phi_k) = (f, \Phi_k), \quad k = 1, \dots, N_h$$

και με γ_j τις συνιστώσες της δοσμένης αρχικής προσέγγισης v_h , $\alpha_j(0) = \gamma_j$ για $1, \dots, N_h$. Σε συμβολισμό πινάκων έχουμε

$$M\alpha'(t) + A\alpha(t) = \vec{f}(t), \quad t > 0, \quad \alpha(0) = \gamma$$

όπου $M = (m_{jk})$ είναι ο πίνακας μάζας με στοιχεία τα $m_{jk} = (\Phi_j, \Phi_k)$, $A = (a_{jk})$ ο πίνακας ακαμψίας με $a_{jk} = (\nabla\Phi_j, \nabla\Phi_k)$, $\vec{f} = f_k$ το διάνυσμα με στοιχεία $f_k = (f, \Phi_k)$, $\alpha(t)$ το διάνυσμα των αγνώστων $\alpha_j(t)$ και $\gamma = (\gamma_k)$. Η διάσταση όλων αυτών των αντικειμένων ισούται με N_h , τη διάσταση δηλαδή του S_h . Εφ'όσον όπως και ο πίνακας ακαμψίας A έτσι και ο πίνακας μάζας M είναι πίνακας Gram και άρα θετικά ορισμένος και αντιστρέψιμος, το παραπάνω σύστημα των ΣΔΕ γράφεται ως εξής

$$\alpha'(t) + M^{-1}A\alpha(t) = M^{-1}\vec{f}(t), \quad t > 0, \quad \alpha(0) = \gamma$$

και άρα προφανώς έχει μοναδική λύση για t θετικό.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε την εκτίμηση στον L^2 για το σφάλμα μεταξύ των λύσεων του ημιδιακριτού και του συνεχούς προβλήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2.1. Έστω u_h και u οι λύσεις των (4.16) και (4.1). Τότε

$$\|u_h(t) - u(t)\| \leq \|v_h - v\| + Ch^r(\|v\|_r + \int_0^t \|u_t\|_r ds), \quad t \geq 0.$$

Εδώ απαιτούμε η λύση του συνεχούς προβλήματος να έχει την έμμεση κανονικότητα που εννοείται από την παρουσία των νορμών στα δεξιά και ότι το v μηδενίζεται στο $\partial\Omega$. Επίσης, αν η (4.8) ισχύει και $v_h = I_h v$, τότε ο πρώτος όρος στα δεξιά θα κυριαρχείται από το δεύτερο. Το ίδιο ισχύει αν $v_h = P_h v$, όπου P_h ορίζει την ορθογωνική προβολή του v πάνω στον S_h συναρτήσει του εσωτερικού γινομένου του L^2 , αφού αυτή η λύση είναι η καλύτερη προσέγγιση του v στον S_h συναρτήσει της L^2 νόρμας. Για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.1 εισάγουμε την ελλειπτική ή Ritz προβολή R_h πάνω στον S_h ως την ορθογωνική προβολή συναρτήσει του εσωτερικού γινομένου $(\nabla v, \nabla w)$ ώστε

$$(\nabla R_h v, \nabla \chi) = (\nabla v, \nabla \chi), \quad \forall \chi \in S_h, \quad v \in H_0^1. \quad (4.17)$$

Αυτός ο ορισμός μπορεί να εκφραστεί λέγοντας πως το $R_h v$ είναι η πεπερασμένων στοιχείων προσέγγιση της λύσης του αντίστοιχου ελλειπτικού προβλήματος με ακριβή λύση v . Ως άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 4.1.1 έχουμε την παρακάτω εκτίμηση σφάλματος.

ΛΗΜΜΑ 4.2.2. Έστω ότι η (4.7) ισχύει. Τότε, με R_h ορισμένο από την (4.17) έχουμε

$$\|R_h v - v\| + h\|\nabla(R_h v - v)\| \leq Ch^s\|v\|_s, \quad v \in H^s \cap H_0^1, \quad 1 \leq s \leq r.$$

Απόδειξη Θεωρήματος 4.2.1.:

Στο βασικό βήμα της απόδειξης θα συγκρίνουμε τη λύση του ημιδιακριτού προβλήματος με την ελλειπτική προβολή της ακριβούς λύσης. Συνεπώς, γράφουμε

$$u_h - u = \theta + \rho, \quad \text{όπου} \quad \theta = u_h - R_h u, \quad \rho = R_h u - u. \quad (4.18)$$

Ο δεύτερος όρος είναι εύκολα φραγμένος λόγω του Λήμματος 4.2.2 και των προφανών εκτιμήσεων ευστάθειας της λύσης (Βλ. Κεφάλαιο 2)

$$\|\rho(t)\| \leq Ch^r \|u(t)\|_r \leq Ch^r (\|v\|_r + \int_0^t \|u_t\|_r ds). \quad (4.19)$$

Για να εκτιμηθεί το θ , σημειώνουμε ότι από τους ορισμούς έχουμε

$$\begin{aligned} & (\theta_t, \chi) + (\nabla \theta, \nabla \chi) \\ &= (u_{h,t}, \chi) + (\nabla u_h, \nabla \chi) - (R_h u_t, \chi) - (\nabla R_h u, \nabla \chi) \\ &= (f, \chi) - (R_h u_t, \chi) - (\nabla u, \nabla \chi) = (u_t - R_h u_t, \chi), \end{aligned} \quad (4.20)$$

ή

$$(\theta_t, \chi) + (\nabla \theta, \nabla \chi) = -(\rho_t, \chi), \quad \forall \chi \in S_h, \quad t > 0, \quad (4.21)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι ο τελεστής R_h αντιμετατίθεται με χρονική διαφοροποίηση. Εφ'όσον, το θ ανήκει στον S_h , επιλέγουμε $\chi = \theta$ στην (4.21) και καταλήγουμε στη σχέση

$$(\theta_t, \theta) + \|\nabla \theta\|^2 = -(\rho_t, \theta). \quad (4.22)$$

Εδώ ο πρώτος όρος ισούται με $\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} \right) \|\theta\|^2$ και ο δεύτερος είναι μη αρνητικός. Αφού το $\|\theta\|$ μπορεί να μην είναι διαφορίσιμο όταν $\theta = 0$, προσθέτουμε ένα ϵ^2 για να πάρουμε

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\theta\|^2 + \epsilon^2) \leq \|\rho_t\| \|\theta\|, \quad \epsilon > 0.$$

Αυτό δείχνει ότι

$$(\|\theta\|^2 + \epsilon^2)^{1/2} \frac{d}{dt} (\|\theta\|^2 + \epsilon^2)^{1/2} \leq \|\rho_t\| \|\theta\|,$$

και άρα αφού $\|\theta\| \leq (\|\theta\|^2 + \epsilon^2)^{1/2}$, μετά την ολοκλήρωση και αφήνοντας το $\epsilon \rightarrow 0$

$$\|\theta(t)\| \leq \|\theta(0)\| + \int_0^t \|\rho_t\| ds. \quad (4.23)$$

Εδώ

$$\|\theta(0)\| = \|v_h - R_h v\| \leq \|v_h - v\| + \|R_h v - v\| \leq \|v_h - v\| + Ch^r \|v\|_r$$

και $\|\rho_t\| = \|R_h u_t - u_t\| \leq Ch^r \|u_t\|_r$, ώστε το επιθυμητό φράγμα για το $\|\theta(t)\|$ να ακολουθήσει.

Στην παραπάνω απόδειξη κάναμε χρήση στην σχέση (4.22) το γεγονός του ότι το $\|\nabla\theta\|^2$ είναι μη αρνητικό. Με μία άλλη αντιμετώπιση αυτού του όρου, μπορούμε να δείξουμε ότι η επίδραση των αρχικών δεδομένων πάνω στο σφάλμα συγκλίνει στο μηδέν εκθετικά καθώς μεγαλώνει το t . Στην πραγματικότητα, με λ_1 τη μικρότερη ιδιοτιμή του $-\Delta$, με οριακές συνθήκες Dirichlet, έχουμε

$$\|\nabla v\|^2 \geq \lambda_1 \|v\|^2, \quad \forall v \in H_0^1 \quad (4.24)$$

και άρα η (4.22) δίνει

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|^2 + \lambda_1 \|\theta\|^2 \leq \|\rho_t\| \|\theta\|,$$

ή $(d/dt)\|\theta\| + \lambda_1 \|\theta\| \leq \|\rho_t\|$ και άρα

$$\begin{aligned} \|\theta(t)\| &\leq e^{-\lambda_1 t} \|\theta(0)\| + \int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)} \|\rho_t(s)\| ds \\ &\leq e^{-\lambda_1 t} \|v_h - v\| + Ch^r (e^{-\lambda_1 t} \|v\|_r + \int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)} \|u_t(s)\|_r ds). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το πρώτο μέρος της (4.19) καταλήγουμε στο ότι με v_h κατάλληλα επιλεγμένο

$$\|u_h(t) - u(t)\| \leq Ch^r (e^{-\lambda_1 t} \|v\|_r + \|u(t)\|_r + \int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)} \|u_t(s)\|_r ds).$$

Τώρα θα αναφέρουμε συνοπτικά μια άλλη προσέγγιση της απόδειξης του Θεωρήματος 4.2.1, δουλεύοντας την εξίσωση με το θ σε μορφή τελεστή. Πρώτα, όπως και στο κεφάλαιο [3], από την αρχή του Duhamel, η λύση της εξίσωσης (4.1) μπορεί να γραφεί ως

$$u(t) = E(t)v + \int_0^t E(t-s)f(s)ds. \quad (4.25)$$

Εδώ $E(t)$ είναι ο τελεστής λύσης της ομογενούς εξίσωσης, η περίπτωση όπου $f \equiv 0$ της (4.1), δηλαδή, ο τελεστής που παίρνει τις αρχικές τιμές $u(0) = v$

στη λύση $u(t)$ στον χρόνο t . Αυτός ο τελεστής μπορεί να θεωρηθεί και ως μια ημιομάδα $e^{\Delta t}$ στον L^2 που δημιουργείται από τη Λαπλασιανή, θεωρούμενη όπως ορίζεται στον $\mathcal{D}(\Delta) = H^2 \cap H_0^1$. Μία διακριτή Λαπλασιανή $\Delta_h : S_h \rightarrow S_h$

$$(\Delta_h \psi, \chi) = -(\nabla \psi, \nabla \chi), \quad \forall \psi, \chi \in S_h, \quad (4.26)$$

όπου αυτό το ανάλογο του τύπου του Green ξεκάθαρα ορίζει $\Delta_h \psi = \sum_{j=1}^{N_h} d_j \Phi_j$ από

$$\sum_{j=1}^{N_h} d_j (\Phi_j, \Phi_k) = -(\nabla \psi, \nabla \Phi_k), \quad k = 1, \dots, N_h$$

αφού ο πίνακας του συστήματος είναι ο θετικά ορισμένος πίνακας μάζας M . Ο τελεστής $-\Delta_h$ είναι αυτοσυζυγής και θετικά ορισμένος στον S_h συναρτηθεί του (\cdot, \cdot) . Επίσης το Δ_h συνδέεται με τους άλλους τελεστές με τη σχέση

$$\Delta_h R_h = P_h \Delta. \quad (4.27)$$

Για

$$(\Delta_h R_h v, \chi) = -(\nabla R_h v, \nabla \chi) = -(\nabla v, \nabla \chi) = (\Delta v, \chi) = (P_h \Delta v, \chi), \quad \forall \chi \in S_h.$$

Με αυτό το συμβολισμό η ημιδιακριτή εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$(u_{h,t}, \chi) - (\Delta_h u_h, \chi) = (P_h f, \chi), \quad \forall \chi \in S_h, \quad t > 0,$$

ή, αφού οι παράγοντες στα αριστερά ανήκουν όλοι στον S_h , $u_{h,t} - \Delta_h u_h = P_h f$. Χρησιμοποιώντας την (4.27) έχουμε για το θ

$$\begin{aligned} \theta_t - \Delta_h \theta &= (u_{h,t} - \Delta_h u_h) - (R_h u_t - \Delta_h R_h u) = \\ &P_h f + (P_h - R_h) u_t - P_h (u_t - \Delta u) = P_h (I - R_h) u_t = -P_h \rho_t \end{aligned}$$

ή

$$\theta_t - \Delta_h \theta = -P_h \rho_t, \quad t > 0. \quad (4.28)$$

Με $E_h(t)$ ορίζουμε το διακριτό ανάλογο του τελεστή $E(t)$ που προαναφέρθηκε, δηλαδή τον τελεστή λύσης του ομογενούς ημιδιακριτού προβλήματος

$$u_{h,t} - \Delta_h u_h = 0, \quad t > 0, \quad u_h(0) = v_h.$$

Το ανάλογο του (4.25) μας λέει τότε ότι η σχέση (4.28) υποδηλώνει ότι

$$\theta(t) = E_h(t)\theta(0) - \int_0^t E_h(t-s)P_h \rho_t(s)ds. \quad (4.29)$$

Σημειώνουμε ότι η $E_h(t)$ είναι σταθερή στον L^2 ή πιο συγκεκριμένα

$$\|E_h(t)v_h\| \leq e^{-\lambda_1 t} \|v_h\| \leq \|v_h\|, \quad v_h \in S_h, \quad t \geq 0. \quad (4.30)$$

Στην πραγματικότητα, επιλέγοντας $\chi = u_h$ στην ομογενή μορφή (4.16) και χρησιμοποιώντας την (4.24) έχουμε

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_h\|^2 + \lambda_1 \|u_h\|^2 \leq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_h\|^2 + \|\nabla u_h\|^2 = 0, \quad t > 0$$

το οποίο εύκολα δείχνει τη σχέση (4.30). Αφού η P_h έχει μοναδιαία νόρμα στον L^2 , η (4.29) υποδηλώνει την (4.23), από την οποία ακολουθεί το Θεώρημα 4.2.1 όπως παραπάνω. Η επιθυμητή εκτίμηση για το θ είναι άρα μια συνέπεια της εκτίμησης σταθερότητας για την $E_h(t)$ συνδυασμένη με το σφάλμα εκτίμησης για το ελλειπτικό πρόβλημα εφαρμοσμένο στο $\rho_t = (R_h - I)u_t$.

Με παρόμοιο τρόπο θα αποδείξουμε το παρακάτω Θεώρημα που αφορά στην εκτίμηση σφάλματος για την κλίση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2.3. Υπό τις υποθέσεις του Θεωρήματος 4.2.1 έχουμε

$$\begin{aligned} \|\nabla u_h(t) - \nabla u(t)\| &\leq C \|\nabla v_h - \nabla v\| \\ &+ Ch^{r-1} \left(\|v\|_r + \|u(t)\|_r + \left(\int_0^t \|u_s\|_{r-1}^2 ds \right)^{1/2} \right) \end{aligned}$$

για $t \geq 0$.

Απόδειξη: Όπως και προηγουμένως γράφουμε το σφάλμα στη μορφή (4.18). Από το Λήμμα 4.2.2

$$\|\nabla \rho(t)\| = \|\nabla(R_h u(t) - u(t))\| \leq Ch^{r-1} \|u(t)\|_r.$$

Για να μπορέσουμε να εκτιμήσουμε το $\nabla \theta$, χρησιμοποιούμε ξανά την (4.21), τώρα για $\chi = \theta_t$. Παίρνουμε

$$\|\theta_t\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \theta\|^2 = -(\rho_t, \theta_t) \leq \frac{1}{2} \|\rho_t\|^2 + \frac{1}{2} \|\theta_t\|^2$$

έτσι ώστε $(d/dt)\|\nabla \theta\|^2 \leq \|\rho_t\|^2$ ή

$$\begin{aligned} \|\nabla \theta(t)\|^2 &\leq \|\nabla \theta(0)\|^2 + \int_0^t \|\rho_s\|^2 ds \\ &\leq (\|\nabla(v_h - v)\| + \|\nabla(R_h v - v)\|)^2 + \int_0^t \|\rho_s\|^2 ds. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Άρα λαμβάνοντας υπ'όψιν το Λήμμα 4.2.2 έχουμε ότι

$$\|\nabla\theta(t)\|^2 \leq 2\|\nabla(v_h - v)\|^2 + Ch^{2r-2}(\|v\|_r^2 + \int_0^t \|u_t\|_{r-1}^2 ds) \quad (4.32)$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

ΣΧΟΛΙΟ: Εάν $v_h = I_h v$ όπως στην (4.8) ή $v_h = R_h v$, τότε $\|\nabla v_h - \nabla v\| \leq Ch^{r-1}\|v\|_r$, ώστε ο πρώτος όρος στα δεξιά στο Θεώρημα 4.2.3 να κυριαρχείται από το δεύτερο.

Στην περίπτωση της σχεδόν ομοιόμορφης οικογένειας τριγωνοποιήσεων \mathcal{T}_h του επίπεδου πεδίου ή, πιο γενικά, όταν η αντίστροφη εκτίμηση (4.9) ισχύει, μία εκτίμηση για το σφάλμα στην κλίση μπορεί να παρθεί άμεσα από το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 4.2.1. Στην πραγματικότητα, παίρνουμε, για χ αυθαίρετο στον S_h

$$\begin{aligned} \|\nabla u_h(t) - \nabla u(t)\| &\leq \|\nabla(u_h(t) - \chi)\| + \|\nabla\chi - \nabla u(t)\| \\ &\leq Ch^{-1}\|u_h(t) - \chi\| + \|\nabla\chi - \nabla u(t)\| \\ &\leq Ch^{-1}\|u_h(t) - u(t)\| + Ch^{-1}(\|\chi - u(t)\| + h\|\nabla\chi - \nabla u(t)\|). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Εδώ, από την προσεγγιστική υπόθεση (4.7), έχουμε, με κατάλληλο $\chi \in S_h$

$$\|\chi - u(t)\| + h\|\nabla\chi - \nabla u(t)\| \leq Ch^r\|u(t)\|_r$$

και άρα, από το Θεώρημα 4.2.1, για κατάλληλη επιλογή του v_h

$$\|\nabla u_h(t) - \nabla u(t)\| \leq Ch^{r-1}(\|v\|_r + \int_0^1 \|u_t(s)\|_r ds).$$

Κάνουμε την παρακάτω παρατήρηση για τον όρο $\theta = u_h - R_h u$ στην (4.18): Υποθέτουμε ότι έχουμε επιλέξει $v_h = R_h v$ ώστε $\theta(0) = 0$. Τότε, μαζί με την (4.32) έχουμε από την (4.31)

$$\|\nabla\theta(t)\| \leq C \left(\int_0^t \|\rho_t\|^2 ds \right)^{1/2} \leq Ch^r \left(\int_0^t \|u_t\|_r^2 ds \right)^{1/2}. \quad (4.34)$$

Άρα η κλίση του θ είναι τάξης $\mathcal{O}(h^r)$, ενώ η κλίση του ολικού σφάλματος μπορεί να είναι μόνο τάξης $\mathcal{O}(h^{r-1})$, για μικρό h . Συνεπώς, η ∇u_h είναι καλύτερη προσέγγιση στη $\nabla R_h u$ από ότι στη ∇u . Αυτό είναι ένα παράδειγμα ενός φαινομένου που αναφέρεται κάποιες φορές και ως υπερσύγκλιση. Ως ένα απλό παράδειγμα μιας εφαρμογής μιας τέτοιας εκτίμησης, θα υποδείξουμε εν

συντομία πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δείξει ένα σημαντικά βέλτιστης τάξης όριο σφάλματος στη μέγιστη - νόρμα. Θεωρούμε τη συμπαγή κατάσταση που περιγράφηκε στην αρχή του κεφαλαίου [4] με Ω ένα επίπεδο ομαλό κυρτό πεδίο ($d = 2$) και τον S_h να αποτελείται από τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις ($r = 2$) σε μια σχεδόν ομοιόμορφη τριγωνοποίηση του Ω . Τότε, από το Θεώρημα 4.1.2 ανακαλώντας τον συμβολισμό $l_h = \log(1/h)$ έχουμε

$$\|\rho_t(t)\|_{L^\infty} = \|R_h u(t) - u(t)\|_{L^\infty} \leq Ch^2 l_h \|u(t)\|_{W_\infty^2}. \quad (4.35)$$

Στις δύο διαστάσεις, η ανισότητα του Sobolev σχεδόν φράσσει τη μέγιστη - νόρμα από τη νόρμα στον H^1 , και μπορεί ναδειχθεί ότι για συναρτήσεις στον υπόχωρο S_h ισχύει

$$\|\chi\|_{L^\infty} \leq Cl_h^{1/2} \|\nabla \chi\|, \quad \forall \chi \in S_h.$$

Εφαρμόζοντας στο θ , αυτό δείχνει, από την (4.34) (με $r = 2$), ότι

$$\|\theta(t)\|_{L^\infty} \leq Ch^2 l_h^{1/2} \left(\int_0^t \|u_t\|_2^2 ds \right)^{1/2}$$

και έτσι μπορούμε να καταλήξουμε για το σφάλμα στο παραβολικό πρόβλημα ότι

$$\|u_h(t) - u(t)\|_{L^\infty} \leq \|\rho(t)\|_{L^\infty} + \|\theta(t)\|_{L^\infty} \leq C(t, u) h^2 l_h.$$

4.2.1 Μέθοδος Galerkin για την προς τα πίσω μέθοδο Euler

Θα μελετήσουμε τη διακριτοποίηση συναρτήσεων και της χρονικής μεταβλητής. Έστω k το χρονικό βήμα και U^n η προσέγγιση στον S_h της $u(t)$ στο $t = t_n = nk$. Αυτή μέθοδος ορίζεται αντικαθιστώντας την χρονική παράγωγο στην σχέση (4.16) με μία προς τα πίσω διαφορά πηλίκου, δηλαδή με $\bar{\partial}U^n = (U^n - U^{n-1})/k$

$$(\bar{\partial}U^n, \chi) + (\nabla U^n, \nabla \chi) = (f(t_n), \chi), \quad \forall \chi \in S_h, \quad n \geq 1, \quad U^0 = v_h. \quad (4.36)$$

Για U^{n-1} δοσμένο ορίζει την U^n έμμεσα από την εξίσωση

$$(U^n, \chi) + k(\nabla U^n, \nabla \chi) = (U^{n-1} + kf(t_n), \chi), \quad \forall \chi \in S_h$$

η οποία είναι ο τύπος πεπερασμένων στοιχείων μιας ελλειπτικής εξίσωσης της μορφής $(I - k\Delta)u = g$. Με συμβολισμό όπως και στην ημιδιακριτή περίπτωση, μπορεί να γραφεί

$$(M + kA)\alpha^n = M\alpha^{n-1} + k\vec{f}(t_n)$$

όπου $M + kA$ είναι θετικά ορισμένο και άρα αντιστρέψιμο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2.4. *Με U^n και u τις λύσεις των (4.36) και (4.1), αντίστοιχα, έχουμε, αν $\|v_h - v\| \leq Ch^r \|v\|_r$,*

$$\|U^n - u(t_n)\| \leq Ch^r (\|v\|_r + \int_0^{t_n} \|u_t\|_r ds) + k \int_0^{t_n} \|u_{tt}\| ds, \quad n \geq 0.$$

Απόδειξη: Σε αναλογία με την (4.18) γράφουμε

$$U^n - u(t_n) = (U^n - R_h u(t_n)) + (R_h u(t_n) - u(t_n)) = \theta^n + \rho^n$$

και $\rho^n = \rho(t_n)$ είναι φραγμένη όπως στην (4.19). Αυτή τη φορά, ο υπολογισμός που αντιστοιχεί στην (4.20) δίνει

$$(\bar{\partial}\theta^n, \chi) + (\nabla\theta^n, \nabla\chi) = -(\omega^n, \chi), \quad \forall \chi \in S_h, \quad n \geq 1 \quad (4.37)$$

όπου

$$\omega^n = R_h \bar{\partial}u(t_n) - u_t(t_n) = (R_h - I)\bar{\partial}u(t_n) + (\bar{\partial}u(t_n) - u_t(t_n)) = \omega_1^n + \omega_2^n.$$

Επιλέγοντας $\chi = \theta^n$, έχουμε $(\bar{\partial}\theta^n, \theta^n) \leq \|\omega^n\| \|\theta^n\|$ ή $\|\theta^n\|^2 - (\theta^{n-1}, \theta^n) \leq k \|\omega^n\| \|\theta^n\|$ ώστε

$$\|\theta^n\| \leq \|\theta^{n-1}\| + k \|\omega^n\| \quad (4.38)$$

και από επαναλαμβανόμενη εφαρμογή προκύπτει

$$\|\theta^n\| \leq \|\theta^0\| + k \sum_{j=1}^n \|\omega^j\| \leq \|\theta^0\| + k \sum_{j=1}^n \|\omega_1^j\| + k \sum_{j=1}^n \|\omega_2^j\|. \quad (4.39)$$

Εδώ, όπως και πριν, το $\theta^0 = \theta(0)$ είναι φραγμένο. Γράφουμε

$$\omega_1^j = (R_h - I)k^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} u_t ds = k^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (R_h - I)u_t ds,$$

και παίρνουμε

$$k \sum_{j=1}^n \|\omega_1^j\| \leq \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} Ch^r \|u_t\|_r ds = Ch^r \int_0^{t_n} \|u_t\|_r ds.$$

Επιπλέον,

$$k\omega_2^j = u(t_j) - u(t_{j-1}) - ku_t(t_j) = - \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1})u_{tt}(s) ds, \quad (4.40)$$

ώστε

$$k \sum_{j=1}^n \|\omega_2^j\| \leq \sum_{j=1}^n \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) u_{tt}(s) ds \right\| \leq k \int_0^{t_n} \|u_{tt}\| ds.$$

Μαζί οι εκτιμήσεις μας ολοκληρώνουν την απόδειξη του Θεωρήματος.

Για να δείξουμε μια εκτίμηση για το $\nabla\theta$ μπορούμε να επιλέξουμε $\chi = \bar{\partial}\theta^n$ στην (4.37) για να πάρουμε $\bar{\partial}\|\nabla\theta^n\|^2 \leq \|\omega^n\|^2$, ή, αν $\nabla\theta(0) = 0$

$$\|\nabla\theta^n\|^2 \leq k \sum_{j=1}^n \|\omega^j\|^2 \leq Ch^{2s} \int_0^{t_n} \|u_t\|_s^2 dt + Ck^2 \int_0^{t_n} \|u_{tt}\|^2 dt \quad (4.41)$$

για $1 \leq s \leq r$. Μαζί με τη δεδομένη εκτίμηση για $\nabla\rho$ αυτό δείχνει με $s = r - 1$, $\|\nabla(U^n - u(t_n))\| \leq C(u)(h^{r-1} + k)$. Αν κάποιος χρησιμοποιήσει το παραπάνω Θεώρημα μαζί με την αντίστροφη ανισότητα (4.9) παίρνει την ασθενή εκτίμηση $\|\nabla(U^n - u(t_n))\| \leq C(u)(h^{r-1} + kh^{-1})$. Σημειώνουμε, επίσης, ότι με $s = r$ στην (4.41), μπορεί να καταλήξουμε στην εκτίμηση μέγιστης - νόρμας $\|U^n - u(t_n)\|_{L^\infty} \leq C(u)l_h(h^r + k)$. Λόγω της μη συμμετρικής επιλογής της διακριτοποίησης στον χρόνο, η προς τα πίσω μέθοδος Euler (Galerkin) είναι μόνο πρώτης τάξης στο k .

4.2.2 Μέθοδος Galerkin για την Crank-Nicolson

Εδώ, η ημιδιακριτή εξίσωση διακριτοποιείται με ένα συμμετρικό τρόπο γύρω από το σημείο $t_{n-\frac{1}{2}} = (n - \frac{1}{2})k$ που παράγει μιας δεύτερης τάξης ακριβή μέθοδο στον χρόνο. Πιο συγκεκριμένα, ορίζουμε την U^n στον S_h αναδρομικά για $n \geq 1$ από τη σχέση

$$(\bar{\partial}U^n, \chi) + \left(\nabla \frac{U^n + U^{n-1}}{2}, \nabla\chi\right) = (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \chi), \quad \forall \chi \in S_h \quad (4.42)$$

με $U^0 = v_h$. Η εξίσωση για την U^n μπορεί να γραφεί σε μορφή πινάκων ως εξής

$$(M + \frac{1}{2}kA)\alpha^n = (M - \frac{1}{2}kA)\alpha^{n-1} + k\vec{f}(t_{n-\frac{1}{2}})$$

με θετικά ορισμένο πίνακα $M + \frac{1}{2}kA$. Το σφάλμα εκτίμησης δίνεται στο επόμενο Θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2.5. Έστω U^n και u οι λύσεις των (4.42) και (4.1) αντίστοιχα και έστω $\|v_h - v\| \leq Ch^r \|v\|_r$. Τότε έχουμε για $n \geq 0$

$$\|U^n - u(t_n)\| \leq Ch^r (\|v\|_r + \int_0^{t_n} \|u_t\| ds) + Ck^2 \int_0^{t_n} (\|u_{ttt}\| + \|\Delta u_{tt}\|) ds.$$

Απόδειξη: Εφόσον το ρ^n είναι φραγμένο όπως παραπάνω, αρκεί να θεωρήσουμε θ^n . Έχουμε

$$(\bar{\partial}\theta^n, \chi) + (\nabla \frac{\theta^n + \theta^{n-1}}{2}, \nabla \chi) = -(\omega^n, \chi), \quad \chi \in S_h, \quad n \geq 1$$

όπου τώρα

$$\begin{aligned} \omega^n &= (R_h - I)\bar{\partial}u(t_n) + (\bar{\partial}u(t_n) - u_t(t_{n-\frac{1}{2}})) \\ &\quad - \Delta(u(t_{n-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2}(u(t_n) + u(t_{n-1}))) = \omega_1^n + \omega_2^n + \omega_3^n. \end{aligned}$$

Επιλέγοντας αυτήν τη φορά $\chi = (\theta^n + \theta^{n-1})/2$ στην εξίσωση για το θ^n , βρίσκουμε

$$(\bar{\partial}\theta^n, \frac{1}{2}(\theta^n + \theta^{n-1})) \leq \frac{1}{2} \|\omega^n\| (\|\theta^n\| + \|\theta^{n-1}\|)$$

ή

$$\|\theta^n\|^2 - \|\theta^{n-1}\|^2 \leq k \|\omega^n\| (\|\theta^n\| + \|\theta^{n-1}\|)$$

έτσι ώστε έπειτα από απαλοιφή ενός κοινού παράγοντα έχουμε

$$\|\theta^n\| \leq \|\theta^{n-1}\| + k \|\omega^n\|.$$

Έπειτα από επαναλαμβανόμενες εφαρμογές αυτό δίνει

$$\|\theta^n\| \leq \|\theta^0\| + k \sum_{j=1}^n (\|\omega_1^j\| + \|\omega_2^j\| + \|\omega_3^j\|).$$

Αφού θ^0 και ω_1^j εκτιμώνται όπως πριν, μένει να φράξουμε τους όρους στα ω_2^j και ω_3^j . Εδώ

$$\begin{aligned} k \|\omega_2^j\| &= \|u(t_j) - u(t_{j-1}) - ku_t(t_{j-\frac{1}{2}})\| \\ &= \frac{1}{2} \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_{j-\frac{1}{2}}} (s - t_{j-1})^2 u_{ttt}(s) ds + \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_j} (s - t_j)^2 u_{ttt}(s) ds \right\| \\ &\leq Ck^2 \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|u_{ttt}\| ds, \end{aligned}$$

και ομοίως

$$k\|\omega_3^j\| = k\|\Delta(u(t_{j-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2}(u(t_j) + u(t_{j-1})))\| \leq Ck^2 \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\Delta u_{tt}\| ds.$$

Όλα τα παραπάνω μαζί δίνουν

$$k \sum_{j=1}^k (\|\omega_2^j\| + \|\omega_3^j\|) \leq Ck^2 \int_0^{t_n} (\|u_{ttt}\| + \|\Delta u_{tt}\|) ds$$

το οποίο ολοκληρώνει και την απόδειξη.

4.2.3 Άλλες μέθοδοι εκτίμησης σφαλμάτων

Ένας άλλος τρόπος για να επιτύχουμε δεύτερης τάξης ακρίβεια στη διακριτοποίηση του χρόνου είναι προσεγγίζοντας την χρονική παράγωγο στη διαφορική εξίσωση με μια δεύτερης τάξης προς τα πίσω διαφορά πηλίκο. Θέτοντας

$$\bar{D}U^n = \bar{\partial}U^n + \frac{1}{2}k\bar{\partial}^2U^n = \frac{(\frac{3}{2}U^n - 2U^{n-1} + \frac{1}{2}U^{n-2})}{k}$$

έχουμε από την επέκταση Taylor, για μία ομαλή συνάρτηση u

$$\bar{D}u(t_n) = u_t(t_n) + \mathcal{O}(k^2), \quad k \rightarrow 0.$$

Συνεπώς, θέτουμε το διακριτό πρόβλημα

$$(\bar{D}U^n, \chi) + (\nabla U^n, \nabla \chi) = (f(t_n), \chi), \quad \forall \chi \in S_h, \quad n \geq 2. \quad (4.43)$$

Σημειώνουμε πως για καθορισμένο n αυτή η εξίσωση κατέχει τρία χρονικά επίπεδα και όχι δύο όπως οι προηγούμενες μέθοδοι μας. Έτσι, πρέπει να περιορίσουμε τη χρήση της για $n \geq 2$ καθώς δε θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε την U^n με αρνητικό n . Με $U^0 = v_h$ δοσμένο, χρειάζεται επίσης να ορίσουμε την U^1 με κάποια μέθοδο και επιλέγουμε να το κάνουμε κατέχοντας ένα βήμα από την προς τα πίσω μέθοδο Euler, δηλαδή, θέτουμε

$$(\bar{\partial}U^1, \chi) + (\nabla U^1, \nabla \chi) = (f(t_1), \chi), \quad \forall \chi \in S_h. \quad (4.44)$$

Σημείωση: Η (4.43) σε μορφή πινάκων γράφεται

$$(\frac{3}{2}M + kA)\alpha^n = 2M\alpha^{n-1} - \frac{1}{2}M\alpha^{n-2} + k\vec{f}(t_n)$$

για $n \geq 2$ με συντελεστή πίνακα του α^n πάλι θετικά ορισμένο.

Τώρα έχουμε το ακόλουθο $\mathcal{O}(h^r + k^2)$ σφάλμα εκτίμησης

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2.6. Με U^n και u τις λύσεις των (4.43) και (4.1), με $U^0 = v_h$ και U^1 ορισμένη από την (4.44), έχουμε, εάν $\|v_h - v\| \leq Ch^r \|v\|_r$,

$$\begin{aligned} \|U^n - u(t_n)\| &\leq Ch^r (\|v\|_r + \int_0^{t_n} \|u_t\|_r ds) \\ &+ Ck \int_0^k \|u_{tt}\| ds + Ck^2 \int_0^{t_n} \|u_{ttt}\| ds, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Απόδειξη: Βλ.[3, Κεφάλαιο 1, σελ.17]

Στα παραπάνω σχήματα χρονικής διακριτοποίησης χρησιμοποιήσαμε ένα σταθερό χρονικό βήμα k . Θα κλείσουμε αυτό το κεφάλαιο με ένα παράδειγμα μεταβλητού χρονικού βήματος της προς τα πίσω μεθόδου Euler.

Έστω ότι $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots$ είναι μία διαμέριση του θετικού άξονα του χρόνου και θέτουμε $k_n = t_n - t_{n-1}$. Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε την προσέγγιση U^n της $u(t_n)$ ορισμένη από την σχέση

$$(\bar{\partial}_n U^n, \chi) + (\nabla U^n, \nabla \chi) = (f(t_n), \chi), \quad \forall \chi \in S_h, \quad n \geq 1 \quad (4.45)$$

με $U^0 = v_h$, όπου $\bar{\partial}_n U^n = (U^n - U^{n-1})/k_n$. Έχουμε την παρακάτω εκτίμηση σφάλματος που ανάγεται σε αυτήν του Θεωρήματος 4.2.4 για σταθερά χρονικά βήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2.7. Έστω U^n και u οι λύσεις των (4.45) και (4.1), με $U^0 = v_h$ ώστε $\|v_h - v\| \leq Ch^r \|v\|_r$. Τότε έχουμε για $n \geq 0$

$$\|U^n - u(t_n)\| \leq Ch^r (\|v\|_r + \int_0^{t_n} \|u_t\|_r ds) + \sum_{j=1}^n k_j \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|u_{tt}\| ds.$$

Απόδειξη: Βλ.[3, Κεφάλαιο 1, σελ.19]

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Ο τύπος της εκτίμησης σφάλματος του Θεωρήματος 4.2.7 προτείνει την χρήση μικρότερων χρονικών βημάτων όταν το $\|u_{tt}\|$ είναι μεγαλύτερο.

Κεφάλαιο 5

Υπολογιστικά παραδείγματα για την εξίσωση της θερμότητας

Σε αυτό το κεφάλαιο, χρησιμοποιήσαμε δύο διαφορετικά προγράμματα για την εκτίμηση των σφαλμάτων στην εξίσωση της θερμότητας. Για τη μονοδιάστατη περίπτωση θεωρήσαμε ως αρχικό πρόβλημα την εξίσωση της θερμότητας (3.1) στο χωροχρονικό πεδίο $(0, 1) \times (0, 1)$ και για τη διδιάστατη περίπτωση την εξίσωση της θερμότητας (4.1) με $x \in [0, 1], y \in [0, 1], t \in [0, 1]$. Η f έχει επιλεγεί με τέτοιο τρόπο ώστε η ακριβής λύση του προβλήματος να είναι $u = \sin(2\pi x)\cos(2\pi t)$ για τη μονοδιάστατη περίπτωση και $u = x(x - 1) \cdot y(y - 1) \cdot e^{-t}$ για τη διδιάστατη περίπτωση της εξίσωσης της θερμότητας. Στην παράγραφο [5.1] παρατίθενται τα αριθμητικά αποτελέσματα και οι εκτιμήσεις σφαλμάτων στην $L^2(0, 1)$ νόρμα που προέκυψαν από κώδικα στο MATLAB. Στην παράγραφο [5.2], παρατηρούμε τις εκτιμήσεις σφαλμάτων στην $L^2(0, 1)$ και στην $H^1(0, 1)$ νόρμα που προέκυψαν από τη χρήση του λογισμικού FreeFem++. Το FreeFem++, όπως θα δούμε και παρακάτω, είναι βασισμένο στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και θα μας δώσει επίσης τα γραφήματα της θερμότητας για τα διαφορετικά χωροχρονικά βήματα.

5.1 Εκτιμήσεις Σφαλμάτων στο MATLAB

Στο πρώτο πρόγραμμα, το MATLAB, υπολογίσαμε την u_h που προκύπτει, δηλαδή την προσεγγιστική λύση του προβλήματος, καθώς και την ακριβή λύση του στο πεδίο $(0, 1) \times (0, 1)$. Έπειτα, υπολογίσαμε το σφάλμα που προκύπτει λόγω της διαφοράς της προσεγγιστικής και της πραγματικής λύσης. Το σφάλ-

μα που υπολογίσαμε σε αυτήν την περίπτωση αφορά στη μονοδιάστατη εξίσωση της θερμότητας και είναι σημειακό, δηλαδή υπολογίστηκε στο τελικό χρονικό σημείο $t = 1$. Ουσιαστικά, υπολογίσαμε το σφάλμα στην $L^2(0, 1)$ νόρμα για διάφορα χωρικά βήματα, δηλαδή για διάφορα h . Παρακάτω παρατίθεται ο κώδικας στο MATLAB με τον οποίο υπολογίζεται η προσεγγιστική λύση u , η πραγματική λύση ur , καθώς και η εκτίμηση σφάλματος στο $t = 1$ για τις διαφορετικές διαμερίσεις του χωρικού πεδίου. Προφανώς, όσο περισσότερα είναι τα βήματα, τόσο μικρότερο είναι το σφάλμα, αφού η προσέγγισή μας θα είναι πιο κοντά στην πραγματική λύση. Η μέθοδος ονομάστηκε thetameth αφού χρησιμοποιείται η θ -μέθοδος για τη λύση της εξίσωσης της θερμότητας. Η χωρική διακριτοποίηση της μεθόδου βασίζεται σε τμηματικά γραμμικά πεπερασμένα στοιχεία. Οι παράμετροι της μεθόδου είναι: το διάνυσμα στήλη \mathbf{l} που περιλαμβάνει τα άκρα του χωρικού διαστήματος ($\alpha=l(1), b=l(2)$) και του χρονικού διαστήματος ($t_0=l(3), T=l(4)$), το διάνυσμα στήλη \mathbf{n} που περιλαμβάνει τον αριθμό των βημάτων σε χώρο και χρόνο, οι u_0 και f που ουσιαστικά είναι οι συναρτήσεις u_{0h} και f , η σταθερά ν που αντιπροσωπεύει τον συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας, οι οριακές συνθήκες Dirichlet $bc(1)$, $bc(2)$ και η τιμή της παραμέτρου θ .

```
function [u,x]=thetameth(l,n,u0,f,bc,nu,theta)
nx=n(1);h=(l(2)-l(1))/nx;
x=[l(1):h:l(2)];
t=l(3); u0=sin(2*pi*x);
uold=(eval('u0'))';
t=l(4);ur=sin(2*pi*x)*cos(2*pi*t);
nt=n(2);k=(l(4)-l(3))/nt;
e=ones(nx+1,1);
K=spdiags([(h/(6*k)-nu*theta/h)*e,(2*h/(3*k)+2*nu*theta/h)*e,...
(h/(6*k)-nu*theta/h)*e],-1:1,nx+1,nx+1);
B=spdiags([(h/(6*k)+nu*(1-theta)/h)*e,(2*h/(3*k)-nu*2*(1-theta)/h)*e,...
(h/(6*k)+nu*(1-theta)/h)*e],-1:1,nx+1,nx+1);
K(1,1)=1; K(1,2)=0; B(1,1)=0; B(1,2)=0;
K(nx+1,nx+1)=1; K(nx+1,nx)=0; B(nx+1,nx+)=0; B(nx+1,nx)=0;
[L,U]=lu(K);
t=l(3);
x=[l(1)+h:h:l(2)-h];
f=-2*pi*sin(2*pi*x).*sin(2*pi*t)+4*(pi*pi)*sin(2*pi*x).*cos(2*pi*t);
fold=(eval('f'))';
fold=h*fold;
fold=[bc(1);fold;bc(2)];
```

```

for time=l(3)+k:k:l(4)
t=time;
fnew=(eval('f'))';
fnew=h*fnew;
fnew=[bc(1);fnew;bc(2)];
b=theta.*fnew+(1-theta).*fold+B*uold;
y=L\b;
u=U\y;
uold=u;
end
err=0;
for i=1:length(x)-1
err=err+(h/2)*((u(i)-ur(i))*(u(i)-ur(i))+(u(i+1)-ur(i+1))*(u(i+1)-ur(i+1)));
end
x=[l(1):h:l(2)];
return

```

Τον παραπάνω κώδικα τον τρέξαμε για $\alpha = l(1) = 0$, $b = l(2) = 1$, $t_0 = l(3) = 0$, $T = l(4) = 1$, αφού θεωρήσαμε ως χωροχρονικό πεδίο το $(0, 1) \times (0, 1)$ ενώ, για το διάλυμα $\mathbf{n}=(n(1),n(2))$ που αφορά στον αριθμό των χωρικών και χρονικών βημάτων, δοκιμάσαμε διαφορετικά h για την υλοποίηση του κώδικα, με $n(1)=1/h$ και $n(2)=1/k$, όπου h το χωρικό και k το χρονικό βήμα. Σε όλες τις περιπτώσεις θεωρήσαμε ότι $h=k$. Η u_{0h} στο πρόβλημά μας προκύπτει μηδενίζοντας στην λύση της εξίσωσης $u = \sin(2\pi x)\cos(2\pi t)$ τον χρόνο t και συνεπώς παίρνουμε $u_{0h} = \sin(2\pi x)$, ενώ, η f προκύπτει λύνοντας την εξίσωση της θερμότητας, και ισούται με $f = -2\pi\sin(2\pi x)\sin(2\pi t) + 4\pi^2\sin(2\pi x)\cos(2\pi t)$ όπως δίνεται και στον κώδικα παραπάνω. Οι οριακές συνθήκες Dirichlet $bc(1)$, $bc(2)$ είναι ίσες με 0 καθώς για $x = 0$ και για $x = 1$, $u(0, t) = u(1, t) = 0$. Για τη λύση της εξίσωσης θεωρήσαμε επίσης, ότι $\nu=1$. Όσον αφορά στη σταθερά θ (theta), τρέξαμε τον κώδικα για $\theta = 1$ αφού ασχοληθήκαμε με την προς τα πίσω μέθοδο *Euler*, οπότε τα αποτελέσματα για τις εκτιμήσεις των σφαλμάτων προκύπτουν έχοντας θεωρήσει ως $\theta = 1$. Παρ'όλα αυτά, θέσαμε και $\theta = 1/2$ ώστε να δούμε και τα αποτελέσματα που δίνει η μέθοδος *Crank-Nicolson* και παρατηρήσαμε μικρές διαφορές σε σχέση με την προς τα πίσω μέθοδο *Euler*. Θα μπορούσαμε να σημειώσουμε ότι για $\theta = 1/2$ τα αποτελέσματα ήταν λίγο καλύτερα από ότι για $\theta = 1$, κυρίως όταν θεωρήσαμε μεγαλύτερα χωρικά βήματα h για τη διακριτοποίηση του χώρου.

Παρακάτω, θα δούμε αναλυτικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν για τις διάφορες τιμές του h καθώς και δύο γραφικές παραστάσεις που απεικονίζουν την προσεγγιστική λύση σε σχέση με τις χωρικές μεταβλητές για τα διάφορα h και

για τις $\theta = 1$ (Σχήμα 5.2), $\theta = 1/2$ (Σχήμα 5.3).

h	err=error ²
$\frac{1}{4}$	0.0137
$\frac{1}{8}$	0.0011
$\frac{1}{16}$	$7.9705 \cdot 10^{-5}$
$\frac{1}{32}$	$5.1448 \cdot 10^{-6}$
$\frac{1}{64}$	$3.2258 \cdot 10^{-7}$
$\frac{1}{128}$	$2.0162 \cdot 10^{-8}$
$\frac{1}{256}$	$1.2600 \cdot 10^{-9}$
$\frac{1}{512}$	$7.8750 \cdot 10^{-11}$

Με βάση τα στοιχεία του παραπάνω πίνακα, παρατηρούμε πως καθώς μικραίνει το h , δηλαδή ουσιαστικά όσο περισσότερα βήματα έχουμε, τόσο πιο μικρό είναι το σφάλμα. Θεωρώντας τον τύπο

$$\|error(1, h)\|_{L^2(0,1)} \leq ch^2$$

καταλήξαμε στο ότι το πηλίκο των διαδοχικών τετραγώνων των σφαλμάτων

$$\frac{\|err(1, h/2)\|_{L^2(0,1)}}{\|err(1, h)\|_{L^2(0,1)}} = \frac{\|error(1, h/2)\|_{L^2(0,1)}^2}{\|error(1, h)\|_{L^2(0,1)}^2} \rightarrow 0.0625.$$

Αυτό είναι λογικό καθώς για το $\|error(1, h)\|_{L^2(0,1)}^2 = \|err(1, h)\|_{L^2(0,1)}$ ισχύει

$$\|err(1, h)\|_{L^2(0,1)} \leq ch^4$$

άρα

$$\|err(1, h/2)\|_{L^2(0,1)} \leq c \left(\frac{h}{2}\right)^4 = c \frac{h^4}{16}.$$

Συνεπώς,

$$\frac{\|err(1, h/2)\|_{L^2(0,1)}}{\|err(1, h)\|_{L^2(0,1)}} \leq \frac{1}{16} = 0.0625.$$

Καθώς αυξάνεται ο αριθμός των βημάτων (δηλαδή για h πολύ μικρό), ο αριθμός αυτός σταθεροποιείται. Στον παρακάτω πίνακα παρατίθενται τα αποτελέσματα του $\frac{\|err(1, h/2)\|_{L^2(0,1)}}{\|err(1, h)\|_{L^2(0,1)}}$ για τις διαφορετικές διαδοχικές τιμές του χωρικού βήματος h .

$\ err(1, h/2)\ /\ err(1, h)\ $
0.0803
0.0725
0.0645
0.0627
0.0625
0.0625
0.0625

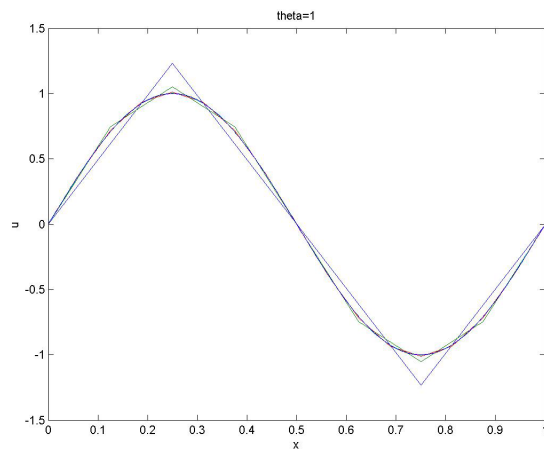
Για την εκτίμηση των σφαλμάτων χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα του τραπεζίου, όπου είναι μια τεχνική προσέγγισης για τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_a^b f(x)dx$ που δίνει ότι $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$. Στην περίπτωση μας, θέλοντας να υπολογίσουμε το σφάλμα στην $L^2(0,1)$ νόρμα και χρησιμοποιώντας τον κανόνα του τραπεζίου για την προσέγγιση του ολοκληρώματος έχουμε:

$$\begin{aligned} \|error(1)\|_{L^2(0,1)}^2 &= \|u_h(1) - u(1)\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &= \int_0^1 |u_h(1) - u(1)|^2 dx = \sum_{j=1}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |u_h(1) - u(1)|^2 dx \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \frac{h}{2} \left(|u_h(1, x_j) - u(1, x_j)|^2 + |u_h(1, x_{j+1}) - u(1, x_{j+1})|^2 \right). \end{aligned}$$

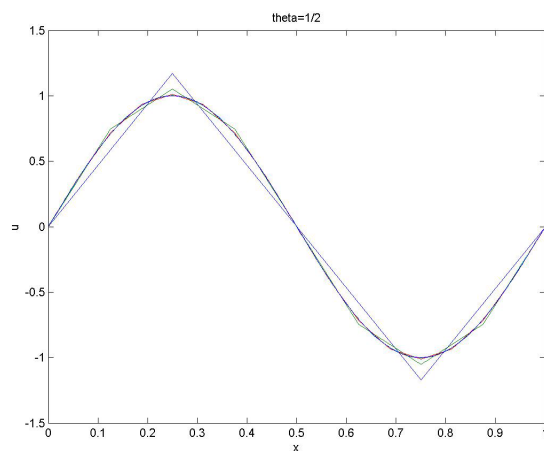
όπου σε αλγοριθμική μορφή γράφεται όπως στην εικόνα (5.1). Δηλαδή, αρχικοποιώντας το σφάλμα και προσθέτοντας σε κάθε χρονικό βήμα και το προηγούμενο σφάλμα, καταλήγουμε στο τελικό σφάλμα στο χρονικό σημείο $t = 1$, έχοντας χρησιμοποιήσει τον κανόνα του τραπεζίου για την προσέγγιση του ολοκληρώματος $\sum_{j=1}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |u_h(1) - u(1)|^2 dx$.

```
err=0;
]for i=1:length(x)-1
    err=err+(h/2)*((u(i)-ur(i))^2+(u(i+1)-ur(i+1))^2)
-end
```

Σχήμα 5.1: Αλγόριθμος στο MATLAB για τον υπολογισμό του σφάλματος.



Σχήμα 5.2: Προσεγγιστική λύση $u_h(u)$ σε σχέση με τα x για τα διάφορα h και για $\theta = 1$.



Σχήμα 5.3: Προσεγγιστική λύση $u_h(u)$ σε σχέση με τα x για τα διάφορα h και για $\theta = 1/2$.

5.2 Εκτιμήσεις Σφαλμάτων στο FreeFem++

Το FreeFem++ είναι ένα λογισμικό που χρησιμοποιείται για την αριθμητική επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων και βασίζεται στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Μέσω του FreeFem++ λύσαμε το πρόβλημα (4.1) και υπολογίσαμε τα σφάλματα $L^2(0, 1)$ και $H^1(0, 1)$. Επίσης, προς το τέλος του κεφαλαίου παρατίθενται και τα γραφήματα που προκύπτουν για την εξίσωση της θερμότητας μέσω του FreeFem++ για τα διαφορετικά χωροχρονικά βήματα. Το FreeFem++ χρησιμοποιεί, όπως θα δούμε και στον παρακάτω κώδικα, την εντολή `mesh Th = square(n,m)`, η οποία τριγωνοποιεί το μοναδιαίο τετράγωνο, δημιουργώντας ένα $n \times m$ πλέγμα στο μοναδιαίο τετράγωνο $[0, 1]^2$. Ο χώρος των πεπερασμένων στοιχείων δημιουργείται με την εντολή `espace Vh(Th,P1)` στην περίπτωση μας, καθώς ο τύπος αντιστοιχεί στην χρήση τμηματικά γραμμικών συνεχών πεπερασμένων στοιχείων στις δύο διαστάσεις (P1), με Th το μέγεθος του πλέγματος και Vh τον χώρο των πεπερασμένων στοιχείων. Η εξίσωση της θερμότητας λύθηκε με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων στο χώρο και με πεπερασμένες διαφορές στο χρόνο. Επίσης, χρησιμοποιήθηκε η προς τα πίσω μέθοδος *Euler* για τη χρονική διακριτοποίηση.

Η f και η αρχική λύση u_0 για $t = 0$ είναι $f = -x(x - 1) \cdot y(y - 1) \cdot e^{-t} - 2e^{-t} \cdot (y(y - 1) + x(x - 1))$ και $u_{0h} = x(x - 1) \cdot y(y - 1)$ αντίστοιχα, ενώ το πρόγραμμα υπολογίζει και τα σφάλματα $L^2(0, 1)$ και $H^1(0, 1)$ έχοντας υπ'όψιν ότι

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x, y)|^2 dx dy \right)^{1/2}, \quad \|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Ο παρακάτω πίνακας περιέχει τις εκτιμήσεις σφαλμάτων για τις διαφορετικές τιμές του χωρικού τετραγωνικού πλέγματος $n \times n$ και για τα αντίστοιχα χρονικά βήματα dt .

dt	n × n	L ² error	H ¹ error
$\frac{1}{4}$	4 × 4	0.00246889	0.00569875
$\frac{1}{8}$	8 × 8	0.000646578	0.00144943
$\frac{1}{16}$	16 × 16	0.000155321	0.000325624
$\frac{1}{32}$	32 × 32	0.000034446	0.0000609535
$\frac{1}{64}$	64 × 64	0.00000650447	0.00000803792
$\frac{1}{128}$	128 × 128	0.00000104535	0.00000581068
$\frac{1}{256}$	256 × 256	0.000000696634	0.00000430141

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται ο κώδικας στο FreeFem++ που κάνει τους παραπάνω υπολογισμούς των σφαλμάτων για το δοσμένο πρόβλημα και για τα διαφορετικά χωρικά και χρονικά βήματα, ενώ με την εντολή plot δίνει παράλληλα το γράφημα της θερμότητας στην εκάστοτε περίπτωση.

```

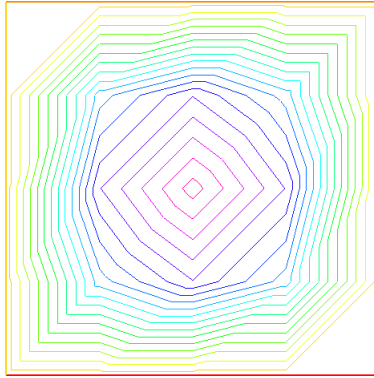
mesh Th=square(16,16);
fespace Vh(Th,P1);
Vh u,v,uu,f,g;
real dt= 0.0625, mu =1;
problem dHeat(u,v) =
int2d(Th)( u*v + dt*mu*(dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v)))
+int2d(Th) (- uu*v - dt*v )
+on(1,2,3,4,u=g);
real t= 0; // start from t=0
uu = x*(x-1)*y*(y-1); // u(x,y,0)=x*(x-1)*y*(y-1)
for (int m=0;m<=1./dt;m++)
{
t=t+dt;
f = -exp(-t)*(x*(x-1)*y*(y-1)+2*(y*(y-1)+x*(x-1)));
g =x*(x-1)*y*(y-1)*exp(-t);
dHeat;
plot(u,wait=true);
uu = u;
real L2=sqrt( int2d(Th)((u-(x*(x-1)*y*(y-1)*exp(-t)))^2) );
cout <<"t="<<t<<"L^2-Error="<<L2 <<endl;
real H1 = sqrt(L2^2 +int2d(Th)((dx(u)-dx(g))^2+(dy(u)-dy(g))^2) );
cout << "H1-err = "<<H1<<endl;
}

```

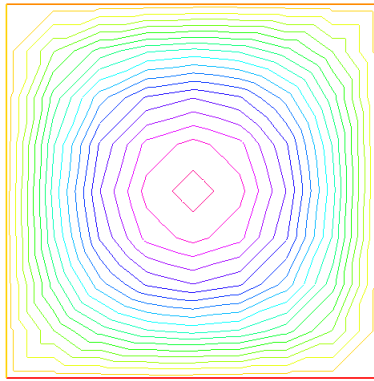
Σχήμα 5.4: Αλγόριθμος στο FreeFem++ για τη λύση $u = x(x-1) \cdot y(y-1) \cdot e^{-t}$ της εξίσωσης της θερμότητας (4.1) και την εκτίμηση των σφαλμάτων.

Παρατηρούμε ότι τα σφάλματα, και στις δύο νόρμες, είναι πάρα πολύ κοντά στο μηδέν, ακόμα και στην περίπτωση των μεγαλύτερων χωροχρονικών βημάτων. Αυτό συμβαίνει, καθώς έχουν χρησιμοποιηθεί πολυώνυμα χαμηλού βαθμού για τον υπολογισμό της λύσης, τα οποία ολοκληρώνονται σχεδόν χωρίς σφάλμα (αφού είναι τόσο κοντά στο μηδέν, θεωρείται σχεδόν μηδενικό). Παρ'όλα αυτά, τα αποτελέσματα μας δείχνουν την πολύ καλή προσέγγιση των λύσεων σε

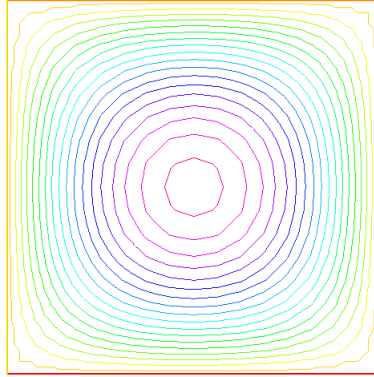
σχέση με τις πραγματικές, έχοντας τόσο αμελητέα σφάλματα. Στις παρακάτω σελίδες, παρατηρούμε τα γραφήματα της θερμότητας που προκύπτουν για τα διάφορα χωροχρονικά βήματα, ξεκινώντας από μικρές τιμές (4×4) και διπλασιάζοντας τον αριθμό των βημάτων κάθε φορά φτάνοντας μέχρι και μεγάλες τιμές (512×512). Είναι προφανής η σταδιακή βελτίωση των γραφημάτων και η καλύτερη απεικόνιση της θερμότητας με την αύξηση του χωρικού τετραγωνικού πλέγματος $n \times n$, καθώς υπάρχει ολοένα και καλύτερη προσέγγιση της πραγματικής λύσης.



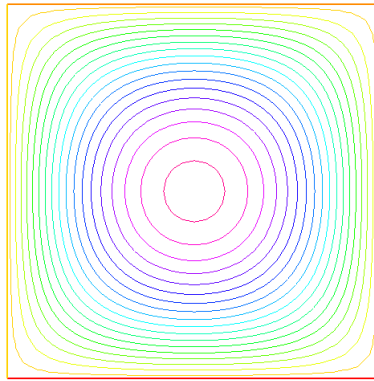
Σχήμα 5.5: Γράφημα της εξίσωσης της θερμότητας (4.1) για 4×4 χωρικό πλέγμα και για χρονικό βήμα $dt = 1/4$.



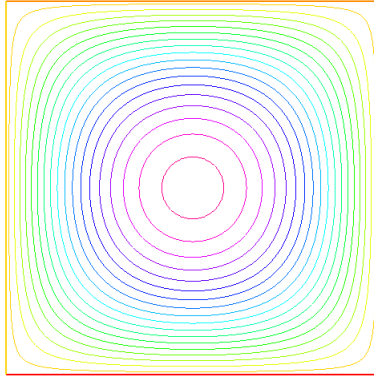
Σχήμα 5.6: Γράφημα της εξίσωσης της θερμότητας (4.1) για 8×8 χωρικό πλέγμα και για χρονικό βήμα $dt = 1/8$.



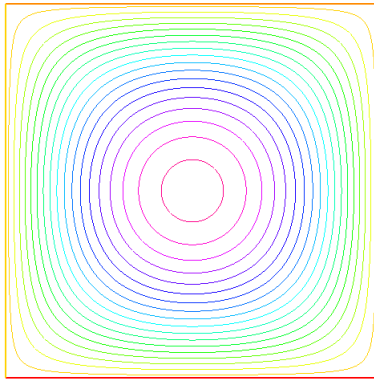
Σχήμα 5.7: Γράφημα της εξίσωσης της θερμότητας (4.1) για 16×16 χωρικό πλέγμα και για χρονικό βήμα $dt = 1/16$.



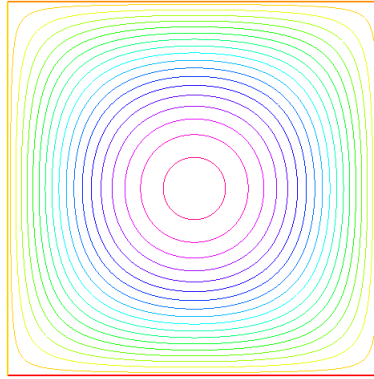
Σχήμα 5.8: Γράφημα της εξίσωσης της θερμότητας (4.1) για 32×32 χωρικό πλέγμα και για χρονικό βήμα $dt = 1/32$.



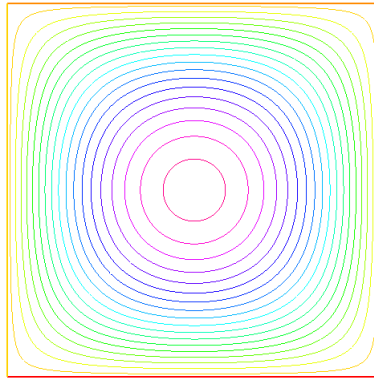
Σχήμα 5.9: Γράφημα της εξίσωσης της θερμότητας (4.1) για 64×64 χωρικό πλέγμα και για χρονικό βήμα $dt = 1/64$.



Σχήμα 5.10: Γράφημα της εξίσωσης της θερμότητας (4.1) για 128×128 χωρικό πλέγμα και για χρονικό βήμα $dt = 1/128$.



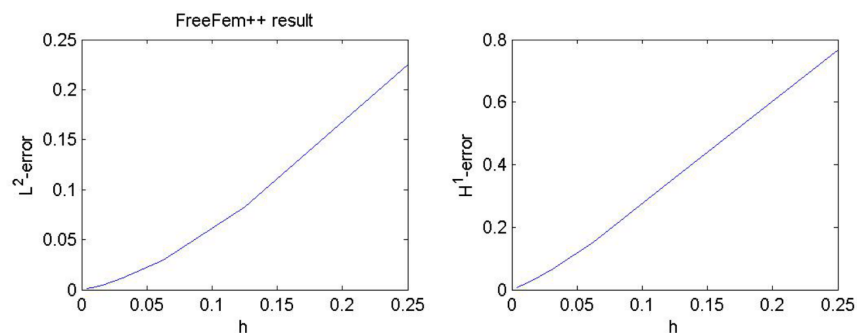
Σχήμα 5.11: Γράφημα της εξίσωσης της θερμότητας (4.1) για 256×256 χωρικό πλέγμα και για χρονικό βήμα $dt = 1/256$.



Σχήμα 5.12: Γράφημα της εξίσωσης της θερμότητας (4.1) για 512×512 χωρικό πλέγμα και για χρονικό βήμα $dt = 1/512$.

Μπορούμε να μελετήσουμε και τη μονοδιάστατη περίπτωση της εξίσωσης της θερμότητας, όπως και στη παράγραφο [5.1], όπου δηλαδή η λύση της εξίσωσης είναι η $u = \sin(2\pi x)\cos(2\pi t)$. Εκτελώντας αυτό το παράδειγμα στο FreeFem++, ουσιαστικά θεωρούμε ότι η μεταβλητή y στην προκειμένη περίπτωση είναι μία σταθερά. Συνεπώς, έχουμε ότι f και η αρχική λύση u_0 για $t = 0$ είναι $f = -2\pi\sin(2\pi x)\sin(2\pi t) + 4\pi^2\sin(2\pi x)\cos(2\pi t)$ και $u_{0h} = \sin(2\pi x)$ αντίστοιχα, ενώ το πρόγραμμα υπολογίζει και τα σφάλματα $L^2(0, 1)$ και $H^1(0, 1)$. Ο παρακάτω πίνακας περιέχει τις εκτιμήσεις σφαλμάτων για τις διαφορετικές τιμές του χωρικού πλέγματος $n \times n$ και για τα αντίστοιχα χρονικά βήματα dt .

dt	$n \times n$	L^2 error	H^1 error
$\frac{1}{4}$	4×4	0.225242	0.768637
$\frac{1}{8}$	8×8	0.082444	0.357327
$\frac{1}{16}$	16×16	0.0296123	0.152383
$\frac{1}{32}$	32×32	0.0114553	0.0673099
$\frac{1}{64}$	64×64	0.0048478	0.031169
$\frac{1}{128}$	128×128	0.00220039	0.0149322
$\frac{1}{256}$	256×256	0.00104405	0.00729934



Σχήμα 5.13: Γραφική παράσταση των σφαλμάτων L^2 , H^1 συναρτήσει του βήματος h .

Στη συνέχεια, όπως και στην παράγραφο [5.1], διαιρώντας διαδοχικά τα σφάλματα και σύμφωνα με τον τύπο

$$\|error(1, h)\|_{H^1(0,1)} \leq ch^2$$

καταλήξαμε στα παρακάτω πηλίκα. Ουσιαστικά, όσο μεγαλώνει το χωρικό πλέγμα $n \times n$, παρατηρούμε ότι η τιμή σύγκλισης του πηλίκου $\frac{\|error(1, h/2)\|_{H^1(0,1)}}{\|error(1, h)\|_{H^1(0,1)}}$ αυξάνεται και τείνει στον αριθμό 0.5.

$\frac{\ error(1, h/2)\ }{\ error(1, h)\ }$
0.464
0.426
0.442
0.463
0.479
0.489

Αυτό είναι λογικό, αφού έχουμε

$$\|error(1, h/2)\|_{H^1(0,1)} \leq c \left(\frac{h}{2}\right)^2 \leq c \frac{h^2}{2}$$

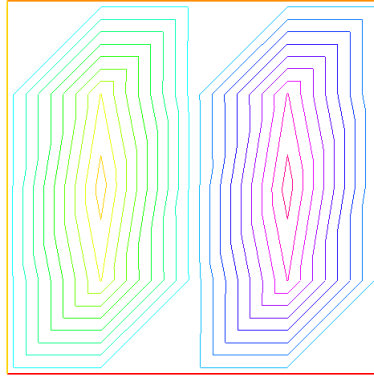
και

$$\|error(1, h)\|_{H^1(0,1)} \leq ch^2.$$

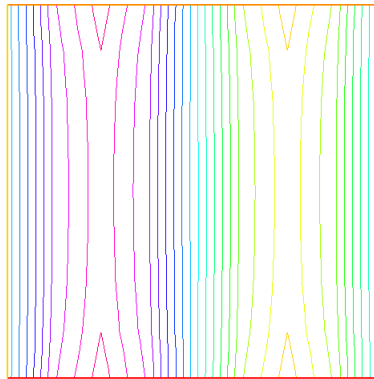
Άρα

$$\frac{\|error(1, h/2)\|_{H^1(0,1)}}{\|error(1, h)\|_{H^1(0,1)}} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

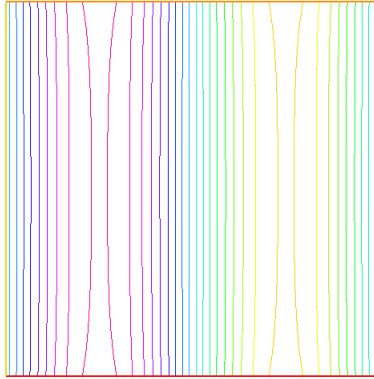
Στις επόμενες σελίδες, παρατηρούμε το γράφημα της θερμότητας για την εξίσωση (3.1) και για τα διαφορετικά χωροχρονικά βήματα.



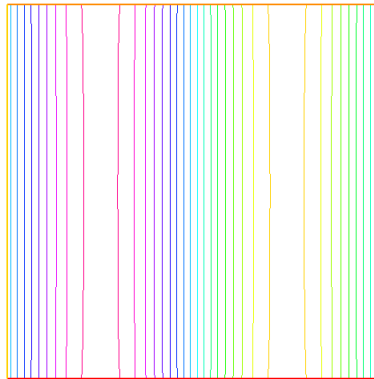
Σχήμα 5.14: Γράφημα της εξίσωσης της θερμότητας (3.1) για 4×4 χωρικό πλέγμα και για χρονικό βήμα $dt = 1/4$.



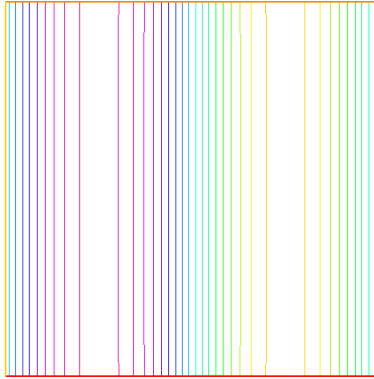
Σχήμα 5.15: Γράφημα της εξίσωσης της θερμότητας (3.1) για 8×8 χωρικό πλέγμα και για χρονικό βήμα $dt = 1/8$.



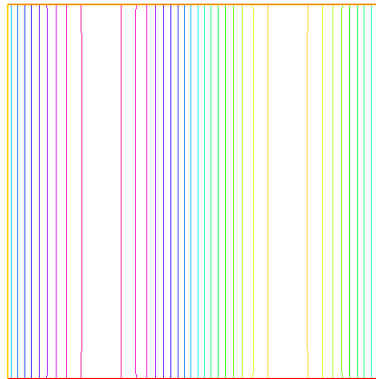
Σχήμα 5.16: Γράφημα της εξίσωσης της θερμότητας (3.1) για 16×16 χωρικό πλέγμα και για χρονικό βήμα $dt = 1/16$.



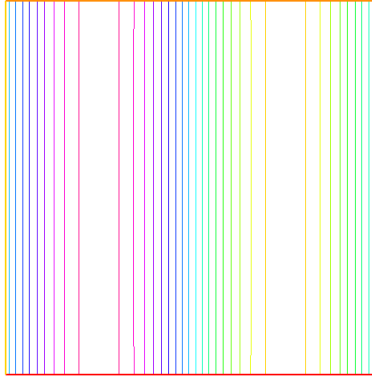
Σχήμα 5.17: Γράφημα της εξίσωσης της θερμότητας (3.1) για 32×32 χωρικό πλέγμα και για χρονικό βήμα $dt = 1/32$.



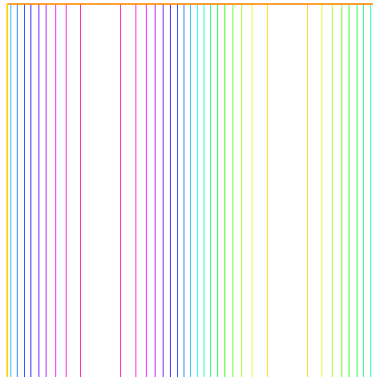
Σχήμα 5.18: Γράφημα της εξίσωσης της θερμότητας (3.1) για 64×64 χωρικό πλέγμα και για χρονικό βήμα $dt = 1/64$.



Σχήμα 5.19: Γράφημα της εξίσωσης της θερμότητας (3.1) για 128×128 χωρικό πλέγμα και για χρονικό βήμα $dt = 1/128$.



Σχήμα 5.20: Γράφημα της εξίσωσης της θερμότητας (3.1) για 256×256 χωρικό πλέγμα και για χρονικό βήμα $dt = 1/256$.



Σχήμα 5.21: Γράφημα της εξίσωσης της θερμότητας (3.1) για 512×512 χωρικό πλέγμα και για χρονικό βήμα $dt = 1/512$.

Βιβλιογραφία

- [1] A.Quarteroni, R.Sacco, F.Saleri, *Numerical Mathematics*, Vol.37, Springer-Verlag.
- [2] L.Evans, *Partial Differential Equations*, AMS publications, Graduate Text in Mathematics.
- [3] Vidar Thomee, *Galerkin finite element methods for parabolic problems* Springer-Verlag, Berlin 1997
- [4] Haim Brezis, *Συναρτησιακή ανάλυση: Θεωρία και Εφαρμογές* Πανεπιστημιακές εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα 1997
- [5] John Penny, George Lindfield, *Numerical methods using MATLAB*
- [6] Peter Linz, Ric , *Exploring numerical methods : an introduction to scientific computing using MATLAB* , 2003
- [7] Gene H. Golub, Charles F. Van Loan, *Matrix computation*, 1989
- [8] F.Hecht, FreeFem++ tutorial, Third Edition στην ιστοσελίδα: <http://www.freefem.org/ff++>
- [9] Eva Part-Enander, Anders Sjoberg, *The Matlab 5 Handbook*, Addison-Wesley