Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Τομέας Μαθηματικών

Διαμερίσεις Ακεραίων

Διπλωματική εργασία

του

Μουράτ Βάρνα

Επιβλέπων: Αλέξανδρος Παπαϊωάννου

Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή επιτροπή την 20/7/2012:

Αλέξανδρος Παπαϊωάννου

Θεμιστοκλής Ρασσιάς

Αλέξανδρος Αρβανιτάκης

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Αλέξανδρο Παπαϊωάννου για την πολύτιμη καθοδήγησή του και το ευχάριστο κλίμα συνεργασίας που αναπτύξαμε καθόλη τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, πραγματοποιείται μία ανάλυση της εξαγωγής των αναδρομικών σχέσεων και των γεννητριών συναρτήσεων.

Αναπτύσσεται διεξοδικά η εύρεση των αναδρομικών σχέσεων καθώς και η παραγωγή των ειδικών μορφών γεννητριών συναρτήσεων.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται η σημαντικότητα αυτών, στην διαμέριση των ακεραίων, η οποία αποτελεί την μέθοδο επίλυσης σε πολλά προβλήματα των μαθηματικών όπως και της πληροφορικής.

Οι έννοιες και ο μαθηματικός συμβολισμός των διακριτών μαθηματικών χρησιμεύουν στη μελέτη και την περιγραφή αντικειμένων και προβλημάτων διάφορων κλάδων της επιστήμης υπολογιστών, όπως οι υπολογιστικοί αλγόριθμοι, οι γλώσσες προγραμματισμού, η κρυπτογραφία, η αυτοματοποιημένη απόδειξη θεωρημάτων (automatedtheoremproving) και η ανάπτυξη λογισμικού.

Abstract

In this thesis, carried out an analysis of the export of recurrence relations and generating functions.

Developed extensively finding the recurrence relations and the production of specific forms of generating functions.

Then, the relevance of these in the partition of integers, which is the method of solving several problems of mathematics and computer science.

The concepts and the mathematical notation of discrete mathematics are used in the study and description of objects and various problems in computer science disciplines such as computational algorithms, programming languages, cryptography, automated theorem proving (automatedtheoremproving) and software development.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1

Γεννήτριες συναρτήσεις

Αναδρομικές Σχέσεις

Ορισμός: Μία σχέση που προσδιορίζει τον νιοστό όρο μίας ακολουθίας σαν συνάρτηση ενός, δύο ή περισσοτέρων προηγούμενων όρων της ακολουθίας ονομάζεται αναδρομική σχέση της ακολουθίας.

1.1 Η έννοια της ακολουθίας

Ας ρίξουμε μια ματιά στην επόμενη παράθεση αριθμών:7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, …. Όπως καταλαβαίνει κανείς, υπάρχουν άπειροι αριθμοί που διαδέχονται ο ένας τον άλλο, μεκάποια λογική σειρά. Συγκεκριμένα, κάθε αριθμός προκύπτει απ’ τον προηγούμενό του ανπροσθέσουμε σ’ αυτόν το 4. Έτσι ο όγδοος αριθμός, ο οποίος δεν αναγράφεται είναι το 35, ο ένατος το 39 κ.ο.κ. Στο επόμενο παράδειγμα θεωρούμε τους πρώτους αριθμούς, δηλαδή τους θετικούς ακεραίους που διαιρούνται μόνον από τον εαυτό τους και τη μονάδα: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... Κατ’ αρχάς υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί; Η απάντηση είναι ναι και η απόδειξή της είναι γνωστή από την αρχαιότητα και οφείλεται στον Ευκλείδη. Αν και στα προηγούμενα παραδείγματα χρησιμοποιήσαμε μόνον ακέραιους αριθμούς, καταλαβαίνει κανείς πως αυτό δεν είναι ο κανόνας. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε την άπειρη διαδοχή αριθμών: 1, ½,1/3,1/4,….
Τί είναι λοιπόν μια ακολουθία; Μια ακολουθία είναι μια άπειρη διαδοχή αριθμών. Κάθε αριθμός λέγεται όρος της ακολουθίας. Οι τελείες στο τέλος της γραφής, π.χ. της 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, …….. δηλώνουν πως ακολουθούν και άλλοι (άπειροι) όροι και συνεπώς, η διαδικασία αυτή δεν έχει τέλος.
Γενικά, ισχύει ότι αν μία συνάρτηση ικανοποιεί μια αναδρομική σχέση με k+1 όρους , αυτή προσδιορίζεται μοναδικά αν γνωρίζουμε k αρχικές συνθήκες. Αξίζει να σημειωθεί ότι η ομοιότητα των αναδρομικών σχέσεων με τις διαφορικές εξισώσεις, ομοιότητα η οποία θα αναλυθεί στη συνέχεια όπου η διαδικασία επίλυσης της αναδρομικής σχέσης με σταθερούς συντελεστές αντιγράφει την διαδικασία επίλυσης μίας παρόμοιας διαφορικής εξίσωσης.

Λύση μίας αναδρομικής σχέσης είναι ηεύρεση μίας έκφρασης της μορφής $Q_n = f(n)$ όπου f(n) μία συνάρτηση του n η οποία ικανοποιεί την αναδρομική σχέση. Στη συνέχεια θα εξεταστεί η επίλυση ορισμένων απλών περιπτώσεων αναδρομικών σχέσεων.

1.2 Η Έννοια της Γεννήτριας Συνάρτησης

Έστω $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots.$ ή σε συντομογραφία $\{a_k\}_{\kappa=0,1,\ldots}$ μία ακολουθία πραγματικών αριθμών. Η συνάρτηση $A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots$ θα λέγεται γεννήτρια συνάρτηση ή απλά γεννήτρια της ακολουθίας $\{a_k\}_{\kappa=0,1,\ldots}$.Στην περίπτωση που η ακολουθία $\{a_k\}_{\kappa=0,1,\ldots}$ είναι πεπερασμένη , δηλαδή υπάρχει φυσικός αριθμός m τέτοιος ώστε να ισχύει $a_m \neq 0$ και $\alpha_k = 0$, για κάθε $k > m$ τότε η συνάρτηση A(t) είναι ένα πολυώνυμο βαθμού m$A(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots + \alpha_m t^m$, και ορίζεται για κάθε πραγματική τιμή της μεταβλητής t. Όταν όμως δεν ισχύει η παραπάνω συνθήκη, η ύπαρξη της γεννήτριας A(t) προϋποθέτει την απόλυτη σύγκλιση της δυναμοσειράς $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ σε μία περιοχή γύρω από το μηδέν ή ισοδύναμα για $|t| \leq$ R (R η ακτίνα σύγκλισης της σειράς). Από τον απειροστικό λογισμό είναι γνωστό ότι δύο δυναμοσειρές είναι ίσες (στην κοινή περιοχή όπου αυτές ορίζονται) αν και μόνο αν οι συντελεστές των αντίστοιχων δυνάμεων της μεταβλητής είναι ίσοι. Μεταφράζοντας το αποτέλεσμα αυτό σε ορολογία γεννητριών μπορούμε να διατυπώσουμε την επόμενη πρόταση

Πρόταση 1.1

Έστω A(t),B(t) οι γεννήτριες των ακολουθιών $\{a_k\}_{\kappa=0,1,\ldots}$ και $\{\beta_k\}_{\kappa=0,1,\ldots}$ αντίστοιχα. Τότε οι A(t),B(t) είναι ίσες , δηλαδή A(t)=B(t) για κάθε t αν και μόνο αν ισχύει $\alpha_\kappa = \beta_\kappa$ για κάθε κ=0,1,2,….

Ιδιότητες Γεννητριών Συναρτήσεων

Ακολουθίες	Γενικός Όρος	Γεν. Συν.
$1, 1, 1, \ldots$	$a_k = 1, k = 0, 1, 2, \ldots$	$1 + z + z^2 + z^3 + \ldots = \frac{1}{1-z}$
$1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3 \cdot 2}, \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2}, \ldots$	$a_k = \frac{1}{k!}$	$1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \ldots = e^z$
$a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots$	$a_k + b_k$	$A(z) + B(z)$
$\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2, \ldots$	λa_k	$\lambda A(z)$
$0, a_0, a_1, \ldots$	$b_k = \begin{cases} 0, k = 0 \\ a_k, k > 0 \end{cases}$	$B(z) = zA(z)$
$a_1, a_2, a_3, \ldots$	$b_k = a_{k+1}$	$B(z) = \frac{A(z) - a_0}{z}$
$\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{r}, a_0, a_1, a_2, \ldots$	$b_k = \begin{cases} 0, k < r \\ a_{k-r}, k \geq r \end{cases}$	$B(z) = z^r \cdot A(z)$
$a_r, a_{r+1}, a_{r+2}, \cdots$	$b_k = a_{k+r}$	$B(z) = \frac{A(z) - a_0 - a_1 z - \ldots - a_{r-1} z^{r-1}}{z^r}$
$a_0, 1 \cdot a_1, 2 \cdot a_2, \ldots$	$b_k = k a_k$	$B(z) = z \cdot A'(z)$
$a_0, \frac{1}{2} \cdot a_1, \frac{1}{3} \cdot a_2, \ldots$	$b_k = \frac{1}{k+1} a_k$	$B(z) = \frac{1}{z} \cdot \int_0^z A(t)dt$
$a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots$	$b_k = \sum_{r=0}^{k} a_r, k = 0, 1, 2, \ldots$	$B(z) = \frac{A(z)}{1-z}$
$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots,$ $a_1 + a_2 + \ldots,$ $a_2 + \ldots,$ $\ldots$	$b_k = \sum_{r=k}^{\infty} a_r, k = 0, 1, 2, \ldots$	$B(z) = \frac{A(1) - z \cdot A(z)}{1-z}$

Ας εξετάσουμε στη συνέχεια τις γεννήτριες ορισμένων συγκεκριμένων απλών ακολουθιών

1. Να υπολογιστεί το άθροισμα $\sum_{i=1}^{t} \binom{n-i}{j}$ χρησιμοποιώντας γεννήτριες συναρτήσεις.

Το άθροισμα εξαρτάται από τις μεταβλητές n, t, j. Θεωρώ την ακολουθία ως προς j,$b_j = \sum_{i=1}^{t}\binom{n-i}{j}$ και γεννήτρια συνάρτηση την $B(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$.Είναι γνωστό όμως ότι η ακολουθία $b_j = \sum_{i=1}^{t}\binom{n-i}{j}$όπου

$a_{ij=}\binom{n-i}{j}$ έχει γεννήτρια συνάρτηση την$A_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} x^j = (1+x)^{n-i}$και σχετίζεται με την $B(x)$ ως εξής:$B(x) = \sum_{i=1}^{t} A_i(x) = \sum_{i=1}^{t}(1+x)^{n-i}$

$$
\begin{aligned}
B(x) &= (1+x)^n \sum_{i=1}^{t} (1+x)^{-i} = (1+x)^n \left(\frac{1}{1+x} + \ldots + \frac{1}{(1+x)^t}\right) = \\
&= (1+x)^n \frac{1}{1+x}\left(1 + \ldots + \frac{1}{(1+x)^{t-1}}\right) = \frac{(1+x)^n}{1+x}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{1+x}\right)^t}{1-\frac{1}{1+x}}\right) = \\
&= (1+x)^n \left(\frac{1-(1+x)^{-t}}{x}\right) = \frac{(1+x)^n}{x} - \frac{(1+x)^{n-t}}{x} \Rightarrow \\
B(x) &= \frac{(1+x)^n}{x} - \frac{(1+x)^{n-t}}{x}
\end{aligned}
$$

Υπολογίζουμε την ακολουθία b_jως εξής:

Έστω η ακολουθία της γ.σ. b_jκαι $\frac{(1+x)^n}{x}$ η ακολουθία της γεννήτριας συνάρτησης$\frac{(1+x)^{n-t}}{x}$.

Ισχύει: $b_j = a_j - c_j a_j$. Όμως η a_j είναι η ακολουθία της $(1+x)^n$μετατοπισμένη αριστερά κατά μια θέση, δηλαδή $a_j = \binom{n}{j+1}$. Ομοίως για την c_j ισχύει $c_j = \binom{n-t}{j+1}$. Τελικά:$b_j = a_j - c_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{t}\binom{n-i}{j} = \binom{n}{j+1} - \binom{n-t}{j+1}$

2. Έστω η ακολουθία $\{a_k\}_{\kappa=0,1,\ldots}$ που ορίζεται ως εξής

$$\alpha_\kappa = \begin{cases} \alpha, \alpha\nu \kappa = \nu \\ 0, \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

όπου α ένας πραγματικός αριθμός και ν μη αρνητικός ακέραιος.

Τότε $A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = \alpha_\nu t^\nu = \alpha t^\nu$.

3. Έστω η σταθερή ακολουθία α,α,α,… με γενικό όρο $\alpha_\kappa = \alpha$ για κ=0,1,2,….Τότε $A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha t^k = \alpha(1 + t + t^2 + \cdots) = \frac{a}{1-t}, |t| < 1$.Ειδικότερα για α=1 προκύπτει ότι η γεννήτρια ακολουθία 1,1,1,1 ,.. είναι η συνάρτηση $A(t) = \frac{1}{1-t}, |t| < 1$.

4. Έστω η ακολουθία $\alpha_\kappa = \frac{1}{\kappa!}, \kappa = 0,1,2,\ldots$Τότε $A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k = e^t$

5. Έστω η ακολουθία $\alpha_k = \frac{1}{k}, k = 1,2,\ldots$Από τον Απειροστικό λογισμό είναι γνωστό ότι $-\log(1-t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} t^k$. Επομένως η γεννήτρια των αριθμών $\alpha_k = \frac{1}{k}, k = 1,2,\ldots$ είναι η συνάρτηση $A(t) = -\log(1-t) = \log\frac{1}{1-t}, t < 1$.

Από τα προηγούμενα είναι φανερό ότι κάθε ακολουθία αριθμών $\{a_k\}_{\kappa=0,1,\ldots}$ καθορίζει με μονοσήμαντο τρόπο μία γεννήτρια συνάρτηση A(t).Πώς όμως μπορούμε να βρούμε την ακολουθία $\{a_k\}_{\kappa=0,1,\ldots}$αν μας δίνουν την γεννήτρια συνάρτηση A(t);Η απάντηση στο ερώτημα είναι απλή και βασίζεται στην Πρόταση 1.1 :αρκεί να γράψουμε την συνάρτηση A(t) σε μορφή αθροίσματος δυνάμεων του t(ανάπτυγμα της A(t)). Ο συντελεστής του όρου t^k μας δείχνει ποιος είναι ο γενικός όρος της ακολουθίας $\{a_k\}_{\kappa=0,1,\ldots}$. Το επόμενο παράδειγμα αποσαφηνίζει τη διαδικασία εντοπισμού της ακολουθίας $\{a_k\}_{\kappa=0,1,\ldots}$ όταν δίνεται η γεννήτρια της A(t).

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω η ακολουθία $A(t) = \frac{1}{1-5t}$, αφού $A(t) = \frac{1}{1-5t} = \sum_{\kappa=0}^{\infty}(5t)^k = \sum_{\kappa=0}^{\infty} 5^k t^k$ η ζητούμενη ακολουθία είναι η $a_k = 5^k, k = 0,1$, δηλαδή η $1,5,5^2,5^3,\ldots$.

Η ακολουθία Fibonacci

Ορισμός: $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ με $F_1 = F_2 = 1$ και $F_0 = 0$ (αυθαίρετα)

Ιδιότητες της ακολουθίας

1.$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$

Απόδειξη

$$F_3 = F_1 + F_2 => F_1 = F_3 - F_2$$

$$F_4 = F_2 + F_3 => F_2 = F_4 - F_3$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.$$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} => F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$$

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1} => F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

Αθροίζοντας έχουμε

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1$$

2. $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$

Απόδειξη

$$F_1 = F_2$$

$$F_3 = F_4 - F_2$$

$$F_5 = F_6 - F_4$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.$$

$$F_{2n-1} = F_{2n} - F_{2n-2}$$

Αθροίζοντας έχουμε

$$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$$

3. ${F_1}^2 + {F_2}^2 + \cdots + {F_n}^2 = F_n F_{n+1}$

Απόδειξη

Ισχύει

$${F_k}^2 = F_k * F_k = F_k(F_{k+1} - F_{k-1})$$

Άρα

$$F_1{}^2 = F_1 * F_2$$

$$F_2{}^2 = F_2 * (F_3 - F_1) = F_2 * F_3 - F_2 * F_1$$
$$F_3{}^2 = F_3 * (F_4 - F_2) = F_3 * F_4 - F_3 * F_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

$$F_n{}^2 = F_n * (F_{n+1} - F_{n-1}) = F_n * F_{n+1} - F_n * F_{n-1}$$

Αθροίζοντας έχουμε

$$F_1{}^2 + F_2{}^2 + \cdots + F_n{}^2 = F_n * F_{n+1}$$

Επίλυση της αναδρομικής σχέσης$\mathbf{F_n = F_{n-1} + F_{n-2}}$ με $\mathbf{F_1 = F_2 = 1}$ και την ακολουθία που παράγουν οι αριθμοί $\mathbf{F_i}$: $\mathbf{1, 1, 2, 3, 5, 8}, \ldots$

Για την επίλυση της αναδρομικής σχέσης χρησιμοποιείται η μέθοδος των γεννητριών συναρτήσεων.

Έστω η ακολουθία των αριθμών $\{a_k\}_{\kappa=0,1,\ldots}$, η γεννήτρια της ακολουθίας είναι η δυναμοσειρά $G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots + \alpha_m t^m$. Αν θεωρήσουμε τις δυναμοσειρές $A(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots$

Και $B(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots$ τότε το άθροισμα A(t)+B(t) και το γινόμενο A(t)*B(t) ορίζονται από τις σχέσεις

$A(t) + B(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots$ και $A(t) * B(t) = d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + \cdots$ όπου $c_n = a_n + b_n, n = 0,1,2, \ldots$

Και $d_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots. + a_{n-1} b_1 + a_n b_0, n = 0,1,2, \ldots$, ενώ για κάθε σταθερά cισχύεις $*$ $A(t) = c * \alpha_0 + c * \alpha_1 t + c * \alpha_2 t^2 + \cdots$

Θεώρημα

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{(1+\sqrt{5})^n}{2^n} - \frac{(1-\sqrt{5})^n}{2^n}\right]$$

Απόδειξη

Έστω $G(x)$η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας Fibonacci$G(x) = F_0 + F_1x + F_2x^2 + \cdots$,έχουμε

$$x{\cdot}G(x) = F_0x + F_1x^2 + F_2x^3 + \cdots$$

$$x^2{\cdot}G(x) = F_0x^2 + F_1x^3 + F_2x^4 + \cdots$$

$$G(x) - x{\cdot}G(x) - x^2{\cdot}G(x) = F_0 + (F_1 - F_0)x + (F_2 - F_1 - F_0)x^2 + (F_3 - F_2 - F_1)x^3 + \cdots$$
$$= 0 + x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots = x$$

Άρα $G(x)(1 - x - x^2) = x \Rightarrow G(x) = \frac{x}{(1-x-x^2)}$ με παραγοντοποίηση του παρανομαστή προκύπτει

$$(1 - x - x^2) = (1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}x)(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x)$$

Οπότε αναλύοντας σε απλά κλάσματα προκύπτει

$$G(x) = \frac{x}{(1 - x - x^2)} = \frac{A}{(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x)} + \frac{B}{(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x)}$$

Οπότε $\begin{cases} 0 = A + B \\ 1 = -\frac{A}{2}(1 - \sqrt{5}) - \frac{B}{2}(1 + \sqrt{5}) \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{5}}, B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ Άρα $G(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x)} - \frac{1}{(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x)}\right]$

Για την απλοποίηση των πράξεων θέτω $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,$b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ οπότε $\sqrt{5}G(x) = \left[\frac{1}{(1-ax)} - \frac{1}{(1-bx)}\right]$,ο πρώτος προσθετέος είναι το άθροισμα των άπειρων όρων της γεωμετρικής προόδου $1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + \cdots$ ενώ ο δεύτερος της προόδου$1 + bx + b^2x^2 + b^3x^3 + \cdots$άρα$\sqrt{5}G(x) =(1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + \cdots)-(1 + bx + b^2x^2 + b^3x^3 + \cdots)=(a-b)x+(a^2 - b^2)x^2+(a^3 - b^3)x^3 + \cdots$.

Αφού $\sqrt{5}G(x) = \sqrt{5}(F_0 + F_1x + F_2x^2 + \cdots)$ ισοδύναμα $\sqrt{5}F_n = a^n - b^n \Rightarrow F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{(1+\sqrt{5})^n}{2^n} - \frac{(1-\sqrt{5})^n}{2^n}\right]$

Μία σημαντική προσέγγιση για τον ακέραιο F_n για μεγάλες τιμέςτου n προκύπτει από την παραπάνω σχέση, b$\cong -0{,}61803 \ldots$ οπότε για μεγάλα n το$b_n \to 0$ οπότε $F_n \cong \frac{a^n}{\sqrt{5}}$.

Το διωνυμικό θεώρημα

$$\binom{n+m}{r} = \binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \cdots . + \binom{n}{r}\binom{m}{0}$$

Απόδειξη

Έστω το γινόμενο $(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots + \alpha_m t^m)(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_n t^n)$=$(\alpha_0 b_0 + (\alpha_1 b_0 + \alpha_0 b_1)t + (\alpha_2 b_0 + \alpha_1 b_1 + \alpha_0 b_2)t^2 + \cdots + (\alpha_m b_n)t^{m+n})$.Γενικά ο συντελεστής του x^r στο γινόμενο ισούται με $(\alpha_0 b_r + \alpha_1 b_{r-1} + \alpha_2 b_{r-2} + \cdots \alpha_r b_0)$ (1). Με χρήση της σχέσης $(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m}$ οι όροι του αναπτύγματος γίνονται

$$\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots .. + \binom{n}{n}x^n\right]\left[\binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots .. + \binom{m}{m}x^m\right]$$
$$= \left[\binom{m+n}{0} + \binom{m+n}{1}x + \binom{m+n}{2}x^2 + \cdots .. + \binom{m+n}{m+n}x^{m+n}\right]$$

Οσυντελεστής του x^r από την σχέση (1) στο αριστερό μέλος ισούται με$\binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \cdots . + \binom{n}{r}\binom{m}{0}$,

Ενώ στο δεξί μέλος είναι $\binom{n+m}{r}$, εξισώνοντας προκύπτει το ζητούμενο.

Θεώρημα

$$\binom{n+m}{n} = \binom{n}{0}\binom{m}{0} + \binom{n}{1}\binom{m}{1} + \cdots . + \binom{n}{n}\binom{m}{n}$$

Απόδειξη

Θεωρώ την παράσταση $(1+x)^n(1+x^{-1})^m = \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots .. + \binom{n}{n}x^n\right]\left[\binom{m}{0} + \binom{m}{1}x^{-1} + \binom{m}{2}x^{-2} + \cdots .. + \binom{m}{m}x^{-m}\right]$

Ο σταθερός όρος στο παραπάνω γινόμενο θα ισούται με το άθροισμα όλων των όρων της μορφής $\binom{n}{r}x^r\binom{m}{r}x^{-r}$, το αριστερό μέλος θα είναι $\binom{n}{0}\binom{m}{0}+\binom{n}{1}\binom{m}{1}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{m}{n}$. Αλλά ισχύει $(1+x)^n(1+x^{-1})^m=(1+x)^n(1+x)^m x^{-m}=(1+x)^{m+n}x^{-m}$. Ο σταθερός όρος στο τελευταίο ανάπτυγμα θα ισούται με τον x^m όρο του αναπτύγματος $(1+x)^{m+n}$, ενώ ο συντελεστής του τελευταίου είναι ο $\binom{n+m}{n}$ δηλαδή το δεξί μέλος.

Γενίκευση του διωνυμικού θεωρήματος

Θεώρημα

1. $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}2^2+\binom{n}{3}3^2\ldots\ldots+\binom{n}{n}n^2=n(n+1)2^{n-2}$

2. $\binom{n}{1}-\binom{n}{2}2^2+\binom{n}{3}3^2\ldots\ldots{}^{+}_{-}\binom{n}{n}n^2=0$

Απόδειξη

$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}x+3\binom{n}{3}x^2+\cdots\ldots+n\binom{n}{n}x^{n-1}=n(1+x)^{n-1}$$

παραγωγίζοντας ως προς xκαταλήγω

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}2^2x+\binom{n}{3}3^2x^2\ldots\ldots+\binom{n}{n}n^2x^{n-1}=n(1+x)^{n-1}+n(n-1)(1+x)^{n-2}x$$

Το δεύτερο μέλος γράφεται $n(1+x)^{n-2}(1+x+nx-x)=n(1+x)^{n-2}(1+nx)$

Αντικαθιστώντας x=1 έχω $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}2^2+\binom{n}{3}3^2\ldots\ldots+\binom{n}{n}n^2=n(n+1)2^{n-2}$

Αντικαθιστώντας x=-1 έχω $\binom{n}{1}-\binom{n}{2}2^2+\binom{n}{3}3^2\ldots\ldots{}^{+}_{-}\binom{n}{n}n^2=0$

Γραμμικές ομογενείς αναδρομικές σχέσεις με σταθερούς συντελεστές

Αποτελεί μία από τις σημαντικότερες αναδρομικές σχέσεις και είναι της μορφής $H(n)=a_1H(n-1)+a_2H(n-2)+\cdots+a_kH(n-k)$ (1)με $n=k,k+1,\ldots.$ και $a_1,a_2,\ldots.,a_k$

πραγματικούς αριθμούς. Επειδή η H(n) υπολογίζεται από τις προηγούμενες k το πλήθος τιμές της H λέμε ότι είναι τάξης k. Υποθέτουμε ότι $a_k \neq 0$ διότι αλλιώς η τάξη της αναδρομικής σχέσης θα ελλατωνόταν, ο όρος γραμμικός σημαίνει ότι οι παρστάσεις H(n-1),H(n-2),…H(n-k) εμφανίζονται στην (1) με εκθέτη μονάδα και ο όρος ομογενής μας πληροφορεί ότι δεν υπάρχει σταθερός όρος στην (1).

Παράδειγμα:η σχέση $H(n) = 3H(n-1)^3 + H(n-2), n = 2{,}3$ δεν είναι γραμμική αναδρομική σχέση ενώ η$H(n) = 5H(n-2) + 3$ δεν είναι γραμμική αναδρομική σχέση και η $H(n) = 2H(n-1) + n^2H(n-2)$ δεν έχει σταθερούς συντελεστές.Έστω τώρα η σχέση h(n)=H(n),n=0,1,2,…ικανοποιεί την αναδρομική σχέση (1) την οποία γράφουμε και $H(n) - a_1H(n-1)$-$a_2H(n-2) - \cdots - a_kH(n-k)$=0 για n=k,k+1,..Τότε η ακολουθία h(0),h(1),h(2),…προσδιορίζεται πλήρως αν προσδιοριστούν οι k αρχικές τιμές h(0),h(1),…,h(k-1).

Στην αναδρομική σχέση (1) αντιστοιχεί η αλγεβρική εξίσωση $x^k - a_1x^{k-1} - a_2x^{k-2} - \cdots - a_k = 0$ η οποία ονομάζεται χαρακτηριστική εξίσωση της αναδρομικής σχέσης(1). Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει k το πλήθος ρίζες $q_1, q_2, \ldots, q_k$ οι οποίες ονομάζονται χαρακτηριστικές ρίζες. Αυτές μπορεί να είναι πραγματικές και διαφορετικές ή πραγματικές αλλά να υπάρχουν και πολλαπλές ρίζες ή μιγαδικές.

Παράδειγμα

Η αναδρομική σχέση $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ η οποία σαν λύση με $F(2) = F(1) = 1$ την ακολουθία Fibonacci,έχει ως χαρακτηριστική εξίσωση την $x^2 - x - 1 = 0$. Όπως υπολογίσαμε στο θεώρημα 2 οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Παράδειγμα

$a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0$ με $a_0 = 1$ και $a_1 = 6$. Η χαρακτηριστική εξίσωση $x^2 - 6x + 9 = 0$ με διπλή ρίζα 3.

Η Μορφή (ομογενούς) λύσης $a_n = A_1n3^n + A_23^n$

Για n = 0: 1 = A_2 Τελικά έχουμε $A_1 = A_2 = 1$, για n = 1: 6 = $3A_1 + 3A_2$

Άρα η (Ομογενής) λύση $a_n = (n+1)3^n$

Θεώρημα

Έστω $q \neq 0$ πραγματικός αριθμός ή μιγαδικός.Τότε η σχέση $H(n) = q^n$ είναι μία λύση της της αναδρομικής σχέσης (1) αν και μόνο αν το q είναι μια χαρακτηριστική ρίζα.

Απόδειξη

Η $H(n) = q^n$ είναι λύση της (1) αν και μόνο αν για $n \geq k$

$$q^n = a_1 q^{n-1} + a_2 q^{n-2} + \cdots + a_k q^{n-k}$$

Εφόσον $q \neq 0$ η εξίσωση αυτή για όλα τα $n \geq k$ ισοδυναμεί με την εξίσωση $q^\kappa = a_1 q^{\kappa-1} + a_2 q^{\kappa-2} + \cdots + a_k$ η οποία είναι χαρακτηριστική εξίσωση, Άρα η $H(n) = q^n$είναι λύση της αναδρομικής σχέσης (1) αν και μόνο αν ο q είναι χαρακτηριστική ρίζα.

Έστω τώρα ότι οι $h_1(n), h_2(n)$ δύο λύσεις της αναδρομικής σχέσης (1) και έστω c_1, c_2 σταθερές. Τότε ο γραμμικός συνδυασμός $c_1 h_1(n) + c_2 h_2(n)$ είναι επίσης λύση της (1).

Πράγματι έχουμε για n=k,k+1,…

$$h_1(n) = a_1 h_1(n-1) + a_2 h_1(n-2) + \cdots + a_k h_1(n-k)$$

Πολλαπλασιάζοντας με c_1την h_1

και$h_2(n) = a_1 h_2(n-1) + a_2 h_2(n-2) + \cdots + a_k h_2(n-k)$

Πολλαπλασιάζοντας με c_2 την h_2

Έχω $c_1 h_1(n) + c_2 h_2(n) = [c_1 a_1 h_1(n-1) + c_2 a_1 h_2(n-1)] + [c_1 a_2 h_1(n-2) + c_2 a_2 h_2(n-2)] + \cdots + [c_1 a_k h_1(n-k) + c_2 a_\kappa h_2(n-k)] =$

$$a_1[c_1 h_1(n-1) + c_2 h_2(n-1)] + a_2[c_1 h_1(n-2) + c_2 h_2(n-2)] + \cdots + a_k[c_1 h_1(n-k) + c_2 h_2(n-k)]$$

Άρα η παράσταση $H(n) = c_1 h_1(n) + c_2 h_2(n)$ είναι επίσης λύση της (1).

Συνδυαστικά με το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι αν $q_1, q_2, \ldots . q_k$

οι χαρακτηριστικές ρίζες της (1) και $c_1, c_2, \ldots c_k$ σταθερές τότε η παράσταση $H(n) = c_1 {q_1}^n + c_2 {q_2}^n + \cdots + c_k {q_k}^n$ είναι επίσης λύση και ονομάζεται γενική λύση της (1).

Θεώρημα

Έστω ότι οι χαρακτηριστικές ρίζες αν $q_1, q_2, \ldots . q_k$ της αναδρομικής σχέσης $H(n) = a_1 H(n-1) + a_2 H(n-2) + \cdots + a_k H(n-k), a_k \neq 0,\ n = k, k+1, \ldots$. είναι όλες διαφορτικές . Τότε η $H(n) = c_1 {q_1}^n + c_2 {q_2}^n + \cdots + c_k {q_k}^n$ είναι η γενική λύση.

Απόδειξη

Έστω h(n) τυχαία λύση της αναδρομικής σχέσης . Τότε η h(n)προσδιορίζεται πλήρως από τις k αρχικές συνθήκες $h(0) = b_0$,$h(1) = b_1, \ldots, h(k-1) = b_{k-1}$.Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι οι σταθερές $c_1, c_2, \ldots c_k$ μπορούν να εκλεγούν έτσι ώστε

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_k = b_0$$

$$c_1 q_1 + c_2 q_2 + \cdots + c_k q_\kappa = b_1$$

$$c_1 {q_1}^{\kappa-1} + c_2 {q_2}^{\kappa-1} + \cdots + c_k {q_k}^{\kappa-1} = b_{k-1}$$

Έχουμε δηλαδή ένα σύστημα k γραμμικών εξισώσεων με k αγνώστους $c_1, c_2, \ldots c_k$.

Ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων είναι ο γνωστός πίνακας Vandermonde

$$\begin{matrix} 1 & 1 & \ldots 1 \\ {q_1}^{\kappa-1} & {q_2}^{\kappa-1} & \ldots {q_k}^{\kappa-1} \end{matrix}$$

Η ορίζουσα του πίνακα ισούται με $(q_2 - q_1)(q_3 - q_1) \ldots (q_k - q_1)(q_3 - q_2) \ldots (q_k - q_2) \ldots (q_k - q_{k-1})$δηλαδή με έναν γινόμενο $\binom{k}{2}$ παραγόντων και εφόσον όλοι οι όροι είναι μη μηδενικοί αφού $q_i \neq q_j$ έπεται ότι και η ορίζουσα είναι μη μηδενική. Άρα το σύστημα έχει μία μόνο λύση.

<u>Παράδειγμα</u>

Να λυθεί η αναδρομική σχέση $H(n) = 2H(n-1) + H(n-2) - 2H(n-3)$ για n=3,4,.. με αρχικές συνθήκες H(0)=1,H(1)=2,H(2)=0.

Λύση

Βρίσκω την χαρακτηριστική εξίσωση $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ η οποία έχει ρίζες τις -1,1,2.Άρα η γενική λύση είναι η $H(n) = c_1 1^n + c_2(-1)^n + c_3 2^n$. Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες

$$H(0) = 1 => c_1 + c_2 + c_3 = 1$$

$$H(1) = 2 => c_1 - c_2 + 2c_3 = 2$$

$$H(2) = 0 => c_1 + c_2 + 4c_3 = 0$$

Καταλήγουμε σε σύστημα εξισώσεων με τρείς αγνώστους, επιλύοντας το σύστημα έχουμε $c_1 = 2, c_2 = -\frac{2}{3}, c_3 = -\frac{1}{3}$. Άρα η λύση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες είναι η$h(n) = 2 - \frac{2}{3}(-1)^n - \frac{1}{3}(2)^n$.

Η απλούστερη περίπτωση αναδρομικής εξίσωσης είναι της μορφής:

$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = 0$ και λέγεται γραμμική γιατί δεν περιέχει δυνάμεις και γινόμενα των t_i, λέγεται ομογενής γιατί ο γραμμικός συνδυασμός των t_i, ισούται με 0, ενώ επίσης έχει σταθερούς συντελεστές a_i. Υποθέτουμε ότι αναζητούμε μία λύση της μορφής:

$t_n = x^n$όπου το $\boldsymbol{x}$ είναι μία σταθερά. Αντικαθιστώντας στην αναδρομική εξίσωση έχουμε:

$\alpha_0\chi^{\eta} + \alpha_1\chi^{\eta-1} + \alpha_2\chi^{\eta-2} + \ldots + \alpha_k\chi^{\eta-k} = 0 =>$

$p(\chi) = \alpha_0 \chi^{k} + \alpha_1\chi^{k-i} + \alpha_2\chi^{k-2} + \ldots. + \alpha_k = 0$

που αποτελεί τη χαρακτηριστική εξίσωση της αναδρομής. Ας υποθέσουμε ότι η εξίσωση έχει H(k) διακριτές ρίζες $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Στην περίπτωση αυτή κάθε γραμμικός συνδυασμός:

$$t_n = \sum_{i=1}^{k} c_i\, r_i^{\,n}$$

είναι λύση της αναδρομής, όπου οι σταθερές c_iεξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες.

Για παράδειγμα, έστω ότι δίνεται η αναδρομική εξίσωση:

$$t_k - 5t_{k-1} + 6t_{k-2} = 0$$

με αρχικές συνθήκες t_0 = 3 και t_1= 7. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\chi^2 - 5\chi + 6 = 0$ με ρίζες $r_1 = 2$ και $r_2 = 3$. Συνεπώς καταλήγουμε ότι:

$t_k = c_0 2^k + c_1 3^k$.Επιλύοντας το σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, που προκύπτει από τις αρχικές συνθήκες, έχουμε:

$3 = c_0 + c_1$

$7 = 2c_0 + 3c_1$

από όπου προκύπτει ότι $c_0 = 2$, $c_1 = 1$ και επομένως η λύση της αναδρομής είναι

$t_k = 2^{\kappa+1} + 3^{\kappa}$.

Τώρα ας υποθέσουμε ότι οι λύσεις δεν είναι όλες διακριτές μεταξύ τους. Έστω ότι υπάρχει μία πολλαπλή ρίζα r βαθμού d. Επομένως το πολυώνυμο$r(\chi)$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$p(\chi) = (\chi — r)^d g(\chi)$

όπου το g(χ) δεν έχει για ρίζα το r οπότε δεν διαιρείται με το (χ — r). Παραγωγίζουμε και λαμβάνουμε:

$p'(\chi) = (\chi — r)^d g'(\chi) + d(\chi — r)^{d-1} g(\chi) = (\chi — r)^{d-1} ((\chi — r)g'(\chi) + dg(\chi))$

όπου παρατηρούμε ότι το p'(χ) έχει πολλαπλή ρίζα r βαθμού d — 1. Το συμπέρασμα αυτό θα το χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια.

Τώρα, εφ'όσον το πολυώνυμο p(χ) έχει πολλαπλή ρίζαr βαθμού d, έπεται ότι το r είναι πολλαπλή ρίζα βαθμού d και του πολυωνύμου:

$X^{k-m} p(\chi) = \alpha_0 \chi^{\kappa} + \alpha_1 \chi^{\kappa-1} + ... + \alpha_\eta \chi^{\kappa-m}$

Παραγωγίζουμε αυτή την έκφραση, πολλαπλασιάζουμε επί ***x*** και λαμβάνουμε:

$\alpha_o k\chi^k + \alpha_1(k — 1)\chi^{k-1} + ... + \alpha_m(k — m)\chi^{k-\iota\eta}$

Με βάση την ανωτέρω παρατήρηση, έπεται ότι η τελευταία έκφραση έχει πολλαπλή ρίζα r βαθμού d — 1. Άρα ισχύει:

$\alpha_0 kr^k + \alpha_1(k — 1)r^{k-1} + ... + \alpha_m(k — m)r^{k-m} = 0$

Αν προσέξουμε καλύτερα αυτήν την αναδρομική εξίσωση, διαπιστώνουμε ότι έχει λύση$t_k = kr^{\kappa}$.

Περαιτέρω, παραγωγίζοντας και πολλαπλασιάζοντας επί ***x*** και πάλι προκύπτει η σχέση:

$\alpha_k k^2\chi^k + \alpha_1(k — 1)^2\chi^{k-1} + ... + \alpha_m(k — m)^2\chi^{k-m}$

με πολλαπλή ρίζα *r* βαθμού d — 2. Επομένως προκύπτει η αναδρομική εξίσωση:

$\alpha_k k^2 r^{\kappa} + \alpha_1(k — 1)^2 r^{\kappa-1} + ... + \alpha_m(k — m)^2 r^{k-m} = 0$

με λύση $t_k = k^2 r^k$.. Η διαδικασία αυτή μπορεί να συνεχισθεί για d — 1 βήματα συνολικά. Έτσι καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα: Αν ένα χαρακτηριστικό πολυώνυμο μίας ομογενούς γραμμικής αναδρομικής εξίσωσης έχει πολλαπλή ρίζα rβαθμού d, τότε οι λύσεις της εξίσωσης είναι $t_k = r^k, kr^k, k^2r^k, \dots, k^{d-1}r^k$ Όπως και πριν, η γενική λύση της αναδρομικής εξίσωσης είναι γραμμικός συνδυασμός αυτών των λύσεων και πρέπει να ληφθούν υπ'όψη οι αρχικές συνθήκες.

Για παράδειγμα, έστω ότι δίνεται η αναδρομική εξίσωση:

$$t_k - 4t_{k-1} + 4t_{k-2} = 0$$

με αρχικές συνθήκες t_0 = 2 και t_1= 10. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\chi^2 - 4\chi + 4 = (\chi - 2)^2$ =0 με διπλή ρίζα r = 2. Συνεπώς καταλήγουμε ότι:

$$t_k = c_0 2^k + c_1 k 2^k$$

Επιλύοντας το σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, που προκύπτει από τις αρχικές συνθήκες, έχουμε:

$2 = c_0$

$10 = 2c_0 + 2c_1$

από όπου προκύπτει ότι c_0= 2, c_1 =3 και επομένως η λύση της αναδρομής είναι

$$t_k = 2^{k+1} + 3k2^k$$

Θεώρημα

Έστω $q_1, q_2, \dots, q_k$ οι διακεκριμένες χαρακτηριστικές ρίζες της αναδρομικής σχέσης του προηγούμενου θεωρήματος. Αν η ρίζα q_1 έχει πολλαπλότητα p_i τότε σε αυτήν αντιστοιχεί το τμήμα της γενικής λύσης $H(n) = H_1(n) + H_2(n) + \cdots + H_k(n)$.

<u>Σχέδιο απόδειξης</u>

Αν η ρίζα q_iέχει πολλαπλότητα p_iτότε όχι μόνο η q_iείναι μερική λύση της αναδρομικής σχέσης (1) αλλά και $q_i{}^n$είναι μερική λύση , αφου ηq_iδεν ικανοποιεί μόνο την χαρακτηριστική εξίσωση αλλά και την πρώτη παράγωγο της χαρακτηριστικής εξίσωσης ως προς αφου η q_iυπετέθη πολλαπλή ρίζα με πολλαπλότητα$p_i \geq 2$. Παρόμοια και η $n^2{q_i}^n$είναι μερική λύση της αναδρομικής σχέσης διότι η q_i ικανοποιεί όχι μόνο την χαρακτηριστική εξίσωση αλλά και την πρώτη και την δεύτερη παράγωγο κ.ο.κΆρα το επιχείρημα αυτό θα μας δώσει τις p_i το πλήθος μερικές λύσεις ${q_1}^n, n{q_i}^n, n^2{q_i}^n, \ldots, n^{p_{i-1}}{q_i}^n$ και ο γραμμικός συνδυασμός αυτών θα είναι η γενική λύση που αντιστοιχεί στην ρίζα q_i πολλαπλότητας p_i της χαρακτηριστικής εξίσωσης .

Μη ομογενείς γραμμικές αναδρομικές σχέσεις με σταθερούς συντελεστές

Στην περίπτωση της μη γραμμικής ομογενούς εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές οι διαδικασίες που περιγράφηκαν δε δίνουν λύση.Αν η σχέση μας είναι γραμμική δευτέρας τάξης μη ομογενής με σταθερούς συντελεστές τότε ισχύει η αρχή της υπέρθεσης. Δηλαδή η γενική λύση ισούται με το άθροισμα της γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενείς συν μίας μερικής λύσης της γραμμικής. Για την εύρεση της μερικής λύσης δεν υπάρχει γενική μέθοδος αλλά όταν η συνάρτηση του δεύτερου μέλους είναι απλή τότε μπορούμε να εργασθούμε όπως φαίνεται στα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε τώρα μη ομογενείς γραμμικές αναδρομικές εξισώσεις, δηλαδή εξισώσεις υπό την επόμενη μορφή, όπου ο γραμμικός συνδυασμός δεν ισούται με μηδέν:

$a_0 tn + a_1 tn\text{-}_1 + a_2 tn\text{-}_2 + : : : a_k tn\text{-}_k = bn_1 p1(n) + bn_2\, p2(n) + \ldots.$

Στο σημείο αυτό χωρίς απόδειξη δίνεται ότι ισοδύναμο είναι να θεωρηθεί η ομογενής γραμμική αναδρομική εξίσωση:

$(\alpha_0\chi^k + \alpha_1\, \chi^{k-1} + \alpha_2\chi^{k-2} + \ldots\, \alpha_k\,)(\chi - c_1)^{d+1}(\chi - c_2)^{d+1} \ldots = 0$

όπου η πρώτη παρένθεση αποτελεί τη χαρακτηριστική εξίσωση του αριστερού σκέλους της μη ομογενούς αναδρομικής εξίσωσης, ενώ dείναι ο βαθμός του πολυωνύμου $P_i(\eta)$.

Για παράδειγμα, έστω ότι δίνεται η μη ομογενής αναδρομική εξίσωση:

$tk\text{-}\ 2tk\text{-}1 = 2^k\ \text{-}1$

με αρχική συνθήκη t_0= 0.. θεωρώντας ότι ισχύει: $b1 = 2$,$b2 = 1$,$p_1(n) = 1$και $p_2(n) = -1$, η εξίσωση μετασχηματίζεται στην ομογενή:

$(\chi - 2)(\chi - 1)(\chi - 2) = 0$

Έτσι φθάνουμε σε μία ομογενή γραμμική αναδρομική εξίσωση με γενική λυση:

$t_k = c_0 1 + c_1 2 + c_2 k 2^k$

Πρέπει να επιλύσουμε ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους. Εύκολα υπολογίζουμε ότι $t_1 = 1, t_2 = 5$,:

$0 = c_0 + c_1$

$1 = c_0 + 2c_1 + 2c_2$

$5 = c_0 + 4c_1 + 8c_2$

από όπου προκύπτει ότι $c_0 = 1; c_1 = -1; c_3 = 1$και επομένως η λύση της αναδρομής είναι $t_k = (k-1)2^k + 1$.

Συνήθως οι μη ομογενείς αναδρομικές εξισώσεις μπορούν να επιλυθούν και με απλή άλγεβρα. Ας θεωρήσουμε και πάλι το προηγούμενο παράδειγμα με την εξίσωση $t_k - 2t_{k-1} = 2^k - 1$.Πρώτον, πολλαπλασιάζουμε και τα δυο σκέλη της εξίσωσης επί δυο, οπότε προκύπτει:

$2t_k - 4t_{k-1} = 2^{k+1} - 2$

Δεύτερον, αντικαθιστούμε όπου ***k*** με ***k*** + 1, οπότε προκύπτει:

$t_{k+1} - 2t_k = 2^{k+1} - 1$

Από τις δυο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι:

$t_{k+1} - 4t_k + t_{k-1} = 1$

Ούτε και αυτή η εξίσωση είναι ομογενής αλλά έχουμε κάνει ένα βήμα. Τρίτον, λοιπόν, στην τελευταία αυτή σχέση αντικαθιστούμε το ***k*** με ***k*** + 1, οπότε προκύπτει:

$t_{k+2} - 4t_{k+1} + t = 1$

Εξισώνοντας τα αριστερά σκέλη των δυο τελευταίων εξισώσεων προκύπτει η ομογενής εξίσωση:

$t_{k+2} - 5t_{k+1} + 8t_k - 4t_{k-1} = 0$, που επιλύεται κατά τα γνωστά, καθώς έχει χαρακτηριστική εξίσωση:

$\chi^3 - 5\chi^2 + 8\chi - 4 = (\chi - 1)(\chi - 2)^2 = 0$

1.Να λυθεί η εξίσωση διαφορών $a_n + 2a_{n-1} = n + 3$ με αρχική συνθήκη $a_0 = 3$.

Λύση

Η αντίστοιχη ομογενείς είναι η $a_n + 2a_{n-1} = 0$ με χαρακτηριστική εξίσωση $x + 2 = 0, x = -2$. Άρα η λύση της ομογενούς είναι $c_1(-2)^n$. Για να βρώ μία μερική λύση της γραμμικής εξίσωσης με $f(n) = n + 3$. Θέτω $a_n = Bn + D$ με B,D προσδιοριστέους συντελεστές. Αντικαθιστώντας το a_n στην δοσμένη εξίσωση έχουμε $Bn + D + 2[B(n-1) + D] = n + 3$=>n3B+3D-2B=n+3 και εξισώνοντας τους συντελεστές του πκαι τους σταθερούς όρους έχουμε B=1/3 και D=11/9. Άρα η μερική λύση είναι $Bn + D = \frac{1}{3}n + \frac{11}{9}$ και η γενική λύση $c_1(-2)^n + \frac{1}{3}n + \frac{11}{9}$. Η αρχική συνθήκη $a_0 = 3$ δίνει για n=0 $c_1 = \frac{16}{9}$.

2.Να λυθεί η εξίσωση διαφορών $a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} = 2^n$

Λύση

Η αντίστοιχη ομογενής είναι η $a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} = 0$ με χαρακτηριστική εξίσωση $x^2 + x + 1 = 0, x = -2$ διπλή ρίζα. Άρα η λύση της ομογενούς είναι $(c_1 + c_2n)(-2)^n$. Η μερική λύση θα είναι της μορφής $a_n = B2^n$ με B προσδιοριστέος συντελεστής. Αντικαθιστώντας το a_n στην δοσμένη εξίσωση έχουμε $B2^n + 2B2^{n-1} + B2^{n-2} = 2$,απλοποιώντας προκύπτει ότι B=4/9.Άρα η γενική λύση είναι $(c_1 + c_2n)(-2)^n + \frac{4}{9}(2)^n$

Παρατήρηση

Όταν το δεξί μέλος της αναδρομικής σχέσης ή της εξίσωσης των διαφορών είναι

Α)Ak^n δηλαδή εκθετικής μορφής τότε η αντίστοιχη μερική λύση θα είναι της μορφής

i) Bk^n αν ο αριθμός k δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης

ii) Bn^mk^n αν ο k είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης πολλαπλότητας m

β)$\sum_{i=1}^{t} p_i n^i$, τότε η αντίστοιχη μερική λύση θα είναι της μορφής

i)$\sum_{i=0}^{t} q_i n^i$ αν ο αριθμός 1 δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

ii)$n^m \sum_{i=0}^{t} q_i n^i$ αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης πολλαπλότητας m

Γ)$f_1(n) + f_2(n)$, όπου f_1 μία εκθετική συνάρτηση και f_2 ένα πολυώνυμο. Τότε η μερική λύση θα ισούται με το άθροισμα της μερικής λύσης που αντιστοιχεί στο πολυώνυμο και της μερικής λύσης που αντιστοιχεί στην εκθετική συνάρτηση.

Εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις

Για την ακολουθία αριθμών $P(n,0), P(n,1), \dots, P(n,n)$ όπου n φυσικός και $P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$ το πλήθος των k-διατάξεων των n ακεραίων $\{1,2,\dots,n\}$ με $k = 0,1,\dots.,n$ η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση είναι η

$$P(n,0) + P(n,1)x + P(n,2)\frac{x^2}{2} + \cdots + P(n,n)\frac{x^n}{n} = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2} + \cdots + \frac{n!x^n}{0!n!} = (1+x)^n.$$

Παρατηρούμε ότι η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας αυτής συμπίπτει με τη συνήθη γεννήτρια συνάρτησης της ακολουθίας των διωνυμικών συντελεστών $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots.., \binom{n}{n}$.

<u>Παράδειγμα</u>

Η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας {1,1,…,1} είναι η $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$ ενώ γενικότερα για κάθε $a \in R$ η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση είναι η η $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n x^n}{n!} = e^{\alpha x}$. Θεωρώντας ένα σύνολο με k διαφορετικά στοιχεία όπου οι επαναληπτικοί αριθμοί των στοιχείων είναι άπειρο τότε το πλήθος των N μεταθέσεων ισούται με k^n.Άρα για την ακολουθία των αριθμών αυτών η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση είναι η e^{kx}. Τι γίνεται όμως στην περίπτωση που οι επαναληπτικοί αριθμοί είναι πεπερασμένοι;Υπενθυμίζουμε ότι άπειροι και πεπερασμένοι επαναληπτικοί αριθμοί στην ουσία σημαίνει ακέραιοι αντίστοιχα $\geq n$ και$< n$. Απάντηση στο ερώτημα δίνει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα

Έστω το πολυώνυμο $s = \{n_1 a_1, n_2 a_2, \dots., n_k a_k\}$, όπου n_i ακέραιος με $n_i < n$ Για κάθε $i \in \{1,2,\dots,k\}$. Έστω h_n το πλήθος των n μεταθέσεων του πολυσυνόλου S. Τότε η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $h_0, h_1, \dots., h_n$ δίνεται από τη σχέση

$f_{n_1}(x) * f_{n_2}(x) * \dots * f_{n_k}(x)$ όπου για i=1,2,3,…k.

$$f_{n_i}(x) = h_0 + h_1 x + h_2 \frac{x^2}{2!} \dots. + h_n \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Απόδειξη

Η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $h_0, h_1, \dots., h_n$ δίνεται από τη σχέση $h_0 + h_1 x + h_2 \frac{x^2}{2!} \dots. + h_n \frac{x^n}{n!} + \cdots$ όπου $h_n = 0$ για $n > n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ άρα προκύπτει για πεπερασμένο άθροισμα. Αν εκτελέσω τον πολλαπλασιαμό στην σχέση $f_{n_1}(x), f_{n_2}(x), \dots, f_{n_k}(x)$ η οποία εκφράζει την ίδια γεννήτρια συνάρτηση θα έχω όρους της μορφής

$\frac{x^{m_1}}{m_1!} * \frac{x^{m_2}}{m_2!} * \dots * \frac{x^{m_k}}{m_k!} = \frac{x^{m_1+m_2+\cdots+m_k}}{m_1! m_2! \dots m_k!}$ όπου $0 \le m_i \le n_i \forall\ 1 \le i \le k$.

Στη συνέχεια θέτω $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ οπότε η παραπάνω σχέση ισούται με $\frac{x^n}{m_1! m_2! \dots m_k!} = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!} * \frac{x^n}{n!}$. Άρα ο συντελεστής του όρου $\frac{x^n}{n!}$. Στη σχέση $f_{n_1}(x), f_{n_2}(x), \dots, f_{n_k}(x)$ θα είναι της μορφής $\sum \frac{x^n}{m_1! m_2! \dots m_k!}$όπου η άθροιση γίνεται σε όλα τα αθροίσματα $m_1, m_2, \dots., m_k$ με $0 \le m_i < n_i$, $\sum m_i = n$.

Αλλά κάθε προσθετέος $\frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!}$ στο άθροισμα αυτό μας δίνει το πλήθος των n-μεταθέσεων του υποπολυσυνόλου $\{m_1 x_1, m_2 x_2, \dots., m_k x_k\}$του πολυσυνόλου S. Αλλά το πλήθος των n – μεταθέσεων του πολυσυνόλου S θα ισούται με το πλήθος των n-μεταθέσεων όλων των υποπολυσυνόλων της μορφής αυτής . Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί h_n των n-μεταθέσεων του Sθα δίνονται από τον άθροισμα $\sum \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!}$. Αλλά είδαμε ότι το άθροισμα αυτό είναι ο συντελεστής του όρου $\frac{x^n}{n!}$ στο γινόμενο $f_{n_1}(x) * f_{n_2}(x) * \dots * f_{n_k}(x)$, αυτή είναι και ηεκθετική γεννήτρια συνάρτηση.

Παράδειγμα

Βρείτε τις εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις για κάθε μια από τις παρακάτω ακολουθίες:

α) $\left\{2^{k+1}\right\}_{k\geq 0}$

Ξέρουμε ότι : $\sum_{k\geq 0}\frac{z^k}{k!}=e^z$ και για $z=2z$: $\sum_{k\geq 0}\frac{(2z)^k}{k!}=e^{2z}$

πολλαπλασιάζοντας με 2 :

$$2\cdot\sum_{k\geq 0}\frac{(2z)^k}{k!}=2e^{2z}\Rightarrow\sum_{k\geq 0}\frac{2^{k+1}z^k}{k!}=\sum_{k\geq 0}2^{k+1}\frac{z^k}{k!}=2e^{2z}$$

Άρα, η ζητούμενη εκθετική γεννήτρια συνάρτηση της $\left\{2^{k+1}\right\}_{k\geq 0}$ είναι η $2e^{2z}$.

β) $\left\{k\cdot 2^{k+1}\right\}_{k\geq 0}$

Στο προηγούμενο παράδειγμα δείξαμε ότι : $\sum_{k\geq 0}\frac{2^{k+1}z^k}{k!}=\sum_{k\geq 0}2^{k+1}\frac{z^k}{k!}=2e^{2z}\quad(*)$

Πολλαπλασιάζουμε την $(*)$ επί 2 : $\sum_{k\geq 0}2^{k+2}\frac{z^k}{k!}=4e^{2z}$ (1) και πολλαπλασιάζοντας την (1) με z προκύπτει :

$$z\cdot\sum_{k\geq 0}2^{k+2}\frac{z^k}{k!}=\sum_{k\geq 0}k\cdot 2^{k+1}\frac{z^k}{k!}=4z\cdot e^{2z}$$

που είναι η ζητούμενη εκθετική γεννήτρια συνάρτηση.

Παράδειγμα

Χρησιμοποιώντας γεννήτριες συναρτήσεις υπολογίστε με πόσους τρόπους μπορούν να μοιραστούν τα 52 χαρτιά μίας τράπουλας σε 4 παίκτες όταν κάθε παίκτης πρέπει να πάρει τουλάχιστον ένα χαρτί.

Λύση

Τα χαρτιά είναι διαφορετικά, οπότε μας ενδιαφέρει η σειρά , δηλαδή η διάταξη των παικτών. Άρα πρέπει να χρησιμοποιηθούν εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις.

Η γεννήτρια συνάρτηση για κάθε παίκτη είναι $\frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + - \cdots . = e^x - 1$

Σημείωση: Τα χαρτιά είναι 52 και επειδή κάθε παίκτης πρέπει να πάρει τουλάχιστον 1 χαρτί και κανένας παίκτης δε μπορεί να πάρει περισσότερα από 49 χαρτιά, θα έπρεπε να σταματήσουμε το άθροισμα $\frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ στον όρο $\frac{x^{49}}{49!}$. Τότε όμως το άθροισμα θα ισούταν με $e^x - 1$. Επεκτείνωντας το άθροισμα στο άπειρο δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα επειδή οι μεγα΄λύτερες δυνάμεις του x δεν επηρεάζουν το ζητούμενο συντελεστή.Άρα η γεννήτρια συνάρτηση για όλους τους παίκτες είναι $(e^x - 1)^4 = e^{4x} - 4e^{3x} + 6e^{2x} - 4e^x + 1$. Επομένως η απάντηση στο ερώτημα δίνεται από το συντελεστή του όρου $\frac{x^{52}}{52!}$ που είναι $4^{52} - 43^{52} + 62^{52} - 4$

Εφαρμογή

Σε μία 1x3 σκακιέρα έχουμε συνολικά 27 διαφορετικούς τριχρωματισμούς:

i) μορφής xxx χρωματισμοί 3 δεκτοί οι 2
ii) μορφής xxy χρωματισμοί 18 δεκτοί οι 12
iii) μορφής xyz χρωματισμοί 6 δεκτοί οι 0

Άρα συνολικά οι δεκτοί χρωματισμοί είναι 14 από τους οποίους οι 6 έχουν δύο κόκκινα τετράγωνα και 8 χωρίς κόκκινα τετράγωνα.

Σε μία 1x4 σκακιέρα έχουμε συνολικά 41 διαφορετικούς τριχρωματισμούς:

Χρωματισμοί	πλήθος	Δεκτά με 4 ή 2	Δεκτά με 0
XXXX	3	1	2
XXXY	24	0	8
XXYY	18	12	6
XXYZ	36	12	0
Σύνολο	81	25	16

Οι αριθμοί BellB_n μας δίνουν το πλήθος των τρόπων διαμέρισης του συνόλου {1,2,…,n} σε υποσύνολα. Έχουμε $B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 5$ και συγκεκριμένα οι 5 διαμερίσεις είναι {1,2,3}-{1},{2,3}-{2},{1,3}-{3},{1,2}-{1},{2},{3} και ορίζουμε $B_0 = 1$. Οι αριθμοί Bell δεν δίνονται από κα΄ποιον απλό κλειστό τύπο , αλλά ικανοποιούν μια γραμμική αναδρομική σχέση.

Συγκεκριμένα:

Θεώρημα

Για $n \geq 1$ $B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}$

Απόδειξη

Έστω X={1,2,…,n} και ας θεωρήσουμε μία διαμέριση του X έστω P. Προφανώς ένα μόνο μέρος θα περιέχει το στοιχείο n έστω το $\{n\} \cup \gamma$ όπου $\gamma \subset \{1,2, \dots n-1\}$. Τα υπόλοιπα μέρη της διαμέρισης P αποτελούν μία διαμέριση P_i του συνόλου {1,2,…,n-1}-γ. Τα δύο αυτά στοιχεία δηλαδή το υποσύνολο γ και η διαμέριση P_i προσδιορίζουν πλήρως την αρχική διαμέριση P. Αν $|\gamma| = k-1$ τότε έχουμε $\binom{n-1}{k-1}$ τρόπους εκλογής του γ και B_{n-k} τρόπους εκλογής για την διαμέριση P_i άρα $\binom{n-1}{k-1} B_{n-k}$ τρόπους για την διαμέριση P. Αθροίζοντας πάνω στις δυνατές τιμές της μεταβλητής k έχουμε το ζητούμενο.

Παράδειγμα

$$\boldsymbol{B_4 = \binom{3}{0} B_3 + \binom{3}{1} B_2 + \binom{3}{2} B_1 + \binom{3}{3} B_0 = 5 + 3 * 2 + 3 * 1 + 1 = 15}$$

|

Έστω λοιπόν $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$ η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας των αριθμών Bell

B_η· θα βρούμε μία έκφραση για την F(t) χρησιμοποιώντας την ιδιότητα ότι αν λοιπόν $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{t^n}{n!}$τότε $\frac{dF(t)}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ δηλαδή η παράγωγος είναι η ίδια η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση με μόνη διαφορά ότι παραλείπεται ο πρώτος προσθετέος.

Θεώρημα

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} = e^{e^t - 1}$$

Απόδειξη

Από την παρατήρηση που κάναμε για την παραγωγό και εφαρμόζοντας στους αριθμούς $B_η$ την προηγούμενη αναδρομική σχέση έχουμε:

$$\frac{dF(t)}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-i}) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} B_{n-i} \frac{t^{n-i}}{(n-i)!}$$
$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{t^j}{j!} \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k t^k}{k!} = e^t F(t).$$

όπου στην προτελευταία ισότητα θέσαμε $j = i - 1$ και $k = n - i$ ήτοι $\frac{dF(t)}{dt} = e^t F(t) => \frac{dF(t)}{F(t)} = e^t * dt$

Ολοκληρώνοντας έχουμε $F(t) = e^t + c$. Η σταθερά c υπολογίζεται από την αρχική σχέση F(0)=1οπότε F(0)=$e^{c+1} = 1 => c = -1$. Άρα

$$F(t)=e^{e^t - 1}.$$

<u>Παράδειγμα</u>

Με πόσους πιθανούς τρόπους μπορούμε να διαχωρίσουμε N μη διακριτές μπάλες σε μη διακριτά κουτιά; Η φράση ‘μη διακριτά κουτιά ’ χρησιμοποιείται για να περιγράψει το γεγονός ότι αν έχουμε τέσσερις μπάλες τότε ο διαχωρισμός των τριών στο πρώτο κουτί και μία στο δεύτερο είναι το ίδιο με το να τοποθετηθεί μία στο πρώτο και τρείς στο δεύτερο. Επομένως η ερώτηση μπορεί να μετατραπεί σε «Με πόσους πιθανούς τρόπους μπορεί ο ακέραιος n να γραφτεί ως άθροισμα των θετικών ακεραίων ;» Αυτά τα αθροίσματα καλούνται διαμερίσεις του n και το πλήθος αυτών συμβολίζεται με p(n). Για παράδειγμα, για N=4 οι διαμερίσεις είναι

4

3+1

2+2

2+1+1

1+1+1+1

Έτσι, p(4)=5,p(1)=1,p(2)=2,p(3)=3.

Με χρήση γεννητριών συναρτήσεων

$$1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

$$1+x^2+x^4+x^6+\cdots=\frac{1}{1-x^2}$$

$$1+x^3+x^6+x^9+\cdots=\frac{1}{1-x^3}$$

Σχηματίζεται το γινόμενο

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$
$$=(1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)$$
$$=1+x+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+7x^6+\cdots.$$

Ο συντελεστής του x^6 είναι 7, αυτό δείχνει ότι υπάρχουν επτά τρόποι να επιλέξεις τρείς όρους ,έναν από κάθε παράγοντα ,του οποίου το αποτέλεσμα είναι x^6, όπως αυτό φαίνεται στον πίνακα στην συνέχεια

Πρώτος παράγοντας	Δεύτερος παράγοντας	Τρίτος παράγοντας
x^6	1	1
x^4	x^2	1
x^3	1	x^3
x^2	x^4	1
x	x^2	x^3
1	x^6	1
1	1	x^6

Συσχετίζοντας κάθε παραπάνω επιλογή με μια διαμέριση του αριθμού 6 σε ένα, δύο ή τρία μέρη,παρατηρούμε ότι το πλήθος των μονάδων στην διαμέριση είναι ο εκθέτης του πρώτου παράγοντα. Το πλήθος των αριθμών δύο είναι ο εκθέτης του δεύτερου παράγοντα, και το πλήθος των αριθμών τρία είναι ο εκθέτης του τρίτου παράγοντα. Εφόσον το γινόμενο των όρων δίνει x^6 το άθροισμα των εκθετών και αντίστοιχα οι άσσοι, τα δυάρια και τα τριάρια θα είναι 6. Η συσχέτιση που αναφέραμε παρουσιάζεται στη συνέχεια

Όροι			Διαμέριση		
x^6	1	1	Έξι 1	Κανένα 2	Κανένα 3
x^4	x^2	1	Τέσσερα 1	Ένα 2	Κανένα 3
x^3	1	x^3	Τρείς 1	Κανένα 2	Ένα 3
x^2	x^4	1	Δύο 1	Δύο 2	Κανένα 3
x	x^2	x^3	Ένας 1	Ένα 2	Ένα 3
1	x^6	1	Κανένας 1	Τρία 2	Κανένα 3
1	1	x^6	Κανένας 1	Κανένα 2	Δύο 3

Είναι εμφανές ότι κάθε διαμέριση του αριθμού 6 θα μας δώσει διάφορες επιλογές των όρων από τους παράγοντες που προκύπτουν, με αποτέλεσμα ο συντελεστής της παραμέτρου x^m είναι ο αριθμός των τρόπων που μπορούμε να αναπτύξουμε την τιμή m ως άθροισμα ακεραίων μικρότερο ή ίσο του τρία.

Θεώρημα

Ο συντελεστής του x^m στην σειρά $\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\ldots}$ είναι το πλήθος των τρόπων που μπορεί να αναλυθεί ο αριθμός m ως άθροισμα των a,b,c,d,…

Απόδειξη

Όπως είδαμε προηγουμένως γινόμενο $\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\ldots} = (1 + x^a + x^{2\alpha} + \cdots)(1 + x^b + x^{2b} + \cdots)(1 + x^c + x^{2c} + \cdots)$Αν ο όρος x^m σχηματίζεται από το γινόμενο των $x^{3\alpha}, x^b, x^{2c}, \ldots$ τότε $m = a + a + a + b + c + c + \cdots$ Ο όρος x^mπου προκύπτει, εμφανίζεται στο γινόμενο ακριβώς όσες φορές ο αριθμός m μπορεί να γραφεί ως άθροισμα των a,b,c,…

Παράδειγμα

Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων να διαμερίσω ένα σύνολο από k διακεκριμένα αντικείμενα σε n υποσύνολα μη κενά και ανά δυο ξένα.
Αν θεωρήσουμε ότι τα n υποσύνολα αντιστοιχούν σε n υποδοχές, τότε οι απαιτήσεις για τα υποσύνολα να είναι ανά δυο ξένα και μη κενά μετατρέπονται στους περιορισμούς για τις υποδοχές να είναι διακεκριμένες και να έχουν τουλάχιστον ένα αντικείμενο αντίστοιχα.
Επομένως, ο αριθμός που ψάχνουμε είναι το αποτέλεσμα του προηγούμενου παραδείγματος με την διαφορά ότι αφού δεν μας ενδιαφέρει η σειρά των στοιχείων μέσα στα υποσύνολα (ή των αντικειμένων στις υποδοχές αντίστοιχα), θα πρέπει να διαιρέσουμε με n!. Άρα:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i (n-i)^k\right) \cdot \frac{1}{n!}$$

Κεφάλαιο 2

Διαμερίσεις ακεραίων και διαγράμματα Ferrers

2.1.Διαμερίσεις ακεραίων

Η τεχνική των γεννητριών συναρτήσεων αναπτύχθηκε από τον Euler ο οποίος στο έργο του "Εισαγωγή στην απειροστική Ανάλυση (1748)" χρησιμοποίησε πρώτος την μέθοδο αυτή για να λύσει το πρόβλημα των διαμερίσεων των ακεραίων. Θεωρούμε τις διαμερίσεις ενός συνόλου X με n στοιχεία και έστω μία από αυτές:

$$\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 \cup \mathrm{X}_2 \cup \dots . \cup \mathrm{X}_\mathrm{k}$$

Τότε έχουμε την αντίστοιχη εξίσωση

$$\mathrm{n} = \mathrm{n}_1 + \mathrm{n}_2 + \cdots + \mathrm{n}_\mathrm{k}$$

όπου $|\mathrm{X}_\iota| = \mathrm{n}_\iota, 1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{k}$.Η εξίσωση αυτή μάς δίνει μία **διαμέριση** του θετικού ακεραίου n σε k**μέρη**.Τονίζουμε ότι αφού τα υποσύνολα $\mathrm{X}_\mathrm{i} \neq 0$, τα μέρη είναι μη μηδενικοί αριθμοί και ότι η σειρά των προσθετέων δεν έχει σημασία (εκτός αν αναφερθεί ρητά το αντίθετο). Οι διαφορετικές διαμερίσεις του αριθμού 6 είναι οι εξείς 11. Στη δεξιά στήλη δίδεται ένας συνήθης συμβολισμός τους

6	[6]
5+1	[15]
4+2	[24]
4+1+1	[$1^2$4]
3+3	[3^2]
3+2+1	[123]
3+1+1+1	[$1^3$3]
2+2+2	[2^3]
2+2+1+1	[$1^2 2^2$]
2+1+1+1+1	[$1^4$2]
1+1+1+1+1+1	[1^6]

Το πρόβλημα της εύρεσης όλων των διαφορετικών διαμερίσεων του θετικού ακεραίου n είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα της τοποθέτησης ή μη διακεκριμένων σφαιρών σε μη διακεκριμένες θέσεις. Το πλήθος των διαφορετικών διαμερίσεων του n συμβολίζεται με P(n).

Έχουμε p(1)=1, p(2)=2, p(3)=3**,** p**(**4)=5,p(5)=7, p(6)=11. Θεωρώ το πολυώνυμο

$$1 + \mathrm{x} + \mathrm{x}^2 + \mathrm{x}^3 + \cdots + \mathrm{x}^{\mathrm{k}} + \cdots \mathrm{x}^{\mathrm{n}}$$

Ο συντελεστής του κ (που ισούται με τη μονάδα) μετρά με πόσους τρόπουςέχουμε k το πλήθος μονάδες σε μία διαμέριση του ακεραίου n. Προφανώς υπάρχει ένας μόνο τρόπος αν $\mathrm{k} \leq \mathrm{n}$ (διότι$\mathrm{n} = \mathrm{k} + (\mathrm{n} - \mathrm{k})$) και κανένας για $\mathrm{k} > n$ (διότι προφανώς κάθε διαμέριση του ακεραίου n θα έχει από καμία μονάδα έως n το πολύ μονάδες. Άρα στην σειρά:

$$1 + \mathrm{x} + \mathrm{x}^2 + \mathrm{x}^3 + \cdots + \mathrm{x}^{\mathrm{k}} + \cdots \mathrm{x}^{\mathrm{n}} + \cdots = \frac{1}{1 - \mathrm{x}}$$

(όπου η ισότητα ισχύει από τον τύπο της φθίνουσας γεωμετρικής προόδου για $|\mathrm{x}| < 1$) ο συντελεστής του x^{k} μας δίνει το πλήθοστων τρόπων για να έχουμε k μονάδες στην διαμέριση κάθε ακέραιουμεγαλύτερου η ίσου από το k.

<u>Παράδειγμα</u>: Έχουμε τις ισότητες:

$$1 + \mathrm{x} + \mathrm{x}^2 + \mathrm{x}^3 + \cdots = \frac{1}{1 - \mathrm{x}}$$

$$1 + \mathrm{x}^2 + \mathrm{x}^4 + \mathrm{x}^6 + \cdots = \frac{1}{1 - \mathrm{x}^2}$$

$$1 + \mathrm{x}^3 + \mathrm{x}^6 + \mathrm{x}^9 + \cdots = \frac{1}{1 - \mathrm{x}^3}$$

Και ας σχηματίσω το γινόμενό τους:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} = (1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)$$

Ο συντελεστής x^6 του είναι 7 διότι υπάρχουν 7 τρόποι να διαλέξω 3 όρους, έναν από κάθε παράγοντα, που να έχουν γινόμενο $χ^6$ όπως φαίνεται στον πίνακα.

1ος παράγον	2ος παράγον	3ος παράγον	Αντίστοιχη διαμέριση
x^6	1	1	6 μονάδες, 0 δύο, 0 τρία
x^4	x^2	1	4 μονάδες, 1 δύο, 0 τρία
x^3	1	x^3	3 μονάδες, 0 δύο, 1 τρία
x^2	x^4	1	2 μονάδες, 2 δύο, 0 τρία
x	x^2	x^3	1 μονάδα, 1 δύο, 1 τρία
1	x^6	1	0 μονάδες, 3 δύο, 0 τρία
1	1	x^6	0 μονάδες, 0 δύο, 2 τρία

Αν θεωρήσουμε το πολυώνυμο $1+χ^2+χ^4+χ^6+\ldots+χ^{[n/2]}$. 0 συντελεστής του όρου $χ^{2k}$ ισούται με το πλήθος των τρόπων που έχουμε k δύο σε μία διαμέριση του ακεραίου n διότι n=2k+(n-2k).

Παρόμοια και στην σειρά

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots = \frac{1}{1 - x^2}$$

ο συντελεστής του χ^2 ισούται με το πλήθος των τρόπων με τους οποίους έχουμε k το πλήθος δύο σε μία διαμέριση κάθε ακεραίου $\geq$ 2k. Προσοχή όμως: ένα δυάρι στην διαμέριση θα φαίνεται από τον συντελεστή του όρου χ^2, δυο δυάρια από τον συντελεστή του όρου χ^4 κ.ο.κ.

Έπεται λοιπόν ότι το γινόμενο

$F(\chi)=(1+\chi+\chi^2+..) (1+\chi^2+\chi^4+\ldots) (1+\chi^3+\chi^6+\ldots).. (1+\chi^n+\chi^{2n}+\ldots)=1/((1-x)(1-\chi 2)\ldots.(1-\chi^n))$

είναι η γεννήτρια συνάρτηση για την (πεπερασμένη) ακολουθία {p(0), p(1), p(2),. ,p(n)}. Προσοχή όμως: Η F(χ) απαριθμεί το πλήθος των διαμερίσεων του ακεραίου j σε μέρη που δεν υπερβαίνουν τον αριθμό n.

Στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε την κατάσταση αυτή για n=3. Συγκεκριμένα είδαμε ότι υπάρχουν 7 τρόποι για να διαμερίσουμε τον ακέραιο 6 έτσι ώστε κανένα μέρος δεν υπερβαίνει τον αριθμό 3.

Βεβαίως ισχύει p(6)=11. Πράγματι εκτός από τις 7 αυτές διαμερίσεις του 6 που μας δίνει η τελευταία στήλη του πίνακα:

6=1+1+1+1+1+1, 6=1+1+1+1+2, 6=1+1+1+3, 6=1+1+2+2, 6=1+2+3, 6=2+2+2, 6=3+3

υπάρχουν και άλλες 4 διαμερίσεις του 6 οι οποίες όμως περιέχουν μέρος μεγαλύτερο του 3 και συγκεκριμένα οι 6=4+2, 6=4+1+1, 6=5+1, 6=6.

Η γεννήτρια λοιπόν συνάρτηση για την άπειρη ακολουθία {p(0), p(1), p(2),.,p(n)},θα δίδεται από την σχέση $G(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots..}$.

Με τις παρατηρήσεις αυτές έχουμε πρακτικά αποδείξει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1. Ο συντελεστής του x^m στην σειρά $\frac{1}{(1-x^\alpha)(1-x^\beta)(1-x^\gamma)\ldots..}$ ισούται με το πλήθος των διαφορετικών τρόπων παράστασης του ακεραίου m σε άθροισμα με προσθετέους α,β,γ κ.ο.κ.

Απόδειξη:

Έχουμε $\frac{1}{(1-x^{\alpha})(1-x^{\beta})(1-x^{\gamma})\ldots\ldots} = (1 + x^{\alpha} + x^{2\alpha} + ..)(1 + x^{\beta} + x^{2\beta} + \cdots)(1 + x^{\gamma} + x^{2\gamma} + \ldots) \ldots$

Αν ο όρος x^m σχηματίζεται από το γινόμενο (έστω) $x^{3\alpha}, x^{\beta}, x^{2\gamma}, \ldots$ τότε m=α+α+α+β+γ+γ+…. ο όρος x^m εμφανίζεται τόσες φορές όσες ο m μπορεί να γράφει σαν άθροισμα με προσθετέους α, β, γ ,...

Θεώρημα 2. Οσυντελεστής του x^m στην σειρά$(1 + x^{\alpha})(1 + x^{\beta})(1 + x^{\gamma})$ ....ισούται με το πλήθος των τρόπων που μπορούμε να γράψουμε τον ακέραιο m σαν άθροισμα όπου οι προσθετέοι α, β, γ,... εμφανίζονται το πολύ μία φορά.

Απόδειξη:

Από το πρώτο γινόμενο $(1 + x^{\alpha})$ μπορώ να επιλέξω είτε τον 1 είτε τον όρο χ^{α}. Και στις δύο περιπτώσεις δεν υπάρχει δυνατότητα να επιλέξουμε τον όρο χ^{α} ξανά. Το ίδιο ισχύει για τα β,γ, κ.ο.κ.

Πόρισμα 3: Αν συμβολίσουμε με $p_d(n)$το πλήθος των διαμερίσεων του n σε **διακεκριμένα**μέρη έχουμε ότι η γεννήτρια συνάρτηση για τον $p_d(n)$είναι: $(1+\chi)(1+\chi^2)(1+\chi^3)(1+\chi^4)\ldots$

Απόδειξη:

Άμεση εφαρμογή του θεωρήματος 2.

<u>Εφαρμογή:</u>

I. $p_d(7) = 5$ και μάλιστα 7,6+1,5+2,4+3,4+2+1.

II. $p_d(6) = 4$ και μάλιστα 6,5+1,4+2,3+2+1 ενώ $p(6) = 11, p(7) = 15$

Συμβολίζουμε με $p_0(n)$ το πλήθος των διαμερίσεων του n σε **μονά** μέρη (όπου φυσικά επιτρέπονται και επαναλήψεις). Από το θεώρημα 1 έχουμε ότι η γεννήτρια συνάρτηση για το $p_0(n)$θα είναι η $\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\ldots\ldots}$.

Έχουμε

$p_0(5)$ =3 και μάλιστα 5, 3+1+1, 1+1+1+1+1

$p_0(6)$=4 και μάλιστα 5+1, 3+3, 3+1+1+1, 1+1+1+1+1+1

$p_0(7)$=5 και μάλιστα 7, 5+1+1, 3+3+1, 3+1+1+1+1,1+1+1+1+1+1+1

Αλλά και

$p_d(5)$ =3 και μάλιστα 5, 4+1,3+2.

$p_d(6)$=4

$p_d(7)$=5

Το παρακάτω θεώρημα αποδεικνύει ότι η ισότητα αυτή δεν είναι τυχαία αλλά ισχύει για κάθε n.

Θεώρημα 4. (Euler) $p_d(n) = p_0(n)$

Απόδειξη. Η γεννήτρια συνάρτηση για το $p_d(n)$ είναι από το Πόρισμα 3:

$(1+\chi)(1+\chi^2)(1+\chi^3)...(1+\chi^k)...=\frac{1-\lambda^2}{1-x}\cdot\frac{1-\lambda^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-\lambda^6}{1-x^3}\cdots\frac{1-\lambda^{2k}}{1-x^k}\cdots=\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5).....}$.

η οποία είναι η γεννήτρια συνάρτηση για τον αριθμό $p_0(n)$.

Συμβολίζουμε με $p_t(n)$ το πλήθος των διαμερίσεων του n σε **διακεκριμένες δυνάμεις** του 2 (π.χ. 1,2,4,8...) τότε προκύπτει άμεσα από το θεώρημα 2 ότι η γεννήτρια συνάρτηση για τον αριθμό $p_t(n)$ είναι

$(1+\chi)\ (1+\chi^2)\ (1+\chi^4)\ (1+\chi^8)\ (1+\chi^{16})...$

Θεώρημα 5.$p_t(n)$ =1 για κάθε n.

Απόδειξη 1. Ισχύει ότι κάθε δεκαδικός μπορεί να γράφει με έναν μόνο τρόπο στο δυαδικό σύστημα. Πράγματι 25=11001=2^4 +2^3 +2^0=16+8+1.

Απόδειξη 2. Η γεννήτρια συνάρτηση για μια ακολουθία από μονάδες είναι

$1+x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$.

Για να αποδείξουμε το θεώρημα πρέπει να δείξουμε ότι η γεννήτρια συνάρτηση της $p_t(n)$ (που από το θεώρημα 2 είναι (1+χ) (1+χ^2) (1+χ^4) (1+χ^8) (1+χ^{16})... ισούται με $\frac{1}{1-x}$

Πράγματι έχουμε:

$$1+x=\frac{1-x^2}{1-x}$$

$$1+x^2=\frac{1-x^4}{1-x^2}$$

$$1+x^4=\frac{1-x^8}{1-x^4}$$

$$1+x^8=\frac{1-x^{16}}{1-x^8}$$

……

Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις αυτές κατά μέλη το αριστερό μέλος ισούται με την γεννήτρια συνάρτηση για την $p_t(n)$ενώ στο δεξί μέλος απλοποιούνται άλα εκτός από το $\frac{1}{1-x}$.

Θα δώσουμε τώρα μια δεύτερη απόδειξη του θεωρήματος του Euler η οποία μας δίνει μία αλγοριθμική κατασκευή μιας διαμέρισης σε μονά μέρη αν ξεκινήσουμε από μία διαμέριση σε διαφορετικά μέρη. Η απόδειξη αυτή οφείλεται στον James Joseph Sylvester (1814-1897).

Θεώρημα 4. (Euler) $p_d(n)=p_0(n)$

Απόδειξη δεύτερη. (Sylvester)

Έστω ότι $n=x_1+x_3 3+x_5 5+\cdots$ μία δεύτερη διαμέριση του n σε μονά μέρη. Οι αριθμοί x_1, x_3, x_5 ,μπορούν κατά έναν τρόπο να γραφούν σαν δυνάμεις του 2 έστω

$$x_1=2^{\alpha_1}+2^{b_1}+2^{\gamma_1}+\cdots$$

$$x_2=2^{\alpha_3}+2^{b_3}+2^{\gamma_3}+\cdots$$

$$x_5=2^{\alpha_5}+2^{b_5}+2^{\gamma_5}+\cdots$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε αυτό σαν έναν τρόπο γραφής του n σαν άθροισμα των διαφορετικών ακέραιων $2^{\alpha_1}, 2^{b_1}2^{\gamma_1}, \dots 3\cdot 2^{\alpha_3}, 3\cdot 2^{b_3}, 3\cdot 2^{\gamma_3}, \dots, 5\cdot 2^{\alpha_5}, 5\cdot 2^{b_5}, 5\cdot 2^{\gamma_5}, \dots$

Άρα σε κάθε διαμέριση του n σε μονά μέρη αντιστοιχεί μία διαμέριση του n σε διακεκριμένα μέρη αφού $5 \cdot 2^{\alpha_5} \neq 5 \cdot 2^{b_5} \neq 7 \cdot 2^{a_7}$ κοκ. Πρέπει να δείξουμε ότι η αντιστοιχία αυτή είναι 1 προς 1. Άρα αν αρχίσουμε από μία διαμέριση του n σε διακεκριμένα μέρη θα πρέπει να καταλήξουμε σε διαμέριση του n σε μονά μέρη.

Βήμα 1: Γράφουμε κάθε όρο της διαμέρισης σαν μία δύναμη του 2 επί ένα μονό μέρος π.χ. $60=2^2 \cdot 15$, $125=2 \cdot 5^3$, $448=2^6 \cdot 7$ κ.ο.κ.

Βήμα 2: Προσθέτουμε όλους τους αριθμούς που έχουν το ίδιο μόνο μέρος π.χ.22·15, 20·15, 24·15 δίνουν -> 15(22+20+24)=15·21 αυτή η αντιστοίχιση θα μας οδηγήσει σε διαμέριση σε μόνα μέρη, και μάλιστα στην ίδια διαμέριση που αντιστοιχίσαμε κατά την ευθεία διαδικασία, θα κάνουμε σαφέστερη την αποδεικτική αυτή διαδικασία εξετάζοντας αναλυτικά τις περιπτώσεις n=8 και η=9.

Παράδειγμα: Για n=8 έχω $p_d(8) = p_0(8) = 6$ και μάλιστα οι μονές διαμερίσεις είναι οι:

$x_1 x_3 x_5$

7+1 —>1·1 + 0·3 + 0·5 + 1·7 = 1 ·1+1·7

5+1+1+1-> 3·1 + 0·3 + 1·5 + 0·7 = 3·1+1·5

5+3->0·1 + 1·3 + 1·5 + 0·7 = 1·3+1·5

3+3+1+1->2·1 + 2·3 + 0·5 + 0·7 =2·1+2·3

3+1+1+1+1+1+1 ->5·1 + 1·3 + 0·5 + 0·7 = 5·1+1ω3

1+1+1+1+1+1+1+1 -> 8·1 + 0·3 + 0·5 + 0·7 = 8·1 .

Γράφω τους αριθμούς x_iστο δυαδικό σύστημα

3=11 (δυαδικό) = $1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 2+1$

5=101 (δυαδικό) = $1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^\circ = 4+1$

8=1000 (δυαδικό) = $1 \cdot 2^3 = 8$

οπότε οι μονές διαμερίσεις γίνονται

7+1 —>1·1+1·7=1·1+7·1 που αντιστοιχεί στην διακεκριμένη διαμέριση 1+7

5+1+1+1—> 3·1+1·5=(2+1) ·1+1·5=2·1+1·1+1·5=1·2+1·1+5·1

που αντιστοιχεί στην διακεκριμένη διαμέριση 2+1+5

5+3 —> 1·3+1·5=3·1+5·1 που αντιστοιχεί στην διακεκριμένη διαμέριση 3+5

3+3+1+1 —> 2·1+2·3=1·2+3·2 που αντιστοιχεί στην διακεκριμένη διαμέριση 2+6

3+1+1+1+1 —> 5·1+1·3=(4+1)·1+1·3=4·1+1·1+1·3=1·4+1·1+3·1 που αντιστοιχεί στην διακεκριμένη διαμέριση 4+1+3

1+1+1+1+1+1+1+1—> 8·1=1·8 που αντιστοιχεί στην διακεκριμένη διαμέριση 8.

Άρα έχουμε την αντιστοιχία

7+1 —>1+7

5+1+1+1 —>5+2+1

5+3 —>5+3

3+3+1+1 —>6+2

3+1+1+1+1+1 —>3+4+1

1+1+1+1+1+1+1+1 —> 8

Η αντίστροφη διαδικασία φαίνεται παρακάτω

1+7	—>	1·1+1·7	=	1·1+0·3+0·5+1·7	=	1+7
5+2+1	—>	1·5+1·2+1·1	=	3·1+0·3+1·5+0·7	=	1+1+1+5
5+3	—>	1·5+1·3	=	0·1+1·3+1·5+0·7	=	3+5
6+2	—>	1·2+2·3	=	2·1+2·3+0·5+0·7	=	1+1+3+3
4+3+1	—>	1·4+1·3+1·1	=	5·1+1·3+0·5+0·7	=	1+1+1+1+1+3
8	—>	1·8	=	8·1+0·3+0·5+0·7	=	1+1+1+1+1+1+1+1

;Για n=9 $p_d(9) = p_0(9) = 8$ και ισχύει

9	=	1·9	→	9·1	=	9
711	=	2·1+1·7	→	7·1+1·2	=	7+2
531	=	1·1+1·3+1·5	→	1·1+3·1+5·1	=	1+3+5
51111	=	4·1+1·5	→	5·1+1·4	=	5+4
333	=	3·3	=	(2+1) ·3=2·3+1·3	→	3·1+3·2=3+6
33111	=	3·1+2·3	=	(2+1)·1+2·3=2·1+1·1+2·3	→	1·2+1·1+3·2=2+1+6
3111111	=	6·1+1·3	=	(4+2)·1+1·3=4·1+2·1+1·3	→	1·4+1·2+3·1=4+2+3
111111111	=	9·1	=	(8+1) ·1=8·1+1·1	→	1·8+1·1=8+1

Άρα οι μονές βρίσκονται σε 1·1 αντιστοιχία με τις διακεκριμένες διαμερίσεις.

Το παρακάτω θεώρημα δίνει ένα φράγμα για τον αριθμό $p(n)$.

Θεώρημα 6: Για κάθε $np(n) < e^{3\sqrt{n}}$.

Απόδειξη:

Θέτω $G(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots..}$ οπότε $\log G(x) = \log\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots..}$ από τον τύπο του Taylor έχουμε

$$-\log(1-y) = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \cdots.$$

Άρα,

$$\log G(x) = (x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots.) + \left(x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \cdots\right) + \left(x^3 + \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} + \cdots\right) + \cdots$$

$$= \frac{x}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{1-x^2} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{1-x^3} + \cdots$$

Αν 0<χ<1 τότε: $\chi^{n-1}<\chi^{n-2}<\chi^2<\chi<1$ και ο μέσος όρος τους είναι μεγαλύτερος από τον ελάχιστο ήτοι:

$x^{n-1} < \frac{1+x+x^2+\cdots x^{n-1}}{n}$ ή

$$\frac{x^{n-1}}{1+x+x^2+\cdots x^{n-1}} < \frac{1}{n}$$

Οπότε

$$\frac{x^n}{1-x^n} = \frac{x}{1-x} * \frac{x^{n-1}}{1+x+x^2+\cdots x^{n-1}} < \frac{x}{1-x} * \frac{1}{n}$$

Άρα

$$\log G(x) < \frac{x}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{1-x^2} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{1-x^3} + \cdots = \frac{x}{1-x}(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots)$$

Αλλά ως γνωστόν $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots < 1 + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1 + 1 = 2$ (κριτήριο ολοκληρώματος στις σειρές)

Άρα $\log G(x) < \frac{2x}{1-x}$

Όμως $G(x) = p(0) + p(1)x + p(2)x^2 + \cdots + p(n)x^n + \cdots$.

Άρα $$G(x) > p(n)x^n$$

$$\log G(x) > \log p(n) + n * \log x$$

$$\log p(n) < \log G(x) - n * \log x < \frac{2x}{1-x} - n * \log x$$

Αλλά για χ>1 ισχύει $\log x < \chi - 1$

(όπως φαίνεται και από την γραφική παράσταση των δύο συναρτήσεων)

Οπότε

$$-\log x = \log\frac{1}{x} < \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

Η ανισότητα μας γίνεται

$$\log p(n) < \frac{2x}{1-x} - n * \frac{1-x}{x}$$

θέτοντας $x = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$ έχουμε $\log p(n) < 3\sqrt{n}$

Οι Hardy και Ramanujanέδειξαν ότι $p(n) - \frac{1}{4\sqrt{3}\,n} e^{n\sqrt{\frac{2n}{3}}}$ προσέγγιση που βελτιώθηκε από τον H.Rademacher.

Θα τελειώσουμε την παράγραφο με ένα αποτέλεσμα του deMoivre σχετικό με το πλήθος των διαμερίσεων του ακεραίου n σε r μέρη όπου όμως η διάταξη παίζει ρόλο.

Θεώρημα 7. (deMoivre**)**

Το πλήθος των διαμερίσεων τουn σε r μέρη **(**όπου όμως έχουμε διάταξη) ισούται με $\binom{n-1}{r-1}$

Απόδειξη:

Ας διατυπώσουμε το πρόβλημα ως εξής: n παρόμοιες σφαίρες θα τοποθετηθούν σε rδιαφορετικά κουτιά (το διαφορετικά οφείλεται στο ότι η διάταξη παίζει τώρα ρόλο) έτσι ώστε κανένα κουτί να μην είναι άδειο. Ας απεικονίσουμε την κατάσταση με r+1 παύλες και n **τελείες.** Οι r+1 παύλες (και ο κώδικας μας αρχίζει και τελειώνει με παύλα) δημιουργούν τα r κουτιά και οι n τελείες είναι οι n σφαίρες. Το γεγονός ότι κανένα κουτί δεν είναι άδειο μεταφράζεται στον κώδικα ότι κάθε παύλα (εκτός από την πρώτη και την τελευταία) είναι ανάμεσα σε τελείες.

Π.χ. ο κώδικας |··|··|···|·| σημαίνει ότι το πρώτο κουτί έχει δύο σφαίρες, το δεύτερο δύο το τρίτο τρείς και το τέταρτο μία. Ο κώδικας | | ···| · | δεν απαντάται διότι το πρώτο κουτί είναι **άδειο.** Οι r+1 λοιπόν παύλες δίνουν r-1 εσωτερικές παύλες (αφαίρεσα τις δύο ακραίες) οι οποίεςπρέπει να τοποθετηθούν στα n-1 διαστήματα μεταξύ των nτελείων. Αλλά τούτο γίνεται με $\binom{n-1}{r-1}$τρόπους.

Παράδειγμα: Για n=5, r=3 έχω 6 δυνατούς τρόπους που αντιστοιχούν στους κώδικες και στις διαμερίσεις

|•|•|•••|—>1   1   3

|•|••|••|—>1   2   2

|•|•••|•|—>1   3   1

|••|•|••|—>2   1   2

|••|••|•|—>2   2   1

|•••|•|•|—>3   1   1

<u>Παράδειγμα</u>**:**   Οι διαμερίσεις του 7 σε 5 μέρη είναι $\binom{6}{4}$=15

31111   11131 22111 21112 12112 11122

13111   11113 21211 12211 11221

1131121121 12121 11212 .

2.2. Διαγράμματα Ferrers

Μπορούμε να παραστήσουμε μία διαμέριση με ένα διάγραμμα. Στην παράσταση αυτή τα μέρη τοποθετούνται έτσι ώστε το μεγαλύτερο να αντιστοιχεί στην πρώτη γραμμή του διαγράμματος, το δεύτερο μεγαλύτερο στην δεύτερη γραμμή κ.ο.κ.

<u>Παράδειγμα:</u> Στην διαμέριση 6+4+2+2 αντιστοιχεί το διάγραμμα

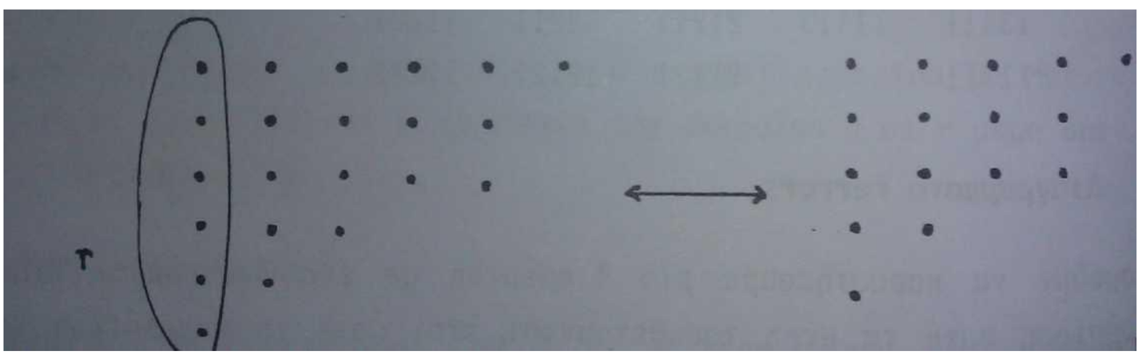
ενώ στην 5+2+2 το διάγραμμα

Τα διαγράμματα αυτά πρωτοχρησιμοποίησε ο NormanMacleadFerrers(1829-1903) και ονομάζονται διαγράμματα **Ferrers.** Η απλή αυτή ιδέα μας επιτρέπει να αποδεικνύουμε προτάσεις σχετικά με τις διαμερίσεις όπως φαίνεται και από το παρακάτω θεώρημα.

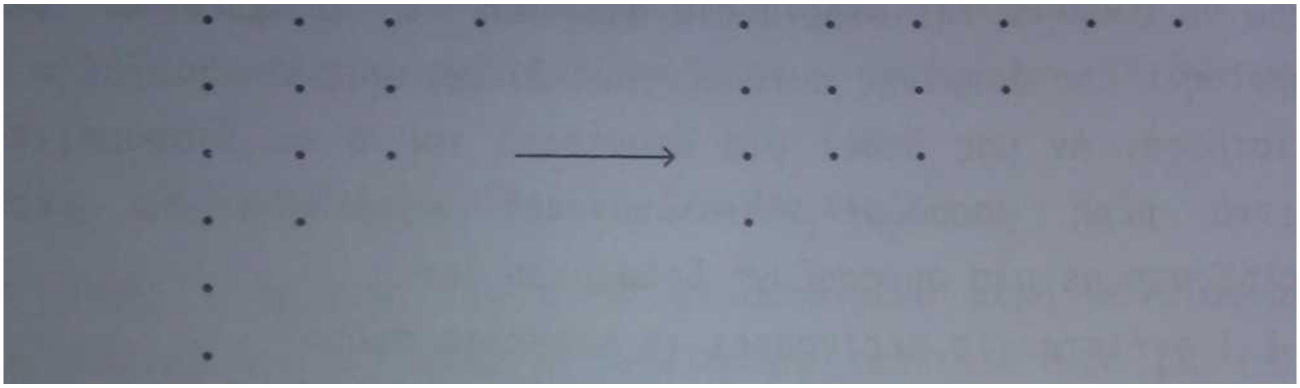
Θεώρημα 8. Το πλήθος των διαμερίσεων του n σε r το πολύ μέρηισούται με το πλήθος των διαμερίσεων του n+r σε rακριβώς μέρη**.**

Απόδειξη:

Έστω ότι έχουμε μία διαμέριση του n+rσε ακριβώς rμέρη. Το διάγραμμα Ferrersέχει λοιπόνακριβώς r γραμμές,άρα η άρα η πρώτη στήλη του διαγράμματος έχει r στοιχεία. Αν αφαιρέσουμε την στήλη αυτή θα έχουμε να διαμερίσουμε τον αριθμό n+r-r=n σε r το πολύ μέρη. Αντίστροφα αν πάρουμε μία διαμέριση του n σε r το πολύ μέρη, προσθέτοντας μία πρώτη στήλη που να αποτελείται από r σημεία καταλήγουμε σε μία διαμέριση του n+r σε ακριβώς r μέρη.
Αφού λοιπόν τα δύο σύνολα μπορούν να τεθούν σε 1-1 αντιστοιχία θα έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό. Τούτη φαίνεται στο σχήμα:



Το διάγραμμα **Ferrers** μιας διαμέρισης απεικονίζει μια απλή διαδικασία που μετασχηματίζει μία διαμέριση σε μία άλλη: Πράγματι εναλλάσσοντας τις γραμμές και τις στήλες μπορούμε να μετασχηματίσουμε την διαμέριση 433211 του 14 στην διαμέριση 6431



Δύο διαμερίσεις λ, λ' που προκύπτουν έτσι λέγονται **συζυγείς** διαμερίσεις. Αν λ=λ' η διαμέριση λέγεται **αυτοσυζυγής**όπως π.χ. η

Παρατηρούμε ότι αν η διαμέριση λ έχει σαν μεγαλύτερο μέρος το m, άρα το διάγραμμα της λ έχει m στοιχεία στην πρώτη γραμμή.

Δείξαμε λοιπόν ότι το πλήθος των διαμερίσεων του n με μεγαλύτερο μέρος ίσο με m ισούται με το πλήθος των διαμερίσεων του n σε ακριβώς m μέρη.
Το παρακάτω θεώρημα μας δίνει το πλήθος των αυτοσυζυγών διαμερίσεων του n. Η απόδειξή του κατασκευάζει πάλι μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ δύο συνόλων.

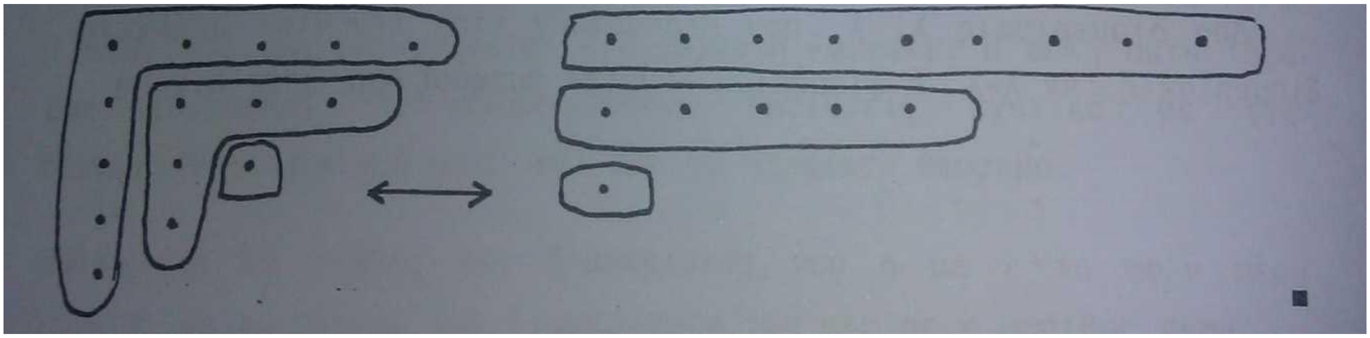
Θεώρημα 9. Το πλήθος των αυτοσυζυγών διαμερίσεων του n ισούται με το πλήθος των διαμερίσεων του n σε μέρη διακεκριμένα και περιττά.

Απόδειξη:

Έστω η αυτοσυζυγής διαμέριση λ (ήτοι λ=λ'). Προφανώς η πρώτη γραμμή και η πρώτη στήλη θα περιέχουν k στοιχεία η κάθε μία. Άρα το συνολικό πλήθος στοιχείων στην πρώτη γραμμή και στήλη θα είναι 2k-1 που είναι περιττός αριθμός. Αν αφαιρέσω την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη,το υπόλοιπο της δεύτερης γραμμής και της δεύτερης στήλης, με το ίδιο επιχείρημα θα έχει 2l-1 στοιχεία. Συνεχίζοντας έτσι θα καταλήξουμε σε μία διαμέριση του n όπου κάθε μέρος είναι περιττό και διαφορετικό των άλλων, (άρα διακεκριμένο). Μπορώ να θεωρήσω την διαδικασία αυτή σαν το «ίσιωμα» των τμημάτων σχήματος L της δοσμένης αυτοσυζυγούς διαμέρισης του η.

Αντίστροφα. Αν μας δοθεί μία διαμέριση του n σε διαφορετικά και περιττά μέρη μπορούμε "διπλώνοντας" κατάλληλα τα μέρη να καταλήξουμε σε μία αυτοσυζυγή διαμέριση του n.

Την 1-1 αντιστοιχία περιγράφει το παρακάτω σχήμα:



<u>Παράδειγμα</u>**:** P αυτοσυζυγής (20)=7.

Πράγματι, οι διαμερίσεις του 20 σε μονά διακεκριμένα μέρη είναι οι

19+1 $\rightarrow 1^8 2\ 10$

17+3 $\rightarrow 1^6 2\ 3\ 9$

15+5 $\rightarrow 1^4 2^2 4\ 8$

13+7 $\rightarrow 1^2 2^3 5\ 7$

11+9 $\rightarrow 2^4 6^2$

11+5+3+1 $\rightarrow 1^2 4^3 6$

9+7+3+1 $\rightarrow 2\ 4^2 5^2$

Μέσα στην απόδειξη του θεωρήματος 8 μπορούμε να "διαβάσουμε" και τον εξής αναγωγικό τύπο για τον υπολογισμό του p(n). Θεωρούμε μία διαμέριση του n σε k ακριβώς μέρη. Αφαιρώντας την πρώτη στήλη του διαγράμματος Ferrers που έχει k στοιχεία προκύπτει μία διαμέριση του n-k σε k το πολύ μέρη η οποία ισούται με μία διαμέριση του n-k σε k ακριβώς μέρη συν μία διαμέριση του n-k σε k-1 ακριβώς μέρη συν κ.ο.κ. ήτοι από τον κανόνα του αθροίσματος έχουμε**:**

$$p_k(n) = p_k(n-k) + p_{k-1}(n-k) + \cdots + p_1(n-k)$$

Είδαμε στο πόρισμα 3 ότι η γεννήτρια συνάρτηση για τις διαμερίσεις του η σε διακεκριμένα μέρη είναι:

$$D(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots$$

όπου για παράδειγμα η διαμέριση του 7=1+2+4 αντιστοιχεί στον όρο $\chi\cdot\chi^2\cdot\chi^3$ και συνεισφέρει μία μονάδα στον συντελεστή του χ^7.

Αν τώρα αλλάξουμε όλα τα πρόσημα από + σε - παίρνουμε την δυναμοσειρά

$$Q(x) = (1-x)(1-x^2)(1-x^3) = 1 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots$$

Εδώ πάλι κάθε διαμέριση του n σε διακεκριμένα μέρη συνεισφέρει στον συντελεστή του χ^n αλλά η συνεισφορά ισούται τώρα με $(-1)^d$ όπου d το πλήθος των διακεκριμένων μερών. Στο παράδειγμα μας η διαμέριση 7=1+2+4 αντιστοιχεί στον όρο $(-\chi)(-\chi^2)(-\chi^3) = (-1)^3 \chi^7$ και συνεισφέρει -1 στον συντελεστή του χ^7.

Γενικά κάθε διαμέριση του n με άρτιο πλήθος (διαφορετικών) μερών συνεισφέρει 1 στο συντελεστή q_nενώ κάθε διαμέριση του n με περιττό πλήθος συνεισφέρει -1 στον q_n .

Άρα $q_n = e_n - 0_n$

όπου e_n: το πλήθος των διαμερίσεων του n σε διακεκριμένα και άρτια μέρη

0_n: το πλήθος των διαμερίσεων του n σε διακεκριμένα και περιττά μέρη.

Αν κάνουμε τις πράξεις έχουμε

$$Q(x) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26}$$

όπου παρατηρούμε ότι:

i) οι μη μηδενικοί συντελεστές είναι +1 και -1 μόνο

ii) ο κανόνας των πρόσημων είναι +,+,-,- κ.ο.κ

iii) οι εκθέτες που εμφανίζονται στην δυναμοσειρά έχουν κάποια περιοδικότητα.

Στο επόμενο θεώρημα θα αποδείξουμε αυτές τις παρατηρήσεις.

Θεώρημα 10.

$$e_n - 0_n = \begin{cases} (-1)^m, \text{αν } n = \frac{1}{2}m(3m \pm 1), m \geq 1 \\ 0, \text{αλλιώς} \end{cases}$$

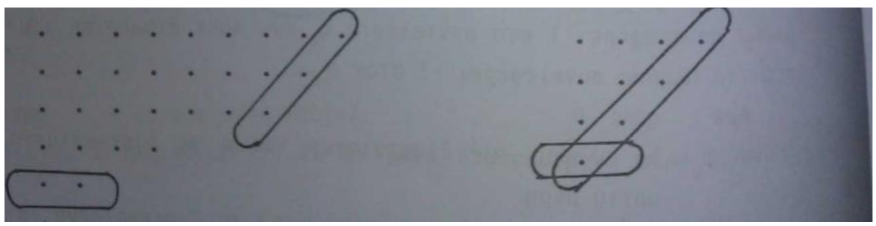
Απόδειξη: (F.Franklin)

Θα βρούμε κάποιο μετασχηματισμό $\lambda \to \lambda^*$ ο οποίος μας μετασχηματίζει μία διαμέριση της μορφής e_n σε διαμέριση της μορφής 0_n. Για τις περισσότερες τιμές του η ο μετασχηματισμός αυτός είναι 1 προς 1 (οπότε $0_n = e_n$) αλλά αυτό δεν ισχύει για $n = \frac{1}{2}m(3m \pm 1)$.

Έστω λοιπόν η διαμέριση λ με διακεκριμένα μέρη. Ορίζω S(λ) το μικρότερο μέρος της λ και t(λ) το μήκος της ακολουθίας με πρώτο όρο το μεγαλύτερο μέρος p, δεύτερο όρο (αν υπάρχει) το μέρος με p-1 στοιχεία, τρίτο όρο το μέρος με p-2 στοιχεία κ.ο.κ όπου συνεχίζουμε όσο υπάρχουν μέρη με στοιχεία κατά ένα λιγότερα από το προηγούμενο μέρος. Στο διάγραμμα **Ferrers** της λ, το t(λ) παρίσταται από την ακολουθία σημείων που αρχίζει από την πάνω δεξιά γωνία και συνεχίζει σε νοτιοδυτική διεύθυνση.

Σαν παράδειγμα οι δύο διαμερίσεις

λ=24789 και λ'=1234

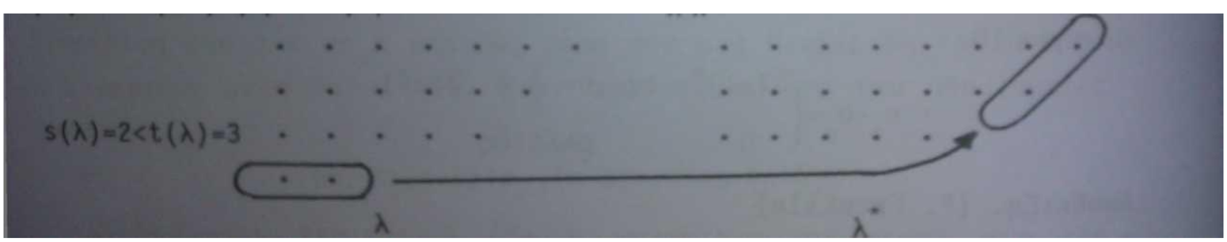


Έχουν s(λ)=2 καιt(λ)=3 ενώ έχουν s(λ')=1 και t(λ')=4.

Δεδομένης της λ οπροσδιορισμός της λ^* εξαρτάται από τα σχετικά μεγέθη των s(λ) και t(λ)

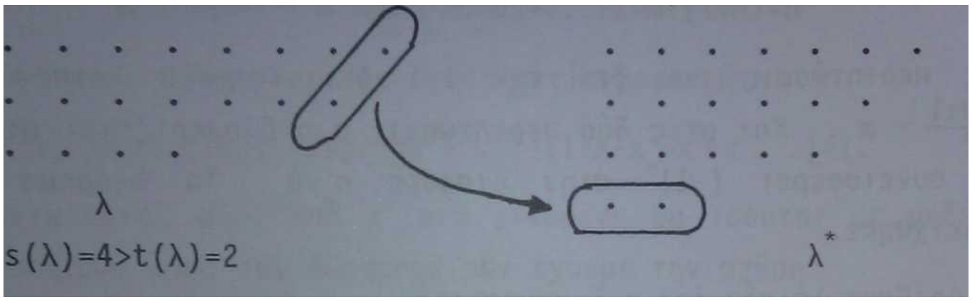
<u>Περίπτωση 1</u> s(λ)≤t(λ)

Στην περίπτωση αυτή η διαμέριση λ^* κατασκευάζεται αν αφαιρέσουμε την τελευταία γραμμή του διαγράμματος Ferrers της λ (που αντιστοιχεί στο s(λ) και προσθέτοντας ένα στοιχείο στα s(λ) μεγαλύτερα μέρη όπως φαίνεται και στο σχήμα

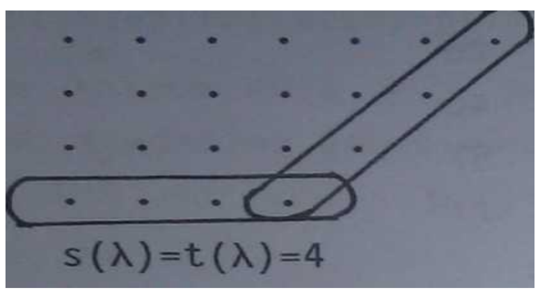


Περίπτωση 2$s(\lambda)>t(\lambda)$

Στην περίπτωση αυτή κατασκευάζουμε την διαμέριση λ^* βγάζοντας ένα στοιχείο από τα $t(\lambda)$ μεγαλύτερα μέρη και δημιουργώντας ένα νέο μικρότερο μέρος με $t(\lambda)$ στοιχεία όπως φαίνεται και στο σχήμα

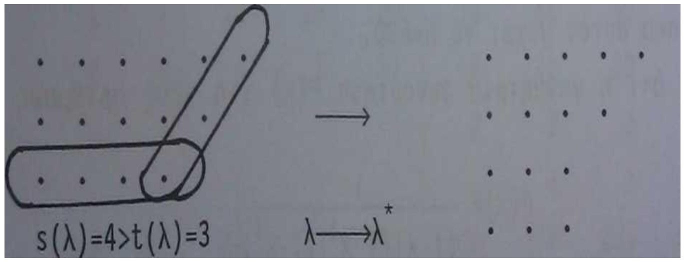


και στις δύο περιπτώσεις ο μετασχηματισμός $\lambda \rightarrow \lambda^*$ μεταβάλλει τον αριθμό των μερών κατά 1 άρα απεικονίζει μία διαμέριση με άρτιο πλήθος μερών σε διαμέριση με περιττό πλήθος μερών και αντίστροφα. Άρα αν η λ^* είναι διαμέριση με διαφορετικά μέρη ο μετασχηματισμός $\lambda \rightarrow \lambda^*$ είναι 1-1. Σε δύο όμως περιπτώσεις αυτό δεν συμβαίνει. Στην περίπτωση 1 μπορεί τα τμήματα του διαγράμματος Ferrers που απεικονίζουν τα $s(\lambda)$ και $t(\lambda)$ να έχουν κοινά στοιχεία όπως φαίνεται και στο σχήμα



Αλλά τότε από την κατασκευή της περίπτωσης 1 προκύπτει ότι η λ^* δεν είναι διαμέριση. Αυτό συμβαίνει όταν $s(\lambda) = m$ και $t(\lambda)=m$ και τα m μέρη είναι m, m+1, m+2,..., 2m-1 (2m- 1-m+1=m). Αλλά τότε $n=m+(m+1)+\ldots+(2m-1)=(m+2m-1)\cdot m/2=m(3m-1)/2$.

Στην περίπτωση 2 είναι πάλι δυνατόν τα $s(\lambda)$ και $t(\lambda)$ να έχουν κοινά στοιχεία οπότε η λ^* είναι μεν διαμέριση αλλά όχι με διακεκριμένα μέρη όπως φαίνεται και στο σχήμα



Πράγματι τα δύο μικρότερα μέρη της λ^* είναι ίσα. Αυτό όμως συμβαίνει όταν s(λ)=m+1 υπάρχουντα m μέρη m+1, m+2,...,2m και t(λ)=m. Αλλά τότεn=(m+1)+(m+2)+….+2m=(m+2m+1)·m/2=m(3m+1)/2.

Στις περιπτώσεις που δεν έχω 1-1 αντιστοιχία λοιπόν έχουμε n= m(3m+1)/2. Και στις δύο περιπτώσεις ο n διαμερίζεται σε m μέρη και συνεισφέρει $(-1)^m$ στην διαφορά $e_n - 0_n$· Το θεώρημα λοιπόν αποδείχθηκε.

Δείξαμε λοιπόν ότι η δυναμοσειρά

$$Q(x) = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)$$

έχει σαν συντελεστή του χ^n την παράσταση $e_n - 0_n$ η οποία ισούται με 0 εκτός από τους όρους χ^n με n= m(3m$\pm$1)/2. Ο παρακάτω πίνακας

δίνει τους εκθέτες:

m	m(3m-1)/2	m(3m+1)/2	πρόσημο
M=1	1	2	-
2	5	7	+
3	12	15	-
4	22	26	+
5	35	40	-
6	51	57	+
7	70	77	-

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να γραφτεί και

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{\infty}(1 - x^{i}) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m}\left(x^{\frac{1}{2m(3m-1)}} + x^{\frac{1}{2m(3m+1)}}\right).$$

Στο υπόλοιπο της παραγράφου θα δούμε πως με την βοήθεια του θεωρήματος 10 μπορούμε να υπολογίσουμε σχετικά εύκολα το p(n).

Ο Ταγματάρχης PercyAlexanderMacMahon (1854-1929) χρησιμοποίησε την μέθοδο αυτή (1918) για να υπολογίσει το p(η) μέχρι το n=200 και βρήκε p(200)=3.972.999.029.388. OGupta (1935) επεξέτεινε τον πίνακα αυτόν μέχρι το n=600. Είδαμε ότι η γεννήτρια συνάρτηση P(χ) για τους αριθμούς p(η) είναι η

$$P(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

ενώ από το θεώρημα 10 η δυναμοσειρά

$$Q(x) = (1-x)(1-x^2)(1-x^3) \ldots.$$

είναι η γεννήτρια συνάρτηση για τους αριθμούς $q_n = e_n - o_n$

Αλλά οι δύο αυτές δυναμοσειρές είναι αντίστροφες ήτοι

$P(\chi) * Q(\chi) = (1+p(1)\chi+p(2)\chi^2+\ldots) \cdot (1-\chi-\chi^2+\chi^5+\chi^2\ldots)=1.$

Άρα ο συντελεστής p(n) του χ^n στο γινόμενο θα ισούται με μηδέν. Από το γινόμενο όμως των δυναμοσειρών έχουμε την σχέση:

p(n)-p(n-1)-p(n-2)+p(n-5)+p(n-7)-p(n-12)-p(n-15) + .. .=0.

Άρα p(η)=p(n-1)+p(n-2)-p(n-5)-p(n-7)+p(n-12)+p(n-15)+...

όπου στο δεύτερο μέλος έχω πεπερασμένο άθροισμα αφού εμφανίζονται όροι της μορφής p(n-k) μόνο με n-k≥0.

Π.χ. Για n=8 έχουμε P(8) =p(7)+p(6)-p(3)-p(1) p(13)=p(12)+p(11)-p(8)-p(6)+p(1)

p(20)=p(19)+p(18)-p(15)-p(13)+p(8)+p(5).

Η σχέση λοιπόν αυτή μαζί με τις αρχικές τιμές που βρήκαμε στ αρχή του κεφαλαίου μας δίνουν τις τιμές του p(n)

p(0)=1 (εξ ορισμού), p(1)=1, p(2)=2, p(3)=3, p(4)=5, p(5) =7, p(6)=11, p(7)=15.

Παράδειγμα:p(8)=15+11-3-1=22.

Ο παρακάτω πίνακας δίνει τις τιμές του p(n) για $8 \leq n \leq 18$ και στηρίζεται προφανώς στην παραπάνω σχέση:

n	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
P (n -1)	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297
P (n -2)	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231
P (n - 5)	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101
P (n -7)	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56
P (n - 12)	-	-	-	1	1	2	3	5	7	11
P (n - 15)	-	-	-	-	-	-	1	1	2	3
P (n)	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385

Κεφάλαιο 3

Ειδικές μορφές διαμερίσεων και λυμένα παραδείγματα

3.1 Υπολογισμός γεννήτριας συνάρτησης

Στην συνέχεια θα αποκτήσουμε μια φόρμουλα για τη γεννήτρια συνάρτηση

$$P(x) = p(0) + p(l)x + p(2)x^2 + \ldots .$$

όπου p (n) είναι ο αριθμός των διαμερισμάτων των n και από συνθήκη, p (0) = 1.
Το σημείο εκκίνησης είναι ο τύπος

$$(1 — x^i)^{-1} = 1 + x^i + x^{2i} + x^{3i} + \ldots .$$

ο οποίος θα πρέπει να θεωρηθεί ως μια εξίσωση για τον αντίστροφο 1 - x * στο πλαίσιο της σειράς C [[X]]. Ο τύπος μπορεί να επιτευχθεί με υπολογισμό, ή αντικαθιστώντας το x με το x^i ($i \geq 1$) στην τυποποιημένη μέθοδο για $(1-x)^{-1.}$ Για τους σκοπούς μας, το κλειδί είναι η παρατήρηση ότι αυτή η σειρά είναι η γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Fibonacci της διαμέρισης του απλού τύπου

$$f_n \sim p(\text{n|n κάθε τμήμα είναι ίση με j}).$$

Σαφώς δεν υπάρχουν τέτοιες διαμερίσεις , εκτός αν το n είναι πολλαπλάσιο του i, όταν υπάρχει μόνο μία διαμέριση $n = i + i + \ldots + i$.
Με άλλα λόγια,

$$f_n = \begin{cases} 1, \alpha\nu n = \alpha i\mu\varepsilon\alpha = 0{,}1{,}2 \\ \quad 0, \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

Έτσι, με βάση τον αρχικό τύπο η γεννήτρια συνάρτηση για την f_n είναι

$$F(x) = (1 - x^i)^{-1}$$

Υποθέτοντας ότι μας δίνονται δύο διαφορετικοί θετικοί ακέραιοι i και j και έστω

$$h_n = p(n|κάθεμέροςείναιίσομειήj)$$

<u>Τότε ποια είναι η γεννήτρια συνάρτηση H(x);</u>

Έστω λοιπόν η συνάρτηση f_n όπως πρίν και έστω συνάρτηση g_n η οποία δηλώνει το πλήθος των διαμερίσεων του ακεραίου n με κάθε μέρος της διαμέρισης να ισούται με j. Έχουμε δείξει ότι

$$F(x) = (1 - x^i)^{-1}$$

Και σύμφωνα με τους ίδιους κανόνες η γεννήτρια συνάρτηση G(x) της g_n είναι ίση με $(1 - x^i)^{-1}$. Γνωρίζοντας ότι h_n είναι το πλήθος των τρόπων γραφής του ακεραίου N ως το άθροισμα των r και n-r , όπου r είναι η διαμέριση σε i μέρη και n-r η διαμέριση σε j μέρη. Τότε, h_n είναι το πλήθος των όρων $f_r g_{n-r}$, η οποία είναι

$$h_n = fog_n + f_1 g_{n-1} + \cdots + f_n g_0$$

Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις προκύπτει

$$H(x) = F(x)G(x) = (1 - x^i)^{-1}(1 - x^j)^{-1}$$

<u>Παράδειγμα</u>

Θέτωντας i=2 και j=3 . Το γινόμενο των δυναμοσειρών για $(1 - x^2)^{-1}$ και $(1 - x^3)^{-1}$ είναι

(l + x^2 + x^4+x^6+x^8+x^{10}+ …)(l + x^3 + x^6+x^9+….)= l + x^2+x^3 + x^4+x^5 + 2x^6+x^7+x^8 + 2x^9+2x^{10}+…..

Ο συντελεστής του x^{10} είναι 2, και προέρχεται από το γινόμενο x^4*$χ^6$ και x^{10}*1. Αυτά τα γινόμενα οδηγούν στα αθροίσματα

10 = 4 + 6 = 2 + 2 + 3 + 3, 10= 10 + 0 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2

Όπου με τη σειρά τους αντιστοιχούν σε δύο τρόπους γραφής του 10 ως μία διαμέριση με κάθε μέρος ίσο με 2 ή 3.

Είναι πλέον εύκολο να καταγράφουμε γεννήτριες συναρτήσεις για τους αριθμούς των διαμερίσεων όπου κάθε όρος ισούται με όρο από ένα συγκεκριμένο πλήθος αριθμών.

Παράδειγμα

$$\alpha_n = p(n | κάθεμέροςείναιίσομειήjήk)$$

Προφανώς, η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση είναι

$$A(x) = (1 - x^i)^{-1}(1 - x^j)^{-1}(1 - x^k)^{-1}$$

Παράδειγμα

Με πόσους τρόπους μπορούν εκατό ευρώ να διαχωριστούν σε 25, 10 και 5 ευρώ;

Λύση

Το ερώτημα αναφέρεται στον αριθμό των διαμερίσεων του ακεραίου 100 με χρήση των αριθμών 5,10,25. Έτσι, η λύση είναι ο συντελεστής του x^{100} της εξίσωσης

$$(1 - x^5)^{-1}(1 - x^{10})^{-1}(1 - x^{25})^{-1}$$

Θέτωντας, y=x^5έχουμε

$$(1 - y)^{-1}(1 - y^2)^{-1}(1 - y^5)^{-1}$$

πουισούταιμε

$$(l + y^2+y^4\text{-f } y^6+y^8+y^{10}+y^{12}+y^{14}+y^{16}+ y^{18}+y^{20}+\ldots)X(l + y^5 + y^{10}+y^{15} + y^{20} + \ldots)$$

Ένας καλός τρόπος υπολογισμού των συντελεστών είναι η χρήση του παρακάτω πίνακα

$1yy^2y^3y^4$	y^5…..	y^{10}…..	y^{15}…..	y^{20}	
10101	01010	10101	01010	1	
	10101	01010	10101	0	$(\times y^5)$
		10101	01010	1	$(\times y^{10})$
			10101	0	$(\times y^{15})$
				1	$(\times y^{20})$
10101	11111	21212	22222	3	

Έτσι,η σχέση

$$(1-y^2)^{-1}(1-y^5)^{-1}$$

Είναι ισοδύναμη με

$$(1 + y^2+ y^4+ y^5 + y^6+ y^7 + y^8 + y^9+2y^{10} + y^{11} + 2y^{12} + y^{13} + 2y^{14} + 2y^{15}+2y^{16}+2y^{17} + 2y^{18} + 2y^{19}+3y^{20} + \ldots)$$

Ο όρος $(1-y)^{-1}$ είναι ισοδύναμος με

$$(1 + y + y^2+ \ldots + y^{20}+ \ldots)$$

Έτσι πολλαπλασιάζοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις και αθροίζοντας τους αντίστοιχους συντελεστές ο προκύπτων αριθμός είναι 29.

Θεώρημα

Η γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών p(n) της διαμέρισης του ακεραίου n μπορεί να γραφτεί ως το άπειρο γινόμενο

$$P(x) = \prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)^{-1}$$

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε m έναν θετικό ακέραιο και p^m (n) το πλήθος των διαμερίσεων του ακεραίουn του οποίου κάθε όρος είναι ένας από τους αριθμούς 1,2,….,m. Τότε το πλήθος p^m (n) των τρόπων έκφρασης του n ως άθροισμα είναι

$$n = s_1 + s_2 + \cdots . s_m$$

Όπου κάθε όρος $s_i(1 \leq i \leq m)$ είναι από μόνο του ένα άθροισμα των αριθμών i. Αυτός ο όρος είναι ισοδύναμος με το πλήθος των τρόπων επιλογής του όρου x^{s_i} από κάθε δυναμοσειρά της μορφής $(1-x^i)^{-1}$ με τέτοιον τρόπο ώστε το γινόμενο των όρων να είναι x^n. Με άλλα λόγια, η γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών p^m (n) είναι

$$p^m(n) = (1-x)^{-1}(1-x^2)^{-1} \dots \dots (1-x^m)^{-1}$$

Για κάθε δοθείσα τιμή n έχουμε $p(n) = p^n(n)$, αφού η διαμέριση του n δεν μπορεί να περιέχει όρους μεγαλύτερους από n. Το γεγονός αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο όρος

$$(1-x^i)^{-1} = 1 + x^i + x^{2i} + \cdots ..$$

με i>n δεν συνεισφέρει στον συντελεστή του x^n στο παραπάνω γινόμενο.Με άλλα λόγια, ο συντελεστής του x^n στο P(x) είναι ο ίδιος με εκείνον του x^n στο $P^n(x)$ και αυτό συμβαίνει αφού $p(n) = p^n(n)$. Έστι, η συνάρτηση P(x) είναι γεννήτρια συνάρτηση του p(n).

3.2 Γεννήτριες συναρτήσεις με περιορισμένες διαμερίσεις

Σε αυτήν την ενότητα θα παραταθούν κάποιες ειδικές περιπτώσεις διαμερίσεων ακεραίων , για παράδειγμα αν θεωρήσουμε ότι θέλουμε κάθε όρος της διαμέρισης να ορίζεται μέχρι το πολύ k φορές. Τότε η συνεισφορά των όρων που ισοδυναμούν με i εκφράζεται από τους όρους του πολυωνύμου

$$1 + x^{i} + x^{2i} + \cdots . + x^{ki}$$

Και όχι στην δυναμοσειρά

$$(1 - x^{i})^{-1} = 1 + x^{i} + x^{2i} + \cdots ..$$

Με αποτέλεσμα η γεννήτρια συνάρτηση να είναι

$$(1 + x + \cdots + x^{k})(1 + x^{2} + \cdots + x^{2k})(1 + x^{3} + \cdots + x^{3k}) \ldots.$$

Εφόσον,

$$1 + x^{i} + x^{2i} + \cdots . + x^{ki} = (1 - x^{(k+1)i})/(1 - x^{i})$$

Μπορούμε να γράψουμε την γεννήτρια συνάρτηση στη μορφή

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1 + x^{i} + x^{2i} + \cdots . + x^{ki}) = \prod_{i=1}^{\infty}(1 - x^{(k+1)i})/(1 - x^{i})$$

Στην πράξη όταν k=1, παράγεται η γεννήτρια συνάρτηση για τους αριθμούς των διαμερίσεων με διακριτούς όρους, όπως διακρίνεται και στον επόμενο πίνακα όπου αναφέρονται κάποιες από τις χρήσιμες γεννήτριες συναρτήσεις

u_n	U(x)
P(n|κάθε όρος είναι διακριτός)	$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)$
P(n|κάθε όρος είναι περιττός)	$1/(1-x)(1-x^3)(1-x^5)$
P(n|κάθε όρος είναι άρτιος)	$1/(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)$
P(n|κάθε όρος είναι ≤ m)	$1/(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^m)$

Παράδειγμα

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των γεννητριών συναρτήσεων να αποδειχθεί ότι

P(n|κάθε όρος είναι διακριτός)= P(n|κάθε όρος είναι περιττός)

Λύση

Έστω D(x),O(x) οι αντίστοιχες γεννήτριες συναρτήσεις , έχουμε

$$D(x)= (1+x)(1+x^2)(1+x^3)$$

$$O(x)= 1/(1-x)(1-x^3)(1-x^5)$$

Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε ότι οι παραπάνω δύο δυναμοσειρές είναι ίδιες, για αυτό το σκοπό θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα

$$1-y=\frac{(1-y^2)}{(1-y)}$$

Έτσι,

$$D(x)= (1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)/ (1-x)(1-x^2)(1-x^3)= 1/(1-x)(1-x^3)(1-x^5)$$

αφού κάθε όρος της μορφής $1-x^{2i}$μπορεί να απλοποιηθεί. Οπότε D(x)=O(x), οπότε και οι ακολουθίες των συντελεστών τους θα είναι ίσες.

Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Ένα φορτίο αποτελείται από τρία διαφορετικά είδη κιβωτίων, 20 από το κιβώτιο τύπου Α (με βάρος 100 κιλά), 10 από το κιβώτιο τύπου Β (με βάρος 500 κιλά) και 14 από το κιβώτιο τύπου Γ (με βάρος 1000 κιλά). Σχηματίστε τις γεννήτριες συναρτήσεις και προσδιορίστε τους όρους των οποίων οι συντελεστές δίνουν:

1. Τους δυνατούς τρόπους με τους οποίους μπορούν να φορτωθούν 10 από τα κιβώτια σε ένα φορτηγό αν υπάρχει περιορισμός να φορτωθούν το λιγότερο 5 από τα Α, το πολύ 5 από τα Β και το πολύ 3 από τα Γ.
2. Τους δυνατούς τρόπους με τους οποίους μπορεί να φορτωθεί ένα φορτηγό αν το ωφέλιμο φορτίο του είναι 5 τόνοι .
3. Τους δυνατούς τρόπους με τους οποίους μπορούν να μοιραστούν τα κιβώτια σε δύο φορτηγά ώστε το κάθε ένα να πάρει τουλάχιστον 5 κιβώτια από το κάθε είδος και τα μισά (22) κιβώτια συνολικά .

Απάντηση:

1. Στο φορτηγό μπορούν να φορτωθούν 5 έως 10 κιβώτια Α, 0 έως 5 κιβώτια Β και 0 έως 3 κιβώτια Γ. Οι απαριθμητές λοιπόν για τα κιβώτια Α,Β,Γ είναι αντίστοιχα:

$$\left(x^5+x^6+x^7+\ldots+x^{10}\right)$$
$$\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\right)$$
$$\left(1+x+x^2+x^3\right)$$

ενώ η γεννήτρια συνάρτηση προκύπτει ως γινόμενο των τριών απαριθμητών:

$$\left(x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}\right)\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\right)\left(1+x+x^2+x^3\right)$$

Ο όρος της γεννήτριας συνάρτησης του οποίου ο συντελεστής δίνει το ζητούμενο αποτέλεσμα είναι ο x^{10}. Θα πρέπει να προσέξουμε εδώ ότι παρά το γεγονός ότι τα διαθέσιμα κιβώτια Α,Β,Γ είναι 20, 10 και 14 αντίστοιχα, οι μεγαλύτερες δυνάμεις του x στους απαριθμητές είναι 10,5 και 3. Στον πρώτο απαριθμητή χρησιμοποιούμε ως μεγαλύτερη δύναμη την x^{10} αφού 10 είναι τα συνολικά κιβώτια που θα φορτωθούν στο φορτηγό. Αν χρησιμοποιούσαμε ως απαριθμητή για τα κιβώτια Α τον

$$\left(x^5+x^6+x^7+\ldots+x^{20}\right)$$

ή

$$\left(x^5+x^6+x^7+\ldots+x^{20}+\ldots.\right)$$

θα δίναμε επίσης σωστή απάντηση αφού οι επιπλέον όροι δεν αλλοιώνουν το συντελεστή του x^{10}. Στους απαριθμητές για τα κιβώτια Β και Γ χρησιμοποιούμε ως μεγαλύτερες δυνάμεις τις 5 και 3 αντίστοιχα αφού αυτό είναι και το μέγιστο πλήθος κιβωτίων που επιτρέπεται να φορτώσουμε στο φορτηγό (παρά το γεγονός ότι τα διαθέσιμα κιβώτια είναι περισσότερα).

2. Χρησιμοποιώντας κιβώτια Α μπορούμε να φορτώσουμε 0,100,200,...,2000 κιλά. Χρησιμοποιώντας κιβώτια Β μπορούμε να φορτώσουμε 0,500,1000,...,5000 κιλά. Χρησιμοποιώντας κιβώτια Γ μπορούμε να φορτώσουμε 0,1000,2000,...5000 κιλά. (Τα διαθέσιμα κιβώτια Γ επαρκούν για μεγαλύτερο φορτίο, μας περιορίζει όμως το ωφέλιμο φορτίο του φορτηγού που είναι 5000 κιλά). Οι απαριθμητές λοιπόν για τα κιβώτια Α,Β,Γ είναι αντίστοιχα:

$$\left(1+x^{100}+x^{200}+\ldots+x^{2000}\right)$$
$$\left(1+x^{500}+x^{1000}+\ldots.+x^{5000}\right)$$
$$\left(1+x^{1000}+x^{2000}+\ldots+x^{5000}\right)$$

ενώ η γεννήτρια συνάρτηση προκύπτει ως γινόμενο των τριών απαριθμητών:
$\left(1+x^{100}+x^{200}+\ldots+x^{2000}\right)\left(1+x^{500}+x^{1000}+\ldots.+x^{5000}\right)\left(1+x^{1000}+x^{2000}+\ldots+x^{5000}\right)$ Ο όρος της γεννήτριας συνάρτησης του οποίου ο συντελεστής δίνει το ζητούμενο αποτέλεσμα είναι ο x^{5000}.

3. Φορτώνονται αρχικά στα δύο φορτηγά 10 κιβώτια Α, 10 κιβώτια Β και 10 κιβώτια Γ. Μένουν λοιπόν 10 κιβώτια Α και 4 κιβώτια Γ που θα πρέπει να φορτωθούν στα δύο

φορτηγά ώστε σε κάθε ένα να φορτωθούν 7 ακόμη κιβώτια (εκτός από τα 5Α, 5Β και 5Γ που έχουν ήδη φορτωθεί). Θα πρέπει να προσέξουμε εδώ ότι οποιαδήποτε επιλογή για το ένα φορτηγό καθορίζει με ακρίβεια τον τρόπο φόρτωσης του δεύτερου φορτηγού, δηλαδή για κάθε τρόπο φόρτωση του πρώτου φορτηγού υπάρχει ένας μόνο τρόπος για να φορτωθεί το δεύτερο φορτηγό. Άρα αρκεί να βρούμε τους τρόπους φόρτωσης του πρώτου φορτηγού, που συμπίπτουν με τους τρόπους φόρτωσης και των δύο φορτηγών. Το πρόβλημα λοιπόν διατυπώνεται ως εξής:

Έχουμε στη διάθεσή μας 10 κιβώτια Α και 4 κιβώτια Γ. Με πόσους τρόπους μπορούμε να φορτώσουμε 7 κιβώτια σε ένα φορτηγό;

Οι απαριθμητές για τα κιβώτια Α,Γ είναι αντίστοιχα:

$$\left(1+x+x^2+\ldots+x^7\right)$$
$$\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)$$

ενώ η γεννήτρια συνάρτηση προκύπτει ως γινόμενο των δύο απαριθμητών:

$$\left(1+x+x^2+\ldots+x^7\right)\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)$$

Ο όρος της γεννήτριας συνάρτησης του οποίου ο συντελεστής δίνει το ζητούμενο αποτέλεσμα είναι ο x^7. Στον πρώτο απαριθμητή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε επιπλέον όρους (με μεγαλύτερες δυνάμεις του x)αφού με την προσθήκη των όρων αυτών δεν επηρεάζεται ο συντελεστής του x^7 στη συνολική γεννήτρια συνάρτηση. Στον δεύτερο όμως απαριθμητή η προσθήκη επιπλέον όρων $\left(x^5, x^6, \ldots\right)$ θα οδηγήσει σε λανθασμένο υπολογισμό του συντελεστή του x^7.

<u>Παράδειγμα 2</u>

Σχηματίστε τη γεννήτρια συνάρτηση και προσδιορίστε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει τους τρόπους με τους οποίους 40 διακεκριμένοι μαθητές μπορούν να μεταφερθούν από 3 διαφορετικά σχολικά λεωφορεία αν στο πρώτο λεωφορείο πρέπει να μπουν τουλάχιστον 5 μαθητές, στο δεύτερο ζυγός αριθμός μαθητών και στο τρίτο μονός αριθμός μαθητών.

Απάντηση:

Το πρόβλημα είναι ακριβώς αντίστοιχο με τους τρόπους σχηματισμού λέξεων μήκους 40 χρησιμοποιώντας τρία γράμματα Α,Β,Γ. Κάθε θέση 1 έως 40 στη λέξη αντιπροσωπεύει έναν μαθητή, ενώ κάθε γράμμα αντιπροσωπεύει ένα λεωφορείο. Για παράδειγμα αν σε μια λέξη το πρώτο γράμμα είναι Α, αυτό σημαίνει ότι μαθητής που έχουμε αντιστοιχίσει στη θέση 1 θα μπει στο λεωφορείο Α. Φυσικά θα πρέπει να ληφθούν υπόψη οι περιορισμοί, σύμφωνα με τους οποίους θα πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον 5 εμφανίσεις του Α στη λέξη, ζυγός αριθμός εμφανίσεων του Β και μονός αριθμός εμφανίσεων του Γ.

Προφανώς πρόκειται για πρόβλημα διατάξεων (μας ενδιαφέρει η σειρά τοποθέτησης των γραμμάτων) οπότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε εκθετική γεννήτρια συνάρτηση. Οι απαριθμητές για τα λεωφορεία Α, Β, Γ είναι αντίστοιχα:

$$\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}....+\frac{x^{40}}{40!}\right)$$

$$\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+....+\frac{x^{40}}{40!}\right)$$

$$\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+....+\frac{x^{39}}{39!}\right)$$

ενώ η γεννήτρια συνάρτηση προκύπτει ως γινόμενο των τριών απαριθμητών:

$$\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}....+\frac{x^{40}}{40!}\right)\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+....+\frac{x^{40}}{40!}\right)\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+....+\frac{x^{39}}{39!}\right)$$

Ο όρος της γεννήτριας συνάρτησης του οποίου ο συντελεστής δίνει το ζητούμενο αποτέλεσμα είναι ο $\frac{x^{40}}{40!}$

Μπορούμε να προσέξουμε ότι η χρησιμοποίηση μεγαλύτερων δυνάμεων του xδεν αλλοιώνει την τιμή του συντελεστή. Η ακόλουθη γεννήτρια συνάρτηση λοιπόν είναι σωστή όσον αφορά στον υπολογισμό του $\frac{x^{40}}{40!}$:

$$\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}....+\frac{x^{40}}{40!}+...\right)\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+....+\frac{x^{40}}{40!}+...\right)\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+....+\frac{x^{39}}{39!}+...\right)$$

Παράδειγμα 3

Έστω ότι θέλουμε να παρκάρουμε 500 αυτοκίνητα σε τρία διαφορετικά πάρκινγκ, που το πρώτο έχει μόνον 80 θέσεις και τα άλλα είναι των 250 θέσεων το καθένα.

1. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να το κάνουμε; (Θεωρήστε ότι δεν έχει σημασία σε ποιο πάρκινγκ παρκάρει κάθε αυτοκίνητο, ή με τι σειρά παρκάρουν στο ίδιο πάρκινγκ). Να γραφεί η σχετική γεννήτρια συνάρτηση, να προσδιοριστεί ο όρος του οποίου ο συντελεστής δίνει το ζητούμενο και να επιλυθεί η γεννήτρια ώστε να βρεθεί η τιμή του συντελεστή.
2. Αν σας δοθεί η γεννήτρια συνάρτηση
   $(1+x+x^2+...+x^{80}+...)(1+x+x^2+...+x^{250}+...)(1+x+x^2+...+x^{250}+...)$
   ο συντελεστής του x^{500} περιέχει την σωστή απάντηση στο παραπάνω πρόβλημα και γιατί;
3. Αν χρειάζεται να παρκάρουμε μόνο 200 αυτοκίνητα και σας δοθεί η γεννήτρια συνάρτηση $(1+x+x^2+...+x^{80})(1+x+x^2+...+x^{250}+...)(1+x+x^2+...+x^{250}+...)$ ο συντελεστής του x^{200} περιέχει την σωστή απάντηση στο πρόβλημα και γιατί;

Απάντηση:

1. Σύμφωνα με την εκφώνηση του ερωτήματος τα αυτοκίνητα θεωρούνται ως μη διακεκριμένα αντικείμενα. Επομένως αν ονομάσουμε Α, Β, Γ τα τρία πάρκινγκ, τότε το Α μπορεί να δεχτεί από 1 έως και 80 αυτοκίνητα, ενώ τα άλλα δύο από 1 έως και 250 αυτοκίνητα. Οι απαριθμητές λοιπόν για τα Α,Β,Γ είναι αντίστοιχα:

$\left(1+x+x^2+...+x^{80}\right)$

$\left(1+x+x^2+...+x^{250}\right)$

$\left(1+x+x^2+...+x^{250}\right)$

ενώ η γεννήτρια συνάρτηση προκύπτει ως γινόμενο των τριών απαριθμητών:

$$\left(1+x+x^2+...+x^{80}\right)\left(1+x+x^2+...+x^{250}\right)\left(1+x+x^2+...+x^{250}\right)$$

Ο όρος της γεννήτριας συνάρτησης του οποίου ο συντελεστής δίνει το ζητούμενο αποτέλεσμα είναι ο x^{500}.

Προχωρούμε στην επίλυση της παραπάνω γεννήτριας συνάρτησης για την εύρεση αυτού του συντελεστή. Έχουμε ότι

$$\left(1+x+x^2+...+x^{80}\right)\left(1+x+x^2+...+x^{250}\right)\left(1+x+x^2+...+x^{250}\right)=$$

$$\left(\frac{1-x^{81}}{1-x}\right)\left(\frac{1-x^{251}}{1-x}\right)\left(\frac{1-x^{251}}{1-x}\right)=\left(\frac{1-x^{81}}{1-x}\right)\left(\frac{1-x^{251}}{1-x}\right)^2=\frac{\left(1-x^{81}\right)\left(x^{502}-2x^{251}+1\right)}{\left(1-x\right)^3}=$$

$$(x^{502}-2x^{251}+1-x^{583}+2x^{332}-x^{81})(1-x)^{-3}=$$

$$(x^{502}-2x^{251}+1-x^{583}+2x^{332}-x^{81})\sum_{k=0}^{\infty}\binom{3+k-1}{k}x^k=$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\binom{3+k-1}{k}x^{k+583}+\sum_{k=0}^{\infty}\binom{3+k-1}{k}x^{k+502}+2\sum_{k=0}^{\infty}\binom{3+k-1}{k}x^{k+332}-2\sum_{k=0}^{\infty}\binom{3+k-1}{k}x^{k+251}$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\binom{3+k-1}{k}x^{k+81}+\sum_{k=0}^{\infty}\binom{3+k-1}{k}x^{k}$$

Εξετάζοντας την παραπάνω παράσταση βλέπουμε ότι ο πρώτος και ο δεύτερος όρος δεν μπορούν να μας δώσουν δύναμη για το x^{500} (αφού δίνουν δυνάμεις μεγαλύτερες του x^{583} ο πρώτος και του x^{502} ο δεύτερος αντίστοιχα). Ο τρίτος όρος θα μας δώσει το x^{500} όταν *κ=168* (αφού $x^{168+332}=x^{500}$) και αντίστοιχα ο τέταρτος όταν *κ=249*, ο πέμπτος όταν *κ=419* και ο έκτος όταν *κ=500*. Άρα ο ζητούμενος συντελεστής είναι ο

$$2\binom{3+168-1}{168}-2\binom{3+249-1}{249}-\binom{3+419-1}{419}+\binom{3+500-1}{500}=$$

$$2\binom{170}{168}-2\binom{251}{249}-\binom{421}{419}+\binom{502}{500}=28730-62750-88410+125751=3321$$

2. Ο συντελεστής του x^{500} στην παρακάτω γεννήτρια συνάρτηση

$$(1+x+x^2+...+x^{80}+...)(1+x+x^2+...+x^{250}+...)(1+x+x^2+...+x^{250}+...)$$

δεν περιέχει τη σωστή απάντηση καθώς σε αυτόν συνεισφέρουν μη επιτρεπόμενες επιλογές (περιπτώσεις με περισσότερα από 80 αυτοκίνητα στο πρώτο πάρκινγκ και περισσότερα από 250 στο δεύτερο και στο τρίτο). Ο συντελεστής λοιπόν του x^{500} δεν είναι ο ίδιος με αυτόν της σωστής γεννήτριας συνάρτησης του πρώτου ερωτήματος.

3. Ο συντελεστής του x^{200} στη γεννήτρια συνάρτηση

$$(1+x+x^2+...+x^{80})(1+x+x^2+...+x^{250}+...)(1+x+x^2+...+x^{250}+...)$$

δίνει τη σωστή απάντηση και είναι ο ίδιος με το συντελεστή του x^{200} στη γεννήτρια συνάρτηση που σχηματίστηκε στο πρώτο ερώτημα

$$\left(1+x+x^2+...+x^{80}\right)\left(1+x+x^2+...+x^{250}\right)\left(1+x+x^2+...+x^{250}\right)$$

αφού είναι προφανές ότι οι επιπλέον όροι (δυνάμεις με εκθέτες μεγαλύτερους του 250 στους απαριθμητές των πάρκινγκ Β και Γ) δεν τον αλλοιώνουν.

Παράδειγμα 4

Διαθέτουμε μια σειρά από 56 σύμβολα και συγκεκριμένα 14 «πλην» (-), 14 «συν» (+), 14 «επί» (*) και 14 «δια» (/).

1. Βρείτε τις «λέξεις» μήκους 15 που μπορούμε να σχηματίσουμε με τουλάχιστον 1 «πλην», τουλάχιστον 2 «συν», ζυγό αριθμό από «επί» (το 0 θεωρείται ζυγός) και μονό αριθμό από «διά». Να γραφεί η σχετική γεννήτρια συνάρτηση, να προσδιοριστεί ο συντελεστής και να επιλυθεί η γεννήτρια ώστε να βρεθεί η τιμή του συντελεστή.
2. Αν σας δοθεί η γεννήτρια συνάρτηση

$$(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^{14}}{14!}+...)(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^{14}}{14!}+...)(1+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^{14}}{14!})(\frac{x^1}{1!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^{13}}{13!})$$

ο συντελεστής του $x^n/n!$ δίνει πάντα την σωστή απάντηση για λέξεις μήκους n (με βάση τους περιορισμούς που αναφέρθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα) και γιατί;

Απάντηση:

1. Πρόκειται προφανώς για ένα πρόβλημα διατάξεων που μπορεί να λυθεί με εκθετική γεννήτρια συνάρτηση. Οι απαριθμητές για τα σύμβολα «πλην», «συν», «επί» και «διά» είναι αντίστοιχα:

$$\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^{14}}{14!}\right)$$

$$\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^{14}}{14!}\right)$$

$$\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^{14}}{14!}\right)$$

$$\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^{13}}{13!}\right)$$

ενώ η γεννήτρια συνάρτηση προκύπτει ως γινόμενο των τεσσάρων απαριθμητών:

$$\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^{14}}{14!}\right)\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^{14}}{14!}\right)\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^{14}}{14!}\right)\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^{13}}{13!}\right)$$

Ο όρος της γεννήτριας συνάρτησης του οποίου ο συντελεστής δίνει το ζητούμενο αποτέλεσμα είναι ο $\frac{x^{15}}{15!}$.

Θα προχωρήσουμε στην επίλυση της παραπάνω γεννήτρια συνάρτησης αφού προηγηθεί η απάντηση στο δεύτερο ερώτημα.

2.Αν δοθεί η γεννήτρια συνάρτηση

$$\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^{14}}{14!}+...\right)\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^{14}}{14!}+...\right)\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^{14}}{14!}\right)\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^{13}}{13!}\right)$$

ο συντελεστής του $x^n/n!$ δεν δίνει πάντα την σωστή απάντηση για λέξεις μήκους n. Πιο συγκεκριμένα δε δίνει τη σωστή απάντηση για n≥17 γιατί μόνο οι συντελεστές των δυνάμεων του *x* με εκθέτες ίσους ή μεγαλύτερους του 17 είναι αυτοί που μεταβάλλονται σε σχέση με τη γεννήτρια συνάρτηση του 1ου υποερωτήματος.

Αυτό μπορούμε να το δείξουμε ως εξής: Ας θεωρήσουμε το δεύτερο απαριθμητή και τον πρώτο όρο που προστίθεται σε σχέση με τη γεννήτρια συνάρτηση του πρώτου υποερωτήματος, τον $\frac{x^{15}}{15!}$. Προφανώς όλοι οι συντελεστές της γεννήτριας συνάρτησης που επηρεάζονται από το συγκεκριμένο όρο είναι λανθασμένοι, αφού δεν υπάρχουν 15 «συν» στη διάθεσή μας. Η μικρότερη δύναμη όμως του *x*στη γεννήτρια συνάρτηση που ο συντελεστής της επηρεάζεται από την παρουσία αυτού του όρου προκύπτει από το γινόμενο του όρου με τις μικρότερες δυνάμεις του *x*από όλους τους άλλους απαριθμητές δηλαδή τους $\frac{x}{1!}$,1, $\frac{x}{1!}$ και είναι πράγματι η x^{17}. Είναι προφανές ότι οι υπόλοιποι όροι που προστίθενται στον δεύτερο απαριθμητή επηρεάζουν στη γεννήτρια συνάρτηση μόνο τους συντελεστές των δυνάμεων του *x* με εκθέτες μεγαλύτερους του 17. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι η παρουσία των πρόσθετων όρων στον πρώτο απαριθμητή επηρεάζει στη γεννήτρια συνάρτηση μόνο τους συντελεστές των δυνάμεων του *x* με εκθέτες ίσους ή μεγαλύτερους του 18. Άρα συνολικά η παρουσία των πρόσθετων όρων στους δύο απαριθμητές αλλοιώνει στη συνολική γεννήτρια συνάρτηση μόνο τους συντελεστές των δυνάμεων του x με εκθέτες ίσους ή μεγαλύτερους του 17.

Προχωρούμε τώρα στον προσδιορισμό του συντελεστή του πρώτου υποερωτήματος. Ακριβώς με τη λογική που χρησιμοποιήσαμε πιο πάνω μπορούμε να δείξουμε ότι η χρησιμοποίηση άπειρων όρων σε κάθε απαριθμητή δεν αλλοιώνει τον συντελεστή του $\frac{x^{15}}{15!}$. Επομένως, θα φτάσουμε στη σωστή απάντηση αν θεωρήσουμε την ακόλουθη εκθετική γεννήτρια συνάρτηση:

$$\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{14}}{14!}+\ldots\right)\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{14}}{14!}+\ldots\right)\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{14}}{14!}+\ldots\right)\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{13}}{13!}+\ldots\right)$$

Σύμφωνα με το ανάπτυγμα

$$e^{kx}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(kx)^i}{i!}$$

η παραπάνω γεννήτρια συνάρτηση γράφεται και ως

$$\left(e^x-1\right)\left(e^x-x-1\right)\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)=$$

$$\left(e^{2x}-2e^x-xe^x+x+1\right)\frac{1}{4}\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)=$$

$$\frac{1}{4}\left(e^{4x}-e^0-2e^{3x}+2e^{-x}-xe^{3x}+xe^{-x}+xe^{2x}-xe^{-2x}+e^{2x}-e^{-2x}\right)=$$

$$\frac{1}{4}\left(e^{4x}-xe^{3x}-2e^{3x}+xe^{2x}+e^{2x}+2e^{-x}+xe^{-x}-xe^{-2x}-e^{-2x}-1\right)=$$

$$\frac{1}{4}\left(\begin{array}{l}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^k x^k}{k!}-x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k x^k}{k!}-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k x^k}{k!}+x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k x^k}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k x^k}{k!}+2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k}{k!}+\\ x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k}{k!}-x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k x^k}{k!}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k x^k}{k!}-1\end{array}\right)=$$

$$\frac{1}{4}\left(\begin{array}{l}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^k x^k}{k!}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k x^{k+1}}{k!}-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k x^k}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k x^{k+1}}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k x^k}{k!}+2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k}{k!}+\\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k!}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k x^{k+1}}{k!}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k x^k}{k!}-1\end{array}\right)=$$

Στην παραπάνω παράσταση, ενώ οι όροι της μορφής $\frac{a^k x^k}{k!}$ είναι άμεσα επιλύσιμοι (για *κ=15* το *α*^{15} μας δίνει έναν συντελεστή για το $\frac{x^{15}}{15!}$) οι όροι της μορφής $\frac{a^k x^{k+1}}{k!}$ είναι λίγο πιο περίπλοκοι. Εδώ είναι φανερό ότι καταρχήν το ζητούμενο *κ* είναι το 14 ώστε να πάρουμε σαν δύναμη το x^{15}. Πως όμως τότε από το $\frac{a^{14} x^{14+1}}{14!}$ θα πάρουμε συντελεστή για το $\frac{x^{15}}{15!}$; Απλά πολλαπλασιάζοντας με το κλάσμα $\frac{15}{15}$. Οπότε από έναν όρο στης μορφής $\frac{a^{14} x^{15}}{14!}$ θα πάρουμε τον $\frac{15a^{14} x^{15}}{15!}$ ο οποίος είναι και ο ζητούμενος και μας δίνει σαν συντελεστή για το $\frac{x^{15}}{15!}$ τον $15\alpha^{14}$.

Με βάση λοιπόν τα παραπάνω ο ζητούμενος συντελεστής του $\frac{x^{15}}{15!}$ είναι ο

$$\frac{1}{4}\left(4^{15} - 15\cdot 3^{14} - 2\cdot 3^{15} + 15\cdot 2^{14} + 2^{15} + 2\cdot(-1)^{15} + 15\cdot(-1)^{14} - 15\cdot(-2)^{14} - (-2)^{15}\right) =$$
$$\frac{1}{4}\left(1073741824 - 71744535 - 28697814 + 245760 + 32768 - 2 + 15 - 245760 + 32768\right) =$$
$$243341256$$

Συμπεράσματα

Διακριτά μαθηματικά (discrete mathematics) ονομάζεται η μελέτη μαθηματικών δομών που είναι θεμελιωδώς διακριτές αντί για συνεχείς. Σε αντίθεση με τους πραγματικούς αριθμούς που έχουν την ιδιότητα να "μεταβάλλονται ομαλά", τα αντικείμενα που μελετώνται στα διακριτά μαθηματικά - όπως οι ακέραιοι, οι γράφοι και οι προτάσεις της λογικής – δεν μεταβάλλονται ομαλά κατά αυτόν τον τρόπο, αλλά έχουν ξεχωριστές, διακριτές τιμές. Τα διακριτά μαθηματικά επομένως αποκλείουν θέματα των "συνεχών μαθηματικών", όπως ο απειροστικός λογισμός και η ανάλυση. Συχνά τα διακριτά αντικείμενα μπορούν να απαριθμηθούν με βάση τους ακέραιους. Τυπικότερα, τα διακριτά μαθηματικά έχουν χαρακτηριστεί ως ο κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με αριθμήσιμα σύνολα (σύνολα που έχουν την ίδια πληθικότητα με τα υποσύνολα των φυσικών αριθμών, συμπεριλαμβανομένων των ρητών αριθμών αλλά όχι και των πραγματικών αριθμών). Όμως, δεν υπάρχει κάποιος ακριβής και καθολικά αποδεκτός ορισμός του όρου "διακριτά μαθηματικά". Στην πράξη τα διακριτά μαθηματικά περιγράφονται λιγότερο από το τι περιέχουν και περισσότερο με βάση τι δεν περιέχουν: συνεχώς μεταβαλλόμενες ποσότητες και σχετικές με αυτές έννοιες.

Το σύνολο των αντικειμένων που μελετώνται στα διακριτά μαθηματικά μπορεί να είναι πεπερασμένο ή άπειρο. Συχνά χρησιμοποιείται ο όρος πεπερασμένα μαθηματικά (finite mathematics) για μέρη του πεδίου των διακριτών μαθηματικών που ασχολούνται με πεπερασμένα σύνολα, και ειδικότερα όταν αυτό έχει σχέση με εφαρμογές στο χώρο των επιχειρήσεων.

Στην παρούσα εργασία, πραγματοποιήθηκε μία ανάλυση της εξαγωγής των αναδρομικών σχέσεων και των γεννητριών συναρτήσεων. Αναπτύχθηκε διεξοδικά η εύρεση των αναδρομικών σχέσεων καθώς και η παραγωγή των ειδικών μορφών γεννητριών συναρτήσεων. Στη συνέχεια , παρουσιάστηκε η σημαντικότητα αυτών στην διαμέριση των ακεραίων. Η διαμέριση των ακεραίων αποτελεί την μέθοδο επίλυσης σε πολλά προβλήματα των μαθηματικών όπως και της πληροφορικής. Η έρευνα στην διαμέριση των ακεραίων αναπτύχθηκε πολύ γρήγορα στο δεύτερο μισό του εικοστού αιώνα, εν μέρει λόγω της ανάπτυξης των ψηφιακών υπολογιστών, οι οποίοι λειτουργούν σε διακριτά βήματα και αποθηκεύουν τα δεδομένα τους σε διακριτά bits. Οι έννοιες και ο μαθηματικός συμβολισμός των διακριτών μαθηματικών χρησιμεύουν στη μελέτη και την περιγραφή αντικειμένων και προβλημάτων διάφορων κλάδων της επιστήμης υπολογιστών, όπως οι υπολογιστικοί αλγόριθμοι, οι γλώσσες προγραμματισμού, η κρυπτογραφία, η αυτοματοποιημένη απόδειξη θεωρημάτων (automated theorem proving) και η ανάπτυξη λογισμικού.

Βιβλιογραφία

1. *N.L.Biggs, Discrete Mathematics, Oxford Science Publications, 1985*

2. *Φ.Αφράτη, Διακριτά Μαθηματικά, Ε.Μ.Π.,1988*

3. *V.K.Balakrishnan, Combinatories, Schaum's outline series, Mc Graw Hill, 1995.*

4. *D.A. Cohen, Basic techniques of Combinatorial Theory, John Wiley, 1978.*

5. *G.Hardy and E.Wright , An introduction to the theory of numbers, Oxford Clarendon press, 1938.*

6. *G.E.Andrews, The theory of partitions, encyclopaedia of Mathematics, 1976.*

7. *Α.Παπαιωάννου, Διακριτά Μαθηματικά, Ε.Μ.Π., 1993.*

8. *Λ Κυρούσης , Χ. Μπούρας, Π.Σπυράκης, Γ. Σταματίου, "Εισαγωγή στους γράφους" , Θεωρία-Προβλήματα-Λύσεις"*

9. *B.Bollobas, Combinatorics, Cambridge U.P., 1986.*

10. *I. Anderson, A first course in Combinatorial Mathematics, Oxford, 1979.*