ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΔΙΚΑΙΟΥ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η Μέθοδος του Αρχιμήδη

Βαγγέλης Παππάς

Επιβλέπων: **Βασίλης Καρασμάνης**, Καθηγητής ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ

ΙΟΥΛΙΟΣ 2012

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η Μέθοδος του Αρχιμήδη
Μία σύγχρονη αναλυτική προσέγγιση

Βαγγέλης Παππάς

ΑΜ:09102006

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ :

Βασίλης Καρασμάνης , Καθηγητής ΕΜΠ

Ευχαριστίες

Ο συγγραφέας ενός βιβλίου δεν είναι απλά μια μηχανή παραγωγής λέξεων, αποκομμένος από τον κοινωνικό του περίγυρο. Δεν κατοικεί σε κάποιο γυάλινο πύργο. Χρειάζεται στο πλευρό του ανθρώπους που να τον στηρίζουν και να του συμπαραστέκονται με κάθε πιθανό και απίθανο τρόπο. Θα έλεγα μάλιστα, πως η συγγραφική του απόδοση είναι ευθεία συνάρτηση του περιβάλλοντος στο οποίο ζει και δημιουργεί.

Ως ασχολία, η συγγραφή ενός βιβλίου είναι μια δουλειά μοναχική και ελιτίστικη, η ευδοκίμηση δε της οποίας δεν είναι πάντα εξασφαλισμένη.

Τα θέλει όλα δικά του, λοιπόν, ένας συγγραφέας. Και πως μπορεί να εξιλεωθεί για αυτόν τον εγωισμό του;

Συνήθως υπάρχουν δύο τρόποι. Ο ένας είναι με την ίδια την ποιότητα του πνευματικού του έργου. Ο δεύτερος είναι με την πρόθυμη, την αβίαστη αναγνώριση της συνεισφοράς όλων αυτών που στάθηκαν αρωγοί στο έργο του.

Ευχαριστώ επομένως από καρδιάς τον κ. Καρασμάνη που μου ανέθεσε τη συγκεκριμένη εργασία και με βοήθησε να δώσω μια κατεύθυνση στις σπουδές μου που να ανταποκρίνεται στις επιθυμίες μου και το σημαντικότερο να ξεφύγω από το τέλμα της απαισιοδοξίας και της στασιμότητας στο οποίο είχα βυθιστεί τα τελευταία χρόνια των σπουδών μου στο Πολυτεχνείο. Η σχέση δασκάλου-μαθητή που δημιουργήσαμε με όλο το σωκρατικό περιεχόμενό της εύχομαι να με συνοδεύει σε όλη μου τη ζωή.

Νιώθω τεράστια ευγνωμοσύνη προς τους γονείς μου, χωρίς την αγάπη των οποίων και φυσικά

την αμέριστη υλική και ηθική συμπαράσταση τους δε θα κατάφερνα να ολοκληρώσω τη διπλωματική μου γιατί απλούστατα θα μου έλειπαν **τα προς το ζην** για να ασχοληθώ με τα προς το ευ ζην!

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον αδερφό μου το Γιάννη που με μύησε στα μυστικά του LATEX και απέκτησα έτσι ένα ισχυρότατο υπολογιστικό εργαλείο για την εργασία μου.

Σε όλους τους φίλους μου που διάβασαν τα πρωτότυπα και μου πρόσφεραν τις συμβουλές τους, εκφράζω τις πιο θερμές μου ευχαριστίες.

Τελευταία άφησα τη σύντροφο μου την Ελένη, τη μούσα της έμπνευσής μου, στην οποία και αφιερώνω αυτό το έργο. Δε θα μπορούσα να της ζητήσω περισσότερα από όσα απλόχερα και ανενδόιαστα μου πρόσφερε.

Χωρίς αυτήν τίποτα δεν θα ήταν εφικτό.

Ευχαριστώ όλους όσους πίστεψαν σε μένα.

Περιεχόμενα

Πρόλογος **13**

1 Εισαγωγή **17**

2 Η Οδύσσεια της Μεθόδου **23**

2.1 Χρησιμοποιώντας τις πηγές 25

2.2 Η περιπέτεια της Μεθόδου - περιπέτεια του Παλίμψηστου! 27

3 Η επιστολή προς τον Ερατοσθένη **33**

3.1 Ἀρχιμήδους Περί τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων προς Ἐρατοσθένη ἔφοδος 33

3.2 Η Επιστολή μεταφρασμένη (σε ελεύθερη απόδοση) 36

3.3 Μια ανάλυση της επιστολής 39

3.4 Προλαμβανόμενα Αρχιμήδη 42

4 Τα θεωρήματα της Μεθόδου **51**

4.1 Θεώρημα 1 53

4.1.1 1ο μέρος 54

4.1.2 2ο μέρος 59

4.1.3 3ο μέρος 60

4.1.4 4ο μέρος 61

4.1.5 5ο μέρος 66

4.2 Θεώρημα 2 73
4.2.1 1ο μέρος 74
4.2.2 2ο μέρος 76
4.2.3 3ο μέρος 78
4.2.4 4ο μέρος 79
4.2.5 5ο μέρος 84
4.3 Θεώρημα 3 89
4.3.1 1ο μέρος 90
4.3.2 2ο μέρος 91
4.3.3 3ο μέρος 93
4.3.4 4ο μέρος 94
4.3.5 5ο μέρος 97
4.4 Θεώρημα 4 105
4.4.1 1ο μέρος 106
4.4.2 2ο μέρος 107
4.4.3 3ο μέρος 109
4.4.4 4ο μέρος 109
4.4.5 5ο μέρος 111
4.5 Θεώρημα 5 116
4.5.1 1ο μέρος 117
4.5.2 2ο μέρος 117
4.5.3 3ο μέρος 119
4.5.4 4ο μέρος 120
4.6 Θεώρημα 6 123
4.6.1 1ο μέρος 124

4.6.2 2ο μέρος 124
4.6.3 3ο μέρος 126
4.6.4 4ο μέρος 126
4.7 Θεώρημα 7 130
4.7.1 1ο μέρος 131
4.7.2 2ο μέρος 131
4.7.3 3ο μέρος 132
4.7.4 4ο μέρος 133
4.7.5 5ο μέρος 135
4.8 Θεώρημα 8 140
4.9 Θεώρημα 9 144
4.9.1 1ο μέρος 145
4.9.2 2ο μέρος 145
4.9.3 3ο μέρος 148
4.9.4 4ο μέρος 149
4.10 Θεώρημα 10 154
4.11 Θεώρημα 11 155
4.12 Θεώρηματα 12,13 163
4.12.1 1ο μέρος 163
4.12.2 2ο μέρος 163
4.12.3 3ο μέρος 166
4.12.4 4ο μέρος 167
4.13 Θεώρημα 14 173
4.14 Θεώρημα 15 185

5 Διάλογος... 187

6 Παράρτημα Α **191**

7 Παράρτημα Β **195**

8 Παράρτημα Γ **203**

9 Παράρτημα Δ **215**

10 Παράρτημα Ε **219**

11 Βιβλιογραφία **239**

Βιβλιογραφία **239**

Πρόλογος

(ή αλλιώς μια προσωπική εξομολόγηση...)

Πέρασαν σχεδόν δύο χρόνια από την ημέρα που ο κ. Καρασμάνης μου ανέθεσε τη διπλωματική εργασία που κρατάτε αυτή τη στιγμή στα χέρια σας. Στην πραγματικότητα, το χρονικό διάστημα είναι ακόμα μεγαλύτερο αν αναλογιστεί κανείς ότι το συγκεκριμένο θέμα ήταν η δεύτερη μου απόπειρα να μετουσιώσω σε κάτι πιο προσωπικό, σε ένα ΄ίδιον πόνημα¨, τα χρόνια των των σπουδών μου στο Πολυτεχνείο.

Μεσολάβησαν πολλά. Χρόνια εργασίας για τα προς το ζην, χρόνια πρωταθλητισμού στην ποδηλασία, στρατός και μάλιστα αλεξιπτωτιστές.

Χρόνια αεργίας θα πει ένας, χρόνια αποπροσανατολισμού από το αντικείμενο των σπυδών θα πει κάποιος άλλος.

Είναι όμως στα αλήθεια έτσι;

Θα μου επιτρέψετε να διαφωνήσω. Για μένα ήταν χρόνια ζύμωσης, πνευματικής και όχι μόνο ωρίμανσης, όπου λειτούργησα και ως συλλέκτης εμπειριών και καταστάσεων σε μια προσπάθεια να κατασταλλάξω κάπου, να βρω την κλίση μου, να καταλάβω τι θέλω να κάνω στη ζωή μου.

Μεγάλες κουβέντες, θα μου πείτε. Δεν πειράζει. Ο στόχος μου πλέον άρχισε να διακρίνεται καθαρά.

Δεν επιθυμώ να γίνω ένας τεχνοκράτης επιστήμονας με όλη τη φανταχτερή μονομέρειά του. Ο κ. Καρασμάνης μου έδωσε φτερά για να απομακρυνθώ ολοταχώς από αυτή τη ζοφερή πιθανότητα.

Πώς;

Μα με τον Αρχιμήδη φυσικά. Το μόνο ιστορικό πρόσωπο που είναι γνωστό ότι πάσχιζε να μείνει στις μνήμες των ανθρώπων σαν ένας μαθηματικός και όχι σαν ένας μηχανικός, παρότι η συνεισφορά του και στους δύο τομείς ήταν εξίσου τεράστια.

Κι όμως η γνώση μου για τον Αρχιμήδη μέχρι τότε περιοριζόταν μόνο στις συναρπαστικές τεχνολογικές επινοήσεις του, στις πολυμήχανες εφευρέσεις του: πως θα μπορούσε αυτός ο άνθρωπος να με οδηγήσει μακριά από την παγίδα του τεχνοκρατισμού;

Η αρχή έγινε όταν άρχισα να μελετάω τα έργα του Αρχιμήδη μέσα από τους κλασικούς τόμους των Ε. Σταμάτη, T. Heath, E.Dijksterhuis. Γνώρισα τότε το γεωμέτρη Αρχιμήδη. Έναν γεωμέτρη που αναγωρίζει πάντα την προσφορά των προκατόχων του και αφιερώνει ολόκληρη τη ζωή του- χωρίς καμμία υπερβολή -στην ανακάλυψη και την απόδειξη καινούριων θεωρημάτων.

Πρώτος μεταξύ των πρώτων ο Αρχιμήδης στη γεωμετρική πρωτοτυπία και αυστηρότητα. Όσο πρωτότυπος είναι στη διερεύνηση καινοτόμων μαθηματικών θεωρημάτων άλλο τόσο είναι αυστηρός όσον αφορά την επαρκή τεκμηρίωσή τους.

Πολύ ωραία θα μου πείτε. Ο Αρχιμήδης είναι ένας ακόμα κλασικός Έλληνας μαθηματικούς σαν αυτούς των κλασικών εγχειριδίων. Πως μπορεί να λειτουργήσει ως πρότυπο για ένα νέο άνθρωπο που αναζητά τη δική του θέση στο πνευματικό στερέωμα;

Προσοχή! Δε σπούδασα καθαρά μαθηματικά για να μυηθώ από νωρίς στο σχολαστικισμό των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών. Σπούδασα εφαρμοσμένα μαθηματικά και φυσική και ήταν προσωπική επιλογή να εμπλουτίσω το πρόγραμμα σπουδών μου με μαθήματα φιλοσοφίας των μαθηματικών και της φυσικής.

Ήμουν, λοιπόν, εξαιρετικά τυχερός που έλαβα μια πρώτη αναγνώριση των κόπων μου. Γιατί με τη ¨Μέθοδο¨ ανακάλυψα έναν άλλο, τον πραγματικό Αρχιμήδη. Το γεωμέτρη που το ευρύ πεδίο των γνώσεων του λειτουργεί ως κινητήριος μοχλός πρωτοποριακών πνευματικών συλλήψεων. Το γεωμέτρη που δαμάζει το αχαλίνωτο άλογο της μηχανικής και το ζεύει στο άρμα της μαθηματι-

κής νόησης.

Ε ναι, λοιπόν. Ένας τέτοιος σφαιρικός νους σίγουρα θα μπορούσε να αποτελέσει το πρότυπό μου. Δεν είναι μονόπλευρος. Χρησιμοποιεί όλα τα εργαλεία στη διάθεσή του για έναν απώτερο σκοπό: να προσφέρει το λιθαράκι του στο οικοδόμημα της Γεωμετρίας και της Επιστήμης γενικότερα.

Φιλοσοφία και μαθηματικά, μηχανική και μαθηματικά, όλα αλληλοσυμπλέκονται στο αριστούργημα αυτό της ανθρώπινης σκέψης.

Εύχομαι αγαπητοί αναγώστες, ξεφυλλίζοντας τις επόμενες σελίδες να μοιραστείτε μαζί μου τη συγκίνηση που γνώρισα όταν διαπίστωσα πως οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί δεν ήταν βαρετοί, τυπολάτρες, φορμαλιστές, αλλά παιχνιδιάρικα γεμάτα φαντασία πνεύματα που δούλευαν έστω και κρυφά, στο προχειρό τους, με ανορθοδόξους τρόπους για να βρουν αυτό που ζητούσαν.

Ίσως όμως να ήταν έτσι μόνο ο Αρχιμήδης.

Σε κάθε περίπτωση αυτό ήταν το κίνητρο που αναζητούσα. Να πιστέψω στη δύναμη της φαντασίας στις θετικές επιστήμες. Σε μια εποχή που αυτές κατατρύχονται από μηχανιστικές, υπολογιστικές αντιλήψεις, να πιστέψω πως δεν οριοθετούνται από τοιχώματα στεγανά, αλλά συνιστούν συγκοινωνούντα δοχεία.

Αυτό ήταν και το μεγαλύτερο δώρο της ¨Μεθόδου¨ του Αρχιμήδη προς έναν προπτυχιακό φοιτητή που αναζητά το δρόμο του.

Καλή ανάγνωση!

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

¨Εύρηκα, εύρηκα...!!¨

Η πόρτα του λουτρού ανοίγει ξαφνικά, και ένας μισόγυμνος, ηλικιωμένος άντρας, ορμάει τρέχοντας στο δρόμο, συνεπαρμένος θαρρείς από επικό ενθουσιασμό, συγκεντρώνοντας πάνω του ματιές αποδοκιμασίας των περαστικών, προσφέροντάς τους απλόχερα το γέλιο και τη θυμηδία...-ναι!- αυτή είναι η πιο διαδεδομένη εικόνα που έχει κάποιος για τον Αρχιμήδη, εικόνα που έφθασε στις μέρες μας μέσα από τη ζωηρή πένα του Ρωμαίου συγγραφέα Βιτρούβιου[1].

Αποκύημα της φαντασίας ή όχι, η ζωηρή περιγραφή του Βιτρούβιου έρχεται σε πλήρη αντίθεση με τη γνώση που αποκτήσαμε μικροί στο σχολείο για τους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς: ξέρετε αυτοί οι σοβαροί κύριοι μιας κάποιας ηλικίας που κατά περίεργη σύμπτωση μοιάζουν όλοι μεταξύ τους και περνούν όλο τους το χρόνο σχεδιάζοντας κύκλους στην άμμο - τί βαρετή αλήθεια ασχολία! Ευτυχώς (για τον ίδιο), τον Αρχιμήδη δεν τον θυμόμαστε έτσι. Θα συμφω-

[1] "idque cum eius rei rationen explicationis astendisset, non est moratus, sed exciluit gaudia motus de solio et nudus vodens domum <uni> versis significabat clara voce invenisse, quad quereret, nam currens identidem graece clamabat εύρηκα εύρηκα...¨ - ¨μόλις, κατόπιν σκέψεως για την αιτία του φαινομένου αυτού, βρήκε την ερμηνεία, δεν παρέμεινε εκεί περισσότερο, αλλά αναπήδησε από το λουτρό συγκινημένος από χαρά, και τρέχοντας γυμνός προς το σπίτι του φώναζε δυνατά, ότι βρήκε εκείνο το οποίο έψαχνε. Διότι τρέχοντας φώναζε διαρκώς στα ελληνικά εύρηκα εύρηκα.¨
-Vitruvius, *De Architectura* IX Pref. 215, p. 406 ed. Curt Fensterbuch, Darmstadt 1964,όπως παρατίθεται στον πρώτο τόμο των Απάντων Αρχιμήδους του Ε.Σταμάτη,εκδόσεις ΤΕΕ,Αθήνα 1970

νήσετε μαζί μου πως η εικόνα που σας περιέγραψα στην αρχή, χάρισε στο σπουδαίο άνδρα την αθανασία. Και κάτι περισσότερο: σκεφθείτε τον ενθουσιασμό σας κάθε φορά που ανακαλύπτετε τη λύση ενός δύσκολου προβλήματος, τη χαρά που σας πλημμυρίζει όταν βρίσκετε κάτι μόνοι σας μετά από κόπο.

Αυτό, λοιπόν, είναι το αχιμήδειο ¨εύρηκα¨!

Γιατί όμως δίνουμε τόση σημασία σε ένα ανεκδοτολογικό σχεδόν περιστατικό από τη ζωή του μεγάλου Έλληνα μαθηματικού;

Ας επιστρέψουμε ξανά στις σχολικές μας αναμνήσεις και ας ανοίξουμε ένα βιβλίο γεωμετρίας. Βάλτε στην άκρη την όποια αντιπάθεια μπορεί να σας γεννά η συγκεκριμένη ενέργεια ή από την άλλη, μην επιτρέψετε στη νοσταλγία να σας κυριέψει, και ξεφυλλίστε ψύχραιμα τις πρώτες σελίδες. Τι παρατηρείτε; Ένα σύνολο μαθηματικών ορισμών, προτάσεων και θεωρημάτων, διατυπωμένα με σαφήνεια, αυστηρότητα και τέτοια κρυστάλλινη καθαρότητα, που δεν σηκώνουν πολλή συζήτηση είναι αλήθεια. Στην περίπτωση που ήσασταν ανήσυχα πνεύματα και ρωτούσατε το δάσκαλό σας σχετικά με τα θεωρήματα, το πιθανότερο είναι ότι σας προέτρεπε απλά να τα αποστηθίσετε, λέγοντάς σας: ¨έτσι έχουν τα πράγματα¨.

Μην κατηγορείτε άδικα το δάσκαλό σας. Αλήθεια, ¨έτσι έχουν τα πράγματα¨ όχι μόνο για την ευκλείδια γεωμετρία, μα για το σύνολο του έργου των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών που διασώθηκε ως τις μέρες μας. Ο Ευκλείδης, ο Απολλώνιος, ο Αρχιμήδης και τόσοι άλλοι μεγάλοι μαθηματικοί της αρχαιότητας ήταν το δίχως άλλο εραστές του ωραίου. Η πιο σημαντική παρακαταθήκη τους, τα μεγάλα τους θεωρήματα, είναι ολοκληρωμένα αριστουργήματα, χωρίς ψεγάδια, χωρίς κατάλοιπα της μεθόδου με την οποία εξελίχθηκαν, αποστειρωμένα προιόντα της μεγαλοφυίας τους.

Πώς όμως κατέληξαν στα θεωρήματά τους; Το ενοχλητικό ερώτημα δεν έχει εύκολη και, το χειρότερο, μοναδική απάντηση.

Τοποθετώντας κατά μέρος ενδεχόμενη ¨θεία έμπνευση¨ των στοχαστών της αρχαιότητας και βλέ-

ποντας τα πράγματα από καθαρά επιστημονική σκοπιά, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι οι Έλληνες μαθηματικοί είχαν στη διάθεσή τους κάποια μέθοδο ή μεθόδους ανάλυσης, όχι λιγότερο ισχυρές από τα εργαλεία των σημερινών συναδέλφων τους, ένα μηχανισμό σκέψης δηλαδή ο οποίος τους οδηγούσε με ασφάλεια στην ανακάλυψη του αποτελέσματος το οποίο στη συνέχεια με τόση συνέπεια και επαρκή αυστηρότητα αποδείκνυαν.

Για αιώνες, η εκνευριστική αυτή υπόθεση εργασίας βασάνιζε τους μαθηματικούς και τους μελετητές των Ελλήνων μαθηματικών. Τα στοιχεία που είχαμε στη διάθεσή μας προκειμένου να κατανοήσουμε σε βάθος τη συλλογιστική των αρχαίων Ελλήνων ήταν ελάχιστα - καθαρά μαθηματικό ενδιαφέρον (εφόσον έχουν γραφεί από τους ίδιους τους μαθηματικούς της αρχαιότητας) έχουν μόνο δύο: οι κάπως δυσνόητοι ορισμοί περί της γεωμετρικής ¨Ανάλυσης και Σύνθεσης¨ στο 13ο Βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη[2] και η εκτενέστερη αλλά όχι σαφέστερη αναφορά στο 7ο βιβλίο της *Μαθηματικής Συναγωγής* του Πάππου του Αλεξανδρινού[3].

Προς τι η τόση μυστικοπάθεια;

Η λύση στο αίνιγμα ίσως εδράζεται στον ίδιο τον χαρακτήρα των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών. Ας δούμε για λίγο τον τρόπο σκέψης των Ελλήνων μαθηματικών. Πρωταρχικός σκοπός τους είναι η επίλυση προβλημάτων. Η σειρά για αυτούς έχει ως εξής: βρίσκω τη λύση τους $\longrightarrow$ πρέπει να πείσω εμένα και τους άλλους ότι αυτή είναι πράγματι η λύση. Αυτό που σε τελική ανάλυση τους ενδιαφέρει είναι η κοινοποίηση ενός μαθημστικού θεωρήματος στους συναδέλφους τους μαθηματικούς, που να συνοδεύεται από αυστηρή (γεωμετρική δηλαδή) απόδειξη. Σε μια εποχή που η μαθηματική παραγωγή περιοριζόταν στην ανταλλαγή επιστολών μεταξύ των μαθηματικών στα μεγάλα αλλά ολιγάριθμα κέντρα γνώσης του ελληνισμού της Μεσογείου (για παράδειγμα μεταξύ Συρακουσών - Αλεξάνδρειας, όπου ζούσαν οι Αρχιμήδης - Ερατοσθένης αντίστοιχα) η αποκάλυψη της ευρετικής μεθόδου του κάθε μαθηματικού πάνω στο αντικείμενο προβληματισμού του δεν ήταν καθόλου αυτονόητη - αυτονόητη ήταν μόνο η τεκμηρίωσή του σύμφωνα με

[2] *Στοιχεία* , XIII,1-5

[3] *Μαθηματική Συναγωγή* ,VII,pp. 634-6

τις παραδεκτές ευκλείδιες αρχές. Έτσι, αυτό που έφθασε ως εμάς (βλ. Ευκλείδης, Πάππος) σαν αρχαία ελληνική ανάλυση δεν ήταν παρά ένα θεωρητικό πλαίσιο τεχνικών επίλυσης - σύμφωνο με τις αυστηρές αρχές της ευκλείδιας γεωμετρίας, στο οποίο μπορούσαν να ανατρέχουν οι μαθηματικοί σε δύσκολα προβλήματα[4], σε καμμία όμως περίπτωση δεν τους υπαγόρευε τη λύση τους - δεν ήταν λυσάρι!

Είπαμε: πρέπει να αφαιρέσω το ικρίωμα της οικοδομής για να παρουσιαστεί ο Παρθενώνας σε όλη του τη μεγαλοπρέπεια!

Χρειάστηκε να περάσουν δύο πάνω κάτω χιλιετίες, χρειάστηκε να φτάσουμε στις απαρχές της Αναγέννησης και τη γέννηση του Λογισμού για να αποκτήσουν τα μαθηματικά καινούρια, εξίσου ισχυρά με των αρχαίων, εργαλεία εύρεσης-ανάλυσης. Η γέννα ήταν μακραίωνη, γεμάτη ωδίνες, και ενίοτε συνοδευόταν από σχόλια ιερής αγανάκτησης για τους αρχαίους μαθηματικούς.Πολλοί από τους γεωμέτρες του 17ου αι. παραπονέθηκαν για την αδιαφάνεια των αρχαίων επίσημων μεθόδων. Ο Torriceli ήταν πεπεισμένος ότι οι αρχαίοι κατείχαν ευρετικές μεθόδους τις οποίες επιμελώς απέκρυπταν (*Opere*, I, 1919, p.140). Ο Descartes μερικές φορές υποπτευόταν ότι είχαν μια αναλυτική μέθοδο για την ανακάλυψη καινούριων θεωρημάτων (Rule IV in *Regulae ad directionem ingenii*, 1629). Χαρακτηριστική είναι η άποψη του Άγγλου μαθηματικού John Wallis[5] το οποίο μας το μεταφέρει ο Heath: " σαν να ήταν από καθαρή πρόθεση να κάλυψε ο Αρχιμήδης τα ίχνη του, σαν να παρέδωσε απρόθυμα στους μεταγενέστερους το μυστικό της μεθόδου του, ενώ επιθυμούσε σφόδρα να τους εξαναγκάσει σε συμφωνία με τα αποτελέσματά του¨ και συμπληρώνει εξίσου οργισμένα: ¨οχι μόνο ο Αρχιμήδης αλλά σχεδόν όλοι οι αρχαίοι έκρυβαν τόσο καλά τις μεθόδους της Ανάλυσης ώστε οι πιο σύγχρονοι μαθηματικοί θεώρησαν ευκολότερο να εφεύρουν από το μηδέν μια καινούρια Ανάλυση παρά να ψάξουν να βρούν την παλιά¨!

[4]Για μια εκτενέστερη περιγραφή της αναλυτικής μεθόδου των αρχαίων Ελλήνων βλ.τη δημοσίευση του κ. Βασίλη Καρασμάνη, *¨Που έγκειται η ευρετική ικανότητα της γεωμετρικής μεθόδου της ανάλυσης και της σύνθεσης¨* ,2003

[5]Άγγλος μαθηματικός (1616-1703), απο τους θεμελιωτές του Απειροστικού Λογισμού. Του αποδίδεται μεταξύ άλλων ο συμβολισμός του απείρου,∞

Μη σπεύσετε όμως και εσείς να τους κατηγορήσετε άδικα!

Στις αρχές του 20ου αι. ένα άγνωστο ως τότε βυζαντινό χειρόγραφο μας αποκάλυψε μια χαμένη πραγματεία του Συρακούσιου ανδρός η οποία τιτλοφορείται: ¨Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένη έφοδος¨. Ας σταθούμε λίγο στην αρχαία ελληνική λέξη *¨εφοδος¨*. Σημαίνει *¨προσέγγιση¨*, *¨δρόμος προς κάτι¨*.Καλά το μαντέψατε: για πρώτη φορά είχαμε μπροστά μας το τεράδιο σκέψης ενός από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς όλων των εποχών, θα μπορούσαμε να ¨ψαχουλέψουμε¨ την ¨εργαλειοθήκη¨ του, να χαρτογραφήσουμε τα μονοπάτια της νόησής του!

Καταλαβαίνετε τον ενθουσιασμό μου.

Η τυχαία ανακάλυψη της Μεθόδου του Αρχιμήδη είναι το μεγάλο Εύρηκα του καιρού μας!

Κεφάλαιο 2

Η Οδύσσεια της Μεθόδου

Ἀρχιμήδης Ἐρατοσθένει εὖ πράττειν

Με αυτή τη φράση αρχίζει η πραγματεία του Αρχιμήδη ¨Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένη Έφοδος¨, το θεωρούμενο ως παντοτινά χαμένο έργο του μεγάλου μαθηματικού, που ήρθε στο φως με την ανακάλυψη του περίφημου Παλίμψηστου το 1906.

Ποια ήταν η τύχη του τετραδίου του Αρχιμήδη μετά τη συγγραφή του από το Συρακούσιο άνδρα; Η προσπάθεια κατασκευής ενός χρονικού της Μεθόδου δεν είναι καθόλου εύκολη υπόθεση. Αλίμονο! Πέρα από τη συνηθισμένη αβεβαιότητα στην χρονολογική ακρίβεια προσδιορισμού γεγονότων του μακρινού παρελθόντος, το εγχείρημά μας καθίσταται ακόμα περισσότερο δύσκολο από την ένδεια στοιχείων.

Ας δούμε όμως τις πληροφορίες που έχουμε στη διάθεσή μας και ας τις τοποθετήσουμε στη σειρά με την οποία έγιναν σε εμάς γνωστές.

Έχουμε:

1. Μία αναφορά στο λήμμα Θεοδόσιος στο βυζαντινό λεξικό *Σούδα*

¨Θεοδόσιος φιλόσοφος ἔγραψε σφαιρικὰ εἰς τρία βιβλία, σχόλια εἰς τὰ Θευδὰ Κεφάλαια, Περὶ ἡμερῶν καὶ νυκτῶν δύο βιβλία, σχόλια εἰς τὸ Ἐφόδιον τοῦ Ἀρχιμήδους, σχέδια οἰκιῶν εἰς τρία

βιβλία, Σκεπτικὰ Κεφάλαια, Ἀστρολογικά, Περὶ οἰκήσεων[1]" .

2. Τρεις αναφορές στα *Μετρικά* και *Γεωμετρικά* του Ήρωνα

"ἔδειξε γὰρ Ἀρχιμήδης ἐν τῷ ἐφοδικῷ, ὅτι πᾶν τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς, τουτέστι παραβολῆς, ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος αὐτῷ τὴν αὐτὴν καὶ ὕψος δὲ ἴσον."

"ἔστω κυλίνδρου τμῆμα μετρῆσαι τετμημένον διὰ τοῦ κέντρου μιᾶς τῶν βάσεων...ἀποδέδειχεν Ἀρχιμήδης ἐν τῷ ἐφοδικῷ, ὅτι τὸ τοιοῦτον τμῆμα ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸ περιγραφόμενον περὶ τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου τετράγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ τμήματι."

"ὁ δ' αὐτὸς Ἀρχιμήδης ἐν τῷ αὐτῷ βιβλίῳ (ἐφοδικῷ), δείκνυσιν, ὅτι ἐὰν εἰς κύβον δύο κύλινδροι διωσθῶσιν τὰς βάσεις ἔχοντες ἐφαπτομένας τῶν πλευρῶν τοῦ κύβου, τὸ κοινὸν τμῆμα τῶν κυλίνδρων δίμοιρον ἔσται τοῦ κύβου."[2]

3. Το ίδιο το Παλίμψηστο.

Τι κοινό έχουν τα στοιχεία της παραπάνω λίστας; Και τα τρία προέρχονται από την ίδια πόλη την Κωνσταντινούπολη!

Πιο αναλυτικά:

1. Το βυζαντινό λεξικό *Σούδα* είναι ένα είδος εγκυκλοπαιδικού λεξικού, των τελών του 10ου αι. που γράφτηκε στην Κων/πολη, με περισσότερα από 30.000 λήμματα, ένας ανεκτίμητος θησαυρός άντλησης πληροφοριών για το μεσαίωνα.

2. Τα έργα *Μετρικά* και *Γεωμετρικά* του Ήρωνα ανακαλύφθηκαν για πρώτη φορά το 1896 σε

[1] *Λεξικό Σούδα*, λήμμα Θεοδόσιος,επιμ. Β.Κατσαρός, εκδόσεις Θύραθεν, Αθήνα 2002

[2] Hero Alexandrinus, vol. III *Metrica*, ed. H.Schone, Lipsiae 1903. όπως παρατίθεται στον πρώτο τόμο των *Απάντων Αρχιμήδους* του Ε.Σταμάτη, εκδόσεις ΤΕΕ, Αθήνα 1970.

ένα χειρόγραφου του 11ου ή του 12ου αι. στην Κων/πολη από τον R.Schone[3].

3. Και το Παλίμψηστο του Αρχιμήδη όμως προέρχεται από την ίδια πόλη!

2.1 Χρησιμοποιώντας τις πηγές

Τέσσερις αναφορές λοιπόν σε ένα μυστηριώδες έργο του Αρχιμήδη με τον εξίσου μυστηριώδη τίτλο Έφοδος (ή εφόδιον ή εφοδικόν) είναι ό,τι έχει φθάσει μέχρι τις μέρες μας σαν βιβλιογραφική μόνο υπόμνηση για το ¨τετράδιο σκέψης¨ του μεγάλου μαθηματικού.

Τέσσερα σπαράγματα μαρτυριών που απλώς υπαινίσσονται το γεωμετρικό χαρακτήρα του συγκεκριμένου έργου και τίποτε περισσότερο.

Με μια γρήγορη πρώτη ματιά, εύκολα διαπιστώνει κανείς πως τα τρία από αυτά είναι παραπομπές σε διάφορες αποδείξεις που πραγματοποίησε ο Συρακούσιος μαθηματικός πάνω σε θέματα επιπεδομετρίας και στερεομετρίας, όπως μας τις μεταφέρει ο Ήρωνας ο Αλεξανδρινός, περίφημος μηχανικός και μαθηματικός της αρχαιότητας.

Μπορείτε τώρα πολύ εύκολα να συνειδητοποιήσετε τη δυσκολία του εγχειρήματος: αναζητούμε τα ίχνη ενός χαμένου από αιώνες μαθηματικού πονήματος, η πραγματική αξία του οποίου δεν είναι αυθύπαρκτη, αλλά στηρίζεται στην αυθεντία του ίδιου του Αρχιμήδη.

Θα πρέπει να προειδοποιήσουμε τον αναγνώστη: η αφήγησή μας προσιδιάζει περισσότερο σε αστυνομικό μυθιστόρημα παρά σε ιστορικο, δεδομένου ότι για τεράστια χρονικά διαστήματα θα βασιστούμε περισσότερο σε φευγαλέα ίχνη στοιχείων παρά σε στοιχεία αυτά καθεαυτά - όλα αυτά φυσικά μέχρι την ανακάλυψη του Παλίμψηστου!

Αρκετά όμως φλυαρήσαμε. Η εκκίνηση πρέπει να δοθεί στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου. Εκεί βρίσκεται ο Ερατοσθένης.

Η πόλη, που ιδρύθηκε το 331 πΧ από το Μ. Αλέξανδρο, γρήγορα εξελίχθηκε σε ακμάζον πολιτιστικό και πνευματικο κέντρο της ελληνιστικής Μεσογείου, χαρακτήρα που διατήρησε σε όλη

[3]βλέπε σχετικά Heath, *A History of Greek Mathematics*, p. 308-309, Dover publication, 1981

τη διάρκεια της ύστερης αρχαιότητας. Ο Ερατοσθένης ο Κυρηναίος ήταν ο διευθυντής της Βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας, της μεγαλύτερης βιβλιοθήκης του αρχαίου κόσμου και επιφανής ακαδημαικός: μεταξύ άλλων προσδιόρισε την περίμετρο της γης με πολύ μεγάλη ακρίβεια! Ο Ερατοσθένης ήταν προσωπικός φίλος του Αρχιμήδη με τον οποίο πιθανότατα γνωρίστηκε όταν ο τελευταίος έκανε ένα πέρασμα από την Αίγυπτο[4] και είναι ο παραλήπτης του έργου του. Είναι το πρώτο πρόσωπο στην Ιστορία που διαβάζει αυτό που ο ίδιος ο Αρχιμήδης τιτλοφορεί ως ¨προσέγγιση των μηχανικών θεωρημάτων¨ για τη λύση ενός γεωμετρικού προβλήματος - μεγάλη τιμή αναμφίβολα! Ο Ερατοσθένης σίγουρα θα αντιλήφθηκε την αξία της επιστολής που είχε στα χέρια του και θα ζήτησε άμεσα να γίνουν αντίγραφά της και να φυλαχθούν στη Βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας. Η ¨Μέθοδος¨ επομένως έχει βρει ασφαλές καταφύγιο στη μεγαλύτερη βιβλιοθήκη του αρχαίου κόσμου και,όπως ένα σημερινό επιστημονικό κείμενο σε μια σημερινή βιβλιοθήκη , ήταν διαθέσιμη προς μελέτη σε όλους τους ενδιαφερόμενους μαθηματικούς που ήταν φυσικά σε θέση να κατανοήσουν το είδος γραφής του Αρχιμήδη και ήθελαν να συμβουλευτούν ριζοσπαστικές μεθόδους επίλυσης προβλημάτων!

Τέτοιος πρέπει να ήταν ο Θεοδόσιος από τη Βιθυνία, Έλληνας μαθηματικός και αστρονόμος, και, το πιο ενδιαφέρον για μας, το δεύτερο καταγεγραμμένο πρόσωπο που ασχολείται με τη Μέθοδο του Αρχιμήδη, σχεδόν έναν αιώνα μετά το θάνατο του τελευταίου. Ο Θεοδόσιος που το πιο γνωστό του έργο είναι ένα εγχειρίδιο σφαιρικής αστρονομίας με τίτλο *Σφαιρικά*, έγραψε κάποιο ¨ὑπόμνημα εἰς Ἀρχιμήδους ἐφόδιον¨. Το πώς περιήλθε στα χέρια του Θεοδόσιου το έργο του Αρχιμήδη μας είναι άγνωστο, μπορούμε όμως να υποθέσουμε πως είτε τη μελέτησε στο χώρο της Βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας ως επιστήμονας - ερευνητής είτε βρήκε κάποιο αντίτυπό της στη Βιβλιοθήκη της Περγάμου, στη σημερινή Μ. Ασία, κάτι που φαίνεται πιο πιθανό, δεδομένης

[4]Η πραμονή του Αρχιμήδη στην Αλεξάνδρεια μνημονεύεται από τον Διόδωρο το Σικελιλιώτη, Έλληνα ιστορικό του 1ου αι.π.Χ. - Diodorus Siculus, *Historia* I 34, ed. Fr. Vogel, Novimbergae 1887, p.55, 25 - V 37, ed. Fr. Vogel, Novimbergae 1890, p.53, 11 όπως παρατίθεται στον πρώτο τόμο των *Απάντων Αρχιμήδους* από τον Ε.Σταμάτη,εκδόσεις ΤΕΕ, Αθήνα 1970.

της εγγύτητας της πατρίδας του με την Πέργαμο[5].

Τελευταίο κατά σειρά πρόσωπο της αρχαιότητας, σύμφωνα πάντα με τις πηγές μας, που ασχολήθηκε με τη Μέθοδο ήταν ο Ήρων ο επονομαζόμενος Μηχανικός. Γνήσιο τέκνο της Αλεξάνδρειας ο Ήρωνας[6], υπήρξε πνεύμα ανήσυχο και οι επιστημονικές του ανησυχίες εκτείνονταν τόσο σε θεωρητικό όσο και σε πρακτικό επίπεδο . [7]Τηρουμένων των αναλογιών ήταν ένας Αρχιμήδης του καιρού του! Καθόλου παράξενο λοιπόν που εντρυφεί στη σκέψη του λαμπρού προκατόχου του. Με τον Ήρωνα κλείνει το πρώτο μέρος της αφήγησής μας για το Χρονικό της Μεθόδου.

2.2 Η περιπέτεια της Μεθόδου - περιπέτεια του Παλίμψηστου!

Εάν νομίζετε πως με το που ήρθε στο φως το Παλίμψηστο μπορέσαμε αμέσως να το ξεφυλλίσουμε και να διαβάσουμε απλά τη ¨Μέθοδο¨ κάνετε λάθος. Ας αφήσουμε όμως τα ίδια γεγονότα να μας πουν την ιστορία.

Σχεδόν δύο χιλιετίες μετά τη συγγραφή της από το Συρακούσιο μαθηματικό και πιο συγκεκριμένα το έτος 1899,η Μέθοδος έρχεται και πάλι στο προσκήνιο αν και όχι άμεσα. Ο συντάκτης του καταλόγου των χειρογράφων των Βιβλιοθηκών του Πατριαρχείου Ιεροσολύμων, Αθανάσιος

[5]για περισσοτερα στοιχεία σχετικά με τη ζωή και το έργο του Θεοδόσιου βλέπε το έργο του Heath, *A History of Greek Mathematics*,p.245-253, Dover publication, 1981

[6]Υπάρχει αρκετή δυσκολία στον προσδιορισμό του χρόνου που έζησε και έδρασε ο Ήρωνας. Εδώ ακολουθούμε τη σύμβαση του Heath που τον τοποθετεί στον 3ο αι. μΧ, λίγο νωρίτερα από τον συμπολίτη του Πάππο. Για περισσότερες πληροφορίες, βλέπε Heath, *A History of Greek Mathematics*,p.298-307, Dover publication, 1981

[7] για παράδειγμα, ο τύπος υπολογισμού του εμβαδού ενός τριγώνου με βάση την ημιπερίμετρο του και τις πλευρές του εντοπίζεται στα *Μετρικά* του Ήρωνα, βλέπε Heath, A History of Greek Mathematics, p.321-323, Dover publication, 1981

Κεραμεύς-Παπαδόπουλος[8], στον τέταρτο τόμο του, σημειώνει την ύπαρξη παλίμψηστου[9] άγνωστου συγγραφέα και παραθέτει μερικούς στίχους μαθηματικού περιεχομένου, οι οποίοι ενδεχομένως θα βοηθούσαν στην αναγνώριση και την ταυτοποίησή του. Το παλίμψηστο βρισκόταν στη βιβλιοθήκη του μετοχίου του Παναγίου Τάφου στην Κωνσταντινούπολη, όπου ήταν καταχωρημένο ως *Κώδιξ ἱεροσολυμιτικός ,355*[10] . Ο Παπαδόπουλος πρόσθεσε επίσης την πληροφορία ότι το χειρόγραφο περιέχει μια επιγραφή του 16ου αι. η οποία αναφέρει ότι ανήκε στη μονή του Αγίου Σάββα [11]. Η επιγραφή αυτή δε διασώζεται σήμερα.

Ξεφυλλίζοντας κανείς το παλίμψηστο αντίκρυζε ένα αυθεντικό λειτουργικό βιβλίο της Ορθόδοξης Εκκλησίας [12],κάτω από το οποίο όμως διακρίνονταν τα ίχνη γραφής κάποιου μαθηματικού έργου. Για να κάνουμε μια εκτίμηση του χρόνου παραμονής του παλίμψηστου στη βιβλιοθήκη του μετοχίου στην Κωνσταντινούπολη θα πρέπει να πάμε πίσω στο 1846, δεδομένου ότι μνημονεύεται σε περιηγητικό βιβλίο με τίτλο *Reise in der Orient* που εκδόθηκε εκείνο το έτος στη Λειψία από το Γερμανό Konstantin von Tischendorf [13], ο οποίος επισκέφθηκε τη Βιβλιοθήκη του μετοχίου,εντόπισε το παλίμψηστο, και μάλιστα, αφαίρεσε ένα φύλλο του το οποίο σήμερα βρίσκεται στη βιβλιοθήκη του Πανεπιστημίου του Κέμπριτζ[14]. Αξίζει να σημειωθεί πάντως πως ούτε ο Τίσεντορφ ούτε μισό αιώνα αργότερα ο Παπαδόπουλος κατόρθωσαν να αναγνωρίσουν το μαθηματικό κείμενο ως αρχιμήδειο πόνημα.

[8]ιστοριοδίφης από τη Δρακεία του Πηλίου(1856-1912),διετέλεσε γραμματέας του Πατριαρχείου Ιεροσολύμων και υφηγητής του Πανεπιστημίου της Αγ.Πετρούπολης όπου και εξέδωσε τους 5 τόμους της *Ιεροσολυμιτικής Βιβλιοθήκης*

[9]χειρόγραφο του οποίου αποξέεται το αρχικό κείμενο και αντί αυτού γράφεται άλλο

[10]και μόνο η αρίθμηση καταχώρησης του Παλίμψηστου είναι ενδεικτική του ανεκμετάλλευτου πνευματικού πλούτου που έχουν μερικές φορές οι βιβλιοθήκες των μοναστηριών

[11]πλήρης ονομασία:Λαύρα του Αγ. Σάββα,ορθόδοξο μοναστήρι που βρίσκεται στην έρημο της Ιουδαίας, μεταξύ της Βηθλεέμ και της Νεκράς Θάλασσας. Κατά την παράδοση ιδρύθηκε το έτος 483 από τον Άγιο Σάββα και αναδείχθηκε γρήγορα σε ένα πολύ σημαντικό πνευματικό κέντρο. Η μονή διέθετε ένα πολύ οργανωμένο βιβλιογραφικό εργαστήριο και η βιβλιοθήκη της το 1834 περιείχε περισσότερα από 1000 χειρόγραφα

[12]μεταξύ άλλων περιείχε προσευχές, το τελετουργικό τυπικό διαφόρων ακολουθιών και τις κατά περίσταση ευχές - για παράδειγμα προσευχές για την περίπτωση που μολύνεται το λάδι, μέχρι και προσευχές εξορκισμού

[13]λόγιο, μελετητή της Βίβλου, 1815-1874, γνωστό για την ανακάλυψη ή καλύτερα την κλοπή του Σιναϊτικου κώδικα της Βίβλου

[14]κατά την προσφιλή του συνήθεια όπως άλλωστε έπραξε και με τον Σιναιτικό κώδικα. Φαίνεται πως σκοπός του ήταν να ταυτοποιήσει το μαθηματικό περιεχόμενο του χειρογράφου προκειμένου να το πουλήσει σε ενδιαφερόμενους αγοραστές

Τη δημοσίευση του Παπαδόπουλου παρατήρησε ο Γερμανός καθηγητής H.Schoene ,εκδότης των *Μετρικών* και της *Διόπτρας* του Ήρωνα στη Λειψία, ο οποίος επέστησε την προσοχή περί του χειρογράφου στον κορυφαίο μελετητή των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών, τον Δανό Heiberg .Το 1906, ο Heiberg μετέβη στην Κωνσταντινούπολη για επιτόπια μελέτη του χειρογράφου όπου διαπίστωσε ότι περιείχε έργα του Αρχιμήδη. Η ανακάλυψη αυτή του Heiberg έγινε πρωτοσέλιδο στον τύπο της εποχής (βλ παράρτημα), ενώ είναι ενδεικτικό της επιμονής και της θέλησης του Δανού επιστήμονα πως κατάφερε να αποκρυπτογραφήσει πάνω από το 80 τοις εκατό του αρχικού μαθηματικού κειμένου με τη βοήθεια ενός μεγεθυντικού φακού!Τα κείμενα που αναγνώρισε ο Heiberg ότι περείχε ο κώδικας ήταν το ¨Περι σφαίρας και κυλίνδρου¨, το ¨Περί ελίκων¨, τμήματα από το ¨Κύκλου μέτρησις¨ και το ¨Επίπεδων ισορροπιών¨, τμήματα από το δεύτερο βιβλίο των ¨Οχουμένων¨ και το ¨Στομάχιο¨. Όμως το σπουδαιότερο εύρημα που ήρθε στο φως ήταν η πραγματεία ¨Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένη έφοδος¨ - το αντικείμενο του βιβλίου μας!

Βάσει αυτής της ανάγνωσης και μιας δεύτερης πάλι στην Κωνσταντινούπολη το 1908, ο Heiberg εξέδωσε συγκεντρωτικά τα έργα του Αρχιμήδη, έκδοση που θεωρείται ακόμα και σήμερα *εκ των ουκ ανευ* για το μελετητή του Αρχιμήδη.

Πότε γράφτηκε όμως το αρχικό μαθηματικό κείμενο του Παλίμψηστου;

Η γραφολογική έρευνα έδειξε πως το κείμενο είναι έργο του 3ου τέταρτου του 10ου αι και έχει προέλευση πιθανότατα την Κωνσταντινούπολη. Η μετατροπή σε παλίμψηστο έγινε αργότερα. Πότε και που έγινε αυτό;Ποιος ήταν υπεύθυνος για αυτή την πράξη;

Κανείς δεν είχε δώσει απάντηση στα παραπάνω ερωτήματα. Το Μάϊο όμως του 2005[15]μια ομάδα επιστημόνων του Synchrotron Radiation Laboratory του Πανεπιστημίου του Στάνφορντ, κατόρθωσε να διαβάσει σε μια σελίδα του χειρογράφου κάτι που κανείς ως τότε δεν είχε καταφέρει: το όνομα του μοναχού και τη χρονολογία ολοκλήρωσης της μετατροπής του χειρόγραφου του Αρ-

[15] *Placed under X-ray gaze, Archimedes manuscript yields secrets lost to time.*Retrieved 2009-03-31

χιμήδη σε εκκλησιαστικό κείμενο- Ιωάννης Μυρωνάς, 14 Απριλίου του 1229 στην Ιερουσαλήμ[15]
.

Μπορούμε να υποθέσουμε πως μετά την Άλωση της Κωνσταντινούπολης το 1204 και τη φοβερή λεηλασία που επακολούθησε, διάφοροι μοναχοί προσπάθησαν να διασώσουν σημαντικά κειμήλια μεταφέροντας τα σε απομακρυσμένες ορθόδοξες μονές - για καλή μας τύχη ο κώδικας του Αρχιμήδη ήταν ένα από αυτά!

Μετά τη μετατροπή του σε εκκλησιαστικό βιβλίο ο κώδικας μεταφέρθηκε στη μονή του Αγ. Σάββα κάπου μεταξύ 13ου και 16ου αιώνα,ενώ μέχρι τα μέσα του 19ου αι. είχε μεταφερθεί στο μετόχι του Παναγίου τάφου στην Κωνσταντινούπολη.

Η ιστορία του χειρογράφου από την εποχή που το μελέτησε ο Heiberg και ύστερα αποκτά τη μορφή πραγματικού αστυνομικού μυθιστορήματος. Αν και πολλά από τα χειρόγραφα της βιβλιοθήκης του μετοχίου του Παναγίου Τάφου μεταφέρθηκαν στην Αθήνα από την Κωνσταντινούπολη κατά τη δεκαετία του 1920, το παλίμψηστο του Αρχιμήδη δεν ήταν ένα από αυτά. Κάτω από ύποπτες συνθήκες βρέθηκε στα χέρια ενός Γάλλου ιδιώτη. Το Πατριαρχείο των Ιεροσολύμων ισχυρίστηκε πως το χειρόγραφο εκλάπη, δεδομένου ότι το μετόχι δεν είχε καμία αρμοδιότητα να εκποιεί έγγραφα της βιβλιοθήκης του χωρίς άδεια από τον ίδιο τον Πατριάρχη, και τέτοια άδεια για πώληση του κώδικα του Αρχιμήδη δεν δόθηκε ποτέ. Ο Αρχιμήδης παρέμεινε στην κατοχή της γαλλικής οικογένειας η οποία προσπάθησε ανεπιτυχώς να τον πουλήσει κατά τη δεκαετία του 1970. Τελικά παρόλο που στην αρχή το γαλλικό υπουργείο πολιτισμού είχε απαγορέψει την έξοδό του από τη χώρα, δόθηκε η άδεια, και στα τέλη του 1998 το παλίμψηστο βρέθηκε σε δημοπρασία του οίκου Christie's . Η δημοπρασία έγινε στις 29 Οκτωβρίου στη Νέα Υόρκη και το χειρόγραφο πωλήθηκε έναντι 2.200.050 δολαρίων σε Αμερικανό συλλέκτη, του οποίου η ταυτότητα παραμένει άγνωστη[16].Το 1999 ο νέος ιδιοκτήτης παραχώρησε το χειρόγραφο στο Μουσείο

[15]έτος κατάληψης της Ιερουσαλήμ από τον αυτοκράτορα Φρειδερίκο το 2ο της Αγίας Ρωμαικής αυτοκρατορίας κατά τη διάρκεια της 6ης Σταυροφορίας (1228-1229)

[16]για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη διένεξη πατριαρχείου-Κρίστις και την εμπλοκή του ελληνικού κράτους στη διεκδίκηση του παλίμψηστου βλέπε παράρτημα.

Τεχνών Γουόλτερς της Βαλτιμόρης για συντήρηση, επεξεργασία και επιστημονική μελέτη. Έκτοτε έχει αρχίσει ένα πολύ σημαντικό έργο γύρω από το χειρόγραφο (με τη χρηματοδότηση του ιδιοκτήτη), με θεαματικά αποτελέσματα.

Το επίκεντρο αυτών των ερευνών[17] είναι φυσικά η ¨Μέθοδός¨ μας![18]

[17]για όλες τις τελευταίες ειδήσεις σχετικά με την έρευνα πάνω στο Παλίμψηστο επισκεφθείτε την ιστοσελίδα palimpsest.org

[18]βασική πηγή για την ενότητα 2.2 του κειμένου μας ήταν το άρθρο του καθηγητή της Ιστορίας των Μαθηματικών κ.Γιάννη Χριστιανίδη,*Το παλίμψηστο αποκαλύπτει το αληθινό εύρηκα του Αρχιμήδη*,το οποίο δημοσιεύτηκε στην εφημερίδα Ελευθεροτυπία, στις 15/1/2001.Ο κ.Χριστιανίδης είναι ίσως η σημαντικότερη αυθεντία σχετικά με τον Αρχιμήδη στον ελληνικό χώρο.

Κεφάλαιο 3

Η επιστολή προς τον Ερατοσθένη

3.1 Ἀρχιμήδους Περί τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων προς Ἐρατοσθένη ἔφοδος

Αρχαίο κείμενο

Ἀρχιμήδης Ἐρατοσθένει εὖ πράττειν. Ἀπέστειλά σοι πρότερον τῶν εὑρημένων θεωρημάτων ἀναγράψας αὐτῶν τὰς προτάσεις φάμενος εὑρίσκειν ταύτας τὰς ἀποδείξεις, ἃς οὐκ εἶπον ἐπί τοῦ παρόντος. Ἦσαν δὲ τῶν ἀπεσταλμένων θεωρημάτων αἱ προτάσεις αἵδε τοῦ μὲν πρώτου ἐάν εἰς πρίσμα ὀρθὸν παραλληλόγραμμον ἔχον βάσιν κύλινδρος ἐγγραφῇ τὰς μὲν βάσεις ἔχων ἐν τοῖς ἀπεναντίον παραλληλογράμμοις, τὰς δὲ πλευρὰς ἐπὶ τῶν λοιπῶν τοῦ πρίσματος ἐπιπέδων, καὶ διά τε τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ κυλίνδρου, καὶ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου τοῦ ἐν τῷ κατεναντίον ἐπιπέδῳ ἀχθῇ ἐπίπεδον, τὸ ἀχθὲν ἐπίπεδον ἀποτεμεῖ τμῆμα ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου, ἑνὸς μὲν τοῦ ἀχθέντος, ἑτέρου δέ, ἐν ᾧ ἡ βάσις ἐστὶν τοῦ κυλίνδρου, τῆς δὲ ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν εἰρημένων ἐπιπέδων, τὸ δὲ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου τμῆμα ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ ὅλου πρίσματος. Τοῦ δὲ ἑτέρου θεωρήματος ἡ πρότασις ἥδε ἐάν εἰς κύβον κύλινδρος ἐγγραφῇ τὰς μὲν βάσεις ἔχων πρὸς τοῖς κατεναντίον παραλληλογράμμοις, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν τῶν λοιπῶν τεσσάρων ἐπιπέδων

ἐφαπτομένην, ἐγγραφῇ δὲ καὶ ἄλλος κύλινδρος εἰς τὸν αὐτὸν κύβον τὰς μὲν βάσεις ἔχων ἐν ἄλλοις παραλληλογράμμοις, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν τῶν λοιπῶν τεσσάρων ἐπιπέδων ἐφαπτομένην, τὸ περιληφθὲν σχῆμα ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κυλίνδρων, ὅ ἐστιν ἐν ἀμφοτέροις τοῖς κυλίνδροις, δίμοιρόν ἐστι τοῦ ὅλου κύβου. συμβαίνει δὲ ταῦτα τὰ θεωρήματα διαφέρειν τῶν πρότερον εὑρημένων ἐκεῖνα μὲν γὰρ τὰ σχήματα, τά τε κωνοειδῆ καὶ σφαιροειδῆ καὶ τὰ τμήματα αὐτῶν, τῷ μεγέθη σχήμασι κώνων καὶ κυλίνδρων συνεκρίναμεν, ἐπιπέδοις δὲ περιεχομένῳ στερεῷ σχήματι οὐδὲν α᾽τῶν ἴσον ἔον εὕρηται, τούτων δὲ τῶν σχημάτων τῶν δυσίν ἐπιπέδοις καὶ ἐπιφανείαις κυλίνδρων ἕκαστον ἑνὶ τῶν ἐπιπέδοις περιεχομένων στερεῶν σχημάτων ἴσον εὑρίσκεται. Τούτων δὴ τῶν θεωρημάτων τὰς ἀποδείξεις ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ γράψας ἀποστλῶ σοι. Ὁρῶν δέ σε, καθάπερ λέγω, σπουδαῖον καὶ φιλοσοφίας προεστῶτα ἀξιολόγως καὶ τὴν ἐν τοῖς μαθήμασιν κατὰ τὸ ὑποπίπτον θεωρίαν τετιμηκότα ἐδοκίμασα γράψαι σοι καὶ εἰς τὸ αὐτὸ βιβλίον ἐξορίσαι τρόπου τινὸς ἰδιότητα, καθ᾽ ὅν σοι παρεχόμενον ἔσται λαμβάνειν ἀφορμὰς εἰς τὸ δύνασθαί τινα τῶν ἐν τοῖς μαθήμασι θεωρεῖν διὰ τῶν μηχανικῶν. τοῦτο δὲ πέπεισμαι χρήσιμον εἶναι οὐδὲν ἧσσον καὶ εἰς τὴν ἀπόδειξιν αὐτῶν τῶν θεωρημάτων. καὶ γάρ τινα τῶν πρότερον μοι φανέντων μηχανικῶς ὕστερον γεωμετρικῶς ἀπεδείχθη διὰ το χωρὶς ἀποδείξεως εἶναι τὴν διὰ τούτου τοῦ τρόπου θεωρίαν ἑτοιμότερον γάρ ἐστι προλαβόντα διὰ τοῦ τρόπου γνῶσιν τινα τῶν ζητημάτων πορίσασθαι τὴν ἀπόδειξιν μᾶλλον ἢ μεδενός ἐγνωσμένου ζητεῖν. Διόπερ καὶ τῶν θεωρημάτων τούτων, ὧν Εὔδοξος ἐξηύρηκεν πρῶτος τὴν ἀπόδειξιν, περί τοῦ κώνου καὶ τῆς πυραμίδος, ὅτι τρίτον μέρος ὁ μὲν κῶνος τοῦ κυλίνδρου, ἡ δὲ πυραμὶς τοῦ πρίσματος, τῶν βάσιν ἐχόντων τὴν α᾽τὴν καὶ ὕψος ἴσον, οὐ μικρὰν ἀπονείμαι ἄν τις Δημοκρίτῳ μερίδα πρώτῳ τὴν ἀπόφανσιν τὴν περί τοῦ εἰρημένου σχήματος χωρὶς ἀποδείξεως ἀποφηναμένῳ. Ἡμῖν δὲ συμβαίνει καὶ τοῦ νῦν ἐκδιδομένου θεωρήματος τὴν εὕρεσιν ὁμοίαν ταῖς πρότερον γεγενῆσθαι. Ἠβουλήθην δὲ τὸν τρόπον ἀναγράψας ἐξενεγκεῖν ἅμα μὲν καὶ διὰ τὸ προειρηκέναι ὑπέρ αὐτοῦ, μή τισιν δοκῶμεν κενήν φωνήν καταβεβλῆσθαι, ἅμα δὲ καὶ πεπεισμένος εἰς τὸ μάθημα οὐ μικρὰν ἄν συμβαλέσθαι χρείαν. Ὑπολαμβάνω γάρ τινας ἤ τῶν ὄντων ἤ ἐπιγινομένων διὰ τοῦ ἀποδειχθέντος τρόπου καὶ ἄλλα θεωρήματα οὔπω ἡμῖν συμπαραπεπτωκότα εὑρήσειν.

Γράφομεν οὖν πρῶτον τὸ καὶ πρῶτον φανὲν διὰ τῶν μηχανικῶν, ὅτι πᾶν τμῆμα ὀρθογωνίου κώνου τομῆς ἐπίτριτόν ἐστιν τριγώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν καὶ ὕψος ἴσον, μετὰ δὲ τοῦτο ἕκαστον τῶν διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου θεωρηθέντων. Ἐπὶ τέλει δὲ τοῦ βιβλίου γράφομεν τὰς γεωμετρικὰς ἀποδείξεις ἐκείνων τῶν θεωρημάτων, ὧν τὰς προτάσεις ἀπεστείλαμέν σοι πρότερον.

Ερμηνευτικά σχόλια πάνω στην επιστολή (επί του αρχαίου κειμένου)

¨παραλληλόγραμμον ἔχου βάσιν¨ : η λέξη που χρησιμοποιείται είναι ¨παραλληλόγραμμον¨ αλλά εννοείται από το περιεχόμενο τετράγωνο. (βλέπε εκφωνήσεις θεωρημάτων 12,14,15)

¨τὰς δὲ πλευρὰς ἐπί τῶν λοιπῶν τοῦ πρίσματος ἐπιπέδων¨ : με άλλα λόγια, η κυλινδρική επιφάνεια εφάπτεται των κάθετων επιφανειών του πρίσματος.

¨ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ ὅλου πρίσματος¨ : το συγκεκριμένο αποτέλεσμα αποδεικνύεται στα θεωρήματα 12-15.

¨πρὸς τοῖς κατεναντίον παραλληλογράμμοις¨ : ομοίως και εδώ εννοούνται τετράγωνα.

¨δίμοιρόν ἐστι τοῦ ὅλου κύβου¨ : ¨είναι τα 2/3 του όλου κύβου¨,το συγκεκριμένο αποτέλεσμα δεν αποδεικνύεται δυστυχώς σε κανένα σημείο του διασωθέντος μέρους της ¨Μεθόδου¨.

¨καὶ διὰ τὸ προειρηκέναι ὑπέρ αὐτοῦ ¨ : ¨και γιατί έχω μιλήσει προηγουμένως για αυτό (το μηχανικό τρόπο)¨, στον πρόλογο του ¨Τετραγωνισμού της παραβολής¨.

¨θεωρημάτων, ὧν τὰς προτάσεις ἀπεστείλαμεν σοι πρότερον¨ :πρόκειται για τα θεωρήματα που βρίσκονται στην αρχή της επιστολής.

3.2 Η Επιστολή μεταφρασμένη (σε ελεύθερη απόδοση)

"Ἀρχιμήδης Ἐρατοσθένει εὖ πράττειν"

Σου απέστειλα προηγουμένως μερικά από τα θεωρήματα που είχα βρει, αναγράφοντας τις εκφωνήσεις αυτών και λέγοντάς σου να προσπαθήσεις να βρεις τις αποδείξεις τους, τις οποίες προσωρινά δεν είχα εξαγγείλει.

Οι εκφωνήσεις των απεσταλμένων θεωρημάτων ήταν οι εξής:

1)Εάν σε ορθό πρίσμα με παραλληλόγραμμη (ενν. τετράγωνη) βάση εγγραφεί κύλινδρος ο οποίος έχει τις βάσεις του στα απέναντι παραλληλόγραμμα (τετράγωνα), τις πλευρές του (δηλ. τις τέσσερις γεννήτριες) στα υπόλοιπα επίπεδα του πρίσματος, και εάν διαμέσου του κέντρου του κύκλου ο οποίος είναι βάση του κυλίνδρου και διαμέσου μιάς πλευράς του τετραγώνου του απέναντι επιπέδου αχθεί επίπεδο, το αχθέν επίπεδο θα αποκόψει από τον κύλινδρο τμήμα (μοιάζει με νύχι) το οποίο περιέχεται μεταξύ δύο επιπέδων και της επιφάνειας του κυλίνδρου (το ένα επίπεδο είναι το αχθέν επίπεδο και το άλλο αυτό στο οποίο βρίσκεται η βάση του κυλίνδρου). Το τμήμα αυτό του κυλίνδρου θα είναι το $\frac{1}{6}$ του όλου πρίσματος.

2)Εάν σε κύβο εγγραφεί κύλινδρος ο οποίος έχει τις βάσεις του στα απέναντι παραλληλόγραμμα (τετράγωνα), την επιφάνειά του εφαπτόμενη των υπόλοιπων τεσσάρων επιπέδων και εάν εγγραφεί και άλλος κύλινδρος στον ίδιο κύβο έχοντας τις βάσεις του σε άλλα παραλληλόγραμμα (τετράγωνα) και την επιφάνειά του εφαπτόμενη στα υπόλοιπα τέσσερα επίπεδα, τοτε το προκύπτον σχήμα το οποίο περικλείεται από τις κυρτές επιφάνειες των κυλίνδρων και το οποίο ανήκει και στους δύο κυλίνδρους, είναι τα $\frac{2}{3}$ του όλου κύβου.

Συμβαίνει μάλιστα τα θεωρήματα αυτά να διαφέρουν από αυτά που είχαν βρεθεί πιο πριν. Γιατί εκείνα τα στερεά, τα κωνοειδή, δηλαδή, και τα σφαιροειδή και τα τμήματά τους τα συγκρίναμε (ως προς το μέγεθος) με κώνους και κυλίνδρους και κανένα από αυτά δε βρέθηκε να είναι ίσο προς στερεό περιεχόμενο μεταξύ επιπέδων (πρισμα). Τα συγκεκριμένα όμως στερεά που περι-

γράφονται στα δύο παραπάνω θεωρήματα βρέθηκε ότι έχουν σχέση με πρίσματα. Τις αποδείξεις, λοιπόν, αυτών των θεωρημάτων σου αποστέλλω στο βιβλίο αυτό.

Θεωρώντας σε, όπως έχω ήδη πει, σπουδαίο και αξιολόγως προεξάρχοντα κατά τη φιλοσοφία και έχοντας τιμήσει τη μαθηματική έρευνα, έκρινα ορθό να σου εκθέσω σε αυτό το βιβλίο και να καθορίσω συγκεκριμένο τρόπο μέσω του οποίου να μπορείς να ξεκινάς να εξετάζεις μαθηματικές προτάσεις μέσω της μηχανικής. Είμαι, μάλιστα, πεπεισμένος ότι η διαδικασία αυτή δεν είναι λιγότερο χρήσιμη και για την απόδειξη των ίδιων των θεωρημάτων. Γιατί και μερικά εξ' αυτών τα οποία μου είχαν αποκαλυφθεί μέσω της μηχανικής απεδείχθησαν στη συνέχεια γεωμετρικώς, διότι η εξέταση μέσω της μηχανικής δεν παρέχει απόδειξη. Διότι είναι ευκολότερο, αφού βρει κανείς μέσω του τρόπου αυτού (της μηχανικής) κάποια γνώση των ζητημάτων να παρουσιάσει την απόδειξη, παρά να ερευνά χωρίς να γνωρίζει προηγουμένως τίποτα.

Για το λόγο αυτό και για τα θεωρήματα των οποίων πρώτος ο Εύδοξος βρήκε την απόδειξη, ότι δηλαδή ο κώνος είναι το $\frac{1}{3}$ του κυλίνδρου και η πυραμίδα το $\frac{1}{3}$ του πρίσματος (με την αυτή βάση και ίσο ύψος), όχι μικρό μέρος πρέπει να αποδοθεί στο Δημόκριτο, ο οποίος πρώτος βρήκε τις παραπάνω σχέσεις, χωρίς όμως να τις αποδείξει. Σε εμένα δε, συνέβη η εύρεση του εκδιδόμενου τώρα θεωρήματος να έχει γίνει όμοια προς τα προηγούμενα. Ήθελα, μάλιστα, καταγράφοντας τον (μηχανικό) τρόπο να τον δώσω στη δημοσιότητα, και γιατί έχω μιλήσει προηγουμένως περί αυτού (για να μη φανεί σε μερικούς ότι λεμε κούφια λόγια) αλλά και γιατί είμαι πεπεισμένος πως προσφέρω όχι μικρή υπηρεσία στα μαθηματικά. Διότι νομίζω ότι μερικοί εκ των συγχρόνων μου ή εκ των μεταγενέστερων θα βρούν και άλλα θεωρήματα μέσω του τρόπου αυτού, τα οποία δεν έχω σκεφθεί ακόμη.

Γράφουμε, λοιπόν, το πρώτο μέσω της μηχανικής αποδειχθέν θεώρημα, ότι κάθε παραβολικό τμήμα είναι τα $\frac{4}{3}$ του τριγώνου με την ίδια βάση και ίσο ύψος. Στη συνέχεια ακολουθούν και άλλα θεωρήματα που εξετάστηκαν με τον τρόπο αυτό. Στο τέλος του βιβλίου παραθέτουμε τις γεωμετρικές αποδείξεις των θεωρημάτων που σου αποστείλαμε προηγουμένως (εννοεί τις απο-

δείξεις των δύο θεωρημάτων που παρουσιάστηκαν στην αρχή της επιστολής).

3.3 Μια ανάλυση της επιστολής

Η πρώτη ανάγνωση του μεταφρασμένου κειμένου που παραθέσαμε αποκαλύπτει εύκολα το χαρακτήρα της φημισμένης πραγματείας του Αρχιμήδη - πρόκειται για μια επιστολή προς τον Ερατοσθένη, κορυφαίο πολυμαθή της εποχής, επιστήθιο φίλο του Αρχιμήδη και διευθυντή του Μουσείου της Αλεξάνδρειας, του σημαντικότερου ερευνητικού ιδρύματος του ελληνιστικού κόσμου.

Όπως γίνεται άμεσα αντιληπτό, η επιστολή αυτή είναι τμήμα μόνο της αλληλογραφίας των δύο επιστημόνων που πιθανότατα έρχεται ως ¨λυσάρι¨ του Αρχιμήδη για να δώσει απαντήσεις σε δύο θεωρήματα που είχε απευθύνει προς λύση στον Ερατοσθένη.

Ακολουθεί η διατύπωση των θεωρημάτων και ένα ενδιαφέρον απόσπασμα, όπου πληροφορούμαστε πως τα ακανόνιστα σχήματα που περιγράφονται αναλυτικά στα δυο θεωρήματα έχουν σχέση με πρίσματα. Τα στερεά αυτά γράφει ο Αρχιμήδης, είναι άξια της προσοχής μας διότι στα μέχρι τώρα στερεά με τα οποία καταπιάστηκε (και πιο συγκεκριμένα τα κωνοειδή και τα σφαιροειδή και τα τμήματά τους) υπήρχαν σχέσεις σύγκρισης με κώνους και κυλίνδρους όχι όμως και με ορθά πρίσματα. Το χωρίο αυτό μας επιτρέπει να εικάσουμε ότι χρονολογικά, το έργο αυτό του Αρχιμήδη,έπεται της πραγματείας του ¨Περι κωνοειδών και σφαιροειδών¨.

Το κυρίως μέρος της επιστολής αρχίζει με ένα λαμπρό έπαινο του Αρχιμήδη προς τον Ερατοσθένη ως σπουδαίου και αναγνωρισμένου σοφού της εποχής, μια προσωπικότητα ισάξια του μεγάλου Συρακούσιου. Ή μήπως δεν είναι έτσι· Αν λάβουμε υπόψιν πως ο σκοπός αυτής της επιστολής είναι η επίλυση δύο ήδη κοινοποιημένων στον Ερατοσθένη θεωρημάτων, είναι πιο λογικό να υποθέσει κανείς πως ο Ερατοσθένης απέτυχε να δώσει απαντήσεις, όντας φημισμένος ως μεγάλος μαθηματικός! Μια τακτική αλληλογραφία μεταξύ δύο φίλων παρά το μαθηματικό της περιεχόμενο δεν είναι υποχρεωτικό να είναι απρόσωπη. Ίσως ένας παιχνιδιάρης Αρχιμήδης περιπαίζει ευγενικά το φίλο του για την αδυναμία του να αποδείξει τα ζητούμενα θεωρήματα![1]Κι

[1]Μάλιστα στο λεξικό *Σούδα*, ο Ερατοσθένης χαρακτηρίζεται ως ¨Βητα¨ γιατί ερχόταν δεύτερος σε οτιδήποτε καταπιανόταν, παρόλο που προσπαθούσε πολυ! Ένας άλλος χαρακτηρισμός που του αποδίδεται είναι ¨Πένταθλος¨.

ύστερα του λέει: και τώρα δες τη μεθοδολογία με την οποία ανακάλυψα τα θεωρήματα. Πρόκειται για ένα συγκεκριμένο τρόπο, εμπνευσμένο από τη μηχανική, ο οποίος θα σε βοηθήσει να αρχίζεις να εξετάζεις άγνωστα μαθηματικά προβλήματα, αλλά και να τα αποδεικνύεις ευκολότερα. Κάποια θεωρήματα, συνεχίζει ο Αρχιμήδης, που μου φανερώθηκε η απόδειξή τους με αυτό το μηχανικό τρόπο, κατόρθωσα στη συνέχεια να τα αποδείξω και γεωμετρικά. Βέβαια, καταλαβαίνεις Ερατοσθένη, ότι ο τρόπος αυτός δεν περιέχει γεωμετρική απόδειξη. Από κάπου όμως πρέπει να ξεκινήσει κανείς όταν έχει να κάνει με δύσκολα γεωμετρικά ζητήματα! Ο Αρχιμήδης πιστεύει πως είναι εξίσου σημαντικό (ή πιο σωστά, αρκετα σημαντικό) με την αυστηρή γεωμετρική απόδειξη κάποιου συγκεκριμένου θεωρήματος η ¨φανέρωσή του (κατά τα ίδια τα λεγόμενά του) με κάποιο (οποιονδήποτε) άλλο τρόπο. Πάρε, για παράδειγμα, Ερατοσθένη, τα εξής θεωρήματα:

1)ότι ο κώνος είναι το $\frac{1}{3}$ του κυλίνδρου με την αυτή βάση και ίσο ύψος και

2)ότι η πυραμίδα είναι το $\frac{1}{3}$ του πρίσματος με την αυτή βάση και ίσο ύψος.[2]

Ναι μεν ο Εύδοξος έφθασε πρώτος στη γεωμετρική τους απόδειξη αλλά θα πρέπει να αναγνωρίσουμε τη συνεισφορά του Δημόκριτου ο οποίος πρώτος μας αποκάλυψε την προαναφερθείσα σχέση μεταξύ των στερεών - και η εύρεση ενός θεωρήματος είναι το ίδιο σημαντική με την απόδειξή του! Το αν ήξερε ή όχι ο Αρχιμήδης τη διαδικασία με την οποία κατέληξε ο Δημόκριτος στο θεώρημα κάπου πενήντα χρόνια νωρίτερα από τον Εύδοξο, ώστε να την κατατάξει ως μη απόδειξη, δεν ενδιαφέρει τόσο το μελετητή της ιστορίας των μαθηματικών. Εκείνο που πρέπει να τονιστεί είναι πως ο Αρχιμήδης προωθεί απερίφραστα την αναγνώριση κάθε πονήματος των συναδέλφων του μαθηματικών, αποδίδοντας ¨τα του Καίσαρος τω Καίσαρι¨: λιθαράκι - λιθαράκι όλοι συμβάλλουν στην εξέλιξη της γεωμετρικής γνώσης![3] Η δικιά του συνεισφορά στο γεωμετρι-

Ίσως το πειραχτήρι ο Αρχιμήδης να κρατούσε τα πρωτεία για τον εαυτό του (τουλάχιστον όσον αφορά τη γεωμετρία)!

[2]Μία ακόμη ίδια αναφορά στον Εύδοξο και το συγκεκριμένο θεώρημα περιέχεται στον πρόλογο του έργου του Αρχιμήδη ¨Περί σφάιρας και κυλίνδρου Ι¨.

[3]Η σχέση του Αρχιμήδη με τους προκατόχους του συνοψίζεται τέλεια στο παρακάτω απόσπασμα από το έργο του Heath *The Works of Archimedes*,c.III:"Ο στόχος του Αρχιμήδη δεν ήταν η απλή οργάνωση ή η επανεξέταση της υπάρχουσας γνώσης. Ο αντικειμενικός του στόχος είναι πάντα κάτι καινούριο, κάποια συγκεκριμένη προσθήκη

κό οικοδόμημα είναι μεταξύ άλλων ο μηχανικός αυτός τρόπος, η Μέθοδος. Οι συνθήκες έχουν ωριμάσει για τη δημοσιοποίησή της για τους παρακάτω λόγους:

1) *¨διὰ τὸ προειρηκέναι ὑπέρ αὐτοῦ¨*

γιατί έχει μιλήσει για αυτή τη μέθοδο σε προηγούμενο έργο του (βλ. εισαγωγή στον ¨Τετραγωνισμό της παραβολής¨)

2) *¨μὴ τισσιν δοκῶμεν κενὴν φωνὴν καταβεβλῆσθαι¨*

για να μη νομίσει κανείς πως λέει κενούς λόγους

3) *¨ἅμα δὲ καὶ πεπεισμένος εἰς τὸ μάθημα οὐ μικράν ἄν συμβαλέσθαι χρείαν. ὑπολαμβάνω γάρ τινας ἤ τῶν ὄντων ἤ ἐπιγινομένων δια τοῦ ἀποδειχθέντος τρόπου καὶ ἄλλα θεωρήματα οὔπω ἡμῖν συμπαραπεπτωκότα εὑρήσειν¨*

γιατί έχει χρέος απέναντι στη μαθηματική κοινότητα να τους προσφέρει ένα χρήσιμο εργαλείο εύρεσης μαθηματικών θεωρημάτων

Μια πρώτη αξιολόγηση της ίδιας της Μεθόδου, μας την παρέχει ταπεινά ο ίδιος ο δημιουργός της. Η επιστολή κλείνει με το πρώτο θεώρημα που απέδειξε ο Αρχιμήδης μέσω της μηχανικής (ότι κάθε παραβολικό τμήμα είναι τα $\frac{4}{3}$ του τριγώνου με την αυτή βάση και ίσο ύψος) και με την επισήμανση ότι θα παραθέσει και τα υπόλοιπα θεωρήματα που εξέτασε με αυτόν τον τρόπο και στο τέλος του βιβλίου θα δοθούν οι γεωμετρικές αποδείξεις των δύο θεωρημάτων που παρουσίασε στην αρχή της επιστολής του. Περισσότερη ανάλυση της επιστολής και κατέπέκταση του περιεχομένου της ¨Μεθόδου¨ θα ακολουθήσει μετά την παρουσίαση των θεωρημάτων.

στο άθροισμα της γνώσης, και η ολοκληρωτική αυθεντικότητά του δεν μπορεί παρά να εκπλήσσει το μελετητή του έργου του. Τα εισαγωγικά γράμματα που συνοδεύουν τα περισσότερα έργα του είναι διαπρεπή χαρακτηριστικά του μεγάλου ανδρός: η ευθύτητα και η απλότητά τους, η απόλυτη απουσία εγωισμού και οποιασδήποτε προσπάθειας να μεμεγεθύνει τα επιτεύγματα του σε σύγκριση με τους άλλους ή να δώσειέμφαση στα λάθη τους εκεί όπου ο αυτός βρήκε λύση, όλα αυτά εντείνουν την ίδια εντύπωση. Δε διστάζει να παραδεχθεί πως κάποια προβλήματα τον ταλαιπώρησαν για χρόνια, ή να παραδεχθεί ενδεχόμενες λανθασμένες αποδείξεις θεωρημάτων που παραθέτει. Μιλάει με τα καλύτερα λόγια για τον εγκάρδιο φίλο του Κόνωνα και τις σημαντικές συνεισφορές που θα έκανε στη γεωμετρία αν ζούσε. Έτσι, ο ιστορικός των μαθηματικών, μελετώντας τις υποχρεώσεις του Αρχιμήδη προς τους προκατόχους του έχει συγκριτικά εύκολο έργο μπροστά του.

3.4 Προλαμβανόμενα Αρχιμήδη

Τις παρακάτω βοηθητικές προτάσεις τις παραθέτει ο Αρχιμήδης ως απαραίτητη γνώση για τα θεωρήματά του. Προκειμένου να διευκολύνουμε τον αναγνώστη να μελετήσει καλύτερα τα θεωρήματα, θα εμπλουτίσουμε τη συγκεκριμένη λίστα με βοηθητικές γεωμετρικές προτάσεις που παίρνει ως δεδομένες ο Αρχιμήδης για τη διερεύνηση των θεωρημάτων του με το μηχανικό τρόπο, τις οποίες θα τις τοποθετήσουμε πριν από κάθε θεώρημα (πρόκειται κατά κανόνα για θεωρήματα που έχει αποδείξει ο Αρχιμήδης σε άλλα έργα του και για ευκλείδια θεωρήματα). Γιατί όμως τις αποκαλούμε *βοηθητικές προτάσεις - προλαμβανόμενα* και όχι *λήμματα* όπως ο Heath (proposition - *Works of Archimedes*, The Method (supplement), p.14, Dover publication, 2002),ο Dijksterhuis (proposition -*Archimedes*, p.315, Princeton university press, 1987), ή ακόμα και ο Σταμάτης (λήμματα - *Αρχιμήδους Άπαντα*, τ.Β., σελ. 389,εκδ. ΤΕΕ, Αθήνα 1970); Ψπάρχει κάποια διαφορά και αν ναι ποια είναι αυτή; Ας σταθούμε για λίγο στον ίδιο τον ορισμό του λήμματος. Ο Πρόκλος[4] (Εις Ευκλ.,211.1-12) ορίζει το λήμμα ως εξής: ¨ο όρος λήμμα πολλές φορές χρησιμοποιείται για να δηλώσει κάθε πρόταση που λαμβάνεται για να επιλυθεί μια άλλη, όπως όταν λένε ότι αυτή η απόδειξη γίνεται από τόσα λήμματα. Ειδικά δε για τη γεωμετρία, το λήμμα είναι πρόταση που χρειάζεται επιβεβαίωση. Γιατί όταν για μια κατασκευή ή για μια απόδειξη υποθέσουμε κάτι που δεν έχει αποδειχθεί, αλλά έχει ανάγκη απόδειξης, τότε αυτό που ελήφθη και έχει το ίδιο ανάγκη έρευνας γιατί είναι αμφίβολο, αυτό το ονομάζουμε λήμμα. Διαφέρει δε από το αίτημα και το αξίωμα γιατί είναι δυνατό να αποδειχθεί, ενώ εκείνα τα λαμβάνουμε καθάυτά χωρίς απόδειξη για να επιβεβαιώσουν άλλες προτάσεις¨. Όπως σημειώνει εύστοχα ο κ.Β.Καρασμάνης (*Η γεωμετρική μέθοδος του Ιπποκράτη του Χίου*,2003), ¨από το χωρίο αυτό βλέπουμε ότι όταν χρησιμοποιούμε ένα λήμμα για τη λύση ενός προβλήματος, θεωρούμε το λήμμα ως γνωστό, λύνουμε το πρόβλημα μέσω αυτού και κατόπιν αποδεικνύουμε το λήμμα.

[4]Έλληνας νεοπλατωνικός φιλόσοφος,412-487 μ.Χ., σχολιαστής πολλών διαλόγων του Πλάτωνα (*Αλκιβιάδης, Κρατύλος,Παρμενίδης, Πολιτεία, Τίμαιος*) όπως επίσης και του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη - θεωρείται από τους τελευταίους μεγάλους κλασικούς φιλοσόφους.

Έτσι το λήμμα είναι ένα είδος υπόθεσης ή αρχής για τη λύση του αρχικού μας προβλήματος¨. Θα πρέπει εμείς απλώς να σημειώσουμε ότι 1) ο ορισμός αυτός του λήμματος ως βοηθητικής πρότασης που χρήζει απόδειξης είναι τελείως σύμφωνος με το σύγχρονο ορισμό του λήμματος όπως αυτός μπορεί να βρεθεί σε ένα μοντέρνο μαθηματικό σύγγραμμα (πχ *the Princeton Companion to Mathematics*,Timothy Gowers,June Barrow-Green and Imre Leader,2008, p.73-74) και 2) επιπλέον έτσι τονίζεται ο γεωμετρικός χαρακτήρας του λήμματος.Επομένως,σωστά ο Αρχιμήδης χρησιμοποιεί τον όρο προλαμβανόμενα και εμείς από την πλευρά μας θα παραθέσουμε τις αποδείξεις των λημμάτων,όπου αυτά υπάρχουν.

Ο Αρχιμήδης,λοιπόν, αποφεύγει να ονομάζει τις 10 πρώτες προτάσεις λήμματα ή θεωρήματα (τις αποκαλεί προλαμβανόμενα), και μόνο την τελευταία πρόταση την ονομάζει θεώρημα. Ας δούμε ποια είναι αυτά:

Αρχαίο κείμενο

1. *Ἐὰν ἀπὸ μεγέθους μέγεθος ἀφαιρεθῇ, τὸ δὲ αὐτὸ σημεῖον κέντρον τοῦ βάρους ᾖ τοῦ τε ὅλου καὶ τοῦ ἀφαιρουμένου, τοῦ λοιποῦ τὸ αὐτὸ σημεῖον κέντρον ἐστῖ τοῦ βάρους.*

2. *Ἐὰν ἀπὸ μεγέθους μέγεθος ἀφαιρεθῇ, ᾗ δὲ μὴ τὸ αὐτὸ σημεῖον κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τε ὅλου μεγέθους καῖ τοῦ ἀφαιρουμένου μεγέθους, τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους τοῦ λοιποῦ μεγέθους ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἐπιζευγνυούσης τὰ κέντρα τοῦ βάρους τοῦ τε ὅλου καὶ τοῦ ἀφαιρουμένου ἐκβεβλημένης καὶ ἀφαιρεθείσης ἀπ᾽ αὐτῆς πρὸς τὴν μεταξὺ τῶν εἰρημένων κέντρων τοῦ βάρους τοῦτον ἐχούσης τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ βάρος τοῦ ἀφῃρημένου μεγέθους πρὸς τὸ λοιπὸν βάρος τοῦ λοιποῦ μεγέθους.*

3. *Ἐὰν ὁποσωνοῦν μεγεθέων τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ᾖ, καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθους τὸ κέντρον ἔσται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.*

4. *Πάσης εὐθείας τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους ἡ διχοτομία τῆς εὐθείας.*

5. *Παντὸς τριγώνου τὸ κέντρον ἐστὶν τοῦ βάρους τὸ σημεῖον, καθ᾽ ὃ αἱ ἐκ τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ἐπὶ μέσας τὰς πλευρὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι τέμνουσιν ἀλλήλας.*

6. *Παντὸς παραλληλογράμμου τὸ κέντρον ἐστὶν τοῦ βάρους τ῾ο σημεῖον, καθ᾽ ὃ αἱ διάμετροι συμπίπτουσιν.*

7. *Κύκλου τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστίν, ὃ καὶ τοῦ κύκλου ἐστὶ κέντρον.*

8. *Παντὸς κυλίνδρου τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν ἡ διχοτομία τοῦ ἄξονος.*

9. *Παντὸς πρίσματος τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους ἡ διχοτομία τοῦ ἄξονος.*

10. *Παντὸς κώνου τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους ἐπὶ τοῦ ἄξονος διαιρεθέντος οὕτως, ὥστε τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ τμῆμα τριπλάσιον εἶναι τοῦ λοιποῦ.*

11. *Χρησόμεθα δὲ καὶ ἐν τῷ προγεγραμμένῳ Κωνοειδῶν τῷδε τῷ θεωρήματι. Ἐὰν ὁπουσαοῦν μεγέθη ἄλλοις μεγέθεσιν ἴσοις τὸ πλῆθος κατὰ δύο τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον τὰ ὁμοίως τεταγμένα, ᾗ δὲ τὰ πρῶτα μεγέθη πρὸς ἄλλα μεγέθη ἐν λόγοις ὁποιοισοῦν, ἢ τὰ πάντα ἢ τινα αὐτῶν, καὶ τὰ ὕστερον μεγέθη πρὸς ἄλλα μεγέθη τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις ᾗ, πάντα τὰ πρῶτα μεγέθη πρὸς πάντα τὰ λεγόμενα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει πάντα τὰ ὕστερον πρὸς πάντα τὰ λεγόμενα.*

Σύγχρονη απόδοση (σε παρένθεση τα έργα του Αρχιμήδη όπου συναντώνται ορισμένα από αυτά

1. Εάν από μέγεθος αφαιρεθεί μέγεθος, το ίδιο δε σημείο είναι κέντρο βάρους και του όλου μεγέθους και του αφαιρούμενου, το σημείο αυτό θα είναι κέντρο βάρους και του υπόλοιπου μεγέθους.

2. Εάν από μέγεθος αφαιρεθεί μέγεθος το οποίο δεν έχει το ίδιο κέντρο βάρους (ενν. με το αρχικό μέγεθος), το κέντρο βάρους του υπόλοιπου μεγέθους θα βρίσκεται επί της ευθείας που ενώνει τα κέντρα βάρους και του όλου και του αφαιρούμενου μεγέθους και αφού ληφθεί πάνω στην ευθεία (προς το μέρος του κέντρου βάρους του όλου μεγέθους) τέτοιο τμήμα, το οποίο να έχει λόγο προς το τμήμα το μεταξύ των προαναφερθέντων κέντρων βάρους, το λόγο που έχει το βάρος του αφαιρεθέντος μεγέθους προς το βάρος του λοιπού μεγέθους.

(Επίπεδων Ισορροπιών, Ι.8)

3. Εάν το κέντρο βάρους καθενός από οσαδήποτε μεγέθη βρίσκεται πάνω στην ίδια ευθεία, και το κέντρο βάρους του μεγέθους που αποτελείται από όλα αυτά θα βρίσκεται πάνω σε αυτήν την ευθεία.

(Επίπεδων Ισορροπιών, I.5)

4. Το κέντρο βάρους οπιασδήποτε ευθείας βρίσκεται στο μέσο της ευθείας.

(Επίπεδων Ισορροπιών, I.4)

5. Το κέντρο βάρους κάθε τριγώνου είναι το σημείο τομής των διαμέσων του.

(Επίπεδων Ισορροπιών, I.13,14)

6. Το κέντρο βάρους κάθε παραλληλογράμμου είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του.

(Επίπεδων Ισορροπιών, I.10)

7. Το κέντρο βάρους του κύκλου είναι το κέντρο του κύκλου.

8. Το κέντρο βάρους κάθε κυλίνδρου είναι το μέσο του άξονά του.

9. Το κέντρο βάρους κάθε πρίσματος είναι το μέσο του άξονά του.

10. Το κέντρο βάρους κάθε κώνου βρίσκεται σε τέτοιο σημείο στον άξονά του, ώστε το τμήμα προς την κορυφή του κώνου να είναι τριπλάσιο του υπόλοιπου[5].

11. Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης και το παρακάτω θεώρημα: εάν οσαδήποτε μεγέθη μιάς σειράς είναι ανά δύο ανάλογα προς οσαδήποτε μεγέθη άλλης σειρας, είναι επιπλέον τα πρώτα μεγέθη προς άλλα μεγέθη (τρίτης σειράς) σε οποιουσδήποτε λόγους ή όλα ή κάποια από αυτά και τα μεγέθη της δεύτερης σειράς έχουν τους ίδιους λόγους προς άλλα μεγέθη (τέταρτης σειράς), τότε το άθροισμα των πρώτων μεγεθών προς το άθροισμα των τρίτων μεγεθών έχει τον ίδιο λόγο τον οποίο έχει το άθροισμα των δεύτερων μεγεθών προς το άθροισμα των τέταρτων μεγεθών.

(Περί κωνοειδών και σφαιροειδών, 1)

Οι προτάσεις 1,3,4,5,6,7,8,9,10 γίνονται εύκολα αντιληπτά από οποιονδήποτε αναγνώστη δια-

[5]Η απόδειξη του συγκεκριμένου λήμματος δεν διασώζεται σε κανένα έργο του Αρχιμήδη ή κάποιο άλλο της αρχαίας ελληνικής μαθηματικής βιβλιογραφίας

θέτει στοιχειώδεις γνώσεις γεωμετρίας. Για την πιο περίπλοκη στη διατύπωση πρόταση 2 και το θεώρημα 11 μια πιο μαθηματικοποιημένη επαναγραφή τους κρίνεται αναγκαία. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε μια τροποποιημένη εκδοχή των εκφωνήσεων των θεωρημάτων κατά Heath (βλ. παρακάτω).

Ο Αρχιμήδης πουθενά στο αρχαίο κείμενο της Μεθόδου δεν αναφέρεται στις προτάσεις αυτές ως εξής : ¨θα χρησιμοποιήσουμε τώρα το λήμμα τάδε, κτλ¨. Με τη βοήθεια του κ. Καρασμάνη προσπαθήσαμε να δώσουμε μια ερμηνεία για αυτήν την παραδοξότητα. Οι 10 πρώτες προτάσεις με μια προσεκτική ματιά, διαπιστώνει κανείς πως έχουν καθαρά μηχανικό χαρακτήρα και μόνο η 11 έχει γεωμετρικό. Οι 10 πρώτες προτάσεις εντοπίζονται σε μηχανικά συγράμματα του Αρχιμήδη (πχ. στο *Περί Επίπεδων Ισορροπιών*) ενώ η τελευταία σε γεωμετρικό πόνημα (*Περί Κωνοειδών και Σφαιροειδών*). Ο Αρχιμήδης είναι αυστηρός στις διατυπώσεις του. Δεν μπορεί να αποδώσει μαθηματικό (γεωμετρικό) χαρακτήρα σε προτάσεις που ανήκουν στο πεδίο της Μηχανικής, να τις αποκαλέσει δηλαδή με γεωμετρικούς όρους (λήμμα, θεώρημα) όταν μάλιστα συμπεριλαμβάνει στη λίστα και ξεχωριστή γεωμετρική πρόταση. Κάτι τέτοιο θα προκαλούσε σύγχυση και θα δημιουργούσε ζήτημα σοβαρότητας και αξιοπιστίας σχετικά με το έργο του μαθηματικού. Για αυτό,λοιπόν, έχουμε 10 βοηθητικές προτάσεις από τη Μηχανική και 1 θεώρημα από τη γεωμετρία που μας προϊδεάζουν για το μικτό χαρακτήρα της Μεθόδου του Αρχιμήδη. Ας δούμε τώρα και τις δύο πιο πρίπλοκες περιπτώσεις 2 και 11.

Προλαμβανόμενο 2: Εάν $AEBZ$ είναι ένα μέγεθος με κέντρο βάρους το σημείο M, και $A\Theta\Delta Z$ ένα τμήμα του του οποίου το κέντρο βάρους είναι το σημείο K, τότε το κέντρο βάρους του υπόλοιπου τμήματος θα είναι ένα σημείο Γ πάνω στην ευθεία KM, τέτοιο ώστε

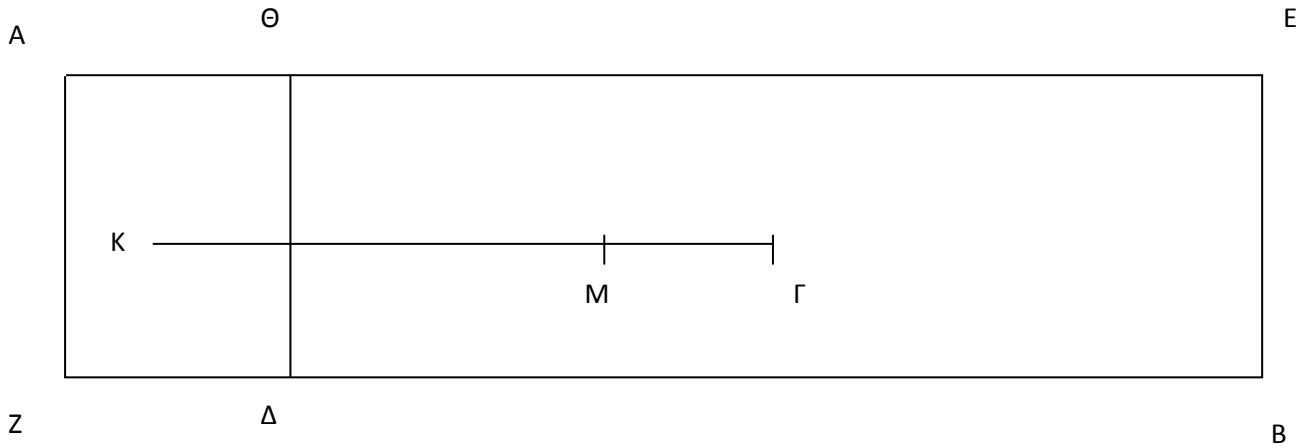
$$\frac{\Gamma M}{MK} = \frac{(A\Theta\Delta Z)}{(\Theta EB\Delta)},$$

όπου το δέυτερο κλάσμα δηλώνει μια σχέση μεταξύ των μεγεθών $A\Theta\Delta Z$ και $\Theta EB\Delta$ (εμβαδά ή όγκοι).

Απόδειξη

Εάν το κέντρο βαρύτητας του $\Theta EB\Delta$ δεν είναι στο Γ αλλά σε κάποιο άλλο σημείο Η προκύπτει αμέσως άτοπο από το θεώρημα του Αρχιμήδη: ¨δύο μεγέθη, συμμετρικά ή ασύμμετρα ισοροπούν σε αποστάσεις αντιστρόφως ανάλογες των μεγεθών¨. (Περί Επίπεδων Ισορροπιών, 6,7)

Σχήμα:



Θεώρημα 11: Εάν έχω για τις δύο σειρές μεγεθών $(A_1, B_1, \Gamma_1, ..., K_1)$,$(A_2, B_2, \Gamma_2, ..., K_2)$:

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$$

$$\frac{B_1}{\Gamma_1} = \frac{B_2}{\Gamma_2}$$

$\vdots$ (α)

κ.ο.κ

και εάν ισχύουν επίσης για τις νέες σειρές $(A_3, B_3, \Gamma_3, ..., K_3)$,$(A_4, B_4, \Gamma_4, ..., K_4)$:

$\frac{A_1}{A_3} = \frac{A_2}{A_4}$

$\frac{B_1}{B_3} = \frac{B_2}{B_4}$

$\vdots$ (β)

κ.ο.κ.

τότε προκύπτει ότι:

$$\frac{A_1 + B_1 + \Gamma_1 + ... + K_1}{A_3 + B_3 + \Gamma_3 + ... + K_3} = \frac{A_2 + B_2 + \Gamma_2 + ... + K_2}{A_4 + B_4 + \Gamma_4 + ... + K_4}$$

<u>Απόδειξη</u>

Η απόδειξη έχει ως εξής. Αφού

$\frac{A_3}{A_1} = \frac{A_4}{A_2}$ και

$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$ ενώ

$\frac{B_1}{B_3} = \frac{B_2}{B_4}$, έχουμε

$\frac{A_3}{B_3} = \frac{A_4}{B_4}$. (γ)

Παρομοίως, $\frac{B_3}{\Gamma_3} = \frac{B_4}{\Gamma_4}$, κοκ (γ)

Ξανά, από τις σχέσεις (α) προκύπτει ότι

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = ...$$

Επομένως,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_1 + B_1 + \Gamma_1 + ... + K_1}{A_2 + B_2 + ... + K_2}, \text{ ή}$$

$$\frac{A_1 + B_1 + \Gamma_1 + ... + K_1}{A_1} = \frac{A_2 + B_2 + \Gamma_2 + ... + K_2}{A_2} \text{ και}$$

$\frac{A_1}{A_3} = \frac{A_2}{A_4}$, ενώ από τις σχέσεις (γ) προκύπτει με τον ίδιο τρόπο ότι

$$\frac{A_3}{A_3 + B_3 + \Gamma_3 + ... + K_3} = \frac{A_4}{A_4 + B_4 + \Gamma_4 + ... + K_4}.$$

Τελικά έχω,

$$\frac{A_1 + B_1 + \Gamma_1 + ... + K_1}{A_3 + B_3 + \Gamma_3 + ... + K_3} = \frac{A_2 + B_2 + \Gamma_2 + ... + K_2}{A_4 + B_4 + \Gamma_4 + ... + K_4}.$$

Κεφάλαιο 4

Τα θεωρήματα της Μεθόδου

Το ουσιαστικότερο, φυσικά, τμήμα του περίφημου έργου του Αρχιμήδη, δεν είναι άλλο από τα θεωρήματα που ανακάλυψε μέσω του μηχανικού τρόπου του[1] , μέσω της Μεθόδου. Στις σελίδες που ακολυθούν θα αναπτύξουμε τα θεωρήματα αυτά βασισμένοι στο παρακάτω πλαίσιο:

1ο μέρος: βοηθητικές προτάσεις
2ο μέρος: αρχαίο κείμενο
3ο μέρος: μαθηματική μετάφραση
4ο μέρος: μηχανική προσέγγιση/μέθοδος
(5ο μέρος): γεωμετρική απόδειξη

Το κυρίαρχο σκεπτικό μας είναι πως η αρχιμήδεια μέθοδος είναι πάνω απ' όλα ένα μαθηματικό έργο και σαν τέτοιο πρέπει να αντιμετωπιστεί, όχι ως λογοτεχνικό κατασκεύασμα. Ξεκινάμε, λοιπόν, με τις εκφωνήσεις χρήσιμων προτάσεων τις οποίες χρησιμοποιεί ως δεδομένες ο Αρχιμήδης μέσα στα θεωρήματά του, ώστε ο αναγνώστης να μπορεί να ανατρέχει γρήγορα σε αυτές

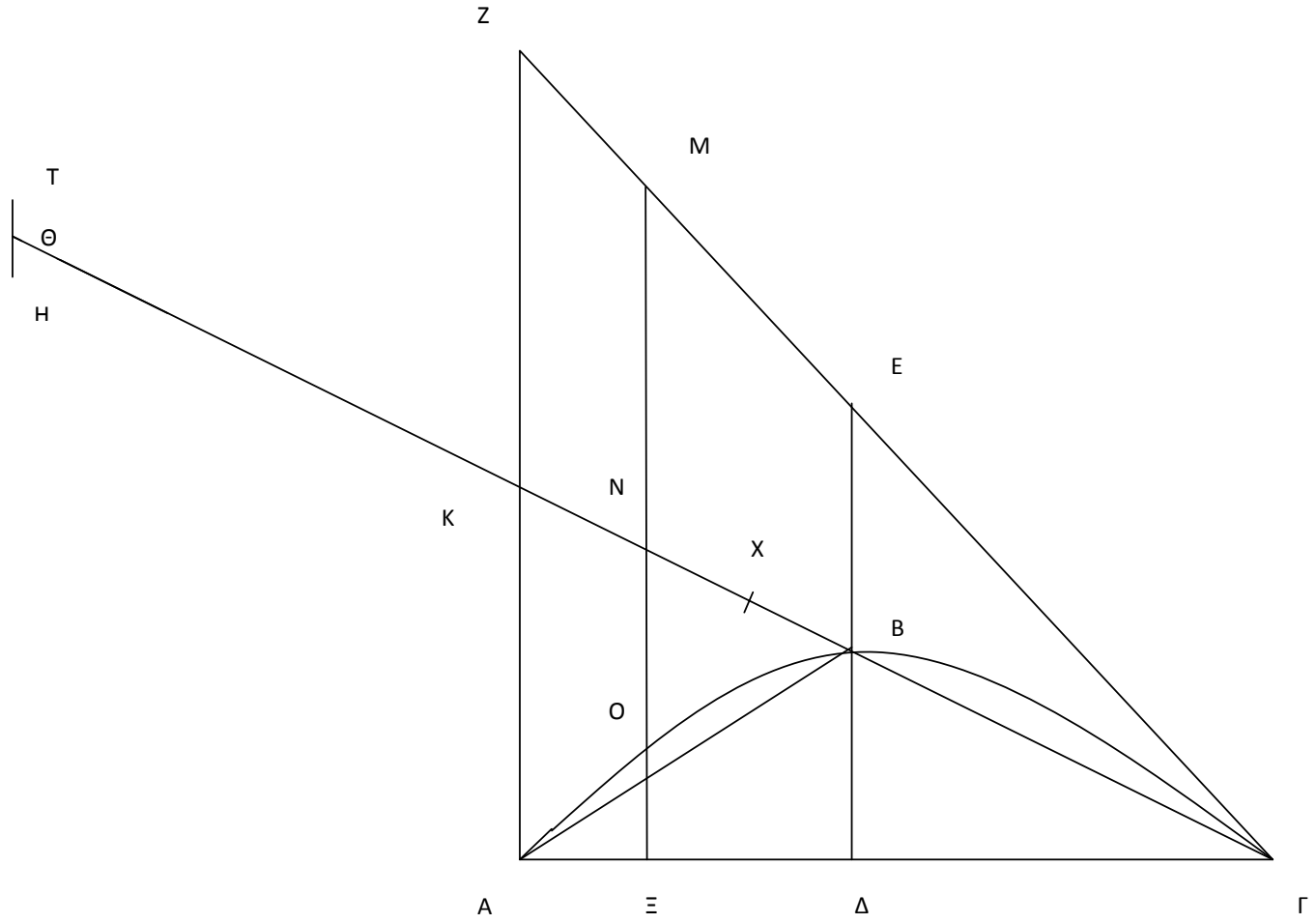
[1] "θεωρημάτων μοι φανέντων μηχανικῶς"

όποτε το θελήσει. Η παράθεση του αρχαίου κειμένου επιτρέπει στο σύγχρονο αναγνώστη να εμβαθύνει, αν το επιθυμεί, στην αυθεντική γεωμετρική γλώσσα του Αρχιμήδη. Η μαθηματική μετάφραση όμως είναι αυτή που αναδεικνύει το χαρακτήρα των προτάσεων με την επιστημονική λιτότητά της. Για τη μαθηματική (και όχι αυτολεξεί) μετάφραση, οδηγοί μας ήταν ο Heath και ο Dijksterhuis και τα έργα τους πάνω στον Αρχιμήδη. Το σημαντικότερο μέρος κάθε θεωρήματος, ο μηχανικός τρόπος, έχει και αυτός συμπυκνωθεί και μαθηματικοποιηθεί για την πληρέστερη κατανόησή του, χωρίς όμως να χάνει ίχνος από την απίστευτη πρωτοτυπία και τη ζωντάνια του. Τέλος δίνεται στον φιλομαθή αναγνώστη η δυνατότητα να κρίνει τα θεωρήματα του Αρχιμήδη και υπό αυστηρή γεωμετρική σκοπιά, με τις γεωμετρικές αποδείξεις που διασώθηκαν σε άλλα έργα του για ορισμένα από τα θεωρήματα αυτά (εξόυ και οι παρενθέσεις στο 5ο μέρος)[2] .

[2]Η γεωμετρική απόδειξη προυποθέτει και αυτή επιπρόσθετες γνώσεις και για αυτόν το λόγο θα διακρίνουμε και σάυτην δύο επιμέρους ενότητες - μία με την προαπαιτούμενη προγενέστερη γνώση, και μία δεύτερη με την καθ' αυτή απόδειξη

4.1 Θεώρημα 1

¨λέγω ὅτι ἐπίτριτόν ἐστιν τό αβγ τμῆμα τοῦ αβγ τριγώνου¨

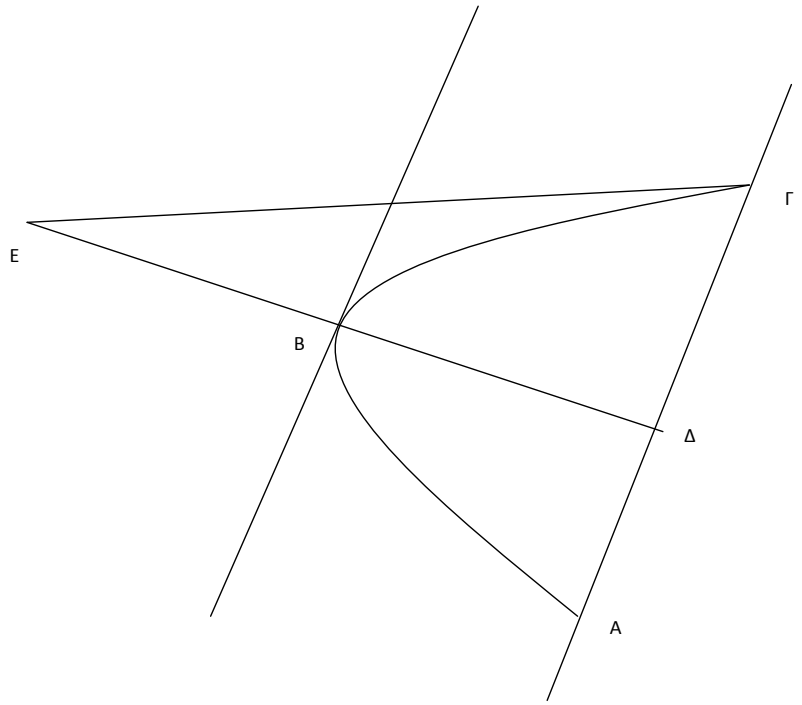


4.1.1 1ο μέρος

Βοηθητικές προτάσεις απαραίτητες για τη μελέτη του 1ου θεωρήματος (επιπλέον των αρχικών προτάσεων)

1.1 Εάν σε μια παραβολή ΑΒΓ, η ΒΔ είναι μια διάμετρος ή παράλληλη προς τη διάμετρο της παραβολής, και η ΑΓ είναι μια χορδή της παραβολής παράληλη στην εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο Β και επιπλέον η ΕΓ είναι εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο Γ, τότε θα ισχύει: $B\Delta = BE$

Σχήμα 1.1



-Αρχιμήδης, Τ*ετρ. Παραβολής* 2, *Κωνικά* Ευκλείδου - Αρισταίου (απωλεσθέντα σήμερα)

1.2 Έστω τα μεγέθη Α,Β τα οποία έχουν τον ίδιο προς ένα τρίτο μέγεθος Γ (σχήμα), δηλ $\frac{A}{\Gamma} = \frac{B}{\Gamma}$ Τότε ισχύει $A = B$.

-Στοιχεία Ευκλείδη, V.9

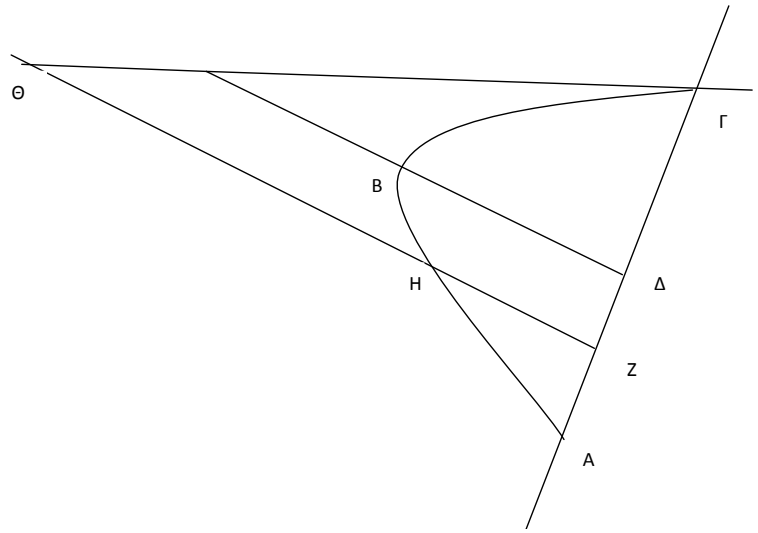
1.3 Στα ισογώνια τρίγωνα οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι ανάλογες και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες είναι ομόλογες (ένα κριτήριο ομοιότητας τριγώνων).

-Στοιχεία Ευκλείδη, VI.4

1.4 Εάν $A\Gamma$ είναι η βάση οποιουδήποτε τμήματος μιας παραβολής, Β η κορυφή του τμήματος και $B\Delta$ η διάμετρος, και εάν η διάμετρος της παραβολής διαμέσου οποιουδήποτε άλλου σημείου Η συναντά την $A\Gamma$ στο Ζ και την εφαπτομένη που διέρχεται από το Γ στο Θ, τότε θα ισχύει:

$$\frac{\Gamma Z}{ZA} = \frac{\Theta H}{HZ}$$

Σχήμα 1.2



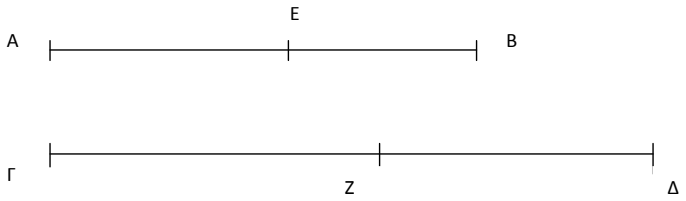
-Αρχιμήδης, *Τετρ. Παραβολής* 5

1.5 Έστω τα μεγέθη AE, EB, ΓZ, $Z\Delta$, για τα οποία ισχύει $AE+EB=AB$ και $\Gamma Z+Z\Delta=\Gamma\Delta$ και

$$\frac{AE}{EB}=\frac{\Gamma Z}{Z\Delta}.$$

Τότε ισχύει $\dfrac{AE+EB}{EB}=\dfrac{\Gamma Z+Z\Delta}{Z\Delta}$ ή $\dfrac{AB}{EB}=\dfrac{\Gamma\Delta}{Z\Delta}$.

Σχήμα 1.3

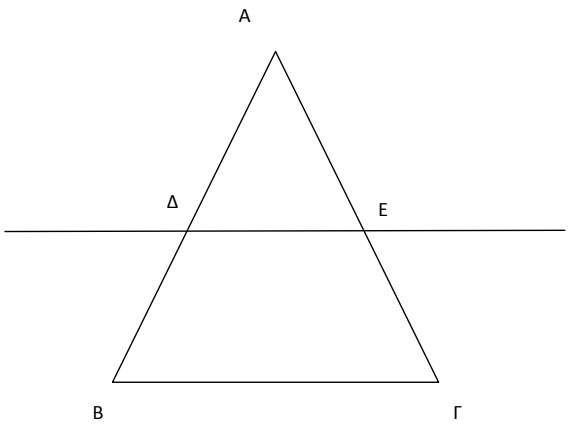


-Στοιχεία Ευκλείδη, V.18

1.6 Αν σε τρίγωνο φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μία από τις πλευρές του, αυτή θα τέμνει τις άλλες δύο πλευρές σε μέρη ανάλογα.Αντίστροφα, αν δύο πλευρές τριγώνου τμηθούν σε μέρη ανάλογα, τότε η ευθεία που περνάει από τα σημεία των τομών θα είναι παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του τριγώνου (¨θεώρημα Θαλή¨).

$$\Delta E//B\Gamma \Longleftrightarrow \frac{B\Delta}{\Delta A}=\frac{\Gamma E}{EA}.$$

Σχήμα 1.4



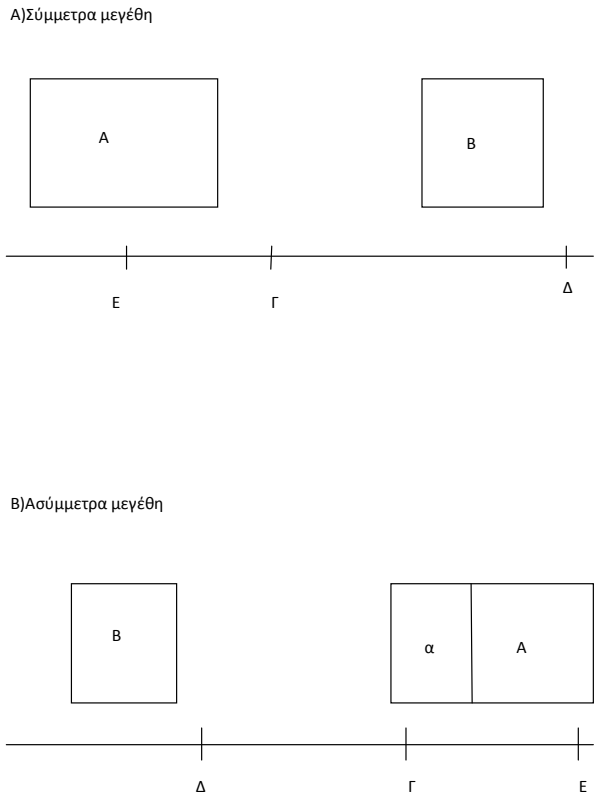
-Στοιχεία Ευκλείδη, VI.2

1.7 Δύο μεγέθη, σύμμετρα ή ασύμμετρα, ισορροπούν σε αποστάσεις αντιστρόφως ανάλογες του λόγου των μεγεθών.Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Α)Αν Α,Β δύο σύμμετρα μεγέθη με κέντρα βάρους τα α,β αντίστοιχα τότε αν είναι μια ευθεία γραμμή και Γ σημείο της τέτοιο ώστε $\frac{(A)}{(B)} = \frac{\Delta\Gamma}{\Gamma E}$, προκύπτει ότι εάν τοποθετήσω το Α με το κέντρο βάρους του στο Ε και το Β με το κέντρο βάρους του στο Δ, το Γ είναι το κέντρο βάρους του συστήματος των μεγεθών.

Β)Αν (Α+α) και Β είναι δύο ασύμμετρα μεγέθη, τότε αν ΔE είναι μια ευθεία γραμμή και Γ σημείο της τέτοιο ώστε $\frac{(A+\alpha)}{B} = \frac{\Delta\Gamma}{\Gamma E}$, προκύπτει ότι εάν τοποθετήσω το (Α+α) με το κέντρο βάρους του στο Ε και το Β με το κέντρο βάρους του στο Δ, το Γ είναι το κέντρο βάρους του συστήματος των μεγεθών.

Σχήμα 1.5



-Αρχιμήδης, *Περί Επίπ. Ισορ.* Ι. 6,7

Παρατήρηση: όπου γίνεται παραπομπή στις παραπάνω προτάσεις, αυτή θα γίνεται ως ¨Πρόταση 1.1,1.2,1.3, κτλ¨, με την αρίθμηση δηλαδή που επιβάλλαμε. Η παραπομπή στα προλαμβανόμενα του βιβλίου του Αρχιμήδη θα γίνεται ως ¨Προλαμβανόμενο Αρχιμήδη 1,2, κτλ¨.

4.1.2 2ο μέρος

Αρχαίο κείμενο

Ἔστω τμῆμα τὸ ΑΒΓ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τῆς ΑΓ καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς τῆς ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΑΓ τῷ Δ καὶ παρὰ τὴν διάμετρον ἤχθω ἡ ΔΒΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ. Λέγω, ὅτι ἐπιτριτόν ἐστιν τὸ ΑΒΓ τμῆμα τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. Ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Γ σημείων ἡ μὲν ΑΖ παρὰ τὴν ΔΒΕ, ἡ δὲ ΓΖ ἐπιψαύουσα τῆς τομῆς, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΓΒ ἐπὶ τὸ Κ, καὶ κείσθω τῇ ΓΚ ἴση ἡ ΚΘ. Νοείσθω ζυγὸς ὁ ΓΘ καὶ μέσου αὐτοῦ το Κ καὶ τῇ ΕΔ παράλληλος τυχοῦσα ἡ ΜΞ. Ἐπεὶ οὖν παραβολή ἐστιν ἡ ΓΒΑ, καὶ ἐφάπτεται ἡ ΓΖ, καὶ τεταγμένως ἡ ΓΔ, ἴση ἐστὶν ἡ ΕΒ τῇ ΒΔ. Τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς στοιχείοις δείκνυται. Διὰ δὴ τοῦτο, καὶ διότι παράλληλοι εἰσιν αἱ ΖΑ, ΜΞ τῇ ΕΔ, ἴση ἐστὶν καὶ ἡ μὲν ΜΝ τῇ ΝΞ, ἡ δὲ ΖΚ τῇ ΚΑ. Καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΞ, οὕτως ἡ ΜΞ προς ΞΟ (τοῦτο γὰρ ἐν λήμματι δείκνυται), ὡς δὲ ἡ ΓΑ πρὸς ΑΞ, οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς ΚΝ, καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΘ, ὡς ἄρα ἡ ΘΚ πρὸς ΚΝ, οὕτως ἡ ΜΞ πρὸς ΞΟ. Καὶ ἐπεὶ το Ν σημεῖου κέντρου τοῦ βάρους τῆς ΜΞ εὐθείας ἐστίν, ἐπείπερ ἴση ἐστὶν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ, ἐὰν ἄρα τῇ ΞΟ ἴσην θῶμεν τὴν ΤΗ καὶ κέντρου τοῦ βάρους αὐτῆς τὸ Θ, ὅπως ἴση ᾖ ἡ ΤΘ τῇ ΘΗ, ἰσορροπήσει ἡ ΤΘΗ τῇ ΜΞ αὐτοῦ μενούση διὰ τὸ ἀντιπεπονθότως τετμῆσθαι τὴν ΘΝ τοῖς ΤΗ, ΜΞ βάρεσιν, καὶ ὡς τὴν ΘΚ πρὸς ΚΝ, οὕτως τὴν ΜΞ πρὸς τὴν ΗΤ. Ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων βάρους κέντρου ἐστὶν τοῦ βάρους τὸ Κ. Ὁμοίως δὲ καί, ὅσαι ἂν ἀχθῶσιν ἐν τῷ ΖΑΓ τριγώνῳ παράλληλοι τῇ ΕΔ, ἰσορροήσουσιν αὐτοῦ μένουσαι ταῖς ἀπολαμβανομέναις ἀπ΄ αὐτῶν ὑπὸ τῆς τομῆς μετευεχθείσαις ἐπὶ τὸ Θ ,ὥστε εἶναι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων κέντρου τοῦ βάρους τὸ Κ. Καὶ ἐπεὶ ἐκ μὲν τῶν ἐν τῷ ΓΖΑ τριγώνῳ τὸ ΓΖΑ τρίγωνον συνέστηκεν, ἐκ δὲ τῶν ἐν τῇ τομῇ ὁμοίως τῇ ΞΟ λαμβανομένων συνέστηκε τὸ ΑΒΓ τμῆμα, ἰσορροπήσει ἄρα τὸ ΖΑΓ τρίγωνον αὐτοῦ μένου τῷ τμήματι τῆς τομῆς τεθέντι περὶ κέντρου τοῦ βάρους τὸ Θ κατὰ τὸ Κ σημεῖου, ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων κέντρου εἶναι τοῦ βάρους τὸ Κ. Τετμήσθω δὴ ἡ ΓΚ τῷ Χ, ὥστε τριπλασίαν εἶναι τὴν ΓΚ τῆς ΚΧ. Ἔσται ἄρα τὸ Χ σημεῖου κέντρου βάρους τοῦ ΑΖΓ τριγώνου. Δέδεικται γὰρ ἐν τοῖς Ἰσορροπικοῖς. Ἐπεὶ οὖν ἰσόρροπον τὸ ΖΑΓ τριγώνον αὐτοῦ μένον τῷ ΒΑΓ τμή-

ματι κατὰ τὸ Κ τεθέντι περὶ τὸ Θ κέντρου τοῦ βάρους, καὶ ἐστιν τοῦ ΖΑΓ τριγώνου κέντρον βάρους τὸ Χ, ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ΑΖΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΓ τμῆμα κείμενον περὶ τὸ Θ κέντρου, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς ΧΚ. Τριπλασία δὲ ἐστιν ἡ ΘΚ τῆς ΚΧ. Τριπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ΑΖΓ τρίγωνον τοῦ ΑΒΓ τμήματος. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ΖΑΓ τρίγωνον τετραπλάσιον τοῦ ΑΒΓ τριγώνου διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΖΚ τῇ ΚΑ, τὴν δὲ ΑΔ τῇ ΔΓ. Ἐπίτριτον ἄρα ἐστὶν τὸ ΑΒΓ τμῆμα τοῦ ΑΒΓ τριγώνου.(τοῦτο οὖν φανερόν ἐστιν). Τοῦτο δὴ διὰ μὲν τῶν εἰρημένων οὐκ ἀποδέδεικται, ἔμφασιν δέ τινα πεποίηκε τὸ συμπέρασμα ἀληθὲς εἶναι. Διόπερ ἡμεῖς ὁρῶντες μὲν οὐκ ἀποδεδειγμένου, ὑπονοοῦντες δὲ τὸ συμπέρασμα ἀληθές εἶναι, τάξομεν τὴν γεωμετρούμενην ἀπόδειξιν ἐξευρόντες αὐτοὶ τὴν ἐκδοθεῖσαν πρότερον.

Ερμηνευτικά σχόλια επί του αρχαίου κειμένου

*¨Τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς στοιχείοις δείκνυται¨:*Στοιχεία Κωνικά Ευκλείδου-Αρισταίου (απωλεσθέντα σήμερα).

¨τοῦτο γὰρ ἐν λήμματι δείκνυται¨: Εδώ φαίνεται ο γεωμετρικός χαρακτήρας του όρου ¨λήμμα¨-εννοεί το θεώρημα 5 από τον Τετραγωνισμό της παραβολής.

¨Δέδεικται γὰρ ἐν τοῖς Ἰσορροπικοῖς¨ : Χαμένο σήμερα έργο του Αρχιμήδη, τμήμα του οποίου πιθανώς να αποτελούσε το Περί Επίπεδων ισορροπιών.

4.1.3 3ο μέρος

Μαθηματική μετάφραση 1ου θεωρήματος

Έστω ΑΒΓ ένα τμήμα παραβολής το οποίο περιβάλλεται από το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ και την παραβολή ΑΒΓ, και έστω Δ το μέσο του ΑΓ. Φέρω την ευθεία ΔΒ παράλληλη στον άξονα της παραβολής και φέρω επίσης τις ΑΒ,ΒΓ. Τότε το παραβολικό χωρίο ΑΒΓ θα είναι τα $\frac{4}{3}$ του τριγώνου ΑΒΓ (όσον αφορά το εμβαδόν).

4.1.4 4ο μέρος

Έφοδος

Από το Α φέρω την ΑΚ παράλληλη στη ΔΕ και αφήνω την εφαπτομένη της παραβολής στο Γ να τμήσει την ΔΒ στο Ε και την ΑΚ στο Ζ. Προεκτείνω τη ΓΒ να συναντήσει την ΑΖ στο Κ και στη συνέχεια προεκτείνω τη ΓΚ στο Θ ώστε $K\Theta = \Gamma K$.

Ας νοηθεί η ΓΘ ως ζυγός με μέσο το Κ.

Φέρω την τυχαία ευθεία ΜΞ παράλληλη στην ΕΔ η οποία τέμνει την ΓΚ στο σημείο Ν και την παραβολή στο σημείο Ο.

Τώρα, εφόσον η ΓΕ είναι εφαπτομένη της παραβολής και ΓΑ χορδή αυτής ισχύει $EB = BD$ (Πρόταση 1.1).

Επειδή ΖΑ, ΜΞ παράλληλοι στην ΕΔ προκύπτει ότι:

$ZK = KA$ και $MN = NX$ (Προτάσεις 1.2 και 1.3).

Από Πρόταση 1.4 και 1.5 ισχύει $\dfrac{M\Xi}{\Xi O} = \dfrac{\Gamma A}{A\Xi}$

Όμως $\dfrac{\Gamma A}{A\Xi} = \dfrac{\Gamma K}{KN}$(Προτάσεις 1.5 και 1.6)

ή (λόγω $\Gamma K = \Theta K$) $= \dfrac{\Gamma A}{A\Xi} = \dfrac{\Theta K}{KN} = \dfrac{M\Xi}{\Xi O}$.

Παίρνω ευθύγραμμο τμήμα $TH = \Xi O$ και το τοποθετώ με το κέντρο βάρους του στο Θ, ώστε $T\Theta = \Theta H$. Τότε αφού Ν είναι το κέντρο βάρους του ευθ. τμήματος ΜΞ (Προλαμβανόμενο 4) προκύπτει

$$\frac{M\Xi}{\Xi O} = \frac{M\Xi}{TH} = \frac{\Theta K}{KN}$$

δηλαδή το ΤΗ στο Θ και το ΜΞ στο Ν θα ισορροπούν ως προς το Κ (Πρόταση 1.7).

Παρόμοια για όλα τα άλλα ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα στο ΔΕ που τέμνουν την παραβολή,

Δηλαδή αυτά

◊ 1. το ευθ. τμήμα μεταξύ των ευθειών ΖΓ, ΓΑ που θα έχει το κέντρο βάρους του στην ευθεία ΚΓ

◊ 2. το ευθ. τμήμα ίσο με το ευθ. τμήμα μεταξύ της ευθείας ΑΓ και της παραβολής ΑΒΓ τοποθετημένο με το κέντρο βάρους του στο Θ

προκύπτει ότι, <u>τα ευθ. αυτά τμήματα θα ισορροπούν ως προς το Κ</u>.

Επομένως το Κ είναι το κέντρο βάρους όλου του συστήματος που αποτελείται από:

1. το άθροισμα των ευθ. τμημάτων σαν το ΜΞ, μεταξύ των ευθειών ΖΓ, ΓΑ τοποθετημένα όπως είναι στο σχήμα

2. το άθροισμα όλων των ευθ. τμημάτων τοποθετημένων στο Θ, τα οποία είναι ίσα με τα ευθ. τμήματα όπως το ΟΞ μεταξύ της ΑΓ και της παραβολής.

Εφόσον τώρα το τρίγωνο ΑΖΓ αποτελείται από όλες τις παράλληλες γραμμές όπως η ΜΞ, και το παραβολικό χωρίο ΑΒΓ αποτελείται από όλα τα τμήματα σαν το ΟΞ (μέσα στην καμπύλη),

συνεπάγεται ότι το τρίγωνο, τοποθετημένο όπως έχει στο σχήμα, ισορροπεί ως προς το Κ με το παραβολικό χωρίο ΑΒΓ, τοποθετημένο με το κέντρο βαρύτητάς του στο Θ. Παίρνω τώρα τμήμα ΧΚ στην ΚΓ τέτοιο ώστε ΓK=$3KQ$.

Επομένως το Χ είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΖΓ (Προλαμβανόμενο 5 Αρχιμήδη).

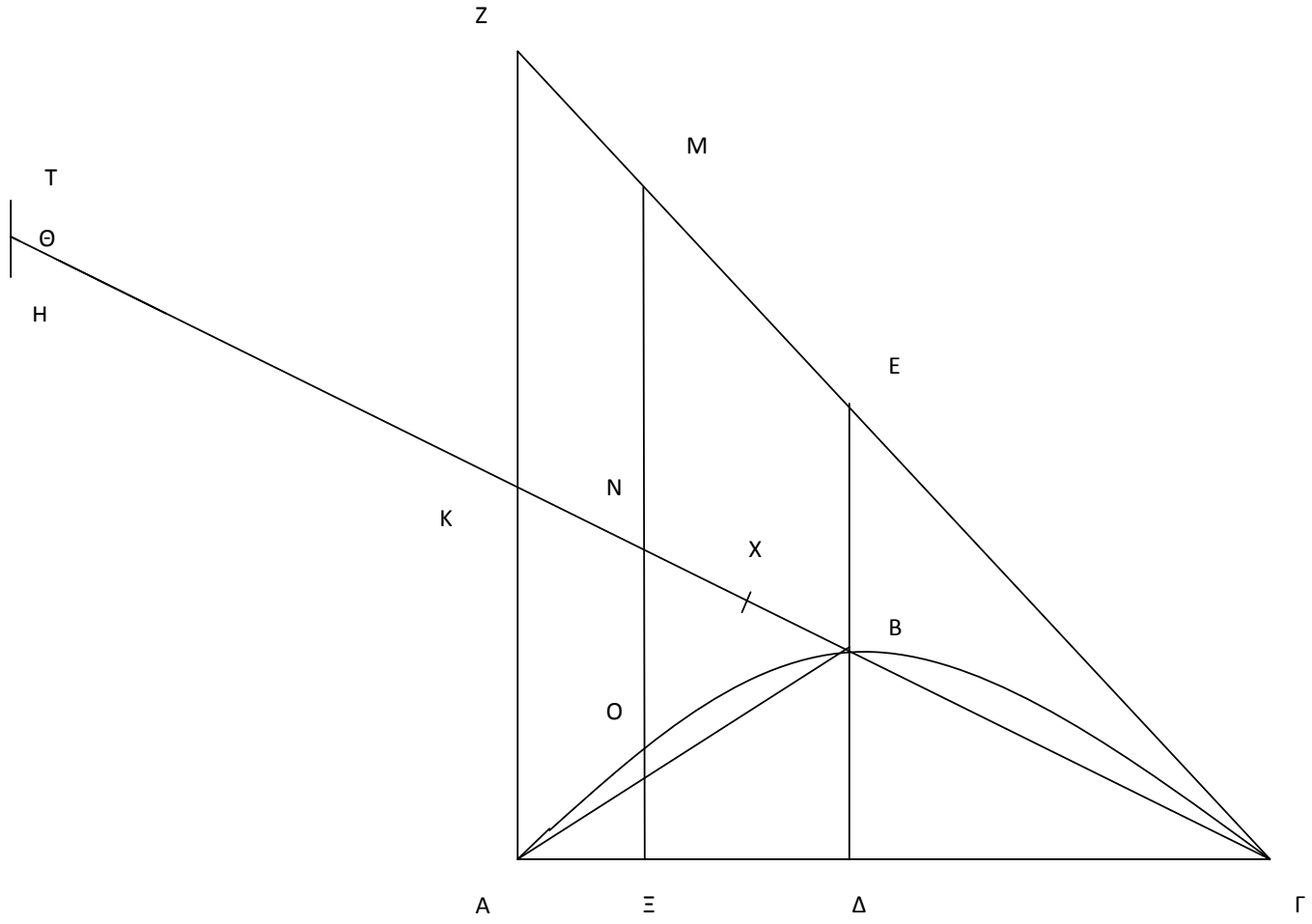
Έχω για την ισορροπία των 2 χωρίων: $\dfrac{(\wedge AZ\Gamma)}{(\frown AB\Gamma)} = \dfrac{\Theta K}{KX} = \dfrac{\Gamma K}{KX} = 3$

οπότε (τριγωνο ΑΒΓ)=$\dfrac{1}{3}$ (παραβολικό χωρίο ΑΖΓ) (1).

Επιπλέον $\dfrac{(\wedge AZ\Gamma)}{(\wedge AB\Gamma)} = \dfrac{1/2.AZ.A\Gamma}{1/2.A\Gamma.B\Delta} = \dfrac{AZ}{B\Delta} = 4$ (αφού $AZ = 2AK = 4B\Delta$) δηλ, (τρίγωνο-ΑΖΓ)=4(τριγωνοΑΒΓ) (2).

Από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ότι $(\frown AB\Gamma) = \dfrac{4}{3}(\wedge AB\Gamma)$.

Σχήμα 1.6



Παρατηρήσεις

Η αναλυτική παρουσίαση του πρώτου θεωρήματος είναι ενδεικτική του τρόπου λειτουργίας της μηχανικής μεθόδου. Ειδικότερα, έχουμε να παρατηρήσουμε τα παρακάτω: 1)Η εκφώνηση του θεωρήματος, *"Ἔστω τμῆμα τὸ ΑΒΓ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τῆς ΑΓ καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς τῆς ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΑΓ τῷ Δ καὶ παρὰ τὴν διάμετρον ἤχθω ἡ ΔΒΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ. Λέγω, ὅτι ἐπιτριτόν ἐστιν τὸ ΑΒΓ τμῆμα τοῦ ΑΒΓ τριγώνου."* μας αποκαλύπτει το ημιεπί-

σημο ύφος του έργου του Αρχιμήδη. Στις επίσημες δημοσιεύσεις του ο Αρχιμήδης παρουσιάζει τα θεωρήματα του με ένα αυστηρό πλαίσιο γενικότητας αποφεύγοντας οποιαδήποτε αναφορά σε σημεία σχημάτων ή στον ειδικό σχεδιασμό κάποιου σχήματος. Για να το καταλάβετε αυτό καλύτερα, ορίστε η επίσημη εκφώνηση του ίδιου θεωρήματος όπως μας την παρέχει ο ίδιος ο μαθηματικός στην επίσημη πραγματεία του ¨Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής¨, *¨πᾶν τμᾶμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἐχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον ¨ - ¨κάθε τμήμα το περιεχόμενο μεταξύ ευθείας και ορθογωνίου κώνου τομής είναι τα τέσσερα τρίτα του τριγώνου με την ίδια βάση και ίσο ύψος¨*, μια επίσημη αρχιμήδεια εκφώνηση! Όλα αυτά συνηγορούν στο χαρακτηρισμό του έργου του Συρακούσιου ως καθαρά προσωπικού, μια επιστολή στο φίλο του τον Ερατοσθένη και όχι μια πραγματεία προς δημοσίευση στη μαθηματική κοινότητα της εποχής.[1]

2)Είναι πολύ σημαντικό να σημειώσουμε πως ο Αρχιμήδης κλείνει το θεώρημα 1 με τα εξής λόγια, *τοῦτο δὴ διὰ μὲν τῶν εἰρημένων οὐκ ἀποδέδεικται, ἔμφασιν δέ τινα πεποίηκε τὸ συμπέρσμα ἀληθὲς εἶναι. Διόπερ ἡμεῖς ὁρῶντες μὲν οὐκ ἀποδεδειγμένου, ὑπονοοῦντες δὲ τὸ συμπέρασμα ἀληθές εἶναι, τάξομεν τὴν γεωμετρούμενην ἀπόδειξιν ἐξευρόντες αὐτοὶ τὴν ἐκδοθεῖσαν πρότερον.*, δηλαδή *¨οσα είπαμε παραπάνω δεν συνιστούν απόδειξη αλλά δίνουν κάποια έμφαση στην αλήθεια του συμπεράσματος. Για αυτό το λόγο βλέποντας ότι το συμπέρασμα δεν είναι μεν αποδεδειγμένο αλλά είναι δε αληθές,παραπέμπουμε τον αναγνώστη στη γεωμετρική απόδειξη, την οποία είχαμε εκδώσει προηγουμένως¨*. Εδώ παρέχεται από τον ίδιο τον Αρχιμήδη ένας πρώτος χαρακτηρισμός για το ύφος της μηχανικής μεθόδου του $\longrightarrow$ είναι ευρετική και όχι αποδεικτική μέθοδος. Η μέθοδος του κατοχυρώνει την αλήθεια του αποτελέσματος αλλά δε συνιστά απόδειξη! Για να έχει επομένως ο αναγνώστης του Αρχιμήδη μια ολοκληρωμένη εικόνα για το θεώρημά του θα παρουσιάσουμε ευθύς αμέσως την αυστηρή γεωμετρική απόδειξη - κάτι στο οποίο μας παραπέμπει σε προηγούμενο έργο του κσι πιο συγκεκριμένα στον ¨Τετραγωνισμο της παραβολής, θεώρημα 24¨.Αξίζει εδώ να σημειώσουμε πως ο διάσημος μελετητής του Αρχιμήδη E.Dijksterhuis προ-

[1]Βλέπε σχετικά E.J. Dijksterhuis, *Archimedes*,p.316,Princeton University Press, 1987

βαίνει σε μια λανθασμένη κατά την άποψή μας ερμηνεία των τελευταίων γραμμών του θεωρήματος.Μεταφράζει το *¨τάξομεν την γεωμετρούμενην ἀπόδειξιν ἐξευρόντες αὐτοί τὴν ἐκδοθεῖσαν πρότερον¨* ως εξής, *¨θα παραθέσουμε τη γεωμετρική απόδειξη που βρήκαμε προηγουμένως¨*.Σκοπός του Αρχιμήδη δεν είναι να συμπεριλάβει στο έργο του τις γεωμ.αποδείξεις όλων των θεωρημάτων που ανακάλυψε με τη μηχανική του μέθοδο,όπως λανθασμένα υποστηρίζει oDijksterhuis[2],αλλά μόνο των δύο καινούριων θεωρημάτων στα οποία αναφέρεται στην επιστολή του προς τον Ερατοσθένη.Οι γεωμετρικές αποδείξεις παραθέτονται συγκεντρωτικά από εμάς στον παρόντα τόμο για λόγους πληρότητας και ως σημείο αναφοράς για τον Έλληνα μελετητή του Αρχιμήδη.[3]

4.1.5 5ο μέρος

Γεωμετρική απόδειξη

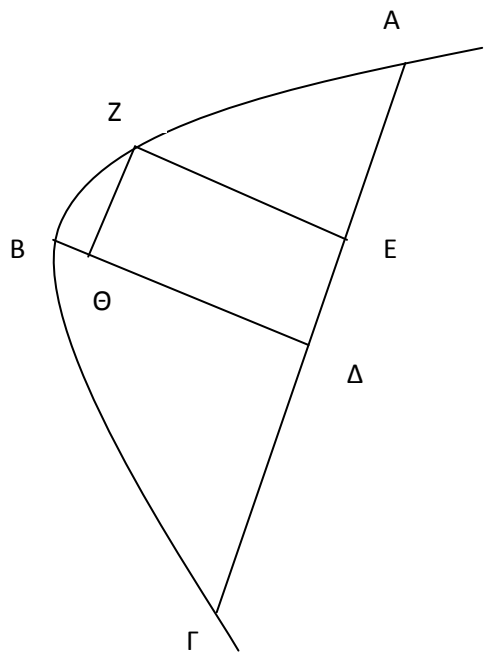
Η γεωμετρική απόδειξη του 1ου θεωρήματος της Μεθόδου έχει φθάσει ως τις μέρες μας μέσα από το έργο του Αρχιμήδη ¨Τετραγωνισμός της Παραβολής¨, όπου αριθμείται ως θεώρημα 24.

Α.Βοηθητικές προτάσεις

Α1. Εάν ΑΓ είναι η χορδή μιας παραβολής, και φέρω τη ΒΔ παράλληλη προς τη διάμετρο της παραβολής από το μέσο Δ της ΑΓ, και την ΖΕ παράλληλη προς τη διάμετρο της παραβολής από το μέσο Ε της ΑΔ, και την ΖΘ παράλληλη προς την ΑΓ, τότε θα ισχύει
ΒΔ=$\frac{4}{3}$ ΕΖ.

[2] *Archimedes*,p.318,Princeton University Press,1987
[3] για πρώτη φορά στα νέα ελληνικά παρουσιάζονται οι γεωμετρικές αποδείξεις των θεωρημάτων της *Μεθόδου*

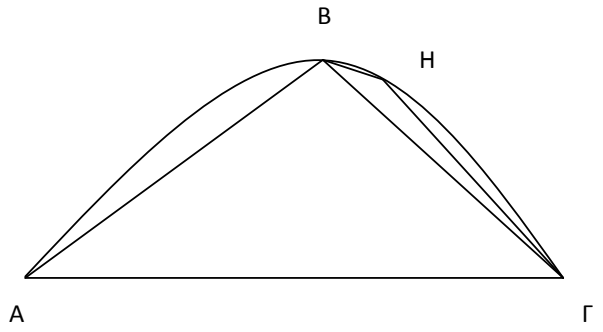
Σχήμα 1.7



-Αρχιμήδης, *Τετραγωνισμός Παραβολής* ,19.

Α2. Εάν ΑΓ είναι η βάση και Β η κορυφή οποιουδήποτε παραβολικού χωρίου, και εάν Η είναι η κορυφή του παραβολικού χωρίου που σχηματίζεται από την ΒΓ, τότε $(\wedge AB\Gamma) = 8(\wedge BH\Gamma)$

Σχήμα 1.8

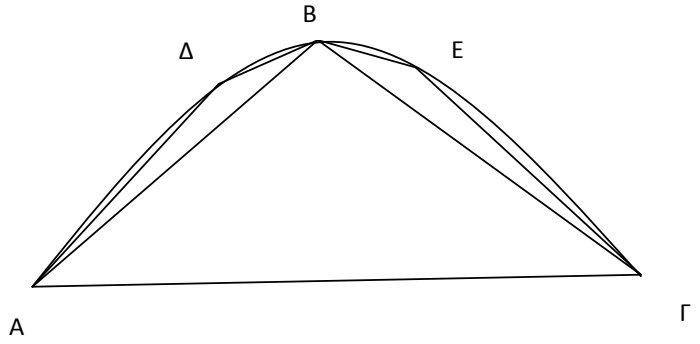


-Αρχιμήδης, *Τετραγωνισμός Παραβολής*, 21.

Α3. Εάν υπάρχει μια σειρά χωρίων Ζ,Η,Θ,Ι... (σχεδιασμένα όπως στο σχήμα), καθένα από τα οποία είναι τετραπλάσιο του επόμενου κατά σειρά, και εάν το μεγαλύτερο, το Ζ, είναι ίσο με το τρίγωνο ΑΒΓ το οποίο είναι εγγεγραμμένο στο παραβολικό χωρίο ΑΒΓ και έχει την ίδια βάση και ίσο ύψος με αυτό, τότε ισχύει για τα χωρία:

(Ζ+Η+Θ+Ι+...)<(εμβαδόν χωρίου ΑΒΓ)

Σχήμα 1.9



(*τα χωρία σχεδιάζονται με την παρακάτω διαδικασία:

$(\wedge AB\Gamma) = Z$

$(\wedge A\Delta B) + (\wedge BE\Gamma) = H$

$\vdots$

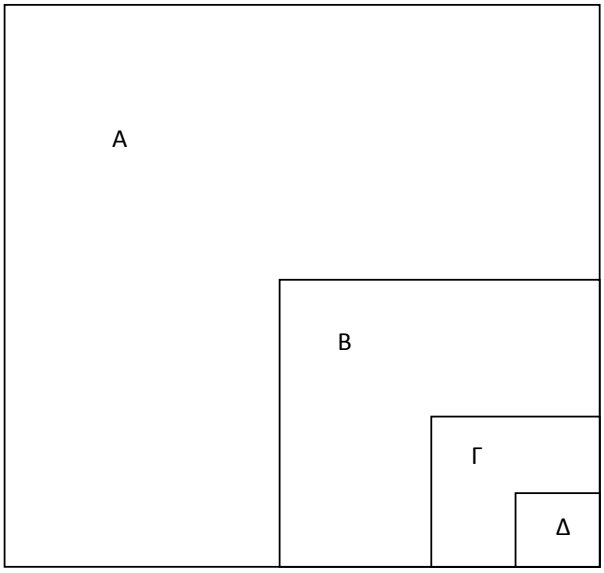
δηλαδή τελικα το άθροισμα των χωρίων μας δίνει το εγγεγραμμένο πολύγωνο στο $(\frown AB\Gamma)$, το οποίο φυσικά είναι μικρότερό του παραβολικού χωρίου *)

-Αρχιμήδης, *Τετραγωνισμός Παραβολής*, 22.

Α4. Εάν υπάρχει μια σειρά χωρίων Α,Β,...,Ε, από τα οποία το Α είναι το μεγαλύτερο, και καθένα απ' αυτά είναι τετραπλάσιο του επόμενου κατά σειρά, τότε ισχύει για τα χωρία

$(A + B + ... + E + \frac{1}{3}E) = \frac{4}{3}A$

Σχήμα 1.10



-Αρχιμήδης, *Τετραγωνισμός Παραβολής*, 23.

Β.Απόδειξη (σε σύγχρονη απόδοση)

¨Κάθε χωρίο που περιέχεται μεταξύ μιας παραβολής και της χορδής της ΑΓ είναι ίσο με τα $\frac{4}{3}$ του τριγώνου (ως προς το εμβαδόν), το οποίο έχει την ίδια βάση με αυτό και ίσο ύψος.¨

Έστω $K = \frac{4}{3}(\wedge AB\Gamma)$, όπου Β η κορυφή του χωρίου. Έχουμε να δείξουμε ότι το εμβαδόν του χωρίου είναι ίσο με Κ.

Εάν το χωρίο δεν είναι ίσο με Κ, τότε θα πρέπει να είναι είτε μεγαλύτερο είτε μικρότερο από αυτό.[4]

[4]Η διαδικασία που ακολουθεί ο Αρχιμήδης για τη γεωμετρική απόδειξη ονομάζεται ¨μέθοδος της εξάντλησης¨ και αποδίδεται στον Εύδοξο τον Κνίδιο,π.410-355 π.Χ. Έλληνα αστρονόμο και μαθηματικό από την Κνίδο της Μικράς Ασίας.Το γενικό πλαίσιο της μεθόδου αυτής περιλαμβάνει μια διπλή *εις άτοπον απαγωγή* και έχει ως εξής: προκειμένου να βρω το εμβαδόν μιας περιοχής τη συγκρίνω με μια δεύτερη περιοχή-η οποία μπορεί να προσεγγίσει όσο θέλουμε την πρώτη- και α)υποθέτουμε ότι η πρώτη περιοχή είναι μεγαλύτερη από τη δεύτερη και αποδεικνύουμε ότι ο ισχυρισμός μας είναι λανθασμένος, και β)υποθέτουμε ότι η πρώτη περιοχή είναι μικρότερη

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

1)Ας υποθέσουμε ότι το εμβαδόν του χωρίου είναι μεγαλύτερο από Κ. Εάν τότε εγγράψουμε στα παραβολικά χωρία που σχηματίζονται από τις ΑΒ, ΒΓ, τρίγωνα τα οποία να έχουν την ίδια βάση και ίσο ύψος με τα σχηματιζομενα παραβολικά χωρία ΑΔΒ, ΒΕΓ (δηλ τα τρίγωνα ΑΔΒ,ΒΕΓ), και εάν στα εναπομείναντα παραβολικά χωρία εγγράψουμε πάλι τρίγωνα με τον ίδιο τρόπο, κ.ο.κ., θα πάρουμε τελικά χωρία (παραβολικα), το άθροισμα των οποίων θα είναι μικρότερο της υπεροχής με την οποία υπερτερεί το παραβολικό χωρίο ΑΒΓ του χωρίου Κ (αφού με τη συνεχόμενη ¨εξάντλησή τους¨ το άθροισμα των παραβολικών χωρίων θα τείνει στο μηδέν). Επομένως, το πολύγωνο που σχηματίζεται με αυτόν τον τρόπο (το εμβαδόν του) θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο του Κ, το οποίο είναι αδύνατο γιατί σύμφωνα με την Πρόταση Α4

$A + B + ... + E < \frac{4}{3}A$ όπου $A = (\wedge AB\Gamma), B = (\wedge A\Delta B) + (\wedge BE\Gamma), ...$ δηλ, το εμβαδόν του χωρίου δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από το Κ.

2)Ας υποθέσουμε τότε ότι το εμβαδόν του χωρίου είναι μικρότερο από το Κ. Εάν τότε $Z = (\wedge AB\Gamma), H = \frac{1}{4}Z, \Theta = \frac{1}{4}H$ κ.ο.κ. μέχρι να φτάσουμε σε ένα χωρίο Ι τέτοιο ώστε το Ι να είναι μκροτερο της διαφοράς μεταξύ του Κ και του αρχικού παραβολικού χωρίου, έχουμε:

$Z + H + \Theta + ... + I + \frac{1}{3}I = \frac{4}{3}A$ (Πρόταση Α4)

= Κ.

Τότε εφόσον το Κ υπερέχει του Z+H+Θ+...+I κατά ένα χωρίο μικρότερο του Ι και του εμβαδού του αρχικού χωρίου κατά μία περιοχή μεγαλύτερη του Ι, προκύπτει ότι:

$Z + H + \Theta + ... + I >$(χωρίο), αδύνατο από Πρόταση Α3.

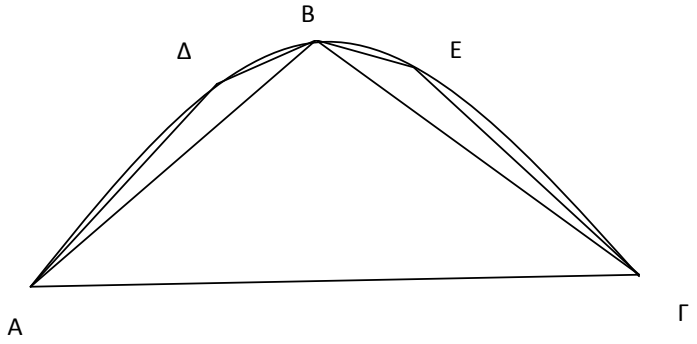
Οπότε το χωρίο δεν είναι μικρότερο από Κ.

Επομένως αφού το χωρίο δεν είναι ούτε μεγαλύτερο ούτε μικρότερο από Κ είναι ίσο με Κ,

$(\frown AB\Gamma) = K = \frac{4}{3}(\wedge AB\Gamma)$.

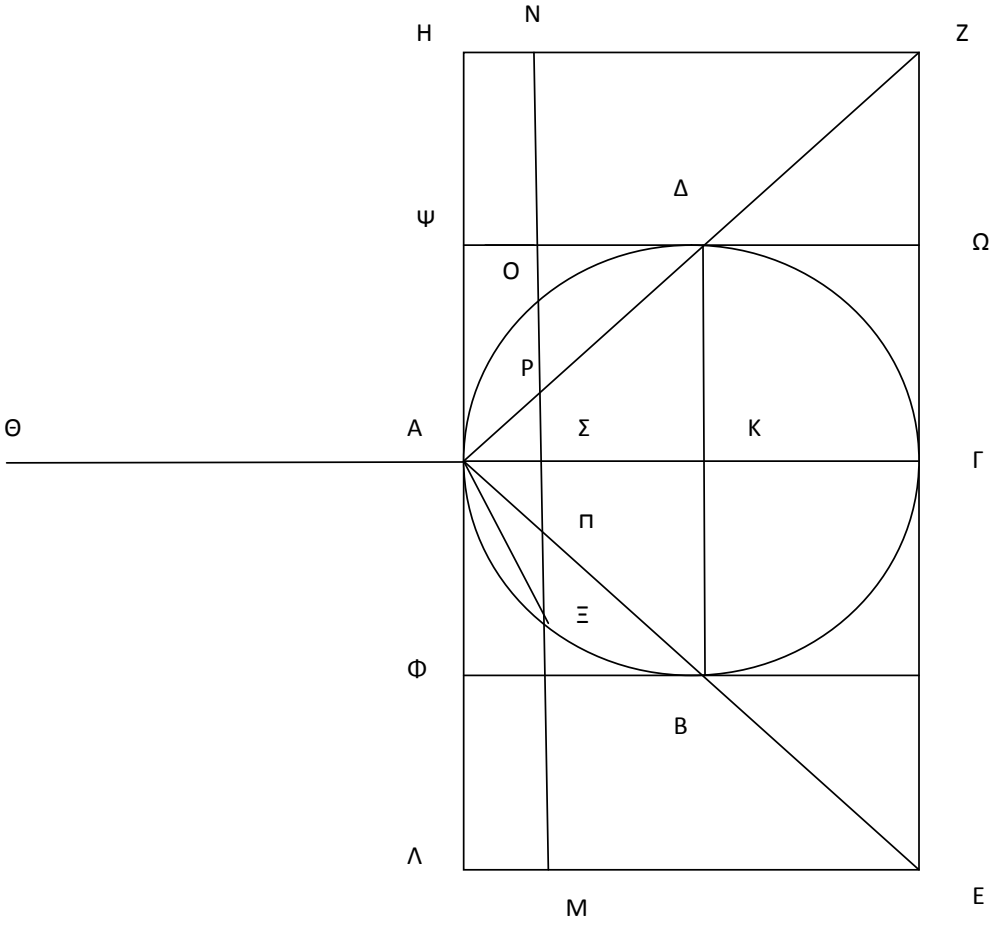
από τη δεύτερη και αποδεικνύουμε ότι και αυτός ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος. Άρα τελικά η πρώτη περιοχή είναι ίση με τη δεύτερη.

Σχήμα 1.11



4.2 Θεώρημα 2

¨ὅτι δέ πᾶσα σφαῖρα τετραπλασία ἐστίν τοῦ κώνου...καί ὁ κύλινδρος...ἡμιόλιος τῆς σφαῖρας ἐστίν... ¨



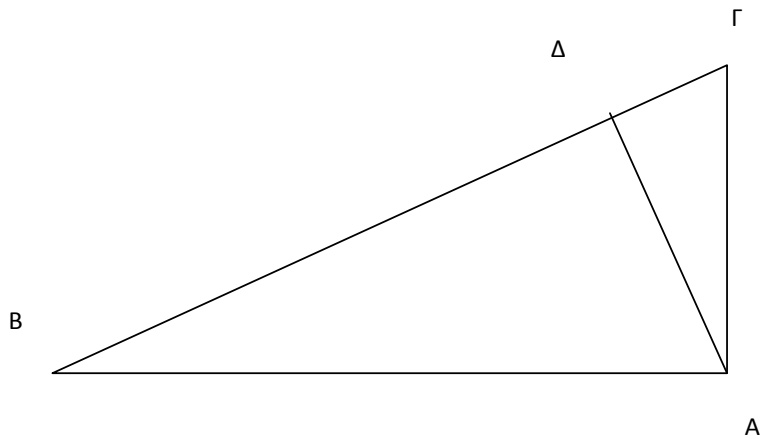
4.2.1 1ο μέρος

Βοηθητικές προτάσεις απαραίτητες για τη μελέτη του 2ου θεωρήματος (επιπλέον των αρχικών προτάσεων)

2.1 Πρόταση 1.3 του 1ου θεωρήματος.

2.2 Αν από την κορυφή της ορθής γωνίας ορθογωνίου τριγώνου φέρουμε κάθετη προς την υποτείνουσα, η κάθετη αυτή είναι μέση ανάλογος των δύο τμημάτων που ορίζονται πάνω στην υποτείνουσα. Δηλαδή, $\frac{A\Delta}{B\Delta} = \frac{\Delta\Gamma}{A\Delta}$.

Σχήμα 2.1



-Στοιχεία Ευκλείδη, VI.8, πόρισμα

2.3 Πυθαγόρειο θεώρημα

2.4 Δύο μεγέθη έχουν τον ίδιο λόγο με εκείνον που έχουν τα ίσες φορές πολλαπλάσιά τους, αν ληφθούν αντίστοιχα. Η πρόταση αυτή διαττυπώνεται και ώς εξής: αν $a = \rho * \gamma$ και $\beta = \rho * \delta$

τότε
$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

-Στοιχεία Ευκλείδη, V.15

2.5 Δύο κύκλοι είναι ανάλογοι των τετραγώνων των διαμέτρων τους.

-Στοιχεία Ευκλείδη, XII.2

2.6 Πρόταση 1.7 του 1ου θεωρήματος.

2.7 Κάθε κώνος είναι ίσος με το $\frac{1}{3}$ του κυλίνδρου ο οποίος έχει την ίδια βάση και ίσο ύψος.

-Στοιχεία Ευκλείδη, XII.10

4.2.2 2ο μέρος

Αρχαίο κείμενο

Ὅτι δὲ πᾶσα σφαῖρα τετραπλασίαν ἐστὶν τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ,ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, ἡμιόλιος τῆς σφαίρας ἐστίν, ὧδε θεωρεῖται κατᾶ τρόπον τόνδε.Ἔστω γάρ τις σφαῖρα, ἐν ᾗ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετροι δὲ αἱ ΑΓ,ΒΔ, πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις οὖσαι, ἔστω δὲ κύκλος ἐν τῇ σφαίρᾳ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ ὀρθὸς πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, καὶ ἀπὸ τοῦ ὀρθοῦ κύκλου τοῦτου κῶνος ἀναγεγράφθω κορυφὴν ἔχων τὸ Α σημεῖον, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ τετμήσθω ὁ κῶνος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ Γ παρὰ τὴν βάσιν.(ποιήσει δὴ κύκλον ὀρθὸν πρὸς) τὴν ΑΓ, καὶ διάμετρος αὐτοῦ ἡ ΕΖ.Ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος ἀναγεγράφθω ἄξονα ἔχων τῇ ΑΓ ἴσον, πλευραὶ δὲ ἔστωσαν τοῦ κυλίνδρου αἱ ΕΛ,ΖΗ. Καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΓΑ, καὶ κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ΑΘ, καὶ νοείσθω ζυγὸς ὁ ΓΘ,μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Α, καὶ ἤχθω τις παράλληλος ὑπάρχουσα τῇ ΒΔ ἡ ΜΝ, τεμνέτω δὲ αὕτη τὸν μὲν ΑΒΓΔ κύκλον κατὰ τὰ Ξ, Ο, τὴν δὲ ΑΓ διάμετρον κατὰ τὸ Σ, τὴν δὲ ΑΕ εὐθεῖαν κατὰ τὸ Π, τὴν δὲ ΑΖ κατὰ τὸ Ρ, καὶ ἀπὸ τῆς ΜΝ εὐθείας ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΓ. Ποιήσει δὴ τοῦτο ἐν μὲν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν (κύκλον οὗ ἔσται διάμετρος ἡ ΜΝ, ἐν δὲ τῇ ΑΒΓΔ σφαίρα) κύκλον, οὗ ἔσται διάμετρος ἡ ΞΟ, ἐν δὲ τῷ ΑΕΖ κώνῳ κύκλον, οὗ ἔσται διάμετρος ἡ ΠΡ.Και ἐπεὶ ἴσον ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΓΑ,ΑΣ τῷ ὑπὸ ΜΣ,ΣΠ.Ἴση γὰρ ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΣΜ, ἡ δὲ ΑΣ τῇ ΠΣ, τῷ δὲ ὑπὸ ΓΑ, ΑΣ ἴσον ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΑΞ, τουτέστιν τὰ ἀπὸ ΞΣ, ΣΠ, ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΜΣ,ΣΠ τοῖς ἀπὸ τῶν ΞΣ, ΣΠ. Καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ἡ ΜΣ πρὸς ΣΠ, ἴση δὲ ἡ ΓΑ τῇ ΑΘ, ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, ἡ ΜΣ πρὸς ΣΠ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΣ,ΣΠ. Τῷ δὲ ὑπὸ ΜΣ, ΣΠ ἴσα ἐδείχθη τὰ ἀπὸ ΞΣ, ΣΠ. Ὡς ἄρα ἡ ΑΘ πρὸς ΑΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὰ ἀπὸ ΞΣ, ΣΠ. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὰ ἀπὸ ΞΣ, ΣΠ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΝ πρὸς τὰ ἀπὸ ΞΟ, ΠΡ, ὡς δὲ τὸἀπὸ ΜΝ πρὸς τὰ ἀπὸ ΞΟ, ΠΡ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, πρὸς (ἀμφοτέρους τοὺς κύκλους τόν

τε ἐν τῷ κώνῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ) καὶ τὸν ἐν τῇ σφαίρᾳ, οὗ ἐστιν διάμετρος ἡ ΞΟ. Ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ πρὸς τοὺς κύκλους τόν τε ἐν τῇ σφαίρᾳ καὶ τὸν ἐν τῷ κώνῳ. Ἐπεὶ οὖν, ὡς ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως αὐτὸς ὁ κύκλος ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ αὐτοῦ μένων ἀμφοτέροις τοῖς κύκλοις, ὧν εἰσιν διάμετροι αἱ ΞΟ, ΠΡ, μετενεχθεῖσι καὶ τεθεῖσιν οὕτως ἐπὶ τὸ Θ, ὥστε εκατέρου αὐτῶν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ, ἰσρροπήσουσι κατὰ τὸ Α σημεῖον.Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ ἐὰν ἄλλη ἀχθῇ ἐν τῷ ΛΖ παραλληλογράμμῳ παρὰ τὴν ΕΖ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΓ, ὅτι ὁ γενόμενος κύκλος ἐν τῷ κυλίνδρῳ ἰσορροπήσει περὶ τὸ Α σημεῖον αὐτοῦ μένων ἀμφοτέροις τοῖς κύκλοις τῷ τε ἐν τῇ σφαίρᾳ γινομένῳ καὶ τῷ ἐν τῷ κώνῳ μετενεχθεῖσι καὶ τεθεῖσιν ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε ἑκατέρου αὐτῶν κέντρον εἶναι τοὺ βάρους τὸ Θ. Συμπληρωθέντος οὖν τοῦ κυλίνδρου ὑπὸ τῶν ληφθέντων κύκλων καὶ τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κώνου ἰσορροπήσει ὁ κύλινδρος περὶ τὸ Α σημεῖον αὐτοῦ μένων συναμφοτέροις τῇ τε σφαίρᾳ καὶ τῷ κώνῳ μετενεχθεῖσι καὶ τεθεῖσιν ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε ἑκατέρου αὐτῶν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ. Ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ τὰ εἰρημένα στερεὰ κατὰ τὸ Α σημεῖον τοῦ μὲν κυλίνδρου μένοντος περὶ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Κ, τῆς δὲ σφαίρας καὶ τοῦ κώνου μετενηνεγμένων, ὡς εἴρηται, περὶ κέντρον βάρους τὸ Θ, ἔσται, ὡς ἡ ΘΑ πρὸς ΑΚ, οὕτως ὁ κύλινδρος πρὸς τὴν σφαῖραν καὶ τὸν κῶνον. Διπλασία δὲ ἡ ΘΑ τῆς ΑΚ. Διπλασίων ἄρα καὶ ὁ κύλινδρος συναμφοτέρου τῆς τε σφαίρας καὶ τοῦ κώνου. Αὐτοῦ δὲ τοῦ κώνου τριπλασίων ἐστί. Τρεῖς ἄρα κῶνοι ἴσοι εἰςὶ δυσί κώνοις τοῖς αὐτοῖς καὶ δυσί σφαίρας. Κοινοὶ ἀφῃρήσθωσαν δύο κῶνοι. Εἷς ἄρα κῶνος ὁ ἔχων τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνου το ΑΕΖ ἴσος ἐστὶ ταῖς εἰρημέναις δυσί σφαίραις. Ὁ δὲ κῶνος, οὗ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΕΖ, ἴσος ἐστὶν ὀκτὼ κώνοις, ὧν ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΔ, διὰ τὸ διπλῆν εἶναι τὴν ΕΖ τῆς ΒΔ. Οἱ ἄρα ὀκτώ κῶνοι οἱ εἰρημένοι ἴσοι εἰσί δυσί σφαίρας. Τετραπλασίων ἄρα ἐστίν ἡ σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, τοῦ κώνου, οὗ κορυφὴ μέν ἐστι τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλος ὀρθός ὢν πρὸς τὴν ΑΓ."Ηχθωσαν δὴ διὰ τῶν Β, Δ σημείων ἐν τῷ ΛΖ παραλληλογράμμῳ τῇ ΑΓ παράλληλοι αἱ ΦΒΧ, ΨΔΩ, καὶ νοείσθω κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ περί διαμέτρους τὰς ΦΨ, ΧΩ κύκλοι, ἄξων δὲ ὁ ΑΓ. Ἐπεί οὖν διπλάσιός ἐστιν ὁ κύλινδρος,

οὗ ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΦΩ τοῦ κυλίνδρου, οὗ ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΦΔ,αὐτὸς δε οὗτος τριπλασίων ἐστιν τοῦ κῶνου, οὗ ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνου τὸ ΑΒΔ, ὡς ἐν τοῖς Στοιχείοις, ἑξαπλασίων ἄρα ὁ κύλινδρος, οὗ ἔστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΦΩ, τοῦ κώνου, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνου τὸ ΑΒΔ. Ἐδείχθη δὲ τοῦ αὐτοῦ κώνου τετραπλασία οὖσα ἡ σφαῖρα, ἧς μέγιστός ἐστιν κύκλος ὁ ΑΒΓΔ. Ἡμιόλιος ἄρα ὁ κύλινδρος τῆς σφαίαρας.Ὅπερ ἔδει δειχθῆναι.Τούτου θεωρημένου, διότι πᾶσα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἡ ἔννοια ἐγένετο, ὅτι πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστί τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ.Ὑπόληψις γὰρ ἦν, καὶ διότι πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, καὶ διότι πᾶσα σφαῖρα ἴση ἐστι κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

Ερμηνευτικά σχόλια επί του αρχαίου κειμένου

¨ὧδε θεωρεῖται κατᾶ τρόπον τόνδε¨: Ακόμα ένα πειστήριο του ευρετικού χαρακτήρα της Μεθόδου $\longrightarrow$ ¨θεωρείται¨ και όχι ¨αποδεικνύεται.

¨ἐν τοῖς Στοιχείοις¨: Εννοεί τα Στοιχεία του Ευκλείδη.

4.2.3 3ο μέρος

Μαθηματική μετάφραση 2ου θεωρήματος

Το θεώρημα αυτό έχει 2 σκέλη:

1)Κάθε σφαίρα είναι (ως προς το στερεό περιεχόμενο) τετραπλάσια του κώνου με βάση ίση προς το μέγιστο κύκλο της σφαίρας και ύψος ίσο προς την ακτίνα της, και

2)Ο κύλινδρος με βάση ίση προς το μεγαλύτερο κύκλο της σφαίρας και ύψος ίσο με τη διάμετρο αυτής είναι τα $\frac{3}{2}$ της σφαίρας.

4.2.4 4ο μέρος

Έφοδος

1)Έστω ΑΒΓΔ ο μέγιστος κύκλος της σφαίρας και ΑΓ, ΒΔ διάμετροι αυτής κάθετες μεταξύ τους. Έστω κύκλος στη σφαίρα με διάμετρο ΒΔ (σε επίπεδο κάθετο στην ΑΓ) και με τον κύκλο αυτό ως βάση γράφω κώνο με κορυφή το Α. Αφού αχθεί η επιφάνεια αυτού του κώνου, τον τέμνω με ένα επίπεδο που διέρχεται από το Γ, παράλληλα προς τη βάση (του κώνου). Θα σχηματισθεί έτσι ένας κύκλος με διάμετρο ΕΖ. Με αυτόν τον κύκλο ως βάση σχηματίζω κύλινδρο με άξονα ίσο με ΑΓ και προεκτείνω την ΓΑ στο Θ ώστε $\Gamma A = A\Theta$.

Θεωρώ το ΓΘ ως ζυγό, με μέσο αυτού το Α. Φέρω την τυχαία ΜΝ παράλληλη προς την ΒΔ, η οποία τέμνει τον κύκλο ΑΒΓΔ στα σημεία Ξ,Ο, τη διάμετρο ΑΓ στο Σ, τα ευθ. τμήματα ΑΕ και ΑΖ στα σημεία Π και Ρ, αντίστοιχα. Φέρω την ΑΞ.

Διαμέσου του ΜΝ ας αχθεί επίπεδο κάθετο στην ΑΓ. Το επίπεδο αυτό θα τμήσει τον κύλινδρο σε κύκλο με διάμετρο ΜΝ, τη σφαίρα σε κύκλο με διάμετρο ΞΟ, και τον κώνο σε κύκλο με διάμετρο ΠΡ.

Επειδή $M\Sigma = A\Gamma$ (όμοια τρίγωνα ΑΚΒ,ΑΓΕ) και $\Pi\Sigma = A\Sigma$ (όμοια τρίγωνα ΑΣΡ, ΑΚΔ) (Πρόταση 2.1)

και ακόμα $\Gamma A \times A\Sigma = A\Xi^2$ (Πρόταση 2.2)=$\Xi\Sigma^2 + \Sigma\Pi^2$ (Πρόταση 2.3) προκύπτει ότι:

$M\Sigma \times \Sigma\Pi = \Xi\Sigma^2 + \Sigma\Pi^2$(1)

Και επειδή:

$\Gamma A = \Theta A$ έχω: $\dfrac{\Theta A}{A\Sigma} = \dfrac{\Gamma A}{A\Sigma}$ ή

$\dfrac{\Theta A}{A\Sigma} = \dfrac{M\Sigma}{\Sigma\Pi}$ ή

$\dfrac{\Theta A}{A\Sigma} = \dfrac{M\Sigma^2}{\Xi\Sigma^2 + \Sigma\Pi^2}$

Όμως $\dfrac{M\Sigma^2}{\Xi\Sigma^2 + \Sigma\Pi^2} = \dfrac{MN^2}{\Xi O^2 + \Pi P^2}$ (Πρόταση 2.4),

άρα $\dfrac{\Theta A}{A\Sigma} = \dfrac{MN^2}{\Xi O^2 + \Pi P^2}$ ή

από Πρόταση 2.5: $\dfrac{\Theta A}{A\Sigma}$ =(κύκλος διαμέτρου ΜΝ)/(κύκλος διαμέτρου ΞΟ+κύκλος διαμετρου ΠΡ)

Δηλαδή $\dfrac{\Theta A}{A\Sigma}$ =(κύκλος στον κύλινδρο)/(κύκλος στη σφαίρα+κύκλος στον κώνο)

Επομένως ο κύκλος στον κύλινδρο, εκεί που βρίσκεται, είναι σε ισορροπία ως προς το Α, με τον κύκλο στη σφαίρα και τον κύκλο στον κώνο μαζί, αν και τους δύο τους τοποθετήσουμε με τα κέντρα βάρους στο Θ.

Παρομοίως για τους τρεις κύκλους που προκύπτουν από ένα επίπεδο κάθετο στην ΑΓ και που περνάει από οποιοδήποτε άλλο ευθύγραμμο τμήμα στο παραλληλόγραμμο ΛΗΖΕ το οποίο είναι παράλληλο στην ΕΖ.

Εάν τώρα ασχοληθούμε με τον ίδιο τρόπο με όλα τα σύνολα των τριών αυτών κύκλων (στους οποίους επίπεδα κάθετα στην ΑΓ τέμνουν τον κύλινδρο,τη σφαίρα και τον κώνο) οι οποίοι σχηματίζουν τα τρία στερεά, προκύπτει ότι ο κύλινδρος, εκεί που βρίσκεται, ισορροπεί ως προς το Α με τη σφαίρα και τον κώνο μαζί, εφόσον και οι δύο μεταφερθούν και τοποθετηθούν στο Θ, ώστε καθενός το κέντρο βάρους να'ναι το Θ. Αφού τώρα Κ είναι το κέντρο βάρους του κυλίνδρου, έχω:

$\frac{\Theta A}{AK}$= κύλινδρος/(σφαίρα+κώνος ΑΕΖ) (Πρόταση 2.6),

αλλά $\Theta A = 2AK$, οπότε κύλινδρος=2(σφαίρα+κώνος ΑΕΖ). Όμως κώνος ΑΕΖ=$\frac{1}{3}$κυλίνδρου (Πρόταση 2.7)

οπότε κώνος ΑΕΖ=2 σφαίρα.

Όμως $EZ = 2B\Delta$ άρα κώνος ΑΕΖ=8 (κώνος ΑΒΔ) και τελικά σφαίρα=4 (κώνος ΑΒΔ).

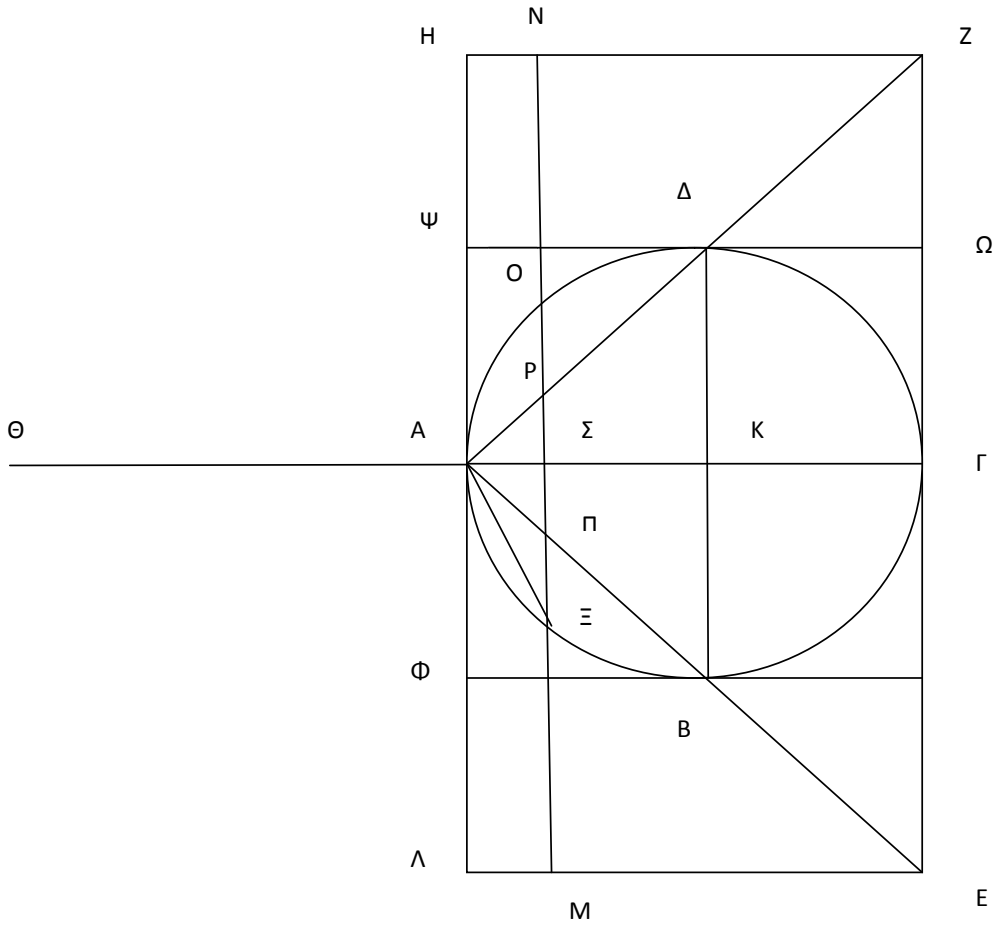
2)Μέσω των σημείων Β και Δ σχεδιάζω τις ΦΒΧ, ΨΔΩ παράλληλες στην ΑΓ. Σχεδιάζω τον κύλινδρο με άξονα την ΑΓ και βάσεις τους κύκλους με διαμέτρους ΦΨ, ΧΩ. Τότε:

κύλινδρος ΦΨΩΧ=2 κύλινδρος ΦΨΔΒ

=6 κώνος ΑΒΔ (Πρόταση 2.7)

=$\frac{3}{2}$σφαίρας (βλ. παραπάνω στο τέλος του 1)

Σχήμα 2.2



Παρατηρήσεις

Ο Αρχιμήδης εδώ κλείνει το 2ο θεώρημα με τις εξής διαπιστώσεις, ¨*Τούτου θεωρημένου, διότι πᾶσα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἡ ἔννοια ἐγένετο, ὅτι πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστί τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ.Ὑπόληψις γὰρ ἦν, καὶ διότι πᾶς κύκλος ἴσος ἔστὶ τριγώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, καὶ διότι πᾶσα σφαῖρα ἴση ἐστι κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας*¨, δηλαδή μας ενημερώνει ότι ¨από το θεώρημα αυτό, ότι κάθε

σφαίρα είναι τετραπλάσια του κώνου με βάση ίση με το μέγιστο κύκλο της σφαίρας και ύψος ίσο με την ακτίνα της σφαίρας (θεώρημα 33-Περί σφαίρας και κυλίνδρου), του δημιουργήθηκε η ιδέα (έννοια) ότι η επιφάνεια κάθε σφαίρας είναι τετραπλάσια του μέγιστου κύκλου της σφαίρας (θεώρημα 34-Περί σφαίρας και κυλίνδρου). Γιατί αναχώρησε από τη σκέψη ότι κάθε κύκλος είναι ίσος που έχει βάση ίση με την περιφέρεια του κύκλου και ύψος ίσο με την ακτίνα αυτού, και κάθε σφαίρα είναι ίση με τον κώνο που έχει βάση ίση με την επιφάνεια της σφαίρας και ύψος ίσο με την ακτίνα της σφαίρας¨.Εδώ ο Αρχιμήδης μας αποκαλύπτει κάτι εκπληκτικό: τα θεωρήματα 33,34 στο έργο του Περί σφαίρας και κυλίνδρου μπορεί να παρατίθενται με αυτή τη σειρά, δεν έφθασε όμως ο μεγάλος μαθηματικός έτσι σε αυτά αλλά αντίστροφα, $34 \Longleftarrow 33$. Αυτό είναι ένα ακόμα δείγμα του τρόπου σκέψης των αρχαίων μαθηματικών που διακρινόταν φυσικά από ευελιξία,εφευρετικότητα και χρήση όλων των εφοδίων προκειμένου να φτάσουν στο αποτέλεσμα. Όπως τονίσαμε και στην εισαγωγή μας, με ενδιαφέρει να βρω το αποτέλεσμα και μετά να ασχοληθώ με το τυπικό κομμάτι, ήτοι την αυστηρή ιεραρχική δόμηση των θεωρημάτων μου ως μέρος μιας επίσημης δημοσίευσης.Ας προσπαθήσουμε να αναπαραστήσουμε τη σειρά των βημάτων με τα οποία ο Αρχιμήδης κατέληξε σε αυτήν την ¨έννοια¨:

α)Κάθε κύκλος είναι ίσος με το τρίγωνο με βάση ίση με την περιφέρεια του κύκλου και ύψος ίσο με την ακτίνα του.

β)Από τις 2 διαστάσεις του βήματος α) στις 3 διαστάσεις του βήματος β) : κάθε σφάιρα είναι ίση με τον κώνο με βάση ίση με την επιφάνεια της σφάιρας και ύψος ίσο με την ακτίνα της (κύκλος-'σφάιρα,τρίγωνο-'κώνος,περιφέρια κύκλου-ἐπιφάνεια σφάιρας).

γ)Κάθε σφαίρα είναι ίση με το τετραπλάσιο του κώνου με βάση ίση με το μέγιστο κύκλο της σφαίρας και ύψος ίσο με την ακτίνα της.

δ)Από το β) και το γ) εύκολα προκύπτει ότι ο κώνος με βάση ίση με την επιφάνεια της σφαίρας και ύψος ίσο με την ακτίνα της είναι ίσος με 4 φορές τον κώνο με βάση ίση με το μέγιστο κύκλο της σφαίρας και ύψος ίσο με την ακτίνα της.

ε)Επειδή τώρα 2 κώνοι με ίσα ύψη όπως οι παραπάνω έχουν τον ίδιο λόγο με τις βάσεις τους[1] βρίσκουμε ότι η επιφάνεια της σφαίρας είναι ίση με το τετραπλάσιο του μέγιστου κύκλου της.

Φυσικά,η παραπάνω διαδικασία δεν συνιστά απόδειξη,είναι όμως ενδεικτική του πόσο εύκολα μπορεί να ανακαλύψει ένας ευφυής μαθηματικός καινούραι θεωρήματα στο ¨προχειρό¨ του θα λέγαμε, και μετά να προβεί στην αναλυτική απόδειξή τους.

4.2.5 5ο μέρος

Γεωμετρική απόδειξη

Η γεωμετρική απόδειξη του 2ου θεωρήματος της ¨Μεθόδου¨ βρίσκεται στο έργο του Συρρακούσιου μαθηματικού ¨Περί σφαίρας και κυλίνδρου, Ι¨ και έχει την αρίθμηση 34.

Α.Βοηθητικές προτάσεις

Α1. Εάν ένα κανονικό πολύγωνο αβ...α΄...βά, ο αριθμός των πλευρών του οποίου είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 4 εγγραφεί στο μέγιστο κύκλο μιας σφαίρας και εάν περιστρέψουμε το πολύγωνο γύρω από τη διάμετρο αα΄ τότε το στερεό (εκ περιστροφής) που σχηματίζεται έχει όγκο μικρότερο του τετραπλάσιου κώνου του οποίου η βάση είναι ίση με το μέγιστο κύκλο της σφαίρας και το ύψος του ίσο με την ακτίνα της σφαίρας.

-Αρχιμήδης, *Περί σφαίρας και κυλίνδρου*, 27.

[1] *Στοιχεία*,Ευκλείδη,XII.11

Α2. Εάν ένα κανονικό πολύγωνο ΑΒ...Α΄...Β΄Α, του οποίου οι πλευρές είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 4, περιγραφεί γύρω από το μέγιστο κύκλο μιας σφαίρας, και εάν περιστρέψουμε το πολύγωνο γύρω από τη διάμετρο ΑΑ΄ τότε το στερεό εκ περιστροφής που σχηματίζεται έχει όγκο μεγαλύτερο από τον όγκο της περιεχόμενης σφαίρας.

-Αρχιμήδης, *Περί σφαίρας και κυλίνδρου*, 28.

Α3. Το στερεό εκ περιστροφής που έχει περιγραφεί όπως στο Α2 γύρω από μια σφαίρα έχει όγκο μεγαλύτερο από τον τετραπλάσιο κώνο του οποίου η βάση είναι ίση με το μέγιστο κύκλο της σφαίρας και το ύψος του ίσο με την ακτίνα της σφαίρας.

-Αρχιμήδης, *Περί σφαίρας και κυλίνδρου*, 31, πόρισμα.

Α4. Εάν ένα κανονικό πολύγωνο με πλευρές ακέραια πολλαπλάσια του 4 εγγραφεί στον μέγιστο κύκλο μιας σφαίρας, ως αβ...α΄...βά, και εάν ένα παρόμοιο πολύγωνο ΑΒ...Α΄...Β΄Α περιγραφεί γύρω από το μέγιστο αυτό κύκλο, και εάν σχηματιστούν τα στερεά εκ περιστροφής με τη στροφή των πολυγώνων γύρω από τις διαμέτρους αα΄ και ΑΑ΄ αντίστοιχα,τότε θα ισχύει για τα δύο στερεά (εγγεγραμένο στη σφαίρα - περιγεγραμμένο στη σφαίρα): οι όγκοι των δύο στερεών έχουν τον τριπλάσιο λόγο των πλευρών τους.

-Αρχιμήδης, *Περί σφαίρας και κυλίνδρου*, 32.

Β.Απόδειξη (σε σύγχρονη απόδοση)

¨Ο όγκος κάθε σφαίρας είναι ίσος με το τετραπλάσιο του κώνου ο οποίος έχει βάση ίση με

το μέγιστο κύκλο της σφαίρας και ύψος ίσο με την ακτίνα της σφαίρας - κάθε κύλινδρος ο οποίος έχει βάση το μέγιστο κύκλο της σφαίρας και ύψος ίσο με τη διάμετρο της σφαίρας, είναι ίσος με τα $\frac{3}{2}$ της σφαίρας (ως προς τον όγκο φυσικά)¨

Έστω αμαάμ΄ ο μέγιστος κύκλος της σφαίρας.

Εάν τώρα η σφαίρα δεν είναι ίση με τον τετραπλάσιο κώνο που περιγράφηκε στην εκφώνηση, τότε θα είναι είτε μεγαλύτερη είτε μικρότερη από αυτόν.[2]

1) Ας θεωρήσουμε ότι η σφαίρα είναι μεγαλύτερη από τον τετραπλάσιο κώνο.

Έστω ότι Κ είναι ο κώνος με βάση ίση με το τετραπλάσιο του μέγιστου κύκλου της σφαίρας και του οποίου το ύψος είναι ίσο με την ακτίνα της σφάιρας. Τότε από την υπόθεση που κάναμε, η σφαίρα είναι μεγαλύτερη από τον Κ . Μπορούμε να βρούμε 2 γραμμές β,γ[3](από τις οποίες η β είναι η μεγαλύτερη) τέτοιες ώστε $\frac{\beta}{\gamma}$ <(όγκος σφαίρας)/ Κ . Ανάμεσα στα β,γ τοποθετώ δύο αριθμητικούς μέσους δ,ε.

Περιγράφω γύρω από και εγγράφω μέσα στο μέγιστο κύκλο της σφαίρας όμοια πολύγωνα, ώστε οι πλευρές τους να έχουν λόγο μικρότερο του $\frac{\beta}{\delta}$.

Σχηματίζω τα στερεά εκ περιστροφής γύρω από τις διαμέτρους αα΄, ΑΑ΄. Οι όγκοι αυτών των στερεών έχουν λόγο τριπλάσιο των πλευρών τους. (Πρόταση Α4)

Έτσι (όγκος εξωτερικού στερεού)/(όγκος εσωτερικού στερεού)< $\frac{\beta^3}{\delta^3}$,από την υπόθεση,

$< \frac{\beta}{\gamma}$, (αφού $\frac{\beta}{\gamma} > \frac{\beta^3}{\delta^3}$),

< (όγκος σφάιρας)/Κ . [4]

[2]κατά την ευδόξεια *μέθοδο της εξάντλησης*,βλ. σημείωση στο τέλος του θεωρήματος 1.

[3]η μέθοδος που ακολουθεί εδώ ο Αρχιμήδης βασίζεται στη θεωρία των αναλογιών όπως αυτή περιέχεται στο 5ο και στο 6ο βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη.Για περισσότερες πληροφορίες βλ.Τ.Heath, *The Works of Archimedes*,p.xl-xliii,Dover publications,2002

[4]Το γεγονός ότι $\beta : \gamma > \beta^3 : \delta^3$ θεωρείται γνωστό από τον Αρχιμήδη. Ο Ευτόκιος αποδεικνύει τη συγκεκριμένη ιδιότητα στο σχολιασμό του πάνω στον Αρχιμήδη ως εξής: παίρνω χ τέτοιο ώστε $\beta : \delta = \delta : \chi$, τότε $\beta - \delta : \beta = \delta - \chi : \delta$, και εφόσον $\beta > \delta, \beta - \delta > \delta - \chi$.Αλλά από την υπόθεση $\beta - \delta = \delta - \epsilon$.Επομένως $\delta - \epsilon > \delta - \chi$ ή $\chi > \epsilon$.Ξανά, υποθέτω ότι $\delta : \chi = \chi : \psi$, και όπως πριν έχουμε $\delta - \chi > \chi - \psi$, και τελικά $\delta - \epsilon > \chi - \psi$. Επομένως $\epsilon - \gamma > \chi - \psi$, και εφόσον $\chi > \epsilon, \psi > \gamma$.Τώρα από την υπόθεση, $\beta, \delta, \chi, \psi$ είναι σε συνεχή αναλογία. Επομένως $\beta^3 : \delta^3 = \beta : \psi < \beta : \gamma$,Τ.Heath,*The Works of Archimedes*,p.42,Dover publications,2002

Αλλά αυτό είναι αδύνατον αφού ο όγκος του περιγεγραμμένου στερεού είναι μεγαλύτερος από αυτόν της σφαίρας (Πρόταση Α2),ενώ ο όγκος του εγγεγραμμένου στερεού είναι μικρότερος του Κ.

Επομένως η σφαίρα δεν είναι μεγαλύτερη του Κ ή τέσσερις φορές του κώνου που περιγράφηκε στην εκφώνηση.

2) Ας θεωρήσουμε ότι η σφαίρα είναι μικρότερη του Κ.

Σε αυτή την περίπτωση παίρνουμε β,γ (β το μεγαλύτερο) τέτοια ώστε $\frac{\beta}{\gamma} <$ (Κ / όγκος σφαίρας). Η υπόλοιπη απόδειξη συνεχίζεται όπως στο 1) και τελικά έχουμε (όγκος εξωτερικού στερεού)/(όγκος εσωτερικού στερεού) $<$ Κ/(όγκος σφαίρας).

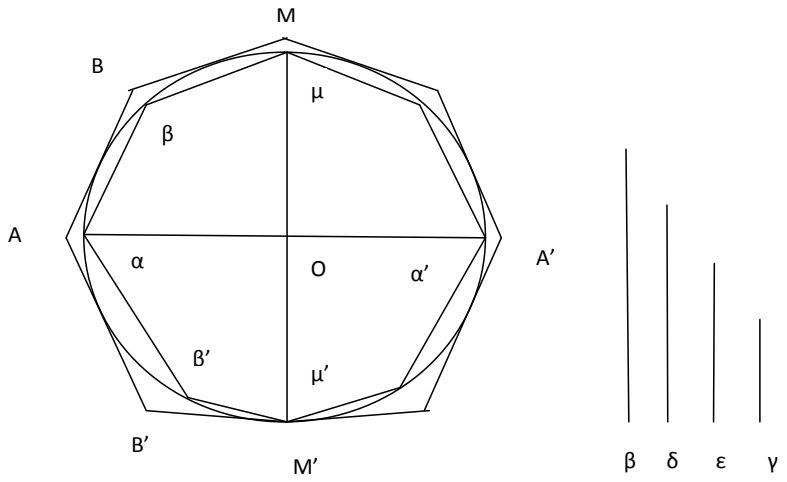
Αλλά αυτό είναι αδύνατο γιατί ο όγκος του εξωτερικού στερεού είναι μεγαλύτερος του Κ (Πρόταση Α3), και ο όγκος του εγγεγραμμένου στερεού είναι μικρότερος από τον όγκο της σφαίρας.

Επομένως η σφαίρα δεν είναι μικρότερη απο Κ.

Αφού η σφαίρα δεν είναι ούε μεγαλύτερη ούτε μικρότερη από Κ, είναι ίση με Κ, ή ίση με τον τετραπλάσιο κώνο που περιγράφηκε στην εκφώνηση.

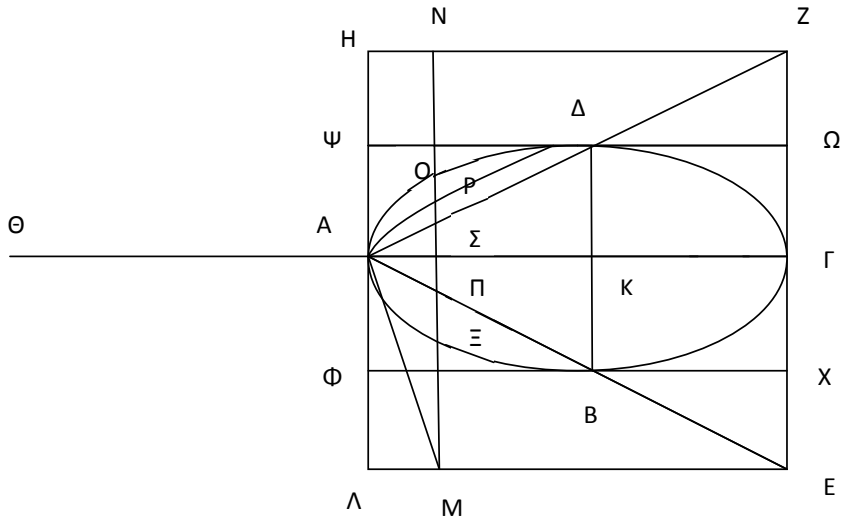
Ο κύλινδρος είναι 3 φορές ο κώνος με την ίδια βάση και ίσο ύψος (Πρόταση 2.7), δηλαδή 6 φορές ο κώνος με την ίδια βάση και ύψος ίσο με την ακτίνα της σφαίρας. Αλλά η σφαίρα είναι τετραπλάσια του τελευταίου κώνου (μόλις το δείξαμε). Επομένως ο κύλινδρος είναι τα $\frac{3}{2}$ της σφαίρας.

Σχήμα 2.3



4.3 Θεώρημα 3

¨...ὅτι ὁ κύλινδρος...ἡμιόλιός ἐστι τοῦ σφαιροειδοῦς...τό ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς διπλάσιόν ἐστι τοῦ κώνου...¨



4.3.1 1ο μέρος

Βοηθητικές προτάσεις απαραίτητες για τη μελέτη του 3ου θεωρήματος (επιπλέον των αρχικών προτάσεων)

3.1 Πρόταση 1.3 του 1ου θεωρήματος.

3.2 Πρόταση 1.5 του 1ου θεωρήματος.

3.3 Πρόταση 2.4 του 2ου θεωρήματος.

3.4 Εάν α, β, γ, δ μεγέθη τέτοια ώστε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$.

-*Στοιχεία Ευκλείδη,* V.16

3.5 Πρόταση 1.2 του 1ου θεωρήματος.

3.6 Πρόταση 2.5 του 2ου θεωρήματος.

3.7 Πρόταση 2.7 του 2ου θεωρήματος.

4.3.2 2ο μέρος

Αρχαίο κείμενο

Θεωρεῖται δὲ διὰ τοῦ τρόπου τούτου (καὶ, ὅτι ὁ κύλινδρος ὁ τὴν μὲν βάσιν) ἔχων ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῷ σφαιροειδεῖ, ὕψος δὲ ἴσον τῷ ἄξονι τοῦ σφαιροειδοῦς, ἡμιόλιός ἐστι τοῦ σφαιροειδοῦς. Τούτου δὲ θεωρηθέντος φανερόν, ὅτι παντὸς σφαιροειδοῦς ἐπιπέδῳ τμηθέντος διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ πρὸς τὸν ἄξονα τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς διπλάσιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. Ἔστω γάρ τι σφαιροειδὲς καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ γινέσθω ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὴ ἡ ΑΒΓΔ, διάμετροι δὲ αὐτῆς ἔστωσαν αἱ ΑΓ, ΒΔ, κέντρου δὲ τὸ Κ, ἔστω δὲ κύκλος ἐν τῷ σφαιροειδεῖ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ ὀρθὸς πρὸς τὴν ΑΓ, νοείσθω δὲ κῶνος βάσιν ἔχων τὸν εἰρημένον κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ Α σημεῖον, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ τετμήσθω ὁ κῶνος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ Γ παρὰ τὴν βάσιν. Ἔσται δὴ ἡ τομὴ αὐτοῦ κύκλος ὀρθὸς πρὸς τὴν ΑΓ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΕΖ. Ἔστω δὲ καὶ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν αὐτὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΕΖ, ἄξονα δὲ τὴν ΑΓ εὐθεῖαν, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΓΑ κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ΑΘ, καὶ νοείσθω ζυγὸς ὁ ΘΓ, μέσου δὲ αὐτοῦ τὸ Α, ἤχθω δέ τις ἐν τῷ ΛΖ παραλληλογράμμῳ παρὰ τὴν ΕΖ ἡ ΜΝ, καὶ ἀπὸ τῆς ΜΝ ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΓ. Ποιήσει δὴ τοῦτο ἐν μὲν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, ἐν δὲ τῷ σφαιροειδεῖ τομὴν κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, ἐν δὲ τῷ κώνῳ τομὴν κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ. Καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΣ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς ΑΠ, τουτέστιν ἡ ΜΣ πρὸς τὴν ΣΠ, ἴση δὲ ἡ ΓΑ τῇ ΑΘ, ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ἡΜΣ πρὸς ΣΠ. Ὡς δὲ ἡ ΜΣ πρὸς ΣΠ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΣ, ΣΠ.Τῷ δὲ ὑπὸ ΜΣ, ΣΠ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΠΣ, ΣΞ. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς τὸ ὑπὸ ΑΣ, ΣΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΞ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΚ, ΚΓ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ ΑΚ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΒ (ἀμφότεροι γὰρ οἱ λόγοι ἐν τῷ τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν εἰσίν), ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΑΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΠ, ἐναλλὰξ ἄρα ἔσται, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΣΓ, τὸ ἀπὸ ΠΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΞ. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΣΓ, τὸ ἀπὸ ΣΠ πρὸς τὸ ὑπὸ ΣΠ, ΠΜ. Ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΜΠ, ΠΣ

τῷ ἀπὸ ΞΣ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ ΠΣ. Τὸ ἄρα ὑπὸ ΜΣ, ΣΠ τοῖς ἀπὸ ΠΣ, ΣΞ ἴσον. Ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὰ ἀπὸ ΠΣ, ΣΞ. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὰ ἀπὸ ΣΞ, ΣΠ, οὕτως ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, πρὸς ἀμφοτέρους τοὺς κύκλους, ὧν διάμετροι αἱ ΞΟ, ΠΡ. Ὥστε ἰσορροπήσει περὶ τὸ Α σμεῖον ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, ἀτοῦ μένων ἀμφοτέροις τοῖς κύκλοις, ὧν διάμετροι αἱ ΞΟ, ΠΡ, μετενεχθεῖσι καὶ τεθεῖσιν τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε ἑκατέρου αὐτῶν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ. Συναμφοτέρων δὲ τῶν κύκλων, ὧν ἐσι διάμετροιαἱ ΞΟ, ΠΡ, μετενηνεγμένων κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ. Καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ πρὸς ἀμφοτέρους τοὺς κύκλους, ὧν διάμετροι αἱ ΞΟ, ΠΡ. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ ἐάν ἄλλη τις ἀχθῇ ἐν τῷ ΛΖ παραλληλογράμμῳ παρὰ τὴν ΕΖ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΓ, ὅτι ὁ γενόμενος κύκλος ἐν τῷ κυλίνδρῳ ἰσορροπήσει περὶ τὸ Α σημεῖον ἀτοῦ μένων συναμφοτέροις τοῖς κύκλοις τῷ τε ἐν τῷ σφαιροειδεῖ γινομένῳ καὶ τῷ ἐν τῷ κώνῳ μετενεχθεῖσιν τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε ἑκατέρου αὐτῶν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ. Συμπληρωθέντος οὖν τοῦ κυλίνδρου ὑπὸ τῶν ληφθέντων κύκλων καὶ τοῦ σφαιροειδοῦς καὶ τοῦ κώνου ἰσόρροπος ὁ κύλινδρος ἔσται περὶ τὸ Α σημεῖον αὐτοῦ μένων τῷ τε σφαιροειδεῖ καὶ τῷ κώνῳ μετενεχθεῖσι καὶ τεθεῖσιν ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε ἑκατέρου αὐτῶν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ. Καὶ ἐστι τοῦ μὲν κυλίνδρου κέντρον τοῦ βάρους τὸ Κ, τοῦ δὲ σφαιροειδοῦς καὶ τοῦ κώνου συναμφοτέρων, ὡς ἐρρέθη, κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ. Ἔστιν οὖν, ὡς ἡ ΘΑ πρὸς ΑΚ, ὁ κύλινδρος πρὸς ἀμφότερα τό τε σφαιροειδές καὶ τὸν κώνον. Διπλασία δὲ ἡ ΑΘ τῆς ΑΚ. Διπλάσιος ἄρα καὶ ὁ κύλινδρος ἀμφοτέρων τοῦ τε σφαιροειδοῦς καὶ τοῦ κώνου. Εἷς ἄρα κύλινδρος ἴσος δυσιν κώνοις καὶ δυσί σφαιροειδέσιν. Εἷς δὲ κύλινδρος ἴσος ἐστὶ κώνοις τοῖς ἀτυοῖς. Τρεῖς ἄρα κῶνοι ἴσοι εἰσι δυσι κώνοις καὶ δυσι σφαιροειδέσι. Κοινοὶ ἀφῃρήσθωσαν δύο κῶνοι. Λοιπὸς ἄρα εἷς κῶνος, οὗ ἔστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΕΖ, ἴσος ἐστὶ δυσὶ σφαιροειδέσιν. Εἷς δὲ κῶνος ὁ αὐτὸς ἴσος ἐστίν ὀκτώ κώνοις, ,ὧν ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΔ. Ὀκτώ ἄρα κῶνοι οἱ εἰρημένοι ἴσοι εἰσι δυσι σφαιροειδέσιν. Καὶ τέσσαρες ἄρα κῶνοι ἴσοι ἑνὶ σφαιροειδεῖ. Τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ σφαιροειδές τοῦ κώνου, οὗ κορυφή μὲν ἐστι τὸ Α σημεῖου, βάσις δὲ ὁ περὶ

διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλος ὀρθός ᾽ὢν πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς διπλάσιόν ἐστι τοῦ εἰρημένου κώνου. ᾽Ηχθωσαν δὲ διὰ τῶν Β, Δ σημείων ἐν τῷ ΛΖ παραλληλογράμμῳ τῇ ΑΓ παράλληλοι αἱ ΦΧ, ΨΩ, καὶ νοείσθω κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ περί διαμέτρους τὰς ΦΨ, ΧΩ κύκλοι, ἄξων δὲ ἡ ΑΓ εὐθεῖα. ᾽Επεὶ οὖν διπλάσιός ἐστιν ὁ κύλινδρος, οὗ ἐστι, τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΦΩ, τοῦ κυλίνδρου, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος πσραλληλόγραμμον τὸ ΦΔ, διὰ τὸ ἴσας αὐτῶν εἶναι τὰς βάσεις, τὸν δὲ ἄξονα τοῦ ἄξονος διπλάσιον, α᾽τὸς δὲ ὁ κύλινδρος, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΦΔ, τριπλασίων ἐστὶ τοῦ κώνου, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλος ὀρθὸς ὢν πρὸς τὴν ΑΓ, ἑξαπλάσιος ἄρα ὁ κύλινδρος, οὗ ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΦΩ, τοῦ εἰρημένου κώνου. ᾽Εδείχθη δὲ τοῦ αὐτοῦ κώνου τετραπλάσιον τὸ σφαιροειδές. ᾽Ημιόλιος ἄρα ἐστὶν ὁ κύλινδρος τοῦ σφαιροειδοῦς.

Ερμηνευτικά σχόλια επί του αρχαίου κειμένου

¨*Θεωρεῖται δὲ διὰ τοῦ τρόπου τούτου*¨: θεώρηση μέσω του μηχανικού τρόπου.

¨*καὶ νοείσθω ζυγὸς ὁ ΘΓ,μετευεχθεῖσι καὶ τεθεῖσιν τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ*¨:καθιερωμένη μηχανική ορολογία στη Μέθοδο του Συρακούσιου μαθηματικού.

¨*συμπληρωθέντος οὖν τοῦ κυλίνδρου ὑπὸ τῶν ληφθέντων κύκλων*¨: στοιχείο απειροστικού λογισμού.

4.3.3 3ο μέρος

Μαθηματική μετάφραση 3ου θεωρήματος

Με τη συγκεκριμένη μέθοδο μπορούμε επίσης να εξετάσουμε το ότι ο κύλινδρος με βάση ίση προς το μέγιστο κύκλο ενός σφαιροειδούς και ύψος ίσο με την ακτίνα του σφαιροειδούς, είναι ίσο με τα $\frac{3}{2}$ του σφαιροειδούς. Και αφού αυτό καταστεί φανερό προκύπτει ότι εάν οποιοδήποτε σφαιροειδές τμηθεί από επίπεδο διαμέσου του κέντρου του και κάθετα προς τον άξονά

του, το μισό του σφαιροειδούς είναι διπλάσιο του κώνου το οποίο έχει την ίδια βάση και τον ίδιο άξονα με αυτό (δηλαδή το μισό σφαιροειδές).

4.3.4 4ο μέρος

Έφοδος

Ας αχθεί ένα επίπεδο διαμέσου του άξονα του σφαιροειδούς το οποίο αποκόπτει από αυτό την έλλειψη ΑΒΓΔ, οι άξονες της οποίας είναι οι ΑΓ και ΒΔ, και Κ το κέντρο της.

Ας αχθεί ένας κύκλος με διάμετρο ΒΔ και σε επίπεδο κάθετο στην ΑΓ.

Ας νοηθεί τότε ένας κώνος με τον παραπάνω κύκλο ως βάση και το Α ως κορυφή, και αφού αχθεί ο κώνος αυτός ας τμηθεί από ένα επίπεδο διαμέσου του Γ, παράλληλα στη βάση του. Το τμήμα αυτό θα είναι ένας κύκλος σε επίπεδο κάθετο στην ΑΓ και με διάμετρο ΕΖ.

Ας νοηθεί κύλινδρος με τον τελευταίο κύκλο ως βάση και άξονα ΑΓ. Προεκτείνω τη ΓΑ στη Θ ώστε $A\Theta = A\Gamma$.

Το ΘΓ τότε ας νοηθεί ως ζυγός με Α το μέσο του.

Στο παραλληλόγραμμο ΛΗΖΕ ας αχθεί οποιαδήποτε ευθεία ΜΝ παράλληλη στην ΕΖ, η οποία τέμνει την έλλειψη στα σημεία Ξ,Ο και τις ΑΕ,ΑΖ,ΑΓ στα σημεία Π,Ρ,Σ αντίστοιχα.

Εάν τώρα κατασκευαστεί εάν επίπεδο διαμέσου της ΜΝ κάθετα προς την ΑΓ, θα κόψει από τον κύλινδρο ένα κύκλο με διάμετρο ΜΝ, από το σφαιροειδές έναν κύκλο με διάμετρο ΞΟ, και από τον κώνο ένα κύκλο με διάμετρο ΠΡ.

Τώρα εφόσον $\Theta A = A\Gamma$ θα είναι $\dfrac{\Theta A}{A\Sigma} = \dfrac{A\Gamma}{A\Sigma}$= $\dfrac{EA}{A\Pi}$ (Πρόταση 3.1, όμοια τρίγωνα ΑΓΕ,ΑΣΠ)

$= \dfrac{M\Sigma}{\Sigma\Pi}$ (Πρόταση 3.1, όμοια τρίγωνα ΑΓΕ,ΑΣΓ).

Επομένως $\dfrac{\Theta A}{A\Sigma} = \dfrac{M\Sigma^2}{M\Sigma.\Sigma\Pi}$

Αλλά από την ιδιότητα της έλλειψης,

$\dfrac{A\Sigma.\Sigma\Gamma}{\Sigma\Xi^2} = \dfrac{AK^2}{KB^2}$=

=$\dfrac{A\Sigma^2}{\Sigma\Pi^2}$ (Πρόταση 3.1, όμοια τρίγωνα ΑΚΒ, ΑΣΓ)

οπότε $\dfrac{\Sigma\Pi^2}{\Sigma\Xi^2} = \dfrac{A\Sigma^2}{A\Sigma.\Sigma\Gamma}$= (Πρόταση 3.4)

=$\dfrac{\Sigma\Pi^2}{\Sigma\Pi.\Pi M}$ (Πρόταση 3.3, 3.1, όμοια τρίγωνα ΑΣΠ,ΠΜΕ).

Τελικά προκύπτει $\Xi\Sigma^2 = \Sigma\Pi.\Pi M$ (Πρόταση 3.5).

Προσθέτω $\Sigma\Pi^2$ σε κάθε μέλος και παίρνω $\Sigma\Xi^2 + \Sigma\Pi^2 = \Sigma\Pi.M\Sigma$.

Έτσι έχω από παραπάνω,

$\dfrac{\Theta A}{A\Sigma} = \dfrac{M\Sigma^2}{\Xi\Sigma^2 + \Sigma\Pi^2} = \dfrac{MN^2}{\Xi O^2 + \Pi P^2}$=

=(κύκλος διαμέτρου ΜΝ)/(κύκλος διαμέτρου ΞΟ + κύκλος διαμέτρου ΠΡ) (Πρόταση 3.6)

Δηλαδή $\dfrac{\Theta A}{A\Sigma}$=(κύκλος στον κύλινδρο)/(κύκλος στο σφαιροειδές + κύκλος στον κώνο).

Επομένως ο κύκλος στον κύλινδρο, εκέι που βρίσκεται, είναι σε ισορροπία ως προς το Α με τον κύκλο στο σφαιροειδές και τον κύκλο στον κώνο μαζί, εάν και οι δύο τελευταίοι κύκλοι τοποθετηθούν με τα κέντρα βαρύτητάς τους στο Θ.

Παρομοίως για τις τρείς αντίστοιχες τομές που προκύπτουν από ένα επίπεδο κάθετο στην ΑΓ το οποίο περνάει διαμέσου οποιασδήποτε άλλης ευθείας παράλληλης στην ΕΖ στο παραλληλόγραμμο ΛΗΖΕ.

Αν τώρα με τον ίδιο τρόπο πάρω όλα τα σύνολα των 3 κύκλων στους οποίους επίπεδα κάθετα στην ΑΓ τέμνουν τον κύλινδρο, το σφαιροειδές και τον κώνο, και τα οποία συνθέτουν τα τρία αυτά στερεά αντίστοιχα, προκύπτει ότι ο κύλινδρος εκεί που βρίσκεται, θα είναι σε ισορροπία ως προς το Α με το σφαιροειδές και τον κώνο μαζί, εφόσον και τα δύο τελευταία τοποθετηθούν με τα κέντρα βαρύτητάς τους στο Θ.

Τώρα εφόσον Κ είναι το κέντρο βαρύτητας του κυλίνδρου,

$\frac{\Theta A}{AK}$=(κύλινδρος)/(σφαιροειδές + κώνος ΑΕΖ).Αλλά $\Theta A = 2AK$ οπότε,

κύλινδρος=2 (σφαιροειδές + κώνος ΑΕΖ).

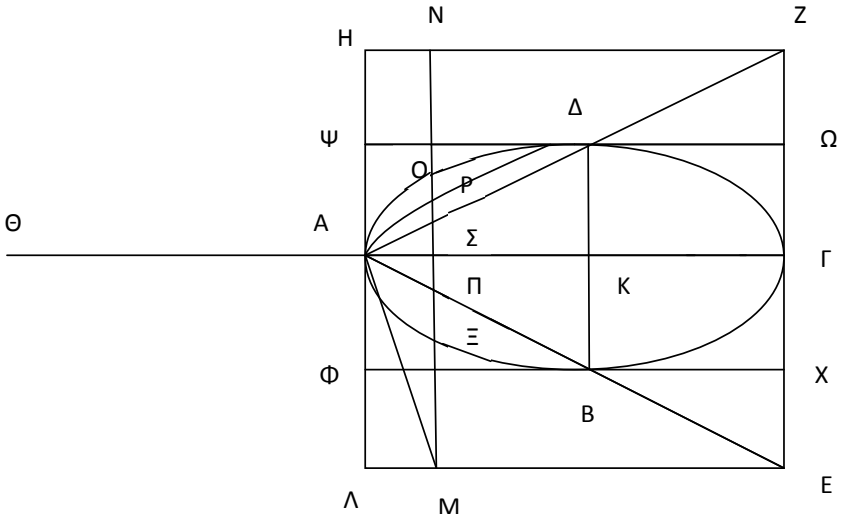
Ισχύει κύλινδρος=3 (κώνος ΑΕΖ) (Πρόταση 3.7). Αλλά αφού ΕΖ=2ΒΔ,

κώνος ΑΕΖ=8 (κώνος ΑΒΔ), επομένως σφαιροειδές=4 (κώνος ΑΒΔ) και τελικά (μισό σφαιροειδές)=2 (κώνος ΑΒΔ).

Διαμέσου των Β,Δ ας αχθούν οι ΦΒΧ, ΨΔΩ παράλληλες στην ΑΓ, και ας νοηθεί κύλινδρος με ΑΓ για άξονα και τους κύκλους με διαμέτρους ΦΨ, ΧΩ σαν βάσεις.

Τότε κύλινδρος ΦΨΩΧ= 2(κύλινδρος ΦΨΔΒ)=6 (κώνος ΑΒΔ)=$\frac{3}{2}$ σφαιροειδούς, από το προηγούμενο αποτέλεσμα.

Σχήμα 3.1



Παρατηρήσεις

Το συγκεκριμένο θεώρημα δεν είναι παρά μια γενίκευση του προηγούμενου θεωρήματος. Αυτή τη φορά ο Αρχιμήδης πέρασε από τη σφαίρα στο σφαιροειδές καταλήγοντας σε πανομοιότυπες σχέσεις αναλογίας και φυσικά καταδεικνύοντας την άνεση και την ευχέρεια που του παρέχει ο μηχανικός τρόπος ώστε να προβαίνει εύκολα σε πιο γενικά συμπεράσματα.

4.3.5 5ο μέρος

Γεωμετρική απόδειξη

Για τη γεωμετρική απόδειξη του 3ου θεωρήματος της Μεθόδου θα χρειαστεί να ανατρέξουμε στα θεωρήματα 27,28,29,30 από το έργο του Αρχιμήδη ¨Περί κωνοειδών και σφαιροειδών¨.

Α.Βοηθητικές προτάσεις

Α1. Το Προλαμβανόμενο 11 του Αρχιμήδη.

Α2. Εάν $A_1, A_2, ..., A_\nu$ είναι οποιοσδήποτε αριθμός περιοχών τέτοιων ώστε

$A_1 = ax + x^2$,

$A_2 = a.2x + (2x)^2$,

.....

$A_\nu = a.\nu x + (\nu x)^2$, τότε

$\nu.A_\nu/(A_1 + A_2 + ... + A_\nu) < (a + \nu x)/(\frac{a}{2} + \frac{\nu x}{3})$ και

$\nu.A_\nu/(A_1 + A_2 + ... + A_{\nu-1}) > (a + \nu x)/(\frac{a}{2} + \frac{\nu x}{3})$

-Αρχιμήδης,*Περί Κωνοειδών και Σφαιροειδών,2*

Β.Απόδειξη (σε σύγχρονη απόδοση)

¨Σε κάθε σφαιροειδές του οποίου το κέντρο είναι το Ο, εάν ένα επίπεδο (κάθετο στο επίπεδο της σελίδας στη ΒΒ') που διέρχεται από τον άξονα του αποκόπτει ένα τμήμα όχι μεγαλύτερο από το μισό του σφαιροειδούς με Α κορυφή και ΑΔ για άξονα, και εάν Α'Δ είναι ο άξονας του υπόλοιπου τμήματος του σφαιροειδούς, τότε ισχύει:

(πρώτο τμήμα)/(κώνος ή τμήμα κώνου με την ίδια βάση και άξονα)=$\frac{OA + A'\Delta}{A'\Delta} = \frac{3OA - A\Delta}{2OA - A\Delta}$.

Σαν ειδική περίπτωση, εάν το επίπεδο διέρχεται από το κέντρο, έτσι ώστε το αποκοπτόμενο τμήμα να είναι το μισό του σφαιροειδούς, το μισό σφαιροειδές είναι διπλάσιο του κώνου ή του τμήματος του κώνου που έχει την ίδια κορυφή και άξονα.¨

Ας αχθεί ένα επίπεδο που κόβει το σφαιροειδές σε επίπεδο παράλληλο στο επίπεδο της σελί-

δας (βλ. σχήμα 3.2) και ας θεωρήσουμε το τελευταίο επίπεδο να διέρχεται από τον άξονα του σφαιροειδούς και να τέμνει το πρώτο επίπεδο στη ΒΒ′, σχηματίζοντας την έλλειψη ΑΒΑ΄Β′.

Ας είναι ΕΦ,Ε΄Φ′ δύο εφαπτομένες στην έλλειψη παράλληλες στη ΒΒ′στα σημεία Α,Α′ και διαμέσου των εφαπτομένων ας αχθούν επίπεδα παράλληλα στη βάση του στερεού τμήματος. Αυτά τα επίπεδα θα εφάπτωνται του σφαιροειδούς στα Α,Α′, τα οποία θα είναιοι κορυφές των δύο τμημάτων στα οποία διαιρείται. Επιπλέον η ΑΑ′ θα διέρχεται από το κέντρο Ο και θα διχοτομεί την ΒΒ′ στο Δ.

Τότε 1) εάν οι βάσεις των δύο τμημάτων είναι κάθετες στον άξονα του σφαιροειδούς, Α,Α′ θα είναι οι κορυφές του σφαιροειδούς όπως και των αποκπτόμενων τμημάτων, ΑΑ′ θα είναι ο άξονας του σφαιροειδούς και η βάση των τμημάτων θα είναι ένας κύκλος με διάμετρο ΒΒ′.

2)εάν η βάση των τμημάτων δεν είναι κάθετη στον άξονα του σφαιροειδούς, η βάση των τμημάτων θα είναι μια έλλειψη της οποίας ΒΒ′ είναι ο ένας άξονας και ΑΔ, Α΄Δ είναι οι άξονες των δύο τμημάτων αντίστοιχα.

Μπορούμε τώρα να σχεδιάσουμε ένα κύλινδρο ή τμήμα κυλίνδρου ΕΒΒ΄Φ με βάση τον κύκλο ή την έλλειψη με διάμετρο τη ΒΒ′ και έχοντας την ΑΔ για άξονα. Μπορούμε επίσης τώρα να σχεδιάσουμε έναν κώνο ή τμήμα κώνου με βάση τον κύκλο ή την έλλειψη με διάμετρο τη ΒΒ′ και έχοντας το Α για κορυφή.(βλ. σχήμα 3.2)

Έχουμε τώρα να δείξουμε ότι εάν η ΟΑ′ προεκταθεί ως το Η ώστε $OA' = A'H$,

(σφαιροειδές τμήμα ΑΒΒ΄)/(κώνος ή τμήμα κώνου ΑΒΒ΄)=$\frac{H\Delta}{A'\Delta}$. Ας είναι Ζ ένας κώνος, τέτοιος ώστε Ζ/(κώνος ή τμήμα κώνου ΑΒΒ΄)=$\frac{H\Delta}{A'\Delta}$ (α). Πρέπει να δείξουμε ότι το τμήμα ΑΒΒ′ είναι ίσο με το Ζ. Αλλά αφού (κύλινδρος ή τμήμα ΕΒ΄)/(κώνος ή τμήμα κώνου ΑΒΒ΄)=$\frac{3}{1}$ (Πρόταση 3.7), έχουμε με τη βοήθεια του (α),

(κύλινδρος ή τμήμα ΕΒ΄)/ Ζ = $A'\Delta/\ \frac{H\Delta}{3}$ (β)

Τώρα εάν το τμήμα ΑΒΒ′ δεν είναι ίσο μτ το Ζ θα είναι είτε μεγαλύτερο είτε μικρότερο από αυτό (*μέθοδος της εξάντλησης*).

Ι. Έστω ότι είναι μεγαλύτερο.

Ας εγγράψω και περιγράψω στο τμήμα ΑΒΒ′ στερεά που αποτελούνται από κυλίνδρους ή τμήματα κυλίνδρων, με άξονες κατά μήκος της $A\Delta$ και όλα ίσα μεταξύ τους, τέτοια ώστε

(περιγεγγραμμένα στερεό)-(εγγεγραμμένα στερεό)<(τμήμα ΑΒΒ′)- Ζ

οπότε προκύπτει (εγγεγραμμένα στερεό)> Ζ (γ).

Φέρω όλα τα επίπεδα που σχηματίζουν τις βάσεις των κυλίνδρων ή των τμημάτων τους ώστε να συναντήσουν την επιφάνεια του κυλίνδρου ΕΒ′. Τότε, εάν $N\Delta$ είναι ο άξονας του μεγαλύτερου κυλίνδρου (ή κυλινδρικού τμήματος)στο περιγεγραμμένο στερεό, ο πλήρης κύλινδρος ΕΒ′ θα υποδιαιρείται σε κυλίνδρους ή τμήματα κυλίνδρων καθένα από τα οποία θα είναι ίσο με το μεγαλύτερο από αυτά στο περιγεγραμμένο στερεό.

Παίρνω ευθ. τμήματα δα′ καθένα ίσο προς Α′Δ και τόσα στο πλήθος όσα τα μέρη στα οποία η ΑΔ διαιρείται από τις βάσεις των κυλίνδρων (ή κυλ. τμημάτων), και μετράω απόσταση δα κατά μήκος της δα′ ίση προς ΑΔ. Προκύπτει ότι $aa' = 2O\Delta$,(Α′Δ - ΑΔ = Α′Ο +ΟΔ - ΑΔ = ΑΟ - ΑΔ + ΟΔ = 2ΟΔ.

Εφαρμόζω σε κάθε μία από τις δα′ ορθογώνια με ύψος ίσο προς δα και σχεδιάζω τα τετράγωνα σε κάθε γραμμή δα όπως στο σχήμα. Ας είναι Σ το εμβαδό κάθε ορθογωνίου.

Από το πρώτο ορθογώνιο αφαιρώ ένα γνώμονα[1] με πλάτος ίσο με ΑΝ, από το δεύτερο ορθογώνιο ένα γνώμονα με πλάτος ίσο με ΑΜ, κοκ, και από το τελευταίο ορθογώνιο δεν αφαιρώ κανένα γνώμονα.

Τότε,

πρώτος γνώμονας=$A'\Delta.A\Delta - N\Delta.(A'\Delta - AN) = A'\Delta.AN + N\Delta.AN = AN.A'N$

Όμοια,

δεύτερος γνώμονας=$AM.A'M$,

κοκ.

[1]Σύμφωνα με τον Ευκλείδη, *Στοιχεία,Βιβλίο ΙΙ, ορισμός 2* ο γνώμονος είναι ένα σχήμα τύπου L που ορίζεται ως εξής,*παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλογράμμων ἑν ὁποιονοῦν ςὺν τοῖς δυςὶ παραπληρώμασι γνώμων καλείσθω.*

Και ο τελευταίος γνώμονας στο προτελευταίο ορθογώνιο είναι ίσος με $A\Lambda.A'\Lambda$.

Όταν οι γνώμονες έχουν αφαιρεθεί από τα διαδοχικά ορθογώνια, τα υπόλοιπα (που θα τα αποκαλέσουμε $R_1, R_2, ..., R_\nu$ όπου ν ο αριθμός των ορθογωνίων και ισχύει $R_\nu = \Sigma$) είναι ορθογώνια που εφαρμόζονται σε ευθ. τμήματα μήκους αα΄ και διαφέρουν κατά τετράγωνα των οποίων οι πλευρές είναι ίσες προς $\Delta N, \Delta M ... \Delta A$ (σχήμα 3.2).

Ας συμβολίσω αλγεβρικά με $\Delta N = x, aa' = 2O\Delta = o$ έτσι ώστε $R_1 = ox + x^2, R_2 = o.2x + (2x)^2, ...$

Τότε συγκρίνοντας διαδοχικά τους κυλίνδρους ή τα τμήματα των κυλίνδρων (1) στον κύλινδρο ΕΒ΄ και (2) στο εγγεγραμμένο στερεό, έχω (και από ιδιότητα έλλειψης)

(πρώτος κύλινδρος στον ΕΒ΄)/(πρώτος στο εγεγραμμένο στερεό)=$\dfrac{B\Delta^2}{\Pi N^2} = \dfrac{A\Delta.A'\Delta}{AN.A'N}$ = Σ/(πρώτος γνώμονας).

(δεύτερος κύλινδρος στον ΕΒ΄)/(δεύτερος στο εγεγραμμένο στερεό)= Σ/(δεύτερος γνώμονας), κοκ.

Ο τελευταίος από τους κυλίνδρους στον κύλινδρο ΕΒ΄ δεν έχει αντίστοιχο σε αυτόν στο εγγεγραμμένο στερεό και δεν υπάρχει αντίστοιχος γνώμονας.

Συνδυάζοντας τις αναλογίες έχουμε (Πρόταση Α1)

(κύλινδρος ΕΒ΄)/(εγγεγραμμένο στερεό)=(άθροισμα όλων των εμβαδών Σ)/(άθροισμα όλων των γνωμόνων).

Τώρα οι διαφορές μεταξύ των Σ και των διαδοχικών γνωμόνων είναι $R_1, R2, ..., R_\nu$, ενώ

$R_1 = ox + x^2$

$R_2 = o.2x + (2x)^2$

.....

$R_\nu = o\beta + \beta^2 = \Sigma$, όπου $\beta = \nu x = A\Delta$.

Επομένως (Πρόταση Α2),

(άθροισμα όλων των Σ)/$(R_1 + R_2 + ... + R_\nu) < (o + \beta)/(\frac{o}{2} + \frac{\beta}{3})$.

Έτσι

(άθροισμα όλων των Σ)/(άθροισμα όλων των γνωμόνων)$> (o + \beta)/(\frac{o}{2} + \frac{2\beta}{3}) > A'\Delta/\frac{H\Delta}{3}$.

Οπότε (κύλινδρος ΕΒ′)/(εγγεγραμμένο στερεό)$> A'\Delta/\frac{H\Delta}{3} >$ (κύλινδρος ΕΒ′)/ Z ,από το (β) παραπάνω.

Επομένως (εγγεγραμμένο στερεό)$<$ Z , το οποίο είναι αδύνατο από το (γ) παραπάνω.

Δηλαδή το τμήμα ΑΒΒ′ δεν είναι μεγαλύτερο του Z .

ΙΙ. Έστω ότι είναι μικρότερο.

Εγγράφουμε και περιγράφουμε στερεά τέτοια ώστε

(περιγεγραμμένο στερεό)-(εγγεγραμμένο στερεό)$<$ Z -(τμήμα ΑΒΒ′), οπότε Z $>$ (περιγεγραμμένο στερεό) (δ).

Σε αυτήν την περίπτωση συγκρίνουμε τους κυλίνδρους ή τα τμήματα κυλίνδρων στο ΕΒ′ με αυτά του περιγεγραμμένου στερεού.

Έτσι (πρώτος κύλινδρος στο ΕΒ′)/(πρώτος στο περιγεγραμμένο στερεό)= Σ/Σ.

(δεύτερος κύλινδρος στο ΕΒ′)/(δεύτερος στο περιγεγραμμένο στερεό)= Σ/ (πρώτος γνώμονας), κοκ.

Τελικά (τελευταίος κύλινδρος στο ΕΒ′)/(τελευταίος στο περιγεγραμμένο στερεό)= Σ/ (τελευταίος γνώμονας).

Τώρα $(\Sigma + (allthegnomons)) = \nu\Sigma - (R_1 + R_2 + ... + R_{\nu-1})$. και $\nu\Sigma/(R_1 + R_2 + ... + R_{\nu-1}) > (o + \beta)/(\frac{o}{2} + \frac{\beta}{3})$ (Πρόταση Α2) έτσι ώστε $\nu\Sigma/(\Sigma + (allthegnomons)) < (o + \beta)/(\frac{o}{2} + \frac{2\beta}{3})$.

Προκύπτει ότι αν συνδυάσουμε τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε

(κύλινδρος ή τμήμα κυλίνδρου ΕΒ′)/(περιγεγραμένο σστερεό)$< (o+\beta)/(\frac{o}{2}+\frac{2\beta}{3}) < A'\Delta/\frac{H\Delta}{3} < (EB')/\Sigma$,από το (β) παραπάνω.

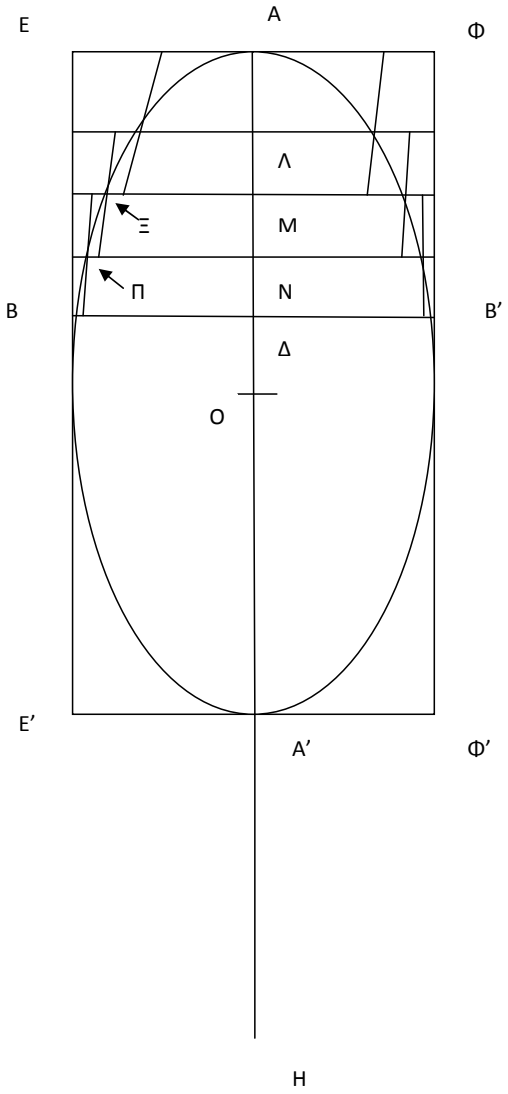
Επομένως το περιγεγραμμένο στερεό είναι μεγαλύτερο από το Σ το οποίο είναι άτοπο από το (δ)

παραπάνω.

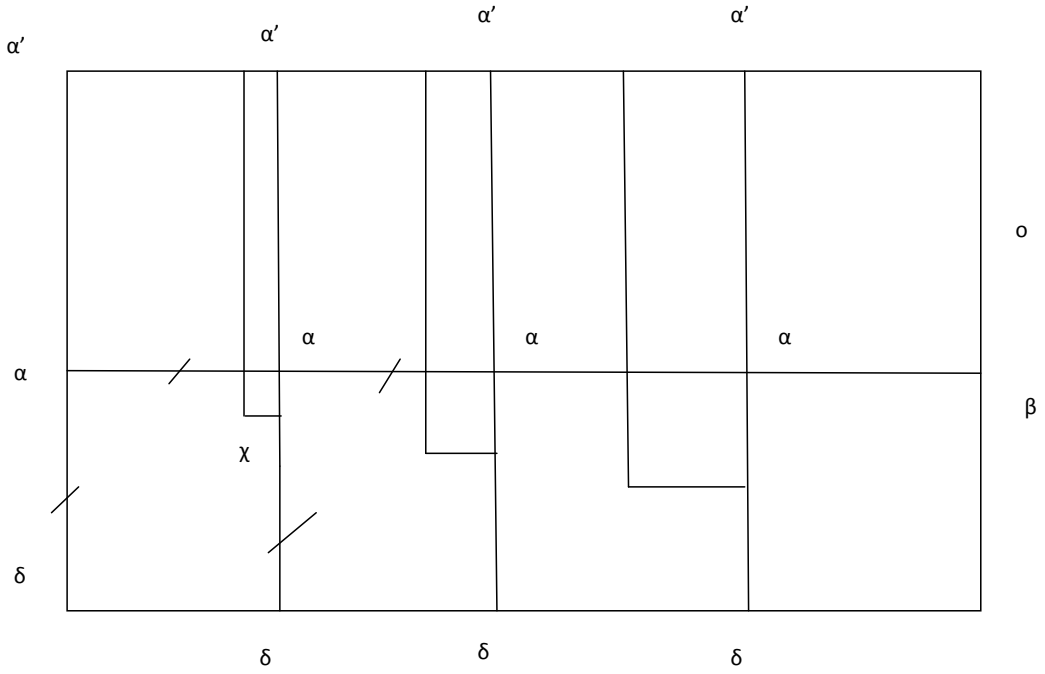
Το τμήμα ΑΒΒ΄ δεν είναι επομένως ούτε μεγαλύτερο ούτε μικρότερο από το Σ, είναι άρα ίσο και άρα η πρόταση αποδείχθηκε.

Στην περίπτωση του μισού σφαιροειδούς αντικαθιστώ απλά ΟΑ για ΑΔ στη σχέση $\frac{3OA - A\Delta}{2OA - A\Delta}$ και έχω (μισό σφαιροειδές)/(κώνος με ίδια βάση και άξονα)=2/1=2.

Σχήμα 3.2

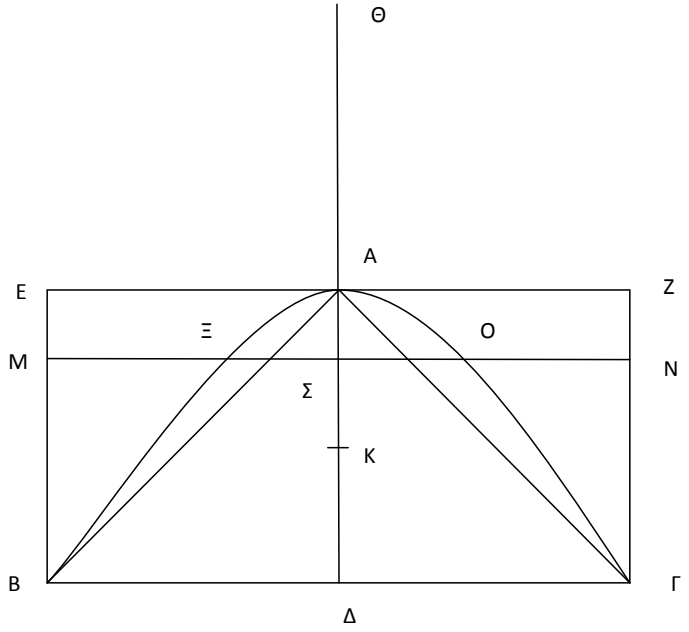


Σχήμα 3.3



4.4 Θεώρημα 4

¨ὅτι δὲ πᾶν τμῆμα ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς...ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ κώνου...¨



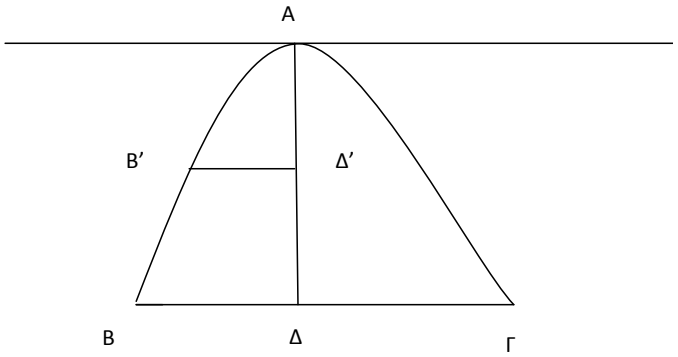
4.4.1 1ο μέρος

Βοηθητικές προτάσεις απαραίτητες για τη μελέτη του 4ου θεωρήματος

4.1 Εάν από ένα σημείο μιας παραβολής αχθεί ευθεία γραμμή η οποία είναι είτε ο άξονας της παραβολής είτε παράλληλη στον άξονα, όπως η ΑΔ , και εάν από δύο άλλα σημεία Β,Β′ της παραβολής αχθούν ευθείες παράλληλες στην εφαπτομένη της παραβολής στο Α, που τέμνουν την ΑΔ στα Δ,Δ′ αντίστοιχα, τότε ισχύει

$$\frac{A\Delta}{A\Delta'} = \frac{B\Delta^2}{B'\Delta'^2}$$

Σχήμα 4.1



-Αρχιμήδης, *Τετραγωνισμός Παραβολής*, 3.

4.2 Πρόταση 2.5 του 2ου θεωρήματος.

4.3 Πρόταση 2.7 του 2ου θεωρήματος.

4.4.2 2ο μέρος

Αρχαίο κείμενο

Ὅτι δὲ πᾶν τμῆμα ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς ἐπιπέδῳ ἀποτεμνόμενον ὀρθῷ πρὸς τὸν ἄξονα ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ τὸν ἄξονα τὸν αὐτόν, ὧδε διὰ τοῦ τρόπου τούτου θεωρεῖται. Ἔστω γὰρ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ὀρθογωνίου κώνου τομὴν τὴν ΑΒΓ, τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὸν ἄξονα, καὶ ἔστω αὐτῶν κοινὴ τομὴ ἡ ΒΓ, ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμήματος ἡ ΔΑ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΑ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ΑΘ,καὶ νοείσθω ζυγὸς ὁ ΔΘ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Α, ἔστω δὲ ἡ τοῦ τμήματος βάσις ὁ περί διάμετρον τὴν ΒΓ κύκλος ὀρθὸς ὢν πρὸς τὴν ΑΔ, νοείσθω δὲ κῶνος βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἐστι διάμετρος ἡ ΒΓ, κορυφὴν δὲ τὸ Α σημεῖον, ἔστω δὲ καὶ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΒΓ, ἄξονα δὲ τὸν ΑΔ, καὶ ἤχθω τις ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ ἡ ΜΝ παράλληλος οὖσα τῇ ΒΓ, καὶ ἀπὸ τῆς ΜΝ ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΔ. Ποιήσει δὴ τοῦτο ἐν μὲν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, ἐν δὲ τῷ τμήματι τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς τομὴν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ. Καὶ ἐπεὶ ὀρθογωνίου κώνου τομή ἐστιν ἡ ΒΑΓ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ ΑΔ, καὶ τεταγμένως κατηγμέναι εἰσίιν αἱ ΞΣ, ΒΔ, ἔστιν, ὡς ἡ ΔΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΣ. Ἴση δὲ ἡ ΔΑ τῇ ΑΘ. Ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΞ. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΞ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, πρὸς τὸν κύκλον τὸν ἐν τῷ τμήματι τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ. Ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, πρὸς τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ. Ἰσόρροπος ἄρα ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ περὶ τὸ Α σημεῖον αὐτοῦ μένων τῷ κύκλω, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, μετενεχθέντι καὶ τεθέντι ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον αὐτοῦ εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ. Καὶ ἐστι τοῦ μὲν κύκλου, οὗ διάμετρός ἐστιν ἡ ΜΝ, κέντρον τοῦ βάρους τὸ Σ, τοὺ δὲ κύκλου, οὗ ἐστι διάμετρος ἡ ΞΟ, μετενηνεγμένου κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ, καὶ ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτόν ἔχει λόγον ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, ὃν ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, πρὸς τὸν

κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ ἐάν ἄλλη τις ἀχθῇ ἐν τῷ ΕΓ παραλληλογράμμῳ παρὰ τὴν ΒΓ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΘ,ὅτι ἰσορροπήσει πρὸς τῷ Α σημείῳ ὁ γενόμενος κύκλος ἐν τῷ κυλίνδρῳ ἀ᾽ψτοῦ μένων τῷ γενομένῳ ἐν τῷ τμήματι τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος μετενεχθέντι ἐπὶ τοὺ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοὺ βάρους τὸ Θ. Συμπληρωθέντος οὖν τοῦ κυλίνδρου καὶ τοὺ τμήματος τοὺ ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς ἰσορροπήσει περὶ τὸ Α σημεῖον ὁ κύλινδρος αὐτοῦ μένων τῷ τμήματι τοῦ ὀθογωνίου κωνοειδέος μετενεχθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ. Ἐπεί δὲ ἰσορροπεῖ περὶ τὸ Α σημεῖον τὰ εἰρημένα μεγέθη, καί ἐστι τοῦ μὲν κυλίνδρου κέντρον βάρους τὸ Κ σημεῖον δίχα τεμνομένης τῆς ΑΔ κατὰ τὸ Κ σημεὶον, τοῦ δὲ τμήματος μετενηνεγμένου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ Θ, ἀντιπεπουθότως τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἡ ΘΑ πρὸς τὴν ΑΚ, ὅν ὁ κύλινδρος πρὸς τὸ τμῆμα. Διπλασία δὲ ἡ ΘΑ τῆς ΑΚ. Διπλάσιος ἄρα καὶ ὅ κύλινδρος τοῦ τμήματος. Ὁ δὲ αὐτὸς κύλινδρος τριπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ ΒΓ, κορυφὴν δὲ τὸ Α σημεῖον. Δῆλον οὖν, ὅτι τὸ τμήμα ἡμιόλιόν ἐστιν τοῦ αὐτοῦ κώνου.

Ερμηνευτικά σχόλια επί του αρχαίου κειμένου

¨*ὧδε διὰ τοῦ τρόπου τούτου θεωρεῖται*¨: θεώρηση με το μηχανικό τρόπο.

¨*Ἰσόρροπος ἄρα ὁ κύκλος,μετενεχθέντι καὶ τεθέντι ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ*¨: μηχανική ορολογία του Αρχιμήδη.

¨*συμπληρωθέντος οὖν τοῦ κυλίνδρου καὶ τοὺ τμήματος τοὺ ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς*¨: στοιχείο απειροστικού λογισμού.

4.4.3 3ο μέρος

Μαθηματική μετάφραση 4ου θεωρήματος

Κάθε τμήμα ενός παραβολοειδούς εκ περιστροφής που αποκόπτεται από ένα επίπεδο κάθετο προς τον άξονά του είναι ίσο (ως προς τον όγκο) με τα $\frac{3}{2}$ του κώνου ο οποίος έχει την ίδια βάση και τον ίδιο άξονα με το τμήμα.

4.4.4 4ο μέρος

Έφοδος

Ας τμηθεί ένα παραβολοειδές εκ περιστροφής από ένα επίπεδο διαμέσου του άξονά του (παράλληλο στο επίπεδο της σελίδας) στην παραβολή ΒΑΓ. Ας τμηθεί επίσης και από ένα άλλο επίπεδο κάθετο προς τον άξονά του που συναντά το προηγούμενο επίπεδο στην ΒΓ. Προεκτείνω τη ΔΑ (τον άξονα του τμήματος) ως το Θ, ώστε $\Theta A = A\Delta$.

Ας νοήσω τη ΘΔ ως ζυγό με μέσο το Α.

Η βάση του παραβολοειδούς είναι ένας κύκλος με διάμετρο ΒΓ (σε επίπεδο κάθετο στην ΑΔ).Ας νοηθεί (1) ένας κώνος με τον κύκλο αυτό ως βάση και κορυφή το Α, και (2) ένας κύλινδρος με τον ίδιο κύκλο ως βάση και την ΑΔ ως άξονα.

Στο παραλληλόγραμμο ΕΖΓΒ φέρω οποιαδήποτε ευθεία ΜΝ παράλληλη στη ΒΓ, και σχεδιάζω το επίπεδο που διέρχεται από αυτή και είναι κάθετο στην ΑΔ. Το επίπεδο αυτό θα κόψει τον κύλινδρο σε έναν κύκλο με διάμετρο ΜΝ και το παραβολοειδές σε ένα κύκλο με διάμετρο ΞΟ.

Τώρα αφού η ΒΑΓ είναι παραβολή με τεταγμένες τις ΒΔ, ΞΣ ισχύει

$\frac{\Delta A}{A\Sigma} = \frac{B\Delta^2}{\Xi\Sigma^2}$ (Πρόταση 4.1)

ή (αφού $\Theta A = A\Delta$), $\dfrac{\Theta A}{A\Sigma} = \dfrac{M\Sigma^2}{\Sigma\Xi^2}$

Επομένως $\dfrac{\Theta A}{A\Sigma}$ = (κύκλος ακτίνας ΜΣ)/(κύκλος ακτίνας ΞΣ) (Πρόταση 4.2) = (κύκλος στον κύλινδρο)/(κύκλος στο παραβολοειδές).

Άρα ο κύκλος στον κύλινδρο, εκεί που βρίσκεται, είναι σε ισορροπία ως προς το Α, με τον κύκλο στο παραβολοειδές, εάν ο τελευταίος τοποθετηθεί με το κέντρο βαρύτητάς του στο Θ.

Παρομοίως για τα αντίστοιχα κυκλικά τμήματα που σχηματίζονται από επίπεδο κάθετο στην ΑΔ που διέρχεται από οποιαδήποτε άλλη ευθεία γραμμή του παραλληλογράμμου παράλληλη στη ΒΓ.

Έτσι, ως συνήθως, αν πάρουμε όλους τους κύκλους που συνθέτουν τον κύλινδρο και το παραβολοειδές και ακολουθήσουμε την παραπάνω διαδικασία, βρίσκουμε ότι ο κύλινδρος εκεί που είναι,βρίσκεται σε ισορροπία με το παραβολοειδές τοποθετημένο με το κέντρο βάρους του στο Θ.

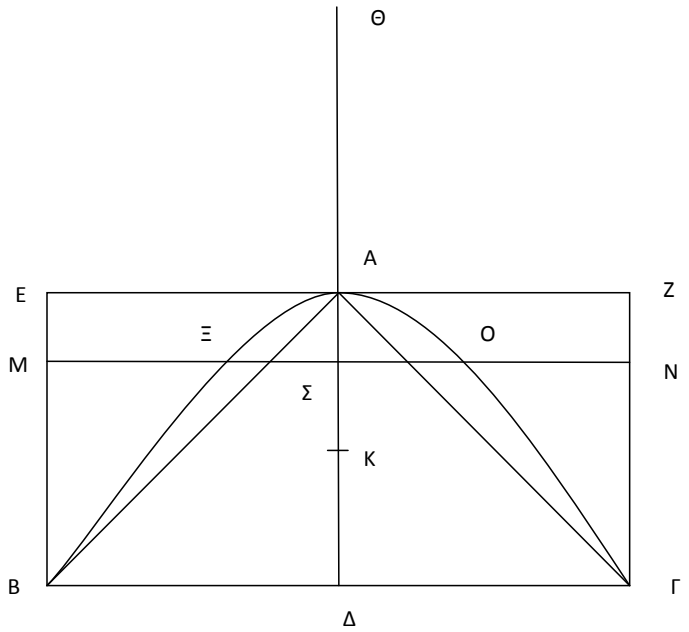
Εάν Κ είναι το μέσο της ΑΔ, Κ είναι το κέντρο βαρύτητας του κυλίνδρου, οπότε

ΘΑ/ΑΚ=(κύλινδρος)/(παραβολοειδές).

Οπότε κύλινδρος=2 (παραβολοειδές).

Αλλά κύλινδρος=3 (κώνος ΑΒΓ) (Πρόταση 4.3),δηλ τελικά παραβολοειδές= $\dfrac{3}{2}$(κώνος ΑΒΓ).

Σχήμα 4.2



4.4.5 5ο μέρος

Γεωμετρική απόδειξη

Η γεωμετρική απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος διασώζεται στο έργο του Αρχιμήδη ¨Περί κωνοειδών και σφαιροειδών¨ ως θεώρημα 21.

Α.Βοηθητικές προτάσεις

Α1. Εάν σε μια αύξουσα αριθμητική ακολουθία που αποτελείται από τα μεγέθη $A_1, A_2, ..., A_\nu$ η κοινή τους διαφορά είναι ίση με το μικρότερο όρο A_1, τότε ισχύει
$\nu.A_\nu < 2(A_1 + A_2 + ... + A_\nu)$ και $\nu.A_\nu > (A_1 + A_2 + ... + A_{\nu-1})$.

-Αρχιμήδης, *Περί κωνοειδών και σφαιροειδών*, Λήμμα πριν από το 1ο θεώρημα.

Α2.Δοθείσης μιας έλλειψης, είναι δυνατόν να αχθεί ένας κώνος τέτοιος ώστε η έλλειψη αυτή να συνιστά τμήμα του.

-Αρχιμήδης, *Περί κωνοειδών και σφαιροειδών*,8.

Α3.Δοθείσης μιας έλλειψης, είναι δυνατόν να αχθεί ένας κύλινδρος τέτοιος ώστε η έλλειψη αυτή να συνιστά τμήμα του.

-Αρχιμήδης, *Περί κωνοειδών και σφαιροειδών*,9.

Α4. Ο κύλινδρος (ή κάθε κυλινδρικό τμήμα) είναι τριπλάσιος του κώνου (ή αντίστοιχα του κωνικού τμήματος) που έχει την ίδια βάση με τον κύλινδρο και ίσο ύψος.

-Αρχιμήδης, *Περί κωνοειδών και σφαιροειδών*,10.

Β.Απόδειξη (σε σύγχρονη απόδοση)

¨Κάθε παραβολοειδές εκ περιστροφής (ή τμήμα αυτού) είναι τα $\frac{3}{2}$ του κώνου (ή του κωνικού τμήματος) που έχει την ίδια βάση και τον ίδιο άξονα.¨

Ας είναι η βάση του παραβολοειδούς κάθετη στο επίπεδο της σελίδας (βλ. σχήμα 4.3), και ας είναι το επίπεδο της σελίδας εκείνο το επίπεδο διαμέσου του άξονα του παραβολοειδούς το οποίο το τέμνει σχηματίζοντας την παραβολή ΒΑΓ .

Ας είναι ΕΦ η εφαπτομένη της παραβολής στο Α, παράλληλη στην ΒΓ .

Τότε (1), εάν το επίπεδο της βάσης του παραβολοειδούς είναι κάθετο στον άξονα του παραβολοειδούς, ο άξονας αυτός είναι η ΑΔ που διχοτομεί την ΒΓ κάθετα στο Δ .

(2) Εάν το επίπεδο της βάσης δεν είναι κάθετο στον άξονα του παραβολοειδούς, ας αχθεί η ΑΔ

παράλληλη στον άξονα του παραβολοειδούς. Η ΑΔ τότε θα διχοτομεί την ΒΓ αλλά όχι κάθετα (όπως δηλαδή στο σχήμα 4.3).

Ας αχθεί διαμέσου της ΕΦ ένα επίπεδο παράλληλο στη βάση του παραβολοειδούς. Αυτό θα εφάπτεται του παραβολοειδούς στο Α, το Α θα είναι η κορυφή του παραβολοειδούς και η ΑΔ ο άξονάς του.

Η βάση του παραβολοειδούς θα είναι ένας κύκλος με διάμετρο ΒΓ ή μια έλλειψη με τη ΒΓ σαν μεγάλο άξονα.

Μπορεί τότε να βρεθεί ένας κύλινδρος ή τμήμα κυλίνδρου που να διέρχεται από τον κύκλο ή την έλλειψη και να έχει την ΑΔ για άξονα (Πρόταση Α3). Παρομοίως μπορεί να βρεθεί ένας κώνος ή τμήμα κώνου που να διέρχεται από τον κύκλο ή την έλλειψη και να έχει το Α ως κορυφή και την ΑΔ για άξονα (Πρόταση Α2).

Ας ονομάσουμε Χ έναν κώνο ίσο με τα $\frac{3}{2}$ (του κώνου ή του τμήματος κώνου ΑΒΓ). Ο κώνος Χ είναι τότε ίσος με το μισό κύλινδρο ΕΓ (Πρόταση Α4).

Θα δείξουμε ότι ο όγκος του παραβολοειδούς είναι ίσος με Χ.

Εάν αυτό δεν ισχύει, τότε το παραβολοειδές θα πρέπει να είναι είτε μεγαλύτερο είτε μικρότερο από Χ.[1]

Ι. Ας υποθέσουμε ότι το παραβολοειδές είναι μεγαλύτερο από Χ. Μπορούμε τότε να εγγράψουμε και να περιγράψουμε στο παραβολοειδές στερεά που αποτελούνται από κυλίνδρους ή τμήματα κυλίνδρων με ίσο ύψος τέτοια ώστε

(περιγεγραμμένο στερεό)-(εγγεγραμμένο στερεό)$<$ (παραβολοειδές)-Χ.

Ας είναι ο μεγαλύτερος από τους κυλίνδρους ή τμήματα κυλίνδρων που σχηματίζουν το περιγεγραμμένο στερεό, εκείνος του οποίου η βάση είναι ο κύκλος ή η έλλειψη με διάμετρο τη ΒΓ και άξονά του την ΟΔ , και ο μικρότερος εκείνος του οποίου η βάση είναι ο κύκλος ή η έλλειψη με διάμετρο την ΠΠ′ και άξονά του την ΑΛ .

Ας είναι επίσης ο μεγαλύτερος από τους κυλίνδρους που σχηματίζουν το εγγεγραμμένο στερεό

[1] κατά τη γνωστή πλέον μέθοδο της εξάντλησης

εκείνοε του οποίου η βάση είναι ο κύκλος ή η έλλειψη με διάμετρο τη ΡΡ′ και άξονα την ΟΔ, και ο μικρότερος εκείνος με βάση τον κύκλο ή την έλλειψη με διάμετρο την ΠΠ′ και άξονά του τη ΛΜ.

Σχηματίζω όλες τις επίπεδες βάσεις των κυλίνδρων ή των κυλινδρικών τμημάτων ώστε να συναντήσουν την επιφάνεια του κυλίνδρου ΕΓ .

Τώρα, εφόσον

(περιγεγραμμένο στερεό)-(εγγεγραμμένο στερεό)<(παραβολοειδές)-Χ, προκύπτει ότι (εγγεγραμμένο στερεό)>Χ (α).

Στη συνέχεια, συγκρίνοντας διαδοχικά τους κυλίνδρους με ύψη ίσα με ΟΔ που συνθέτουν αντίστοιχα τμήματα του μεγάλου κυλίνδρου ΕΓ και του εγγεγραμμένου στερεού, έχουμε

(πρώτος κύλινδρος στον ΕΓ)/(πρώτος στο εγγεγραμμένο στερεό)= $\frac{B\Delta^2}{PO^2} = \frac{A\Delta}{AO} = \frac{B\Delta}{TO}$, όπου η ΑΒ συναντά την ΟΡ στο Τ.

Και μετά, (δεύτερος κύλινδρος στον ΕΓ)/(δεύτερος στο εγγεγραμμένο στερεό)= $\frac{HO}{\Sigma N}$,με τον ίδιο τρόπο,

κοκ.

Επομένως (Προλαμβανόμενο Αρχιμήδη 11) (κύλινδρος ΕΓ)/(εγγεγραμμένο στερεό)= $(B\Delta + HO + ...)/(TO + \Sigma N + ...)$, όπου ΒΔ,ΗΟ,... είναι όλα ίσα, και ΒΔ,ΤΟ,ΣΝ,... συνιστούν φθίνουσα αριθμητική ακολουθία.

Αλλά από την Πρόταση Α1 $B\Delta + HO + ... > 2(TO + \Sigma N + ...)$.Επομένως (κύλινδρος ΕΓ)>(2 εγγεγραμμένο στερεό) ή Χ>(εγγεγραμμένο στερεό), το οποίο είναι αδύνατο από το (α) παραπάνω.

ΙΙ. Ας υποθέσουμε τώρα ότι το παραβολοειδές είναι μικρότερο από Χ.

Στην περίπτωση αυτή εγγράφουμε και περιγράφουμε στερεά όπως και πριν, τέτοια ώστε

(περιγεγραμμένο στερεό)-(εγγεγραμμένο στερεό)<Χ-(παραβολοειδές),οπότε προκύπτει ότι

(περιγεγραμμένο στερεό)<Χ (β).Συγκρίνοντας τώρα τους κυλίνδρους που σχηματίζουν το μεγάλο κύλινδρο ΕΓ και το περιγεγραμμένο στερεό αντίστοιχα έχουμε

(πρώτος κύλινδρος στον ΕΓ)/(πρώτος στο περιγεγραμμένο στερεό)$= \dfrac{B\Delta^2}{B\Delta^2} = \dfrac{B\Delta}{B\Delta}$.

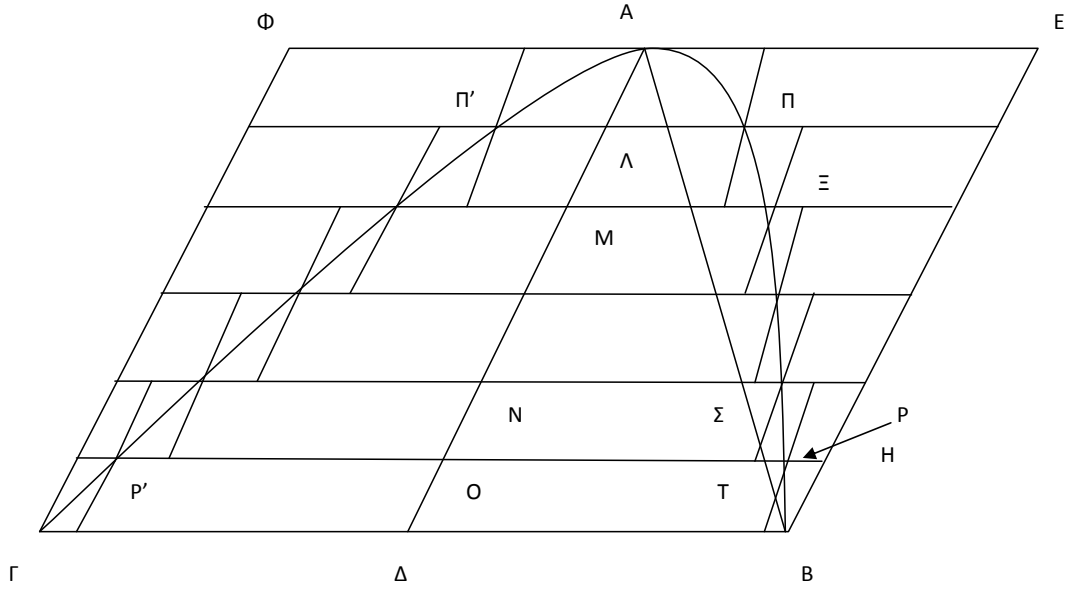
(δεύτερος κύλινδρος στον ΕΓ)/(δεύτερος στο περιγεγραμμένο στερεό)$= \dfrac{HO^2}{PO^2} = \dfrac{A\Delta}{AO} = \dfrac{HO}{TO}$ κοκ.

Επομένως (Προλαμβανόμενο Αρχιμήδη 11), (κύλινδρος ΕΓ)/(περιγεγραμμένο στερεό)$= (B\Delta + HO + ...)/(B\Delta + TO + ...)$,

$< 2/1$ (Πρόταση Α1) οπότε Χ<(περιγεγραμμένο στερεό), το οποίο είναι αδύνατο από το (β) παραπάνω.

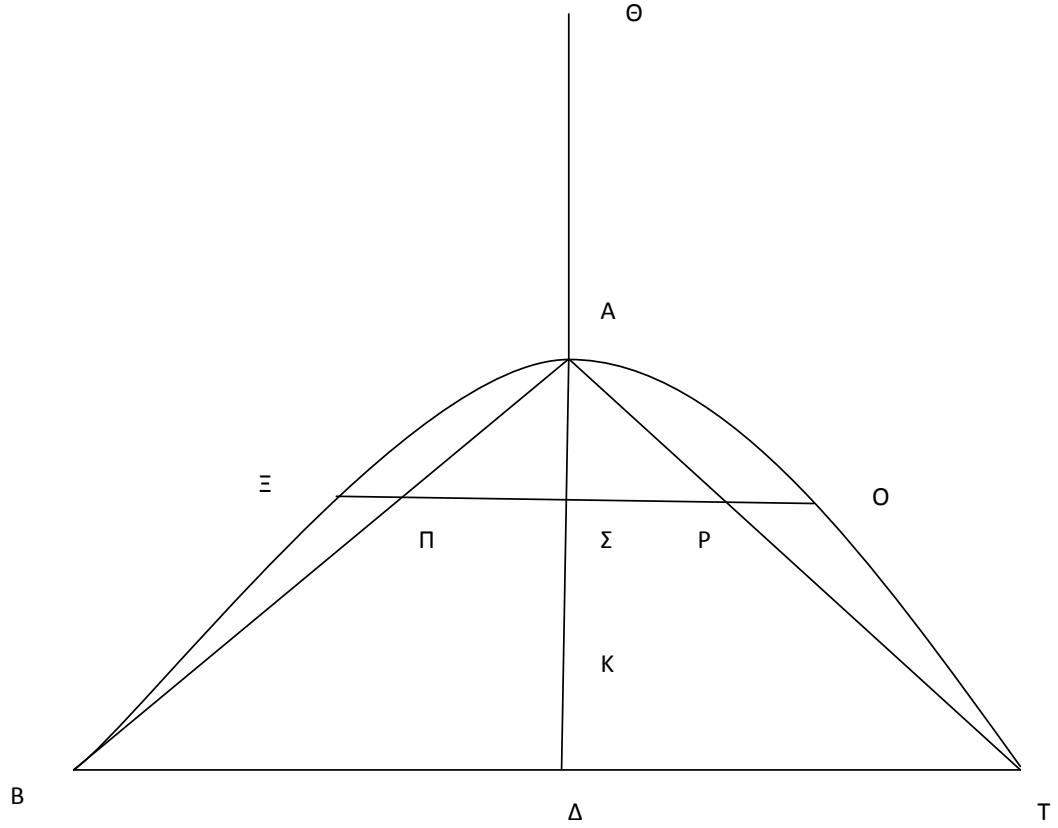
Επομένως το παραβολοειδές δεν είναι ούτε μεγαλύτερο ούε μικρότερο από Χ, άρα είναι ίσο με αυτό δηλαδή ίσο προς τα $\dfrac{3}{2}$ (του κώνου ΑΒΓ).

Σχήμα 4.3



4.5 Θεώρημα 5

¨ὅτι δέ τοῦ τμήματος τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος...τό κέντρον τοῦ βάρους ἐστίν ἐπί τῆς εὐθείας...ὥστε διπλάσιον εἶναι τό μέρος αὐτοῦ τό πρός τῇ κορυφῇ τοῦ λοιποῦ τμήματος...¨



4.5.1 1ο μέρος

Βοηθητικές προτάσεις απαραίτητες για τη μελέτη του 5ου θεωρήματος

5.1 Πρόταση 4.1 του 4ου θεωρήματος

5.2 Πρόταση 1.3 του 1ου θεωρήματος

5.3 Πρόταση 1.2 του 1ου θεωρήματος

5.4 Πρόταση 2.5 του 2ου θεωρήματος

4.5.2 2ο μέρος

Αρχαίο κείμενο

Ὅτι δὲ τοῦ τμήματος τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος τοῦ ἀποτεμνομένου ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὸν ἄξονα τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥ ἐστιν ἄξων τοῦ τμήματος, τμηθείσης οὕτως τῆς εἰρημένης εὐθείας, ὥστε διπλάσιον εἶναι τὸ μέρος ἀ᾽τοῦ τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ λοιποῦ τμήματος,ὧδε διὰ τοῦ τρόπου θεωρεῖται. Ἔστω τμῆμα ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς ἀποτεμνόμενον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὸν ἄξονα καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ ἑτέρῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τὴν ΑΒΓ ὀρθογωνίου κώνου τομήν, τοῦ δὲ ἀποτετμηκότος τὸ τμῆμα ἐπιπέδου καὶ τοῦ τέμνοντος κοινὴ τομὴ ἔστω ἡ ΒΓ, ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμήματος καὶ διάμετρος τῆς ΑΒΓ τομῆς ἡ ΑΔ εὐθεῖα, καὶ τῆς ΔΑ ἐκβληθείσης ἴση ἀ᾽τῇ κείσθω ἡ ΑΘ, καὶ νοείσθω ζυγὸς ὁ ΔΘ, μέσον δὲ ἀ᾽τοῦ τὸ Α, ἔστω δὲ καὶ κῶνος ἐγγεγραμένος ἐν τῷ τμήματι, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ αἱ ΒΑ, ΑΓ, ἤχθω δὲ τις ἐν τῇ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου το μῇ ἡ ΞΟ παράλληλος οὖσα τῇ ΒΓ, τεμνέτω δὲ αὕτη τὴν μὲν τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομὴν κατὰ τὰ Ξ,Ο, τὰς δὲ τοῦ κώνου πλευρὰς κατὰ τὰ Π, Ρ σημεῖα. Ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίου κώνου τομῇ κάθετοι ἠγμέναι εἰσίν ἐπὶ τὴν διάμετρον αἱ ΞΣ, ΒΔ, ἔστιν, ὡς ἡ ΔΑ πρὸς

ΑΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΣ. Ὡς δὲ ἡ ΔΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς ΠΣ, ὡς δὲ ἡ ΒΔ πρὸς ΠΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΠΣ. Ἔσται ἄρα καί, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΔ, ΠΣ. Ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ ΞΣ τῷ ὑπὸ ΒΔ, ΠΣ. Ἀνάλογον ἄρα εἰσίν αἱ ΒΔ, ΣΞ, ΣΠ, καὶ διὰ τοῦτο ἐστιν, ὡς ἡ ΒΔ πρὸς ΠΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΞΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΠ. Ὡς δὲ ἡ ΒΔ πρὸς ΠΣ, οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς ΑΣ, τουτεστιν ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ. Καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΞΣ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΠ. Ἀνεστάτω δὴ ἀπὸ τῆς ΞΟ ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΔ. Ποιήσει δὴ τοῦτο ἐν μὲν τῷ τμήματι τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, ἐν δὲ τῷ κώνῳ κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ. Καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΞΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΠ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΞΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΠ, οὕτως ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, πρὸς τὸν κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ, ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, πρὸς τὸν κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ.Ἰσορροπήσει ἄρα περὶ τὸ Α σημεῖον ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, αὐτοῦ μένων τῷ κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ, μετενεχθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ. Ἐπεὶ οὖν τοῦ μὲν κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, αὐτοῦ μένοντος κέντρον ἐστὶν τοὺ βάρους τὸ Σ, τοῦ δὲ κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ, μετενεχθέντος, ὡς ἐρρέθη, κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ, καὶ .αντιπεπουθότως τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, ὅν ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, πρὸς τὸν κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ, ἰσορροπήσουσιν ἄρα πρὸς τῷ Α σημείῳ. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ ἐὰν ἄλλη τις ἀχθῇ ἐν τῇ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῇ παράλληλος τῇ ΒΓ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΔ, ὅτι ὁ γενόμενος κύκλος ἐν τῷ τμήματι τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος αὐτοῦ μένων ἰσορροπήσει περὶ τὸ Α σημεῖον τῷ γενομένῳ κύκλῳ ἐν τῷ κώνῳ μετενεχθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ. Συμπληρωθέντων οὖν ὑπὸ τῶν κύκλων τοῦ τε τμήματος καὶ τοῦ κώνου ἰσορροπήσουσι περὶ τὸ Α σημεῖου τεθέντες πάντες οἱ κύκλοι οἱ ἐν τῷ τμήματι αὐτοῦ μένοντες πᾶσι τοῖς κύκλοις τοῖς ἐν τῷ κώνῳ μετενεχθεῖσι καὶ τεθεῖσι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ σημεῖου οὕτως, ὥστε αὐτῶν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ. Ἰσόρροπον οὖν καὶ τὸ τμῆμα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος περὶ τὸ Α σημεῖον αὐτοῦ μένον τῷ κώνω μετενεχθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι τοῦ βάρους αὐτοῦ τὸ Θ. Ἐπεὶ οὖν συναμφοτέρων τῶν μεγε-

θῶν ὡς ἑνὸς λεγομένων κέντρον ἐστὶν τοῦ βάρους τὸ Α, αὐτοῦ δὲ τοῦ κώνου τοῦ μετενηνεγμένου κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ, τοῦ λοιποῦ ἄρα μεγέθους τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς ΑΘ ευθείας ἐκβεβλημένης ἐπὶ τὸ Α καὶ ἀπολληφθείσης ἀπ᾽ αὐτῆς τῆς ΑΚ τηλικαύτης, ὥστε τὴν ΑΘ πρὸς α᾽τὴν τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον. Ἡμιόλιον δέ ἐστιν τὸ τμῆμα τοῦ κώνου. Ἡμιόλιος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΘΑ τῆς ΑΚ, καὶ ἐστιν τὸ Κ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος τῆς ΑΔ τετμημένης οὕτως, ὥστε διπλάσιον εἶναι τὸ μέρος αὐτῆς τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ τμήματος τοῦ λοιποῦ τμήματος.

Ερμηνευτικά σχόλια επί του αρχαίου κειμένου

¨*ὧδε διὰ τοῦ τρόπου θεωρεῖται*¨: Θεώρηση μέσω του μηχανικού τρόπου.

4.5.3 3ο μέρος

Μαθηματική μετάφραση 5ου θεωρήματος

Το κέντρο βάρους ενός τμήματος παραβολοειδούς εκ περιστροφής που αποκόπτεται από επίπεδο κάθετο στον άξονά του βρίσκεται στην ίδια ευθεία που είναι και ο άξονας του τμήματος και διαιρεί τη συγκεκριμένη ευθεία με τέτοιο τρόπο ώστε το τμήμα το κοντινότερο στην κορυφή του άξονα να είναι διπλάσιο του υπόλοιπου τμήματος.

4.5.4 4ο μέρος

Έφοδος

Ας τμηθεί ένα παραραβολοειδές εκ περιστροφής από ένα επίπεδο που περιέχει τον άξονά του (παράλληλο στο επίπεδο της σελίδας) στην παραβολή ΒΑΓ. Ας τμηθεί επίσης και από ένα άλλο επίπεδο κάθετο στον άξονα που τέμνει το προηγούμενο επίπεδο στην ΒΓ.

Προεκτείνω τη ΔΑ, τον άξονα του παραβολοειδούς, ως το Θ ώστε $\Theta A = A\Delta$. Ας νοηθεί η ΔΘ ως ζυγός με μέσο Α.

Η βάση του παραβολοειδούς είναι ένας κύκλος με διάμετρο ΒΓ και ας νοηθεί σε επίπεδο κάθετο στην ΑΔ ο κώνος με τον κύκλο αυτό ως βάση και κορυφή το Α, ώστε οι ΑΒ, ΑΓ να είναι οι γεννήτριες του κώνου.

Στην παραβολή φέρω την ΞΟ που τέμνει τις ΑΒ, ΑΔ, ΑΓ στα σημεία Π, Σ,Ρ αντίστοιχα.

Τώρα από την ιδιότητα της παραβολής,

$\dfrac{B\Delta^2}{\Xi\Sigma^2} = \dfrac{\Delta A}{A\Sigma}$ (Πρόταση 5.1)

$= \dfrac{B\Delta}{\Pi\Sigma}$ (Πρόταση 5.2, όμοια τρίγωνα ΑΠΣ,ΑΒΔ)

$= \dfrac{B\Delta^2}{B\Delta.\Pi\Sigma}$

Επομένως $\Xi\Sigma^2 = B\Delta.\Pi\Sigma$ (Πρόταση 5.3)

ή $\dfrac{B\Delta}{\Xi\Sigma} = \dfrac{\Xi\Sigma}{\Pi\Sigma}$

οπότε $\dfrac{B\Delta}{\Pi\Sigma} = \dfrac{\Xi\Sigma^2}{\Pi\Sigma^2}$ (Πρόταση 5.3)

Αλλά $\dfrac{B\Delta}{\Pi\Sigma} = \dfrac{A\Delta}{A\Sigma} = \dfrac{\Theta A}{A\Sigma}$

Άρα $\dfrac{\Theta A}{A\Sigma} = \dfrac{\Xi\Sigma^2}{\Pi\Sigma^2} = \dfrac{\Xi O^2}{\Pi P^2}$.

Εάν τώρα διαμέσου της ΞΟ αχθεί ένα επίπεδο κάθετα στην ΑΔ, το επίπεδο αυτό θα τμήσει το παραβολοειδές σε έναν κύκλο με διάμετρο ΞΟ και τον κώνο σε ένα κύκλο με διάμετρο ΠΡ.

Επομένως
$\dfrac{\Theta A}{A\Sigma}$ = (κύκλος διαμέτρου ΞΟ)/(κύκλος διαμέτρου ΠΡ) (Πρόταση 5.4)= (κύκλος στο παραβολοειδές)/(κύκλος στον κώνο),

και ο κύκλος στο παραβολοειδές, εκεί που βρίσκεται, βρίσκεται σε ισορροπία ως προς το Α με τον κύκλο στον κώνο τοποθετημένο με το κέντρο βαρύτητάς του στο Θ.

Παρομοίως για τα δύο αντίστοιχα κυκλικά τμήματα που προκύπτουν από ένα επίπεδο κάθετο στην ΑΔ και διέρχεται διαμέσου οποιασδήποτε διαμέτρου της παραβολής.

Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο με όλα τα κυκλικά τμήματα τα οποία συνιστούν τόσο το παραβολοειδές όσο και τον κώνο αντίστοιχα, προκύπτει ότι το παραβολοειδές, εκεί που βρίσκεται, είναι σε ισορροπία ως προς το Α με τον κώνο τοποθετημένο με το κέντρο βαρύτητάς του στο Θ.

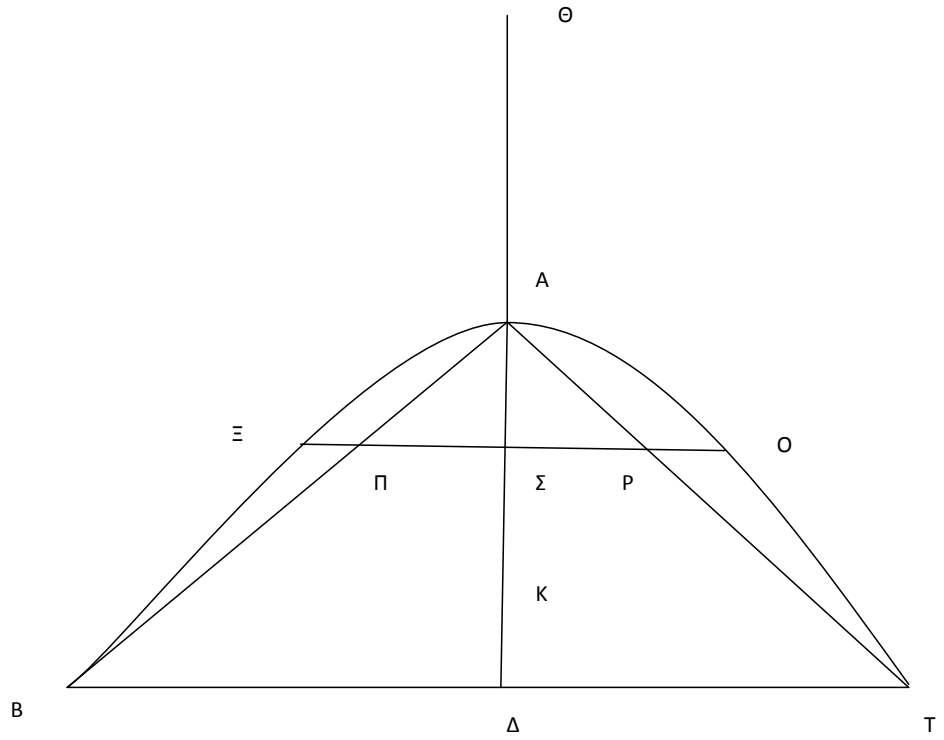
Τώρα, εφόσον το Α είναι το κέντρο βαρύτητας όλου του συστήματος όπως είναι τοποθετημένο, και το κέντρο βαρύτητας μέρους του (του κώνου) είναι στο Θ,το κέντρο βαρύτητας του λοιπού τμήματος (του παραβολοειδούς), είναι σε σημείο Κ της ΘΑ τέτοιο ώστε

$\dfrac{\Theta A}{AK}$ =(παραβολοειδές)/(κώνος).

Αλλά παραβολοειδές= $\dfrac{3}{2}$(κώνου). (Θεώρημα 4 της Μεθόδου)

Επομένως $\Theta A = \frac{3}{2} AK$, δηλ το Κ διαιρεί την ΑΔ κατά τέτοιο τρόπο ώστε $AK = 2K\Delta$.

Σχήμα 5.1

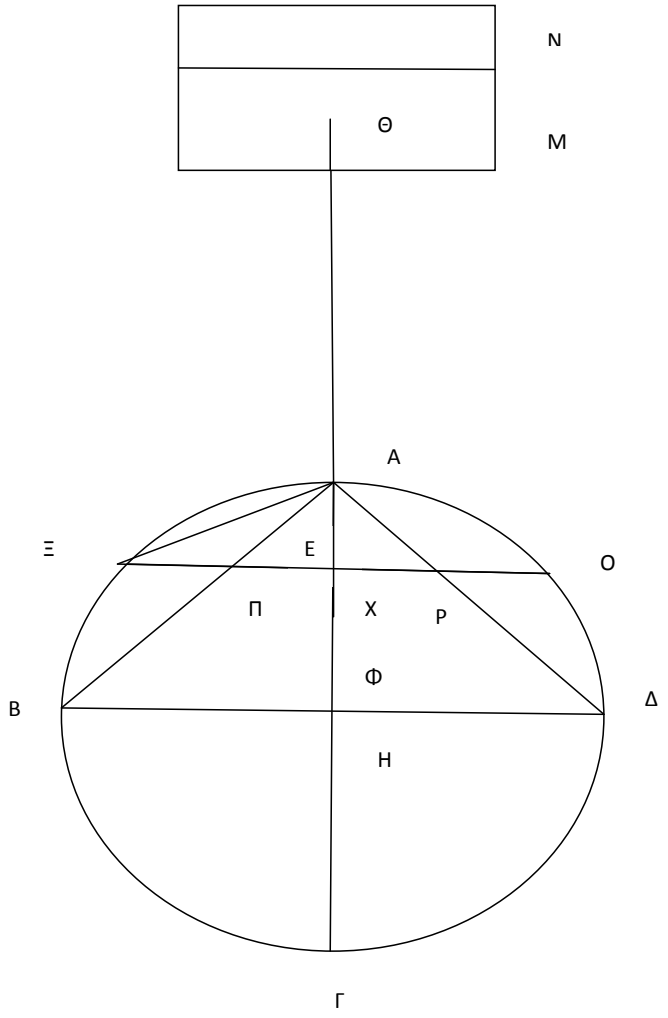


Παρατήρηση

Το θεώρημα αυτό είναι το πρώτο από μια σειρά θεωρημάτων της μεθόδου με θέμα την εύρεση του κέντρου βάρους κάποιων στερεών. Η γεωμετρική του απόδειξη δεν εντοπίζεται πουθενά στα διασωθέντα έργα του Αρχιμήδη.

4.6 Θεώρημα 6

¨παντός ἡμισφαιρίου τό κέντρον τοῦ βάρους ἐπί τῆς εὐθείας ἐστίν...ὡστε τό τμῆμα αὐτῆς τό πρός τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἡμισφαιρίου πρός τό λοιπόν τμῆμα τοῦτον ἔχειν τόν λόγον, ἥν ἔχει τά πέντε πρός τά τρία¨



4.6.1 1ο μέρος

Βοηθητικές προτάσεις απαραίτητες για τη μελέτη του 6ου θεωρήματος

6.1 Η γωνία που αντιστοιχεί σε ημικύκλιο είναι ορθή.

-Στοιχεία Ευκλείδη, III.31

6.2 Πρόταση 1.2 του 1ου θεωρήματος.

6.3 Πρόταση 2.2 του 2ου θεωρήματος.

6.4 Πρόταση 2.5 του 2ου θεωρήματος.

4.6.2 2ο μέρος

Αρχαίο κείμενο

Παντὸς ἡμισφαιρίου τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς εὐθείας ἐστίν, ἥ ἐστιν ἄξων αὐτοῦ, τμηθείσης οὕτως, ὥστε τὸ τμῆμα αὐτῆς τὸ πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἡμισφαιρίου πρὸς τὸ λοιπὸν τμῆμα τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει τα πέντε πρὸς τὰ τρία. Ἔστω σφαῖρα καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου, καὶ γενέσθω ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τομὴ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, διάμετροι δὲ ἔστωσαν τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ, ΒΔ, ἀπὸ δὲ τῆς ΒΔ ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ ἔστω κῶνος βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ Α σημεῖον, πλευραὶ δὲ ἔστωσαν τοῦ κώνου αἱ ΒΑ, ΑΔ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΓΑ, καὶ κείσθω τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΑΘ, καὶ νοείσθω

ζυγὸς ἡ ΘΓ εὐθῖα, μέσου δὲ αὐτοῦ τὸ Α, καὶ ἤχθω τις ἐν τῷ ΒΑΔ ἡμικυκλίῳ ἡ ΞΟ παράλληλος οὖσα τῇ ΒΔ, τεμνέτω δὲ αὕτη τὴν μὲν τοῦ ἡμικυκλίου περιφέρειαν κατὰ τὰ Ξ, Ο, τὰς δὲ τοῦ κώνου πλευρὰς κατὰ τὰ Π, Ρ σημεῖα, τὴν δὲ ΑΓ, κατὰ τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τῆς ΞΟ ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθόν πρὸς τὴν ΑΕ. Ποιήσει δὴ τοῦτο ἐν μὲν τῷ ἡμισφαιρίῳ τομὴν κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, ἐν δὲ τῷ κώνῳ τομὴν κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ. Καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΑΕ, τὸ ἀπὸ ΞΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ, τῷ δὲ ἀπὸ ΞΑ ἴσα τὰ ἀπὸ ΑΕ, ΕΞ, τῇ δὲ ΑΕ ἴση ἡ ΕΠ, ὡς ἄρα ἡ ΑΓ πρὸς ΑΕ, οὕτως τὰ ἀπὸ ΞΕ, ΕΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΠ. Ὡς δὲ τὰ ἀπὸ ΞΕ, ΕΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΠ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΞΟ καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΠΡ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΠΡ, καί ἐστιν ἡ ΓΑ τῇ ΑΘ ἴση. Ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΞΟ καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον την ΠΡ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΠΡ. Ἰσορροπήσουσιν ἄρα περὶ τὸ Α σημεῖον ἀμφότεροι οἱ κύκλοι, ὧ˜ν εἰσι διάμετροι αἱ ΞΟ, ΠΡ αὐτοῦ μένοντες τῷ κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ, μετευεχθέντι καὶ τεθέντι κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ. Ἐπεὶ οὖν ἀμφοτέρων μὲν τῶν κύκλων, ὧν εἰσι διάμετροι αἱ ΞΟ, ΠΡ, αὐτοῦ μενόντων κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν τὸ Ε, τοῦ δὲ κύκλου, οὗ ἐστι διάμετρος ἡ ΠΡ, μετευεχθέντος τὸ Θ, ἔστιν, ὡς ἡ ΕΑ πρὸς ΑΘ, οὕτως ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ, πρὸς τοὺς κύκλους, ὧν διάμετροι αἱ ΞΟ, ΠΡ. Ὁμοίως δὲ καὶ, ἐὰν ἄλλη τις ἀχθῇ ἐν τῇ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῇ παράλληλος τῇ ΒΗΔ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθόν πρὸς τὴν ΑΓ, ἰσορροπήσουσιν περὶ τὸ Α σημεῖον ἀμφότεροι οἱ κύκλοι ὅ τε ἐν τῷ ἡμισφαιρίῳ γενόμενος καὶ ὁ ἐν τῷ κώνῳ αὐτοῦ μένοντες τῷ γενομένῳ κύκλῳ ἐν τῷ κώνῳ μετευεχθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ. Συμπληρωθέντων οὖν ὑπὸ τῶν κύκλων τοῦ τε ἡμισφαιρίου καὶ τοῦ κώνου ἰσορροπήσουσι περὶ τὸ Α σημεῖον πάντες οἱ κύκλοι οἱ ἐν τῷ ἡμισφαιρίῳ καὶ οἱ ἐν τῷ κώνῳ αὐτοῦ μένοντες πᾶσι τοῖς κύκλοις τοῖς ἐν τῷ κώνῳ μετευεχθεῖσι καὶ τεθεῖσι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι α᾽τῶν τοῦ βάρους τὸ Θ. Ὥστε ἰσορροπήσουσι περὶ τὸ Α σημεῖον τὸ τε ἡμισφαίριον καὶ ὁ κῶνος αὐτοῦ μένοντα τῷ κώνῳ μετευεχθέντι κα᾽ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε κέντρον αὐτοῦ εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ σημεῖον.....δ.....ἔλασσον.....τῶν δὲ.....ἰσορροπούντων κατὰ τὸ Α.....τρ.....τὸ.....καὶ ἐπεὶ ἐστιν,ὡς ἡ ΘΑ πρὸς ΑΧ,.....ἄξων

ὁ ΑΗ..τὰ.....μου.....σημεῖον.....κῶνον τοῖς.....τοῦ κώνου.....καὶ ἐπεὶ τετραπλασίᾳ ἐστὶν ἡ σφαῖρα τοῦ κώνου, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλος, ἄξων δὲ ἡ ΑΗ.....

4.6.3 3ο μέρος

Μαθηματική μετάφραση 6ου θεωρήματος

Το κέντρο βαρύτητας κάθε ημισφαιρίου βρίσκεται στην ευθεία γραμμή στην οποία είναι ο άξονάς του και διαιρεί τη συγκεκριμένη ευθεία με τέτοιο τρόπο ώστε το τμήμα της που είναι κοντά στην κορυφή του ημισφαιρίου να έχει προς το υπόλοιπο τμήμα το λόγο $\frac{5}{3}$.

4.6.4 4ο μέρος

Έφοδος

Ας τμηθεί μια σφαίρα από ένα επίπεδο διαμέσου του κέντρου της (παράλληλο στο επίπεδο της σελίδας) στον κύκλο ΑΒΓΔ. ΑΓ, ΒΔ είναι οι κάθετες διάμετροι αυτού του κύκλου. Διαμέσου της ΒΔ ας αχθεί ένα επίπεδο κάθετο στην ΑΓ.

Το τελευταίο επίπεδο θα αποκόψει τη σφαίρα σε ένα κύκλο με διάμετρο ΒΔ.

Ας νοηθεί ένας κώνος με τον τελευταίο κύκλο ως βάση και κορυφή το Α.

Προεκτείνω τη ΓΑ στο Θ, ώστε $\Theta A = \Gamma A$, και ας θεωρηθεί η ΘΓ ως ζυγός με μέσο Α.

Στο ημικύκλιο ΒΑΔ, φέρω οποιαδήποτε ευθεία ΞΟ παράλληλη στην ΒΔ, που τέμνει την ΑΓ στο Ε και τις 2 γεννήτριες του κώνου ΑΒ, ΑΔ στα σημεία Π, Ρ αντίστοιχα. Φέρω την ΑΞ.

Διαμέσου της ΞΟ ας αχθεί ένα επίπεδο κάθετα στην ΑΓ. Το επίπεδο αυτό θα τμήσει το ημισφαίριο σε κύκλο με διάμετρο ΞΟ και τον κώνο σε κύκλο με διάμετρο ΠΡ.

Τώρα

$$\frac{\Theta A}{AE} = \frac{A\Gamma}{AE}$$

$$= \frac{\Xi A^2}{AE^2}$$(Πρόταση 6.1,6.2,6.3)

=(πυθαγόρειο θεώρημα)= $\frac{\Xi E^2 + AE^2}{AE^2}$

$$= \frac{\Xi E^2 + \Pi E^2}{\Pi E^2}$$ (όμοια τρίγωνα ΑΕΠ,ΑΒΗ και ΑΕ=ΠΕ)

=(κύκλος διαμετρου ΞΟ + κύκλος διαμέτρου ΠΡ)/(κύκλος διαμέτρου ΠΡ) (Πρόταση 6.4)

Επομένως οι κύκλοι με διαμέτρους ΞΟ, ΠΡ, στα μέρη που βρίσκονται είναι σε ισορροπία ως προς το Α με τον κύκλο διαμέτρου ΠΡ εάν ο τελευταίος τοποθετηθεί με το κέντρο βαρύτητάς του στο Θ.

Και εφόσον το κέντρο βαρύτητας των δύο κύκλων με διαμέτρους ΞΟ, ΠΡ μαζί, εκεί που βρίσκονται, είναι....

(υπάρχει ένα κενό εδώ στο αρχαίο κείμενο αλλά η απόδειξη μπορεί εύκολα να συμπληρωθεί από την απόδειξη του θεωρήματος 9) (βλ Heath, *The Method*,p.28-29, Dover publications, 2002)

Προχωρούμε από το σημείο όπου οι κύκλοι με διαμέτρους ΞΟ, ΠΡ, εκεί που βρίσκονται, είναι σε ισορροπία ως προς το Α με τον κύκλο διαμέτρου ΠΡ τοποθετημένο με το κέντρο βαρύτητάς του στο Θ.

Μια παρόμοια σχέση ισχύει για όλα τα σύνολα των κύκλων που προκύπτουν από επίπεδα διαμέσου σημείων στην ΑΗ και κάθετα σε αυτήν.

Παίρνουμε τώρα όλους τους κύκλους που γεμίζουν το ημισφαίριο ΒΑΔ και τον κώνο ΑΒΔ αντίστοιχα και βρίσκουμε ότι το ημισφαίριο ΒΑΔ και ο κώνος ΑΒΔ, εκεί που βρίσκονται, είναι σε ισορροπία ως προς το Α με έναν κώνο ίσο με τον κώνο ΑΒΔ τοποθετημένο με το κέντρο βαρύτητάς του στο Θ.

θεωρούμε τώρα τον κύλινδρο Μ+Ν ίσο με τον κώνο ΑΒΔ.

Τότε εφόσον ο κύλινδρος Μ+Ν τοποθετημένος με το κέντρο βαρύτητάς του στο Θ, ισορροπεί το ημισφαίριο ΒΑΔ και τον κώνο ΑΒΔ εκεί που βρίσκονται, υποθέτουμε ότι το τμήμα Μ του κυλίνδρου, τοποθετημένο με το κέντρο βαρύτητάς του στο Θ, ισορροπεί τον κώνο ΑΒΔ (μόνο του) εκεί που βρίσκεται. Επομένως το τμήμα Ν του κυλίνδρου τοποθετημένο με το κέντρο βαρύτητάς του στο Θ, ισορροπεί με το ημισφαίριο (μόνο του) εκεί που βρίσκεται.

Τώρα το κέντρο βαρύτητας του κώνου είναι σε ένα σημείο Φ τέτοιο ώστε $AH = 4\Phi H$ (Προλαμβανόμενο 10 Αρχιμήδη), οπότε αφού το τμήμα Μ στο Θ είναι σε ισορροπία με τον κώνο,

Μ/(κώνος)= $\frac{3}{4}AH/\Theta A = \frac{3}{8}A\Gamma/A\Gamma$, οπότε Μ= $\frac{3}{8}$(κώνου).

Αλλά $M + N =$(κώνος), οπότε $N = \frac{5}{8}$(κώνος).

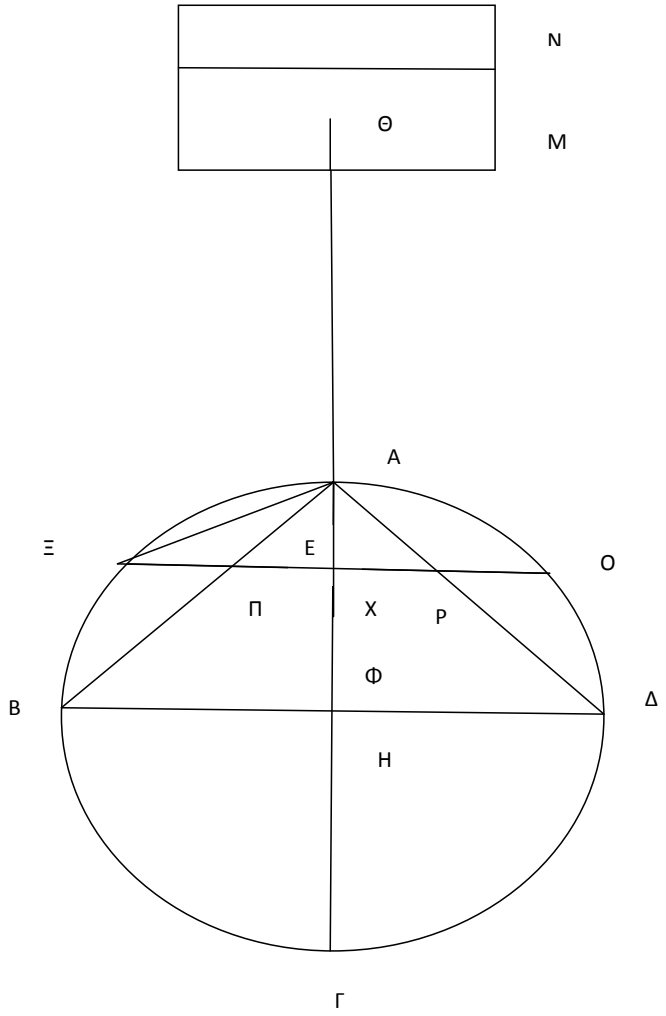
Τώρα αφού το τμήμα Ν στο Θ ισορροπεί μόνο του το ημισφαίριο, (ημισφαίριο)/Ν= $\frac{\Theta A}{AX}$.

Αλλά το ημισφαίριο ΒΑΔ= δύο φορές ο κώνος ΑΒΔ (Θεώρημα 2 παραπάνω) και Ν= $\frac{5}{8}$(κώνου).

Επομένως $2/\frac{5}{8} = \frac{\Theta A}{AX} = \frac{2AH}{AX}$,όπου $AX = \frac{5}{8}AH$,δηλαδή το Χ διαιρεί την ΑΗ κατά τέτοιο τρόπο ώστε

$$\frac{AX}{XH} = \frac{5}{3}.$$

Σχήμα 6.1

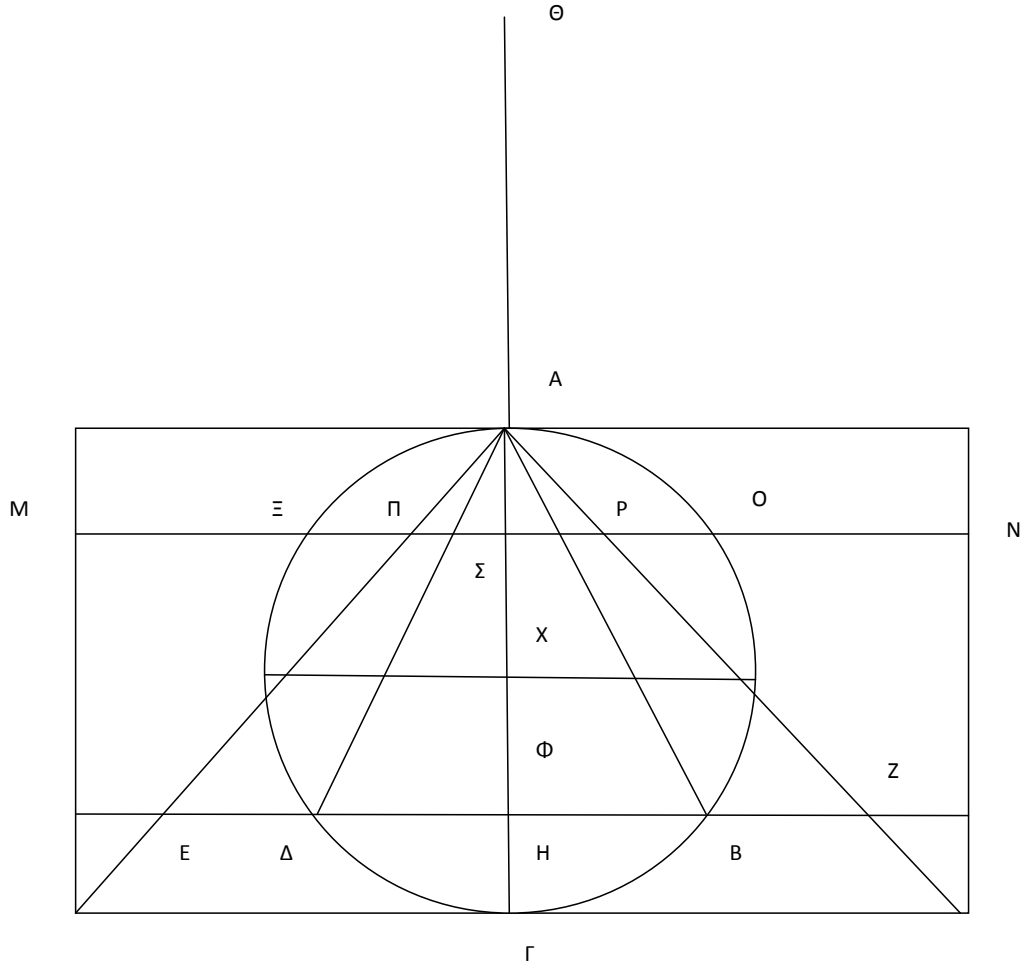


Παρατήρηση

Και αυτό το θεώρημα έχει κεντροβαρικό περιεχόμενο.

4.7 Θεώρημα 7

¨πᾶν τμῆμα σφαίρας πρός τόν κῶνον τόν βάσιν ἔχοντα τήν αὐτήν τῷ τμήματι καί ἄξονα τόν αὐτόν τοῦτον ἔχει τόν λόγον ὅν ἔχει συναμφότερος ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καί τό ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος πρός τό ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος¨



4.7.1 1ο μέρος

Δεν απαιτούνται ιδιαίτερες βοηθητικές προτάσεις για τη μελέτη του συγκεκριμένου θεωρήματος.

4.7.2 2ο μέρος

Αρχαίο κείμενο

(υπάρχουν σημαντικά κενά στο αρχαίο κείμενο τα οποία δυστυχώς δεν έχουν αποκατασταθεί ούτε με τις υπερσύγχρονες μεθόδους των τωρινών μελετητών του παλίμψηστου - το κείμενο ωστόσο ακολουθεί την ίδια δομή με τις διατυπώσεις των προηγούμενων θεωρημάτων)

Θεωρεῖται δὲ διὰ τοῦ τρόπου τούτου καὶ, ὅτι πᾶν τμῆμα σφαίρας πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι κα᾽ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ὅν ἔχει συναμφότερος ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος πρὸς τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος.....τω.....ὀρθη.....τὸ αὐτὸ.....παρα.....καὶ ἀπὸ τῆς ΜΝ ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΓ. Ποιήσει δὴ τοῦτο ἐν μὲν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν κύκλου, οὗ ἐστι διάμετρος ἡ ΜΝ, ἐν δὲ τῷ τμήματι τη῾ς σφαίρας τομὴν κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, ἐν δὲ τῷ κώνῳ οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΕΖ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, κύκλον, οὗ διάμετρός ἐστιν ἡ ΠΡ. ᾽Ομοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται ἰσόρροπος περὶ τὸ Α σημεῖον ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, αὐτοῦ μένων ἀμφοτέροις τοῖς κύκλοις, ὧν διάμετροι αἱ ΞΟ, ΠΡ, μετενεχθεῖσι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ. ᾽Ομοίως δὲ ἐπὶ πάντων συμπληρωθέντων οὖν καὶ τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ κώνου καὶ τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας ὑπὸ τῶν κύκλων ἰσορροπήσει καὶ ὁ κύλιυδρος αὐτοῦ μένων συναμφοτέροις τῷ τε κώνῳ καὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας μετενηνεγμένοις καὶ κειμένοις τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ. Τεμνέσθω δὲ ἡ ΑΗ κατὰ τὰ Φ, Χ σημεῖα οὕτως, ὥστε τὴν μὲν ΑΧ εἶναι ἴσην τῇ ΧΗ, τὴν δὲ ΗΦ τρίτου μέρος τῆς ΑΗ. ᾽Εσται δὴ τοῦ μὲν κυλίνδρου κέντρον τοῦ βάρους τὸ Χ διὰ τὸ

διχοτομίαν εἶναι τοῦ ΑΗ ἄξονος. Ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ περὶ τὸ Α σημεῖον τὰ εἰρημένα μεγέθη, ἔσται, ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς ἀμφότερον τὸν τε κῶνον, οὗ διάμετρος τῆς βάσεως ἡ ΕΖ, καὶ τὸ τμῆμα τῆς σφαίρας τὸ ΒΑΔ, οὕτως ἡ ΘΑ πρὸς ΑΧ. Καὶ ἐπεὶ τριπλασία ἐστὶν ἡ ΗΑ τῆς ΗΦ, τρίτον μέρος ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΓΗ, ΗΦ τοῦ ὑπὸ ΑΗ, ΗΓ. Ἴσον δὲ τῷ ὑπὸ ΑΗ, ΗΓ τὸ ἀπὸ ΗΒ. Ἔσται δὴ καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΗ τρίτον μέρος τὸ ὑπὸ ΓΗ, ΗΦ.....ὑπὸ ΗΓ.....τὸ δὲ ἀπὸ ΑΗ.....ὑπὸ ΗΓ.....τῆς.....ΚΛ.....τρου.....οὕτως ὁ κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν..κύκλος πρὸς τὸν.....ὁ κύλινδρος, οὗ βάσις....ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΚΛ κύκλος πρὸς τὸν ΑΕΖ κῶνον. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΘΑ πρὸς.....ἄρα ἡ.....πρὸς τὸν κῶνον. Ἐδείχθη δὲ καί, ὡς ἡ ΘΑ πρὸς ΑΧ, οὕτως ὁ κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περ ὶ διάμετρον τὴν ΚΛ κύκλος πρὸς τὸ τμῆμα τῆς σφαίρας τὸ ΑΒΔ καὶ τὸν κῶνον. Καὶ ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς συναμφοτέρας τὰς..Φ.....τὸ ΑΒΔ τμῆμα τῆς σφαίρας.....τα.....καὶ.....ὅτε.....τὸ ΑΒΔ τμῆμα πρὸς τὸν κύλινδρον, οὗ ἐστι βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν..κύκλος, ἄξων δὲ ὁ α᾽τός, οὕτως.....Χ πρὸς.....ὡς δὲ ὁ κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΚΛ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΔ κῶνον, οὕτως.....τω.....πρὸς..Β.....η.Φ.....ὡς ἡ.....ἡ Α.τῇ.....καὶ ἡ ΗΓ καὶ.....

4.7.3 3ο μέρος

Μαθηματική μετάφραση 7ου θεωρήματος

Κάθε τμήμα σφαίρας έχει ως προς τον κώνο (με την ίδια βάση και ίδιο ύψος) το λόγο τον οποίο έχει το άθροισμα της ακτίνας της σφαίρας και το ύψος του υπόλοιπου τμήματος προς το ύψος του υπόλοιπου τμήματος.

4.7.4 4ο μέρος

Έφοδος

(παρά τα σημαντικά κενά στο αρχαίο κείμενο η παράθεση της μηχανικής μεθόδου είναι εύκολη υπόθεση γιατί βασίζεται στα προηγούμενα-βλέπε *Archimedes Method*,T.Heath,p.30-31, Dover publications, 2002)

Το επίπεδο διαμέσου της ΜΝ, κάθετο στην ΑΓ (σχήμα) θα τμήσει τον κύλινδρο σε ένα κύκλο με διάμετρο ΜΝ, το σφαιρικό τμήμα ΑΔΒ σε έναν κύκλο με διάμετρο ΞΟ και τον κώνο με βάση την ΕΖ σε έναν κύκλο με διάμετρο ΠΡ.

Με τον ίδιο τρόπο όπως πριν (Θεώρημα 2) μπορούμε να δείξουμε ότι ο κύκλος με διάμετρο ΜΝ, εκεί που βρίσκεται, είναι σε ισορροπία ως προς το Α με τους δύο κύκλους με διαμέτρους ΞΟ, ΠΡ εάν αυτοί οι κύκλοι τοποθετηθούν με τα κέντρα βαρύτητάς τους στο Θ.

Το ίδιο μπορούμε να δείξουμε για όλα τα σύνολα των τριών κύκλων στους οποίους τέμνει οποιοδήποτε επίπεδο κάθετο στην ΑΓ τον κύλινδρο, το σφαιρικό τμήμα και τον κώνο με το ίδιο ύψος ΑΗ.

Εφόσον τότε όλα τα σύνολα των κύκλων συνθέτουν ολόκληρο τον κύλινδρο, ολόκληρο το σφαιρικό τμήμα και ολόκληρο τον κώνο αντίστοιχα, προκύπτει ότι ο κύλινδρος, εκεί που βρίσκεται, είναι σε ισορροπία ως προς το Α με το άθροισμα του σφαιρικού τμήματος και του κώνου εάν και τα δύο τοποθετηθούν με τα κέντρα βάρους τους στο Θ.

Διαιρώ την ΑΗ στα Χ, Φ έτσι ώστε $AX = XH$ και $A\Phi = 3\Phi H$.

Επομένως το Χ θα είναι το κέντρο βαρύτητας του κυλίνδρου και Φ θα είναι το κέντρο βαρύτητας του κώνου.

Αφού τώρα τα σώματα είναι σε ισορροπία όπως περιγράφηκε,

(κύλινδρος)/(κώνος ΑΕΖ + τμήμα ΒΑΔ της σφαίρας)= $\dfrac{\Theta A}{AX}$.

Έχουμε,

(κώνος ΑΕΖ + τμήμα ΒΑΔ)/(κύλινδρος)= $\dfrac{AX}{A\Gamma} = \dfrac{AX.A\Gamma}{A\Gamma^2}$(1)

Αλλά (κύλινδρος)/(κώνος ΑΕΖ)= $\dfrac{A\Gamma^2}{\frac{1}{3}EH^2} = \dfrac{A\Gamma^2}{\frac{1}{3}AH^2}$(2)

Από τις (1),(2) προκύπτει,

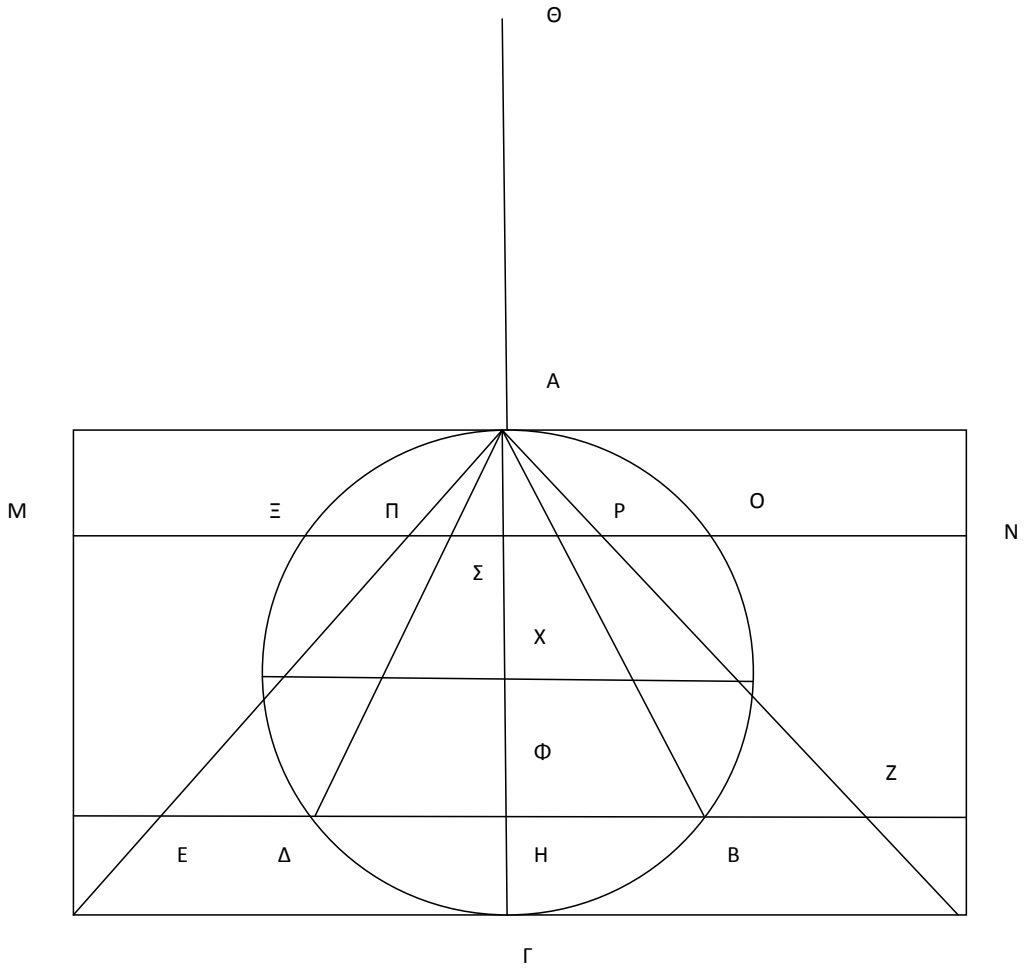
(κώνος ΑΕΖ + τμήμα ΒΑΔ)/(κώνος ΑΕΖ)= $\dfrac{AX.A\Gamma}{\frac{1}{2}AH^2} = \dfrac{\frac{1}{2}A\Gamma}{\frac{1}{3}AH}$ οπότε (τμήμα ΒΑΔ)/(κώνος ΑΕΖ)= $(\frac{1}{2}A\Gamma - \frac{1}{3}AH)/\frac{1}{3}AH$ (3). Και

(κώνος ΑΕΖ)/(κώνος ΑΒΔ)= $\dfrac{EH^2}{\Delta H^2} = \dfrac{AH^2}{AH.H\Gamma} = \dfrac{AH}{H\Gamma} = \frac{1}{3}AH/\frac{1}{3}H\Gamma$ (4).

Από τις (3),(4) προκύπτει τελικά,

(τμήμα ΒΑΔ)/(κώνος ΑΒΔ)= $(\frac{1}{2}A\Gamma - \frac{1}{3}AH)/\frac{1}{3}H\Gamma = (\frac{3}{2}A\Gamma - AH)/H\Gamma = (\frac{1}{2}A\Gamma + H\Gamma)/H\Gamma$.

Σχήμα 7.1



4.7.5 5ο μέρος

Γεωμετρική απόδειξη

Η πλήρης γεωμετρική απόδειξη βρίσκεται στο έργο του Αρχιμήδη ¨Περί σφαίρας και κυλίνδρου ΙΙ¨ ως θεώρημα 2.

Α.Βοηθητικές προτάσεις

Α1. Η επιφάνεια κάθε σφαίρας είναι ίση με 4 φορές τον μέγιστο κύκλο αυτής (ως προς το εμβαδόν του).

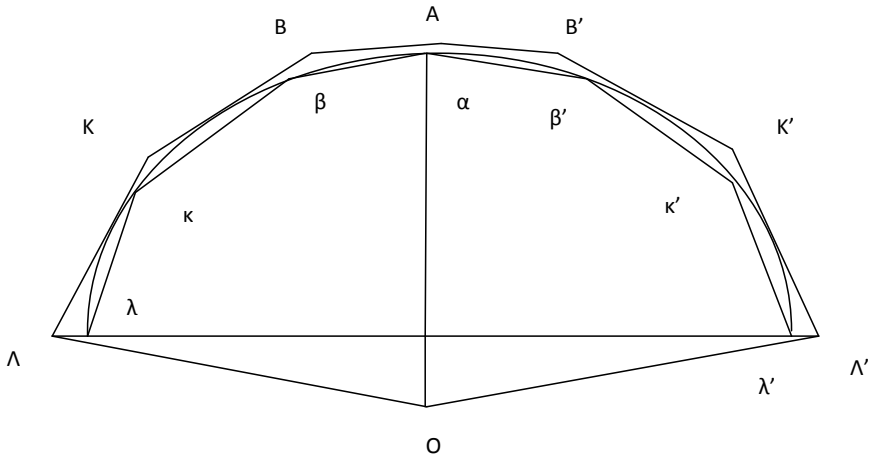
-Αρχιμήδης, *Περί σφαίρας και κυλίνδρου Ι*, 33.

Α2. Κάθε σφαίρα είναι ίση (ως προς τον όγκο) με τον τετραπλάσιο κώνο ο οποίος έχει βάση ίση με το μέγιστο κύκλο της σφαίρας και ύψος ίσο με την ακτίνα της σφαίρας.

-Αρχιμήδης, *Περί σφαίρας και κυλίνδρου Ι*, 34.

Α3. Εάν λαλ΄ είναι ένα τμήμα σφαίρας μικρότερο από ημισφαίριο και Οα η ακτίνα κάθετη στη βάση του τμήματος, τότε η επιφάνεια του τμήματος είναι ίση προς τον κύκλο του οποίου η ακτίνα είναι ίση με αλ .

Σχήμα 7.2



-Αρχιμήδης, *Περί σφαίρας και κυλίνδρου Ι*, 42.

Α4. Ο όγκος οποιοδήποτε τμήματος σφαίρας είναι ίσος προς τον κώνο του οποίου η βάση είναι ίση με την επιφάνεια του σφαιρικού τμήματος και του οποίου το ύψος είναι ίσο με την ακτίνα της σφαίρας.

-Αρχιμήδης, *Περί σφαίρας και κυλίνδρου Ι*, 44.

Β.Απόδειξη (σε σύγχρονη απόδοση)

¨Εάν ΒΑΒ' είναι ένα τμήμα σφαίρας, ΒΒ΄ η διάμετρος της βάσης του τμήματος και Ο το κέντρο της σφαίρας, και εάν ΑΑ΄ είναι η διάμετρος της σφαίρας που διχοτομεί την ΒΒ΄ στο Μ, τότε ο όγκος του τμήματος είναι ίσο προς έναν κώνο του οποίου η βάση είναι ίδια με αυτή του τμήματος και του οποίου το ύψος είναι η όπου

$$\frac{\eta}{AM} = \frac{OA' + A'M}{A'M}$$

Πόρισμα-το τμήμα ΒΑΒ΄ έχει προς έναν κώνο με την ίδια βάση και ίσο ύψος την αναλογία $\frac{OA' + A'M}{A'M}$.¨

Παίρνω τμήμα ΜΗ πάνω στη ΜΑ ίσο προς η ,και ΜΗ΄ πάνω στη ΜΑ΄ ίσο προς η΄ ,όπου

$$\frac{\eta'}{A'M} = \frac{OA + AM}{AM}.$$

Ας νοηθούν 3 κώνοι με κορυφές τα Ο, Η, Η΄ και κοινή βάση τη βάση ΒΒ΄ του σφαιρικού τμήματος. Φέρω τις ΑΒ, ΑΈ.

Ας είναι Γ ένας κώνος του οποίου η βάση είναι ίση προς την επιφάνεια του τμήματος ΒΑΒ′ της σφαίρας, δηλ προς έναν κύκλο με ακτίνα ίση προς ΑΒ (Πρόταση Α3), και του οποίου το ύψος είναι ίσο προς ΟΑ.

Επομένως ο κώνος Γ είναι ίσος προς το στερεό τομέα ΟΒΑΒ′ (Πρόταση Α4).

Τώρα εφόσον $\frac{HM}{MA} = \frac{OA' + A'M}{A'M} \Longrightarrow \frac{HA}{AM} = \frac{OA}{A'M}$ και

$\frac{HA}{AO} = \frac{AM}{MA'}$,έτσι ώστε $\frac{HO}{OA} = \frac{AA'}{A'M} = \frac{AA'.AM}{BM^2} = \frac{(A'M + MA).AM}{BM^2} = \frac{BM^2 + MA^2}{BM^2} =$

=$\frac{AB^2}{BM^2}$ =(βάση κώνου Γ)/(κύκλος με διάμετρο ΒΒ′.

Αλλά η ΟΑ είναι ίση προς το ύψος του κώνου Γ .Επομένως εφόσον οι κώνοι είναι ίσοι εάν οι βάσεις τους και τα ύψη τους είναι αντιστρόφως ανάλογα, προκύπτει ότι ο κώνος Γ (ή το στερεό τμήμα ΟΒΑΒ′) είναι ίσα προς έναν κώνο του οποίου η βάση είναι ο κύκλος με διάμετρο ΒΒ′ και του οποίου το ύψος είναι ΟΗ.

Αυτός ο τελευταίος κώνος είναι ίσος προς το άθροισμα των δύο άλλων που έχουν την ίδια βάση και ύψη ΟΜ, ΜΗ, δηλ προς το στερεό τμήμα ΟΒΗΒ′.

Επομένως το τμήμα ΟΒΑΒ′ είναι ίσο προς το ρόμβο ΟΒΗΒ′.

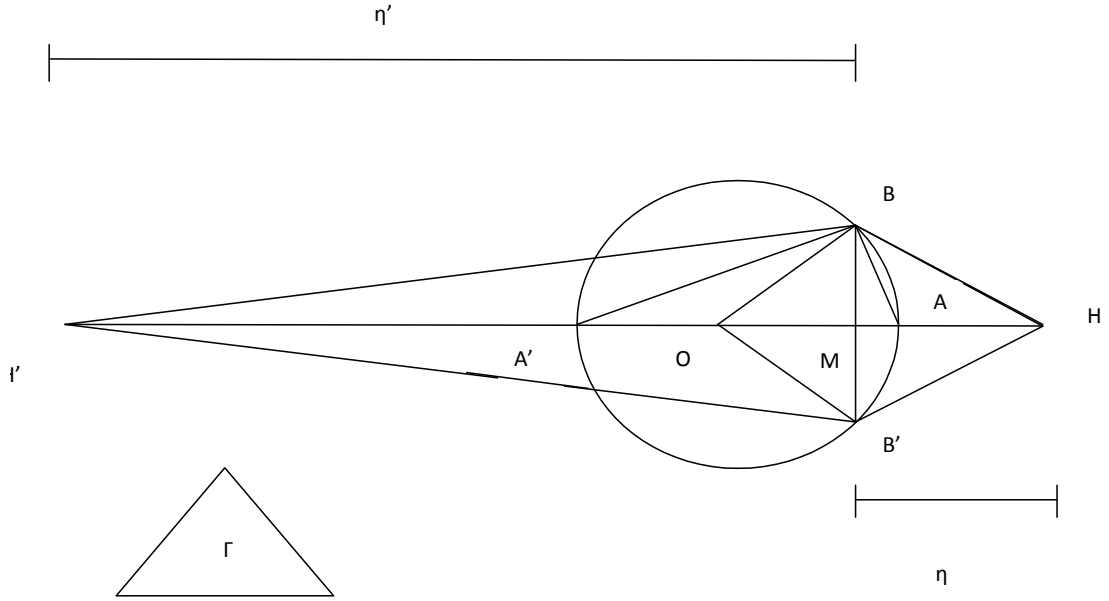
Αφαιρώντας το κοινό μέρος, τον κώνο ΟΒΒ′,

το τμήμα ΒΑΒ′ = τον κώνο ΗΒΒ′.

Παρόμοια, με την ίδια μέθοδο, μπορούμε να δείξουμε ότι

το τμήμα ΒΑΆΒ′ = τον κώνο ΗΆΒΒ′.

Σχήμα 7.3



4.8 Θεώρημα 8

Ο Αρχιμήδης παραθέτει μόνο την εκφώνηση του θεωρήματος γιατί απλούστατα θεωρεί πως δεν αποτελεί παρά μια γενίκευση του προηγούμενου θεωρήματος (από τη σφάιρα περνάμε σε οποιοδήποτε σφαιροειδές).Η γεωμετρική απόδειξη του θεωρήματος εντοπίζεται στο έργο του Αρχιμήδη *Περί κωνοειδών και σφαιροειδών* (θεωρήματα 29 και 31).

Αρχαίο κείμενο

Ὁμοίως δὲ θεωρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου καὶ, ὅτι πᾶν τμῆμα σφαιροειδέος ἀποτετμημένου ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὸν κῶνου τὸν βάσιν ἔχοντα τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος ἥ τε ἡμίσεια τοῦ ἄξονος τοῦ σφαιροειδέος καὶ τοῦ ἄξονος τοῦ ἀντικειμένου τμήματος πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ ἀντικειμένου τμήματος.

Γεωμετρική απόδειξη - Μετάφραση

¨Εάν ένα επίπεδο διαιρεί ένα σφαιροειδές σε δύο άνισα τμήματα, και εάν ΑΝ,Α΄Ν είναι οι άξονες του μικρότερου και του μεγαλύτερου τμήματος αντίστοιχα, ενώ Γ είναι το κέντρο του σφαιροειδούς, τότε

(μεγαλύτερο τμήμα σφαιροειδούς)/(κώνος ή τμήμα κώνου με την ίδια βάση και άξονα)= $\dfrac{\Gamma A + AN}{AN}$.¨

Ας αχθεί ένα επίπεδο που διαιρεί το σφαιροειδές διαμέσου της ευθείας ΡΡ′, κάθετα στο επίπεδο της σελίδας (σχήμα), με το τελευταίο επίπεδο (το επίπεδο της σελίδας δηλαδή) να διέρχεται από τον άξονα του σφαιροειδούς τέμνοντας το πρώτο επίπεδο στην ΡΡ′ και σχηματίζοντας την έλλειψη ΡΑΡ΄Α΄.

Φέρω τις εφαπτομένες στην έλλειψη, παράλληλες στην ΡΡ′, που εφάπτωνται αυτής στα σημεία Α,Α′ και διαμέσου των εφαπτομένων σχεδιάζω επίπεδα κάθετα στη βάση των τμημάτων. Τα επίπεδα αυτά θα εφάπτονται του σφαιροειδούς στα Α,Α′, η ευθεία ΑΑ′ θα διέρχεται από το κέντρο Γ και θα διχοτομεί την ΡΡ′ στο Ν, ενώ ΑΝ,ΑΝ′ θα είναι οι άξονες των τμημάτων.

Τότε (1) εάν το αποκόπτον επίπεδο είναι κάθετο στον άξονα του σφαιροειδούς ΑΑ′, Α,Α′ θα είναι οι κορυφές τόσο του σφαιροειδούς όσο και των τμημάτων. Επίσης τα τμήματα του σφαιροειδούς που προκύπτουν από το αποκόπτον επίπεδο και όλα τα επίπεδα παράλληλα σε αυτό θα είναι κύκλοι.

(2) Εάν το αποκόπτον επίπεδο δεν είναι κάθετο στον άξονα, η βάση των τμημάτων θα είναι μια έλλειψη με άξονα ΡΡ′ και τα τμήματα του σφαιροειδούς που προκύπτουν από επίπεδα παράλληλα στο αποκόπτον επίπεδο θα είναι επίσης ελλείψεις.

Ας αχθεί ένα επίπεδο διαμέσου της Γ παράλληλα στη βάση των τμημάτων που να συναντά το επίπεδο της σελίδας στην ΒΒ′.

Κατασκευάζω τρεις κώνους ή τμήματα κώνων, δύο με το Α ως κοινή κορυφή και βάσεις τις ΡΡ′,ΒΒ′ αντίστοιχα και τον τρίτο με το ΡΡ′ ως βάση και το Α′ ως κορυφή.

Προεκτείνω την ΓΑ στο Η και την ΓΑ′ στο Η′ έτσι ώστε

$AH = A'H' = \Gamma A$.

Έχουμε να δείξουμε ότι

(τμήμα ΑΡΡ′)/(κώνος ή τμήμα κώνου ΑΡΡ′)= $\dfrac{\Gamma A + AN}{AN} = \dfrac{NH}{AN}$.Τώρα εφόσον το μισό σφαιροειδές είναι το διπλάσιο του κώνου ή του τμήματος κώνου ΑΒΒ′ (Θεώρημα 3).Επομένως

(το σφαιροειδές)=4 (κώνος ή τμήμα κώνου ΑΒΒ′).

Αλλά

(κώνος ή τμήμα κώνου ΑΒΒ′)/(κώνος ή τμήμα κώνου ΑΡΡ′)= $\dfrac{\Gamma A}{AN}.\dfrac{B\Gamma^2}{PN^2} = \dfrac{\Gamma A}{AN}.\dfrac{\Gamma A.\Gamma A'}{AN.AN'}$ (α),(η τελευταία σχέση προκύπτει από ιδιότητα έλλειψης)

Εάν μετρήσουμε την ΑΚ κατά μήκος της ΑΑ′ έτσι ώστε

$\dfrac{AK}{A\Gamma} = \dfrac{A\Gamma}{AN}$, έχουμε $\dfrac{AK.A'N}{A\Gamma.A'N} = \dfrac{\Gamma A}{AN}$. Οπότε η (α) γίνεται

(κώνος ή τμήμα κώνου ΑΒΒ΄)/(κώνος ή τμήμα κώνου ΑΡΡ΄)= $\dfrac{AK.A'N}{\Gamma A.A'N}.\dfrac{\Gamma A.\Gamma A'}{AN.A'N} = \dfrac{AK.\Gamma A'}{AN.A'N}$.

Αλλά (κώνος ή τμήμα κώνου ΑΡΡ΄)/(τμήμα ΑΡΡ΄)= $\dfrac{A'N}{NH'} = \dfrac{AN.A'N}{AN.NH'}$.Επομένως

(κώνος ή τμήμα κώνου ΑΒΒ΄)/(τμήμα ΑΡΡ΄)= $\dfrac{AK.\Gamma A'}{AN.NH'}$,έτσι ώστε (σφαιροειδές)/(τμήμα ΑΡΡ΄)= $\dfrac{HH'.AK}{AN.NH'}$, αφού $HH' = 4\Gamma A'$.

Άρα (τμήμα ΑΆΡΡ΄)/(τμήμα ΑΡΡ΄)= $\dfrac{HH'.AK - AN.NH'}{AN.NH'} = \dfrac{AK.NH + NH'.NK}{AN.NH'}$.Επιπλέον,

(τμήμα ΑΡΡ΄)/(κώνος ή τμήμα κώνου ΑΡΡ΄)= $\dfrac{NH'}{A'N} = \dfrac{AN.NH'}{AN.A'N}$,

(κώνος ή τμήμα κώνου ΑΡΡ΄)/(κώνος ή τμήμα κώνου ΑΆΡΡ΄)= $\dfrac{AN}{A'N} = \dfrac{AN.A'N}{A'N^2}$.

Από τις 3 τελευταίες σχέσεις προκύπτει

(τμήμα ΑΆΡΡ΄)/(κώνος ή τμήμα κώνου ΑΆΡΡ΄)

$$= \frac{AK.NH + NH'.NK}{A'N^2}$$

$$= \frac{AK.NH + NH'.NK}{\Gamma A^2 + NH'.\Gamma N}$$

$$= \frac{AK.NH + NH'.NK}{AK.AN + NH'.\Gamma N} \text{ (β)}$$

Αλλά

$$\frac{AK.NH}{AK.AN} = \frac{NH}{AN} = \frac{\Gamma A + AN}{AN} = \frac{AK + \Gamma A}{\Gamma A} \text{ (εφόσον } \frac{AK}{A\Gamma} = \frac{A\Gamma}{AN}\text{)}$$

$$= \frac{HK}{\Gamma A} = \frac{HK - NH}{\Gamma A - AN} = \frac{NK}{\Gamma N} = \frac{NH'.NK}{NH'.\Gamma N}.$$

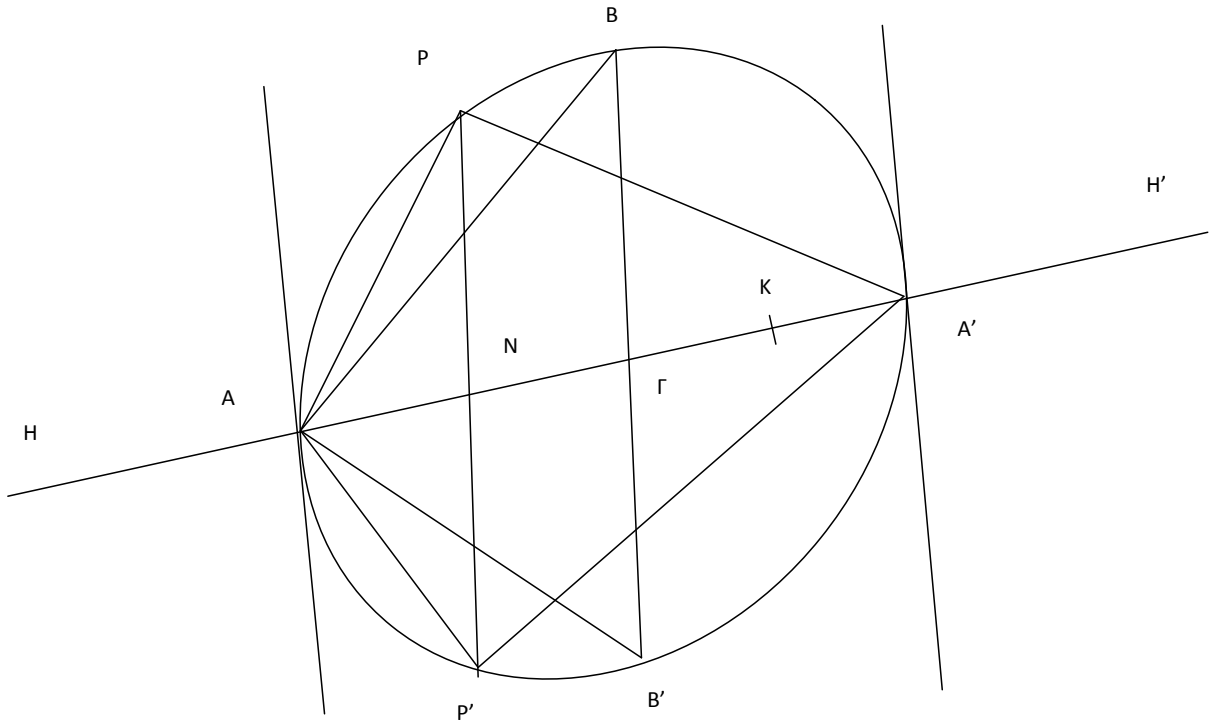
Έτσι η σχέση (β) είναι ίση με τη σχέση

$$\frac{AK.NH}{AK.AN} \text{ ή } \frac{NH}{AN}$$

Δηλ,

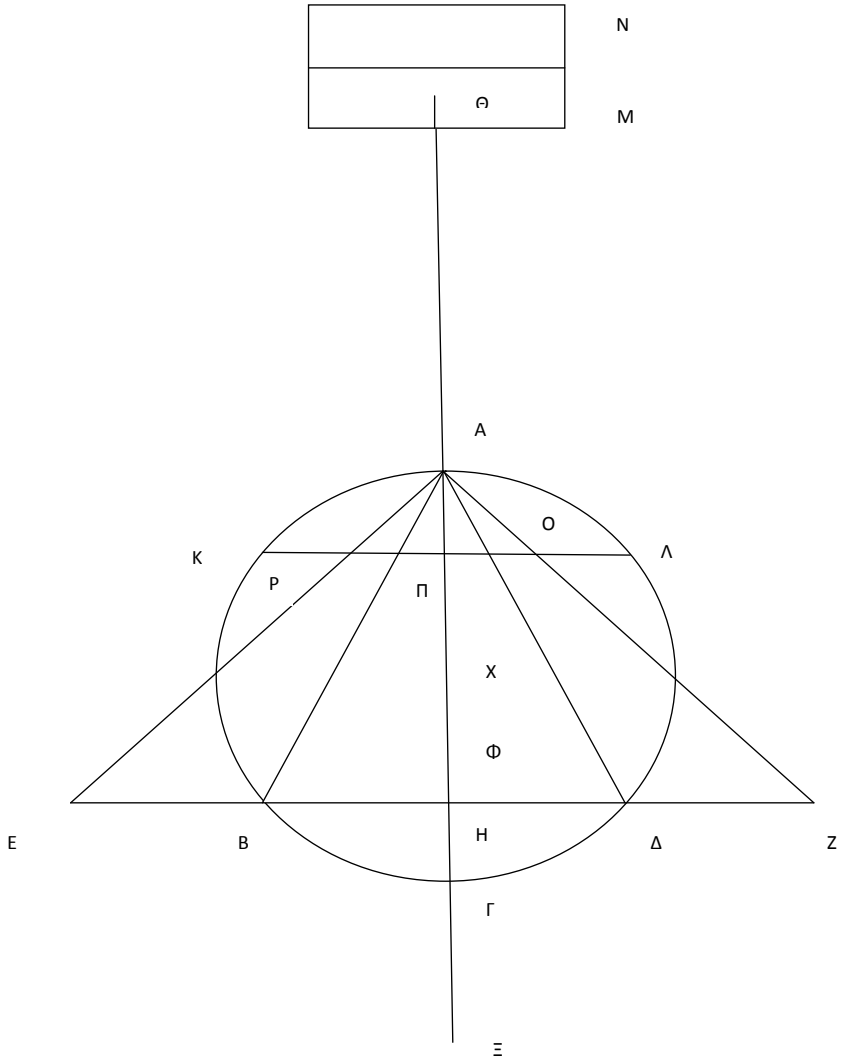
(τμήμα ΑΡΡ')/(κώνος ή τμήμα κώνου ΑΡΡ')$= \dfrac{NH}{AN} = \dfrac{\Gamma A + AN}{AN}$.

Σχήμα 8.1



4.9 Θεώρημα 9

¨παντός τμήματος σφαίρας τό κέντρον τοῦ βάρους ἐστίν ἐπί τῆς ευθείας, ἥ ἔστιν ἄξων τοῦ τμήματος, διηρημένης οὕτως, ὥστε τό μέρος αὐτῆς τό πρός τῇ κορυφῇ τοῦ τμήματος πρός τό λοιπόν τοῦτον ἔχει τόν λόγον, ὅν ἔχει συναμφότερον ὅ τε ἄξων τοῦ τμήματος καί ἡ τετραπλασία τοῦ ἄξονος τοῦ ἐν τῷ ἀντικειμένῳ τμήματι πρός συναμφότερον τόν τε ἄξονα τοῦ τμήματος καί τήν διπλασίαν τοῦ ἄξονος τοῦ ἐν τῷ ἀντικειμένῳ τμήματι ἐμπεριεχομένου.¨



4.9.1 1ο μέρος

Βοηθητικές προτάσεις απαραίτητες για τη μελέτη του 9ου θεωρήματος

9.1 Πρόταση 6.1 του 6ου θεωρήματος.

9.2 Πρόταση 1.2 του 1ου θεωρήματος.

9.3 Πρόταση 2.2 του 2ου θεωρήματος.

9.4 Πρόταση 2.5 του 2ου θεωρήματος.

9.5 Δύο ισοϋψείς κώνοι ή κύλινδροι είναι ανάλογοι των βάσεών τους.

-Στοιχεία Ευκλείδη XII, 11.

9.6 Πρόταση 1.5 του 1ου θεωρήματος.

9.7 Πρόταση 2.4 του 2ου θεωρήματος.

4.9.2 2ο μέρος

Αρχαίο κείμενο(και εδώ εντοπίζονται κάποια κενά στο αρχαίο κείμενο)

Παντὸς τμήματος σφαίρας τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν ἐπὶ τῆς ευθείας, ἥ ἔστιν ἄξων τοῦ τμήματος, διηρημένης οὕτως, ὥστε τὸ μέρος αὐτῆς τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ τμήματος πρὸς τὸ λοιπὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον ὅ τε ἄξων τοῦ τμήματος καὶ ἡ τετραπλασία τοῦ ἄξονος τοῦ ἐν τῷ ἀντικειμένῳ τμήματι πρὸς συναμφότερον τὸν τε ἄξονα τοῦ τμήματος καὶ τὴν διπλασίαν τοῦ ἄξονος τοῦ ἐν τῷ ἀντικειμένῳ τμήματι ἐμπεριεχομένου.....τοῦ δὲ ἀποτετμηκότος το τμῆμα ἐπιπέδου ἡ ΒΔ, ἡ δὲ ΓΑ εὐθεῖα διάμετρος ἔστω ὀρθὴ πρὸς τὴν ΒΔ καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Η σημεῖον. Ὥστε τοῦ τμήματος, οὗ κορυφὴ τὸ Α σημεῖον, ἄξων ἔσται ἡ ΑΗ, τοῦ δὲ ἀντικειμένου ἄξων ἡ ΗΓ. Τετμήσθω δὲ ἡ ΑΗ κατὰ τὸ Χ, ὥστε εἶναι, ὡς τὴν ΑΧ πρὸς ΧΗ, οὕτως τήν τε ΑΗ καὶ τὴν τετραπλασίαν τῆς ΗΓ πρὸς τὴν ΑΗ καὶ τὴν διπλασίαν τῆς ΑΓ. Λέγω, ὅτι τοῦ τμήματος, οὗ κορυφὴ τὸ Α σημεῖον, κέντρον

τοῦ βάρους ἐστι τὸ Χ.....φοτέροις.....τμημ....,οὗ κορυφή...σημεῖον.....ΗΑ..ἐχ.....τὴν Η. Λόγου.....κέντρου.....Χ.εἰ..τμηθη...ρ.....χηματ..μει.....ω...ἐν δὴ...τέρ.....καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΓ, καὶ κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ΑΘ καὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἴση ἡ ΓΞ, καὶ νοείσθω ζυγὸς ἡ ΓΘ, μέσου δὲ αὐτοῦ τὸ Α, γεγράφθω δὲ καὶ κύκλος ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῷ ἀποτέμνοντι τὸ τμῆμα κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ἴσῳ τῇ ΑΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τούτου γεγράφθω κῶνος κορυφὴν ἔχων τὸ Α σημεῖον, πλευραὶ δὲ ἔστωσαν τοῦ κώνου αἱ ΑΕ, ΑΖ, καὶ ἤχθω τις τῇ ΕΖ παράλληλος ἡ ΚΛ καὶ συμβαλλέτω τῇ μὲν περειφερείᾳ τοῦ τμήματος κατὰ τὰ Κ, Λ, ταῖς δὲ τοῦ ΑΕΖ κώνου πλευραῖς κατὰ τὰ Ρ, Ο, τῇ δὲ ΑΓ κατὰ τὸ Π.Ἐπεὶ δή ἐστιν, ὡς ἡ ΑΓ, πρὸς ΑΠ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΚΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΠ, καὶ ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ ΚΑ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΠ, ΠΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΠ, τὸ ἀπὸ ΠΟ, ἐπεὶ καὶ τῷ ἀπὸ ΑΗ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἐστιν ἴσον, ὡς ἄρα ἡ ΓΑ πρὸς ΑΠ, οὕτως τὰ ἀπὸ ΚΠ, ΠΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΠ. Ὡς δὲ τὰ ἀπὸ ΚΠ, ΠΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΟ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΚΛ καὶ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΟΡ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΟΡ, καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΑΘ.Ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΠ, οὕτως ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΚΛ καὶ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΟΡ κύκλος πρὸς τὸν περὶ τὴν ΟΡ. Ἐπεὶ οὖν, ὡς οἱ περὶ διαμέτρους τὰς ΚΛ, ΟΡ κύκλοι πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΟΡ κύκλος καὶ κείσθω τοῦ ζυγοῦ κατά το Θ, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ. Ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΠ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΚΛ καὶ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΟΡ αὐτοῦ μένοντες πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΟΡ μετενεχθέντα καὶ τεθέντα τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ.Ἰσόρροποι ἄρα οἱ κύκλοι ὅ τε ἐν τῷ τμήματι τῷ ΒΑΔ καὶ ὁ ἐν τῷ ΑΕΖ κώνῳ τῷ ἐν τῷΑΕΖ κώνῳ περὶ τὸ Α. Ὁμοίως δὲ καὶ πάντες οἱ κύκλοι οἱ ἐν τῷ ΒΑΔ τμήματι καὶ ἐν τῷ ΑΕΖ κώνῳ αὐτοῦ μένοντες κατὰ τὸ Α σημεῖον ἰσόρροποι πᾶσι τοῖς κύκλοις τοῖς ἐν τῷ ΑΕΖ κώνῳ μετευεχθεῖσι καὶ τεθεῖσι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτῶν τοῦ βάρους τὸ Θ. Ὥστε καὶ τὸ ΑΒΔ τμῆμα τῆς σφαίρας καὶ ὁ ΑΕΖ κῶνος ἰσορροπεῖ περὶ τὸ Α σημεῖον αὐτοῦ μένοντα τῷ ΕΑΖ κώνῳ μετευεχθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ.Ἔστω δὲ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΕΖ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ Α σημεῖον, ἴσος κύλινδρος ὁ ΜΝ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΗ κατὰ τὸ Φ, ὥστε τετραπλασίαν εἶναι τὴν

ΑΗ τῆς ΦΗ. Τὸ Φ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους τοῦ ΕΑΖ κώνου. Τοῦτο γὰρ προγράφεται καὶ τετμήσθω ἔτι ὁ ΜΝ κύλινδρος ἐπιπέδῳ τέμνοντι πρὸς ὀρθάς, ὥστε τὸν Μ κύλινδρον ἰσορροπεῖν τῷ ΕΑΖ κώνῳ. Ἐπεὶ οὖν ἰσόρροπος ὁ ΕΑΖ κῶνος καὶ τὸ ΑΒΔ τμῆμα αὐτοῦ μένοντα τῷ ΕΑΖ κώνῳ μετευεχθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ, καὶ ἐστιν τῷ ΕΑΖ κώνῳ ἴσος ὁ ΜΝ κύλινδρος, καὶ κεῖται ἑκάτερος τῶν Μ, Ν κυλίνδρων κατὰ τὸ Θ, καὶ ἰσόρροπος ὁ ΜΝ κύλινδρος, ἑκατέροις, ἰσόρροπος καὶ ὁ Ν τῷ τμήματι τῆς σφαίρας κατὰ τὸ Α σημεῖον.Καὶ ἐπεὶ ἐστιν, ὡς τὸ ΒΑΔ τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, οὕτως ἡ ΞΗ πρὸς ΗΓ. Τοῦτο γὰρ προγράφεται. Ὡς δὲ ὁ ΒΑΔ κῶνος πρὸς τὸν ΕΑΖ κῶνον, οὕτως ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΕΖ, ὡς δὲ ὁ κύκλος πρὸς τὸν κύκλον, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΕ, καὶ ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ ΒΗ ἴσον τὸ ὑπὸ ΓΗ, ΗΑ, τῷ δὲ ἀπὸ ΗΕ ἴσον τὸ ἀπὸ ΗΑ, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΓΗ, ΗΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΑ. Ὡς ἄρα ὁ ΒΑΔ κῶνος πρὸς τὸν ΕΑΖ κῶνον, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΑ. Ἐδείχθη δὲ καί, ὡς ὁ ΒΑΔ κῶνος πρὸς τὸ ΒΑΔ τμῆμα, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΞ. Δι᾽ ἴσου ἄρα,ὡς τὸ ΒΑΔ τμῆμα πρὸς τὸν ΕΑΖ κῶνον, οὕτως ἡ ΞΗ πρὸς ΗΑ. Καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΑΧ πρὸς ΧΗ, οὕτως ἡ ΗΑ καὶ ἡ τετραπλασία τῆς ΗΓ πρὸς τὴν ΑΗ καὶ τὴν διπλασίαν τῆς ΗΓ, ἀνάπαλιν ἔσται, ὡς ἡ ΗΧ πρὸς ΧΑ, οὕτως ἡ διπλασία τῆς ΓΗ καὶ ἡ ΗΑ πρὸς τὴν τετραπλῆν τῆς ΓΗ καὶ τὴν ΗΑ. Συνθέντι, ὡς ἡ ΗΑ πρὸς ΑΧ, οὕτως ἡ ἑξαπλασία τῆς ΓΗ καὶ διπλασία τῆς ΗΑ πρὸς τὴν ΗΑ καὶ τετραπλῆν τῆς ΗΓ. Καὶ τῆς μὲν ἑξαπλασίας τῆς ΗΓ καὶ διπλασίας τῆς ΗΑ ἡ ΗΞ, τῆς δὲ τετραπλασίας τῆς ΗΓ καὶ τῆς ΗΑ τέταρτον μέρος ἡ ΓΦ. Τοῦτο γὰρ φανερόν. Ὡς ἄρα ἡ ΗΑ πρὸς ΑΧ, οὕτως ἡ ΞΗ πρὸς ΓΦ. Ὥστε καὶ, ὡς ἡ ΞΗ πρὸς ΗΑ, οὕτως ἡ ΓΦ πρὸς ΧΑ. Ἐδείχθη δὲ καὶ, ὡς ἡ ΞΗ πρὸς ΗΑ, οὕτως τὸ τμῆμα, οὗ ἐστι κορυφὴ τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλος, πρὸς τὸν κῶνον, οὗ ἐστι κορυφὴ τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΕΖ κύκλος. Ὡς ἄρα τὸ ΒΑΔ τμῆμα πρὸς τὸν ΕΑΖ κῶνον, οὕτως ἡ ΓΦ πρὸς ΧΑ. Καὶ ἐπεὶ ἰσόρροπος ὁ Μ κύλινδρος τῷ ΕΑΖ κώνῳ κατὰ τὸ Α, καὶ ἐστι τοῦ μὲν κυλίνδρου κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ, τοῦ δὲ ΕΑΖ κώνου τὸ Φ, ἔσται ἄρα, ὡς ὁ ΕΑΖ κῶνος πρὸς τὸν Μ κύλινδρον, οὕτως ἡ ΘΑ πρὸς ΑΦ, τουτέστιν ἡ ΓΑ πρὸς ΑΦ. Καὶ ἐστι

τῷ ΕΑΖ κώνῳ ἴσος ὁ ΜΝ κύλινδρος. Διελόντι ἄρα, ὡς ὁ ΜΝ κύλινδρος πρὸς τὸν Ν κύλινδρον, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΓΦ. Καί ἐστιν ἴσος ὁ ΜΝ κύλινδρος τῷ ΕΑΖ κώνῳ. Ὡς ἄρα ὁ ΕΑΖ κῶνος πρὸς τὸν Ν κύλινδρον, οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς ΓΦ, τουτέστιν ἡ ΘΑ πρὸς ΓΦ. Ἐδείχθη δὲ καί, ὡς τό ΒΑΔ τμῆμα πρὸς τὸν ΕΑΖ κῶνον, οὕτως ἡ ΓΦ πρὸς ΧΑ. Δι᾽ἴσου ἄρα ἔσται, ὡς τὸ ΑΒΔ τμῆμα πρὸς τὸν Ν κύλινδρον, οὕτως ἡ ΘΑ πρὸς ΑΧ. Καὶ ἐδείχθη ἰσόρροπον τὸ ΒΑΔ τμῆμα τῷ Ν κυλίνδρῳ κατὰ τὸ Α, καὶ ἐστι τοῦ Ν κυλίνδρου κέντρον βάρους τὸ Θ. Καὶ τοῦ ΒΑΔ ἄρα τμήματος κέντρον τὸ Χ σημεῖον.

Ερμηνευτικά σχόλια επί του αρχαίου κειμένου

¨*Τοῦτο γὰρ προγράφεται*¨:εδώ ο Αρχιμήδης εννοεί το προλαμβανόμενο 10.

¨*Τοῦτο γὰρ προγράφεται*¨:εδώ ο Αρχιμήδης εννοεί το θεώρημα 7.

4.9.3 3ο μέρος

Μαθηματική μετάφραση 3ου θεωρήματος

Το κέντρο βαρύτητας κάθε τμήματος μιας σφαίρας βρίσκεται στην ευθεία που είναι ο άξονας του τμήματος, η οποία διαιρείται κατά τέτοιο τρόπο από αυτό ώστε το μέρος κοντά στην κορυφή του τμήματος να έχει προς το υπόλοιπο τμήμα τον λόγο που έχει το άθροισμα του άξονα του τμήματος και του τετραπλασίου του άξονα του υπόλοιπου τμήματος προς το άθροισμα του άξονα του τμήματος και του διπλάσιου του άξονα του υπόλοιπου τμήματος.

4.9.4 4ο μέρος

Έφοδος

Προεκτείνω την ΑΓ, στα Θ,Ξ ώστε $\Theta A = A\Gamma$ και η ΓΞ να είναι ίση με την ακτίνα της σφαίρας.

Ας νοηθεί η ΘΓ ως ζυγός με μέσο αυτού το Α.

Στο επίπεδο που αποκόπτει το τμήμα περιγράφω κύκλο με κέντρο Η και ακτίνα ΗΕ=ΑΗ, και πάνω στον κύκλο αυτό υψώνω κώνο με κορυφή το Α και γεννήτριες τις ΑΕ, ΑΖ.

Φέρω την ΚΛ διαμέσου οποιουδήποτε σημείου Π στην ΑΗ, παράλληλη στην ΕΖ και τέμνοντας το τμήμα στα Κ,Λ και τις ΑΕ,ΑΖ στα Ρ,Ο αντίστοιχα. Φέρω την ΑΚ.

Τώρα,

$$\frac{\Theta A}{A\Pi} = \frac{\Gamma A}{A\Pi} =$$

$$= \frac{AK^2}{A\Pi^2} \text{(Προτάσεις 9.1,9.2,9.3)}$$

$$= \frac{K\Pi^2 + \Pi A^2}{\Pi A^2}$$

$$= \frac{K\Pi^2 + O\Pi^2}{O\Pi^2}$$

=(κύκλος διαμέτρου ΚΛ+κύκλος διαμέτρου ΟΡ)/(κύκλος διαμέτρου ΟΡ)(Πρόταση 9.4).

Ας νοηθεί ένας κύκλος ίσος με τον κύκλο με διάμετρο ΟΡ τοποθετημένο με το κέντρο βαρύτητάς του στο Θ.

Επομένως οι κύκλοι με διαμέτρους ΚΛ,ΟΡ, εκεί που βρίσκονται, είναι σε ισορροπία ως προς το Α με τον κύκλο διαμέτρου ΟΡ τοποθετημένο με το κέντρο βαρύτητάς του στο Θ.

Παρομοίως για τα αντίστοιχα κυκλικά τμήματα που προκύπτουν από οποιοδήποτε άλλο επίπεδο κάθετο στην ΑΗ.

Επομένως, παίρνοντας όλα τα κυκλικά τμήματα που συνιστούν το τμήμα ΑΒΔ της σφαίρας και του κώνου ΑΕΖ αντίστοιχα, βρίσκουμε ότι το τμήμα ΑΒΔ της σφάιρας και ο κώνος ΑΕΖ, εκεί που βρίσκονται, είναι σε ισορροπία με τον κώνο ΑΕΖ αν ο τελευταίος τοποθετηθεί με το κέντρο βαρύτητάς του στο Θ.

Θεωρώ τον κύλινδρο Μ+Ν ίσο με τον κώνο ΑΕΖ, ο οποίος έχει κορυφή το Α και τον κύκλο διαμέτρου ΕΖ ως βάση.

Διαιρώ την ΑΗ στο Φ έτσι ώστε ΑΗ=4 ΦΗ. Επομένως Φ είναι το κέντρο βαρύτητας του κώνου ΑΕΖ (Προλαμβανόμενο 10 Αρχιμήδη).

Ας τμηθεί ο κύλινδρος Μ+Ν από ένα επίπεδο κάθετο στον άξονά του, ώστε ο κύλινδρος Μ (μόνος του), τοποθετημένος με το κέντρο βαρύτητάς του στο Θ, να είναι σε ισορροπία με τον κώνο ΑΕΖ. Εφόσον ο Μ+Ν αναρτημένος από το Θ είναι σε ισορροπία με το τμήμα ΑΒΔ της σφαίρας και τον κώνο ΑΕΖ εκεί που βρίσκονται, ενώ ο Μ, επίσης στο Θ, είναι σε ισορροπία με τον κώνο ΑΕΖ εκεί που βρίσκεται, προκύπτει ότι ο Ν, στο Θ είναι σε ισορροπία με το τμήμα ΑΒΔ της σφαίρας εκεί που βρίσκεται.

Τώρα (1) (τμήμα ΑΒΔ της σφαίρας)/(κώνος ΑΒΔ)= $\frac{\Xi H}{H\Gamma}$(Θεώρημα 7 Αρχιμήδη, στον παρόν τόμο).Και (2) (κώνος ΑΒΔ)/(κώνος ΑΕΖ)

=(κύκλος διαμέτρου ΒΔ)/(κύκλος διαμέτρου ΕΖ) (Πρόταση 9.5)

$$= \frac{B\Delta^2}{EZ^2}$$

$= \frac{BH^2}{HE^2}$ (Πρόταση 9.4). Όμως $BH^2 = \Gamma H.HA$ (Προτάσεις 9.1,9.3)

$$= \frac{\Gamma H.HA}{HA^2}$$

$= \dfrac{\Gamma H}{HA}$.

Από τις (1),(2) έχω (τμήμα ΑΒΔ της σφαίρας)/(κώνος ΑΕΖ)= $\dfrac{\Xi H}{HA}$.

Παίρνω σημείο Χ στην ΑΗ έτσι ώστε

$\dfrac{AX}{XH} = \dfrac{HA + 4H\Gamma}{HA + 2H\Gamma}$ ή αντίστροφα $\dfrac{HX}{XA} = \dfrac{2H\Gamma + HA}{4H\Gamma + HA}$ και

$\dfrac{HA}{AX} = \dfrac{6H\Gamma + 2HA}{4H\Gamma + HA}$ (Πρόταση 9.6).

Αλλά ΗΞ= $\dfrac{1}{4}(6H\Gamma + 2HA)$, γιατί $H\Xi - H\Gamma = \dfrac{1}{2}(H\Gamma + HA)$ και

ΓΦ= $\dfrac{1}{4}(4H\Gamma + HA)$.Επομένως $\dfrac{HA}{AX} = \dfrac{\Xi H}{\Gamma\Phi}$ (Πρόταση 9.7) και αντίστροφα

$\dfrac{H\Xi}{HA} = \dfrac{\Gamma\Phi}{XA}$.

Προκύπτει από τα παραπάνω, ότι
(τμήμα ΑΒΔ της σφαίρας)/(κώνος ΑΕΖ)= $\dfrac{\Gamma\Phi}{XA}$.
Τώρα εφόσον ο κύλινδρος Μ με το κέντρο βαρύτητάς του στο Θ είναι σε ισορροπία ως προς το Α με τον κώνο ΑΕΖ με το κέντρο βαρύτητάς του στο Φ,
(κώνος ΑΕΖ)/(κύλινδρος Μ)= $\dfrac{\Theta A}{A\Phi} = \dfrac{\Gamma A}{A\Phi}$, και εφόσον ο κώνος ΑΕΖ=κύλινδρος Μ+Ν,έχουμε

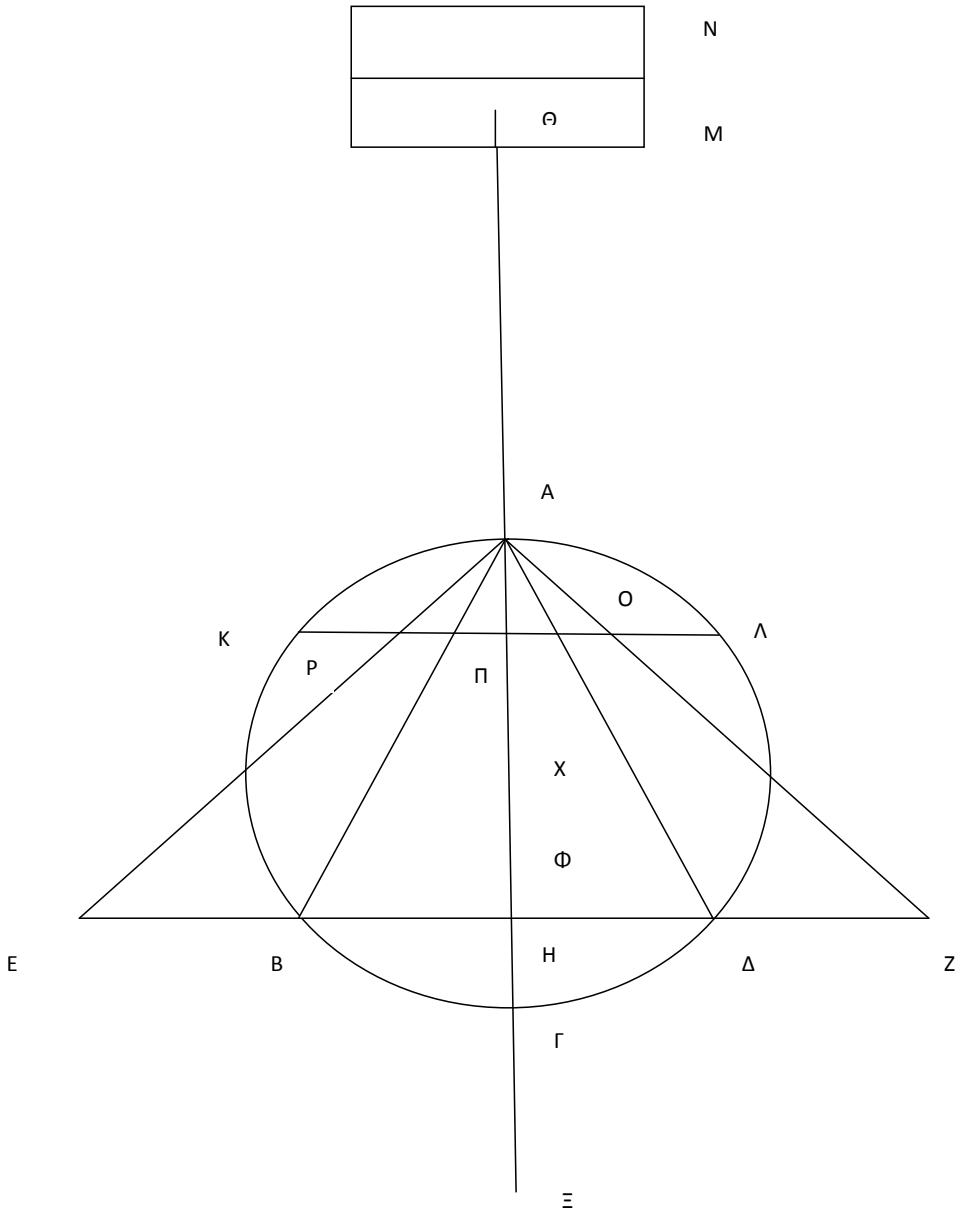
(κύλινδρος Μ)/(κύλινδρος Ν)= $\dfrac{A\Phi}{\Gamma\Phi}$.

Από τις παραπάνω 2 σχέσεις (κώνος ΑΕΖ)/(κύλινδρος Ν)= $\dfrac{\Gamma A}{\Gamma\Phi} = \dfrac{\Theta A}{\Gamma\Phi}$.

Αλλά δείξαμε ότι (τμήμα ΑΒΔ της σφαίρας)/(κώνος ΑΕΖ)= $\dfrac{\Gamma\Phi}{AX}$,

επομένως και πάλι από τις δύο παραπάνω σχέσεις (τμήμα ΑΒΔ της σφαίρας)/(κύλινδρος Ν)= $\dfrac{\Theta A}{AX}$. Δείχτηκε παραπάνω ότι ο κύλινδρος Ν στο Θ είναι σε ισορροπία ως προς το Α με το τμήμα ΑΒΔ, εκεί που βρίσκεται, άρα τελικά αφού το Θ είναι το κέντρο βάρους του κυλίνδρου Ν, Χ είναι το κέντρο βάρους του τμήματος ΑΒΔ της σφαίρας.

Σχήμα 9.1



4.10 Θεώρημα 10

Σε ένα ακόμα θεώρημα ο Αρχιμήδης μας μεταφέρει μόνο την εκφώνησή του που απλά μας ενημερώνει πωςτο θεώρημα 9 μπορεί να δειχθεί με τον ίδιο τρόπο για το κέντρο βάρους οποιουδήποτε τμήματος σφαιροειδούς.

Αρχαίο κείμενο

Ὁμοίως δὲ τούτοις θεωρεῖται καὶ, ὅτι παντὸς τμήματος σφαιροειδὲος τὸ κέντρον ἐστὶν τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥ ἐστιν ἄξων τοῦ τμήματος, διῃρημένης τῆς εὐθείας,ὥστε τὸ μέρος αὐτῆς τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ τμήματος πρὸς τὸ λοιπὸν τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὅν ἔχει συναμφότερον ὅ τε ἄξων τοῦ τμήματος καὶ ἡ τετραπλασία τοῦ ἄξονος τοῦ ἐν τῷ ἀντικειμένῳ τμήματι πρὸς συνφότερον τὸν τε ἄξονα τοῦ τμήματος καὶ τὴν διπλασίαν τοῦ ἄξονος τοῦ ἐν τῷ ἀντικειμένῳ τμήματι ἐμπεριεχομένου.
δηλαδή,
Με παρόμοιο τρόπο δείχνεται ότι το κέντρο βαρύτητας κάθε τμήματος σφαιροειδούς βρίσκεται στην ευθεία που είναι ο άξονας του τμήματος,η οποία διαιρείται κατά τέτοιο τρόπο από αυτό ώστε το μέρος κοντά στην κορυφή του τμήματος να έχει προς το υπόλοιπο τμήμα τον λόγο που έχει το άθροισμα του άξονα του τμήματος και του τετραπλάσιου του άξονα του υπόλοιπου τμήματος προς το άθροισμα του άξονα του τμήματος και του διπλάσιου του άξονα του υπόλοιπου τμήματος.

4.11 Θεώρημα 11

Και εδώ ο Αρχιμήδης παραθέτει μόνο την εκφώνηση του θεωρήματος.

Αρχαίο κείμενο

Θεωρεῖται δὲ διὰ τοῦ τρόπου καὶ, ὅτι πᾶν τμῆμα ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ἔχει τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος ὅ τε ἄξων τοῦ τμήματος καὶ ἡ τριπλασία τῆς προσούσης τῷ ἄξονι πρὸς συναμφότερον τὸν τε ἄξονα τοῦ τμήματος τοῦ κωνοειδοῦς καὶ τὴν διπλασίαν τῆς προσούσης τῷ ἄξονι, κέντρον δὲ τοῦ βάρους τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος τμηθέντος τοῦ ἄξονος, ὥστε τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ τμῆμα πρὸς τὸ λοιπὸν λόγον ἔχειν, ὃν ἔχει ὅ τε τριπλάσιος τοῦ ἄξονος καὶ ἡ ὀκταπλασία τῆς προσκειμένης πρὸς τὸν ἄξονα αὐτοῦ τοῦ κωνοειδέος καὶ τὴν τετραπλασίαν αὐτῆς τῆς προσκειμένης πρὸς αὐτὸν.Καὶ ἄλλων πλειόνων ἀ.....θεωρουμένων τὰ....περιλήψομεν ῥητ...ως, ἐπεὶ ὁ τρόπος ὑποδέδεικται διὰ τῶν προειρημένων.

Μαθηματική μετάφραση

Α.Κάθε τμήμα υπερβολοειδούς εκ περιστροφής έχει ως προς τον κώνο ο οποίος έχει την ίδια βάση με το τμήμα και τον ίδιο άξονα, τον ίδιο λόγο με αυτόν που έχει το άθροισμα του άξονα του τμήματος και το τριπλάσιο της απόστασης μεταξύ της κορυφής του τμήματος και του παραπάνω κώνου προς το άθροισμα του άξονα του τμήματος και του διπλάσιου της ίδιας απόστασης (μεταξύ της κορυφής του τμήματος του υπερβολοειδούς και του κώνου).
Β.Το κέντρο βάρους του υπερβολοειδούς εκ περιστροφής τέμνει τον άξονά του έτσι ώστε το τμήμα το πλησιέστερο στην κορυφή του υπερβολοειδούς να έχει ως προς το υπόλοιπο, το λόγο τον οποίο έχει το άθροισμα του τριπλάσιου άξονα του υπερβολοειδούς και το οκταπλάσιο του τμήματος του

άξονα του πλησιέστερου προς την κορυφή αυτού προς το άθροισμα του άξονα του υπερβολοειδούς και του τετραπλάσιου του τμήματος του άξονα του πλησιέστερου προς την κορυφή αυτού.

Γεωμετρική απόδειξη

Η γεωμετρική απόδειξη του πρώτου μέρους του παραπάνω θεωρήματος εντοπίζεται στο έργο του Αρχιμήδη *Περί κωνοειδών και σφαιροειδών* στα θεωρήματα 25,26.

Α.Βοηθητικές προτάσεις

Α1.Το προλαμβανόμενο 11 του Αρχιμήδη.

Α2.Εάν $A_1, A_2, ...A_\nu$ είναι οποιοσδήποτε αριθμός περιοχών τέτοιων ώστε

$A_1 = a\chi + \chi^2$,

$A_2 = a.2\chi + (2\chi)^2$,

.....

$A_\nu = a.\nu\chi + (\nu\chi)^2$, τότε

$\nu.A_\nu/(A_1 + A_2 + ... + A_\nu) < (a + \nu\chi)/(\frac{a}{2} + \frac{\nu\chi}{3})$ και

$\nu.A_\nu/(A_1 + A_2 + ... + A_{\nu-1}) > (a + \nu\chi)/(\frac{a}{2} + \frac{\nu\chi}{3})$

-Αρχιμήδης, *Περί Κωνοειδών και Σφαιροειδών*, 2.

Β.Απόδειξη (σε σύγχρονη απόδοση)

¨Σε κάθε υπερβολοειδές εκ περιστροφής, εάν Α είναι η κορυφή και ΑΔ ο άξονας οποιουδήποτε τμήματος που αποκόπτεται από ένα επίπεδο, και εάν ΓΑ είναι η ημιδιάμετρος του υπερβολοειδούς διαμέσου του Α (η ΓΑ βρίσκεται στην ίδια ευθεία φυσικά με την ΑΔ),τότε ισχύει

(τμήμα υπερβολοειδούς)/(κώνος με την ίδια βάση και άξονα)=$\dfrac{A\Delta + 3\Gamma A}{A\Delta + 2\Gamma A}$.¨

Ας είναι το επίπεδο που αποκόπτει το παραπάνω τμήμα κάθετο στο επίπεδο του χαρτιού, και ας είναι το τελευταίο επίπεδο το επίπεδο διαμέσου του άξονα του υπερβολοειδούς το οποίο τέμνει το αποκόπτον επίπεδο κάθετα στη ΒΒ′, και σχηματίζει το υπερβολικό τμήμα ΒΑΒ′.Ας είναι Γ το κέντρο του υπερβολοειδούς.

Έστω ΕΦ εκείνη η εφαπτομένη του υπερβολικού τμήματος η οποία είναι παράλληλη στη ΒΒ′ στο σημείο Α.Ας αχθεί η ΓΑ η οποία θα τέμνει την ΒΒ′ στο Δ. Η ΓΑ θα είναι τότε η ημιδιάμετρος του υπερβολοειδούς, Α θα είναι η κορυφή του τμήματος και ΑΔ ο άξονάς του. Προεκτείνω την ΑΓ στο Α′ και το Η, έτσι ώστε $A\Gamma = \Gamma A' = A'H$.

Διαμέσου της ΕΦ φέρω επίπεδο παράλληλο στη βάση του τμήματος το οποίο θα εφάπτεται του υπερβολοειδούς στο Α. Τότε (1), εάν η βάση του τμήματος είναι κάθετη στον άξονα του υπερβολοειδούς, Α θα είναι η κορυφή και ΑΔ ο άξονας τόσο του υπερβολοειδούς όσο και του τμήματος, και η βάση του τμήματος θα είναι ένας κύκλος με διάμετρο ΒΒ′.

(2)Εάν η βάση του τμήματος δεν είναι κάθετη στον άξονα του υπερβολοειδούς, η βάση θα είναι μια έλλειψη με τη ΒΒ′ σαν μεγάλο άξονα.

Τότε μπορεί να αχθεί κύλινδρος ή τμήμα κυλίνδρου ΕΒΒ′Φ ο οποίος να έχει βάση τον κύκλο ή την έλλειψη γύρω από ΒΒ′ και την ΑΔ για άξονα. Μπορεί επίσης να αχθεί κώνος ή τμήμα κώνου με βάση τον ίδιο κύκλο και την ίδια έλλειψη με το Α ως κορυφή.

Έχουμε να δείξουμε ότι

(τμήμα ΑΒΒ′)/(κώνος ή τμήμα κώνου ΑΒΒ′)=$\dfrac{H\Delta}{A'\Delta}$.

Ας είναι Κ ένας κώνος τέτοιος ώστε

Κ/(κώνος ή τμήμα κώνου ΑΒΒ΄)=$\frac{H\Delta}{A'\Delta}$, (α) έχουμε να αποδείξουμε ότι ο Κ είναι ίσος με το τμήμα.
Τώρα (κύλινδρος ή τμήμα ΕΒ΄)/(κώνος ή τμήμα κώνου ΑΒΒ΄)=$\frac{3}{1}$. Επομένως από το (α),

(κύλινδρος ή τμήμα ΕΒ΄)/Κ=Α΄Δ/$\frac{H\Delta}{3}$ (β).

Εάν το τμήμα δεν είναι ίσο προς το Κ θα πρέπει να είναι είτε μεγαλύτερο είτε μικρότερο (μέθοδος της εξάντλησης).

Ι.Έστω ότι το τμήμα είναι μεγαλύτερο του Κ.

Εγγράφω και περιγράφω στο τμήμα στερεά που αποτελούνται από κυλίνδρους ή τμήματα κυλίνδρων με άξονες κατά μήκος της ΑΔ και όλα ίσα μεταξύ τους,έτσι ώστε

(περιγεγραμμένο στερεό)-(εγγεγραμμένο στερεό)΄(τμήμα)-Κ, οπότε (εγγεγραμμένο στερεό)΄Κ (γ).

Ας αχθούν όλα τα επίπεδα που σχηματίζουν τις βάσεις των κυλίνδρων ώστε να συναντήσουν την επιφάνειά του ολοκληρωμένου κυλίνδρου ΕΒ΄.

Τότε εάν ΝΔ είναι ο άξονας του μεγαλύτερου κυλίνδρου στο περιγεγραμμένο στερεό,ολόκληρος ο κύλινδρος θα διαιρείται σε κυλίνδρους,καθένας από τους οποίους θα είναι ίσος με αυτόν τον μεγαλύτερο κύλινδρο.

Ας υπάρχει ένας αριθμός ευθειών α ίσες προς ΑΑ΄ και τόσες στο πλήθος όσα τα τμήματα στα οποία η ΑΔ διαιρείται από τις βάσεις των κυλίνδρων. Σε κάθε γραμμή α σχεδιάζω ένα ορθογώνιο και πάνω από αυτό ένα τετράγωνο και ας είναι το μεγαλύτερο από τα ορθογώνια ίσο προς το ορθογώνιο ΑΔ.Α΄Δ και το μικρότερο ίσο προς το ορθογώνιο ΑΛ.Α΄Λ. Επίσης οι πλευρές των υπερκείμενων τετραγώνων β,π,ρ,...,λ ας συνιστούν μια φθίνουσα αριθμητική ακολουθία. Έτσι οι β,π,ρ,...,λ θα είναι αντίστοιχα ίσες προς τις ΑΔ,ΑΝ,ΑΜ,...,ΑΛ και τα ορθογώνια $(a\beta+\beta^2), (a\pi+\pi^2), ..., (a\lambda+\lambda^2)$ θα είναι αντίστοιχα ίσα προς τα ΑΔ.Α΄Δ,ΑΝ.Α΄Ν,...,ΑΛ.Α΄Λ.

Υποθέτω επιπλέον ότι έχω έναν αριθμό εμβαδών Σ καθένα ίσο προς το μέγιστο ορθογώνιο ΑΔ.Α΄Δ και τόσα στον αριθμό όσα τα μειούμενα στο μέγεθος ορθογώνια.

Συγκρίνοντας τώρα τους διαδοχικούς κυλίνδρους πρώτον σε ολόκληρο τον κύλινδρο ΕΒ′ και δεύτερον στο εγγεγραμμένο στερεό, αρχίζοντας από τη βάση του υπερβολοειδούς τμήματος , έχουμε (πρώτος κύλινδρος ή τμήμα στον ΕΒ′)/(πρώτος στο εγγεγραμμένο στερεό)=$\frac{B\Delta^2}{RN^2} = \frac{A\Delta.A'\Delta}{AN.A'N} = \frac{\Sigma}{a\pi + \pi^2}$.

Ξανά,

(δεύτερος κύλινδρος ή τμήμα στον ΕΒ′)/(δεύτερος στο εγγεγραμμένο στερεό)=$\frac{B\Delta^2}{\Pi M^2} = \frac{A\Delta.A'\Delta}{AM.A'M} = \frac{\Sigma}{a\rho + \rho^2}$, κοκ.

Ο τελευταίος κύλινδρος στο μεγάλο κύλινδρο ΕΒ′ δεν έχει κύλινδρο που να αντιστοιχεί σε αυτόν στο εγγεγραμμένο στερεό. Συνδυάζοντας τις αναλογίες παίρνουμε (πρόταση Α1)

(κύλινδρος ή τμήμα ΕΒ′)/(εγγεγραμμένο στερεό)=(άθροισμα όλων των Σ)/($(a\pi + \pi^2) + (a\rho + \rho^2 + ...) > (a + \beta)/(\frac{a}{2} + \frac{\beta}{3}$(πρόταση Α2)

$> A'\Delta/\frac{H\Delta}{3}$,εφόσον α=ΑΑ′,β=ΑΔ,

$> \frac{EB'}{K}$,από το (β) παραπάνω.

Οπότε (εγγεγραμμένο στερεό)<Κ.

Αλλά αυτό είναι αδύνατο γιατί από το (γ) παραπάνω, το εγγεγραμμένο στερεό είναι μεγαλύτερο του Κ.

ΙΙ.Έστω ότι το τμήμα είναι μικρότερο του Κ.

Σε αυτήν την περίπτωση περιγράφουμε και εγγράφοουμε στερεά τέτοια ώστε (περιγγεγραμμένο στερεό)-(εγγεγραμμένο στερεό)<Κ-(τμήμα),οπότε προκύπτει Κ>(περιγεγραμμένο στερεό) (δ).

Συγκρίνουμε τώρα διαδοχικούς κυλίνδρους ή τμήματα στο μεγάλο κύλινδρο και στο περιγεγραμμένο στερεό και έχουμε

(πρώτος κύλινδρος στον ΕΒ')/(πρώτος στο περιγεγραμμένο στερεό)= $\dfrac{\Sigma}{\alpha\beta+\beta^2}$,

(δεύτερος κύλινδρος στον ΕΒ')/(δεύτερος στο περιγεγραμμένο στερεό)= $\dfrac{\Sigma}{\alpha\pi+\pi^2}$,

κοκ.

Οπότε (πρόταση Α1), (κύλινδρος ή τμήμα ΕΒ')/(περιγεγραμμένο στερεό)=(άθροισμα όλων των Σ)/$(\alpha\beta+\beta^2)+(\alpha\pi+\pi^2+...)<(\alpha+\beta)/(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{3})$(Πρόταση Α2)

$<A'\Delta/\dfrac{H\Delta}{3}$

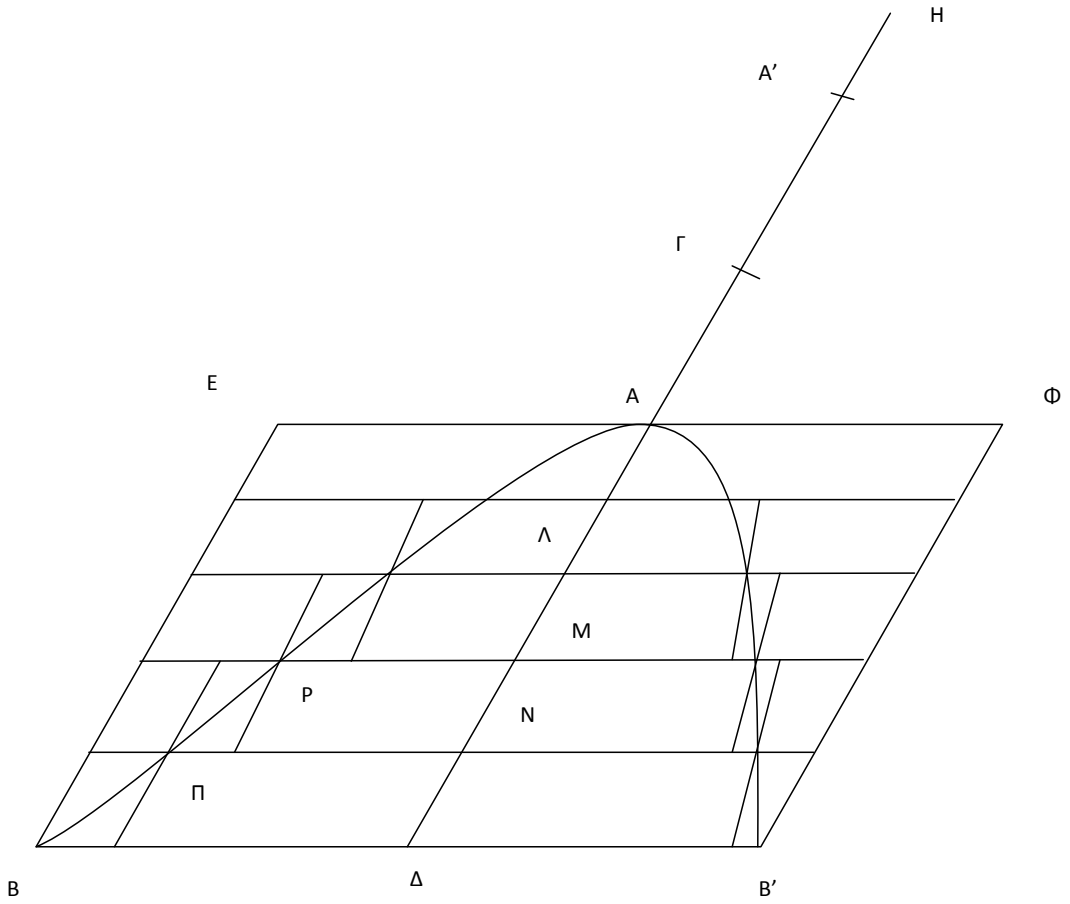
$<\dfrac{EB'}{K}$,από (β) παραπάνω.

Οπότε το περιγεγραμμένο στερεό είναι μεγαλύτερο του Κ,το οποίο είναι αδύνατο από το (δ) παραπάνω.

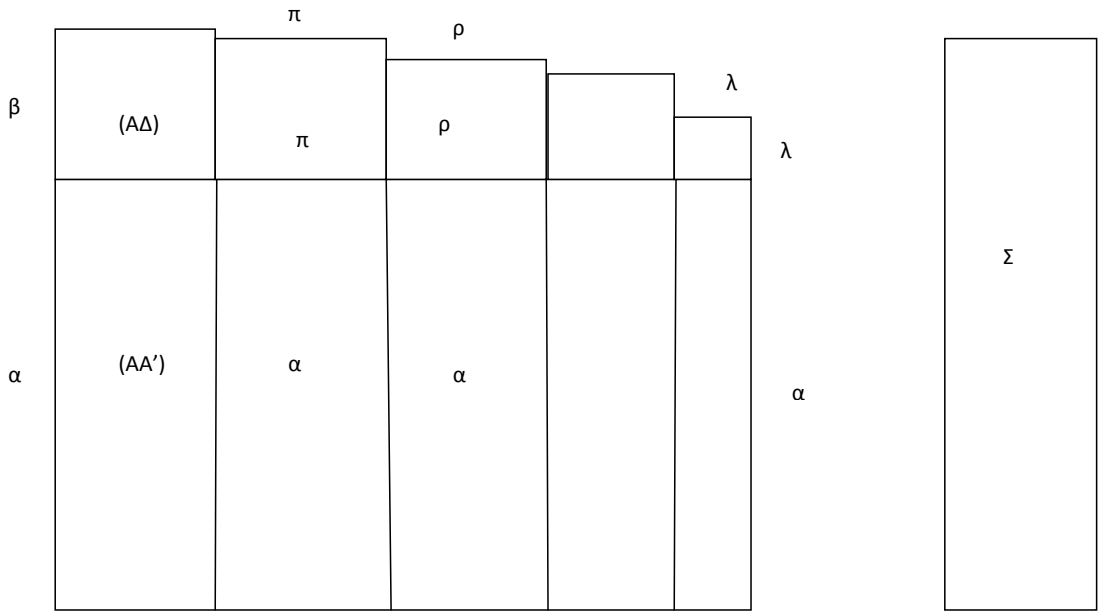
Επομένως το τμήμα του υπερβολοειδούς δεν είναι ούτε μεγαλύτερο ούτε μικρότερο από το Κ,άρα είναι ίσο με αυτό.

Έτσι από το (α), (τμήμα υπερβολοειδούς)/(κώνο με την ίδια βάση και άξονα)= $\dfrac{A\Delta+3\Gamma A}{A\Delta+2\Gamma A}$.

Σχήμα 11.1



Σχήμα 11.2



Παρατηρήσεις

Οι τελευταίες γραμμές του θεωρήματος *¨Και ἄλλων πλειόνων ἁ.....θεωρουμένων τὰ...περιλήψομεν ῥητ...ως,ἐπεὶ ὁ τρόπος ὑποδέδεικται διὰ τῶν προειρημένων¨*, αν και περιέχουν κάποια κενά είναι σημαντικές για την κατανόηση του χαρακτήρα της επιστολής προς τον Ερατοσθένη και ειδικότερα της Μεθόδου του. Μας λέει εδώ πως με το συγκεκριμένο μηχανικό τρόπο του αποκαλύφθηκαν και άλλα πολλά τέτοια θεωρήματα τα οποία όμως δεν είναι αναγκαίο να τα αναπτύξει εκτενώς γιατί με τα διατυπωμένα έως τώρα 11 θεωρήματα γίνεται σαφής και κατανοητή η μηχανική διαδικασία. Έτσι,με τα ίδια τα λόγια του Αρχιμήδη, οδηγούμαστε στο τελευταίο μέρος της επιστολής του, στην απόδειξη των θεωρημάτων που είναι διατυπωμένα στην αρχή της επιστολής.

4.12 Θεώρηματα 12,13

Τα θεωρήματα 12,13[1] πραγματεύονται με τον νεοπαρουσιαζόμενο μηχανικό τρόπο τον όγκο του κυλινδρικού ¨νυχιού¨ που είναι το πρώτο από τα δύο στερεά που παρουσιάστηκε στην αρχή της επιστολής.Περνάμε κατευθείαν στη γνώριμη δομή μας.

4.12.1 1ο μέρος

Βοηθητικές προτάσεις απαραίτητες για τη μελέτη του 12ου,13ου θεωρήματος

12.1 Η πρόταση 1.3 του 1ου θεωρήματος.

12.2 Τα τρίγωνα και τα παραλληλόγραμμα τα οποία έχουν το ίδιο ύψος, έχουν λόγο εμβαδών ίσο προς το λόγο των βάσεων.

-*Στοιχεία Ευκλείδη,* VI,1

12.3 Δύο παραλληλεπίπεδα με ίσα ύψη είναι ανάλογα των βασεών τους.

-*Στοιχεία Ευκλείδη,* ΞI,32

4.12.2 2ο μέρος

Αρχαίο κείμενο

(Θεώρημα 12)

Ἐὰν εἰς πρίσμα ὀρθὸν τετραγώνους ἔχου βάσεις κύλιυδρος ἐγγραφῇ τὰς μέν βάσεις ἔχων ἐν τοῖς ἀπεναντίου τετραγώνοις, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν τῶν λοιπῶν παραλληλογράμμων τεσσάρων ἐπιπέδων ἐφαπτομένην, διὰ δὲ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ὁς ἐστι βάσις τοῦ κυλίυδρου, καὶ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἀπεναντίου τετραγώνου ἐπίπεδον ἀχθῇ, ὅτι τὸ ἀποτμηθέν σχῆμα ὑπὸ τοῦ ἀχθέντος ἐπιπέδου ἕκτου

[1] συμβατική αρίθμηση κατά Heiberg, στην πραγματικότητα πρόκειται για ένα και το αυτό θεώρημα

ἐστὶ μέρος τοῦ ὅλου πρίσματος, διὰ ***τοῦ τρόπου τούτου θεωρεῖται.Δείξαντες δὴ ἀναχωρήσομεν ἐπὶ τὴν διὰ τῶν γεωμετρούμενων ἀπόδειξιν αὐτοῦ****.Νοείσθω πρίσμα ὀρθὸν τετραγώνους ἔχον βάσεις καὶ ἐν τῷ πρίσματι κύλινδρος ἐγγεγραμμένος, ὡς εἴρηται, τμηθέντος δὲ τοῦ πρίσματος διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμηκός τὸ τμῆμα τοῦ κυλίνδρου τοῦ μὲν πρίσματος τοῦ τὸν κύλινδρον ἔχοντος τομὴ ἔστω τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμηκότος τὸ τμῆμα ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἠγμένου ἐπιπέδου ὀρθοῦ πρὸς τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀ-ποτετμηκὸς τὸ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου τμῆμα κοινὴ τομή ἔστω ἡ ΒΓ εὐθεῖα, ἄξων δὲ ἔστω τοῦ πρίσματος καὶ τοῦ κυλίνδρου ἡ ΓΔ εὐθεῖα, καὶ τεμνέτω αὐτ*

ὴν ἡ ΕΖ δίχα καὶ πρὸς ὀρθάς, καὶ διὰ τῆς ΕΖ ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθόν πρὸς τὴν ΓΔ.Ποιήσει δὴ τοῦτο ἐν μὲν τῷ πρίσματι τομὴν τετράγωνον, ἐν δὲ τῷ κυλίνδρῳ τομὴν κύκλου.Ἔστω οὖν τοῦ μὲν πρίσματος τομὴ τὸ ΜΝ τετράγωνον, τοῦ δὲ κυλίνδρου ὁ ΞΟΠΡ κύκλος, καὶ ἐφαπτέσθω ὁ κύκλος τῶν τοῦ τετραγώνου πλευρῶν κατὰ τὰ Ξ,Ο,Π,Ρ σημεῖα, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμηκότος τὸ τμὴμα ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ διὰ τῆς ΕΖ ἀχθέντος ἐπιπέδου ὀρθοῦ πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου κοι-νὴ τομή ἔστω ἡ ΚΛ εὐθεῖα.Τέμνει δὲ αὐτὴν δίχα ἡ ΠΘΞ. Ἤχθω δέ τις εὐθεῖα ἐν τῷ ΟΠΡ ἡμικυκλίῳ ἡ ΣΤ πρὸς ὀρθὰς οὖσα τῇ ΠΧ, καὶ ἀπὸ τῆς ΣΤ ἐπίπεδον ἀνασταθέν ὀρθὸν πρὸς τὴν ΞΠ ἐκβεβλήσθω ἐφ΄ ἑκάτερα τοῦ ἐπιπέδου, ἐν ᾧ ἐστιν ὁ ΞΟΠΡ κύκλος. Ποιήσει δὴ τοῦτο ἐν τῷ ἡμικυλίνδρῳ, οὗ ἐστι βάσις τὸ ΟΠΡ ἡμικύκλιον, ὕψος δὲ ὁ ἄξων τοῦ πρίσματος, τομὴν παραλληλογράμου,οὗ ἔσται μία μὲν πλευρὰ ἡ ἴση τῇ ΣΤ, ἡ δὲ ἑτέρα τῇ τοῦ κυλίνδρου πλευρᾷ, ποιήσει δὲ καὶ ἐν τῷ τμήματι τῷ ἀποτετμημένῳ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου τομὴν παραλληλόγραμμον , οὗ ἐστιν ἡ μὲν ἑτέρα πλευρὰ ἴση τῇ ΣΤ, ἡ δὲ ἑτέρα τῇ ΝΥ. Ἔστω δὲ οὕτως ἡ ΝΥ ἠγμένη ἐν τῷ ΔΕ παραλληλογράμμῳ παράλληλος οὖσα τῇ ΒΩ ἴσην ἀπολαμβάνουσα τὴν ΕΙ τῇ ΠΧ.Καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμον ἐστι τὸ ΕΓ , καὶ πα-ράλληλος ἡ ΝΙ τῇ ΘΓ,καὶ διηγμέναι εἰσίν αἱ ΕΘ,ΓΒ ,ἔστιν, ὡς ἡ ΕΘ πρὸς ΘΙ, οὕτως ἡ ΩΓ πρὸς ΓΝ, τουτέστιν ἡ ΒΩ πρὸς ΥΝ. Ὡς δὲ ἡ ΒΩ πρὸς ΥΝ, οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον τὸ γενόμενον ἐν τῷ ἡμικυλινδρίῳ πρὸς τὸ γενόμενον ἐν τῷ ἀποτμήματι τῷ ἀποτμηθέντι ἀπό τοῦ κυλίνδρου.Ἀμφότερων γὰρ τῶν παραλληλογράμμων ἡ αὐτὴ πλευρὰ ἐστιν ἡ ΣΤ.Καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΘΠ, ἡ δὲ ΙΘ τῇ

ΧΘ.Καὶ ἐπεί ἴση ἐστὶν ἡ ΠΘ τῇ ΘΞ, ὡς ἄρα ἡ ΘΞ πρὸς ΘΧ, οὕτως τὸ γενόμενον παραλληλόγραμμον ἐν τῷ ἡμικυλινδρίῳ πρὸς τὸ γενόμενον ἐν τῷ ἀποτμήματι τῷ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου.Νοείσθω μετακείμενον τὸ ἐν τῷ τμήματι παραλληλόγραμμον καὶ κείμενον κατὰ τὸ Ξ, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Ξ, καὶ ἔτι νοείσθω ζυγός ὁ ΠΞ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Θ.Ἰσορροπεῖ δὴ περὶ τὸ Θ σημεῖον τὸ παραλληλόγραμμον τὸ ἐν τῷ ἡμικυλινδρίῳ αὐτοῦ μένον τῷ παραλληλογράμμῳ τῷ γενομένῳ ἐν τῷ ἀποτμήματι τῷ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου μετενεχθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Ξ οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Ξ σημεῖον. Καὶ ἐπεὶ ἐστι τοῦ μὲν παραλληλογράμμου τοῦ γενομένου ἐν τῷ τμήματι τῷ ἀποτμηθέντι μετενηνεγμένου κέντρον τοῦ βάρους τὸ Ξ, καὶ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ΞΘ πρὸς ΘΧ, ὃν τὸ παραλληλόγραμμον, οὗ εἴπομεν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Χ, πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον, οὗ εἴπομεν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Ξ, ἰσορροπήσει ἄρα περὶ τὸ Θ παραλληλόγραμμον, οὗ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Χ, τῷ παραλληλογράμμῳ,οὗ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Ξ. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι καὶ, ὅταν ἄλλη τις ἀχθῇ ἐν τῷ ΟΠΡ ἡμικυκλίῳ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΠΘ καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν πρὸς τὴν ΠΘ καὶ ἐκβληθῇ ἐφ᾽ ἑκάτερα τοῦ ἐπιπέδου τοῦ, ἐν ᾧ ἐστιν ὁ ΞΟΠΡ κύκλος, ὅτι τὸ γινόμενον παραλληλόγραμμον ἐν τῷ ἡμικυλινδρίῳ ἰσόρροπον περὶ τὸ Θ σημεῖον αὐτοῦ μένον τῷ παραλληλογράμμῳ τῷ γενομένῳ ἐν τῷ τμήματι τῷ ἀποτμηθέντι ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου μετενεχθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Ξ οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Ξ σημεῖον. Καὶ πάντα ἄρα τὰ παραλληλόγραμμα τὰ γενόμενα ἐν τῷ ἡμικυλινδρίῳ αὐτοῦ μένοντα ἰσορροπήσει περὶ τὸ Θ σημεῖον πᾶι τοῖς παραλληλογράμμοις τοῖς γενομένοις ἐν τῷ τμήματι τῷ ἀποτμηθέντι ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου μετενηνεγμένοις καὶ κειμένοις τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Ξ σημεῖον. Ὥστε ἰσορροπεῖν καὶ τὸ ἡμικυλίνδριον αὐτοῦ μένον περὶ τὸ Θ σημεῖον τῷ τμήματι τῷ ἀποτμηθέντι μετενεχθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατ᾽ὰ τὸ Ξ οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τὸ Ξ σημεῖον.

(Θεώρημα 13)

Ἔστω δὴ πάλιν τὸ ὀρθόν πρὸς τὸν ἄξονα παραλληλόγραμμον τὸ ΜΝ καὶ ὁ κύκλος ὁ ΞΟΠΡ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΜ,ΘΗ, καὶ ἀνεστάτω ἀπ᾽ αὐτῶν ἐπίπεδα ὀρθὰ πρὸς τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστι τὸ

ΟΠΡ ἡμικύκλιον, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ εἰρημένα ἐπίπεδα. Ἔσται δὴ τι πρίσμα βάσιν μὲν ἔχον τηλικαύτην, ἡλίκη ἐστὶ τὸ ΘΜΗ τρίγωνον, ὕψος δὲ ἴσον τῷ ἄξονι τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἐστι τὸ πρίσμα τοῦτο τέταρτον μέρος τοῦ ὅλου πρίσματος τοῦ περιέχοντος τὸν κύλινδρον. Ἤχθωσαν δὲ τινες εὐθεῖαι ἐν τῷ ΟΠΡ ἡμικυκλίῳ καὶ ἐν τῷ ΜΝ τετραγώνῳ αἱ ΚΛ,ΤΥ ἴσον ἀπέχουσαι τῆς ΠΞ. Τέμνουσιν δὴ αὗται τὴν μὲν τοῦ ΟΠΡ ἡμικυκλίου περιφέρειαν κατὰ τὰ Κ,Τ σημεῖα, τὴν δὲ ΟΡ διάμετρον κατὰ τὰ Σ,Ζ, τὰς δὲ ΘΗ,ΘΜ κατὰ τὰ Φ,Χ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τῶν ΚΛ,ΤΥ ἐπίπεδα ὀρθὰ πρὸς τὴν ΟΡ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ᾽ ἑκάτερα τοῦ ἐπιπέδου, ἐν ᾧ ἐστιν ὁ ΞΟΠΡ κύκλος. Ποιήσει δὴ τὸ ἕτερον ἐν μὲν τῷ ἡμικυλινδρίῳ, οὗ βάσις μέν τὸ ΟΠΡ ἡμικύκλιον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρω, τομὴν παραλληλόγραμμον, οὗ ἐστιν μία μὲν πλευρὰ ἴση τῇ ΚΣ, ἡ δὲ ἑτέρα ἴση τῷ ἄξονι τοῦ κυλίνδρου, ἐν δὲ τῷ πρίσματι τῷ ΘΗΜ ὁμοίως παραλληλόγραμμον, οὗ ἔσται μία μὲν ἴση τῇ ΛΧ, ἡ δὲ ἑτέρα ἴση τῷ ἄξονι. Διὰ δὲ τὰ αὐτὰ ἐν τῷ αὐτῷ ἡμικυλινδρίῳ ἔσται τι παραλληλόγραμμον, οὗ ἐστι μία μὲν πλευρὰ ἴση τῇ ΤΖ, ἡ δὲ ἑτέρα ἴση τῷ ἄξονι τοῦ κυλίνδρου, ἐν δὲ τῷ πρίσματι παραλληλόγραμμον, οὗ ἐστιν ἡ μὲν μία πλευρά ἴση τῇ ΥΦ, ἡ δὲ ἑτέρα ἴση τῷ ἄξονι τοῦ κυλίνδρου...

(εδώ το αρχαίο κείμενο διακόπτεται απότομα)

Ερμηνευτικά σχόλια επί του αρχαίου κειμένου

¨*...τοῦ τρόπου τούτου θεωρεῖται.Δείξαντες δὴ ἀναχωρήσομεν ἐπὶ τὴν διὰ τῶν γεωμετρούμενων ἀπόδειξιν αὐτοῦ.*¨:δηλαδή αφού δείξουμε το θεώρημα με το μηχανικό τρόπο θα προχωρήσουμε στη γεωμετρική απόδειξή του.

4.12.3 3ο μέρος

Μαθηματική μετάφραση των θεωρημάτων

Εάν σε ορθό πρίσμα με τετράγωνες βάσεις εγγραφεί κύλινδρος με τις βάσεις του στα απέναντι τετράγωνα και την επιφάνειά του να εφάπτεται των υπόλοιπων τεσσάρων παραλληλόγραμμων του πρίσματος, και εάν διαμέσου του κέντρου του κύκλου ο οποίος είναι η βάση του κυλίν-

δρου και μιας πλευράς του απέναντι τετραγώνου αχθεί ένα επίπεδο, το στερεό που σχηματίζεται από αυτό το επίπεδο (επίπεδο 1),δηλαδή το ¨κυλινδρικό νύχι¨, θα είναι το $\frac{1}{6}$ του όλου πρίσματος.

4.12.4 4ο μέρος

Έφοδος

Θεώρημα 12

Ας νοηθεί ένα ορθό πρίσμα με έναν κύλινδρο εγγεγραμμένο σε αυτό όπως δηλώθηκε.

Ας τμηθεί το πρίσμα από επίπεδο διερχόμενο από τον άξονά του κάθετο προς το επίπεδο το οποίο έχει τμήσει το τμήμα του κυλίνδρου (δηλαδή παράλληλο στη σελίδα).Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΒ η τομή του πρίσματος που περιέχει τον κύλινδρο και η ευθεία ΒΓ η κοινή τομή του επιπέδου 1 (βλέπε παραπάνω) και του επιπέδου του παράλληλου στη σελίδα που μόλις αναφέραμε. (βλ. σχήμα 12.1)

Έστω ΓΔ ο άξονας του πρίσματος και του κυλίνδρου, και ας αχθεί η ΕΖ η οποία τον διχοτομεί κάθετα, και διαμέσου της ΕΖ ας αχθεί επίπεδο κάθετο στη ΓΔ. Το επίπεδο αυτό θα τμήσει το πρίσμα σε ένα τετράγωνο και τον κύλινδρο σε ένα κύκλο. (βλ. σχήμα 12.2)

Έστω ΜΝ το τετράγωνο και ΞΟΠΡ ο κύκλος (βλ. σχήμα 12.2),και έστω ότι ο κύκλος εφάπτεται στις πλευρές του τετραγώνου στα Ξ,Ο,Π,Ρ (Τα Ζ,Ε στο σχήμα 12.1 είναι ταυτόσημα με τα Ξ,Π, αντίστοιχα στο σχήμα 12.2). Έστω Θ το κέντρο του κύκλου.

Έστω ΚΛ η τομή του επιπέδου διαμέσου της ΕΖ, δηλαδή του επιπέδου του κάθετου στον άξονα του κυλίνδρου, και του επιπέδου που αποκόπτει το ζητούμενο κυλινδρικό τμήμα. Η ΚΛ διχοτομείται από την ΞΠ και περνάει από το μέσο της ΘΠ.(βλ.σχήμα 12.2).

Έστω ΣΤ, τυχαία χορδή του κύκλου, κάθετη στο ΘΠ στο σημείο Χ, και διαμέσου της ΣΤ ας αχθεί επίπεδο κάθετο στην ΞΠ.

Το αχθέν επίπεδο θα τμήσει τον ημικύλινδρο σε ένα παραλληλόγραμμο, η μία πλυρά του οποίου

θα είναι ίση με τη ΣΤ και η άλλη θα είναι μια γεννήτρια του κυλίνδρου. Θα τμήσει επίσης το ¨κυλινδρικό νύχι¨ σε ένα παραλληλόγραμμο, η μία πλευρά του οποίου θα είναι ίση με τη ΣΤ και η άλλη ίση και παράλληλη με την ΥΝ (στο σχήμα 12.1).

Η ΥΝ θα είναι παράλληλη στη ΒΩ και θα αποκόψει κατά μήκος της ΕΘ στο παραλληλόγραμμο ΔΕ, το τμήμα ΕΙ (σχ. 12.1) το οποίο ταυτίζεται με το ΠΧ (σχ. 12.2).

Τώρα,εφόσον το ΕθΓΩ είναι ένα παραλληλόγραμμο και η ΝΙ είναι παράλληλη στη ΘΓ,

$\frac{E\Theta}{\Theta I} = \frac{\Omega\Gamma}{\Pi N} = \frac{B\Omega}{\Upsilon N}$,Πρόταση (12.1,όμοια τρίγωνα ΥΓΝ και ΒΓΩ)

= (παραλληλόγραμμο στον ημικύλινδρο)/(παραλληλόγραμμο στο ¨νύχι¨). (Πρόταση 12.2)

Ισχύει ΕΘ=ΘΠ,ΘΙ=ΧΘ,ΠΘ=ΘΞ, επομένως από την ομοιότητα των τριγώνων ΥΓΝ και ΒΓΩ έυκολα προκύπτει,

$\frac{\Theta\Xi}{\Theta X}$=(παραλληλόγραμμο στον ημικύλινδρο)/(παραλληλόγραμμο στο ¨νύχι¨).

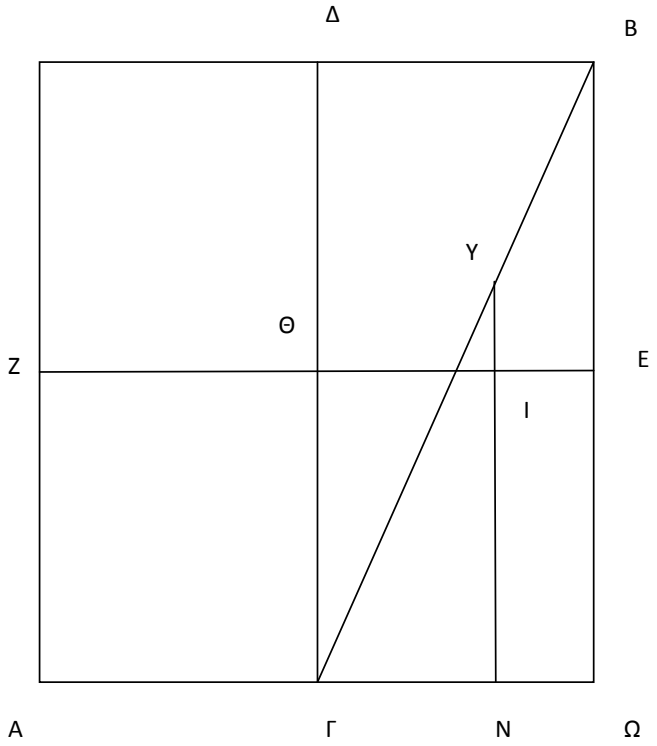
Ας νοηθεί ότι το παραλληλόγραμμο στο ¨νύχι¨ μεταφέρεται και τοποθετείται στο Ξ ώστε το Ξ να είναι το κέντρο βάρους του, και ας νοηθεί ότι η ΞΠ είναι ζυγός με μέσο το Θ.

Τότε, εφόσον Χ είναι το κέντρο βαρύτητας του παραλληλογράμμου στον ημικύλινδρο, προκύπτει από τα παραπάνω ότι το παραλληλόγραμμο στον ημικύλινδρο, εκεί που βρίσκεται, με το κέντρο βαρύτητάς του στο Χ, είναι σε ισορροπία ως προς το Θ με το παραλληλόγραμμο στο ¨νύχι¨ όταν τοποθετηθεί με το κέντρο βαρύτητάς του στο Ξ.

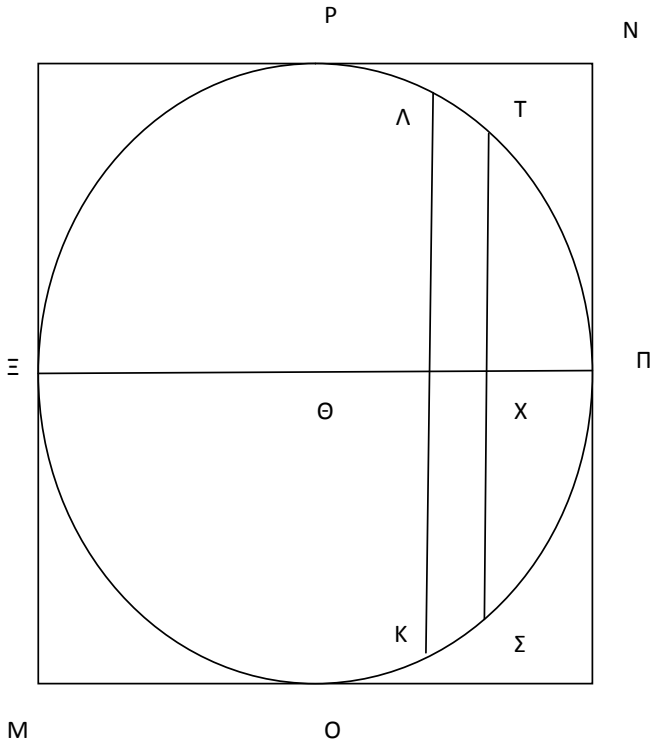
Ομοίως για όλα τα άλλα παραλληλόγραμμα που σχηματίζονται από κάθε επίπεδο κάθετο στην ΞΠ που διέρχεται από οποιαδήποτε χορδή του ημικυκλίου ΟΠΡ κάθετα στην ΞΠ.

Εάν τώρα πάρουμε όλα τα παραλληλόγραμμα που συνθέτουν τον ημικύλινδρο και το ¨κυλινδρικό νύχι¨ αντίστοιχα, προκύπτει ότι ο ημικύλινδρος, εκεί που βρίσκεται, είναι σε ισορροπία ως προς το Θ με το ¨νυχι¨ που αποκόπτεται, όταν το τελευταίο τοποθετηθεί με το κέντρο βαρύτητάς του στο Ξ.

Σχήμα 12.1



Σχήμα 12.2



Θεώρημα 13

Έστω τώρα το παραλληλόγραμμο ΜΝ, κάθετο στον άξονα του πρίσματος, και ας αχθεί σε αυτό ο κύκλος ΞΟΠΡ με διαμέτρους τις ΞΠ και ΟΡ. (βλ. σχήμα 12.3) Φέρω τις ΘΗ,ΘΜ και διαμέσου αυτών ας αχθούν επίπεδα κάθετα στο επίπεδο του κύκλου. Σχηματίζεται τότε ένα πρίσμα με τριγωνική βάση τη ΘΜΗ και ύψος ίσο με τον άξονα του κυλίνδρου. Το πρίσμα αυτό είναι το $\frac{1}{4}$ του αρχικού πρίσματος που περιγράφει τον κύλινδρο.(πρόταση 12.3)

Ας αχθούν οι ΛΚ,ΥΤ, παράλληλες και ισαπέχουσες από την ΞΠ, τέμνοντας τον κύκλο στα Κ,Τ, τη διάμετρο ΟΡ στα Σ,Ζ και τις ΘΗ, ΘΜ στα Χ,Φ, αντίστοιχα.

Διαμέσου των ΛΚ,ΥΤ ας αχθούν επίπεδα κάθετα στην ΟΡ. Τα επίπεδα αυτά θα σχηματίσουν

σαν τομές στον ημικύλινδρο ΟΠΡ και στο πρίσμα ΘΜΗ τέσσερα παραλληλόγραμμα στα οποία τα ύψη τους θα είναι ίσα προς τον άξονα του κυλίνδρου και οι άλλες πλευρές ίσες προς τις ΚΣ,ΤΖ,ΛΧ,ΥΦ, αντίστοιχα...(κενό στο αρχαίο κείμενο)

(η έφοδος συμπληρώνεται εύκολα, βλ. *The Method*,T.Heath,p.39-40,Dover publications,2002)

Ο Αρχιμήδης θέλει να δείξει ότι ο ημικύλινδρος ΟΠΡ, εκεί που βρίσκεται, ισορροπεί το πρίσμα ΘΜΗ, εκεί που βρίσκεται, γύρω από το Θ σαν σταθερό σημείο.

Πρέπει πρώτα να δείξει ότι (1) το παραλληλόγραμμο με πλευρά ΚΣ και (2) το παραλληλόγραμμο με πλευρά ΛΧ, εκεί που βρίσκονται, ισορροπούν ως προς το Σ, ή με άλλα λόγια, τα ευθ. τμήματα ΣΚ,ΛΧ, εκεί που βρίσκονται, ισορροπούν ως προς το Σ.

Τώρα,(ακτίνα κύκλου ΞΟΠΡ)^2 $=\Sigma K^2 + \Sigma\Theta^2$, ή

$\Sigma\Lambda^2 = \Sigma K^2 + \Sigma X^2$.

Επομένως,$\Sigma\Lambda^2 - \Sigma X^2 = \Sigma K^2$.

Και αντίστοιχα $(\Sigma\Lambda + \Sigma X).\Lambda X = \Sigma K^2$,

ενώ $\frac{1}{2}(\Lambda\Sigma + \Sigma X)/\frac{1}{2}\Sigma K = \frac{\Sigma K}{\Lambda X}$.

Το $\frac{1}{2}(\Lambda\Sigma + \Sigma X)$ είναι η απόσταση του κέντρου βαρύτητας της ΛΧ από το Σ, ενώ το $\frac{1}{2}\Sigma K$ είναι η απόσταση του κέντρου βαρύτητας του ΣΚ από το Σ.

Επομένως το ΣΚ και το ΛΧ, εκεί που βρίσκονται, ισορροπούν ως προς το Σ.

Παρομοίως για όλα τα αντίστοιχα παραλληλόγραμμα. Παίρνοντας όλα τα παραλληλόγραμμα στον ημικύλινδρο και το πρίσμα αντίστοιχα, βρίσκουμε ότι ο ημικύλινδρος ΟΠΡ και το πρίσμα ΘΜΗ, εκεί που βρίσκονται, ισορροπούν ως προς το Θ. Από το αποτέλεσμα αυτό και από αυτό του θεωρήματος 12 παραπάνω βρίσκουμε αμέσως τον όγκο του ¨νυχιού¨.Γιατί στο θεώρημα 12 το ¨κυλινδρικό νύχι¨ τοποθετημένο με το κέντρο βαρύτητάς του στο Ξ, ισορροπεί τον ημικύλινδρο ως προς το Θ εκεί που βρίσκεται.Από το θεώρημα 13 μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον ημι-

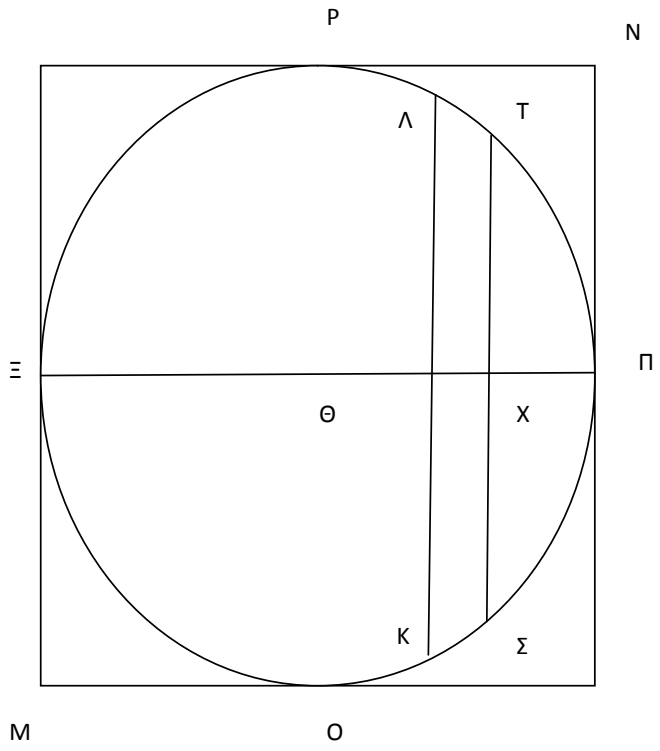
κύλινδρο εκεί που βρίσκεται με το πρίσμα ΘΜΗ.Το κέντρο βαρύτητας του πρίσματος θα είναι τότε σε ένα σημείο έστω Ψ πάνω στη ΘΠ έτσι ώστε,

ΘΨ=$\frac{2}{3}$ΘΠ. Άρα, θεωρώντας το πρίσμα να εφαρμόζεται στο κέντρο βαρύτητάς του, έχουμε

(κυλινδικό ¨νύχι¨)/(πρίσμα)=$\frac{2}{3}\frac{\Theta\Pi}{\Theta X} = \frac{2}{3}$,δηλαδή

(κυλινδικό ¨νύχι¨)=$\frac{2}{3}$(πρίσμα ΘΜΗ)=$\frac{1}{6}$(αρχικό πρίσμα).

Σχήμα 12.3



4.13 Θεώρημα 14

Παραθέτουμε εδώ το θεώρημα 14 της *Μεθόδου* το οποίο χρησιμοποιεί ο Αρχιμήδης ως ενδιάμεσο θεώρημα προκειμένου να καταλήξει στην αυστηρή γεωμετρική απόδειξη για το ¨κυλινδρικό νύχι¨ στο θεώρημα 15. Το θεώρημα αυτό έχει ιδιαίτερη αξία γιατί είναι το μόνο γνωστό θεώρημα στο οποίο ο Αρχιμήδης κάνει αμιγή χρήση των *αδιαιρέτων*, αλλά και γιατί με τις νέες μεθόδους μελέτης του Παλίμψηστου (με τη χρήση υπεριώδους ακτινοβολίας)μας αποκάλυψε χωρία στα οποία ο Αρχιμήδης πραγματεύεται σύνολα με άπειρα στοιχεία. Περισσότερα στις σελίδες που ακολουθούν.

Πλήρες Αρχαίο Κείμενο[1]

Ἔστω πρίσμα ὀρθὸν τετράγωνον ἔχον βάσιν, καὶ ἔστω αὐτοῦ μια τῶν βάσεων τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ πρίσμα κύλινδρος, καὶ ἔστω τοῦ κυλίνδρου βάσις ὁ ΕΖΗΘ κύκλος ἐφαπτόμενος τοῦ τετραγώνου, διὰ δὲ τοῦ κέντρου αὐτοῦ καὶ τῆς τοῦ τετραγώνου πλευρᾶς τῆς ἐν τῷ κατεναντίον ἐπιπέδῳ τοῦ ΑΒΓΔ τῆς κατὰ τὴν ΓΔ ἐπίπεδον ἤχθω.Ἀποτεμεῖ δὴ τοῦτο ἀπὸ τοῦ ὅλου πρίσματος ἄλλο πρίσμα, ὃ ἔσται τέταρτον μέρος τοῦ ὅλου πρίσματος.Αὐτὸ δὲ τοῦτο ἔσται περιεχόμενον ὑπὸ τριῶν παραλληλογράμμων καὶ δύο τριγώνων κατεναντίον ἀλλήλοις.Γεγράφθω δὴ ἐν τῷ ΕΖΗ ἡμικυκλίῳ ὀρθογωνίου κώνου τομή, διάμετρος δὲ αυτῆς ἔσται ἡ ΖΚ, ἔστω δὲ καὶ παρ ᾽ὴν δύνανται αἱ καταγόμεναι ἐν τῇ τομῇ αὐτὴ ἡ ΖΚ καὶ ἤχθω τις ἐν τῷ ΔΗ παραλληλογράμμῳ ἡ ΜΝ παράλληλος οὖσα τῇ ΚΖ.Τεμεῖ δὴ αὕτη τὴν μὲν τοῦ ἡμικυκλίου περιφέρειαν κατὰ τὸ Σ τὴν δὲ τοῦ κώνου τομὴν κατὰ τὸ Λ.Καί ἐστιν ἴσον τὸ ὑπὸ ΜΝΛ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΣ.Τοῦτο γὰρ ἐστι σαφές.Διὰ τοῦτο δὴ ἔσται, ὡς ἡ ΜΝ πρὸς ΝΛ οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΣ.Καὶ ἀπὸ τὴς ΜΝ ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθὸν πρὸς τὴν ΕΗ.Ποιήσει δὴ τὸ ἐπίπεδον ἐν τῷ πρίσματι τῷ ἀποτμηθέντι ἀπὸ τοῦ ὅλου πρίσματος

[1] Πηγή μας για το πλήρες αρχαίο κείμενο ήταν η ακόλουθη δημοσίευση της ερευνητικής ομάδας που μελετάει το Παλίμψηστο του Αρχιμήδη, Netz, Reviel; Saito, Ken; Tchernetska, Natalie: A new reading of Method Proposition 14: preliminary evidence from the Archimedes palimpsest. I. SCIAMVS 2 (2001), 9-29.

τομὴν τρίγωνον ὀρθογώνιον οὗ ἔσται μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ἡ ΜΝ, ἡ δὲ ἑτέρα ἡ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ ὀρθὴ πρὸς τὴν ΓΔ ἀναγομένη ἀπὸ τοῦ Μ ἴση τῷ ἄξονι τοῦ κυλίνδρου, ἡ δέ ὑποτείνουσα ἐν αὐτῷ τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ. Ποιήσει δὴ καὶ ἐν τῷ τμήματι τῷ ἀποτμηθέντι ἀπὸμ τοῦ κυλίνδρου ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἀχθέντος διὰ τῆς ΕΗ καὶ τῆς τοῦ τετραγώνου πλευρᾶς τῆς κατεναντίου τῇ ΓΔ τομὴν τρίγωνον ὀρθογώνιον, οὗ ἔσται μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ἡ ΝΣ, ἡ δὲ ἑτέρα ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου ἀναγομένη ἀπὸ τοῦ Σ ὀρθὴ πρὸς τὸ ΔΗ ἐπίπεδον, ἡ δὲ ὑποτείνουσα ἐν τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ, καὶ ἔστιν τὰ τρίγωνα ὅμοια.Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΜΝ,ΝΛ τῷ ἀπὸ ΝΣ, τοῦτο γὰρ φανερόν, ὡς εἴρηται, ἔσται ὡς ἡ ΜΝ πρὸς ΝΛ οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΣ,ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΣ, οὕτως τὸ ἀπό τῆς ΜΝ τρίγωνον ἐν τῷ ὅλῳ ἀποτμηθέντι πρίσματι πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΝΣ τρίγωνον τὸ ἐν τῷ ἀποτεμνομένῳ τὸ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου ἀφηρημένον.Ὡς ἄρα ἡ ΜΝ πρὸς ΝΛ οὕτως τὸ τρίγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον.Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἐάν ἄλλη τις ἀχθῇ ἐν τῷ ΔΗ παραλληλογράμμῳ παρὰ τὴν ΚΖ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθὸν πρὸς τὴν ΕΗ, ὅτι ἔσται ὡς τὸ τρίγωνον τὸ γενόμενον ἐν τῷ πρίσματι πρὸς τὸ τρίγωνον ἐν τῷ ἀποτμήματι τὸ ἐν τῷ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου οὕτως ἡ ἀχθείσα ἐν τῷ ΔΗ παραλληλογράμμω παράλληλος οὖσα τῇ ΚΖ πρὸς τὴν ἀπολληφθεῖσαν ἀπὸ τῆς ΗΖ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς ΕΗ διαμέτρου.Συμπληρωθέντος οὖν τοῦ ΔΗ παραλληλογράμμου ὑπὸ τῶν ἀγομένων παρὰ τὴν ΚΖ, καὶ τοῦ τμήματος τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς ΕΗ διαμέτρου ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ἐν τῷ τμήματι.Συμπληρωθέντος δὲ καὶ τοῦ πρίσματος ὑπὸ τῶν τριγώνων τῶν γενομένων ἐν αὐτῷ, καὶ τοῦ τμήματος τοῦ ἀποτμηθέντος ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου. Καὶ ἔστι τινὰ μεγέθη ἴσα ἀλλήλοις, τὰ τρίγωνα τὰ ἐν τῷ πρίσματι, καὶ ἔστι ἑτέρα μεγέθη, αἵ εἰσιν εὐθεῖαι ἐν τῷ ΔΗ παραλληλογράμμῳ παράλληλοι οὖσαι τῇ ΖΚΘ, ἃ καὶ ἀλλήλοις ἴσα ἐστὶ, καὶ πλήθει ἴσαι τοῖς ἐν τῷ πρίσματι τριγώνοις. Ἔσται δὲ καὶ ἑτέρα τρίγωνα τὰ ἐν τῷ τμήματι τῷ ἀποτμηθέντι ἴσα τῷ πλήθει τοῖς γενομένοις ἐν τῷ πρίσματι τριγώνοις. Καὶ αἱ ἑτέραι εὐθεῖαι ἀπολαμβανόμεναι ἀπὸ τῶν ἀγομένων παρὰ τὴν ΚΖ μεταξὺ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς ΕΗ εἰςὶ ἴσαι πλῆθει ταῖς ἐν τῷ ΔΗ παραλληλογράμμω ἠγμέναις παρὰ τὴν ΚΖ. Καὶ ἔσται ὡς πάντα τὰ τρίγωνα τὰ ἐν τῷ πρίσματι πρὸς πάντα τὰ τρίγωνα

τὰ ἐν τῷ ἀποτμηθέντι τῷ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου ἀφηρημένα οὕτως πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι αἱ ἐν τῷ ΔΗ παραλληλογράμμῳ πρὸς πάσας τὰς εὐθείας τὰς μεταξὺ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς ΕΗ εὐθείας.Καὶ ἐκ μὲν τῶν ἐν τῷ πρίσματι τριγώνων σύγκειται τὸ πρίσμα, ἐκ δὲ τῶν ἐν τῷ ἀποτμήματι ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου τὸ ἀπότμημα, ἐκ δὲ τῶν εὐθείων τῶν ἐν τῷ ΔΗ παραλληλογράμμω παρὰ τὴν ΚΖ τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον, ἐκ δὲ τῶν εὐθείων μεταξὺ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς ΕΗ τὸ τμῆμα τῆς παραβολῆς. Ὡς ἄρα τὸ πρίσμα πρὸς τὸ ἀπότμημα τὸ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου οὕτως τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΖΗ τμῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς ΕΗ εὐθείας.Ἡμιόλιον δὲ τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον τοῦ τμήματος τοῦ περιεχόμενου οὕτως ὑπὸ τὴς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς ΕΗ ευθείας.Δεδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς πρότερον ἐκδεδομένοις.Ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ πρίσμα τοῦ ἀποτμήματος τοῦ ἀφηρημένου ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου.Οἵων ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κυλίνδρου δύο, τοιούτων ἐστὶν τὸ πρίσμα τριῶν.Οἵων δὲ τὸ πρίσμα τριῶν τοιούτων ἐστὶν τὸ ὅλου πρίσμα τὸ περί ὅλου τὸν κύλιυδρου ΙΒ διὰ τὸ Δ εἶναι τὸ ἕτερου τοῦ ἑτέρου. Οἵων ἄρα τὸ ἀπότμημα τοῦ κυλίνδρου δύο, τοιούτων ἐστίν τὸ ὅλου πρίσμα ΙΒ.Ὥστε τὸ τμῆμα τὸ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ ὅλου κυλίνδρου ἕκτου μέρος ἐστὶ τοῦ ὅλου πρίσματος.

Απόδοση στα νεά ελληνικά

Έστω ορθό πρίσμα με τετράγωνη βάση, και έστω μια από τις βάσεις αυτού το τετράγωνο ΑΒΓΔ.Ας εγγραφεί κύλινδρος στο πρίσμα και έστω η βάση του κυλίνδρου ο κύκλος ΕΖΗΘ ο οποίος εφάπτεται του τετραγώνου.Διαμέσου του κέντρου του κύκλου και της πλευράς του τετραγώνου απέναντι από το τετράγωνο ΑΒΓΔ, δηλαδή της πλευράς πάνω από τη ΓΔ, ας αχθεί επίπεδο (επίπεδο 1).Το επίπεδο αυτό θα αποκόψει από ολόκληρο το πρίσμα άλλο πρίσμα το οποίο θα είναι το $\frac{1}{4}$ του αρχικού πρίσματος.Το πρίσμα αυτό θα περικλείεται από 3 παραλληλόγραμμα και δύο τρίγωνα το ένα απέναντι από το άλλο.Ας εγγραφεί τώρα παραβολή στο ημικύκλιο ΕΖΗ,με διάμετρο αυτής

την ΖΚ και ας είναι η ΖΚ η ευθεία εκείνη για την οποία ισχύει $HK.ZK = ZK^2$.[2]Ας αχθεί επίσης στο παραλληλόγραμμο ΔΗ ευθεία ΜΝ, παράλληλη στην ΚΖ.Αυτή θα αποκόψει την περιφέρεια του ημικυκλίου στο Σ και την παραβολή στο Λ. Και ισχύει $MN.N\Lambda = N\Sigma^2$.Γιατί αυτό είναι σαφές.[3]Εξαιτίας αυτού ισχύει $\frac{MN}{N\Lambda} = \frac{MN^2}{N\Sigma^2}$.[4]Από τη ΜΝ ας αχθέι τώρα επίπεδο κάθετο στην ΕΗ (επίπεδο 2).Το επίπεδο αυτό θα σχηματίσει σαν τομή στο πρίσμα το αποτμηθέν από το αρχικό (αυτό δηλαδή που είπαμε πως είναι το 1/4 του αρχικού πρίσματος) ορθογώνιο τρίγωνο,η μία πό τις κάθετες πλευρές του οποίου είναι η ΜΝ ενώ η άλλη είναι η ευθεία που άγεται από το Μ στο επίπεδο της ΓΔ που είναι κάθετο στην πλευρα ΓΔ και είναι ίση με τον άξονα του κυλίνδρου.Η υποτείνουσα του τριγώνου θα βρίσκεται στο αρχικό αποκόπτον επίπεδο (επίπεδο 1).Το επίπεδο 2 θα αποκόψει επίσης από το αποτμηθέν κυλινδρικό τμήμα ένα 2ο ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές τη ΝΣ και την ευθεία που άγεται από το Σ και είναι κάθετη στο επίπεδο του παραλληλογράμμου ΔΗ,ενώ η υποτείνουσά του θα βρίσκεται στο επίπεδο 1.Τα 2 αυτά ορθογώνια τρίγωνα θα είναι όμοια.[5] Και αφού ισχύει $MN.N\Lambda = N\Sigma^2$,το οποίο είναι φανερό όπως προλέχθηκε,θα ισχύει $\frac{MN}{N\Lambda} = \frac{MN^2}{N\Sigma^2}$.[6]

Επίσης θα ισχύει η σχέση $\frac{MN^2}{N\Sigma^2}$ = (τρίγωνο του αποτμηθέντος πρίσματος με βάση τη ΜΝ)/(τρίγωνο κυλινδρικού τμήματος με βάση τη ΝΣ).

[2]βλ. σχετικά υποσημείωση 5 στο Netz, Reviel; Saito, Ken; Tchernetska, Natalie: A new reading of Method Proposition 14: preliminary evidence from the Archimedes palimpsest. I. SCIAMVS 2 (2001), part 2, p.111

[3]Αφού ΜΝ=ΚΣ (βλ.σχήμα) έχω $MN^2 = K\Sigma^2$,έτσι $MN.N\Lambda + MN.M\Lambda = ZM^2 + N\Sigma^2$.Όμως από ιδιότητα της παραβολής $MN.M\Lambda = MZ^2$.Επομένως τελικά προκύπτει το ζητούμενο, $MN.N\Lambda = N\Sigma^2$.

[4]Έχω αναλυτικά,$MN.N\Lambda = N\Sigma^2 \Rightarrow \frac{MN}{N\Sigma} = \frac{N\Sigma}{N\Lambda} \Rightarrow \frac{MN^2}{N\Sigma} = \frac{MN.N\Sigma}{N\Lambda} \Rightarrow \frac{MN^2}{N\Sigma^2} = \frac{MN}{N\Lambda}$.

[5]Εδώ τελειώνει θα λέγαμε το κατασκευαστικό κομμάτι, το σύνολο δηλαδή των οδηγιών που παρέχει ο Αρχιμήδης προκειμένου να κατασκευάσουμε το κατάλληλο γεωμετρικό σχήμα για να κατανοήσουμε καλύτερα το θεώρημα.Ακολουθεί η επεξεργασία με τη χρήση των αδιαίρετων.

[6]Στο Netz, Reviel; Saito, Ken; Tchernetska, Natalie: A new reading of Method Proposition 14: preliminary evidence from the Archimedes palimpsest. I. SCIAMVS 2 (2001),part 2,p.120-121 οι Netz et. al απορούν με την επανάληψη της συγκεκριμένης πρότασης από τον Αρχιμήδη.Αφενός αγνοούν το γεγονός ότι η πραγμάτευση του θεωρήματος από τον Αρχιμήδη περιλαμβάνει κατασκευαστικό κομμάτι σχήματος του οποίου η επαναληφθείσα σχέση είναι σημαντική για να καθοδηγήσει τον αναγνώστη στην εκλογή της κατάλληλης παραβολής στο γεωμετρικό του σχήμα.Είναι τυπικό της Αρχιμήδειας επίλυσης η σχολαστικότητα που αρχίζει με την κατασκευαστική εκφώνηση και συνεχίζεται με το μαθηματικό κομμάτι όπου πλέον η σχέση ενσωματώνεται στην ανάλυση-διερεύνηση του προβλήματος.Η υπόθεση περί απρόσεκτου-αδαούς σχολιαστή του Αρχιμήδη όπως αυτή διατυπώνεται από τους παραπάνω κύριους μελετητές της Μεθόδου είναι περιττή.

Και άρα (τρίγωνο πρίσματος)/(τρίγωνο κυλινδρικού τμήματος)=$\frac{MN}{N\Lambda}$.

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι εάν αχθεί άλλη ευθεία στο παραλληλόγραμμο ΔΗ, παράλληλη στην ΚΖ και από αυτήν ορθώσουμε επίπεδο κάθετο στην ΕΗ θα ισχύει, (τρίγωνο πρίσματος)/(τρίγωνο κυλινδρικού τμήματος)=(οποιαδήποτε παράλληλη ευθεία στην ΚΖ στο παραλληλόγραμμο ΔΗ)/(οποιαδήποτε ευθεία μεταξύ παραβολής ΕΖΗ και της διαμέτρου αυτής ΕΗ).[7]

Το ΔΗ παραλληλόγραμμο συμπληρώνεται από όλες τις ευθείες τις παράλληλες στην ΚΖ (τύπου ΜΝ δηλαδή) και το παραβολικό χωρίο ΕΖΗ από όλες τις ευθείες όπως η ΝΛ.

Το πρίσμα συμπληρώνεται επίσης από όλα τα τρίγωνα τα γενόμενα σε αυτό (με βάση δηλαδή την ΜΝ) και το κυλινδρικό τμήμα από όλα τα τρίγωνα που το αποτελούν (όπως αυτό με βάση την ΝΣ).

Και υπάρχουν κάποια μεγέθη ίσα μεταξύ τους, τα τρίγωνα του πρίσματος.

Και υπάρχουν άλλα μεγέθη, οι ευθείες οι παράλληλες στην ΚΖ στο παραλληλόγραμμο ΔΗ, οι οποίες είναι ίσες μεταξύ τους και ίσες ως προς το πλήθος με τα τρίγωνα του πρίσματος.

Και υπάρχουν και άλλα τρίγωνα, τα τρίγωνα του κυλινδικού τμήματος, τα οποία είναι ίσα ως προς το πλήθος με τα τρίγωνα του πρίσματος.

Και άλλες ευθείες, οι ευθείες που άγονται μεταξύ της παραβολής ΕΖΗ και της διαμέτρου ΕΗ οι οποίες είναι ίσες ως προς το πλήθος με τις ευθείες στο παραλληλόγραμμο ΔΗ, τις παράλληλες στην ΚΖ.

Και ισχύει (όλα τα τρίγωνα του πρίσματος)/(όλα τα τρίγωνα του κυλινδρικού τμήματος)=(όλες οι ευθείες στο παραλληλόγραμμο ΔΗ)/(όλες οι ευθείες μεταξύ της παραβολής ΕΖΗ και της διαμέτρου ΕΗ).

Και το πρίσμα συντίθεται από τα τρίγωνα του πρίσματος, από τα τρίγωνα του κυλινδρικού τμήματος το τμήμα αυτό, από τις ευθείες τις παράλληλες στην ΚΖ το ΔΗ παραλληλόγραμμο και από

[7] Δηλαδή της (τυχαίας) ευθείας ΝΛ στο σχήμα μας.

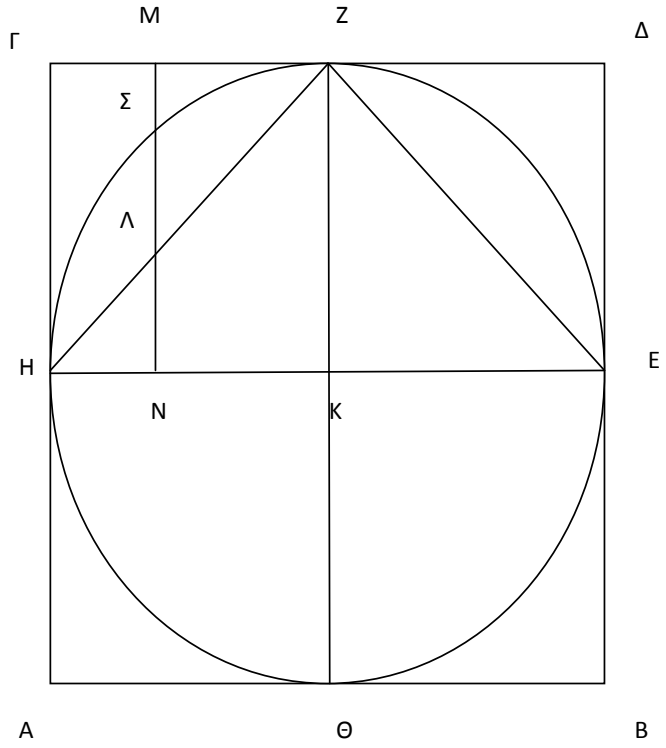
τις ευθείες μεταξύ της παραβολής ΕΖΗ και της διαμέτρου ΕΗ το παραβολικό χωρίο.

Επομένως, (πρίσμα)/(κυλινδρικό τμήμα)=(παραλληλόγραμμο ΔΗ)/(παραβολικό χωρίο ΕΖΗ).

Αλλά, (παραλληλόγραμμο ΔΗ)=$\frac{3}{2}$(παραβολικού χωρίου ΕΖΗ), γιατί αυτό έχει δειχθεί σε προηγούμενο έργο (Τετραγωνισμός Παραβολής).

Άρα (πρίσμα)=$\frac{3}{2}$(κυλινδρικού τμήματος).Επομένως αφού το (πρίσμα)=$\frac{1}{4}$(αρχικού πρίσματος) προκύπτει εύκολα ότι το ¨κυλινδρικό νύχι¨ είναι το $\frac{1}{6}$ του αρχικού πρίσματος.

Σχήμα 14.1



Ανάλυση του θεωρήματος

Η δομή του θεωρήματος είναι ευδιάκριτη.Μέχρι τη φράση ¨*...καὶ ἔστιν τὰ τρίγωνα ὅμοια.*¨ μπορούμε να αναγνωρίσουμε,όπως έχουμε ήδη αναφέρει παραπάνω (βλ.υποσημειώσεις 5 και 6), ενα κατασκευαστικό κομμάτι, όπου ο Αρχιμήδης απλά προβαίνει στο σχεδιασμό του κατάλληλου γεωμετρικού σχήματος (βλ. σχήμα 14.1 όπου το τρίγωνο ΕΖΗ αντιστοιχεί στην παραβολή ΕΖΗ). Ακολουθεί το κυρίως μέρος της πραγμάτευσης του θεωρήματος με τη θεωρία των αδιαιρέτων στο οποίο και θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας.Το κομμάτι αυτό δομείται ως εξής,

- △πρίσματος: △κυλινδρικού νυχιού = |παραλληλόγραμμου:|παραβολικού χωρίου, (σχέση 1)
- το □ΔΗ συμπληρώνεται από όλα τα |παραλληλόγραμμου, (σχέση 2)
- το ∩ΕΖΗ συμπληρώνεται από όλα τα |παραβολικού χωρίου, (σχέση 3)
- το πρίσμα συμπληρώνεται από όλα τα △πρίσματος, (σχέση 4)
- το ¨κυλ.νύχι¨ συμπληρώνεται από όλα τα △κυλινδρικού νυχιού, (σχέση 5)
- τα △πρίσματος είναι μεγέθη ίσα μεταξύ τους, (σχέση 6)
- τα |παραλληλόγραμμου είναι άλλα μεγέθη ίσα μεταξύ τους, (σχέση 7)
- τα |παραλληλόγραμμου είναι ίσα ως προς το πλήθος με τα △πρίσματος, (σχέση 8)
- τα △κυλινδρικού νυχιού είναι ίσα ως προς το πλήθος με τα △πρίσματος, (σχέση 9)
- τα |παραλληλόγραμμου είναι ίσα ως προς το πλήθος με τα |παραβολικού χωρίου, (σχέση 10)
- όλα τα △πρίσματος: όλα τα △κυλινδρικού νυχιού = όλα τα |παραλληλόγραμμου: όλα τα |παραβολικού χωρίου, (σχέση 11)
- το πρίσμα αποτελείται από όλα τα △πρίσματος, (σχέση 12)
- το ¨κυλ.νύχι¨ αποτελείται από όλα τα △κυλινδρικού νυχιού, (σχέση 13)
- το □ΔΗ αποτελείται από όλα τα |παραλληλόγραμμου, (σχέση 14)
- το ∩ΕΖΗ αποτελείται από όλα τα |παραβολικού χωρίου, (σχέση 15)

• (πρίσμα)/(κυλινδρικό νύχι)=(παραλληλόγραμμο ΔΗ)/(παραβολικό χωρίο ΕΖΗ), (σχέση 16)

Οι σχέσεις 6-10 ,στις οποίες ο Αρχιμήδης συσχετίζει κάποια σύνολα γεωμετρικών στοιχείων μεταξύ τους, ερμηνεύονται εύκολα αν λάβουμε υπόψιν μας το Θεώρημα 11 των Προλαμβανόμενων του Αρχιμήδη,

Χρησόμεθα δὲ καὶ ἐν τῷ προγεγραμμένῳ Κωνοειδῶν τῷδε τῷ θεωρήματι. Ἐὰν ὁπουσαοῦν μεγέθη ἄλλοις μεγέθεσιν ἴσοις τὸ πλῆθος κατὰ δύο τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον τὰ ὁμοίως τεταγμένα, ᾗ δὲ τὰ πρῶτα μεγέθη πρὸς ἄλλα μεγέθη ἐν λόγοις ὁποιοισοῦν, ἢ τὰ πάντα ἢ τινα αὐτῶν, καὶ τὰ ὕστερον μεγέθη πρὸς ἄλλα μεγέθη τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις ᾗ, πάντα τὰ πρῶτα μεγέθη πρὸς πάντα τὰ λεγόμενα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει πάντα τὰ ὕστερον πρὸς πάντα τὰ λεγόμενα.

δηλαδή,

Εάν οσαδήποτε μεγέθη (σύνολο 1) έχουν του ίδιο λόγο,ανά δύο, με άλλα μεγέθη (ίσα στο πλήθος με τα πρώτα,σύνολο 2) που έχουν παρόμοια διάταξη με τα πρώτα, και τα πρώτα μεγέθη (σύνολο 1),ή όλα ή κάποια από αυτά, βρίσκονται σε οποιοδήποτε λόγο με άλλα μεγέθη (σύνολο 3), και τα τελευταία μεγέθη (σύνολο 2) έχουν αντίστοιχα τους ίδιους λόγους με άλλα μεγέθη (σύνολο 4), τότε όλα τα πρώτα μεγέθη προς όλα τα μεγέθη του συνόλου 3 έχουν τον ίδιο λόγο με το λόγο στον οποίο βρίσκονται τα μεγέθη του συνόλου 2 με τα μεγέθη του συνόλου 4.

Για να γίνει πιο εύκολα ο συσχετισμός των σχέσεων 6-10 με το Θεώρημα 11 του Αρχιμήδη θα χρησιμοποιήσουμε την αναχρονιστική αλλά πλήρως επεξηγηματική ανάλυση που παρατίθεται στο Netz, Reviel; Saito, Ken; Tchernetska, Natalie: A new reading of Method Proposition 14: preliminary evidence from the Archimedes palimpsest. I. SCIAMVS 2 (2001), part 1, p.20.

Έχω μια συλλογή από 4 σύνολα A, B, C, D με τα στοιχεία τους $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$,$(b_1, b_2, b_3, ..., b_n)$, $(c_1, c_2, c_3, ..., c_n)$,$(d_1, d_2, d_3, ..., d_n)$.

Τα σύνολα αυτά πρέπει να ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες,

α)Τα σύνολα Α και Β να είναι ισόμορφα υπό λόγο.Δηλαδή για κάθε k, m να έχουμε $a_k : a_m = b_k : b_m$.

β)Τα σύνολα Α και Β να έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων, έστω n.

γ)Τα σύνολα C και D παράγονται (ο κάθε όρος τους) από ανίστοιχους όρους των συνόλων Α και Β, πάντα μέσω αναλογιών.Για κάθε k, έχουμε $a_k : c_k = b_k : d_k$.

δ)Τα σύνολα C και D δεν είναι απαραίτητο να αντιστοιχούν σε όλα τα στοιχεία των Α και Β, αλλά μπορούν να αντιστοιχούν και σε υποσύνολά τους.

Όταν όλες οι παραπάνω ιδιότητες ικανοποιούνται, τότε έχω,

$\sum a : \sum c = \sum b : \sum d$.

Ας εφαρμόσουμε τώρα το Θεώρημα 11 στις παραπάνω σχέσεις:

Θα συμβολίσουμε με Α το $\triangle$πρίσματος, με Β το |παραλληλόγραμμου, με C το $\triangle$κυλινδρικού νυχιού και με D το |παραβολικού χωρίου.Τότε,

• η ιδιότητα (γ) αντιστοιχεί στη σχέση 1, δηλαδή τα σύνολα C,D, παράγονται, όρο προς όρο, από τα σύνολα Α και Β μέσω αναλογιών,

• η ιδιότητα (α) προκύπτει από τις σχέσεις 6 και 7 οι οποίες μας δείχνουν ότι τα σύνολα Α και Β είναι ισόμορφα υπό λόγο διότι αφού όλα τα στοιχεία του Α είναι ίσα μεταξύ τους και όλα τα στοιχεία του Β είναι ίσα μεταξύ τους, τετριμμένα τότε για κάθε ζεύγος στοιχείων των Α και Β έχω, $a_k : a_m = b_k : b_m$,

• η ιδιότητα (β) αντιστοιχεί στη σχέση 8, τα σύνολα Α και Β έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων,

• η ιδιότητα (δ) εντοπίζεται στις σχέσεις 8,9,10 όπου τα σύνολα C και D αντιστοιχούν σε σύνολα με τον ίδιο αριθμό όρων.

Η σχέση 11 τώρα προκύπτει εύκολα ως το καταληκτικό συμπέρασμα του θεωρήματος 11,

όλα τα $\triangle$πρίσματος: όλα τα $\triangle$κυλινδρικού νυχιού = όλα τα |παραλληλόγραμμου: όλα τα |παραβολικού χωρίου.

Ας συνοψίσουμε λοιπόν τώρα τη δομή του θεωρήματος 14. Έχουμε

Α)Τη βασική σχέση 1,

$\triangle$πρίσματος: $\triangle$κυλινδρικού νυχιού = |παραλληλόγραμμου:|παραβολικού χωρίου,

Β)Τις σχέσεις 2,3,4 και 5 όπου κάποια μεγέθη μεγαλύτεων διαστάσεων αναλύονται στ επιμέρους σύνολα γεωμετρικών στοιχείων που τα αποτελούν, ώστε να οριστούν με άλλα λόγια τα σύνολα A, B, C, D του θεωρήματος (προλαμβανόμενου) 11 που θα χρησιμοποιήσει στη συνέχεια ο Αρχιμήδης.Δηλαδή,

σύνολο Α τα $\triangle$πρίσματος,

σύνολο Β τα |παραλληλόγραμμου,

σύνολο C τα $\triangle$κυλινδρικού νυχιού,

σύνολο D τα |παραβολικού χωρίου.

Γ)Τις βασικές σχέσεις 6,7,8,9 και 10 που συνθέτουν τις προϋποθέσεις του θεωρήματος 11 που χρησιμοποιεί ο Αρχιμήδης.

Δ)Τη σχέση 11 ως το αποτέλεσμα της εφαρμογής του προλαμβανόμενου 11,

όλα τα $\triangle$πρίσματος: όλα τα $\triangle$κυλινδρικού νυχιού = όλα τα |παραλληλόγραμμου: όλα τα |παραβολικού χωρίου

Ε)Τη συνεπακόλουθη αντικατάσταση των αθροισμάτων των συνόλων που απαρτίζουν την παραπάνω σχέση με τα γεωμετρικά μεγέθη που τα αναπαριστούν,*πρίσμα,κυλινδρικό νύχι,παραλληλόγραμμο και παραβολικό χωρίο.*(σχέσεις 12,13,14,15,16)

Παρόλη τη χρήση των αδιαιρέτων η πραγμάτευση του θεωρήματος 14 από τον Αρχιμήδη δεν αρκείται σε υπερβολικά άλματα διαστάσεων από το ένα γεωμετρικό μέγεθος στο άλλο και σε υπερβολικές γενικεύσεις, αλλά παρουσιάζει μια λογική δομή.

Ανακύπτει εύκολα το πρώτο ερώτημα σχετικά με το θεώρημα.

Συνιστά η χρήση των αδιαιρέτων στο θεώρημα αυτό,απόδειξη ή εύρεση;

Η απάντηση είναι εύκολη και λακωνική.Όχι δε συνιστά απόδειξη.

Η βεβαιότητά μας προκύπτει από το γεγονός ότι ο Αρχιμήδης δε χρησιμοποιεί πουθενά τον όρο *αποδεικνύεται*(*δειχθήσεται* στα αρχαία ελληνικά) όπως κάνει καθαρά στην εκφώνηση του επόμενου θεωρήματος που συνιστά την επίσημη γεωμετρική απόδειξη του αποτελέσματος που

αναζητά.[8]

Επομένως η όλη διαδικασία δεν είναι παρά *ευρετική*.

Αυτή πρέπει να είναι η αφετηρία μας για τη συζήτηση της λεγόμενης μεθόδου των αδιαιρέτων του Αρχιμήδη, γεγονός το οποίο παραγνωρίζουν οι κύριοι μελετητές του Παλίμψηστου στο Netz, Reviel; Saito, Ken; Tchernetska, Natalie: A new reading of Method Proposition 14: preliminary evidence from the Archimedes palimpsest. I. SCIAMVS 2 (2001), p.21-26 προτιμώντας να προβούν σε μια σειρά εικοτολογικών κρίσεων για το συγκεκριμένο θεώρημα, αποκαλώντας το μάλιστα, λανθασμένα, ¨απόδειξη των αδιαιρέτων¨ (Indivisibles Proof).

Ακολουθεί το δεύτερο ερώτημα.

Ποια είναι η χρησιμότητα του Προλαμβανόμενου 11 στη δομή του θεωρήματος 14;

Εδώ η απάντησή μας δεν μπορεί να είναι μονολεκτική.Θα πρέπει να σημειώσουμε πως οι σχέσεις 6,7,8,9 και 10 ήταν ακριβώς εκείνες οι σχέσεις που δεν είχε κατορθώσει να διαβάσει ο Heiberg και χωρίς τις οποίες η μετάβαση από τη σχέση 1 στη σχέση 11 είναι ένα νοητικό άλμα που δεν ανταποκρίνεται στη σοβαρότητα του μαθηματικού Αρχιμήδη. Ωστόσο δεν καταρρίπτει εξολοκλήρου και τη μεθοδικότητα του θεωρήματος αφού όπως είδαμε στην τελευταία παράγραφο του θεωρήματος 2 (σελ. 82-83 στον παρόντα τόμο) είναι σε θέση να χρησιμοποιήσει μαθηματικά θεωρήματα ποικιλοτρόπως προκεμένου να ανακαλύψει κάτι καινούριο και στη συνέχεια να το αποδείξει.Είναι και αυτή μια από τις ευκολίες που του παρέχει ο ευρετικός χαρακτήρας του θεωρήματος με τη σχετική χαλαρότητά του.Έτσι δεν έκανε τελείως λάθος, κατά την προσωπική μας εκτίμηση πάντα, ο Dijksterhuis που παρέβλεψε το άλμα αυτό της πίστης που απαιτούσε κατά τα φαινόμενα από τον αναγνώστη του ο Αρχιμήδης.Από την άλλη πλευρά η ανακάλυψη των σχέσεων 6-10 θεμελιώνει λογικά το οικοδόμημα του θεωρήματος δεν του προσδίδει όμως την τελική αυστηρότητα μιας απόδειξης, κάτι που εξάλλου δεν είναι και στα σχέδια του Αρχιμήδη όπως παρατηρήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο.Αυτό γίνεται ευκολότερα αντιληπτό αν συνειδητοποιήσει κανείς πως ο Αρχιμήδης δεν αναφέρεται πουθενά ρητά πως θα χρησιμοποι-

[8]βλ.εκφώνηση 15ου θεωρήματος

ήσει το συγκεκριμένο προλαμβανόμενο στο θεώρημα αυτό,πράγμα παράξενο για ένα θεώρημα διατυπωμένο στο τέλος ενός βιβλίου που απαιτεί την χρήση ενός πρωταρχικά διατυπωμένου θεωρήματος,ίσως όχι όμως και τόσο αν λάβουμε υπόψιν μας και πάλι τη ¨χαλαρότητα¨ του ευρετικού του χαρακτήρα.

Και κάτι ακόμα για το περίφημο Προλαμβανόμενο 11.Στο άρθρο Netz, Reviel; Saito, Ken; Tchernetska, Natalie: A new reading of Method Proposition 14: preliminary evidence from the Archimedes palimpsest. I. SCIAMVS 2 (2001), p.21 οι μελετητές του Παλίμψηστου υποστηρίζουν πως ο Αρχιμήδης κινδυνεύει να προβεί σε ένα ατόπημα όταν χρησιμοποιεί ένα θεώρημα του οποίου η απόδειξη[9] αναφέρεται σε πεπερασμένο αριθμό μεγεθών, για να περιγράψει σχέσεις συνόλων με άπειρα κατά τα φαινόμενα στοιχεία.Ο Αρχιμήδης δεν σφάλλει όμως ακόμα και στη μορφή της διατύπωσης που θεωρείται αυστηρή,

ὁπουσαοῦν μεγέθη,οσαδήποτε μεγέθη,αυτό είναι το απαραίτητο κομμάτι της εκφώνησης του θεωρήματος 11 το οποίο είναι εκ των ουκ ανευ για να κάνει ο ευφυής μαθηματικός τη γενίκευση στο ¨δυνάμει άπειρο¨.Έτσι το ζήτημα της αυστηρότητας ή μη της απόδειξης είναι δευτερεύον αφού η χρήση του θεωρήματος 11 θα γίνει καθαρά για ευρετικούς λόγους.

Τελευταίο και ίσως πιο ενδιαφέρον ερώτημα.

Ο Αρχιμήδης χειρίζεται στο θεώρημά του το ¨εν ενεργεία άπειρο¨ , ή το ¨δυνάμει άπειρο¨ ;

Και εδώ η απάντησή μας μπορεί να είναι λακωνική. Το ¨δυνάμει άπειρο¨.Ας πάρουμε τις σχέσεις 8,9, 10 οι οποίες είναι η βάση της προβληματικής μας.Έχουμε

- τα |παραλληλόγραμμου είναι ίσα ως προς το πλήθος με τα △πρίσματος, (σχέση 8)
- τα △κυλινδρικού νυχιού είναι ίσα ως προς το πλήθος με τα △πρίσματος, (σχέση 9)
- τα |παραλληλόγραμμου είναι ίσα ως προς το πλήθος με τα |παραβολικού χωρίου, (σχέση 10)

Κατά τους μελετητές του Παλίμψηστου[10] εδώ είναι η πρώτη φορά στην αρχαία ελληνική μαθη-

[9]Περί Κωνοειδών και Σφαιροειδών,1

[10]Netz, Reviel; Saito, Ken; Tchernetska, Natalie: A new reading of Method Proposition 14: preliminary evidence from the Archimedes palimpsest. I. SCIAMVS 2 (2001), p.25-26

ματική βιβλιογραφία που συγκρίνονται δύο σύνολα με άπειρα στοιχεία και προκύπτουν ΄΄ίσα ως προς το πλήθος΄΄. Το γεγονός αυτό τους προδιαθέτει να μιλήσουν για χειρισμό από τον Αρχιμήδη του ΄΄εν ενεργεία΄΄ απείρου. Είναι όμως πράγματι έτσι;

Όπως οι ίδιοι μελετητές αναφέρουν οι αρχαίοι Έλληνες ήταν ιδιαίτερα προσεκτικοί στο χειρισμό του απείρου, χρησιμοποιούσαν το ΄΄δυνάμει΄΄ άπειρο για να αποφεύγουν τις κακοτοπιές.Ακόμα μία περίπτωση είναι και αυτή του Αρχιμήδη.Προκαλεί εντύπωση το γεγονός πως ενώ διατυπώνουν τη θεωρία τους περί προσεκτικότητας των αρχαίων Ελλήνων ανάγουν τις παραπάνω σχέσεις σε σχέσεις ΄΄εν ενεργεία΄΄ απείρου όταν ο ίδιος ο Αρχιμήδης δεν αναφέρεται πουθενά σε κάτι άπειρο (παρά μόνο σε μια 1 προς 1 αντιστοιχία) και όταν φυσικά η ίδια η εκφώνηση του θεωρήματος (θυμηθείτε, το προλαμβανόμενο μιλάει για ΄΄οσαδήποτε μεγέθη΄΄, χωρίς να αναφέρεται πουθενά σε απειρίες).Το συμπέρασμά τους λοιπόν είναι παρακινδυνευμένο, και εξάλλου, αν δούμε συνολικά τη δομή των θεωρημάτων 12,13,14,15, η χρήση καινοτόμων όρων περί του απείρου σε ένα θεώρημα ευρετικού χαρακτήρα διατυπωμένο πριν από μια αυστηρή γεωμετρική απόδειξη χωρίς να υπάρχει η αναγκαιότητά τους για την οικονομια του θεωρήματος κρίνεται άτοπη ακόμα και για μια ιδιοφυια σαν τον Αρχιμήδη.

4.14 Θεώρημα 15

Θα παραθέσουμε εδώ την αυθεντική αρχαία εκφώνηση του θεωρήματος 15, τη γεωμετρική δηλαδή απόδειξη των προηγούμενων θεωρημάτων 12-14.

Ἔστω πρίσμα ὀρθὸν τετραγώνους ἔχον βάσεις, ὧν μία ἔστω τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ πρίσμα κύλινδρος, οὗ βάσις ἐστω ὁ ΕΖΗ κύκλος.Ἐφάπτεται δὴ οὗτος τῶν τοῦ τετραγώνου πλευρῶν κατὰ τὰ Ε,Ζ,Η,Θ σημεῖα.Κέντρον δὲ ἔστω τὸ Κ, καὶ διὰ τῆς ΕΗ διαμέτρου καὶ μιᾶς πλευρᾶς.....ἐπίπεδον ἤχθω. Τοῦτο δὴ τὸ ἐπίπεδον ἀποτέμνει πρίσμα Ἀπὸ τοῦ ὅλου πρίσματος καὶ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου ἀπότμημα κυλίνδρου.Λέγω δή, ὅτι τοῦτο τὸ τμῆμα τὸ ἀποτετμημένου ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου ὑπὸ τοῦ ἀχθέντος ἐπιπέδου ἕκτου μέρος ὄν δειχθήσεταιτοῦ ὅλου πρίσματος.

Η γεωμετρική αυτή απόδειξη είναι κατά το μεγαλύτερο ποσοστό της χαμένη σήμερα αλλά από τα διασωθέντα τμήματά της προκύπτει πως ακολουθεί πιστά τη γνωστή μέθοδομ της ¨ευδόξειας¨ εξάντλησης, χωρίς φυσικά τη χρήση των αδιαιρέτων.Για μια πλήρη ανακατασκευή της απόδειξης βλ. T.L.Heath, *Archimedes'Method*, p.43-48, Dover, New York ,2002.

Κεφάλαιο 5

Διάλογος...

(...αντί Επιλόγου!)

● Τι είναι τελικά η περίφημη *Μηχανική Μέθοδος* του Αρχιμήδη;

-Είναι μια ιδιοφυής διαδικασία ¨ζύγισης¨ των αδιαίρετων στοιχείων τα οποία συνιστούν το μετρούμενο μέγεθος (για π.χ. τα παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα που πληρώνουν ένα επίπεδο χωρίο).

● Γιατί τη χαρακτηρίζεις ιδιοφυή;

-Γιατί σε αυτή τη διαδικασία ο Αρχιμήδης ενσωματώνει όλο το μεγαλειώδες γνωσιακό του υπόβαθρο πάνω στη μηχανική (για το οποίο έμεινε τελικά στην ιστορία) προκειμένου να ανακαλύψει γεωμετρικά θεωρήματα με καθαρά μαθηματικό περιεχόμενο. Αυτή η σύμπραξη Μηχανικής και Γεωμετρίας προς όφελος της τελευταίας, μας φαίνεται άκρως εντυπωσιακή σήμερα.

● Ο Αρχιμήδης χρησιμοποιεί για πρώτη φορά μεθόδους από τη μηχανική για να ανακαλύψει γεωμετρικά θεωρήματα;

-Η απάντηση είναι όχι.Ο Αρχιμήδης έχει ξαναχρησιμοποιήσει μηχανικές μεθόδους στο έργο του *Τετραγωνισμός της παραβολής,∂.14-16.*

● Τότε γιατί αποδίδουμε ιδιαίτερη σημασία στη *Μέθοδό*του;

-Διότι με τη (βελτιωμένη ουσιαστικά) εκδοχή της μηχανικής μεθόδου ο Αρχιμήδης εξετάζει περισσότερα από 15 θεωρήματα σε μία μόνο πραγματεία του. Το γεγονός αυτό από μόνο του προσδίδει στη μέθοδό του ξεχωριστή αξία.

● Ποια είναι η κύρια διαφορά της μηχανικής μεθόδου του έργου που εξετάζεις στη διπλωματική σου με τη μηχανική μέθοδο στον *Τετραγωνισμό της Παραβολής*;

-Η χρήση αδιαιρέτων και όχι τραπεζίων προς ¨ζύγιση¨.

● Ποιο θεώρημα συνιστάς για την καλύτερη δυνατή κατανόηση της μηχανικής μεθόδου;

-Το θεώρημα 1 στον παρόντα τόμο, σελ.53-66.

● Δώσε μια σύνοψη της *Μεθόδου* του Αρχιμήδη

-Επιστολή προς τον Ερατοσθένη,θεωρήματα 1-13 -ᾲμηχανική μέθοδος με αδιαίρετα,θεώρημα 14 -ᾲμόνο αδιαίρετα, θεώρημα 15-ᾲγεωμ. απόδειξη θεωρήματος 12 (χαμένη κατά το μεγαλύτερο ποσοστό της),θεώρημα 16 (χαμένο σήμερα)

● Που έγκειται το έλλειμα αυστηρότητας της μεικτής μηχανικής-μεθόδου των αδιαιρέτων;Γιατί δεν θεωρείται απόδειξη;

-Πρόκειται για ένα πολύ σοβαρό ερώτημα.Το έλλειμμα αυστηρότητας της μεικτής μεθόδου του Αρχιμήδη δεν εντοπίζεται ούτε μόνο στη χρήση των αδιαιρέτων ούτε μόνο στη μηχανική μέθοδο. Σοβαροί μελετητές του έργου του Αρχιμήδη, αποδίδουν ένα έλλειμμα αυστηρότητας στη χρήση της μεθόδου των αδιαρέτων και στις δυσκολίες που δημιουργεί η αποδόμηση ενός γεωμετρικού μεγέθους στα απλούστερα συστατικά του (εδώ υπεισέρχεται και η έννοια του ¨δυνάμει¨ απείρου).[1]Εμείς από την πλευρά μας συμφωνούμε πλήρως για το έλλειμμα σοβαρότητας και τη ¨χαλαρότητα¨ που διακρίνει τη χρήση των αδιαιρέτων, σημειώνουμε όμως τη μεγάλη ευρετική της αξία για τη γεωμετρία, όπως φαίνεται από το θεώρημα 14 στον παρόντα τόμο.Διαφωνούμε όμως με την απόδοση εγκυρότητας στη χρήση θεωρημάτων από τη Μηχανική αφού όσο αξιωματικοποιημένα αυτά και αν είναι δεν παύουν να είναι μηχανικά και όχι γεωμετρικά!Για αυτό άλλωστε

[1]βλ. σχετικά E.J.Dijksterhuis, *Archimedes*,p.319-320 αλλά και Γ.Χριστιανίδης,Θέματα από την ιστορία των μαθηματικών, σελ. 140-142

ο Αρχιμήδης ΠΟΥΘΕΝΑ στο έργο του δεν αποδεικνύει θεώρημα με μηχανικό τρόπο.[2]Άρα λοιπόν,μηχανική και αδιαίρετα δεν έχουν αποδεικτική αξία παρά μόνο (τεράστια) ευρετική.

● Ποια μέθοδο χρησιμοποιεί τότε ο Αρχιμήδης για την απόδειξη των θεωρημάτων του;

-Την παραδεδεγμένη ¨ευδόξεια¨ μέθοδο της εξάντλησης.

● Για ποιο λόγο ο Αρχιμήδης συνέγραψε την επιστολή;

-Ο διαφαινόμενος στόχος του ήταν να προσκαλέσει τους αναγώστες του να ανακαλύψουν καινούρια θεωρήματα σαν και αυτά που ανακάλυψε ο ίδιος. Για αυτό η *Μέθοδος* θεωρείται από τα ύστερα έργα του Συρακούσιου.

● Σε ποια γλώσσα συνέγραψε ο Αρχιμήδης το έργο του;

-Στη μητρική του δωρική διάλεκτο των Συρακουσών.

● Για ποιο λόγο την απευθύνει στον Ερατοσθένη;

-Γιατί ο Ερατοσθένης είναι ο επικεφαλής του σημαντικότερου πνευματικού ιδρύματος του κόσμου, της Βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας, και αφού τη διαβάσει θα εξασφαλίσει σίγουρα τη μελλοντική μετάδοσή της σε συναδέλφους μαθηματικούς.

[2]Διαφωνούμε έτσι με την άποψη του κ.Χριστιανίδη που ενστερνίζεται την άποψη του Dijksterhuis περί αυστηρότητας των μηχανικών αποδείξεων.Στο έργο του πρώτου που αναφέραμε στην προηγούμενη υποσημείωση, υποστηρίζει ότι ο Αρχιμήδης στον *Τετραγωνισμό της Παραβολής* προβαίνει σε αυστηρή μηχανική απόδειξη του θεωρήματος όταν ο ίδιος ο Αρχιμήδης μας μεταφέρει ¨πρώτον μεν ως δια των μηχανικών εθεωρήθη,μετα ταυτα δε και ως δια των γεωμετρούμενων αποδείκνυται.

Κεφάλαιο 6

Παράρτημα Α

Έργα και ημέρες του ανδρός

Ο χώρος δράσης του μεγάλου μαθηματικού ήταν η γενέτειρά του οι Συρακούσες. Οι Συρακούσες, παλιά κορινθιακή αποικία, ήταν η σημαντικότερη και πολυπληθέστερη ελληνική πόλη της Σικελίας, οι ηγέτες της οποίας ασκούσαν δυναμική ανεξάρτητη εξωτερική πολιτική. Η άνοδος της ισχύος του ρωμαϊκού κράτους και η σταδιακή επικράτηση στην ιταλική χερσόνησο μοιραία έφερε τις Συρακούσες σε τροχιά σύγκρουσης με τους επεκτατικούς γείτονές τους. Σε αυτό το περιβάλλον, ο Αρχιμήδης, στενός φίλος ή ίσως και συγγενής του τότε ηγεμόνα των Συρακουσών Ιέρωνα, ήρθε ως απομηχανής θεός, να βοηθήσει την πατρίδα του στον άνισο αγώνα της. Το σπουδαιότερο πνεύμα της εποχής του ο πολυμήχανος Αρχιμήδης έθεσε τον εαυτό του στην υπηρεσία της πόλης του. Η βοήθειά του ήταν πολυεπίπεδη: ο σχεδιασμός και επίβλεψη οχυρωματικών έργων, τεράστια ποικιλία βαλλιστικών όπλων (καταπέλτες που εκσφενδόνιζαν γιγαντιαία βλήματα που συνέθλιβαν στρατιώτες και πλοία, αρπάγες που βύθιζαν τα πλοία σαν παιδικά παιχνίδια ήταν μερικά μόνο από τα ¨δώρα¨ του προς τους Ρωμαίους) και φυσικά τα περίφημα κάτοπτρα με τα οποία πυρπολούσε εύκολα τα εχθρικά πλοία. Όπως όμως έχει δείξει επανηλειμμένα η ιστορία ούτε το ισχυρότερο οπλοστάσιο δεν είναι αρκετό να αποσοβήσει την ήττα και την πτώση όσο υπάρχει ένα αποτελεσματικότερο όπλο, η προδοσία. Έτσι καταλήφθηκαν οι Συρακούσες

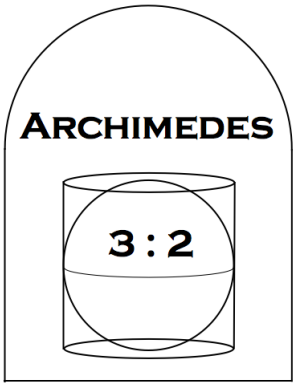
και ο σοφός Αρχιμήδης βρήκε τραγικό θάνατο από το ξίφος ενός Ρωμαίου στρατιώτη, τον οποίο μάλιστα παρακάλεσε να τον σκοτώσει αν θέλει αλλά να μην του καταστρέψει το γεωμετρικό σχήμα το οποίο μελετούσε εκείνη τη στιγμή!

Βρισκόμαστε στο έτος 212 π.Χ. Ποιος ήταν όμως αυτός ο άνθρωπος που ακόμα και υπό την απειλή όπλου βάζει τη γεωμετρία πάνω από την ίδια του τη ζωη;

Αυτός ήταν ο γιος του Φειδία του αστρονόμου, που ήρθε στον κόσμο γύρω στο 287 π.Χ., ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς όλων των εποχών. Όπως μας παραδίδουν οι αρχαίες πηγές ο Αρχιμήδης έκανε ένα παραγωγικό πέρασμα από την Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου όπου όχι μόνο γνωρίστηκε και έγινε φίλος με τους μεγαλύτερους μαθηματικούς της εποχής του (μεταξύ των οποίων ο Κόνωνας και ο Ερατοσθένης - και οι δύο αποδέκτες αρκετών πραγματειών του) αλλά κατασκεύασε και την περίφημη αρδευτική μηχανή που φέρει το όνομά του, ¨κοχλίας του Αρχιμήδη¨. Το πάθος του για τα μαθηματικά δεν κορέστηκε ποτέ. Ο Αρχιμήδης συνήθιζε να στέλνει τις μαθηματικές του προτάσεις, με ή χωρίς αποδείξεις, στους διάφορους φίλους του στην Αλεξάνδρεια και ιδίως στον Κόνωνα, μια γόνιμη αλληλογραφία επιστημόνων στο πρόσφορο πλαίσιο του ελληνιστικού κόσμου. Το αποτέλεσμα αυτού του διαλόγου ήταν μια σειρά καινοτόμων και πολύπλοκων μαθηματικών θεωρημάτων στα οποία κυριολεκτικά αφιέρωσε τη ζωή του - μπορούσε να ξεχνάει το φαγητό και τις άλλες αναγκαιότητες της ζωής και να σχεδιάζει γεωμετρικά σχήματα στη στάχτη ή όταν έκανε μπάνιο στο λάδι πάνω στο σώμα του! Υπερβολές: Μάλλον όχι αν αναλογιστούμε την απίστευτη πολυμέρεια του έργου του (που έχει διασωθεί): στη *γεωμετρία* ο τετραγωνισμός καμπυλόγραμμων επίπεδων σχημάτων και ο τετραγωνισμός και ο κυβισμός επίπεδων επιφανειών, θεμελιώνοντας τον απειροστικό λογισμό, στην *αριθμητική* ο υπολογισμός του π με πολύ μεγάλη ακρίβεια και η εφεύρεση ενός συστήματος αριθμητικής ορολογίας με το οποίο μπορούσε να εκφράσει γλωσσικά οποιονδήποτε αριθμό από το 1 έως το 80000000000000000 (ναι, είναι 16 μηδενικά!), στη *μηχανική* προχώρησε ως την εύρεση των κεντρών βάρους πολύπλοκων γεωμετρικών σχημάτων - παραβολής, ημικυκλίου, κώνου, ημι-

σφαιρίου, παραβολοειδούς εκ περιστροφής κ.ά., τέλος, θεμελίωσε ολόκληρη την επιστήμη της *υδροστατικής*. Όλα αυτά αντιπροσωπεύουν ένα άθροισμα επιστημονικών επιτευγμάτων αξεπέραστο από οποιονδήποτε στην παγκόσμια ιστορία. Δεν θα περιμέναμε όμως τίποτα λιγότερο από έναν άνθρωπο που κάποτε δήλωσε ¨δώσε μου κάπου να σταθώ και θα κινήσω τη γη¨.

Η σχετική απάθεια με την οποία αντιμετώπιζε ο Αρχιμήδης τις διάφορες εφευρέσεις του, όσο εντυπωσιακές και αν ήταν και η αγωνία του μήπως οι μεταγενέστεροι τον μνημονεύουν περισσότερο για αυτές και λιγότερο για τη μαθηματική του συνεισφορά (φόβος που εν μέρει επιβεβαιώθηκε αν σκεφτεί κανείς πόση κατάπληξη και δέος προκαλούν στον κοινό θνητό τα διάφορα μηχανήματα με τα οποία κατατρόπωνε τους εχθρούς του εν αντιθέσει με το δυσνόητο στους πολλούς γεωμετρικό του έργο) αντικατοπτρίζεται με τον καλύτερο τρόπο στο αίτημα που παρέδωσε στους φίλους του και συγγενείς του σχετικά με το τι πρέπει να αναγράφει ο τάφος του: έναν κύλινδρο που να είναι περιγεγραμμένος μιας σφαίρας μαζί με το λόγο που φέρει ο κύλινδρος προς τη σφαίρα.



Το ελάχιστο αντίο στο μέγιστο γεωμέτρη.

-Σημείωση:Η βασικότερη πηγή πληροφοριών-μαρτυριών για τη ζωή του μεγάλου Συρακούσιου

είναι ο πρώτος τόμος των *Απάντων Αρχιμήδους* του Ε.Σταμάτη,Εκδόσεις Τεχνικού Επιμελητηρίου της Ελλάδος, Αθήνα 1970.

Κεφάλαιο 7

Παράρτημα Β

Η Ιστορία της διεκδίκησης του Παλίμψηστου από το ελληνικό κράτος

(άρθρο του Παναγιώτη Λιάκου δημοσιευμένο στο περιοδικό GEO της *Ελευθεροτυπίας*, αντλημένο από την ιστοσελίδα http://www.ellinikoarxeio.com/2010/10/archimedes-palimpsisto.html)

ΚΩΔΙΚΟΣ ΕΥΡΗΚΑ

29/10/1998,502 Park Avenue , Νέα Υόρκη, αίθουσα δημοπρασιών του οίκου Κρίστις. Το ελληνικό κράτος μειοδοτεί στη δημοπρασία για το Παλίμψηστο του Αρχιμήδη, την ίδια στιγμή που δαπανά τρισεκατομμύρια για δημόσια ¨ολυμπιακά¨ έργα και πολιτιστικές ολυμπιάδες.

Κατά μια όλως ειρωνική (σημειολογικά) συγκυρία, ο τίτλος της δημοπρασίας υπ΄ αριθμόν 9058 ήταν ¨Εύρηκα¨, μια από τις ιστορικότερες λέξεις των θετικών επιστημών παγκοσμίως. Κάτω από το σφυρί του δημοπράτη βρέθηκε το Παλίμψηστο του Αρχιμήδη, για την ιστορία και τη σημασία του οποίου αφιερώνονται πολλές σελίδες στο έυθετο που κρατάτε στα χέρια σας.

Στο παρόν σημείωμα θα μας απασχολήσει η στάση,η συμπεριφορά και η μάλλον αθεράπευτη αβελτηρία του ελληνικού Δημοσίου που, όπως σε κάθε ανάλογη σημαντική περίπτωση, έπραξε τα συνήθη ελάχιστα, με μηδενικά αποτελέσματα, Το κακό είναι πως οι ελληνικές αρχές, ευ προκει-

μένω το υπουργείο Πολιτισμού, γνώριζαν τα πάντα από τις 5 Οκτωβρίου 1998, λίγες μόνο ημέρες αφότου είχε ανακοινωθεί η δημοπρασία του Παλίμψηστου του Αρχιμήδη από τον οίκο Κρίστις (Christie's).

Μία ομάδα επιστημόνων του Τμήματος Μεθοδολογίας, Ιστορίας και Θεωρίας της Επιστήμης του Πανεπιστημίου Αθηνών είχε αποστείλει επιστολή στον τότε υπουργό πολιτισμού κ. Ε. Βενιζέλο, όπου σημειωνόταν εμφατικά η εξαιρετική σπουδαιότητα του Παλίμψηστου, τόσο για τις επιστήμες όσο και για την πολιτιστική κληρονομιά. Αποδέκτες της ευ λόγω επιστολής ήταν σχεδόν όλα τα ΜΜΕ, έντυπα και ηλεκτρονικά.

Έγραφαν τότε, μεταξύ άλλων οι καθηγητές: ¨Το χειρόγραφο αυτό βγαίνει τώρα σε δημοπρασία από του οίκο Christie's ,κοστολογημένο όπως γράφτηκε, στην τιμή των τριακοσίων εκατομμυρίων δραχμών! Η τιμή είναι βεβαίως εξαιρετικά υψηλή. Αλλά πρέπει να τονιστεί ότι η απόκτησή του από την Ελλάδα θα είναι κάτι το εξαιρετικά σημαντικό. Παρά το γεγονός ότι το περιεχόμενο του χειρογράφου έχει εκδοθεί και μελετηθεί από τους ειδικούς, πρέπει να λάβουμε υπ'οψιν ότι έχουμε εδώ ένα αυθεντικό κομμάτι της πολιτιστικής μας κληρονομιάς που, εκτός από την ανεκτίμητη επιστημονική του αξία, είναι όπως είπαμε μοναδικό. Η διεκδίκηση των τεκμηρίων της πολιτιστικής μας κληρονομιάς, χωρίς εθνικισμούς και μεγάλες κουβέντες, είτε είναι τα γλυπτά του Παρθενώνα είτε είναι πίνακες του Γκρέκο είτε είναι πολύτιμα χειρόγραφα, πρέπει να αποτελεί μέρος της πολιτικής στον τομέα του πολιτισμού¨.

Λόγια γεμάτα αλήθεια και ουσιαστική ευαισθησία για τα ελληνικά πράγματα. Που κατέληξαν ωστόσο; Η κατάληξη της ευαισθητοποίησης των επιστημόνων δε θα μπορούσε να είναι άλλη από εκείνη που προέκυψε, αφού τη διεκδίκηση του Παλίμψηστου ανέλαβε ένα κράτος που συνήθως καθεύδει ονειρευόμενο αρχαίες δάφνες και σύγχρονα ευραωπαϊκά πακέτα στήριξης.

Η πρωτοβουλία των Οκτώ και η χαμένη ευκαιρία

Οι άνθρωποι που αποπειράθηκαν να κινητοποιήσουν την κρατική μηχανή ήταν οκτώ διδάσκοντες ιστορία και φιλοσοφία των επιστημών του Τμήματος Μεθοδολογίας, Ιστορίας και Θεωρίας της

Επιστήμης (ΜΙΘΕ) του Πανεπιστημίου Αθηνών: Δ.Αναπολιτάνος, Θ.Αραμπατζής,Κ.Γαβρόγλου, Δ.Διαλέτης, Β.Καρακώστας, Β.Κιντή, Κ.Κριμπάς και Γ.Χριστιανίδης.

Η έκκληση των καθηγητών τράβηξε το ενδιαφέρον των ΜΜΕ κι ακολούθησε σειρά συνεντεύξεων και παρουσιάσεων του θέματος από εφημερίδες, ραδιοφωνικούς και τηλεοπτικούς σταθμούς. Το αίτιο είναι προφανές: το αμείωτο ενδιαφέρον του κοινού για τον επαναπατρισμό της προγονικής κληρονομιάς. Ενδεικτικά θα αναφέρουμε πως μόνο στις 8 Οκτωβρίου του 1998 οι κ. Γαβρόγλου και Χριστιανίδης έδωσαν συνέντευξη στον ¨ Antenna ¨, ο κ.Γαβρόγλου στο MEGA , ο.Χριστιανίδης στην κρατική τηλεόραση και στους ραδιοφωνικούς σταθμούς Glash 961 και Αθήνα 984.

Βροχή δημοσιευμάτων σημειώθηκε στον ημερήσιο τύπο, Ενδεικτικοί είναι οι τίτλοι ορισμένων εφημερίδων ευρείας κυκλοφορίας:

- *¨Το δεν εύρηκα του ΥΠΠΟ για την απόκτηση του χειρογράφου του Αρχιμήδη! 'Ερανος κι 'Εφοδος, η λύση¨- Καθημερινή, 9/10/1998*
- *¨Σχέδιο απόκτησης του Κώδικα του Αρχιμήδη¨ - Ελευθεροτυπία, 9/10/1998*
- *¨Για του κώδικα του Αρχιμήδη¨ - 'Εθνος, 9/10/1998*
- *¨Κίνηση για την αγορά του Παλίμψηστου του Αρχιμήδους¨ - Τα Νέα, 9/10/1998*
- *¨Χειρόγραφο του Αρχιμήδη: συμβολική η απόκτησή του ¨ - Ριζοσπάστης, 10/10/1998*
- *¨Το εύρηκα του ΥΠΠΟ βρήκε ανταπόκριση¨ - Καθημερινή, 11/10/1998*
- *¨Αρχιμήδους Πάθη¨ - Καθημερινή, 18/10/1998*
- *¨Επιχείρηση Αρχιμήδης¨ Ελευθεροτυπία, 18/10/1998*

Ο τύπος, η κοινή γνώμη και οι ειδικοί πίεζαν το υπουργείο να αναλάβει τις ευθύνες του και να κινηθεί. 'Επρεπε να βρεθούν χρήματα προκειμένου να αγοραστεί το χειρόγραφο. Με μια δεύτερη επιστολή της επιστημονικής ομάδας, που εκδόθηκε ως δελτίο τύπου του Πανεπιστημίου Αθηνών λίγες μέρες αργότερα, γινόταν μια αποτίμηση της επιστημονικής αξίας του χειρογράφου. Επιπλέον, αναφερόταν σαφώς ότι είχε σημειωθεί μεγάλη πρόοδος σε άλλους επιστημονικούς κλάδους (όπως στη δορυφορική τηλεπισκόπηση), και συνεπώς υπήρχαν οι τεχνολογικές δυνατότητες για την

ανάγνωση του χειρογράφου.

Διάφοροι ιδιωτικοί φορείς και ιδρύματα εξεδήλωσαν το ενδιαφέρον τους να συνδράμουν στην εθνική προσπάθεια. Ενδεικτικά, αναφέρουμε τα εξής: ίδρυμα Ωνάση, Σταύρου Νιάρχου, Κωστόπουλου, Βουδούρη, Α.Γ.Λεβέντη, όμιλος Λάτση, Ένωση Τραπεζών και το Μορφωτικό Ίδρυμα της Εθνικής Τράαπεζας. Συνολικά από τους χορηγούς συγκευτρώθηκαν περί τα 2.000.000 δολάρια. Ταυτόχρονα, ο τότε υπουργός Πολιτισμούκ.Βενιζέλος διέπραττε ένα σημαντικότατο σφάλμα: δεν δέχτηκε καν να συναντήσει του εκπρόσωπο των Κρίστις, ο οποίος ήρθε στην Ελλάδα πριν ¨βγει στο σφυρί¨ το Παλίμψηστο, προκειμένου να διαπραγματευτεί με του ¨ηθικό δικαιούχο του σπάνιου χειρόγραφου, δηλαδή το ελληνικό κράτος.

Εκ πρώτης όψεως, το ζήτημα θα μπορούσε να λυθεί πριν καν φτάσουν τα πράγματα στο σφυρί του δημοπράτη και το ¨1,2,3, πουλήθηκε!¨. Δυστυχώς, τα εύκολα πράγματα δεν έγιναν δύσκολα αλλά ανέφικτα, καθώς το ελληνικό κράτος, δια του τότε υπουργού Πολιτισμού, τήρησε ¨αξιοπρεπή¨ στάση - ίσως κατά βάθος ελπίζοντας να μην κριθεί εκ του αποτελέσματος που προδιαγραφόταν αρνητικό. Η στάση του υπουργείου μπορεί να συνοψισθεί στο ¨δεν ομιλούμε με όσους πωλούν χειρόγραφα που έχουν κλαπεί πριν από 100 χρόνια [σημειωτέον ότι το Παλίμψηστο ήταν κάποτε ιδιοκτησία του Πατριαρχείου των Ιεροσολύμων]. Εκ πρώτης όψεως θα ήταν λογική η εν λόγω στάση, αν διακρινόταν από συνέπεια και συνέχεια. Ωστόσο, δεν στέκει εφόσον διαρκώς γίνονταν, γίνονται και φαίνεται πως θα συνεχίσουν να γίνονται διάλογοι με όσους πωλούν ή εκθέτουν ελληνικές αρχαιότητες που έχουν κλαπεί πριν από 200,100 ή ακόμη λιγότερα χρόνια.Η υπόθεση ¨μάρμαρα Ακροπόλεως¨ και οι λέξεις Έλγιν και μουσείο Γκετί πρέπει να μας θυμίσουν πολλούς ανάλογου περιεχομένου διαλόγους.

Υπό αυτό το πρίσμα, κρίνεται ως εξαιρετικά ενδιαφέρουσα η εξέλιξη της αίτησης ασφαλιστικών μέτρων που είχε κάνει το Πατριαρχείο Ιεροσολύμων: δικαστήριο της Νέας Υόρκης την απέρριψε την παραμονή της δημοπρασίας. Το σκεπτικό της απόφασης στηριζόταν στο επιχείρημα πως η ύπααρξη του χειρογράφου ήταν γνωστή από δεκαετίες. Συνεπώς, ο οποιοσδήποτε ιδιοκτήτης θα

μπορούσε να προβάλλει τις αξιώσεις του σε εύθετο χρόνο.

Η ...επιτόπια πραγματογνωμοσύνη

¨Η σημερινή κατάσταση του χειρογράφου: το χειρόγραφο βρίσκεται σε πολύ κακή κατάσταση, έστω και αν αυτή έχει σήμερα σταθεροποιηθεί. Φθορές από υγρασία, εκτεταμένοι λεκέδες μούχλας, μαυρισμένα από τη φωτιά άκρα έχουν αλλοιώσει σημαντικά την αρχική μορφή του χειρογράφου. Επιπλέον, αρκετά φύλλα είναι είτε αποκομμένα από τη στάχωση είτε τους λείπουν τα περιθώρια είτε ακόμη και μέρος του κειμένου. Σε πολλά φύλλα η υγρασί έχει εξαφανισει τη μελάνη και το κείμενο του ευχολογίου δεν είναι αναγνώσιμο. Αυτό ισχύει πολύ περισσότερο για του υποκείμενο Αρχιμήδη. Το ποσοστό των φύλλων που βρίσκεται σε εξαιρετικά κακή κατάσταση για έναν ή και περισσότερους από τους παραπάνω λόγους είναι περίπου το 25 τοις εκατό του συνόλου¨.

Όσα (απογοητευτικά) μόλις διαβάσατε αποτελούν απόσπασμα από την έκθεση που συνέταξε, έπειτα από ¨επιτόπια εξέταση¨ του χειρογράφου, η κ.Σ.Κοτζάμπαση, επίκουρη καθηγήτρια τότε, στο Τμήμα Μεσαιωνικής και Νέας Ελληνικής Φιλολογίας του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης. Η πραγματογνωμοσύνη της κ. Κοτζάμπαση πραγματοποιήθηκε, όπως αναφέρει η ίδια, την Πέμπτη, 22 Οκτωβρίου του 1998 στους χώρους του οίκου Κρίστις της Νέας Υόρκης.

Ακόμη πιο απογοητευτική ήταν η συνέχεια της έκθεσης πραγματογνωμοσύνης, που αναφερόταν στην αξία του χειρογράφου - ένα ζήτημα-κλειδί, το οποίο καθόριζε εν πολλοίς το κατά πόσο το φειδωλό (στα σημαντικά) ελληνικό κράτος θα άξιζε να δαπανήσει χρήματα για την απόκτηση του Παλίμψηστου. Γράφει σχετικά η κ.Κοτζάμπαση: ¨η κακή κατάσταση του χειρογράφου δεν επιτρέπει παρόλη την εξέλιξη της τεχνολογίας, ίσως μια υπερβολικά αισιόδοξη πρόβλεψη για τις δυνατότητες ανάγνωσης των υπόλοιπων φύλλων ή για συμπλήρωση και διόρθωση γραφών του Χάιμπεργκ¨.

Άυθρακες δηλαδή ο θησαυρός! Όμως, η εν λόγω έκθεση πραγματογνωμοσύνης έχει αμφισβητηθεί έντονα από την επιστημονική κοινότητα, η οποία συμμετείχε στην υπόθεση της ευαισθητοποίησης, που αναφερόταν στην αξία του χειρογράφου - ένα ζήτημα κλειδί, το οποίο θα καθόριζε εν πολλοίς

το κατά πόσο το φειδωλό (στα σημαντικά) ελληνικό κράτος θα άξιζε να δαπανήσει χρήματα για την απόκτηση του Παλίμψηστου. Γράφει σχετικά η κ. Κοτζάμπαση: ¨η κακή κατάσταση του χειρογράφου δεν επιτρέπει, παρόλη την εξέλιξη της τεχνολογίας, ίσως μια υπερβολικά αισιόδοξη πρόβλεψη για τις δυνατότητες ανάγνωσης των υπόλοιπων φύλλων ή για συμπλήρωση και διόρθωση γραφών του Χάιμπεργκ.¨

Άνθρακες δηλαδή ο θησαυρός! Όμως, η ευ λόγω έκθεση πραγματογνωμοσύνης έχει αμφισβητηθεί έντονα από την επιστημονική κοινότητα, η οποία συμμετείχε στην υπόθεση της ευαισθητοποίησης των αρχών για την αγορά του Παλίμψηστου. Φυσικά, η εξέλιξη της υπόθεσης δικαίωσε όσους χαρακτήριζαν την έκθεση ¨πρόχειρη¨ και αστήρικτη¨.

Η κ. Κοτζάμπαση στο κείμενο της δεν αναφέρει κάποια πληροφορία για το είδος των ελέγχων που πραγματοποίησε η ίδια στην εξέταση του χειρογράφου στη Νέα Υόρκη.

Η ζημιά σε κάθε περίπτωση είχε γίνει. Το ΥΠΠΟ ενημερώθηκε με κάθε επισημότητα ότι δεν έπρεπε να περιμένει πολλά από το χειρόγραφο. Ειδικά το σημεί που έλεγε ¨παρ΄ όλη την εξέλιξη της τεχνολογίας¨ ήταν μεταφυσικά διατυπωμένο! Ό,τι κι αν έχει γίνει ή θα γίνει από την επιστήμη, ας μην περιμένουμε πολλά...

Ουσιαστική απάντηση σε όσα υποστηρίζονται στην ευ λόγω έκθεση αλλά και σε άλλες αστήρικτες αιτιάσεις είχε ήδη δοθεί μέσω μιας επιστολής που συνυπέγραφαν οι υπεύθυνοι τριών εργαστηρίων, τα οποία είχαν την εξειδίκευση και τις προδιαγραφές να ανακτήσουν τον ¨χαμένο¨ Αρχιμήδη: επρόκειτο για τους διευθυντές του Ερευνητικού Πανεπιστημιακού Ινστιτούτου Συστημάτων και Υπολογιστών του Ε.Μ.Π.,του Εργαστηρίου Ηλεκτρονικής Επεξεργασίας Ιστορικών Αρχείων του Πανεπιστημίου Αθηνών και της Ομάδας Επεξεργασίας Ψηφιακών Εικόνων του Εθνικού Αστεροσκοπείου. Οι επικεφαλής αυτών των εργαστηρίων εξηγούσαν τις υφιστάμενες τεχνολογικές δυνατότητες. Επίσης, τεκμηρίωναν πως τα εργαστήρια μπορούσαν να συμβάλλουν καθοριστικά στην ψηφιακή αποκατάσταση του χειρογράφου αλλά και να συντονίσουν την τεχνική επεξεργασία.

Στην Ελλάδα όμως ποιος δίνει σημασία σε αυτές τις τεχνικές λεπτομέρειες;

¨Θα επανέλθουμε στην εξαγορά απευθείας¨

Η επιτόπια πραγματογνωμοσύνη της κ. Κοτζάμπαση έγινε την Πέμπτη, 22 Οκτωβρίου 1998. Στις 23/10, μόλις μια ημέρα αργότερα, ο κ.Βενιζέλος με επιστολή του (αριθμός πρωτοκόλλου 7975) ευχαριστεί τους χορηγούς και, μεταξύ άλλων, τους διαβεβαιώνει: ¨Συνεκτιμώντας με άκρα προσοχή όλα τα δεδομένα και σε συννενόηση με το Πατριαρχείο Ιεροσολύμων καταλήξαμε στη θέση πως το Πατριαρχείο έχει ιστορική πρωτίστως υποχρέωση και υποχρέωση έναντι της διεθνούς νομιμότητας ως προς τη διακίνηση πολιτιστικών αγαθών να ζητήσει και να διεκδικήσει την επιστροφή του χειρογράφου. Ελπίζουμε ότι το εγχείρημα θα ευδοκιμήσει. Αν η έκβαση είναι αρνητική, θα επανέλθουμε στην εξαγορά απευθείας ή μέσω δημοπρασίας του χειρογράφου.[...]Πιστεύω ότι η προετοιμασία μας και ο χειρισμός που κάνουμε είναι ο καλύτερος δυνατός. Κρατούμε συνεπώς ως δεδομένη την ευγενική και γενναιόδωρη προσφορά σας και θα είμαστε σε διαρκή επαφή μαζί σας ως προς την εξέλιξη της υπόθεσης¨.

Στην έκβαση των ασφαλιστικών μέτρων του Πατριαρχείου ήδη έχουμε αναφερθεί και δεν χρειάζεται να επανέλθουμε. Αυτό όμως που έχει εξέχουσα σημασία στην επιστολή του κ.Βενιζέλου είναι η υπόσχεσή του προς τους χορηγούς ότι εάν η έκβαση της νομικής διεκδίκησης είναι αρνητική ¨θα επανέλθουμε στην εξαγορά απευθείας ή μέσω δημοπρασίας του χειρογράφου¨.

Ούτε απευθείας εξαγορά έγινε, στη δημοπρασία μειοψηφίσαμε, κρατικό χρήμα δεν δόθηκε, οι χορηγοί έμειναν με την προσδοκία μιας εθνικής επιτυχίας και το μόνο που μπορέσαμε να κάνουμε τελικά όλοι μας είναι να πληρώσουμε. Τι να πληρώσουμε;

Μα τι άλλο εκτός από πολιτιστικά γεγονότα που δεν έχουν την επιστημονική και ιστορική αξία του Παλίμψηστου, αλλά έχουν -ευτυχώς για πολλούς- πολύ μεγαλύτερο τιμή. Η ¨Θεσσαλονίκη, Πολιτιστική Πρωτεύουσα της Ευρώπης¨ κόστισε περί τα 360 εκατομμύρια ευρώ. Η Πολιτιστική Ολυμπιάδα 150.000.000 ευρώ - όλα με απευθείας αναθέσεις. Ο ταλαίπωρος ο Αρχιμήδης θα μας χρέωνε μόλις 2.200.000 δολάρια, αλλά τα πλήρωσε άλλος. Ίσως αν υιοθετούσε το Παλίμψηστο κάποιος κρατικοδίαιτος ¨επαναστάτης¨, το περιέφερε στις ρούγες για συναυλίες, να εύρισκε το

κράτος μας χρήματα. Θα ήταν κι αυτό μια κάποια λύσις...

Κεφάλαιο 8

Παράρτημα Γ

Τα πρωτοσέλιδα των New York Times του Παλίμψηστου

BIG LITERARY FIND IN CONSTANTINOPLE

Savant Discovers Books by Archimedes, Copied About 900 A. D.

IT OPENS A BIG FIELD

Whether the Turks Destroyed the Libraries When They Took the City Always a Disputed Question.

COPENHAGEN, July 15.—Y. L. Heiberg, Professor of Philology in the University of Copenhagen, made a most interesting discovery in the Convent of the Holy Grave at Constantinople a few weeks ago.

While studying old manuscripts in the convent he discovered a number of palimpsests which, in addition to prayers and psalms of the twelfth century, included works by Archimedes.

The Archimedes manuscript was a copy made about the year 900 by a monk and later conveyed to Constantinople.

The Turkish authorities did not permit Prof. Heiberg to remove the manuscript. He was permitted, however, to make a copy of it, and this will shortly be published.

The fact that Prof. Heiberg copied the Archimedes manuscript apparently indicates that it consisted, entirely or in part, of works by Archimedes that have hitherto been lost, for he would hardly have taken the trouble to transcribe the books on plane geometry, solid geometry, arithmetic, and mechanics which have come down to us from among the writings by the great Greek. Perhaps, even, the manuscript found at Constantinople may contain the work on notation which Archimedes is supposed to have written and which, when it was lost, meant the loss to the world of the system he invented.

But whether this is so or not, the discovery is of extraordinary interest as showing that ancient manuscripts do exist in Constantinople—that the old legend, "Where the Turk's foot is planted grass never grows again" does not apply to all the libraries that were in the city when Mohammed II. took it in 1453. It may even be that careful search would result in the discovery of the lost books of Livy and Cicero and many other treasures of antiquity that vanished between the close of the classical age and the Renaissance. Perhaps, indeed, the book the loss of which was the greatest literary loss the world ever suffered, the Poems of Sappho, will be at last recovered and one of the chief objects of the proposed excavation of Herculaneum will be attained in another way.

served the libraries they found in Constantinople. It is known that the Turk was always reluctant to destroy writing, lest perchance it should contain the name of God, but a good many scholars have been of the opinion that this scruple did not weigh with Mohammed and his followers when they entered the great city and started to make a bonfire of the treasures of antiquity that were contained in it.

Some years ago J. C. Robinson obtained permission to enter the Sultan's library of manuscripts, and saw 3,000 of them ranged in leather cases upon the wall. He came to the conclusion that Western scholars had examined them long before and that there was nothing of value in them. As a matter of fact, there is no record of any such examination.

Meredith Townsend, in "Asia and Europe," made an appeal for the examination of this library. He said: "The Sultan's library should be searched through as the first condition of the next loan made to Turkey—if there ever is another—and permission demanded to hunt for that older and more valuable store of manuscripts believed or known to be stored in the crypt of St. Sophia. * * * That is the last place left where we shall be likely to make a great literary find, and it should be searched before the great day when the destiny of the Ottomans is completed, and Constantinople once more sinks down, a mass of blood-stained ruins, fired by its possesors before they commence their final retreat to the desert from which, in the mysterious providence of God, they were suffered to emerge, in order to destroy the eastern half of the civilized world. The only other chance is in the Shereefal Palace, at Morocco, and it is uncertain if a library exists there."

Mr. Townsend might have referred to the further chance, a slight one, it is true, but still a chance, that the Chinese Empire may contain some of the lost treasures of the past. But the Danish savant's discovery in Constantinople indicates that that city is by far the best hunting ground for the modern Humanists, if any still exist.

The New York Times
Published: July 16, 1907
Copyright © The New York Times

Μετάφραση

Μεγάλη λογοτεχνική ανακάλυψη στην Κωνσταντινούπολη.

Σοφός ανακαλύπτει βιβλία του Αρχιμήδη, τα οποία αντιγράφηκαν γύρω στο 900 μ.Χ.

Ανοίγει ένα ευρύ πεδίο.

Το αν οι Τούρκοι κατέστρεψαν τις βιβλιοθήκες όταν κατέλαβαν την πόλη παραμένει πάντα ένα διαφιλονικούμενο ζήτημα.

Κοπεγχάγη, 15 Ιουλίου. Ο Heiberg , καθηγητής φιλολογίας στο Πανεπιστήμιο της Κοπεγχάγης, έκανε μια πολύ σημαντική ανακάλυψη στο Μετόχι του Παναγίου Τάφου στην Κων/πολη λίγες βδομάδες νωρίτερα.Ευώ μελετούσε παλιά χειρόγραφα στο μετόχι, ανακάλυψε έναν αριθμό παλίμψηστων τα οποία, μαζί με προσευχές και ψαλμούς του 12ου αι., περιείχαν έργα του Αρχιμήδη.Το χειρόγραφο του Αρχιμήδη ήταν ένα αντίγραφο που δημιουργήθηκε γύρω στο 900 μ.Χ. από ένα μοναχό και στη συνέχεια μεταφέρθηκε στην Κων/πολη. Οι τουρκικές αρχές δεν επέτρεψαν στον καθηγητή Heiberg να αφαιρέσει το χειρόγραφο από το μοναστήρι.Του επιτράπηκε ωστόσο να κατασκευάσει ένα αντίγραφο αυτού το οποίο πρόκειται να εκδοθεί σύντομα. Το γεγονός πως ο Heiberg αντέγραψε το χειρόγραφο του Αρχιμήδη, φανερώνει ότι αποτελείται, εξολοκλήρου ή εν μέρει, από έργα του Αρχιμήδη τα οποία είχαν χαθεί, γιατί αλλιώς δεν θα έμπαινε στον κόπο να μεταγράψει τα βιβλία στην επίπεδη και στερεά γεωμετρία, αριθμητική και μηχανική τα οποία έχουν φτάσει

ως εμάς μέσω των γραπτών του μεγάλου Έλληνα. Ίσως μάλιστα το χειρόγραφο που βρέθηκε στην Κων/πολη μπορεί να περιέχει το έργο πάνω στο συμβολισμό (ενν. αριθμητικό) το οποίο ο Αρχιμήδης θεωρείται ότι είχε γράψει και το οποίο όταν χάθηκε, σήμανε την απώλεια στον κόσμο του συστήματος που είχε εφεύρει. Αλλά είτε είναι αυτό είτε όχι (ενν. το χαμένο έργο), η ανακάλυψη είναι εξαιρετικού ενδιαφέροντος γιατί δείχνει ότι αρχαία χειρόγραφα υπάρχουν πράγματι στην Κων/πολη - και ότι το παλιό ρητό, "οπου πατήσει Τούρκου ποδάρι δε φυτρώνει ποτέ χορτάρι" δεν εφαρμόζεται σε όλες τις βιβλιοθήκες που υπήρχαν στην πόλη όταν ο Μωάμεθ ο Β΄ την κατέλαβε το 1453. Μπορεί μάλιστα να δειχθεί ότι μια προσεκτική έρευνα θα μπορούσε να καταλήξει στην αποκάλυψη των χαμένων έργων του Λίβιου και του Κικέρωνα και πολλών άλλων θησαυρών της αρχαιότητας που εξαφανίστηκαν στο χάσμα μεταξύ της κλασσικής εποχής και της Αναγέννησης. Ίσως, πράγματι, το βιβλίο, η απώλεια του οποίου ήταν η μεγαλύτερα λογοτεχνική απώλεια που υπέστη ποτέ ο κόσμος, τα Ποιήματα της Σαπφούς, θα ανακαλυφθούν επιτέλους και ένας από τους κύριους στόχους της προτεινόμενης ανασκαφής του Herculaneum θα υλοποιηθεί με κάποιο άλλο τρόπο.Διότι πάντα παραμένει ένα διαφιλονικούμενο ζήτημα το αν οι Τούρκοι κατέστρεψαν ή διατήρησαν τις βιβλιοθήκες που βρήκαν στην Κων/πολη. Είναι γνωστό ότι οι Τούρκοι ήταν πάντα διστακτικοί στο να καταστρέψουν γραπτά, από φόβο μήπως περιέχουν το όνομα του Θεού, αλλά πολλοί ακαδημαϊκοί πιστεύουν πως αυτός ο ενδοιασμός δε θα βάρυνε τόσο το Μωάμεθ και τους ακολούθους του όταν μπήκαν στη μεγάλη πόλη και άρχισαν να ανάβουν υπαίθριες φωτιές από τους θησαυρούς της αρχαιότητας που ήταν φυλαγμένοι εκεί.Μερικά χρόνια πριν, ο J.C.Robinson έλαβε την άδεια να εισέλθει στη βιβλιοθήκη χειρογράφων του Σουλτάνου, και είδε 3000 από αυτά να κρέμονται σε δερμάτινες θήκες πάνω στον τοίχο.Κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι Δυτικοί ακαδημαϊκοί τα είχαν μελετήσει πολύ πριν και ότι δεν υπήρχε τίποτα αξίας σε αυτά. Στην πραγματικότητα, δεν υπάρχει καμμία αναφορά μιας τέτοιας μελέτης. Ο Meredith Townsend στην "Ασία και Ευρώπη", απηύθυνε έκκληση για τη διερεύνηση αυτής της βιβλιοθήκης. Είπε: "η βιβλιοθήκη του σουλτάνου πρέπει να διερευνηθεί πλήρως ως ο πρώτος όρος για τη χορήγηση νέου δανείου

στην Τουρκία - εάν υπάρξει νέο δάνειο - και πρέπει να απαιτηθεί άδεια να αναζητηθούν εκείνα τα παλαιότερα και πιο πολύτιμα φορτία χειρογράφων που πιστεύεται ή είναι γνωστό ότι υπάρχουν στην κρύπτη της Αγίας Σοφίας. Αυτό είναι το τελευταίο μέρος που απέμεινε στο οποίο πιθανότατα θα κάνουμε μια μεγάλη λογοτεχνική ανακάλυψη, και θα πρέπει να ερευνηθεί προτού έρθει η μεγάλη μέρα όπου η μοίρα των Οθωμανών θα έχει ολοκληρωθεί, και η Κων/πολη για μια ακόμη φορά θα βυθιστεί, μια μάζα από ματωμένα ερείπια, πυρπολημένη σπό τους κατόχους της προτού αρχίσουν την τελευταία υποχώρησή τους στην έρημο, από την οποία κατά τη μυστήρια πρόνοια του Θεού, υποχρεώθηκαν να αναδυθούν προκειμένου να καταστρέψουν το ανατολικό μισό του πολιτισμένου κόσμου. Η μοναδική άλλη περίπτωση είναι το βασιλικό παλάτι στο Μαρόκο, και είναι αμφίβολο αν υπάρχει μια βιβλιοθήκη εκεί.¨ Ο κ. Townsend μπορεί να αναφέρθηκε και στην επιπρόσθετη πιθανότητα, μια πολύ μικρή είναι αλήθεια, αλλά παρόλα αυτά πιθανότητα, ότι η Κινέζικη αυτοκρατορία μπορεί να κατέχει κάποιους από τους χαμένους θησαυρούς της αρχαιότητας. Αλλά η ανακάλυψη του Δανού σοφού στην Κων/πολη δείχνει ότι η πόλη αυτή είναι μακράν ο καλύτερος κυνηγετικός τόπος για τους σύγχρονους ουμανιστές, αν υπάρχει κανείς ακόμα.

Δημοσιευμένο στις 16 Ιουλίου 1907.

TELLS ARCHIMEDES'S METHODS OF SEARCH

Palimpsest Found at Constantinople Is of Extreme Interest.

TURKEY RAISED OBSTACLES

At First Denied That Any Such Manuscript Existed—Prof. Heiberg Then Went and Unearthed It.

Foreign Correspondence THE NEW YORK TIMES.

COPENHAGEN, July 19.—The discovery in a convent at Constantinople by Prof. I. L. Heiberg of this city of a manuscript containing parts of works by the great mathematician, Archimedes, which had hitherto been among the treasures of antiquity lost to the world, proves to be of extraordinary interest. Not only is the find itself of extreme value, but the circumstances in which the manuscript was run down suggest fascinating possibilities of similar finds in the Turkish capital.

Prof. Heiberg is probably the leading living authority on the life and works of Archimedes, the greatest mathematician and inventive genius of the classical age.

Last year Prof. Schione, a German savant, informed Prof. Heiberg that he believed, would be found to convent library at Constantinople which, he believed., would be found to contain some of Archimedes's writings. Prof. Heiberg immediately began negotiations through diplomatic channels with a view to having the manuscript sent to him as a loan. The Turkish Government not only refused the request, but denied that any such manuscript existed.

Finally Prof. Heiberg decided to go to Constantinople and look for the manuscript himself. With the aid of the Turkish librarian, Nicholas Tsoukaladskis, he discovered the book and found, to his delight, that it was a palimpsest, the first writing on which had hardly been erased at all, the scribe who indicted the later script, which consisted of a "euchologion," having apparently merely taken a sponge and passed it over the original manuscript. The manuscript contained writings by Archimedes of the greatest importance.

The professor began by collating the pages and transcribing a large part of the contents. He found, however, that to copy the entire manuscript would be a long task, and he therefore asked permission of the Turkish authorities to photograph the manuscript. This time he did not have any trouble with them and the permission was granted.

The book consists of 185 written pages. The original writing is in a beautiful brown ink. On eight pages—1, 2, 15, 18, 20, 120, 122, and 146—the script has so far baffled all attempts at deciphering, while the professor has succeeded in reading only a few words on Pages 119, 157, 158, and 160. Dr. Heiberg, however, is hopeful of ultimately making out almost the entire manuscript. He has already been greatly assisted by his colleague, Prof. H. G. Zeuthen.

For full details of the discovery we shall have to wait until the volume is published, but it is stated that it is of peculiar value because, unlike the previously known works of Archimedes, it does not contain only bare mathematical and mechanical formulae, but explains how Archimedes obtained his knowledge through various methods and gives a wonderful insight into the mind of this great philosopher—one of the most wonderful minds that has ever existed. The name of the philosopher Democritus is often mentioned in the manuscript, showing that Archimedes was a close student of his writings.

At the same time the manuscript contains many geometrical figures which, it is asserted, are of extreme interest. In some cases these figures do not appear to have been finished, being mere suggestions of the complete diagrams.

The New York Times
Published: August 4, 1907
Copyright © The New York Times

Μετάφραση

Μιλάει για τις ερευνητικές μεθόδους του Αρχιμήδη.

Το Παλίμψηστο που βρέθηκε στην Κων/πολη είναι εξαιρετικού ενδιαφέροντος.

Η Τουρκία ορθώνει εμπόδια.

Στην αρχή αρνήθηκαν την ύπαρξη τέτοιου χειρογράφου - ο καθηγητής Heiberg στη συνέχεια πήγε και το ξέθαψε.

Κοπεγχάγη, 19 Ιουλίου. Η ανακάλυψη σε ένα μετόχι της Κων/πολης από του καθηγητή Heiberg ενός χειρογράφου που περιείχε τμήματα έργου του μεγάλου μαθηματικού Αρχιμήδη, τα οποία

κατατάσσονταν στους θησαυρούς της αρχαιότητας που ήταν εξαφανισμένοι από του κόσμο, αποδεικνύεται εξαιρετικού ενδιαφέροντος. Όχι μόνο η ίδια η ανακάλυψη είναι εξαιρετικής σημασίας, αλλά και οι συνθήκες κάτω από τις οποίεςτο χειρόγραφο αποκαλύφθηκε υπονοούν συναρπαστικές δυνατότητες παρόμοιων ανακαλύψεων στην τουρκική πρωτεύουσα. Ο καθηγητής Heiberg είναι ίσως η κορυφαία εν ζωή αυθεντία για τη ζωή και το έργο του Αρχιμήδη, του μεγαλύτερου μαθηματικού και εφευρετικού νου της κλασικής εποχής. Του προηγούμενο χρόνο, ο καθηγητής Schone , ένας Γερμανός σοφός, πληροφόρησε του καθηγητή Heiberg για το τι πίστευε ότι θα μπορούσε να βρεθεί στη βιβλιοθήκη του μετοχίου στην Κων/πολη, όπου πίστευε θα μπορούσαν να βρίσκονται κάποια από τα γραπτά του Αρχιμήδη. Ο καθηγητής Heiberg αμέσως άρχισε διαπραγματεύσεις μέσω διπλωματικών καναλιών με την πρόθεση να του αποσταλεί το χειρόγραφο σαν δάνειο. Η τουρκική κυβέρνηση όχι μόνο αρνήθηκε το αίτημα αλλά και την ύπαρξη τέτοιου χειρογράφου. Τελικά ο καθηγητής Heiberg αποφάσισε να πάει ο ίδιος στην Κων/πολη και να αναζητήσει το χειρόγραφο. Με τη βοήθεια του βιβλιοθηκάριου Νικόλαου Τσουκαλαδάκη ανακάλυψε το βιβλίο και βρήκε, προς ευθουσιασμό του, ότι ήταν ένα παλίμψηστο, η πρώτη γραφή του οποίου είχε σχεδόν σβηστεί εντελώε και ο συγγραφέας που έκανε τη μεταγενέστερη γραφή, η οποία αποτελείτο από ένα ¨ευχολόγιο¨, πήρε ουσιαστικά ένα σφουγγάρι και το πέρασε πάνω από το αρχικό χειρόγραφο. Το χειρόγραφο περιείχε γραπτά του Αρχιμήδη εξαιρετικής σημασίας. Ο καθηγητής άρχισε με τη συλλογή των σελίδων και τη μεταγραφή μργάλου τμήματος των περιεχομένων. Ανακάλυψε ωστόσο ότι η αντιγραφή του χειρογράφου θα ήταν μια χρονοβόρα διαδικασία και επομένως ζήτησε την άδεια των τουρκικών αρχών να φωτογραφίσει το χειρόγραφο. Αυτή τη φορά δεν είχε καυένα πρόβλημα μαζί τους και η άδεια δόθηκε.Το βιβλίο περιέχει 185 γραμμένες σελίδες. Η αρχική γραφή έχει γίνει με ένα όμορφο καφέ μελάνι. Σε 8 σελίδες -1,2,15,18,20,120,122 και 146- το κείμενο έχει ματαιώσει μέχρι τώρα κάθε προσπάθεια αποκρυπτογράφησης, ενώ ο καθηγητής κατόρθωσε να διαβάσειμόνο μερικές λέξεις στις σελίδες 119,157,158 και 160. Ο δρ. Heiberg όμως είναι αισιόδοξος ότι τελικά θα τα καταφέρει με ολόκληρο το χειρόγραφο. Έχει άλλωστε τη

βοήθεια του συναδέλφου του Zeuthen .Για αναλυτικές λεπτομέρειες της ανακάλυψης θα πρέπει να περιμένουμε μέχρι να εκδοθεί ο τόμος, αλλά τονίζεται ότι έχει ιδιαίτερη αξία γιατί αντίθετα με τα προηγούμενα γνωστά έργα του Αρχιμήδη δεν περιέχει μόνο γυμνούς μαθηματικούς και μηχανικούς τύπους, αλλά εξηγεί το πως ο Αρχιμήδης απέκτησε τη γνώση του διαμέσου ποικίλων μεθόδων και δίνει μια υπέροχη διεισδυτική ματιά στο μυαλό αυτού του μεγάλου φιλοσόφου - μιας από τις πιο υπέροχες διάνοιες που έχουν ποτέ υπάρξει. Το όνομα του φιλοσόφου Δημόκριτου αναφέρεται συχνά στο χειρόγραφο, δείχνοντας ότι ο Αρχιμήδης ήταν ένας στενός μελετητής των γραπτών του.Την ίδια στιγμή το χειρόγραφο περιέχει πολλά γεωμετρικά σχήματα τα οποία είναι εξαιρετικού ενδιαφέροντος.Σε μερικές περιπτώσεις τα σχήματα αυτά φαίνονται ανολοκλήρωτα, σαν να είναι περισσότερο υποδείξεις για τα ολοκληρωμένα διαγράμματα.

Δημοσιευμένο στις 4 Αυγούστου 1907.

Παρατηρήσεις-σχόλια

Τα δύο πολύ ενδιαφέροντα άρθρα που παρατίθενται παραπάνω συνιστούν τμήμα των πρωτοσέλιδων της εφημερίδας ¨The New York Times ¨, αποτελούν καρπό προσωπικής έρευνας στο ηλεκτρονικό αρχείο της εφημερίδας, και είναι πολύ ενδεικτικά του αντίκτυπου που προκάλεσε στον κόσμο η ανακάλυψη του Παλίμψηστου σχεδόν έναν αιώνα πριν.

Το πρώτο άρθρο, δημοσιευμένο στις 16 Ιουλίου του 1907 με τον εύγλωττο τίτλο ¨Μεγάλη λογοτεχνική ανακάλυψη¨ στην Κων/πολη¨ μαρτυρά αμέσως τη σπουδαιότητα του έργου του Αρχιμήδη ως τμήμα της πνευματικής μας κληρονομιάς. Εκείνο όμως που αξίζει να σχολιαστεί ιδιαίτερα είναι η διάθεση του αρθρογράφου απέναντι στο τουρκικό κράτος, την οποία εάν είμαστε επιεικείς θα τη χαρακτηρίζαμε απλώς ως εχθρική:

♦ ¨Το αν οι Τούρκοι κατέστρεψαν τις βιβλιοθήκες όταν κατέλαβαν την Πόλη πραμένει πάντα ένα διαφιλονικούμενο ζήτημα.¨

♦ ¨Το παλιό ρητό: όπου πατήσει Τούρκου ποδάρι δε φυτρώνει ποτέ ξανά χορτάρι (!) δεν ισχύει

για όλες τις βιβλιοθήκες που υπήρχαν στην Πόλη όταν ο Μωάμεθ την κατέλαβε το 1453.¨

♦ ¨Είναι γνωστό ότι οι Τούρκοι ήταν πάντα διστακτικοί στο να καταστρέψουν γραπτά [...]αλλά πολλοί ακαδημαϊκοί πιστεύουν πως ο ενδοιασμός αυτός δε θα βάρυνε τόσο τον Μωάμεθ και τους ακολούθους του όταν μπήκαν στην ένδοξη πόλη και άρχισαν να ανάβουν υπαίθριες φωτιές με τους θησαυρούς της αρχαιότητας που ήταν φυλαγμένοι εκεί.¨

Ή παρακάτω, η παράθεση ενός άλλου άρθρου στην εφημερίδα ¨Ασία και Ευρώπη¨ :

¨Πρέπει να ερευνηθεί (η κρύπτη της Αγίας Σοφίας) προτού έρθει η ένδοξη μέρα όπου η μοίρα των Οθωμανών θα έχει ολοκληρωθεί και η Κων/πολη για μια ακόμη φορά θα καταποντιστεί, μια μάζα από ματωμένα ερείπια, πυρπολημένη από τους κατόχους της, προτού αυτοί υποχωρήσουν τελικά στην έρημο από την οποία κατά μυστήρια πρόνοια του Θεού αναδύθηκαν με σκοπό να καταστρέψουν το ανατολικό μισό του πολιτισμένου κόσμου¨.

Τι σκληρό άρθρο, αλήθεια!

Όλα όμως έχουν την εξήγησή τους. Βρισκόμαστε στα 1907, μια δεκαετία σχεδόν πριν την έναρξη του Α΄ Παγκοσμίου Πολέμου και το Οθωμανικό κράτος, γερασμένο και παρηκμασμένο ψυχορραγεί. Η στενή συμμαχία των Τούρκων με τη μιλιταριστική Γερμανία, η υποβόσκουσα ένταση στα Βαλκάνια με τους κάποτε υποτελείς λαούς της αυτοκρατορίας έτοιμους να απελευθερωθούν ή να απελευθερώσουν νέα εδάφη ,σε συνδυασμό με την παγιωμένη αντίληψη των Δυτικών για την ανύπαρκτη σχέση των Τούρκων με τον πολιτισμό και την έλλειψη σεβασμού προς την ελληνορωμαϊκή κληρονομιά, μπορούν πολύ εύκολα να ερμηνεύσουν τη μισερή στάση του συγγραφέα του άρθρου. Ο Meredith Townsend μάλιστα, αρθρογράφος στην ¨Ασία και Ευρώπη¨, προτείνει να τεθεί ως όρος για το επόμενο δάνειο προς το τουρκικό κράτος (άλλη μια απόδειξη της οικονομικής δυσπραγίας του)την ενδελεχή εξέταση της βιβλιοθήκης του σουλτάνου - αλλιώς να μην υπάρξει νέο δάνειο.

Πέρα όμως από τη σκληρή αντιμετώπιση που επιφυλλάσει ο συγγραφέας του άρθρου για τους Τούρκους δείχνει να ενδιαφέρεται πάρα πολύ για το περιεχόμενο του Παλίμψηστου. Εικάζει,

λοιπόν, και σωστά μπορούμε να πούμε πως περιέχει χαμένα από καιρό έργα του Αρχιμήδη αλλιώς δε θα έμπαινε στον κόπο να τα αντιγράψει με τόση επιμέλεια ο Heiberg .Μάλιστα εύχεται το χειρόγραφο να περιέχει το έργο του Αρχιμήδη πάνω στο αριθμητικό σύστημα συμβολισμού που είχε δημιουργήσει ο μαθηματικός και το οποίο θεωρεί πως κατέχει ξεχωριστή θέση ανάμεσα στα έργα του.

Τέλος εύχεται η ανακάλυψη του Παλίμψηστου του Αρχιμήδη να λειτουργήσει ως κινητήριος μοχλός για τους ανά τον κόσμο Ουμανιστές ώστε να ανακαλύψουν και άλλα θαύματα της πνευματικής μας κληρονομιάς (μάλιστα τοποθετεί τα ποιήματα της Σαπφούς ως την πιο αξεπέραστη απώλεια στον κόσμο της λογοτεχνίας) στις Βιβλιοθήκες της Κωνσταντινούπολης και άλλων πόλεων.

Το δεύτερο άρθρο,δημοσιευμένο είκοσι μέρες περίπου αργότερα από το πρώτο, στον κύριο τίτλο του επικεντρώνεται στο περιεχόμενο του Παλίμψηστου και μας πληροφορεί πως αυτό περιέχει κάποιες από τις μεθόδους έρευνας του Αρχιμήδη. Αφού ρίξει φως στα γεγονότα που οδήγησαν στην ανακάλυψη του πολύτιμου κειμηλίου και δώσει έμφαση στην άρνηση των τουρκικών αρχών να δεχτούν καν την ύπαρξη του Παλίμψηστου μεταφέρει αναλυτικές πληροφορίες για το περιεχόμενό του: πρόκειται για ένα βιβλίο 185 σελίδων τις οποίες φωτογράφισε μία προς μία ο Heiberg προκειμένου να το μελετήσει αναλυτικότερα στην πατρίδα του.

Το σημαντικότερο ωστόσο κομμάτι του άρθρου είναι η προτελευταία παράγραφός του, όπου τονίζεται εκατό χρόνια πριν η ιδιαίτερη αξία του έργου ως μέσου κατανόησης της συλλογιστικής του μεγάλου μαθηματικού,¨μιας από τις πιο υπέροχες διανοήσεις που έχουν ποτέ υπάρξει¨ και στη σχέση του με το φιλόσοφο Δημόκριτο καθώς το όνομα του τελευταίου εντοπίζεται στο Παλίμψηστο.

Κεφάλαιο 9

Παράρτημα Δ

Η ανακατασκευή[1] της μηχανικής μεθόδου για τη διερεύνηση του δεύτερου στερεού της αρχιμήδειας εισαγωγής (θεώρημα 16)

Κρίναμε εδώ σκόπιμο να παραθέσουμε άλλη μία εφαρμογή της Μηχανικής Μεθόδου του Αρχιμήδη προκειμένου να καταδείξουμε τη δυναμική της στην ανακάλυψη και διερεύνηση φαινομενικά δύσκολων προβλημάτων, όπως αυτό που διατυπώνεται από το μαθηματικό στην επιστολή του προς τον Ερατοσθένη:

¨Εάν σε κύβο εγγραφεί κύλινδρος ο οποίος έχει τις βάσεις του στα απέναντι τετράγωνα, την επιφάνειά του εφαπτόμενη των υπόλοιπων τεσσάρων επιπέδων και εάν εγγραφεί και άλλος κύλινδρος στον ίδιο κύβο έχοντας τις βάσεις του σε άλλα τετράγωνα και την επιφάνειά του εφαπτόμενη στα υπόλοιπα τέσσερα επίπεδα, τοτε το προκύπτον σχήμα το οποίο περικλείεται από τις κυρτές επιφάνειες των κυλίνδρων και το οποίο ανήκει και στους δύο κυλίνδρους, είναι τα $\frac{2}{3}$ του όλου κύβου.¨

Στο σχήμα μας $VWYX$ είναι το τμήμα του κύβου που αποκόπτεται από επίπεδο (παράλληλο

[1] που οφείλεται στον Zeuthen και παρατίθεται στο T.L.Heath, *The Method*,p.48-51,Dover,New York,2002

στο επίπεδο της σελίδας), και το οποίο διέρχεται από τον άξονα BD ενός από τους κυλίνδρους που είναι εγγεγραμμένοι στον κύβο.

Το ίδιο επίπεδο δίνει τον κύκλο $ABCD$ ως τομή του άλλου εγγεγραμμένου κυλίνδρου με άξονα κάθετο στο επίπεδο της σελίδας,ο οποίος εκτείνεται σε κάθε πλευρά του επιπέδου σε απόσταση ίση με την ακτίνα του κύκλου ή ίση με την πλευρά του κύβου.

Η AC είναι η διάμετρος του κύκλου που είναι κάθετη στην BD. Φέρω τις AB, AD και τις προεκτείνω να συναντήσουν την εφαπτομένη C του κύκλου στα E, F.

Τότε $EC = CF = CA$.

Ας αχθεί η εφαπτομένη LG στο Α και ας σχεδιασθεί το τετράπλευρο $EFGL$.

Φέρω ευθείες από το Α στις 4 γωνίες της τομής στην οποία το επίπεδο διαμέσου της BD, κάθετου στην AK αποκόπτει τον κύβο.Αυτές οι ευθείες, εάν παραχθούν,θα συναντήσουν το επίπεδο της επιφάνειας του κύβου απέναντι από το Α σε 4 σημεία σχηματίζοντας τις 4 πλευρές ενός τετραγώνου στο επίπεδο με πλευρές ίσες προς την EF ή το διπλάσιο της πλευράς του κύβου, και έτσι θα σχηματιστεί μια πυραμίδα με το Α για κορυφή και το τελευταίο τετράγωνο για βάση.

Σχηματίζω το παραλληλεπίπεδο με βάση και ύψος ίσα με αυτά της πυραμίδας.

Φέρω στο παραλληλόγραμμο LF οποιαδήποτε ευθεία ΜΝ παράλληλη στην EF, και διαμέσου της ΜΝ σχεδιάζω επίπεδο κάθετο στην AC.Το επίπεδο αυτό αποκόπτει,

1)το στερεό που περικλείεται απόμ τους 2 κυλίνδρους σε τετράγωνο με πλευρά ίση με OP,

2)το πρίσμα σε τετράγωνο με πλευρά ίση με ΜΝ και

3)την πυραμίδα σε τετράγωνο με πλευρά ίση με QR.

Προεκτείνω την CA στο Η, ώστε ΗΑ=CA, και ας νοηθεί ζυγός η HC.

Τώρα όπως στο θεώρημα 2, αφού $MC = AC, QS = AS$,

$MS.SQ = CA.AS$

AO^2

$OS^2 + SQ^2$.

Επίσης,

$HA : AS = CA : AS$

$= MS : SQ$

$= MS^2 : MS.SQ$

$= MS^2 = (OS^2 + SQ^2)$

$= MN^2 = (OP^2 + QR^2)$

$= (\square, MN) : (\square, OP + \square, QR)$.

Επομένως το τετράγωνο με πλευρά ίση με τη ΜΝ, εκεί που βρίσκεται, είναι σε ισορροπία ως προς το Α με τα τετράγωνα με πλευρές τα OP, QR αντίστοιχα, με τα κέντρα βαρύτητάς τους στο Η.

Προχωρώντας με τον ίδιο για όλα τα τετράγωνα που σχηματίζονται από επίπεδα κάθετα στην AC, δείχνουμε τελικά ότι το πρίσμα, εκεί που βρίσκεται, είναι σε ισορροπία ως προς το Α με το στερεό που περικλείεται μεταξύ των δύο κυλίνδρων και της πυραμίδας, και τα δύο τοποθετημένα με τα κέντρα βαρύτητάς τους στο Η.

Τώρα το κέντρο βαρύτητας του πρίσματος είναι στο Κ.Επομένως,

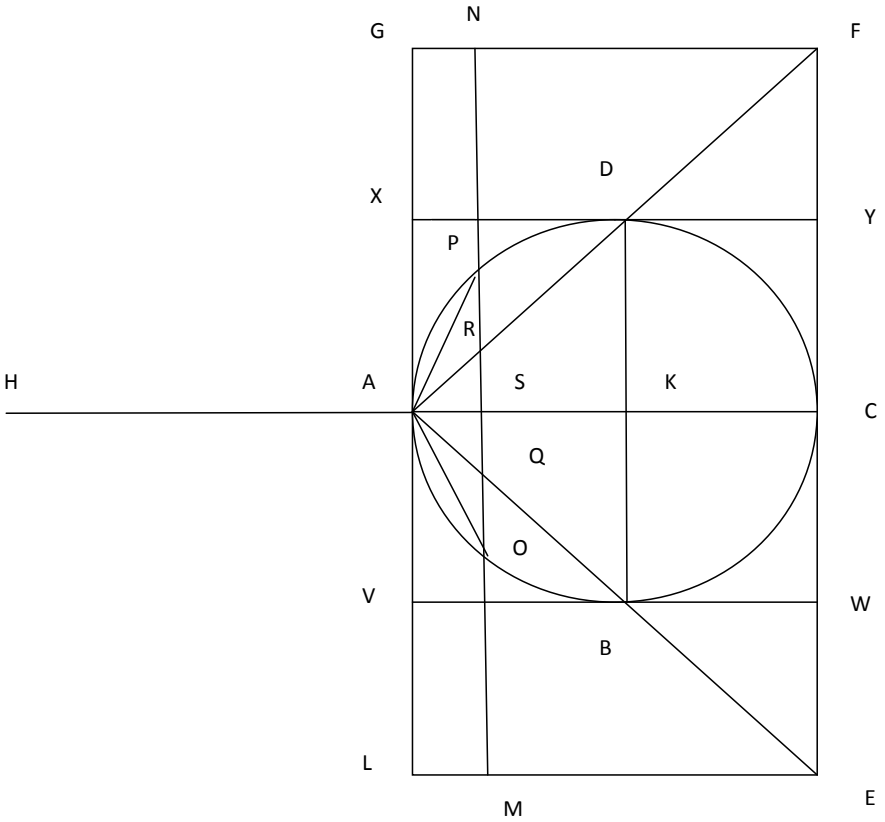
$HA : AK$=(πρίσμα):(στερεό+πυραμίδα) ή

$2 : 1$=(πρίσμα):(στερεό+1/3 πρίσμα).

Επομένως 2(στερεό)+ 2/3 (πρίσμα)=(πρίσμα).

Προκύπτει ότι (στερεό μεταξύ κυλίνδρων)=1/6 (πρίσματος)= 2/3 (κύβου).

Σχήμα Ε.1



Κεφάλαιο 10

Παράρτημα Ε

Τα πρωτότυπα πρακτικά της δίκαστικής διαμάχης του Πατριαρχείου Ιεροσολύμων με τον Οίκο Κρίστις

The Greek Orthodox Patriarchate of Jerusalem v. Christies'As Inc., 1999 U.S. Dist. LEXIS 13257 (S.D. N.Y. 1999)

WOOD, U.S.D.J.:

Plaintiff the Greek Orthodox Patriarchate of Jerusalem (the "Patriarchate") brought this action seeking the return of the Archimedes Palimpsest, a tenth-century manuscript containing a copy of certain writings of Archimedes (the "Palimpsest"). The Court denied plaintiff's request for a preliminary injunction preventing the auction of the Palimpsest on October 28, 1998. Defendants Christie's, Inc. ("Christie's"), Anne Guersan ("Mme. Guersan"), and John/Jane Doe (the "Purchaser") (collectively, "defendants") have moved for summary judgment pursuant to Federal Rule of Civil Procedure 56. For the reasons stated below, the Court grants the motion.

I. Background

The following statement of the facts of this case is drawn from the parties' Statements of Material Facts as to Which There Is No Genuine Issue To Be Tried ("56.1 Stat."), the allegations of the Amended Complaint ("Am. Comp."), and various affidavits submitted by the parties.

The Palimpsest is a manuscript of great historical importance. In general, a palimpsest is a text from which the original writing has been washed off, so that the paper can be reused. (See 56.1 Stat. PP 3-4; see also Malcolm W. Browne, Ancient Archimedes Text Turns Up, and It's for Sale, N.Y. Times, Oct. 27, 1998, at F5.) The original text of the Palimpsest involved in this case was written in the tenth century and is a copy of two of Archimedes's most significant works, "On Floating Bodies" and "Method of Mechanical Theorems." (See Affidavit of Anne Guersan, Feb. 12, 1999, Exh. A, at sixth unnumbered page; see also Browne, supra.) The originals of these texts are believed to have been destroyed in the fire that consumed the library of Alexandria, Egypt, in the third century. (See Browne, supra.) According to legend, Archimedes conceived of the principles of "On Floating Bodies" while in the bathtub. The story holds that King Hiero II of Syracuse asked Archimedes if he could determine whether the King's goldsmith [*3] had delivered to the King a crown made of gold, as ordered, or of gold mixed with silver, without damaging the crown. Archimedes was thinking of this problem while taking a bath, and realized that he could evaluate the composition of the crown by the amount of water it displaced. Archimedes leapt from the bathtub and ran naked through the streets, exclaiming "Eureka!" meaning "I've found it!" (See Affidavit of Anne Guersan, Feb. 12,1999 ("Guersan Aff."), Exh. A, at sixth unnumbered page; see also Browne, supra.)

Sometime in the twelfth or thirteenth century, due to the short supply of writing material, the original lettering of the manuscript was partially washed away and Greek liturgical text written over it. (See 56.1 Stat. P 4.) For an undetermined period of time, the Palimpsest was kept in the library of Mar Saba, a monastery in Palestine in the desert southeast of Jerusalem. (See id. P 5.) The Mar Saba collection was eventually incorporated, sometime in the nineteenth century, into the Library of the Patriarchate in Jerusalem. (See id.) The Patriarchate is an order of monks, declared a Patriarchate by the Fourth Ecumenical Council of the Christian Church [*4] in 451 A.D. (See Am. Comp. P2.) The Patriarchate is devoted to large-scale educational and philanthropic activities and to protecting Christian holy places in the territory which is now Israel, Jordan, and the Palestinian authority. (See id.) The Palimpsest, and hundreds of other manuscripts, were subsequently transferred to the Metochion of the Holy Sepulchre. The Metochion is a monastery in Constantinople belonging to the Patriarchate. (See 56.1 Stat. at P 6.)

In the nineteenth and early twentieth century, several scholars noted the existence of the Palimpsest among the collection of manuscripts in the Metochion. German biblical scholar Constantine Tischendorf mentioned viewing the Palimpsest in his 1846 travel book, Reise in der Orient. (See id. P 7.) Tischendorf obtained a leaf from the Palimpsest that was later sold to the University Library in Cambridge, England. The leaf remains there today. (See id.) In 1899, A.I. Papadopoulos-Kerameus included the Palimpsest in his catalogue of manuscripts belonging to the Metochion. (See id. P 8.) In 1906 and 1908, Danish classicist J.L. Heiberg studied the Palimpsest, both times while the Palimpsest was still in Constantinople. (See id. P 9.)

What happened next to the Palimpsest is unclear. Although certain manuscripts from the Metochion were transported out of Istanbul (formerly Constantinople) in the 1930s and removed to Athens, Greece, the Palimpsest was not among them. (See id. PP 10-11.) It is not known whether the Palimpsest was intentionally left behind in Istanbul or whether the Palimpsest had already been removed from the Metochion's collection. It appears, however, that several manuscripts left the Metochion collection in the early part of the century. The Bibliotheque Nationale de France, in Paris, purchased a Metochion manuscript at the turn of the century, the University of Chicago acquired one in the 1930s, and the Cleveland Museum of Art purchased a manuscript in the 1940s from a private dealer who had acquired it in the 1920s. (See id. P 12.) n1

- - - - - - - - - - - - - - Footnotes - - - - - - - - - - - - - - -

n1 The Patriarchate disputes that the Bibliotheque Nationale purchased a Metochion manuscript around the turn of the century (see Pl. 56.1 Stat. P 12), and asserts that the purchase took place in the 1930s. (See Affidavit of Metropolitan Timothy of Vostra, Mar. 18, 1999, P 15.)

- - - - - - - - - - - - End Footnotes- - - - - - - - - - - - -

Sometime in the 1920s, Mr. Marie Louis Sirieix, a French civil servant and businessman, acquired the Palimpsest. (See id. P 14.) The circumstances surrounding Mr. Sirieix's purchase of the Palimpsest are not known. The Patriarchate maintains that the Palimpsest must have been stolen, either by Mr. Sirieix or a middleman, because the Metochion had no authority to sell or remove any manuscripts without permission from the patriarchate. (See Affidavit of Metropolitan Timothy of Vostra, Mar. 18, 1999 ("Met. Timothy Aff."), PP 9-14.) The Guersan family has produced no bill of sale or other document evidencing transfer of

title to the Palimpsest.

Mr. Sirieix, who kept the Palimpsest at his home in Paris, died in 1956. (See id. PP 14-15.) After 1947, Mr. Sirieix's daughter, Mme. Anne Guersan, cared for the Palimpsest with the help of her husband and her son, Dr. Robert Guersan. (See id.P 15.) In the early 1960s, the Guersan family showed the Palimpsest to one of their neighbors, Professor Jean Bollack, a professor of Greek Literature at the University of Lille. (See id. P 16.) When Mme. Guersan became concerned about the condition of the Palimpsest, she consulted Professor [*7] Bollack, Professor A. Wasserstein, a member of the faculty of the Humanities of the Hebrew University in Jerusalem, and Father Joseph Paramelle, a philologist at the Institut de Recherche et d'Histoire des Textes of the Centre Nationale de la Recherche Scientifique ("CNRS"). (See id. P 17.) Eventually, Mme. Guersan had the Palimpsest treated and restored by the Establishment Mallet in Paris. (See Def. 56.1 Stat. P 17.) n2 Professor Wasserstein and Father Paramelle examined several pages of the Palimpsest sometime in 1970 and advised Mme. Guersan as to the provenance and proper preservation of the manuscript. (See id. PP 18-20; see also Guersan Aff. Exh. C (Letter of A. Wasserstein dated Aug. 25, 1970).)

- - - - - - - - - - - - - - Footnotes - - - - - - - - - - - - - - -

n2 The Patriarchate disputes this statement (see Pl. 56.1 Stat. P 17), but provides no basis for its disagreement. (See id.)

- - - - - - - - - - - - End Footnotes- - - - - - - - - - - - - -

In the early 1970s, the Guersan family first considered selling the Palimpsest. (See id. P 21.) The family printed at least two hundred copies of a brochure, one hundred in English and one hundred in French, that described the Palimpsest. (See id.; see also Guersan Aff.,

Exh. A.) Following distribution of these brochures, the Guersan family received inquiries from, among other places, the Beinecke Rare Book Library at Yale University, H.P. Kraus Rare Books and Manuscripts in New York, the University of Texas Humanities Research Center, and the University of Pittsburgh. (See Guersan Aff. Exh. D-H.) One potential purchaser visited the Guersans in 1984. (See 56.1 Stat. P 26.)

The Guersans consigned the Palimpsest to Christie's. In March 1993, the Guersan family sought export authorization for the Palimpsest. (See id. P 27.) Although the French Ministry of Culture initially denied the request in early 1996, later that year it reversed its decision and granted the Guersan family an export certificate. (See id. PP 27-29.) The Palimpsest was initially sent to Oxford University for additional study, then brought to New York in 1998. (See id. P 30.) On August 13, 1998, Christie's informed the State of Greece that a public auction of the palimpsest was planned. (See id. P 32.) In September 1998, Christie's announced [*9] the auction of the Palimpsest on October 29, 1998. (See id. P 33.)

One week before the auction, on October 22, 1998, the Patriarchate notified Christie's that it believed itself to be the rightful owner of the Palimpsest. (See id. P 34.) The day before the auction, October 28, 1998, the Patriarchate sought a temporary restraining order to prevent the auction of the Palimpsest, which this Court denied on that date. (See id. P 35.) Before it filed this lawsuit, the Patriarchate had never asserted claims over other Metochion manuscripts in private hands or announced the disappearance, loss, or theft of any Metochion manuscripts. (See id. P 13.) The Palimpsest was sold at auction on October 29, 1998, for 2 million dollars. (See id. P 36.) The Patriarchate subsequently amended its Complaint to include as defendants Mme. Guersan and the Purchaser of the Palimpsest. (See id. P 39.) Following limited discovery, defendants brought this motion for summary judgment.

II. Discussion

At the outset, the Court notes that the parties disagree over whether French law or New York law should govern this case. In its decision on the Patriarchate's motion for a preliminary injunction, the Court concluded that French law should apply. (See Transcript of Proceedings Before the Hon. Kimba M. Wood, Oct. 28, 1998, at 25.)
Although the Court adheres to that view in determining the present motion, the Court also concludes that the result would be the same even if it were to apply New York law. As stated more fully below, the laches defense provides a basis for granting defendants' motion for summary judgment whether French law or New York law applies.

***

***

B. Choice of Law

As noted above, the Patriarchate maintains that New York law should apply to this case, while defendants urge that French law must govern this action. The choice of law question is relevant in this action because French law and New York law treat differently good faith purchasers of allegedly stolen art. As explained more fully below, under French law title may be obtained by prescription over a thirty-year period. New York, in contrast, strongly favors the rights of original owners over even good faith purchasers. As the New York Court of Appeals has explained: "The rule in this State is that a cause of action for replevin against the good-faith purchaser of a stolen chattel accrues when the true owner makes demand for return of the chattel and the person in possession of the chattel refuses to return it." Solomon

R. Guggenheim Found. v. Lubell, 77 N.Y.2d 311,567 N.Y.S.2d 623, 626, 569 N.E.2d 426 (1991) (citations omitted); see also DeWeerth v. Baldinger, 836 F.2d 103, 106 (2d Cir. 1987) ("DeWeerth I") (citations omitted).

Because this action was brought pursuant to this Court's diversity jurisdiction, the Court must apply the choice of law rules of the forum state in which it sits, New York. See Klaxon Co. v. Stentor Elec. Mfg. Co., 313 U.S. 487, 496, 85 L. Ed. 1477, 61 S. Ct. 1020 (1941); Schwimmer v. Allstate Ins. Co., 176 F.3d 648, 650 (2d Cir. 1999). Under New York's choice of law rules, "questions relating to the validity of a transfer of personal property are governed by the law of the state where the property is located at the time of the alleged transfer." Kunstsammlungen Zu Weimar v. Elicofon, 536 F. Supp. 829, 845- 46 (E.D.N.Y. 1981) (citing Wyatt v. Fulrath, 16 N.Y.2d 169, 264 N.Y.S.2d 233, 211 N.E.2d 637 (1965); Restatement (Second) of Conflict of Laws • 246 (1971)) (additional citations omitted), aff'd, 678 F.2d 1150 (2d Cir. 1982). the Restatement provision upon which the district court in Kunstsammlungen relied states that, "whether there has been a transfer of an interest in a chattel by adverse possession or by prescription . . . [is] determined by the local law of the state where the chattel was at the time the transfer is claimed to have taken place." Restatement • 246.

Applying this test, the laws of France should apply to determine whether Mme. Guersan acquired title to the Palimpsest. The relevant transfer of title did not occur in New York, from Mme. Guersan to Christie's, or from Christie's to the Purchaser, but from the Patriarchate to Mr. Sirieix (perhaps through other individuals) and the Guersans' alleged acquisition of title to the Palimpsest by prescriptive possession in France. The Patriarchate makes no argument that the transfer from Mme. Guersan to Christie's, or from Christie's to the Purchaser, was invalid except insofar as Mme. Guersan never obtained legitimate title to the Palimpsest.

Because title passed, if at all, in France, French law should apply to this case.

The Patriarchate's assertions that the choice of law issue should be resolved in favor of New York rests less on legal principles than public policy arguments. The Patriarchate suggests that New York, being one of the leading centers of international commerce in art, has an interest in avoiding a reputation as a place where stolen art may be freely bought and sold. By placing the Palimpsest for auction in New York, this argument runs, the Guersan family has availed itself of the benefits of this forum and so must also be subject to its laws.

At the outset, it should be noted that the choice of law question may be resolved on public policy grounds only where the application of foreign law "would be violative of fundamental notions of justice or prevailing concepts of good morals." Curley v. AMR Corp., 153 F.3d 5, 12 (2d Cir. 1998) (citation omitted). The public policy interests of the State of New York, although not insignificant, do not rise to this level.

The New York Court of Appeals has recognized that the allocation of the burden of proof in cases involving art theft is influenced by the fact that "New York enjoys a worldwide reputation as a preeminent cultural center." Lubell, 567 N.Y.S.2d at 628. Providing some protection to original owners is necessary because "commercial indifference to ownership . . . facilitates traffic in stolen works of art." Porter v. Wertz, 68 A.D.2d 141,149, 416 N.Y.S.2d 254, 259, aff'd, 53 N.Y.2d 696, 439 N.Y.S.2d 105, 421 N.E.2d 500 (1981). [*16] The Lubell court was concerned about the effect of requiring an owner to demonstrate diligence within the three-year statute of limitations for recovery of a chattel, set forth in C.P.L.R. • 214(3). See Lubell, 567 N.Y.S.2d at 628 ("Three years after the theft, any purchaser, good faith or not, would be able to hold onto stolen art work unless the true owner was able to establish

that it had undertaken a reasonable search for the missing art."). The thirty-year period for prescriptive possession under French law, however, is a substantial length of time, not an indication of "commercial indifference." n3

- - - - - - - - - - - - - - Footnotes - - - - - - - - - - - - - - -

n3 The Patriarchate also relies on the Court of Appeals's statement in Wyatt that, "New York has the right to say as a matter of public policy whether it will apply its own rules to property in New York of foreigners who choose to place it here for custody or investment." Wyatt, 264 N.Y.S.2d at 235-36. Yet, as defendants point out, Wyatt involved a determination of title to funds that a Spanish couple placed in a New York bank account, and which remained there for a few decades. See id. at 234.

- - - - - - - - - - - - End Footnotes- - - - - - - - - - - - -

Furthermore, the fact that French law and New York law differ on this issue is insufficient to prove any violation of "fundamental notions of justice or prevailing concepts of good morals." Curley, 153 F.3d at 12. As defendants point out, New York's enhanced protection for original owners as against good faith purchasers is a relatively recent development. In DeWeerth I, the Second Circuit determined that New York courts would probably "impose a duty of reasonable diligence in attempting to locate stolen property, in addition to the undisputed duty to make a demand for return within a reasonable time after the current possessor is identified." DeWeerth I, 836 F.2d at 108 (emphasis added). As it turned out, this prediction was incorrect. See Lubell, 153 A.D.2d 143, 550 N.Y.S.2d 618, 621-23 (rejecting DeWeerth I's reliance on diligence in context of statute of limitations defense, and confining diligence inquiry to laches defense). It cannot be said that New York law "emphatically supports" the rights of owners (Pl. Mem. at 11), based on "fundamental notions of justice" where the law on

this issue was unclear until the Lubell decision in [*18] 1991, which contradicted the Second Circuit's statement of New York law made a few years earlier.

The public policy arguments advanced by the Patriarchate, therefore, fail to justify a departure from New York's choice of law rules. Moreover, the Patriarchate's assumption that New York law is significantly more favorable to their case than French law is ill- founded. Although the application of New York law to this case would deprive defendants of their argument that the Guersan family acquired the Palimpsest through prescriptive possession over the course of thirty years, the Patriarchate must still confront the laches defense. As explained more fully below, defendants' claim that this action is barred by laches is sufficient under New York law to justify summary judgment in defendants' favor. Because the Court concludes that French law applies to this action, it will first evaluate the adequacy of Mme. Guersan's title to the Palimpsest under the laws of France.

C. Prescriptive Possession Under French Law

Article 2262 of the French Civil Code provides that, "All actions, real as well as personal, are prescribed by thirty years, without the one who alleges such prescription being obliged to show a right thereto or an inferred objection of bad faith being able to be raised against him." Code civil [C. civ.] art. 2262 (John H. Crabb, trans., Rothman Co. rev. ed. 1995). HN12To qualify for prescriptive possession, "a possession must be continuous and uninterrupted, peaceful, public, unequivocal, and as owner." C. civ. art.2229. The parties disagree as to whether Mme. Guersan is able to show that possession was public for the required period. (See Def. Mem. at 16-18.) n4

- - - - - - - - - - - - - - Footnotes - - - - - - - - - - - - - - -

n4 The Patriarchate also suggests that the "impossibility to act" rule interrupts the prescriptive period. (See Def. Mem. at 17; Affidavit of Denis Tallon, Mar. 26, 1999, P16.) The provisions of the Civil Code that interrupt the prescriptive period, however, concern unemancipated minors and spouses, not entities such as the Patriarchate. See C. civ. arts. 2251-59.

- - - - - - - - - - - - End Footnotes- - - - - - - - - - - - - -

It is clear that the Guersan family's possession of the Palimpsest was public by the early 1970s. When the Guersan family first considered selling the Palimpsest in the early 1970s, it printed at least two hundred copies of a brochure, one hundred in English and one hundred in French. (See Guersan Aff. P 21.) Following distribution of these brochures, the Guersan family received inquiries from a variety of academic institutions. (See id. Exh. D-H.) Even before the distribution of the brochures, the family showed the Palimpsest to Professor Wasserstein, in 1970. (See id. P 2.) Professor Wasserstein wrote to the Guersans in 1970 describing the provenance of the manuscript (see id. Exh. C (Letter from A. Wasserstein, Aug. 25, 1970)), and shortly thereafter a colleague of his wrote to the Guersans to solicit a donation of the Palimpsest, which was declined. (See id. P 6.) The Patriarchate appears to admit that the Guersan family satisfied the elements of prescriptive possession since the early 1970s. (See Def. Mem. at 16; see also Affidavit of Denis Tallon, Mar. 26, 1999 ("Tallon Aff."), P 15.)

Assuming the family to have printed the brochures sometime in the early 1970s, there is still the issue of whether the Guersan family possessed the Palimpsest in a public manner since at least 1968, thirty years before this action was commenced. The Patriarchate sug-

gests that, "it may be argued that the possessor hid the Palimpsest because of its dubious origin and out of fear that disclosing its identity would bring forth a claim from the real owner." (Def. Mem. at 16.) The Patriarchate points to no evidence supporting this inference. According to Mme. Guersan, the family showed the Palimpsest to Prof. Bollack in 1960. (See Guersan Aff. P 16.) The Patriarchate contends that Professor Bollack's recollection that he viewed the manuscript in 1960, a date which Professor Bollack admits is "reconstructed" (see Guersan Aff. Exh. B (Letter from Prof. Jean Bollack, Nov. 2, 1998)), is "unconvincing." (Def. Mem. at 16.) Yet it is unlikely that even a "reconstructed" recollection would be inaccurate by a decade, which is what the Patriarchate must argue to place Prof. Bollack's viewing of the Palimpsest after 1968. To the contrary, the Patriarchate's argument that Prof. Bollack's recollection is unworthy of belief actually supports the inference that Prof. Bollack viewed the Palimpsest in 1960. The Patriarchate suggests that the Bollack letter is unconvincing because he characterizes the manuscript as "carefully preserved." (Def. Mem. at 16 (quoting Bollack Letter).) Yet, the Patriarchate argues, Mme. Guersan allegedly became concerned about the state of the Palimpsest sometime before 1970. (See Def. Mem. at 16-17.) The suggestion that Bollack's recollection of a "carefully preserved" manuscript is at odds with the Guersans' concerns about preservation is easily resolved by assuming the truth of both the Bollack letter and Mme. Guersan's affidavit, which taken together suggest that the manuscript was in fine condition in 1960 but, ten years later, showed some signs of deterioration. More generally, Mme. Guersan states in her affidavit that,

I am unaware of any complaint or claim made by any person, institution, or government concerning the ownership of the Palimpsest, prior to the claim which is the subject of this litigation. Moreover, experts who evaluated the Palimpsest over the past decades have confirmed my family's belief that other acquirers of manuscripts from the Metochion have never had their rightful ownership contested.

(Guersan Aff. P 15.) This statement is consistent with the fact that the Patriarchate has never taken any steps to recover those manuscripts that once belonged to the Metochion and are presently possessed by the Bibliotheque Nationale de France, the University of Chicago, and the Cleveland Museum of Art. (See id. P 12.) There is nothing in the record, in short, that suggests that the Guersans either kept the Palimpsest hidden, or had any motive to do so.

The Court does not mean to suggest that the Guersan family has provided overwhelming evidence of public possession of the Palimpsest beginning in the late 1960s (although there is abundant evidence of public possession in the early 1970s). The Court concludes, however, that the Patriarchate has failed to point to any genuine issues of material fact that could be resolved at trial; instead, it has simply cast aspersions on the validity of the Guersans' title during the period of the late 1960s to early 1970s. Because HN13the Patriarchate "must do more than simply show that there is some metaphysical doubt as to the material facts." Matsushita, 475 U.S. at 586, summary judgment should enter in defendants' favor.

D. Laches

Even if the Court were to conclude that New York law applied to determine the rights of the parties, defendants' laches defense bars the Patriarchate's claim to the Palimpsest. "Generally, the principle of laches is applied where it is clear that a plaintiff unreasonably delayed in initiating an action and a defendant was unfairly prejudiced by the delay." Robins Island Preservation Fund, Inc. v. Southold Dev. Corp., 959 F.2d 409, 423 (2d Cir.1992) (citing Stone v. Williams, 873 F.2d 620, 623 (2d Cir.), vacated on other grounds, 891 F.2d 401 (2d Cir. 1989)). In the context of claims of lost or stolen works of art or cultural artifacts, "the doctrine of laches . . . safeguards the interests of a good faith purchaser of lost or stolen

art . . . by weighing in the balance of competing interests the owner's diligence in pursuing his claim." Czartoryski-Borbon v. Turcotte, N.Y.L.J., Apr.28, 1999, at 27 col. 2 (Sup. Ct. N.Y. Cty. 1999). Thus, the Patriarchate "must show due diligence in attempting to locate the property to defeat the laches defense." Id.

Although the New York Court of Appeals and the United States Court of Appeals for the Second Circuit have disagreed as to whether the claimant need show reasonable diligence in the context of a statute of limitations defense, both courts have explicitly ruled that the claimant's reasonable diligence in locating the lost property is highly relevant to a laches defense.

DeWeerth I concerned a painting by French Impressionist Claude Monet, entitled "Champs de Ble a Vetheuil," created in 1879. See DeWeerth I, 836 F.2d at 104. The owner of the Monet, the daughter of the original purchaser, sent the painting to a relative for safekeeping in August 1943. The painting was kept in a castle in Oberbalzheim, in southern Germany. See id. at 105. While American soldiers were quartered in the castle, in 1945, the painting disappeared. See id. In 1946, the owner contacted the military government administering the Bonn-Cologne area, and in 1957 she contacted the Bundeskriminalamt, the West German federal bureau of investigation, in an effort to recover the stolen painting. See id. The owner also contacted an attorney and an art professor, seeking assistance in the investigation. See id. These efforts having come to naught, the owner made no further efforts to recover the Monet after 1957. See id. When the painting resurfaced on loan at an art gallery in New York, the owner demanded that the most recent purchaser return the Monet. When that demand was rejected, the owner brought suit soon thereafter. See id. at 105-06. The Second Circuit rejected the owner's claim, reasoning that New York law would impose a burden of reasonable diligence upon one seeking to recover stolen property. See id. at 108. It concluded that the

owner's investigation was "minimal," id. at 111, and that her delay in making a demand for recovery of the Monet was unreasonable.

Although the Second Circuit rested its decision on the statute of limitations issue, and specifically refrained from addressing the laches defense, see id. at 112 n.7, the New York Court of Appeals ruled in Lubell that the DeWeerth I decision should have been based on the principle of laches. Lubell was an action brought by the Guggenheim Museum to recover a gouache painted by Marc Chagall in 1912. See Lubell, 550N.Y.S.2d at 619. The Museum sued a good-faith purchaser of the Chagall, who had bought the gouache from a gallery, which in turn purchased it from a thief. See id. The Lubell court reasoned that the "gist" of DeWeerth I was that, "although the plaintiff's title to the stolen property might be lawful, she should not be heard to assert it because the delay attributable to her lack of diligence in searching for the property prejudiced the defendant in her defense. That is laches." Id. at 621. Thus while it was incorrect to analyze the plaintiff's diligence in the context of a statute of limitations defense, the plaintiff's diligence in recovering stolen property would be relevant to a laches defense. As the Lubell court concluded:

We hold that whether plaintiff was obligated to do more than it did in searching for the gouache depends on whether it was unreasonable not to do more, and whether it was unreasonable not to do more is an issue of fact relevant to the defense of laches and not the statute of limitations.

Id. at 619. n5 Like the New York Court of Appeals, those commentators who strongly favor the rights of the original owner nevertheless allow a significant role for the laches defense. See Steven A. Bibas, Note, The Case Against Statutes of Limitations for Stolen Art, 103 Yale L.J. 2437, 2467-68 (1994) ("If an owner took no significant steps to report a theft . . . and this silence prejudiced the buyer, laches should bar recovery."); Sydney M. Drum, Comment,

DeWeerth v. Baldinger: Making New York a Haven for Stolen Art?, 64 N.Y.U. L. Rev. 909, 942 (1989) ("Laches would limit the troubling possibility . . . that owners, knowing the relevant facts, could wait idly for decades, or even centuries, before any legal obligation arose to pursue their claims."); Andrea E. Hayworth, Note, Stolen Artwork: Deciding Ownership Is No Pretty Picture, 43 Duke L.J. 337, 375 (1993) ("The [Lubell] rule provides protection for original owners, as well as defenses for innocent purchasers, through the application of laches and the availability of other causes of action.").

- - - - - - - - - - - - - - Footnotes - - - - - - - - - - - - - - -

n5 In DeWeerth v. Baldinger, 38 F.3d 1266 (2d Cir. 1994) ("DeWeerth II"), the Second Circuit noted that the New York Court of Appeals had found the analysis of DeWeerth I to be "wrong." Id. at 1272.

- - - - - - - - - - - - End Footnotes- - - - - - - - - - - - -

In many cases, the application of the laches defense is an issue for trial. In Czartoryski, for example, a Polish prince brought suit to recover a painting by Jan Mostaert, which was allegedly stolen during the Nazi invasion of Poland during the Second World War. See Czartoryski, supra, at col. 2. The court declined to grant either plaintiff's motion for summary judgment or defendant's cross-motion for summary judgment because "there are conflicting facts as to whether plaintiff's family availed itself of numerous resources available in the west to locate stolen art." Id.; see also Republic of Turkey v. Metropolitan Museum of Art, 762 F. Supp. 44 (S.D.N.Y. 1990) (finding that genuine issue of material fact as to whether defendant was prejudiced by plaintiff's delay in making a demand for stolen artifacts precluded summary judgment).

In some cases, however, the record is sufficiently clear on summary judgment to establish whether or not a particular search was diligent. Kunstsammlungen arose out of the tangled claims of ownership to two portraits painted by Albrecht Durer in 1499 that were stolen by American servicemen during the Second World War. In that [*30] case, both the district court and the Second Circuit found that museum's search had been diligent. A museum official painstakingly catalogued the location and condition of the portraits, immediately reported the theft to the provisional government and various German museums, wrote to the United States Department of State throughout the 1950s and 1960s, and enlisted Harvard professors in the search for the portraits. See Kunstsammlungen, 536 F. Supp. at 849-52; see also Kunstsammlungen, 678 F.2d at 1165 (affirming district court's conclusion that the search for the portraits was "reasonably diligent"). In DeWeerth I, by contrast, the Second Circuit concluded that the original owner had not acted diligently because she failed to conduct any search for 24 years. See DeWeerth, 836 F.2d at 112.

Applying these principles, the question of whether the Patriarchate was sufficiently diligent in searching for the Palimpsest to defeat defendants' laches defense is easily answered. The Patriarchate was not diligent at all. Indeed, it was unaware that the Palimpsest had been missing, even though there was some indication that the Palimpsest was no longer part of the Metochion collection in the 1930s, at the time it was transferred to Athens. (See 56.1 Stat. PP 10-11.) Before it filed this lawsuit, the Patriarchate had neither asserted any claims to other Metochion manuscripts, nor announced that any Metochion manuscripts were missing. (See id. P 13; Met. Timothy Aff. P 7.) The Patriarchate's own expert on French law admits that, "the Patriarchate has shown no great interest for the Palimpsest until recently." (Tallon Aff. P 18.) The only excuse the Patriarchate raises for its utter lack of diligence is that, as an order of monks, it could not be expected to search for a painting. (See Def. Mem. at 20.) As

the Patriarchate's expert advises, "It must be remembered that the Patriarchate is a religious institution not equipped for such a research." (Tallon Aff. P 16.) Yet if the Patriarchate was able to retain counsel with impressive speed to bring this action the night before the Christie's auction, it could have retained counsel to search for the Palimpsest, or at least make some inquiries, at some point during the previous seventy years. Cf. DeWeerth I, 836 F.2d at 112 (noting that even if plaintiff "could not have mounted a more extensive investigation herself, she could have retained someone to do it for her").

In balancing the equities raised by defendants' laches defense, the Court must also determine whether there is any prejudice suffered by defendants attributable to the Patriarchate's delay in bringing its claim. In Robins Island, the Second Circuit noted that, "A defendant may suffer prejudice either because it would be inequitable, in light of a change in defendant's position, to allow plaintiff's claim to proceed or because the delay makes it difficult to garner evidence to vindicate his or her rights." Robins Island, 959 F.2d at 424 (citing Stone, 873 F.2d at 625). Robins Island involved a claim for title of land confiscated from a loyalist to the Crown during the American Revolution. The instant case involves comparable difficulties in garnering evidence. What the instant case lacks in temporal remoteness, compared to Robins Island, it makes up for in the distance over which the transfer(s) of title to the Palimpsest may have occurred, which may have been in Constantinople (or Istanbul), Paris, or any point in between. [*33]

The Patriarchate emphasizes that Mme. Guersan has not "come forward with any proof surrounding [her] good faith acquisition of the manuscript" (Def. Mem. at 3), and that "they have no receipt, no contract, no bill of sale, no piece of evidence to support the valid purchase of such a valuable piece of history." (Def. Mem. at 15.) As the Palimpsest was acquired

so long ago, however, it is not unreasonable that the Guersan family no longer has such documents. The Patriarchate's seventy-year delay in coming forward to claim ownership of the Patriarchate renders it virtually impossible for the Guersans to prove ownership. As was the case in DeWeerth I, the critical witness (Mr. Sirieix) is deceased, memories have faded, and key documents, assuming they existed at all, are missing. See DeWeerth I, 836 F.2d at 112. Thus "it is impossible for [defendant] to obtain witnesses or marshal evidence." Robins Island, 959 F.2d at 424. Because the Patriarchate's delay in bringing this action renders defendants' case much more difficult to prove, the doctrine of laches bars this action.

In sum, the Patriarchate waited almost seventy years after the Palimpsest was transferred to Mr. Sirieix to bring suit against his heirs. The passage of time renders trial of this matter virtually impossible; the Court would be confronted with the Patriarchate's claim that it clearly possessed the Palimpsest at the beginning of this century against defendants' claim that they clearly possess it at the end, with little or no evidence of what happened in between. As the Second Circuit concluded in Robins Island, "It is because this case turns on ancient and unascertainable facts that the law favors repose." Id. at 424.

III. Conclusion

For the reasons stated above, defendants' motion for summary judgment is granted. [Doc. No. 14.] the Clerk of Court is directed to close this case. Any pending motions are moot.

Κεφάλαιο 11

Βιβλιογραφία

-Αρχιμήδης, *Άπαντα*,3 τόμοι,Ε.Σ.Σταμάτης,Εκδόσεις ΤΕΕ, Αθήνα,1970-1974

-E.J.Dijksterhuis,*Arcimedes*,Princeton,NJ,Princeton university press, 1987

-T.L.Heath,*A History of Greek Mathematics*, 2 vol., New York, Dover, 1981

-T.L.Heath,*The Works of Archimedes*,New York, Dover, 2002

-T.L.Heath,*Mathematics in Aristotle*,Oxford university press,Oxford, 1970

-T.L.Heath,*Euclid, the Thirteen Books of the Elements*,3 vol., New York, Dover, 2002

-Γιάννης Χριστιανίδης,*Θέματα από την Ιστορία των μαθηματικών*,ΠΕΚ,Ηράκλειο, 2008

-Απολλώνιος,*Κωνικά*,Α΄ τόμος, Ε.Σ.Σταμάτης, Εκδόσεις ΤΕΕ, Αθήνα, 1975

-David Lindberg,*Οι απαρχές της Δυτικής Επιστήμης*,Πανεπιστημιακές εκδόσεις ΕΜΠ, Αθήνα, 2003

-Reviel Netz,William Noel,*Ο κώδικας του Αρχιμήδη*,Εκδόσεις Αλεξάνδρεια, Αθήνα, 2007

-G.E.R.Lloyd,*Αρχαία Ελληνική Επιστήμη*,ΠΕΚ, Ηράκλειο, 2008

-G.E.R.Lloyd,*Ελληνική Επιστήμη μετά του Αριστοτέλη*,ΠΕΚ, Ηράκλειο, 2007

-Reviel Netz,*The Shaping of Deduction in Greek Mathematics*,Cambridge, Cambridge university press, 1999