



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ
ΓΙΑ ΡΟΕΣ ΥΨΗΛΩΝ ΚΑΙ ΧΑΜΗΛΩΝ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ, ΣΕ
ΠΟΛΥΠΕΞΕΡΓΑΣΤΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

Διδακτορική Διατριβή

ΒΑΡΒΑΡΑ Γ. ΑΣΟΥΤΗ

Επιβλέπων : ΚΥΡΙΑΚΟΣ Χ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΓΛΟΥ
Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2009



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΓΙΑ
ΡΟΕΣ ΥΨΗΛΩΝ ΚΑΙ ΧΑΜΗΛΩΝ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ, ΣΕ
ΠΟΛΥΠΕΞΕΡΓΑΣΤΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

Διδακτορική Διατριβή
της
ΒΑΡΒΑΡΑΣ Γ. ΑΣΟΥΤΗ

Επταμελής Εξεταστική Επιτροπή:

1. Αικατερινάρης Ιωάννης
Καθηγητής Πανεπιστημίου Πατρών
Σχολή Μηχανολόγων & Αεροναυπηγών Μηχανικών
2. Αναγνωστόπουλος Ιωάννης
Επ. Καθηγητής ΕΜΠ
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
3. Βουτσινάς Σπυρίδων
Αν. Καθηγητής ΕΜΠ
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
4. Γιαννάκογλου Κυριάκος (επιβλέπων)*
Αν. Καθηγητής ΕΜΠ
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
5. Μαθιουδάκης Κωνσταντίνος*
Καθηγητής ΕΜΠ
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
6. Παπαηλιού Κυριάκος*
Ομ. Καθηγητής ΕΜΠ
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
7. Τσαγγάρης Σωκράτης
Καθηγητής ΕΜΠ
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών

* Μέλος της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής.

ΑΘΗΝΑ, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2009

Περίληψη

Η διδακτορική αυτή διατριβή επικεντρώνεται στην ανάπτυξη και πιστοποίηση μεθόδων και λογισμικού για την ανάλυση και το σχεδιασμό-βελτιστοποίηση αεροδυναμικών μορφών σε υψηλές και χαμηλές ταχύτητες ροής, μέσω προσταθεροποίησης χαμηλών αριθμών Mach. Περιλαμβάνει την ανάπτυξη αιτιοκρατικών μεθόδων βελτιστοποίησης, με έμφαση στον υπολογισμό της κλίσης της συνάρτησης κόστους μέσω των συζυγών (adjoint) τεχνικών με προσταθεροποίηση αλλά και στοχαστικών πληθυσμιακών μεθόδων, προτείνοντας νέες διατυπώσεις ασύγχρονων Εξελικτικών Αλγορίθμων (EA) για πολυεπεξεργαστικά υπολογιστικά συστήματα.

Με στόχο τη δημιουργία ενιαίου λογισμικού αριθμητικής επίλυσης των εξισώσεων Navier-Stokes για όλο το εύρος των ταχυτήτων ροής, σε προϋπάρχον λογισμικό πρόλεξης συμπεστών ροών εισάγεται η προσταθεροποίηση χαμηλών αριθμών Mach. Αυτή εξασφαλίζει ταχύτερη σύγκλιση σε προσομοιώσεις ροών πολύ χαμηλών ταχυτήτων, επιτρέπει την πρόλεξη ακόμη και όταν το χωρίς προσταθεροποίηση λογισμικό αποτυγχάνει και εξομαλύνει-βελτιώνει την ποιότητά της σε ιδιόμορφες περιοχές της ροής (λ.χ. ακμές πρόσπτωσης ή εκφυγής). Το λογισμικό χρησιμοποιείται για την πρόλεξη χρονικά μόνιμων ή μη-μόνιμων πεδίων ροής σε πτερυγώσεις στροβιλομηχανών (συμπεριλαμβανομένης της μελέτης της ροής του ακτινικού διακένου), αγωγούς, μεμονωμένες αεροτομές ή γύρω από ολόκληρο αεροσκάφος καθώς και την προσομοίωση ροής αέρα παρουσία καπνού σε 3Δ χώρο. Το υπολογιστικό κέρδος από τη χρήση προσταθεροποίησης υπερτίθεται σε αυτό λόγω της πολυεπεξεργασίας.

Όσον αφορά στις αιτιοκρατικές μεθόδους βελτιστοποίησης, θεμελιώνεται η συζυγής τεχνική (διακριτή και συνεχή) με χρήση της ίδιας προσταθεροποίησης και της πολυεπεξεργασίας. Η προτεινόμενη τεχνική επιτρέπει τον αεροδυναμικό σχεδιασμό σε πολύ χαμηλές ταχύτητες ροής και πιστοποιείται σε προβλήματα σχεδιασμού-βελτιστοποίησης 2Δ πτερυγώσεων συμπεστών και μεμονωμένων αεροτομών. Το κέρδος από την ένταξη της προσταθεροποίησης σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης προέρχεται από την ταχύτερη επίλυση τόσο των εξισώσεων ροής όσο και των συζυγών τους εξισώσεων.

Η διακριτή συζυγής τεχνική αναπτύσσεται με βάση τις διακριτοποιημένες προσταθεροποιημένες εξισώσεις ροής. Ως προς τη συνεχή συζυγή τεχνική, πραγματοποιείται διερεύνηση σχετικά με το αν η προσταθεροποίηση πρέπει να εφαρμοστεί στις συζυγείς εξισώσεις ή να υιοθετηθούν οι συζυγείς των προσταθεροποιημένων εξισώσεων ροής. Αποδεικνύεται ότι οι δύο αυτές παραλλαγές, υπό προϋποθέσεις (κατάλληλη επιλογή του μητρώου προσταθεροποίησης), καταλήγουν στο ίδιο αποτέλεσμα. Κατά τη διατύπωση των συνεχών συζυγών εξισώσεων με προσταθεροποίηση, γίνονται 'αναγκαστικές' παραδοχές σχετικές με τον τρόπο χειρισμού του μητρώου προσταθεροποίησης και τη διακριτοποίηση. Αυτές προκαλούν μικρές αποκλίσεις στις τιμές των παραγώγων ευαισθησίας της συνάρτησης κόστους (σε ιδιόμορφες περιοχές της ροής) χωρίς, όμως, επίπτωση στη σύγκλιση του αλγορίθμου βελτιστοποίησης.

Όσον αφορά στις στοχαστικές πληθυσμιακές μεθόδους βελτιστοποίησης, αναπτύσσεται και πιστοποιείται ένας πλήρως ασύγχρονος δομημένος EA (ΑΔΕΑ), εγγενώς παράλληλος. Η κατάργηση της έννοιας της γενιάς αίρει προβλήματα συγχρονισμού, επιτυγχάνοντας μέγιστη εκμετάλλευση των διαθέσιμων επεξεργαστών. Στον ΑΔΕΑ ο πληθυσμός διατάσσεται σε 2Δ δομημένο πλέγμα και διαχωρίζεται σε αλληλοκαλυπτόμενους δήμους, προσδιορίζοντας έτσι την επικοινωνία μεταξύ τους αλλά και την εφαρμογή των τελεστών εξέλιξης. Η ασύγχρονη

λειτουργία του αλγορίθμου εξασφαλίζεται από τον τρόπο αλληλεπίδρασης των δέμων. Με την ολοκλήρωση μιας αξιολόγησης και τη στιγμιαία 'αδράνεια' ενός επεξεργαστή, λαμβάνουν χώρα ενδο- και δια-δημοτικές διεργασίες μέσω των οποίων επιλέγεται 'αμέσως' το νέο άτομο που θα σταλεί για αξιολόγηση, επιτυγχάνοντας τη μέγιστη παράλληλη απόδοση. Ο ΑΔΕΑ συνδυάζεται, με ένα νέο τρόπο, και με τη χρήση μεταπροτύπων (τεχνητών νευρωνικών δικτύων) για την προσεγγιστική προαξιολόγηση υποψηφίων λύσεων. Δεδομένης της απουσίας γενιών η επόμενη προς αξιολόγηση λύση προέρχεται από ένα μικρό αριθμό προαξιολογημένων, από τοπικά μεταπρότυπα, νέων λύσεων. Η επιπλέον επιβάρυνση είναι αμελητέα συγκρινόμενη με το υπολογιστικό κόστος της επίλυσης των εξισώσεων Navier-Stokes, κρατώντας διαρκώς όλους τους επεξεργαστές απασχολημένους.

Ο ΑΔΕΑ εφαρμόζεται-πιστοποιείται σε προβλήματα σχεδιασμού-βελτιστοποίησης 2Δ περυγώσεων συμπίεστων και μεμονωμένων αεροτομών (με το λογισμικό πρόλεξης ροής που προαναφέρθηκε), στο σχεδιασμό μικρού επιβατικού υπερηχητικού αεροσκάφους με έναν ή δύο στόχους και μια σειρά μαθηματικών συναρτήσεων. Η εφαρμογή της παραλληλίας, τόσο σε επίπεδο αξιολογήσεων όσο και στο λογισμικό αξιολόγησης, μειώνει δραματικά το κόστος αναμονής του μηχανικού, καθιστώντας την προτεινόμενη μέθοδο ιδανική για βιομηχανική χρήση.

Λέξεις κλειδιά: Θερμικές Στροβιλομηχανές, Υπολογιστική Ρευστοδυναμική, Προσταθεροποίηση Χαμηλών Αριθμών Mach, Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση-Σχεδιασμός, Συζυγείς Τεχνικές, Σύγχρονοι και Ασύγχρονοι Εξελικτικοί Αλγόριθμοι.

Abstract

This PhD thesis focuses on the development and assessment of methods for the analysis and design–optimization of aerodynamic shapes, at high and low speed flows, using low Mach number preconditioning. It comprises the development of deterministic optimization methods, by laying emphasis on the computation of the objective function gradient using the adjoint technique with the aforementioned preconditioning as well as stochastic, population–based methods by proposing new asynchronous Evolutionary Algorithms (EA) for multiprocessor systems.

Aiming at possessing a single CFD analysis software for all flow speeds, the preconditioning technique is applied to an existing software for the solution of the compressible flow equations. It ensures faster convergence for very low Mach numbers, allows the solution even in cases in which the non–preconditioned equations fail and provides smooth solution at singular areas (in the vicinity of the leading and trailing edges). This software is used to numerically predict steady and unsteady flows in turbomachines (including predictions of tip clearance flows), ducts, isolated airfoils, flow around aircraft as well as flows in the presence of smoke in 3D enclosures. The computational gain due to the preconditioning is superimposed to that of multiprocessing.

Concerning the gradient–based optimization methods, the adjoint technique (discrete and continuous) using preconditioning and parallelization is developed. The proposed technique allows the aerodynamic design at very low speed flows and is validated in design–optimization problems of 2D turbomachinery cascades and isolated airfoils. The use of preconditioning during the optimization cycles results to faster solutions of both the mean flow and adjoint equations.

The discrete adjoint technique is developed using the already discretized preconditioned flow equations. For the continuous adjoint formulation there are two possibilities, namely either to precondition the adjoint equations or to form the adjoint to the preconditioned flow equations. In this thesis, these two options are proved to be equivalent (by choosing an appropriate preconditioning matrix). During the formulation of the continuous adjoint equations, “necessary” assumptions, concerning the handling of preconditioning matrix and the discretization, are made. These assumptions introduce a small error to the sensitivity derivatives which, however, does not affect the convergence of the optimization algorithm.

Concerning the stochastic optimization method, a fully asynchronous structured EA–AEA is developed and assessed. The lack of generations removes synchronization problems and allows the maximum utilization of all available processors. The population lies on the nodes of a 2D supporting structured mesh and is divided into overlapping demes, that determine the communication between demes and the implementation of evolutionary operators. The way demes interact determines the asynchronous operation of the algorithm. As soon as an evaluation is over and a processor is “temporarily” idle, the new candidate solution to undergo evaluation is “immediately” selected by means of intra– and inter–deme procedures, giving rise to the maximum possible parallel speed–up. AEA is coupled, in a new way, with metamodels (radial basis functions networks) for the inexact

pre-evaluation of candidate solutions. In the absence of generations, the next candidate solution is selected among a small number of pre-evaluated, using local metamodels, new individuals. The cost of using metamodels is negligible compared to the evaluation cost for the solution of Navier–Stokes equations and assures that all processors are always busy.

Design-optimization problems of 2D compressor cascades and isolated airfoils, the single and multi-objective design of a supersonic business jet and mathematical benchmarks are presented to assess the proposed algorithm. The parallelization both evaluations and evaluation software reduces the wall clock time of an optimization and enables the use of the proposed method for industrial applications.

Keywords: Thermal Turbomachines, Computational Fluid Dynamics, Low Mach Number Preconditioning, Aerodynamic Design-Optimization, Adjoint Methods, Synchronous and Asynchronous Evolutionary Algorithms.

Αντί Προλόγου

Αντί άλλου προλόγου, η ενότητα αυτή αναφέρεται στο Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών ΕΜΠ (ΕΘΣ/ΕΜΠ) και, ειδικότερα, στην ερευνητική του ομάδα της Μονάδας Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης του Τομέα Ρευστών, της οποίας είμαι μέλος εδώ και πολλά χρόνια. Η γνωριμία μου με τον επιβλέποντα τη διατριβή μου Αν. Καθηγητή κ. Κυριάκο Γιαννάκογλου ξεκινά από το 2000, τότε που ακόμη ήμουν πρωτοετής σπουδάστρια της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών ΕΜΠ. Το ενδιαφέρον μου για τους υπολογιστές και τον προγραμματισμό και, αργότερα, για τις υπολογιστικές μεθόδους για την επίλυση προβλημάτων μηχανικού με ώθησε να ενταχθώ, από το τέλος του πρώτου έτους, στην ερευνητική του ομάδα. Η αρχική ενασχόληση ήταν 'ερασιτεχνική', συνεχίστηκε με την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας υπό την επίβλεψή του και, ως φυσική συνέχεια, ακολούθησε και η εκπόνηση της διδακτορικής μου διατριβής.

Κατά την περίοδο της διπλωματικής μου εργασίας και, στη συνέχεια, της διδακτορικής μου διατριβής, τα τελευταία πέντε χρόνια περίπου, η πορεία μου είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με αυτήν της συγκεκριμένης ομάδας του ΕΘΣ/ΕΜΠ. Το εργαστήριο έγινε για όλα αυτά τα χρόνια το δεύτερο σπίτι μου (όπου, πρακτικά, πέρασα όλα αυτά τα χρόνια, πολύ περισσότερες ώρες απ' ότι στο πραγματικό μου σπίτι, ξεχνώντας τις έννοιες 'αργία', 'διακοπές' και 'αργά') και η συνεργασία μου με τον κ. Γιαννάκογλου αλλά και τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας ήταν πάντοτε εξαιρετική.

Θεωρώ τον εαυτό μου πραγματικά τυχερό που είχα τη δυνατότητα να συνεργαστώ μαζί του και να μάθω πολλά απ' αυτόν. Σε αυτόν οφείλω την επιστημονική μου κατάρτιση και τον επαγγελματισμό που πλέον διακρίνει τη δουλειά μου. Πέρασαμε πάρα πολλά Σαββατοκύριακα συζητώντας ή διαφωνώντας για νέες ιδέες και μεθόδους όπου, οφείλω να ομολογήσω, ότι οι υποδείξεις του ήταν πάντοτε καθοριστικές. Δεν έλειψαν τα ξενύχτια. Ποτέ δε φεύγαμε από το γραφείο το βράδυ αν δεν τελείωνε-λειτουργούσε σωστά ένας αλγόριθμος ή οτιδήποτε άλλο δεν έπρεπε να 'μείνει πίσω' για την επόμενη μέρα. Αυτό περιελάμβανε γιορτές και αργίες, καθώς πολλά λάθη διορθώθηκαν και αλγόριθμοι λειτούργησαν σωστά για πρώτη φορά σε αργίες, ακόμα και παραμονές πρωτοχρονιάς! Ενδεικτικά θυμάμαι την παραμονή πρωτοχρονιάς του 2006, όπου δουλεύοντας με τον κ. Γιαννάκογλου, λίγο πριν την αλλαγή του χρόνου βρέθηκε το 'τελευταίο' καθοριστικό λάθος και πρωτοέτρεξε σωστά ο παράλληλος επιλύτης Navier-Stokes με προσταθεροποίηση, αλλά και τη χαρά και των δυο μας που αυτό έγινε το 2005 και όχι το 2006! Αλλά και πιο πρόσφατα, την παραμονή πρωτοχρονιάς του 2009 (οπότε και είχε δοθεί το κείμενο της διατριβής στα μέλη της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής) όταν, παρέα με τον Ξενοφώντα και τον κ. Γιαννάκογλου, καταφέραμε να τρέξουμε τον πρώτο κώδικα Euler δεύτερης τάξης σε κάρτες γραφικών (μια νέα περιοχή έρευνας στην οποία πλέον δραστηριοποιούμαι χωρίς αυτή να συμπεριλαμβάνεται στην παρούσα διατριβή), κερδίζοντας το στοίχημα του να γίνει αυτό μέσα στο 2008. Μου έρχονται και πολλά άλλα στο μυαλό, που ένας απλός πρόλογος δεν αρκεί για να απαριθμήσω. Έτσι σταματώ κάπου εδώ ευχαριστώντας τον κ. Γιαννάκογλου για την υπομονή του, τη φιλία του και το χρόνο που διέθεσε καθόλη τη διάρκεια της διατριβής μου, μέχρι και την τελευταία στιγμή, για τη λεπτομερή διόρθωση του κειμένου.

Η συνεργασία μου, κατά τη διάρκεια της διατριβής, και με τα υπόλοιπα μέλη της ερευνητικής ομάδας, Δημήτρη Παπαδημητρίου, Παναγιώτη Λιακόπουλο, Θωμά Ζερβογιάννη, Χαρίκλεια

Γεωργοπούλου, Γιάννη Καμπόλη, Αλέξανδρο Ζυμάρη, Ευγενία Κοντολέοντος, Ξενοφώντα Τρομπούκη και Στέλιο Κυριάκου ήταν εξαιρετική. Αν έπρεπε να ξεχωρίσω κάποιους, αυτοί είναι ο Θωμάς με τον οποίο, λόγω των απαιτήσεων των διατριβών μας, συνεργαστήκαμε σε θέματα υπολογιστικής ρευστοδυναμικής, αλλά και ο Γιάννης που βοήθησε στην εξοικείωσή μου με ‘εξεζητημένες’ τεχνολογίες υπολογιστών (λ.χ. grid computing) και παρείχε βοήθεια και γνώσεις σε προγραμματισμό σε C++. Τέλος, οφείλω να αναφέρω πόσο πολύ χρήσιμες ήταν οι συμβουλές των παλαιότερων διδασκόντων του ΕΘΣ/ΕΜΠ Δημήτρη Κουμπογιάννη (πλέον Επ. Καθηγητή ΤΕΙ Αθηνών) και Δημήτρη Παπαδημητρίου. Ο πρώτος βοήθησε στην εξοικείωσή μου με το λογισμικό επίλυσης των εξισώσεων Navier–Stokes του Εργαστηρίου τότε που ήμουν ακόμη ‘νέα’ στην περιοχή αυτή και ο δεύτερος μου παρείχε σημαντική βοήθεια στα πρώτα στάδια της ενασχόλησής μου με τις συζυγείς τεχνικές.

Πέραν των καθαρά επιστημονικών θεμάτων, θα αποτελούσε παράλειψη αν δεν αναφερόμουν και στις προσπάθειες όλων μας για την εύρυθμη λειτουργία και διαρκή αναβάθμιση–επέκταση των υπολογιστικών συστημάτων του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών και της Μονάδας Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης (αυτά που μεταξύ μας αποκαλούμε ‘Βέλη’). Η επέκτασή τους ήταν διαρκής με την πάροδο του χρόνου και από σαράντα περίπου επεξεργαστές που υπήρχαν όταν ξεκίνησα τη διατριβή μου, πλέον ξεπερνούν τους τριακόσιους. Αν και στις αρχές της διατριβής οι υπάρχοντες υπολογιστές φάνταζαν πολλοί, πλέον αντιλαμβάνομαι ότι χωρίς την εξέλιξή τους δε θα ήταν δυνατή η επίλυση των προβλημάτων μεγάλης κλίμακας που παρουσιάζονται σε αυτή. Η ύπαρξη, εξέλιξη και συντήρηση αυτής της υποδομής οφείλεται στις συνεισφορές όλων μας και παρά το ότι αυτή η ενασχόληση ουσιαστικά ‘έκλεβε’ χρόνο από τον προγραμματισμό, εντούτοις ήταν κάτι που πάντα έκανα με ιδιαίτερη ευχαρίστηση, όπως και κάθε άλλο μέλος της ομάδας. Αν και οι Παναγιώτης, Γιάννης ήταν αυτοί που ήξεραν και ‘έστηναν’ (ελλείπει system administrator) τα νέα μηχανήματα, όλοι εμείς οι υπόλοιποι, συχνά χωρίς τις εξειδικευμένες γνώσεις εκείνων, προσπαθούσαμε να βοηθάμε με τον τρόπο μας (λ.χ. στη συναρμολόγηση), ακόμα κι αν αυτό μεταφράζονταν μόνο ως παρέα (άρα, φοβάμαι, ως καθυστέρηση για αυτούς). Θυμάμαι με ευχαρίστηση ακόμη και τις ‘άλλου τύπου εργασίες’ που κατά καιρούς κάναμε, πάντοτε μόνοι μας, για τη συντήρηση και αναβάθμιση του χώρου εργασίας μας. Δεν ξεχνώ, ένα πολύ ζεστό μεσημέρι, αρχές καλοκαιριού προ τριετίας, τη μεταφορά με σχοινιά και εγκατάσταση κλιματιστικής μονάδας για τους υπολογιστές στην ταράτσα του κτιρίου, σπασμένα πριόνια και τρυπάνια για τη διαμόρφωση του χώρου του υπολογιστικού μας κέντρου, κόψιμο και βίδωμα λαμαρινών, κατασκευή και συναρμολόγηση στηριγμάτων, πέρασμα καλωδιώσεων, μονώσεις αλλά και μικρές μετακομίσεις. Σίγουρα ξεχνάω πολλά, αλλά θεωρώ ότι το τελικό αποτέλεσμα και η συνολική υποδομή που αυτή τη στιγμή υπάρχει, μας δικαιώνει όλους.

Τέλος, επιθυμώ να ευχαριστήσω και τους άλλους δύο Καθηγητές του ΕΘΣ/ΕΜΠ και μέλη της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής, κ.κ. Κ. Παπαηλιού και Κ. Μαθιουδάκη, για τις σημαντικές υποδείξεις και παρατηρήσεις τους σχετικά με το κείμενο και την παρουσίαση της διατριβής. Τους ευχαριστώ επίσης για το ότι ανταποκρίθηκαν και οι δύο άμεσα στη διόρθωση του κειμένου αυτού.

Ολοκληρώνοντας, αξίζει να αναφερθεί ότι διακριτά τμήματα της παρούσας διατριβής υποστηρίχθηκαν–χρηματοδοτήθηκαν από μια ετήσια υποτροφία από τον Ειδικό Λογαριασμό Έρευνας (ΕΛΕ) και ερευνητικά προγράμματα του ΕΘΣ/ΕΜΠ με επιστημονικό υπεύθυνο τον κ. Κ. Γιαννάκογλου. Αυτά ήταν (α) το υποπρόγραμμα με τίτλο ‘Θεωρητική Διατύπωση του Συ-

ζυγούς (Adjoint) Προβλήματος για τις Εξισώσεις Ροής Συμπιεστού Ρευστού με Προσταθεροποίηση Χαμηλών Αριθμών Mach. Υπολογιστική Πιστοποίηση σε Ροές Χαμηλών και Υψηλών Ταχυτήτων στις Στροβιλομηχανές', στο πλαίσιο του Προγράμματος Ενίσχυσης Βασικής Έρευνας 'ΑΕΥΚΙΠΠΟΣ' του ΕΜΠ (β) το Ευρωπαϊκό ερευνητικό έργο (FP6) 'HISAC Environmentally Friendly High Speed Aircraft' και (γ) ερευνητικό πρόγραμμα με τίτλο 'Ανάπτυξη Λογισμικού Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής για την Αερο-Θερμοδυναμική Ανάλυση Ροών παρουσία Ανεμιστήρων' που ανατέθηκε στο ΕΘΣ/ΕΜΠ από την Ελληνική εταιρεία HM Engineering A.E.

Βαρβάρα Ασούτη
Ιανουάριος 2009

*Caminante, son tus huellas
el camino, y nada más;
Caminante, no hay camino,
se hace camino al andar.*

*Al andar se hace camino
y al volver la vista atrás
se ve la senda que nunca
se ha de volver a pisar.
Caminante, no hay camino,
sino estelas en la mar.*

Antonio Machado

Περιεχόμενα

1	Αεροδυναμική Ανάλυση και Σχεδιασμός	1
1.1	Ο Ρόλος της ΥΡΔ στην Αεροδυναμική Ανάλυση και στο Σχεδιασμό	1
1.2	Σύγχρονα Προβλήματα Αεροδυναμικής Βελτιστοποίησης	3
1.3	Σύγχρονες Μέθοδοι Αεροδυναμικής Βελτιστοποίησης	5
1.4	Συνεισφορά της Διατριβής στη Σχετική Έρευνα στο ΕΘΣ/ΕΜΠ	8
1.5	Περιεχόμενα και Δομή της Διατριβής	10
2	Αριθμητική Επίλυση Εξισώσεων Ροής – Προσταθεροποίηση Χαμηλών Αριθμών Mach	13
2.1	Οι Εξισώσεις της Ροής	14
2.1.1	Διατύπωση	14
2.1.2	Πρόβλημα Ιδιοτιμών και Ιδιοδιανυσμάτων	15
2.1.3	Οριακές Συνθήκες	16
2.2	Προσταθεροποίηση Χαμηλών Αριθμών Mach	17
2.2.1	Διατύπωση	19
2.2.2	Το Ιδιοπρόβλημα για τις Προσταθεροποιημένες Εξισώσεις	20
2.3	Μοντελοποίηση της Τύρβης	21
2.3.1	Μοντέλο Τύρβης μιας Εξίσωσης Spalart–Allmaras	22
2.3.2	Μοντέλα Τύρβης Δύο Εξισώσεων	23
2.3.3	Μοντέλα Τύρβης και Προσταθεροποίηση	26
2.4	Διακριτοποίηση Εξισώσεων & Οριακών Συνθηκών	26
2.4.1	Ορισμός Όγκου Ελέγχου	26
2.4.2	Ολοκλήρωση Εξισώσεων Ροής σε Όγκο Αναφοράς	28
2.4.3	Υπολογισμός Διανυσμάτων Ροής	29
2.4.4	Ψευδο–Χρονικό Βήμα Ολοκλήρωσης	31
2.4.5	Αριθμητική Επιβολή Οριακών Συνθηκών	32
2.5	Μέθοδοι Αριθμητικής Ολοκλήρωσης στον Ψευδο–Χρόνο	33
2.5.1	Σημειακά Πεπλεγμένο Σχήμα	33
2.5.2	Ρητό Σχήμα	34
2.6	Χρονικά Μη–Μόνιμες Εξισώσεις Ροής	34
2.7	Επίλυση σε Πολυεπεξεργαστικό Περιβάλλον	35
2.7.1	Διαμερισμός Υπολογιστικού Χωρίου	35
2.7.2	Παραλληλοποίηση Αλγορίθμου Επίλυσης	37

3	Πρόλεξη Πεδίων Ροής με Προσταθεροποίηση–Εφαρμογές	41
3.1	Αποτίμηση Κέρδους από τη Χρήση της Προσταθεροποίησης	41
3.1.1	Πρόλεξη Ροής σε 2Δ Πτερύγωσις Συμπιεστών	41
3.1.2	Πρόλεξη Ροής γύρω από 2Δ Μεμονωμένες Αεροτομές	47
3.2	Έλεγχος Αποκόλλησης Οριακού Στρώματος	50
3.2.1	Πρόλεξη Ροής Χωρίς Έλεγχο	52
3.2.2	Έλεγχος Ροής με Χρονικά Μόνιμη Αναρρόφηση	55
3.2.3	Έλεγχος Ροής με Περιοδική Εναλλαγή Αναρρόφησης Έγχυσης	58
3.3	Αλληλεπίδραση Οριακού Στρώματος με Κύμα Κρούσης	60
3.4	Ανάλυση Ατριβούς Ροής Γύρω από Αεροσκάφος	67
3.5	Ανάλυση Ροής σε 3Δ Πτερύγωση Συμπιεστή	70
3.5.1	Πρόλεξη Ροής στην Είσοδο και στην Έξοδο	72
3.5.2	Πρόλεξη Ροής στο Ακτινικό Διάκενο	85
3.6	Προσομοίωση Ροής Αέρα Παρουσία Καπνού	91
3.6.1	Προσομοίωση Χρονικά Μόνιμης Ροής	92
3.6.2	Προσομοίωση Περιστατικού Πυρκαγιάς	93
4	Συζυγείς Τεχνικές με Προσταθεροποίηση Χαμηλών Αριθμών Mach	97
4.1	Βιβλιογραφική Επισκόπηση	98
4.2	Εισαγωγή στις Συζυγείς Τεχνικές–Διαδικασία Σχεδιασμού	101
4.3	Διακριτή και Συνεχής Συζυγή Τεχνική–Σύγκριση	104
4.4	Οι Μελετούμενες Συναρτήσεις Κόστους	105
4.4.1	Αντίστροφος Σχεδιασμός	105
4.4.2	Ελαχιστοποίηση Συντελεστή Οπισθέλκουσας	106
4.5	Η Διακριτή Συζυγής Τεχνική με Προσταθεροποίηση	107
4.6	Η Συνεχής Συζυγής Τεχνική με Προσταθεροποίηση	108
4.6.1	Διατύπωση	108
4.6.2	Διακριτοποίηση και Αριθμητική Επίλυση	115
4.7	Διερεύνηση–Εμβάθυνση στην Προσταθεροποίηση στη Συνεχή Συζυγή Τεχνική	115
4.7.1	Εκδοχή 1: Συζυγής Διατύπωση των Προσταθεροποιημένων Εξισώσε- ων Ροής	115
4.7.2	Εκδοχή 2: Προσταθεροποίηση Χαμηλών Αριθμών Mach των Συζυγών Εξισώσεων	116
4.7.3	Έλεγχος Ταύτισης των Δύο Εκδοχών	116
4.8	Σχεδιασμός σε Πολυεπεξεργαστικό Περιβάλλον	117
4.9	Εφαρμογές–Πιστοποίηση	119
4.9.1	Αντίστροφος Σχεδιασμός Πτερύγωσης Συμπιεστή–Ατριβής Ροή	119
4.9.2	Αντίστροφος Σχεδιασμός Μεμονωμένων Αεροτομών–Ατριβής Ροή	122
4.9.3	Αντίστροφος Σχεδιασμός Πτερύγωσης Συμπιεστή–Τυρβώδης Ροή	127
4.9.4	Αντίστροφος Σχεδιασμός Συμμετρικής Αεροτομής–Τυρβώδης Ροή	129
4.9.5	Ελαχιστοποίηση Συντελεστή Οπισθέλκουσας με Δεδομένο Συντελε- στή Άνωσης	131
4.10	Ανακεφαλαίωση–Σχόλια–Συμπεράσματα	136

5	Σύγχρονοι και Ασύγχρονοι Εξελικτικοί Αλγόριθμοι	137
5.1	Εισαγωγή στους Εξελικτικούς Αλγορίθμους	137
5.1.1	Βιβλιογραφική Επισκόπηση	137
5.1.2	Ορισμός Προβλήματος Βελτιστοποίησης	142
5.1.3	Διαχείριση Περιορισμών	143
5.1.4	Προβλήματα Πολλών Στόχων – Μέτωπο Pareto	143
5.1.5	Εισαγωγή και Χρήση Μεταπροτύπων	144
5.1.6	Γενικευμένος Εξελικτικός Αλγόριθμος	145
5.2	Δομημένος Εξελικτικός Αλγόριθμος	146
5.2.1	Τοπολογία–Περιγραφή Αλγορίθμου	147
5.2.2	Τελεστές Εξέλιξης	148
5.2.3	Ημι–Ασύγχρονος ΔΕΑ	151
5.3	Ασύγχρονος Δομημένος Εξελικτικός Αλγόριθμος	151
5.3.1	Βασικά Στοιχεία Τοπολογίας–Περιγραφή Αλγορίθμου	152
5.3.2	Αντικατάσταση Πόλου	153
5.3.3	Επιλογή Νέου Πράκτορα για το Σχηματισμό Απογόνου	154
5.3.4	Τελεστές Εξέλιξης	155
5.3.5	Προσαρμογή της ΠΠΑ στον ΑΔΕΑ	155
5.4	Πιστοποίηση–Εφαρμογές	156
5.4.1	Μαθηματικές Συναρτήσεις	156
5.4.2	Σχεδιασμός 2Δ Πτερύγωσης Συμπιεστή	166
5.4.3	Σχεδιασμός 2Δ Μεμονωμένης Αεροτομής	169
5.4.4	Σχεδιασμός Μικρού Υπερηχητικού Αεροσκάφους	170
6	Επίλογος–Συμπεράσματα	175
6.1	Συμπεράσματα και Σχόλια	176
6.1.1	Προσταθεροποίηση Χαμηλών Αριθμών Mach στις Εξισώσεις Ροής	176
6.1.2	Αιτιοκρατικές Μέθοδοι Βελτιστοποίησης – Συζυγείς Τεχνικές με Προσταθεροποίηση Χαμηλών Αριθμών Mach	177
6.1.3	Στοχαστικές Μέθοδοι Βελτιστοποίησης – Ασύγχρονος Δομημένος Εξελικτικός Αλγόριθμος (ΑΔΕΑ)	178
6.2	Στοιχεία Πρωτοτυπίας της Διατριβής	179
6.3	Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα	180
Α΄	Εξισώσεις Ροής με Μεταβλητό Πάχος Σωλήνα Ροής	183
Β΄	Μελέτη Ροών Παρουσία Καπνού	185
Β΄.1	Προσθήκη Όρων Βαρύτητας	185
Β΄.2	Εξίσωση Συγκέντρωσης Καπνού	186
Γ΄	Παραμετροποίηση Αεροτομών	187
Γ΄.1	Καμπύλες Bézier	187
Γ΄.2	Μεταβολές Γεωμετρικών Ποσοτήτων	188
Δ΄	Υπολογισμός Επιδόσεων Επιβατικού Υπερηχητικού Αεροσκάφους	191
Δ΄.1	Διατύπωση Προβλήματος – Μεταβλητές Σχεδιασμού	191
Δ΄.2	Αλγόριθμος Επίλυσης	193
Δ΄.2.1	Τυπική Ατμόσφαιρα	194

Δ'.2.2 Υπολογισμός Γεωμετρικών Μεγεθών του Αεροσκάφους	195
Δ'.2.3 Υπολογισμός-Διαστασιολόγηση Κινητήρων και Κελύφων	199
Δ'.2.4 Υπολογισμός Βάρους	200
Δ'.2.5 Υπολογισμός Αεροδυναμικών Μεγεθών	202
Δ'.2.6 Επιδόσεις	204
Δ'.3 Βασικά Σύμβολα και Δείκτες	207

Κεφάλαιο 1

Αεροδυναμική Ανάλυση και Σχεδιασμός

1.1 Ο Ρόλος της ΥΡΔ στην Αεροδυναμική Ανάλυση και στο Σχεδιασμό

Κατά την τελευταία εικοσαετία του εικοστού αιώνα, η μοντελοποίηση φυσικών προβλημάτων καθώς και η ανάπτυξη αξιόπιστων τεχνικών επίλυσης των μερικών διαφορικών εξισώσεων (μ.δ.ε) που τα διέπουν έφτασε, ουσιαστικά, σε επίπεδο ωριμότητας. Η επάρκεια σε αξιόπιστο και γρήγορο λογισμικό ανάλυσης έδωσε ώθηση στην ανάπτυξη τεχνικών σχεδιασμού, βασισμένων σχεδόν αποκλειστικά σε υπολογιστικές μεθόδους, περιορίζοντας την πειραματική πιστοποίηση μόνο κατά την τελική (πλην όμως ουσιαστική) φάση του σχεδιασμού. Οι εφαρμογές σχεδιασμού-βελτιστοποίησης στην αεροδυναμική αντιμετωπίζονται από τη βιομηχανία με τη συνδυασμένη χρήση λογισμικού CAD (Computer Aided Design) για την παραμετροποίηση, απεικόνιση και εποπτεία τους, λογισμικό υπολογιστικής μηχανικής (λογισμικό επίλυσης των εξισώσεων ροής, λογισμικό δομικής ανάλυσης κατασκευών που συνήθως στηρίζεται στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, λογισμικό επίλυσης των εξισώσεων του ηλεκτρομαγνητισμού κ.λ.π.) και διαδικασιών αναζήτησης βέλτιστων λύσεων (αιτιοκρατικού, στοχαστικού ή υβριδικού τύπου). Αρωγοί στα παραπάνω είναι μέθοδοι προεργασίας της υπολογιστικής προσομοίωσης (με κυριότερο εκπρόσωπο τους το λογισμικό γένεσης υπολογιστικών πλεγμάτων) και η πολυεπεξεργασία. Η τελευταία έχει πρακτικά ενσωματωθεί στην Υπολογιστική Ρευστοδυναμική (ΥΡΔ, Computational Fluid Dynamics/CFD), αποτελώντας πλέον αναπόσπαστο στοιχείο για την υλοποίηση υπολογισμών μεγάλης κλίμακας.

Εστιάζοντας ιδιαίτερα στην ΥΡΔ, τονίζεται ότι η ύπαρξη λογισμικού πρόλεξης ροών (λ.χ. ενός επιλύτη των εξισώσεων Navier–Stokes/NS) αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για την ανάλυση της ροής και το σχεδιασμό ενός αεροδυναμικού σώματος¹. Το λογισμικό οφείλει να είναι αξιόπιστο και γρήγορο, ώστε η ανάλυση αφενός μεν να είναι αποδεκτής ακρίβειας, αφετέρου δε να ολοκληρώνεται με το ‘ελάχιστο’ δυνατό υπολογιστικό κόστος. Σήμερα, οι ανάγκες της αεροδυναμικής βελτιστοποίησης (ως προς την πρόλεξη πεδίων ροής) στη βιομηχανία, τα πανεπιστήμια ή τα ερευνητικά κέντρα, αντιμετωπίζονται με τη χρήση είτε οικείου

¹ Στην παρούσα διατριβή, ο όρος αεροδυναμικό σώμα αναφέρεται σε πτερυγώσεις στροβιλομηχανών, αγωγούς, μεμονωμένες αεροτομές, ολόκληρο αεροσκάφος κ.ο.κ.

(in-house) είτε εμπορικού λογισμικού ΥΡΔ. Τη γενικότητα, ευχρηστία και φιλικότητα προς το χρήστη του εμπορικού λογισμικού αντισταθμίζει η άμεση πρόσβαση στον πηγαίο κώδικα, η δυνατότητα αλλαγών, ρυθμίσεων και προσθηκών σε αυτόν αλλά, κυρίως, η ακριβής γνώση των χρησιμοποιούμενων μοντέλων ροής και αριθμητικών σχημάτων που προσφέρει η χρήση λογισμικού ανεπτυγμένου από τον ίδιο τον ερευνητή ή την ερευνητική ομάδα. Ακολουθώντας την παράδοση του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών του ΕΜΠ (ΕΘΣ/ΕΜΠ), η διατριβή στηρίζεται σε λογισμικό ΥΡΔ που προϋπήρχε το οποίο, αφού επεκτείνεται και εμπλουτίζεται με τρόπο που αναλύεται στη συνέχεια, υποστηρίζει τις εφαρμογές βελτιστοποίησης και σχεδιασμού που ακολουθούν.

Βασικό κριτήριο για την επιλογή μεθοδολογίας και λογισμικού ΥΡΔ ικανού να ανταπεξέλθει στις ανάγκες της αεροδυναμικής βελτιστοποίησης (άρα, προφανώς, και στις ανάγκες ανάλυσης-πρόλεξης πεδίων ροής) είναι η περιοχή τιμών ταχύτητας ή αριθμού Mach που χαρακτηρίζει κάθε εφαρμογή. Προλέξεις πεδίων ροής ασυμπίεστου ρευστού, παραδοσιακά αντιμετωπίζονται με την τεχνική της διόρθωση πίεσης (και παραλλαγές της) ή την τεχνική της ψευδοσυμπιεστότητας². Η πρώτη τεχνική εκμεταλλεύεται την απεμπλοκή της πίεσης από την εξίσωση της συνέχειας, οδηγώντας σε ελλειπτικά ή παραβολικά συστήματα (ανάλογα με τις απλοποιήσεις και παραδοχές). Η δεύτερη τεχνική εισάγει έναν ψευδοχρονικό όρο πίεσης στην εξίσωση της συνέχειας, επιτρέποντας τη χρήση τεχνικών επίλυσης των υπερβολικών συστημάτων. Στη θεωρία και στις τεχνικές επίλυσης των υπερβολικών συστημάτων βασίζονται, σχεδόν εξ ολοκλήρου, και οι μέθοδοι επίλυσης των εξισώσεων ροής συμπιεστού ρευστού (μέσω τεχνικών χρονοπροέλασης, time-marching). Οι μέθοδοι πρόλεξης πεδίων ροής ασυμπίεστου ρευστού μπορούν και έχουν ήδη επεκταθεί (και από την ερευνητική ομάδα του ΕΘΣ/ΕΜΠ) σε συμπιεστές ακόμα και διηχητικές ροές. Αντίστοιχα, η δυνατότητα χρήσης των τεχνικών χρονοπροέλασης (που έχουν θεμελιωθεί για τις συμπιεστές ροές) επεκτείνεται και σε σχεδόν ασυμπίεστες ροές (ροές πολύ χαμηλών ταχυτήτων) μέσω της προσταθεροποίησης χαμηλών αριθμών Mach (Low Mach number preconditioning).

Η αεροδυναμική βελτιστοποίηση και σχεδιασμός βασίζονται στην ΥΡΔ, ουσιαστικά, υπό δύο έννοιες. Διαδικασίες στοχαστικού ή ημι-στοχαστικού χαρακτήρα (ακόμα και για την, όχι και τόσο ακραία για τη βιομηχανία, περίπτωση που ο σχεδιασμός βασίζεται στην εμπειρία του μηχανικού, δηλαδή σε επαναλαμβανόμενες δοκιμές, trial and error) χρησιμοποιούν λογισμικό ΥΡΔ για την αξιολόγηση των υποψήφιων λύσεων, κατά την αναζήτηση της βέλτιστης ή των βέλτιστων από αυτές. Επιπλέον, η ΥΡΔ μπορεί να υποστηρίζει διαδικασίες σχεδιασμού που βασίζονται στον υπολογισμό της κλίσης μιας συνάρτησης κόστους, αφού ο υπολογισμός αυτός υλοποιείται (λ.χ. για την περίπτωση των συζυγών τεχνικών που αποτελούν ένα από τα βασικά στοιχεία της παρούσας διατριβής) υπό τον περιορισμό της ικανοποίησης των εξισώσεων ροής που αναλύονται με λογισμικό ΥΡΔ.

Στην ανάλυση αλλά, κυρίως, στο σχεδιασμό-βελτιστοποίηση στην αεροδυναμική, το υπολογιστικό κόστος είναι εξίσου σημαντικό με την ακρίβεια των υπολογισμών. Ειδικότερα, ο μειωμένος συνολικός χρόνος σχεδιασμού ενός νέου προϊόντος ή διεργασίας (από τη σύλληψη μέχρι την τελική υλοποίηση) ενισχύει την ανταγωνιστικότητά του/της. Η μείωση του χρόνου ανάλυσης μέσω λ.χ. καλύτερων αριθμητικών σχημάτων του λογισμικού ΥΡΔ βρίσκεται

² Σε αυτή την εισαγωγική ενότητα του Κεφαλαίου 1 δεν παρατίθενται βιβλιογραφικές αναφορές. Αυτές μπορούν να αναζητηθούν στις επόμενες ενότητες του ίδιου κεφαλαίου και στα επιμέρους κεφάλαια της διατριβής.

πλέον σε επίπεδο ωριμότητας. Η διατριβή, στοχεύοντας στη μείωση του συνολικού χρόνου σχεδιασμού για προβλήματα ροής χαμηλών ταχυτήτων, συνεισφέρει σε αυτό μέσω της προσταθεροποίησης χαμηλών αριθμών Mach, όχι μόνο στο πρόβλημα πρόλεξης πεδίων ροής αλλά και σε αυτό του υπολογισμού της κλίσης μιας συνάρτησης στόχου, για τις ανάγκες της βελτιστοποίησης. Η τεχνική πολυπλέγματος (multigrid), στην οποία υπάρχει σχετική εμπειρία στο ΕΘΣ/ΕΜΠ αποτελεί μια διαφορετική διαδικασία μείωσης του υπολογιστικού κόστους, η οποία όμως δεν εμπλέκεται στην παρούσα διατριβή.

Η υιοθέτηση ενός αριθμητικού σχήματος καθορίζεται πλέον και με κριτήριο την ενδεχόμενη χρήση παράλληλων υπολογιστών ή πολυεπεξεργαστικού συστήματος. Η πολυεπεξεργασία αποτελεί βασικό στοιχείο της διατριβής και υλοποιείται, για το λογισμικό ΥΡΔ, με την τεχνική των πολλαπλών υποχωρίων (subdomaining). Σύμφωνα με αυτή, το υπολογιστικό πλέγμα διαμερίζεται σε επιμέρους τμήματα και η πρόλεξη της ροής σε καθένα από αυτά ανατίθεται σε διαφορετικούς επεξεργαστές, οι οποίοι επικοινωνούν περιοδικά ανταλλάσσοντας πληροφορίες. Γενικότερα, η παραλληλοποίηση λογισμικού ΥΡΔ πραγματοποιείται με δύο βασικούς τρόπους που υπαγορεύονται από το χρησιμοποιούμενο υλικό (hardware), υιοθετώντας διαφορετικές τεχνικές παραλληλοποίησης και τις σχετικές βιβλιοθήκες για συστήματα κοινής και καταναμημένης μνήμης. Στα συστήματα καταναμημένης μνήμης εντάσσονται οι συστοιχίες διασυνδεδεμένων επεξεργαστών (cluster computing). Τα τελευταία χρόνια, η πολυεπεξεργασία έχει επεκταθεί και σε τεχνικές πλέγματος (grid computing) εκμεταλλευόμενη τη δυνατότητα διασύνδεσης γεωγραφικά απομακρυσμένων συστοιχιών επεξεργαστών. Οι τρέχουσες δραστηριότητες και τάσεις στην περιοχή της πολυεπεξεργασίας συγκεντρώνονται κυρίως στο επιστημονικό συνέδριο Parallel CFD³, αλλά και σε κάθε συνέδριο με θέματα στην ευρύτερη περιοχή της ΥΡΔ.

1.2 Σύγχρονα Προβλήματα Αεροδυναμικής Βελτιστοποίησης

Αποτέλεσμα των όσων αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα είναι ότι το μεγαλύτερο ενδιαφέρον στην ανάπτυξη και χρήση μεθόδων και λογισμικού έχει ουσιαστικά επικεντρωθεί στην ένταξή τους σε διαδικασίες αεροδυναμικού σχεδιασμού-βελτιστοποίησης. Προϋποθέσεις που πληρούνται ώστε αυτή η μετατόπιση ενδιαφέροντος να υλοποιείται με επιτυχία αποτελέσαν αφενός η ωρίμανση (πρακτικά, η επάρκεια) αλγορίθμων και μεθόδων πρόλεξης ροών (αλλά και δομικής ανάλυσης, κλπ) και αφετέρου η ραγδαία ανάπτυξη των υπολογιστικών συστημάτων που επέτρεψε προλέξεις ροών σε προβλήματα μεγάλης κλίμακας.

Μια κατηγοριοποίηση των παρουσιαζόμενων προβλημάτων βελτιστοποίησης στην αεροδυναμική σχετίζεται με το στόχο που τίθεται, δηλαδή με το αν η διαδικασία σχεδιασμού αποβλέπει στην εύρεση του (καθολικού) ακρότατου μιας συνάρτησης που εκφράζει την απόδοση ενός συστήματος ή στην ‘αναπαραγωγή’-επίτευξη μιας δεδομένης αεροδυναμικής συμπεριφοράς. Τα προβλήματα της τελευταίας περίπτωσης, τα οποία στοχεύουν στην εύρεση λ.χ της γεωμετρίας μιας αεροτομής η οποία ικανοποιεί μια επιθυμητή-δεδομένη τιμή ή κατανομή μεγέθους, ονομάζονται προβλήματα αντίστροφου σχεδιασμού.

Οι στόχοι σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης εξαρτώνται και καθορίζονται από το αν αυτό αφορά σε εσωτερική ή εξωτερική αεροδυναμική. Για παράδειγμα, συνηθισμένα προβλήματα

³<http://www.parcfd.org/>

είναι αυτά της ελαχιστοποίησης απωλειών ροής σε πτερυγώσεις στροβιλομηχανών και της ελαχιστοποίησης του συντελεστή οπισθέλκουσας με ταυτόχρονη μεγιστοποίηση (ή επίτευξη συγκεκριμένης τιμής) του συντελεστή άνωσης για μεμονωμένες αεροτομές, πτέρυγες ή αεροσκάφη. Τα δύο απλά παραδείγματα που δόθηκαν αφορούν αποκλειστικά στην αεροδυναμική επίδοση, χωρίς προφανώς να αναφέρονται στις υπόλοιπες πτυχές του κάθε προβλήματος. Είναι όμως προφανές ότι τα σύγχρονα προβλήματα σχεδιασμού άπτονται πολλών επιστημονικών περιοχών. Για παράδειγμα, η δομική ανάλυση (με χρήση, κυρίως, λογισμικού πεπερασμένων στοιχείων) ασχολείται με τη στατική και δυναμική επάρκεια των κατασκευών, η επιστήμη του περιβάλλοντος με θέματα εκπομπών καυσαερίων ενός κινητήρα, η ακουστική με θέματα αεροδυναμικού θορύβου, όπως ο ηχητικός κρότος κατά την υπερηχητική πτήση, κ.ο.κ. Η εμπλοκή περισσότερων της μιας επιστημονικών περιοχών στο ίδιο πρόβλημα καθιστά τα σύγχρονα προβλήματα όχι μόνο πολλών στόχων (Multi-Objective Optimization, MOO) αλλά πολλών στόχων από διαφορετικές επιστημονικές περιοχές (Multi-Disciplinary Optimization, MDO). Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης που παρουσιάζονται στη διατριβή αυτή αφορούν μεν την αεροδυναμική βελτιστοποίηση (λ.χ. η συζυγής τεχνική με προσταθεροποίηση χαμηλών αριθμών Mach για τον υπολογισμό της κλίσης συναρτήσεων κόστους) αλλά ασφαλώς καλύπτουν και την περιοχή του MDO. Ειδικότερα, οι ασύγχρονοι ΕΑ που προτείνονται εφαρμόζονται, μεταξύ άλλων, σε ένα πρόβλημα σχεδιασμού βέλτιστου υπερηχητικού αεροσκάφους (Supersonic Business Jet), αλλά μπορούν να εφαρμοσθούν και σε κάθε άλλο πρόβλημα MDO, υπό την προϋπόθεση ότι είναι διαθέσιμο το σχετικό λογισμικό αξιολόγησης.

Επιπλέον των παραπάνω, τα τελευταία χρόνια παρουσιάζεται έντονη ενασχόληση με προβλήματα βελτιστοποίησης σε καθεστώς αβεβαιότητας (uncertainty). Αυτά ανήκουν στα λεγόμενα στοχαστικά προβλήματα βελτιστοποίησης όπου κατά τη διατύπωση του προβλήματος, σημαντικά στοιχεία αυτού, λ.χ. οι συνθήκες ροής, ή ορισμένα αεροδυναμικά και δομικά χαρακτηριστικά, μεταβάλλονται με μη-αιτιοκρατικά προβλέψιμο τρόπο. Οι δύο βασικές κατηγορίες των προβλημάτων σχεδιασμού-βελτιστοποίησης υπό αβεβαιότητα, [257], είναι τα προβλήματα στιβαρού σχεδιασμού (robust design) και αυτά του σχεδιασμού βάσει αξιοπιστίας (reliability-based design). Στην πρώτη περίπτωση, ο σχεδιασμός επιθυμείται να παραμένει σχετικά ανεπηρέαστος από τυχόν μικρές αλλαγές των αβέβαιων ποσοτήτων ενώ, στη δεύτερη, οι πιθανότητες αστοχίας του είναι μικρότερες από μια μικρή-αποδεκτή τιμή.

Η σπουδαιότητα της αεροδυναμικής βελτιστοποίησης επιβεβαιώνεται ανατρέχοντας στα ερευνητικά έργα που χρηματοδοτούνται από την Ευρωπαϊκή Ένωση στον τομέα της αεροναυτικής. Πιο συγκεκριμένα, πολλά (αν όχι όλα τα) ερευνητικά προγράμματα του έκτου και έβδομου Προγράμματος Πλαισίου (FP6 & FP7) περιλαμβάνουν μεταξύ άλλων και την πτυχή της αεροδυναμικής βελτιστοποίησης (είτε ως βασική είτε ως επιμέρους συνιστώσα). Παράδειγμα, με βάση τη σχετική εμπειρία και συμμετοχή του ΕΘΣ/ΕΜΠ, αποτελεί το έργο *HISAC-Environmentally Friendly High Speed Aircraft* (FP6) το οποίο στοχεύει στο σχεδιασμό ενός φιλικού προς το περιβάλλον υπερηχητικού αεροσκάφους. Το έργο απαίτησε την εμπλοκή πολλών επιστημονικών κλάδων (MDO) καθώς, εκτός από τις αεροδυναμικές επιδόσεις (λ.χ. την εμβέλεια), ενδιέφεραν η δομική ανάλυση (για καθορισμό και ελαχιστοποίηση του βάρους), οι επιδόσεις και εκπομπές των κινητήρων και η ελαχιστοποίηση του ηχητικού κρότου. Η συμμετοχή του ΕΘΣ/ΕΜΠ στο συγκεκριμένο έργο υποστηρίχθηκε, μεταξύ άλλων, από λογισμικό που παρουσιάζεται στην παρούσα διατριβή, ενώ μια παραλλαγή της προαναφερθείσας εφαρμογής MDO παρουσιάζεται σε επόμενη ενότητα.

1.3 Σύγχρονες Μέθοδοι Αεροδυναμικής Βελτιστοποίησης

Με βάση τα προηγούμενα, οι σύγχρονες μέθοδοι βελτιστοποίησης-σχεδιασμού αεροδυναμικών μορφών καλούνται να ανταπεξέλθουν στις προκλήσεις που τίθενται ώστε οι νέοι σχεδιασμοί να αντιστοιχούν σε πραγματικά (καθολικά) βέλτιστες λύσεις αλλά, κυρίως, να εντοπίζονται με αποδεκτό υπολογιστικό κόστος. Τις τελευταίες δεκαετίες έχουν αναπτυχθεί και εξακολουθούν να αναπτύσσονται διάφορες μέθοδοι βελτιστοποίησης στην αεροδυναμική, με στόχο το βέλτιστο σχεδιασμό μορφής συνιστωσών στροβιλομηχανών (συνήθως πτερυγίων), μεμονωμένων πτερυγίων ή και ολόκληρων αεροσκαφών.

Οι αλγόριθμοι αεροδυναμικής βελτιστοποίησης μπορούν να διακριθούν σε δύο βασικές κατηγορίες: τους αιτιοκρατικούς και τους στοχαστικούς. Οι αιτιοκρατικοί αλγόριθμοι ξεκινούν από μια αρχική λύση και με τον υπολογισμό ακριβών (ή, έστω, προσεγγιστικών) κλίσεων της συνάρτησης στόχου προχωρούν προς τη βέλτιστη λύση. Έχουν πολύ γρήγορο ρυθμό σύγκλισης αλλά κινδυνεύουν να εγκλωβιστούν σε τοπικά ακρότατα. Από την άλλη πλευρά, οι στοχαστικοί αλγόριθμοι μπορούν να οδηγήσουν στο ολικό ακρότατο, με τίμημα όμως το μεγάλο αριθμό αξιολογήσεων που απαιτούνται για να επιτευχθεί αυτό. Το τελευταίο, σε ορισμένες περιπτώσεις καθιστά τη χρήση τους (τουλάχιστον, στην κλασική τους μορφή) ασύμφορη.

Η χρήση αιτιοκρατικών μεθόδων στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση βασίζεται στη διαθεσιμότητα διαδικασίας-λογισμικού υπολογισμού της κλίσης μιας συνάρτησης κόστους. Η όδευση προς το ακρότατο γίνεται με μεθόδους, [187, 1], όπως αυτή της απότομης καθόδου (steepest descent), των συζυγών κλίσεων (conjugate gradient), της μεθόδου Newton (ακριβούς ή προσεγγιστικής-BFGS) κ.α.

Η πλέον ενδιαφέρουσα μέθοδος για τον υπολογισμό της κλίσης μιας συνάρτησης κόστους είναι η χρήση πεπερασμένων διαφορών, η οποία όμως (έστω πρώτης τάξης ακρίβειας) απαιτεί την επίλυση των εξισώσεων ροής για μια μικρή διαταραχή κάθε μεταβλητής σχεδιασμού. Το υπολογιστικό κόστος εξαρτάται από την ακρίβεια του υπολογισμού των πεπερασμένων διαφορών (πρώτης ή δεύτερης τάξης σχήματα διαφόρισης) και αυξάνει γραμμικά με τον αριθμό των μεταβλητών σχεδιασμού. Επιπλέον, η ακρίβεια των υπολογισμών (λόγω στρογγυλεύσεων, αφαίρεσης δύο ποσοτήτων με πολύ κοντινές τιμές και κυρίως, διαίρεσης με την πολύ μικρή ποσότητα ϵ) εξαρτάται σημαντικά από την επιλογή της τιμής της μικρής διαταραχής ϵ . Το μεγάλο υπολογιστικό κόστος, καθιστά απαγορευτική τη χρήση πεπερασμένων διαφορών στα σύγχρονα προβλήματα τα οποία προσδιορίζονται από μεγάλο αριθμό μεταβλητών σχεδιασμού.

Αντίθετα, εμπνευσμένη από τη θεωρία ελέγχου, η χρήση των συζυγών διατυπώσεων (adjoint methods) είναι πολύ αποδοτική και μικρότερου κόστους. Με αυτές, η κλίση της συνάρτησης στόχου υπολογίζεται μέσω της επίλυσης των συζυγών εξισώσεων με κόστος αντίστοιχο αυτού της επίλυσης των εξισώσεων ροής και, κυρίως, ανεξάρτητο του πλήθους των μεταβλητών σχεδιασμού. Η πρώτη εφαρμογή των συζυγών τεχνικών για το σχεδιασμό στη μηχανική των ρευστών έγινε από τον Pironneau, [202], αλλά ο Jameson, [118], ήταν αυτός που τις εφάρμοσε στην εξωτερική αεροδυναμική με χρήση των ατριβών εξισώσεων ροής στη μορφή περιορισμού. Στην πορεία, η χρήση τους επεκτάθηκε και στις συνεκτικές ροές, στην εξωτερική αεροδυναμική αλλά και τις στροβιλομηχανές, ενώ προτάθηκαν και νέες συναρτήσεις στόχοι ολοκληρωματικής μορφής, [121, 24, 25, 98, 194, 192], διευρύνοντας έτσι το πεδίο εφαρμογής της μεθόδου.

Διακρίνονται δύο είδη συζυγών μεθόδων, που διαφέρουν στον τρόπο σχηματισμού των διακριτοποιημένων συζυγών εξισώσεων, η συνεχής και η διακριτή συζυγής τεχνική. Στη συνεχή συζυγή τεχνική, από τις εξισώσεις ροής, μέσω της συζυγούς διατύπωσης, λαμβάνονται οι συζυγείς μ.δ.ε, οι οποίες διακριτοποιούνται στη συνέχεια, [118, 119, 194]. Αντίθετα, η διακριτή συζυγής μέθοδος προκύπτει από την εφαρμογή της συζυγούς διατύπωσης στις ήδη διακριτοποιημένες εξισώσεις ροής, [98, 24]. Σε κάθε περίπτωση, η ανάπτυξη της συζυγούς μεθόδου προϋποθέτει 'επένδυση' για τη μαθηματική θεμελίωση και τον προγραμματισμό της, σε βαθμό που εξαρτάται από το χρησιμοποιούμενο μοντέλο ροής και τη συνάρτηση στόχο.

Εκτός από τις πεπερασμένες διαφορές και τις συζυγείς εξισώσεις, στη βιβλιογραφία εμφανίζονται και άλλες μέθοδοι για τον υπολογισμό κλίσης συνάρτησης κόστους. Σε αυτές συγκαταλέγονται η μέθοδος των μιγαδικών μεταβλητών (η τεχνική βασίζεται σε ιδέες που προτάθηκαν πριν δύο περίπου δεκαετίες, [161, 162], αναθεωρήθηκαν πρόσφατα, [226] και εφαρμόζονται σε προβλήματα αεροδυναμικής και δομικής βελτιστοποίησης, [183, 165, 186] κ.α.), η αυτόματη διαφορίση⁴, αλλά και μέθοδοι υπολογισμού προσεγγιστικών παραγώγων με ή χωρίς τη χρήση συζυγών μεταβλητών. Παράθεση και αναφορά στα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα καθεμιάς μπορεί να αναζητηθεί, μεταξύ άλλων και στο βιβλίο [177].

Στην κατηγορία των στοχαστικών μεθόδων, συνήθως χρησιμοποιούνται πληθυσμιακές μέθοδοι, με τους Εξελικτικούς Αλγόριθμους (ΕΑ) να είναι οι πλέον διαδεδομένες από αυτές. Οι ΕΑ βασίζονται στη θεωρία της εξέλιξης των ειδών (Darwin, [64]) και μιμούνται φυσικές διεργασίες όπως η διασταύρωση και η μετάλλαξη. Η εξάπλωση και χρήση τους στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση ουσιαστικά ξεκινά τη δεκαετία του 90, με βασικά βιβλία-αναφορά στους γενετικούς αλγόριθμους αυτά των Goldberg, [102] και Michalewicz, [174]. Ήταν η εποχή που και η ισχύς των υπολογιστικών συστημάτων άρχισε να γίνεται σημαντική ή, έστω, ικανή να υποστηρίξει την επαναλαμβανόμενη κλήση λογισμικού ΥΡΔ για τις ανάγκες ενός ΕΑ. Οι ΕΑ έχουν το πλεονέκτημα της άμεσης προσαρμογής σε οποιοδήποτε πρόβλημα σχεδιασμού χωρίς καμιά επιπλέον εργασία, καθώς η χρήση τους δεν επηρεάζεται ούτε από τις μεταβλητές σχεδιασμού ούτε από αλλαγές της συνάρτησης κόστους. Αρκεί το λογισμικό ΥΡΔ (ή οποιοδήποτε άλλο λογισμικό αξιολόγησης υποψήφιων λύσεων) να καταστεί συμβατό ως προς την είσοδο δεδομένων και την έξοδο αποτελεσμάτων με τον ΕΑ. Η στοχαστικότητα της μεθόδου αναζήτησης θεωρητικά εξασφαλίζει την εύρεση του ολικού ακρότατου, μετά από επαρκή αριθμό αξιολογήσεων. Αυτό βέβαια αυξάνει κατά πολύ το υπολογιστικό κόστος, καθώς μια αξιολόγηση ταυτίζεται με την επίλυση των εξισώσεων ροής, καθιστώντας ιδιαίτερα ακριβή και συχνά, σχεδόν απαγορευτική τη χρήση τους (στην κλασική τους μορφή) σε προβλήματα σχεδιασμού μεγάλης κλίμακας. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται είτε με την παράλληλη αξιολόγηση υποψήφιων λύσεων είτε με τη μείωση του αριθμού των αξιολογήσεων που απαιτούνται για την εύρεση της βέλτιστης λύσης.

Η ένταξη της πολυπεξεργασίας σε έναν ΕΑ μοιάζει και είναι, κατά μία έννοια, ιδιαίτερα απλή.

⁴Η αυτόματη διαφορίση (automatic differentiation, [208, 105]) είναι μια τεχνική για τον υπολογισμό των παραγώγων μιας συνάρτησης που δίνεται υπό τη μορφή αλγόριθμου-λογισμικού. Ειδικότερα, λαμβάνοντας έναν αλγόριθμο υπολογισμού μιας ή περισσότερων συναρτήσεων κόστους που καθορίζονται από ορισμένες μεταβλητές σχεδιασμού, δημιουργεί ένα νέο λογισμικό-αλγόριθμο που εκτός από τα προηγούμενα, υπολογίζει επιπλέον τις παραγώγους όλων των συναρτήσεων κόστους προς όλες τις μεταβλητές σχεδιασμού. Λογισμικά αυτόματης διαφορίσης για αλγόριθμους σε Fortran 77/90, C/C++ υπάρχουν διαθέσιμα στο διαδίκτυο, [267, 271] κ.α.

Όντας πληθυσμιακή μέθοδος ανίχνευσης, ο EA βασίζεται στην αξιολόγηση ενός πληθυσμού (αντί μιας μεμονωμένης υποψήφιας λύσης) σε κάθε γενιά. Η διαθεσιμότητα ενός αριθμού επεξεργαστών επιτρέπει την ανάθεση διαφορετικών αξιολογήσεων (λ.χ. διαφορετικών κλήσεων του λογισμικού ΥΡΔ) σε διαφορετικούς επεξεργαστές. Αυτό δεν επηρεάζει τον αλγόριθμο, αφού οι αξιολογήσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, και επιφέρει ελάχιστη επιβάρυνση λόγω διεπεργαστικής επικοινωνίας (communication overhead). Η τελευταία περιορίζεται στην αποστολή των τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού σε κάθε επεξεργαστή και τη λήψη της υπολογισθείσας τιμής της συνάρτησης κόστους από αυτόν. Η χρήση παραλληλοποιημένων κωδίκων ΥΡΔ εντάσσεται άμεσα σε τέτοιες μορφές παραλληλοποίησης αναθέτοντας κάθε αξιολόγηση σε περισσότερους από έναν επεξεργαστές. Εκτός από τη χρήση πολλών επεξεργαστών, η παραλληλοποίηση ενός EA γίνεται πλέον και με άλλους τρόπους. Έτσι έχουν προταθεί οι παράλληλοι EA (ΠΕΑ, Parallel Evolutionary Algorithms). Το νέο στοιχείο είναι ότι πλέον πραγματοποιούνται επεμβάσεις και στην αλγοριθμική δομή του EA, οδηγώντας σε αρκετές παραλλαγές ΠΕΑ. Στη βιβλιογραφία παρουσιάζονται διάφοροι τρόποι ταξινόμησης των ΠΕΑ, [47, 188, 22]. Ανάλογα με τον τύπο του πληθυσμού, διαχωρίζονται σε ΠΕΑ ενιαίου πληθυσμού (single-population) ή πολλών πληθυσμών (multi-population). Στην κατηγορία των ΠΕΑ πολλών πληθυσμών υπάγονται οι κατανομημένοι και κυψελωτοί EA (distributed, cellular EA) ανάλογα με τη τοπολογία και τον αριθμό μελών κάθε υποπληθυσμού. Η παρούσα διατριβή, μεταξύ άλλων, συμβάλλει στην άρση εμποδίων συγχρονισμού (στο τέλος κάθε γενιάς) ενός (σύγχρονου) EA, προτείνοντας έναν ασύγχρονο δομημένο EA με ιδιαίτερα πλεονεκτήματα κατά τη χρήση του σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον.

Σχετικά με τη μείωση του απαιτούμενου αριθμού αξιολογήσεων, χρησιμοποιούνται υποκατάστατες μέθοδοι αξιολόγησης ή μεταπρότυπα (metamodels, surrogate evaluation models). Στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση, τα μεταπρότυπα υποκαθιστούν τον ακριβή αλλά χρονοβόρο υπολογισμό της συνάρτησης στόχου, που συνήθως περιλαμβάνει την επίλυση των εξισώσεων Navier–Stokes, με προσεγγιστικά μοντέλα, [189, 92]. Περαιτέρω ανάλυση, για τα είδη και τον τρόπο ένταξής τους στους EA, παρουσιάζεται στο σχετικό με τους EA κεφάλαιο της διατριβής.

Η ταυτόχρονη εκμετάλλευση των πλεονεκτημάτων στοχαστικών και αιτιοκρατικών μεθόδων βελτιστοποίησης γίνεται μέσω του υβριδισμού τους. Ένας τρόπος υβριδισμού είναι η εναλλαγή της χρήσης EA και συζυγών τεχνικών, καθώς και οι ανταλλαγή πληροφοριών μεταξύ τους, στο πλαίσιο ενός Ιεραρχικού EA, [12, 11]. Μια βασική ιεραρχική δομή (χωρίς όμως να είναι η μοναδική) είναι η εκκίνηση της διαδικασίας βελτιστοποίησης με τον EA, ο οποίος αναλαμβάνει την ανίχνευση του χώρου σχεδιασμού. Ακολουθεί η εφαρμογή της αιτιοκρατικής μεθόδου, η οποία, εκμεταλλευόμενη την ‘υπόδειξη’ του EA για την περιοχή που πιθανότατα εντοπίζεται το ακρότατο, μπορεί να συγκλίνει με ακρίβεια και ταχύτητα σ’ αυτό.

Εκτός από τους EA, στους οποίους επικεντρώνεται, μεταξύ άλλων, και το ενδιαφέρον της παρούσας διατριβής, στη βιβλιογραφία παρουσιάζονται και άλλες πληθυσμιακές μέθοδοι βελτιστοποίησης με πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα, όπως αυτές των αποικιών μυρμηγκιών (Ant Colonies Optimization–ACO, [58, 70, 259, 92]), τα σμήνη εντόμων (Particle Swarm Optimization–PSO, [77]) και η διαφορική εξέλιξη (Differential Evolution–DE, [227]).

Η παραπάνω αναφορά στις αιτιοκρατικές και στοχαστικές μεθόδους βελτιστοποίησης, με τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα που καθιερώθηκαν τους παρουσιάζει δεν αποσκοπεί σε σύγκρι-

ση μεταξύ τους. Κάθε κατηγορία μεθόδων αποτελεί μια ολοκληρωμένη διαδικασία βελτιστοποίησης, η οποία έχει εφαρμοστεί (και εφαρμόζεται) με επιτυχία σε προβλήματα αεροδυναμικού σχεδιασμού. Η επιλογή μεθόδου για ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης δεν εξαρτάται μόνο από τα πλεονεκτήματα αυτής αλλά καθορίζεται και από άλλους παράγοντες π.χ. το πρόβλημα αυτό καθαυτό, την κρίση του μηχανικού ή ακόμα και από τη διαθεσιμότητα της μιας ή της άλλης τεχνικής.

1.4 Συνεισφορά της Διατριβής στη Σχετική Έρευνα στο ΕΘΣ/ΕΜΠ

Η ενότητα αυτή έχει σκοπό, ανακεφαλαιώνοντας τις σχετικές ερευνητικές δραστηριότητες του ΕΘΣ/ΕΜΠ (προηγούμενες, όπως αποτυπώνονται στις ολοκληρωθείσες διδακτορικές διατριβές και το δημοσιευμένο έργο, αλλά και τις τρέχουσες, στη μορφή των υπό εξέλιξη διδακτορικών διατριβών) να εντάξει την παρούσα διατριβή (στη μορφή επιμέρους ‘συνεισφορών’) στο γενικότερο αυτό πλαίσιο. Τα στοιχεία πρωτοτυπίας της διατριβής εμφανίζονται σε άλλα σημεία της (μεταξύ των οποίων και στην επόμενη ενότητα) και συνοψίζονται στο τελευταίο κεφάλαιο της.

Οι ερευνητικές δραστηριότητες του ΕΘΣ/ΕΜΠ, ανταποκρινόμενες στις σύγχρονες απαιτήσεις του αεροδυναμικού σχεδιασμού, περιλαμβάνουν την ανάπτυξη τόσο αιτιοκρατικών όσο και στοχαστικών μεθόδων βελτιστοποίησης. Για την υποστήριξη και χρήση αυτών των μεθόδων αναπτύσσεται λογισμικό για την ανάλυση ροών κάθε τύπου (συμπιεστές, ασυμπιεστές, υψηλών, χαμηλών ταχυτήτων κλπ) καθώς και λογισμικό γένεσης υπολογιστικών πλεγμάτων. Σε όλα τα προηγούμενα, σημαντικό ρόλο διαδραματίζει η πολυεπεξεργασία (cluster & grid computing), η οποία στοχεύει στη μείωση του πραγματικού χρόνου ανάλυσης ή σχεδιασμού. Η ανάπτυξη λογισμικού επίλυσης των εξισώσεων Navier–Stokes στο ΕΘΣ/ΕΜΠ λαμβάνει χώρα περίπου τα τελευταία 25 χρόνια και περιλαμβάνει λογισμικό για συμπιεστές και ασυμπιεστές ροές. Στην περίπτωση ασυμπιεστων ροών αναπτύχθηκαν–αναπτύσσονται και οι δύο δυνατές μεθοδολογίες, αρχικά αυτή της διόρθωσης πίεσης (διατριβές Νικολάου [17], Πολίτη [19]) και τελευταία, αυτή της ψευδοσυμπιεστότητας (διατριβή Κοντολέοντος [13]). Το λογισμικό διόρθωσης πίεσης, επεκτάθηκε με επιτυχία και στις διηχητικές ροές, [204]. Για την πρόλεξη συμπιεστών ροών χρησιμοποιείται η μέθοδος της χρονοπροέλασης (διατριβές Κουμπογιάννη [14], Γιώτη [8], Λαμπρόπουλου [15], Παπαδημητρίου [18]) για την επίλυση των χρονικά μόνιμων εξισώσεων Navier–Stokes. Στο λογισμικό αυτό, το οποίο αποτέλεσε λογισμικό ‘βάσης’ για την παρούσα διατριβή (και άλλες ταυτόχρονα εξελισσόμενες διατριβές), η διακριτοποίηση των εξισώσεων γίνεται με την τεχνική των πεπερασμένων όγκων με κεντροκομβική διατύπωση και οι όροι μεταφοράς αναλύονται με ανάντι σχήματα δεύτερης τάξης με περιοριστές. Για τη μοντελοποίηση της τύρβης χρησιμοποιούνται διάφορα μοντέλα μιας και δύο διαφορικών εξισώσεων της βιβλιογραφίας.

Η συνεισφορά της παρούσας διατριβής στο προαναφερθέν λογισμικό συμπιεστών ροών έγκειται στην επέκτασή του για πρόλεξη σχεδόν ασυμπιεστων ροών (σε πολύ χαμηλούς αριθμούς Mach) μέσω της τεχνικής της προσταθεροποίησης (preconditioning) χαμηλών αριθμών Mach, [172, 239, 248]. Η πορεία που ακολουθεί η διατριβή, είναι (κατά κάποιον τρόπο) η αντίστροφη αυτής της διατριβής [19], όπου το λογισμικό διόρθωσης πίεσης ασυμπιεστων ροών επεκτάθηκε στις συμπιεστές–διηχητικές ροές [204]. Δηλαδή, η παρούσα διατριβή ξεκινά από το

λογισμικό συμπίεστων ροών, με πολύ καλή συμπεριφορά στις καθαρά συμπίεστες ροές, και το 'τροποποιεί' έτσι ώστε να γίνει γρήγορο και αξιόπιστο και στις χαμηλές ταχύτητες. Επιπλέον συνεισφορά της διατριβής στο λογισμικό είναι ο εμπλουτισμός του για τη πρόλεξη χρονικά μη-μόνιμων ροών. Συνολικά λοιπόν δημιουργείται και 'συντηρείται' λογισμικό επίλυσης των χρονικά μόνιμων και μη-μόνιμων εξισώσεων Navier-Stokes σε κάθε ταχύτητα ροής, ικανό να υποστηρίξει αιτιοκρατικές και στοχαστικές μεθόδους βελτιστοποίησης.

Για την πρόλεξη ροών (ανεξάρτητα αν γίνεται με λογισμικό συμπίεστων ή ασυμπίεστων ροών) χρησιμοποιούνται δομημένα πλέγματα και μη-δομημένα (τρίγωνα για 2Δ, τετράεδρα για 3Δ). Πλέον υπάρχει η δυνατότητα χρήσης και υβριδικών πλεγμάτων (διατριβή Ζερβογιάννη [9]) αποτελούμενα από τρίγωνα και τετράπλευρα για 2Δ και τετράεδρα, πενταεδρικές πυραμίδες, πρίσματα τριγωνικής βάσης και εξάεδρα για 3Δ. Για τη γένεση πλέγματος, το ΕΘΣ/ΕΜΠ διαθέτει λογισμικό γένεσης μη-δομημένων υπολογιστικών χωρίων, με χρήση της μεθόδου του προελαύνοντος μετώπου. Το λογισμικό αυτό έχει επεκταθεί έτσι ώστε να είναι δυνατή η γένεση υβριδικών πλεγμάτων με διαστρωματώσεις κοντά στα στερεά τοιχώματα (διατριβές Λιακόπουλου [16], Καμπόλη [11]).

Για την αντιμετώπιση προβλημάτων μεγάλης κλίμακας και τη μείωση του υπολογιστικού κόστους ήταν απαραίτητη η δυνατότητα επίλυσης σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον, η οποία γίνεται με τη μέθοδο των πολλαπλών υποχωρίων (μοντέλο συντονιστή-εργάτη). Αρχικά χρησιμοποιήθηκε το πρωτοκόλλο επικοινωνίας PVM, το οποίο δεδομένου ότι πλέον δεν υποστηρίζεται σε όλες τις εφαρμογές, οδήγησε στην ανάγκη προσθήκης και εναλλακτικής χρήσης του πρωτοκόλλου επικοινωνίας MPI (συνεργασία διατριβών Ζερβογιάννη [9], Κοντολέοντος [13] και παρούσας διατριβής).

Στον τομέα των αιτιοκρατικών μεθόδων βελτιστοποίησης, χρησιμοποιούνται οι συζυγείς τεχνικές (διακριτή και συνεχής) για την εύρεση της κλίσης της συνάρτησης στόχου σε δομημένα και μη-δομημένα πλέγματα για συμπίεστες και ασυμπίεστες ροές (διατριβές Παπαδημητρίου [18], Ζυμάρη [10], Ζερβογιάννη [9], Κοντολέοντος [13]). Η χρήση τους περιλαμβάνει προβλήματα σχεδιασμού σε πτερυγώσεις στροβιλομηχανών, αλλά και μεμονωμένες αεροτομές. Παρουσιάζονται νέες συναρτήσεις στόχου και πρωτότυποι τρόποι για την αποφυγή υπολογισμού χωρικών ολοκληρωμάτων για την εύρεση της κλίσης της συνάρτησης στόχου και το σχεδιασμό σε ατριβείς όσο και σε συνεκτικές ροές, [194, 192, 193]. Αν και στις περισσότερες σχετικές εργασίες της βιβλιογραφίας, κατά τη διατύπωση των συζυγών εξισώσεων αμελείται η μεταβολή της τυρβώδους συνεκτικότητας, έχει πρόσφατα προταθεί διατύπωση που τη λαμβάνει υπόψη, επιλύοντας επιπλέον συζυγείς εξισώσεις για κάθε διαφορική εξίσωση του μοντέλου τύρβης, [263]. Η διακριτή συζυγής μέθοδος χρησιμοποιείται για την επίλυση του προβλήματος βέλτιστης προσαρμογής πλέγματος στη λύση με *a posteriori* εκτίμηση σφάλματος, [258], ενώ χρησιμοποιούνται επικουρικά και μέθοδοι αυτόματης διαφορίσης. Τελευταία, το ενδιαφέρον έχει επικεντρωθεί στον υπολογισμό της δεύτερης παραγώγου αεροδυναμικών συναρτήσεων κόστους με τις συζυγείς τεχνικές, ώστε για τη βελτιστοποίηση να χρησιμοποιηθεί και η (ακριβής) μέθοδος Newton, [195, 196, 197].

Στην παρούσα διατριβή, οι μέθοδοι διακριτής και συνεχούς συζυγούς τεχνικής επεκτείνονται για σχεδιασμό και σε χαμηλές ταχύτητες. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της προσταθεροποίησης χαμηλών αριθμών Mach η οποία, εκτός από τις εξισώσεις ροής, επιδρά και στις συζυγείς εξισώσεις, [30]. Έτσι, αφενός καθίσταται δυνατός ο σχεδιασμός σε χαμηλούς αριθμούς Mach

και αφετέρου, σε σύγκριση με τις αντίστοιχες εξισώσεις χωρίς προσταθεροποίηση, επιταχύνεται η επίλυση τόσο του ευθέος όσο και του συζυγούς προβλήματος.

Στην κατηγορία των στοχαστικών μεθόδων βελτιστοποίησης, στο ΕΘΣ/ΕΜΠ δίνεται έμφαση στην ανάπτυξη ΕΑ (διατριβές Γιώτη [8], Καρακάση [12], Καμπόλη [11], Γεωργοπούλου [7]). Η ενασχόληση με τους ΕΑ ξεκίνησε πριν 12 περίπου χρόνια με την ανάπτυξη του λεγόμενου γενικευμένου ΕΑ (ΓΕΑ) ο οποίος περιλάμβανε στοιχεία γενετικών αλγορίθμων και στρατηγικών εξέλιξης. Με στόχο τη μείωση του υπολογιστικού κόστους, χρησιμοποιήθηκαν τεχνητά νευρωνικά δίκτυα ως μεταπρότυπα για την προσεγγιστική προ-αξιολόγηση του πληθυσμού κάθε γενιάς, αλλά και η παράλληλη αξιολόγηση υποψήφιων λύσεων σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον, [91]. Ακολούθησε η ανάπτυξη των κατανεμημένων ΕΑ (ΚΕΑ) και των Ιεραρχικών ΕΑ (όπου σε κάθε επίπεδο χρησιμοποιείται διαφορετικού κόστους λογισμικό αξιολόγησης), [134, 135, 136]. Τα τελευταία δύο έτη, δίνεται έμφαση στη χρήση των Ιεραρχικών ΕΑ όπου σε κάθε επίπεδο μπορεί να χρησιμοποιείται διαφορετικό λογισμικό αξιολόγησης, διαφορετική παραμετροποίηση ή ακόμα και διαφορετική μέθοδος βελτιστοποίησης (π.χ. στοχαστική και αιτιοκρατική, δηλαδή ΕΑ και συζυγής τεχνική για τον υπολογισμό της κλίσης της συνάρτησης στόχου), [131, 132]. Το τελευταίο αποτελεί, σε ορισμένες από τις πιθανές διατυπώσεις του, υβριδισμό στοχαστικών και αιτιοκρατικών μεθόδων βελτιστοποίησης με στόχο την εκμετάλλευση των πλεονεκτημάτων καθενιάς. Επιπλέον, η παράλληλη-ταυτόχρονη αξιολόγηση υποψήφιων λύσεων εκτός από πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον (cluster computing), επεκτάθηκε και στη χρήση γεωγραφικά απομακρυσμένων υπολογιστών (grid computing). Όλα τα παραπάνω αποτελούν τα βασικά χαρακτηριστικά του λογισμικού EASY, [264]. Ένας διαφορετικού τύπου υβριδισμός μεθόδων, επιτυγχάνεται με τους μιμητικούς αλγορίθμους (Memetic EA), [93], περιοχή στην οποία επίσης δραστηριοποιείται η ερευνητική ομάδα του ΕΘΣ/ΕΜΠ.

Οι προαναφερθέντες ΕΑ υπάγονται στην κατηγορία των σύγχρονων ΕΑ. Στην παρούσα διατριβή, αναπτύσσονται και νέοι ασύγχρονοι ΕΑ οι οποίοι, καταργώντας την έννοια της γενιάς, εκμεταλλεύονται πλήρως τη διαθέσιμη υπολογιστική ισχύ, [31].

1.5 Περιεχόμενα και Δομή της Διατριβής

Η παρούσα διατριβή, ξεκινώντας από το προϋπάρχον λογισμικό και μεθόδους του ΕΘΣ/ΕΜΠ που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, αναπτύσσει μεθόδους για την ανάλυση και το σχεδιασμό-βελτιστοποίηση αεροδυναμικών μορφών, σε όλο το εύρος ταχυτήτων ροής, επιδιώκοντας αποδεκτό υπολογιστικό κόστος.

Ειδικότερα, όσον αφορά στο λογισμικό επίλυσης των εξισώσεων Navier–Stokes που βασίζεται στη θεωρία των υπερβολικών συστημάτων και αρχικά αναπτύχθηκε για συμπιεστές ροές, εισάγεται η μέθοδος της προσταθεροποίησης χαμηλών αριθμών Mach ώστε με ένα μόνο λογισμικό συμπιεστών ροών να είναι δυνατή η επίλυση των εξισώσεων Navier–Stokes σε όλο το εύρος των ταχυτήτων ροής. Η προσταθεροποίηση εξασφαλίζει ταχύτερη σύγκλιση σε προσομοιώσεις ροών πολύ χαμηλών ταχυτήτων ή, ακόμα, καθιστά δυνατή τη σύγκλιση εκεί που η αριθμητική επίλυση των μη-προσταθεροποιημένων εξισώσεων θα αποτύγχανε ή θα οδηγούσε σε μη-αποδεκτά αποτελέσματα. Το κέρδος από τη συνδυασμένη χρήση προσταθεροποίησης και πολυεπεξεργασίας είναι διττό. Το λογισμικό με την προσταθεροποίηση χρησιμοποιείται για την υποστήριξη μεθόδων βελτιστοποίησης εξασφαλίζοντας μείωση του υπολογιστικού κό-

στους κατά την επίλυση των εξισώσεων ροής, π.χ. μιας υποψήφιας λύσης στο πλαίσιο ενός ΕΑ. Η ανάπτυξη των προσταθεροποιημένων εξισώσεων, η διακριτοποίηση τους με τις παραδοχές που αυτή εισάγει καθώς και η επίλυση τους με μεθόδους χρονοπροέλασης, παρουσιάζεται στο **Κεφάλαιο 2**. Επιπλέον, αναλύεται ο τρόπος επίλυσης χρονικά μη-μόνιμων ροών, όπου με τη τεχνική του διπλού χρονικού βήματος για κάθε πραγματική χρονική στιγμή επιλύεται το προσταθεροποιημένο χρονικά μόνιμο σύστημα των εξισώσεων.

Στο **Κεφάλαιο 3** γίνεται αποτίμηση του κέρδους από τη χρήση της προσταθεροποίησης σε μια σειρά προβλημάτων. Επιπλέον, παρουσιάζονται παραδείγματα ανάλυσης 2Δ και 3Δ ροών, σε πτερυγώσεις στροβιλομηχανών, σε μεμονωμένες αεροτομές, αεροσκάφη, αγωγούς καθώς και περιπτώσεις διφασικών ροών παρουσία καπνού.

Η τεχνική της προσταθεροποίησης επεκτείνεται και στο σχεδιασμό-βελτιστοποίηση με χρήση συζυγών τεχνικών, για το σχεδιασμό σε χαμηλές ταχύτητες, κάτι που εμφανίζεται για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία. Η ένταξη της προσταθεροποίησης χαμηλών αριθμών Mach στις συζυγείς τεχνικές (διακριτή και συνεχή) παρουσιάζεται στο **Κεφάλαιο 4**. Για τη διακριτή συζυγή τεχνική, η εφαρμογή της προσταθεροποίησης είναι άμεση, χρησιμοποιώντας τις προσταθεροποιημένες εξισώσεις ροής σε διακριτή μορφή. Για τη συνεχή συζυγή τεχνική προηγείται διερεύνηση και εμβάθυνση σχετικά με το εάν η τεχνική της προσταθεροποίησης πρέπει να εφαρμοστεί στις συζυγείς εξισώσεις ή οι συζυγείς εξισώσεις να διατυπωθούν με αφετηρία τις προσταθεροποιημένες εξισώσεις ροής. Αποδεικνύεται ότι οι δύο αυτές παραλλαγές, υπό προϋποθέσεις, οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα. Η ανάλυση περιλαμβάνει τη μαθηματική θεμελίωση της μεθόδου με αναφορά στις παραδοχές που εισάγονται ώστε οι συζυγείς εξισώσεις με προσταθεροποίηση να έχουν τα ίδια πλεονεκτήματα και να διακριτοποιούνται με αντίστοιχα σχήματα με τις προσταθεροποιημένες εξισώσεις ροής. Επιπλέον, παρουσιάζονται νέες συναρτήσεις στόχου για σχεδιασμό μεμονωμένων αεροτομών και αναπτύσσεται η διαδικασία σχεδιασμού σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον. Η πιστοποίηση της μεθόδου γίνεται σε 2Δ πτερυγώσεις στροβιλομηχανών και μεμονωμένες αεροτομές για προβλήματα αντίστροφου σχεδιασμού και ελαχιστοποίησης του συντελεστή οπισθέλκουσας. Αποδεικνύεται ότι, είτε στη διακριτή είτε στη συνεχή συζυγή τεχνική, η εισαγωγή της προσταθεροποίησης επιταχύνει τόσο την επίλυση του ευθέως όσο και του συζυγούς προβλήματος και ουσιαστικά όλη τη διαδικασία σχεδιασμού. Το κέρδος αυξάνει ακόμα περισσότερο όταν η ανάλυση και ο σχεδιασμός γίνονται σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον.

Το **Κεφάλαιο 5** επικεντρώνεται στις στοχαστικές μεθόδους βελτιστοποίησης και ειδικότερα τους ΕΑ. Ο σχεδιασμός-βελτιστοποίηση με χρήση ΕΑ συνήθως είναι αρκετά χρονοβόρος λόγω του μεγάλου αριθμού αξιολογήσεων για την εύρεση της βέλτιστης λύσης. Το πρόβλημα αυτό επιλύεται εφαρμόζοντας την τεχνική των παράλληλων αξιολογήσεων, αλλά και με τη χρήση μεταπροτύπων, που μειώνουν το συνολικό αριθμό των απαιτούμενων αξιολογήσεων. Δεδομένου ότι οι κλασικοί (σύγχρονοι) ΕΑ σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον παρουσιάζουν προβλήματα συγχρονισμού με την ολοκλήρωση μιας γενιάς, τα οποία γίνονται εντονότερα όταν χρησιμοποιούνται μεταπρότυπα, η διατριβή προτείνει μια πρωτότυπη παραλλαγή ασύγχρονου ΕΑ, [31]. Ο προτεινόμενος Ασύγχρονος Δομημένος ΕΑ (ΑΔΕΑ) είναι εγγενώς ασύγχρονος, εκμεταλλεύεται σε μέγιστο βαθμό τη διαθέσιμη υπολογιστική ισχύ και η χρήση του ενδείκνυται ιδίως για ετερογενές πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον. Η ανάλυση περιλαμβάνει όλη τη διαδικασία η οποία, ξεκινώντας από ένα σύγχρονο ΕΑ, μέσω του ημι-ασύγχρονου ΕΑ, καταλήγει στον ΑΔΕΑ. Στον ΑΔΕΑ, ο πληθυσμός τοποθετείται σε 2Δ ορθογωνικό πλέγμα,

το οποίο διαχωρίζεται σε εν μέρει αλληλοκαλυπτόμενους δήμους των έξι ατόμων. Επιπλέον, εισάγονται νέοι τελεστές διασταύρωσης και προτείνεται και νέος τρόπος ένταξης των μεταπροτύπων σε αυτόν. Ο νέος αλγόριθμος αρχικά πιστοποιείται σε μαθηματικές συναρτήσεις χαμηλού υπολογιστικού κόστους. Στη συνέχεια, χρησιμοποιείται για το σχεδιασμό 2Δ πτερώγωσης συμπίεστη και μεμονωμένης αεροτομής καθώς και το σχεδιασμό μικρού υπερηχητικού αεροσκάφους.

Η διατριβή ολοκληρώνεται με το **Κεφάλαιο 6** στο οποίο, μετά από μια σύντομη ανακεφαλαίωση, παρουσιάζονται τα συμπεράσματα και τα στοιχεία πρωτοτυπίας της διατριβής.

Κεφάλαιο 2

Αριθμητική Επίλυση Εξισώσεων Ροής – Προσταθεροποίηση Χαμηλών Αριθμών Mach

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται, αρχικά, οι εξισώσεις ροής για μη-συνεκτικές (εξισώσεις Euler) και συνεκτικές ροές (εξισώσεις Navier–Stokes). Η παρουσίαση περιλαμβάνει τη συντηρητική και μη-συντηρητική γραφή τους, αναφορά στο σχετικό πρόβλημα ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων και σύντομη αναφορά στις επιβαλλόμενες οριακές συνθήκες. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η ανάπτυξη των προσταθεροποιημένων εξισώσεων, για χρήση σε προβλήματα ροής χαμηλών αριθμών Mach και το πως αυτές προκύπτουν από την κλασική διατύπωση των εξισώσεων ροής. Για το ίδιο θέμα, προηγείται σχετική βιβλιογραφική επισκόπηση. Για τις προσταθεροποιημένες εξισώσεις ακολουθεί ανάλυση του σχετικού ιδιοπροβλήματος και μελετάται η συμπεριφορά τους σε ροές χαμηλού αριθμού Mach, συγκρινόμενη με αυτήν των κλασικών εξισώσεων ροής (δηλ. αυτών χωρίς προσταθεροποίηση). Σημειώνεται, ότι όπου χρειάζεται να οριστούν μητρώα, αυτά γράφονται για τριδιάστατες (3Δ) ροές ενώ τα αντίστοιχα για τις διδιάστατες (2Δ) ροές προκύπτουν άμεσα από αυτά. Επιπλέον, παρουσιάζεται η μοντελοποίηση της τύρβης με αναφορές στα μοντέλα δύο εξισώσεων $k-\epsilon$ και $k-\omega$ καθώς και στο μοντέλο μιας εξίσωσης των Spalart–Allmaras που, εδώ, χρησιμοποιούνται κατά περίπτωση.

Ακολουθεί αναφορά στον τρόπο διακριτοποίησης και αριθμητικής επίλυσης των παραπάνω μερικών διαφορικών εξισώσεων με την τεχνική των πεπερασμένων όγκων, στο πλαίσιο μιας μεθόδου χρονοπροέλασης. Η τεχνική διακριτοποίησης και επίλυσης μπορεί να εφαρμοστεί σε μη-δομημένα και υβριδικά πλέγματα. Όλη η ανάλυση γίνεται θεωρώντας τις προσταθεροποιημένες εξισώσεις ροής ώστε να μελετηθούν οι παραδοχές και οι αλλαγές που επιβάλλει η προσταθεροποίηση. Για την επαναφορά στις αντίστοιχες σχέσεις που διέπουν τις κλασικές εξισώσεις ροής, αρκεί να υποτεθεί μοναδιαίο μητρώο προσταθεροποίησης. Αρχικά ορίζονται οι όγκοι ελέγχου στους οποίους ολοκληρώνονται οι εξισώσεις, αναλύεται ο τρόπος υπολογισμού των διανυσμάτων ροής, η αριθμητική επιβολή των οριακών συνθηκών και, τέλος, παρουσιάζονται οι μέθοδοι αριθμητικής επίλυσης για χρονικά μόνιμες και μη-μόνιμες ροές.

Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με αναφορά στη χρήση της πολυεπεξεργασίας η οποία αποτελεί σημαντική συνιστώσα της διατριβής. Αναλύονται οι τρόποι διαχωρισμού του υπολογιστικού χωρίου σε επιμέρους χωρία και οι τροποποιήσεις που απαιτούνται ώστε να είναι δυνατή η

εκτέλεση του λογισμικού επίλυσης των εξισώσεων ροής σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον.

2.1 Οι Εξισώσεις της Ροής

2.1.1 Διατύπωση

Οι εξισώσεις ροής για συνεκτικές ροές συμπιεστού ρευστού, σε συντηρητική διανυσματική μορφή, γράφονται ως

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}_i^{inv}}{\partial x_i} - \frac{\partial \vec{f}_i^{vis}}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1)$$

με $i=1, 2$ για 2Δ και $i=1, 2, 3$ για 3Δ ροές. Θεωρώντας ότι η γραφή 2.1 καλύπτει χρονικά μόνιμες ροές οι οποίες, στη συνέχεια, θα επιλυθούν αριθμητικά με την τεχνική της χρονο-προέλασης εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες των υπερβολικών εξισώσεων στο χωρο-χρόνο, με t συμβολίζεται ο ψευδο-χρόνος. Επίσης, $x_i = (x_1, x_2)$ ή (x_1, x_2, x_3) είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες για 2Δ ή 3Δ προβλήματα, αντίστοιχα. \vec{U} είναι το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών και \vec{f}_i^{inv} , \vec{f}_i^{vis} είναι, αντίστοιχα, τα διανύσματα ατρίβων και συνεκτικών ροών κατά τη διεύθυνση x_i . Αυτά δίνονται από τις σχέσεις

$$\vec{U} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho \vec{u} \\ E_t \end{Bmatrix}, \quad \vec{f}_i^{inv} = \begin{Bmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i \vec{u} + \delta_i p \\ (E_t + p)u_i \end{Bmatrix}, \quad \vec{f}_i^{vis} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\tau}_i \\ u_j \tau_{ij} + q_i \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

όπου ρ η πυκνότητα, $\vec{u} = [u_1, u_2]^T$ για 2Δ ή $[u_1, u_2, u_3]^T$ για 3Δ ροές είναι οι καρτεσιανές συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας \vec{u} , $E_t = \rho E = \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \rho |\vec{u}|^2$ η ολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου και p η στατική πίεση. Επιπλέον, $\vec{\tau}_i = [\tau_{i1}, \tau_{i2}]^T$ για 2Δ ή $\vec{\tau}_i = [\tau_{i1}, \tau_{i2}, \tau_{i3}]^T$ για 3Δ ροές, είναι το διάνυσμα των συνιστωσών των συνεκτικών τάσεων, που ορίζονται ως

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad (2.3)$$

όπου $\vec{\delta}_i = [\delta_{i1}, \delta_{i2}]^T$ για 2Δ ή $\vec{\delta}_i = [\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}]^T$ για 3Δ, είναι το σύμβολο του Kronecker. Τέλος με $q_i = k \frac{\partial T}{\partial x_i}$ συμβολίζεται η ροή θερμότητας κατά τη διεύθυνση x_i , ενώ η σύνδεση των θερμοδυναμικών μεγεθών γίνεται μέσω της καταστατικής εξίσωσης των τελείων αερίων $p = \rho RT$. Οι εξισώσεις της σχέσης 2.1, αν θεωρήσουμε μόνο τους μη-συνεκτικούς όρους (εξισώσεις Euler) γράφονται

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}_i^{inv}}{\partial \vec{U}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + A_i \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i} = 0 \quad (2.4)$$

όπου $A_i = \frac{\partial \vec{f}_i^{inv}}{\partial \vec{U}}$ είναι τα Ιακωβιανά μητρώα των ατρίβων ροών για τις συντηρητικές μεταβλητές.

Ένας εναλλακτικός τρόπος γραφής των εξισώσεων Euler (σχέση 2.4) είναι με χρήση των μη-συντηρητικών μεταβλητών. Αυτός ο τρόπος γραφής οδηγεί σε απλούστερης μορφής Ιακωβιανά μητρώα και, άρα, είναι χρήσιμος στην περαιτέρω επεξεργασία τους για την εύρεση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων. Με χρήση των μη-συντηρητικών μεταβλητών $\vec{V} = [\rho \ u_i \ p]^T$,

η 'αντίστοιχη'¹ της δεύτερης εξίσωσης της 2.4 γράφεται ως

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \bar{A}_i \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_i} = 0 \quad (2.5)$$

όπου \bar{A}_i τα Ιακωβιανά μητρώα για τις μη-συντηρητικές μεταβλητές. Η σχέση που συνδέει τα μητρώα \bar{A}_i με τα αντίστοιχα A_i είναι (βλ. προηγούμενη υποσημείωση)

$$\bar{A}_i = M^{-1} A_i M \quad (2.6)$$

με $M = \frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{V}}$ το μητρώο μετασχηματισμού από τις συντηρητικές στις μη-συντηρητικές μεταβλητές. Τα μητρώα M και M^{-1} , για 3Δ ροές είναι, [116],

$$M = \frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{V}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 & \rho u_1 & \rho u_2 & \rho u_3 & 1/(\gamma-1) \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad (2.7)$$

$$M^{-1} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{U}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u_1/\rho & 1/\rho & 0 & 0 & 0 \\ -u_2/\rho & 0 & 1/\rho & 0 & 0 \\ -u_3/\rho & 0 & 0 & 1/\rho & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma-1)|\vec{u}|^2 & -(\gamma-1)u_1 & -(\gamma-1)u_2 & -(\gamma-1)u_3 & -(\gamma-1) \end{bmatrix}$$

ενώ τα αντίστοιχα για 2Δ ροές προκύπτουν αν απαλειφθούν η τέταρτη γραμμή και η τέταρτη στήλη από τα παραπάνω μητρώα.

2.1.2 Πρόβλημα Ιδιοτιμών και Ιδιοδιανυσμάτων

Ένα βασικό βήμα για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων είναι η εύρεση των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων της ορίζουσας $A = A_i n_i$ όπως ορίζεται στη συνέχεια. Η γνώση των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων σε υπερβολικά προβλήματα στο χώρο-χρόνο επιτρέπει τη διατύπωση σχημάτων διακριτοποίησης των αριθμητικών ροών, συμβατών με τη φυσική της ροής. Το μητρώο A συνδέει τα κατά κατεύθυνση Ιακωβιανά μητρώα A_i (λ.χ. $A_1 = \frac{\partial \vec{f}_1^{inv}}{\partial \vec{U}}$, $A_2 = \frac{\partial \vec{f}_2^{inv}}{\partial \vec{U}}$, $A_3 = \frac{\partial \vec{f}_3^{inv}}{\partial \vec{U}}$ για ένα 3Δ πρόβλημα) μέσω των συνιστωσών ενός μοναδιαίου διανύσματος \vec{n} κάθετου σε κάθε επιμέρους τμήμα της περιβάλλουσας ενός όγκου αναφοράς, το οποίο διασχίζει η ατριβής ροή. Με $n_i = (n_1, n_2, n_3)$ συμβολίζονται οι συνιστώσες του διανύσματος \vec{n} . Όπως απορρέει από τη σχέση 2.6, τα μητρώα A και \bar{A} έχουν ίδιες ιδιοτιμές και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Για το λόγο αυτό αρκεί να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του μητρώου $\bar{A} = \bar{A}_i n_i$ των μη-συντηρητικών μεταβλητών, όπου ο υπολογισμός είναι πιο εύκολος. Οι ιδιοτιμές υπολογίζονται από τη σχέση

$$\det |\lambda_i I - \bar{A}| \quad (2.8)$$

¹ Η χρήση εισαγωγικών υπονοεί το διαφορετικό τρόπο εμφάνισης των λεγόμενων Ιακωβιανών μητρώων, αφού ο μετασχηματισμός των εξισώσεων ροής στις μη-συντηρητικές μεταβλητές δίνει, βήμα προς βήμα, ότι $\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + A_i \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{V}} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + A_i \frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{V}} \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \bar{A}_i \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_i} = 0$

και, κατά τα γνωστά, είναι οι

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2,3} &= \vec{u} \cdot \vec{n} \\ \lambda_{4,5} &= \vec{u} \cdot \vec{n} \pm c|\vec{n}|\end{aligned}\quad (2.9)$$

με c την ταχύτητα του ήχου. Επιπλέον, από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}\vec{l}^i \bar{A} &= \lambda_i \vec{l}^i \\ \bar{A} \vec{r}^i &= \lambda_i \vec{r}^i, \quad i = 1, 5\end{aligned}\quad (2.10)$$

μπορούν να σχηματισθούν τα μητρώα L^{-1} και L που περιέχουν, το μεν L^{-1} τα αριστερά ιδιοδιανύσματα γραμμής (\vec{l}^i) του \bar{A} (ένα ιδιοδιάνυσμα ανά γραμμή του L^{-1}), το δε L τα δεξιά ιδιοδιανύσματα στήλης (\vec{r}^i) του \bar{A} (ένα ιδιοδιάνυσμα ανά στήλη του L). Τα μητρώα αυτά διαγωνοποιούν την ορίζουσα \bar{A} των μη-συντηρητικών μεταβλητών, η οποία γράφεται ως

$$\bar{A} = L\Lambda L^{-1}\quad (2.11)$$

όπου

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)\quad (2.12)$$

Κατ' αναλογία με τη σχέση 2.11, ορίζονται και τα μητρώα P και P^{-1} τα οποία διαγωνοποιούν το μητρώο A των συντηρητικών μεταβλητών ως

$$A = P\Lambda P^{-1}\quad (2.13)$$

όπου τα P και P^{-1} προκύπτουν ως $P = ML$ και $P^{-1} = L^{-1}M^{-1}$. Δεν γίνεται περαιτέρω αναφορά στη σχετική θεωρία (ορισμός των μητρώων L , L^{-1} , P και P^{-1}), αφού αυτή μπορεί να βρεθεί σε βιβλία Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής για το συμπιεστό ρευστό (πχ. [116]).

2.1.3 Οριακές Συνθήκες

Στην περίπτωση ατριβών ροών, στα στερεά τοιχώματα εφαρμόζεται η συνθήκη μη-εισχώρησης, δηλαδή ο μηδενισμός της κάθετης στο τοίχωμα ταχύτητας. Αντίθετα, σε συνεκτικές ροές, εφαρμόζεται η συνθήκη μη-ολίσθησης, δηλαδή ο μηδενισμός όλων των συνιστωσών της ταχύτητας. Σχετικά με τις συνθήκες εισόδου-έξόδου, αυτές εξαρτώνται από τη μελετούμενη περίπτωση. Ειδικότερα, για ροές γύρω από μεμονωμένες αεροτομές τίθενται επ'άπειρον συνθήκες αδιατάρακτης ροής (δεδομένου ότι το όριο του υπολογιστικού χωρίου εκτείνεται πολύ μακριά από την αεροτομή). Για μελέτη ροών σε πτερυγώσεις στροβιλομηχανών το πλήθος των οριακών συνθηκών στην είσοδο και την έξοδο καθορίζεται από την κατεύθυνση διάδοσης της πληροφορίας (πρόσχημο ιδιοτιμών). Έτσι, για ροές υποηχητικής αξονικής ταχύτητας στην είσοδο, εκεί επιβάλλονται η ολική πίεση, η ολική θερμοκρασία και η γωνία εισόδου της ροής (ή γωνίες για 3Δ), ενώ στην έξοδο η στατική πίεση. Για ροές υπερηχητικής αξονικής ταχύτητας εισόδου, όλες οι ποσότητες ροής καθορίζονται στην είσοδο του πεδίου. Επιπλέον, στα περιοδικά όρια, εξασφαλίζεται ότι τα μεγέθη ροής για κάθε ζεύγος περιοδικών κόμβων είναι ίδια, με την προφανή ιδιαιτερότητα του να εφαρμόζεται η περιοδικότητα στο διάνυσμα της ταχύτητας στις περιφερειακές πτερυγώσεις.

2.2 Προσταθεροποίηση Χαμηλών Αριθμών Mach

Στην προηγούμενη ενότητα αναλύθηκαν οι εξισώσεις συμπιεστού ρευστού. Οι αντίστοιχοι κώδικες επίλυσης αυτών των εξισώσεων είναι αξιόπιστοι και γρήγοροι για την πρόλεξη ροών με αριθμό Mach μεγαλύτερο περίπου του 0.3, δηλαδή σε καθαρά συμπιεστές ροές. Σε αρκετές περιπτώσεις όμως, ένα πεδίο ροής περιλαμβάνει μεγάλο εύρος ταχυτήτων, από υψηλούς έως χαμηλούς αριθμούς Mach. Για παράδειγμα, κατά την ανάλυση της ροής γύρω από μια πτέρυγα με μεγάλη γωνία προσβολής, ένα μέρος του πεδίου ροής μπορεί να θεωρηθεί ασυμπίεστο με χαμηλούς αριθμούς Mach, ενώ σε άλλες περιοχές του πεδίου τα φαινόμενα συμπιεστότητας είναι σημαντικά. Οι αλγόριθμοι/κώδικες επίλυσης συμπιεστών ροών, όσο ο αριθμός Mach πλησιάζει στο μηδέν (ασυμπίεστο όριο) παρουσιάζουν προβλήματα αποδοτικότητας (καθυστερήση σύγκλισης) ή/και ακρίβειας (μη αποδεκτές λύσεις). Η δυσκολία επίλυσης σχετίζεται με τη μεγάλη απόκλιση ανάμεσα στη ταχύτητα του ρευστού και στις ταχύτητες των ακουστικών κυμάτων, η οποία ουσιαστικά υποδηλώνει ότι το σύστημα έχει κακό αριθμό κατάστασης².

Στοχεύοντας στην ύπαρξη ενός λογισμικού για την επίλυση ροών σε όλο το εύρος ταχυτήτων (από υψηλούς έως χαμηλούς αριθμούς Mach), στη βιβλιογραφία εμφανίζονται δύο διαφορετικές 'φιλοσοφίες'—θεωρήσεις ως προς τους σχετικούς αλγορίθμους. Η πρώτη θεώρηση αφορά στην επέκταση—τροποποίηση των κωδίκων για ασυμπίεστες ροές ώστε να ληφθεί υπόψη η συμπιεστότητα, ενώ η δεύτερη σχετίζεται με την επέκταση των κωδίκων συμπιεστών ροών προς τους χαμηλούς αριθμούς Mach.

Όσον αφορά στο λογισμικό επίλυσης ασυμπίεστων ροών, οι δύο βασικές τεχνικές που χρησιμοποιούνται είναι αυτές της διόρθωσης πίεσης και της ψευδοσυμπιεστότητας. Η τεχνική της διόρθωσης πίεσης πρωτοπαρουσιάστηκε από τους Karki, Patankar, [137]. Σύμφωνα με αυτήν, αρχικά υποτίθεται ένα πεδίο πίεσης με βάση το οποίο επιλύονται οι εξισώσεις ορμής για τον υπολογισμό του πεδίου της ταχύτητας. Στη συνέχεια, το πεδίο της πίεσης διορθώνεται επιλύοντας μια εξίσωση Poisson για την ικανοποίηση της εξίσωσης της συνέχειας κ.ο.κ. Η μέθοδος της ψευδοσυμπιεστότητας αναπτύχθηκε από τον Chorin, [55] και συνίσταται στην εισαγωγή ενός όρου τεχνητής συμπιεστότητας (χρονική παράγωγος πίεσης, $\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial p}{\partial t}$) στην εξίσωση της συνέχειας. Σύγκριση των δύο αυτών τεχνικών μπορεί να βρεθεί στις εργασίες [200, 231], όπου αποδεικνύεται ότι και οι δύο δίνουν αξιόπιστες λύσεις συγκρινόμενες με τα αντίστοιχα πειραματικά αποτελέσματα. Οι παραπάνω εργασίες, για τα αριθμητικά σχήματα που χρησιμοποιούν και τις παρουσιάζόμενες εφαρμογές, οδηγούνται στο συμπέρασμα ότι η τεχνική της διόρθωσης πίεσης υπερτερεί ως προς την ακρίβεια των προλέξεων, ενώ οι μέθοδοι ψευδοσυμπιεστότητας εμφανίζουν ταχύτερη σύγκλιση.

Η δεύτερη θεώρηση, η οποία συγκεντρώνει και το ενδιαφέρον της παρούσας διατριβής, αφορά στην ανάπτυξη μεθόδων προσταθεροποίησης με στόχο την επίλυση σχεδόν ασυμπίεστων ροών με αλγορίθμους σχεδιασμένους για συμπιεστές ροές. Η βασική ιδέα της προσταθεροποίησης ξεκινά από τις μεθόδους ψευδοσυμπιεστότητας με τη προσθήκη τεχνητών χρονικών παραγώγων σε όλες τις εξισώσεις και όχι μόνο σε αυτή της συνέχειας. Μια επισκόπηση των μεθόδων προσταθεροποίησης παρουσιάζεται στην εργασία [139].

Από τις πρώτες εργασίες σχετικά με την προσταθεροποίηση είναι αυτή των Choi, Merkle, [53] το 1985, οι οποίοι πρότειναν τον πολλαπλασιασμό του ψευδο-χρονικού όρου των εξισώσεων

² Λόγος της μέγιστης κατ' απόλυτή τιμή ιδιοτιμή προς της ελάχιστη κατ' απόλυτη τιμή ιδιοτιμή.

Euler με ένα διαγώνιο μητρώο προσταθεροποίησης. Το μητρώο αυτό ουσιαστικά επιδρούσε μόνο στην χρονική παράγωγο της εξίσωσης της ενέργειας κι ήταν έτσι ορισμένο ώστε να εξαλείφει τη μεγάλη απόκλιση των ιδιοτιμών του συστήματος (stiffness of the eigenvalues).

Μια πιο γενικευμένη μελέτη των μεθόδων προσταθεροποίησης για την επίλυση των ασυμπίεστων αλλά και των συμπίεστων εξισώσεων σε χαμηλές ταχύτητες παρουσιάστηκε το 1987 από τον Turkel, [239]. Αρχικά, στις ασυμπίεστες εξισώσεις, επέκτεινε τη μέθοδο της ψευδοσυμπίεστότητας προσθέτοντας χρονικές παραγώγους της πίεσης σε όλες τις εξισώσεις. Στη συνέχεια, προχώρησε στην εφαρμογή της τεχνικής και στις εξισώσεις ροής συμπίεστου ρευστού (με διάνυσμα αγνώστων μεταβλητών το $[p, \vec{u}, S]^T$, όπου S η εντροπία), όπου πολλαπλασίασε τον χρονικό όρο των εξισώσεων μ'ένα 'αντίστοιχο' μητρώο προσταθεροποίησης αυτού που είχε προκύψει για τις ασυμπίεστες εξισώσεις ροής ($[p, \vec{u}]^T$). Σε αυτήν την εργασία, αλλά και σε αυτές που ακολούθησαν, [240, 241, 242] προτείνεται μια ολόκληρη 'οικογένεια' μητρώων προσταθεροποίησης.

Εκτός από τα μητρώα των Turkel, Merkle, [240, 53] στη βιβλιογραφία προτείνονται και άλλα μητρώα προσταθεροποίησης. Ο ορισμός τους ποικίλλει ανάλογα με το διάνυσμα των μεταβλητών ως προς τις οποίες επιλύονται οι εξισώσεις. Οι δύο συχνότερα εμφανιζόμενες κατηγορίες είναι τα μητρώα με χρήση του διανύσματος των συντηρητικών μεταβλητών, $[\rho, \rho\vec{u}, E_t]^T$ [53, 252, 80] και αυτά με διάνυσμα μεταβλητών το $[p, \vec{u}, S]^T$ [248, 243, 244]. Από αυτά τα μητρώα, άλλα είναι συμμετρικά [53, 248] ενώ τα περισσότερα είναι μη-συμμετρικά [243, 252, 80].

Ανεξάρτητα από το διάνυσμα μεταβλητών ως προς τις οποίες επιλύονται οι εξισώσεις ροής, όλα τα μητρώα προσταθεροποίησης ορίζονται ως συνάρτηση των τοπικών μεγεθών της ροής και, ειδικότερα, ποσοτήτων ανάλογων του M^2 . Σε κάθε περίπτωση, η δημιουργία ενός μητρώου προσταθεροποίησης αποβλέπει στην άρση των προβλημάτων (δηλ. τη μεγάλη απόκλιση ακουστικών κυμάτων και ταχύτητας ρευστού) που εμφανίζουν οι κώδικες συμπίεστου ρευστού σε ροές χαμηλών ταχυτήτων.

Ενώ οι πρώτες εφαρμογές αφορούσαν τις 2Δ ατριβείς ροές, η μέθοδος επεκτάθηκε και στις τρεις διαστάσεις [248, 243], σε συνεκτικές ροές [172, 80], και επιπλέον συνδυάστηκε με μεθόδους πολυπλέγματος [253]. Τα παραδείγματα εφαρμογής περιλαμβάνουν μεμονωμένες αεροτομές, πτέρυγες αεροσκαφών, πτερυγώσεις στροβιλομηχανών, μελέτη ροών σε θαλάμους καύσης κ.α.

Για τη διακριτοποίηση των προσταθεροποιημένων εξισώσεων με ανάντι σχήματα και χρήση μονοδιάστατου επιλύτη κατά Roe [215], οι van Leer, Lee, Roe παρατήρησαν ότι η έκφραση του διανύσματος της ατριβούς ροής πρέπει να τροποποιηθεί [248]. Αυτή η τροποποίηση, που αφορά μόνο στο τμήμα της τεχνητής συνεκτικότητας (artificial dissipation) του διανύσματος ατριβούς ροής ώστε αυτό να γίνει 'αντίστοιχο' με το προσταθεροποιημένο σύστημα των εξισώσεων, βελτιώνει και την αριθμητική λύση. Αργότερα, οι Guillard, Viozat που μελέτησαν τη συμπεριφορά των ανάντι σχημάτων στις χαμηλές ταχύτητες τροποποίησαν περαιτέρω αυτό το σχήμα, [107]. Επιπλέον τροποποιήσεις, που καλύπτουν ροές όλων των ταχυτήτων, παρουσιάστηκαν πρόσφατα από τους Li, Gu, Qu [154, 155].

Επιπλέον, η τεχνική της προσταθεροποίησης επεκτάθηκε για την ανάλυση χρονικά μη-μόνιμων ροών [246] με χρήση της μεθόδου διπλού χρονικού βήματος (dual time step). Με βάση

αυτήν την προσέγγιση, η επίλυση για κάθε πραγματική χρονική στιγμή θεωρείται ως ένα χρονικά μόνιμο πρόβλημα (με εμβόλιμους όρους πηγής για τη χρονική μεταβολή) στο οποίο εφαρμόζεται η τεχνική της προσταθεροποίησης.

Στη βιβλιογραφία εμφανίζονται πολλές ακόμα εργασίες σχετικές με τη συμπεριφορά των προσταθεροποιημένων εξισώσεων. Αυτές μπορεί να είναι είτε γενικές [251, 153] είτε πιο ειδικές, όπως για παράδειγμα η [43] όπου ελέγχεται η επίδραση του λόγου επιμήκους του υπολογιστικού πλέγματος ή η [63] όπου παρουσιάζεται ανάλυση σχετική με την επίδραση της ορθογωνιότητας των ιδιοδιανυσμάτων στην πορεία σύγκλισης.

2.2.1 Διατύπωση

Με αφετηρία τις εξισώσεις Navier–Stokes (σχέση 2.1), οι προσταθεροποιημένες εξισώσεις προκύπτουν πολλαπλασιάζοντας τον ψευδο-χρονικό όρο των εξισώσεων με τον αντίστροφο ενός μητρώου Γ , το οποίο ονομάζεται μητρώο προσταθεροποίησης (preconditioning matrix) και είναι συνάρτηση των τοπικών μεγεθών της ροής. Έτσι, η εξίσωση γράφεται

$$\Gamma^{-1} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}_i^{inv}}{\partial x_i} - \frac{\partial \vec{f}_i^{vis}}{\partial x_i} = 0 \quad (2.14)$$

Από την παραπάνω σχέση φαίνεται ότι, στη λύση ενός χρονικά μόνιμου πεδίου ροής, όπου ο ψευδο-χρονικός όρος δεν υφίσταται, η προσταθεροποίηση δεν επηρεάζει τις εξισώσεις. Αν θεωρήσουμε μόνο τους μη-συνεκτικούς όρους, όπως στη σχέση 2.4, οι προσταθεροποιημένες εξισώσεις γράφονται

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + A_i \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \Gamma A_i \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + A_{\Gamma_i} \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

όπου $A_{\Gamma_i} = \Gamma A_i$ είναι τα προσταθεροποιημένα Ιακωβιανά μητρώα για τις συντηρητικές μεταβλητές. Οι προσταθεροποιημένες εξισώσεις Euler, με χρήση των μη-συντηρητικών μεταβλητών, ξεκινώντας από την εξίσωση 2.5, γράφονται ως

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^{-1} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \bar{A}_i \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \bar{\Gamma} \bar{A}_i \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \bar{A}_{\Gamma_i} \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

όπου \bar{A}_i όπως προαναφέρθηκε είναι τα Ιακωβιανά μητρώα για τις μη-συντηρητικές μεταβλητές και $\bar{A}_{\Gamma_i} = \bar{\Gamma} \bar{A}_i$ είναι τα αντίστοιχα προσταθεροποιημένα. Στη συνέχεια, ο κάτω δείκτης Γ θα υποδηλώνει πάντα προσταθεροποιημένα μητρώα. Η σχέση μεταξύ των μητρώων προσταθεροποίησης Γ και $\bar{\Gamma}$, ώστε να υπάρχει ενιαίο αποτέλεσμα από την εφαρμογή της

προσταθεροποίησης, είναι

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma} &= M^{-1}\Gamma M \\ \bar{\Gamma}^{-1} &= M^{-1}\Gamma^{-1}M\end{aligned}\quad (2.17)$$

Για τον καθορισμό του μητρώου προσταθεροποίησης, στη βιβλιογραφία έχουν προταθεί διάφορες εκφράσεις, όπως ήδη αναφέρθηκε. Στην παρούσα διατριβή και στο λογισμικό που αναπτύχθηκε, χρησιμοποιείται το μητρώο που προτάθηκε από τον Eriksson [80] και το οποίο, σε μη-συντηρητική μορφή, γράφεται ως

$$\bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}\quad (2.18)$$

όπου $\alpha = \min(1, M^2)$ και $\beta = -(1 - \alpha)/c^2$.

Από τη σχέση 2.17, χρησιμοποιώντας τις 2.7 και 2.17 και μετά από τις σχετικές πράξεις, προκύπτει η έκφραση του μητρώου προσταθεροποίησης σε συντηρητικές μεταβλητές

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2}|\bar{u}|^2\kappa & -\kappa u_1 & -\kappa u_2 & -\kappa u_3 & -\kappa \\ \frac{1}{2}|\bar{u}|^2\kappa u_1 & 1 - \kappa u_1^2 & -\kappa u_1 u_2 & -\kappa u_1 u_3 & -\kappa u_1 \\ \frac{1}{2}|\bar{u}|^2\kappa u_2 & -\kappa u_1 u_2 & 1 - \kappa u_2^2 & -\kappa u_2 u_3 & -\kappa u_2 \\ \frac{1}{2}|\bar{u}|^2\kappa u_3 & -\kappa u_1 u_3 & -\kappa u_2 u_3 & 1 - \kappa u_3^2 & -\kappa u_3 \\ -\frac{1}{2}|\bar{u}|^2[1 - \delta] & [1 - \delta]u_1 & [1 - \delta]u_2 & [1 - \delta]u_3 & -\delta \end{bmatrix}\quad (2.19)$$

όπου $\kappa = (\gamma - 1)\beta$ και $\delta = \alpha + \frac{1}{2}|\bar{u}|^2(\gamma - 1)\beta$.

2.2.2 Το Ιδιοπρόβλημα για τις Προσταθεροποιημένες Εξισώσεις

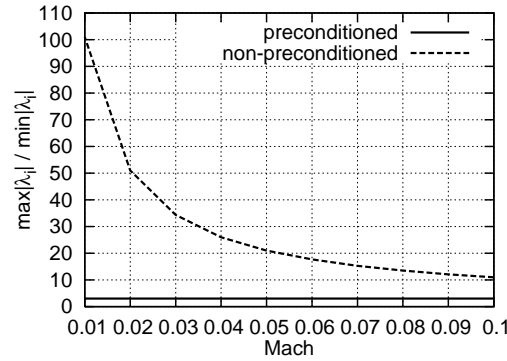
Προκειμένου να αναλυθεί η επίδραση του μητρώου προσταθεροποίησης στο σύστημα των εξισώσεων, ξαναυπολογίζονται οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του προσταθεροποιημένου πλέον Ιακωβιανού μητρώου

$$\bar{A}_\Gamma = \bar{\Gamma} \bar{A} = \bar{\Gamma} \bar{A}_i n_i\quad (2.20)$$

Οι νέες ιδιοτιμές υπολογίζονται από σχέση αντίστοιχη της 2.8, χρησιμοποιώντας το προσταθεροποιημένο Ιακωβιανό μητρώο και είναι

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2,3} &= \bar{u} \cdot \bar{n} \\ \lambda_{4,5} &= \frac{1}{2} \left\{ (1 + a) \bar{u} \cdot \bar{n} \pm \sqrt{[(1 - a) \bar{u} \cdot \bar{n}]^2 + 4ac^2 |\bar{n}|^2} \right\}\end{aligned}\quad (2.21)$$

Οι νέες ιδιοτιμές αποδεικνύεται ότι είναι περίπου της ίδιας τάξης μεγέθους. Στο σχήμα 2.1 τυπώνεται ο λόγος της μέγιστης προς την ελάχιστη κατ' απόλυτη τιμή ιδιοτιμή (αριθμός κατάστασης-condition number) συναρτήσει του αριθμού Mach για το 'κλασικό' και το προσταθεροποιημένο σύστημα εξισώσεων. Όσο ο αριθμός Mach πλησιάζει στο μηδέν, ο λόγος $\max|\lambda_i|/\min|\lambda_i|$ για το 'κλασικό' σύστημα αυξάνεται, δηλ. το σύστημα έχει κακό αριθμό



Σχήμα 2.1: Σύγκριση του λόγου ($\max|\lambda_i|/\min|\lambda_i|$) για το προσταθεροποιημένο και το ‘κλασικό’ σύστημα σε εύρος αριθμών Mach $0.01 \leq M \leq 0.1$.

κατάστασης (ill-conditioned) γεγονός που οδηγεί στα γνωστά προβλήματα σύγκλισης. Αντίθετα, για το προσταθεροποιημένο σύστημα, ο λόγος αυτός παραμένει κοντά στη μονάδα για οποιοδήποτε αριθμό Mach.

Προφανώς, οι τροποποιημένες ιδιοτιμές επηρεάζουν και τα ιδιοδιανύσματα του προσταθεροποιημένου συστήματος (βλ. σχέση 2.10) τα οποία για τις μη-συντηρητικές μεταβλητές είναι, για τα αριστερά ιδιοδιανύσματα

$$L_{\Gamma} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & -n_3 & -n_2 & -n_1/c^2 \\ n_2 & -n_3 & 0 & n_1 & -n_2/c^2 \\ n_3 & n_2 & -n_1 & 0 & -n_3/c^2 \\ 0 & n_1 & n_2 & n_3 & -\frac{(\vec{u} \cdot \vec{n} - \lambda_4)}{\alpha \rho c^2 |\vec{n}|} \\ 0 & -n_1 & -n_2 & -n_3 & -\frac{(\vec{u} \cdot \vec{n} - \lambda_5)}{\alpha \rho c^2 |\vec{n}|} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

και για τα δεξιά ιδιοδιανύσματα

$$L_{\Gamma}^{-1} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & \frac{\alpha \rho |\vec{n}|}{\lambda_4 - \lambda_5} & \frac{\alpha \rho |\vec{n}|}{\lambda_4 - \lambda_5} \\ 0 & -n_3 & n_2 & \frac{(\vec{u} \cdot \vec{n} - \lambda_5)}{(\lambda_4 - \lambda_5)} n_1 & \frac{(\vec{u} \cdot \vec{n} - \lambda_4)}{(\lambda_4 - \lambda_5)} n_1 \\ n_3 & 0 & -n_1 & \frac{(\vec{u} \cdot \vec{n} - \lambda_5)}{(\lambda_4 - \lambda_5)} n_2 & \frac{(\vec{u} \cdot \vec{n} - \lambda_4)}{(\lambda_4 - \lambda_5)} n_2 \\ -n_2 & n_1 & 0 & \frac{(\vec{u} \cdot \vec{n} - \lambda_5)}{(\lambda_4 - \lambda_5)} n_3 & \frac{(\vec{u} \cdot \vec{n} - \lambda_4)}{(\lambda_4 - \lambda_5)} n_3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha \rho c^2 |\vec{n}|}{\lambda_4 - \lambda_5} & \frac{\alpha \rho c^2 |\vec{n}|}{\lambda_4 - \lambda_5} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Τα παραπάνω μητρώα για $\alpha=1$ (δηλαδή με ‘απενεργοποίηση’ της προσταθεροποίησης) καταλήγουν στα αντίστοιχα του χωρίς προσταθεροποίηση συστήματος (βλ. [116], σελ. 178–179).

2.3 Μοντελοποίηση της Τύρβης

Στην παρούσα διατριβή, για τη μοντελοποίηση της τύρβης, χρησιμοποιούνται μοντέλα μιας ή δύο διαφορικών εξισώσεων. Ειδικότερα, μεγαλύτερη έμφαση δίνεται στο μοντέλο μιας εξίσωσης των Spalart και Allmaras, [228], ενώ σε κάποιες εφαρμογές, κυρίως για λόγους σύγκρισης, χρησιμοποιούνται και τα μοντέλα δύο εξισώσεων, $k - \varepsilon$ και $k - \omega$, [128, 171]. Πιο συγκεκριμένα, όσον αφορά στο μοντέλο τύρβης Spalart–Allmaras, αυτό εφαρμόζεται με

θεώρηση είτε χαμηλών αριθμών Reynolds είτε υψηλών αριθμών Reynolds σε συνδυασμό με την τεχνική των συναρτήσεων τοίχου. Οι δύο αυτές θεωρήσεις χρησιμοποιούνται και για το $k - \varepsilon$, ενώ το $k - \omega$ και οι παραλλαγές του εφαρμόζονται μόνο με θεώρηση χαμηλών αριθμών Reynolds.

2.3.1 Μοντέλο Τύρβης μιας Εξίσωσης Spalart–Allmaras

Το μοντέλο τύρβης Spalart–Allmaras (SA) [228] επιλύει μια διαφορική εξίσωση για τη μεταβλητή $\tilde{\nu}$, από την οποία υπολογίζεται η τυρβώδης συνεκτικότητα μέσω της σχέσης

$$\mu_t = \tilde{\mu} f_{v_1} \quad (2.24)$$

όπου

$$\tilde{\mu} = \rho \tilde{\nu}, \quad f_{v_1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v_1}^3}, \quad \chi = \frac{\tilde{\mu}}{\mu} \quad (2.25)$$

Το μοντέλο SA αρχικά διατυπώθηκε για ασυμπίεστες ροές. Προκειμένου να εφαρμοστεί και σε περιπτώσεις συμπιεστών ροών, οι συγγραφείς του, [228], απλά προτείνουν την επαναδιατύπωση της εξίσωσης για τη μεταβλητή $\tilde{\mu} = \rho \tilde{\nu}$. Έτσι, η εξίσωση του μοντέλου για συμπιεστές ροές γράφεται ως, [14],

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \tilde{\mu}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i \tilde{\mu})}{\partial x_i} &= \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left((\mu + \tilde{\mu}) \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_i} \right) + c_{b_2} \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_i} \right)^2 \right] + c_{b_1} (1 - f_{t_2}) \tilde{S} \rho \tilde{\mu} \\ &- (c_{w_1} f_w - \frac{c_{b_1}}{\kappa^2} f_{t_2}) \left(\frac{\tilde{\mu}}{d} \right)^2 + \rho^2 f_{t_1} \Delta u^2 \end{aligned} \quad (2.26)$$

με τους συντελεστές που εμφανίζονται στην παραπάνω εξίσωση να ορίζονται ως

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= |\vec{w}| + \frac{\tilde{\mu}}{y^2 \kappa^2} f_{v_2} \\ f_{v_2} &= 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v_1}}, \quad f_w = g \left(\frac{1 + c_{w_3}^6}{g^6 + c_{w_3}^6} \right)^{1/6} \\ g &= r + c_{w_2} (r^6 - r), \quad r = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{S} \rho \kappa^2 y^2} \end{aligned}$$

με $|\vec{w}|$ το μέτρο του στροβιλισμού του πεδίου ταχύτητας και y την απόσταση κάθε κόμβου από το πλησιέστερο τοίχωμα. Για το συντελεστή του όρου μετάβασης (τελευταίος όρος της εξίσωσης 2.26) ισχύει ότι

$$f_{t_1} = c_{t_1} g_t \exp \left(-c_{t_2} \frac{w_t^2}{\Delta u^2} [y^2 + g_t^2 y_t^2] \right), \quad g_t = \min(0.1, \frac{\Delta u}{\omega_t} \Delta x) \quad (2.27)$$

όπου y_t είναι η απόσταση ενός σημείου του πεδίου ροής από το σημείο μετάβασης που είναι κάποιο σημείο του τοιχώματος (ορισμένο από το χρήστη ή υπολογισμένο με κάποιο εμπειρικό κριτήριο μετάβασης, βλέπε [144, 238]), w_t ο στροβιλισμός του σημείου μετάβασης και Δu η διαφορά μεταξύ των ταχύτητων ενός σημείου του πεδίου ροής και του σημείου μετάβασης. Τέλος, οι σταθερές που εμφανίζονται στις παραπάνω σχέσεις λαμβάνουν τις τιμές

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{2}{3}, \quad \kappa = 0.41, \quad Pr_t = 0.9, \quad c_{v_1} = 7.1, \quad c_{b_1} = 0.1355, \quad c_{b_2} = 0.622, \\ c_{w_1} &= \frac{c_{b_1}}{\kappa^2} + \frac{1 + c_{b_2}}{\sigma}, \quad c_{w_2} = 0.3, \quad c_{w_3} = 2, \quad c_{t_1} = 1, \quad c_{t_2} = 2, \quad c_{t_3} = 1.1, \quad c_{t_4} = 2 \end{aligned}$$

Οι οριακές συνθήκες που επιβάλλονται είναι τύπου Dirichlet για την είσοδο της ροής, όπου η μεταβλητή $\tilde{\mu}$ λαμβάνει σταθερή τιμή και συνθήκες αδιατάρακτης ροής για την έξοδο. Στα στερεά τοιχώματα, για θεώρηση χαμηλών αριθμών Reynolds (Low Reynolds, LR), επιβάλλεται μηδενική Dirichlet συνθήκη $\tilde{\mu}=0$, ενώ για θεώρηση υψηλών αριθμών Reynolds εφαρμόζονται οι συναρτήσεις τοίχου (Wall Functions, WF). Ειδικότερα η χρησιμοποιούμενη έκφραση, [254], η οποία πρωτοπαρουσιάστηκε από τον Spalding [229], μοντελοποιεί με μια μόνο εξίσωση την εσωτερική περιοχή του στρωτού οριακού υποστρώματος, την περιοχή μετάβασης και το λογαριθμικό τμήμα του τυρβώδους οριακού στρώματος, ως

$$y^+ = u^+ + e^{-\kappa B} \left[e^{-\kappa u^+} - 1 - \kappa u^+ - \frac{(\kappa u^+)^2}{2} - \frac{(\kappa u^+)^3}{6} \right] \quad (2.28)$$

όπου η αδιάστατη απόσταση από το στερεό τοίχωμα y^+ και ταχύτητα u^+ ορίζονται ως

$$y^+ = \frac{y \rho u_\tau}{\mu}, \quad u^+ = \frac{u}{u_\tau}$$

με u_τ την ταχύτητα τριβής, y την απόσταση από το στερεό τοίχωμα και $\kappa=0.41$, $B=5.5$. Η οριακή συνθήκη για την τυρβώδη συνεκτικότητα υπολογίζεται από τη σχέση, [254],

$$\mu_t = \mu \kappa e^{-\kappa B} \left[e^{\kappa u^+} - 1 - \kappa u^+ - \frac{(\kappa u^+)^2}{2} \right] \quad (2.29)$$

από την οποία, μέσω της σχέσης 2.24, λαμβάνεται η οριακή συνθήκη της μεταβλητής $\rho \tilde{\mu}$ ως

$$\rho \tilde{\mu} = \frac{\rho \mu_t}{f_{v_1}} \quad (2.30)$$

2.3.2 Μοντέλα Τύρβης Δύο Εξισώσεων

Οι εξισώσεις των μοντέλων τύρβης δύο εξισώσεων ($k - \varepsilon$ και $k - \omega$) σε διανυσματική γραφή μπορούν να εκφραστούν ως

$$\frac{\partial \vec{U}_t}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}_{t,i}^{inv}}{\partial x_i} - \frac{\partial \vec{f}_{t,i}^{vis}}{\partial x_i} = S_t \quad (2.31)$$

όπου

$$\vec{U}_t = \left\{ \begin{array}{c} \rho k \\ \rho \varphi \end{array} \right\}, \quad \vec{f}_{t,i}^{inv} = \left\{ \begin{array}{c} \rho u_i k \\ \rho u_i \varphi \end{array} \right\}, \quad \vec{f}_{t,i}^{vis} = \left\{ \begin{array}{c} (\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}) \frac{\partial k}{\partial x_i} \\ (\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varphi}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \end{array} \right\}, \quad \vec{S}_t = \left\{ \begin{array}{c} S_k \\ S_\varphi \end{array} \right\} \quad (2.32)$$

με k την τυρβώδη κινητική ενέργεια, $\varphi = \varepsilon$ ή ω την καταστροφή ή το ρυθμό διάχυσης της τυρβώδους κινητικής ενέργειας αντίστοιχα και S_k , S_φ (S_ε , S_ω) τους αντίστοιχους όρους πηγής των εξισώσεων.

Μοντέλο τύρβης $k - \varepsilon$

Στην περίπτωση του μοντέλου $k - \varepsilon$ [128], ο συντελεστής της τυρβώδους συνεκτικότητας εκφράζεται ως συνάρτηση των ποσοτήτων k και ε , σύμφωνα με τη σχέση

$$\mu_t = f_\mu c_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.33)$$

ενώ οι όροι πηγής της σχέσης 2.32, ορίζονται ως

$$S_k = \mathcal{P}_k - \rho\varepsilon - \mathcal{D}, \quad S_\varepsilon = c_{\varepsilon 1} f_1 \frac{\varepsilon}{k} \mathcal{P}_k - c_{\varepsilon 2} f_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + \mathcal{E} \quad (2.34)$$

Ο όρος παραγωγής \mathcal{P}_k εξαρτάται από τη γένεση τυρβώδους ενέργειας \mathcal{G} σύμφωνα με τη σχέση

$$\mathcal{P}_k = \mu_t \mathcal{G} - \frac{2}{3} \rho k \frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \quad \mathcal{G} = \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (2.35)$$

ενώ \mathcal{D} , \mathcal{E} είναι όροι πηγής για θεώρηση χαμηλών αριθμών Reynolds. Στην παρούσα διατριβή χρησιμοποιείται η παραλλαγή του Chien [52], για την οποία οι προαναφερθέντες όροι δίνονται από τις σχέσεις

$$\mathcal{D} = 2\mu \frac{k}{y^2}, \quad \mathcal{E} = -2\mu \frac{\varepsilon}{y^2} \exp\left(-\frac{y^+}{2}\right) \quad (2.36)$$

Τέλος, οι συντελεστές και σταθερές που παρουσιάζονται στις παραπάνω εξισώσεις ορίζονται ως

$$f_\mu = 1 - \exp\{-0.0115y^+\}, \quad f_1 = 1, \quad f_2 = 1 - 0.22 \exp\{-(Re_t/6)^2\}, \quad y^+ = (\rho y/\mu) \sqrt{\tau_w/\rho}$$

$$Re_t = Re \frac{\rho k^2}{\mu \varepsilon}, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3, \quad c_{\varepsilon 1} = 1.35, \quad c_{\varepsilon 2} = 1.8, \quad c_\mu = 0.09$$

Στην είσοδο του πεδίου ροής οι οριακές συνθήκες είναι τύπου Dirichlet όπου επιβάλλονται οι τιμές $k_{in} = 3/2(T_u u_{in})^2$ και $\varepsilon_{in} = c_\mu^{3/4} k_{in}^{3/2}/L$, με T_u την ένταση της τύρβης, u_{in} την ταχύτητα στην είσοδο και L το μήκος ανάμιξης. Στην έξοδο τίθενται συνθήκες αδιατάρακτης ροής. Οι οριακές συνθήκες στο στερεό τοίχωμα, για θεώρηση χαμηλών αριθμών Reynolds, [52], είναι $k=0$, $\varepsilon=0$.

Στην περίπτωση θεώρησης υψηλών αριθμών Reynolds χρησιμοποιούνται οι συναρτήσεις τοίχου. Κατά την εφαρμογή τους θεωρείται ότι το πραγματικό στερεό τοίχωμα βρίσκεται στο εσωτερικό του τοιχώματος, σε σταθερή απόσταση, η οποία ορίζεται έτσι ώστε ο οριακός κόμβος του πλέγματος να βρίσκεται στη λογαριθμική περιοχή του οριακού στρώματος. Υπό αυτήν την παραδοχή, η τεχνική των συναρτήσεων τοίχου χρησιμοποιείται για να καλύψει τη μοντελοποίηση της ροής στο 'διάκενο' ανάμεσα στον οριακό κόμβο του πλέγματος και του υποτιθέμενου τοιχώματος. Για τον υπολογισμό της αδιάστατης ταχύτητας χρησιμοποιείται η σχέση [255]

$$u^+ = \begin{cases} y^+ & \text{αν } y^+ < 11.6 \\ \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B & \text{αν } y^+ \geq 11.6 \end{cases} \quad (2.37)$$

Οι οριακές συνθήκες για τα k , ε δίνονται από τις σχέσεις

$$k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{c_\mu}}, \quad \varepsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa y}$$

Μοντέλο τύρβης $k-\omega$

Στην περίπτωση του μοντέλου $k-\omega$ του Wilcox, [255], η τυρβώδης συνεκτικότητα υπολογίζεται από τη σχέση

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \quad (2.38)$$

και οι όροι πηγής της σχέσης 2.32 ισούνται με

$$S_k = \mathcal{P}_k - \beta^* \rho k \omega, \quad S_\omega = \gamma \frac{\omega}{k} \mathcal{P}_k - \beta \rho \omega^2 \quad (2.39)$$

με $\beta=0.075$, $\beta^*=0.09$, $\sigma_\omega=\sigma_k=0.5$, $\gamma=\beta/\beta^* - \sigma_\omega \kappa^2/\sqrt{\beta^*}=0.55$

Επιπλέον της κλασικής διατύπωσης, χρησιμοποιούνται δύο ‘παραλλαγές’ του μοντέλου που προτάθηκαν από τον Menter, [171]. Η πρώτη εκδοχή είναι το BSL–Baseline model το οποίο δημιουργήθηκε έτσι ώστε να εκμεταλλεύεται τα πλεονεκτήματα του $k-\omega$ κοντά στο στερεό τοίχωμα και αυτά του $k-\varepsilon$ στο υπόλοιπο πεδίο. Το νέο μοντέλο προκύπτει από την πρόσθεση–ανάμιξη (blending) του ‘κλασικού’ $k-\omega$ πολλαπλασιασμένου με μια συνάρτηση F_1 και του μετασχηματισμένου $k-\varepsilon$ πολλαπλασιασμένου με $(1 - F_1)$. Η συνάρτηση F_1 ορίζεται έτσι ώστε να λαμβάνει την τιμή μονάδα κοντά στο στερεό τοίχωμα, και μηδέν μακριά από την επιφάνεια. Έτσι στο εσωτερικό μέρος του οριακού στρώματος και μέχρι περίπου το 50% αυτού επιλύεται το μοντέλο $k-\omega$ το οποίο προοδευτικά μετατρέπεται στο μετασχηματισμένο $k-\varepsilon$. Η δεύτερη εκδοχή είναι το λεγόμενο SST–Shear Stress Transport model το οποίο αποτελεί επέκταση του πρώτου, με την επιπλέον ικανότητα να λαμβάνει υπόψη τη μεταφορά της τυρβώδους διατμητικής τάσης στο οριακό στρώμα. Για τις δύο αυτές παραλλαγές, οι όροι πηγής ξαναγράφονται ως

$$S_k = \mathcal{P}_k - \beta^* \rho k \omega, \quad S_\omega = \gamma \frac{\rho}{\mu_t} \mathcal{P}_k - \beta \rho \omega^2 + 2\rho(1 - F_1)\sigma_\omega \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (2.40)$$

όπου για τους συντελεστές και τις σταθερές ισχύει

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4), \quad \arg_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\mu}{\rho \omega y^2} \right), \frac{4\rho \sigma_\omega k}{\text{CD}_{k\omega} y^2} \right],$$

$$\text{CD}_{k\omega} = \max \left(2\rho \sigma_\omega \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-20} \right)$$

και

$$q = F_1 q_1 + (1 - F_1) q_2, \quad q = \{\beta, \sigma_\omega, \sigma_k, \gamma\},$$

$$q_1 = \{0.075, 0.5, 0.5, 0.55\}, \quad q_2 = \{0.0828, 0.856, 1.0, 0.44\}$$

Στην περίπτωση του μοντέλου SST, ο υπολογισμός της τυρβώδους συνεκτικότητας γίνεται από την τροποποιημένη σχέση

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\max\{\omega, \omega F_2/\sigma_1\}} \quad (2.41)$$

όπου

$$F_2 = \tanh \arg_2^2, \quad \arg_2 = \max \left(\frac{2\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\mu}{\rho \omega y^2} \right) \quad (2.42)$$

Οι οριακές συνθήκες για όλες τις εκδοχές του μοντέλου $k-\omega$ στο στερεό τοίχωμα είναι $k_w=0$ και $\omega_w=60\mu/\rho\beta y_w^2$ με y_w την απόσταση από τον πρώτο από το τοίχωμα κόμβο. Στην είσοδο επιβάλλεται $k_{in}=(3/2)(T_u u_{in})^2$ και $\omega_{in}=k_{in}^{1/2}/c_\mu L$.

2.3.3 Μοντέλα Τύρβης και Προσταθεροποίηση

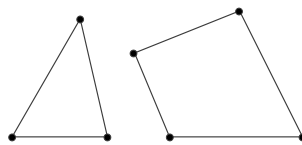
Διευκρινίζεται ότι οι εξισώσεις του μοντέλου τύρβης δεν υπόκεινται σε προσταθεροποίηση. Η εφαρμογή της περιορίζεται μόνο στις εξισώσεις μέσης ροής, όπου διαδραματίζει και σημαντικό ρόλο με την τροποποίηση των ιδιοτιμών του συστήματος. Η επίδραση της προσταθεροποίησης στις εξισώσεις του μοντέλου τύρβης είναι έμμεση, δηλαδή γίνεται μόνο μέσω των μεγεθών των μεταβλητών της ροής που υπολογίζονται σε κάθε ψευδο-χρονικό βήμα.

2.4 Διακριτοποίηση Εξισώσεων & Οριακών Συνθηκών

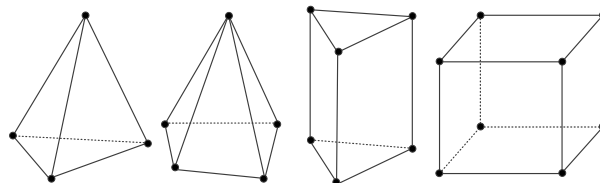
Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται η διακριτοποίηση των εξισώσεων με την τεχνική των πεπερασμένων όγκων και κεντροκομβική διατύπωση. Αρχικά, ορίζονται οι όγκοι ελέγχου που χρησιμοποιούνται κατά την ολοκλήρωση των εξισώσεων, για 2Δ ή 3Δ ροές σε μη-δομημένα ή υβριδικά πλέγματα και ακολουθεί η διακριτοποίηση των εξισώσεων σε αυτά. Σημειώνεται ότι η ανάλυση (με όλα τα ενδιάμεσα στάδια και παραδοχές) γίνεται θεωρώντας τις προσταθεροποιημένες εξισώσεις ροής. Είναι προφανές ότι αν σε όλα τα παρακάτω, αντί για το μητρώο προσταθεροποίησης Γ χρησιμοποιηθεί το μοναδιαίο μητρώο, όλες οι σχέσεις ισχύουν και για την χωρίς προσταθεροποίηση διατύπωση. Τέλος, γίνεται αναφορά στον τρόπο υπολογισμού του ψευδο-χρονικού βήματος ολοκλήρωσης. Παρά το γεγονός ότι η χρήση υβριδικών πλεγμάτων δεν αποτελεί κεντρικό στοιχείο της διατριβής αφού η σχετική υποδομή αναπτύχθηκε σε άλλη παράλληλα εξελισσόμενη διατριβή [9], κρίνεται σκόπιμη η, έστω και επιγραμματική, αναφορά στα βασικά χαρακτηριστικά (όγκοι ελέγχου, διακριτοποίηση κλπ) αυτών, δεδομένου ότι σε κάποιες από τις εφαρμογές σε επόμενα κεφάλαια, χρησιμοποιούνται υβριδικά πλέγματα.

2.4.1 Ορισμός Όγκου Ελέγχου

Στην περίπτωση 2Δ ροών, το υπολογιστικό πλέγμα μπορεί, γενικά, να αποτελείται από τριγωνικά και τετραπλευρικά στοιχεία (σχήμα 2.2), ενώ στην περίπτωση 3Δ ροών από τετραεδρικά στοιχεία, πενταεδρικές πυραμίδες, πρισματικά και εξαεδρικά στοιχεία (σχήμα 2.3).



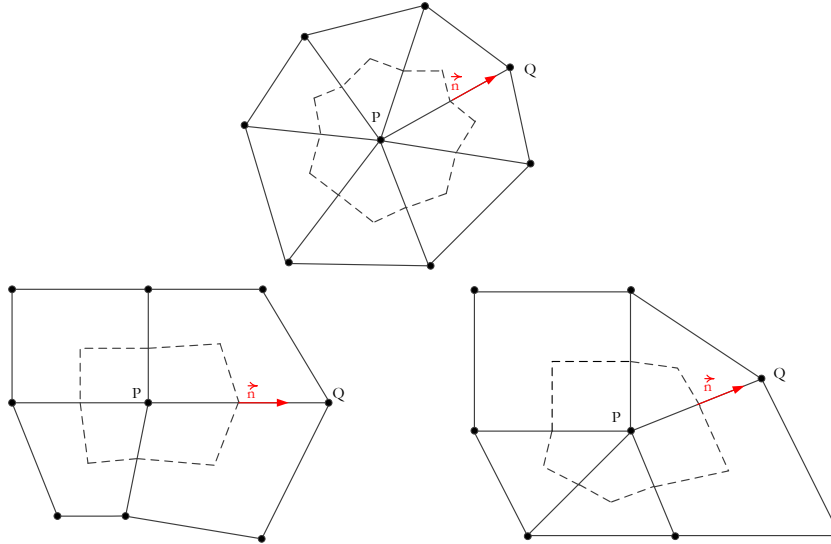
Σχήμα 2.2: Στοιχεία που συνθέτουν ένα 2Δ υβριδικό υπολογιστικό πλέγμα.



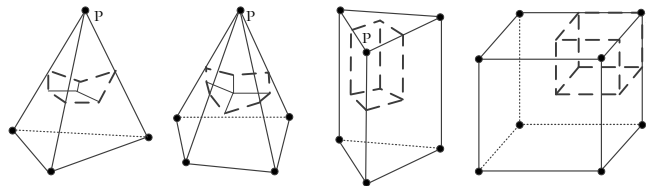
Σχήμα 2.3: Στοιχεία που συνθέτουν ένα 3Δ υβριδικό υπολογιστικό πλέγμα.

Τον ορισμό των όγκων ελέγχου υπαγορεύει η κεντροκομβική διατύπωση. Έτσι, οι όγκοι ελέγχου γύρω από κάθε κόμβο του πλέγματος, ορίζονται, ενώνοντας με τεθλασμένη γραμμή-

επιφάνεια τα βαρύκεντρα των γύρω στοιχείων και τα μέσα των ακμών που συντρέχουν στον κόμβο. Στο σχήμα 2.4 φαίνονται όλες οι δυνατές περιπτώσεις ορισμού όγκου ελέγχου σε 2Δ πλέγματα ενώ στο σχήμα 2.5 φαίνεται ο τρόπος σχηματισμού του όγκου ελέγχου σε κάθε ένα από τα στοιχεία ενός 3Δ πλέγματος.



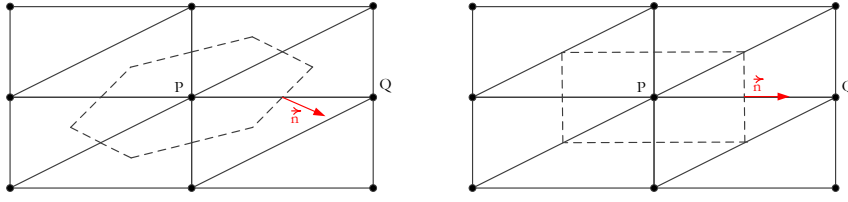
Σχήμα 2.4: Ορισμός όγκου ελέγχου σε 2Δ πλέγματα τριγωνικών (πάνω), τετραπλευρικών (κάτω αριστερά) στοιχείων ή σε υβριδικά πλέγματα τα οποία αποτελούνται από τρίγωνα και τετράπλευρα (κάτω δεξιά).



Σχήμα 2.5: Τρόπος σχηματισμού όγκου ελέγχου γύρω από έναν κόμβο 3Δ πλέγματος. Παρουσιάζεται ένα τμήμα του όγκου ελέγχου αφού η πλήρης μορφή του θα προκύψει συσσωρεύοντας ίδιου ή διαφορετικού τύπου στοιχεία γύρω από τον κόμβο P .

Σε αρκετές περιπτώσεις, 2Δ πλέγματα ή τμήματα αυτών, αποτελούμενα από τριγωνικά στοιχεία, μπορεί να προέλθουν από διάσπαση ανισότροπων τετραπλευρικών στοιχείων (λ.χ. πολύ κοντά στο στερεό τοίχωμα). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, τα δημιουργούμενα τρίγωνα να έχουν μεγάλο λόγο επιμήκους (σχήμα 2.6, αριστερά) δημιουργώντας προβλήματα κατά την επίλυση [35, 14]. Προκειμένου να αποφευχθούν τέτοια φαινόμενα έχει στο παρελθόν προταθεί και δεύτερος τρόπος υπολογισμού των όγκων ελέγχου [35], όπου αντί του βαρυκέντρου χρησιμοποιείται το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου. Σε περίπτωση αμβλυγώνιου τριγώνου, όπου το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου βρίσκεται εκτός του τριγώνου, τότε, για το σχηματισμό του όγκου ελέγχου, λαμβάνεται το μέσο της πλευράς η οποία βρίσκεται απέναντι από την αμβλεία γωνία. Σε ορθογώνια τρίγωνα, το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου και το μέσο της υποτείνουσας συμπίπτουν. Ο εναλλακτικός τρόπος ορισμού του όγκου

ελέγχου φαίνεται στο σχήμα 2.6, δεξιά.



Σχήμα 2.6: Ορισμός όγκου ελέγχου τριγωνικών στοιχείων με χρήση του βαρυκέντρου (αριστερά) και του κέντρου του περιγεγραμμένου κύκλου (δεξιά).

2.4.2 Ολοκλήρωση Εξισώσεων Ροής σε Όγκο Αναφοράς

Οι προσταθεροποιημένες εξισώσεις (2.14) ξαναγράφονται ως

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \Gamma \left(\frac{\partial \vec{f}_i^{inv}}{\partial x_i} - \frac{\partial \vec{f}_i^{vis}}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (2.43)$$

και ολοκληρώνονται στον όγκο ελέγχου Ω κάθε κόμβου P

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} d\Omega + \Gamma \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \vec{f}_i^{inv}}{\partial x_i} - \frac{\partial \vec{f}_i^{vis}}{\partial x_i} \right) d\Omega = 0 \quad (2.44)$$

Το μητρώο προσταθεροποίησης διατηρείται εκτός του ολοκληρώματος ώστε να είναι εφικτή η εφαρμογή του θεωρήματος Green–Gauss σε αυτό. Αυτή είναι μια πρώτη–βασική παραδοχή που γίνεται κατά τη διακριτοποίηση των προσταθεροποιημένων εξισώσεων. Με εφαρμογή του θεωρήματος Green–Gauss, το δεύτερο χωρικό ολοκλήρωμα της σχέσης 2.44 μετατρέπεται σε επιφανειακό ολοκλήρωμα στο όριο του όγκου ελέγχου $\partial\Omega$, δηλαδή

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} d\Omega + \Gamma \int_{\partial\Omega} (\vec{f}_i^{inv} - \vec{f}_i^{vis}) n_i d\partial\Omega = 0 \quad (2.45)$$

Το επιφανειακό ολοκλήρωμα ξαναγράφεται, σε διακριτή μορφή, ως άθροισμα επιμέρους όρων κι έτσι η σχέση 2.45 καταλήγει στη μορφή

$$\frac{\Omega_P}{\Delta t_P} \Delta \vec{U}_P + \Gamma_P \sum_{Q \in nei(P)} \{ \vec{\Phi}_{PQ}^{inv} - \vec{\Phi}_{PQ}^{vis} \} \Delta \partial\Omega = 0 \quad (2.46)$$

η οποία, στην ειδική περίπτωση όπου το υπολογιστικό χωρίο αποτελείται μόνο από τρίγωνα για 2Δ ή τετράεδρα για 3Δ, μπορεί να γραφεί και ως

$$\frac{\Omega_P}{\Delta t_P} \Delta \vec{U}_P + \Gamma_P \sum_{Q \in nei(P)} \vec{\Phi}_{PQ}^{inv} \Delta \partial\Omega - \Gamma_P \sum_{T \in nei_T(P)} \vec{\Phi}_{P,T}^{vis} \Delta \partial\Omega = 0 \quad (2.47)$$

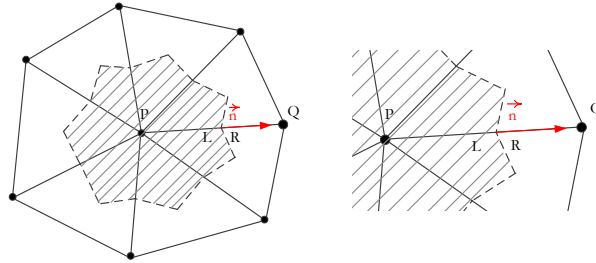
όπου Ω_P είναι το εμβαδόν/όγκος της υπολογιστικής κυψέλης γύρω από τον κόμβο P (σχήμα 2.4 για 2Δ). Με $nei(P)$ συμβολίζονται οι γείτονες του κόμβου P , $nei_T(P)$ είναι τα τρίγωνα για 2Δ ή τετράεδρα για 3Δ που τον περιβάλλουν και $\vec{\Phi}_{PQ}$ είναι το διάνυσμα ροής ανά μονάδα μήκους που διασχίζει το κοινό τμήμα του ορίου των υπολογιστικών κυψελών που ορίζονται γύρω από δύο οποιουδήποτε επί ακμής κόμβους P και Q .

2.4.3 Υπολογισμός Διανυσμάτων Ροής

Ο τρόπος υπολογισμού των διανυσμάτων ροής είναι κοινός για 2Δ και 3Δ ροές. Ειδικότερα, το διάνυσμα ατρίβους ροής είναι πάντοτε σε αντιστοιχία με μια ακμή του πλέγματος και υπολογίζεται με χρήση του μονοδιάστατου επιλύτη Riemann κατά Roe [215]. Σύμφωνα με αυτόν, το διάνυσμα ατρίβους ροής ανάμεσα στους κόμβους P και Q που συνδέονται με ακμή, υπολογίζεται από τη σχέση

$$\vec{\Phi}_{PQ}^{inv} = \frac{1}{2} [H(\vec{U}_{PQ}^L, \vec{n}_{PQ}) + H(\vec{U}_{PQ}^R, \vec{n}_{PQ})] - \frac{1}{2} |\tilde{A}_{PQ}| (\vec{U}_{PQ}^R - \vec{U}_{PQ}^L) \quad (2.48)$$

όπου $|\tilde{A}_{PQ}|$ είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα με τις απόλυτες ιδιοτιμές υπολογισμένη με τις μέσες κατά Roe τιμές των μεταβλητών στο μεσόκομβο ανάμεσα στους κόμβους P και Q , [215] και οι ροές $H(\vec{U}_{PQ}^L, \vec{n}_{PQ}), H(\vec{U}_{PQ}^R, \vec{n}_{PQ})$ ορίζονται στη συνέχεια (σχέση 2.50). Τα $\vec{U}_{PQ}^L, \vec{U}_{PQ}^R$ είναι τα διανύσματα των συντηρητικών μεταβλητών αριστερά και δεξιά από την αντίστοιχη διεπιφάνεια, δηλαδή το μέσο του τμήματος PQ (λ.χ. όπως φαίνονται στο σχήμα 2.7 για 2Δ). Για πρώτης τάξης ακρίβεια, τα $\vec{U}_{PQ}^L, \vec{U}_{PQ}^R$ λαμβάνουν τις τιμές των \vec{U}_P και \vec{U}_Q αντίστοιχα.



Σχήμα 2.7: Όγκος ελέγχου γύρω από τον κόμβο P ενός 2Δ πλέγματος τριγωνικών στοιχείων. Φαίνονται το κάθετο στο τμήμα του περιγράμματος του όγκου ολοκλήρωσης (που σχετίζεται με την ακμή PQ) μοναδιαίο διάνυσμα \vec{n} καθώς και η αριστερή (L) και δεξιά (R) κατάσταση κατά την επίλυση του μονοδιάστατου προβλήματος Riemann μεταξύ των κόμβων P και Q .

Για δεύτερης τάξης ακρίβεια, υπολογίζονται με προεκβολή σύμφωνα με τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \vec{U}_{PQ}^L &= \vec{U}_P + \frac{1}{2} (\overrightarrow{PQ}) \nabla \vec{U}_P \\ \vec{U}_{PQ}^R &= \vec{U}_Q - \frac{1}{2} (\overrightarrow{PQ}) \nabla \vec{U}_Q \end{aligned} \quad (2.49)$$

Επειδή οι προεκβολές μπορεί να προκαλέσουν υπερεκτίμηση ή υποεκτίμηση των τιμών των $\vec{U}_{PQ}^L, \vec{U}_{PQ}^R$, προκειμένου να εξασφαλιστεί η μονοτονία του σχήματος, χρησιμοποιούνται συναρτήσεις περιορισμού (limiters). Ειδικότερα, στο λογισμικό ΥΡΔ που χρησιμοποιείται ή/και εμπλουτίζεται στην παρούσα διατριβή, χρησιμοποιούνται τρεις συναρτήσεις περιορισμών. Αυτές είναι, οι συναρτήσεις περιορισμού των van Leer–van Albada [249], [247] των Barth–Jespersen [36] και του Venkatakrishnan [250]. Ο τρόπος λειτουργίας των περιοριστών καθώς και περαιτέρω ανάλυση τους παρουσιάζεται στη διατριβή [15]. Στη συνέχεια, για λόγους ευκολίας στους συμβολισμούς, οι σχέσεις αναλύονται υποθέτοντας πρώτης τάξης ακρίβεια, παρόλο που σε όλες τις παρουσιαζόμενες εφαρμογές χρησιμοποιείται δεύτερης τάξης ακρίβεια. Με την παραπάνω υπόθεση τίθεται

$$\begin{aligned} H(\vec{U}_{PQ}^L, \vec{n}_{PQ}) &= H(\vec{U}_P, \vec{n}_{PQ}) = A_P \vec{U}_P \\ H(\vec{U}_{PQ}^R, \vec{n}_{PQ}) &= H(\vec{U}_Q, \vec{n}_{PQ}) = A_Q \vec{U}_Q \end{aligned} \quad (2.50)$$

και το διάνυσμα ατρίβους ροής (2.48) ξαναγράφεται

$$\vec{\Phi}_{PQ}^{inv} = \frac{1}{2} [A_P \vec{U}_P + A_Q \vec{U}_Q] - \frac{1}{2} |\tilde{A}_{PQ}| (\vec{U}_Q - \vec{U}_P) \quad (2.51)$$

Στην περίπτωση της προσταθεροποίησης χαμηλών αριθμών Mach, σύμφωνα με τους Van Leer, Roe [248] το διάνυσμα ροής πρέπει να τροποποιηθεί ώστε να είναι συμβατό με το προσταθεροποιημένο σύστημα εξισώσεων. Συγκεκριμένα, πολλαπλασιάζοντας το διάνυσμα ατρίβους ροής (2.51) με το μοναδιαίο μητρώο $\Gamma^{-1}\Gamma$, επηρεάζεται μόνο ο δεύτερος όρος στο δεξί μέλος, ο οποίος, υπό τις παραδοχές που εισάγει η παρακάτω σχέση, ξαναγράφεται

$$\begin{aligned} |\tilde{A}_{PQ}| (\vec{U}_Q - \vec{U}_P) &= |\tilde{\Gamma}_{PQ}^{-1} \tilde{\Gamma}_{PQ} \tilde{A}_{PQ}| (\vec{U}_Q - \vec{U}_P) \\ &\simeq \tilde{\Gamma}_{PQ}^{-1} |\tilde{\Gamma}_{PQ} \tilde{A}_{PQ}| (\vec{U}_Q - \vec{U}_P) \\ &= \tilde{\Gamma}_{PQ}^{-1} |\tilde{A}_{\Gamma_{PQ}}| (\vec{U}_Q - \vec{U}_P) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις 2.51 και 2.52 το διάνυσμα ροής για το προσταθεροποιημένο σύστημα λαμβάνει την τελική του μορφή

$$\vec{\Phi}_{PQ}^{inv} = \frac{1}{2} [A_P \vec{U}_P + A_Q \vec{U}_Q] - \frac{1}{2} \tilde{\Gamma}_{PQ}^{-1} |\tilde{A}_{\Gamma_{PQ}}| (\vec{U}_Q - \vec{U}_P) \quad (2.53)$$

η οποία, για μοναδιαίο μητρώο Γ , επανέρχεται στη σχέση 2.51.

Το διάνυσμα συνεκτικής ροής υπολογίζεται με δύο εναλλακτικούς τρόπους, τον υπολογισμό ‘κατά στοιχείο’ ($\vec{\Phi}_{P,T}^{vis}$) πλέγματος και τον υπολογισμό ‘κατά ακμή’ ($\vec{\Phi}_{P,Q}^{vis}$). Οι δύο αυτές εκδοχές, λαμβάνουν το όνομά τους με βάση τον αλγοριθμικό τρόπο υπολογισμού, δηλαδή τη σάρωση στοιχείων ή ακμών του πλέγματος.

Ο ‘κατά στοιχείο’ υπολογισμός χρησιμοποιείται μόνο σε πλέγματα τριγωνικών για 2Δ ή τετραεδρικών για 3Δ στοιχείων. Σε αυτή την εκδοχή ο υπολογισμός των παραγώγων των μη-συντηρητικών μεταβλητών \vec{V} γίνεται θεωρώντας γραμμική κατανομή των μεταβλητών σε κάθε στοιχείο του πλέγματος. Ειδικότερα, σε τρίγωνο ή τετράεδρο (και τα δύο συμβολίζονται με T) για τον υπολογισμό των παραγώγων $(\nabla V_T)_j$ της μεταβλητής j , χρησιμοποιείται η σχέση

$$(\nabla V_T)_j = \sum_{k=1}^{3 \text{ ή } 4} V_{j,k} \frac{\partial L_k}{\partial x_k} \quad (2.54)$$

όπου L_k οι συναρτήσεις μορφής του κόμβου k του τριγώνου ή τετραέδρου.

Ο ‘κατά ακμή’ υπολογισμός είναι πιο γενικός και μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε υβριδικά πλέγματα με συνδυασμό στοιχείων οποιασδήποτε μορφής. Η συνοπτική του παρουσίαση γίνεται για λόγους πληρότητας, ενώ περισσότερες λεπτομέρειες μπορούν να αναζητηθούν στις διατριβές [15], [9]. Σε αυτή την εκδοχή, για την εύρεση των παραγώγων των μη-συντηρητικών μεταβλητών σε μια ακμή (έστω αυτή που ενώνει τους κόμβους P και Q), χρησιμοποιείται η σχέση [253, 36]

$$(\nabla V_{PQ})_j = \frac{1}{2} [(\nabla V_P)_j + (\nabla V_Q)_j] - \left[\frac{1}{2} [(\nabla V_P)_j + (\nabla V_Q)_j] \cdot \vec{n} - \frac{V_{j,Q} - V_{j,P}}{(\vec{PQ})} \right] \vec{n} \quad (2.55)$$

2.4.4 Ψευδο-Χρονικό Βήμα Ολοκλήρωσης

Για τον υπολογισμό του ψευδο-χρονικού βήματος χρησιμοποιούνται δύο εναλλακτικοί τρόποι, οι 'κατά στοιχείο' και 'κατά ακμή'. Όπως και στην περίπτωση του αριθμητικού διανύσματος συνεκτικής ροής, ο πρώτος τρόπος βρίσκει εφαρμογή μόνο σε πλέγματα τριγωνικών ή τετραεδρικών στοιχείων ενώ ο δεύτερος μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πλέγματα με οποιονδήποτε συνδυασμό στοιχείων.

Για την πρώτη εκδοχή ('κατά στοιχείο' υπολογισμός) το τοπικό, ψευδο-χρονικό βήμα σε κάθε κόμβο (έστω P) δίνεται από τη γενική σχέση

$$\Delta t_P = \frac{CFL}{T^{inv} + T^{vis}} \quad (2.56)$$

όπου περιλαμβάνονται δύο όροι, ο ατριβής T^{inv} και ο συνεκτικός T^{vis} . CFL είναι ο αριθμός *Courant – Friedrichs – Lewy*, [60] που επιλέγεται έτσι ώστε να εξασφαλίζεται ο ταχύτερος δυνατός ρυθμός σύγκλισης χωρίς να διαταράσσεται η ευστάθεια του σχήματος επίλυσης. Ο ατριβής όρος υπολογίζεται από την ανάλυση ευστάθειας, [84] και ισούται

$$T^{inv} = \frac{1}{h_T} (|\vec{u}| + c) \quad (2.57)$$

με h_T το ελάχιστο ύψος του τριγωνικού ή τετραεδρικού στοιχείου και $|\vec{u}|$ τη μέγιστη ταχύτητα σε αυτό. Ο όρος στην παρένθεση αντιστοιχεί στη μέγιστη ταχύτητα διάδοσης της πληροφορίας σε κάθε στοιχείο και στην περίπτωση των προσταθεροποιημένων εξισώσεων τροποποιείται, χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη-προσταθεροποιημένη μέγιστη ταχύτητα διάδοσης της πληροφορίας, ως

$$T^{inv} = \frac{1}{h_T} \frac{1}{2} \left[(1+a)|\vec{u}| + \sqrt{[(1-a)|\vec{u}|]^2 + 4ac^2} \right] \quad (2.58)$$

Ο συνεκτικός όρος δίνεται από τη σχέση (κοινή και για προσταθεροποιημένες και μη εξισώσεις)

$$T^{vis} = \frac{1}{h_T^2} \frac{2\gamma}{\rho} \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \quad (2.59)$$

Στον δεύτερο τρόπο υπολογισμού ('κατά ακμή' υπολογισμός), το ψευδο-χρονικό βήμα δίνεται, [130], ως

$$\Delta t_P = \frac{CFL \Omega_P}{\sum_i T_i^{inv} + T^{vis}}, \quad i = 2 \text{ ή } 3 \text{ για } 2\Delta \text{ ή } 3\Delta \quad (2.60)$$

όπου Ω_P το εμβαδό/όγκος του όγκου ελέγχου του κόμβου P για τον οποίο υπολογίζεται το ψευδο-χρονικό βήμα. Το ατριβές τμήμα ισούται με

$$T_i^{inv} = (|u_i| + c)\Omega_{Pi} \quad (2.61)$$

όπου Ω_{Pi} οι προβολές του όγκου ελέγχου του κόμβου P κατά την κατεύθυνση i . Ο όρος στην παρένθεση αντιστοιχεί στη μέγιστη ταχύτητα διάδοσης πληροφορίας ανά κατεύθυνση. Προκειμένου η έκφραση 2.60 του ψευδο-χρονικού βήματος να χρησιμοποιηθεί και για τις προσταθεροποιημένες εξισώσεις ροής, στην παρούσα διατριβή, η σχέση 2.61 προσαρμόζεται ως

$$T_i^{inv} = \frac{1}{2} \left[(1+a)|u_i| + \sqrt{[(1-a)u_i]^2 + 4ac^2} \right] \Omega_{Pi} \quad (2.62)$$

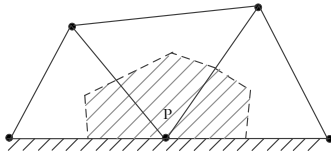
Ο συνεκτικός όρος υπολογίζεται από την κοινή, για προσταθεροποιημένες και μη εξισώσεις, σχέση

$$T^{vis} = 2(\mu + \mu_t) \frac{\Omega_P}{\rho \sum_i \Omega_{Pi}} \quad (2.63)$$

2.4.5 Αριθμητική Επιβολή Οριακών Συνθηκών

Στερεά Τοιχώματα

Όπως προαναφέρθηκε, για ατριβείς ροές, η συνθήκη μη-εισχώρησης επιβάλλεται μηδενίζοντας την κάθετη στο τοίχωμα ταχύτητα, δηλαδή $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$. Έτσι στο διάνυσμα ατριβούς ροής, για έναν κόμβο στο στερεό τοίχωμα, απομένουν μόνο όροι πίεσης



Σχήμα 2.8: Ορισμός όγκου ελέγχου σε κόμβο στο στερεό τοίχωμα.

$$\vec{\Phi}_{wall}^{inv} = \begin{Bmatrix} 0 \\ p\vec{n} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.64)$$

Αντίθετα, στην περίπτωση συνεκτικής ροής, η συνθήκη μη-ολίσθησης, επιβάλλει το μηδενισμό όλων των συνιστωσών της ταχύτητας, δίνοντας μηδενικές Dirichlet συνθήκες $u_i = 0$ στον κόμβο P του τοιχώματος (σχήμα 2.8).

Είσοδος και Έξοδος

Για την είσοδο και έξοδο (δείκτες IO) του πεδίου ροής, σύμφωνα με το σχήμα διάσπασης ροών (Flux Vector Spitting, [249]), λαμβάνεται

$$\vec{\Phi}_{IO}^{inv} = A_P^+ \vec{U}_P + A_P^- \vec{U}_{inf} \quad (2.65)$$

όπου οι δείκτες P και inf δηλώνουν έναν οριακό κόμβο και μια υποθετική κατάσταση στο εξωτερικό του χωρίου αντίστοιχα, ενώ A είναι το Ιακωβιανό μητρώο των ατριβών ροών κατά την κάθετη στην είσοδο/έξοδο κατεύθυνση. Λαμβάνοντας υπόψη τις θετικές (+) και αρνητικές (−) ιδιοτιμές, το διάνυσμα ροής στην περίπτωση των προσταθεροποιημένων εξισώσεων τροποποιείται ως

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}_{IO}^{inv} &= \Gamma^{-1}(\Gamma A_P^+) \vec{U}_P + \Gamma^{-1}(\Gamma A_P^-) \vec{U}_{inf} \Rightarrow \\ \vec{\Phi}_{IO}^{inv} &= \Gamma^{-1}(\Gamma A)_P^+ \vec{U}_P + \Gamma^{-1}(\Gamma A)_P^- \vec{U}_{inf} \Rightarrow \\ \vec{\Phi}_{IO}^{inv} &= \Gamma^{-1} A_{P\Gamma}^+ \vec{U}_P + \Gamma^{-1} A_{P\Gamma}^- \vec{U}_{inf} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Σε περιπτώσεις ροών σε περιφερειακές πτερυγώσεις στροβιλομηχανών, στην έξοδο της πτερυγώσης εφαρμόζεται η εξίσωση της ακτινικής ισορροπίας

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{u_{per}^2}{r} \quad (2.67)$$

(r είναι η ακτινική θέση και u_{per} η περιφερειακή συνιστώσα της απόλυτης ταχύτητας) ώστε να υπολογισθεί η ακτινική κατανομή της στατικής πίεσης, με δεδομένη την τιμή της πίεσης στην ακτίνα ποδός.

Περιοδικά Όρια

Η εξασφάλιση της ισότητας των μεγεθών της ροής σε κάθε ζεύγος περιοδικών κόμβων (έστω P και P') επιτυγχάνεται συμπληρώνοντας τα διανύσματα ροής ενός κόμβου με αυτά του αντίστοιχου περιοδικού του, κατά τους σχετικούς ισολογισμούς. Σε περιφερειακές πτερυγώσεις, η συνθήκη αυτή ουσιαστικά αντιστοιχεί στην άθροιση των αντίστοιχων διανυσμάτων ροής αφού προηγηθεί περιστροφή τους κατά την περιφερειακή κατεύθυνση κατά γωνία ίση με το γωνιακό βήμα της πτερύγωσης.

2.5 Μέθοδοι Αριθμητικής Ολοκλήρωσης στον Ψευδο-Χρόνο

Για την ολοκλήρωση των εξισώσεων ροής στον ψευδο-χρόνο, η δέλτα διατύπωση ως προς τις συντηρητικές μεταβλητές υπολογίζει τη διόρθωση ΔU_P ανά ψευδο-χρονικό βήμα για τον κόμβο P από τη σχέση

$$\frac{\Omega_P}{\Delta t_P} \Delta \vec{U}_P = -\vec{R}_\Gamma^m, \quad (2.68)$$

όπου $\vec{R}_\Gamma^m = \Gamma_P \vec{R}^m$ είναι το υπόλοιπο των εξισώσεων ροής πολλαπλασιασμένο με το μητρώο προσταθεροποίησης. Το υπόλοιπο \vec{R}^m ισούται με

$$\vec{R}^m = \sum_{Q \in nei(P)} \{ \vec{\Phi}_{PQ}^{inv} - \vec{\Phi}_{PQ}^{vis} \} \Delta \theta \Omega \quad (2.69)$$

όπου υπενθυμίζεται ότι $nei(P)$ είναι οι γειτονικοί κόμβοι του κόμβου P που συνδέονται με αυτόν με ακμή. Η επίλυση γίνεται είτε με σημειακά πεπλεγμένο σχήμα όταν $m = n + 1$ είτε με ρητό σχήμα, όταν $m = n$, με n το μετρητή των ψευδο-χρονικών βημάτων.

2.5.1 Σημειακά Πεπλεγμένο Σχήμα

Σύμφωνα με το σημειακά πεπλεγμένο σχήμα επίλυσης, το υπόλοιπο των εξισώσεων στο ψευδο-χρονικό βήμα $n + 1$ γράφεται, συναρτήσει του υπολοίπου στο προηγούμενο βήμα n και της διόρθωσης $\Delta \vec{U}^{n+1}$ ($\Delta \vec{U}^{n+1} = \vec{U}^{n+1} - \vec{U}^n$), ως

$$\vec{R}_\Gamma^{n+1} = \vec{R}_\Gamma^n + \frac{\partial \vec{R}_\Gamma}{\partial \vec{U}} \Delta \vec{U}^{n+1} \quad (2.70)$$

Έτσι, για τον κόμβο P , η σχέση 2.68 λαμβάνει τη μορφή

$$\left(\frac{\Omega_P}{\Delta t_P} I_P + \left[\frac{\partial \vec{R}_\Gamma}{\partial \vec{U}} \right]_P \right) \Delta \vec{U}^{n+1} = -\vec{R}_\Gamma^n \quad (2.71)$$

όπου το I_P προκύπτει από το μοναδιαίο μητρώο, με μοναδική μη-μηδενική τιμή στο διαγώνιο μητρώο αυτή που αντιστοιχεί στον κόμβο P . Ο όρος $\left[\frac{\partial \vec{R}_\Gamma}{\partial \vec{U}} \right]_P$ εμπλέκει τους άμεσους γείτονες του κόμβου P , με τρόπο συμβατό με τη διακριτοποίηση. Με βάση αυτή την εμπλοκή, το αριστερό μέλος της εξίσωσης 2.70 χωρίζεται σε διαγώνιους (D_P) και μη-διαγώνιους όρους (Z_Q), ως

$$D_P^n \Delta \vec{U}_P^{n+1} + \sum_{Q \in nei(P)} Z_Q^n \Delta \vec{U}_Q^{n+1} = -\vec{R}_\Gamma^n \quad (2.72)$$

όπου οι D_P προέρχονται από συνεισφορές του προς επίλυση κόμβου P ενώ οι Z_Q ποσοτικοποιούν τις συνεισφορές των γειτόνων Q του P . Η παραπάνω εξίσωση επιλύεται με την επαναληπτική μέθοδο Jacobi, με j_{max} εσωτερικές επαναλήψεις ως προς τη διόρθωση $\Delta\vec{U}_P^{n+1}$,

$$\Delta\vec{U}_P^{n+1,j+1} = -(D_P^n)^{-1} \left(\vec{R}_\Gamma^n + \sum_{Q \in nei(P)} Z_Q^n \Delta\vec{U}_Q^{n+1,j} \right), \quad j = 1, \dots, j_{max} \quad (2.73)$$

από την οποία τελικά προκύπτουν οι νέες τιμές των ροϊκών μεγεθών \vec{U}_P^{n+1} ($\vec{U}_P^{n+1} = \vec{U}_P^n + \Delta\vec{U}_P^{n+1}$).

2.5.2 Ρητό Σχήμα

Στην περίπτωση ρητού σχήματος η ανανέωση των τιμών των ροϊκών μεταβλητών γίνεται με τη μέθοδο Runge–Kutta(RK), [48, 3], με nrk βήματα. Ο αλγόριθμος επίλυσης έχει ως εξής

$$\begin{aligned} \vec{U}_P^{n+1,0} &= \vec{U}_P^n \\ \vec{U}_P^{n+1,rk} &= \vec{U}_P^n - a_{rk} \frac{\Delta t_P}{\Omega_P} \vec{R}_\Gamma^{n+1,rk-1}, \quad rk = 1, \dots, nrk \\ \vec{U}_P^{n+1} &= \vec{U}_P^{n+1,nrk} \end{aligned} \quad (2.74)$$

όπου a_{rk} συντελεστές που εξαρτώνται από την τάξη–βήματα της μεθόδου. Αν $nrk = 1$ και $a_1 = 1$ τότε η σχέση 2.74 οδηγεί στο πρώτης τάξης σχήμα Euler. Συνήθης επιλογή είναι ένα σχήμα RK τέταρτης τάξης με τους συντελεστές να λαμβάνουν τις τιμές $a_1 = 0.11$, $a_2 = 0.2766$, $a_3 = 0.5$ και $a_4 = 1$, [150].

2.6 Χρονικά Μη–Μόνιμες Εξισώσεις Ροής

Για την προσομοίωση χρονικά μη–μόνιμων ροών επιλύονται οι εξισώσεις

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}_i^{mv}}{\partial x_i} - \frac{\partial \vec{f}_i^{vis}}{\partial x_i} = 0 \quad (2.75)$$

στις οποίες, συγκριτικά με τις εξισώσεις 2.1, έχει προστεθεί η μεταβολή $\partial \vec{U} / \partial \tau$ ως προς τον πραγματικό χρόνο τ . Για τη χρονική διακριτοποίηση, χρησιμοποιείται ένα σχήμα δεύτερης τάξης στο χρόνο, σύμφωνα με το οποίο η χρονική παράγωγος των μεταβλητών της ροής εκφράζεται ως

$$\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} \right)^{k+1} = \frac{3\vec{U}^{k+1} - 4\vec{U}^k + \vec{U}^{k-1}}{2\Delta\tau} \quad (2.76)$$

όπου $\Delta\tau$ το πραγματικό χρονικό βήμα και k ο μετρητής των πραγματικών χρονικών στιγμών. Με θεώρηση αντίστοιχη με αυτήν του ψευδο–χρόνου, $k+1$ είναι η τρέχουσα (προς επίλυση) χρονική στιγμή ενώ k και $k-1$ οι δύο προηγούμενες χρονικές στιγμές. Το πραγματικό χρονικό βήμα λαμβάνει τιμή η οποία ορίζεται από το χρήστη. Ο όρος του ψευδο–χρονικού βήματος, $\partial \vec{U} / \partial \tau$, προστίθεται για αριθμητικούς λόγους και χρησιμοποιείται για τη σύγκλιση των εξισώσεων σε κάθε πραγματικό χρονικό βήμα.

Για την επίλυση χρονικά μη-μόνιμων ροών σε χαμηλές ταχύτητες, η προσταθεροποίηση εξακολουθεί να ‘επιδρά’ στο ψευδο-χρονικό όρο των εξισώσεων

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} + \Gamma^{-1} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}_i^{inv}}{\partial x_i} - \frac{\partial \vec{f}_i^{vis}}{\partial x_i} = 0 \quad (2.77)$$

και, ουσιαστικά, για κάθε πραγματική χρονική στιγμή τ , επιλύεται το προσταθεροποιημένο σύστημα των εξισώσεων. Οι όροι που προκύπτουν από την πραγματική χρονική παράγωγο, αντιμετωπίζονται ως όροι ‘πηγής’.

2.7 Επίλυση σε Πολυεπεξεργαστικό Περιβάλλον

Το λογισμικό επίλυσης των εξισώσεων Navier–Stokes που περιγράφεται στο παρόν κεφάλαιο έχει προγραμματιστεί ώστε να υποστηρίζει επίλυση σε περιβάλλον παράλληλης επεξεργασίας. Οι λόγοι που επιβάλλουν την παράλληλη εκτέλεση ενός λογισμικού ΥΡΔ είναι η ενδεχόμενη αδυναμία εκτέλεσης ενός προβλήματος μεγάλης κλίμακας σε ένα μόνο επεξεργαστή λόγω περιορισμών διαθέσιμης μνήμης ή/και η ανάγκη για σημαντική μείωση του υπολογιστικού κόστους. Η ‘λογική’ της παραλληλοποίησης του λογισμικού της παρούσας διατριβής είναι αυτή του διαμερισμού του υπολογιστικού χωρίου σε υποχωρία και η ανάθεση της επίλυσης καθενός απ’αυτά σε διαφορετικό επεξεργαστή, [143].

Στη συνέχεια, υποτίθεται ότι οι διαθέσιμοι επεξεργαστές που θα χρησιμοποιηθούν κατά την παράλληλη επεξεργασία είναι ίδιοι, δηλαδή έχουν ίδια ισχύ και μνήμη και είτε είναι αποκλειστικά διαθέσιμοι είτε έχουν ίδιο και σταθερό υπολογιστικό φορτίο. Υπό αυτήν την παραδοχή, η παραλληλοποίηση του λογισμικού ΥΡΔ, προκειμένου να είναι αποδοτική (δηλαδή, να εκμεταλλεύεται πλήρως τη διαθέσιμη υπολογιστική ισχύ αλλά και να επιτυγχάνει τη μέγιστη παράλληλη επιτάχυνση κατά την επίλυση), πρέπει να εξασφαλίζει (α) την ισοκατανομή του υπολογιστικού φορτίου στους διαθέσιμους επεξεργαστές, (β) την ελαχιστοποίηση του όγκου επικοινωνίας μεταξύ των υποχωρίων και (γ) την ελαχιστοποίηση της συχνότητας επικοινωνίας.

Δεδομένης της μεθόδου παραλληλοποίησης που προαναφέρθηκε, τα δύο πρώτα χαρακτηριστικά εξαρτώνται από το λογισμικό διαμερισμού του υπολογιστικού χωρίου ενώ το τελευταίο αφορά στο σχεδιασμό–προγραμματισμό του λογισμικού ΥΡΔ. Στις δύο υποσημειωμένες που ακολουθούν αναλύονται η μέθοδος διαμερισμού του υπολογιστικού χωρίου αλλά και η υλοποίηση, ο προγραμματισμός και οι προσθήκες στο σειριακό λογισμικό ΥΡΔ προκειμένου να είναι εφικτή η εκτέλεση του σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον.

2.7.1 Διαμερισμός Υπολογιστικού Χωρίου

Για το διαμερισμό του υπολογιστικού χωρίου χρησιμοποιείται η μέθοδος και το λογισμικό που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της διατριβής [8] στο ΕΘΣ/ΕΜΠ. Πρόκειται για μια μέθοδο διαμερισμού μη–δομημένων πλεγμάτων και, γενικότερα, γράφων σε μη–αλληλοκαλυπτόμενα υποχωρία. Ο διαμερισμός του υπολογιστικού χωρίου ανάγεται στην επίλυση ενός προβλήματος διαμερισμού του ισοδύναμου γράφου με χρήση εξελικτικών αλγορίθμων. Προκειμένου να επιταχυνθεί ο διαμερισμός, χρησιμοποιείται ένα πολυεπίπεδο σχήμα συστολής του γράφου και ευρετικές τεχνικές [99]. Η αναγωγή σε γράφο καθιστά τη μέθοδο εφαρμόσιμη σε κάθε

τύπο πλέγματος (άρα και σε 2Δ και 3Δ υβριδικά πλέγματα αποτελούμενα από οποιονδήποτε συνδυασμό πλεγματοειδών στοιχείων³).

Ως κριτήρια για τον διαμερισμό τίθενται ο ίσος αριθμός πλεγματοειδών στοιχείων ανά υποχωρίο και η ελαχιστοποίηση του ορίου (ακμές ή έδρες) μεταξύ των υποχωρίων. Από τα παραπάνω, η ελαχιστοποίηση της διεπιφάνειας μεταξύ των υποχωρίων εξασφαλίζει και την ελαχιστοποίηση του όγκου επικοινωνίας κατά την επίλυση, ενώ ο ίσος αριθμός στοιχείων αποβλέπει στην ισοκατανομή του υπολογιστικού φορτίου στους επεξεργαστές. Το τελευταίο είναι αληθές μόνο υπό την προϋπόθεση ότι κάθε πλεγματοειδές στοιχείο απαιτεί το ίδιο υπολογιστικό κόστος κατά την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων ροής (βασική υπόθεση που γίνεται στη διατριβή [8] κατά τη θεμελίωση της μεθόδου).

Το λογισμικό διαμερισμού πλέγματος που περιγράφηκε χρησιμοποιείται αυτούσιο και χωρίς καμία παρέμβαση και στην παρούσα διατριβή. Πρόκειται για μια μέθοδο η οποία έχει ήδη συγκριθεί και αξιολογηθεί τόσο στη διατριβή [8] όσο και στις σχετικές εργασίες [99],[94] με εξαιρετικά αποτελέσματα. Ο διαμερισμός επιτυγχάνεται σε πολύ σύντομο χρόνο, χάρη στο πολυεπίπεδο σχήμα συστολής γράφου και τις ευρετικές τεχνικές ενώ τα αποτελέσματα είναι σχεδόν τα βέλτιστα με βάση τα τεθέντα κριτήρια.

Με βάση τα όσα αναλύθηκαν σε προηγούμενη ενότητα σχετικά με τον τρόπο επίλυσης, έγινε φανερό ότι τόσο τα στοιχεία όσο και κυρίως οι ακμές του πλέγματος διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στο τελικό κόστος υπολογισμού. Έτσι, το υπάρχον κριτήριο για ίδιο αριθμό πλεγματοειδών στοιχείων σε κάθε υποχωρίο πρέπει να αναθεωρηθεί λαμβάνοντας υπόψη και (ή μόνο) τις ακμές. Σύμφωνα με το θεώρημα του Euler, η συσχέτιση των εσωτερικών (δείκτης ie) και οριακών ακμών (δείκτης be) με τις έδρες ενός πλέγματος (δείκτης f και ένας ακέραιος που δηλώνει το πλήθος των κορυφών κάθε έδρας) δίνεται από τη γενική σχέση, [35],

$$2n_{ie} + n_{be} = \sum_{i \geq 3} i \cdot n_{f(i)} \quad (2.78)$$

η οποία, για 2Δ πλέγμα τριγωνικών στοιχείων ξαναγράφεται προσεγγιστικά ως $2n_{ie} \approx 3n_{f(3)}$, με $n_{f(3)}$ το πλήθος των τριγώνων. Αυτή η αναλογία ακμών–τριγώνων (3 προς 2) είναι ακριβής όσο $2n_{ie} \gg n_{be}$. Με το διαμερισμό του πλέγματος σε υποχωρία και μάλιστα, όσο αυξάνει το πλήθος τους, η παραδοχή $2n_{ie} \gg n_{be}$ σε κάθε υποχωρίο τίθεται σε αμφισβήτηση. Σε υβριδικά 2Δ πλέγματα, η 2.78 γράφεται ως $2n_{ie} + n_{be} = 3n_{f(3)} + 4n_{f(4)}$ όπου $n_{f(4)}$ είναι το πλήθος των τετραπλευρών. Είναι, λοιπόν, προφανές ότι η ισοκατανομή των πλεγματοειδών στοιχείων στα επιμέρους χωρία δεν εγγυάται αναγκαστικά τον ισομοιρασμό των ακμών του πλέγματος, άρα και την ισοκατανομή του υπολογιστικού φορτίου στους διαθέσιμους επεξεργαστές. Αυτό θα ίσχυε μόνο στην περίπτωση όπου κάθε υποχωρίο περιείχε ίσο αριθμό τριγωνικών και τετραπλευρικών στοιχείων, κάτι το οποίο μόνο τυχαία θα μπορούσε να επιτευχθεί. Προς αυτή την κατεύθυνση θα ήταν επιθυμητή η προσθήκη συναρτήσεων βαρύτητας για κάθε τύπο στοιχείου κάτι το οποίο είναι εφικτό και η υποδομή του λογισμικού διαμερισμού το επιτρέπει. Το πρόβλημα όμως που τίθεται είναι ο ορισμός αυτών των συναρτήσεων βάσει του ‘κόστους’ υπολογισμού για κάθε στοιχείο, το οποίο δεν είναι προφανές. Όπως γίνεται αντιληπτό, το

³ Διευκρινίζεται ότι με τον όρο πλεγματοειδές στοιχείο δηλώνεται εκείνο το στοιχείο του υπολογιστικού χωρίου που έχει την ίδια διάσταση με το προς επίλυση πρόβλημα/χωρίο. Ειδικότερα σε 2Δ χωρία, ως πλεγματοειδή στοιχεία νοούνται τα τρίγωνα και τα τετράπλευρα, ενώ σε 3Δ τα τετράεδρα, οι πενταεδρικές πυραμίδες, τα πρίσματα και τα εξάεδρα.

πρόβλημα αυτό εντείνεται σε 3D πλέγματα και μάλιστα υβριδικά, όπου δεν είναι δυνατή ούτε καν η συσχέτιση πλεγματοειδών στοιχείων με ακμές.

Σε όλα τα παραπάνω πρέπει να ληφθεί επιπλέον υπόψη ότι η απόδοση από τη χρήση πολυεπεξεργασίας επηρεάζεται και από το είδος των χρησιμοποιούμενων επεξεργαστών. Ειδικότερα, σε ετερογενή συστήματα διασυνδεδεμένων επεξεργαστών (όπως και το σύστημα του ΕΘΣ/ΕΜΠ), όπου οι επεξεργαστές δεν έχουν όλοι τα ίδια χαρακτηριστικά, η ισοκατανομή υπολογιστικού φορτίου δεν εγγυάται απαραίτητα και την 'απόλυτη' απόδοση καθώς πλέον αυτή εξαρτάται και από τον κάθε επεξεργαστή. Σε μικρά συστήματα όπου οι χρήστες είναι λίγοι και γνωρίζουν τα χαρακτηριστικά του κάθε μηχανήματος, θεωρητικά μπορούν για την παράλληλη επεξεργασία να επιλέξουν ίδιους επεξεργαστές χωρίς επιπλέον φορτίο από άλλους χρήστες και να επιτύχουν εξαιρετική παράλληλη απόδοση. Αυτή η εκδοχή βέβαια είναι πολύ δύσκολο να επιτευχθεί, ιδίως στα σύγχρονα συστήματα διασυνδεδεμένων υπολογιστών που είναι και γεωγραφικά απομακρυσμένα (Grid Computing), όπου τέτοιου είδους επιλογή και συνεννόηση δεν είναι εφικτή ή επιτρεπτή.

Τα ανωτέρω σχόλια, παρά το γεγονός ότι επικεντρώθηκαν στη μέθοδο [99], είναι γενικά και ισχύουν και για κάθε μέθοδο-λογισμικό διαμερισμού πλεγμάτων που εφαρμόζει αντίστοιχα κριτήρια κατά το διαμερισμό, λ.χ. [138]. Ολοκληρώνοντας, επαναλαμβάνεται ότι τελικά η μέθοδος χρησιμοποιείται ως έχει για το διαμερισμό οποιουδήποτε τύπου πλεγμάτων και κρίνοντας εκ του αποτελέσματος συμπεριφέρεται ικανοποιητικά καθώς δεν παρατηρήθηκαν 'καθυστερήσεις' εξαιτίας αυτού.

2.7.2 Παραλληλοποίηση Αλγορίθμου Επίλυσης

Σχετικά με την παραλληλοποίηση του λογισμικού επίλυσης των εξισώσεων Navier–Stokes, αυτή βασίζεται στο μοντέλο συντονιστή-εργάτη⁴ με χρήση των πρωτοκόλλων επικοινωνίας PVM ή MPI, [88, 106]. Το υπόβαθρο και η λογική της παραλληλοποίησης είναι όμοια με αυτή που χρησιμοποιήθηκε και σε προηγούμενες διατριβές στο ΕΘΣ/ΕΜΠ [14, 8, 15] στο αντίστοιχο θέμα. Η συνεισφορά της διατριβής στο λογισμικό και στην παραλληλοποίηση εντοπίζεται αφενός στην επαναδιατύπωση-επαναπρογραμματισμό υπάρχουσών διεργασιών, αλλά και στην προσθήκη νέων ώστε να καλυφθούν οι νέες λειτουργίες του λογισμικού (προσταθεροποίηση, μη-μόνιμες ροές), τα οποία περιγράφονται παρακάτω.

Ως προς την πρώτη συνεισφορά, πραγματοποιήθηκε αναδιάρθρωση/επανασύνταξη των φάσεων επικοινωνίας με στόχο την ελαχιστοποίηση του χρόνου ανταλλαγής μηνυμάτων. Οι αλλαγές αυτές αφορούν στην υλοποίηση του αλγορίθμου, έγιναν σε συνεργασία με τις ταυτόχρονα εξελισσόμενες διατριβές [9, 10] και δεν αναφέρονται καθώς στόχος του κειμένου δεν είναι να υπεισέλθει σε τέτοιου είδους προγραμματιστικές λεπτομέρειες.

Όσον αφορά στις νέες μεθόδους που προστέθηκαν στο λογισμικό, η προσταθεροποίηση χαμηλών αριθμών Mach δεν εισάγει καμία επιπλέον επικοινωνία. Αυτό γιατί, προγραμματιστικά, η εφαρμογή της προσταθεροποίησης είναι 'τοπική' (αφορά λ.χ. έναν κόμβο ή μια ακμή και δεν εμπλέκει γειτονικά τους στοιχεία) και ο υπολογισμός του μητρώου προσταθεροποίησης (το οποίο χρησιμοποιείται είτε σε κόμβους του πλέγματος είτε στο μέσο ακμών) μπορεί να

⁴master-slave

γίνει μεμονωμένα σε κάθε υποχωρίο, αφού κάθε εργάτης διαθέτει όλα τα απαραίτητα δεδομένα. Από την άλλη, η παράλληλη εκτέλεση χρονικά μη-μόνιμων ροών απαιτεί επικοινωνιών των εργατών με το συντονιστή για αποστολή και λήψη δεδομένων κατά την ολοκλήρωση ενός πραγματικού χρονικού βήματος και το συγχρονισμό των εργατών-επεξεργαστών πριν την έναρξη του επόμενου πραγματικού βήματος.

Επιπλέον, σε συνεργασία με τη διατριβή [9] της οποίας κεντρικό θέμα είναι η χρήση υβριδικών πλεγμάτων, η παρούσα διατριβή συνεισέφερε στην παραλληλοποίηση των νέων στοιχείων του συνολικού λογισμικού του ΕΘΣ/ΕΜΠ. Ειδικότερα, το λογισμικό επίλυσης των εξισώσεων Navier–Stokes που έχει αναπτυχθεί στο ΕΘΣ/ΕΜΠ είναι πλέον ενιαίο και καλύπτει την επίλυση μόνιμων ή μη-μόνιμων ροών υψηλών και χαμηλών ταχυτήτων (μέσω προσταθεροποίησης) με χρήση μη-δομημένων ή υβριδικών πλεγμάτων με δυνατότητα προσαρμογής τους στη λύση, [14, 16].

Η παραλληλοποίηση του λογισμικού σχεδιασμού βέλτιστων αεροδυναμικών μορφών με χρήση συζυγών τεχνικών απαίτησε παραλληλοποίηση η οποία ακολούθησε το πρότυπο αυτής που προαναφέρθηκε για τον επιλύτη της ροής. Έτσι παραλληλοποιήθηκε και το λογισμικό επίλυσης των συζυγών εξισώσεων και δημιουργήθηκε ένας κεντρικός διαχειριστής υπεύθυνος για τη διόρθωση της γεωμετρίας σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης και την παράλληλη εκτέλεση τόσο των εξισώσεων ροής όσο και των συζυγών εξισώσεων, όπως θα αναλυθεί εκτενώς σε επόμενο κεφάλαιο.

Όλες οι προσθήκες ή/και τροποποιήσεις έχουν εισαχθεί-προγραμματιστεί με τρόπο ώστε το λογισμικό ΥΡΔ να εκτελείται τόσο σειριακά όσο και παράλληλα, με χρήση του πρωτοκόλλου επικοινωνίας PVM ή MPI, χωρίς καμία περαιτέρω επέμβαση στον κώδικα. Το μόνο που τροποποιείται είναι οι βιβλιοθήκες συστήματος που επιλέγονται κατά τη μετάφραση του λογισμικού. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω μιας ενδιάμεσης 'βιβλιοθήκης' που δημιουργήθηκε (βλ. και [9, 13]) και περιέχει τις κλήσεις στο πρωτόκολλο επικοινωνίας. Έτσι, ανάλογα με τις επιλογές του χρήστη κατά τη μετάφραση του λογισμικού, αυτό είναι κατάλληλο για σειριακή ή παράλληλη εκτέλεση με PVM ή MPI.

Παρακάτω, αναφέρονται οι βασικές εργασίες του συντονιστή και του εργάτη καθώς και οι απαιτούμενες επικοινωνίες τόσο του συντονιστή με τους εργάτες όσο και των εργατών μεταξύ τους.

Ο συντονιστής είναι αυτόνομο τμήμα κώδικα, το οποίο εκτελείται σειριακά σε έναν από τους επεξεργαστές όπου θα εκτελεστεί κι ένας εργάτης. Είναι υπεύθυνος για το συνολικό υπολογιστικό χωρίο και για την ανάθεση της επίλυσης κάθε τμήματος αυτού σε διαφορετικό επεξεργαστή-εργάτη. Δεδομένου ότι χειρίζεται όλο το υπολογιστικό χωρίο και γενικά εκτελείται ταυτόχρονα με κάποιο εργάτη (σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές), βασικός στόχος κατά τον προγραμματισμό του είναι να εκτελεί τις κατά το δυνατόν ελάχιστες εργασίες (μόνο τις απαραίτητες) ώστε να μην επηρεάζει το φορτίο του επεξεργαστή και άρα την εκτέλεση της διεργασίας του εργάτη. Οι βασικές εργασίες που διεκπεραιώνει είναι:

- (α) Αρχικά χειρίζεται όλο το υπολογιστικό χωρίο, το διαμερίζει σε τόσα υποχωρία όσοι οι διαθέσιμοι επεξεργαστές και υπολογίζει μόνο τα απαραίτητα στοιχεία τοπολογίας.
- (β) Μέσω κατάλληλων κλήσεων του πρωτοκόλλου επικοινωνίας ξεκινά τις διεργασίες των

εργατών και αποστέλλει δεδομένα σχετικά με το προς επίλυση ροϊκό πρόβλημα (συνθήκες ροής). Ταυτόχρονα δημιουργεί τοπική αρίθμηση για κάθε υποχωρίο, τις λίστες επικοινωνίας μεταξύ τους και αποστέλλει αυτά στους εργάτες. Σε αυτό το σημείο, ουσιαστικά ολοκληρώνεται η προκαταρκτική φάση της εργασίας.

- (γ) Με το πέρας κάθε επανάληψης, συλλέγει τα επιμέρους υπόλοιπα από την επίλυση των εξισώσεων (μέτρο της σύγκλισης) σε κάθε εργάτη, συνθέτει το συνολικό υπόλοιπο ανά εξίσωση, ελέγχει τη σύγκλιση και αποφασίζει για τη συνέχιση ή τον τερματισμό της επίλυσης.
- (δ) Ανά συγκεκριμένο αριθμό επαναλήψεων που έχει οριστεί από το χρήστη ή με την ολοκλήρωση των υπολογισμών, αναλαμβάνει τη συλλογή των τιμών των μεταβλητών ροής, την αντιστοίχισή τους στο συνολικό πλέγμα και την αποθήκευση των αποτελεσμάτων.

Κάθε εργάτης από την πλευρά του, αφού λάβει τα απαραίτητα δεδομένα από το συντονιστή, δηλαδή τις συνθήκες ροής και το τμήμα του υποχωρίου που του αναλογεί με τοπική αρίθμηση, ξεκινά την επίλυση των εξισώσεων ροής στο υποχωρίο του. Η επίλυση σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον επιβάλλει μερικές τροποποιήσεις και προσθήκες στον αρχικό-σειριακό κώδικα. Βάση του τρόπου διαμερισμού του πλέγματος που αναλύθηκε παραπάνω, τα προκύπτοντα υποχωρία διαθέτουν κοινό όριο ακμών και κόμβων με κάθε γειτονικό υποχωρίο. Έτσι κατά την επαναληπτική επίλυση των εξισώσεων είναι απαραίτητες οι παρακάτω επικοινωνίες μεταξύ των εργατών:

Ως προς τους όγκους ελέγχου: Η πρώτη βασική επικοινωνία λαμβάνει χώρα κατά τον υπολογισμό των όγκων ελέγχου για κάθε κόμβο του υπολογιστικού πλέγματος. Σύμφωνα με τον τρόπο διαμερισμού του πλέγματος, ένα πλεγματοειδές στοιχείο ανήκει αποκλειστικά σε ένα υποχωρίο. Άρα, για έναν κόμβο στο ενδιαμέσο όριο μεταξύ υποχωρίων καθένα από αυτά μπορεί να υπολογίσει μόνο εκείνο το τμήμα του όγκου ελέγχου που του αντιστοιχεί (ανάλογα με τον αριθμό των πλεγματοειδών στοιχείων στα οποία ανήκει ο κόμβος). Έτσι κάθε υποχωρίο, αφού υπολογίσει τον όγκο ελέγχου για κάθε κόμβο του επικοινωνεί με τα γειτονικά του υποχωρία ώστε να συμπληρώσει τα 'τμήματα' του όγκου ελέγχου που του λείπουν στους κόμβους επικοινωνίας με γειτονικά υποχωρία.

Ως προς τις παραγώγους ροϊκών μεγεθών: Αντίστοιχη επικοινωνία απαιτείται κατά τον υπολογισμό των παραγώγων των ροϊκών μεγεθών καθώς, σε μη-δομημένα πλέγματα, οι παράγωγοι υπολογίζονται σε κάθε τριγωνικό ή τετραεδρικό στοιχείο και συνεισφορές τους επιμερίζονται στους τρεις ή τέσσερις κόμβους του. Η επικοινωνία απαιτείται ακόμα και στην περίπτωση όπου οι παράγωγοι υπολογίζονται ανά ακμή πλέγματος, όπως λ.χ. γίνεται στα 2δ ή 3Δ υβριδικά πλέγματα.

Ως προς το χρονικό βήμα: Επιπλέον, επικοινωνία απαιτείται για την εύρεση του ψευδο-χρονικού βήματος ολοκλήρωσης σε κάθε κόμβο, είτε αυτό υπολογίζεται ανά πλεγματοειδές στοιχείο είτε ανά ακμή σε κάθε υποχωρίο.

Ως προς τα διανύσματα ροής: Κατά τον υπολογισμό του δεξιού μέλους της εξίσωσης 2.68, απαιτείται επικοινωνία στους οριακούς-μεταξύ υποχωρίων κόμβους, προκειμένου να ανταλλάξουν πληροφορία για τα διανύσματα ροής που διασχίζουν τον όγκο ελέγχου (κάθε υποχωρίο μπορεί να υπολογίσει μόνο τα διανύσματα ροής που διασχίζουν το όριο του όγκου ελέγχου το οποίο του ανήκει).

Ως προς την επίλυση: Τέλος, στην περίπτωση επίλυσης με την σημειακά πεπλεγμένη μέθοδο Jacobi, σε κάθε εσωτερική επανάληψη υπάρχει επικοινωνία των κόμβων που βρίσκονται μεταξύ υποχωρίων ώστε να λάβουν όλη την πληροφορία από τους μη-διαγώνιους όρους Z_Q της σχέσης 2.73.

Κεφάλαιο 3

Πρόλεξη Πεδίων Ροής με Προσταθεροποίηση–Εφαρμογές

Στο κεφάλαιο παρουσιάζονται εφαρμογές πρόλεξης 2Δ ή 3Δ μόνιμων και μη-μόνιμων ροών σε πτερυγώσεις στροβιλομηχανών, μεμονωμένες αεροτομές, αεροσκάφη και αγωγούς, χρησιμοποιώντας το λογισμικό με προσταθεροποίηση χαμηλών αριθμών Mach (κεφάλαιο 2)

Το κεφάλαιο ξεκινά με σύγκριση του ρυθμού σύγκλισης αλλά και των αποτελεσμάτων από την επίλυση με και χωρίς προσταθεροποίηση. Στόχος είναι η αποτίμηση του υπολογιστικού κέρδους από τη χρήση της προσταθεροποίησης. Δεδομένου ότι το λογισμικό βάσης του αναπτυχθέντος στη διατριβή λογισμικού αποτέλεσε αντικείμενο προηγούμενων διατριβών στο ΕΘΣ/ΕΜΠ, [14, 8, 15] όπου υπήρξε επαρκής πιστοποίησή του σε εύρος εφαρμογών, στην παρούσα διατριβή το ενδιαφέρον μετατοπίζεται προς το κέρδος που προκύπτει από τη χρήση της προσταθεροποίησης χαμηλών αριθμών Mach.

Στις περιπτώσεις ροής που ακολουθούν, η ανάλυση γίνεται με το λογισμικό με προσταθεροποίηση και, κατά περίπτωση, παρουσιάζονται και συγκρίσεις των αποτελεσμάτων με άλλους υπολογισμούς από τη βιβλιογραφία ή με διαθέσιμες πειραματικές μετρήσεις. Όλες οι παρουσιαζόμενες συγκρίσεις δίνονται μορφή του δεκαδικού λογαρίθμου της νόρμας του υπολοίπου των επιλύσεων εξισώσεων.

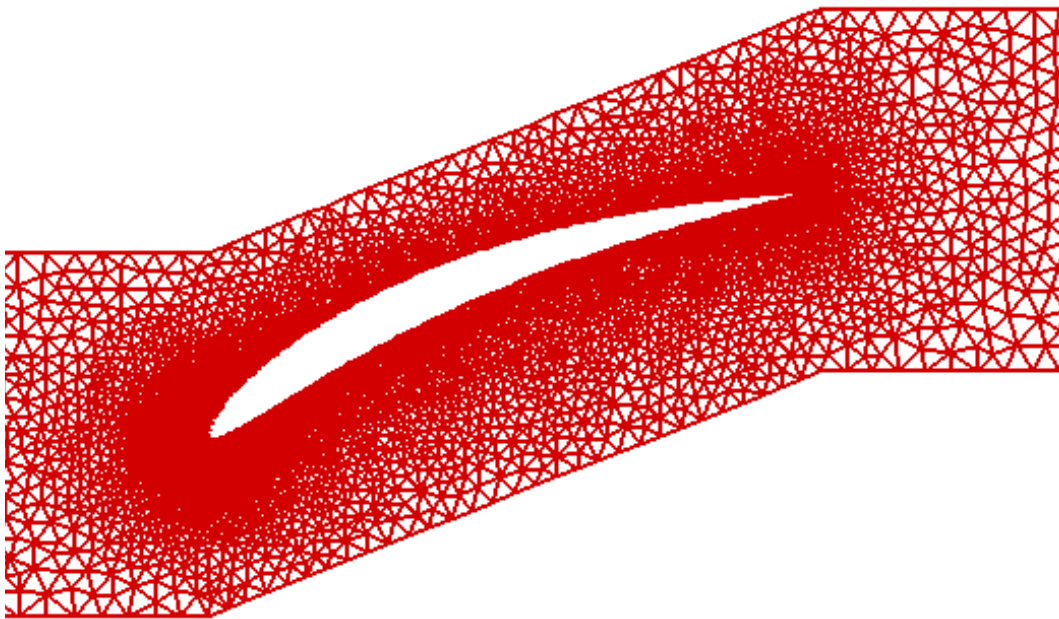
3.1 Αποτίμηση Κέρδους από τη Χρήση της Προσταθεροποίησης

Σε αυτή την ενότητα αποτιμάται το κέρδος από τη χρήση της προσταθεροποίησης σε ροές χαμηλών αριθμών Mach και, για το σκοπό αυτό, αναλύονται επιλεγμένα προβλήματα ροής. Για λόγους σύγκρισης, οι υπολογισμοί επαναλαμβάνονται με και χωρίς προσταθεροποίηση χρησιμοποιώντας τον επιλύτη Jacobi.

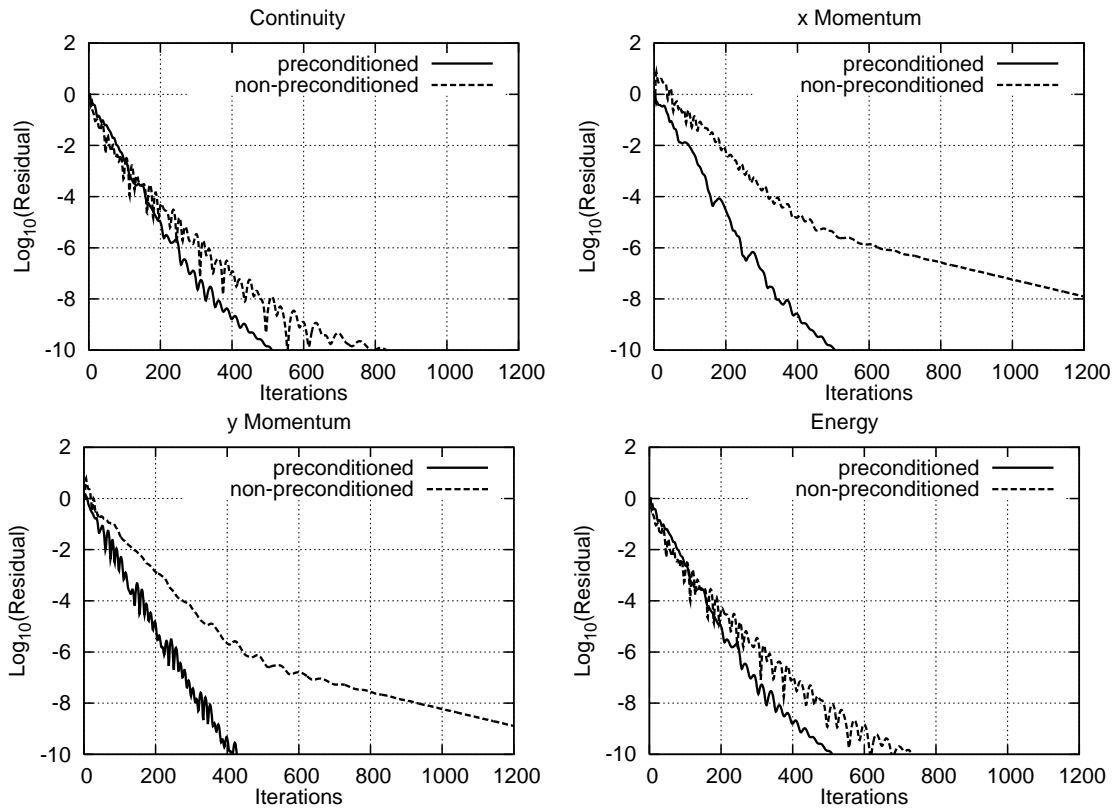
3.1.1 Πρόλεξη Ροής σε 2Δ Πτερύγωσης Συμπιεστών

Η πρώτη εφαρμογή αφορά την ανάλυση ατρίβους ροής σε μια 2Δ πτερύγωση συμπιεστή, με ισεντροπικό Mach εξόδου $M_{2, is} = 0.15$ και γωνία εισόδου της ροής $\alpha_1 = 41^\circ$. Λεπτομέρεια του υπολογιστικού πλέγματος με περίπου 6000 κόμβους και 13000 τριγωνικά στοιχεία γύρω από

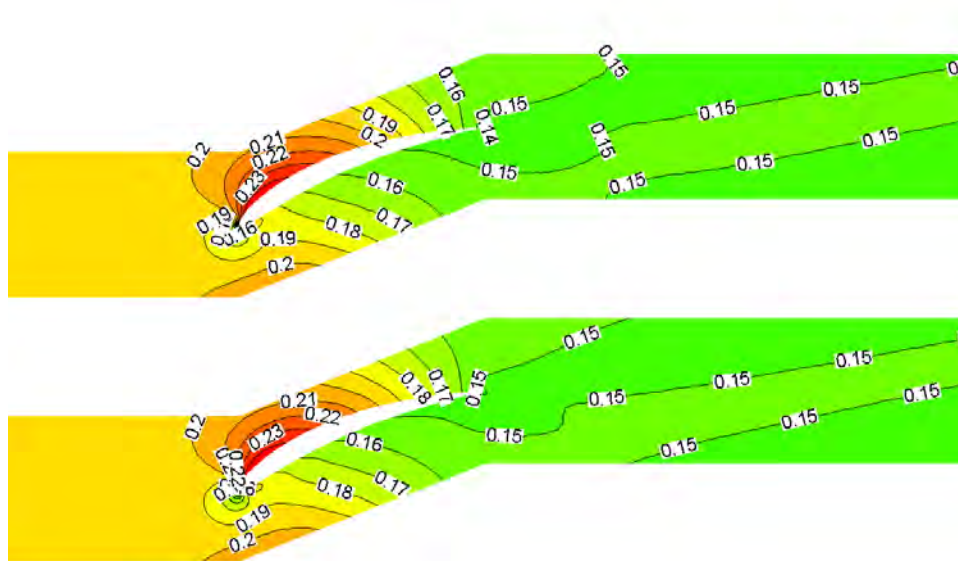
την περύγωση φαίνεται στο σχήμα 3.1. Στο σχήμα 3.2 παρουσιάζεται ο ρυθμός σύγκλισης όλων των εξισώσεων με και χωρίς τη χρήση της προσταθεροποίησης. Σε κάθε περίπτωση (και για όλες οι εξισώσεις) το προσταθεροποιημένο σύστημα εξισώσεων οδηγεί σε ταχύτερη σύγκλιση. Συγκεκριμένα, για σύγκλιση των εξισώσεων κατά 8 τάξεις μεγέθους η σύγκλιση με τις προσταθεροποιημένες εξισώσεις επιτυγχάνεται 3 φορές γρηγορότερα. Η επίλυση των εξισώσεων, προσταθεροποιημένων και μη, οδηγεί σε όμοιο πεδίο ροής, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.3 όπου παρουσιάζεται το πεδίο του αριθμού Mach. Παρόλα αυτά, στην κατανομή του συντελεστή πίεσης στο στερεό τοίχωμα (σχήμα 3.4), το προσταθεροποιημένο σύστημα εξισώσεων μοιάζει να εξομαλύνει 'αφύσικες' υπερακοντίσεις στις ακμές πρόσπτωσης και εκφυγής του περυγίου. Αυτό οφείλεται στον τροποποιημένο όρο της τεχνητής συνεκτικότητας κατά το σχηματισμό του ατριβούς διανύσματος ροής (εξίσωση 2.53).



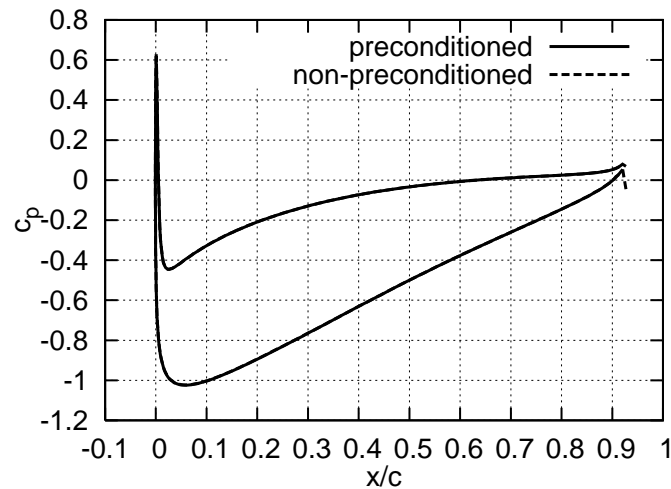
Σχήμα 3.1: Ροή σε 2Δ περύγωση συμπίεστη ($M_{2,ts} = 0.15$, $\alpha_1 = 41^\circ$). Λεπτομέρεια του υπολογιστικού πλέγματος, που αποτελείται αποκλειστικά από τριγωνικά στοιχεία, κοντά στην περύγωση. Η ανάντι και κατάντι έκταση του υπολογιστικού χωρίου φαίνεται στο σχήμα 3.3.



Σχήμα 3.2: Ροή σε 2Δ περύγωση συμπιεστή ($M_{2_{is}} = 0.15$, $\alpha_1 = 41^\circ$). Σύγκριση του ρυθμού σύγκλισης των εξισώσεων ροής με και χωρίς προσταθεροποίηση.



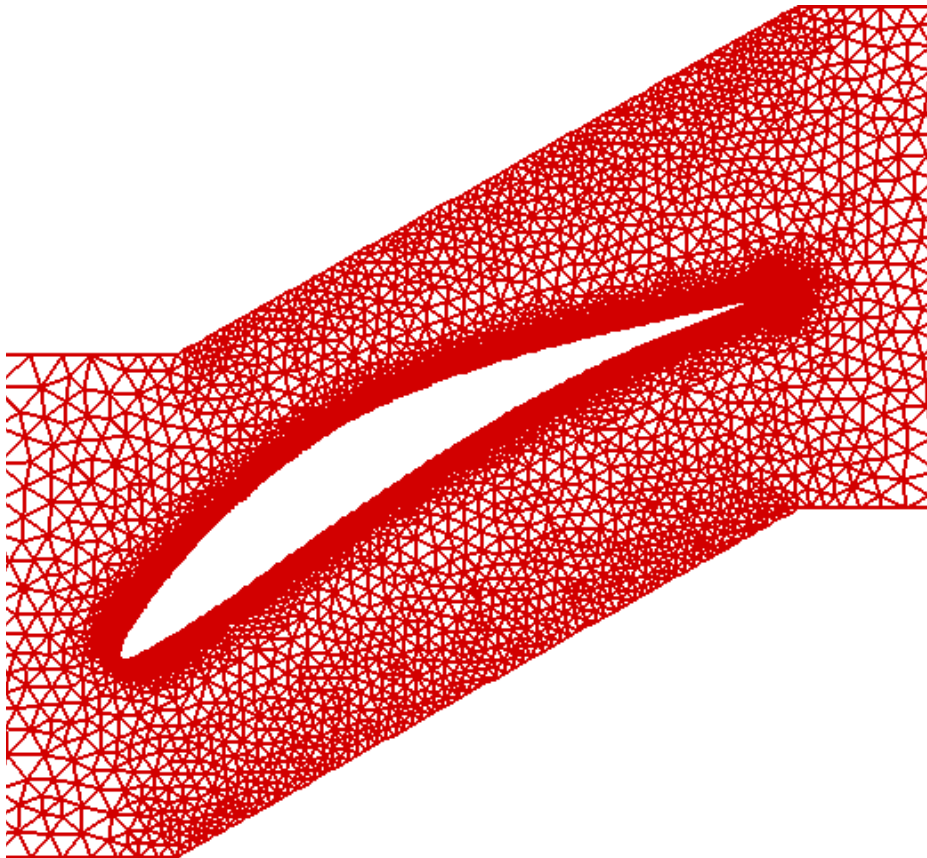
Σχήμα 3.3: Ροή σε 2Δ περύγωση συμπιεστή ($M_{2_{is}} = 0.15$, $\alpha_1 = 41^\circ$). Πεδίο και ισογραμμές αριθμού Mach από την επίλυση με (επάνω) και χωρίς (κάτω) προσταθεροποίηση.



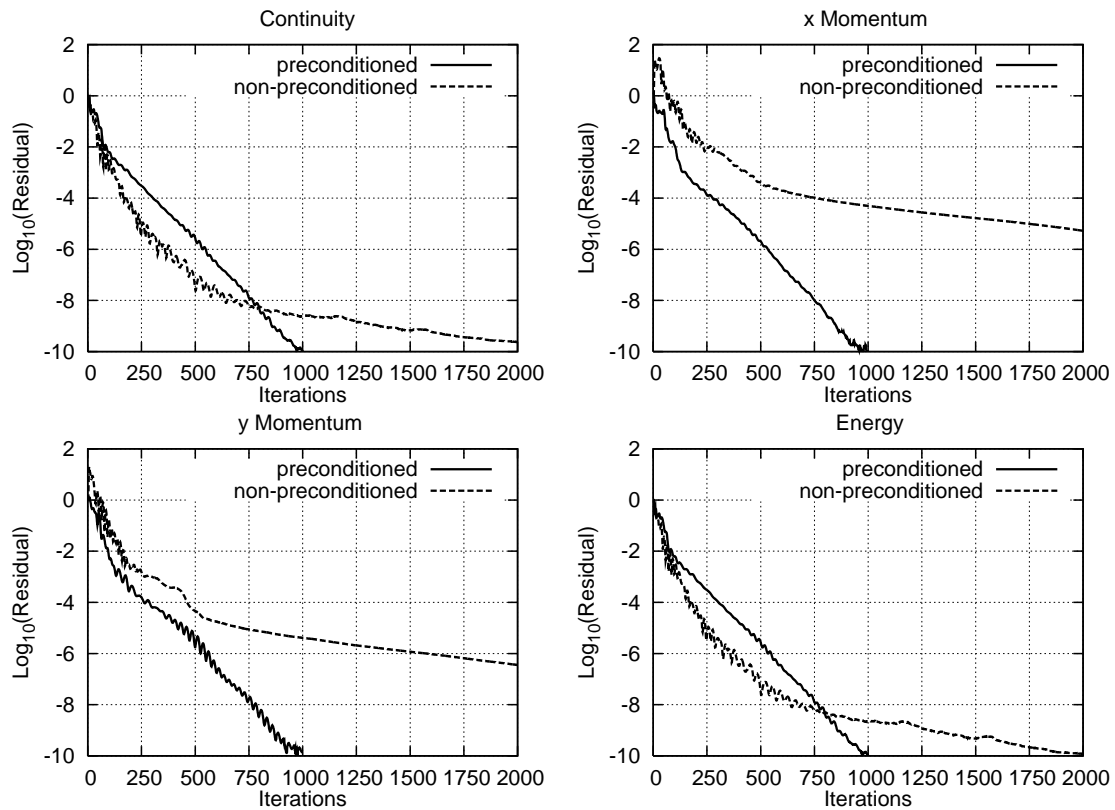
Σχήμα 3.4: Ροή σε 2Δ πτερύγωση συμπιεστή ($M_{2_{is}} = 0.15$, $\alpha_1 = 41^\circ$). Σύγκριση των κατανομών του συντελεστή πίεσης που προκύπτουν από το λογισμικό επίλυσης των εξισώσεων Euler με και χωρίς προσταθεροποίηση.

Αντίστοιχα αποτελέσματα σχετικά με την επιτάχυνση της επίλυσης, σχήμα 3.6, λαμβάνονται και για την περίπτωση τυρβώδους ροής σε μια πτερύγωση συμπιεστή ελεγχόμενης διάχυσης σε συνθήκες $M_{2_{is}} = 0.07$, $\alpha_1 = 41^\circ$, $Re = 9 \times 10^5$ και λόγο αξονικής ταχύτητας πυκνότητας $AVDR = 0.9^1$. Για την επίλυση χρησιμοποιείται το μοντέλο τύρβης μιας εξίσωσης των Spalart-Allmaras με συναρτήσεις τοίχου. Το υπολογιστικό πλέγμα (περίπου 8000 κόμβων και 15000 τριγωνικών στοιχείων) περιλαμβάνει διαστρωματώσεις γύρω από το στερεό τοίχωμα (σχήμα 3.5). Υπενθυμίζεται ότι η εξίσωση του μοντέλου της τύρβης δεν υπόκειται σε προσταθεροποίηση. Η σύγκλιση των εξισώσεων μέσης ροής, όμως, είναι σαφώς γρηγορότερη όταν σ'αυτές επιδρά η προσταθεροποίηση και η τότε προκύπτουσα λύση εμφανώς βελτιωμένη, σχήμα 3.7. Στο σχήμα 3.6 αξίζει να παρατηρηθεί η πορεία σύγκλισης των εξισώσεων της ορμής κατά x και y . Ήδη από τις 1000 επαναλήψεις, το υπόλοιπο των προσταθεροποιημένων εξισώσεων έχει μειωθεί κατά περίπου 10 τάξεις μεγέθους. Αντίθετα, η απουσία προσταθεροποίησης, στον ίδιο αριθμό επαναλήψεων, οδηγεί σε μείωση του υπολοίπου μόνο κατά 4 τάξεις μεγέθους και η κλίση της πορείας σύγκλισης είναι πολύ μικρή.

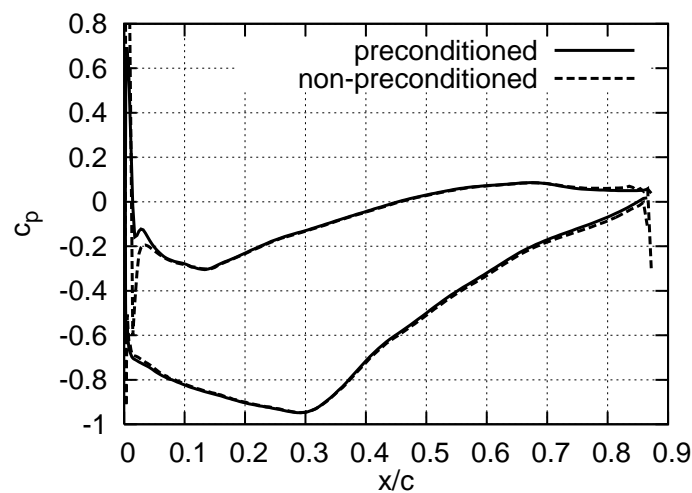
¹Ο τρόπος επίλυσης με $AVDR$ -πάχος σωλήνα ροής περιγράφεται στο παράρτημα Α'.



Σχήμα 3.5: Ροή σε 2Δ πτερύγωση συμπιεστή ($M_{2,iss} = 0.07$, $\alpha_1 = 41^\circ$, $Re = 9 \times 10^5$). Λεπτομέρεια υπολογιστικού πλέγματος κοντά στην αεροτομή.



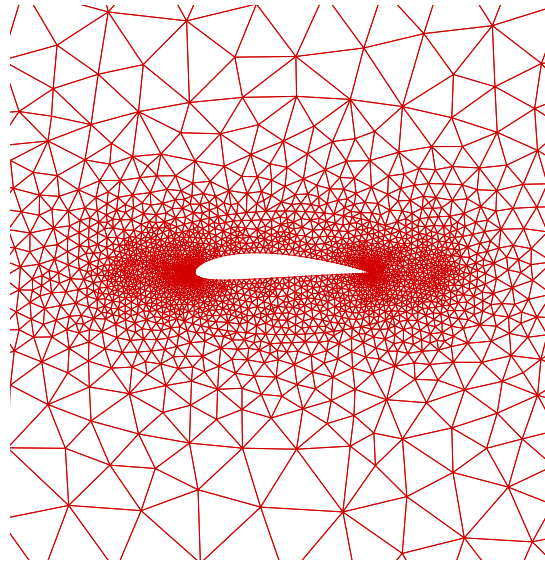
Σχήμα 3.6: Ροή σε 2Δ περύγωση συμπίεστη ($M_{2_{is}}=0.07$, $\alpha_1=41^\circ$, $Re=9\times 10^5$). Σύγκριση του ρυθμού σύγκλισης των εξισώσεων ροής με και χωρίς προσταθεροποίηση.



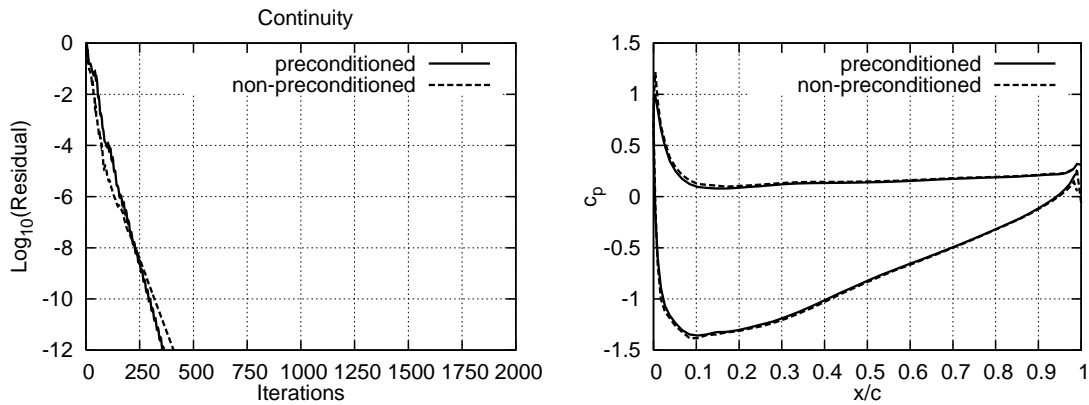
Σχήμα 3.7: Ροή σε 2Δ περύγωση συμπίεστη ($M_{2_{is}}=0.07$, $\alpha_1=41^\circ$, $Re=9\times 10^5$). Σύγκριση της κατανομής του συντελεστή πίεσης από την προκύπτουσα λύση με το λογισμικό με και χωρίς προσταθεροποίηση.

3.1.2 Πρόλεξη Ροής γύρω από 2Δ Μεμονωμένες Αεροτομές

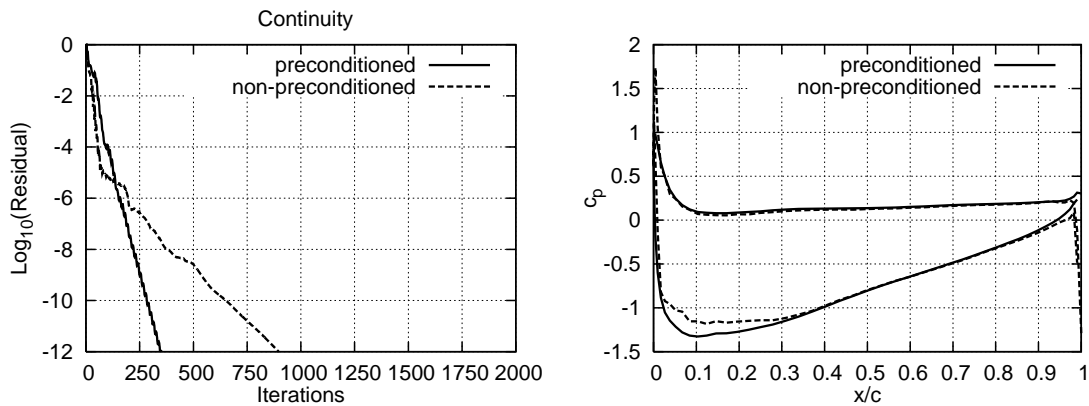
Στην περίπτωση μεμονωμένων αεροτομών, το κέρδος από τη χρήση της προσταθεροποίησης γίνεται ευκολότερα εμφανές δεδομένου ότι οι ταχύτητες ροής σε αυτές μπορεί να είναι ακόμα πιο μικρές. Η πρώτη εφαρμογή σε μεμονωμένες αεροτομές αφορά στην ατριβή ροή γύρω από αεροτομή NACA 4415 (σχήμα 3.8) σε γωνία επ'άπειρο ροής $\alpha_\infty = 4^\circ$ και τρεις διαφορετικές ταχύτητες ροής που αντιστοιχούν σε $M_\infty = 0.2$, 0.05 και 0.001 . Από τα αποτελέσματα, σχήματα 3.9, 3.10 και 3.11, είναι εμφανές ότι όσο ο M_∞ μειώνεται, το κέρδος από τη χρήση της προσταθεροποίησης μεγαλώνει. Πιο συγκεκριμένα, για $M_\infty = 0.2$, το κέρδος από τη χρήση της προσταθεροποίησης είναι μικρό, αλλά υπαρκτό. Στις περιπτώσεις και $M_\infty = 0.05$ και 0.001 , η προσταθεροποίηση εξασφαλίζει από 2 ως 5 φορές ταχύτερη επίλυση (για σύγκλιση 10 τάξεων μεγέθους). Όσον αφορά στο συντελεστή πίεσης, οι λύσεις με την προσταθεροποίηση είναι για όλες τις ταχύτητες ροής 'ομαλές' (χωρίς περίεργες υπερακοντίσεις). Αντίθετα, με το μη-προσταθεροποιημένο σύστημα σε $M_\infty = 0.2$ (σχήμα 3.9) παρουσιάζονται 'αφύσικες' υπερακοντίσεις στις ακμές πρόσπτωσης και εκφυγής οι οποίες αρχίζουν να επεκτείνονται περισσότερο στην περίπτωση $M_\infty = 0.05$ (σχήμα 3.10). Η λύση για $M_\infty = 0.001$ είναι μη-αποδεκτή και παρουσιάζεται απλά και μόνο για λόγους σύγκρισης.



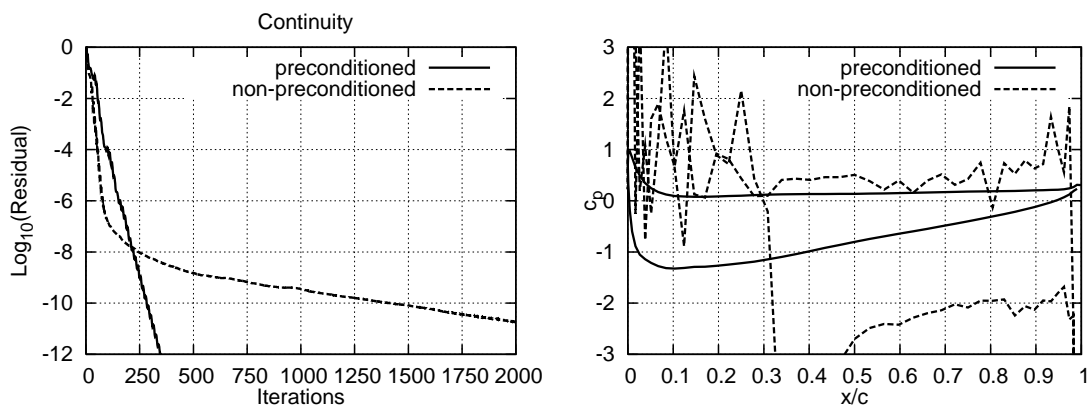
Σχήμα 3.8: Ροή γύρω από μεμονωμένη αεροτομή. Υπολογιστικό πλέγμα γύρω από την αεροτομή.



Σχήμα 3.9: Ροή γύρω από μεμονωμένη αεροτομή ($M_\infty = 0.2$, $\alpha_\infty = 4^\circ$). Σύγκριση του ρυθμού σύγκλισης του υπολοίπου της εξίσωσης συνέχειας (αριστερά) και της κατανομής του συντελεστή πίεσης (δεξιά), με και χωρίς προσταθεροποίηση.

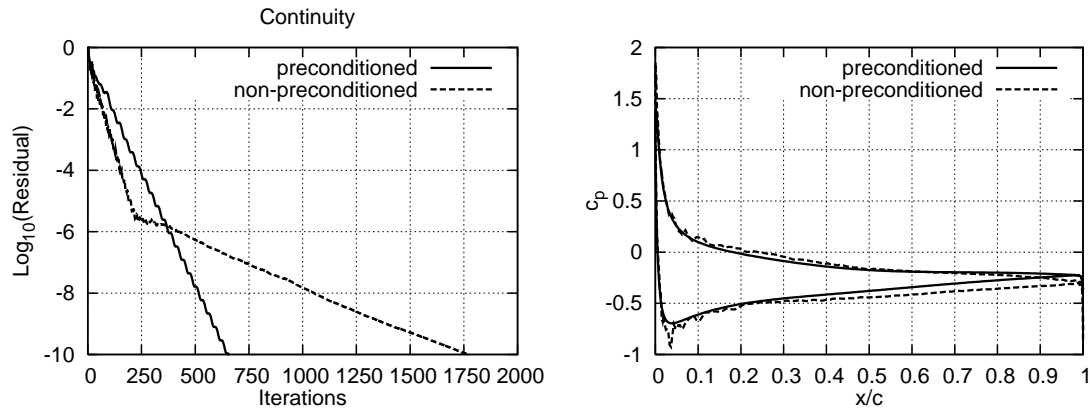


Σχήμα 3.10: Ροή γύρω από μεμονωμένη αεροτομή ($M_\infty = 0.05$, $\alpha_\infty = 4^\circ$). Σύγκριση του ρυθμού σύγκλισης του υπολοίπου της εξίσωσης συνέχειας (αριστερά) και της κατανομής του συντελεστή πίεσης (δεξιά), με και χωρίς προσταθεροποίηση.

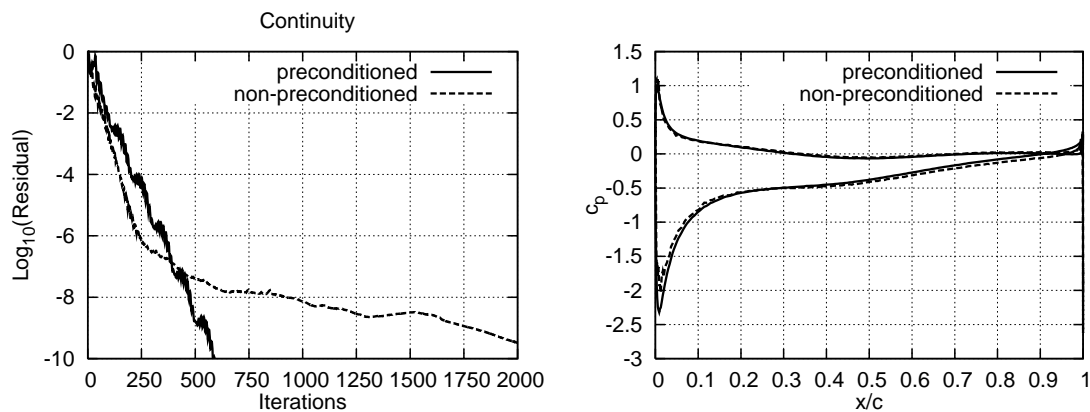


Σχήμα 3.11: Ροή γύρω από μεμονωμένη αεροτομή ($M_\infty = 0.001$, $\alpha_\infty = 4^\circ$). Σύγκριση του ρυθμού σύγκλισης του υπολοίπου της εξίσωσης συνέχειας (αριστερά) και της κατανομής του συντελεστή πίεσης (δεξιά), με και χωρίς προσταθεροποίηση.

Η τελευταία παρουσιαζόμενη περίπτωση στην ενότητα αυτή αφορά στη ροή γύρω από μια συμμετρική αεροτομή, σε συνθήκες $M_\infty = 0.02$ και $\alpha_\infty = 5^\circ$. Για αυτήν την περίπτωση παρουσιάζονται αποτελέσματα για στρωτή ροή με αριθμό Reynolds $Re = 2000$ και τυρβώδη ροή με $Re = 5 \times 10^5$, σχήματα 3.12 και 3.13 αντίστοιχα, όπου και πάλι το προσταθεροποιημένο σύστημα είναι ταχύτερο και ακριβέστερο ως προς το μη-προσταθεροποιημένο.



Σχήμα 3.12: Ροή γύρω από συμμετρική αεροτομή ($M_\infty = 0.02$, $\alpha_\infty = 5^\circ$, $Re = 2000$). Σύγκριση του ρυθμού σύγκλισης του υπολοίπου της εξίσωσης συνέχειας (αριστερά) και της κατανομής του συντελεστή πίεσης (δεξιά), με και χωρίς προσταθεροποίηση.



Σχήμα 3.13: Ροή γύρω από συμμετρική αεροτομή ($M_\infty = 0.02$, $\alpha_\infty = 5^\circ$, $Re = 5 \times 10^5$). Σύγκριση του ρυθμού σύγκλισης του υπολοίπου της εξίσωσης συνέχειας (αριστερά) και του συντελεστή πίεσης (δεξιά), με και χωρίς προσταθεροποίηση.

3.2 Έλεγχος Αποκόλλησης Οριακού Στρώματος

Τα τελευταία χρόνια ο έλεγχος της αποκόλλησης του οριακού στρώματος (ή έλεγχος της ροής όπως συχνά αναφέρεται για συντομία) αποτελεί αντικείμενο ενδιαφέροντος πολλών ερευνητών. Βέβαια, η ιδέα του ελέγχου της ροής δεν είναι νέα, καθώς ουσιαστικά ξεκινά από την ‘ανακάλυψη’ του οριακού στρώματος από τον Prandtl, [206]. Ο έλεγχος της ροής μέσω του ‘χειρισμού’-ελέγχου του οριακού στρώματος στοχεύει στην αποτροπή ή, έστω, καθυστέρηση της αποκόλλησης του, αίροντας ή περιορίζοντας τα αρνητικά αποτελέσματα αυτής (λ.χ. τις αυξημένες απώλειες). Για παράδειγμα, σε ένα αεροσκάφος, ο έλεγχος της ροής γύρω από την πτέρυγα του οδηγεί σε σημαντική μείωση της οπισθέλκουσας, αυξάνει την άνωση και γενικά βελτιώνει την απόδοση του. Στη βιβλιογραφία παρουσιάζονται δύο τρόποι ελέγχου της αποκόλλησης του οριακού στρώματος, [87, 205], ο παθητικός έλεγχος, ο οποίος βασίζεται στην τροποποίηση της γεωμετρίας του στερεού τοιχώματος και ο ενεργητικός έλεγχος ο οποίος βασίζεται στην τροποποίηση της φυσικής της ροής με κατάλληλη αναρρόφηση (suction) ή έγχυση (blowing) ρευστού σε αυτή.

Σχετικά με τον παθητικό έλεγχο, η πλέον χρησιμοποιούμενη τεχνική είναι αυτή των γεννητριών δινών (vortex generators). Οι δίνες που σχηματίζονται προκαλούν μεταφορά ρευστού χαμηλής ενέργειας από την επιφάνεια του σώματος στην κυρίως ροή και το αντίστροφο, δηλαδή μεταφορά ρευστού υψηλής ενέργειας από την κυρίως ροή στην περιοχή πλησίον του στερεού τοιχώματος το οποίο μπορεί να ‘αντέξει’ την αύξηση της πίεσης που λαμβάνει χώρα πριν την εμφάνιση της αποκόλλησης. Η πρώτη συστηματική μελέτη των γεννητριών δινών έγινε από τους Schubauer, Spangenberg, [218]. Έκτοτε, έχουν χρησιμοποιηθεί επιτυχώς σε αρκετές εφαρμογές τις αεροδυναμικής, [209, 156, 157, 101, 220] και με εξαιρετικά αποτελέσματα. Γενικά οι γεννήτριες δινών είναι σχεδιασμένες για να λειτουργούν είτε ως παθητικές, με σταθερό σχήμα και τοποθέτηση στην επιφάνεια ενός σώματος, είτε ως ενεργητικές, με δυνατότητα μεταβολής σχήματος, θέσης και διεύθυνσης ως προς την ροή ανάλογα με αυτή, ‘συσκευές’. Παρόλα αυτά, μερικά από τα επιχειρήματα όσων ασχολούνται με στον ενεργητικό έλεγχο της ροής, είναι ότι η τοποθέτηση γεννητριών δινών εμπεριέχει κινδύνους φθοράς, απαιτεί επιπλέον συντήρηση ενώ σε περιπτώσεις μη-αποκολλημένων ροών η παρουσία τους (λ.χ. σε μια πτέρυγα) προκαλεί επιπλέον αύξηση της οπισθέλκουσας.

Ως προς τον ενεργητικό έλεγχο, ιστορικά η πρώτη μέθοδος ελέγχου αποκόλλησης που χρησιμοποιήθηκε ήταν αυτή της αναρρόφησης, από τον Prandtl για την καθυστέρηση της αποκόλλησης της ροής γύρω από ένα κύλινδρο. Η αναρρόφηση έγκειται στην απομάκρυνση του επιβραδυνόμενου ρευστού από την επιφάνεια και την εκτροπή ρευστού με μεγάλη ορμή από την κυρίως ροή προς την επιφάνεια. Από την άλλη, η έγχυση βασίζεται στην προσθήκη ορμής (με προσθήκη ρευστού) στο ρεύμα του ρευστού κοντά στο στερεό τοίχωμα. Σε κάθε περίπτωση, αυτός ο τρόπος ροής προϋποθέτει τη διάνοιξη οπής στο μελετούμενο αεροδυναμικό σώμα και την ύπαρξη του σχετικού μηχανισμού για τη διακίνηση του προς έγχυση ή αναρρόφηση ρευστού. Στη βιβλιογραφία παρουσιάζονται πολλές εφαρμογές ενεργητικού ελέγχου σε προβλήματα ροών σε αγωγούς ή και αεροτομές, [219, 59, 42], ακόμα και περιπτώσεις βελτιστοποίησης, [237, 76]. Τα τελευταία χρόνια η έμφαση εστιάζεται στη χρήση σύνθετων δεσμών ροής (synthetic jets) [104, 129, 100, 78, 222, 256]. Αυτές χρησιμοποιούν την εναλλασσόμενη αναρρόφηση και εμφύσηση διαμέσου μιας οπής για τη μεταφορά ορμής στη ροή (momentum transfer) με οριακή συνθήκη μηδενικής ροής μάζας (zero net mass flux). Οι σύνθετες δέσμες ροής λαμβάνουν το όνομά τους από το γεγονός ότι η ροή μακριά από την οπή προσομοιά-

ζει με μια δέσμη που 'έρχεται να συν-τεθεί' στη γύρω ροή. Αντίθετα, η ροή κοντά στην οπή παρουσιάζει χρονικές διακυμάνσεις, οι οποίες οφείλονται στην χρονικά εναλλασσόμενη αναρρόφηση-εμφύσηση.

Μέχρι το 2004 οι εφαρμογές ελέγχου ροής με χρήση σύνθετων δεσμών ροής ήταν σχετικά 'μεμονωμένες' και δεν ήταν προφανής η αποτίμηση των μεθοδολογιών που χρησιμοποιούνταν, [216]. Με στόχο να αναλυθούν οι διαδικασίες και υπολογιστικές μέθοδοι για την εφαρμογή σύνθετων δεσμών ροής, το κέντρο ερευνών της NASA (NASA Langley Research Center-LaRC) διοργάνωσε το CFD Validation of Synthetic Jets and Turbulent Separation Control (CFDVAL2004) Workshop. Σε αυτό προτάθηκαν τρεις διαφορετικές περιπτώσεις μελέτης (test cases) οι οποίες μελετήθηκαν πειραματικά στο κέντρο ερευνών NASA LaRC. Από τις εργασίες που παρουσιάστηκαν-συμμετείχαν στο workshop οι περισσότερες περιλαμβάνουν τη χρήση των εξισώσεων Navier-Stokes (RANS & URANS) με χρήση διαφόρων μοντέλων τύρβης μιας ή δύο εξισώσεων ή 'ανάμιξη' RANS-LES και άλλες χρησιμοποιούν ΔΝΣ.

Στη συνέχεια αυτής της ενότητας παρουσιάζεται ο έλεγχος της αποκόλλησης οριακού στρώματος σε έναν αγωγό με διαμόρφωση, που αποτελεί την τρίτη από τις μελετούμενες περιπτώσεις στο προαναφερθέν workshop, [266]. Στόχος της είναι ο έλεγχος της αποκόλλησης του οριακού στρώματος κατά τη μελέτη της ροής πάνω από ένα σώμα τύπου Glauert-Goldschmied, [219].

Οι συνθήκες της ροής είναι επ'άπειρον αριθμός Mach $M_\infty = 0.1$ και αριθμός Reynolds βασισμένος στη χορδή της διαμόρφωσης $Re = 9.36 \times 10^5$. Ως συνθήκες περιβάλλοντος λαμβάνονται αυτές της τυπικής ατμόσφαιρας στο επίπεδο της θάλασσας, δηλαδή $p_\infty = 101,325 \text{ kg/ms}^2$ και $T_\infty = 298 \text{ K}$. Η χαμηλή ταχύτητα ροής ενδείκνυται για τη χρήση της προσταθεροποίησης.

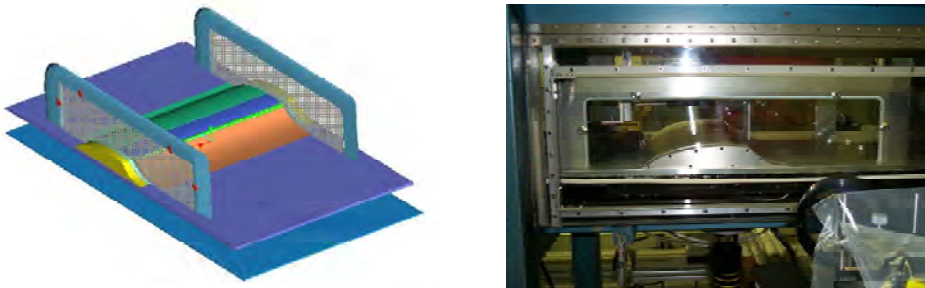
Για τον έλεγχο της αποκόλλησης του οριακού στρώματος χρησιμοποιείται ο λεγόμενος ενεργητικός έλεγχος της ροής. Αυτός έγκειται στην αναρρόφηση (suction) ή έγχυση (blowing) ρευστού στην κύρια ροή. Η περιοδική εναλλαγή αναρρόφησης και έγχυσης αποτελεί τη τεχνική των σύνθετων δεσμών ροής (synthetic jet). Στην παρούσα μελέτη, οι περιπτώσεις ροής ή ελέγχου ροής που ενδιαφέρουν είναι οι εξής:

1. Πρόλεξη ροής χωρίς έλεγχο.
2. Πρόλεξη ροής ελεγχόμενης μέσω χρονικά μόνιμης αναρρόφησης.
3. Πρόλεξη ροής ελεγχόμενης μέσω εναλλαγής αναρρόφησης και έγχυσης.

Για κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις παρουσιάζεται σύγκριση με τα πειραματικά αποτελέσματα, αλλά και τα αποτελέσματα των υπόλοιπων ερευνητών που συμμετείχαν στο workshop². Το χρησιμοποιούμενο υπολογιστικό πλέγμα είναι δεδομένο, λαμβάνεται από την ιστοσελίδα του Workshop, [266] και αποτελείται από περίπου 116000 κόμβους και 230000 τριγωνικά στοιχεία. Ο έλεγχος της αποκόλλησης του οριακού στρώματος γίνεται με την αναρρόφηση ή έγχυση αέρα στο πεδίο ροής μέσω μιας οπής στη διαμόρφωση. Κάτω από αυτήν υπάρχει ένα κωδωνοειδές δοχείο το οποίο χρησιμοποιείται για τη διακίνηση του αέρα, ουσιαστικά μέσω μιας μεμβράνης που βρίσκεται στη βάση του (σχήμα 3.15).

²Οι εργασίες αυτές εμπεριέχονται στα πρακτικά του workshop, [51].

Η πειραματική διάταξη περιλαμβάνει το σώμα ανάμεσα σε δύο γυάλινες πλάκες, σχήμα 3.14. Η ροή θεωρείται διδιάστατη παρά το γεγονός ότι η παρουσία των πλευρικών πλακών επηρεάζει το πεδίο ροής στην περιοχή κοντά σε αυτές.



Σχήμα 3.14: Έλεγχος αποκόλλησης οριακού στρώματος. Γεωμετρία διαμόρφωσης (αριστερά) και διάταξη πειραματικών μετρήσεων (δεξιά), [266].



Σχήμα 3.15: Έλεγχος αποκόλλησης οριακού στρώματος. Γεωμετρία διαμόρφωσης (αριστερά) και λεπτομέρεια στη θέση της οπής (δεξιά) από το υπολογιστικό πλέγμα.

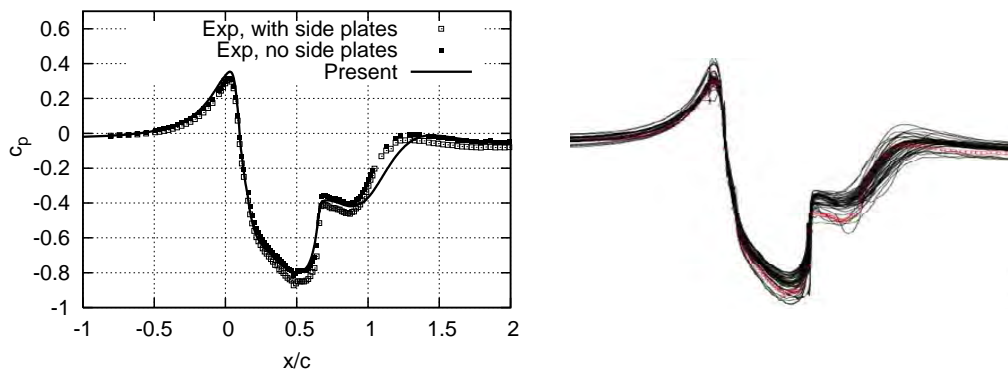
3.2.1 Πρόλεξη Ροής Χωρίς Έλεγχο

Η πρώτη μελετούμενη περίπτωση αφορά στην πρόλεξη του πεδίου της μόνιμης ροής στη δεδομένη γεωμετρία (αγωγός με διαμόρφωση) χωρίς κανέναν έλεγχο ροής (πρακτικά αυτό σημαίνει μηδενική ταχύτητα στο κωδωνοειδές δοχείο, ως να μην υπήρχε καθόλου οπή).

Στο αριστερό μέρος του σχήματος 3.16 παρουσιάζεται η κατανομή του συντελεστή πίεσης στην περιοχή της διαμόρφωσης η οποία συγκρίνεται με τα αντίστοιχα πειραματικά αποτελέσματα. Για αυτήν την περίπτωση, τα πειράματα επαναλήφθηκαν αφαιρώντας τις γυάλινες πλευρικές πλάκες της διάταξης κι έτσι στην αριστερή πλευρά του σχήματος υπάρχουν δύο πειραματικές καμπύλες. Από αυτές αποδεικνύεται ότι οι πλευρικές πλάκες της πειραματικής διάταξης επηρεάζουν τις μετρήσεις (wall effect), παρά το γεγονός ότι οι υπολογισμοί γίνονται θεωρώντας διδιάστατη ροή. Έτσι, όπως λογικά αναμένεται, τα υπολογιστικά αποτελέσματα

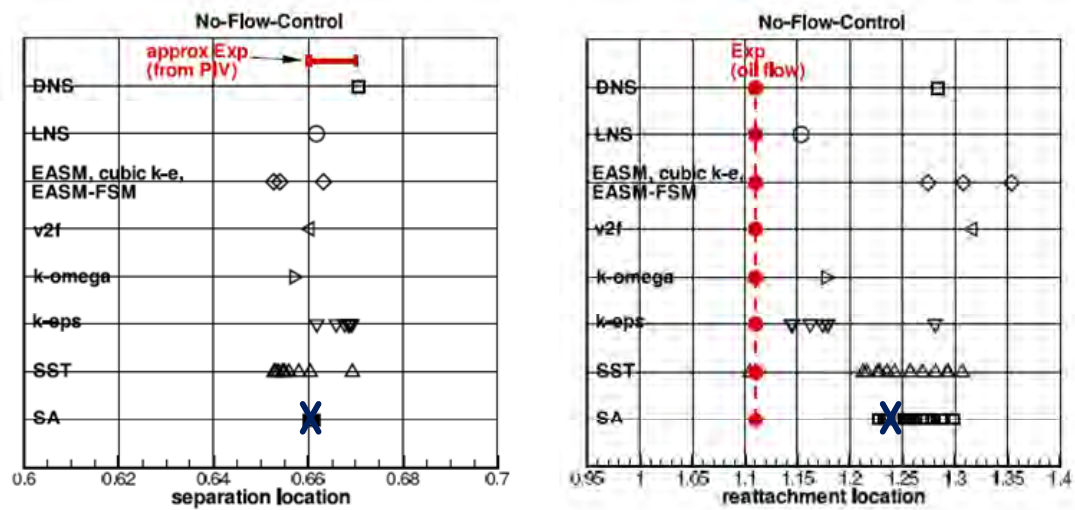
είναι πολύ πιο κοντά στις αντίστοιχες μετρήσεις χωρίς τις πλευρικές πλάκες. Ακόμα όμως και σε σύγκριση με τις μετρήσεις παρουσία πλακών οι υπολογισμοί έχουν την ίδια μορφή και απόκλιση από το πείραμα με αυτήν που παρουσιάστηκε και από άλλους υπολογισμούς³ (3.16 δεξιά).

Όσον αφορά την πρόλεξη των σημείων αποκόλλησης και επανακόλλησης του οριακού στρώματος (σχήμα 3.17, με το σύμβολο X) οι υπολογισμοί προβλέπουν σωστά (εντός των ορίων που προβλέπει και το πείραμα) τη θέση αποκόλλησης. Σχετικά με την πρόβλεψη της θέσης επανακόλλησης, αυτή απέχει μεν από την αντίστοιχη πειραματική αλλά σε σύγκριση με τους υπόλοιπους υπολογισμούς που επίσης χρησιμοποίησαν το μοντέλο SA είναι πολύ ικανοποιητική. Οι ισογραμμές ταχύτητας στην περιοχή της επανακόλλησης για τους υπολογισμούς και το πείραμα φαίνονται στο σχήμα 3.18.

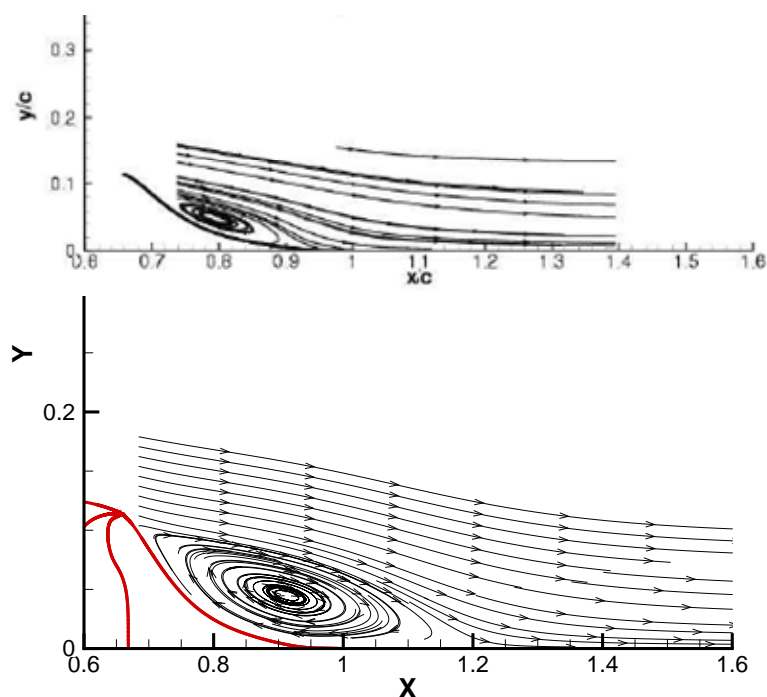


Σχήμα 3.16: Πρόλεξη ροής χωρίς έλεγχο. Σύγκριση των υπολογισμών της παρούσας διατριβής (αριστερά) και άλλων ερευνητών (δεξιά) με τα πειραματικά αποτελέσματα, [51].

³Άλλων ερευνητών όπως παρουσιάζονται στο [51].



Σχήμα 3.17: Πρόλεξη ροής χωρίς έλεγχο. Θέση αποκόλλησης (αριστερά) και επανακόλλησης (δεξιά) του οριακού στρώματος (σύμβολο X) συγκρινόμενη με άλλους υπολογισμούς και τα πειραματικά αποτελέσματα από το ίδιο workshop.



Σχήμα 3.18: Πρόλεξη ροής χωρίς έλεγχο. Ισογραμμές ταχύτητας στην περιοχή επανακόλλησης του οριακού στρώματος όπως προκύπτουν από το πείραμα (επάνω) και τον υπολογισμό που πραγματοποιήθηκε στην παρούσα διατριβή (κάτω), χωρίς κοινή κλίμακα μήκους στους δύο άξονες.

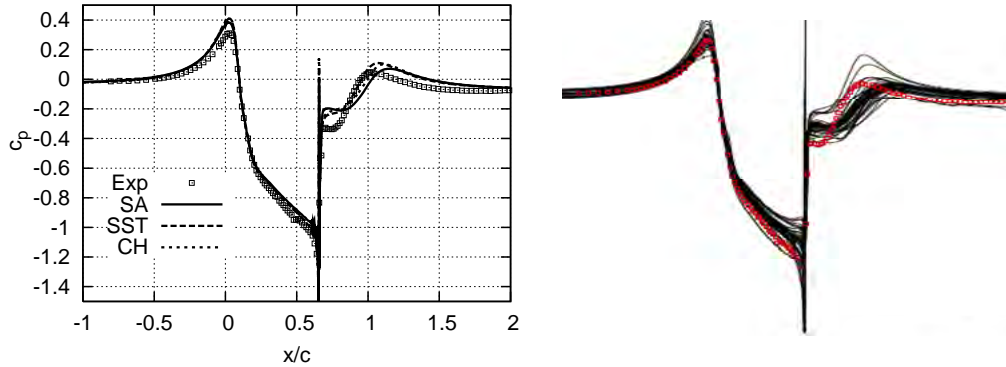
3.2.2 Έλεγχος Ροής με Χρονικά Μόνιμη Αναρρόφηση

Η δεύτερη περίπτωση πρόλεξης ροής είναι αυτή του ελέγχου με τη χρονικά μόνιμη αναρρόφηση. Εδώ, ο έλεγχος εφαρμόζεται στην οπή θεωρώντας σταθερό ρυθμό αναρρόφησης 0.01518 kg/s . Σε επίπεδο υλοποίησης στο λογισμικό επίλυσης, αυτός ο ρυθμός αναρρόφησης μεταφράζεται ως οριακή συνθήκη εξόδου για την y εξίσωση της ορμής στο κάτω (οριζόντιο) τμήμα του κωδωνοειδούς δοχείου.

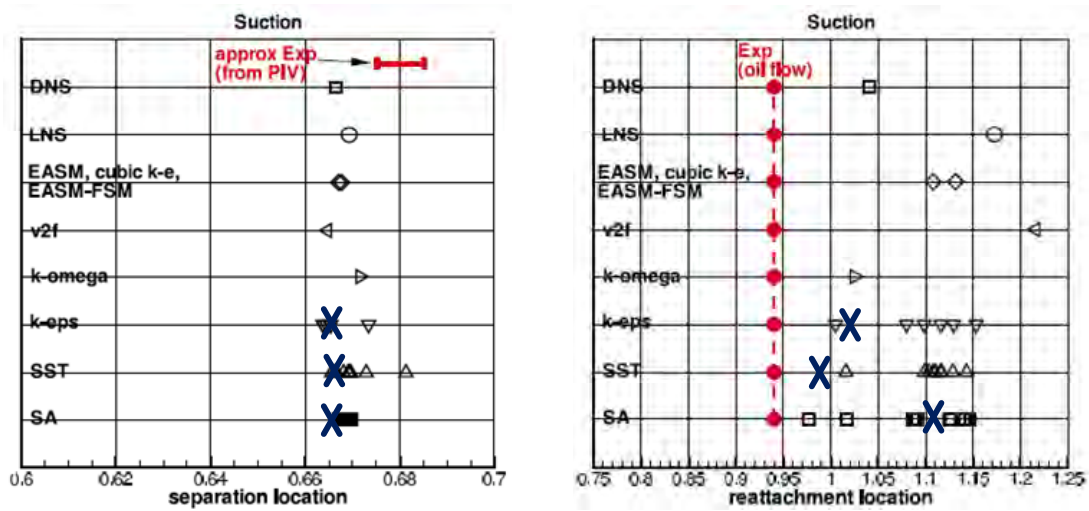
Σε αυτή την περίπτωση ελέγχεται η συμπεριφορά τριών μοντέλων τύρβης και πιο συγκεκριμένα του Spalart-Allmaras (SA), [228], του $k-\epsilon$ του Chien (CH), [52], και του $k-\omega$ SST, [171], όλα στην εκδοχή χαμηλών αριθμών Reynolds. Η προκύπτουσες κατανομές του συντελεστή πίεσης από τους τρεις υπολογισμούς είναι σχεδόν όμοιες και αντίστοιχης μορφής με τους υπολογισμούς άλλων ερευνητών, [51] (σχήμα 3.19).

Η θέση αποκόλλησης του οριακού στρώματος είναι περίπου ίδια και για τα τρία μοντέλα τύρβης και στην ίδια περιοχή με τους υπόλοιπους υπολογισμούς, έστω κι αν δεν συμπίπτει ακριβώς με την προβλεπόμενη από το πείραμα περιοχή (σχήμα 3.20, αριστερά). Όσον αφορά στη θέση επανακόλλησης, η καλύτερη πρόβλεψη γίνεται από το μοντέλο $k-\omega$ SST το οποίο πλησιάζει περισσότερο στα πειραματικά δεδομένα. Ακόμα και σε σύγκριση με τα υπόλοιπα αποτελέσματα με χρήση του μοντέλου τύρβης SST, η παρούσα πρόβλεψη είναι καλύτερη. Οι αντίστοιχες ισογραμμές ταχύτητας στην περιοχή της επανακόλλησης φαίνονται στο σχήμα

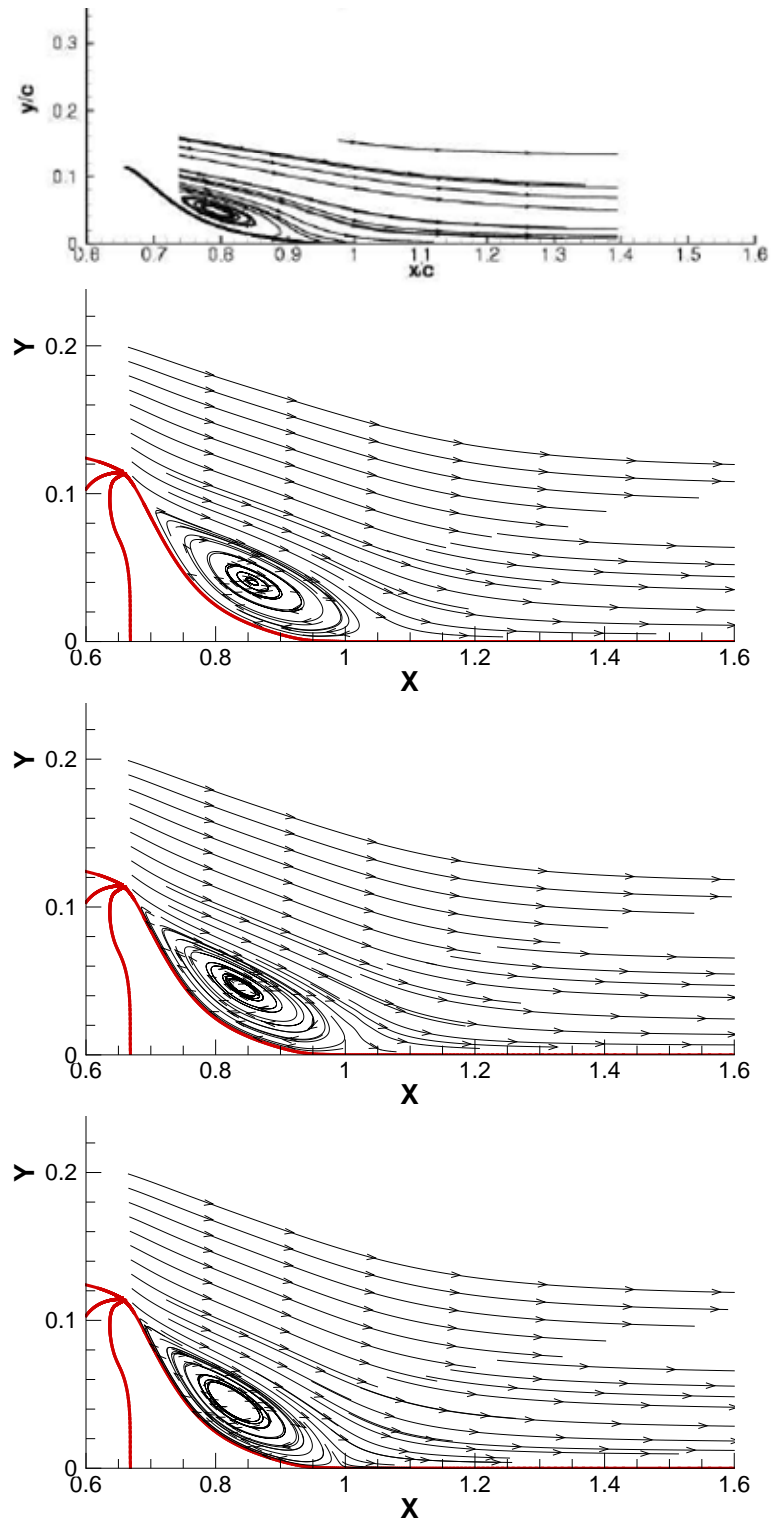
3.21.



Σχήμα 3.19: Έλεγχος ροής με χρονικά μόνιμη αναρρόφηση. Σύγκριση των υπολογισμών της παρούσας διατριβής (αριστερά) και άλλων ερευνητών (δεξιά) με τα πειραματικά αποτελέσματα, [51].



Σχήμα 3.20: Έλεγχος ροής με χρονικά μόνιμη αναρρόφηση. Θέση αποκόλλησης (αριστερά) και επανακόλλησης (δεξιά) του οριακού στρώματος (σύμβολα X και για τα τρία μοντέλα τύρβης) συγκρινόμενη με άλλους υπολογισμούς και τα πειραματικά αποτελέσματα από το ίδιο workshop.

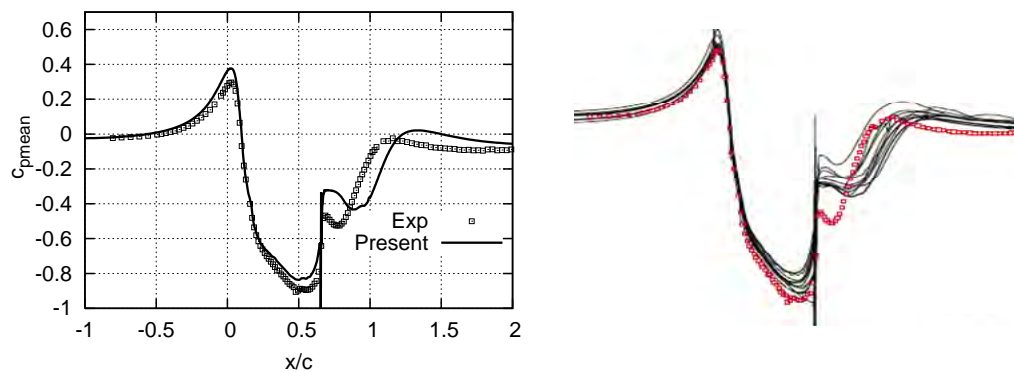


Σχήμα 3.21: Έλεγχος ροής με χρονικά μόνιμη αναρρόφηση. Ισογραμμές ταχύτητας στην περιοχή επανακόλλησης του οριακού στρώματος όπως προκύπτουν από το πείραμα (επάνω) και τους υπολογισμούς με τα τρία μοντέλα τύρβης, SA, CH, SST (δεύτερο, τρίτο και τέταρτο σχήμα αντίστοιχα, χωρίς κοινή κλίμακα μήκους στους δύο άξονες).

3.2.3 Έλεγχος Ροής με Περιοδική Εναλλαγή Αναρρόφησης Έγχυσης

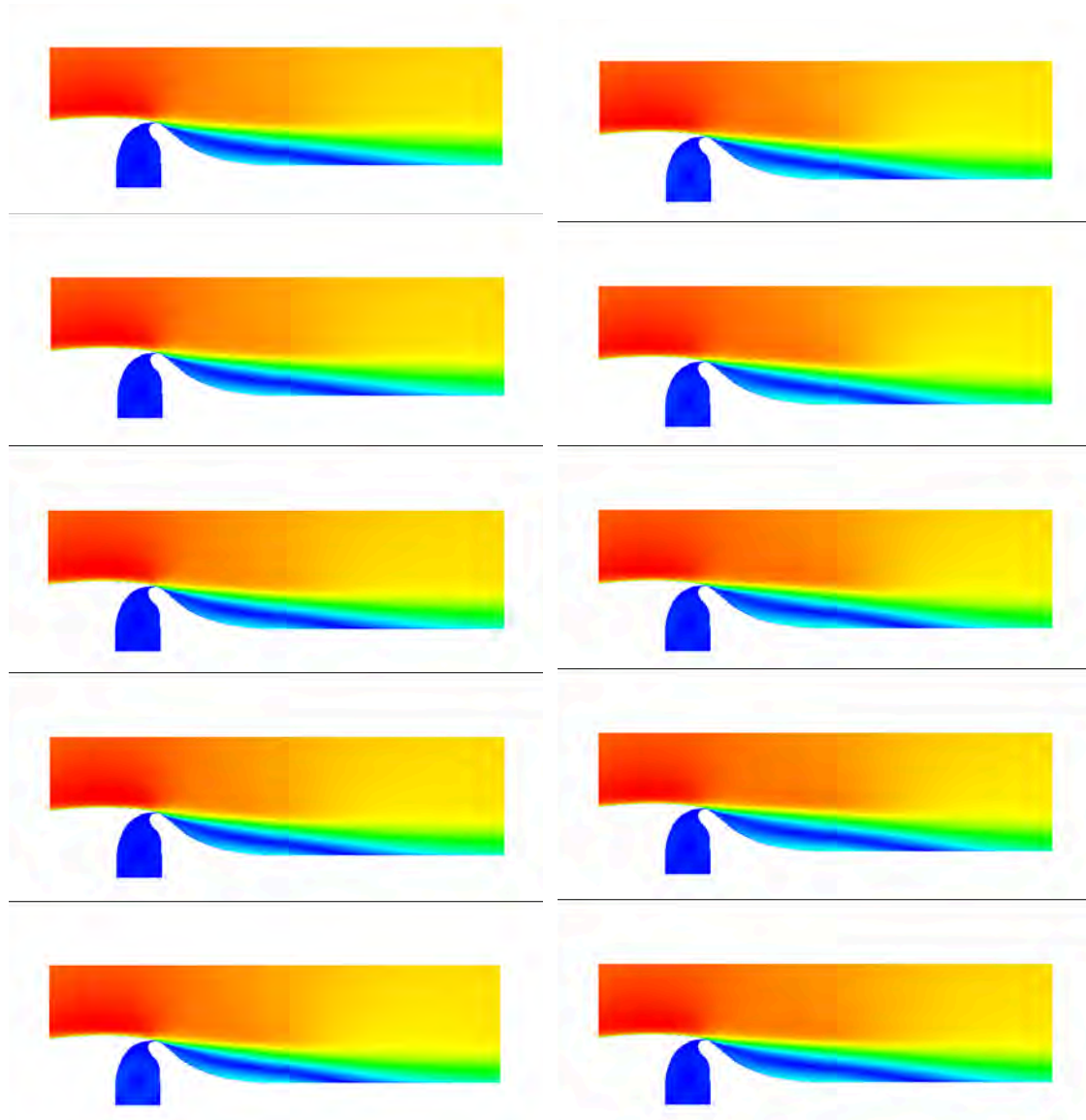
Η τρίτη περίπτωση ροής αφορά στην περιοδική εναλλαγή αναρρόφησης και έγχυσης με συχνότητα $f = 135.5 \text{ Hz}$ και συντελεστή παροχής μάζας (mass flux coefficient) $C_m = 0.111\%^4$. Κατ' αναλογία με την προηγούμενη περίπτωση ελέγχου και πάλι η οριακή συνθήκη για την y εξίσωση της ορμής τίθεται στο κάτω μέρος του κωδωνοειδές δοχείου, όπου ανάλογα με τη φάση του ελέγχου είναι είτε συνθήκη εισόδου (φάση έγχυσης) είτε συνθήκη εξόδου (φάση αναρρόφησης).

Η χρονικά μέση κατανομή του συντελεστή πίεσης σε σύγκριση με τα πειραματικά και προλέξεις άλλων υπολογισμών φαίνεται στο σχήμα 3.22, όπου οι υπολογισμοί (της παρούσας διατριβής και άλλων ερευνητών) είναι όμοιοι. Τέλος, η εξέλιξη του περιοδικού φαινομένου της αναρρόφησης και έγχυσης ανά $1/10$ της περιόδου παρουσιάζεται στο σχήμα 3.22.



Σχήμα 3.22: Έλεγχος ροής με περιοδική εναλλαγή αναρρόφησης έγχυσης. Σύγκριση των υπολογισμών της παρούσας διατριβής (αριστερά) και άλλων ερευνητών (δεξιά) με τα πειραματικά αποτελέσματα από το ίδιο workshop.

⁴ Στην προκειμένη περίπτωση ο συντελεστής παροχής μάζας ορίζεται ως $C_m = \frac{\rho h u_{jet,rms}^2}{\frac{1}{2} \rho \infty u_\infty^2}$ με h το πλάτος της οπής.

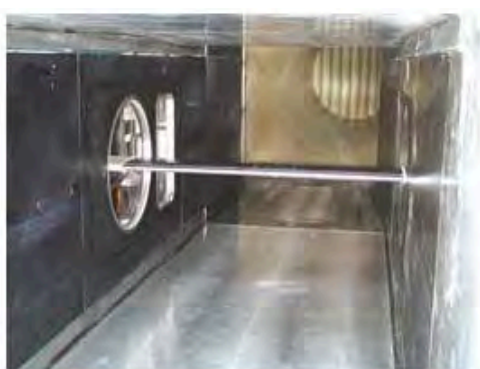


Σχήμα 3.23: Έλεγχος ροής με περιοδική εναλλαγή αναρρόφησης έγχυσης. Πεδίο αριθμού Mach κατά τη διάρκεια μιας περιόδου ανά $1/10 T$ αυτής, πρώτα η αριστερή στήλη και μετά η δεξιά. Η πρώτη εικόνα (επάνω αριστερά) αντιστοιχεί στη φάση αναρρόφησης. Οι κεντρικές εικόνες, αριστερά και δεξιά αντιστοιχούν στις στιγμές μέγιστης παροχής αναρρόφησης και έγχυσης αντίστοιχα.

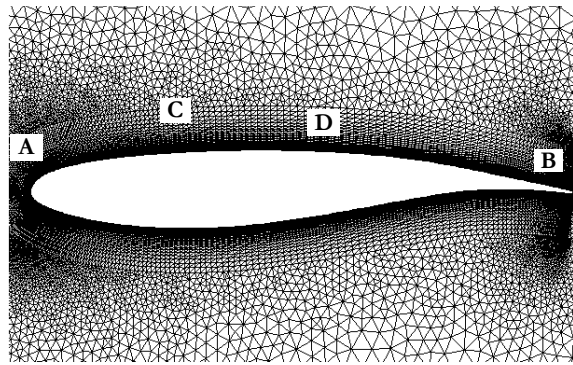
3.3 Αλληλεπίδραση Οριακού Στρώματος με Κύμα Κρούσης

Η επόμενη εφαρμογή αφορά στη χρονικά μη-μόνιμη αλληλεπίδραση οριακού στρώματος με κύμα κρούσης (γνωστή ως buffet) στη μεμονωμένη αεροτομή OAT15A. Σε μια διηχητική ροή, ως buffet ορίζονται οι αστάθειες της ροής που προκαλούνται από την αλληλεπίδραση του οριακού στρώματος με το κύμα κρούσης, ενώ οι δομικοί κραδασμοί αναφέρονται συχνά με τον όρο buffeting. Οι δύο όροι είναι αλληλένδετοι (και συχνά χρησιμοποιούνται αδιακρίτως) καθώς το buffeting είναι η δομική απόκριση σε μια αεροδυναμική διέγερση (buffet). Τα αεροδυναμικά φαινόμενα τα οποία μπορούν να προκαλέσουν διέγερση μιας κατασκευής σχετίζονται με τη διακύμανση πίεσης σε μια φυσαλίδα αποκόλλησης, ένα στρόβιλο ή ένα κύμα κρούσης και την περιοχή αποκόλλησης. Τα φαινόμενα αυτά είναι φυσικά και αυτοσυντηρούμενα και μπορούν να παρατηρηθούν τόσο σε μεμονωμένες αεροτομές, όσο και σε βαθμίδες στροβιλομηχανών. Δεδομένου ότι η παρουσία buffeting μειώνει την επιτρεπόμενη περιοχή λειτουργίας ενός αεροδυναμικού σώματος και είναι δυνατό να οδηγήσει ακόμα και στην καταστροφή του, στη βιβλιογραφία παρουσιάζονται τρόποι για την αντιμετώπιση του (μη-εμφάνιση) με χρήση συστημάτων ελέγχου, όπως οι γεννήτριες δινών ή ένα κινούμενο τμήμα στην ακμή εκφυγής μιας πτέρυγας (flap actuator), [50, 145, 41]. Η περίπτωση ροής γύρω από την OAT15A, που εδώ μελετάται, ανήκει στην κατηγορία του διηχητικού buffet με αστάθειες της ροής που προέρχονται από την παρουσία κύματος κρούσης και αποκολλημένου οριακού στρώματος. Το φαινόμενο αυτό για τη συγκεκριμένη αεροτομή έχει μελετηθεί πειραματικά στη διηχητική αεροδυναμική σήραγγα S3 της ONERA διαστάσεων $0.8 \times 0.76 \text{ m}^2$ (σχήμα 3.24), αλλά και υπολογιστικά από αρκετούς ερευνητές, [68, 234, 235]. Το πειραματικό μοντέλο της αεροτομής OAT15A είχε μήκος χορδής $c = 230 \text{ mm}$, λόγο πάχους προς χορδή $t/c = 12.5\%$ και πάχος ακμής εκφυγής ίσο με $0.5\%c$.

Η ροή γύρω από την αεροτομή είναι διηχητική, με επ'άπειρον ταχύτητα $M_\infty = 0.73$, αριθμό Reynolds βασισμένο στη χορδή $Re = 3 \times 10^6$. Οι υπολογισμοί πραγματοποιήθηκαν για γωνίες της επ'άπειρον ταχύτητας από $\alpha_\infty = 2.5^\circ$ ως $\alpha_\infty = 4.5^\circ$, με χρήση του μοντέλου τύρβης Spalart-Allmaras και δεδομένο σημείο μετάβασης από στρωτή σε τυρβώδη ροή στο $x/c = 7\%$, στις πλευρές υπερπίεσης και υποπίεσης. Το υπολογιστικό πλέγμα, λεπτομέρεια του οποίου φαίνεται στο σχήμα 3.25, δημιουργήθηκε με διαστρωματώσεις κοντά στο στερεό τοίχωμα και την τεχνική του προελαύνοντος μετώπου στο υπόλοιπο χωρίο και αποτελείται από περίπου 37000 κόμβους και 75000 τρίγωνα.

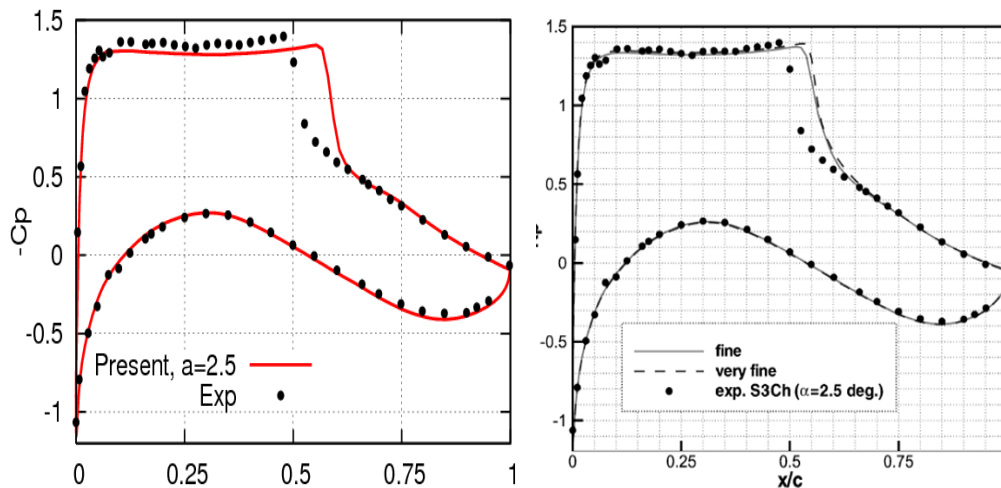


Σχήμα 3.24: Διηχητική σήραγγα S3-ONERA, [272].



Σχήμα 3.25: Μη-δομημένο υπολογιστικό πλέγμα τριγωνικών στοιχείων γύρω από την αεροτομή OAT15A. Διακρίνονται οι διαστρωματώσεις που επιβάλλει η ανάγκη επαρκούς ανάλυσης του αναπτυσσόμενου οριακού στρώματος.

Οι υπολογισμοί ξεκινούν από τη χρονικά μόνιμη ροή σε γωνία $\alpha_\infty = 2.5^\circ$ όπου είναι δυνατή η σύγκριση με τα αποτελέσματα αριθμητικών υπολογισμών της εργασίας [68] και τα αντίστοιχα πειραματικά [272]. Όπως φαίνεται στο σχήμα 3.26 οι δύο υπολογισμοί δίνουν ίδια αποτελέσματα και διαφέρουν από το πείραμα ως προς τη θέση του κύματος.

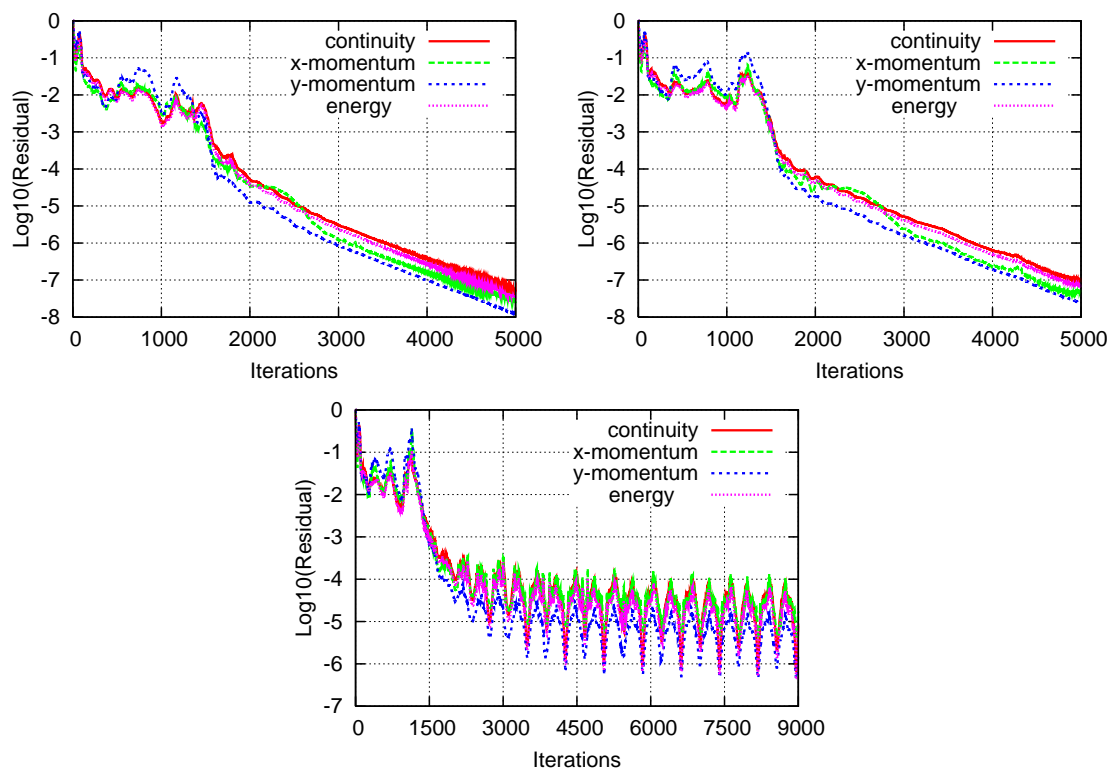


Σχήμα 3.26: Ροή γύρω από την αεροτομή OAT15A. Χρονικά μόνιμη ροή ($\alpha_\infty = 2.5^\circ$). Σύγκριση συντελεστή πίεσης από τους υπολογισμούς της παρούσας διατριβής (αριστερά) και της εργασίας [68] (δεξιά) με τα πειραματικά αποτελέσματα.

Σύμφωνα με τα πειραματικά αποτελέσματα, το φαινόμενο της αλληλεπίδρασης οριακού στρώματος με το κύμα κρούσης πρωτοεμφανίζεται σε γωνία επ'άπειρον ροής $\alpha_\infty = 3.25^\circ$, αλλά τα πειραματικά δεδομένα είναι διαθέσιμα για γωνία $\alpha_\infty = 3.25^\circ$ όπου η θέση του κύματος πάλλεται σε εύρος $0.2c$ με συχνότητα 69 Hz .

Προκειμένου να ελεγχθεί και υπολογιστικά αυτό, αρχικά παρουσιάζονται υπολογισμοί σε

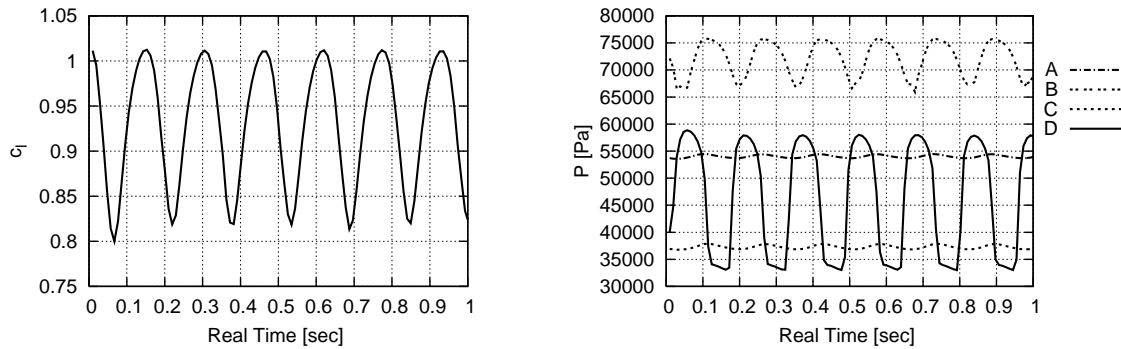
μικρότερες γωνίες ροής. Ειδικότερα στο σχήμα 3.27 φαίνεται ο ρυθμός σύγκλισης των εξισώσεων ροής για τρεις γωνίες $\alpha_\infty = 2.5^\circ, 3^\circ$ και 3.5° . Ενώ για τις δύο πρώτες τιμές της α_∞ οι εξισώσεις συγκλίνουν επαρκώς, στις $\alpha_\infty = 3.5^\circ$ παρατηρείται ταλάντωση του υπολοίπου των εξισώσεων (στον ψευδο-χρόνο) γεγονός που αποτελεί ένδειξη ότι έχει ξεκινήσει το χρονικά μη-μόνιμο φαινόμενο της αλληλεπίδρασης οριακού στρώματος με το κύμα κρούσης (buffet).



Σχήμα 3.27: Ροή γύρω από την αεροτομή OAT15A. Υπόθεση χρονικά μόνιμης ροής και χρήση αντίστοιχου λογισμικού για την αριθμητική πρόλεξη. Ρυθμός σύγκλισης εξισώσεων ροής για επ'άπειρον γωνία ροής $\alpha_\infty = 2.5^\circ$ (επάνω αριστερά), $\alpha_\infty = 3^\circ$ (επάνω δεξιά) και $\alpha_\infty = 3.5^\circ$ (κάτω). Το τελευταίο σχήμα υποδεικνύει ότι σε γωνία $\alpha_\infty = 3.5^\circ$ η υπόθεση χρονικά μόνιμης ροής δεν ευσταθεί και η χρήση λογισμικού πρόλεξης μη-μόνιμων ροών είναι επιβεβλημένη.

Έτσι, για $\alpha_\infty = 3.5^\circ$ οι υπολογισμοί συνεχίζονται θεωρώντας μη-μόνιμη ροή. Στο σχήμα 3.28 παρουσιάζονται η μεταβολή του συντελεστή άνωσης και της πίεσης σε 4 σημεία γύρω από την αεροτομή (σημεία A, B, C, D σχήματος 3.25) με το χρόνο. Φαίνεται ότι αρκούν το πολύ δύο περίοδοι από την έναρξη του χρονικά μη-μόνιμου υπολογισμού, με αρχικοποίηση το 'ασύγκλιτο' χρονικά μόνιμο πεδίο (σχήμα 3.27 κάτω), ώστε να επιτευχθεί περιοδική πρόλεξη. Από αυτά υπολογίζεται η συχνότητα του φαινομένου σύμφωνα με την παρούσα πρόλεξη, η οποία ισούται με 65.6 Hz . Η τιμή αυτή είναι ικανοποιητική συγκρινόμενη με την πειραματικά υπολογιζόμενη τιμή των 69 Hz . Σε άλλους αριθμητικούς υπολογισμούς της βιβλιογραφίας [68, 234], η τιμή της συχνότητας συνήθως υπερεκτιμάται ($73 - 74 \text{ Hz}$).

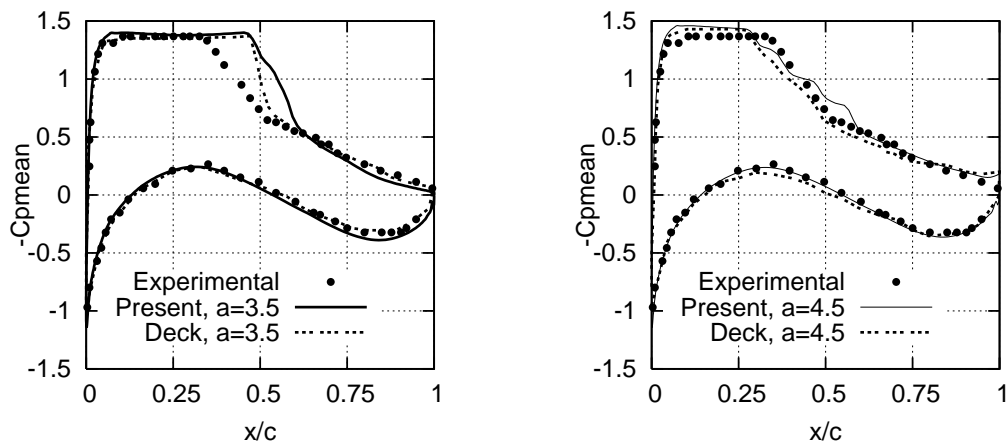
Οι μη-μόνιμοι υπολογισμοί επαναλαμβάνονται για $\alpha_\infty = 4.5^\circ$ προκειμένου να ελεγχθεί ο ισχυ-



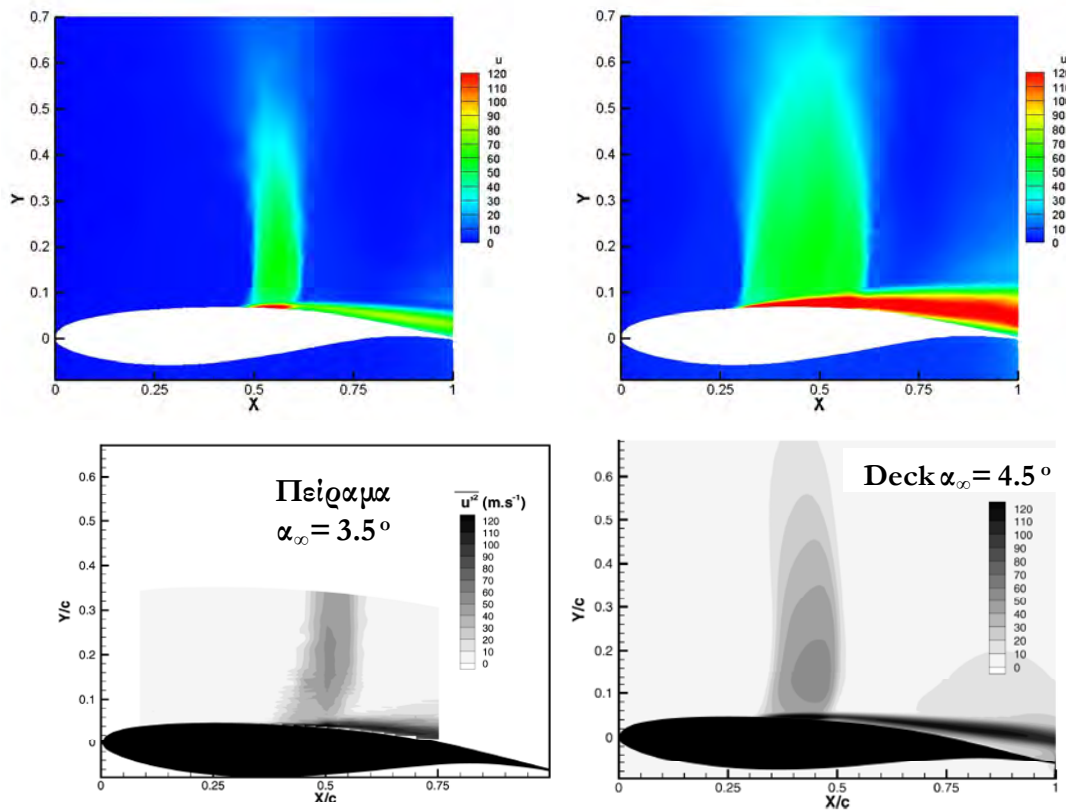
Σχήμα 3.28: Ροή γύρω από την αεροτομή OAT15A. Αλληλεπίδραση οριακού στρώματος με κύμα κρούσης. Χρονική μεταβολή του συντελεστή άνωσης (αριστερά) και της πίεσης καταγεγραμμένης σε 4 κόμβους κοντά στην αεροτομή, για επ'άπειρον γωνία ροής $\alpha_\infty = 3.5^\circ$.

ρισμός του Deck, [68] ότι υπολογισμοί που προκύπτουν $\alpha_\infty = 4.5^\circ$ πλησιάζουν περισσότερο στα πειραματικά αποτελέσματα των $\alpha_\infty = 3.5^\circ$. Συγκρίσεις της χρονικά μέσης τιμής του συντελεστή πίεσης με τους υπολογισμούς τις εργασίας [68] και τα πειραματικά αποτελέσματα για τις δύο αυτές γωνίες φαίνονται στο σχήμα 3.29 από όπου πράγματι συνάγεται ότι οι υπολογισμοί για $\alpha_\infty = 4.5^\circ$ προεγγίζουν καλύτερα τα πειραματικά αποτελέσματα. Αυτό αποδεικνύεται και από τις συγκρίσεις του rms πεδίου της οριζόντιας ταχύτητας (σχήμα 3.30).

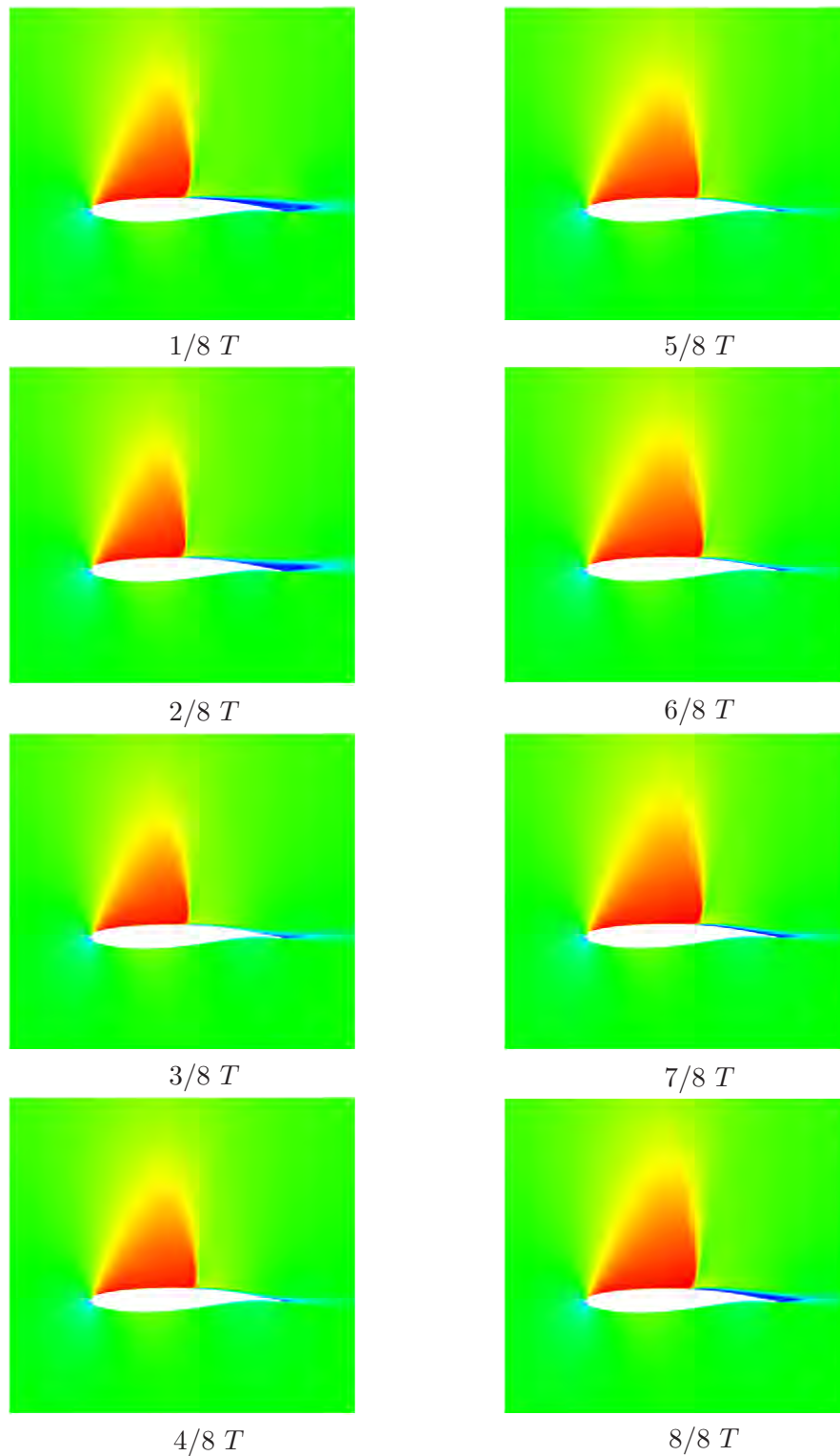
Τέλος, στα σχήματα 3.31 και 3.32 παρουσιάζεται η εξέλιξη (με διαδοχικές εικόνες του πεδίου του αριθμού Mach) του μη-μόνιμου φαινομένου σε χρονικές στιγμές ανά $1/8$ της περιόδου για $\alpha_\infty = 3.5^\circ$ και $\alpha_\infty = 4.5^\circ$, αντίστοιχα. Οι παρουσιάζόμενες λύσεις αντιστοιχούν στα ληφθέντα αποτελέσματα αφού έχει επιτευχθεί η περιοδική συμπεριφορά της πρόλεξης.



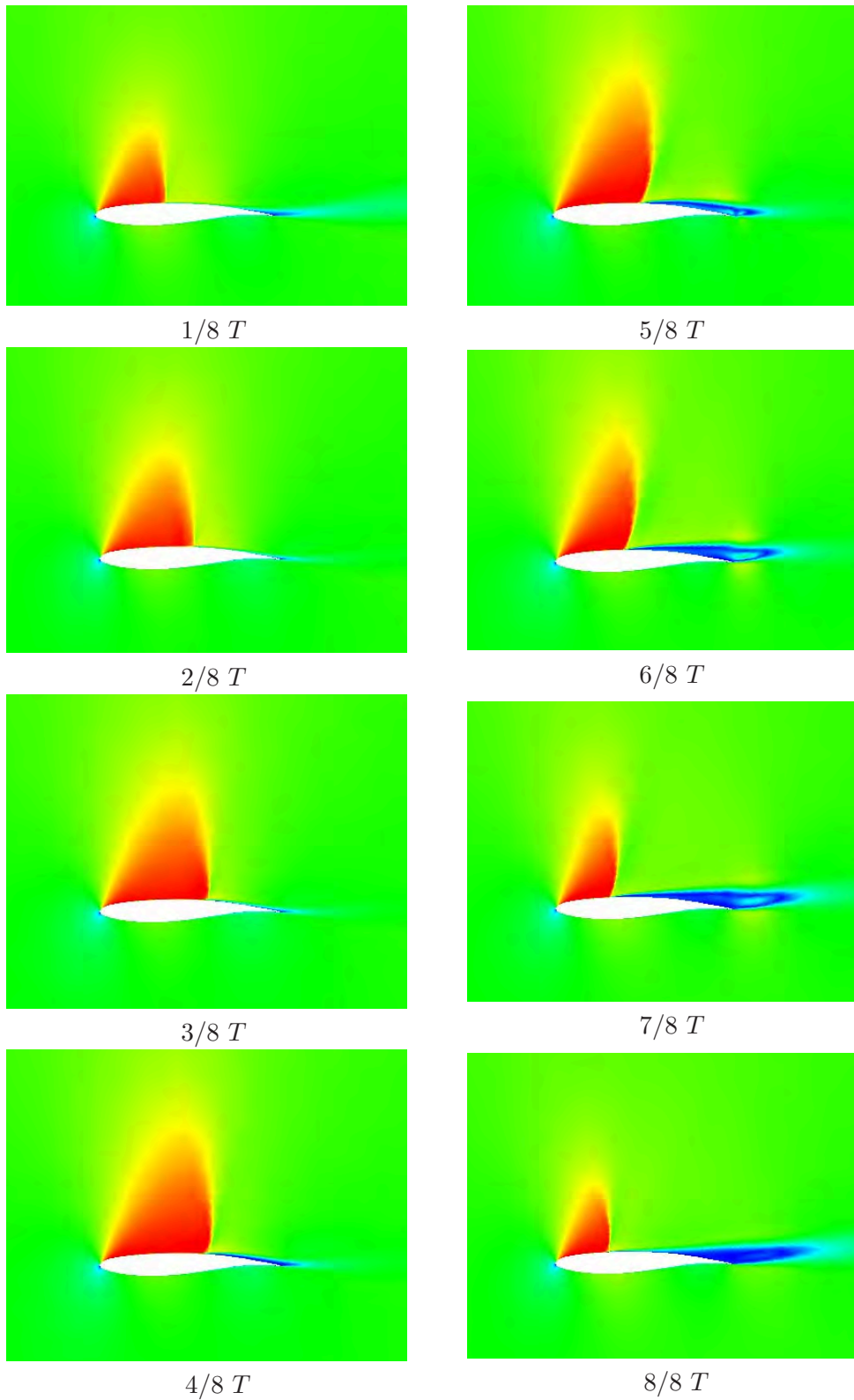
Σχήμα 3.29: Ροή γύρω από την αεροτομή OAT15A. Αλληλεπίδραση οριακού στρώματος με κύμα κρούσης. Σύγκριση χρονικά μέσης τιμής του συντελεστή πίεσης με τους υπολογισμούς τις εργασίας [68] (συμβολίζεται ως Deck) και τα πειραματικά αποτελέσματα για επ'άπειρον γωνία ροής $\alpha_\infty = 3.5^\circ$ (αριστερά) και $\alpha_\infty = 4.5^\circ$ (δεξιά).



Σχήμα 3.30: Ροή γύρω από την αεροτομή OAT15A. Αλληλεπίδραση οριακού στρώματος με κύμα κρούσης. Σύγκριση του rms πεδίου της οριζόντιας ταχύτητας των υπολογισμών της παρούσας διατριβής για γωνίες της επ'άπειρον ταχύτητας ίσες με $\alpha_\infty = 3.5^\circ$ (επάνω αριστερά) και $\alpha_\infty = 4.5^\circ$ (επάνω δεξιά) με τα πειραματικά για $\alpha_\infty = 3.5^\circ$ (κάτω αριστερά) και τους υπολογισμούς της εργασίας [68] για 4.5° (κάτω δεξιά). Η χρωματική παλέτα είναι αναγκαστικά διαφορετική δεδομένου ότι τα δύο κάτω σχήματα έχουν ληφθεί αυτούσια από τη βιβλιογραφία.



Σχήμα 3.31: Ροή γύρω από την αεροτομή OAT15A. Αλληλεπίδραση οριακού στρώματος με κύμα κρούσης. Εξέλιξη φαινομένου κατά τη διάρκεια μιας περιόδου για γωνία της επ'άπειρον ταχύτητας $\alpha_{\infty} = 3.5^{\circ}$. Η χρωματική κλίμακα είναι κοινή για όλες τις χρονικές στιγμές, με τιμές του αριθμού Mach από 0.1 έως 1.3, ανά 0.1.



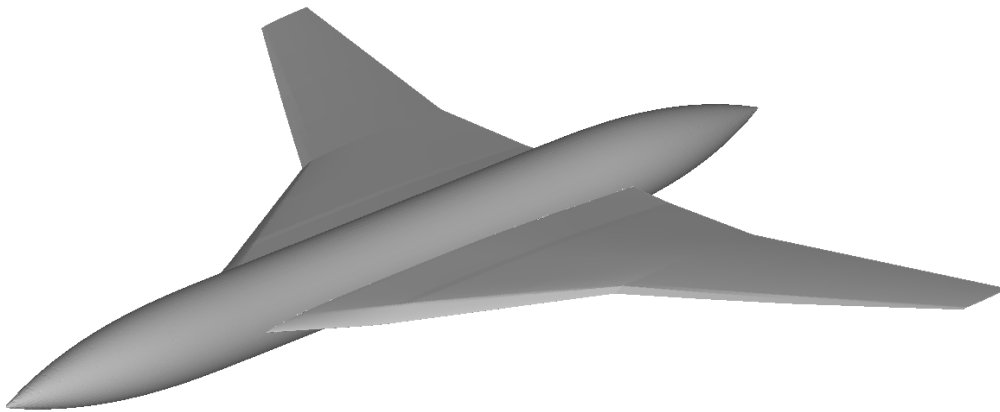
Σχήμα 3.32: Ροή γύρω από την αεροτομή OAT15A. Αλληλεπίδραση οριακού στρώματος με κύμα κρούσης. Εξέλιξη φαινομένου κατά τη διάρκεια μιας περιόδου για γωνία της επ'άπειρον ταχύτητας $\alpha_{\infty} = 4.5^{\circ}$. Η χρωματική κλίμακα είναι κοινή για όλες τις χρονικές στιγμές, με τιμές του αριθμού Mach από 0.1 έως 1.3, ανά 0.1.

3.4 Ανάλυση Ατριβούς Ροής Γύρω από Αεροσκάφος

Η επόμενη εφαρμογή, αφορά στην ατριβή ροή γύρω από ένα αεροσκάφος. Πρόκειται για ένα Supersonic Business Jet (SBJ) (σχήμα 3.33) το οποίο μελετάται στη φάση απογείωσης, όπου η επ'άπειρον ταχύτητα ροής είναι $M_\infty=0.3$. Οι μελετούμενες γωνίες της επ'άπειρον ταχύτητας κυμαίνονται από $\alpha_\infty = 5^\circ$ ως $\alpha_\infty = 25^\circ$ με βήμα 5° . Οι υπολογισμοί πραγματοποιούνται με το λογισμικό με προσταθεροποίηση, το κέρδος από τη χρήση της προσταθεροποίησης σε σύγκριση με την απουσία αυτής είναι μεν μικρό, για τη δεδομένη ταχύτητα ροής, αλλά υφίσταται.

Το υπολογιστικό πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε για τους υπολογισμούς⁵ αποτελείται από περίπου 1250000 κόμβους και 6550000 τετράεδρα. Οι παραπάνω διαστάσεις αφορούν μάλιστα στο μισό πεδίο ροής, στο οποίο πραγματοποιήθηκαν οι υπολογισμοί θεωρώντας συνθήκες συμμετρίας.

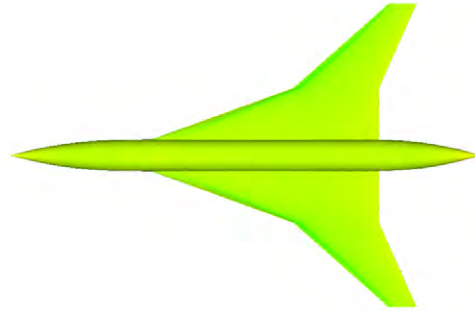
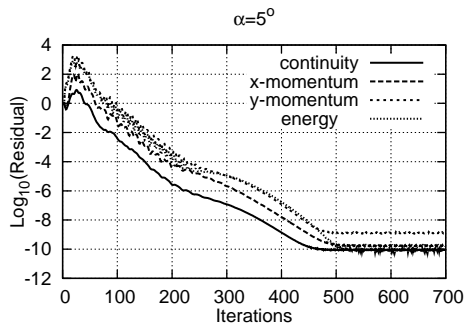
Στα σχήματα με τα αποτελέσματα που ακολουθούν (3.34 ως 3.38) παρουσιάζονται ο ρυθμός σύγκλισης των χρονικά μόνιμων εξισώσεων ροής και η επιφανειακή κατανομή πίεσης για κάθε μελετούμενη γωνία. Στις μικρές τιμές της γωνίας η επίλυση-σύγκλιση θεωρώντας χρονικά μόνιμη ροή είναι ικανοποιητική. Αντίθετα, στις μεγαλύτερες γωνίες (20° και 25°) το υπόλοιπο των εξισώσεων ταλαντούται χωρίς επαρκή σύγκλιση και γι'αυτό οι υπολογισμοί συνεχίζονται θεωρώντας μη-μόνιμη ροή. Σε αυτές τις δύο περιπτώσεις, οι τιμές του συντελεστή άνωσης (που φαίνονται στο σχήμα 3.39) υπολογίζονται με βάση τις τιμές που ελήφθησαν στις τελευταίες πραγματικές χρονικές επαναλήψεις (μέση τιμή αυτών), όταν πλέον είχε επιτευχθεί περιοδική πρόλεξη. Το γεγονός αυτό δικαιολογεί και τις αποκλίσεις που παρουσιάζονται σε σύγκριση με άλλους υπολογισμούς⁶ οι οποίοι έγιναν με θεώρηση χρονικά μόνιμης ροής.



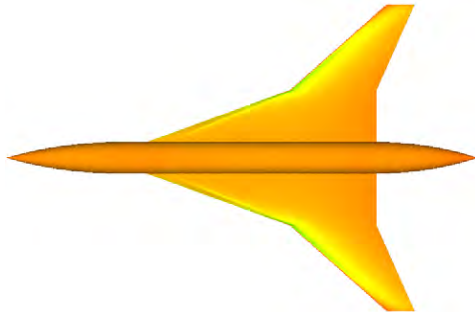
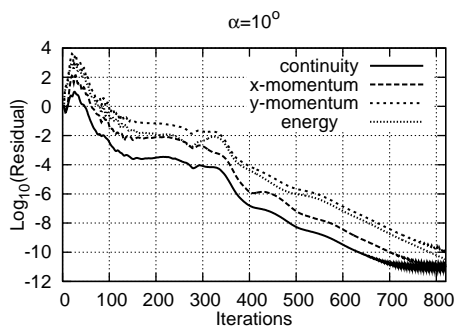
Σχήμα 3.33: Ατριβής ροή γύρω από αεροσκάφος. Μορφή αεροσκάφους.

⁵ Δεδομένα από συνεργαζόμενη ερευνητική ομάδα, στο πλαίσιο του έργου HISAC, Contract no AIP4-CT-2005-516132, [270], που χρηματοδοτήθηκε από την Ευρωπαϊκή Ένωση.

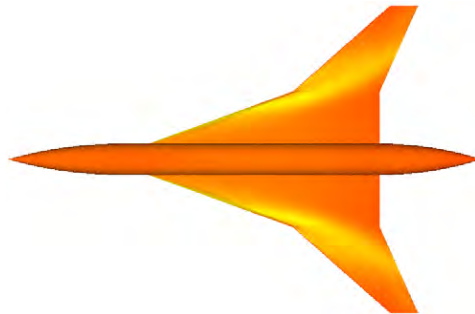
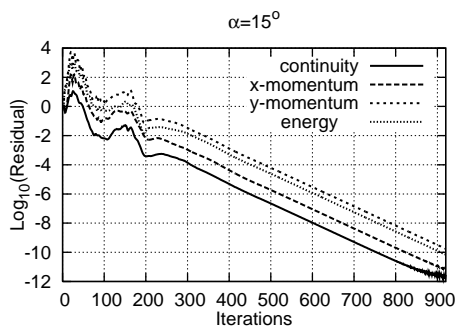
⁶ Αποτελέσματα από συνεργαζόμενη ερευνητική ομάδα στο πλαίσιο του έργου HISAC.



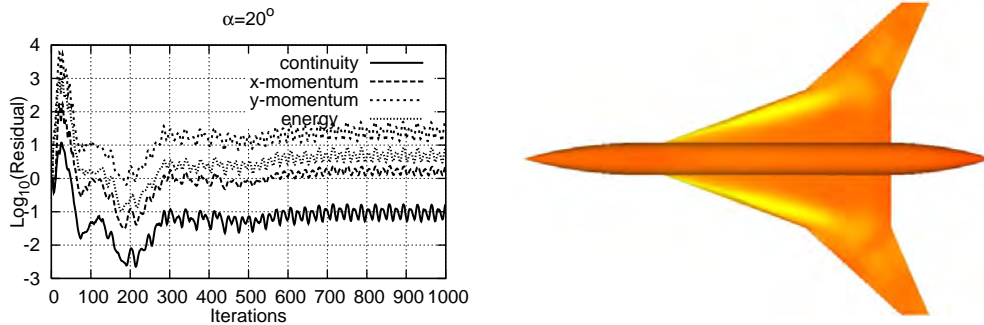
Σχήμα 3.34: Ατριβής ροή γύρω από αεροσκάφος. Πορεία σύγκλισης των χρονικά-μόνιμων εξισώσεων Euler και επιφανειακή κατανομή πίεσης (αεροσκάφος σε κάτοψη) για γωνία επ'άπειρο ροής $\alpha_\infty = 5^\circ$.



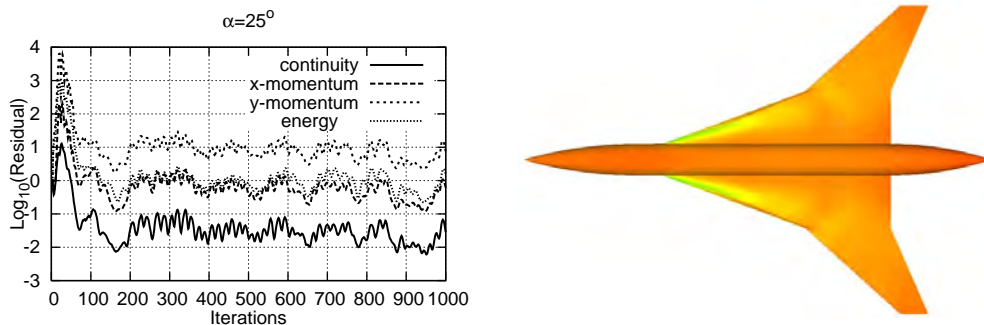
Σχήμα 3.35: Ατριβής ροή γύρω από αεροσκάφος. Πορεία σύγκλισης των χρονικά-μόνιμων εξισώσεων Euler και επιφανειακή κατανομή πίεσης (αεροσκάφος σε κάτοψη) για γωνία επ'άπειρο ροής $\alpha_\infty = 10^\circ$.



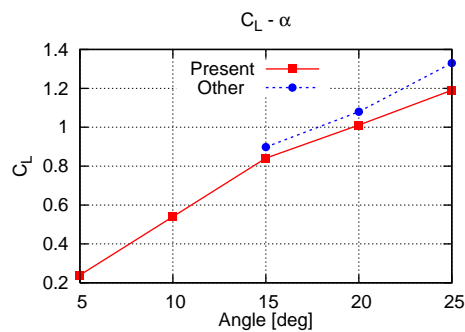
Σχήμα 3.36: Ατριβής ροή γύρω από αεροσκάφος. Πορεία σύγκλισης των χρονικά-μόνιμων εξισώσεων Euler και επιφανειακή κατανομή πίεσης (αεροσκάφος σε κάτοψη) για γωνία επ'άπειρο ροής $\alpha_\infty = 15^\circ$.



Σχήμα 3.37: Ατριβής ροή γύρω από αεροσκάφος. Πορεία σύγκλισης των χρονικά-μόνιμων εξισώσεων Euler και επιφανειακή κατανομή πίεσης (αεροσκάφος σε κάτοψη) για γωνία επ'άπειρο ροής $\alpha_\infty = 20^\circ$.



Σχήμα 3.38: Ατριβής ροή γύρω από αεροσκάφος. Πορεία σύγκλισης των χρονικά-μόνιμων εξισώσεων Euler και επιφανειακή κατανομή πίεσης (αεροσκάφος σε κάτοψη) για γωνία επ'άπειρο ροής $\alpha_\infty = 25^\circ$.

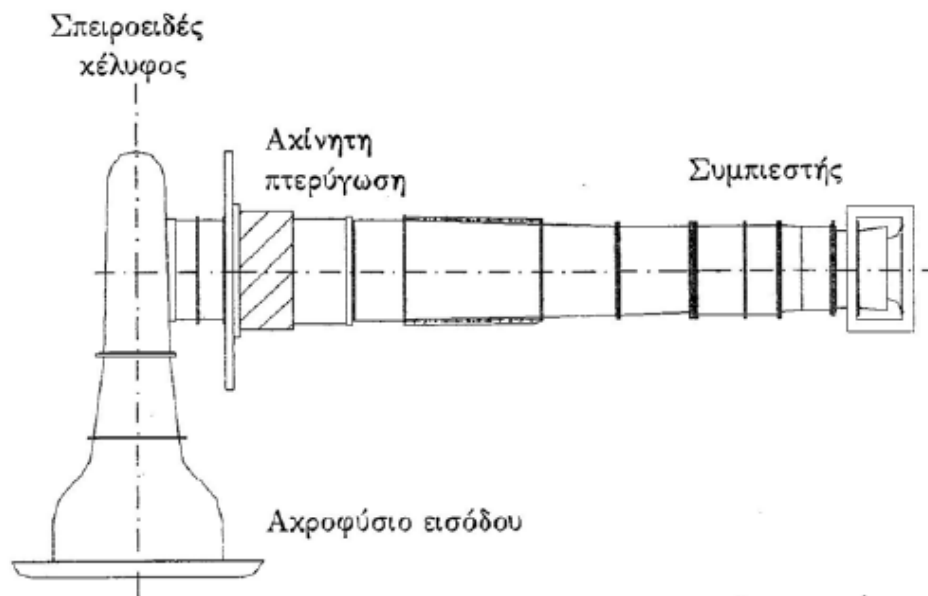


Σχήμα 3.39: Ατριβής ροή γύρω από αεροσκάφος. Σύγκριση συντελεστή άνωσης. Τετράγωνα: υπολογισμοί παρούσας διατριβής. Κύκλοι: Υπολογισμοί συνεργαζόμενης Ευρωπαϊκής ερευνητικής ομάδας (με το δικό της επιλύτη Euler στο ίδιο πλέγμα), στο πλαίσιο του έργου HISAC.

3.5 Ανάλυση Ροής σε 3Δ Πτερύγωση Συμπιεστή

Η επόμενη εφαρμογή αφορά στη μελέτη της ροής στη μεμονωμένη ακίνητη πτερύγωση αξονικού συμπιεστή η οποία βρίσκεται εγκατεστημένη στο ΕΘΣ/ΕΜΠ. Πρόκειται για πτερύγωση η οποία χρησιμοποιήθηκε για τη μελέτη των φαινομένων που αναπτύσσονται στο ακτινικό διάκενο ενός αξονικού συμπιεστή σε υψηλούς αριθμούς Mach. Η πτερύγωση έχει σχεδιαστεί από τη SNECMA στο πλαίσιο Ευρωπαϊκού ερευνητικού έργου⁷ για το συγκεκριμένο σκοπό. Οι πειραματικές μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν στο πλαίσιο δεύτερου Ευρωπαϊκού ερευνητικού έργου⁸.

Η πειραματική διάταξη βρίσκεται εγκατεστημένη στο ΕΘΣ/ΕΜΠ και αποτελείται από το ακροφύσιο εισόδου, το σπειροειδές κέλυφος, τη μελετούμενη πτερύγωση και έναν αξονικό συμπιεστή (σχήμα 3.40). Το τμήμα των μετρήσεων (σχήμα 3.41) περιλαμβάνει την ακίνητη πτερύγωση η οποία είναι προσαρμοσμένη στο εξωτερικό κέλυφος, ενώ η σχετική κίνηση δημιουργείται από την περιστροφή του εσωτερικού τυμπάνου. Το περιστρεφόμενο τμήμα του τυμπάνου εκτείνεται από $6.85\%c_{ax}$ ανάντι ως $1.98\%c_{ax}$ κατάντι της ακμής προσβολής. Ο λόγος των ακτινών του εσωτερικού προς το εξωτερικό τύμπανο ισούται με 0.75 ($r_{hub} = 0.244\text{ m}$, $r_{shr} = 0.324\text{ m}$). Για τις πειραματικές μετρήσεις, [71, 72, 73], η ταχύτητα περιστροφής του τυμπάνου είναι $N = 6540\text{ rpm}$, ενώ μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν και για ακίνητο τύμπανο.

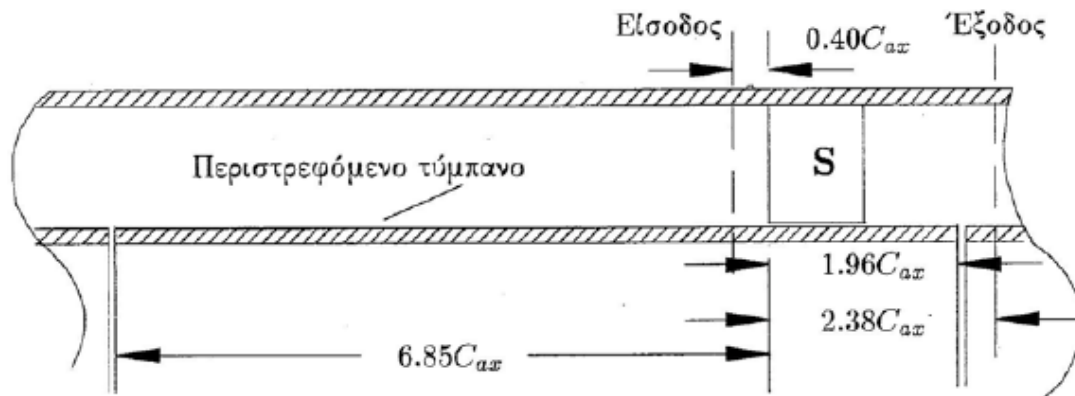


Σχήμα 3.40: Κάτοψη πειραματικής διάταξης, [166, 73].

Η πτερύγωση αποτελείται από 19 πτερύγια χορδής $c = 0.1\text{ m}$ τοποθετημένα σε γωνία κλίσης 51.4° , με λόγο ύψους προς χορδή 0.8, μέγιστο πάχος $4.58\%c$ και στερεότητα 1.065. Η ροή στην πτερύγωση είναι ροή υψηλής ταχύτητας με μέγιστη τιμή του αριθμού Mach στην είσοδο

⁷Advanced Civil Core Compressor Aerodynamics, AER2-CT92-0039, 1/1/1993-30/9/1996.

⁸Assessment of the Physical Processes and Code Evaluation for Turbomachinery Flows, BRPR-CT97-0610 1/1/1998- 31/8/2000.



Σχήμα 3.41: Τμήμα μετρήσεων πειραματικής διάταξης, [72].

περίπου 0.6, η οποία οδηγεί σε αριθμό Reynolds της ροής περίπου $Re = 1.1 \times 10^6$. Η τιμή της παροχής είναι της τάξης των 13 kg/sec .

Οι παρόντες υπολογισμοί γίνονται με χρήση του μοντέλου τύρβης Spalart–Allmaras (SA) χαμηλών αριθμών Reynolds. Η ένταση της τυρβώδους κινητικής ενέργειας στην είσοδο επιβάλλεται ίση με 1.5% και ο λόγος της τυρβώδους προς μοριακή συνεκτικότητα με 20. Ως οριακές συνθήκες, στην είσοδο επιβάλλονται οι ακτινικές κατανομές της ολικής πίεσης και των γωνιών της ροής στην ακτινική και περιφερειακή διεύθυνση. Στην έξοδο, ως οριακή συνθήκη, επιβάλλεται η ακτινική κατανομή της στατικής πίεσης, η οποία υπολογίζεται επαναληπτικά μέσω της εξίσωσης ακτινικής ισορροπίας με δεδομένη την τιμή της στατικής πίεσης στην ακτίνα ποδός. Στην περίπτωση ροής με περιστρεφόμενο τύμπανο, σε αυτό επιβάλλεται οριακή συνθήκη τύπου Dirichlet για την απόλυτη ταχύτητα η οποία ισούται με την ταχύτητα περιστροφής ($U = \omega r_{hub} = 167 \text{ m/s}$).

Οι υπολογισμοί που παρουσιάζονται παρακάτω περιλαμβάνουν 4 περιπτώσεις ροής, για δύο ύψη ακτινικού διακένου ($t/c = 2\%$ και $t/c = 4\%$), ακίνητο και περιστρεφόμενο τύμπανο. Για αυτές τις περιπτώσεις είναι διαθέσιμα αποτελέσματα από τις πειραματικές μετρήσεις, [71, 72]. Επιπλέον, η πτερύγωση αυτή έχει μελετηθεί υπολογιστικά και στη διδακτορική διατριβή του Πολίτη, [19] όπου, σε σύγκριση με την παρούσα διατριβή, οι υπολογισμοί έγιναν με λογισμικό επίλυσης των 3Δ εξισώσεων Navier–Stokes με την τεχνική της διόρθωσης πίεσης, με χρήση του μοντέλου τύρβης $k-\varepsilon$ με συναρτήσεις τοίχου και χρήση δομημένων υπολογιστικών πλεγμάτων. Σε αντίθεση στην παρούσα διατριβή οι υπολογισμοί γίνονται με χρήση του μοντέλου τύρβης SA χαμηλών αριθμών Reynolds, λογισμικό χρονοπροέλασης και μη-δομημένα υπολογιστικά πλέγματα. Υπάρχουν, δηλαδή, ουσιώδεις διαφορές και ως προς τον αλγόριθμο επίλυσης των εξισώσεων ροής και τα συναφή σχήματα διακριτοποίησης, ως προς το χρησιμοποιούμενο μοντέλο τύρβης αλλά και ως προς τη χωρική διακριτοποίηση, δηλαδή το υπολογιστικό πλέγμα. Η χρήση μη-δομημένων πλεγμάτων (στην παρούσα διατριβή) επιτρέπει τη δημιουργία πλεγματος διατηρώντας ακέραια τη μορφή της πτερύγωσης (σε αντίθεση με το ‘pinched’ ακροπτερύγιο της διατριβής [19]).

Ειδικότερα, όσον αφορά τα υπολογιστικά πλέγματα, για τη μελέτη των παραπάνω περιπτώσεων ροής δημιουργήθηκαν δύο πλέγματα, ένα για κάθε ύψος ακτινικού διακένου. Πρόκειται για

μη-δομημένα/υβριδικά πλέγματα που δημιουργήθηκαν με λογισμικό του ΕΘΣ/ΕΜΠ, [16, 11]. Αποτελούνται από:

1. εξάεδρα γύρω από το πτερύγιο,
2. πρίσματα τριγωνικής βάσης με διαστρωματώσεις κοντά στο τύμπανο και το κέλυφος,
3. τετράεδρα στο κυρίως τμήμα του χωρίου,
4. μια 'ζώνη' πενταεδρικών πυραμίδων ανάμεσα σε εξάεδρα και τετράεδρα.

Τα δύο πλέγματα (ένα από αυτά φαίνεται στο σχήμα 3.42) περιλαμβάνουν περίπου 327000 εξάεδρα, 6300 πενταεδρικές πυραμίδες, 410000 πρίσματα, 790000 τετράεδρα και 1100000 κόμβους⁹. Οι διαστάσεις αυτές είναι πολύ μεγαλύτερες από αυτές των πλεγμάτων της διατριβής [19], το οποίο είναι αναμενόμενο δεδομένου ότι στην παρούσα διατριβή οι υπολογισμοί γίνονται με θεώρηση χαμηλών αριθμών Reynolds. Αυτό βέβαια καθίσταται δυνατό κυρίως λόγω της επάρκειας υπολογιστικής ισχύος και μνήμης σε σύγκριση με τα προ δεκαετίας δεδομένα, τότε δηλαδή που έγιναν οι υπολογισμοί της διατριβής [19].

Οι διαστάσεις του πλέγματος καθιστούν επιτακτική τη χρήση πολυεπεξεργασίας. Ειδικότερα, οι υπολογισμοί (περίπου 5000 επαναλήψεις, σύγκλιση κατά περίπου 8 τάξεις μεγέθους) έγιναν διασπώντας το συνολικό χωρίο σε 24 ή 60 υποχωρία (ανάλογα με τους διαθέσιμους επεξεργαστές). Ο χρόνος επίλυσης στην περίπτωση των 60 υποχωρίων σε 10 υπολογιστές 2xquad core Xeon, 8 GB RAM ήταν περίπου 5 ώρες με επιλύτη Jacobi.

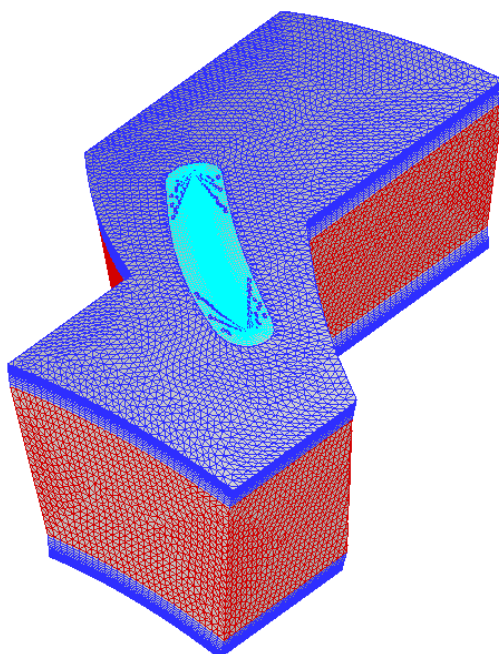
3.5.1 Πρόλεξη Ροής στην Είσοδο και στην Έξοδο

Στα σχήματα που ακολουθούν (3.43 ως 3.62) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα στην είσοδο και την έξοδο του πεδίου ροής, για τα δύο ύψη ακτινικού διακένου, ακίνητο και περιστρεφόμενο τύμπανο. Διευκρινίζεται ότι οι θέσεις (διατομές) εισόδου και εξόδου στα οποία αντιστοιχούν οι εκεί διαθέσιμες πειραματικές μετρήσεις βρίσκονται σε θέσεις 40% c_{ax} ανάντι και 138% c_{ax} κατάντι της ακμής πρόσπτωσης, αντίστοιχα. Στα υπολογιστικά πλέγματα που δημιουργήθηκαν, το επίπεδο εισόδου τοποθετείται πιο μπροστά, σε θέση 90% c_{ax} ανάντι της ακμής προσβολής, ώστε η επιβολή των οριακών συνθηκών εκεί να μην επηρεάζει το πεδίο στην 'ουσιαστική' είσοδο της πτερυγώσης.

Τα αποτελέσματα των μεγεθών της ροής που παρουσιάζονται αντιστοιχούν στις μέσες κατά την περιφερειακή κατεύθυνση ακτινικές κατανομές αυτών και συγκρίνονται με τα αντίστοιχα αποτελέσματα από τη διατριβή [19] αλλά και τα πειραματικά [71, 72]. Τα μεγέθη που παρουσιάζονται είναι η ολική πίεση, η γωνία ροής στην περιφερειακή κατεύθυνση καθώς και η αξονική και περιφερειακή συνιστώσα της ταχύτητας. Οι συνιστώσες της ταχύτητας που παρουσιάζονται είναι αδιαστατοποιημένες με την ταχύτητα περιστροφής του τυμπάνου ($U = \frac{2\pi N}{60} r_{hub} = 167m/sec$) ανεξάρτητα αν πρόκειται για ακίνητο ή περιστρεφόμενο τύμπανο. Επιπλέον παρουσιάζεται και η ακτινική κατανομή του συντελεστή απωλειών ολικής πίεσης (Pressure Loss Coefficient, PLC), ο οποίος υπολογίζεται από τη σχέση

$$PLC(r) = \frac{p_{t_{inl}}(r) - p_t(r)}{p_{t_{inl}}(r) - p_{inl}(r)} \quad (3.1)$$

⁹ Από δύο πλέγματα, για τα δύο ύψη ακτινικού διακένου, αυτό για $t/c=4\%$ είναι μεγαλύτερο κατά 10000 κόμβους και 15000 πρίσματα.



Σχήμα 3.42: Πτερύγωση αξονικού συμπιεστή ΕΘΣ/ΕΜΠ. Υπολογιστικό χωρίο που αντιστοιχεί σε ένα βήμα της πτερύγωσης και μη-δομημένο πλέγμα για την πρόλεξη της ροής.

όπου τα μεγέθη που εμφανίζονται αντιστοιχούν στις μέσες κατά την περιφερειακή κατεύθυνση τιμές για κάθε ακτινική θέση. Από τον ορισμό του συντελεστή απωλειών, είναι προφανές ότι αυτός λαμβάνει μηδενική τιμή στην είσοδο και, γι'αυτό το λόγο, παρουσιάζεται μόνο η ακτινική κατανομή του στην έξοδο της πτερύγωσης. Επιπλέον, οι αρνητικές τιμές του συντελεστή απωλειών που φαίνονται στα διαγράμματα οφείλονται και αυτές στον τρόπο ορισμού του.

Κατά την περιφερειακή ολοκλήρωση ενός μεγέθους σε μια δεδομένη διατομή ενός μη-δομημένου, υβριδικού πλέγματος γίνονται, αναγκαστικά, ορισμένες παραδοχές. Ειδικότερα, αρχικά εντοπίζονται οι ακτινικές θέσεις για κάθε μια από τις οποίες θα ολοκληρωθεί περιφερειακά ένα μέγεθος της ροής. Αυτές οι θέσεις δεν είναι κατ' ανάγκη ίδιες στις διατομές εισόδου και εξόδου (ο τρόπος γένεσης πλέγματος δεν εγγυάται κάτι τέτοιο). Έτσι επιλέγονται οι ακτινικές θέσεις στο περιοδικό τμήμα της εισόδου και διατηρούνται ίδιες και για τους υπολογισμούς στην έξοδο ώστε να είναι εφικτός ορισμός του συντελεστή απωλειών ολικής πίεσης (σχέση 3.1). Για κάθε ακτινική θέση r , η περιφερειακή ολοκλήρωση (λαμβάνοντας υπόψη και την παροχή μάζας) ουσιαστικά γίνεται σε μια ακτινική 'ζώνη' (από το μέσο της απόστασης της τρέχουσας ακτινικής θέσης με την προηγούμενη και την επόμενη ακτινική θέση) ώστε να ληφθεί υπόψη η επίδραση όλων των κόμβων του μη-δομημένου πλέγματος που αυτή εμπεριέχει.

Στα παρακάτω σχήματα, με συνεχή γραμμή φαίνονται τα αποτελέσματα των υπολογισμών της παρούσας διατριβής, με διακεκομμένη τα αντίστοιχα της διατριβής του Πολίτη [19] και με διακριτά σημεία οι πειραματικές μετρήσεις που έγιναν στο ΕΘΣ/ΕΜΠ.

Αρχικά, όσον αφορά στο πεδίο εισόδου η ταύτιση των αποτελεσμάτων είναι εξαιρετική, όπως

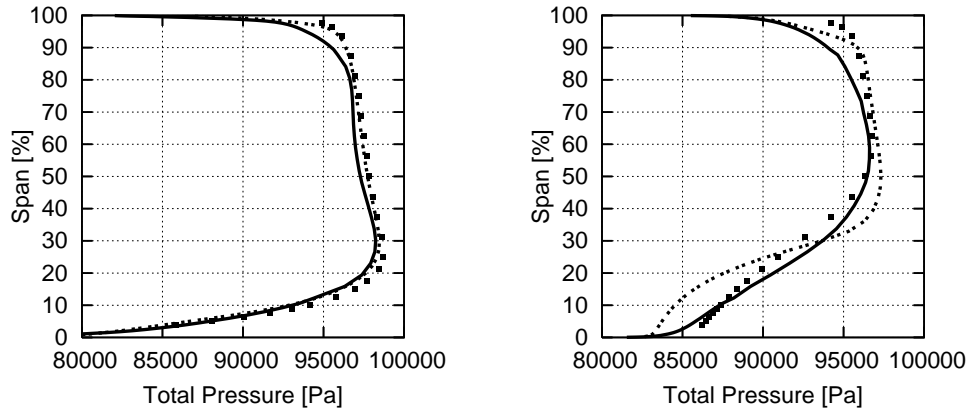
αναμένονταν, καθώς τα παρουσιαζόμενα μεγέθη άμεσα ή έμμεσα επιβάλλονταν ως οριακές συνθήκες (ολική πίεση και γωνία ροής άμεση επιβολή, ενώ οι ταχύτητες καθορίζονται έμμεσα δεδομένου ότι πρέπει να διατηρείται η τιμή της παροχής). Οι πολύ μικρές διαφορές που παρατηρούνται σε ορισμένα σημεία για την ολική πίεση οφείλονται κυρίως στην πολυωνυμική έκφραση παρεμβολής με την οποία αυτή υπολογίζεται, αλλά και στον τρόπο επιβολής των οριακών συνθηκών (βλ. κεφάλαιο 2, ιδεατός κόμβος στην είσοδο).

Σχετικά με το πεδίο εξόδου, τα αποτελέσματα είναι ικανοποιητικά συγκρινόμενα με τα αντίστοιχα πειραματικά. Επιπλέον, σε σύγκριση και με τα υπολογιστικά αποτελέσματα της διατριβής [19], στις περισσότερες περιπτώσεις οι παρόντες υπολογισμοί πλησιάζουν περισσότερο στα αντίστοιχα πειραματικά μετρούμενα μεγέθη. Αυτό γίνεται περισσότερο εμφανές στις περιοχές κοντά στις ακτίνες ποδός και κεφαλής, όπου το μοντέλο χαμηλών αριθμών Reynolds (παρούσα διατριβή) δίνει καλύτερη πρόλεξη των μεγεθών της ροής συγκρινόμενο με τις συναρτήσεις τοίχου, κάτι γενικά αναμενόμενο. Ειδικά, για την περίπτωση του ακίνητου τυμπάνου, η σύμπτωση των περισσότερων μεγεθών με τα αντίστοιχα πειραματικά είναι εξαιρετική.

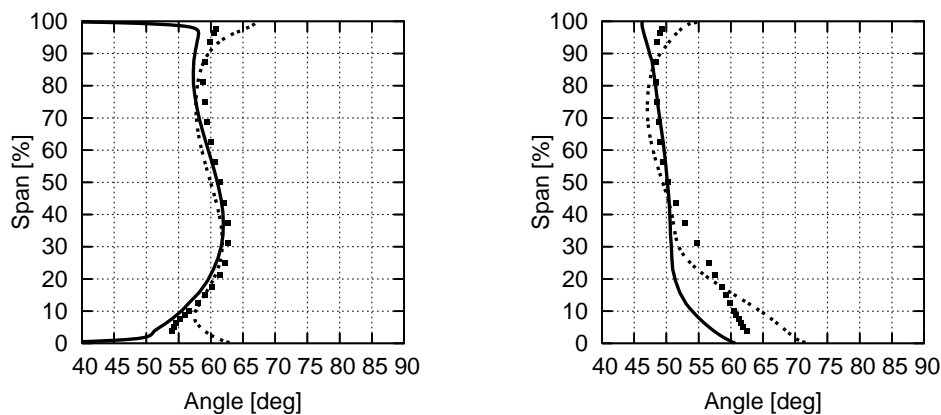
Αποκλίσεις, σε σύγκριση με τα πειραματικά αποτελέσματα, παρουσιάζουν και οι δύο υπολογισμοί στην πρόλεξη γωνία ροής στις μικρές ακτίνες (σχήματα 3.44, 3.49). Η διαφορά αυτή οφείλεται κυρίως στον τρόπο υπολογισμού της ακτινικής κατανομής της γωνίας, καθώς πρόκειται για ένα μέγεθος με μεγάλη περιφερειακή ανομοιομορφία το οποίο ολοκληρώνεται κατά την περιφερειακή κατεύθυνση. Αυτό οφείλεται στην ύπαρξη του στροβίλου του ακτινικού διακένου, και στις 'αδυναμίες' των μοντέλων τύρβης να προλέξουν την ανάμιξη της ροής. Η διαφορά στη γωνία ροής οφείλεται κυρίως στην αξονική συνιστώσα της ταχύτητας (σχήματα 3.45, 3.50) καθώς η πρόλεξη της περιφερειακής συνιστώσας αυτής είναι πολύ καλή (σχήματα 3.46, 3.51).

Σχετικά με το συντελεστή απωλειών (σχήματα 3.47, 3.52), οι παρόντες υπολογισμοί προλέγουν με ικανοποιητική ακρίβεια τις τιμές αυτού για ύψος ακτινικού διακένου $t/c = 4\%$. Για ακτινικό διάκενο $t/c = 2\%$ παρουσιάζεται υποεκτίμηση της τιμής του σε σχέση με την υπερεκτίμηση της διατριβής [19], αλλά γενικά οι παρόντες υπολογισμοί πλησιάζουν περισσότερο στις πειραματικές τιμές.

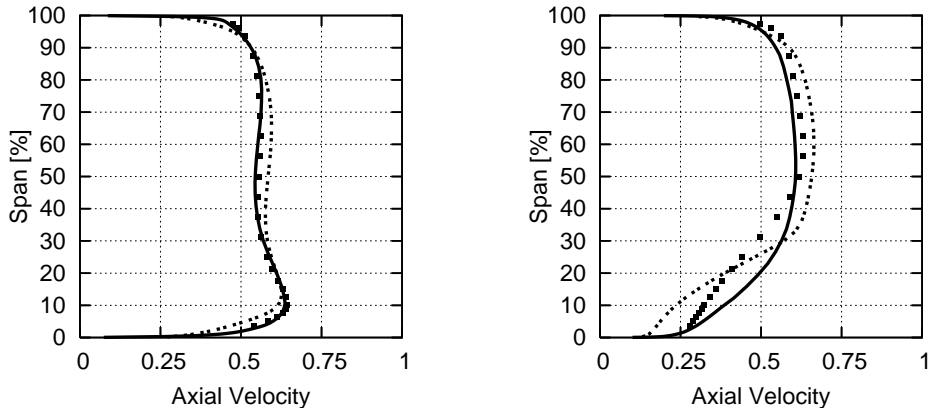
Για το περιστρεφόμενο τύμπανο, οι αποκλίσεις στις τιμές της γωνίας είναι σχεδόν αντίστοιχες με αυτές για το ακίνητο τύμπανο. Οφείλονται στην αξονική συνιστώσα της ταχύτητας, όπου η υποεκτίμηση στις μικρές ακτίνες, αναγκάζει (λόγω του φαινομένου της στένωσης) τη ροή σε επιτάχυνση στις μεγαλύτερες ακτίνες (σχήματα 3.55, 3.60) ώστε να διατηρηθεί η παροχή μάζας. Όσον αφορά στο συντελεστή απωλειών (σχήματα 3.57, 3.62), οι παρόντες υπολογισμοί είναι πολύ πιο κοντά στις πειραματικές μετρήσεις σε σύγκριση με τους υπολογισμούς της διατριβής [19].



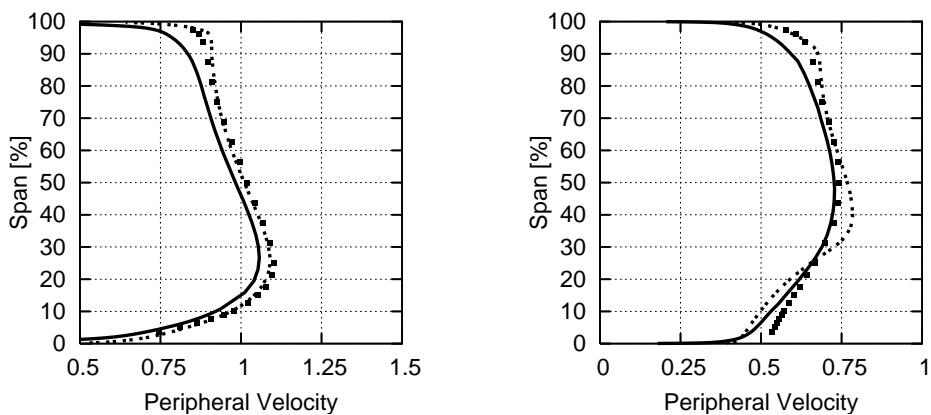
Σχήμα 3.43: Πτερύγωση αξονικού συμπιεστή ΕΘΣ/ΕΜΠ. Ακίνητο τύμπανο, $t/c=2\%$. Ακτινικές κατανομές της περιφερειακά ολοκληρωμένης ολικής πίεσης στην είσοδο (αριστερά) και την έξοδο (δεξιά) της πτερύγωσης. Συνεχής γραμμή: υπολογισμός παρούσας διατριβής. Διακεκομμένη γραμμή: υπολογισμός διατριβής [19]. Διακριτά σημεία: μετρήσεις στο ΕΘΣ/ΕΜΠ [71, 72].



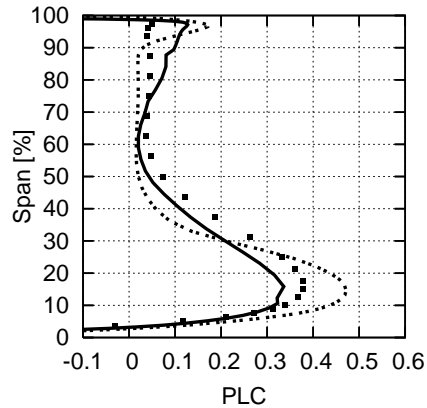
Σχήμα 3.44: Πτερύγωση αξονικού συμπιεστή ΕΘΣ/ΕΜΠ. Ακίνητο τύμπανο, $t/c=2\%$. Ακτινικές κατανομές της περιφερειακά ολοκληρωμένης γωνίας ροής στην περιφερειακή κατεύθυνση στην είσοδο (αριστερά) και την έξοδο (δεξιά) της πτερύγωσης. Συνεχής γραμμή: υπολογισμός παρούσας διατριβής. Διακεκομμένη γραμμή: υπολογισμός διατριβής [19]. Διακριτά σημεία: μετρήσεις στο ΕΘΣ/ΕΜΠ [71, 72].



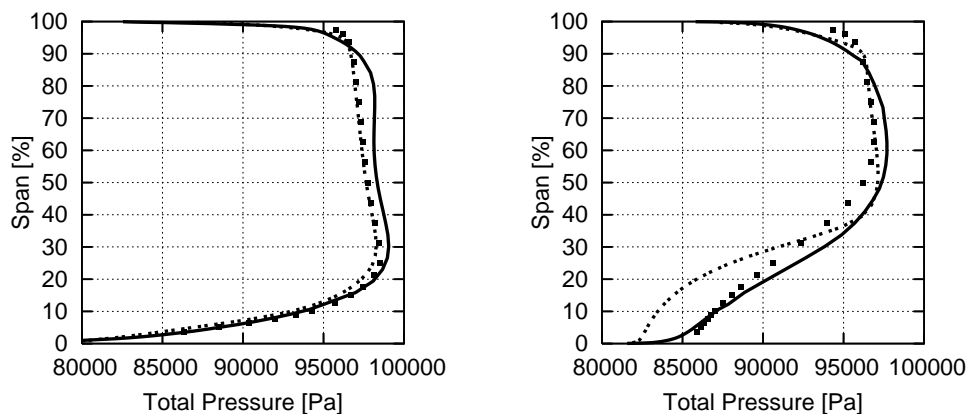
Σχήμα 3.45: Πτερύγωση αξονικού συμπιεστή ΕΘΣ/ΕΜΠ. Ακίνητο τύμπανο, $t/c = 2\%$. Ακτινικές κατανομές της περιφερειακά ολοκληρωμένης αξονικής ταχύτητας στην είσοδο (αριστερά) και την έξοδο (δεξιά) της πτερύγωσης. Συνεχής γραμμή: υπολογισμός παρούσας διατριβής. Διακεκομμένη γραμμή: υπολογισμός διατριβής [19]. Διακριτά σημεία: μετρήσεις στο ΕΘΣ/ΕΜΠ [71, 72].



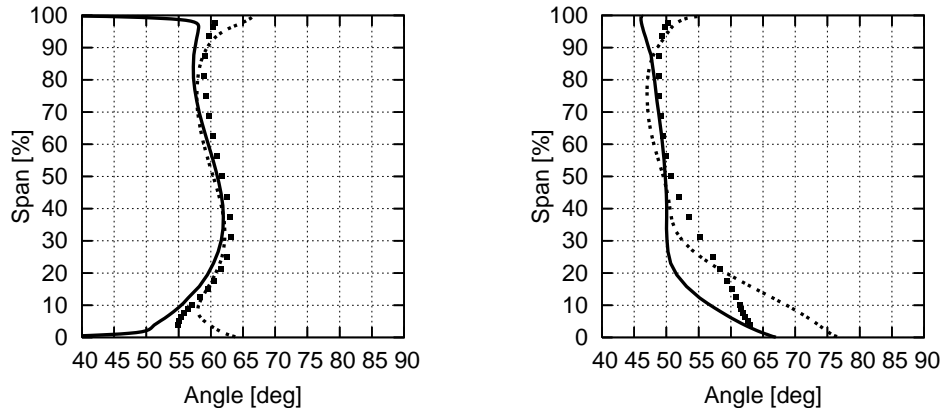
Σχήμα 3.46: Πτερύγωση αξονικού συμπιεστή ΕΘΣ/ΕΜΠ. Ακίνητο τύμπανο, $t/c = 2\%$. Ακτινικές κατανομές της περιφερειακά ολοκληρωμένης περιφερειακής ταχύτητας στην είσοδο (αριστερά) και την έξοδο (δεξιά) της πτερύγωσης. Συνεχής γραμμή: υπολογισμός παρούσας διατριβής. Διακεκομμένη γραμμή: υπολογισμός διατριβής [19]. Διακριτά σημεία: μετρήσεις στο ΕΘΣ/ΕΜΠ [71, 72].



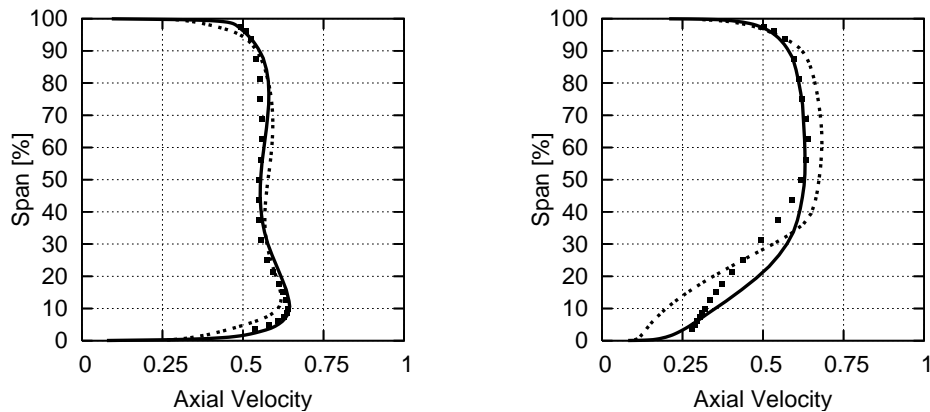
Σχήμα 3.47: Πτερύγωση αξονικού συμπιεστή ΕΘΣ/ΕΜΠ. Ακίνητο τύμπανο, $t/c=2\%$. Ακτινική κατανομή του συντελεστή απωλειών ολικής πίεσης στην έξοδο της πτερύγωσης. Συνεχής γραμμή: υπολογισμός παρούσας διατριβής. Διακεκομμένη γραμμή: υπολογισμός διατριβής [19]. Διακριτά σημεία: μετρήσεις στο ΕΘΣ/ΕΜΠ [71, 72].



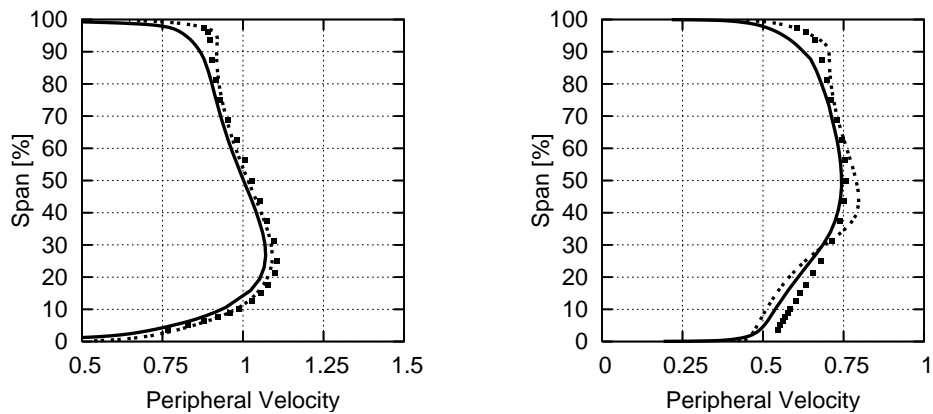
Σχήμα 3.48: Πτερύγωση αξονικού συμπιεστή ΕΘΣ/ΕΜΠ. Ακίνητο τύμπανο, $t/c=4\%$. Ακτινικές κατανομές της περιφερειακά ολοκληρωμένης ολικής πίεσης στην είσοδο (αριστερά) και την έξοδο (δεξιά) της πτερύγωσης. Συνεχής γραμμή: υπολογισμός παρούσας διατριβής. Διακεκομμένη γραμμή: υπολογισμός διατριβής [19]. Διακριτά σημεία: μετρήσεις στο ΕΘΣ/ΕΜΠ [71, 72].



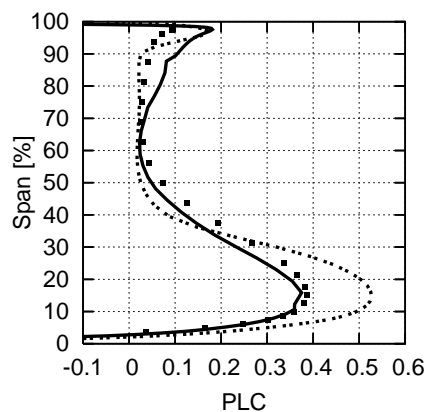
Σχήμα 3.49: Πτερύγωση αξονικού συμπιεστή ΕΘΣ/ΕΜΠ. Ακίνητο τύμπανο, $t/c=4\%$. Ακτινικές κατανομές της περιφερειακά ολοκληρωμένης γωνίας ροής στην περιφερειακή κατεύθυνση στην είσοδο (αριστερά) και την έξοδο (δεξιά) της πτερύγωσης. Συνεχής γραμμή: υπολογισμός παρούσας διατριβής. Διακεκομμένη γραμμή: υπολογισμός διατριβής [19]. Διακριτά σημεία: μετρήσεις στο ΕΘΣ/ΕΜΠ [71, 72].



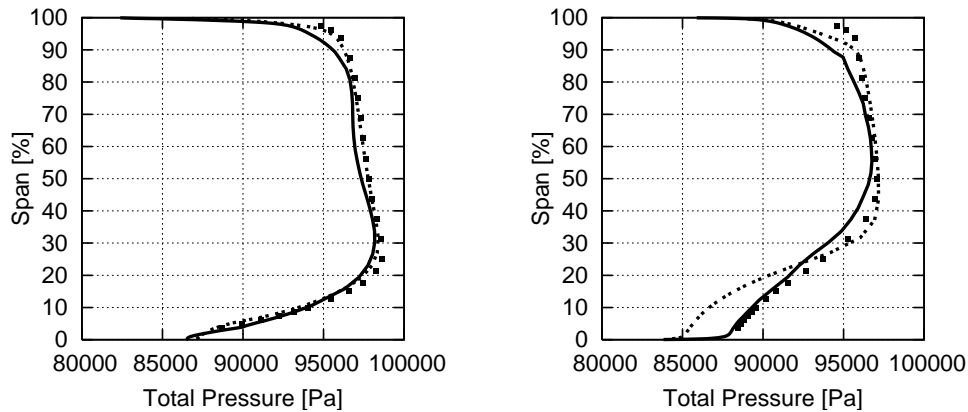
Σχήμα 3.50: Πτερύγωση αξονικού συμπιεστή ΕΘΣ/ΕΜΠ. Ακίνητο τύμπανο, $t/c=4\%$. Ακτινικές κατανομές της περιφερειακά ολοκληρωμένης αξονικής ταχύτητας στην είσοδο (αριστερά) και την έξοδο (δεξιά) της πτερύγωσης. Συνεχής γραμμή: υπολογισμός παρούσας διατριβής. Διακεκομμένη γραμμή: υπολογισμός διατριβής [19]. Διακριτά σημεία: μετρήσεις στο ΕΘΣ/ΕΜΠ [71, 72].



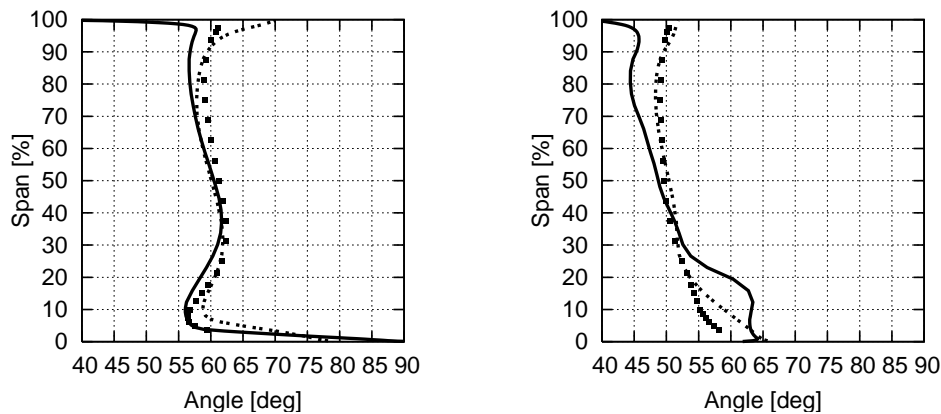
Σχήμα 3.51: Πτερύγωση αξονικού συμπιεστή ΕΘΣ/ΕΜΠ. Ακίνητο τύμπανο, $t/c=4\%$. Ακτινικές κατανομές της περιφερειακά ολοκληρωμένης περιφερειακής ταχύτητας στην είσοδο (αριστερά) και την έξοδο (δεξιά) της πτερύγωσης. Συνεχής γραμμή: υπολογισμός παρούσας διατριβής. Διακεκομμένη γραμμή: υπολογισμός διατριβής [19]. Διακριτά σημεία: μετρήσεις στο ΕΘΣ/ΕΜΠ [71, 72].



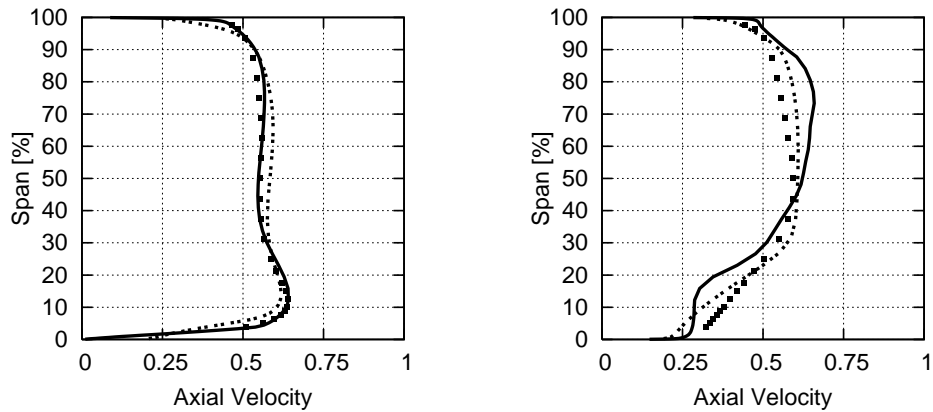
Σχήμα 3.52: Πτερύγωση αξονικού συμπιεστή ΕΘΣ/ΕΜΠ. Ακίνητο τύμπανο, $t/c=4\%$. Ακτινική κατανομή του συντελεστή απωλειών ολικής πίεσης στην έξοδο της πτερύγωσης. Συνεχής γραμμή: υπολογισμός παρούσας διατριβής. Διακεκομμένη γραμμή: υπολογισμός διατριβής [19]. Διακριτά σημεία: μετρήσεις στο ΕΘΣ/ΕΜΠ [71, 72].



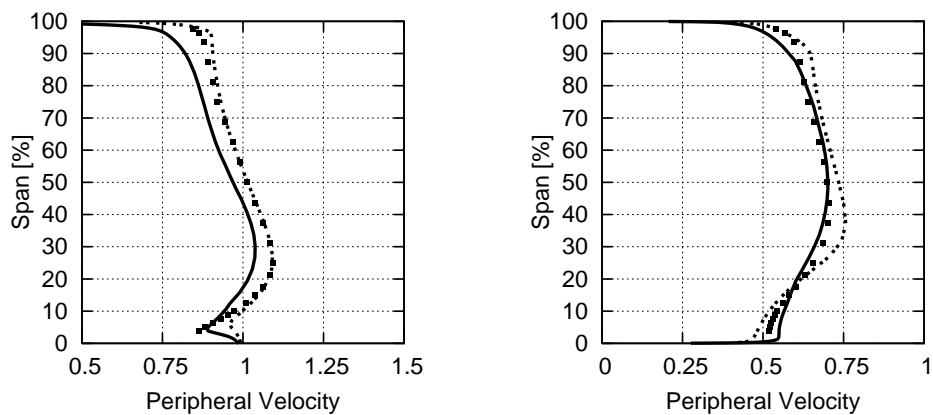
Σχήμα 3.53: Πτερύγωση αξονικού συμπιεστή ΕΘΣ/ΕΜΠ. Περιστρεφόμενο τύμπανο, $t/c=2\%$. Ακτινικές κατανομές της περιφερειακά ολοκληρωμένης ολικής πίεσης στην είσοδο (αριστερά) και την έξοδο (δεξιά) της πτερύγωσης. Συνεχής γραμμή: υπολογισμός παρούσας διατριβής. Διακεκομμένη γραμμή: υπολογισμός διατριβής [19]. Διακριτά σημεία: μετρήσεις στο ΕΘΣ/ΕΜΠ [71, 72].



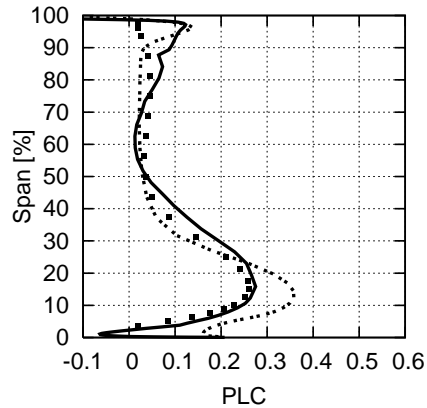
Σχήμα 3.54: Πτερύγωση αξονικού συμπιεστή ΕΘΣ/ΕΜΠ. Περιστρεφόμενο τύμπανο, $t/c=2\%$. Ακτινικές κατανομές της περιφερειακά ολοκληρωμένης γωνίας ροής στην περιφερειακή κατεύθυνση στην είσοδο (αριστερά) και την έξοδο (δεξιά) της πτερύγωσης. Συνεχής γραμμή: υπολογισμός παρούσας διατριβής. Διακεκομμένη γραμμή: υπολογισμός διατριβής [19]. Διακριτά σημεία: μετρήσεις στο ΕΘΣ/ΕΜΠ [71, 72].



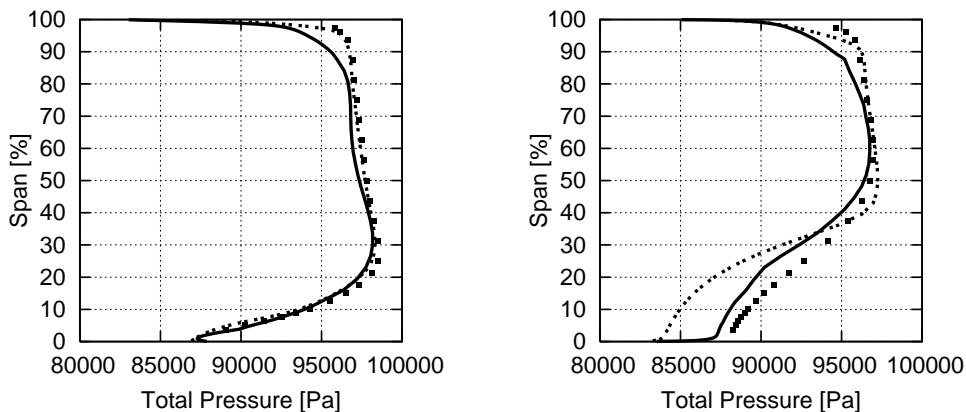
Σχήμα 3.55: Πτερύγωση αξονικού συμπιεστή ΕΘΣ/ΕΜΠ. Περιστρεφόμενο τύμπανο, $t/c = 2\%$. Ακτινικές κατανομές της περιφερειακά ολοκληρωμένης αξονικής ταχύτητας στην είσοδο (αριστερά) και την έξοδο (δεξιά) της πτερύγωσης. Συνεχής γραμμή: υπολογισμός παρούσας διατριβής. Διακεκομμένη γραμμή: υπολογισμός διατριβής [19]. Διακριτά σημεία: μετρήσεις στο ΕΘΣ/ΕΜΠ [71, 72].



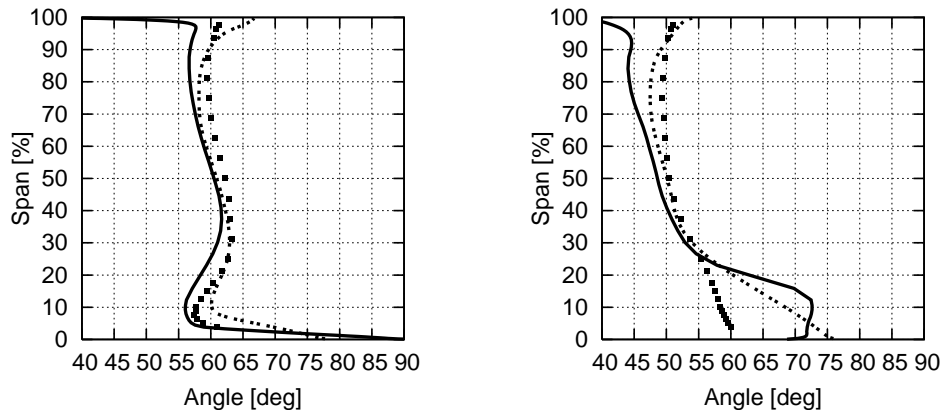
Σχήμα 3.56: Πτερύγωση αξονικού συμπιεστή ΕΘΣ/ΕΜΠ. Περιστρεφόμενο τύμπανο, $t/c = 2\%$. Ακτινικές κατανομές της περιφερειακά ολοκληρωμένης περιφερειακής ταχύτητας στην είσοδο (αριστερά) και την έξοδο (δεξιά) της πτερύγωσης. Συνεχής γραμμή: υπολογισμός παρούσας διατριβής. Διακεκομμένη γραμμή: υπολογισμός διατριβής [19]. Διακριτά σημεία: μετρήσεις στο ΕΘΣ/ΕΜΠ [71, 72].



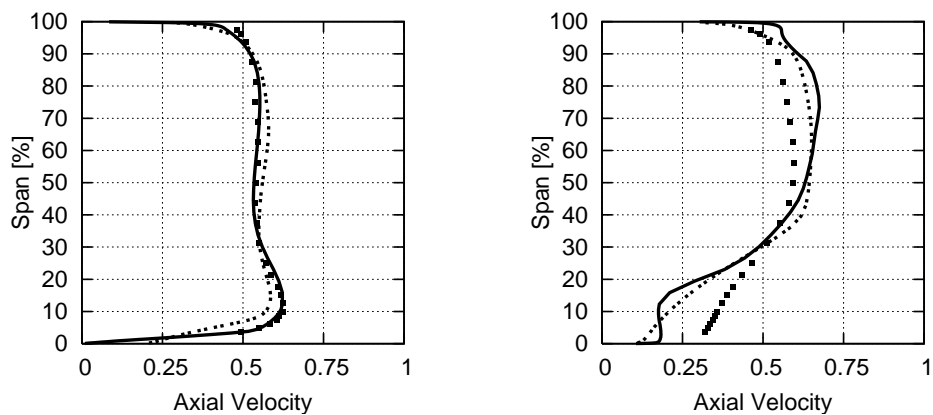
Σχήμα 3.57: Πτερύγωση αξονικού συμπιεστή ΕΘΣ/ΕΜΠ. Περιστρεφόμενο τύμπανο, $t/c = 2\%$. Ακτινική κατανομή του συντελεστή απωλειών ολικής πίεσης στην έξοδο της πτερύγωσης. Συνεχής γραμμή: υπολογισμός παρούσας διατριβής. Διακεκομμένη γραμμή: υπολογισμός διατριβής [19]. Διακριτά σημεία: μετρήσεις στο ΕΘΣ/ΕΜΠ [71, 72].



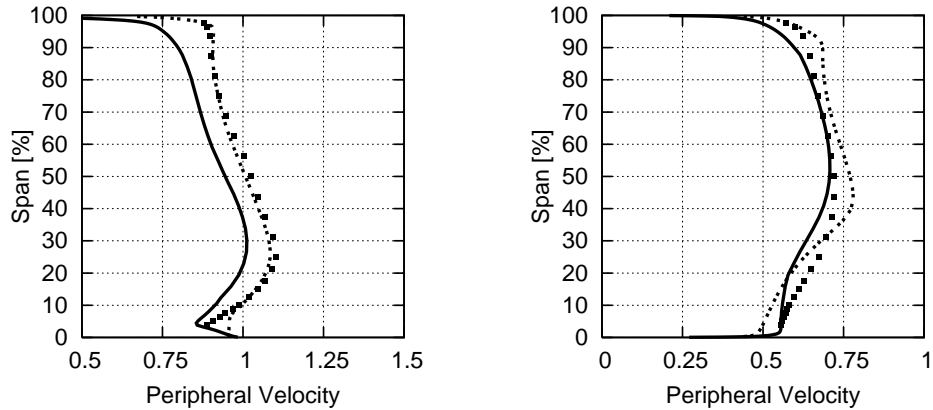
Σχήμα 3.58: Πτερύγωση αξονικού συμπιεστή ΕΘΣ/ΕΜΠ. Περιστρεφόμενο τύμπανο, $t/c = 4\%$. Ακτινικές κατανομές της περιφερειακά ολοκληρωμένης ολικής πίεσης στην είσοδο (αριστερά) και την έξοδο (δεξιά) της πτερύγωσης. Συνεχής γραμμή: υπολογισμός παρούσας διατριβής. Διακεκομμένη γραμμή: υπολογισμός διατριβής [19]. Διακριτά σημεία: μετρήσεις στο ΕΘΣ/ΕΜΠ [71, 72].



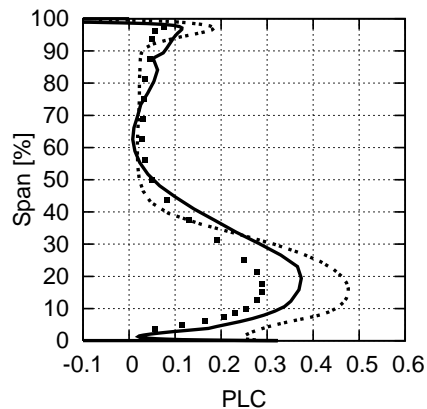
Σχήμα 3.59: Πτερύγωση αξονικού συμπιεστή ΕΘΣ/ΕΜΠ. Περιστρεφόμενο τύμπανο, $t/c = 4\%$. Ακτινικές κατανομές της περιφερειακά ολοκληρωμένης γωνίας ροής στην περιφερειακή κατεύθυνση στην είσοδο (αριστερά) και την έξοδο (δεξιά) της πτερύγωσης. Συνεχής γραμμή: υπολογισμός παρούσας διατριβής. Διακεκομμένη γραμμή: υπολογισμός διατριβής [19]. Διακριτά σημεία: μετρήσεις στο ΕΘΣ/ΕΜΠ [71, 72].



Σχήμα 3.60: Πτερύγωση αξονικού συμπιεστή ΕΘΣ/ΕΜΠ. Περιστρεφόμενο τύμπανο, $t/c = 4\%$. Ακτινικές κατανομές της περιφερειακά ολοκληρωμένης αξονικής ταχύτητας στην είσοδο (αριστερά) και την έξοδο (δεξιά) της πτερύγωσης. Συνεχής γραμμή: υπολογισμός παρούσας διατριβής. Διακεκομμένη γραμμή: υπολογισμός διατριβής [19]. Διακριτά σημεία: μετρήσεις στο ΕΘΣ/ΕΜΠ [71, 72].



Σχήμα 3.61: Πτερύγωση αξονικού συμπιεστή ΕΘΣ/ΕΜΠ. Περιστρεφόμενο τύμπανο, $t/c=4\%$. Ακτινικές κατανομές της περιφερειακά ολοκληρωμένης περιφερειακής ταχύτητας στην είσοδο (αριστερά) και την έξοδο (δεξιά) της πτερύγωσης. Συνεχής γραμμή: υπολογισμός παρούσας διατριβής. Διακεκομμένη γραμμή: υπολογισμός διατριβής [19]. Διακριτά σημεία: μετρήσεις στο ΕΘΣ/ΕΜΠ [71, 72].



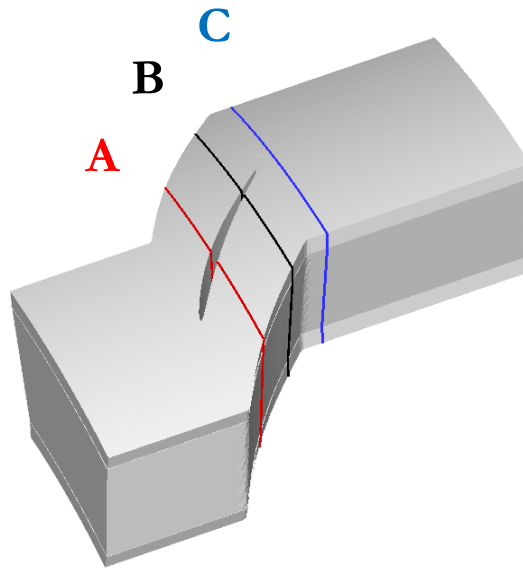
Σχήμα 3.62: Πτερύγωση αξονικού συμπιεστή ΕΘΣ/ΕΜΠ. Περιστρεφόμενο τύμπανο, $t/c=4\%$. Ακτινική κατανομή του συντελεστή απωλειών ολικής πίεσης στην έξοδο της πτερύγωσης. Συνεχής γραμμή: υπολογισμός παρούσας διατριβής. Διακεκομμένη γραμμή: υπολογισμός διατριβής [19]. Διακριτά σημεία: μετρήσεις στο ΕΘΣ/ΕΜΠ [71, 72].

3.5.2 Πρόλεξη Ροής στο Ακτινικό Διάκενο

Για τη μελέτη της ροής που προκαλεί-επάγει η παρουσία ακτινικού διακένου στην πτερύγωση του συμπιεστή, υπολογίζεται το πεδίο του συντελεστή ολικής πίεσης σε τρία αξονικά επίπεδα του πεδίου ροής. Τα επίπεδα αυτά βρίσκονται σε αξονική απόσταση $33.5\%c_{ax}$ (επίπεδο *A*), $78.2\%c_{ax}$ (επίπεδο *B*) και $114.5\%c_{ax}$ (επίπεδο *C*) κατάντι της ακμής προσβολής της πτερύγωσης (σχήμα 3.63). Ο συντελεστής ολικής πίεσης υπολογίζεται από τη σχέση

$$C_{pt} = \frac{\bar{p}_{t_{inl}} - p_t}{\bar{p}_{t_{inl}} - \bar{p}_{inl}} \quad (3.2)$$

όπου $\bar{p}_{t_{inl}}$, \bar{p}_{inl} οι μέσες τιμές της ολικής και στατικής πίεσης εισόδου, αντίστοιχα. Η σύγκριση των αποτελεσμάτων από τους δύο υπολογισμούς και το πείραμα (μόνο για περιστρεφόμενο τύμπανο) παρουσιάζονται στα σχήματα 3.64–3.75. Για την κατανόηση των σχημάτων, διευκρινίζεται ότι στο υπολογιστικό πλέγμα της διατριβής [19] η πτερύγωση βρίσκεται στα άκρα του χωρίου, σε αντίθεση με το υπολογιστικό πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε στους παρόντες υπολογισμούς όπου η πτερύγωση βρίσκεται στο μέσο του.



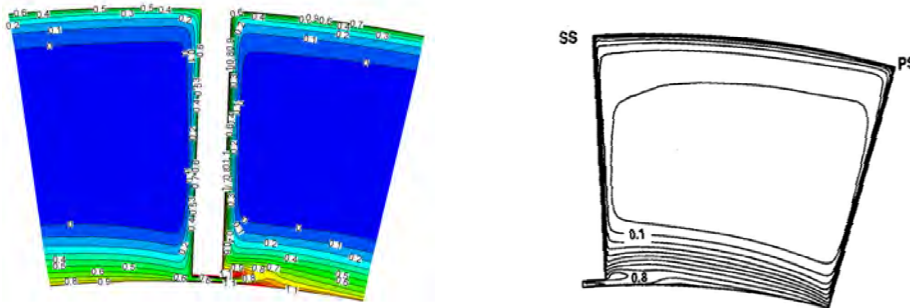
Σχήμα 3.63: Πτερύγωση αξονικού συμπιεστή ΕΘΣ/ΕΜΠ. Θέσεις των τριών εγκάρσιων τομών *A*, *B*, *C*, όπου στη συνέχεια θα παρουσιαστούν κατανομές του συντελεστή ολικής πίεσης.

Τα αποτελέσματα για ακίνητο τύμπανο από τους παρόντες υπολογισμούς και αυτούς της διατριβής [19] είναι όμοια τόσο οπτικά όσο και σε επίπεδο αριθμητικών τιμών. Στο επίπεδο *A* (σχήματα 3.64, 3.67), ακόμα δεν είναι εμφανής ο στρόβιλος του ακτινικού διακένου, ο οποίος είναι πλήρως σχηματισμένος στο επίπεδο *B* (σχήματα 3.65, 3.68). Οι διαφορές για τα δύο ύψη ακτινικού διακένου έγκεινται στη θέση και στην έκταση του στρόβιλου. Στο επίπεδο *C* (σχήματα 3.66, 3.69) ο στρόβιλος καταλαμβάνει μεγαλύτερη έκταση και έχει μετακινηθεί προς την πλευρά υπερπίεσης του διπλανού πτερυγίου.

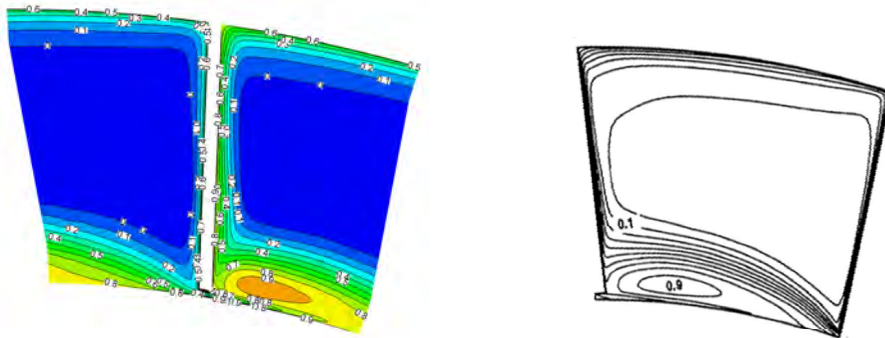
Για το περιστρεφόμενο τύμπανο, τα δύο υπολογιστικά αποτελέσματα είναι όμοια και με ίδιες

τιμές του συντελεστή ολικής πίεσης. Σε σύγκριση με τα πειραματικά αποτελέσματα παρατηρείται ομοιότητα στα πεδία αλλά με διαφορετικές τιμές. Οι διαφορές αυτές ερμηνεύονται από τον τρόπο ορισμού του συντελεστή ολικής πίεσης, όπου λαμβάνονται υπόψη οι μέσες τιμές πίεσης στο επίπεδο εισόδου. Οι τιμές αυτές δεν είναι ίδιες, δεδομένου ότι οι θέσεις των επιπέδων εισόδου πειράματος και υπολογισμών δεν είναι ίδιες. Όμως, από τη μορφή των ισογραμμών, είναι εμφανές ότι οι υπολογισμοί προλέγουν πολύ καλά τη θέση και την έκταση του στροβίλου του ακτινικού διαχένου.

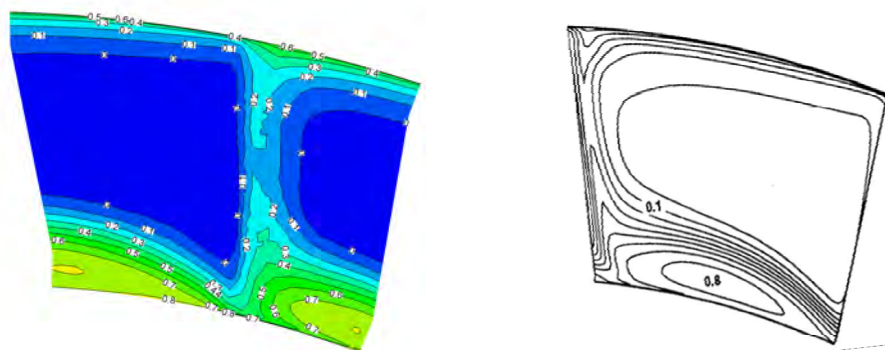
Για ύψος ακτινικού διαχένου $t/c = 2\%$ ο στρόβιλος έχει ήδη εμφανιστεί από το επίπεδο *A* (σχήμα 3.70). Στο επίπεδο *B* (σχήματα 3.71, 3.74), οι διαφοροποιήσεις ως προς τη θέση και την έκταση του στροβίλου για τα δύο ύψη ακτινικού διαχένου είναι περισσότερο εμφανείς απ'ότι για την περίπτωση με ακίνητο τύμπανο.



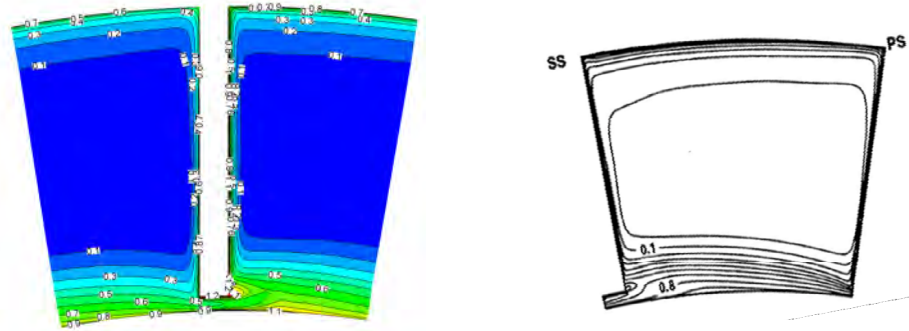
Σχήμα 3.64: Πτερύγωση αξονικού συμπιεστή ΕΘΣ/ΕΜΠ. Ακίνητο τύμπανο, $t/c = 2\%$. Πεδίο συντελεστή ολικής πίεσης στην εγκάρσια τομή *A* του παρόντος υπολογισμού (αριστερά) και του υπολογισμού της διατριβής [19] (δεξιά).



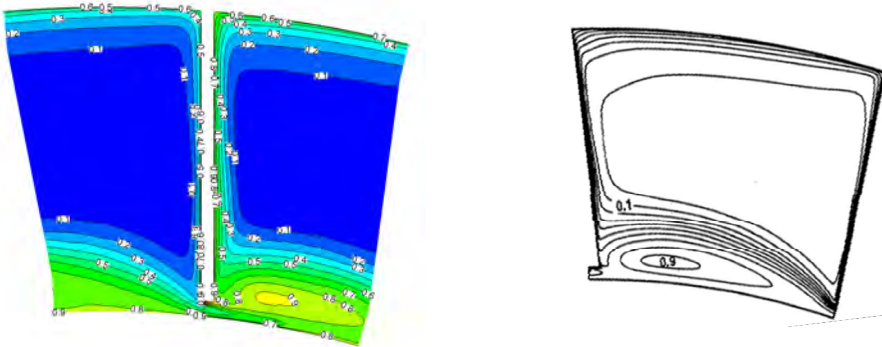
Σχήμα 3.65: Πτερύγωση αξονικού συμπιεστή ΕΘΣ/ΕΜΠ. Ακίνητο τύμπανο, $t/c = 2\%$. Πεδίο συντελεστή ολικής πίεσης στην εγκάρσια τομή *B* του παρόντος υπολογισμού (αριστερά) και του υπολογισμού της διατριβής [19] (δεξιά).



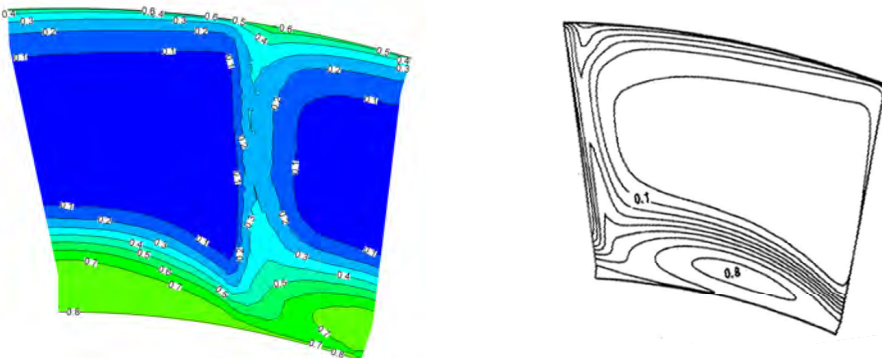
Σχήμα 3.66: Πτερύγωση αξονικού συμπιεστή ΕΘΣ/ΕΜΠ. Ακίνητο τύμπανο, $t/c=2\%$. Πεδίο συντελεστή ολικής πίεσης στην εγκάρσια τομή C του παρόντος υπολογισμού (αριστερά) και του υπολογισμού της διατριβής [19] (δεξιά).



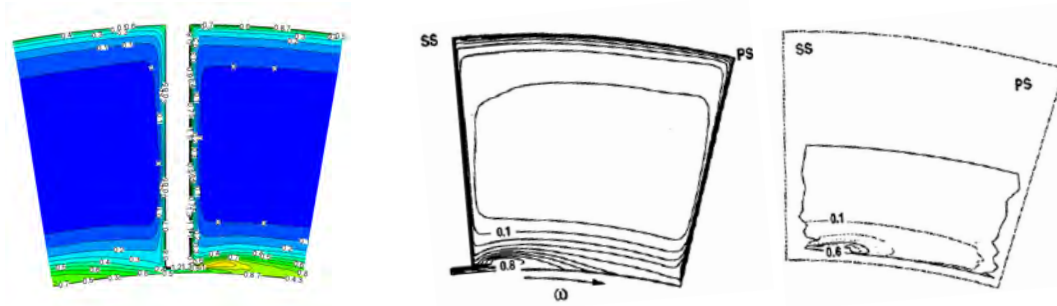
Σχήμα 3.67: Πτερύγωση αξονικού συμπιεστή ΕΘΣ/ΕΜΠ. Ακίνητο τύμπανο, $t/c=4\%$. Πεδίο συντελεστή ολικής πίεσης στην εγκάρσια τομή *A* του παρόντος υπολογισμού (αριστερά) και του υπολογισμού της διατριβής [19] (δεξιά).



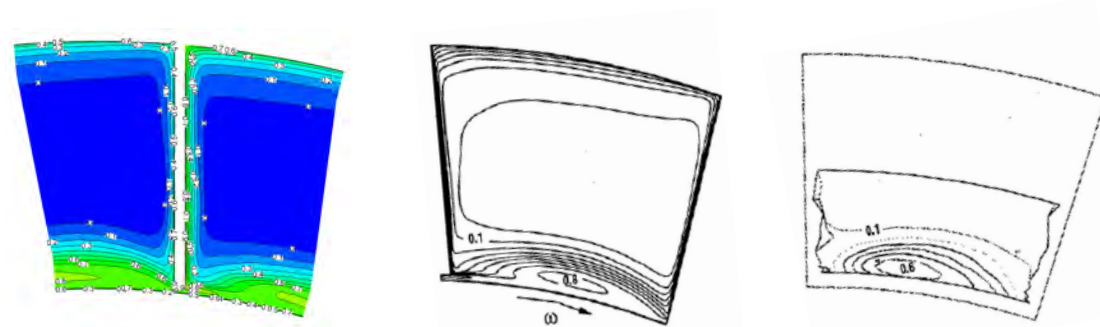
Σχήμα 3.68: Πτερύγωση αξονικού συμπιεστή ΕΘΣ/ΕΜΠ. Ακίνητο τύμπανο, $t/c=4\%$. Πεδίο συντελεστή ολικής πίεσης στην εγκάρσια τομή *B* του παρόντος υπολογισμού (αριστερά) και του υπολογισμού της διατριβής [19] (δεξιά).



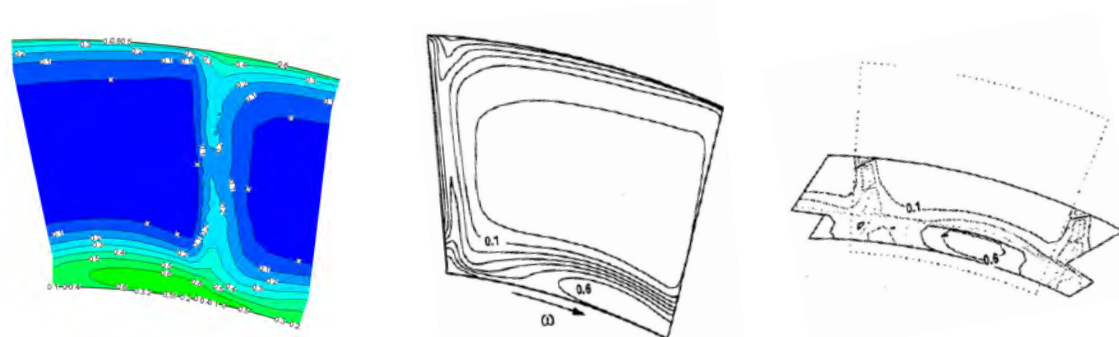
Σχήμα 3.69: Πτερύγωση αξονικού συμπιεστή ΕΘΣ/ΕΜΠ. Ακίνητο τύμπανο, $t/c=4\%$. Πεδίο συντελεστή ολικής πίεσης στην εγκάρσια τομή *C* του παρόντος υπολογισμού (αριστερά) και του υπολογισμού της διατριβής [19] (δεξιά).



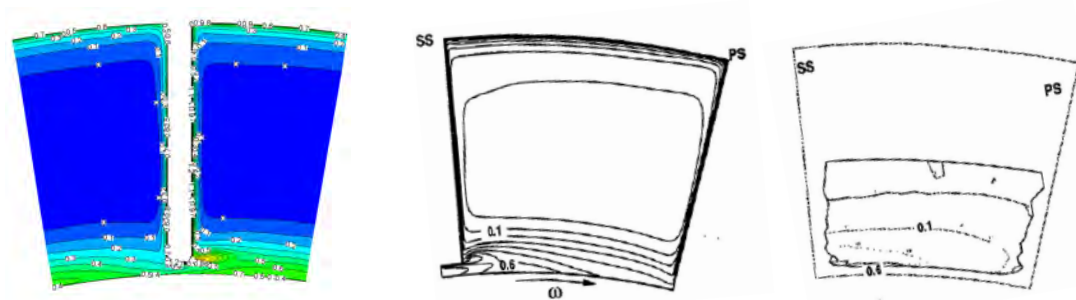
Σχήμα 3.70: Πτερύγωση αξονικού συμπιεστή ΕΘΣ/ΕΜΠ. Περιστρεφόμενο τύμπανο, $t/c=2\%$. Πεδίο συντελεστή ολικής πίεσης στην εγκάρσια τομή A του παρόντος υπολογισμού (αριστερά), του υπολογισμού της διατριβής [19] (κέντρο) και των μετρήσεων στο ΕΘΣ/ΕΜΠ (δεξιά).



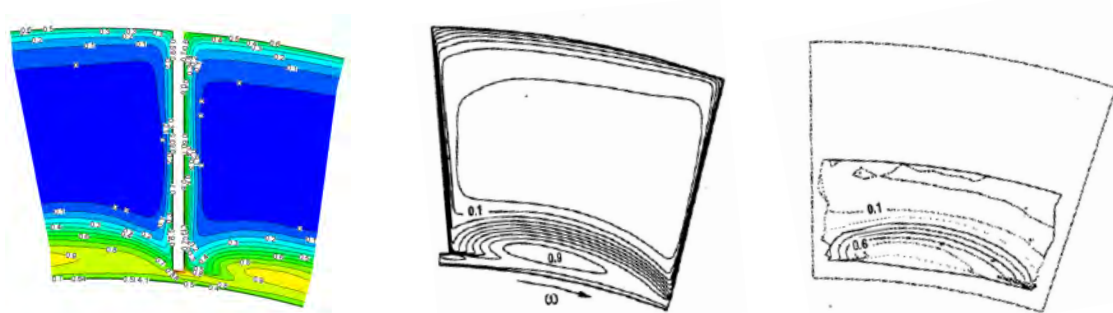
Σχήμα 3.71: Πτερύγωση αξονικού συμπιεστή ΕΘΣ/ΕΜΠ. Περιστρεφόμενο τύμπανο, $t/c=2\%$. Πεδίο συντελεστή ολικής πίεσης στην εγκάρσια τομή B του παρόντος υπολογισμού (αριστερά), του υπολογισμού της διατριβής [19] (κέντρο) και των μετρήσεων στο ΕΘΣ/ΕΜΠ (δεξιά).



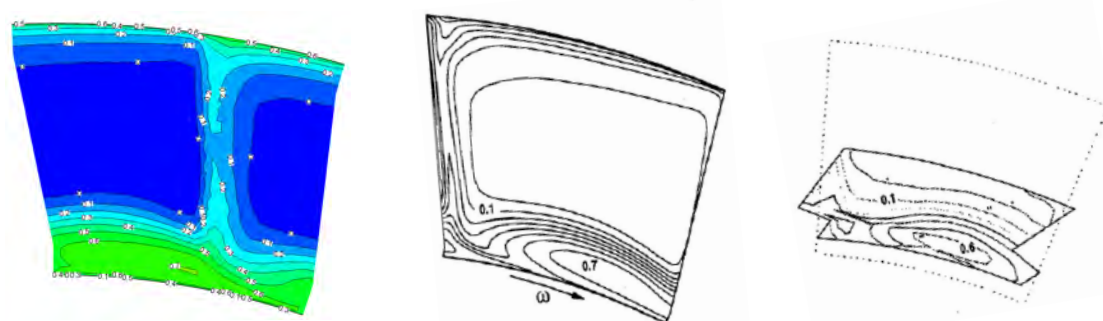
Σχήμα 3.72: Πτερύγωση αξονικού συμπιεστή ΕΘΣ/ΕΜΠ. Περιστρεφόμενο τύμπανο, $t/c=2\%$. Πεδίο συντελεστή ολικής πίεσης στην εγκάρσια τομή C του παρόντος υπολογισμού (αριστερά), του υπολογισμού της διατριβής [19] (κέντρο) και των μετρήσεων στο ΕΘΣ/ΕΜΠ (δεξιά).



Σχήμα 3.73: Πτερύγωση αξονικού συμπιεστή ΕΘΣ/ΕΜΠ. Περιστρεφόμενο τύμπανο, $t/c=4\%$. Πεδίο συντελεστή ολικής πίεσης στην εγκάρσια τομή A του παρόντος υπολογισμού (αριστερά), του υπολογισμού της διατριβής [19] (κέντρο) και των μετρήσεων στο ΕΘΣ/ΕΜΠ (δεξιά).



Σχήμα 3.74: Πτερύγωση αξονικού συμπιεστή ΕΘΣ/ΕΜΠ. Περιστρεφόμενο τύμπανο, $t/c=4\%$. Πεδίο συντελεστή ολικής πίεσης στην εγκάρσια τομή B του παρόντος υπολογισμού (αριστερά), του υπολογισμού της διατριβής [19] (κέντρο) και των μετρήσεων στο ΕΘΣ/ΕΜΠ (δεξιά).



Σχήμα 3.75: Πτερύγωση αξονικού συμπιεστή ΕΘΣ/ΕΜΠ. Περιστρεφόμενο τύμπανο, $t/c=4\%$. Πεδίο συντελεστή ολικής πίεσης στην εγκάρσια τομή C του παρόντος υπολογισμού (αριστερά), του υπολογισμού της διατριβής [19] (κέντρο) και των μετρήσεων στο ΕΘΣ/ΕΜΠ (δεξιά).

3.6 Προσομοίωση Ροής Αέρα Παρουσία Καπνού

Η τελευταία παρουσιαζόμενη περίπτωση αφορά σε πρόλεξη πεδίου ροής αέρα παρουσία καπνού (Παράρτημα Β'). Πρόκειται για τη μελέτη προσομοίωσης της λειτουργίας του αερισμού σε περίπτωση πυρκαγιάς στην αποβάθρα ενός σταθμού μετρό υπό κατασκευή στην Ελλάδα. Η μελέτη επικεντρώνεται στον υπολογισμό της συγκέντρωσης καπνού στο χώρο του σταθμού, από την οποία ουσιαστικά καθορίζεται και η ασφαλής εκκένωση του από τους επιβάτες¹⁰.

Με σκοπό να γίνει κατανοητή η γεωμετρία του χώρου, ακολουθεί μια σύντομη αναφορά στα βασικά χαρακτηριστικά του σταθμού. Ο σταθμός αποτελείται από δύο υπόγεια επίπεδα, το επίπεδο της αποβάθρας και το επίπεδο έκδοσης/ελέγχου εισιτηρίων και έχει κεντρική αποβάθρα. Αυτή χωρίζεται από τις σήραγγες με συρόμενες πόρτες και, άρα, η συναλλαγή αέρα μεταξύ αποβάθρας και σήραγγας θεωρείται αμελητέα. Η αποβάθρα συνδέεται με το υπερκείμενο επίπεδο μέσω δύο σκαλών, οι οποίες χρησιμοποιούνται τόσο σε κανονικές όσο και σε συνθήκες έκτακτης ανάγκης. Επάνω από τις συρόμενες πόρτες τις αποβάθρας υπάρχουν στόμια αερισμού τα οποία, σε κανονική λειτουργία, χρησιμεύουν στην προσαγωγή κλιματιζόμενου αέρα στην αποβάθρα. Σε περίπτωση πυρκαγιάς τα ίδια στόμια θα χρησιμοποιηθούν για την απαγωγή καπνού από την αποβάθρα (με δυνατότητα αναρρόφησης $8m^3/s$ από κάθε πλευρά της αποβάθρας, συνολικά $16m^3/s$), όπως θα παρουσιαστεί στη συνέχεια.

Με βάση τα προηγούμενα, το υπολογιστικό χωρίο για τις προσομοιώσεις (σχήματα 3.76, 3.77) δημιουργήθηκε λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιαιτερότητες του σταθμού. Έτσι, εκτός από τα δύο επίπεδα του σταθμού δημιουργήθηκε ακόμη ένα τρίτο επίπεδο που είναι το επίπεδο του δρόμου. Η αποβάθρα έχει μήκος $50m$ και πλάτος $10m$ και είναι πλήρως απομονωμένη από τις σήραγγες. Το συνολικό χωρίο περιλαμβάνει τα ανοίγματα μεταξύ των επιπέδων, σκάλες από την αποβάθρα προς το επίπεδο έκδοσης/ελέγχου εισιτηρίων και τα στόμια του συστήματος αερισμού τα οποία θεωρείται ότι διατρέχουν όλο το μήκος της αποβάθρας.

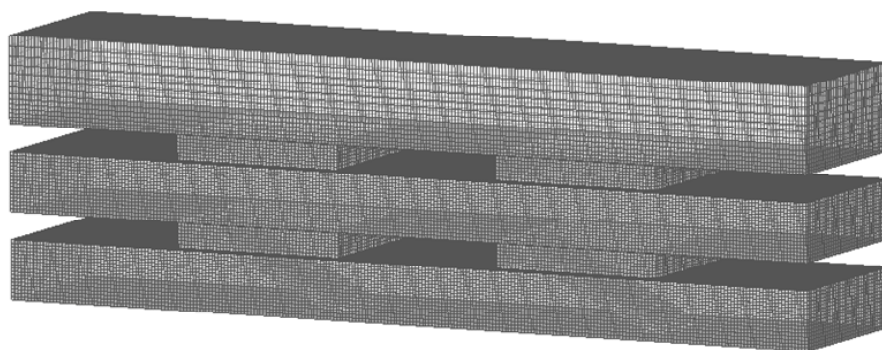
Τα επιμέρους τμήματα του σταθμού (επίπεδα, ανοίγματα, σκάλες) δημιουργήθηκαν ξεχωριστά και το τελικό χωρίο προέκυψε από τη σύνθεση αυτών. Αποτελείται εξ ολοκλήρου από εξαέδρα και έχει περίπου 600000 κόμβους.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από δύο προσομοιώσεις για χρονικά μόνιμη και μη-μόνιμη ροή. Η χρονικά μόνιμη προσομοίωση αποβλέπει στον έλεγχο της λειτουργίας του συστήματος αερισμού ενώ η μη-μόνιμη μελετά την περίπτωση πυρκαγιάς και επικεντρώνεται στην εύρεση της συγκέντρωσης καπνού στο χώρο του σταθμού¹¹. Σε κάθε περίπτωση, η ανάλυση γίνεται με χρήση του μοντέλου τύρβης $k-\epsilon$ όπου έχουν ληφθεί επιπλέον υπόψη όροι βαρύτητας στις επιλυόμενες εξισώσεις ροής. Στην περίπτωση της μη-μόνιμης ροής όπου υπάρχει και η παρουσία καπνού επιλύεται επιπλέον μια εξίσωση για τη συγκέντρωση καπνού.

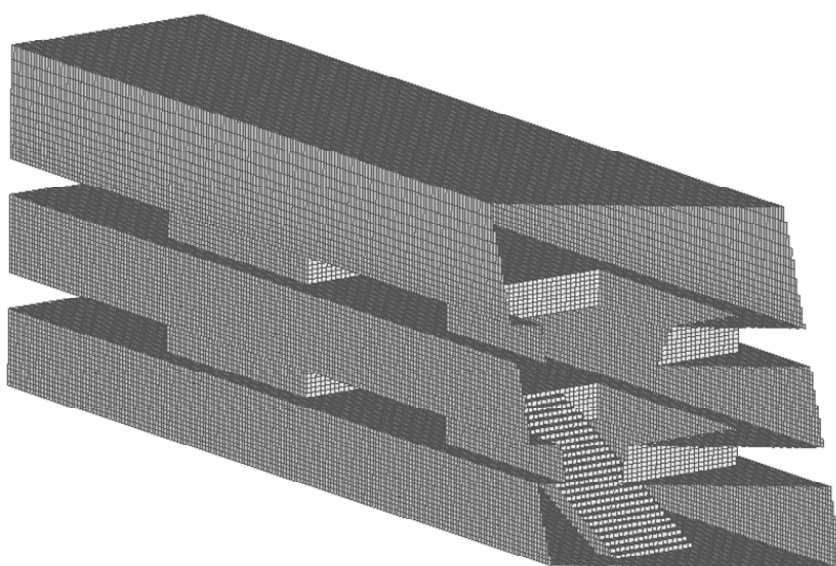
Στις συρόμενες πόρτες αποβάθρας (που θεωρούνται κλειστές) τίθενται οριακές συνθήκες στερεού τοιχώματος. Στα στόμια του συστήματος αερισμού (έξοδος) επιβάλλεται τιμή στατικής πίεσης τέτοια ώστε να εξασφαλίζεται η απαγωγή της προβλεπόμενης ποσότητας αέρα/καπνού.

¹⁰ Η χρηματοδότηση της μελέτης αυτής έγινε από την ΗΜ Α.Ε. στο πλαίσιο συνεργασίας με το ΕΘΣ/ΕΜΠ.

¹¹ Η ασφαλής εκκένωση του χώρου προϋποθέτει η συγκέντρωση καπνού να είναι μικρότερη του 1% σε ύψος μικρότερο του $185cm$. Επιπλέον, οι χρόνοι εκκένωσης ισούνται με 5 λεπτά για το πρώτο επίπεδο και 2 λεπτά για κάθε επόμενο επίπεδο.



Σχήμα 3.76: Υπολογιστικό χωρίο και πλέγμα για το μελετούμενο σταθμό μετρό. Επιφανειακό πλέγμα αποτελούμενο από τετραπλευρικά στοιχεία, που καταλήγει σε 3Δ πλέγμα εξαεδρικών στοιχείων.

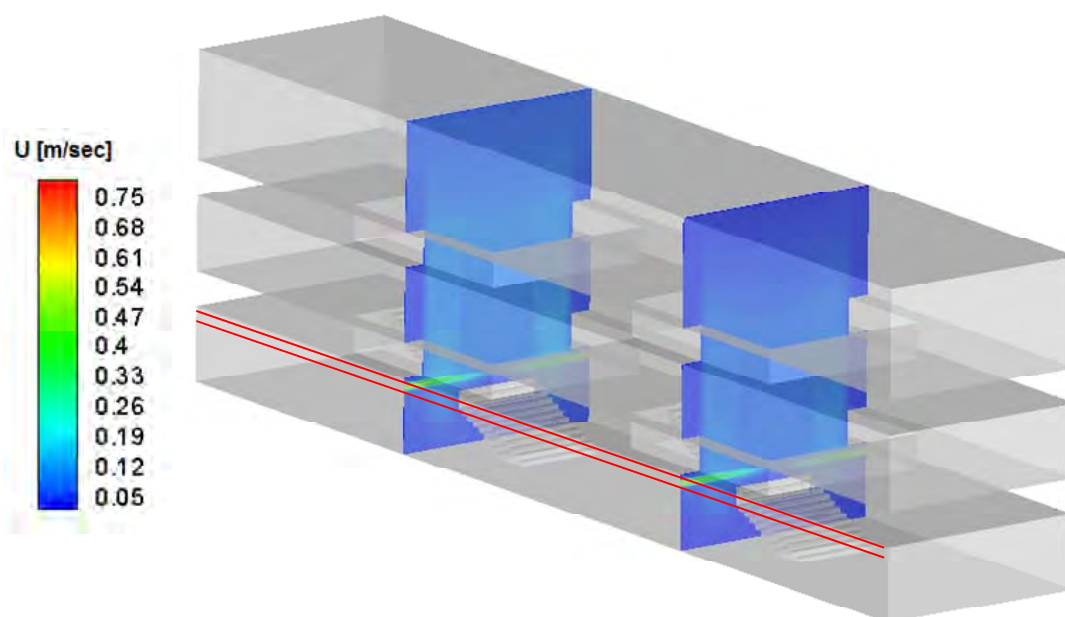


Σχήμα 3.77: Λεπτομέρεια του υπολογιστικού χωρίου στο σταθμό μετρό όπου φαίνονται τα ανοίγματα και οι σκάλες από την αποβάθρα προς στο επίπεδο έκδοσης/ελέγχου εισιτηρίων.

3.6.1 Προσομοίωση Χρονικά Μόνιμης Ροής

Η πρώτη προσομοίωση που παρουσιάζεται αφορά στον υπολογισμό του μόνιμου πεδίου ροής στο σταθμό με το σύστημα αερισμού σε κατάσταση απαγωγής αέρα από την αποβάθρα. Αυτή η περίπτωση αναπαριστά τη λειτουργία του συστήματος αερισμού σε κατάσταση έκτακτης ανάγκης αλλά χωρίς πυρκαγιά. Στο σχήμα 3.78 παρουσιάζεται το πεδίο ταχυτήτων σε δύο τομές του σταθμού, στα ανοίγματα που βρίσκονται και οι σκάλες.

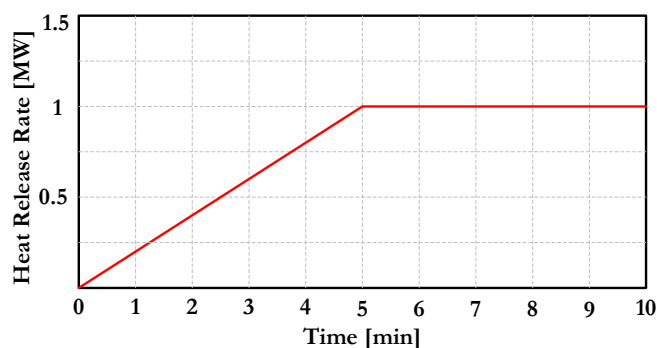
Αυτό που αξίζει να παρατηρήσει κανείς είναι οι πολύ χαμηλές ταχύτητες ροής που αναπτύσσονται στο πεδίο, γεγονός που καθιστά επιβεβλημένη τη χρήση της προσταθεροποίησης χαμηλών αριθμών Mach.



Σχήμα 3.78: Προσομοίωση λειτουργίας αερισμού στο σταθμό μετρό σε περίπτωση ανάγκης. Χρονικά μόνιμη ροή. Πεδίο ταχυτήτων σε δύο εγκάρσιες τομές του σταθμού στην περιοχή που βρίσκονται οι σκάλες.

3.6.2 Προσομοίωση Περιστατικού Πυρκαγιάς

Για την προσομοίωση περιστατικού πυρκαγιάς, θεωρείται η εκδήλωση πυρκαγιάς συνολικής εκλυόμενης ενέργειας 1MW , η οποία αναπτύσσεται γραμμικά εντός 5 λεπτών και παραμένει σταθερή για τα επόμενα 5 λεπτά. Δηλαδή, ο συνολικός χρόνος προσομοίωσης είναι 10 λεπτά με πραγματικό χρονικό βήμα 1 sec (360 επιλύσεις των εξισώσεων ροής). Ο ρυθμός έκλυσης θερμότητας συναρτήσει του χρόνου δίνεται στο σχήμα 3.79.



Σχήμα 3.79: Προσομοίωση περιστατικού πυρκαγιάς. Διάγραμμα ρυθμού έκλυσης θερμότητας από την εστία της πυρκαγιάς κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης.

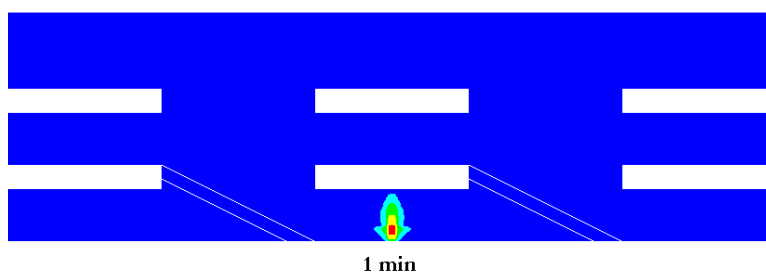
Ο χρόνος ανίχνευσης της πυρκαγιάς στην αποβάθρα (χρόνος που απαιτείται μέχρι ο καπνός να φτάσει στους ανιχνευτές καπνού) είναι περίπου 30sec . Σε αυτό το διάστημα θεωρείται ότι

δεν υπάρχει καθόλου αερισμός στο χώρο. Οι ανεμιστήρες που θα αναλάβουν την απαγωγή του αέρα από την αποβάθρα μέσω των ανοιγμάτων των αεραγωγών φτάνουν στη μέγιστη ταχύτητα τους 90sec μετά την ανίχνευση της πυρκαγιάς (δηλαδή μετά το τέλος του δεύτερου λεπτού). Έτσι, κατά τη διάρκεια αυτών των 90sec, η απαγωγή αέρα αυξάνει γραμμικά από 0 ως $16m^3/sec$, ενώ μετά παραμένει σταθερή. Για τα επόμενα τρία λεπτά, η πυρκαγιά συνεχίζει την ανάπτυξη της μέχρι το 1MW όπου και παραμένει σταθερή για τα επόμενα 5 λεπτά.

Η πυρκαγιά τοποθετείται στο μέσο της αποβάθρας μεταξύ των ανοιγμάτων για τις δύο σκάλες¹². Στα σχήματα που ακολουθούν (3.80–3.84) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της συγκέντρωσης καπνού στο διαμήκες επίπεδο συμμετρίας σε ενδιάμεσες χρονικές στιγμές της προσομοίωσης.

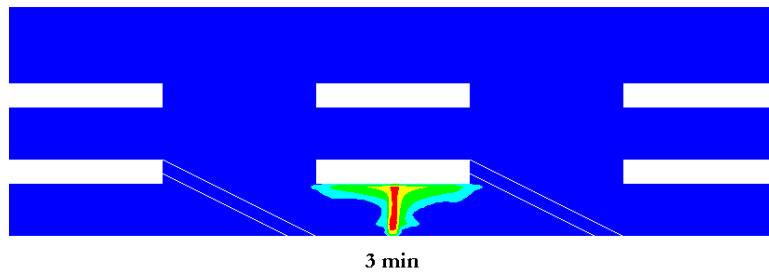
Μετά το πρώτο λεπτό, ο καπνός οριακά φτάνει στην οροφή του επιπέδου της αποβάθρας (σχήμα 3.80). Ο καπνός συνεχίζει να αναπτύσσεται και να εξαπλώνεται στην οροφή κινούμενος προς τα ανοίγματα των δύο σκαλών. Μετά το τρίτο λεπτό κι ενώ το σύστημα αερισμού είναι σε πλήρη λειτουργία (ήδη από το δεύτερο λεπτό), ο καπνός έχει φτάσει στα όρια των ανοιγμάτων (σχήμα 3.81). Από τη δεξιά πλευρά, ο καπνός συναντά το εμπόδιο της κάτω πλευράς της σκάλας ενώ από την άλλη πλευρά αρχίζει να περνά στο πάνω επίπεδο. Στο τέλος του πέμπτου λεπτού, όπου ο ρυθμός έκλυσης θερμότητας φτάνει στη μέγιστη τιμή του, υπάρχει καπνός στην αριστερή σκάλα (σχήμα 3.82) σε συγκέντρωση πολύ μικρότερη της οριακά αποδεκτής τιμής.

Με την πάροδο του χρόνου, ο καπνός συνεχίζει να απλώνεται στην αποβάθρα αλλά και να ανεβαίνει στα ανώτερα επίπεδα, μόνο όμως από την αριστερή πλευρά (σχήματα 3.83, 3.84). Η δεξιά σκάλα σε όλη τη διάρκεια της προσομοίωσης παραμένει ανεπηρέαστη.

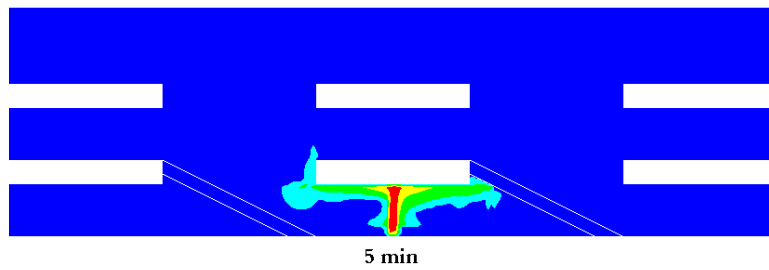


Σχήμα 3.80: Προσομοίωση περιστατικού πυρκαγιάς. Συγκέντρωση καπνού τη χρονική στιγμή $\tau = 1 \text{ min}$.

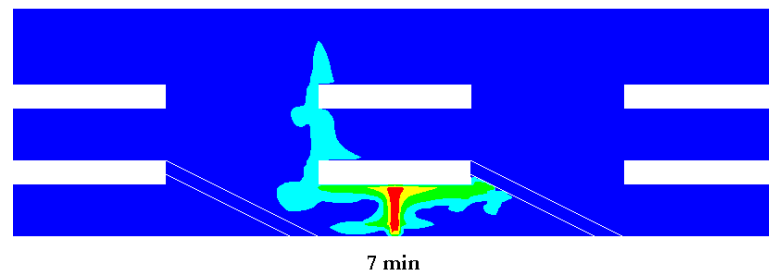
¹² Η θέση αυτή θεωρείται από τις πλέον δυσμενείς καθώς η πυρκαγιά βρίσκεται κοντά και στα δύο ανοίγματα και άρα ο καπνός μπορεί να περάσει 'γρήγορα' στο επάνω επίπεδο.



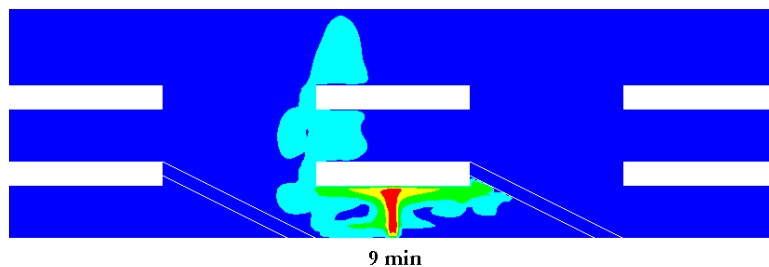
Σχήμα 3.81: Προσομοίωση περιστατικού πυρκαγιάς. Συγκέντρωση καπνού τη χρονική στιγμή $\tau = 3 \text{ min}$.



Σχήμα 3.82: Προσομοίωση περιστατικού πυρκαγιάς. Συγκέντρωση καπνού τη χρονική στιγμή $\tau = 5 \text{ min}$.



Σχήμα 3.83: Προσομοίωση περιστατικού πυρκαγιάς. Συγκέντρωση καπνού τη χρονική στιγμή $\tau = 7 \text{ min}$.



Σχήμα 3.84: Προσομοίωση περιστατικού πυρκαγιάς. Συγκέντρωση καπνού τη χρονική στιγμή $\tau = 9 \text{ min}$.



Κεφάλαιο 4

Συζυγείς Τεχνικές με Προσταθεροποίηση Χαμηλών Αριθμών Mach

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η επέκταση των συζυγών τεχνικών για τον υπολογισμό των παραγωγών συναρτήσεων κόστους σε προβλήματα αεροδυναμικού σχεδιασμού–βελτιστοποίησης σε χαμηλές ταχύτητες μέσω προσταθεροποίησης χαμηλών αριθμών Mach στις ισχύουσες εξισώσεις ροής. Το κεφάλαιο ξεκινά με μια γενικότερη εισαγωγή στις συζυγείς τεχνικές, όπως παρουσιάζονται στη διεθνή βιβλιογραφία, με ιδιαίτερες αναφορές στις μεθόδους και το σχετικό λογισμικό που έχει αναπτυχθεί στο ΕΘΣ/ΕΜΠ, [18, 194]. Το λογισμικό αυτό που αφορά είτε στη συνεχή, [18], είτε στη διακριτή, [10], συζυγή τεχνική αποτελεί τη βάση για την εισαγωγή και χρήση της προσταθεροποίησης στις συζυγείς τεχνικές, [29, 30], στην παρούσα διατριβή.

Η επέκταση των συζυγών τεχνικών για σχεδιασμό σε χαμηλές ταχύτητες καλύπτει και τις δύο παραλλαγές αυτών, τη διακριτή και τη συνεχή μέθοδο. Δεδομένου ότι, στην περίπτωση της διακριτής συζυγούς μεθόδου η εισαγωγή της προσταθεροποίησης είναι σχεδόν άμεση, μεγαλύτερη έμφαση δίνεται στη συνεχή διατύπωση. Για την τελευταία, αρχικά αναλύονται οι συναρτήσεις κόστους που θα χρησιμοποιηθούν και στη συνέχεια, παρουσιάζεται η συζυγή διατύπωση με προσταθεροποίηση.

Ακολούθως, λαμβάνει χώρα διερεύνηση και εμβάθυνση ως προς το αν η τεχνική της προσταθεροποίησης πρέπει να εφαρμοστεί στις συζυγείς εξισώσεις ή αν οι συζυγείς εξισώσεις πρέπει να διατυπωθούν με αφετηρία τις προσταθεροποιημένες εξισώσεις ροής. Παρά το γεγονός ότι η φάση της διερεύνησης προηγείται της φάσης της διατύπωσης, επιλέγεται να παρουσιαστεί μετά από αυτήν ώστε να αποφευχθούν περιττές επαναλήψεις.

Ακολουθεί η περιγραφή του αλγορίθμου σχεδιασμού για εκτέλεση σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την παρουσίαση εφαρμογών σχεδιασμού–βελτιστοποίησης αεροδυναμικών μορφών για τις οποίες χρησιμοποιείται η προτεινόμενη μέθοδος. Η πιστοποίηση περιλαμβάνει το σχεδιασμό πτερυγώσεων στροβιλομηχανών αλλά και μεμονωμένων αεροτομών, σε ατρίβεις και συνεκτικές ροές. Επιπλέον, παρουσιάζεται η διπλή επιτάχυνση της διαδικασίας σχεδιασμού (α) από τη χρήση της προσταθεροποίησης χαμηλών αριθμών Mach

και (β) από τη χρήση πολυεπεξεργαστικού συστήματος.

4.1 Βιβλιογραφική Επισκόπηση

Η συζυγής τεχνική πρωτοχρησιμοποιήθηκε σε προβλήματα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης το 1984 από τον Pironneau, [202], για προβλήματα δυναμικών ροών με ελλειπτικές εξισώσεις. Ουσιαστικά όμως, η πρώτη εφαρμογή στις υπερβολικές εξισώσεις ροής έγινε από τον Jameson ο οποίος, το 1988, [118], ανέπτυξε και πρότεινε τη συνεχή συζυγή τεχνική για τις εξισώσεις Euler. Από την ανάλυση που παρουσιάζεται, αποδεικνύεται ότι οι συζυγείς εξισώσεις έχουν όμοια πολυπλοκότητα με τις εξισώσεις ροής και άρα το κόστος για έναν κύκλο σχεδιασμού είναι σχεδόν διπλάσιο του κόστους επίλυσης των εξισώσεων ροής. Εφαρμογές της μεθόδου στο σχεδιασμό μεμονωμένων πτερύγων, παρουσιάζονται λίγο αργότερα από τον ίδιο, [119].

Η ερευνητική ομάδα του Jameson (Reuther, Alonso, Pierce, Martinelli, Kim κ.α.) συνέχισε να ασχολείται με τη συνεχή συζυγή μέθοδο επεκτείνοντάς τη στο σχεδιασμό σε υπερηχητικές ροές και σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον [120, 213]. Επιπλέον, αναπτύχθηκε η συζυγής διατύπωση των εξισώσεων Navier–Stokes για σχεδιασμό σε συνεκτικές ροές [121], ενώ υπήρξε περαιτέρω επέκταση στις μη-μόνιμες ροές, [180]. Οι εφαρμογές που παρουσιάζονται περιλαμβάνουν το σχεδιασμό πτερύγων αεροσκαφών με στόχο δεδομένη κατανομή πίεσης, την ελαχιστοποίηση του συντελεστή οπισθέλκουσας με δεδομένο συντελεστή άνωσης, [140, 141], ή και τον περιορισμό των χροστικών κυμάτων, [108] ή του ηχητικού κρότου, [23].

Ενώ, οι περισσότερες από τις παραπάνω εργασίες (Jameson κ.α.) αφορούσαν εφαρμογές της συνεχούς συζυγούς τεχνικής σε δομημένα πλέγματα, ήδη από το 1997 οι Anderson, Venkatakrishnan, [24] παρουσίασαν την επέκταση της τεχνικής σε μη-δομημένα πλέγματα και συνεκτικές ροές. Η ίδια εργασία, εκτός από τη συνεχή περιλαμβάνει και την ανάπτυξη της διακριτής συζυγούς τεχνικής, ενώ προβαίνει και σε συγκρίσεις των παραγώγων από τις δύο συζυγείς τεχνικές και τις πεπερασμένες διαφορές.

Στις αρχικές διατυπώσεις της συνεχούς συζυγούς τεχνικής [119, 121] η έκφραση της παραγώγου της συνάρτησης κόστους ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού περιείχε χωρικά ολοκληρώματα τα οποία απαιτούσαν αρκετό χρόνο υπολογισμού. Το 2003 ο Jameson [122] πρότεινε μια νέα διατύπωση την οποία ονόμασε “reduced gradient formula”. Σε αυτή τη διατύπωση, η οποία αφορούσε μόνο ατριβείς ροές, οι παράγωγοι ευαισθησίας υπολογίζονται μόνο στα όρια του υποχωρίου.

Προς την ίδια κατεύθυνση οι Papadimitriou, Giannakoglou, [194] πρότειναν μια πιο γενική διατύπωση, για διάφορες συναρτήσεις κόστους αλλά και για συνεκτικές ροές. Επιπλέον πλεονέκτημα αυτής της διατύπωσης, εκτός από το ότι η έκφραση της παραγώγου εξαρτάται μόνο από επιφανειακά ολοκληρώματα, είναι ότι δεν εξαρτάται από μεταβολές χωρικών ποσοτήτων που αφορούν στο πλέγμα (λ.χ. μετρικών). Αυτό καθιστά τη διατύπωση ανεξάρτητη του τύπου του πλέγματος του υπολογιστικού χωρίου και, άρα, μπορεί να εφαρμοστεί τόσο σε δομημένα όσο και σε μη-δομημένα πλέγματα.

Εκτός από τις περιπτώσεις σχεδιασμού μεμονωμένων αεροτομών ή και ολόκληρων αεροσκαφών στις οποίες αρχικά εφαρμόστηκε, η συνεχής συζυγής τεχνική επεκτάθηκε και στο σχεδια-

σμό πτερυγώσεων στροβιλομηχανών με στόχο την ελαχιστοποίηση του συντελεστή απωλειών ολικής πίεσης, [193, 192], αγωγών-εξαρτημάτων αυτοκινήτων, αλλά και στη βελτιστοποίηση μορφής ολόκληρου αυτοκινήτου, [190, 191]. Στις δύο τελευταίες εργασίες, η διατύπωση των συζυγών εξισώσεων γίνεται από τις ασυμπίεστες εξισώσεις ροής και χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό τοπολογικών και επιφανειακών παραγώγων ευαισθησίας.

Όσον αφορά στη διακριτή συζυγή τεχνική, η ανάπτυξη της έγινε αρχικά από τους Elliott, Peraire το 1996, για ατριβείς ροές σε μη-δομημένα πλέγματα, [81]. Οι ίδιοι συγγραφείς επέκτειναν τη διατύπωση στις συνεκτικές ροές, [82], ενώ πρότειναν και σχετική διατύπωση για το σχεδιασμό αεροσκαφών, [83]. Την ίδια περίπου περίοδο, η διακριτή συζυγής τεχνική επεκτείνεται στις τυρβώδεις ροές από τους Anderson, Bonhaus, Nielsen για σχεδιασμό (2Δ) αεροτομών, [25], και (3Δ) πτερύγων, [184]. Σε αυτές τις εργασίες υιοθετείται η παραδοχή της μηδενικής μεταβολής των μεταβλητών του μοντέλου τύρβης (τυρβώδους συνεκτικότητας ή κάθε άλλης ποσότητας που αυτό εισάγει) καθώς δεν διατυπώνεται και δεν επιλύεται συζυγής εξίσωση του μοντέλου τύρβης.

Επιπλέον, για τη διακριτή συζυγή τεχνική σημαντική είναι η ανάπτυξη από τον Giles και την ερευνητική του ομάδα (Pierce, Duta κ.α). Αυτοί, παρότι αρχικά ασχολήθηκαν με τη μαθηματική θεμελίωση και μελέτη και των δύο τεχνικών, [95, 96], τελικά επικεντρώθηκαν στη διακριτή συζυγή τεχνική, χρησιμοποιώντας τόσο τις εξισώσεις Euler όσο και τις Navier–Stokes, [97]. Οι εφαρμογές τους περιλαμβάνουν ροές εξωτερικής αεροδυναμικής για ελαχιστοποίηση των κρουστικών κυμάτων [98], αλλά και ροές (μόνιμες και μη-μόνιμες) σε πτερυγώσεις στροβιλομηχανών, όπου ως στόχοι τίθενται η ελαχιστοποίηση των απωλειών και η ελάττωση των ταλαντώσεων των πτερυγίων λόγω κυμάτων [45, 75, 46].

Στη βιβλιογραφία μπορούν ακόμα να βρεθούν εργασίες όπου παρουσιάζονται, υπό προϋποθέσεις, οι αναλυτικές λύσεις των συζυγών εξισώσεων, [185].

Ανεξάρτητα από τις προτιμήσεις των ερευνητών προς τη διακριτή ή τη συνεχή συζυγή τεχνική, ορισμένοι απ'αυτούς προχώρησαν και σε συγκρίσεις ανάμεσα στις δύο τεχνικές. Για παράδειγμα, στις εργασίες [181, 182] των Nadarajah, Jameson παρουσιάζεται σύγκριση ανάμεσα στη συνεχή και στη διακριτή συζυγή μέθοδο για ατριβείς και συνεκτικές ροές αντίστοιχα. Η σύγκριση περιλαμβάνει τη διατύπωση, την εφαρμογή των οριακών συνθηκών, τις παραγώγους ευαισθησίας και τη σύγκλιση. Από αυτές τις συγκρίσεις προκύπτει ότι οι παράγωγοι ευαισθησίας που υπολογίζονται με τη διακριτή συζυγή τεχνική είναι πιο ακριβείς από αυτές της συνεχούς συζυγούς τεχνικής (συγκρινόμενες με τις αντίστοιχες που υπολογίζονται με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών). Βέβαια, η διαφορά στην ακρίβεια είναι πολύ μικρή και μειούται ακόμα περισσότερο όσο αυξάνει η διάσταση του υπολογιστικού πλέγματος. Επιπλέον αυτή η διαφορά δεν επηρεάζει το ρυθμό σύγκλισης. Τέλος αποδεικνύεται ότι το υπολογιστικό κόστος για τον υπολογισμό των συζυγών μεταβλητών είναι μεγαλύτερο με τη διακριτή συζυγή τεχνική, αν και αυτό εξαρτάται σημαντικά από τον τρόπο προγραμματισμού. Σύγκριση, όσον αφορά στη μαθηματική θεμελίωση των δύο τεχνικών, παρουσιάζεται και στην εργασία [96] (Giles, Pierce). Οι συγγραφείς καταλήγουν στο ότι η διακριτή τεχνική εμφανίζει περισσότερα πλεονεκτήματα από τη συνεχή τεχνική για εννοιολογικούς και πρακτικούς λόγους (conceptual and pragmatic reasons), γεγονός που εξηγεί και τη μετέπειτα ενασχόληση τους με τη διακριτή τεχνική.

Για την επιτάχυνση της συνολικής διαδικασίας βελτιστοποίησης σχεδιασμού έχει προταθεί η λεγόμενη one shot μέθοδος [148, 111]. Σύμφωνα με αυτή, οι εξισώσεις της ροής, οι συζυγείς εξισώσεις και η εξίσωση διόρθωσης των τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού επιλύονται ταυτόχρονα. Το συνολικό υπολογιστικό κόστος της διαδικασίας σχεδιασμού είναι, κατά πολλούς συγγραφείς, ένα μικρό πολλαπλάσιο του κόστους επίλυσης των εξισώσεων ροής.

Μια λίγο διαφορετική τεχνική που συναντάται στη βιβλιογραφία και υπό προϋποθέσεις μειώνει το υπολογιστικό κόστος είναι η χρήση μη-ακριβών (προσεγγιστικών) παραγώγων της κλίσης της συνάρτησης κόστους (incomplete gradient), [176, 177, 178, 224, 225]. Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο, αντί της ακριβούς παραγώγου υπολογίζεται μια προσεγγιστική παράγωγος αφού παραλειφθούν ορισμένοι 'μη-σημαντικοί' όροι (συνήθως, πρόκειται για όρους των οποίων ο υπολογισμός απαιτεί πολύ χρόνο). Ανάλογα με τη διατύπωση μπορεί να απαιτείται ή όχι η επίλυση των συζυγών εξισώσεων ή να απαιτούνται οι τιμές των συζυγών μεταβλητών στο όριο του χωρίου. Παρότι οι προσεγγιστικές τιμές της παραγώγου αποκλίνουν από τις πραγματικές, στις σχετικές εργασίες προτείνονται αλγόριθμοι με καλή απόδοση ως προς τη συνολική διαδικασία βέλτιστου σχεδιασμού.

Ένας διαφορετικός τρόπος επιτάχυνσης της διαδικασίας σχεδιασμού σε χαμηλές ταχύτητες ροής εμφανίζεται στις εργασίες [29, 30] και είναι η ανάπτυξη που έγινε στο πλαίσιο της παρούσας διατριβής. Σε αντίθεση με τα προηγούμενα (τα σχετικά με τον υπολογισμό προσεγγιστικών παραγώγων), η διατριβή εστιάζει στον υπολογισμό των ακριβών παραγώγων της συνάρτησης κόστους, όταν η ροή διαμορφώνεται σε πολύ μικρές ταχύτητες (σχεδόν ασυμπίεστες ροές). Για το λόγο αυτό, οι συζυγείς εξισώσεις για τη συνεχή αλλά και τη διακριτή τεχνική διατυπώνονται από τις αντίστοιχες προσταθεροποιημένες εξισώσεις ροής (Euler ή Navier–Stokes). Έτσι, όχι μόνο καθίσταται δυνατός ο σχεδιασμός σε πολύ χαμηλές ταχύτητες ροής, αλλά η επιβολή της προσταθεροποίησης επιταχύνει την επίλυση των εξισώσεων ροής και των συζυγών εξισώσεων, άρα και το συνολικό σχεδιασμό-βελτιστοποίηση.

Στα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω περιλαμβάνονται και εργασίες από την πραγματοποιούμενη έρευνα στο ΕΘΣ/ΕΜΠ. Εκτός αυτών, αναγνωρίζονται ακόμη δύο περιοχές ενδιαφέροντος στις οποίες, αν και δεν εστιάζει η παρούσα διατριβή, είναι προφανές ότι η προτεινόμενη διαδικασία προσταθεροποίησης χαμηλών αριθμών Mach μπορεί να 'μετεμφυτευτεί' και να προσαρμοστεί άμεσα.

Η μια περιοχή ενδιαφέροντος αφορά στη χρήση της συζυγούς τεχνικής, είτε στη συνεχή είτε στη διακριτή εκδοχή της, για τον υπολογισμό παραγώγων ευαισθησίας δεύτερης τάξης, δηλαδή του μητρώου Hess για συγκεκριμένες συναρτήσεις κόστους. Η έρευνα αυτή, [195, 196, 197] που είναι σε εξέλιξη, ως προς τη συνεχή διατύπωση εμφανίζεται για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία, ενώ υπάρχουν ελάχιστες εργασίες που παρουσιάζουν αντίστοιχες διατυπώσεις με τη διακριτή τεχνική, [221, 232]. Η εύρεση του ακριβούς μητρώου Hess επιτρέπει τη χρήση μεθόδου Newton (αντί της μεθόδου της απότομης καθόδου) και το ενδιαφέρον εστιάζεται στο υπολογιστικό κόστος.

Η δεύτερη περιοχή ενδιαφέροντος αφορά στην άρση της παραδοχής περί αμελητέων μεταβολών των τυρβωδών ποσοτήτων. Η διατύπωση συζυγούς εξίσωσης για αυτή του μοντέλου τύρβης (για το μοντέλο Spalart–Allmaras), [10, 263] έχει ήδη δειχθεί ότι επιτρέπει τον ακριβή υπολογισμό παραγώγων ευαισθησίας ενώ η προαναφερθείσα παραδοχή (η οποία γίνεται στις

περισσότερες μεθόδους που αναπτύσσονται και συναντώνται στη βιβλιογραφία) οδηγεί, κατά περίπτωση, σε σημαντικές αποκλίσεις ως προς την τιμή των παραγώγων.

4.2 Εισαγωγή στις Συζυγείς Τεχνικές–Διαδικασία Σχεδιασμού

Έστω ότι επιθυμείται ο σχεδιασμός–βελτιστοποίηση ενός αεροδυναμικού σώματος (λ.χ. μιας αεροτομής) με βάση ένα προεπιλεγμένο κριτήριο. Το κριτήριο αυτό, μαθηματικά ταυτίζεται με την ελαχιστοποίηση της τιμής μιας συνάρτησης F . Επιπλέον, θεωρείται ότι η προς σχεδιασμό αεροτομή παραμετροποιείται με κάποιο τρόπο (πολύωνυμα Bézier–Bernstein, b-Splines, NURBS κ.α.), ο οποίος καθορίζει το διάνυσμα \vec{b} των μεταβλητών σχεδιασμού που μονοσήμαντα ορίζουν το σχήμα της αεροτομής. Η συνάρτηση κόστους διατυπώνεται ως

$$F = F(\vec{U}, \vec{b}) \quad (4.1)$$

όπου \vec{U} είναι το διάνυσμα των μεταβλητών της ροής (όπως παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 2) και $\vec{b} = [b_1, b_2, \dots, b_N]^T$ οι N μεταβλητές σχεδιασμού.

Για τη διακριτή μέθοδο η οποία πρώτη παρουσιάζεται, η σχέση 4.1 εκφράζει τη διακριτοποιημένη γραφή της συνάρτησης κόστους. Αν λ.χ. πρόκειται για μια ολοκληρωματική ποσότητα, η διακριτοποιημένη γραφή ενέχει την εφαρμογή μιας μεθόδου αριθμητικής ολοκλήρωσης. Οποιαδήποτε αλλαγή των μεταβλητών σχεδιασμού \vec{b} προκαλεί αλλαγή της μορφής–γεωμετρίας της αεροτομής, άρα και του πεδίου ροής \vec{U} γύρω από αυτή. Η μεταβολή δF της συνάρτησης κόστους λόγω της μεταβολής $\delta \vec{b}$ των τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού (και του πεδίου ροής) γράφεται ως

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial \vec{U}} \delta \vec{U} + \frac{\partial F}{\partial \vec{b}} \delta \vec{b} \quad (4.2)$$

Οι εξισώσεις του πεδίου ροής, χρησιμοποιώντας το διάνυσμα του υπολοίπου των διακριτοποιημένων εξισώσεων \vec{R} , γράφονται

$$\vec{R} = \vec{R}(\vec{U}, \vec{b}) = 0 \quad (4.3)$$

Η μεταβολή του πεδίου ροής λόγω μεταβολής των μεταβλητών σχεδιασμού είναι

$$\delta \vec{R} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \delta \vec{U} + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \delta \vec{b} = 0 \quad (4.4)$$

και εξακολουθεί να ισούται με μηδέν καθώς οι εξισώσεις ροής ικανοποιούνται τόσο πριν όσο και μετά τη μεταβολή της μορφής της αεροτομής που προκλήθηκε από τη μεταβολή $\delta \vec{b}$. Δεδομένου ότι $\delta \vec{R} = 0$, η εξίσωση 4.4, μπορεί να πολλαπλασιασθεί με ένα διάνυσμα $\vec{\Psi}$ και να προστεθεί στην εξίσωση 4.2 της μεταβολής της συνάρτησης, κόστους δημιουργώντας τη λεγόμενη επαυξημένη συνάρτηση κόστους. Η μεταβολή αυτής γράφεται

$$\delta F_{aug} = \frac{\partial F}{\partial \vec{U}} \delta \vec{U} + \frac{\partial F}{\partial \vec{b}} \delta \vec{b} + \vec{\Psi}^T \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \delta \vec{U} + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \delta \vec{b} \right)$$

Αναδιατάσσοντας τους όρους, προκύπτει

$$\delta F_{aug} = \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{U}} + \vec{\Psi}^T \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right) \delta \vec{U} + \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{b}} + \vec{\Psi}^T \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \right) \delta \vec{b} \quad (4.5)$$

Στην εξίσωση 4.5 επιλέγεται το διάνυσμα $\vec{\Psi}$ με τρόπο ώστε να μηδενίζεται ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους, δηλαδή να ισχύει ότι

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \vec{U}}\right) + \vec{\Psi}^T \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}}\right) = 0$$

ή

$$\left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}}\right)^T \vec{\Psi} + \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{U}}\right)^T = 0 \quad (4.6)$$

Με αυτόν τον τρόπο η μεταβολή της επαυξημένης συνάρτησης κόστους καθίσταται ανεξάρτητη της μεταβολής των μεταβλητών της ροής $\delta \vec{U}$. Η εξίσωση 4.6 ονομάζεται διακριτή συζυγής (adjoint) ή δυαδική (dual) εξίσωση και το $\vec{\Psi}$ αποτελεί το πεδίο των συζυγών ή δυαδικών μεταβλητών. Με την ικανοποίηση-επίλυση των συζυγών εξισώσεων η σχέση 4.5 γράφεται

$$\delta F_{aug} = \delta F = \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{b}} + \vec{\Psi}^T \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}}\right) \delta \vec{b} \quad (4.7)$$

και επαναδιατυπώνεται ώστε να εκφράσει την επιθυμητή κλίση της συνάρτησης κόστους ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, ως

$$\frac{\delta F}{\delta \vec{b}} = \frac{\partial F}{\partial \vec{b}} + \vec{\Psi}^T \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \quad (4.8)$$

Για τη συνεχή συζυγή μέθοδο, η επαυξημένη συνάρτηση κόστους προκύπτει από την πρόσθεση του ολοκληρώματος του γινομένου των εξισώσεων ροής με το πεδίο των συζυγών μεταβλητών $\vec{\Psi}^1$ στη συνάρτηση κόστους, ως

$$F_{aug} = F + \int_{\Omega} \vec{\Psi}^T \left(\frac{\partial \vec{f}_i}{\partial x_i}\right) d\Omega \quad (4.9)$$

Η μεταβολή της F_{aug} γράφεται

$$\delta F_{aug} = \delta F + \int_{\Omega} \vec{\Psi}^T \delta \left(\frac{\partial \vec{f}_i}{\partial x_i}\right) d\Omega \quad (4.10)$$

όπου οι όροι που περιέχουν μεταβολές των συζυγών μεταβλητών και του στοιχειώδους όγκου $d\Omega$ είναι μηδενικοί, καθώς πολλαπλασιάζονται με τις εξισώσεις ροής οι οποίες στη χρονικά μόνιμη λύση ικανοποιούνται, δηλαδή τις $\frac{\partial \vec{f}_i}{\partial x_i} = 0$. Για τη μεταβολή δF της συνάρτησης κόστους, 'κατ'αναλογία' με τη σχέση 4.2, ισχύει

$$\delta F = \delta F_b(\delta \vec{b}) + \delta F_U(\delta \vec{U}) \quad (4.11)$$

όπου ο πρώτος όρος εξαρτάται από τη μεταβολή των τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού και ο δεύτερος από τη μεταβολή του πεδίου ροής. Θεωρώντας τις ατριβείς εξισώσεις ροής και

¹ Διευκρινίζεται ότι το διάνυσμα $\vec{\Psi}$, στην περίπτωση της συνεχούς συζυγούς τεχνικής, αντιστοιχεί στις εξισώσεις ροής και δεν πρέπει να συγχέεται με αυτό που χρησιμοποιήθηκε κατά την ανάλυση της διακριτής συζυγούς τεχνικής, το οποίο αντιστοιχούσε σε όλες τις κομβικές τιμές πολλαπλασιασμένες με το πλήθος των μ.δ.ε της ροής.

ακολουθώντας την ανάπτυξη που παρουσιάζεται στη διατριβή [18]², λαμβάνεται η συνεχής συζυγής εξίσωση

$$\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t} - A_i^T \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x_i} = 0 \quad (4.12)$$

ενώ η τελική έκφραση της μεταβολής της συνάρτησης κόστους δίνεται από τη σχέση

$$\delta F_{aug} = \delta F_b(\delta \vec{b}) + \int_{S_w} [\Psi_{i+1} p - \vec{\Psi}^T \vec{f}_i^{inv}] \delta(n_i dS) - \int_{S_w} \frac{\partial \vec{U}^T}{\partial x_k} A^T \vec{\Psi} \delta x_k dS \quad (4.13)$$

από την οποία υπολογίζεται η κλίση της συνάρτησης κόστους ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού.

Η κλίση της συνάρτησης κόστους, υπολογισμένη μέσω είτε της διακριτής είτε της συνεχούς συζυγούς διατύπωσης, μπορεί, στη συνέχεια, να χρησιμοποιηθεί σε οποιαδήποτε μέθοδο καθόδου για τη διόρθωση-ανανέωση της γεωμετρίας του προς σχεδιασμό αεροδυναμικού σχήματος. Ειδικότερα, για την περίπτωση της απότομης καθόδου που χρησιμοποιείται στην παρούσα διατριβή, η διαδικασία ανανέωσης των τιμών του \vec{b} γράφεται ως

$$\vec{b}^{new} = \vec{b}^{old} - \eta \left(\frac{dF}{d\vec{b}} \right) \quad (4.14)$$

με η το βήμα της καθόδου που καθορίζεται από το χρήστη.

Διαδικασία Σχεδιασμού με τη Συζυγή Τεχνική

Με βάση τα παραπάνω, το πρώτο βήμα για το σχεδιασμό-βελτιστοποίηση ενός αεροδυναμικού σώματος είναι ο καθορισμός της συνάρτησης κόστους F προς ελαχιστοποίηση. Στην παρούσα διατριβή χρησιμοποιούνται δύο συναρτήσεις κόστους, οι οποίες θα οριστούν και μαθηματικά σε επόμενη ενότητα. Η πρώτη περίπτωση σχεδιασμού είναι ο λεγόμενος αντίστροφος σχεδιασμός, όπου προκαθορίζεται η επιθυμητή κατανομή πίεσης p_{tar} στο στερεό τοίχωμα του σώματος (λ.χ. τις πλευρές υπερπίεσης και υποπίεσης μιας αεροτομής). Η δεύτερη περίπτωση σχεδιασμού αφορά σε μεμονωμένες αεροτομές, με στόχο την ελαχιστοποίηση του συντελεστή οπισθέλκουσας με δεδομένη τιμή του συντελεστή άνωσης.

Έχοντας καθορίσει τη συνάρτηση κόστους, απαιτείται επιλογή του γεωμετρικού μοντέλου που καθορίζει την παραμετροποίηση. Στην ανάπτυξη που ακολουθεί γίνεται χρήση των καμπυλών Bézier-Bernstein χωρίς βέβαια να αποκλείεται η χρήση και κάποιου άλλου μοντέλου (πχ. b-Splines, NURBS κλπ). Έστω, για λόγους γενικότητας, ότι το μοντέλο της παραμετροποίησης εκφράζεται ως $B(\vec{b})$. Τέλος, πρέπει να επιλεγθεί η μέθοδος βελτιστοποίησης (εδώ, όπως προαναφέρθηκε, χρησιμοποιείται η μέθοδος της απότομης καθόδου) που θα χρησιμοποιηθεί στο βηματικό αλγόριθμο επίλυσης.

Ο αλγόριθμος σχεδιασμού-βελτιστοποίησης (έστω για μια αεροτομή) έχει ως εξής:

Βήμα 0: Επιλογή αρχικής λύσης \vec{b}^n με $n=0$, η οποία αντιστοιχεί σε μια αρχική (πιθανόν και τυχαία) αεροτομή.

²Η ανάπτυξη αυτή εδώ παραλείπεται αλλά, σε επόμενη ενότητα, θα ακολουθήσει εκτενής ανάλυση για τις προσταθεροποιημένες εξισώσεις ροής που ενδιαφέρουν την παρούσα διατριβή.

Βήμα 1: Χάραξη περιγράμματος τρέχουσας αεροτομής εφαρμόζοντας το μοντέλο παραμετροποίησης $B(\vec{b}^n)$.

Βήμα 2: Δημιουργία υπολογιστικού πλέγματος γύρω από την αεροτομή, αριθμητική επίλυση των εξισώσεων ροής σε αυτό για τις δεδομένες συνθήκες ροής και υπολογισμός του διανύσματος των μεταβλητών της ροής \vec{U}^n . Γνωρίζοντας το πεδίο ροής, είναι άμεσος ο υπολογισμός της απόκλισης της πίεσης p από την πίεση-στόχο κατά μήκος του στερεού τοιχώματος ή των συντελεστών άνωσης και οπισθέλκουσας κλπ, ανάλογα με τη συνάρτηση κόστους που έχει επιλεγεί.

Βήμα 3: Επίλυση των συζυγών εξισώσεων (εξισώσεις 4.6) στο ίδιο υπολογιστικό πλέγμα, χρησιμοποιώντας το προϋπάρχον πεδίο ροής και υπολογισμός του συζυγούς πεδίου $\vec{\Psi}^n$.

Βήμα 4: Ανανέωση των τιμών των παραμέτρων σχεδιασμού που καθορίζουν τη μορφή της αεροτομής εφαρμόζοντας τη μέθοδο της απότομης καθόδου (εξίσωση 4.14), χρησιμοποιώντας την κλίση της συνάρτησης κόστους που υπολογίστηκε από την 4.8.

Βήμα 5: Εφαρμογή κριτηρίων σύγκλισης και επιστροφή στο βήμα 1 με $(n \leftarrow n + 1)$, αν η μέθοδος δεν έχει συγκλίνει ακόμη, σύμφωνα με προαποφασισμένο κριτήριο σύγκλισης.

4.3 Διακριτή και Συνεχής Συζυγή Τεχνική—Σύγκριση

Όπως προαναφέρθηκε ήδη από την εισαγωγή (Κεφάλαιο 1), υπάρχει η δυνατότητα να διατυπωθούν δύο είδη συζυγών τεχνικών, η διακριτή και η συνεχής συζυγή τεχνική. Η διαφορά τους έγκειται στον τρόπο με τον οποίο, από τις εξισώσεις ροής, προκύπτουν οι συζυγείς εξισώσεις, στη διακριτή τους μορφή.

Ειδικότερα, στην περίπτωση της διακριτής συζυγούς τεχνικής, η συζυγής διατύπωση επιβάλλεται στις διακριτοποιημένες εξισώσεις ροής με αποτέλεσμα τις διακριτοποιημένες συζυγείς εξισώσεις (σχήμα 4.1 αριστερά). Αντίθετα, για τη συνεχή συζυγή τεχνική, οι συζυγείς εξισώσεις προκύπτουν από την εφαρμογή της συζυγούς διατύπωσης στις εξισώσεις ροής και αυτές στη συνέχεια διακριτοποιούνται (σχήμα 4.1 δεξιά).

Η βασική αυτή διαφορά ως προς τη διατύπωση, ουσιαστικά καθορίζει και τα σχετικά 'πλεονεκτήματα-μειονεκτήματα' της μιας διατύπωσης ως προς την άλλη. Πιο συγκεκριμένα, η συνεχής συζυγής τεχνική προϋποθέτει αρκετή προ-εργασία για τη θεμελίωση της και την εύρεση της έκφρασης της παραγώγου της συνάρτησης κόστους. Κάθε αλλαγή της συνάρτησης κόστους απαιτεί νέα θεμελίωση ή, έστω, κατάλληλη τροποποίηση της προηγούμενης. Σε αντίθεση, η εφαρμογή της διακριτής συζυγούς τεχνικής είναι άμεση, αλλά απαιτεί μεγαλύτερη μνήμη για την αποθήκευση μητρώων που έχουν υπολογιστεί κατά την επίλυση των εξισώσεων ροής.

Επιπλέον, ο αλγόριθμος επίλυσης των διακριτών συζυγών εξισώσεων έχει την ίδια ακριβώς συμπεριφορά και εκμεταλλεύεται όλες τις ιδιότητες του αντίστοιχου αλγορίθμου επίλυσης των εξισώσεων ροής. Από την άλλη πλευρά, ο αλγόριθμος επίλυσης των συζυγών μ.δ.ε που προκύπτουν από τη συνεχή συζυγή διατύπωση δημιουργείται εξ αρχής και άρα υπάρχει δυνατότητα επιλογής της μεθόδου διακριτοποίησης, η οποία μπορεί να είναι διαφορετική από αυτή των εξισώσεων ροής. Συνήθως, βέβαια, προτιμάται σχήμα διακριτοποίησης των συζυγών



Σχήμα 4.1: Σύγκριση διακριτής (αριστερά) και συνεχούς (δεξιά) συζυγούς τεχνικής.

εξισώσεων όμοιο με αυτό των εξισώσεων ροής, ώστε να αποφευχθούν ‘ασυμβατότητες’ στον υπολογισμό της παραγωγού της συνάρτησης κόστους.

4.4 Οι Μελετούμενες Συναρτήσεις Κόστους

Στην ενότητα αυτή, αναλύονται οι συναρτήσεις κόστους F προς ελαχιστοποίηση που χρησιμοποιούνται στα προβλήματα βελτιστοποίησης που αναλύονται στην παρούσα διατριβή. Πρόκειται για προβλήματα αντίστροφου σχεδιασμού (σε μεμονωμένες αεροτομές ή/και πτερυγώσεις στροβιλομηχανών) και ελαχιστοποίησης του συντελεστή οπισθέλκουσας με δεδομένο συντελεστή άνωσης (για μεμονωμένες αεροτομές). Οι περιπτώσεις που επιλέχθηκαν είναι ενδεικτικές και θα μπορούσαν εύκολα, αντ’αυτών, να χρησιμοποιηθούν άλλες συναρτήσεις κόστους.

4.4.1 Αντίστροφος Σχεδιασμός

Σε προβλήματα αντίστροφου σχεδιασμού, όπου στόχος είναι μια επιθυμητή κατανομή πίεσης στο σύνολο ή τμήμα του στερεού τοιχώματος, η F ορίζεται ως

$$F = \frac{1}{2} \int_{S_w} (p - p_{tar})^2 dS \quad (4.15)$$

όπου S_w είναι το όριο του στερεού τοιχώματος το οποίο ελέγχεται εξ ολοκλήρου από τις μεταβλητές σχεδιασμού, p_{tar} η πίεση-στόχος σε κάθε σημείο του ορίου S_w και p η κατανομή στατικής πίεσης της τρέχουσας λύσης. Η μεταβολή της συνάρτησης κόστους η οποία προκαλείται από μεταβολή των μεταβλητών σχεδιασμού \vec{b} , γράφεται

$$\delta F = \int_{S_w} (p - p_{tar}) \delta p dS + \frac{1}{2} \int_{S_w} (p - p_{tar})^2 \delta(dS) \quad (4.16)$$

όπου ο όρος $\delta(dS) = \phi_1(\delta\vec{b})$ εξαρτάται-καθορίζεται από την παραμετροποίηση.

4.4.2 Ελαχιστοποίηση Συντελεστή Οπισθέλκουσας

Στην περίπτωση που επιθυμείται ο σχεδιασμός μεμονωμένης αεροτομής με ελάχιστο συντελεστή οπισθέλκουσας (c_d) και δεδομένη τιμή του συντελεστή άνωσης ($c_l=c_{l_{tar}}$), η F ορίζεται ως

$$F = (c_l - c_{l_{tar}})^2 + \beta c_d^2 \quad (4.17)$$

όπου το β είναι ποσότητα ορισμένη από το χρήστη με σκοπό την ποσοτική συσχέτιση των συντελεστών άνωσης και οπισθέλκουσας. Η μεταβολή της F δίνεται από τη σχέση

$$\delta F = 2(c_l - c_{l_{tar}})\delta c_l + 2\beta c_d \delta c_d \quad (4.18)$$

με

$$c_{d,l} = \frac{1}{\varpi} \int_{S_w} (g_1 \cos a_\infty + g_2 \sin a_\infty) dS \quad (4.19)$$

όπου a_∞ η επ'άπειρον γωνία ροής, $\varpi = \frac{1}{2}\rho|\vec{u}_\infty|^2 c$, c η χορδή και $(g_1, g_2) = (f_1, f_2)$ για c_d ή $(g_1, g_2) = (f_2, -f_1)$ για c_l , όπου f_1, f_2 είναι οι δυνάμεις που ασκούνται στην αεροτομή κατά τη x_1 και τη x_2 διεύθυνση, αντίστοιχα. Στην περίπτωση ατριβούς ροής, οι δυνάμεις αυτές ταυτίζονται με τις δυνάμεις πίεσης, οπότε η εξίσωση 4.19 για τους συντελεστές άνωσης και οπισθέλκουσας ξαναγράφεται

$$c_{d,l}^{inv} = \frac{1}{\varpi} \int_{S_w} p (q_1 \cos a_\infty + q_2 \sin a_\infty) dS \quad (4.20)$$

και η μεταβολή αυτών

$$\begin{aligned} \delta c_{d,l}^{inv} &= \frac{1}{\varpi} \int_{S_w} \delta p (q_1 \cos a_\infty + q_2 \sin a_\infty) dS \\ &+ \frac{1}{\varpi} \int_{S_w} p \cos a_\infty \delta(q_1 dS) + \frac{1}{\varpi} \int_{S_w} p \sin a_\infty \delta(q_2 dS) \end{aligned}$$

όπου $(q_1, q_2) = (n_1, n_2)$ για το c_d ή $(q_1, q_2) = (t_1, t_2)$ για το c_l , $\vec{t} = (t_1, t_2) = (n_2, -n_1)$ είναι το εφαπτομενικό στο στερεό τοίχωμα μοναδιαίο διάνυσμα, ενώ η ποσότητα $\delta(q_i dS) = \phi_2(\delta\vec{b})$ εξαρτάται από την παραμετροποίηση της αεροτομής. Στην περίπτωση συνεκτικών ροών, στις δυνάμεις που ασκούνται στην αεροτομή υπεισέρχονται και οι διατμητικές τάσεις, δηλαδή $f_i = pn_i - \tau_{ij}n_j$, με $i, j = 1, 2$. Τότε, η μεταβολή των συντελεστών άνωσης και οπισθέλκουσας γράφεται

$$\begin{aligned} \delta c_{d,l} &= \delta c_{d,l}^{inv} - \frac{1}{\varpi} \int_{S_w} (\delta\tau_{kk} q_k \cos a_\infty + \delta\tau_{mm} q_m \sin a_\infty + \delta\tau_{km} (q_m \cos a_\infty + q_k \sin a_\infty)) dS \\ &- \frac{1}{\varpi} \int_{S_w} (\tau_{kk} \cos a_\infty + \tau_{km} \sin a_\infty) \delta(q_k dS) \\ &- \frac{1}{\varpi} \int_{S_w} (\tau_{mm} \sin a_\infty + \tau_{km} \cos a_\infty) \delta(q_m dS) \end{aligned} \quad (4.21)$$

όπου τα k, m λαμβάνουν τις τιμές $k=1, m=2$ για το c_d και $k=2, m=1$ για το c_l .

4.5 Η Διακριτή Συζυγής Τεχνική με Προσταθεροποίηση

Η διακριτή συζυγής τεχνική με προσταθεροποίηση βασίζεται στη διακριτοποιημένη μορφή των προσταθεροποιημένων εξισώσεων ροής. Θεωρώντας ως συνάρτηση κόστους την $F = F(\vec{U}, \vec{b})$ (σχέση 4.1), η μεταβολή της λόγω μεταβολής $\delta\vec{b}$ των \vec{b} δίνεται από τη σχέση 4.2

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial \vec{U}} \delta \vec{U} + \frac{\partial F}{\partial \vec{b}} \delta \vec{b}$$

σε διακριτή μορφή, το υπόλοιπο των προσταθεροποιημένων εξισώσεων ροής δίνεται από τη σχέση

$$\vec{R}_\Gamma = \Gamma \vec{R} = \vec{0} \quad (4.22)$$

και η μεταβολή του ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού γράφεται ως

$$\begin{aligned} \delta \vec{R}_\Gamma &= \frac{\partial \vec{R}_\Gamma}{\partial \vec{U}} \delta \vec{U} + \frac{\partial \vec{R}_\Gamma}{\partial \vec{b}} \delta \vec{b} \\ &= \left(\Gamma \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} + \vec{R} \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{U}} \right) \delta \vec{U} + \left(\Gamma \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} + \vec{R} \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{b}} \right) \delta \vec{b} = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Στην παραπάνω σχέση εμφανίζονται μεταβολές του μητρώου προσταθεροποίησης Γ ως προς το πεδίο ροής και τις μεταβλητές σχεδιασμού (όροι $\partial \Gamma / \partial \vec{U}$ και $\partial \Gamma / \partial \vec{b}$, αντίστοιχα). Για τους όρους αυτούς δεν απαιτείται καμία παραδοχή ούτε επιπλέον υπολογισμοί καθώς πολλαπλασιάζονται με το υπόλοιπο των εξισώσεων \vec{R} και, στη χρονικά μόνιμη λύση, ισχύει $\vec{R}_\Gamma = \vec{R} = 0$. Έτσι, η σχέση 4.23 ξαναγράφεται

$$\delta \vec{R}_\Gamma = \Gamma \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \delta \vec{U} + \Gamma \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \delta \vec{b} = 0 \quad (4.24)$$

Δεδομένου ότι $\delta \vec{R}_\Gamma = 0$, η εξίσωση 4.23 μπορεί να πολλαπλασιασθεί με ένα διάνυσμα $\vec{\Psi}$ και να προστεθεί στην 4.22 δίνοντας την επαυξημένη συνάρτηση κόστους

$$\delta F_{aug} = \frac{\partial F}{\partial \vec{U}} \delta \vec{U} + \frac{\partial F}{\partial \vec{b}} \delta \vec{b} + \vec{\Psi}^T \left(\Gamma \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \delta \vec{U} + \Gamma \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \delta \vec{b} \right)$$

ή αναδιατάσσοντας τους όρους

$$\delta F_{aug} = \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{U}} + \vec{\Psi}^T \Gamma \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right) \delta \vec{U} + \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{b}} + \vec{\Psi}^T \Gamma \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \right) \delta \vec{b} \quad (4.25)$$

Για την απαλοιφή του όρου που εξαρτάται από τη μεταβολή των ροϊκών μεγεθών $\delta \vec{U}$ επιλύεται η εξίσωση

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \vec{U}} \right) + \vec{\Psi}^T \Gamma \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right) = 0$$

ή

$$\left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right)^T \vec{\Psi}_\Gamma + \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{U}} \right)^T = 0 \quad (4.26)$$

Η τελευταία σχέση είναι η συζυγής εξίσωση των προσταθεροποιημένων εξισώσεων για τη διακριτή εκδοχή και επιλύεται ως προς τις προσταθεροποιημένες συζυγείς μεταβλητές

$$\vec{\Psi}_\Gamma = \Gamma^T \vec{\Psi} \quad (4.27)$$

Με την ικανοποίηση/επίλυση των διακριτών συζυγών εξισώσεων με προσταθεροποίηση, η σχέση 4.25 λαμβάνει τη μορφή

$$\delta F_{aug} = \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{b}} + \vec{\Psi}_\Gamma^T \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \right) \delta \vec{b} \quad (4.28)$$

από την οποία υπολογίζεται άμεσα η κλίση της συνάρτησης κόστους ως

$$\frac{dF}{d\vec{b}} = \frac{dF_{aug}}{d\vec{b}} = \frac{\partial F}{\partial \vec{b}} + \vec{\Psi}_\Gamma^T \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \quad (4.29)$$

4.6 Η Συνεχής Συζυγής Τεχνική με Προσταθεροποίηση

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται η ανάπτυξη της συνεχούς συζυγούς τεχνικής με προσταθεροποίηση. Η ανάλυση ξεκινά από τις προσταθεροποιημένες εξισώσεις ροής και, χρησιμοποιώντας ως βάση ανάλυση αντίστοιχη αυτής που αναπτύχθηκε στη διατριβή [18], καταλήγει στη συζυγή διατύπωση των προσταθεροποιημένων εξισώσεων ροής και τον τρόπο διακριτοποίησής τους.

4.6.1 Διατύπωση

Η επαυξημένη συνάρτηση κόστους για τις προσταθεροποιημένες εξισώσεις της σχέσης 2.15, γράφεται ως

$$\delta F_{aug} = \delta F + \int_{\Omega} \vec{\Psi}^T \delta \left[\Gamma \left(\frac{\partial \vec{f}_i}{\partial x_i} \right) \right] d\Omega \quad (4.30)$$

ή

$$\delta F_{aug} = \delta F + \int_{\Omega} \vec{\Psi}^T \delta \Gamma \frac{\partial \vec{f}_i}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega} \vec{\Psi}^T \Gamma \delta \left(\frac{\partial \vec{f}_i}{\partial x_i} \right) d\Omega \quad (4.31)$$

όπου $\vec{f}_i = \vec{f}_i^{nv} - \vec{f}_i^{vis}$. Στο χωρικό ολοκλήρωμα της σχέσης 4.30 εμφανίζεται η μεταβολή των προσταθεροποιημένων εξισώσεων, όπως αυτές παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 2. Κατά τη διατύπωση και περαιτέρω ανάπτυξη της επαυξημένης συνάρτησης κόστους δεν γίνεται καμία παραδοχή σχετικά με τη διαχείριση του όρου $\delta \Gamma$, καθώς στη χρονικά μόνιμη λύση των εξισώσεων Navier–Stokes ισχύει $\frac{\partial \vec{f}_i}{\partial x_i} = 0$, γεγονός που μηδενίζει το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της σχέσης 4.31, η οποία τελικά γράφεται

$$\delta F_{aug} = \delta F + \int_{\Omega} \vec{\Psi}_\Gamma^T \delta \left(\frac{\partial \vec{f}_i}{\partial x_i} \right) d\Omega \quad (4.32)$$

όπου με $\vec{\Psi}_\Gamma$ συμβολίζεται το γινόμενο των συζυγών μεταβλητών με το μητρώο προσταθεροποίησης, δηλαδή $\vec{\Psi}_\Gamma = \Gamma^T \vec{\Psi}$, το οποίο στη συνέχεια θα αναφέρεται ως το προσταθεροποιημένο διάνυσμα των συζυγών μεταβλητών. Από τους εναπομείναντες όρους της εξίσωσης 4.32, ο

πρώτος όρος, δηλαδή η μεταβολή της συνάρτησης κόστους, καθορίζεται από το πρόβλημα σχεδιασμού όπως παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα. Για την ανάλυση του τελευταίου όρου, χρησιμοποιείται η σχέση

$$\delta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial(\delta \Phi)}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\partial(\delta x_k)}{\partial x_i} \quad (4.33)$$

η οποία αναπτύχθηκε από τους Παπαδημητρίου και Γιαννάκογλου και παρουσιάζεται στη διατριβή [18] και την εργασία [194] και εκφράζει τη μεταβολή της παραγώγου μιας οποιασδήποτε ροϊκής ποσότητας Φ συναρτήσει της παραγώγου της μεταβολής $\delta \Phi$ και των παραγώγων των μεταβολών των συντεταγμένων των κόμβων του υπολογιστικού χωρίου. Κατά συνέπεια, το χωρικό ολοκλήρωμα της σχέσης 4.32 αναλύεται ως

$$\int_{\Omega} \vec{\Psi}_{\Gamma}^T \delta \left(\frac{\partial \vec{f}_i}{\partial x_i} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \vec{\Psi}_{\Gamma}^T \frac{\partial(\delta \vec{f}_i)}{\partial x_i} d\Omega - \int_{\Omega} \vec{\Psi}_{\Gamma}^T \frac{\partial \vec{f}_i}{\partial x_k} \frac{\partial(\delta x_k)}{\partial x_i} d\Omega \quad (4.34)$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες, προκύπτει

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vec{\Psi}_{\Gamma}^T \delta \left(\frac{\partial \vec{f}_i}{\partial x_i} \right) d\Omega &= - \int_{\Omega} \delta \vec{f}_i^T \frac{\partial \vec{\Psi}_{\Gamma}}{\partial x_i} d\Omega + \int_{S_{i,o,w}} \vec{\Psi}_{\Gamma}^T \delta \vec{f}_i n_i dS \\ &+ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\vec{\Psi}_{\Gamma}^T \frac{\partial \vec{f}_i}{\partial x_k} \right) \delta x_k d\Omega - \int_{S_w} \vec{\Psi}_{\Gamma}^T \frac{\partial \vec{f}_i}{\partial x_k} \delta x_k n_i dS \end{aligned} \quad (4.35)$$

όπου με S_i , S_o και S_w συμβολίζονται η είσοδος, η έξοδος και το στερεό τοίχωμα, αντίστοιχα. Το τελευταίο ολοκλήρωμα ορίζεται μόνο στο στερεό τοίχωμα όπου ισχύει $\delta x_k \neq 0$, άρα εξαρτάται από την παραμετροποίηση, δηλαδή $\delta x_k = \phi_3(\delta \vec{b})$. Περαιτέρω ανάπτυξη της σχέσης 4.35 απαιτεί ξεχωριστή ανάλυση των ατριβών και των συνεκτικών όρων.

Η Μεταβολή των Ατριβών Όρων

Για τις ατριβείς ροές, η σχέση 4.35 ξαναγράφεται αντικαθιστώντας το \vec{f}_i με \vec{f}_i^{inv} , δηλαδή

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vec{\Psi}_{\Gamma}^T \delta \left(\frac{\partial \vec{f}_i^{inv}}{\partial x_i} \right) d\Omega &= - \int_{\Omega} \delta \vec{f}_i^{invT} \frac{\partial \vec{\Psi}_{\Gamma}}{\partial x_i} d\Omega + \int_{S_{i,o,w}} \vec{\Psi}_{\Gamma}^T \delta \vec{f}_i^{inv} n_i dS \\ &+ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\vec{\Psi}_{\Gamma}^T \frac{\partial \vec{f}_i^{inv}}{\partial x_k} \right) \delta x_k d\Omega - \int_{S_w} \vec{\Psi}_{\Gamma}^T \frac{\partial \vec{f}_i^{inv}}{\partial x_k} \delta x_k n_i dS \end{aligned} \quad (4.36)$$

Το πρώτο χωρικό ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της παραπάνω εξίσωσης, με χρήση της σχέσης $\delta \vec{f}_i^{inv} = A_i \delta \vec{U}$, ξαναγράφεται ως

$$- \int_{\Omega} \delta \vec{f}_i^{invT} \frac{\partial \vec{\Psi}_{\Gamma}}{\partial x_i} d\Omega = - \int_{\Omega} \delta \vec{U}^T A_i^T \frac{\partial \vec{\Psi}_{\Gamma}}{\partial x_i} d\Omega \quad (4.37)$$

όπου υπενθυμίζεται ότι A_i είναι τα Ιακωβιανά μητρώα και \vec{U} το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών ροής. Το πρώτο επιφανειακό ολοκλήρωμα, αναλύεται χωριστά για την είσοδο, έξοδο και τα στερεά τοιχώματα του πεδίου ροής. Για την είσοδο και την έξοδο γράφεται ως

$$\int_{S_{i,o}} \vec{\Psi}_{\Gamma}^T \delta \vec{f}_i^{inv} n_i dS = \int_{S_{i,o}} \delta \vec{U}^T A_i^T \vec{\Psi}_{\Gamma}^T dS \quad (4.38)$$

με $A = A_i n_i$, ενώ για το στερεό τοίχωμα, όπου επιβάλλεται η συνθήκη μη-εισχώρησης, $u_i n_i = 0$, ισχύει

$$\int_{S_w} \vec{\Psi}_\Gamma^T \delta \vec{f}_i^{inv} n_i dS = \int_{S_w} \Psi_{\Gamma_{i+1}} n_i \delta p dS + \int_{S_w} [\Psi_{\Gamma_{i+1}} p - \vec{\Psi}_\Gamma^T \vec{f}_i^{inv}] \delta(n_i dS) \quad (4.39)$$

με $\Psi_{\Gamma_{i+1}} n_i = \Psi_{\Gamma_2} n_1 + \Psi_{\Gamma_3} n_2$. Η παραπάνω σχέση προκύπτει αναπτύσσοντας την οριακή συνθήκη στο τοίχωμα $\vec{f}_i^{inv} n_i = \{0, p\vec{n}, 0\}^T$ (σχέση 2.64). Για το δεύτερο χωρικό ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της εξίσωσης 4.36 ισχύει

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\vec{\Psi}_\Gamma^T \frac{\partial \vec{f}_i^{inv}}{\partial x_k} \right) \delta x_k d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{\partial \vec{\Psi}_\Gamma^T}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{f}_i^{inv}}{\partial x_k} \delta x_k d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \vec{\Psi}_\Gamma^T \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \vec{f}_i^{inv}}{\partial x_k} \right) \delta x_k d\Omega \end{aligned} \quad (4.40)$$

όπου ο τελευταίος όρος της εξίσωσης ισούται με το μηδέν, λόγω της ικανοποίησης των εξισώσεων ροής. Με χρήση της σχέσης $\frac{\partial \vec{f}_i}{\partial x_k} = A_i \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_k}$, το εναπομείναν ολοκλήρωμα λαμβάνει τη μορφή

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\vec{\Psi}_\Gamma^T \frac{\partial \vec{f}_i^{inv}}{\partial x_k} \right) \delta x_k d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \vec{U}^T}{\partial x_k} A_i^T \frac{\partial \vec{\Psi}_\Gamma}{\partial x_i} \delta x_k d\Omega \quad (4.41)$$

ενώ ο τελευταίος όρος (επιφανειακό ολοκλήρωμα) της σχέσης 4.36 γράφεται

$$- \int_{S_w} \vec{\Psi}_\Gamma^T \frac{\partial \vec{f}_i^{inv}}{\partial x_k} \delta x_k n_i dS = - \int_{S_w} \frac{\partial \vec{U}^T}{\partial x_k} A^T \vec{\Psi}_\Gamma \delta x_k dS \quad (4.42)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις 4.37 ως 4.42 στην 4.36, το χωρικό ολοκλήρωμα του όρου $\vec{\Psi}_\Gamma^T \delta \left(\frac{\partial \vec{f}_i^{inv}}{\partial x_i} \right)$ λαμβάνει την τελική του μορφή

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vec{\Psi}_\Gamma^T \delta \left(\frac{\partial \vec{f}_i^{inv}}{\partial x_i} \right) d\Omega &= - \int_{\Omega} \left(\delta \vec{U}^T - \frac{\partial \vec{U}^T}{\partial x_k} \delta x_k \right) A_i^T \frac{\partial \vec{\Psi}_\Gamma}{\partial x_i} d\Omega + \int_{S_{i,o}} \delta \vec{U}^T A^T \vec{\Psi}_\Gamma^T dS \\ &+ \int_{S_w} \Psi_{\Gamma_{i+1}} n_i \delta p dS + \int_{S_w} [\Psi_{\Gamma_{i+1}} p - \vec{\Psi}_\Gamma^T \vec{f}_i^{inv}] \delta(n_i dS) \\ &- \int_{S_w} \frac{\partial \vec{U}^T}{\partial x_k} A^T \vec{\Psi}_\Gamma \delta x_k dS \end{aligned} \quad (4.43)$$

Η Μεταβολή των Συνεκτικών Όρων

Για τις συνεκτικές ροές, η σχέση 4.35 ξαναγράφεται, αντικαθιστώντας το \vec{f}_i με \vec{f}_i^{vis} , ως

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \vec{\Psi}_\Gamma^T \delta \left(\frac{\partial \vec{f}_i^{vis}}{\partial x_i} \right) d\Omega &= \int_{\Omega} \delta \vec{f}_i^{visT} \frac{\partial \vec{\Psi}_\Gamma}{\partial x_i} d\Omega - \int_{S_{i,o,w}} \vec{\Psi}_\Gamma^T \delta \vec{f}_i^{vis} n_i dS \\ &- \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\vec{\Psi}_\Gamma^T \frac{\partial \vec{f}_i^{vis}}{\partial x_k} \right) \delta x_k d\Omega + \int_{S_w} \vec{\Psi}_\Gamma^T \frac{\partial \vec{f}_i^{vis}}{\partial x_k} \delta x_k n_i dS \end{aligned} \quad (4.44)$$

Για το πρώτο χωρικό ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης, που περιέχει τις μεταβολές των συνεκτικών διανυσμάτων ροής ισχύει

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta \vec{f}_i^{\text{vis}T} \frac{\partial \vec{\Psi}_{\Gamma}}{\partial x_i} d\Omega &= \int_{\Omega} \delta \tau_{ij} \left(\frac{\partial \Psi_{\Gamma j+1}}{\partial x_i} + u_j \frac{\partial \Psi_{\Gamma 4}}{\partial x_i} \right) d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \delta u_i \tau_{ij} \frac{\partial \Psi_{\Gamma 4}}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega} \delta q_i \frac{\partial \Psi_{\Gamma 4}}{\partial x_i} d\Omega \end{aligned} \quad (4.45)$$

όπου η μεταβολή των τάσεων $\delta \tau_{ij}$, χρησιμοποιώντας τη σχέση 4.33 για τη σύνδεση της μεταβολής της παραγώγου με την παράγωγο της μεταβολής και τις μεταβολές των συντεταγμένων, γράφεται ως

$$\begin{aligned} \delta \tau_{ij} &= \mu_{eff} \left[\left(\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\delta u_j)}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial(\delta u_k)}{\partial x_k} \right] - \\ &\mu_{eff} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial(\delta x_k)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial(\delta x_k)}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial(\delta x_k)}{\partial x_l} \right] \end{aligned} \quad (4.46)$$

με $\mu_{eff} = \mu + \mu_t$ να συμβολίζει τη φαινόμενη συνεκτικότητα, για τη γενική περίπτωση όπου μελετώνται και τυρβώδεις ροές. Σχετικά με τη φαινόμενη συνεκτικότητα γίνονται δύο παραδοχές. Η συνεκτικότητα μ θεωρείται ανεξάρτητη της θερμοκρασίας και, για τυρβώδεις ροές, η μεταβολή της τυρβώδους συνεκτικότητας αμελείται. Η μεταβολή του θερμοκρασιακού διανύσματος ροής γράφεται ως

$$\int_{\Omega} \delta q_i \frac{\partial \Psi_{\Gamma 4}}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\Omega} k \left(\frac{\partial(\delta T)}{\partial x_i} - \frac{\partial T}{\partial x_k} \frac{\partial(\delta x_k)}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \Psi_{\Gamma 4}}{\partial x_i} d\Omega \quad (4.47)$$

με k το συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας. Η 4.47, με ολοκλήρωση κατά παράγοντες για τους δύο όρους, ξαναγράφεται

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta q_i \frac{\partial \Psi_{\Gamma 4}}{\partial x_i} d\Omega &= - \int_{\Omega} k \delta T \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Psi_{\Gamma 4}}{\partial x_i} \right) d\Omega + \int_{S_w} k \delta T \frac{\partial \Psi_{\Gamma 4}}{\partial x_i} n_i dS \\ &+ \int_{\Omega} \frac{\partial q_i}{\partial x_k} \frac{\partial \Psi_{\Gamma 4}}{\partial x_i} \delta x_k d\Omega + \int_{\Omega} k \frac{\partial T}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Psi_{\Gamma 4}}{\partial x_i} \right) \delta x_k d\Omega \\ &- \int_{S_w} k \frac{\partial T}{\partial x_k} \frac{\partial \Psi_{\Gamma 4}}{\partial x_i} \delta x_k n_i dS \end{aligned} \quad (4.48)$$

Το πρώτο επιφανειακό ολοκλήρωμα της σχέσης 4.44 αναλύεται περαιτέρω ως

$$- \int_{S_{i,o,w}} \vec{\Psi}_{\Gamma} \delta \vec{f}_i^{\text{vis}T} n_i dS = - \int_{S_w} [(\Psi_{\Gamma i+1} + u_i \Psi_{\Gamma 4}) \delta \tau_{ij} + \Psi_{\Gamma 4} \tau_{ij} \delta u_i + \Psi_{\Gamma 4} \delta q_j] n_j dS \quad (4.49)$$

Στην παραπάνω εξίσωση, όλοι οι όροι που περιέχουν ταχύτητες ή μεταβολές ταχυτήτων μπορούν να παραλειφθούν, λόγω της συνθήκης μη-ολίσθησης, οδηγώντας στην

$$- \int_{S_{i,o,w}} \vec{\Psi}_{\Gamma} \delta \vec{f}_i^{\text{vis}T} n_i dS = - \int_{S_w} \Psi_{\Gamma i+1} \delta \tau_{ij} n_j dS - \int_{S_w} \Psi_{\Gamma 4} \delta q_j n_j dS \quad (4.50)$$

Για συνεκτικές ροές, στο στερεό τοίχωμα ισχύει η συνθήκη $\tau_{ij} n_i n_j = 0$ [194, 18] (η οποία ισοδυναμεί με την $\frac{\partial u_n}{\partial n} = 0$), η μεταβολή της οποίας γράφεται

$$\delta \tau_{ij} n_i n_j + \tau_{ij} \delta(n_i n_j) = 0 \quad (4.51)$$

Η 4.51, αν χρησιμοποιηθεί στον πρώτο όρο της 4.50 δίνει

$$-\int_{S_w} \Psi_{\Gamma_{i+1}} \delta \tau_{ij} n_j dS = -\int_{S_w} \frac{\Psi_{\Gamma_{i+1}}}{n_i} [\delta \tau_{ij} n_i n_j + \tau_{ij} \delta(n_i n_j)] dS + \int_{S_w} \frac{\Psi_{\Gamma_{i+1}}}{n_i} \tau_{ij} \delta(n_i n_j) dS \quad (4.52)$$

Ο δεύτερος όρος της 4.50 γράφεται ως

$$-\int_{S_w} \Psi_{\Gamma_4} \delta q_j n_j dS = -\int_{S_w} \Psi_{\Gamma_4} \delta(q_j n_j dS) + \int_{S_w} \Psi_{\Gamma_4} q_j \delta(n_j dS) \quad (4.53)$$

Οι εξισώσεις 4.31 και 4.34 ως 4.53 δίνουν την τελική έκφραση για την επαυξημένη συνάρτηση κόστους δF_{aug} ως

$$\begin{aligned} \delta F_{aug} = & \delta F - \int_{\Omega} \left(\delta \vec{U} - \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_k} \delta x_k \right)^T \left(A_i^T \frac{\partial \vec{\Psi}_{\Gamma}}{\partial x_i} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \left(\delta \vec{V} - \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_k} \delta x_k \right)^T \vec{K} d\Omega \\ & - \int_{S_w} \frac{\partial \vec{U}^T}{\partial x_k} A^T \vec{\Psi}_{\Gamma} \delta x_k dS + \int_{S_w} \Psi_{\Gamma_{i+1}} n_i \delta p dS + \int_{S_w} [\Psi_{\Gamma_{i+1}} p - \vec{\Psi}_{\Gamma}^T \vec{f}_i^{nv}] \delta(n_i dS) \\ & + \int_{S_{i,o}} \delta \vec{U}^T (A^T \vec{\Psi}_{\Gamma}) dS + \int_{S_w} k \delta T \frac{\partial \Psi_{\Gamma_4}}{\partial x_i} n_i dS - \int_{S_w} \Psi_{\Gamma_4} \delta(q_j n_j dS) \\ & + \int_{S_w} \Psi_{\Gamma_4} q_j \delta(n_j dS) - \int_{S_w} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \tau_{ij}^{(\Psi_{\Gamma})} \delta x_k n_j dS + \int_{S_w} \frac{\Psi_{\Gamma_{i+1}}}{n_i} \tau_{ij} \delta(n_i n_j) dS \\ & - \int_{S_w} k \frac{\partial T}{\partial x_k} \frac{\partial \Psi_{\Gamma_4}}{\partial x_i} \delta x_k n_i dS + \int_{S_w} \vec{\Psi}_{\Gamma} \frac{\partial f_i^{vis}}{\partial x_k} \delta x_k n_i dS \end{aligned} \quad (4.54)$$

όπου με \vec{K} συμβολίζεται το διάνυσμα των όρων διάχυσης των συζυγών εξισώσεων και ορίζεται στη συνέχεια (σχέση 4.57).

Συζυγείς Εξισώσεις με Προσταθεροποίηση Χαμηλών Αριθμών Mach

Στην εξίσωση 4.54, η απαλοιφή των χωρικών ολοκληρωμάτων που περιέχουν όρους $\frac{\partial \vec{U}}{\partial b} = \delta \vec{U} - \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_k} \delta x_k$ γίνεται μέσω της ικανοποίησης των προσταθεροποιημένων συζυγών εξισώσεων

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t} - A_i^T \frac{\partial \vec{\Psi}_{\Gamma}}{\partial x_i} - M^{-T} \vec{K} &= 0 \quad \text{ή} \\ \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t} - A_i^T \frac{\partial (\Gamma^T \vec{\Psi})}{\partial x_i} - M^{-T} \vec{K} &= 0 \end{aligned} \quad (4.55)$$

όπου υπενθυμίζεται ότι $M = \frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{V}}$. Υποθέτοντας ότι το μητρώο προσταθεροποίησης Γ^T μπορεί να 'βγει έξω' από την μερική παράγωγο (παραδοχή), η εξίσωση 4.55 τελικά γράφεται

$$\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t} - A_{\Gamma_i}^T \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x_i} - M^{-T} \vec{K} = 0 \quad (4.56)$$

με $A_{\Gamma} = \Gamma A$ (όπως ορίστηκε στο κεφάλαιο 2). Οι συνιστώσες του διανύσματος των όρων διάχυσης \vec{K} είναι

$$K_1 = -\frac{T}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial \Psi_{\Gamma_4}}{\partial x_j} \right), \quad K_{i+1} = \frac{\partial \tau_{ij}^{(\Psi_{\Gamma})}}{\partial x_j} - \tau_{ij} \frac{\partial \Psi_{\Gamma_4}}{\partial x_j}, \quad K_4 = \frac{T}{p} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial \Psi_{\Gamma_4}}{\partial x_j} \right) \quad (4.57)$$

με $i = 1, 2$ (2Δ).

Με $\tau_{ij}^{(\Psi_\Gamma)}$ συμβολίζονται οι ‘συζυγείς τάσεις’, οι οποίες ορίζονται ως

$$\begin{aligned} \tau_{ij}^{(\Psi_\Gamma)} &= \mu_{eff} \left(\frac{\partial \Psi_{\Gamma j+1}}{\partial x_i} + u_j \frac{\partial \Psi_{\Gamma 4}}{\partial x_i} + \frac{\partial \Psi_{\Gamma i+1}}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial \Psi_{\Gamma 4}}{\partial x_j} \right) \\ &\quad - \frac{2}{3} \mu_{eff} \delta_{ij} \left(\frac{\partial \Psi_{\Gamma k+1}}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \Psi_{\Gamma 4}}{\partial x_k} \right) \end{aligned}$$

Η ονομασία ‘συζυγείς τάσεις’ προκύπτει από το γεγονός ότι τα $\tau_{ij}^{(\Psi_\Gamma)}$ περιέχουν παραγώγους των συζυγών μεταβλητών ‘κατ’ αναλογία’ με τις συνεκτικές τάσεις που περιέχουν παραγώγους των ροϊκών μεγεθών.

Είναι προφανές ότι η σχέση 4.55 χωρίς τους συνεκτικούς όρους, δηλαδή η

$$\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t} - A_{\Gamma_i}^T \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x_i} = 0 \quad (4.58)$$

αποτελεί στις συζυγείς εξισώσεις με προσταθεροποίηση για ατριβείς ροές.

Οριακές Συνθήκες

Οι οριακές συνθήκες εισόδου–εξόδου προκύπτουν απαλείφοντας από την εξίσωση 4.54 τα επικαμπύλια ολοκληρώματα εισόδου και εξόδου που περιέχουν όρους $\delta \vec{U}$, άρα

$$\delta \vec{U}^T (A^T \vec{\Psi}_\Gamma) = 0 \quad (4.59)$$

Οι οριακές συνθήκες για τα στερεά τοιχώματα εξαρτώνται από τη συνάρτηση κόστους. Ειδικότερα, σε προβλήματα αντίστροφου σχεδιασμού, όπου η συνάρτηση κόστους δίνεται από τη σχέση 4.15, η οριακή συνθήκη σε περίπτωση ατριβών ροών θα είναι

$$(p - p_{tar}) + \Psi_{\Gamma_{i+1}} n_i = 0 \quad (4.60)$$

Στην περίπτωση συνεκτικών ροών, ο όρος $-\int_{S_w} \frac{\Psi_{\Gamma_{i+1}}}{n_i} [\delta \tau_{ij} n_i n_j + \tau_{ij} \delta(n_i n_j)] dS$ της 4.52 απαλείφεται επιβάλλοντας $\frac{\Psi_{\Gamma_2}}{n_1} = \frac{\Psi_{\Gamma_3}}{n_2}$ στο στερεό όριο. Η προηγούμενη σχέση, συνδυαζόμενη με την εξίσωση 4.60, οδηγεί στην οριακή συνθήκη για τα στερεά τοιχώματα σε συνεκτικές ροές

$$\Psi_{\Gamma_{i+1}} = -(p - p_{tar}) n_i, \quad i = 1, 2 \quad (4.61)$$

Εξετάζοντας τις σχέσεις 4.60 και 4.61, παρατηρείται ότι, όταν η μέθοδος συγκλίνει, δηλ. $p = p_{tar}$, η συνθήκη για μη–συνεκτικές ροές γράφεται $\Psi_{\Gamma_2} n_1 + \Psi_{\Gamma_3} n_2 = 0$ η οποία, για τις συζυγείς εξισώσεις, είναι ισοδύναμη της συνθήκης μη–εισχώρησης για τις συνιστώσες της ταχύτητας στο ευθύ πρόβλημα. Επιπλέον, η συνθήκη για συνεκτικές ροές δίνει $\Psi_{\Gamma_2} = \Psi_{\Gamma_3} = 0$, η οποία είναι ισοδύναμη της συνθήκης μη–ολίσθησης.

Από την άλλη πλευρά, σε προβλήματα ελαχιστοποίησης του συντελεστή οπισθέλκουσας για δεδομένη τιμή του συντελεστή άνωσης, η συνθήκη για μη–συνεκτικές ροές είναι

$$\left[\frac{2}{\omega} (c_l - c_{l_{tar}}) (n_2 \cos \alpha_\infty - n_1 \sin \alpha_\infty) + \frac{2}{\omega} \beta c_d (n_1 \cos \alpha_\infty + n_2 \sin \alpha_\infty) \right] + \Psi_{\Gamma_{i+1}} n_i = 0 \quad (4.62)$$

ενώ για συνεκτικές ροές ισχύουν οι επόμενες δύο συνθήκες

$$\begin{aligned}\Psi_{\Gamma 2} &= \frac{2}{\varpi}(c_l - c_{l_{tar}}) \sin \alpha_\infty - \frac{2}{\varpi} \beta c_d \cos \alpha_\infty \\ \Psi_{\Gamma 3} &= -\frac{2}{\varpi}(c_l - c_{l_{tar}}) \cos \alpha_\infty - \frac{2}{\varpi} \beta c_d \sin \alpha_\infty\end{aligned}\quad (4.63)$$

Ανεξάρτητα από τη συνάρτηση F , τα ολοκληρώματα που περιέχουν όρους δT και $\delta(q_j n_j dS)$ προσδιορίζουν την οριακή συνθήκη τοίχου για το $\Psi_{\Gamma 4}$, η οποία εξαρτάται από την οριακή συνθήκη της θερμοκρασίας. Ειδικότερα, η συνθήκη σταθερής θερμοκρασίας στα στερεά τοιχώματα οδηγεί στη μηδενική Dirichlet συνθήκη $\Psi_{\Gamma 4} = 0$, ενώ για αδιαβατικές συνθήκες επιβάλλεται μηδενική συνθήκη τύπου Neumann, $\frac{\partial \Psi_{\Gamma 4}}{\partial x_i} n_i = 0$.

Τελική Έκφραση Μεταβολής της F_{aug} -Παράγωγοι Ευασθησίας

Μετά την ικανοποίηση των συζυγών εξισώσεων και των οριακών συνθηκών τους, οι εναπομείναντες όροι της εξίσωσης 4.54 δίνουν την τελική έκφραση για τη μεταβολή της συνάρτησης κόστους

$$\begin{aligned}\delta F_{aug} &= \delta F_b(\delta \vec{b}) + \int_{S_w} [\Psi_{\Gamma_{i+1}} p - \vec{\Psi}_\Gamma^T \vec{f}_i^{inv}] \delta(n_i dS) \\ &- \int_{S_w} \frac{\partial \vec{U}^T}{\partial x_k} A^T \vec{\Psi}_\Gamma \delta x_k dS + \int_{S_w} \vec{\Psi}_\Gamma^T \frac{\partial \vec{f}_i^{vis}}{\partial x_i} \delta x_k n_i dS \\ &+ \int_{S_w} \frac{\Psi_{\Gamma_{i+1}}}{n_i} \tau_{ij} \delta(n_i n_j) dS + \int_{S_w} \Psi_{\Gamma 4} q_i \delta(n_i dS) \\ &- \int_{S_w} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \tau_{ij}^{(\Psi_\Gamma)} \delta x_k n_j dS - \int_{S_w} \frac{\partial T}{\partial x_k} k \frac{\partial \Psi_{\Gamma 4}}{\partial x_i} \delta x_k n_i dS\end{aligned}\quad (4.64)$$

όπου για προβλήματα αντίστροφου σχεδιασμού

$$\delta F_b(\delta \vec{b}) = \frac{1}{2} \int_{S_w} (p - p_{tar})^2 \delta(dS)\quad (4.65)$$

ενώ για προβλήματα ελαχιστοποίησης του συντελεστή οπισθέλκουσας

$$\begin{aligned}\delta F_b(\delta \vec{b}) &= \frac{2}{\varpi}(c_l - c_{l_{tar}}) \left[-\int_{S_w} p \sin \alpha_\infty \delta(n_1 dS) + \int_{S_w} p \cos \alpha_\infty \delta(n_2 dS) \right] + \\ &\frac{2}{\varpi}(c_l - c_{l_{tar}}) \left[\int_{S_w} (\tau_{1k} \sin \alpha_\infty - \tau_{2k} \cos \alpha_\infty) \delta(n_k dS) \right] + \\ &\frac{2}{\varpi} \beta c_d \left[\int_{S_w} p \cos \alpha_\infty \delta(n_1 dS) + \int_{S_w} p \sin \alpha_\infty \delta(n_2 dS) \right] - \\ &\frac{2}{\varpi} \beta c_d \left[\int_{S_w} (\tau_{1k} \cos \alpha_\infty + \tau_{2k} \sin \alpha_\infty) \delta(n_k dS) \right]\end{aligned}\quad (4.66)$$

Στην εξίσωση 4.64, οι μεταβολές που περιέχουν όρους n_i, n_j, dS εκφράζονται ως $\delta(n_i dS) = \phi_2(\delta \vec{b})$ (όπως ορίστηκε νωρίτερα) και $\delta(n_i n_j) = \phi_4(\delta \vec{b})$. Με χρήση κατάλληλων συναρτήσεων ϕ_1 ως ϕ_4 οι οποίες εξαρτώνται από την παραμετροποίηση (Παράρτημα Γ'), υπολογίζεται η κλίση $\frac{\delta F}{\delta b_i} = \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_i}$ για τη χρήση στη μέθοδο της απότομης καθόδου (σχέση 4.14).

4.6.2 Διακριτοποίηση και Αριθμητική Επίλυση

Για τη διακριτοποίηση των προσταθεροποιημένων συζυγών εξισώσεων, χρησιμοποιείται η τεχνική των πεπερασμένων όγκων με κεντροκομβική διατύπωση, όπως και στο ευθύ πρόβλημα. Έτσι, η ολοκλήρωση σε όγκους αναφοράς της εξίσωσης 4.56 δίνει

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \left(-A_{\Gamma_i}^T \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x_i} - M^{-T} \vec{K} \right) d\Omega = 0 \quad (4.67)$$

η οποία σε διακριτή μορφή γράφεται ως

$$\frac{\Omega_P}{\Delta t_P} \Delta \vec{\Psi}_P + \sum_{Q \in nei(P)} \{ \vec{\Phi}_{PQ}^{\Psi, inv} + \vec{\Phi}_{PQ}^{\Psi, vis} \} \Delta \partial \Omega = 0 \quad (4.68)$$

όπου P ένας κόμβος στον όγκο ελέγχου Ω του οποίου ολοκληρώνονται οι συζυγείς εξισώσεις και Q ένας γειτονικός κόμβος ο οποίος συνδέεται με τον P με ακμή. Το ατρίβες διάνυσμα ροής για τις συζυγείς εξισώσεις ($\vec{\Phi}_{PQ}^{\Psi, inv}$), χρησιμοποιώντας ένα σχήμα αντίστοιχο με αυτό του Roe για το ευθύ πρόβλημα, δίνεται από τη σχέση

$$\vec{\Phi}_{PQ}^{\Psi, inv} = \frac{1}{2} (-A_{\Gamma_P}^T \vec{\Psi}_P - A_{\Gamma_Q}^T \vec{\Psi}_Q) - \frac{1}{2} |\tilde{A}_{\Gamma_{PQ}}^T| (\vec{\Psi}_Q - \vec{\Psi}_P) \quad (4.69)$$

Το συνεκτικό διάνυσμα ροής $\vec{\Phi}_{PQ}^{\Psi, vis}$, κατ' αναλογία με το ευθύ πρόβλημα, υπολογίζεται είτε θεωρώντας γραμμική κατανομή των παραγώγων των συζυγών μεταβλητών σε κάθε τριγωνικό στοιχείο είτε με 'κατά ακμή' υπολογισμό όπου οι παράγωγοι υπολογίζονται από τη σχέση 2.55. Το ψευδο-χρονικό βήμα που χρησιμοποιείται κατά την επίλυση είναι ίδιο με αυτό που έχει υπολογισθεί για το ευθύ προσταθεροποιημένο πρόβλημα και η επίλυση του συστήματος γίνεται με το ίδιο σχήμα (λ.χ. Jacobi) με το οποίο επιλύεται και το ευθύ πρόβλημα.

4.7 Διερεύνηση–Εμβάθυνση στην Προσταθεροποίηση στη Συνεχή Συζυγή Τεχνική

Η ενότητα αυτή εμβαθύνει στον τρόπο εισαγωγής της προσταθεροποίησης στη συνεχή συζυγή τεχνική. Ειδικότερα, αναλύει τις δύο πιθανές εκδοχές, τη συζυγή διατύπωση των προσταθεροποιημένων εξισώσεων ροής και την προσταθεροποίηση των συζυγών εξισώσεων που προκύπτουν από τις εξισώσεις ροής χωρίς προσταθεροποίηση. Οι δύο αυτές εκδοχές, υπό προϋποθέσεις, αποδεικνύεται ότι μπορούν να ταυτιστούν.

4.7.1 Εκδοχή 1: Συζυγής Διατύπωση των Προσταθεροποιημένων Εξισώσεων Ροής

Η συζυγής διατύπωση των προσταθεροποιημένων εξισώσεων αποτελεί την εκδοχή που αναλύθηκε εκτενώς στην προηγούμενη ενότητα. Πιο συγκεκριμένα, η επαυξημένη συνάρτηση κόστους διατυπώθηκε πολλαπλασιάζοντας τις προσταθεροποιημένες εξισώσεις ροής με το διάνυσμα $\vec{\Psi}$ (εξίσωση 4.30), δηλαδή η προσταθεροποίηση συμμετείχε εξαρχής στη διατύπωση. Η ανάλυση λοιπόν ξεκινά από τις προσταθεροποιημένες εξισώσεις ροής (για λόγους απλότητας χρησιμοποιούνται οι ατρίβεις εξισώσεις)

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \Gamma A_i \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i} = 0$$

και καταλήγει στη συζυγή τους διατύπωση, η οποία είναι

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t} - A_i^T \Gamma^T \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x_i} &= 0 \\ \text{ή} \quad \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t} - (\Gamma A_i)^T \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned} \quad (4.70)$$

4.7.2 Εκδοχή 2: Προσταθεροποίηση Χαμηλών Αριθμών Mach των Συζυγών Εξισώσεων

Ως εναλλακτική εκδοχή, εύλογα προτείνεται η εκ των υστέρων προσταθεροποίηση της συζυγούς εξίσωσης όπως αυτή προκύπτει από την κλασική συνεχή διατύπωση (δηλαδή από τις εξισώσεις ροής χωρίς προσταθεροποίηση). Σε αυτήν την περίπτωση, υιοθετώντας δηλαδή την κλασική συζυγή διατύπωση, [18], η συζυγής εξίσωση καταλήγει στη

$$\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t} - A_i^T \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x_i} = 0$$

στην οποία θα εφαρμοστεί, εκ των υστέρων, η προσταθεροποίηση χαμηλών αριθμών Mach. Χρησιμοποιώντας την ίδια λογική με αυτή του ευθέως προβλήματος, ο ψευδο-χρονικός όρος πολλαπλασιάζεται με τον αντίστροφο του μητρώου \mathcal{D}^{-T} , το οποίο επιλέγεται ως μητρώο προσταθεροποίησης των συζυγών εξισώσεων. Αυτό το μητρώο \mathcal{D} (πέραν του ανάστροφου που, ευλόγως, εισάγεται) δεν έχει κατ' ανάγκη σχέση με το Γ . Άρα, η προσταθεροποιημένη εξίσωση της 4.71 είναι

$$\mathcal{D}^{-T} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t} - A_i^T \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x_i} = 0$$

η οποία ξαναγράφεται ως

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t} - \mathcal{D}^T A_i^T \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x_i} &= 0 \\ \text{ή} \quad \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t} - (A_i \mathcal{D})^T \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned} \quad (4.71)$$

4.7.3 Έλεγχος Ταύτισης των Δύο Εκδοχών

Η εξίσωση 4.71 είναι η εκδοχή της αριστερής προσταθεροποίησης για τις συζυγείς εξισώσεις, ενώ η 4.70 η δεξιά προσταθεροποίηση για την ίδια εξίσωση. Οι δύο πιθανές εκδοχές για την εισαγωγή της προσταθεροποίησης στις συζυγείς εξισώσεις ταυτίζονται αν υποθεθεί $A\mathcal{D} = \Gamma A$ ή, για τις μη-συντηρητικές μεταβλητές, $\bar{A} \bar{\mathcal{D}} = \bar{\Gamma} \bar{A}^3$. Μια τέτοια επιλογή κάθε άλλο παρά αυθαίρετη είναι, καθώς εξασφαλίζει ότι τα μητρώα $A\mathcal{D}$ και ΓA έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές άρα η προσταθεροποίηση θα δρα 'ομοίως' στο ευθύ και στο συζυγές πρόβλημα. Αυτό γενικά είναι επιθυμητό, αφού οι ιδιοτιμές του μητρώου ΓA είναι πιο συγκεντρωμένες από αυτές του A (κεφάλαιο 2, σχήμα 2.1) και οδηγούν σε ταχύτερη σύγκλιση τις εξισώσεις ροής. Οπότε, οι συγκεντρωμένες ιδιοτιμές του $A\mathcal{D}$ θα εξασφαλίζουν ταχύτερη σύγκλιση και των συζυγών εξισώσεων. Με βάση την παραπάνω υπόθεση ισότητας το μητρώο $\bar{\mathcal{D}}$ υπολογίζεται από τη σχέση

$$\bar{\mathcal{D}} = \bar{A}^{-1} \bar{\Gamma} \bar{A} \quad (4.72)$$

³ $A\mathcal{D} = \Gamma A \Rightarrow M^{-1} A M M^{-1} \mathcal{D} M = M^{-1} \Gamma M M^{-1} A M \Rightarrow \bar{A} \bar{\mathcal{D}} = \bar{\Gamma} \bar{A}$

όπου το ιακωβιανό μητρώο \bar{A} και το μητρώο προσταθεροποίησης $\bar{\Gamma}$ των μη-συντηρητικών μεταβλητών ορίζονται ως

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \vec{u} \cdot \vec{n} & \rho n_1 & \rho n_2 & 0 \\ 0 & \vec{u} \cdot \vec{n} & 0 & n_1/\rho \\ 0 & 0 & \vec{u} \cdot \vec{n} & n_2/\rho \\ 0 & \rho c^2 n_1 & \rho c^2 n_2 & \vec{u} \cdot \vec{n} \end{bmatrix}$$

και

$$\bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

Μετά από πράξεις προκύπτει ότι

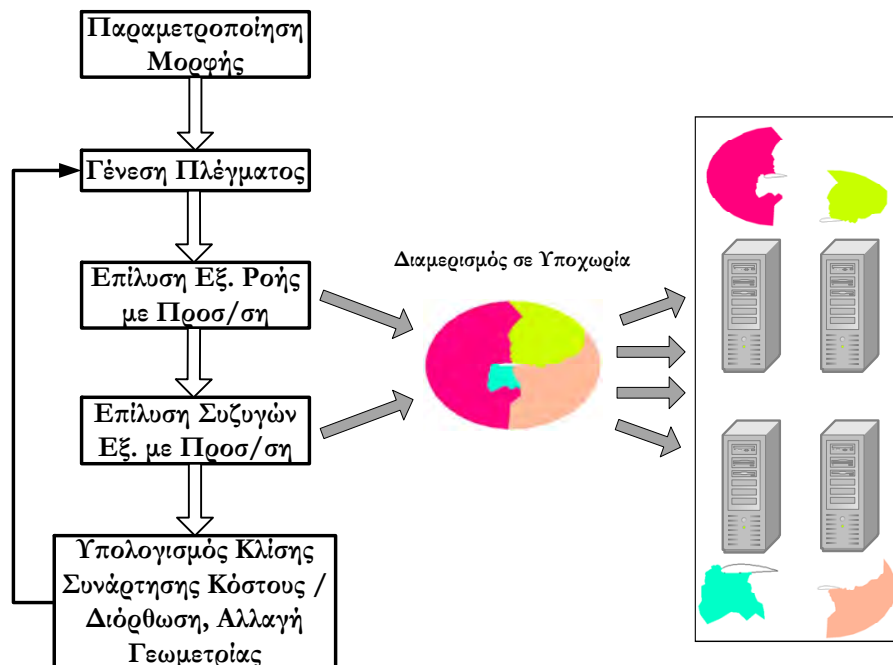
$$\bar{D} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\rho n_1 \vec{u} \cdot \vec{n} (\alpha - 1)}{(\vec{u} \cdot \vec{n})^2 - c^2} & \frac{\rho n_2 \vec{u} \cdot \vec{n} (\alpha - 1)}{(\vec{u} \cdot \vec{n})^2 - c^2} & \frac{(\vec{u} \cdot \vec{n})^2 (\alpha - 1)}{(\vec{u} \cdot \vec{n})^2 - c^2} \\ 0 & n_2^2 + n_1^2 \frac{(\vec{u} \cdot \vec{n})^2 - \alpha c^2}{(\vec{u} \cdot \vec{n})^2 - c^2} & -n_1 n_2 + n_1 n_2 \frac{(\vec{u} \cdot \vec{n})^2 - \alpha c^2}{(\vec{u} \cdot \vec{n})^2 - c^2} & -\frac{n_1 \vec{u} \cdot \vec{n} (\alpha - 1)}{(\vec{u} \cdot \vec{n})^2 - c^2} \\ 0 & -n_1 n_2 + n_1 n_2 \frac{(\vec{u} \cdot \vec{n})^2 - \alpha c^2}{(\vec{u} \cdot \vec{n})^2 - c^2} & n_1^2 + n_2^2 \frac{(\vec{u} \cdot \vec{n})^2 - \alpha c^2}{(\vec{u} \cdot \vec{n})^2 - c^2} & -\frac{n_2 \vec{u} \cdot \vec{n} (\alpha - 1)}{(\vec{u} \cdot \vec{n})^2 - c^2} \\ 0 & \frac{\rho c^2 n_1 \vec{u} \cdot \vec{n} (\alpha - 1)}{(\vec{u} \cdot \vec{n})^2 - c^2} & \frac{\rho c^2 n_2 \vec{u} \cdot \vec{n} (\alpha - 1)}{(\vec{u} \cdot \vec{n})^2 - c^2} & -\frac{\alpha (\vec{u} \cdot \vec{n})^2 - c^2}{(\vec{u} \cdot \vec{n})^2 - c^2} \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

Από τα παραπάνω αποδεικνύεται ότι μπορεί να οριστεί μητρώο \bar{D} που, εφαρμόζοντας δεξιά προσταθεροποίηση στις συζυγείς εξισώσεις, επιφέρει τα ίδια αποτελέσματα με το μητρώο αριστερής προσταθεροποίησης $\bar{\Gamma}$. Ο υπολογισμός του D από το \bar{D} είναι προφανής, δηλαδή $D = M \bar{D} M^{-1}$. Στο μητρώο \bar{D} φαίνεται να υπάρχει πρόβλημα στην ηχητική κατάσταση όπου $M=1$ (αριθμός Mach) και $|\vec{u}|=c$ το οποίο όμως στην πραγματικότητα δεν υφίσταται καθώς η ποσότητα α έχει ορισθεί ως $\alpha = \max(1, M^2)$. Δηλαδή, στην ηχητική περίπτωση, το μητρώο $\bar{\Gamma}$ ισούται εξ ορισμού με το μοναδιαίο μητρώο, θεώρηση η οποία προφανώς υιοθετείται και για το \bar{D} , δηλαδή όταν $M=1$ τότε $\bar{D} = I$.

4.8 Σχεδιασμός σε Πολυεπεξεργαστικό Περιβάλλον

Ο σχεδιασμός αεροδυναμικών μορφών που αναπτύχθηκε στις προηγούμενες ενότητες και το σχετικό λογισμικό που τον υλοποιεί έχει προγραμματιστεί ώστε να είναι δυνατή η εκτέλεση του σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον. Οι βασικές αρχές της παράλληλης επεξεργασίας για την επίλυση των εξισώσεων ροής (διαμερισμός υποχωρίων, μοντέλο συντονιστή-εργάτη) έχουν ήδη περιγραφεί στην ενότητα 2.7. Παρόλα αυτά, ο σχεδιασμός αεροδυναμικών μορφών, περιλαμβάνει επιπλέον την επίλυση των συζυγών εξισώσεων, την παραμετροποίηση της μορφής κ.α. Έτσι, σε πρώτη φάση, ο αλγόριθμος σχεδιασμού ξεκινά σειριακά, όπου ένας κεντρικός διαχειριστής αναλαμβάνει την παραμετροποίηση της αεροτομής, τη γένεση πλέγματος γύρω από αυτή και το διαμερισμό του σε υποχωρία. Ο αριθμός τους καθορίζεται συνήθως από τον αριθμό των διαθέσιμων επεξεργαστών και τη διάσταση του πλέγματος. Στη συνέχεια, ο διαχειριστής δίνει εντολή στο συντονιστή της επίλυσης των εξισώσεων ροής, ο οποίος με τη σειρά του αναθέτει την επίλυση στους εργάτες (με βάση τα όσα έχουν περιγραφεί στην ενότητα 2.7). Με την ολοκλήρωση της αριθμητικής επίλυσης των εξισώσεων ροής, ο διαχειριστής συλλέγει τα αποτελέσματα και δίνει εντολή στο συντονιστή της επίλυσης των συζυγών

εξισώσεων για την επίλυση τους. Η επίλυσή τους βασίζεται και αυτή στο μοντέλο συντονιστή-εργάτη, όπου οι απαιτούμενες επικοινωνίες είναι όμοιες με αυτές των εξισώσεων ροής, με τη διαφορά ότι αφορούν στις συζυγείς μεταβλητές αντί στα ροϊκά μεγέθη. Με την ολοκλήρωση της επίλυσης και των συζυγών εξισώσεων, ο κεντρικός διαχειριστής αναλαμβάνει τη συλλογή των αποτελεσμάτων, τον υπολογισμό της κλίσης της συνάρτησης κόστους και, συνεπώς, τη δημιουργία της νέας-ανανεωμένης γεωμετρίας. Ο συνολικός αλγόριθμος-διαδικασία (σχήμα 4.2) επαναλαμβάνεται για τον επόμενο κύκλο βελτιστοποίησης, κ.ο.κ.



Σχήμα 4.2: Αλγόριθμος σχεδιασμού αεροδυναμικών μορφών με χρήση συζυγών τεχνικών και προσταθεροποίησης, σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον.

4.9 Εφαρμογές–Πιστοποίηση

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται οι εφαρμογές και η πιστοποίηση της προτεινόμενης μεθόδου για την εισαγωγή της προσταθεροποίησης στις συζυγείς εξισώσεις. Περιλαμβάνονται προβλήματα σχεδιασμού πτερυγώσεων στροβιλομηχανών αλλά και μεμονωμένων αεροτομών, σε ατριβείς και συνεκτικές ροές. Ως συναρτήσεις κόστους χρησιμοποιούνται αυτές που παρουσιάστηκαν στην ενότητα 4.4. Έτσι τα μελετούμενα προβλήματα σχεδιασμού είναι είτε προβλήματα αντίστροφου σχεδιασμού με δεδομένη κατανομή πίεσης είτε προβλήματα ελαχιστοποίησης του συντελεστή οπισθέλκουσας με δεδομένο συντελεστή άνωσης (μόνο για μεμονωμένες αεροτομές).

Στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων που ακολουθεί μελετώνται το κέρδος στη συνολική διαδικασία σχεδιασμού από τη χρήση της προσταθεροποίησης στις εξισώσεις ροής και τις συζυγείς εξισώσεις, αλλά και η διττή επιτάχυνση από συνδυασμένη χρήση προσταθεροποίησης και πολυεπεξεργασίας. Επιπλέον, ελέγχονται οι παραδοχές τις οποίες εισάγει η προσταθεροποίηση συγκρίνοντας την ακρίβεια υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας με τη συνεχή, τη διακριτή τεχνική με προσταθεροποίηση και τις πεπερασμένες διαφορές. Για όλες τις παρουσιαζόμενες εφαρμογές, ο σχεδιασμός πραγματοποιείται με την προτεινόμενη συζυγή τεχνική (διακριτή ή συνεχή) με προσταθεροποίηση και, σε ό,τι ακολουθεί, αυτό θα θεωρείται δεδομένο εκτός αν δηλώνεται κάτι διαφορετικό (μεμονωμένοι υπολογισμοί χωρίς προσταθεροποίηση λ.χ. για λόγους σύγκρισης).

Σε όλες τις περιπτώσεις, η παραμετροποίηση των αεροδυναμικών μορφών γίνεται με δύο καμπύλες Bézier, χωριστά για την πλευρά υπερπίεσης και την πλευρά υποπίεσης. Οι γεωμετρίες (σημεία ελέγχου) των αεροτομών κατά την έναρξη της βελτιστοποίησης είναι τυχαίες (συνήθως συμμετρικές για τις σχεδιαζόμενες μεμονωμένες αεροτομές).

Για τις περιπτώσεις αντίστροφου σχεδιασμού, η συνάρτηση κόστους υπολογίζεται με επίλυση της ροής σε μια γνωστή αεροτομή. Έτσι στις μελετούμενες περιπτώσεις, εκτός από την κατανομή του συντελεστή πίεσης (στόχος) είναι επιπλέον γνωστή και η γεωμετρία από την οποία αυτός προέκυψε (αεροτομή αναφοράς). Προφανώς ο σχεδιασμός θα μπορούσε να γίνει γνωρίζοντας απλά και μόνο την κατανομή πίεσης.

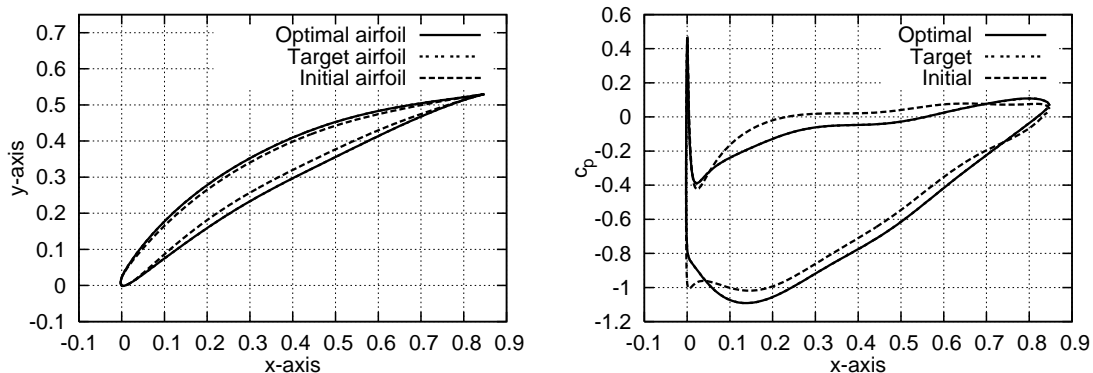
Δεδομένου ότι, σε κάποιες από τις εφαρμογές που ακολουθούν, παρουσιάζονται συγκρίσεις ως προς το ρυθμό σύγκλισης των εξισώσεων ροής και των συζυγών εξισώσεων με και χωρίς προσταθεροποίηση, διευκρινίζεται ότι κατά την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων (ευθέως και συζυγούς προβλήματος) χρησιμοποιείται ο επιλύτης Jacobi.

4.9.1 Αντίστροφος Σχεδιασμός Πτερύγωσης Συμπιεστή–Ατριβής Ροή

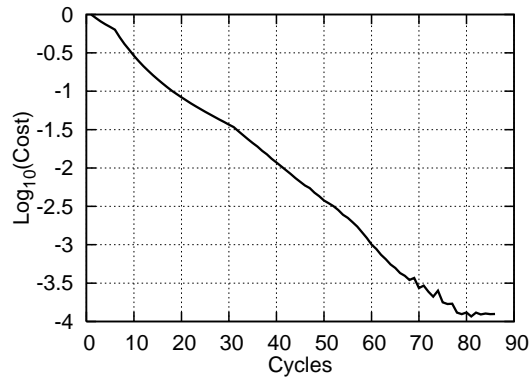
Η πρώτη εφαρμογή αφορά στον αντίστροφο σχεδιασμό μιας 2Δ πτερύγωσης συμπιεστή με γωνία κλίσης 32° και λόγο βήματος προς χορδή 0.75, σε ατριβή ροή. Η γεωμετρία της αεροτομής παραμετροποιείται με 46 σημεία ελέγχου, 23 για κάθε πλευρά (υποπίεσης και υπερπίεσης). Τα σημεία που βρίσκονται κοντά στις ακμές πρόσπτωσης και εκφυγής διατηρούνται σταθερά ενώ για τα υπόλοιπα σημεία ελέγχου σταθερές παραμένουν οι αξονικές συντεταγμένες τους, καταλήγοντας τελικά σε ένα πρόβλημα με 32 μεταβλητές σχεδιασμού. Οι συνθήκες ροής είναι: γωνία εισόδου της ροής στην πτερύγωση $\alpha_1 = 50^\circ$ και ισεντροπικός αριθμός Mach στην

έξοδο της $M_{2_{is}}=0.1$. Ο σχεδιασμός πραγματοποιείται με τη συνεχή συζυγή τεχνική με προσταθεροποίηση και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα σχήματα 4.3, 4.4 και 4.5. Σε αυτά φαίνεται σύγκριση της γεωμετρίας και του συντελεστή πίεσης της βέλτιστης αεροτομής με την αεροτομή αναφοράς και την αεροτομή έναρξης της βελτιστοποίησης, η πορεία σύγκλισης της τιμής της συνάρτησης-κόστους (σε δεκαδικό λογάριθμο με αναγωγή στην τιμή κόστους του πρώτου κύκλου) και το πεδίο του αριθμού Mach της ροής στη βέλτιστη πτερύγωση. Στο σχήμα 4.3, υπάρχει ουσιαστικά πλήρης ταύτιση των καμπυλών για την αεροτομή αναφοράς και την προκύπτουσα-βέλτιστη αεροτομή και γι'αυτό δεν μπορούν να αναγνωριστούν ως διαφορετικές καμπύλες.

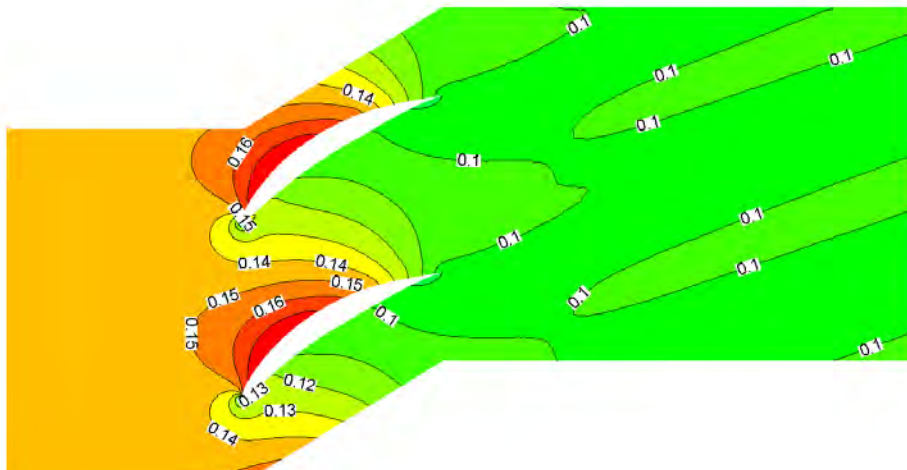
Προκειμένου να καταστεί σαφές το κέρδος από τη χρήση της προσταθεροποίησης στη συνολική διαδικασία σχεδιασμού, οι υπολογισμοί, για έναν κύκλο βελτιστοποίησης, επαναλαμβάνονται με και χωρίς προσταθεροποίηση. Η σύγκριση της ρυθμού σύγκλισης των εξισώσεων ροής και των συζυγών εξισώσεων με και χωρίς προσταθεροποίηση (σχήμα 4.6) αποδεικνύει ότι η προσταθεροποίηση, εκτός από τις εξισώσεις ροής (που αναλύθηκαν και σε προηγούμενη ενότητα) επιφέρει σημαντικό κέρδος και στις συζυγείς εξισώσεις. Το κέρδος αυτό (ως προς τον υπολογιστικό χρόνο που απαιτείται για έναν κύκλο βελτιστοποίησης) σε υπολογιστή P4, 3000MHz, 2GB RAM παρουσιάζεται στον πίνακα 4.1. Αν στο κέρδος λόγω προσταθεροποίησης υπερτερεί και το κέρδος από τη χρήση πολυεπεξεργασίας τότε για ένα κύκλο βελτιστοποίησης σε 16 υπολογιστές απαιτούνται μόλις 50 δευτερόλεπτα. Έτσι, για το συγκεκριμένο πρόβλημα σχεδιασμού, με χρήση προσταθεροποίησης και πολυεπεξεργασίας η τελική λύση επιτυγχάνεται μετά από 85 κύκλους βελτιστοποίησης σε περίπου 70 λεπτά, μόνο.



Σχήμα 4.3: Αντίστροφος σχεδιασμός πτερύγωσης συμπιεστή, ατρίβης ροή ($\alpha_1 = 50^\circ$, $M_{2_{is}} = 0.1$). Αεροτομή αναφοράς, προκύπτουσα-βέλτιστη αεροτομή και αεροτομή έναρξης βελτιστοποίησης (αριστερά) και οι αντίστοιχες κατανομές του συντελεστή πίεσης στα στερεά τοιχώματα (δεξιά).



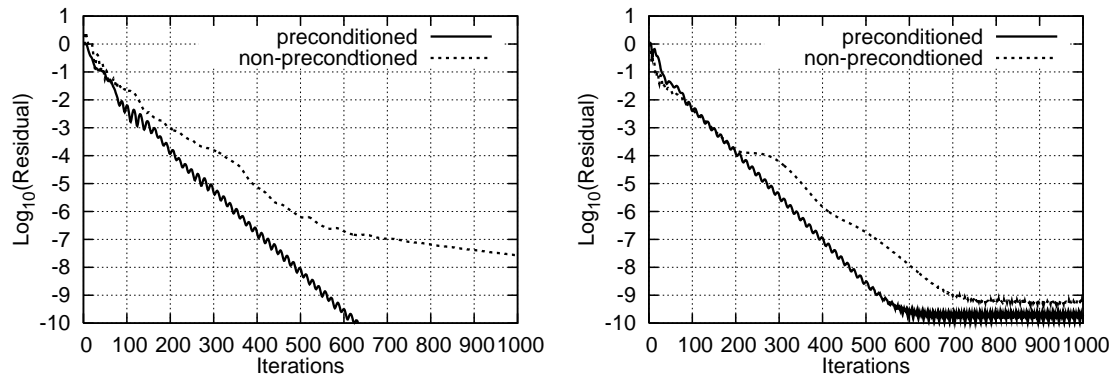
Σχήμα 4.4: Αντίστροφος σχεδιασμός πτερύγωσης συμπιεστή, ατριβής ροή ($\alpha_1 = 50^\circ$, $M_{2_{is}} = 0.1$). Εξέλιξη της τιμής της συνάρτησης-κόστους, ανηγμένης στο κόστος του πρώτου κύκλου.



Σχήμα 4.5: Αντίστροφος σχεδιασμός πτερύγωσης συμπιεστή, ατριβής ροή ($\alpha_1 = 50^\circ$, $M_{2_{is}} = 0.1$). Πεδίο και ισογραμμές αριθμού Mach της ροής στη βέλτιστη πτερύγωση.

Πίνακας 4.1: Αντίστροφος σχεδιασμός πτερύγωσης συμπιεστή, ατριβής ροή ($\alpha_1 = 50^\circ$, $M_{2_{is}} = 0.1$). Σύγκριση απαιτούμενου υπολογιστικού χρόνου για έναν κύκλο βελτιστοποίησης με και χωρίς προσταθεροποίηση.

	Σειριακή Εκτέλεση	Παράλληλη Εκτέλεση (16 CPUs)
Με Προσταθεροποίηση	19 min	50 sec
Χωρίς Προσταθεροποίηση	32 min	90 sec



Σχήμα 4.6: Αντίστροφος σχεδιασμός περύγωσης συμπιεστή, ατριβής ροή ($\alpha_1 = 50^\circ$, $M_{2_{i_s}} = 0.1$). Σύγκριση του ρυθμού σύγκλισης των εξισώσεων ροής (αριστερά) και των συζυγών εξισώσεων (δεξιά) με και χωρίς προσταθεροποίηση, σε έναν κύκλο βελτιστοποίησης.

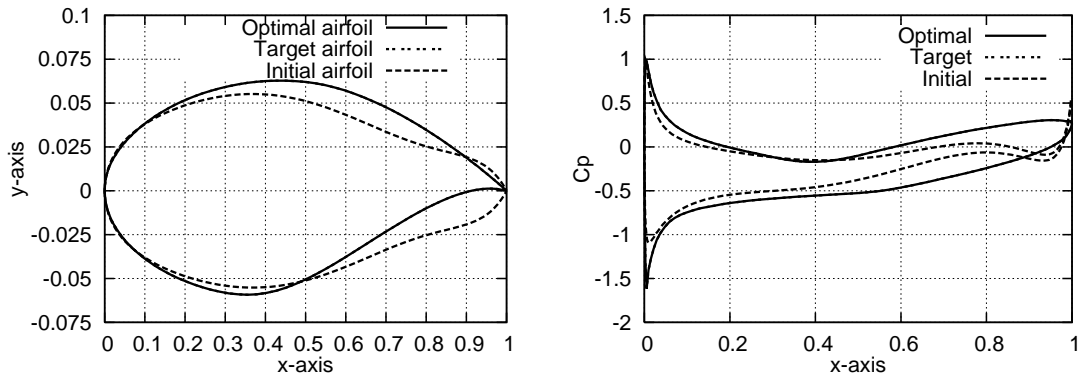
4.9.2 Αντίστροφος Σχεδιασμός Μεμονωμένων Αεροτομών–Ατριβής Ροή

Η επόμενη περίπτωση αφορά στον αντίστροφο σχεδιασμό μεμονωμένης αεροτομής σε ατριβή ροή και συνθήκες επ'άπειρον ροής $M_\infty = 0.1$ και $\alpha_\infty = 3^\circ$. Ο σχεδιασμός πραγματοποιείται και με τις δύο συζυγείς τεχνικές, τη διακριτή και τη συνεχή συζυγή, με προσταθεροποίηση. Για την παραμετροποίηση της αεροτομής χρησιμοποιήθηκαν 30 σημεία ελέγχου (15 για κάθε πλευρά) τα οποία μεταβάλλονταν τόσο κατά την οριζόντια (x) όσο και κατά την κατακόρυφη (y) διεύθυνση (εξαιρέση αποτελούν τα ακίνητα σημεία στην ακμή πρόσπτωσης και εκφυγής).

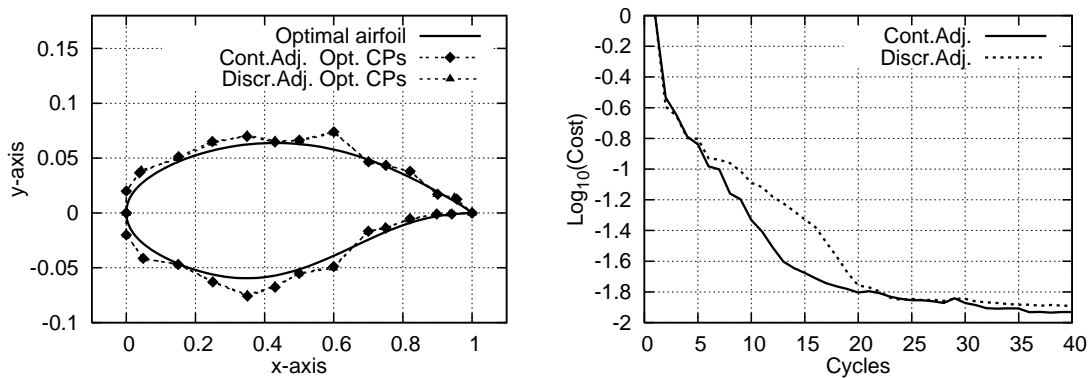
Η προκύπτουσα βέλτιστη αεροτομή και ο συντελεστής πίεσης στα τοιχώματα της συγκρίνονται με τα αντίστοιχα μεγέθη αναφοράς παρουσιάζονται στο σχήμα 4.7. Στο ίδιο σχήμα φαίνονται επίσης η αεροτομή από την οποία ξεκίνησε η βελτιστοποίηση και η κατανομή πίεσης αυτής. Η ταύτιση της προκύπτουσας αεροτομής με την αεροτομή αναφοράς είναι πλήρης, παρά το γεγονός ότι η αεροτομή έναρξης της βελτιστοποίησης βρισκόταν μακριά από αυτήν. Παρότι ο σχεδιασμός πραγματοποιήθηκε και με τις δύο συζυγείς τεχνικές, οι προκύπτουσες λύσεις (για σχεδιασμό με τη διακριτή και τη συνεχή συζυγή μέθοδο) είναι ίδιες σε επίπεδο γραφικής απεικόνισης και για το λόγο αυτό αποτυπώνεται μόνο η μια από αυτές. Για την τελική βέλτιστη, λύση το πεδίο του αριθμού Mach φαίνεται στο σχήμα 4.10. Επιπλέον, η ομοιότητα των λύσεων από τις δύο τεχνικές, φαίνεται στα σημεία ελέγχου της βέλτιστης λύσης (σχήμα 4.8 αριστερά) αλλά και στην τελική τιμή της συνάρτησης-κόστους (σχήμα 4.8 δεξιά). Ειδικότερα, οι δύο τεχνικές συγκλίνουν σχεδόν στην ίδια τιμή συνάρτησης κόστους ακολουθώντας λίγο διαφορετική πορεία, η οποία οφείλεται στις διαφορετικές τιμές του βήματος καθόδου που χρησιμοποιήθηκαν κατά την εφαρμογή της μεθόδου της απότομης καθόδου.

Τέλος, στο σχήμα 4.9 παρουσιάζεται σύγκριση των παραγώγων ευαισθησίας όπως αυτές υπολογίζονται από τις δύο συζυγείς τεχνικές με προσταθεροποίηση και τις πεπερασμένες διαφορές (με $\epsilon = 10^{-7}$). Από τις 60 τιμές που τυπώνονται, οι πρώτες 30 αντιστοιχούν στην πλευρά υπερπίεσης και οι υπόλοιπες 30 στην πλευρά υποπίεσης. Για κάθε πλευρά τα πρώτα 15 σημεία αντιστοιχούν στις παραγώγους ως προς την τετμημένη x και τα υπόλοιπα 15 ως προς την τεταγμένη y . Η ταύτιση των παραγώγων ευαισθησίας που προκύπτουν από τις συζυγείς τεχνικές με τις πεπερασμένες διαφορές είναι εξαιρετική, ειδικά για την περίπτωση

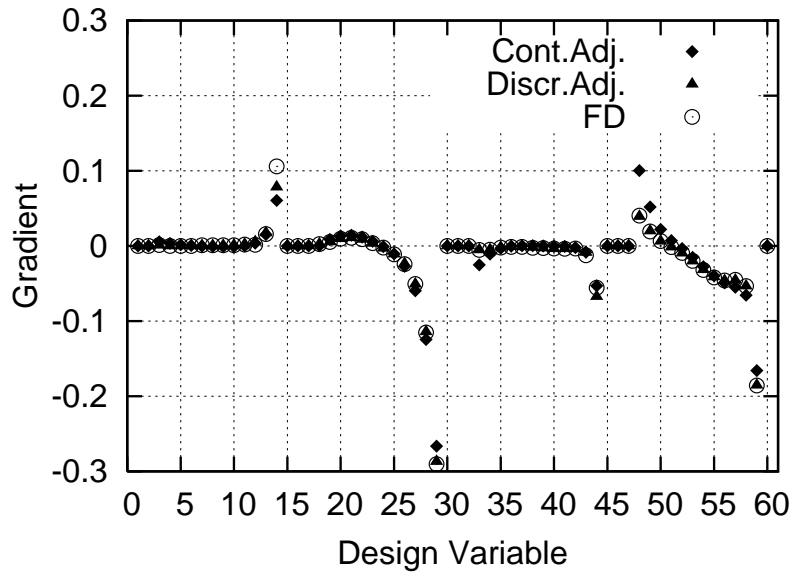
της διακριτής μεθόδου. Όσον αφορά στις παραγώγους ευαισθησίας από τη συνεχή συζυγή μέθοδο, μικρές διαφορές παρατηρούνται μόνο στα σημεία ελέγχου πολύ κοντά στις ακμές πρόσπτωσης και εκφυγής. Οι διαφορές αυτές, πέραν των ιδιομορφιών της ροής σε αυτά τα σημεία, δικαιολογούνται και από τις παραδοχές που έχουν γίνει κατά τη διατύπωση και διακριτοποίηση των συνεχών συζυγών εξισώσεων με προσταθεροποίηση.



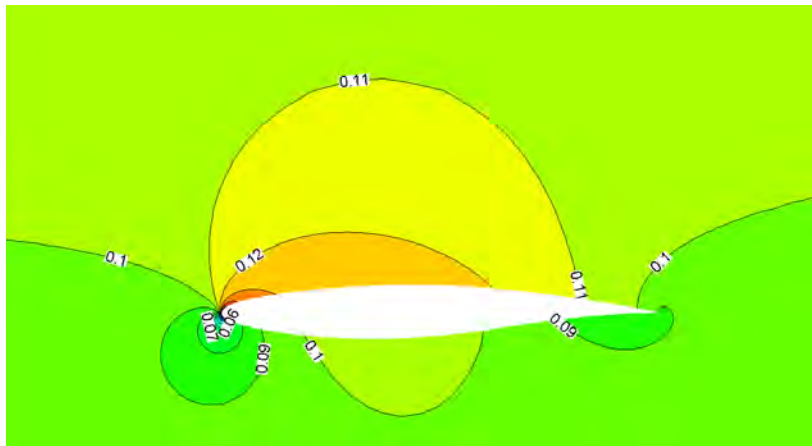
Σχήμα 4.7: Αντίστροφος σχεδιασμός μεμονωμένης αεροτομής, ατριβής ροή ($\alpha_\infty = 3^\circ$, $M_\infty = 0.1$). Αεροτομή αναφοράς, προκύπτουσα-βέλτιστη αεροτομή και αεροτομή έναρξης βελτιστοποίησης χωρίς κοινή κλίμακα στους δύο άξονες (αριστερά) και οι αντίστοιχες κατανομές του συντελεστή πίεσης στα στερεά τοιχώματα (δεξιά).



Σχήμα 4.8: Αντίστροφος σχεδιασμός μεμονωμένης αεροτομής, ατριβής ροή ($\alpha_\infty = 3^\circ$, $M_\infty = 0.1$). Σύγκριση σημείων ελέγχου στην προκύπτουσα-βέλτιστη αεροτομή (αριστερά) και εξέλιξη της τιμής της συνάρτησης κόστους (δεξιά) με τη συνεχή και τη διακριτή συζυγή τεχνική με προσταθεροποίηση.



Σχήμα 4.9: Αντίστροφος σχεδιασμός μεμονωμένης αεροτομής, ατριβής ροή ($\alpha_\infty = 3^\circ$, $M_\infty = 0.1$). Σύγκριση παραγώγων ευαισθησίας, υπολογισμένων με τη συνεχή και τη διακριτή συζυγή τεχνική με προσταθεροποίηση και τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών.



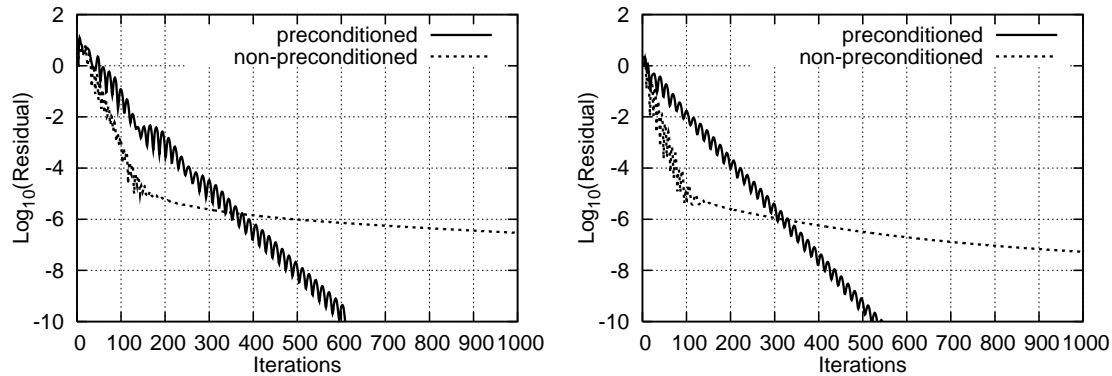
Σχήμα 4.10: Αντίστροφος σχεδιασμός μεμονωμένης αεροτομής, ατριβής ροή ($\alpha_\infty = 3^\circ$, $M_\infty = 0.1$). Πεδίο και ισογραμμές αριθμού Mach της ροής γύρω από τη βέλτιστη αεροτομή.

Η τελευταία περίπτωση σχεδιασμού σε ατριβή ροή αφορά στον αντίστροφο σχεδιασμό μεμονωμένης αεροτομής σε πολύ χαμηλή ταχύτητα επ'άπειρον ροής $M_\infty = 0.001$ και γωνία $\alpha_\infty = 6^\circ$. Σε αυτήν την περίπτωση, η χρήση της προσταθεροποίησης γίνεται ιδιαίτερα αισθητή αν συγκριθεί ο ρυθμός σύγκλισης των εξισώσεων ροής και των συζυγών εξισώσεων με και χωρίς προσταθεροποίηση (σχήμα 4.11). Εκτός από την ταχύτερη επίλυση, στην προκειμένη περίπτωση η προσταθεροποίηση είναι απαραίτητη για την υλοποίηση του σχεδιασμού, καθώς οι μη-προσταθεροποιημένες εξισώσεις δεν συγκλίνουν επαρκώς. Έτσι, η όποια προσπάθεια σχεδιασμού χωρίς προσταθεροποίηση θα εμπεριείχε το ρίσκο του υπολογισμού 'λανθασμένων'

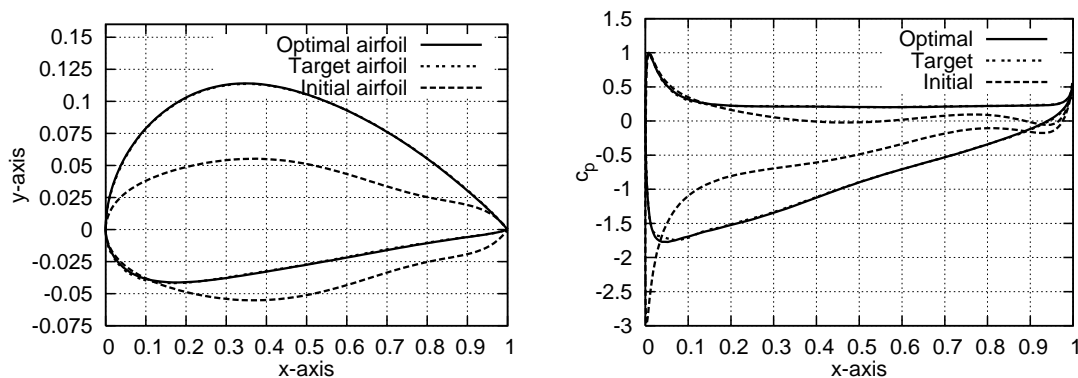
παραγώγων ευαισθησίας λόγω ανεπαρκούς σύγκλισης των εξισώσεων κι έτσι, ακόμα κι αν ολοκληρώνονταν με επιτυχία, θα απαιτούσε πολύ περισσότερους κύκλους σχεδιασμού.

Τα αποτελέσματα της διαδικασίας σχεδιασμού παρουσιάζονται στο σχήμα 4.12. Η αναπαγωγή της γεωμετρίας αναφοράς και της κατανομής πίεσης είναι εξαιρετική, παρά την ‘απόσταση’ της αρχικής γεωμετρίας από τη γεωμετρία αναφοράς. Η σύγκλιση της τιμής της συνάρτησης κόστους φαίνεται στο σχήμα 4.13.

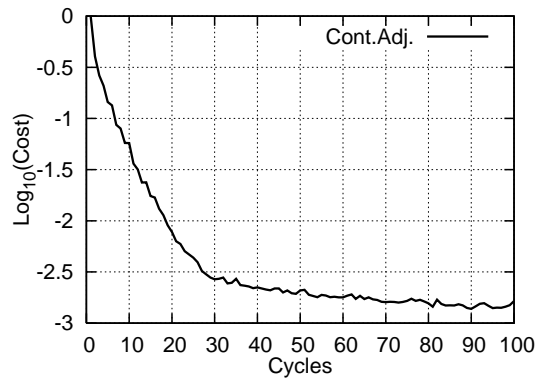
Επιπλέον, στο σχήμα 4.14 φαίνεται σύγκριση των παραγώγων ευαισθησίας με τις δύο συζυγείς τεχνικές και τις πεπερασμένες διαφορές. Παρά το γεγονός ότι ο σχεδιασμός έγινε με τη συνεχή συζυγή τεχνική, για λόγους σύγκρισης έγιναν υπολογισμοί των παραγώγων και με τη διακριτή μέθοδο σε μια ενδιάμεση αεροτομή, η οποία προέκυψε κατά τη διάρκεια του σχεδιασμού. Τέλος, το πεδίο του αριθμού Mach της ροής στη βέλτιστη αεροτομή παρουσιάζεται στο σχήμα 4.15.



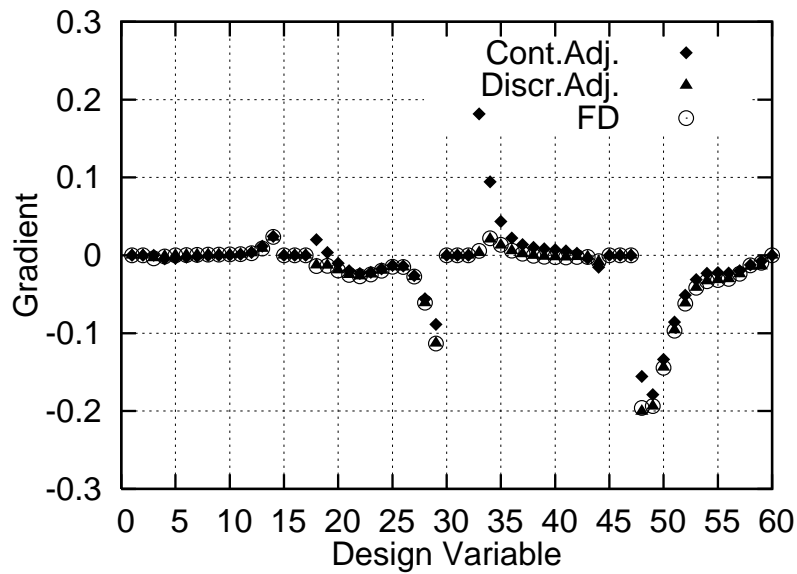
Σχήμα 4.11: Αντίστροφος σχεδιασμός μεμονωμένης αεροτομής, ατριβής ροή ($\alpha_\infty = 6^\circ$, $M_\infty = 0.001$). Σύγκριση του ρυθμού σύγκλισης των εξισώσεων ροής (αριστερά) και των συζυγών εξισώσεων (δεξιά) με και χωρίς προσταθεροποίηση, σε έναν κύκλο βελτιστοποίησης.



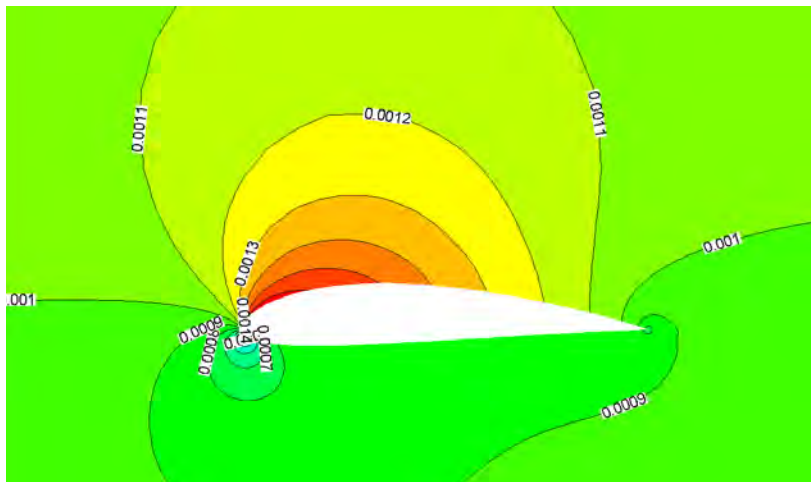
Σχήμα 4.12: Αντίστροφος σχεδιασμός μεμονωμένης αεροτομής, ατριβής ροή ($\alpha_\infty = 6^\circ$, $M_\infty = 0.001$). Αεροτομή αναφοράς, προκύπτουσα-βέλτιστη αεροτομή και αεροτομή έναρξης βελτιστοποίησης χωρίς κοινή κλίμακα στους δύο άξονες (αριστερά) και οι αντίστοιχες κατανομές του συντελεστή πίεσης στα στερεά τοιχώματα (δεξιά).



Σχήμα 4.13: Αντίστροφος σχεδιασμός μεμονωμένης αεροτομής, ατριβής ροή ($\alpha_\infty = 6^\circ$, $M_\infty = 0.001$). Εξέλιξη της τιμής της συνάρτησης κόστους, ανηγμένης στο κόστος του πρώτου κύκλου.



Σχήμα 4.14: Αντίστροφος σχεδιασμός μεμονωμένης αεροτομής, ατριβής ροή ($\alpha_\infty = 6^\circ$, $M_\infty = 0.001$). Σύγκριση παραγώγων ευαισθησίας υπολογισμένων με τη συνεχή και τη διακριτή συζυγή τεχνική με προσταθεροποίηση και τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών.



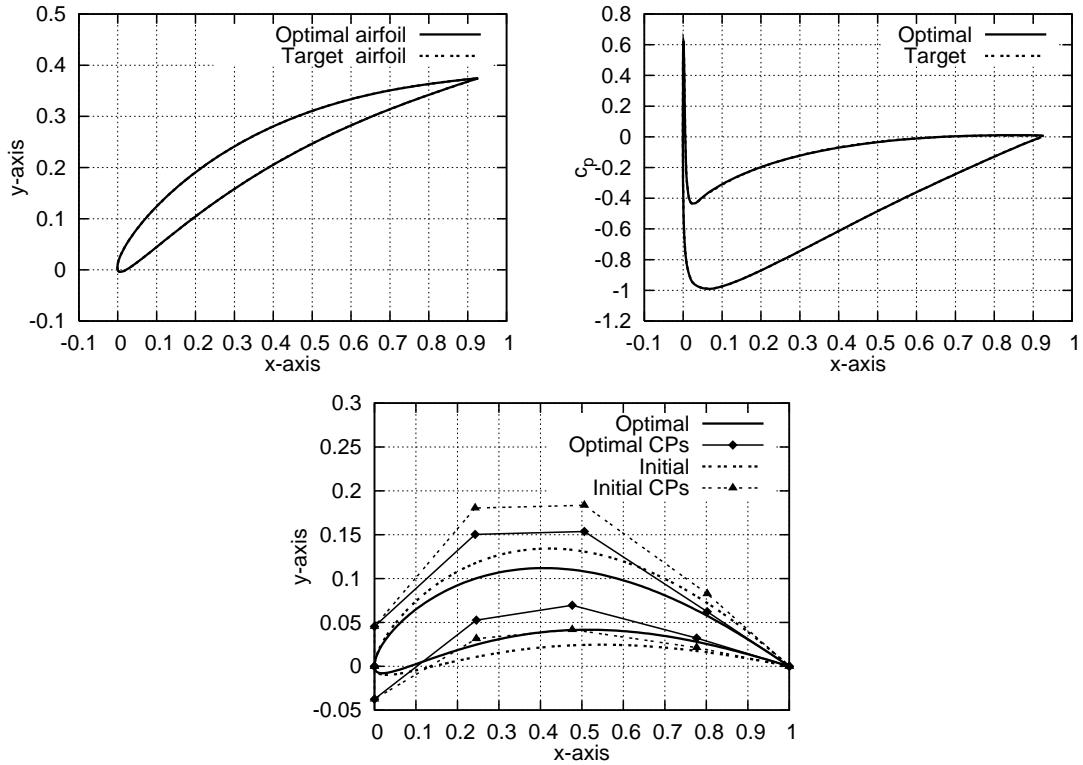
Σχήμα 4.15: Αντίστροφος σχεδιασμός μεμονωμένης αεροτομής, ατριβής ροή ($\alpha_\infty = 6^\circ$, $M_\infty = 0.001$). Πεδίο και ισογραμμές αριθμού Mach της ροής γύρω από τη βέλτιστη αεροτομή.

4.9.3 Αντίστροφος Σχεδιασμός Πτερύγωσης Συμπιεστή–Τυρβώδης Ροή

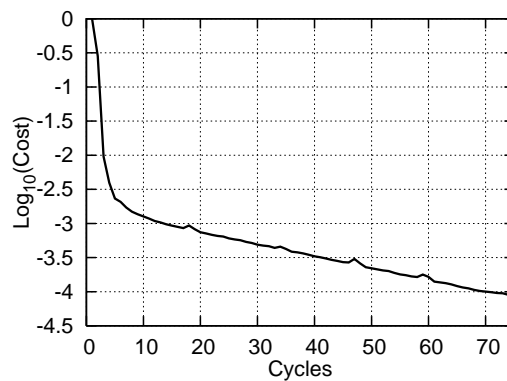
Η επόμενη εφαρμογή αφορά στον αντίστροφο σχεδιασμό πτερύγωσης συμπιεστή με γωνία κλίσης 22° και λόγο βήματος προς χορδή 0.55, σε τυρβώδη ροή, με τη συνεχή συζυγή τεχνική με προσταθεροποίηση. Οι συνθήκες ροής είναι $\alpha_1 = 41^\circ$, $M_{2,ts} = 0.15$ και αριθμός Reynolds βασισμένος στη χορδή $Re = 9.5 \times 10^5$. Για τη μοντελοποίηση της τύρβης χρησιμοποιείται το μοντέλο μιας εξίσωσης των Spalart–Allmaras.

Η γεωμετρία της αεροτομής παραμετροποιείται με 12 σημεία ελέγχου των καμπυλών Bézier που μεταβάλλονται μόνο ως προς την κατακόρυφη (περιφερειακή) διεύθυνση και αν αμεληθούν τα σταθερά σημεία της ακμής πρόσπτωσης και εκφυγής, το πλήθος των μεταβλητών σχεδιασμού είναι 8. Παρά το σχετικά μικρό πλήθος μεταβλητών σχεδιασμού, σε σύγκριση με τις άλλες εφαρμογές που παρουσιάζονται, η περίπτωση αυτή επιλέχθηκε έτσι ώστε να ελεγχθεί η βασική παραδοχή κατά την οποία αμελούνται οι μεταβολές της τυρβώδους συνεκτικότητας, για τη συνεχή συζυγή διατύπωση για τυρβώδεις ροές.

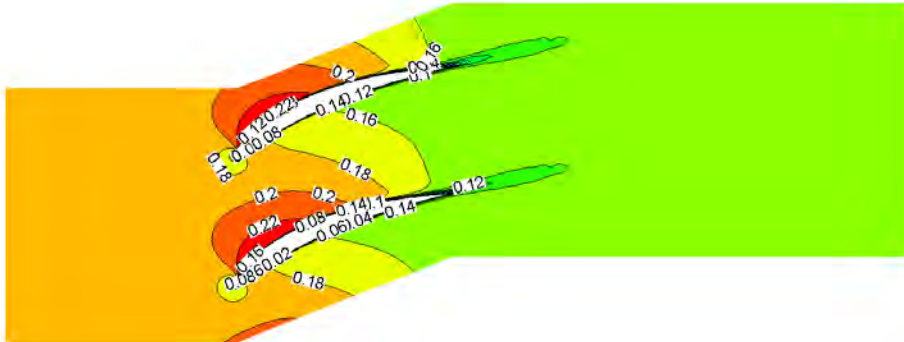
Από τα αποτελέσματα, αποδεικνύεται ότι αυτή η παραδοχή, στην παρούσα εφαρμογή, δεν επηρεάζει τη διαδικασία σχεδιασμού καθώς υπάρχει πλήρης αναπαραγωγή της γεωμετρίας αναφοράς και του συντελεστή πίεσης μετά από περίπου 70 κύκλους βελτιστοποίησης (σχήματα 4.16, 4.17 και 4.18). Αυτό γίνεται ακόμα πιο σημαντικό, αν αναλογιστεί κανείς ότι η αεροτομή έναρξης της βελτιστοποίησης είναι ‘σχετικά’ μακριά από την τελική–βέλτιστη λύση, όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.16 (κάτω) όπου, εκτός από τις δύο αυτές αεροτομές, αποτυπώνονται και τα σχετικά σημεία ελέγχου (διευκρινίζεται ότι η παραμετροποίηση γίνεται σε μηδενική γωνία στροφής και το πτερύγιο τοποθετείται στη ‘σωστή’ γωνία κλίσης πριν τη δημιουργία του πλέγματος).



Σχήμα 4.16: Αντίστροφος σχεδιασμός πτερύγωσης συμπιεστή ($\alpha_1 = 41^\circ$, $M_{2_{is}} = 0.15$, $Re = 9.5 \times 10^5$). Αεροτομή αναφοράς και προκύπτουσα-βέλτιστη αεροτομή (πάνω αριστερά) και οι αντίστοιχες κατανομές του συντελεστή πίεσης στα στερεά τοιχώματα (πάνω δεξιά). Σημεία ελέγχου στην αρχική και προκύπτουσα-βέλτιστη αεροτομή (κάτω).



Σχήμα 4.17: Αντίστροφος σχεδιασμός πτερύγωσης συμπιεστή ($\alpha_1 = 41^\circ$, $M_{2_{is}} = 0.15$, $Re = 9.5 \times 10^5$). Εξέλιξη της τιμής της συνάρτησης-κόστους, ανηγμένης στο κόστος του πρώτου κύκλου.



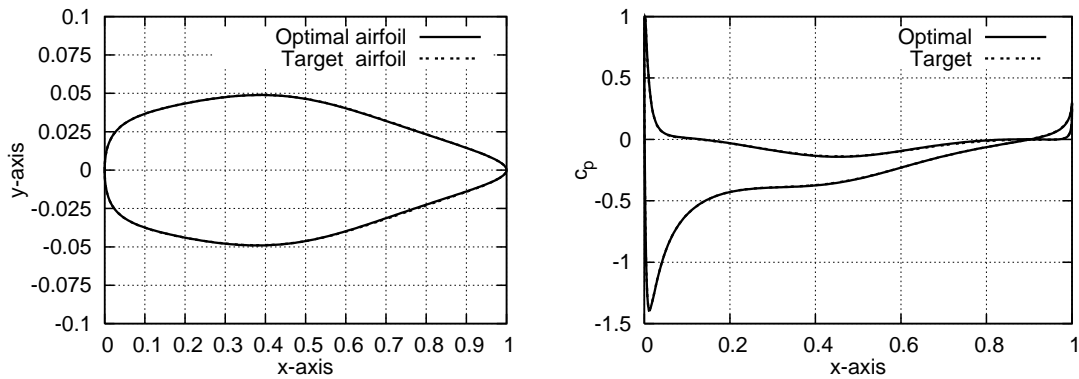
Σχήμα 4.18: Αντίστροφος σχεδιασμός πτερύγωσης συμπιεστή ($\alpha_1 = 41^\circ$, $M_{2, is} = 0.15$, $Re = 9.5 \times 10^5$). Πεδίο και ισογραμμές αριθμού Mach της ροής στη βέλτιστη πτερύγωση.

4.9.4 Αντίστροφος Σχεδιασμός Συμμετρικής Αεροτομής–Τυρβώδης Ροή

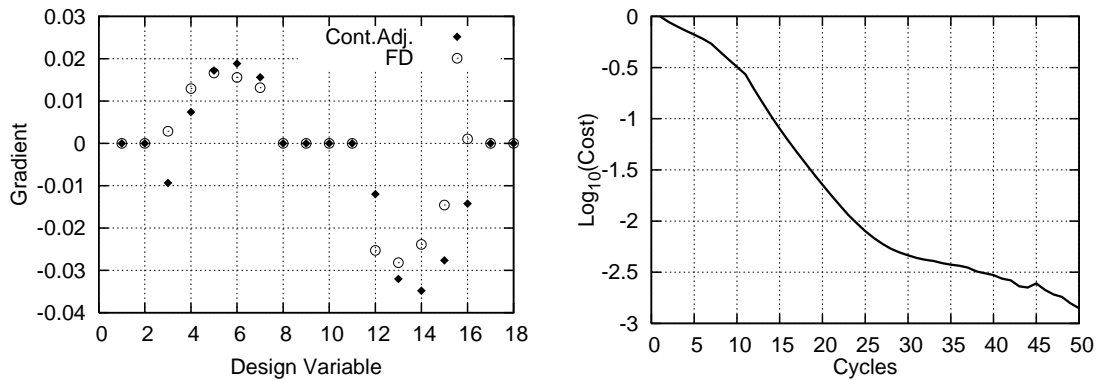
Η τελευταία εφαρμογή αντίστροφου σχεδιασμού αφορά σε μια συμμετρική αεροτομή σε τυρβώδη ροή. Οι συνθήκες επ'άπειρον ροής είναι $M_\infty = 0.1$, γωνία $\alpha_\infty = 3^\circ$ και αριθμός Reynolds $Re = 10^6$. Ο σχεδιασμός γίνεται με τη συνεχή συζυγή τεχνική με προσταθεροποίηση χωρίς να επιλύεται συζυγής εξίσωση για την εξίσωση του μοντέλου τύρβης Spalart–Allmaras.

Από τη σύγκριση των παραγώγων ευαισθησίας που υπολογίζονται με τη συνεχή συζυγή τεχνική με προσταθεροποίηση και τις πεπερασμένες διαφορές (σχήμα 4.20 αριστερά) παρατηρούνται αποκλίσεις των τιμών. Αυτές, οφείλονται αφενός στις παραδοχές τις οποίες εισάγει η προσταθεροποίηση στη διατύπωση των συζυγών εξισώσεων και τη διακριτοποίησή τους και αφετέρου στην παραδοχή της μηδενικής μεταβολής της τυρβώδους συνεκτικότητας (όπως φαίνεται και στην εργασία [263]). Παρόλα αυτά, οι μη-ακριβείς τιμές παραγώγων ευαισθησίας δεν επηρεάζουν το σχεδιασμό ούτε όσον αφορά στην προκύπτουσα-βέλτιστη αεροτομή και το συντελεστή πίεση σε σχέση με τις τιμές αναφοράς (σχήμα 4.19), ούτε και στην πορεία σύγκλισης της συνάρτησης κόστους (σχήμα 4.20 δεξιά).

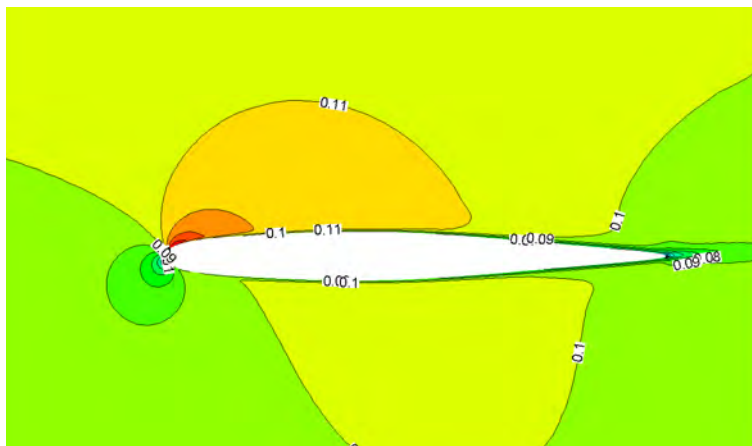
Πιθανότατα, η επίλυση της συζυγούς εξίσωσης για την εξίσωση του μοντέλου τύρβης θα βελτίωνε τις παραγώγους ευαισθησίας και άρα θα επιτάχυνε τη διαδικασία σχεδιασμού (λιγότεροι απαιτούμενοι κύκλοι βελτιστοποίησης), όμως κάτι τέτοιο ξεφεύγει από το πλαίσιο της παρούσας διατριβής (μελετάται στη διατριβή [10]).



Σχήμα 4.19: Αντίστροφος σχεδιασμός συμμετρικής αεροτομής ($\alpha_\infty = 3^\circ$, $M_\infty = 0.1$, $Re = 10^6$). Αεροτομή αναφοράς και προκύπτουσα-βέλτιστη αεροτομή χωρίς κοινή κλίμακα στους δύο άξονες (αριστερά) και οι αντίστοιχες κατανομές του συντελεστή πίεσης στα στερεά τοιχώματα (δεξιά).



Σχήμα 4.20: Αντίστροφος σχεδιασμός συμμετρικής αεροτομής ($\alpha_\infty = 3^\circ$, $M_\infty = 0.1$, $Re = 10^6$). Σύγκριση παραγώγων ευαισθησίας υπολογισμένων με τη συνεχή συζυγή τεχνική με προσταθεροποίηση και τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών (αριστερά). Εξέλιξη της τιμής της συνάρτησης-κόστους, ανηγμένης στο κόστος του πρώτου κύκλου.



Σχήμα 4.21: Αντίστροφος σχεδιασμός συμμετρικής αεροτομής ($\alpha_\infty = 3^\circ$, $M_\infty = 0.1$, $Re = 10^6$). Πεδίο και ισογραμμές αριθμού Mach της ροής στη βέλτιστη αεροτομή.

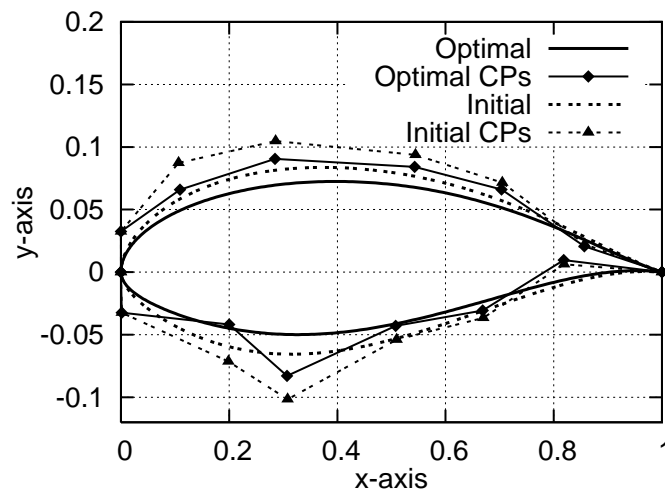
4.9.5 Ελαχιστοποίηση Συντελεστή Οπισθέλκουσας με Δεδομένο Συντελεστή Άνωσης

Οι τελευταίες εφαρμογές αφορούν σε σχεδιασμό μεμονωμένων αεροτομών με στόχο την ελαχιστοποίηση του συντελεστή οπισθέλκουσας για δεδομένο συντελεστή άνωσης.

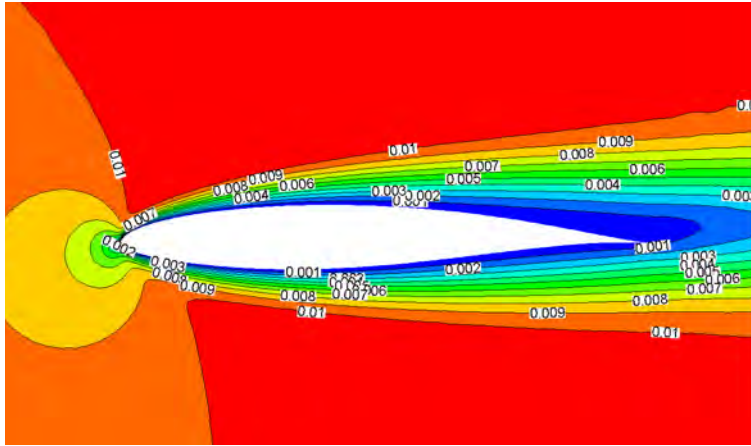
Στην πρώτη από τις δύο περιπτώσεις που ακολουθούν, ο σχεδιασμός γίνεται με τη διακριτή συζυγή τεχνική με συνθήκες επ'άπειρον ροής $M_\infty = 0.01$, $\alpha_\infty = 3^\circ$ και αριθμό Reynolds $Re = 500$. Η προς σχεδιασμό αεροτομή παραμετροποιείται με 8 σημεία ελέγχου Bézier σε κάθε πλευρά. Στη συνάρτηση κόστους (σχέση 4.17), ο επιθυμητός συντελεστής άνωσης λαμβάνει την τιμή $c_{l_{tar}} = 0.087$ ο συντελεστής β που συσχετίζει τους συντελεστές άνωσης και οπισθέλκουσας επιλέγεται ίσος με $\beta = 0.05$. Προφανώς πρόκειται για στρωτή ροή.

Η αρχική και η προκύπτουσα-βέλτιστη αεροτομή από το σχεδιασμό, τα αντίστοιχα σημεία ελέγχου καθώς και το πεδίο του αριθμού Mach για τη βέλτιστη γεωμετρία παρουσιάζονται στα σχήματα 4.22, 4.23. Η σύγκριση των παραγώγων ευαισθησίας με τη διακριτή συζυγή τεχνική και τις πεπερασμένες διαφορές (σχήμα 4.24) δείχνει εξαιρετική ταύτιση.

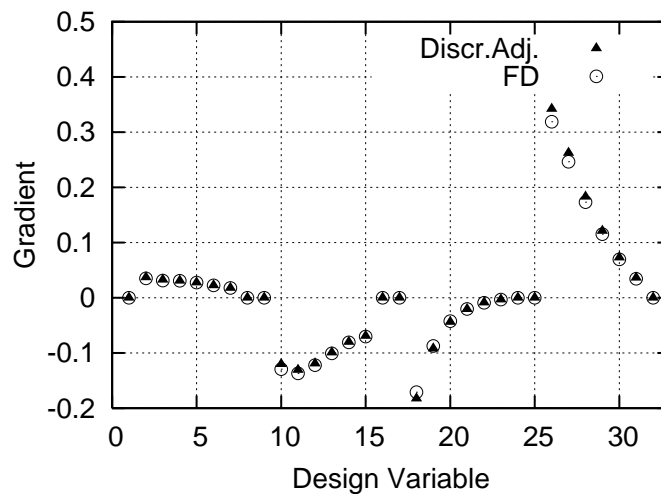
Η σύγκλιση της διαδικασίας σχεδιασμού όπου επιτυγχάνεται βελτίωση του συντελεστή οπισθέλκουσας, αλλά και της συνολικής συνάρτησης κόστους φαίνεται στο σχήμα 4.25. Σημειώνεται ότι η αρχική γεωμετρία είναι τυχαία επιλεγμένη (και αρκετά διαφορετική αυτής που προέκυψε από τη βελτιστοποίηση) και γι'αυτό το λόγο και δεν ικανοποιεί την επιθυμητή τιμή του συντελεστή άνωσης στην αρχή της βελτιστοποίησης. Στους πρώτους κύκλους, παρατηρείται απότομη πτώση της τιμής της συνάρτησης-κόστους F η οποία συνδέεται κυρίως με τη γρήγορη επίτευξη της επιθυμητής τιμής του συντελεστή άνωσης (τουλάχιστον προσεγγιστικά). Στη συνέχεια, η συνάρτηση F και ο συντελεστής άνωσης παραμένουν σχεδόν σταθερά ενώ ο συντελεστής οπισθέλκουσας εξακολουθεί να μειώνεται (σχήμα 4.25).



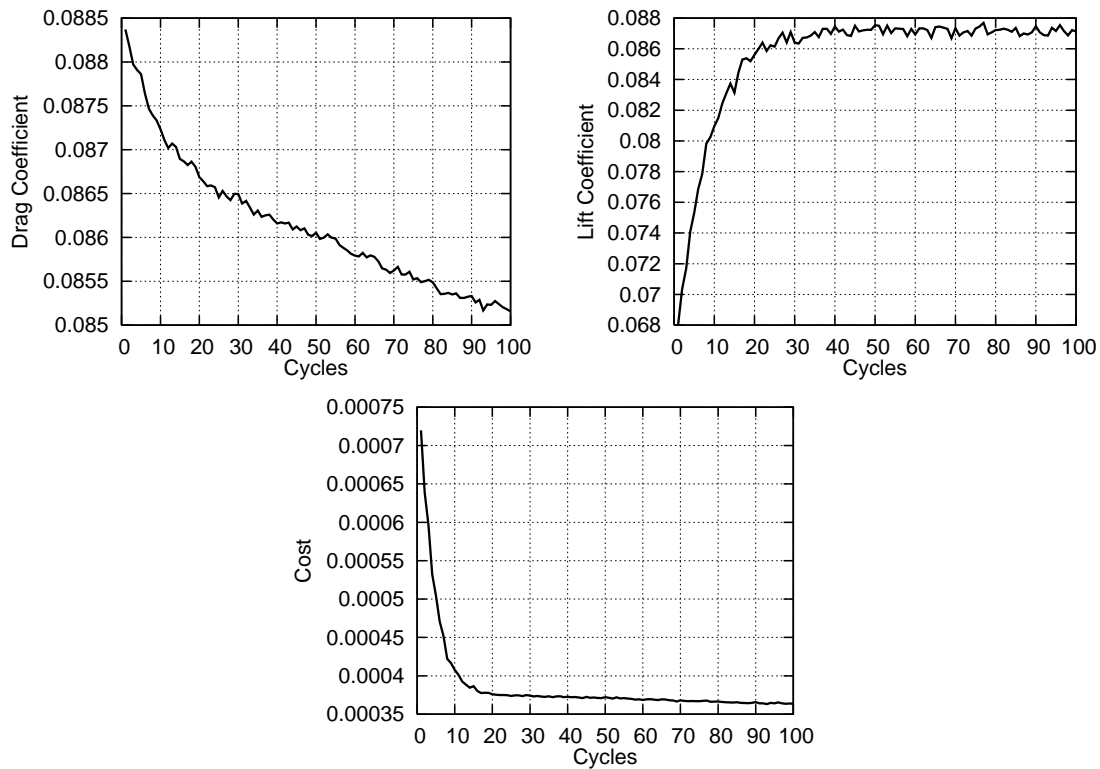
Σχήμα 4.22: Σχεδιασμός μεμονωμένης αεροτομής με τη διακριτή συζυγή τεχνική με προσταθεροποίηση ($M_\infty = 0.01$, $\alpha_\infty = 3^\circ$, $Re = 500$). Αρχική και προκύπτουσα-βέλτιστη αεροτομή χωρίς κοινή κλίμακα στους δύο άξονες και αντίστοιχα σημεία ελέγχου.



Σχήμα 4.23: Σχεδιασμός μεμονωμένης αεροτομής με τη διακριτή συζυγή τεχνική με προσταθεροποίηση ($M_\infty = 0.01$, $\alpha_\infty = 3^\circ$, $Re = 500$). Πεδίο και ισογραμμές αριθμού Mach της ροής γύρω από τη βέλτιστη αεροτομή.

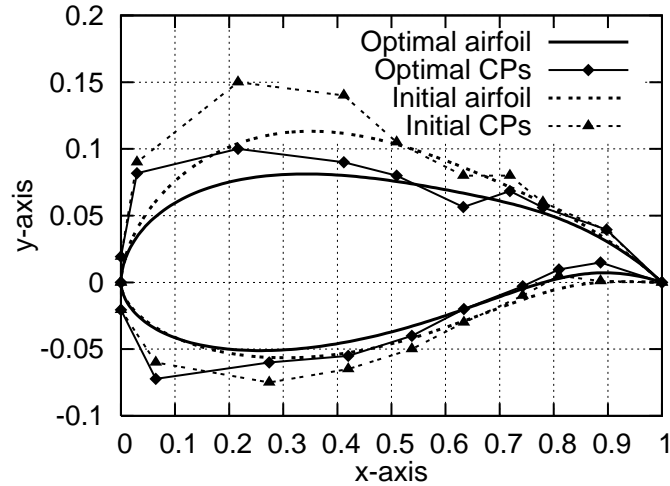


Σχήμα 4.24: Σχεδιασμός μεμονωμένης αεροτομής με τη διακριτή συζυγή τεχνική με προσταθεροποίηση ($M_\infty = 0.01$, $\alpha_\infty = 3^\circ$, $Re = 500$). Σύγκριση παραγώγων ευαισθησίας υπολογισμένων με τη διακριτή συζυγή τεχνική και τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών.

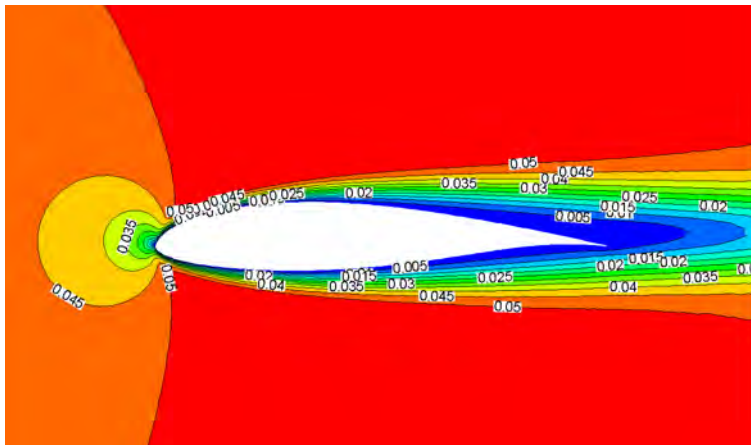


Σχήμα 4.25: Σχεδιασμός μεμονωμένης αεροτομής με τη διακριτή συζυγή τεχνική με προσταθεροποίηση ($M_\infty=0.01$, $\alpha_\infty=3^\circ$, $Re=500$). Ελαχιστοποίηση του συντελεστή οπισθέλκουσας (πάνω αριστερά), σύγκλιση του συντελεστή άνωσης στην επιθυμητή τιμή (πάνω δεξιά) και εξέλιξη της τιμής της συνάρτησης-κόστους $F=(c_l - 0.087)^2 + 0.05 c_d^2$ (κάτω).

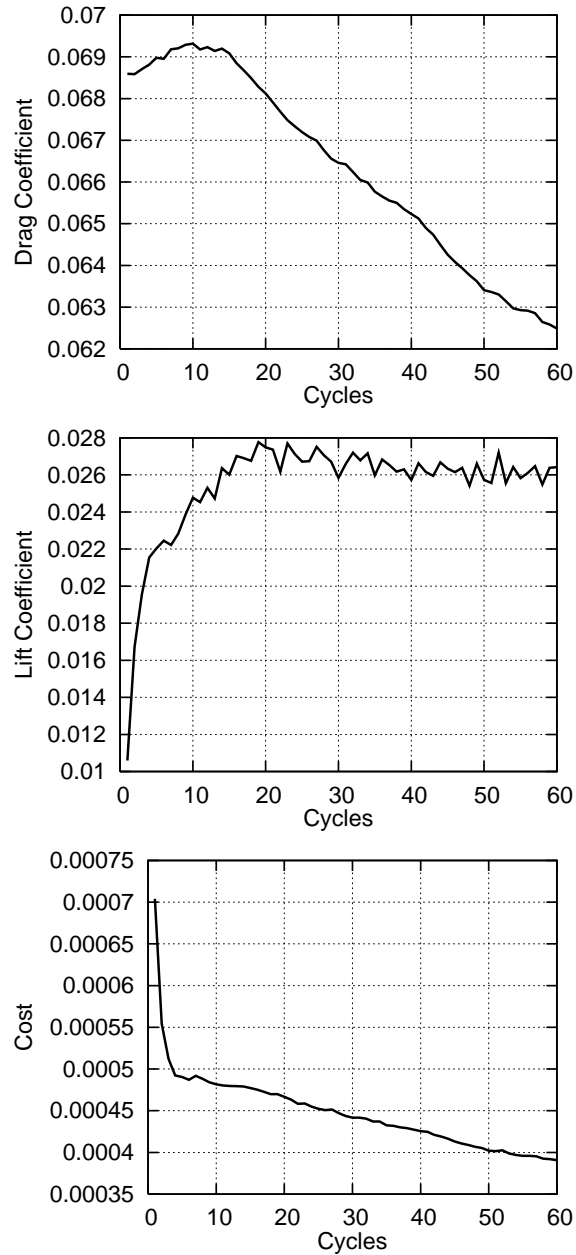
Ο δεύτερος σχεδιασμός πραγματοποιείται με τη συνεχή συζυγή τεχνική σε αεροτομή η οποία παραμετροποιείται με 10 σημεία ελέγχου ανά πλευρά. Οι συνθήκες επ'άπειρον ροής είναι $M_\infty = 0.05$, $\alpha_\infty = 1^\circ$ και $Re = 1000$, δηλαδή στρωτή ροή. Παρά τη χαμηλή ταχύτητα ροής και τη μικρή γωνία προσβολής, άρα και τις χαμηλές τιμές των συντελεστών άνωσης και οπισθέλκουσας, ο σχεδιασμός πραγματοποιείται χωρίς κανένα πρόβλημα επιτυγχάνοντας την επιθυμητή τιμή του συντελεστή άνωσης $c_{l_{tar}} = 0.0263$ (με $\beta = 1$) και βελτιστοποιώντας το συντελεστή οπισθέλκουσας κατά 0.007. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα σχήματα 4.26, 4.27 και 4.28.



Σχήμα 4.26: Σχεδιασμός μεμονωμένης αεροτομής με τη συνεχή συζυγή τεχνική με προσταθεροποίηση ($M_\infty = 0.05$, $\alpha_\infty = 1^\circ$, $Re = 1000$). Αρχική και προκύπτουσα-βέλτιστη αεροτομή χωρίς κοινή κλίμακα στους δύο άξονες και αντίστοιχα σημεία ελέγχου.



Σχήμα 4.27: Σχεδιασμός μεμονωμένης αεροτομής με τη συνεχή συζυγή τεχνική με προσταθεροποίηση ($M_\infty = 0.05$, $\alpha_\infty = 1^\circ$, $Re = 1000$). Πεδίο και ισογραμμές αριθμού Mach της ροής γύρω από τη βέλτιστη αεροτομή.



Σχήμα 4.28: Σχεδιασμός μεμονωμένης αεροτομής με τη συνεχή συζυγή τεχνική με προσταθεροποίηση ($M_\infty = 0.05$, $\alpha_\infty = 1^\circ$, $Re = 1000$). Ελαχιστοποίηση του συντελεστή οπισθέλκουσας (πάνω), σύγκλιση του συντελεστή άνωσης στην επιθυμητή τιμή (κέντρο) και εξέλιξη της τιμής της συνάρτησης-κόστους $F = (c_l - 0.0263)^2 + c_d^2$ (κάτω).

4.10 Ανακεφαλαίωση–Σχόλια–Συμπεράσματα

Στην ενότητα αυτή συνοψίζονται τα συμπεράσματα από την εισαγωγή της προσταθεροποίησης χαμηλών αριθμών Mach στις συζυγείς τεχνικές και τη χρήση των προσταθεροποιημένων συζυγών εξισώσεων για τον υπολογισμό της κλίσης της συνάρτησης κόστους, κατά το σχεδιασμό–βελτιστοποίηση αεροδυναμικών μορφών σε χαμηλές ταχύτητες.

Αρχικά, έχοντας ως δεδομένο το κέρδος από την προσταθεροποίηση των εξισώσεων ροής (Κεφάλαιο 2), η ιδέα ήταν η εισαγωγή της προσταθεροποίησης και στις συζυγείς εξισώσεις. Έτσι θα επιταχύνονταν η αριθμητική επίλυση και των συζυγών εξισώσεων και γενικά θα ήταν δυνατός ο σχεδιασμός σε χαμηλούς αριθμούς Mach.

Σε πρώτη φάση διατυπώθηκαν οι προσταθεροποιημένες διακριτές συζυγείς εξισώσεις, οι οποίες προέκυψαν άμεσα από τη διακριτοποιημένη μορφή των προσταθεροποιημένων εξισώσεων ροής. Για τη συνεχή συζυγή τεχνική, απαιτήθηκε διερεύνηση ως προς τον αν έπρεπε να προσταθεροποιηθούν οι συζυγείς εξισώσεις ή αν η συζυγής διατύπωση θα εφαρμόζονταν στις προσταθεροποιημένες εξισώσεις ροής. Αποδείχθηκε ότι οι δυο αυτές εκδοχές μπορούν να ταυτιστούν και αναλύθηκαν οι παραδοχές που εισάγονται κατά τη διατύπωση και διακριτοποίηση των συζυγών εξισώσεων με προσταθεροποίηση.

Δεδομένου ότι η χρήση της προσταθεροποίησης στις συζυγείς τεχνικές παρουσιάζεται για πρώτη φορά βιβλιογραφία, η προτεινόμενη μεθοδολογία πιστοποιήθηκε σε ένα πλήθος εφαρμογών σχεδιασμού–βελτιστοποίησης, με στόχο τον έλεγχο της απόδοσης και της ακρίβειας της μεθόδου.

Τόσο στη συνεχή όσο και στη διακριτή συζυγή τεχνική, η προσταθεροποίηση επιταχύνει την αριθμητική επίλυση των συζυγών εξισώσεων. Σε συνδυασμό με την επιτάχυνση και των εξισώσεων ροής, το κέρδος σε ένα κύκλο βελτιστοποίησης είναι διττό. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την επιτάχυνση και της συνολικής διαδικασίας σχεδιασμού. Αν σε αυτό προστεθεί και το κέρδος από τη χρήση της πολυεπεξεργασίας, τότε ο απαιτούμενος χρόνος σχεδιασμού μειώνεται ακόμα περισσότερο (λ.χ. περίπου μια ώρα για ατρίβεις 2Δ ροές, με επίλυση ευθέως και συζυγούς προβλήματος σε 16 επεξεργαστές).

Εκτός από την επιτάχυνση της επίλυσης, η προσταθεροποίηση καθιστά δυνατή την επίλυση σε πολύ χαμηλές ταχύτητες ροής, εκεί που οι μη–προσταθεροποιημένες εξισώσεις (ροής ή συζυγείς) θα αποτύγχαναν ή θα οδηγούσαν σε μη–αποδεκτά αποτελέσματα.

Όσον αφορά στην ακρίβεια υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας, στην περίπτωση της διακριτής συζυγούς τεχνικής η ταύτισή τους με τις πεπερασμένες διαφορές είναι εξαιρετική. Για τη συνεχή συζυγή τεχνική παρατηρούνται μικρές αποκλίσεις στις τιμές των παραγώγων σε σύγκριση με τις πεπερασμένες διαφορές κυρίως στα ιδιόμορφα σημεία της ροής (ακμές πρόσπτωσης και εκφυγής). Αυτές οι αποκλίσεις οφείλονται στις παραδοχές κατά τη διατύπωση των συνεχών συζυγών εξισώσεων (εξαγωγή μητρώου Γ^T από τη μερική παράγωγο, σχέση 4.55) και τη διακριτοποίησή τους. Παρόλα αυτά, κρίνοντας από το αποτέλεσμα, αποδεικνύεται ότι αυτές οι παραδοχές και αποκλίσεις στις τιμές των παραγώγων δεν έχουν επίπτωση στη σύγκλιση του συνολικού αλγορίθμου σχεδιασμού–βελτιστοποίησης.

Κεφάλαιο 5

Σύγχρονοι και Ασύγχρονοι Εξελικτικοί Αλγόριθμοι

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφονται οι στοχαστικές μέθοδοι βελτιστοποίησης που αναπτύχθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν στο πλαίσιο της διατριβής. Ειδικότερα, η ανάλυση ξεκινά με μια σύντομη βιβλιογραφική επισκόπηση των Εξελικτικών Αλγορίθμων (ΕΑ) (είδη, τεχνικές, παραλληλοποίηση) και αμέσως μετά παρουσιάζονται τα βασικά χαρακτηριστικά του Γενικευμένου Εξελικτικού Αλγορίθμου (ΓΕΑ–λογισμικό EASY, [264, 8, 12, 11]) που έχει αναπτυχθεί στο ΕΘΣ/ΕΜΠ.

Στη συνέχεια, το ενδιαφέρον εντοπίζεται στις λεγόμενες ασύγχρονες παραλλαγές των ΕΑ, με ιδιαίτερα πλεονεκτήματα σε σχέση με τη χρήση πολυεπεξεργαστικών συστημάτων και περιγράφονται οι νέες μέθοδοι που προτάθηκαν και αναπτύχθηκαν στην παρούσα διατριβή. Πρόκειται για το δομημένο εξελικτικό αλγόριθμο (ΔΕΑ) και τον ασύγχρονο δομημένο εξελικτικό αλγόριθμο (ΑΔΕΑ).

Στην τελευταία ενότητα του κεφαλαίου παρουσιάζονται η πιστοποίηση και οι εφαρμογές όλων των παραπάνω μεθόδων. Η πιστοποίηση των μεθόδων γίνεται σε μαθηματικά προβλήματα βελτιστοποίησης τα οποία, λόγω μικρού υπολογιστικού κόστους, μπορούν να επαναληφθούν πολλές φορές ώστε να υπάρξει σαφής εικόνα για τη συμπεριφορά και τις επιδόσεις των αλγορίθμων. Οι νέες μέθοδοι συγκρίνονται με το ΓΕΑ ή άλλες μεθόδους της βιβλιογραφίας. Στη συνέχεια, οι μέθοδοι εφαρμόζονται στο σχεδιασμό αεροδυναμικών μορφών, αεροτομών και πτερυγώσεων στροβιλομηχανών, αλλά και τον προκαταρκτικό σχεδιασμό μικρού υπερηχητικού αεροσκάφους.

5.1 Εισαγωγή στους Εξελικτικούς Αλγόριθμους

5.1.1 Βιβλιογραφική Επισκόπηση

Γενικά

Η ιστορία των εξελικτικών αλγορίθμων ξεκινά από τη δημοσίευση του βιβλίου περί εξέλιξης των ειδών του Darwin, [64]. Σε αυτό γίνεται αναφορά στις αρχές της φυσικής επιλογής (natural selection), μια διαδικασία με την οποία οι οργανισμοί που προσαρμόζονται ευκολό-

τερα στο περιβάλλον έχουν περισσότερες πιθανότητες να επιβιώσουν και να αναπαραχθούν, ενώ σχολιάζονται οι διεργασίες της διασταύρωσης και της μετάλλαξης.

Η πρώτη αναφορά στους γενετικούς αλγορίθμους (genetic algorithms ΓΑ) εμφανίζεται το 1975 από τον Holland, στο βιβλίο [117] όπου παρουσιάζεται ένας τρόπος εφαρμογής της εξελικτικής διαδικασίας για την επίλυση προβλημάτων αναζήτησης της βέλτιστης λύσης. Είχαν προηγηθεί οι παρουσιάσεις του εξελικτικού προγραμματισμού (evolutionary programming) [86] και των στρατηγικών εξέλιξης (evolution strategies) [212]. Αργότερα προτάθηκε και ο γενετικός προγραμματισμός (genetic programming), [61, 146, 147]. Οι παραπάνω μέθοδοι ανήκουν στην ευρύτερη κατηγορία των ΕΑ. Ενιαία αντιμετώπιση όλων αυτών των μεθόδων, που παρουσιάζουν αρκετά κοινά χαρακτηριστικά, γίνεται στα βιβλία [32, 33].

Ένας ΕΑ διαχειρίζεται ένα πληθυσμό ατόμων, όπου κάθε άτομο αντιπροσωπεύει μια υποψήφια λύση ενός δεδομένου προβλήματος. Σε κάθε άτομο αποδίδεται μια τιμή καταλληλότητας (ή τιμή της συνάρτησης κόστους). Το σύνολο των ατόμων απαρτίζει τη λεγόμενη γενιά του ΕΑ, η οποία ανανεώνεται με εφαρμογή εξελικτικών διεργασιών. Αυτές περιλαμβάνουν την επιλογή (selection), τη διασταύρωση (crossover) και τη μετάλλαξη (mutation). Η ανανέωση του πληθυσμού και επαναξιολόγηση των ατόμων που τον απαρτίζουν, οδηγεί στην εύρεση καλύτερης λύσης, με τη πάροδο των γενιών. Σημαντικές αναφορές στον τομέα των ΓΑ και των ΕΑ γενικότερα αποτελούν τα βιβλία των Goldberg, [102] και Michalewicz, [174].

Με βάση και τα όσα περιγράφησαν παραπάνω, το βασικό πλεονέκτημα ενός ΕΑ είναι η δυνατότητα εξερεύνησης και ανίχνευσης όλου του χώρου των μεταβλητών σχεδιασμού που θα οδηγήσει στην εύρεση του ολικού ακροτάτου. Αυτό, ταυτόχρονα αποτελεί και το βασικό μειονέκτημα των ΕΑ, καθώς για την εύρεση της βέλτιστης λύσης απαιτείται αρκετά μεγάλος αριθμός αξιολογήσεων. Έτσι, αν αναλογιστεί κανείς ότι στα προβλήματα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης ως λογισμικό αξιολόγησης συνήθως χρησιμοποιείται η 'ακριβή' αλλά και χρονοβόρα επίλυση των εξισώσεων ροής, η χρήση των ΕΑ καθίσταται σχεδόν απαγορευτική ως 'καθημερινό' εργαλείο σχεδιασμού στη βιομηχανία.

Οι τρόποι αντιμετώπισης αυτού του προβλήματος που παρουσιάζονται στη βιβλιογραφία σχετίζονται με:

1. τη χρήση προσεγγιστικών μοντέλων αξιολόγησης (μεταπροτύπων),
2. τη χρήση παράλληλων ΕΑ,
3. τη χρήση ιεραρχικών ΕΑ,
4. τον υβριδισμό ΕΑ με αιτιοκρατικές μεθόδους βελτιστοποίησης,
5. συνδυασμό μερικών ή όλων από τις τέσσερις προαναφερθείσες τεχνικές.

Ένας βασικός τρόπος διαχωρισμού των ΕΑ, ο οποίος θα αναλυθεί στη συνέχεια είναι οι σύγχρονοι και ασύγχρονοι ΕΑ. Στους σύγχρονους ΕΑ, που αποτελούν και τη συντριπτική πλειοψηφία των μεθόδων της βιβλιογραφίας, οι εξελικτικές διεργασίες εφαρμόζονται σε ολόκληρο τον πληθυσμό μιας γενιάς, μόλις αυτή ολοκληρωθεί. Αντίθετα, στους ασύγχρονους ΕΑ δεν υφίσταται η έννοια της γενιάς και κάθε άτομο ανανεώνεται 'ανεξάρτητα' από τα υπόλοιπα. Η εξάλειψη της έννοιας της γενιάς κατά την εξέλιξη, αναιρεί την ανάγκη συγχρονισμού

με το πέρας κάθε γενιάς, ο οποίος πρακτικά μπορεί να επιβαρύνει την παράλληλη απόδοση καθιστώντας ανενεργούς κάποιους επεξεργαστές, ενδεχομένως για αρκετό διάστημα. Δεδομένου ότι, συχνά, οι ασύγχρονοι ΕΑ αναφέρονται στη βιβλιογραφία και ως παράλληλοι ΕΑ, η σχετική επισκόπηση θα είναι κοινή, υπό τον τίτλο ‘Παράλληλοι ΕΑ (ΠΕΑ)’.

ΕΑ και Προσεγγιστικά Μοντέλα Αξιολόγησης

Ως προσεγγιστικά μοντέλα αξιολόγησης ή μεταπρότυπα (metamodels) ορίζονται μοντέλα χαμηλού (υπολογιστικού) κόστους τα οποία υπολογίζουν με προσεγγιστικό τρόπο την τιμή της συνάρτησης κόστους, χρησιμοποιώντας μεθόδους παρεμβολής ή προεκβολής αντί του λογισμικού ή της διαδικασίας που να επιλύει το φυσικό πρόβλημα.

Τα μεταπρότυπα χρησιμοποιούνται σε συνδυασμό με τους ΕΑ σε διάφορες περιπτώσεις: (α) υψηλό κόστος υπολογισμού συνάρτησης κόστους, (β) απουσία ακριβούς συνάρτησης κόστους, (γ) ύπαρξη ‘θορύβου’ ή αβεβαιότητας στον ΕΑ και (δ) προβλήματα πολλών τοπικών ακροτάτων. Από αυτές τις περιπτώσεις, οι οποίες αναλύονται διεξοδικά στην εργασία [127], το ενδιαφέρον στα προβλήματα αεροδυναμικής έγκειται κυρίως στην πρώτη περίπτωση. Έτσι, τα μεταπρότυπα χρησιμοποιούνται για την αντικατάσταση των ακριβών αξιολογήσεων με μεθόδους ΥΡΔ.

Ένας πρώτος διαχωρισμός των ΕΑ που υποστηρίζονται από μεταπρότυπα, ανάλογα με τον τρόπο κατασκευής και χρήσης των τελευταίων σε σχέση με τον ΕΑ, είναι σε αυτούς που χρησιμοποιούν αποσυνδεδεμένα (off-line) και συνδεδεμένα (on-line) με την εξέλιξη μεταπρότυπα. Στην πρώτη εκδοχή, το μεταπρότυπο εκπαιδεύεται ανεξάρτητα από την εξέλιξη, [201, 44] συνήθως αφορά όλο τον πληθυσμό και ανανεώνεται με επαναξιολόγηση της προτεινόμενης από το μεταπρότυπο λύσης με το ακριβές πρότυπο (λ.χ. του λογισμικού ΥΡΔ). Η ανανέωση του γίνεται κατόπιν ελέγχου των επιδόσεών του, δηλαδή με βάση την απόκλιση των προσεγγίσεων από τις τιμές της ακριβούς συνάρτησης κόστους. Στη δεύτερη εκδοχή, τα συνδεδεμένα με την εξέλιξη μεταπρότυπα (on-line), εκπαιδεύονται κατά τη διάρκεια της εξέλιξης, [198, 91, 189]. Η εφαρμογή τους στον ΕΑ μπορεί να γίνει με εναλλαγή (σταθερής ή μεταβλητής συχνότητας) γενιών χρήσης του προσεγγιστικού και του ακριβούς προτύπου, [126]. Επιπλέον, έχει προταθεί η επιλογή ενός ή περισσότερων ατόμων τα οποία εκτός από την προσέγγιση του μεταπρότυπου αξιολογούνται και με το ακριβές πρότυπο, [90, 92]. Αυτή η τεχνική έχει αναπτυχθεί στο ΕΘΣ/ΕΜΠ και αναφέρεται ως προσεγγιστική προαξιολόγηση (ΠΠΑ, inexact pre-evaluation, IPE), [92]. Η επιλογή αυτών των ατόμων μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους, αν και αποδεικνύεται ότι επιτυγχάνεται καλύτερη απόδοση με επαναξιολόγηση των καλύτερων με βάση το μεταπρότυπο ατόμων. Η απόδοση αυξάνει ακόμα περισσότερο όταν το μεταπρότυπο εκπαιδεύεται τοπικά για κάθε μέλος του πληθυσμού λαμβάνοντας υπόψη τα χαρακτηριστικά των γειτονικών προς αυτό μελών, [92, 134, 135, 189].

Τα πιο συχνά συναντούμενα στη βιβλιογραφία μεταπρότυπα είναι οι μέθοδοι επιφανειών απόκρισης, τα στατιστικά μοντέλα (διεργασίες Gauss) και τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα. Ενδεικτικές εφαρμογές με χρήση ή και σύγκριση μεταπρότυπων παρουσιάζονται στις εργασίες, [198, 92, 79, 210, 189, 214]. Περαιτέρω ανάλυση για τη χρήση και τα είδη των μεταπρότυπων παρουσιάζεται στις διατριβές [8, 12, 11].

Παράλληλοι ΕΑ (ΠΕΑ)

Η βασική ιδέα για τους παράλληλους ΕΑ είναι ο διαχωρισμός των διεργασιών που επιτελεί ο ΕΑ σε επιμέρους διεργασίες και η παράλληλη υλοποίησή τους σε πολλούς επεξεργαστές. Αυτή η ‘διαίρει και βασίλευε’ (divide-and-conquer, [47]) προσέγγιση μπορεί να εφαρμοστεί με πολλούς τρόπους στους ΕΑ. Στη βιβλιογραφία παρουσιάζονται αρκετές εργασίες στις οποίες επιχειρείται ταξινόμηση των ΠΕΑ, με πλέον σημαντικές τις [47, 188, 22].

Ένας βασικός τρόπος διαχωρισμού των ΠΕΑ σχετίζεται με τον τύπο του πληθυσμού, όπου διακρίνονται οι ΠΕΑ ενιαίου πληθυσμού (single-population) και οι ΠΕΑ πολλών πληθυσμών (multi-population).

Η παραλληλοποίηση των ΕΑ ενιαίου πληθυσμού γίνεται με το μοντέλο συντονιστή-εργάτη (master-slave). Σε αυτή την περίπτωση, η παραλληλία εφαρμόζεται σε επίπεδο αξιολογήσεων, δηλαδή οι προς αξιολόγηση υποψήφιοι λύσεις αποστέλλονται στους διαθέσιμους επεξεργαστές, ενώ οι εξελικτικές διεργασίες (επιλογή, διασταύρωση, μετάλλαξη) λαμβάνουν χώρα στον ενιαίο πληθυσμό.

Σχετικά με τους ΠΕΑ πολλών πληθυσμών, αυτοί διαχωρίζονται εκ νέου σε κατηγορίες, ανάλογα με τον τρόπο διαχωρισμού του πληθυσμού και το πλήθος των μελών κάθε υπο-πληθυσμού. Διακρίνονται οι κατηγορίες των ΠΕΑ με ένα άτομο (λεπτόκοκκο ή λεπτομερές, fine-grained) ή αρκετά άτομα (χοντρόκοκκο ή αδρομερές, coarse-grained) ανά υπο-πληθυσμό. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι λεγόμενοι ΕΑ κυτταρικής δομής (cellular EA) και στη δεύτερη οι κατανεμημένοι ΕΑ (distributed EA).

Στους αλγορίθμους κυτταρικής δομής, μια συνήθης διάταξη του πληθυσμού είναι αυτή ενός ορθογωνικού πλέγματος. Οι εξελικτικές διεργασίες περιορίζονται σε μια μικρή γειτονιά του πλέγματος, ενώ η αλληλοκάλυψη τους εξασφαλίζει την επικοινωνία μεταξύ των μελών του πληθυσμού. Η ιδανική περίπτωση παραλληλίας ενός τέτοιου αλγορίθμου είναι η ύπαρξη ενός επεξεργαστή για κάθε μέλος του πληθυσμού.

Στους κατανεμημένους ΕΑ κάθε υπο-πληθυσμός αξιολογείται και εξελίσσεται σε διαφορετικό επεξεργαστή. Οι υπο-πληθυσμοί ή δήμοι επικοινωνούν και ανταλλάσσουν άτομα περιοδικά (migration). Σε αυτήν την περίπτωση, απαιτείται ο ορισμός επιπλέον παραμέτρων σχετικά με τη συχνότητα της ανταλλαγής και την επιλογή των ατόμων προς ανταλλαγή. Η επιτάχυνση της επίλυσης είναι δεδομένη, αφού το μέγεθος των δήμων είναι μικρότερο από αυτό του συνολικού πληθυσμού. Το σημαντικό όμως και αυτό που καθορίζεται από τις προαναφερθείσες παραμέτρους είναι η απόδοση του αλγορίθμου σε σχέση με τον κλασικό ΕΑ.

Με βάση τα παραπάνω, η παραλληλοποίηση ενός ΕΑ (με οποιοδήποτε από τους προαναφερθέντες τρόπους) αποβλέπει στην καλύτερη απόδοση του αλγορίθμου τόσο από πλευράς τελικής-βέλτιστης λύσης όσο και από πλευράς χρόνου υπολογισμού. Παρόλα αυτά κατά την παραλληλοποίηση ενός σύγχρονου ΕΑ (έστω, για λόγους ευκολότερης κατανόησης, με την τεχνική συντονιστή-εργάτη) το κέρδος στο χρόνο υπολογισμού δεν είναι συνήθως το μέγιστο δυνατό. Αυτό οφείλεται στο λεγόμενο πρόβλημα συγχρονισμού (synchronization). Ο συντονιστής περιμένει την ολοκλήρωση των αξιολογήσεων όλων των μελών του πληθυσμού μιας γενιάς ώστε, μέσω των εξελικτικών διεργασιών, να προχωρήσει στην επόμενη γενιά. Αν

λοιπόν για οποιοδήποτε λόγο η αξιολόγηση ενός μέλους καθυστερήσει (λ.χ. αποκολλημένη ροή γύρω από αεροτομή που απαιτεί περισσότερο χρόνο για σύγκλιση των εξισώσεων ροής), τότε μπορεί να καθυστερήσει ολόκληρος ο αλγόριθμος. Το πρόβλημα επιλύεται θεωρητικά, αν ο αριθμός των χρησιμοποιούμενων επεξεργαστών είναι ίσος ή ακέραιο πολλαπλάσιο των μελών του πληθυσμού. Κάτι τέτοιο αφενός δεν εγγυάται την πλήρη αξιοποίηση των διαθέσιμων επεξεργαστών και αφετέρου το πρόβλημα γίνεται μεγαλύτερο αν υποθεθεί η χρήση προσεγγιστικής προαξιολόγησης κατά τη διάρκεια μιας γενιάς όπου αξιολογούνται μόνο λίγα άτομα του πληθυσμού (άρα οι υπόλοιποι διαθέσιμοι επεξεργαστές παραμένουν ανενεργοί). Ουσιαστική επίλυση του προβλήματος συγχρονισμού επιτυγχάνεται αν αναιρεθεί ο συγχρονισμός, δηλαδή με την υιοθέτηση ενός ασύγχρονου ΕΑ, [22, 31]. Η απουσία γενιών και η αποσύνδεση της εξέλιξης από αυτές εξαλείφει τα προβλήματα συγχρονισμού και οδηγεί σε πολύ καλύτερη αξιοποίηση της διαθέσιμης υπολογιστικής ισχύος, άρα και μέγιστη παράλληλη απόδοση του αλγορίθμου.

Τα παραπάνω ισχύουν για την παράλληλη επεξεργασία τόσο σε διασυνδεδεμένους (cluster computing) όσο και σε γεωγραφικά απομακρυσμένους επεξεργαστές (grid computing), [159, 158].

Αρκετές φορές στη βιβλιογραφία ο όρος ΠΕΑ χρησιμοποιείται για να δηλώσει και έναν ασύγχρονο ΕΑ (ΑΕΑ). Για παράδειγμα σε μια από τις πρώτες εργασίες σχετικά με τους ΑΕΑ, ο Mühlenbein, [179], ο οποίος χρησιμοποιεί τον όρο 'παράλληλος γενετικός αλγόριθμος' αντί του ΑΕΑ διαφοροποιεί τον αλγόριθμό του από έναν τυπικό ΓΑ. Τα άτομα του πληθυσμού διανέμονται στο 2Δ χώρο και οι διαδικασίες διασταύρωσης επιμερίζονται σε γειτονιές αυτού. Επιπλέον, κάθε άτομο του πληθυσμού μπορεί να βελτιώσει την καταλληλότητα του μέσω τοπικής μεθόδου αναρρίχησης λόφου (hill climbing) καθόλη τη διάρκεια της ζωής του. Την ίδια περίπου περίοδο με τον [179] εμφανίζεται και ο ασύγχρονος αλγόριθμος ASPARAGOS, [103], όπου η τοπολογική διάταξη του πληθυσμού προσομοιάζει με σκάλα με ενωμένα άκρα στο πάνω και κάτω μέρος της, ενώ και εδώ τα άτομα του πληθυσμού βελτιώνουν την καταλληλότητα τους μέσω της μεθόδου αναρρίχησης λόφου.

Οι Manderick, Spiessens, [164], χρησιμοποίησαν έναν λεπτόκοκκο ΠΕΑ με τα άτομα του πληθυσμού να διατάσσονται σε 2Δ πλέγμα, όπου και εδώ οι διεργασίες επιλογής και διασταύρωσης λαμβάνουν χώρα σε γειτονιές του πλέγματος. Παρατήρησαν ότι η απόδοση του αλγορίθμου χειροτερεύει με την αύξηση του μεγέθους της γειτονιάς (μελών που την απαρτίζουν). Οι Hart, [109], και Alba, [21], εφάρμοσαν την 'ίδια' ιδέα σε χοντρόκοκκους ΠΕΑ με τους υποπληθυσμούς να διανέμονται σε 2Δ πλέγμα. Σε αυτές τις εργασίες οι ασύγχρονοι αλγόριθμοι παρουσιάζουν πολύ καλύτερη απόδοση από την, αντίστοιχη, σύγχρονη εκδοχή τους. Άλλοι προτεινόμενοι ΑΕΑ και μελέτες σχετικά τη σημασία του χώρου-γειτονιάς από την οποία γίνεται η επιλογή των μελών του πληθυσμού για τη διασταύρωση σε κυτταρικής δομής ΕΑ εμφανίζονται στις εργασίες [160, 37, 89].

Ο ΑΕΑ που παρουσιάζεται στην παρούσα διατριβή, [31], και θα αναλυθεί εκτενώς στη συνέχεια, αποτελεί έναν τελείως διαφορετικό αλγόριθμο από όσους έχουν παρουσιαστεί μέχρι στιγμής. Μπορεί η διάταξη του πληθυσμού να γίνεται σε 2Δ πλέγμα βάσης προσομοιάζοντας σε ΕΑ κυτταρικής δομής (όπως αρκετοί ΑΕΑ στη βιβλιογραφία), όμως ο τρόπος διαχωρισμού σε δήμους, η μορφολογία τους και ο τρόπος των εξελικτικών τελεστών είναι πολύ διαφορετικοί.

Σε κάθε περίπτωση, οι προτεινόμενοι ΑΕΑ στοχεύουν στη μέγιστη δυνατή παράλληλη απόδοση σε πολυεπεξεργαστικά συστήματα (συνήθως της λογικής Multiple Instruction stream, Multiple Data stream- MIMD).

Ιεραρχικοί ΕΑ

Ένας άλλος τρόπος για την αύξηση της απόδοσης ενός ΕΑ είναι μέσω της χρήσης ιεραρχικών μεθόδων αναζήτησης (Ιεραρχικοί ΕΑ, ΙΕΑ), [113, 136, 132, 131]. Στους ΙΕΑ, η χρήση μοντέλων χαμηλής και υψηλής ακρίβειας γίνεται σε διαφορετικά επίπεδα (συνήθως δύο) αναζήτησης. Για παράδειγμα, σε έναν ΙΕΑ, στο χαμηλό επίπεδο χρησιμοποιείται το λογισμικό αξιολόγησης χαμηλής ακρίβειας και κόστους με στόχο την εξερεύνηση του χώρου σχεδιασμού, ενώ στο υψηλό επίπεδο γίνεται εκμετάλλευση αυτής της πληροφορίας με χρήση του ακριβούς και ακριβού λογισμικού. Αυτό προφανώς προϋποθέτει την επικοινωνία μεταξύ των δύο επιπέδων για ανταλλαγή πληροφοριών.

Εναλλακτικά, σε κάθε επίπεδο ενός ΙΕΑ μπορεί να χρησιμοποιηθεί διαφορετικός αριθμός μεταβλητών σχεδιασμού. Για παράδειγμα, είναι δυνατή η παραμετροποίηση μιας αεροτομής με διαφορετικό αριθμό σημείων ελέγχου, δηλαδή πολλά σημεία στο ανώτατο επίπεδο και λιγότερα στο κατώτατο.

Ένας τρίτος τρόπος ιεραρχικής αξιολόγησης είναι η χρήση διαφορετικής μεθόδου σε κάθε επίπεδο. Έτσι, στο ένα επίπεδο χρησιμοποιούνται ΕΑ και στο άλλο μια άλλη πληθυσμιακή ή μια αιτιοκρατική μέθοδος βελτιστοποίησης.

Υβριδισμός—Συνδυασμοί

Ο υβριδισμός ΕΑ και αιτιοκρατικών μεθόδων βελτιστοποίησης στοχεύει στην ταυτόχρονη εκμετάλλευση των πλεονεκτημάτων των δύο μεθόδων. Ένας συνήθης τρόπος υβριδισμού είναι η εναλλαγή χρήσης ΕΑ και συζυγών τεχνικών [207, 132]. Αυτό όπως προαναφέρθηκε αποτελεί μια πιθανή παραλλαγή ενός ιεραρχικού ΕΑ. Σε αυτή την περίπτωση ο ΕΑ είναι υπεύθυνος για την ανίχνευση του χώρου σχεδιασμού και την ‘υπόδειξη’ της περιοχής του ακροτάτου στο οποίο μπορεί πλέον να συγκλίνει, πολύ γρήγορα, μια αιτιοκρατική μέθοδος.

Βέβαια, τα τελευταία χρόνια, οι παρουσιαζόμενοι ΕΑ τείνουν να συνδυάζουν δύο ή περισσότερα από τα παραπάνω χαρακτηριστικά. Ειδικά στον τομέα της αεροδυναμικής βελτιστοποίησης, η επιθυμία σχεδιασμού σε λογικό υπολογιστικό χρόνο καθιστά αναγκαία τη χρήση παράλληλων ΕΑ. Αυτοί, κατά περίπτωση, συνδυάζονται με μεταπρότυπα, ιεραρχικούς ΕΑ, υβριδικά σχήματα ή και όλα μαζί.

5.1.2 Ορισμός Προβλήματος Βελτιστοποίησης

Έστω ότι επιθυμείται η ελαχιστοποίηση M συναρτήσεων της μορφής,

$$\min \vec{f}(\vec{x}) = \min \{f_1(\vec{x}), \dots, f_M(\vec{x})\} \quad (5.1)$$

υπό τους M_c περιορισμούς ανισό-ισότητας

$$c_j(\vec{x}) \leq c_j^{thres}, \quad j = 1, \dots, M_c \quad (5.2)$$

όπου \vec{x} είναι το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού που ανήκει στο R^N και ορίζεται από τα ανώτερα, b_{upp}^i και κατώτερα, b_{low}^i , όρια καθειμιάς μεταβλητής σχεδιασμού. c_j είναι οι M_c συναρτήσεις περιορισμών.

5.1.3 Διαχείριση Περιορισμών

Οι περιορισμοί 5.2 λαμβάνονται υπόψη, αποδίδοντας ένα βαθμό ποινής σε όλες τις συνιστώσες f_m της διανυσματικής συνάρτησης κόστους σε όσες υποψήφια λύσεις \vec{x} παραβιάζουν τουλάχιστον έναν από τους τεθέντες περιορισμούς, [102, 175]. Για την υποψήφια λύση \vec{x} και καθέναν από τους M_c περιορισμούς ανισοϊσότητας ($j \in [1, M_c]$), σχέση 5.2, είτε αυτός ικανοποιείται είτε όχι, αντιστοιχίζεται ένας όρος ποινής P_j . Επειδή οι όροι ποινής δρουν πολλαπλασιαστικά, στην περίπτωση που ο περιορισμός j ικανοποιείται, η τιμή του P_j λαμβάνει την τιμή μονάδα (ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού). Στην περίπτωση μη-ικανοποιούμενου περιορισμού επιλέγεται ως συνάρτηση ποινής μια εκθετικής μορφής συνάρτηση. Έτσι, για $j \in [1, M_c]$, οι όροι ποινής ορίζονται ως

$$P_j = \begin{cases} 1 & \text{αν } c_j(\vec{x}) \leq c_j^{thres} \\ \exp\left(\alpha_j \frac{c_j - c_j^{thres}}{c_j^{dead} - c_j^{thres}}\right) & \text{αν } c_j^{thres} < c_j(\vec{x}) < c_j^{dead} \\ \infty & \text{αν } c_j(\vec{x}) \geq c_j^{dead} \end{cases} \quad (5.3)$$

όπου πέραν του πραγματικού ορίου των αποδεκτών λύσεων c_j^{thres} που ορίστηκε στην 5.2, εισάγεται από το χρήστη και ένα δεύτερο όριο ανά περιορισμό, το c_j^{dead} , με $c_j^{dead} > c_j^{thres}$. Η χρήση των δύο αυτών ορίων ανά περιορισμό χαλαρώνει την επιβολή του περιορισμού επιτρέποντας τον εντοπισμό βέλτιστων λύσεων με ενεργούς περιορισμούς ανισοϊσότητας μέσω προσέγγισής τους από τη μη-αποδεκτή περιοχή του χώρου των λύσεων. Ο χρήστης καθορίζει επιπλέον το ρυθμό απόσβεσης της εκθετικής ποινής, μέσω επιλογής της τιμής της παραμέτρου α_j . Η τιμή της ποινής P_j πολλαπλασιάζει όλες τις τιμές των $f(\vec{x})$ ή $f_m(\vec{x})$ οι οποίες, στη συνέχεια, θα θεωρείται ότι είναι οι ήδη πολλαπλασιασμένες με τη συνάρτηση ποινής δηλαδή

$$f_m(\vec{x}) = f_m(\vec{x}) \prod_{j=1}^{M_c} P_j, \quad m = 1, M \quad (5.4)$$

Στην περίπτωση που κάποιος περιορισμός τίθεται στην μορφή $c_j > c_j^{thres}$ (δηλ. έχει αντίθετη κατεύθυνση από αυτή της σχέσης 5.2) τότε με κατάλληλες μαθηματικές πράξεις τίθεται στη μορφή της σχέσης 5.2 ως $-c_j < -c_j^{thres}$ και ο περαιτέρω χειρισμός του είναι όμοιος με αυτόν που περιγράφηκε παραπάνω. Τέλος, οποιοσδήποτε περιορισμός ισότητας, όπου ο περιορισμός καλείται να λάβει μια συγκεκριμένη-επιθυμητή τιμή $c = c^{des}$, μετατρέπεται σε δύο περιορισμούς ανισότητας ως

$$\begin{aligned} c_1 &< c^{des} + \delta\epsilon \\ c_2 &> c^{des} - \delta\epsilon \end{aligned}$$

όπου $\delta\epsilon$ μια πολύ μικρή θετική τιμή που καθορίζεται από το χρήστη.

5.1.4 Προβλήματα Πολλών Στόχων – Μέτωπο Pareto

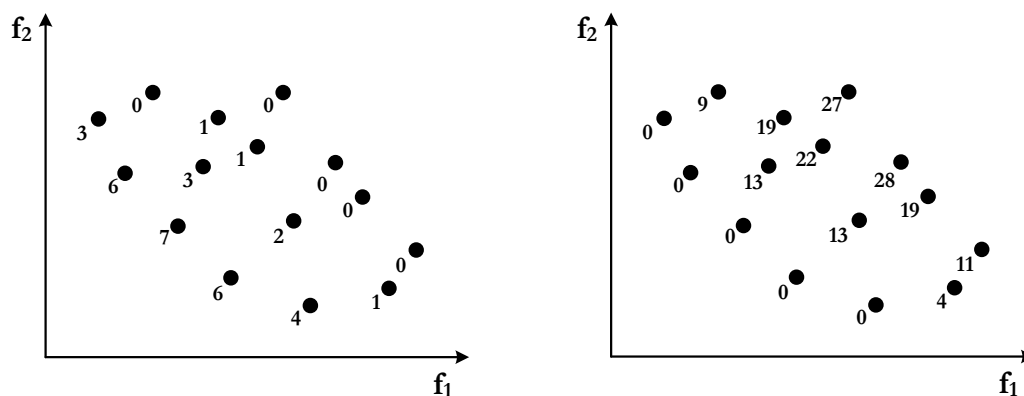
Στην περίπτωση όπου $M \geq 1$, η ελαχιστοποίηση των M συναρτήσεων της σχέσης 5.1 προϋποθέτει την ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση όλων των συναρτήσεων $f_m(\vec{x})$. Για τη σύγκριση

δύο λύσεων, έστω \vec{x}_1 και \vec{x}_2 της 5.1, χρησιμοποιούνται κριτήρια κυριαρχίας [173, 67]. Έτσι αν $f_m(\vec{x}_1) \leq f_m(\vec{x}_2)$ και $f_m(\vec{x}_1) < f_m(\vec{x}_2)$ για τουλάχιστον έναν στόχο $m \in [1, M]$, τότε η \vec{x}_1 κυριαρχεί στη \vec{x}_2 και συμβολίζεται με $\vec{x}_1 \succ \vec{x}_2$. Ο συμβολισμός $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$ (ή $\vec{x}_2 \neq \vec{x}_1$) χρησιμοποιείται για να καθορίσει δύο μη-κυριαρχούμενα άτομα, όπου κανένα από τα δύο δεν κυριαρχεί στο άλλο. Η βελτιστοποίηση με πολλούς στόχους αποβλέπει στον υπολογισμό των μη-κυριαρχούμενων μελών του πληθυσμού (\mathcal{P}_a) τα οποία αποτελούν τις κατά Pareto, [199], βέλτιστες λύσεις.

Ο Αλγόριθμος SPEA II

Ο αλγόριθμος SPEA II, [261] χρησιμοποιείται για την απόδοση (βαθμωτής) τιμής καταλληλότητας σε κάθε άτομο του πληθυσμού (πληθυσμός γονέων, απογόνων και επιλέκτων), με βάση την οποία θα επιλέγουν τα μη-κυριαρχούμενα μέλη του μετώπου Pareto. Η απόδοση τιμής γίνεται σε τρεις φάσεις, ως

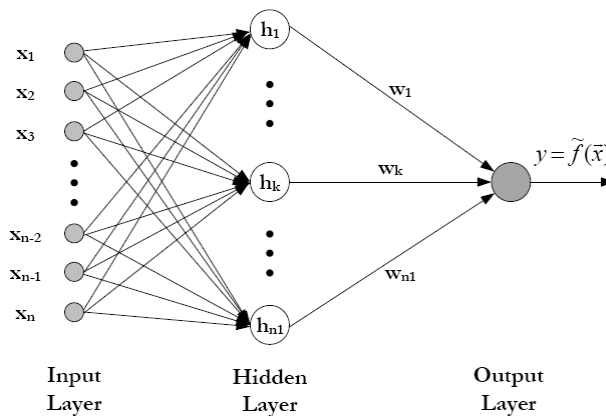
1. Αρχικά, σε κάθε άτομο του πληθυσμού αποδίδεται μια τιμή 'ισχύος' (strength $S(i)$) η οποία ισούται με τον αριθμό των ατόμων στα οποία κυριαρχεί (σχήμα 5.1, αριστερά).
2. Για κάθε άτομο του πληθυσμού υπολογίζεται μια πρώτη-γενική τιμή κόστους (raw fitness $R(i)$) αθροίζοντας τις τιμές ισχύος των ατόμων από τα οποία αυτό κυριαρχείται (σχήμα 5.1, δεξιά).
3. Για κάθε άτομο υπολογίζεται η απόσταση του από τα υπόλοιπα, στο χώρο των στόχων. Οι αποστάσεις κατατάσσονται σε αύξουσα σειρά και λαμβάνεται η k -ισοστή (όπου το k ισούται με την τετραγωνική ρίζα του συνόλου του πληθυσμού - γονείς, απόγονοι, επίλεκτοι), η οποία εκφράζει την πυκνότητα της γειτονιάς κάθε ατόμου (αντίστροφη της απόστασης). Έτσι, η τελική τιμή κόστους για κάθε άτομο προκύπτει ως άθροισμα της γενικής τιμής κόστους και της πυκνότητας της γειτονιάς του.



Σχήμα 5.1: Ο αλγόριθμος SPEA II σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων. Απόδοση τιμής ισχύος (αριστερά) και υπολογισμός γενικής τιμής κόστους (δεξιά).

5.1.5 Εισαγωγή και Χρήση Μεταπροτύπων

Ο συνδυασμός ΕΑ και μεταπροτύπων γίνεται με την τεχνική της προσεγγιστικής προαξιολόγησης (ΠΠΑ) και χρήση τεχνητών νευρωνικών δικτύων. Ειδικότερα, ο αλγόριθμος (εξέλιξη)



Σχήμα 5.2: Δίκτυο Ακτινικών Συναρτήσεων Βάσης (ΔΑΣΒ).

ξεκινά αξιολογώντας με το ακριβές πρότυπο όλα τα μέλη του πληθυσμού. Τα αποτελέσματα αποθηκεύονται στη βάση δεδομένων (ΒΔ). Όταν συμπληρωθεί ένας δεδομένος αριθμός αξιολογήσεων (ο οποίος επιλέγεται με βάση την πολυπλοκότητα του προς επίλυση προβλήματος) ξεκινά η επίδραση του μεταπρότυπου. Σε κάθε νέα γενιά, το μεταπρότυπο εκπαιδεύεται τοπικά για κάθε μέλος του πληθυσμού (με πληροφορία που λαμβάνει από τη ΒΔ) και χρησιμοποιείται για την απόδοση προσεγγιστικής τιμής στη συνάρτηση κόστους $f_m(\vec{x})$. Στη συνέχεια επιλέγονται ένα ή περισσότερα άτομα (ο αριθμός τους καθορίζεται από το χρήστη), τα πλέον 'υποσχόμενα' (καλύτερα) με βάση την προσέγγιση του μεταπρότυπου, τα οποία επαναξιολογούνται και με το ακριβές υπολογιστικό πρότυπο. Μόνο οι λύσεις-αποτελέσματα με το ακριβές πρότυπο αποθηκεύονται στη ΒΔ, ώστε το μεταπρότυπο να εκπαιδεύεται αποκλειστικά και μόνο από 'σωστή'-ακριβή πληροφορία.

Ως μεταπρότυπα, στην παρούσα εργασία, χρησιμοποιούνται τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα και ειδικότερα τα δίκτυα ακτινικών συναρτήσεων βάσης (ΔΑΣΒ, Radial Basis Function Networks - RBFN), [56, 110]. Ένα ΔΑΣΒ είναι ένα πλήρως συνδεδεμένο δίκτυο που αποτελείται από τρία επίπεδα και η γραφική του απεικόνιση για M κρυμμένα επίπεδα και μια έξοδο (για πρόβλημα ενός στόχου) φαίνεται στο σχήμα 5.2. Το ΔΑΣΒ πραγματοποιεί αρχικά τη μη-γραμμική απεικόνιση από το επίπεδο εισόδου στο κρυφό επίπεδο και, στη συνέχεια, τη γραμμική απεικόνιση από το κρυφό επίπεδο στο επίπεδο εξόδου. Η μαθηματική ανάλυση του τρόπου λειτουργίας ενός ΔΑΣΒ, ξεφεύγει από το πλαίσιο της διατριβής και μπορεί να αναζητηθεί είτε στα σχετικά βιβλία που αναφέρθηκαν νωρίτερα είτε στις διατριβές [12, 8]

5.1.6 Γενικευμένος Εξελικτικός Αλγόριθμος

Στην ενότητα αυτή περιγράφεται ο Γενικευμένος Εξελικτικός Αλγόριθμος (ΓΕΑ) που αναπτύσσεται στο ΕΘΣ/ΕΜΠ (λογισμικό EASY, [264, 8, 12, 11]). Στόχος είναι να παρουσιαστεί η 'λογική' λειτουργίας ενός ΕΑ ώστε στην πορεία να φανούν οι διαφορές με τον προτεινόμενο στην παρούσα διατριβή αλγόριθμο. Ο ΓΕΑ απετέλεσε τη βάση για τον προγραμματισμό του νέου λογισμικού και, σε αρκετές περιπτώσεις, χρησιμοποιείται ως μέτρο σύγκρισης για τον έλεγχο της απόδοσης του νέου αλγορίθμου.

Στην περιγραφή που ακολουθεί, παρουσιάζεται η 'απλή'-τυπική μορφή ΓΕΑ, η οποία προσο-

μοιάζει τη λειτουργία ενός ΕΑ. Διευκρινίζεται, ότι ο ΓΕΑ είναι ένας ιεραρχικός κατανεμημένος ΕΑ με χρήση μεταπροτύπων, στοιχεία τα οποία στην παρούσα φάση δεν ενδιαφέρουν.

Αλγόριθμος ΓΕΑ

ΓΕΑ1. [Αξιολόγηση Απογόνων]

Αξιολόγηση κάθε μέλους του πληθυσμού των απογόνων για τον υπολογισμό των τιμών της συνάρτησης κόστους $f(\vec{x})$.

ΓΕΑ2. [Απόδοση Τιμής Καταλληλότητας]

Με την ολοκλήρωση των αξιολογήσεων σε κάθε άτομο αποδίδεται μια τιμή καταλληλότητας. Αυτή, για προβλήματα ενός στόχου, αντιστοιχεί στην τιμή της συνάρτησης κόστους. Για προβλήματα πολλών στόχων, η τιμή καταλληλότητας για ένα συγκεκριμένο άτομο προκύπτει από τις τιμές της συνάρτησης κόστους, τόσο του ίδιου του ατόμου όσο και των υπολοίπων ατόμων του πληθυσμού, όπως θα περιγραφεί στη συνέχεια.

ΓΕΑ3. [Διαχείριση Επιλέκτων]

Ανανέωση του πληθυσμού των επιλέκτων με επιλογή των καλύτερων ατόμων από τους αξιολογηθέντες απογόνους και τον προηγούμενο πληθυσμό των επιλέκτων.

ΓΕΑ4. [Επιλογή Γονέων]

Ανανέωση του πληθυσμού των γονέων από το υπάρχον σύνολο γονέων αλλά και αυτό των απογόνων, λαμβάνοντας προαιρετικά υπόψη το μέγιστο αριθμό γενιών που μπορεί να επιβιώνει ένα άτομο.

ΓΕΑ5. [Αναπαραγωγή]

Δημιουργία του νέου συνόλου των απογόνων. Για τη δημιουργία καθενός απογόνου συνδυάζονται άτομα που έχουν επιλεγεί από τον πληθυσμό των γονέων ή (με μικρή πιθανότητα) και των επιλέκτων. Κάθε νέος απόγονος που προκύπτει υπόκειται σε μετάλλαξη με μια μικρή πιθανότητα.

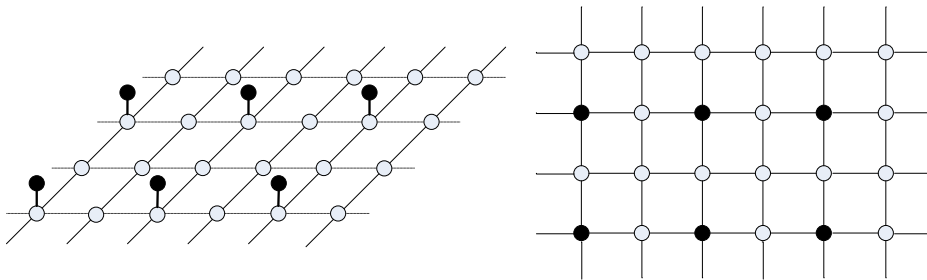
ΓΕΑ6. [Έλεγχος Τερματισμού]

Αν ικανοποιείται κάποιο κριτήριο τερματισμού (μέγιστο πλήθος αξιολογήσεων, συνεχιζόμενη αδυναμία βελτίωσης του καλύτερου ατόμου επί πολλές γενιές, κλπ.) τότε ο αλγόριθμος σταματά. Διαφορετικά επιστρέφει στο βήμα ΓΕΑ1 και συνεχίζει τους υπολογισμούς για την επόμενη γενιά.

5.2 Δομημένος Εξελικτικός Αλγόριθμος

Στην ενότητα αυτή περιγράφεται ο Δομημένος Εξελικτικός Αλγόριθμος (ΔΕΑ), ο οποίος αποτελεί εξέλιξη του ΓΕΑ και μοιράζεται ορισμένα από τα χαρακτηριστικά ενός ΕΑ κυτταρικής δομής. Ειδικότερα, στο ΔΕΑ, ο πληθυσμός τόσο των γονέων όσο και των απογόνων διατάσσεται επί 2Δ δομημένου πλέγματος. Αυτή η διάταξη-δομή, πέρα από ότι προσδίδει την ονομασία του αλγορίθμου, καθορίζει τους εξελικτικούς τελεστές, τελεστές επιλογής γονέων, διασταύρωσης κλπ. οι οποίοι εδώ λαμβάνουν χώρα μεταξύ υποψήφιων λύσεων-μελών του πληθυσμού που βρίσκονται σε γειτονικούς κόμβους του πλέγματος.

Μετά τη βασική περιγραφή των τοπολογικών χαρακτηριστικών του ΔΕΑ, αναλύεται ο σχετικός σύγχρονος αλγόριθμος και ο τρόπος εφαρμογής των εξελικτικών τελεστών. Επιπλέον,



Σχήμα 5.3: ΔΕΑ. Τοπολογική διάταξη ενός 6×4 πλέγματος. Με μαύρο σημειώνονται οι γονείς. Πλέγμα απογόνων και υπερυψωμένο πλέγμα γονέων (αριστερά). Κάτοψη συνολικού πλέγματος, όπου κάθε μαύρος κύκλος αντιστοιχεί σε έναν γονέα και έναν απόγονο που υπερκαλύπτεται από τον γονέα (δεξιά).

παρουσιάζεται μια εναλλακτική ημι-ασύγχρονη εκδοχή του αλγορίθμου. Υπενθυμίζεται ότι η τάση να δημιουργηθεί, τελικά, ένας πλήρως ασύγχρονος αλγόριθμος υπαγορεύεται από την ανάγκη ακύρωσης της έννοιας των γενιών, με στόχο τη μεγιστοποίηση της παράλληλης απόδοσης του αλγορίθμου.

5.2.1 Τοπολογία–Περιγραφή Αλγορίθμου

Βασικό χαρακτηριστικό του ΔΕΑ είναι η τοπολογική διάταξη του πληθυσμού τόσο των γονέων όσο και των απογόνων. Πιο συγκεκριμένα, ο πληθυσμός των απογόνων είναι τοποθετημένος σε ένα 2Δ δομημένο πλέγμα βάσης διαστάσεων $n_1 \times n_2 (= N_{mesh})$. Το πλέγμα αυτό θεωρείται ότι είναι περιοδικό προς όλες τις διευθύνσεις, το οποίο, σε συνδυασμό με τον τρόπο εφαρμογής των εξελικτικών τελεστών προϋποθέτει ότι τα n_1 και n_2 πρέπει να είναι ζυγοί αριθμοί. Ο πληθυσμός των γονέων ισούται πάντα με το $1/4$ του πληθυσμού των απογόνων και τοποθετείται σε ένα ‘υπερυψωμένο’ πλέγμα διαστάσεων $\mu_1 \times \mu_2 (= \mu)$, για το οποίο ισχύει $\mu_1 = \frac{n_1}{2}$ και $\mu_2 = \frac{n_2}{2}$. Το πλέγμα αυτό αντιστοιχεί στους περιττούς κόμβους του πλέγματος των απογόνων και προς τις δύο διευθύνσεις (σχήμα 5.3) και προφανώς είναι περιοδικό. Στην ανάλυση της μεθόδου που ακολουθεί, ο όρος πλέγμα (ή συνολικό πλέγμα ή πλέγμα βάσης) θα δηλώνει το πλέγμα των απογόνων καθώς οι διαστάσεις του πλέγματος των γονέων και οι σχετικές θέσεις τους με τους απογόνους είναι πλήρως καθορισμένες. Επιπλέον, για το πλέγμα των απογόνων υιοθετείται ένα συνεχές (σε σειρά) σύστημα αρίθμησης, σύμφωνα με το οποίο, η αρίθμηση ξεκινά από το κάτω αριστερά μέλος του πληθυσμού, ολοκληρώνεται στο πάνω δεξιά και ο μετρητής αυξάνεται κατά την κατακόρυφη διεύθυνση.

Ο ΔΕΑ υλοποιείται σε 5 βήματα αντίστοιχα με αυτά του ΓΕΑ τα οποία περιγράφονται παρακάτω. Η εκτέλεση του σε περιβάλλον παράλληλης επεξεργασίας υποδηλώνει την ταυτόχρονη αξιολόγηση μέρους των υποψήφιων λύσεων μιας γενιάς.

Αλγόριθμος ΔΕΑ

ΔΕΑ1. [Αξιολόγηση] Τα μέλη του πληθυσμού των απογόνων της τρέχουσας γενιάς αξιολογούνται, ένα προς ένα, με σειρά που καθορίζεται από την συνεχή αρίθμηση που τους έχει δοθεί. Πριν από κάθε αξιολόγηση προηγείται έλεγχος της βάσης δεδομένων σχετικά με πιθανή προγενέστερη αξιολόγησή τους. Στην περίπτωση εκτέλεσης σε περιβάλλον παράλληλης επεξεργασίας, αρχικά αποστέλλονται προς αξιολόγηση οι N_{CPU} πρώτοι

απόγονοι, δηλαδή τόσοι όσοι και οι διαθέσιμοι επεξεργαστές. Με την ολοκλήρωση μιας αξιολόγησης, άρα την απελευθέρωση ενός επεξεργαστή, το επόμενο κατά σειρά μέλος αποστέλλεται για αξιολόγηση, και αυτό συνεχίζεται έως ότου ολοκληρωθεί η αξιολόγηση όλων των μελών του πληθυσμού των απογόνων. Στην περίπτωση χρήσης ΠΠΑ (IPE), στους διαθέσιμους επεξεργαστές αποστέλλονται για αξιολόγηση μόνο τα N_{IPE} 'καλύτερα' κατά το μεταπρότυπο μέλη. Προφανώς αυτή η περίπτωση εμπεριέχει τον κίνδυνο ελλιπούς αξιοποίησης των διαθέσιμων επεξεργαστών στην περίπτωση που $N_{IPE} < N_{CPU}$. Από την άλλη, η συνθήκη $N_{IPE} \geq N_{CPU}$ που θα εξασφάλιζε την πλήρη αξιοποίηση των επεξεργαστών κατά τη φάση της ΠΠΑ δεν ικανοποιείται σχεδόν ποτέ καθώς η τιμή N_{IPE} είναι συνήθως μικρή (τιμή που επιλέγεται από το χρήστη με κριτήρια τον αριθμό των μελών του πληθυσμού, την πολυπλοκότητα του προς επίλυση προβλήματος κ.α.) ενώ, αντίθετα, για τον αριθμό των επεξεργαστών N_{CPU} προτιμώνται μεγάλες τιμές για λόγους επιτάχυνσης της επίλυσης.

ΔΕΑ2. [Απόδοση Τιμής Καταλληλότητας & Διαχείριση Επιλέκτων] Μετά το πέρας της αξιολόγησης μιας γενιάς αποδίδεται μια τιμή καταλληλότητας για κάθε απόγονο και ανανεώνεται ο πληθυσμός των επιλέκτων.

ΔΕΑ3. [Εφαρμογή Τελεστών Εξέλιξης] Η εφαρμογή των τελεστών εξέλιξης οδηγεί στη δημιουργία της νέας γενιάς. Περιλαμβάνει την επιλογή γονέων (ανανέωση πληθυσμού γονέων), τη διασταύρωση (ανανέωση πληθυσμού απογόνων) και τη μετάλλαξη, ο τρόπος εφαρμογής των οποίων αναλύεται στην υπο-ενότητα που ακολουθεί.

ΔΕΑ4. [Έλεγχος Τερματισμού] Αν ικανοποιείται κάποιο κριτήριο τερματισμού (μέγιστο πλήθος αξιολογήσεων, συνεχιζόμενη αδυναμία βελτίωσης του καλύτερου ατόμου κλπ.) τότε ο αλγόριθμος σταματά. Διαφορετικά επιστρέφει στο βήμα 1 και συνεχίζει τους υπολογισμούς στην επόμενη γενιά.

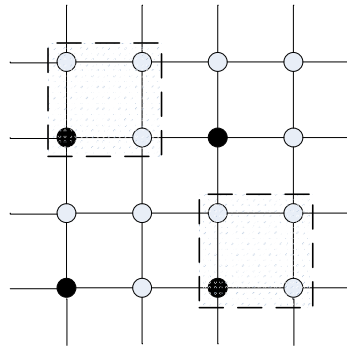
5.2.2 Τελεστές Εξέλιξης

Οι τελεστές εξέλιξης που χρησιμοποιούνται στον ΔΕΑ και ειδικότερα η επιλογή γονέων και η διασταύρωση είναι άρρηκτα συνδεδεμένοι με την τοπολογική διάταξη γονέων και απογόνων στο 2Δ δομημένο πλέγμα.

Επιλογή Γονέων

Ο τελεστής επιλογής γονέων καθορίζει-ανανεώνει τον πληθυσμό των γονέων μετά το πέρας κάθε γενιάς. Δεδομένου ότι οι σχετικές θέσεις γονέων και απογόνων πάνω στο πλέγμα είναι εξαρχής καθορισμένες, κάθε νέος γονέας προκύπτει μετά από διαγωνισμό¹ των τεσσάρων ατόμων του συνόλου απογόνων που βρίσκονται στην άμεση γειτονιά του. Ο τρόπος ορισμού της γειτονιάς κάθε γονέα παρουσιάζεται στο σχήμα 5.4 ενώ δεν υπάρχει επικάλυψη μεταξύ των γειτονιών. Για την επιλογή-ανανέωση ενός γονέα συγκρίνονται οι τιμές καταλληλότητας των τεσσάρων απογόνων της γειτονιάς του. Από τις τέσσερις αυτές τιμές κρατούνται η βέλτιστη και η χειρότερη. Έπειτα, με πιθανοτικό διαγωνισμό, επιλέγεται ως γονέας ένας από τους δύο απογόνους, με σαφές προβάδισμα στη επιλογή του βέλτιστου.

¹tournament selection



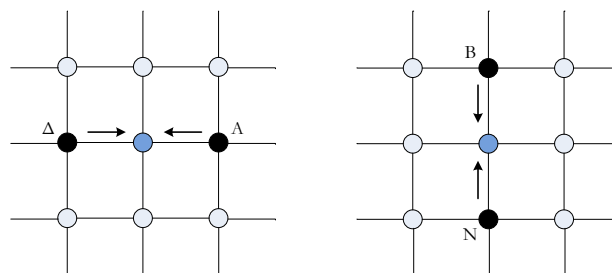
Σχήμα 5.4: ΔΕΑ. Ορισμός γειτονιάς γονέα σε ένα 4×4 πλέγμα. Με ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ορίζονται οι γειτονιές του πάνω αριστερά και κάτω δεξιά γονέα.

Διασταύρωση και Μετάλλαξη

Όπως προαναφέρθηκε, στο ΔΕΑ η κωδικοποίηση που χρησιμοποιείται είναι η δυαδική και για τη δημιουργία ενός απογόνου εμπλέκονται δύο γονείς με διασταύρωση ενός σημείου² [8]. Σημαντικό παράγοντα για τη διασταύρωση αποτελεί η επιλογή των δύο γονέων που θα συμμετάσχουν σε αυτή. Η επιλογή γίνεται με βάση τη σχετική θέση απογόνου και γονέων στο πλέγμα. Διακρίνονται τέσσερις τρόποι επιλογής άρα και τύποι διασταύρωσης, οι οποίοι αναλύονται στη συνέχεια. Αξίζει να σημειωθεί ότι το βέλτιστο άτομο του πληθυσμού δεν αντικαθίσταται κατά τη διαδικασία της διασταύρωσης. Επιπλέον, στους τύπους διασταύρωσης που ακολουθούν, η επιβολή της περιοδικότητας του πλέγματος θεωρείται προφανής στην περίπτωση που ο προς ανανέωση απόγονος βρίσκεται σε κάποιο άκρο αυτού.

Διασταύρωση τύπου A

Η διασταύρωση τύπου A λαμβάνει χώρα στην περίπτωση που οι γονείς και ο απόγονος βρίσκονται στην ίδια γραμμή ή στήλη του πλέγματος. Για αυτόν τον τύπο υπάρχουν δύο εκδοχές, μια για την περίπτωση όπου γονείς και απόγονος βρίσκονται στην ίδια γραμμή (τύπος A_1) και μια για την περίπτωση ίδιας στήλης (τύπος A_2). Έτσι, στην πρώτη εκδοχή, ο απόγονος προέρχεται από διασταύρωση του αριστερού (Δυτικού) και δεξιού (Ανατολικού) γονιού, ενώ στη δεύτερη εκδοχή από διασταύρωση του πάνω (Βόρειου) και κάτω (Νότιου) γονιού, όπως παρουσιάζεται και στο σχήμα 5.5, αριστερά και δεξιά αντίστοιχα.

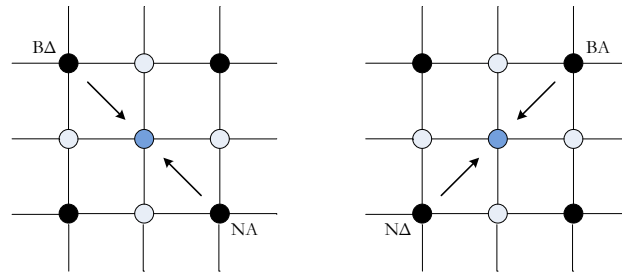


Σχήμα 5.5: ΔΕΑ. Διασταύρωση τύπου A. Παραλλαγές A_1 (αριστερά) και A_2 (δεξιά).

²one point crossover

Διασταύρωση τύπου B

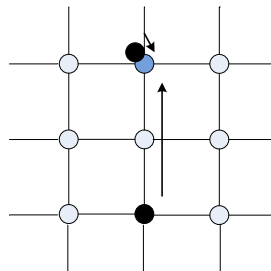
Η διασταύρωση τύπου B λαμβάνει χώρα στην περίπτωση που ο απόγονος βρίσκεται ανάμεσα σε τέσσερις γονείς και υπάρχουν και γι' αυτόν δύο εκδοχές (τύπος B_1 , B_2). Ο απόγονος προέρχεται από διασταύρωση των δύο γονέων που βρίσκονται στην ίδια διαγώνιο, δηλαδή του πάνω-αριστερά (ΒορειοΔυτικού) με τον κάτω-δεξιό (ΝοτιοΑνατολικού) για την εκδοχή B_1 και του κάτω-αριστερά (ΝοτιοΔυτικού) με τον πάνω-δεξιό (ΒορειοΑνατολικού) για την εκδοχή B_2 , όπως στο σχήμα 5.6.



Σχήμα 5.6: ΔΕΑ. Διασταύρωση τύπου B. Παραλλαγές B_1 (αριστερά) και B_2 (δεξιά).

Διασταύρωση τύπου Γ

Η διασταύρωση τύπου Γ, εφαρμόζεται στην περίπτωση που η θέση του προς δημιουργία απογόνου στο πλέγμα ταυτίζεται με τη θέση κάποιου γονέα. Σε αυτήν την περίπτωση, ο απόγονος προέρχεται από τη διασταύρωση του γονέα που βρίσκεται στην ίδια θέση στο πλέγμα με αυτόν και του προηγούμενου, σε συνεχή αρίθμηση, γονέα όπως στο σχήμα 5.7.



Σχήμα 5.7: ΔΕΑ. Διασταύρωση τύπου Γ.

Διασταύρωση τύπου Δ

Η τελευταία περίπτωση διασταύρωσης (τύπου Δ) πρόκειται για διασταύρωση δύο τυχαίων γονέων, όπως συμβαίνει στην περίπτωση του κλασικού ΕΑ. Η πιθανότητα διασταύρωσης τύπου Δ είναι συνήθως πολύ μικρή και ορίζεται από το χρήστη. Άρα είναι εφικτή ακόμα και η απενεργοποίηση της σε περίπτωση που ο χρήστης επιθυμεί διασταύρωση εξ ολοκλήρου καθοριζόμενη από την τοπολογία του πλέγματος.

Μετάλλαξη

Η λειτουργία του τελεστή μετάλλαξης είναι όμοια με αυτή του ΓΕΑ για μεταβλητές με δυαδική

κωδικοποίηση, δηλαδή σε κάποιο τυχαίο σημείο του χρωμοσώματος ένα ψηφίο του αλλάζει τιμή από $0 \rightarrow 1$ ή από $1 \rightarrow 0$, λχ.

$$\begin{array}{ccc} 011011000101 & \rightarrow & 011011010101 \\ & & \text{ή} \\ 011011000101 & \rightarrow & 010011000101 \end{array}$$

5.2.3 Ημι-Ασύγχρονος ΔΕΑ

Ο αλγόριθμος που περιγράφηκε νωρίτερα ανήκει στην κατηγορία των σύγχρονων αλγορίθμων και σε περίπτωση εκτέλεσης του σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον εμφανίζονται προβλήματα ελλιπούς αξιοποίησης των διαθέσιμων επεξεργαστών (τα οποία αναλύθηκαν νωρίτερα στην αναφορά για τους ΠΕΑ). Στοχεύοντας στην επίλυση αυτών των προβλημάτων, αναπτύχθηκε ο Ημι-Ασύγχρονος ΔΕΑ (ΗΑΔΕΑ) του οποίου η εκτέλεση γίνεται αποκλειστικά σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον. Στον ΗΑΔΕΑ τροποποιείται η έννοια της γενιάς καθώς ένα μέλος του πληθυσμού είναι δυνατό να προέλθει από διασταύρωση μελών που, με τη λογική του σύγχρονου αλγορίθμου, ανήκουν σε διαφορετικές ‘γενιές’. Ειδικότερα, στον ΗΑΔΕΑ, όλα τα μέλη του πληθυσμού των απογόνων προς αξιολόγηση τοποθετούνται σε μια λίστα με βάση την συνεχή αρίθμηση τους. Επιπλέον, ορίζεται από το χρήστη ένας μη-μηδενικός αριθμός $N_{rest} < N_{mesh}$ ο οποίος δηλώνει τον αριθμό των μη αξιολογημένων μελών που πρέπει να υπάρχουν στη λίστα ώστε να εφαρμοστούν οι τελεστές εξέλιξης. Ο αλγόριθμος ξεκινά όπως και ο ΔΕΑ, όπου μέλη του τυχαία αρχικοποιημένου πληθυσμού, τόσα όσα ο αριθμός των διαθέσιμων επεξεργαστών, αποστέλλονται προς αξιολόγηση. Κάθε φορά που ένα μέλος επιστρέφει, σημειώνεται ως αξιολογημένο και το επόμενο στη λίστα αποστέλλεται για αξιολόγηση. Όταν στη λίστα απομένουν N_{rest} μη αξιολογημένα μέλη τότε αρχίζει η εφαρμογή των τελεστών εξέλιξης. Αρχικά ανανεώνονται όλοι οι γονείς λαμβάνοντας πληροφορία τόσο από μέλη που μόλις αξιολογήθηκαν αλλά και από παλαιότερα/μη αξιολογημένα μέλη. Οι νέοι γονείς διασταυρώνονται για να ανανεώσουν όσους από τους απογόνους έχουν ήδη αξιολογηθεί. Με αντίστοιχο τρόπο (δηλαδή στα ήδη αξιολογημένα μέλη) εφαρμόζεται και ο τελεστής της μετάλλαξης. Τα μέλη του πληθυσμού ξανατίθενται όλα ως μη αξιολογημένα και οι αξιολογήσεις συνεχίζονται.

5.3 Ασύγχρονος Δομημένος Εξελικτικός Αλγόριθμος

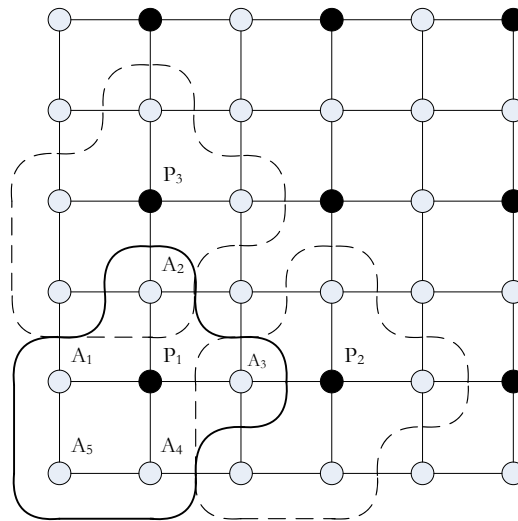
Ο Ασύγχρονος Δομημένος Εξελικτικός Αλγόριθμος (ΑΔΕΑ, [31]) αποτελεί εξέλιξη του ΔΕΑ όπου έχουν επέλθει αρκετές αλλαγές ως προς τη λειτουργία του αλγορίθμου. Το βασικό κίνητρο για τη δημιουργία του ΑΔΕΑ είναι η επιθυμία ενός πλήρως ασύγχρονου αλγορίθμου που θα εκμεταλλεύεται πλήρως τους διαθέσιμους επεξεργαστές.

Ουσιαστικά, το μόνο κοινό τους στοιχείο είναι η χρήση 2Δ δομημένου πλέγματος στο οποίο τοποθετείται ο πληθυσμός. Στον ΑΔΕΑ το πλέγμα διαμερίζεται σε, εν μέρει, επικαλυπτόμενους δήμους συγκεκριμένης τοπολογίας και ιδιοτήτων. Οι δήμοι αποτελούνται από έναν πόλο στον οποίο αποθηκεύονται τα βασικά στοιχεία κάθε δήμου (όπως θα αναλυθούν στη συνέχεια) και πέντε πράκτορες οι οποίοι αναλαμβάνουν τις αξιολογήσεις των υποψήφιων λύσεων. Ο αλγόριθμος του ΑΔΕΑ είναι πλήρως ασύγχρονος καθώς με την ολοκλήρωση μιας αξιολόγησης (δηλ. απελευθέρωση ενός επεξεργαστή) ακολουθεί μια σειρά ενδο- και δια-

δημοτικών διεργασιών βάσει των οποίων επιλέγεται ο πράκτορας από τον οποίο θα προέλθει η επόμενη υποψήφια λύση προς αξιολόγηση.

5.3.1 Βασικά Στοιχεία Τοπολογίας–Περιγραφή Αλγορίθμου

Όπως προαναφέρθηκε, ο πληθυσμός του ΑΔΕΑ τοποθετείται σε 2D δομημένο πλέγμα διαστάσεων $n_1 \times n_2$ στο οποίο ισχύει περιοδικότητα (όπως και στο ΔΕΑ), άρα τα n_1 και n_2 είναι ζυγοί αριθμοί. Το πλέγμα διαμερίζεται σε δήμους όπως φαίνεται στο σχήμα 5.8. Κάθε δήμος (ο οποίος στη συνέχεια θα συμβολίζεται ως \mathcal{D}_p) αποτελείται από έξι κόμβους, έναν πόλο (pole) και πέντε πράκτορες–ανιχνευτές (agents). Μεταξύ των δήμων υπάρχει μερική επικάλυψη τέτοια ώστε οι τέσσερις πράκτορες κάθε δήμου να ανήκουν και σε ένα γειτονικό δήμο, ενώ μόνο ο ένας ανήκει εξ ολοκλήρου σ'ένα δήμο. Με βάση τον τρόπο διαχωρισμού του πλέγματος σε δήμους, σε ένα πλέγμα $n_1 \times n_2$, ο αριθμός των πόλων θα είναι ίσος με $N_{poles} = N_{mesh}/4$ και ο αριθμός των πρακτόρων $N_{agents} = 3N_{mesh}/4$, με $N_{mesh} = n_1n_2$. Μόνο οι πράκτορες (είτε αυτοί ανήκουν εξ ολοκλήρου σ'ένα δήμο είτε μοιράζονται μεταξύ δύο δήμων) αναλαμβάνουν την αξιολόγηση υποψήφιας λύσεων³. Οι πόλοι είναι αυτοί που χαρακτηρίζουν και αντιπροσωπεύουν τον κάθε δήμο (σε αυτούς αποθηκεύονται πληροφορίες σχετικές με το βέλτιστο άτομο του δήμου) και συμμετέχουν στις ενδο– και δια–δημοτικές διεργασίες ανάδειξης του πράκτορα απ' όπου θα προέλθει η επόμενη υποψήφια λύση προς αξιολόγηση.



Σχήμα 5.8: ΑΔΕΑ. Τοπολογική διάταξη ενός 6×6 πλέγματος (ενδεικτικά). Οι πόλοι σημειώνονται με μαύρο χρώμα και με συνεχή και διακεκομμένη γραμμή φαίνονται τρεις δήμοι. Για το δήμο του πόλου P_1 , ο πράκτορας A_3 ανήκει στους δήμους P_1 και P_2 , ενώ ο A_5 είναι ο μόνος που ανήκει εξ ολοκλήρου στο δήμο P_1 .

Η γενική δομή του αλγορίθμου έχει ως εξής:

³ Στην περιγραφή του αλγορίθμου, η έννοια του πράκτορα ταυτίζεται με το άτομο–υποψήφια λύση που σχηματίζεται στη συγκεκριμένη θέση πλέγματος βάσης και αποστέλλεται προς αξιολόγηση στους επεξεργαστές.

Αλγόριθμος ΑΔΕΑ

- ΑΔΕΑ1.** [Έναρξη] Με την έναρξη του αλγορίθμου, αριθμός πρακτόρων ίσος με τον αριθμό των διαθέσιμων επεξεργαστών, τυχαία επιλεγμένων, αποστέλλονται προς αξιολόγηση. Στη γενική περίπτωση όπου $N_{agents} \geq N_{CPU}$, τότε υπάρχουν ανενεργοί πράκτορες οι οποίοι περιμένουν να αποσταλούν για αξιολόγηση.
- ΑΔΕΑ2.** [Αντικατάσταση Πόλου] Με την ολοκλήρωση μιας αξιολόγησης ακολουθεί μια σειρά από ενδο-δημοτικές διεργασίες προκειμένου να αποφασιστεί αν ο πράκτορας που μόλις επέστρεψε πρέπει να αντικαταστήσει τον ή τους πόλο(υς) με τους οποίους συνδέεται τοπολογικά.
- ΑΔΕΑ3.** [Επιλογή Νέου Πράκτορα για το Σχηματισμό Απογόνου] Πρόκειται για μια σειρά δια-δημοτικών διεργασιών, μέσω των οποίων επιλέγεται ο νέος πράκτορας στον οποίο θα σχηματιστεί ο απόγονος-υποψήφια λύση που θα σταλεί προς αξιολόγηση στο διαθέσιμο επεξεργαστή. Κάθε δήμος αποκτά μια τιμή προτεραιότητας (βάσει της ηλικίας και της τιμής καταλληλότητας/συνάρτησης κόστους) σε σχέση με τους υπόλοιπους. Ως νέος πράκτορας για το σχηματισμό απογόνου επιλέγεται ο μεγαλύτερης ηλικίας πράκτορας του δήμου με τη μεγαλύτερη προτεραιότητα.
- ΑΔΕΑ4.** [Εφαρμογή Τελεστών Εξέλιξης] Εφαρμόζονται οι τελεστές εξέλιξης στο δήμο με τη μεγαλύτερη προτεραιότητα για δημιουργία του νέου πράκτορα. Ο τρόπος διασταύρωσης είναι εμπνευσμένος από τους τελεστές μετάλλαξης που χρησιμοποιούνται στη μέθοδο της διαφορικής εξέλιξης ενώ ο τρόπος επιβολής της μετάλλαξης καθορίζεται από τη χρήση πραγματικής κωδικοποίησης.
- ΑΔΕΑ5.** [Αποστολή Νέου Πράκτορα για Αξιολόγηση] Ο νέος πράκτορας που επιλέχθηκε και δημιουργήθηκε στις δύο προηγούμενες φάσεις αποστέλλεται προς αξιολόγηση στο διαθέσιμο επεξεργαστή.
- ΑΔΕΑ6.** [Έλεγχος Σύγκλισης] Έλεγχος σύγκλισης και επιστροφή στο βήμα 2 ή τερματισμός του αλγορίθμου.

5.3.2 Αντικατάσταση Πόλου

Με την ολοκλήρωση της αξιολόγησης ενός πράκτορα \vec{x}_{agent} , πρέπει να αποφασιστεί το κατά πόσο αυτός θα αντικαταστήσει τον ή τους πόλους με τους οποίους συνδέεται. Η απόφαση αυτή λαμβάνεται στο πλαίσιο μιας ενδο-δημοτικής διεργασίας η οποία βασίζεται στη σύγκριση του \vec{x}_{agent} με το \vec{x}_{pole} (για κάθε έναν από τους δήμους από τους δήμους στους οποίους μπορεί να ανήκει ο \vec{x}_{agent}). Σε προβλήματα ενός στόχου, η σύγκριση είναι προφανής και την τιμή του πόλου καταλαμβάνει όποιο εκ των \vec{x}_{agent} , \vec{x}_{pole} δίνει καλύτερη-μικρότερη τιμή συνάρτησης κόστους. Σε προβλήματα περισσότερων στόχων, η σύγκριση γίνεται με κριτήρια κυριαρχίας. Έτσι, ο πράκτορας \vec{x}_{agent} , αντικαθιστά τον πόλο, \vec{x}_{pole} , αν κυριαρχεί σε αυτόν, δηλ. $\vec{x}_{agent} \succ \vec{x}_{pole}$, ενώ ο πόλος παραμένει ίδιος στην αντίθετη περίπτωση, δηλ. $\vec{x}_{pole} \succ \vec{x}_{agent}$. Στην περίπτωση όπου δεν υπάρχει απόλυτη κυριαρχία, ως επιπλέον κριτήριο χρησιμοποιείται το κατά πόσο ο πράκτορας ή/και ο πόλος ανήκουν στο σύνολο \mathcal{P}_a του μέτρωπο Pareto. Έτσι, ο πράκτορας \vec{x}_{agent} , αντικαθιστά τον πόλο, \vec{x}_{pole} , αν αυτός ανήκει στο Pareto ενώ ο πόλος όχι, δηλ. $\vec{x}_{agent} \in \mathcal{P}_a$ & $\vec{x}_{pole} \notin \mathcal{P}_a$. Όταν και οι δύο ανήκουν, $\vec{x}_{agent} \in \mathcal{P}_a$ & $\vec{x}_{pole} \in \mathcal{P}_a$, ή δεν ανήκουν, $\vec{x}_{agent} \notin \mathcal{P}_a$ & $\vec{x}_{pole} \notin \mathcal{P}_a$, στο Pareto, ο πράκτορας, \vec{x}_{agent} , αντικαθιστά τον πόλο, \vec{x}_{pole} , με πιθανότητα 50%. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις, ο πόλος παραμένει ίδιος.

5.3.3 Επιλογή Νέου Πράκτορα για το Σχηματισμό Απογόνου

Η επιλογή του νέου πράκτορα για το σχηματισμό απογόνου-νέα υποψήφια λύση που θα αποσταλεί για αξιολόγηση γίνεται μέσω δια-δημοτικών διεργασιών και ο νέος πράκτορας επιλέγεται από το δήμο με τη μεγαλύτερη τιμή προτεραιότητας. Η έννοια-τιμή της προτεραιότητας αποδίδεται σε κάθε πόλο και αποτελείται από δύο επιμέρους προτεραιότητες, την προτεραιότητα λόγω ηλικίας, Pr_p^{age} και την προτεραιότητα λόγω τιμής της συνάρτησης κόστους, Pr_p^{cost} ως

$$Pr_p = Pr_p^{age} Pr_p^{cost} \quad (5.5)$$

Για κάθε πράκτορα k ορίζεται μια ηλικία A_k ως η διαφορά του αριθμού της τελευταίας αξιολόγησης του συγκεκριμένου πράκτορα από τον αριθμό της τρέχουσας αξιολόγησης, δηλ. $A_k = Curr_{evals} - Eval_k$. Η ηλικία του πόλου p για τον δήμο D_p υπολογίζεται ως μέση τιμή των ηλικιών των πρακτόρων αυτού του δήμου, δηλαδή

$$\bar{A}_p = \frac{1}{5} \sum_{k \in D_p} A_k \quad (5.6)$$

Η προτεραιότητα λόγω ηλικίας για κάθε πόλο, δίνεται από το λόγο της μέσης ηλικίας του πόλου προς τη μέγιστη μέση ηλικία μεταξύ όλων των πόλων ως

$$Pr_p^{age} = \frac{\bar{A}_p}{\max(\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_{N_{poles}})} \quad (5.7)$$

Για τον υπολογισμό της προτεραιότητας λόγω τιμής της συνάρτησης κόστους χρησιμοποιούνται κριτήρια δύναμης και κυριαρχίας, εμπνευσμένα από τον αλγόριθμο SPEA [261]. Αρχικά, σε κάθε πόλο αποδίδεται μια τιμή ισχύος S_p η οποία ισούται με τον αριθμό των πόλων στους οποίους κυριαρχεί, δηλαδή $S_p \in [0, N_{poles} - 1]$. Στη συνέχεια, αποδίδεται σε κάθε πόλο μια πρώτη-γενική τιμή κόστους αθροίζοντας τη δύναμη των πόλων από τους οποίους κυριαρχείται,

$$R_p = \sum_{p^* \succ p} S_{p^*} \quad (5.8)$$

Επιπλέον, για κάθε πόλο p υπολογίζεται η απόστασή του στο χώρο των στόχων από τους υπόλοιπους πόλους. Οι αποστάσεις κατατάσσονται σε αύξουσα σειρά και επιλέγεται η k -οστή, d_p , σύμφωνα με [261]. Τελικά, η πυκνότητα της γειτονιάς κάθε πόλου ορίζεται ως

$$D_p = \frac{1}{d_p + 2} \quad (5.9)$$

και η προτεραιότητα λόγω τιμής της συνάρτησης κόστους δίνεται από τη σχέση

$$Pr_p^{cost} = \frac{\Phi_p}{\Phi_{max} - \Phi_{min}}, \quad \Phi_p = D_p + R_p \quad (5.10)$$

όπου Φ_p η τελική-λεπτομερής τιμή κόστους, $\Phi_{max} = \max\{\Phi_1, \dots, \Phi_{N_{poles}}\}$ και $\Phi_{min} = \min\{\Phi_1, \dots, \Phi_{N_{poles}}\}$.

Η μεγαλύτερη τιμή προτεραιότητας, υπολογιζόμενη από τη σχέση 5.5, υποδεικνύει τον δήμο απ' όπου θα επιλεγεί ο νέος πράκτορας για το σχηματισμό του απογόνου που θα σταλεί για αξιολόγηση. Από τους 5 πράκτορες του δήμου, επιλέγεται αυτός με τη μεγαλύτερη ηλικία (δηλ. αυτός που έχει πολύ 'ώρα' να αξιολογηθεί), υπό την προϋπόθεση ότι δεν αξιολογείται.

5.3.4 Τελεστές Εξέλιξης

Διασταύρωση

Όπως αναφέρθηκε και στην αρχική περιγραφή του ΑΔΕΑ, για τις μεταβλητές σχεδιασμού χρησιμοποιείται πραγματική κωδικοποίηση. Το σχήμα διασταύρωσης είναι εμπνευσμένο από τον τρόπο ορισμού του δοκιμαστικού διανύσματος στον Αλγόριθμο Διαφορικής Εξέλιξης (Differential Evolution, [227]) και εφαρμόζεται μέσα στον δήμο που επιλέχθηκε νωρίτερα. Πιο συγκεκριμένα, για τη δημιουργία του νέου πράκτορα προς αξιολόγηση, στην τιμή του πόλου προστίθεται ένα ποσοστό της διαφοράς δύο πρακτόρων του δήμου, σύμφωνα με το σχήμα

$$\vec{x}_k = \vec{x}_{pole} + \omega (\vec{x}_{k_1} - \vec{x}_{k_2}), \quad k_1, k_2 \in \mathcal{D}_p \ \& \ k_1 \neq k_2 \quad (5.11)$$

όπου ω είναι μια τυχαία τιμή στο διάστημα $[0, 1]$.

Μετάλλαξη

Σχετικά με τον τελεστή μετάλλαξης, αυτός καθορίζεται από την πραγματική κωδικοποίηση και εφαρμόζεται με πιθανότητα της οποίας η τιμή εξαρτάται από τον τρέχοντα αριθμό αξιολογήσεων. Αρχικά, η τιμή του πράκτορα για κάθε μεταβλητή σχεδιασμού x_k^i αδιαστατοποιείται με βάση το κατώτερο και ανώτερο όριο της $[b_{low}^i, b_{upp}^i]$ ως $\hat{x}_k^i = (x_k^i - b_{low}^i)/(b_{upp}^i - b_{low}^i)$, υπόκειται σε μετάλλαξη σύμφωνα με το σχήμα

$$\begin{aligned} \hat{x}_k^i &= \hat{x}_k^i (1 + \omega_{mut}), \quad \text{αν } \omega_{mut} < 0.5 \\ \hat{x}_k^i &= \hat{x}_k^i (1 - \omega_{mut}), \quad \text{αν } \omega_{mut} \geq 0.5 \end{aligned} \quad (5.12)$$

με ω_{mut} μια τυχαία τιμή στο $[0, 1]$ και τελικά επανέρχεται στη διαστατή τιμή της $x_k^i = b_{low}^i + \hat{x}_k^i (b_{upp}^i - b_{low}^i)$.

Εξασφάλιση Ορίων

Στην περίπτωση που η προκύπτουσα τιμή x_k^i οποιασδήποτε μεταβλητής σχεδιασμού (μετά τους τελεστές διασταύρωσης και μετάλλαξης) παραβιάζει τα προκαθορισμένα όριά της $[b_{low}^i, b_{upp}^i]$, επιβάλλεται το σχήμα διόρθωσης

$$\begin{aligned} x_k^i &= b_{low}^i + |x_k^i - b_{low}^i|, \quad \text{αν } x_k^i < b_{low}^i \\ x_k^i &= b_{upp}^i - |x_k^i - b_{upp}^i|, \quad \text{αν } x_k^i > b_{upp}^i \end{aligned} \quad (5.13)$$

όσες φορές χρειάζεται μέχρις ότου η τιμή x_k^i βρεθεί μέσα στα προκαθορισμένα όρια.

5.3.5 Προσαρμογή της ΠΠΑ στον ΑΔΕΑ

Όπως περιγράφηκε νωρίτερα στους σύγχρονους αλγορίθμους, η ΠΠΑ εφαρμόζεται για τον υπολογισμό της τιμής της συνάρτησης $f_m(\vec{x})$ για όλα τα άτομα μιας γενιάς. Κατόπιν, τα N_{IPE} καλύτερα (με βάση την προαξιολόγηση) άτομα της γενιάς επιλέγονται για να αξιολογηθούν και με το ακριβές πρότυπο. Στον ΑΔΕΑ, όπως αυτός αναλύθηκε παραπάνω, αντίστοιχη χρήση της ΠΠΑ δεν είναι εφικτή καθώς δεν υπάρχει η έννοια της γενιάς. Υπενθυμίζεται ότι με την ολοκλήρωση μιας αξιολόγησης, ο αντίστοιχος επεξεργαστής στιγμιαία καθίσταται ανενεργός έως ότου (μέσω των ένδο- και δια-δημοτικών διεργασιών) επιλεγεί και δημιουργηθεί το νέο προς αξιολόγηση άτομο, στον πράκτορα που επιλέχθηκε προς τούτο. Στην περίπτωση της χρήσης ΠΠΑ, το βήμα **ΑΔΕΑ 4** του αλγορίθμου της ενότητας 5.3.1 τροποποιείται ως εξής:

ΑΔΕΑ 4α) Δημιουργία N_{IPE} πρακτόρων (\vec{x}_{agent}) μέσω εξελικτικών τελεστών (σχέσεις 5.11, 5.12 και 5.13).

ΑΔΕΑ 4β) Εκπαίδευση και χρήση του μεταπροτύπου για την εκτίμηση της τιμής της συνάρτησης $f_m(\vec{x})$ για καθέναν από αυτούς τους πράκτορες. Η εκπαίδευση για κάθε πράκτορα γίνεται με τα πλησιέστερα στο χώρο των μεταβλητών σχεδιασμού άτομα από τη βάση δεδομένων.

ΑΔΕΑ 4γ) Επιλογή του ‘καλύτερου’ πράκτορα, με βάση την εκτίμηση του μεταπροτύπου, για αξιολόγηση με το ακριβές πρότυπο.

5.4 Πιστοποίηση–Εφαρμογές

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται εφαρμογές για την πιστοποίηση του ΑΔΕΑ. Αρχικά, η πιστοποίηση γίνεται σε προβλήματα ελαχιστοποίησης μαθηματικών συναρτήσεων, τα οποία, λόγω μικρού υπολογιστικού κόστους, μπορούν να επαναληφθούν πολλές φορές και άρα να υπάρχει σαφής εικόνα για τη συμπεριφορά και τις επιδόσεις του αλγορίθμου. Στη συνέχεια, ο ΑΔΕΑ εφαρμόζεται σε προβλήματα σχεδιασμού αεροδυναμικών μορφών (περυγώσης συμπίεστη και μεμονωμένης αεροτομής), ενώ ως τελευταίο παράδειγμα, παρουσιάζεται ο σχεδιασμός–προκαταρκτική διαστασιολόγηση μικρού υπερηχητικού αεροσκάφους σε προβλήματα ενός ή δύο στόχων. το τελευταίο είναι ένα πρόβλημα πολλών επιστημονικών περιοχών (MDO).

Στα παρουσιαζόμενα αποτελέσματα ο ΑΔΕΑ συγκρίνεται με ένα κλασικό (τυπικό, σύγχρονο) ΕΑ (ο οποίος εμφανίζεται ως τΕΑ ή Conv.ΕΑ) και άλλες μεθόδους στη βιβλιογραφία. Επιπλέον, σε ένα από τα προβλήματα σχεδιασμού παρουσιάζεται σύγκριση όλων των μεθόδων ΔΕΑ, δηλαδή του ΑΔΕΑ με τις σύγχρονες και ημι–ασύγχρονες παραλλαγές του.

Στα μαθηματικά προβλήματα, οι υπολογισμοί–βελτιστοποιήσεις επαναλαμβάνονται αρκετές φορές (25, 30, ανάλογα με την περίπτωση) χρησιμοποιώντας διαφορετικές γεννήτριες τυχαίων αριθμών, Random Number Generator (RNG), οι οποίες ουσιαστικά είναι υπεύθυνες για την αρχικοποίηση του πληθυσμού. Σε ένα σύγχρονο ΕΑ, η επανάληψη της βελτιστοποίησης με ίδια τιμή RNG οδηγεί σε ίδιο αποτέλεσμα. Κάτι τέτοιο δεν ισχύει στον ΑΔΕΑ, εξαιτίας της ασύγχρονης λειτουργίας του αλγορίθμου (διαφορετική αλληλουχία υποψήφιων λύσεων), αλλά και πιθανών αλλαγών στο φορτίο κάποιου επεξεργαστή.

5.4.1 Μαθηματικές Συναρτήσεις

Συνάρτηση Ackley

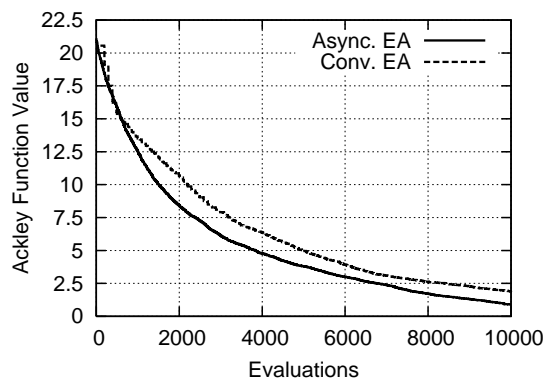
Η πρώτη εφαρμογή συνίσταται στην ελαχιστοποίηση της τιμής της συνάρτησης του Ackley, [20],

$$f(\vec{x}) = -20 \exp \left(0.2 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N}} \right) - \exp \left(\frac{\sum_{i=1}^N \cos(2\pi x_i)}{N} \right) + 20 + e \quad (5.14)$$

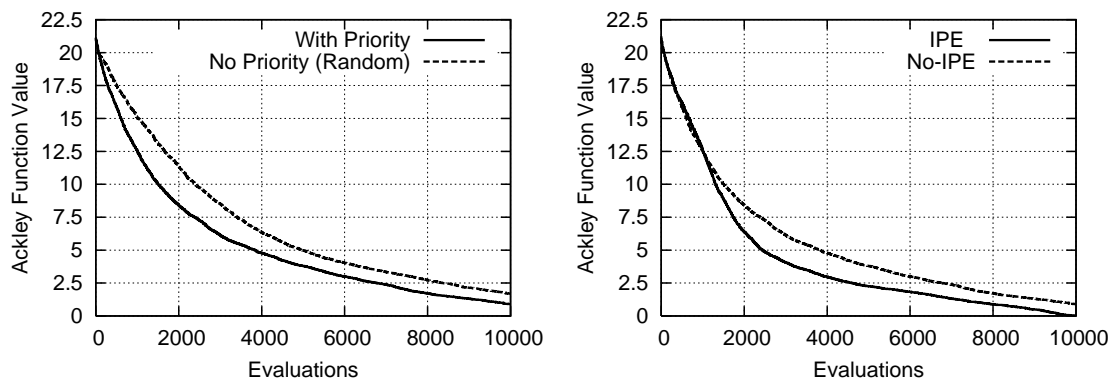
στη γενικευμένη της μορφή, [32], με $N = 30$ μεταβλητές σχεδιασμού και $x_i \in [-32.768, 32.768]$. Πρόκειται για μη–διαχωρίσιμη συνάρτηση, με πολλά τοπικά ακρότατα και ελάχιστη τιμή $f(\vec{x}) =$

0 για $x_i = 0$. Η συνάρτηση επιλέγεται για σύγκριση του ΑΔΕΑ μ'έναν κλασικό ΕΑ, αλλά και για να ελεγχθούν ο ρόλος της προτεραιότητας και της επίδρασης των μεταπροτύπων. Για τον ΑΔΕΑ χρησιμοποιείται πλέγμα 10×10 (75 πράκτορες και 25 πόλοι) και 20 επεξεργαστές. Η βελτιστοποίηση επαναλαμβάνεται 30 φορές με όριο αξιολογήσεων τις 10000. Η μέση σύγκλιση από τις 30 βελτιστοποιήσεις παρουσιάζεται στο σχήμα 5.9 όπου συγκρίνεται με την αντίστοιχη σύγκλιση ενός κλασικού ΕΑ. Για τον ίδιο αριθμό αξιολογήσεων ο ΑΔΕΑ επιτυγχάνει καλύτερη τιμή της συνάρτησης (μέση τιμή $f_{mean} = 0.8963$, τυπική απόκλιση $s = 0.3861$) συγκρινόμενος μ'ένα κλασικό ΕΑ ($f_{mean} = 1.8732$, $s = 0.5366$). Προκειμένου να επιβεβαιωθεί η εγκυρότητα της 'οπτικής' παρατήρησης, πραγματοποιείται ένα t-test για τον έλεγχο των μέσων τιμών των δύο μεθόδων. Η λαμβανόμενη τιμή $t_0 = 8.0925$ πράγματι αποδεικνύει ότι ο ΑΔΕΑ είναι σημαντικά καλύτερος από έναν κλασικό ΕΑ.

Στη συνέχεια, ελέγχεται η σημασία του ορισμού της προτεραιότητας για την επιλογή του πράκτορα από τον οποίο θα προκύψει η νέα υποψήφια λύση για αξιολόγηση. Έτσι, αντί της προτεινόμενης μεθοδολογίας (ορισμό ηλικίας, προτεραιότητας κ.λ.π.), οι 30 βελτιστοποιήσεις επαναλαμβάνονται με τυχαία επιλογή του νέου πράκτορα. Η γραφική απεικόνιση των αποτελεσμάτων με και χωρίς προτεραιότητα φαίνεται στο σχήμα 5.10, αριστερά. Όπως παρουσιάζεται στον πίνακα 5.1, από τη σύγκριση των μέσων τιμών με t-test, αποδεικνύεται ότι ο ορισμός και η χρήση της έννοιας της προτεραιότητας είναι πολύ σημαντική και αποτελεί καθοριστική παράμετρο της απόδοσης του προτεινόμενου αλγορίθμου. Τέλος, όσον αφορά στην επίδραση των μεταπροτύπων (σχήμα 5.10, δεξιά), για το δεδομένο αριθμό αξιολογήσεων και με χρήση μεταπροτύπων ο ΑΔΕΑ επιτυγχάνει τιμές της συνάρτησης $f_{mean} = 0.0214$, δηλαδή πολύ κοντά στη λύση. Είναι προφανές ότι, για μια μαθηματική συνάρτηση, το (σχεδόν αμελητέο) κόστος κατασκευής του μεταπροτύπου είναι συγκρίσιμο με το (πραγματικά αμελητέο) κόστος αξιολόγησης, σε αντίθεση με τα προβλήματα αεροδυναμικής.



Σχήμα 5.9: Ελαχιστοποίηση συνάρτησης Ackley. Σύγκριση πορείας σύγκλισης ΑΔΕΑ με έναν κλασικό ΕΑ. Ο οριζόντιος άξονας (αριθμός αξιολογήσεων) ουσιαστικά αντιστοιχεί στο υπολογιστικό κόστος.



Σχήμα 5.10: Ελαχιστοποίηση συνάρτησης Ackley. Έλεγχος της επίδρασης της προτεραιότητας (αριστερά) και της προσεγγιστικής προαξιολόγησης (δεξιά).

Πίνακας 5.1: Ελαχιστοποίηση συνάρτησης Ackley. Έλεγχος της σημασίας της προτεραιότητας. Οι υπολογισμοί με προτεραιότητα και τυχαία επιλογή γίνονται με το ίδιο υπολογιστικό κόστος.

	Με προτεραιότητα	Τυχαία Επιλογή
f_{mean}	0.8963	1.6939
f_{min}	0.1958	1.0416
f_{max}	1.4394	2.3727
s	0.3861	0.3447
t_0	8.4386	

Πρόβλημα Ελαχιστοποίησης Δύο Στόχων ZDT3

Η δεύτερη μαθηματική εφαρμογή αποβλέπει στην εύρεση του μετώπου Pareto του προβλήματος δύο στόχων

$$\min \begin{cases} f_1(\vec{x}) = x_1 \\ f_2(\vec{x}) = g(x_2, \dots, x_N)h(f_1(x_1), g(x_2, \dots, x_N)) \end{cases} \quad (5.15)$$

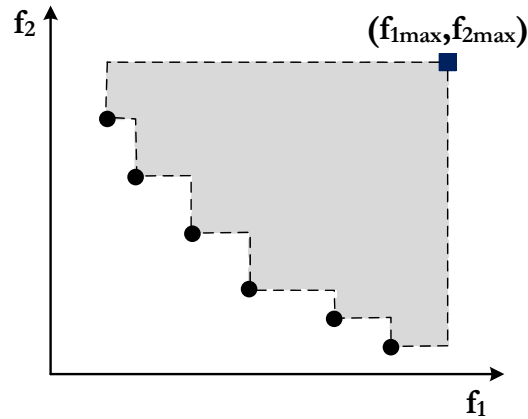
όπου

$$g(x_2, \dots, x_N) = 1 + 9 \sum_{i=2}^N x_i / (N - 1) \quad (5.16)$$

$$h(f_1, g) = 1 - \sqrt{f_1/g} - (f_1/g) \sin(10\pi f_1)$$

με $N = 30$ και $0 < x_i < 1$, $x_i \in [0, 1]$. Το μέτωπο προκύπτει αναλυτικά για $g(\vec{x}) = 1$ και είναι ασυνεχές στο χώρο των στόχων. Η συνάρτηση αυτή επιλέχθηκε προκειμένου να ελεγχθεί η ικανότητα του αλγορίθμου για εύρεση ενός ασυνεχούς μετώπου, αλλά και να μελετηθεί η αλληλεπίδραση των δόμων κατά τη διάρκεια της βελτιστοποίησης. Θέτοντας ως ανώτατο επιτρεπτό όριο αξιολογήσεων τις 25000, πραγματοποιήθηκαν 30 βελτιστοποιήσεις σε 18 επεξεργαστές, με πλέγμα ΑΔΕΑ 10×10 . Για κάθε βελτιστοποίηση υπολογίζεται ο δείκτης υπερόγκου [262] (σχήμα 5.11) με σημείο αναφοράς το $(f_1, f_2) = (5, 3)$. Ο δείκτης αυτός μετρά το χώρο στον οποίο το μέτωπο κυριαρχεί (δηλαδή όσο μεγαλύτερη τιμή έχει ο δείκτης τόσο καλύτερη είναι η προσέγγιση του μετώπου). Στον πίνακα 5.2 παρουσιάζονται οι μέσες τιμές του εν λόγω δείκτη από τις 30 βελτιστοποιήσεις και η σύγκριση τους μέσω ενός t-test. Η καλύτερη προσέγγιση του μετώπου Pareto από καθένα αλγόριθμο σε σύγκριση με το αναλυτικό μέτωπο φαίνονται στο σχήμα 5.12. Είναι εμφανές και αποδεικνύεται και από το στατιστικό test ότι ο ΑΔΕΑ επιτυγχάνει καλύτερη λύση για το δεδομένο αριθμό αξιολογήσεων.

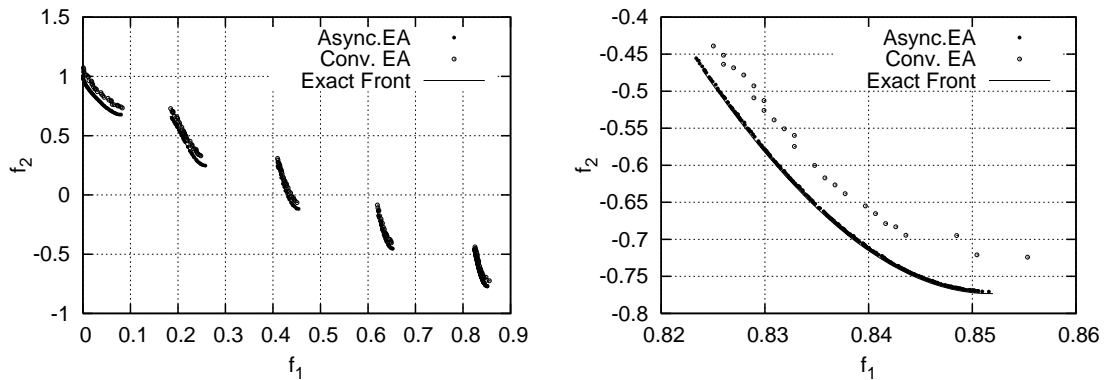
Η πορεία εξέλιξης του μετώπου (για την περίπτωση της καλύτερης προσέγγισης) φαίνεται στο σχήμα 5.13, όπου τυπώνεται η θέση του μετώπου των μη-κυριαρχούμενων λύσεων και των 25 πόλων μετά από 3000, 7000, 10000, 15000, 20000 και 25000 αξιολογήσεις. Ο αριθμός των μελών του μετώπου, για αυτές τις αξιολογήσεις, που προέρχονται από κάθε δόμο φαίνεται στο σχήμα 5.14, όπου είναι εμφανής η συμμετοχή όλων των δόμων (σε ποσοστό που αλλάζει κατά τη διάρκεια της βελτιστοποίησης) στη δημιουργία του τελικού μετώπου. Στην προκειμένη περίπτωση, μετά τις 25000 αξιολογήσεις, τα περισσότερα μέλη του μετώπου προέρχονται από τον 1ο δόμο. Τα μέλη του μετώπου που προέρχονται απ'αυτόν το δόμο φαίνονται στο σχήμα 5.15.



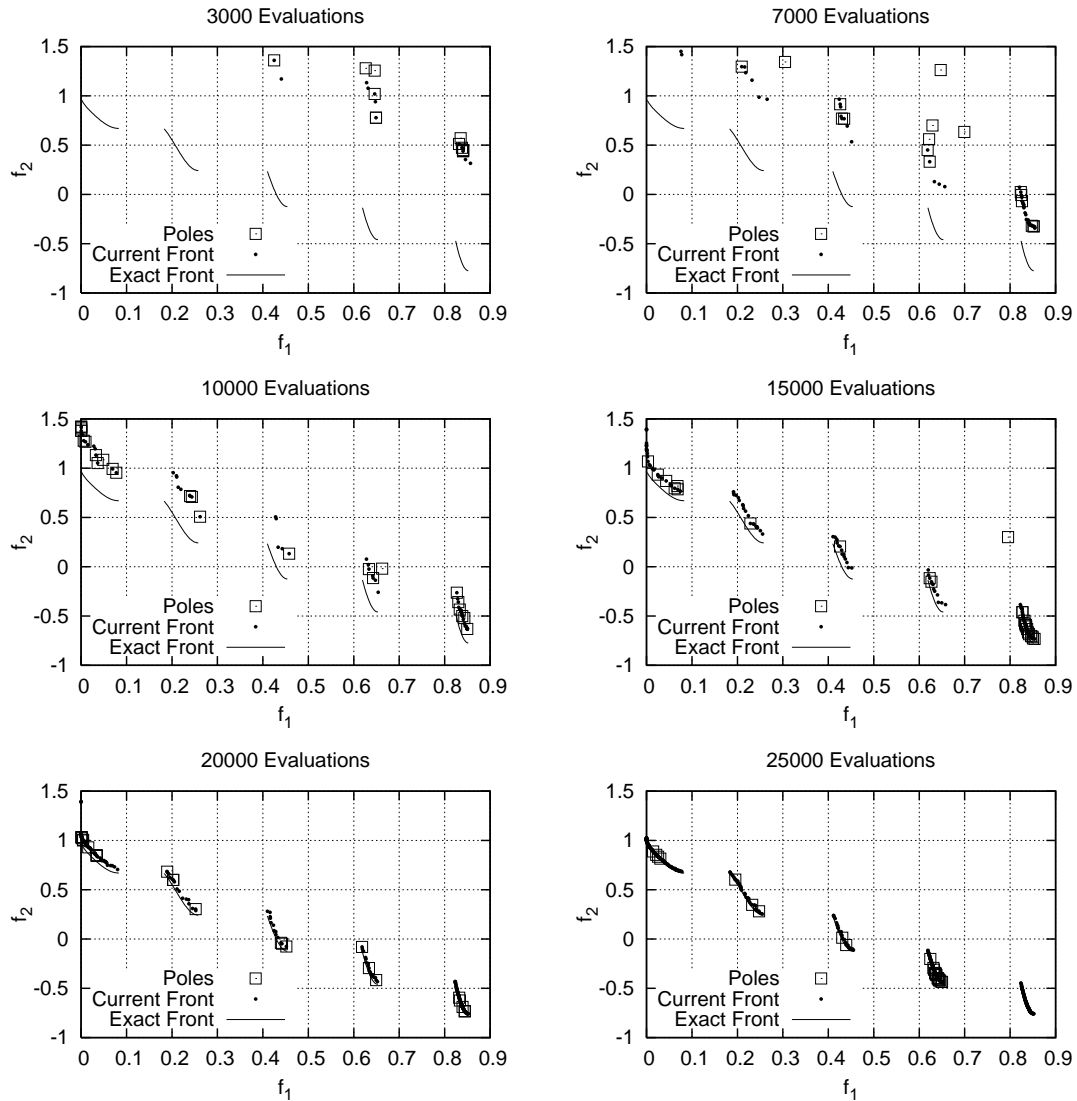
Σχήμα 5.11: Ορισμός δείκτη υπερόγκου I_H σε ένα εικονικό πρόβλημα δύο στόχων. Το άνω δεξιά όριο, (f_{1max}, f_{2max}) , του υπερόγκου καθορίζεται από το χρήστη. Εξ ορισμού, μεγάλη τιμή του I_H αντιστοιχεί σε καλύτερη προσέγγιση του μετώπου Pareto.

Πίνακας 5.2: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων ZDT3. Δείκτης υπερόγκου και t-test ανάμεσα στον ΑΔΕΑ και έναν κλασικό ΕΑ μετά από 25000 αξιολογήσεις.

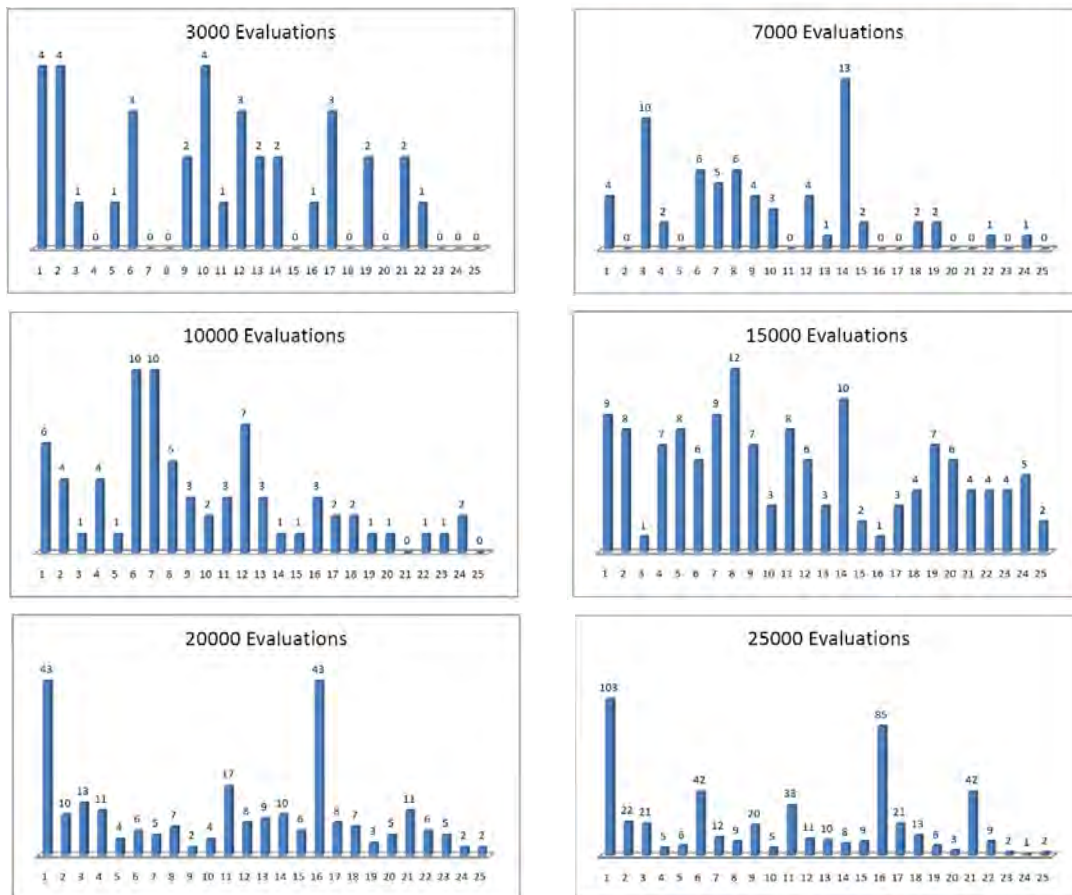
	ΑΔΕΑ	Κλασικός ΕΑ
$I_{H_{mean}}$	18.0318	17.8584
s	0.5106	0.4559
t_0	13.8750	



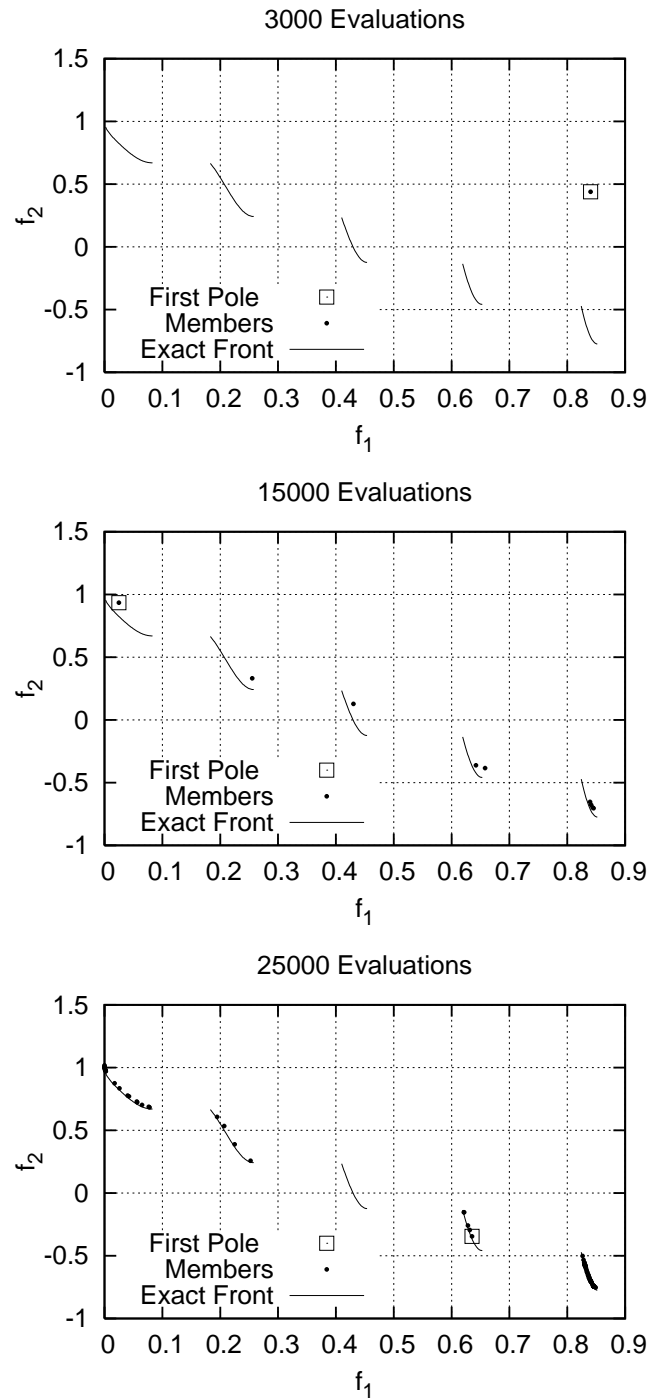
Σχήμα 5.12: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων ZDT3. Προσεγγίσεις μετώπου Pareto υπολογισμένο από τον ΑΔΕΑ και έναν κλασικό ΕΑ μετά 25000 αξιολογήσεις συγκρινόμενες με το ακριβές μέτωπο Pareto (αριστερά). Λεπτομέρεια του τελευταίου τμήματος του μετώπου (δεξιά).



Σχήμα 5.13: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων ZDT3. Πορεία μετώπου των μη-κυριαρχούμενων λύσεων κατά τη διάρκεια της βελτιστοποίησης. Με τετράγωνο φαίνονται οι θέσεις των πόλων.



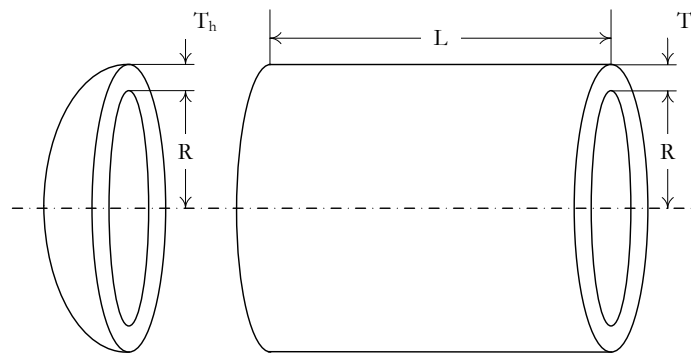
Σχήμα 5.14: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων ZDT3. Αριθμός των μελών του μετώπου των μη-κυριαρχούμενων λύσεων που προέρχονται από κάθε δήμο (από τους $5 \times 5 = 25$ συνολικά) μετά από 3000, 7000, 10000, 15000, 20000 και 25000 αξιολογήσεις.



Σχήμα 5.15: Πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων ZDT3. Μη-κυριαρχούμενα μέλη προερχόμενα από τον δήμο 1 και τον αντίστοιχο πόλο μετά από 3000, 15000 και 25000 αξιολογήσεις.

Σχεδιασμός Βέλτιστου Δοχείου Πίεσης

Η τελευταία εφαρμογή στις μαθηματικές συναρτήσεις σχετίζεται με τον υπό περιορισμούς σχεδιασμό ενός κυλινδρικού δοχείου πίεσης με ημισφαιρικά καπάκια (σχήμα 5.16). Το πρόβλημα αυτό παρουσιάστηκε και επιλύθηκε για πρώτη φορά το 1990 από τον Sandgren [217] με την τεχνική branch and bound. Λύσεις αυτού του προβλήματος παρουσιάζονται στη βιβλιογραφία με χρήση διαφόρων μεθόδων, όπως οι επανυζημένοι πολλαπλασιαστές Lagrange (ALM, [133]), παραλλαγές γενετικών αλγορίθμων (GeneAS, [66]) με πιθανοτικές επιλογές (GA, [57]), παραλλαγή της μεθόδου διαφορικής εξέλιξης (εDE, [230]) και μέθοδοι βασισμένες στη θεωρία σμήνους εντόμων (CPSO, [112]).



Σχήμα 5.16: Σχεδιασμός δοχείου πίεσης. Γεωμετρικά στοιχεία.

Στόχος είναι η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης

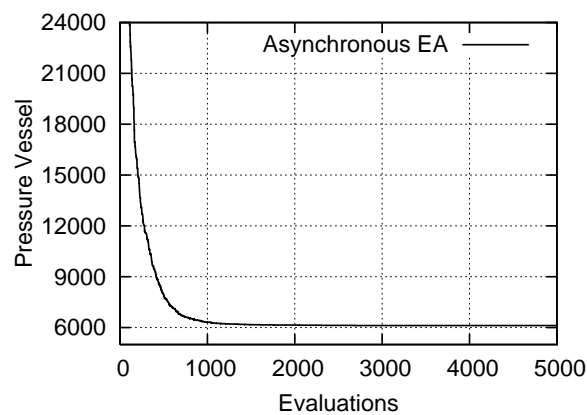
$$f(\vec{x}) = 0.6224\tilde{x}_1x_3x_4 + 1.7781\tilde{x}_2x_3^2 + 3.1661\tilde{x}_1^2x_4 + 19.84\tilde{x}_1^2x_3 \quad (5.17)$$

η οποία περιλαμβάνει το κόστος υλικού, μορφοποίησης και συγκόλλησης. Το πρόβλημα ορίζεται χρησιμοποιώντας $N = 4$ μεταβλητές σχεδιασμού, το πάχος του κυλινδρικού τμήματος $\tilde{x}_1 = T_s$, του κεφαλιού $\tilde{x}_2 = T_h$, την εσωτερική ακτίνα $x_3 = R$ και το μήκος του κυλινδρικού τμήματος $x_4 = L$. Οι δύο πρώτες μεταβλητές σχεδιασμού λαμβάνουν τιμές οι οποίες είναι ακέραια πολλαπλάσια των 0.0625 in που είναι και τα διαθέσιμα πάχη λαμαρινών, δηλ. $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = 0.0625(k_1, k_2)$. Ουσιαστικά ο ΑΔΕΑ υπολογίζει τις τιμές k_1, k_2 και x_3, x_4 με όρια $1 < k_{1,2} < 99$ και $10 < x_{3,4} < 200$. Τα $k_{1,2}$ πρέπει να είναι ακέραιες τιμές, κάτι που προφανώς δεν μπορεί να εγγυηθεί ο αλγόριθμος. Για το λόγο αυτό, στο λογισμικό αξιολόγησης, πριν τον υπολογισμό της συνάρτησης κόστους οι τιμές των k_1, k_2 που προέκυψαν από τον ΑΔΕΑ μετατρέπονται σε ακέραιες απαλείφοντας το δεκαδικό τους τμήμα. Επιπλέον, το πρόβλημα υπόκειται στους παρακάτω 4 γεωμετρικούς περιορισμούς

$$\begin{aligned} c_1(\vec{x}) &= -\tilde{x}_1 + 0.0193x_3 \leq 0 \\ c_2(\vec{x}) &= -\tilde{x}_2 + 0.00954x_3 \leq 0 \\ c_3(\vec{x}) &= -\pi x_3^2 x_4 - \frac{4}{3}\pi x_3^3 + 1296000 \leq 0 \\ c_4(\vec{x}) &= x_4 - 240 \leq 0 \end{aligned}$$

Για την επίλυση, οι υπολογισμοί-βελτιστοποιήσεις επαναλήφθηκαν 30 φορές, με ανώτατο όριο αξιολογήσεων τις 10000, για διάφορες διαστάσεις πλέγματος ΑΔΕΑ σε 20 επεξεργαστές. Η μέση σύγκλιση του αλγορίθμου αποτυπώνεται στο σχήμα 5.17 και αντιστοιχεί σε

$f_{mean} = 6116.008$, με βέλτιστη επιτυγχανόμενη τιμή την $f_{min} = 6059.7146$. Η σύγκριση του ΑΔΕΑ με τα αποτελέσματα άλλων μεθόδων στη βιβλιογραφία φαίνεται στον πίνακα 5.3. Διευκρινίζεται ότι οι τιμές των περιορισμών είναι στη μορφή $c_i(\vec{x}) \leq 0$, άρα η εμφάνιση θετικών ποσοτήτων υποδηλώνει παραβίαση του περιορισμού. Από τον πίνακα φαίνεται ότι η βέλτιστη λύση του ΑΔΕΑ είναι καλύτερη από τις περισσότερες λύσεις στη βιβλιογραφία και ελάχιστα χειρότερη μόνο αυτής της μεθόδου εDE, [230]. Εκτός από τη λύση αυτή καθαυτή σημαντική παράμετρος αποτελεί και ο αριθμός των αξιολογήσεων στον οποίο αυτή επιτεύχθηκε. Έτσι για τον ΑΔΕΑ και τη μέθοδο εDE απαιτούνται 10000 αξιολογήσεις σε αντίθεση με τις μεθόδους GA και CPSO που επιτυγχάνουν μεν αρκετά καλές λύσεις, αλλά απαιτούν 80000 και 200000 αντίστοιχα. Από την άμεση σύγκριση των ΑΔΕΑ και εDE, αποδεικνύεται ότι ο προτεινόμενος αλγόριθμος είναι καλύτερος, καθώς επιτυγχάνει συστηματικά καλές λύσεις από τις 2000 αξιολογήσεις σε αντίθεση με τις 5000 της μεθόδου εDE, [230].



Σχήμα 5.17: Σχεδιασμός δοχείου πίεσης. Μέση πορεία σύγκλισης του ΑΔΕΑ τις πρώτες 5000 αξιολογήσεις.

Πίνακας 5.3: Σχεδιασμός δοχείου πίεσης. Σύγκριση βέλτιστης λύσης ΑΔΕΑ (από τις 25) με τις βέλτιστες λύσεις άλλων μεθόδων της βιβλιογραφίας.

Μέθοδος Έτος	ΑΔΕΑ 2008	CPSO 2007	εDE 2006	GA 2002	GeneAS 1997	ALM 1994	B&B 1988
\tilde{x}_1	0.8125	0.8125	N/A	0.8125	0.9375	1.125	1.125
\tilde{x}_2	0.4375	0.4375	N/A	0.4375	0.5000	0.625	0.625
x_3	42.0984	42.0912	N/A	42.0973	48.3290	58.291	47.700
x_4	176.6366	176.7465	N/A	176.654	112.679	43.690	117.701
$c_1(\vec{x})$	$-4.3 \cdot 10^{-8}$	-0.000139	N/A	-0.00002	-0.00475	0.000016	-0.2043
$c_2(\vec{x})$	-0.03588	-0.035949	N/A	-0.03589	-0.03894	-0.06890	-0.1699
$c_3(\vec{x})$	-0.000052	-116.3827	N/A	-27.8860	-3652.87	-21.2201	54.226
$c_4(\vec{x})$	-63.3634	-63.2535	N/A	-63.3459	-127.321	-196.310	-122.299
$f(\vec{x})$	6059.7146	6061.0777	6059.7143	6059.9463	6410.3811	7198.0428	8129.1036

5.4.2 Σχεδιασμός 2Δ Πτερύγωσης Συμπιεστή

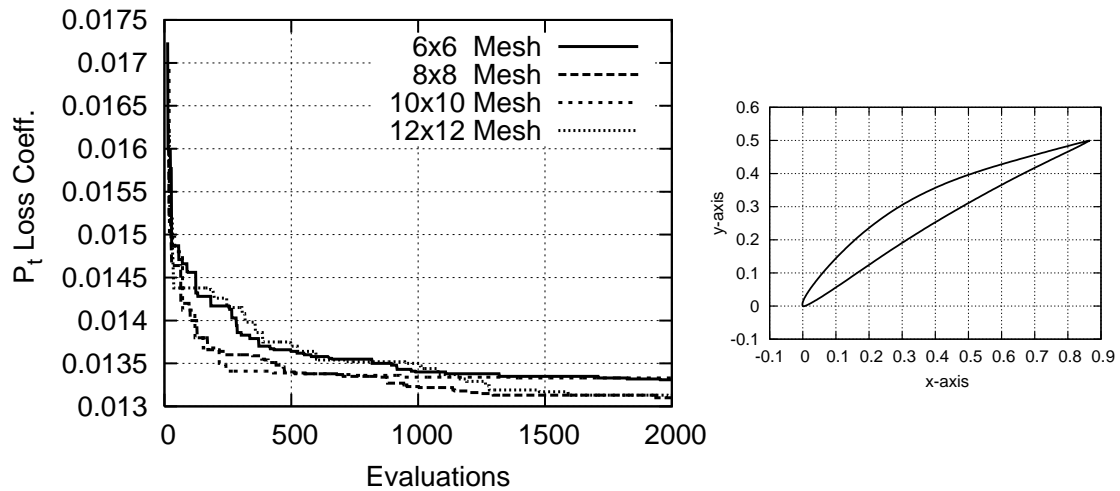
Η πρώτη μη-μαθηματική περίπτωση σχεδιασμού αφορά στο σχεδιασμό 2Δ πτερύγωσης συμπιεστή με στόχο την ελαχιστοποίηση του συντελεστή απωλειών ολικής πίεσης $\omega = (p_{t_1} - p_{t_2})/0.5\rho_1 V_1^2$, όπου p_t είναι η ολική πίεση, ρ η πυκνότητα και V η ταχύτητα. Οι δείκτες 1 και 2 υποδηλώνουν την είσοδο και την έξοδο της πτερύγωσης, αντίστοιχα. Ο σχεδιασμός γίνεται για ισεντροπικό Mach εξόδου της ροής $M_{2,is} = 0.45$, γωνία εισόδου της ροής $\alpha_1 = 47^\circ$ και αριθμό Reynolds βασισμένο στη χορδή $Re_c = 8.4 \cdot 10^5$. Η πτερύγωση έχει σταθερή γωνία κλίσης 30° , λόγο βήματος προς χορδή ίσο 0.68 και $AVDR = 0.89$. Η γεωμετρία της πτερύγωσης παραμετροποιείται με δύο καμπύλες Bézier των 9 σημείων ελέγχου (μια για κάθε πλευρά). Τα σημεία στην ακμή πρόσπτωσης και εκφυγής παραμένουν σταθερά, ενώ τα υπόλοιπα μετακινούνται κατά την κάθετη στη χορδή διεύθυνση. Ως λογισμικό αξιολόγησης (το φερόμενο ως 'ακριβές πρότυπο'), χρησιμοποιείται το λογισμικό επίλυσης των εξισώσεων Navier–Stokes με προσταθεροποίηση που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 2 με χρήση του μοντέλου τύρβης Spalart–Allmaras. Για επίλυση με θεώρηση χαμηλών αριθμών Reynolds οι διαστάσεις του υπολογιστικού πλέγματος είναι της τάξης των 20000 κόμβων και 40000 τριγωνικών στοιχείων. Προκειμένου να αποφευχθεί η δημιουργία πολύ λεπτών, μη-αποδεκτών αεροτομών τίθενται τρεις γεωμετρικοί περιορισμοί πάχους (T)

$$T(0.30c) \geq 0.08c, \quad T(0.60c) \geq 0.07c, \quad T(0.90c) \geq 0.01c \quad (5.18)$$

με c το μήκος της χορδής. Κατά την επιβολή των περιορισμών βάση της σχέσης 5.3 τίθεται $\alpha = 3$ και $c_j^{dead}/c_1^{thres} = 0.8$. Ο έλεγχος των γεωμετρικών περιορισμών γίνεται μετά την παραμετροποίηση και δημιουργία της νέας υποψήφιας λύσης, ώστε αν κάποιος απ'αυτούς παραβιάζεται να μην προχωρήσει στην ακριβή-χρονοβόρα ανάλυση με το λογισμικό επίλυσης. Αυτός ο έλεγχος, έχει ως αποτέλεσμα το συνολικό κόστος ανά αξιολόγηση να κυμαίνεται από κάτι πολύ μικρό μέχρι το κόστος της επίλυσης των εξισώσεων Navier–Stokes. Βέβαια, και το ίδιο το κόστος της επίλυσης των εξισώσεων Navier–Stokes ενδέχεται να διαφέρει από αξιολόγηση σε αξιολόγηση ανάλογα με τις διαστάσεις του υπολογιστικού πλέγματος και τη γεωμετρία της πτερύγωσης (λ.χ. 'περίεργη' γεωμετρία πτερύγωσης θα απαιτεί περισσότερες επαναλήψεις του επιλύτη Jacobi για τη σύγκλιση). Επιπλέον, των γεωμετρικών περιορισμών, τίθεται ένας επιπλέον περιορισμός σχετικά με τη γωνία στροφής της ροής (μεγαλύτερη από 22°). Προφανώς ο έλεγχος αυτού του περιορισμού γίνεται με την ολοκλήρωση της επίλυσης των εξισώσεων Navier–Stokes.

Σε πρώτη φάση, στοχεύοντας στον έλεγχο της επίδρασης του πλέγματος βάσης του ΑΔΕΑ, η βελτιστοποίηση επαναλαμβάνεται 4 φορές, σε 20 επεξεργαστές, για διαστάσεις πλεγμάτων 6×6 , 8×8 , 10×10 , 12×12 και όριο αξιολογήσεων τις 2000. Η πορεία σύγκλισης σε κάθε περίπτωση, καθώς και η βέλτιστη γεωμετρία της πτερύγωσης φαίνονται στο σχήμα 5.18, ενώ στον πίνακα 5.4 φαίνεται η προκύπτουσα τιμή του συντελεστή απωλειών (βέλτιστη λύση) για κάθε διάσταση πλέγματος. Στην προκειμένη περίπτωση, η καλύτερη τιμή προκύπτει από διάσταση πλέγματος 8×8 , ενώ πολύ κοντινή είναι και η τιμή της λύσης για πλέγμα 12×12 .

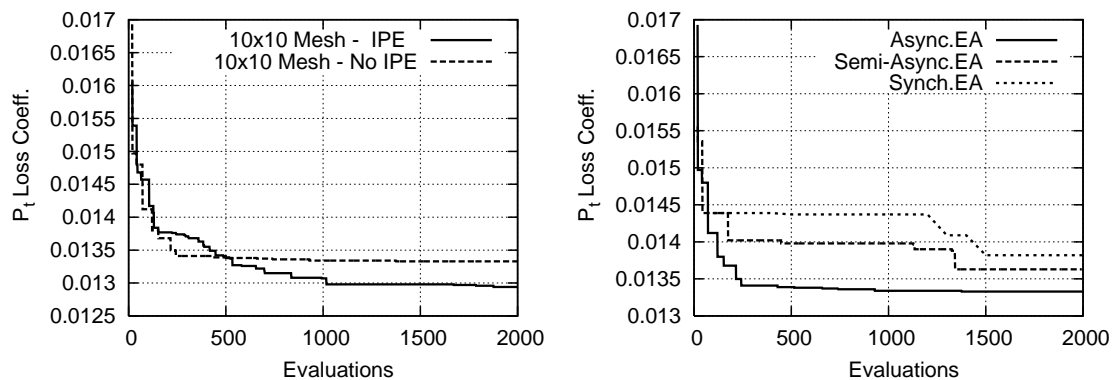
Η βέλτιστη λύση είναι ακόμα καλύτερη αν χρησιμοποιηθούν μεταπρότυπα μετά τις 200 αξιολογήσεις, σχήμα 5.19 (αριστερά). Ήδη από τις 1000 αξιολογήσεις ο αλγόριθμος με χρήση των μεταπρωτύπων επιτυγχάνει πολύ καλύτερη λύση ($\omega = 0.01298$) απ'ότι χωρίς αυτά σε διπλάσιο αριθμό αξιολογήσεων. Στο ίδιο σχήμα, 5.19 (δεξιά), ελέγχεται η απόδοση του ΑΔΕΑ σε σύγκριση με τις προηγούμενες παραλλαγές ΔΕΑ (σύγχρονου και ημι-ασύγχρονου), όπου φαίνεται ότι επιτυγχάνει πολύ καλύτερη βέλτιστη λύση.



Σχήμα 5.18: Σχεδιασμός 2Δ περύγωσης συμπίεστή. Πορεία σύγκλισης ΑΔΕΑ για διάφορες διαστάσεις πλέγματος βάσης (αριστερά) και βέλτιστη περύγωση (δεξιά).

Πίνακας 5.4: Σχεδιασμός 2Δ περύγωσης συμπίεστή. Έλεγχος της επίδρασης του πλέγματος βάσης που χρησιμοποιεί ο ΑΔΕΑ στη βέλτιστη λύση.

Πλέγμα ΑΔΕΑ	ω
6×6	0.01331
8×8	0.01310
10×10	0.01333
12×12	0.01312



Σχήμα 5.19: Σχεδιασμός 2Δ περύγωσης συμπίεστή. Έλεγχος της επίδρασης της χρήσης μεταπροτύπων (αριστερά) και σύγκριση ΑΔΕΑ με Ημι-Ασύγχρονου και Σύγχρονου ΔΕΑ (δεξιά).

Η σύγκριση του ΑΔΕΑ με ένα σύγχρονο ΕΑ όσον αφορά στον απαιτούμενο χρόνο για τη βελτιστοποίηση παρουσιάζεται στον πίνακα 5.5. Για τη σύγκριση αυτή, αντί του επιλύτη των εξισώσεων Navier–Stokes χρησιμοποιήθηκε μια ολοκληρωματική μέθοδος του οριακού

στρώματος, [74]. Χρησιμοποιούνται 8 επεξεργαστές και τίθεται ανώτατο όριο 5000 αξιολογήσεων. Η βελτιστοποίηση επαναλαμβάνεται για τρεις διαφορετικές γεννήτριες τυχαίων αριθμών (RNG) και τρεις διαστάσεις πλέγματος του ΑΔΕΑ. Για το σύγχρονο ΕΑ, οι διαστάσεις του πληθυσμού γονέων και απογόνων δίνονται ως πολλαπλάσια του 8 ($(\mu, \lambda) = (64, 128)$) ώστε να εξασφαλιστεί θεωρητικά η αξιοποίηση όλων των επεξεργαστών (και άρα να εξαλειφθούν προβλήματα συγχρονισμού). Σε κάθε περίπτωση, η βελτιστοποίηση με τον ΑΔΕΑ ολοκληρώνεται ταχύτερα και οδηγεί, για περίπου σταθερό αριθμό αξιολογήσεων σε καλύτερη λύση από αυτήν του σύγχρονου ΕΑ. Οι διαφορές στον αριθμό των αξιολογήσεων οφείλονται στην παρουσία περιορισμών οι οποίες (όπως προαναφέρθηκε) όταν δεν ικανοποιούνται ακυρώνουν την επακόλουθη αξιολόγηση μέσω της πρόλεξης του πεδίου ροής (καταγράφονται μόνο οι επιτυχείς αξιολογήσεις). Ο μικρότερος αριθμός αξιολογήσεων για τον ΑΔΕΑ (περισσότερες αποτυχημένες λύσεις) πιθανόν αποτελεί ένδειξη καλύτερης εξερεύνησης/ανίχνευσης του χώρου των μεταβλητών σχεδιασμού.

Πίνακας 5.5: Σχεδιασμός 2Δ πτερύγωσης συμπίεστη. Σύγκριση απαιτούμενου χρόνου βελτιστοποίησης μεταξύ ΑΔΕΑ και ενός κλασικού-σύγχρονου ΕΑ.

		RNG1	RNG2	RNG3
		Αξιολ./Χρόνος	Αξιολ./Χρόνος	Αξιολ./Χρόνος
Σύγχρονος ΕΑ	(64, 128)	4864 / 31	4845 / 29.5	4965 / 30
ΑΔΕΑ	8×8	4758 / 28	4728 / 27.5	4802 / 28
	10×10	4735 / 27.5	4751 / 28	4758 / 28.5
	12×12	4705 / 28	4750 / 27.5	4732 / 28

Τέλος, η επιτάχυνση από την παράλληλη επεξεργασία φαίνεται στον πίνακα 5.6. Για την περίπτωση πλέγματος ΑΔΕΑ 10×10, οι υπολογισμοί επαναλήφθηκαν με χρήση 4, 6, 8, 15 και 24 επεξεργαστών. Ο απαιτούμενος χρόνος για την ολοκλήρωση της βελτιστοποίησης και ο αριθμός των αξιολογήσεων φαίνονται επίσης στον πίνακα. Για τη μέτρηση της επιτάχυνσης λόγω παραλληλίας θεωρείται ότι ο χρόνος της βελτιστοποίησης σε έναν επεξεργαστή ισούται με $53.5 \times 4 = 214 \text{ min}$ κι ότι ο αριθμός των αξιολογήσεων είναι ίδιος σε όλες τις περιπτώσεις (παρά τις μικρές διαφορές που στην πραγματικότητα εμφανίζονται). Έτσι, η παράλληλη επιτάχυνση από τη χρήση του ΑΔΕΑ είναι τάξης του 94% για τους 24 επεξεργαστές. Προφανώς η τιμή αυτή θα ήταν ακόμη μεγαλύτερη αν το υπολογιστικό κόστος ανά αξιολόγηση ήταν πολύ μεγαλύτερο (λ.χ. υπολογισμοί με λογισμικό αξιολόγησης τον επιλύτη εξισώσεων Navier–Stokes).

Πίνακας 5.6: Σχεδιασμός 2Δ πτερύγωσης συμπίεστη. Υπολογισμός χρόνου και παράλληλης επιτάχυνσης του ΑΔΕΑ με βάση τον αριθμό των επεξεργαστών.

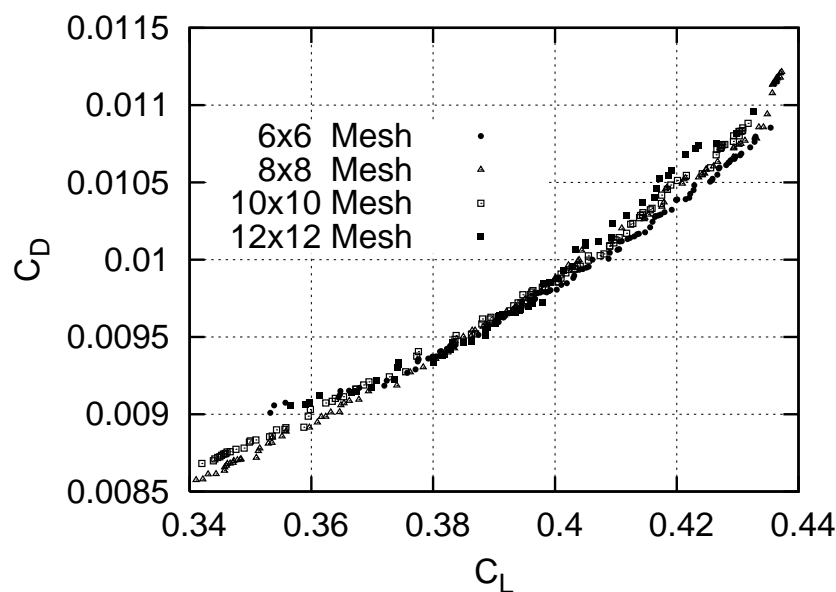
CPUs	Χρόνος (min)	Αξιολογήσεις	Parallel Speed-up
1	214	-	-
4	53.5	4752	100%
6	38	4750	93.33%
8	28	4758	95%
15	15	4758	95.33%
24	9.5	4741	93.8%

5.4.3 Σχεδιασμός 2Δ Μεμονωμένης Αεροτομής

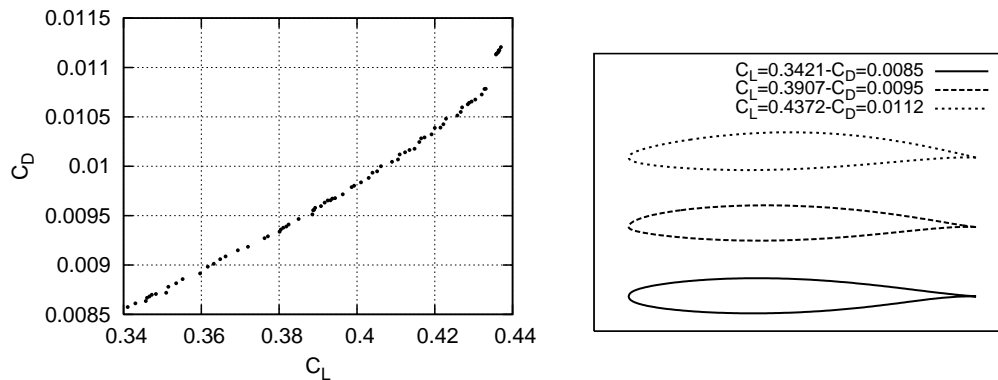
Η επόμενη περίπτωση αφορά στο σχεδιασμό μεμονωμένης αεροτομής για ελαχιστοποίηση του συντελεστή οπισθέλκουσας και μεγιστοποίηση του συντελεστή άνωσης. Οι συνθήκες επ'άπειρον ροής είναι $M_\infty = 0.15$, $\alpha_\infty = 6^\circ$, $Re_c = 3 \times 10^6$. Η αεροτομή παραμετροποιείται με δύο καμπύλες Bézier με 7 σημεία ελέγχου η καθεμιά. Η βελτιστοποίηση γίνεται με λογισμικό επίλυσης των εξισώσεων Navier–Stokes με προσταθεροποίηση χαμηλών αριθμών Mach και χρήση του μοντέλου τύρβης Spalart–Allmaras χαμηλών αριθμών Reynolds, υπό τους περιορισμούς πάχους

$$T(0.15c) \geq 0.06c, \quad T(0.35c) \geq 0.08c, \quad T(0.60c) \geq 0.07c, \quad T(0.85c) \geq 0.02c \quad (5.19)$$

Ο τρόπος χειρισμού των περιορισμών είναι όμοιος με αυτόν που περιγράφηκε νωρίτερα. Και σε αυτή την περίπτωση ελέγχεται η επίδραση του πλέγματος ΑΔΕΑ στη λύση. Οι υπολογισμοί γίνονται σε 24 επεξεργαστές με ανώτατο όριο αξιολογήσεων 2000. Οι προσεγγίσεις του μετώπου Pareto για κάθε μια διάσταση πλέγματος ΑΔΕΑ φαίνονται στο σχήμα 5.20. Από το σχήμα αυτό δεν είναι προφανές ποιά διάσταση πλέγματος είναι καλύτερη. Αν από αυτές τις λύσεις απομονωθούν οι μη-κυριαρχούμενες ('Pareto των Pareto') το προκύπτον μέτωπο είναι αυτό του σχήματος 5.21 (αριστερά). Τρεις λύσεις (γεωμετρικές αεροτομών) από αυτό φαίνονται στη δεξιά πλευρά του σχήματος 5.21. Αυτό το μέτωπο αποτελείται από τα 150 μέλη από τα οποία τα περισσότερα προέρχονται από το πλέγμα διάστασης 6×6 , πίνακας 5.7. Από το αποτέλεσμα αυτό, αποδεικνύεται ότι και οι μικρές διαστάσεις πλέγματος οδηγούν σε ικανοποιητικά αποτελέσματα. Προφανώς το συμπέρασμα αυτό δεν είναι γενικό, εξαρτάται από το εξεταζόμενο πρόβλημα και επηρεάζεται από τη στοχαστικότητα του αλγορίθμου. Έτσι, με βάση και τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας, δεν μπορεί να εξαχθεί ακριβές συμπέρασμα σχετικά με την επίδραση της διάστασης του πλέγματος βάσης του ΑΔΕΑ στη λύση.



Σχήμα 5.20: Σχεδιασμός 2Δ μεμονωμένης αεροτομής. Προσεγγίσεις μετώπου μη-κυριαρχούμενων λύσεων για διάφορες διαστάσεις πλέγματος ΑΔΕΑ.



Σχήμα 5.21: Σχεδιασμός 2Δ μεμονωμένης αεροτομής. Μέτωπο μη-κυριαρχούμενων λύσεων από τη μετεπεξεργασία των προηγούμενων μετώπων μη-κυριαρχούμενων λύσεων ανά διάσταση πλέγματος (αριστερά) και τρεις γεωμετρίες αεροτομής (δεξιά).

Πίνακας 5.7: Σχεδιασμός 2Δ μεμονωμένης αεροτομής. Προέλευση μελών του μετώπου των μη-κυριαρχούμενων λύσεων που προέκυψε από τη μετεπεξεργασία των μετώπων για διάφορες διαστάσεις πλέγματος βάσης ΑΔΕΑ.

Πλέγμα ΑΔΕΑ	Αριθμός Μελών
6 × 6	64
8 × 8	56
10 × 10	1
12 × 12	19

5.4.4 Σχεδιασμός Μικρού Υπερηχητικού Αεροσκάφους

Η τελευταία εφαρμογή του ΑΔΕΑ, αφορά στο σχεδιασμό μικρού υπερηχητικού αεροσκάφους (Supersonic Business Jet-SBJ). Πρόκειται για ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης που συνδυάζει πολλές επιστημονικές περιοχές (MDO), όπου σε κάθε μια από αυτές χρησιμοποιούνται εμπειρικά μοντέλα υπολογισμού. Για παράδειγμα, οι υπολογισμοί αεροδυναμικών μεγεθών (συντελεστές άνωσης και οπισθέλκουσας) προέρχονται από εμπειρικές σχέσεις αντί της επίλυσης των εξισώσεων ροής γύρω από το αεροσκάφος. Η ανάλυση επιδόσεων του αεροσκάφους περιγράφεται αναλυτικά στο παράρτημα Δ'. Οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι 12 και αφορούν στοιχεία της πτήσης, την ποσότητα καυσίμου και γεωμετρικά χαρακτηριστικά της πτέρυγας και του ουραίου πτερυγίου. Ειδικότερα, για την ευθεία πτήση μεταβλητές αποτελούν ο αριθμός Mach και το υψόμετρο πτήσης. Για την πτέρυγα, η επιφάνειά της σε κάτοψη, οι γωνίες οπισθόκλισης στην ακμή προσβολής και εκφυγής, η εκλέπτυνση και ο λόγος μέγιστου πάχους προς χορδή. Για το κάθετο ουραίο πτερύγιο, οι γωνίες οπισθόκλισης στη ακμή προσβολής και εκφυγής, η εκλέπτυνση και ο λόγος μέγιστου πάχους προς χορδή. Τέλος, η σχετική με το καύσιμο μεταβλητή σχεδιασμού είναι το συνολικό του βάρους. Τα όρια τους παρουσιάζονται στον πίνακα Δ'.1 του παραρτήματος Δ'.

Στην εφαρμογή αυτή, αντιμετωπίζονται τρία προβλήματα σχεδιασμού:

1. Ελαχιστοποίηση βάρους απογείωσης (πρόβλημα ενός στόχου)
2. Μεγιστοποίηση εμβέλειας (πρόβλημα ενός στόχου)
3. Μεγιστοποίηση εμβέλειας με ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση βάρους απογείωσης (πρόβλημα δύο στόχων)

υπό τους περιορισμούς του μήκους απογείωσης και της ταχύτητας προσέγγισης,

$$\begin{aligned} BFL &\leq 2000 \text{ m} \\ V_{appr} &\leq 72 \text{ m/sec} \end{aligned} \quad (5.20)$$

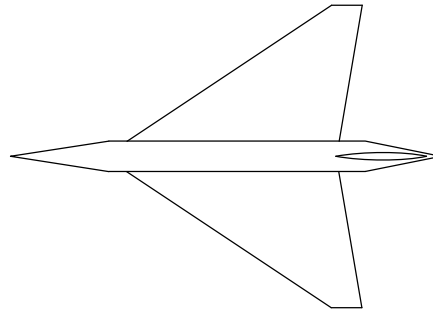
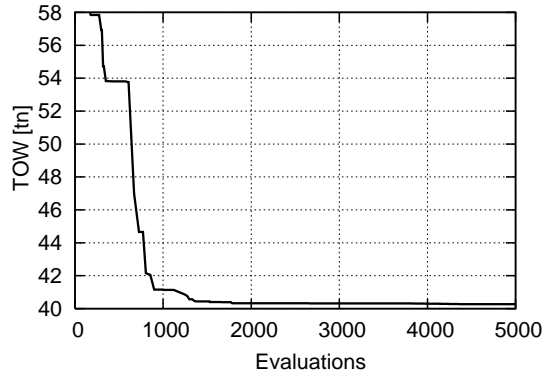
Κατά περίπτωση, ως επιπλέον περιορισμοί τίθενται και η εμβέλεια ή το βάρος απογείωσης. Για παράδειγμα, κατά την ελαχιστοποίηση του βάρους απογείωσης, επιθυμείται η διατήρηση της εμβέλειας πάνω από κάποια τιμή. Αντίστοιχα, κατά τη μεγιστοποίηση της εμβέλειας το βάρος δεν πρέπει να υπερβαίνει μια προκαθορισμένη τιμή.

Οι υπολογισμοί-βελτιστοποιήσεις έχουν επαναληφθεί 30 φορές ανά περίπτωση σχεδιασμού, με διάφορες διαστάσεις πλέγματος βάσης ΑΔΕΑ (8×8, 8×10, 10×10), σε 10 και 20 επεξεργαστές. Στα σχήματα που ακολουθούν φαίνονται μόνο οι βέλτιστες λύσεις για κάθε περίπτωση.

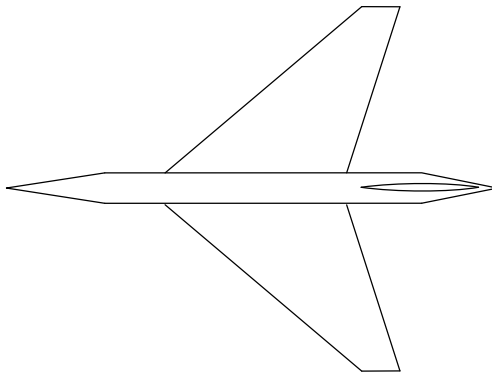
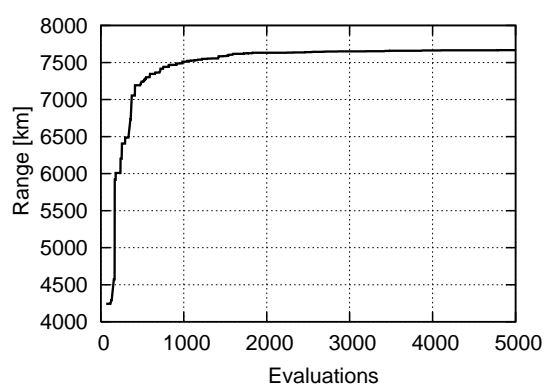
Πιο συγκεκριμένα, κατά την ελαχιστοποίηση του βάρους απογείωσης, με τον επιπλέον περιορισμό η εμβέλεια να είναι μεγαλύτερη των 6000 km, η βέλτιστη λύση είναι 40265.7 kg. Η πορεία σύγκλισης του ΑΔΕΑ και η γραφική απεικόνιση του προκύπτοντος-βέλτιστου αεροσκάφους φαίνονται στο σχήμα 5.22. Τα αντίστοιχα αποτελέσματα για τη μεγιστοποίηση της εμβέλειας, με επιπλέον περιορισμό το βάρος απογείωσης να μην ξεπερνά τα 70000 kg, παρουσιάζονται στο σχήμα 5.23. Οι τιμές των επιδόσεων των αεροσκαφών για τις δύο αυτές περιπτώσεις σχεδιασμού ενός στόχου αποτυπώνονται στον πίνακα 5.8. Από την οπτική παρατήρηση των κατόψεων των δύο αεροσκαφών, δεξιά πλευρά σχημάτων 5.22 και 5.23, παρατηρείται ότι το αεροσκάφος για ελάχιστο βάρος απογείωσης έχει πτέρυγα 'σχεδόν' δέλτα (delta wing) και σχετικά μικρό μήκος, σε αντίθεση με το αεροσκάφος για μέγιστη εμβέλεια που έχει μεγαλύτερο μήκος και βελοειδή πτέρυγα (arrow wing). Αυτό το συμπέρασμα αφορά το συγκεκριμένο πρόβλημα σχεδιασμού που αντιμετωπίζεται με το δεδομένο αλγόριθμο υπολογισμού επιδόσεων και δεν γενικεύεται για όλα τα αεροσκάφη. Τέλος, το μέτωπο Pareto από βελτιστοποίηση δύο στόχων παρουσιάζεται στο σχήμα 5.23. Σε αυτό, τα δύο ακραία σημεία του πρακτικά αντιστοιχούν στις δύο λύσεις που ελήφθησαν από τις προηγηθείσες επιλύσεις των δύο προβλημάτων ενός στόχου.

Πίνακας 5.8: Σχεδιασμός μικρού υπερηχητικού αεροσκάφους (SBJ). Παρουσίαση επιδόσεων αεροσκαφών που προέκυψαν επιλύοντας προβλήματα ενός στόχου, της ελαχιστοποίησης του βάρους απογείωσης και (χωριστά) της μεγιστοποίησης της εμβέλειας.

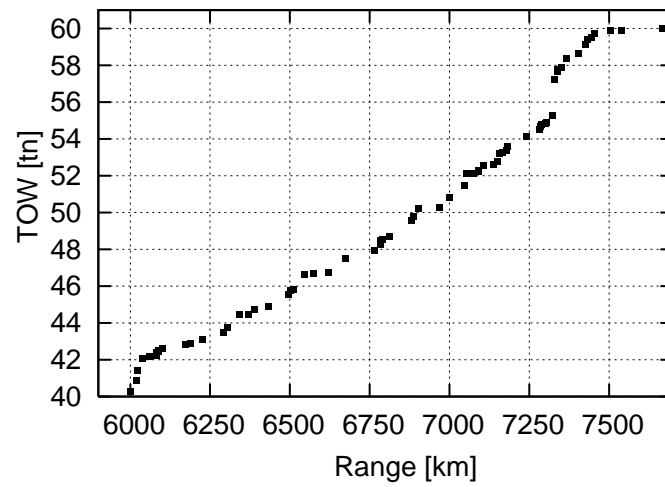
	Ελαχιστοποίηση Βάρους Απογείωσης	Μεγιστοποίηση Εμβέλειας
<i>TOW</i> [kg]	40265.7	59797.4
<i>R</i> [km]	6000.61	7667.3
<i>V_{appr}</i> [m/s]	71.99	71.98
<i>BFL</i> [m]	1615.5	1999.25



Σχήμα 5.22: Σχεδιασμός μικρού υπερηχητικού αεροσκάφους (SBJ). Σχεδιασμός ενός στόχου, της ελαχιστοποίησης του βάρους απογείωσης. Πορεία σύγκλισης ΑΔΕΑ (αριστερά) και κάτοψη προκύπτοντος αεροσκάφους (δεξιά).



Σχήμα 5.23: Σχεδιασμός μικρού υπερηχητικού αεροσκάφους (SBJ). Σχεδιασμός ενός στόχου, της μεγιστοποίησης της εμβέλειας. Πορεία σύγκλισης ΑΔΕΑ (αριστερά) και κάτοψη προκύπτοντος αεροσκάφους (δεξιά).



Σχήμα 5.24: Σχεδιασμός μικρού υπερηχητικού αεροσκάφους (SBJ). Μέτωπο Pareto που υπολογίστηκε όταν ως στόχοι ετέθησαν η μεγιστοποίηση της εμβέλειας και η ελαχιστοποίηση του βάρους απογείωσης.

Κεφάλαιο 6

Επίλογος—Συμπεράσματα

Η παρούσα διδακτορική διατριβή επικεντρώθηκε στην ανάπτυξη και πιστοποίηση μεθόδων και λογισμικού για την ανάλυση και το σχεδιασμό–βελτιστοποίηση αεροδυναμικών μορφών σε υψηλές και χαμηλές ταχύτητες ροής, μέσω προσταθεροποίησης χαμηλών αριθμών Mach. Ένας από τους στόχους που εξαρχής τέθηκε ήταν να μπορούν να καλύπτονται, με ενιαίο λογισμικό, όλες οι περιπτώσεις ροής, από χαμηλές υποηχητικές (σχεδόν ασυμπίεστες) ως και υπερηχητικές. Το λογισμικό αυτό βασίστηκε στην τεχνική της χρονοπροέλασης (time–marching) εκμεταλλευόμενο πλήρως την εμπειρία στη διαχείριση των υπερβολικών συστημάτων των εξισώσεων ροής και το προϋπάρχον στο ΕΘΣ/ΕΜΠ λογισμικό.

Κατεβλήθη προσπάθεια ώστε οι παρουσιαζόμενες εφαρμογές να περιλαμβάνουν ευρύ φάσμα περιπτώσεων χρονικά μόνιμων ή μη–μόνιμων ροών σε πτερυγώσεις στροβιλομηχανών, αγωγούς, μεμονωμένες αεροτομές ή γύρω από ολόκληρο αεροσκάφος καθώς και τη μοντελοποίηση περιστατικού πυρκαγιάς με καπνό σε κλειστούς χώρους.

Από την πλευρά της ανάπτυξης μεθόδων σχεδιασμού–βελτιστοποίησης, παρουσιάστηκαν αιτιοκρατικές μέθοδοι βασισμένες στην κλίση της συνάρτησης κόστους, η οποία υπολογίζεται με χρήση συζυγών τεχνικών και την υπόψη προσταθεροποίηση χαμηλών αριθμών Mach, αλλά και στοχαστικές μέθοδοι προτείνοντας νέες διατυπώσεις παράλληλων ασύγχρονων Εξελικτικών Αλγορίθμων (ΕΑ). Το σχετικό λογισμικό που αναπτύχθηκε εφαρμόστηκε σε προβλήματα σχεδιασμού–βελτιστοποίησης 2Δ πτερυγώσεων συμπίεστων και μεμονωμένων αεροτομών, στο σχεδιασμό μικρού επιβατικού υπερηχητικού αεροσκάφους με έναν ή δύο στόχους και μια σειρά μαθηματικών συναρτήσεων από τη σχετική βιβλιογραφία. Στα παρουσιαζόμενα προβλήματα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης, ως λογισμικό αξιολόγησης χρησιμοποιείται το λογισμικό επίλυσης των εξισώσεων ροής με προσταθεροποίηση χαμηλών αριθμών Mach.

Σημαντική παράμετρος σε όλες τις εφαρμογές είναι η χρήση της πολυεπεξεργασίας. Η χρήση της ήταν πραγματικά επιβεβλημένη για την ανάλυση προβλημάτων μεγάλης κλίμακας με υψηλές απαιτήσεις σε μνήμη και χρόνο εκτέλεσης. Επιπλέον, στοχεύει στη μείωση του πραγματικού χρόνου ανάλυσης (λ.χ για χρονικά μη–μόνιμες ροές) ή σχεδιασμού όπου εξετάζονταν–επιλύονταν πολλές υποψήφιες λύσεις μέχρι τον εντοπισμό της βέλτιστης.

Για τους υπολογισμούς που παρουσιάστηκαν στη διατριβή χρησιμοποιήθηκε η υπολογιστική πλατφόρμα της Μονάδας Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης του ΕΘΣ/ΕΜΠ η οποία αποτελείται από τρεις συστοιχίες διασυνδεδεμένων επεξεργαστών.

Η πρώτη συστοιχία υπολογιστών περιλαμβάνει 22 κόμβους Pentium 4 (32bit, 35 πυρήνες) και συνολική μνήμη RAM 35GB. Η δεύτερη συστοιχία αποτελείται από 32 κόμβους (64bit, Pentium 4 και Xeon, 80 πυρήνες) και συνολική μνήμη 105GB. Η τρίτη συστοιχία βασίζεται σε τεχνολογία blade servers (DELL Poweredge) και αποτελείται από 22 διεπεξεργαστικούς κόμβους (64bit, 2 Quad Core Xeon ανά κόμβο, 174 πυρήνες σύνολο) και συνολική μνήμη 256GB. Όλες οι συστοιχίες φέρουν λειτουργικό σύστημα Linux (Fedora Core 7 οι δύο πρώτες, Redhat Enterprise 5 η τρίτη) και η επικοινωνία τους πραγματοποιείται με το πρωτόκολλο TCP/IP. Η παράλληλη επεξεργασία υποστηρίζεται με χρήση των παράλληλων πρωτοκόλλων PVM και MPI. Οι τρεις συστοιχίες, επιπλέον, ενώνονται σε πλέγμα (grid) επεξεργαστών με τρόπο και λογισμικό που περιγράφεται αναλυτικά στη διατριβή [16].

6.1 Συμπεράσματα και Σχόλια

Επιμέρους ανακεφαλαιώσεις, σχόλια και τα συμπεράσματα στα οποία κατέληξε η παρούσα διατριβή όσον αφορά στη χρήση της προσταθεροποίησης χαμηλών αριθμών Mach στις εξισώσεις ροής και στην ανάπτυξη αιτιοκρατικών και στοχαστικών μεθόδων για το σχεδιασμό-βελτιστοποίηση σε όλο το εύρος ταχυτήτων ροής, συνοψίζονται στις επόμενες ενότητες.

6.1.1 Προσταθεροποίηση Χαμηλών Αριθμών Mach στις Εξισώσεις Ροής

Αποσκοπώντας στην ύπαρξη ενιαίου λογισμικού αριθμητικής επίλυσης των εξισώσεων Navier–Stokes για όλο το εύρος των ταχυτήτων ροής, στο προϋπάρχον λογισμικό επίλυσης συμπιεστού ρευστού του ΕΘΣ/ΕΜΠ, εισήχθη η τεχνική της προσταθεροποίησης χαμηλών αριθμών Mach. Με αυτό τον τρόπο δημιουργήθηκε ενιαίο λογισμικό για την πρόλεξη ροών ανεξάρτητα από τον αριθμό Mach, στο οποίο μπορεί να συνταχθεί οποιαδήποτε μελλοντική βελτίωση και προσθήκη. Η παρατήρηση αυτή αναφέρεται στο προφανές πλεονέκτημα της συντήρησης και εξέλιξης ενός μόνο λογισμικού (βάσης, τουλάχιστον) για την ανάλυση πεδίων ροής.

Η χρήση της προσταθεροποίησης στις εξισώσεις ροής εξασφαλίζει ταχύτερη σύγκλιση κατά την επίλυση ροών πολύ χαμηλών ταχυτήτων ή, ακόμη καθιστά δυνατή την πρόλεξη ροών σε ταχύτητες στις οποίες το χωρίς προσταθεροποίηση λογισμικό αποτυγχάνει ή οδηγεί σε μη-αποδεκτή λύση (λ.χ. ταχύτητες ροής μικρότερες του $M_\infty = 0.05$). Επιπλέον, η τροποποίηση του διανύσματος ατριβούς ροής κατά τη διακριτοποίηση των προσταθεροποιημένων εξισώσεων εξομαλύνει-βελτιώνει την ποιότητα της πρόλεξης σε ιδιόμορφες περιοχές της ροής (λ.χ. στις ακμές πρόσπτωσης ή εκφυγής, όπου έτσι κι αλλιώς η ροή έχει πολύ μικρή ταχύτητα), ακόμη και στις υψηλότερες ταχύτητες ροής.

Η κεντροκομβική διατύπωση πεπερασμένων όγκων που χρησιμοποιείται στον επίλυση των εξισώσεων Navier–Stokes της διατριβής, σύμφωνα με την οποία τα διανύσματα ατριβούς ροής που διαρρέουν τα όρια κάθε όγκου ελέγχου υπολογίζονται ανά ακμή του πλέγματος, αποδείχθηκε πλεονεκτική ως προς τις τροποποιήσεις που επέβαλε η χρήση της προσταθεροποίησης. Στις εφαρμογές που παρουσιάστηκαν χρησιμοποιήθηκαν μη-δομημένα πλέγματα και μάλιστα υβριδικά (τα οποία λ.χ., για 3D εφαρμογές, αποτελούνταν από συνδυασμό τετραέδρων, τριγωνικών πρισμάτων, εξαέδρων και πενταεδρικών πυραμίδων) όπου, η διαχείριση των ατριβών όρων άρα και της προσταθεροποίησης με σάρωση των ακμών ουδεμία επιβάρυνση προκαλεί. Αρκεί η σάρωση των ακμών του πλέγματος, ανεξάρτητα του είδους των στοιχείων που το αποτελούν, ώστε να εφαρμοστεί η προσταθεροποίηση.

Στο υπολογιστικό κέρδος από τη χρήση της προσταθεροποίησης υπερτίθεται και το κέρδος από την πολυεπεξεργασία. Έτσι, το λογισμικό με προσταθεροποίηση χρησιμοποιείται ως λογισμικό αξιολόγησης για την υποστήριξη μεθόδων βελτιστοποίησης-σχεδιασμού. Πιο συγκεκριμένα, είναι ιδανικό για χρήση στο πλαίσιο ΕΑ, όπου το λογισμικό ανάλυσης καλείται για ένα μεγάλο αριθμό υποψηφίων λύσεων, αφού η επιτάχυνση της επίλυσης για κάθε αξιολόγηση μειώνει και τον απαιτούμενο χρόνο για την εύρεση της βέλτιστης λύσης.

6.1.2 Αιτιοκρατικές Μέθοδοι Βελτιστοποίησης – Συζυγείς Τεχνικές με Προσταθεροποίηση Χαμηλών Αριθμών Mach

Όσον αφορά στις αιτιοκρατικές μεθόδους, η διατριβή επικεντρώθηκε στη θεμελίωση της συζυγούς τεχνικής με χρήση της προσταθεροποίησης χαμηλών αριθμών Mach για τον υπολογισμό της κλίσης της συνάρτησης κόστους κατά το σχεδιασμό-βελτιστοποίηση σε όλο το εύρος ταχυτήτων ροής. Η θεμελίωση περιλαμβάνει και τις δύο πιθανές εκδοχές τις συζυγούς τεχνικής, τη συνεχή και τη διακριτή και παρουσιάζεται στη βιβλιογραφία για πρώτη φορά.

Όσον αφορά στη διακριτή συζυγή τεχνική, η εισαγωγή της προσταθεροποίησης γίνεται άμεσα με αφετηρία τις ήδη διακριτοποιημένες προσταθεροποιημένες εξισώσεις ροής. Ως προς τη συνεχή συζυγή μέθοδο, η προσταθεροποίηση χαμηλών αριθμών Mach δείχθηκε ότι μπορεί να εφαρμοστεί με δύο τρόπους: την εκ των υστέρων προσταθεροποίηση των συζυγών εξισώσεων που προκύπτουν από τις εξισώσεις ροής ή τη διατύπωση των συζυγών εξισώσεων από τις προσταθεροποιημένες εξισώσεις ροής. Η σχετική διερεύνηση και εμβάθυνση που πραγματοποιήθηκε αποδεικνύει ότι, υπό προϋποθέσεις (λ.χ. την κατάλληλη επιλογή του τελεστή προσταθεροποίησης σε καθεμιά περίπτωση), οι δύο τρόποι προσταθεροποίησης οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα.

Κατά τη διατύπωση των συνεχών συζυγών εξισώσεων με προσταθεροποίηση, γίνονται 'αναγκαστικές' παραδοχές οι οποίες σχετίζονται με τον τρόπο χειρισμού του μητρώου προσταθεροποίησης (λ.χ. διευκολύνοντας την εξαγωγή του μητρώου προσταθεροποίησης από τις μερικές παραγώγους) και τη διακριτοποίησή τους. Οι παραδοχές αυτές αποδεικνύεται ότι δεν έχουν ουσιαστική επίπτωση στην πρόλεξη των παραγώγων για τις ανάγκες της βελτιστοποίησης.

Οι υπολογιζόμενες παράγωγοι ευαισθησίας με τις συζυγείς τεχνικές με προσταθεροποίηση είναι ακριβείς, συγκρινόμενες με τις πεπερασμένες διαφορές. Ειδικότερα, η σύμπτωση των τιμών των παραγώγων είναι σχεδόν απόλυτη για τη διακριτή τεχνική. Στην περίπτωση της συνεχούς συζυγούς τεχνικής παρουσιάζονται μικρές αποκλίσεις (κυρίως σε ιδιόμορφες περιοχές της ροής όπως αυτές κοντά στις ακμές πρόσπτωσης ή εκφυγής πτερυγώσεων ή αεροτομών), οι οποίες πιθανόν οφείλονται στις παραπάνω παραδοχές. Από τις εφαρμογές αποδεικνύεται ότι, όπως προαναφέρθηκε, αυτές οι αποκλίσεις δεν επηρεάζουν τη σύγκλιση του αλγορίθμου βελτιστοποίησης-σχεδιασμού.

Η ένταξη της προσταθεροποίησης στις συζυγείς τεχνικές (συνεχή και διακριτή), επιταχύνει την αριθμητική επίλυση των συζυγών εξισώσεων. Έτσι, το κέρδος από την προσταθεροποίηση σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης είναι διττό και επάλληλο, προερχόμενο από την οικονομικότερη επίλυση τόσο των εξισώσεων ροής όσο και των συζυγών τους εξισώσεων. Η επιτάχυνση ενός κύκλου βελτιστοποίησης επιφέρει επιτάχυνση και στη συνολική διαδικασία της βελτιστο-

ποίησης, με προφανή κέρδη οποτεδήποτε χρησιμοποιείται για τις ανάγκες της βιομηχανίας.

Περαιτέρω μείωση του χρόνου σχεδιασμού επιτυγχάνεται με ταυτόχρονη χρήση της πολυεπεξεργασίας. Η παραλληλοποίηση των συζυγών εξισώσεων είναι άμεση και υλοποιείται με ίδιο τρόπο με αυτόν των εξισώσεων ροής.

6.1.3 Στοχαστικές Μέθοδοι Βελτιστοποίησης – Ασύγχρονος Δομημένος Εξελικτικός Αλγόριθμος (ΑΔΕΑ)

Όσον αφορά στις στοχαστικές μεθόδους βελτιστοποίησης, παρουσιάστηκε ένας πλήρως ασύγχρονος δομημένος ΕΑ (ΑΔΕΑ), εγγενώς παράλληλος, ο οποίος, λόγω απουσίας της έννοιας της γενιάς, εξαλείφει τα προβλήματα συγχρονισμού που εμφανίζουν οι κλασικοί (σύγχρονοι) ΕΑ. Έτσι, εκμεταλλεύεται σε μέγιστο βαθμό τη διαθέσιμη υπολογιστική ισχύ (λ.χ. επιτάχυνση από τη χρήση παραλληλίας της τάξης του 93.8% σε 24 επεξεργαστές).

Στον προτεινόμενο ΑΔΕΑ ο πληθυσμός διατάσσεται σε 2Δ δομημένο πλέγμα και διαχωρίζεται σε δήμους των 6 κόμβων (με έναν πόλο και 5 πράκτορες αξιολόγησης ο καθένας), εκμεταλλευόμενος τις ιδιότητες των κατανεμημένων ΕΑ. Ο τρόπος διαχωρισμού σε δήμους (ύπαρξη ενός κοινού πράκτορα αξιολόγησης μεταξύ δύο δήμων) και η μερική αλληλοκάλυψή τους καθορίζει έμμεσα την επικοινωνία μεταξύ αυτών.

Ο τρόπος με τον οποίο δομήθηκε ο προτεινόμενος ΑΔΕΑ τον διαφοροποιεί επαρκώς από τις παραλλαγές των άλλων ασύγχρονων ΕΑ που έχουν παρουσιαστεί με σκοπό την επίτευξη στόχων αντίστοιχων με αυτούς της παρούσας μεθόδου. Η ύπαρξη πλέγματος βάσης καθορίζει συγκεκριμένη δομή στην εφαρμογή των τελεστών επιλογής γονέων και διασταύρωσης. Η ομαδοποίηση σε δήμους με τη μορφή που εδώ προτείνεται και η σχετική θέση αυτών επί του πλέγματος διαφοροποιεί τον παρόντα ΑΔΕΑ από τους κατανεμημένους ΕΑ. Ο τρόπος αλληλοκάλυψης των δήμων εισάγει ένα βολικό σχήμα επικοινωνίας μεταξύ τους, επιτρέποντας σε τέσσερις από τους πέντε πράκτορες αξιολόγησης να ανήκουν σε δύο δήμους (μορφή ανταλλαγής πληροφορίας) και στον εναπομένοντα ένα να περιορίζεται στον οικείο δήμο. Η περιοδικότητα σε κάθε κατεύθυνση πλέγματος εξασφαλίζει 'βέλτιστη' ροή πληροφορίας μεταξύ των δήμων.

Η επιλογή του πράκτορα από τον οποίο θα προέλθει η υποψήφια λύση προς αξιολόγηση σε ένα στιγμιαία διαθέσιμο επεξεργαστή, γίνεται μέσω μιας σειράς ένδο- και δια-δημοτικών διεργασιών. Οι διεργασίες αυτές, κατά τη διάρκεια των οποίων ορίζονται οι έννοιες της ηλικίας και της προτεραιότητας, εξασφαλίζουν την πολύ καλή απόδοση του αλγορίθμου. Επιπλέον, σημαντικό στοιχείο του αλγορίθμου είναι ο τελεστής διασταύρωσης. Η διασταύρωση λαμβάνει χώρα αποκλειστικά στο δήμο που επιλέχθηκε για να σχηματισθεί εκεί το νέο άτομο και χρησιμοποιεί τελεστές η λειτουργία των οποίων προσομοιάζει σε αυτούς που χρησιμοποιούν οι αλγόριθμοι διαφορικής εξέλιξης.

Ο ΑΔΕΑ συνδυάζεται, με ένα νέο τρόπο, και με τη χρήση μεταπροτύπων (τεχνητών νευρωνικών δικτύων) για την προσεγγιστική προαξιολόγηση υποψηφίων λύσεων. Δεδομένου ότι δεν υφίσταται η έννοια της γενιάς, για τη χρήση μεταπροτύπων, ο πράκτορας που θα δώσει την επόμενη υποψήφια λύση για αξιολόγηση δημιουργεί ένα μικρό αριθμό νέων λύσεων, τις αξιολογεί στιγμιαία με τοπικό μεταπρότυπο και αποστέλλει στον ελεύθερο επεξεργαστή εκείνη

την υποψήφια λύση η οποία φαίνεται να υπερτερεί κατά το μεταπρότυπο. Από τις εφαρμογές φάνηκε ότι η χρήση μεταπρωτύπων τοπικής ισχύος (λ.χ. δικτύων ακτινικών συναρτήσεων βάσης που εκπαιδεύονται με μικρό αριθμό γειτονικών λύσεων οι οποίες έτυχε να αξιολογηθούν κατά τα προηγούμενα βήματα του ΕΑ) είναι ιδιαίτερα πλεονεκτική. Ο μικρός αριθμός δειγμάτων εκπαίδευσης καθιστά ταχύτερη την εκπαίδευση κάθε μεταπρωτύπου και έτσι, πραγματικά, το διάστημα αναμονής του επεξεργαστή ο οποίος μόλις ολοκλήρωσε την προηγούμενη αξιολόγηση (μέχρι να του ανατεθεί η επόμενη) είναι αμελητέος. Μάλιστα, θα μπορούσε με ασφάλεια να χαρακτηριστεί ως μηδενικός για πραγματικά προβλήματα βελτιστοποίησης όπου το λογισμικό αξιολόγησης έχει υψηλό κόστος. Με τον τρόπο αυτό, ο χρόνος αναμονής (δηλ. η παραμονή σε αδράνεια) ενός επεξεργαστή είναι ο ελάχιστος δυνατός και ιδίως στις περιπτώσεις που το υπολογιστικό κόστος κάθε αξιολόγησης είναι ιδιαίτερα υψηλό, η αναμονή αυτή κρίνεται ουσιαστικά αμελητέα.

Από τις εφαρμογές–πιστοποίηση του αλγορίθμου αποδεικνύεται ότι ο ΑΔΕΑ παρουσιάζει καλύτερη απόδοση έναντι των κλασικών ΕΑ. Στα προβλήματα σχεδιασμού, η παραλληλία εφαρμόζεται σε δύο επίπεδα, τόσο σε επίπεδο αξιολογήσεων όσο και στο ίδιο το λογισμικό αξιολόγησης διπλασιάζοντας το κέρδος από τη χρήση πολυεπεξεργασίας και επιταχύνοντας τη συνολική διαδικασία σχεδιασμού.

6.2 Στοιχεία Πρωτοτυπίας της Διατριβής

Τα πρωτότυπα στοιχεία της διατριβής μπορούν να συνοψιστούν στα παρακάτω:

- Εισαγωγή και χρήση της προσταθεροποίησης στις συζυγείς εξισώσεις για σχεδιασμό σε όλο το εύρος των ταχυτήτων ροής. Η μεθοδολογία περιλαμβάνει τη διατύπωση τόσο των διακριτών όσο και των συνεχών συζυγών εξισώσεων με προσταθεροποίηση και δεν έχει παρουσιαστεί στη βιβλιογραφία στο παρελθόν, με εξαίρεση, προφανώς, τις δημοσιεύσεις που απορρέουν από την παρούσα διατριβή [29, 30].
- Δημιουργία ασύγχρονου δομημένου ΕΑ (ΑΔΕΑ), ο οποίος, λόγω απουσίας γενεών άρα και συγχρονισμού, εκμεταλλεύεται πλήρως τη διαθέσιμη υπολογιστική ισχύ. Ο ΑΔΕΑ υλοποιεί ένα πρωτότυπο τρόπο κατανομής της ανίχνευσης σε γειτονικούς, αλληλοκαλυπτόμενους δήμους. Όπως αναφέρεται στην εργασία [31] αλλά και, φυσικά, στην παρούσα διατριβή επιπλέον στοιχείο πρωτοτυπίας του ΑΔΕΑ είναι ο τρόπος εφαρμογής των εξελικτικών τελεστών. Αυτοί λαμβάνουν χώρα σε ένα δήμο και το σχήμα διασταύρωσης προκύπτει χρησιμοποιώντας ιδέες των διαφορικών εξελικτικών μεθόδων.
- Η ασύγχρονη λειτουργία του αλγορίθμου θεμελιώνεται στον τρόπο αλληλεπίδρασης μεταξύ των δήμων. Με την ολοκλήρωση μιας αξιολόγησης και τη στιγμιαία ‘αδράνεια’ του επεξεργαστή από τον οποίο προήλθε, λαμβάνουν χώρα ενδο- και δια-δημοτικές διεργασίες μέσω των οποίων επιλέγεται ‘αμέσως’ (σε αμελητέο χρόνο) το νέο άτομο που θα σταλεί για αξιολόγηση. Αυτές οι διεργασίες, πέραν του ότι εξασφαλίζουν τη μέγιστη δυνατή εκμετάλλευση της υπολογιστικής ισχύος, διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο και στην απόδοση του ΑΔΕΑ.
- Η τοπολογική διάταξη του ΑΔΕΑ παραπέμπει σε ΕΑ κυτταρικής δομής (cellular EA, fine-grained). Παρόλα αυτά στον ΑΔΕΑ δίνεται διαφορετική διάσταση στην έννοια της επικοινωνίας μεταξύ των ατόμων, καθώς αυτή αποτελεί τμήμα της εφαρμογής των εξελικτικών τελεστών.

- Εισαγωγή της προσεγγιστικής προαξιολόγησης στον ΑΔΕΑ, η οποία επιτρέπει την αποτελεσματικότερη αναζήτηση της βέλτιστης λύσης. Η πρωτοτυπία έγκειται στην εισαγωγή και χρήση των μεταπρότυπων στο πλαίσιο ενός ασύγχρονου αλγορίθμου όπως ο ΑΔΕΑ. Σε ένα σύγχρονο ΕΑ, κατά την προσεγγιστική προαξιολόγηση, η τιμή της συνάρτησης κόστους όλων των ατόμων του πληθυσμού προσεγγίζεται από το μεταπρότυπο. Στη συνέχεια, ένα ή περισσότερα άτομα, συνήθως τα πλέον υποσχόμενα με βάση το μεταπρότυπο, επιλέγονται για αξιολόγηση με το ακριβές λογισμικό αξιολόγησης. Κάτι αντίστοιχο δεν μπορεί να γίνει στον ΑΔΕΑ αφού δεν υφίσταται η έννοια της γενιάς. Για το λόγο αυτό, όταν εφαρμόζεται το μεταπρότυπο, στη φάση της διασταύρωσης δημιουργούνται περισσότερα του ενός νέα άτομα. Για αυτά τα άτομα εκπαιδεύεται ένα μεταπρότυπο το οποίο ‘παρεμβάλλει’ τις τιμές της συνάρτησης κόστους. Το καλύτερο από αυτά αποστέλλεται για αξιολόγηση με το ακριβές μοντέλο στο διαθέσιμο επεξεργαστή. Ο χρόνος που απαιτείται για τη δημιουργία των νέων ατόμων και την εκπαίδευση του νευρωνικού δικτύου, είναι ασήμαντος και ουσιαστικά αμελητέος συγκρινόμενος με το υπολογιστικό κόστος μιας αξιολόγησης.

6.3 Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα

Ακολουθεί σύντομη παράθεση ερευνητικών περιοχών οι οποίες θα μπορούσαν να αποτελέσουν τη ‘φυσική συνέχεια’ των θεμάτων που διαπραγματεύεται η παρούσα διατριβή:

- (α) Όπως φαίνεται στα προηγούμενα, η διατριβή ξεκίνησε ‘αναγκαστικά’ (υπό την έννοια ότι αποτελούσε προαπαιτούμενο της επέκτασης στις συζυγείς τεχνικές) από την ανάπτυξη λογισμικού επίλυσης της εξισώσεων Navier–Stokes με προσταθεροποίηση χαμηλών αριθμών Mach. Εκτιμάται ότι, με την ολοκλήρωση και των ταυτόχρονα εξελισσόμενων άλλων διατριβών στο ΕΘΣ/ΕΜΠ, αυτό το λογισμικό επίλυσης φθάνει πλέον στο επιθυμητό επίπεδο πληρότητας έχοντας επαρκώς πιστοποιηθεί. Παρόλα αυτά, αναγνωρίζονται και προτείνονται ορισμένες δράσεις για το μέλλον, όπως:
- Η ένταξη της τεχνικής του πολυπλέγματος (multigrid), όπως προτάθηκε στη διατριβή Λαμπρόπουλου [15] στο λογισμικό που ήδη φέρει την προσταθεροποίηση. Η υπάρχουσα ‘βιβλιοθήκη’ με τα υποπρογράμματα της μεθόδου του πολυπλέγματος πρέπει αρχικά να επεκταθεί ώστε να χειρίζεται και υβριδικά πλέγματα, μιας και το λογισμικό της προαναφερθείσας διατριβής χειριζόταν μόνο τριγωνικά (2Δ) και τετραεδρικά (3Δ) στοιχεία. Στη συνέχεια, αξίζει να ενσωματωθεί και η προσταθεροποίηση. Αν και προγραμματιστικά το εγχείρημα μοιάζει (και είναι) σχετικά απλό, έχει ενδιαφέρον να διερευνηθεί ο τρόπος εφαρμογής της προσταθεροποίησης στα αραιά πλέγματα. Σύμφωνα με τη διατριβή [15] ή την εργασία [151], στο αραιό πλέγμα οι όγκοι ελέγχου σχηματίζονται με τη συσσωμάτωση όγκων ελέγχου του πυκνού πλέγματος (agglomeration multigrid). Είναι, λοιπόν, ενδιαφέρον να ελεγχθεί ο τρόπος δράσης της προσταθεροποίησης στις ‘εικονικές’ ακμές του αραιού πλέγματος, δεδομένης της τοπικής δράσης της προσταθεροποίησης (αφού χρησιμοποιείται ο τοπικός αριθμός Mach).
 - Η παραλληλοποίηση του λογισμικού επίλυσης των εξισώσεων ροής (αρχικά χωρίς και, μετά, με προσταθεροποίηση) στις επεξεργαστικές μονάδες καρτών γραφικών (Graphics Processing Units, GPUs), ώστε να γίνει εκμετάλλευση των αρκετών

πυρήνων που αυτές διαθέτουν, [40]. Πρόκειται για μια ιδιαίτερα νέα περιοχή έρευνας, όπου ήδη δραστηριοποιείται η ομάδα του ΕΘΣ/ΕΜΠ. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η παρακολούθηση της τεχνολογίας των *GPUs*, ώστε το λογισμικό να μπορεί άκοπα και εύκολα να παρακολουθεί την εξέλιξη του υλικού.

(β) Ως προς τις συζυγείς μεθόδους, η χρήση της προσταθεροποίησης χαμηλών αριθμών Mach που εισάγει η διατριβή καλείται να παρακολουθήσει κάθε σχετική εξέλιξη που πραγματοποιείται διεθνώς αλλά κυρίως στο ΕΘΣ/ΕΜΠ. Ενδεικτικά αναφέρονται:

- Η επέκταση της χρήσης της προσταθεροποίησης σε λογισμικό (συνεχών και διακριτών) συζυγών μεθόδων για 3Δ εφαρμογές. Αναφερόμαστε στην επέκταση του (χωρίς προσταθεροποίηση) λογισμικού συζυγών μεθόδων για 3Δ ροές που αναπτύχθηκε στη διατριβή Παπαδημητρίου [18].
- Η επέκταση της χρήσης της προσταθεροποίησης και στις συζυγείς τεχνικές για τον υπολογισμό παραγώγων ευαισθησίας δεύτερης τάξης (αναφερόμαστε σε μεθόδους που πρόσφατα αναπτύχθηκαν στο ΕΘΣ/ΕΜΠ, [195, 196, 197]). Προφανώς, η σχετική εργασία μπορεί να πραγματοποιηθεί είτε για τη συνεχή είτε για τη διακριτή εκδοχή της συζυγούς μεθόδου. Η μέχρι τώρα εμπειρία σε αυτές τις μεθόδους στο ΕΘΣ/ΕΜΠ ανέδειξε την ιδιαίτερη ευαισθησία τους στην ακριβή παραγωγή των ιακωβιανών μητρών των ατριβών ροών. Στην προτεινόμενη επέκταση, το ενδιαφέρον έγκειται στο ότι θα χρησιμοποιούνται και πρέπει να παραγωγίζονται με ακρίβεια τα προσταθεροποιημένα ιακωβιανά μητρώα.
- Η επέκταση της χρήσης της προσταθεροποίησης και στην περίπτωση χρησιμοποίησης της συζυγούς εξίσωσης του μοντέλου τύρβης, στο πρότυπο της πρόσφατης εργασίας του ΕΘΣ/ΕΜΠ [263] για το μοντέλο Spalart–Allmaras.

(γ) Στην περιοχή των εξελικτικών αλγορίθμων, φυσική συνέχεια του προτεινόμενου ΑΔΕΑ αποτελούν:

- Η επέκταση της παραλληλοποίησης ώστε να μπορεί να χρησιμοποιεί γεωγραφικά απομακρυσμένους υπολογιστές ή συστοιχίες υπολογιστών (τεχνική υπολογισμών σε πλέγμα υπολογιστικών πόρων, *grid computing*), [158].
- Η διερεύνηση άλλων περιπτώσεων δομημένων πλεγμάτων βάσης για τον ΑΔΕΑ, όπως λ.χ. η χρησιμοποίηση ενός 3Δ πλέγματος βάσης, επανακαθορίζοντας τη μορφή των (3Δ, πλέον) δήμων.
- Η αναδόμηση του ΑΔΕΑ ώστε να απευθύνει τις αξιολογήσεις και στις μονάδες επεξεργασίας καρτών γραφικών (τις *GPUs*), με βάση την ιδέα που προαναφέρθηκε.

Δημοσιεύσεις

Αποτελέσματα της έρευνας της παρούσας διδακτορικής διατριβής έχουν, μέχρι τώρα, δημοσιευθεί σε διεθνή επιστημονικά περιοδικά ή στα πρακτικά διεθνών επιστημονικών συνεδρίων. Ακολουθεί σχετικός κατάλογος.

1. Asouti V.G., Giannakoglou K.C. Aerodynamic Optimization Using a Parallel Asynchronous Evolutionary Algorithm Controlled by Strongly Interacting Demes. *Engineering Optimization* 2009; **41**(3): 241–257.

2. Asouti V.G., Zymaris A.S., Papadimitriou D.I., Giannakoglou K.C. Continuous and Discrete Adjoint Approaches for Aerodynamic Shape Optimization with Low Mach Number Preconditioning. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 2008; **57**(10): 1485–1504.
 3. Trompoukis X., Asouti V.G., Zervogiannis T., Giannakoglou K.C. CFD Analysis and Parametric Study–Optimization of Suction–Blowing Flow Control Techniques. *6th GRACM International Congress on Computational Mechanics*. Thessaloniki, 19-21 June, 2008.
 4. Kampolis I.C., Zymaris A.S., Asouti V.G., Giannakoglou K.C. Multilevel Optimization Strategies Based on Metamodel - Assisted Evolutionary Algorithms, for Computationally Expensive Problems. *IEEE Congress on Evolutionary Computation CEC* 2007. September 25-28 2007, Singapore.
 5. Giannakoglou K.C., Kampolis I.C., Liakopoulos P.I.K., Karakasis M.K., Papadimitriou D.I., Zervogiannis T., Asouti V.G. Aerodynamic Shape Optimization Methods on Multiprocessor Platforms. *International Conference on Parallel Computational Fluid Dynamics Parallel CFD* 2007. May 21-24 2007, Antalya Turkey. (Invited Lecture)
 6. Asouti V.G., Papadimitriou D.I., Giannakoglou K.C. Continuous Adjoint Method with Low - Mach Number Preconditioning. *EUROGEN 2007, Conference on Evolutionary and Deterministic Methods for Design, Optimization and Control with Applications to Industry and Social Problems*. Jyväskylä, Finland, June 11-13, 2007.
 7. Asouti V.G., Papadimitriou D.I., Koubogiannis D.G., Giannakoglou K.C. Low Mach Number Preconditioning for 2D and 3D Upwind Flow Solution Schemes, on Unstructured Grids. *5th GRACM International Congress on Computational Mechanics*. Cyprus, 29 June - 1 July, 2005.
-

Παράρτημα Α΄

Εξισώσεις Ροής με Μεταβλητό Πάχος Σωλήνα Ροής

Σε ορισμένες από τις παρουσιαζόμενες περιπτώσεις ροής σε 2Δ περυγώσεις στροβιλομηχανών, στις συνθήκες ροής εμφανίζεται ο λόγος του γινομένου πυκνότητας αξονικής ταχύτητας στην είσοδο και στην έξοδο της περύγωσης (AVDR). Πρόκειται για ψευδο-3Δ ροές με μεταβλητό πάχος σωλήνα ροής $h = h(x_1)$. Στις εφαρμογές που υιοθετείται πάχος σωλήνα ροής, η τιμή του θεωρείται σταθερή πριν την ακμή πρόσπτωσης και μετά την ακμή εκφυγής, ενώ ανάμεσά τους μεταβάλλεται γραμμικά με την αξονική απόσταση.

Κατά την επίλυση 2Δ ροών με πάχος σωλήνα ροής, οι εξισώσεις ροής της σχέσης 2.1 ξαναγράφονται

$$\frac{\partial(h\vec{U})}{\partial t} + \frac{\partial(h\vec{f}_i^{inv})}{\partial x_i} - \frac{\partial(h\vec{f}_i^{vis})}{\partial x_i} = \vec{S}_h \quad (A'.1)$$

όπου οι όροι \vec{U} , \vec{f}_i^{inv} , \vec{f}_i^{vis} είναι αυτοί που ορίστηκαν στη σχέση 2.2 και ο επιπλέον όρος πηγής λόγω του πάχους του σωλήνα ροής ισούται με

$$\vec{S}_h = h \frac{\partial h}{\partial x_1} \begin{pmatrix} 0 \\ p - \tau_{nn} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (A'.2)$$

με

$$\tau_{nn} = \frac{2}{3}\mu \left(2 \frac{u_1}{h} \frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \quad (A'.3)$$

Η σχέση 2.3 για τις συνεκτικές τάσεις ξαναγράφεται ως

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}\mu \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \frac{2}{3}\mu \frac{u_1}{h} \frac{\partial h}{\partial x_1} \quad \text{με } i=j \quad (A'.4)$$

Παράρτημα Β΄

Μελέτη Ροών Παρουσία Καπνού

Η παρούσα διατριβή συμπεριλαμβάνει αποτελέσματα από μελέτη ροών σε χώρους με παρουσία καπνού, ο οποίος προέρχεται από καύση κάποιου υλικού σε σημείο αυτών. Σε αυτές τις περιπτώσεις πέραν των εξισώσεων ροής και αυτών του μοντέλου τύρβης επιλύεται και μια εξίσωση μεταφοράς-διάχυσης για τη συγκέντρωση καπνού. Επιπλέον, στις εξισώσεις ορμής, ενέργειας και των εξισώσεων του μοντέλου τύρβης $k - \varepsilon$ προστίθενται όροι βαρύτητας (σε αντίθεση με τις ροές σε μεμονωμένες αεροτομές ή πτερυγώσεις στροβιλομηχανών όπου οι βαρυτικές δυνάμεις είναι αμελητέες συγκριτικά με τις υπόλοιπες αναπτυσσόμενες δυνάμεις).

Β΄.1 Προσθήκη Όρων Βαρύτητας

Εξισώσεις Ροής

Κατά την επίλυση ροών παρουσία καπνού, οι εξισώσεις ροής της σχέσης 2.1 ξαναγράφονται

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}_i^{inv}}{\partial x_i} - \frac{\partial \vec{f}_i^{vis}}{\partial x_i} = \vec{S}_{bf} \quad (\text{B'.1})$$

όπου οι όροι \vec{U} , \vec{f}_i^{inv} , \vec{f}_i^{vis} είναι αυτοί που ορίστηκαν στη σχέση 2.2 και ο επιπλέον όρος λόγω βαρύτητας και της παρουσίας φωτιάς ισούται με

$$\vec{S}_{bf} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \rho g_i \\ \rho u_i g_j + \frac{Q_{fire}}{V_{fire}} \end{array} \right\} \quad (\text{B'.2})$$

με g την επιτάχυνση της βαρύτητας, Q_{fire} την εκλυόμενη ισχύ από την παρουσία φωτιάς και V_{fire} τον όγκο της φωτιάς.

Εξισώσεις Μοντέλου Τύρβης

Κατά την προσομοίωση ροών παρουσία καπνού, για τη μοντελοποίηση της τύρβης χρησιμοποιείται το μοντέλο $k - \varepsilon$ με θεώρηση συναρτήσεων τοίχου. Η παρουσία βαρύτητας προστίθεται στους όρους πηγής του μοντέλου (σχέση 2.34) οι οποίοι ξαναγράφονται ως

$$S_k = \mathcal{P}_k + \mathcal{P}_b - \rho \varepsilon - \mathcal{D}$$
$$S_\varepsilon = c_{\varepsilon 1} f_1 \frac{\varepsilon}{k} (\mathcal{P}_k + \mathcal{P}_b) - c_{\varepsilon 2} f_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + \mathcal{E}$$

όπου $D=0$, $\mathcal{E}=0$ και

$$\mathcal{P}_b = -g_i \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \quad (\text{B'.3})$$

με $Pr_t=0.9$ τον τυρβώδη αριθμό Prandtl.

Β'.2 Εξίσωση Συγκέντρωσης Καπνού

Η συγκέντρωση καπνού C υπολογίζεται από την επίλυση της εξίσωσης

$$\frac{\partial(\rho C)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i C)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{Sc} \right) \frac{\partial C}{\partial x_j} \right] + \dot{m}_{smoke} \quad (\text{B'.4})$$

όπου $C = \frac{\rho_{smoke}}{\rho}$ η συγκέντρωση του καπνού, $Sc = 0.56$ ο αριθμός Schmidt και \dot{m}_{smoke} ο ρυθμός παραγωγής καπνού που ορίζεται ως

$$\dot{m}_{smoke} = \frac{Q_{fire}}{\eta_{comb} Hu V_{fire}} (1 + s) \quad (\text{B'.5})$$

με Q_{fire} την εκλυόμενη ισχύ, V_{fire} τον όγκο της φωτιάς, η_{comb} το βαθμό απόδοσης της καύσης, Hu τη θερμογόνο ικανότητα του καυσίμου και s το στοιχειομετρικό λόγο αέρα-καυσίμου. Οι τιμές των παραπάνω ποσοτήτων αναγράφονται στον πίνακα Β'.1.

Πίνακας Β'.1: Μελέτη ροών αέρα παρουσία καπνού. Αριθμητικές τιμές χρησιμοποιούμενων ποσοτήτων.

$V_{fire} [m^3]$	1
η_{comb}	0.98
$Hu [J/kg]$	20×10^6
s	17.2

Παράρτημα Γ'

Παραμετροποίηση Αεροτομών

Στο παράρτημα αυτό περιγράφεται ο τρόπος παραμετροποίησης αεροδυναμικών μορφών που χρησιμοποιείται κατά το σχεδιασμό τους με χρήση αιτιοκρατικών ή στοχαστικών μεθόδων βελτιστοποίησης. Στο πρώτο τμήμα παρουσιάζεται το σχήμα παραμετροποίησης το οποίο βασίζεται στα πολυώνυμα Bézier–Bernstein [85, 69, 65, 1, 3] (καμπύλες Bézier).

Στη συνέχεια η ανάλυση επικεντρώνεται στον υπολογισμό των μεταβολών γεωμετρικών ποσοτήτων, ποσότητες ϕ_1 ως ϕ_4 που ορίστηκαν στο κεφάλαιο 4 για το σχεδιασμό με χρήση συζυγών μεταβλητών. Οι συναρτήσεις αυτές περιλαμβάνουν μεταβολές του μήκους τόξου dS , του κάθετου στο όριο διανύσματος $n_i dS$, των συντεταγμένων x_j της αεροτομής και της ποσότητας $n_i n_j$ πάνω στην αεροτομή και υπολογίζονται με βάση το σχήμα παραμετροποίησης.

Γ'.1 Καμπύλες Bézier

Οι συντεταγμένες $x_j(t)$, $j = 1, 2$ (δηλ. $x_1(t), x_2(t)$) μιας παραμετρικής καμπύλης Bézier βαθμού K υπολογίζονται από τη σχέση, [85],

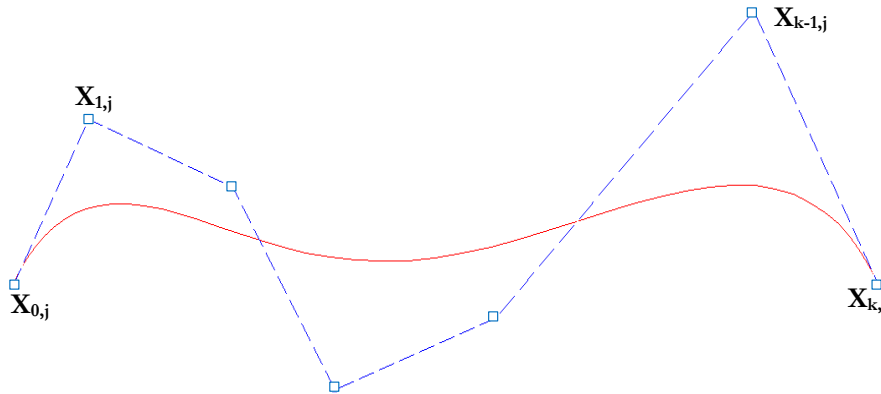
$$x_j(t) = \sum_{i=0}^K B_{i,K}(t) X_{ij}, \quad t \in [0, 1] \quad (\Gamma'.1)$$

όπου $B_{i,K}(t)$ τα πολυώνυμα Bernstein

$$B_{i,K}(t) = \binom{K}{i} t^i (1-t)^{K-i} \quad (\Gamma'.2)$$

με ($i = 0, \dots, K$) τα $K+1$ σημεία ελέγχου και X_{ij} τις συντεταγμένες αυτών.

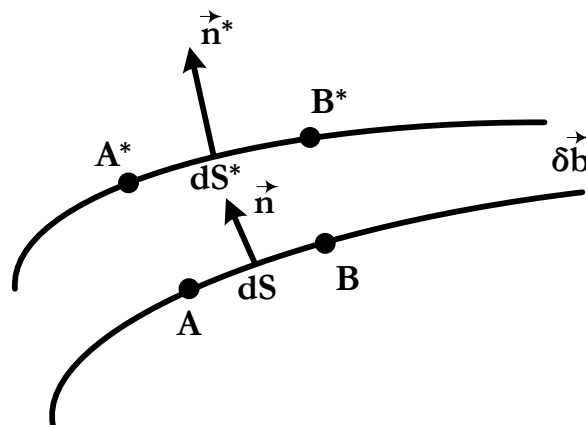
Στην παρούσα εργασία, η παραμετροποίηση μιας αεροτομής γίνεται με χρήση δύο καμπυλών Bézier, χωριστά για τις πλευρές υπερπίεσης και υποπίεσης. Μια βοηθητική ιδιότητα μιας καμπύλης Bézier είναι ότι η παράγωγός της στο πρώτο και τελευταίο σημείο της καθορίζεται από τα σημεία ελέγχου και συγκεκριμένα η καμπύλη εφάπτεται στα $X_{1,j} - X_{0,j}$ και $X_{K,j} - X_{K-1,j}$ στα άκρα. Άρα, η εξασφάλιση της συνέχειας της πρώτης παραγώγου στις ακμές πρόσπτωσης και εκφυγής (αν επιθυμείται) επιτυγχάνεται με την τοποθέτηση των δύο πρώτων και δύο τελευταίων σημείων στην ίδια ευθεία. Επιπλέον πλεονέκτημα της καμπύλης είναι η εποπτική διασύνδεση καμπύλης και σημείων ελέγχου καθώς αυτή εμπεριέχεται στο κυρτό πολύγωνο που σχηματίζεται από τα σημεία ελέγχου.



Σχήμα Γ'.1: Καμπύλη Bézier με 7 σημεία ελέγχου.

Γ'.2 Μεταβολές Γεωμετρικών Ποσοτήτων

Έστω μεταβολή των μεταβλητών σχεδιασμού κατά $\delta\vec{b}$. Η μεταβολή αυτή προκαλεί αλλαγή στη μορφή-γεωμετρία της αεροτομής (σχήμα Γ'.2). Θεωρώντας ότι A και B είναι δύο διαδοχικά σημεία (ουσιαστικά κόμβοι του υπολογιστικού πλέγματος) στην καμπύλη, οι τιμές της παραμέτρου t για αυτά είναι t και $t + dt$, αντίστοιχα. Στη νέα γεωμετρία, για ίδιες τιμές της παραμέτρου t , τα νέα σημεία είναι τα A^* , B^* . Ουσιαστικά θεωρείται ότι το A μετακινείται στο A^* και το B στο B^* . Η μεταβολή αυτή έχει ως αποτέλεσμα τη μεταβολή του στοιχειώδους μήκους τόξου από dS σε dS^* αλλά και του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος από \vec{n} σε \vec{n}^* . Οι συντεταγμένες των σημείων A , B σύμφωνα με τον ορισμό των καμπυλών Bézier (σχέση



Σχήμα Γ'.2: Αλλαγή γεωμετρίας που προκαλείται από μεταβολή των μεταβλητών σχεδιασμού.

Γ'.1) είναι

$$x_{jA} = \sum_{i=0}^K B_{i,K}(t) X_{ij} \quad \text{και} \quad x_{jB} = \sum_{i=0}^K B_{i,K}(t) X_{ij} \quad (\Gamma'.3)$$

ενώ για τα A^* , B^* , μετά τη μεταβολή των συντεταγμένων των σημείων ελέγχου κατά δX_{ij} ισχύει

$$x_{jA^*} = \sum_{i=0}^K B_{i,K}(t)(X_{ij} + \delta X_{ij}) \quad \text{και} \quad x_{jB^*} = \sum_{i=0}^K B_{i,K}(t)(X_{ij} + \delta X_{ij}) \quad (\Gamma'.4)$$

Με βάση τις σχέσεις Γ'.3, Γ'.4, η μεταβολή των συντεταγμένων της αεροτομής δx_j με τη μεταβολή των συντεταγμένων των σημείων ελέγχου υπολογίζεται ως

$$\delta x_j = \sum_{i=0}^K B_{i,K}(t) \delta X_{ij} \quad (\Gamma'.5)$$

Για τα στοιχειώδη μήκη ανάμεσα στα δύο σημεία πριν και μετά τη μεταβολή των σημείων ελέγχου ισχύει

$$\begin{aligned} dx_{jAB} = x_{jB} - x_{jA} &= \sum_{i=0}^K [B_{i,K}(t+dt) - B_{i,K}(t)] X_{ij} \\ &= dt \sum_{i=0}^K \dot{B}_{i,K}(t) X_{ij} \end{aligned} \quad (\Gamma'.6)$$

και

$$\begin{aligned} dx_{jAB^*} = x_{jB^*} - x_{jA^*} &= \sum_{i=0}^K [B_{i,K}(t+dt) - B_{i,K}(t)] (X_{ij} + \delta X_{ij}) \\ &= dt \sum_{i=0}^K \dot{B}_{i,K}(t) (X_{ij} + \delta X_{ij}) \end{aligned} \quad (\Gamma'.7)$$

όπου $\dot{B}_{i,K}(t) = \frac{d}{dt} B_{i,K}(t)$. Από αυτά υπολογίζονται και τα dS , dS^* ως

$$(dS)^2 = (dx_{jAB})^2 = (dt)^2 \left(\sum_{i=0}^K \dot{B}_{i,K}(t) X_{ij} \right)^2 \quad (\Gamma'.8)$$

$$(dS^*)^2 = (dx_{jAB^*})^2 = (dt)^2 \left(\sum_{i=0}^K \dot{B}_{i,K}(t) (X_{ij} + \delta X_{ij}) \right)^2 \quad (\Gamma'.9)$$

Η μεταβολή του dS με τη μεταβολή των σημείων ελέγχου υπολογίζεται από την εξίσωση των σχέσεων

$$\delta((dS)^2) = (dS^*)^2 - (dS)^2 \quad (\Gamma'.10)$$

$$\delta((dS)^2) = 2 dS \delta(dS) \quad (\Gamma'.11)$$

και με χρήση των Γ'.7, Γ'.8, γράφεται ως

$$\delta(dS) = \frac{(dt)^2}{dS} \dot{x}_j \sum_{i=0}^K \dot{B}_{i,K}(t) \delta X_{ij} \quad (\Gamma'.12)$$

όπου $\dot{x}_j = \frac{dx_j}{dt} = \sum_{i=0}^K \dot{B}_{i,K}(t) X_{ij}$.

Τα μοναδιαία διανύσματα \vec{n} και \vec{n}^* , για 2Δ ροές, υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}\vec{n} &= (n_1, n_2) = \left(-\frac{dx_{2AB}}{dS}, \frac{dx_{1AB}}{dS} \right) \\ \vec{n}^* &= (n_1^*, n_2^*) = \left(-\frac{dx_{2AB^*}}{dS}, \frac{dx_{1AB^*}}{dS} \right)\end{aligned}\quad (\Gamma'.13)$$

Οι μεταβολές των συνιστωσών n_1, n_2 του \vec{n} με τη μεταβολή των σημείων ελέγχου υπολογίζονται ως

$$\begin{aligned}\delta n_1 &= n_1^* - n_1 = -\frac{dt}{dS} \left((1 - n_1^2) \sum_{i=0}^K \dot{B}_{i,K}(t) \delta X_{i2} + n_1 n_2 \sum_{i=0}^K \dot{B}_{i,K}(t) \delta X_{i1} \right) \\ \delta n_2 &= n_2^* - n_2 = \frac{dt}{dS} \left((1 - n_2^2) \sum_{i=0}^K \dot{B}_{i,K}(t) \delta X_{i1} + n_1 n_2 \sum_{i=0}^K \dot{B}_{i,K}(t) \delta X_{i2} \right)\end{aligned}\quad (\Gamma'.14)$$

Με χρήση των παραπάνω υπολογίζονται και οι μεταβολές $\delta(n_i n_j)$ για $i \neq j$, μέσω της σχέσης

$$\delta(n_i n_j) = n_i \delta(n_j) + \delta(n_i) n_j \quad (\Gamma'.15)$$

Τέλος, μεταβολές της ποσότητας $n_i dS$ υπολογίζονται από τη σχέση

$$\delta(n_i dS) = n_i \delta(dS) + \delta n_i dS \quad (\Gamma'.16)$$

όπου για τα $\delta(dS)$ και δn_i χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις Γ'.12 και Γ'.14, αντίστοιχα.

Παράρτημα Δ΄

Υπολογισμός Επιδόσεων Επιβατικού Υπερηχητικού Αεροσκάφους

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζεται ο αλγόριθμος ανάλυσης επιδόσεων ενός μικρού επιβατικού υπερηχητικού αεροσκάφους (Supersonic Business Jet, SBJ) ο οποίος, στο πλαίσιο ενός αλγορίθμου βελτιστοποίησης, πραγματοποιείται για κάθε σύνολο τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού που μονοσήμαντα καθορίζει ένα τέτοιο αεροσκάφος. Στο σχεδιασμό-βελτιστοποίηση μέσω στοχαστικών μεθόδων (Κεφάλαιο 5), το λογισμικό που αντιστοιχεί στον αλγόριθμο που ακολουθεί καλείται για κάθε υποψήφια λύση ώστε να διαστασιολογήσει το αεροσκάφος και να υπολογίσει τις επιδόσεις του, οι οποίες αποτελούν στόχους ή περιορισμούς του προβλήματος.

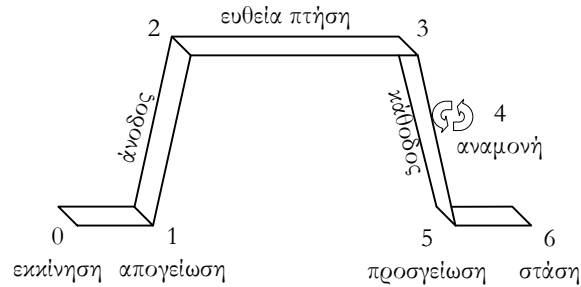
Επισημαίνεται ότι η υλοποίηση ενός τέτοιου αλγορίθμου ανάλυσης και υπολογισμού επιδόσεων ενός SBJ, δεν αποτελεί κεντρικό θέμα της διατριβής, αλλά η δημιουργία και χρήση του σχετικού λογισμικού επιτρέπει την πιστοποίηση των μεθόδων βελτιστοποίησης που αναπτύχθηκαν σε ένα ρεαλιστικό πρόβλημα (ενός ή περισσότερων στόχων, με περιορισμούς), το οποίο έχει, παρ' όλα αυτά, αποδεκτό υπολογιστικό κόστος ανά αξιολόγηση. Θεματικά δε, ανήκει στην επιστημονική περιοχή της διατριβής.

Η διατύπωση του προβλήματος υπολογισμού επιδόσεων SBJ, [114, 149] συνδυάζει πολλούς επιστημονικούς κλάδους (multi-disciplinary problem), αφού περιλαμβάνει αεροδυναμική ανάλυση, ανάλυση βάρους, συστήματος πρόωσης κλπ., που εδώ υλοποιούνται με εμπειρικούς τύπους. Σε επόμενο στάδιο, αυτοί οι τύποι θα μπορούσαν να αντικατασταθούν από ακριβέστερα-ακριβότερα μοντέλα, π.χ. λογισμικό ανάλυσης δομικών στοιχείων, επιλύτη ροής με χρήση των εξισώσεων ροής, αλλά και να προστεθούν και νέοι στόχοι (πχ. ο περιορισμός του ηχητικού κρότου).

Δ΄.1 Διατύπωση Προβλήματος – Μεταβλητές Σχεδιασμού

Στόχος είναι ο σχεδιασμός ενός μικρού υπερηχητικού αεροσκάφους (SBJ) με δυνατότητα μεταφοράς έως 12 ατόμων. Ο όρος 'μικρό αεροσκάφος', χρησιμοποιείται για να δηλώσει, όχι μόνο τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά αυτού, αλλά και το μικρό βάρος του. Αν και μικρό, επιθυμείτε να έχει μεγάλη εμβέλεια, ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για μακρινές αποστάσεις

(υπερατλαντικές πτήσεις). Το μικρό του βάρος, έρχεται σε αντίθεση με την επιδίωξη μεγάλης εμβέλειας, καθώς ο προφανής τρόπος για αύξηση της εμβέλειας πτήσης είναι η αύξηση της ποσότητας του καυσίμου άρα του συνολικού βάρους απογείωσης. Η συνολική αποστολή (φάκελος πτήσης) του αεροσκάφους είναι τυπική και περιλαμβάνει την απογείωση, την ευθεία οριζόντια πτήση, την κάθοδο, πιθανή αναμονή και την προσγείωση (σχήμα Δ'.1). Επιπλέον,



Σχήμα Δ'.1: Φάκελος πτήσης - Αποστολή αεροσκάφους

επιβάλλονται περιορισμοί σχετικά με το απαιτούμενο μήκος απογείωσης αλλά και την ταχύτητα προσέγγισης η οποία εμμέσως καθορίζει το απαιτούμενο μήκος προσγείωσης, ώστε να μπορεί να χρησιμοποιήσει όσο το δυνατόν περισσότερα αεροδρόμια.

Για το σχεδιασμό χρησιμοποιούνται 12 ελεύθερες μεταβλητές, οι οποίες αφορούν στοιχεία της πτήσης, την ποσότητα καυσίμου και γεωμετρικά χαρακτηριστικά της πτέρυγας και του ουραίου περυγίου. Ειδικότερα, για την ευθεία πτήση (δείκτης cr), στα ζητούμενα του σχεδιασμού είναι ο αριθμός Mach (M_{cr}) και το υψόμετρο πτήσης (z_{cr}). Για την πτέρυγα (δείκτης w), η επιφάνειά της σε κάτοψη (S_w), οι γωνίες οπισθόκλισης στην ακμή προσβολής (Λ_{LE_w}) και εκφυγής (Λ_{TE_w}), η εκλέπτυνση (λ_w) και ο λόγος μέγιστου πάχους προς χορδή ($(t/c)_w$). Για το κάθετο ουραίο περύγιο (δείκτης v), οι γωνίες οπισθόκλισης στη ακμή προσβολής (Λ_{LE_v}) και εκφυγής (Λ_{TE_v}), η εκλέπτυνση (λ_v) και ο λόγος μέγιστου πάχους προς χορδή ($(t/c)_v$). Τέλος, για το καύσιμο (δείκτης $fuel$) ως μεταβλητή σχεδιασμού υιοθετείται το συνολικό του βάρος (W_{fuel}). Τα όρια των μεταβλητών σχεδιασμού που χρησιμοποιούνται κατά τη διαδικασία βελτιστοποίησης, φαίνονται στον πίνακα Δ'.1.

Ένα βασικό χαρακτηριστικό του αεροσκάφους είναι ότι το έχει μόνο κάθετο ουραίο περύγιο και όχι οριζόντιο (στο πρότυπο του Concorde [269]).

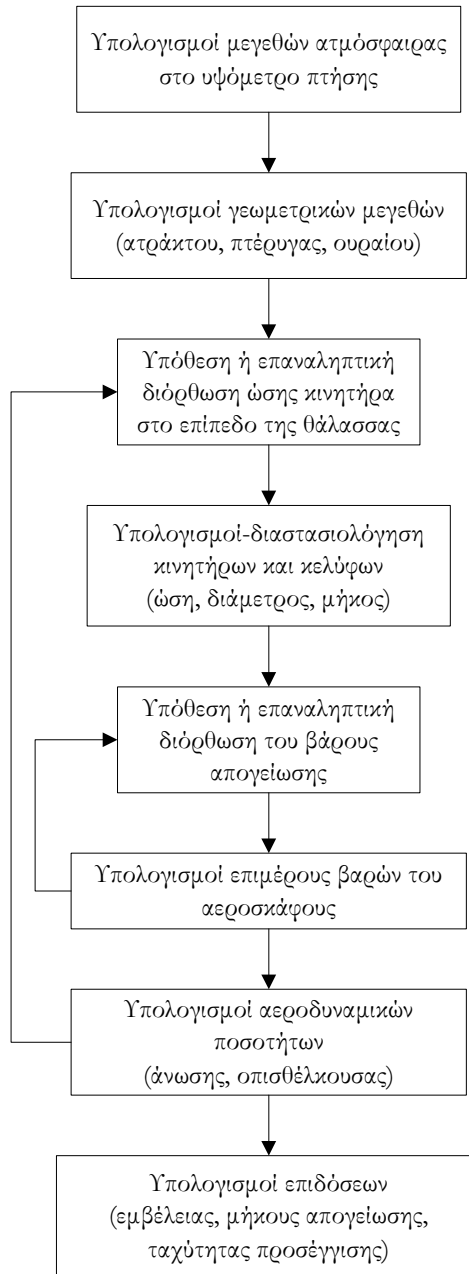
Ανατρέχοντας στα αντίστοιχα προγράμματα της NASA, φαίνεται ότι μετά το 2000, προγράμματα όπως το Supersonic Transport (SST) ή το διάδοχό του Supersonic Business Jet (SBJ) μετεξελίχθησαν στο πρόγραμμα High Speed Civil Transport (HSCT). Δυσειδίχθησαν σχετικά με τον ηχητικό κρότο, όμως, περιόρισαν το μέγεθος του αεροσκάφους στο σχεδιασμό του οποίου στόχευε το HSCT επιστρέφοντας ουσιαστικά σε αυτό που πλέον αποκαλείται Supersonic Business Jet (SBJ). Το τελευταίο [163], αναφέρεται σε SBJ για μεταφορά 8 έως 10 επιβατών (αντί των 250 – 300 που αρχικά στόχευε το HSCT) με $M_{cr} \in [1.6, 2.0]$ και εμβέλεια 3500 – 4500 Nm (αντί $M_{cr} \in [2.0, 2.4]$ και εμβέλεια 5000 – 6500 Nm).

Πίνακας Δ'.1: Μεταβλητές σχεδιασμού.

Μεταβλητή	Ελάχιστη τιμή	Μέγιστη τιμή	Μονάδες
M_{cr}	1.6	2	-
z_{cr}	13000	18000	m
S_w	100	200	m^2
Λ_{LE_w}	45	70	($^\circ$)
Λ_{TE_w}	-5	15	($^\circ$)
λ_w	0.05	0.5	-
$(t/c)_w$	0.04	0.06	-
Λ_{LE_v}	45	70	($^\circ$)
Λ_{TE_v}	-5	15	($^\circ$)
λ_v	0.05	0.5	-
$(t/c)_v$	0.06	0.08	-
W_{fuel}	15000	30000	kg

Δ'.2 Αλγόριθμος Επίλυσης

Ο αλγόριθμος υπολογισμού των επιδόσεων ενός αεροσκάφους, το οποίο περιγράφεται από ένα σύνολο τιμών των 12 μεταβλητών του πίνακα Δ'.1, σκιαγραφείται στο σχήμα Δ'.2. Για το συγκεκριμένο υψόμετρο πτήσης, υπολογίζονται τα χαρακτηριστικά της ατμόσφαιρας (πυκνότητα, θερμοκρασία). Κατόπιν, υπολογίζονται τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της ατράκτου, της πτέρυγας και του κάθετου ουραίου πτερυγίου με βάση τις καθορισμένες γεωμετρικές ποσότητες. Ακολουθεί ο υπολογισμός της ώσης και του συνολικού βάρους του αεροσκάφους, μέσω επαναληπτικής διαδικασίας έως ότου ικανοποιηθεί η απαίτηση ισότητας της άνωσης με το βάρος και της οπισθέλκουσας με την ώση, κατά την ευθεία πτήση. Για το σκοπό αυτό, αρχικοποιείται η ώση στο επίπεδο της θάλασσας. Απ' αυτήν, σε συνδυασμό με τις συνθήκες και το υψόμετρο πτήσης υπολογίζεται η ώση του κινητήρα και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά αυτού, χρησιμοποιώντας εμπειρικές σχέσεις. Ακολουθεί νέα υπόθεση για το συνολικό βάρος απογείωσης, συναρτήσει του οποίου υπολογίζονται τα βάρη των επιμέρους τμημάτων του αεροσκάφους. Τα βάρη αυτά αθροίζονται για να δώσουν το συνολικό βάρος απογείωσης, η τιμή του οποίου διορθώνεται μέχρι η διαδικασία να συγκλίνει. Έχοντας, πλέον, το συνολικό βάρος του αεροσκάφους και όλα τα γεωμετρικά του χαρακτηριστικά, ακολουθεί ο υπολογισμός των αεροδυναμικών μεγεθών. Υπολογίζεται η άνωση και ο συντελεστής άνωσης κατά την ευθεία πτήση. Στη συνέχεια, υπολογίζεται ο συντελεστής οπισθέλκουσας και η εξίσωση της οπισθέλκουσας με την ώση δίνει μια νέα τιμή για την ώση (άρα και την ώση στο επίπεδο της θάλασσας). Με τη νέα αυτή τιμή επαναλαμβάνονται τα παραπάνω βήματα και όταν συγκλίνει και αυτή η διαδικασία, είναι πλέον γνωστή η ώση και όλα τα χαρακτηριστικά του αεροσκάφους, οπότε απομένει μόνο ο υπολογισμός των επιδόσεων του (μήκος απογείωσης, εμβέλεια, ταχύτητα προσέγγισης). Στις υποενότητες που ακολουθούν, αναλύονται εκτενώς οι βασικές σχέσεις που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των επιμέρους ποσοτήτων (γεωμετρικά μεγέθη, βάρη, αεροδυναμικοί υπολογισμοί κλπ) σε κάθε βήμα του αλγορίθμου που περιγράφηκε προηγουμένως.



Σχήμα Δ'.2: Αλγόριθμος υπολογισμού επιδόσεων του αεροσκάφους για δεδομένες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού.

Δ'.2.1 Τυπική Ατμόσφαιρα

Για τη μοντελοποίηση της ατμόσφαιρας, υποτίθεται ότι ο αέρας συμπεριφέρεται ως τέλειο αέριο, δηλαδή

$$p = \rho RT \quad (\Delta'.1)$$

με σταθερά τελείου αερίου την $R=287.04 \text{ J/kg/K}$. Για υψόμετρο έως 11000 m (τροπόσφαιρα), η θερμοκρασία μεταβάλλεται γραμμικά ως προς το ύψος σύμφωνα με τη σχέση

$$T = T_0 - Bz \quad (\Delta'.2)$$

όπου $T_0=288.15 \text{ K}$ είναι η απόλυτη θερμοκρασία στο επίπεδο της θάλασσας και $B=-\frac{dT}{dz} = 0.0065 \text{ K/m}$ είναι ο σταθερός ρυθμός της μεταβολής της θερμοκρασίας με το υψόμετρο. Δεδομένου ότι η μεταβολή της πίεσης με το υψόμετρο δίνεται από τη σχέση

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (\Delta'.3)$$

προκύπτει ότι

$$p = p_0 \left(1 - \frac{Bz}{T_0}\right)^{\frac{g}{RB}} = p_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{g}{RB}} \quad (\Delta'.4)$$

όπου $p_0 = 101325 \text{ Pa}$ είναι η πίεση στο επίπεδο της θάλασσας και $g = 9.80665 \text{ m/s}^2$ η επιτάχυνση της βαρύτητας. Ο λόγος της πυκνότητας προς την πυκνότητα στο επίπεδο της θάλασσας είναι

$$\sigma = \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\left(\frac{g}{RB}-1\right)} \quad (\Delta'.5)$$

Για υψόμετρο μεγαλύτερο από 11000 m και έως 25000 m (στρατόσφαιρα), η θερμοκρασία παραμένει σταθερή και ίση με $T=216.65 \text{ K}$. Η πίεση εκεί προκύπτει ως

$$p = p_{11}e^{-(g/RT)(z-z_{11})} \quad (\Delta'.6)$$

όπου p_{11} η πίεση σε υψόμετρο $z_{11} = 11000 \text{ m}$, όπως υπολογίζεται από τη σχέση Δ'.4. Οι μεταβολές της θερμοκρασίας, της πίεσης και της πυκνότητας συναρτήσεως του υψομέτρου, φαίνονται στο σχήμα Δ'.3.

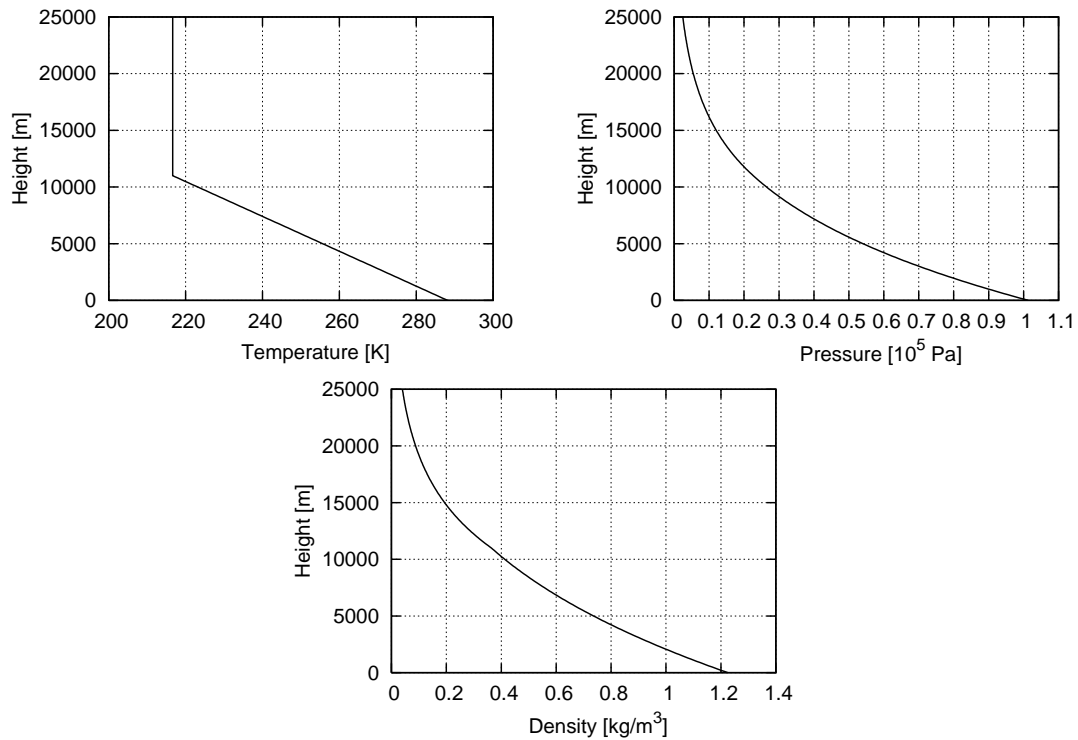
Δ'.2.2 Υπολογισμός Γεωμετρικών Μεγεθών του Αεροσκάφους

Ο υπολογισμός των γεωμετρικών μεγεθών του αεροσκάφους διαστασιολογεί την άτρακτο, την πτέρυγα και το κάθετο ουραίο πτερύγιο.

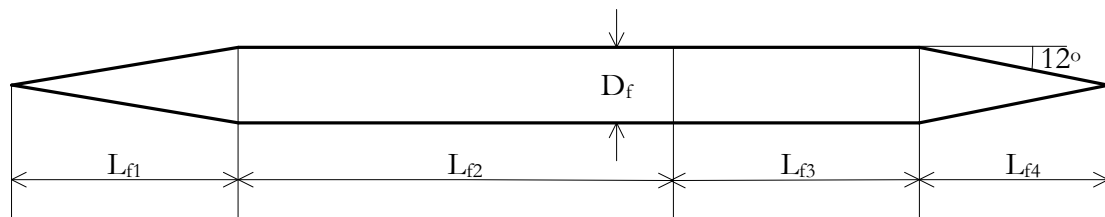
Άτρακτος

Η διαστασιολόγηση της ατράκτου γίνεται λαμβάνοντας υπόψη τα χαρακτηριστικά άλλων SBJ που παρουσιάζονται στη βιβλιογραφία. Έτσι, η άτρακτος αποφασίζεται να έχει κυκλική διατομή διαμέτρου 2.15 m , άρα κυλινδρική μορφή στο κυρίως τμήμα της η οποία συμπληρώνεται με δύο κωνικά τμήματα (εμπρόσθιο και οπίσθιο), σχήμα Δ'.4. Το εμπρόσθιο τμήμα υπολογίζεται έτσι ώστε το αεροσκάφος να βρίσκεται πλήρως μέσα στον κώνο Mach ενώ για το οπίσθιο τμήμα η γωνία κλίσης του δεν πρέπει να ξεπερνά τις $10^\circ - 12^\circ$ προκειμένου να αποφευχθούν φαινόμενα αποκόλλησης της ροής. Με βάση τα παραπάνω, τα μήκη του εμπρόσθιου και οπίσθιου τμήματος της ατράκτου υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} L_{f1} &= \frac{D_f}{2} / \tan(0.3 \arcsin(1/M_{cr})) \\ L_{f4} &= \frac{D_f}{2} / \tan(12^\circ) \end{aligned} \quad (\Delta'.7)$$

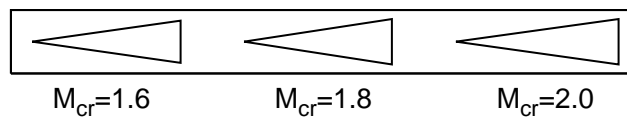


Σχήμα Δ'.3: Κατανομές θερμοδυναμικών μεγεθών Τυπικής Ατμόσφαιρας: Θερμοκρασία (επάνω αριστερά), πίεση (επάνω δεξιά) και πυκνότητα (κάτω) συναρτήσει του υψομέτρου.



Σχήμα Δ'.4: Γεωμετρία ατράκτου συνολικού μήκους $L_f = L_{f1} + L_{f2} + L_{f3} + L_{f4}$.

Άρα το οπίσθιο τμήμα έχει σταθερό μήκος $L_{f4} \simeq 5m$, ενώ το εμπρόσθιο εξαρτάται από τον αριθμό Mach πτήσης. Σύμφωνα με τα όρια του M_{cr} , το L_{f1} θα κυμαίνεται από $6.35m$ ως $6.67m$. Η μορφή του τελευταίου, για τρεις τιμές του M_{cr} (μέσα στα τεθέντα όρια), φαίνεται στο σχήμα Δ'.5.



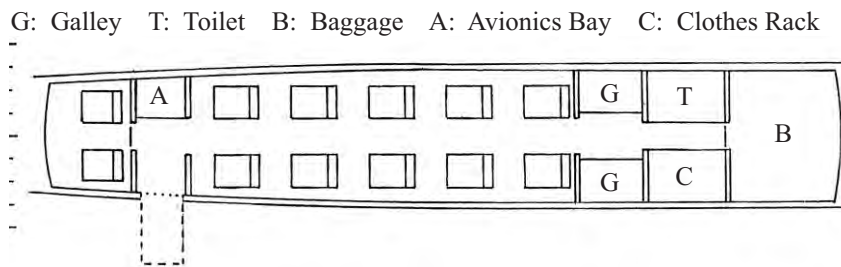
Σχήμα Δ'.5: Άτρακτος: Μορφή εμπρόσθιου τμήματος της ατράκτου για τρεις τιμές του αριθμού Mach σύμφωνα με τη σχέση Δ'.7. Σχήμα υπό κλίμακα.

Το κυλινδρικό τμήμα της κυρίως ατράκτου χωρίζεται σε δύο τμήματα. Το πρώτο τμήμα

αποτελεί το χώρο για τους επιβάτες (καμπίνα, θάλαμος επιβατών) ενώ το δεύτερο τμήμα χρησιμοποιείται για την αποθήκευση του καυσίμου (ή μέρος αυτού). Έτσι, αν υποθεθεί ότι το δεύτερο τμήμα περιλαμβάνει όλο το καύσιμο (δηλαδή ο όγκος του πρέπει να ισούται με αυτόν του καυσίμου) τότε το μήκος του θα δίνεται από τη σχέση

$$L_{f_3} = \frac{4V_{fuel}}{\pi D_f^2} \quad (\Delta'.8)$$

όπου ο όγκος είναι $V_{fuel} = W_{fuel} / \rho_{fuel}$. Το καύσιμο, εξαρτάται από τον τύπο του κινητήρα και συνήθεις τιμές της πυκνότητας ρ_{fuel} κυμαίνονται μεταξύ 770 με 820 kg/m^3 . Ειδικότερα, για το καύσιμο Jet A-1, το οποίο αποτελεί τυπικό καύσιμο για αεροσκάφη, είναι $\rho_{fuel} = 807.5 \text{ kg/m}^3$. Το μήκος του θαλάμου των επιβατών καθορίζεται από την τεθείσα απαίτηση μεταφοράς 12 ατόμων και προδιαγραφές άνεσης (υπηρεσίες πρώτης θέσης) ανά επιβάτη. Έτσι εδώ εκτιμάται ότι το ελάχιστο μήκος είναι $L_{f_2} = 10 \text{ m}$. Για τους 12 επιβάτες προβλέπονται δύο σειρές έξι καθισμάτων πρώτης θέσης (με βήμα 1m). Επιπλέον, με βάση τους κανονισμούς, για αριθμό επιβατών μικρότερο του 20, επιβάλλεται η ύπαρξη μιας εξόδου κινδύνου (Type III $510 \times 915 \text{ mm}$)¹, ενώ στο συνολικό χώρο συνεκτιμάται η ύπαρξη χώρου κουζίνας, αποσκευών και WC. Μια πιθανή διαμόρφωση του θαλάμου επιβατών, με βάση τη σχετική βιβλιογραφία [163], θα μπορούσε να είναι αυτή του σχήματος Δ'.6. Αν και εικονιζόμενη στο σχήμα άτρακτος έχει ελλειπτική διατομή, η διαφορά της από την προτεινόμενη κυκλική είναι ουσιαστικά μικρή. Τέλος, χρήσιμο μέγεθος για τους αεροδυναμικούς υπολογισμούς, όπως θα φανεί στη



Σχήμα Δ'.6: Άτρακτος: Διαμόρφωση του θαλάμου επιβατών όπως παρουσιάζεται στην εργασία [163].

συνέχεια, είναι η συνολική επιφάνεια της άτρακτου, που υπολογίζεται από τη σχέση

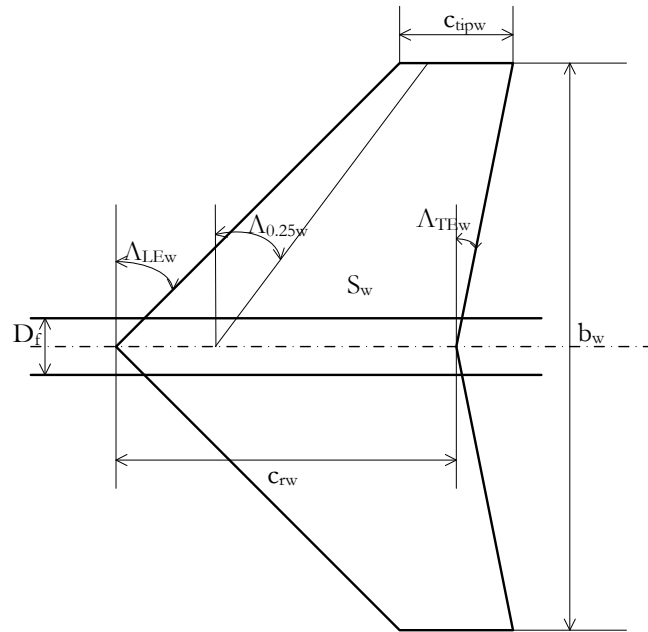
$$S_f = \pi D_f \left[L_{f_2} + L_{f_3} + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{D_f^2}{4} + L_{f_1}^2} + \sqrt{\frac{D_f^2}{4} + L_{f_4}^2} \right) \right] \quad (\Delta'.9)$$

Πτέρυγα

Σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, οι μεταβλητές σχεδιασμού που αφορούν στην πτέρυγα (γωνίες οπισθόκλισης στην ακμή προσβολής και εκφυγής, εκλέπτυνση και λόγος μέγιστου πάχους προς χορδή) καθορίζουν και τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά, από γεωμετρικές σχέσεις. Έτσι για τη χορδή στη ρίζα, έχουμε (σχήμα Δ'.7)

$$c_{r_w} = \sqrt{\frac{S_w (\tan \Lambda_{LE_w} - \tan \Lambda_{TE_w})}{1 - \lambda_w^2}} \quad (\Delta'.10)$$

¹FAR 25 (section 25.807)



Σχήμα Δ'.7: Γεωμετρία πτέρυγας και βασικά γεωμετρικά σύμβολα. Από τα εικονιζόμενα, μεταβλητές σχεδιασμού είναι η επιφάνεια της κάτοψης S_w , οι γωνίες οπισθόκλισης στην ακμή προσβολής, Λ_{LE_w} και εκφυγής, Λ_{TE_w} και η εκλέπτυνση c_{tipw}/c_{rw} (λόγος της χορδής στο ακροπτερύγιο προς τη χορδή στη ρίζα). Η διακεκομμένη γραμμή είναι ο άξονας συμμετρίας της ατράκτου και ουσιαστικά το σημείο-ρίζα από όπου ξεκινά η πτέρυγα.

όπου $\lambda_w = \frac{c_{tipw}}{c_{rw}}$, για το εκπέτασμα

$$b_w = \frac{2S_w}{c_{rw}(1 + \lambda_w)} \quad (\Delta'.11)$$

και για το λόγο επιμήκους

$$AR_w = \frac{b_w^2}{S_w} \quad (\Delta'.12)$$

Η γωνία οπισθόκλισης στο 25% του μήκους της χορδής, μέγεθος που χρησιμοποιείται κατά τον υπολογισμό του βάρους της πτέρυγας, ορίζεται από τη σχέση [236]

$$\tan\Lambda_{0.25w} = \tan\Lambda_{TE_w} - 0.75 \frac{4}{AR_w} \frac{1 - \lambda_w}{1 + \lambda_w} \quad (\Delta'.13)$$

Επιπλέον, για τους υπολογισμούς αεροδυναμικών μεγεθών επιβάλλεται ο υπολογισμός της βρεχόμενης επιφάνειας της πτέρυγας (δηλαδή της συνολικής επιφάνειας της πτέρυγας που 'βρέχεται' από τον αέρα)

$$S_{wet_w} = 2(1 + 0.2 (t/c)_w) S_{exp_w} \quad (\Delta'.14)$$

όπου η εκτιθέμενη επιφάνεια (εμβαδόν κάτοψης του τμήματος της πτέρυγας που εξέχει από την άτρακτο) είναι

$$S_{exp_w} = S_w - \frac{D_f}{2}(2c_{rw} - \frac{D_f}{2}\tan\Lambda_{LE_w} + \frac{D_f}{2}\tan\Lambda_{TE_w}) \quad (\Delta'.15)$$

Κάθετο ουραίο πτερύγιο

Για το κάθετο ουραίο πτερύγιο, όπως και για την πτέρυγα, από τις 'τόσες' μεταβλητές σχεδιασμού σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, καθορίζονται οι γωνίες οπισθόκλισης στην ακμή προσβολής και εκφυγής, η εκλέπτυνση του και ο λόγος του μέγιστου πάχους προς τη χορδή. Γίνεται η παραδοχή ότι η επιφάνεια της πλάγιας όψης του ισούται με 10% της κάτωφης της επιφάνειας της πτέρυγας, δηλαδή

$$S_v = 0.1 S_w \tag{Δ'.16}$$

ενώ τα υπόλοιπα γεωμετρικά μεγέθη, όπως ορίζονται στο σχήμα Δ'.8, υπολογίζονται από σχέσεις αντίστοιχες με αυτές της πτέρυγας. Έτσι, για τη χορδή στη ρίζα του κάθετου πτερυγίου ισχύει

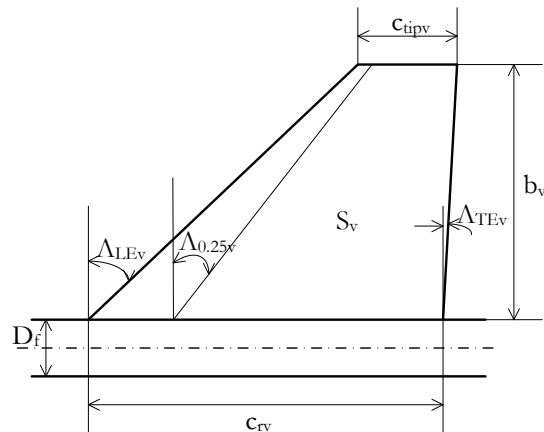
$$c_{rv} = \sqrt{\frac{2S_v(\tan\Lambda_{LEv} - \tan\Lambda_{TEv})}{1 - \lambda_v^2}}$$

για το ύψος

$$b_v = \frac{2S_v}{c_{rv}(1 - \lambda_v^2)} \tag{Δ'.17}$$

και για τη βρεχόμενη επιφάνειά του

$$S_{wetv} = 2(1 + 0.2 (t/c)_v)S_v \tag{Δ'.18}$$



Σχήμα Δ'.8: Γεωμετρία κάθετου ουραίου πτερυγίου και βασικοί συμβολισμοί. Χωρίς κλίμακα.

Δ'.2.3 Υπολογισμός-Διαστασιολόγηση Κινητήρων και Κελύφων

Για τον υπολογισμό και τη διαστασιολόγηση του κινητήρα, όπως προαναφέρθηκε στην περιγραφή του αλγορίθμου, αρχικά υποτίθεται μια τιμή για την ώση T_0 [N] στο επίπεδο της θάλασσας. Ο υπολογισμός της ώσης στις συνθήκες της ευθείας πτήσης γίνεται από εμπειρικές σχέσεις [167] οι οποίες συνδέουν το λόγο της ώσης T [N] προς την ώση στο επίπεδο της θάλασσας με το υψόμετρο και την ταχύτητα πτήσης. Ειδικότερα, για κινητήρα διπλού ρεύματος (turbofan) με μικρό λόγο παράκαμψης (low bypass ratio), ισχύει

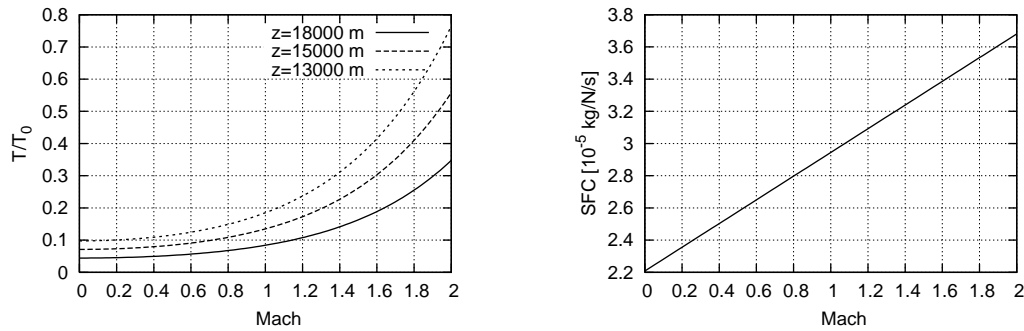
$$\frac{T}{T_0} = 0.6 \frac{p_{cr}}{p_0} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{cr}^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \tag{Δ'.19}$$

Αντίστοιχα, εμπειρική σχέση [167] χρησιμοποιείται και για την ειδική κατανάλωση καυσίμου

$$SFC = 2.83 \cdot 10^{-5} (0.9 + 0.3M_{cr}) \sqrt{\frac{T_{cr}}{T_0}} [kg/N/sec] \tag{Δ'.20}$$

Στο σχήμα Δ'.9 παρουσιάζεται η εξάρτηση του λόγου $\frac{T}{T_0}$ και της ειδικής κατανάλωσης καυσίμου SFC από τον αριθμό Mach και το υψόμετρο πτήσης. Στην περίπτωση του SFC , για ύψη μεγαλύτερα των 11000 m όπου η θερμοκρασία παραμένει σταθερή η καμπύλη είναι μια. Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του κινητήρα υπολογίζονται κι αυτά από εμπειρικές σχέσεις και εξαρτώνται από την ώση στο επίπεδο της θάλασσας ως

$$\begin{aligned} D_{eng} &= c_1 T_0^{k_1} \\ L_{eng} &= c_2 T_0^{k_2} \end{aligned} \tag{Δ'.21}$$



Σχήμα Δ'.9: Λόγος ώσης προς ώση στο επίπεδο της θάλασσας (αριστερά) και ειδική κατανάλωση καυσίμου (δεξιά) με βάση τις εμπειρικές σχέσεις Δ'.19 και Δ'.20. Η τελευταία καμπύλη αφορά πτήση στη στρατόσφαιρα (δηλ. για ύψη μεγαλύτερα των 11000 m).

όπου c_1 , c_2 , k_1 , k_2 σταθερές. Σχετικά με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του κελύφους του κινητήρα και του αγωγού εισόδου, αυτά υπολογίζονται από τα αντίστοιχα μεγέθη του κινητήρα, δηλαδή

$$L_{in} = 4 D_{eng}, \quad L_{nac} = L_{in} + L_{eng}, \quad D_{nac} = 1.1 D_{eng} \quad (\Delta'.22)$$

Δ'.2.4 Υπολογισμός Βάρους

Το συνολικό βάρος² απογείωσης (TOW) του αεροσκάφους υπολογίζεται αθροίζοντας το βάρος του άδειου από καύσιμα αεροσκάφους (ZFW) και το βάρος του καυσίμου (W_{fuel}), δηλαδή

$$TOW = ZFW + W_{fuel} \quad (\Delta'.23)$$

Το βάρος του άδειου από καύσιμα αεροσκάφους, αποτελείται από τα βάρη επιβατών (W_{payl}) και πληρώματος (W_{crew}), το λειτουργικό βάρος (W_{op}) και το βάρος άδειου αεροσκάφους (W_{empty}) ως

$$ZFW = W_{payl} + W_{crew} + W_{op} + W_{empty} \quad (\Delta'.24)$$

Για τον υπολογισμό των βαρών πληρώματος και επιβατών πρέπει να υποτεθεί ένα μέσο βάρος για κάθε άτομο. Για το πλήρωμα έχουμε $N_{crew} = 3$, υπολογίζοντας τον κυβερνήτη, τον συγκυβερνήτη και έναν ιπτάμενο φροντιστή. Ο αριθμός των μελών του πληρώματος καθορίζεται από κανονισμούς, αλλά και από το είδος της λειτουργίας για την οποία προορίζεται. Έτσι, επειδή πρόκειται για αεροσκάφος μεγάλης εμβέλειας (και διάρκειας πτήσης) πρέπει να υπάρχουν δύο πιλότοι. Όσο για τους ιπτάμενους φροντιστές, αρκεί ένας ανά 10 – 15 επιβάτες πρώτης θέσης, άρα εδώ απαιτείται μόνο ένας. Για τους επιβάτες, όπως έχει προαναφερθεί, ισχύει $N_{pas} = 12$. Στο σχεδιασμό των μεγάλων αεροσκαφών, κάθε άτομο υπολογίζεται ότι ζυγίζει 80kg και μεταφέρει χειραποσκευές και αποσκευές βάρους 7kg και 20kg αντίστοιχα. Εδώ, κάθε επιβάτης ή μέλος πληρώματος υπολογίζεται με συνολικό βάρος 100kg . Άρα

$$W_{crew} + W_{payl} = 100 (N_{crew} + N_{pas}) = 1500 \text{ [kg]} \quad (\Delta'.25)$$

²Το βάρος, όπως παρουσιάζεται στην ενότητα αυτή μετράται σε kg και ουσιαστικά ταυτίζεται με τη μάζα. Προτιμάται, παρόλα αυτά, η χρησιμοποίηση του όρου βάρους προκειμένου η ανάλυση να είναι συμβατή με τη σχετική βιβλιογραφία, λ.χ. στο βιβλίο [236], σελίδα 235 όπου δηλώνεται 'Weight [lb or kg]'

Το λειτουργικό βάρος που ουσιαστικά αποτελεί τις προμήθειες νερού, φαγητού και εξοπλισμού ασφαλείας, αντιστοιχεί σε περίπου $17kg$ ανά επιβάτη και $10kg$ για το όλο το πλήρωμα. Εδώ, υποτίθεται ότι

$$W_{op} = 210 \text{ [kg]} \quad (\Delta'.26)$$

Το βάρος άδειου αεροσκάφους αποτελείται από το βάρος του αεροδυναμικού πλαισίου (άτρακτος- W_f , πτέρυγα- W_w , ουραίο πτερύγιο- W_v), το βάρος του συστήματος προσγείωσης (W_{gear}), το βάρος του συστήματος πρόωσης (που καθορίζεται από το βάρος και τον αριθμό των κινητήρων, $W_{prop} = N_{eng} W_{eng}$) και το βάρος του σταθερού εξοπλισμού του αεροσκάφους (W_{fe} , ηλεκτρικά, υδραυλικά συστήματα, συστήματα πλοήγησης κλπ), δηλαδή

$$W_{empty} = W_w + W_v + W_f + W_{gear} + N_{eng} W_{eng} + W_{fe} \quad (\Delta'.27)$$

Από αυτά, τα βάρη του συστήματος προσγείωσης και του σταθερού εξοπλισμού, με βάση δεδομένα από αντίστοιχα αεροσκάφη και τη σχετική βιβλιογραφία [211], υπολογίζονται κατ' αναλογία προς το συνολικό βάρος απογείωσης. Άρα

$$W_{gear} = 0.04 TOW \quad (\Delta'.28)$$

και

$$W_{fe} = 0.08 TOW \quad (\Delta'.29)$$

Τα βάρη του αεροδυναμικού πλαισίου υπολογίζονται χρησιμοποιώντας σχέσεις που δίνονται στη [268]. Έτσι, για την πτέρυγα ισχύει

$$W_w = 20.6 S_w + 5.387 \cdot 10^{-6} \frac{N_{ult} b^3 \sqrt{TOW \cdot ZFW} (1 + 2\lambda)}{(t/c)_w \cos^2 \Lambda_{0.25_w} S_{exp_w} (1 + \lambda)} \quad (\Delta'.30)$$

με τον 'απόλυτο' συντελεστή φόρτισης ³ (ultimate load factor) $N_{ult} = 4.5$, για το ουραίο πτερύγιο,

$$W_v = 12.8 S_v + 24 \cdot 10^{-5} \frac{N_{ult} b_v^3 (8 + 0.09 \frac{TOW}{S_{exp_w}})}{(t/c)_v \cos^2 \Lambda_{0.25_v}} \quad (\Delta'.31)$$

και για την άτρακτο

$$W_f = (5.1314 + 0.498 I_f) S_f \quad (\Delta'.32)$$

με

$$I_f = \begin{cases} I_p & \text{αν } I_p > I_b \\ \frac{I_p^2 + I_b^2}{2I_b} & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (\Delta'.33)$$

Οι δείκτες πίεσης (I_p -pressure index) και κάμψης (I_b -bending index) υπολογίζονται από τις σχέσεις, [268]

$$\begin{aligned} I_p &= 10^{-4} (p_{cr} - p_{cab}) D_f \\ I_b &= 1.3 \cdot 10^{-4} \frac{W_{I_b} N_{ult} L_f}{D_f^2} \\ W_{I_b} &= ZFW - W_w - N_{we} W_{eng} \end{aligned}$$

³ Απόλυτος συντελεστής φόρτισης είναι ο οριακός συντελεστής φόρτισης (αναλογία άνωσης προς το βάρος) πολλαπλασιασμένος με 1.5 για μεγαλύτερη ασφάλεια των δομικών στοιχείων. Ειδικότερα, τα δομικά στοιχεία αρχίζουν να υφίστανται φθορές στον οριακό συντελεστή φόρτισης ενώ αποτυγχάνουν πλήρως στον απόλυτο συντελεστή φόρτισης.

όπου p_{cab} η πίεση στην καμπίνα των επιβατών η οποία θεωρείται⁴ ίση με αυτή σε υψόμετρο 2000 m και N_{we} είναι ο αριθμός των κινητήρων που είναι 'δεμένοι' στην πτέρυγα. Τέλος, το βάρος κάθε κινητήρα εξαρτάται από την ώση του στο επίπεδο της θάλασσας (T_0) [268], ως

$$W_{eng} = 3.5 \cdot 10^{-2} T_0^{0.9255} \quad (\Delta'.34)$$

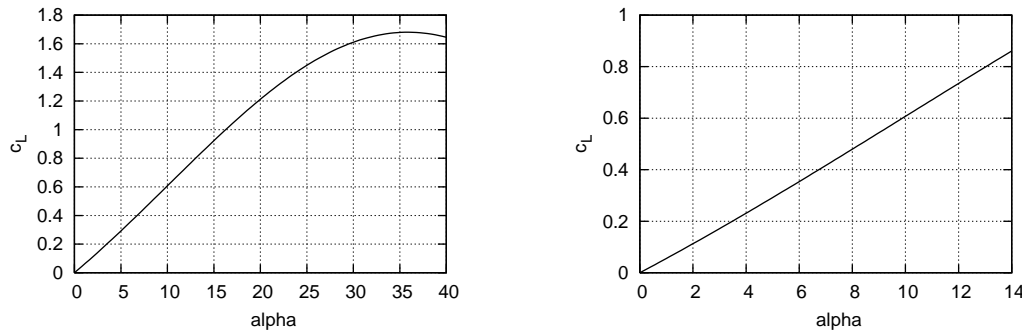
Δ'.2.5 Υπολογισμός Αεροδυναμικών Μεγεθών

Συντελεστής άνωσης

Ο συντελεστής άνωσης δίνεται από την αναλογία του Polhamus [203], σύμφωνα με την οποία η άνωση υπολογίζεται ως άθροισμα της δυναμικής άνωσης (potential lift) και της άνωσης που σχετίζεται με την ύπαρξη αποκολλημένων στροβίλων στην ακμή προσβολής (vortex lift). Σύμφωνα με αυτήν είναι

$$c_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho_{cr} V_{cr}^2 S_w} = \frac{\pi AR_w}{2} \sin a \cos a \left(\cos a + \frac{\sin a \cos a}{\cos \Lambda_{LEw}} - \frac{\sin a}{2 \cos \Lambda_{LEw}} \right) \quad (\Delta'.35)$$

όπου a η γωνία προσβολής στην ευθεία πτήση και L η άνωση. Η σχέση Δ'.35 για συγκεκριμένο λόγο επιμήκους ($AR_w = 2$) και γωνία οπισθόκλισης στην ακμή προσβολής ($\Lambda_{LEw} = 55^\circ$), απεικονίζεται γραφικά στο σχήμα Δ'.10. Σε αυτήν τη φάση της ανάλυσης, η παραπάνω σχέ-



Σχήμα Δ'.10: Συντελεστής άνωσης συναρτήσει της γωνίας προσβολής a για $\Lambda_{LEw} = 55^\circ$ και $AR_w = 2$ από $0-40^\circ$ (αριστερά) και λεπτομέρεια στο διάστημα $0-14^\circ$ (δεξιά).

ση χρησιμοποιείται 'αντίστροφα', δηλαδή για τον υπολογισμό της γωνίας προσβολής κατά την ευθεία πτήση όταν ο συντελεστής c_L έχει υπολογισθεί. Σημειώνεται ότι η γωνία a δεν υπεισέρχεται σε άλλο σημείο του υπολογισμού. Ειδικότερα, το βάρος κατά της έναρξης της πτήσης (gW_{bc}) εξισώνεται με την άνωση (L), δηλ.

$$L = gW_{bc} \Rightarrow \frac{1}{2} \rho_{cr} V_{cr}^2 S_w c_L = gW_{bc} \quad (\Delta'.36)$$

με $V_{cr} = \sqrt{\gamma RT_{cr}} M_{cr}$ την ταχύτητα πτήσης. Το βάρος κατά την έναρξη της πτήσης είναι

$$W_{bc} = TOW - W_{fuel}^{0-2} \approx 0.95 TOW \quad (\Delta'.37)$$

αφού γίνεται η προσέγγιση ότι $W_{fuel}^{0-2} \approx 0.05 TOW$ (είναι το βάρος του καυσίμου που απαιτείται για το τμήμα $0-2$ της αποστολής του αεροσκάφους, δηλαδή την εκκίνηση, την τροχοδρόμηση,

⁴FAR 25 (section 25.841)

την απογείωση και την άνοδο στο υψόμετρο πτήσης). Γνωρίζοντας το συντελεστή άνωσης, από τη σχέση Δ'.36 υπολογίζεται η γωνία προσβολής κατά την πτήση. Στην ανάλυση αυτή (με τα δεδομένα όρια των μεταβλητών σχεδιασμού, πίνακας Δ'.1) οι προκύπτουσες τιμές για τη γωνία προσβολής είναι $1-2^\circ$, οπότε η υπόθεση τις εξίσωσης των δυνάμεων βάρους και άνωσης θεωρείται ασφαλής (δηλαδή οι δυνάμεις μπορούν να θεωρηθούν περίπου συνευθειακές και να αμεληθούν τα συνημίτονα κατεύθυνσης, γι'αυτό προηγήθηκε και η παρατήρηση ότι η γωνία α δεν εμπλέκεται σε άλλους υπολογισμούς).

Συντελεστής οπισθέλκουσας

Ο συντελεστής οπισθέλκουσας του αεροσκάφους σχηματίζεται από το συντελεστή οπισθέλκουσας μηδενικής άνωσης στον οποίο υπερτίθεται η επαγόμενη οπισθέλκουσα λόγω άνωσης, ως

$$c_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho_{cr}V_{cr}^2S_w} = c_{D0} + Kc_L^2 \quad (\Delta'.38)$$

με D την οπισθέλκουσα και K συντελεστή που εξαρτάται από τον αριθμό Mach πτήσης, δηλαδή

$$K = \begin{cases} \frac{1}{\pi AR_w e} & , \text{για } M_{cr} < 1 \\ \frac{AR_w(M_{cr}^2 - 1)}{4AR_w\sqrt{M_{cr}^2 - 1} - 2} \cos\Lambda_{LEw} & , \text{για } M_{cr} > 1 \end{cases} \quad (\Delta'.39)$$

με το συντελεστή e (συντελεστής Oswald) να ορίζεται [211] ως

$$e = 4.61(1 - 0.045AR_w^{0.68})\cos\Lambda_{LEw}^{0.15} - 3.1, \text{για } \Lambda_{LEw} > 30^\circ \quad (\Delta'.40)$$

Ο συντελεστής οπισθέλκουσας μηδενικής άνωσης, ανάλογα με τις συνθήκες πτήσης, εξαρτάται από την οπισθέλκουσα λόγω κατεβασμένων τροχών ($c_{D_{gear}}$), κυμάτων ($c_{D_{wave}}$) και διατμητικών τάσεων ($c_{D_{visc}}$), ως

$$c_{D0} = \begin{cases} c_{D_{visc}} + c_{D_{gear}} & \text{για κατεβασμένους τροχούς και } M_{cr} < 1 \\ c_{D_{visc}} + c_{D_{wave}} & \text{για } M_{cr} \geq 1 \end{cases} \quad (\Delta'.41)$$

όπου ο συντελεστής οπισθέλκουσας λόγω των κατεβασμένων τροχών έχει σταθερή τιμή $c_{D_{gear}}=0.02$.

Η οπισθέλκουσα λόγω κυμάτων είναι η δύναμη πίεσης από την ύπαρξη κρουστικών κυμάτων, καθορίζεται από την κατανομή όγκου του αεροσκάφους και υπολογίζεται από τη σχέση, [211]

$$c_{D_{wave}} = \frac{9\pi}{2S_w} \left(\frac{A_{max}}{L_f} \right)^2 E_{wd} \left[1 - 0.386(M_{cr} - 1.2)^{0.57} \left(1 - \frac{\pi\Lambda_{LEw}^{0.77}}{100} \right) \right] \quad (\Delta'.42)$$

όπου A_{max} το εμβαδόν της μέγιστης τομής του αεροσκάφους και E_{wd} ένας εμπειρικός συντελεστής που λαμβάνει τιμές στο διάστημα 1.8-2.2 (εδώ τίθεται $E_{wd}=2$). Ο συντελεστής οπισθέλκουσας λόγω διατμητικών τάσεων δίνεται από το άθροισμα

$$c_{D_{visc}} = \sum_i \frac{S_{wet_i}}{S_i} c_{f_i} \quad (\Delta'.43)$$

όπου ο συντελεστής τριβής c_{f_i} , για κάθε στοιχείο i (άκτρακτο, πτέρυγα, ουραίο πτερύγιο και κέλυφος κινητήρα) είναι υπολογισμένος για τυρβώδη ροή. Ειδικότερα, ο υπολογισμός

του συντελεστή τριβής γίνεται από το συντελεστή τριβής για ασυμπίεστες ροές λαμβάνοντας επιπλέον υπόψη την επίδραση του αριθμού Mach ⁵ σύμφωνα με τη σχέση

$$c_{f_i} = c_{f_i}^{inc} \frac{r_R^{0.2}}{r_T} \quad (\Delta'.44)$$

όπου ο συντελεστής τριβής για ασυμπίεστες ροές ισούται με

$$c_{f_i}^{inc} = \frac{0.074}{(Re_i)^{0.2}} \quad (\Delta'.45)$$

Ο αριθμός Reynolds $Re_i = Re_i(L_{char})$ της ροής υπολογίζεται από τη σχέση $Re_i = \frac{\rho V L_{char}}{\mu}$, όπου το χαρακτηριστικό μήκος κατά περίπτωση είναι το L_f για την άτρακτο, το L_{nac} για το κέλυφος του κινητήρα και η μέση αεροδυναμική χορδή για την πτέρυγα και το ουραίο περύγιο. Η γενική σχέση υπολογισμού της μέσης αεροδυναμικής χορδής είναι

$$\bar{c}_j = \frac{2c_{r_j}(1 + \lambda_j + \lambda_j^2)}{3(1 + \lambda_j)} \quad (\Delta'.46)$$

όπου $j \equiv w$ για την πτέρυγα και $j \equiv v$ για το κάθετο ουραίο περύγιο.

Για την ευθεία υπερηχητική πτήση, ο συντελεστής οπισθέλκουσας μηδενικής άνωσης υπολογίζεται από τη δεύτερη σχέση της εξίσωσης Δ'.41 και ο συνολικός συντελεστής οπισθέλκουσας από την Δ'.38. Στη συνέχεια, η οπισθέλκουσα \mathcal{D} εξισώνεται με την συνολική ώση \mathcal{T}_{tot} του αεροσκάφους,

$$\frac{1}{2} \rho_{cr} V_{cr}^2 S_w c_D = N_{eng} \mathcal{T} \quad (\Delta'.47)$$

όπου $N_{eng} = 2$ ή 3 όπως προαναφέρθηκε. Από την παραπάνω σχέση ξαναυπολογίζεται η ώση για κάθε κινητήρα, άρα και η ώση στο επίπεδο της θάλασσας της οποίας η τιμή διορθώνεται και οι υπολογισμοί βάρους και αεροδυναμικών μεγεθών επαναλαμβάνονται σύμφωνα με τον αλγόριθμο του σχήματος Δ'.2.

Δ'.2.6 Επιδόσεις

Εμβέλεια

Η εμβέλεια του αεροσκάφους υπολογίζεται από την εξίσωση Breguet

$$\mathcal{R} = \frac{V}{g SFC} \frac{c_L}{c_D} \ln \left(\frac{W_{bc}}{W_{ec}} \right) \quad (\Delta'.48)$$

⁵ Η εξάρτηση του συντελεστή τριβής από τον αριθμό Mach είναι μικρή στους χαμηλούς αριθμούς Mach, αλλά γίνεται σημαντική σε υψηλούς αριθμούς Mach. Ο τρόπος υπολογισμού του λόγου c_f/c_f^{inc} παρουσιάστηκε από τους Sommer και Short [223], ονομάζεται μέθοδος T' και στηρίζεται στο ότι η 'αεροδυναμική θέρμανση' (aerodynamic heating) μεταβάλλει τις ιδιότητες του ρευστού. Θεωρώντας πλήρως τυρβώδη ροή, η θερμοκρασία του τοιχώματος υπολογίζεται από τη θερμοκρασία στο υψόμετρο πτήσης ως $\frac{T_w}{T_{cr}} = (1 + 0.178 M_{cr}^2)$. Ο λόγος της φαινόμενης ασυμπίεστης θερμοκρασίας ορίζεται ως

$r_T = \frac{T'}{T_{cr}} = 1 + 0.035 M_{cr}^2 + 0.45 \left(\frac{T_w}{T_{cr}} - 1 \right)$ και αντίστοιχα, ο λόγος του φαινόμενου αριθμού Reynolds

$r_R = \frac{Re'}{Re_{cr}} = \frac{\rho'}{\rho_{cr}} \frac{\mu_{cr}}{\mu'} = \frac{T_{cr}}{T'} \frac{\mu_{cr}}{\mu'}$ με $\frac{\rho'}{\rho_{cr}} = \frac{T_{cr}}{T'}$ θεωρώντας σταθερή πίεση στο οριακό στρώμα, ενώ η συνεκτικότητα υπολογίζεται από τον τύπο του Sutherland. Έτσι ο συντελεστής τριβής για συμπιεστές ροές δίνεται από τη σχέση $c_f = \frac{T_{cr}}{T'} c_f^{inc}$, με c_f^{inc} τον ασυμπίεστο συντελεστή τριβής υπολογισμένος σε αριθμό Reynolds Re' ως $c_f^{inc} = \frac{0.074}{Re'^{0.2}}$. Άρα ο λόγος του συμπιεστού προς τον ασυμπίεστο συντελεστή τριβής είναι

$\frac{c_f}{c_f^{inc}} = \frac{r_R^{0.2}}{r_T}$.

όπου το βάρος κατά την έναρξη της πτήσης υπολογίζεται από τη σχέση Δ'.37 ενώ το βάρος στο τέλος της πτήσης εκτιμάται ίσο με

$$W_{ec} \approx TOW - 0.95W_{fuel} \quad (\Delta'.49)$$

Ταχύτητα προσέγγισης

Η ταχύτητα προσέγγισης (V_{appr}), η οποία αποτελεί σημαντική παράμετρο που καθορίζει το μήκος προσγείωσης, εξαρτάται από την ταχύτητα αποκόλλησης (V_s). Ειδικότερα, με βάση τους κανονισμούς⁶ αποτελεί πολλαπλάσιο της ως

$$V_{appr} = 1.3V_s \quad (\Delta'.50)$$

Ως ταχύτητα αποκόλλησης (σε δεδομένη γωνία προσβολής) ορίζεται η ελάχιστη ταχύτητα για την οποία η πτέρυγα δημιουργεί επαρκή άνωση για την πτήση και εξαρτάται από τη φόρτιση πτέρυγας (W/S_w) και το μέγιστο συντελεστή άνωσης $c_{L_{max}}$. Για τον υπολογισμό της ταχύτητας αποκόλλησης θεωρείται ότι η άνωση ισούται με το βάρος και ο συντελεστής άνωσης έχει την μέγιστη τιμή του (υπολογίζεται από τη σχέση Δ'.35 για μέγιστη γωνία προσβολής 14°). Στην προκειμένη περίπτωση, ως βάρος λαμβάνεται το μέγιστο βάρος προσγείωσης (MLW). Αυτό υπολογίζεται ως ποσοστό του συνολικού βάρους απογείωσης και, ειδικότερα, αποτελεί το 80 – 100% αυτού (στο συγκεκριμένο πρόβλημα σχεδιασμού τίθεται $MLW = 0.8TOW$), ώστε να είναι εφικτή ενδεχόμενη αναγκαστική προσγείωση σχεδόν αμέσως μετά την απογείωση [211],

$$V_s = \sqrt{\frac{g \cdot MLW}{\frac{1}{2}\rho_0 S_w c_{L_{max}}}} \quad (\Delta'.51)$$

Μήκος απογείωσης

Στη βιβλιογραφία εμφανίζονται διάφοροι τρόποι υπολογισμού του μήκους απογείωσης [5], [211], [125] κ.α.. Στη συγκεκριμένη ανάλυση χρησιμοποιείται η θεωρία του 'ισορροπημένου μήκους απογείωσης'– BFL (Balanced Field Length), όπως παρουσιάζεται από τον Raymer [211]. Έτσι, αρχικά ορίζεται το μήκος τροχοδρόμησης (ground roll), δηλαδή η απόσταση που διανύει το αεροσκάφος μέχρι τη στιγμή που αποκολλάται από το έδαφος (σε ταχύτητα ίση με το 110%–120% της ταχύτητας αποκόλλησης) και το μήκος υπερπήδησης εμποδίου (obstacle clearance distance), δηλαδή η απόσταση που απαιτείται από την αποκόλληση έως ότου το αεροσκάφος φτάσει σε ύψος 35 ft (=10.7 m).

Το ισορροπημένο μήκος απογείωσης (BFL) είναι το μήκος που απαιτείται για την απογείωση στην περίπτωση αστοχίας ενός κινητήρα (για αεροσκάφη με δύο ή περισσότερους κινητήρες) τη χειρότερη, για την απογείωση, χρονική στιγμή και ανταποκρίνεται στους κανονισμούς του FAR 25. Ειδικότερα, κατά τη φάση της τροχοδρόμησης υπάρχει μια κρίσιμη ταχύτητα 'απόφασης' (decision speed, V_1) στην οποία, αν αστοχήσει ένας κινητήρας, το αεροσκάφος μπορεί είτε να φρενάρει και να σταματήσει είτε να συνεχίσει την απογείωση. Αν υπάρξει αστοχία κινητήρα πριν την ταχύτητα V_1 τότε το αεροσκάφος σταματά, ενώ διαφορετικά ο πιλότος υποχρεούται να το απογειώσει. Για τον υπολογισμό του BFL η απογείωση χωρίζεται σε δύο φάσεις, τη φάση της επιτάχυνσης από μηδενική ταχύτητα μέχρι την ταχύτητα αστοχίας

⁶FAR 23 (section 23.73)

ενός κινητήρα και τη φάση της κίνησης ως ύψος 10.7 m, ενώ η αναλυτική σχέση [236] έχει ως

$$BFL = \frac{0.863}{1 + 2.3\Delta\gamma} \left(\frac{TOW}{S_w \rho c_{L_{climb}}} + h_{to} \right) \left(\frac{1}{\bar{T}/(g \cdot TOW) - U} + 2.7 \right) + \frac{\Delta S_{to}}{\sqrt{\sigma}} \quad (\Delta'.52)$$

όπου $h_{to}=10.7$ m, $\Delta S_{to}=200$ m, $U=0.01c_{L_{max}}+0.02$ για κατεβασμένα flap, $\bar{T}=0.75 N_{eng}T_0$ η μέση ώση κατά την απογείωση και $\Delta\gamma=\gamma_{climb}-\gamma_{min}$, ενώ

$$\gamma_{climb} = \arcsin \frac{(N_{eng} - 1)T_0 - \mathcal{D}}{g \cdot TOW} \quad \text{και} \quad \gamma_{min} = \begin{cases} 0.024 & \text{αν } N_{eng} = 2 \\ 0.027 & \text{αν } N_{eng} = 3 \\ 0.030 & \text{αν } N_{eng} = 4 \end{cases} \quad (\Delta'.53)$$

είναι οι γωνίες ανόδου και μια ελάχιστη γωνία, αντίστοιχα. Η οπισθέλκουσα (\mathcal{D}) και ο συντελεστής άνωσης ($c_{L_{climb}}$) υπολογίζονται με βάση τα μεγέθη της απογείωσης. Ειδικότερα, η ταχύτητα κατά την απογείωση είναι $V_{to} = 1.2V_{to_s}$, με την ταχύτητα αποκόλλησης κατά τη απογείωση ίση με

$$V_{to_s} = \sqrt{\frac{gTOW}{\frac{1}{2}\rho_0 S_w c_{L_{max}}}} \quad (\Delta'.54)$$

Επιπλέον, για τον υπολογισμό της οπισθέλκουσας χρησιμοποιείται η σχέση $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\rho_0 V_{to}^2 S_w c_D$, όπου ο συντελεστής οπισθέλκουσας υπολογίζεται για υποχητική ταχύτητα και περιλαμβάνει την οπισθέλκουσα λόγω κατεβασμένων τροχών.

Δ'.3 Βασικά Σύμβολα και Δείκτες

Σύμβολα

a	γωνία προσβολής (angle of attack)
A	εμβαδό τομής αεροσκάφους (cross-sectional area)
AR	λόγος επιμήκους (Aspect Ratio)
b	εκπέτασμα (span)
BFL	μήκος απογείωσης (Balanced Field Length)
c	χορδή
c_L	συντελεστής άνωσης
c_D	συντελεστής οπισθέλκουσας
c_{D_0}	συντελεστής οπισθέλκουσας μηδενικής άνωσης
c_f	συντελεστής τριβής
D	διάμετρος
g	επιτάχυνση της βαρύτητας
L	μήκος
M	αριθμός Mach
MLW	μέγιστο βάρος απογείωσης (Maximum Landing Weight)
p	πίεση
R	σταθερά τελείου αερίου
\mathcal{R}	εμβέλεια
S	επιφάνεια
(t/c)	λόγος πάχους προς χορδή (thickness ratio)
T	θερμοκρασία
T	ώση
TOW	βάρος απογείωσης (Take-off Weight)
V	ταχύτητα
\mathcal{V}	όγκος
W	βάρος
z	υψόμετρο
ZFW	βάρος άδειου από καύσιμα αεροσκάφους (Zero Fuel Weight)
Λ	γωνία οπισθόκλισης ή γωνία βέλους (sweep angle)
λ	εκλέπτυνση (taper ratio)
ρ	πυκνότητα
σ	λόγος πυκνότητας προς την πυκνότητα στο επίπεδο της θάλασσας

Δείκτες

<i>bc</i>	έναρξη πτήσης (beginning of cruise)
<i>cr</i>	ευθεία πτήση (cruise)
<i>ec</i>	τέλος πτήσης (end of cruise)
<i>eng</i>	κινητήρας
<i>exp</i>	εκτιθέμενη (exposed)
<i>f</i>	άτρακτος (fuselage)
<i>fuel</i>	καύσιμο
<i>in</i>	είσοδος
<i>LE</i>	ακμή προσβολής (leading edge)
<i>nac</i>	κέλυφος κινητήρα (nacelle)
<i>TE</i>	ακμή εκφυγής (trailing edge)
<i>v</i>	κάθετο ουραίο πτερύγιο (vertical tail)
<i>w</i>	πτέρυγα (wing)
<i>wet</i>	βρεχόμενη (wetted)
0	επίπεδο θάλασσας (sea level)

Βιβλιογραφία

- [1] Γιαννάκογλου ΚΧ. *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική*. ΕΜΠ, 2005.
- [2] Γιαννάκογλου ΚΧ. *Συνεκτικές Ροές στις Στροβιλομηχανές*. ΕΜΠ, 2005.
- [3] Γιαννάκογλου ΚΧ, Αναγνωστόπουλος Ι, Μπεργελές Γ. *Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς*. 2^η έκδοση, ΕΜΠ, 2002.
- [4] Μαθιουδάκης ΚΜ. *Εισαγωγή στους Αεροπορικούς Κινητήρες: Στροβιλοαντιδραστήρες*. ΕΜΠ, 2003.
- [5] Μπεργελές Γ. *Αεροδυναμική του Υποχηητικού Αεροσκάφους*. ΕΜΠ, 2002.
- [6] Παπαηλιού ΚΔ, Μαθιουδάκης ΚΜ, Γιαννάκογλου ΚΧ. *Εισαγωγή στις Θερμικές Στροβιλομηχανές*. ΕΜΠ, 2000.
- [7] Γεωργοπούλου Χ. *Τεχνικές βελτιστοποίησης για τη σχεδίαση και λειτουργία αεροστροβιλικών μονάδων και συνιστωσών τους*. Διδακτορική Διατριβή υπό Εξέλιξη, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών.
- [8] Γιώτης Α. *Χρήση εξελικτικών τεχνικών, υπολογιστικής ευφυΐας και μεθόδων υπολογιστικής ρευστομηχανικής στη βελτιστοποίηση-αντίστροφη σχεδίαση πτερυγώσεων στροβιλομηχανών, μέσω παράλληλης επεξεργασίας*. Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, 2003.
- [9] Ζερβογιάννης Θ. *Ανάπτυξη μεθόδων σχεδίασης βέλτιστων μορφών στην αεροδυναμική και τις στροβιλομηχανές μέσω εξελικτικών αλγορίθμων και συζυγών τεχνικών*. Διδακτορική Διατριβή υπό Εξέλιξη, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών.
- [10] Ζυμάρης Α. *Συμβολή στη σχεδίαση πτερυγώσεων αξονικών και ακτινικών συμπιεστών μέσω συζυγών τεχνικών*. Διδακτορική Διατριβή υπό Εξέλιξη, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών.
- [11] Καμπόλης Ι. *Πολυεπίπεδοι, πολυεπεξεργαστικοί αλγόριθμοι αεροδυναμικής βελτιστοποίησης στις στροβιλομηχανές*. Διδακτορική Διατριβή υπό Εξέλιξη, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών.
- [12] Καρακάσης Μ. *Ιεραρχικοί, κατανεμημένοι εξελικτικοί αλγόριθμοι και υπολογιστική ευφυΐα στη σχεδίαση βέλτιστων αεροδυναμικών μορφών, σε περιβάλλον πολυεπεξεργασίας*. Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Τομέας Ρευστών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, 2006.
- [13] Κοντολέοντος Ε. *Ανάλυση και βελτιστοποίηση σύνθετων ρευστομηχανικών διατάξεων με χρήση υπολογιστικής ρευστοδυναμικής και εξελικτικών αλγορίθμων*. Διδακτορική Διατριβή υπό Εξέλιξη, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών.

- [14] Κουμπογιάννης Δ. Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Navier–Stokes με χρήση μη δομημένων πλεγμάτων σε περιβάλλον παράλληλης επεξεργασίας. Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, 1998.
- [15] Λαμπρόπουλος Ν. Τεχνικές πολυπλέγματος σε μη-δομημένα πλέγματα για την αριθμητική επίλυση πεδίων ροής στις στροβιλομηχανές, σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον. Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, 2005.
- [16] Λιακόπουλος ΠΚ. Γένεση μη-δομημένων πλεγμάτων με προσαρμοστικά στοιχεία και διαχείρισή τους σε μεθόδους ανάλυσης και βελτιστοποίησης συνιστωσών στροβιλομηχανών. Διδακτορική Διατριβή υπό Εξέλιξη, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, 2008.
- [17] Νικολάου Η. Μελέτη της ροής στο ακτινικό διάκενο αξονικών περυγώσεων στροβιλομηχανών μέσω της επίλυσης των τριδιάστατων εξισώσεων Navier–Stokes. Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, 1998.
- [18] Παπαδημητρίου Δ. Συζυγείς (Adjoint) διατυπώσεις για την ανάλυση – σχεδίαση περυγώσεων στροβιλομηχανών και τη βέλτιστη προσαρμογή πλέγματος με *a posteriori* εκτίμηση σφάλματος. Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, 2006.
- [19] Πολίτης Ε. Ανάπτυξη μεθόδου επίλυσης των εξισώσεων Navier–Stokes για την ανάλυση της ροής σε περυγώσεις στροβιλομηχανών με ή χωρίς ακτινικό διάκενο. Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, 1998.
- [20] Ackley DH. *A connectionist machine for genetic hillclimbing*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1987.
- [21] Alba E, Troya JM. Analyzing synchronous and asynchronous parallel distributed genetic algorithms. *Future Generation Computer Systems* 2001; **17**(4):451–465.
- [22] Alba E, Tomassini M. Parallelism and evolutionary algorithms. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 2002; **6**(5):443–462.
- [23] Alonso JJ, Kroo IM, Jameson A. Advanced algorithms for design and optimization of quiet supersonic platform. *AIAA Paper 2002-0144*, AIAA 40th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, January 2002.
- [24] Anderson WK, Venkatakrisnan V. Aerodynamic design optimization on unstructured grids with a continuous adjoint formulation. *AIAA Paper 1997-0643*, 35th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, January 1997.
- [25] Anderson WK, Bonhaus DL. Airfoil design on unstructured grids for turbulent flows. *AIAA Journal* 1999; **37**(2):185–191.
- [26] Anderson WK, Newman JC, Whitfield DL, Nielsen EJ. Sensitivity analysis for the Navier–Stokes equations on unstructured meshes using complex variables. *AIAA Paper 1999-3294*, 14th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Norfolk, VA, June 1999.
- [27] Arian E, Salas D. Admitting the Inadmissible: Adjoint formulation for incomplete cost functionals in aerodynamic optimization. *Institute for Computer Applications in Science and Engineering (ICASE), Technical Report TR-97-69*, 1997.
-

-
- [28] Asouti VG, Papadimitriou DI, Koubogiannis DG, Giannakoglou KC. Low Mach number preconditioning for 2D and 3D upwind flow solution schemes, on unstructured grids. *5th GRACM International Congress on Computational Mechanics*, Limassol, Cyprus, June–July 2005.
- [29] Asouti VG, Papadimitriou DI, Giannakoglou KC. Continuous adjoint method with low–Mach number preconditioning. *EUROGEN 2007, Conference on Evolutionary and Deterministic Methods for Design, Optimization and Control with Applications to Industry and Social Problems*, Jyväskylä, Finland, June 2007.
- [30] Asouti VG, Zymaris AS, Papadimitriou DI, Giannakoglou KC. Continuous and discrete adjoint approaches for aerodynamic shape optimization with low Mach number preconditioning. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 2008; **57**(10):1485–1504.
- [31] Asouti VG, Giannakoglou KC. Aerodynamic optimization using a parallel asynchronous evolutionary algorithm controlled by strongly interacting demes. *Engineering Optimization* 2009; **41**(3):241–257.
- [32] Bäck T. *Evolutionary Algorithms in Theory and Practice: Evolution Strategies, Evolutionary Programming, Genetic Algorithms*. Oxford University Press, Oxford, UK, 1996.
- [33] Bäck T, Fogel D, Michalewicz Z. *Handbook of Evolutionary Computation*. IOP Publishing Ltd, Bristol, UK, 1997.
- [34] Barnard RH, Philpott DR. *Aircraft Flight: A description of the physical principles of aircraft flight*, 3rd ed., Prentice Hall, 2004.
- [35] Barth TJ. Aspects of unstructured grids and finite–volume solvers for the Euler and Navier–Stokes equations. *AGARD Report 787, Special Course on Unstructured Grid Methods for Advection Dominated Flows*, 1992.
- [36] Barth TJ, Jespersen D. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes. *AIAA Paper 1989-0366, 27th Aerospace Sciences Meeting* Reno, NV, January 1989.
- [37] Baugh JW, Kumar SV. Asynchronous genetic algorithms for heterogeneous networks using coarse–grained dataflow. *Genetic and Evolutionary Computation Conference, GECCO 2003*, Chicago, IL, July 2003.
- [38] Bertin JJ. *Aerodynamics for Engineers*, 4th edition, Prentice Hall, NJ, 2002.
- [39] Brandt A. Multigrid Techniques: 1984 guide with applications to fluid dynamics. *GMD-Studien*, no 85, St. Augustin, Germany, 1984.
- [40] Brandvik T, Pullan G. Acceleration of a 3D Euler solver using commodity graphics hardware. *AIAA Paper 2008-607, 46th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* Reno, NV, January 2008.
- [41] Brunet V. Computational study of buffet phenomenon. *AIAA Paper 2003-3679, 21st AIAA Applied Aerodynamics Conference*, Orlando, June 2003.
- [42] Bruun A, Nitsche W. Active control of turbulent separated flows over slanted surfaces. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 2006; **27**(5):748–755.
- [43] Buelow PEO, Venkateswaran S, Merkle CL. The effect of grid aspect ratio on convergence. *AIAA Journal* 1994; **32**(12):2401–2408.
- [44] Bull L. On model–based evolutionary computation. *Soft Computing* 1999; **3**(2):76–82.
-

-
- [45] Campobasso MS, Duta MC, Giles MB. Adjoint methods for turbomachinery design. *ISABE Paper 2001-1055*, 2001.
- [46] Campobasso MS, Duta MC, Giles MB. Adjoint calculation of sensitivities of turbomachinery objective functions. *AIAA Journal of Propulsion and Power* 2003; **19**(4):693–703.
- [47] Cantú-Paz E. A survey of parallel genetic algorithms. *Calculateurs Paralleles, Reseaux et Systemes Repartis* 1998; **10**(2):141–171.
- [48] Carnahan B, Luther AH, Wilkes JO. *Applied Numerical Methods*. John Wiley & Sons, New York, 1969.
- [49] Carre G, Fournier L, Lanteri S. Parallel linear multigrid algorithm for the acceleration of compressible flow calculations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2000; **184**(2–4):427–448.
- [50] Caruana D, Mignosi A, Correge M, Le Pourhiet A, Rodde AM. Buffet and buffeting control in transonic flow. *Aerospace Science and Technology* 2005; **9**(7):605–616.
- [51] Proceedings of the 2004 Workshop on CFD Validation of Synthetic Jets and Turbulent Separation Control. *CFD Validation of Synthetic Jets And Turbulent Separation Control Contributed Papers*. Volumes 1–5.
- [52] Chien KY. Predictions of channel and boundary–layer flows with a low–Reynolds–number turbulence model. *AIAA Journal* 1992; **20**(1):33–38.
- [53] Choi YH, Merkle CL. The application of preconditioning in viscous flows. *AIAA Journal* 1985; **23**(10):1518–1524.
- [54] Choi YH, Merkle CL. The application of preconditioning in viscous flows. *Journal of Computational Physics* 1993; **105**(2):207–233.
- [55] Chorin AJ. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *Journal of Computational Physics* 1967; **2**(1):12–26.
- [56] Cichocki A, Unbenhauen R. *Neural Networks for Optimization and Signal Processing*. John Wiley & Sons, New York, 1993.
- [57] Coello CAC, Montes EM. Constraint–handling in genetic algorithms through the use of dominance–based tournament selection. *Advanced Engineering Informatics* 2002; **16**:193–203.
- [58] Colorni A, Dorigo M, Maniezzo V. Distributed optimization by ant colonies. *Proceedings of ECAL'91, European Conference on Artificial Life*, Elsevier Publishing, Amsterdam, 1991.
- [59] Collis SS, Joslin RD, Seifert A, Theofilis V. Issues in active flow control: theory, control, simulation and experiment. *Progress in Aerospace Sciences* 2004; **40**(4–5):237–289.
- [60] Courant R, Friedrichs K, Lewy H. Über die partiellen differenzgleichungen der mathematischen Physik, *Mathematische Annalen* 1928; **100**:32–74.
- [61] Cramer NL. A representation for the adaptive generation of single programs. *Conference on Genetic Algorithms and Their Applications* 183–187, 1985.
- [62] Dadone A, Grossman B. Fast convergence of inviscid fluid dynamic design problems. *Computers & Fluids* 2003; **32**(4):607–627.
- [63] Darmofal DL, Schmid PJ. The importance of eigenvectors for local preconditioners of the Euler equations. *Journal of Computational Physics* 1996; **127**(2):346–362.
-

-
- [64] Darwin C. *On the Origin of Species by Means of Natural Selection, or the Preservation of Favored Races in the Struggle for Life*. John Murray, London, UK, 1859.
- [65] Davies A, Samuels P. *An Introduction to Computational Geometry for Curves and Surfaces*. Clarendon Press, Oxford, UK, 1996.
- [66] Deb K. *GeneAS, a robust optimal design technique for mechanical component design. Evolutionary algorithms in engineering applications*. Springer, Berlin, 1997
- [67] Deb K. *Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms*. John Wiley & Sons, New York, USA.
- [68] Deck S. Numerical simulation of transonic buffet over a supercritical airfoil. *AIAA Journal* 2005; **43**(7):1556–1566.
- [69] Dierckx P *Curve and Surface Fitting with Splines*. Clarendon Press, Oxford, UK, 1995.
- [70] Dorigo M, Maniezzo V. Colorni A. The ant system: optimization by a colony of cooperating agents. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B* 1996; **26**(1):29–41.
- [71] Doukelis A, Mathioudakis K, Papailiou K. The effect of tip clearance gap size and wall rotation on the performance of a high-speed annular compressor cascade. *ASME Paper 98-GT-38, International Gas Turbine & Aeroengine Congress & Exhibition*, Stockholm, Sweden, June 1998.
- [72] Doukelis A, Mathioudakis K, Papailiou K. Investigation of the 3D flow structure in a high-speed annular compressor cascade for tip clearance effects. *ASME Paper 98-GT-39, International Gas Turbine & Aeroengine Congress & Exhibition*, Stockholm, Sweden, June 1998.
- [73] Doukelis A. *Study of the flowfield in the tip clearance region of compressor bladings*. PhD Thesis, Cranfield University, School of Mechanical Engineering, 1998.
- [74] Drela M, Giles MB. Viscous-inviscid analysis of transonic and low Reynolds number airfoils. *AIAA Journal* 1987; **25**(10):1347–1355.
- [75] Duta MC, Giles MB, Campobasso MS. The harmonic adjoint approach to unsteady turbomachinery design. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 2002; **40**(3–4):323–332
- [76] Duvigneau R, Visonneau M. Optimization of a synthetic jet actuator for aerodynamic stall control. *Computers & Fluids* 2006; **35**(6):624–638.
- [77] Eberhart RC, Kennedy J. A new optimizer using particle swarm theory. *Sixth International Symposium on Micromachine and Human Science*, Nagoya, Japan. pp. 39–43, 1995.
- [78] Ekaterinaris JA. Prediction of active flow control performance on airfoils and wings. *Aerospace Science and Technology* 2004; **8**(5):401–410.
- [79] Emmerich M, Giotis A, Ozdemir M, Bäck T, Giannakoglou KC. Metamodel-assisted evolution strategies. *7th International Conference on Parallel Problem Solving from Nature PPSN VII, ser. Lecture Notes in Computer Science* 2002; vol. 2439. Springer-Verlag, 2002, pp. 361–370.
- [80] Eriksson LE. A preconditioned Navier–Stokes solver for low mach number flows. *3rd ECCOMAS CFD Conference*, Paris, September 1996.
- [81] Elliott J, Peraire J. Aerodynamic design using unstructured meshes. *AIAA Paper 96-1941, 27th Fluids Dynamics Conference*, New Orleans, LA, June 1996.
-

-
- [82] Elliott J, Peraire J. Aerodynamic optimization on unstructured Meshes with Viscous Effects. *AIAA Paper 97-1849*, 13th Computational Fluids Dynamics Conference, Snowmass Village, CO, June–July 1997.
- [83] Elliott J, Peraire J. Practical three–dimensional aerodynamic design and optimization using unstructured meshes. *AIAA Journal* 1997; **35**:1479–1485.
- [84] Fezoui L, Lanteri S, Larrouturou B, Olivier C. Resolution numerique des equations de Navier–Stokes pour un fluide compressible en maillage triangulaire. *Rapport de recherche INRIA 1033*, INRIA, Sophia Antipolis, May 1989.
- [85] Forest AR. Interactive interpolation and approximation by Bézier polynomials. *The Computer Journal* 1972; **15**(1):71–79.
- [86] Fogel LJ, Owens AJ, Walsh MJ. *Artificial intelligence through simulated evolution*, John Wiley & Sons, New York 1966.
- [87] Gad–el–Hak M, Bushnell DM. Separation control: a review. *Journal of Fluids Engineering* 1991; **113**:5–30.
- [88] Geist A, Beguelin A, Dongarra J, Jiang W, Manchek R, Sunderam V. *PVM: Parallel Virtual Machine. A Users' Guide and Tutorial for Networked Parallel Computing*. The MIT Press, 1994.
- [89] Giacobini M, Alba E, Tomassini M. Selection intensity in asynchronous cellular evolutionary algorithms. *GECCO 2003*, LNCS 2723, pp. 955–966, 2003.
- [90] Giannakoglou KC. Designing turbomachinery blades using evolutionary methods. *ASME Paper 99-GT-181*, 44th ASME Gas Turbine & Aeroengine Congress, Indianapolis, USA, June 1999.
- [91] Giannakoglou KC, Giotis AP, Karakasis MK. Low–Cost Genetic Optimization based on Inexact Pre-evaluations and the sensitivity analysis of design parameters. *Inverse Problems in Engineering* 2001; **9**(4):389–412.
- [92] Giannakoglou KC. Design of optimal aerodynamic shapes using stochastic optimization methods and computational intelligence. *Progress in Aerospace Sciences* 2002; **38**(1):43–76.
- [93] Giannakoglou KC, Kampolis IC, Georgopoulou CA. Metamodel–assisted evolutionary algorithms (MAEAs). *von Karman Institute Lectures Series on Introduction to Optimization and Multidisciplinary Design in Aeronautics and Turbomachinery*, June 2008.
- [94] Giannakoglou KC, Giotis A.P. Unstructured 3D grid partitioning methods based on genetic algorithms. *4th European Computational Fluid Dynamics Conference, ECCOMAS, (Mini-Symposium: Impact of Evolutionary Computing in Flow Engineering)*, Athens, September 1998.
- [95] Giles MB, Pierce NA. Adjoint equations in CFD: duality, boundary conditions and solution behaviour. *AIAA Paper 97-1850*, 1997.
- [96] Giles MB, Pierce NA. An introduction to the adjoint approach to design. *Flow, Turbulence and Combustion* 2000; **65**:393–415.
- [97] Giles MB, Duta MC, Muller JD, Pierce NA. Algorithm developments for discrete adjoint methods. *AIAA Journal* 2003; **41**(2):198–205.
- [98] Giles MB. Discrete adjoint approximations with shocks. *Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications*, Springer-Verlag 2003.
-

-
- [99] Giotis AP, Giannakoglou KC. An unstructured grid partitioning method based on genetic algorithms. *Advances in Engineering Software* 1998; **29**(2):129–138.
- [100] Glezer A, Amitay M. Synthetic jets. *Annual Review of Fluid Mechanics* 2002; **34**:503–529.
- [101] Godard G, Stanislas M. Control of a decelerating boundary layer. Part 1: Optimization of passive vortex generators. *Aerospace Science and Technology* 2006; **10**(6):181–191.
- [102] Goldberg DE. *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison–Wesley, 1989.
- [103] Gorges–Shleuter M, ASPARAGOS: A population genetics approach to genetic algorithms. *Evolution and Optimization '89* 1989; 86–94. Akademie-Verlag (Berlin), 1989.
- [104] Greenblatt D, Wygnanski IJ. The control of flow separation by periodic excitation. *Progress in Aerospace Sciences* 2000; **36**(7):487–545.
- [105] Griewank A. *On Automatic Differentiation. Mathematical Programming: Recent Developments and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 1989.
- [106] Gropp W, Lusk E, Skjellum A. *Using MPI: Portable Parallel Programming with the Message-Passing Interface*. 1994.
- [107] Guillard H, Viozat C. On the behaviour of upwind schemes in the low Mach number limit. *Computers & Fluids* 1999; **28**(1):63–86.
- [108] Harbeck M, Jameson A. Exploring the limits of transonic shock-free airfoil design. *AIAA Paper 2005-1041, 43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, January 2005.
- [109] Hart WE, Baden S, Belew RK, Kohn S. Analysis of the numerical effects of parallelism on a parallel genetic algorithm. *10th International Parallel Processing Symposium*, pp 606-612, 1996.
- [110] Haykin S. *Neural networks*, 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall International, Inc, 1998.
- [111] Hazra S, Schulz V, Brezillon J, Gauger N. Aerodynamic shape optimization using simultaneous pseudo-timestepping. *Journal of Computational Physics* 2005; **204**(1):46–64.
- [112] He Q, Wang L. An effective co-evolutionary particle swarm optimization for constrained engineering design problems. *Engineering Applications of Artificial Intelligence* 2007; **20**:89–99.
- [113] Herrera F, Lozano M, Moraga C. Hierarchical distributed genetic algorithms. *International Journal of Intelligent Systems* 1999; **14**(9):1099–1121.
- [114] Herrmann U, Laban M. Multi-Disciplinary Analysis and Optimisation Applied to Supersonic Aircraft Part 2: Application & Results . *AIAA Paper 2007-1858, 48th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference* Honolulu, Hawaii, April 2007.
- [115] Hirsch C. *Numerical computation of internal and external flows, Vol1, Fundamentals of Numerical Discretization*. John Wiley & Sons Publication, 1992.
- [116] Hirsch C. *Numerical computation of internal and external flows, Vol2, Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows*. John Wiley & Sons Publication, 1992.
-

-
- [117] Holland JH. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, 1975. University of Michigan Press. Second Edition, 1992.
- [118] Jameson A. Aerodynamic design via control theory. *Journal of Scientific Computing* 1998; **3**(3):233–260.
- [119] Jameson A. Optimum aerodynamic design using CFD and control theory. *AIAA Paper 95-1729, 12th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, San Diego, CA, June 1995.
- [120] Jameson J, Alonso JJ. Automatic aerodynamic optimization on distributed memory architectures. *AIAA paper 96-0409, 34th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, January 1996.
- [121] Jameson A, Pierce N, Martinelli L. Optimum aerodynamic design using the Navier–Stokes equations. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 1998; **10**(1–4):213–237.
- [122] Jameson J, Kim S. Reduction of the adjoint gradient formula in the continuous limit. *AIAA Paper 2003-0040, 41st AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, January 2003.
- [123] Jameson J. The role of CFD in preliminary aerospace design. *4th ASME Joint Fluids Engineering Conference*, Honolulu, 2003.
- [124] Jameson A, Shankaran S, Martinelli L, Haimes B. Aerodynamic shape optimization of complete aircraft configuration. *AIAA Paper 2004-0533, 42nd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, January 2004.
- [125] Jenkinson LR, Simpkin P, Rhodes D. *Civil Jet Aircraft Design*. Arnold Publishing, GB, 1999.
- [126] Jin Y, Olhofer, Sendhoff B. A framework for evolutionary optimization with approximate fitness functions. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2002; **6**(5):481–494.
- [127] Jin U. A comprehensive survey of fitness approximation in evolutionary computation. *Soft Computing Journal: A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications*, 2005; **9**(1):3–12.
- [128] Jones WP, Launder BE. The calculation of low–Reynolds–number phenomena with a two-equation model of turbulence. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 1973; **16**(6):1119–1130.
- [129] Joslin RD, Viken AS. Aerodynamic performance of an active flow control configuration using unstructured-grid RANS. *AIAA Paper 2001-0248, 39th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, 2001.
- [130] Kallinderis Y. A 3-D finite-volume method for the Navier–Stokes equations with adaptive hybrid grids. *Applied Numerical Mathematics* 1996; **20**(4):387–406.
- [131] Kampolis IC, Giannakoglou KC. A multilevel approach to single– and multiobjective aerodynamic optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2008; **197**(33–40):2963–2975.
- [132] Kampolis IC, Zymaris AS, Asouti VG, Giannakoglou KC. Multilevel optimization strategies based on metamodel–assisted evolutionary algorithms, for computationally expensive problems. *2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, Singapore, September 25–28, 2007.
-

-
- [133] Kannan BK, Kramer SN. An augmented Lagrange multiplier based method for mixed integer discrete continuous optimization and its applications to mechanical design. *ASME Journal of Mechanical Design* 1994; **116**(2):405–411.
- [134] Karakasis MK, Giotis AP, Giannakoglou KC. Inexact information aided, low-cost, distributed genetic algorithms for aerodynamic shape optimization. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 2003; **43**(10–11):1149–1166.
- [135] Karakasis MK, Giannakoglou KC. On the use of metamodel-assisted multi-objective evolutionary algorithms. *Engineering Optimization* 2006; **38**(8):941–957.
- [136] Karakasis MK, Koubogiannis DG, Giannakoglou KC. Hierarchical distributed evolutionary algorithms in shape optimization. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 2007; **53**(3):455–469.
- [137] Karki KC, Patankar SV. Pressure based calculation procedure for viscous flows at all speeds in arbitrary configurations. *AIAA Journal* 1989; **27**(9):1167–1174.
- [138] Karypis G, Kumar V. A fast and highly quality multilevel scheme for partitioning irregular graphs. *SIAM Journal on Scientific Computing* 1998; **20**(1):359–392.
- [139] Keshtiban IJ, Belblidia F, Webster MF. Compressible flow solvers for low mach number flows: A review. *Computer Science Research Report*. Swansea University, UK, 2004.
- [140] Kim SK, Alonso JJ, Jameson A. Two-dimensional high-lift aerodynamic optimization using the continuous adjoint method. *AIAA Paper 2000-4741, 8th AIAA Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, Long Beach, CA, September 2000.
- [141] Kim SK, Alonso JJ, Jameson A. Design optimization of high-lift configurations using a viscous continuous adjoint method. *AIAA Paper 2002-0844, 40th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, January 2002.
- [142] Kim H, Sasaki D, Obayashi S, Nakahashi K. Aerodynamic optimization of supersonic transport wing using unstructured adjoint method. *AIAA Journal* 2001; **39**(6):1011–1020.
- [143] Koubogiannis DG, Pousoulidis LC, Rovas DV, Giannakoglou KC. Solution of flow problems using unstructured grids on distributed memory platforms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1998; **160**(1–2):89–100.
- [144] Koubogiannis DG, Athanassiadis AN, Giannakoglou KC. One- and two-equation turbulence models for the Prediction of complex cascade flows using unstructured grids. *Computers & Fluids* 2003; **32**(3):403–430.
- [145] Kourta A, Petit G, Rosenblum JP, Courty JC. Prédiction du tremblement en écoulement transsonique. *C. R. Mecanique* 2005; **333**(11):810–817.
- [146] Koza JR. *Genetic Programming: On the Programming of Computers by Means of Natural Selection*. The MIT Press, Cambridge 1992.
- [147] Koza JR. *Genetic Programming II: Automatic Discovery of Reusable Programs*. The MIT Press, Cambridge 1994.
- [148] Kuruvila G, Taasan S, Salas MD. Airfoil design and optimization by the one-shot method. *AIAA Paper 1995-478, 33rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, January 1995.
-

-
- [149] Laban M, Herrmann U. Multi-Disciplinary Analysis and Optimisation Applied to Supersonic Aircraft Part 1: Analysis Tools. *AIAA Paper 2007-1857, 48th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference* Honolulu, Hawaii, April 2007.
- [150] Lallemand MH. Etude de schemas Runge–Kutta a 4 pas pour la resolution multigrille des equations d’Euler 2D. *Rapport de Recherche INRIA*, 1988.
- [151] Lambropoulos NK, Koubogiannis DG, Giannakoglou KC. Acceleration of a Navier–Stokes equation solver for unstructured grids using agglomeration multigrid and parallel processing. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2004; **193**(1):781–803.
- [152] Launder BE, Sharma BI. Application of the energy dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc. *Letters in Heat and Mass Transfer* 1974; **1**:131–138.
- [153] Lee S-H. Convergence characteristics of preconditioned Euler equations. *Journal of Computational Physics* 2005; **208**(1):266–288.
- [154] Li X-S, Gu C-W. An all-speed Roe-type scheme and its asymptotic analysis of low Mach number behaviour. *Journal of Computational Physics* 2008; **227**(10):5144–5159.
- [155] Li X-S, Gu C-W, Xu J-Z. Development of Roe-type scheme for all-speed flows based on preconditioning method. *Computers & Fluids* 2009; to appear.
- [156] Lin JC, Howard FG, Selby GV. Small submerged vortex generators for turbulent flow separation control. *Journal of Spacecraft and Rockets* 1990; **27**(5):503–507.
- [157] Lin JC. Review of research on low-profile vortex generators to control boundary-layer separation. *Progress in Aerospace Sciences* 2002; **38**(4–5):389–420.
- [158] Liakopoulos PIK, Kampolis IC, Giannakoglou KC. Grid enabled, hierarchical distributed meta-model assisted evolutionary algorithms for aerodynamic shape optimization. *Future Generation Computer Systems* 2008; **24**(7):701–708.
- [159] Lim D, Ong YS, Jin Y, Sendhob B, Lee BS. Efficient hierarchical parallel genetic algorithms using grid computing. *Future Generation Computer Systems* 2007; **23**(4):658–670.
- [160] Liu P, Lau F, Lewis MJ, Wang C. A new asynchronous parallel evolutionary algorithm for function optimization. *Parallel Problem Solving from Nature, PPSN VII*, Granada, Spain, September 2002.
- [161] Lyness JN. Numerical algorithms based on the theory of complex variable. *ACM 22nd National Conference*. Washington, DC, 1967, pp. 124-134
- [162] Lyness JN, Moler CB. Numerical differentiation of analytic functions. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 1967; **4**(2):202–210.
- [163] Mack RJ. A Supersonic Business-Jet Concept Designed for Low Sonic Boom. *Nasa-TM-2003-212435* 2003.
- [164] Manderick B, Spiessens P. Fine-grained parallel genetic algorithms. *Third International Conference on Genetic Algorithms* pp. 428–433, Morgan Kaufmann (San Mateo, CA), 1989.
- [165] Martins JRRA, Kroo IM, Alonso JJ. An automated method for sensitivity analysis using complex variables. *AIAA-2000-0689, 38th Aerospace Sciences Meeting*, Reno, NV, January 2000.
-

-
- [166] Mathioudakis K, Papailiou K, Neris N, Bonhommet C, Albrand G, Wegner U. An Annular Cascade Facility for Studying Tip Clearance Effects in High Speed Flows. *XIII ISABE*, Chattanooga, Tennessee, USA, September 1997.
- [167] Mattingly JD. *Elements of Propulsion: Gas Turbines and Rockets*. AIAA Education Series, 2006.
- [168] Mattingly JD, Heiser WH, Pratt DT. *Aircraft Engine Design* 2nd ed., AIAA Education Series, 2002.
- [169] Mavriplis DJ. Multigrid Solution of the two-dimensional Euler equations on unstructured triangular meshes. *AIAA Journal* 1988; **26**(7):824–831.
- [170] McCormick BW. *Aerodynamics, Aeronautics and Flight Mechanics*. John Wiley & Sons, 1995.
- [171] Menter FR. Zonal two equation k - ω turbulence models for aerodynamic flows. *AIAA Paper 93-2906*, 1993.
- [172] Merkle CL, Choi Y-H. Computation of low speed compressible flows with time-marching procedures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1988; **25**(2):293–311.
- [173] Miettinen K. *Nonlinear Multiobjective Optimization*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1999.
- [174] Michalewicz Z. *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*. Springer-Verlag, 3rd edition, 1996.
- [175] Michalewicz Z, Schoenauer M. Evolutionary algorithms for constrained parameter optimization problems. *Evolutionary Computation Mechanics* 1996; **4**:1–32.
- [176] Mohammadi B. Dynamical approaches and incomplete gradients for shape optimization and flow control. *AIAA Paper 1999-3374, 14th Computational Fluid Dynamics Conference*, Norfolk, VA, June–July 1999.
- [177] Mohammadi B, Pironneau O. *Applied Shape Optimization for Fluids*. Clarendon Press, Oxford, 2001.
- [178] Mohammadi B, Pironneau O. Shape optimization in fluid mechanics. *Annual Review of Fluid Mechanics* 2004; **36**:255–279.
- [179] Mühlenbein H, Gorges-Shleuter M, Kramer O. Evolution algorithms in combinatorial optimization. *Parallel Computing* 1988; **7**(1):65–88.
- [180] Nadarajah S, McMullen M, Jameson A. Non-linear frequency domain based optimum shape design for unsteady three-dimensional flow. *AIAA Paper 2006-1052, 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, January 2006.
- [181] Nadarajah S, Jameson A. A comparison of the continuous and discrete adjoint approach to automatic aerodynamic optimization. *AIAA Paper 2000-0667, 38th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, January 2000.
- [182] Nadarajah S, Jameson A. Studies of the continuous and discrete adjoint approaches to viscous automatic aerodynamic shape optimization. *AIAA Paper 2001-2530, 15th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, Anaheim, CA, June 2001.
-

-
- [183] Newman JC, Anderson WK, Whitefield DL. Multidisciplinary Sensitivity Derivatives Using Complex Variables. *Journal of Aircraft* 1999; **36**(1):87–96.
- [184] Nielsen EJ, Anderson WK. Aerodynamic design optimization on unstructured meshes using the Navier–Stokes equations. *AIAA Paper 98–4809* 1998.
- [185] Nielsen EJ, Lu J, Park MA, Darmofal DL. An implicit, exact dual adjoint solution method for turbulent flows on unstructured grids. *Computers & Fluids* 2004; **33**(9):1131–1155.
- [186] Nielsen EJ, Kleb WL. Efficient construction of discrete adjoint operators on unstructured grids by using complex variables. *AIAA Journal* 2005; **44**(4):827–836.
- [187] Nocedal J, Wright SJ. *Numerical Optimization*. Springer Series in Operations Research, New York, 1999.
- [188] Nowostawski M, Poli R. Parallel genetic algorithm taxonomy. *Third International Conference on Knowledge-Based Intelligent Information Engineering Systems KES 1999*, Adelaide, South Australia, August–September 1999.
- [189] Ong YS, Nair PB, Keane AJ. Evolutionary optimization of computationally expensive problems via surrogate modeling. *AIAA Journal* 2003; **41**(4):687–696.
- [190] Othmer C, De Villers E, Weller HG. Implementation of a continuous adjoint for topology optimization of ducted flows. *AIAA Paper 2007-3947, 18th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, Miami, FL, June 2007.
- [191] Othmer C. A continuous adjoint formulation for the computation of topological and surface sensitivities of ducted flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 2008; **58**(8):861–877.
- [192] Papadimitriou DI, Zymaris AS, Giannakoglou KC. Discrete and continuous adjoint formulations for turbomachinery applications. *EUROGEN 2005*, Munich, Germany, 2006.
- [193] Papadimitriou DI, Giannakoglou KC. Compressor blade optimization using a continuous adjoint formulation. *ASME Paper GT2006-90466, ASME Gas Turbine & Aeroengine Technical Congress and Exposition*, Barcelona, Spain, May 2006.
- [194] Papadimitriou DI, Giannakoglou KC. A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals for inviscid and viscous flows. *Computers & Fluids* 2007; **36**(2):325–341.
- [195] Papadimitriou DI, Giannakoglou KC. Direct, adjoint and mixed approaches for the computation of Hessian in airfoil design problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 2007; **56**(10):1929–1943.
- [196] Papadimitriou DI, Giannakoglou KC. Computation of the Hessian matrix in aerodynamic inverse design using continuous adjoint formulations. *Computers & Fluids* 2008; **37**(8):1029–1039.
- [197] Papadimitriou DI, Giannakoglou KC. The continuous direct–adjoint approach for second order sensitivities in viscous aerodynamic inverse design problems. *Computers & Fluids* 2009; to appear.
- [198] Papila N, Shyy W, Fitz–Coy N, Haftka RT. Assessment of neural net and polynomial–based techniques for aerodynamic applications. *AIAA Paper 99-3167, 17th AIAA Applied Aerodynamics Conference*, Norfolk, VA, June 1999.
-

-
- [199] Pareto V. *Cour's d'Economie politique professè á l' Univeritè de Lausanne*. Lausanne, François-Rouge, 1896–1897.
- [200] Pentaris A, Nikolados K, Tsangaris S. Development of projection and artificial compressibility methodologies using the approximate factorization technique. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 1994; **19**(11):1013–1138.
- [201] Pierret S, Van den Braembussche R. Three-dimensional turbine blade design using a Navier-Stokes solver and artificial neural network. *ASME Journal of Turbomachinery* 1999; **121**(2):326–332.
- [202] Pironneau O. *Optimal shape design for elliptic systems*. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [203] Polhamus EC. A concept of the vortex lift of sharp-edge delta wings based on a leading edge suction analogy. *NASA TN D-3767* 1966.
- [204] Politis ES, Giannakoglou KC. A pressure based algorithm for high-speed turbomachinery flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 1997; **25**(1):63–80.
- [205] Pollard A. Passive and active control of near-wall turbulence. *Progress in Aerospace Sciences* 1997; **33**(11–12):689–708.
- [206] Prandtl L. Üeber flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner reibung. *Third International Mathematical Congress*, Heidelberg, 1904.
- [207] Quagliarella D, Vicini A. Coupling genetic algorithms and gradient based optimization techniques. *Genetic Algorithms and Evolution Strategy in Engineering and Computer Science. Recent Advances and Industrial Applications*. John Wiley & Sons Ltd., Nov. 1997, pp. 289–309.
- [208] Rall LB. *Automatic Differentiation: Techniques and Applications*. Springer Verlag, Berlin, Germany, 1981
- [209] Rao DM, Kariya TT. Boundary-layer submerged vortex generators for separation control—an exploratory study. *AIAA Paper 1988-3546, 1st National Fluid Dynamics Congress*, Cincinnati, OH, July, 1988.
- [210] Rasheed K, Vattam S, Ni X. Comparison of methods for developing dynamic reduced models for design optimization. *2002 Congress on Evolutionary Computation (CEC) 2002*; 390–395.
- [211] Raymer DP. *Aircraft Design: A conceptual approach*. 3rd ed. AIAA Education Series, 1999.
- [212] Rechenberg I. *Evolutionstrategie: Optimierung technischer Systeme nach Prinzipien der biologischen Evolution*. Frommann-Holzboog, Stuttgart 1973.
- [213] Reuther J, Alonso JJ, Rimlinger MJ, Jameson A. Aerodynamic shape optimization of supersonic aircraft configurations via an adjoint formulation on distributed memory parallel computers. *Computers & Fluids* 1999; **28**(4–5):675–700.
- [214] Reyes-Sierra M, Coello C. A study of fitness inheritance and approximation techniques for multi-objective particle swarm optimization. *2005 IEEE Congress on Evolutionary Computation 2005*; **1**:65–72.
- [215] Roe PL. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of Computational Physics* 1981; **43**(2):357–372.
-

- [216] Rumsey CL, Gatski TB, Sellers WL, Vatsa VN, Viken SA. Summary of the 2004 computational fluid dynamics validation workshop on synthetic jets. *AIAA Journal* 2006; **44**(2):194–207.
- [217] Sandgren E. Nonlinear integer and discrete programming in mechanical design optimization. *ASME Journal of Mechanical Design*, 1990; **112**(2):223–229.
- [218] Schubauer GB, Spangenberg WG. Forced mixing in boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics* 1960; **8**(1):10–32.
- [219] Seifert A, Pack LG. Active flow separation control on wall-mounted hump at high Reynolds numbers. *AIAA Journal* 2002; **40**(7):1363–1372.
- [220] Shan H, Jiang L, Liu C, Love M, Maines B. Numerical study of passive and active flow separation control over a NACA0012 airfoil. *Computers & Fluids* 2008; **37**(8):975–992.
- [221] Sherman LL, Taylor III AC, Green LL, Newman PA, Hou GW, Korivi VM. First- and second-order aerodynamic sensitivity derivatives via automatic differentiation with incremental iterative methods. *Journal of Computational Physics* 1996; **129**(2):307–331.
- [222] Skamnakis D, Papailiou K. Flow stability analysis and excitation using pulsating jets. *C. R. Mecanique* 2005; **333**(8):628–635.
- [223] Sommer SC, Short BJ. Free-flight measurements of turbulent-boundary-layer skin friction in the presence of severe aerodynamic heating at mach number from 2.8 to 7.0. *NACA Technical Note* 3391, 1955.
- [224] Soto O, Löhner R. CFD shape optimization using an incomplete-gradient adjoint formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2001; **51**(6):735–753.
- [225] Soto O, Löhner R. On the computation of flow sensitivities from boundary integrals. *AIAA Paper 2004-0112, 42nd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, January 2004.
- [226] Squire W, Trapp G. Using complex variables to estimate derivatives of real functions. *SIAM Review* 1998; **40**(1):110–112.
- [227] Storn R, Price K. Differential Evolution – A simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces. *Technical Report TR-95-012*, ICSI, 1995, ftp.icsi.berkeley.edu.
- [228] Spalart P, Allmaras S. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *La Recherche Aeronautique* 1994; **1**:5–21.
- [229] Spalding DB. A single formula for the law of the wall. *Journal of Applied Mechanics* 1961; **28**:455–457.
- [230] Takahama T, Sakai S, Iwane N. Solving nonlinear constrained optimization problems by the ϵ constrained differential evolution. *IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics* 2006; 2322–2327.
- [231] Tamamidis P, Zhang G, Assanis DN. Comparison of pressure-based and artificial compressibility methods for solving 3D steady incompressible viscous flows. *Journal of Computational Physics* 1996; **124**(1):1–13.
- [232] Taylor III AC, Green LL, Newman PA, Putko MM. Some advanced concepts in discrete aerodynamic sensitivity analysis. *AIAA Journal* 2003; **41**(7):1224–1229.
-

- [233] Thomas JP, Hall KC, Dowell EH. A discrete adjoint approach for modeling unsteady aerodynamic design sensitivities. *AIAA Paper 2003-0041, 41th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, January 2003.
- [234] Thierry M, Coustols E. URANS computations of shock-induced oscillations over 2D rigid airfoils: Influence of test section geometry. *Flow, Turbulence and Combustion* 2005; **74**(4):331–354.
- [235] Thierry M, Coustols E. Numerical prediction of shock induced oscillations over a 2D airfoil: Influence of turbulence modelling and test section walls. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 2006; **27**(4):661–670.
- [236] Torenbeek E. *Synthesis of Subsonic Airplane Design*. Delft University Press, 1982.
- [237] Trompoukis X, Asouti VG, Zervogiannis T, Giannakoglou KC. CFD Analysis and parametric study-optimization of suction-blowing flow control techniques. *6th GRACM International Congress on Computational Mechanics*, Thessaloniki, June, 2008.
- [238] Tsourakis GI, Koubogiannis DG, Giannakoglou KC. Transition and heat transfer predictions in a turbine cascade at various free-stream turbulence intensities through a one-equation turbulence model. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 2002; **38**(11):1091–1110.
- [239] Turkel E. Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations. *Journal of Computational Physics* 1987; **72**(2):277–298.
- [240] Turkel E. A review of preconditioning methods for fluid Dynamics. *Applied Numerical Mathematics*, 1993; **12**:257–284.
- [241] Turkel E, Fiterman A, van Leer B. Preconditioning and the limit of the compressible to the incompressible flow equations for finite difference schemes. *Frontiers of Computational Fluid Dynamics 1994*, John Wiley & Sons, 1994.
- [242] Turkel E, Vatsa VN, Radespiel R. Preconditioning methods for low-speed flows. *AIAA Paper 1996-2460*, 1994.
- [243] Turkel E, Radespiel R, Kroll N. Assessment of preconditioning methods for multidimensional aerodynamics. *Computers & Fluids* 1997; **26**(6):613–634.
- [244] Turkel E. Preconditioning techniques in computational fluid dynamics *Annual Reviews in Fluid Mechanics* 1999; **31**: 385–416.
- [245] Turkel E. Robust low speed preconditioning for viscous high lift flows. *AIAA Paper 2002-0962, 40th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, January 2002.
- [246] Turkel E, Vatsa VN. Choise of variables and preconditioning for time dependent flows. *AIAA Paper 2003-3692, 16th AIAA CFD Conference*, Orlando, FL, June 2003.
- [247] van Albada GD, van Leer B, Roberts WW. A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics. *Astronomy and Astrophysics* 1982; **108**:76–84.
- [248] van Leer B, Lee WT, Roe PL. Characteristic time-stepping or local preconditioning of the Euler equations. *AIAA Paper 1991-1552, 10th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, Honolulu, HI, June 1991.
- [249] van Leer B. Flux vector splitting for the Euler equations. *Lecture Notes in Physics* 1982; **170**:405–512.
-

- [250] Venkatakrishnan V. Convergence to steady state solutions of the Euler equations on unstructured grids with limiters. *Journal of Computational Physics* 1995; **118**(1):120–130.
- [251] Volpe G. Performance of compressible flow codes at low Mach numbers. *AIAA Journal* 1993; **31**(1):49–56.
- [252] Weiss JM, Smith WA. Preconditioning applied to variable and constant density flows. *AIAA Journal* 1995; **33**(11):2050–2057.
- [253] Weiss JM, Maruszewski JP, Smith WA. Implicit solution of preconditioned Navier–Stokes equations using algebraic multigrid. *AIAA Journal* 1999; **37**(1):29–36.
- [254] White FM. *Viscous Fluid Flow*. Mc–Graw Hill, Inc., 1974.
- [255] Wilcox DC. *Turbulence modeling for CFD*. DCW Industries, 1993.
- [256] You D, Moin P. Active control of flow separation over an airfoil using synthetic jets. *Journal of Fluids and Structures* 2008; **24**(8):1349–1357.
- [257] Zang TA. Needs and opportunities for uncertainty–based multidisciplinary design methods for aerospace vehicles. *NASA TM 2002-211462*, 2002.
- [258] Zervogiannis T, Liakopoulos PIKD, Papadimitriou DI, Giannakoglou KC. A grid enrichment and movement strategy for a posteriori error analysis in viscous flows. *7th European Conference on Turbomachinery, Fluid Dynamics and Thermodynamics*, Athens, March 5–8, 2007.
- [259] Zervogiannis T, Asouti VG, Gagas K, Kaounis A, Giannakoglou KC. Inverse design of aerodynamic shapes using ant colony optimization. *6th National Congress on Mechanics*, Thessaloniki, July 2001.
- [260] Zitzler E, Deb K, Thiele L. Comparison of multiobjective evolutionary algorithms. *Technical Report 70*, Computer Engineering and Networks Laboratory (TIK), Swiss Federal Institute of Technology (ETH) 1999.
- [261] Zitzler E, Laumanns M, Thiele L. SPEA2: Improving the Strength Pareto Evolutionary Algorithm. *Technical Report 103*, Computer Engineering and Networks Laboratory (TIK), Swiss Federal Institute of Technology (ETH). 2001.
- [262] Zitzler E, Brockhoff D, Thiele L. The Hypervolume Indicator Revisited: On the design of pareto–compliant indicators via weighted integration. *LNCS, Evolutionary Multi–Criterion Optimization (EMO 2007)*. **4403**:862–876. Springer, Heidelberg, 2007.
- [263] Zymaris AS, Papadimitriou DI, Giannakoglou KC, Othmer C. Continuous adjoint approach to the Spalart–Allmaras turbulence model, for incompressible flows. *Computers & Fluids* 2009; to appear.
- [264] <http://147.102.55.162/EASY/>
- [265] <http://adg.stanford.edu/aa241/AircraftDesign.html>
- [266] <http://cfdval2004.larc.nasa.gov/>
- [267] <http://tapenade.inria.fr/>
- [268] <http://www.aoe.vt.edu/~mason/Mason/ACinfoTOC.html>
- [269] <http://www.concordesst.com/>
-

[270] <http://www.hisacproject.com/>

[271] <http://www.mcs.anl.gov/adifor>

[272] <http://www.onera.fr/>
