

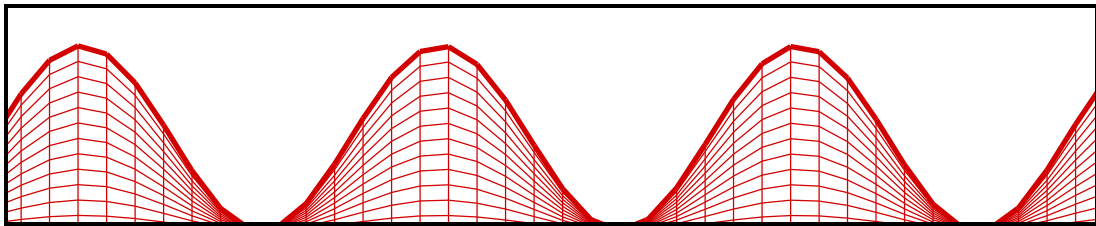


ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΔΠΜΣ ΝΑΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΘΑΛΑΣΣΙΑΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΚΙ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Αριθμητική διερεύνηση της διάδοσης διδιάστατων κυματισμών σε
περιβάλλον με ιξώδες

Διπλωματική εργασία

Επιβλέπων Καθηγητής : Γεώργιος Τζαμπίρας



Αθήνα, Ιούλιος 2012

ΑΝΔΡΕΑΣ ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ
Διπλ. Μηχανολόγος Μηχανικός
andreas.triantafyllou@yahoo.com
+30 6944626824
+30 2108063652

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	
Εισαγωγή	σελ.3
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	
Απλοί αρμονικοί κυματισμοί	σελ.4
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	
Αρχές Διατήρησης – Θεμελιώδεις Διαφορικές Εξισώσεις	σελ.9
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4	
Υπολογιστικές μέθοδοι και διακριτοποίηση	σελ.11
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5	
Μέθοδος πεπερασμένων όγκων ελέγχου	σελ.18
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6	
Κινούμενα πλέγματα	σελ.24
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7	
Συνοριακές συνθήκες	σελ.30
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8	
Περιπτώσεις- Test cases	σελ.39
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α΄	σελ.93
ΜΕΡΟΣ Β΄	
Quadratic interpolation in non uniform Grids	σελ.115

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Τα τελευταία χρόνια έχει αποκτήσει ιδιαίτερο ενδιαφέρον , η προσομοίωση της ροής γύρω από αεροτομές αξονοσυμμετρικά σώματα, πλοία για στρατιωτικές και πολιτικές εφαρμογές καθώς και γενικά η προσομοίωση υδροδυναμικών φαινομένων όπως είναι τα κύματα .

Σε αυτή την κατεύθυνση η ανάπτυξη της ισχύος των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών έχει ανοίξει το δρόμο για ένα πλήθος νέων επιστημών και επιστημονικών εφαρμογών.

Μία από τις νέες επιστήμες είναι και η Υπολογιστική Ρευστοδυναμική (Computational Fluid Dynamics, CFD).

Αντικείμενό της είναι η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων που διέπουν την κίνηση των ρευστών σε πεδία όπου η αναλυτική επίλυση είναι αδύνατη. Η παρούσα εργασία εντάσσεται στα πλαίσια της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής και έχει σαν αντικείμενο την Αριθμητική Πρόσομοίωση αρμονικών κυματισμών. Στόχος μας είναι η προσομοίωση της παραγωγής και διάδοσης ενός αρμονικού κύματος μέσα από μία περιοχική υψηλής συνεκτικότητας καθώς και η προσομοίωση αρμονικού κυματισμού με ανύψωση πυθμένα.

Για την παραγωγή του κύματος, κατασκευάστηκε μία αριθμητική δεξαμενή συνδυάζοντας τη θεωρία αρμονικών κυματισμών, και τις αρχές και τεχνικές της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής. Αυτό έγινε με τη χρήση ενός κώδικα ηλεκτρονικού υπολογιστή σε γλώσσα FORTRAN για την προσομοίωση της δεξαμενής και την επίλυση του πεδίου ροής. Ο κώδικας αυτός είναι ο Wgen που έχει αναπτυχθεί από τον Καθηγητή του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, Γεώργιο Τζαμπίρα.

Κατά τη διαδικασία αυτή γίνεται μοντελοποίηση ενός εμβόλου η κίνηση του οποίου παράγει έναν αρμονικό κυματισμό ο οποίος διαδίδεται κατά μήκος της δεξαμενής εως ότου συναντήσει το κατάντι στερεό σύνορο.

Σ' αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάκτορα Πολύζο Στυλιανό για την καθοδήγησή του και φυσικά τον καθηγητή κύριο Τζαμπίρα Γεώργιο για την πολύτιμη βοήθειά του.

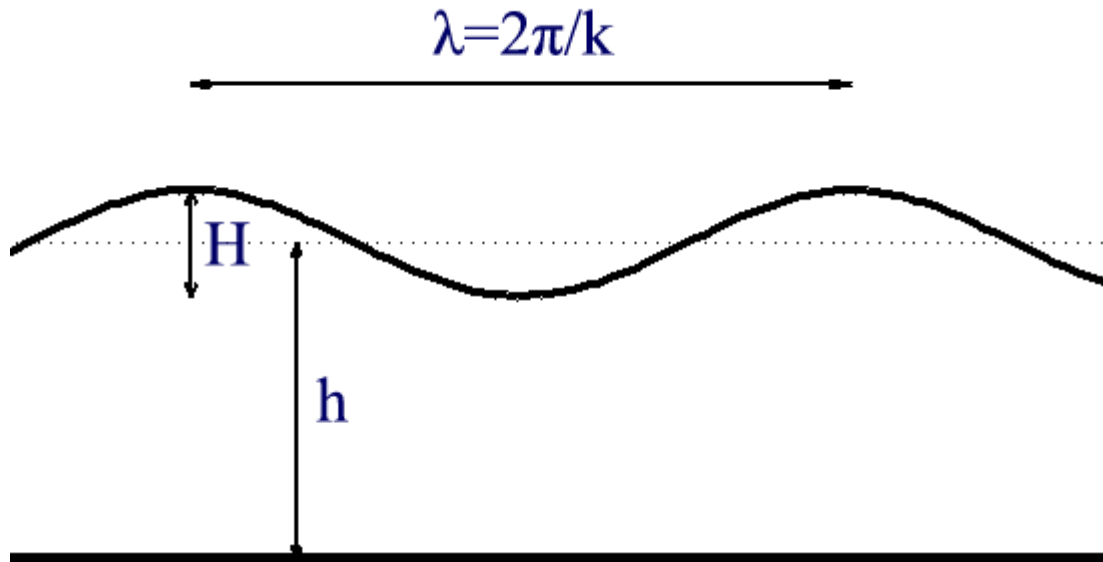
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Απλοί αρμονικοί κυματισμοί

Θεωρούμε απλό αρμονικό κυματισμό με περίοδο T και μήκος κύματος λ , που μεταδίδεται σε θαλάσσιο νερό σταθερού βάθους h . Η κατεύθυνση μετάδοσης είναι παράλληλη με τον άξονα x . Η κυκλική συχνότητα ω και ο κυματαριθμός k του κυματισμού ορίζονται από τις σχέσεις $\omega = 2\pi/T$, και $k = 2\pi/\lambda$. Η μετατόπιση της ελεύθερης επιφάνειας έχει την μορφή:

$$\eta = a \cos(kx - \omega t)$$

Όπου a είναι το πλάτος ταλάντωσης του κύματος. Το ύψος του κύματος H ορίζεται σαν η κατακόρυφη απόσταση ανάμεσα σε μία κορυφή και μία κοιλιά του κύματος. Για κυματισμούς του τύπου που περιγράφεται παραπάνω $H = 2a$



Το δυναμικό της ροής έχει την μορφή

$$\phi = \sin(kx - \omega t)F(z)$$

Όπου $F(z)$ είναι συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$\frac{d^2 F}{dz^2} - k^2 F = 0$$

Η ανωτέρω διαφορική εξίσωση ικανοποιείται από οποιονδήποτε γραμμικό συνδυασμό των συναρτήσεων $e^{\pm kz}$. Επειδή η λύση πρέπει να ικανοποιεί την οριακή συνθήκη στον πυθμένα, που τώρα είναι $dF/dz(-h) = 0$ επιλέγουμε τον ακόλουθο γραμμικό συνδυασμό:

$$F = A \cosh(k(z+h)) + B \sinh(k(z+h))$$

Όπου A,B σταθερές. Η οριακή συνθήκη στον πυθμένα επιβάλλει $B=0$, ενώ από άλλη οριακή συνθήκη επιβάλλεται:

$$A = \frac{a\omega}{k \sinh(kh)}$$

Κατά συνέπεια το δυναμικό της ροής δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\phi = \frac{a\omega \cosh(k(z+h))}{k \sinh(kh)} \sin(kx - \omega t)$$

Αντικαθιστώντας την την δυναμική συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση:

$$\omega^2 = gk \tanh(kh)$$

Η παραπάνω εξίσωση συνδέει την συχνότητα και τον κυματαριθμό και είναι η εξίσωση διασποράς των θαλασσιών κυμάτων.

Για μεγάλα βάθη εν σχέσει με το μήκος του κύματος ($kh \gg 1$) έχουμε ότι $\tanh(kh) \approx 1$, οπότε η προηγούμενη εξίσωση παίρνει την μορφή

$$\omega^2 = gk$$

Αντίθετα για μικρά βάθη εν σχέσει με το μήκος του κύματος ($kh \ll 1$) έχουμε ότι $\tanh(kh) \approx kh$, οπότε η (2.7) παίρνει την μορφή

$$\omega^2 = ghk^2$$

Για μεγάλα μήκη κύματος παρατηρούμε ότι η ταχύτητα μετάδοσης του κυματισμού είναι ίση με $(gh)^{1/2}$, δηλαδή είναι ανεξάρτητη του κυματαριθμού. Για μικρά μήκη κύματος η ταχύτητα μετάδοσης του κυματισμού είναι ίση με $(g/k)^{1/2}$, δηλαδή η ταχύτητα μετάδοσης είναι αντιστρόφως ανάλογη με την ρίζα του μήκους κύματος. Στην γενική περίπτωση λόγω της ανισότητας $\tanh a \leq a$ έχουμε την ακόλουθη σχέση για την ταχύτητα μετάδοσης

$$\frac{\omega}{k} \leq \sqrt{gh}$$

Οι όροι «βαθύ» ή «ρηχό» νερό είναι σχετικοί και έχουν να κάνουν με το πως συγκρίνεται το μήκος του κύματος με το βάθος της θάλασσας.

Συγκεκριμένα αν $\lambda/h > 62.8$ έχουμε ρηχό νερό, ενώ αν $h/\lambda > 0.5$ έχουμε βαθύ νερό. Έτσι ακόμα και στο βαθύτερο σημείο της θάλασσας το νερό φαίνεται ρηχό για τα σεισμικά κύματα που έχουν πολύ μεγάλο μήκος κύματος, ενώ στα κύματα που δημιουργεί ένα μοντέλο σε δεξαμενή το νερό της δεξαμενής φαίνεται βαθύ.

Αντίστοιχα, σε βαθύ νερό η έκφραση για το δυναμικό παίρνει την ακόλουθη κάπως απλούστερη μορφή

$$\phi = \frac{a\omega}{k} e^{kz} \sin(kx - \omega t)$$

Σε ρηχό νερό $kh \rightarrow 0$ έχουμε ότι $\cosh(k(z+h)) \approx 1$, $\sinh(kh) \approx kh$, οπότε μεταχειριζόμενοι ότι για ρηχό νερό $\omega/k = (gh)^{1/2}$, βρίσκουμε ότι η ροή τείνει σε μία μονοδιάστατη ροή παράλληλη με τον άξονα των x :

$$\phi = \frac{ag}{\omega} \sin(kx - \omega t)$$

Το δυναμικό στο όριο του ρηχού νερού δεν εξαρτάται από το z , οπότε ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace μόνο προσεγγιστικά, με την έννοια ότι, επειδή το μήκος κύματος είναι μεγάλο, ο κυματαριθμός k είναι μικρός, οπότε $\nabla^2 \phi = \partial^2 \phi / \partial x^2 = -k^2 \phi \approx 0$. Το δυναμικό δεν χρησιμοποιείται για τα κύματα του ρηχού νερού, αλλά μεταχειριζόμαστε κατ'ευθείαν τις εξισώσεις του Euler.

Τροχιές σωματιδίων

Οι ταχύτητες που προκαλεί το κύμα είναι περιοδικές χρονικά, όπως φαίνεται με παραγωγή του δυναμικού:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = a\omega \frac{\cosh(k(z+h))}{\sinh(kh)} \cos(kx - \omega t)$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = a\omega \frac{\sinh(k(z+h))}{\sinh(kh)} \sin(kx - \omega t)$$

Η μέση ταχύτητα είναι παντού ίση με μηδέν, και κατά συνέπεια τα σωματίδια του νερού εκτελούν μικρές ταλαντώσεις γύρω από την θέση ισορροπίας τους.

Εστω (x, z) η θέση του σωματιδίου όταν δεν υπάρχει κύμα ($a=0$). και $(x+\xi, z+\zeta)$ η στιγμιαία θέση του σωματιδίου όταν υπάρχει κύμα. Εξ ορισμού τα (ξ, ζ) ικανοποιούν τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{d\xi}{dt} = a\omega \frac{\cosh(k(z + \zeta + h))}{\sinh(kh)} \cos(k(x + \xi) - \omega t)$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = a\omega \frac{\sinh(k(z + \zeta + h))}{\sinh(kh)} \sin(k(x + \xi) - \omega t)$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι μη γραμμικές ως προς ξ και ζ , και κατά συνέπεια η επίλυση τους είναι δυσχερής. Σε συνέπεια με τις παραδοχές της γραμμικής θεωρίας όμως μπορούμε υποθέσουμε ότι οι μετατοπίσεις των σωματιδίων είναι μικρές, και κατά συνέπεια μπορούμε να αγνοήσουμε τα (ξ, ζ) όπου εμφανίζονται στο δεξιό μέλος. Οι εξισώσεις τότε ολοκληρώνονται άμεσα ως προς χρόνο και έχουμε ότι:

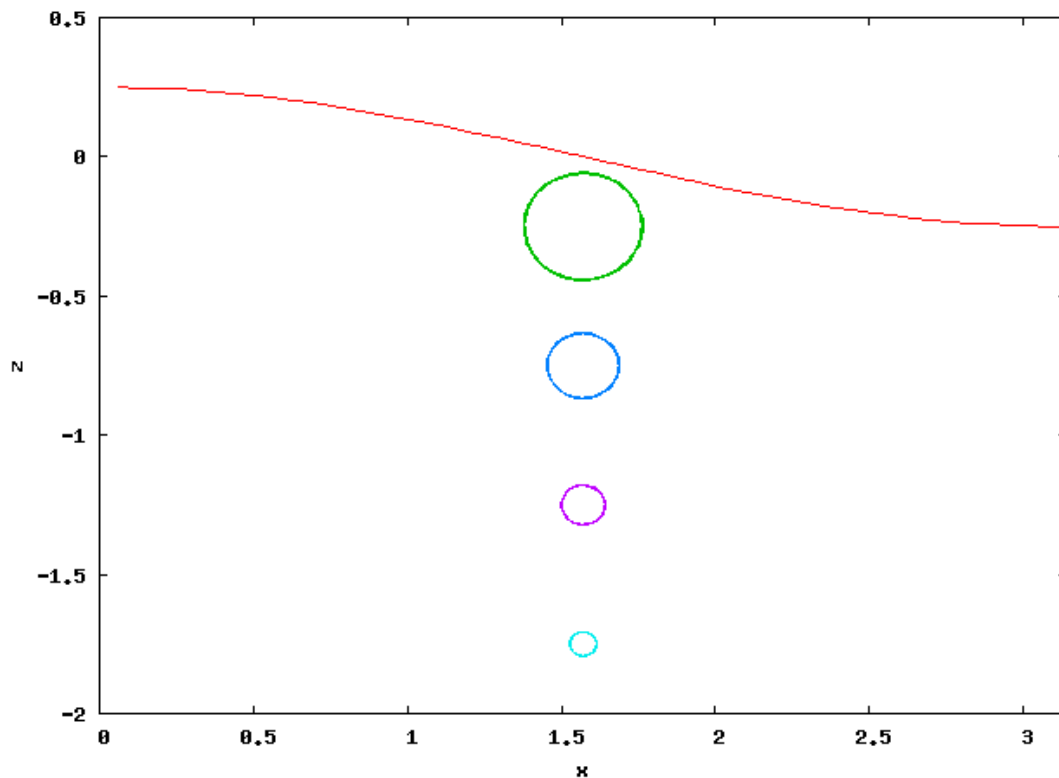
$$\xi = -a \frac{\cosh(k(z + h))}{\sinh(kh)} \sin(kx - \omega t)$$

$$\zeta = a \frac{\sinh(k(z + h))}{\sinh(kh)} \cos(kx - \omega t)$$

Βλέπουμε επομένως ότι τα σωματίδια διαγράφουν ελλειπτικές τροχιές με μεγάλο ημιάξονα παράλληλο με τον άξονα x και ίσο με $a \cos(k(z + h)) / \sinh(kh)$, και μικρό ημιάξονα παράλληλο με τον άξονα z και ίσο με $a \sinh(k(z + h)) / \sinh(kh)$.

Στο βαθύ νερό $kh \rightarrow \infty$ και οι δύο ημιάξονες γίνονται ίσοι με $a \exp(kz)$, δηλαδή οι τροχιές γίνονται κύκλοι με ακτίνα που μειώνεται εκθετικά με το βάθος.

Σε βάθος μεγαλύτερο από το μισό μήκος κύματος τα σωματίδια του νερού κινούνται ελάχιστα και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι παραμένουν ακίνητα. Στο ρηκό νερό, όπου $kh \rightarrow 0$, ο μεγάλος ημιάξονας τείνει στην τιμή agk / ω^2 ενώ ο μικρός άξονας τείνει στο μηδέν. Το πέρασμα δηλαδή ενός μεγάλου μήκους κύματος προκαλεί μιά γραμμική ταλάντωση των σωματιδίων του ρευστού στην x κατεύθυνση σε όλο το βάθος του ρευστού.



Τροχιές σωματιδίων κάτω από απλό αρμονικό κύμα σε βαθύ νερό. Οι τροχιές είναι κύκλοι με κέντρο τη θέση ισορροπίας του σωματιδίου και ακτίνα που μειώνεται εκθετικά με το βάθος.

Σημειώνεται ότι τα προηγούμενα ισχύουν με βάση την γραμμική θεωρία των κυματισμών. Στην πραγματικότητα, λόγω των μη γραμμικών όρων στις οριακές συνθήκες, η μέση ταχύτητα των σωματιδίων του ρευστού στην x κατεύθυνση έχει μη μηδενική τιμή. Αποδεικνύεται ότι η μέση ταχύτητα είναι ανάλογη με a^2 , είναι επομένως πολύ μικρότερη από την στιγμιαία ταχύτητα, και δικαιολογημένα αγνοείται στην γραμμική θεωρία. Η μέση ταχύτητα των σωματιδίων του ρευστού είναι όμως πολύ σημαντική για γεωφυσικά φαινόμενα, επειδή προκαλεί μία μέση μεταφορά μάζας νερού παράλληλα με την κατεύθυνση μετάδοσης του κύματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Αρχές Διατήρησης – Θεμελιώδεις Διαφορικές Εξισώσεις .

Θέλουμε να εξετάσουμε την αρχή διατήρησης μίας φυσικής ποσότητας Φ σε ένα πεδίο ασυμπίεστης μη μόνιμης ροής:

$$\text{Συσσώρευση} + (\text{Εκροή} - \text{Εισροή}) = \text{Παραγωγή} - \text{Κατανάλωση}$$

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τις εκφράσεις που λαμβάνουν η αρχή διατήρησης της μάζας και η αρχή διατήρησης της ορμής σε ένα πεδίο όπως αυτό που προαναφέραμε.

Αρχή Διατήρησης Μάζας.

Η αρχή διατήρησης της μάζας σε ένα πεδίο ασυμπίεστης μη μόνιμης ροής, μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός μεταβολής μάζας} \\ \text{στον όγκο ελέγχου} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ολική παροχή μάζας μέσα} \\ \text{από την επιφάνεια ελέγχου} \end{array} \right\}$$

Χρησιμοποιώντας καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, η μαθηματική έκφραση, υπό μορφή διαφορικής εξίσωσης, της προηγούμενης ισότητας θα είναι:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{v}) = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot v) = 0$$

Όπου συμβολίζουμε με ρ την πυκνότητα του ρευστού, u η ταχύτητα στην x - Διεύθυνση και v η ταχύτητα στην y -διεύθυνση.

Η σχέση αυτή μπορεί να απλουστευθεί κάνοντας ορισμένες παραδοχές.

Έτσι, αν θεωρήσουμε ότι το πεδίο είναι μόνιμο, τότε η εξίσωση παίρνει την μορφή:

$$\text{div}(\rho \cdot \vec{v}) = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot v) = 0$$

Επιπλέον, αν θεωρήσουμε ότι η πυκνότητα του ρευστού είναι σταθερή σε όλο τον όγκο του, πράγμα που συμβαίνει στα ασυμπίεστα ρευστά που θα μελετήσουμε, τότε η εξίσωση λαμβάνει την απλούστερη μορφή:

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Αρχή Διατήρησης Ορμής

Η αρχή διατήρησης της ορμής σε ένα πεδίο ασυμπίεστης μη μόνιμης ροής, μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός μεταβολής ορμής} \\ \text{στον όγκο ελέγχου} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Συνισταμένη δύναμη που ασκείται} \\ \text{στον όγκο ελέγχου} \end{array} \right\}$$

Η μαθηματική έκφραση, υπό μορφή διαφορικής εξίσωσης, της προηγούμενης ισότητας είναι η ακόλουθη:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho g - \operatorname{grad} p + \mu \Delta \vec{u}$$

Όπου συμβολίζουμε με g την επιτάχυνση της βαρύτητας, με p την πίεση του ρευστού, με μ την δυναμική συνεκτικότητα του, με Δ τον τελεστή Laplace και με $\frac{D\vec{u}}{Dt}$ την υλική ή ουσιώδη παράγωγο. Οι δύο τελευταίοι συμβολισμοί αναλύονται, για καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων δύο διαστάσεων (x και y - διευθύνσεις), ως εξής:

$$\left(\frac{D\vec{u}}{Dt} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\left(\frac{D\vec{u}}{Dt} \right) = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}$$

Έτσι, μπορούμε να γράψουμε τη διαφορική εξίσωση της αρχής διατήρησης της ορμής, σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, ως ακολούθως:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho g - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

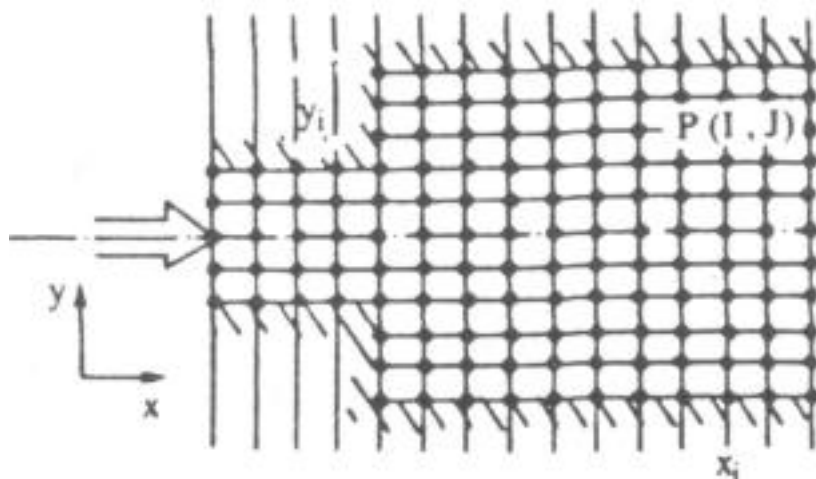
$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho g - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ.

Διακριτοποίηση Φυσικού Χώρου.

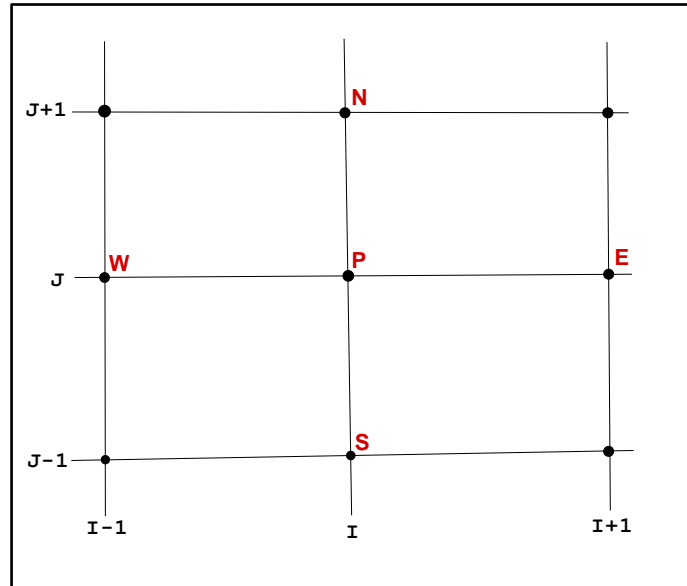
Για να επιλύσουμε τις διαφορικές εξισώσεις των προβλημάτων που αντιμετωπίζουμε, το πρώτο βήμα που απαιτείται να κάνουμε είναι να διακριτοποιήσουμε τον φυσικό χώρο στον οποίο λαμβάνει χώρα το φυσικό φαινόμενο που μελετάμε. Η διακριτοποίηση επιτυγχάνεται με την τοποθέτηση ενός αριθμητικού πλέγματος πάνω στο πεδίο ροής. Για την απλούστερη περίπτωση όπου το πεδίο ροής είναι ένας ορθογώνιος παραλληλόγραμμος χώρος, το αριθμητικό πλέγμα έχει τη μορφή ευθειών σταθερού x και σταθερού y . Η τομή των ευθειών αυτών καλείται υπολογιστικός κόμβος. Ένα παράδειγμα υπολογιστικού πλέγματος φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Η τοποθέτηση των ευθειών που απαρτίζουν το αριθμητικό πλέγμα μπορεί να είναι αυθαίρετη, αν και προσπαθούμε, όσο αυτό είναι δυνατό, να τις κατανέμουμε ομοιόμορφα. Με αυτό τον τρόπο απλοποιούμε όσο περισσότερο γίνεται τις αλγεβρικές εξισώσεις, εξοικονομώντας έτσι υπολογιστικό χρόνο και υπολογιστική μνήμη. Πάντως στις περιοχές όπου οι εξαρτημένες μεταβλητές παρουσιάζουν μεγάλες κλίσεις ή κοντά σε στερεά σύνορα ή σε μέρη όπου έχουμε έντονη αλλαγή γεωμετρίας, είμαστε υποχρεωμένοι να πυκνώσουμε το αριθμητικό πλέγμα.

Τις γραμμές σταθερού x τις συμβολίζουμε χρησιμοποιώντας τον δείκτη I , ενώ για τις σταθερού y τις συμβολίζουμε χρησιμοποιώντας τον δείκτη J . Το πλήθος των ευθειών κατά την διεύθυνση x είναι NI (δηλαδή $I = 1, 2, 3, \dots, NI$), ενώ το πλήθος των ευθειών κατά την διεύθυνση y είναι NJ (δηλαδή $J = 1, 2, 3, \dots, NJ$). Η τομή της ευθείας σταθερού x , $X(I)$, με την ευθεία σταθερού y , $Y(J)$, είναι ο κόμβος (I, J) , που έχει συντεταγμένες

(x, y) ή $(X(I), Y(I, J))$. Ο κόμβος αυτός συμβολίζεται ως $P(I, J)$ και στην περίπτωση που έχουμε πρόβλημα δύο διαστάσεων περιβάλλεται από τέσσερις κόμβους. Οι κόμβοι αυτοί συμβολίζονται με $E(I+1, J)$ (από την λέξη East), $W(I-1, J)$ (από την λέξη West), $N(I, J+1)$ (από την λέξη North) και $S(I, J-1)$ (από την λέξη South).



Σε αρκετές περιπτώσεις, η μορφολογία του πεδίου της ροής κάνει πιο συμφέρουσα την χρήση κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων. Αυτό απαιτεί να εκφραστούν οι διαφορικές μας εξισώσεις σε πολικές συντεταγμένες.

Τέλος, υπάρχουν περιπτώσεις όπου ούτε το καρτεσιανό ούτε το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων μπορούν να μας δώσουν αποτελέσματα. Στις περιπτώσεις αυτές εκφράζουμε τις διαφορικές μας εξισώσεις σε ένα καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων, που έχουμε προσαρμόσει κατάλληλα στην γεωμετρία και χρησιμοποιούμε για την διακριτοποίηση του χώρου καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων.

Διακριτοποίηση Διαφορικών Εξισώσεων.

Η διακριτοποίηση των διαφορικών εξισώσεων μπορεί να γίνει με έναν από τους ακόλουθους τρόπους:

1. Προσέγγιση των παραγώγων με πολυώνυμα παρεμβολής,
2. Προσέγγιση των παραγώγων με χρήση σειρών Taylor,
3. Ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης με χρήση κάποιου κριτηρίου ελαχιστοποίησης και

4. Με τη μέθοδο πεπερασμένων όγκων, δηλαδή με ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης σε υποχώρους του πεδίου ροής με κατάλληλες παραδοχές.

Παρόλο που δεν έχει αποδειχτεί η ανωτερότητα μίας εκ των παραπάνω μεθόδων, η μέθοδος πεπερασμένων όγκων παρουσιάζει δύο σημαντικά πλεονεκτήματα. Το πρώτο είναι η αποφυγή ιδιόμορφων σημείων των διαφορικών εξισώσεων. Το δεύτερο αφορά την ικανοποίηση της συντηρητικότητας του σχήματος διαφορών, που είναι μία βασική ιδιότητα των φυσικών εξισώσεων και που θα αναλύσουμε στην συνέχεια. Η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων είναι η μέθοδος που έχει χρησιμοποιηθεί στην παρούσα εργασία.

Ακρίβεια Προσέγγισης Παραγώγου.

Όταν οι διαφορικές εξισώσεις ολοκληρωθούν πάνω σε πεπερασμένους όγκους ελέγχου, που περιβάλλουν κάθε σημείο του υπολογιστικού πλέγματος, σχηματίζονται οι εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τρία σχήματα διαφορών για την προσέγγιση αυτή:

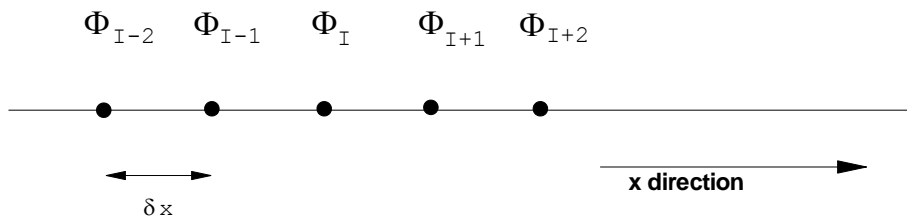
1. το άνωτες σχήμα διαφορών,
2. το κάτωτες σχήμα διαφορών και
3. το σχήμα κεντρικών διαφορών.

Έστω ότι έχουμε διακριτοποιήσει ένα φυσικό μέγεθος Φ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η προσεγγιστική έκφραση της παραγώγου του φυσικού μεγέθους, ανάλογα με το σχήμα διαφορών που θα χρησιμοποιήσουμε, θα είναι:

$$\text{Ανάντι } \Sigma.\Delta.: \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_i^n = \frac{\phi_i^n - \phi_{i-1}^n}{\Delta x} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_i^n \cdot \frac{\Delta x}{2} - \left(\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}\right)_i^n \cdot \frac{\Delta x^2}{6} + \text{OAT}$$

$$\text{Κεντρικές } \Delta.: \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_i^n = \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2 \cdot \Delta x} - \left(\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}\right)_i^n \cdot \frac{\Delta x^2}{3} + \text{OAT}$$

$$\text{Κατάντι } \Sigma.\Delta.: \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_i^n = \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_i^n}{\Delta x} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_i^n \cdot \frac{\Delta x}{2} - \left(\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}\right)_i^n \cdot \frac{\Delta x^2}{6} + \text{OAT}$$



Ο πρώτος όρος του δεύτερου σκέλους των παραπάνω σχέσεων αποτελεί την προσεγγιστική έκφραση της παραγώγου, ενώ οι υπόλοιποι όροι αποτελούν το σφάλμα αποκοπής της προσέγγισης. Επομένως μπορούμε να ορίσουμε το σφάλμα αποκοπής με τον ακόλουθο τρόπο:

$$T.E. = P.D.E. - F.D.E.$$

Όπου: T.E. : Total Error

P.D.E. : Partial Differential Equation

F.D.E. : Finite Differential Equation

Η πληροφορία που δίνει το σφάλμα αποκοπής αφορά την περίπτωση της οριακής συμπεριφοράς για $\Delta x \rightarrow 0$. Αν και το σφάλμα αποκοπής τείνει στο μηδέν με ρυθμό ανάλογο της n -ιοστής δύναμης του Δx , τότε η προσέγγιση του σχήματος διαφορών έχει ακρίβεια τάξης n . Οι ανάντι και κατάντι διαφορές έχουν πρώτης τάξης ακρίβεια, ενώ οι κεντρικές διαφορές έχουν δεύτερης τάξης ακρίβεια.

Μία προσέγγιση πεπερασμένων διαφορών της αρχικής διαφορικής εξίσωσης, που περιγράφει τη μεταβολή μιας φυσικής ποσότητας, θεωρείται συνεπής, όταν μπορούμε να δείξουμε ότι το σφάλμα αποκοπής τείνει στο μηδέν, καθώς το αριθμητικό πλέγμα γίνεται πυκνότερο. Τα συστήματα στα οποία καταλήγουν οι διακριτοποιήσεις των μη γραμμικών αρχικών διαφορικών εξισώσεων είναι επίσης μη γραμμικά και απαιτούν επαναληπτικές διαδικασίες επίλυσης.

Μία επαναληπτική διαδικασία είναι ευσταθής, όταν τα λάθη από οποιαδήποτε πηγή (στρογγύλευσης ή αποκοπής) δεν αυξάνονται πάνω από ένα επίπεδο καθώς η επίλυση προχωράει από το ένα βήμα στο επόμενο. Παρόλο που η ευστάθεια αφορά συστήματα παραβολικά, έχει έννοια και σε επαναληπτικές λύσεις μέσα στο χώρο.

Για παραβολικά προβλήματα, ισχύει το ισοδύναμο θεώρημα του Lax σύμφωνα με το οποίο, για ένα καλώς τεθειμένο πρόβλημα αρχικών τιμών που προσεγγίζεται από ένα σχήμα που είναι συνεπές, η ευστάθεια είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για την επίτευξη σύγκλισης.

Απαιτήσεις από ένα Σχήμα Διαφορών.

Προκειμένου η προσέγγιση που κάνουμε με ένα σχήμα πεπερασμένων διαφορών να ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα, το σχήμα διαφορών θα πρέπει να έχει κάποιες ιδιότητες. Οι απαραίτητες αυτές ιδιότητες είναι η συντηρητικότητα, οι φραγμένες τιμές και η μεταφορά.

1) Συντηρητικότητα.

Η αριθμητική ολοκλήρωση μιας μεταβλητής Φ οδηγεί σε εκφράσεις παροχής που περιέχουν τη μεταφορά και τη διάχυση της Φ δια μέσου των εδρών των όγκων ελέγχου. Ένα σχήμα διαφορών συντηρεί τη μεταβλητή Φ όταν η προσέγγιση της παροχής μέσω μεταφοράς και διάχυσης εσωτερικά και εξωτερικά μιας έδρας καταλήγει στην ίδια έκφραση. Σε γειτονικούς όγκους ελέγχου η συντηρητικότητα απαιτεί να προσεγγίζεται η παροχή της Φ μέσα από την κοινή έδρα με αμετάβλητο τρόπο και από τους δύο υπολογιστικούς κόμβους. Για παράδειγμα, η κεντρική διαφόριση είναι συντηρητικό σχήμα.

2) Φραγμένες τιμές.

Η αριθμητική επίλυση του γραμμικού συστήματος γίνεται με επαναληπτική μέθοδο. Μια ικανή συνθήκη για να είναι συγκλίνουσα η επαναληπτική διαδικασία επίλυσης εκφράζεται μέσω των τιμών των συντελεστών της μεταβλητής Φ σε κάθε κόμβο ελέγχου.

Αυτή η συνθήκη εξασφαλίζει ότι το σχήμα διαφορών είναι φραγμένο, και ο πίνακας των συντελεστών του γραμμικού συστήματος έχει διαγώνια υπεροχή αφού η διαγώνιος του αποτελείται από τους συντελεστές AP .

Αν αγνοήσουμε την παρουσία πηγών, το φραγμένο σχήμα διαφορών εξασφαλίζει τον περιορισμό της τιμής της Φ μεταξύ των μεγίστων και ελαχίστων τιμών της στα σύνορα υπολογισμού. Έστω, για παράδειγμα, ότι υπολογίζεται η κατανομή θερμοκρασίας T μίας ράβδου χωρίς πηγές, με θερμοκρασίες T_1 και T_2 στα άκρα της. Η χρήση φραγμένου σχήματος έχει ως αποτέλεσμα η θερμοκρασία (TA) μέσα στην ράβδο να μην ξεπερνά τα όρια T_1 και T_2 , που είναι η απαραίτητη φυσική συνθήκη. Στην περίπτωση που δεν ικανοποιείται η συνθήκη του φραγμένου σχήματος, εμφανίζονται στη λύση απότομες ανωμαλίες με τη μορφή ακμών χωρίς φυσικά αίτια, και σε ορισμένες περιπτώσεις δεν επιτυγχάνεται η σύγκλιση. Το σχήμα κεντρικής διαφόρισης δεν εξασφαλίζει την ιδιότητα αυτή. Αυτό συμβαίνει γιατί είναι δυνατό οι συντελεστές A_i να λάβουν αντίθετα πρόσημα, ανάλογα με τις σχετικές τιμές των συντελεστών μεταφοράς και διάχυσης. Έτσι, προκειμένου να ενισχύσουμε τον

συντελεστή A_P , μετασχηματίζουμε την αλγεβρική εξίσωση μεταφοράς. Δηλαδή, ενώ η

Αρχική μορφή της είναι:

$$A_P \cdot \Phi_P = A_E \cdot \Phi_E + A_W \cdot \Phi_W + A_N \cdot \Phi_N + A_S \cdot \Phi_S + S_U \cdot \Delta V$$

την φέρνουμε στην μορφή:

$$(A_P + S_P) \cdot \Phi_P = A_E \cdot \Phi_E + A_W \cdot \Phi_W + A_N \cdot \Phi_N + A_S \cdot \Phi_S + S_P \cdot \Delta V$$

Όπου ο όρος S_P περιέχει τους αρνητικούς όρους του συντελεστή πηγής S_U . Υπάρχει έτσι το επιπλέον όφελος ότι ενισχύεται ο πεπλεγμένος χαρακτήρας της εξίσωσης μεταφοράς ως προς τη μεταβλητή Φ .

3) Μεταφορά.

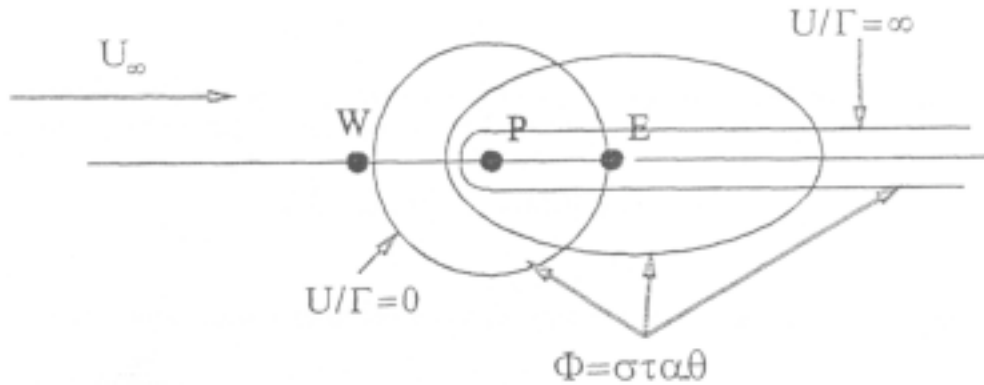
Η ιδιότητα της μεταφοράς αναφέρεται στον τρόπο με τον οποίο μια πληροφορία (για παράδειγμα η τιμή της μεταβλητής Φ) διαδίδεται μεταξύ των σημείων του πεδίου ροής. Οι δύο μηχανισμοί διάδοσης της πληροφορίας είναι η μεταφορά και η διάχυση. Ορίζεται ο αδιάστατος τοπικός αριθμός Peclet, που για την διεύθυνση x είναι:

$$Pe = \frac{\text{Μεταφορά}}{\text{Διάχυση}} = \frac{u \Delta x}{\Gamma_\phi}$$

όπου Δx είναι η απόσταση μεταξύ των υπολογιστικών κόμβων. Αν θεωρήσουμε μια σημειακή πηγή της Φ στο σημείο P , ανάλογα με τον αριθμό Peclet οι καμπύλες σταθερής Φ παίρνουν τις μορφές που φαίνονται στο επόμενο σχήμα. Αν $Pe = 0$, έχουμε καθαρή διάχυση της Φ και η τιμή της σε έναν κόμβο εξαρτάται από τους ανάντι και τους κατάντι κόμβους. Η καμπύλη σταθερής Φ είναι κύκλος.

Με την αύξηση του Pe , η καμπύλη σταθερής Φ μετατρέπεται σε έλλειψη και κινείται κατάντι. Η τιμή στον P -κόμβο εξαρτάται κυρίως από τους ανάντι κόμβους, και μονάχα από τους πολύ κοντινούς κατάντι κόμβους.

Όταν $Pe \rightarrow \infty$ (περίπτωση καθαρής μεταφοράς), η καμπύλη παίρνει τη μορφή ευθείας αφού κάθε πληροφορία του πεδίου ροής διαδίδεται μονάχα μέσω μεταφοράς. Τότε η τιμή της Φ στον κόμβο P εξαρτάται μονάχα από τους ανάντι κόμβους δηλαδή τον W , και καθόλου από τους κατάντι (εδώ E).



Αυτή η σχέση μεταξύ του αριθμού Peclet και του τρόπου διάδοσης των πληροφοριών σε ένα πεδίο ροής ονομάζεται ιδιότητα της μεταφοράς. Ένα σχήμα διαφορών έχει την ιδιότητα της μεταφοράς όταν αναγνωρίζει την επικρατούσα διεύθυνση ενός πεδίου ροής, και τη λαμβάνει υπ' όψιν στον υπολογισμό των συντελεστών A_i .

Στο σημείο αυτό δίνονται δύο ορισμοί για το πεδίο ροής, χωρίς να θεμελιώνονται μαθηματικά:

Ένα πεδίο ροής ονομάζεται ελλειπτικό όταν δεν υπάρχει επικρατούσα διεύθυνση διάδοσης των φυσικών πληροφοριών, δηλαδή χαρακτηρίζεται από μικρό αριθμό Peclet. Αντίθετα, ένα πεδίο ροής ονομάζεται παραβολικό όταν έχει μια κύρια διεύθυνση διάδοσης και σχετικά μεγάλο αριθμό Peclet. Το σχήμα κεντρικής διαφόρισης δεν έχει την ιδιότητα της μεταφοράς, και είναι κατάλληλο για ελλειπτικά πεδία ροής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΌΓΚΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ .

Ολοκληρωματική μορφή της Εξίσωσης Μεταφοράς .

Η εξίσωση της ορμής μπορεί εναλλακτικά να γραφεί με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\text{div}(\vec{V} \cdot \Phi) = \text{div}[\Gamma_{\Phi} \cdot \text{grand}(\Phi)] + S_{\Phi}$$

Το αριστερό μέρος της ανωτέρω εξίσωσης εκφράζει τους όρους μεταφοράς του μεγέθους Φ από τη μέση ροή. Ο πρώτος όρος του δεξιού μέρους της εξίσωσης εκφράζει τους όρους διάχυσης του μεγέθους Φ . Ο δεύτερος όρος του δεξιού μέρους της εξίσωσης εκφράζει τους όρους πηγής του μεγέθους Φ και μπορεί να είναι μία συνάρτηση του μεγέθους Φ . Σκοπός μας είναι να ολοκληρώσουμε την ανωτέρω εξίσωση σε στοιχειώδεις όγκους ελέγχου, εφαρμόζοντας το θεώρημα της απόκλισης και μεταφέρεται σε εξίσωση που περιέχει τις τιμές των μεταβλητών στο όριο S του όγκου V .

Η ολοκληρωτική μορφή της γενικής εξίσωσης μεταφοράς πάνω στον όγκο ελέγχου V , με σύνορο την επιφάνεια S , είναι:

$$\oint_S [\vec{V} \cdot \Phi - \Gamma_{\Phi} \cdot \text{grand}(\Phi)] \cdot \vec{n} \cdot dS = S_{\Phi}$$

όπου με (η) συμβολίζουμε το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στην επιφάνεια S .

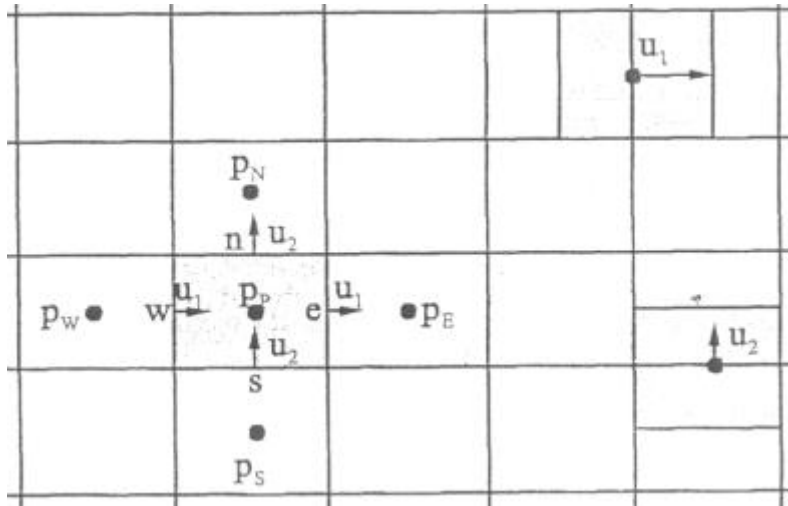
Ο συντελεστής διάχυσης Γ_{Φ} ονομάζεται και ενεργός συνεκτικότητα, και ανάλογα με το μέγεθος που εξετάζουμε και το μοντέλο τύρβης που χρησιμοποιείται λαμβάνει διαφορετικές τιμές. Στην περίπτωση μας δεν χρησιμοποιήθηκε μοντέλο τύρβης. Έτσι η τιμή του θεωρείται ίση με την κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού.

Υπολογιστικό Πλέγμα – Όγκοι Ελέγχου .

Προκειμένου να μπορέσουμε να κατασκευάσουμε και να αριθμήσουμε το υπολογιστικό πλέγμα πρέπει να κάνουμε κάποιες θεωρήσεις. Έτσι, θεωρούμε ότι οι κύριοι κόμβοι του αριθμητικού πλέγματος σχηματίζουν τους υπολογιστικούς όγκους της πίεσης, P , ενώ οι αντίστοιχοι όγκοι ελέγχου για τις ταχύτητες u και v προκύπτουν από τα μέσα των εδρών του πλέγματος.

Επομένως, οι όγκοι ελέγχου της ταχύτητας είναι μετατοπισμένοι σε σχέση με αυτούς της πίεσης.

Στο σχήμα που ακολουθεί βλέπουμε τη διάταξη ενός απλού ορθογωνίου πλέγματος καθώς και του τρόπου κατανομής των όγκων ελέγχου των διαφόρων μεγεθών.



Η διακριτοποίηση της εξίσωσης μεταφοράς επιτυγχάνεται με βάση τις ακόλουθες παραδοχές:

1. Ομοιόμορφη κατανομή των διαφόρων ποσοτήτων στον όγκο ελέγχου.
2. Ομοιόμορφη κατανομή των διαφόρων ποσοτήτων στις ακμές του όγκου ελέγχου.

Προκειμένου να υπολογίσουμε την τιμή μίας μεταβλητής Φ στα σημεία των εδρών του όγκου ελέγχου, χρησιμοποιούμε γραμμικές παρεμβολές μεταξύ των κόμβων του πλέγματος. Έτσι, γενικά έχουμε:

$$\Phi_e = f_e \cdot \Phi_E + (1 - f_e) \cdot \Phi_P$$

$$\Phi_w = f_w \cdot \Phi_W + (1 - f_w) \cdot \Phi_P$$

$$\Phi_n = f_n \cdot \Phi_N + (1 - f_n) \cdot \Phi_P$$

$$\Phi_s = f_s \cdot \Phi_S + (1 - f_s) \cdot \Phi_P$$

Όπου:

$$f_e = \frac{\delta x_{P_e}}{\delta x_{P_E}}, \quad f_n = \frac{\delta x_{P_n}}{\delta x_{P_N}}$$

$$f_w = \frac{\delta x_{P_w}}{\delta x_{P_W}}, \quad f_s = \frac{\delta x_{P_s}}{\delta x_{P_S}}$$

Σχήματα Διαφορών .

Είναι προφανές, ότι οι συντελεστές A_i , μπορεί να είναι αρνητικοί ή θετικοί, ανάλογα με τη τιμή που παίρνει ο αριθμός Peclet:

$$Pe = \frac{u_e \cdot \Delta x_{EP}}{\Gamma_\phi}$$

όπου στην παραπάνω εξίσωση, έχουμε τα μεγέθη που αναφέρονται στη δεξιά έδρα του υπολογιστικού όγκου.

Ο συντελεστής A_E είναι θετικός μόνο όταν ισχύει:

$$\frac{1}{f_e} > Pe$$

Στην περίπτωση που ισχύει:

$$\frac{1}{f_e} < Pe$$

Τότε είναι $A_E < 0$ και για $A_i > 0$, $i = N, S, W$ δεν ισχύει η σχέση:

$$|A_p| = \left| \sum_i A_i \right| \geq \sum_i |A_i|$$

που είναι ικανή συνθήκη (για τις εξισώσεις ορμής σε καρτεσιανό πλέγμα)

για να έχουμε φραγμένο σχήμα διαφορών. Η αδυναμία αυτή οδηγεί είτε σε αδυναμία επίλυσης των συστημάτων των εξισώσεων μεταφοράς, είτε σε

λύσεις που εμφανίζουν αφύσικες ταλαντώσεις στις κομβικές τιμές. Γι' αυτό το λόγο, η εφαρμογή των κεντρικών διαφορών (που είναι δεύτερης τάξης ακρίβειας), είναι αποδοτική μόνο όταν έχουμε τόσο πυκνά πλέγματα, ώστε να ικανοποιείται η παραπάνω ανισότητα δηλαδή:

$$\frac{1}{f_e} > Pe$$

Η αδυναμία των κεντρικών διαφορών να παράγουν φραγμένες λύσεις,

οδήγησε στην εφαρμογή άλλων σχημάτων τα οποία ουσιαστικά προσεγγίζουν τους όρους μεταφοράς, αφού οι όροι διάχυσης είναι πάντοτε θετικοί και επομένως η έκφραση τους με κεντρική διαφόριση είναι ικανοποιητική. Το απλούστερο από αυτά τα σχήματα αντιστοιχεί στην ανάντι διαφόριση, στην οποία διατηρούνται μόνο οι θετικοί όροι A_i , δηλαδή τίθεται: $A_i = 0$, όπου: $A_i < 0$.

Είναι προφανές ότι το σχήμα αυτό είναι φραγμένο. Παρόλο που το σχήμα των ανάντι διαφορών ικανοποιεί τις δύο θεμελιώδεις ιδιότητες (φραγμένο και συντηρητικό), προϋποθέτει ότι το πλέγμα είναι προσανατολισμένο με τις γραμμές ροής, το οποίο είναι αδύνατο να συμβαίνει σε κάθε σημείο του πεδίου υπολογισμού, ιδίως όταν εξετάζονται πολύπλοκα φαινόμενα. Όσο μεγαλύτερη είναι η απόκλιση από τις τοπικές γραμμές ροής, τόσο μεγαλύτερη είναι και η πιθανότητα του σφάλματος αριθμητικής διάχυσης, όπως ονομάζεται το αριθμητικό σφάλμα που εμφανίζεται λόγω της τυχαιότητας του πλέγματος.

Μη μόνιμες Διδιάστατες Ροές .

Όταν εξετάζουμε μη μόνιμες διδιάστατες ροές, στις αρχικές εξισώσεις μεταφοράς στο αριστερό μέλος, προστίθεται ο όρος: $D\Phi/Dt$, ο οποίος περιλαμβάνει ουσιαστικά και την επίδραση της χρονικής μεταβολής η οποία αγνοείται για τις μόνιμες ροές. Όταν εξετάζουμε μη μόνιμα προβλήματα, ο

όρος $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ ολοκληρώνεται στους όγκους ελέγχου ως εξής:

$$\int_V \frac{\partial\Phi}{\partial t} dV \approx \int_V \frac{\Phi_P^n - \Phi_P^0}{\delta t} dV \approx \frac{\Phi_P^n - \Phi_P^0}{\delta t} \delta V$$

όπου Φ_P^n είναι η τιμή της μεταβλητής στο κέντρο του όγκου P κατά τη τρέχουσα χρονική στιγμή και Φ_P^0 η αντίστοιχη τιμή της στην προηγούμενη χρονική στιγμή.

Οι εξισώσεις μεταφοράς παίρνουν τη μορφή:

$$\frac{\Phi_P^n - \Phi_P^0}{\delta t} \delta V = -C(\Phi^n) + D(\Phi^n) + S_\Phi^n$$

$$\frac{\Phi_P^n - \Phi_P^0}{\delta t} \delta V = -C(\Phi^0) + D(\Phi^0) + S_\Phi^0$$

όπου: $C(\Phi)$, είναι οι όροι μεταφοράς χωρίς το χρονικό όρο:

$$\int_V \frac{\partial\Phi}{\partial t} dV$$

Στη πρώτη από τις προηγούμενες εξισώσεις, έχουμε την πλήρως πεπλεγμένη μορφή των διακριτοποιημένων εξισώσεων, όπου όλοι οι όροι στο δεξί μέλος εκφράζονται στη νέα χρονική στιγμή. Αυτό σημαίνει ότι απαιτείται επαναληπτική διαδικασία σε κάθε χρονικό βήμα για να επιτευχθεί σύγκλιση.

Στη δεύτερη εξίσωση, όλοι οι όροι στο δεξιό μέλος εκφράζονται στη προηγούμενη χρονική στιγμή και η μόνη άγνωστη προς επίλυση είναι η Φ^n , που προκύπτει άμεσα. Στην πρώτη περίπτωση δεν έχουμε προβλήματα ευστάθειας και σύγκλισης αλλά απαιτείται σημαντικά μεγαλύτερη υπολογιστική ισχύς, ενώ στη δεύτερη απαιτούνται ιδιαίτερα κριτήρια για να προκύψουν ευσταθείς λύσεις. Στις περισσότερες περιπτώσεις, ορισμένοι από τους όρους του δεξιού μέλους της:

$$\frac{\Phi_P^n - \Phi_P^0}{\delta t} \delta V = -C(\Phi^0) + D(\Phi^0) + S_\Phi^0$$

εκφράζονται ως συναρτήσεις του Φ ή ακολουθούνται ιδιαίτερες τεχνικές που αφορούν την εφαρμογή της εξίσωσης της συνέχειας για να προκύψουν ευσταθείς λύσεις. Για να αποφύγουμε τα μειονεκτήματα που εισάγονται με την εφαρμογή των ρητών μεθόδων χρησιμοποιούμε εδώ μόνο την εξίσωση:

$$\frac{\Phi_P^n - \Phi_P^0}{\delta t} \delta V = -C(\Phi^n) + D(\Phi^n) + S_\Phi^n$$

Που και από φυσική άποψη είναι πιο σωστή: ό,τι συμβαίνει τώρα, υπακούει στις γενικές μας εξισώσεις τώρα και εξαρτάται από το ότι συνέβη στις προηγούμενες στιγμές.

Η παραπάνω εξίσωση υπό ολοκληρωμένη μορφή μετατρέπεται στην:

$$\left(A_P + \frac{\delta V}{\delta t} \right) \cdot \Phi_P^n = \sum_i A_i \cdot \Phi_i^n + S_\Phi^n + \frac{\delta V}{\delta t} \cdot \Phi_P^0, \quad i = E, W, N, S$$

Όπου οι $A_P, A_N, \dots, S_\Phi^n$ εκφράζονται όπως και στη περίπτωση των μόνιμων ροών. Ο όρος S_Φ χωρίζεται σε δύο ομάδες, την $S'_{1\Phi} \cdot \Phi_P$ που μεταφέρεται στο πρώτο μέλος και την $S'_{2\Phi}$ η οποία παραμένει στο δεύτερο μέλος. Στο δεύτερο μέλος προστίθεται ο όρος $\frac{\delta V}{\delta t} \Phi_P^0$ όπου δV είναι όγκος ελέγχου και: $\delta t = t_n - t_0$ και συμπεριλαμβάνεται στον όρο $S'_{2\Phi}$ επειδή αναφέρεται στη προηγούμενη χρονική στιγμή και στο πρώτο μέλος ο όρος A_P ενισχύεται από τον όρο ο οποίος συμπεριλαμβάνεται στον όρο $S'_{1\Phi}$ επειδή αναφέρεται στη τρέχουσα χρονική στιγμή. Όσο πιο μικρό είναι το δt , τόσο ο συντελεστής του πρώτου μέρους μεγαλώνει και ενισχύει τη σύγκλιση του συστήματος της εξίσωσης:

$$\left(A_P + \frac{\delta V}{\delta t} \right) \cdot \Phi_P^n = \sum_i A_i \cdot \Phi_i^n + S_\Phi^n + \frac{\delta V}{\delta t} \cdot \Phi_P^0, \quad i = E, W, N, S$$

Επομένως στη πλήρως πεπλεγμένη μέθοδο, η μείωση του δt συνεπάγεται γρήγορη σύγκλιση και επιτρέπει την αύξηση των συντελεστών υποχαλάρωσης. Πολύ μικρές όμως τιμές του δt , εισάγουν σημαντικά σφάλματα στρογγυλεύσεως και χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στην εφαρμογή τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΚΙΝΟΥΜΕΝΑ ΠΛΕΓΜΑΤΑ .

Λόγοι χρήσης Κινούμενων Πλεγμάτων .

Στο πρόβλημα που είχαμε να αντιμετωπίσουμε, ήταν επιτακτική η ανάγκη χρησιμοποίησης κινουμένων πλεγμάτων. Αυτό συνέβαινε γιατί είχαμε να αντιμετωπίσουμε ένα πρόβλημα με ύπαρξη διεπιφάνειας δύο ρευστών (νερού και αέρα δηλαδή -ελεύθερης επιφάνειας). Το αποτέλεσμα είναι στο διαχωριστικό σύνορο των δύο επιφανειών να μην μπορούμε να βασιστούμε στις τιμές που υπολογίσαμε στο προηγούμενο χρονικό βήμα, αφού έχουμε μετακίνηση των υπολογιστικών κόμβων.

Πράγματι, εάν θεωρήσουμε ένα σταθερό σημείο παρατήρησης του κυματισμού, καθώς με την πάροδο του χρόνου το κύμα «προχωρά», αλλάζει συνεχώς η στάθμη του ρευστού. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, με την πάροδο του χρόνου, εάν βρισκόμαστε σε φάση μείωσης της στάθμης του ρευστού, εκεί που στο προηγούμενο χρονικό βήμα είχαμε υγρό, στην τωρινή χρονική στιγμή υπάρχει αέρας. Αντίστοιχα, εάν βρισκόμαστε σε φάση αύξησης της στάθμης του ρευστού, εκεί που στο προηγούμενο χρονικό βήμα είχαμε αέρα, στην τωρινή χρονική στιγμή υπάρχει υγρό.

Γίνεται λοιπόν αντιληπτό, ότι πρέπει σε κάθε χρονικό βήμα να αλλάζει όλη η γεωμετρία του πλέγματος, αφού αλλάζει η ελεύθερη επιφάνεια (δηλαδή το όριο του χωρίου που εξετάζουμε). Έτσι, πρέπει να υπολογίζουμε αρχικά την καινούργια ελεύθερη επιφάνεια και στη συνέχεια, αφού κατασκευάσουμε το καινούργιο πλέγμα, να υπολογίσουμε τις τιμές των μεταβλητών στους νέους κόμβους του πλέγματος.

Οι τιμές των μεταβλητών στους νέους κόμβους του πλέγματος μπορούν να υπολογιστούν με δύο διαφορετικούς τρόπους:

- Είτε με τη μέθοδο των κινούμενων πλεγμάτων,
- είτε κάνοντας διαδοχικές γραμμικές παρεμβολές αρχικά στην x-διεύθυνση και στη συνέχεια στην y-διεύθυνση.

Στην παρούσα εργασία εφαρμόζουμε τη δεύτερη μέθοδο.

Υπολογισμός Νέας Ελεύθερης Επιφάνειας .

Την νέα ελεύθερη επιφάνεια μπορούμε να την υπολογίσουμε με δύο τρόπους: είτε με τη θεώρηση κατά Lagrange είτε με τη θεώρηση κατά Euler.

Η θεώρηση κατά Lagrange συσχετίζει τις συνιστώσες της ταχύτητας με τις θέσεις που ακολουθεί ένα στοιχείο της ελεύθερης επιφάνειας στο χρόνο. Έτσι, εάν η συνάρτηση $h(x_1, t)$ περιγράφει ένα σημείο της ελεύθερης επιφάνειας, η σχέση εκφράζεται ως εξής:

$$u_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1(t+dt) - x_1(t)}{dt} \Rightarrow x_1(t+dt) = u_1 \cdot dt + x_1(t)$$

$$u_2 = \frac{dx_2}{dt} = \frac{h(x_1 + dx_1, t + dt) - h(x_1, t)}{dt} \Rightarrow h(x_1 + dx_1, t + dt) = u_2 \cdot dt + h(x_1, t)$$

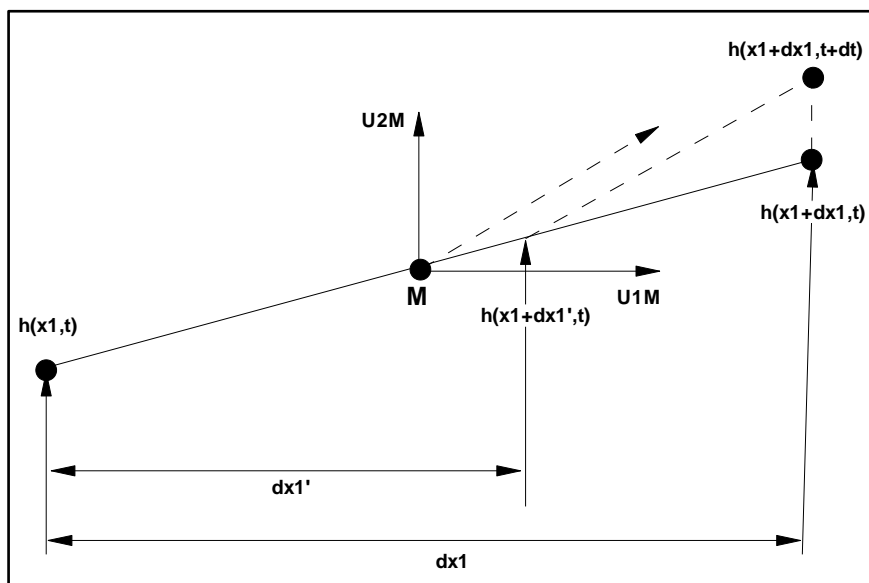
Στη συνέχεια, αφού έχουμε υπολογίσει τη νέα θέση του σημείου της ελεύθερης επιφάνειας, $h(x_1 + dx_1, t + dt)$ υπολογίζουμε την ελεύθερη επιφάνεια στις θέσεις των κόμβων του πλέγματος με γραμμική παρεμβολή.

Η θεώρηση κατά Euler είναι ουσιαστικά μία πιο απλοποιημένη μορφή των ανωτέρω αρχικών εξισώσεων. Χρησιμοποιώντας Ανάπτυγμα Taylor πρώτης τάξης για τα μεγέθη $h(x_1 + dx_1, t + dt)$ και $x_1(t + dt)$ προκύπτει ότι:

$$u_2 \approx \frac{\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right) \cdot \delta t + \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right) \cdot \delta x_1}{\delta t}$$

$$\frac{\delta h(x_1, t)}{\delta t} \approx \frac{\partial h(x_1, t)}{\partial x_1} \cdot u_2 - u_1$$

Τα γεωμετρικά μεγέθη που προαναφέραμε, επεξηγούνται στο σχήμα που ακολουθεί.



Θεωρητικά, δεν υπάρχει πρόβλημα ώστε να χρησιμοποιηθεί η θεώρηση κατά Euler τόσο σε μόνιμες όσο και σε μη μόνιμες ροές, εφόσον η ακρίβεια της εξαρτάται από την επιλογή του χρονικού βήματος.

Παρόλα αυτά, χρησιμοποιήσαμε την προσέγγιση της ελεύθερης επιφάνειας κατά Lagrange, αφού είναι ακριβέστερη.

Μέθοδος Κινούμενων Πλεγμάτων .

Με απλά λόγια, θα μπορούσαμε να πούμε ότι τεχνικές στις οποίες «αφήνουμε» το πλέγμα να κινηθεί καθώς κινείται το όριο ή η διεπιφάνεια, είναι πιο αποτελεσματικές από τις τεχνικές οι οποίες χρησιμοποιούν σταθερό- ακίνητο πλέγμα και αφήνουν το όριο ή τη διεπιφάνεια να περνάει μέσα από αυτό.

Προκειμένου να εξηγήσουμε την μέθοδο αυτή, θα εξετάσουμε αρχικά την χρονική παράγωγο μεγεθών που εκφράζονται σαν ολοκληρώματα σε όγκο $V=V(t)$, που εξαρτάται από το χρόνο (χωρίς κατ' ανάγκη να είναι υλικός όγκος).

Έστω λοιπόν όγκος: $V(t)$, και έστω: $S(t)$ η επιφάνεια που περιβάλλει τον όγκο $V(t)$. Όταν η διαφορική εξίσωση μεταφοράς ολοκληρωθεί στον πεπερασμένο όγκο, το ολοκλήρωμα του όρου $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ προσεγγίζεται ακολουθώντας το θεώρημα μεταφοράς του Reynolds, πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \Phi \cdot dV \approx \int_{V(t+\delta t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \cdot dV + \int_{S(t)} \Phi_S(t) \cdot \vec{u}_g \cdot d\vec{s}$$

όπου: $V(t)$ είναι ο όγκος ελέγχου στο χρόνο t , $V(t+\delta t)$ είναι ο όγκος ελέγχου στο χρόνο $t+\delta t$, Φ_S είναι η οριακή τιμή πάνω στη περιβάλλουσα επιφάνεια S του $V(t)$, u_g είναι η ταχύτητα του πλέγματος και dS είναι το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια S .

Ο όρος του αριστερού μέλους σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής, μπορεί να προσεγγισθεί ως εξής:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \Phi \cdot dV \approx \frac{\int_{V(t+\delta t)} \Phi(t+\delta t) \cdot dV + \int_{V(t)} \Phi(t) \cdot dV}{\delta t} \approx \Phi_P \cdot \frac{V(t+\delta t) - V(t)}{\delta t}$$

όπου: Φ_P είναι η τιμή στο κέντρο του όγκου ελέγχου $V(t+\delta t)$, ενώ Φ_0 είναι η αντίστοιχη στον όγκο $V(t)$.

Όταν το πλέγμα μεταβάλλεται μόνο σε μία διεύθυνση, το επιφανειακό ολοκλήρωμα στο θεώρημα μεταφοράς του Reynolds, μπορεί να υπολογιστεί εφαρμόζοντας το θεώρημα της μέσης τιμής:

$$\int_{S(t)} \Phi_s(t) \cdot \vec{u}_g \cdot d\vec{s} \approx \Phi_n(t) \cdot u_{gn} \cdot \delta x - \Phi_s(t) \cdot u_{gs} \cdot \delta x$$

όπου: δx είναι το μήκος του όγκου ελέγχου στον x-άξονα, Φ_n , Φ_s είναι οι μέσες τιμές στη βόρεια και τη νότια πλευρά του υπολογιστικού όγκου και u_{gn} , u_{gs} είναι οι αντίστοιχες ταχύτητες πλέγματος οι οποίες ορίζονται ως εξής:

$$u_{gn} = \frac{Y_n(t + \delta t) - Y_n(t)}{\delta t}$$

$$u_{gs} = \frac{Y_s(t + \delta t) - Y_s(t)}{\delta t}$$

Επομένως, το ολοκλήρωμα της χρονικής παραγώγου τη χρονική στιγμή $(t + \delta t)$, υπολογίζεται ως εξής:

$$\int_{V(t+\delta t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \cdot dV \approx \Phi_p \cdot \frac{V(t + \delta t)}{\delta t} - \Phi_0 \cdot \frac{V(t)}{\delta t} - \Phi_n(t) \cdot u_{gn} \cdot \delta x - \Phi_s(t) \cdot u_{gs} \cdot \delta x$$

Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της παραπάνω εξίσωσης,

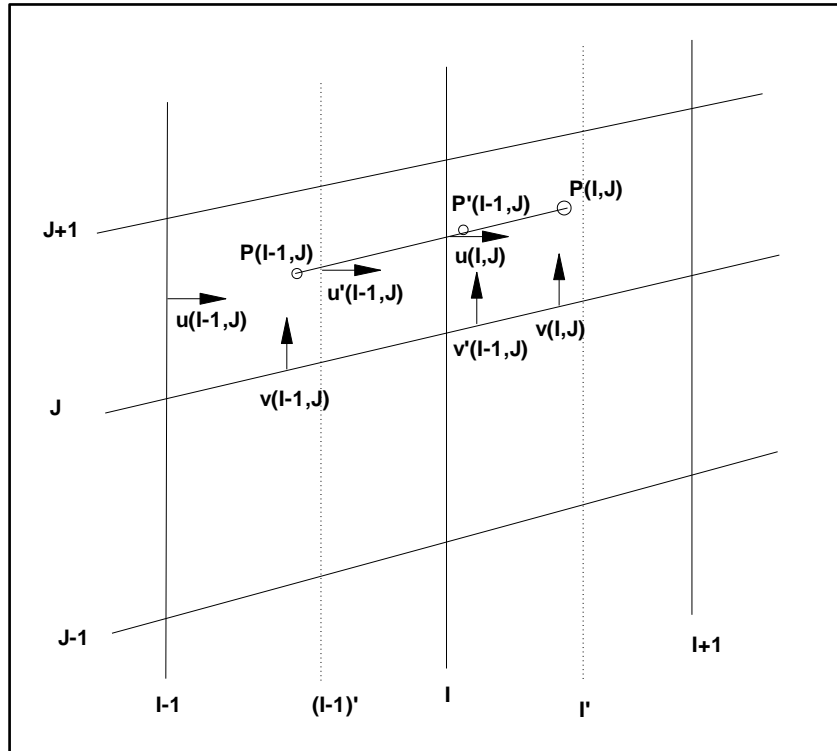
συμπεριλαμβάνεται στον όρο πηγής $S'1\Phi$, που βρίσκεται στο πρώτο μέλος της διακριτοποιημένης εξίσωσης μεταφοράς, επειδή αναφέρεται στη παρούσα χρονική στιγμή. Οι υπόλοιποι όροι, συμπεριλαμβάνονται στον όρο πηγής $S'2\Phi$, που βρίσκεται στο δεύτερο μέλος της διακριτοποιημένης εξίσωσης μεταφοράς, επειδή αναφέρονται στη προηγούμενη χρονική στιγμή.

Μέθοδος Γραμμικών Παρεμβολών .

Στη μέθοδο αυτή χρησιμοποιούμε γραμμικές παρεμβολές κατά τη x-διεύθυνση αρχικά (και όπου χρειάζεται) και στη συνέχεια στην y-διεύθυνση σε όλο το πεδίο ροής που εξετάζουμε.

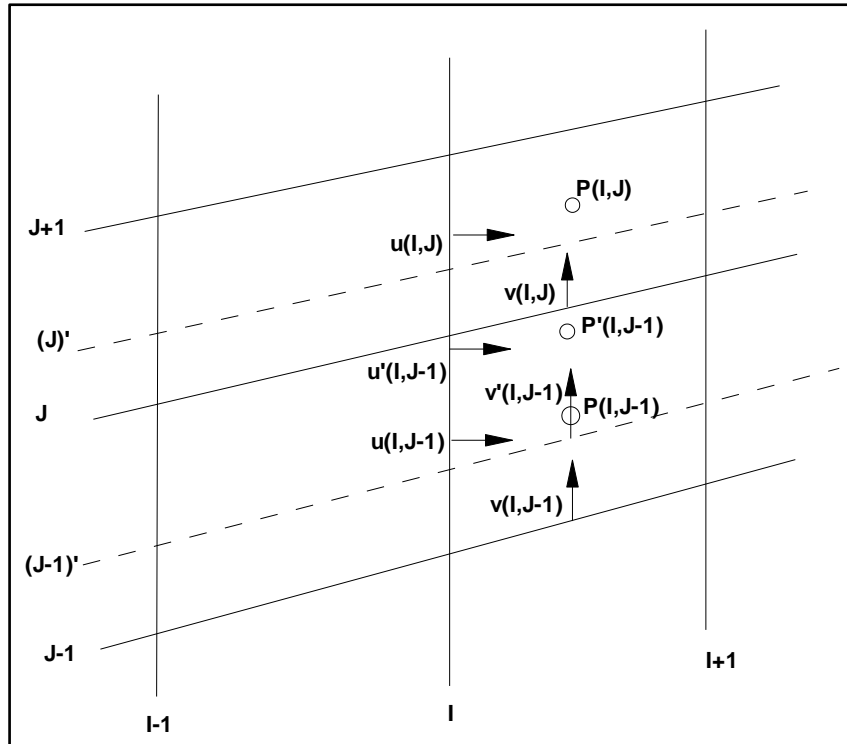
Προκειμένου να κάνουμε γραμμική παρεμβολή κατά τη x-διεύθυνση, θα πρέπει να μεταβληθεί η οριζόντια θέση των κόμβων του πλέγματος. Εφόσον έχουμε οριζόντια κίνηση του πιστονιού, είναι λογικό οι κόμβοι του πλέγματος να μετατοπίζονται κατά τη x-διεύθυνση. Όμως, για λόγους τόσο εξοικονόμησης πράξεων όσο και για καλύτερη αντιμετώπιση του προβλήματος, περιορίζουμε την επίδραση αυτής της μετατόπισης μόνο σε ένα μέρος του πεδίου, δηλαδή κοντά στο πιστόνι. Έτσι, οι

προσεγγίσεις που κάνουμε είναι λιγότερες και τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε είναι πιο «σταθερά», ενώ επιτυγχάνεται γρηγορότερα η σύγκλιση του προβλήματος. Η λογική με την οποία πραγματοποιούνται οι γραμμικές παρεμβολές στην x - διεύθυνση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα .



Η γραμμική παρεμβολή κατά τη x -διεύθυνση γίνεται σε όλους τους κόμβους του πεδίου κατά την y -διεύθυνση, χωρίς να λαμβάνεται καθόλου υπ' όψιν το γεγονός ότι το κύμα έχει «προχωρήσει». Από τη νέα γεωμετρία της ελεύθερης επιφάνειας, χρησιμοποιούμε σε αυτό το σημείο μόνο τις νέες οριζόντιες θέσεις των υπολογιστικών κόμβων του πλέγματος και μόνο για τους κόμβους εκείνους που επηρεάζονται από την κίνηση του πιστονιού.

Στη συνέχεια, έπεται η γραμμική παρεμβολή κατά την y -διεύθυνση σε όλο το πεδίο της ροής. Στο σημείο αυτό λαμβάνουμε υπ' όψιν την κατακόρυφη μετακίνηση των υπολογιστικών κόμβων του πλέγματος από τη νέα γεωμετρία της ελεύθερης επιφάνειας. Ουσιαστικά, λαμβάνουμε υπ' όψιν το πύκνωμα και την αραιώση των υπολογιστικών κόμβων του πλέγματος κατά την y -διεύθυνση. Η διαδικασία αυτή λαμβάνει χώρα σε όλο το πεδίο ροής, καθώς το κύμα προχωρά σε όλο το μήκος του πεδίου. Η λογική με την οποία πραγματοποιούνται οι γραμμικές παρεμβολές στην y -διεύθυνση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Θα πρέπει να συμπληρώσουμε σε αυτό το σημείο ότι όσον αφορά την παρεμβολή κατά την y -διεύθυνση, μπορούμε να κάνουμε και πολυωνυμική παρεμβολή. Όμως, η διαδικασία αυτή καθυστερεί την επίλυση του προβλήματος, χωρίς να προσφέρει κάποια αξιοσημείωτη βελτίωση σε σχέση με την γραμμική παρεμβολή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ.

Είδη Συνοριακών Συνθηκών.

Οι συνοριακές, συνθήκες είναι απαραίτητες την επίλυση των γραμμικών συστημάτων που προκύπτουν, καθώς χάρη σε αυτές αποκτούμε τις απαραίτητες σχέσεις ώστε τα γραμμικά συστήματα να «κλείσουν», δηλαδή να έχουμε τόσες σχέσεις όσες είναι και οι άγνωστες ποσότητες που θέλουμε να υπολογίσουμε.

Στα προβλήματα που εξετάζουμε, υπάρχουν δύο κύριοι τύποι συνοριακών συνθηκών που χρησιμοποιούνται:

- Συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet και
- Συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann.

Προκειμένου να εφαρμόσουμε συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet για μία μεταβλητή ϕ που θέλουμε να υπολογίσουμε, είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε την τιμή της, έστω ϕ_0 , στο σύνορο (όριο) του υπολογιστικού πεδίου.

Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann για μία μεταβλητή ϕ που θέλουμε να υπολογίσουμε, είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε την τιμή, έστω f_0 , της συνάρτησης:

$$f_0 = \frac{\partial \phi}{\partial n}$$

Κάθετα στο σύνορο (όριο) του υπολογιστικού πεδίου.

Στη συνέχεια, θα περιγράψουμε τις συνοριακές συνθήκες που χρησιμοποιήθηκαν στα σύνορα του υπολογιστικού πεδίου. Τα σύνορα αυτά είναι τα ακόλουθα:

- Πυθμένας κυματιστήρα – σύνορο S,
- Ελεύθερη επιφάνεια – σύνορο N,
- Αριστερό όριο κυματιστήρα (πιστόνι) – σύνορο W και
- Δεξιό όριο κυματιστήρα (έξοδος πεδίου ροής) – σύνορο E.

Πυθμένας Δεξαμενής, Σύνορο S.

Οι συνοριακές συνθήκες που χρησιμοποιούμε για τον πυθμένα είναι οι ακόλουθες:

- Για την ταχύτητα στην x-διεύθυνση, u, είναι: $u=0$ (συνοριακή συνθήκη τύπου Dirichlet).
- Για την ταχύτητα στην y-διεύθυνση, v, είναι: $v=0$ (συνοριακή συνθήκη τύπου Dirichlet)
- Για την πίεση, p, είναι:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0$$

(συνοριακή συνθήκη τύπου Neumann)

Ελεύθερη Επιφάνεια, Σύνορο N.

Οι συνοριακές συνθήκες που χρησιμοποιούμε για την ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού είναι οι ακόλουθες:

- Για την ταχύτητα στην x-διεύθυνση, u, θεωρούμε ότι είναι ίση με την τιμή που έχει στον κόμβο $J=(NJ-1)$ (συνοριακή συνθήκη τύπου Neumann)
- Για την ταχύτητα στην y-διεύθυνση, v, υπολογίζουμε την τιμή της από την επίλυση της εξίσωσης ορμής.
- Για την πίεση, p, θεωρούμε ότι ισχύει: $p=0$, αφού στην ελεύθερη επιφάνεια έχουμε ατμοσφαιρική πίεση.

Αριστερό Όριο – Έμβολο, Σύνορο W.

Στην παρούσα εργασία για την παραγωγή των κυμάτων χρησιμοποιείται ένα έμβολο στο αριστερό άκρο της δεξαμενής. Υπάρχουν τρεις διαφορετικοί τρόποι λειτουργίας του πιστονιού οι οποίοι επιλέγονται μέσω της μεταβλητής PADDLE.

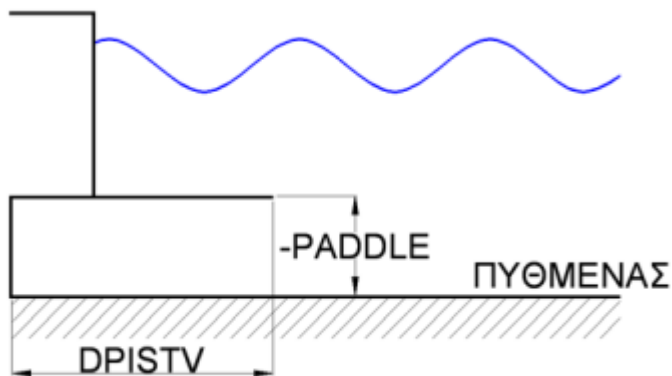
Η μεταβλητή αυτή μπορεί να πάρει είτε θετικές είτε αρνητικές τιμές, είτε να είναι ίση με το μηδέν. Η απόλυτη τιμή της όμως πρέπει να είναι μικρότερη από το βάθος του ρευστού στη δεξαμενή. Το βάθος του ρευστού εισάγεται με την μεταβλητή DEPTH. Θα πρέπει δηλαδή να ισχύει:

$$|PADDLE| < DEPTH$$

Η μεταβλητή PADDLE ορίζει από ποιο ύψος και μετά θα κινείται το αριστερό σύνορο της δεξαμενής, προκειμένου να δημιουργηθεί ο κυματισμός. Με άλλα λόγια ορίζει το μέγεθος του πιστονιού και κατά συνέπεια πόσο μεγάλη θα είναι η διαταραχή που θα προκληθεί.

Η επίδραση των διαφόρων τιμών της μεταβλητής PADDLE φαίνονται παρακάτω:

- $PADDLE = 0$: Κινείται όλο το αριστερό σύνορο του κυματιστήρα.
- $PADDLE > 0$: Κινείται το αριστερό σύνορο από ύψος ίσο με PADDLE και πάνω, αφήνοντας την ροή ελεύθερη στην y-διεύθυνση.
- $PADDLE < 0$: Κινείται το αριστερό σύνορο από ύψος ίσο με την απόλυτη τιμή του PADDLE και πάνω, θεωρώντας ότι υπάρχει ένας λεπτός και λείος σωλήνας-οδηγός, μέχρι μήκος ίσο με την τιμή της μεταβλητής DPISV, ο οποίος αποτρέπει την κατακόρυφη κίνηση του ρευστού ($v=0$).



Στη συνέχεια θα δούμε τις οριακές συνθήκες που αντιστοιχούν σε κάθε τιμή της PADDLE.

Στην περίπτωση που η μεταβλητή PADDLE είναι ίση με μηδέν, ισχύουν οι ακόλουθες συνοριακές συνθήκες:

- Για την ταχύτητα στην x-διεύθυνση, u , θεωρούμε ότι είναι ίση με την παράγωγο της συνάρτησης κίνησης του κυματιστήρα (πιστονιού).
- Για την ταχύτητα στην y-διεύθυνση, v , θεωρούμε ότι είναι ίση με την τιμή που έχει στον κόμβο I=(2) (συνοριακή συνθήκη τύπου Neumann)
- Για την πίεση, p , θεωρούμε ότι είναι ίση με την τιμή που έχει στον κόμβο I=(2) (συνοριακή συνθήκη τύπου Neumann).

Αυτές είναι οι οριακές συνθήκες για το πιστόνι ($y \geq |PADDLE|$) και για τις δύο άλλες περιπτώσεις.

Για την περίπτωση που η μεταβλητή PADDLE λαμβάνει μη αρνητική τιμή, ισχύουν οι ακόλουθες συνοριακές συνθήκες, για το τμήμα κάτω από το πιστόνι ($y < |PADDLE|$):

- Για την ταχύτητα στην x-διεύθυνση, u , είναι: $u=0$ (συνοριακή συνθήκη τύπου Dirichlet).
- Για την ταχύτητα στην y-διεύθυνση, v , είναι: $v=0$ (συνοριακή συνθήκη τύπου Dirichlet).
- Για την πίεση, p , θεωρούμε ότι είναι ίση με την τιμή που έχει στον κόμβο I=(2) (συνοριακή συνθήκη τύπου Neumann)

Για την περίπτωση που η μεταβλητή PADDLE λαμβάνει αρνητική τιμή, ισχύουν οι ακόλουθες συνοριακές συνθήκες, για την περιοχή του λεπτού και λείου σωλήνα-οδηγού ($y = -PADDLE$):

- Για την ταχύτητα στην x-διεύθυνση, u , θεωρούμε ότι είναι ίση με την τιμή που έχει στον κόμβο I=(2) (συνοριακή συνθήκη τύπου Neumann).
- Για την ταχύτητα στην y-διεύθυνση, v , είναι: $v=0$ (συνοριακή συνθήκη τύπου Dirichlet).
- Για την πίεση, p , θεωρούμε ότι είναι ίση με την τιμή που έχει στον κόμβο I=(2) (συνοριακή συνθήκη τύπου Neumann)

Δεξί Όριο – Έξοδος Πεδίου Ροής, Σύνορο E.

Ο κώδικας δίνει τη δυνατότητα να επιλέξουμε τέσσερις διαφορετικές συνοριακές συνθήκες για την έξοδο της δεξαμενής. Η επιλογή της οριακής συνθήκης εξόδου στο αρχείο εισαγωγής μεταβλητών γίνεται με την μεταβλητή NEAS η οποία μπορεί να παίρνει δύο τιμές, 0 και 1. Οι τιμές αυτές αντιστοιχούν στις εξής περιπτώσεις:

- NEAS =0: Συνοριακή συνθήκη μη ανάκλασης (non-reflecting boundary condition).
- NEAS =1: Συνοριακή συνθήκη δημιουργίας στάσιμου κύματος.

Η τρίτη επιλογή αφορά στη χρήση συνθήκης μη ανάκλασης, σε συνδυασμό με χρήση ρευστού υψηλής συνεκτικότητας στο δεξί άκρο της δεξαμενής. Στην επιλογή αυτή θα αναφερθούμε στο επόμενο εδάφιο.

Η τέταρτη επιλογή αφορά στη χρήση συνθήκης μη ανάκλασης, σε συνδυασμό με χρήση ακτής κυματοειδούς μορφής με ή χωρίς ρευστό υψηλής συνεκτικότητας στο δεξί άκρο της δεξαμενής. Στην επιλογή αυτή θα αναφερθούμε στο επόμενο εδάφιο.

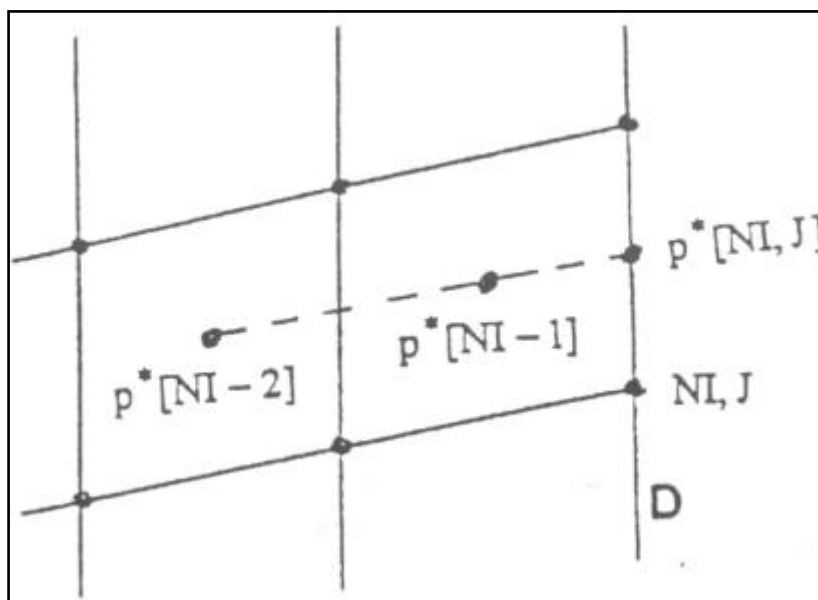
Για την περίπτωση της συνοριακής συνθήκης μη ανάκλασης (NEAS =0), εφαρμόζονται οι συνοριακές συνθήκες:

- Για την ταχύτητα στην x-διεύθυνση, u , υπολογίζουμε την τιμή της μέχρι και τον τελευταίο υπολογιστικό κόμβο του πλέγματος.
- Για την ταχύτητα στην y-διεύθυνση, v , θεωρούμε ότι είναι ίση με την τιμή που έχει στον κόμβο $I=(NI-1)$ (συνοριακή συνθήκη τύπου Neumann).
- Για την πίεση, p , υπολογίζουμε την τιμή της στον τελευταίο υπολογιστικό κόμβο του πλέγματος κάνοντας γραμμική παρεκβολή στους δύο προ-τελευταίους κόμβους.

Για την περίπτωση της συνοριακής συνθήκης δημιουργίας στάσιμου κύματος ($NEAS = 1$), εφαρμόζονται οι συνοριακές συνθήκες:

- Για την ταχύτητα στην x-διεύθυνση, u , υπολογίζουμε την τιμή της μέχρι και τον τελευταίο υπολογιστικό κόμβο του πλέγματος.
- Για την ταχύτητα στην y-διεύθυνση, v , θεωρούμε ότι είναι ίση με την τιμή που έχει στον κόμβο $I=(NI-1)$ (συνοριακή συνθήκη τύπου Neumann).
- Για την πίεση, p , υπολογίζουμε την τιμή της στον τελευταίο υπολογιστικό κόμβο του πλέγματος κάνοντας γραμμική παρεκβολή στους δύο προ-τελευταίους κόμβους.

Ο τρόπος που γίνεται η γραμμική παρεκβολή για τον υπολογισμό της πίεσης φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Απόσβεση Κυματισμών μέσω Συνεκτικότητας.

Οι δύο τύποι συνοριακών συνθηκών για το δεξί όριο της δεξαμενής που περιγράφηκαν παραπάνω παρουσιάζουν προβλήματα.

Στην περίπτωση συνθήκης μη ανάκλασης, εμφανίζονται ανακλάσεις, δηλαδή κύματα που αλλάζουν διεύθυνση και επιστρέφουν προς τον κυματιστήρα, αλλοιώνοντας τη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας.

Στην περίπτωση συνθήκης στάσιμου κύματος εμφανίζεται μείωση της στάθμης του ρευστού.

Αποδοτικότερες συνοριακές συνθήκες είναι αυτές του πρώτου τύπου, όμως πρέπει να βρεθεί ένας τρόπος να αποφευχθούν οι ανακλάσεις.

Σε μία πραγματική δεξαμενή κατασκευάζεται μία τεχνητή ακτή στην οποία διαχέεται η ενέργεια των κυμάτων.

Στην παρούσα μεθοδολογία εκμεταλλευόμαστε το φαινόμενο της απόσβεσης των κυμάτων λόγω συνεκτικότητας. Θεωρούμε ότι η δεξαμενή είναι γεμάτη με δύο μη αναμίξιμα και σταθερά διαχωρισμένα ρευστά, το πρώτο έχει ίδια συνεκτικότητα με το νερό ενώ το δεύτερο έχει συνεκτικότητα πολλαπλάσια κατά ένα συντελεστή, σταθερή η αυξανόμενη γραμμικά ή εκθετικά.

Τα κύματα διαδίδονται κανονικά μέσω του πρώτου ρευστού με ελάχιστες απώλειες. Όταν περάσουν στο δεύτερο ρευστό, αποσβένονται ταχύτατα και η ενέργειά τους έχει πρακτικά μηδενιστεί πριν συναντήσουν τον τοίχο στο δεξιό άκρο της δεξαμενής. Με αυτό τον τρόπο αποφεύγονται οι ανακλάσεις χωρίς να αυξάνεται ο χρόνος σύγκλησης.

Η χρήση της μεθόδου αυτής ελέγχεται από πέντε μεταβλητές στο αρχείο εισόδου δεδομένων.

- VISINF: Είναι ο παράγοντας επί τον οποίο πολλαπλασιάζεται η συνεκτικότητα του νερού.
 - VISINF >0: Πολλαπλασιαστής της κινηματικής συνεκτικότητας,
 - VISINF <0: VISINF = Μέγιστη τιμή του πολλαπλασιαστή της κινηματικής συνεκτικότητας.
- XVIS1: Ορίζει τη θέση μετάβασης από το ένα ρευστό στο δεύτερο:
 - XVIS1=0: Υπάρχει μόνο ένα ρευστό στη δεξαμενή,
 - XVIS1>0: Το δεύτερο ρευστό ξεκινάει από τη θέση XVIS1,
 - XVIS1<0: Το δεύτερο ρευστό ξεκινάει από το ποσοστό του μήκους της δεξαμενής - XVIS1,
- XVIS2: Ορίζει τη θέση μετάβασης από το δεύτερο ξανά στο πρώτο:

- $XVIS2 > 0$: Το δεύτερο ρευστό σταματάει στη θέση $XVIS2$,
- $XVIS2 < 0$: Το δεύτερο ρευστό σταματάει στο ποσοστό του μήκους της δεξαμενής – $XVIS2$,
- $DEPVIS$: Ορίζει το ύψος μετάβασης από το ένα ρευστό στο δεύτερο:
- $DEPVIS = 0$: Το δεύτερο ρευστό εκτείνεται καθ' όλο το βάθος της δεξαμενής,
- $DEPVIS > 0$: Το δεύτερο ρευστό ξεκινάει από βάθος $DEPVIS$ και εκτείνεται μέχρι την ελεύθερη επιφάνεια,
- $DEPVIS < 0$: Το δεύτερο ρευστό ξεκινάει από το ποσοστό βάθους – $DEPVIS$ και εκτείνεται μέχρι την ελεύθερη επιφάνεια,
- $IEXP$: Βαθμός της καμπύλης αύξησης της συνεκτικότητας όταν $VISINF < 0$:

$$\text{Συνεκτικότητα}(X) = VISCOS \cdot \left(1 + (VISINF - 1) \cdot \left(\frac{X - XVIS1}{XVIS2 - XVIS1} \right)^{IEXP} \right)$$

Απόσβεση Κυματισμών με χρήση Ακτής.

Στις πραγματικές πειραματικές δεξαμενές χρησιμοποιούνται διατάξεις απόσβεσης των κυματισμών, υπό μορφή ακτής από μεταλλικό πλέγμα.

Σκοπός της ακτής είναι η αύξηση της στροβιλότητας του ρευστού, η δημιουργία τυρβώδους ροής και τελικά καταστροφή της ενέργειας.

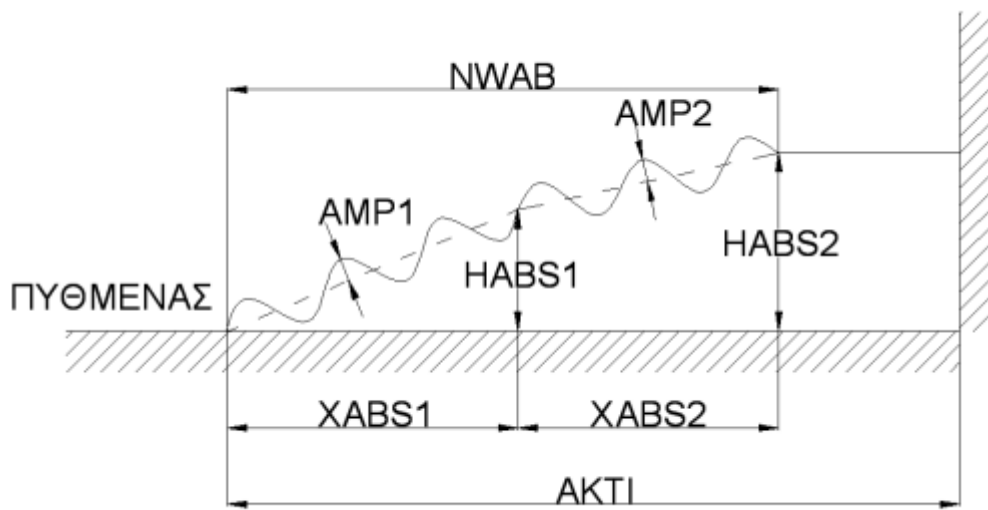
Ο κώδικας παρέχει τη δυνατότητα δημιουργίας ακτής, δηλαδή ενός κεκλιμένου επιπέδου με ημιτονοειδή επιφάνεια.

Η ακτή λειτουργεί με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως και σε μια πειραματική δεξαμενή, δηλαδή αυξάνει τη στροβιλότητα του ρευστού και επιτυγχάνει την καταστροφή της ενέργειας. Σε συνδυασμό με ρευστό υψηλής συνεκτικότητας, επιτυγχάνεται η αποτελεσματική απόσβεση των κυματισμών.

Η χρήση της μεθόδου αυτής ελέγχεται από οκτώ μεταβλητές στο αρχείο εισόδου δεδομένων.

- $NWAB$: Αριθμός κυμάτων στην επιφάνεια των δύο τμημάτων της ακτής .
- $AKTI$: Μήκος ακτής από δεξιό άκρο δεξαμενής.

- ΧABS1: Μήκος πρώτου τμήματος ακτής.
- ΧABS2: Μήκος δεύτερου τμήματος ακτής.
- ΗABS1: Ύψος πρώτου τμήματος ακτής ψ .
- ΗABS2: Ύψος δεύτερου τμήματος ακτής.
- AMP1: Πλάτος ημιτονοειδούς επιφάνειας στο πρώτο τμήμα της ακτής.
- AMP2: Πλάτος ημιτονοειδούς επιφάνειας στο δεύτερο τμήμα της ακτής.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

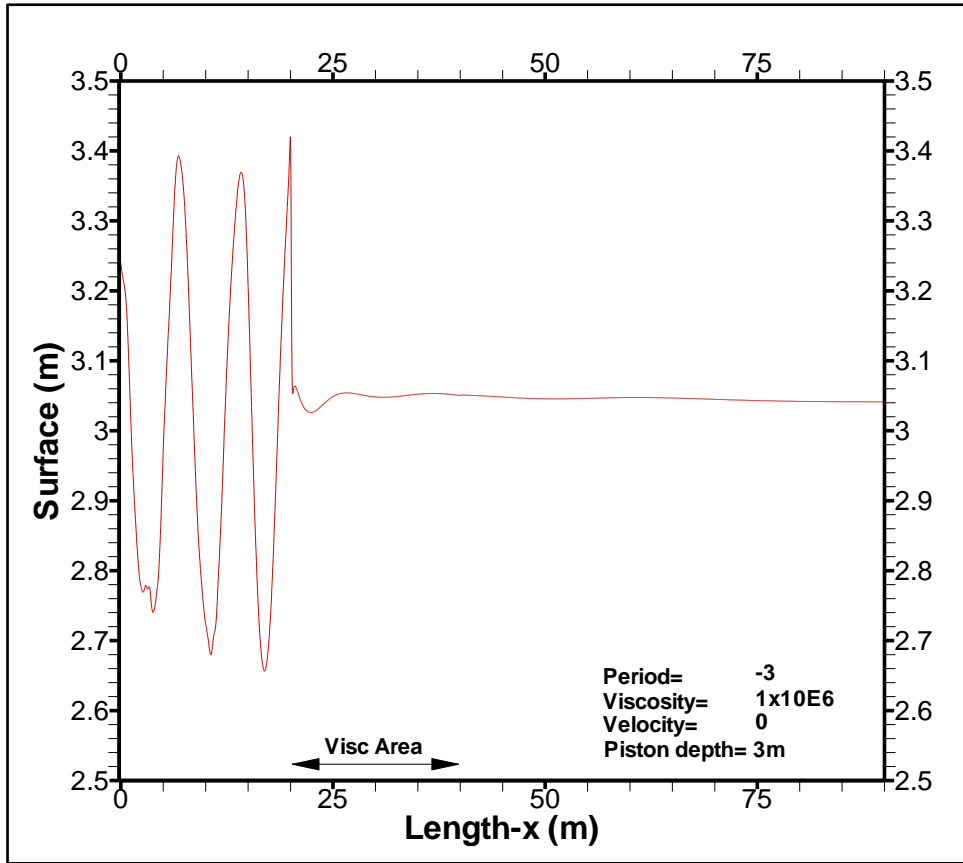
ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ - TEST CASES

Περίπτωση 1 (Amorgos v1):

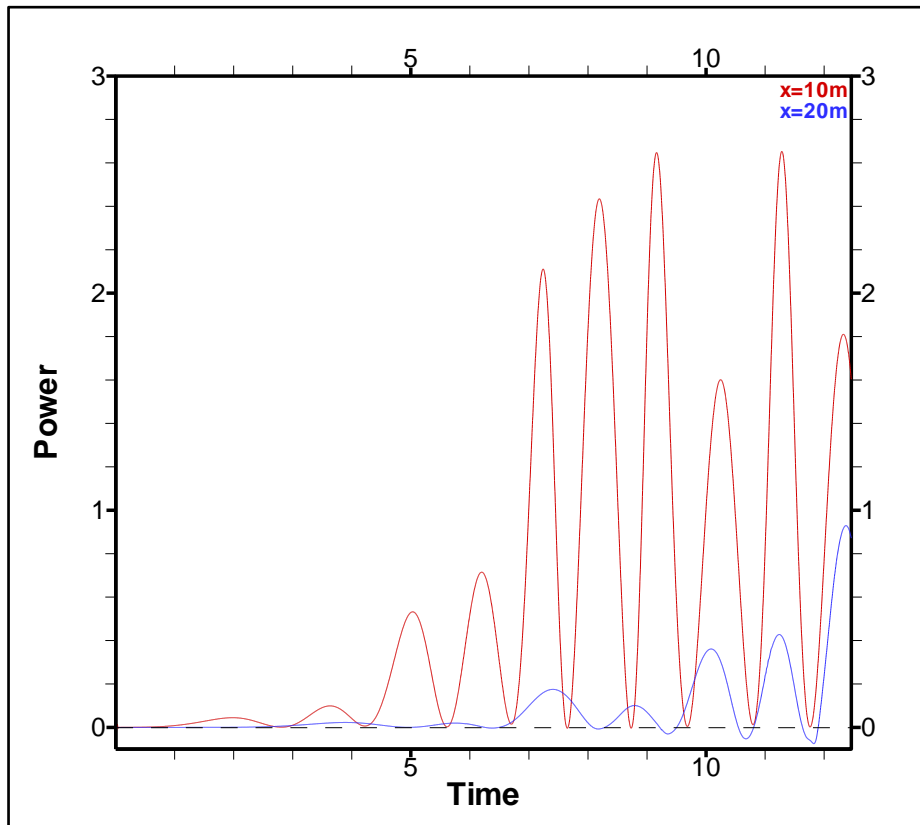
Τα δεδομένα εισόδου είναι:

NI=3000	NJ=80	(Μή ορθογώνιο πλέγμα 3000x80)
VELIN=0		(Μηδενική ταχύτητα ρευστού)
PERIOD=-3		(Περίοδος αρμονικού κυματισμού)
XFIRST=0	XLAST=200	(Μήκος δεξαμενής 200 μέτρα)
PISTON=+3	PADDLE=0	(Κίνηση εμβόλου βάθους 3 μέτρα)
VISINF=+1e6		(Σταθερή συνεκτικότητα ίση με $Visinf*10E-06$)
XVIS1=20	XVIS2=40	(Συνεκτικότητα στην περιοχή από 20 ως 40m)

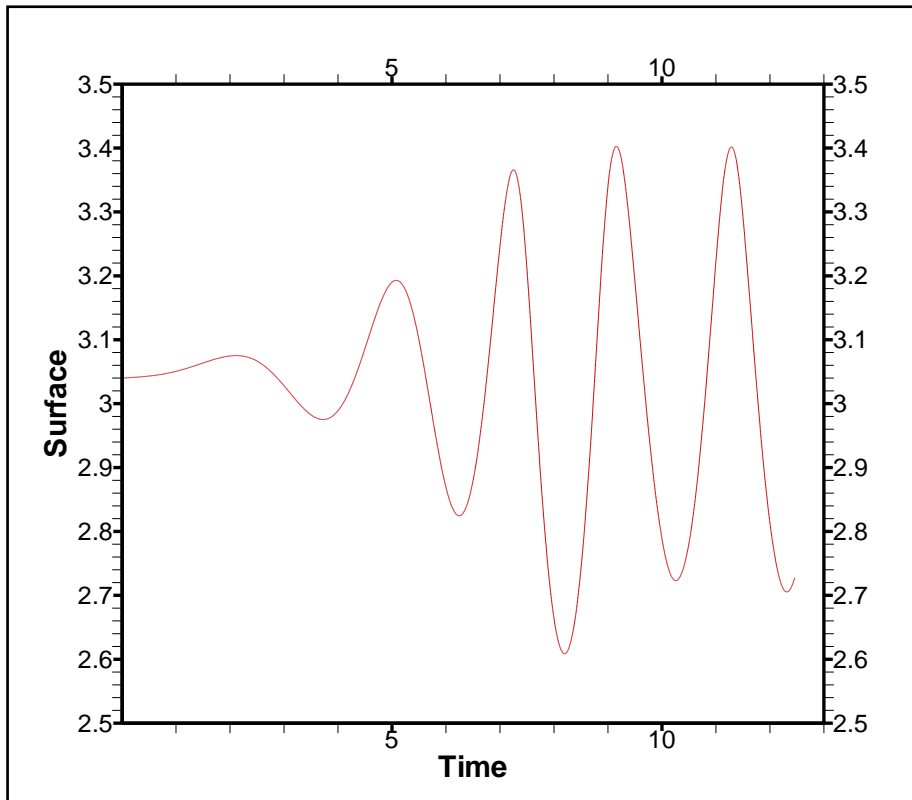
Στην περίπτωση αυτή εξετάζουμε τη διάδοση του κύματος μέσα απο περιοχή συνεκτικότητας ίση με 1×10^6 φορές τη συνεκτικότητα του νερού όταν κινείται όλο το αριστερό σύνορο με συχνότητα κίνησης του εμβόλου 3rad/sec. Τα αποτελέσματα φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα:



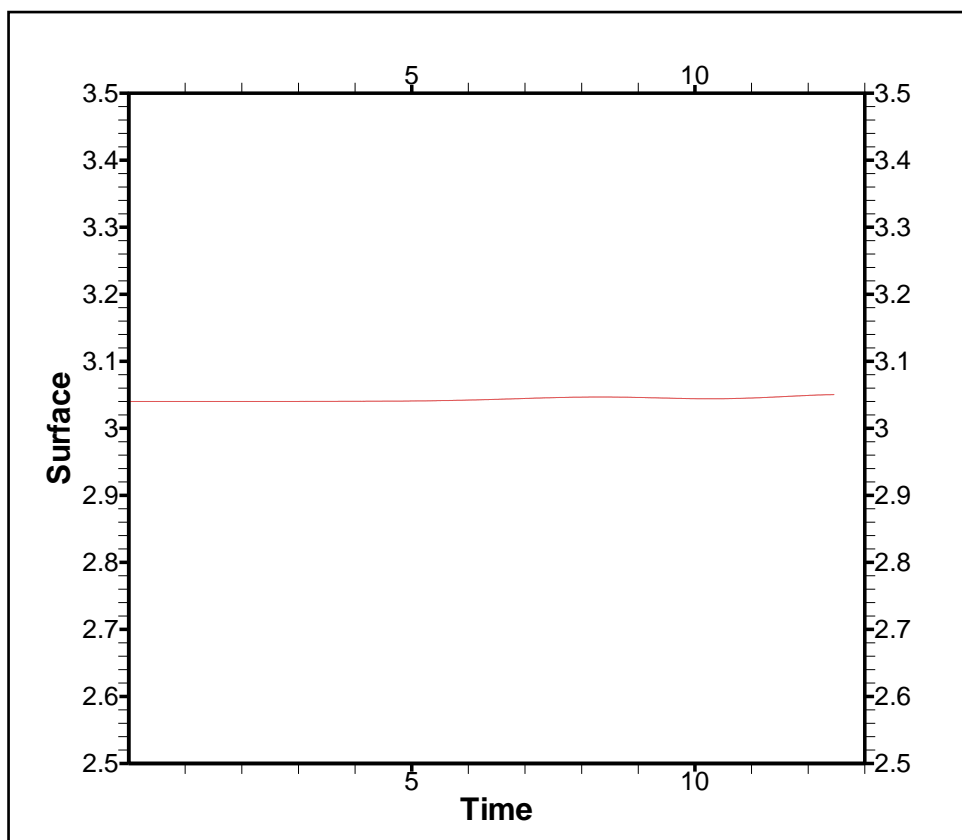
Σχήμα(1.1) Ανύψωση της επιφάνειας



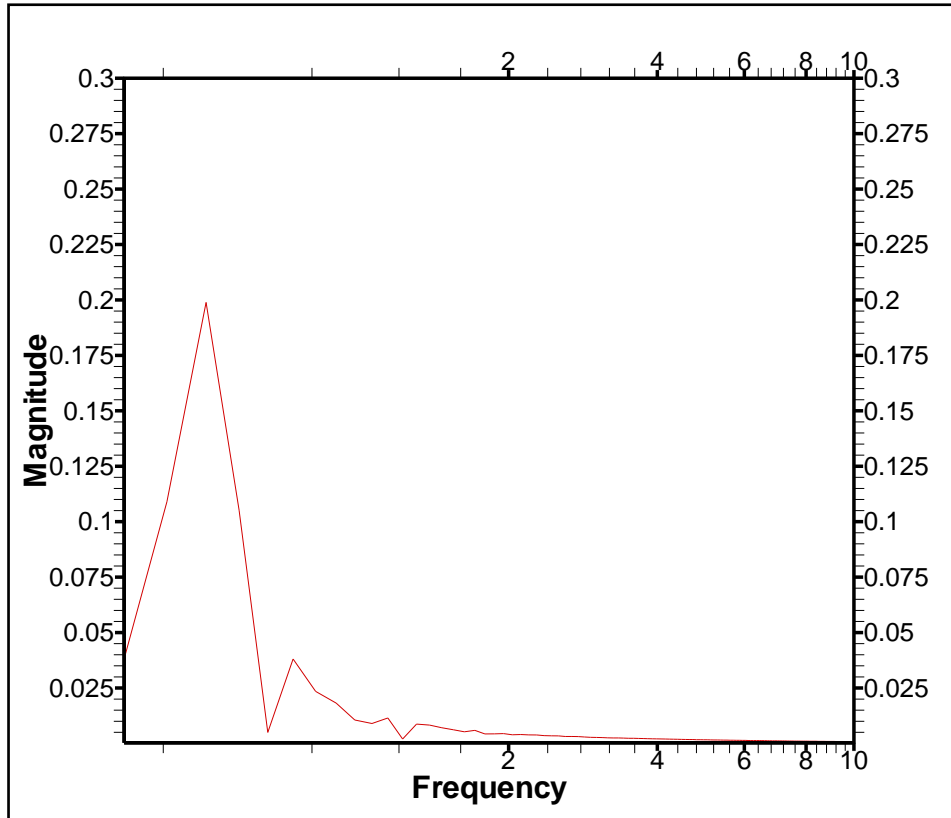
Σχήμα(1.2) Χρονική εξέλιξη της στιγμιαίας ισχύος



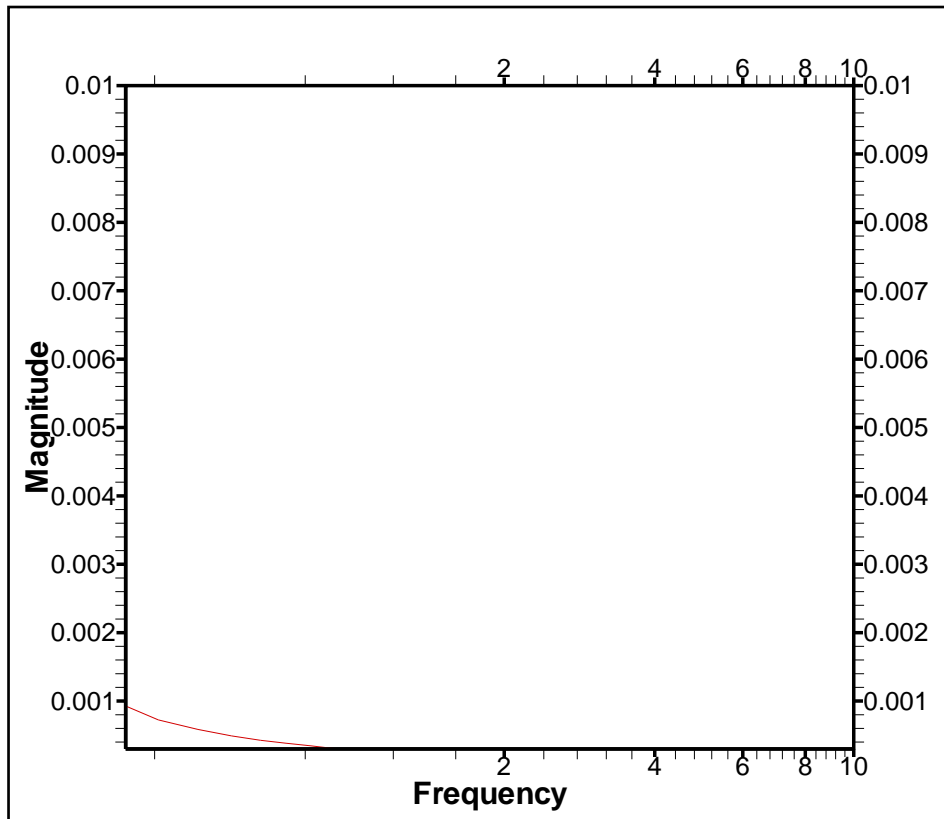
Σχήμα(1.3) Χρονική εξέλιξη της επιφάνειας για $x=20m$



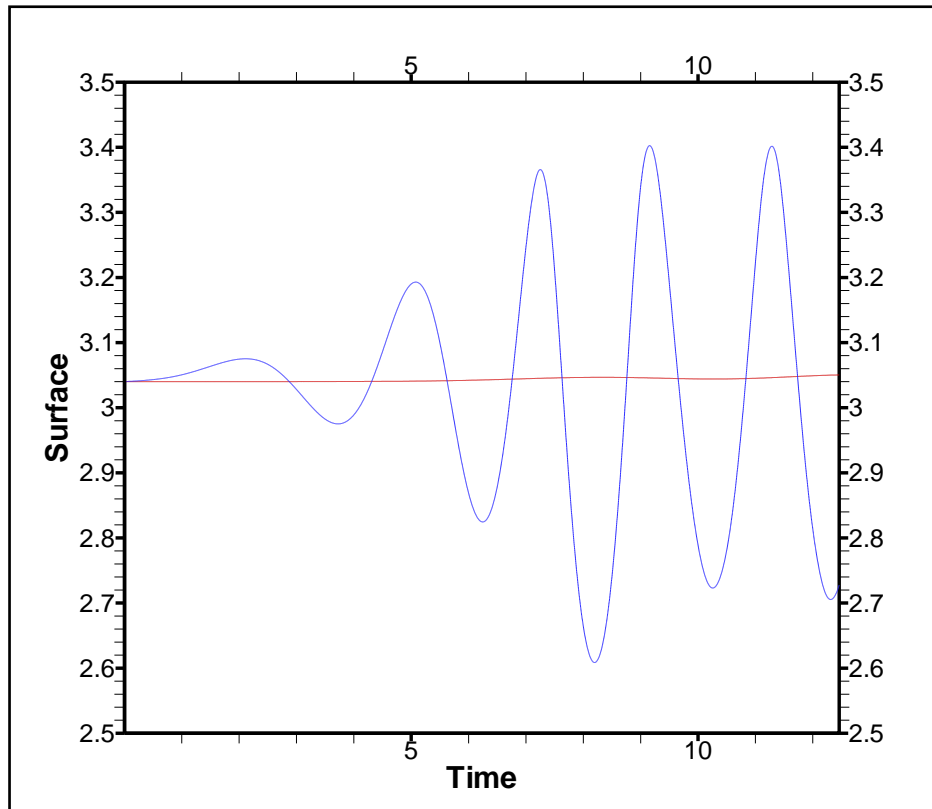
Σχήμα(1.4) Χρονική εξέλιξη της επιφάνειας για $x=40m$



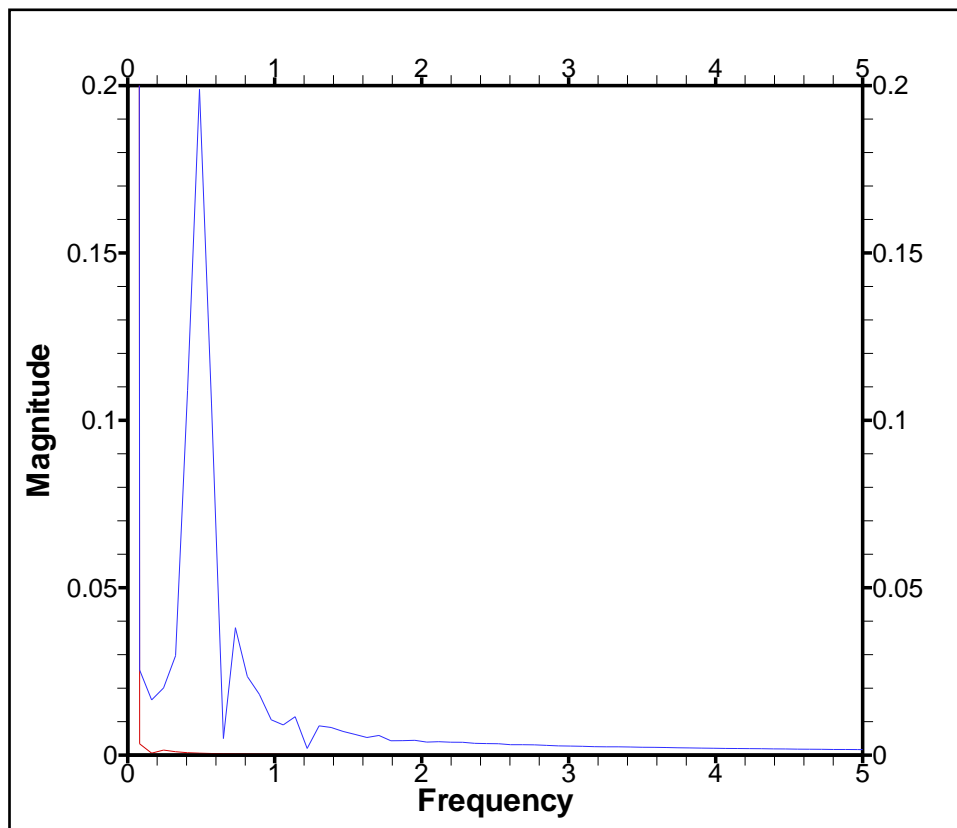
Σχήμα(1.5) Ανάλυση συχνότητας κύματος για $x=20m$



Σχήμα(1.6) Ανάλυση συχνότητας κύματος για $x=40m$



Σχήμα(1.7) Σύγκριση χρονικής εξέλιξης της επιφάνειας για $x=20m$ και $x=40m$



Σχήμα(1.8) Σύγκριση ανάλυσης συχνότητας κύματος για $x=20m$ και $x=40m$

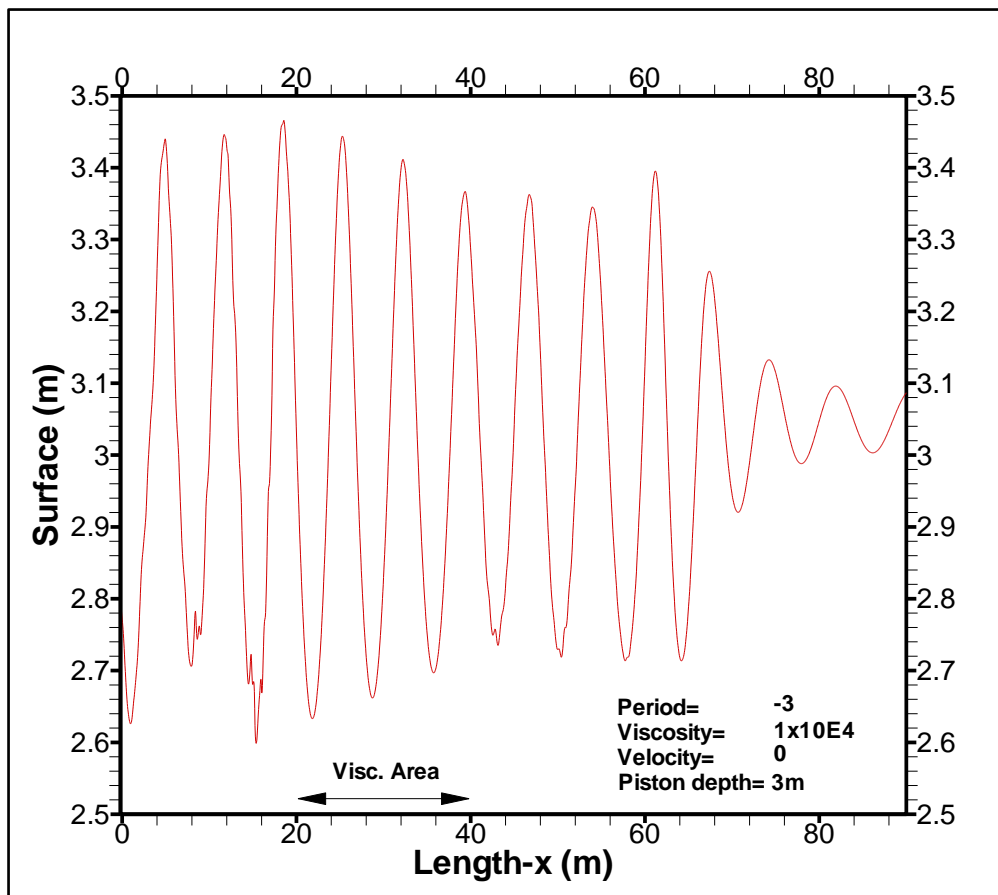
Από τα προηγούμενα διαγράμματα προκύπτει πως με τη συγκεκριμένη τιμή της συνεκτικότητας το κύμα δεν διαδίδεται. Από το διάγραμμα της στιγμιαίας ισχύος παρατηρούνται κάποιες μικρές αρνητικές τιμές για $x=20\text{m}$ αλλά χωρίς όμως αυτό να συνεπάγεται εκτεταμένες ανακλάσεις.

Περίπτωση 2 (Amorgos v2) :

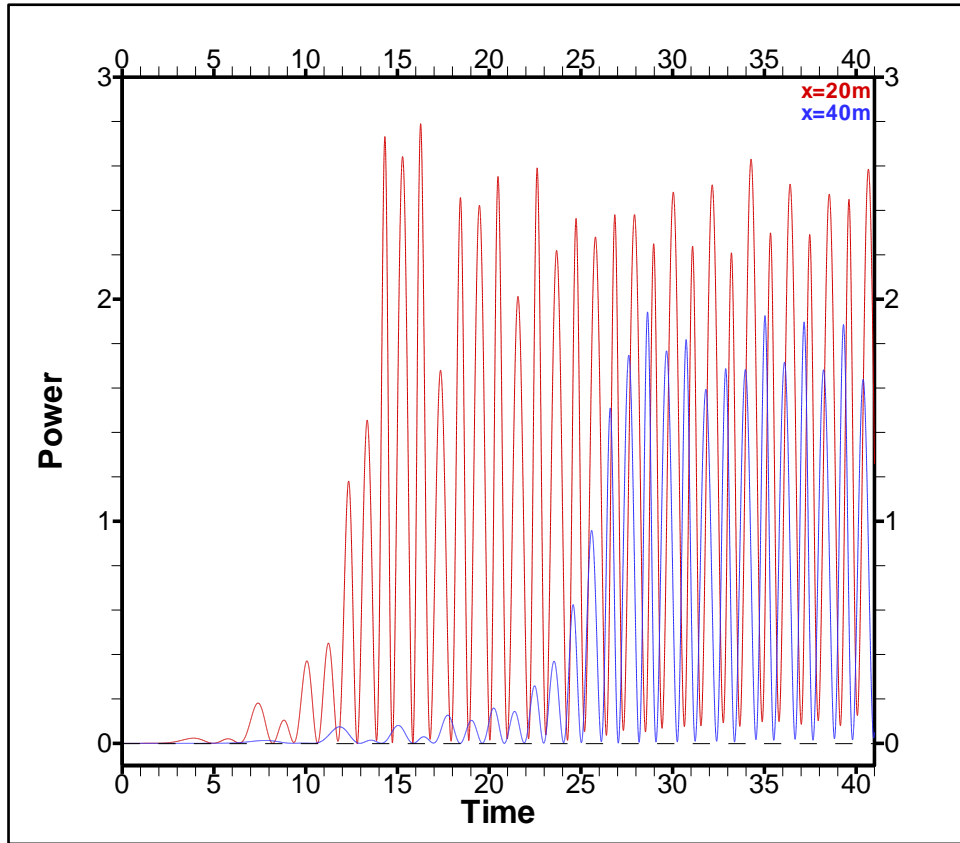
Τα δεδομένα εισόδου είναι:

- NI=3000 NJ=80 (Μή ορθογώνιο πλέγμα 3000x80)
VELIN=0 (Μηδενική ταχύτητα ρευστού)
PERIOD=-3 (Περίοδος αρμονικού κυματισμού)
XFIRST=0 XLAST=200 (Μήκος δεξαμενής 200 μέτρα)
PISTON=+3 PADDLE=0 (Κίνηση εμβόλου βάθους 3 μέτρα)
VISINF=+1e4 (Σταθερή συνεκτικότητα ίση με $Visinf \cdot 10E-06$)
XVIS1=20 XVIS2=40 (Συνεκτικότητα στην περιοχή από 20 ως 40m)

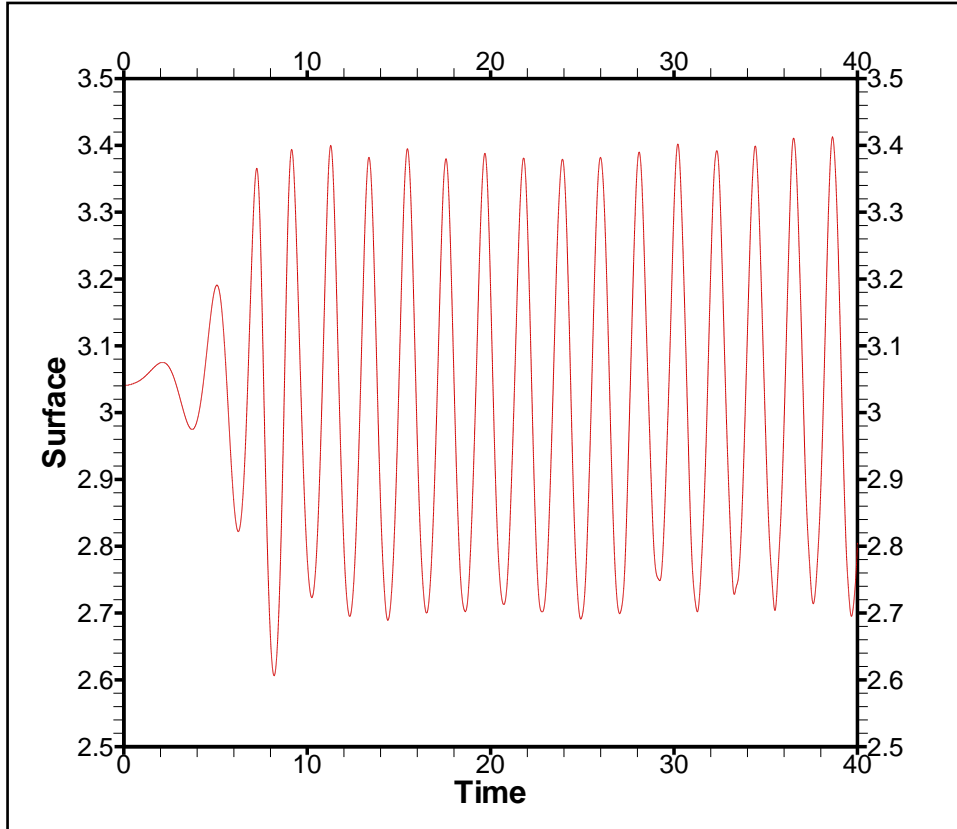
Στην περίπτωση αυτή εξετάζουμε τη διάδοση του κύματος μέσα απο περιοχή συνεκτικότητας ίση με 1×10^4 φορές τη συνεκτικότητα του νερού όταν κινείται όλο το αριστερό σύνορο με συχνότητα κίνησης του εμβόλου 3rad/sec. Τα αποτελέσματα φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα:



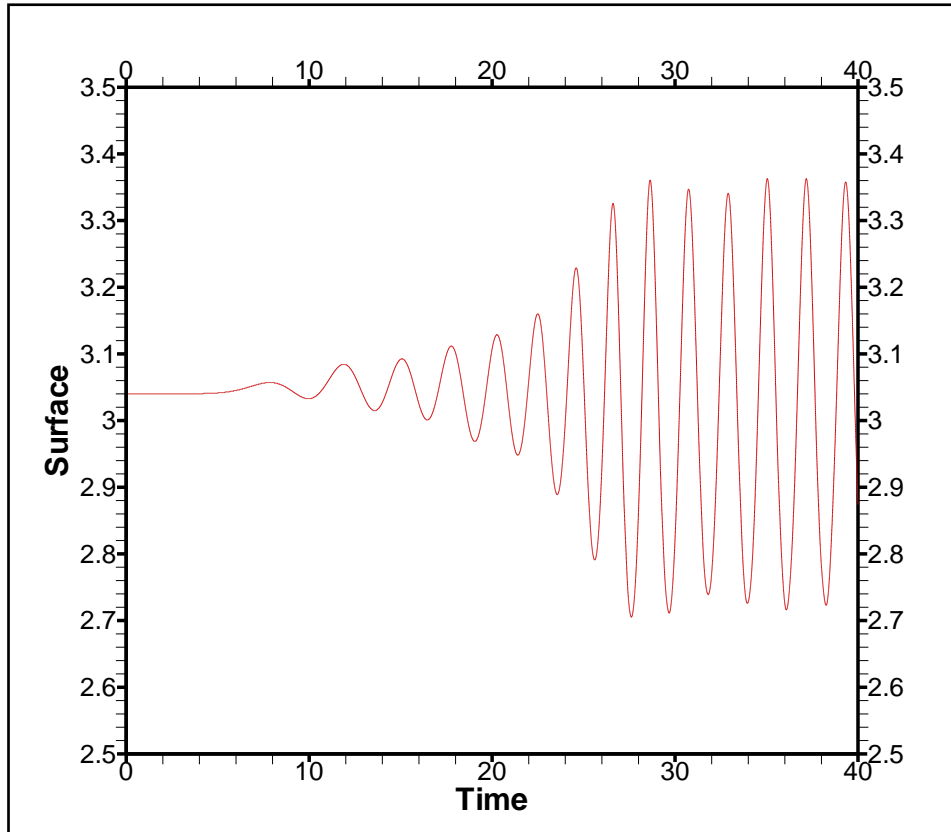
Σχήμα(2.1) Ανύψωση της επιφάνειας



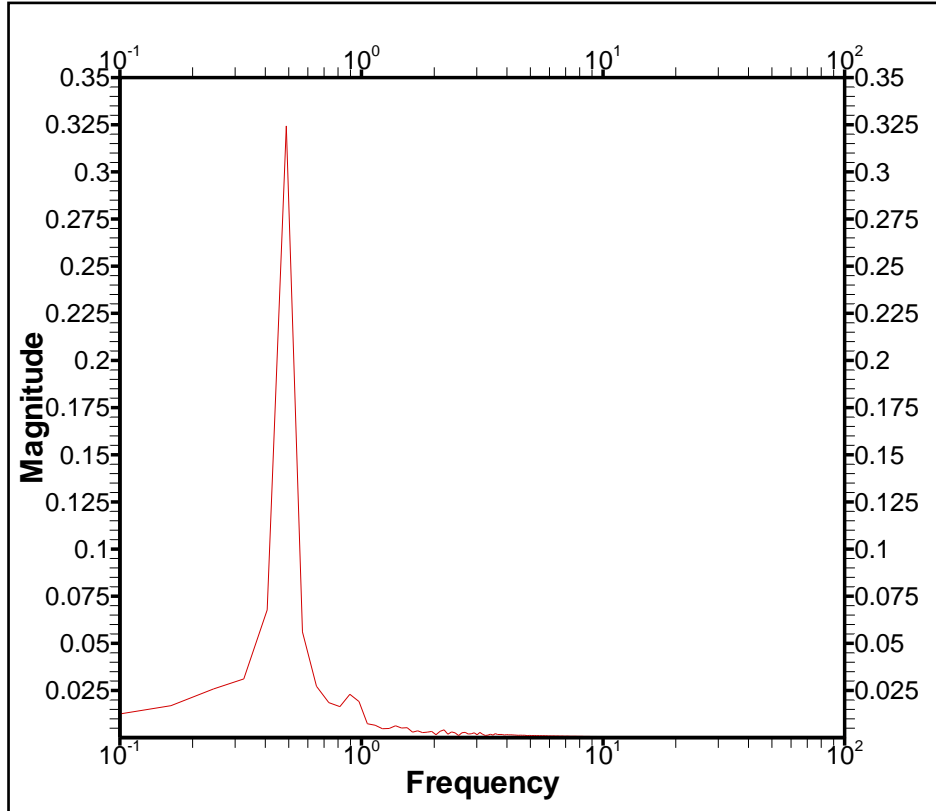
Σχήμα(2.2) Χρονική εξέλιξη της στιγμιαίας ισχύος



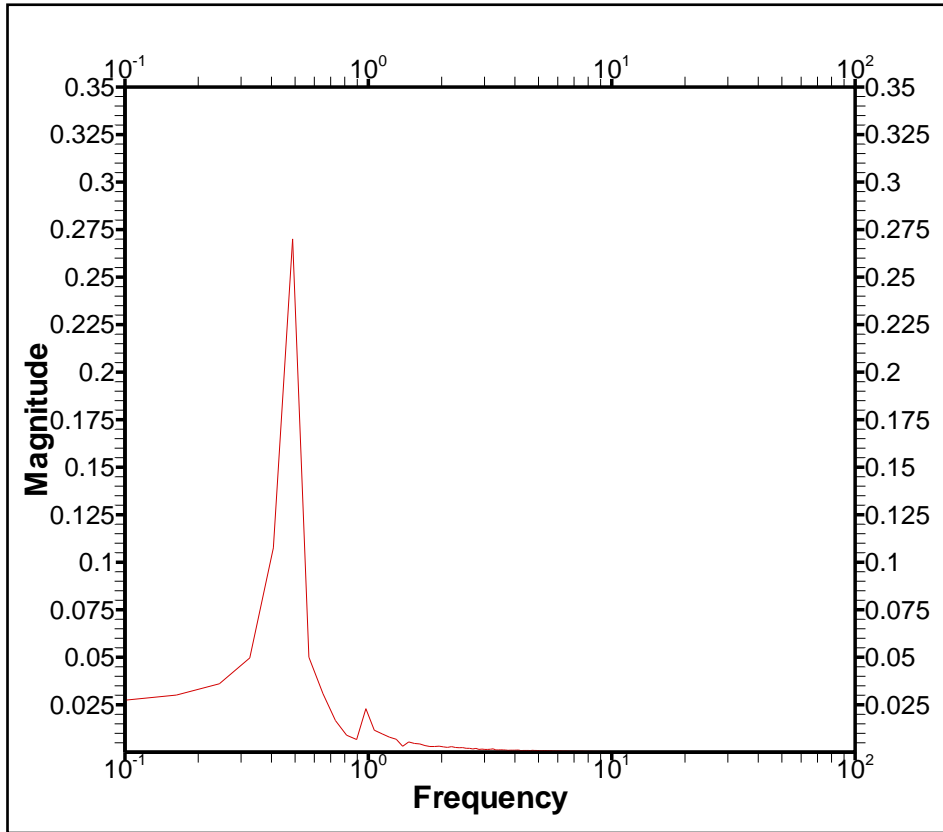
Σχήμα(2.3) Χρονική εξέλιξη της επιφάνειας για $x=20m$



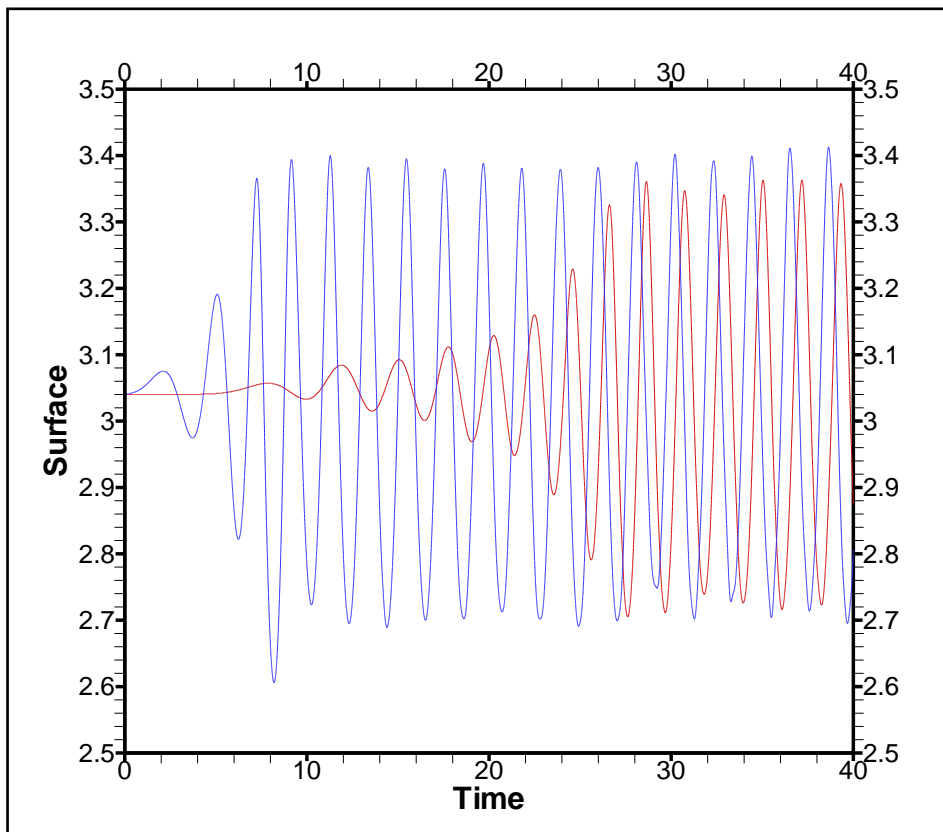
Σχήμα(2.4) Χρονική εξέλιξη της επιφάνειας για $x=40m$



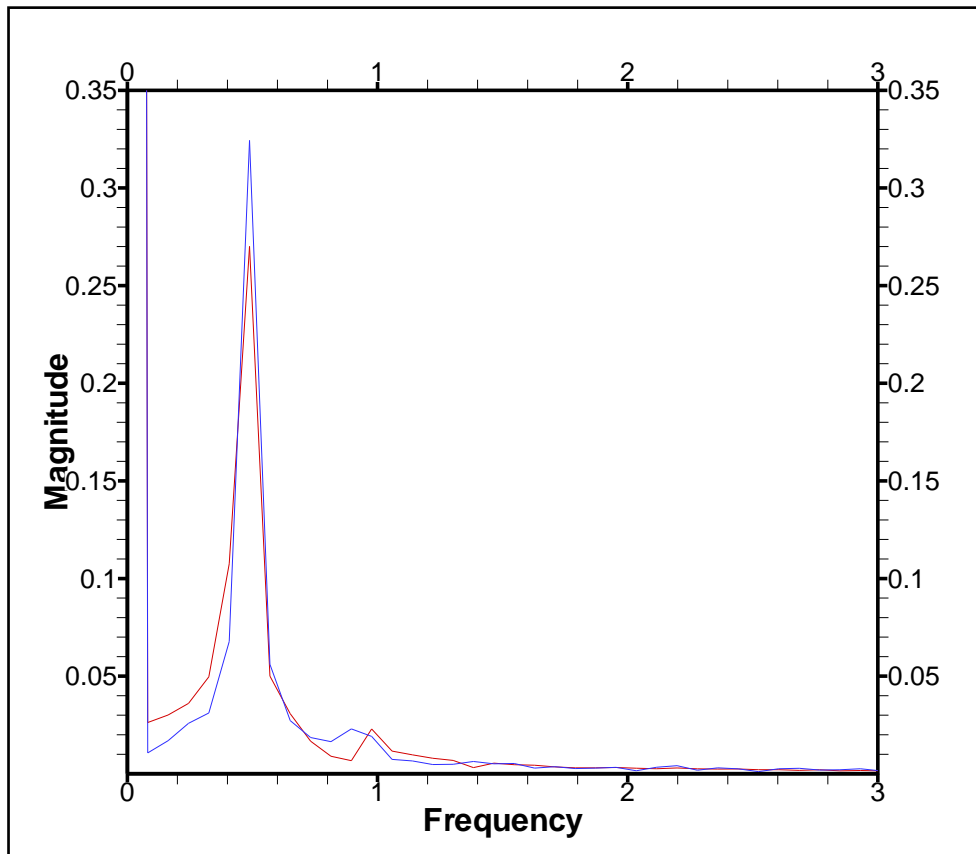
Σχήμα(2.5) Ανάλυση συχνότητας κύματος για $x=20m$



Σχήμα(2.6) Ανάλυση συχνότητας κύματος για $x=40m$



Σχήμα(2.7) Σύγκριση χρονικής εξέλιξης της επιφάνειας για $x=20m$ και $x=40m$



Σχήμα(2.8) Σύγκριση ανάλυσης συχνότητας κύματος για $x=20m$ και $x=40m$

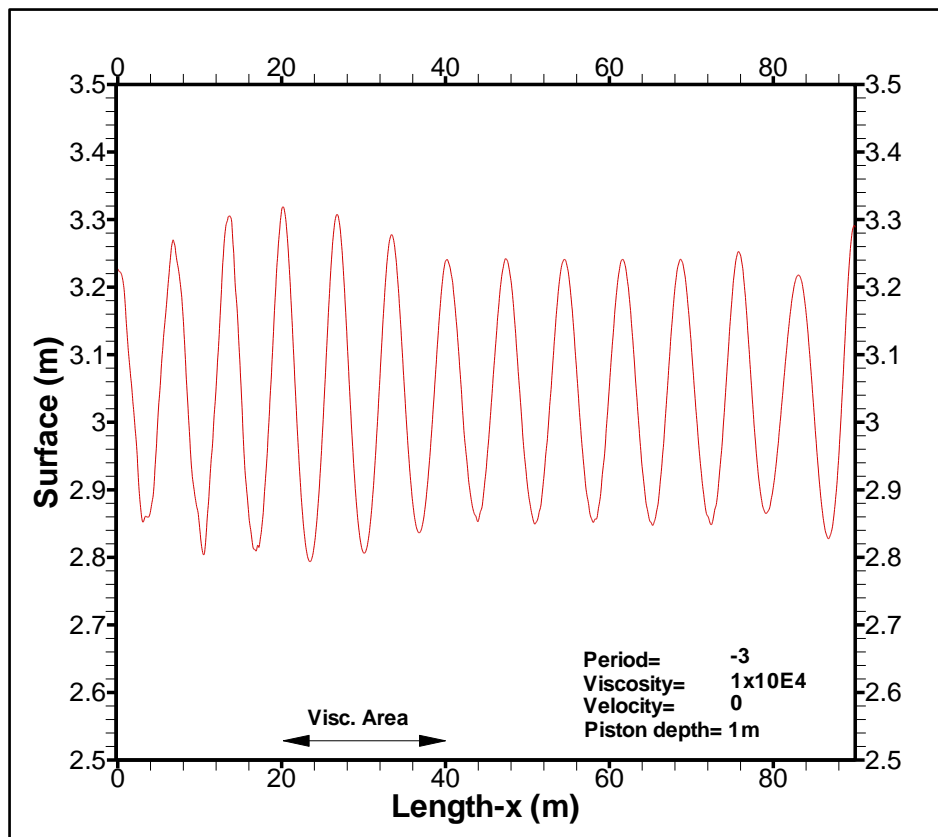
Από τα προηγούμενα διαγράμματα προκύπτει πως με τη συγκεκριμένη τιμή της συνεκτικότητας το κύμα διαδίδεται. Από το διάγραμμα της στιγμιαίας ισχύος δεν παρατηρούνται αρνητικές τιμές που συνεπάγεται ότι δεν έχουμε ανακλάσεις λόγω της συνεκτικότητας. Από τα σχήματα (2.7) και (2.8) φαίνεται ότι το κύμα μεταδίδεται με την ίδια συχνότητα πριν και μετά την περιοχή της αυξημένης συνεκτικότητας με μικρή όμως ελάττωση στο ύψος του κύματος. Και σ' αυτή την περίπτωση έχουμε απώλεια ενέργειας.

Περίπτωση 3 (Amorgos v2a) :

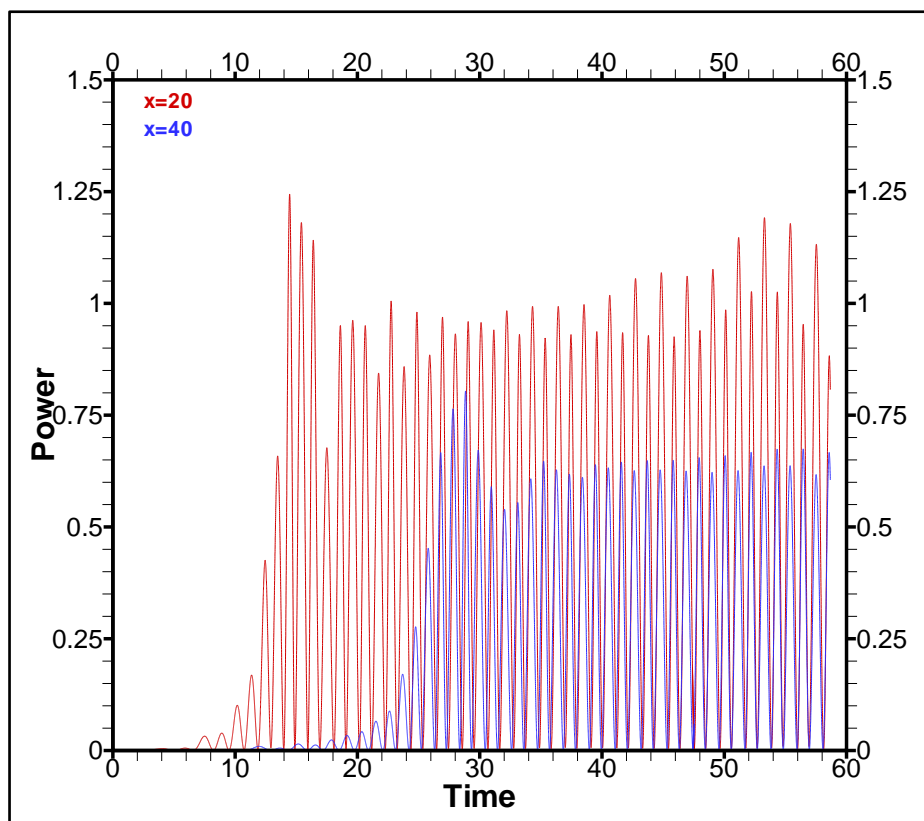
Τα δεδομένα εισόδου είναι:

- NI=3000 NJ=80 (Μή ορθογώνιο πλέγμα 3000x80)
VELIN=0 (Μηδενική ταχύτητα ρευστού)
PERIOD=-3 (Περίοδος αρμονικού κυματισμού)
XFIRST=0 XLAST=200 (Μήκος δεξαμενής 200 μέτρα)
PISTON=+3 PADDLE=-2 (Κίνηση εμβόλου βάθους 1 μέτρο)
VISINF=+1e4 (Σταθερή συνεκτικότητα ίση με $Visinf \cdot 10E-06$)
XVIS1=20 XVIS2=40 (Συνεκτικότητα στην περιοχή από 20 ως 40m)

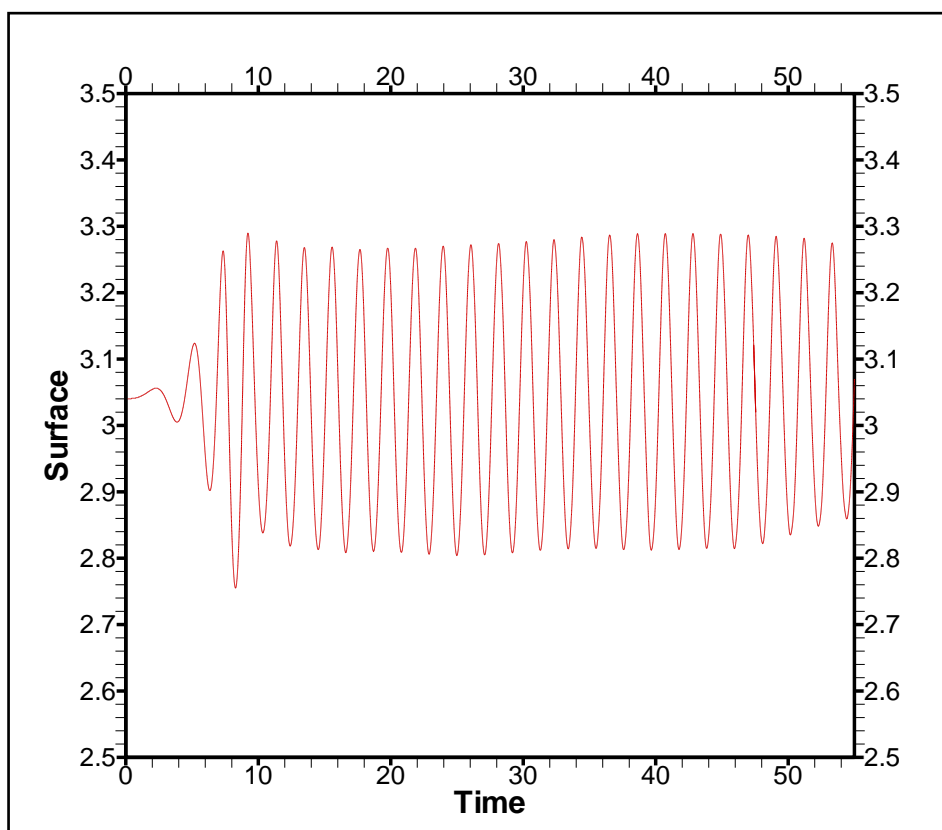
Στην περίπτωση αυτή εξετάζουμε τη διάδοση του κύματος μέσα απο περιοχή συνεκτικότητας ίση με 1×10^4 φορές τη συνεκτικότητα του νερού όταν κινείται μόνο ένα μέρος του αριστερού συνόρου (επιφανειακός κυματισμός) με συχνότητα κίνησης του εμβόλου 3rad/sec. Τα αποτελέσματα φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα:



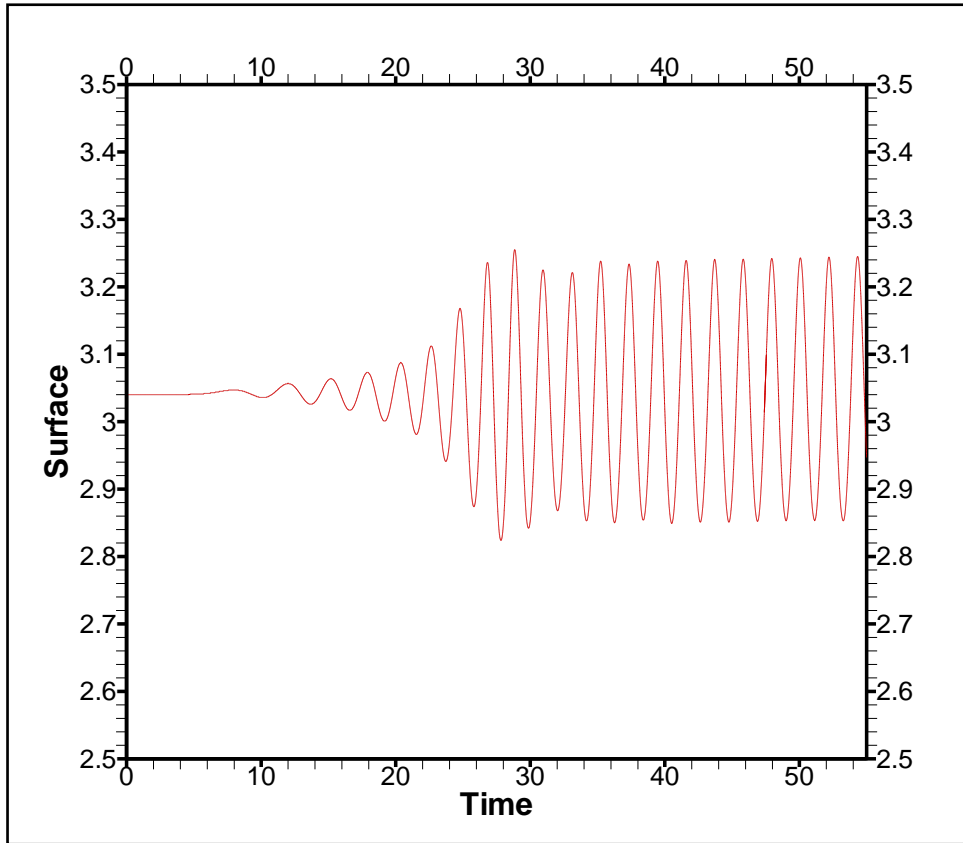
Σχήμα(3.1) Ανύψωση της επιφάνειας



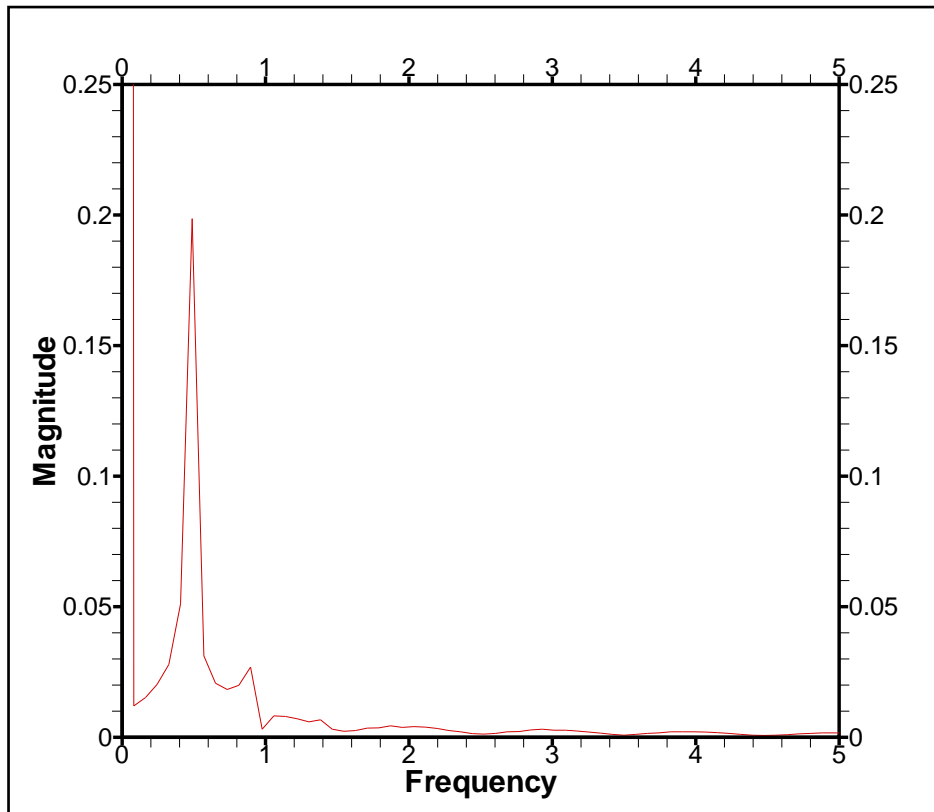
Σχήμα(3.2) Χρονική εξέλιξη της στιγμιαίας ισχύος



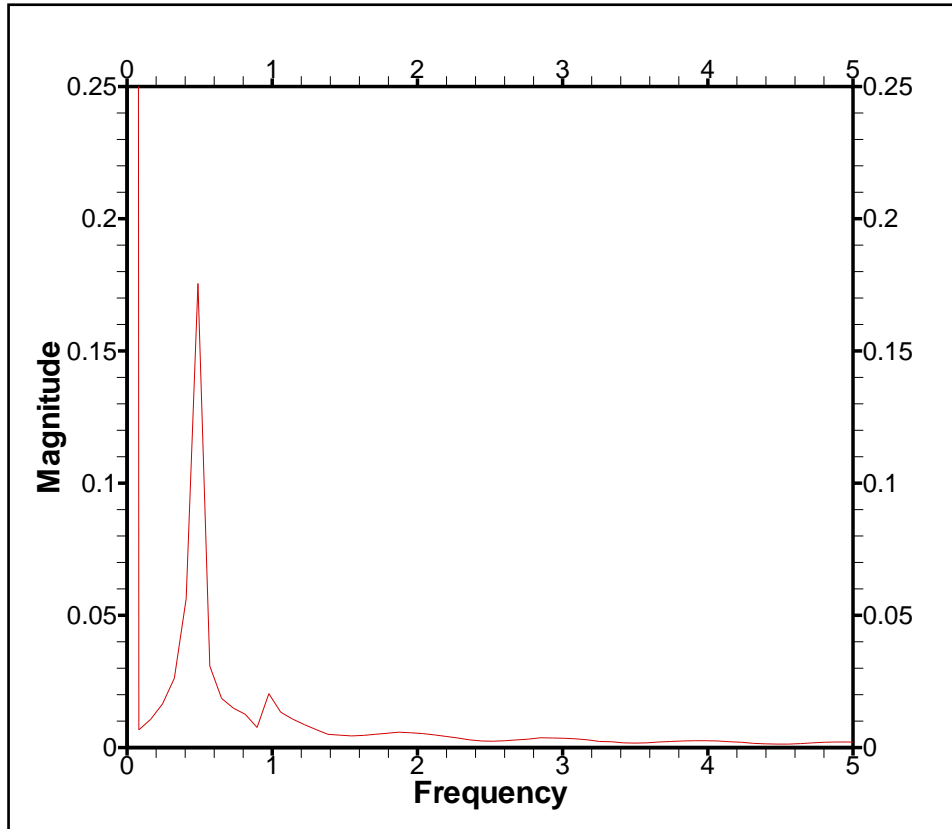
Σχήμα(3.3) Χρονική εξέλιξη της επιφάνειας για $x=20m$



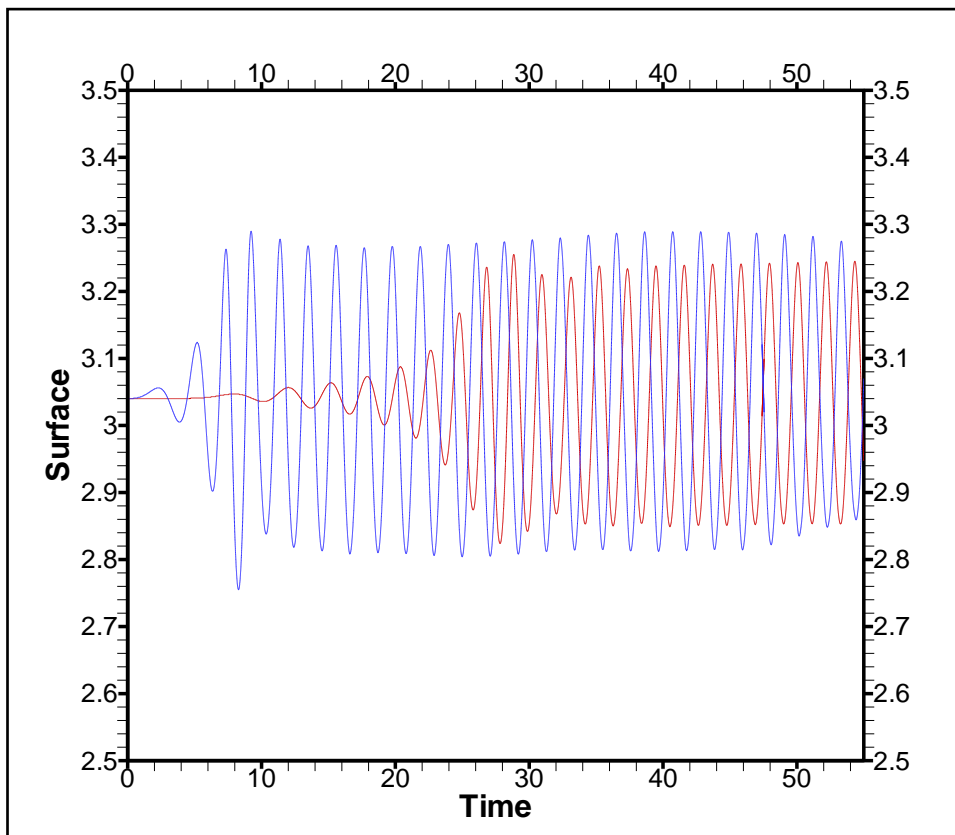
Σχήμα(3.4) Χρονική εξέλιξη της επιφάνειας για $x=40m$



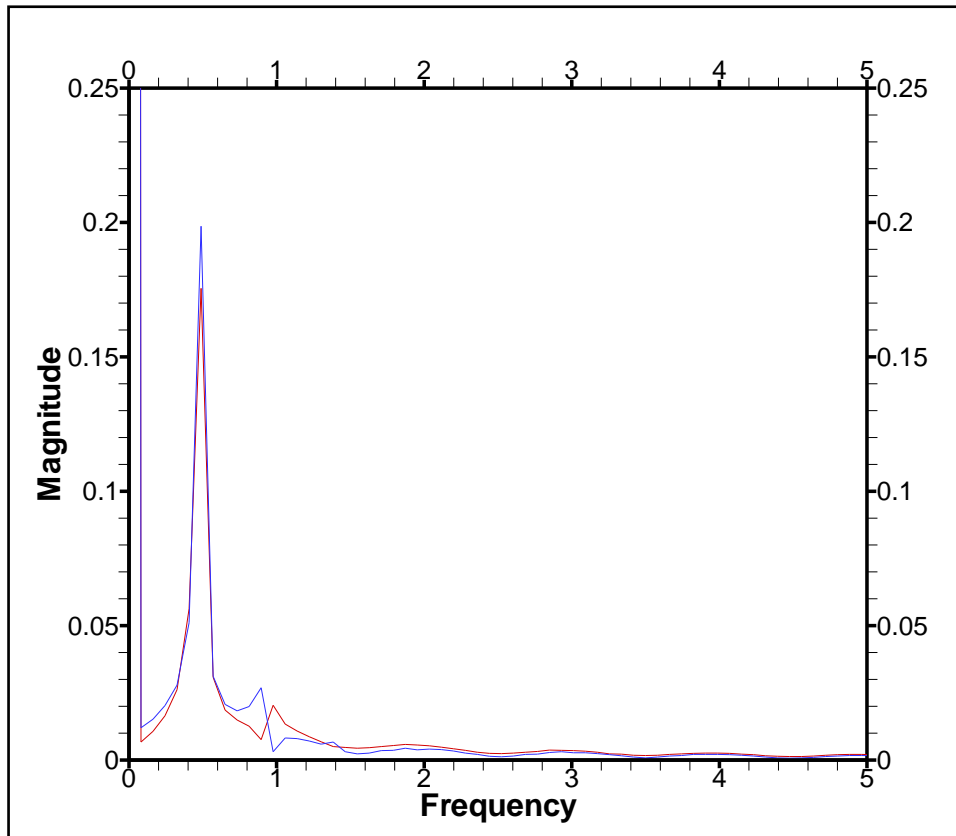
Σχήμα(3.5) Ανάλυση συχνότητας κύματος για $x=20m$



Σχήμα(3.6) Ανάλυση συχνότητας κύματος για $x=40m$



Σχήμα(3.7) Σύγκριση χρονικής εξέλιξης της επιφάνειας για $x=20m$ και $x=40m$



Σχήμα(3.8) Σύγκριση ανάλυσης συχνότητας κύματος για $x=20m$ και $x=40m$

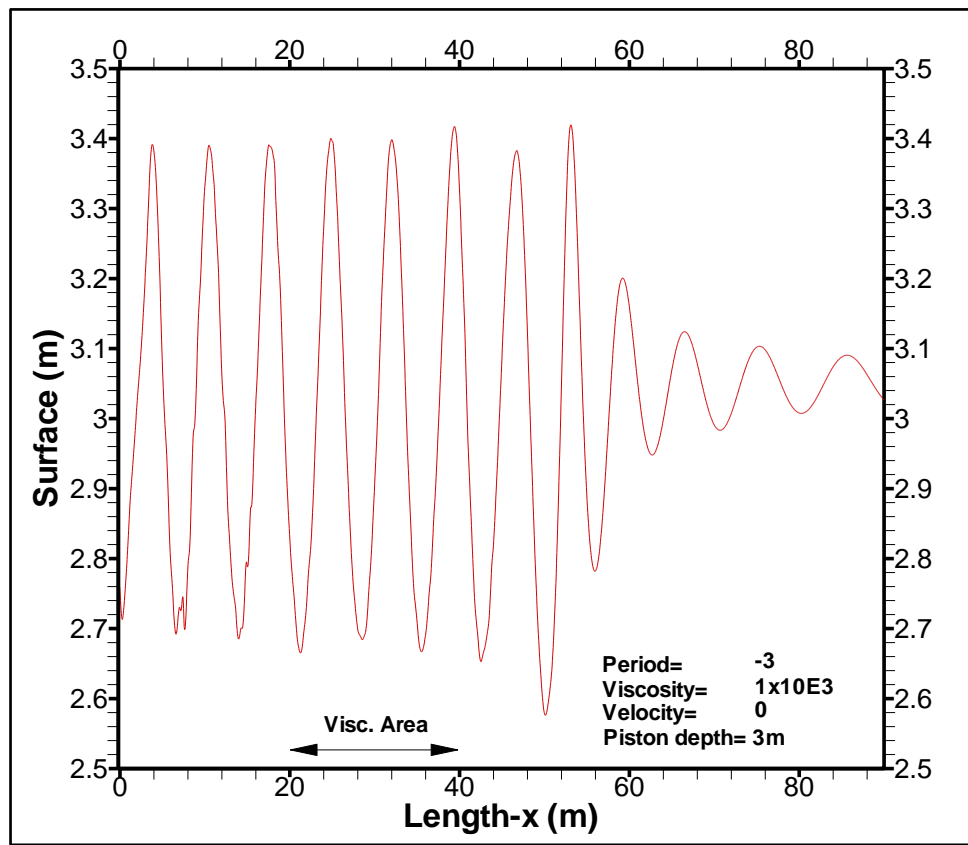
Από τα προηγούμενα διαγράμματα προκύπτει πως με τη συγκεκριμένη τιμή της συνεκτικότητας το κύμα διαδίδεται. Από το διάγραμμα της στιγμιαίας ισχύος δεν παρατηρούνται αρνητικές τιμές που συνεπάγεται ότι δεν έχουμε ανακλάσεις λόγω της συνεκτικότητας. Από τα σχήματα (3.7) και (3.8) φαίνεται ότι το κύμα μεταδίδεται με την ίδια συχνότητα πριν και μετά την περιοχή της αυξημένης συνεκτικότητας με μικρή όμως ελάττωση στο ύψος του κύματος. Και σ' αυτή την περίπτωση έχουμε απώλεια ενέργειας. Παρατηρούμε ότι σε σχέση με την περίπτωση που κινείται το έμβολο καθ' όλο το ύψος του αριστερού συνόρου έχουμε μεγαλύτερη μείωση του ύψους του κύματος και μεγαλύτερη καταστροφή της ενέργειας. Συμπεραίνουμε ότι η επίδραση της συνεκτικότητας είναι μεγαλύτερη σε επιφανειακούς κυματισμούς.

Περίπτωση 4 (Amorgos v3) :

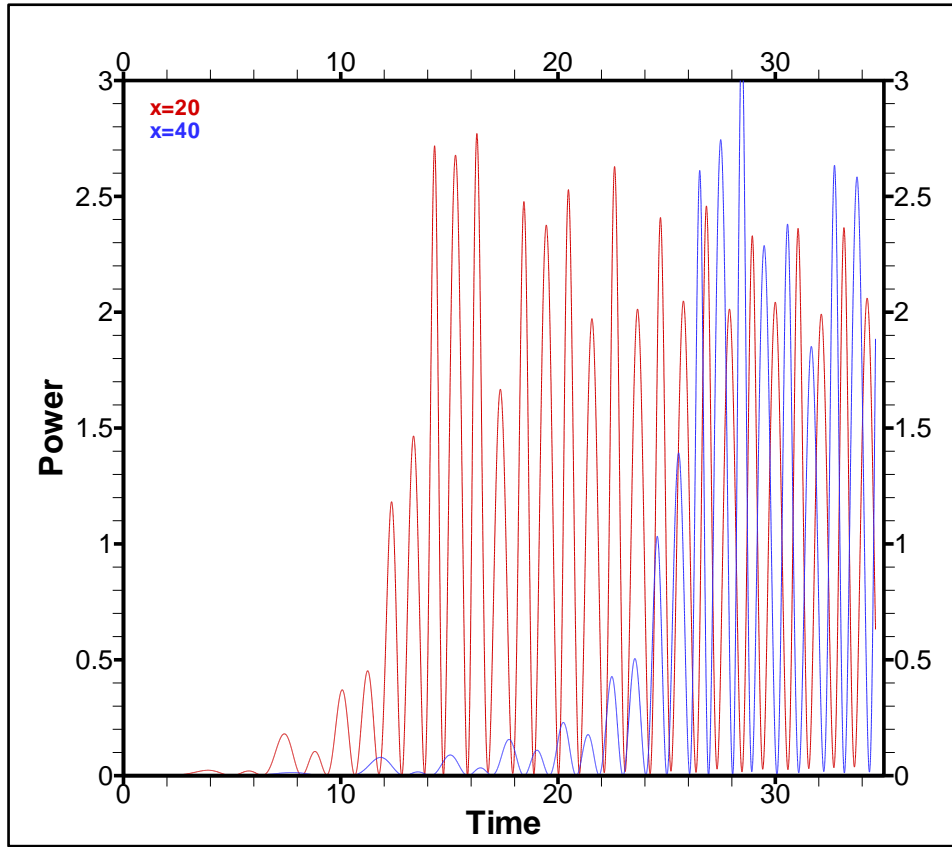
Τα δεδομένα εισόδου είναι:

- NI=3000 NJ=80 (Μή ορθογώνιο πλέγμα 3000x80)
VELIN=0 (Μηδενική ταχύτητα ρευστού)
PERIOD=-3 (Περίοδος αρμονικού κυματισμού)
XFIRST=0 XLAST=200 (Μήκος δεξαμενής 200 μέτρα)
PISTON=+3 PADDLE=0 (Κίνηση εμβόλου βάθους 3 μέτρα)
VISINF=+1e3 (Σταθερή συνεκτικότητα ίση με $Visinf \cdot 10E-06$)
XVIS1=20 XVIS2=40 (Συνεκτικότητα στην περιοχή από 20 ως 40m)

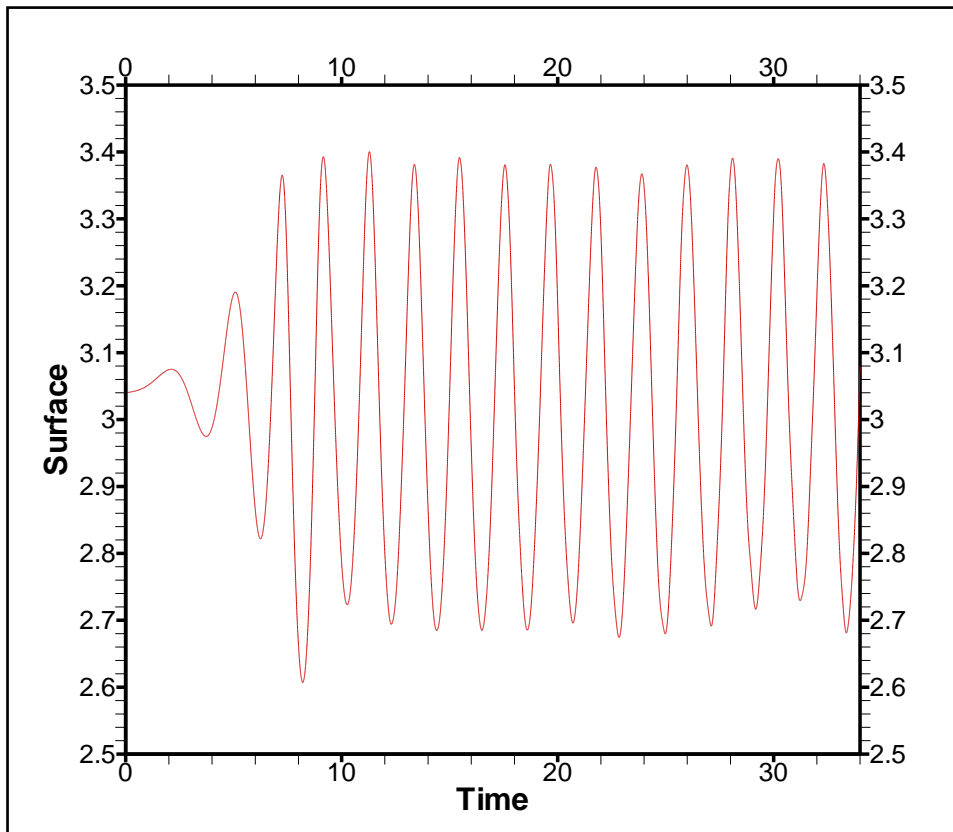
Στην περίπτωση αυτή εξετάζουμε τη διάδοση του κύματος μέσα απο περιοχή συνεκτικότητας ίση με 1×10^3 φορές τη συνεκτικότητα του νερού όταν κινείται όλο το αριστερό σύνορο με συχνότητα κίνησης του εμβόλου 3 rad/sec . Τα αποτελέσματα φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα:



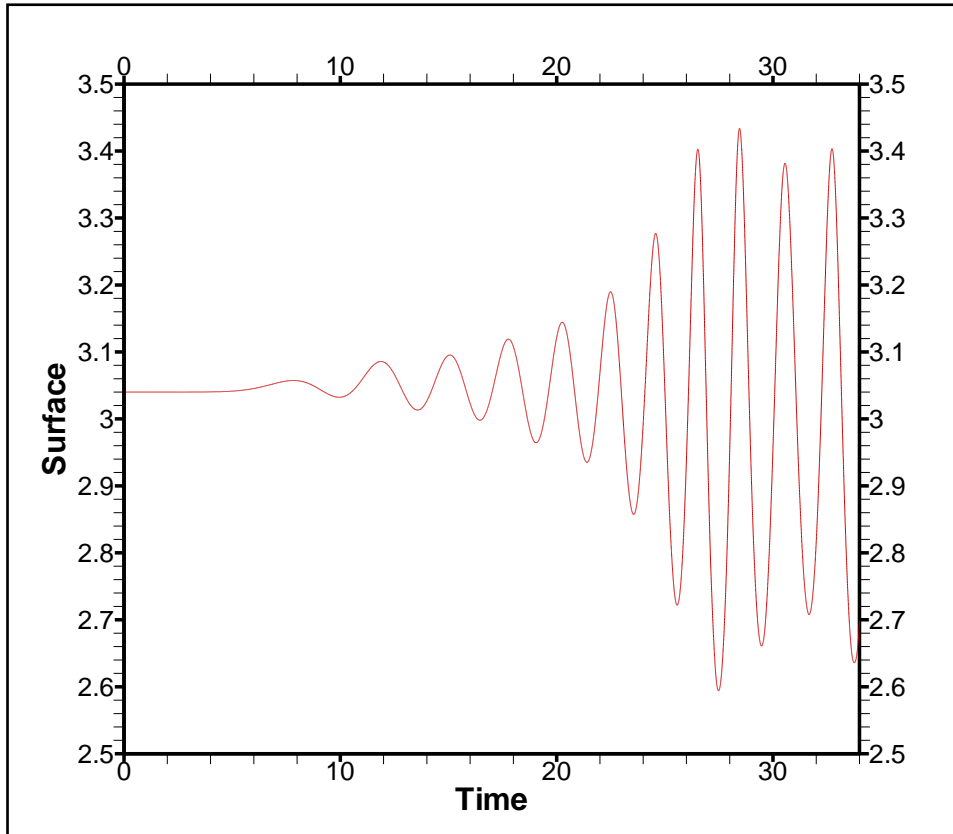
Σχήμα(4.1) Ανύψωση της επιφάνειας



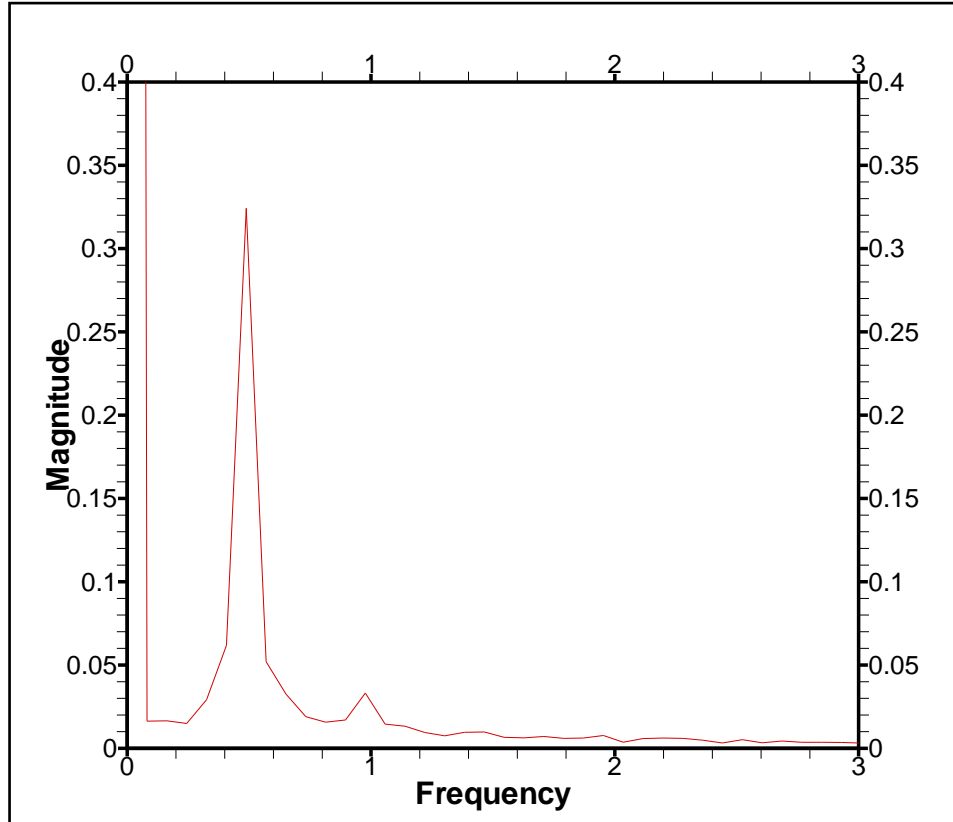
Σχήμα(4.2) Χρονική εξέλιξη της στιγμιαίας ισχύος



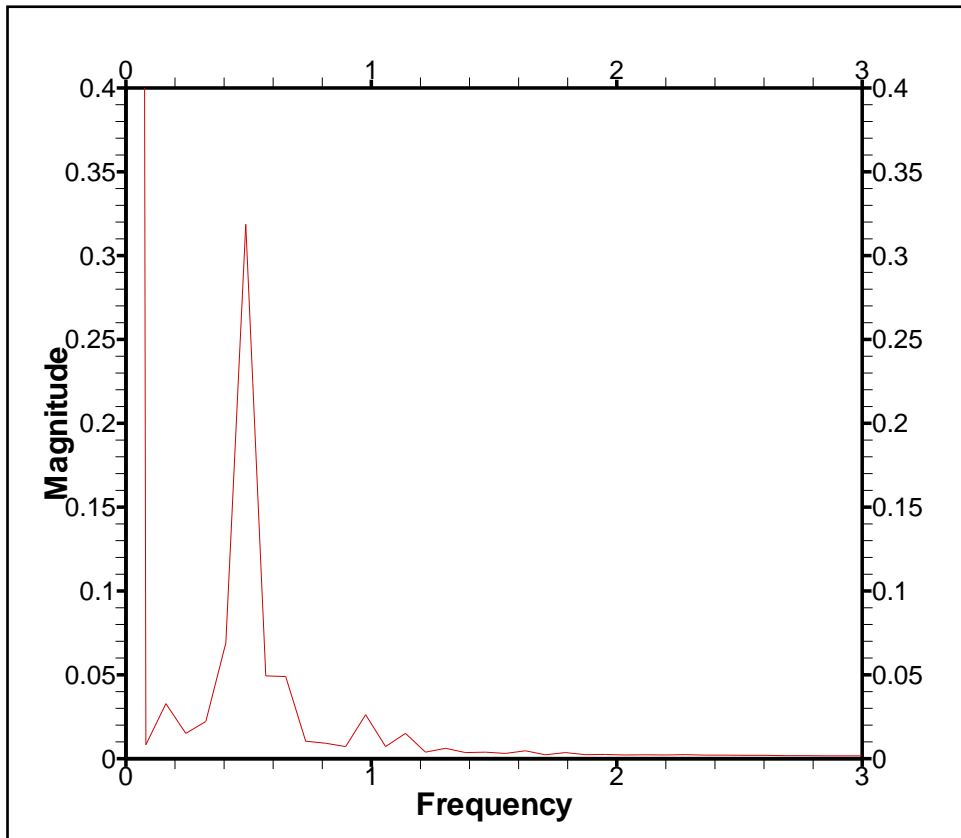
Σχήμα(4.3) Χρονική εξέλιξη της επιφάνειας για $x=20m$



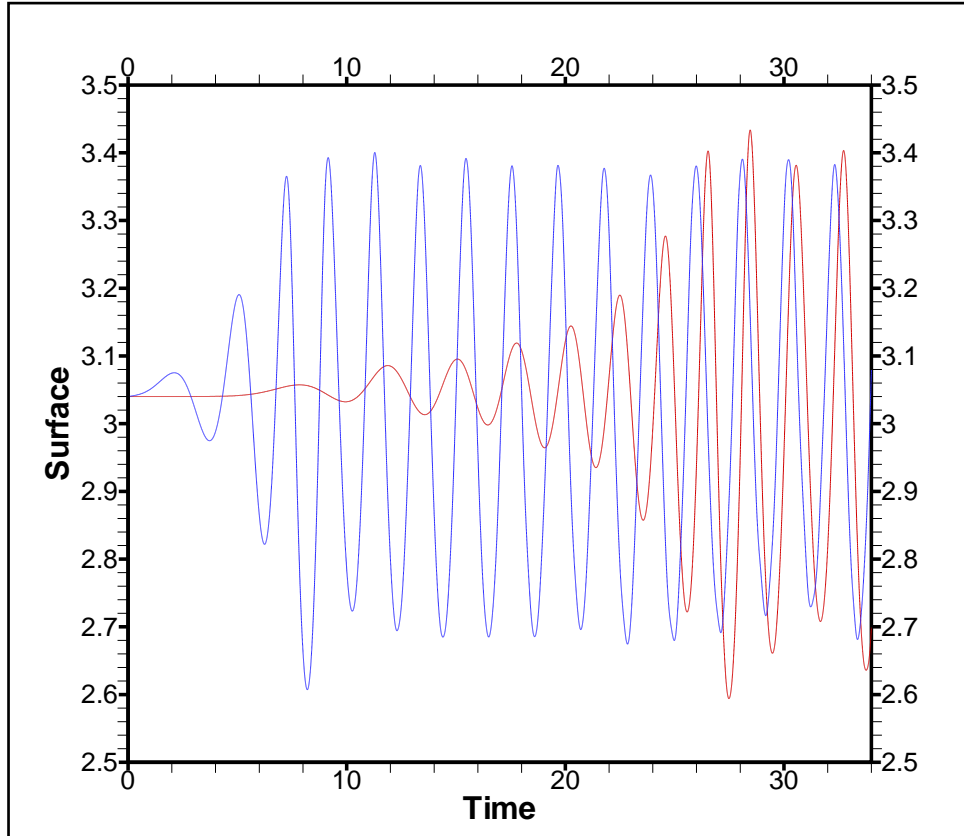
Σχήμα(4.4) Χρονική εξέλιξη της επιφάνειας για $x=40m$



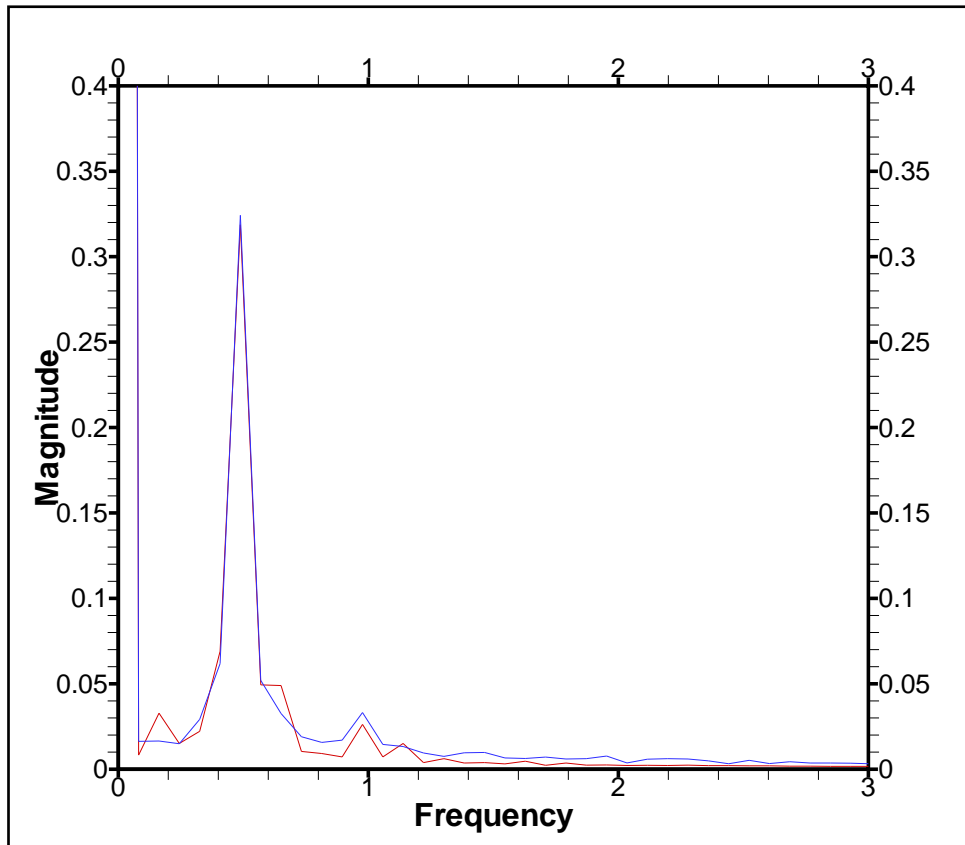
Σχήμα(4.5) Ανάλυση συχνότητας κύματος για $x=20m$



Σχήμα(4.6) Ανάλυση συχνότητας κύματος για $x=40m$



Σχήμα(4.7) Σύγκριση χρονικής εξέλιξης της επιφάνειας για $x=20m$ και $x=40m$



Σχήμα(4.8) Σύγκριση ανάλυσης συχνότητας κύματος για $x=20m$ και $x=40m$

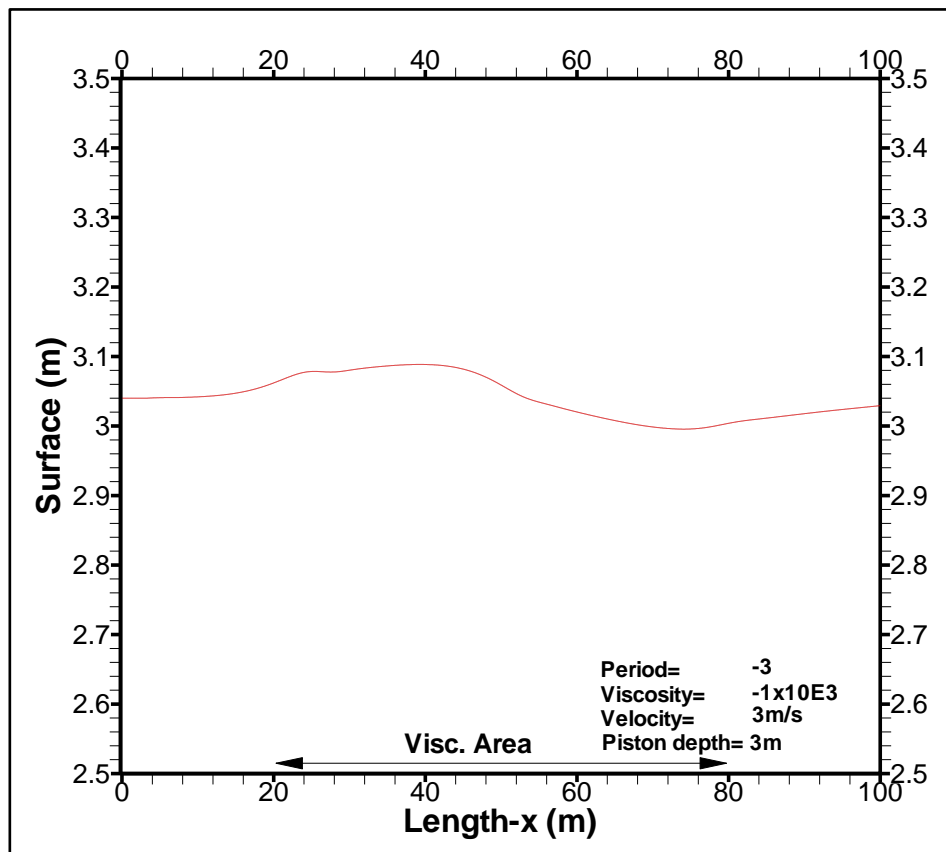
Από τα προηγούμενα διαγράμματα προκύπτει πως με τη συγκεκριμένη τιμή της συνεκτικότητας το κύμα διαδίδεται χωρίς ιδιαίτερη μεταβολή. Από το διάγραμμα της στιγμιαίας ισχύος δεν παρατηρούνται αρνητικές τιμές που συνεπάγεται ότι δεν έχουμε ανακλάσεις λόγω της συνεκτικότητας. Από τα σχήματα (4.7) και (4.8) φαίνεται ότι το κύμα μεταδίδεται με την ίδια συχνότητα πριν και μετά την περιοχή της αυξημένης συνεκτικότητας χωρίς όμως να ελαττώνεται το ύψος του κύματος. Σ' αυτή την περίπτωση φαίνεται ότι δεν έχουμε απώλεια ενέργειας. Συμπεραίνουμε ότι η επίδραση της συνεκτικότητας είναι ελάχιστη έως μηδενική παρ' όλο που το έμβολο κινείται καθ' όλο το ύψος της δεξαμενής.

Περίπτωση 5 (Amorgos v4) :

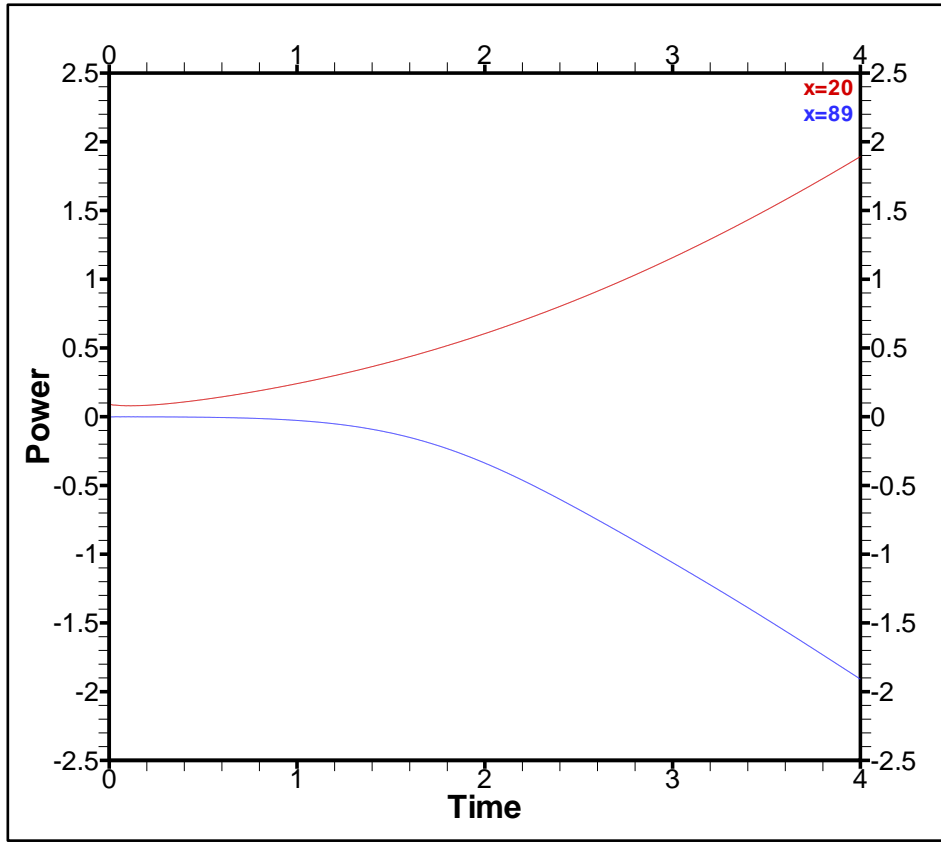
Τα δεδομένα εισόδου είναι:

NI=3000 NJ=80 (Μή ορθογώνιο πλέγμα 3000x80)
VELIN=3 (Ταχύτητα ρευστού 3m/s)
PERIOD=-3 (Συχνότητα αρμονικού κυματισμού)
XFIRST=0 XLAST=200 (Μήκος δεξαμενής 200 μέτρα)
PISTON=3 PADDLE=0 (Κίνηση εμβόλου βάθους 3 μέτρα)
VISINF=+1e4 (Σταθερή συνεκτικότητα ίση με $Visinf \cdot 10E-06$)
XVIS1=20 XVIS2=80 (Συνεκτικότητα στην περιοχή από 20 ως 80m)

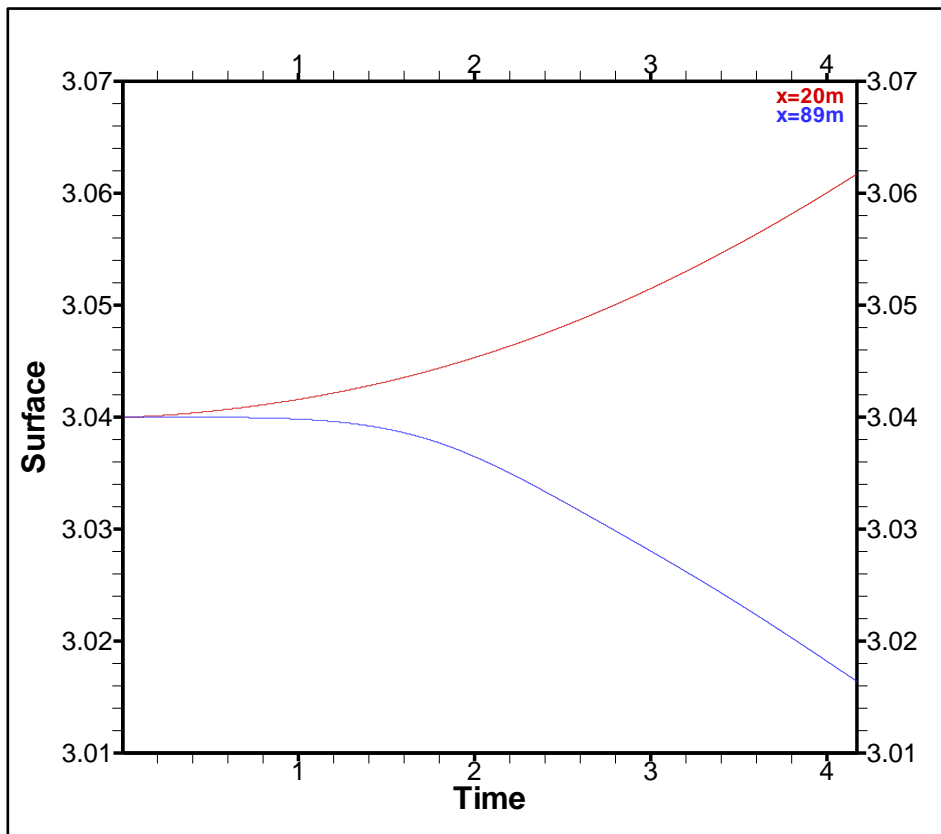
Στην περίπτωση αυτή εξετάζουμε τη μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας μέσα απο περιοχή συνεκτικότητας ίση με 1×10^4 φορές τη συνεκτικότητα του νερού όταν εισάγεται ελεύθερη ομοιόμορφη ροή ταχύτητας 3m/s. Τα αποτελέσματα φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα:



Σχήμα(5.1) Ανύψωση της επιφάνειας



Σχήμα(5.2) Χρονική εξέλιξη της στιγμιαίας ισχύος



Σχήμα(5.3) Σύγκριση χρονικής εξέλιξης της επιφάνειας για $x=20m$ και $x=89m$

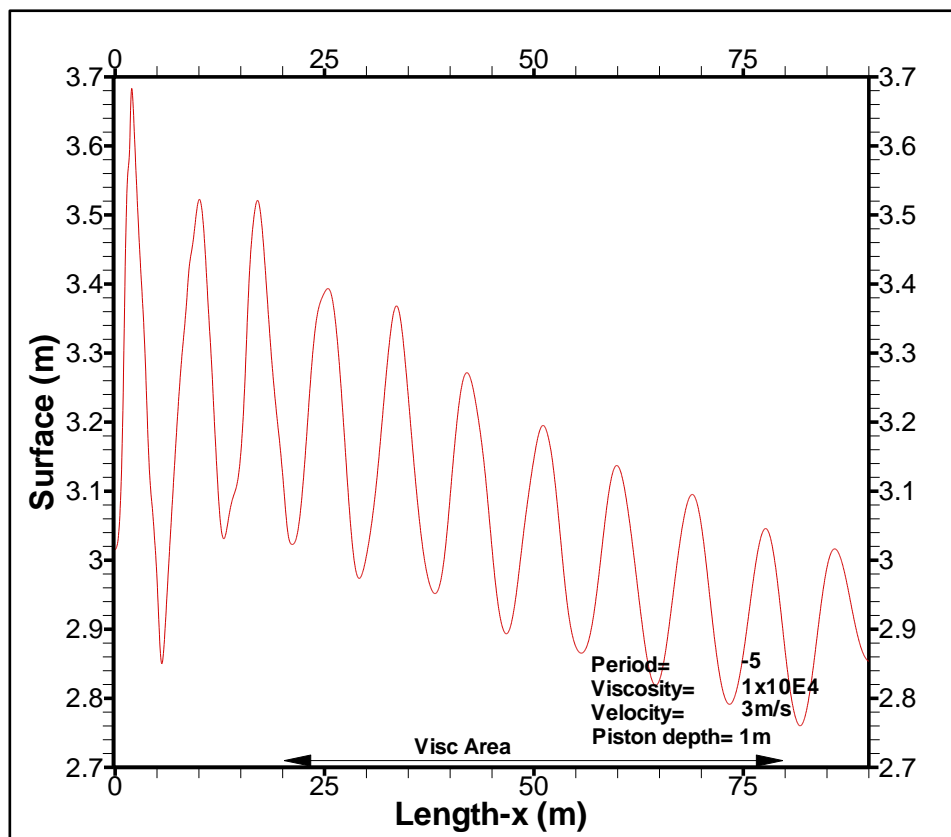
Από τα προηγούμενα διαγράμματα φαίνεται η ανύψωση της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας ανάντι της περιοχής υψηλής συνεκτικότητας και μείωση της στάθμης κατόντι. Αυτό συμβαίνει λόγω της ανάκλασης της ελεύθερης ροής δηλαδή η συνεκτικότητα λειτουργεί ως τείχος ανυψώνοντας έτσι τη στάθμη ανάντι και παράλληλα λόγω της διατήρησης της μάζας μειώνεται η στάθμη κατόντι.

Περίπτωση 6 (Καβάλα v1) :

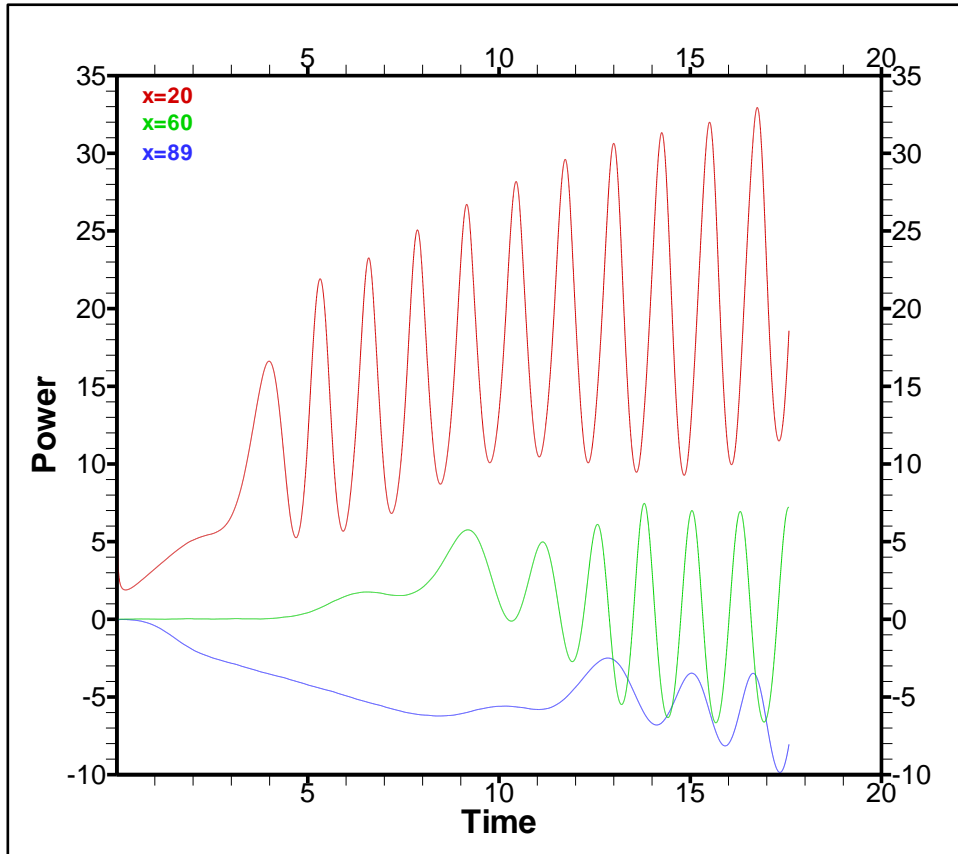
Τα δεδομένα εισόδου είναι:

- | | | |
|-------------|-----------|---|
| NI=3000 | NJ=80 | (Μή ορθογώνιο πλέγμα 3000x80) |
| VELIN=3 | | (Ταχύτητα ρευστού 3m/s) |
| PERIOD=-5 | | (Συχνότητα αρμονικού κυματισμού) |
| XFIRST=0 | XLAST=200 | (Μήκος δεξαμενής 200 μέτρα) |
| PISTON=0 | PADDLE=-2 | (Κίνηση εμβόλου βάθους 1 μέτρο) |
| VISINF=+1e4 | | (Σταθερή συνεκτικότητα ίση με $Visinf \cdot 10E-06$) |
| XVIS1=20 | XVIS2=80 | (Συνεκτικότητα στην περιοχή από 20 ως 80m) |

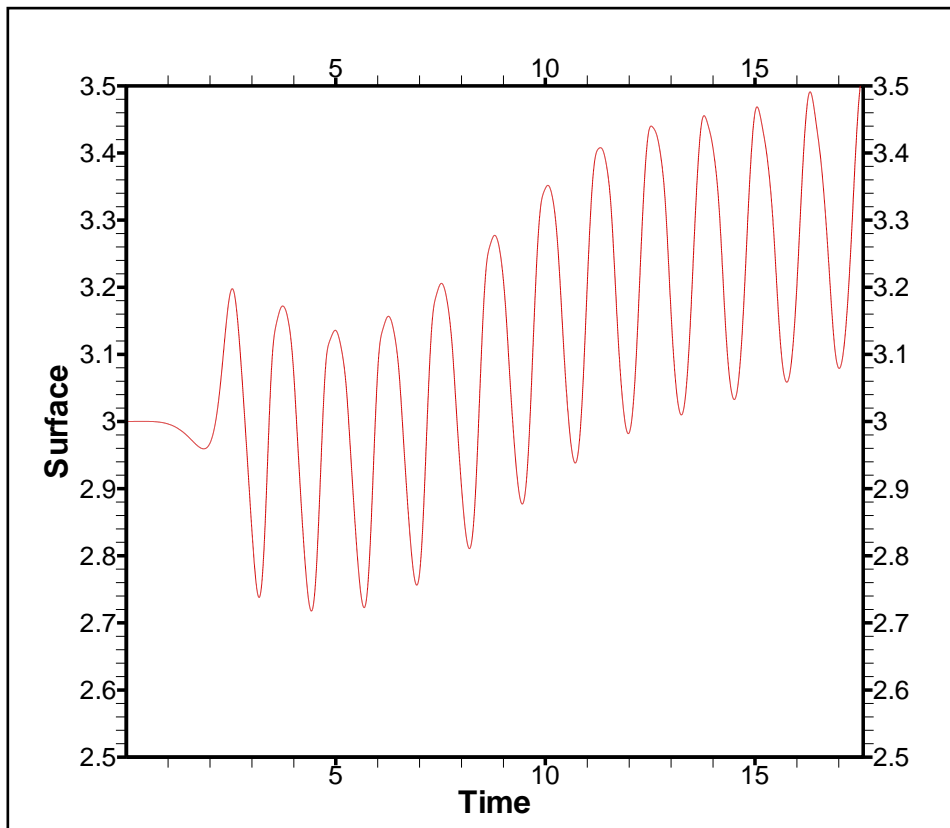
Στην περίπτωση αυτή εξετάζουμε τη διάδοση του κύματος μέσα απο περιοχή συνεκτικότητας ίση με 1×10^4 φορές τη συνεκτικότητα του νερού όταν κινείται μόνο ένα μέρος του αριστερού συνόρου (επιφανειακός κυματισμός) με συχνότητα κίνησης του εμβόλου 5rad/sec και παράλληλα εισάγεται και ελεύθερη ροή ταχύτητας 3m/sec. Τα αποτελέσματα φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα:



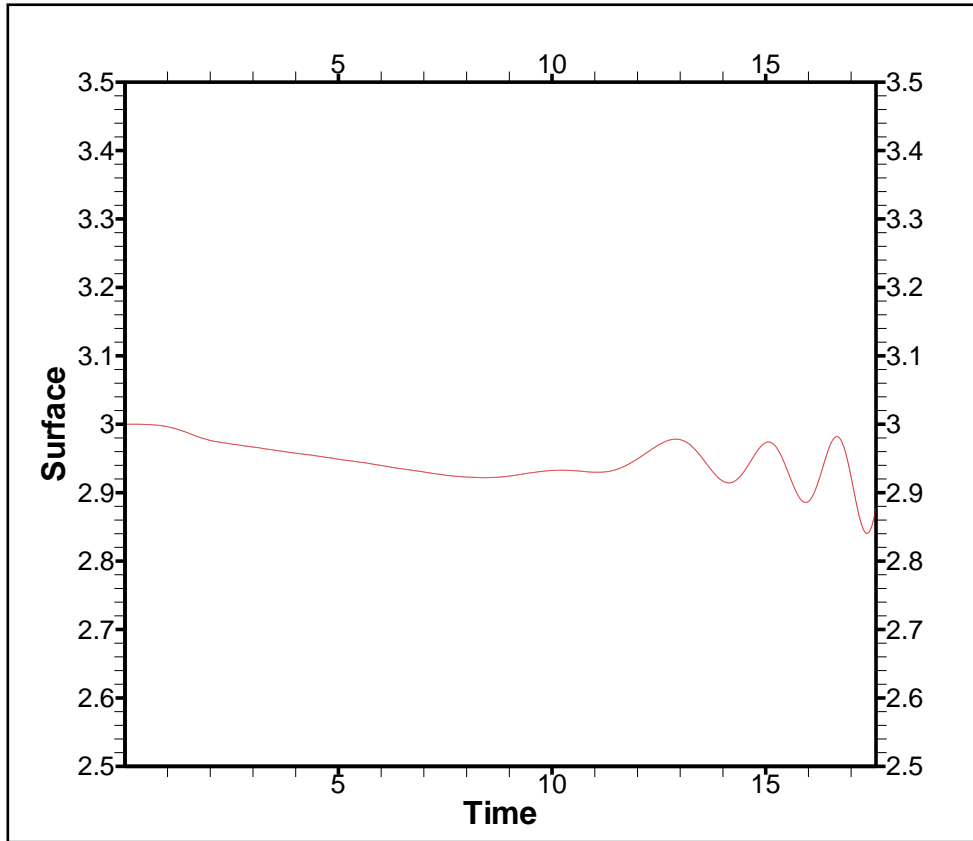
Σχήμα(6.1) Ανύψωση της επιφάνειας



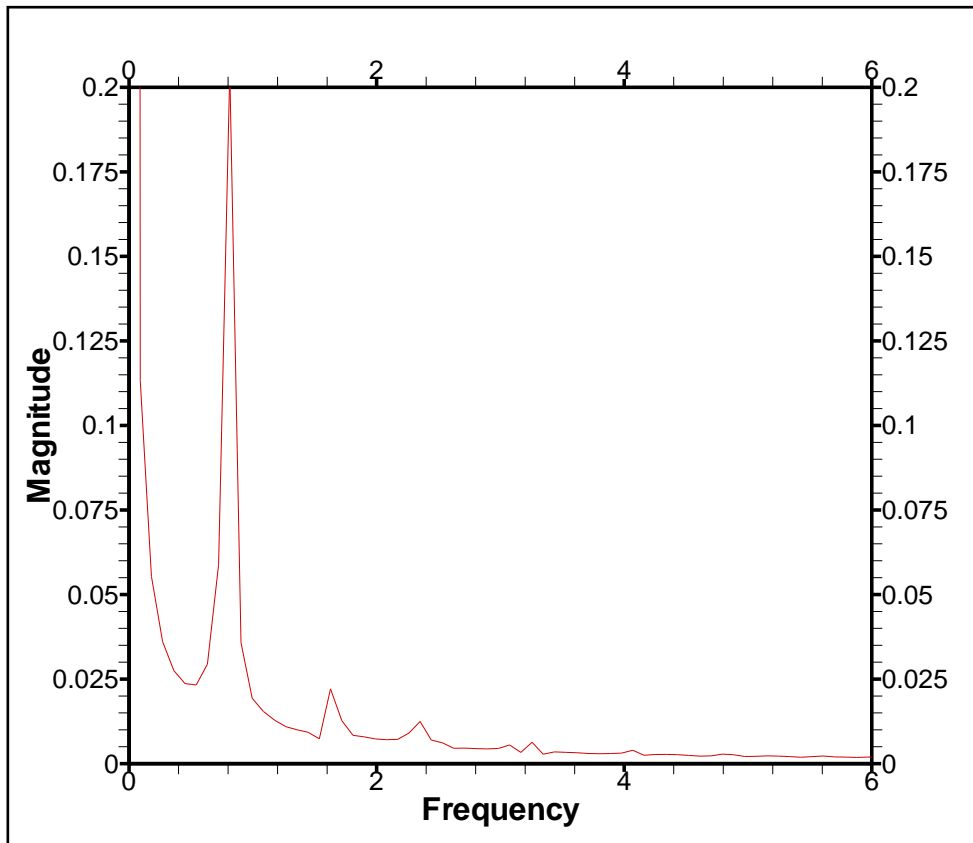
Σχήμα(6.2) Χρονική εξέλιξη της συγμιαίας ισχύος



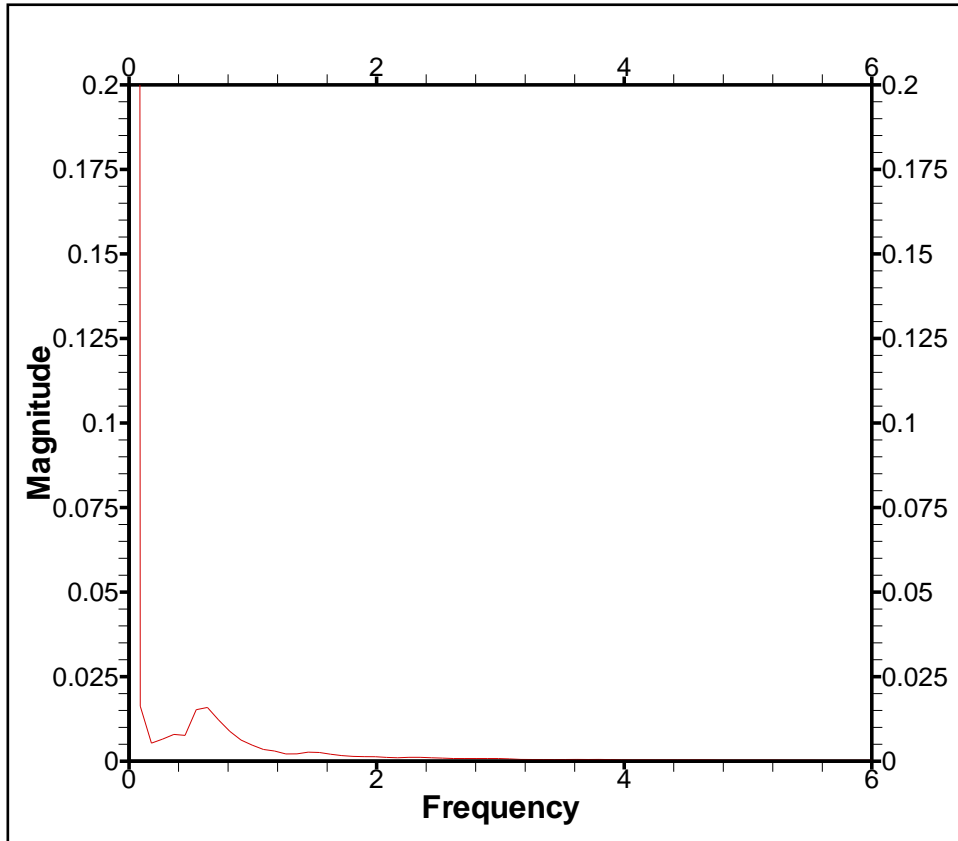
Σχήμα(6.3) Χρονική εξέλιξη της επιφάνειας για $x=20m$



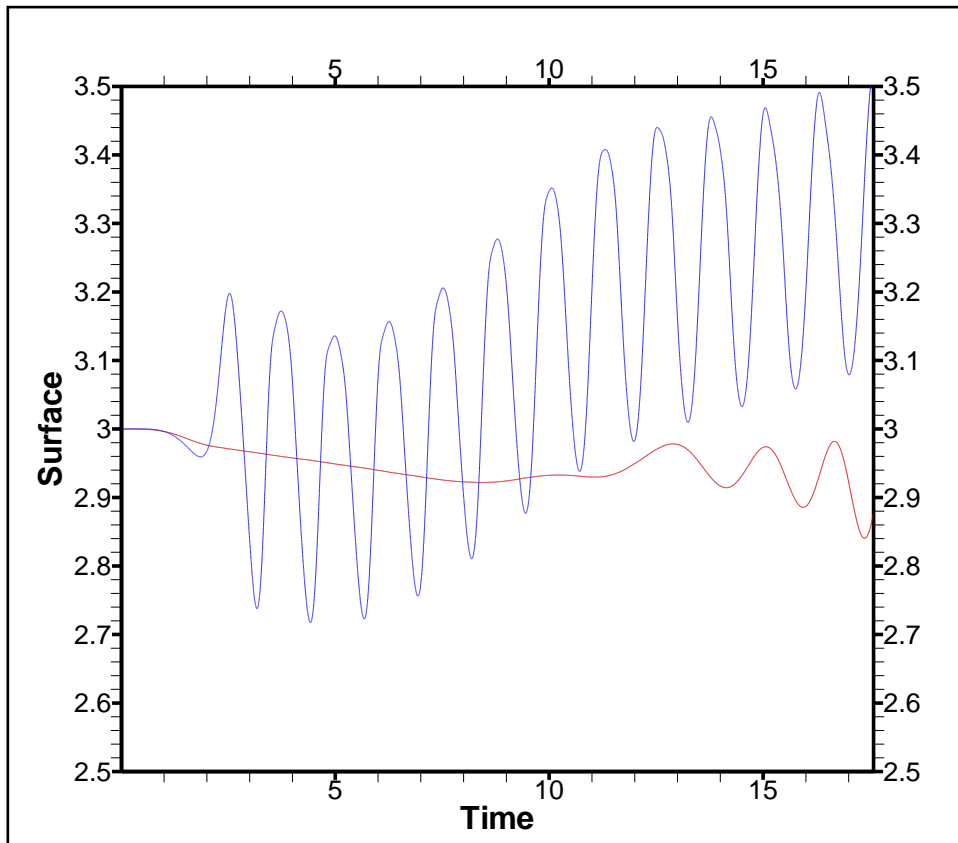
Σχήμα(6.4) Χρονική εξέλιξη της επιφάνειας για $x=89m$



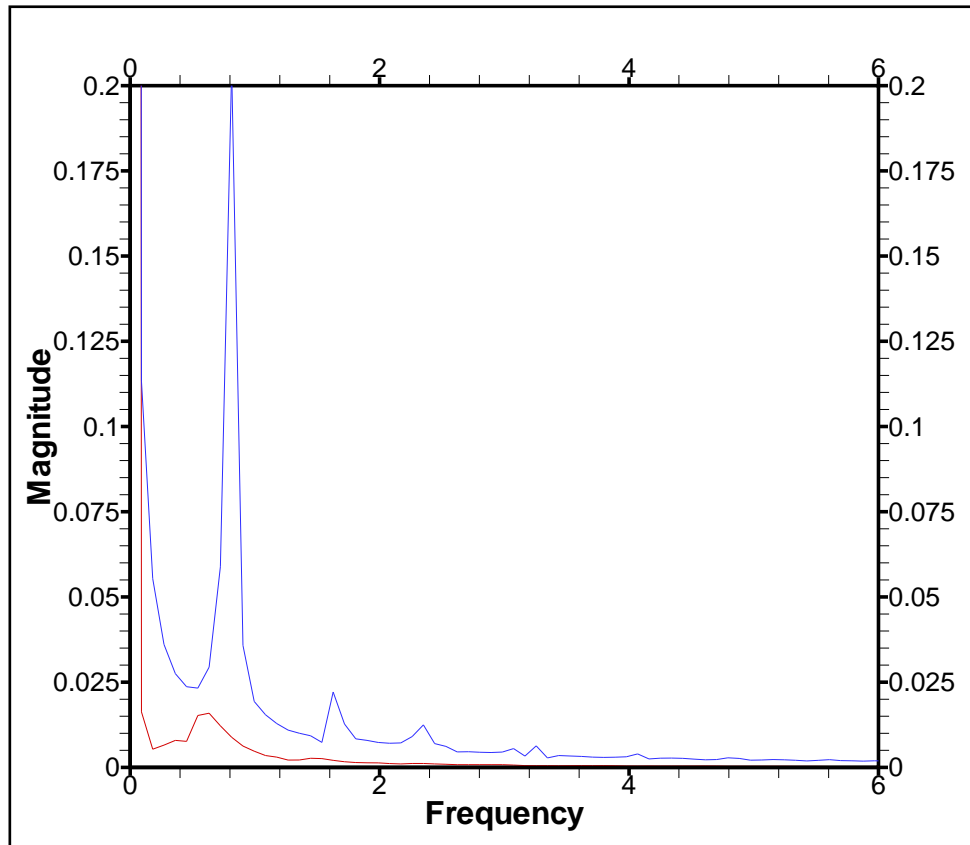
Σχήμα(6.5) Ανάλυση συχνότητας κύματος για $x=20m$



Σχήμα(6.6) Ανάλυση συχνότητας κύματος για $x=89m$



Σχήμα(6.7) Σύγκριση χρονικής εξέλιξης της επιφάνειας για $x=20m$ και $x=89m$



Σχήμα(6.8) Σύγκριση ανάλυσης συχνότητας κύματος για $x=20m$ και $x=89m$

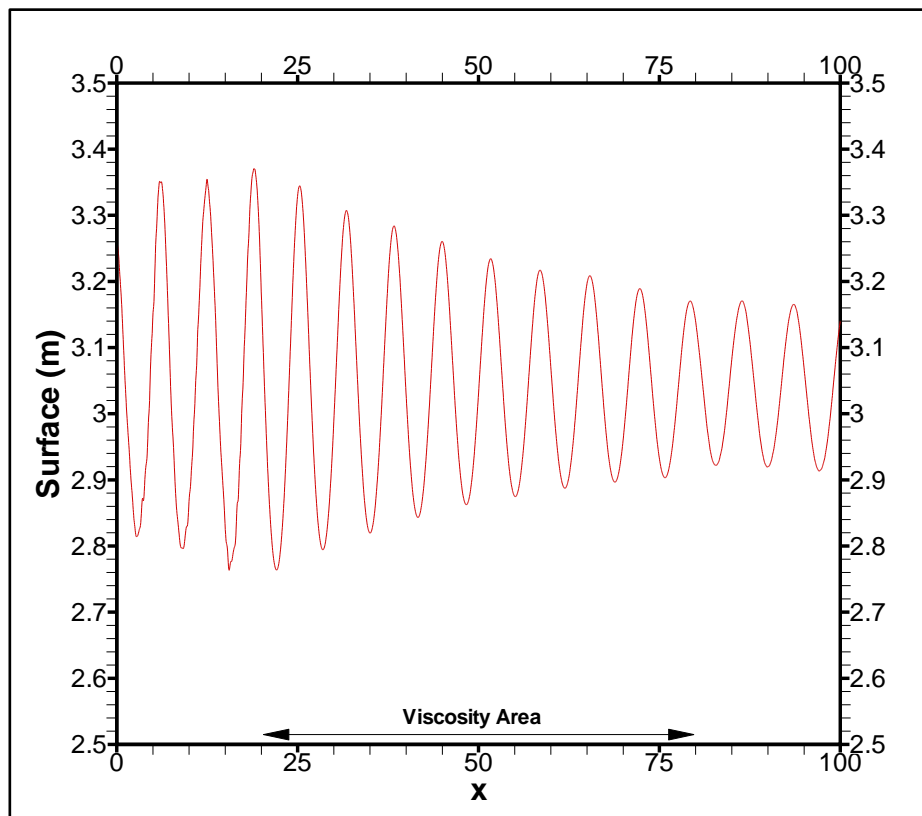
Από τα προηγούμενα διαγράμματα προκύπτει πως με τη συγκεκριμένη τιμή της συνεκτικότητας και την εισαγωγή ομοιόμορφης ταχύτητας του ρευστού το κύμα διαδίδεται με μια άκρως ιδιέταιρη μεταβολή. Παρατηρούμε ότι στο αριστερό άκρο της δεξαμενής υπάρχει μία ανύψωση της μέσης στάθμης του νερού. Απ' την άλλη στο δεξιό άκρο της δεξαμενής υπάρχει μείωση της στάθμης που μειώνει και την δυναμική ενέργεια και κατά συνέπεια προκύπτουν αρνητικές τιμές της στιγμιαίας ισχύος, παρ' όλα αυτά από το διάγραμμα στιγμιαίας ισχύος δε μπορούμε να συμπεράνουμε αν υπάρχουν ανακλάσεις του κύματος ούτε για το αριστερό άκρο ούτε για το δεξιό. Η ανύψωση της στάθμης στο αριστερό άκρο πιθανόν προκύπτει από την ανάκλαση λόγω της ταχύτητας της ροής που ανακλάται στο στρώμα της συνεκτικότητας και η μείωση της στάθμης στο δεξιό άκρο προκύπτει λόγω συνέχειας. Στο δεξιό άκρο παρατηρούμε ότι η τιμή της συνεκτικότητας καθώς και το μεγάλο εύρος της έχουν μειώσει αρκετά το ύψος του κύματος.

Περίπτωση 7 (Samos v1) :

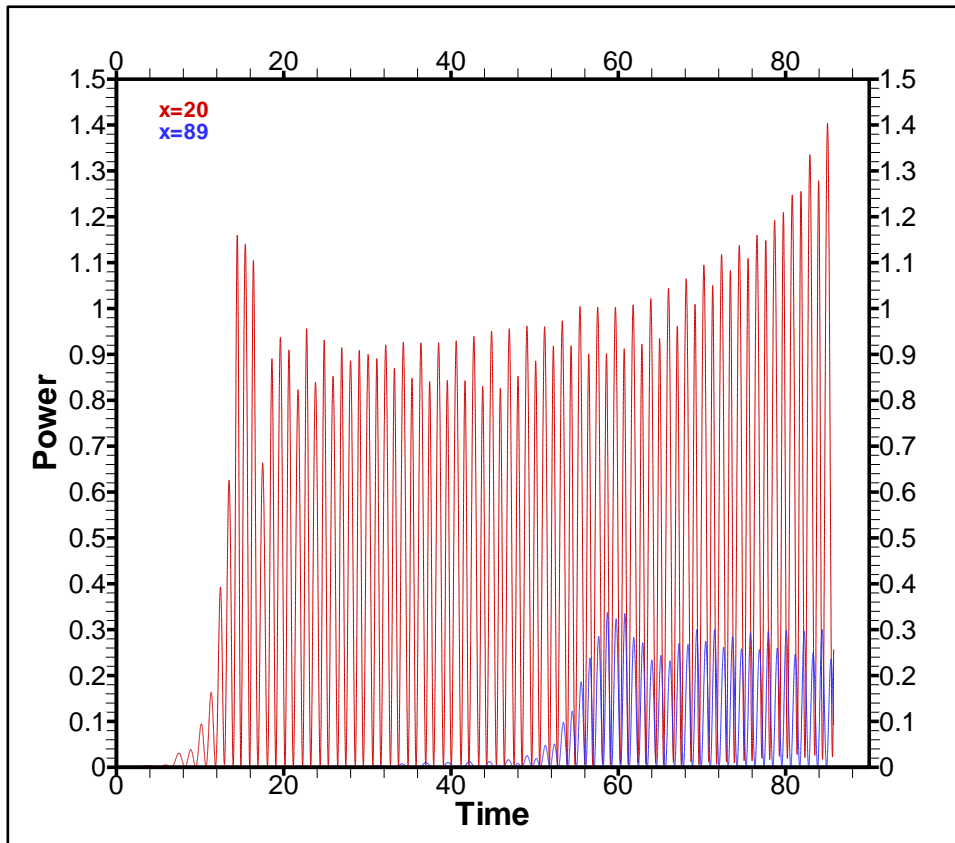
Τα δεδομένα εισόδου είναι:

NI=3000 NJ=80 (Μή ορθογώνιο πλέγμα 3000x80)
VELIN=0 (Μηδενική ακύτητα ρευστού)
PERIOD=-3 (Συχνότητα αρμονικού κυματισμού)
XFIRST=0 XLAST=200 (Μήκος δεξαμενής 200 μέτρα)
PISTON=+3 PADDLE=+2 (Κίνηση εμβόλου βάθους 1 μέτρο)
VISINF=+1e4 (Σταθερή συνεκτικότητα ίση με $Visinf \cdot 10E-06$)
XVIS1=20 XVIS2=80 (Συνεκτικότητα στην περιοχή από 20 ως 80m)

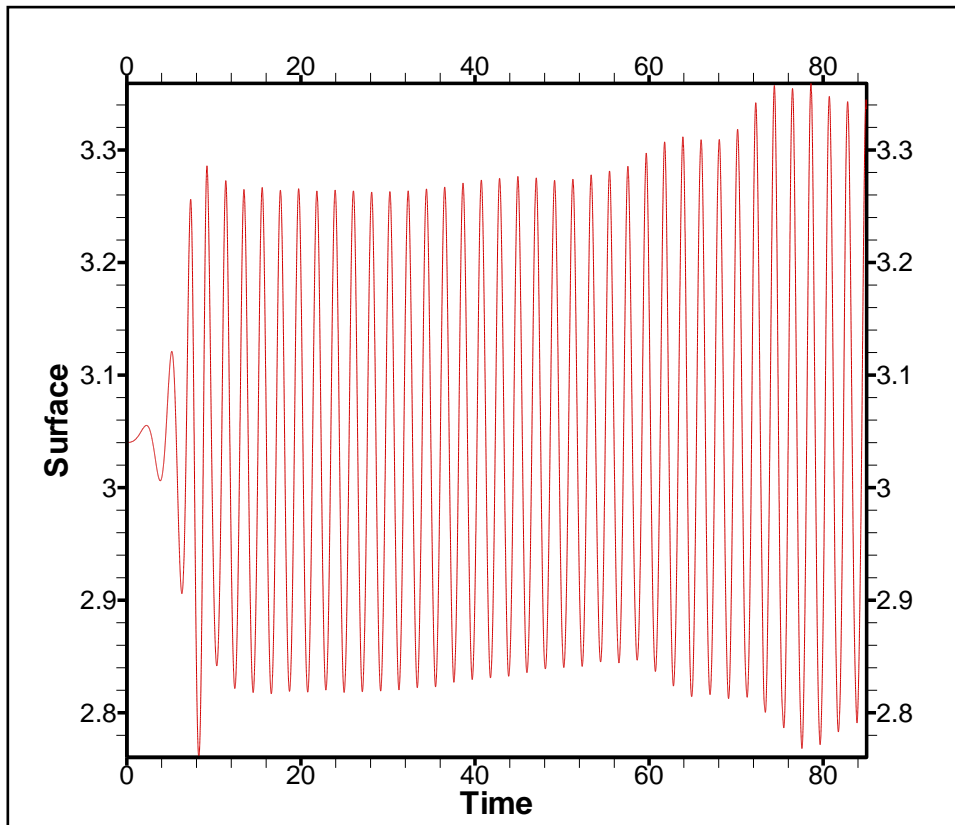
Στην περίπτωση αυτή εξετάζουμε τη διάδοση του κύματος μέσα απο περιοχή συνεκτικότητας ίση με 1×10^4 φορές τη συνεκτικότητα του νερού όταν κινείται μόνο ένα μέρος του αριστερού συνόρου (επιφανειακός κυματισμός) με συχνότητα κίνησης του εμβόλου 3 rad/sec και παράλληλα εισάγεται και ελεύθερη ροή ταχύτητας 3 m/sec . Τα αποτελέσματα φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα:



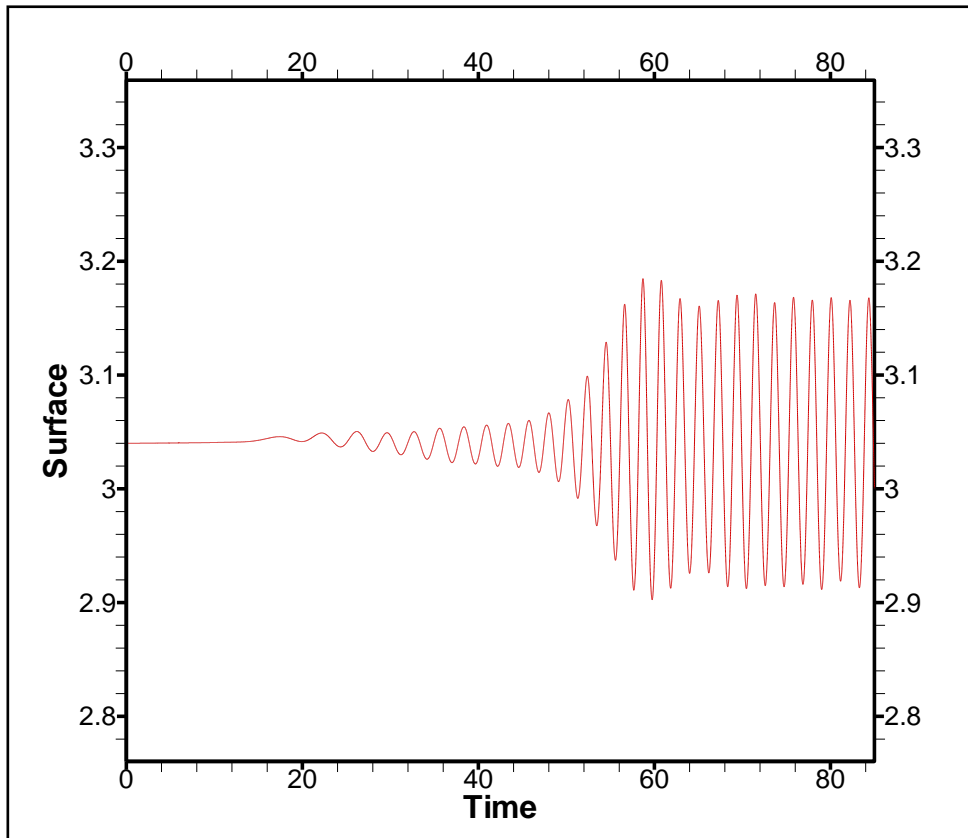
Σχήμα(7.1) Ανύψωση της επιφάνειας



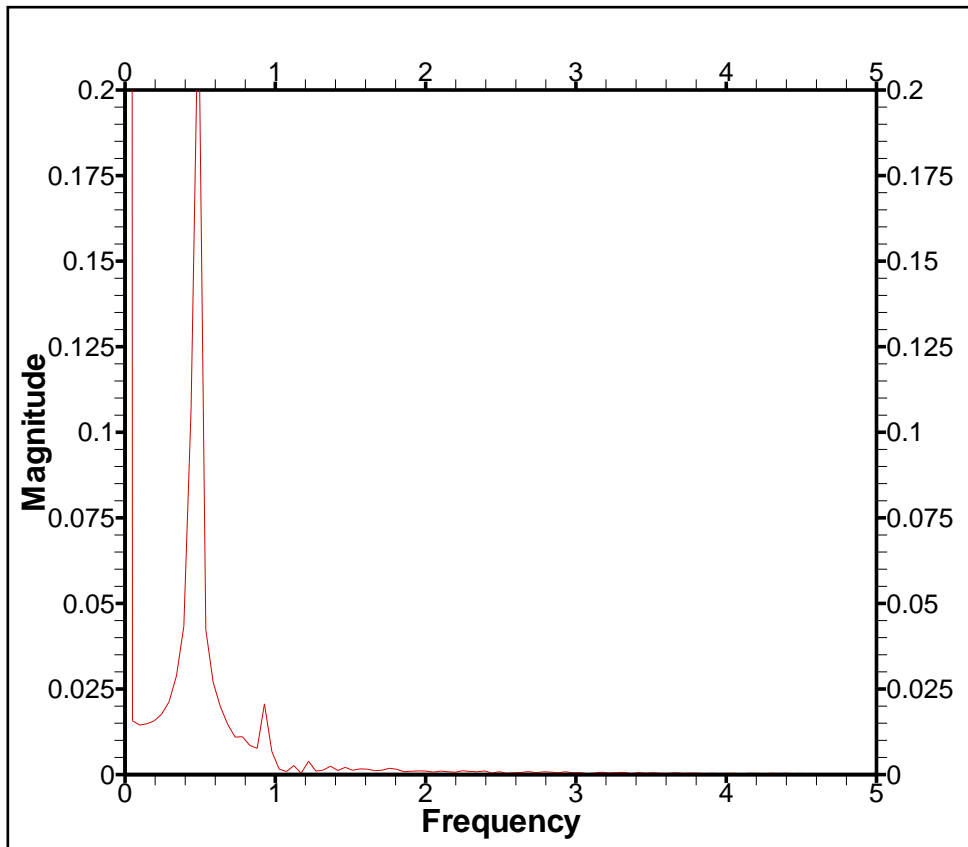
Σχήμα(7.2) Χρονική εξέλιξη της στιγμιαίας ισχύος



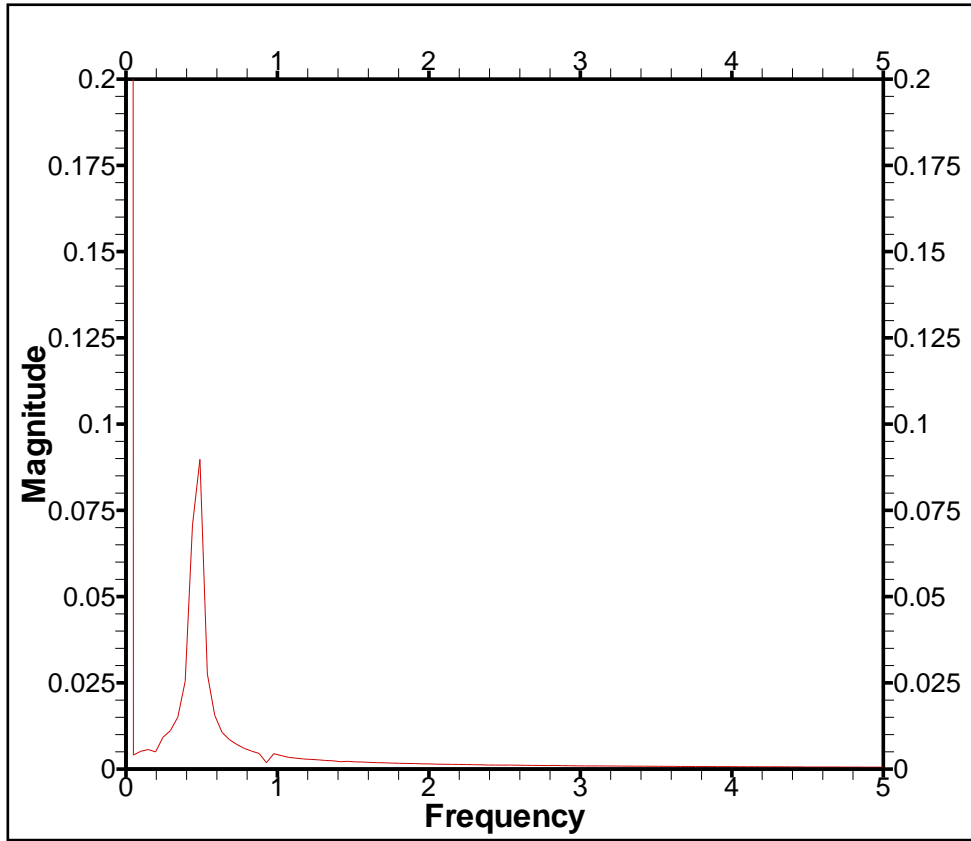
Σχήμα(7.3) Χρονική εξέλιξη της επιφάνειας για $x=20m$



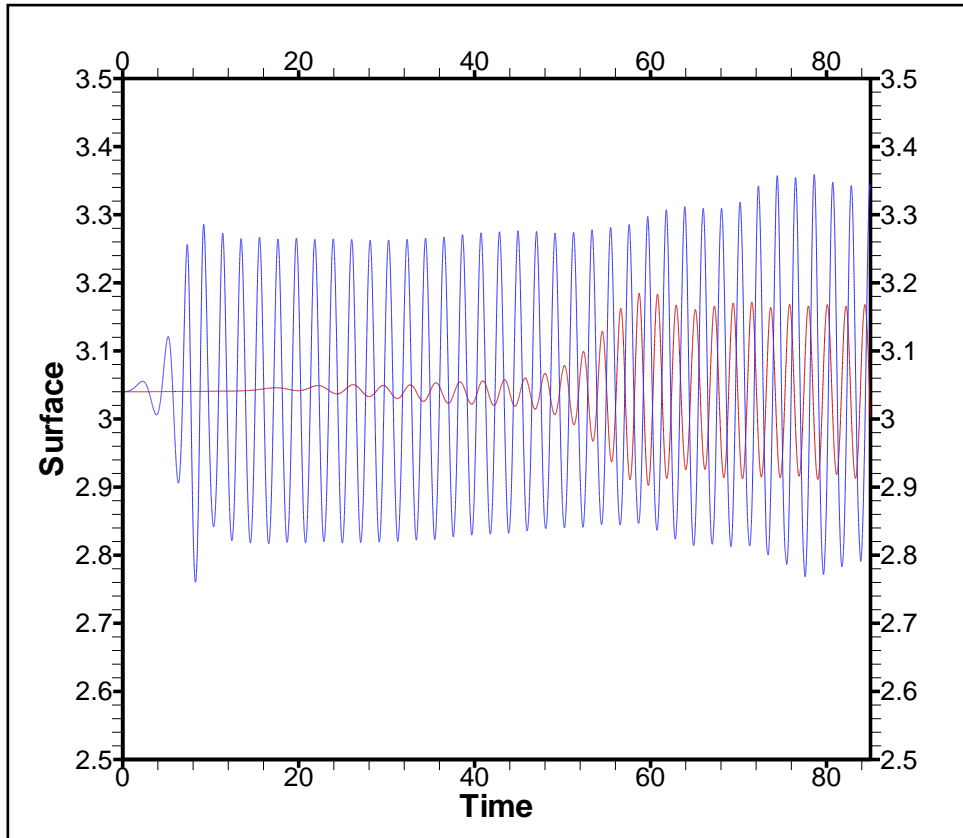
Σχήμα(7.4) Χρονική εξέλιξη της επιφάνειας για $x=89m$



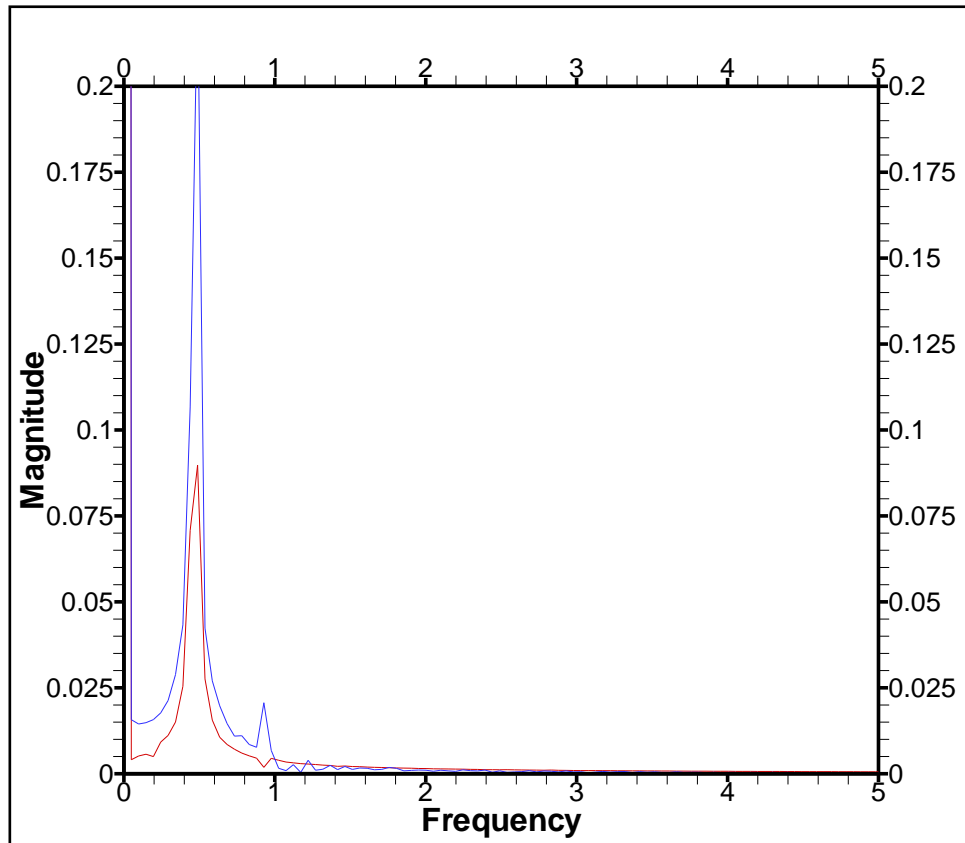
Σχήμα(7.5) Ανάλυση συχνότητας κύματος για $x=20m$



Σχήμα(7.6) Ανάλυση συχνότητας κύματος για $x=89m$



Σχήμα(7.7) Σύγκριση χρονικής εξέλιξης της επιφάνειας για $x=20m$ και $x=89m$



Σχήμα(7.8) Σύγκριση ανάλυσης συχνότητας κύματος για $x=20m$ και $x=89m$

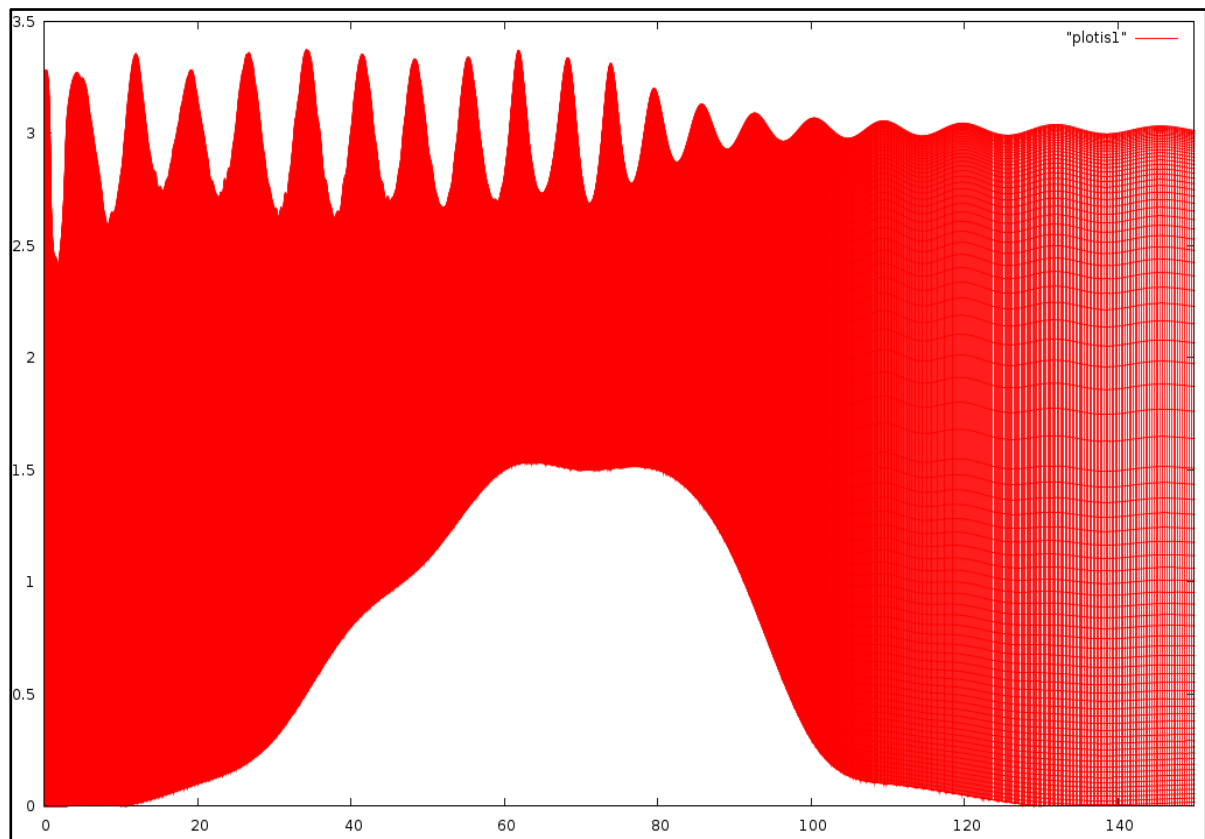
Από τα προηγούμενα διαγράμματα προκύπτει πως με τη συγκεκριμένη τιμή της συνεκτικότητας το κύμα διαδίδεται χωρίς να μεταβάλλεται η συχνότητα του κύματος όμως το ύψος του κύματος μειώνεται. Από το διάγραμμα της στιγμιαίας ισχύος δεν παρατηρούνται αρνητικές τιμές που συνεπάγεται ότι δεν έχουμε ανακλάσεις λόγω της συνεκτικότητας. Σ' αυτή την περίπτωση φαίνεται φανερά ότι έχουμε απώλεια ενέργειας λόγω της ελάττωσης του ύψους του κύματος όπως δείχνει το διάγραμμα ισχύος .

Περίπτωση 8 (ωgen c1) :

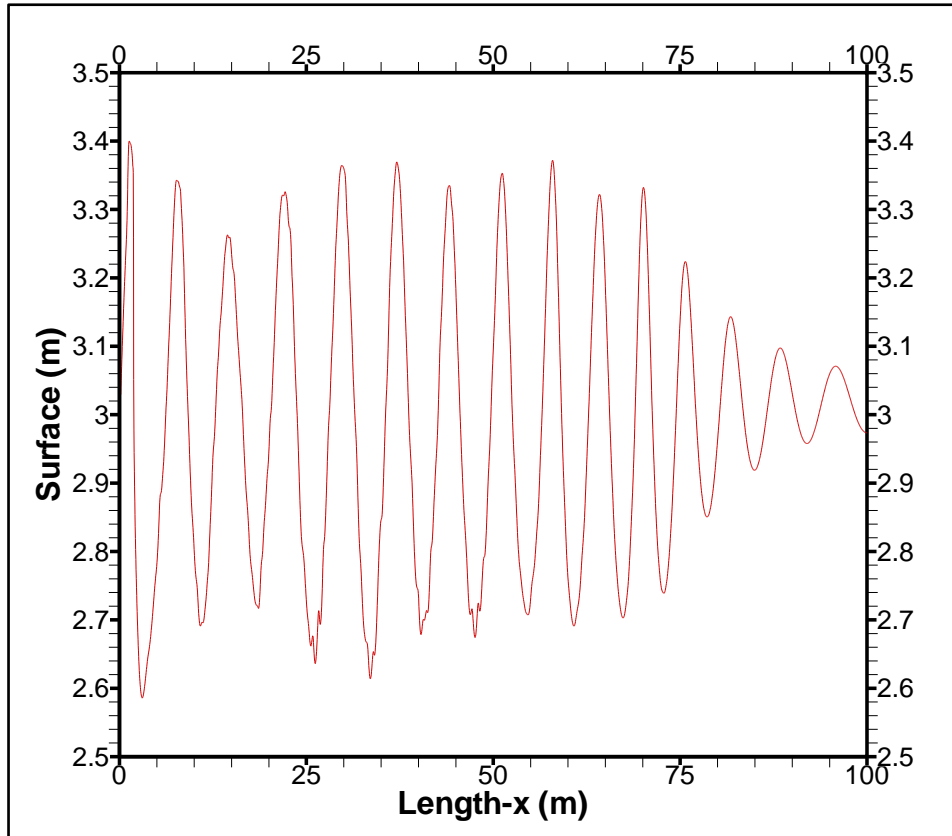
Τα δεδομένα εισόδου είναι:

NI=3000	NJ=80	(Μή ορθογώνιο πλέγμα 3000x80)
VELIN=0		(Μηδενική ακύτητα ρευστού)
PERIOD=-3		(Συχνότητα αρμονικού κυματισμού)
XFIRST=0	XLAST=200	(Μήκος δεξαμενής 200 μέτρα)
PISTON=+3	PADDLE=-2	(Κίνηση εμβόλου βάθους 1 μέτρο)

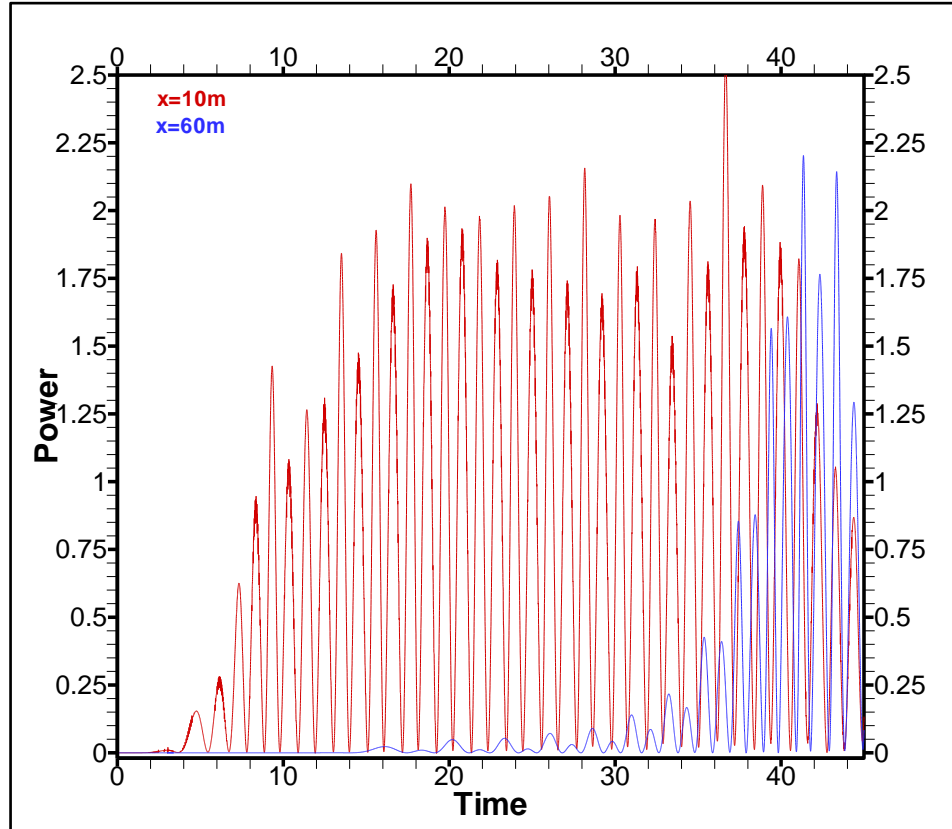
Στην περίπτωση αυτή εξετάζουμε τη διάδοση του κύματος όταν στον πυθμένα υπάρχει τυχαία ανύψωση του στερεού ορίου και κινείται μόνο ένα μέρος του αριστερού συνόρου (επιφανειακός κυματισμός) με συχνότητα κίνησης του εμβόλου 3rad/sec. Τα αποτελέσματα φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα:



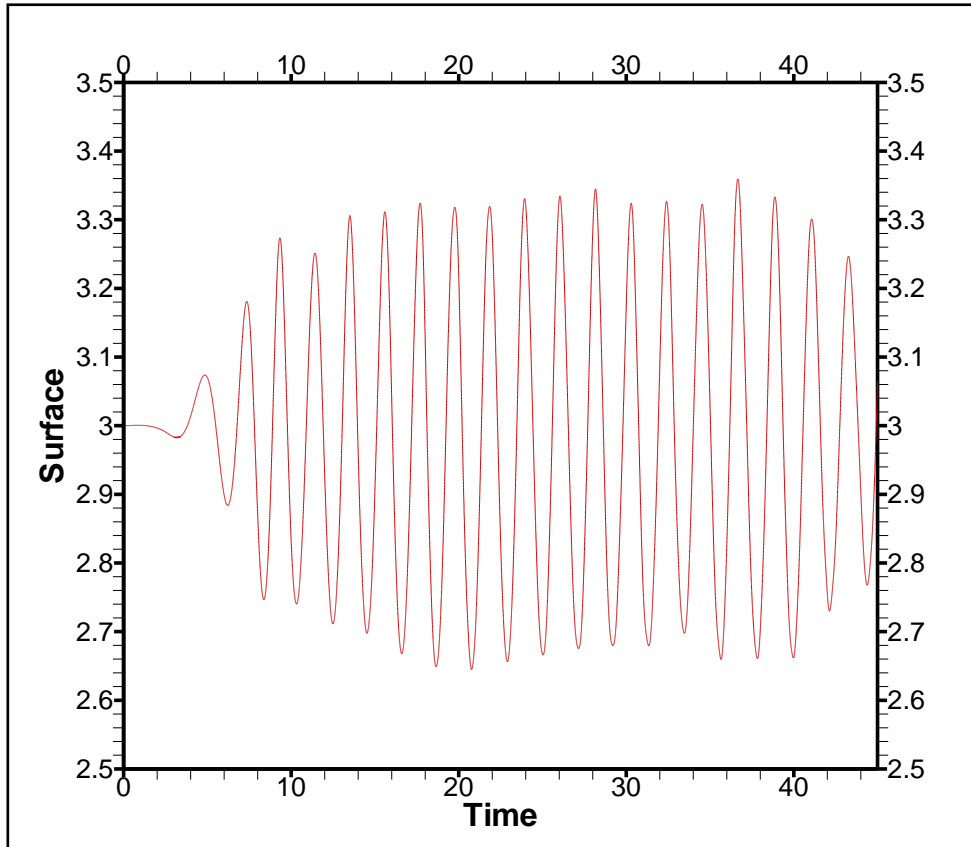
Σχήμα(8.1) Απεικόνιση του πλέγματος



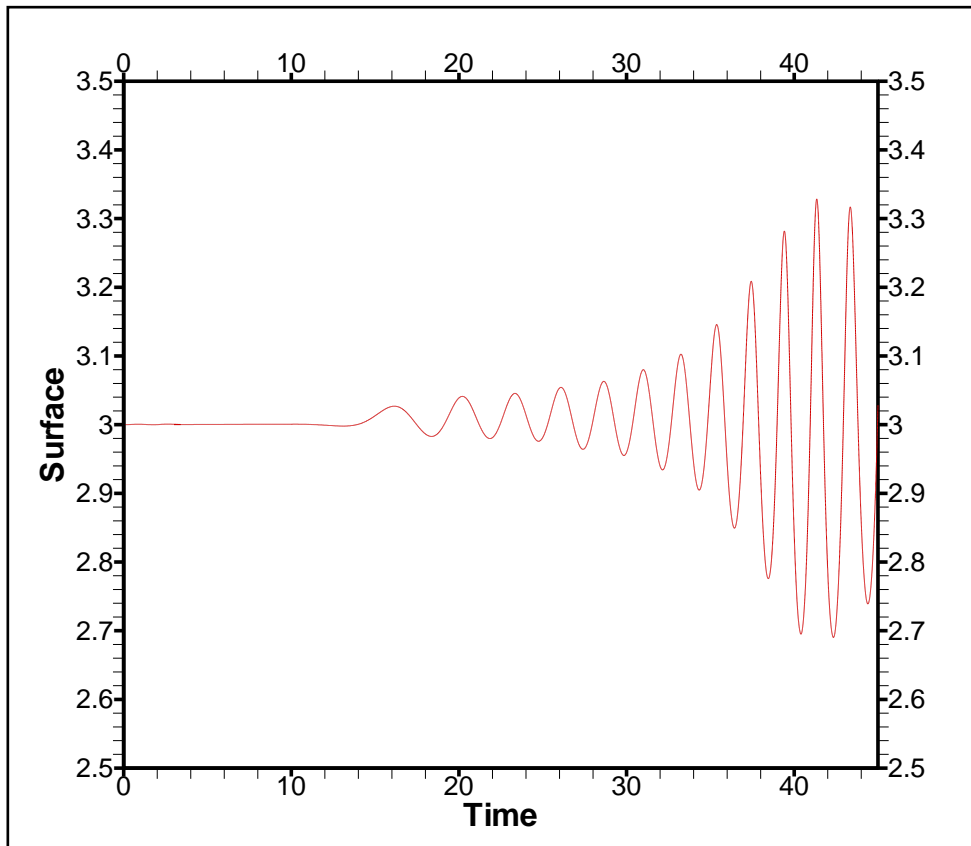
Σχήμα(8.2) Ανύψωση της επιφάνειας



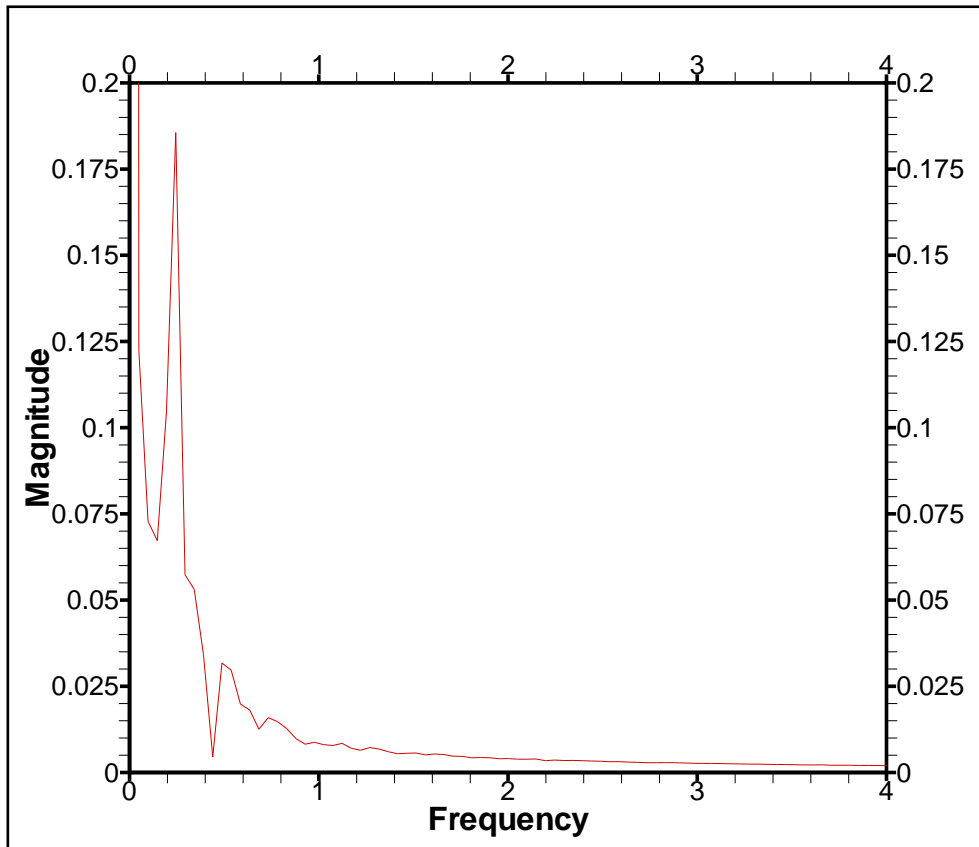
Σχήμα(8.3) Χρονική εξέλιξη της στιγμιαίας ισχύος



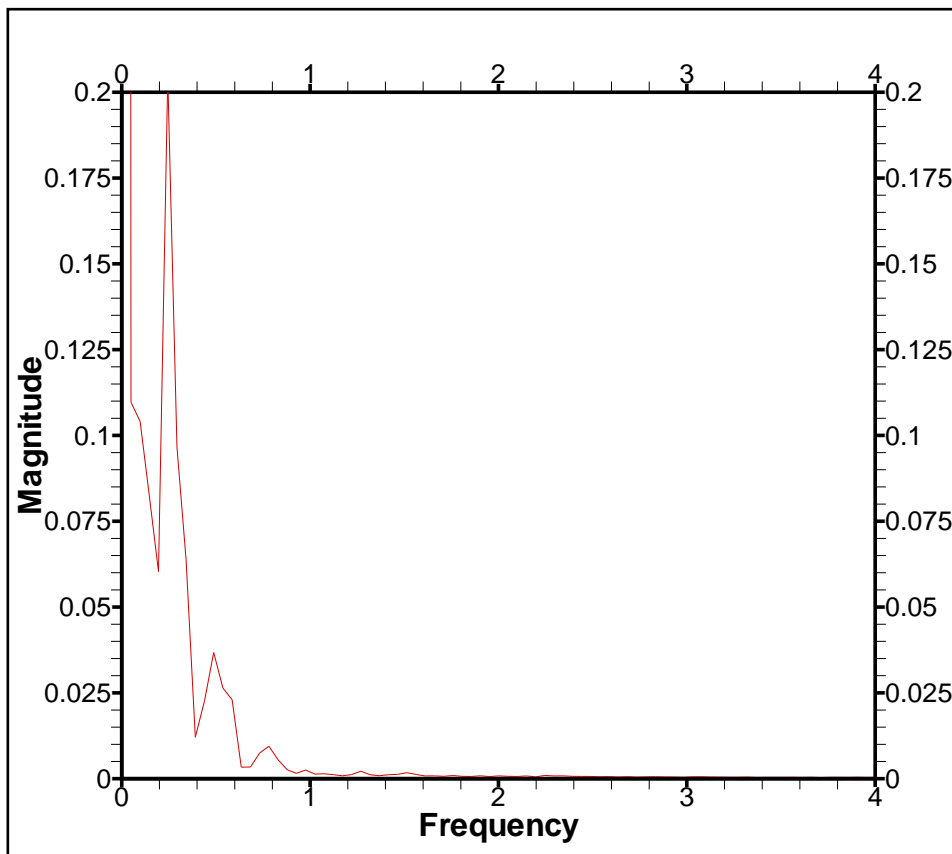
Σχήμα(8.4) Χρονική εξέλιξη της επιφάνειας για $x=10m$



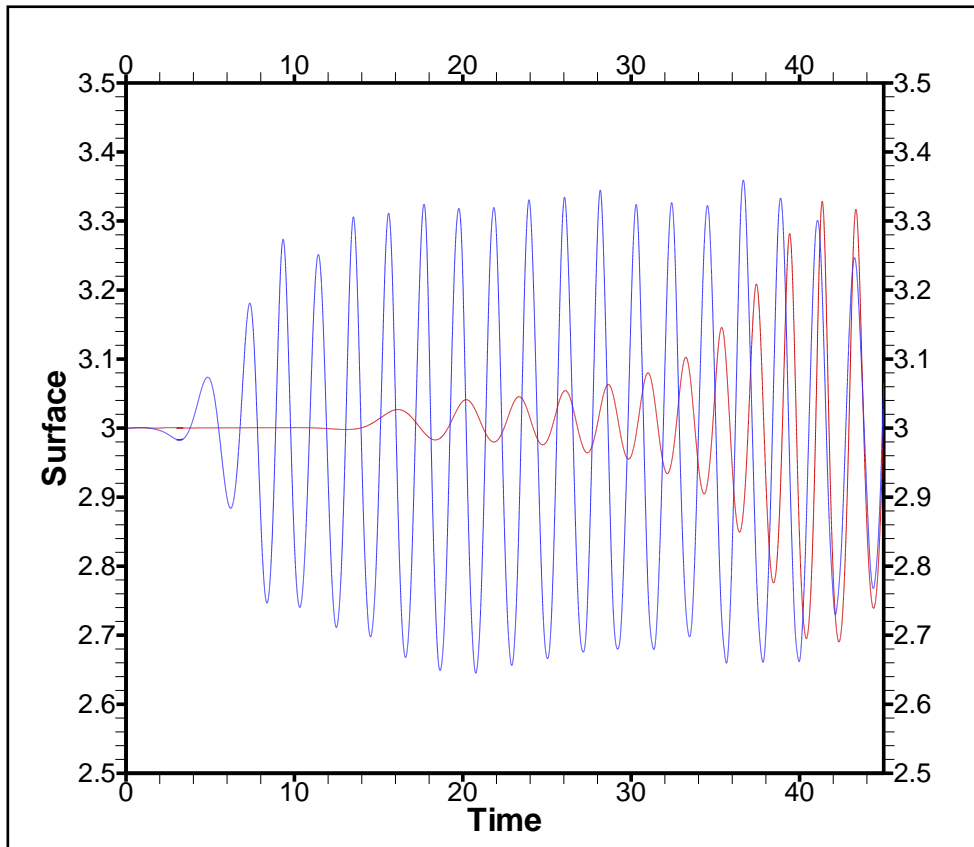
Σχήμα(8.5) Χρονική εξέλιξη της επιφάνειας για $x=60m$



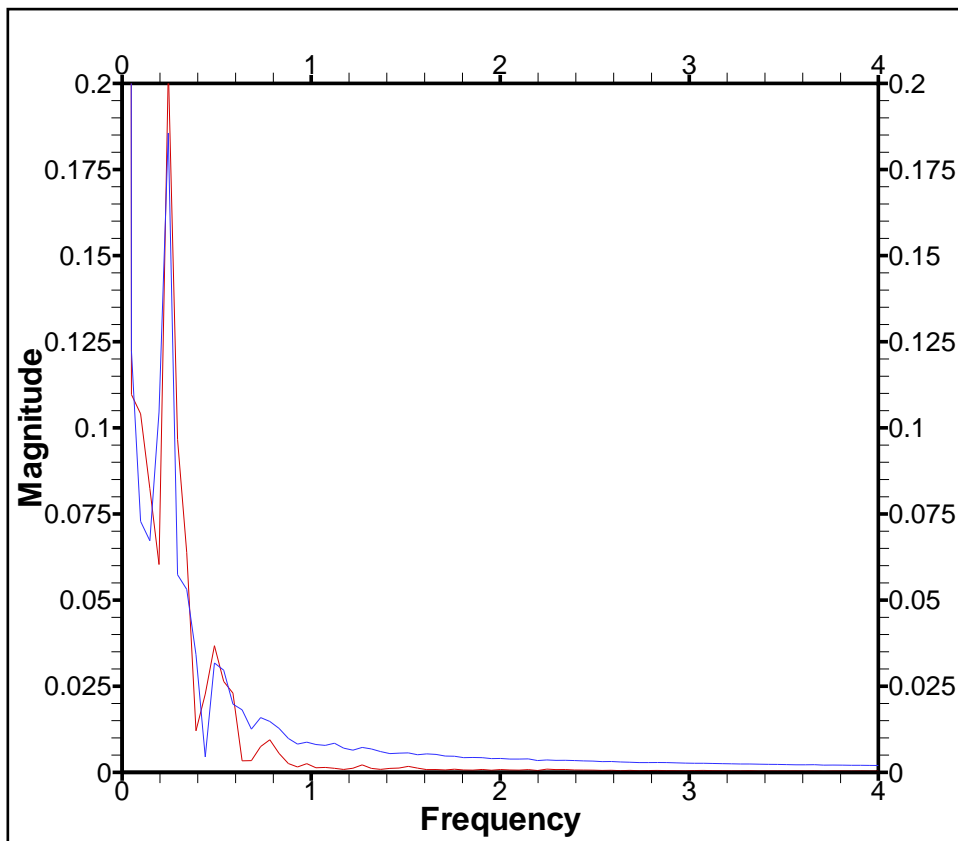
Σχήμα(8.6) Ανάλυση συχνότητας κύματος για $x=10m$



Σχήμα(8.7) Ανάλυση συχνότητας κύματος για $x=60m$



Σχήμα(8.8) Σύγκριση χρονικής εξέλιξης της επιφάνειας για $x=10m$ και $x=60m$



Σχήμα(8.9) Σύγκριση ανάλυσης συχνότητας κύματος για $x=10m$ και $x=60m$

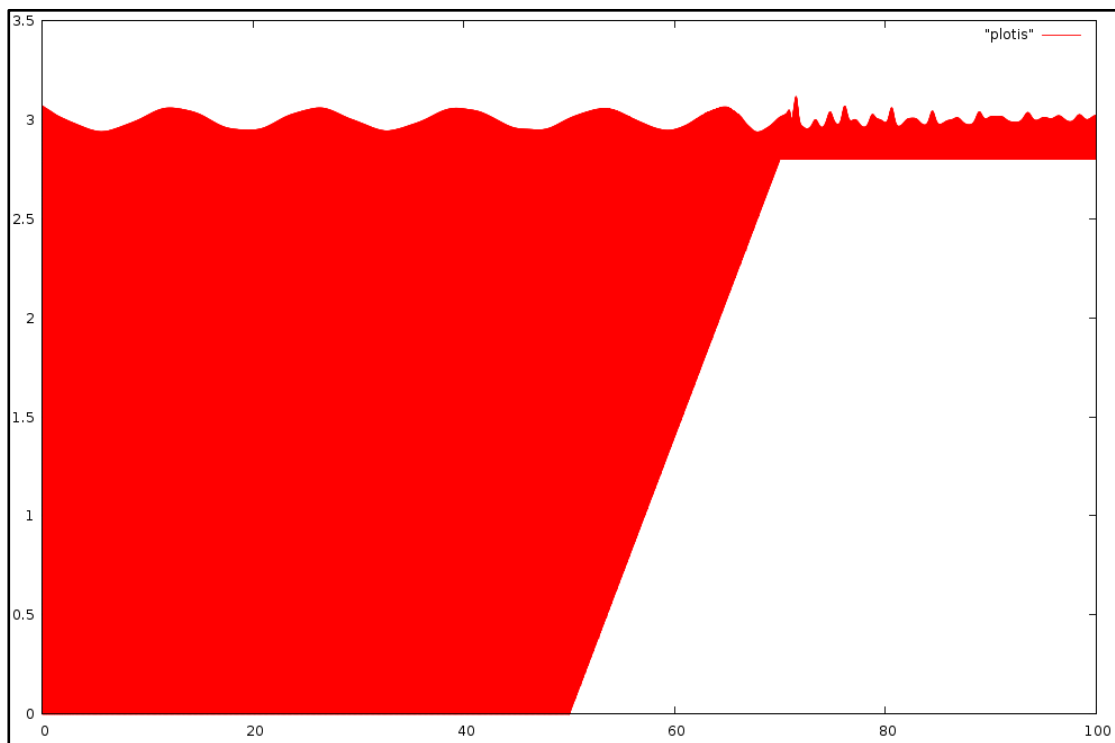
Από τα προηγούμενα διαγράμματα προκύπτει το κύμα διαδίδεται χωρίς να μεταβάλλεται ούτε η συχνότητα ούτε το ύψος του Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η κίνηση του εμβόλου δημιούργησε ένα επιφανειακό κύμα το οποίο όμως δεν επηρεάστηκε καθόλου από την ανύψωση του πυθμένα εφόσον αυτή βρισκόταν σε σχετικά μεγάλο βάθος. Σ' αυτό το συμπέρασμα συντελεί και το γεγονός πως απ το διάγραμμα ισχύος δεν παρατηρείται απώλεια ενέργειας ισχύος ούτε αρνητικές τιμές. Παρατηρούμε δηλαδή ότι το κύμα στη θέση $x=60$ έχει ακριβώς την ίδια μορφή με το κύμα στη θέση $x=10$ απλά είναι μετατοπισμένο χρονικά.

Περίπτωση 9 (ωgen c2) :

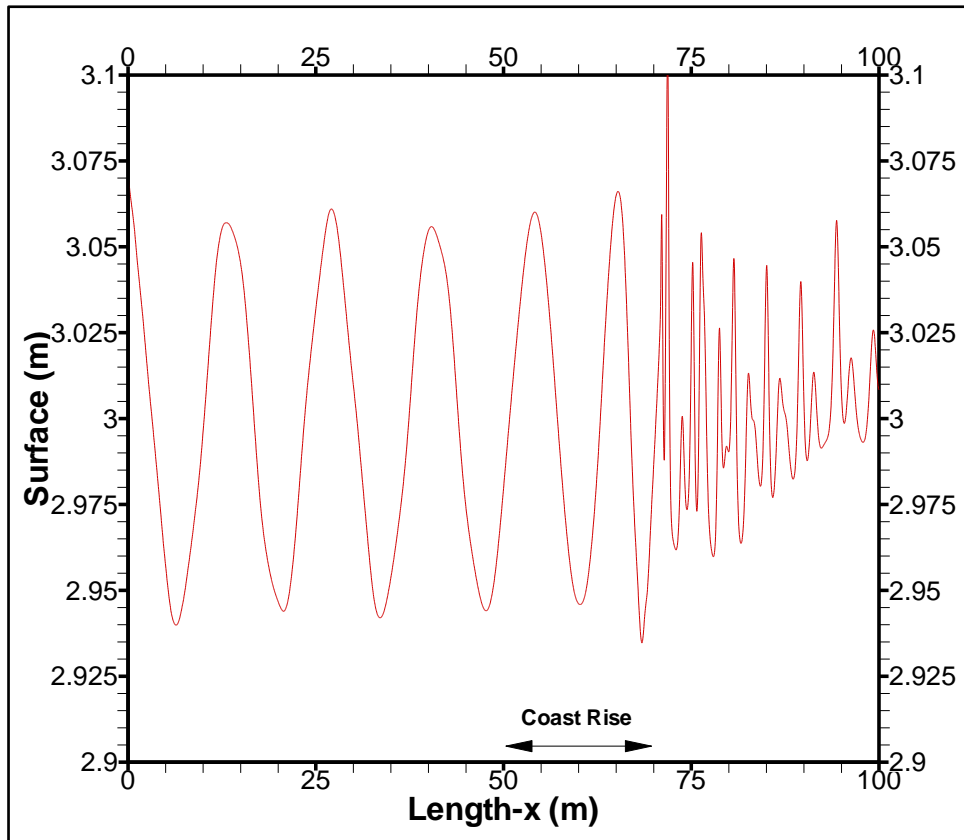
Τα δεδομένα εισόδου είναι:

NI=3000	NJ=80	(Μή ορθογώνιο πλέγμα 3000x80)
VELIN=0		(Μηδενική ακύτητα ρευστού)
PERIOD=-2		(Συχνότητα αρμονικού κυματισμού)
XFIRST=0	XLAST=100	(Μήκος δεξαμενής 100 μέτρα)
PISTON=+3	PADDLE=-2	(Κίνηση εμβόλου βάθους 1 μέτρο)

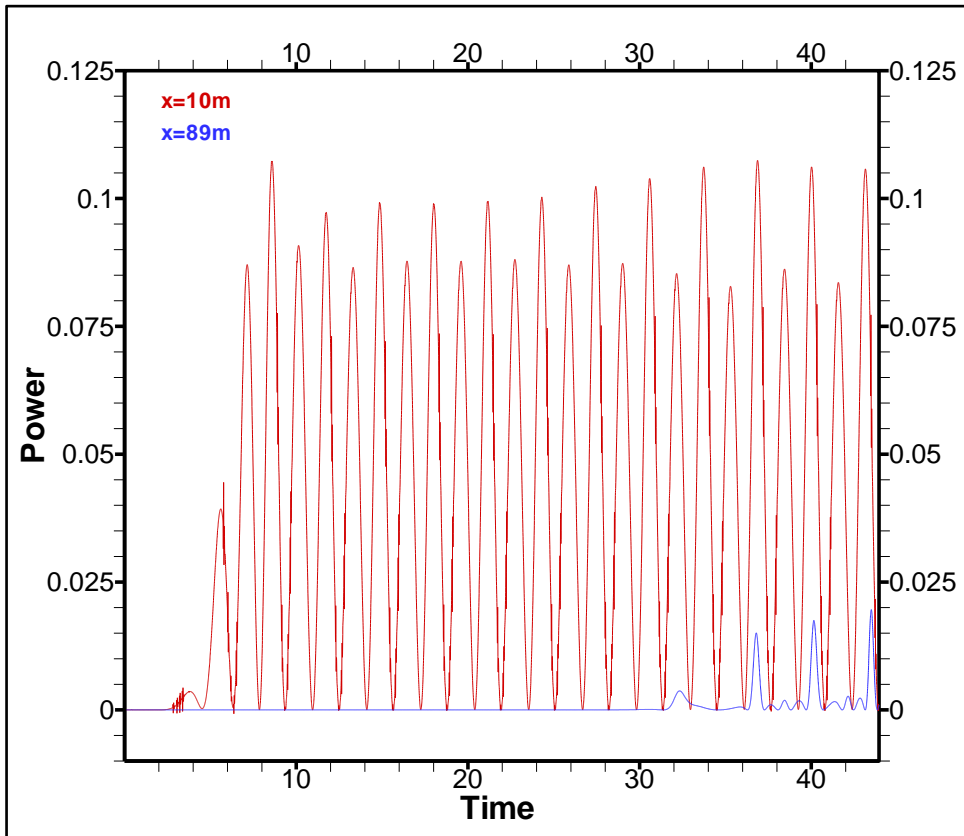
Στην περίπτωση αυτή εξετάζουμε τη διάδοση του κύματος όταν στο δεξιό σύνορο υπάρχει βαθμιαία ανύψωση του πυθμένα (ακτή) και κινείται μόνο ένα μέρος του αριστερού συνόρου (επιφανειακός κυματισμός) με συχνότητα κίνησης του εμβόλου 2rad/sec. Τα αποτελέσματα φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα:



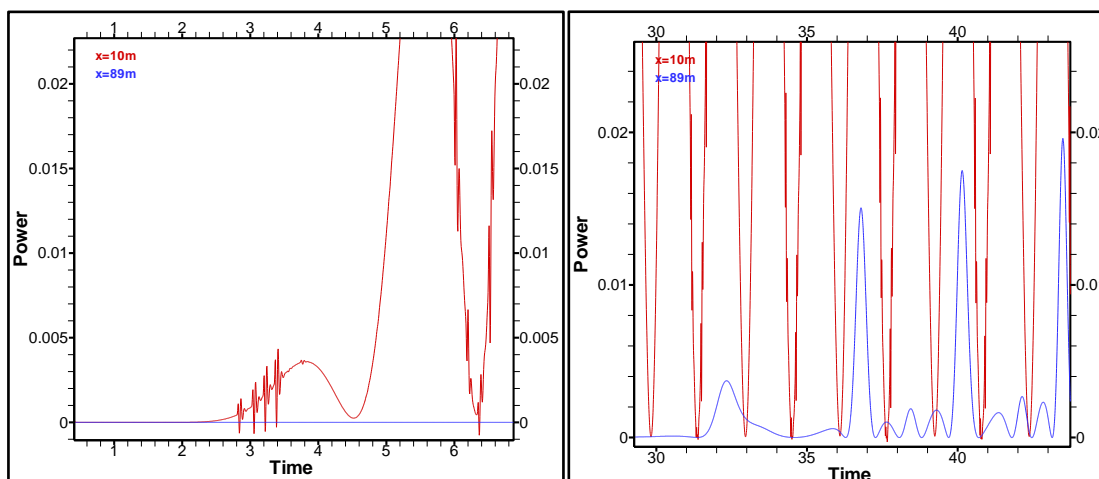
Σχήμα(9.1) Απεικόνιση του πλέγματος



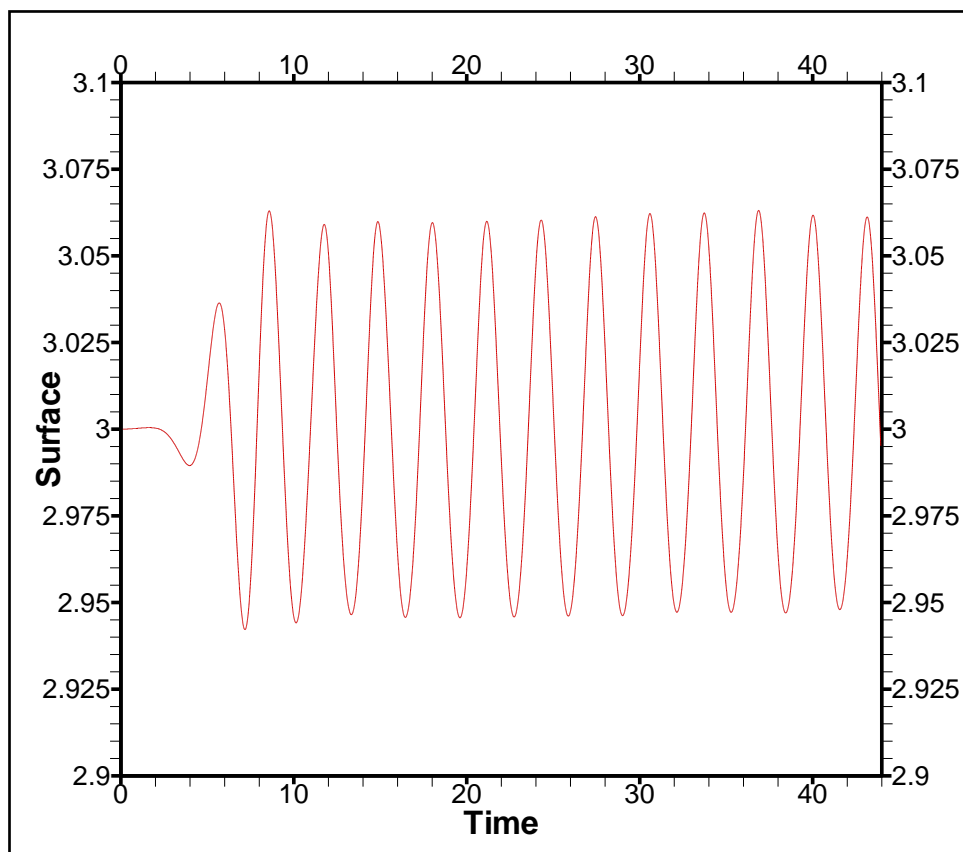
Σχήμα(9.2) Ανύψωση της επιφάνειας



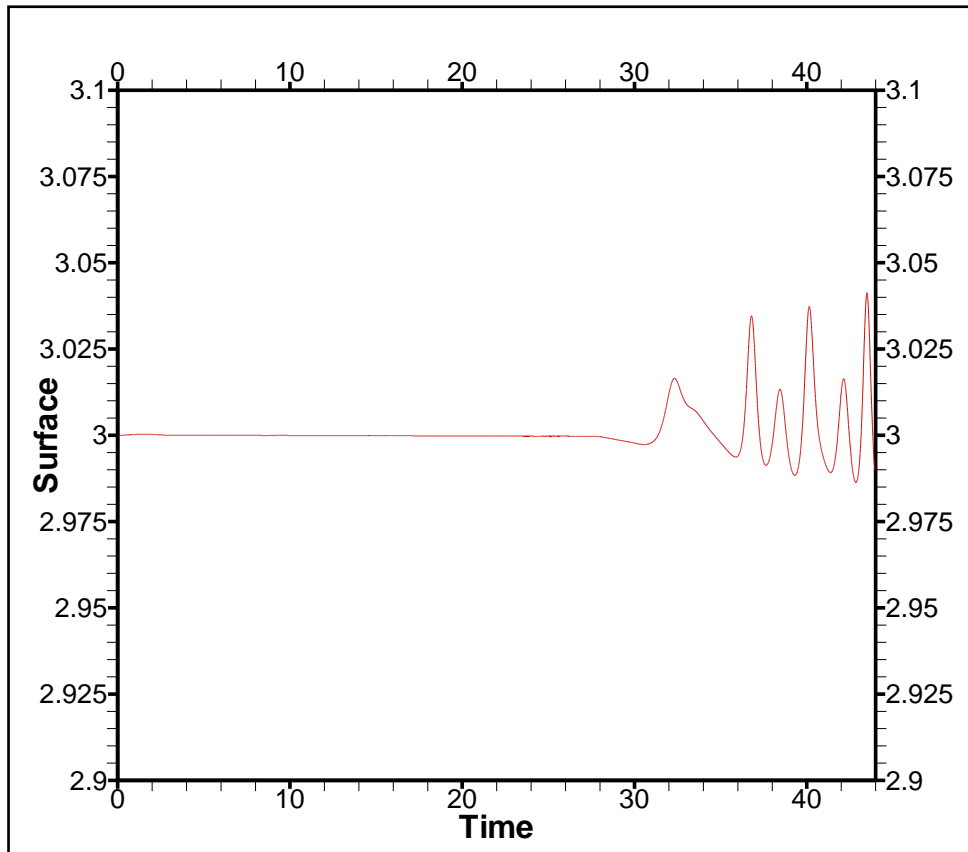
Σχήμα(9.3) Χρονική εξέλιξη της στιγμιαίας ισχύος



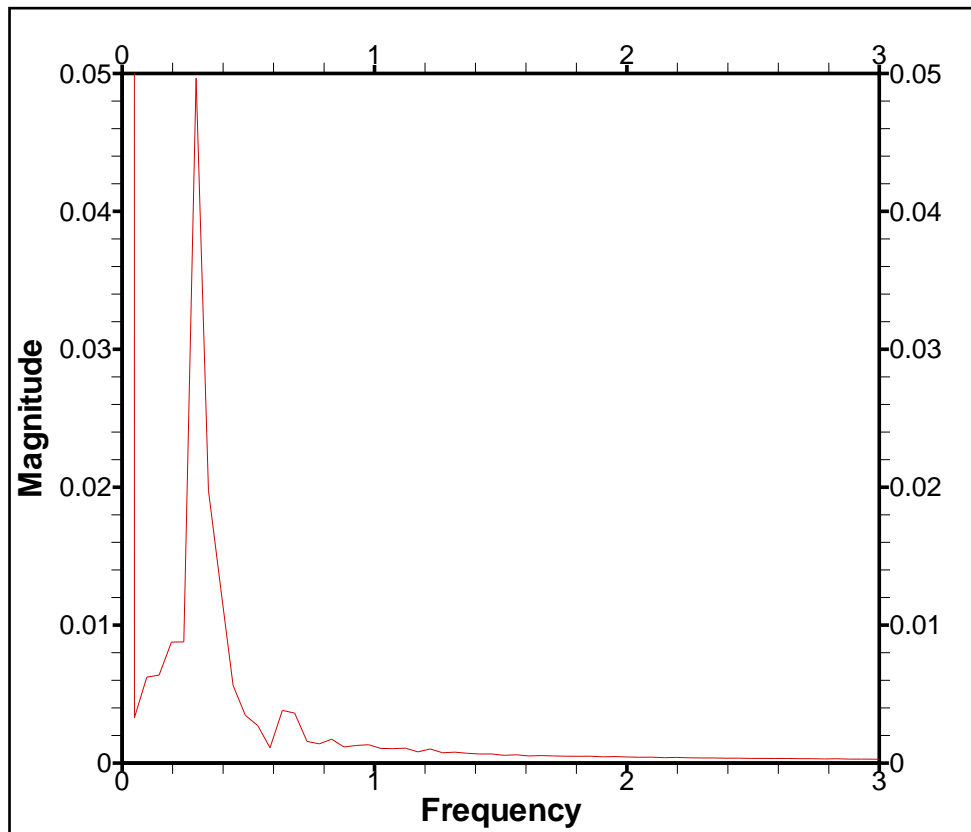
Σχήμα(9.4) Μεγέθυνση της χρονικής εξέλιξης της συγμιαίας ισχύος



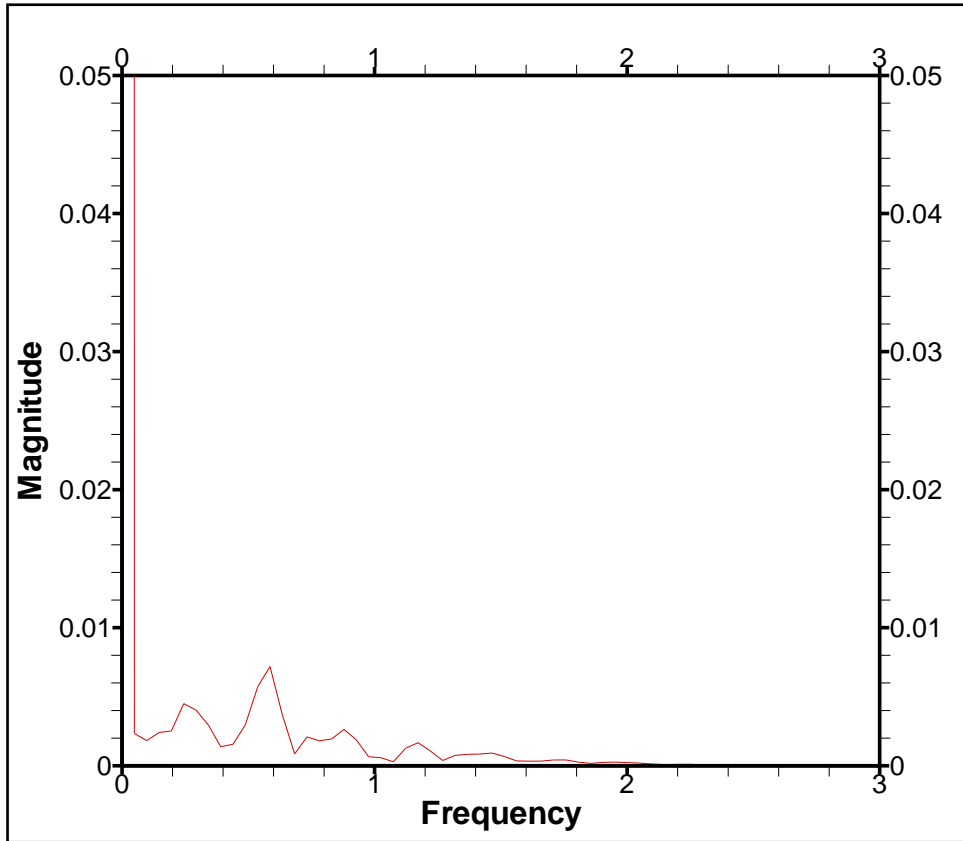
Σχήμα(9.5) Χρονική εξέλιξη της επιφάνειας για $x=10m$



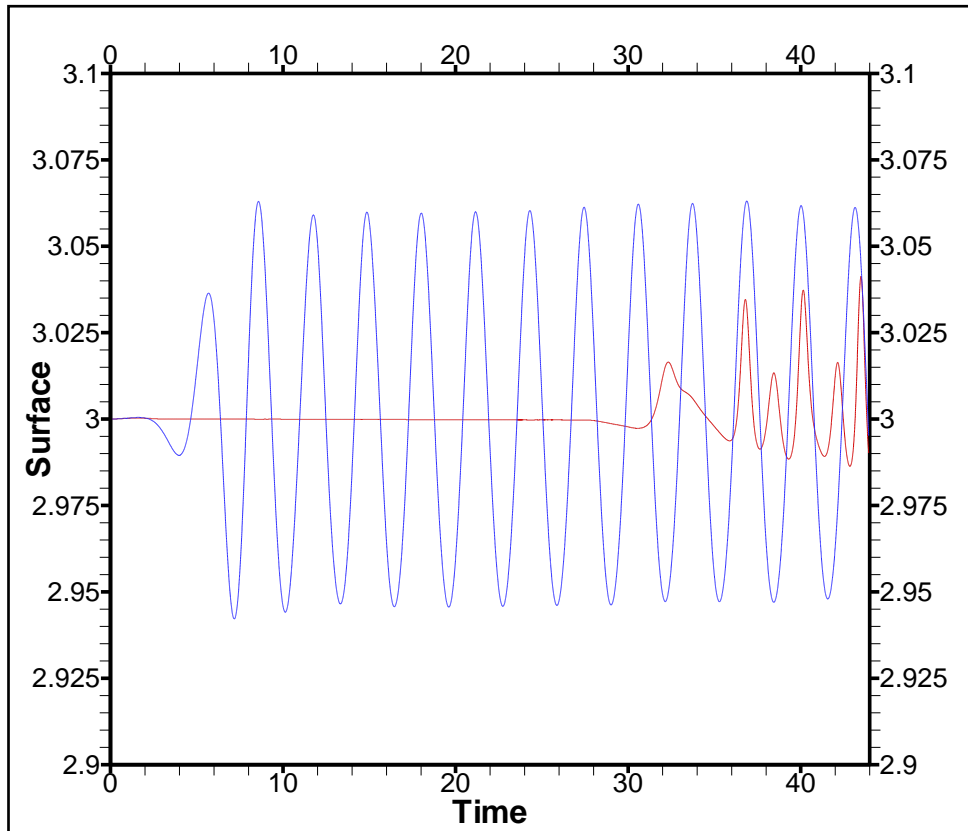
Σχήμα(9.6) Χρονική εξέλιξη της επιφάνειας για $x=89m$



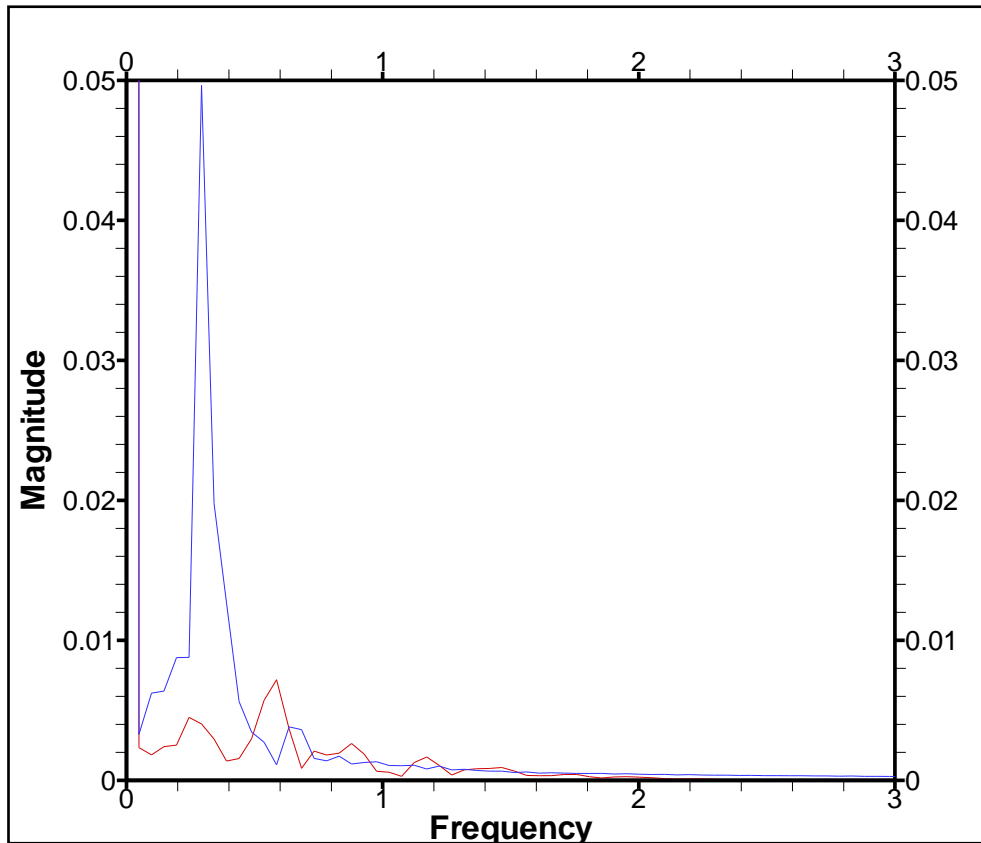
Σχήμα(9.7) Ανάλυση συχνότητας κύματος για $x=10m$



Σχήμα(9.8) Ανάλυση συχνότητας κύματος για $x=89m$



Σχήμα(9.9) Σύγκριση χρονικής εξέλιξης της επιφάνειας για $x=10m$ και $x=89m$



Σχήμα(9.10) Σύγκριση ανάλυσης συχνότητας κύματος για $x=10m$ και $x=89m$

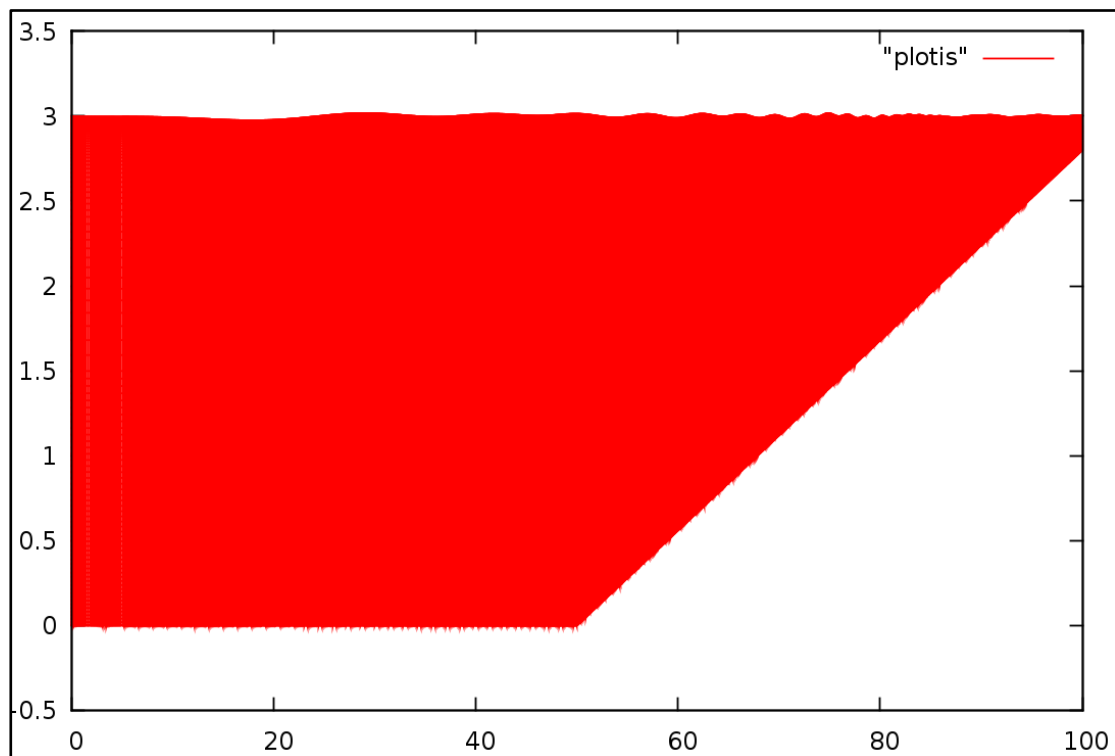
Από τα προηγούμενα διαγράμματα προκύπτει ότι το κύμα όταν φτάσει κοντά στην ακμή της ακτής σπάει σε μικρότερους κυματισμούς μικρότερου ύψους, μήκους αλλά μεγαλύτερης συχνότητας. Παρατηρείται επίσης σημαντική πτώση της στιγμιαίας ισχύος (που εφείλεται κυρίως στην ελάττωση του βάθους και κατά συνέπεια της δυναμικής ενέργειας) εν τούτοις όμως δεν παρατηρείται κάποια σημαντική ανύψωση της στάθμης όπως θα ήταν αναμενόμενο αν και ο κυματισμός είναι επιφανειακός. Από το διάγραμμα της ισχύος βλέπουμε ότι δημιουργούνται στο δεξί άκρο κάποιες αμελητέες ανακλάσεις ενώ η το διάγραμμα των συχνοτήτων τείνει να επιβεβαιώσει την αύξηση της συχνότητας του κυματισμού.

Περίπτωση 10 (*wgen cb*) :

Τα δεδομένα εισόδου είναι:

NI=2000	NJ=80	(Μή ορθογώνιο πλέγμα 2000x80)
VELIN=0		(Μηδενική ταχύτητα ρευστού)
PERIOD=-5		(Συχνότητα αρμονικού κυματισμού)
XFIRST=0	XLAST=100	(Μήκος δεξαμενής 100 μέτρα)
PISTON=0	PADDLE=0	(Κίνηση εμβόλου βάθους μέτρο)

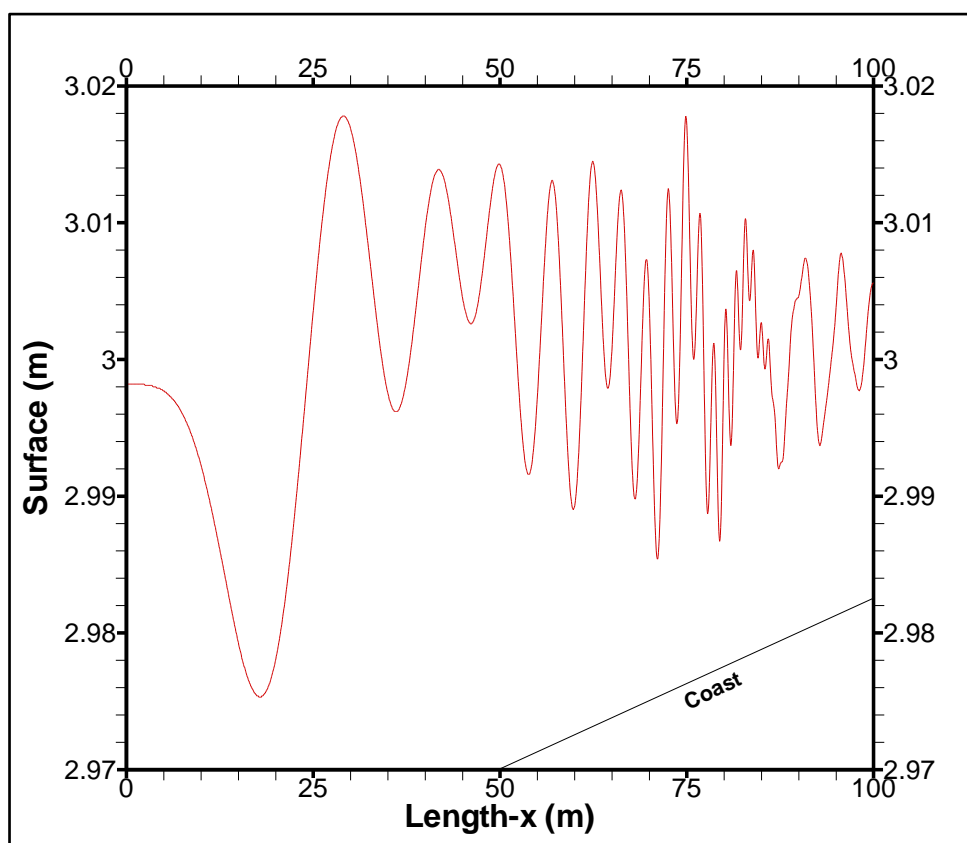
Στην περίπτωση αυτή εξετάζουμε τη διάδοση του κύματος μεγάλου μήκους όταν στο δεξιό σύνορο υπάρχει βαθμιαία ανύψωση του πυθμένα (ακτή) και κινείται μόνο όλο το αριστερό σύνορο με συχνότητα κίνησης του εμβόλου 5rad/sec. Τα αποτελέσματα φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα:



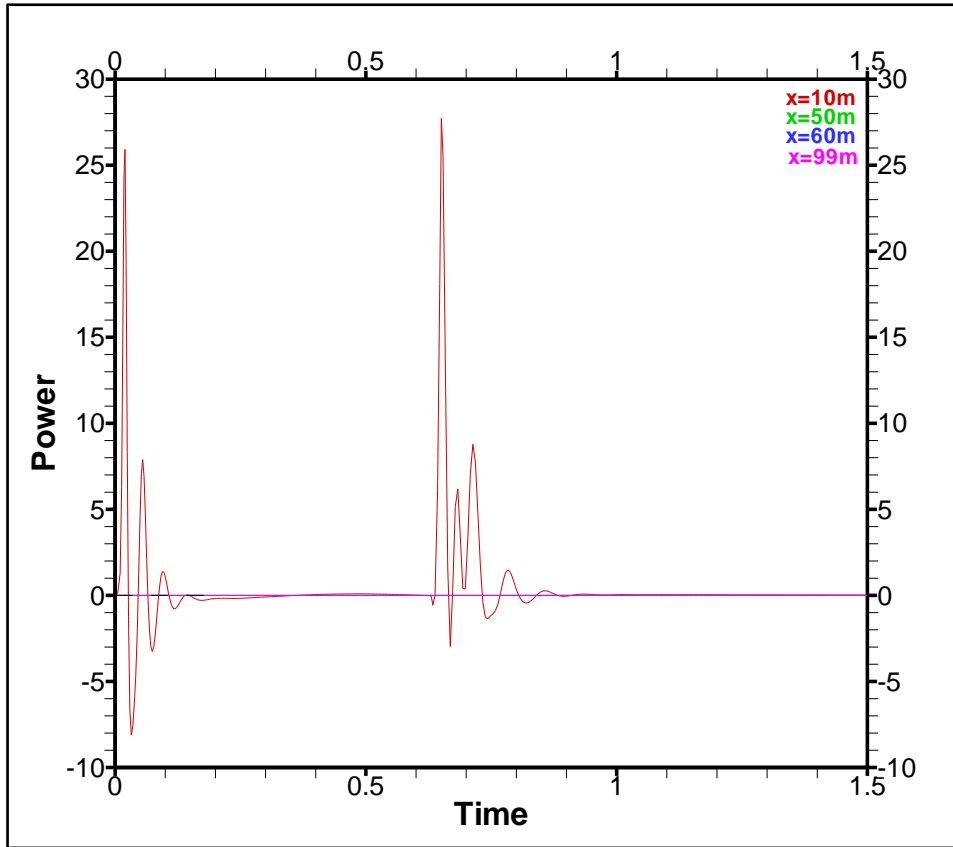
Σχήμα(10.1) Απεικόνιση του πλέγματος



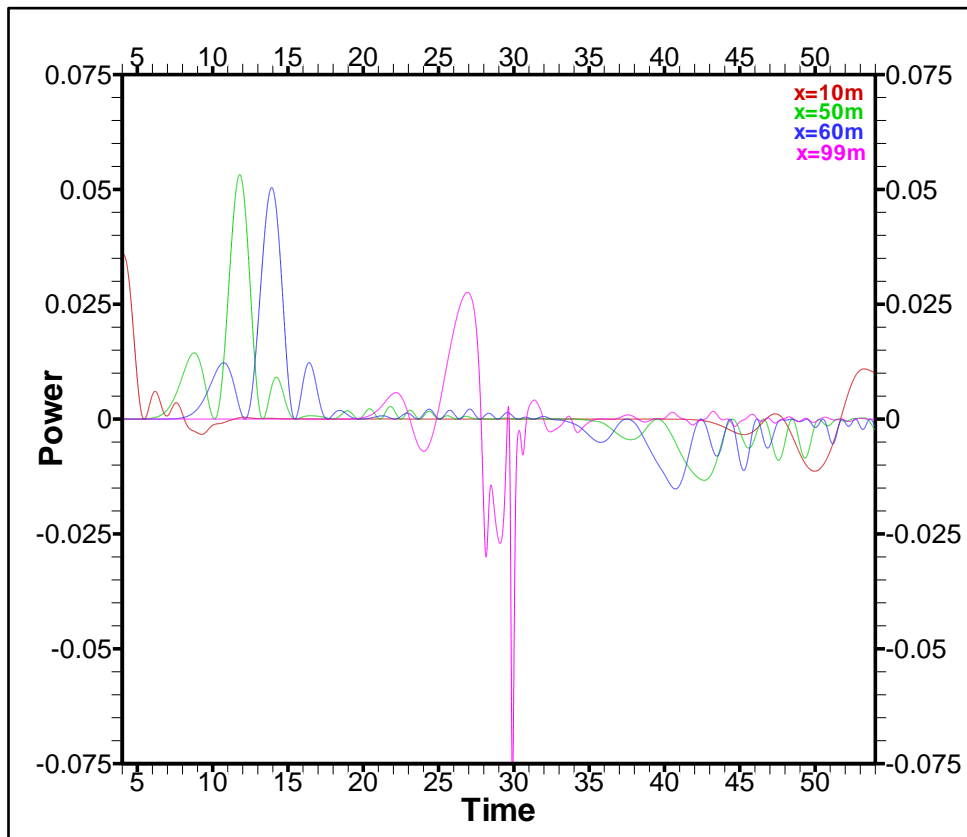
Σχήμα(10.2) Μεγέθυνση του πλέγματος στο δεξι άκρο



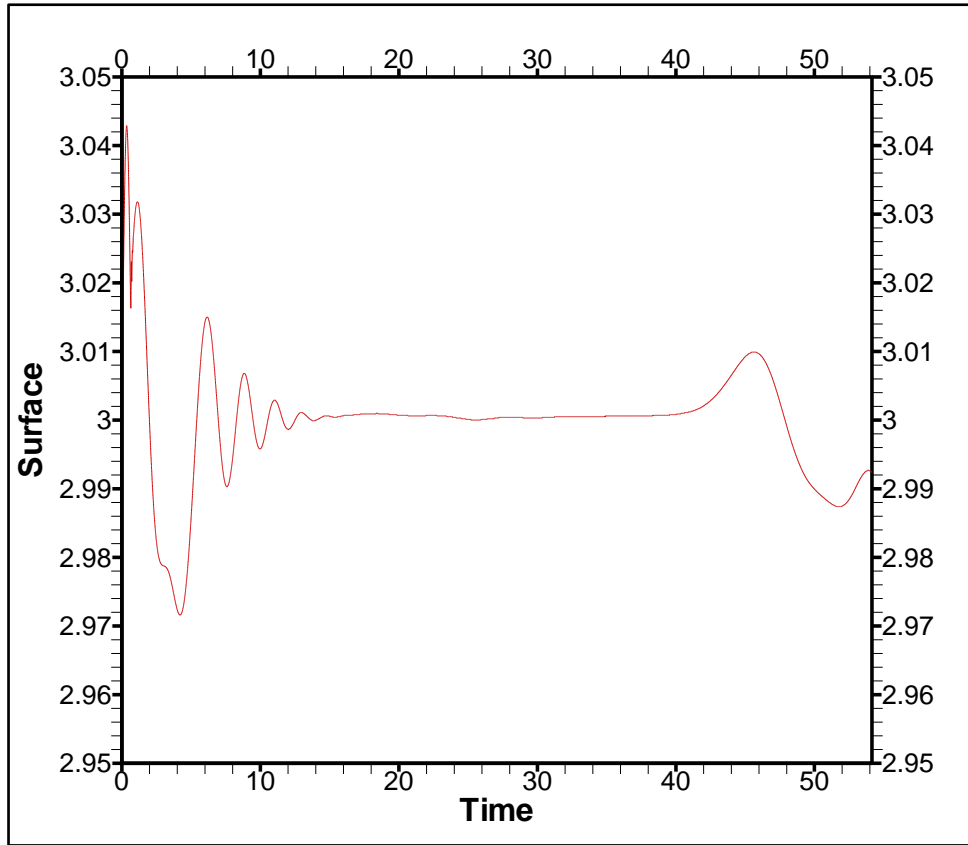
Σχήμα(10.3) Ανύψωση της επιφάνειας



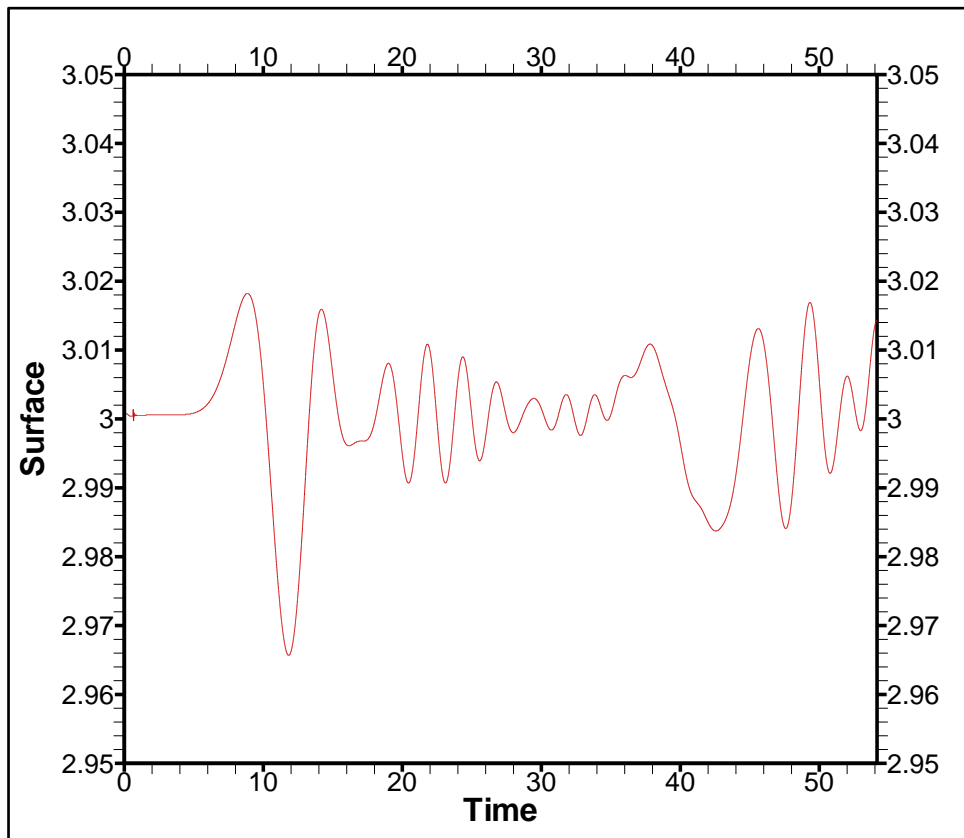
Σχήμα(10.4) Χρονική εξέλιξη της στιγμιαίας ισχύος



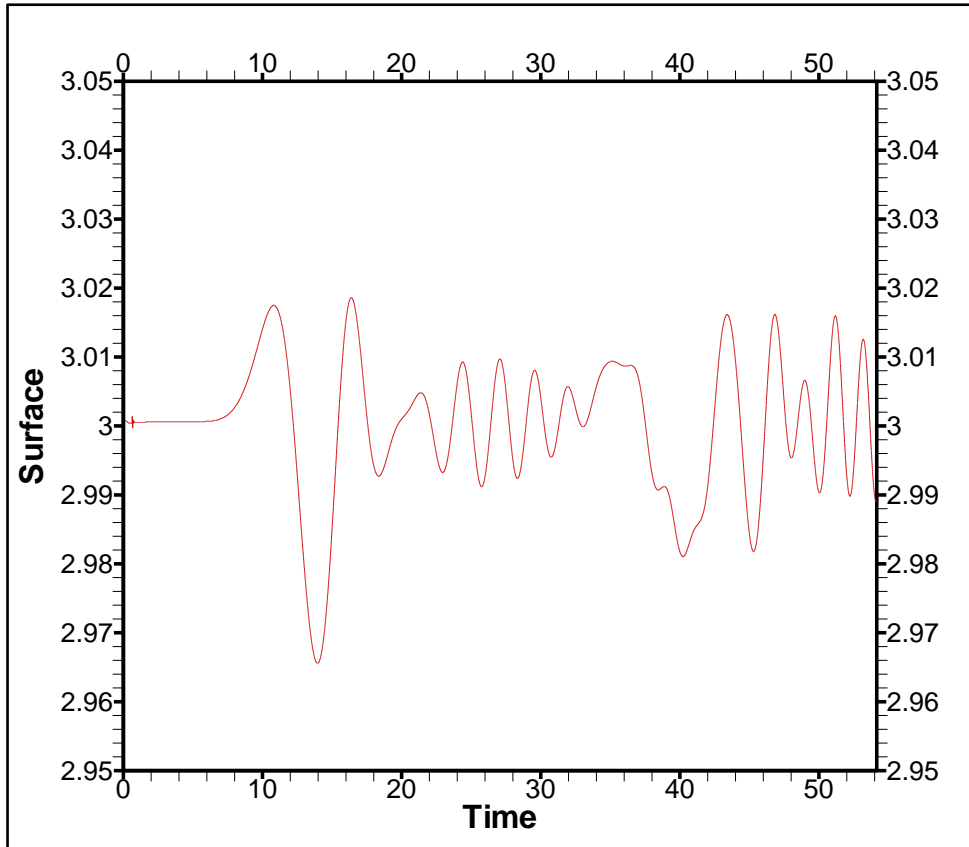
Σχήμα(10.5) Χρονική εξέλιξη της στιγμιαίας ισχύος



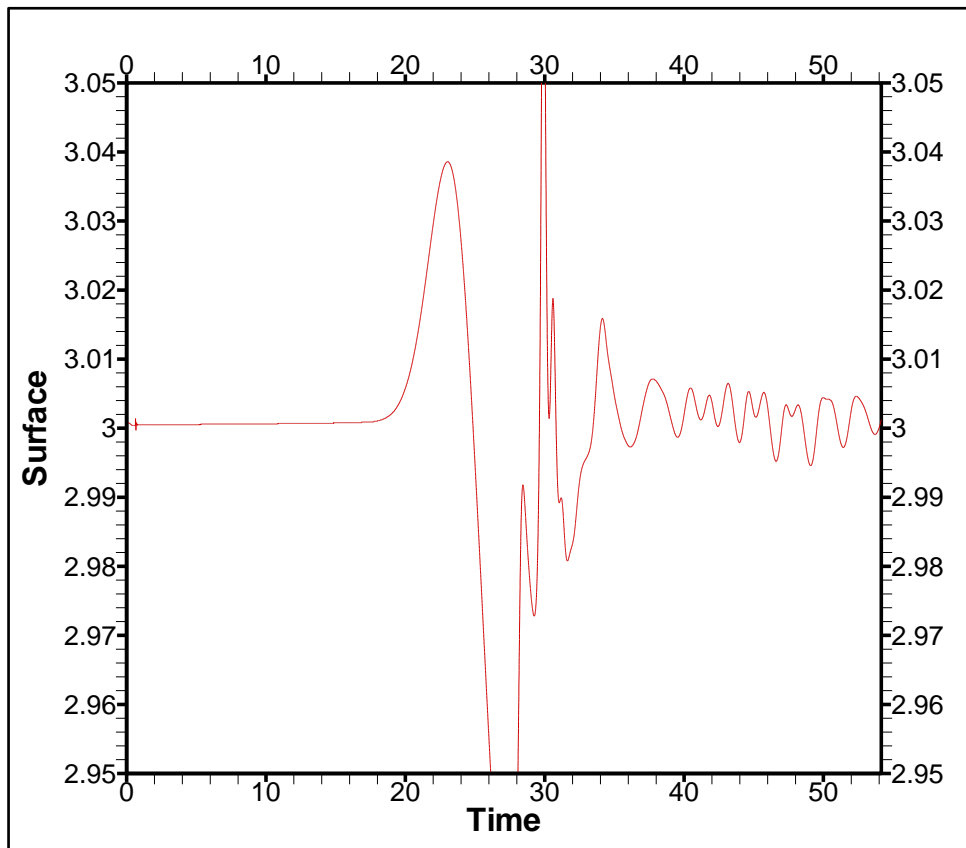
Σχήμα(10.6) Χρονική εξέλιξη της επιφάνειας για $x=10m$



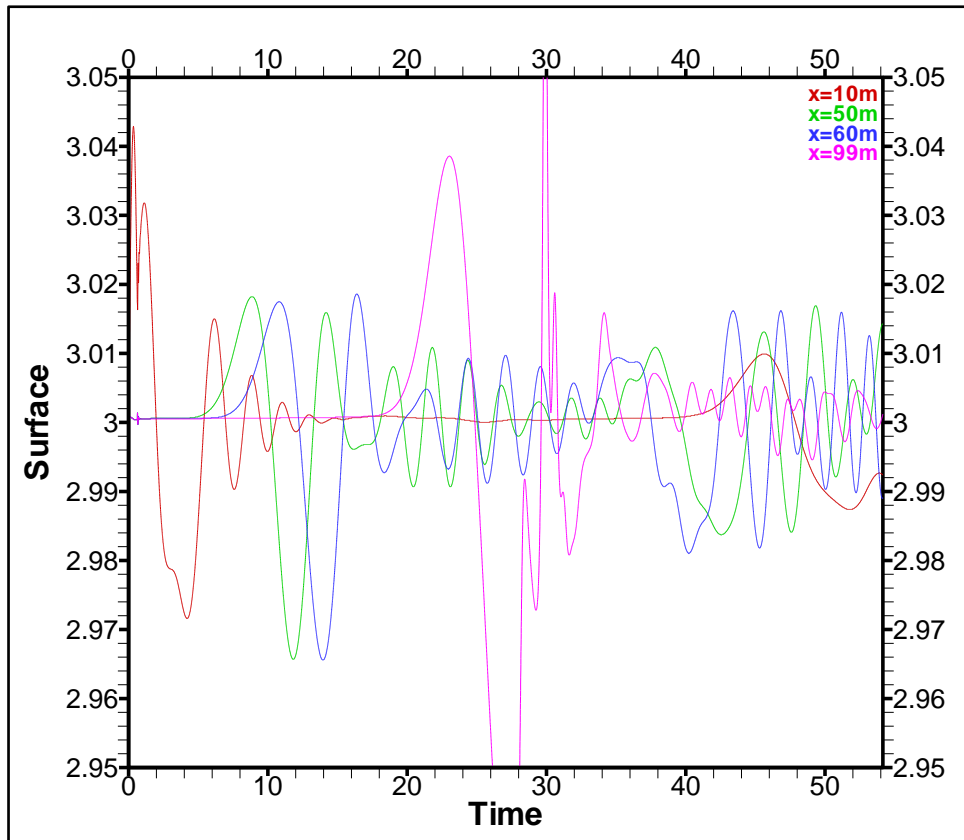
Σχήμα(10.7) Χρονική εξέλιξη της επιφάνειας για $x=50m$



Σχήμα(10.8) Χρονική εξέλιξη της επιφάνειας για $x=60m$



Σχήμα(10.9) Χρονική εξέλιξη της επιφάνειας για $x=99m$



Σχήμα(10.10) Σύγκριση χρονικής εξέλιξης της επιφάνειας για $x=10m, x=50, x=60, x=99m$

Από τα προηγούμενα διαγράμματα παρατηρούμε ότι αρχικά κινείται το έμβολο παράγοντας ένα αρχικό κύμα μεγάλου μήκους το οποίο φτάνει αρκετά γρήγορα στο δεξιό άκρο δημιουργώντας αρχικά μία απότομη ανύψωση της στάθμης (τσουνάμι) και εν συνεχεία ανακλάται από το δεξιό σύνορο και δημιουργούνται τυχαίοι κυματισμοί οι οποίοι επανανακλώνται στο έμβολο και εν τέλει το αρχικό κύμα μεγάλου μήκους σπάει σε αρκετά μικρότερου μήκους. Οι ανακλάσεις είναι ακανόνιστες κάτι που φαίνεται ενδεικτικά στο διάγραμμα ισχύος.

Συνοπτικά Συμπεράσματα :

Από τις προηγούμενες περιπτώσεις που τρέξαμε προέκυψε το συμπέρασμα ότι για μικρές τιμές της συνεκτικότητας ο κυματισμός δεν αντιλαμβάνεται την ύπαρξή της κάτι που γίνεται πιο αισθητό όσο ανεβαίνει η τιμή της.

Πιο συγκεκριμένα αρχικά για τιμές της τάξης του 1×10^{-3} η επίδραση είναι πολύ μικρή, για $\nu = 1 \times 10^{-2}$ η επίδραση είναι φανερή, δηλαδή το ύψος του κύματος μειώνεται αρκετά και για $\nu = 1$ το κύμα καταστρέφεται τελείως.

Επίσης στην περίπτωση που είχαμε συνδυασμένη ροή με κύμα προέκυψε ότι το πρόβλημα συμπεριφέρεται σαν επαλληλία δύο ξεχωριστών περιπτώσεων, μίας ελεύθερης ροής δίχως κύμα και ενός κυματισμού χωρίς το ένα να επηρεάζει το άλλο.

Σε όλες τις περιπτώσεις η συχνότητα του κύματος παρέμεινε αναλοιώτη μετά τη διέλευσή του από την περιοχή της αυξημένης συνεκτικότητας ενώ παρατηρήσαμε ότι όσο μεγαλώνει σε εύρος η περιοχή της συνεκτικότητας τόσο περισσότερο μειώνεται το ύψος του κύματος δηλαδή το τελευταίο αποσβαίνεται. Εν τέλει λοιπόν συμπεραίνουμε ότι όσο αυξάνεται η τιμή και το εύρος της περιοχής της συνεκτικότητας τόσο μεγαλύτερη είναι η απόσβεση.

Στις περιπτώσεις που είχαμε ακτή στο δεξιό άκρο της δεξαμενής παρατηρήθηκε μια μικρή στιγμιαία αύξηση του ύψους του κύματος και στη συνέχεια αυτό κατακερματίστηκε σε μικρότερα κύματα μεγαλύτερης συχνότητας τα οποία μάλιστα μετά τις ανακλάσεις απ' το δεξιό συνορο είχαν ακανόνιστη μορφή. Και πάλι παρατηρήθηκε η καταστροφή της ενέργειας του κύματος (πτώση της στιγμιαίας ισχύος) όπως και στις περιπτώσεις της αυξημένης συνεκτικότητας κάτι που άλλωστε ήταν αναμενόμενο.

Στην περίπτωση του μεταβλητού πυθμένα- εμπόδιο δεν παρατηρήθηκε κάποια μεταβολή και αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο κυματισμός ήταν επιφανειακός και το στερεό σύνορο του εμποδίου ήταν σε σχετικά μεγαλύτερο βάθος.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΜΕΡΟΥΣ Α'

-Αρχεία εισαγωγής δεδομένων Dgenw

-Βιβλιογραφία

Αρχείο Εισαγωγής Δεδομένων Dgenw

U: Εντολή επίλυσης της U ταχύτητας:

U =0: Μη επίλυση.

U =1: Επίλυση.

P: Εντολή επίλυσης της διόρθωσης της πίεσης:

P =0: Μη επίλυση.

P =1: Επίλυση.

V: Εντολή εφαρμογής μοντέλου τύρβης.

V =0: Στρωτή ροή.

V =1: Τυρβώδης ροή.

K: Εντολή επίλυσης της κινητικής ενέργειας της τύρβης:

K=0: Μη επίλυση.

K=1: Επίλυση.

E: Εντολή επίλυσης της καταστροφής της κινητικής ενέργειας της τύρβης:

E=0: Μη επίλυση.

E=1: Επίλυση.

T: Εντολή χρήσης κινούμενου πλέγματος:

T=1: Παρεμβολή.

T=2: Κινούμενο πλέγμα.

NI: Αριθμός κόμβων στη x-διεύθυνση.

NJ: Αριθμός κόμβων στη y-διεύθυνση.

IGEX: Εντολή τοποθέτησης των κόμβων κατά την y-διεύθυνση:

IGEX =0: Γραμμικά.

IGEX =1: Εκθετικά.

JCUT: Ορίζει τη θέση του κόμβου, άνωθεν του οποίου εφαρμόζεται η IGEX.

IPIST: Ορίζει τον τελευταίο κόμβο κατά τη x-διεύθυνση όπου το πλέγμα κινείται λόγω του πιστονιού.

IEAS: Ορίζει τον κόμβο έπειτα από τον οποίο πυκνώνει το πλέγμα.

INTP: Εντολή χρήσης γραμμικών παρεμβολών για τον υπολογισμό των των νέων τιμών των μεταβλητών:

INTP =0: Μη χρήση παρεμβολών.

INTP =1: Χρήση παρεμβολών (αδύνατος συνδυασμός T=2 και INTP =1).

NWAB: Αριθμός κυμάτων στην επιφάνεια των δύο τμημάτων της ακτής

ISUR: Τρόπος υπολογισμού ελεύθερης επιφάνειας:

ISUR =0: Euler.

ISUR =1: Lagrange.

ISPL: Τρόπος υπολογισμού μορφής ελεύθερης επιφάνειας:

ISPL =0: Γραμμική παρεμβολή.

ISPL =1: Spline.

LINV: Μεταβλητή υπολογισμού της v-ταχύτητας στον πρώτο κόμβο του πλέγματος:

LINV =0: V=0.

LINV =1: $V(J =1)= V(J =2)$, Συνθήκη τύπου Neumann.

LINV =2: $V(J =1)= V(J =2)$ και $\eta(J =1)=\eta(J =2)$, Συνθήκη τύπου Neumann.

NORC: Συνθήκη υπολογισμού της παροχής στην ελεύθερη επιφάνεια:

NORC =0: $V(NJ)$, από ισότητα παροχών.

NORC =1: $V(NJ)= V(NJ -1)$, Συνθήκη τύπου Neumann.

IPRI: Τρόπος εκτύπωσης των αποτελεσμάτων στην οθόνη:

NORU: Μεταβλητή καθορισμού οριακής συνθήκης για τη U-ταχύτητα:

NORU =0: U(NJ), υπολογίζεται μέχρι τον τελευταίο κόμβο.

NORU =1: U(NJ)= U(NJ -1), Συνθήκη τύπου Neumann.

NORP: Μεταβλητή καθορισμού οριακής συνθήκης για την πίεση:

NORP =1: P(NJ)= P(NJ -1), Συνθήκη τύπου Neumann.

NORP =2: οριακή συνθήκη για την πίεση.

IPIS, ISTR, IPER: Χρήση του αλγόριθμου PISO για τον υπολογισμό της εξίσωσης διόρθωσης της πίεσης.

NWES: Οριακή συνθήκη στο αριστερό σύνορο:

NWES =0: Συνοριακή συνθήκη τύπου Neumann για όλες τις μεταβλητές.

NWES =1: Συνοριακή συνθήκη τύπου Dirichlet για όλες τις μεταβλητές.

NEAS: Οριακή συνθήκη στο δεξιό σύνορο:

NEAS =0: Συνοριακή συνθήκη μη ανάκλασης.

NEAS =1: Συνοριακή συνθήκη στάσιμου κύματος.

NSOT: Οριακή συνθήκη πυθμένα:

NSOT =0: Στερεό σύνορο.

NSOT =1: Ελεύθερο σύνορο.

LASP: Οριακή συνθήκη για την πίεση στο δεξί άκρο της δεξαμενής:

LASP =0: P(NI), από γραμμική προεκβολή.

LASP =1: P(NI), οι καθ' ύψος μεταβολές της πίεσης, ίδιες με NI-1.

LASP =2: P(NI), από ανάπτυγμα Taylor.

NOSL: Οριακή συνθήκη για την V-ταχύτητα στο δεξί άκρο της δεξαμενής:

NOSL =0: $V(NI)=0$.

NOSL =1: $V(NI)= V(NI -1)$, Συνθήκη τύπου Neumann

NSU: Αριθμός των κλίσεων της υπορουτίνας LISOLV για την επίλυση του γραμμικού συστήματος για την U-ταχύτητα.

NSV: Αριθμός των κλίσεων της υπορουτίνας LISOLV για την επίλυση του γραμμικού συστήματος για την V-ταχύτητα.

NSP: Αριθμός των κλίσεων της υπορουτίνας LISOLV για την επίλυση του γραμμικού συστήματος για την πίεση.

MAXI: Αριθμός επαναλείψεων για $t=0$.

MAST: Μέγιστος αριθμός χρονικών βημάτων.

MAX1: Αριθμός επαναλείψεων για $t>0$.

NOBR: Μεταβλητή προστασίας από θραύση των κυμάτων:

NOBR =0: Ελεύθερα κύματα.

NOBR \neq 0: Προστασία έναντι θραύσης.

MODV: Μεταβλητή χρήσης εναλλακτικού τρόπου για τον υπολογισμό της ταχύτητας στην ελεύθερη επιφάνεια:

ISAV: Αριθμός εσωτερικών επαναλήψεων για την αποθήκευση δεδομένων.

KSAV: Αριθμός χρονικών βημάτων για την αποθήκευση της ελεύθερης επιφάνειας.

MSAV: Αριθμός χρονικών βημάτων για την αποθήκευση ολόκληρου του

JPRE: Δείκτης j της θέσης όπου η πίεση έχει σταθερή τιμή.

IMON: Δείκτης i του σημείου παρατήρησης των τιμών των μεταβλητών.

JMON: Δείκτης j του σημείου παρατήρησης των τιμών των μεταβλητών.

KCRT: Μεταβλητή που ορίζει αν θα τυπώνεται στην οθόνη η τρέχουσα υπορουτίνα:

KCRT =0: Μη εμφάνιση υπορουτίνας.

KCRT =1: Εμφάνιση στην οθόνη της τρέχουσας υπορουτίνας.

GRAV: Επιτάχυνση της βαρύτητας σε συμβατό σύστημα μονάδων:

9.81 [m/sec²]

VELIN: Ταχύτητα εισόδου του ρευστού.

SORMAX: Μέγιστη τιμή κανονικοποίησης των υπολοίπων U, V, M.

FACTOP: Συντελεστής ισχυροποίησης διαγωνίου, του συντελεστή A P στην εξίσωση της πίεσης.

TANMAX: Μέγιστη γωνία κλίσης σε μοίρες, μεταξύ του οριζόντιου επιπέδου και της ελεύθερης επιφάνειας για την αποφυγή θραύσης του κύματος,

VOLSUR: Μεταβλητή για τη διατήρηση του όγκου του νερού σταθερού:

VOLSUR =0: Ελεύθερος όγκος.

VOLSUR ≠0: Διατήρηση όγκου.

DYMAX: Μέγιστη επιτρεπόμενη μετακίνηση κόμβου.

DTO: Σημείο έναρξης μέτρησης χρόνου.

DELTA: Χρονικό βήμα.

PERIOD: Περίοδος ταλάντωσης εμβόλου

PERIOD >0: Περίοδος σε [sec].

PERIOD <0: PERIOD =γωνιακή ταχύτητα [rad/sec].

TIMEL: Χρονική στιγμή διακοπής της κίνησης του εμβόλου.

TANIM: Χρονικό βήμα για καταγραφή της ελεύθερης επιφάνειας.

XFIRST: Διαμήκης θέση του πρώτου υπολογιστικού κόμβου.

XLAST: Διαμήκης θέση του τελευταίου υπολογιστικού κόμβου.

DEAST: Απόσταση του κόμβου με θέση IEAS (record3) έως το XLAST.

DPISTV: Μήκος σωλήνα- οδηγού του εμβόλου (όταν PADDLE <0,

AMPL0: Πλάτος ταλάντωσης εμβόλου.

TSUNAM: Μεταβλητή για την προσομοίωση κυμάτων λόγω σεισμών, προκαλεί στιγμιαία μετακίνηση του πυθμένα,

PISTON: Απόσταση του κόμβου με θέση XFIRST (record 14) έως το IPST

PADDLE: Θέση κατώτερου άκρου εμβόλου:

PADDLE ≥0: Θέση κατώτερου άκρου εμβόλου.

PADDLE <0: Θέση κατώτερου άκρου εμβόλου = PADDLE + ύπαρξη σωλήνα- οδηγού.

PHASE: Αρχική φάση εμβόλου, σε μοίρες.

URFU: Συντελεστής υποχαλάρωσης για την U-ταχύτητα.

URFV: Συντελεστής υποχαλάρωσης για την V-ταχύτητα.

URFP: Συντελεστής υποχαλάρωσης για την πίεση.

DEPTH: Βάθοςνερού.

DSUR: Απόσταση του ανώτατου κόμβου από την ελεύθερη επιφάνεια.

DBOT: Απόσταση κατώτατου κόμβου από τον πυθμένα.

DSIDE: Απόσταση του εγγύτερου στην πλευρά κόμβου, από αυτή.

YMINT: Ελάχιστη επιτρεπόμενη απόσταση του πυθμένα από την ελεύθερη επιφάνεια.

AKTI: Μήκος ακτής από δεξιό άκρο δεξαμενής.

XABS1: Μήκος πρώτου τμήματος ακτής

XABS2: Μήκος δεύτερου τμήματος ακτής.

HABS1: Ύψος πρώτου τμήματος ακτής.

HABS2: Ύψος δεύτερου τμήματος ακτής.

AMP1: Πλάτος ημιτονοειδούς επιφάνειας στο πρώτο τμήμα της ακτής.

AMP2: Πλάτος ημιτονοειδούς επιφάνειας στο δεύτερο τμήμα της ακτής.

VISCOS: Κινηματική συνεκτικότητα.

VISINF: Πολλαπλασιαστής της κινηματικής συνεκτικότητας για την απόσβεση των κυματισμών:

VISINF >0: Πολλαπλασιαστής της κινηματικής συνεκτικότητας.

VISINF <0: VISINF = Μέγιστη τιμή του πολλαπλασιαστή της κινηματικής συνεκτικότητας.

XVIS1: Διαμήκης απόσταση πρώτου κόμβου με αυξημένη συνεκτικότητα από το έμβολο:

XVIS1 >0: Απόσταση από το έμβολο.

XVIS1 <0: 1 XVIS = ποσοστό επί του μήκους της δεξαμενής.

XVIS2: Διαμήκης απόσταση τελευταίου κόμβου με αυξημένη συνεκτικότητα από το έμβολο:

XVIS2 >0: Απόσταση από το έμβολο.

XVIS2 <0: 2 XVIS = ποσοστό επί του μήκους της δεξαμενής.

DPISV: Απόσταση από τον πυθμένα κατώτατου κόμβου με αυξημένη συνεκτικότητα:

DPISV >0: Απόσταση από τον πυθμένα.

DPISV <0: DPISV = ποσοστό επί του βάθους της δεξαμενής.

IDAT: Αριθμός των σημείων στα οποία καταγράφεται η χρονική ιστορία της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας.

IEXP: Βαθμός της καμπύλης αύξησης της συνεκτικότητας όταν $VISINF < 0$

XDAT: Διαμήκης θέση κόμβου καταγραφής της χρονικής ιστορίας της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας.

Amorgos v1

```

UVPVKET
113 1
NI__NJ__IGEX_JCUT_
3000 080 1 -1
IPST_IEAS_INTP_NWAB_
100 500 +0 +80
ISUR_ISPL_LINV_NORC_IPRI_
1 00 +1 +1 -002
NORU_NORP_IPIS_ISTR_IPER_
1 +2 4 03 001
NWES_NEAS_NSOT_LASP_NOSL_
1 +1 0 -2 +0
NSU__NSV__NSP__LAXU_LAXV_
2 2 60 +1 +1
MAXI_MAST_MAX1_NOBR_MODV_
500 70000 030 +3 +0
ISAV_KSAV_MSAV_
1000 050 100
JPRE_IMON_JMON_KCRT_
0 00 005 0000
GRAV_____VELIN_____SORMAX_____
9.81 0.00 -0.04
FACTOP_____TANMAX_____VOLSUR_____DYMAX_____ATTN_____
1.005 60. +2.0 0.00500 +0.0
DT0_____DELTAT_____PERIOD_____TIMEL_____TANIM_____
-.000 0.003 -3. -0.000 +100.
XFIRST_____XLAST_____DEAST_____DPISTV_____
0. 200. 100.0 0.00
AMPL0_____TSUNAM_____PISTON_____PADDLE_____PHASE_____
0.20 +0.0 +3. 0.00 -00.
URFU_____URFV_____URFP_____
0.5 0.5 +0.3
DEPTH_____DSUR_____DBOT_____DSIDE_____YMINT_____
3.04 0.005 0.020 0. 0.005
AKTI_____XABS1_____XABS2_____HABS1_____HABS2_____
00. 20. 10. 2.8 2.8
AMP1_____AMP2_____
0.1 0.05
VISCOS_____
1.00000E-6
VISINF_____XVIS1_____XVIS2_____DEPVIS_____
+1.e6 20. 40. +0.
IDAT_IEXP_
7 2
XDAT
10.
20.
30.
40.
50.
60.
89.

```

Amorgos v2

```

UVPVKET
113 1
NI__NJ__IGEX_JCUT_
3000 080 1 -1
IPST_IEAS_INTP_NWAB_
100 500 +0 +80
ISUR_ISPL_LINV_NORC_IPRI_
1 00 +1 +1 -002
NORU_NORP_IPIS_ISTR_IPER_
1 +2 4 03 001
NWES_NEAS_NSOT_LASP_NOSL_
1 +1 0 -2 +0
NSU__NSV__NSP__LAXU_LAXV_
2 2 60 +1 +1
MAXI_MAST_MAX1_NOBR_MODV_
500 70000 030 +3 +0
ISAV_KSAV_MSAV_
1000 050 100
JPRE_IMON_JMON_KCRT_
0 00 005 0000
GRAV_____VELIN_____SORMAX_____
9.81 0.00 -0.04
FACTOP_____TANMAX_____VOLSUR_____DYMAX_____ATTN_____
1.005 60. +2.0 0.00500 +0.0
DT0_____DELTAT_____PERIOD_____TIMEL_____TANIM_____
-.000 0.003 -3. -0.000 +100.
XFIRST_____XLAST_____DEAST_____DPISTV_____
0. 200. 100.0 0.00
AMPL0_____TSUNAM_____PISTON_____PADDLE_____PHASE_____
0.20 +0.0 +3. 0.00 -00.
URFU_____URFV_____URFP_____
0.5 0.5 +0.3
DEPTH_____DSUR_____DBOT_____DSIDE_____YMINT_____
3.04 0.005 0.020 0. 0.005
AKTI_____XABS1_____XABS2_____HABS1_____HABS2_____
00. 20. 10. 2.8 2.8
AMP1_____AMP2_____
0.1 0.05
VISCOS_____
1.00000E-6
VISINF_____XVIS1_____XVIS2_____DEPVIS_____
+1.e4 20. 40. +0.
IDAT_IEXP_
7 2
XDAT
10.
20.
30.
40.
50.
60.
89.

```

Amorgos v2a

```

UVPVKET
113 1
NI__NJ__IGEX_JCUT_
3000 080 1 -1
IPST_IEAS_INTP_NWAB_
100 500 +0 +80
ISUR_ISPL_LINV_NORC_IPRI_
1 00 +1 +1 -002
NORU_NORP_IPIS_ISTR_IPER_
1 +2 4 03 001
NWES_NEAS_NSOT_LASP_NOSL_
1 +1 0 -2 +0
NSU__NSV__NSP__LAXU_LAXV_
2 2 60 +1 +1
MAXI_MAST_MAX1_NOBR_MODV_
500 70000 030 +3 +0
ISAV_KSAV_MSAV_
1000 050 100
JPRE_IMON_JMON_KCRT_
0 00 005 0000
GRAV_____VELIN_____SORMAX_____
9.81 0.00 -0.04
FACTOP_____TANMAX_____VOLSUR_____DYMAX_____ATTN_____
1.005 60. +2.0 0.00500 +0.0
DT0_____DELTAT_____PERIOD_____TIMEL_____TANIM_____
-.000 0.003 -3. -0.000 +100.
XFIRST_____XLAST_____DEAST_____DPISTV_____
0. 200. 100.0 0.00
AMPL0_____TSUNAM_____PISTON_____PADDLE_____PHASE_____
0.20 +0.0 +3. -2.00 -00.
URFU_____URFV_____URFP_____
0.5 0.5 +0.3
DEPTH_____DSUR_____DBOT_____DSIDE_____YMINT_____
3.04 0.005 0.020 0. 0.005
AKTI_____XABS1_____XABS2_____HABS1_____HABS2_____
00. 20. 10. 2.8 2.8
AMP1_____AMP2_____
0.1 0.05
VISCOS_____
1.00000E-6
VISINF_____XVIS1_____XVIS2_____DEPVIS_____
+1.e4 20. 40. +0.
IDAT_IEXP_
7 2
XDAT
10.
20.
30.
40.
50.
60.
89.

```

Amorgos v3

```

UVPVKET
113 1
NI__NJ__IGEX_JCUT_
3000 080 1 -1
IPST_IEAS_INTP_NWAB_
100 500 +0 +80
ISUR_ISPL_LINV_NORC_IPRI_
1 00 +1 +1 -002
NORU_NORP_IPIS_ISTR_IPER_
1 +2 4 03 001
NWES_NEAS_NSOT_LASP_NOSL_
1 +1 0 -2 +0
NSU__NSV__NSP__LAXU_LAXV_
2 2 60 +1 +1
MAXI_MAST_MAX1_NOBR_MODV_
500 70000 030 +3 +0
ISAV_KSAV_MSAV_
1000 050 100
JPRE_IMON_JMON_KCRT_
0 00 005 0000
GRAV_____VELIN_____SORMAX_____
9.81 0.00 -0.04
FACTOP_____TANMAX_____VOLSUR_____DYMAX_____ATTN_____
1.005 60. +2.0 0.00500 +0.0
DT0_____DELTAT_____PERIOD_____TIMEL_____TANIM_____
-.000 0.003 -3. -0.000 +100.
XFIRST_____XLAST_____DEAST_____DPISTV_____
0. 200. 100.0 0.00
AMPL0_____TSUNAM_____PISTON_____PADDLE_____PHASE_____
0.20 +0.0 +3. 0.00 -00.
URFU_____URFV_____URFP_____
0.5 0.5 +0.3
DEPTH_____DSUR_____DBOT_____DSIDE_____YMINT_____
3.04 0.005 0.020 0. 0.005
AKTI_____XABS1_____XABS2_____HABS1_____HABS2_____
00. 20. 10. 2.8 2.8
AMP1_____AMP2_____
0.1 0.05
VISCOS_____
1.00000E-6
VISINF_____XVIS1_____XVIS2_____DEPVIS_____
+1.e3 20. 40. +0.
IDAT_IEXP_
7 2
XDAT
10.
20.
30.
40.
50.
60.
89.

```

Amorgos v4

```

UVPVKET
113 1
NI__NJ__IGEX_JCUT_
3000 080 1 -1
IPST_IEAS_INTP_NWAB_
100 500 +0 +80
ISUR_ISPL_LINV_NORC_IPRI_
1 00 +1 +1 -002
NORU_NORP_IPIS_ISTR_IPER_
1 +2 4 03 001
NWES_NEAS_NSOT_LASP_NOSL_
2 +2 0 -2 +0
NSU__NSV__NSP__LAXU_LAXV_
2 2 60 +1 +1
MAXI_MAST_MAX1_NOBR_MODV_
500 70000 030 +3 +0
ISAV_KSAV_MSAV_
1000 050 100
JPRE_IMON_JMON_KCRT_
0 00 005 0000
GRAV_____VELIN_____SORMAX_____
9.81 3.00 -0.04
FACTOP_____TANMAX_____VOLSUR_____DYMAX_____ATTN_____
1.005 60. +2.0 0.00500 +0.0
DT0_____DELTAT_____PERIOD_____TIMEL_____TANIM_____
-.000 0.003 -3. -0.000 +100.
XFIRST_____XLAST_____DEAST_____DPISTV_____
0. 200. 100.0 0.00
AMPL0_____TSUNAM_____PISTON_____PADDLE_____PHASE_____
0.00 +0.0 +3. -0.00 -00.
URFU_____URFV_____URFP_____
0.5 0.5 +0.3
DEPTH_____DSUR_____DBOT_____DSIDE_____YMINT_____
3.04 0.005 0.020 0. 0.005
AKTI_____XABS1_____XABS2_____HABS1_____HABS2_____
00. 20. 10. 2.8 2.8
AMP1_____AMP2_____
0.1 0.05
VISCOS_____
1.00000E-6
VISINF_____XVIS1_____XVIS2_____DEPVIS_____
-1.e4 20. 80. +0.
IDAT_IEXP_
7 -2
XDAT
10.
20.
30.
40.
50.
60.
89.
    
```

Kavala v1

```

UVPVKET
113 1
NI__NJ__IGEX_JCUT_
3000 080 1 -1
IPST_IEAS_INTP_NWAB_
000 500 +0 +80
ISUR_ISPL_LINV_NORC_IPRI_
1 00 +1 +1 -002
NORU_NORP_IPIS_ISTR_IPER_
1 +2 4 03 001
NWES_NEAS_NSOT_LASP_NOSL_
2 +2 0 -2 +0
NSU__NSV__NSP__LAXU_LAXV_
2 2 60 +1 +1
MAXI_MAST_MAX1_NOBR_MODV_
030 70000 030 +3 +0
ISAV_KSAV_MSAV_
1000 050 100
JPRE_IMON_JMON_KCRT_
0 00 005 0000
GRAV_____VELIN_____SORMAX_____
9.81 3.00 -0.04
FACTOP_____TANMAX_____VOLSUR_____DYMAX_____ATTN_____
1.005 60. +2.0 0.00500 +0.0
DT0_____DELTAT_____PERIOD_____TIMEL_____TANIM_____
-.000 0.005 -5. -0.000 +100.
XFIRST_____XLAST_____DEAST_____DPISTV_____
0. 200. 100.0 0.00
AMPL0_____TSUNAM_____PISTON_____PADDLE_____PHASE_____
0.20 +0.0 +0. -2.00 -00.
URFU_____URFV_____URFP_____
0.5 0.5 +0.3
DEPTH_____DSUR_____DBOT_____DSIDE_____YMINT_____
3.00 0.005 0.020 0. 0.005
AKTI_____XABS1_____XABS2_____HABS1_____HABS2_____
00. 20. 10. 2.8 2.8
AMP1_____AMP2_____
0.1 0.05
VISCOS_____
1.00000E-6
VISINF_____XVIS1_____XVIS2_____DEPVIS_____
+1.e4 20. 80. +0.
IDAT_IEXP_
7 2
XDAT
10.
20.
30.
40.
50.
60.
89.

```


Samos v1

```

UVPVKET
113 1
NI__NJ__IGEX_JCUT_
3000 080 1 -1
IPST_IEAS_INTP_NWAB_
100 500 +0 +80
ISUR_ISPL_LINV_NORC_IPRI_
1 00 +1 +1 -002
NORU_NORP_IPIS_ISTR_IPER_
1 +2 4 03 001
NWES_NEAS_NSOT_LASP_NOSL_
1 +1 0 -2 +0
NSU_NSV_NSP_LAXU_LAXV_
2 2 60 +1 +1
MAXI_MAST_MAX1_NOBR_MODV_
030 70000 030 +3 +0
ISAV_KSAV_MSAV_
1000 050 100
JPRE_IMON_JMON_KCRT_
0 00 005 0000
GRAV_____VELIN_____SORMAX_____
9.81_____0.00_____ -0.04
FACTOP_____TANMAX_____VOLSUR_____DYMAX_____ATTN_____
1.005_____60._____ +2.0_____0.00500 +0.0
DT0_____DELTAT_____PERIOD_____TIMEL_____TANIM_____
-.000_____0.005_____ -3._____ -0.000 +100.
XFIRST_____XLAST_____DEAST_____DPISTV_____
0._____200._____100.0_____0.00
AMPL0_____TSUNAM_____PISTON_____PADDLE_____PHASE_____
0.20_____+0.0_____ +3._____ +2.00 -00.
URFU_____URFV_____URFP_____
0.5_____0.5_____ +0.3
DEPTH_____DSUR_____DBOT_____DSIDE_____YMINT_____
3.04_____0.005_____0.020_____0._____0.005
AKTI_____XABS1_____XABS2_____HABS1_____HABS2_____
00._____20._____10._____2.8_____2.8
AMP1_____AMP2_____
0.1_____0.05
VISCOS_____
1.00000E-6
VISINF_____XVIS1_____XVIS2_____DEPVIS_____
+1.e4_____20._____80._____ +0.
IDAT_IEXP_
7 2
XDAT
10.
20.
30.
40.
50.
60.
89.

```

Wgen c1

```

UVPVKET
113 1
NI__NJ__IGEX_JCUT_
3000 080 2 -2
IPST_IEAS_INTP_NWAB_
100 500 +0 +80
ISUR_ISPL_LINV_NORC_IPRI_
1 00 +1 +1 -002
NORU_NORP_IPIS_ISTR_IPER_
1 +2 4 03 001
NWES_NEAS_NSOT_LASP_NOSL_
1 +1 0 -2 +0
NSU__NSV__NSP__LAXU_LAXV_
2 2 60 +1 +1
MAXI_MAST_MAX1_NOBR_MODV_
030 70000 030 +3 +0
ISAV_KSAV_MSAV_
1000 050 100
JPRE_IMON_JMON_KCRT_IPLO_
0 00 005 0000 +1
GRAV__VELIN__SORMAX__
9.81 0.00 -0.04
FACTOP__TANMAX__VOLSUR__DYMAX__ATTN__
1.005 60. +2.0 0.00500 +1.0
DT0__DELTAT__PERIOD__TIMEL__TANIM__
-.000 0.005 -3. -0.000 +100.
XFIRST__XLAST__DEAST__DPISTV__
0. 200. 100.0 0.00
AMPL0__TSUNAM__PISTON__PADDLE__PHASE__
0.20 +0.0 +3.0 -2.00 -00.
URFU__URFV__URFP__
0.5 0.5 +0.3
DEPTH__DSUR__DBOT__DSIDE__YMINT__
3.00 0.005 0.020 0. 0.005
AKTI__XABS1__XABS2__HABS1__HABS2__
00. 20. 10. 2.8 2.8
AMP1__AMP2__
0.1 0.05
VISCOS__
1.00000E-6
VISINF__XVIS1__XVIS2__DEPVIS__
-0.e9 60. 90. +0.
IDAT_IEXP_
7 0
XDAT
10.
20.
30.
40.
50.
60.
89.

```

Wgen c2

```

UVPVKET
113 1
NI__NJ__IGEX_JCUT_
3000 080 2 -2
IPST_IEAS_INTP_NWAB_
100 000 +0 +00
ISUR_ISPL_LINV_NORC_IPRI_
1 00 +1 +1 -002
NORU_NORP_IPIS_ISTR_IPER_
1 +2 4 03 001
NWES_NEAS_NSOT_LASP_NOSL_
1 +1 0 -2 +0
NSU_NSV_NSP_LAXU_LAXV_
2 2 60 +1 +1
MAXI_MAST_MAX1_NOBR_MODV_
030 70000 030 +3 +0
ISAV_KSAV_MSAV_
1000 050 100
JPRE_IMON_JMON_KCRT_IPLO_
0 00 005 0000 +1
GRAV_____VELIN_____SORMAX_____
9.81_____0.00_____ -0.04
FACTOP_____TANMAX_____VOLSUR_____DYMAX_____ATTN_____
1.005_____60._____ +2.0_____0.00500 +1.0
DT0_____DELTAT_____PERIOD_____TIMEL_____TANIM_____
-.000_____0.005_____ -2._____ -0.000 +100.
XFIRST_____XLAST_____DEAST_____DPISTV_____
0._____100._____000.0_____0.00
AMPL0_____TSUNAM_____PISTON_____PADDLE_____PHASE_____
0.10_____+0.0_____ +3.0_____ -2.00_____ -00.
URFU_____URFV_____URFP_____
0.5_____0.5_____ +0.3
DEPTH_____DSUR_____DBOT_____DSIDE_____YMINT_____
3.00_____0.005_____0.020_____0._____0.005
AKTI_____XABS1_____XABS2_____HABS1_____HABS2_____
50._____20._____00._____2.8_____2.8
AMP1_____AMP2_____
0.0_____0.00
VISCOS_____
1.00000E-6
VISINF_____XVIS1_____XVIS2_____DEPVIS_____
-0.e9_____60._____90._____ +0.
IDAT_IEXP_
7 0
XDAT
10.
20.
30.
40.
50.
60.
89.

```

Wgen c6

```

UVPVKET
111 1
NI__NJ__IGEX_JCUT_
2000 100 2 -2
IPST_IEAS_INTP_NWAB_
50 00 +1 +40
ISUR_ISPL_LINV_NORC_IPRI_
1 00 +1 +1 -002
NORU_NORP_IPIS_ISTR_IPER_
1 +2 4 02 001
NWES_NEAS_NSOT_LASP_NOSL_
1 +1 0 -2 +1
NSU__NSV__NSP__LAXU_LAXV_
2 2 60 +0 +0
MAXI_MAST_MAX1_NOBR_MODV_
030 70000 030 +3 +0
ISAV_KSAV_MSAV_
1000 050 100
JPRE_IMON_JMON_KCRT_IPLO_
0 00 005 0000 +1
GRAV_____VELIN_____SORMAX_____
9.81 0.00 -0.04
FACTOP_____TANMAX_____VOLSUR_____DYMAX_____ATTN_____
1.005 60. +2.0 0.00500 +0.0
DT0_____DELTAT_____PERIOD_____TIMEL_____TANIM_____
-0.005 0.0050 -5. -0.500 +200.
XFIRST_____XLAST_____DEAST_____DPISTV_____
0. 100. 0.0 1.0
AMPL0_____TSUNAM_____PISTON_____PADDLE_____PHASE_____
0.4 5. 0. 0. 0.
URFU_____URFV_____URFP_____
0.5 0.5 +0.3
DEPTH_____DSUR_____DBOT_____DSIDE_____YMINT_____
3.00 0.005 0.020 0.000 0.000
AKTI_____XABS1_____XABS2_____HABS1_____HABS2_____
50. 50. 00. 2.8 2.8
AMP1_____AMP2_____
0.0 0.0
VISCOS_____
1.00000E-6
VISINF_____XVIS1_____XVIS2_____DEPVIS_____
-0.e5 00. 00. +0.
IDAT_IEXP_
7 04
XDAT
10.
20.
30.
40.
50.
60.
99.

```


ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1]. Σημειώσεις του μαθήματος «Ειδικά θέματα μηχανικής των ρευστών»
Γ.Τζαμπίρας
- [2]. Σημειώσεις του μαθήματος «Βασικές αρχές ναυτικής και θαλάσσιας
υδροδυναμικής-θεωρία κυμάτων» Γ.Τριανταφύλλου
- [3]. Διπλωματική εργασία «Αριθμητική προσομοίωση τυχαίων
κυματισμών» Σ.Πολύζος
- [4]. On a numerical method for generating harmonic waves in a finite
2D tank. G.Tzabiras,S.Polyzos & V.Papakonstantinou 13th congress of
IMAM Oct. 2009

ΜΕΡΟΣ Β'

Πολυωνυμική παρεμβολή σε ανομοιόμορφα πλέγματα

Σ' αυτό το μέρος της διπλωματικής εργασίας γίνεται διερεύνηση της μεθόδου των πεπερασμένων όγκων ελέγχου με σχήματα ανώτερης τάξης μέσω της πολυωνυμικής προσέγγισης σε μη ισαπέχοντα πλέγματα.

Τα μη ισαπέχοντα πλέγματα χρησιμοποιούνται πολλές φορές σε περίπλοκες γεωμετρίες ή σε περιπτώσεις όπου εφαρμόζεται πύκνωση ή αραιώση έτσι ώστε να υπάρχει καλή προσέγγιση γύρω από ένα σώμα που θέλουμε να εξετάσουμε τη ροή που το περιβάλλει κοντά σε αυτό αλλά θα ήταν υπολογιστικά ασύμφορο να διατηρήσουμε την ίδια πυκνή διαμέριση μακριά απ το σώμα που τα φαινόμενα δεν είναι έντονα και οι κλίσεις των μεγεθών που προσεγγίζουμε είναι πολύ μικρές.

Το σχήμα που διερευνάται είναι παρόμοιο με το σχήμα QUICK (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinetics) του Leonard (1979) με τη διαφορά ότι οι κόμβοι του διακριτοποιημένου πεδίου δεν είναι ισαπέχοντες. Το γεγονός ότι στη βιβλιογραφία δεν υπάρχουν εκτενείς αναφορές για αυτό το σχήμα είχε ως αποτέλεσμα να «χτίσουμε» αυτό το σχήμα από την αρχή.

Στη συνέχεια έγινε μια επιφανειακή διερεύνηση για το αν αυτό το σχήμα μπορεί να εισαχθεί υπό TVD (Total Variation Diminishing) περιορισμούς όπου καταφέραμε να εκφράσουμε το σχήμα με τη γραμμική μορφή που απαιτείται, δεν έχει γίνει όμως έλεγχος για τα όρια (TVD Limiters) αν δηλαδή αυτά αλλάζουν σε μη ισαπέχοντα πλέγματα.

Στη συνέχεια έγινε μία πρώτη δοκιμή σε μία απλή μονοδιάστατη περίπτωση συναγωγής (μεταφοράς)- διάχυσης όπου περιγράφονται οι αλγεβρικές πράξεις, η εύρεση των συντελεστών, τα διαγράμματα των περιπτώσεων και τα συνοπτικά σχόλια.

Η ακόλουθη διερεύνηση έγινε από κοινού με το συνάδελφο κ^ο Παπαδόπουλο Μάρκο.

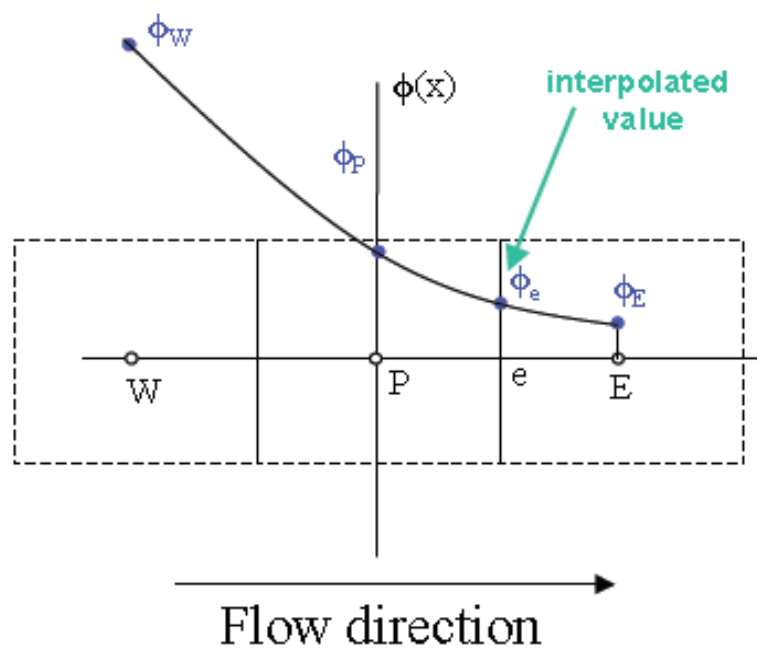
QUADRATIC INTERPOLATION

Αναζητούμε ένα πολυώνυμο παρεμβολής τέτοιο ώστε :

$$p(x)_c = \Phi_c \quad p'(x)_c = \Phi'_c \quad \text{και} \quad p''(x)_c = \Phi''_c$$

Προκύπτει λοιπόν (Taylor) ότι:

$$p(x) = \frac{\Phi''_c}{2} (x-c)^2 + \Phi'_c (x-c) + \Phi_c$$



Στην περίπτωσή μας :

$$\Phi_e = \frac{D2}{2} (x_e - x_p)^2 + D1(x_e - x_p) + D0$$

Όπου D_2, D_1, D_0 η δεύτερη, η πρώτη και η μηδενική παράγωγος στο σημείο e .

Αντικαθιστώντας όπου x_e τις τιμές x_E, x_P και x_W αντίστοιχα προκύπτουν οι παράγωγοι:

$$D_2 = 2 \left[\frac{\Phi_E - \Phi_P}{x_E - x_P} - \frac{\Phi_P - \Phi_W}{x_P - x_W} \right] \frac{1}{x_E - x_W}$$

$$D_1 = \left[\frac{\Phi_E - \Phi_P}{x_E - x_P} - \frac{D_2}{2} (x_E - x_P) \right] \Rightarrow$$

$$D_1 = \left[\frac{\Phi_E - \Phi_P}{x_E - x_P} - \left[\frac{\Phi_E - \Phi_P}{x_E - x_P} - \frac{\Phi_P - \Phi_W}{x_P - x_W} \right] \frac{x_E - x_P}{x_E - x_W} \right]$$

$$D_0 = \Phi_P$$

Τελικά για *upstream* διαφοράση προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \Phi_e &= \left[\frac{\Phi_E - \Phi_P}{x_E - x_P} - \frac{\Phi_P - \Phi_W}{x_P - x_W} \right] \frac{1}{x_E - x_W} (x_e - x_P)^2 + \\ &+ \left[\frac{\Phi_E - \Phi_P}{x_E - x_P} - \left[\frac{\Phi_E - \Phi_P}{x_E - x_P} - \frac{\Phi_P - \Phi_W}{x_P - x_W} \right] \frac{x_E - x_P}{x_E - x_W} \right] (x_e - x_P) + \Phi_P \end{aligned}$$

$$\Phi_e = \Phi_E \left[\frac{(x_e - x_P)(x_e - x_W)}{(x_E - x_P)(x_E - x_W)} \right] + \Phi_P \left[1 - \frac{(x_e - x_P)(x_e - x_E)}{(x_P - x_W)(x_E - x_W)} - \frac{(x_e - x_P)(x_e - x_W)}{(x_E - x_P)(x_E - x_W)} \right] +$$

$$+ \Phi_W \left[\frac{(x_e - x_P)(x_e - x_E)}{(x_P - x_W)(x_E - x_W)} \right]$$

Και αντίστοιχα:

$$\Phi_w = \Phi_P \left[\frac{(x_w - x_W)(x_w - x_{WW})}{(x_P - x_W)(x_P - x_{WW})} \right] + \Phi_W \left[1 - \frac{(x_w - x_W)(x_w - x_P)}{(x_W - x_{WW})(x_P - x_{WW})} - \frac{(x_w - x_W)(x_w - x_{WW})}{(x_P - x_W)(x_P - x_{WW})} \right] +$$

$$+ \Phi_{WW} \left[\frac{(x_w - x_W)(x_w - x_P)}{(x_W - x_{WW})(x_P - x_{WW})} \right]$$

Θέτοντας:

$$UE1 = \frac{(x_e - x_P)(x_e - x_W)}{(x_E - x_P)(x_E - x_W)} \quad UE2 = \frac{(x_e - x_P)(x_e - x_E)}{(x_P - x_W)(x_E - x_W)} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\Phi_e = UE1\Phi_E + [1 - (UE1 + UE2)]\Phi_P + UE2\Phi_W}$$

και

$$UW1 = \frac{(x_w - x_W)(x_w - x_{WW})}{(x_P - x_W)(x_P - x_{WW})} \quad UW2 = \frac{(x_w - x_W)(x_w - x_P)}{(x_W - x_{WW})(x_P - x_{WW})} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\Phi_w = UW1\Phi_P + [1 - (UW1 + UW2)]\Phi_W + UW2\Phi_{WW}}$$

Θεωρώντας ότι τα σημεία e , w βρίσκονται στο μεσοδιάστημα μεταξύ των κόμβων P-E και W-P αντίστοιχα δηλαδή

$$(x_E - x_P) = \Delta x \quad \text{και} \quad (x_e - x_P) = \frac{\Delta x}{2}$$

$$(x_P - x_W) = \Delta x \quad \text{και} \quad (x_w - x_W) = \frac{\Delta x}{2}$$

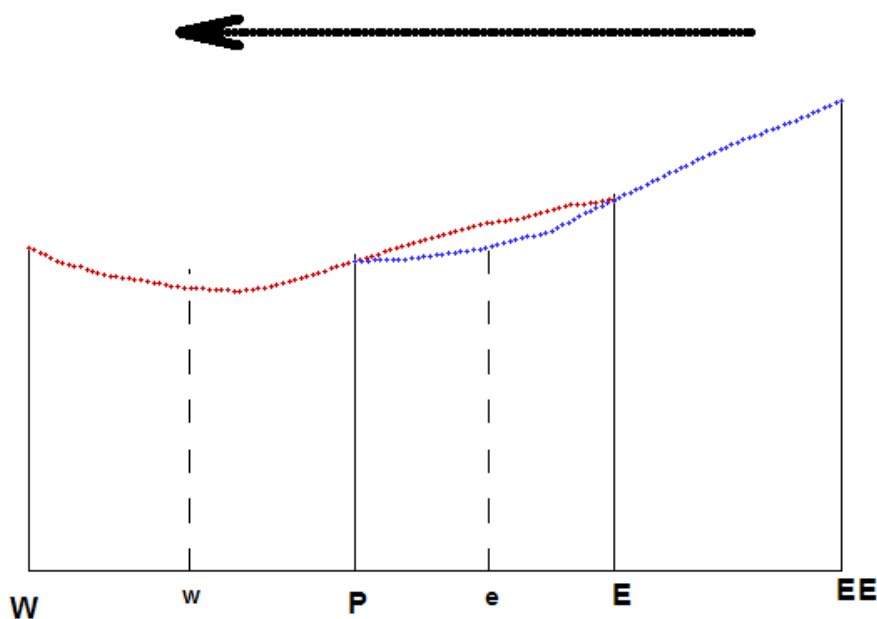
Προκύπτουν οι μεταβλητοί συντελεστές $UE1, UE2, UW1$ και $UW2$

$$UE1 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x_P - x_W}{x_E - x_W} \right), \quad UE2 = -\frac{1}{4} \frac{(x_E - x_P)^2}{(x_P - x_W)(x_E - x_W)}$$

$$UW1 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x_W - x_{WW}}{x_P - x_{WW}} \right), \quad UW2 = -\frac{1}{4} \frac{(x_P - x_W)^2}{(x_W - x_{WW})(x_P - x_{WW})}$$

Όπου φαίνεται ότι οι παραπάνω συντελεστές είναι ανεξάρτητοι των e και w όπως ήταν αναμενόμενο.

Κατ' αντιστοιχία τα ίδια ισχύουν και για *downstream* διαφόριση:



$$\Phi_e = \Phi_P \left[\frac{(x_e - x_E)(x_e - x_{EE})}{(x_P - x_E)(x_P - x_{EE})} \right] + \Phi_E \left[1 - \frac{(x_e - x_E)(x_e - x_P)}{(x_E - x_{EE})(x_P - x_{EE})} - \frac{(x_e - x_E)(x_e - x_{EE})}{(x_P - x_E)(x_P - x_{EE})} \right] + \Phi_{EE} \left[\frac{(x_e - x_E)(x_e - x_P)}{(x_E - x_{EE})(x_P - x_{EE})} \right]$$

$$\Phi_w = \Phi_W \left[\frac{(x_w - x_P)(x_w - x_E)}{(x_W - x_P)(x_W - x_E)} \right] + \Phi_P \left[1 - \frac{(x_w - x_P)(x_w - x_W)}{(x_P - x_E)(x_W - x_E)} - \frac{(x_P - x_w)(x_E - x_w)}{(x_P - x_W)(x_E - x_W)} \right] + \Phi_E \left[\frac{(x_w - x_P)(x_w - x_W)}{(x_P - x_E)(x_W - x_E)} \right]$$

$$DE1 = \frac{(x_e - x_E)(x_e - x_{EE})}{(x_P - x_E)(x_P - x_{EE})} \quad , \quad DE2 = \frac{(x_e - x_E)(x_e - x_P)}{(x_E - x_{EE})(x_P - x_{EE})}$$

$$\Phi_e = DE1\Phi_P + [1 - (DE1 + DE2)]\Phi_E + DE2\Phi_{EE}$$

$$DW1 = \frac{(x_w - x_P)(x_w - x_E)}{(x_W - x_P)(x_W - x_E)} \quad , \quad DW2 = \frac{(x_w - x_P)(x_w - x_W)}{(x_P - x_E)(x_W - x_E)}$$

$$\Phi_w = DW1\Phi_W + [1 - (DW1 + DW2)]\Phi_P + DW2\Phi_E$$

Θεωρώντας ότι τα σημεία e ,w βρίσκονται στο μεσοδιάστημα μεταξύ των κόμβων P-E και W-P αντίστοιχα δηλαδή

$$(x_P - x_E) = -\Delta x \quad (x_e - x_E) = -\frac{\Delta x}{2} \quad (x_W - x_P) = -\Delta x \quad (x_w - x_P) = -\frac{\Delta x}{2}$$

$$DE1 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x_E - x_{EE}}{x_P - x_{EE}} \right), \quad DE2 = -\frac{1}{4} \frac{(x_E - x_P)^2}{(x_E - x_{EE})(x_P - x_{EE})}$$

$$DW1 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x_P - x_E}{x_W - x_E} \right), \quad DW2 = -\frac{1}{4} \frac{(x_W - x_P)^2}{(x_P - x_E)(x_W - x_E)}$$

Αν θεωρήσουμε ότι το Δx είναι σταθερό καθ' όλη τη διαδρομή οι μεταβλητοί συντελεστές γίνονται σταθεροί.

$$UE1=3/8 \quad UE2=-1/8 \quad UW1=3/8 \quad UW2=-1/8$$

$$DE1=3/8 \quad DE2=-1/8 \quad DW1=3/8 \quad DW2=-1/8$$

Προκύπτει λοιπόν η προσέγγιση QUICK:

UPSTREAM:

$$\Phi_e = \frac{3}{8} \Phi_E + \frac{6}{8} \Phi_P - \frac{1}{8} \Phi_W$$

$$\Phi_w = \frac{3}{8} \Phi_P + \frac{6}{8} \Phi_W - \frac{1}{8} \Phi_{WW}$$

DOWNSTREAM:

$$\Phi_e = \frac{3}{8} \Phi_P + \frac{6}{8} \Phi_E - \frac{1}{8} \Phi_{EE}$$

$$\Phi_w = \frac{3}{8} \Phi_W + \frac{6}{8} \Phi_P - \frac{1}{8} \Phi_E$$

Upstream			
east	Μεταβλητό Δx	Μεταβλητό Δx στο κέντρο	Σταθερό Δx
UE1	$\frac{(x_e - x_p)(x_e - x_w)}{(x_E - x_p)(x_E - x_w)}$	$\frac{1}{4} \left(1 + \frac{x_p - x_w}{x_E - x_w} \right)$	$\frac{3}{8}$
UE2	$\frac{(x_e - x_p)(x_e - x_E)}{(x_p - x_w)(x_E - x_w)}$	$-\frac{1}{4} \frac{(x_E - x_p)^2}{(x_p - x_w)(x_E - x_w)}$	$-\frac{1}{8}$
$\Phi_e = UE1\Phi_E + [1 - (UE1 + UE2)]\Phi_p + UE2\Phi_w$			
west	Μεταβλητό Δx	Μεταβλητό Δx στο κέντρο	Σταθερό Δx
UW1	$\frac{(x_w - x_w)(x_w - x_{ww})}{(x_p - x_w)(x_p - x_{ww})}$	$\frac{1}{4} \left(1 + \frac{x_w - x_{ww}}{x_p - x_{ww}} \right)$	$\frac{3}{8}$
UW2	$\frac{(x_w - x_w)(x_w - x_p)}{(x_w - x_{ww})(x_p - x_{ww})}$	$-\frac{1}{4} \frac{(x_p - x_w)^2}{(x_w - x_{ww})(x_p - x_{ww})}$	$-\frac{1}{8}$
$\Phi_w = UW1\Phi_p + [1 - (UW1 + UW2)]\Phi_w + UW2\Phi_{ww}$			

Downstream			
east	Μεταβλητό Δx	Μεταβλητό Δx στο κέντρο	Σταθερό Δx
DE1	$\frac{(x_e - x_E)(x_e - x_{EE})}{(x_p - x_E)(x_p - x_{EE})}$	$\frac{1}{4} \left(1 + \frac{x_E - x_{EE}}{x_p - x_{EE}} \right)$	$\frac{3}{8}$
DE2	$\frac{(x_e - x_E)(x_e - x_p)}{(x_E - x_{EE})(x_p - x_{EE})}$	$-\frac{1}{4} \frac{(x_E - x_p)^2}{(x_E - x_{EE})(x_p - x_{EE})}$	$-\frac{1}{8}$
$\Phi_e = DE1\Phi_p + [1 - (DE1 + DE2)]\Phi_E + DE2\Phi_{EE}$			
west	Μεταβλητό Δx	Μεταβλητό Δx στο κέντρο	Σταθερό Δx
DW1	$\frac{(x_w - x_p)(x_w - x_E)}{(x_w - x_p)(x_w - x_E)}$	$\frac{1}{4} \left(1 + \frac{x_p - x_E}{x_w - x_E} \right)$	$\frac{3}{8}$
DW2	$\frac{(x_w - x_p)(x_w - x_w)}{(x_p - x_E)(x_w - x_E)}$	$-\frac{1}{4} \frac{(x_w - x_p)^2}{(x_p - x_E)(x_w - x_E)}$	$-\frac{1}{8}$
$\Phi_w = DW1\Phi_w + [1 - (DW1 + DW2)]\Phi_p + DW2\Phi_E$			

Πίνακας Μεταβλητών Συντελεστών

Για Upstream μεταβολές θετότητας $\frac{x_P - x_W}{x_E - x_W} = a$ προκύπτουν οι συντελεστές Σταθερού

Δx στο κέντρο:

$$UE1 = \frac{a+1}{4} \quad \text{και} \quad UE2 = \frac{1}{4} \left(2 - \frac{a^2+1}{a} \right)$$

Εν τέλει:

$$\Phi_e = \frac{a^2+a}{4a} \Phi_E + \frac{a+1}{4a} \Phi_P - \frac{(a-1)^2}{4a} \Phi_W \quad \Rightarrow \quad \text{για} \quad r = \frac{\Phi_P - \Phi_W}{\Phi_E - \Phi_P}$$

$$\Phi_e = \Phi_P + \frac{1}{2} \left[\frac{a+1}{2} + \frac{(a-1)^2}{2a} r \right] (\Phi_E - \Phi_P)$$

Δηλαδή

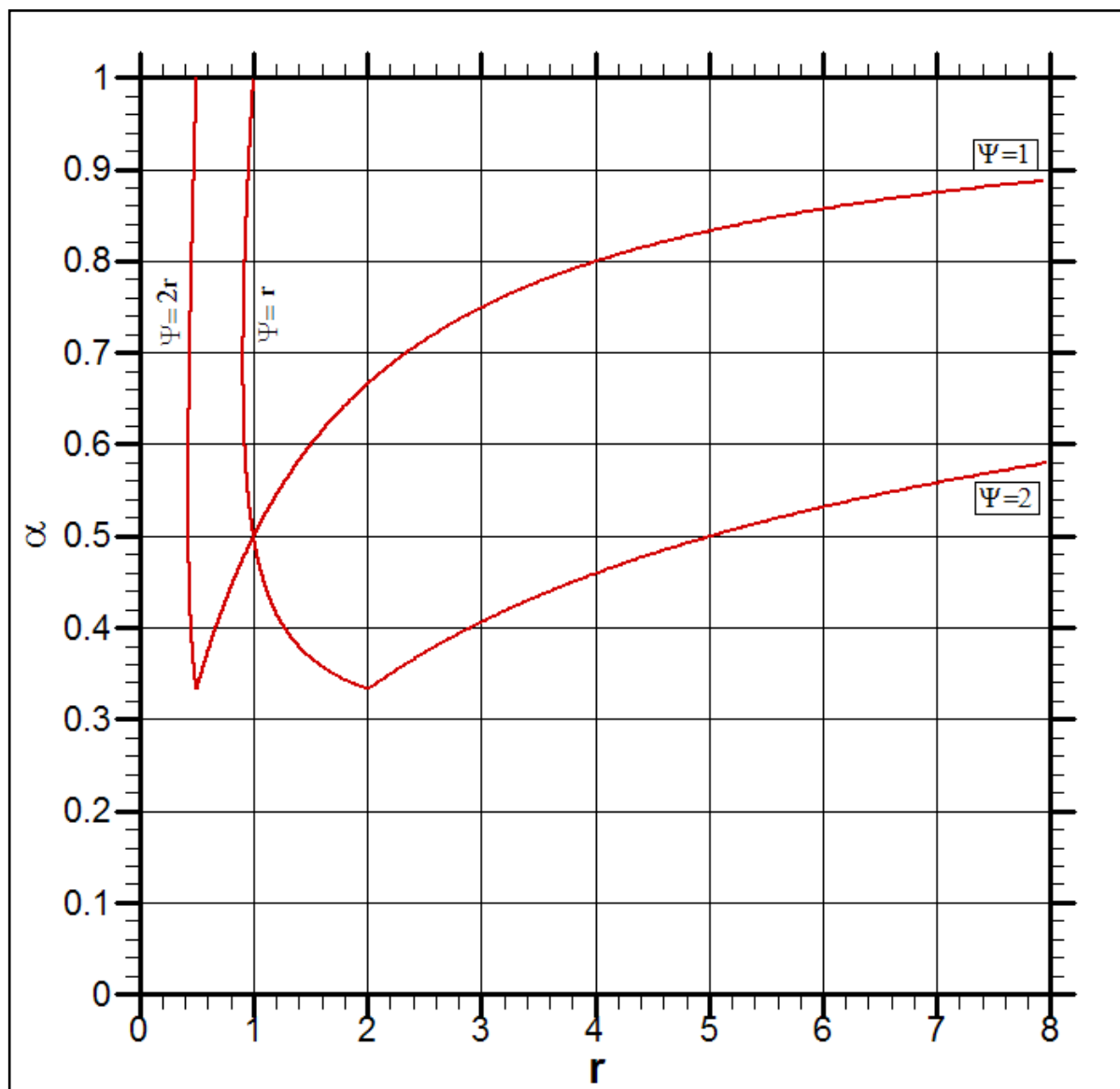
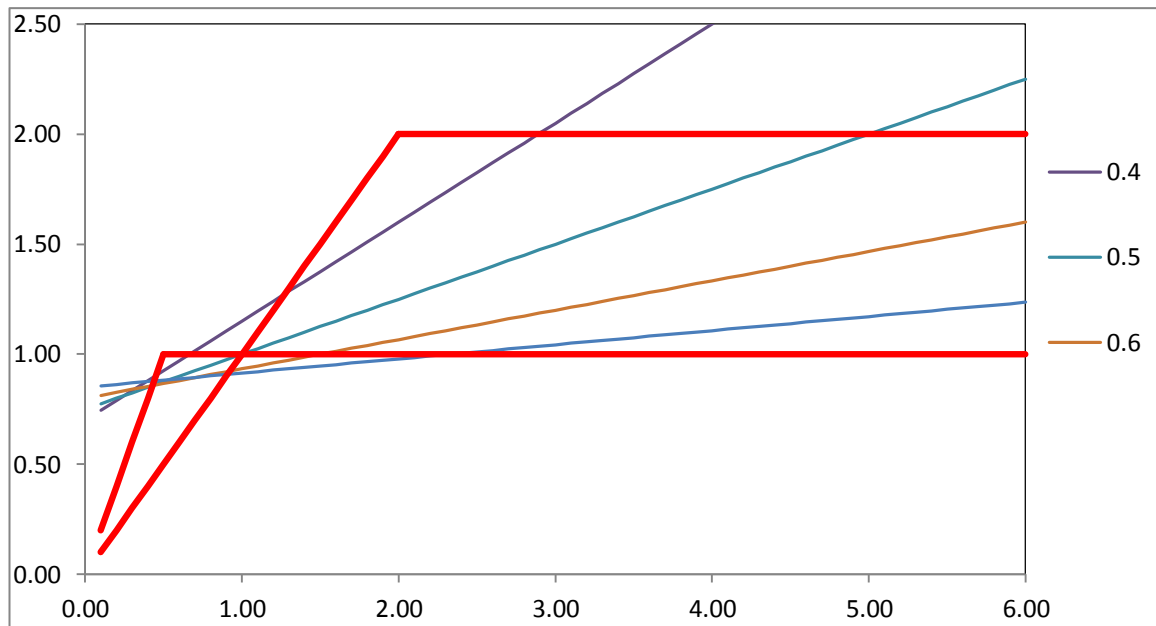
$$\Psi(r) = \frac{a+1}{2} + \frac{(a-1)^2}{2a} r$$

Τα όρια για TVD σχήματα δεύτερης τάξεως είναι:

$$\text{Για } 0 < r < 1, \quad r < \Psi(r) < 2r \quad \text{και} \quad \Psi(r) < 1$$

$$\text{Για } r > 1, \quad \Psi(r) < r \quad \text{και} \quad 1 < \Psi(r) < 2$$

Προκύπτουν λοιπόν τα παρακάτω διαγράμματα $\Psi(r)$ -r και a-r :



Από τα προηγούμενα διαγράμματα βλέπουμε ότι η μόνη περίπτωση όπου πληρείται η συνθήκη $\Psi(1)=1$ είναι για $a=0.5$ δηλαδή στο σχήμα QUICK ενώ στις υπόλοιπες περιπτώσεις παρουσιάζεται ασυνέχεια κοντά στην περιοχή του $(1,1)$. Επίσης για a μικρότερο της τιμής 0.33 δεν υπάρχει καμία περιοχή που να ανταποκρίνεται. Σημειώνεται ότι για $r < 0.4$ βρισκόμαστε εκτός σχήματος TVD ανεξαρτήτου a .

Από την πρώτη στήλη του προηγούμενου πίνακα παίρνουμε:

$$\frac{x_e - x_P}{x_E - x_P} = \lambda$$

$$\Phi_e = \Phi_P + \frac{1}{2} \left[2\lambda(\lambda - \alpha\lambda + \alpha) + \frac{2\lambda(1-\lambda)(a-1)^2}{a} r \right] (\Phi_E - \Phi_P)$$

Δηλαδή:

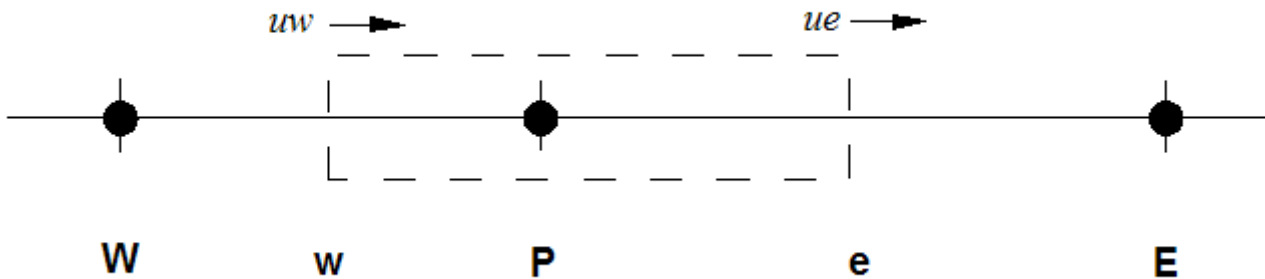
$$\Psi(r) = \left[2\lambda(\lambda - \alpha\lambda + \alpha) + \frac{2\lambda(1-\lambda)(a-1)^2}{a} r \right]$$

Απουσία πηγών η μόνιμη συναγωγή και διάχυση κάποιας ιδιότητας Φ σε δεδομένο μονοδιάστατο πεδίο ροής ταχύτητας u είναι:

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)$$

Και για να διατηρείται η συνέχεια:

$$\frac{d}{dx}(\rho u) = 0$$



$$(\rho u A \phi)_e - (\rho u A \phi)_w = \Gamma A \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_e - \Gamma A \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_w$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση της συνέχειας παίρνουμε:

$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w = 0$$

Θέτοντας δύο μεταβλητές F και D για να εκφράσουμε τη συναγωγική διακύμανση και διάχυση αντίστοιχα παίρνουμε:

$$F = \rho u \quad \text{και} \quad D = \frac{\Gamma}{\delta x}$$

$$D_w = \frac{\Gamma}{\delta x_{WP}} \quad D_e = \frac{\Gamma}{\delta x_{PE}}, \quad F_w = \rho u_w \quad F_e = \rho u_e$$

Υπολογισμός συντελεστών για ενδιάμεσους κόμβους:

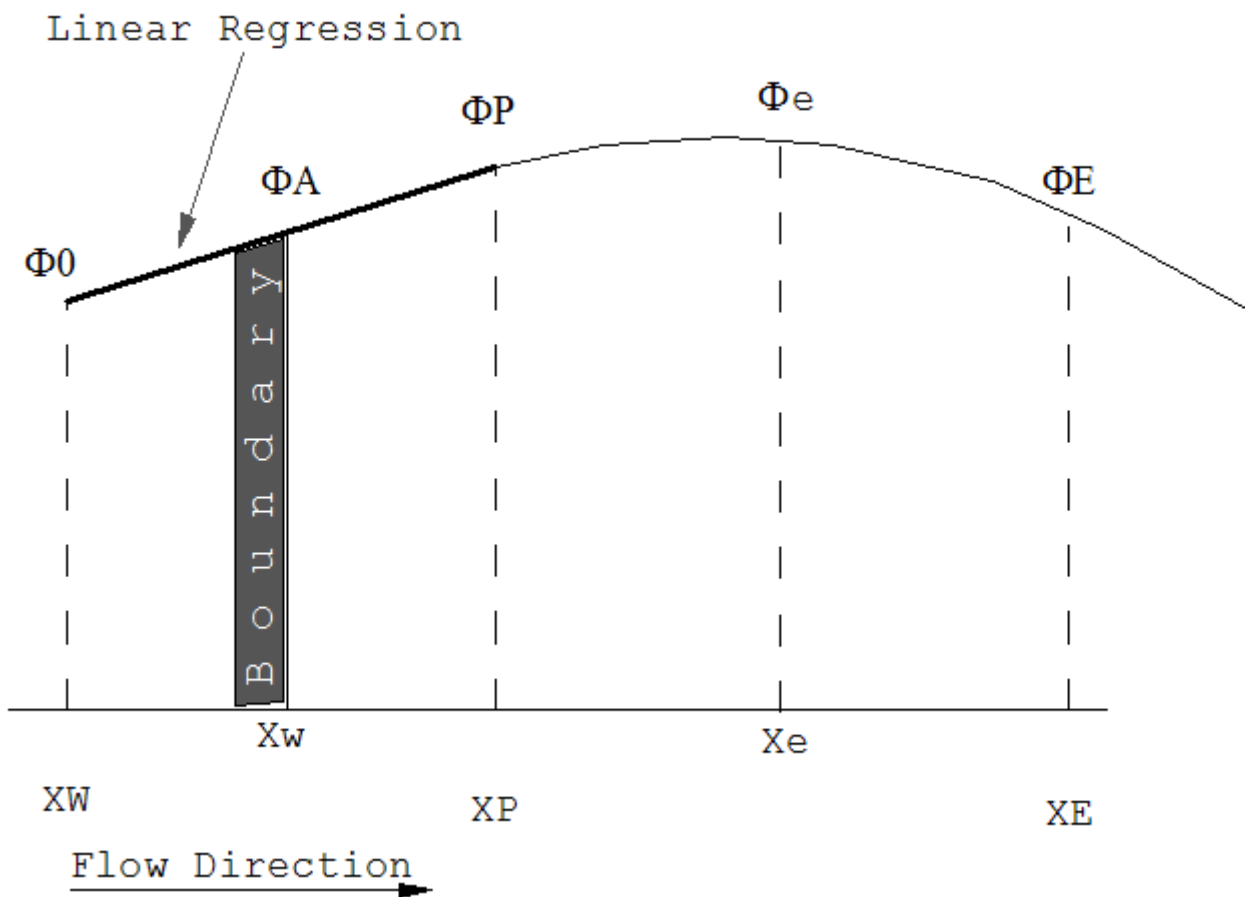
$$F_e \Phi_e - F_w \Phi_w = D_e (\Phi_E - \Phi_P) - D_w (\Phi_P - \Phi_W)$$

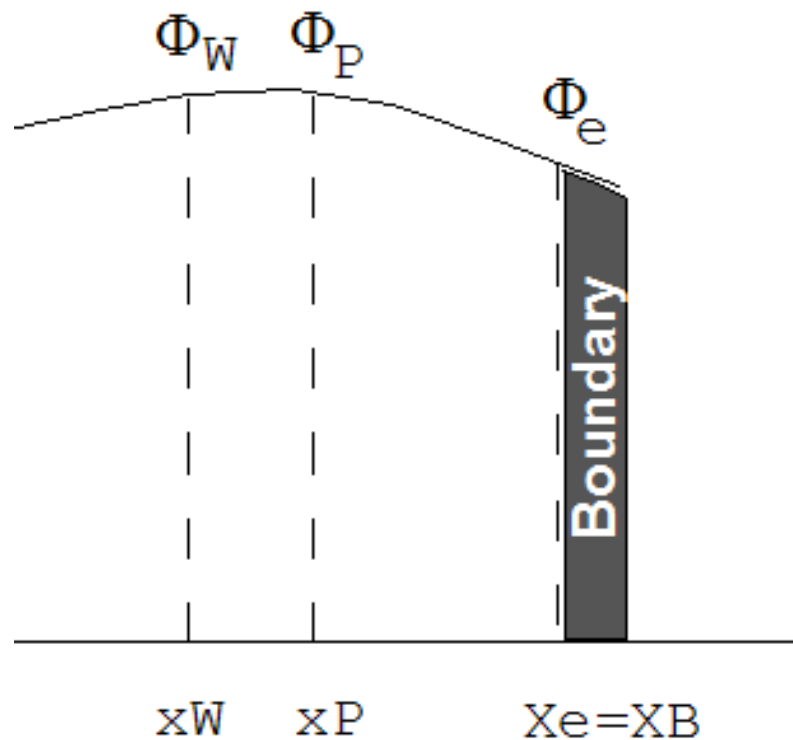
$$a_P \Phi_P = a_W \Phi_W + a_E \Phi_E + a_{WW} \Phi_{WW}$$

Από τις εκφράσεις των Φ_e και Φ_w προκύπτει ο παρακάτω πίνακας συντελεστών.

a_W	a_E	a_{WW}	a_P
$F_w [1 - (UW1 + UW2)] + D_w - F_e UE2$	$D_e - F_e UE1$	$F_w UW2$	$a_E + a_W + a_{WW} + (F_e - F_w)$

Όπου οι τιμές των $UE1$, $UE2$, $UW1$, $UW2$ μπορούν να βρεθούν από τον προηγούμενο πίνακα μεταβλητών συντελεστών (μεταβλητό Δx στο κέντρο).





Για να υπολογίσουμε τον πρώτο κόμβο κάνουμε προεκβολή στο εσωτερικό του συνόρου χρησιμοποιώντας γραμμική παρεμβολή έτσι ώστε:

$$\Phi_0 = \Phi_W = 2\Phi_A - \Phi_P, \quad x_P - x_w = x_w - x_W$$

Προκύπτει λοιπόν:

$$\Phi_e = UE1\Phi_E + (1 - UE1 - 2UE2)\Phi_P + 2UE2\Phi_A$$

Για τον προσδιορισμό της κλίσης στο σύνορο πρέπει να ικανοποιείται η εξίσωση του πολυωνύμου:

$$\Phi(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$$

$$\beta_0 = \Phi_w + \frac{x_E x_W (\Phi_P - \Phi_w)}{(x_P - x_W)(x_E - x_P)} + \frac{x_P x_W (\Phi_E - \Phi_w)}{(x_E - x_W)(x_E - x_P)}$$

$$\beta_1 = \frac{(x_E + x_W)(\Phi_P - \Phi_w)}{(x_P - x_W)(x_E - x_P)} - \frac{(x_P + x_W)(\Phi_E - \Phi_w)}{(x_E - x_W)(x_E - x_P)}$$

$$\beta_2 = \frac{(\Phi_E - \Phi_w)}{(x_E - x_W)(x_E - x_P)} - \frac{(\Phi_P - \Phi_w)}{(x_P - x_W)(x_E - x_P)}$$

Προκύπτει λοιπόν:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_i = \frac{(\Phi_P - \Phi_w)(x_E + x_W - 2x_i)}{(x_P - x_W)(x_E - x_P)} + \frac{(\Phi_E - \Phi_w)(2x_i - x_P - x_W)}{(x_E - x_W)(x_E - x_P)}$$

Και αντίστοιχα για τα σύνορα ανάντι και κατόντι (A και B αντίστοιχα):

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_A = \frac{(\Phi_P - \Phi_A)(x_E - x_A)}{(x_P - x_A)(x_E - x_P)} - \frac{(\Phi_E - \Phi_A)(x_P - x_A)}{(x_E - x_A)(x_E - x_P)}$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_B = \frac{(\Phi_B - \Phi_W)(2x_B - x_P - x_W)}{(x_B - x_W)(x_B - x_P)} - \frac{(\Phi_P - \Phi_W)(x_B - x_W)}{(x_P - x_W)(x_B - x_P)}$$

Έχουμε λοιπόν:

$$F_e [UE1\Phi_E + (1-UE1-2UE2)\Phi_P + 2UE2\Phi_A] - F_A \Phi_A =$$

$$= D_e (\Phi_E - \Phi_P) - D_A \left[\frac{(\Phi_P - \Phi_A)(x_E - x_A)}{(x_P - x_A)(x_E - x_P)} - \frac{(\Phi_E - \Phi_A)(x_P - x_A)}{(x_E - x_A)(x_E - x_P)} \right]$$

$$\underbrace{\left[F_e - F_e UE1 - 2F_e UE2 + \frac{2D_A(x_E - x_A)}{(x_E - x_P)} + D_e \right]}_{a_P} \Phi_P =$$

$$\underbrace{\left[D_e + \frac{2D_A(x_P - x_A)^2}{(x_E - x_A)(x_E - x_P)} - F_e UE1 \right]}_{a_E} \Phi_E + \underbrace{\left[F_A + 2D_A \left(1 + \frac{x_P - x_A}{x_E - x_A} \right) - 2F_e UE2 \right]}_{-S_P} \Phi_A$$

$$a_P = a_E + (F_e - F_A) - S_P$$

Για τον δεύτερο κόμβο προκύπτει αντίστοιχα:

$$\underbrace{\left[F_e - F_e UE1 - F_e UE2 - F_w UW1 + D_e + D_w \right]}_{a_P} \Phi_P =$$

$$\underbrace{(D_e - F_e UE1)}_{a_E} \Phi_E + \underbrace{(D_w + F_w - F_e UE2 - F_w UW1 - 2F_w UW2)}_{a_W} \Phi_W + \underbrace{2F_w UW2}_{-S_P} \Phi_A$$

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_A) - S_P$$

Στον τελευταίο κόμβο πριν το σύνορο έχουμε:

$$F_B \Phi_B - F_w [UW1\Phi_P + (1-UW1+UW2)\Phi_W + UW2\Phi_{WW}] =$$

$$= \Gamma_B \left[\frac{(\Phi_B - \Phi_W)(2x_B - x_P - x_W)}{(x_B - x_W)(x_B - x_P)} - \frac{(\Phi_P - \Phi_W)(x_B - x_W)}{(x_P - x_W)(x_B - x_P)} \right] - D_w (\Phi_P - \Phi_W)$$

Οπότε προκύπτει:

$$\left[\underbrace{\frac{2D_B(x_B - x_W)}{x_P - x_W} + D_W - F_W UW1}_{a_P} \right] \Phi_P =$$

$$= \left[\underbrace{\frac{2D_B(x_B - x_W)}{x_P - x_W} - \frac{2D_B(2x_B - x_P - x_W)}{x_B - x_W} + D_W - F_w UW1 - F_w UW2 + F_W}_{a_W} \right] \Phi_W +$$

$$+ \underbrace{[F_w UW2]}_{a_{WW}} \Phi_{WW} + \left[\underbrace{\frac{2D_B(2x_B - x_P - x_W)}{x_B - x_W} - F_B}_{-S_P} \right] \Phi_B$$

Προκύπτει λοιπόν ο παρακάτω πίνακας συντελεστών:

Node	Type	a_{ww}	a_w	a_E	$-S_P$
1	Non Uniform	0	0	$D_e + \frac{2D_A(x_P - x_A)^2}{(x_E - x_A)(x_E - x_P)} - F_eUE1$	$F_A + 2D_A \left(1 + \frac{x_P - x_A}{x_E - x_A}\right) - 2F_eUE2$
	QUICK	0	0	$D_e + \frac{1}{3}D_A - \frac{3}{8}F_e$	$F_A + \frac{8}{3}D_A + \frac{1}{4}F_e$
2	Non Uniform	0	$D_w + F_w - F_eUE2 - F_wUW1 - 2F_wUW2$	$D_e - F_eUE1$	$2F_wUW2$
	QUICK	0	$D_w + \frac{1}{8}F_e + \frac{7}{8}F_w$	$D_e - \frac{3}{8}F_e$	$-\frac{1}{4}F_w$
3÷ n-1	Non Uniform	F_wUW2	$F_w[1 - (UW1 + UW2)] + D_w - F_eUE2$	$D_e - F_eUE1$	0
	QUICK	$-\frac{1}{8}F_w$	$D_w + \frac{1}{8}F_e + \frac{3}{4}F_w$	$D_e - \frac{3}{8}F_e$	0
n	Non Uniform	F_wUW2	$\frac{2D_B(x_B - x_w)}{x_P - x_w} - \frac{2D_B(2x_B - x_P - x_w)}{x_B - x_w} + D_w - F_wUW1 - F_wUW2 + F_w$	0	$\frac{2D_B(2x_B - x_P - x_w)}{x_B - x_w} - F_B$
	QUICK	$-\frac{1}{8}F_w$	$D_w + \frac{1}{3}D_B + \frac{3}{4}F_w$	0	$\frac{8}{3}D_B - F_B$

Θεωρούμε την περίπτωση απλής μόνιμης μονοδιάστατης ροής με τα ακόλουθα δεδομένα:

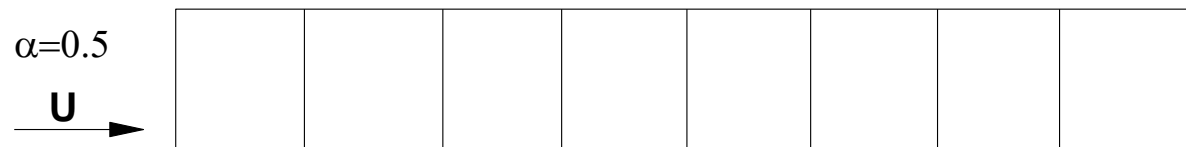
$$\rho = 1 \text{ kg/m}^3$$

$$\Gamma = 0.1 \text{ kg/m} \cdot \text{s}$$

$$\Phi_A = 1$$

$$\Phi_B = 0$$

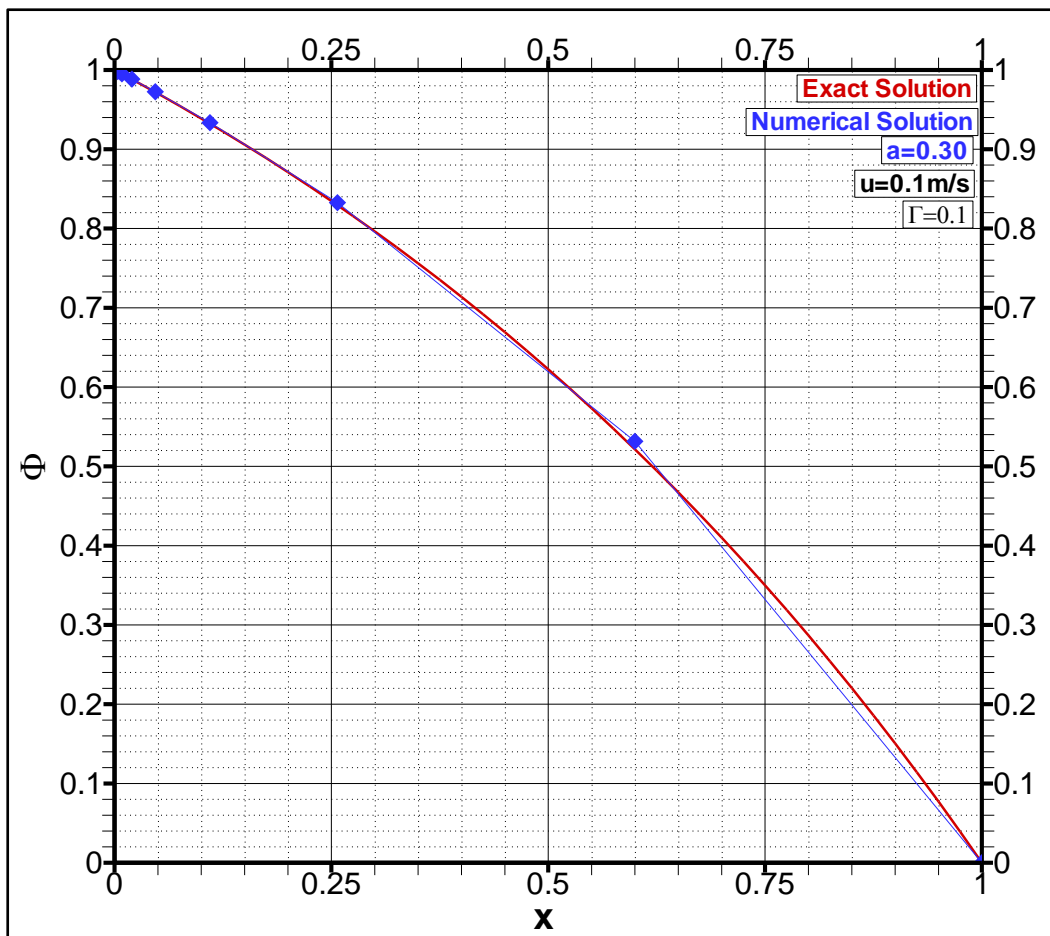
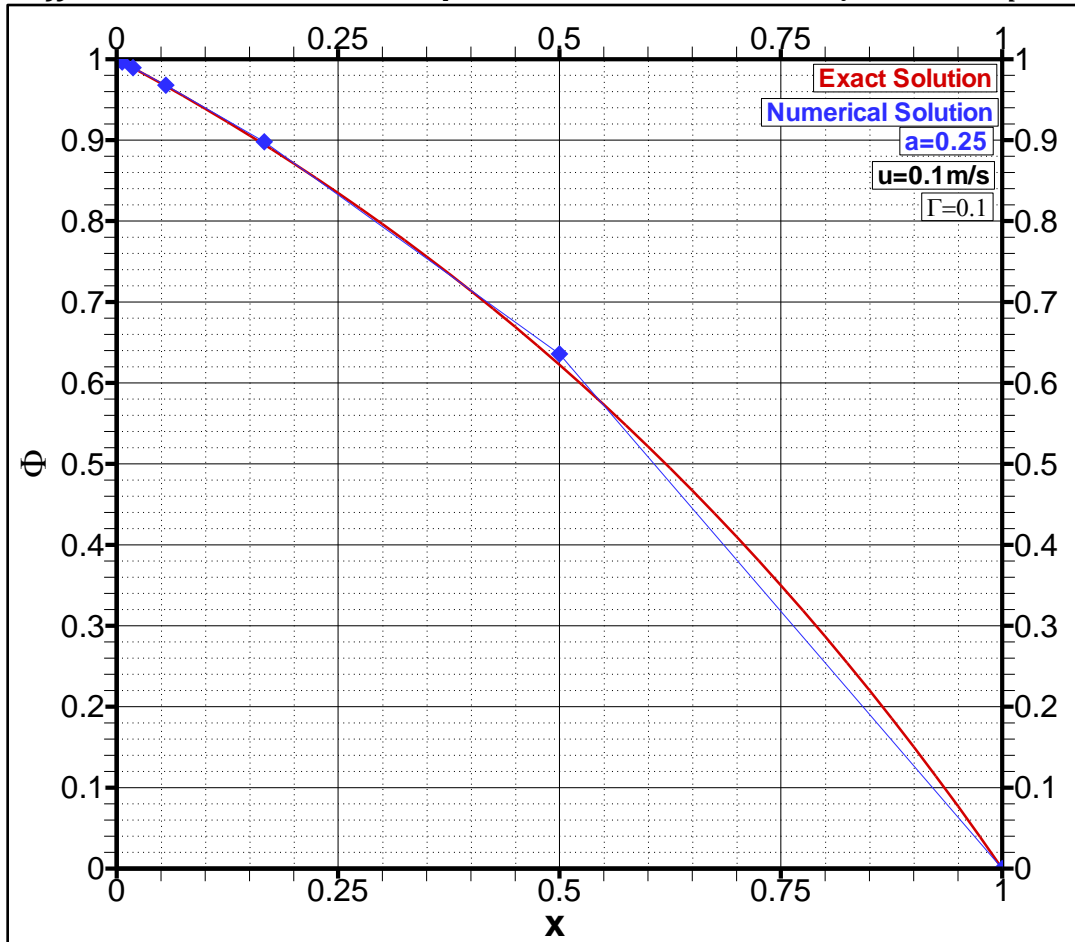
Προσπαθούμε λοιπόν να βρούμε τις τιμές της μεταβλητής Φ για διάφορες τιμές της ταχύτητας και για διάφορες τιμές του γεωμετρικού συντελεστή (α) όπου $\frac{x_P - x_W}{x_E - x_W} = \alpha$

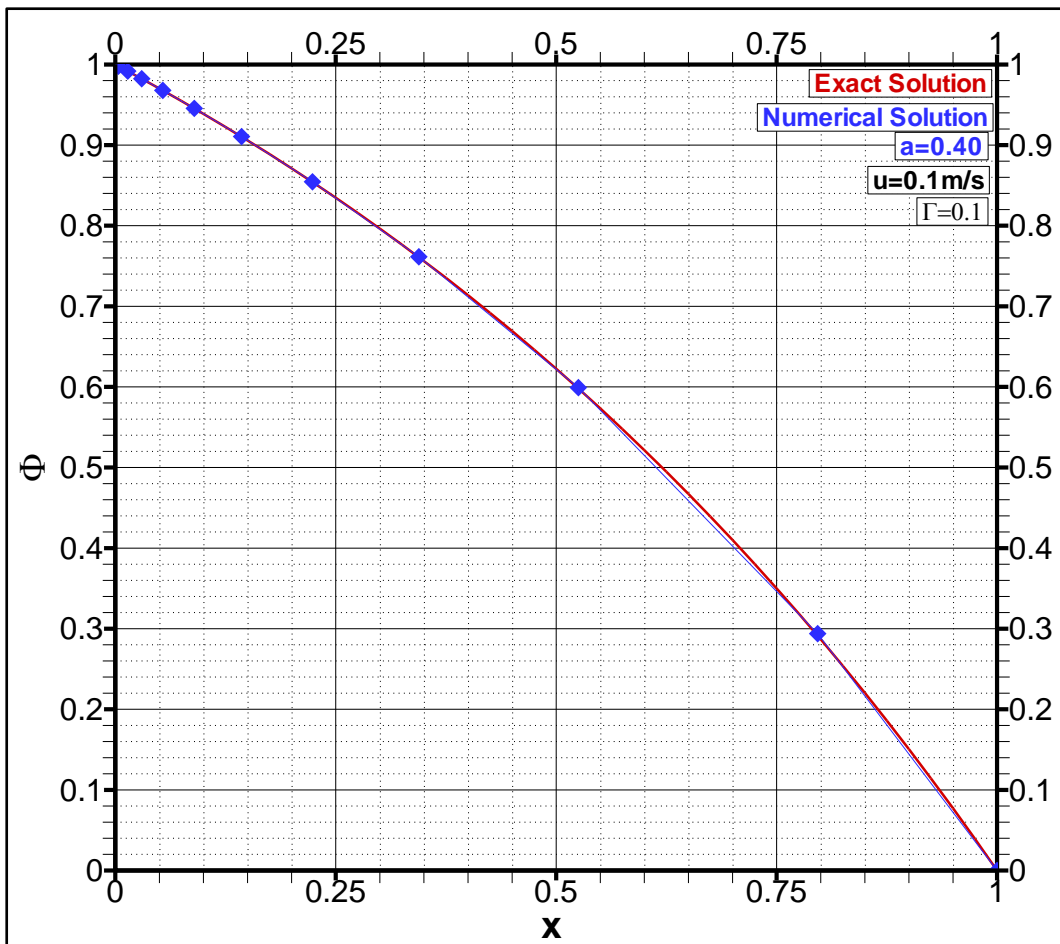
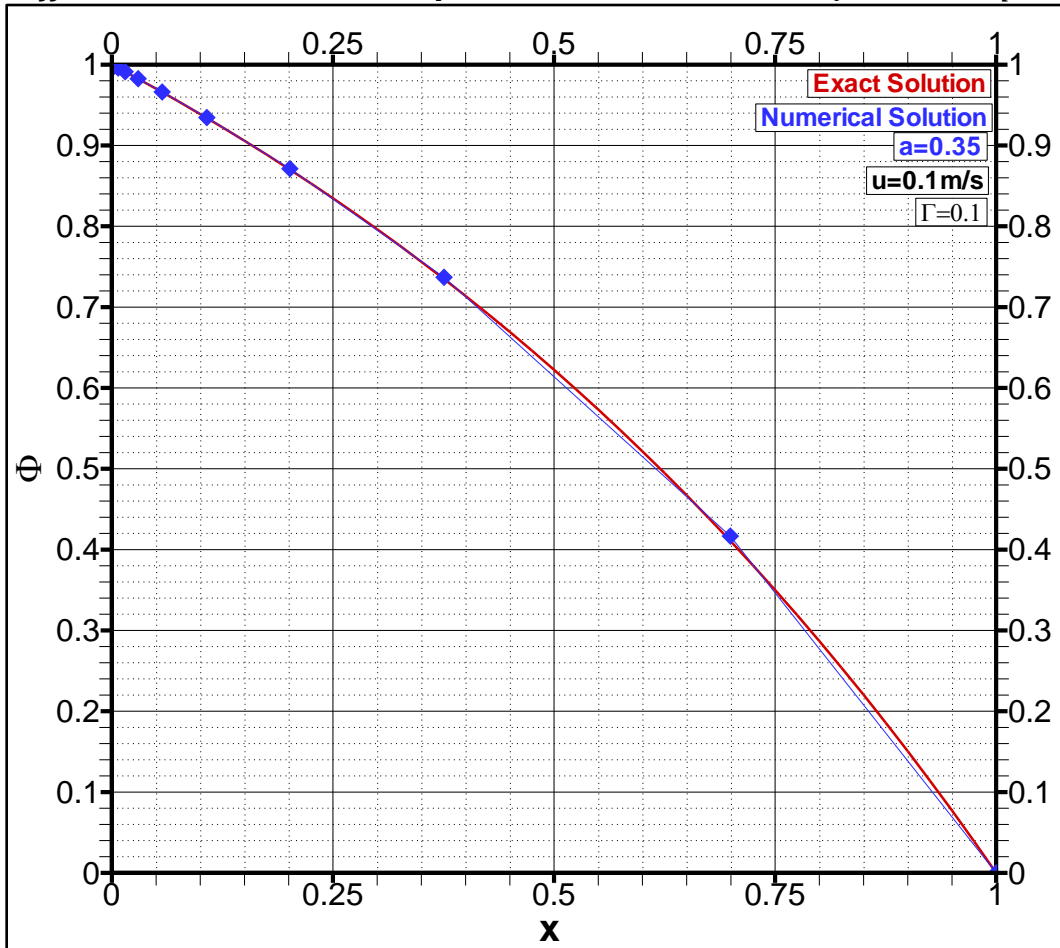


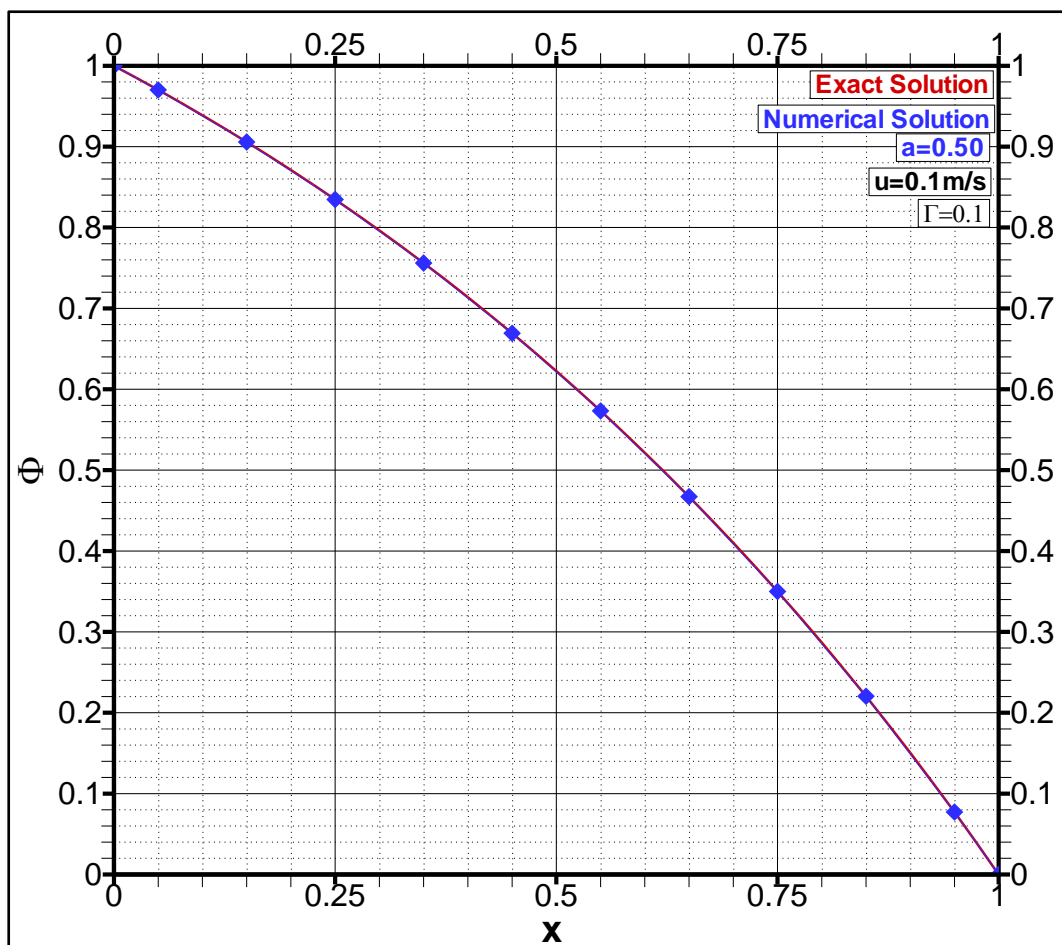
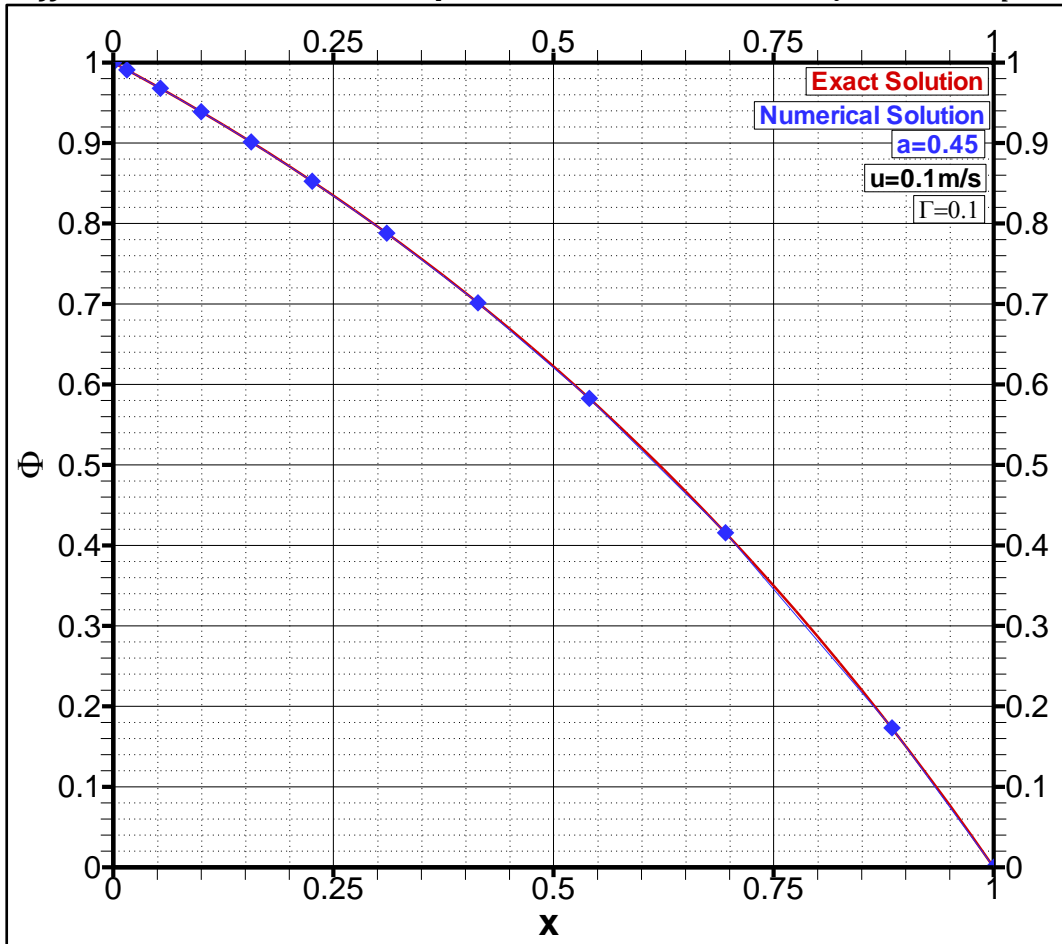
Η ακριβής λύση (Exact Solution) είναι η λύση της διαφορικής εξίσωσης και είναι:

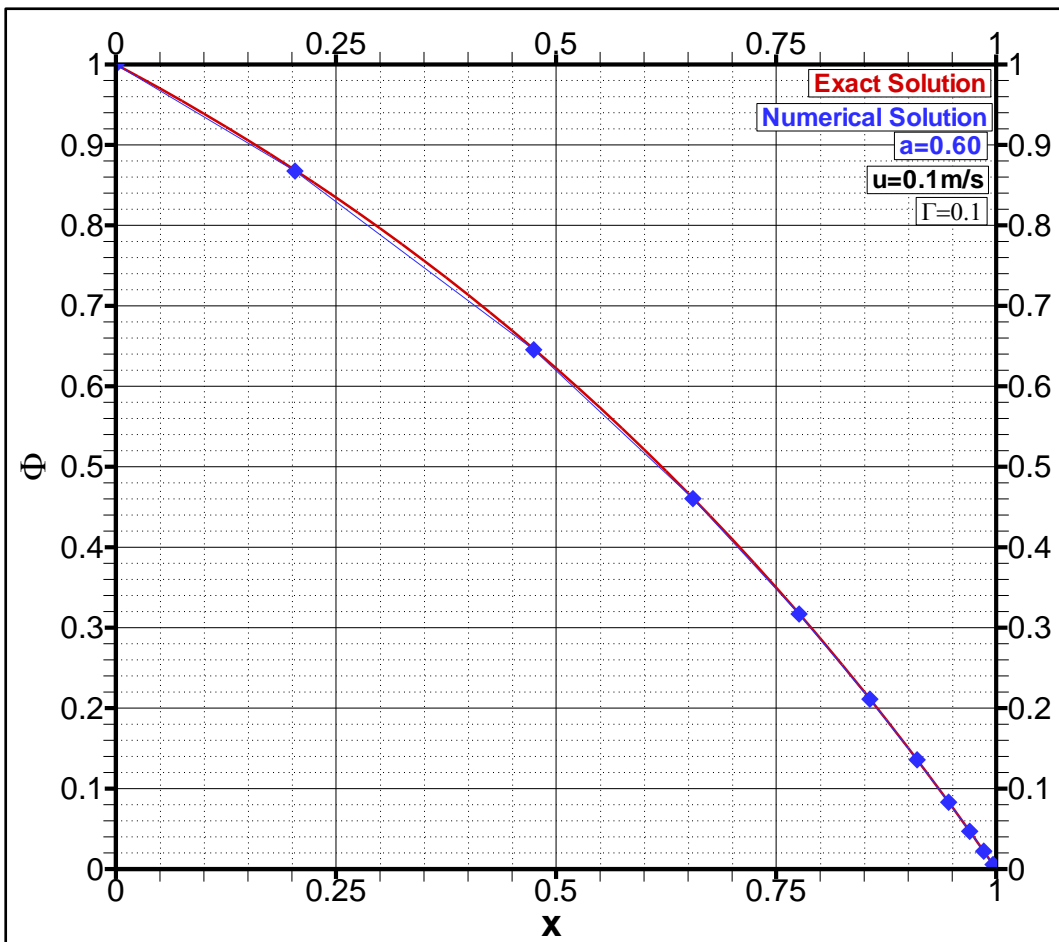
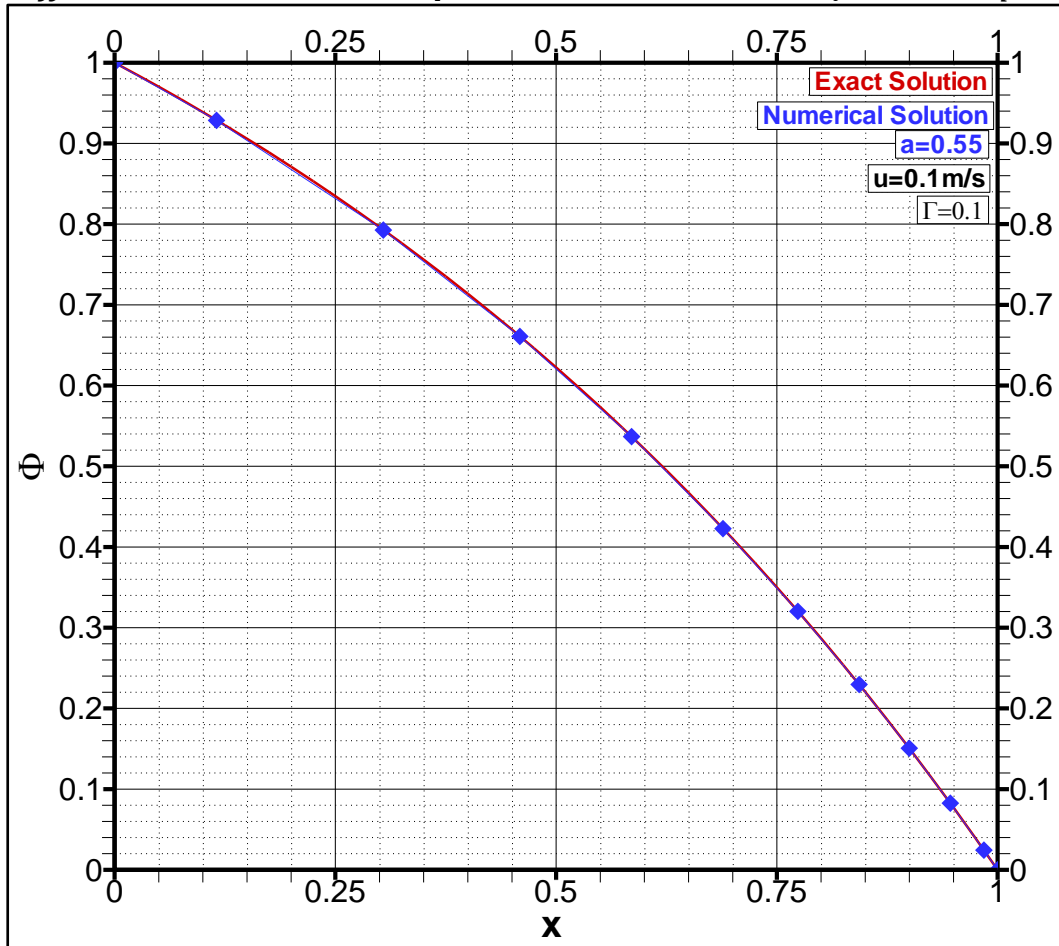
$$\Phi(x) = \Phi_A + (\Phi_B - \Phi_A) \left(\frac{e^{(\rho u x / \Gamma)} - 1}{e^{(\rho u L / \Gamma)} - 1} \right)$$

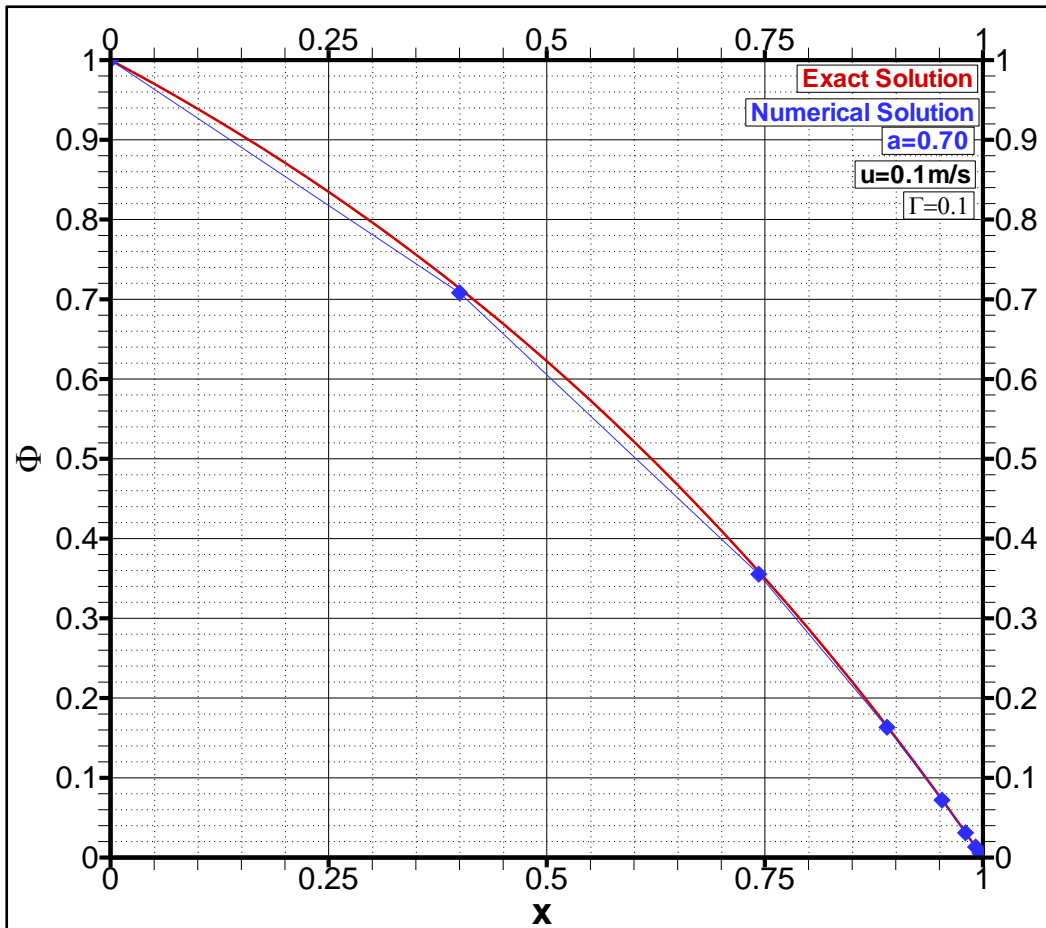
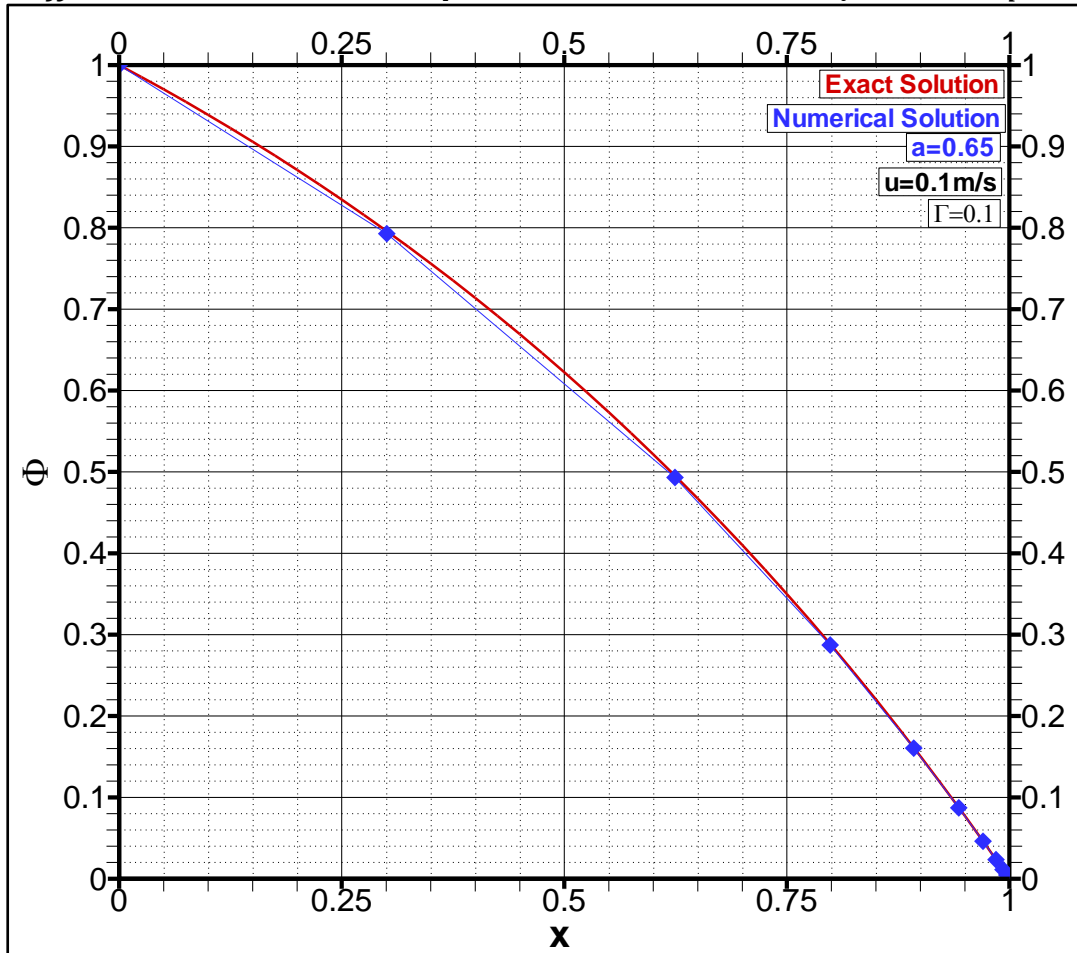
Προκύπτουν λοιπόν τα διαγράμματα για $U = 0.1, 0.5, 1, 1.5 \text{ m/s}$ αντίστοιχα.

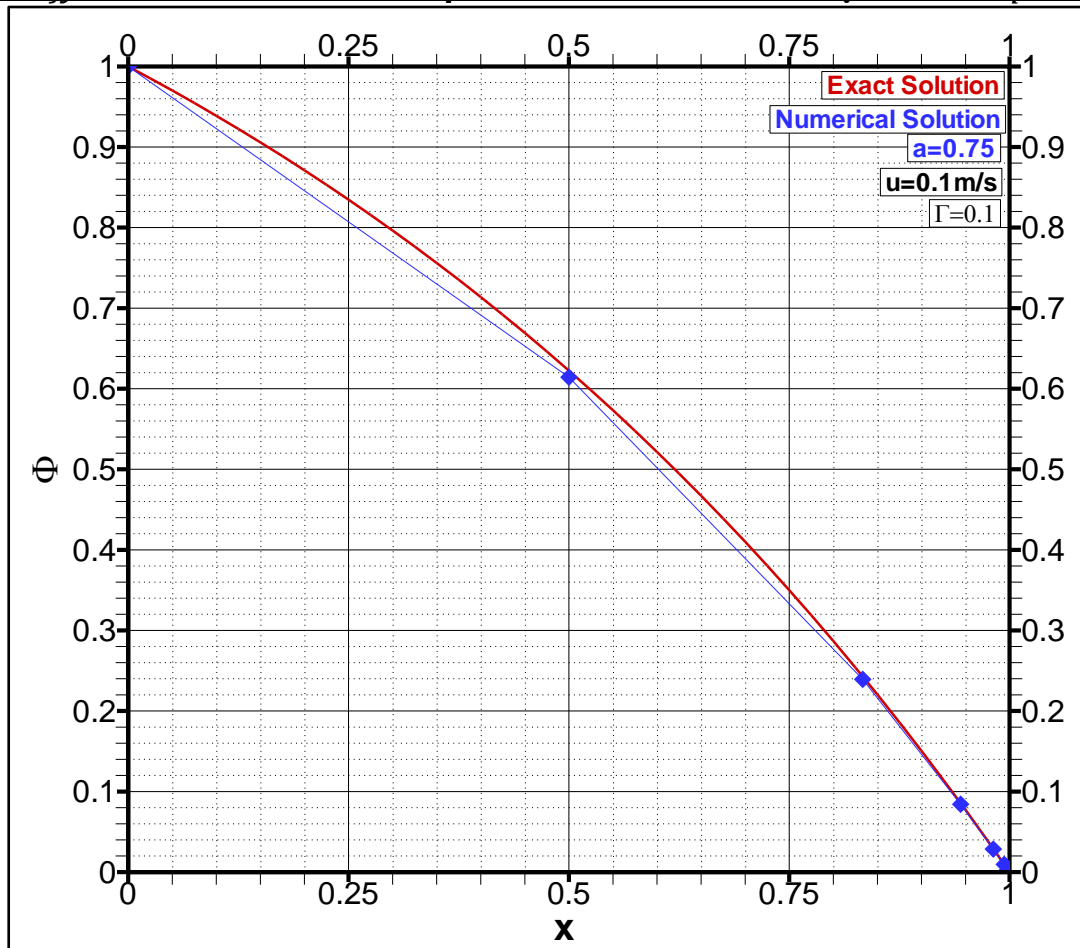


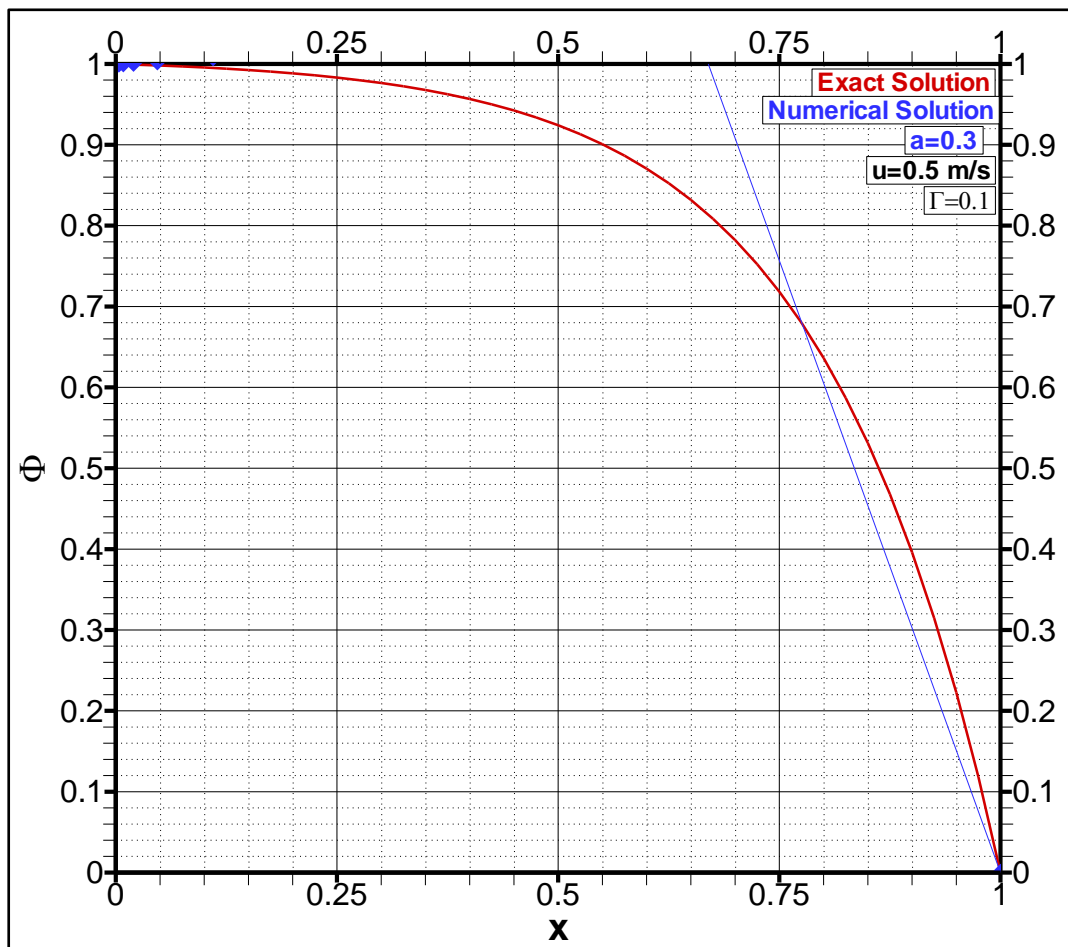
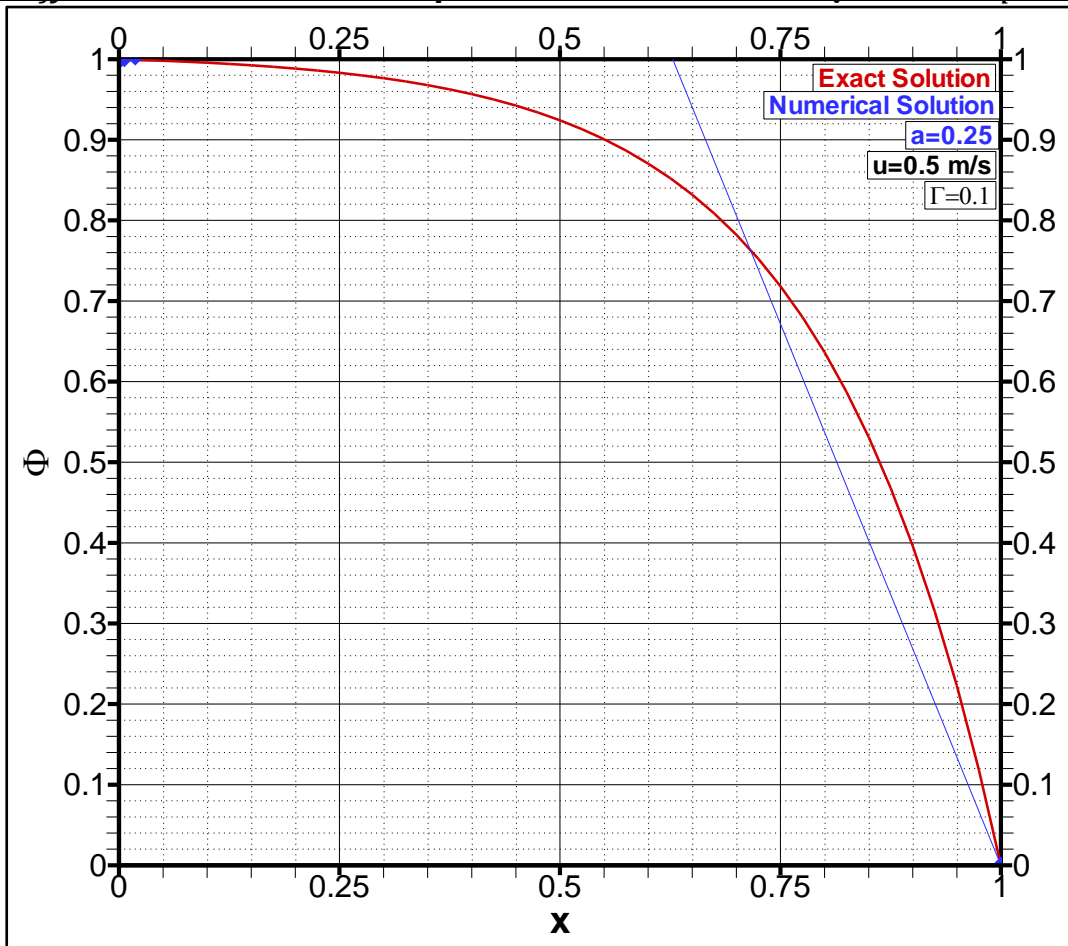


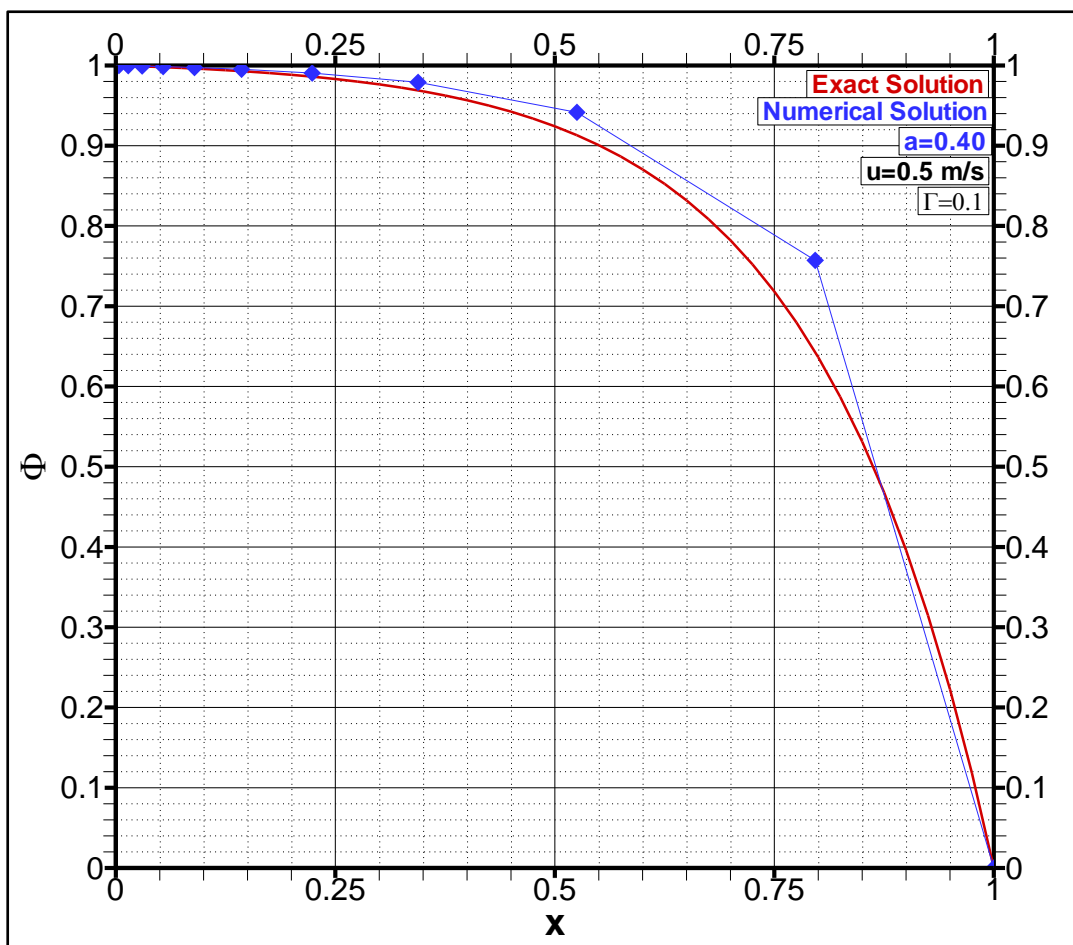
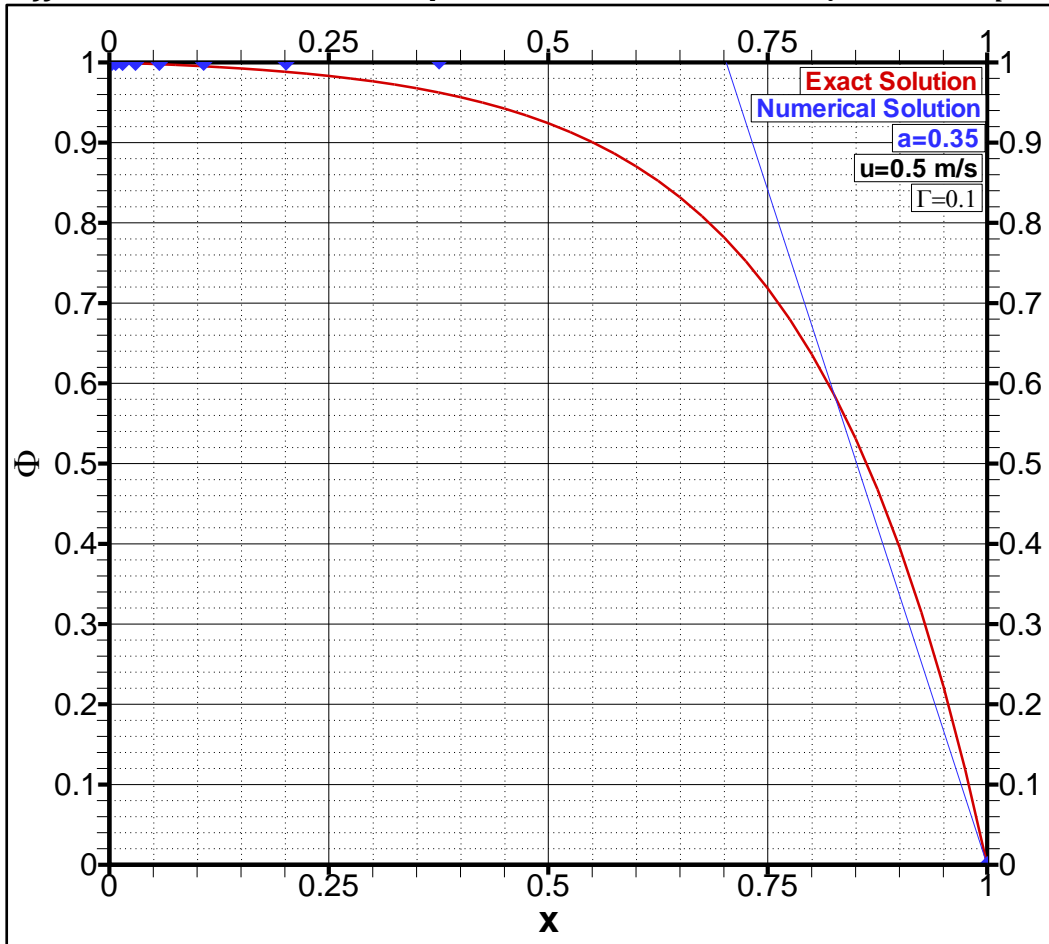


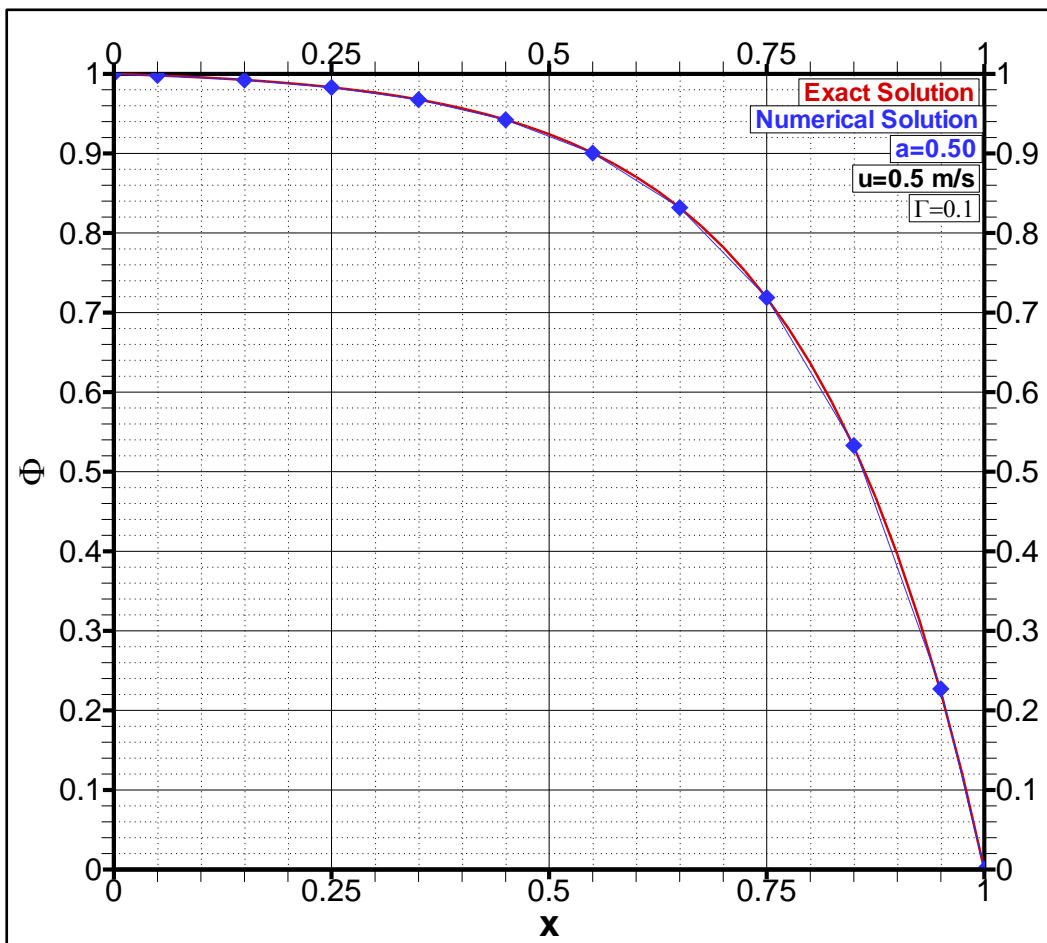
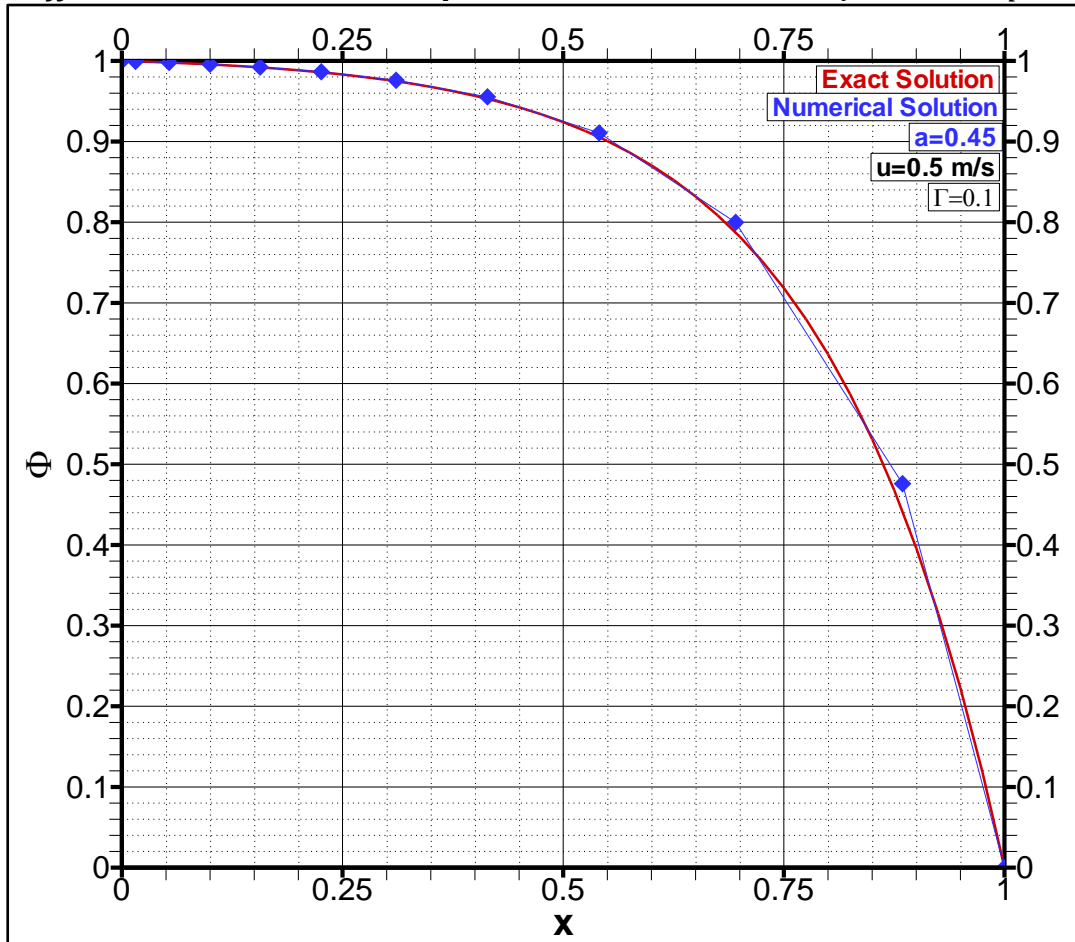


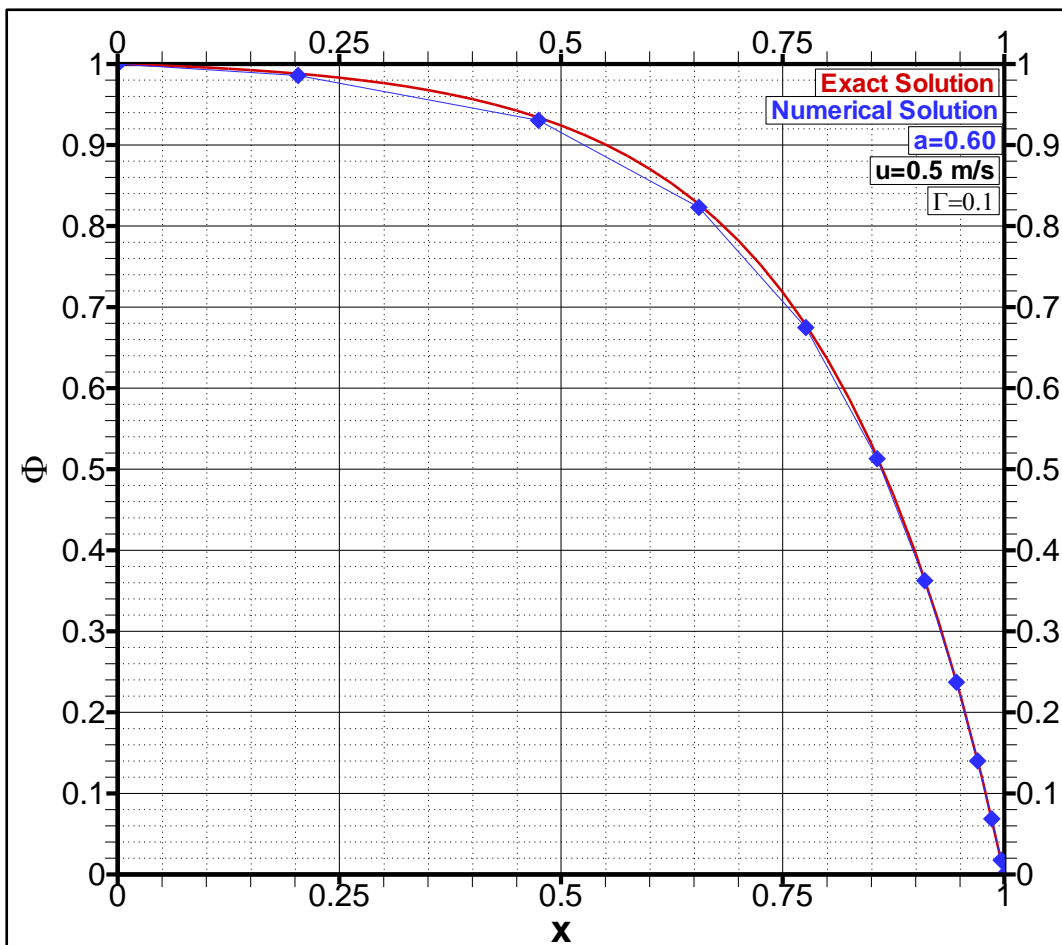
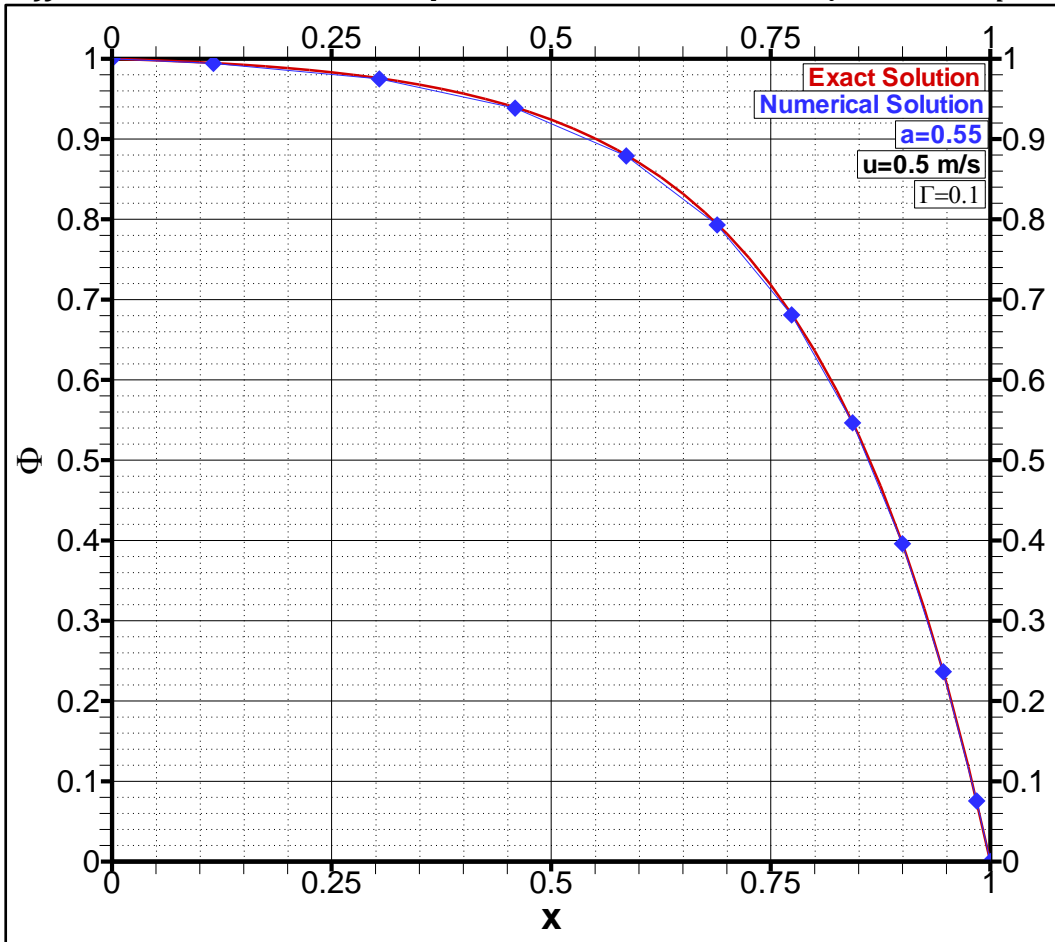


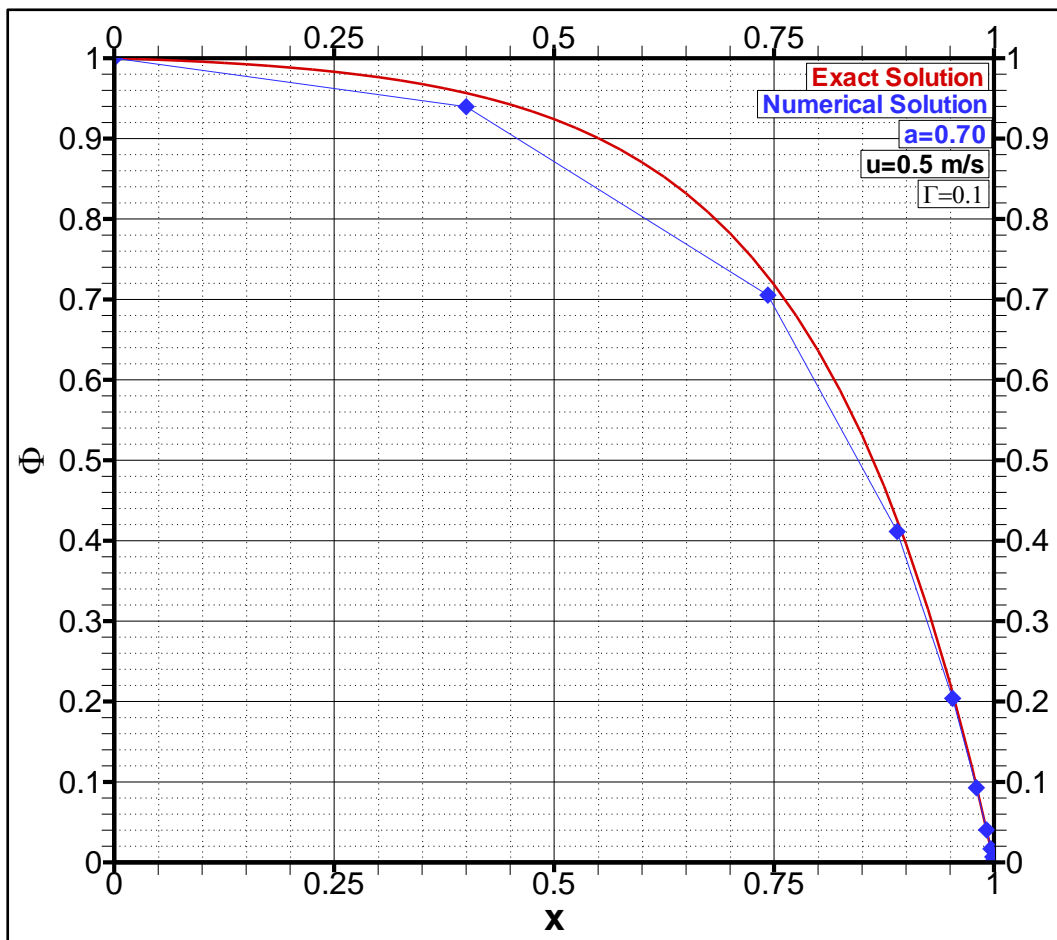
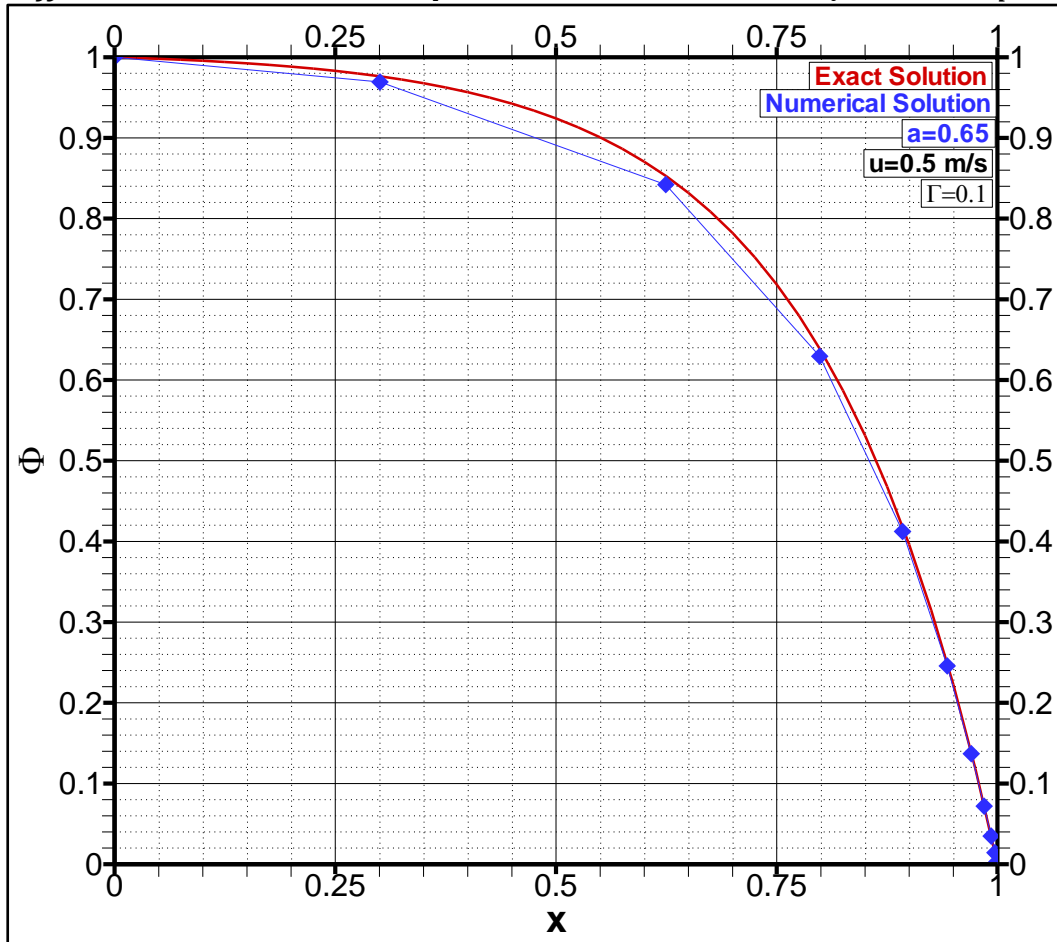


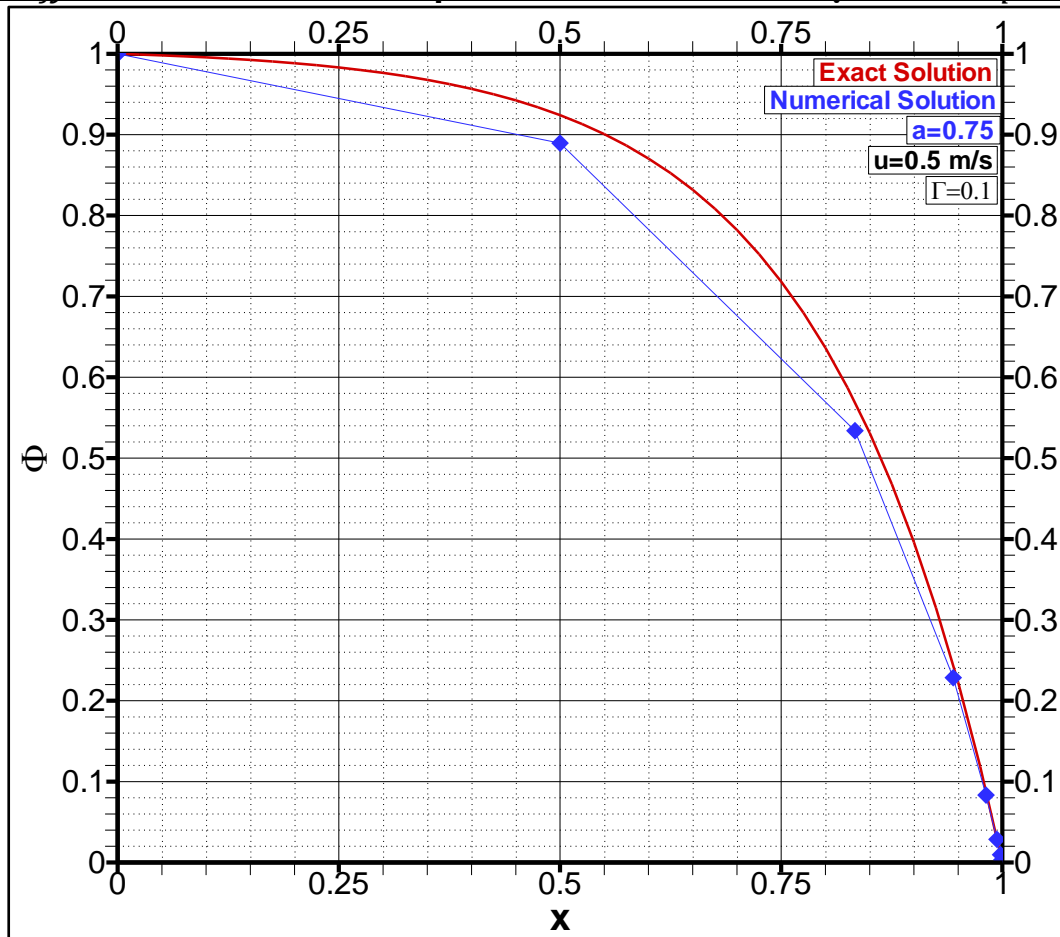


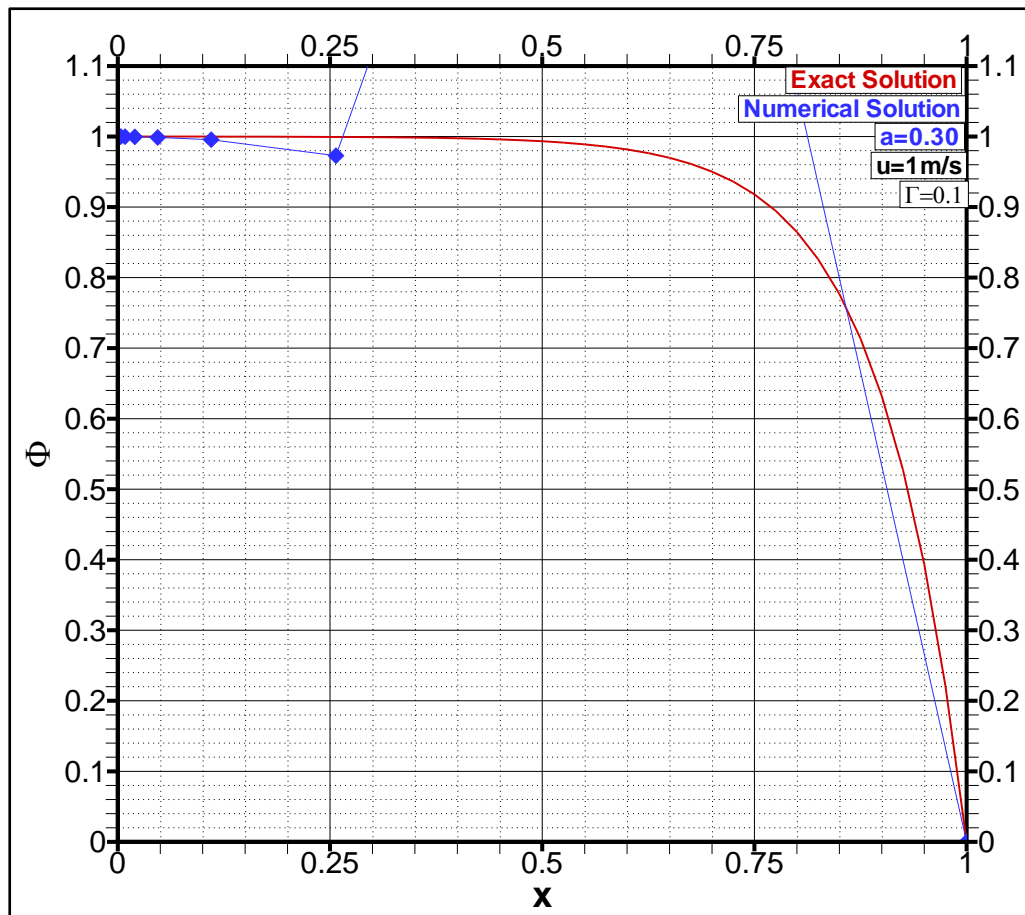
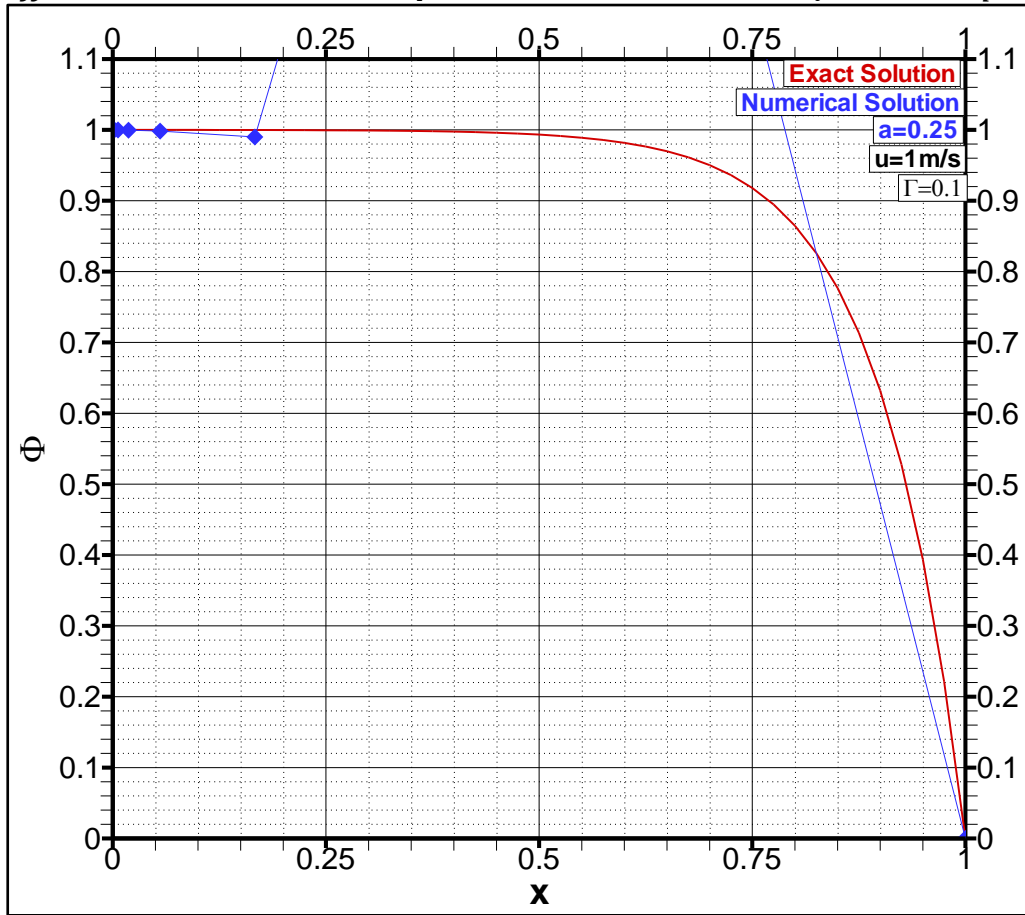


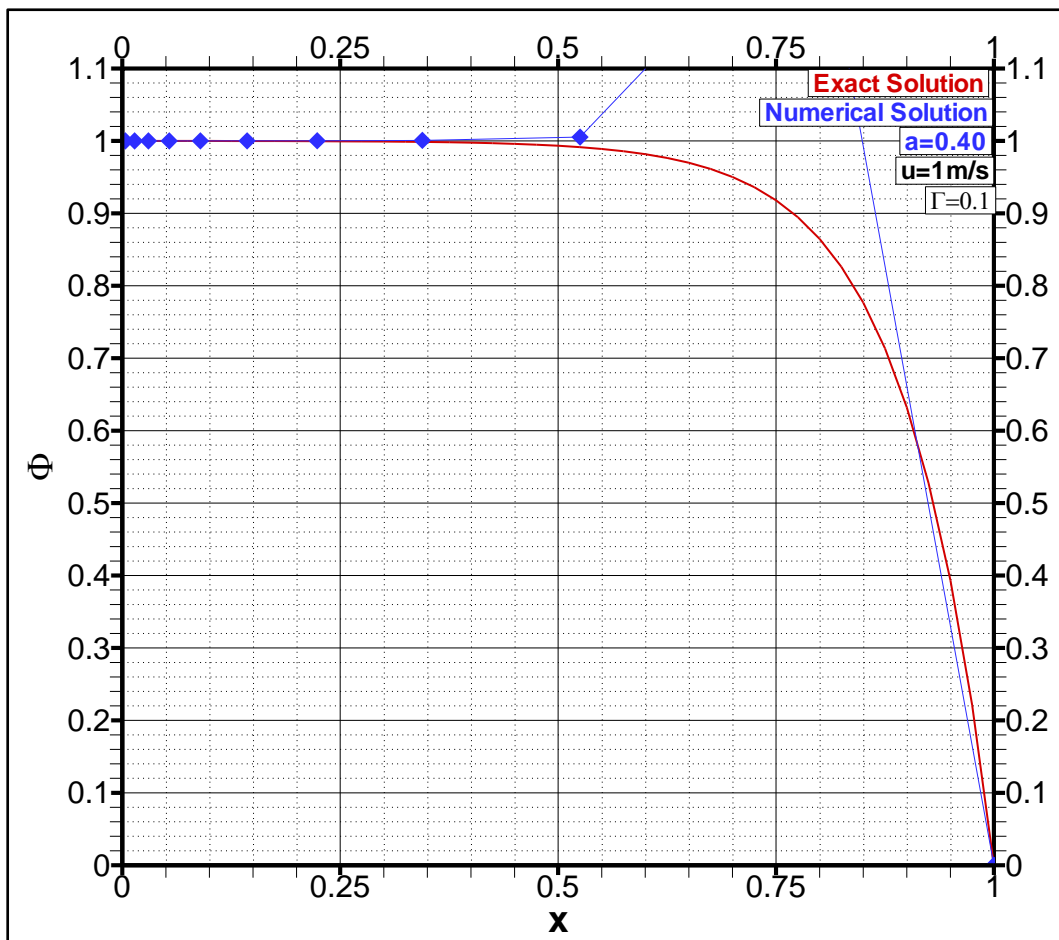
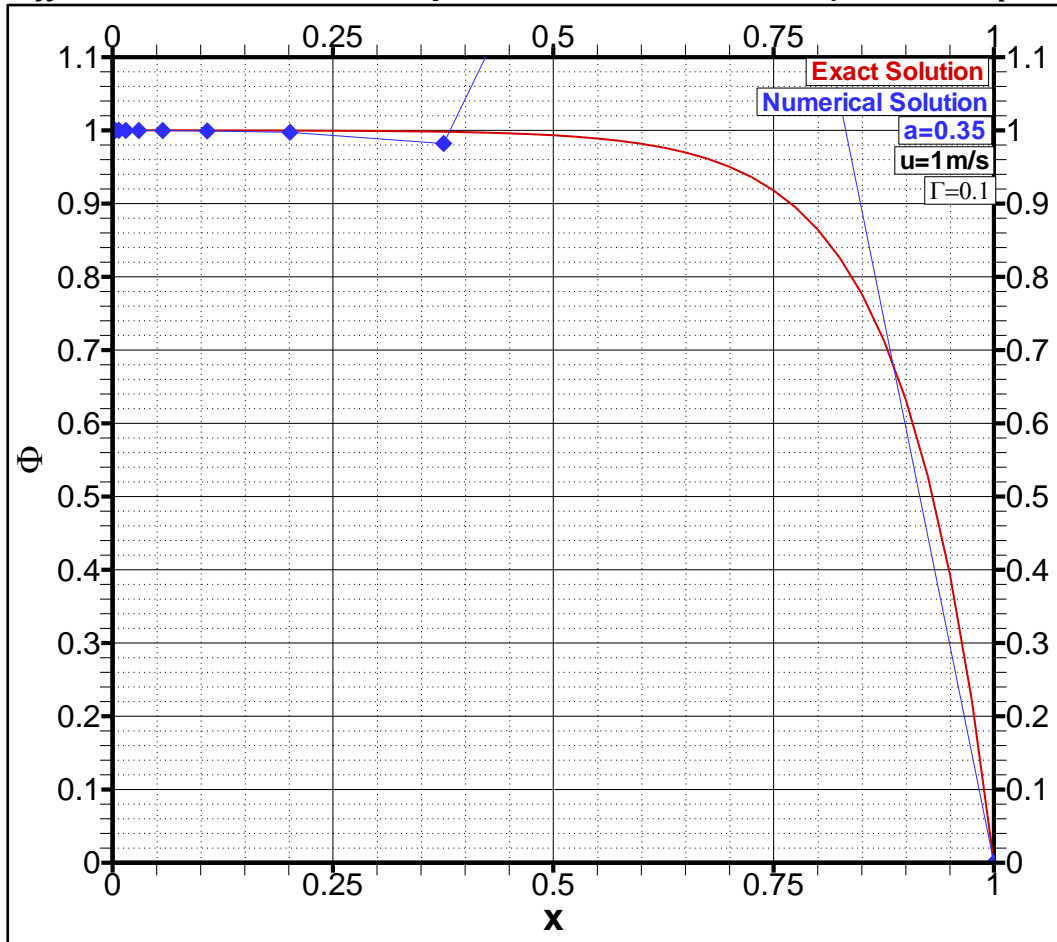


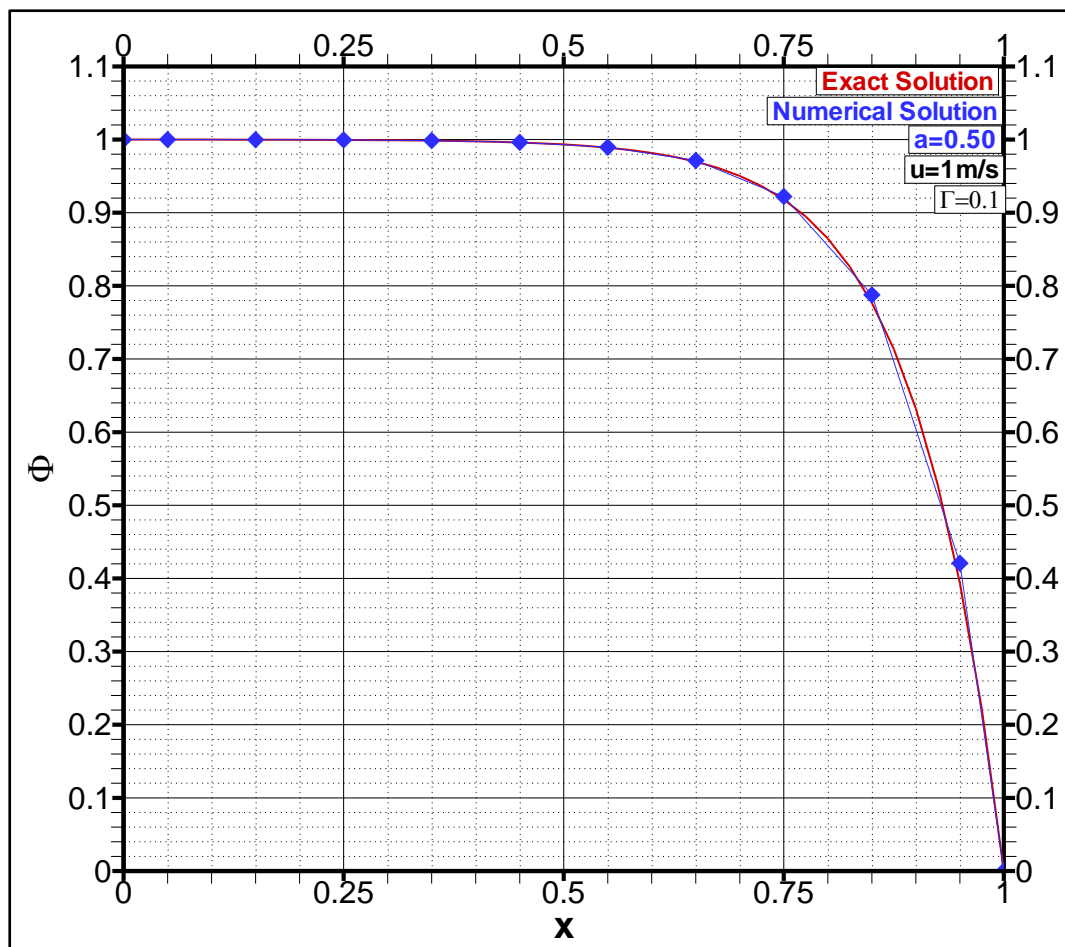
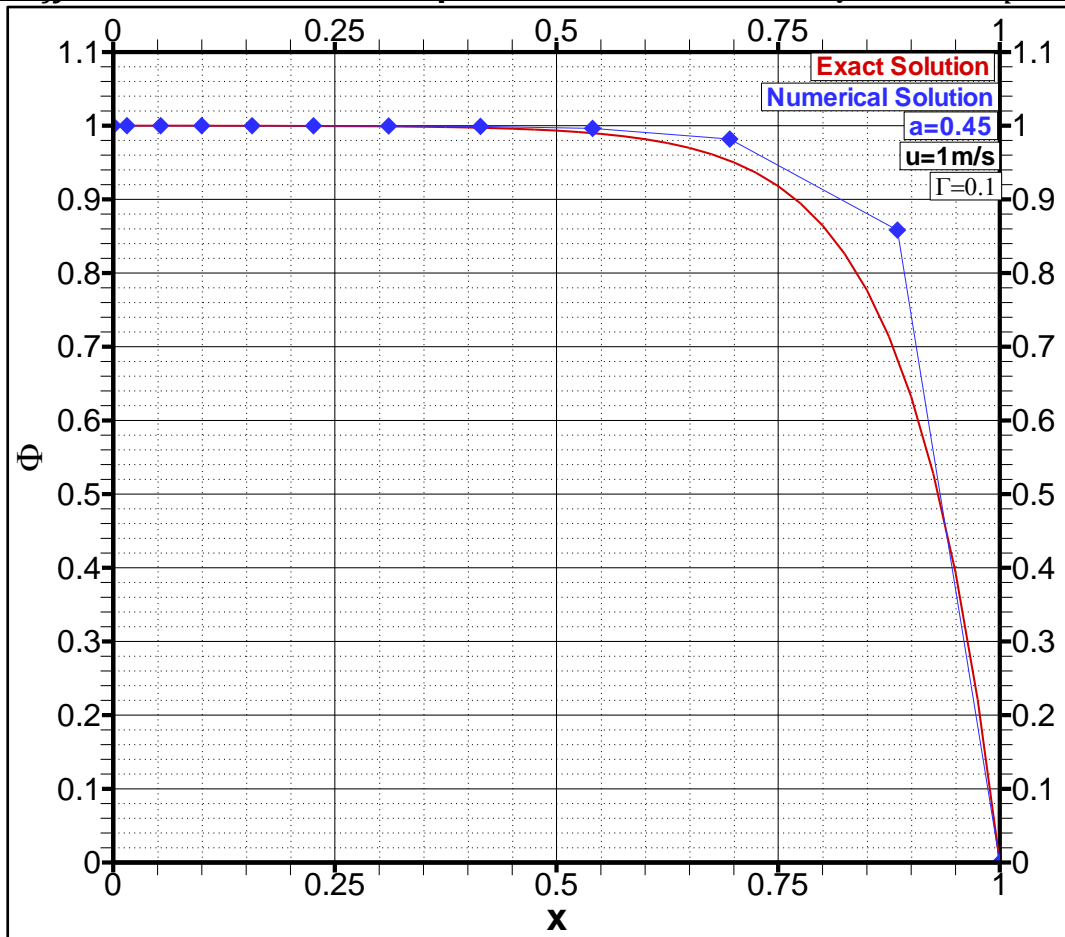


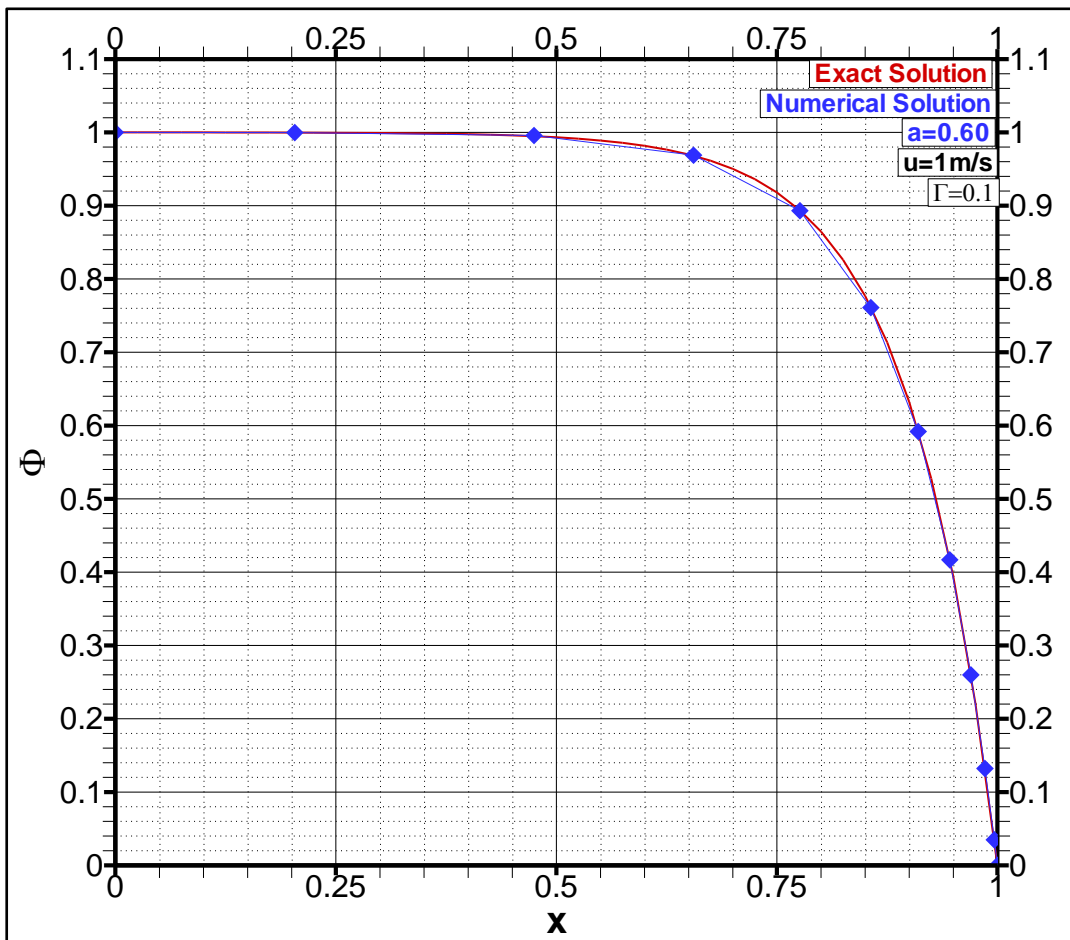
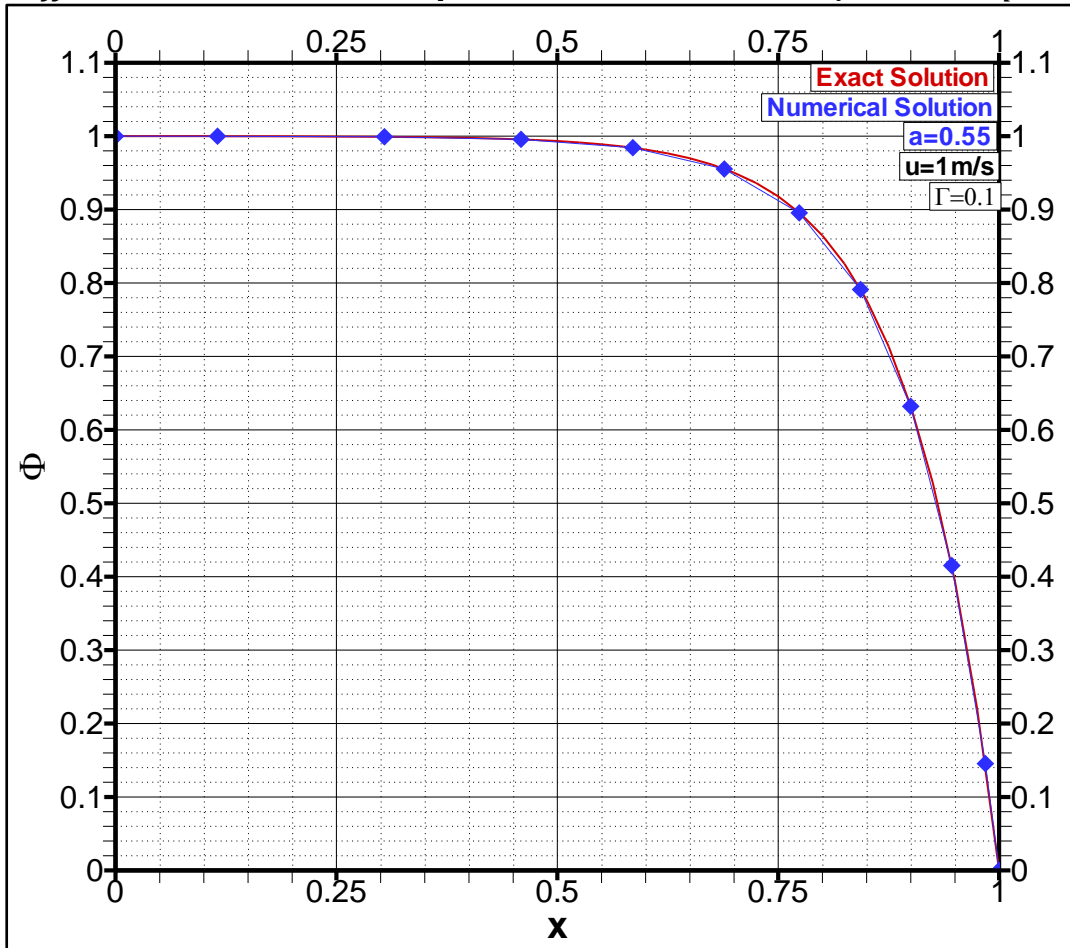


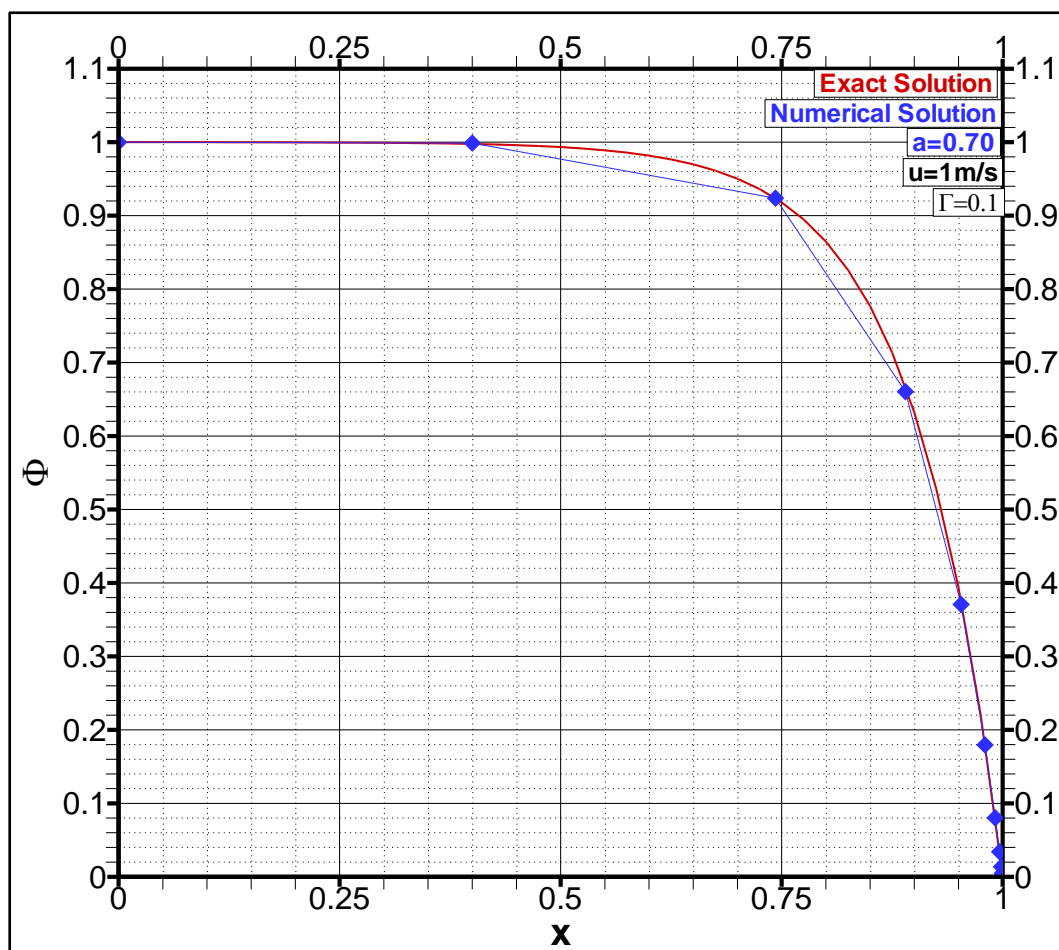
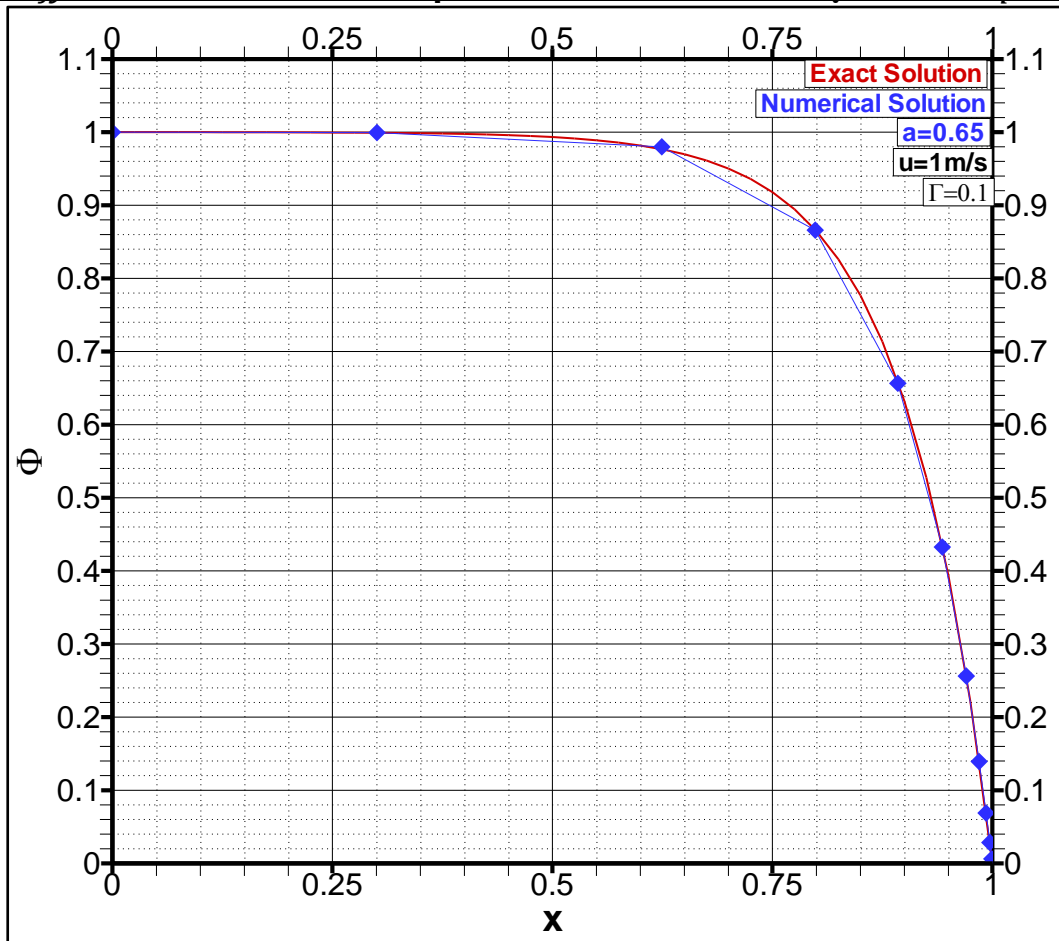


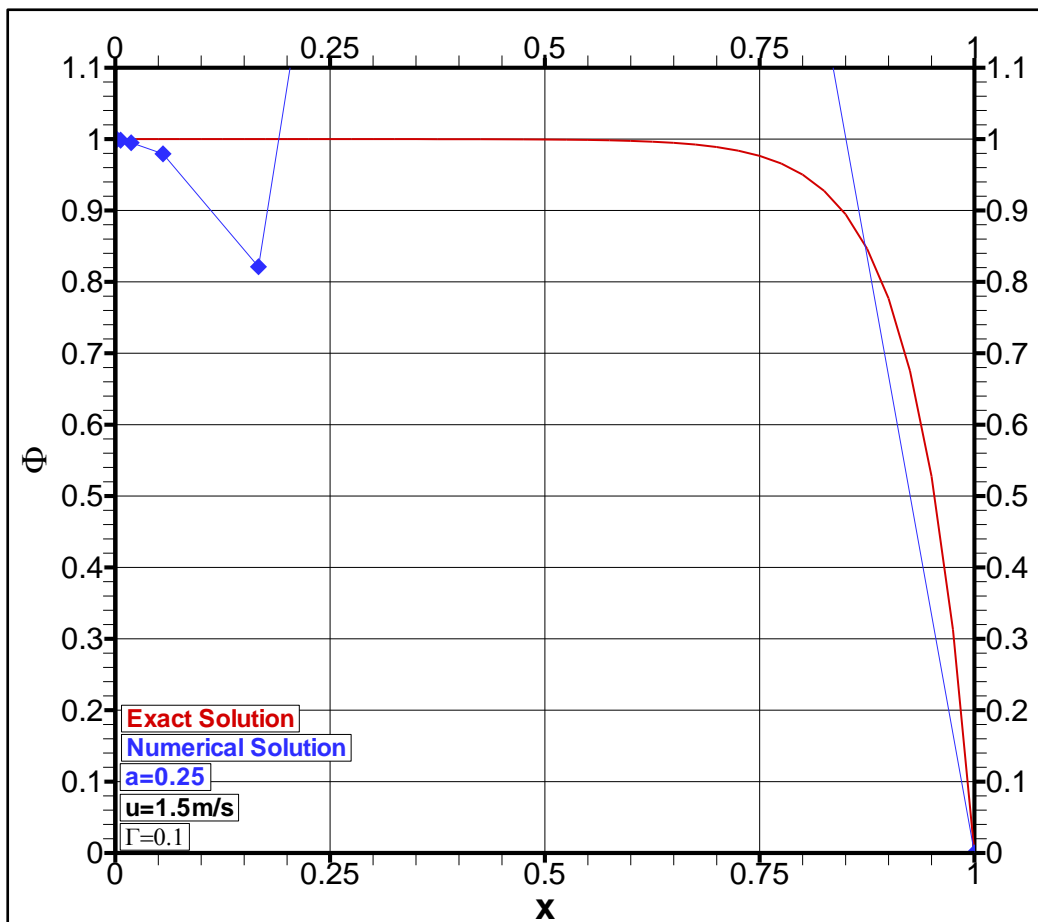
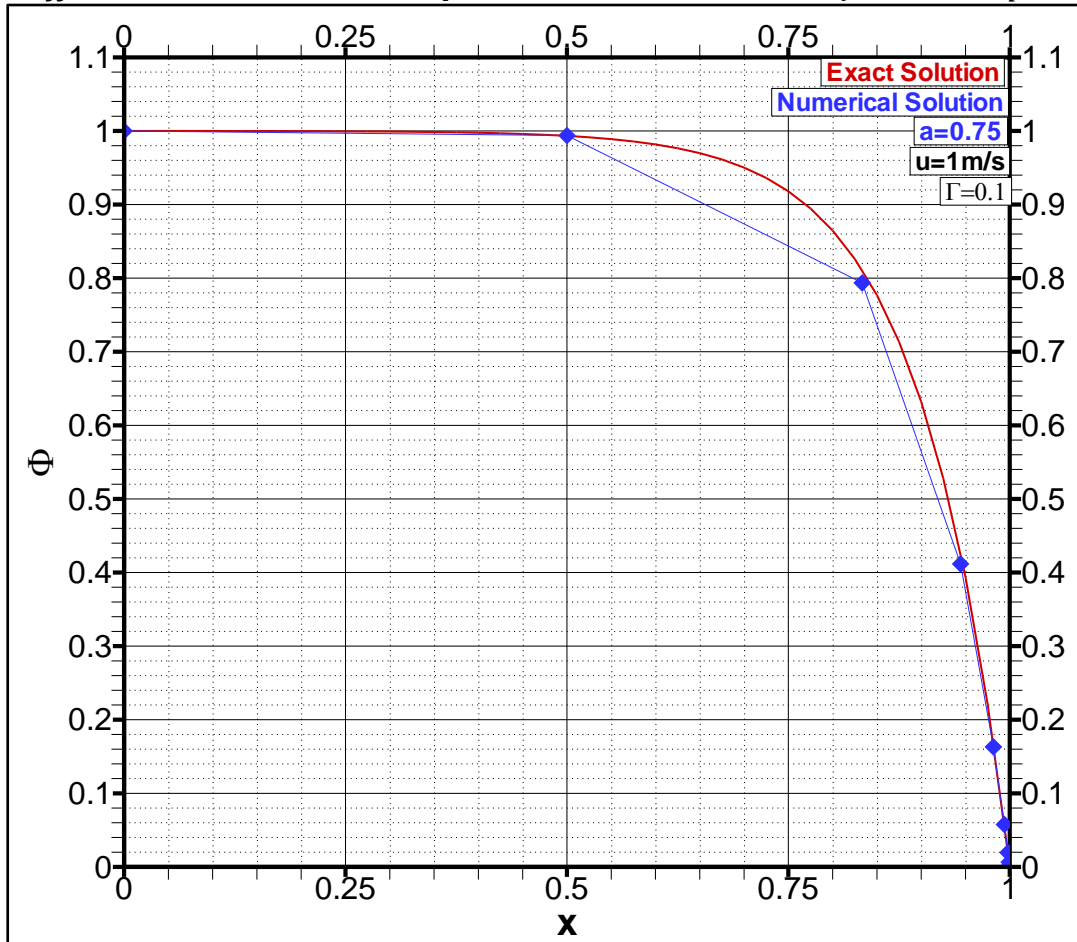


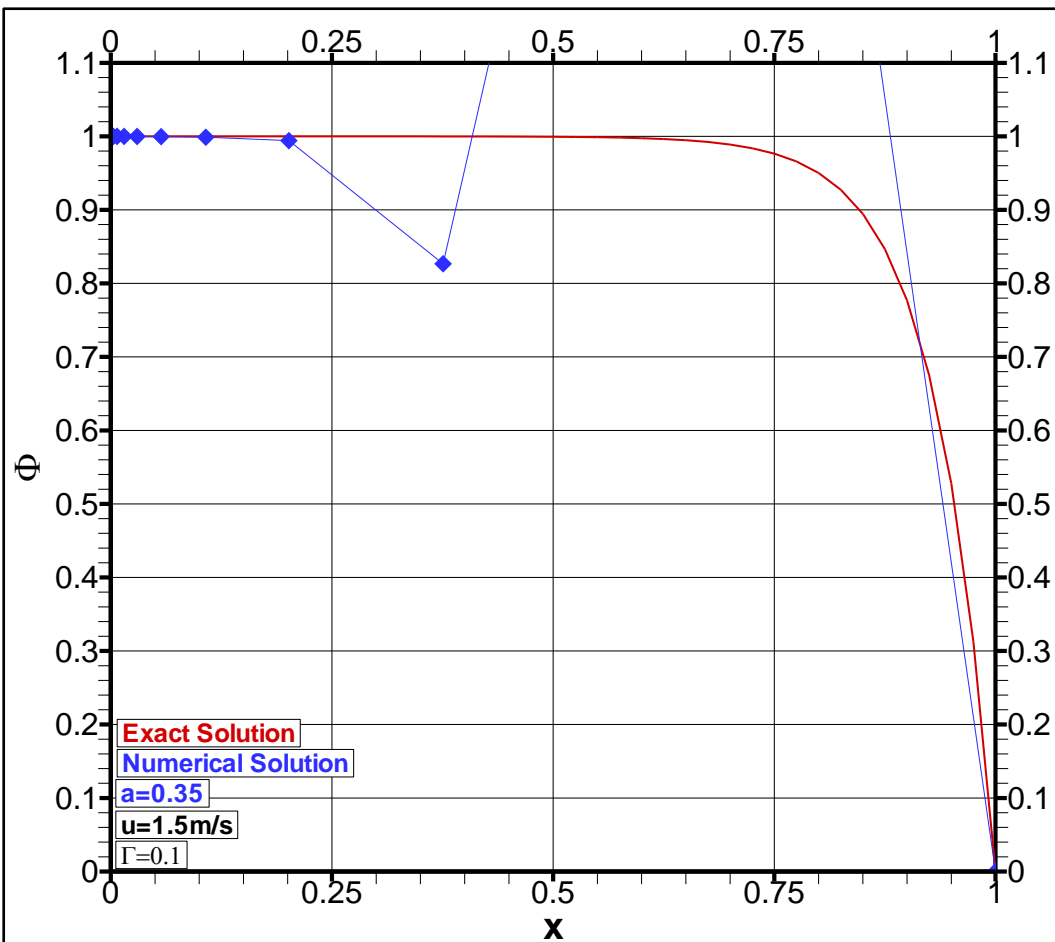
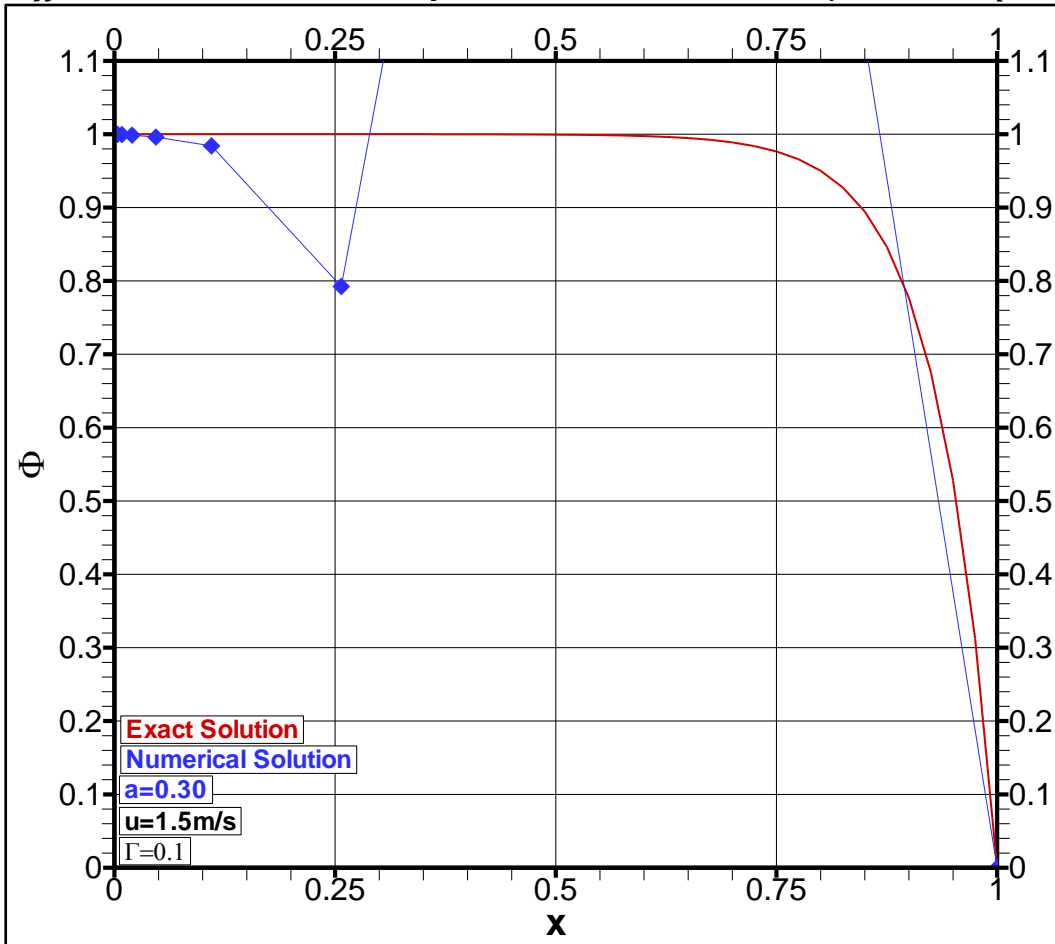


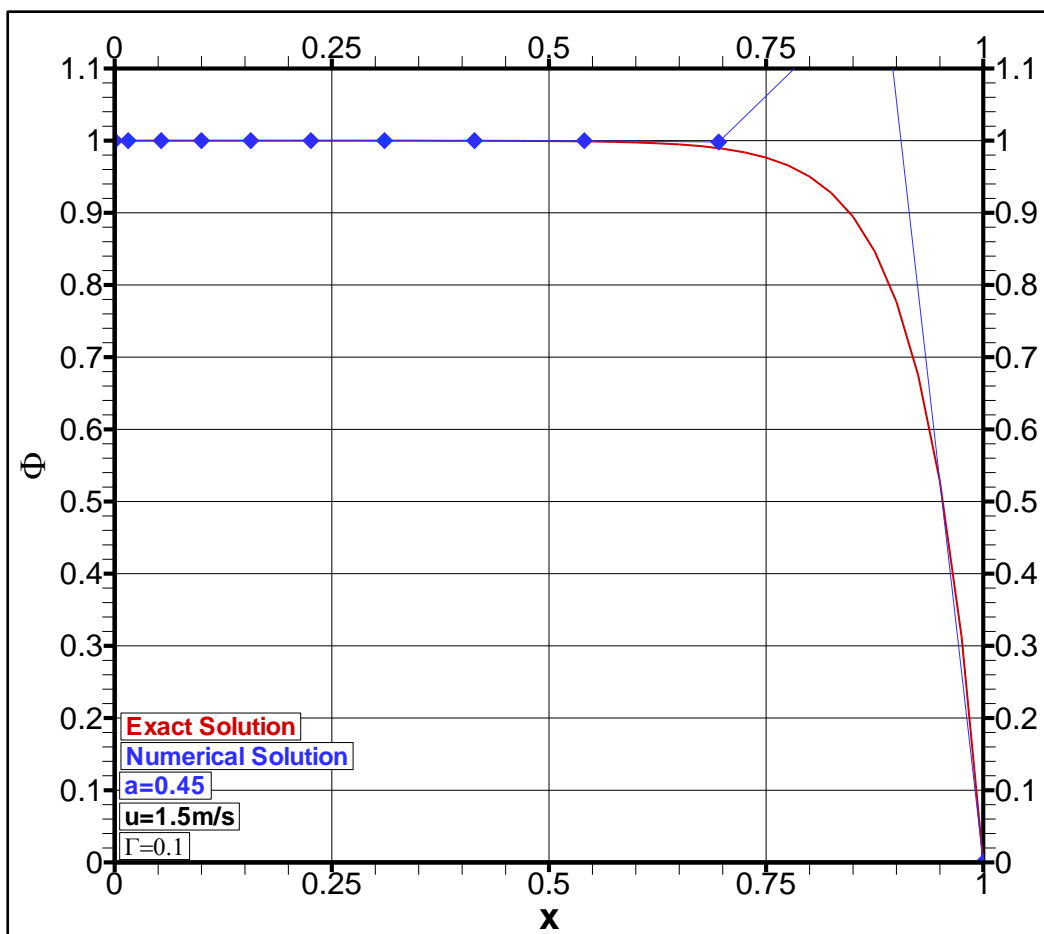
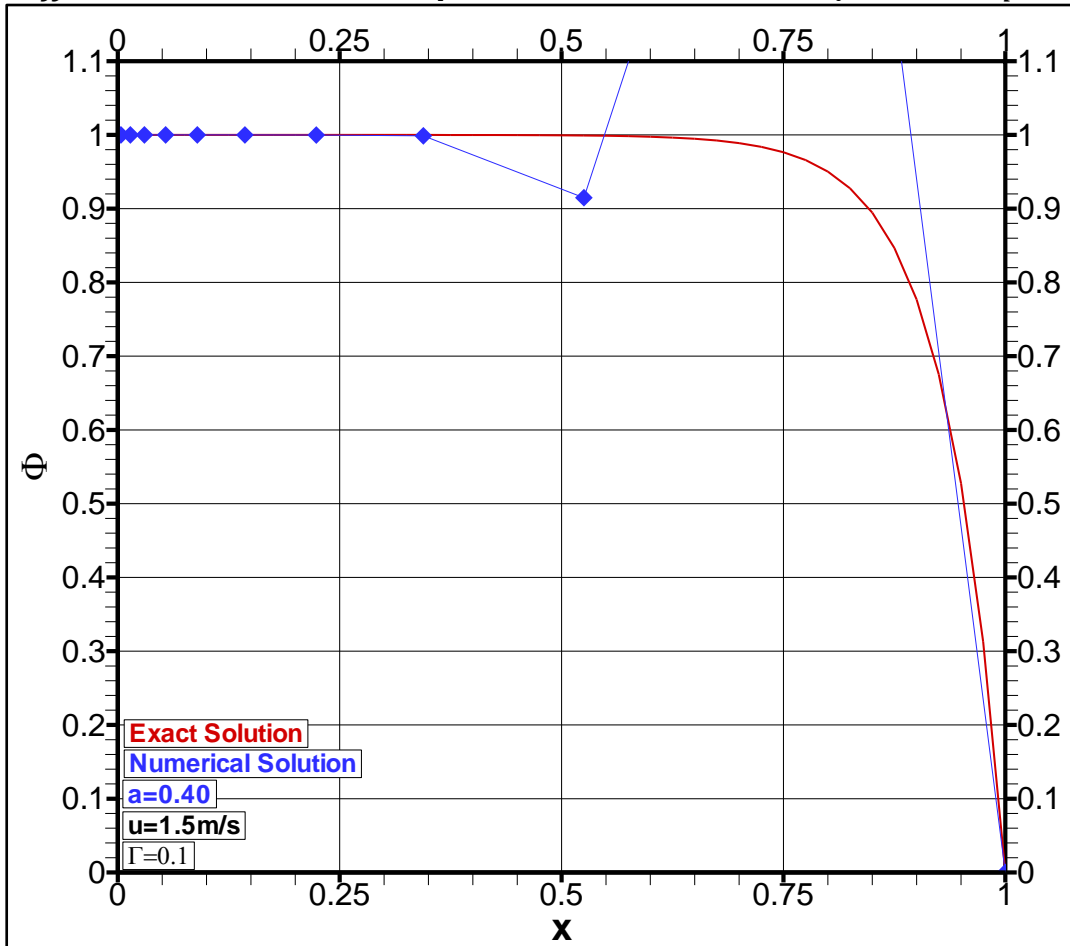


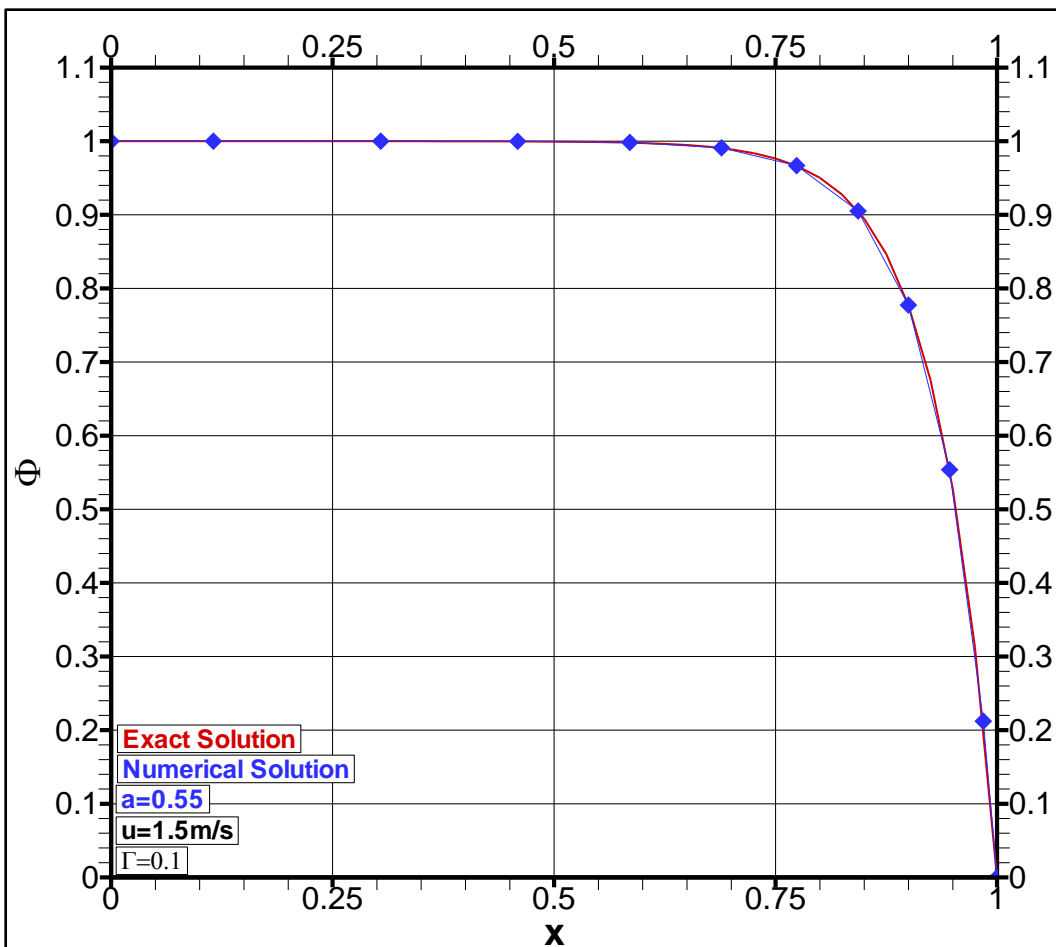
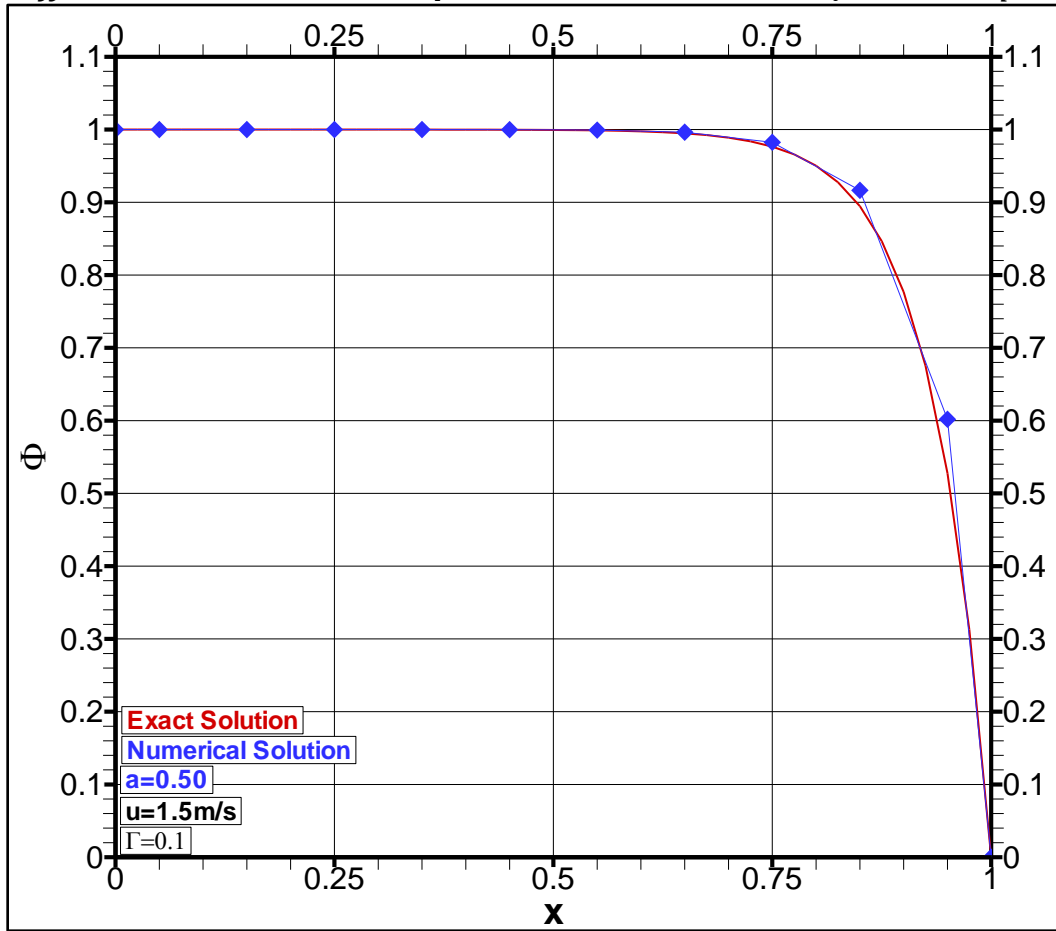


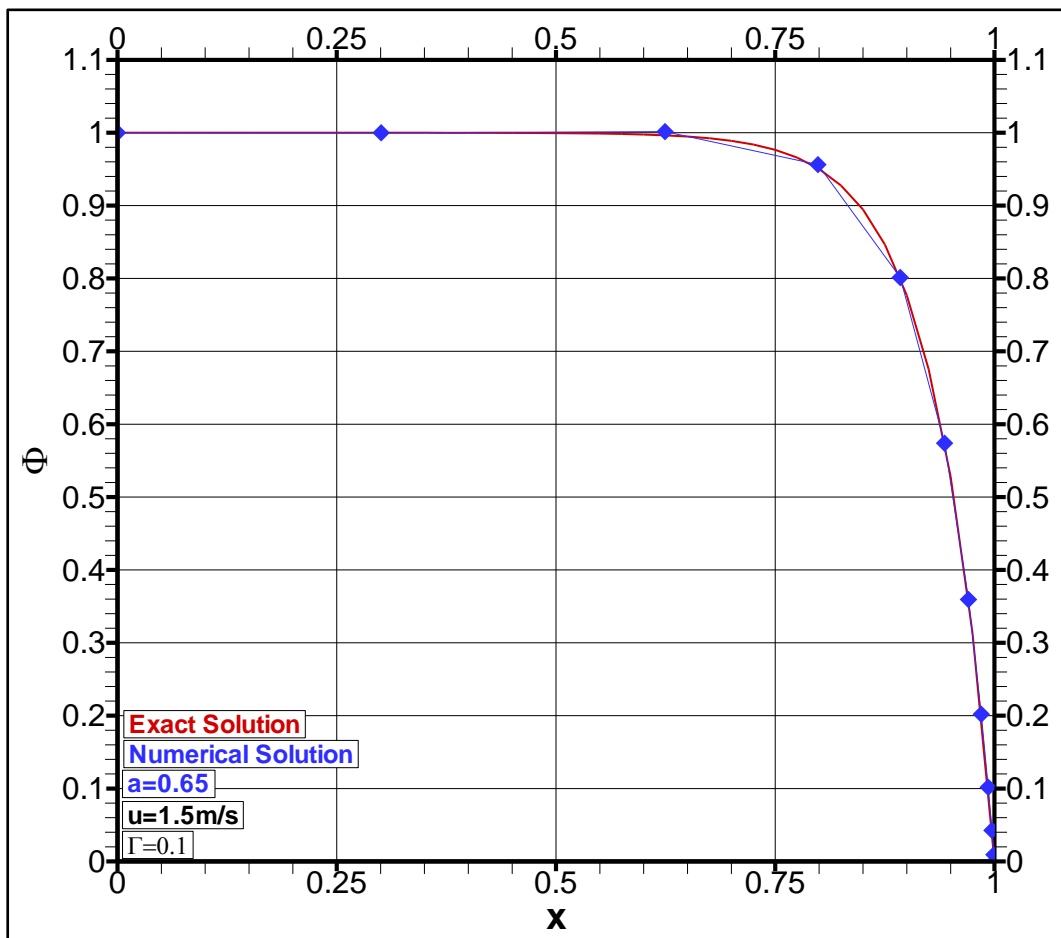
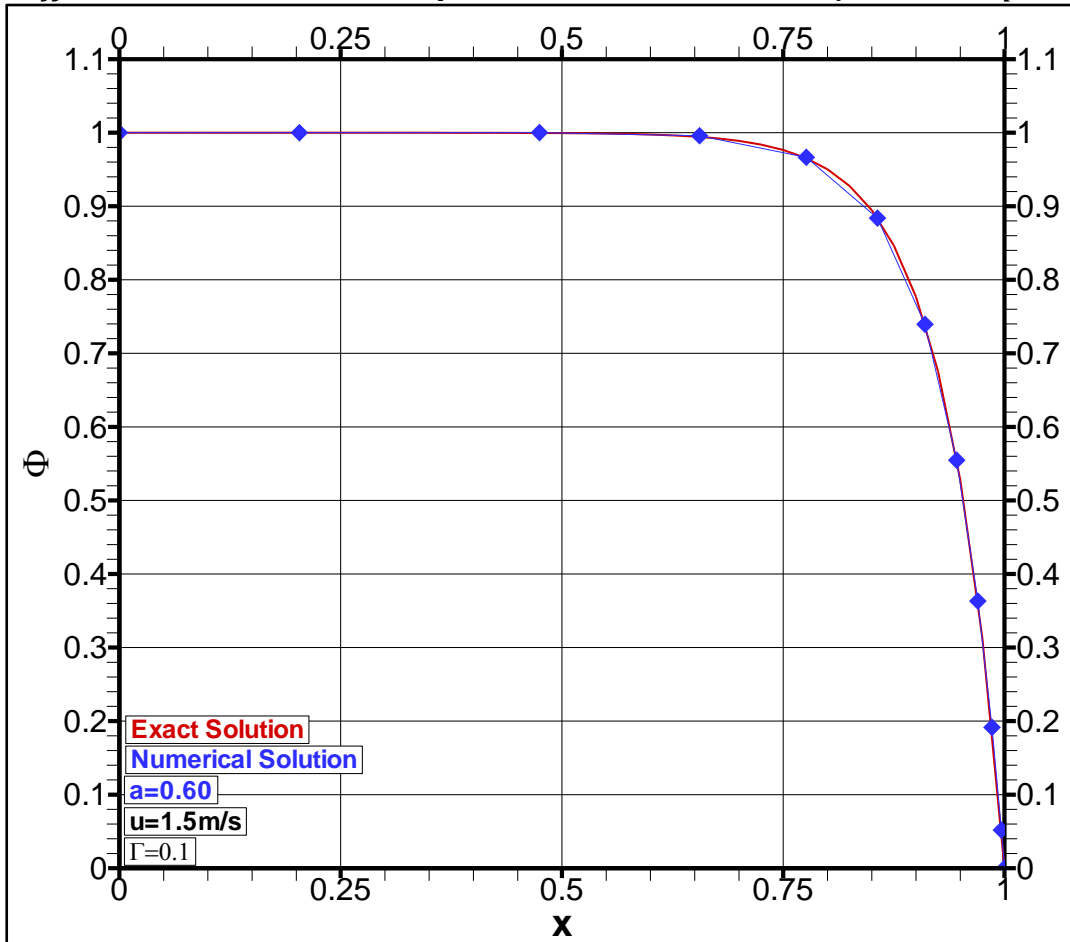


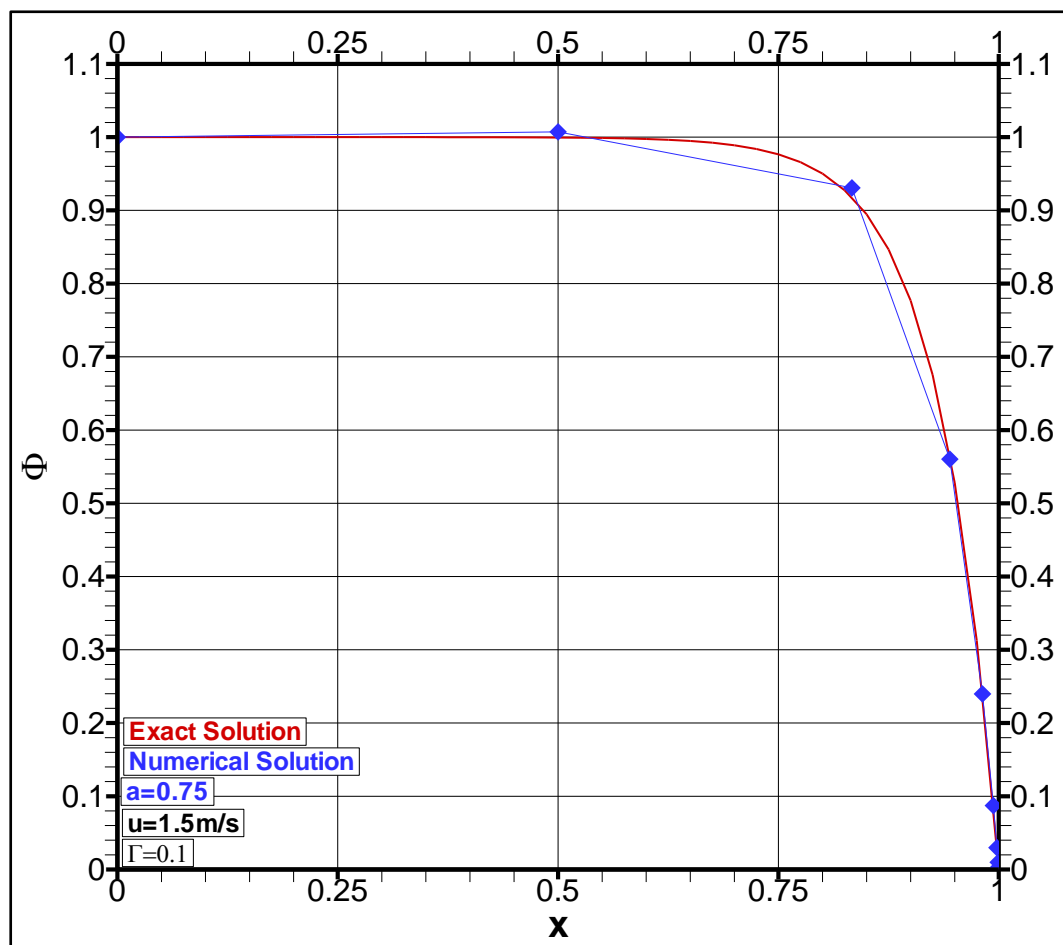
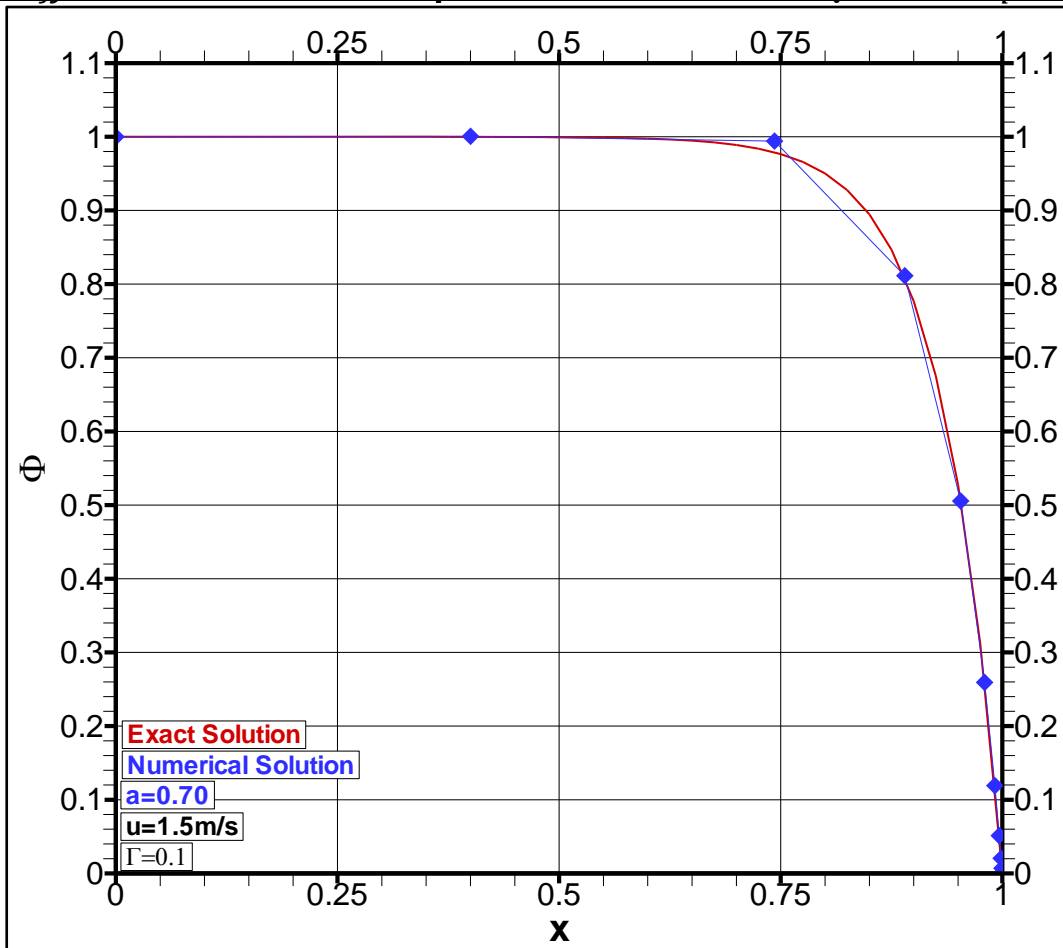


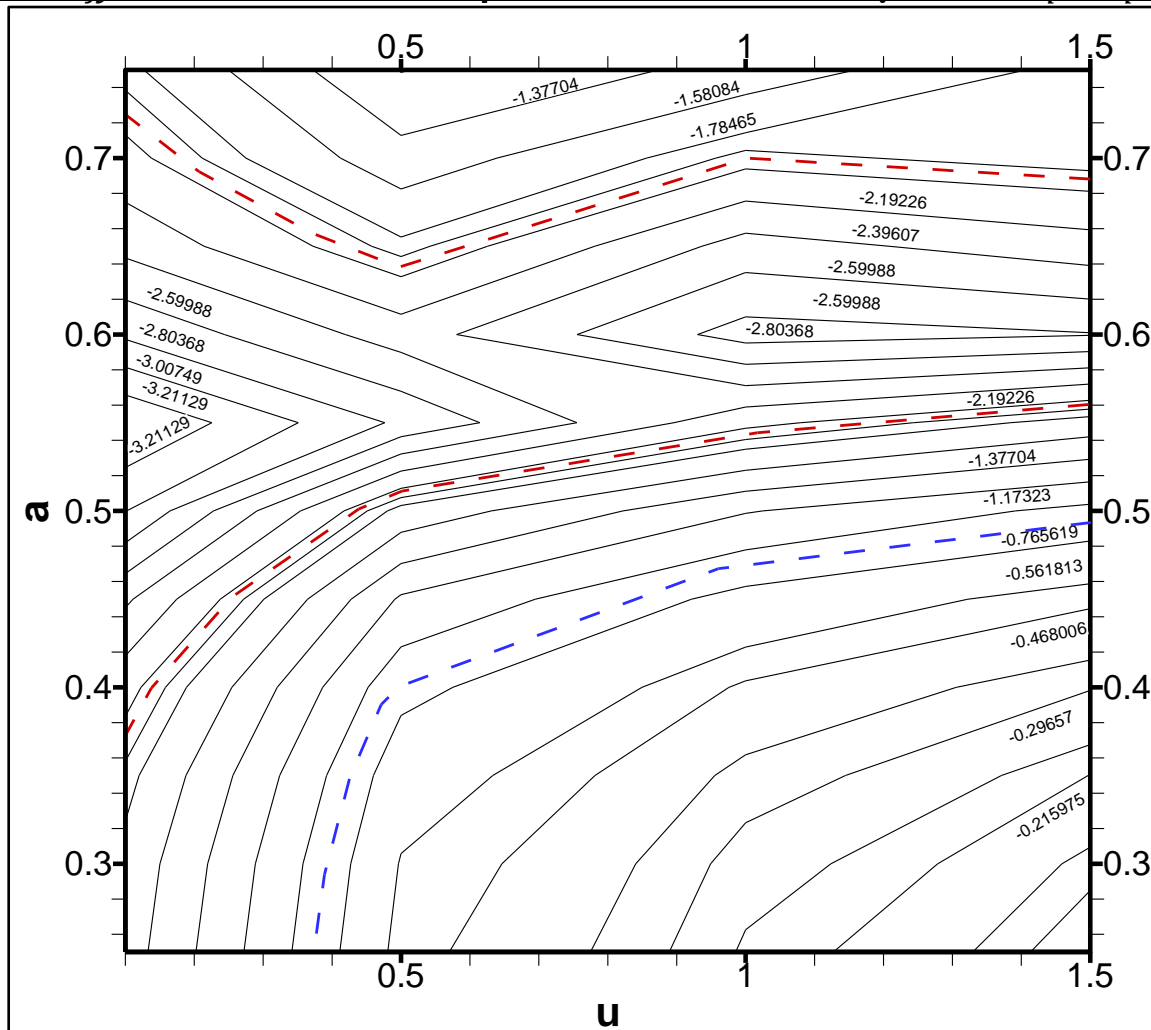










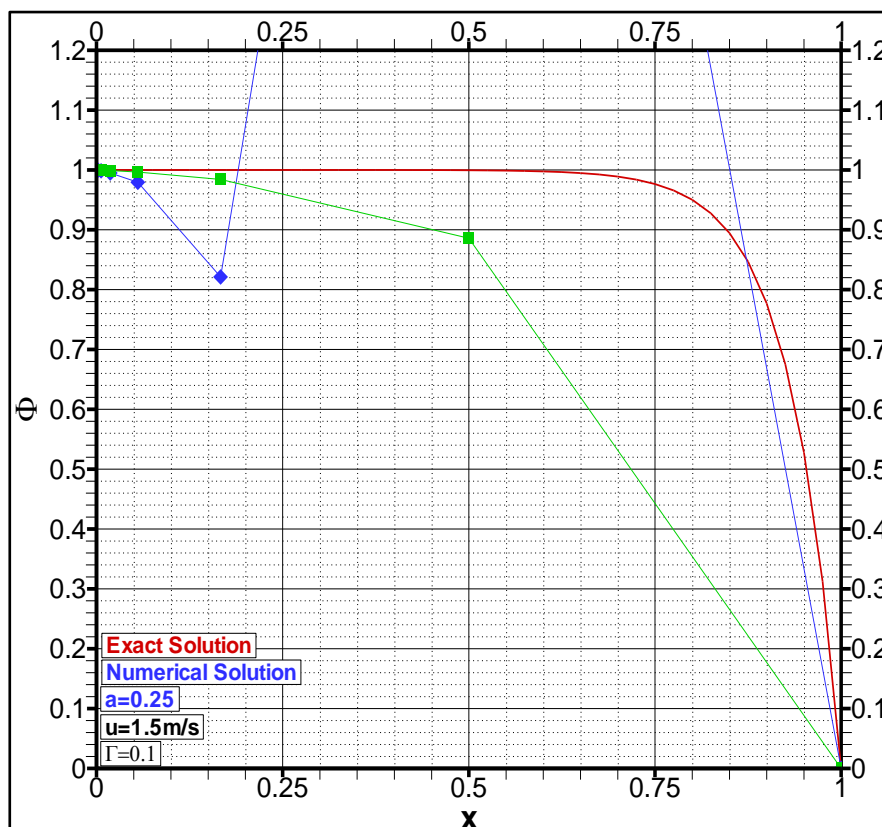
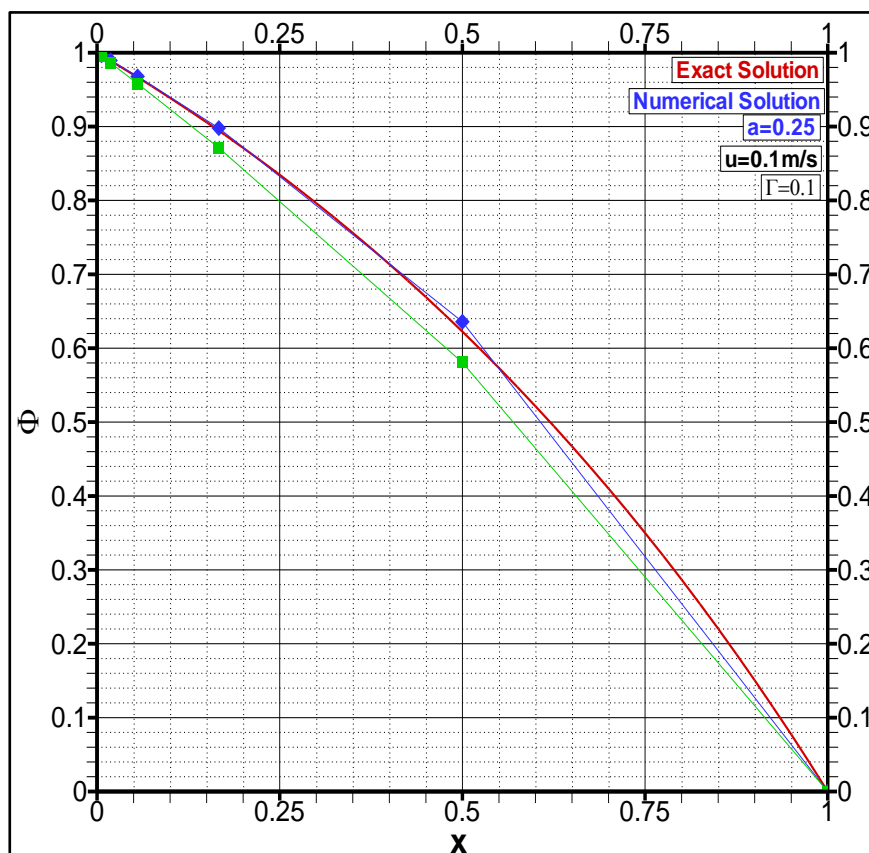
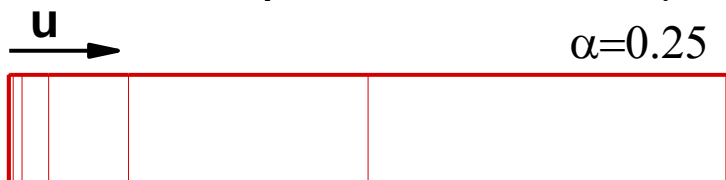


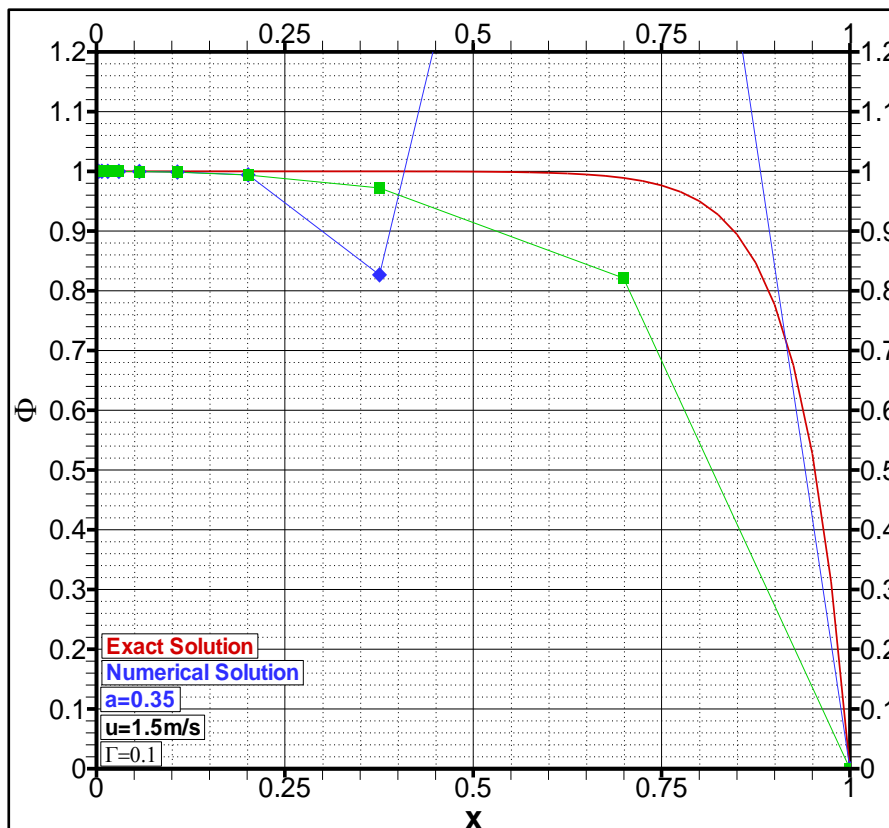
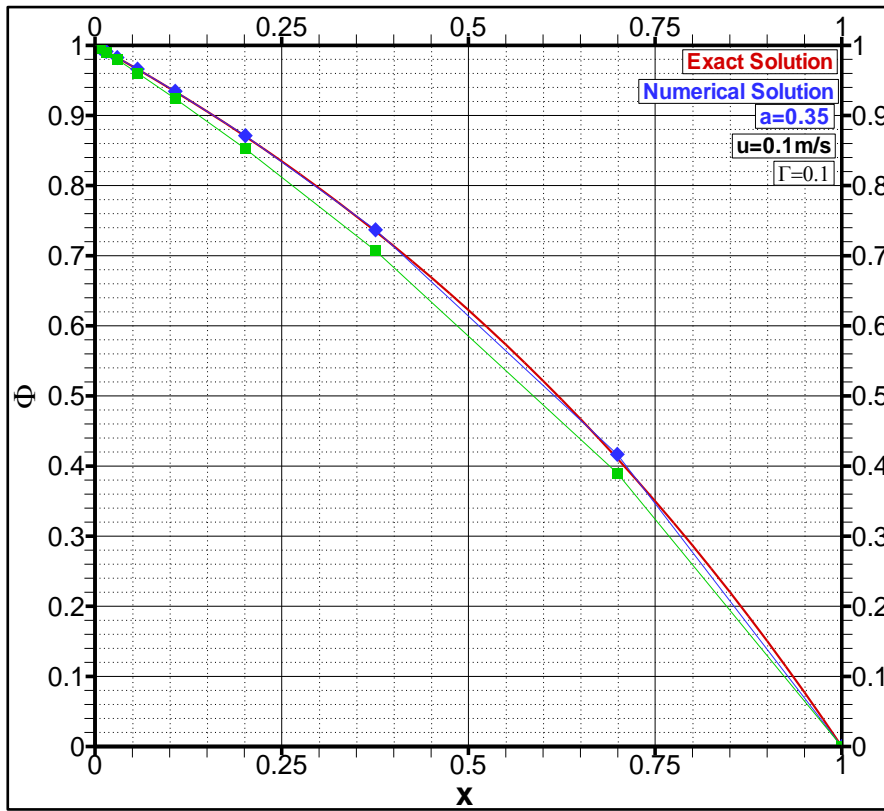
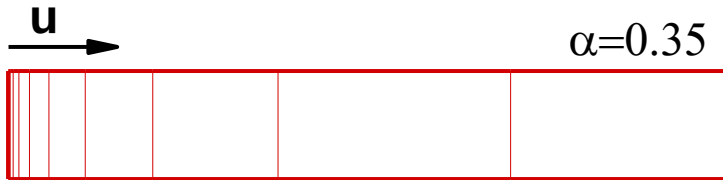
Διάγραμμα ισοσταθμικών μεγίστου σφάλματος

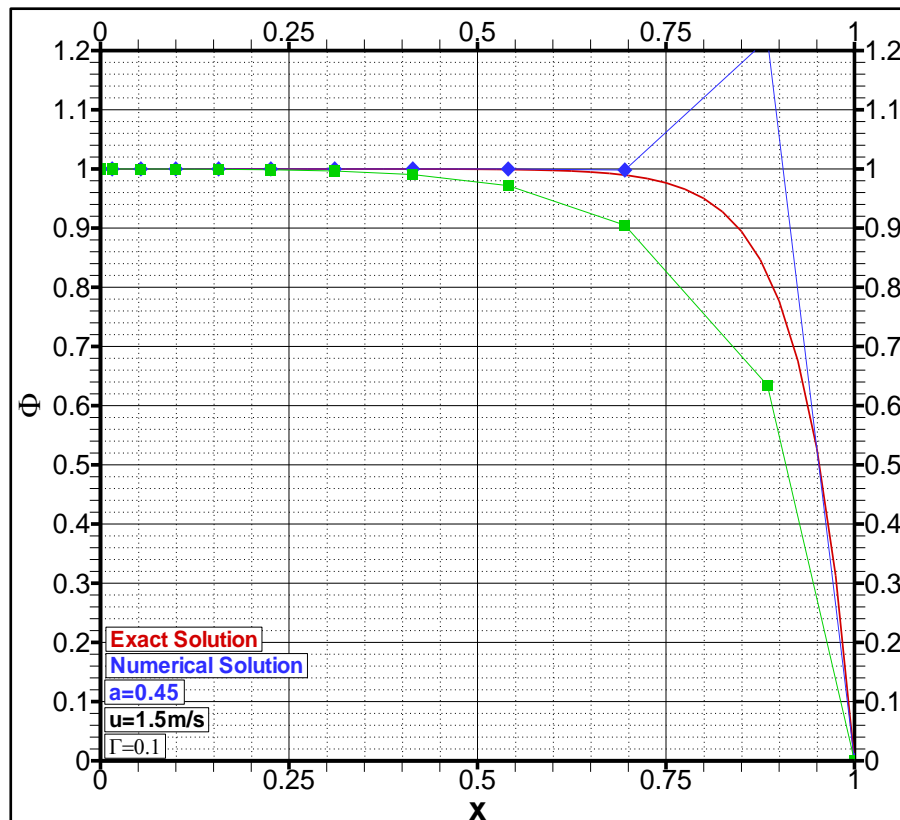
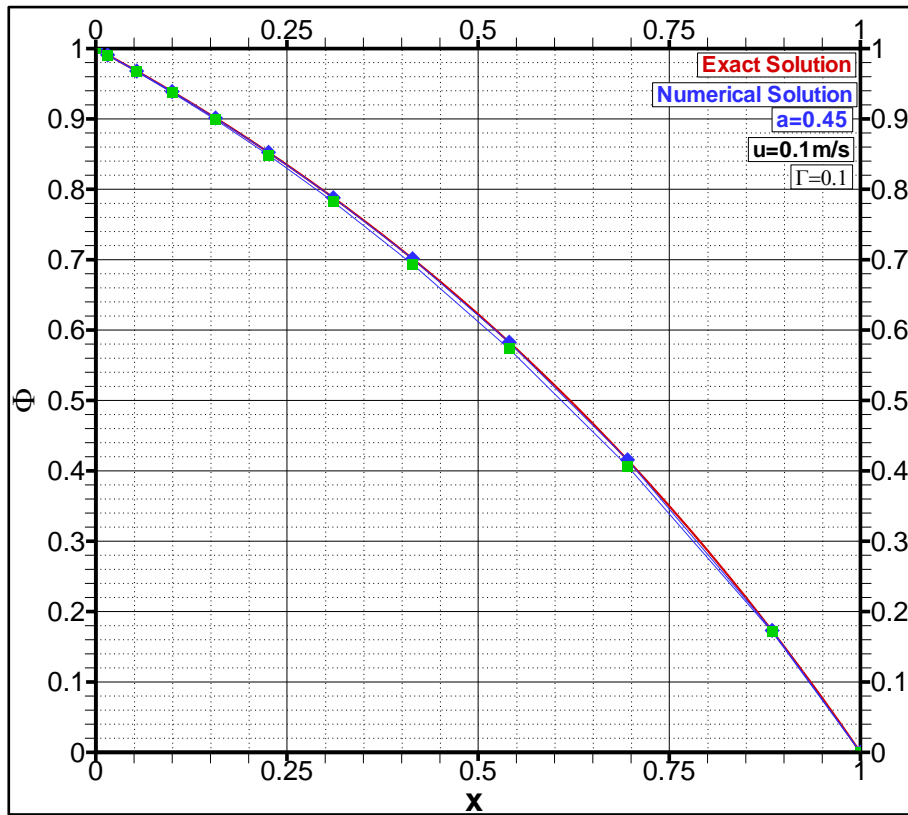
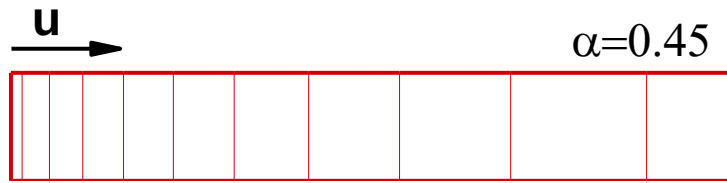
Από τα προηγούμενα διαγράμματα παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές της ταχύτητας έχουμε αρκετά καλή σύγκλιση σε όλα τα πλέγματα ενώ όσο αυξάνεται η τιμή της ταχύτητας παρατηρούμε αξιόπιστες προσεγγίσεις μόνο για τιμές του συντελεστή (α) μεγαλύτερες του 0.45.

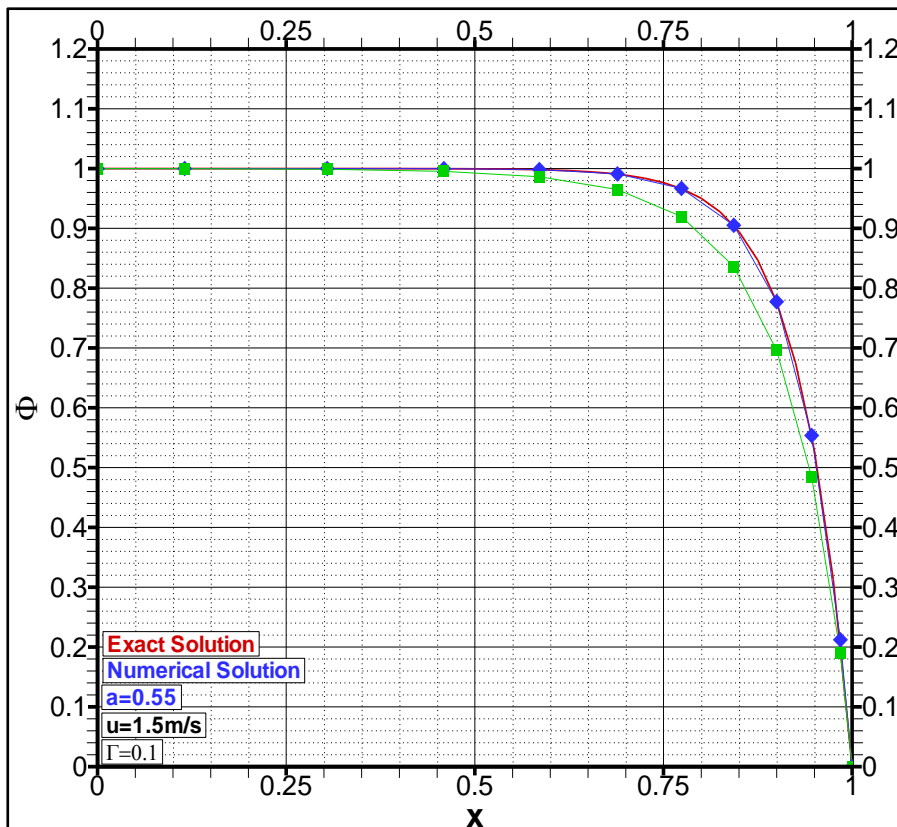
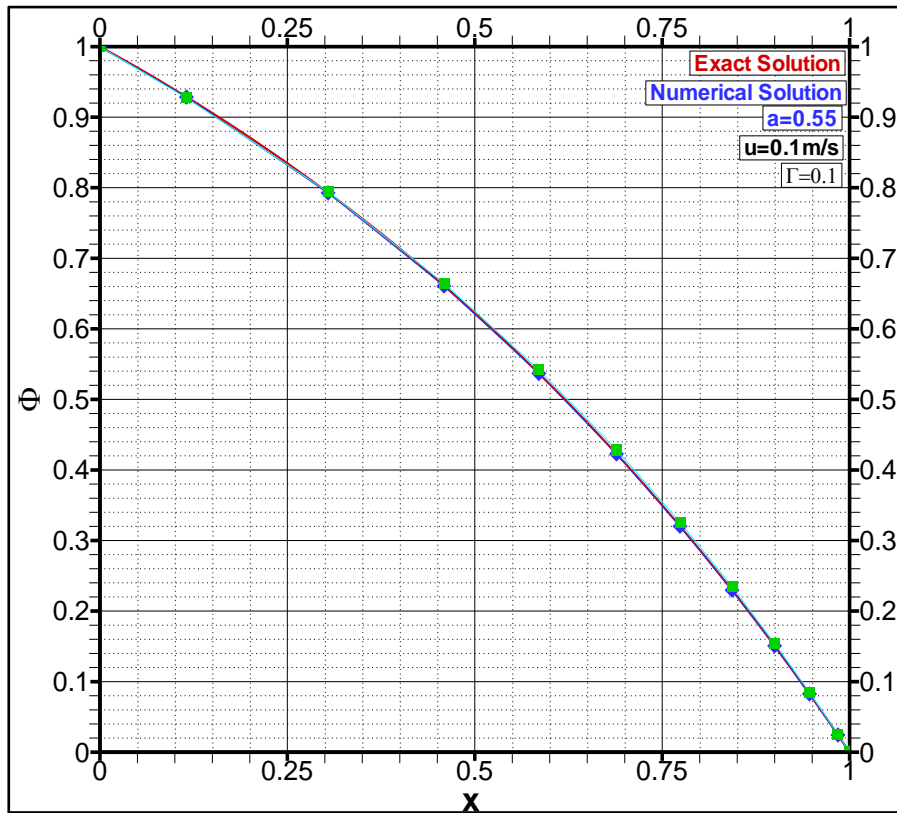
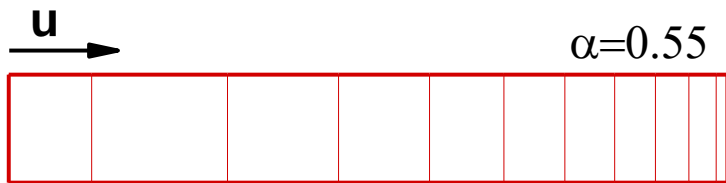
Από το διάγραμμα των ισοσταθμικών του μεγίστου λογαριθμικού σφάλματος προκύπτει ότι υπάρχει μία περιοχή για (α) μεταξύ 0.55 έως 0.65 όπου η προσέγγιση διατηρείται σε αρκετά καλά επίπεδα ακρίβειας ανεξαρτήτως της ταχύτητας.

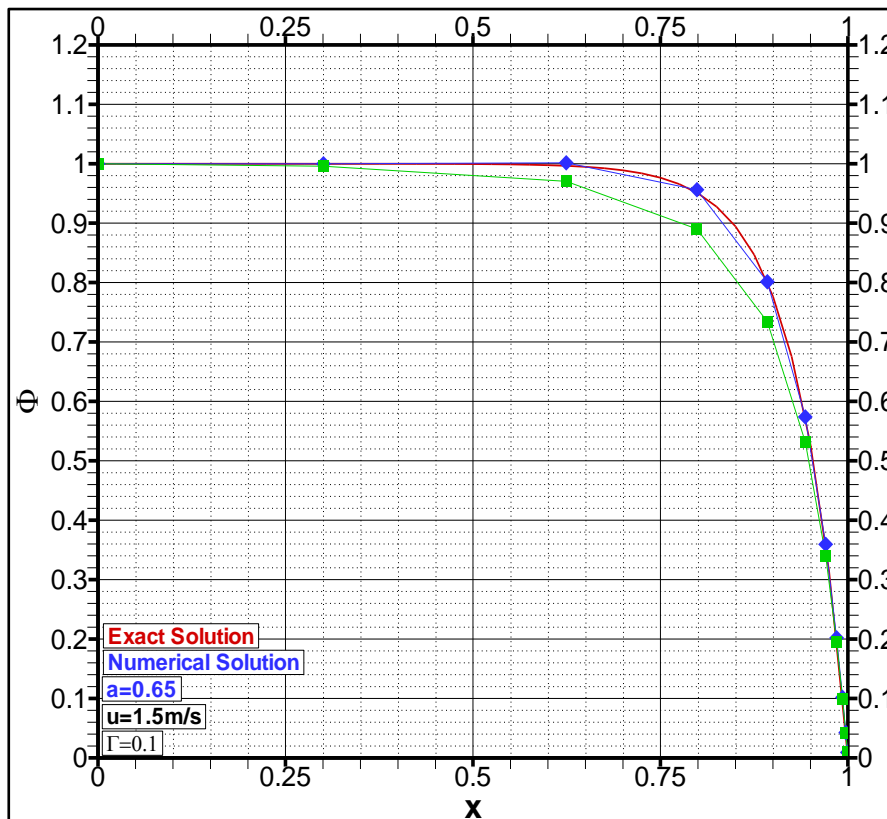
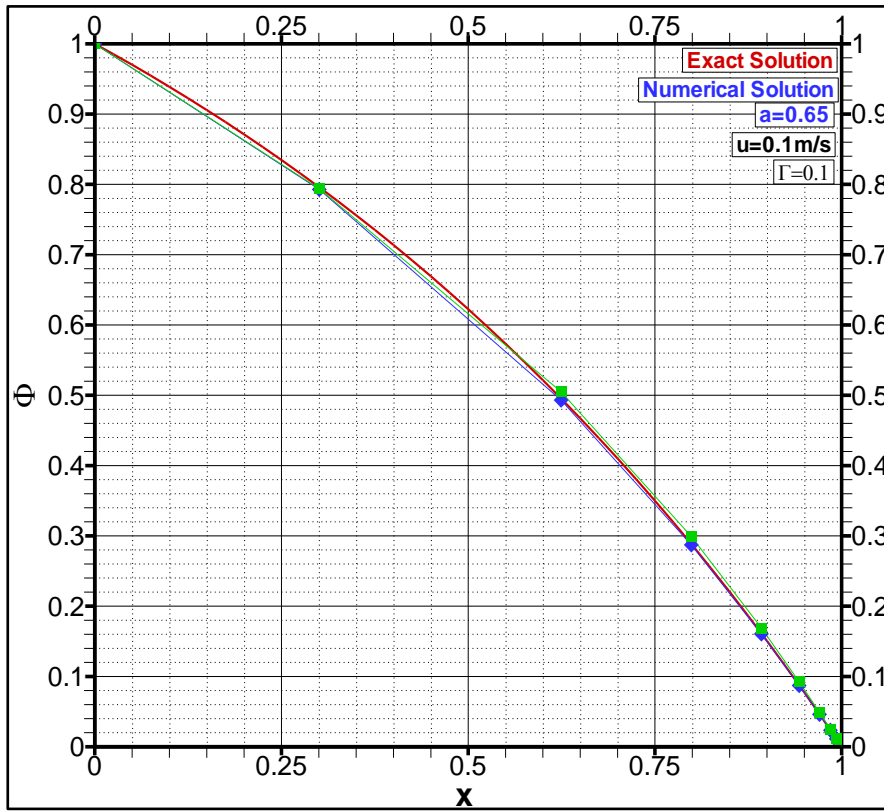
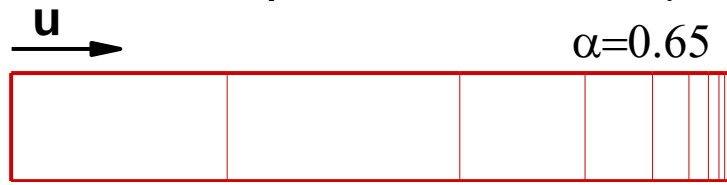
Ακολουθούν τα συγκριτικά διαγράμματα με το άναντες σχήμα διαφορών όπου είναι εμφανής η ανάγκη το σχήμα να είναι φραγμένο:

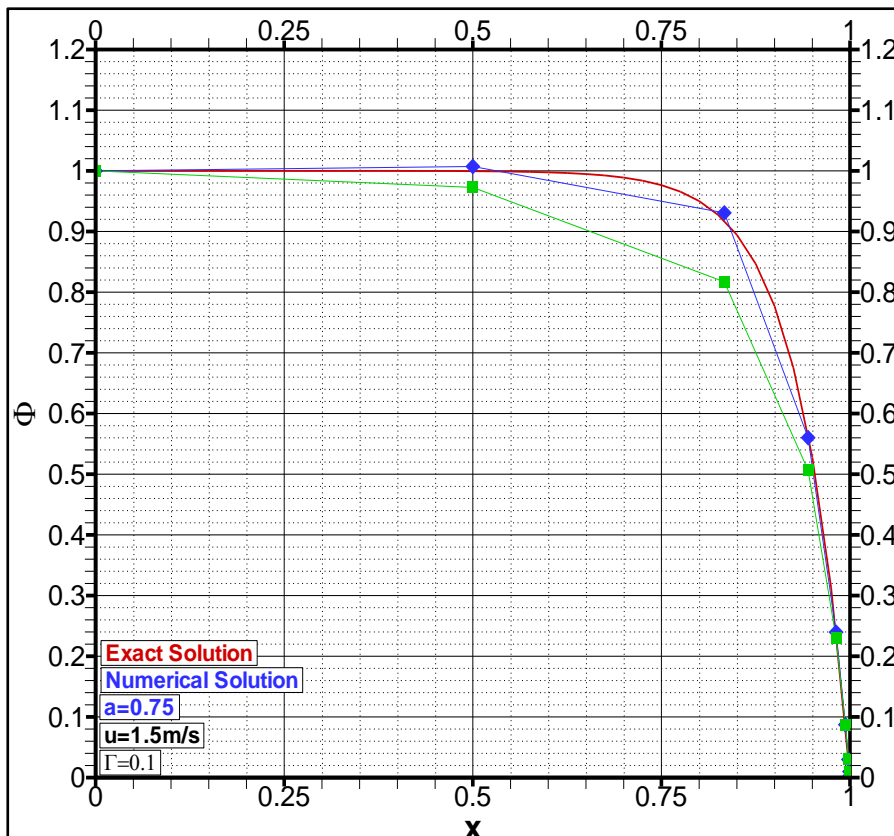
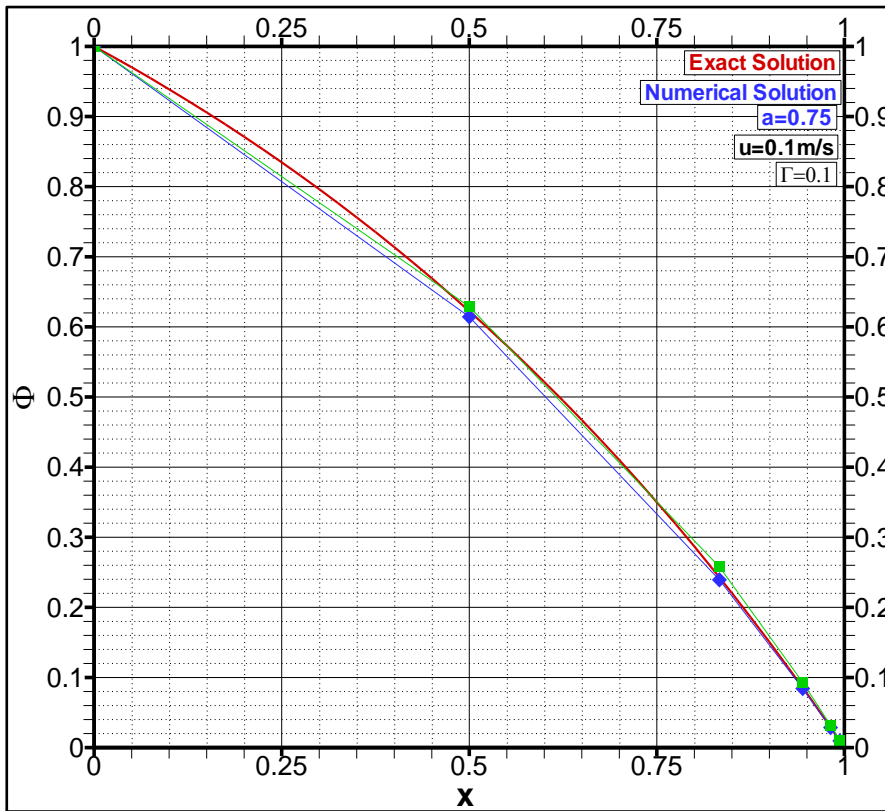
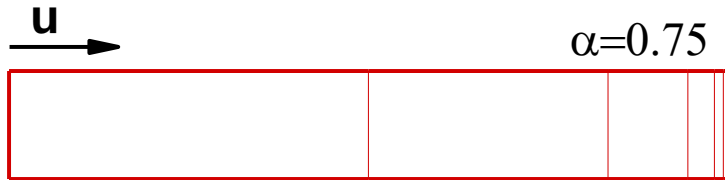












ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1]. Numerical computation of internal and external flows - C.Hirsch
- [2]. Computational methods for fluid dynamics - J.H.Ferziger M.Peric
- [3]. Introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method - Versteeg H.K., Malalasekera W.
- [4]. A first course in computational fluid dynamics – Roe 2009
- [5]. A genuinely high order total variation diminishing scheme for one-dimensional scalar conservation laws – Xiangxiong Zhang and Chi-Wang
- [6]. Nonlinear Interpolation and Total Variation Diminishing Schemes - Francois Dubois
- [7]. Compact third-order limiter functions for finite volume methods - Miroslav Cada , Manuel Torrilhon