



**Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο**  
**Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών**  
**Τομέας Ρευστών**  
**Εργαστήριο Υδροδυναμικών Μηχανών**

**Ανάπτυξη μη πλεγματικής σωματιδιακής μεθοδολογίας για την προσομοίωση μόνιμων και μη μόνιμων ροών με ελεύθερη επιφάνεια: εφαρμογή και πιστοποίηση σε υδροστροβίλους δράσης**

Διδακτορική Διατριβή - Εκτεταμένη Περίληψη

**ΦΟΙΒΟΣ-ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ Κ. ΚΟΥΚΟΥΒΙΝΗΣ**

**Τριμελής συμβουλευτική επιτροπή:**

Δ. Παπαντώνης, Καθηγητής ΕΜΠ  
Κ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ  
Γ. Αναγνωστόπουλος, Επίκουρος Καθηγητής ΕΜΠ

**Επταμελής εξεταστική επιτροπή:**

Δ. Παπαντώνης, Καθηγητής ΕΜΠ  
Κ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ  
Σ. Τσαγκάρης, Καθηγητής ΕΜΠ  
Σ. Βουτσινάς, Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ  
Δ. Μαθιουλάκης, Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ  
Γ. Αναγνωστόπουλος, επίκουρος καθηγητής ΕΜΠ  
Β. Ριζιώτης, Λέκτορας ΕΜΠ.

Αθήνα, Ιούλιος 2012

Η έγκριση της διδακτορικής διατριβής από την Ανώτατη Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών Ε.Μ. Πολυτεχνείου δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα (Ν. 5343/1932, Άρθρο 202)

## Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή .....	5
2. Βασικές αρχές της μεθόδου SPH.....	9
3. Η μέθοδος SPH για την προσομοίωση ροών .....	13
4. Πιστοποίηση της μεθόδου SPH .....	25
4.1. Βασικές δοκιμές .....	25
4.2. Πιστοποίηση σε ροές με ιξώδες .....	27
4.3. Ροές με ελεύθερες επιφάνειες.....	38
5. Εφαρμογές σε υδροστροβίλους δράσης .....	41
5.1. Ροή σε ακροφύσιο υδροστροβίλου Pelton.....	41
5.2. Εκτροπέας δέσμης υδροστροβίλου .....	43
5.3. Προσομοιώσεις υδροστροβίλων δράσης.....	45
5.3.1. Υδροστροβίλος Turgo.....	46
5.3.2. Υδροστροβίλος Pelton .....	51
6. Ενσωμάτωση επιλυτών Riemann στην μέθοδο SPH .....	57
7. Η μέθοδος SPH-ALE .....	63
8. Επίλογος .....	71
8.1. Συνεισφορά της παρούσας εργασίας.....	73
8.2. Γενικές σκέψεις περί των μεθόδων SPH / Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα .....	75
9. Αναφορές .....	76



## 1. Εισαγωγή

Ως υδροστρόβιλοι δράσης ορίζονται οι υδροστρόβιλοι στους οποίους όλη η μεταβολή πίεσης συμβαίνει στο στάτορα. Πρακτικά ο στάτορας είναι ακροφύσιο/α στο οποίο σχηματίζεται μια δέσμη νερού που κατευθύνεται στο δρομέα. Ο δρομέας μεταβάλλει την κατεύθυνση της ροής και, κατά συνέπεια, αναπτύσσεται ροπή και μεταφέρεται ενέργεια από το ρευστό στον άξονα του υδροστρόβιλου. Η λειτουργία γίνεται σε ατμοσφαιρικό περιβάλλον, παρουσία αέρα. Τέτοιοι υδροστρόβιλοι είναι οι Pelton και Turgo. Αντίθετα, στους υδροστρόβιλους αντίδρασης η πίεση αλλάζει πριν και μετά το δρομέα, ο δρομέας είναι πλήρως εμβαπτισμένος σε νερό και το περίβλημα σφραγισμένο. Η μελέτη υδροστροβίλων απαιτεί την κατανόηση των μηχανισμών και των ροϊκών φαινομένων που αναπτύσσονται κατά την λειτουργία τους και αυτό μπορεί να γίνει με τρεις τρόπους, που συχνά επικαλύπτονται και αλληλοσυμπληρώνονται:

- Με χρήση αναλυτικών προσεγγιστικών μοντέλων
- Με προσομοίωση των ροϊκών φαινομένων
- Με πειραματικές δοκιμές και μετρήσεις

Στην παρούσα εργασία αποδίδεται ιδιαίτερη βαρύτητα στην προσομοίωση της ροής.

Η προσομοίωση ροών απαιτεί την επίλυση των εξισώσεων ροής που εκφράζουν την διατήρηση της μάζας, της ορμής και την ενέργειας. Η επίλυση των εξισώσεων ροής μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας δυο διαφορετικές θεωρήσεις: με θεώρηση κατά Euler ή κατά Lagrange. Στη θεώρηση Euler τα υπολογιστικά στοιχεία παραμένουν ακίνητα στον χώρο. Αντίθετα στην θεώρηση κατά Lagrange τα υπολογιστικά στοιχεία κινούνται παρακολουθώντας την ροή. Ένας άλλος τρόπος κατηγοριοποίησης των μεθόδων επίλυσης της ροής είναι σε πλεγματικές και μη πλεγματικές. Στις πλεγματικές μεθόδους τα υπολογιστικά στοιχεία είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους με προκαθορισμένο τρόπο, ο οποίος καθορίζει και τις διακριτοποιημένες προσεγγιστικές σχέσεις που χρησιμοποιούνται για την επίλυση των εξισώσεων. Αντίθετα, στις μη πλεγματικές μεθόδους δεν υπάρχει συνδεσιμότητα μεταξύ των υπολογιστικών στοιχείων, ή τουλάχιστον δεν ορίζεται ρητά· οι προσεγγιστικές σχέσεις υπολογίζονται με βάση το ασύνδετο σύνολο υπολογιστικών στοιχείων. Οι κλασικές μέθοδοι της υπολογιστικής ρευστομηχανικής, όπως πεπερασμένες διαφορές, πεπερασμένα στοιχεία και πεπερασμένοι όγκοι είναι πλεγματικές μέθοδοι με θεώρηση κατά Euler, παρόλα αυτά η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων χρησιμοποιείται και με θεώρηση κατά Lagrange για την επιστήμη αντοχής υλικών.

Η θεώρηση κατά Lagrange παρουσιάζει ορισμένα πλεονεκτήματα σε σχέση με τη θεώρηση κατά Euler. Δεδομένου ότι δεν χρειάζεται να υπολογιστεί η παράγωγος συναγωγής, ο υπολογιστικός αλγόριθμος είναι απλούστερος. Η παρακολούθηση διεπιφανειών / ασυνεχειών είναι απλούστερη δεδομένου ότι τα ίδια τα υπολογιστικά στοιχεία ακολουθούν τα εν λόγω χαρακτηριστικά. Παρόλα αυτά, η θεώρηση κατά Lagrange είναι προβληματική όταν παρουσιάζονται μεγάλες παραμορφώσεις. Αυτός είναι και ο λόγος που θεώρηση κατά Lagrange χρησιμοποιείται ως επί το πλείστον στην υπολογιστική μηχανική στερεών. Μια πλεγματική Lagrangian μέθοδος για την προσομοίωση ροών θα ήταν προβληματική λόγω της έντονης σχετική κίνησης των στοιχείων ρευστού, που θα παραμόρφωνε το υπολογιστικό πλέγμα, απαιτώντας τεχνική ανακατασκευής του πλέγματος.

Προσομοίωση υδροστροβίλων ή τμημάτων υδροστροβίλων ξεκίνησε από το 1978, αρχικά σε απλές γεωμετρίες αγωγών απαγωγής, χρησιμοποιώντας θεώρηση δυναμικής ροής και 2-διάστατη ροή, και με την πάροδο του χρόνου χρησιμοποιώντας όλο και πιο πολύπλοκα αριθμητικά μοντέλα σε πλήρως 3-διάστατες και κινούμενες γεωμετρίες. Για τις προσομοιώσεις αυτού του είδους χρησιμοποιήθηκαν πλεγματικές υπολογιστικές τεχνικές με θεώρηση κατά Euler.

Η προσομοίωση υδροστροβίλων δράσης με τη χρήση πλεγματικών Eulerian μεθόδων έγινε πρακτικά δυνατή μετά το 2000. Ο κύριος λόγος έχει να κάνει με την πολυπλοκότητα των ροϊκών

φαινομένων. Σε αντίθεση με τους υδροστροβίλους αντίδρασης η ροή είναι διφασική, με ελεύθερη επιφάνεια, μη-μόνιμη, ενώ περιλαμβάνει και κινούμενες γεωμετρίες. Παρόλο που πλέον υπάρχουν οι διαθέσιμες τεχνικές για την αντιμετώπιση των παραπάνω φαινομένων, η προσομοίωση ενός τέτοιου υδροστροβίλου είναι αρκετά χρονοβόρα και απαιτεί σημαντική υπολογιστική ισχύ.

Μια ενδιαφέρουσα εναλλακτική πρόταση είναι η χρήση μη πλεγματικής μεθόδου με θεώρηση κατά Lagrange. Σε αυτήν την περίπτωση είναι δυνατή η αξιοποίηση των πλεονεκτημάτων της θεώρησης κατά Lagrange, χωρίς να υπάρχουν προβλήματα λόγω της παραμόρφωσης του υπολογιστικού πλέγματος από την κίνηση των υπολογιστικών στοιχείων. Η θεώρηση κατά Lagrange δίνει την δυνατότητα εύκολης παρακολούθησης της ελεύθερης επιφάνειας - καθόσον δεν απαιτεί κάποια ειδική μεθοδολογία για την παρακολούθησή της- και χειρισμού κινούμενων γεωμετριών. Επιπροσθέτως η απουσία υπολογιστικού πλέγματος και η χρήση ασύνδετων υπολογιστικών στοιχείων για τις προσεγγίσεις που απαιτούνται για την επίλυση των εξισώσεων ροής, επιτρέπει την προσομοίωση φαινομένων με έντονες παραμορφώσεις, όπως για παράδειγμα κυμάτων. Ακόμα απλοποιεί την όλη διαδικασία της προσομοίωσης, δεδομένου ότι η κατασκευή πλέγματος δεν είναι απλή υπόθεση, ειδικά για πολύπλοκες γεωμετρίες.

Η παρούσα εργασία έχει σαν κύριο στόχο την ανάπτυξη της μη πλεγματικής μεθόδου Smoothed Particle Hydrodynamics (που θα υποδηλώνεται στο εξής απλά με την συντομογραφία SPH), καθώς και των πιο σύγχρονων παραλλαγών της, για την προσομοίωση διαφόρων τύπων ροών με ή χωρίς ιξώδες. Η συγκεκριμένη μέθοδος έχει τα πλεονεκτήματα που αναφέρθηκαν παραπάνω, δηλαδή είναι μη πλεγματική και υιοθετεί Lagrangian θεώρηση. Η εν λόγω μέθοδος αναπτύχθηκε το 1977 και από τότε έχει εφαρμοστεί σε διάφορα ερευνητικά πεδία (συμπεριλαμβανομένης και της μηχανικής ρευστών), κατά συνέπεια υπάρχει θεωρητικό υπόβαθρο και εμπειρία στη χρήση της, χωρίς να παραβλέπεται ότι υπάρχει ακόμη σημαντικό περιθώριο ερευνητικής δραστηριότητας, δεδομένου ότι υπάρχουν σημεία της μεθόδου που χρήζουν βελτίωσης, όπως για παράδειγμα ο χειρισμός των ορίων.

Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στην προσομοίωση ροών με ελεύθερη επιφάνεια, καθώς η περιγραφή αυτού του τύπου ροής αποτελεί και το μεγαλύτερο πλεονέκτημα της μεθόδου. Επιπλέον η μέθοδος SPH εφαρμόστηκε στην προσομοίωση υδροστροβίλων δράσης, όπως Pelton και Turgo, και χρησιμοποιήθηκε για τη βελτιστοποίηση υδροστροβίλου Turgo, με σκοπό την αύξηση του βαθμού απόδοσης του υδροστροβίλου.

Τα πρωτότυπα σημεία της παρούσας εργασίας συνοψίζονται παρακάτω:

- Ανάπτυξη υπολογιστικών αλγορίθμων με βάση τη μέθοδο SPH και των παραλλαγών της.
- Εφαρμογή της μεθόδου για την προσομοίωση υδροστροβίλων δράσης και το σχεδιασμό υδροστροβίλου Turgo.
- Ανάπτυξη σχήματος ακρίβειας δεύτερης τάξης για τις μεθόδους SPH που περιλαμβάνουν επιλύτες Riemann.

Στα πλαίσια αυτής της εργασίας οι μέθοδοι που αναπτύχθηκαν, πιστοποιήθηκαν και δοκιμάστηκαν χρησιμοποιώντας αναλυτικές λύσεις (όπου ήταν διαθέσιμες), πειραματικά και αριθμητικά αποτελέσματα από την βιβλιογραφία, αλλά και αριθμητικά αποτελέσματα από το εμπορικό υπολογιστικό πακέτο Fluent. Με τη χρήση του Fluent δεν υπονοείται ότι το εν λόγω πρόγραμμα προσφέρει την απόλυτη ακρίβεια· το συγκεκριμένο πρόγραμμα έχει χρησιμοποιηθεί από πολλούς χρήστες ανά τον κόσμο για την προσομοίωση διαφόρων ροϊκών φαινομένων, συμπεριλαμβανομένων και πολυφασικών ροών, κατά συνέπεια έχει πιστοποιηθεί, άρα είναι κατάλληλο στο να δώσει μια ενδεικτική λύση που χρησιμοποιείται σαν αναφορά. Παράλληλα το υπολογιστικό πρόγραμμα Fluent είναι διαθέσιμο στους φοιτητές του ΕΜΠ μέσω του κεντρικού υπολογιστή της σχολής.

Η παρούσα εργασία είναι δομημένη ως εξής:

- Το 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο πραγματεύεται τις βασικές αρχές για την εξαγωγή των προσεγγιστικών σχέσεων της μεθόδου, καθώς επίσης και την ανάλυση της ακρίβειας της μεθόδου
- Το 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο αφορά την έκφραση των εξισώσεων Navier-Stokes σύμφωνα με τις προσεγγίσεις της μεθόδου SPH.
- Το 4<sup>ο</sup> κεφάλαιο αφορά δοκιμές πιστοποίησης της μεθόδου SPH που αναπτύχθηκε. Το κεφάλαιο αυτό χωρίζεται σε τρεις ενότητες. Η πρώτη αφορά τη δοκιμή βασικών ιδιοτήτων της μεθόδου SPH, όπως διατήρηση της στροφορμής. Η δεύτερη ενότητα αφορά την προσομοίωση ροών με ιξώδες. Η τρίτη ενότητα αφορά ροές με ελεύθερη επιφάνεια.
- Στο 5<sup>ο</sup> κεφάλαιο περιλαμβάνονται πρακτικές εφαρμογές της μεθόδου σε υδροστροβίλους δράσης.
- Στα κεφάλαια 6 και 7 παρουσιάζονται παραλλαγές της μεθόδου SPH, βασισμένες σε επιλύτες Riemann, που αναπτύχθηκαν στα πλαίσια της παρούσας εργασίας. Στα ίδια κεφάλαια παρουσιάζονται και εφαρμογές/δοκιμές των εν λόγω παραλλαγών.
- Το 8<sup>ο</sup> κεφάλαιο αποτελεί έναν επίλογο που συνοψίζει τα συμπεράσματα της παρούσας εργασίας.





## 2. Βασικές αρχές της μεθόδου SPH

Η μέθοδος Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) επινοήθηκε από τους Lucy, Gingold και Monaghan το 1977, αρχικά για την προσομοίωση αστροφυσικών προβλημάτων στον 3-διάστατο ανοικτό χώρο. Ωστόσο σύντομα επεκτάθηκε καλύπτοντας τη συμπεριφορά ρευστών και στερεών.

Η μέθοδος επινοήθηκε για την επίλυση προβλημάτων υδροδυναμικής φύσεως που μπορούν να εκφραστούν με τη μορφή μερικών διαφορικών εξισώσεων. Αναλυτικές λύσεις αυτών των προβλημάτων εν γένει δεν υπάρχουν, οπότε είναι αναγκαία η διακριτοποίηση του προβλήματος και η διατύπωση προσεγγίσεων για τους τελεστές των διαφορικών εξισώσεων.

Ο περιγραφόμενος χώρος αντιπροσωπεύεται από ένα σύνολο αυθαίρετα κατανεμημένων υπολογιστικών στοιχείων τα οποία καλούνται *σωματίδια*. Μεταξύ των σωματιδίων δεν υπάρχει συνδεσιμότητα (δεν υφίσταται υπολογιστικό πλέγμα). Τα σωματίδια κινούνται ακολουθώντας το πεδίο ροής (*Lagrangian θεώρηση*), κατά συνέπεια η τοπική κατανομή σωματιδίων προσαρμόζεται στα χαρακτηριστικά του περιγραφόμενου φαινομένου. Αυτό επιτρέπει την εύκολη περιγραφή ασυνεχειών και διεπιφανειών.

Η διατύπωση των προσεγγίσεων της μεθόδου SPH βασίζεται σε δυο βήματα: το πρώτο περιλαμβάνει την ολοκληρωματική προσέγγιση ενώ το δεύτερο τη σωματιδιακή.

### Ολοκληρωματική προσέγγιση

Η ολοκληρωματική προσέγγιση βασίζεται στην ταυτότητα [1]:

$$f(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.1)$$

όπου  $f(\mathbf{r})$  είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση ενός 3D διανύσματος θέσης  $\mathbf{r}$  και  $\delta$  είναι η συνάρτηση δ-Dirac. Η ταυτότητα 2.1 μπορεί να προσεγγιστεί αντικαθιστώντας τη συνάρτηση δ-Dirac με μια *συνάρτηση ομαλοποίησης*  $W$  (αλλιώς *συνάρτηση πυρήνα*). Χαρακτηριστικό της συνάρτησης ομαλοποίησης είναι το *μήκος ομαλοποίησης*  $h$ , καθώς καθορίζει την ακρίβεια των προσεγγίσεων της μεθόδου.

$$f(\mathbf{r}) \equiv \int_{\Omega} f(\mathbf{r}') W(\mathbf{r}-\mathbf{r}', h) d\mathbf{r}' \quad (2.2)$$

Προκειμένου να ισχύει η παραπάνω σχέση 2.2, πρέπει η συνάρτηση ομαλοποίησης να πληροί ορισμένες προϋποθέσεις, όπως:

- να είναι θετική, φθίνουσα, άρτια και κανονικοποιημένη στο χωρίο υποστήριξης,
- να είναι συμπαγής, ομαλή και
- να τείνει στη συνάρτηση δ-Dirac όσο το μήκος ομαλοποίησης τείνει στο μηδέν.

Είναι δυνατό να διατυπωθεί μια αντίστοιχη έκφραση για την παράγωγο της συνάρτησης  $f$ , αντικαθιστώντας όπου  $f$  την  $\nabla f(\mathbf{r})$  στην 2.2. Τελικά, μετά από πράξεις:

$$\langle \nabla f(\mathbf{r}) \rangle = \int_S f(\mathbf{r}') W(\mathbf{r}-\mathbf{r}', h) \mathbf{n} dS - \int_{\Omega} f(\mathbf{r}') \nabla W(\mathbf{r}-\mathbf{r}', h) d\mathbf{r}' \quad (2.3)$$

Το επιφανειακό ολοκλήρωμα στην εξίσωση 2.3 είναι μηδέν εάν το όριο του χωρίου υποστήριξης είναι εντός του υπολογιστικού χώρου, οπότε και μπορεί να παραλειφθεί. Σε αντίθετη περίπτωση απαιτείται ιδιαίτερη μεταχείριση ούτως ώστε να αντισταθμιστεί η επίδρασή του.

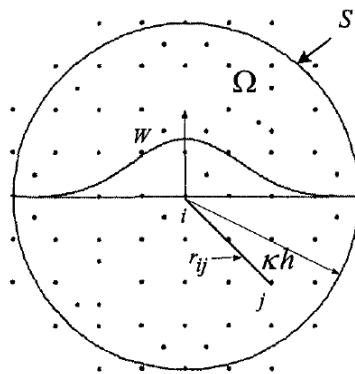
Σωματιδιακή προσέγγιση

Ο υπολογιστικός χώρος αντιπροσωπεύεται από ένα πεπερασμένο σύνολο σωματιδίων που καταλαμβάνουν χώρο και φέρουν μάζα καθώς και όλες τις χαρακτηριστικές ιδιότητες του περιγραφόμενου μέσου. Επομένως, οι ολοκληρωματικές προσεγγίσεις μετατρέπονται σε αθροίσματα πεπερασμένων όρων. Έτσι η σχέση 2.2 μπορεί να προσεγγιστεί ως:

$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(\mathbf{r}_j) W_{ij} \quad (2.4)$$

Αντίστοιχη είναι και η προσέγγιση της παραγώγου:

$$\langle \nabla f(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(\mathbf{r}_j) \nabla_i W_{ij} \quad (2.5)$$



Σχ. 2.1. Το χωρίο υποστήριξης της συνάρτησης ομαλοποίησης.

Στις παραπάνω σχέσεις  $m_j$  και  $\rho_j$  συμβολίζουν τη μάζα και την πυκνότητα του σωματιδίου  $j$  (βλέπε και σχήμα 2.1), ενώ ως  $W_{ij}$  ορίζεται το  $W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h)$ .

Είναι δυνατό, με κατάλληλους χειρισμούς, να εξαχθούν επιπλέον συσχετίσεις για την παράγωγο μιας συνάρτησης, όπως:

$$\langle \nabla f(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^N m_j [f(\mathbf{r}_j) - f(\mathbf{r}_i)] \nabla_i W_{ij} \quad (2.6)$$

$$\langle \nabla f(\mathbf{r}) \rangle = \rho_i \sum_{j=1}^N m_j \left[ \left( \frac{f(\mathbf{r}_j)}{\rho_j^2} \right) + \left( \frac{f(\mathbf{r}_i)}{\rho_i^2} \right) \right] \nabla_i W_{ij} \quad (2.7)$$

Η εξίσωση 2.6 παρουσιάζει αρκετά καλύτερη συμπεριφορά και ακρίβεια, σε σχέση με την 2.5, δεδομένου ότι είναι σε θέση να αναπαράγει ακριβώς την κλίση πολυωνύμων μηδενικού βαθμού, για οποιαδήποτε κατανομή σωματιδίων.

Χρησιμοποιώντας αντίστοιχες προσεγγίσεις είναι δυνατό να εξαχθεί σχέση για τον υπολογισμό της Λαπλασιανής.

Εκτίμηση σφαλμάτων των προσεγγίσεων SPH

Το σφάλμα των εκφράσεων της μεθόδου SPH αποτελείται από το σφάλμα της ολοκληρωματικής και της σωματιδιακής προσέγγισης.

Χρησιμοποιώντας ανάπτυγμα κατά Taylor είναι δυνατό να υπολογιστεί το σφάλμα ολοκληρωματικής προσέγγισης. Τελικά, εάν ισχύουν οι δυο ακόλουθες συνθήκες [1]:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_0 = \int_{\Omega} W(x-x',h) dx' = 1 \\ M_1 = \int_{\Omega} (x-x')W(x-x',h) dx' = 0 \\ M_2 = \int_{\Omega} (x-x')^2 W(x-x',h) dx' = 0 \\ \dots \\ M_n = \int_{\Omega} (x-x')^n W(x-x',h) dx' = 0 \end{array} \right\} \quad (2.8)$$

και

$$\left\{ \begin{array}{l} W(x-x',h)|_S = 0 \\ W'(x-x',h)|_S = 0 \\ \dots \\ W^{(k-1)}(x-x',h)|_S = 0 \end{array} \right\} \quad (2.9)$$

τότε είναι δυνατή η ολοκληρωματική προσέγγιση μιας συνάρτησης και της παραγώγου μέχρι  $k$ -τάξης με ακρίβεια  $n$  τάξης. Με βάση αυτές τις συνθήκες είναι δυνατή η κατασκευή συναρτήσεων ομαλοποίησης υψηλής ακριβείας. Ωστόσο, εδώ πρέπει να επισημανθεί ότι, συνάρτηση ομαλοποίησης με ολοκληρωματική προσέγγιση ακρίβειας πάνω από  $2^{\text{η}}$  τάξη, αναγκαστικά θα έχει αρνητικές τιμές σε κάποια περιοχή του χωρίου υποστήριξης. Αυτό θα έχει ως συνέπεια τον υπολογισμό αφύσικων λύσεων, όπως αρνητική πυκνότητα/ενέργεια.

Ο υπολογισμός του σφάλματος σωματιδιακής προσέγγισης είναι αρκετά πιο πολύπλοκος, καθώς εξαρτάται από την κατανομή των σωματιδίων στο χωρίο υποστήριξης, η δε κατανομή με τη σειρά της εξαρτάται από τη δυναμική της ροής. Ένας τρόπος είναι να εκτιμηθεί το σφάλμα από σωματίδια τα οποία τοποθετήθηκαν αρχικά σε ένα καρτεσιανό πλέγμα, αλλά στη συνέχεια μετακινήθηκαν κατά μια τυχαία μετατόπιση συγκεκριμένου πλάτους. Αυτός ο τρόπος υπερεκτιμά το σφάλμα γιατί, στην πράξη, δεν εμφανίζονται τέτοιες κατανομές. Με άλλα λόγια, η κατανομή των σωματιδίων μπορεί να εμφανίζει ανομοιομορφίες αλλά αυτές παρουσιάζονται ακολουθώντας ένα πρότυπο, ανάλογα με το πεδίο ροής. Ο Monaghan [2] απέδειξε ότι η ομαλότητα της συνάρτησης  $W$  μειώνει το σφάλμα σωματιδιακής προσέγγισης. Επίσης έδειξε ότι το σφάλμα είναι αμελητέο για σωματίδια τοποθετημένα σε καρτεσιανό πλέγμα, εάν το μήκος ομαλοποίησης είναι μεγαλύτερο από την απόσταση μεταξύ των σωματιδίων.

Εδώ πρέπει να τονιστεί ότι, παρόλο που η ομοιόμορφη κατανομή παρουσιάζει αμελητέο σφάλμα σωματιδιακής προσέγγισης, μια τέτοια κατανομή ενδέχεται να μην είναι προτιμητέα. Αυτό οφείλεται στη φύση της μεθόδου SPH και στην τάση που έχουν τα σωματίδια να κινούνται σε χαρακτηριστικές κατευθύνσεις. Αυτό έχει ως συνέπεια τα σωματίδια να κινούνται σχηματίζοντας χαρακτηριστικές γραμμές και τελικά προκαλούνται συσσωματώματα, επηρεάζοντας την ακρίβεια των προσεγγίσεων και δίνοντας μη φυσικές λύσεις. Επομένως, στην πράξη πρέπει να γίνει ένας συμβιβασμός και τα σωματίδια να μην είναι ομοιόμορφα διατεταγμένα, ούτως ώστε να κρατηθεί το σφάλμα στο ελάχιστο.

### Η συνάρτηση ομαλοποίησης

Όπως παρουσιάστηκε παραπάνω, η συνάρτηση ομαλοποίησης παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στη μέθοδο SPH επηρεάζοντας την ακρίβεια των προσεγγίσεων της μεθόδου. Η μορφή μιας συνάρτησης ομαλοποίησης είναι η ακόλουθη:

$$W(\mathbf{r}_{ij}) = A(h^d) f\left(\frac{\mathbf{r}_{ij}}{h}\right) \quad (2.10)$$

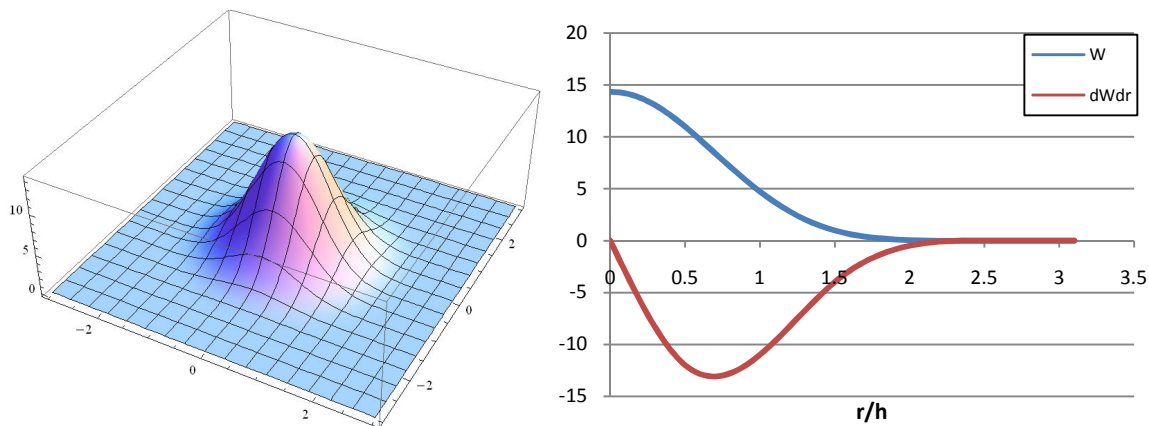
Η συνάρτηση ομαλοποίησης είναι το γινόμενο ενός σταθερού όρου  $A(h^d)$  με μια συνάρτηση  $f$  που εξαρτάται από το λόγο της απόστασης μεταξύ των σωματιδίων προς το μήκος ομαλοποίησης  $h$ . Ο εκθέτης  $d$  δηλώνει τη διάσταση του προβλήματος. Ο σταθερός όρος χρειάζεται προκειμένου η συνάρτηση πυρήνα να είναι κανονικοποιημένη, δηλαδή:

$$\int_{\Omega} W(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1 \quad (2.11)$$

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε αποκλειστικά η Spline 4<sup>ης</sup> τάξης (quartic), καθώς έχει συνεχή παράγωγο δεύτερης τάξης, σε αντίθεση με την κυβική Spline, ενώ ταυτόχρονα το χωρίο υποστήριξης είναι μικρότερο της Gaussian. Η εξίσωσή της είναι η ακόλουθη

$$W(\mathbf{r}) = A(h^d) \cdot \begin{cases} (q+2.5)^4 - 5(q+1.5)^4 + 10 \cdot (q+0.5)^4 & 0 \leq q < 0.5 \\ (2.5-q)^4 - 5(1.5-q)^4 & 0.5 \leq q < 1.5 \\ (2.5-q)^4 & 1.5 \leq q < 2.5 \\ 0 & 2.5 \leq q \end{cases} \quad (2.12)$$

όπου  $q = \frac{\|\mathbf{r}\|}{h}$  και  $A(h^1) = \frac{1}{24h}$ ,  $A(h^2) = \frac{96}{1199\pi \cdot h^2}$ ,  $A(h^3) = \frac{1}{20\pi \cdot h^3}$



Σχ. 2.2. Αριστερά: 3D μορφή της συνάρτησης Spline 4<sup>ης</sup> τάξης. Δεξιά: γράφημα της συνάρτησης και της παραγώγου της.

### 3. Η μέθοδος SPH για την προσομοίωση ροών

Στο παρόν κεφάλαιο αναλύεται η μέθοδος SPH που αναπτύχθηκε για την προσομοίωση ασυμπίεστων ροών. Η ροή αντιμετωπίζεται ως ασθενώς συμπιεστή· εκφράσεις για πραγματικά ασυμπίεστη ροή είναι δυνατό να εξαχθούν, αλλά ο τελικός αλγόριθμος είναι προβληματικός στον παραλληλισμό του, ενώ αντιμετωπίζει αστάθειες. Οι εκφράσεις της μεθόδου SPH απορρέουν από τις βασικές εξισώσεις ροής της ρευστομηχανικής, δηλαδή τις αρχές διατήρησης:

- της μάζας,
- της ορμής και
- της ενέργειας

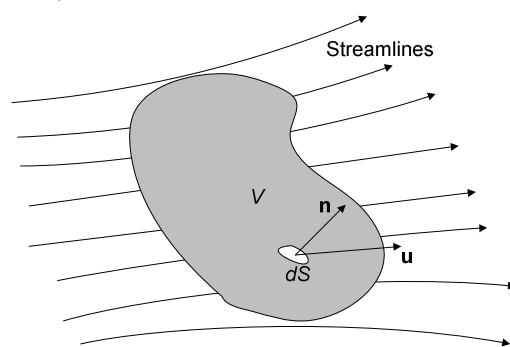
Στη θεώρηση κατά Lagrange υπολογίζεται η ολική χρονική παράγωγος που αποτελείται από το άθροισμα της χρονικής παραγωγού και της παραγωγού συναγωγής (convection derivative). Με άλλα λόγια ισχύει για τη χρονική παράγωγο κατά Lagrange ενός βαθμωτού μεγέθους  $f$ :

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} \quad (3.1)$$

όπου

- $\frac{Df}{Dt}$  η χρονική παράγωγος κατά Lagrange (αλλιώς υλική παράγωγος),
- $\frac{\partial f}{\partial t}$  η χρονική παράγωγος κατά Euler,
- $\mathbf{u} = (u, v, w)$  το διάνυσμα ταχύτητας του σωματιδίου που παρακολουθείται,
- $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z}$  χωρική παράγωγος του μεγέθους  $f$  ως προς  $x$ ,  $y$ ,  $z$  αντίστοιχα

Στη θεώρηση κατά Lagrange ο όγκος ελέγχου κινείται ακολουθώντας τη ροή, με συνέπεια η ποσότητα ρευστού να μένει εντός του όγκου ελέγχου. Με άλλα λόγια, ο όγκος ελέγχου μπορεί να παραμορφωθεί, αλλά η μάζα του μένει ίδια.



Σχ. 3.1. Ένας όγκος ελέγχου κατά Lagrange.

Η συνολική μεταβολή του όγκου κατά Lagrange ενός όγκου ελέγχου, μπορεί να υπολογιστεί ως:

$$\frac{1}{\delta V} \frac{D(\delta V)}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3.2)$$

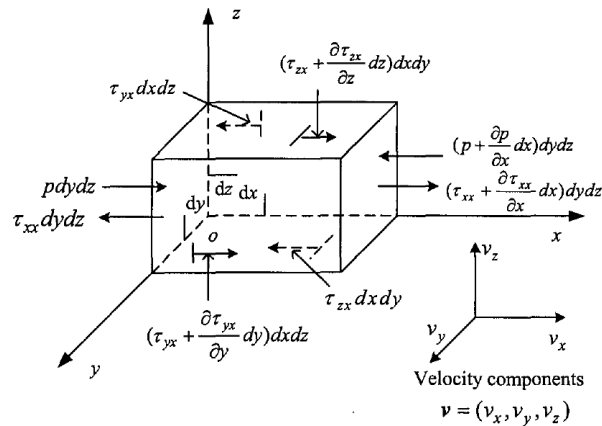
#### Εξίσωση συνέχειας

Η εξίσωση της συνέχειας εκφράζει τη διατήρηση της μάζας:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (3.3)$$

Εξίσωση ορμής

Η εξίσωση της ορμής ουσιαστικά εκφράζει τον 2<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα, δηλαδή η συνισταμένη δύναμη πάνω στον Lagrangian όγκο ελέγχου ισούται με τη μάζα του επί την επιτάχυνσή του.



Σχ. 3.2. Οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα κελί κατά Lagrange.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στον παραπάνω όγκο ελέγχου είναι επιφανειακές δυνάμεις και δυνάμεις σώματος. Δυνάμεις σώματος είναι η βαρύτητα, μαγνητικές δυνάμεις ή άλλες δυνάμεις που ασκούνται σε όλο τον όγκο ελέγχου του ρευστού. Η εξίσωση της ορμής σε κάθε άξονα (x, y, z) είναι:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho F_x \quad (3.4)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho F_y \quad (3.5)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho F_z \quad (3.6)$$

Για Νευτώνειο ρευστό, η τάση  $\tau$  είναι ανάλογη της παραμόρφωσης  $\epsilon$  μέσω του δυναμικού ιξώδους  $\mu$ , δηλαδή:

$$\tau_{ab} = \mu \epsilon_{ab} \quad (3.7)$$

όπου

$$\epsilon_{ab} = \frac{\partial v_b}{\partial x_a} + \frac{\partial v_a}{\partial x_b} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \delta_{ab} \quad (3.8)$$

Εξισώσεις Navier – Stokes εκφρασμένες κατά SPH

Η προσέγγιση της πυκνότητας είναι πολύ σημαντική για τη μέθοδο SPH, καθώς καθορίζει την κατανομή σωματιδίων. Υπάρχουν δύο τρόποι για τον υπολογισμό της πυκνότητας στο κλασικό SPH. Ο πρώτος που ονομάζεται *αθροιστική πυκνότητα*, βασίζεται στην εφαρμογή της σχέσης 2.4 για την πυκνότητα:

$$\rho = \sum_{j=1}^N m_j W_{ij} \quad (3.9)$$

Μια άλλη δυνατότητα για προσέγγιση της πυκνότητας, είναι μέσω της *εξίσωσης της συνέχειας*. Ξεκινώντας από την εξίσωση 3.3 και χρησιμοποιώντας την προσέγγιση 2.5, καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση:

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = -\rho_i \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{u}_j \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (3.10)$$

Με κατάλληλους χειρισμούς είναι δυνατό να εξαχθεί μια εναλλακτική σχέση που χρησιμοποιεί σχετικές ταχύτητες, ως προς το σωματίδιο  $i$ . Η σχέση αυτή παρουσιάζει καλύτερη συμπεριφορά, καθώς δίνει ακριβέστερα αποτελέσματα.

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = -\rho_i \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \nabla_i W_{ij} = \rho_i \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{u}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (3.11)$$

με  $\mathbf{u}_{ij} = \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j$  (γενικά ως  $\varphi_{ij}$  ορίζεται η διαφορά  $\varphi_i - \varphi_j$ )

Μια ακόμα πιο δημοφιλής μορφή της εξίσωσης της συνέχειας είναι η ακόλουθη:

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{u}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (3.12)$$

Οι προηγούμενες σχέσεις έχουν πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα. Η προσέγγιση αθροιστικής πυκνότητας διατηρεί τη μάζα ακριβώς, αλλά υποεκτιμά την πυκνότητα όταν χρησιμοποιείται κοντά στο σύνορο του υπολογιστικού χώρου. Επίσης απαιτείται ο υπολογισμός της πριν από τον υπολογισμό των υπολοίπων μεγεθών. Αντίθετα, στην περίπτωση χρήσης της εξίσωσης της συνέχειας δεν υπάρχει αυτός ο περιορισμός, κάτι που ευνοεί την μείωση υπολογιστικού κόστους και την παράλληλη επεξεργασία.

Για την έκφραση των εξισώσεων της ορμής ακολουθείται παραπλήσια διαδικασία με την εξίσωση της συνέχειας. Τελικά η εξίσωση της ορμής μπορεί να εκφραστεί (για περισσότερες πληροφορίες ο αναγνώστης παραπέμπεται στο πλήρες κείμενο της εργασίας), χρησιμοποιώντας συμβολισμό Einstein, ως:

$$\frac{Du_i^a}{Dt} = -\sum_j m_j \left( \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x^a} + \sum_j m_j \left( \frac{\mu_i \varepsilon_i^{ab}}{\rho_i^2} + \frac{\mu_j \varepsilon_j^{ab}}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x^b} + f_{body}^a \quad (3.13)$$

Η παραμόρφωση του στοιχείου ρευστού υπολογίζεται από την σχέση:

$$\varepsilon_i^{ab} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} u_{ji}^a \frac{\partial W_{ij}}{\partial x^b} + \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} u_{ji}^b \frac{\partial W_{ij}}{\partial x^a} - \frac{2}{3} \left( \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{u}_{ji} \cdot \nabla W_{ij} \right) \delta^{ab} \quad (3.14)$$

Πρακτικά, οι ερευνητές που ασχολούνται με το SPH σπανίως χρησιμοποιούν την έκφραση 3.13 σε συνδυασμό με την 3.14, καθώς απαιτείται ξεχωριστός υπολογισμός της παραμόρφωσης των στοιχείων ρευστού και στη συνέχεια της εξίσωσης ορμής. Ακόμα απαιτείται κατάλληλη προεκβολή της παραμόρφωσης στο όριο για να προσομοιωθούν σωστά ροές με ιξώδες. Αντί λοιπόν της σχέσης 3.13 & 3.14, είναι προτιμότερη η παρακάτω σχέση η οποία λαμβάνει υπόψη την συνεισφορά του ιξώδους χρησιμοποιώντας την SPH προσέγγιση για την Λαπλασιανή του πεδίου ταχυτήτων [3, 4]:

$$\frac{D\mathbf{u}_i}{Dt} = -\sum_j m_j \left[ \left( \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \nabla W_{ij} - \mathbf{\Pi}_{ij} \right] + \mathbf{f}_{body} \quad (3.15)$$

με

$$\mathbf{\Pi}_{ij} = \frac{\mu_i + \mu_j}{\rho_i \rho_j} \frac{\mathbf{u}_{ij}}{\|\mathbf{r}_{ij}\|^2} \mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla W_{ij} \quad (3.16)$$

Η σχέση 3.16 είναι σε θέση να αντιμετωπίσει προβλήματα όπου αλληλεπιδρούν δυο ή περισσότερα ρευστά με διαφορετικό ιξώδες, μη Νευτώνεια ρευστά και φαινόμενα τύρβης, ενώ τα αποτελέσματά της είναι παραπλήσια με της 3.14.

Οι σχέσεις 3.13-3.16 αποτελούν εναλλακτικές για τη μοντελοποίηση του φυσικού ιξώδους. Παρόλα αυτά σε προσομοιώσεις που περιλαμβάνουν κύματα κρούσης είναι αναγκαία η προσθήκη ενός άλλου όρου ιξώδους, που ονομάζεται τεχνητό ιξώδες ή τεχνητή συνεκτικότητα. Χωρίς τη χρήση του όρου τεχνητού ιξώδους θα ήταν αδύνατη η προσομοίωση τέτοιων φαινομένων, καθώς θα προκαλούνταν έντονες αριθμητικές ταλαντώσεις. Ο όρος τεχνητής συνεκτικότητας που προτάθηκε από τον Monaghan [2] είναι ο ακόλουθος:

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-\alpha_{\Pi}\bar{c}_{ij}\varphi_{ij} + \beta_{\Pi}\varphi_{ij}}{\bar{\rho}_{ij}} & \mathbf{u}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} < 0 \\ 0 & \mathbf{u}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} < 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

όπου

$$\varphi_{ij} = \frac{h_{ij}\mathbf{u}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}}{\|\mathbf{r}_{ij}\|^2 + (0.1h_{ij})^2}$$

$$\bar{\rho}_{ij} = \frac{1}{2}(\rho_i + \rho_j)$$

$$\bar{c}_{ij} = \frac{1}{2}(c_i + c_j)$$

$$c_i = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}^{\text{Tait}} = c_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}}$$

$$h_{ij} = \frac{1}{2}(h_i + h_j)$$

Οι όροι  $c_0$  και  $\rho_0$  αντιστοιχούν στην ταχύτητα του ήχου και στην πυκνότητα σε κατάσταση αναφοράς, όταν χρησιμοποιηθεί η καταστατική εξίσωση Tait. Για την προσομοίωση αερίων απαιτείται κατάλληλη τροποποίηση, προκειμένου να ληφθεί υπόψη η αντίστοιχη καταστατική εξίσωση (π.χ. τελείου αερίου). Οι παράμετροι  $\alpha_{\Pi}$ ,  $\beta_{\Pi}$  είναι σταθερές με τιμή  $\sim 1$ .

### Καταστατική εξίσωση Tait

Η επίλυση ασυμπίεστων ροών με τη μέθοδο SPH είναι δυνατή, αλλά παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες όπως θα αναλυθεί στην συνέχεια. Γι' αυτό το λόγο οι ασυμπίεστες ροές αντιμετωπίζονται ως ασθενώς συμπίεστες χρησιμοποιώντας κατάλληλη καταστατική εξίσωση, συνήθως χρησιμοποιώντας την εξίσωση Tait [5]:

$$p = B \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma} - 1 \right] \quad (3.18)$$

όπου  $\gamma$  είναι μια σταθερά με τιμή 7,  $\rho_0$  είναι η πυκνότητα στην κατάσταση αναφοράς και  $B$  είναι ο συντελεστής δυσκαμψίας, που καθορίζει το κατά πόσο το ρευστό θα συμπεριφερθεί σαν ασυμπίεστο και είναι ίσος με  $\rho_0 c_0^2 / \gamma$ . Ο συντελεστής  $c_0$  είναι η ταχύτητα του ήχου για την πυκνότητα αναφοράς

$\rho_0$ . Εν γένει δεν χρησιμοποιείται η πραγματική ταχύτητα του ήχου, καθώς θα είχε ως συνέπεια να απαιτούνται μικρά χρονικά βήματα για την ολοκλήρωση στον χρόνο. Πρακτικά, λοιπόν, χρησιμοποιείται μια «τεχνητή» τιμή της ταχύτητας του ήχου που πρέπει να είναι τουλάχιστον 10 φορές η μέγιστη ταχύτητα που εμφανίζεται στην προσομοίωση, ώστε η πυκνότητα να μη μεταβάλλεται πάνω από 1%, σύμφωνα με τη σχέση:



$$\frac{|\delta\rho|}{\rho} \sim \frac{\|\mathbf{u}_{\max}\|^2}{c^2} \quad (3.19)$$

Το χρονικό βήμα που απαιτείται προκειμένου η μέθοδος να είναι ευσταθής μπορεί να υπολογιστεί από την παρακάτω σχέση [4]:

$$dt = \min\left(0.4\frac{h}{c_0}, 0.25\min\left(\sqrt{\frac{h}{\gamma_i}}\right), 0.125\min\left(\frac{\rho_i h^2}{\mu_i}\right)\right) \quad (3.20)$$

όπου  $\gamma_i$  είναι το μέτρο της επιτάχυνσης και  $\mu_i$  το δυναμικό ιξώδες του σωματιδίου  $i$ . Εδώ πρέπει να τονιστεί ότι, ακόμα και με την χρήση των κατάλληλων τιμών για την ταχύτητα του ήχου και το χρονικό βήμα, οι κατανομές της πυκνότητας και της πίεσης παρουσιάζουν διακυμάνσεις. Αυτές οφείλονται στην καταστατική εξίσωση, καθώς για μικρές μεταβολές της πυκνότητας προκαλεί μεγάλες μεταβολές της πίεσης. Προκειμένου να εξομαλυνθούν αυτές οι διακυμάνσεις απαιτείται κάποιο φίλτρο πυκνότητας, επίλυση της συνθήκης Poisson ή χρήση επιλυτών Riemann.

#### Διατύπωση ασυμπίεστου ρευστού για τη μέθοδο SPH

Η επιβολή της συνθήκης ασυμπίεστότητας είναι δυνατή στη μέθοδο SPH με δυο τρόπους: με τη μέθοδο προβολής ή με διόρθωση πίεσης.

Η μέθοδος προβολής βασίζεται στον υπολογισμό ενός ενδιάμεσου πεδίου ταχυτήτων το οποίο διορθώνεται με κατάλληλο πεδίο πίεσης ούτως ώστε να ικανοποιεί τη συνθήκη μη απόκλισης. Η λογική της μεθόδου φαίνεται στις παρακάτω σχέσεις:

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{dt} = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u}^n + \mathbf{f}^n \quad (3.21)$$

$$\Delta p^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^* \quad (3.22)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} \quad (3.23)$$

Από τη σχέση 3.21 υπολογίζεται το ενδιάμεσο πεδίο ταχυτήτων  $\mathbf{u}^*$ , από το οποίο υπολογίζεται ένα πεδίο πιέσεων (3.22), που τελικά χρησιμοποιείται για τη διόρθωση του ενδιάμεσου πεδίου ταχυτήτων (3.23). Η σχέση 3.22 αποτελεί ουσιαστικά ένα σύστημα  $N \times N$ , όπου  $N$  ο αριθμός των σωματιδίων της προσομοίωσης. Το σύστημα έχει τη μορφή  $\mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{B}$ , με άγνωστο το διάνυσμα πιέσεων  $\mathbf{P}$ . Οι πίνακες  $\mathbf{A}$  και  $\mathbf{B}$  είναι οι ακόλουθοι (για τον υπολογισμό των πινάκων αυτών ο αναγνώστης παραπέμπεται στο πλήρες κείμενο):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n A_{1j} & -A_{12} & -A_{13} & \dots & -A_{1N} \\ -A_{21} & \sum_{j=1}^n A_{2j} & -A_{23} & \dots & -A_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -A_{N1} & A_{N2} & \dots & \dots & \sum_{j=1}^n A_{Nj} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{\rho_1}{2\Delta t} \sum_j m_j \mathbf{u}_{1j}^* \cdot \nabla_1 W_{1j} \\ -\frac{\rho_2}{2\Delta t} \sum_j m_j \mathbf{u}_{2j}^* \cdot \nabla_2 W_{2j} \\ \dots \\ \dots \\ -\frac{\rho_N}{2\Delta t} \sum_j m_j \mathbf{u}_{Nj}^* \cdot \nabla_N W_{Nj} \end{bmatrix}$$

όπου ο όρος  $A_{ij}$  δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$A_{ij} = m_j \frac{\mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}}{\|\mathbf{r}_{ij}\|^2} \quad (3.24)$$

Δεδομένου ότι ο πίνακας  $\mathbf{A}$  είναι αραιός, απαιτούνται κατάλληλες μέθοδοι αποθήκευσης και επίλυσης προκειμένου να επιτευχθεί η υψηλή απόδοση του αλγορίθμου.

Η μέθοδος που περιγράφηκε είναι σε θέση να δώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα, αλλά η πρακτική της εφαρμογή είναι προβληματική, δεδομένου ότι, καθώς οι θέσεις των σωματιδίων αλλάζουν, ο πίνακας  $\mathbf{A}$  πρέπει να ανανεώνεται σε κάθε χρονικό βήμα. Επιπλέον είναι προβληματική η διαχείριση των οριακών συνθηκών με αυτόν τον τρόπο, εκτός και εάν χρησιμοποιηθούν κατοπτρικά σωματίδια. Ακόμα αυτή η μέθοδος παρουσιάζει αστάθειες κοντά στην ελεύθερη επιφάνεια, ενώ απαιτείται συνδυασμός με την τεχνική της ανακατανομής σωματιδίων για τη σωστή εφαρμογή σε έγκλειστες ροές.

Η μέθοδος διόρθωσης της πίεσης είναι αρκετά απλούστερη στην εφαρμογή της. Η βασική ιδέα είναι να υπολογιστεί μια διόρθωση πίεσης η οποία διαδίδεται στο χώρο, στο τρέχον χρονικό βήμα, διορθώνοντας την ταχύτητα. Αρχικά υπολογίζεται ένα ενδιάμεσο πεδίο ταχυτήτων. Καθώς αυτό το πεδίο ταχυτήτων δεν ικανοποιεί τη συνθήκη μη απόκλισης, υπολογίζεται μια διόρθωση της πίεσης για κάθε σωματίδιο. Από τη διόρθωση της πίεσης υπολογίζεται και μια διόρθωση της ταχύτητας. Οι διορθώσεις πίεσης και ταχύτητας εφαρμόζονται στα ενδιάμεσα πεδία πίεσης και ταχύτητας αντίστοιχα, μέχρις ότου η απόκλιση του πεδίου ταχύτητας πέσει κάτω από μια προκαθορισμένη τιμή. Η διαδικασία φαίνεται στα παρακάτω βήματα:

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p^n + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u}^n + f \quad (3.25)$$

$$\delta p_i^n = \gamma \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{u}_{ij}^* \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (3.26)$$

$$p_i^{n+1} = p_i^n + \omega \delta p_i^n \quad (3.27)$$

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Omega \frac{dt}{\rho_i} \sum_j m_j (\delta p_j^n - \delta p_i^n) \nabla_i W_{ij} \quad (3.28)$$

Το βήμα 3.25 είναι ο υπολογισμός του ενδιάμεσου πεδίου ταχυτήτων, στη συνέχεια υπολογίζεται η διόρθωση πίεσης από τη σχέση 3.26 η οποία εφαρμόζεται στο πεδίο πιέσεων με ένα συντελεστή υποχαλάρωσης  $\omega$ . Η διόρθωση πίεσης χρησιμοποιείται για τη διόρθωση του πεδίου ταχυτήτων με τη σχέση 3.28 με τη χρήση κατάλληλου συντελεστή υποχαλάρωσης  $\Omega$ . Η διαδικασία επαναλαμβάνεται, συνεχίζοντας από τη σχέση 3.26.

Η μέθοδος αυτή μπορεί να παραλληλιστεί με ευκολία. Ωστόσο σε πρακτικές εφαρμογές η διάδοση της διόρθωσης πίεσης είναι πολύ αργή, με αποτέλεσμα να απαιτούνται πολλές επαναλήψεις. Τελικά ακόμα και εκτελούμενη παράλληλα, η μέθοδος αυτή είναι αρκετά αργή για πολλά σωματίδια. Ακόμα είναι δύσκολος ο καθορισμός των συντελεστών υποχαλάρωσης, ώστε να εξασφαλιστεί η ευστάθεια της μεθόδου.

Λόγω των παραπάνω προβλημάτων, στην παρούσα εργασία, το ρευστό θεωρήθηκε ασθενώς συμπίεστο, ενώ δοκιμάστηκαν τρόποι για την εξομάλυνση των πεδίων πυκνότητας και πίεσης.

Ομαλοποίηση των πεδίων πίεσης και πυκνότητας

Προκειμένου να αντιμετωπιστούν οι ταλαντώσεις των πεδίων πυκνότητας και πίεσης, έχουν αναπτυχθεί φίλτρα που αποσκοπούν στην εξομάλυνση των εν λόγω πεδίων. Τέτοια φίλτρα είναι:

- 0<sup>ης</sup> τάξης (φίλτρο Shepard): ουσιαστικά αποτελεί σταθμισμένο μέσο όρο των πυκνοτήτων στη γειτονιά του σωματιδίου  $i$ . Η στάθμιση γίνεται με βάση τη συνάρτηση πυρήνα.

$$\rho_i = \sum_j m_j \tilde{W}_{ij} \quad (3.29)$$

όπου:

$$\tilde{W}_{ij} = \frac{W_{ij}}{\sum_j \frac{m_j}{\rho_j} W_{ij}} \quad (3.30)$$

- 1<sup>ης</sup> τάξης (MLS φίλτρο): το εν λόγω φίλτρο βασίζεται στην μέθοδο Moving Least Squares και είναι δυνατό να αναπαράγει ακριβώς τις γραμμικές μεταβολές του πεδίου πυκνότητας.

$$\rho_i = \sum_j m_j \tilde{W}_{MLS} \quad (3.31)$$

Ο όρος  $W_{MLS}$  υπολογίζεται από την σχέση:

$$\tilde{W}_{ij}^{MLS} = [\beta_0 + \beta_x(x_i - x_j) + \beta_y(y_i - y_j) + \beta_z(z_i - z_j)] W_{ij} \quad (3.32)$$

όπου  $\beta_0, \beta_x, \beta_y, \beta_z$  διορθωτικοί συντελεστές υπολογιζόμενοι από:

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_z \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Ο πίνακας  $\mathbf{A}$  ορίζεται ως:

$$\mathbf{A} = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} W_{ij} \tilde{\mathbf{A}} \quad (3.34)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & (x_i - x_j) & (y_i - y_j) & (z_i - z_j) \\ (x_i - x_j) & (x_i - x_j)^2 & (x_i - x_j)(y_i - y_j) & (x_i - x_j)(z_i - z_j) \\ (y_i - y_j) & (x_i - x_j)(y_i - y_j) & (y_i - y_j)^2 & (y_i - y_j)(z_i - z_j) \\ (z_i - z_j) & (x_i - x_j)(z_i - z_j) & (y_i - y_j)(z_i - z_j) & (z_i - z_j)^2 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Η αντιστροφή του πίνακα  $\mathbf{A}$  μπορεί να γίνει με αναλυτικές σχέσεις, καθώς ο πίνακας είναι 4x4 για 3-διάστατα προβλήματα. Ωστόσο πρέπει να ληφθεί υπόψη το γεγονός ότι όταν ένα σωματίδιο είναι απομακρυσμένο, δηλ. έχει λίγα γειτονικά σωματίδια, τότε ο πίνακας  $\tilde{\mathbf{A}}$  θα είναι κοντά στο μηδέν με αποτέλεσμα η διόρθωση να είναι αφύσικα μεγάλη.

Σε προσομοιώσεις ασθενώς συμπιεστών ρευστών είναι ευεργετικό να ομαλοποιηθούν και οι μετατοπίσεις των σωματιδίων. Αυτό μπορεί να γίνει με την τεχνική XSPH [1, 2]:

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{u}_i - e \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{u}_j W_{ij} \quad (3.36)$$

όπου η τιμή της παραμέτρου  $e$  παίρνει τιμές ~0.3.

Μια εναλλακτική τροποποίηση από τα φίλτρα πυκνότητας είναι να χρησιμοποιηθεί ένας όρος διάχυσης στην εξίσωση της συνέχειας [6], ώστε να μετασχηματιστεί στην ακόλουθη μορφή:

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \sum_{j=1}^N m_j \left( \mathbf{u}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij} + \mathbf{n}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij} \frac{c_{ij}}{\rho_j} (\rho_i - \rho_j) \right) \quad (3.37)$$

Ο πρώτος όρος είναι ο όρος απόκλισης του πεδίου ταχύτητας, ενώ ο δεύτερος όρος είναι ο όρος διάχυσης, βασισμένος στη Λαπλασιανή της πυκνότητας. Στην σχέση 3.37:

-  $n_{ij}$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα από το σωματίδιο  $j$  στο  $i$ , δηλ.  $\mathbf{n}_{ij} = \frac{\mathbf{r}_{ij}}{\|\mathbf{r}_{ij}\|}$ .

-  $c_{ij}$  είναι η μέγιστη ταχύτητα του ήχου μεταξύ των σωματιδίων  $i$  και  $j$ . Η ταχύτητα του ήχου μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση:

$$c_i = c_0 \sqrt{\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}} \quad (3.38)$$

#### Αστάθεια υπό τάση και διόρθωση πυρήνα

Είναι γνωστό ότι η μέθοδος SPH είναι επιρρεπής σε ένα φαινόμενο που καλείται *αστάθεια υπό τάση*. Το φαινόμενο αυτό εμφανίζεται λόγω της συμπεριφοράς των παραγώγων της συνάρτησης ομαλοποίησης, οδηγεί σε σχηματισμό συσσωματωμάτων σωματιδίων ή σε «έκρηξη» των σωματιδίων και τελικά στην κατάρρευση της προσομοίωσης. Για την αντιμετώπισή της υπάρχουν τρεις τρόποι:

- Χρήση κατάλληλης συνάρτησης πυρήνα, της οποίας η δεύτερη παράγωγος να είναι μηδέν. Ωστόσο μια τέτοια συνάρτηση πυρήνα δεν είναι αρκετά ομαλή, οδηγώντας σε άλλου είδους προβλήματα.
- Ενσωμάτωση μιας μικρής απωστικής δύναμης στην εξίσωση της ορμής, δίνοντας τελικά την ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{D\mathbf{u}_i}{Dt} = -\sum_j m_j \left[ \left( \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + R f_{ij} \right) \nabla W_{ij} \right] + \mathbf{f}_{body} \quad (3.39)$$

$$\text{όπου } R = R_i + R_j$$

$$\text{και } R_i = \max\left(-\varepsilon \frac{p_i}{\rho_i^2}, 0\right)$$

$$f_{ij} = \frac{W_{ij}}{W(dx)}$$

Η τιμή του όρου  $\varepsilon$  τίθεται  $\sim 0.2$ .

- Διόρθωση της παραγώγου της συνάρτησης πυρήνα. Με αυτή τη μέθοδο, αποφεύγεται η χρήση κάποιας επιπρόσθετης αφύσικης δύναμης, ενώ αυξάνεται και η ακρίβεια των προσεγγίσεων. Αντί της παραγώγου  $\nabla W_{ij}$  χρησιμοποιείται η διορθωμένη παράγωγος  $\nabla \tilde{W}_{ij}$ :

$$\nabla \tilde{W}_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{L}_i + \mathbf{L}_j) \nabla W_{ij}, \quad (3.40)$$

$$\text{δηλαδή: } \begin{bmatrix} d\tilde{W}/dx \\ d\tilde{W}/dy \\ d\tilde{W}/dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{L}_{11} & \bar{L}_{12} & \bar{L}_{13} \\ \bar{L}_{21} & \bar{L}_{22} & \bar{L}_{23} \\ \bar{L}_{31} & \bar{L}_{32} & \bar{L}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW/dx \\ dW/dy \\ dW/dz \end{bmatrix}$$

όπου:

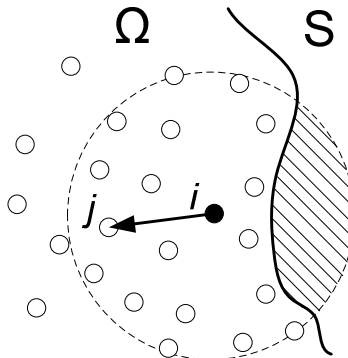
$$\mathbf{L}_i = \mathbf{M}^{-1} \quad (3.41)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (x_j - x_i) \frac{dW}{dx} & \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (x_j - x_i) \frac{dW}{dy} & \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (x_j - x_i) \frac{dW}{dz} \\ \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (y_j - y_i) \frac{dW}{dx} & \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (y_j - y_i) \frac{dW}{dy} & \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (y_j - y_i) \frac{dW}{dz} \\ \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (z_j - z_i) \frac{dW}{dx} & \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (z_j - z_i) \frac{dW}{dy} & \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (z_j - z_i) \frac{dW}{dz} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Ο πίνακας  $\mathbf{M}$  είναι δυνατό να αντιστραφεί αναλυτικά, καθώς έχει μέγεθος  $3 \times 3$ , για 3-διάστατες προσομοιώσεις. Παρόλα αυτά απαιτείται προσοχή στον υπολογισμό της διόρθωσης σε απομακρυσμένα σωματίδια, καθώς ο πίνακας θα είναι εκφυλισμένος.

### Επιβολή οριακών συνθηκών

Η κύρια αδυναμία της μεθόδου SPH έχει να κάνει με την επιβολή των οριακών συνθηκών. Το πρόβλημα μπορεί να γίνει κατανοητό από το σχήμα 3.3. Στο σχήμα φαίνεται το σωματίδιο  $i$  του οποίου το χωρίο υποστήριξης περικλύπεται από το όριο. Σε αυτήν την περίπτωση μόνο τα σωματίδια εντός του υπολογιστικού χώρου  $\Omega$  συνεισφέρουν στις σωματιδιακές αλληλεπιδράσεις, με αποτέλεσμα να μειώνεται η ακρίβεια των προσεγγίσεων. Οι τεχνικές που θα περιγραφούν στη συνέχεια για την επιβολή των ορίων αποσκοπούν στην κάλυψη του τμήματος του χωρίου υποστήριξης που αποκόπηκε με σωματίδια συγκεκριμένων χαρακτηριστικών, ούτως ώστε να επιβληθεί η αντίστοιχη οριακή συνθήκη.



Σχ. 3.3. Το πρόβλημα των οριακών συνθηκών

Οι κύριες τεχνικές που υπάρχουν για την επιβολή των οριακών συνθηκών είναι οι ακόλουθες:

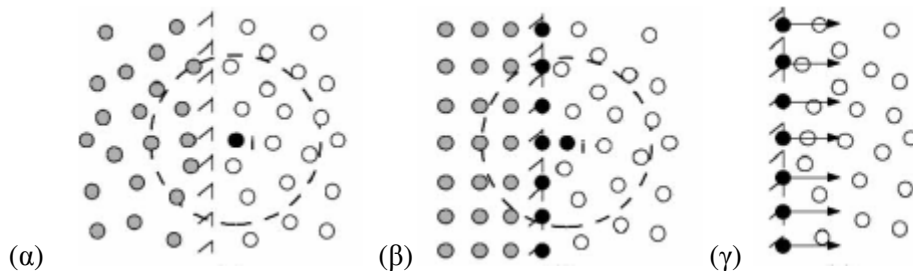
- Κατοπτρικά σωματίδια (σχ. 3.4α): πρόκειται για σωματίδια που δημιουργούνται συμμετρικά ως προς το όριο. Η πίεση και η πυκνότητα ενός κατοπτρικού σωματιδίου είναι ίδια με του αντίστοιχου σωματιδίου ρευστού. Η κάθετη, ως προς το όριο, ταχύτητα είναι αντίθετη από αυτήν του αντίστοιχου σωματιδίου, ενώ η παράλληλη είναι ίδια, σε περίπτωση τοιχώματος με ολίσθηση, ή η αντίθετη για τοίχωμα χωρίς ολίσθηση. Το κύριο μειονέκτημα αυτού του τύπου

οριακών συνθηκών είναι ότι αδυνατεί να περιγράψει πολύπλοκες γεωμετρίες, ενώ δεν εγγυάται την μη διαπερατότητα ενός τοίχου από σωματίδια ρευστού. Αυτός ο τύπος χρησιμοποιείται κυριότερα για την επιβολή συνθηκών συμμετρίας.

- Δυναμικά σωματίδια: αυτός ο τύπος οριακής συνθήκης περιλαμβάνει την τοποθέτηση σωματιδίων σε στρώσεις κατάλληλα διατεταγμένων πέρα από το όριο. Τα χαρακτηριστικά των σωματιδίων αυτών υπολογίζονται από την εξίσωση της συνέχειας ενώ η κίνησή τους είναι προκαθορισμένη.
- Συνοριακές δυνάμεις: αυτός ο τύπος εξυπηρετεί μόνο την επιβολή οριακών συνθηκών τοιχώματος. Ουσιαστικά τοποθετείται ένα στρώμα σωματιδίων πάνω στο όριο τα οποία ασκούν απωστικές δυνάμεις, εμποδίζοντας τα σωματίδια ρευστού να διαπεράσουν το τοίχωμα. Η απωστική δύναμη έχει τη μορφή:

$$\mathbf{f}_i [m/s^2] = \begin{cases} D \left[ \left( \frac{r_0}{\|\mathbf{r}\|} \right)^{12} - \left( \frac{r_0}{\|\mathbf{r}\|} \right)^6 \right] \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^2} & \frac{r_0}{\|\mathbf{r}\|} \leq 1 \\ 0 & \frac{r_0}{\|\mathbf{r}\|} > 1 \end{cases} \quad (3.43)$$

και προστίθεται στην εξίσωση της ορμής 3.15 των σωματιδίων ρευστού. Με βάση αυτήν τη δύναμη είναι δυνατό να υπολογιστεί η συνολική δύναμη που τελικά ασκείται στο τοίχωμα, αλλά και η ροπή σε περιστρεφόμενες γεωμετρίες. Κύριο πλεονέκτημα της μεθόδου είναι η δυνατότητα περιγραφής πολύπλοκων γεωμετριών. Ωστόσο οι υπολογιζόμενες δυνάμεις παρουσιάζουν έντονες διαταραχές.

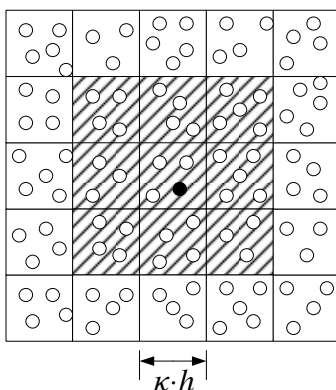


Σχ. 3.4. Επιβολή οριακών συνθηκών με: (α) κατοπτρικά σωματίδια, (β) δυναμικά σωματίδια, (γ) συνοριακές δυνάμεις

### Εύρεση γειτονικών σωματιδίων

Για να γίνει ο υπολογισμός των προσεγγίσεων SPH είναι απαραίτητο να βρεθούν οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματιδίων. Ένας τρόπος για να γίνει αυτό είναι να υπολογιστούν ευθέως οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ όλων των σωματιδίων, αυτό όμως έχει ως συνέπεια αυξημένο υπολογιστικό κόστος, καθώς θα πρέπει να υπολογιστούν  $N \times N$  αλληλεπιδράσεις, όπου  $N$  ο αριθμός των σωματιδίων. Αντ' αυτού, είναι δυνατό να εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι η συνάρτηση πυρήνα είναι συμπαγής, δηλ. έχει περιορισμένη ακτίνα αλληλεπίδρασης. Άρα, για να βρεθούν οι αλληλεπιδράσεις ενός σωματιδίου  $i$ , δεν έχει νόημα να βρεθούν οι αλληλεπιδράσεις με όλα τα υπόλοιπα, παρά μόνο με όσα βρίσκονται στην κοντινή γειτονιά του  $i$ , σε απόσταση μικρότερη ή ίση με την ακτίνα αλληλεπίδρασης της συνάρτησης ομαλοποίησης.

Επομένως, πρακτικά κατασκευάζεται ένα πλέγμα που χωρίζει τον υπολογιστικό χώρο σε κελιά. Το κάθε κελί έχει διάσταση όση η ακτίνα αλληλεπίδρασης της συνάρτησης  $W$  και τα σωματίδια κατηγοριοποιούνται σε κελιά, ανάλογα με την θέση τους στο χώρο. Οπότε, αν χρειαστεί να βρεθούν οι αλληλεπιδράσεις του σωματιδίου  $i$ , τότε αρκεί να βρεθεί σε ποιο κελί ανήκει και στη συνέχεια να υπολογιστούν οι αλληλεπιδράσεις με τα σωματίδια που ανήκουν στα γειτονικά κελιά.

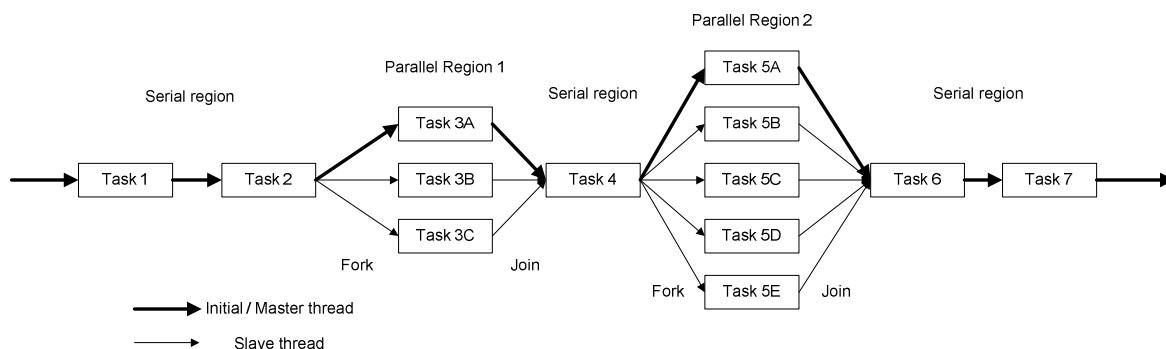


Σχ. 3.5. Πλέγμα για την εύρεση των γειτονικών σωματιδίων.

### Παραλληλοποίηση

Με τη μέθοδο SPH είναι δυνατό να προσομοιωθούν πολύπλοκα προβλήματα. Ωστόσο, η μέθοδος είναι, εν γένει, αρκετά απαιτητική από πλευράς υπολογιστικού χρόνου, ιδιαίτερα για 3-διάστατες προσομοιώσεις. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της μεθόδου είναι ότι οι αλληλεπιδράσεις του κάθε σωματιδίου μπορούν να υπολογιστούν ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα. Αυτό το χαρακτηριστικό επιτρέπει τον εύκολο παραλληλισμό του αλγορίθμου, προκειμένου να αξιοποιηθεί η επεξεργαστική ισχύς σύγχρονων υπολογιστών και ταυτόχρονα να μειωθεί ο απαιτούμενος χρόνος για την ολοκλήρωση μιας προσομοίωσης.

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε παραλληλισμός κοινής μνήμης με την χρήση OpenMP [7]. Ο αλγόριθμος χωρίζεται σε κομμάτια που εκτελούνται σειριακά και σε κομμάτια που εκτελούνται παράλληλα (βλέπε σχ. 3.6). Η σειριακή περιοχή εκτελείται από ένα νήμα εντολών. Όταν το πρόγραμμα φτάνει σε μια παράλληλη περιοχή, τότε δημιουργούνται επιπλέον νήματα και το καθένα εκτελείται σε ξεχωριστό επεξεργαστή. Η μετατροπή ενός σειριακού αλγορίθμου SPH σε παράλληλο με OpenMP είναι σχετικά απλή, αλλά απαιτείται προσοχή ούτως ώστε να αποφευχθούν συνθήκες που οδηγούν σε καταστροφή των δεδομένων της μνήμης (αλλιώς *data race condition*). Οι περιοχές που παραλληλίστηκαν είναι αυτές με το μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος, όπως: ο υπολογισμός των χρονικών παραγώγων των πεδίων ταχύτητας και πυκνότητας, το φίλτρο πυκνότητας κλπ. Η απόδοση του παραλληλισμού είναι αρκετά κοντά στο 100%.



Σχ. 3.6. Διάγραμμα εκτέλεσης ενός παράλληλου αλγορίθμου.





## 4. Πιστοποίηση της μεθόδου SPH

### 4.1. Βασικές δοκιμές

Σε αυτό το τμήμα θα παρουσιαστούν ορισμένες βασικές δοκιμές της μεθόδου SPH που έχουν σκοπό να προσομοιάσουν τη βασική συμπεριφορά των εξισώσεων Euler ή τη διατήρηση βασικών ιδιοτήτων, όπως της στροφορμής. Οι δοκιμές που θα παρουσιαστούν είναι:

- Δοκιμή Shock tube
- Περιστροφή ποσότητας ρευστού που σχηματίζει τετράγωνο
- Παραμόρφωση ρευστού που σχηματίζει κύκλο

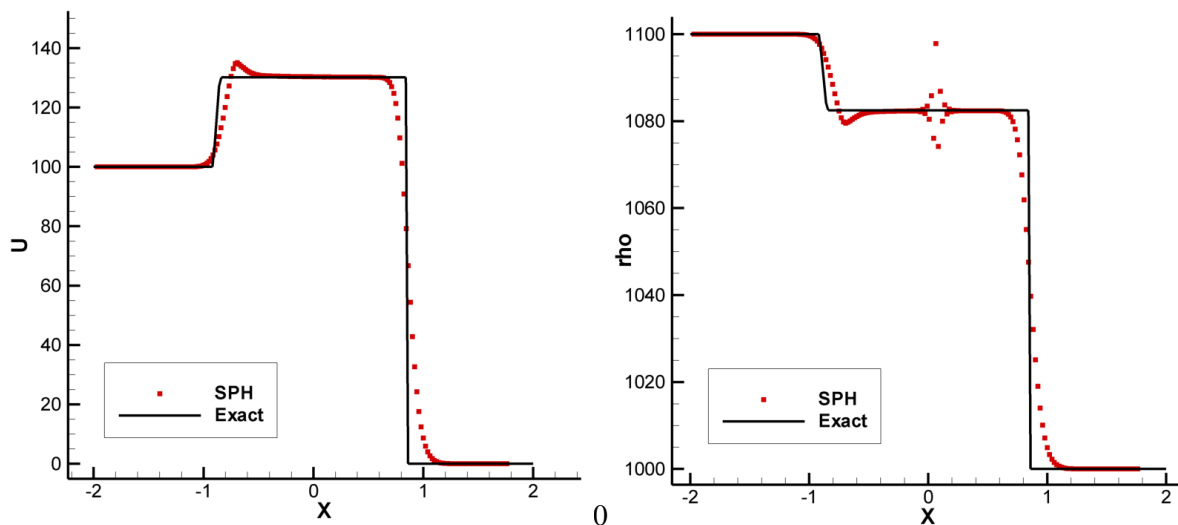
#### Δοκιμή σωλήνα κυμάτων κρούσης (shock tube)

Η δοκιμή Shock tube αποσκοπεί στην αναπαραγωγή της κυματικής συμπεριφοράς που είναι εγγενής στις εξισώσεις Euler. Μια ασυνέχεια χωρίζει δυο διακριτές καταστάσεις με διαφορετική πυκνότητα/πίεση και ταχύτητα. Η εν λόγω ασυνέχεια οδηγεί στο σχηματισμό τριών χαρακτηριστικών κυμάτων: δυο μη-γραμμικών κυμάτων, που μπορεί να είναι κύματα κρούσης ή αραιώσης και οριοθετούν μια νέα κατάσταση, και ενός εκφυλισμένου κύματος που ονομάζεται ασυνέχεια επαφής. Η μέθοδος SPH χρησιμοποιήθηκε για την προσομοίωση της εν λόγω συμπεριφοράς, ξεκινώντας από την ακόλουθη κατάσταση:

$$\begin{cases} \rho_L = 1100, & u_L = 100 & x < 0 \\ \rho_R = 1000, & u_R = 0 & x > 0 \end{cases}$$

Το πρόβλημα είναι μονοδιάστατο, ενώ η λύση του συγκρίθηκε με την ακριβή επίλυση του προβλήματος Riemann (ο αναγνώστης παραπέμπεται στο πλήρες κείμενο της εργασίας). Σημειώνεται ότι για την επίλυση απαιτείται η χρήση του όρου τεχνητού ιξώδους (εξ. 3.17). Ο μονοδιάστατος χώρος περιγράφεται από 200 σωματίδια, τοποθετημένα πυκνότερα στην περιοχή υψηλής πυκνότητας.

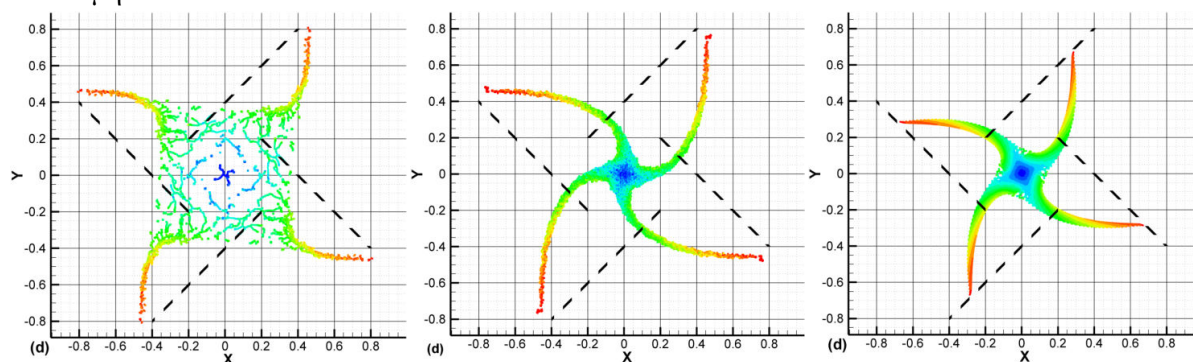
Από τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στη σχ. 4.1 φαίνεται ότι η μέθοδος SPH είναι σε θέση να αναπαράγει σωστά τις ταχύτητες των μη-γραμμικών κυμάτων, καθώς και την ενδιάμεση κατάσταση. Παρόλα αυτά υπάρχει ανακρίβεια στο πεδίο της πυκνότητας κοντά στην ασυνέχεια επαφής, που έχει παρατηρηθεί και από άλλους ερευνητές [1].



Σχ. 4.1. Προσομοίωση σωλήνα κυμάτων κρούσης με την μέθοδο SPH. Αριστερά η ταχύτητα και δεξιά η πυκνότητα. Με συνεχή γραμμή είναι η αναλυτική λύση, ενώ με κόκκινα τετράγωνα η λύση της μεθόδου SPH.

Περιστροφή ρευστού σε μορφή τετράγωνου

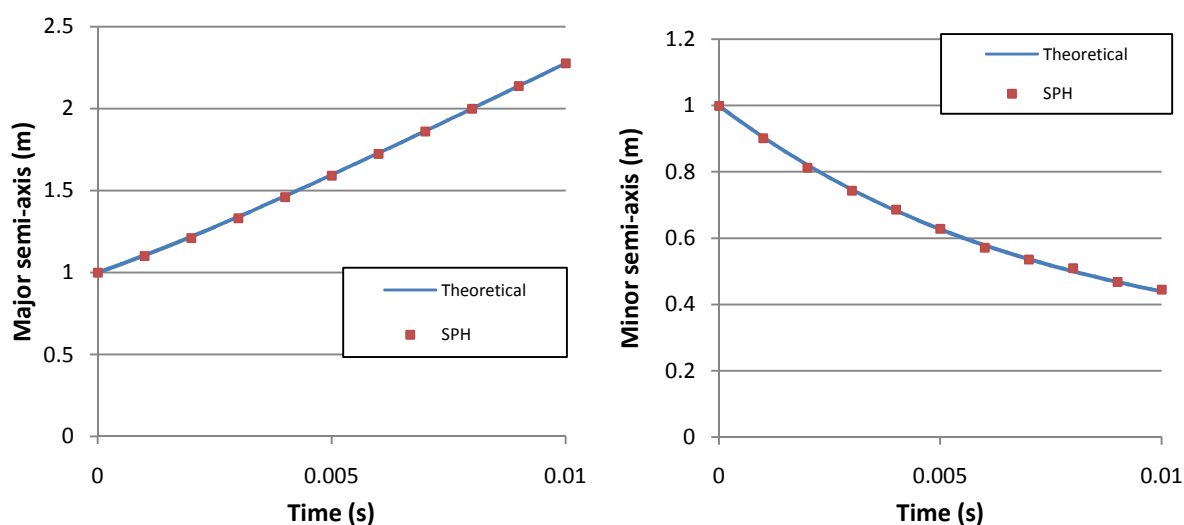
Αυτή η δοκιμή περιλαμβάνει την περιστροφή ποσότητας ρευστού, διατεταγμένης με τέτοιον τρόπο ώστε να σχηματίζει τετράγωνο (πλευράς 0.4m αποτελούμενο συνολικά από 10201 σωματίδια). Λόγω της φυγόκεντρης δύναμης ο σχηματισμός παραμορφώνεται δημιουργώντας κλάδους που ιδεατά πρέπει να ακολουθήσουν τις διακεκομμένες γραμμές (σχ. 4.2). Επιπλέον η δοκιμή αυτή αποσκοπεί και στην εξέταση του φαινομένου αστάθειας υπό τάση, καθώς στο εσωτερικό του τετραγώνου θα αναπτυχθεί αρνητική πίεση. Αν δεν αντιμετωπιστεί το εν λόγω φαινόμενο, θα προκληθούν συσσωματώματα και τελικά η προσομοίωση καταρρέει (σχ. 4.2). Η διόρθωση του Monaghan είναι σε θέση να το αντιμετωπίσει. Η διόρθωση πυρήνα δίνει ακόμα καλύτερη συμπεριφορά και ομαλότερη κατανομή των πεδίων.



Σχ. 4.2. Προσομοίωση περιστροφής τετράγωνης ποσότητας ρευστού. Αριστερά: χωρίς αντιμετώπιση της αστάθειας. Κέντρο: χρησιμοποιώντας τη διόρθωση του Monaghan. Δεξιά: διόρθωση συνάρτησης πυρήνα.

Παραμόρφωση ρευστού σε μορφή κύκλου

Σε αυτήν τη δοκιμή μια κυκλική ποσότητα ρευστού υποβάλλεται σε κατάλληλο πεδίο ταχυτήτων, ώστε να μετασχηματιστεί σε έλλειψη. Δεδομένου ότι το ρευστό θεωρείται ασθενώς συμπιεστό, το εμβαδό του κύκλου πρέπει να είναι (περίπου) ίδιο με αυτό της έλλειψης. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα υπάρχουν αναλυτικές σχέσεις που δίνουν τις διαστάσεις των αξόνων της έλλειψης σε σχέση με το χρόνο. Στο σχήμα 4.3 φαίνεται η μεταβολή των διαστάσεων της έλλειψης ως προς το χρόνο σε σχέση με την αναλυτική λύση. Η αρχική ακτίνα του κύκλου ήταν 1m και αποτελείται από 5000 σωματίδια.



Σχ. 4.3. Μεταβολή ως προς το χρόνο των διαστάσεων της έλλειψης

## 4.2. Πιστοποίηση σε ροές με ιξώδες

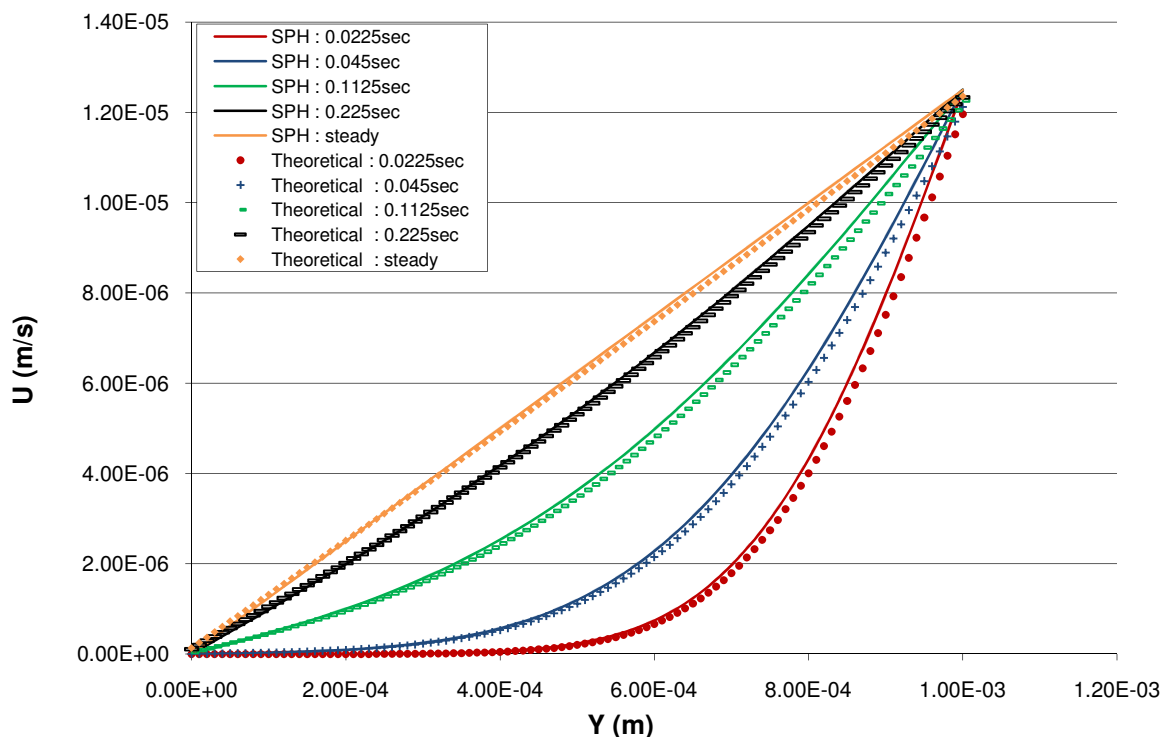
Σε αυτό το τμήμα θα αναλυθούν περιπτώσεις στις οποίες θα εξεταστεί το φαινόμενο της συνεκτικότητας, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο SPH. Στις περιπτώσεις που θα εξεταστούν περιλαμβάνονται απλές δοκιμές, όπως ροές Couette και Poiseuille, αλλά και πιο πολύπλοκες ροές όπως ροή σε ανάποδο σκαλοπάτι για μικρούς και μεγάλους Reynolds. Θα εξεταστεί επίσης και η χρήση μοντέλων τύρβης στη μέθοδο SPH.

Ροή Couette

Η ροή Couette είναι η αναπτυσσόμενη ροή μεταξύ δυο παράλληλων επίπεδων άπειρων πλακών. Η μια πλάκα είναι ακίνητη, ενώ η άλλη κινείται με συγκεκριμένη ταχύτητα. Είναι δυνατό να εκφραστεί αναλυτική σχέση που δίνει την κατανομή της ταχύτητας στο χώρο και χρόνο:

$$u(t, y) = \frac{u_0}{l} y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2u_0}{n\pi} (-1)^n \sin\left(\frac{n\pi}{l} y\right) \text{Exp}\left(-v \frac{n^2 \pi^2}{l^2} t\right) \quad (4.1)$$

Η σχέση 4.1 θα χρησιμοποιηθεί για τη σύγκριση των αποτελεσμάτων της μεθόδου SPH. Όπως φαίνεται και από το σχήμα 4.1 οι υπολογιζόμενες ταχύτητες από τη μέθοδο SPH και την αναλυτική σχέση είναι παραπλήσιες. Για την προσομοίωση της επίδρασης του ιξώδους χρησιμοποιήθηκε ο όρος ιξώδους του Morris [4] (εξ. 3.16), ενώ χρησιμοποιήθηκαν περιοδικές συνθήκες για την προσομοίωση των άπειρων πλακών. Στην εγκάρσια κατεύθυνση, μεταξύ των πλακών, τοποθετήθηκαν 100 σωματίδια.



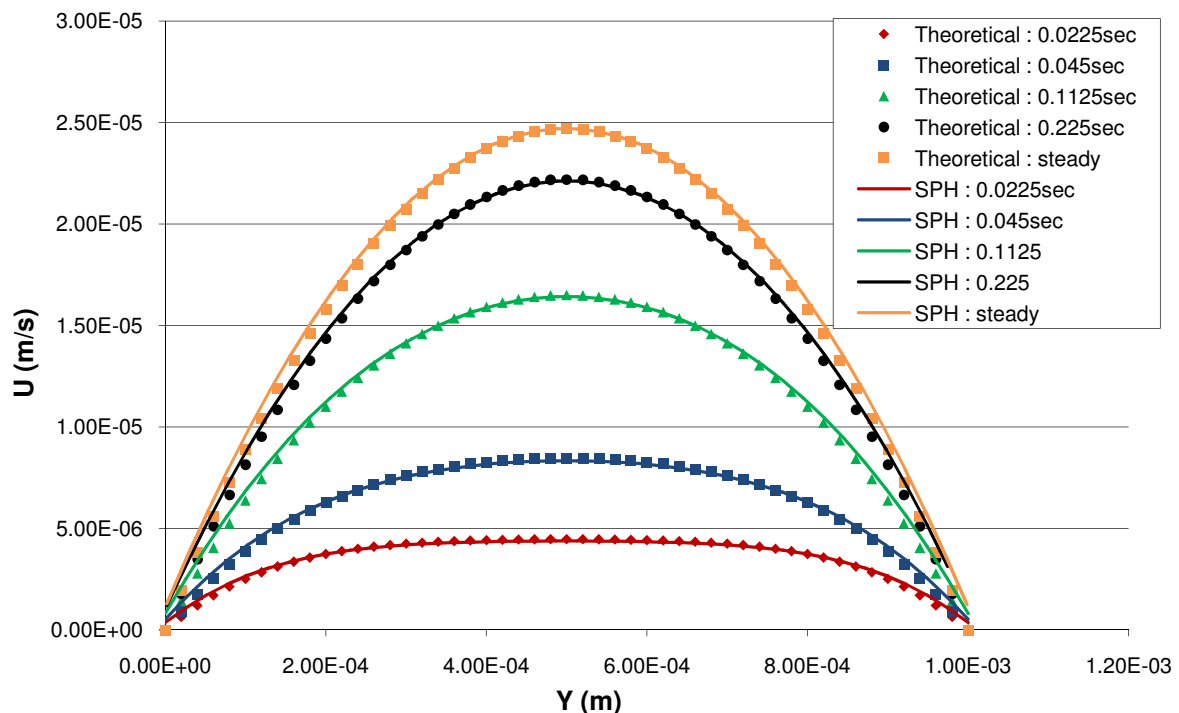
Σχ. 4.4. Κατανομή της ταχύτητας στον  $y$ -άξονα για διάφορες χρονικές στιγμές, χρησιμοποιώντας τον όρο ιξώδους του Morris.

Ροή Poisseuille

Η ροή *Poisseuille* είναι παραπλήσια με τη ροή Couette, με τη διαφορά ότι και οι δυο πλάκες είναι ακίνητες, ενώ η ροή προκαλείται από μια διαφορά πίεσης. Η αναλυτική σχέση που δίνει την κατανομή της ταχύτητας στο χώρο και χρόνο είναι η ακόλουθη:

$$u(t,y) = \frac{f}{2\nu} y(y-l) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4f l^2}{\nu \pi^3 (2n+1)^3} \sin\left(\frac{\pi y}{l} (2n+1)\right) \text{Exp}\left(-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 \nu}{l^2} t\right) \quad (4.2)$$

Και εδώ η συμφωνία της αναλυτικής λύσης με τη λύση της μεθόδου SPH είναι ικανοποιητική για όλες τις χρονικές στιγμές, χρησιμοποιώντας 100 σωματίδια μεταξύ των πλακών.

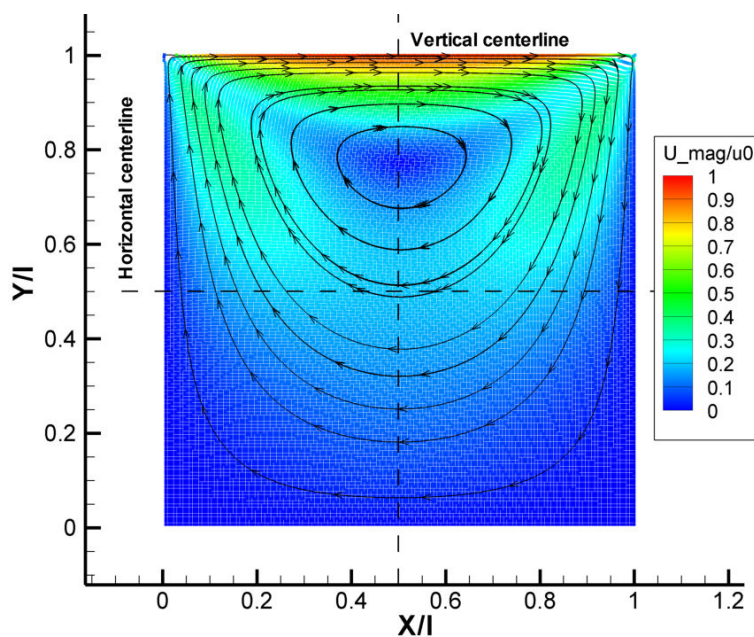


Σχ. 4.5. Κατανομή της ταχύτητας στον y-άξονα για διάφορες χρονικές στιγμές, χρησιμοποιώντας τον όρο ιξώδους του Morris.

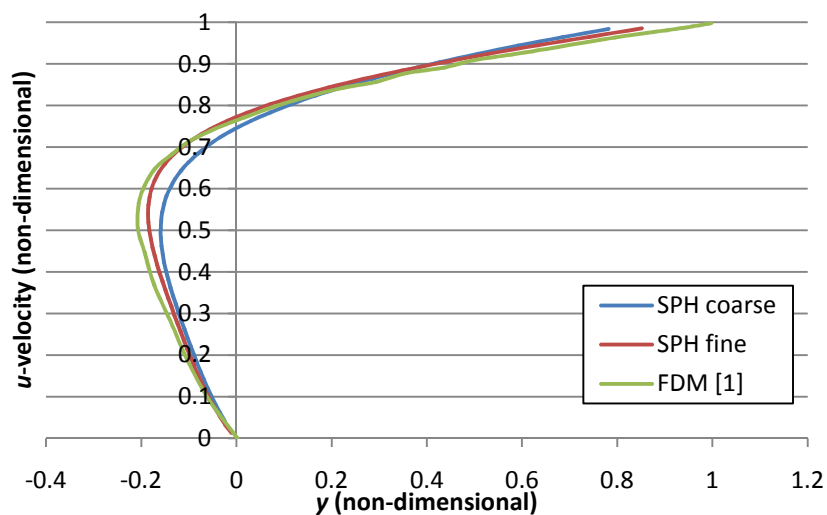
Ροή σε τετράγωνη κοιλότητα

Η εν λόγω δοκιμή εξετάζει τη ροή που αναπτύσσεται εντός τετραγωνικής κοιλότητας, της οποίας όλες οι πλευρές, εκτός από την πάνω, είναι ακίνητες. Η πάνω πλευρά κινείται με μια προκαθορισμένη ταχύτητα. Η μέθοδος SPH χρησιμοποιήθηκε για να επιλυθεί το πεδίο ροής, χρησιμοποιώντας δυο αναλύσεις: με 3600 σωματίδια και με 22500 σωματίδια. Δεδομένου ότι δεν υπάρχει αναλυτική λύση, τα αποτελέσματα της μεθόδου συγκρίθηκαν με αντίστοιχα της βιβλιογραφίας [1], για τις ίδιες συνθήκες.

Στο σχήμα 4.6 φαίνονται τα αποτελέσματα για του πεδίου ροής. Εδώ πρέπει να επισημανθεί ότι κατά την διάρκεια της προσομοίωσης παρατηρείται μια αφύσικη συγκέντρωση σωματιδίων στην πάνω δεξιά γωνία της κοιλότητας, που οφείλεται στην εγγενή συμπεριφορά της μεθόδου, δηλαδή στην προσανατολισμένη κίνηση των σωματιδίων, όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο 2. Παρόλα αυτά η κατανομή ταχυτήτων είναι παραπλήσια με αυτήν της βιβλιογραφίας (σχ. 4.7).



Σχ. 4.6. Πεδίο ροής εντός της κοιλότητας.



Σχ. 4.7. Κατανομή ταχυτήτων στην γραμμή X=0.5.

### Στρωτή ροή σε κυλινδρικό αγωγό

Η ροή αυτή είναι παραπλήσια με τη ροή Poiseuille με τη διαφορά ότι το ρευστό κινείται εντός απείρου κυλινδρικού αγωγού, λόγω διαφοράς πίεσης. Για την προσομοίωση με τη μέθοδο SPH χρησιμοποιήθηκαν περιοδικές συνθήκες αλλά και συνθήκες συμμετρίας. Το πεδίο ταχυτήτων που προκύπτει είναι παραβολικό, όπως υπαγορεύεται και από την αναλυτική λύση [8]:

$$u(r) = 2u_m \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (4.3)$$

Στη σχέση 4.8 το  $r$  αναπαριστά την απόσταση από τον άξονα του κυλίνδρου στην ακτινική διεύθυνση και όχι το 3D διάνυσμα θέσης.

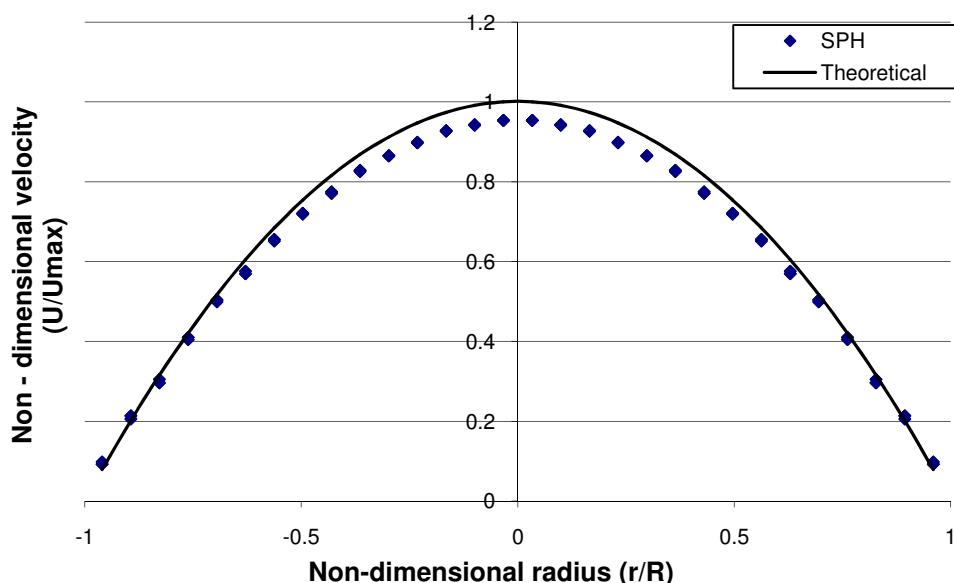
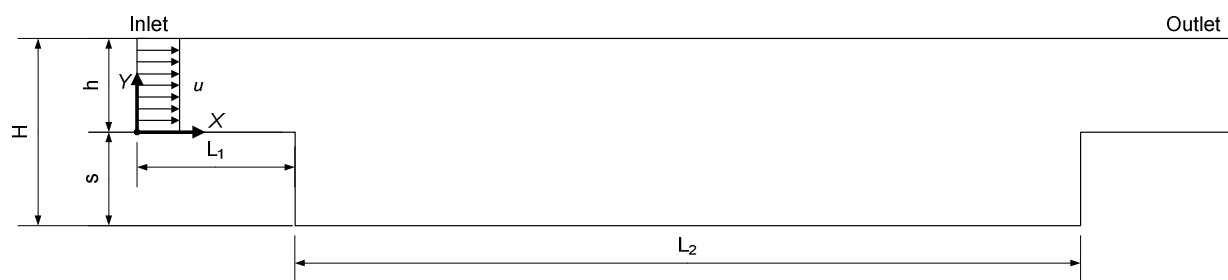


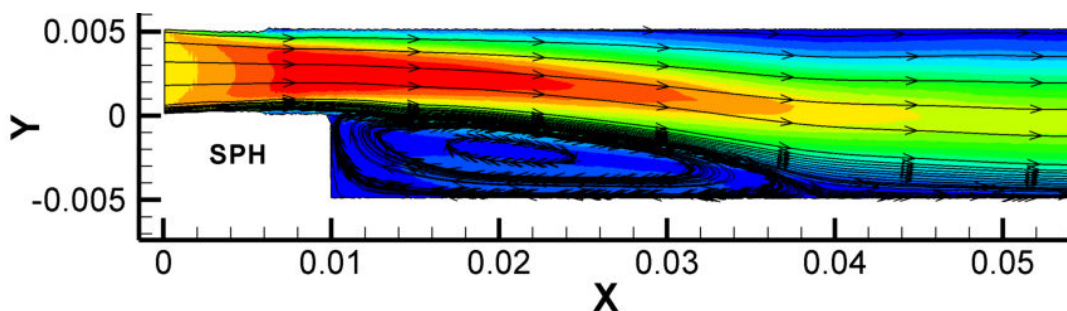
Fig. 4.8. Σύγκριση της κατανομής αξονικής ταχύτητας στη διάμετρο του κυλίνδρου.

Στρωτή ροή σε ανάποδο σκαλοπάτι

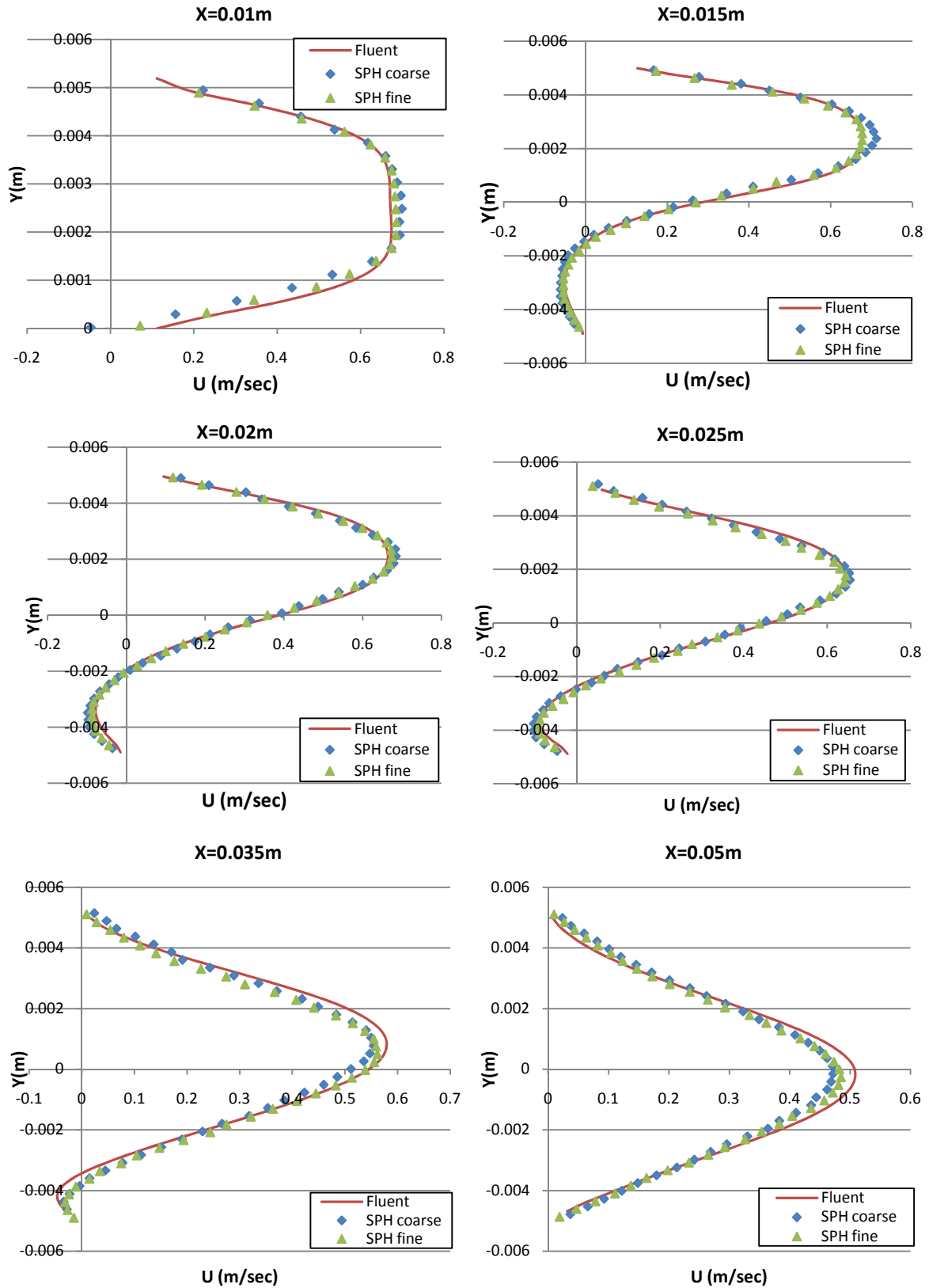
Η ροή σε ανάποδο σκαλοπάτι είναι η ροή που αναπτύσσεται σε μια απότομη διεύρυνση αγωγού, περιλαμβάνοντας αποκόλληση, ανακυκλοφορία και επανακόλληση. Η γεωμετρία που προσομοιώθηκε βασίζεται σε πειράματα του Armary [8, 9] για αριθμό Reynolds 389. Σε πρώτη φάση δεν χρησιμοποιήθηκε ακριβώς η ίδια γεωμετρία, αλλά προστέθηκε και μια στένωση στην έξοδο (σχ. 4.9), προκειμένου να αποφευχθεί ο σχηματισμός κενών μέσα στον αγωγό. Χρησιμοποιήθηκαν δυο αναλύσεις, μια πυκνότερη με μέγεθος σωματιδίων 0.125mm και μια αραιότερη με μέγεθος 0.2mm. Τα αποτελέσματα της μεθόδου SPH συγκρίθηκαν με αντίστοιχα αποτελέσματα από το υπολογιστικό πακέτο Fluent (σχ. 4.11), δίνοντας παραπλήσια πεδία ροής.



Σχ. 4.9. Σχήμα της γεωμετρίας.



Σχ. 4.10. Ροή σε ανάποδο σκαλοπάτι. Αναπτυσσόμενο πεδίο ροής.



Σχ. 4.11. Ροή σε ανάποδο σκαλοπάτι. Κατανομές ταχύτητας σε διάφορες θέσεις.

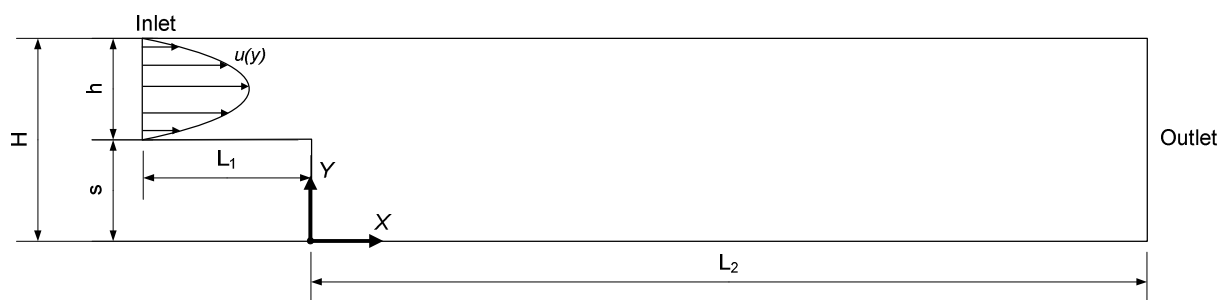
Ανακατανομή σωματιδίων

Προκειμένου να αντιμετωπιστεί η συσσώρευση σφαλμάτων λόγω της ανομοιογενούς κατανομής σωματιδίων, είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί η τεχνική της ανακατανομής σωματιδίων [10]. Η βασική ιδέα της εν λόγω τεχνικής είναι να επαναφέρονται περιοδικά τα σωματίδια σε μια κανονική, ομοιογενή κατανομή. Μετά τη μεταφορά, τα χαρακτηριστικά τους υπολογίζονται με παρεμβολή με βάση τα χαρακτηριστικά και τις θέσεις που είχαν πριν τη μεταφορά. Τα βασικά πλεονεκτήματα της τεχνικής είναι:

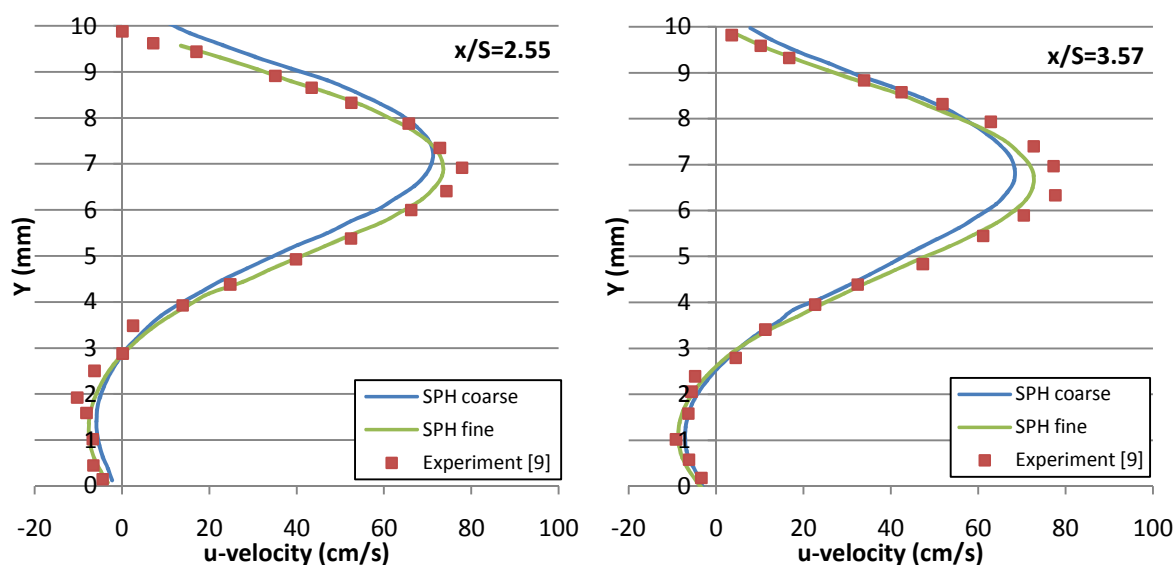
- ελεγχόμενη κατανομή σωματιδίων, επομένως δεν μπορούν να σχηματιστούν αφύσικα κενά,
- αποφεύγεται η εισχώρηση σωματιδίων στο τοίχωμα,
- αυξάνεται η ακρίβεια των αποτελεσμάτων.

Το κύριο μειονέκτημα είναι η εισαγωγή αριθμητικής διάχυσης, λόγω της αριθμητικής παρεμβολής.

Με την τεχνική ανακατανομής σωματιδίων είναι δυνατή η προσομοίωση της ακριβούς γεωμετρίας των πειραμάτων του Armaly χρησιμοποιώντας διαμορφωμένο προφίλ εσόδου (σχ. 4.12). Η μέθοδος SPH δίνει αποτελέσματα κοντά στα πειραματικά, ενώ υπολογίζει το μήκος ανακυκλοφορίας στην σωστή έκταση.

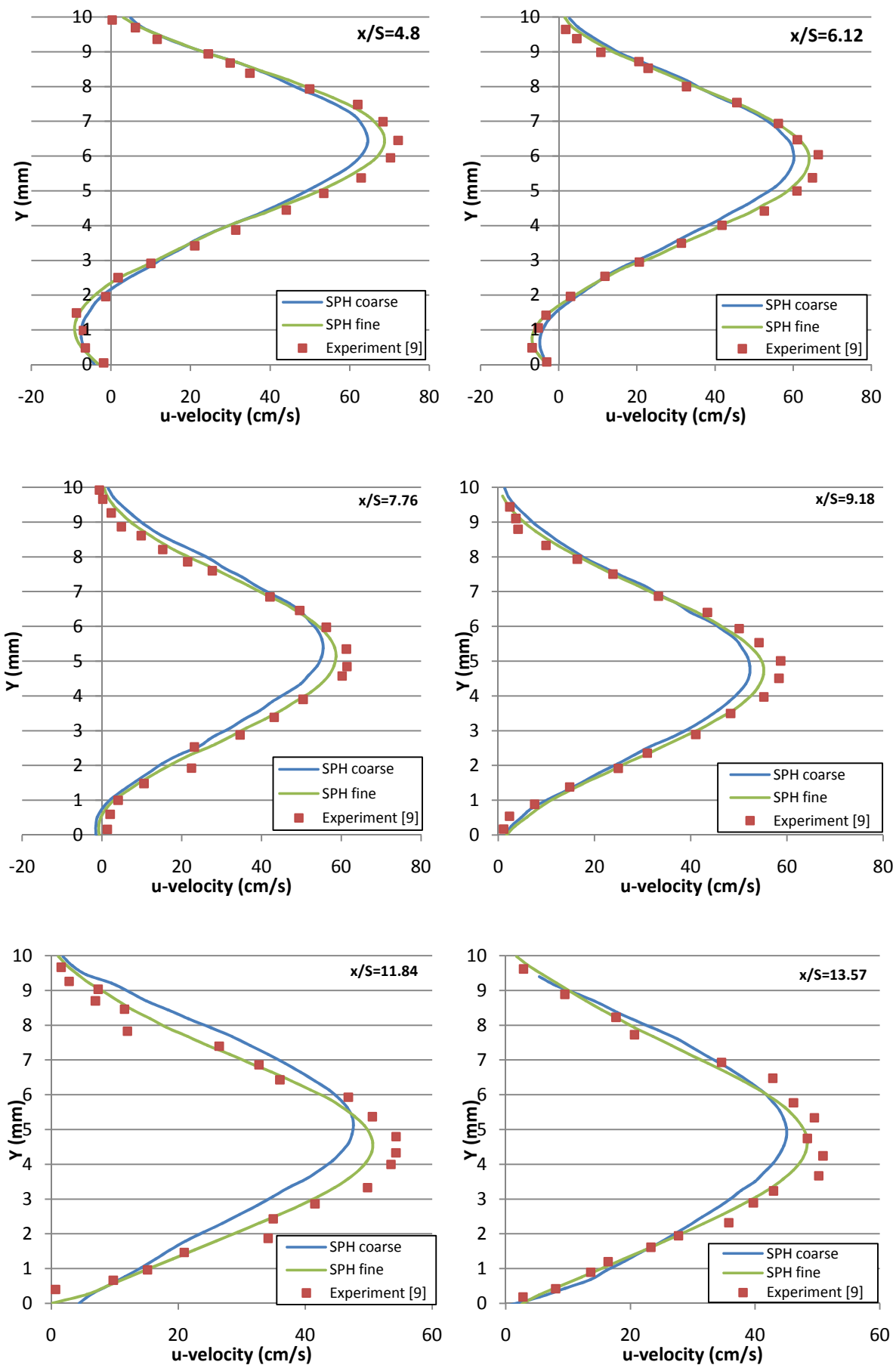


Σχ. 4.12. Γεωμετρία του πειράματος του Armaly.



Σχ. 4.13. Προσομοίωση πειράματος του Armaly. Σύγκριση των κατανομών ταχύτητας.





Σχ. 4.14. Προσομοίωση πειράματος του Armaly. Σύγκριση των κατανομών ταχύτητας.

Προσομοίωση φαινομένων τύρβης με τη μέθοδο SPH

Ως τυρβώδης καλείται η μη μόνιμη, ακανόνιστη, χαοτική ροή. Τυρβώδης θα μπορούσε να χαρακτηριστεί η πλειονοψηφία των ροών που εμφανίζονται σε βιομηχανικές αλλά και καθημερινές πρακτικές εφαρμογές. Παρόλα αυτά είναι σχετικά δύσκολο να αναλυθούν, λόγω του ότι είναι εγγενώς μη-μόνιμες. Ακόμα οι δομές της ροής εκτυλίσσονται σε ένα ευρύ πεδίο κλιμάκων χώρου και χρόνου, που πρέπει να συμπεριληφθούν προκειμένου μια προσομοίωση να είναι ακριβής. Αυτού του είδους η προσομοίωση καλείται *Direct Numerical Simulation*, είναι δε αρκετά πολύπλοκη για να είναι πρακτική η εφαρμογή. Αντ' αυτού συνήθως γίνεται η επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes εκφρασμένων σε μορφή μέσου όρου ως προς το χρόνο (*Reynolds Averaged Navier Stokes - RANS*). Με αυτόν τον τρόπο είναι δυνατή η έκφραση κατάλληλων μοντέλων για την προσομοίωση της επίδρασης της τύρβης στη ροή.

Η ενσωμάτωση κλασικών μοντέλων τύρβης στη μέθοδο SPH είναι δυνατή, τροποποιώντας κατάλληλα τις μέσες εξισώσεις Navier-Stokes χρησιμοποιώντας κατάλληλες προσεγγίσεις SPH (εξ. 2.4-2.7). Οι μέσες εξισώσεις Navier-Stokes είναι οι ακόλουθες:

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \sum_{j=1}^N m_j \bar{\mathbf{u}}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (4.4)$$

$$\frac{D\bar{\mathbf{u}}_i}{Dt} = -\sum_j m_j \left[ \left( \frac{\bar{p}_i}{\rho_i^2} + \frac{\bar{p}_j}{\rho_j^2} \right) \nabla W_{ij} - \mathbf{\Pi}_{ij} \right] + \mathbf{f}_{body} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{\Pi}_{ij} = \frac{(\mu + \mu_T)_i + (\mu + \mu_T)_j}{\rho_i \rho_j} \frac{\bar{\mathbf{u}}_{ij}}{\|\mathbf{r}_{ij}\|^2} \mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla W_{ij} \quad (4.6)$$

Για την ολοκλήρωση του μοντέλου τύρβης χρειάζονται επιπλέον σχέσεις για τον υπολογισμό του όρου τυρβώδους συνεκτικότητας που μοντελοποιεί τα φαινόμενα τύρβης. Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, η μοντελοποίηση αυτή θα γίνει μέσω μοντέλων δύο εξισώσεων, των μοντέλων  $k$ - $\varepsilon$  και  $k$ - $\omega$  [11]. Οι εξισώσεις των  $k$ ,  $\varepsilon$  και  $\omega$  είναι οι ακόλουθες:

$$\frac{dk}{dt} = P - \varepsilon + \sum_j m_j \frac{\mu_{k,i} + \mu_{k,j}}{\rho_i \rho_j} \frac{k_i - k_j}{\|\mathbf{r}_{ij}\|^2} \mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla W_{ij} \quad (4.7)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) + \sum_j m_j \frac{\mu_{\varepsilon,i} + \mu_{\varepsilon,j}}{\rho_i \rho_j} \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_j}{\|\mathbf{r}_{ij}\|^2} \mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla W_{ij} \quad (4.8)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega}{k} (C_{\omega 1} P - C_{\omega 2} k \omega) + \sum_j m_j \frac{\mu_{\omega,i} + \mu_{\omega,j}}{\rho_i \rho_j} \frac{\omega_i - \omega_j}{\|\mathbf{r}_{ij}\|^2} \mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla W_{ij} \quad (4.9)$$

Οι όροι που εμφανίζονται στις παραπάνω εξισώσεις είναι οι ακόλουθοι:

$$P = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} S^2 = \frac{k}{\omega} S^2 \quad (4.10)$$

$$S^2 = -\frac{1}{2} \sum_j m_j \frac{\rho_i + \rho_j}{\rho_i \rho_j} \frac{\|\bar{\mathbf{u}}_i - \bar{\mathbf{u}}_j\|^2}{\|\mathbf{r}_{ij}\|^2} \mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla W_{ij} \quad (4.11)$$

με

$$\mu_{k,i} = \mu_i + \frac{\mu_{T,i}}{\sigma_k} \quad \mu_{\varepsilon,i} = \mu_i + \frac{\mu_{T,i}}{\sigma_\varepsilon} \quad \mu_{\omega,i} = \mu_i + \frac{\mu_{T,i}}{\sigma_\omega}$$

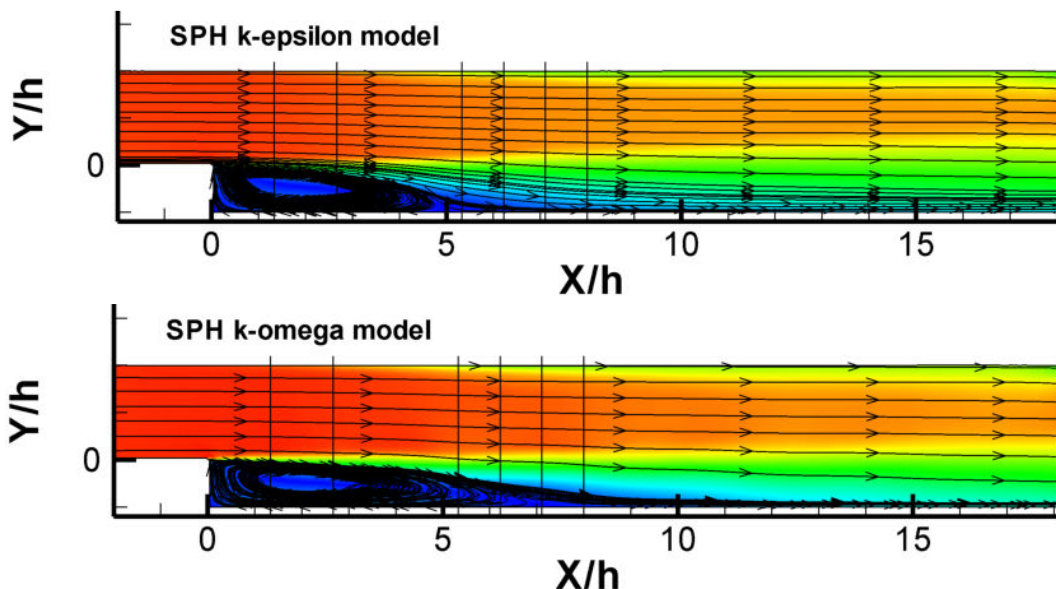
Ακόμα, οι παράμετροι των μοντέλων είναι:

- $C_\mu=0.09$
- $C_{\varepsilon 1}=1.44$
- $C_{\varepsilon 2}=1.92$
- $\sigma_k=1$
- $\sigma_\varepsilon=1.3$
- $\beta^*=0.09$
- $C_{\omega 1}=5/9$
- $C_{\omega 2}=3/40$
- $\sigma_k=2$
- $\sigma_\omega=2$

Πέραν των παραπάνω εξισώσεων απαιτείται κατάλληλη αντιμετώπιση της ροής κοντά στο τοίχωμα. Κοντά στο τοίχωμα οι κλίσεις είναι πολύ μεγάλες και για την προσομοίωσή τους απαιτείται πολύ μεγάλη ανάλυση. Αντ' αυτού η ροή κοντά στο τοίχωμα συνήθως προσομοιώνεται χρησιμοποιώντας κατάλληλες συναρτήσεις τοιχώματος.

Με βάση τα παραπάνω είναι δυνατή η προσομοίωση της τυρβώδους ροής σε ανάποδο σκαλοπάτι με τη χρήση της μεθόδου SPH με τα μοντέλα  $k-\varepsilon$  και  $k-\omega$  για  $Re=69610$ . Εδώ πρέπει να τονιστεί ότι απευθείας προσομοίωση υψηλών Reynolds με την μέθοδο SPH με ή χωρίς μοντέλα τύρβης οδηγεί σε αφύσικη συμπεριφορά της ροής. Πέραν του σχηματισμού κενών εντός του υπολογιστικού χώρου, η αταξία των σωματιδίων προκαλεί υπερεκτίμηση των οριακών στρωμάτων και δευτερεύοντες στροβίλους που δεν εμφανίζονταν στα πειράματα. Επομένως για την προσομοίωση φαινομένων τύρβης είναι αναγκαστική η χρήση της τεχνικής ανακατανομής σωματιδίων.

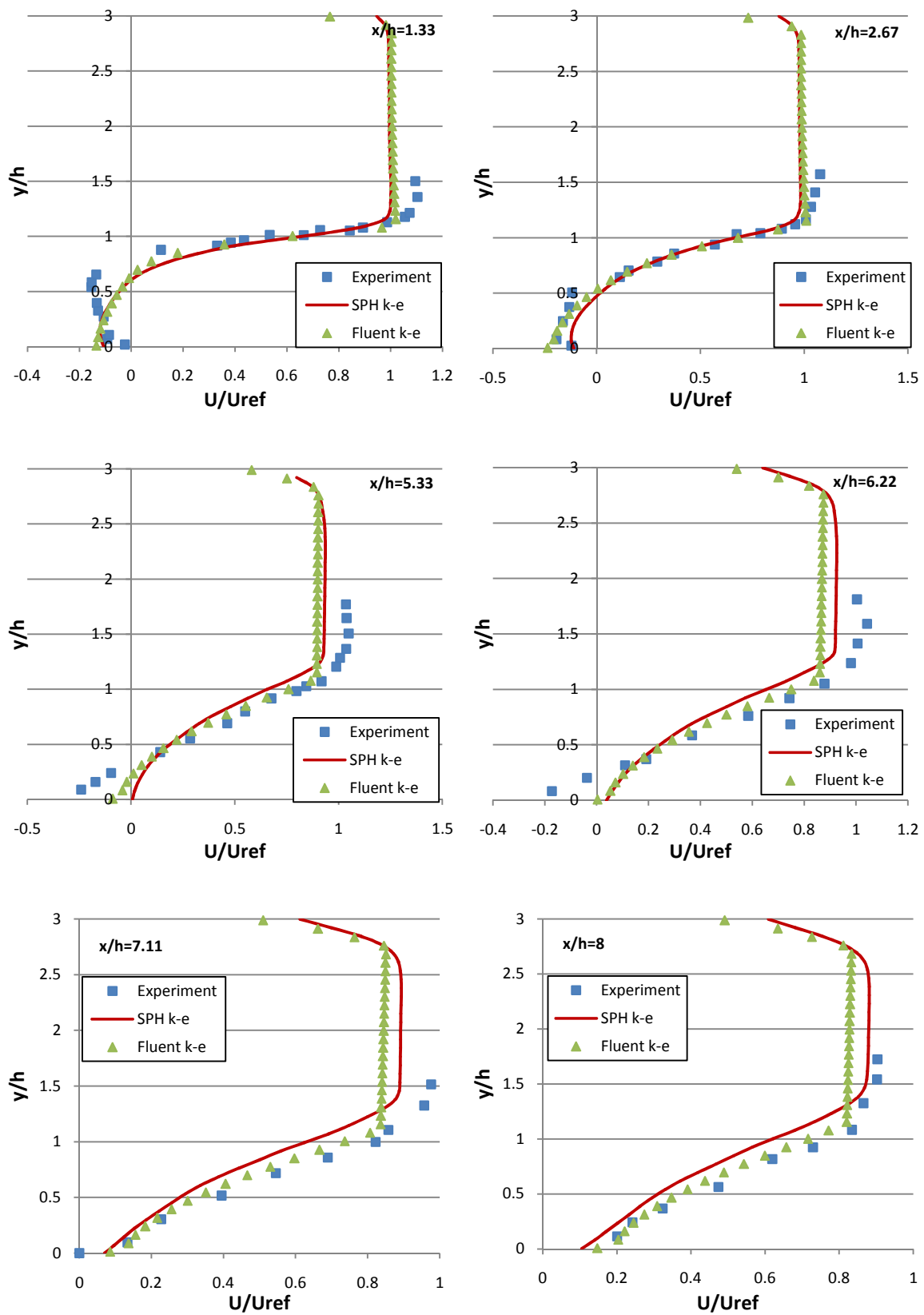
Στο σχήμα 4.15 φαίνεται το μήκος ανακυκλοφορίας της ροής. Το μοντέλο  $k-\omega$  είναι σε θέση να υπολογίσει καλύτερα την έκταση της ανακυκλοφορίας σε σχέση με το  $k-\varepsilon$ , κάτι που είναι γνωστό και από τη βιβλιογραφία.



Σχ. 4.15. Μήκος ανακυκλοφορίας όπως υπολογίζεται από τα δυο μοντέλα τύρβης.

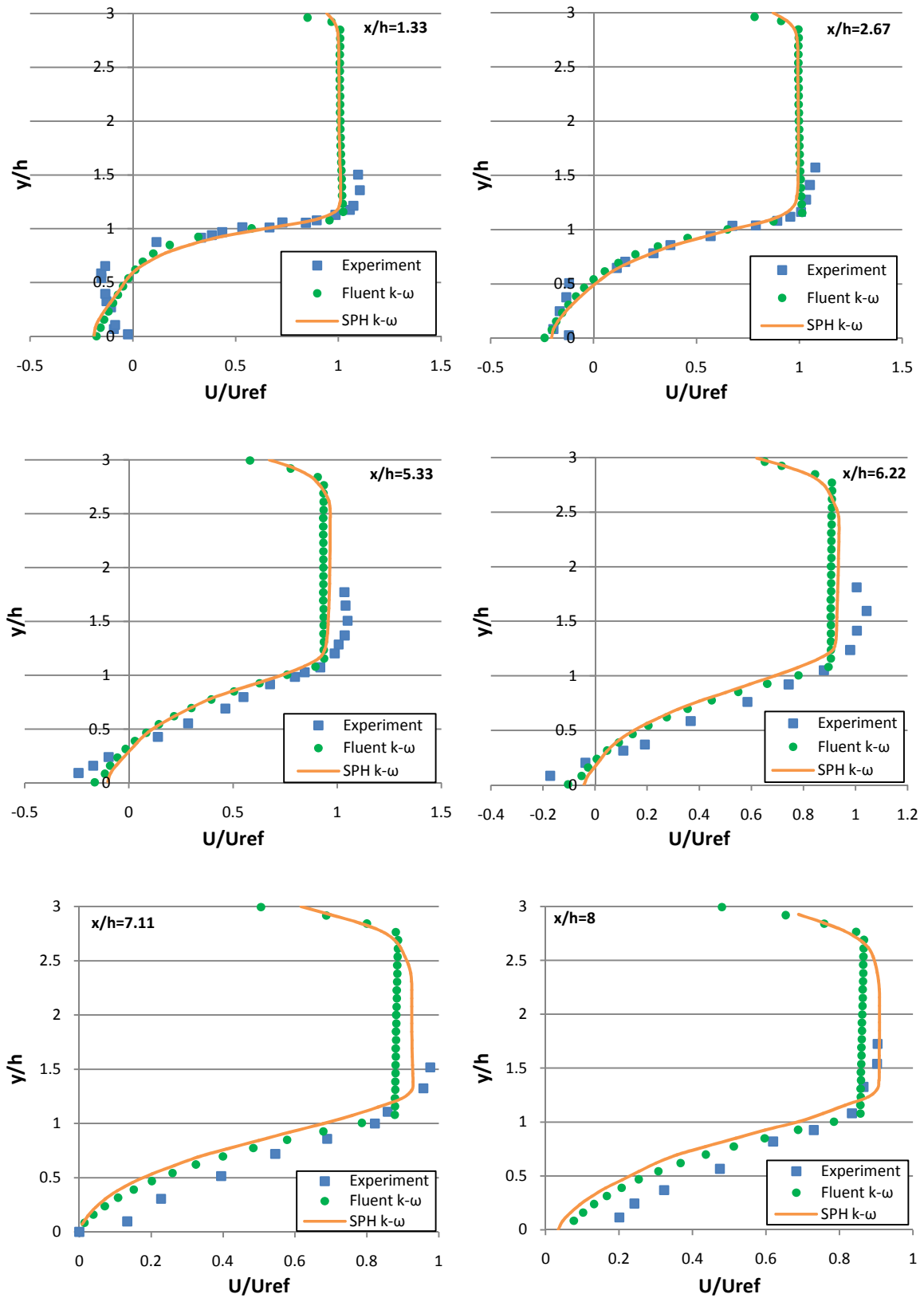
Στη συνέχεια φαίνονται συγκριτικά κατανομές ταχύτητας σε διάφορες θέσεις. Αποκλίσεις υπάρχουν σε σχέση με τα πειραματικά, κάτι που είναι ως ένα σημείο αναμενόμενο. Απ' την άλλη η συμφωνία μεταξύ των αριθμητικών είναι ικανοποιητική.

*k-ε μοντέλο τύρβης*



Σχ. 4.16. Τυρβώδης ροή σε ανάποδο σκαλοπάτι. Κατανομές ταχύτητας σε διάφορες θέσεις υπολογισμένα με τη μέθοδο SPH, σε σύγκριση με αριθμητικά από το πρόγραμμα Fluent και πειραματικά.

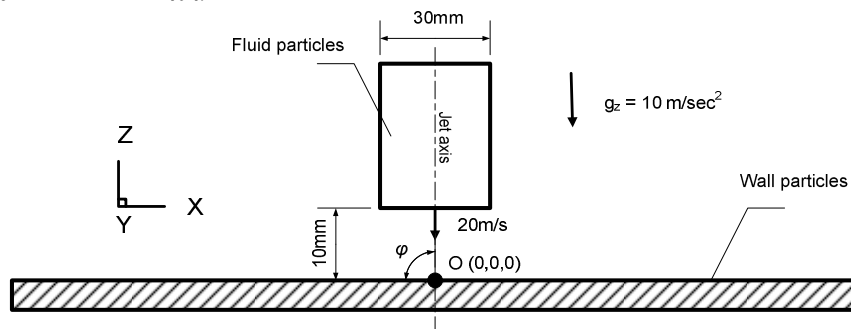
*k- $\omega$  μοντέλο τύρβης*



Σχ. 4.17. Τυρβώδης ροή σε ανάποδο σκαλοπάτι. Κατανομές ταχύτητας σε διάφορες θέσεις υπολογισμένα με τη μέθοδο SPH, σε σύγκριση με αριθμητικά από το πρόγραμμα Fluent και πειραματικά.

### 4.3. Ροές με ελεύθερες επιφάνειες

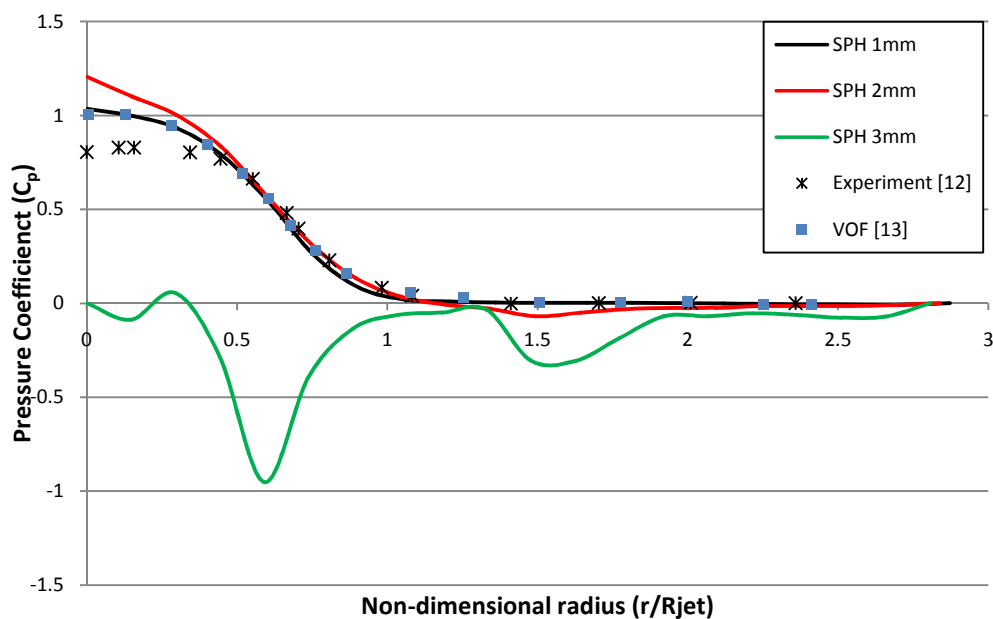
Το κύριο πλεονέκτημα της μεθόδου SPH είναι η προσομοίωση ροών ελεύθερης επιφάνειας, καθώς δεν απαιτείται κάποια τεχνική για την παρακολούθηση της διεπιφάνειας, ή επιβολή οριακών συνθηκών στην ελεύθερη επιφάνεια. Σε πρώτη φάση έγινε η προσομοίωση πρόσκρουσης δέσμης νερού πάνω σε επίπεδη πλάκα για διάφορες γωνίες. Η ταχύτητα της δέσμης ήταν 20m/s, ενώ το περιγραφόμενο ρευστό ήταν νερό. Η προσομοίωση θεωρήθηκε ατριβής. Ένα διάγραμμα της προσομοίωσης δίνεται στο σχήμα 4.18.



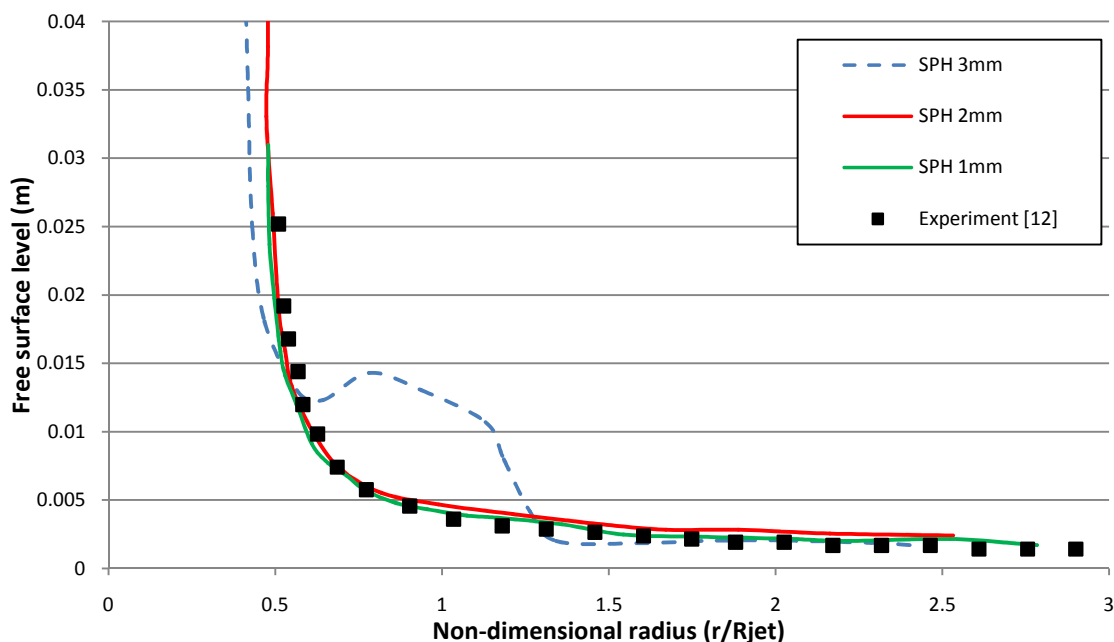
Σχ. 4.18. Διάγραμμα της πρόσκρουσης δέσμης σε επίπεδη πλάκα.

Τα σωματίδια τοποθετήθηκαν χρησιμοποιώντας κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων, σχηματίζοντας δακτυλίους και με κατάλληλο τρόπο ώστε να αποφευχθεί κατά το δυνατό το φαινόμενο της προσανατολισμένης κίνησης σωματιδίων (ο αναγνώστης παραπέμπεται στο πλήρες κείμενο της εργασίας). Επιπλέον χρησιμοποιήθηκαν οριακές συνθήκες συμμετρίας όπου ήταν δυνατό, για την επιτάχυνση των υπολογισμών.

Αρχικά πραγματοποιήθηκε ανάλυση ανεξαρτησίας σωματιδίων αναφορικά με την περιγραφή της ελεύθερης επιφάνειας και της κατανομής πίεσης πάνω στο τοίχωμα. Από τα αποτελέσματα προέκυψε ότι ανάλυση 1mm επαρκεί για την περιγραφή του φαινομένου, όπως φαίνεται και από τα σχήματα 4.19 και 4.20.

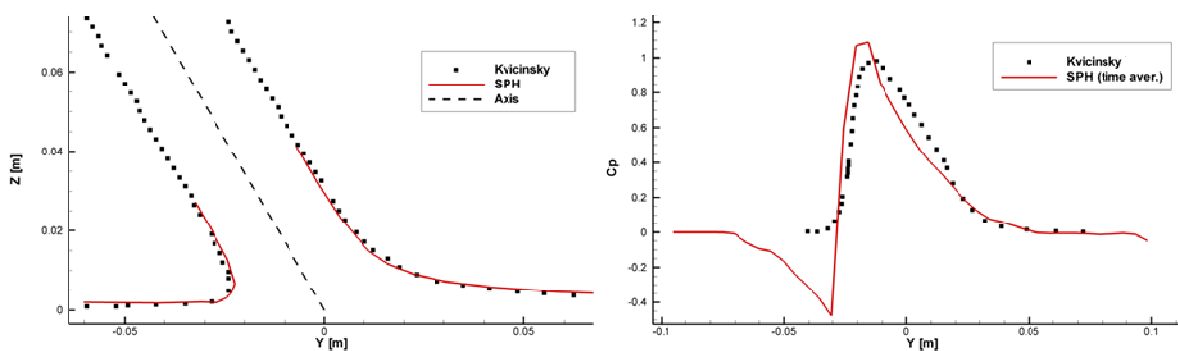


Σχ. 4.19. Πρόσκρουση δέσμης σε επίπεδη πλάκα (γωνία 90°). Κατανομή του συντελεστή πίεσης στην ακτινική κατεύθυνση.

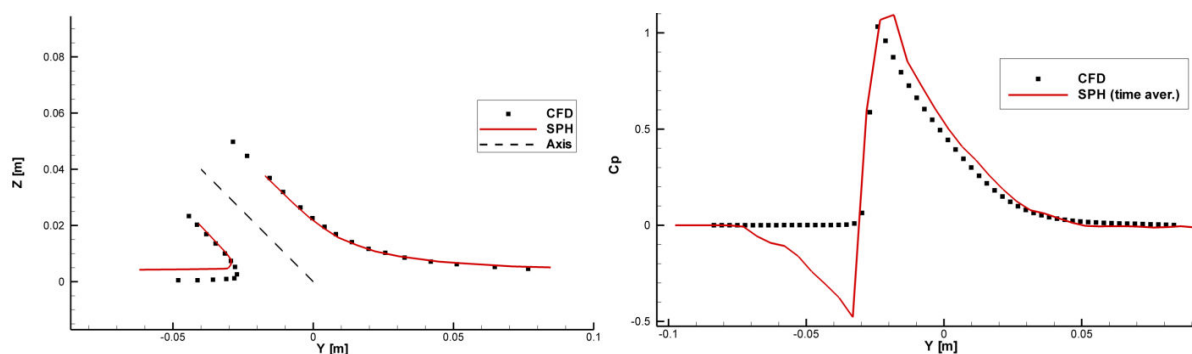


Σχ. 4.20. Ύψος ελεύθερης επιφάνειας στην ακτινική κατεύθυνση.

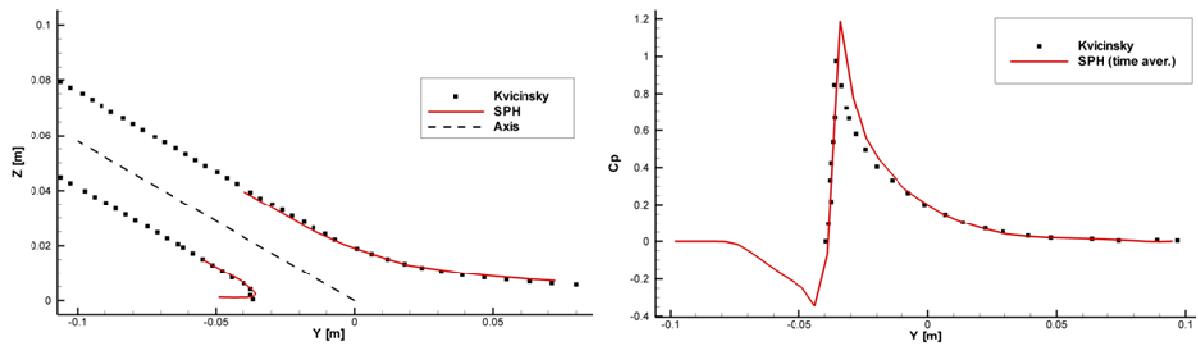
Χρησιμοποιώντας την ανάλυση 1mm, προσομοιώθηκαν και οι υπόλοιπες γωνίες πρόσκρουσης. Από τα αποτελέσματα φαίνεται ότι η μέθοδος SPH είναι σε θέση να περιγράψει αρκετά καλά την ελεύθερη επιφάνεια του φύλλου νερού μετά την πρόσκρουση. Η κατανομή της πίεσης υπολογίζεται με μέσο όρο ως προς τον χρόνο, για να εξομαλυνθούν οι διαταραχές της πίεσης. Παρόλα αυτά υπάρχουν ορισμένες ανακρίβειες, όπως η υποεκτίμηση του συντελεστή πίεσης μετά το σημείο ανακοπής.



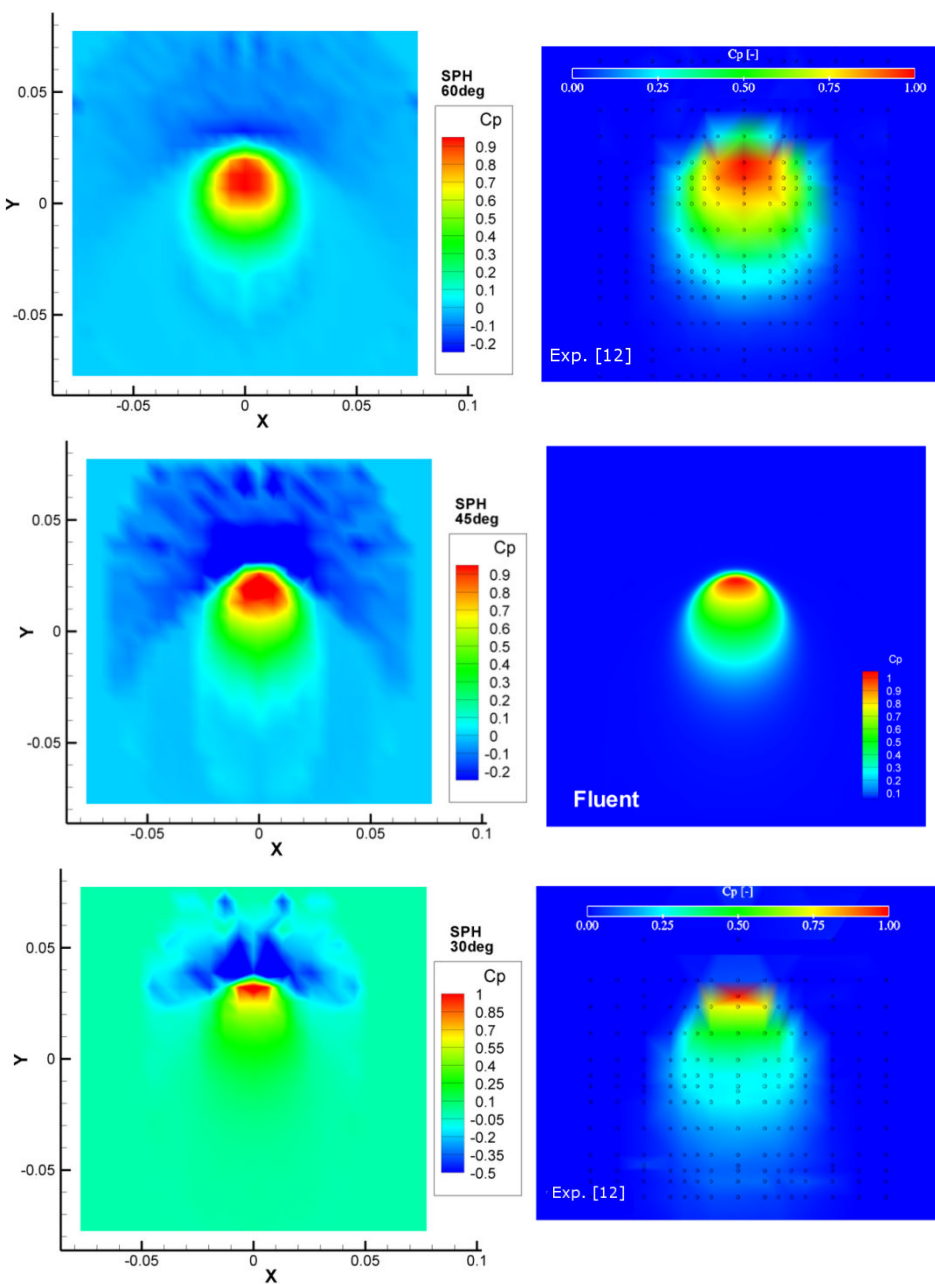
Σχ. 4.21. Ελεύθερη επιφάνεια (αριστερά) και κατανομή πίεσης (δεξιά) για την πρόσκρουση υπό γωνία 30°.



Σχ. 4.22. Ελεύθερη επιφάνεια (αριστερά) και κατανομή πίεσης (δεξιά) για την πρόσκρουση υπό γωνία 45°.



Σχ. 4.23. Ελεύθερη επιφάνεια (αριστερά) και κατανομή πίεσης (δεξιά) για την πρόσκρουση υπό γωνία  $30^\circ$ .



Σχ. 4.24. Κατανομή πίεσης πάνω στην πλάκα. Από πάνω προς τα κάτω, πρόσκρουση  $60^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $30^\circ$ .

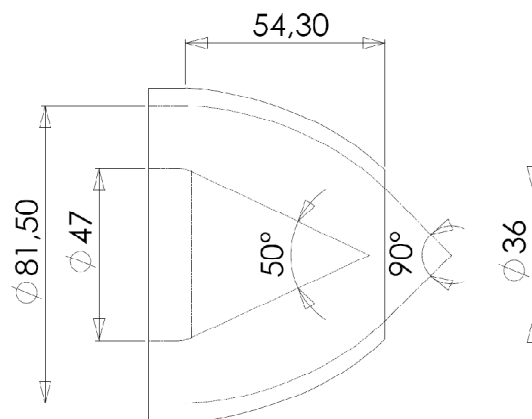


## 5. Εφαρμογές σε υδροστροβίλους δράσης

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται εφαρμογές της μεθόδου SPH σε εξαρτήματα υδροστροβίλων δράσης. Πιο συγκεκριμένα μελετήθηκαν η ροή σε ακροφύσιο, σε εκτροπέα και σε δρομείς Pelton και Turgo.

### 5.1. Ροή σε ακροφύσιο υδροστροβίλου Pelton

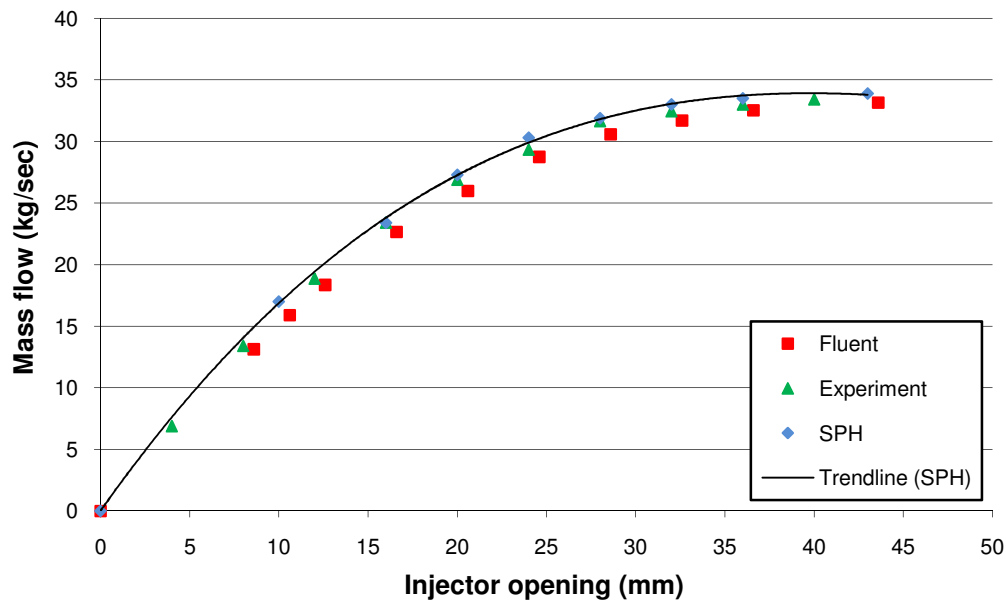
Στο ακροφύσιο υδροστροβίλου δράσης λαμβάνει χώρα η μετατροπή της πίεσης του νερού σε κινητική ενέργεια, διαμορφώνοντας μια δέσμη νερού με μεγάλη κινητική ενέργεια. Η ρύθμιση της παροχής δια μέσου του ακροφυσίου γίνεται χρησιμοποιώντας κινητή βελόνα. Στο σχήμα 5.1 φαίνεται η γεωμετρία του ακροφυσίου που προσομοιώθηκε.



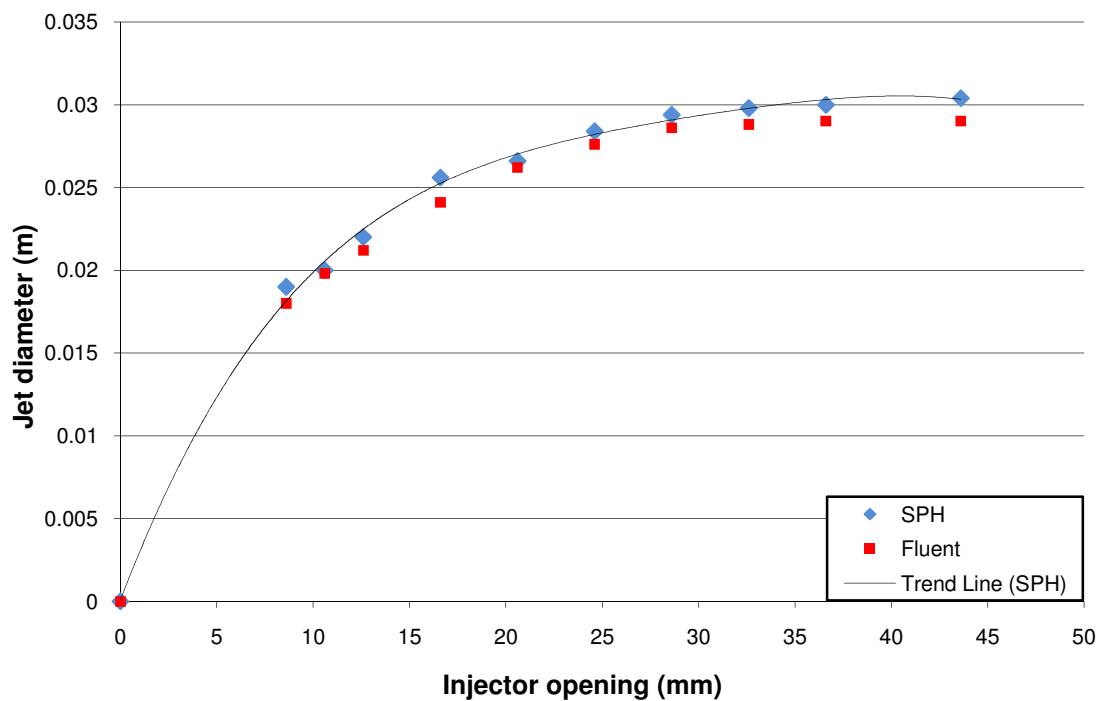
Σχ. 5.1. Σχεδιάγραμμα ενός ακροφυσίου Pelton με την ρυθμιστική βελόνα (διαστάσεις σε mm)

Δεδομένου ότι το πρόβλημα είναι αξονο-συμμετρικό, η 3-διάστατη γεωμετρία διαμορφώθηκε σχηματίζοντας ένα 2-διάστατο περίγραμμα το οποίο περιστράφηκε κατά τον άξονα συμμετρίας, διαμορφώνοντας τις επιφάνειες των τοιχωμάτων. Η τελική προσομοίωση έγινε θεωρώντας 3-διάστατη γεωμετρία με δυο επίπεδα συμμετρίας κάθετα μεταξύ τους.

Στην είσοδο του ακροφυσίου επιβλήθηκε σταθερή ολική πίεση, που αντιπροσωπεύει το ολικό ύψος υδατόπτωσης. Η στατική πίεση υπολογίστηκε μέσω της ολικής πίεσης, αφαιρώντας τη συμβολή της κινητικής ενέργειας του νερού. Για τον καθορισμό της κατάλληλης ανάλυσης έγινε ανάλυση ανεξαρτησίας σωματιδίων, απ' όπου φάνηκε ότι ανάλυση 1mm είναι αρκετή για την περιγραφή του ακροφυσίου. Στη συνέχεια, η ροή προσομοιώθηκε για διάφορα ανοίγματα ακροφυσίου, ενώ τα αποτελέσματα της ροής συγκρίθηκαν με πειραματικά (σχ. 5.2). Ακόμα συγκρίθηκε και η διάμετρος της δέσμης για διάφορα ανοίγματα, όπως υπολογίστηκε από τη μέθοδο SPH και από το πρόγραμμα Fluent (σχ. 5.3). Γενικά η μέθοδος SPH δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα όσον αφορά την παροχή και τη διάμετρο της δέσμης. Επίσης είναι σε θέση να περιγράψει αρκετά καλά και το μεταβατικό φαινόμενο στην αρχή λειτουργίας του ακροφυσίου.



Σχ. 5.2. Χαρακτηριστική καμπύλη ακροφυσίου – συγκριτικά μεταξύ μεθόδου SPH, πειραματικών και αριθμητικών αποτελεσμάτων.

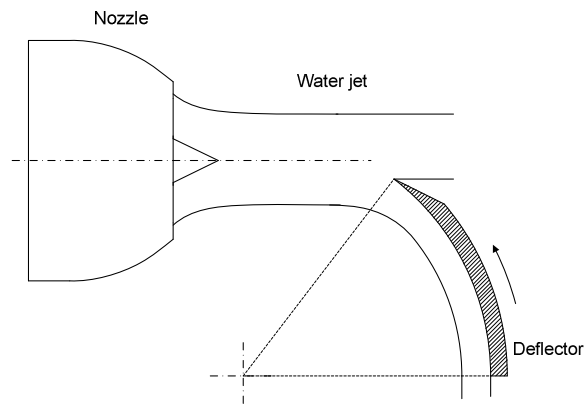


Σχ. 5.3. Μεταβολή της διαμέτρου της δέσμης σε σχέση με το άνοιγμα του ακροφυσίου.

## 5.2. Εκτροπέας δέσμης

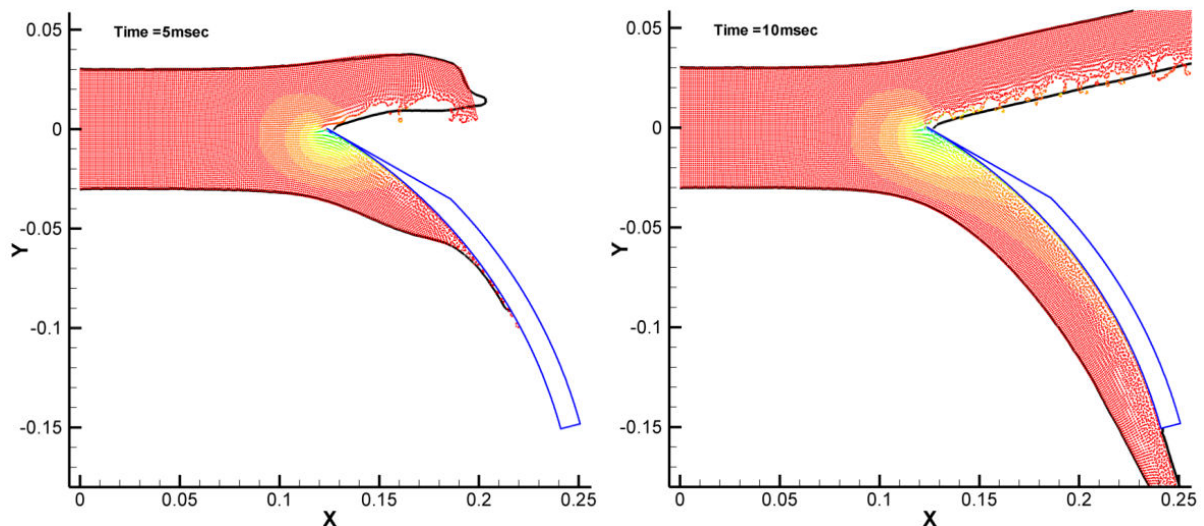
Εν γένει, η ρύθμιση του φορτίου στους υδροτροβίλους δράσης γίνεται μέσω της βελόνας του ακροφυσίου. Ωστόσο αυτή η ρύθμιση δεν είναι τόσο γρήγορη ώστε να χρησιμοποιηθεί σε καταστάσεις έκτακτης ανάγκης, εκτός του ότι μπορεί να οδηγήσει σε φαινόμενα υδραυλικού πλήγματος. Επομένως σε τέτοιες περιπτώσεις χρησιμοποιείται εκτροπέας δέσμης.

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται η προσομοίωση της λειτουργίας ενός εκτροπέα δέσμης (όπως στο σχήμα 5.4), ούτως ώστε να διαπιστωθεί το κατά πόσο είναι δυνατή η χρήση του στη ρύθμιση φορτίου πέραν από την εκτροπή στις καταστάσεις ανάγκης.



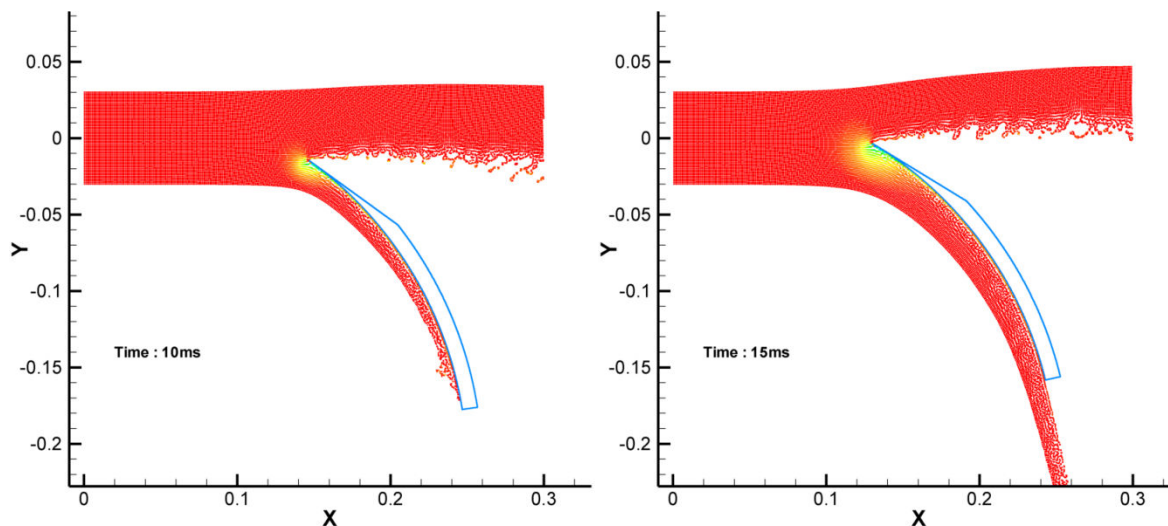
Σχ. 5.4. Εκτροπέας δέσμης.

Σε πρώτη φάση έγινε προσομοίωση της ροής σε απλούστερες 2-διάστατες γεωμετρίες. Στο σχήμα 5.5 φαίνεται η ροή που σχηματίζεται λόγω της αλληλεπίδρασης του νερού με τον ακίνητο εκτροπέα σε δύο ενδεικτικά στιγμιότυπα. Η ελεύθερη επιφάνεια του νερού προσδιορίζεται με ακρίβεια σε σύγκριση με αριθμητικά αποτελέσματα από το πρόγραμμα Fluent.

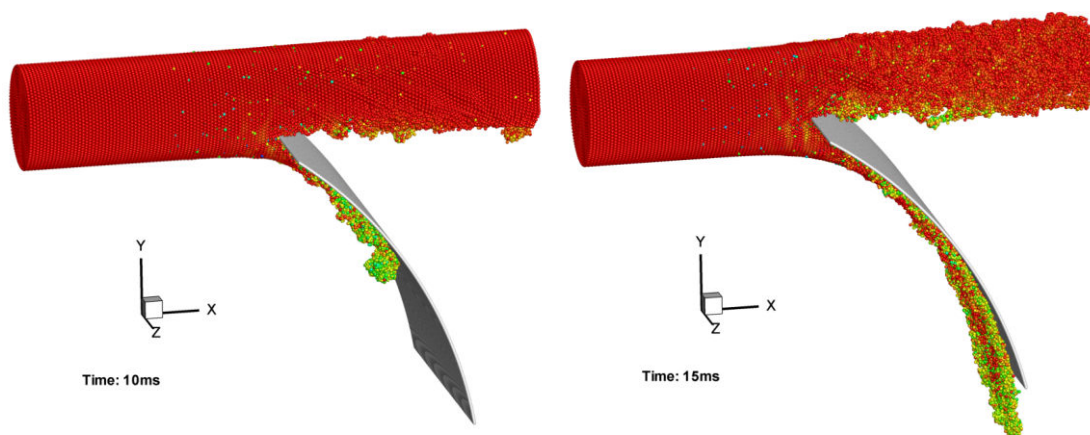


Σχ. 5.5. Ροή σε ακίνητο εκτροπέα. Η λύση της μεθόδου SPH αναπαρίσταται με χρωματισμένα σωματίδια, σύμφωνα με το μέτρο της ταχύτητας. Η συνεχής γραμμή δείχνει την ελεύθερη επιφάνεια υπολογισμένη με το Fluent.

Στη συνέχεια, έγιναν δοκιμές σε 2-διάστατες και 3-διάστατες γεωμετρίες με κινούμενο εκτροπέα. Και στις δυο περιπτώσεις διαπιστώθηκε ότι το υπόλοιπο τμήμα της δέσμης, παραμορφώνεται αρκετά και φαίνεται να εκτρέπεται και αυτό εν μέρει, ακόμα και για μικρά ποσοστά εκτροπής (25-40%)– το φαινόμενο αυτό είναι πιο έντονο στην 2D προσομοίωση (σχ. 5.6).



Σχ. 5.6. Ροή σε κινούμενο εκτροπέα (2D).



Σχ. 5.7. Ροή σε κινούμενο εκτροπέα (3D).

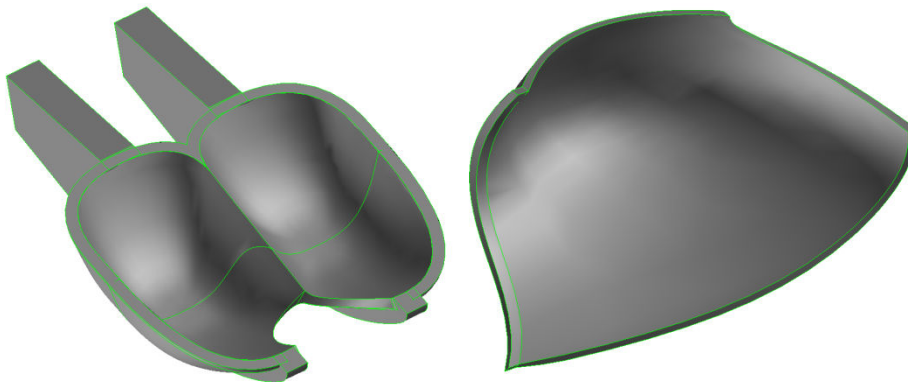
Από την 3-διάστατη προσομοίωση φαίνεται ότι υπάρχει σημαντική διασπορά της δέσμης μετά την αλληλεπίδραση με τον εκτροπέα, κάτι που θα έχει αρκετά σημαντική επίδραση στην απόδοση του υδροστροβίλου, δεδομένου ότι η επίδραση του περιβάλλοντος αέρα αναμένεται να χειροτερεύσει ακόμα περισσότερο την ποιότητα της δέσμης. Τελικά, διαπιστώνεται ότι το συγκεκριμένο σχήμα του εκτροπέα δεν είναι κατάλληλο για την ρύθμιση του φορτίου.

### 5.3. Προσομοιώσεις υδροστροβίλων δράσης

Η αρχή λειτουργίας των υδροστροβίλων δράσης βασίζεται στην αλληλεπίδραση μιας δέσμης νερού με μεγάλη ταχύτητα με δρομέα κατάλληλης γεωμετρίας. Ο δρομέας μεταβάλλει την κατεύθυνση της δέσμης με αποτέλεσμα να αναπτύσσεται ροπή στο δρομέα. Η πίεση μεταβάλλεται μόνο στο ακροφύσιο του υδροστροβίλου, με αποτέλεσμα να είναι δυνατή η λειτουργία σε ατμοσφαιρικό περιβάλλον παρουσία αέρα, χωρίς την ανάγκη σφραγισμένου περιβλήματος.

Ο δρομέας του υδροστροβίλου Pelton διαθέτει πτερύγια κατάλληλης γεωμετρίας, ονομαζόμενα και *σκαφίδια*. Η ροή προσκρούει στο μέσο του σκαφιδίου, χωρίζεται στα δύο, ακολουθεί την επιφάνεια του σκαφιδίου και τελικά εξέρχεται με αντίθετη κατεύθυνση σε σχέση με την κατεύθυνση της δέσμης. Ο υδροστροβίλος Pelton είναι σχεδιασμένος για μικρές παροχές και μεγάλα υδραυλικά ύψη.

Ο υδροστροβίλος Turgo είναι κατάλληλος για εφαρμογές μέσου υδραυλικού ύψους. Ο δρομέας του μοιάζει με το δρομέα του υδροστροβίλου Pelton χωρισμένο στη μέση. Το νερό εισέρχεται από την μια πλευρά του δρομέα και εξέρχεται από την άλλη, κάτι που επιτρέπει τον χειρισμό μεγάλων παροχών, χωρίς να αλληλεπιδρά το εξερχόμενο με το εισερχόμενο νερό.



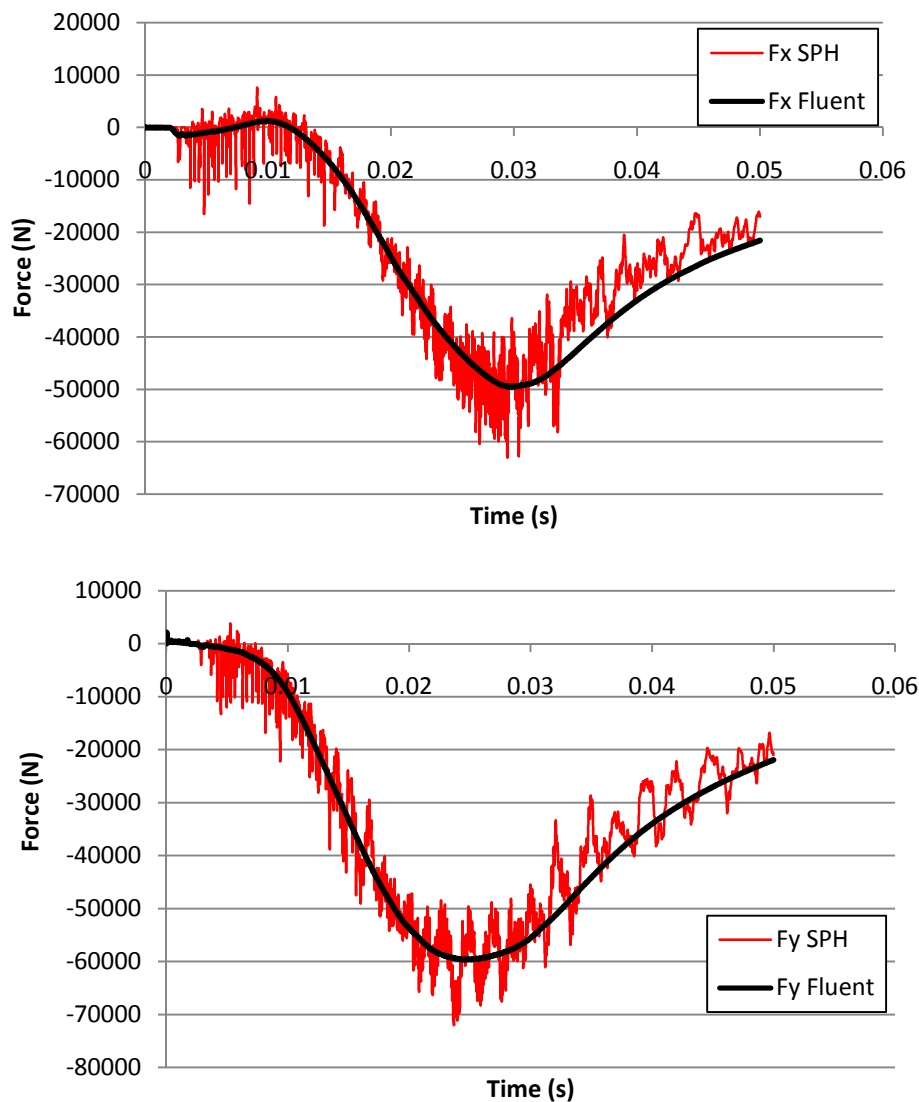
Σχ. 5.8. Σκαφίδιο Pelton (αριστερά) και πτερύγιο Turgo (δεξιά).

Κοινό χαρακτηριστικό των υδροστροβίλων δράσης είναι ότι η αναπτυσσόμενη ροή είναι διφασική, καθώς περιλαμβάνει και νερό και αέρα. Επίσης είναι μη-μόνιμη και περιλαμβάνει κινούμενες γεωμετρίες. Τα παραπάνω καθιστούν χρονοβόρα την προσομοίωση με τη χρήση συμβατικών προγραμμάτων προσομοίωσης βασισμένα σε Eulerian περιγραφή. Απ' την άλλη η μέθοδος SPH έχει το πλεονέκτημα της εύκολης περιγραφής κινούμενων γεωμετριών και ελεύθερης επιφάνειας.

Η γεωμετρία των σκαφιδίων/πτερυγίων Pelton και Turgo αντίστοιχα είναι αρκετά πολύπλοκη. Ο αποτελεσματικότερος τρόπος για την περιγραφή τους είναι χρησιμοποιώντας NURBS. Οι γεωμετρίες των υδροστροβίλων Turgo δημιουργήθηκαν χρησιμοποιώντας κατάλληλο λογισμικό του εργαστηρίου. Η γεωμετρία του Pelton δημιουργήθηκε με παραπλήσιο λογισμικό, αλλά είναι βασισμένη στη γεωμετρία υπάρχοντος υδροστροβίλου. Και στις δυο περιπτώσεις η γεωμετρία του σκαφιδίου/πτερυγίου αναπαρίσταται από μια 3-διάστατη καμπύλη επιφάνεια που μπορεί να περιγραφεί χρησιμοποιώντας κατάλληλο πλέγμα. Στη συνέχεια, αυτό το πλέγμα χρησιμοποιήθηκε για να τοποθετηθούν σωματίδια πάνω στην επιφάνεια του πτερυγίου, αντιπροσωπεύοντας το τοίχωμα. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την παραμετροποίηση της γεωμετρίας των υδροστροβίλων, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο πλήρες κείμενο.

### 5.3.1. Υδροστρόβιλος Turgo

Σε πρώτη φάση έγιναν 2-διάστατες προσομοιώσεις με ακίνητο/κινούμενο περύγιο. Οι διαστάσεις του περυγίου υπολογίστηκαν με βάση τη μέση ακτίνα υδροστροβίλου Turgo. Στην περίπτωση του ακίνητου περυγίου, τα αποτελέσματα των αναπτυσσόμενων δυνάμεων συγκρίθηκαν με τις δυνάμεις προσδιοριζόμενες αναλυτικά από την διατήρηση της ορμής. Στην περίπτωση του κινούμενου περυγίου, τα αποτελέσματα συγκρίθηκαν με τα αποτελέσματα του Fluent. Το πεδίο ροής ήταν πρακτικά πανομοιότυπο, ωστόσο οι αναπτυσσόμενες δυνάμεις παρουσιάζουν ταλαντώσεις (σχ. 5.9). Παρόλα αυτά, η απόκλιση στο συνολικά αποδιδόμενο έργο είναι λιγότερη από 3%.



Σχ. 5.9. Δυνάμεις πάνω στο περύγιο: πάνω δύναμη στον x-άξονα, κάτω δύναμη στον y-άξονα.

Στην συνέχεια μελετήθηκε η 3-διάστατη ροή σε ακίνητο περύγιο Turgo, για διάφορες γωνίες πρόσκρουσης. Οι διαστάσεις του περυγίου ήταν:

- Πλάτος 332mm
- Μήκος 412mm
- Βάθος 265mm

Μετά από ανάλυση ανεξαρτησίας σωματιδίων βρέθηκε ότι μέγεθος σωματιδίων ίσο με 5mm είναι αρκετό για την περιγραφή της ροής, δίνοντας ικανοποιητικά αποτελέσματα δυνάμεων πάνω στο πτερύγιο, όπως φαίνεται και στον πίνακα 5-I. Σε όλες τις περιπτώσεις που προσομοιώθηκαν με την μέθοδο SPH, τα αποτελέσματα των δυνάμεων ήταν αρκετά κοντά στα αντίστοιχα που υπολογίστηκαν με το Fluent (πίνακες 5-II και 5-III). Η περιγραφή της ελεύθερης επιφάνειας ήταν ακριβής ακόμα και στην πιο περίπλοκη περίπτωση της πρόσκρουσης των 60°, όπου παρουσιάζεται αλληλεπίδραση του εξερχόμενου νερού με την δέσμη που προσκρούει στο πτερύγιο (σχ. 5.10).

Πίνακας 5-I. Δυνάμεις στο πτερύγιο για την πρόσκρουση δέσμης με γωνία 30°

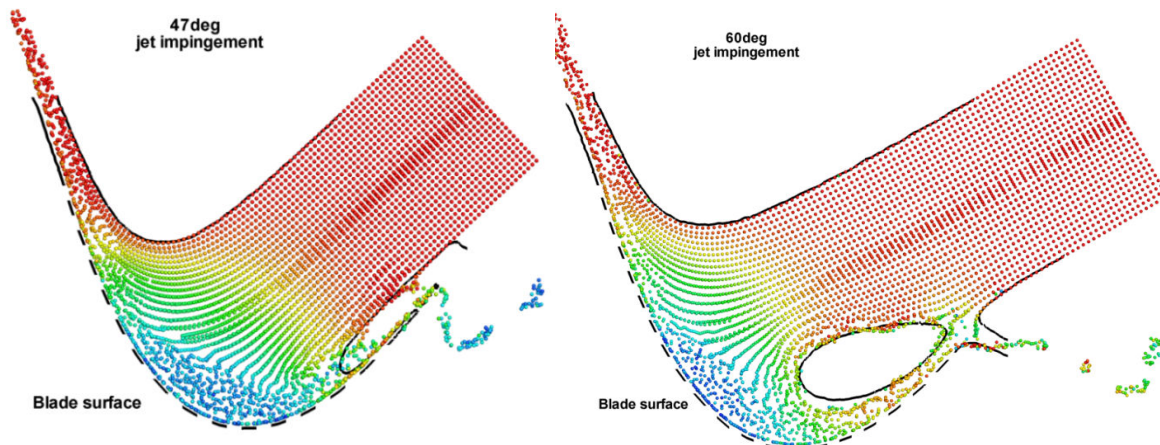
Calculated forces	$F_x [N]$	$F_y [N]$	$F_z [N]$
Fluent	5425.575	-8614.56	-25216.4
SPH: fine	5338.143	-8476.81	-24802.1
SPH: intermediate	5199.245	-8577.67	-24623.3
SPH: coarse	3516.502	-7333.66	-21243.8

Πίνακας 5-II. Δυνάμεις στο πτερύγιο για την πρόσκρουση δέσμης με γωνία 47°

47° jet impingement	$F_x [N]$	$F_y [N]$	$F_z [N]$
SPH	4885.766	-12173.4	-22985.4
Fluent	5019.615	-12424.7	-22986.1
% deviation	2.66	2.02	0.01

Πίνακας 5-III. Δυνάμεις στο πτερύγιο για την πρόσκρουση δέσμης με γωνία 60°

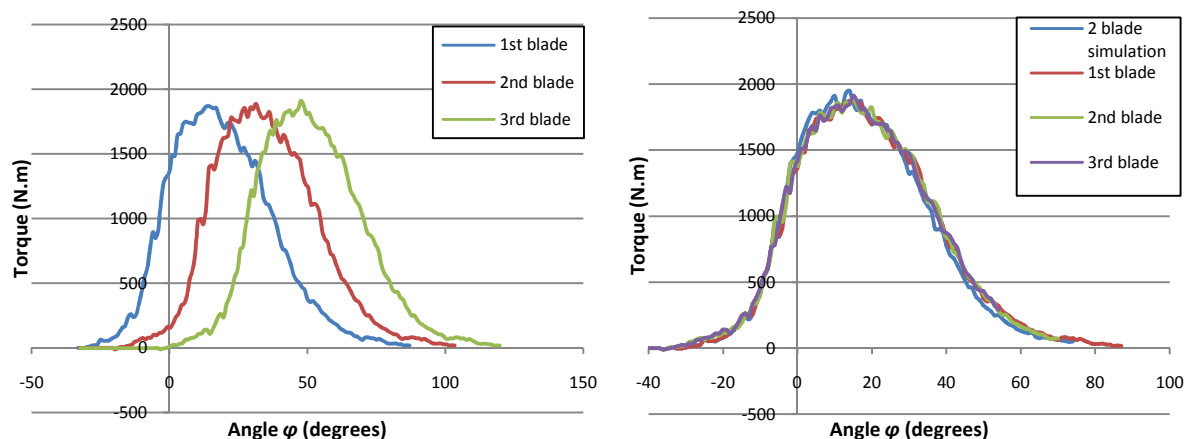
60° jet impingement	$F_x [N]$	$F_y [N]$	$F_z [N]$
SPH	3745.34	-15280.2	-16882.9
Fluent	3927.32	-15720.2	-16695.8
% deviation	4.63	2.79	-1.12



Σχ. 5.10. Σύγκριση ελεύθερης επιφάνειας υπολογισμένης με τη μέθοδο SPH και το πρόγραμμα Fluent. Αριστερά: πρόσκρουση 47°. Δεξιά: πρόσκρουση 60°. Η ελεύθερη επιφάνεια υπολογισμένη με το Fluent αναπαρίσταται με συνεχή μαύρη γραμμή.

Επιπλέον η μέθοδος SPH είναι σημαντικά ταχύτερη, σε σχέση με το υπολογιστικό πακέτο Fluent, λόγω της φύσης της που επιτρέπει αποδοτικότερο παραλληλισμό και λόγω του ότι δεν προσομοιώνεται η αέρια φάση.

Χρησιμοποιώντας την ανάλυση 5mm που προέκυψε από την ανάλυση ανεξαρτησίας σωματιδίων, έγιναν προσομοιώσεις περιστρεφόμενου δρομέα υδροστροβίλου Turgo. Ο δρομέας είχε 22 πτερύγια με ακτίνα βάσης 260mm, ακτίνα κορυφής 500mm (ονομαστική διάμετρος 770mm). Για την επιτάχυνση των υπολογισμών θεωρήθηκε η ροή μόνο μεταξύ δύο διαδοχικών πτερυγίων, θεωρώντας περιοδικές συνθήκες ροής – κάτι που διαπιστώθηκε ότι ισχύει με αρκετά καλή ακρίβεια από τα αποτελέσματα προσομοίωσης ενός μεγαλύτερου τμήματος του δρομέα (σχ. 5.11).

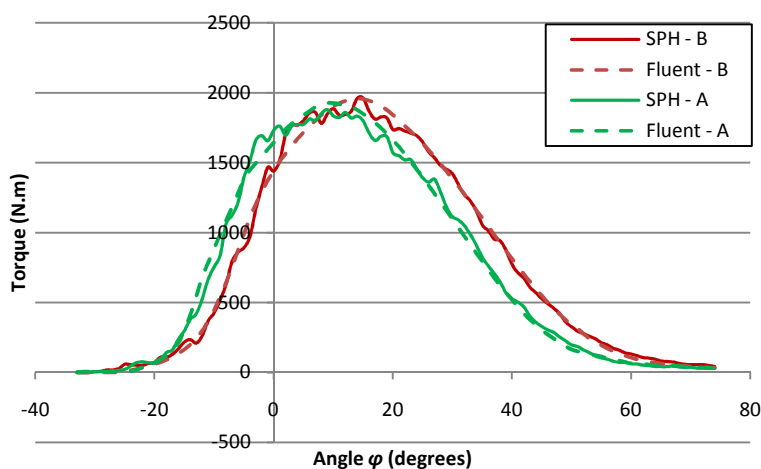


Σχ. 5.11. Αριστερά: γράφημα ροπής των τριών πρώτων πτερυγίων δρομέα Turgo. Δεξιά: σύγκριση της υπολογιζόμενης ροπής από την προσομοίωση δυο πτερυγίων και μεγαλύτερου τμήματος του δρομέα Turgo.

Δυο διαφορετικές γεωμετρίες πτερυγίου προσομοιώθηκαν, ενώ τα αποτελέσματα συγκρίθηκαν με αντίστοιχα αριθμητικά από το πρόγραμμα Fluent. Οι εν λόγω γεωμετρίες είχαν προκύψει από μια προκαταρκτική βελτιστοποίηση με τον αλγόριθμο FLS. Και για τις δυο γεωμετρίες τα αριθμητικά αποτελέσματα ήταν αρκετά κοντά, όσον αφορά:

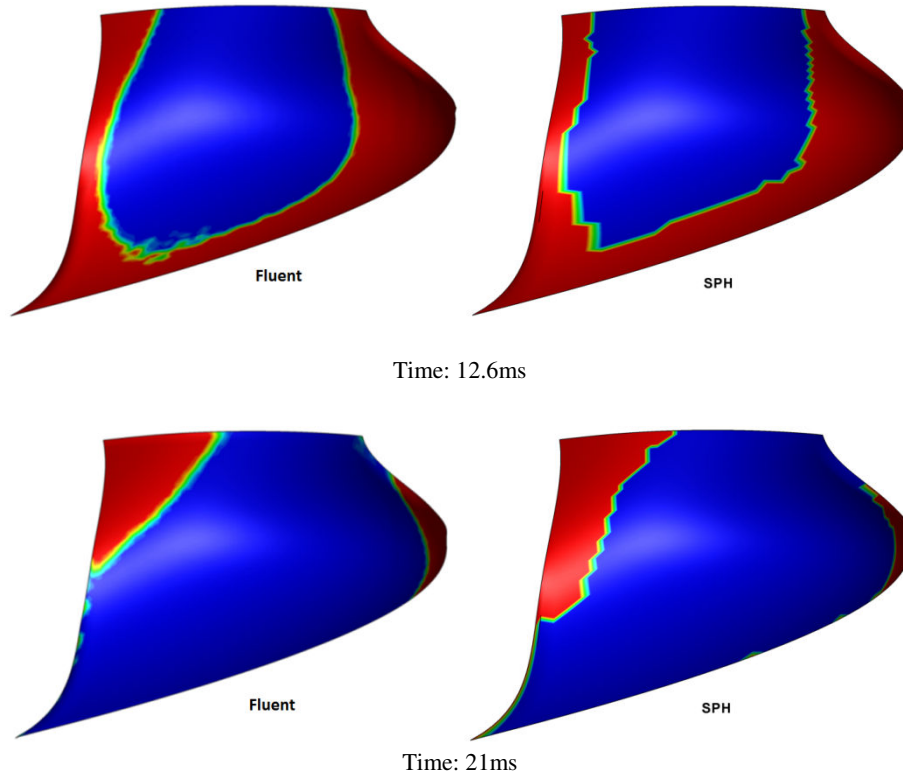
- Τη διαμόρφωση/διασπορά της ροής πάνω στο πτερύγιο (σχ. 5.13).
- Την αναπτυσσόμενη ροπή πάνω στο πτερύγιο. Ωστόσο, εδώ πρέπει να επισημανθεί ότι ροπή αναπτύσσεται και στα δυο πτερύγια, στο ένα λόγω πρόσκρουσης της δέσμης και στο άλλο λόγω υποπίεσης. Η υποπίεση αυτή είναι αδύνατο να υπολογιστεί με τις οριακές συνθήκες που χρησιμοποιήθηκαν στη μέθοδο SPH, οδηγώντας σε υποεκτίμηση της συνολικής ροπής του δρομέα.

Από τις προσομοιώσεις εντοπίστηκε η καλύτερη από τις δυο γεωμετρίες η οποία χρησιμοποιήθηκε για τις περαιτέρω δοκιμές.



Σχ. 5.12. Γράφημα ροπής πάνω στο πτερύγιο δρομέα Turgo που προσκρούει η δέσμη – σύγκριση διαφορετικών γεωμετριών πτερυγίου.

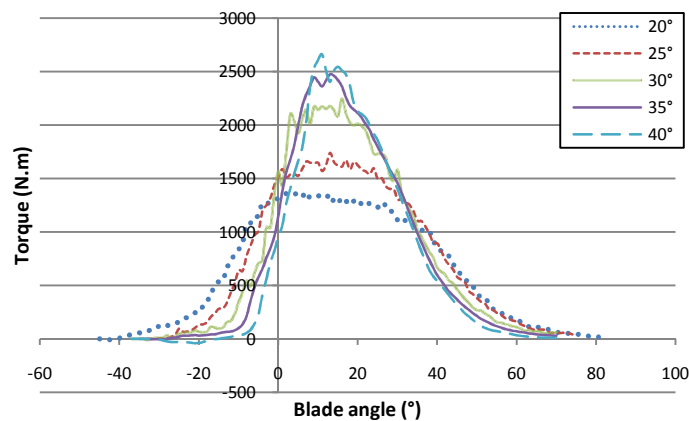




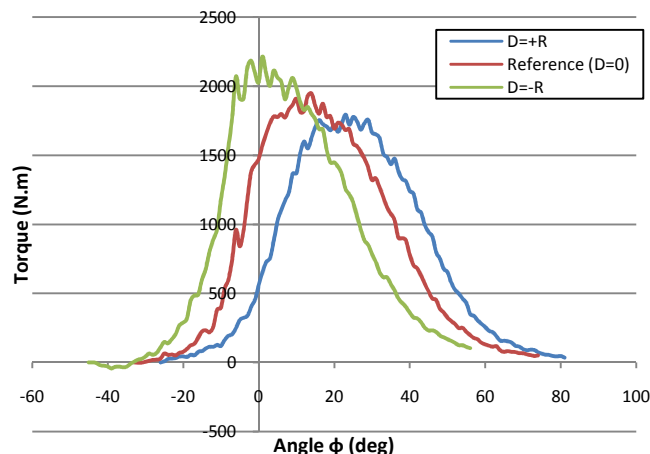
Σχ. 5.13. Διασπορά της δέσμης πάνω στο περύγιο.

Χρησιμοποιώντας την καλύτερη γεωμετρία περυνγίου έγιναν δυο παραμετρικές δοκιμές, με σκοπό να διαπιστωθούν οι καλύτερες δυνατές συνθήκες εισόδου της δέσμης στον δρομέα:

- Εύρεση βέλτιστης γωνίας εισόδου της δέσμης. Δοκιμάστηκαν διάφορες γωνίες εισόδου, ξεκινώντας από  $20^\circ$  ως  $40^\circ$ . Διαπιστώθηκε ότι όσο η γωνία εισόδου αυξάνεται, τόσο η καμπύλη ροπής στενεύει και αποκτά μεγαλύτερη μέγιστη τιμή (σχ. 5.14). Ωστόσο ο βαθμός απόδοσης μεγιστοποιείται στις  $\sim 30^\circ$ .
- Βέλτιστη θέση της δέσμης. Η δέσμη μετατοπίστηκε παράλληλα κατά απόσταση  $D = -R_{jet}, 0, +R_{jet}$ . Για αρνητικές μετατοπίσεις η καμπύλη ροπής ξεκινά νωρίτερα και είναι στενότερη με μεγαλύτερη μέγιστη τιμή. Το αντίστροφο ισχύει όταν η απόσταση γίνεται θετική (σχ. 5.15). Ο μέγιστος βαθμός απόδοσης διαπιστώθηκε ότι εμφανίζεται για μετατόπιση κοντά στο 0.



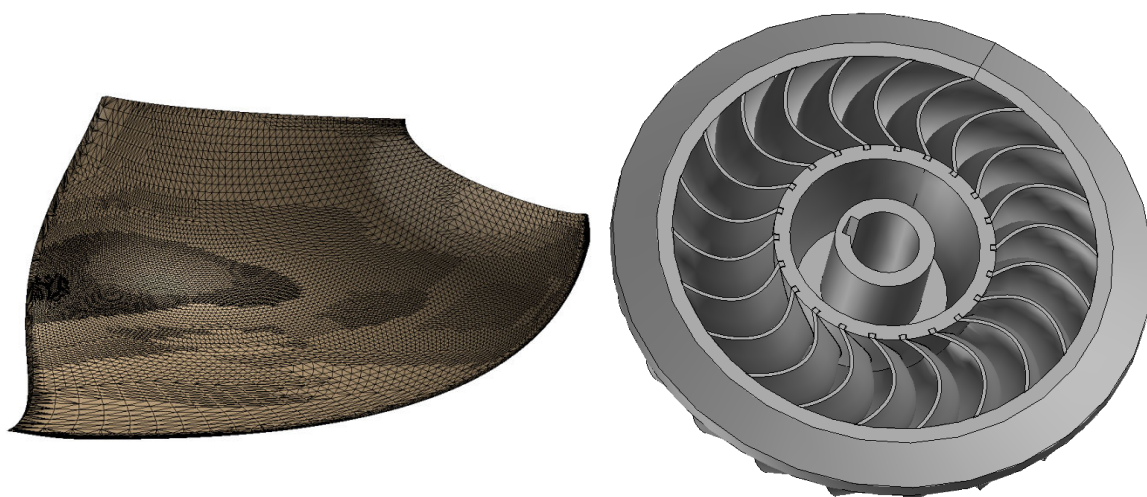
Σχ. 5.14. Γράφημα ροπής πάνω στο περύγιο δρομέα Turgo που προσκρούει η δέσμη – σύγκριση διαφορετικών γεωμετρικών περυνγίου.



Σχ. 5.15. Γράφημα ροπής πάνω στο πτερύγιο δρομέα Turgo που προσκρούει η δέσμη – σύγκριση διαφορετικών γεωμετριών πτερυγίου.

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο SPH έγινε ρύθμιση του υπολογιστικού αλγορίθμου FLS, ώστε να περιγράφει ικανοποιητικά τη διασπορά της δέσμης πάνω στο πτερύγιο του υδροστροβίλου [14]. Η μέθοδος FLS έχει το πλεονέκτημα ότι είναι σημαντικά πιο γρήγορη από τη μέθοδο SPH, δεδομένου ότι απαιτεί μόλις μερικά δευτερόλεπτα για την εκτέλεσή της σε έναν σύγχρονο υπολογιστή. Μετά τη ρύθμιση ο αλγόριθμος FLS χρησιμοποιήθηκε για τη βελτιστοποίηση της γεωμετρίας μοντέλου υδροστροβίλου. Η αρχική γεωμετρία του υδροστροβίλου βασίστηκε στη καλύτερη γεωμετρία που προέκυψε από τις προσομοιώσεις που περιγράφηκαν παραπάνω. Από τη βελτιστοποίηση με τη χρήση του προγράμματος EASY (βασισμένο σε γενετικούς αλγορίθμους [15]) και του αλγορίθμου FLS προέκυψε ένα νέο σύνολο βέλτιστων γεωμετριών, οι οποίες δοκιμάστηκαν με τη μέθοδο SPH προσδιορίζοντας την τελική βέλτιστη γεωμετρία.

Τελικά η εν λόγω γεωμετρία χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή των πτερυγίων και του δρομέα του υδροστροβίλου. Παράλληλα, με την μέθοδο SPH προσδιορίστηκαν και τα φορτία των εδράνων του άξονα του υδροστροβίλου (πίνακας 5-IV). Τα φορτία αυτά επαληθεύτηκαν χρησιμοποιώντας το θεώρημα διατήρησης της ορμής (βλέπε το πλήρες κείμενο).

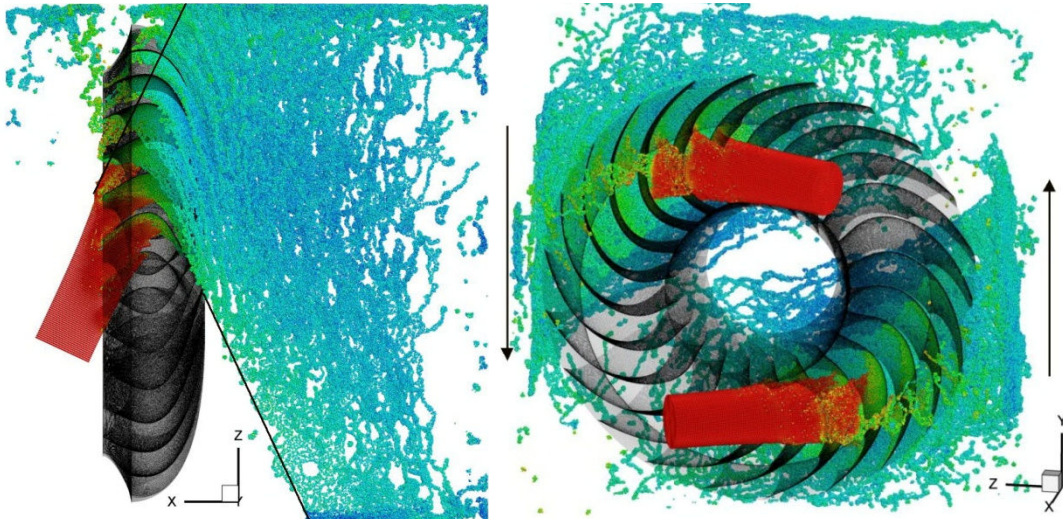


Σχ. 5.16. Αριστερά: Σχέδιο CAD του πτερυγίου του υδροστροβίλου Turgo. Δεξιά: Σχέδιο CAD του δρομέα του υδροστροβίλου.

Πίνακας 5-IV. Δυνάμεις κατά τη λειτουργία του υδροστροβίλου.

Forces in (N)	Upper jet	Lower jet	Both jets
$F_x$	-693.7	-693.7	-1387.5
$F_y$	122.1	-122.1	0.0
$F_z$	2205.8	-2205.8	0.0
Weight (y-axis)	-402.2	-402.2	-402.2
$F_{axial}$	-693.7	-693.7	-1387.5
$F_{radial}$	2223.5	2267.3	402.2

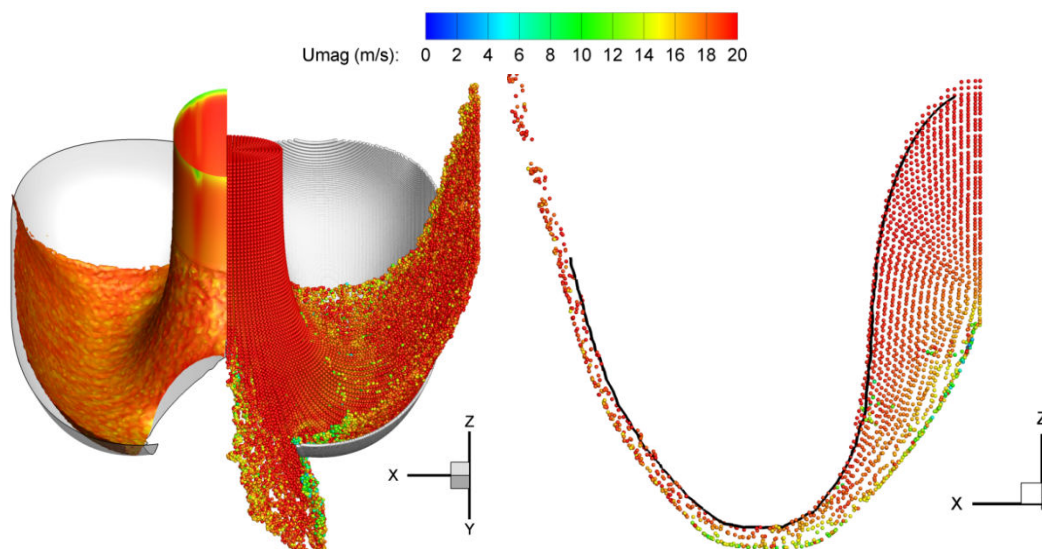
Επίσης, έγιναν προσομοιώσεις της συνολικής γεωμετρίας του δρομέα Turgo συμπεριλαμβανομένου και του κελύφους, για να διαπιστωθεί τυχόν αλληλεπίδραση του εξερχόμενου νερού με το τοίχωμα και/ή τη δέσμη. Μελετήθηκε η ροή σε λειτουργία ενός και δυο ακροφυσίων (σχ. 5.17). Τελικά διαπιστώθηκε ότι τόσο σε λειτουργία ενός αλλά και δυο ακροφυσίων τα εξερχόμενα φύλλα νερού απομακρύνονται από το δρομέα δίχως να επηρεάζουν αυτόν ή τη δέσμη του νερού.



Σχ. 5.17. Αριστερά: Προσομοίωση πλήρους δρομέα Turgo με λειτουργία ενός ακροφυσίου. Με συνεχή γραμμή φαίνεται η έκταση στην οποία απλώνονται τα φύλλα νερού. Δεξιά: προσομοίωση δρομέα με λειτουργία δυο ακροφυσίων. Τα βέλη δείχνουν την κατεύθυνση κίνησης μέρους της ροής που προσκρούει στα τοιχώματα.

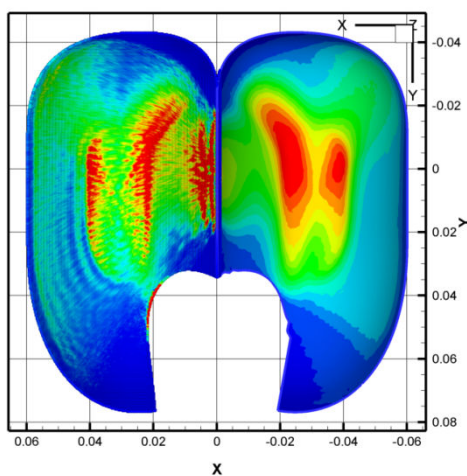
### 5.3.2. Υδροστρόβιλος Pelton

Αρχικά πραγματοποιήθηκαν 3-διάστατες προσομοιώσεις για ακίνητο σκαφίδιο Pelton για διάφορες γωνίες, που αντιπροσωπεύουν διαφορετικές φάσεις αλληλεπίδρασης της δέσμης νερού με τον δρομέα Pelton. Η ανάλυση που χρησιμοποιήθηκε ήταν 1mm, ενώ επιβλήθηκαν οριακές συνθήκες συμμετρίας στο μέσο του σκαφιδίου, ούτως ώστε να επιταχυνθούν οι υπολογισμοί. Παράλληλα η κατανομή των σωματιδίων πάνω στη δέσμη ήταν τέτοια ώστε να αποφευχθεί η στοίχιση σωματιδίων στο επίπεδο συμμετρίας (καθώς θα παγιδευόνταν στον επίπεδο συμμετρίας), κάτι που θα οδηγούσε σε αφύσικες λύσεις. Ενδεικτικά στο σχήμα 5.18 φαίνεται η ροή που αναπτύσσεται, υπολογισμένη με τη μέθοδο SPH και το Fluent: το πεδίο ροής είναι παραπλήσιο, η διασπορά της δέσμης αντίστοιχη καθώς επίσης και η κατανομή ταχυτήτων. Παρόμοια είναι και η ελεύθερη επιφάνεια, όπως φαίνεται σε μια ενδεικτική τομή στην σχ. 5.18.



Σχ. 5.18. Προσομοίωση πρόσκρουσης σε σκαφίδιο Pelton υπό γωνία 120°. Αριστερά: σύγκριση του πεδίο ροής υπολογισμένο με τη μέθοδο SPH και το υπολογιστικό πακέτο Fluent. Δεξιά σύγκριση της ελεύθερης επιφάνειας.

Η κατανομή πίεσης πάνω στο σκαφίδιο μπορεί να υπολογιστεί μέσω των οριακών δυνάμεων τοιχώματος (εξ. 3.43). Η κατανομή είναι η αναμενόμενη και αντίστοιχη με αυτήν του υπολογιστικού πακέτου Fluent, με εξαίρεση την περιοχή κοντά στο splitter όπου παρατηρείται υπερεκτίμηση της πίεσης. Στον πίνακα 5-V παρουσιάζονται οι υπολογισμένες δυνάμεις πάνω στο σκαφίδιο, όπου παρατηρούνται αποκλίσεις. Αυτές οι αποκλίσεις εντοπίζονται στην επίδραση της διάχυσης του φίλτρου πυκνότητας.



Σχ. 5.19. Κατανομή πίεσης πάνω στο σκαφίδιο για πρόσκρουση δέσμης με γωνία 90°.

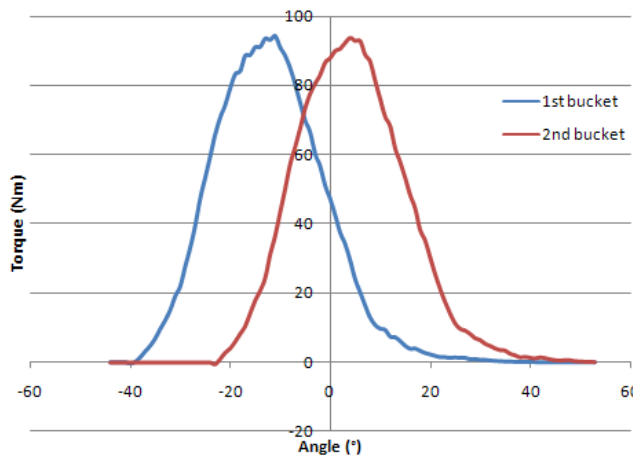
Πίνακας 5-V. Δυνάμεις πάνω στο ακίνητο σκαφίδιο

Impingement angle	Method	$F_x [N]$	$F_y [N]$	$F_z [N]$
60°	Fluent	-38.2	-102.9	-253.9
	SPH sym.	-35.1	-99.4	-236.8
90°	Fluent	-21.9	-32.1	-278.8
	SPH sym.	-17.7	-30.5	-260.6
120°	Fluent	-21.43	22.3	-219.5
	SPH sym.	-15.5	23.3	-207.5

Επίσης αναλύθηκε και η ροή σε κινούμενο δομέα Pelton. Οι διαστάσεις του δομέα είναι:

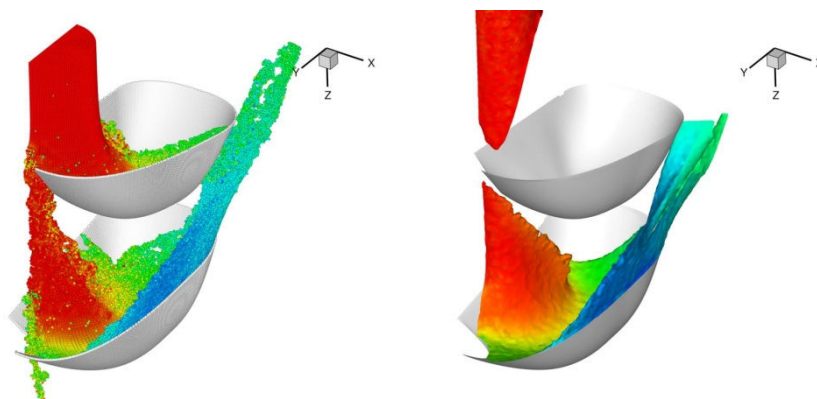
- Ακτίνα βάσης: 177mm
- Ακτίνα κορυφής: 293mm
- Ονομαστική ακτίνα: 224mm

Η προσομοίωση του κινούμενου δομέα Pelton έγινε με παραπλήσιο τρόπο με την προσομοίωση του δομέα Turgo. Και σε αυτήν την περίπτωση αναλύθηκε η ροή μεταξύ δυο διαδοχικών σκαφιδίων, θεωρώντας περιοδική ροή, καθώς φάνηκε ότι η επίδραση των επόμενων σκαφιδίων δεν είναι σημαντική (σχ. 5.20). Επίσης χρησιμοποιήθηκαν οριακές συνθήκες συμμετρίας στο μέσο των σκαφιδίων. Τέλος, τα σκαφίδια περιγράφηκαν μόνο χρησιμοποιώντας μια στρώση σωματιδίων, για απλότητα και επιτάχυνση των υπολογισμών.

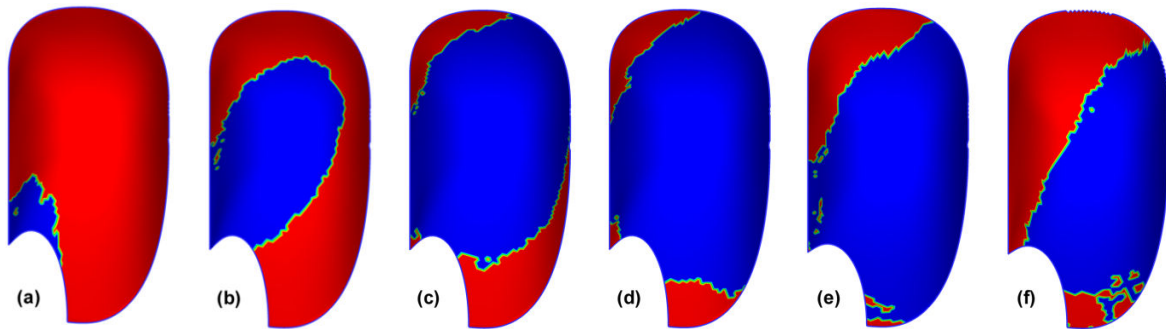


Σχ. 5.20. Συγκριτικό σχήμα μεταξύ της αναπτυσσόμενης ροπής στο πρώτο και στο δεύτερο σκαφίδιο. Η προσομοίωση έγινε θεωρώντας τρία διαδοχικά σκαφίδια.

Από τις προσομοιώσεις φάνηκε ότι η μέθοδος SPH είναι σε θέση να εντοπίσει σημαντικές λεπτομέρειες της ροής, όπως την αλληλεπίδραση του εξερχόμενου φύλλου νερού με το επόμενο σκαφίδιο (σχ. 5.21 – παρόλα αυτά η συγκεκριμένη αλληλεπίδραση δεν επηρεάζει σημαντικά την καμπύλη ροπής). Εκτός αυτού δίνει ρεαλιστικά αποτελέσματα σχετικά με την εξάπλωση του νερού πάνω στο σκαφίδιο κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασης δέσμης-σκαφιδίου (σχ. 5.22).

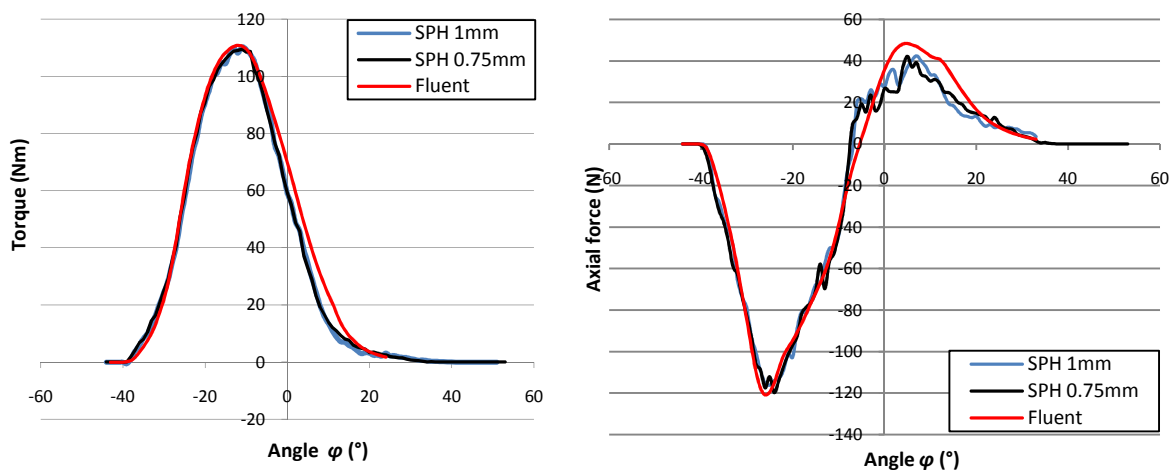


Σχ. 5.21. Σύγκριση ροής που αναπτύσσεται σε υδροστρόβιλο Pelton. Αριστερά: προσομοίωση με τη μέθοδο SPH. Δεξιά: προσομοίωση με το υπολογιστικό πακέτο Fleunt.



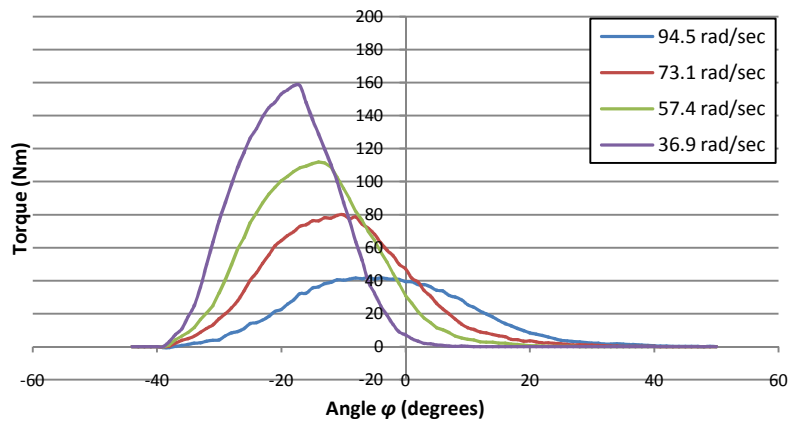
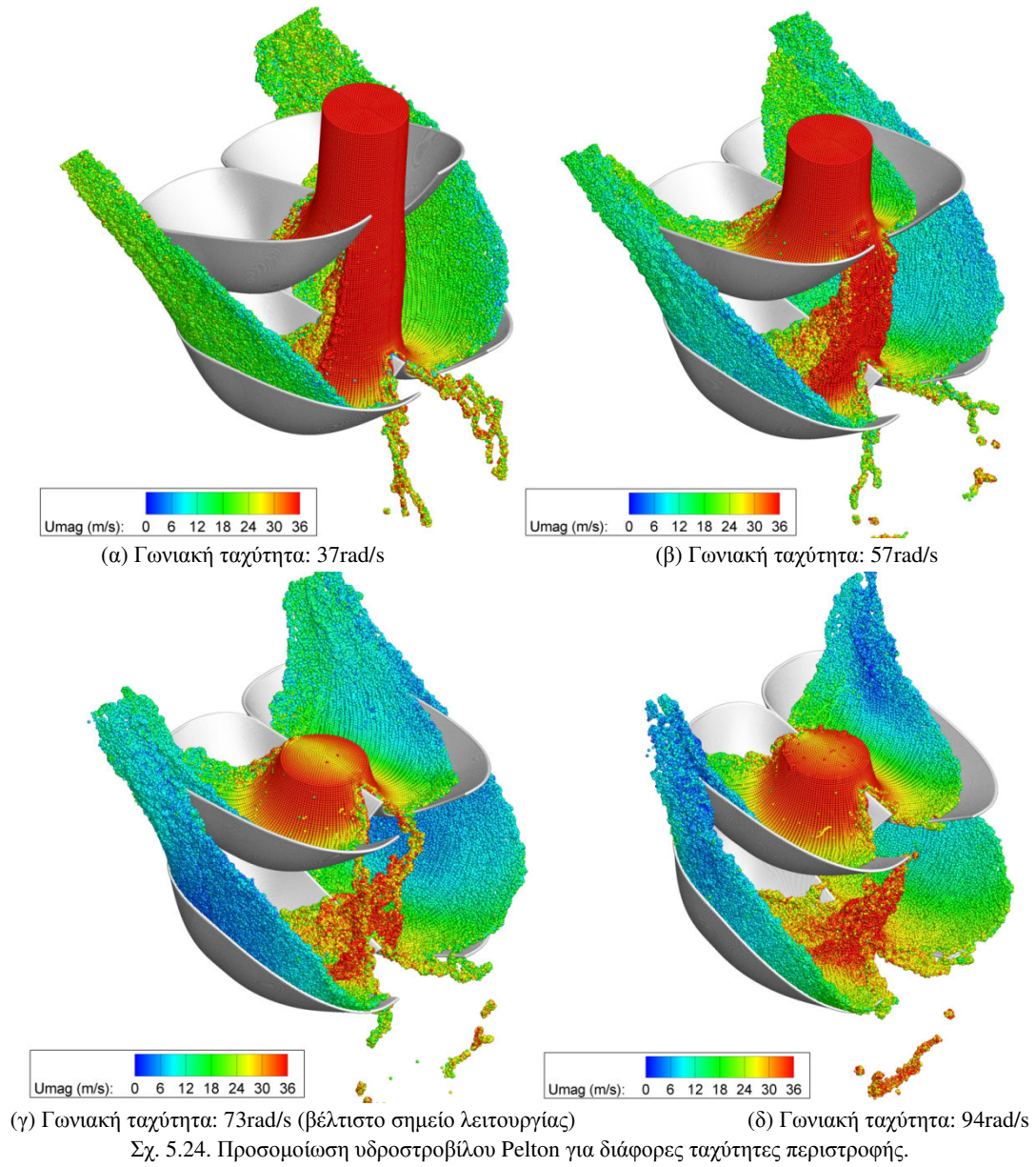
Σχ. 5.22. Εξέλιξη της ελεύθερης επιφάνειας πάνω στο σκαφίδιο Pelton.

Όσον αφορά την αναπτυσσόμενη ροπή, τα αποτελέσματα της μεθόδου SPH είναι πολύ κοντά στα αντίστοιχα του πακέτου Fluent. Η μέθοδος SPH περιγράφει αρκετά καλά τη ροπή κατά την εκκίνηση της αλληλεπίδρασης μέχρι τη μέγιστη τιμή, εν συνεχεία όμως υποεκτιμά τη ροπή. Παραπλήσια συμπεριφορά εμφανίζεται και στην αξονική δύναμη του μισού σκαφιδίου (ο συνολικός δρομέας δεν δέχεται αξονική δύναμη). Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι αύξηση της ανάλυσης δεν βελτιώνει τα αποτελέσματα.

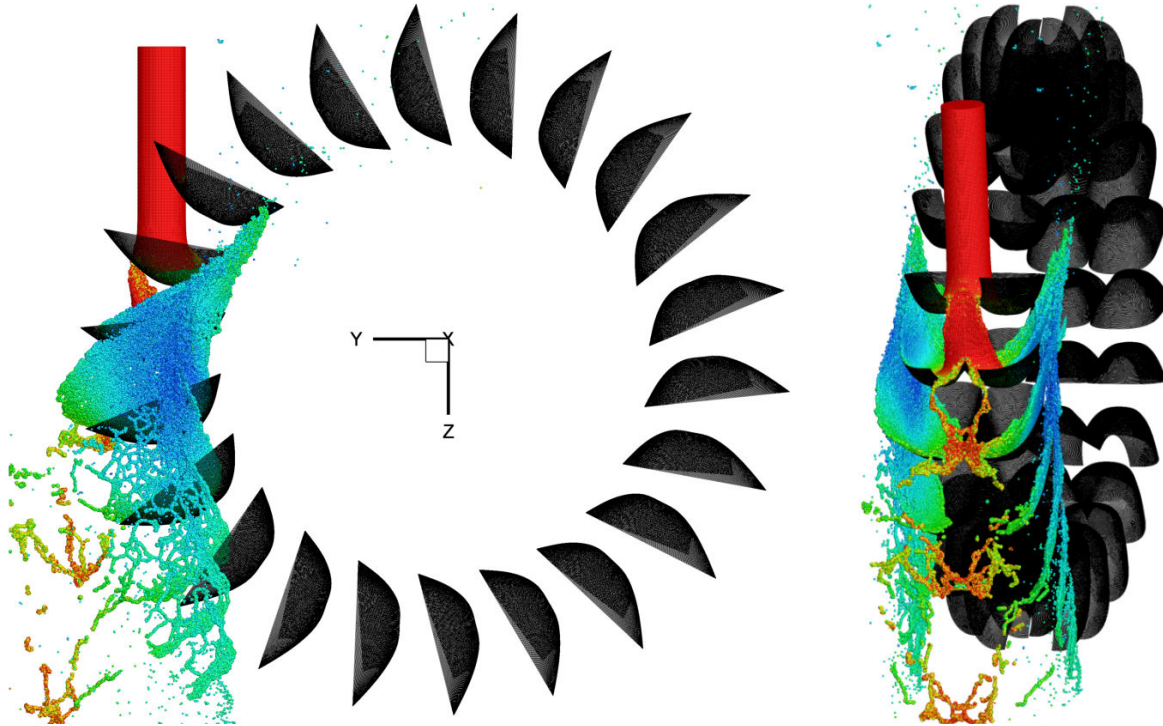


Σχ. 5.23. Σύγκριση της καμπύλης ροπής (αριστερά) και της αξονικής δύναμης (δεξιά) στο μισό σκαφίδιο.

Μεταβάλλοντας την ταχύτητα περιστροφής του δρομέα είναι δυνατό να μελετηθεί η συμπεριφορά του υδροστροβίλου σε σημεία λειτουργίας εκτός του κανονικού. Όπως φαίνεται στη σχ. 5.24, για περιφερειακή ταχύτητα του δρομέα περίπου ίση με τη μισή ταχύτητα δέσμης εμφανίζεται η μέγιστη απόδοση, καθώς η υπολειπόμενη κινητική ενέργεια του νερού μετά την αλληλεπίδραση είναι ελάχιστη. Επίσης η περιοχή στην οποία εμφανίζεται η ελάχιστη ταχύτητα είναι η ονομαστική ακτίνα του δρομέα. Για μικρότερες ή μεγαλύτερες ταχύτητες περιστροφής η περιοχή ελάχιστης κινητικής ενέργειας μετακινείται προς το χείλος αποκοπής ή τη βάση του σκαφιδίου αντίστοιχα. Επίσης από το γράφημα στο σχήμα 5.25 φαίνεται ότι για μεγαλύτερες ταχύτητες περιστροφής μεγαλώνει το εύρος της καμπύλης ροπής, ενώ μειώνεται η μέγιστη τιμή της.



Τέλος έγινε και προσομοίωση του πλήρους δρομέα, όπως φαίνεται και στο σχήμα 5.26. Όπως είναι αναμενόμενο, μετά την αρχική μεταβατική κατάσταση, διαμορφώνεται μια περιοδική συμπεριφορά, τόσο στο πεδίο ροής όσο και στην καμπύλη ροπής.



Σχ. 5.26. Προσομοίωση του συνολικού δρομέα Pelton.

#### Σύνοψη από την εφαρμογή της μεθόδου SPH σε υδροστροβίλους δράσης

Από τα παραπάνω συμπεραίνεται ότι η μέθοδος SPH είναι σε θέση να προσομοιώσει αποτελεσματικά τα φαινόμενα ροής που εμφανίζονται σε υδροστροβίλους δράσης, καθώς επίσης και τις λεπτομέρειες της ροής. Σε όλες τις περιπτώσεις, η εκτέλεση του αλγορίθμου SPH είναι πιο γρήγορη από του προγράμματος Fluent (έχοντας λάβει υπόψη την παράλληλη επεξεργασία). Ακόμα με τη μέθοδο SPH είναι προσιτή η προσομοίωση πλήρους δρομέα Turgo και Pelton σε ένα σύγχρονο πολυπύρηνο επεξεργαστή, κάτι που δεν θα ήταν εφικτό με τη χρήση πλεγματικών μεθόδων καθώς θα απαιτείτο πολύ πυκνό πλέγμα ακόμα και μακριά από το δρομέα.

Παρόλα αυτά υπάρχουν ορισμένες ανακρίβειες, καθώς στις περιπτώσεις που δοκιμάστηκαν υπήρχε υποεκτίμηση της ροπής μέχρι και 5%, τόσο σε αριθμητικά όσο και πειραματικά. Αυτό οφείλεται εν μέρει στην αντιμετώπιση των οριακών συνθηκών με τη χρήση απωστικών σωματιδίων και στο φίλτρο πυκνότητας καθώς εισάγει αριθμητική διάχυση.



## 6. Ενσωμάτωση επιλυτών Riemann στη μέθοδο SPH (SPH-R)

Στα προηγούμενα κεφάλαια παρουσιάστηκε η μέθοδος SPH, καθώς επίσης και κάποιες από τις αδυναμίες της μεθόδου, όπως οι διαταραχές του πεδίου πυκνότητας και πίεσης. Μια εναλλακτική της χρήσης φίλτρων πυκνότητας είναι η ενσωμάτωση επιλυτών Riemann για την επίλυση των σωματιδιακών αλληλεπιδράσεων [16]. Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται αναφορά στη χρήση επιλυτών χρησιμοποιώντας μη συντηρητικές μεταβλητές.

Οι εξισώσεις 3.12 και 3.15 μπορούν να γραφούν ως εξής:

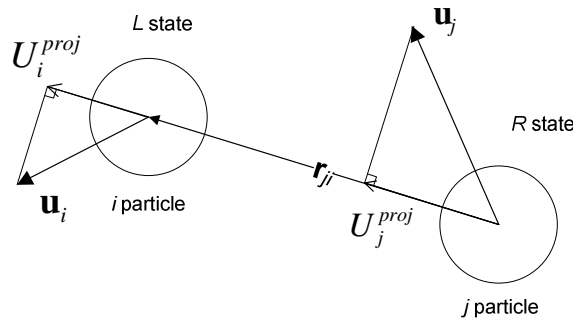
$$\frac{D\rho_i}{Dt} = -\sum_j m_j 2(U_i^{proj} - U_{ij}^*) \frac{dW}{dr} \quad (6.1)$$

$$\frac{D\mathbf{u}_i}{Dt} = -\sum_j m_j \left( \frac{2p_{ij}^*}{\rho_i \rho_j} \right) \nabla W_{ij} + \mathbf{f}_{body} \quad (6.2)$$

όπου  $U_i^{proj}$  είναι η προβολή της ταχύτητας του σωματιδίου  $i$  στο μοναδιαίο διάνυσμα που ξεκινά από το σωματίδιο  $j$  και καταλήγει στο  $i$ .

$$U_i^{proj} = -\mathbf{u}_i \cdot \frac{\mathbf{r}_{ij}}{\|\mathbf{r}_{ij}\|} \quad (6.3)$$

$$U_j^{proj} = -\mathbf{u}_j \cdot \frac{\mathbf{r}_{ij}}{\|\mathbf{r}_{ij}\|} \quad (6.4)$$



Σχ. 6.1. Αλληλεπίδραση μεταξύ σωματιδίου  $i$  και  $j$ .

Η επίλυση του προβλήματος Riemann γίνεται θεωρώντας ότι τα σωματίδια  $i$  και  $j$  είναι οι δύο καταστάσεις του προβλήματος Riemann (L και R αντίστοιχα). Από την επίλυση προκύπτει μια ενδιάμεση κατάσταση που συμβολίζεται με αστερίσκο, η οποία μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τις παρακάτω σχέσεις:

$$U_{ij}^* = \frac{c_L \rho_L u_L + c_R \rho_R u_R + p_L - p_R}{c_L \rho_L + c_R \rho_R} \quad (6.5)$$

$$p_{ij}^* = \frac{c_R \rho_R p_L + c_L \rho_L p_R + c_R \rho_R c_L \rho_L (u_L - u_R)}{c_L \rho_L + c_R \rho_R} \quad (6.6)$$

Γενικά, η επίλυση ενός προβλήματος Riemann είναι πιο πολύπλοκη, αλλά στη συγκεκριμένη περίπτωση γνωρίζουμε εκ των προτέρων τη λύση, καθώς θεωρήθηκε ασθενώς συμπιεστή ροή.

Το πλεονέκτημα που έχει η παραπάνω διατύπωση των εξισώσεων SPH είναι ότι απαιτείται μια σχετικά μικρή αλλαγή του αλγορίθμου για την ενσωμάτωση του επιλύτη Riemann, ενώ πλέον δεν απαιτείται φίλτρο/διόρθωση. Ωστόσο το σχήμα που προκύπτει έχει μεγάλη αριθμητική διάχυση, λόγω του ότι βασίζεται στη μέθοδο Godunov ( $1^{ns}$  τάξης). Σε πρακτικές εφαρμογές απαιτείται ένα σχήμα

μεγαλύτερης ακρίβειας, όπως το σχήμα MUSCL 2<sup>ης</sup> τάξης [17] που βασίζεται στην ανακατασκευή των δεδομένων στη διεπιφάνεια μεταξύ των δυο σωματιδίων. Για την ανακατασκευή χρησιμοποιούνται οι χωρικές παράγωγοι με κατάλληλο περιορισμό για να αποφευχθούν φαινόμενα αριθμητικής διασποράς. Η διαδικασία είναι η ακόλουθη:

- Υπολογισμός χωρικών παραγώγων (εμπρός και πίσω):

$$\text{SPH: } \langle \nabla \Phi_i \rangle_F = 2 \sum_{X_j > X_i} \frac{m_j}{\rho_j} (\Phi_j - \Phi_i) \nabla W_{ij} \quad (6.7)$$

$$\text{SPH: } \langle \nabla \Phi_i \rangle_B = 2 \sum_{X_j < X_i} \frac{m_j}{\rho_j} (\Phi_j - \Phi_i) \nabla W_{ij} \quad (6.8)$$

Στις παραπάνω σχέσεις  $\Phi$  είναι το διάνυσμα των μη συντηρητικών μεταβλητών  $[\rho, u, v, w]^T$

- Υπολογισμός κλίσεων για κάθε σωματίδιο, λαμβάνοντας υπόψη την κατεύθυνση του τοπικού συστήματος συντεταγμένων, οριζόμενου από το  $\mathbf{r}_{ij}$ :

$$\Delta_{i,F} = \nabla \Phi_{i,F/B} \cdot \mathbf{r}_{ij} \quad (6.9)$$

$$\Delta_{i,B} = \nabla \Phi_{i,F/B} \cdot \mathbf{r}_{ij} \quad (6.10)$$

- Περιορισμός κλίσεων:

$$\bar{\Delta}_i = \begin{cases} \max[0, \min(\beta \Delta_{i,B}, \Delta_{i,F}), \min(\Delta_{i,B}, \beta \Delta_{i,F})] & \Delta_{i,F} > 0 \\ \min[0, \max(\beta \Delta_{i,B}, \Delta_{i,F}), \max(\Delta_{i,B}, \beta \Delta_{i,F})] & \Delta_{i,F} < 0 \end{cases} \quad (6.11)$$

- Ανακατασκευή δεδομένων:

$$\Phi_{iL} = \Phi_i - \frac{1}{2} \bar{\Delta}_i \quad (6.12)$$

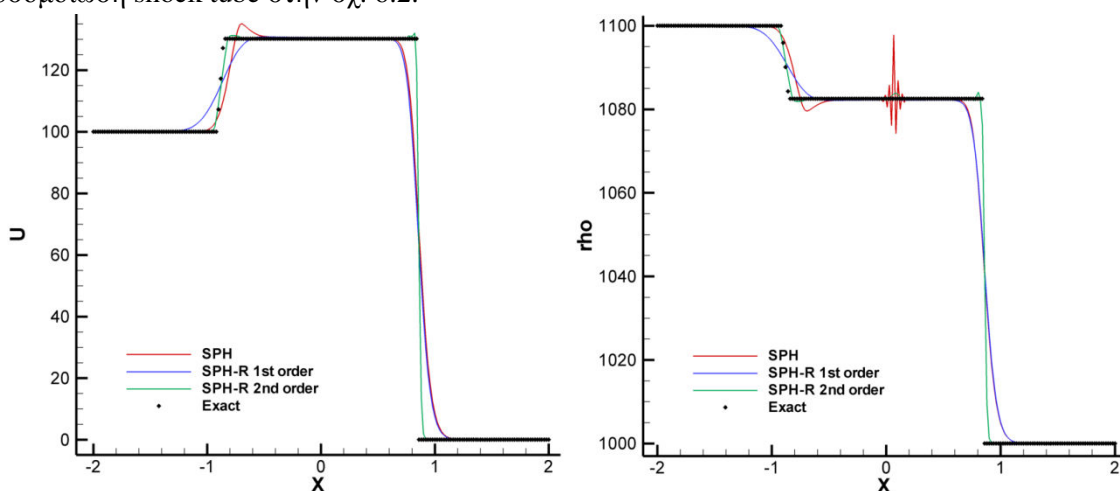
$$\Phi_{iR} = \Phi_i + \frac{1}{2} \bar{\Delta}_i \quad (6.13)$$

$$\Phi_{jL} = \Phi_j - \frac{1}{2} \bar{\Delta}_j \quad (6.14)$$

$$\Phi_{jR} = \Phi_j + \frac{1}{2} \bar{\Delta}_j \quad (6.15)$$

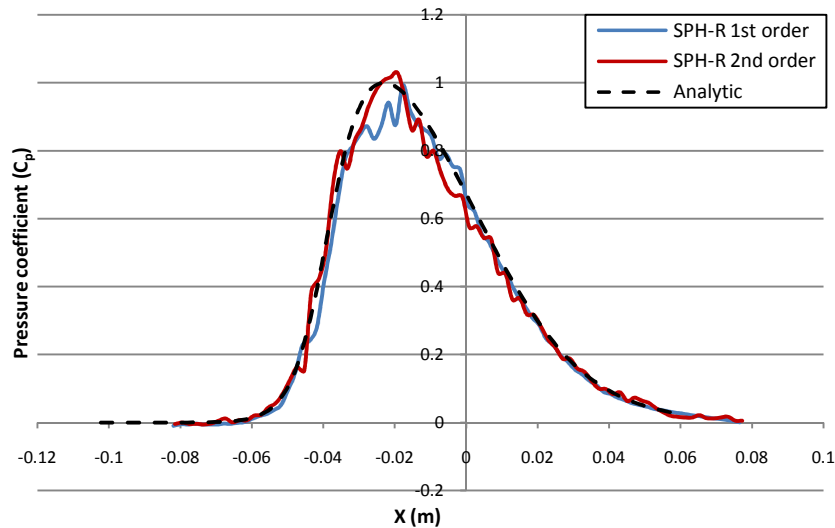
- Επίλυση του προβλήματος Riemann χρησιμοποιώντας την κατάσταση  $\Phi_{iR}$  και  $\Phi_{jL}$  αντί των  $\Phi_i, \Phi_j$ .

Το σχήμα που προκύπτει είναι ακριβές, χωρίς αριθμητική διασπορά, όπως φαίνεται και από την προσομοίωση shock tube στην σχ. 6.2.



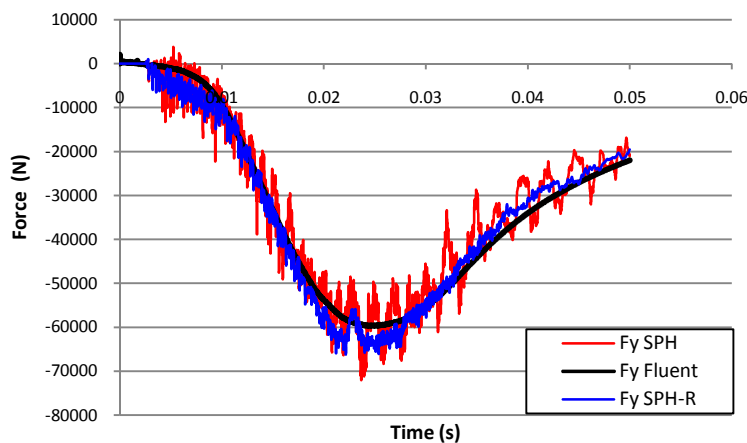
Σχ. 6.2. Αποτελέσματα των σχημάτων SPH-R για τη δοκιμή shock tube. Σύγκριση με την αναλυτική λύση και τη μέθοδο SPH.

Η μέθοδος SPH-R είναι σε θέση να υπολογίσει ακριβή πεδία πίεσης, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση 2-διάστατης πρόσκρουσης δέσμης νερού σε επίπεδη πλάκα υπό γωνία  $60^\circ$  (σχ. 6.3). Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι η κατανομή πίεσης είναι πιο ομαλή και πλησιέστερη στην αναλυτική σε σχέση με την αντίστοιχη υπολογισμένη από τη μέθοδο SPH χρησιμοποιώντας φίλτρα πυκνότητας ή όρους διάχυσης.



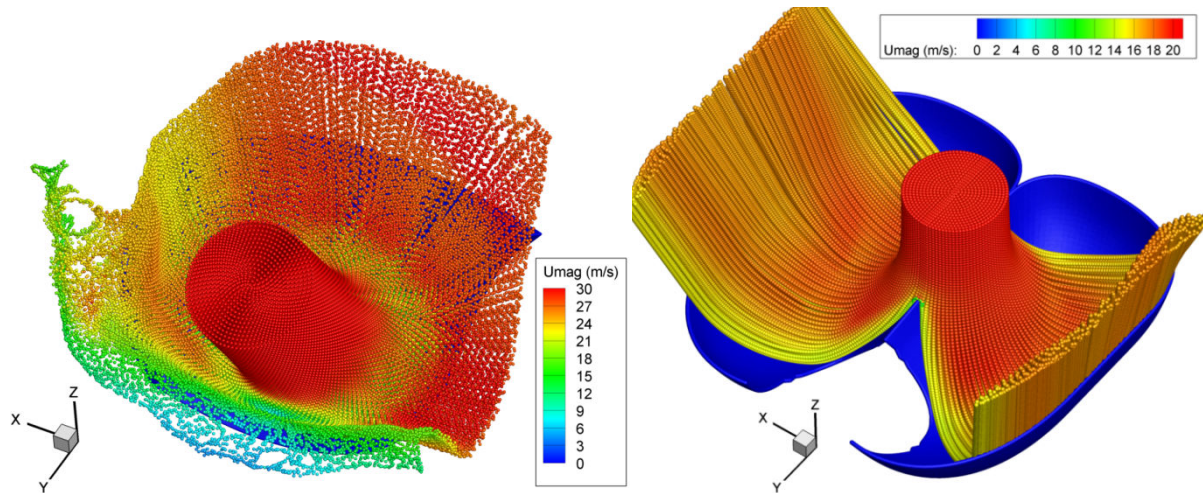
Σχ. 6.3. Κατανομή πίεσης πάνω στην πλάκα (2-διάστατη προσομοίωση) – σύγκριση με την αναλυτική λύση.

Μπορεί να γίνει εφαρμογή της μεθόδου SPH-R χρησιμοποιώντας σωματίδια απωστικών δυνάμεων για οριακή συνθήκη τοιχώματος. Διακυμάνσεις συνεχίζουν να παρουσιάζονται στις αναπτυσσόμενες δυνάμεις, αλλά έχουν μικρότερο εύρος (σχ. 6.4).



Σχ. 6.4. Ιστορικό δυνάμεων πάνω στο κινούμενο 2D πτερύγιο Turgo.

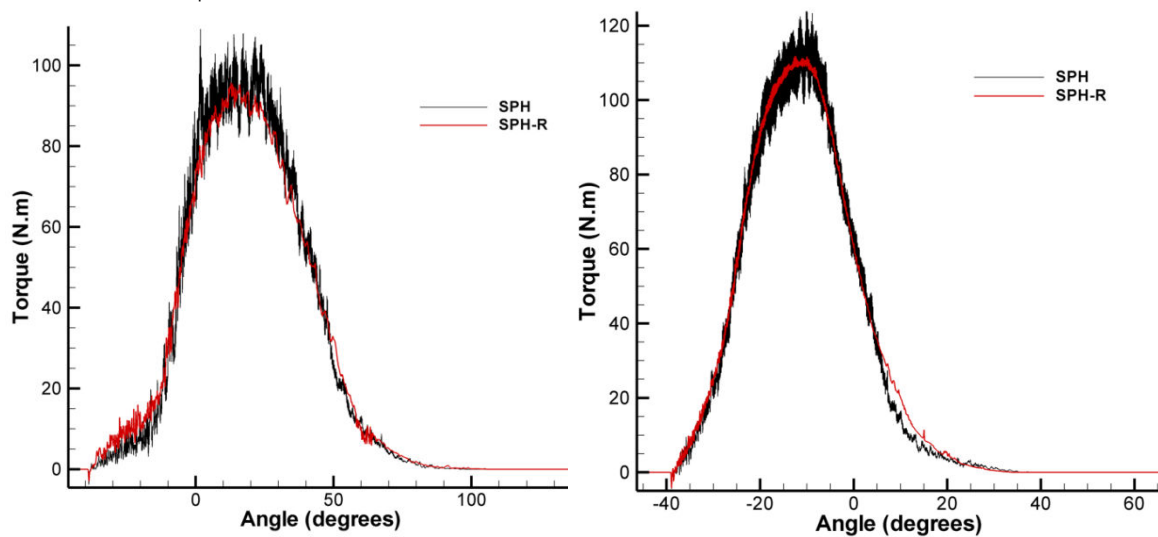
Σε πρακτικές 3-διάστατες εφαρμογές παρατηρήθηκε ότι, παρόλο που χρησιμοποιήθηκε σχήμα  $2^{15}$  τάξης ακρίβειας, η παρουσία της αριθμητικής διάχυσης ήταν αισθητή. Για παράδειγμα στο σχήμα 6.5 είναι εμφανές ότι η ταχύτητα των φύλλων νερού που διαμορφώνονται μετά από την πρόσκρουση της δέσμης στις αντίστοιχες γεωμετρίες είναι υποεκτιμημένη. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την επακόλουθη υποεκτίμηση των υπολογιζόμενων δυνάμεων.



Σχ. 6.5. Αριστερά: πρόσκρουση δέσμης πάνω σε πτερόγιο Turgo. Δεξιά: πρόσκρουση δέσμης σε σκαφίδιο Pelton.

Κατά την προσομοίωση κινούμενων δρομέων υδροστροβίλων δράσης παρατηρήθηκε ότι η μέθοδος SPH-R είναι δυνατό να περιγράψει καλύτερα ορισμένες φάσεις λειτουργίας του υδροστροβίλου, καθώς:

- Οι διακυμάνσεις της ροπής μειώνονται αισθητά σε σχέση με τη μέθοδο SPH
- Υπολογίζεται ακριβέστερα η ροπή σε συγκεκριμένες φάσεις λειτουργίας, όπως στο άδειασμα του σκαφιδίου Pelton.



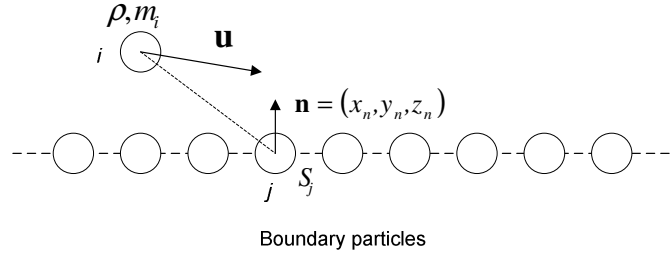
Σχ. 6.6. Αναπτυσσόμενη ροπή σε υδροστρόβιλο Turgo (αριστερά) και Pelton (δεξιά).

Ένα σημαντικό μειονέκτημα της μεθόδου SPH-R είναι ότι απαιτεί σημαντικά περισσότερο χρόνο για την επίλυση, δεδομένου ότι σε κάθε χρονικό βήμα απαιτείται υπολογισμός των παραγώγων, περιορισμός των κλίσεων κλπ. (εξ. 6.7-6.15).

Ένα άλλο πλεονέκτημα της μεθόδου SPH-R είναι η επιβολή των οριακών συνθηκών χρησιμοποιώντας την επίλυση ενός μερικού προβλήματος Riemann [18, 19]. Σε αυτήν την περίπτωση το όριο αντιπροσωπεύεται από ένα σύνολο στοιχείων επιφάνειας, τα οποία χαρακτηρίζονται από εμβαδό και την τοπική κάθετο. Όταν ένα σωματίδιο ρευστού αλληλεπιδρά με το όριο, τότε μπορεί να υπολογιστεί η λύση του μερικού προβλήματος Riemann, ανάλογα με την οριακή συνθήκη και να χρησιμοποιηθεί μέσω του όρου επιφάνειας της εξίσωσης 2.3:

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = V_{term} - \sum_{j \in \partial\Omega} \rho_j S_j 2(U_i^{proj} - U_{ij}^*) W_{ij} \quad (6.16)$$

$$\frac{D\mathbf{u}_i}{Dt} = \mathbf{V}_{term} + \mathbf{f}_{body} + \sum_{j \in \partial\Omega} S_j \left( \frac{2p_{ij}^*}{\rho_i} \right) W_{ij} \mathbf{n}_j \quad (6.17)$$



Σχ. 6.7. Επιβολή οριακών συνθηκών.

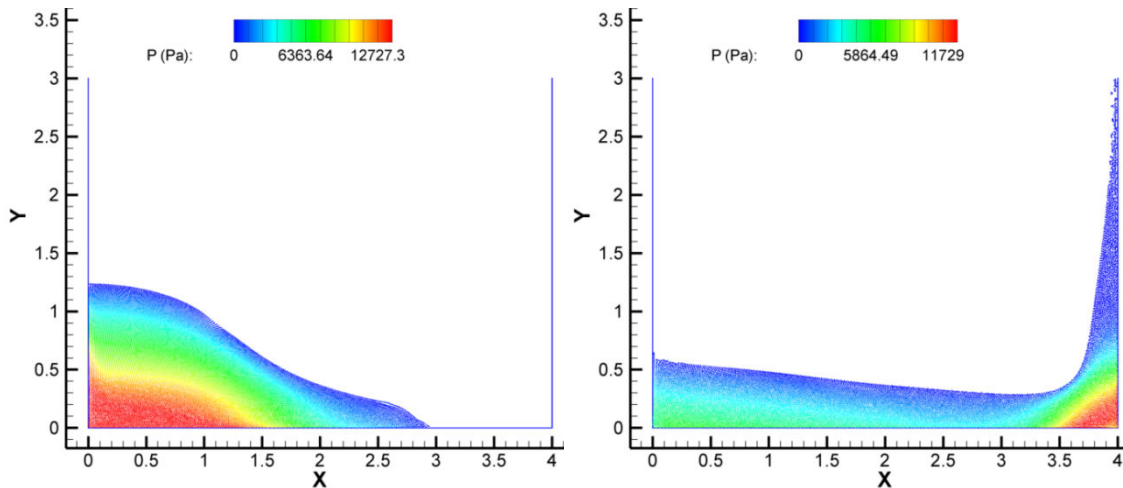
Με αυτόν τον τρόπο μπορούν να μοντελοποιηθούν οριακές συνθήκες ανεξαρτήτως τύπου, χωρίς την ανάγκη προεκβολής των αριθμητικών δεδομένων πέρα από τον υπολογιστικό χώρο, ενώ είναι δυνατή και η επέκταση και με σχήμα  $2^{15}$  τάξης.

Άλλη μια δυνατότητα είναι η κατασκευή ενός υβριδίου μεταξύ SPH και SPH-R, όπου για τα εσωτερικά σωματίδια του υπολογιστικού χώρου χρησιμοποιείται η μέθοδος SPH με όρο διάχυσης πυκνότητας (εξ. 3.37), ενώ για την αλληλεπίδραση με το τοίχωμα επιλύεται το μερικό πρόβλημα Riemann. Οι εξισώσεις της υβριδικής μεθόδου είναι οι ακόλουθες:

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \sum_{j \in \Omega} m_j \left( \mathbf{u}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij} + \mathbf{n}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij} \frac{c_{ij}}{\rho_j} (\rho_i - \rho_j) \right) - \sum_{j \in \partial\Omega} \rho_j S_j (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{ij}^*) \cdot \mathbf{n}_j W_{ij} \quad (6.18)$$

$$\frac{D\mathbf{u}_i}{Dt} = - \sum_{j \in \Omega} m_j \left( \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \nabla W_{ij} + \sum_{j \in \partial\Omega} S_j \frac{2p_{ij}^*}{\rho_i} \mathbf{n}_j W_{ij} + \mathbf{f}_{body} \quad (6.19)$$

Η μέθοδος αυτή έχει το πλεονέκτημα της ακριβούς αντιμετώπισης οριακών συνθηκών, περιορισμένης αριθμητικής διάχυσης, λόγω του ότι η μέθοδος Godunov χρησιμοποιείται μόνο κατά την αλληλεπίδραση με το τοίχωμα, ενώ η ταχύτητα εκτέλεσης είναι παραπλήσια της μεθόδου SPH, καθώς δεν χρειάζεται σχήμα  $2^{15}$  τάξης. Η υβριδική μέθοδος είναι σε θέση να δώσει ακριβή αποτελέσματα κατανομής πίεσης στη δοκιμή κατάρρευσης υδάτινης στήλης (dam break – σχ. 6.8), κάτι που το κλασικό SPH αδυνατεί.



Σχ. 6.8. Ενδεικτικά στιγμιότυπα κατάρρευσης υδάτινης στήλης με την χρήση του υβριδίου SPH/SPH-R.



## 7. Η μέθοδος SPH-ALE

Μια παραλλαγή της μεθόδου SPH βασίζεται στη διακριτοποίηση των εξισώσεων Euler σε συντηρητική μορφή, εκφρασμένες χρησιμοποιώντας περιγραφή ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) [20]. Πλέον τα σωματίδια θεωρούνται κινούμενοι πεπερασμένοι όγκοι, που κινούνται ακολουθώντας ένα μεταφορικό πεδίο, όχι κατ' ανάγκη ίδιο με το ροϊκό πεδίο. Αυτό δίνει το πλεονέκτημα ελέγχου της κίνησης των σωματιδίων.

Οι εξισώσεις της μεθόδου είναι:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{r}_i, t) \\
 \frac{d}{dt}(\omega_i) &= \omega_i \sum_{j=1}^N \omega_j (\mathbf{u}_0(\mathbf{r}_j) - \mathbf{u}_0(\mathbf{r}_i)) \cdot \nabla_i W_{ij} \\
 \frac{d}{dt}(\omega_i \rho_i) &+ \omega_i \sum_{j=1}^N \omega_j 2\rho_E (\mathbf{u}_E - \mathbf{u}_0) \cdot \nabla_i W_{ij} = 0 \\
 \frac{d}{dt}(\omega_i \rho_i u_i) &+ \omega_i \sum_{j=1}^N \omega_j 2 \left[ [\rho_E u_E (u_E - u_0) + P_E] \frac{\partial W}{\partial x} + [\rho_E u_E (v_E - v_0)] \frac{\partial W}{\partial y} + [\rho_E u_E (w_E - w_0)] \frac{\partial W}{\partial z} \right] = \omega_i \rho_i g_x \\
 \frac{d}{dt}(\omega_i \rho_i v_i) &+ \omega_i \sum_{j=1}^N \omega_j 2 \left[ [\rho_E v_E (u_E - u_0)] \frac{\partial W}{\partial x} + [\rho_E v_E (v_E - v_0) + P_E] \frac{\partial W}{\partial y} + [\rho_E v_E (w_E - w_0)] \frac{\partial W}{\partial z} \right] = \omega_i \rho_i g_y \\
 \frac{d}{dt}(\omega_i \rho_i w_i) &+ \omega_i \sum_{j=1}^N \omega_j 2 \left[ [\rho_E w_E (u_E - u_0)] \frac{\partial W}{\partial x} + [\rho_E w_E (v_E - v_0)] \frac{\partial W}{\partial y} + [\rho_E w_E (w_E - w_0) + P_E] \frac{\partial W}{\partial z} \right] = \omega_i \rho_i g_z
 \end{aligned} \tag{7.1-7.6}$$

Στις παραπάνω εξισώσεις ο όγκος του «σωματιδίου» συμβολίζεται με  $\omega_i$ , ενώ δείκτης  $E$  χρησιμοποιείται για να δείξει την λύση του προβλήματος Riemann. Η επίλυση του προβλήματος Riemann γίνεται μεταξύ των αλληλεπιδρώντων σωματιδίων  $i$  και  $j$ , χρησιμοποιώντας την μέθοδο του Roe. Για τον υπολογισμό της πίεσης χρησιμοποιείται και πάλι η εξίσωση Tait.

Και εδώ απαιτείται σχήμα  $2^{ns}$  τάξης για την πρακτική εφαρμογή της μεθόδου. Το σχήμα  $2^{ns}$  τάξης είναι παραπλήσιο με αυτό που περιγράφηκε παραπάνω στις εξ. 6.7-6.15 με τη διαφορά ότι υπάρχει ένα επιπλέον βήμα, το βήμα εξέλιξης (*evolution step*) [17].

$$\bar{\Phi}_{iR} = \Phi_i + \frac{1}{2} \frac{dt}{dx} [\mathbf{F}(\Phi_{iL}) - \mathbf{F}(\Phi_{iR})] \tag{7.7}$$

$$\bar{\Phi}_{jL} = \Phi_j + \frac{1}{2} \frac{dt}{dx} [\mathbf{F}(\Phi_{jL}) - \mathbf{F}(\Phi_{jR})] \tag{7.8}$$

Ουσιαστικά η διαδικασία είναι παραπλήσια με τη δοκιμασμένη μέθοδο MUSCL-Hancock που χρησιμοποιείται κατά κόρον στη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων.

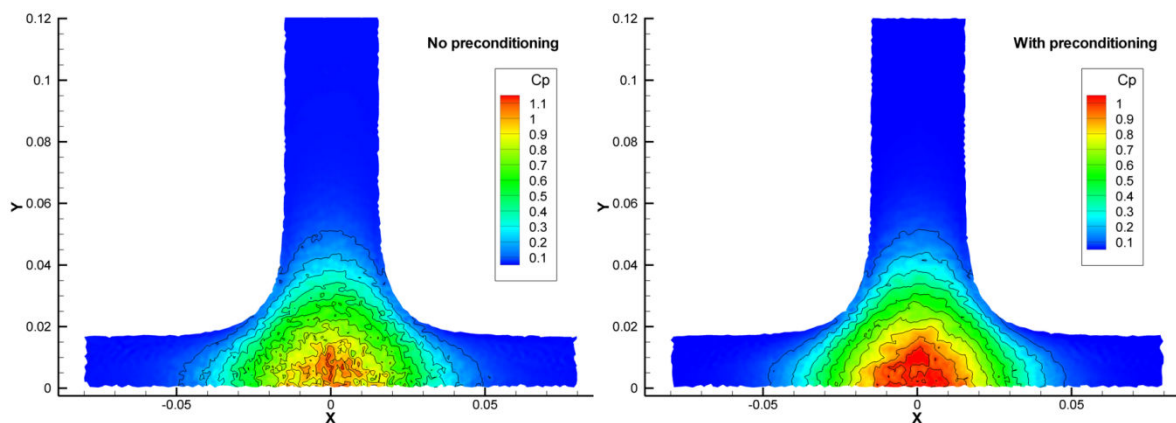
Η επιβολή των οριακών συνθηκών γίνεται χρησιμοποιώντας την επίλυση μερικού προβλήματος Riemann στο όριο και προσθέτοντας τη συμβολή του επιφανειακού όρου στις εξισώσεις 7.1-7.6, δίνοντας τελικά:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(\omega_i) &= V_{term} + \omega_i \sum_{j \in S} S_j (\mathbf{u}_0(\mathbf{r}_j) - \mathbf{u}_0(\mathbf{r}_i)) \cdot \mathbf{n}_j W_{ij} \\
 \frac{d}{dt}(\omega_i \rho_i) &+ V_{term} + \omega_i \sum_{j \in S} S_j 2\rho_E (\mathbf{u}_E - \mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{n}_j W_{ij} = 0 \\
 \frac{d}{dt}(\omega_i \rho_i u_i) &+ V_{term} + \omega_i \sum_{j \in S} S_j 2[\rho_E u_E (u_E - u_0) + P_E] W_{ij} x_n + [\rho_E u_E (v_E - v_0)] W_{ij} y_n + [\rho_E u_E (w_E - w_0)] W_{ij} z_n = \omega_i \rho_i g_x \\
 \frac{d}{dt}(\omega_i \rho_i v_i) &+ V_{term} + \omega_i \sum_{j \in S} S_j 2[\rho_E v_E (u_E - u_0)] W_{ij} x_n + [\rho_E v_E (v_E - v_0) + P_E] W_{ij} y_n + [\rho_E v_E (w_E - w_0)] W_{ij} z_n = \omega_i \rho_i g_y \\
 \frac{d}{dt}(\omega_i \rho_i w_i) &+ V_{term} + \omega_i \sum_{j \in S} S_j 2[\rho_E w_E (u_E - u_0)] W_{ij} x_n + [\rho_E w_E (v_E - v_0)] W_{ij} y_n + [\rho_E w_E (w_E - w_0) + P_E] W_{ij} z_n = \omega_i \rho_i g_z
 \end{aligned}
 \tag{7.9-7.13}$$

Μια ακόμα τεχνική που μπορεί να χρησιμοποιηθεί με τη μέθοδο SPH-ALE είναι η χρήση προσταθεροποίησης χαμηλών ταχυτήτων (*low speed preconditioning*), η οποία συμβάλλει στη βελτίωση του πεδίου πυκνότητας/πίεσεων ιδιαίτερα στην περίπτωση που η ροή είναι ασθενώς συμπιεστή. Χρησιμοποιώντας τον preconditioner του Turkel [21, 22], κατάλληλα διαμορφωμένο για συντηρητικές μεταβλητές:

$$\mathbf{P}_c = \begin{bmatrix} \beta^2 & 0 & 0 & 0 \\ \beta^2 u - u & 1 & 0 & 0 \\ \beta^2 v - v & 0 & 1 & 0 \\ \beta^2 w - w & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \tag{7.14}$$

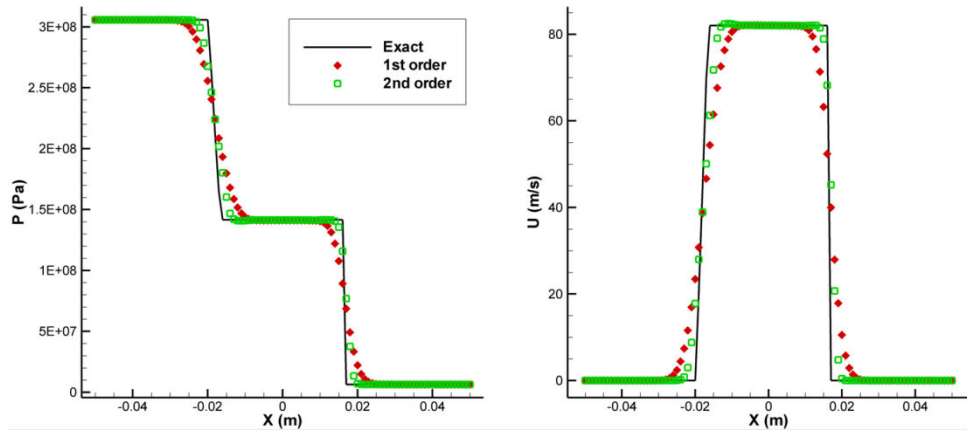
είναι δυνατό να μειωθεί σημαντικά ο αριθμητικός θόρυβος, όπως φαίνεται και από την απλή δοκιμή 2-διάστατης πρόσκρουσης δέσμης στην σχ. 7.1.



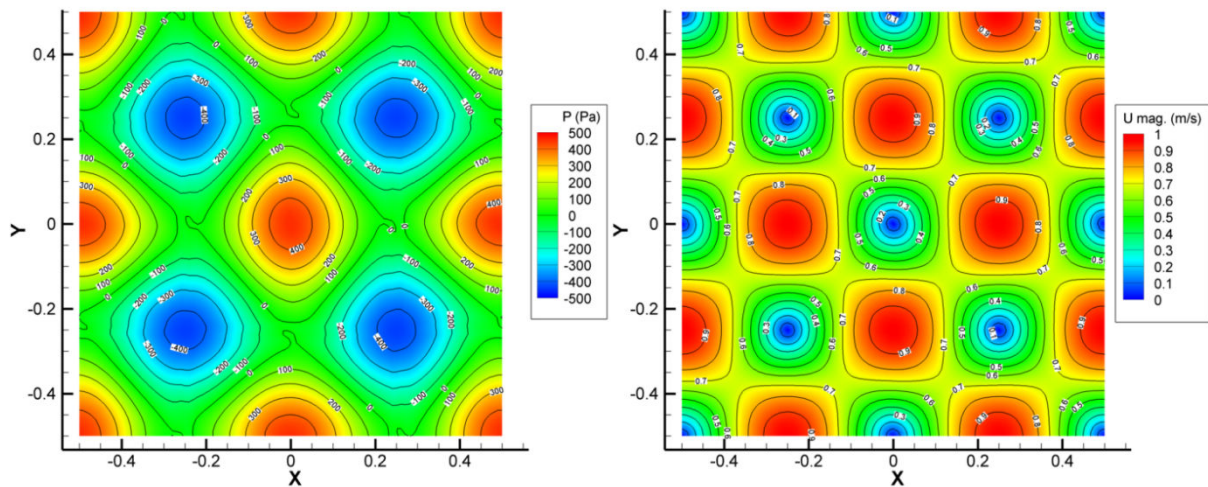
Σχ. 7.1. Σύγκριση της κατανομής πίεσης με και χωρίς τη χρήση preconditioning.

Η μέθοδος μπορεί να προσομοιώσει αποτελεσματικά προβλήματα όπως Shock tube ή ροή Green Taylor, χρησιμοποιώντας το πλεονέκτημα της θεωρίας ALE, χωρίς να χρειάζεται να μετακινούνται τα σωματίδια, κάτι που θα είχε ως συνέπεια την εισαγωγή σφαλμάτων λόγω ανομοιομορφίας κατανομής των σωματιδίων.



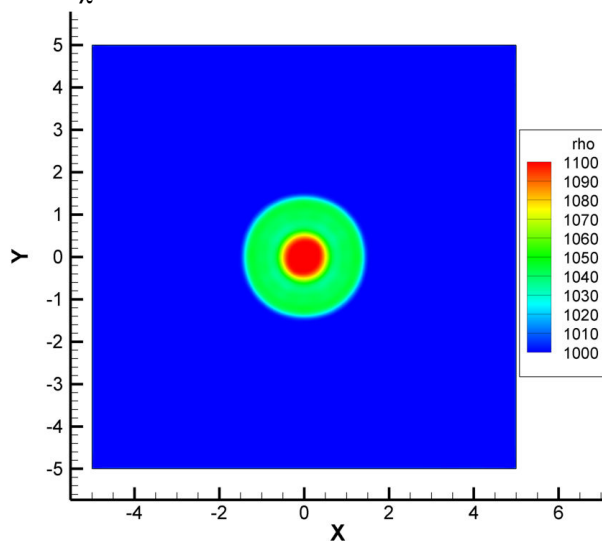


Σχ. 7.2. Δοκιμή Shock tube χρησιμοποιώντας Eulerian θεώρηση με την μέθοδο SPH-ALE.

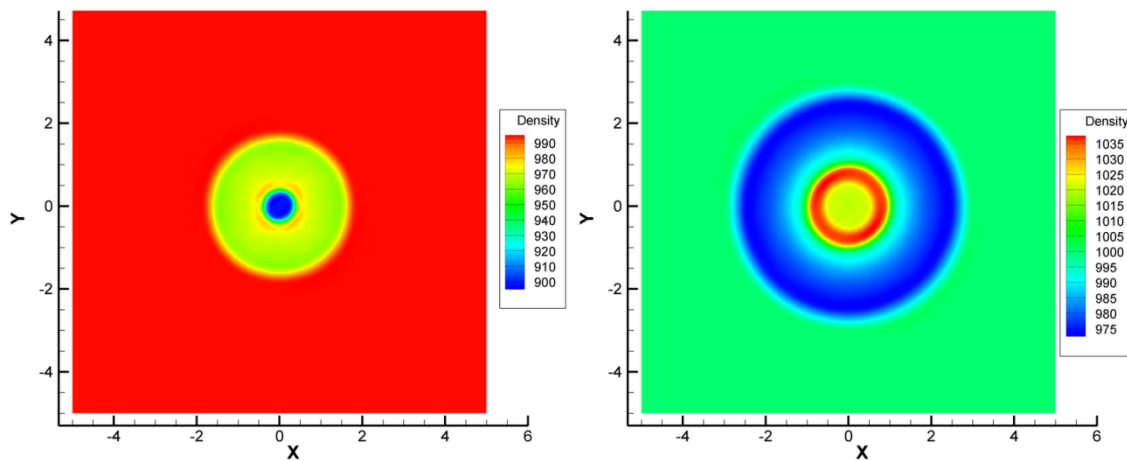


Σχ. 7.3. Επίλυση των δινών Green Taylor με τη μέθοδο SPH-ALE.

Επιπλέον είναι σε θέση να προσομοιώσει βίαια φαινόμενα, όπως εκρήξεις/καταρρέυσεις, δίνοντας παραπλήσια αποτελέσματα με τη μέθοδο πεπερασμένων όγκων (αναπτύχθηκε αλγόριθμος πάνω στη συγκεκριμένη μέθοδο για τα εν λόγω προβλήματα, βλέπε το κείμενο της πλήρους εργασίας), όπως φαίνεται στα σχ. 7.4 και 7.5.

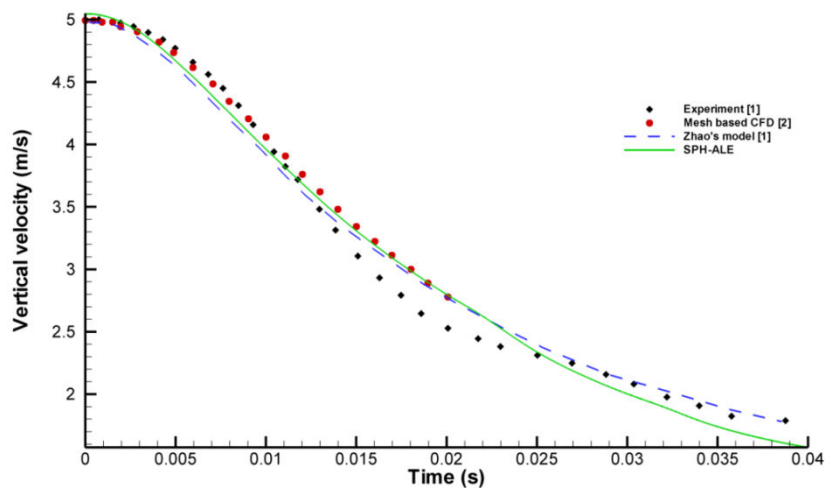


Σχ. 7.4. Λύση 2-διάστατης έκρηξης χρησιμοποιώντας τη μέθοδο SPH-ALE 2<sup>ης</sup> τάξης.

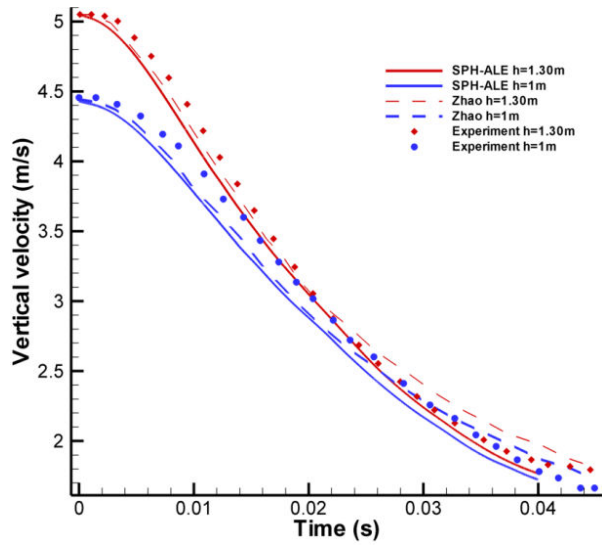


Σχ. 7.5. Λύση 2-διάστατης κατάρρευσης χρησιμοποιώντας τη μέθοδο SPH-ALE 2<sup>ης</sup> τάξης. Αριστερά το κύμα κρούσης κινείται προς το κέντρο του σχήματος. Δεξιά έχει συμβεί συγκέντρωση του κύματος κρούσης, το οποίο πλέον κινείται προς τα έξω.

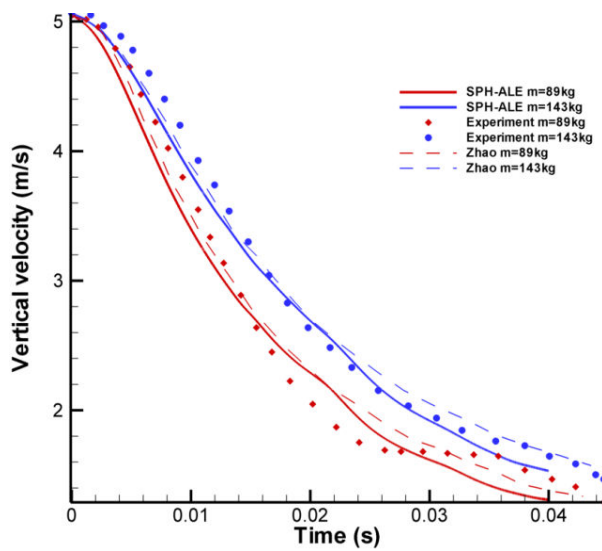
Παράλληλα είναι δυνατή η εφαρμογή της μεθόδου και σε φαινόμενα αλληλεπίδρασης στερεού / ρευστού (fluid / rigid body interaction), χωρίς την ανάγκη κατασκευής/χειρισμού κινούμενου πλέγματος που θα απαιτούσε μια κλασική Eulerian μέθοδος. Εν προκειμένω, προσομοιώθηκε η πρόσκρουση σφήνας στην επιφάνεια νερού, ενώ τα αποτελέσματα συγκρίθηκαν με αντίστοιχα πειραματικά. Στο σχήμα 7.6 φαίνεται η ταχύτητα σφήνας μάζας 94kg με γωνία 25°, που προσκρούει με ταχύτητα ~5m/s σε νερό, όπως υπολογίστηκε από τη μέθοδο SPH-ALE σε σύγκριση με αποτελέσματα της βιβλιογραφίας. Αντίστοιχα αποτελέσματα, για άλλες συνθήκες, φαίνονται και στα σχήματα 7.7-7.9.



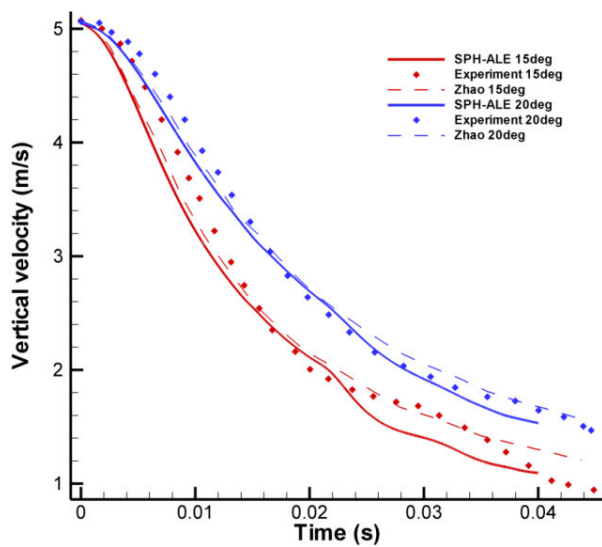
Σχ. 7.6. Ταχύτητα της σφήνας κατά την πρόσκρουση.



Σχ. 7.7. Ταχύτητα της σφήνας κατά την πρόσκρουση. Εξάρτηση από το ύψος πτώσης.

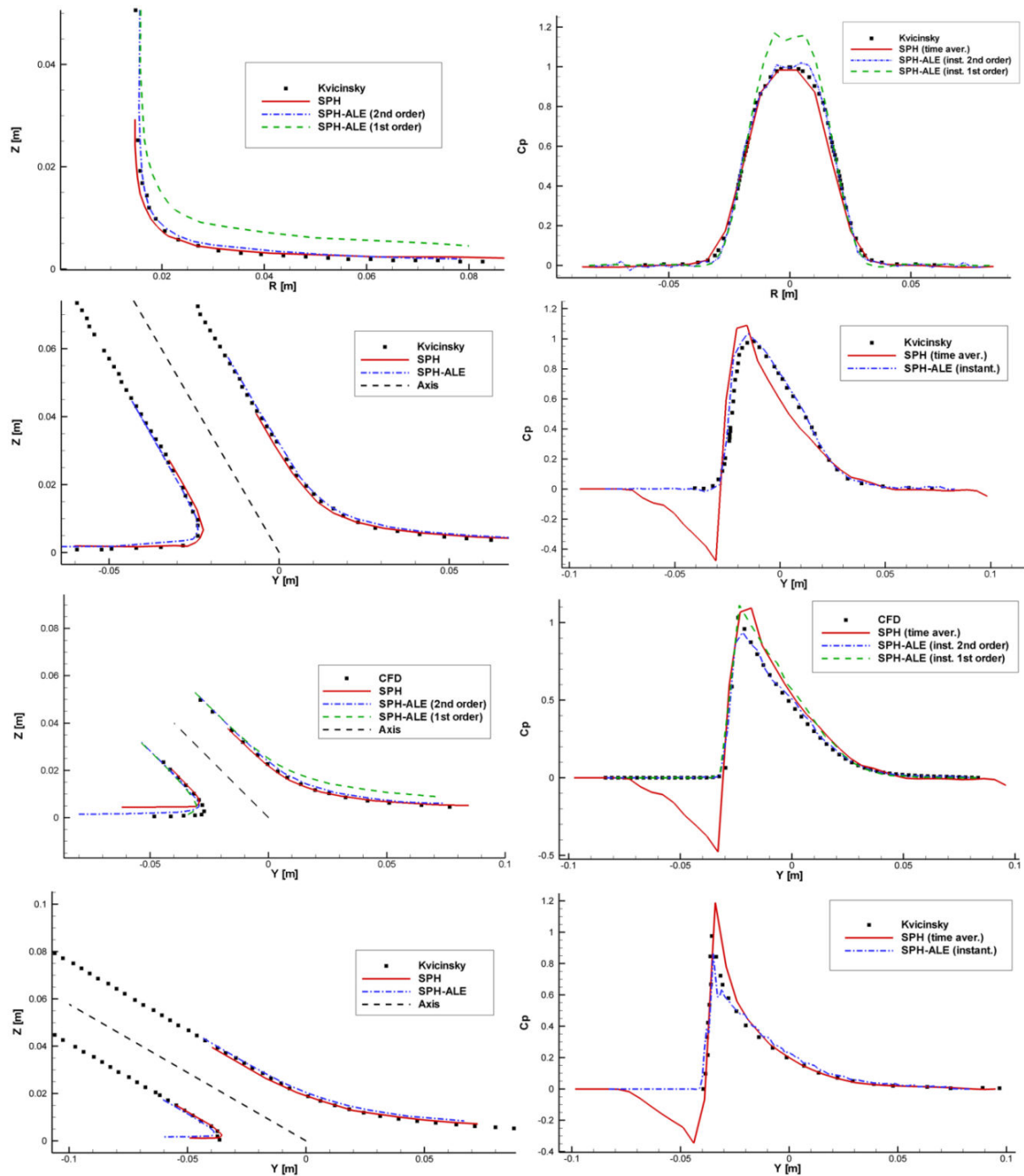


Σχ. 7.8. Ταχύτητα της σφήνας κατά την πρόσκρουση. Εξάρτηση από την μάζα της σφήνας.



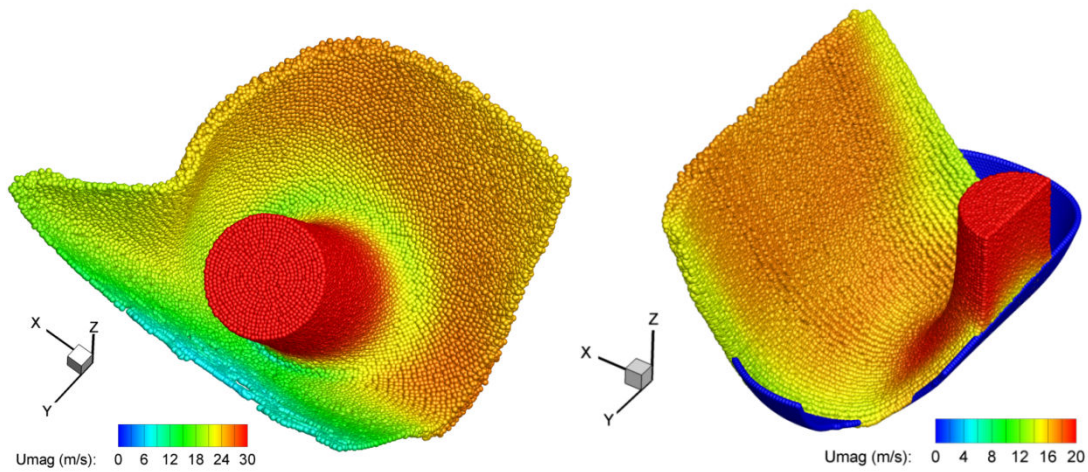
Σχ. 7.9. Ταχύτητα της σφήνας κατά την πρόσκρουση. Εξάρτηση από την γωνία της σφήνας.

Σε προσομοιώσεις δέσμης σε επίπεδη πλάκα (3D) η μέθοδος SPH-ALE έδωσε αισθητά καλύτερα αποτελέσματα από τη μέθοδο SPH, δεδομένου ότι είναι σε θέση να προσδιορίσει την ακριβή θέση της ελεύθερης επιφάνειας, ενώ ταυτόχρονα υπολογίζει λογικές ακριβείς κατανομές πίεσης, δίχως υπερεκτιμήσεις ή υποεκτιμήσεις (σχ. 7.10).

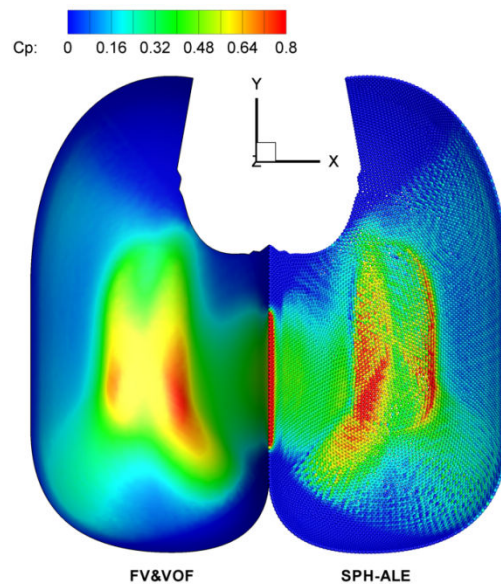


Σχ. 7.10. Πρόσκρουση δέσμης σε επίπεδη επιφάνεια για διάφορες γωνίες. Αριστερά: θέση ελεύθερης επιφάνειας. Δεξιά: Κατανομή πίεσης.

Τέλος, έγιναν προσομοιώσεις και σε γεωμετρίες υδροτροβίλων δράσης. Διαπιστώθηκαν αντίστοιχα ευρήματα με τη μέθοδο SPH-R, δηλαδή ότι η επίδραση της αριθμητικής διάχυσης οδηγεί σε υποεκτίμηση των δυνάμεων, αλλά η απόκλιση ήταν μικρότερη χρησιμοποιώντας την μέθοδο SPH-ALE. Το στιγμιαίο πεδίο πίεσης έχει λογικές τιμές και παραπλήσιες με αυτές που υπολογίστηκαν από το Fluent (σχ. 7.12).



Σχ. 7.11. Μορφή της αναπτυσσόμενης ροής σε περύγιο Turgo και σκαφίδιο Pelton.



Σχ. 7.12. Σύγκριση του πεδίου πιέσεων μεταξύ SPH-ALE και Fluent.



## 8. Επίλογος

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η ανάπτυξη αλγορίθμων βασισμένων στη μέθοδο SPH, αλλά και στις παραλλαγές της, για την προσομοίωση ροών με ελεύθερη επιφάνεια. Το ενδιαφέρον εστιάστηκε στην προσομοίωση ροών που εμφανίζονται σε υδροστροβίλους δράσης, συμπεριλαμβανομένου και του σχεδιασμού με χρήση τεχνικών βελτιστοποίησης ενός υδροστροβίλου Turgo. Ένας επιμέρους στόχος της εργασίας είναι η πιστοποίηση της μεθόδου σε διάφορες ροές, περιλαμβάνοντας ροές με ελεύθερη επιφάνεια αλλά και έγκλειστες ροές, με ή χωρίς ιξώδες.

Σε πρώτη φάση αναπτύχθηκε η κλασική μέθοδος SPH. Η μέθοδος SPH δοκιμάστηκε σε συνδυασμό με διάφορα φίλτρα πυκνότητας και λοιπές διορθώσεις, σε ροές με/χωρίς ιξώδες για μικρούς και μεγάλους Reynolds. Φαινόμενα τύρβης είναι δυνατό να προσομοιωθούν με τη μέθοδο SPH αλλά απαιτείται αντιμετώπιση της αταξίας των σωματιδίων, όπως η τεχνική ανακατανομής σωματιδίων.

Ακόμα, η μέθοδος SPH εφαρμόστηκε και σε ροές με ελεύθερες επιφάνειες και διαπιστώθηκε ότι μπορεί να προβλέψει ικανοποιητικά τη θέση της ελεύθερης επιφάνειας, ωστόσο οι κατανομές πίεσης δεν είναι ακριβείς, ενώ και το ιστορικό των δυνάμεων/ροπών πάνω στα τοιχώματα παρουσιάζει έντονες διακυμάνσεις. Απ' την εφαρμογή σε υδροστροβίλους δράσης διαπιστώθηκε μια συστηματική υποεκτίμηση του βαθμού απόδοσης, η οποία δεν φάνηκε να βελτιώνεται με την αύξηση της ανάλυσης. Παρόλα αυτά η μέθοδος είναι σε θέση να προλέξει σωστά σχετικές διαφορές μεταξύ δυο υποψήφιων σχεδιασμών, κατά συνέπεια ήταν δυνατή η βελτιστοποίηση δρομέα Turgo σε συνδυασμό με την μέθοδο FLS. Επιπλέον, λόγω της φύσης της, η μέθοδος SPH εκτελείται αποδοτικά χρησιμοποιώντας παράλληλη επεξεργασία, με αποτέλεσμα να απαιτεί λιγότερο χρόνο σε σχέση με το υπολογιστικό πακέτο Fluent που χρησιμοποιήθηκε για λόγους σύγκρισης.

Για την αντιμετώπιση των θεμάτων που εμφανίζονται στη μέθοδο SPH, εξετάστηκε η χρήση επιλυτών Riemann για τις αλληλεπιδράσεις σωματιδίων, αναπτύσσοντας κατάλληλους αλγορίθμους. Με αυτόν τον τρόπο δεν απαιτείται η χρήση αυθαίρετων φίλτρων ή διορθωτικών συντελεστών, ενώ ταυτόχρονα υπολογίζονται ρεαλιστικά πεδία πίεσης. Ωστόσο η αυξημένη αριθμητική διάχυση απαιτεί χρήση σχημάτων  $2^{ns}$  τάξης ακρίβειας. Ένα νέο σχήμα ακριβείας  $2^{ns}$  τάξης αναπτύχθηκε. Το τελικό σχήμα δίνει καλύτερα αποτελέσματα σε αρκετές εφαρμογές, ωστόσο σε 3-διάστατες δοκιμές παρουσιάζει σημαντική αριθμητική διάχυση και είναι πιο αργό στην εκτέλεση σε σχέση με την μέθοδο SPH.

Μια άλλη παραλλαγή που αναπτύχθηκε ήταν η μέθοδος SPH-ALE, η οποία χρησιμοποιεί μια εντελώς διαφορετική οπτική. Η παραλλαγή αυτή δίνει την δυνατότητα τα σωματίδια να κινούνται με αυθαίρετο τρόπο, επιτρέποντας την προσομοίωση προβλημάτων που θα ήταν αδύνατο χρησιμοποιώντας μόνο Lagrangian περιγραφή (π.χ. ροή Green Taylor). Σε πρακτικές εφαρμογές παρουσιάζει σημαντική αριθμητική διάχυση, όπως και η μέθοδος SPH-R, ωστόσο δίνει σχετικά καλύτερα αποτελέσματα.

Μια ενδιαφέρουσα παραλλαγή που αναπτύχθηκε και περιγράφηκε στην παρούσα εργασία είναι η υβριδική μέθοδος SPH/SPH-R στην οποία αποφεύγεται η χρήση της μεθόδου Godunov για τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ σωματιδίων – χρησιμοποιείται μόνο στην αλληλεπίδραση με το τοίχωμα. Η μέθοδος αποφεύγει τη χρήση σχήματος  $2^{ns}$  τάξης που είναι πιο χρονοβόρο, δεδομένου ότι απαιτείται η διαδικασία υπολογισμού παραγώγων, περιορισμού κλίσεων κλπ, ενώ τα αποτελέσματα είναι συγκρίσιμα με αυτά των μεθόδων SPH-R/SPH-ALE  $2^{ns}$  τάξης.

Τα σημαντικότερα σημεία της παρούσας εργασίας μπορούν να συνοψιστούν στα παρακάτω:

- Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας αναπτύχθηκαν αλγόριθμοι με βάση την μέθοδο SPH και τις παραλλαγές της. Οι αλγόριθμοι αυτοί ελέγχθηκαν σε βασικές δοκιμές, όπως την αναπαραγωγή της κυματικής συμπεριφοράς των εξισώσεων Euler ή τη διατήρηση της στροφορμής.
- Ο αλγόριθμος SPH χρησιμοποιήθηκε για την προσομοίωση ροών με ιξώδες για μικρούς και μεγάλους αριθμούς Reynolds. Το πεδίο ροής υπολογίζεται σωστά σε σχέση με τις αναφορές για τους μικρούς αριθμούς Reynolds. Η ανακατανομή των σωματιδίων μπορεί να βελτιώσει την ποιότητα των αποτελεσμάτων. Ροές σε μεγάλους Reynolds (τυρβώδεις ροές) είναι δυνατό να προσομοιωθούν, υπό την προϋπόθεση ότι η κατανομή των σωματιδίων ελέγχεται.
- Η προσομοίωση με ελεύθερη επιφάνεια είναι πολύ εύκολη με τη μέθοδο SPH. Σε όλες τις περιπτώσεις η ελεύθερη επιφάνεια που υπολογίστηκε από τη μέθοδο SPH ήταν πανομοιότυπη με αυτήν που υπολογίστηκε από το πρόγραμμα Fluent. Ωστόσο το πεδίο της πίεσης παρουσιάζει διαταραχές, επιβάλλοντας την χρήση χρονικού μέσου όρου για την εξαγωγή αποτελεσμάτων.
- Η μέθοδος SPH είναι σε θέση να προλέξει τη μεταβατική κατάσταση της ροής σε ακροφύσιο Pelton, αλλά και τη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας στη μόνιμη κατάσταση. Ακόμα η χαρακτηριστική καμπύλη του ακροφυσίου, που συνδέει την παροχή μάζας με το άνοιγμα του ακροφυσίου προσδιορίστηκε με ακρίβεια σε σχέση με τις πειραματικές μετρήσεις.
- Με τη χρήση της μεθόδου SPH εξετάστηκε η αλληλεπίδραση της δέσμης νερού με εκτροπέα κυλινδρικού σχήματος, επιδιώκοντας τη ρύθμιση του φορτίου υδροστροβίλου. Από την αλληλεπίδραση διαπιστώθηκε ότι ο εκτροπέας αυτού του σχήματος προκαλεί έντονη διαταραχή στη δέσμη, με λογικό επακόλουθο τον αντίκτυπο στην απόδοση του υδροστροβίλου.
- Κατά την προσομοίωση ροών σε υδροστροβίλους δράσης, σε κινούμενες και ακίνητες γεωμετρίες, η μέθοδος SPH δίνει παραπλήσια αποτελέσματα με το πρόγραμμα Fluent, όσον αφορά την ελεύθερη επιφάνεια, αλλά και την καμπύλη ροπής.
- Η μέθοδος SPH χρησιμοποιήθηκε σε συνδυασμό με τον αλγόριθμο FLS για τη βελτιστοποίηση της γεωμετρίας υδροστροβίλου Turgo. Ο αλγόριθμος FLS χρησιμοποιήθηκε μετά από ρύθμιση, σαν πρώτο στάδιο για την αξιολόγηση των υποψήφιων γεωμετριών. Στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος SPH για την αξιολόγησή τους. Επιπλέον, με τη μέθοδο SPH υπολογίστηκαν τα αξονικά και ακτινικά φορτία του δρομέα, τα οποία λήφθηκαν υπόψη για την επιλογή των εδράσεων της ατράκτου του δρομέα.
- Η μέθοδος SPH χρησιμοποιήθηκε για την προσομοίωση πλήρους δρομέα υδροστροβίλου Turgo και Pelton. Στην περίπτωση του υδροστροβίλου Turgo συμπεριλήφθηκε και το πραγματικό περίβλημα και αποδείχθηκε ότι ο υδροστροβίλος λειτουργεί χωρίς σημαντικές παρεμβολές από το εξερχόμενο νερό.
- Παραλλαγές βασισμένες στους επιλύτες Riemann αναπτύχθηκαν και εξετάστηκαν, προκειμένου να αντιμετωπιστούν τα εγγενή προβλήματα της μεθόδου (διαταραχές πεδίου



πίεσης και επιβολή οριακών συνθηκών). Αναπτύχθηκε ένα νέο σχήμα  $2^{ns}$  τάξης βασισμένο στην μέθοδο MUSCL-Hancock.

- Η μέθοδος SPH-ALE έχει το πλεονέκτημα της θεώρησης Arbitrary Lagrangian Eulerian, που επιτρέπει στα υπολογιστικά στοιχεία να κινούνται με αυθαίρετο τρόπο. Κατάλληλη επιλογή του μεταφορικού πεδίου αντιμετωπίζει δυο σημαντικές αστάθειες της μεθόδου: την αστάθεια υπό τάση και την προσανατολισμένη κίνηση των σωματιδίων.
- Μια νέα μέθοδος, που ουσιαστικά αποτελεί υβρίδιο των μεθόδων SPH και SPH-R αναπτύχθηκε, συνδυάζοντας τα δυνατά χαρακτηριστικά τους, δηλαδή μικρή αριθμητική διάχυση και ακριβή επιβολή οριακών συνθηκών.

### 8.1. Συνεισφορά της παρούσας εργασίας

#### Πρωτότυπα στοιχεία

Σχετικά με την αριθμητική μέθοδο SPH:

- Ανάπτυξη υπολογιστικών αλγορίθμων βασισμένων στη μέθοδο SPH και τις παραλλαγές της. Κατά την διάρκεια της παρούσας εργασίας αναπτύχθηκαν υπολογιστικοί αλγόριθμοι βασισμένοι στην οικογένεια μεθόδων SPH (standard SPH, SPH-R, SPH-ALE, υβρίδιο SPH/SPH-R), σε γλώσσα Fortran. Επίσης αναπτύχθηκαν και παράλληλες εκδόσεις των αλγορίθμων, χρησιμοποιώντας παραλληλισμό κοινής μνήμης με το OpenMP.
- Ανάπτυξη ενός σχήματος ακρίβειας 2ης τάξης, βασισμένο στη μέθοδο MUSCL-Hancock. Η χρήση επιλυτών Riemann εισάγει αριθμητική διάχυση, λόγω της φύσης του σχήματος Godunov. Το νέο σχήμα χρησιμοποιεί εκφράσεις εμπρός και πίσω παραγώγων, ενώ είναι παραπλήσιο με το σχήμα MUSCL-Hancock, που είναι δοκιμασμένο στη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων.
- Ανάπτυξη μιας νέας υβριδικής μεθόδου SPH που συνδυάζει την μέθοδο SPH με την SPH-R για την αντιμετώπιση των ορίων. Προκειμένου να αντιμετωπιστεί η εγγενής αριθμητική διάχυση των παραλλαγών SPH, βασισμένων σε επιλύτες Riemann, και η προβληματική επιβολή οριακών συνθηκών της μεθόδου SPH, συντέθηκε μια νέα υβριδική μέθοδος που συνδυάζει τα δυνατά σημεία της κάθε μεθόδου. Το υβρίδιο SPH/SPH-R αντιμετωπίζει τις σωματιδιακές αλληλεπιδράσεις με το κλασικό σχήμα SPH, ενώ τα όρια αντιμετωπίζονται με την επίλυση του μερικού προβλήματος Riemann. Με αυτόν τον τρόπο η αριθμητική διάχυση είναι μειωμένη, ενώ η επιβολή ορίων ακριβής.

Σχετικά με την προσομοίωση ροών με ελεύθερη επιφάνεια:

- Εφαρμογή της μεθόδου SPH για την επίλυση της ροής σε υδροστροβίλους δράσης. Η πλειοψηφία των προσομοιώσεων υδροστροβίλων δράσης γίνεται με τη χρήση κλασικών τεχνικών υπολογιστικής μηχανικής, υιοθετώντας θεώρηση κατά Euler και κινούμενα πλέγματα. Αντ' αυτού, στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται μη-πλεγματική σωματιδιακή μέθοδος.

- Προσομοίωση και βελτιστοποίηση της γεωμετρίας ενός υδροστροβίλου Turgo. Οι υδροστρόβιλοι Turgo κατασκευάζονται από λίγες εταιρίες ανά τον κόσμο, ενώ ο σχεδιασμός τους βασίζεται σε πειραματικές μετρήσεις και εμπειρικές σχέσεις. Στην παρούσα εργασία, η μέθοδος SPH χρησιμοποιήθηκε για την προσομοίωση και βελτιστοποίηση ενός τέτοιου υδροστροβίλου. Η βέλτιστη γεωμετρία χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή ενός εργαστηριακού υδροστροβίλου.

Δημοσιεύσεις σε διεθνή περιοδικά

- Koukouvini. P., Anagnostopoulos J., Papantonis. D., «Turbulence Modeling in Smoothed Particle Hydrodynamics Methodology: Application in Nozzle Flow», AIP Conference Proceedings vol. 1168, p. 248-251, 2009. DOI: 10.1063/1.3241439
- Koukouvini. P., Anagnostopoulos J., Papantonis. D., «SPH method used for flow predictions at a Turgo impulse turbine: comparison with Fluent», World Academy of Science Engineering and Technology, vol. 79, p. 659-666, 2011.
- Koukouvini. P., Anagnostopoulos J., Papantonis. D., “An improved MUSCL treatment for the SPH-ALE method: comparison with the standard SPH method for the jet impingement case” Journal of Numerical Methods in Fluids. In press. DOI: 10.1002/flid.3706.
- Koukouvini. P., Anagnostopoulos J., Papantonis. D., “Simulation of 2d wedge impacts on water using the SPH-ALE method” European Journal of Mechanics B/Fluids. Under review.

Συμμετοχή σε συνέδρια

- Σταματέλος Φ., Κουκουβίνης Φ., Αναγνωστόπουλος Ι., Παπαντώνης Δ., «Αριθμητική προσομοίωση ασυμπίεστης ροής με την χρήση της μεθόδου Smoothed Particle Hydrodynamics method», Ημερίδα Ροή 2008, Κοζάνη, Ελλάδα, 28 Νοεμβρίου 2008.
- Koukouvini. P., Anagnostopoulos J., Papantonis. D., «Flow modelling in the injector of a Pelton turbine», Proceedings of the 4<sup>th</sup> Spheric Workshop, Nantes, France, 27 - 29 May 2009.
- Koukouvini. P., Anagnostopoulos J., Papantonis. D., «Flow modeling in a Turgo turbine using SPH», Proceedings of the 5<sup>th</sup> Spheric Workshop, Manchester, United Kingdom, 23 - 25 June 2010.
- Koukouvini. P., Anagnostopoulos J., Papantonis. D., «Flow analysis inside a Pelton turbine bucket using smoothed particle hydrodynamics», Hydro 2010 conference, Lisbon, Portugal, 27 - 29 September 2010.
- Koukouvini. P., Anagnostopoulos J., Papantonis. D., «Ανάπτυξη και εφαρμογή της μεθόδου SPH για υδροστροβίλους δράσης», Συνέδριο Ροή 2010, Θεσσαλονίκη, Ελλάδα, 12-13 Νοεμβρίου 2010.
- Koukouvini. P., Anagnostopoulos J., Papantonis. D., «Numerical Computation of the performance curve of a Pelton turbine using the smoothed particle hydrodynamics method», 7<sup>th</sup>

GRACM International Conference on Computational Mechanics, Athens, Greece, 30 June - 2 July 2011.

- Anagnostopoulos J., Koukouvinis P., Stamatelos F., Papantonis D., «Optimal design and experimental validation of a Turgo model Hydro turbine», Proceedings of the 11<sup>th</sup> Conference on Engineering Systems Design and Analysis (ESDA 2012), Nantes, France, 2012.

## 8.2. Γενικές σκέψεις περί των μεθόδων SPH/προτάσεις για περαιτέρω έρευνα

Το σημαντικότερο πλεονέκτημα της μεθόδου SPH είναι το γεγονός ότι δεν απαιτείται κάποιο υπολογιστικό πλέγμα για τον υπολογισμό παραγώγων. Αντ' αυτού χρησιμοποιείται ένα σύνολο ασύνδετων υπολογιστικών στοιχείων για την προσέγγιση της παραγώγου, επιτρέποντας την προσομοίωση φαινομένων με μεγάλες παραμορφώσεις. Ωστόσο η κατανομή των υπολογιστικών στοιχείων επιδρά σημαντικά στην ακρίβεια των προσεγγίσεων και επιπλέον η κατανομή τους αλλάζει κατά την διάρκεια μιας προσομοίωσης. Διαφορετικές κατανομές σωματιδίων ενδέχεται να οδηγήσουν σε σημαντικές διαφορές στα αποτελέσματα.

Οι προσεγγίσεις της μεθόδου SPH δεν είναι το ίδιο επιρρεπείς σε σφάλματα. Ένας τρόπος που βελτιώνει την ακρίβεια των προσεγγίσεων είναι με τη διόρθωση της παραγώγου της συνάρτησης πυρήνα (εξ. 3.40-3.42), που εξασφαλίζει την ακριβή αναπαράσταση πολυωνύμων 1<sup>ου</sup> βαθμού. Η διόρθωση όμως αυτή εισάγει επιπλέον υπολογιστικό κόστος, ενώ η εφαρμογή της απαιτεί προσοχή σε απομακρυσμένα σωματίδια. Διορθώσεις μεγαλύτερης ακρίβειας δεν έχουν διερευνηθεί, ωστόσο ενδέχεται να έχουν ακόμα μεγαλύτερο κόστος ή να εμφανίζουν αστάθειες.

Η θεώρηση κατά Lagrange της μεθόδου SPH είναι ακόμα ένα ελκυστικό στοιχείο, καθώς δίνει την δυνατότητα παρακολούθησης ελεύθερων επιφανειών. Ωστόσο φαίνεται ότι μια εντελώς Lagrangian θεώρηση δεν είναι πάντα ευεργετική, καθώς υπό συνθήκες, ενδέχεται να διαμορφωθούν αφύσικες κατανομές. Μια λύση είναι η ανακατανομή σωματιδίων. Εναλλακτική λύση είναι η υιοθέτηση της ALE θεώρησης που επιτρέπει στα σωματίδια να κινούνται με οποιοδήποτε τρόπο. Προτείνεται περαιτέρω διερεύνηση των δυνατοτήτων της θεώρησης ALE, ούτως ώστε τα σωματίδια να κινούνται με τέτοιο τρόπο ώστε να παρακολουθούν τα σημαντικά στοιχεία της ροής, όπως ελεύθερες επιφάνειες, αλλά ταυτόχρονα να μην εμφανίζουν τα προβλήματα που υπάρχουν λόγω Lagrangian θεώρησης. Έλεγχος της θέσης των σωματιδίων απαιτείται και σε προσομοιώσεις μεταβαλλόμενης ανάλυσης, καθώς είναι επιθυμητό τα σωματίδια που περιγράφουν την περιοχή ενδιαφέροντος να μείνουν σε συγκεκριμένη θέση και να μην παρασυρθούν από την ροή.

Ένα άλλο σημαντικό στοιχείο της μεθόδου SPH είναι ότι οι προσεγγίσεις επηρεάζονται τόσο από την απόσταση μεταξύ των σωματιδίων (σωματιδιακή προσέγγιση), όσο και από το μήκος ομαλοποίησης (ολοκληρωματική προσέγγιση). Προκειμένου να επιτευχθεί αποδεκτή σωματιδιακή προσέγγιση θα πρέπει το κάθε σωματίδιο να αλληλεπιδρά με 50 γειτονικά σωματίδια. Εν γένει, οι προσεγγίσεις της μεθόδου SPH είναι αρκετά ακριβές από υπολογιστικής άποψης, με αποτέλεσμα να απαιτούνται παράλληλοι αλγόριθμοι ειδικά για 3D εφαρμογές. Υπάρχει η δυνατότητα χρήσης μεταβλητής ανάλυσης, αλλά απαιτείται συνυπολογισμός επιπλέον όρων στις προσεγγίσεις παραγώγου, αλλιώς υπάρχουν σημαντικοί περιορισμοί.

Δεδομένου ότι η μέθοδος SPH είναι υπολογιστικά ακριβή, απαιτούνται κατάλληλοι αλγόριθμοι που θα αξιοποιήσουν στο μέγιστο τη διαθέσιμη επεξεργαστική ισχύ. Η χρήση OpenMP για παραλληλισμό είναι μεν απλή, αλλά επιβάλλει χρήση ενός μόνο πολυπύρηνου υπολογιστή. Απ' την άλλη η χρήση παραλληλισμού διανεμημένης μνήμης απαιτεί κατάλληλο προγραμματισμό για την

αποδοτική επικοινωνία μεταξύ των συνεργαζόμενων υπολογιστών. Η χρήση καρτών γραφικών (GPGPUs) είναι μια πολλά υποσχόμενη τεχνική παραλληλισμού με μεγάλες δυνατότητες επιτάχυνσης της εκτέλεσης του αλγορίθμου.

Σε πρακτικές βιομηχανικές εφαρμογές απαιτείται η χρήση κατάλληλων μοντέλων για την προσομοίωση των φαινομένων τύρβης. Παρ' όλο που η ενσωμάτωση κλασικών μοντέλων τύρβης είναι δυνατή στη μέθοδο SPH, εμφανίζονται επιπλοκές/διαταραχές σε μεγάλους Reynolds. Για την αντιμετώπιση των επιπλοκών αυτών, απαιτείται έλεγχος της θέσης των σωματιδίων. Η ανακατανομή σωματιδίων είναι μια δυνατότητα αλλά δεν μπορεί να εφαρμοστεί εύκολα σε ροές με ελεύθερες επιφάνειες. Η μέθοδος SPH-ALE, έχει σημαντική αριθμητική διάχυση που ενδεχομένως αποκρύπτει τα φαινόμενα τύρβης. Απ' την άλλη, έχουν αναπτυχθεί μοντέλα τύρβης ειδικά διαμορφωμένα για την μέθοδο SPH, ωστόσο δεν έχουν δοκιμαστεί ιδιαίτερα στην υπολογιστική ρευστομηχανική.

Η ενσωμάτωση επιλυτών Riemann δίνει τη δυνατότητα να αντιμετωπιστούν μερικές από τις εγγενείς αδυναμίες της μεθόδου SPH. Σε συνδυασμό με την αντιμετώπιση οριακών συνθηκών με τη χρήση μερικού προβλήματος Riemann είναι δυνατή η διαμόρφωση μιας στιβαρής μεθόδου. Ωστόσο η επίδραση της αριθμητικής διάχυσης είναι εμφανής, ακόμα και με τη χρήση σχημάτων ακρίβειας  $2^{15}$  τάξης. Ανάπτυξη σχημάτων ακόμα μεγαλύτερης ακρίβειας αποτελεί ένα πεδίο ενδιαφέροντος, αλλά είναι άγνωστο εάν το τελικό σχήμα θα είναι ευσταθές σε περιπτώσεις που η κατανομή σωματιδίων παραμορφωθεί. Η υβριδική μέθοδος SPH/SPH-R ενδεχομένως να αποτελεί μια λύση, καθώς δεν χρησιμοποιείται η μέθοδος Godunov παρά μόνο στις αλληλεπιδράσεις με το τοίχωμα. Πέραν της μεθόδου SPH-ALE, μια εναλλακτική μέθοδος με παραπλήσιες δυνατότητες είναι και η Finite Volume Particle Method (FVPM), η οποία εξασφαλίζει καλύτερη ακρίβεια.

## Αναφορές

- [1] G.R. Liu, M. B. Liu, "Smoothed particle hydrodynamics", World scientific publishing, 2003, ISBN 981-238-456-1
- [2] J.J. Monaghan, "Smoothed Particle Hydrodynamics", Reports on progress in physics, vol. 68, p. 1703-1759, 2005, DOI: 10.1088/0034-4885/68/8/R01
- [3] D. Violeau, R. Issa, "Numerical modeling of complex turbulent free surface flows with the SPH method: an overview", International Journal of Numerical Methods in Fluids, vol. 53, p. 277-304, 6 July 2006.
- [4] J. P. Morris, P. J. Fox, Y. Zhu, "Modeling low Reynolds number incompressible flows using SPH", Journal of Computational Physics, vol. 136, p. 214-226, 1997.
- [5] M.J. Ivings, D.M. Causon, E.F. Toro, "On Riemann solvers for compressible liquids", International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 28, p.395 – 418, 1998.
- [6] A. Ferrari, M. Dumbser, E.F. Toro and A. Armanini, "A New 3D Parallel SPH scheme for Free Surface Flows" Computers & Fluids, vol. 38, issue 6, pages 1203-1217, 2009.
- [7] B. Chapman, G. Jost, R. Pas, "Using OpenMP: Portable Shared Memory Parallel Programming", MIT Press, ISBN-10:0-262-53302-2, ISBN-13: 978-0-262-53302-7.
- [8] S. Tsaggaris, "Fluid Mechanics", Symeon Press, 2005, ISBN: 960-7888-55-3.
- [9] B.F. Armaly, F. Durst, J. C. F. Pereira, B. Schonung, "Experimental and theoretical investigation of backward facing step flow", Journal of Fluid Mechanics, vol. 127, p. 473-496, 1983.

- [10] A.K. Chaniotis, D. Poulidakos, P. Koumoutsakos, “Remeshed Smoothed Particle Hydrodynamics for the simulation of viscous and heat conduction flows”, *Journal of Computational Physics*, vol. 182, p.67-90, 2002.
- [11] S. B. Pope, “Turbulent flows”, Cambridge University Press, October 16, 2000, ISBN-10: 0521598869, ISBN-13: 978-0521598866.
- [12] S. Kvicinsky, “Method d’analyse des écoulements 3D a surface libre: application aux turbines Pelton”, These N°2526, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, 2002.
- [13] J.C. Marongiu, F. Leboeuf, E. Parkinson, “Numerical simulation of the flow in a Pelton turbine using the meshless method smoothed particle hydrodynamics: a new simple boundary treatment”, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, vol. 221, Part A: *Journal of Power and Energy*, 2007.
- [14] J. Anagnostopoulos, P. Koukouvinis, F. Stamatelos, D. Papantonis, “Optimal design and experimental validation of a Turgo model Hydro turbine”, *Proceedings of the 11th Conference on Engineering Systems Design and Analysis (ESDA 2012)*, Nantes, France, 2012.
- [15] K. Giannakoglou, “Optimization methods for aerodynamics”, 4<sup>rd</sup> edition, NTUA publishing, Athens 2006.
- [16] A. Parshikov, S. Medin, “Smoothed Particle Hydrodynamics using interparticle contact algorithms”, *Journal of computational physics*, vol. 180, p. 358-382, 2002. DOI: 10.1006/jcph.2002.7099.
- [17] E.F. Toro, “Riemann Solvers and Numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction”, 3<sup>rd</sup> edition, Springer, 2009, ISBN 978-3-540-25202-3, e-ISBN 978-3-540-49834-6, DOI: 10.1007/978-3-540-49834-6.
- [18] F. Dubois, “Partial Riemann problem, boundary conditions and gas dynamics”, *Absorbing boundaries and layers, domain decomposition methods: application to large scale computations*, p. 16-77, New York 2001, Nova Science Publishers.
- [19] J.C. Marongiu, F. Leboeuf, J. Caro, E. Parkinson, “Free-surface flows using an hybrid SPH-ALE method”, *Journal of Hydraulic Research*, vol. 48, extra issue 2010, p. 40-49, DOI: 10.3826/jhr.2010.0002.
- [20] J. P. Vila, “On weighted methods and smooth particle hydrodynamics”, *Mathematical models and methods in applied sciences*, vol. 9, issue 2, p. 161-209, March 1999, DOI: 10.1142/S0218202599000117
- [21] J.C. Marongiu, F. Leboeuf, J. Caro, E. Parkinson, “Low mach number numerical schemes for the SPH-ALE method. Application in free surface flow in Pelton turbines”, 4<sup>th</sup> Spheric Workshop, Nantes, 27-29 May 2009, France.
- [22] D. Drikakis, Rider W., “High resolution methods for Incompressible and low speed flows”, Springer, 2005.