



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Διπλωματική Εργασία

**Η μέθοδος των Καυστικών στη
μελέτη του Βραζιλιανού δίσκου**

Γεώργιος Γ. Μπακάλης

Επιβλέπων Καθηγητής

Δρ. Σ. Κ. Κουρκουλής

Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα 2012

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία ασχολείται με τη μελέτη του ρηγματωμένου και αρηγμάτωτου Βραζιλιανού δίσκου. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιείται η οπτική μέθοδος των καυστικών στην προσπάθεια να ερευνηθούν δύο σημαντικά θέματα του προβλήματος: το μήκος επαφής δοκιμίου - αρπάγης και οι συντελεστές έντασης των τάσεων. Η μελέτη αυτή πραγματοποιήθηκε στο Εργαστήριο Αντοχής Υλικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου υπό την επίβλεψη του Αναπληρωτή καθηγητή Δρ. Σ. Κ. Κουρκουλή.

Εμπνευστής της εργασίας αυτής ήταν ένας άνθρωπος, ο οποίος από το πρώτο κιόλας έτος των σπουδών μου, επηρέασε σημαντικά τόσο εμένα προσωπικά, όσο και τη μετέπειτα πορεία των σπουδών μου. Θα ήθελα, λοιπόν, να ευχαριστήσω τον τ. καθηγητή κ. Δ. Πάζη, τόσο για την πρόταση αυτής της διπλωματικής εργασίας, όσο και για τη στήριξή του, η οποία συνεχίστηκε και αφότου συνταξιοδοτήθηκε. Επίσης, ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στον αναπληρωτή καθηγητή και επιβλέποντα της εργασίας Δρ. Σ. Κ. Κουρκουλή για την ευκαιρία που μου έδωσε να συνεργαστώ μαζί του, αλλά και για την αρωγή και καθοδήγηση που μου παρείχε καθ'όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας. Συνοδοιπόρος στην πορεία των πειραμάτων ήταν ο υποψήφιος διδάκτορας του τομέα μηχανικής Α. Λεβαντής, τον οποίο και θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά για τη συνεργασία μας. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους υποψήφιους διδάκτορες Ε. Πάσιου, Μ. Πανά, Π. Χατζηστέργο, Α. Μητουσούδη και Ε. Γιάνναρη, οι οποίοι με βοήθησαν σε οτιδήποτε και αν χρειάστηκα και υπέμειναν αδιαμαρτύρητα το σκοτάδι της αίθουσας που όλοι μοιραζόμασταν, το οποίο απαιτείται στα πειράματα καυστικών.

Περίληψη

Το πείραμα του Βραζιλιανού δίσκου αποτελεί ένα από τα πιο ευρέως διαδεδομένα πειράματα προσδιορισμού εφελκυστικής αντοχής ψαθυρών υλικών. Από την δεκαετία του '40 που εισήχθη ως πειραματική μέθοδος έως και σήμερα, έχει απασχολήσει αρκετές φορές την επιστημονική κοινότητα, με πολλούς επιστήμονες να μελετούν κατά καιρούς πτυχές αυτής της τεχνικής στην προσπάθειά τους να την βελτιώσουν. Στην συγκεκριμένη διπλωματική εργασία επιλέξαμε να μελετήσουμε πειραματικά, με τη μέθοδο των καυστικών, δύο σημαντικά θέματα του προβλήματος. Αυτά ήταν ο υπολογισμός του μήκους επαφής μεταξύ δοκιμίου - αρπάγης και ο προσδιορισμός των συντελεστών έντασης τάσεων για γωνίες κλίσης της ρωγμής από 0° έως και 30° . Η επιλογή αυτή δεν έγινε τυχαία. Όσον αφορά το μήκος επαφής, ο λόγος που μας έκανε να θελήσουμε να το μετρήσουμε πειραματικά ήταν οι διάφορες παραδοχές που έχουν γίνει κατά καιρούς στις λύσεις του προβλήματος, οι οποίες αφορούν την κατανομή του φορτίου της μηχανής στο σύνορο του δοκιμίου. Έτσι, μετρώντας το συγκεκριμένο μήκος επαφής, προσπαθήσαμε να βρούμε εάν και κατά πόσο το εφαρμοζόμενο φορτίο μπορεί να θεωρηθεί σημειακό ή όχι. Σχετικά με τους συντελεστές έντασης των τάσεων, προσπαθήσαμε να επιβεβαιώσουμε τη μετάβαση από συνθήκες καθαρού mode I σε καθαρού mode II, οι οποίες εμφανίζονται σύμφωνα με τη θεωρία για το προαναφερθέν εύρος γωνιών, και να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που βρήκαμε με την κλειστή αναλυτική λύση του προβλήματος. Περιληπτικά τα κεφάλαια περιέχουν τα ακόλουθα:

Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας περιγράφεται αναλυτικά η μέθοδος των καυστικών στη γενική της μορφή, όπως προκύπτει για τη θεώρηση απείρων μέσων, αλλά και πιο συγκεκριμένα, για την περίπτωση της άπειρης ρηγματωμένης πλάκας. Στο δεύτερο κεφάλαιο, παρουσιάζεται η ιστορική εξέλιξη του πειράματος του ρηγματωμένου και αρηγμάτωτου Βραζιλιανού δίσκου μαζί με μια συνοπτική παρουσίαση της κλειστής θεωρητικής λύσης, τόσο για τον αρηγμάτωτο όσο και για τον ρηγματωμένο Βραζιλιανό δίσκο. Στο τρίτο κεφάλαιο, περιγράφεται αναλυτικά η πειραματική διαδικασία που ακολουθήθηκε στη μελέτη μας στα πειράματα του ρηγματωμένου και αρηγμάτωτου δίσκου. Εξηγείται πλήρως η διαδικασία κοπής των δοκιμίων, καθώς και τα επιπρόσθετα πειράματα που έγιναν για τον προσδιορισμό των οπτικών και των ελαστικών σταθερών του υλικού. Τέλος, στο κεφάλαιο αυτό

εξηγείται ο τρόπος προσδιορισμού των ζητούμενων μεγεθών σε κάθε περίπτωση ξεχωριστά. Στο τέταρτο κεφάλαιο, παρουσιάζονται τα πειραματικά αποτελέσματα κάθε σειράς πειραμάτων συγκριτικά με τη θεωρία μαζί με τα σχετικά διαγράμματα. Στο πέμπτο κεφάλαιο, τέλος, παρατίθενται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τη συγκεκριμένη μελέτη καθώς και προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

Ελπίζω η παρούσα εργασία να αποτελέσει έναυσμα για κάποιον, φοιτητή ή μη, ώστε να εμβαθύνει στο συγκεκριμένο επιστημονικό αντικείμενο.

Αθήνα, Μάρτιος 2012
Γιώργος Ι. Μπακάλης

Abstract

The Brazilian disc test is one of the most widely used experimental techniques for the determination of the tensile strength of brittle materials. The method was presented in the early '40s and is still under discussion among many scientists. In this paper we choose to use the optical method of caustics as to investigate experimentally two aspects of this experiment: the contact length between the two compressed discs and the stress intensity factors which result from the test for angles of crack inclination in the range $0^\circ - 30^\circ$. This selection was made due to two basic assumptions that are considered in the various theoretical solutions of the problem. For that reason, we computed the above mentioned quantities and we compared them with the theoretical ones. The thesis is structured as follows:

The first chapter contains an analytical description of the caustics method in their generalized form and the special case of the infinite cracked plate. In the second chapter, the Brazilian test's solution is described for both cracked and non-cracked cases with a view on its history. The third chapter involves the experimental procedure we followed and the way we calculated the results. In the fourth chapter, we present the results of the experiments in comparison with the theoretical values. Finally, in the fifth chapter, we present some conclusion remarks and we suggest some projects for future research.

Περιεχόμενα

Πρόλογος.....	i
Περίληψη.....	iii
Abstract.....	v

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ

1.1 Εισαγωγή.....	1
1.2 Γεωμετρική Οπτική.....	6
1.2.1 Μεταβολή φωτεινότητας μέσα στα υλικά.....	6
1.2.2 Μεταβολή οπτικού δρόμου σε φορτισμένο και αφόρτιστο δοκίμιο.....	7
1.3 Περιγραφή της μεθόδου των καυστικών.....	10
1.4 Εφαρμογή για οπτικώς ισότροπα υλικά.....	13
1.5 Μεταβολή της φωτεινότητας στο πέτασμα	16
1.6 Καυστική σε άπειρη ρηγματωμένη πλάκα.....	19
1.7 Σχόλια γύρω από την μέθοδο των καυστικών.....	25

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

Ο ΒΡΑΖΙΛΙΑΝΟΣ ΔΙΣΚΟΣ

2.1 Εισαγωγή.....	29
2.2 Ο αρηγμάτωτος βραζιλιανός δίσκος - Το πρόβλημα του Hertz.....	31
2.2.1 Κλειστή λύση αρηγμάωτου δίσκου.....	31
2.2.2 Το πρόβλημα του Hertz.....	32
2.3 Ο ρηγματωμένος βραζιλιανός δίσκος.....	35
2.4 Περιγραφή της κλειστής λύσης του ρηγματωμένου βραζιλιανού δίσκου.....	37

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

3.1 Γενικά.....	47
3.2 Προσδιορισμός των ελαστικών σταθερών.....	47
3.3 Πειράματα καυστικών.....	49
3.3.1 Οπτική διάταξη.....	49
3.3.2 Προσδιορισμός τασεοπτικών σταθερών.....	50
3.3.3 Προετοιμασία δοκιμίων.....	56
3.3.4 Πειράματα αρηγμάτωτου δίσκου.....	56
3.3.5 Πειράματα ρηγματωμένου δίσκου.....	62
3.3.6 Διαδικασία επεξεργασίας πειραμάτων.....	62

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΩΝ

4.1 Αποτελέσματα αρηγμάτωτου δίσκου.....	66
4.2 Αποτελέσματα ρηγματωμένου δίσκου	71

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

5.1 Πειράματα αρηγμάτωτου δίσκου.....	98
5.2 Πειράματα ρηγματωμένου δίσκου.....	99
Βιβλιογραφία.....	104

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Η ΟΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ

Η ΟΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ

1.1 Εισαγωγή

Η μέθοδος των καυστικών είναι μια πειραματική μέθοδος η οποία βασίζεται στις αρχές της γεωμετρικής οπτικής. Πρόκειται για μια μέθοδο πολύ ευαίσθητη στα τασικά πεδία και ως εκ τούτου είναι ιδιαίτερος χρήσιμη, και σε μερικές περιπτώσεις μοναδική, για τον ποσοτικό προσδιορισμό εντατικών μεγεθών όπως ο συντελεστής έντασης των τάσεων, ο συντελεστής συγκέντρωσης των τάσεων κτλ. Η όλη ιδέα της μεθόδου είναι αρκετά απλή. Η παρουσία τάσεων σε ένα σώμα αλλάζει τόσο την γεωμετρία του όσο και τις οπτικές του ιδιότητες. Η αλλαγή της γεωμετρίας αφορά κυρίως την μεταβολή του πάχους του δοκιμίου, που προσδιορίζεται πλήρως από τον γνωστό νόμο του Hooke, ενώ η αλλαγή των οπτικών σταθερών περιγράφεται από τον τασεοπτικό νόμο Maxwell-Neumann. Εάν υποθέσουμε τώρα ότι πάνω σε ένα φορτισμένο δοκίμιο προσπίπτουν ακτίνες φωτός, τότε ο οπτικός δρόμος που θα ακολουθήσουν διαφέρει σημαντικά από εκείνον που θα ακολουθούσαν εάν το δοκίμιο ήταν αφόρτιστο. Η απόκλιση αυτή εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από την μηχανική καταπόνηση. Όταν πληρούνται ορισμένες συνθήκες, οι φωτεινές ακτίνες όπως τις παρατηρούμε σε ένα πέτασμα συγκεντρώνονται σε κάποιες χαρακτηριστικές καμπύλες μεγάλης φωτεινότητας, τις καυστικές, η παραμετρική εξίσωση των οποίων είναι γνωστή. Έτσι, η τασική ιδιομορφία έχει μετατραπεί σε οπτική ιδιομορφία. Γνωρίζοντας τώρα τον νόμο μετασχηματισμού των ακτινών του φωτός, που μαθηματικά συνδέεται με την εντατική κατάσταση, μπορούμε να πάρουμε πληροφορίες για το εντατικό μέγεθος που μας ενδιαφέρει πολύ εύκολα μετρώντας κάποια χαρακτηριστική διάσταση της καμπύλης. Αξίζει να σημειωθεί ότι η μέθοδος των καυστικών έχει εφαρμογή μόνο σε περιοχές που υπάρχει απότομη μεταβολή του τασικού πεδίου όπως για παράδειγμα κοντά σε ρωγμές, σε σπές και στα σύνορα των δοκιμίων αφού όπως θα δούμε στη συνέχεια μόνο τότε δημιουργούνται οι χαρακτηριστικές αυτές καμπύλες.

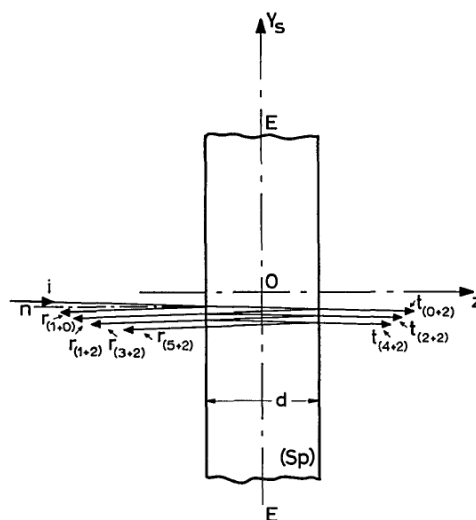
Η αρχική θεώρηση της μεθόδου των καυστικών, η οποία εισήχθη από τον Manogg το 1964, αφορούσε την μεταβολή του φωτός που περνούσε μέσα από διαφανή δοκίμια τόσο σε στατικά όσο και σε δυναμικά προβλήματα. Όμως, αυτό είχε σαν αποτέλεσμα να περιορίζεται η εφαρμογή της μεθόδου μόνο σε διαφανή υλικά (κυρίως από Plexiglas). Από το 1971 και έπειτα, ο τότε καθηγητής του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου Π.Σ. Θεοχάρης και οι

συνεργάτες του διεύρυναν το πεδίο εφαρμογής, δίνοντας την περιγραφή της μεθόδου για την περίπτωση που οι φωτεινές ακτίνες δεν διέρχονται μέσα από το δοκίμιο, αλλά ανακλώνται από αυτό. Έτσι, το πεδίο εφαρμογής της μεθόδου επεκτάθηκε και στα αδιαφανή υλικά, ενώ ταυτόχρονα μια σειρά από ιδιότητες της μεθόδου (που ήταν αδύνατο να εμφανισθούν στην μέθοδο της διέλευσης) εμπλούτισαν την πειραματική τεχνική δίνοντας στους ερευνητές μια σαφώς καλύτερη πληροφόρηση για τα φαινόμενα που μελετούσαν.

1.2 Γεωμετρική οπτική

1.2.1 Μεταβολή φωτεινότητας μέσα στα υλικά

Ας θεωρήσουμε μια μονοχρωματική φωτεινή ακτίνα η οποία διαδίδεται στο χώρο. Υποθέτουμε ότι τα φαινόμενα περίθλασης λόγω της κυματικής φύσης του φωτός είναι αμελητέα και ως εκ τούτου σε ομογενή μέσα η διαδρομή της από ένα σημείο P σε ένα σημείο P' είναι ευθύγραμμη. Όταν η ακτίνα προσπέσει κάθετα σε μια διαφανή επίπεδη πλάκα (Σχήμα 1.1), ένα μέρος της θα ανακλαστεί από την μπροστινή επιφάνεια, ενώ το υπόλοιπο θα διαθλαστεί στο εσωτερικό. Η διαθλωμένη ακτίνα με τη σειρά της θα ανακλαστεί στην πίσω επιφάνεια κατά ένα μέρος και το υπόλοιπο θα διαθλαστεί ξανά, διερχόμενο από την πίσω επιφάνεια του υλικού. Η διαδικασία αυτή, που επαναλαμβάνεται άπειρες φορές, περιγράφεται μαθηματικά από τον γνωστό νόμο του Snell.



Σχήμα 1. 1

Όμως, σε κάθε ανάκλαση και διάθλαση η ένταση της φωτεινής ακτίνας ελαττώνεται με αποτέλεσμα ύστερα από κάποιες προσπτώσεις οι φωτεινές ακτίνες να μην έχουν αρκετή ένταση ώστε να γίνονται αντιληπτές. Ποσοτικά η φωτεινότητα κάθε ακτίνας ως ποσοστό της αρχικής ισούται με: $I_{k+l}^{r,t} = R^k (1 - R)^l I_1$ [1]. Οι δείκτες r,t υποδηλώνουν ανακλώμενη και διερχόμενη ακτίνα αντίστοιχα, οι k, l τον αριθμό των ανακλάσεων και των διελεύσεων. Με I_1 συμβολίζεται η φωτεινότητα της αρχικής ακτίνας. Τέλος, η παράμετρος R ισούται με: $R = (n - 1)^2 / (n + 1)^2$. Έτσι, οι μόνες ακτίνες που έχουν αξιόλογη

φωτεινότητα ώστε να τις παρατηρήσουμε είναι η ανακλώμενη από την εμπρός επιφάνεια (με φωτεινότητα $I_{1+0}^r = 0,04I$), η ανακλώμενη από την πίσω επιφάνεια ($I_{1+2}^r = 0,037I$) και η πρώτη που διέρχεται από την άλλη πλευρά του δοκιμίου ($I_{0+2}^t = 0,92I$).

1.2.2 Μεταβολή οπτικού δρόμου σε φορτισμένο και αφόρτιστο δοκίμιο

Έστω μια φωτεινή ακτίνα η οποία διασχίζει τις οπτικές διαδρομές s_1, s_2, \dots, s_n με αντίστοιχους δείκτες διαθλάσεως n_1, n_2, \dots, n_n . Ο συνολικός χρόνος της διαδρομής, που ονομάζεται και οπτικός δρόμος, θα ισούται με: $t = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^n n_i s_i$, όπου c η ταχύτητα του φωτός στο κενό. Με βάση αυτό τον τύπο θα υπολογίσουμε τη διαφορά του οπτικού δρόμου που θα ακολουθήσουν οι τρεις φωτεινές ακτίνες που μας ενδιαφέρουν, η πρώτη ανακλώμενη, η δεύτερη ανακλώμενη και η διερχόμενη από το δοκίμιο.

Ας θεωρήσουμε την φωτεινή ακτίνα ABDE (Σχήμα 1.2) πολωμένη είτε κατά τη διεύθυνση της κύριας τάσης σ_1 , είτε της κύριας τάσης σ_2 , που προσπίπτει κάθετα σε πλάκα που βρίσκεται υπό κατάσταση επίπεδης έντασης. Για την ανακλώμενη από την πίσω επιφάνεια, ο οπτικός δρόμος όταν η πλάκα είναι αφόρτιστη είναι:

$$s_A = 2(AB)\eta_0 + 2d\eta \quad (1.1)$$

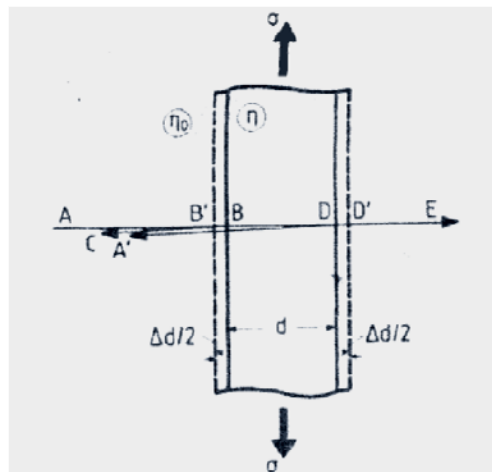
όπου d είναι το πάχος του δοκιμίου, η_0 ο δείκτης διαθλάσεως του περιβάλλοντος και η ο δείκτης διαθλάσεως του υλικού της αφόρτιστης πλάκας.

Αν επιβάλλουμε μια φόρτιση τότε το πάχος της πλάκας και ο δείκτης διάθλασής της θα αλλάξουν. Έτσι, ο παραπάνω οπτικός δρόμος θα γίνει:

$$s_{L_{1,2}} = 2 \left((AB) - \frac{\Delta d}{2} \right) \eta_0 + 2(d + \Delta d)\eta_{1,2} \quad (1.2)$$

όπου Δd είναι η αλλαγή στο πάχος λόγω της φόρτισης και $\eta_{1,2}$ είναι ο δείκτης διάθλασης που έχει το φορτισμένο υλικό στις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων $\sigma_{1,2}$ αντίστοιχα. Θέτουμε:

$$\eta_{1,2} = \eta + \Delta\eta_{1,2} \quad (1.3)$$



Σχήμα 1.2

όπου $\Delta\eta_{1,2}$ είναι η μεταβολή του δείκτη διάθλασης. Η μεταβολή του οπτικού δρόμου της ακτίνας $ABDA'$ που οφείλεται στη φόρτιση δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta s_{r_{1,2}} = s_{L_{1,2}} - s_A = 2 \left[(\eta_{1,2} - \eta) d + \left(\eta - \frac{\eta_0}{2} \right) \Delta d \right] \quad (1.4)$$

Με όμοιο τρόπο δείχνουμε ότι για την οπτική ακτίνα $ABDE$ που διέρχεται από την άλλη πλευρά της πλάκας, η διαφορά στον οπτικό δρόμο λόγω της φόρτισης είναι:

$$\Delta s_t = (\eta_{1,2} - \eta) d + (\eta - \eta_0) \Delta d \quad (1.5)$$

Ενώ για την ανακλώμενη από την εμπρός επιφάνεια ABC η μεταβολή στον οπτικό δρόμο είναι:

$$\Delta s_f = -\eta_0 \Delta d \quad (1.6)$$

Οι μεταβολές του δείκτη διάθλασης στις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων υπολογίζονται από το νόμο των Maxwell – Neumann:

$$\Delta\eta_{1,2} = \eta_{1,2} - \eta = b_1 \varepsilon_{1,2} + b_2 (\varepsilon_{2,1} + \varepsilon_3) \quad (1.7)$$

όπου b_1, b_2 σταθερές του υλικού και $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ οι κύριες τροπές. Επιπλέον, ισχύει ο νόμος του Hooke:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{E} (\sigma_{1,2} - \nu \sigma_{2,1}) \quad (1.8)$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (1.9)$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{\Delta d}{d} \quad (1.10)$$

Η μεταβολή των οπτικών δρόμων των ακτίνων $ABDA'$ και $ABDE$ δίνονται από τις συνθήκες Favre:

$$\Delta s_{r_{1,2}} = 2c_r [(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \xi_r (\sigma_1 - \sigma_2)] d \quad (1.11)$$

$$\Delta s_{t_{1,2}} = c_t [(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \xi_r (\sigma_1 - \sigma_2)] d \quad (1.12)$$

όπου $\xi_{r,t}$ είναι ο συντελεστής οπτικής ανισοτροπίας του υλικού και $c_{r,t}$ είναι οι ταυροοπτικές σταθερές οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις:

$$c_{r,t} = \frac{\alpha_{r,t} + \beta_{r,t}}{2} \quad , \quad \xi_{r,t} = \frac{\alpha_{r,t} - \beta_{r,t}}{\alpha_{r,t} + \beta_{r,t}} \quad (1.13)$$

όπου:

$$\alpha_r = \frac{1}{E} \left[b_1 - 2\nu b_2 - \nu \left(\eta - \frac{\eta_0}{2} \right) \right] \quad \beta_r = \frac{1}{E} \left[b_2 - \nu(b_1 + b_2) - \nu \left(\eta - \frac{\eta_0}{2} \right) \right]$$

$$\alpha_t = \frac{1}{E} [b_1 - 2\nu b_2 - \nu(\eta - \eta_0)] \quad \beta_t = \frac{1}{E} [b_1 - \nu(b_1 + b_2) - \nu(\eta - \eta_0)]$$

(1.14-1.17)

Για ένα οπτικώς ισότροπο υλικό έχουμε:

$$b_1 = b_2 = b$$

$$\Delta s_{r_1} = \Delta s_{r_2} = 2c_r (\sigma_1 + \sigma_2) d \quad (1.18)$$

$$\Delta s_{t_1} = \Delta s_{t_2} = c_t (\sigma_1 + \sigma_2) d \quad (1.19)$$

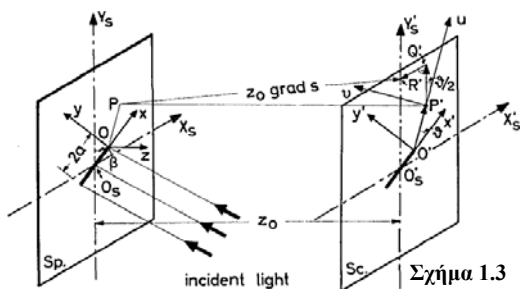
$$\alpha_r = \beta_r = c_r = \frac{1}{E} \left[(1 - 2\nu)b - \nu \left(\eta - \frac{\eta_0}{2} \right) \right] \quad (1.20)$$

$$\alpha_t = \beta_t = c_t = \frac{1}{E} [(1 - 2\nu)b - \nu(\eta - \eta_0)] \quad (1.21)$$

$$\text{Και τελικά προκύπτει: } c_r = c_t - \frac{\nu\eta_0}{2E} \quad (1.22)$$

1.3 Περιγραφή της μεθόδου των καυστικών για την περίπτωση ρηγματωμένων σωμάτων

Ας θεωρήσουμε ένα επίπεδο δοκίμιο (πεπερασμένο ή άπειρο) από μηχανικά ισότροπο υλικό το οποίο φέρει μια ρωγμή όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Για ευκολία θεωρούμε ότι το δοκίμιο συμπίπτει με το επίπεδο O_{xy} για $z = 0$ με την αρχή των αξόνων O να ταυτίζεται με το



Σχήμα 1.3

μέσο της ρωγμής και τον άξονα O_x να ακολουθεί τη διεύθυνση της ρωγμής.. Θα εξετάσουμε την περίπτωση που το φως ανακλάται από το δοκίμιο. Η περίπτωση που το φως διέρχεται μέσα από το δοκίμιο προκύπτει εύκολα με όμοιο τρόπο. Έστω οι παράλληλες φωτεινές ακτίνες που ανακλώνται στην πίσω επιφάνεια της πλάκας. Τα κυματικά μέτωπα που σχηματίζονται για μια δεδομένη στιγμή t_0 , δηλαδή οι επιφάνειες πάνω στις οποίες η φάση του κύματος είναι σταθερή, είναι της μορφής:

$$S(x, y, z) = \text{σταθ}. \quad (1.23)$$

Εάν το $S(x, y)$ εκφράζει τον οπτικό δρόμο της φωτεινής ακτίνας που διέρχεται από το σημείο P μεταξύ δύο παράλληλων επιπέδων τότε ισχύει η σχέση:

$$S(x, y, z) = z - s(x, y) = \text{σταθ}. \quad (1.24)$$

Από την οποία προκύπτει:

$$\text{grad}S(x, y, z) = \vec{k} - \frac{\partial s}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial s}{\partial y} \vec{j} \quad (1.25)$$

Αν υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε ένα πέτασμα παράλληλο στην πλάκα, το οποίο βρίσκεται στην θέση z_0 , τότε η απόκλιση των φωτεινών ακτινών ισούται με ένα διάνυσμα \vec{w} , το οποίο είναι προφανές ότι ισούται με:

$$\vec{w} = z_0 \text{grad}S(x, y, z) \quad (1.26)$$

που με βάση τις παραπάνω σχέσεις γράφεται και:

$$\vec{w} = -z_0 \text{grad}S(x, y) = -z_0 \left(\frac{\partial s}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial s}{\partial y} \vec{j} \right) \quad (1.27)$$

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{w} \quad (1.28)$$

Σύμφωνα με την γεωμετρική οπτική, η απόκλιση δίνεται από την σχέση:

$$\vec{w} = -z_0 \text{grad}S(x, y, z) \quad (1.29)$$

η οποία στο επίπεδο γίνεται:

$$\vec{w} = -z_0 \text{grad}S(x, y) = -\left(\frac{\partial s}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial s}{\partial y} \vec{j} \right) \quad (1.30)$$

Ομοίως για τους οπτικούς δρόμους:

$$s(x, y) = s'_A + \Delta s_{r,t,f}(x, y) \quad (1.31)$$

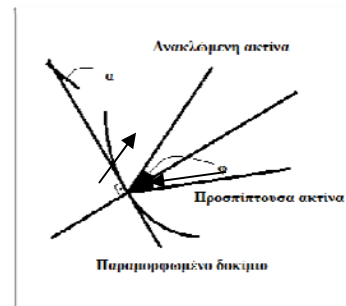
$$\text{Άρα έχουμε:} \quad \vec{w} = -z_0 \text{grad} \Delta s_{r,t,f}(x, y, z) \quad (1.32)$$

Επομένως, το σημείο P του δοκιμίου απεικονίζεται στο πέτασμα που βρίσκεται σε απόσταση z_0 με την παραπάνω σχέση. Η σχέση αυτή ανάλογα με το αν εξετάζουμε την ανάκλαση από την εμπρός επιφάνεια, την πίσω επιφάνεια ή την διέλευση σε ισότροπα υλικά γίνεται:

$$\vec{w} = -\varepsilon z_0 d c_{r,t} \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (1.33)$$

με $\varepsilon=1$ για τη διέλευση και $\varepsilon=2$ για την ανάκλαση από την πίσω επιφάνεια. Στην περίπτωση τώρα που η ακτίνα ανακλάται απευθείας από την εμπρός επιφάνεια, ισχύει ότι αν α είναι η γωνία στροφής λόγω της παραμόρφωσης, τότε από το νόμο του Snell η απόκλιση της ανακλώμενης ακτίνας ισούται με:

$$\varphi = 2\alpha \quad (1.34)$$



Σχήμα 1.4

και η γωνία α δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha = \text{grad} \frac{\Delta d}{2} = -\text{grad} \left[\frac{vd}{E} \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \right] \quad (1.35)$$

Επομένως η γωνία φ είναι:

$$\varphi = -\frac{vd}{E} \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) = -dc_f \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (1.36)$$

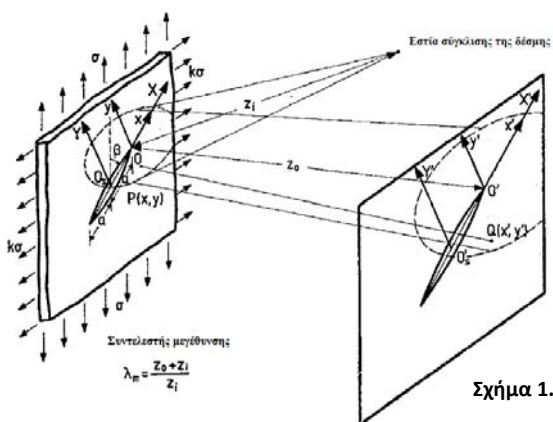
$$\text{όπου: } c_f = \frac{v}{E} \quad (1.37)$$

είναι η τασεοπτική σταθερά για την πρώτη ανακλώμενη ακτίνα από την εμπρός επιφάνεια του δοκιμίου.

Τελικά, το διάνυσμα απόκλισης \vec{w} της ανακλώμενης ακτίνας πάνω στο πέτασμα σε απόσταση z_0 από την πλάκα, ισούται με:

$$\vec{w} = -\epsilon z_0 dc_{r,t,f} \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (1.38)$$

Η παραπάνω ανάλυση ισχύει για την περίπτωση που η δέσμη των φωτεινών ακτίνων είναι παράλληλη και προσπίπτει κάθετα στο δοκίμιο. Πολλές φορές, για να έχουμε καλύτερη ανάλυση στο πείραμά μας, ρυθμίζουμε τη δέσμη ώστε πριν συναντήσει το δοκίμιο να είναι συγκλίνουσα (+) ή αποκλίνουσα (-). Αυτή η τεχνική μας δίνει μια μεγέθυνση στην εικόνα του πετάσματος που κάνει τις καμπύλες πιο ευδιάκριτες. Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται ο τρόπος που επιτυγχάνεται η μεγέθυνση στην περίπτωση της αποκλίνουσας δέσμης. Τότε, ο συντελεστής της οπτικής μεγέθυνσης δίνεται από τη σχέση:



$$\lambda_m = \frac{z_0 \pm z_i}{z_i} \quad (1.39-1.40)$$

όπου z_0 είναι η απόσταση του πετάσματος από την πλάκα και z_i είναι η απόσταση της εστίας της φωτεινής δέσμης από την πλάκα. Προφανώς αν η δέσμη είναι παράλληλη η τιμή της σταθεράς ισούται με τη μονάδα. Σε κάθε περίπτωση για λόγους ευκολίας ενσωματώνουμε τη σταθερά αυτή στις εξισώσεις μας θέτοντας:

$$C_{r,t,f}^* = -\frac{\epsilon z_0 d C_{r,t,f}}{\lambda_m} \quad (1.41)$$

1.4 Εφαρμογή για οπτικώς ισότροπα υλικά

Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα απόκλισης εξαρτάται από την πρώτη αναλλοίωτη του τανυστή των τάσεων, η οποία μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4\text{Re}\varphi(z) \quad (1.42)$$

όπου $\varphi(z)$ αναλυτική συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής z . Θεωρούμε ότι η $\varphi(z)$ είναι της μορφής:

$$\varphi(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (1.43)$$

με $u(x, y), v(x, y)$ πραγματικές συναρτήσεις των μεταβλητών x, y που ικανοποιούν τις συνθήκες Cauchy – Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.44)$$

Είναι προφανές ότι οι συναρτήσεις u, v ικανοποιούν την αρμονική εξίσωση Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (1.45)$$

Η απόκλιση του φωτός για ισότροπα υλικά δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{w} = C_{r,t,f}^* \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) = 4C_{r,t,f}^* \text{gradRe}\varphi(z) = 4C_{r,t,f}^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} \right) \quad (1.46)$$

ενώ στο μιγαδικό επίπεδο γίνεται:

$$\vec{w} = 4C_{r,t,f}^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.47)$$

Το διάνυσμα αυτό εκφράζει την απόκλιση μιας τυχαίας ακτίνας φωτός που διέρχεται από ένα σημείο P του δοκιμίου πάνω σ' ένα πέτασμα αναφοράς που βρίσκεται σε απόσταση z_0 από την πλάκα. Εάν θεωρήσουμε ένα σύστημα αναφοράς $O'_{x'y'z'}$ πάνω στο πέτασμα (όπως φαίνεται στο σχήμα) τότε το διάνυσμα απόκλισης ισούται με: $\vec{W} = \vec{z} + \vec{w}$ το οποίο στο μιγαδικό επίπεδο γίνεται:

$$W = z + w = x + iy + 4C_{r,t,f}^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.48)$$

Το διάνυσμα \vec{W} στο μιγαδικό επίπεδο γίνεται:

$$W = x' + iy' \quad (1.49)$$

και η σχέση (1.48) γίνεται:

$$x' + iy' = \left(x + 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial u}{\partial x} \right) + i \left(y + 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.50)$$

Η οποία μας δίνει τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$x' = x + 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad y' = y + 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.51)$$

Δηλαδή, το σημείο P με συντεταγμένες (x, y) απεικονίζεται στο πέτασμα στο σημείο με συντεταγμένες (x', y') που δίνονται από τις παραπάνω εξισώσεις. Για να ανήκουν τα σημεία x, y σε μια καμπύλη θα πρέπει το x να παίρνει μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή όταν το y είναι σταθερό ή το αντίστροφο. Η συνθήκη αυτή ικανοποιείται όταν η ιακωβιανή ορίζουσα λαμβάνει την τιμή μηδέν:

$$J = \frac{\partial(x',y')}{\partial(x,y)} = 0 \quad \text{η οποία γράφεται:} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.52)$$

Κάνοντας πράξεις βρίσκουμε ότι τα αντίστοιχα στοιχεία της ορίζουσας ισούνται με:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial x} &= 1 + 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , & & \frac{\partial y'}{\partial y} &= 1 + 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} , \\ \frac{\partial x'}{\partial y} &= 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & , & & \frac{\partial y'}{\partial x} &= 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (1.53)$$

Αντικαθιστώντας τις (1.53) στην (1.52) έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 1 + 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & 1 + 4C_{r,t,f}^* \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.54)$$

Έπειτα από πράξεις προκύπτει:

$$1 + 4C_{r,t,f}^* \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + 16C_{r,t,f}^{*2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = 0 \quad (1.55)$$

Αντικαθιστούμε στην τελευταία σχέση την (1.45) και παίρνουμε:

$$1 + 16C_{r,t,f}^{*2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = 0 \quad (1.56)$$

Παραγωγίζουμε την αναλυτική $\varphi(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ δύο φορές ως προς x και έχουμε:

$$\varphi(z)'' = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (1.57)$$

και από τις σχέσεις Cauchy – Riemann έχουμε:

$$\varphi(z)'' = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - i \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad (1.58)$$

Το μέτρο της συνάρτησης αυτής ισούται με:

$$|\varphi(z)''|^2 = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 \quad (1.59)$$

και από την εξίσωση Laplace προκύπτει:

$$|\varphi(z)''|^2 = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 \quad (1.60)$$

Αντικαθιστώντας την (1.60) στην (1.58) παίρνουμε:

$$|4C_{r,t,f}^* \varphi(z)''|^2 = 1 \quad (1.61)$$

που είναι ισοδύναμη με την:

$$|4C_{r,t,f}^* \varphi(z)''| = 1 \quad (1.62)$$

Η σχέση (1.61) είναι η εξίσωση της αρχικής καμπύλης. Ισχύει:

$$\overline{\varphi(z)'} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.63)$$

και η (1.48) γίνεται:

$$W = z + 4C_{r,t,f}^* \overline{\varphi(z)'} \quad (1.64)$$

που είναι η εξίσωση της καυστικής.

1.5 Μεταβολή της φωτεινότητας στο πέτασμα.

Είδαμε πώς περιγράφεται η μέθοδος των καυστικών ξεκινώντας από το φορτισμένο δοκίμιο και καταλήγοντας στις τελικές εξισώσεις. Παρατηρώντας όμως κανείς τις εικόνες που εμφανίζονται σε ένα πείραμα καυστικών θα διαπιστώσει ότι εντός της καυστικής καμπύλης υπάρχει μια έντονα σκοτεινή περιοχή, ενώ όσο απομακρυνόμαστε από αυτή η φωτεινότητα γίνεται ομοιόμορφη. Η περιγραφή του φαινομένου είναι απλή. Θα εξετάσουμε την περίπτωση της ανάκλασης, καθώς και για την περίπτωση της διέλευσης τα αποτελέσματα είναι παρόμοια. Ας υποθέσουμε ότι παράλληλες

φωτεινές ακτίνες η φωτεινότητα των οποίων (συναρτήσει της θέσης τους) είναι $\xi(x_1, x_2)$ προσπίπτουν στο δοκίμιο [2]. Μετά την ανάκλαση τους, οι ακτίνες θα πάνε να είναι παράλληλες και πιο συγκεκριμένα οι τελικές τους θέσεις θα δίνονται από τις εξισώσεις (1.64). Αν υποθέσουμε ότι το δοκίμιο έχει τέτοιες επιφάνειες ώστε να ανακλώνται τελείως οι φωτεινές ακτίνες που προσπίπτουν σ' αυτό, τότε η ενέργεια του φωτός που προσπίπτει παραμένει αναλλοίωτη. Εάν ονομάσουμε D' την επιφάνεια του πετάσματος, τότε από την αρχή διατήρησης της ενέργειας η συνολική ενέργεια E που έχουν οι φωτεινές ακτίνες που προσπίπτουν στην επιφάνεια D του δοκιμίου θα ισούται με την ενέργεια E' που θα έχουν όταν φτάσουν στην επιφάνεια D' του πετάσματος.

$$\text{Επομένως, } E = \iint_D \xi(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 = E' = \iint_{D'} \Xi(\mathbf{X}) dX_1 dX_2 \quad (1.65)$$

όπου $\Xi(\mathbf{X})$ είναι η ένταση του φωτός στο πέτασμα.

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις μετασχηματισμού (1.64) και κάνοντας αλλαγή μεταβλητών στην (1.65) έχουμε:

$$E = \iint_D \xi(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 = E' = \iint_{D'} \Xi(\mathbf{X}(\mathbf{x})) |J(\mathbf{x})| dX_1 dX_2 \quad (1.66)$$

Όπου: $J(\mathbf{x}) = \det(\nabla \mathbf{X})$ η ιακωβιανή ορίζουσα της εξίσωσης μετασχηματισμού (1.64). Αφού η εξίσωση (1.66) ισχύει για κάθε τυχαία περιοχή D έχουμε:

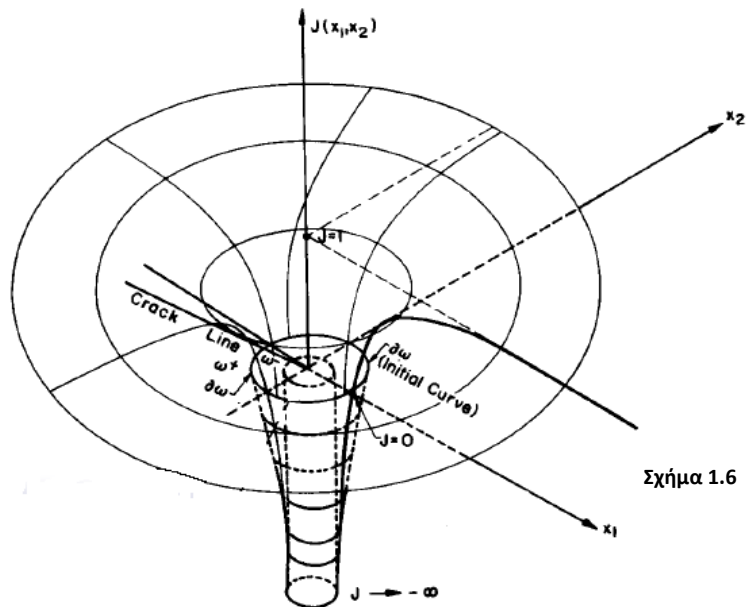
$$\Xi(\mathbf{B}(\mathbf{x}, f)) = \frac{\xi(\mathbf{x})}{J(\mathbf{x})} = \xi(\mathbf{x}) [\det \nabla \mathbf{X}]^{-1} \quad (1.67)$$

Η ιακωβιανή ορίζουσα βάσει των σχέσεων μετασχηματισμού μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$J(\mathbf{x}) = \det(\nabla \mathbf{X}) = \det \left\{ \mathbf{1} - 2\nabla \left[(z_0 - f) \frac{\nabla f}{1 - |\nabla f|^2} \right] \right\} \quad (1.68)$$

με $\mathbf{1}$ τον μοναδιαίο τανυστή.

Όπως είπαμε και στην αρχή, η μέθοδος αυτή έχει εφαρμογή σε περιπτώσεις που υπάρχει απότομη τοπική μεταβολή του τασικού πεδίου. Πράγματι, μακριά από την τασική ιδιομορφία η επιφάνεια είναι σχεδόν επίπεδη, δηλ. $\nabla f \rightarrow 0$ και ο δεύτερος όρος στην εξίσωση (1.67) είναι πολύ μικρός πράγμα που σημαίνει ότι $J \rightarrow \det(\mathbf{1}) = 1$ και $\mathcal{E} \rightarrow \xi$. Επομένως, η ένταση του φωτός στο πέτασμα παραμένει ομοιόμορφη, $\xi(\mathbf{x}) = \xi_0$. Όσο όμως πλησιάζουμε προς την τασική ιδιομορφία, η τιμή της ορίζουσας J μικραίνει και η φωτεινότητα στο πέτασμα μεγαλώνει. Μόλις φτάσουμε τα σημεία της αρχικής καμπύλης, η J μηδενίζεται. Τότε, η φωτεινότητα στα σημεία που έχουν αφετηρία την αρχική καμπύλη γίνεται μέγιστη και έχουμε την παρουσία της καυστικής στο πέτασμα μας. Τα σημεία που βρίσκονται μέσα στην αρχική καμπύλη έχουν ορίζουσα με πολύ μικρή αρνητική τιμή, ενώ όσο πλησιάζουμε προς την τασική ιδιομορφία η ορίζουσα J μικραίνει κι άλλο παίρνοντας την τιμή $-\infty$ όταν $|\nabla f|^2 = 1$. Σε αυτό το σημείο αξίζει να τονίσουμε ότι μετά την αρχική καμπύλη έχουμε μια αλλαγή στο πρόσημο της ορίζουσας J . Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι οι φωτεινές ακτίνες που προσπίπτουν εκτός της αρχικής καμπύλης απεικονίζονται στο πέτασμα εκτός της καυστικής. Οι περιοχές που βρίσκονται πάνω στην αρχική καμπύλη απεικονίζονται ακριβώς πάνω στην καυστική και τέλος οι περιοχές εντός της αρχικής καμπύλης απεικονίζονται και αυτές εκτός της καυστικής. Αυτό εξηγεί τόσο το γιατί ο μηδενισμός της ορίζουσας είναι αναγκαία και ικανή συνθήκη για τη δημιουργία της καυστικής, όσο και το γιατί ακριβώς μετά την καυστική παρουσιάζονται και οι περιοχές αυτές της μηδενικής φωτεινότητας. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται γραφικά η μεταβολή της ιακωβιανής ορίζουσας σε σχέση με το πόσο κοντά στην τασική ιδιομορφία προσπίπτουν οι φωτεινές ακτίνες. Στον άξονα J παριστάνεται η ιακωβιανή ορίζουσα, ενώ οι άξονες x_1, x_2 σχηματίζουν ένα επίπεδο που ταυτίζεται με το επίπεδο που βρίσκεται το δοκίμιο. Είναι προφανές ότι η εν λόγω μεταβολή συμβαίνει πολύ απότομα καθώς πλησιάζουμε στην τασική ιδιομορφία, γεγονός που φανερώνει την ευαισθησία της μεθόδου.



Σχήμα 1.6

Η ιακωβιανή ορίζουσα κοντά στην ιδιομορφία

1.6 Κανστική σε άπειρη ρηγματωμένη πλάκα

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια άπειρη ρηγματωμένη πλάκα σε συνθήκες επίπεδης έντασης όπως αυτή που είδαμε στο σχήμα 2.3. Για ευκολία υποθέτουμε ότι το σύστημα συντεταγμένων μας ξεκινάει από την κορυφή της ρωγμής O με τον άξονα O_x να βρίσκεται κατά μήκος της ρωγμής [3, 4]. Όπως είναι γνωστό, το τασικό πεδίο στην περιοχή O , που βρίσκεται παρά το άκρο της ρωγμής, παρουσιάζει ιδιομορφία της τάξης του $-1/2$, δηλαδή τείνει στο άπειρο με όμοιο τρόπο με την συνάρτηση $r^{-1/2}$ καθώς το $r \rightarrow 0$, όπου το r είναι η ακτινική απόσταση από το σημείο O . Στην περίπτωση αυτή γράφουμε τα σημεία του επιπέδου σε πολικές συντεταγμένες $z = x + iy = r \exp(i\theta)$. Υπό αυτές τις συνθήκες ο συντελεστής έντασης των τάσεων K στο σημείο O δίνεται από την σχέση:

$$K = 2(2\pi)^{1/2} \lim_{z \rightarrow 0} [z^{1/2} \Phi(z)] \quad (1.69)$$

όπου $\Phi(z)$ είναι η τασική συνάρτηση κατά Muskhelishvili. Από την εξίσωση (1.69) λύνοντας ως προς $\Phi(z)$ παίρνουμε για περιοχή κοντά στο άκρο της ρωγμής:

$$\Phi(z) = \frac{K}{[2(2\pi z)^{1/2}]} \quad (1.70)$$

Ο συντελεστής K είναι γενικά μια μιγαδική ποσότητα της μορφής:

$$K = K_I - iK_{II} \quad (1.71)$$

όπου K_I, K_{II} είναι οι συντελεστές έντασης των τάσεων για καταπονήσεις τύπου mode I και mode II αντίστοιχα. Αν χρησιμοποιήσουμε τώρα τη σχέση (1.70) στην εξίσωση (1.62) της αρχικής καμπύλης αντικαθιστώντας το $\Phi(z)$, βρίσκουμε ότι η καμπύλη αυτή αποτελεί κύκλο ακτίνας:

$$r = r_0 = \left[\frac{3}{8(2\pi)^{1/2}} |CK| \right]^{2/5} = 0.4677 |CK|^{2/5} \quad (1.72)$$

Παρατηρούμε ότι η ακτίνα της αρχικής καμπύλης εξαρτάται από δύο παραμέτρους. Τον συντελεστή έντασης των τάσεων K και την οπτική σταθερά C που εξαρτάται από την οπτική διάταξη. Επίσης, ο εν λόγω κύκλος διακόπτεται σε ένα σημείο από την παρουσία της ρωγμής. Δηλαδή, ξεκινάει από το αρνητικό χείλος της ρωγμής για γωνία $\theta = -\pi$ και καταλήγει στο θετικό χείλος για γωνία $\theta = \pi$.

Οι παραμετρικές εξισώσεις των καυστικών έπειτα από αντικατάσταση της $\Phi(z)$ γίνονται:

$$W = X + iY = \lambda_m \left\{ r_0 \exp(i\theta) - \frac{C\bar{K}}{4(2\pi)^{1/2}} r_0^{-3/2} \exp\left(\frac{3i\theta}{2}\right) \right\}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \quad (1.73)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την εξίσωση (1.72) έχουμε:

$$W = X + iY = \lambda_m r_0 \left\{ \exp(i\theta) - \frac{2\bar{\alpha}}{3} \exp\left(\frac{3i\theta}{2}\right) \right\}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \quad (1.74)$$

$$\text{όπου: } \alpha = -CK/|CK| \quad (1.75)$$

και το $\bar{\alpha}$ είναι ο συζυγής μιγαδικός του α . Εάν επιπλέον εκφράσουμε τον συντελεστή έντασης των τάσεων K σε πολικές συνταγμένες έχουμε:

$$K = |K| \exp(-i\omega) \quad (1.76)$$

$$\text{με } \omega = \tan^{-1}(K_{II}/K_I) \quad (1.77)$$

Η εξίσωση (1.74) μπορεί να γίνει:

$$W = X + iY = \lambda_m r_0 \left\{ \exp(i\theta) + \frac{2\varepsilon}{3} \exp\left[i\left(\frac{3\theta}{2} + \omega\right)\right] \right\}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \quad (1.78)$$

$$\text{με } \varepsilon = -C/|C| = -\text{sign}C \quad (1.79)$$

$$\text{Τέλος, θέτοντας: } \mu = K_{II}/K_I = \tan \omega \quad (1.80)$$

η (1.78) παίρνει τη μορφή:

$$W = X + iY = \lambda_m r_0 \left\{ \exp(i\theta) + \frac{2\varepsilon}{3} \frac{1+i\mu}{(1+\mu^2)^{1/2}} \exp\left(\frac{3i\theta}{2}\right) \right\} \quad (1.81)$$

Η εξίσωση (1.78) είναι ισοδύναμη με τις:

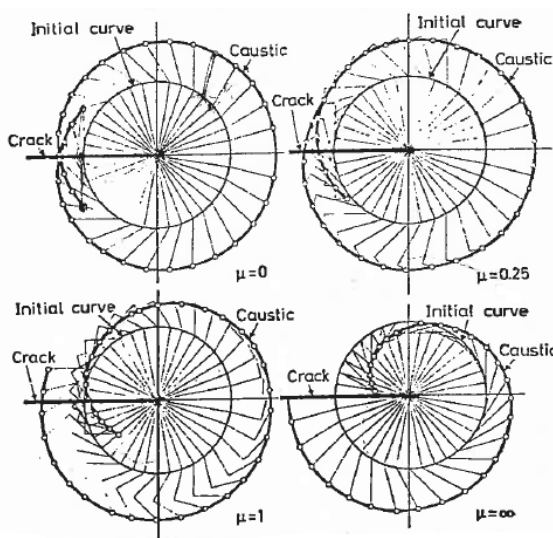
$$\begin{aligned} X &= \lambda_m r_0 \left\{ \cos \theta + \frac{2\varepsilon}{3} \cos\left(\frac{3\theta}{2} + \omega\right) \right\} \\ Y &= \lambda_m r_0 \left\{ \sin \theta + \frac{2\varepsilon}{3} \sin\left(\frac{3\theta}{2} + \omega\right) \right\} \quad -\pi \leq \theta \leq \pi. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Όπως επίσης και η (1.81) είναι ισοδύναμη με τις:

$$\begin{aligned} X &= \lambda_m r_0 \left\{ \cos \theta + \frac{2\varepsilon}{3} (1 + \mu^2)^{-1/2} \left[\cos \frac{3\theta}{2} - \mu \sin \frac{3\theta}{2} \right] \right\}, \\ Y &= \lambda_m r_0 \left\{ \sin \theta + \frac{2\varepsilon}{3} (1 + \mu^2)^{-1/2} \left[\sin \frac{3\theta}{2} + \mu \cos \frac{3\theta}{2} \right] \right\}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \end{aligned} \quad (1.83)$$

Εάν προσπαθήσουμε να σχεδιάσουμε τις παραπάνω σχέσεις θα δούμε ότι δημιουργούνται δύο καυστικές καμπύλες. Αυτό συμβαίνει διότι η παράμετρος ε παίρνει τις τιμές ± 1 για κάθε τιμή της παραμέτρου μ . Η φυσική σημασία

αυτού του "διπλού" προσήμου είναι ότι έχουμε δύο ανακλάσεις: μια από την εμπρός επιφάνεια και μια από την πίσω. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι καυστικές για τιμές του $\mu=0, 0.25, 1, \infty$ για $\varepsilon=1$ μαζί με τις αντίστοιχες αρχικές καμπύλες.



Σχήμα 1.7

Οι καυστικές καμπύλες καθώς μεταβαίνουμε από Mode I σε Mode II

Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση παρουσιάζεται όταν στρέψουμε το σύστημα συντεταγμένων O_{xy} κατά -2ω έτσι ώστε να συμπίπτει με το σύστημα $O_{x'y'}$.

$$\text{Επειδή } z' = x' + iy' = r \exp(i\theta') \quad , \quad \theta = \theta' - 2\omega \quad (1.84)$$

η (1.78) γίνεται:

$$W' = X' + iY' = \lambda_m r_0 \left\{ \exp(i\theta') - \frac{2\varepsilon}{3} \exp\left(\frac{3i\theta'}{2}\right) \right\}, \quad -\pi + 2\omega \leq \theta' \leq \pi + 2\omega \quad (1.85)$$

ή κατά x και y:

$$X' = \lambda_m r_0 \left\{ \cos \theta' + \frac{2\varepsilon}{3} \cos\left(\frac{3\theta'}{2}\right) \right\}, \quad Y' = \lambda_m r_0 \left\{ \sin \theta' + \frac{2\varepsilon}{3} \sin\left(\frac{3\theta'}{2}\right) \right\}$$

$$-\pi + 2\omega \leq \theta' \leq \pi + 2\omega \quad (1.86)$$

Δίνοντας στο ε τις τιμές ± 1 οι παραπάνω εξισώσεις γίνονται:

$$X' = \lambda_m r_0 \left\{ \cos \theta' + \frac{2}{3} \cos\left(\frac{3\theta'}{2}\right) \right\} \quad Y' = \lambda_m r_0 \left\{ \sin \theta' + \frac{2}{3} \sin\left(\frac{3\theta'}{2}\right) \right\}$$

$$-2\pi \leq \theta' \leq 2\pi \quad (1.87)$$

Μπορούμε να εκφράσουμε τις παραπάνω εξισώσεις σε πολική μορφή θέτοντας:

$$X' + iY' = \rho \exp(i\varphi) \quad (1.88)$$

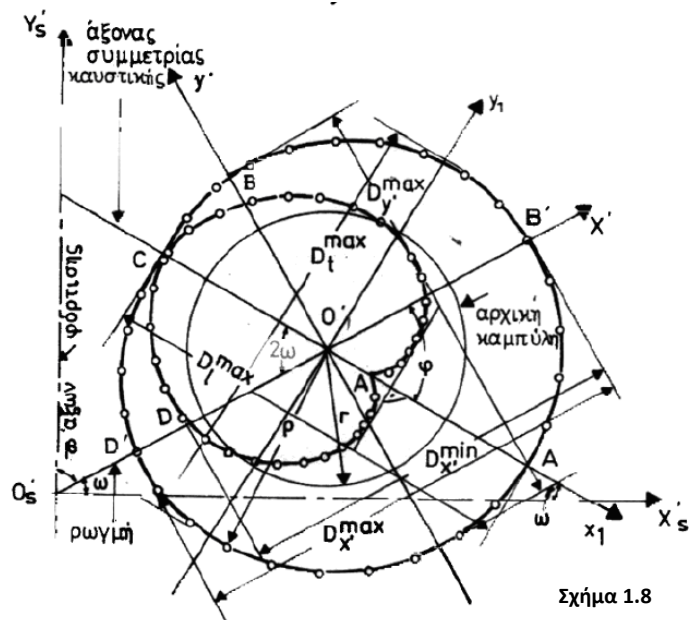
Έτσι βρίσκουμε:

$$\tan \varphi = \frac{3 \sin \theta' + 2 \sin(3\theta'/2)}{3 \cos \theta' + 2 \cos(3\theta'/2)} \quad (1.89)$$

για την πολική γωνία φ και :

$$\rho = \lambda_m r_0 \left\{ \cos(\theta' - \varphi) + \frac{2}{3} \cos\left(\frac{3\theta'}{2} - \varphi\right) \right\} \quad (1.90)$$

για την πολική ακτίνα ρ .



Σχήμα 1.8

Είναι εύκολο να παρατηρήσει κανείς ότι η ακτίνα ρ παίρνει μέγιστη τιμή ρ_{max} για $\theta' = \varphi = 0$ και έχουμε: $\rho_{max} = \frac{5\lambda_m r_0}{3}$ (1.91)

Αντίστοιχα, η ρ λαμβάνει ελάχιστη τιμή όταν $\varphi = 0$, $\theta' = \pm 2\pi$ που ισούται με:

$$\rho_{min} = \frac{\lambda_m r_0}{3} \quad (1.92)$$

Σε αυτές τις τιμές η καυστική τέμνει τον θετικό άξονα $O'_{x'}$. Τέλος, για

$$\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right) = 1/4, \quad \varphi = \pi, \quad \theta' = \pm 2 \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \quad \text{ή} \quad \theta = \pm 151^\circ 3' \quad (1.93)$$

Είναι φανερό ότι η μέγιστη διάμετρος της καυστικής στον άξονα $O_{x'}$ ισούται με:

$$D_l^{max} = 3\lambda_m r_0 \quad (1.94)$$

ενώ η μέγιστη διάμετρος σε διεύθυνση παράλληλη προς τον άξονα $O_{y'}$:

$$D_t = 3.1702\lambda_m r_0, \quad \theta' = \pm \frac{2\pi}{5}, \quad \text{ή} \quad \theta = \pm 72^\circ \quad (1.95)$$

Εάν θέσουμε: $\delta_l^{max} = 3.00$ $\delta_t^{max} = 3.1702$

Μπορούμε να γράψουμε τις (1.94), (1.95) ως:

$$D_l^{max} = \lambda_m r_0 \delta_l^{max} \quad D_t^{max} = \lambda_m r_0 \delta_t^{max} \quad (1.96)$$

Τα $\delta_{l,t}^{max}$ ονομάζονται συντελεστές διόρθωσης των διαμέτρων $D_{l,t}^{max}$ της καυστικής. Τώρα μπορούμε πολύ εύκολα να προχωρήσουμε στην εύρεση του συντελεστή έντασης των τάσεων K , αφού η τιμή του εξαρτάται μόνο από τον συντελεστή μεγέθυνσης λ_m και τις τασεοπτικές σταθερές C . Έτσι, έχουμε να προσδιορίσουμε το μέτρο του και την γωνία ω . Την γωνία ω θα την υπολογίσουμε γραφικά. Το μέτρο τώρα θα το υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας είτε τη διάμετρο D_{max} είτε τη διάμετρο D_{min} λαμβάνοντας υπ' όψιν κάθε φορά τον αντίστοιχο συντελεστή διόρθωσης δ . Έτσι, το K_I δίδεται από τον τύπο:

$$K_I = K \cos \omega = \frac{2\sqrt{2\pi}}{3\epsilon z_0 d \lambda_m^{3/2} c_{r,t,f}} \left(\frac{D_{l,t}^{max}}{\delta_{l,t}^{max}} \right)^{5/2} \cos \frac{\varphi}{2} \quad (1.97)$$

ενώ το K_{II} από την σχέση:

$$\tan \omega = \frac{K_{II}}{K_I} \quad (1.98)$$

Σε αυτό το σημείο καλό θα ήταν να τονίσουμε ότι δεν είναι απαραίτητο να μετρήσουμε την μέγιστη διάμετρο προκειμένου να υπολογίσουμε τα K_I , K_{II} . Οποιαδήποτε διάμετρος της καυστικής μπορεί να μας δώσει τα ζητούμενα αποτελέσματα αρκεί να γνωρίζουμε για τα σημεία της διαμέτρου που μετράμε από ποια σημεία της αρχικής καμπύλης προέρχονται. Μια πολύ ενδιαφέρουσα εναλλακτική μέθοδος υπολογισμού δίνεται στο άρθρο: Some further properties of caustics useful in mechanical applications [5].

1.7 Σχόλια γύρω από την μέθοδο των καυστικών.

Όπως αναφέραμε παραπάνω, οι εξισώσεις που αναπτύξαμε ισχύουν για την άπειρη πλάκα με ρωγμή, η τασική συνάρτηση της οποίας είναι η (1.69). Δεδομένου όμως ότι οι περισσότερες εφαρμογές είναι σε πεπερασμένα σώματα, παρουσιάζουν ενδιαφέρον οι περιπτώσεις που οι διαστάσεις της πλάκας δεν είναι άπειρες ή υπάρχουν και άλλες ασυνέχειες κοντά στη ρωγμή. Τότε, καλό είναι να κρατήσουμε παραπάνω όρους (δύο ή και τρεις) στο ανάπτυγμα της $\Phi(z)$ προκειμένου να πετύχουμε καλύτερη ακρίβεια. Σε ακόμα πιο δύσκολες περιπτώσεις πρέπει να βρούμε την ακριβή έκφραση της $\Phi(z)$ και να υπολογίσουμε τις εξισώσεις της καυστικής και της αρχικής καμπύλης από την αρχή. Τις περισσότερες φορές όμως οι τύποι που ισχύουν για τις άπειρες πλάκες μας δίνουν μια πολύ καλή προσέγγιση στο πρόβλημα και δεδομένου ότι ο υπολογισμός τόσο της $\Phi(z)$, όσο και των παραμετρικών εξισώσεων των καυστικών μπορεί να γίνει πολύ πολύπλοκος (ή και να μην είναι δυνατόν να βρεθεί αναλυτική λύση) επιβάλλεται πολλές φορές η χρήση της θεωρίας που ισχύει για το άπειρο μέσον.

Ένα άλλο ερώτημα που τίθεται φυσιολογικά είναι εάν από τις δύο μεθόδους καυστικών η μια πλεονεκτεί έναντι της άλλης. Συγκρίνοντάς τις μπορούμε να πούμε κατ'αρχήν ότι στην περίπτωση της ανακλάσεως δια-

μορφώνονται δύο καυστικές αντί για μια· η μια προέρχεται από την εμπρός επιφάνεια και η άλλη από την πίσω. Αυτή η ταυτόχρονη αποτύπωση και των δύο καυστικών στο πέτασμα αποτελεί μια εξαιρετική πληροφορία για το εάν βρισκόμαστε σε κατάσταση επίπεδης έντασης, επίπεδης παραμόρφωσης, ή γενικά τρισδιάστατης εντατικό - παραμορφωσιακής κατάστασης. Ο λόγος για τον οποίο το φαινόμενο αυτό παρουσιάζεται μόνο στις καυστικές ανακλάσεως είναι η ύπαρξη καυστικής από την απευθείας ανάκλαση στην μπροστινή πλευρά του δοκιμίου. Η καυστική αυτή οφείλεται μόνο στην αλλαγή της γεωμετρίας του δοκιμίου και όχι σε κάποια αλλαγή του δείκτη διάθλασης (αφού $c_f = \frac{v}{E} = \text{σταθ.}$). Έτσι, όταν είμαστε σε κατάσταση επίπεδης έντασης παρατηρούμε δυο καμπύλες μεγάλης φωτεινότητας, ενώ όσο πλησιάζουμε σε κατάσταση επίπεδης παραμόρφωσης η αλλαγή του πάχους τοπικά στην τασική ιδιομορφία τείνει να γίνει μηδέν, με αποτέλεσμα η καυστική της εμπρός επιφάνειας να εξασθενεί κατά πολύ σε φωτεινότητα (σε αντίθεση με την καυστική ανακλάσεως από την πίσω επιφάνεια που βασίζεται πολύ περισσότερο στην αλλαγή του δείκτη διάθλασης που περιγράφεται από το νόμο Maxwell – Neumann). Άλλη μια δυνατότητα που δεν θα μπορούσαμε να έχουμε με τη μέθοδο της διελεύσεως είναι ο ακριβής προσδιορισμός της κορυφής της ρωγμής, αφού για την εύρεσή του μας χρειάζεται να γνωρίζουμε τον άξονα συμμετρίας της καυστικής. Ο άξονας αυτός βρίσκεται γραφικά από την καυστική της εμπρός επιφάνειας. Η τομή του με τον άξονα που συμπίπτει με τη διεύθυνση της ρωγμής μας δίνει την κορυφή της ρωγμής O.

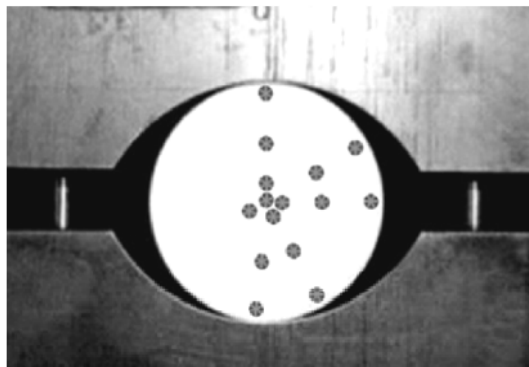
Τέλος, η κατά πολύ καλύτερη ευκρίνεια που παρουσιάζουν οι φωτογραφίες των καυστικών ανακλάσεως σε σχέση με εκείνες της διελεύσεως επιτρέπει μια σημαντικά καλύτερη προσέγγιση σχετικά με την ποσοτικοποίηση των μετρούμενων μεγεθών αλλά και με την ποιοτική αξιολόγηση του πειράματος. Και αυτό γιατί αφ' ενός μεν οι χαρακτηριστικές διαστάσεις των καμπυλών είναι μετρήσιμες με καλύτερη ακρίβεια, αλλά και αφ' ετέρου η ποιοτική παρατήρηση της μορφής τους μπορεί να αναδείξει φαινόμενα όπως για παράδειγμα πλαστικές ζώνες με πολύ πιο ξεκάθαρο τρόπο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Ο ΒΡΑΖΙΛΙΑΝΟΣ ΔΙΣΚΟΣ

2. Ο ΒΡΑΖΙΛΙΑΝΟΣ ΔΙΣΚΟΣ

2.1 Εισαγωγή

Η πλέον προσφιλής δοκιμή αντοχής σε εφελκυσμό ενός υλικού είναι αδιαμφισβήτητα το κλασικό πείραμα μονοαξονικού εφελκυσμού. Όταν όμως θέλουμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο σε ψαθυρά υλικά (όπως για παράδειγμα τα γεωυλικά) που η φύση τους δεν μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε την συγκεκριμένη πειραματική τεχνική, αναγκαζόμαστε να χρησιμοποιήσουμε άλλες, έμμεσες μεθόδους προκειμένου να υπολογίσουμε το όριο αντοχής σε εφελκυσμό. Μια τέτοια μέθοδος είναι και το πείραμα του Βραζιλιανού δίσκου. Σύμφωνα με την τεχνική αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε την αντοχή ενός ψαθυρού υλικού σε εφελκυσμό θλίβοντας αντιδιαμετρικά έναν κυλινδρικό δίσκο. Αντί δηλαδή να εφελκύσουμε το δοκίμιό μας, το θλίβουμε όπως φαίνεται στη φωτογραφία του σχήματος 2.1. Εν γένει περιμένουμε τη θραύση στο κέντρο του δίσκου όπου και αναπτύσσεται η μέγιστη εφελκυστική τάση.



Σχήμα 2.1

Η συγκεκριμένη πειραματική διαδικασία εισήχθη από τους Carneiro [6, 7] και Akazawa [8] την δεκαετία του 40. Η ευκολία υλοποίησης του πειράματος σε σχέση με άλλες μεθόδους συνέβαλε στο να κερδίσει έδαφος έναντι των άλλων μεθόδων, ενώ, όπως θα δούμε στη συνέχεια, στην περίπτωση που προϋπάρχει και μια ρωγμή στο κέντρο του δίσκου αποτελεί ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για τον προσδιορισμό του συντελεστή έντασης των τάσεων. Η πρώτη θεωρητική λύση του προβλήματος για την περίπτωση του αρηγμάτωτου δίσκου δόθηκε από τον Hondros [9]. Θεώρησε το πρόβλημα ενός γραμμικά ελαστικού, ομογενούς και ισότροπου υλικού υπό την προϋπόθεση ότι το θλιπτικό φορτίο από τις αρπάγες κατανέμεται ομοιόμορφα σε

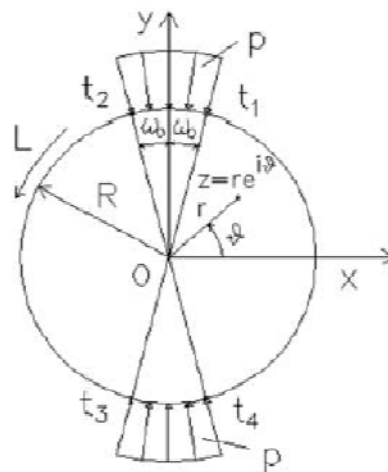
δύο συμμετρικά πεπερασμένα τόξα στο σύνορο του δίσκου. Έτσι, έδωσε μια προσεγγιστική λύση για τις τάσεις (όχι όμως και τις μετατοπίσεις) χρησιμοποιώντας πραγματική ανάλυση. Στη συνέχεια αρκετοί επιστήμονες ασχολήθηκαν με το θέμα. Ο Fairhurst [10] κατέληξε στο συμπέρασμα ότι το βραζιλιανό τεστ υπερεκτιμά την αντοχή σε εφελκυσμό όταν μελετάμε υλικά με χαμηλό λόγο θλιπτικής προς εφελκυστική αντοχή καθώς επίσης έδειξε ότι πρέπει να ελαττώνεται όσο γίνεται περισσότερο η τριβή στις αρπάγες διότι σε αντίθετη περίπτωση ενδέχεται τα αποτελέσματα να είναι εσφαλμένα. Μια ενδιαφέρουσα παραλλαγή του πειράματος προτάθηκε από τον Hobbs [11] σύμφωνα με την οποία ο δίσκος έχει στο κέντρο του μια οπή προκειμένου να είμαστε βέβαιοι ότι η θραύση δεν θα συμβεί σε διαφορετικό σημείο, πράγμα το οποίο παρατηρείται ορισμένες φορές στην πράξη. Σήμερα, οι προδιαγραφές σύμφωνα με τις οποίες διεξάγεται το πείραμα έχουν καθοριστεί πλήρως από την ASTM [12] και την ISRM [13], ενώ ταυτόχρονα το πρόβλημα συνεχίζει να μελετάται σε ερευνητικό επίπεδο.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία ο κύριος σκοπός μας είναι ο προσδιορισμός των συντελεστών έντασης των τάσεων στο πρόβλημα του ρηγματωμένου βραζιλιανού δίσκου. Όμως, θα ασχοληθούμε και με τον αρηγμάτωτο στο κομμάτι που αφορά το μήκος επαφής της φόρτισης στο σύνορο. Ο λόγος που αποφασίσαμε να προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το μήκος επαφής είναι οι διαφορές μεταξύ των παραδοχών που έχουν γίνει κατά καιρούς στη λύση του προβλήματος, αφού έχει λυθεί τόσο με την υπόθεση του σημειακού φορτίου όσο και με αυτή του ομοιόμορφα κατανεμημένου. Έτσι, εκτελέσαμε πειράματα καυστικών και σε αρηγμάτωτους δίσκους, μεταβάλλοντας ελαφρώς τον συντελεστή τριβής μεταξύ δοκιμίου και αρπάγης με κατάλληλη λίπανση και συγκρίναμε τα αποτελέσματα με την θεωρία του Hertz. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε περιληπτικά την κλειστή λύση του αρηγμάτωτου δίσκου, του ρηγματωμένου και την θεωρία του Hertz διότι θα αποτελέσουν τις κύριες θεωρητικές αναφορές μας.

2.2 Ο αρηγμάτωτος βραζιλανός δίσκος - Το πρόβλημα του Hertz

2.2.1 Κλειστή λύση αρηγμάτωτου δίσκου

Όπως είπαμε η πρώτη λύση του προβλήματος δόθηκε από τον Hondros αλλά ήταν προσεγγιστική και δεν έδινε αποτελέσματα για το πεδίο των μετατοπίσεων. Η πρώτη κλειστή λύση του προβλήματος τόσο για τις τάσεις όσο και για τις μετατοπίσεις δόθηκε από τους Ch. F. Markides et al [14] με την παραδοχή ότι το φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο κατά μήκος δύο τόξων (Σχήμα 2.2). Οι τασικές συναρτήσεις $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ που λύνουν το πρόβλημα ικανοποιούν τις σχέσεις:



Σχήμα 2.2

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 4\Re\Phi(z) \quad (2.1)$$

$$\sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta} = 2\Re\Phi(z) - e^{2i\theta}[\bar{z} \cdot \Phi(z) + \Psi(z)] \quad (2.2)$$

$$2\mu(u_r + iu_\theta) = e^{-i\theta}[\kappa \cdot \varphi(z) - z \cdot \overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}] \quad (2.3)$$

Όπου: $\Phi(z) = \varphi'(z)$, $\Psi(z) = \psi'(z)$. Η σταθερά κ παίρνει τις τιμές $(3 - \nu)/(1 + \nu)$ για επίπεδη ένταση και $3 - 4\nu$ για επίπεδη παραμόρφωση (με μ συμβολίζουμε το μέτρο διάτμησης).

Το πρόβλημα λύθηκε με δύο τρόπους. Ο πρώτος στηρίζεται στη γενική λύση Muskhelishvili για τον μοναδιαίο δίσκο και έγινε με χρήση ολοκληρωμάτων Cauchy. Τα μιγαδικά δυναμικά που προέκυψαν είναι συνάρτηση της ακτίνας R του δίσκου, της φόρτισης p στην περίμετρο, της γωνίας φ_0 που σχηματίζει ο άξονας συμμετρίας της φόρτισης με τον άξονα x (στη συνέχεια ο άξονας της ρωγμής θα ταυτίζεται με τον άξονα x) και της γωνίας ω_0 που υποδηλώνει το εύρος του τόξου στο οποίο κατανέμεται η

φόρτιση. Οι τάσεις και οι μετατοπίσεις που προέκυψαν στα σημεία της περιμέτρου που αρχίζει και τελειώνει η φόρτιση ανέδειξαν την ιδιομορφία του προβλήματος στα σημεία αυτά και ήταν αρκετά διαφωτιστικές σχετικά με φαινόμενα αστοχίας που έχουν παρατηρηθεί κατά καιρούς σε πειράματα. Η δεύτερη λύση του προβλήματος έγινε με χρήση της θεωρίας των τμηματικά ολόμορφων συναρτήσεων. Η τασική συνάρτηση $\Phi(z)$ θεωρήθηκε ως τμηματικά ολόμορφη συνάρτηση με γραμμή ασυνέχειας τα φορτισμένα τόξα του δίσκου. Στη συνέχεια το πρόβλημα λύθηκε στο μοναδιαίο δίσκο στο μιγαδικό επίπεδο ζ και μέσω της σύμμορφης απεικόνισης $z=R\zeta$ βρέθηκε η λύση στον πραγματικό δίσκο ακτίνας R .

Οι τιμές των συναρτήσεων $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ τελικά βρέθηκαν να ισούνται με:

$$\Phi(z) = -\frac{p}{2\pi i} \ln \frac{t_2^2 - z^2}{t_1^2 - z^2} + \frac{p\omega_0}{\pi} \quad (2.4)$$

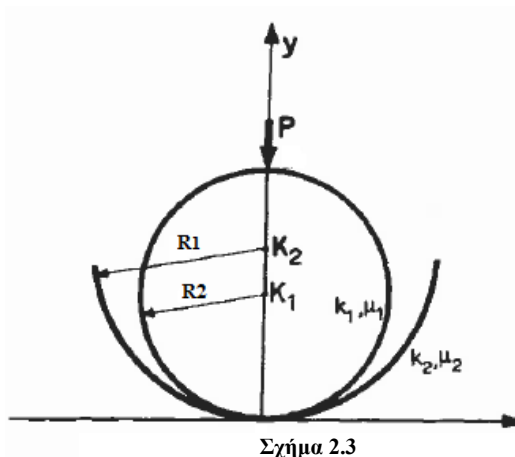
$$\Psi(z) = \frac{pR^2}{\pi i} \left(\frac{1}{t_1^2 - z^2} - \frac{1}{t_2^2 - z^2} \right) \quad (2.5)$$

με $t_j, j = 1,2,3,4$ τα ακραία σημεία της φόρτισης.

Η λύση αυτή είναι ταυτόσημη με την πρώτη, αλλά είναι εκείνη που χρησιμοποιείται στη συνέχεια και στον ρηγματωμένο δίσκο.

2.2.2 Το πρόβλημα του Hertz

Ένα πρόβλημα που μοιάζει με τον βραζιλιανό δίσκο είναι το πρόβλημα επαφής δύο δίσκων που πιέζονται από ένα συγκεντρωμένο φορτίο όπως στο διπλανό σχήμα. Το πρόβλημα αυτό μελετήθηκε για πρώτη φορά από τον Hertz [15] το 1882. Μελετώντας την περίπτωση των δύο δίσκων ο Hertz υπέθεσε ότι οι επιφάνειες επαφής μπορούν να μοντελοποιηθούν με ένα πολυώνυμο 2^{ου}



βαθμού ως προς x, y . Έτσι, για σημεία κοντά στο σημείο αρχικής επαφής η απόσταση δύο τυχαίων σημείων των δίσκων από το επίπεδο επαφής xy μπορούν να πάρουν τη μορφή: $\delta_1 = A_1x^2 + A_2xy + A_3y^2$, $\delta_2 = B_1x^2 +$

$B_2xy + B_3y^2$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η απόσταση μεταξύ τους ισούται με: $\delta_1 + \delta_2 = (A_1 + B_1)x^2 + (A_2 + B_2)xy + (A_3 + B_3)y^2$. Αν επιλέξουμε το σύστημα αξόνων με τέτοιο τρόπο ώστε να μηδενίζεται ο όρος xy τότε η παραπάνω σχέση γίνεται: $\delta_1 + \delta_2 = Ax^2 + By^2$. Οι σταθερές A, B εξαρτώνται από τις καμπυλότητες των σωμάτων στο σημείο επαφής και από τη γωνία των επιπέδων που αντιστοιχούν στις κύριες καμπυλότητες κάθε επιφάνειας. Έστω R_1, R'_1 οι κύριες ακτίνες καμπυλότητας του ενός σώματος και R_2, R'_2 οι κύριες καμπυλότητες του άλλου. Αν επιπλέον η γωνία των κάθετων επιπέδων που αντιστοιχούν σε καμπυλότητες $1/R_1$ και $1/R_2$ συμβολιστεί με το γράμμα θ , τότε οι σταθερές A, B μπορούν να υπολογισθούν από τους τύπους:

$$A + B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_2} \right)$$

$$B - A = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2} \right) \cos 2\theta \right]^{1/2} \quad (2.6)$$

Αν ονομάσουμε ω_1 και ω_2 τις μετατοπίσεις δύο τυχαίων σημείων που μελετάμε μετά την φόρτιση και ε την απόστασή τους τότε:

$$\omega_1 + \omega_2 + \delta_1 + \delta_2 = \varepsilon \quad (2.7)$$

$$\text{ή αλλιώς: } \omega_1 + \omega_2 = \varepsilon - Ax^2 + By^2 \quad (2.8)$$

Το πρώτο μέλος παίρνει τη μορφή (Timoshenko):

$$\omega_1 + \omega_2 = \left(\frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{\pi E_2} \right) \iint \frac{qdA}{\gamma} \quad (2.9)$$

όπου qdA είναι η δύναμη που εφαρμόζεται στο στοιχείο dA που βρίσκεται σε απόσταση γ από το σημείο επαφής O . Με αυτόν τον τρόπο καταλήξαμε στην σχέση:

$$(\kappa_1 + \kappa_2) \iint \frac{qdA}{\gamma} = \varepsilon - Ax^2 + By^2 \quad (2.10)$$

Το πρόβλημα τώρα είναι η εύρεση μιας συνάρτησης q που ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση. Ο Hertz έδειξε ότι ένα ελλειψοειδές με ημιάξονες a, b ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση. Το ελλειψοειδές έχει μέγιστη τιμή ίση με

q_0 στο αρχικό σημείο επαφής. Αν η εξωτερική δύναμη είναι ίση με P τότε ισχύει ότι:

$$P = \iint q dA = \frac{2}{3} \pi a b q_0 \quad (2.11)$$

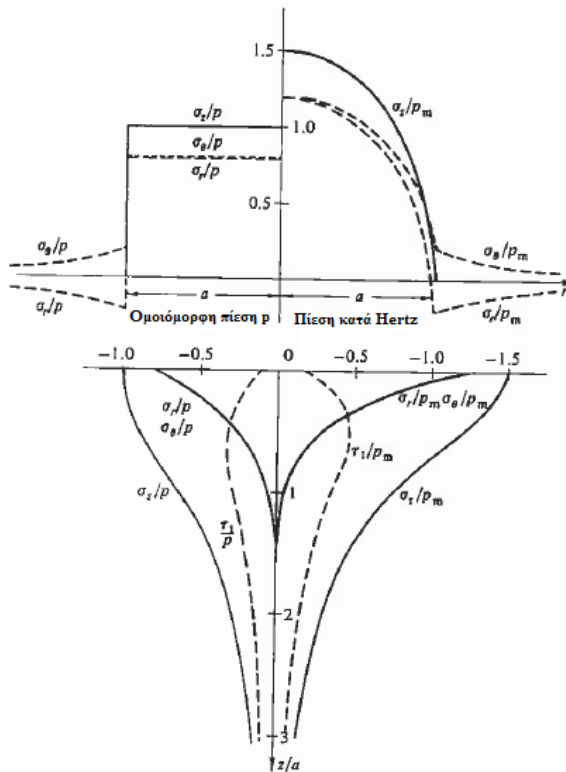
που μας δίνει ότι η μέγιστη τιμή q_0 ισούται με:

$$q_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{a b \pi} \quad (2.12)$$

και κάνοντας πράξεις καταλήγουμε ότι οι ημιάξονες της έλλειψης ισούνται με:

$$a = m \frac{3\pi}{4} \frac{P(\kappa_1 + \kappa_2)}{A+B} \quad \& \quad b = n \frac{3\pi}{4} \frac{P(\kappa_1 + \kappa_2)}{A+B} \quad (2.13)$$

Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε ότι ο Hertz κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η επιφάνεια επαφής γενικά είναι τμήμα έλλειψης οι ημιάξονες της οποίας εξαρτώνται τόσο από το εφαρμοζόμενο φορτίο όσο και από την γεωμετρία των σωμάτων. Επίσης, παρατηρούμε ότι σε σχέση με το ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο η μέγιστη τιμή με βάση τη θεωρία του Hertz είναι 1,5 φορά μεγαλύτερη από τη μέση τιμή της και παρουσιάζεται στο αρχικό σημείο επαφής. Στο διπλανό διάγραμμα φαίνεται με γραφικό τρόπο η διαφορά μεταξύ της ομοιόμορφης πίεσης και της πίεσης κατά Hertz.



Σχήμα. 2.4 Η διαφορά της ομοιόμορφης πίεσης από την πίεση κατά Hertz

2.3 Ο ρηγματωμένος βραζιλιανός δίσκος

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει και η περίπτωση του ρηγματωμένου βραζιλιανού δίσκου. Η εν λόγω πειραματική διαδικασία προτάθηκε από τους Awaji και Sato [16] και το κυριότερο πλεονέκτημά της (πέραν της απλότητάς της) είναι ότι δίνει τη δυνατότητα επίτευξης κάθε δυνατού συνδυασμού των τύπων mode I, mode II μέσω της κατάλληλης επιλογής της γωνίας κλίσης φ_0 του άξονα της ρωγμής ως προς τη διεύθυνση της φόρτισης και του λόγου a/R όπου a το μήκος της ρωγμής και R η διάμετρος του δίσκου.

Η πιο ευρέως διαδεδομένη λύση του προβλήματος του ρηγματωμένου δίσκου δόθηκε το 1982 από τον Atkinson [17]. Η λύση αυτή θεωρούσε ότι η φόρτιση γινόταν μέσω δύο σημειακών αντιδιαμετρικών φορτίων (και όχι κατανεμημένων σε τόξα όπως συμβαίνει στην πραγματικότητα) και δόθηκε με τη μορφή άπειρων σειρών. Μια άλλη λύση, πάλι υπό την μορφή άπειρων σειρών, δόθηκε από τον Dong [18] αλλά σε αυτή την περίπτωση το φορτίο δεν ήταν σημειακό, αλλά ομοιόμορφα κατανεμημένο κατά μήκος δύο τόξων. Μια ειδική περίπτωση όπου η ρωγμή είναι κάθετη στη διεύθυνση της φόρτισης μελετήθηκε από τους Xu και Delale [19] με χρήση ιδιόμορφων ολοκληρωτικών εξισώσεων. Στη λύση αυτή υποτέθηκαν τόσο σημειακά όσο και κατανεμημένα φορτία ενώ ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το συμπέρασμα ότι υπό κάποιες συνθήκες τα χείλη της ρωγμής μπορεί να αναγκασθούν να ακουμπήσουν μεταξύ τους δίνοντας έτσι συντελεστή έντασης τάσεων K_I με αρνητικό πρόσημο.

Ο ρηγματωμένος βραζιλιανός δίσκος έχει χρησιμοποιηθεί στη μηχανική των θραύσεων από αρκετούς επιστήμονες προκειμένου να μελετηθεί η συμπεριφορά γεωυλικών όπως το τσιμέντο, το μάρμαρο και οι βράχοι και ως εκ τούτου η μέθοδος εκτέλεσης του πειράματος έχει τυποποιηθεί από την ISRM [10]. Για παράδειγμα, οι Ojdrovic και Petroski [20] προσδιόρισαν την αντοχή σε θραύση του τσιμέντου, ο Shetty [21] μελέτησε θραύσεις μεικτού τύπου υπό διαξονική εντατική κατάσταση συγκρίνοντας τα αποτελέσματα με διάφορες θεωρίες και οι Zhao [22] και Chang [23] εφάρμοσαν τη μέθοδο σε βραχώδη υλικά.

Όμως, παρά το γεγονός ότι η συγκεκριμένη πειραματική διαδικασία έχει απασχολήσει για πολλά χρόνια την επιστημονική κοινότητα υπάρχουν ακόμα και σήμερα κάποια αναπάντητα ερωτήματα καθοριστικής σημασίας. Το σημαντικότερο πρόβλημα όλων είναι ότι η γενική λύση του προβλήματος

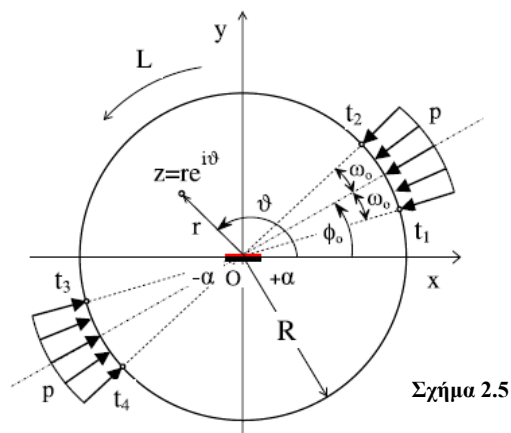
σε κλειστή μορφή δεν έχει ακόμα βρεθεί, εκτός από κάποιες συγκεκριμένες περιπτώσεις και κάτω από συγκεκριμένες θεωρητικές παραδοχές, όπως για παράδειγμα περιπτώσεις που ο λόγος του μήκους της ρωγμής προς την διάμετρο του δίσκου δεν ξεπερνά κάποια τιμή, το πώς κατανέμονται τα φορτία στις αρπάγες κτλ. Πέρα από τον συμβιβασμό των θεωρητικών παραδοχών που κάνουμε προκειμένου να έχουμε λύση που να μας περιγράφει το τασικό πεδίο του προβλήματος, στην πορεία της έρευνας αναδύονται και κάποια θέματα που έχουν να κάνουν με τη φύση του πειράματος. Αναφέροντας μερικά χαρακτηριστικά από αυτά, θα μπορούσαμε να πούμε κατ' αρχήν ότι ένα μείζον θέμα είναι σε ποια γωνία κλίσης της ρωγμής ως προς την φόρτιση επιτυγχάνεται εντατική κατάσταση καθαρού mode II. Οι Jia [24] και Al Shayea [25] παρατήρησαν ότι για γωνίες κλίσης της ρωγμής μεγαλύτερες των 30° το φορτίο που ασκείται στη ρωγμή γίνεται θλιπτικό και έχουμε κλείσιμο των χειλέων της. Επιπλέον, οι διαστάσεις της ρωγμής, αλλά και ο τρόπος με τον οποίο την δημιουργούμε, είναι καθοριστικής σημασίας για τα αποτελέσματα του πειράματος. Πιο συγκεκριμένα ο λόγος a/R του μήκους της ρωγμής ως προς την ακτίνα του δίσκου στις περισσότερες των περιπτώσεων πρέπει να περιορίζεται μεταξύ 0.4 και 0.6 (Dong [18]) ενώ ο τρόπος με τον οποίο δημιουργείται πρέπει να έχει σαν τελικό αποτέλεσμα μια σχισμή όσο γίνεται πιο κοντά στην φυσική ρωγμή. Η τελευταία παράμετρος δεν είναι τόσο απλή όσο ακούγεται διότι οι περισσότερες διατάξεις που χρησιμοποιούμε για την προετοιμασία των δοκιμών δεν μας δίνουν συνήθως τόση ελευθερία ώστε να δημιουργήσουμε ακριβώς αυτό που επιθυμούμε. Κι όμως είναι καθοριστικής σημασίας για την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων. Ήδη από το 1990 οι Theocaris και Sakellariou [26] χρησιμοποιώντας την πειραματική μέθοδο των καυστικών στο πείραμα του βραζιλιανού δίσκου κατέδειξαν τις διαφορές μεταξύ ρωγμής και εγκοπής πέραν της προφανούς διαφοράς στον συντελεστή έντασης των τάσεων. Πιο συγκεκριμένα, οι συγγραφείς της πειραματικής αυτής μελέτης αναφέρουν ότι σε αντίθεση με την περίπτωση της εγκοπής, η φυσική ρωγμή απαγορεύει την προς τα μέσα μετακίνηση των χειλέων της ρωγμής γεγονός που με την σειρά του καθιστά αδύνατη την δημιουργία αρνητικού συντελεστή K_I . Επιπλέον, καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι η παρουσία διατμητικών τάσεων θα οδηγούσε και πάλι σε θετική τιμή του K_I και η μοναδική περίπτωση που θα λάμβανε την τιμή μηδέν είναι όταν θα βρίσκεται κάθετα στην φόρτιση.

Είναι προφανές από τις παραπάνω μελέτες (πειραματικές και μη) ότι το θέμα του ρηγματωμένου βραζιλιανού δίσκου δεν έχει απαντηθεί πλήρως.

Ένα μεγάλο βήμα όμως προς την λύση του προβλήματος είναι ο υπολογισμός όσον αφορά τις τάσεις και τις μετατοπίσεις του βραζιλιανού δίσκου σε κλειστή μορφή. Η πρώτη κλειστή αναλυτική λύση του ρηγματωμένου δίσκου (αλλά και του αρηγμάτωτου όπως αναφέραμε σε προηγούμενη παράγραφο) δόθηκε το 2009 από τους Ch. F. Markides et al. [14, 28]. Η προσπάθεια αυτή έγινε στα πλαίσια της έρευνας που γίνεται στο Εργαστήριο Αντοχής Υλικών του Τομέα Μηχανικής του Ε.Μ.Π. για τις μηχανικές ιδιότητες υλικών που χρησιμοποιούνται στις εργασίες αναστήλωσης του μνημείου της Ακρόπολης με επικεφαλής τον Αναπληρωτή Καθηγητή Ε.Μ.Π. Σ. Κ. Κουρκουλή. Κύριο αντικείμενο αυτής της διατριβής είναι ο ρηγματωμένος βραζιλιανός δίσκος. Όμως, λύνεται και το πρόβλημα του αρηγμάτωτου δίσκου διότι είναι προαπαιτούμενο για την μετάβαση στη λύση του ρηγματωμένου. Στη συνέχεια θα κάνουμε μια προσπάθεια να περιγράψουμε περιληπτικά το κομμάτι της παραπάνω λύσης που αναφέρεται στην περίπτωση που τα χείλη της ρωγμής δεν έρχονται σε επαφή (και έτσι δεν παρουσιάζεται overlapping στα χείλη της ρωγμής) καθότι θα αποτελέσει την κύρια αναφορά μας στην παρούσα εργασία. Η συγκεκριμένη διατριβή βέβαια περιέχει τη λύση του προβλήματος για όλες τις δυνατές περιπτώσεις φόρτισης του δοκιμίου, δίνοντας και μια διορθωτική λύση φυσικώς αποδεκτή στο πρόβλημα της αλληλοεπικάλυψης, αλλά εμείς θα περιοριστούμε στο κομμάτι που θα μελετήσουμε πειραματικά.

2.4 Περιγραφή της κλειστής λύσης του ρηγματωμένου βραζιλιανού δίσκου.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε έναν δίσκο ακτίνας R ο οποίος περιέχει μια κεντρική ρωγμή μήκους $2a$. Η ρωγμή θεωρείται ως μια μαθηματική ευθεία, δηλαδή η απόσταση μεταξύ των χειλέων της είναι μηδενική. Υποθέτουμε μια φόρτιση όμοια με αυτή που εικο-



νίζεται στο Σχήμα 2.5 και θεωρούμε ότι το πρόβλημα είναι επίπεδο. Το φορτίο που ασκείται από τις αρπάγες στο δοκίμιο θεωρούμε ότι είναι ομοιόμορφη ακτινική πίεση p που ασκείται σε δύο πεπερασμένου μήκους αντιδιαμετρικά τόξα μήκους $2R\omega_0$, ενώ οποιεσδήποτε τάσεις τριβής αμελούνται. Επειδή το φορτίο δεν είναι σημειακό θεωρούμε ότι η διεύθυνση της φόρτισης βρίσκεται στο μέσον του τόξου που ασκείται η πίεση p και σχηματίζει γωνία φ_0 με τον άξονα της ρωγμής. Οι συντεταγμένες κάθε σημείου του δίσκου περιγράφονται υπό τη μορφή μιγαδικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο: $z = x + iy = re^{i\theta}$ με το κέντρο του μιγαδικού επιπέδου να βρίσκεται στο κέντρο του δίσκου. Τα σημεία της περιφέρειας του δίσκου περιγράφονται από την παραπάνω εξίσωση για $r=R$ και συμβολίζονται με t , δηλαδή: $t = Re^{i\theta}$, ενώ τα ακραία σημεία της περιφέρειας, όπου ασκείται φόρτιση τα συμβολίζουμε με $t_j, j = 1,2,3,4$. Είναι προφανές ότι υπό αυτές τις προϋποθέσεις το πρόβλημά μας ανήκει στην κατηγορία του πρώτου θεμελιώδους προβλήματος της ελαστικότητας. Η επίλυσή του θα γίνει με τη μέθοδο των μιγαδικών δυναμικών Kolosov – Muskhelishvili [27].

Πριν τη λύση του ρηγματωμένου δίσκου βρέθηκε αυτή του αρηγμάτων και χρησιμοποιήθηκε στη συνέχεια στην ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών στον ρηγματωμένο. Προχωρώντας στη λύση του ρηγματωμένου δίσκου έγινε η παραδοχή ότι το μήκος της ρωγμής σε σχέση με την ακτίνα του δίσκου είναι αρκετά μικρό. Αυτή η παραδοχή δίνει την ελευθερία να υποθέσουμε πως η παρουσία της ρωγμής δεν επηρεάζει την εντατικό – παραμορφωσιακή κατάσταση στην περίμετρο του δίσκου. Φυσικά το αντίστροφο δεν συμβαίνει, αφού η φόρτιση στο σύνορο του δίσκου επηρεάζει το τασικό πεδίο κοντά στη ρωγμή. Έτσι, οι τασικές συναρτήσεις $\Phi_0(z), \Psi_0(z)$ του αντίστοιχου αρηγμάτων δίσκου ισχύουν και για την περίπτωση του ρηγματωμένου επάνω στην περίμετρο L του δίσκου, ενώ καθώς φεύγουμε από εκεί την θέση τους παίρνουν κάποιες άλλες συναρτήσεις Φ, Ψ εξ αιτίας της ύπαρξης της ρωγμής. Ουσιαστικά, μπορούμε να πούμε ότι στην περιοχή της ρωγμής οι $\Phi_0(z), \Psi_0(z)$ του αρηγμάτων διορθώνονται με κάποιες επιπρόσθετες τμηματικά ολόμορφες συναρτήσεις. Στη συνέχεια, υπολογίζεται οι συνάρτηση $\Omega(z)$ που είναι πιο κατάλληλη από την $\Psi(z)$ όταν έχουμε παρουσία ρωγμών. Το πρόβλημα έχει λυθεί συναρτήσεων των παραμέτρων a, R, p, φ_0 , και ω_0 . Καλό είναι να ξαναθυμίσουμε στο σημείο αυτό ότι οι παρακάτω εξισώσεις ισχύουν μόνο στην περίπτωση που τα χείλη της ρωγμής δεν έρχονται σε επαφή μεταξύ τους.

Έτσι, τα μιγαδικά δυναμικά $\Phi_1(z), \Omega_1(z)$ (ο δείκτης 1 υποδηλώνει ότι πρόκειται για το πρώτο θεμελιώδες πρόβλημα) που αποτελούν την λύση του παραπάνω προβλήματος ισούνται με:

$$\Phi_1(z) = \frac{p}{4\pi i} \left\{ \frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}} \cdot \left(4i\omega_0 - \ln \frac{t_2^2-z^2}{t_1^2-z^2} + \ln \frac{\bar{t}_2^2-\bar{z}^2}{\bar{t}_1^2-\bar{z}^2} \right) - \left(\ln \frac{t_2^2-z^2}{t_1^2-z^2} + \ln \frac{\bar{t}_2^2-\bar{z}^2}{\bar{t}_1^2-\bar{z}^2} \right) + 2 \cdot (z^2 - R^2) \cdot \left(\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}} - 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{t_1^2-z^2}} - \frac{1}{\sqrt{t_2^2-z^2}} \right) \right\} \quad (2.14)$$

και

$$\Omega_1(z) = \frac{p}{4\pi i} \left\{ \frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}} \cdot \left(4i\omega_0 - \ln \frac{t_2^2-z^2}{t_1^2-z^2} + \ln \frac{\bar{t}_2^2-\bar{z}^2}{\bar{t}_1^2-\bar{z}^2} \right) + \left(\ln \frac{t_2^2-z^2}{t_1^2-z^2} + \ln \frac{\bar{t}_2^2-\bar{z}^2}{\bar{t}_1^2-\bar{z}^2} \right) + 2 \cdot (z^2 - R^2) \cdot \left(\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}} + 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{t_1^2-z^2}} - \frac{1}{\sqrt{t_2^2-z^2}} \right) \right\} \quad (2.15)$$

Αντικαθιστώντας τις (2.14), (2.15) στις εκφράσεις των τάσεων [24]:

$$\sigma_{yy,1} - i\sigma_{xy,1} = \Phi_1(z) + \Omega_1(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_1'(z)} \quad (2.16)$$

Βρίσκουμε τις τάσεις $\sigma_{yy,1}$ και $\sigma_{xy,1}$ κατά μήκος του άξονα της ρωγμής:

$$\sigma_{yy,1} = \frac{p}{\pi} \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} \cdot [\arg(t_1^2 - x^2) - \arg(t_2^2 - x^2) + 2\omega_0] + \frac{2x}{\sqrt{x^2-a^2}} \cdot \frac{R^2(R^2-x^2)[(R^4+x^4) \sin 2\omega_0 \cos 2\varphi_0 - R^2x^2 \sin 4\omega_0]}{R^8+x^8-4R^2x^2(R^4+x^4) \cos 2\omega_0 \cos 2\varphi_0 + 2R^4x^4(\cos 4\varphi_0 + 2 \cos^2 2\omega_0)} \right\} \quad (2.17)$$

$$\sigma_{xy,1} = \frac{p}{\pi} \frac{-2x}{\sqrt{x^2-a^2}} \cdot \frac{R^2(R^2-x^2)(R^4-x^4) \sin 2\omega_0 \sin 2\varphi_0}{R^8+x^8-4R^2x^2(R^4+x^4) \cos 2\omega_0 \cos 2\varphi_0 + 2R^4x^4(\cos 4\varphi_0 + 2 \cos^2 2\omega_0)} \quad (2.18)$$

Όπως είναι γνωστό οι συντελεστές έντασης των τάσεων δίνονται από τις σχέσεις [28]:

$$K_{I,(1)}^{(\Phi_1)} = \sqrt{2\pi} \cdot \Re e \left\{ \lim_{z \rightarrow a} [2\Phi_1(z) \cdot \sqrt{z-a}] \right\} \quad (2.19)$$

$$K_{II,(1)}^{(\Phi_1)} = -\sqrt{2\pi} \cdot \Im m\{\lim_{z \rightarrow a} [2\Phi_1(z) \cdot \sqrt{z-a}]\} \quad (2.20)$$

Έπειτα από αντικατάσταση και πράξεις προκύπτουν οι mode I και mode II συντελεστές έντασης των τάσεων για την συγκεκριμένη περίπτωση:

$$K_{I,(1)} = p \sqrt{\frac{a}{\pi}} \left\{ \arg(t_1^2 - \alpha^2) - \arg(t_2^2 - \alpha^2) + 2\omega_0 + \frac{2R^2(R^2 - \alpha^2) \cdot [(R^4 + \alpha^4) \sin 2\omega_0 \cos 2\varphi_0 - R^2 \alpha^2 \sin 4\omega_0]}{R^8 + \alpha^8 - 4R^2 \alpha^2 (R^4 + \alpha^4) \cos 2\omega_0 \cos 2\varphi_0 + 2R^4 \alpha^4 (\cos 4\varphi_0 + 2 \cos^2 2\omega_0)} \right\} \quad (2.21)$$

$$K_{II,(1)} = -p \sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{-2R^2(R^2 - \alpha^2)(R^4 - \alpha^4) \sin 2\omega_0 \sin 2\varphi_0}{R^8 + \alpha^8 - 4R^2 \alpha^2 (R^4 + \alpha^4) \cos 2\omega_0 \cos 2\varphi_0 + 2R^4 \alpha^4 (\cos 4\varphi_0 + 2 \cos^2 2\omega_0)} \quad (2.22)$$

Η εξίσωση (2.23) περιέχει τους όρους $\arg(t_j^2 - \alpha^2)$, $j = 1, 2$ που σχετίζονται με τα άκρα των τόξων της φόρτισης. Αυτό το σημείο χρήζει ιδιαίτερης προσοχής διότι θα πρέπει να δώσουμε στους όρους αυτούς διαφορετική τιμή ανάλογα με το πού βρίσκεται το σημείο z . Έτσι, οδηγούμαστε σε τρεις περιπτώσεις για την φ_0 στο πρώτο τεταρτημόριο του δίσκου. Διαλέγουμε την σωστή έκφραση ανάλογα με την περιοχή που βρισκόμαστε :

Περιοχή I:

$$0 \leq \varphi_0 \leq \frac{1}{2} \text{Arc cos} \frac{a^2}{R^2} - \omega_0 ,$$

$$\arg(t_{1,2}^2 - \alpha^2) = \text{Arc tan} \frac{R^2 \sin 2(\varphi_0 \mp \omega_0)}{R^2 \cos 2(\varphi_0 \mp \omega_0) - a^2} \quad (2.23)$$

Περιοχή II:

$$\frac{1}{2} \text{Arc cos} \frac{a^2}{R^2} - \omega_0 < \varphi_0 \leq \frac{1}{2} \text{Arc cos} \frac{a^2}{R^2} + \omega_0 ,$$

$$\arg(t_1^2 - \alpha^2) = \text{Arc tan} \frac{R^2 \sin 2(\varphi_0 - \omega_0)}{R^2 \cos 2(\varphi_0 - \omega_0) - a^2} ,$$

$$\arg(t_2^2 - \alpha^2) = \pi + \text{Arc tan} \frac{R^2 \sin 2(\varphi_0 + \omega_0)}{R^2 \cos 2(\varphi_0 + \omega_0) - \alpha^2}. \quad (2.24)$$

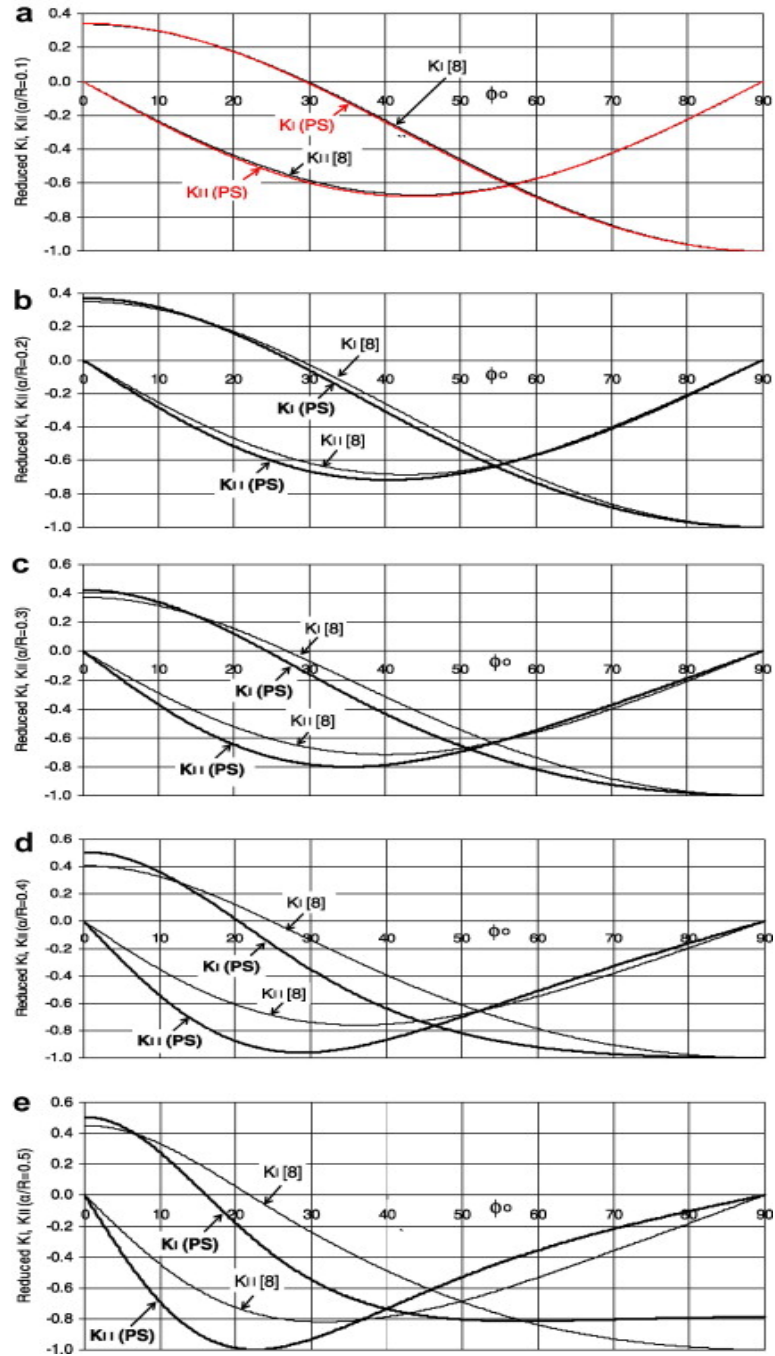
Περιοχή III:

$$\frac{1}{2} \text{Arc cos} \frac{a^2}{R^2} + \omega_0 < \varphi_0 \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\arg(t_{1,2}^2 - \alpha^2) = \pi + \text{Arc tan} \frac{R^2 \sin 2(\varphi_0 \mp \omega_0)}{R^2 \cos 2(\varphi_0 \mp \omega_0) - \alpha^2}. \quad (2.25)$$

Με τον τρόπο αυτό είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τις τιμές των SIF για τις παραμέτρους της φόρτισής μας. Σε επόμενο κεφάλαιο της εργασίας οι τιμές που αναφέρονται στην θεωρητική λύση του προβλήματος υπολογίστηκαν από αυτούς τους τύπους.

Ένα ερώτημα που έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι το πόσο μεγάλες διαφοροποιήσεις παρουσιάζουν τα αποτελέσματα αυτής της θεωρίας σε σχέση με τις άλλες που έχουν δοθεί κατά καιρούς. Μια ενδιαφέρουσα σύγκριση της παραπάνω λύσης με την λύση κατά Atkinson [17] γίνεται στην δημοσίευση [28]. Εκεί, προκειμένου οι δύο λύσεις να είναι συγκρίσιμες μεταξύ τους και δεδομένου ότι στην λύση Atkinson το φορτίο θεωρείται σημειακό, η γωνία ω_0 λαμβάνει την τιμή 0.05° και από το ανάπτυγμα σε σειρά της [17] κρατούνται οι πέντε πρώτοι όροι. Τα αποτελέσματα φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα για διάφορους λόγους μηκών a/R . Εκεί, είναι προφανές ότι για λόγους $a/R < 0.2$ τα αποτελέσματα είναι σχεδόν ταυτόσημα μεταξύ τους και όταν ο λόγος μεγαλώνει, οι λύσεις σταδιακά παρουσιάζουν αποκλίσεις. Τέλος, πρέπει να τονισθεί ότι τα παρακάτω αποτελέσματα είναι αξιόπιστα μόνο για συγκεκριμένους συνδυασμούς των φ_0, ω_0 αφού για ορισμένες περιπτώσεις οι λύσεις δεν είναι φυσικά αποδεκτές. Πιο συγκεκριμένα, για γωνίες $29.3^\circ < \varphi_0 < 90^\circ$ ο συντελεστής K_I λαμβάνει αρνητική τιμή. Αυτό γίνεται γιατί στο μαθηματικό μοντέλο συμβαίνει αλληλοεπικάλυψη στα χείλη της ρωγμής πράγμα που δεν είναι φυσικά αποδεκτό, αφού στην πραγματικότητα έχουμε θλιπτικές τάσεις και ενδεχομένως και κάποιες τάσεις τριβής μεταξύ των χειλέων, που εμποδίζουν αυτό το φαινόμενο. Σε τέτοια περίπτωση, θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί η λύση που περιλαμβάνει την διόρθωση του προβλήματος της αλληλοεπικάλυψης [28].



Σχήμα 2.6 Σύγκριση C.I.F. και λύσεις Atkinson - Markides

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

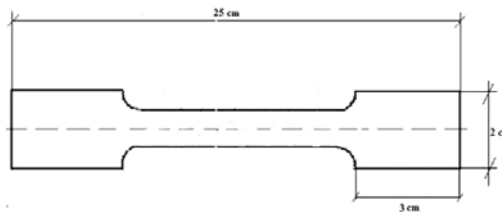
3. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

3.1 Γενικά

Προκειμένου να μετρήσουμε πειραματικά τα μήκη επαφής και τους συντελεστές έντασης των τάσεων στο πείραμα του βραζιλιανού δίσκου πραγματοποιήσαμε πειράματα καυστικών ανακλάσεως. Τα πειράματα έγιναν σε δύο οπτικές διατάξεις αποκλίνουσας δέσμης με διαφορετικό συντελεστή μεγέθυνσης. Το υλικό από το οποίο φτιάξαμε τα δοκίμια ήταν οπτικώς ισότροπο, Plexiglas πάχους 1 cm. Όλα τα δοκίμια προέρχονταν από την ίδια παρτίδα Plexiglas προκειμένου να έχουν τις ίδιες οπτικές και μηχανικές ιδιότητες, ενώ για να είμαστε βέβαιοι ότι τα αποτελέσματά μας είναι όσο το δυνατόν πιο αξιόπιστα εκτελέσαμε και κάποια συμπληρωματικά πειράματα ώστε να βρούμε τις τιμές των ελαστικών και οπτικών σταθερών. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, στην πορεία των πειραμάτων αποδείχθηκε ότι το θέμα των τασεοοπτικών σταθερών του υλικού αποτελεί ένα σημαντικό πρόβλημα από μόνο του, έχει δε απασχολήσει κατά το παρελθόν αρκετούς επιστήμονες που ασχολούνται με τις καυστικές, καθώς έχει παρατηρηθεί ότι οι ενδεικτικές τιμές στην βιβλιογραφία παρουσιάζουν τόσο μεγάλο εύρος που αν απλώς διαλέξουμε μια από αυτές τις τιμές, τα αποτελέσματα μπορεί να παρουσιάσουν μεγάλα σφάλματα.

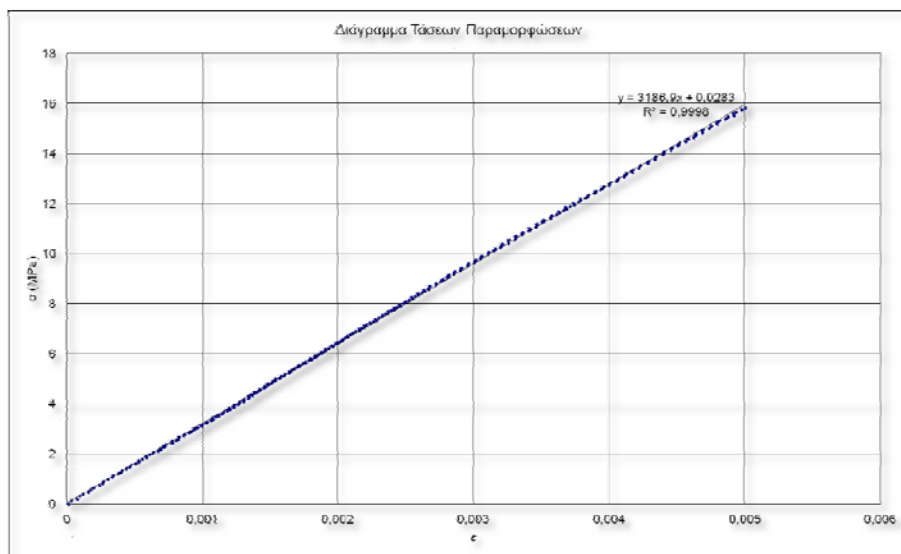
3.2 Προσδιορισμός των ελαστικών σταθερών

Για να μετρήσουμε πειραματικά τις ελαστικές σταθερές του υλικού εκτελέσαμε τρία πειράματα μονοαξονικού εφελκυσμού. Τα δοκίμια ήταν ειδικά διαμορφωμένα στο μηχανουργείο σε σχήμα Dog Bone και φυσικά ήταν από το ίδιο φύλλο Plexiglas που κατασκευάστηκαν και όλα τα υπόλοιπα δοκίμια. Οι διαστάσεις τους ήταν 25 cm x 2 cm με πάχος 1 cm.



Κάθε φορά ένα διπλό ηλεκτρομηκυσιόμετρο ετοποθετείτο στο κέντρο του δοκιμίου έτσι ώστε να έχουμε ταυτόχρονα την εγκάρσια και τη διαμήκη παραμόρφωση. Με τη βοήθεια του προγράμματος Excel φτιάξαμε τα διαγράμματα τάσεων – παραμορφώσεων και επιμήκους – εγκάρσιας παραμορφώσεως.

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι σε πολύ καλή συμφωνία με τις αντίστοιχες τιμές που βρίσκονται στη βιβλιογραφία βρισκόμενα πολύ κοντά στον μέσο όρο. Πιο συγκεκριμένα, το μέτρο ελαστικότητας υπολογίσθηκε ίσο με: $E = 3,18 \cdot 10^9 Pa$ και ο λόγος Poisson ίσος με $\nu = 0,39$.

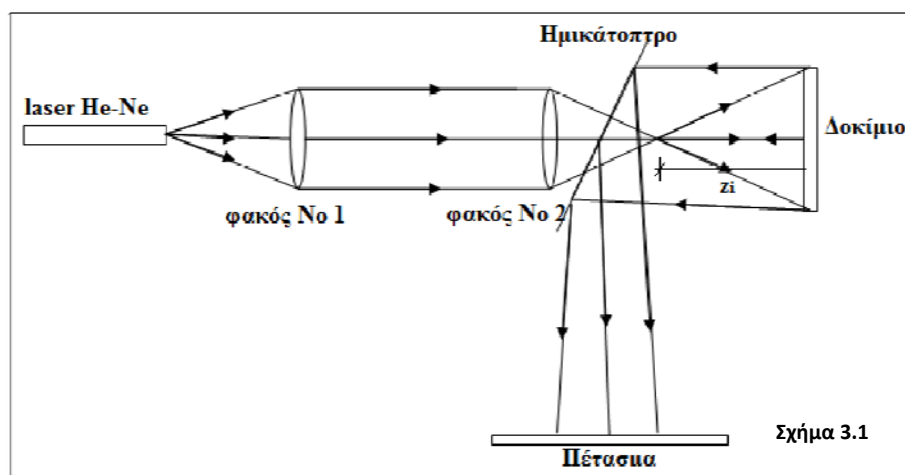


Διάγραμμα 3.1 Διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων

3.3 Πειράματα καυστικών

3.3.1 Οπτική διάταξη

Τα εργαλεία που χρειαζόμαστε για να εκτελέσουμε ένα πείραμα καυστικών είναι μια πηγή μονοχρωματικού φωτός, ένα σύστημα φακών κατάλληλα τοποθετημένων ώστε να ρυθμίζουν την φωτεινή δέσμη με τα επιθυμητά χαρακτηριστικά, ένα ή δύο πετάσματα προβολής των φωτεινών ακτίνων και μια ή δύο φωτογραφικές μηχανές που θα αποτυπώνουν τις εικόνες σε κάθε στιγμή.



Στη δική μας περίπτωση, η πηγή φωτισμού ήταν ένα laser He-Ne το οποίο εξέπεμπε την φωτεινή δέσμη, η οποία με τη σειρά της συναντούσε στη διαδρομή της ένα σύστημα φακών, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1. Πιο συγκεκριμένα, αμέσως μετά το laser οι φωτεινές ακτίνες συναντούσαν έναν φακό γνωστής εστιακής απόστασης. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα την μετατροπή της φωτεινής δέσμης από αποκλίνουσα σε παράλληλη. Από εκεί και έπειτα υπήρχε κάθε δυνατή ελευθερία στο συντελεστή μεγέθυνσης λ_m της οπτικής διάταξης. Εάν δεν τοποθετούσαμε άλλο φακό η δέσμη θα παρέμενε παράλληλη δίνοντας στη σταθερά λ_m την τιμή 1. Όμως, για λόγους βελτίωσης των πειραματικών δεδομένων, αποφασίσαμε να τοποθετήσουμε στη συνέχεια και δεύτερο φακό προκειμένου να πετύχουμε μια μεγέθυνση στις καμπύλες που θα τις έκανε πιο ευδιάκριτες. Έτσι, άλλος ένας φακός γνωστής εστιακής απόστασης τοποθετήθηκε πριν το δοκίμιο προκαλώντας σύγκλιση των ακτινών πριν από αυτό. Στη συνέχεια, το επόμενο αντικείμενο που

συναντούσε το φως ήταν το φορτισμένο δοκίμιο. Οι ανακλώμενες ακτίνες, στην προς τα πίσω πορεία τους συναντούσαν ένα ημικατόπτρο που βρισκόταν σε κλίση 45° ως προς το δοκίμιο. Αυτό είχε σαν αποστολή να μην εμποδίζει τη διέλευση του φωτός κατά τη διεύθυνση προς το δοκίμιο και ταυτόχρονα να φροντίζει να ανακλάται στην πορεία του προς το πέτασμα. Η χρήση του ημικατόπτρου βελτίωσε κατά πολύ την αξιοπιστία των πειραμάτων αφού μας επέτρεψε να τοποθετήσουμε το πέτασμα σε καταλληλότερη θέση. Και αυτό γιατί σε αντίθετη περίπτωση για να πετύχουμε το πείραμα της ανάκλασης θα έπρεπε αφ' ενός το δοκίμιο να είναι στραμμένο ως προς την διεύθυνση του φωτός (αλλιώς οι ανακλώμενες ακτίνες θα πήγαιναν πάλι προς το laser) και αφ' ετέρου δεν θα είχαμε τόσο μεγάλη ελευθερία στην επιλογή της απόστασης z_0 λόγω χωροταξικών περιορισμών. Η τιμή της παραμέτρου z_i ισούται με την απόσταση που φαίνεται στο σχήμα, ενώ η παράμετρος z_0 ισούται με το άθροισμα των αποστάσεων ημικατόπτρου – δοκίμιου και ημικατόπτρου - πετάσματος.

3.3.2 Προσδιορισμός τασεοπτικών σταθερών

Γενικά

Όπως αναφέραμε προωύτερα, οι τιμές των τασεοπτικών σταθερών έχουν μεγάλο εύρος τιμών, πράγμα το οποίο δεν μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε κάποια τιμή που να βρίσκεται κοντά στο μέσο όρο της βιβλιογραφίας. Το θέμα έχει μελετηθεί κατά το παρελθόν από τον καθηγητή Π.Σ. Θεοχάρη και τα αποτελέσματα της έρευνας αναφέρονται στο άρθρο του: Dependence of stress – optical coefficients on the mechanical and optical properties of polymers [1]. Στο άρθρο αυτό αναφέρεται μεταξύ άλλων ότι στο PMMA ενώ οι τιμές των ελαστικών σταθερών δεν παρουσιάζουν μεγάλη διασπορά από φύλλο σε φύλλο (έχοντας ως μέση τιμή για το μεν μέτρο ελαστικότητας $E = 34 \cdot 10^3 \frac{kp}{cm^2}$, για τον δε λόγο Poisson $\nu = 0,34$), οι τασεοπτικές σταθερές παρουσιάζουν μεγάλες αποκλίσεις. Οι τιμές τους μπορεί να κυμαίνονται για την c_r από $-1,61 \cdot 10^{-5} \frac{cm^2}{kp}$ μέχρι $-2,27 \cdot 10^{-5} \frac{cm^2}{kp}$ και για την c_t από $-1,00 \cdot 10^{-5} \frac{cm^2}{kp}$ έως $-1,78 \cdot 10^{-5} \frac{cm^2}{kp}$.

Επιπλέον, στο ίδιο άρθρο, ο συγγραφέας επισημαίνει πως οι οπτικές σταθερές δεν αποτελούν χαρακτηριστικές ιδιότητες του υλικού όπως οι ελαστικές σταθερές, αλλά μεταβάλλονται κατά τη διάρκεια της φόρτισης.

Στα διαγράμματα που παραθέτει απεικονίζει τις διακυμάνσεις που παρατηρούνται συναρτήσει της φόρτισης για τις σταθερές c_r , c_t . Εκεί μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι καθεμία σταθερά έχει μια γραμμική και μια μη γραμμική περιοχή. Ευτυχώς, οι σταθερές c_t , c_r παρουσιάζουν μια αρκετά μεγάλη γραμμική περιοχή δίνοντάς μας την ευκαιρία να κάνουμε την μελέτη μας στηριζόμενοι στην παραδοχή ότι στο μεγαλύτερο εύρος της φόρτισης που θα εφαρμόσουμε, οι τασεοπτικές σταθερές έχουν σταθερή τιμή. Άλλωστε, εργαζόμαστε στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικότητας πράγμα το οποίο στρέφει την προσοχή μας μακριά από τα πολύ υψηλά φορτία.

Μέθοδος προσδιορισμού των σταθερών

Η διαδικασία που συνήθως ακολουθείται για να υπολογισθούν οι τασεοπτικές σταθερές είναι το πείραμα συμβολομετρίας. Υπάρχει όμως και μια άλλη έμμεση μέθοδος. Συγκεκριμένα, εκτελείται ένα ‘αντίστροφο’ πείραμα καυστικών ψάχνοντας αυτή τη φορά τις c_r , c_t . Οι δύο πιο γνωστές τέτοιες μέθοδοι έχουν προταθεί από τους Raftopoulos και Kartalopoulos [29] και από τους Theocaris και Ioakimidis [30].

Οι πρώτοι χρησιμοποιούν μια διάταξη στην οποία μια ρηγματωμένη πλάκα τοποθετείται σε πλαίσιο φόρτισης και εκτελείται πείραμα εφελκυσμού. Τα δύο πετάσματα ανάκλασης και διέλευσης τοποθετούνται σε ίσες αποστάσεις από το δοκίμιο και μονοχρωματικό φώς προσπίπτει κάθετα στην επιφάνεια του δοκιμίου. Καθώς εκτελούμε το πείραμα σταματάμε σε τακτά διαστήματα τη φόρτιση και φωτογραφίζουμε ταυτόχρονα τα δύο πετάσματα. Μετρώντας τις μέγιστες διαμέτρους των δύο καυστικών σε κάθε στιγμιότυπο εργαζόμαστε ως εξής:

$$\Theta\acute{\epsilon}\tau\omicron\mu\epsilon\ q \equiv D_{tr}/D_{tt} \quad (3.1)$$

όπου D_{tr} , D_{tt} οι χαρακτηριστικές μέγιστες διάμετροι των καυστικών ανακλάσεως και διελεύσεως. Από την εξίσωση:

$$c_r = \frac{\nu}{E} \left(\frac{1}{2} - \frac{q^{5/2}-1}{q^{5/2}-2} \right) \quad (3.2)$$

βρίσκουμε την σταθερά για την ανάκλαση και από την:

$$D_{tr}/D_{tt} = 0,5 \cdot (c_r/c_t)^{2/5} \quad (3.3)$$

υπολογίζουμε την c_t .

Η μέθοδος των Theocaris, Ioakimidis [30] από την άλλη ακολουθεί διαφορετική τακτική. Σύμφωνα με αυτή, αντί για μια ρηγματωμένη πλάκα έχουμε μια πλάκα με οπή στο σημείο που τέμνονται οι δύο διαγώνιοι και μόνο ένα πέτασμα, αυτό της ανάκλασης. Υποβάλλουμε στη συνέχεια το δοκίμιο σε ένα πείραμα μονοαξονικού εφελκυσμού. Τότε, διαμορφώνονται δύο καυστικές στο πέτασμα. Η μια οφείλεται στην ανάκλαση από την εμπρός επιφάνεια και η άλλη από την πίσω. Για αυτή που δημιουργείται από την απ'ευθείας ανάκλαση γνωρίζουμε ότι η τασεοπτική σταθερά της ισούται με:

$$c_f = \frac{\nu}{E} \quad (3.4)$$

Επιπλέον, οι δύο καμπύλες έχουν το ίδιο σχήμα και είναι στραμμένη η μια ως προς την άλλη κατά 90° . Εάν γράψουμε σε συνοπτική μορφή τις σταθερές $C_{r,f}$ του προβλήματος έχουμε:

$$C_{r,f} = z_0 d c_{r,f} p / (\lambda_m R^2) \quad (3.5)$$

όπου d είναι το πάχος του δοκιμίου, λ_m είναι ο συντελεστής μεγέθυνσης της οπτικής διάταξης, R η ακτίνα της οπής και p το φορτίο της μηχανής. Οι δε αρχικές καμπύλες της κάθε καυστικής δίνονται από την εξίσωση:

$$r_{0(r,f)} = R |12 C_{r,f}|^{1/4} \quad (3.6)$$

Είναι αυτονόητο ότι η αρχική καμπύλη δημιουργείται σε σημεία με:

$$r_{0(r,f)} \geq R \quad (3.7)$$

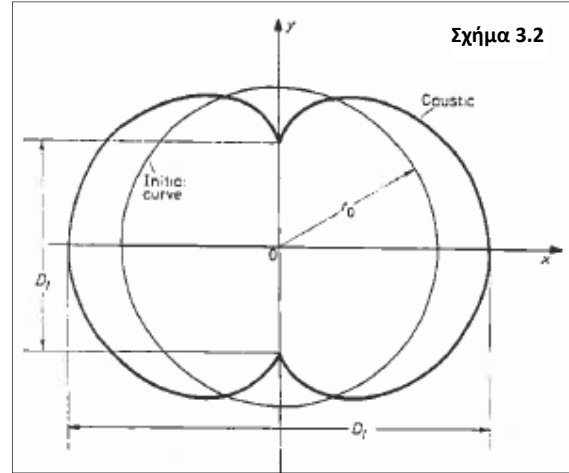
γιατί για ακτίνα μικρότερη αυτής του κύκλου δεν υπάρχει καν υλικό στο δοκίμιο. Στην εικόνα που βλέπουμε, η φόρτιση είναι κατά μήκος του άξονα y και απεικονίζονται η καυστική της πίσω επιφάνειας, οι χαρακτηριστικές της διάμετροι D_t, D_l και η αρχική της καμπύλη. Οι παραμετρικές εξισώσεις των καυστικών κατά x και y δίνονται από τις σχέσεις:

$$X = \lambda_m z_0 (\cos \theta \pm \frac{1}{3} \cos 3\theta)$$

(3.8)

$$Y = \lambda_m z_0 (\sin \theta \pm \frac{1}{3} \sin 3\theta)$$

(3.9)



όπου το + ισχύει για $C < 0$ και

το - για $C > 0$. Από την εξίσωση (3.9) για $\theta = 0^\circ$ και $\theta = 90^\circ$ έχουμε:

$$D_l = \frac{8}{3} |\lambda_m| r_0 \quad , \quad D_t = \frac{4}{3} |\lambda_m| r_0 \quad (3.10)$$

Ακόμα, από τις εξισώσεις (3.4) – (3.6) κάνοντας πράξεις μπορούμε να βρούμε:

$$c_r = - \left(\frac{\nu}{E} \right) (D_{lr} / D_{lf})^4 \quad (3.11)$$

αφού γενικά $c_r < 0$. Το μόνο που μένει τώρα είναι να βρούμε και τη σταθερά c_t . Αυτό είναι εύκολο διότι ισχύει και η σχέση:

$$c_r = 2c_t - \nu/E \quad (3.12)$$

Έτσι, είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε και τις δύο σταθερές. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την δεύτερη εξίσωση από τις (3.10) μαζί με τις (3.4) – (3.6) για τον προσδιορισμό του c_r :

$$c_r = - \left(\frac{\nu}{E} \right) (D_{tr} / D_{tf})^4 \quad (3.13)$$

Τέλος, συνδυάζοντας τις (3.11) & (3.13) καταλήγουμε στην:

$$c_r = -\left(\frac{\nu}{E}\right) [(D_{lr}/D_{tr})/(D_{lf}/D_{tf})]^2 \quad (3.14)$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε δύο διαθέσιμες εξισώσεις για να υπολογίσουμε την c_r . Την (3.13) και την (3.14). Από αυτές τις δύο πιο καλά αποτελέσματα μας δίνει η (3.14) διότι εκφράζει την σταθερά μας λαμβάνοντας υπ' όψιν τέσσερις διαστάσεις της καμπύλης αντί για δύο, γεγονός που μειώνει κατά πολύ τα σφάλματα που δημιουργούνται στην περίπτωση που το πέτασμα δεν είναι εντελώς παράλληλο με το δοκίμιο.

Στη συγκεκριμένη μέθοδο καμία από τις παραμέτρους z_0, p, R, d, λ_m δεν εμπλέκεται στον υπολογισμό των τασεοπτικών σταθερών $c_{r,t}$. Το γεγονός αυτό έχει πολύ μεγάλη σημασία διότι περιορίζει κατά πολύ τα σφάλματά μας, αφού ούτε η οπτική διάταξη, ούτε η ακτίνα της οπής (πέραν του ότι πρέπει να είναι πολύ μικρότερη σε σχέση με τις άλλες διαστάσεις της πλάκας) παίζουν ρόλο. Ακόμα δεν χρειάζεται να γνωρίζουμε καν το φορτίο που ασκείται στο δοκίμιο.

Συγκρίνοντας τις δύο μεθόδους, αποφασίσαμε να δουλέψουμε με την μέθοδο Theocaris, Ioakimidis γιατί έχει μια σειρά πλεονεκτημάτων έναντι της άλλης μεθόδου. Συνοπτικά μπορούμε να αναφέρουμε τα παρακάτω:

- i. Δε χρειαζόμαστε δύο πετάσματα (η διάταξη με τα δύο παράλληλα και ισαπέχοντα από το δοκίμιο πετάσματα μπορεί να αποτελέσει πηγή αριθμητικού σφάλματος εάν οι αποστάσεις είναι ελαφρώς άνισες ή εάν τα πετάσματα δεν είναι εντελώς παράλληλα).
- ii. Ένα δοκίμιο με οπή μας δίνει τη δυνατότητα να αποφύγουμε πολύ πιο εύκολα φαινόμενα πλαστικότητας σε σχέση με ένα ρηγματωμένο.
- iii. Ένα δοκίμιο με οπή έχει πάντοτε λιγότερες ατέλειες σε σχέση με ένα δοκίμιο με ρωγμή.

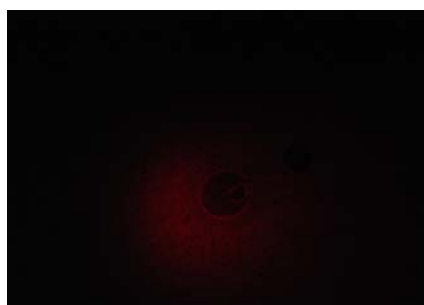
Αποτελέσματα οπτικών σταθερών

Για να υπολογίσουμε τις τασεοπτικές σταθερές κατασκευάσαμε στο μηχανουργείο μια ορθογώνια πλάκα διαστάσεων $30 \times 12 \times 1 \text{ cm}$ από το Plexiglas που προέρχονταν οι δίσκοι των υπόλοιπων πειραμάτων με μια οπή ακτίνας 2 mm στο κέντρο της. Στη συνέχεια, αλλάξαμε τη δυναμοκυψέλη της μηχανής τοποθετώντας την κατάλληλη για πείραμα εφελκυσμού και τοποθετήσαμε την πλάκα στις αρπάγες. Έπειτα, ρυθμίσαμε την οπτική διάταξη σύμφωνα με τις προσταγές του πειράματος που θα εκτελούσαμε. Το εφαρμοζόμενο φορτίο είχε 4 στάδια. Ξεκινήσαμε να φορτίζουμε

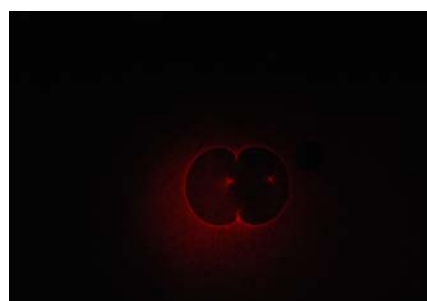
σταματώντας για πρώτη φορά στα 5KN. Το δεύτερο βήμα ήταν στα 7.5 KN, το τρίτο στα 10KN και το τελευταίο στα 13.5 KN. Οι 3 από τις 4 φωτογραφίες από το πέτασμα της ανάκλασης φαίνονται παρακάτω μαζί με το αντίστοιχο διάγραμμα της τασεοπτικής σταθεράς c_r .

Τελικά, η τιμή της c_r για το υλικό μας βρέθηκε ότι ισούται με:

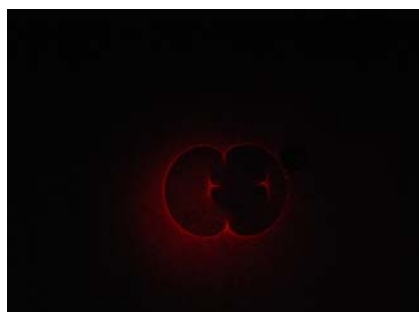
$$c_r = 1,2 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$$



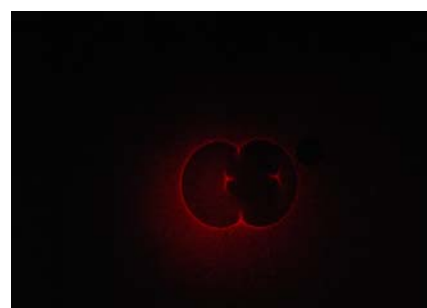
0 KN



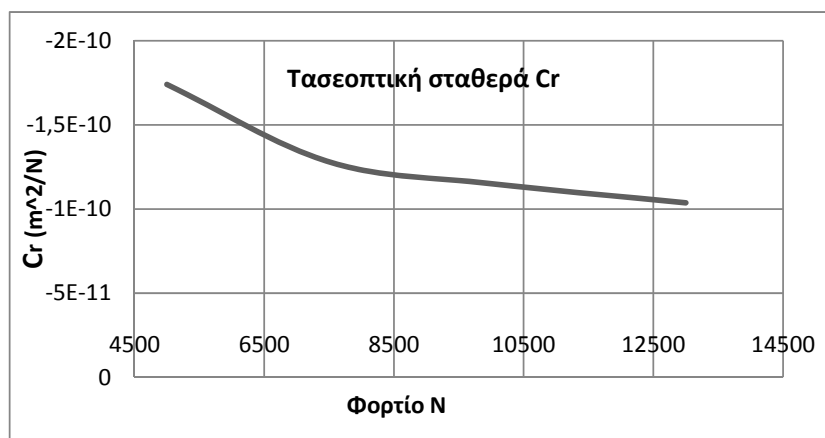
5 KN



10 KN



13 KN



3.3.3 Προετοιμασία δοκιμίων

Τα δοκίμιά μας κόπηκαν από ένα φύλλο Plexiglas πάχους 1 cm και διαμορφώθηκαν στο μηχανουργείο του Τομέα Μηχανικής. Έτσι, κόπηκαν τόσο ρηγματωμένοι όσο και αρηγμάτωτοι δίσκοι διαμέτρου 10 cm. Μεγάλη προσοχή δόθηκε στην κατεργασία των δοκιμίων στα άκρα τους προκειμένου να μην υπάρχει κωνικότητα που θα μας αλλοίωνε τα αποτελέσματα. Επίσης, η επιφάνεια των δίσκων που θα έρχονταν σε επαφή με τις αρπάγες ήταν όσο γίνεται πιο λεία προκειμένου τα δοκίμια να έρχονται σε επαφή με τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Στα ρηγματωμένα δοκίμια δημιουργήθηκε μια τρύπα στο κέντρο τους με ένα τρυπάνι διαμέτρου 0.5 mm έτσι ώστε να είμαστε αργότερα σε θέση να περάσουμε από εκεί την σέγα και να δημιουργήσουμε τις ρωγμές μας. Η σέγα που χρησιμοποιήσαμε ήταν πάχους 0.2 mm και αφού περάστηκε από την κεντρική τρύπα διαμόρφωσε συμμετρικές ακτινικές ρωγμές με μήκη 1 cm και 2 cm. Η επιλογή των διαστάσεων της σέγας έγινε με γνώμονα το να βρισκόμαστε όσο το δυνατόν πιο κοντά στα χαρακτηριστικά μια φυσικής ρωγμής και όχι μιας εγκοπής. Το θέμα έχει ήδη μελετηθεί κατά το παρελθόν [31] και έχει αποδειχθεί ότι για εγκοπές με λόγο πλευρών m εντός του φάσματος $40 \leq m \leq 70$ τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε απέχουν από αυτά μιας φυσικής ρωγμής κατά 5%. Η δε κεντρική οπή έγινε τόσο μικρή που ήταν οριακά μεγαλύτερη από την απόσταση των χειλέων της ρωγμής προκειμένου να δημιουργούσε όσο το δυνατόν λιγότερες ανεπιθύμητες πρόσθετες τασικές ιδιομορφίες και συνεπώς καυστικές, οι οποίες θα έπεφταν επάνω στις καυστικές των ρωγμών και θα αλλοίωναν την τελική εικόνα.

Τα δοκίμια υπέστησαν θλίψη σε μια μηχανή Instron 1125 50 kN του Εργαστηρίου Αντοχής Υλικών. Στη μηχανή αυτή τοποθετήθηκε και βαθμονομήθηκε μια κατάλληλη δυναμοκυψέλη για πειράματα θλίψης με εύρος φόρτισης 0-5000 Nt καθώς και οι κατάλληλες αρπάγες για το πείραμα του Βραζιλιανού δίσκου. Στα πειράματά μας το φορτίο εφαρμοζόταν σε διακεκομμένα βήματα ανά 1 KN με τον πιο αργό ρυθμό που έχει η μηχανή ο οποίος ισούται με 0.5 cm/min.

3.3.4 Πειράματα αρηγμάτωτου δίσκου

Το ένα σκέλος των πειραμάτων είναι η εύρεση του μήκους επαφής μεταξύ αρπάγης και δοκιμίου σε δίσκους χωρίς ρωγμή. Η μια σειρά πειραμάτων έγινε με το δοκίμιο και την αρπάγη να βρίσκονται σε επαφή χωρίς να

παρεμβάλλεται τίποτα μεταξύ τους. Στην άλλη σειρά πειραμάτων αποφασίσαμε να προσθέσουμε λιπαντικό μεταξύ των επιφανειών προκειμένου να παρατηρήσουμε ενδεχόμενες αλλαγές που θα οφείλονταν στην παρουσία της τριβής. Για να έχουμε δε μια καλύτερη εικόνα σχετικά με την αναπτυσσόμενη τριβή στις επιφάνειες που μελετάμε κατασκευάσαμε ένα κεκλιμένο επίπεδο μεταβαλλόμενης κλίσης. Σε αυτό, αφού τοποθετήθηκαν οι επιφάνειες που θα έρχονταν σε επαφή στο πείραμα με λιπαντικό και χωρίς, ξεκινήσαμε με πολύ αργό ρυθμό να το ανυψώνουμε. Στην αρχή οι δυο επιφάνειες ήταν ακίνητες μεταξύ τους, αλλά κάποια στιγμή καθώς το ανυψώναμε ακολούθησε ολίσθηση της μιας ως προς την άλλη. Εκείνη τη στιγμή σταματούσαμε την ανύψωση και μετρούσαμε την γωνία κλίσης. Η επαυτομένη αυτής ισούται με τον συντελεστή τριβής. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι ο συντελεστής τριβής στην περίπτωση που δεν έχουμε λιπαντικό βρέθηκε ίσος με 0.5 ενώ στην περίπτωση που το λιπάνουμε βρέθηκε να ισούται με 0.3

Όσον αφορά την οπτική διάταξη, χρησιμοποιήθηκε αποκλίνουσα δέσμη και το πέτασμα με το οποίο εργαστήκαμε ήταν αυτό της ανάκλασης. Η εύρεση την εξίσωσης της καυστικής που θα μας έδινε ποσοτικά το ζητούμενο αποτέλεσμα θα έπρεπε να γίνει με χρήση της εξίσωσης (2.5). Όμως, η εύρεση των παραμετρικών εξισώσεων των καυστικών για τον βραζιλιανό δίσκο είναι ακόμα ανοικτό επιστημονικό θέμα που ξεπερνάει τα πλαίσια μιας διπλωματικής εργασίας. Έτσι, αποφασίσαμε να υπολογίσουμε τα ζητούμενα αποτελέσματα χρησιμοποιώντας την λύση για το πρόβλημα του Hertz, μιας και η αρχή του Saint Venant μας δίνει το δικαίωμα να "παρακάμψουμε" το γεγονός ότι η φόρτιση στο επάνω μέρος του δίσκου είναι σημειακή και όχι απολύτως ίδια με την δική μας περίπτωση. Το πρόβλημα αυτό έχει μελετηθεί και κατά το παρελθόν με τη μέθοδο των καυστικών από τους Stassinakis & Theocaris [32], ενώ μια ενδιαφέρουσα πειραματική μελέτη με τη μέθοδο των καυστικών έχει γίνει και από τον G. Papadopoulos [33], όπου ο συγγραφέας μελετά μια εκδοχή του προβλήματος στην οποία οι δίσκοι βρίσκονται εντός ρουλεμάν. Η πορεία της λύσης έχει ως εξής:

Η λύση του προβλήματος του Hertz έχει δοθεί και από τον Muskhelishvili [24] σε σαφώς πιο βολική μορφή για τα πειράματα καυστικών. Η τασική συνάρτηση $\Phi(z)$ για αυτό το πρόβλημα ισούται με:

$$\Phi(z) = \frac{(1^2 - z^2)^{1/2}}{2\pi K} \int_{-1}^1 \frac{f'(t)dt}{(1^2 - t^2)^{1/2}(t-z)} \quad (3.15)$$

όπου:

$$\int_{-1}^l \frac{tf'(t)dt}{(l^2-t^2)^{1/2}} = KP \quad (3.16)$$

$$f(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) t^2 \quad (3.17)$$

$$K = \frac{k_1+1}{4\mu_1} + \frac{k_2+1}{4\mu_2} \quad (3.18)$$

Με $\mu_{1,2}$ συμβολίζουμε το μέτρο διάτμησης των δύο υλικών και τα $k_{1,2}$ ισούνται με $k_1 = (3 - 4\nu_{1,2})$ για επίπεδη παραμόρφωση και $k_{1,2} = (3 - \nu_{1,2})/(1 + \nu_{1,2})$ για επίπεδη ένταση. Ας τοποθετήσουμε ένα σύστημα συντεταγμένων A_{xy} με την κορυφή Α στο αρχικό σημείο επαφής των δίσκων και την ευθεία A_x να είναι η κοινή εφαπτομένη των δύο κυλίνδρων. Με αυτό το συμβολισμό μπορούμε να υποθέσουμε ότι το μήκος επαφής είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους $2l$ που βρίσκεται κατά μήκος του άξονα A_x . Ολοκληρώνοντας τις δύο πρώτες από τις παραπάνω εξισώσεις βρίσκουμε τους τύπους που μας δίνουν τις εξισώσεις των $\Phi(z)$ και l :

$$\Phi(z) = -i \frac{R-r}{2KRr} \left[z - (z^2 - l^2)^{1/2} \right] \quad (3.19)$$

και

$$l^2 = \frac{2Rr}{\pi(R-r)} KP \quad (3.20)$$

Από τον τύπο της $\Phi(z)$ βρίσκουμε:

$$\frac{4C}{\lambda_m} \frac{d^2\Phi(z)}{dz^2} = -2i \frac{C(R-r)}{\lambda_m KRr} \left[-\frac{1}{(z^2-l^2)^{1/2}} + \frac{z^2}{(z^2-l^2)(z^2-l^2)^{1/2}} \right] \quad (3.21)$$

Θέτουμε:

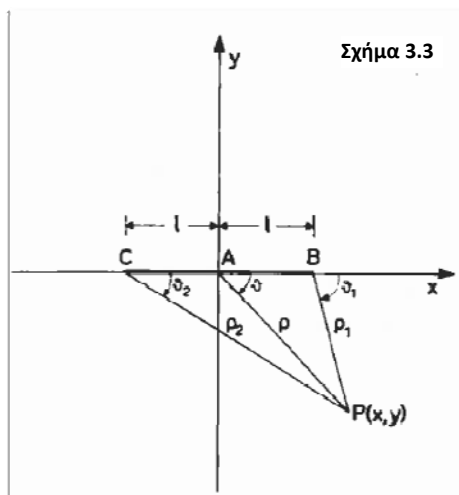
$$C^* = \frac{C(R-r)}{\lambda_m KRr} \quad (3.22)$$

Και η (3.21) γίνεται:

$$\frac{4C}{\lambda_m} \frac{d^2\Phi(z)}{dz^2} = -2iC^* \left[-\frac{1}{(z^2-l^2)^{1/2}} + \frac{z^2}{(z^2-l^2)(z^2-l^2)^{1/2}} \right] \quad (3.23)$$

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} z_1 &= z - l & z_2 &= z + l \\ z &= \rho e^{i\theta} & z_1 &= \rho_1 e^{i\theta_1} \\ z_2 &= \rho_2 e^{i\theta_2} \end{aligned} \quad (3.24)$$



Η (3.23) μετά από αντικατάσταση γίνεται:

$$\frac{4C}{\lambda_m} \frac{d^2\Phi(z)}{dz^2} = -2iC^* \frac{l^2}{(\rho_1\rho_2)^{3/2}} e^{-i\frac{3(\theta_1+\theta_2)}{2}} \quad (3.25)$$

Συνδυάζοντας την τελευταία με την εξίσωση της αρχικής καμπύλης, έχουμε:

$$\frac{4C}{\lambda_m} \left| \frac{d^2\Phi(z)}{dz^2} \right| = (2C^*) \frac{l^2}{(\rho_1\rho_2)^{3/2}} = 1 \quad (3.26)$$

Η οποία μας δίνει:

$$(\rho_1\rho_2) = (2C^*)^{2/3} l^{4/3} \quad (3.27)$$

Από το σχήμα παίρνουμε ότι:

$$\rho_1^2 = \rho^2 + l^2 - 2l\rho \cos \theta, \quad \rho_2^2 = \rho^2 + l^2 + 2l\rho \cos \theta \quad (3.28)$$

Αντικαθιστώντας τα στην (3.27) έχουμε:

$$\rho^4 - 2\rho^2 l^2 \cos 2\theta + l^4 - (2C^*)^{4/3} l^{8/3} = 0 \quad (3.29)$$

Οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (που αποτελούν και την ακτίνα της αρχικής καμπύλης) βρίσκονται να είναι:

$$\rho = l \left\{ \cos 2\theta \pm \left[\cos^2 2\theta - 1 + \left(\frac{2C^*}{l} \right)^{4/3} \right]^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (3.30)$$

όπου κρατήσαμε μόνο τις δύο θετικές ρίζες. Επιπλέον, από την παραμετρική εξίσωση της καυστικής έχουμε:

$$\frac{4C}{\lambda_m} \frac{d\Phi(z)}{dz} = -2iC^* \left[1 - \frac{z}{(z^2 - l^2)^{1/2}} \right] \quad (3.31)$$

$$\frac{4C}{\lambda_m} \frac{d\Phi(z)}{dz} = -2iC^* \left[1 - \frac{\rho}{(\rho_1 \rho_2)^{1/2}} \left\{ \cos \left[\theta - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] - i \sin \left[\theta - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] \right\} \right] \quad (3.32)$$

Έτσι, οι παραμετρικές εξισώσεις της καυστικής γίνονται:

$$\begin{aligned} X &= \lambda_m \left\{ \rho \cos \theta + (2C^*)^{2/3} l^{-2/3} \rho \sin \left[\theta - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] \right\} \\ Y &= \lambda_m \left\{ \rho \sin \theta - (2C^*)^{2/3} l^{-2/3} \rho \cos \left[\theta - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Οι γωνίες θ_1, θ_2 δίνονται από τις σχέσεις:

$$\theta_1 = \arctan \frac{\sin \theta}{\rho \cos \theta - l} \quad \theta_2 = \arctan \frac{\rho \sin \theta}{\rho \cos \theta + l} \quad (3.34)$$

Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε ότι η εξίσωση της αρχικής καμπύλης (3.30) που θα μας χρειαστεί προκειμένου να υπολογίσουμε το μήκος επαφής των δύο δίσκων δεν είναι πια κύκλος, όπως συνέβαινε στις περιπτώσεις των ρωγμών, αλλά είναι μια άγνωστης μορφής καμπύλη. Για να έχουμε πραγματικές ρίζες για την τιμή της ρ θα πρέπει :

$$\cos^2 2\theta - 1 + \left(\frac{2C^*}{l} \right)^{4/3} > 0$$

Επειδή τώρα η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $\cos^2 2\theta$ είναι η μονάδα και η ελάχιστη το μηδέν, για να ικανοποιείται η συνθήκη αρκεί:

$$2C^* > l$$

Επιπλέον, η άλλη παράσταση που βρίσκεται κάτω από τη ρίζα για θετικό πρόσημο δίνει πάντοτε:

$$\cos 2\theta + \left[\cos^2 \theta - 1 + \left(\frac{2C^*}{l} \right)^{4/3} \right]^{1/2} > 0$$

Για αρνητικό πρόσημο η ποσότητα:

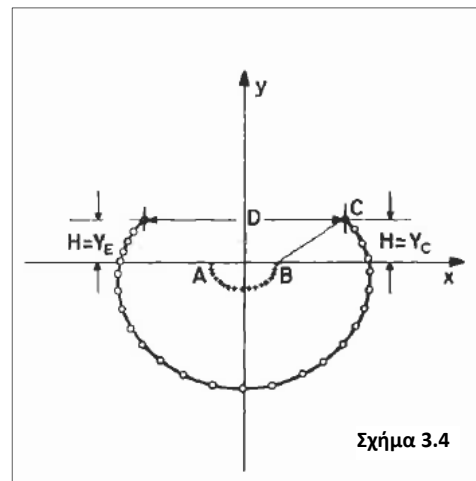
$$\cos 2\theta - \left[\cos^2 \theta - 1 + \left(\frac{2C^*}{l} \right)^{4/3} \right]^{1/2}$$

δίνει ρίζες για $l > 2C^*$. Για αυτές τις τιμές της C^* έχουμε 2 μιγαδικές ρίζες για την ρ και συνεπώς μια διπλή καυστική. Σε κάθε περίπτωση οι αρχικές καμπύλες είναι πολύπλοκες και μπορούν να παρασταθούν μόνο γραφικά. Όμως, τα σημεία που μας ενδιαφέρουν για τον προσδιορισμό του μήκους επαφής είναι εκείνα που αντιστοιχούν στις τιμές της γωνίας $\theta = 0, \pi$ δηλαδή τα σημεία A και B. Τα σημεία αυτά αντιστοιχίζονται στα ακραία σημεία της καυστικής C και E τα οποία απέχουν στο πέτασμα απόσταση ίση με D. Έτσι, έχουμε για $\theta = 0$ ή π :

$$\begin{aligned} x_{A,B} &= l \left\{ 1 + (2C^*/l)^{2/3} \right\}^{1/2}, \\ y_{A,B} &= 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

και

$$\begin{aligned} X_{C,E} &= \pm \lambda_m \rho \\ Y_{C,E} &= \lambda_m \left\{ (2C^*/l)^{2/3} \rho - 2C^* \right\} \end{aligned} \quad (3.36)$$



Έχοντας τώρα περιγράψει τον τρόπο απεικόνισης των ακραίων σημείων της αρχικής καμπύλης (που αποτελούν τα ακραία σημεία του μήκους επαφής) υπολογίζουμε ότι η απόστασή τους D ισούται με:

$$D = 2X_C \equiv 2X_E = 2\lambda_m \rho = 2\lambda_m l \left[1 + \left(\frac{2C^*}{l} \right)^{2/3} \right]^{1/2} \quad (3.37)$$

Και τελικά καταλήγουμε ότι το μήκος επαφής l δίνεται από την λύση της εξίσωσης:

$$l^2 + 2C^* \frac{2}{3} l^{4/3} - D^4 / 4\lambda_m^2 = 0 \quad (3.38)$$

3.3.5 Πειράματα ρηγματωμένου δίσκου

Στα πειράματα των ρηγματωμένων δοκιμίων μας απασχόλησε η περίπτωση που δεν εμφανίζεται αλληλοεπικάλυψη στα χείλη της ρωγμής. Έτσι, η γωνία που σχημάτιζε κάθε φορά η ρωγμή ως προς την φόρτιση ήταν $0^\circ, 10^\circ, 20^\circ$ και 30° . Ο λόγος που επιλέξαμε να μελετήσουμε αυτό το εύρος γωνιών είναι ότι στις 0° επιτυγχάνουμε συνθήκες καθαρού mode I, ενώ στις 30° ($29,3^\circ$ σύμφωνα με την θεωρητική λύση [11]) έχουμε συνθήκες καθαρού mode II, με τις ενδιάμεσες τιμές γωνιών να μας δίνουν φόρτιση μεικτού τύπου. Τα μήκη των ρωγμών σε κάθε μια από αυτές τις γωνίες ήταν 1 cm και 2 cm. Για τις ρωγμές μήκους ενός εκατοστού διαφοροποιήσαμε την οπτική διάταξη "παίζοντας" με τον συντελεστή μεγέθυνσης προκειμένου να δούμε εάν και κατά πόσο διαφοροποιούνται τα αποτελέσματα. Οι ζητούμενες τιμές δίνονται από τις εξισώσεις:

$$K_I = K \cos \omega = \frac{2\sqrt{2\pi}}{3\epsilon z_0 d \lambda_m^{3/2} c_{r,t,f}} \left(\frac{D_{l,t}^{max}}{\delta_{l,t}^{max}} \right)^{5/2} \cos \frac{\varphi}{2} \quad (3.39)$$

$$\tan \omega = \frac{K_{II}}{K_I} \quad (3.40)$$

3.3.6 Διαδικασία επεξεργασίας πειραμάτων

Είδαμε παραπάνω την πορεία που ακολουθήσαμε στα πειράματά μας και τις εξισώσεις που μας δίνουν τα ζητούμενα αποτελέσματα σε κάθε περίπτωση.

Σειρά έχει η επεξεργασία των αποτελεσμάτων που προέκυψαν. Η διαδικασία που ακολουθήθηκε για την επεξεργασία αυτών των πειραμάτων είχε ως εξής:

Αφού τυπώσαμε τις φωτογραφίες των καυστικών το πρώτο βήμα που κάναμε ήταν να μετρήσουμε την μέγιστη διάμετρό τους. Αν και όπως δείξαμε στο πρώτο κεφάλαιο δεν είναι απαραίτητο να εργαστούμε με την μέγιστη διάμετρο (εκτός από την περίπτωση των μηκών επαφής που αναγκαστικά χρειαζόμαστε την απόσταση D), επιλέξαμε αυτή την τεχνική διότι σε εκείνη την διάσταση η εικόνα της καυστικής είχε την καλύτερη φωτεινότητα γεγονός που έκανε την όλη διαδικασία πιο εύκολη αλλά και πιο αξιόπιστη. Όμως, η απόσταση που μετράμε από τις φωτογραφίες δεν αποτελεί την πραγματική διάσταση της καυστικής. Και αυτό γιατί οι διαστάσεις των καμπυλών στις φωτογραφίες σε σχέση με το πέτασμα έχουν αλλάξει λόγω της εστίασης της φωτογραφικής μηχανής, αλλά και λόγω της εκτύπωσης της φωτογραφίας στις διαστάσεις του φωτογραφικού χαρτιού. Το δεύτερο βήμα λοιπόν ήταν να χρησιμοποιήσουμε έναν μάρτυρα γνωστών διαστάσεων που είχαμε κολλήσει εκ των προτέρων στο πέτασμα και να υπολογίσουμε την ποσοστιαία μεταβολή των διαστάσεων που οφείλεται στην φωτογραφία. Έτσι, μετατρέψαμε τα μήκη που μετρήσαμε στις φωτογραφίες στα πραγματικά. Το επόμενο χαρακτηριστικό που μας χρειάζεται για να συνεχίσουμε την διαδικασία είναι η χρήση των διαστάσεων της οπτικής διάταξης και των τασεοπτικών σταθερών. Εδώ πρέπει να επισημάνουμε ότι στην αρχή και στο τέλος κάθε πειράματος μετρούσαμε τα μήκη z_0 και z_i της οπτικής διάταξης για επαλήθευση προκειμένου να είμαστε βέβαιοι ότι δεν συνέβη καμία μεταβολή στην διάταξή μας πράγμα που θα αχρήστευε τα πειράματα.

Στους συντελεστές έντασης των τάσεων αντικαταστήσαμε την μέγιστη διάμετρο D , τις τιμές των τασεοπτικών σταθερών και τις διαστάσεις τις οπτικής διάταξης στις σχέσεις (3.39) και (3.40). Η μόνη ποσότητα που μας χρειάζεται επιπλέον για να ολοκληρώσουμε τους υπολογισμούς μας είναι η γωνία ω . Η γωνία ω υπολογίστηκε γραφικά από τις τυπωμένες φωτογραφίες. Πιο συγκεκριμένα, σε κάθε φωτογραφία ρηγματωμένου δίσκου χαράχθηκε ο άξονας διεύθυνσης της ρωγμής. Έπειτα, χαράχθηκε ο άξονας ως προς τον οποίο η ρωγμή παρουσιάζει συμμετρία και μετρήθηκε η γωνία των δύο αυτών αξόνων. Η τιμή αυτή ισούται με το διπλάσιο της γωνίας ω . Έχοντας πλέον όλα τα στοιχεία που χρειαζόμαστε στη διάθεσή μας χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα Excel βρήκαμε τις ζητούμενες ποσότητες.

Στα μήκη επαφής το πρόβλημα ήταν πιο δύσκολο. Η εύρεση των μηκών επαφής ολοκληρώνεται μόλις αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (3.38) τις σταθερές της διάταξης μας και τα μήκη D που μετρήσαμε. Όμως, μια πρόσθετη δυσκολία που υπεισέρχεται στο πρόβλημα είναι ότι η παραπάνω εξίσωση δεν μπορεί να λυθεί αναλυτικά. Για να μπορέσουμε να βρούμε τις τιμές του l που μηδενίζουν την παράσταση χρειάστηκε κάποια αριθμητική μέθοδος. Εμείς προτιμήσαμε την μέθοδο Newton – Raphson. Έτσι, χρησιμοποιήθηκε ο αλγόριθμος που υλοποιεί την μέθοδο για κάθε στιγμιότυπο του πειράματος που φωτογραφήθηκε. Ο αριθμός των επαναλήψεων της μεθόδου δεν ήταν προκαθορισμένος, αλλά η εκτέλεση των επαναλήψεων σταματούσε μόλις η διαφορά δύο διαδοχικών όρων ήταν μικρότερη από 10 δεκαδικά ψηφία. Τα αποτελέσματα κάθε πειράματος παρουσιάζονται στην επόμενη ενότητα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΩΝ

4.1 Αποτελέσματα αρηγμάτωτου δίσκου

Δοκίμιο χωρίς λιπαντικό

Χαρακτηριστικά οπτικής διάταξης

$$\lambda_m = 4,17 \quad z_0 = 3,11 \text{ m} \quad z_i = 0,98 \text{ m}$$



3 kN



6 kN

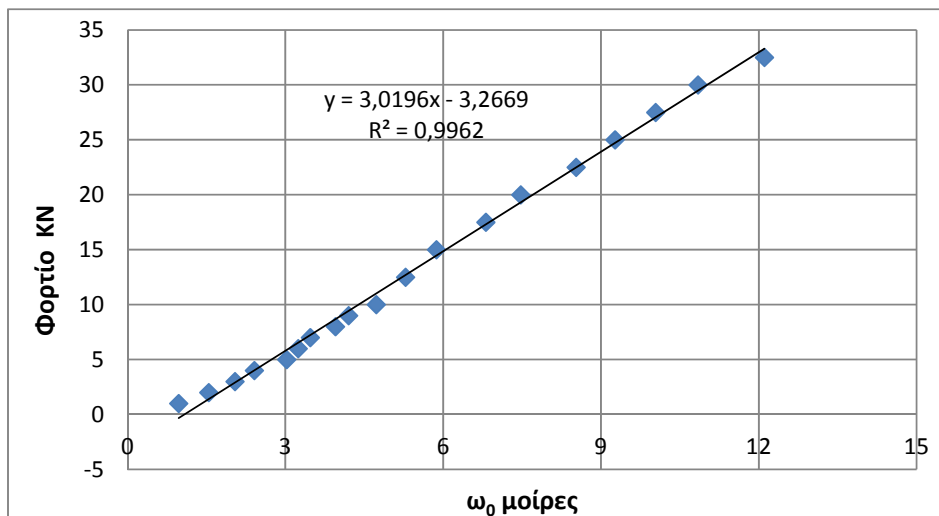
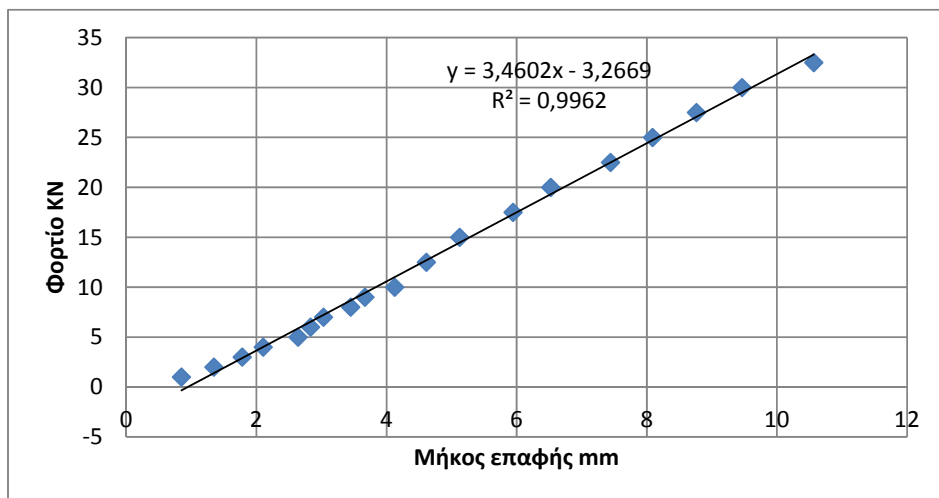


9 kN



20 kN

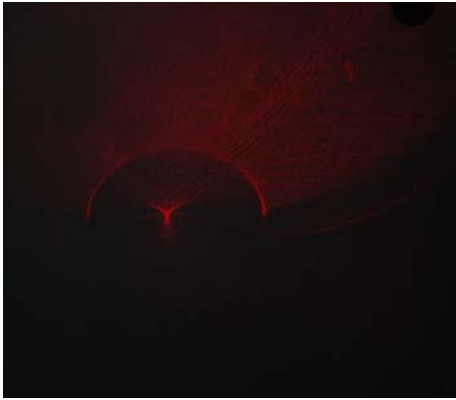
Στο συγκεκριμένο πείραμα το φορτίο που επιβλήθηκε ήταν ανά 1 KN για τα 10 πρώτα στιγμιότυπα και ανά 2,5 KN για τα επόμενα, μέχρι τα 45 KN χωρίς να έχουμε θραύση του δοκιμίου. Κατά την επεξεργασία των αποτελεσμάτων δεν χρησιμοποιήσαμε όλο το εύρος φόρτισης διότι προφανώς παρατηρήθηκε πλαστικότητα στα υψηλά φορτία που αλλοίωσε την αξία των αποτελεσμάτων. Τα μήκη επαφής που μετρήθηκαν ξεκινούσαν από τα 0,848 mm και έφτασαν τα 10,6 mm στα 32,5 KN. Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η σχέση μεταξύ φορτίου και μήκους επαφής όπως επίσης και φορτίου και τόξου επαφής σε μοίρες.



Δοκίμιο με λιπαντικό

Χαρακτηριστικά οπτικής διάταξης

$$\lambda_m = 4,17 \quad z_0 = 3,11 \text{ m} \quad z_i = 0,98 \text{ m}$$



3 KN



6 KN

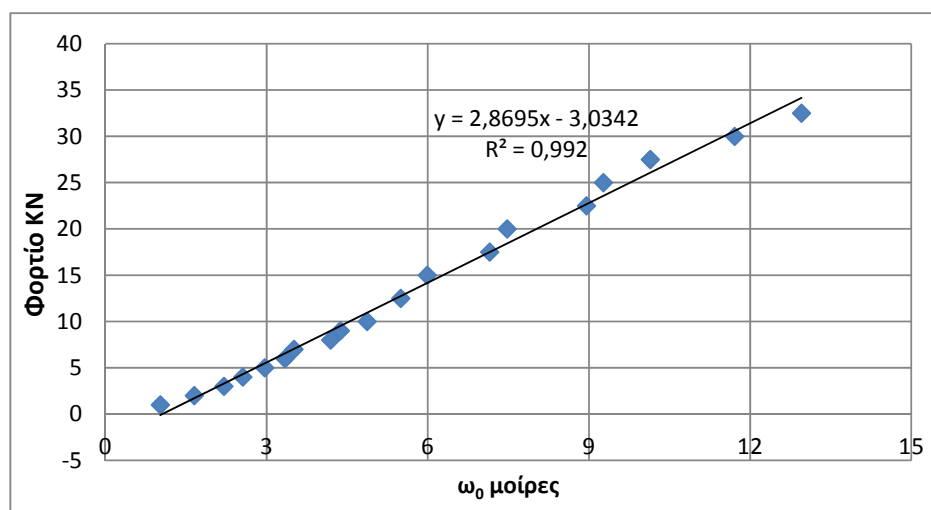
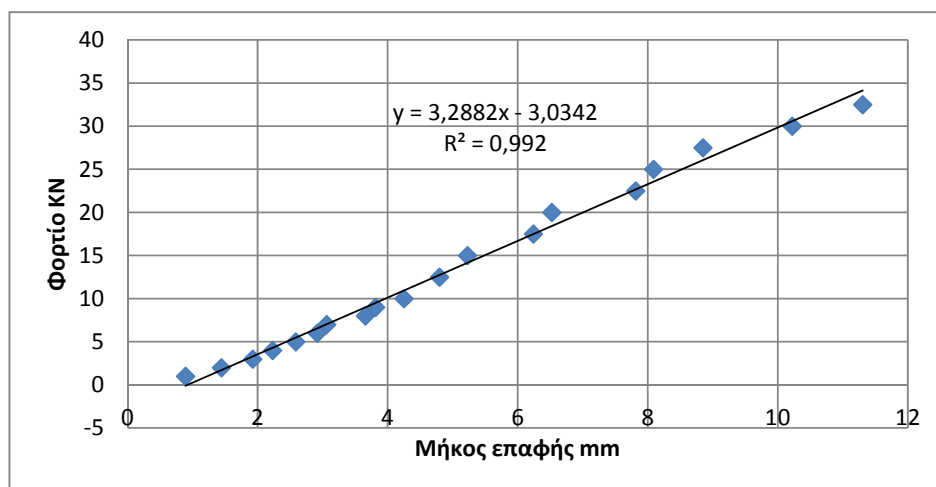


9 KN

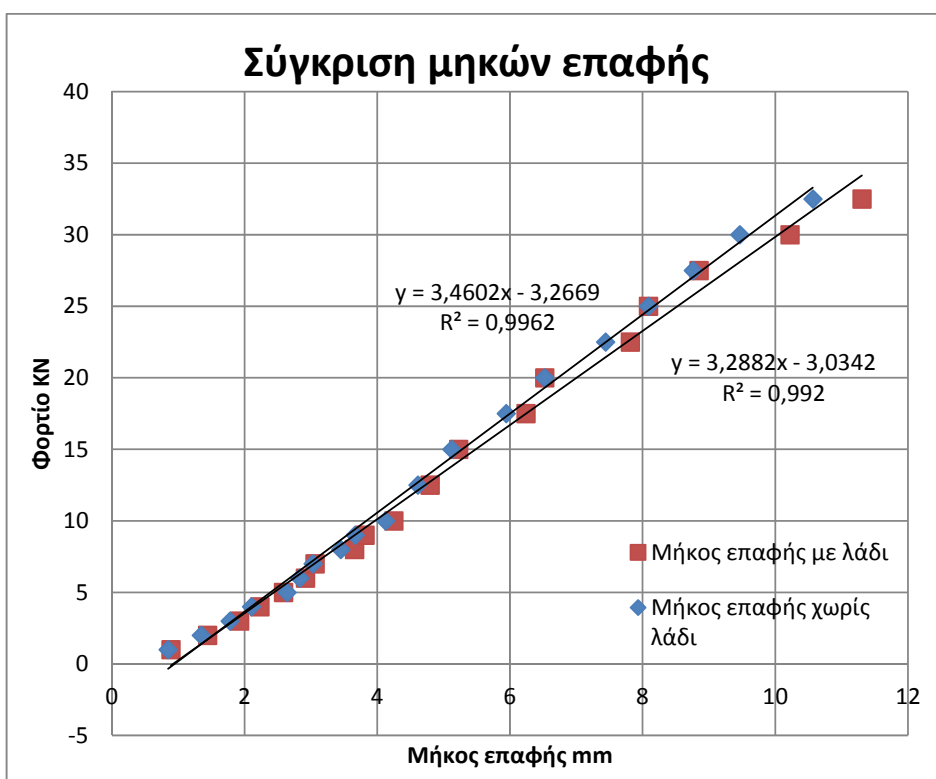


20 KN

Η διαδικασία φόρτισης ήταν όμοια με την προηγούμενη. Το φορτίο εφαρμόστηκε ανά 1KN στα πρώτα δέκα βήματα του πειράματος και ανά 2,5 για κάθε επόμενο ως τα 45 KN. Οι διαφορές των αποτελεσμάτων μεταξύ αυτού του πειράματος και του προηγούμενου είναι πολύ μικρές γεγονός που ίσως οφείλεται και στην μικρή διαφοροποίηση που παρουσίασε ο συντελεστής τριβής όπως μετρήθηκε στο κεκλιμένο επίπεδο. Στο πρώτο από τα παρακάτω διαγράμματα φαίνεται η μεταβολή του μήκους επαφής κατά τη διάρκεια της φόρτισης, ενώ στο δεύτερο φαίνεται το τόξο επαφής σε μοίρες συναρτήσει του φορτίου.



Τέλος, στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζονται συγκριτικά τα μήκη επαφής για τις δύο προαναφερθείσες περιπτώσεις:



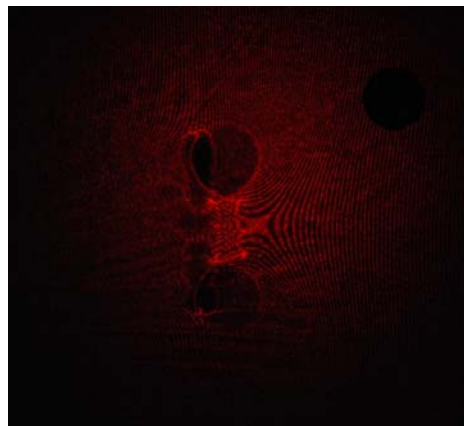
Διάγραμμα 4.1 Σύγκριση μηκών επαφής

4.2 Αποτελέσματα ρηγματωμένου δίσκου Μήκος ρωγμής 1 cm

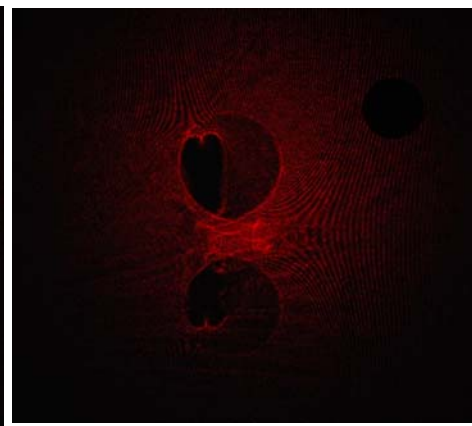
Γωνία κλίσης ρωγμής 0°

Χαρακτηριστικά οπτικής διάταξης

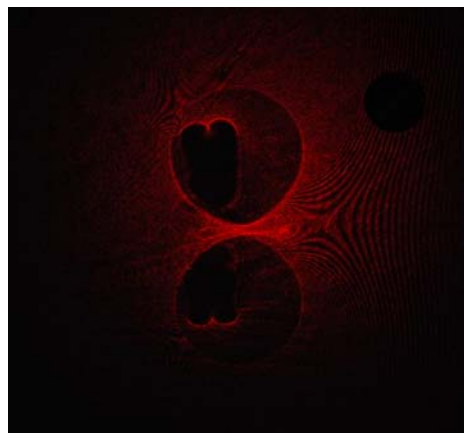
$\lambda_m = 5,01$ $z_0 = 2,17$ m $z_i = 0,54$ m



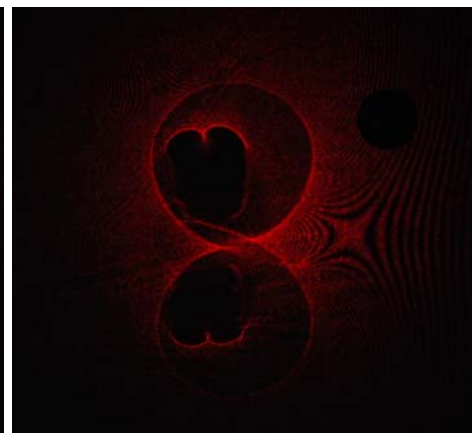
3 kN



6 kN

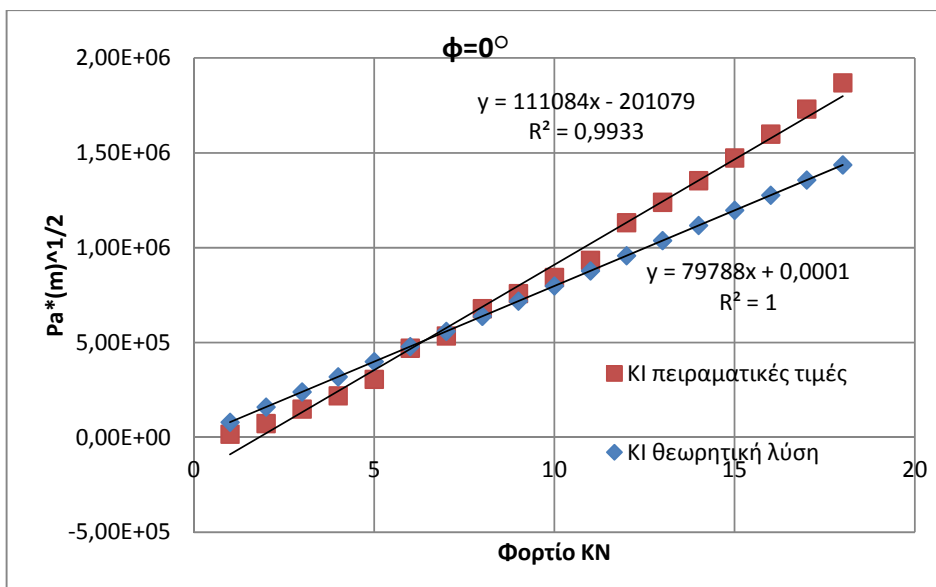


10 kN



15 kN

Σε αυτό το πείραμα το δοκίμιο τοποθετήθηκε έτσι, ώστε η ρωγμή να είναι κατακόρυφη προκειμένου να επιτύχουμε συνθήκες καθαρού mode I. Οι τιμές των διαμέτρων ελέγχθηκαν και στα δύο άκρα της ρωγμής προκειμένου να βεβαιωθούμε ότι οι διαστάσεις της ήταν όπως έπρεπε και δεν υπήρχαν ασυμμετρίες. Το φορτίο που εφαρμόστηκε ήταν κλιμακωτό ανά 1 KN μέχρι την θραύση η οποία έλαβε χώρα στα 19 KN. Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η μεταβολή του συντελεστή K_I κατά τη διάρκεια της φόρτισης και η αντίστοιχη θεωρητική τιμή. Οι τιμές του οριζόντιου άξονα είναι σε KN, ενώ του κατακόρυφου σε $(Pa \cdot m^{1/2})$, όπως φαίνονται και στο παρακάτω διάγραμμα:

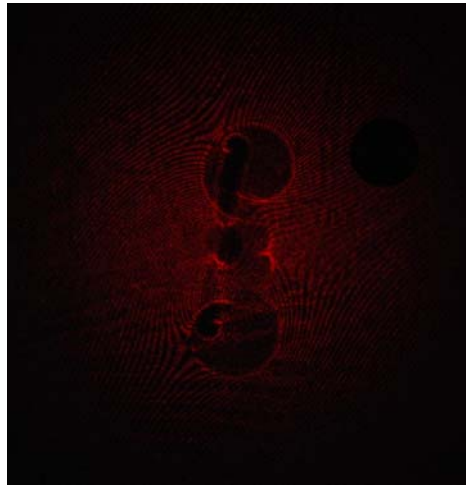


Διάγραμμα 4.2

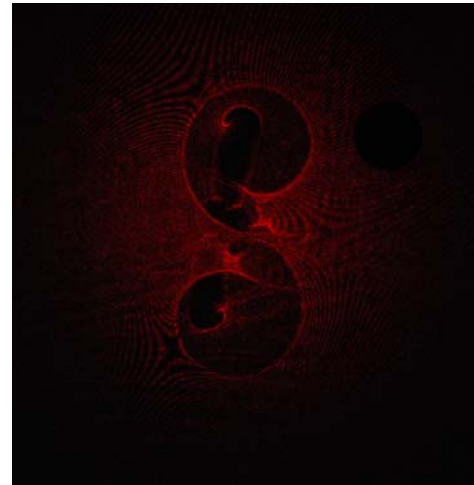
Γωνία κλίσης ρογμής 10°

Χαρακτηριστικά οπτικής διάταξης

$\lambda_m = 5,01$ $z_0 = 2,17$ m $z_i = 0,54$ m



3 kN



6 kN

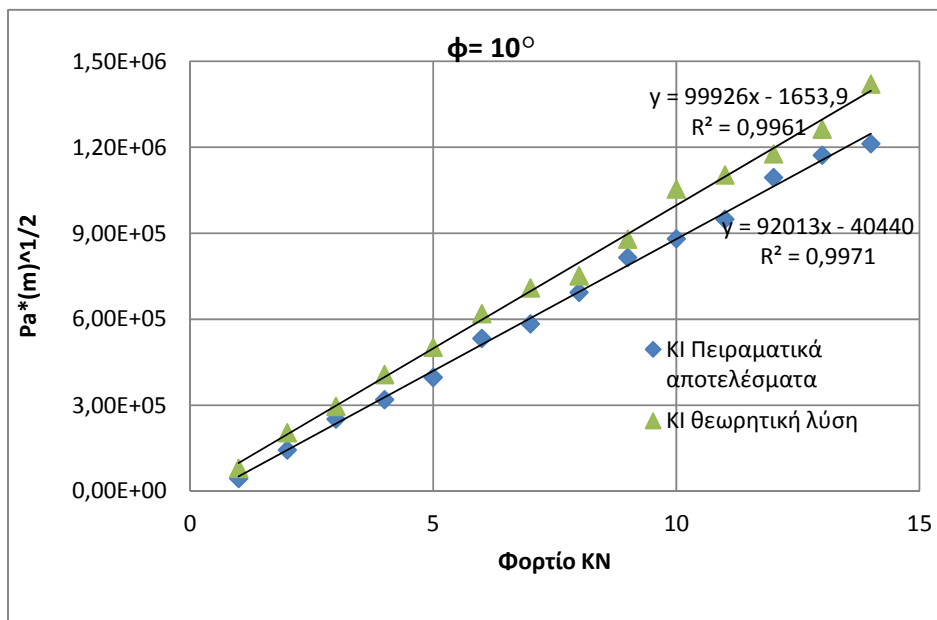


10 kN

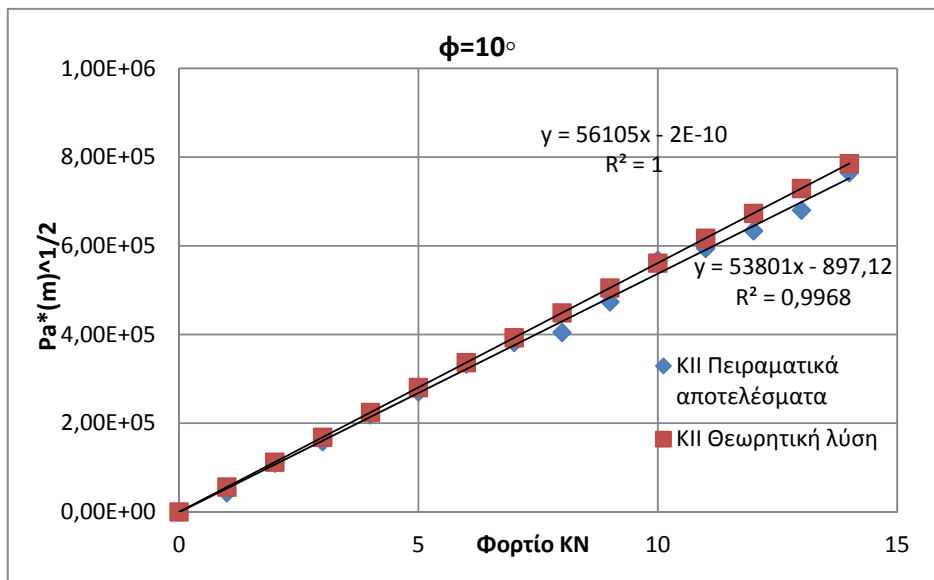


15 kN

Αυτή τη φορά η γωνία κλίσης της ρωγμής ως προς την φόρτιση ήταν 10° . Επομένως, όπως φαίνεται και από τις φωτογραφίες πλέον έχουμε και την παρουσία συντελεστή έντασης τάσεων K_{II} εκτός από τον K_I . Η γωνία συμμετρίας ω της ρωγμής βρέθηκε γραφικά και μετά τον υπολογισμό του K_I υπολογίσαμε το K_{II} . Το φορτίο εφαρμόστηκε ανά 1 KN μέχρι την θραύση που έλαβε χώρα στα 17 KN. Τα αποτελέσματα και για τα δύο άκρα της ρωγμής είναι ταυτόσημα, γεγονός που μας διασφαλίζει ότι τα δοκίμιά μας πληρούσαν τις προϋποθέσεις που έπρεπε. Στα παρακάτω διαγράμματα φαίνονται οι τιμές των K_I , K_{II} κατά τη διάρκεια της φόρτισης μαζί με τις αντίστοιχες θεωρητικές τιμές. Οι τιμές του φορτίου είναι σε KN και των S.I.F. σε $(Pa \cdot m)^{1/2}$.



Διάγραμμα 4.3



Διάγραμμα 4.4

Γωνία κλίσης ρογμής 20°

Χαρακτηριστικά οπτικής διάταξης

$\lambda_m = 5,01$ $z_0 = 2,17$ m $z_i = 0,54$ m



3 KN



6 KN

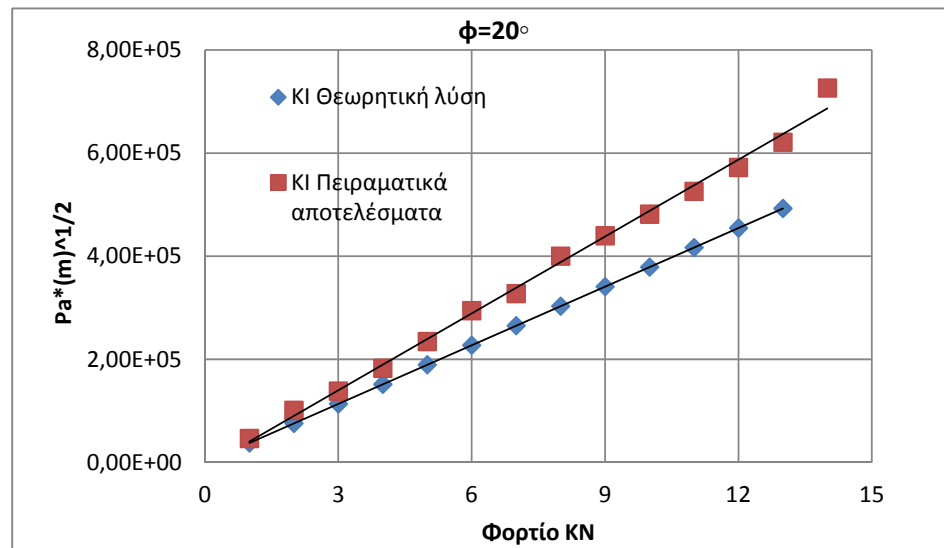


10 KN



12 KN

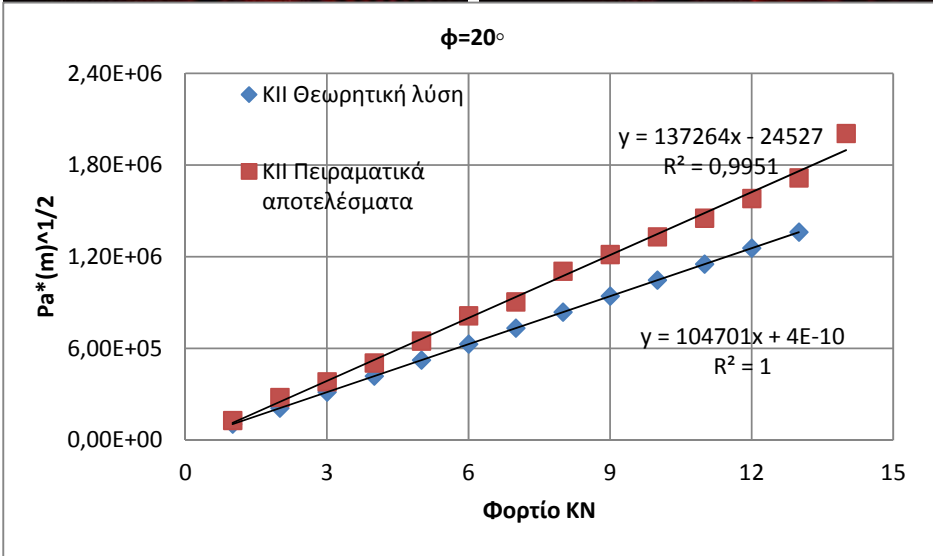
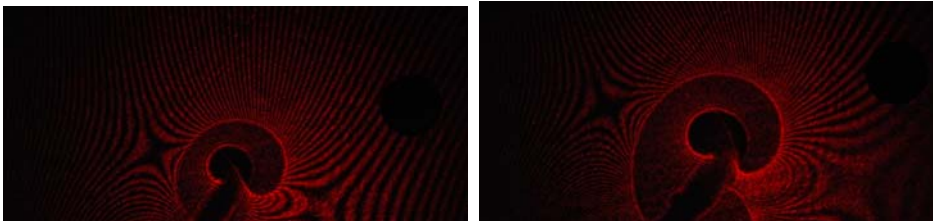
Η κλίση αυξήθηκε κατά 10° και πλέον έφτασε τις 20° . Η διαδικασία φόρτισης του δοκιμίου ήταν και πάλι η ίδια (ανά 1 KN ως τη θραύση). Το δοκίμιο έσπασε στα 14 KN. Στους επόμενους πίνακες παρατίθενται τα διαγράμματα των K_I, K_{II} σε $(Pa \cdot m)^{1/2}$ και οι αντίστοιχες θεωρητικές τιμές.



Γωνία κλίσης ρωγμής 30°

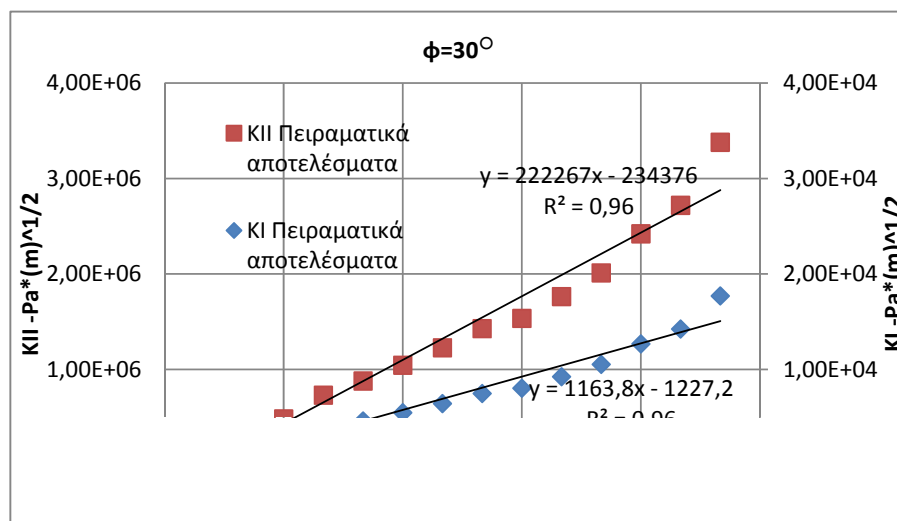
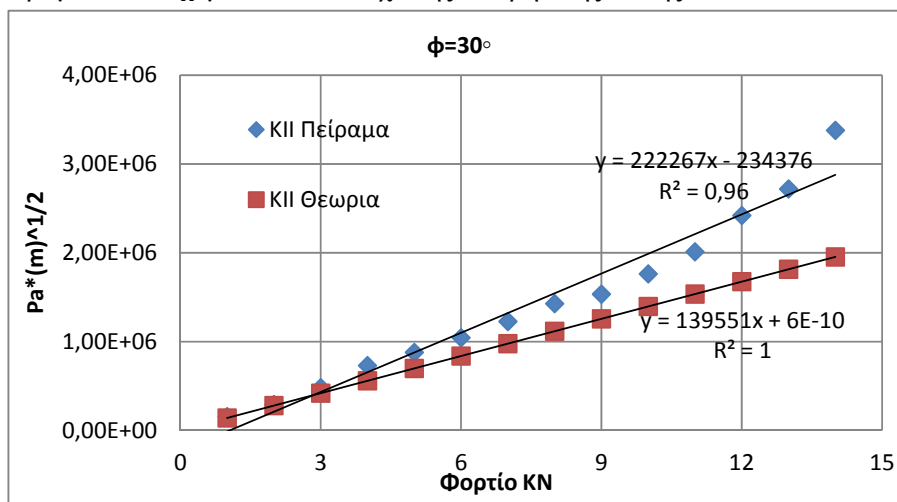
Χαρακτηριστικά οπτικής διάταξης

$$\lambda_m = 5,01 \quad z_0 = 2,17 \text{ m} \quad z_i = 0,54 \text{ m}$$



Διάγραμμα 4.5

Εδώ έχουμε την τελευταία εκδοχή φόρτισης που μελετήσαμε. Η γωνία κλίσης της ρωγμής ως προς την φόρτιση είναι 30° . Σύμφωνα με την θεωρία είμαστε κοντά στην αλληλοεπικάλυψη των χειλέων της ρωγμής καθώς επίσης και σε συνθήκες καθαρού mode II. Όπως φαίνεται από τις φωτογραφίες δεν παρατηρείται το φαινόμενο της αλληλοεπικάλυψης και τα αποτελέσματα του συντελεστή K_I είναι κατά πολύ μικρότερα από εκείνα του συντελεστή K_{II} . Παρακάτω δίδεται το κοινό διάγραμμα των K_I, K_{II} (όπως αυτά υπολογίσθηκαν από το πείραμα) σε $(Pa \cdot m)^{1/2}$ καθώς και η σύγκριση του πειραματικού K_{II} με το αντίστοιχο της θεωρητικής λύσης.



Γωνία κλίσης ρωγμής 0°

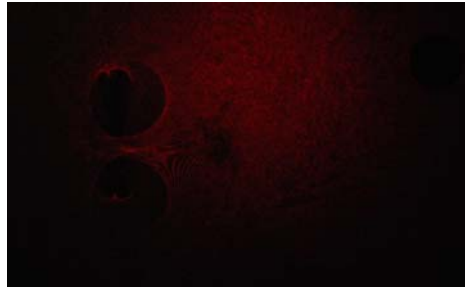
Χαρακτηριστικά οπτικής διάταξης

Χαρακτηριστικά οπτικής διάταξης

$$\lambda_m = 4,17 \quad z_0 = 3,11 \text{ m} \quad z_i = 0,98 \text{ m}$$



3 KN



6 KN

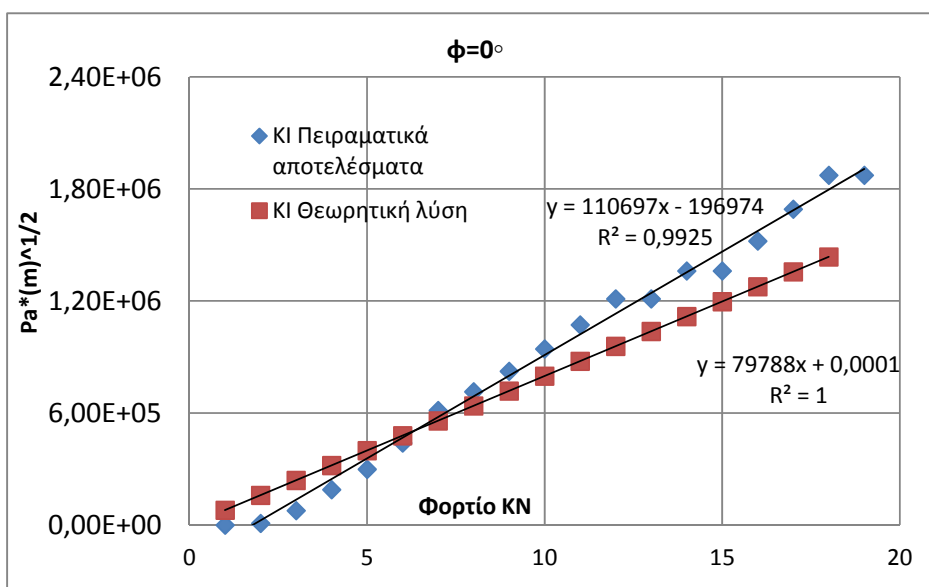


10 KN



15 KN

Αυτό είναι το δεύτερο πείραμα που η ρωγμή τοποθετήθηκε κατακόρυφα προκειμένου να επιτύχουμε συνθήκες καθαρού mode I. Και πάλι οι τιμές των διαμέτρων ελέγχθηκαν και στα δύο άκρα της ρωγμής προκειμένου να βεβαιώσουμε ότι οι διαστάσεις της ήταν όπως έπρεπε και δεν υπήρχαν ασυμμετρίες. Το φορτίο που εφαρμόστηκε ήταν κλιμακωτό ανά 1 KN μέχρι την θραύση η οποία έλαβε χώρα στα 18 KN. Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η μεταβολή του συντελεστή K_I κατά τη διάρκεια της φόρτισης. Οι τιμές του οριζόντιου άξονα είναι σε KN, ενώ του κατακόρυφου σε $(Pa \cdot m)^{1/2}$.



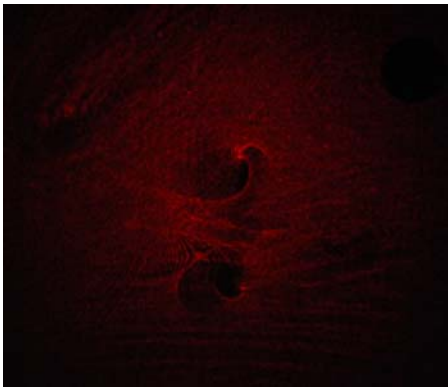
Διάγραμμα 4.7

Γωνία κλίσης ρωγμής 10°

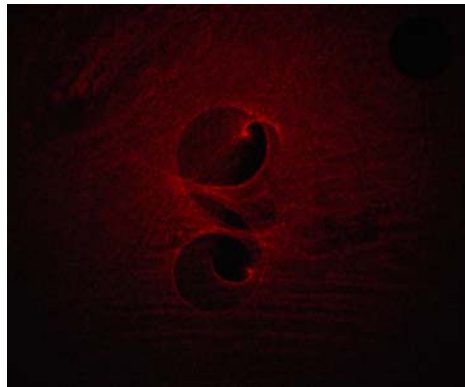
Χαρακτηριστικά οπτικής διάταξης

Χαρακτηριστικά οπτικής διάταξης

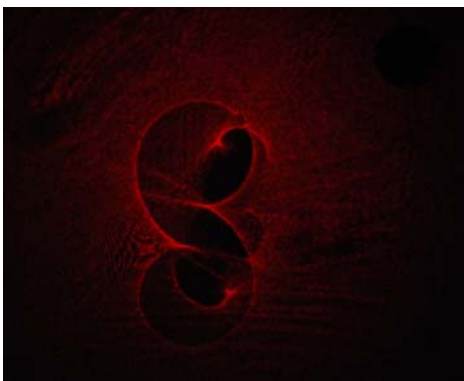
$$\lambda_m = 4,17 \quad z_0 = 3,11 \text{ m} \quad z_i = 0,98 \text{ m}$$



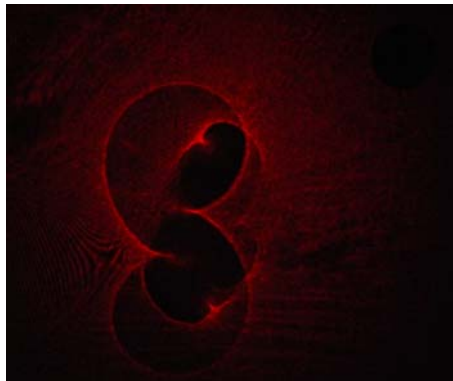
3 KN



6 KN

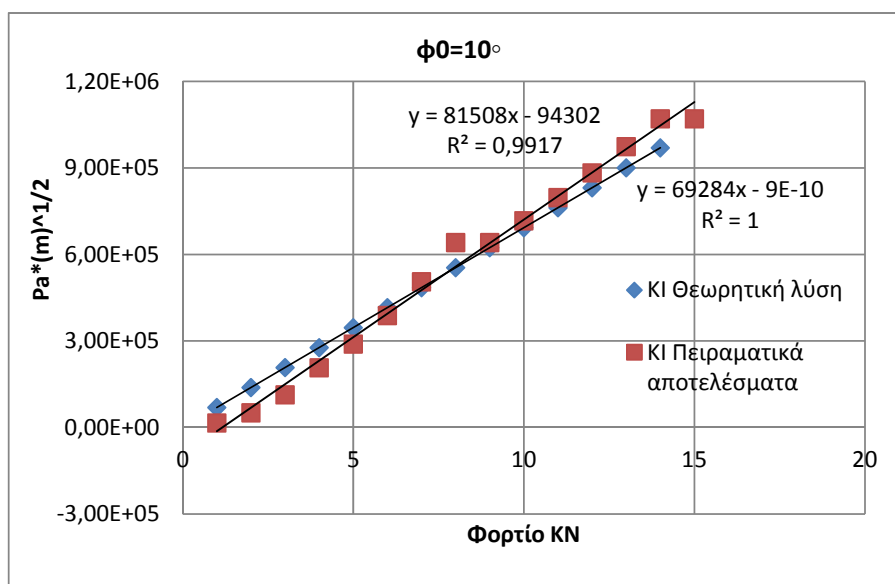
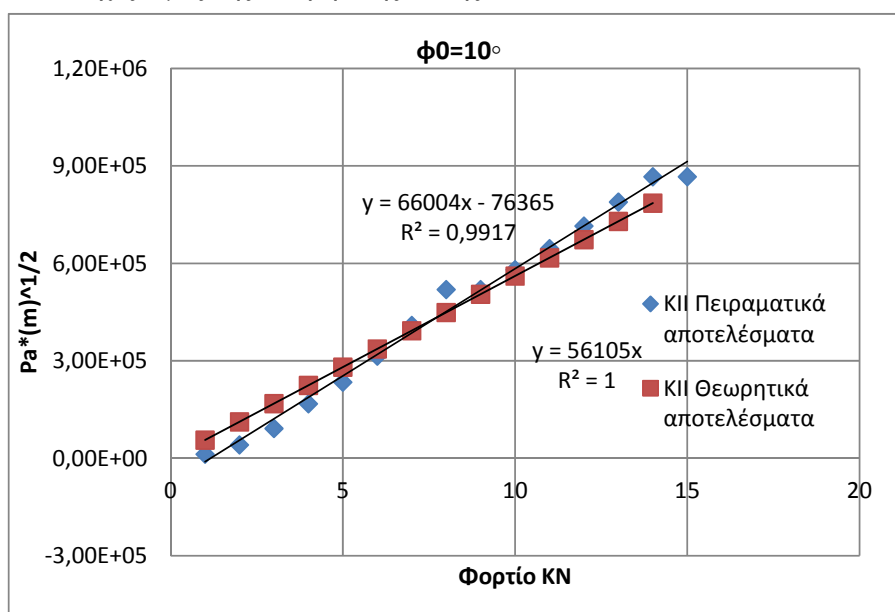


10 KN



15 KN

Εδώ παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της δεύτερης σειράς πειραμάτων που πραγματοποιήθηκαν για ρωγή μήκους 1 cm με κλίση 10°. Το φορτίο επιβλήθηκε σταδιακά ξεκινώντας από την τιμή 1 KN μέχρι τη θραύση. Στα παρακάτω διαγράμματα φαίνονται οι τιμές των συντελεστών K_I, K_{II} με τις αντίστοιχες τιμές της θεωρητικής λύσης.



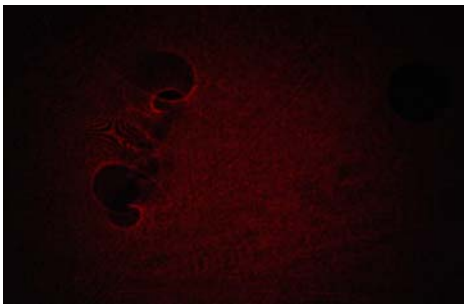
Διάγραμμα 4.8

Γωνία κλίσης ρογμής 20°

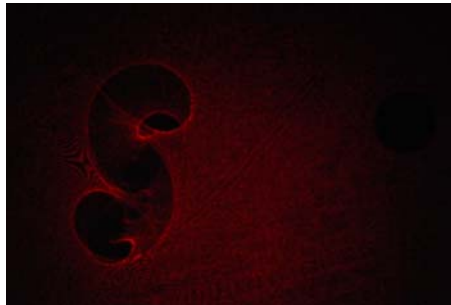
Χαρακτηριστικά οπτικής διάταξης

Χαρακτηριστικά οπτικής διάταξης

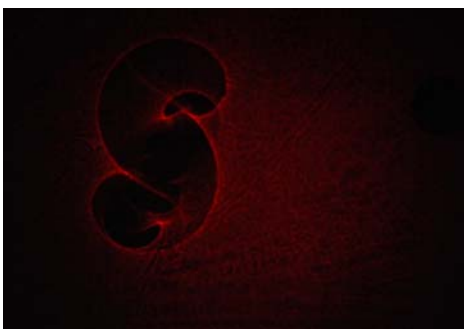
$$\lambda_m = 4,17 \quad z_0 = 3,11 \text{ m} \quad z_i = 0,98 \text{ m}$$



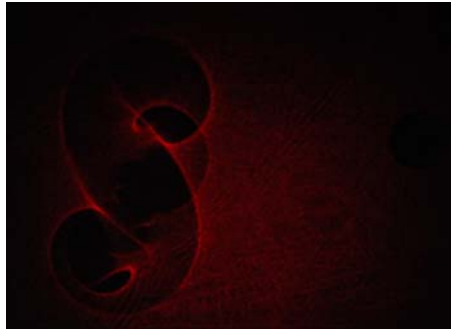
3 KN



6 KN

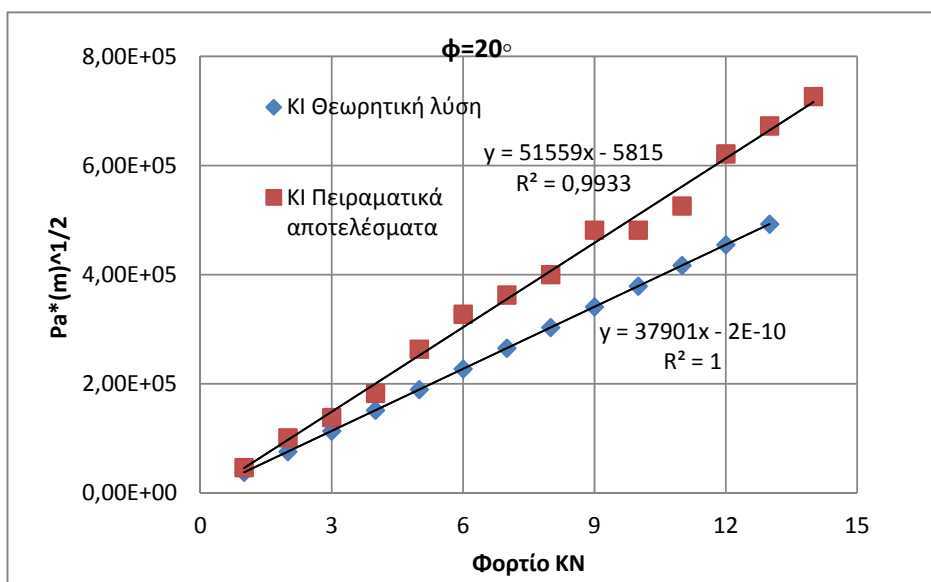
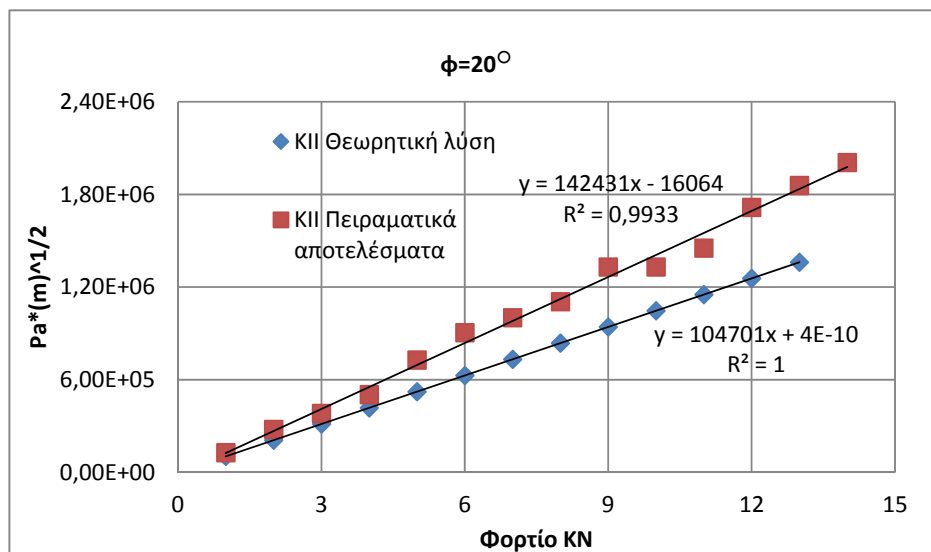


10 KN



14 KN

Εδώ παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της επαναληπτικής σειράς πειραμάτων για κλίση της ρωγμής ίση με 20° . Στα παρακάτω διαγράμματα φαίνονται οι τιμές των K_I, K_{II} σε σύγκριση με τις τιμές που προέκυψαν από την αναλυτική λύση.



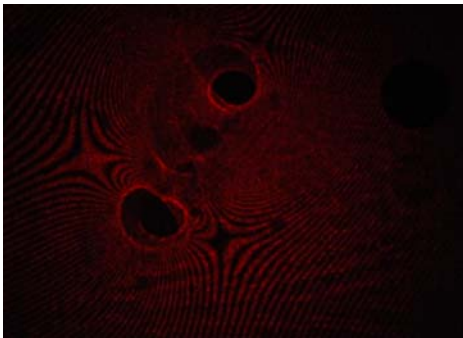
Διάγραμμα 4.9

Γωνία κλίσης ρωγμής 30°

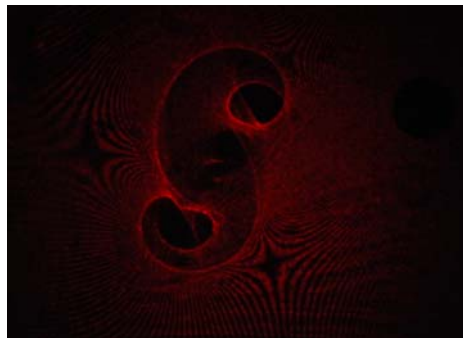
Χαρακτηριστικά οπτικής διάταξης

Χαρακτηριστικά οπτικής διάταξης

$$\lambda_m = 4,17 \quad z_0 = 3,11 \text{ m} \quad z_i = 0,98 \text{ m}$$



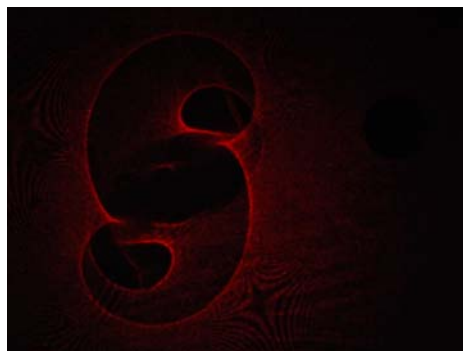
3 KN



6 KN

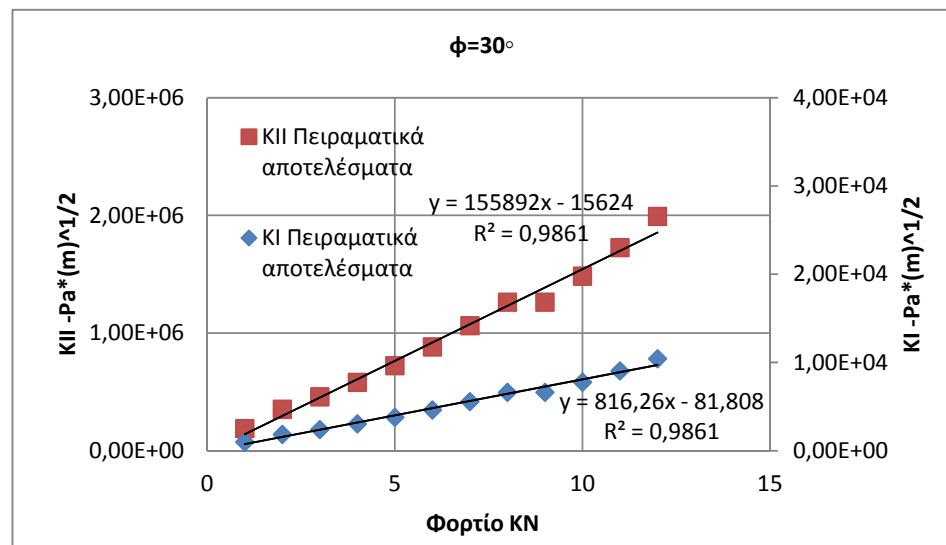
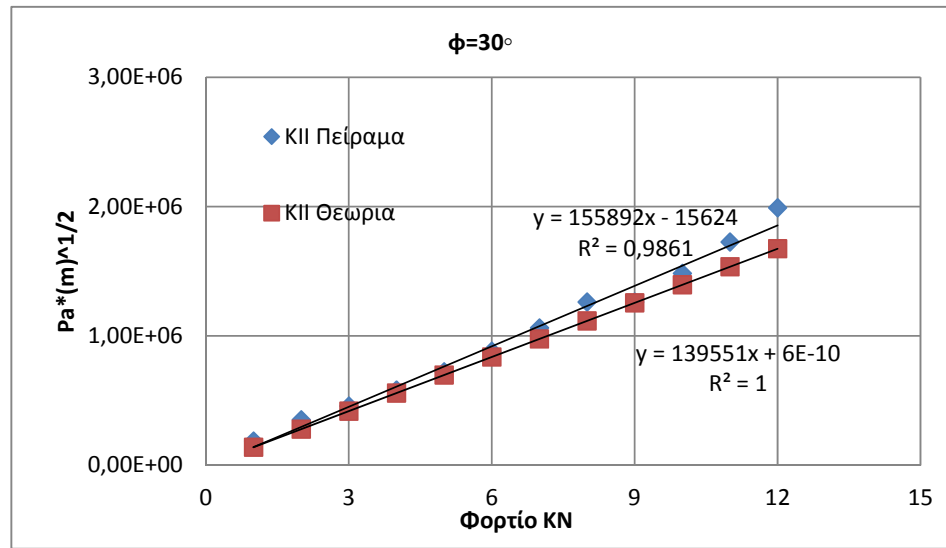


10 KN



12 KN

Τέλος, εδώ βλέπουμε τα αντίστοιχα διαγράμματα των K_I, K_{II} που προέκυψαν από το επαναληπτικό πείραμα για κλίση της ρωγμής ίση με 30°



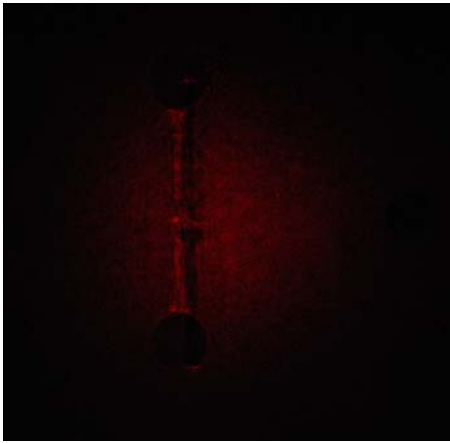
Διάγραμμα 4.10

Μήκος ρωγμής 2cm

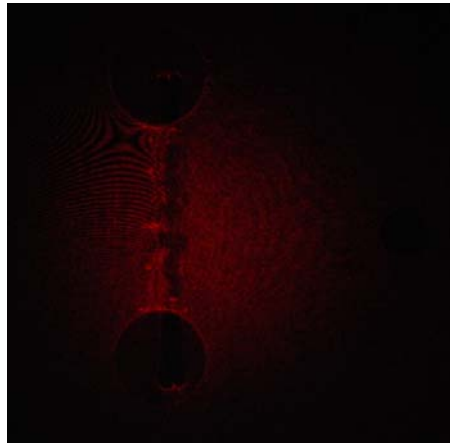
Γωνία κλίσης ρωγμής 0°

Χαρακτηριστικά οπτικής διάταξης

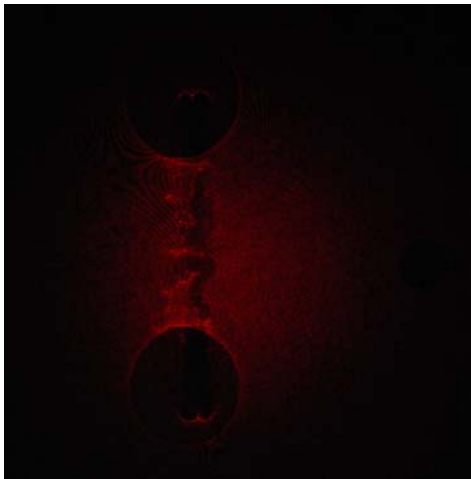
$$\lambda_m = 5,01 \quad z_0 = 2,17 \text{ m} \quad z_i = 0,54 \text{ m}$$



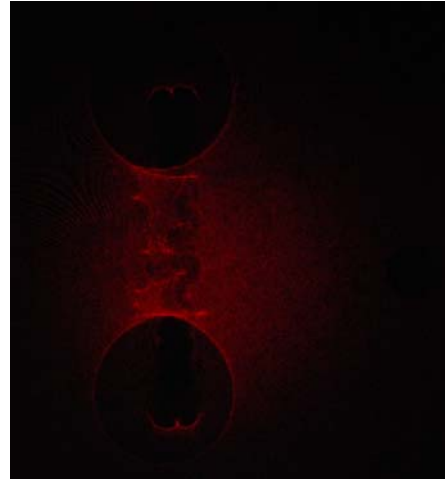
1.5 KN



3.5 KN

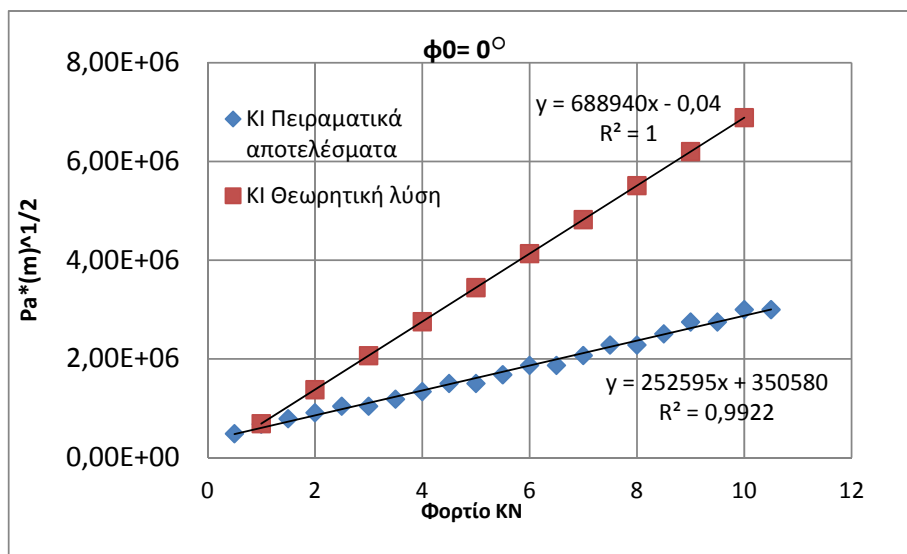


5.5 KN



8.5 KN

Σε αυτό το πείραμα τοποθετήσαμε το δίσκο έτσι, ώστε η ρωγμή μήκους 2 cm να είναι κατακόρυφη προκειμένου να επιτύχουμε συνθήκες καθαρού mode I. Το φορτίο που εφαρμόστηκε ήταν κλιμακωτό ανά 0.5 KN μέχρι την θραύση η οποία συνέβη στα 12 KN. Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η μεταβολή του συντελεστή K_I κατά τη διάρκεια της φόρτισης και η αντίστοιχη θεωρητική τιμή. Οι τιμές του οριζόντιου άξονα είναι σε KN, ενώ του κατακόρυφου σε $(Pa \cdot m)^{1/2}$.

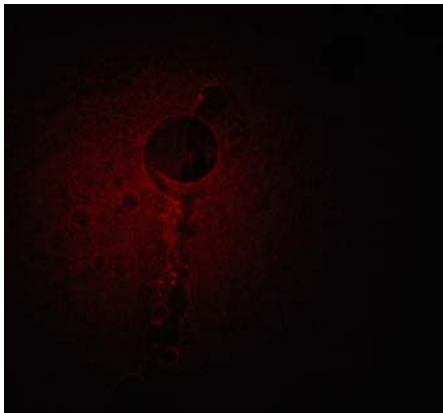


Διάγραμμα 4.11

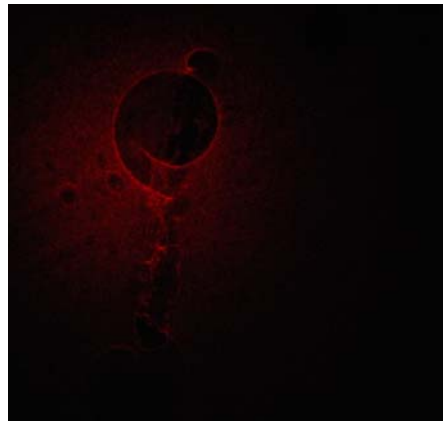
Γωνία κλίσης ρωγμής 10°

Χαρακτηριστικά οπτικής διάταξης

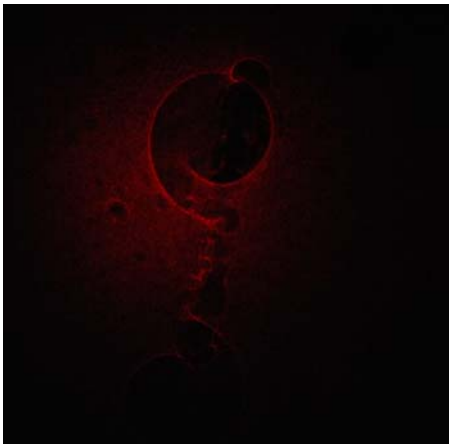
$\lambda_m = 5,01$ $z_0 = 2,17$ m $z_i = 0,54$ m



2 KN



4 KN

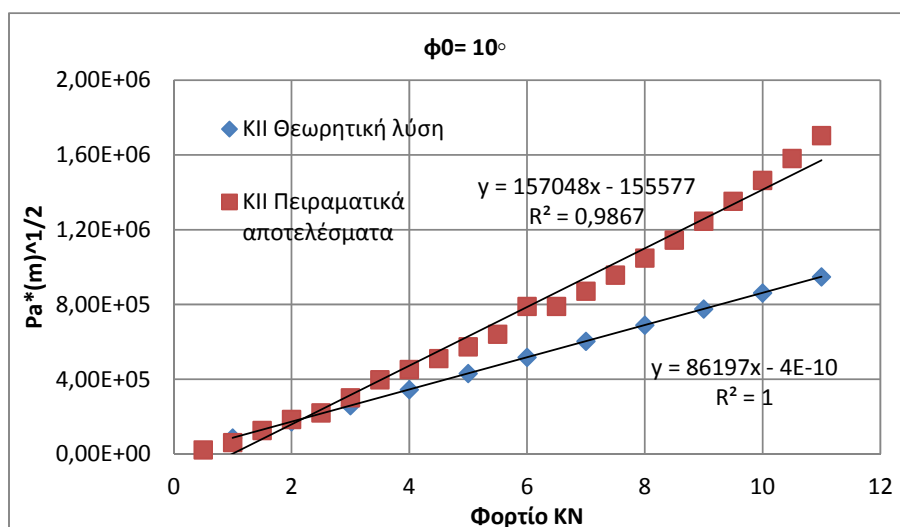
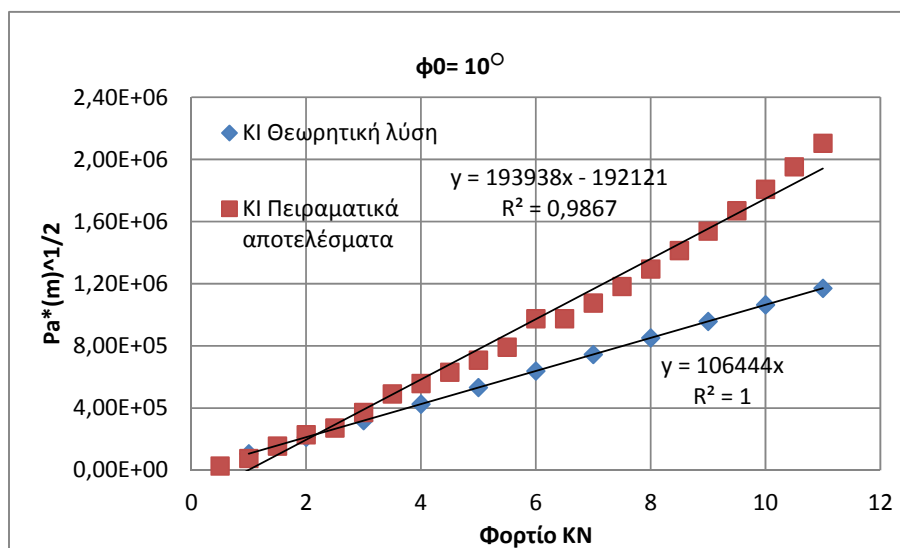


6 KN



8 KN

Σε αυτό το πείραμα τοποθετήσαμε το δίσκο με ρωγμή μήκους 2 cm έτσι, ώστε η γωνία κλίσης της ρωγμής ως προς την φόρτιση να είναι ίση με 20°. Στα παρακάτω διαγράμματα φαίνονται οι τιμές των K_I, K_{II} σε σύγκριση με τις τιμές που προέκυψαν από την αναλυτική λύση.

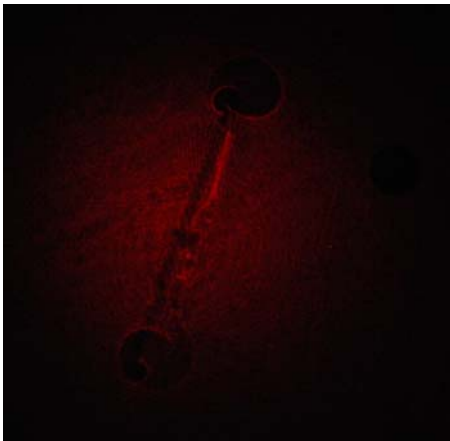


Διάγραμμα 4.12

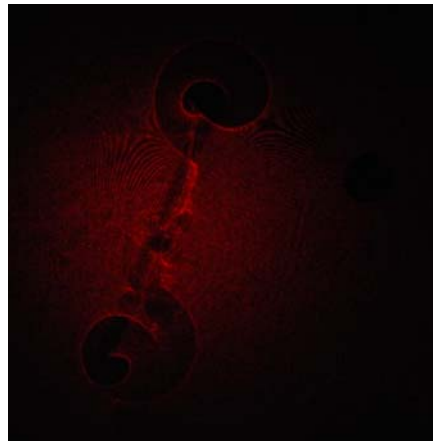
Γωνία κλίσης ρωγμής 20°

Χαρακτηριστικά οπτικής διάταξης

$\lambda_m = 5,01$ $z_0 = 2,17$ m $z_i = 0,54$ m



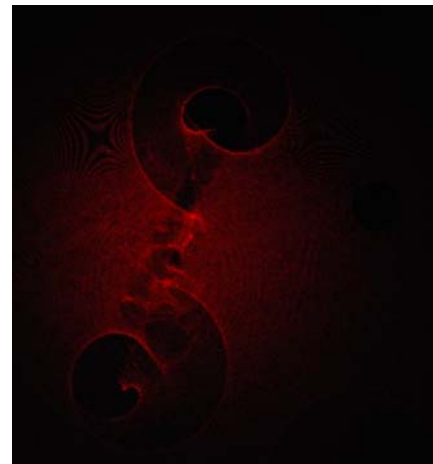
2 kN



4 kN

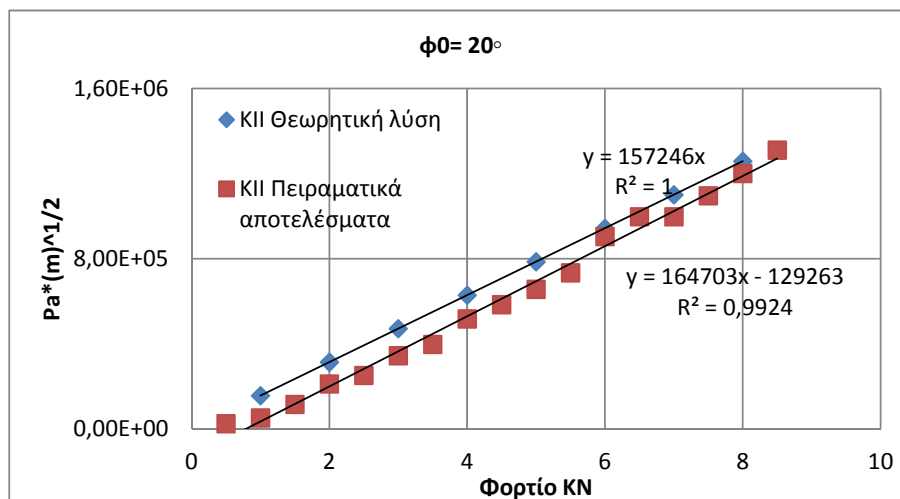
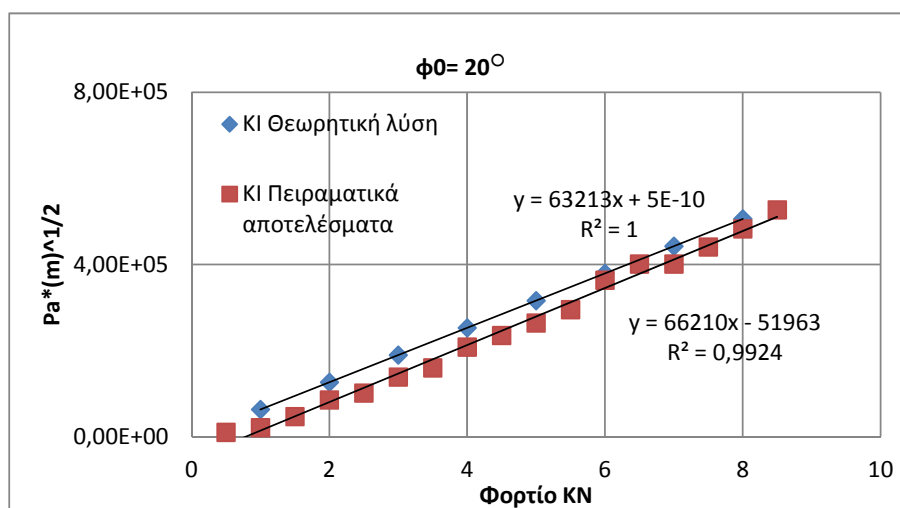


6 kN



8.5 kN

Σε αυτό το πείραμα τοποθετήσαμε το δοκίμιο με τέτοιο τρόπο, ώστε η ρωγμή να παρουσιάζει κλίση 20° ως προς την διεύθυνση της φόρτισης και φορτίσαμε τον δίσκο ανά 0.5 KN ως τη θραύση που συνέβη στα 9 KN . Παρακάτω φαίνονται τα σχετικά διαγράμματα των αποτελεσμάτων για τους συντελεστές K_I, K_{II} .



Διάγραμμα 4.13

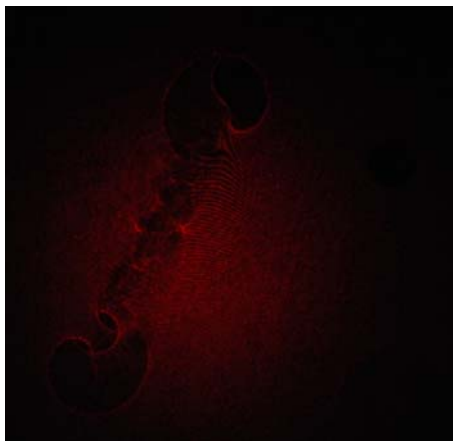
Γωνία κλίσης ρωγμής 20°

Χαρακτηριστικά οπτικής διάταξης

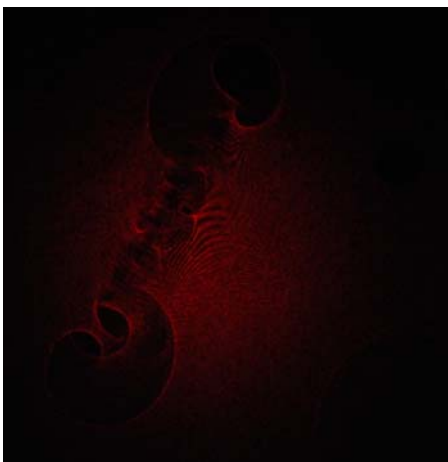
$\lambda_m = 5,01$ $z_0 = 2,17$ m $z_i = 0,54$ m



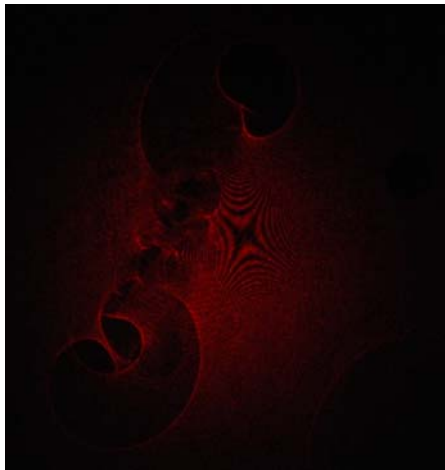
1.5 kN



3 kN

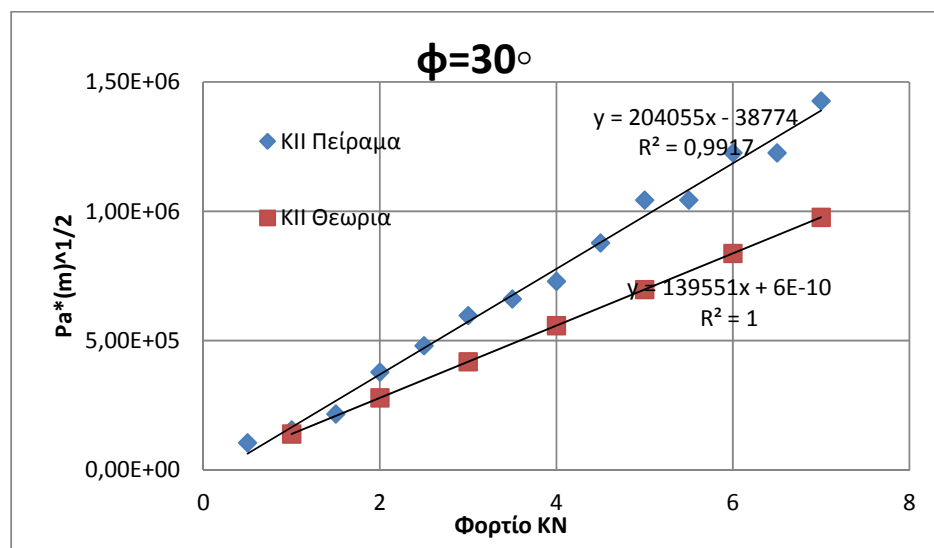
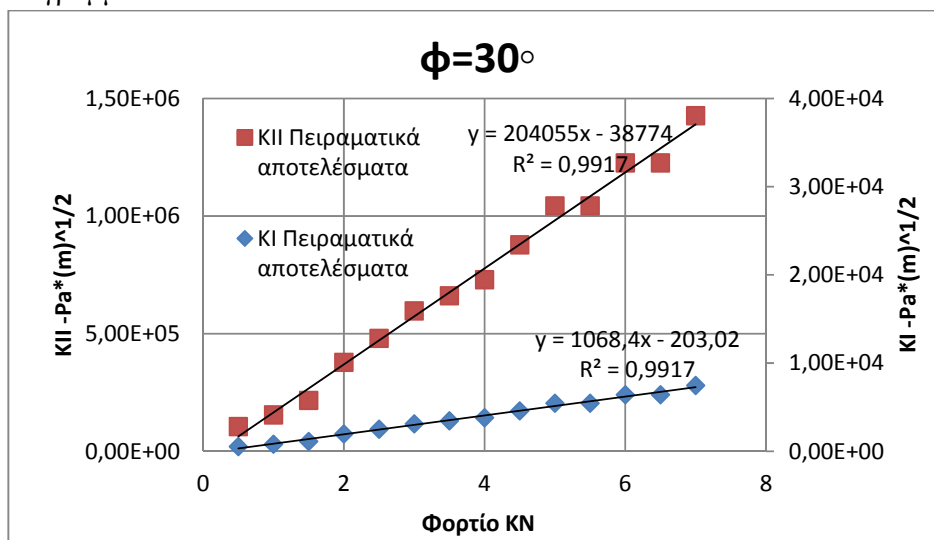


4.5 kN



6.5 kN

Αυτό ήταν το τελευταίο πείραμα ρηγματωμένου δίσκου που πραγματοποιήσαμε. Το μήκος της ρωγμής ήταν 2 cm και η φόρτιση εφαρμόστηκε ως τη θραύση με τις φωτογραφίες να αποτυπώνουν στιγμιότυπα ανά 0.5 KN. Τα σχετικά αποτελέσματα του πειράματος φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα.



Διάγραμμα 4.14

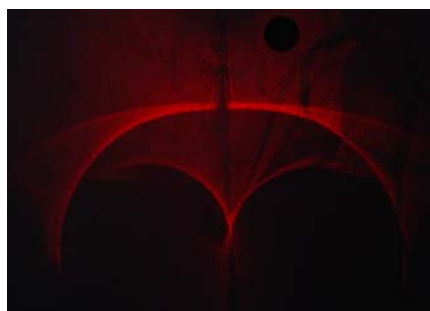
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

5.1 Πειράματα αρηγμάτωτου δίσκου

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, τα πειράματα του αρηγμάτωτου δίσκου που πραγματοποιήσαμε έγιναν με δύο διαφορετικούς συντελεστές τριβής. Αυτό το επιδιώξαμε διότι μας ενδιέφερε να εξετάσουμε κατά πόσον οι τάσεις που οφείλονται σε δυνάμεις τριβής στην επαφή των δύο δίσκων επηρεάζουν το αποτέλεσμα. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ δοκιμίου - αρπάγης χωρίς λιπαντικό βρέθηκε ότι είναι ίσος με 0.5 ενώ στην περίπτωση που λιπάνουμε το δοκίμιο ο συντελεστής τριβής που πετύχαμε βρέθηκε να ισούται με 0.3. Τα μήκη επαφής που μετρήθηκαν στην πρώτη περίπτωση είχαν τιμές που ξεκινούσαν από τα 0.84 mm για φορτίο ίσο με 1 KN και αυξάνονταν με γραμμικό τρόπο έως τα 10.56 mm για φορτίο ίσο με 32.5 KN. Στη δεύτερη περίπτωση (με το μειωμένο συντελεστή τριβής) τα μήκη ξεκινούσαν από 0.89 mm για φόρτιση ίση με 1 KN και συνέχιζαν γραμμικά μέχρι τα 32.5 KN όπου λάμβαναν την τιμή 11.3 mm. Σε αυτό το σημείο πρέπει να πούμε ότι η φόρτιση δεν σταμάτησε σε αυτή την τιμή, αλλά έφτασε ως τα 45 KN. Εμείς όμως επιλέξαμε να επεξεργαστούμε τα δεδομένα μέχρι τα 325 KN, προκειμένου να είμαστε σίγουροι για την ορθότητα των αποτελεσμάτων, καθώς από ένα σημείο και έπειτα δεν είχαμε γραμμική συμπεριφορά στο υλικό μας και τα αποτελέσματα θα απείχαν από την πραγματικότητα. Το κριτήριο σύμφωνα με το οποίο επιλέξαμε αυτό το όριο ήταν η ποιότητα των καυστικών στις φωτογραφίες. Έτσι, αποφασίσαμε να λάβουμε υπ' όψη μας μόνο τα στιγμιότυπα της φόρτισης που μας έδιναν ευδιάκριτες καυστικές καμπύλες μικρού πάχους, η καμπυλότητα των οποίων είχε τα ίδια χαρακτηριστικά. Σαν ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα παραθέτουμε τις δύο παρακάτω φωτογραφίες που αποτελούν τα στιγμιότυπα των 30 KN και 40 KN, όπου η διαφορά στην καμπυλότητα και το πάχος των γραμμών είναι εμφανής.



30 KN



40 KN

Έπειτα από την επεξεργασία, παρατηρήσαμε ότι και στις δύο περιπτώσεις τα μετρούμενα μήκη επαφής βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους, γεγονός το οποίο σε ένα μεγάλο βαθμό οφείλεται στη μικρή απόκλιση του συντελεστή τριβής των δύο περιπτώσεων. Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η σύγκριση των αποτελεσμάτων που υπολογίσαμε πειραματικά σε αντιπαραβολή με την θεωρητική λύση [14].

Αυτό που μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα είναι πως η παραδοχή του σημειακού φορτίου απέχει σημαντικά από την πράξη καθώς μόλις από τα 2 KN και έπειτα το μήκος επαφής ξεπερνά το 1 mm, ενώ στα 30 KN και στις δύο περιπτώσεις ισούται περίπου με 1 cm. Αν λάβουμε τώρα υπ' όψη μας το γεγονός ότι τα δοκίμιά μας φορτίστηκαν ως τα 45 KN και δεν έσπασαν (δεν μετρήσαμε το φορτίο θραύσης γιατί θα ξεπερνούσαμε το μέγιστο όριο της μηχανής), καταλαβαίνουμε ότι στις πρακτικές εφαρμογές (ειδικά κοντά στα φορτία που υπολογίζεται η τάση θραύσης) η κατανομή του φορτίου έχει σημαντική έκταση πάνω στο σύνορο. Το γεγονός αυτό έχει εξηγηθεί και από την κλειστή λύση [14] του προβλήματος όπου παρουσιάζεται η τοπική ιδιομορφία του πεδίου, πράγμα που εξηγεί "απροσδόκητα" φαινόμενα θραύσης στο σύνορο, όπου έχουν παρουσιαστεί κατά καιρούς σε πειράματα. Σχετικά με την κατανομή του φορτίου πάνω στο μετρούμενο τόξο επαφής δεν μπορέσαμε να λάβουμε πειραματικές πληροφορίες. Είναι βέβαιο όμως πως η παραδοχή του ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου είναι σημαντικά καλύτερη από εκείνη του σημειακού, ενώ αν λάβουμε υπ' όψη μας την θεωρία του Hertz, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η κατανομή ακολουθεί ημιτονοειδή καμπύλη στο αντίστοιχο τόξο επαφής.

5.2 Πειράματα ρηγματωμένου δίσκου

Στα πειράματα ρηγματωμένου δίσκου επικεντρωθήκαμε σε τέσσερις χαρακτηριστικές γωνίες κλίσης της ρωγμής ως προς την φόρτιση ώστε αφ' ενός να μην παρουσιάζεται αλληλοεπικάλυψη των χειλέων της ρωγμής και αφ' ετέρου να μεταβούμε από συνθήκες καθαρού mode I σε συνθήκες καθαρού mode II. Τα αποτελέσματα παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 4 σε αντιπαραβολή με την θεωρητική λύση [28].

Όμως, τα διαγράμματα εκείνα περιλαμβάνουν όλα τα στιγμιότυπα που μετρήθηκαν πειραματικά. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να περιλαμβάνονται και αποτελέσματα που αντιστοιχούν σε φορτία στα οποία έχουμε ξε-

περάσει το όριο της γραμμικής ελαστικότητας. Έτσι, προσπαθήσαμε να βρούμε για ποιες από τις τιμές των συντελεστών K_I, K_{II} που υπολογίσαμε, το υλικό συμπεριφέρεται γραμμικώς ελαστικά. Ο τρόπος με τον οποίο αυτό είναι εφικτό είναι ο εξής: Σε κάθε φωτογραφία καυστικών μετράμε τις δύο χαρακτηριστικές διαμέτρους D_I^{max}, D_t^{max} . Από την θεωρία είναι γνωστό ότι οι σχέσεις αυτές αποτελούν αναλλοίωτες ποσότητες της καυστικής. Έτσι, αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1.92) βρίσκουμε ότι ο λόγος των D_t^{max} / D_I^{max} πρέπει να ισούται με 1.056. Έτσι, σε κάθε περίπτωση που ο παραπάνω λόγος ισούται με διαφορετική τιμή από αυτή, είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε ότι έχουμε ξεφύγει από την γραμμική ελαστικότητα. Είναι δε αυτονόητο ότι οι τιμές των συντελεστών όπως υπολογίζονται είτε με τον ένα είτε με τον άλλο τρόπο θα πρέπει να μας δίνουν ταυτόσημα αποτελέσματα.

Περιοριζόμενοι λοιπόν στις περιοχές που τα αποτελέσματά μας έχουν ισχύ, παρατηρήσαμε ότι για ρωγμές μήκους 1 cm και γωνίες κλίσης 0° και 10° τα αποτελέσματα τόσο του συντελεστή K_I όσο και του K_{II} έρχονται σε πολύ καλή συμφωνία με την θεωρητική λύση και οι αποκλίσεις είναι εν γένει μικρές. Με εξαίρεση τα τρία τελευταία στιγμιότυπα και στα δύο πειράματα οι τιμές των παραπάνω διαμέτρων ικανοποιούσαν την συνθήκη που εξετάσαμε και η θραύση συνέβη στα 19 kN και στα 15 kN αντίστοιχα. Στις γωνίες όμως των 20° και 30° τα αποτελέσματα διαφοροποιούνται αρκετά. Και αυτό γιατί η εντατική κατάσταση του δοκιμίου πέριξ του άκρου της ρωγμής είναι σημαντικά πιο έντονη σε αυτές τις γωνίες, γεγονός το οποίο φάνηκε και από το ότι το δοκίμιο έσπασε σε χαμηλότερα φορτία (περίπου στα 12 kN και 11 kN αντίστοιχα). Έτσι, στις μεγάλες γωνίες, δεδομένου ότι η θραύση συνέβη νωρίτερα, περιμέναμε να βγούμε και από το όριο της γραμμικής ελαστικότητας νωρίτερα. Πράγματι, μετρώντας τις δύο διαμέτρους που προαναφέραμε στις φωτογραφίες μας για κάθε τιμή της φόρτισης παρατηρήσαμε ότι μετά το φορτίο των 6 kN και των 4 kN για τις 20° και για τις 30° αντίστοιχα, δεν διατηρείται ο αναλλοίωτος χαρακτήρας των χαρακτηριστικών αυτών διαμέτρων και επομένως τα αποτελέσματα που προκύπτουν όταν μετρούνται με κάθε διάμετρο ξεχωριστά αποκλίνουν μεταξύ τους. Το φαινόμενο αυτό συμβαίνει διότι στις συγκεκριμένες περιπτώσεις η πλαστική ζώνη πέριξ του άκρου της ρωγμής έχει τέτοια έκταση και μορφή που τέμνεται με ένα τμήμα της αρχικής μας καμπύλης. Επομένως, μετρώντας μια χαρακτηριστική διάμετρο της καυστικής που αντιστοιχεί σε

σημεία της αρχικής καμπύλης που βρίσκονται μέσα στη ζώνη πλαστικότητας, τα αποτελέσματα είναι μη αποδεκτά.

Εάν παρατηρήσουμε πιο προσεκτικά τις φωτογραφίες των καυστικών μας σε αυτές στις γωνίες, λαμβάνοντας υπ' όψιν μας την διεύθυνση που ακολούθησε η ρωγμή κατά τη διάρκεια της θραύσης, θα παρατηρήσουμε ότι δεν έχει παρουσιαστεί πλαστικότητα σε όλη την έκταση της αρχικής καμπύλης. Έτσι, αποφασίσαμε να υπολογίσουμε ξανά τα αποτελέσματά μας χρησιμοποιώντας αυτή τη φορά την διάμετρο D_{min} (η οποία φαίνεται στο Σχήμα 1.8), αφού εκείνο το κομμάτι της καυστικής μοιάζει να μην έχει επηρεαστεί σχεδόν καθόλου από την πλαστική ζώνη. Η σχέση της αρχικής καμπύλης με αυτή τη διάμετρο δίνεται στην [3]. Είναι δε αυτονόητο ότι τα αποτελέσματα που προκύπτουν με αυτό τον τρόπο θα πρέπει να είναι ταυτόσημα με εκείνα που προκύπτουν από τους άλλους δύο που προαναφέραμε (εφόσον ολόκληρη η αρχική καμπύλη δεν τέμνεται με την πλαστική ζώνη). Αναλύοντας τα δεδομένα μας με τον τρίτο αυτό τρόπο παρατηρήσαμε πολύ καλή σύμπτωση στα αρχικά στιγμιότυπα της φόρτισης και μια αξιολογη μεταβολή στα αποτελέσματά μας όσο μεγάλωνε η κλίση της ρωγμής και το φορτίο. Το γεγονός αυτό είναι απολύτως αναμενόμενο δεδομένης της εντατικής κατάστασης πέριξ του άκρου της ρωγμής και της φύσης της μεθόδου των καυστικών. Καταλήξαμε έτσι στο συμπέρασμα ότι στις 20°, 30° για χαμηλά φορτία (που όλα τα αποτελέσματα συμπίπτουν μεταξύ τους) οι μετρούμενοι συντελεστές έντασης των τάσεων έχουν πολύ καλή συμφωνία με την θεωρία, ενώ όσο το φορτίο και η κλίση μεγαλώνει τα αποτελέσματα αποκλίνουν. Είναι δε πολύ ενδιαφέρον το γεγονός ότι τα αποτελέσματα που αποκλίνουν πρώτα είναι εκείνα που οφείλονται στην διάμετρο D_t , ενώ καθώς αυξάνεται το εντατικό πεδίο τα αμέσως επόμενα είναι εκείνα που υπολογίσθηκαν με βάση την D_l και τελευταία ακολουθούν εκείνα της D_{min} αφού η πλαστική ζώνη καθώς μεγαλώνει επικαλύπτει με αυτή τη σειρά τα σημεία της αρχικής καμπύλης που αντιστοιχούν σε κάθε μια από αυτές τις διαμέτρους.

Σχετικά με την αξιολόγηση του εύρους του φορτίου που έχουμε αξιόπιστες τιμές μπορούμε να πούμε με σιγουριά ότι τα στιγμιότυπα που μας δίνουν ταυτόσημα αποτελέσματα και με τις τρεις μεθόδους είναι σίγουρα ασφαλή. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι το υπόλοιπο εύρος των μετρήσεών μας δεν είναι αξιόπιστο, αφού είναι πολύ πιθανό να βρούμε διαμέτρους που αντιστοιχούν σε σημεία που δεν υπάρχει αλληλοεπικάλυψη πλαστικής ζώνης – αρχικής καμπύλης, λαμβάνοντας σωστά αποτελέσματα. Άλλωστε, η πα-

ρουσία της πλαστικής ζώνης δεν αλλάζει την εξίσωση της αρχικής καμπύλης εάν αυτές οι δύο δεν τέμνονται μεταξύ τους (έως ένα βαθμό θα υπάρχουν μετατοπίσεις στο επίπεδο που θα αλλάζουν τα χαρακτηριστικά της αρχικής καμπύλης, αλλά αυτές οι μετατοπίσεις έτσι κι αλλιώς δεν λαμβάνονται υπ' όψιν στην μέθοδο των καυστικών.). Μέχρι εκείνο το σημείο όμως, σε όλα τα πειράματα των ρωγμών 1 cm, παρατηρείται αρκετά καλή συμφωνία με την θεωρία, με τις αποκλίσεις να είναι μεν υπαρκτές, αλλά αρκετά μικρές αφού σε κάθε περίπτωση η απόκλιση της πειραματικά μετρούμενης τιμής σε σχέση με την θεωρητική ισούται με το σφάλμα της διακριτικής ικανότητας (που θεωρήσαμε ότι ισούται περίπου με 1 mm).

Στις ρωγμές τώρα που είχαν μήκος 2cm η διαδικασία της φόρτισης είχε μικρότερο βήμα, καθώς περιμέναμε η θραύση να συμβεί σε πολύ πιο χαμηλά φορτία. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία στην επεξεργασία, καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι τα όρια αξιοπιστίας για τις μετρήσεις των 0°, 10°, 20° και 30° ήταν 4 kN, 2.5 kN, 2 kN και 2 kN αντίστοιχα. Οι τιμές που προέκυψαν είχαν και εδώ μια περιοχή που βρίσκονταν σε συμφωνία με την θεωρητική λύση, αλλά δυστυχώς το εύρος φόρτισης για το οποίο μπορέσαμε να έχουμε αξιόπιστα αποτελέσματα ήταν πολύ μικρό (για τις 20° και 30° ήταν μόλις ένα στιγμιότυπο!) γεγονός που δεν μας επιτρέπει να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα. Πρέπει όμως να πούμε στο σημείο αυτό ότι ναι μεν η θεωρητική παραδοχή στην οποία στηρίζεται η λύση που επικαλούμαστε [28] θεωρεί ότι για λόγους $a/R < 1/3$ η παρουσία της ρωγμής δεν επηρεάζει το σύνορο, αλλά ας μην ξεχνάμε ότι οι εξισώσεις των καυστικών που χρησιμοποιήσαμε υπολογίστηκαν για την περίπτωση της άπειρης πλάκας γεγονός που συνεπάγεται αποκλίσεις όσο η ρωγμή πλησιάζει το σύνορο.

Η σύμπτωση ή η απόκλιση με την θεωρία που εμφάνισαν τα αποτελέσματα όταν παύει να ισχύει η γραμμική ελαστικότητα (τόσο στις μικρές όσο και στις μεγάλες ρωγμές) θεωρείται τυχαία και επομένως δεν θα ήταν σωστό να λαμβάνεται σοβαρά υπ' όψιν. Ο μόνος λόγος που τα προσθέσαμε στα παραπάνω διαγράμματα ήταν η πλήρης παρουσίαση των πειραματικών στοιχείων που συλλέξαμε.

5.3 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Στην παρούσα εργασία μελετήθηκαν ορισμένες εκδοχές του προβλήματος του βραζιλιανού δίσκου, αλλά υπάρχουν ακόμα αρκετά πράγματα που θα μπορούσαν να μελετηθούν στο συγκεκριμένο πρόβλημα με τη μέθοδο των

καυστικών. Στο σημείο αυτό λοιπόν θα θέλαμε να κάνουμε ορισμένες προτάσεις σε οποιονδήποτε ενδιαφέρεται για μελλοντική έρευνα πάνω στο θέμα.

- Κατ' αρχήν πρέπει να τονίσουμε ότι οι παραμετρικές εξισώσεις των καυστικών τόσο του αρηγμάτωτου όσο και του ρηγματωμένου βραζιλιανού δίσκου αποτελούν επιστημονικά ανοικτά θέματα, καθώς η παραμετρική τους μορφή δεν έχει ακόμη βρεθεί.
- Επιπλέον, ιδιαίτερο ενδιαφέρον θα παρουσίαζε η μελέτη του φαινομένου της αλληλοεπικάλυψης των χειλέων της ρωγμής όταν η γωνία κλίσης της ρωγμής ως προς τη φόρτιση ξεπερνά τις 30° και φτάνει ως τις 90° .
- Επιπρόσθετα, ενδιαφέρον παρουσιάζει η μέτρηση του μήκους επαφής σε ρηγματωμένο Βραζιλιανό δίσκο συναρτήσει του μήκους και της γωνίας κλίσης της ρωγμής.
- Τέλος, θεωρούμε ότι ένα πολύ ενδιαφέρον θέμα θα ήταν η περαιτέρω μελέτη της επιρροής των τάσεων τριβής στο συγκεκριμένο πείραμα.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] P. S. Theocaris 'Dependence of stress – optical coefficients on the mechanical and optical properties of polymers' *Journal of strain analysis* Vol. 8 no 4 1973
- [2] A. J. Rosakis and A. T. Zehnder 'On the method of caustics: An exact analysis based on geometrical optics' *Journal of elasticity* 15 (1985) 347-367
- [3] P. S. Theocaris 'Elastic stress intensity factors evaluated by caustics' *Mechanics of fracture*, Vol. VII Sijthoff and Noordhof (1981)
- [4] Γ. Παπαδόπουλος 'Πειραματική μηχανική των θραύσεων', εκδόσεις Κλειδάριθμος
- [5] P. S Theocaris and D. Pazis 'Some further properties of caustics useful in mechanical applications' *Applied Optics* Vol. 20, No 23
- [6] Carneiro F. 'Une nouvelle method d'essai pour determiner la resistance a la traction du beton. Paris: Reunion des Laboratories d' Essai de Materiaux; 1974
- [7] Carneiro F, Barcellos A. Resistance a la traction des betons. *Bull RILEM* 1953; I(13):97-108
- [8] Akazawa T. Tension test method for concrete. *Int Assoc Test Res Labs Mater Struct* 1953; 16:13-23
- [9] Hondros G. 'The evaluation of Poisson's ratio and the modulus of materials of a low tensile resistance by the Brazilian test with particular reference to concrete. *Aust J Appl Sci* 1959; 10:243-68
- [10] Fairhurst C. 'On the validity of the Brazilian test for brittle materials' *Int J Rock Mech Min Sci* 1964; 1:535-46
- [11] Hobbs DW. An assessment of a technique for determining the tensile strength of rock. *Brit. J Appl. Phys* 1965; 16:259-69
- [12] ASTM Standard method for splitting tensile strength of intact rock core specimens Vol. 04.08, 1988, p.471-475.5.
- [13] ISRM Suggested methods for determining the fracture toughness of rock. *Int. J. Rock. Mech. Min Sci. Geomech. Abstr.* 1988; 25:71-96
- [14] Ch. F. Markides, D.N. Pazis, S.K. Kourkoulis 'Closed full-field solutions for stresses and displacements in the Brazilian disk under distributed radial load' *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* 47 (2010) 227-237

- [15] Hertz H. 'Ueber die berührung fester elastischer Körper' J. F. Math (1882)
- [16] H. Awaji and S. Sato 'Combined mode fracture toughness measurement by the disc test' ASME Trans. J. Eng Mater. Technol. 100 (1987) 175-182
- [17] C. Atkinson, R.E. Smelser, J. Sanchez 'Combined mode fracture via the cracked Brazilian disk test', Int. J. Fract. 18 (1982) 279-291
- [18] S.M. Dong 'Theoretical analysis of the effects of relative crack length and loading angle on the experimental results for cracked Brazilian disk testing' Eng. Fract. Mech. 75 (2008) 2557-2581
- [19] X.L. Xu, F. Delale 'Stress intensity factors for an internal of edge crack in a circular elastic disk subjected to concentrated or distributed loads' Eng. Fract. Mech. 42 (5) (1992)
- [20] R. Ojdrovic, H.J. Petroski 'The cracked Brazilian specimen for fracture toughness testing of concrete', Int. J. Fract. 27 (1985) R75- R80
- [21] D.K. Shetty, A.R. Rosenfield, W.H. Duckworth 'Mixed mode fracture in biaxial stress state: Application of the diametral compression test', Eng. Fract. Mech. (1987) 825-840
- [22] X.L. Zhao, J.C. Roegiers, M. Guo 'The determination of fracture toughness of rocks by Chevron – notched Brazilian Disk Specimens' SCA Conference, paper number 9014, 1990
- [23] S.H. Chang, C.H. Lee, S. Jeon 'Measurement of rock fracture toughness under modes I and II and mixed mode conditions by using disk – type specimens' Eng. Geology 66 (2002) 79-97
- [24] Z. Jia, A. Castro – Montero, S.P. Shah 'Observations of mixed mode fracture with center notched disk specimens' Cement Concrete Res. 26 (1) (1996) 125-173
- [25] N.A. Al –Shayea 'Crack propagation trajectories for rocks under mixed mode I and II fracture' Eng. Geology 81 (2005) 84-97
- [26] P.S. Theocaris, M. Sakellariou 'Cracks and slits in compression and shear: an experimental study' Acta Mechanica 85, 55-70 (1990)
- [27] Muskhelishvili NI (1963) Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. P. Noordhoff, Groningen, The Netherlands
- [28] Ch. F. Markides, D.N. Pazis, S.K. Kourkoulis 'Stress intensity factors for the Brazilian disc with a short central crack: Opening versus closing cracks' Applied Mathematical Modelling 35 (2011) 5636-5651

- [29] Kartalopoulos S.V and Raftopoulos D.D 1976 'A novel optical method for the evaluation of the ratio of Poisson's ratio to the modulus of elasticity of optically transparent materials' J. Phys. D: Appl. Phys. 9 2545
- [30] P.S. Theocaris and N.I Ioakimidis 'On the determination of stress – optical constants by the method of reflected caustics' J. Phys. D: Appl. Phys. Vol. 12, 1979
- [31] P.S. Theocaris, L. Petrou 'From the rectangular hole to the ideal crack' Int. J. Sol. and Struct. 25, 213-233 (1989)
- [32] P.S. Theocaris and C.A. Stassinakis 'The elastic contact of two disks by the method of caustics' Experimental Mechanics
- [33] G. Papadopoulos 'Experimental study of the load distribution in bearings by the method of caustics and the photoelasticity method' J. Strain Analysis Vol. 40 No. 4